Maths ULCR Victor Dubois

1 Enoncé

Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\forall a < b$ deux réels, on définit :

$$E_{a,b} = Vect\left(\left\{g_{\alpha,\beta} : \left\{\begin{array}{ccc} [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(\alpha x + \beta) \end{array}\right. , \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}\right)$$

Alors, montrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) $f \notin \mathbb{R}[X]$
(ii) $\forall a < b \in \mathbb{R},\ E_{a,b}$ est dense (pour la norme infinie) dans $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$

2 Déroulé de l'oral, commentaires

Examinateur très sympathique (jeune, brun avec des lunettes), assez fatigué. Il me prévient tout de suite qu'il ne dira rien pendant 10 minutes. Finalement, il n'a rien dit pendant toute ma démonstration de $\overline{(i)} \Rightarrow \overline{(ii)}$, à l'exception de quelques questions de cours ou lorsqu'il avait un doute sur ce que je voulais dire.

Pour démonstrer ce sens, il fallait trouver un intervalle et une fonction continue qui ne soit pas dans l'adhérence. Après quelques recherches infructueuses, j'ai fait cette méthode :

— $f \in \mathbb{R}[X]$, d°$f = n$. Par conséquent $E_{a,b}$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Je montre que $h : \left\{\begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(\frac{1}{x^2}) \end{array}\right.$ n'est pas dans l'adhérence (pour la norme infinie) de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est vrai parce que h change de signe très souvent.
Je pense que j'aurais pu le faire en moins de 20 minutes, mais c'était mon premier oral et j'étais assez mal à l'aise.

Ensuite, j'ai essayé $\overline{(ii)} \Rightarrow \overline{(i)}$, ce qui se fait très mal (procédé constructif difficile à mettre en place) : l'examinateur me suggère de montrer $(i) \Rightarrow (ii)$, et me donne l'indication : montrer que $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xf'(\alpha x + \beta) \end{array} \right.$ est dans l'adhérence de $E_{a,b}$, $\forall a < b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
C'est dommage, parce que j'ai eu une idée proche de celle qui fonctionne, mais je n'ai pas réussi à me débrouiller seul. Il m'a donc guidé jusqu'au moment où, comme je ne voyais toujours pas, il me conseille d'étudier :
$f((\alpha + h)x + \beta) - f(\alpha x + \beta)$
En remplaçant le h par un $\frac{1}{n}$, on obtient une suite de fonctions qui converge bien uniformément vers ϕ. A la fin de la démonstration de la cvu (par développement limité de f), il me remercie et me dit que l'oral est fini.