

Chapitre 3 : nombres complexes

Table des matières

| | |
|--|----------|
| 1 Propriétés algébriques | 2 |
| 1.1 Rappels, opérations | 2 |
| 1.2 Conjugué | 2 |
| 1.3 Module | 2 |
| 2 Groupe unimodulaire \mathbb{U} des nombres complexes de module 1 | 3 |
| 2.1 Présentation | 3 |
| 2.2 Exponentielle d'un nombre complexe | 3 |
| 2.3 Applications à la trigonométrie | 3 |
| 2.3.1 Comment retrouver des formules de trigonométrie? | 3 |
| 2.3.2 Formules de trigonométrie à connaître | 4 |
| 2.3.3 Formules de trigonométrie à savoir retrouver | 4 |
| 2.4 Équations trigonométriques | 5 |
| 3 Arguments d'un nombre complexe | 5 |
| 4 Équations algébriques dans \mathbb{C} | 6 |
| 4.1 Équations $z^n = 1$, racines n -ièmes de l'unité | 6 |
| 4.2 Équations $z^n = a$ | 6 |
| 4.3 Cas particulier : équations $z^2 = a$ | 7 |
| 4.4 Équations du second degré | 7 |
| 5 Interprétation géométrique des nombres complexes | 7 |
| 5.1 Affixe d'un point, module et argument d'un complexe | 7 |
| 5.2 Interprétations géométriques de transformations complexes | 8 |
| 5.2.1 Applications $z \mapsto a \cdot z + b$ | 8 |
| 5.2.2 Application $z \mapsto \pm\bar{z}$ | 8 |

1 Propriétés algébriques

1.1 Rappels, opérations

Définition 1 On munit l'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de nombres réels de deux lois de composition :

- l'addition : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
- la multiplication : $(a, b) \times (a', b') = (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b)$

On vérifie que les lois $+$ et \times ainsi définies sont associatives, commutatives, admettent un élément neutre $(0, 0)$ pour $+$ et $(1, 0)$ pour \times et \times est distributive sur $+$.

On pose $i = (0, 1)$, puis on associe à chaque couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le complexe : $z = a + ib$. On remarque que $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} et les nombres a et b s'appellent respectivement les parties réelle et imaginaire de z : $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

Les calculs d'addition $+$ et de multiplication \times ou \cdot sur les nombres complexes se font de manière habituelle.

1.2 Conjugué

Définition 2 Pour tout complexe $z = a + ib$, on définit le *conjugué de z* noté \bar{z} par : $\bar{z} = a - ib$.

Méthode : Comment calculer les parties réelle ou imaginaire d'un quotient $\frac{z}{z'}$?

- multiplier le dénominateur par l'expression conjuguée : le dénominateur devient réel
- faire le calcul sur l'expression transformée.

Exemple 1 Calculer la partie réelle de $\frac{1+2i}{-1+3i}$ et la partie imaginaire de $(1+i\sqrt{3})^n$.

Proposition 1 On a :

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_+$.

Méthode : Comment montrer qu'un complexe est réel, ou imaginaire pur ?

- comparer z à \bar{z}
- si $z = \bar{z}$, alors z est réel ; si $z = -\bar{z}$, alors z est imaginaire pur.

1.3 Module

Définition 3 On appelle *module de z*, le nombre $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Remarque 1 Calculer le module ou la valeur absolue d'une nombre réel (qui est en fait un nombre complexe) revient au même.

Proposition 2 • $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2} \in \mathbb{R}_+$

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ et $|\bar{z}| = |z|$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ et l'égalité a lieu si et seulement si il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que : $z = \rho \cdot z'$ ou $z' = \rho \cdot z$. (on dit que z et z' sont positivement liés)

2 Groupe unimodulaire \mathbb{U} des nombres complexes de module 1

2.1 Présentation

Définition 4 On définit *le groupe unimodulaire* noté \mathbb{U} par l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = \frac{1}{z} \right\}.$$

2.2 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 5 Pour tout nombre complexe z , on note :

$$e^z = e^{\Re e(z)} \cdot (\cos(\Im m(z)) + i \sin(\Im m(z))),$$

où la première exponentielle appliquée à $\Re e(z)$ est la fonction exponentielle que l'on connaît pour les nombres réels.

Théorème 1 On a :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- tout nombre complexe z de module 1 est de la forme $z = e^{i\theta}$ pour un certain θ dans \mathbb{R}
- pour tous z et z' dans \mathbb{C} , alors $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

Corollaire 1 (Formules de Moivre et d'Euler)

On a :

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.3 Applications à la trigonométrie

2.3.1 Comment retrouver des formules de trigonométrie ?

Méthode : Comment exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ ou $\sin \theta$?

- ▶ appliquer la formule du binôme de Newton à $a = \cos \theta$ et $b = i \sin \theta$
- ▶ prendre la partie réelle (ou imaginaire) dans cette expression pour avoir une formule pour $\cos(n\theta)$ ou pour $\sin(n\theta)$.

Méthode : Comment linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$?

- ▶ appliquer la formule d'Euler pour $\cos \theta$ ou $\sin \theta$
- ▶ appliquer la formule du binôme de Newton
- ▶ regrouper les termes de la somme deux par deux par expressions conjuguées.

Exemple 2 • Exprimer $\sin 5t$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

- Linéariser $\sin^5 x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Méthode : Comment calculer une somme de cosinus ou de sinus ?

- ▶ poser chaque cosinus (resp. chaque sinus) comme partie réelle (resp. imaginaire) d'un certain complexe
- ▶ calculer la somme de ces complexes par une formule (du binôme ou géométrique)
- ▶ prendre la partie réelle (resp. imaginaire) dans la formule trouvée.

Exemple 3 Démontrer la formule : $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$.

2.3.2 Formules de trigonométrie à connaître

Proposition 3 Pour tous a et b dans \mathbb{R} , on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

2.3.3 Formules de trigonométrie à savoir retrouver

Proposition 4 Pour tous p et q dans \mathbb{R} , on a :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Là où cela est bien défini en posant $t = \tan \frac{\theta}{2}$:

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque 2 De manière générale, lorsque l'on a une somme ou une différence de deux éléments de \mathbb{U} , il faut penser à factoriser par la demi-somme des angles (technique de l'arc moitié) :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times 2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \text{ et } e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times 2i \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

En particulier : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2.4 Équations trigonométriques

Méthode : Comment résoudre $\cos \theta = \alpha$, ou $\sin \theta = \alpha$ ou $\tan \theta = \alpha$?

- ▶ trouver une solution particulière θ_0
- ▶ donner directement les solutions :
 - $\cos \theta = \cos \theta_0 \iff \theta = \pm \theta_0 [2\pi]$
 - $\sin \theta = \sin \theta_0 \iff \begin{cases} \theta = \theta_0 [2\pi] \\ \theta = \pi - \theta_0 [2\pi] \end{cases}$
 - $\tan \theta = \tan \theta_0 \iff \theta = \theta_0 [\pi]$.

Méthode : Comment résoudre $a \cos \theta + b \sin \theta = c$?

- Lorsque $(a, b) = (0, 0)$, si $c = 0$, tout est solution et si $c \neq 0$, il n'y a aucune solution.
- Lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$:
 - ▶ poser $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
 - ▶ trouver un angle θ_0 tel que $\cos \theta_0 = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta_0 = \frac{b}{r}$
 - ▶ transformer l'équation selon :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \iff \cos(\theta - \theta_0) = \frac{c}{r}$$

- ▶ distinguer le cas $\left| \frac{c}{r} \right| > 1$ où il n'y a aucune solution et le cas $\left| \frac{c}{r} \right| \leq 1$ pour se ramener à une équation du type $\cos \Theta = \cos \Theta_0$.

Exemple 4 • Résoudre l'équation $\cos(2x) - \sin(2x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Résoudre l'équation $\sqrt{3} \sin(3x) + \cos(3x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 Arguments d'un nombre complexe

Définition 6 Étant donné un nombre complexe $z \neq 0$, on appelle **un argument de z** tout nombre réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. Par abus de notation, un argument de z est noté $\arg z$. En fait, si θ_0 est un argument de z , tous les arguments sont $\theta_0 + 2k\pi$, pour k décrivant \mathbb{Z} .

Définition 7 On appelle **argument principal** de z le seul argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Remarque 3 Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire d'une unique façon sous la forme :

$$z = r \cdot e^{i\theta}, \text{ où } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi].$$

Cette notation est appelée **notation exponentielle** : elle est très adaptée pour calculer produits, quotients et puissances entières d'un nombre complexe.

Proposition 5 Pour tous nombres complexes z et z' dans \mathbb{C}^* , on a :

$$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi] \text{ et } \arg \left(\frac{z'}{z} \right) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$$

Exemple 5 Soit $Z \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $e^z = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4 Équations algébriques dans \mathbb{C}

4.1 Équations $z^n = 1$, racines n -ièmes de l'unité

Définition 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racines n -ièmes de l'unité** les nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Théorème 2 L'ensemble \mathbb{U}_n contient exactement n éléments qui sont :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Exemple 6 On a :

$$\mathbb{U}_1 = \{1\}, \quad \mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{U}_3 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\} \text{ et } \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}.$$

On note dans toute la suite le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

4.2 Équations $z^n = a$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $z^n = a$?

- ▶ trouver une solution particulière z_0 en calculant $a = r \cdot e^{i\theta}$
- ▶ donner directement toutes les solutions $z = z_0 \times e^{2ik\pi/n}$, pour k entre 0 et $(n-1)$.

Exemple 7 Déterminer les racines 5-ièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

4.3 Cas particulier : équations $z^2 = a$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $z^2 = a$?

- si on peut mettre a sous la forme $a = r \cdot e^{i\theta}$, se reporter à la méthode précédente.
- sinon,
 - poser $a = \alpha + i\beta$ avec α et β réels
 - poser l'inconnue $z = x + iy$ avec x et y réels
 - éléver z au carré puis identifier parties réelle et imaginaire
 - rajouter l'équation : $|z|^2 = |a|$
 - calculer x^2 et y^2
 - utiliser une équation pour avoir les signes entre x et y .

Exemple 8 Déterminer les racines carrées de $\Delta = -15 + 8i$.

4.4 Équations du second degré

Méthode : Comment résoudre $az^2 + bz + c = 0$ lorsque $a \neq 0$?

- calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- trouver une solution δ_0 à l'équation : $\delta^2 = \Delta$ (méthode précédente)
- donner les solutions de $az^2 + bz + c = 0$: $z = \frac{-b \pm \delta_0}{2a}$.

Exemple 9 • Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

- Résoudre l'équation : $2iz^2 - 3z - 1 - 3i = 0$.

5 Interprétation géométrique des nombres complexes

5.1 Affixe d'un point, module et argument d'un complexe

Définition 9 On munit le plan \mathcal{P} d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout nombre complexe z , on peut associer le seul point M du plan \mathcal{P} de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$. Ce point sera noté $M(z)$. Réciproquement, à tout point M du plan \mathcal{P} , on peut lui associer le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de ses coordonnées et ainsi définir le nombre complexe $z = x + iy$. Ce nombre complexe sera appelé **l'affixe du point M** .

Proposition 6 On dispose des propriétés suivantes :

- pour tous $A(a)$ et $B(b)$ dans le plan, la longueur AB vaut $|b - a|$
- pour tous points $A(a), B(b), C(c), D(d)$ du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ vaut $\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)$.

Exemple 10 Soient a et b deux nombres complexes différents.

- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\frac{z - a}{z - b}$ soit un nombre réel positif.

- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\frac{z-a}{z-b}$ soit un nombre réel négatif.
- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\frac{z-a}{z-b}$ soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire positive.
- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\frac{z-a}{z-b}$ soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire négative.

Définition 10 Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle **disque ouvert de centre a et de rayon r** l'ensemble :

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

On appelle **disque fermé de centre a et de rayon r** l'ensemble : $\overline{D(a, r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$

5.2 Interprétations géométriques de transformations complexes

5.2.1 Applications $z \mapsto a \cdot z + b$

Méthode : Comment interpréter une transformation de la forme $f : z \mapsto a \cdot z + b$?

- si $a = 1$, la fonction f est la translation de vecteur d'affixe b .
- sinon,
 - mettre a sous forme exponentielle : $a = r \cdot e^{i\theta}$
 - trouver un point fixe ω en résolvant $z = a \cdot z + b$
 - la fonction f est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport d'homothétie r et d'angle de rotation θ .

Exemple 11 Interpréter géométriquement l'application $z \mapsto (1 + i)z + 2$.

5.2.2 Application $z \mapsto \pm\bar{z}$

Proposition 7 • L'application $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- L'application $z \mapsto -\bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.