Problème n° 21 : Déterminants

Problème 1 – Déterminant d'une matrice circulante

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, et $C(a_0, \dots, a_n)$ la matrice (appelée « matrice circulante ») définie par :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, chaque ligne est obtenue par permutation circulaire de la précédente. Le but de ce problème est d'exposer trois méthodes de calcul du déterminant de la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Dans tout le problème, ω_i désigne la racine n-ième de l'unité $\omega_i = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$, et on notera $\omega = \omega_1$. On notera également P le polynôme $P = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j X^j$.

Question préliminaire

Exprimer $\det(C(a_1, \dots, a_{n-1}, a_0))$ en fonction de $\det(C(a_0, \dots, a_{n-1}))$.

Partie I – Utilisation des déterminants de Vandermonde

Soit $\Omega = (\omega_{i-1}^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Soit $(i,k) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que le coefficient $b_{i,k}$ de la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times \Omega$ est
$$b_{i,k} = \omega_{i-1}^{k-1} P(\omega_{k-1}).$$
2. En déduire que
$$\det(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_{k-1}).$$

Partie II – Méthode polynomiale

Soit Q le polynôme défini par :
$$Q(X) = \det(C(X, a_1, \dots, a_{n-1})).$$

1. Justifier que X est un polynôme de degré n.
2. Justifier que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, le polynôme Q est divisible par $X + \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j \omega_i^j$.
3. En factorisant Q, en déduire une nouvelle fois que
$$\det(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_i).$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas où les quantités $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j \omega_i^j$ *sont 2 à 2 distinctes.*

Partie III – Diagonalisation

Soit $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $J^k = C(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où le 1 est la $k+1$-ième coordonnée. En déduire une expression de $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ comme polynôme de J.
2. En considérant le polynôme $\det(J - XI_n)$, déterminer les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Ker}(J - \lambda I_n) \neq \{0\}$.
3. En déduire l'existence d'une matrice P inversible (qu'on ne demande pas nécessairement d'expliciter) telle que

$$J = PDP^{-1},$$

   D étant la matrice diagonale dont les coefficients sont les ω_i, $i \in [\![1, n-1]\!]$.
4. Exprimer $P^{-1}C(a_0, \ldots, a_{n-1})P$ et en déduire $\det(C(a_0, \ldots, a_{n-1}))$.