

Exercices de révision pour les oraux : Série 2.

1. Filtrage et oscillations

On étudie le circuit de la figure 1.

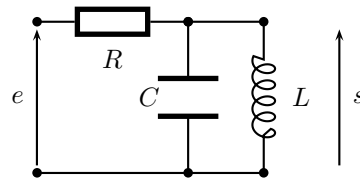


FIGURE 1 – Filtre passe-bande à éléments passifs

1. Pour quelle valeur de la pulsation ω , l'amplitude de la tension s est-elle maximale ?

On envisage maintenant le circuit représenté à la figure 2. L'amplificateur opérationnel idéal est considéré en régime linéaire, cela signifie que l'on considère que les courants entrants dans l'amplificateur linéaire intégré sont très faibles au point d'écriture $i_- = i_+ = 0$. De plus, le régime linéaire assure là encore que la différence de potentiel entre les entrées $+$ et $-$ est très faible. On écrira que $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

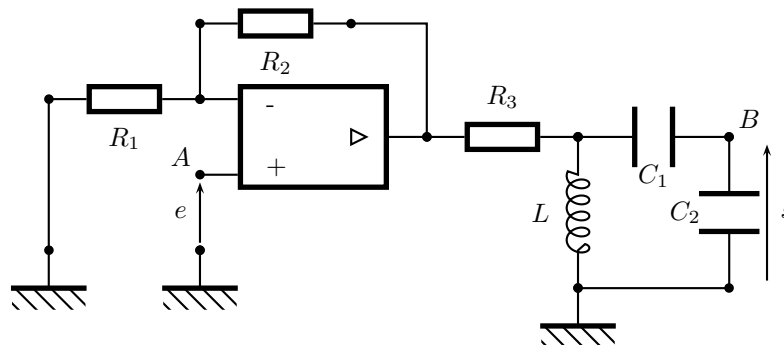


FIGURE 2 – Oscillateur

2. Établir, dans le cadre d'un fonctionnement de l'AO en régime linéaire, la fonction de transfert $H = s/e$.
3. La résistance R_2 est une résistance variable. On relie A et B par un fil. Quelle est en régime linéaire, l'équation différentielle vérifiée par s ? Que peut-on observer ? Dans quelles conditions ?

Réponses : $H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1+jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $H = \frac{(1+\frac{R_2}{R_1})jL\omega}{(1+\frac{C_2}{C_1})R_3 + (1+\frac{C_2}{C_1})jL\omega - LR_3C_2\omega^2}$, $LR_3C_2 \frac{d^2s}{dt^2} + L(\frac{C_2}{C_1} - \frac{R_2}{R_1}) \frac{ds}{dt} + (1+\frac{C_2}{C_1})R_3s = 0$, si $R_2 < R_1 \frac{C_2}{C_1}$ régime amorti, si $R_2 > R_1 \frac{C_2}{C_1}$ saturation, si $R_2 = R_1 \frac{C_2}{C_1}$ oscillations harmoniques à $\omega'_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$.

2. Généralisation du critère de Shannon

1. On considère un signal à support borné, c'est-à-dire un signal présentant un spectre continu de 0 à f_{max} . Il est échantillonné à la fréquence F_e . Représenter le spectre du signal échantillonné pour $F_e > 2f_{max}$ et pour $F_e < f_{max}$. En étudiant ce qu'il se passe pour des fréquences inférieures à F_e , retrouver le critère de SHANNON.
2. On considère un signal à bande étroite de largeur B centrée autour de la fréquence f_0 . Représenter le spectre du signal échantillonné pour $F_e < 2f_0$. Analyser.
3. Le spectre à bande étroite est celui des radios FM dont la bande de fréquence occupe l'intervalle de $f_m = 87,5$ MHz à $f_M = 108$ MHz. Il est échantillonné avec une fréquence $F_e = 43,5$ MHz. Le critère de SHANNON est-il respecté ? Peut-on récupérer à l'aide d'un filtre passe-bande uniquement le signal initial ?
4. On reprend la question précédente avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 50$ MHz.
5. Généraliser les études précédentes et établir que l'on peut récupérer parfaitement le signal initial en l'échantillonnant à une fréquence F_e s'il existe un entier n tel que :

$$\frac{2f_M}{n} < F_e < \frac{2f_m}{n-1}$$

Réponses : Le spectre du signal échantillonné comprend tous les domaines de fréquence tels que $[nF_e - f_{max}; nF_e + f_{max}]$, si $F_e < 2f_{max}$ il y a recouvrement des spectres entre $(n-1)F_e + f_{max}$ et $nF_e - f_{max}$. Il faut donc $F_e > 2f_{max}$. Pour un signal à bande étroite, on a un spectre $[nF_e - f_M; nF_e - f_m] \cup [nF_e + f_m; nF_e + f_M]$. Avec $F_e = 43,5$ MHz, aucun ordre n ne recouvre le spectre du signal de départ ($n = 0$) que l'on peut récupérer. Par contre, pour $F_e = 50$ MHz, on a recouvrement de $n = 4$ avec le cas $n = 0$. Pour éviter le problème, il faut $(n-1)F_e - f_m < f_m$ et $nF_e - f_M > f_M$, on trouve donc la généralisation du critère de SHANNON.

3. Quantique ou classique

Dites si l'étude des systèmes suivants vous semble relever du domaine de la physique quantique ou de la physique classique

1. Un oscillateur électrique LC portant une charge $q = 5,0 \cdot 10^{-7}$ C avec $L = 40$ mH et $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$ F.
2. Une personne de masse $m = 70$ kg en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre. Même étude pour un neutron de masse $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.
3. Une box Wi-Fi de puissance $P = 0,1$ W émettant à la fréquence $f = 2,4$ GHz. On considérera que la box émet des photons.
4. Un vase rempli d'hélium superfluide est mis en rotation. On observe que l'hélium reste au repos hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase. Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre et une fréquence de rotation de l'ordre de 10 Hz. On s'intéresse aux mouvements des atomes d'hélium des tourbillons.

Réponses : c'est l'action S qui est le critère à évaluer et à comparer à $\hbar \simeq 10^{-34}$ J · s, on a $S = E \times \Delta t$ avec $E = \frac{q^2}{2C}$ et $\Delta t \simeq \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC}$ d'où $S \simeq q^2 \sqrt{\frac{L}{C}}$, on trouve $S = 10^{-10}$ J · s $\gg \hbar$ c'est classique ; la personne c'est $S \simeq mv\Delta z$ on a $v = gt$ et $\Delta z = \frac{1}{2}gt^2$ d'où $S \simeq m\sqrt{g\Delta z^3}$ avec $\Delta z \simeq 1$ m d'où $S \simeq 200$ J · s, $S \gg \hbar$ c'est classique, pour le neutron c'est quantique car les distances sont de l'ordre de 10^{-10} m d'où $S \simeq 10^{-36}$ J · s $< \hbar$; $E = P\Delta t$ et ici $\Delta t \simeq \frac{1}{f}$ d'où $S \simeq \frac{P}{f}$ on trouve $S \simeq 10^{-20}$ J · s $\gg \hbar$, c'est classique ; la masse des atomes est de l'ordre de 10^{-26} kg, leur vitesse est de l'ordre de $rf = 10^{-3}$ m · s⁻¹, $S \simeq mv \times r = 10^{-33}$ J · s, on est assez près de \hbar , il faut utiliser la Mécanique quantique.

4. Vitesse de libération

La loi de distribution des vitesses est notée $f_{e,p}(\vec{v})$. Elle est définie telle que la probabilité élémentaire $dP_{e,p}$ d'observer une particule (électron e ou proton p) dont le vecteur vitesse est compris entre \vec{v} et $\vec{v} + d\vec{v}$ s'écrit :

$$dP_{e,p}(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}) = f_{e,p}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$$

La notation indicielle e, p spécifie que les quantités se rapportent à celles des électrons pour l'indice e ou à celles des protons pour l'indice p . Protons et électrons ont la même densité volumique $n_0/2$.

On suppose, pour le moment, que cette distribution des vitesses est maxwellienne pour les électrons et les protons, soit :

$$f_{e,p}(\vec{v}) = \left(\frac{m_{e,p}}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{e,p} \vec{v}^2}{2k_B T_0} \right)$$

1. Vérifier que $\iiint f_{e,p} dv_x dv_y dv_z = 1$.
2. Montrer que la distribution $g_{e,p}(v)$ de la norme v de la vitesse s'écrit : $g_{e,p}(v) = 4\pi v^2 f_{e,p}(\vec{v})$.
3. Exprimer la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\langle v_{e,p}^2 \rangle}$ ainsi que la vitesse la plus probable, notée $w_{e,p}$.
4. Définir la vitesse de libération v_{lib} d'une particule située à la distance r_0 d'un astre de masse M_a . Cette vitesse est-elle la même pour les électrons et les protons ? Comparer aux vitesses précédentes.

On donne la valeur de l'intégrale suivante ($a > 0$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Réponses : On a $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. En introduisant cette expression dans la loi de distribution des vitesses, on peut séparer le calcul en un produit de 3 intégrales de forme identique à $I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{m_{e,p} v_x^2}{2k_B T_0} dv_x$. Ici, on se place dans le cadre de la mécanique classique ce qui impose que la vitesse n'est pas limitée à c comme cela est le cas en mécanique relativiste. On intègre donc entre $-\infty$ et $+\infty$. À l'aide du formulaire qui indique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -ax^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, on trouve aisément que $I_x = \sqrt{\frac{2\pi k_B T_0}{m_{e,p}}}$. On vérifie donc bien que $\iiint f_{e,p} dv_x dv_y dv_z = 1$.

On recherche la loi de probabilité pour qu'une particule ait la norme de sa vitesse comprise entre v et $v + dv$. La probabilité élémentaire est alors $dP_{e,p}(v, v + dv) = g_{e,p} dv$. Il faut considérer que dans l'espace des vitesses, toutes les particules dont l'extrémité du vecteur vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ se situe dans une sphère comprise entre les rayons v et $v + dv$ répondent à la question. Cela définit le volume élémentaire $4\pi v^2 dv$. La probabilité recherchée correspond donc au rapport des volumes $\frac{4\pi v^2 dv}{dv_x dv_y dv_z}$. On a donc $dP_{e,p}(v, v + dv) = dP_{e,p}(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}) \frac{4\pi v^2 dv}{dv_x dv_y dv_z}$ ce qui démontre que : $g_{e,p}(v) = 4\pi v^2 f_{e,p}(\vec{v})$.

La vitesse la plus probable s'obtient pour $\frac{dg_{e,p}}{dv} = 0$. Cela revient à chercher quand la dérivée de la fonction $h(v) = v^2 \exp(-av^2)$ s'annule avec $a = \frac{m_{e,p}}{2k_B T_0}$. On a $\frac{dh}{dv} = 2v \exp(-av^2)[1 - av^2] = 0$. La seule valeur d'annulation qui a un sens physique est $v = \sqrt{\frac{1}{a}}$. On a donc : $w_{e,p} = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m_{e,p}}}$. On peut à ce stade du calcul observer que la loi de probabilité peut se réécrire $f_{e,p}(\vec{v}) = \frac{1}{w_{e,p}^3 \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{w_{e,p}^2}\right)$. Ainsi la distribution des normes de la vitesse s'écrit $g_{e,p} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{w_{e,p}} \frac{v^2}{w_{e,p}^2} \exp\left(-\frac{v^2}{w_{e,p}^2}\right)$. Nous savons que dans une loi de distribution de MAXWELL, la vitesse quadratique moyenne est donnée pour une particule ponctuelle possédant 3 degrés de liberté par $\frac{1}{2} m_{e,p} \langle v_{e,p}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_0$. On trouve donc : $\sqrt{\langle v_{e,p}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{m_{e,p}}}$. On peut redémontrer ce résultat selon le calcul suivant : $\langle v_{e,p}^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} w_{e,p}^2 \int_0^\infty \frac{v^4}{w_{e,p}^2} \exp\left(-\frac{v^2}{w_{e,p}^2}\right) \frac{dv}{w_{e,p}}$. On pose $u = \frac{v}{w_{e,p}}$ et alors $\langle v_{e,p}^2 \rangle = \frac{4w_{e,p}^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^4 \exp(-u^2) du$. Notons $I = \int_0^\infty u^4 \exp(-u^2) du$. Il faut procéder à une intégration par parties selon : $I = \left[-\frac{u^3}{2} \exp(-u^2)\right]_0^\infty + \frac{3}{2} \int_0^\infty u^2 \exp(-u^2) du = \frac{3}{2} \int_0^\infty u^2 \exp(-u^2) du$. Il faut à nouveau intégrer par parties et $I = \frac{3}{2} \left(\left[-\frac{u}{2} \exp(-u^2)\right]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-u^2) du\right) = \frac{3}{4} \int_0^\infty \exp(-u^2) du$. Or, par parité de $\exp(-u^2)$ et en utilisant le résultat fourni dans l'énoncé, on a $\int_0^\infty \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on trouve que $I = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$. Le carré de la vitesse quadratique moyenne est donc $\langle v_{e,p}^2 \rangle = \frac{3w_{e,p}^2}{2} = \frac{3k_B T_0}{m_{e,p}}$. Ce résultat démontre bien l'expression proposée au départ.

La vitesse de libération de l'interaction gravitationnelle correspond à une énergie mécanique nulle pour une particule se situant à la distance r_0 du centre du Soleil : $E_m = \frac{1}{2} m_{e,p} v_{lib}^2 - \frac{GM_\odot m_{e,p}}{r_0} = 0$. On obtient ainsi : $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_0}}$. Cette vitesse est indépendante de la masse de la particule, elle est donc la même pour les électrons et les protons. On trouve : $v_{lib} = 280 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. À comparer à quelle T_0 , il y a libération.

5. Freinage d'un satellite

Un satellite terrestre est placé sur une orbite circulaire d'altitude h . On appelle R le rayon terrestre et g l'accélération de la pesanteur au sol. On donne $R = 6400 \text{ km}$ et $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Déterminer l'énergie E , la vitesse v et la période T du satellite.
- A.N. : On considère un satellite géostationnaire de 500 kg puis le même satellite à 300 km d'altitude. Calculer E , v et T .
- Du fait des frottements sur les hautes couches de l'atmosphère, le satellite perd lentement de la hauteur, son orbite restant quasiment circulaire. La perte de hauteur $-\Delta h$ par unité de temps Δt vérifie :

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \ll \frac{h}{T}$$

Montrer qu'on peut rendre compte de cette perte de hauteur par une force de frottement fluide $-\lambda \vec{v}$ et exprimer λ en fonction de m , R , h , Δh et Δt .

- Un satellite de 500 kg à 300 km d'altitude perd 10 m de hauteur par tour de la Terre. Au bout de combien de temps arriverait-il au niveau du sol si le coefficient de frottement ne changeait pas ?

Réponses : $E = -\frac{mgR^2}{2(R+h)}$, $v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}$, $T = 86164 \text{ s}$, $v = 3,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $E = -2,4 \times 10^9 \text{ J}$, $T = 5440 \text{ s}$, $v = 7,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $E = -1,5 \times 10^{10} \text{ J}$, $\lambda = \frac{m\Delta h}{2(R+h)\Delta t}$, $\lambda = 6,9 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau = \frac{m}{2\lambda} \ln\left(1 + \frac{h}{R}\right)$, $\tau = 1,65 \times 10^8 \text{ s}$ cela fait un peu plus de 5 ans.

6. Pression hydrostatique sur un entonnoir

On considère un entonnoir de masse m . Dans la première partie de l'exercice son extrémité est fermée. Il est assimilé à un cône de hauteur H et de rayon R . On le place, à l'envers, dans un cristalliseur présentant une ouverture. On place une hauteur L d'eau de masse volumique μ , supposée constante, voir la figure 3.

- Quelle est la force pressante qui s'exerce sur l'entonnoir ?
- Quelle est la force nécessaire pour soulever l'entonnoir ?

Réponses : $F = \mu g \pi R^2 \left(L - \frac{H}{3}\right)$, $F' = \mu g \pi R^2 \left(L - \frac{H}{3}\right) + mg$

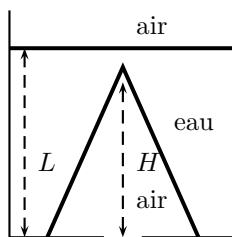


FIGURE 3 – Entonnoir

7. Cycle thermodynamique

Une certaine quantité d'air, assimilé à un gaz parfait (avec $\gamma = 1,40$) subit une transformation cyclique réversible à partir d'un état de départ $A(p_0, V_0, T_0)$.

- AB est une compression adiabatique jusqu'à une pression αp_0
- BC est un échauffement isobare jusqu'à un volume V_0/β
- CD est une détente adiabatique jusqu'au volume de départ
- DA est un refroidissement isochore.

1. Représenter ce cycle sur un diagramme de CLAPEYRON. Quelles sont les phases motrices ? Le cycle est-il moteur ?
2. Définir et calculer le rendement du cycle.

Réponse : $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha \beta^{1-\gamma} - \beta}{\alpha - \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \beta}$.

8. Isolation d'un tuyau et pertes thermiques

Un tuyau cylindrique, de rayon intérieur R_1 , de rayon externe R_2 et de longueur L suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les perturbations dues aux bords, canalise vers un dispositif d'utilisation une vapeur saturée sous pression à la température $T_i = 453 \text{ K}$. L'air extérieur est à la température $T_e = 293 \text{ K}$. On considère le régime thermique permanent établi. On appelle T_1 et T_2 les températures en $r = R_1$ et $r = R_2$. La conductivité thermique du matériau de la conduite est λ_1 uniforme. Le phénomène est unidirectionnel, la température ne dépend que de r (distance à l'axe du tuyau).

1. On appelle $P_{cond}(r)$ la puissance thermique transférée à travers un cylindre de rayon r et de longueur L . Expliquer pourquoi $P_{cond}(r)$ prend ici une valeur P_0 indépendante de r .
2. Établir l'expression de la température $T(r)$ en fonction de r et des données du problème.
3. Donner l'expression de la résistance thermique de conduction R_{cond} et faire l'application numérique avec $R_1 = 15 \text{ cm}$, $R_2 = 16 \text{ cm}$, $L = 10 \text{ m}$, $\lambda_1 = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
4. Les processus de transfert thermique entre un fluide à la température T_f et la paroi à la température T_p font intervenir des phénomènes de convection pour lesquels on admet que la puissance transférée est donnée en valeur absolue par :

$$P_{conv} = hS|T_f - T_p|$$

où h est le coefficient de transfert convectif, nous supposons que ce coefficient est le même quelle que soit la surface d'échange, ce qui est une approximation de la réalité ; S est la surface à travers laquelle s'effectue le transfert convectif. Montrer que pour décrire le transfert thermique complet de la vapeur vers l'air extérieur un bon modèle consiste à le représenter par des résistances thermiques. Déterminer la résistance équivalente R_0 .

5. Avec $h = 23 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, calculer R_0 et P_0 . Déterminer T_1 et T_2 .
6. Représenter graphiquement T en fonction de r .
7. En raisonnant sur le tuyau, calculer la quantité d'entropie créée par unité de temps. Interpréter physiquement.
8. On dispose sur le tuyau une couche d'isolant d'épaisseur constante et de conductivité thermique λ_2 , le rayon externe est R_3 . On pose $y = R_2/R_3$. Montrer que la résistance thermique totale du tuyau isolé se met sous la forme :

$$R_t = R_0 + A(-\ln y - f(y))$$

où $f(y)$ est une fonction affine de y .

9. Représenter graphiquement les fonctions $\ln y$ et $f(y)$ sur le même graphique dans son domaine de définition. Discuter, selon la valeur de λ_2 , la position relative des représentations graphiques. Démontrer une inégalité sur λ_2 telle que la pose de l'isolant, quelle qu'en soit l'épaisseur, diminue les pertes thermiques. Tracer $f(y)$ dans le cas contraire et faire apparaître graphiquement la zone où la pose d'isolant augmente les fuites thermiques. Préciser numériquement si $\lambda_2 = 4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Donner les raisons physiques de ce phénomène inattendu.
10. À la sortie du tuyau, la vapeur juste saturée ($T_i = 453 \text{ K}$) subit une détente adiabatique réversible jusqu'à la température $T_f = 293 \text{ K}$. On raisonnera sur l'unité de masse de fluide. On dispose des données suivantes :

$T(\text{K})$	453	293
$p_{\text{sat}}(\text{bar})$	12,5	1,0
$v_{mV}(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	0,61	1,20
$v_{mL}(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	0,002	0,002

v_{mV} et v_{mL} représentent respectivement les volumes massiques de la vapeur et du liquide. L'enthalpie massique de vaporisation du corps est :

$$L_{\text{vap}}(T) = 3340 - 2,93T$$

en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, la capacité thermique massique du liquide est $c_L = 2,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Déterminer et décrire complètement l'état final. Calculer le travail massique w reçu par le fluide lors de cette détente.

Réponses : Régime indépendant de t , $T(r) = -\frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} + T_1$, $R_{\text{cond}} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L} = 6,4 \times 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, résistances en série $R_0 = \frac{1}{h2\pi R_1 L} + R_{\text{cond}} + \frac{1}{h2\pi R_2 L} = 9 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, $P_0 = \frac{T_i - T_e}{R_0} = 17,8 \text{ kW}$, $T_i - T_1 = \frac{P_0}{h2\pi R_1 L}$, $T_1 = 371 \text{ K}$, $T_2 - T_e = \frac{P_0}{h2\pi R_2 L}$, $T_2 = 369 \text{ K}$, $\frac{\delta S_c}{dt} = P_0(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i}) = 21,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$, $R_t = \frac{1}{h2\pi R_1 L} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi L} + \frac{1}{h2\pi R_3 L}$, $f(y) = \frac{\lambda_2}{hR_2}(1 - y)$, $\frac{\lambda_2}{hR_2} < 1$, sinon il faut une épaisseur maximale d'isolant déterminée à l'intersection de $-\ln y$ et $f(y)$, ici $\frac{\lambda_2}{hR_2} = 1,1$ une épaisseur trop grande n'améliore pas l'isolement, l'effet est dû à la modification du gradient de température, 65% de vapeur d'eau et 35% d'eau liquide, $160 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

9. Approche électromagnétique du condensateur plan

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon a , d'axe Oz situés dans les plans $z = \pm h$. On admet que \vec{E} est colinéaire à \vec{e}_z à l'intérieur du système. Pour $h \ll a$, ce modèle est justifié dans le volume intérieur au système, sauf au voisinage immédiat des bords $r = a$. Le système est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $\nu = \omega/2\pi$. Le but de l'exercice est de déterminer la structure du champ électromagnétique dans le condensateur sans s'en tenir nécessairement au domaine des basses fréquences. Les expressions des opérateurs vectoriels seront trouvées dans le formulaire. On donne en outre :

$$\Delta U(r) = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right)$$

1. On admet d'abord que le champ électrique, selon le modèle usuel du condensateur plan tel qu'il est utilisé en électrostatique, est uniforme à l'intérieur du condensateur. On le note :

$$\vec{E}_0 = A_0 \cos \omega t \vec{e}_z$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique en admettant qu'il est de la forme :

$$\vec{B}_1 = B_1(r, t) \vec{e}_\theta$$

2. Selon l'équation de Maxwell-Faraday, \vec{B}_1 est à son tour la source d'un champ électrique \vec{E}_2 . Déterminer ce champ en admettant qu'il est de la forme :

$$\vec{E}_2 = E_2(r, t) \vec{e}_z$$

3. Exprimer $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ en fonction de \vec{E}_0 et de la variable $x = r\omega/c$. Avec $a = 10 \text{ cm}$ et $\nu = 10 \text{ MHz}$ (limite supérieure d'un générateur de signaux usuel), évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet en confondant dans tout le système l'expression du champ avec celle valable en très basse fréquence. A quel concept théorique la condition $x \ll 1$ s'identifie-t-elle ? En s'inspirant de la démarche suivie dans les questions précédentes, expliquer qualitativement pourquoi le champ \vec{E} calculé ci-dessus ne correspond toujours pas à une solution exacte du problème.

4. On reprend le problème en cherchant une solution a priori sous la forme :

$$\vec{E} = A(r) \cos \omega t \vec{e}_z$$

Montrer que A ne dépend pas de z et établir une équation différentielle vérifiée par $A(r)$. En posant $y = A(r)/A(0)$ et $x = r\omega/c$, en déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x)$.

On propose des solutions de cette équation sous la forme :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

5. Établir une récurrence et en déduire les deux premiers termes de la série en partant de $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ (hypothèses qu'on essaiera de justifier). Comparer au résultat de la question précédente.

Réponses : $B_1(r, t) = -\frac{\omega A_0 r}{2c^2} \sin \omega t$, $E_2(r, t) = -\frac{\omega^2 A_0 r^2}{4c^2} \cos \omega t$, $\vec{E} = \vec{E}_0(1 - \frac{x^2}{4})$, ARQP, $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, $\forall n \geq 2$ $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$.

10. Induction et moment dipolaire

On considère une petite spire de rayon a petit devant celui d'une autre spire parcouru par un courant dont le moment magnétique est \vec{m} . La spire de rayon a est placée loin de la grande spire de telle sorte que les axes des deux spires soient superposés. A la date $t = 0$, la petite spire située sans vitesse à la distance r_0 est accélérée uniformément pendant la durée τ . Elle conserve ensuite la vitesse v_0 atteinte à ce moment. La petite spire ne fait que s'éloigner de la grande. On utilisera l'expression du champ magnétique créé par un dipôle sur son axe, à la distance z de celui-ci :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \vec{e}_z$$

- Expliquer l'origine de l'intensité parcourant la petite spire de résistance R .
- Établir l'expression de cette intensité en fonction du temps. Faire une représentation graphique.

Réponses : Induction par variation du flux de \vec{B} créé par la grande spire dans la petite spire,

$$i_{t \leq \tau} = \frac{3\mu_0 m a^2}{2R} \frac{v_0 \frac{t}{\tau}}{(r_0 + \frac{v_0 t^2}{2\tau})^4}, \quad i_{t \geq \tau} = \frac{3\mu_0 m a^2}{2R} \frac{v_0}{(r_0 + v_0(t - \frac{\tau}{2}))^4}.$$

11. Interféromètre de Michelson et effet Pockels

On considère un interféromètre de MICHELSON, monté en coin d'air d'angle α et éclairé par une source étendue sous incidence quasi-normale. La source lumineuse est monochromatique de longueur λ . Sur un bras de l'interféromètre, on dispose une lame de faible épaisseur e d'indice n . Un observateur regarde les franges d'interférences.

- Quelle est la forme de ces franges d'interférences ? Justifier.
- Pour les observer, l'observateur doit-il accommoder ou non ? Justifier.
- En réalité, la lame est taillée dans un matériau non linéaire dont l'indice n est commandé par une tension $v(t)$ fournie par un générateur BF (effet POCKELS) : $n(t)$ est une fonction triangle de période T , de valeur minimale n_1 et de valeur maximale n_2 . Discuter ce que voit l'observateur suivant les valeurs de T , n_1 , n_2 , α et λ . On rappelle que la durée de persistance des images sur la rétine est d'environ 0,1 s.

Réponses : $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$, il doit accommoder, aucun effet perceptible si $|n_2 - n_1| \ll \frac{\lambda}{e}$, les franges se brouillent si T est plus petite que quelques 10 ms, si T est supérieure à quelques 0,1 s, on voit la translation des franges.

12. Diffraction par un réseau sous incidence non normale

Soit un réseau de pas a éclairé par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 0,5416 \mu\text{m}$. La source est supposée placée à l'infini à l'aide d'une lentille de focale $f = 50 \text{ cm}$. On effectue les mesures des angles d'émergence dans les ordres k suivants :

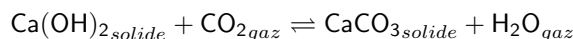
	$k = \pm 1$	$k = \pm 2$
θ	$23^\circ 12'$	$49^\circ 18'$
θ	$-19^\circ 30'$	$-44^\circ 15'$

- Déterminer l'angle d'incidence. Positionner correctement la source ponctuelle.
- Calculer le pas du réseau et le nombre de traits par millimètre.
- On éclaire le réseau avec une longueur d'onde inconnue λ . On obtient $37^\circ 41'$ dans l'ordre 2 et $-37^\circ 43'$ dans l'ordre -2 . Que peut-on en conclure ? Calculer la longueur d'onde λ et son incertitude absolue.

Réponses : $\theta_0 = 3 \times 10^{-2}$ rad, la source est à 1,5 cm du foyer objet, $a = 1,49 \mu\text{m}$ et $n = 672 \text{ mm}^{-1}$, $\lambda = 0,4556 \mu\text{m}$.

13. Obtention de carbonate de calcium

La Portlandite (hydroxyde de calcium) peut se carbonater suivant la réaction :



On donne à 298 K, les valeurs suivantes :

	$\text{Ca(OH)}_{2\text{solide}}$	$\text{CO}_{2\text{gaz}}$	$\text{CaCO}_{3\text{solide}}$	$\text{H}_2\text{O}_{\text{gaz}}$
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	-986,1	-393,5	-1206,9	-241,8
S° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)	83,4	213,7	92,9	188,7

1. Calculer $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$. Commenter les signes obtenus.
2. Quelles sont les influences sur l'équilibre : d'une élévation de température ? d'une élévation de pression ? d'une addition à T , p fixées de $\text{CO}_{2\text{gaz}}$?
3. Calculer l'enthalpie libre standard de la réaction à 298 K et la constante d'équilibre K_0 . Conclusion.
4. Donner l'expression de $\ln K_0 = f(T)$.

L'aragonite et la calcite sont les deux variétés allotropiques du carbonate de calcium. On relève dans les tables de données thermodynamiques :

	$\text{CaCO}_{3\text{calcite}}$	$\text{CaCO}_{3\text{aragonite}}$
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	-1206,9	-1207,1
S° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)	92,9	88,7

5. Déterminer l'enthalpie libre standard accompagnant la transformation de l'aragonite en calcite à 298 K. Quelle est la variété allotropique stable du carbonate de calcium à 298 K sous la pression de 1 bar ?

Réponses : $\Delta_r H^\circ = -69,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ exothermique, $\Delta_r S^\circ = -15,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ diminution du désordre, si T augmente déplacement dans le sens (2) endothermique, $\Delta_r \nu_{\text{gaz}} = 0$ pas d'influence de p , un ajout de $\text{CO}_{2\text{gaz}}$ va être consommé (loi de modération) par un déplacement dans le sens (1), $\Delta_r G^\circ = -64,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $K_0 = 2 \times 10^{11}$, $\ln K_0 = \frac{8311}{T} - 1,86$, $\Delta_r G^\circ = 200 - 4,2T$, à $T = 298 \text{ K}$ $\Delta_r G^\circ = -1052 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$, $Q = 1$, $\Delta_r G = \Delta_r G^\circ = -1052 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ $\Delta_r G < 0$ sens (1), la calcite est stable.