CORPS DES FRACTIONS

L'objet de cette annexe est de présenter la construction du corps des fractions d'un anneau commutatif intègre. Pour cela, on définit précisément la notion de fraction. On montre ensuite que l'ensemble constitué de ces fractions est un corps qui contient l'anneau et qui est (au sens de l'inclusion) le plus petit sur-corps de cet anneau.

Dans tout ce qui suit, $(A, +, \times)$ désigne un anneau commutatif intègre. On note $A^* = A \setminus \{0\}$.

Vous manipulez depuis longtemps les fractions, dans le cadre restreint des nombres rationnels. Intuitivement, les fractions sont des quotients d'entiers satisfaisant la règle d'égalité du produit en croix : « a/b et c/d, où $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^*$ sont égales lorsque $ad = bc$ ». La définition ci-dessous donne un sens précis à cette notion, dans le cadre général d'un anneau commutatif intègre.

Définition 1

Sur $A \times A^*$, la relation $\sim$ définie par $\forall (a, b), (c, d) \in A \times A^*,\ (a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ est une relation d'équivalence (grâce à l'intégrité de A).

Pour tout couple $(a, b) \in A \times A^*$, la classe d'équivalence de (a, b) pour la relation $\sim$ est notée a/b et s'appelle une fraction (d'éléments de A).

On note $K = (A \times A^*)/\!\sim$ l'ensemble quotient de $A \times A^*$ par $\sim$, c'est-à-dire l'ensemble des fractions.

Tout couple (c, d) appartenant à la a/b s'appelle un représentant de la fraction a/b. Le numérateur de ce représentant est c et le dénominateur est d.

■ La réflexivité et la symétrie de $\sim$ sont évidentes. Pour la transitivité, considérons trois couples (a, b), (c, d), (e, f) dans $A \times A^*$ tels que $(a, b) \sim (c, d)$ et $(c, d) \sim (e, f)$. On a donc $ad = bc$ et $cf = de$. On en déduit que $adf = bde$ et, comme $d \neq 0$ et A est intègre, il en découle que $af = be$, d'où $(a, b) \sim (e, f)$. La relation $\sim$ est donc bien transitive, ce qui en fait une relation d'équivalence. ■

On peut retenir la règle d'égalité des fractions, dite règle du produit en croix :

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dans } K\right) \iff \big((a, b) \sim (c, d) \text{ dans } A \times A^*\big) \iff (ad = bc \text{ dans } A).$$

A priori, l'anneau A et son ensemble des fractions K ont des éléments de natures différentes. Cependant, via l'identification décrite ci-dessous, on peut « plonger » A dans K.

Définition 2

Tout élément $a \in A$ est identifié à la fraction $a/1$. On peut ainsi considérer que $A \subset K$.

■ Cette identification n'est valide que si elle est univoque, c'est-à-dire si l'application $j : A \longrightarrow K$ telle que $\forall a \in A,\ j(a) = a/1$ est injective. Vérifions le ! Soient $a, b \in A$ tels que $j(a) = j(b)$. On a donc $a/1 = b/1$, ce qui donne $a.1 = 1.b$, c'est-à-dire $a = b$. Ainsi, j est injective et l'identification proposée est licite. ■

Dorénavant, pour tout $a \in A$, on peut écrire $a = a/1 = \{(c, d) \in A \times A^* : c = ad\} = (ad)/d$ pour tout $d \in A^*$.

En particulier, on a $0 = 0/1 = 0/b$ et $1 = 1/1 = b/b$ pour tout $b \in A^*$.

On peut alors munir K d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de A.

Définition 3

Sur K, on considère les lois de composition $+$ et $\times$ définies, pour a/b et c/d dans K, par

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ces opérations sont bien définies et prolongent celles de A.

■ ▷ Commençons par démontrer que les opérations $+$ et $\times$ sont bien définies, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les fractions. Supposons que $a/b=\alpha/\beta$ et $c/d=\gamma/\delta$ où $a,\alpha,c,\gamma\in A$ et $b,\beta,d,\delta\in A^*$ de sorte que $a\beta=b\alpha$ et $c\delta=d\gamma$. Dès lors, on a

$$(ad+bc)(\beta\delta)=(a\beta)(d\delta)+(b\beta)(c\delta)=(b\alpha)(d\delta)+(b\beta)(d\gamma)=(bd)(\alpha\delta+\beta\gamma),$$

d'où

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}.$$

On a

$$(ac)(\beta\delta)=(a\beta)(c\delta)=(b\alpha)(d\gamma)=(\alpha\gamma)(bd),$$

donc

$$\frac{ac}{bd}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}.$$

Ces deux résultats prouvent que l'addition et la multiplication sont bien définies sur K.

▷ Justifions ensuite que ces opérations prolongent celles de A. Pour cela, on reprend le plongement de A dans K, c'est-à-dire l'application $j : A \longrightarrow K$ telle que $\forall a\in A,\ j(a)=a/1$. Pour tous $a,b\in A$, on a

$$j(a)+j(b)=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a.1+1.b}{1.1}=\frac{a+b}{1}=j(a+b)$$

et

$$j(a)j(b)=\frac{a}{1}\times\frac{b}{1}=\frac{a.b}{1.1}=\frac{ab}{1}=j(ab),$$

ce qui prouve que les opérations sur K prolongent celles sur A. ■

On peut alors énoncer le résultat principal concernant l'ensemble K des fractions.

Proposition 1

$(K,+,\times)$ est le plus petit corps commutatif dont A est un sous-anneau.

■ L'associativité et la commutativité de $+$ sont évidentes. L'élément neutre de $+$ est $0=0/1$. Tout élément a/b de K admet un opposé qui est $(-a)/b$. Donc $(K,+)$ est un groupe abélien. L'associativité de $\times$ est évidente. L'élément neutre de $\times$ est $1=1/1$. Donc $(A,\times)$ est un monoïde. La distributivité de $\times$ sur $+$ est évidente. On sait donc que K est un anneau.

Par ailleurs, tout élément non nul a/b de K est inversible d'inverse b/a. Donc K est un corps.

Les lois de K prolongent celles de A et $A\subset K$ donc A est un sous-anneau de K.

Enfin, introduisons un corps $(L,+,\times)$ tel que $A\subset L\subset K$ et démontrons que $L=K$. Soit $x\in K$. Par définition de K, il existe $a\in A$ et $b\in A^*$ tels que $x=a/b$. Comme $b\in A^*$, on a $b\in L^*$. Comme l'inverse de b dans K est $1/b$ et que cet inverse doit être dans L (puisque L est un sous-corps de K), on a $1/b\in L$. Par ailleurs, $a\in A$ donc $a\in L$. Le sous-corps L étant stable par produit, on a $a\times 1/b\in L$, c'est-à-dire $x=a/b\in L$. Cela prouve que $K\subset L$ et donc que $L=K$. Ainsi, K est le le plus petit sur-corps de A. ■

En passant de A à K, on a obtenu l'inversibilité (dans K) de tous les éléments non nuls de A. Plus précisément, l'inverse de $a\in A^*$ est $1/a$.

Exemples :

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est défini comme le corps des fractions de l'anneau commutatif intègre $\mathbb{Z}$.