Les espaces préhilbertiens

Table des matières

1 Produits scalaires **3**
1.1 Définition d'un produit scalaire 3
1.2 Exemples 3
1.2.1 Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque muni d'une base 3
1.2.2 Sur $\mathbb{R}^n$ 4
1.2.3 Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ 4
1.2.4 Les espaces l^p 4
1.3 Identités remarquables 5
1.4 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski 6

2 espaces vectoriels normés de dimensions finies **8**
2.1 Suites et fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie 8
2.2 Compacité 10
2.3 Equivalence des normes 12
2.4 Applications linéaires et multilinéaires 12

3 Orthogonalité **14**
3.1 Orthogonalité en dimension quelconque 14
3.2 En dimension finie 19
3.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel 22
3.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 26

4 Endomorphismes d'un espace euclidien **29**
4.1 Endomorphismes symétriques 29
4.2 Groupe orthogonal. 30
4.2.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal. 30
4.2.2 Les rotations. 31
4.2.3 Les symétries orthogonales 32
4.2.4 Matrices orthogonales. 32
4.2.5 Orientation d'un espace vectoriel réel. 34
4.2.6 Produit mixte. 35

5 Géométrie plane **37**
5.1 Lien avec le cours sur les complexes 37
5.2 Le groupe orthogonal de degré 2 38
5.3 Les isométries vectorielles du plan 39
5.4 Un résultat sur les similitudes (hors programme) 40
5.5 Angles orientés dans le plan 41
5.6 Les droites affines du plan usuel 43

6 Géométrie dans l'espace **43**
6.1 Le produit vectoriel (hors programme). 44
6.2 Droites et plans affines en dimension 3 46
6.2.1 Equation d'un plan 46
6.2.2 Système d'équations d'une droite 46
6.3 Le groupe orthogonal en dimension 3 47

1 Produits scalaires

1.1 Définition d'un produit scalaire

Notation. Pour ce paragraphe, on fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on note E.

Définition. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

On dit que φ est une ***forme bilinéaire définie***
si et seulement si, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x,x) \neq 0$.

Définition. Soit $\varphi \in L_2(E)$.

On dit que φ est une ***forme bilinéaire positive***
si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$.

Définition.
Un ***produit scalaire*** est une forme bilinéaire symétrique définie positive,
c'est-à-dire une application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$;
- $x \neq 0 \Longrightarrow \varphi(x,x) > 0$.

Définition. Un ***espace préhilbertien réel*** est un couple (E,φ), où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et où φ est un produit scalaire sur E.

1.2 Exemples

1.2.1 Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque muni d'une base

Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i\in I}$

et notons $$\begin{array}{cccc} \varphi : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\sum_{i\in I} x_i e_i, \sum_{i\in I} y_i e_i\right) & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i y_i \end{array}.$$

Alors φ est un produit scalaire sur E.

Démonstration.
Soient $(x,y,z) \in E^3$ et $a \in \mathbb{R}$.
Notons $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, $y = \sum_{i\in I} y_i e_i$ et $z = \sum_{i\in I} z_i e_i$.

- $\varphi(ax+y,z) = \sum_{i\in I}(ax_i+y_i)z_i = a\sum_{i\in I} x_i z_i + \sum_{i\in I} y_i z_i = a\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$

et $\varphi(x, ay+z) = \sum_{i\in I} x_i(ay_i+z_i) = a\sum_{i\in I} x_i y_i + \sum_{i\in I} x_i z_i = a\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$,
donc $\varphi \in L_2(E)$.

- $\varphi(y,x) = \sum_{i\in I} y_i x_i = \sum_{i\in I} y_i x_i = \varphi(x,y)$, donc $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$.
- $\varphi(x,x) = \sum_{i\in I} x_i^2$, donc $\varphi(x,x) \geq 0$, ce qui prouve que φ est positive.

De plus, si $\varphi(x,x)=0$, pour tout $i\in I$, $x_i=0$, donc $x=0$.
Ainsi, φ est une forme bilinéaire définie positive.
On a montré que (E,φ) est un espace préhilbertien.

1.2.2 Sur $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier strictement positif. Lorsque $E=\mathbb{R}^n$ et que e est la base canonique de E, l'exemple précédent devient :

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\end{array}.$$

C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. □

Remarque. Pour tout $X,Y\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(X,Y)={}^tXY$.

1.2.3 Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Notation. On fixe $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété. Pour tout $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on pose $\varphi(f,g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $f,g,h\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
⋄ D'après la linéarité des intégrales,
$\int_a^b(\alpha f+g)h=\alpha\int_a^b fh+\int_a^b gh$. De plus $\int_a^b fg=\int_a^b gf$, donc φ est une forme bilinéaire symétrique.
⋄ $\varphi(f,f)=\int_a^b f(t)^2dt\geq 0$, donc φ est positive.
De plus, si $\varphi(f,f)=0$, alors $\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)^2\end{array}$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc, d'après le cours, $f=0$. Ainsi φ est une forme bilinéaire définie.
On a montré que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc que c'est un produit scalaire. Ainsi $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\varphi)$ est un espace préhilbertien. □

1.2.4 Les espaces l^p

Définition. On dit qu'une suite (u_n) de réels est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Notation.
⋄ Pour $p\in\mathbb{R}_+^*$, notons $l^p=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \sum|u_n|^p \text{ converge}\}$.
⋄ Notons l^∞ l'ensemble des suites bornées de réels.

Propriété. l^1, l^2 et l^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
De plus si (a_n) et (b_n) sont dans l^2, alors (a_nb_n) est un élément de l^1.

Démonstration.
$\diamond$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites sommables de réels et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha a_n + b_n| \leq |\alpha||a_n| + |b_n|$, or $\sum(\alpha|a_n| + |b_n|$ converge,
donc $\sum(\alpha|a_n| + \beta|b_n|)$ est absolument convergente.
Ceci prouve que $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$.
De plus, l^1 est non vide, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
$\diamond$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de l^2.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $(|a_n| - |b_n|)^2 \geq 0$, donc $|a_nb_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, ce qui prouve que $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l^1.
De plus, $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n$, donc $(a_n + b_n) \in l^2$. On en déduit facilement que l^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
$\diamond$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de réels et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha a_n + b_n| \leq |\alpha||a_n| + |b_n| \leq |\alpha| \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j| + \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |b_j|$,
ainsi $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. De plus, l^∞ est non vide, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. $\square$

Propriété. Pour tout $(u_n), (v_n) \in l^2$, on pose $((u_n)|(v_n)) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_nv_n$.
l^2 muni de $(.|.)$ est un espace préhilbertien.

Démonstration.
Soit $(u_n), (v_n) \in l^2$. On a montré que $(u_nv_n) \in l^1$, donc $\sum u_nv_n$ est absolument convergente et $((u_n)|(v_n))$ est défini.
$(.|.)$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive.
Si $((u_n)|(u_n)) = 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_j^2 \leq ((u_n)|(u_n)) = 0$, donc $(u_n) = 0$. $\square$

1.3 Identités remarquables

Notation. Dans ce paragraphe, E désigne un espace préhilbertien réel. Son produit scalaire sera noté $(.|.)$.

Définition. Pour tout $x \in E$, la norme de x est $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Formule. Pour tout $((x, y), \alpha) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{cl} \|\alpha x\| & = |\alpha|\|x\|, \\ \|x+y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y), \\ \|x-y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y), \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & = 4(x|y), \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 & = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{array}}$$

La dernière formule porte le nom de ***formule du parallélogramme*** ou ***formule de la médiane***, en raison de ses interprétations géométriques.

Les seconde, troisième et quatrième formules permettent de calculer $(.|.)$ en ne connaissant que $\|.\|$. Elles portent le nom de ***formules de polarisation***, mais selon le programme, la formule de polarisation est :

$$2(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Remarque. Le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et où $(.|.)$ est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ permet de retrouver rapidement ces formules.
Par exemple, la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

permet de retrouver la quatrième formule.

Exercice. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$.
Déterminer, s'il existe, un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la norme est N.

Solution : *Analyse :* S'il existe, une identité de polarisation indique que ce produit scalaire est donné par :
$\langle (x,y),(x',y')\rangle = \frac{1}{4}(N(x+x',y+y')^2 - N(x-x',y-y')^2) = xx' + xy' + x'y + 3yy'$, pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^4$.
Synthèse : On vérifie que l'application $\langle .,. \rangle$ ainsi définie est symétrique, bilinéaire, définie positive, et que sa norme est N.

Théorème de Pythagore.

$$(x|y) = 0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

1.4 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Notation. On reprend les notations du paragraphe précédent.

Théorème. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz :***

$$\forall (x,y) \in E^2 \ \ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \|y\|^2$.
$\diamond$ *Premier cas :* On suppose que $\|x\|^2 = 0$. Alors $x = 0$, donc $|(x|y)| = 0 = \|x\|\|y\|$, et (x,y) est une famille liée, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ *Deuxième cas :* On suppose maintenant que $\|x\| > 0$. Alors le polynôme $X^2\|x\|^2 + 2X(x|y) + \|y\|^2$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, donc il possède au plus une racine réelle. Or il est de degré 2, donc son discriminant est négatif ou nul :
$4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. On en déduit que $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$.

$\diamond$ *Etude du cas d'égalité dans le second cas :*
Supposons que $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$. Alors le discriminant est nul, donc le polynôme possède effectivement une racine réelle, que l'on notera λ. Ainsi,
$0 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \|y\|^2 = \|\lambda x + y\|^2$, donc $\lambda x + y = 0$ et (x, y) est bien lié.
Réciproquement, si (x, y) est lié, sachant que $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, donc $|(x|y)| = |\lambda|\|x\|^2 = \|x\|\|y\|$. $\square$

Exemple. $\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2 \ \ |\int_a^b fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$.

Exercice. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{Tr}(M)| \leq \sqrt{n\mathrm{Tr}({}^tMM)}$.
Préciser quand cette inégalité est une égalité.

Solution :

$\bullet$ Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, posons $\varphi(M, N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ et montrons que φ est un produit scalaire.

$\diamond$ Soient $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha M + \beta N, P) &= \mathrm{Tr}({}^t(\alpha M + \beta N)P) = \mathrm{Tr}((\alpha\,{}^tM + \beta\,{}^tN)P) \\ &= \alpha\mathrm{Tr}({}^tMP) + \beta\mathrm{Tr}({}^tNP) = \alpha\varphi(M, P) + \beta\varphi(N, P),\end{aligned}$$

donc φ est linéaire par rapport à sa première variable. De même, on montre que φ est linéaire par rapport à sa seconde variable. Ainsi, φ est bilinéaire.

$\diamond$ Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\varphi(M, N) = \mathrm{Tr}({}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tNM)) = \mathrm{Tr}({}^tNM) = \varphi(N, M)$,
donc φ est une forme bilinéaire symétrique.

$\diamond$ Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le $(i, i)^{\text{ème}}$ coefficient de ${}^tMM$ est égal à $\sum_{j=1}^n m_{j,i}m_{j,i}$, donc $\varphi(M, M) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$, ce qui prouve que φ est positive.
De plus, si $\varphi(M, M) = 0$, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $m_{i,j} = 0$, donc $M = 0$.
Ainsi, φ est un produit scalaire, auquel on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que le cas d'égalité :

$\bullet$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $|\mathrm{Tr}(M)|^2 = |\varphi(I_n, M)|^2 \leq \varphi(I_n, I_n)\varphi(M, M) = n\mathrm{Tr}({}^tMM)$.
Il y a égalité si et seulement si M et I_n sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si M est une matrice scalaire.

Théorème. ***Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire.***

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $y = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ky$.

Démonstration.

$\bullet$ Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

• Si $y = 0$, il y a égalité et x et y sont positivement colinéaires.
On peut donc supposer pour la suite de la démonstration que $y \neq 0$.
• Supposons que x et y sont positivement colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ky$. Alors $\|x+y\| = (k+1)\|y\| = \|x\| + \|y\|$.
• Réciproquement, supposons qu'il y a égalité dans l'inégalité de Minkowski.
Alors, dans la démonstration ci-dessus, toutes les inégalités sont des égalités.
Ainsi, $(x|y) = |(x|y)|$ donc $(x|y) \geq 0$, et $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$, donc d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, x et y sont colinéaires. Or $y \neq 0$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = ky$. Ainsi, $(x|y) = k\|y\|^2$, or $\|y\| \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(x|y) \geq 0$, donc $k \in \mathbb{R}_+$.
□

Théorème. Soit E un espace préhilbertien réel.
Alors la norme associée à son produit scalaire est bien une norme.

Démonstration.
Notons $(.|.)$ son produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.
Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
⋄ $\|x\| = (x|x) \geq 0$ car $(.|.)$ est positive.
⋄ $\|x\| = 0 \Longrightarrow (x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, car $(.|.)$ est définie.
⋄ $\|\lambda\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = |\lambda|\sqrt{(x|x)} = |\lambda|\|x\|$.
⋄ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, d'après l'inégalité de Minkowski. □

2 espaces vectoriels normés de dimensions finies

2.1 Suites et fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

Propriété. Suites à valeurs dans un espace de dimension finie.
On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie strictement positive, notée q. Soit $e = (e_1, \ldots, e_q)$ une base de E.

Soit (x_n) une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum_{i=1}^{q} x_{i,n} e_i$.

Alors, la suite (x_n) converge dans E si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, la suite $(x_{i,n})$ converge dans $\mathbb{K}$, et, dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{q} (\lim_{n\to+\infty} x_{i,n}) e_i$.

Démonstration.
Nous démontrerons plus tard que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il n'est pas nécessaire de préciser dans l'énoncé de

cette propriété quelle norme sur E est utilisée, et, pour en faire la démonstration, on peut choisir sur E la norme que nous voulons.
Choisissons donc sur E la norme définie par la relation suivante :
pour tout $y = \sum_{i=1}^{q} y_i e_i \in E$, $\|y\| = \sum_{i=1}^{q} |y_i|$. (le fait que $\|.\|$ est effectivement une norme sur E est laissé en exercice).
Ainsi, la suite (x_n) converge vers $l = \sum_{i=1}^{q} l_i e_i$ si et seulement si
$\sum_{i=1}^{q} |x_{i,n} - l_i| = \|x_n - l\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$
$|x_{i,n} - l_i| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $(x_{i,n})$ converge vers l_i. $\square$

Propriété. Limite d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x) e_i \end{array}$.
Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = \sum_{i=1}^{q} l_i e_i \in F$. Alors,
$f(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\in A}}{\longrightarrow} l_i$.

Démonstration.
Nous choisirons à nouveau comme norme $\begin{array}{rccc} \|.\| : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \sum_{i=1}^{q} y_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{q} |y_i| \end{array}$.

Notons $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}^q & \longrightarrow & F \\ & (y_1, \ldots, y_q) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{q} y_i e_i \end{array}$. Pour tout $y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{K}^q$,
$\|\varphi(y)\| = \|y\|_1$. Ainsi φ et φ^{-1} sont continues.
D'après le théorème de composition des limites, $f(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si
$\varphi^{-1}(f(x)) \underset{\substack{x\to a \\ x\in A}}{\longrightarrow} \varphi^{-1}(l)$, donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\in A}}{\longrightarrow} l_i$. $\square$

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit.
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où F_1, ..., F_q sont des espaces vectoriels normés et notons $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Alors,
f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1,\ldots,e_q)$ et notons $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x)=\sum_{i=1}^{q} f_i(x)e_i \end{array}$. Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Alors,
f est continue en a si et seulement si pour tout $i\in\mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

Exemple. L'application $\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1+4x & e^x \\ \sin x & \ln(1+x) \end{pmatrix} \end{array}$ est continue.

Notation. Pour toute la suite du chapitre 2, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n>0$ et on fixe une base de E que l'on note $e=(e_1,\ldots,e_n)$.
Si $x=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\in E$, on pose $N(x)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.
On vérifie que N est une norme sur E.

2.2 Compacité

Convention : dans ce paragraphe, on dira qu'un espace vectoriel normé est bon si et seulement si ses parties compactes sont exactement ses parties fermées bornées.

Lemme 1. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Si F est bon, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, F^p est bon.

Démonstration.
Soit K un fermé borné de F^p. Il existe $M>0$ tel que $K\subset B_f^{\infty}(0,M)$.
Or $(x_1,\ldots,x_p)\in B_f^{\infty}(0,M)\iff \sup\limits_{1\le i\le p}\|x_i\|\le M \iff \forall i\in\mathbb{N}_p\ \|x_i\|\le M$, ainsi
$(x_1,\ldots,x_p)\in B_f^{\infty}(0,M)\iff \forall i\in\mathbb{N}_p\ x_i\in B_f^F(0,M)$, donc $B_f^{\infty}(0,M)=B_f^F(0,M)^p$.
Or $B_f^F(0,M)$ est un fermé borné de F, donc c'est un compact. Ainsi $B_f^{\infty}(0,M)$ est un compact en tant que produit cartésien de compacts. De plus K est une partie fermée incluse dans un compact, donc c'est un compact. □

Lemme 2. Soient F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f\ :F\longrightarrow G$ une isométrie, c'est-à-dire une application surjective telle que
$\forall(x,y)\in F^2\ \ d(f(x),f(y))=d(x,y)$.
Alors F est bon si et seulement si G est bon.

Démonstration.
⋄ Soit $(x,y)\in F^2$ tel que $f(x)=f(y)$. Alors $d(x,y)=d(f(x),f(y))=0$, donc $x=y$. Ainsi f est injective, donc bijective. De plus f et f^{-1} sont 1-lipschitziennes, donc continues.
⋄ Supposons que les compacts de F sont ses fermés bornés. Soit K un fermé borné de G. $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue et il est borné car f est une isométrie, donc

$f^{-1}(K)$ est un compact de F. Ainsi $K = f(f^{-1}(K))$ est un compact de G, en tant qu'image d'un compact par une application continue. □

Théorème. Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont exactement ses fermés bornés.

Démonstration.
⋄ On sait déjà que les parties compactes de $\mathbb{K}$ sont exactement ses fermés bornés (cf chapitre "Limites et continuité" page 13).
⋄ Le lemme 1 montre alors que $\mathbb{K}^n$ est bon.
⋄ Enfin, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$ est une isométrie en choisissant sur $\mathbb{K}^n$ la norme 1, donc d'après le lemme 2, les compacts de E sont les fermés bornés. □

Théorème de Bolzano-Weierstrass.
De toute suite bornée de vecteurs de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration.
Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Il existe $M > 0$ tel que
$\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0, M)$. Ainsi (x_n) est une suite dont les éléments sont dans un fermé borné, donc dans un compact. Elle admet donc au moins une valeur d'adhérence. □

Remarque. Pour le moment, ces deux théorèmes ne sont valables qu'avec la norme N que nous avons choisie sur E, mais nous montrerons ci-dessous que toutes les normes sur E sont équivalentes, donc ces théorèmes sont en fait valables pour toutes les normes de E.

Théorème. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est complet.

Démonstration.
⋄ Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. Elle est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence que l'on notera x. On sait alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
⋄ Réciproquement, on a déjà vu que toute suite convergente était une suite de Cauchy.
□

Propriété. Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie. Tout sous-espace vectoriel de G de dimension finie est fermé.

Démonstration.
Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension finie. Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $l \in G$.
En tant que suite convergente de G, (x_n) est une suite de Cauchy de G, donc c'est une suite de Cauchy de F, mais F est de dimension finie, donc d'après le théorème précédent, la suite (x_n) converge dans F, donc $l \in F$, ce qui prouve que F est fermé.
□

2.3 Equivalence des normes

Théorème.
Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration.
• Soit N' une seconde norme sur E.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. $N'(x) = N'(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N'(e_i)$.
Posons $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} N'(e_i)$. Pour tout $x \in E$, $(1)\ : N'(x) \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \beta N(x)$.
• On en déduit que pour tout $(x, y) \in E^2$, $|N'(x) - N'(y)| \leq N'(x - y) \leq \beta N(x - y)$, c'est-à-dire que l'application $N'\ : (E, N) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application β-lipschitzienne. Ainsi, cette application est continue.
En particulier, si l'on note $S_N(0, 1) = \{x \in E \ / \ N(x) = 1\}$ (c'est la sphère unité pour la norme N), alors $N'_{/S_N(0,1)}$ est continue, or $S_N(0, 1)$ est un fermé borné de (E, N), donc il est compact (on utilise bien ici le paragraphe précédent avec N, et non avec N' ce qui ne serait pas correct). Ainsi $N'_{/S_N(0,1)}$ est une application bornée qui atteint ses bornes.
En particulier, il existe $x_0 \in S_N(0, 1)$ tel que pour tout $x \in S_N(0, 1)$, $N'(x) \geq N'(x_0)$.
Si $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{N(x)} \in S_N(0, 1)$, donc $N'\left(\frac{x}{N(x)}\right) \geq N'(x_0)$.
De plus $N(x_0) = 1$, donc $x_0 \neq 0$, ce qui montre que $N'(x_0) > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, $(2)\ : N(x) \leq \frac{1}{N'(x_0)} N'(x)$.
(1) et (2) prouvent que N et N' sont équivalentes. □

2.4 Applications linéaires et multilinéaires

Théorème. Toute application linéaire dont l'ensemble de départ est de dimension finie est continue.

Démonstration.
Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque et $u \in L(E, F)$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. $\|u(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|u(e_i)\|$.
Posons $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\|u(x)\| \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \beta N(x)$.
u étant linéaire, on en déduit qu'elle est β-lipschitzienne, donc u est continue. □

Théorème. Soient $E_1, \ldots, E_p$ une famille de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels *de dimensions finies*, où $p \in \mathbb{N}^*$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.
Toute application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

Démonstration.
Pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, on note n_j la dimension de E_j et $e_j = (e_{1,j}, \dots, e_{n_j,j})$ une base de E_j. Soit f une application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.

Soit $(x_1, \dots, x_p) = (\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}e_{i,j})_{1 \le j \le p} \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

$f(x_1, \dots, x_p) = f(\sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1}e_{i,1}, x_2, \dots, x_p)$, donc en utilisant la linéarité selon la première variable, $f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1} f(e_{i,1}, x_2, \dots, x_p)$, puis

$f(x_1, \dots x_p) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1} \sum_{j=1}^{n_2} a_{j,2} f(e_{i,1}, e_{j,2}, x_3, \dots, x_p)$, donc

$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{u=(i_1,\dots,i_p) \in \mathbb{N}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{n_p}} a_{i_1,1} \dots a_{i_p,p} f(e_{i_1,1}, \dots, e_{i_p,p})$.

Soit $j \in \mathbb{N}_p$ et $i \in \{1, \dots, n_j\}$. $a_{i,j} = e^*_{i,j}(x_j)$, si l'on désigne par $(e^*_{k,j})_{1 \le k \le n_j}$ la base duale de e_j. Mais $e^*_{i,j}$ est une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie, donc c'est une fonction continue de x. L'expression précédente de $f(x_1, \dots, x_p)$ et les théorèmes usuels montrent alors que f est continue. □

Propriété. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les applications polynômiales de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sont continues.

Démonstration.
Soit f une fonction polynômiale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Il existe une famille de scalaires $(\alpha_u)_{u \in \mathbb{N}^n}$ indexée par $\mathbb{N}^n$ et presque nulle telle que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\; f(x) = \sum_{u=(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n} \alpha_u x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

f est donc continue sur $\mathbb{K}^n$ d'après les théorèmes usuels. □

Remarque. Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & g(x_1, \dots, x_n) \end{array}$.

Si g est une application polynômiale, alors f est continue. En effet, $f = g \circ h$ où $\begin{array}{rccc} h: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$. h est continue car linéaire en dimension finie, et g est continue car polynômiale, donc f est continue.

Exemple. L'application det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

3 Orthogonalité

Notation. E désigne toujours un espace préhilbertien.
Son produit scalaire est noté $< .,. >$ et la distance associée est notée d.

3.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Définition. Soit $(x, y) \in E^2$.
x et y sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$. Dans ce cas, on note $x \perp y$.

Remarque.
La relation d'orthogonalité est symétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni transititve.

Exemples.
- Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux.
- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$, les fonctions sin et cos sont des vecteurs unitaires orthogonaux. En effet,
$\langle \sin, \cos \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\,dt = 0$ par imparité,
$\|\sin\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = 1$ et
$\|\cos\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 1$.

Définition. Soit A une partie de E.
L'***orthogonal*** de A est $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A \quad x \perp y\}$: c'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Alors $a^\perp$ est un hyperplan. En effet, c'est le noyau de la forme linéaire $x \longmapsto \langle x, a \rangle$.

Propriété. Soit A une partie de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
$A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp$. $\square$

Définition. Soient A et B deux parties de E. On dit qu'elles sont orthogonales si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B. On note alors $A \perp B$.
Ainsi, $A \perp B \iff [\forall (a, b) \in A \times B,\ \ a \perp b]$.

Propriété. Soient A et B deux parties de E. $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} A\perp B &\iff [\forall (a,b)\in A\times B,\ \ a\perp b] \\ &\iff [\forall a\in A,\ \ (\forall b\in B\ \ , a\perp b)] \\ &\iff [\forall a\in A\ \ , a\in B^{\perp}] \\ &\iff A\subset B^{\perp}. \end{aligned}$$

La seconde équivalence s'obtient en intervertissant les rôles joués par A et B. □

Propriété. Soient A et B deux parties de E. On dispose des propriétés suivantes :
- — $A\subseteq B \Longrightarrow B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$,
- — $(A\cup B)^{\perp}=A^{\perp}\cap B^{\perp}$,
- — $A^{\perp}=(\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$,
- — et $A\subseteq (A^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration.

◇ Supposons que $A\subseteq B$.
Soit $x\in B^{\perp}$. Pour tout $a\in A$, $a\in B$, donc $x\perp a$. Ainsi, $x\in A^{\perp}$.
On a donc prouvé que $B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$.
◇ x appartient à $(A\cup B)^{\perp}$ si et seulement si x est orthogonal à tout élément de $A\cup B$, donc si et seulement si x est orthogonal à tout élément de A (ie : $x\in A^{\perp}$) et à tout élément de B (ie : $x\in B^{\perp}$). Ainsi $(A\cup B)^{\perp}=A^{\perp}\cap B^{\perp}$.
◇ $A\subseteq \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A)^{\perp}\subseteq A^{\perp}$.
Réciproquement, soit $x\in A^{\perp}$.
Soit $y\in\mathrm{Vect}(A)$. Il existe $(\alpha_a)_{a\in A}\in\mathbb{R}^{(A)}$ telle que $y=\sum_{a\in A}\alpha_a a$.
Ainsi $<x,y>=\sum_{a\in A}\alpha_a<x,a>=0$, car $x\in A^{\perp}$.
On a montré que, pour tout $y\in\mathrm{Vect}(A)$, $x\perp y$, donc $x\in\mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.
C'est vrai pour tout $x\in A^{\perp}$, donc $A^{\perp}\subseteq\mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.
◇ $A\perp A^{\perp}$, donc $A\subseteq(A^{\perp})^{\perp}$. □

Remarque. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
$F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$, donc $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
Cependant, en général, $(F\cap G)^{\perp}\neq F^{\perp}+G^{\perp}$ et $F^{\perp\perp}\neq F$.

Remarque. Un vecteur $x\in E$ est orthogonal à un sous-espace vectoriel F de E muni d'une base e si et seulement si x est orthogonal aux vecteurs de la base e.
En effet, supposons que $e=(e_i)_{i\in I}$ est une base de F. Si pour tout $i\in I$, $x\perp e_i$, alors $x\in\{e_i/i\in I\}^{\perp}=[\mathrm{Vect}\{e_i/i\in I\}]^{\perp}=F^{\perp}$.

Exemple. Notons H le plan de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne dans la base canonique est : $x+y-z=0$.
Déterminons l'orthogonal de H, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
Une base de H est $(X_1,X_2)=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, donc $H^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$X \in H^\perp \iff (X_1|X) = (X_2|X) = 0 \iff \begin{cases} x - y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x \\ z & = -x \end{cases}$,

donc $H^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exemples.

— Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, si $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors v est orthogonal à l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

— Dans $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des fonctions paires (et continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$) et le sous-espace vectoriel $\mathcal{J}$ des fonctions impaires sont orthogonaux. En effet, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $j \in \mathcal{J}$, $\langle p, j\rangle = \int_{-1}^1 p(t)j(t)\, dt = 0$ par imparité.

Propriété. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Démonstration.

◇ Tout vecteur de E est orthogonal à 0, donc $\{0\}^\perp = E$.

◇ Si $x \in E^\perp$, alors $< x, x >= 0$, donc $x = 0$. □

Définition. Soit I un ensemble quelconque et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Elle est dite orthogonale si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad (i \neq j \Longrightarrow x_i \perp x_j).$$

Elle est dite ***orthonormale*** si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad < x_i, x_j >= \delta_{i,j}.$$

Exemple. Considérons à nouveau l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $c_k : x \longmapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \longmapsto \sin(kx)$. Montrons que la concaténation des familles $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale. Soit $k, h \in \mathbb{N}^*$.
$\langle c_k, c_h\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos(k-h)x + \cos(k+h)x}{2}\, dx$, donc
lorsque $k \neq h$, $\langle c_k, c_h\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\Big[\dfrac{\sin(k-h)x}{k-h} + \dfrac{\sin(k+h)x}{k+h}\Big]_0^{2\pi} = 0$,
et lorsque $k = h$, $\|c_k\|^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1 + \cos(k+h)x}{2}\, dx = 1$.
De même, $\langle s_k, s_h\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos(k-h)x - \cos(k+h)x}{2}\, dx$, donc

lorsque $k \neq h$, $\langle s_k, s_h \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\Big[\dfrac{\sin(k-h)x}{k-h} - \dfrac{\sin(k+h)x}{k+h}\Big]_0^{2\pi} = 0$,
et lorsque $k = h$, $\|s_k\|^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1-\cos(k+h)x}{2}\, dx = 1$.
Enfin, $\langle c_k, s_h \rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(hx)\, dx = 0$ par imparité.

Relation de Pythagore : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors $\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.
Cependant, lorsque $n \geq 3$, la réciproque est fausse.

Démonstration.
Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, les vecteurs $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (0,2)$ et $x_3 = (0,-1)$ vérifient la relation de Pythagore sans être deux à deux orthogonaux. □

Propriété. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
En particulier, une famille orthonormale est toujours libre.

Démonstration.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale sans vecteur nul.
Soit $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$ telle que $\displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$.
Soit $j \in I$. $\alpha_j < x_j, x_j > = < x_j, \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i x_i > = 0$, or $< x_j, x_j > \neq 0$, donc $\alpha_j = 0$. □

Propriété. Supposons que E admet une base orthonormée notée $(e_i)_{i \in I}$.
Si $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in E$ et $y = \displaystyle\sum_{i \in I} \beta_i e_i \in E$, alors
$< x, y > = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i^2$ et $x = \displaystyle\sum_{i \in I} < e_i, x > e_i$.

Démonstration.
◇ $< x, y > = < \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{j \in I} \beta_j e_j > = \sum_{(i,j) \in I^2} \alpha_i \beta_j < e_i, e_j > = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i$.
◇ En particulier, lorsque $y = x$, $< x, x > = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i^2$.
◇ Soit $j \in I$. $< e_j, x > = < e_j, \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i > = \sum_{i \in I} \alpha_i < e_j, e_i > = \alpha_j$,
donc $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i = \sum_{i \in I} < e_i, x > e_i$. □

Propriété. Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i \in I}$.
Alors il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel e est une base orthonormée.

Démonstration.
- *Existence.* D'après l'exemple étudié au 1.2.1, page 3, l'application

$$\begin{array}{rcll} \varphi: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\sum_{i\in I} x_i e_i, \sum_{i\in I} y_i e_i\right) & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i y_i \end{array}$$ est un produit scalaire sur E.

De plus, pour tout $(h,k)\in I^2$, $\varphi(e_h,e_k)=\sum_{i\in I}\delta_{i,h}\delta_{i,k}=\delta_{h,k}$,
donc e est orthonormée pour ce produit scalaire.

- *Unicité.* Soit ψ un produit scalaire sur E pour lequel e est orthonormée.

D'après la première formule de la propriété précédente, $\psi=\varphi$. □

Remarque. En particulier, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, pour toute base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, il existe un produit scalaire pour lequel $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
Ceci semble contredire la notion intuitive d'orthogonalité de deux vecteurs du plan basée sur la notion d'angle droit.
En fait, à chaque produit scalaire est associée une notion d'angle droit, et pour deux vecteurs quelconques mais non liés, on peut choisir un produit scalaire pour lequel ils forment un angle droit.
Si notre intuition est "choquée" par ce qui précède, c'est que nous vivons dans un espace physique où la notion de distance est fixée (tout au moins en première approximation). Changer de distance est donc contraire à notre intuition. Or la notion de distance contient celle d'angle droit, comme angle formés par un rayon et une tangente d'un même cercle.

Propriété. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\le i\le n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E que l'on suppose deux à deux orthogonaux.

Alors ils forment une somme directe que l'on note $E_1 \overset{\perp}{\bigoplus}\cdots\overset{\perp}{\bigoplus} E_n=\overset{\perp}{\bigoplus_{1\le i\le n}} E_i$.

Démonstration.

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i=0$. Soit $j\in\{1,\dots,n\}$.

Pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $i\neq j$, $<x_j,x_i>=0$, donc $\|x_j\|^2=<x_j,\sum_{i=1}^n x_i>=0$.

Ainsi, $x_j=0$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, ce qui prouve que la somme est directe. □

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

G est un ***supplémentaire orthogonal*** de F si et seulement si $E=F\overset{\perp}{\oplus}G$.

Exemple. Dans $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des fonctions paires et le sous-espace vectoriel $\mathcal{J}$ des fonctions impaires sont supplémentaires orthogonaux.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
F admet au plus un supplémentaire orthogonal. Il s'agit de $F^\perp$.

Démonstration.
Supposons que G est un supplémentaire orthogonal de F, et montrons que $G = F^\perp$.
- $G \perp F$, donc $G \subseteq F^\perp$.
- Réciproquement, soit $x \in F^\perp$.

$E = F + G$, donc il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$.
$F \perp G$, donc $< g, f >= 0$. Ainsi, $\|f\|^2 =< f, f > + < g, f >=< x, f >$, or $x \in F^\perp$, donc $< x, f >= 0$. On en déduit que $\|f\|^2 = 0$, ce qui prouve que $f = 0$, puis que $x = g \in G$.
Ainsi $F^\perp \subseteq G$. □

Remarque. Il est possible qu'un sous-espace vectoriel de E n'admette aucun supplémentaire orthogonal. Par exemple, munissons $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ du produit scalaire

$$< .,. >: \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_n), (y_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n, \end{array}$$

et notons $F = \{(x_n) \in E / \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0\}$. F est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $(y_n) \in F^\perp$. Pour tout $(x_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ tel que $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Choisissons pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $p^{\text{ème}}$ qui est égal à 1, et le $(p + 1)^{\text{ème}}$ qui est égal à -1.
$(x_n) \in F$, donc $0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n = y_p - y_{p+1}$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_{p+1} = y_p$, ce qui prouve que (y_n) est une suite constante. Or elle est presque nulle, donc nécessairement, $(y_n) = 0$.
On a donc prouvé que $F^\perp = \{0\}$, or $F \neq E$, donc $F^\perp$ n'est pas un supplémentaire de F. Ainsi F n'admet aucun supplémentaire orthogonal.
On peut également remarquer que $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq F$.
De plus, si l'on pose $G = \text{Vect}((\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}})$, on a $F \cap G = \{0\}$, donc $(F \cap G)^\perp = E$, mais $F^\perp + G^\perp = G^\perp \neq E$, car $(\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \notin G^\perp$.

3.2 En dimension finie

Propriété. On suppose que E est de dimension finie.
Pour tout $x \in E$, on note $< x, . >: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & < x, y > \end{array}$.
Alors, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration.
- $< .,. >$ est linéaire par rapport à sa seconde variable, donc, pour tout $x \in E$, $< x, . >\in L(E, \mathbb{R})$. Ainsi, l'application $x \longmapsto < x, . >$ est bien définie de E dans $L(E, \mathbb{R})$. Pour la suite de la démonstration, on notera $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$.

• Soit $(x, y, a, b) \in E \times E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $z \in E$,
$f(ax + by)(z) =< ax + by, z >= a < x, z > +b < y, z >= (af(x) + bf(y))(z)$,
donc $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$, ce qui prouve que f est une application linéaire.
• Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$.
Pour tout $y \in E$, $< x, y >= f(x)(y) = 0$, donc $x \in E^{\perp} = \{0\}$. Ainsi, $x = 0$ ce qui prouve que le noyau de f est réduit à $\{0\}$.
• f est donc une application linéaire injective. De plus, $dim(E) = dim(L(E, \mathbb{R}))$, donc f est un isomorphisme. □

Théorème. On ne suppose pas que E est de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. De plus $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration.
• Soit $x \in E$. Notons $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & < x, y > \end{array}$.
$\varphi \in L(F, \mathbb{R})$, donc, d'après la propriété précédente appliquée à F, il existe $f \in F$ tel que $\varphi =< f, . >_{/F}$.
Ceci signifie que, pour tout $y \in F$, $< x, y >=< f, y >$, donc que $x - f \in F^{\perp}$.
Ainsi $x = f + (x - f) \in F + F^{\perp}$. Ceci prouve que $E = F + F^{\perp}$.
Or $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, donc $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F dans E. De plus, on a déjà établi qu'il n'y a pas d'autre supplémentaire orthogonal de F, donc $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F.
• $E = F^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} F$, donc F est un supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$, or le seul éventuel supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$ est $(F^{\perp})^{\perp}$. Ainsi $F = (F^{\perp})^{\perp}$. □

Exemple. Reprenons l'exemple où H est le plan de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne dans la base canonique est : $x + y - z = 0$.
Si l'on pose $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $H = \{X \in \mathbb{R}^3 / (N|X) = 0\} = \{N\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(N)^{\perp}$.
Or $\mathrm{Vect}(N)$ est de dimension finie, donc on peut appliquer le théorème précédent.
Ainsi, $H^{\perp} = (\mathrm{Vect}(N)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(N)$.
On retrouve bien le même résultat que précédemment.

Définition.
On appelle ***espace euclidien*** tout espace préhilbertien de dimension finie.

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose que E est un espace euclidien de dimension $n > 0$. On notera $< ., . >$ son produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Propriété.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Démonstration.
$F^{\perp} + G^{\perp} = (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} = (F^{\perp} \cup G^{\perp})^{\perp\perp} = (F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp})^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$. □

Propriété. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim(F^{\perp}) = dimE - dimF$.

Propriété. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient x et y des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base e sont données sous forme de vecteurs colonnes notés X et Y. Alors $< x, y >=^t YX =^t XY$.

Démonstration.
Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Ainsi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Donc $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =^t XY =^t YX$. □

Remarque. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, pour tout $u \in L(E)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $[\text{mat}(u, e)]_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

La fin de ce paragraphe est hors programme.

Définition. La matrice du produit scalaire dans la base e est égale à

$$\text{mat}(< ., . >, e) = (< e_i, e_j >)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété. e est orthogonale si et seulement si $\text{mat}(< ., . >, e)$ est diagonale.
e est orthonormée si et seulement si $\text{mat}(< ., . >, e) = I_n$.

Formule. Soit e une base quelconque de E. On note Ω la matrice de $< ., . >$ dans la base e. Soient x et y deux vecteurs de E, dont les coordonnées dans e sont données sous la forme des vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$< x, y >= {}^tX\Omega Y = {}^tY{}^t\Omega X = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_i y_j \omega_{i,j}.$$

Démonstration.
Posons $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{n,1} \end{pmatrix}$ et $\Omega = (\omega_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

$$\begin{aligned} < x, y > &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} e_i, \sum_{j=1}^{n} y_{j,1} e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_{j,1} e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,1} y_{j,1} < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,1} \omega_{i,j} y_{j,1} \\ &= {}^tX\Omega Y, \end{aligned}$$

d'après la formule pour le produit de trois matrices. De plus, une matrice carrée d'ordre 1 est toujours symétrique, donc ${}^tX\Omega Y = {}^t({}^tX\Omega Y) = {}^tY{}^t\Omega X$. □

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit φ une forme bilinéaire sur E.
La matrice de φ dans la base e est $\text{mat}(\varphi, e) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $x, y \in E$, en posant $X = \text{mat}_e(x)$ et $Y = \text{mat}_e(y)$, $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$.
φ est symétrique si et seulement si $\Omega \in S_n(\mathbb{K})$.

3.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \bigoplus F^\perp = E$.
On appelle ***projection orthogonale*** sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Dans ce chapitre, elle est notée p_F.

Remarque. On utilisera souvent le fait que le projecteur associé à p_F est $Id_E - p_F = p_{F^\perp}$. En particulier, pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$.

Formule. Soit F un sous-espace vectoriel de E que l'on suppose muni d'une base orthonormée $e = (e_i)_{i\in I}$. On suppose de plus que $F \oplus F^\perp = E$.

Alors, pour tout $x \in E$, $\boxed{p_F(x) = \sum_{i\in I}^{n} < e_i, x > e_i}$.

En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, muni d'une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$, alors, pour tout $x \in E$, $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i}$.

Démonstration.
Soit $x \in E$.
$p_F(x) = \sum_{i\in I} < e_i, p_F(x) > e_i$ car $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de F.
Or, pour tout $i \in I$, $< e_i, p_F(x) >=< e_i, (p_F(x) - x) + x >=< e_i, x >$
car $p_F(x) - x \in F^\perp$, donc $p_F(x) = \sum_{i\in I} < e_i, x > e_i$. □

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \bigoplus F^\perp = E$.
Pour tout $x \in E$, $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$, donc on peut calculer $p_F(x)$ en passant par $p_{F^\perp}(x)$. C'est pertinent lorsque F est un hyperplan de E.

Exemple. Considérons à nouveau l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$. En posant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k \ : \ x \longmapsto \cos(kx)$ et $s_k \ : \ x \longmapsto \sin(kx)$, on a vu que la concaténation des familles $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale. Posons également $c_0 \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie facilement que $B_n = (c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ est une famille orthonormée de E. Posons

$$\begin{aligned} E_n &= \mathrm{Vect}(B_n) \\ &= \{x \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \ / \ a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $f \in E$, c'est-à-dire pour toute application f continue et 2π-périodique, le projeté orthogonal de f sur E_n est $p_{E_n}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k c_k + b_k s_k)$, où pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = \langle f, c_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\ dt$, où $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ dt$ et où pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $b_k = \langle f, s_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\ dt$.

On dit que $p_{E_n}(f)$ est le développement de f en série de Fourier à l'ordre n.

Exemple. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni sa structure euclidienne canonique.
On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$.
On souhaite calculer $p_F(u_3)$, où $u_3 = (0, 1, 1)$.
On pourrait orthonormaliser (u_1, u_2) selon le procédé de Gram-Schmidt puis appliquer la formule précédente, mais il y a plus simple :
(u_1, u_2) étant libre, c'est une base de F.
Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(u_3) = au_1 + bu_2$.
$u_3 - p_F(u_3) \in F^\perp$, donc $\langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_1, p_F(u_3) \rangle$ et $\langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_2, p_F(u_3) \rangle$.
Ainsi, $a\|u_1\|^2 + b\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle$ et $a\langle u_2, u_1 \rangle + b\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_3 \rangle$, donc (a, b) vérifie le système d'équations $\begin{cases} a + 2b &= 1 \\ 2a + b &= 1 \end{cases}$. Les formules de Cramer donnent $a = \frac{1}{3} = b$, donc $p_F(u_3) = \frac{1}{3}(u_1 + u_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Théorème de la projection orthogonale :
Soient $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors,

$$\boxed{d(a, F) = d(a, p_F(a)).}$$

De plus, pour tout $y \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $d(a, y) > d(a, F)$.
Ainsi, $p_F(a)$ est le vecteur de F le plus proche de a (cf figure).
On dispose de la formule suivante : $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$.
Enfin, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de F, on dispose de l'***inégalité de Bessel*** : $\|a\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} < e_i, a >^2$.

Remarque. À part pour le dernier point, le théorème et sa démonstration sont valables en supposant seulement que F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$.

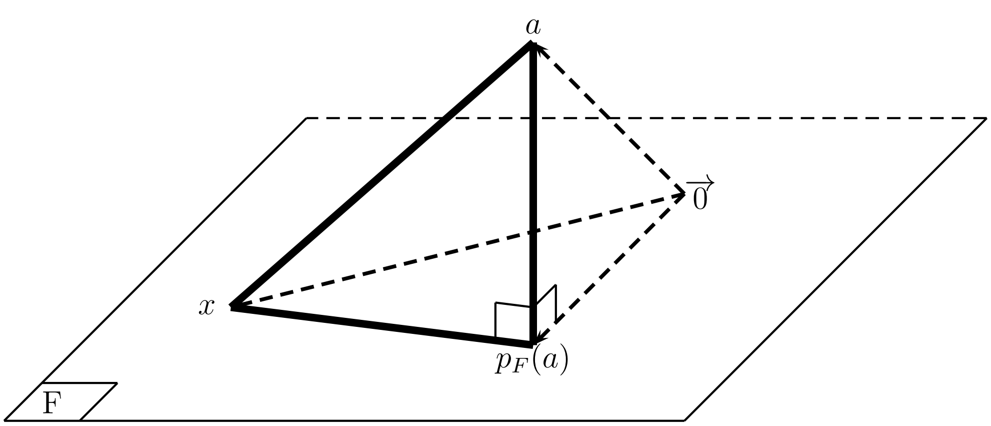
Démonstration.

- $a = p_F(a) + (a - p_F(a))$, avec $p_F(a) \in F$ et $a - p_F(a) \in F^\perp$.

Soit $x \in F$. $\|x - a\|^2 = \|(x - p_F(a)) + (p_F(a) - a)\|^2$,

donc d'après le théorème de Pythagore (appliqué au triangle rectangle représenté en gras sur la figure),
(1) : $\|x-a\|^2 = \|x-p_F(a)\|^2 + \|p_F(a)-a\|^2$.
Ainsi, pour tout $x \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $\|x-a\|^2 > \|p_F(a)-a\|^2$.
Ceci démontre que $\{\|x-a\|/x \in F\}$ admet $\|p_F(a)-a\|$ comme minimum,
donc $d(a,F) = \|p_F(a)-a\|$.
• La formule (1) devient, lorsque $x=0$: $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \|p_F(a)-a\|^2$, donc $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a,F)^2$.
• On sait que $p_F(a) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, a > e_i$, car $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base **orthonormée** de F, donc $\|p_F(a)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < e_i, a >^2$,
Ainsi, $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \|p_F(a)-a\|^2 \geq \|p_F(a)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < e_i, a >^2$. □

Figure.



Exemple. Reprenons l'exemple où $E = \mathbb{R}^3$ muni sa structure euclidienne canonique, $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (1,0,1)$. On pose $u_3 = (0,1,1)$ et on souhaite calculer $d(F,u_3)$.
D'après un calcul précédent, $d(F,u_3) = \|u_3 - p_F(u_3)\| = \|(0,1,1) - (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
On peut cependant court-circuiter ce "long" calcul précédent. En effet,
$d(F,u_3) = \|p_{F^\perp}(u_3)\|$, or $u_4 = (1,-1,-1) \in \{u_1,u_2\}^\perp = F^\perp$ donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(u_4)$. On en déduit que $d(F,u_3) = \frac{|\langle u_3, u_4\rangle|}{\|u_4\|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exemple. Prenons $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini par
$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons E_n l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont polynômiales de degré inférieur ou égal à n. C'est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n+1$.
Notons p_n la projection orthogonale sur E_n.
Soit $f \in E$. $p_n(f)$ est le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui est le plus proche de l'application f au sens de la distance associée au produit scalaire choisi sur E. On dit que $p_n(f)$ est une approximation de f ***au sens des moindres carrés***.
• $E_n \subset E_{n+1}$, donc $d(f, E_{n+1}) \leq d(f, E_n)$. Ainsi, $p_{n+1}(f)$ est une approximation de f qui est meilleure que $p_n(f)$.
• On peut même montrer que $d(p_n(f), f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que l'approximation peut être choisie aussi bonne que l'on veut (au sens des moindres carrés) à condition de choisir n suffisamment grand. C'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass (programme de seconde année).

Propriété. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose $H = a^{\perp}$. H est un hyperplan dont a est un vecteur **normal**. Pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$ et, en notant s_H la symétrie orthogonale par rapport à H, $s_H(x) = x - 2\dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, passant par un point A et dirigé par l'hyperplan vectoriel H :
Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul de $H^{\perp}$, on dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Dans ce cas, pour tout $M \in E$, $d(M, \mathcal{H}) = \dfrac{| < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{AM} > |}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
Si $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$ dans un repère orthonormé, pour tout $M \in E$, $d(M, \mathcal{H}) = \dfrac{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de M dans le repère.

Démonstration.
◇ $d(M, \mathcal{H}) = \inf_{M \in \mathcal{H}} \|\overrightarrow{MP}\|$, or $\mathcal{H} = A + H = \{A + x \ / \ x \in H\}$,
donc $d(M, \mathcal{H}) = \inf_{x \in H} \|(A + x) - M\| = \inf_{x \in H} \|x - \overrightarrow{AM}\| = d(\overrightarrow{AM}, H)$,
ainsi $d(M, \mathcal{H}) = \|p_{H^{\perp}}(\overrightarrow{AM})\| = \dfrac{\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

◇ Supposons que $\mathcal{H}$ admette pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$.

Notons $(x_{i,M})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de M et $(x_{i,A})_{1 \leq i \leq n}$ celles de A. Posons également

$\overrightarrow{n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors la formule précédente s'écrit

$d(M, \mathcal{H}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}} \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_{i,M} - x_{i,A}) \Big|$, or $A \in \mathcal{H}$, donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,A} = c$, donc

$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,M} - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}$. $\square$

3.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt.***
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,
i) $e_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, e_k est positivement colinéaire à la projection orthogonale de x_k sur l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$. C'est-à-dire que la famille $(e_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ est récursivement définie par les relations suivantes :

$$e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}, \text{ où } E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i.$$

Démonstration.
• *Existence.*
◇ Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Posons $F_k = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $F_0 = \{0\}$.
Notons p_k la projection orthogonale sur F_k et posons $E_k = x_k - p_{k-1}(x_k)$.
Ainsi, E_k désigne la projection orthogonale de x_k sur l'orthogonal de F_{k-1}.
◇ Supposons que $E_k = 0$. Alors $x_k = p_{k-1}(x_k) \in F_{k-1}$, ce qui est faux car $(x_1, \dots, x_k)$ est un système libre. Ainsi $E_k \neq 0$ et on peut poser $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|} \in F_k$.
◇ Soit $(h, k) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $h < k$. $e_h \in F_h \subset F_{k-1}$ et $e_k \in F_{k-1}^{\perp}$,
donc $< e_h, e_k > = 0$.
Ainsi la famille (e_k) est orthonormale.
◇ Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $< x_k, e_k > = \frac{1}{\|E_k\|} < x_k, E_k >$,
or $< x_k, E_k > = < E_k + p_{k-1}(x_k), E_k > = \|E_k\|^2$ car $p_{k-1}(x_k) \in F_{k-1}$ et $E_k \in F_{k-1}^{\perp}$.
Ainsi $< x_k, e_k > = \|E_k\| \in \mathbb{R}_+^*$.
• *Unicité.*
◇ Soit $(f_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ une seconde famille orthonormale telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $< f_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $h \in \{1, \ldots, k\}$, $f_h \in F_k$, donc $\text{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \subset F_k$. De plus, les deux familles $(f_1, \ldots, f_k)$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ étant libres,
$dim(\text{Vect}(f_1, \ldots, f_k)) = k = dim(F_k)$, donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$\text{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = F_k$.
◇ Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. $f_k \in \{f_1, \ldots, f_{k-1}\}^\perp = \text{Vect}(\{f_1, \ldots, f_{k-1}\})^\perp = F_{k-1}^\perp$,
donc f_k et e_k appartiennent à $F_k \cap F_{k-1}^\perp$. Cet espace est l'orthogonal de F_{k-1} pour la restriction du produit scalaire à F_k, donc $dim(F_k \cap F_{k-1}^\perp) = dim(F_k) - dim(F_{k-1}) = 1$, ainsi, cet espace est une droite vectorielle.
On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $f_k = ae_k$.
◇ $< f_k, x_k >= a < e_k, x_k >$ donc $a \in \mathbb{R}_+^*$.
◇ Enfin $1 = \|f_k\| = a$, donc $f_k = e_k$, ce qui prouve l'unicité. □

Exercice. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2).
Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$< P, Q >= P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1).$$

1°) Montrer que $(P, Q) \longmapsto < P, Q >$ est un produit scalaire sur E.

2°) Déterminer une base orthonormée de E, notée (P_0, P_1, P_2), telle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $deg(P_i) = i$.

Solution.

1°) On vérifie que $< ., . >$ est une forme bilinéaire symétrique.
Soit $P \in E$. $< P, P >= P(1)^2 + P(0)^2 + P(-1)^2$, donc $< ., . >$ est positive.
De plus, si $< P, P >= 0$, alors P admet 0, 1 et -1 comme racines, or P est de degré inférieur ou égal à 2, donc P est nul. Ceci prouve que $< ., . >$ est définie positive.
Ainsi, $< ., . >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire sur E.
On notera $\|.\|$ la norme associée.

2°) On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .

- $\|1\|^2 = 3$, donc on pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- Notons E_1 le polynôme obtenu en enlevant à X sa projection orthogonale sur $\text{Vect}(P_0)$. $E_1 = X - < P_0, X > P_0 = X - \dfrac{1}{3} < 1, X >= X - \dfrac{1}{3}(1 + 0 + (-1)) = X$.
De plus, $\|E_1\|^2 = 1^2 + |0|^2 + (-1)^2 = 2$, donc on pose $P_1 = \dfrac{X}{\sqrt{2}}$.
- Notons E_2 le polynôme obtenu en enlevant à X^2 sa projection orthogonale sur $\text{Vect}(P_0, P_1)$.

$$\begin{aligned} E_2 &= X^2 - < P_0, X^2 > P_0 - < P_1, X^2 > P_1 \\ &= X^2 - \frac{1}{3} < 1, X^2 > - \frac{1}{2} < X, X^2 > X \\ &= X^2 - \frac{1}{3}(1^2 + 0^2 + (-1)^2) - \frac{1}{2}(1.(1^2) + (-1).(-1)^2)X \\ &= X^2 - \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

De plus, $\|E_2\|^2 = (1^2 - \dfrac{2}{3})^2 + \dfrac{2}{3}^2 + ((-1)^2 - \dfrac{2}{3})^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, donc on pose $P_2 = \dfrac{\sqrt{3}X^2}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ une base de E.
Alors il existe une unique base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant de plus strictement positifs.

Démonstration.
Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{T}^+$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Avec les notations de l'énoncé du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt,
$i) \Longleftrightarrow P_x^e \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow P_e^x \in \mathcal{T}$ et
$ii) \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $[P_e^x]_{i,i} > 0$ (en effet, $[P_e^x]_{i,i} =< e_i, x_i >$ car la base e est orthonormée).
Ainsi, $[i)$ et $ii)] \Longleftrightarrow P_e^x \in \mathcal{T}^+ \Longleftrightarrow P_x^e \in \mathcal{T}^+$. □

Propriété. Supposons que E est de dimension finie.
◇ E admet au moins une base orthonormée.
◇ Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormale de E, on peut la compléter en une base orthonormale de E.

Démonstration.
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormale de E, on note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
$F^\perp$ admet au moins une base orthonormale $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On vérifie que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E. □

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille infinie***
Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
i) $e_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, e_k est positivement colinéaire à la projection orthogonale de x_k sur l'orthogonal de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$. C'est-à-dire que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est récursivement définie par les relations suivantes :

$$e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}, \text{ où } E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i.$$

Démonstration.
Il suffit d'adapter la démonstration du cas d'une famille finie. □

Exemple. Considérons un produit scalaire noté $< .,. >$ sur $E = \mathbb{R}[X]$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit une base orthonormée de polynômes (P_n) vérifiant $i)$ et $ii)$.
D'après $i)$, $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $deg(P_n) \leq n$, mais si $deg(P_n) < n$,
alors $\text{Vect}(P_0, \ldots, P_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $(P_0, \ldots, P_n)$ n'est pas libre, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = n$.
Une telle famille de polynômes, de degrés étagés et formant une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$, s'appelle une famille de polynômes orthogonaux.
La théorie des polynômes orthogonaux est assez riche : elle constitue le sujet de quelques problèmes de concours, souvent pour un produit scalaire particulier de $\mathbb{R}[X]$, de la forme $(P, Q) \longmapsto \int_I \varphi(t)P(t)Q(t)dt$, où φ est une fonction continue positive, définie sur l'intervalle I, qui dépend du problème.

4 Endomorphismes d'un espace euclidien

On suppose pour toute cette partie que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

4.1 Endomorphismes symétriques

Définition. Soit $u \in L(E)$. u est un ***endomorphisme symétrique*** si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, $< u(x), y >=< x, u(y) >$.

Propriété. Soient e une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$.
Alors u est symétrique si et seulement si $\text{mat}(u, e)$ est symétrique.

Démonstration.
Notons $M = \text{mat}(u, e)$.
⋄ Supposons d'abord que $M = {}^tM$.
Soit $x, y \in E$. Posons $X = \Psi_e^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \Psi_e^{-1}(y)$.
e étant orthonormée, $< u(x), y >= {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY = {}^tXMY =< x, u(y) >$, donc u est symétrique.
⋄ Réciproquement, supposons que u est symétrique.
Soit $i, j \in \{1, \ldots, \}$: $M_{i,j}$ est égal à la i-ème coordonnée de $u(e_j)$, or e est orthonormée, donc $M_{i,j} =< u(e_j), e_i >=< e_j, u(e_i) >= M_{j,i}$, ce qui prouve que M est symétrique. □

Notation. On notera $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
C'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété. Une projection est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une projection orthogonale.

Démonstration.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires.
Notons p la projection sur F parallèlement à G.
• Supposons que p est un endomorphisme symétrique.
Soit $f \in F$ et $g \in G$. Alors $< f, g >=< p(f), g >=< f, p(g) >=< f, 0 >= 0$, donc $F \perp G$ et p est une projection orthogonale.
• Réciproquement, supposons que p est une projection orthogonale.
Il existe une base orthonormée de F notée $(e_1, \ldots, e_r)$ et une base orthonormée de G notée $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$. $G = F^\perp$, donc la réunion de ces deux bases est une base orthonormée de E notée $e = (e_1, \ldots, e_n)$.
La matrice de p dans e est diagonale, donc symétrique, et e est orthonormée, donc p est un endomorphisme symétrique. □

Propriété. Une symétrie est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Démonstration.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit e une base orthonormée de E.
$s = 2p - Id$, donc $\text{mat}(s, e) = 2\text{mat}(p, e) - I_n$. Ainsi $\text{mat}(s, e)$ est symétrique si et seulement si $\text{mat}(p, e)$ est symétrique, donc s est symétrique si et seulement si p est symétrique, c'est-à-dire si et seulement si $G = F^\perp$, donc si et seulement si s est une symétrie orthogonale. □

Remarque. On notera qu'une symétrie n'est donc pas en général un endomorphisme symétrique.

Propriété. Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Démonstration.
Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$.
$< u(x), y >=< x, u(y) >= 0$, car $x \in F^\perp$ et $u(y) \in u(F) \subset F$. □

Vous verrez en seconde année le
Théorème spectral : Soit u un endomorphisme de E.
Si u est symétrique, il existe au moins une base orthonormée de vecteurs propres de u.
On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.

4.2 Groupe orthogonal.

4.2.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal.

Définition. Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un ***automorphisme orthogonal*** ou une ***isométrie vectorielle*** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

— (i) : conservation du produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$;

— (ii) : conservation de la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.
— (iii) : si e est une base orthonormée de E, en posant $M = \text{mat}(u, e)$, M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Démonstration.
◇ $(i) \Longrightarrow (ii)$: évident.
◇ $(ii) \Longrightarrow (iii)$: en utilisant une identité de polarisation.
◇ $(i) \Longleftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^t(MX)(MY) = {}^tXY$,
donc $(i) \Longleftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ [\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX[{}^tMMY - Y] = 0]$,
ainsi $(i) \Longleftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tMMY - Y \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\} \Longleftrightarrow {}^tMM = I_n \Longleftrightarrow (iii)$. □

Notation. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

Propriété. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.
On l'appelle le ***groupe orthogonal*** de E.

Propriété. Si $u \in O(E)$, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(u)$. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
$\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$ et $\|x\|^2 \neq 0$, donc $\lambda^2 = 1$. □

Propriété. Soit $u \in O(E)$.
Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Démonstration.
Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$: $< u(x), y >=< u(x), u(u^{-1}(y)) >=< x, u^{-1}(y) >$, car u conserve le produit scalaire.
De plus, $u(F) \subset F$, mais u étant inversible, $dim(u(F)) = dim(F)$, donc $u(F) = F$, puis $F = u^{-1}(F)$. En particulier $u^{-1}(y) \in F$ et $x \in F^\perp$,
donc $< u(x), y >=< x, u^{-1}(y) >= 0$, pour tout $y \in F$, donc $u(x) \in F^\perp$. □

4.2.2 Les rotations.

Propriété. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$, mais la réciproque est fausse.

Démonstration.
Soit e une base orthonormée de E. Notons $M = \text{mat}(u, e)$. On sait alors que M est inversible et que $M^{-1} = {}^tM$, donc $\det(M) = \det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$,
donc $\det(u)^2 = \det(M)^2 = 1$. □

Définition. Soit $u \in O(E)$.
On dit que u est une ***rotation*** si et seulement si $\det(u) = 1$.
u est une ***isométrie vectorielle indirecte*** ou négative si et seulement si $\det(u) = -1$.

Propriété. L'ensemble des rotations de E, noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $O(E)$, appelé ***groupe spécial orthogonal***.
L'ensemble des isométries indirectes de E est noté $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. Il n'a pas de structure particulière.

Définition. On note $SL(E) = \{u \in GL(E)/\det(u) = 1\}$. C'est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé le groupe spécial linéaire de E.
$SO(E)$ est un sous-groupe strict de $SL(E)$.

4.2.3 Les symétries orthogonales

Propriété. La symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $F \oplus G = E$) est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (ie : $G = F^{\perp}$).

Démonstration.
Soit e une base orthonormée de E. Posons $M = \text{mat}(s, e)$. s est un automorphisme orthogonal si et seulement si ${}^tM = M^{-1}$, mais s est une symétrie, donc $M^{-1} = M$. Ainsi, s est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique. On sait que c'est le cas si et seulement si s est une symétrie orthogonale.
□

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F.
$s \in SO(E)$ si et seulement si $dim(E) - dim(F)$ est paire.
En particulier, si F est un hyperplan, $s \in O^{-}(E)$ et, dans ce cas, s est appelée une ***réflexion***,
et si $dim(F) = dim(E) - 2$, s est une rotation, et dans ce cas, s est appelée un ***retournement***.

Remarque. Lorsque $n = 3$, les retournements sont donc les symétries orthogonales par rapport à une droite.

Exercice. Soient a et b deux vecteurs unitaires distincts de E.
Il existe une unique réflexion de E, notée $s_{a,b}$, qui échange a et b.
$s_{a,b}$ est la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur $b - a$, donc

$$\forall x \in E \;\; s_{a,b}(x) = x - 2 < e, x > e, \text{ où } e = \frac{1}{\|b - a\|}(b - a).$$

Démonstration.
Au tableau. □

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont perpendiculaires lorsque $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $G^{\perp} \subset F$.

4.2.4 Matrices orthogonales.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une ***matrice orthogonale*** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.
— ${}^tMM = I_n$;

— $M^tM = I_n$;
— M est inversible et $M^{-1} =^t M$.

Propriété. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le ***groupe orthogonal de degré*** n et noté $O(n)$.

Propriété. Pour tout $M \in O(n)$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Définition. Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont appelées les ***matrices de rotations***.
Les matrices orthogonales de déterminant égal à -1 sont appelées les matrices orthogonales gauches ou indirectes.
L'ensemble des matrices de rotations est un sous-groupe de $O(n)$, appelé ***groupe spécial orthogonal de degré*** n et noté $SO(n)$.
L'ensemble des matrices orthogonales indirectes est noté $O^-(n) = O(n) \setminus SO(n)$. Il n'a pas de structure particulière.

Définition. $SL(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, appelé le groupe spécial linéaire de degré n. Il contient strictement $SO(n)$.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$M \in O(n)$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Démonstration.
Notons $M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de M, notée C_j, a pour coordonnées $(m_{i,j})_{1\le i\le n}$, donc $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthonormée si et seulement si , pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\delta_{i,j} =< C_i, C_j >= {}^tC_iC_j$, mais ${}^tC_iC_j$ est le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice ${}^tMM$ (plus généralement, le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de AB vaut L_iC_j, où L_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et où C_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de B), donc $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthonormée si et seulement si ${}^tMM = I_n$. □

Propriété. Soient e une base orthonormée de E et e' une base quelconque de E.
$\boxed{e' \text{ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de } e \text{ à } e' \text{ est orthogonale.}}$

Démonstration.
Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et $P_e^{e'} = (p_{i,j})$.
e' est orthonormée si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,
$\delta_{i,j} =< e'_i, e'_j >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{k,i}p_{k,j}$ (car e est orthonormée), donc si et seulement si les vecteurs colonnes de $P_e^{e'}$ constituent une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si et seulement si $P_e^{e'} \in O(E)$. □

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
— $u \in O(E)$;
— $\text{mat}(u, e) \in O(n)$;
— $u(e)$ est une base orthonormée.

Démonstration.
⋄ En notant $M = \text{mat}(u, e)$, et en tenant compte du fait que e est orthonormée, on sait déjà que $u \in O(E)$ si et seulement si ${}^tM = M^{-1}$, donc si et seulement si $M \in O(n)$.
⋄ $\text{mat}(u, e) = P_e^{u(e)}$, donc toujours en tenant compte du fait que e est orthonormée, $\text{mat}(u, e) \in O(n)$ si et seulement si $u(e)$ est une base orthonormée de E. □

Exemple. Les matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire canonique), car elles transforment la base canonique de $\mathbb{R}^n$ en une base orthonormée, constituée des mêmes vecteurs dans un ordre différent.

Propriété. (Hors programme) Dans une matrice orthogonale droite, chaque coefficient est égal à son cofacteur.
Dans une matrice orthogonale gauche, chaque coefficient est l'opposé de son cofacteur.

Démonstration.
Soit $M \in SO(n)$.
$M^tCof(M) = \det(M)I_n = I_n$, donc ${}^tCof(M) = M^{-1} =^t M$, ainsi $Cof(M) = M$.
De même, lorsque $M \in O^-(M)$, on montre que $Cof(M) = -M$. □

Exemple. La matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale gauche.

Démonstration.
On vérifie que ses vecteurs constituent une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et que le cofacteur de position $(1, 1)$ vaut $\frac{2}{3}$. □

Propriété. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M est symétrique, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que
$M = PDP^{-1} = PD^tP$.

Démonstration.
Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M et c la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
C'est une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) et
$\text{mat}(u, c) = M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $u \in S(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée f constituée de vecteurs propres de u.
Notons $P = P_c^f$. $P \in O(n)$, car c et f sont orthonormées.
Notons $D = \text{mat}(u, f)$. D est diagonale car f est une base de vecteurs propres.
D'après les formules de changement de base, $M = PDP^{-1} = PD^tP$. □

4.2.5 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, pour le moment non muni d'une structure euclidienne.

Notation. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de E et on considère sur $\mathcal{B}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie de la manière suivante :

$$\forall (e, e') \in \mathcal{B}^2 \quad e\mathcal{R}e' \Longleftrightarrow \det(P_e^{e'}) > 0.$$

Propriété. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$.

Propriété. $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ est formé de deux éléments qui sont appelés les ***orientation***s de E. "Orienter E", c'est choisir l'une de ces deux orientations qui devient l'ensemble des ***bases directes*** (ou positives), l'autre orientation étant alors l'ensemble des ***bases indirectes*** (ou négatives, ou rétrogrades).

Démonstration.
E possède au moins une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors $e' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n'est pas en relation par $\mathcal{R}$ avec e. Notons $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ les classes d'équivalence de e et e' respectivement. $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}'$ (sinon, on aurait $e\mathcal{R}e'$). Montrons que ce sont les seules orientations.
Soit e'' une base de E. On veut montrer que $e'' \in \mathcal{O}$ ou $e'' \in \mathcal{O}'$. Supposons que $e'' \notin \mathcal{O}$. Alors $\det(P_{e'}^{e''}) = \det(P_{e'}^{e}) \times \det(P_e^{e''}) > 0$, donc $e'' \in \mathcal{O}'$. □

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

Définition. Soit D une droite vectorielle incluse dans E que l'on oriente en choisissant un vecteur unitaire $\vec{k} \in D$. "Orienter l'hyperplan $D^\perp$ par le vecteur $\vec{k}$ de D", c'est choisir comme orientation de $D^\perp$ l'ensemble des bases $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $D^\perp$ telles que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, \vec{k})$ est une base directe de E.

Remarque. On utilise souvent le procédé précédent pour orienter un plan lorsque E est de dimension 3.

Propriété. Soient e et e' deux bases orthonormées de E. On suppose que e est directe. Alors e' est directe si et seulement si $P_e^{e'} \in SO(n)$.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée directe de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
- $u \in SO(E)$;
- $\mathrm{mat}(u, e) \in SO(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée directe.

4.2.6 Produit mixte.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien **orienté** de dimension $n > 0$.

Propriété. Si e et e' sont deux bases orthonormées directes, $\det_e = \det_{e'}$.

Démonstration.
Soit $x \in E^n$. $\det_e(x) = \det_e(e')\det_{e'}(x)$, mais $\det_e(e') = \det(P_e^{e'}) = 1$, car $P_e^{e'} \in SO(n)$, donc $\det_e(x) = \det_{e'}(x)$. □

Définition. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
Le ***produit mixte*** de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $\det_e(x_1, \ldots, x_n)$, où e est une base orthonormée directe quelconque de E. Il est noté $\det(x_1, \ldots, x_n)$ ou encore $[x_1, \ldots, x_n]$.

Remarque.
Si on change l'orientation de l'espace E, le produit mixte est changé en son opposé.

Propriété.
On suppose que $n = 2$. L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Propriété. On suppose que $n = 3$. Le volume d'un parallélépipède dont les côtés correspondent aux vecteurs u, v, et w vaut $|\det(u, v, w)|$.

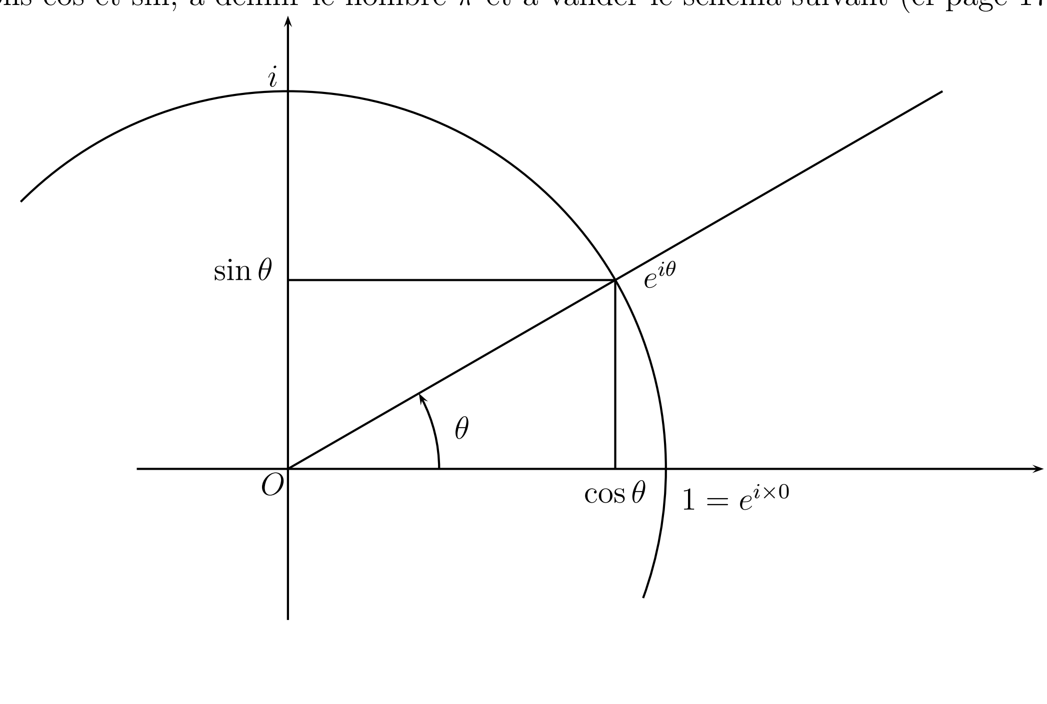
5 Géométrie plane

Notation. Dans ce chapitre, sauf indication du contraire, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2 et $\mathcal{E}$ est un plan affine dirigé par E (on dit que $\mathcal{E}$ est le plan usuel).
On notera $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

5.1 Lien avec le cours sur les complexes

Notation. On fixe une base orthonormée directe de E, notée $e = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On choisit une origine $O \in \mathcal{E}$ et on note $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; c'est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

Avec ces notations, on a vu lors du cours sur les complexes que l'on pouvait associer à tout point $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ du plan usuel $\mathcal{E}$ (resp : tout vecteur $\overrightarrow{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de E) le complexe $z = x + iy$, appelé l'affixe du point M (resp : l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$).
Maintenant que l'on dispose de la théorie de l'algèbre linéaire, enrichie de la théorie des espaces euclidiens orientés, les arguments géométriques admis pendant le cours sur les complexes sont acquis. C'est donc le moment de réviser le cours sur les complexes et de s'assurer de l'absence de cercles vicieux entre les différentes définitions et les différents théorèmes.
En particulier, en faisant de l'analyse réelle, nous étions parvenus à construire les fonctions cos et sin, à définir le nombre π et à valider le schéma suivant (cf page 17) :



Nous avions montré que sur ce schéma, $\theta \in [0, 2\pi[$ représente la longueur de l'arc de cercle joignant le complexe 1 au complexe $e^{i\theta}$.

Notation. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $u_\alpha = \cos(\alpha)\vec{\imath} + \sin(\alpha)\vec{\jmath}$. C'est donc l'unique vecteur d'affixe $e^{i\alpha}$.

5.2 Le groupe orthogonal de degré 2

Propriété.
$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$. $O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Démonstration.
Soit $M \in O(2)$. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Les colonnes de M constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, donc $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$. On en déduit qu'il existe $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, $b = \cos(\phi)$, $d = \sin(\phi)$, et que $\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) = 0$.
Ainsi, $\cos(\theta - \phi) = 0$, puis $\theta - \phi \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
Si $\phi \equiv \theta - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, alors $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et réciproquement, on vérifie qu'une telle matrice est dans $O^-(2)$, et si $\phi \equiv \theta - \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$, alors $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et réciproquement, on vérifie qu'une telle matrice est dans $SO(2)$. □

Notation. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Propriété. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$,
- l'endomorphisme r_θ canoniquement associé à R_θ est la similitude directe $z \longmapsto e^{i\theta}z$, c'est-à-dire la rotation de centre 0 et d'angle θ ;
- l'endomorphisme s_θ canoniquement associé à S_θ est la similitude indirecte $z \longmapsto e^{i\theta}\overline{z}$, c'est-à-dire la réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$, donc
$r_\theta(z) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = e^{i\theta}z$.
De même, $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix}$, donc
$s_\theta(z) = x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) = e^{i\theta}\overline{z}$. □

Formule. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et } S_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
En passant aux affixes, il suffit de vérifier que $e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$ et que $e^{i\theta} \times \overline{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}$.
$\square$

Formules : pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$,
- $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$;
- $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$;
- $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$;
- $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.

Démonstration.
Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. $R_\theta S_\varphi \in O^-(2)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $R_\theta S_\varphi = S_\alpha$.
De plus, la première colonne de $R_\theta S_\varphi$ est $R_\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$,
donc $\alpha \equiv \theta + \varphi\ [2\pi]$.
Ainsi, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$.
Les autres formules se démontrent de manière analogue. $\square$

Formule. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $S_\theta^{-1} = S_\theta$ et $S_\alpha^{-1} R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO(2), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array}$ est un morphisme surjectif de groupes. On en déduit que $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif.

Propriété. L'application $R_\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme entre les groupes $(SO(2), \times)$ et $\mathbb{U}$.

5.3 Les isométries vectorielles du plan

Propriété. Soient $s \in O^-(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $mat(s, e) = S_\theta$.
Alors s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$.
Ainsi, $O^-(E)$ est l'ensemble des réflexions de E.

Démonstration.
e étant orthonormée, $\mathrm{mat}(s, e) \in O^-(2)$, donc d'après le paragraphe précédent, Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}(s, e) = S_\theta$. On sait alors qu'en identifiant tout vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec son affixe $x + iy$, s est la réflexion selon la droite $\mathbb{R}e^{i\frac{\theta}{2}}$. $\square$

Définition. Soit $r \in SO(E)$. La matrice de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base. Si cette matrice vaut R_θ, θ est appelé l'angle de la rotation r, déterminé à 2π près. Si on change d'orientation, cette mesure est changée en son opposé.

Démonstration.
e est orthonormée, donc $\mathrm{mat}(r, e) \in SO(2)$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}(r, e) = R_\theta$.
Soit e' une seconde base orthonormée de E. Notons $P = P_e^{e'}$.
⋄ Supposons que e' est aussi directe. Alors $P \in O^+(2)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = R_\alpha$.

Ainsi, $\mathrm{mat}(r, e') = P^{-1}\mathrm{mat}(r, e)P = R_{-\alpha}R_\theta R_\alpha = R_\theta$.
Ceci prouve que la matrice de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base.
$\diamond$ Supposons maintenant que e' est indirecte. Alors $P \in O^-(2)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = S_\alpha$. Ainsi, $\mathrm{mat}(r, e') = P^{-1}\mathrm{mat}(r, e)P = S_\alpha R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.
Ceci prouve que si on change d'orientation, la mesure de r est changée en son opposé.
$\square$

Remarque. Ceci fournit une interprétation de l'orientation du plan : cela revient à choisir un sens direct de rotation.
Ensuite, orienter un espace euclidien E_3 de dimension 3, revient, pour $a \in E_3 \setminus \{0\}$, à convenir du sens direct de rotation dans le plan $a^\perp$, associé à a. C'est la règle du tire-bouchon, ou son contraire pour l'autre orientation.

5.4 Un résultat sur les similitudes (hors programme)

Propriété. Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une **application** telle que
— $f(0) = 0$ et
— pour tout $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, c'est-à-dire $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.
Ainsi f conserve la distance euclidienne et laisse 0 invariant.
Alors f est un automorphisme orthogonal.

Démonstration.
$\diamond$ Montrons d'abord que f conserve la norme :
pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$.
$\diamond$ Montrons maintenant que f conserve le produit scalaire : pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= -\tfrac{1}{2}(\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)\\ &= -\tfrac{1}{2}(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

$\diamond$ Il reste à prouver que f est linéaire. Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. D'après la conservation du produit scalaire, $f(e)$ est aussi une base orthonormée de E. Ainsi, si $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), f(x)\rangle f(e_i)$ (développement de $f(x)$ selon la base orthonormée $f(e)$), donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle f(e_i)$: une telle expression est clairement linéaire en fonction de x. $\square$

Corollaire. Une application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une similitude si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |f(z) - f(z')| = \lambda|z - z'|$.

Démonstration.
Le sens direct résulte de l'étude des similitudes effectuées à la fin du cours sur les complexes. Réciproquement, soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |f(z) - f(z')| = \lambda|z - z'|$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, posons $g(z) = \frac{1}{\lambda}(f(z) - f(0))$.

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|g(z) - g(z')| = \frac{1}{\lambda}|f(z) - f(z')| = |z - z'|$, donc en identifiant $\mathbb{C}$ avec le plan usuel E, g conserve la distance euclidienne. De plus $g(0) = 0$, donc d'après la propriété précédente, $g \in O(E)$. Ainsi g est une rotation ou bien une réflexion. Dans tous les cas, g est donc une similitude du plan complexe. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \lambda g(z) + f(0)$, donc f est aussi une similitude. □

5.5 Angles orientés dans le plan

Définition. Soient u et u' deux vecteurs unitaires de E.
Il existe une unique rotation de E qui transforme u en u'.
L'angle de cette rotation est par définition l'angle orienté du vecteur u vers le vecteur u'. Il sera noté $\widehat{(u, u')}$.
On dispose des formules suivantes : $\cos \widehat{(u, u')} =< u, u' >$ et $\sin \widehat{(u, u')} = \det(u, u')$.

Remarque. Ainsi la notion d'angle orienté ne dépend que de la structure de plan euclidien orienté et non du choix d'une base.

Démonstration.
◇ Dans la base e, la somme des carrés des coordonnées de u vaut 1, car u est unitaire, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \cos\alpha \vec{\imath} + \sin\alpha \vec{\jmath}$. De même, il existe $\alpha' \in \mathbb{R}$ tel que $u' = \cos\alpha' \vec{\imath} + \sin\alpha' \vec{\jmath}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons r_θ la rotation de E d'angle θ. On sait que le vecteur colonne des coordonnées de $r_\theta(u)$ dans la base e vaut $R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$, donc $r_\theta(u) = u'$ si et seulement si $\theta + \alpha \equiv \alpha'$ $[2\pi]$.
Ainsi, il existe une unique rotation de E qui transforme u en u' et l'angle de cette rotation vaut $\alpha' - \alpha$ (à 2π près).
◇ $< u, u' >= \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' = \cos(\alpha' - \alpha) = \cos\widehat{(u, u')}$ et
$\det(u, u') = \cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha' = \sin(\alpha' - \alpha) = \sin\widehat{(u, u')}$. □

Définition. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. L'angle orienté des vecteurs x et y est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\dfrac{x}{\|x\|}$ en $\dfrac{y}{\|y\|}$.

Cet angle est noté $\widehat{(x, y)}$. On dispose des formules suivantes :
$\cos\widehat{(x, y)} = \dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\widehat{(x, y)} = \dfrac{\det(x, y)}{\|x\|\|y\|}$.

Remarque. Dans le cours sur les complexes, page 27, on a montré que si A, B, C sont trois points distincts du plan usuel, d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$,
alors $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \arg\Big(\dfrac{b - c}{a - c}\Big)$ $[2\pi]$.
Vérifiez maintenant que la démonstration alors utilisée est en cohérence avec cette définition d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls.

Propriété. Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E, on a les formules suivantes :
- ⋄ Relation de Chasles : $\widehat{(x_1,x_2)}+\widehat{(x_2,x_3)}=\widehat{(x_1,x_3)}$.
- ⋄ $\widehat{(x_2,x_1)}=-\widehat{(x_1,x_2)}$.
- ⋄ $\widehat{(x_1,x_2)}=0 \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1=\mathbb{R}_+x_2$ et $\widehat{(x_1,x_2)}=\pi \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1=\mathbb{R}_-x_2$.
- ⋄ Si r est une rotation, $\widehat{(r(x_1),r(x_2))}=\widehat{(x_1,x_2)}$.
- ⋄ Si s est une réflexion, $\widehat{(s(x_1),s(x_2))}=-\widehat{(x_1,x_2)}$.

Démonstration.
Convenons de noter r_θ la rotation d'angle θ. Posons, pour tout $i\in\{1,2,3\}$, $y_i=\dfrac{x_i}{\|x_i\|}$.

⋄ $r_{\widehat{(y_1,y_2)}+\widehat{(y_2,y_3)}}(y_1)=r_{\widehat{(y_2,y_3)}}\circ r_{\widehat{(y_1,y_2)}}(y_1)=r_{\widehat{(y_2,y_3)}}(y_2)=y_3$, or $r_{\widehat{(y_1,y_3)}}$ est l'unique rotation qui transforme y_1 en y_3, donc $\widehat{(y_1,y_2)}+\widehat{(y_2,y_3)}=\widehat{(y_1,y_3)}$,
c'est-à-dire $\widehat{(x_1,x_2)}+\widehat{(x_2,x_3)}=\widehat{(x_1,x_3)}$.

⋄ $r_{\widehat{(y_1,y_2)}}(y_1)=y_2$, donc $y_1=r^{-1}_{\widehat{(y_1,y_2)}}(y_2)=r_{-\widehat{(y_1,y_2)}}(y_2)$.

⋄ $\widehat{(x_1,x_2)}=0$ si et seulement si la rotation d'angle 0, égale à Id_E, transforme $\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ en $\dfrac{x_2}{\|x_2\|}$, donc si et seulement si $x_2=\dfrac{\|x_2\|}{\|x_1\|}x_1$. Ainsi, $\widehat{(x_1,x_2)}=0 \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1=\mathbb{R}_+x_2$.
De même, $\widehat{(x_1,x_2)}=\pi$ si et seulement si la rotation d'angle π, égale à $-Id_E$, transforme $\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ en $\dfrac{x_2}{\|x_2\|}$, donc si et seulement si $x_2=-\dfrac{\|x_2\|}{\|x_1\|}x_1$.
Ainsi, $\widehat{(x_1,x_2)}=0 \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1=\mathbb{R}_-x_2$.

⋄ Si r est une rotation, elle correspond dans le plan complexe à une similitude directe (laissant fixe 0), on a déjà vu qu'elle conserve les angles. De même, si s est une réflexion, elle correspond dans le plan complexe à une similitude indirecte (laissant fixe 0), on a déjà vu qu'elle transforme un angle en son opposé. □

> **Exercice.** Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E, montrer que si $\widehat{(x_1,x_2)}=\widehat{(x_3,x_4)}$, alors $\widehat{(x_1,x_3)}=\widehat{(x_2,x_4)}$.
> Solution : D'après la relation de Chasles,
> $\widehat{(x_1,x_3)}=\widehat{(x_1,x_2)}+\widehat{(x_2,x_3)}=\widehat{(x_2,x_3)}+\widehat{(x_3,x_4)}=\widehat{(x_2,x_4)}$.

Définition. On ne suppose plus que E est de dimension 2, mais seulement que E est un espace euclidien préhilbertien. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
On appelle angle non orienté ou écart angulaire des vecteurs x et y la quantité

$$\widehat{(x,y)}=\arccos\left(\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}\right)\in[0,\pi].$$

- — Lorsque $\widehat{(x,y)}\in]0,\frac{\pi}{2}[$, cet angle est dit aigu ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)}\in]\frac{\pi}{2},\pi[$, cet angle est dit obtus ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)}=\frac{\pi}{2}$ (i.e lorsque $x\perp y$), on dit que c'est un angle droit ;

— Lorsque $\widehat{(x,y)} \in \{0, \pi\}$, on dit que c'est un angle plat :
  — lorsque $\widehat{(x,y)} = 0$, x et y sont positivement colinéaires,
  — lorsque $\widehat{(x,y)} = \pi$, x et y sont colinéaires de sens contraire.

Démonstration.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$, donc $\widehat{(x,y)}$ est correctement défini. □

Remarque. D'après une identité de polarisation,

$$\widehat{(x,y)} = \arccos\Big(\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4\|x\|\|y\|}\Big).$$

Propriété. Soit E un espace euclidien préhilbertien et $x, y \in E \setminus \{0\}$.
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, si λ et μ ont le même signe, alors $\widehat{(x,y)} = \widehat{(\lambda x, \mu y)}$,
et si λ et μ sont de signes contraires, alors $\widehat{(\lambda x, \mu y)} = \pi - \widehat{(x,y)}$.

5.6 Les droites affines du plan usuel

On se place à nouveau dans un plan affine $\mathcal{E}$.

Propriété. Les droites affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux+vy+w = 0$, où $(u,v) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u, v) est orthogonal à la droite.
Les droites non parallèles à $\vec{\jmath}$ admettent une équation de la forme $y = px + q$, p étant appelé la pente de la droite.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et orthogonale au vecteur (u, v) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur (u, v) a pour équation $-v(x - x_0) + u(y - y_0) = 0 = \begin{vmatrix} u & x - x_0 \\ v & y - y_0 \end{vmatrix}$.

Propriété. La droite passant par les points (supposés distincts) de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$.

6 Géométrie dans l'espace

Tout au long de ce chapitre (sauf précision du contraire), E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3 (on notera $< .,. >$ son produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée) et $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E. On dit que $\mathcal{E}$ est l'espace usuel.
On fixe également un repère de $\mathcal{E}$, noté $R = (O, e)$, où e une base orthonormée directe de E, notée $e = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou $e = (e_1, e_2, e_3)$ selon les cas.

6.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Remarque. On rappelle que det désigne le produit mixte, c'est-à-dire le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Définition. Soit $(a, b) \in E^2$. Il existe un unique vecteur c de E tel que

$$\forall x \in E \quad \det(a, b, x) =< c, x > .$$

Il est appelé "***produit vectoriel*** de a et b" et est noté $a \wedge b$. On a donc

$$\boxed{\forall x \in E \ \det(a, b, x) =< a \wedge b, x > .}$$

Démonstration.
L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme et $\det(a, b, .) = (x \longmapsto \det(a, b, x))$ est un élément de $L(E, \mathbb{R})$, donc il existe un unique $c \in E$ tel que $\det(a, b, .) =< c, . >$. □

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (a, b) & \longmapsto & a \wedge b \end{array}$ est bilinéaire et antisymétrique.

Démonstration.
Pour tout $a, b \in E$, $a \wedge b = \varphi^{-1}(\det(a, b, .))$, or φ^{-1} est linéaire et det est trilinéaire et antisymétrique. Ceci permet de conclure. □

Propriété. Soit $(a, b) \in E^2$. (a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.

Démonstration.
Si (a, b) est lié, pour tout $x \in E$, (a, b, x) est lié, donc $\det(a, b, x) = 0$. Ainsi, $a \wedge b = 0$.
Si (a, b) est libre, il existe $x \in E$ tel que (a, b, x) est libre (théorème de la base incomplète). $< a \wedge b, x >= \det(a, b, x) \neq 0$, donc $a \wedge b \neq 0$. □

Propriété. Soit a et b deux vecteurs indépendants entre eux.
Alors $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b tel que $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace. De plus $\|a \wedge b\| = \|a\|\|b\| \sin \phi$, où ϕ est l'angle non orienté entre a et b.

Démonstration.
◇ $\langle a \wedge b, a \rangle = \det(a, b, a) = 0$ et de même, $\langle a \wedge b, b \rangle = 0$, donc $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b. De plus, $\det(a, b, a \wedge b) = \langle a \wedge b, a \wedge b \rangle > 0$, donc $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace.
◇ En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille libre (a, b), on obtient une famille orthonormée (e_1, e_2) tel que $a = \|a\|e_1$ et $b = \|b\|((\cos \varphi)e_1 + (sin\varphi)e_2)$, où φ est l'angle orienté entre e_1 et b, pour une certaine orientation du plan $\text{Vect}(a, b)$. φ et ϕ ont le même cosinus, donc ils sont égaux ou opposés modulo 2π, ce qui prouve que $|\sin \varphi| = \sin \phi$.
On complète (e_1, e_2) en une base orthonormée directe $e = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a \wedge b = \lambda e_3$. Alors

$$\begin{aligned}\|a\wedge b\|^2 &= \langle a\wedge b, a\wedge b\rangle\\ &= \det(a,b,a\wedge b)\\ &= \det(\|a\|e_1, \|b\|((\cos\varphi)e_1+(\sin\varphi)e_2), \lambda e_3)\\ &= \begin{vmatrix} \|a\| & \|b\|\cos\varphi & 0\\ 0 & \|b\|\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\\ &= \|a\|\|b\|\lambda\sin\varphi,\end{aligned}$$

d'autre part, $\|a\wedge b\| = \|\lambda e_3\| = |\lambda| \neq 0$, donc $\lambda^2 = \|a\wedge b\|^2 = \|a\|\|b\|\lambda\sin\varphi$, puis $\|a\wedge b\| = |\lambda| = \|a\|\|b\||\sin\varphi| = \|a\|\|b\|\sin\phi$. □

Formule. *Identité de Lagrange :*
Pour tout $(a,b)\in E^2$, $< a,b >^2 + \|a\wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2$.

Propriété. $e_1\wedge e_2 = e_3 \quad e_2\wedge e_3 = e_1 \quad e_3\wedge e_1 = e_2$.

Démonstration.
Soit $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in E$. $\det(e_1,e_2,x) = \det(e_1,e_2,x_3e_3) = x_3 =< e_3, x >$,
donc $e_1\wedge e_2 = e_3$. Les autres formules se démontrent de la même façon. □

Formule. *C*oordonnées du produit vectoriel. Pour tout $(a,b)\in E^2$,

$$\text{Si } a = \left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right._e \text{ et } b = \left|\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{matrix}\right._e \text{ alors } a\wedge b = \left|\begin{matrix} \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right._e .$$

Démonstration.
Soit $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in E$. $\det(a,b,x) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & x_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & x_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & x_3\end{vmatrix}$.
Si l'on développe ce déterminant selon la dernière colonne, on obtient
$\det(a,b,x) = \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} x_3$,

donc $\det(a,b,x) =< c, x >$, où $c = \left|\begin{matrix} \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right._e$. □

6.2 Droites et plans affines en dimension 3

6.2.1 Equation d'un plan

Propriété. Les plans affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + wz + t = 0$, où $(u, v, w) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est orthogonal (on dit aussi normal) au plan.
La direction du plan est le plan vectoriel d'équation $ux + vy + wz = 0$.

Propriété. Deux plans de $\mathcal{E}$ d'équations $ux+vy+wz+t = 0$ et $u'x+v'y+w'z+t' = 0$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') sont colinéaires, donc si et seulement si $\left|\begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array}\right._{e} \wedge \left|\begin{array}{l} u' \\ v' \\ w' \end{array}\right._{e} = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur (u, v, w) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par deux vecteurs indépendants de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_0 & u & u' \\ y - y_0 & v & v' \\ z - z_0 & w & w' \end{vmatrix} = 0$.

6.2.2 Système d'équations d'une droite

Propriété. Une droite affine de $\mathcal{E}$ admet un système d'équations de la forme :
$\begin{cases} ux + vy + wz + t & = 0 \\ u'x + v'y + w'z + t' & = 0 \end{cases}$, où $ux + vy + wz + t = 0$ et $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ sont les équations de deux plans affines non parallèles.
Cette droite est dirigée par le vecteur $\left|\begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array}\right._{e} \wedge \left|\begin{array}{l} u' \\ v' \\ w' \end{array}\right._{e}$. En effet, ce vecteur est non nul car les deux plans ne sont pas parallèles et il est dans la direction de chacun des deux plans, car il est orthogonal aux normales de ces plans.

Propriété. (hors programme) Les droites non parallèles au plan $\text{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admettent un système d'équations de la forme $\begin{cases} x & = az + c \\ y & = bz + c' \end{cases}$.

Démonstration.
Soit $\mathcal{D}$ une droite, de direction D non parallèle au plan $\text{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Notons (c, c', c'') les coordonnées d'un point C fixé dans $\mathcal{D}$.
Soit $\overrightarrow{u} = \left|\begin{array}{l} a \\ b \\ d \end{array}\right._{e}$ un vecteur directeur de D. $d \neq 0$ car $D \not\subset \text{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, donc quitte à diviser $\overrightarrow{u}$ par d, on peut supposer que $d = 1$. Ainsi,

$$M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_R \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} \;\; M = C + t\overrightarrow{u}$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \;\; \begin{cases} x &= ta + c \\ y &= tb + c' \\ z &= t + c'' \end{cases} \iff \begin{cases} x &= a(z - c'') + c \\ y &= b(z - c'') + c' \end{cases}. \square$$

6.3 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème. Réduction des matrices orthogonales :
On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Si $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

où $\tau_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ avec $\sin\theta_i \neq 0$ et $k_1 + k_2 + 2p = n$.

Démonstration.
En seconde année. $\square$

Notation. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On désigne par $r(\omega, \theta)$ l'unique rotation de E qui laisse invariant ω et qui induit sur le plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω, la rotation d'angle θ.

Propriété. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe une base orthonormée directe e de E telle que $\mathrm{mat}(r(\omega, \theta), e) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, on peut choisir $e = (i, j, k)$ où (i, j) est une base orthonormée directe du plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω et où $k = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$.

Théorème. Si $r \in SO(E)$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $r = r(\omega, \theta)$.

Remarque. Soit $u \in O^-(E)$. $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = 1$, donc $-u \in SO(E)$.
Ainsi, on peut décrire géométriquement une isométrie indirecte, en déterminant $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $u = -r(\omega, \theta)$.