Devoir Surveillé n° 1 (2h30)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – Applications linéaires injectives ou surjectives

L'objectif de ce court problème est d'étudier quelques propriétés des applications linéaires injectives ou surjectives de $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$. *On utilise ces résultats pour montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire bijective de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$. *On généralisera ce résultat à* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *lorsque* $n \neq m$ *dans le cours d'algèbre linéaire.*
On rappelle que l'on définit dans $\mathbb{R}^n$ *:*

- *une addition : si* $X = (x_1, \dots, x_n)$ *et* $Y = (y_1, \dots, y_n)$ *sont deux éléments de* $\mathbb{R}^n$, *alors on définit*

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

- *la multiplication par un réel : si* $X = (x_1, \dots, x_n)$ *est un élément de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est linéaire si pour tout* X *et tout* Y *de* $\mathbb{R}^n$, *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}^n$,

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y) \qquad \textit{et} \qquad f(\lambda X) = \lambda f(X).$$

Soit $(X_1, \dots, X_\ell)$ *une famille de* ℓ *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *On dit qu'il s'agit d'une :*

- *famille libre si pour tout* $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ *de* $\mathbb{R}$, *on a l'implication :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i = 0_{RR^n} \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, \ell]\!], \quad \lambda_i = 0)$
  où $0_{\mathbb{R}^n}$ *désigne le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$.
- *famille génératrice de* $\mathbb{R}^n$ *si pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, *il existe des réels* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tels que* $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i$.

On rappelle que la notation $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} a_i$ *désigne la somme* $a_k + \dots + a_n$.

1. Soit $n = 3$, et $X_1 = (1,1,0)$, $X_2 = (1,0,1)$, $X_3 = (0,1,1)$.
   (a) Résoudre le système $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 = (0,0,0)$, en les inconnues λ, μ et ν.
   (b) Qu'en déduit-on sur la liberté de la famille (X_1, X_2, X_3).
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer que $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tous $X_1, \dots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $\mathbb{R}$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(X_k).$$

4. On définit $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^m}\})$ (noyau de f). Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
5. Montrer que si f est injective (et toujours linéaire), et si $(X_1, \dots, X_\ell)$ est une famille libre, alors $(f(X_1), \dots, f(X_\ell))$ est également une famille libre.
6. Montrer que si f est surjective (et toujours linéaire), et si $(X_1, \dots, X_\ell)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors $(f(X_1), \dots, f(X_\ell))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$.
7. On utilise ces résultats pour montrer dans cette question qu'il n'existe pas d'application linéaire bijective (c'est ce qu'on appelle un isomorphisme) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Soit X_1, X_2 et X_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, il existe λ et μ tels que $X_3 = \lambda X_1 + \mu X_2$.

(b) En déduire que 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent jamais former une famille libre.

(c) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Problème 2 – Ensemble des applications d'un ensemble infini dans un autre, d'après Maxime Ramzi

On rappelle qu'étant donnés deux ensembles E et F, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E et F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F.

Le but de ce problème est de démontrer que si E et F sont deux ensembles infinis, et si F n'est « pas trop gros » par rapport à $\mathcal{P}(E)$, alors F^E et $\mathcal{P}(E)$ ont même cardinal.

On dit que :

- *E est subpotent à F s'il existe une injection $f : E \to F$;*
- *E est équipotent à F s'il existe une bijection $f : E \to F$.*

Ainsi l'équipotence traduit l'égalité des cardinaux.

Dans tout le problème, on suppose vrai l'axiome du choix.

On admet les deux résultats suivants :

- *Si E est infini, alors E et $E \times E$ sont équipotents (résultat nécessitant l'axiome du choix)*
- *Théorème de Cantor-Bernstein : Si E est subpotent à F et F subpotent à E, alors E est équipotent à F.*

Questions préliminaires

1. Montrer que E est subpotent à F si et seulement s'il existe une surjection $g : F \to E$ (la construction de g est redemandée).
2. Montrer que E est équipotent à F si et seulement s'il existe une injection $f : E \to F$ et une surjection $g : E \to F$.

Partie I – Quelques résultats préliminaires

1. Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application.
   (a) Montrer que si f est surjective, alors pour tout $B' \in \mathcal{P}(B)$, $f(f^{-1}(B')) = B'$
   (b) Montrer que si f est injective, alors pour tout $A' \in \mathcal{P}(A)$, $f^{-1}(f(A')) = A'$.
   (c) Montrer que si A et B sont équipotents, alors $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ sont équipotents
2. Soit A, B et C trois ensembles, tel que B soit subpotent à C. Soit $\varphi : B \to C$ une injection. En considérant $\Phi : B^A \to C^A$ définie par $\Phi(f) = \varphi \circ f$, montrer que B^A est subpotent à C^A.
3. Montrer que si B et C sont équipotents, B^A et C^A sont équipotents.
4. Démontrer de même que si A et B sont équipotents, alors C^A et C^B sont équipotents.
5. Soit A, B et C des ensembles quelconques. En explicitant une bijection, montrer que $C^{A\times B}$ et $(C^B)^A$ sont équipotents.

Partie II – Cardinal de F^E lorsque F est subpotent à E

On considère ici deux ensembles E et F tel que E soit infini, et F soit non vide et non réduit à un singleton, subpotent à E.

1. (a) Montrer que E est subpotent à $E \times F$, et que $E \times F$ est subpotent à $E \times E$.
   (b) En déduire que E est équipotent à $E \times F$.
   (c) En considérant le graphe des fonctions, montrer que F^E est subpotent à $\mathcal{P}(E \times F)$.
2. (a) Soit $x_0 \in F$ et $E' \in \mathcal{P}(E)$. Justifier l'existence d'une application $f : E \to F$ telle que $f^{-1}(\{x_0\}) = E'$.
   (b) Construire une surjection de F^E sur $\mathcal{P}(E)$.
3. Montrer que F^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents.

Partie III – Cardinal de F^E lorsque F est subpotent à $\mathcal{P}(E)$

On suppose toujours dans cette partie que E est infini, et on suppose de plus que F est subpotent à $\mathcal{P}(E)$.

1. À l'aide de résultats de la partie I, montrer que E^E et $(E^E)^E$ sont équipotents.
2. À l'aide de la partie II, en déduire que $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(E)^E$ sont équipotents.
3. Montrer que F^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents.