Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Écoles Normales Supérieures - MP

1. ***a)*** Soient E un ensemble, φ une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même croissante pour l'inclusion. Montrer que φ admet un point fixe.
b) Soient E et F deux ensembles, f une injection de E dans F, g une injection de F dans E. En considérant l'application qui à l'élément A de $\mathcal{P}(E)$ associe $E \setminus (g(F \setminus f(A)))$, montrer qu'il existe une bijection de E sur F.

2. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on note, pour n de $\mathbb{N}^*$, $L_u(n)$ l'ensemble des $(u_k, \ldots, u_{k+n-1})$ où k parcourt $\mathbb{N}$, et $P_u(n) = \operatorname{Card}(L_u(n))$.
a) Montrer : $P_u(n) \leqslant \operatorname{Card}(\mathcal{A}^n)$.
b) Pour tout ℓ de $\mathbb{N}$, on pose $\sigma_\ell(u) = (u_{n+\ell})_{n\in\mathbb{N}}$.
Donner deux inégalités liant $P_u(n)$ et $P_{\sigma_\ell(u)}(n)$.
c) Montrer que si u est périodique à partir d'un certain rang, $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.
d) On suppose la suite $(P_u(n))$ non strictement croissante. Montrer qu'elle est bornée, puis que u est périodique à partir d'un certain rang,
e) Que dire de la suite $(P_u(n))$ si elle est strictement croissante ?

3. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$. Établir l'existence d'une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe m dans $\mathbb{N}$ tel que n appartienne à $\displaystyle\bigcap_{k\geqslant m} A_{\varphi(k)}$ ou à $\displaystyle\bigcap_{k\geqslant m} \mathbb{N} \setminus A_{\varphi(k)}$.

4. On munit $E = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de sa structure de groupe additif : $a + b = (a_n + b_n)$ si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$. On note E^* l'ensemble des morphismes de groupes de E dans $\mathbb{Z}$. On note $e_k = (\delta_{k,n})_n$. Montrer que si un élément f de E^* est nul en chaque e_k, f est nulle.
Ind. On pourra considérer des suites du type $(p^n a_n)$.

5. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On définit $\varphi : \mathcal{P}(G) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ comme suit. Soit A incluse dans G ; on considère les parties B de A telles que pour tous éléments distincts b et b' de B, $b + b'$ n'est pas dans A ; on note $\varphi(A)$ le plus grand cardinal d'une telle partie B.
a) Déterminer $\varphi(A)$ si A est un sous-groupe de G.
b) Montrer que si A est la réunion de $k \in \mathbb{N}^*$ sous-groupes de G alors $\varphi(A) \leqslant k$.
c) Ici $G = \mathbb{Z}$. On suppose A incluse dans $\mathbb{N}^*$ et $\operatorname{Card}(A) = 2^k$ où k est un entier strictement positif. Montrer : $\varphi(A) \geqslant k + 1$.

6. Soit G un groupe fini de cardinal $n \geqslant 2$. Soit k un entier strictement positif. Soit $g = (g_1, \ldots, g_k)$ un élément de G^k ; on note $k = \nu(g)$; on note $A(g)$ l'ensemble des produits $g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ où $0 \leqslant s \leqslant k$ et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant k$, et $a(g) = |A(g)|$. On note E la réunion des G^k.
a) Soit g dans E tel que $A(g) = G$. Montrer que $\nu(g) \geqslant \log_2 n$.
b) Soit g dans E. Montrer l'existence de x dans G tel que, g' étant (g, x) :
$$1 - \frac{a(g')}{n} \leqslant \left(1 - \frac{a(g)}{n}\right)^2.$$
c) Établir l'existence de g dans E tel que $A(g) = G$ et $\nu(g) \leqslant \log_2(2n \ln n)$.

7. Soit σ dans $\mathcal{S}_n$. Déterminer la signature de la permutation μ_σ de $\mathcal{S}_n$ définie par : $\forall g \in \mathcal{S}_n$, $\mu_\sigma(g) = \sigma \circ g$.

8. Soit p un nombre premier. On admet que le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{F}_p$ est cyclique. Soit un entier $n > 0$. Pour tout Q de $\mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$ on pose

$S_n(Q) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{F}_p^n} Q(x_1,\dots,x_n)$.

a) Soit Q un élément de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré strictement inférieur à $p-1$. Montrer : $S_1(Q) = 0$.
b) On considère des polynômes de n variables $F_1,\dots,F_m$ sur $\mathbb{F}_p$ dont la somme des degrés est strictement inférieure à n.
On note $V = \left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{F}_p^n\ ;\ \forall i\in[\![1,m]\!], F_i(x_1,\dots,x_n) = 0\right\}$.
Montrer que p divise le cardinal de V. Montrer que si le terme constant de chaque F_i est nul, alors V contient un autre élément que $(0,\dots,0)$.
c) On suppose $n \geqslant 2$ et on donne des entiers $a_1,\dots,a_{2n-1}$. Montrer qu'il existe $i_1,\dots,i_n$ distincts tels que $a_{i_1}+\cdots+a_{i_n} \equiv 0 \bmod n$.
d) Prouver le résultat admis.

9. Soient p un nombre premier, $n_1,\dots,n_p$ des entiers strictement positifs. On note d le pgcd des n_i. Montrer que le polynôme $\dfrac{X^{n_1}+\cdots+X^{n_p}-p}{X^d-1}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

10. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{Z}[X]$ non constants.
a) On suppose que l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\ ;\ P(n) \mid Q(n)\}$ est infini. Montrer que P divise Q dans $\mathbb{Q}[X]$.
b) On suppose que, pour tout couple (a,b) d'entiers relatifs distincts, $P(b)-P(a)$ divise $Q(b)-Q(a)$. Montrer qu'existe H dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q = H(P)$.

11. Soit un entier $n \geqslant 2$.
a) Donner des réels $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ distincts tels que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les a_i est inversible.
b) Montrer qu'il existe une solution avec des a_i dans $[1,2]$.

12. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie non nulle. Soient u et v deux endomorphismes de E.
a) On pose $V(x,y) = (u(x),u(y))$ pour tout (x,y) de E^2. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel non trivial de E^2, stable par V et ne s'écrivant pas $F\times F'$ où F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u.
b) On suppose que les polynômes minimaux de u et de v sont premiers entre eux. On pose $V : (x,y)\in E^2 \mapsto (u(x),v(x))$. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E^2 stable par V est de la forme $F\times F'$ avec $F\subset E$ stable par u et $F'\subset E$ stable par v.

13. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Graphe(A) l'ensemble $\{(X,AX)\ ;\ X\in\mathbb{R}^n\}$.
a) Montrer que Graphe(A) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ et qu'il caractérise A.
b) À quelle condition un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ est-il le graphe d'une matrice ?
c) Soient $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et Rot_k l'isomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ qui échange les composantes selon e_k et f_k sans toucher aux autres. À quelle condition sur A existe-t-il une matrice A' telle que Graphe$(A') = \mathrm{Rot}_k(\text{Graphe}(A))$? Dans ce cas, calculer A'.
d) On note $\mathrm{Sweep}_k(A)$ la matrice A' de la question précédente. Que dire, sous réserve d'existence à chaque étape, de $\mathrm{Sweep}_1\circ\mathrm{Sweep}_2\circ\cdots\circ\mathrm{Sweep}_n(A)$?

14. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$ une matrice carrée réelle. On définit le permanent de A : $\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$. On suppose que tous les $a_{i,j}$ valent 0 ou 1 et on note k le nombre de $a_{i,j}$ nuls.
a) Montrer que si $k<n$ alors $\mathrm{perm}(A)>0$.
b) Montrer que si $k\leqslant n$ alors $\mathrm{perm}(A)\leqslant n!\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)$.

15. Soit $\mathbb{K}$ un corps.
a) Montrer l'équivalence entre : (i) $\mathbb{K}$ est algébriquement clos,
(ii) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, tout endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ admet un vecteur propre.
b) Montrer que deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui commutent ont un vecteur propre commun.

16. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ admettant exactement les mêmes sous-espaces stables. Montrer que u et v sont cotrigonalisables. Commutent-ils ?

17. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, u un endomorphisme de E et $x_1,\dots,x_{n+1}$ des vecteurs propres de u tels que, pour toute partie I de cardinal n de $\{1,\dots,n+1\}$, $(x_i)_{i\in I}$ soit libre. Que dire de u ?

18. Soient A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et x dans $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$. On munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\|\ \|$ et on pose, pour k dans $\mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{A^kx}{\|A^kx\|}$. Étudier la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$.

19. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

20. Donner un exemple de forme linéaire non continue.

21. Existe-t-il une norme N sur $\mathbb{R}^2$ telle que les seules isométries linéaires de $(\mathbb{R}^2, N)$ soient id et $-$ id ?

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les condition suivantes sont équivalentes :
i) A est une isométrie linéaire pour une norme N ;
ii) pour tout X de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{A^n X,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est borné ;
iii) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1.

23. Soient $n \geqslant 2$ un entier et f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
a) On suppose f surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas compact.
b) On suppose que f est convexe et que l'ensemble des zéros de f est un compact non vide. Montrer $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

24. On note $\overline{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue. À quelle condition existe-t-il $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue telle que $f = e^g$?

25. ***a)*** Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
b) Déterminer les morphismes continus de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

26. Soient a dans $\mathbb{R}$ et, pour n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n(an! - \lfloor an! \rfloor)$. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge si et seulement si $a \in (\mathbb{Q} + \mathbb{N}e)$.

27. Soit f une application bijective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, lipschitzienne et de réciproque lipschitzienne. Montrer que l'une des deux fonctions $x \mapsto f(x) - x$, $x \mapsto f(x) + x$ est bornée.

28. Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue et $(z_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$.
a) On suppose que (z_n) a exactement une valeur d'adhérence α. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
b) Que dire si (z_n) a exactement p valeurs d'adhérence $\alpha_1, \dots, \alpha_p$?

29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n)) \times \cdots \times \ln^{(k_n)}(n)$ où $\ln^{(k)}$ est le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $\ln^{(k)}(n) \geqslant 1$. Étudier la nature de la série de terme général $1/f(n)$.

30. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ bornée telle que, pour tout (x, y) de I^2, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

31. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout réel α, la fonction $g_\alpha\ : x \mapsto f(x + \alpha) - f(x)$ est polynomiale. Montrer que tous les polynômes $g_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$, ont même degré ou qu'ils sont tous constants

32. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{h \to +\infty} (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) = 0$. Montrer que f est affine.

33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\dfrac{\mathrm{d}^{2n+2}}{\mathrm{d}x^{2n+2}}(1 + x^2)^{n+1/2} = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)^2\right) (1 + x^2)^{-n-3/2}$.

34. Soient un entier $N \geqslant 2$ et $f : [1, N] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose : $\max |f'| < 1$ et $\min f'' > 0$. Montrer que le nombre de points à coordonnées entières du graphe de f est au plus égal à $1 + 2\,N^{2/3}$.

35. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note E_n l'ensemble des polynômes de degré $n - 1$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et on pose $\alpha_n = \inf\limits_{P \in E_n} \{\max\{|P(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
a) Montrer que $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$.
On définit deux suites $(P_n)_{n \geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ de polynômes en posant $P_0 = Q_0 = 1$ et, pour n dans $\mathbb{N}$: $P_{n+1} = P_n + X^{2^n} Q_n$ et $Q_{n+1} = P_n - X^{2^n} Q_n$.
b) Montrer que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$. Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n - 1} r_k X^k$ où les r_k ne dépendent pas de n et sont dans $\{-1, 1\}$.
c) Déterminer $\max\{|P_n(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
d) Montrer $\alpha_n = O(\sqrt{n})$.

36. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

37. ***a)*** Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
b) Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

38. Soit C l'algèbre des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Pour f dans C et $\delta > 0$, justifier l'existence de
$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \delta\}$.
Quelle est la limite de $\omega_f(\delta)$ lorsque δ tend vers 0 ?
b) Soit désormais $(T_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications linéaires de C dans C. On suppose que, pour f dans C à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et n dans $\mathbb{N}$, on a $T_n(f) \geqslant 0$. On suppose aussi que, pour la norme de convergence uniforme : $\forall f \in \{1, \sin, \cos\}$, $T_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$. Soient δ dans $]0, \pi/2[$, y dans $\mathbb{R}$ et $g_y\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto 1-\cos(x-y)$. Pour f dans C et n dans $\mathbb{N}$, montrer $|T_n(f - f(y)1)| \leqslant \omega_f(\delta)T_n(1) + \dfrac{2\|f\|_\infty}{1-\cos(\delta)}T_n(g_y)$. En déduire $T_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.

39. Soient S un segment de longueur > 0, f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit l'espace C des fonctions continues de S dans $\mathbb{R}$ de la norme uniforme. On note V_f le sous-espace de l'espace C engendré par les fonctions $f_{a,b}\ :\ x \mapsto f(ax+b)$ avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et b dans $\mathbb{R}$. Décrire l'adhérence de V_f dans C.

40. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$B_n(f)\ :\ x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $T^0(f) = f$ et $T^k(f) = B_n(T^{k-1}(f))$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\left\|T^k(f) - B_1(f)\right\|_\infty \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

41. On admet le théorème suivant. *Si une série entière a un rayon de convergence infini et si sa somme est bornée sur $\mathbb{C}$ alors cette somme est constante.*
On note G l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues telles que, pour tout $\alpha \geqslant 0$, $t \mapsto e^{\alpha|t|}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour f dans G, x réel, on pose $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{ixt}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que G n'est pas réduit à la fonction nulle.
b) Soit f dans G. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Soient f dans G, a réel, z complexe. On pose $\varphi_a(z) = \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{iz(t-a)}f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que φ_a est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et bornée sur le demi-plan $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.
d) Soit f dans G telle que $\hat{f} = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)}f(t)\mathrm{d}t$ est nul pour tous a, z. En déduire que φ_a est, pour tout a, bornée sur $\mathbb{C}$.
e) Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

42. On note E l'ensemble des $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continûment dérivables et bornées. Soit a un réel strictement positif. Si $f \in E$, on considère $(\mathcal{E}_f)$ l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$.
a) Exprimer les solutions de $(\mathcal{E}_f)$. Montrer qu'une et une seule de ces solutions est dans E ; on la note $\Phi(f)$.
b) Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de E. Déterminer les valeurs propres de Φ.
c) Soit f dans E, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $\Phi(f)$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$.

43. Soient f dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{-*})$ et (E) l'équation différentielle $x'' + f(t)\,x = 0$ sur $[0,1]$.
a) Décrire la structure de l'ensemble des solutions de (E), rappeler le théorème de Cauchy linéaire, mettre le système différentiel associé à (E) sous forme matricielle.
b) Montrer que si x est solution de (E) et vérifie $x(0) = x(1) = 0$ alors $x = 0$.
c) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute solution x de (E), on ait :
$\varepsilon^2 \displaystyle\int_0^1 x(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_0^1 x'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)\,x(t)^2\,\mathrm{d}t$.

44. Soit un réel positif ε. On note f_ε une solution du problème de Cauchy :
$(Q_\varepsilon)\quad y'' = y + \varepsilon y'^2\,;\, y(0) = 1, y'(0) = 0$. Étudier l'erreur $\Delta_\varepsilon = f_\varepsilon - f_0$.

45. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ F(x) = f\left(\|x\|^2\right)x$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

46. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie de $\mathbb{N}^*$. On dit que A est à sommes distinctes si, pour toutes parties I et J de A, $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j \Rightarrow I = J$. On note $f(n)$ le cardinal maximal d'une partie A à sommes distinctes incluse dans $\{1, \ldots, n\}$.
a) Montrer que $f(n) \geqslant \log_2(n) + O(1)$.
b) Montrer que $f(n) \leqslant \log_2(n) + \log_2(\log_2(n)) + O(1)$.
c) En considérant $X \subset A$ un sous-ensemble aléatoire uniforme de A, montrer que
$f(n) \leqslant \log_2(n) + \dfrac{1}{2}\log_2(\log_2(n)) + O(1)$.

47. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Soit S une partie finie non vide de $\mathbb{K}$, $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur S. Montrer que $P\left(Q(U_1, \ldots, U_n) = 0\right) \leqslant \dfrac{d}{|S|}$.

48. On considère des variables aléatoires réelles X, Y, Z, discrètes. On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $X + Z$.
a) Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
b) Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
c) Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?
d) Et si X, Y et Z sont indépendantes ?

49. Soit $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et telles que $P(\varepsilon_n = -1) = P(\varepsilon_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$.

50. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On suppose $X_1 + X_2 \sim 2X$. Montrer que X est presque sûrement constante.

51. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice aléatoire $M_n = (X_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n})$, où les $X_{i,j}$ sont des variables de Rademacher indépendantes, $P(X_{i,j} = 1) = P(X_{i,j} = -1) = 1/2$.
a) Calculer $E(\det(M_n))$ et $V(\det(M_n))$.
b) Que dire des lois de $\det(M_n)$ et $-\det(M_n)$?
c) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on pose $Y = {}^tA\,A$. Montrer : $\det Y \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Y_{i,i}$.
d) Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que, quand $n \to +\infty$, $P(|\det M_n| = n^{n/2}) = \mathcal{O}(a^n)$.
e) Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $P(|\det M_n| \geqslant n^{n/2-\varepsilon})$?

52. Soient σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, C_n la variable aléatoire donnant le nombre de cycles de σ_n.
a) Montrer que l'on peut écrire $C_n \sim (X_1 + \cdots + X_n)$, où, pour tout i, X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $1/i$ et où les X_i sont mutuellement indépendantes.
b) En déduire que C_n est concentré autour de $\ln(n)$.

53. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, M la matrice $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On note r_n l'espérance du rang de M. Déterminer un équivalent de r_n, puis un développement asymptotique à deux termes de r_n lorsque $n \to +\infty$.

54. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X = 0) > 0$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires $X_i^n, 1 \leqslant i \leqslant n$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, i.i.d., telles que $X \sim (X_1^n + \cdots + X_n^n)$.
a) Donner un exemple de variable aléatoire infiniment divisible. Donner un exemple de variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X = 0) > 0$ et non infiniment divisible.
b) Montrer que X est infiniment divisible si et seulement si G_X peut s'écrire sous la forme $z \mapsto p_0 \exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} b_i z^i\right)$ où p_0 et les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}^+$ et $\sum b_i$ converge.
c) Interpréter de manière probabiliste le résultat de la question précédente.

55. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, à support fini, non constante presque sûrement. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Montrer l'existence de c_1 dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_1}{\sqrt{n}} \leqslant \sup\{P(S_n = k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
b) Montrer que $P(S_n = k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(E(e^{itX})\right)^n e^{-ikt}\mathrm{d}t$.

c) Montrer l'existence de c_2 dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{P(S_n = k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \leqslant \dfrac{c_2}{\sqrt{n}}$.

56. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On pose $\Phi_X : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto E\left(e^{-\lambda X}\right)$. Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.

57. Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{K}_{=n}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_{<n}[X]$) l'ensemble des polynômes de degré égal (resp. strictement inférieur) à n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit P_n (resp. Q_n) une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathbb{K}_{=n}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_{<n}[X]$) ; on suppose P_n et Q_n indépendantes. Calculer l'espérance du nombre d'étapes dans l'algorithme d'Euclide relatif à (P_n, Q_n).

58. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur le groupe $\mathcal{S}_n$.
a) Montrer que $P(X_nY_n = Y_nX_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
b) Donner une expression de $P(X_nY_n = Y_nX_n)$.

59. On définit la notion de graphe $G = (S, A)$ où S est l'ensemble des sommets et $A \subset \{\{x, y\}; (x, y) \in S^2$ avec $x \neq y\}$ est l'ensemble des arêtes. On dit que deux graphes sont isomorphes s'il existe un bijection entre les deux ensembles de sommets qui respecte les arêtes. Soit $p \in\ ]0, 1[$. On prend $S = \mathbb{N}$. On considère des graphes sur $\mathbb{N}$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $x \neq y$, l'arête $\{x, y\}$ est présente avec probabilité p fixée, les variables de Bernoulli associées à ces paires étant supposées indépendantes.
a) Soient $p, p' \in]0, 1[$ et G_p, $G_{p'}$ deux variables aléatoires qui vérifient la loi précédente pour les paramètres respectifs p et p'. Montrer que, presque sûrement, G_p et $G_{p'}$ sont isomorphes.
b) Montrer qu'il est presque sûr que, pour toute partition (N_1, N_2) de $\mathbb{N}$, le graphe de G_p induit sur N_1 ou celui induit sur N_2 est isomorphe à G_p.

Écoles Normales Supérieures - PC

60. Soit $E = \left\{u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})\ ;\ u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 1\right\}$. Si u appartient à E, on pose
$J(u) = \displaystyle\int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right)$. Déterminer $\inf\{J(u),\ u \in E\}$.

61. ***a)*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $u : x \mapsto f(x, x)$ et $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$. Calculer u'. Calculer la différentielle de g en (a, b).
b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que f est α-homogène si et seulement si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$. Montrer que f est α-homogène si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.
c) Déterminer les $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(z - y)\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + (x - z)\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + (y - x)\,\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

62. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X \geqslant t) \leqslant P(Y \geqslant t)$.
a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ croissante et bornée, on a $E\left(h(X)\right) \leqslant E\left(h(Y)\right)$.
b) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si $\lambda \leqslant \mu$.
c) On suppose X et Y indépendantes et $X \prec Y$. Montrer que $P(X \leqslant Y) \geqslant 1/2$.

École Polytechnique - MP

63. ***a)*** Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $x^2 = x$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est commutatif.
b) Montrer que la conclusion subsiste si on suppose que $x^4 = x$ pour tout $x \in A$ ou bien si on suppose que $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.

64. ***a)*** Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
b) Montrer que tout groupe abélien fini est isomorphe au produit direct de groupes cycliques dont les cardinaux sont des puissances de nombres premiers.

65. Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ et $M = \sup\left\{\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n e_i z_i\right|,\ (e_1, \ldots, e_n) \in \{-1, 1\}^n\right\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |z_i| \leqslant 2M$.

66. ***a)*** Trouver les P de $\mathbb{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.

b) Trouver les F de $\mathbb{C}(X)$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.

67. Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A+kB$ soit inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour tout k de $\{0,\dots,4\}$. Montrer que $A+5B$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

68. Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V)$ un morphisme d'algèbres. Montrer que n divise $\dim V$ et qu'il existe une base β de V telle que, pour toute A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Mat}_\beta(\Phi(A)) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A \end{array}\right)$.

69. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si h est un nombre réel, soit τ_h l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ de translation par h : si f est dans $\mathcal{C}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$. Déterminer les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}$ stables par tous les τ_h.

70. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

71. Soit $A : [0,1] \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une fonction continue. Étudier la convergence de la suite de terme général $E_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(I_d + \frac{1}{n}A\big(k/n\big)\Big)$.

72. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2 \to 0$. Montrer que soit $u_n \to 0$, soit $u_n \to +\infty$.

73. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\tan n}{n}$ ne converge pas vers 0.
Ind. On utilisera la décomposition en fraction continue de $\pi/2$ dont on admettra qu'il existe une infinité de réduites dont le dénominateur est impair.

74. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels $\geqslant 0$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, la série de terme général b_n converge et la série de terme général na_n diverge.
a) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k} + b_n$.
b) Montrer que la suite (u_n) est bornée.
c) On suppose que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

75. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que
$\|f'\|_\infty \leqslant \dfrac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \dfrac{b-a}{2}\|f''\|_\infty$.

76. Soient M et R dans $\mathbb{R}^{+*}$, $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels telle que, pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, $|v_{p,q}| \leqslant \dfrac{M}{R^{p+q}}$.
a) Justifier l'existence de $v(t,x) = \displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} v_{p,q} t^p x^q$ pour $|t| < R$ et $|x| < R$.
b) Montrer que l'équation différentielle $x'(t) = v(t, x(t))$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 et vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

77. Soient $n \geqslant 2$ un entier, X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, non certaines, indépendantes, telles que $X \sim Y + Z$ si et seulement si n n'est pas premier.

78. ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Montrer que, pour tout $x > 0$, $P\left(|X - E(X)| \geqslant x\sqrt{n}\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{x^2}$.
b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et X une variable aléatoire discrète, centrée et à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que $\forall s > 0$, $E(e^{sX}) \leqslant e^{s^2(b-a)^2/8}$.

c) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, réelles bornées et indépendantes. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels tels que, pour tout i, $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\forall t > 0$, $P(S_n - E(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(\dfrac{-2t}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$. Comment peut-on majorer $P(S_n - E(S_n) \leqslant -t)$?

79. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P\Big(\dfrac{S_n}{n} > r\Big) \leqslant e^{-nr^2/2}$.

80. On note ℓ^1 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$. Pour $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ dans ℓ^1, soit $N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

a) Montrer que (ℓ^1, N) est un espace normé.

b) Soit $\mathcal{P}$ la partie de ℓ^1 constituée des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$. On se donne par ailleurs une suite double $(P_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P_{i,j} = 1$. Justifier, pour $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ dans ℓ^1, la définition de (uP) dans ℓ^1 telle que, pour tout j dans $\mathbb{N}$: $(uP)_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i P_{i,j}$.

c) On suppose dans la suite qu'existe c dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathcal{P}$ tels que, pour tout (i,j) de $\mathbb{N}^2$, $P_{i,j} \geqslant c\, w_j$. Montrer que $c \leqslant 1$. Que dire si $c = 1$?

d) Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ dans ℓ^1 telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$. Montrer : $N(uP) \leqslant (1-c)N(u)$.

e) Montrer qu'il existe une unique u dans $\mathcal{P}$ telle que $uP = u$.

Écoles Polytechnique - ESPCI - PC

81. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$. Montrer que f ne s'annule pas.

82. Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $2 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant n$. On munit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soient $E_1 = \{k \in \{1, \dots, n\},\ p_1 \,|\, k\}$ et $E_2 = \{k \in \{1, \dots, n\},\ p_2 \,|\, k\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si n s'écrit sous la forme $n = k\, p_1 p_2 + \ell p_1$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant \ell p_1 < p_2$.

Mines-Ponts - MP

83. Que dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2 + A - I_n$?

84. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Étudier la suite $\Big(N(A^k)^{1/k}\Big)_{k\geqslant 1}$.

85. On pose $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$.

a) Montrer que $u_n \to +\infty$.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n$.
d) Montrer que $u_n = o(n)$.
e) Donner un équivalent de u_n.

86. Soient a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle telle que $x_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a}{(x_1 \dots x_n)^{1/n}}$.

a) Déterminer la limite de (x_n).
b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{x_n}{\ln n}$.

87. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer le développement en série entière de $\varphi_\alpha :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(\alpha \arccos(x))$.
b) Pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est-elle polynomiale ?

88. Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t+t^2)^n}\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

89. Étudier $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(tx)}{t\,\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$: domaine de définition ($x \in \mathbb{R}$), caractère $\mathcal{C}^\infty$, équivalents aux bornes.

90. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

91. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
a) Soient A_1 et A_2 dans $\mathcal{T}$. Calculer $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$.
b) Soient $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathcal{T}$. On pose $\Gamma = \left\{A_1, \overline{A_1}\right\} \times \cdots \times \left\{A_n, \overline{A_n}\right\}$. Calculer
$$\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right).$$

Mines-Ponts - PSI

92. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe des suites v, w respectivement croissante et décroissante telles que $u = v + w$.

93. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, avec $f \circ g$ décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

94. Soit $p \in \mathbb{R}$. Déterminer selon p l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^p(x)}{\cos^p(x) + \sin^p(x)}\mathrm{d}x$.

95. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$, où x est un réel.
a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Étudier sa continuité.
b) Trouver un équivalent de S en 0.

96. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f = 0$.
c) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Mines-Ponts - PC

97. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels $\geqslant 0$. On suppose qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}^+$ tels que $\alpha + \beta < 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n$. Montrer que $x_n \to 0$.

Centrale - MP

98. ***a)*** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
b) Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on note $p(n)$ le plus grand diviseur premier de n et on note $E = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ;\ p(n) < p(n+1) < p(n+2)\}$
Soit q un nombre premier différent de 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = q^{2^n} - 1$ et $v_n = q^{2^n} + 1$.
Montrer que $(u_n \notin E) \iff (p(u_n) \geqslant q$ ou $p(v_n) \leqslant q)$.
c) Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n \Rightarrow \left(\dfrac{v_n}{2}\right) \wedge \left(\dfrac{v_m}{2}\right) = 1$.
d) En déduire que E est infini.

99. PYTHON. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère le développement en base 2 de n : $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n} 2^k$ où k_n est dans $\mathbb{N}$, les $\varepsilon_{k,n}$ sont dans $\{0,1\}$ et $\varepsilon_{k_n,n} = 1$. On pose $L(n) = 2^{k_n}$ et $S(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n}$. On fixe α dans $\mathbb{R}^{+*}$.
a) Écrire les fonctions L et S en PYTHON.
b) Écrire en PYTHON une fonction d'argument (N, α) calculant la somme partielle à l'ordre N de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{L(n)^\alpha S(n)}$.

c) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $b_n = 2^n a_{2^n}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum b_n$ converge.

d) Pour quelles valeurs de α la série $\sum \dfrac{1}{L(n)^\alpha S(n)}$ converge-t-elle ?

100. ***a)*** Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(-x)$.
b) On donne $\alpha \in]-1, 1[$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière au voisinage de tout point telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

101. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, t^k \mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t + \ln(n)} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k I_k}{(\ln(n))^{k+1}}$.

b) On suppose qu'existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_0 = \cdots = I_{p-1} = 0$ et $I_p \neq 0$. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^p}{(\ln(n))^{p+1}} I_p$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sum a_n$ converge.

102. PYTHON. Aux cinq sommets d'un pentagone sont postés des joueurs de discoplane. Au début du jeu, deux des joueurs, voisins immédiats, ont entre les mains un discoplane. Ils envoient le discoplane à gauche ou à droite, et les receveurs font de même à l'étape suivante. Le jeu s'arrête lorsque deux discoplanes sont entre les mains d'un même joueur. On note T la variable aléatoire qui numérote l'étape à laquelle le jeu s'arrête.
a) Estimer numériquement $E(T)$.
b) Soit $n \geqslant 1$. On note a_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de voisins immédiats à l'étape n, b_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de joueurs non voisins immédiats (et différents) à l'étape n. On pose $A(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ et $B(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) z^n$ à l'aide de $A(z)$ et de $B(z)$.
c) Conclure. Généraliser au polygone à $2p + 1$ côtés.

103. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dispose $n + 1$ boules blanches et noires dans une urne. On note X_0 la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant initial. On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On effectue alors l'opération « tirage-remplacement » suivante. On tire deux boules de l'urne. Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans l'urne ; si elles sont de la même couleur, on les remplace par une boule noire et une boule blanche. On itère ce « tirage-remplacement » et on note X_k la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches à l'issue de la k-ième opération.
a) Montrer, par un argument de symétrie, que l'espérance de X_k est constante.
b) On pose $U_k = {}^t(P(X_k = 1), \ldots, P(X_k = n))$. Construire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} = AU_k$.
c) Montrer que la suite (A^n) est convergente.

104. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, soient $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(nx)^k}{k!}$, $f_n(x) = e^{-nx} P_n(x)$.
a) Écrire une fonction $P(n, x)$ qui renvoie la valeur $P_n(x)$. Vérifier que $P_7(0.1) = 2.0137348$.
b) Tracer le graphe de la restriction de f_n à $[0, 2]$ pour quelques valeurs de n. Conjecturer un résultat relatif à la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$. Montrer que, pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geqslant n$: $n^{k-n} \leqslant \dfrac{k!}{n!}$. En déduire $0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant e^{-nx} \dfrac{(nx)^n}{n!(1-x)}$. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, 1[$.

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$. Montrer que $k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1] \mapsto \dfrac{(nx)^k}{k!}$ est croissante, puis que $f_n(x) \leqslant n e^{-nx} \dfrac{(nx)^n}{n!}$.
Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $]1, +\infty[$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer les relations

$u_n = 1 - e^{-n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$, puis $1 - 2u_n = \frac{e^{-n} n^n}{n!}(a_n + b_n - c_n)$ où on pose, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\lambda_{n,k} = \frac{n^{k-n} n!}{k!}$, $a_n = \sum_{k=2n}^{+\infty} \lambda_{n,k}$, $b_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \lambda_{n,k}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,k}$.

f) Avec les notations précédentes, montrer, si $k \geqslant 2n$, $\lambda_{n,k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2n+1}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.