Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 21

– à rendre pour le mardi 02 juin –

Exercice 1

Soient $n \geqslant 3$ un entier, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que :

$$X \sim \mathscr{U}_{[\![1,n]\!]} \text{ et } Y \sim \mathscr{U}_{\{-1,1\}}.$$

Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 2

Soient $X_0, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies de Ω à valeurs dans $\{0,1\}$, où l'univers Ω est fini.
On suppose que :

- la variable X_0 est nulle
- pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = 0$
- pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $\{X_k = 0\}$ est la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$
- la famille $(X_0, \cdots, X_n)$ possède la propriété de Markov :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall (x_0, \cdots, x_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+2},$$

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0, \cdots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k).$$

S'il existe, on note T le plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_k = 1$ et si au contraire tous les X_k valent 0, alors on note $T = +\infty$.
On note enfin N, le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $X_k = 1$.

1. Que signifie la propriété de Markov ?
2. Quelle est la loi de X_1 ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(N = 0)$.
5. Déterminer la loi de T. Que vaut $\mathbb{P}(T < +\infty)$?
6. Déterminer au moyen d'une relation de récurrence, une expression explicite de $\mathbb{P}(X_k = 1)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
7. (a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1, X_k = 1)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On distinguera les cas : $k < n$ et $k = n$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(N = 1)$.
8. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Combien existe-t-il de n-listes de $\{0,1\}$ qui contiennent k fois le réel 1 mais jamais deux 1 consécutifs et qui finissent par 0 ?
   (b) Montrer que :

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n-k}{k} \frac{1}{2^{n-k}} + \binom{n-k}{k-1} \frac{1}{2^{n-k+1}}.$$