

# DYNAMIQUE DES POPULATIONS

Cette fiche vous présente quelques modèles de dynamique des populations.

## A. *Modèle de Malthus*

Le [modèle de Malthus](#) (1798) est un modèle simple qui décrit la vitesse de croissance d'une population lorsque celle-ci est de taille raisonnable et placée dans des conditions idéales : espace illimité, nourriture suffisante, absence de prédateurs, résistance aux maladies...

Dans ces conditions, Malthus considère que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents. En notant  $N(t)$  le nombre d'individus de la population à l'instant  $t$ , le taux de croissance d'une telle population est alors proportionnel à la population, ce qui donne la relation différentielle suivante :

$$N'(t) = rN(t),$$

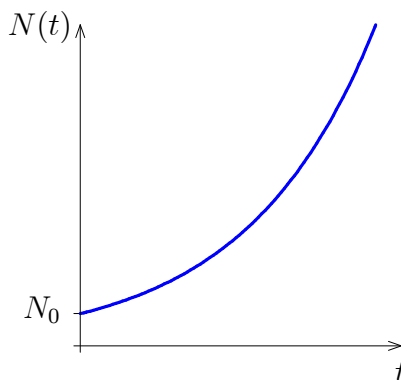
où  $r > 0$  désigne le [taux de croissance per capita](#), c'est-à-dire le « nombre » de nouveaux individus que peut produire en moyenne chaque individu de la population par unité de temps.

La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

où  $N_0$  désigne la population initiale (c'est-à-dire à  $t = 0$ ).

On observe ainsi une croissance exponentielle :



Par comparaison avec les données expérimentales, on a pu constater que le modèle présente un très bon ajustement avec la première phase de croissance d'une population issue d'un effectif faible. Ainsi, en l'absence de pression (démographique, trophique, compétition, prédation...), l'hypothèse de Malthus semble bien acceptable.

Cependant, le modèle souffre d'une incohérence profonde : la croissance exponentielle n'est en aucune manière limitée. Autrement dit, n'importe quelle espèce qui suivrait le seul modèle de Malthus finirait très vite par atteindre des densités de population irréalistes !

Les deux modèles présentés dans les prochains paragraphes tiennent compte des limites du milieu pour éviter cette incohérence.

## B. *Modèle de Verhulst*

Comme on vient de le voir, le modèle de Malthus permet de décrire l'évolution d'une population qui bénéficie de conditions idéales. Dans la réalité, ces conditions sont rares et ne restent valables que sur de courtes durées (un environnement clos suppose vraisemblablement des ressources limitées). Par conséquent, dès que l'on s'approche de la surpopulation (manque de nourriture, interactions dues à la promiscuité, ...), le taux de croissance baisse afin que la population ne dépasse pas une certaine limite.

Le [modèle de Verhulst](#) (1838) a pour but de tenir compte de ces contraintes imposées par le milieu. Pour cela, Verhulst choisit de remplacer le taux de croissance constant  $r$  du modèle de Malthus par un taux de croissance variant avec la taille de la population.

Plus précisément, Verhulst corrige le taux de croissance per capita  $r$  en le multipliant par le facteur correctif limitant  $1 - N(t)/K$  où  $K$  désigne la [capacité de charge du milieu](#) (c'est-à-dire l'effectif de population que l'on ne peut dépasser).

Ainsi, lorsque la population est faible devant  $K$ , le facteur  $1 - N(t)/K$  est proche de 1 et le taux de croissance est proche de  $r$ . On retrouve alors le modèle malthusien et sa croissance exponentielle (compatible avec une population faible dans un milieu idéal).

A contrario, lorsque la population s'approche de sa limite  $K$ , le facteur  $1 - N(t)/K$  tend vers 0 et le taux de croissance s'affaiblit. Le modèle tient ainsi compte de la stabilisation de la population au palier  $K$ .

Verhulst aboutit alors à la relation différentielle suivante :

$$N'(t) = r \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t).$$

Ce type de modèle est classique. On ne le rencontre pas seulement en dynamique des populations mais aussi en géologie, en économie, en sciences physiques, en chimie, etc. Il est alors communément désigné sous le nom de [modèle logistique](#).

L'équation différentielle de Verhulst n'est pas linéaire. On peut toutefois la résoudre en procédant par séparation des variables (une technique de résolution des équations différentielles que vous utiliserez souvent en sciences physiques).

Pour cela, on suppose tout d'abord que la population initiale  $N_0$  est strictement comprise entre 0 et  $K$  (ce qui est fort logique du point de vue biologique). Un théorème difficile (de Cauchy–Lipschitz) implique alors que  $N(t)$  reste constamment comprise entre 0 et  $K$  (au sens strict). On peut alors réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{N'(t)}{\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)} = r,$$

ce qui donne, après décomposition de la fraction,

$$\frac{N'(t)}{K - N(t)} + \frac{N'(t)}{N(t)} = r.$$

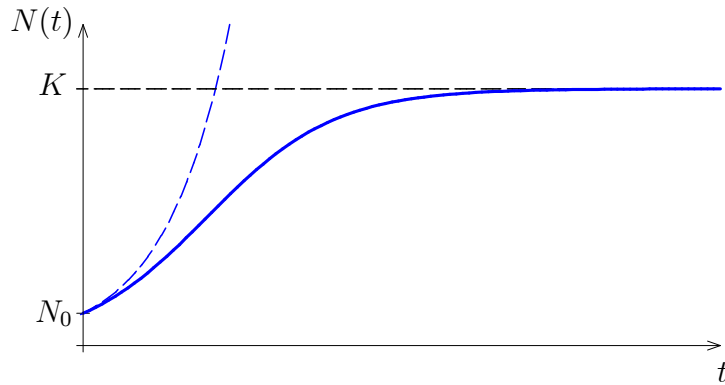
L'intégration de cette relation entre les instants 0 et  $t$  donne alors

$$-\ln \frac{K - N(t)}{K - N_0} + \ln \frac{N(t)}{N_0} = rt,$$

ce que l'on peut réécrire (après quelques calculs laissés au soin du lecteur) sous la forme

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}.$$

On observe cette fois, qu'après un début en croissance exponentielle (la courbe de Malthus est en pointillés sur le dessin), la courbe de Verhulst (en trait plein) se stabilise asymptotiquement à la valeur  $K$  :



On parle d'une **courbe logistique**.

À partir du modèle de Verhulst, une analyse s'est développée concernant les stratégies évolutives des êtres vivants. En effet, si l'on considère deux sous-populations en compétition dans le cadre du modèle logistique, il apparaît que l'une peut « l'emporter » sur l'autre soit en améliorant la valeur de  $r$ , soit en améliorant la valeur de  $K$  :

- « Stratégie  $r$  » : Ont une stratégie  $r$  les êtres vivants qui tablent sur une forte valeur de  $r$ , c'est-à-dire ceux qui produisent un grand nombre de juvéniles. On trouvera ainsi des espèces dont les juvéniles ont de faible chance d'atteindre l'âge adulte, dont la population fluctue fortement, qui alternent de nombreuses phases d'installation et de disparition et qui sont souvent de petite taille et à courte durée de vie.
- « Stratégie  $K$  » : Ont une stratégie  $K$  les êtres vivants qui optimisent la valeur de  $K$ , c'est-à-dire ceux qui produisent peu de jeunes et privilégient la meilleure adéquation possible avec leur milieu. On trouvera ainsi des espèces qui prodiguent beaucoup de soins aux jeunes, qui forment des couples stables et qui sont souvent de grande taille et de durée de vie importante.

## C. *Modèle de Gompertz*

Le modèle de Gompertz (1825) est un « concurrent » du précédent. En effet, comme dans le modèle de Verhulst, la population décrite par l'équation de Gompertz croît d'abord de façon exponentielle puis finit par se stabiliser en s'approchant d'une valeur plafond.

Comme Verhulst, Gompertz corrige le taux de croissance per capita  $r$  en le multipliant par un facteur correctif limitant  $\ln K - \ln N(t)$  où  $K$  désigne toujours la capacité de charge du milieu. Il aboutit ainsi à la relation différentielle suivante :

$$N'(t) = r(\ln K - \ln N(t))N(t).$$

Là encore, l'équation différentielle n'est pas linéaire mais on peut la résoudre par séparation des variables. Comme dans le cas du modèle de Verhulst, on fait l'hypothèse que  $0 < N_0 < K$  et l'on admet que cela implique que, pour tout  $t > 0$ , on a  $0 < N(t) < K$ . Dès lors, il est licite de réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{\frac{N'(t)}{N(t)}}{\ln K - \ln N(t)} = r.$$

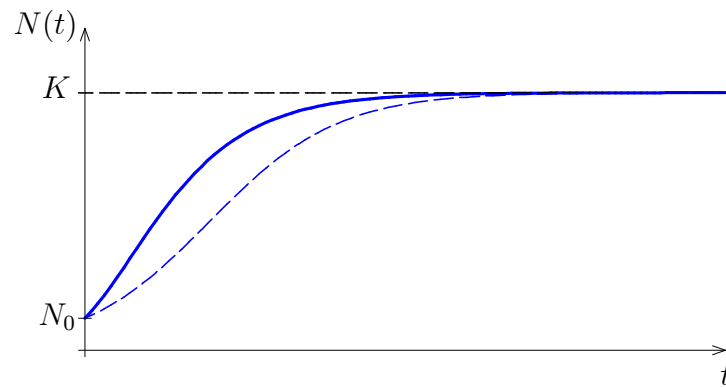
En intégrant cette relation entre 0 et  $t$ , il vient

$$-\ln \left( \frac{\ln K - \ln N(t)}{\ln K - \ln N_0} \right) = rt,$$

ce qui donne

$$N(t) = K \exp \left\{ -(\ln K - \ln N_0) e^{-rt} \right\}.$$

Graphiquement, la courbe de Gompertz (en trait plein) est semblable à la courbe logistique (en pointillés) à ceci près que la croissance exponentielle initiale est plus forte pour Gompertz mais dure moins longtemps (puisque le point d'inflexion arrive plus tôt que sur la courbe logistique) :



Pour une population initiale  $N_0$  et un taux de croissance per capita  $r$  observés, on choisira plutôt le modèle de Gompertz ou plutôt celui de Verhulst afin que l'ajustement des paramètres (à partir des données expérimentales) donne une courbe de croissance conforme aux observations.