

Oraux ENS - Maths Cachan-Rennes

Martin Teuscher

2 juillet 2019

1 Énoncé

$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}$, on pose : $f_t : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x - t) \end{cases}$

Pour $\varepsilon > 0$, on dit que $t \in \mathbb{R}$ est une ε -presque-période de f si $\|f - f_t\|_\infty \leq \varepsilon$.

Enfin, on dit que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est **presque périodique** si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall I$ intervalle de longueur r , I contient au moins une ε -presque-période de f .

1. Donner des exemples de fonctions presque périodiques.

Après avoir montré que les fonctions périodiques sont presque périodiques, l'examineur m'a demandé d'autres candidats. Je n'ai pas eu d'idée sur le moment et il est directement passé à la question suivante.

2. Montrer que toute fonction presque périodique est bornée.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (t_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extractrice, $(f_{t_{\varphi(n)}})$ CVU. Montrer que f est presque périodique.

Indication 1 : On pourra raisonner par l'absurde et construire par récurrence une suite $(t_n)_n$ de réels non ε -presque-période tels que $\forall i \neq j, t_i - t_j$ ne soit pas non plus une ε -presque-période.

Indication 2 : traduire la CVU par le critère de Cauchy.

4. Étudier la réciproque de la question 3.

2 Déroulé de l'oral

Lieu de passage : ENS Cachan, bâtiment Cournot, salle E102.

Examineur aimable, sans rien d'extravagant non plus. Il était assez actif dans l'exercice et donnait des indications assez régulièrement pour ne pas me laisser partir sur une fausse route. Il restait attentif à ce que je disais, prenant en note quand je proposais des idées ou des initiatives de bon aloi.

Nous avons eu un DM sur les fonctions presque périodiques, mais je ne me souvenais de rien. J'ai commis plusieurs étourderies au long de l'oral, j'avais du mal à trouver quels intervalles judicieux utiliser. **Dans ce genre d'exercice blindé de quantificateurs pas forcément limpides, il faut garder une concentration extrême pour ne pas faire d'erreurs de manipulation des objets.**