ARGFONCTIONS CORRECTION

Exercice 1

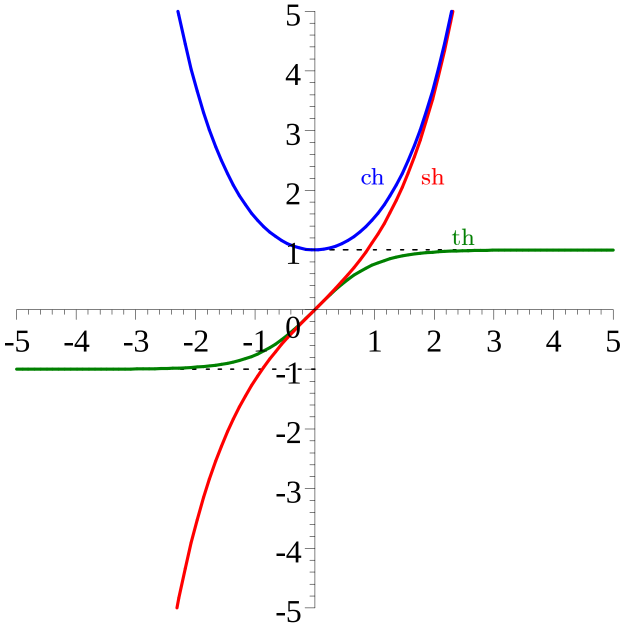
1. R*acontez tout ce que vous savez sur les fonctions hyperboliques* ch*,* sh *et* th*. N'oubliez pas les dessins (avec les éventuelles tangentes et asymptotes particulières).*

   On appelle *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique* les fonctions ch, sh et th définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$
   La fonction ch est paire (avec $\operatorname{ch}(0) = 1$) alors que les fonctions sh et th sont impaires (ce qui implique que $\operatorname{sh}(0) = \operatorname{th}(0) = 0$).

   Les fonctions sh, ch et th sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x), \qquad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$
   Cela permet de voir que sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ alors que ch est strictement décroisante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   En outre, ch et sh tendent vers $+\infty$ très vite lorsque x tend vers $+\infty$ (à la vitesse de $x \longmapsto \mathrm{e}^x/2$ pour être précis) et th tend vers 1 en $+\infty$ ce qui lui assure une asymptote horizontale en $+\infty$.

   Les courbes de ces trois fonctions ont donc l'allure suivante :



   La courbe du cosinus hyperbolique est une *chainette*. En effet, c'est la forme que prend une chaine lorsque la tient par ses deux extrémités. Coïncidence heureuse, la **ch**ainette est donc la courbe de la fonction ch.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

2. a) *Sans chercher (pour le moment) à déterminer la réciproque, démontrer que* sh *réalise une bijection entre des intervalles que l'on précisera. Sa réciproque est nommée argument sinus hyperbolique et est notée* argsh. *Dire tout ce que vous pouvez sur* argsh *(en particulier : imparité, classe de régularité et dérivée, dessin de la courbe représentative).*

La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$. Le théorème de la bijection permet donc d'en déduire que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sh réalise une bijection entre } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{R} \\ \text{dont la réciproque est notée argsh.}\end{array}}$$

De plus, le théorème de la bijection affirme que argsh est de même stricte monotonie sur $\mathbb{R}$ que sh sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{argsh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Comme sh est impaire sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{argsh est impaire sur } \mathbb{R}.}$$

Pour la régularité, on peut déjà noter que le théorème de la bijection dit que

$$\boxed{\text{argsh est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Mais c'est mieux que cela ! Comme $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction sh n'a pas de tangente horizontale. Comme sh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de difféomorphisme des fonctions réelles nous dit que toute la régularité de sh se transmet à sa réciproque argsh, autrement dit que

$$\boxed{\text{argsh est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

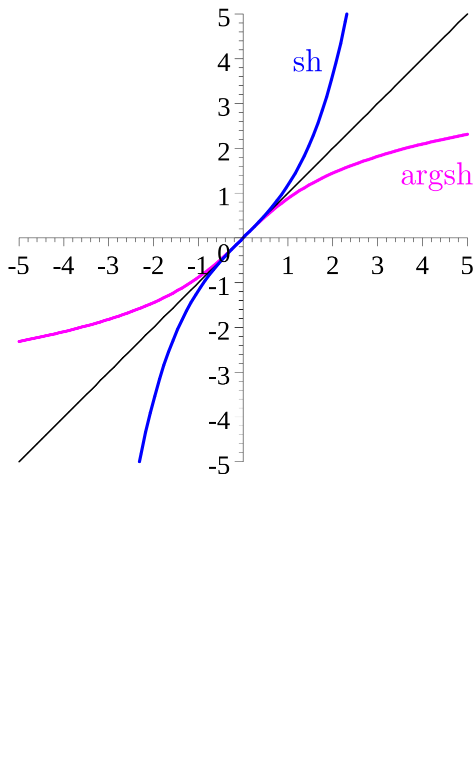
Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\text{argsh}'(y) &= \frac{1}{\text{sh}'(\text{argsh}\, y)} \\
&= \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}\, y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{argsh}\, y) + 1}} \qquad \text{car ch} = +\sqrt{\text{sh}^2 + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \text{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.}$$

Graphiquement, on obtient



b) *Déterminer une expression explicite de* argsh.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x) = y \quad &\iff \quad \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\
&\iff \quad (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \qquad \Delta = 4y^2 + 4 \geqslant 0 \\
&\iff \quad \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\mathrm{e}^x = \underbrace{y - \sqrt{y^2+1}}_{<0}}_{\text{impossible}} \\
&\iff \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{argsh}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{array}\right.}$$

3. a) *Sans chercher (pour le moment) à déterminer la réciproque, démontrer que la restriction de* ch *à* $\mathbb{R}_+$ *réalise une bijection entre* $\mathbb{R}_+$ *et un intervalle que l'on précisera. Sa réciproque est nommée argument cosinus hyperbolique et est notée* argch. *Dire tout ce que vous pouvez sur* argch *(en particulier : classe de régularité et dérivée, comportement en* 1*, dessin de la courbe représentative).*

La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_+$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$. Le théorème de la bijection permet donc d'en déduire que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la restriction de ch à } \mathbb{R}_+ \text{ réalise une bijection entre} \\ \mathbb{R}_+ \text{ et } [1;+\infty[\text{ dont la réciproque est notée argch.}\end{array}}$$

De plus, le théorème de la bijection affirme que argch est de même stricte monotonie sur $[1;+\infty[$ que ch sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{argch est strictement croissante sur } [1;+\infty[.}$$

Le théorème de la bijection dit que

$$\boxed{\text{argch est continue sur } [1;+\infty[.}$$

Comme $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, la restriction $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]1;+\infty[$ n'a pas de tangente horizontale sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]1;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de difféomorphisme des fonctions réelles nous dit que

$$\boxed{\text{argch est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]1;+\infty[.}$$

En 1, on a un point d'incertitude. Par ailleurs, pour tout $y \in]1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}'(y) &= \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch} y)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch} y) - 1}} \qquad \text{car } \operatorname{sh} = +\sqrt{\operatorname{ch}^2 - 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall y \in]1;+\infty[, \qquad \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$$

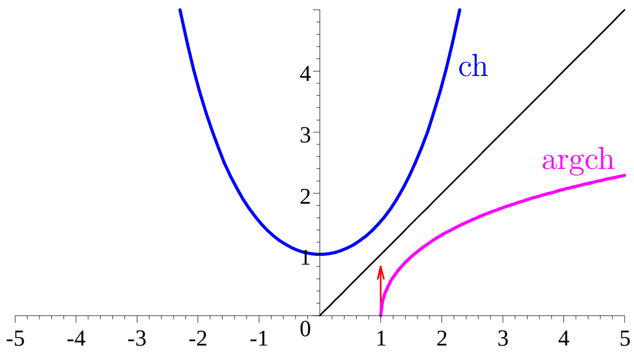
De plus, on a

$$\lim_{y \to 1} \operatorname{argch}'(y) = +\infty$$

donc

$$\boxed{\text{argch admet une demi-tangente verticale en 1.}}$$

Graphiquement, on obtient



b) *Déterminer une expression explicite de* argch.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\
&\Longleftrightarrow \quad (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x + 1 = 0 \qquad \Delta = 4y^2 - 4 \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\mathrm{e}^x = \underbrace{y - \sqrt{y^2-1}}_{<1}}_{\text{impossible}} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{argch} \left\{ \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \end{array} \right.}$$

4. a) *Sans chercher (pour le moment) à déterminer la réciproque, démontrer que* th *réalise une bijection entre des intervalles que l'on précisera. Sa réciproque est nommée argument tangente hyperbolique et est notée* argth. *Dire tout ce que vous pouvez sur* argth *(en particulier : imparité, classe de régularité et dérivée, dessin de la courbe représentative).*

La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \operatorname{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{th} = +1$. Le théorème de la bijection permet donc d'en déduire que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{th réalise une bijection entre } \mathbb{R} \text{ et }]-1;1[\\ \text{dont la réciproque est notée argth.} \end{array}}$$

De plus, le théorème de la bijection affirme que argth est de même stricte monotonie sur $]-1;1[$ que th sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{argth est strictement croissante sur }]-1;1[.}$$

Comme th est impaire sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{argth est impaire sur }]-1;1[.}$$

Pour la régularité, on peut déjà noter que le théorème de la bijection dit que

$$\boxed{\text{argth est continue sur }]-1;1[.}$$

Mais c'est mieux que cela ! Comme $\operatorname{th}' = 1/\operatorname{ch}^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction th n'a pas de tangente horizontale. Comme th est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de difféomorphisme des fonctions réelles nous dit que toute la régularité de th se transmet à sa réciproque argth, autrement dit que

$$\boxed{\text{argth est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1;1[.}$$

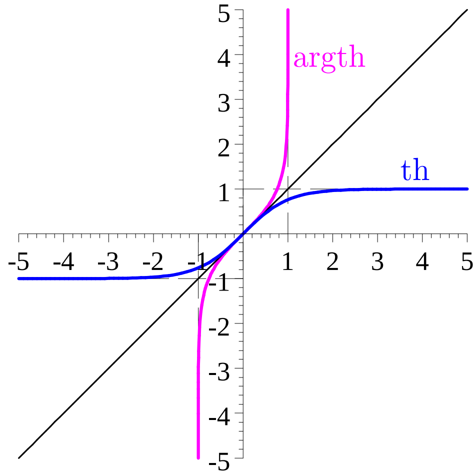
Par ailleurs, pour tout $y \in]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}'(y) &= \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth} y)}\\ &= \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth} y)}\\ &= \frac{1}{1-y^2},\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall y \in]-1;1[, \qquad \operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

Graphiquement, on obtient



b) *Déterminer une expression explicite de* argth.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x) = y \quad &\iff \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y\\ &\iff \quad (1-y)(e^x)^2 = 1+y\\ &\iff \quad e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \text{car } \frac{1+y}{1-y} > 0 \text{ et } e^x > 0\\ &\iff \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{argth}\left\{\begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ y & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\end{array}\right.}$$

c) *Pour déterminer les primitives de $t \longmapsto 1/(1-t^2)$, vous semble-t-il plus judicieux d'utiliser la fonction* argth *ou la décomposition en éléments simples de $1/(1-X^2)$? On veut une réponse justifiée !*

La fonction argth est une primitive de $t \longmapsto 1/(1-t^2)$ sur $]-1;1[$ alors que la décomposition en éléments simples permet de donner les primitives de $t \longmapsto 1/(1-t^2)$ sur $]-1;1[$ mais aussi sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour primitiver } t \longmapsto 1/(1-t^2)\text{, il est plus judicieux}\\ \text{d'utiliser la décomposition en éléments simples.}\end{array}}$$

Remarque : La décomposition en éléments simples dit que $t \longmapsto (\ln|1+t| - \ln|1-t|)/2$ est une primitive de $t \longmapsto 1/(1-t^2)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.