# DÉRIVATION

## Exercice 1. [$\circ$]

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{4x^2-1},\qquad f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\qquad f(x)=|\ln x|.$$

$$f(x)=\cos(\sqrt{x}),\qquad f(x)=x|x|.$$

## Exercice 2. [$\circ$]

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. La limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée centrale de $f$ en $x_0$ et est notée $f'_c(x_0)$.

1. Démontrer que si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent, alors $f'_c(x_0)$ existe et vaut $\big(f'_g(x_0)+f'_d(x_0)\big)/2$. Que dire si $f$ est dérivable en $x_0$ ?
2. Si $f$ admet une dérivée centrale en un point, est-elle nécessairement : continue en ce point ? dérivable à gauche et/ou à droite en ce point ?

## Exercice 3. [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f$ admet un minimum local en 0. La fonction $f$ est-elle nécessairement décroissante dans un voisinage latéral gauche de 0 et croissante dans un voisinage latéral droit de 0 ?
2. On suppose que $f'(0) > 0$. La fonction $f$ est-elle nécessairement strictement croissante au voisinage de 0 ?

## Exercice 4. [$\circ$]

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ centré en 0.
   a) Démontrer que si $f$ est paire (resp. impaire), alors $f'$ est impaire (resp. paire).
   b) Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de $f$. Démontrer que, si $f$ est impaire alors $F$ est paire. Est-il vrai que si $f$ est paire alors $F$ est impaire ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est $T$-périodique. Démontrer que $f'$ est aussi $T$-périodique.

## Exercice 5. [$\circ$]

Soient $I$ un intervalle et $a \in I$. On considère $f, m, M : I \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $m$ et $M$ sont dérivables en $a$. On suppose que $m \leqslant f \leqslant M$, $m(a) = M(a)$ et $m'(a) = M'(a)$. Démontrer que $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = m'(a) = M'(a)$.

## Exercice 6. [$\star$] (Théorème de Cesàro fonctionnel)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f'$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Démontrer que $x \longmapsto f(x)/x$ tend vers $\ell$ en $+\infty$.

## Exercice 7. [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leqslant f(0) \exp\left(x\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\cdot$$

## Exercice 8. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\cdot$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note $\ell$ sa limite.
2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \ell f'(0)$.
3. En choisissant $f(x) = \ln(1+x)$, déterminer $\ell$.

## Exercice 9. [$\circ$]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant scindé sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $P'$ est encore scindé sur $\mathbb{R}$.

   Si on suppose de plus que $P$ est à racines simples, démontrer qu'il en est de même pour $P'$.

   Ces deux résultats restent-ils vrais sur $\mathbb{C}$ ?
2. Application : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Démontrer que $P$ ne peut posséder deux coefficients consécutifs nuls.

## Exercice 10. [$\circ$] (Polynômes de Legendre)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X^2-1)^n$. Démontrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 11. [$\star$] (Rolle généralisé)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $f : [a;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;+\infty[$ et dérivable sur $]a;+\infty[$ qui admet en $+\infty$ une limite égale à $f(a)$. Démontrer qu'il existe $c \in ]a;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ une même limite finie. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
3. Soit $f : ]a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a;b[$ telle que $\lim_{a^+} f = \lim_{b^-} f = +\infty$. Démontrer qu'il existe $c \in ]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

## Exercice 12. (Règle de l'Hôpital)

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. On suppose que $g'$ ne s'annule pas sur $]a;b[$. Justifier que $g(a) \neq g(b)$ et démontrer qu'il existe $c \in ]a;b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot$$

2. Soient $I$ un intervalle et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $I$. On considère $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I$ qui admettent chacune une limite finie en $x_0$. Ces limites sont notées $f(x_0)$ et $g(x_0)$, même lorsque $x_0 = \pm\infty$. On suppose que $g'$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose enfin que $f'/g'$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $x_0$. Justifier que $\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ g(x) \neq g(x_0)$ et démontrer la *règle de L'Hôpital* :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot$$

3. Applications
   a) Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \big(x - \sin(x)\big)/x^3$.
   b) Démontrer que si $f$ et $g$ sont dérivables au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et nulles en $x_0$ alors $\big(f' = o_{x_0}(g')\big) \Longrightarrow \big(f = o_{x_0}(g)\big)$.

## Exercice 13. [$\star$]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

1. Soit $c > b$. Démontrer qu'il existe une nombre réel $d \in\, ]a;b[$ tel que la tangente au graphe de $f$ au point d'abscisse $d$ coupe l'axe des $x$ en $(c, 0)$.
2. On suppose de plus que $f$ dérivable en $a$ et $f'(a) = 0$. Démontrer qu'il existe $d \in\, ]a;b[$ tel que la tangente de $f$ au point d'abscisse $d$ coupe l'axe des $x$ en $(a, 0)$.

## Exercice 14. [$\star$]

Soit $f : ]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f(x)$ et $xf'(x)$ admettent des limites finies $\ell$ et $\ell'$ quand $x$ tend vers 0. Démontrer que $\ell' = 0$.

## Exercice 15. [$\star$]

En utilisant $f_x : t \longmapsto (t+1)^x - t^x$, résoudre l'équation $(E) :\ 1^x + 5^x + 6^x = 2^x + 3^x + 7^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 16. [$\circ$]

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)$. On note $\varphi$ la limite de cette suite.
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $\varphi - u_n$ par le terme général d'une suite géométrique. En déduire $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\varphi$ à $10^{-3}$ près.

## Exercice 17. [$\star$] (Théorème de Darboux)

Soit $f : ]a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ (avec $a < b$). Nous allons démontrer, de deux manières, que $f'$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous $\alpha, \beta \in\, ]a;b[$ tels que $\alpha < \beta$, la fonction $f'$ prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. C'est le *théorème de Darboux*.

1. Soient $\alpha, \beta \in\, ]a;b[$ tel que $\alpha < \beta$. Démontrer le théorème de Darboux en appliquant le TVI aux applications
$$\tau_\alpha \left\{ \begin{array}{ccc} ]\alpha;\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \tau_\beta \left\{ \begin{array}{ccc} [\alpha;\beta[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} \end{array} \right.$$
2. Soient $\alpha, \beta \in\, ]a;b[$ tel que $\alpha < \beta$ et $k \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. Démontrer que l'application $\varphi : x \longmapsto f(x) - kx$ n'est pas injective et retrouver ainsi le théorème de Darboux.

## Exercice 18. [$\circ$]

Démontrer, à l'aide de la formule de Taylor–Lagrange, que
$$\forall x \geqslant 1, \qquad \left| x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1) \right| \leqslant \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

## Exercice 19. [$\star$]

Déterminer des valeurs approchées de $\sin(31°)$, $\mathrm{e}^{0,1}$ et $\cos(0,1)$ sans utiliser de calculatrice, en précisant à chaque fois une majoration de l'erreur commise.

## Exercice 20. [$\star$] (Une suite chaotique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{e} - E_n \leqslant \mathrm{e}/(n+1)!$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = \mathrm{e} - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nu_{n-1} - 1$. Déterminer le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. On perturbe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en modifiant très légèrement son premier terme. Autrement dit, on considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $v_0 = u_0 + \varepsilon$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = nv_{n-1} - 1$. Déterminer, selon $\varepsilon$, le comportement asymptotique de $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

### Exercice 21. [$\star$]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que, si $|h| \leqslant 1$ (avec $h \neq 0$), on a

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{(x+1)t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

   et en déduire que $f$ est dérivable en $x$ et que

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

2. Déterminer l'expression de $f + f'$.

### Exercice 22. [$\circ$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n$-ème des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos^3 x, \qquad g(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \qquad h(x) = x^{n-1}\ln x.$$

### Exercice 23. [$\circ$] (Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \exp\left\{-\dfrac{1}{(x-a)(b-x)}\right\} & \text{si } x \in \,]a;b[ \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n$ telle que

$$\forall x \in \,]a;b[\,, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\big((x-a)(b-x)\big)^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}\right\}.$$

2. En déduire que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 24. [$\circ$]

Démontrer que tan est absolument croissante sur $[0;\pi/2[$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est une fonction positive sur $[0;\pi/2[$.