DM n° 8 : Études de fonctions, fonctions usuelles

Correction de l'exercice 1 – (Étude d'une fonction)

On définit la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. La fonction f est définie sur $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$. Les fonctions $y \mapsto |y|$ et $y \mapsto \sqrt{y}$ étant dérivables (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement), ainsi que l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}}$.
   On a donc la continuité sur ce domaine. Les fonctions valeur absolue et racine étant aussi continues en 0, on récupère aussi la continuité en -2. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$
   Montrons que f n'est pas dérivable en -2. Pour cela, formons le taux d'accroissement. Pour tout $h \in]-1,1[$ non nul, on a :
   $$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = e^{\frac{1}{h-2}}\frac{\sqrt{|h-2|}}{\sqrt{|h|}} \times \operatorname{sgn}(h),$$
   où $\operatorname{sgn}(h)$ est le signe de h égal à 1 ou -1. Cette expression n'admet pas de limite lorsque h tend vers 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en -2. Le $\boxed{\text{domaine de dérivabilité de } f \text{ est donc } \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}}$.
   Par ailleurs, le taux d'accroissement ci-dessus admet des limites infinies à gauche et à droite :
   $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = +\infty$$
   Donc $\boxed{f \text{ n'est dérivable ni à droite ni à gauche en } -2}$. On peut également dire qu'on a des demi-tangentes verticales à gauche et à droite en -2 (toutes les deux étant dirigées vers le haut).
2. On exploite l'indication, nous incitant à considérer la dérivée logarithmique. La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$. On peut donc la composer par ln, et f étant de plus dérivable sur ce domaine, il en est de même de $\ln\circ f$. On a alors, en dérivant $\ln\circ f$ (et en sortant au préalable la racine sous forme d'un coefficient $\frac{1}{2}$) :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x(x+2)}$$
   Remarquez que les valeurs absolues ne nous gênent plus dans ce calcul, puisque $x \mapsto \ln|x|$ se dérive sur tout son domaine en $x \mapsto \frac{1}{x}$; il reste alors seulement à composer par $x \mapsto x(x+2)$.
   Une mise sur le même dénominateur amène :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}, \quad \boxed{f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}f(x)}.$$
   On obtient alors le tableau de variations suivant, complété des limites obtenues dans la question suivantes.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2-2\sqrt{2}}$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$	↗	$+\infty$

3. • En $-\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to 1$, donc la limite est donnée par la racine, et on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

- De la même façon, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Lorsque $x \to 0^-$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- Lorsque $x \to 0^+$, par croissances comparées $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} \to +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- La seule demi-tangente possible aux bornes du domaine est à gauche en 0. L'expression de la dérivée et l'utilisation des croissances comparées nous assure de la même manière que $f'(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, on a une $\boxed{\text{demi-tangente horizontale à gauche en } 0}$.
  On peut préciser ce résultat au regard de la question 8 : après prolongement par continuité à gauche en 0, f est dérivable à gauche de dérivée à gauche nulle en 0.
- On a déjà montré qu'on a des $\boxed{\text{demi-tangentes verticale vers le haut en } -2}$.

4. - Étude d'une asymptote en $+\infty$.
     On calcule dans un premier temps une limite de $\frac{f(x)}{x}$:

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   On a alors, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} - x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{x(x+2)} - x \right) + x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1), \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2x}{\sqrt{x(x+2)} + x} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} + 1 = 2. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe une asymptote } (D) \text{ en } +\infty, \text{ d'équation } y = x + 2.}$
   Lorsque nous disposerons d'outils plus efficaces (DL), ce calcul semblera plus naturel. Pour le moment, l'idée est de se ramener à des limites remarquables, quitte à contraindre un peu notre expression en lui ajoutant et retranchant des termes.
   - Étude d'une asymptote en $-\infty$.
     On refait un peu la même chose. La limite de $\frac{f(x)}{x}$ se fait de même, à part qu'il ressort un signe $-$ du quotient $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.
     On a alors, pour tout $x < -2$:

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} + x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{x(x+2)} + x \right) - x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1), \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2x}{\sqrt{x(x+2)} - x} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-2}{1+1} - 1 = -2, \end{aligned}$$

     la dernière égalité provenant de la simplification par $-x = |x| = \sqrt{x^2}$.
     Ainsi, $\boxed{\text{la droite } (D') : \ y = -x - 2 \text{ est asymptote à la courbe en } -\infty.}$

5. On calcule le signe de $f(x) - (x+2)$, en utilisant l'inégalité de convexité classique pour l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f(x) - (x+2) &= \sqrt{x+2} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x} - \sqrt{x+2} \right) \\ &\geqslant \sqrt{x+2} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} - \sqrt{x+2} \right) = \sqrt{x+2} \cdot \frac{x + 1 - \sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

   Or, $(x+1)^2 - x(x+2) = 1 > 0$, donc

$$\forall x > 0, \quad f(x) - (x+2) > 0.$$

   La courbe est donc $\boxed{\text{au-dessus de son asymptote sur }]0, +\infty[.}$

6. De même :

$$\begin{aligned}\forall x < -2, \quad f(x) + (x+2) &= \sqrt{-(x+2)}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{-x} + \sqrt{-(x+2)}\right) \\ &\geqslant \sqrt{-(x+2)}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{-x} - \sqrt{-(x+2)}\right) \\ &= \sqrt{-(x+2)} \cdot \frac{x+1-\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{-x}} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, f est aussi au-dessus de son asymptote en $-\infty$ sur $]-\infty, -2[$.

7. On étudie la concavité de f en calculant la dérivée seconde :

$$\forall x \neq -2, 0, \quad f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2(x+2)}\right)^2 f(x) + \frac{2x^3(x+2) - (3x^2+4x)(x^2-2)}{(x^2(x+2))^2} f(x).$$

Après simplifications, on trouve :

$$\forall x \neq -2, 0, \quad f''(x) = \frac{2(x^2+4x+2)f(x)}{x^4(1+x)^2}.$$

Ainsi, le signe de $f''(x)$ est donné par celui de x^2+4x+2, strictement négatif sur $]-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}[\backslash\{-2\}$, et positif ou nul ailleurs.

Ainsi, f est :
- convexe sur $]-\infty, -2-\sqrt{2}[$,
- concave sur $]-2-\sqrt{2}, -2[$
- convexe sur $]-2, -2+\sqrt{2}[$,
- concave sur $]-2+\sqrt{2}, 0[$
- concave sur $]0, +\infty[$.

On a deux points d'inflexion, en $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$. Les pentes des tangentes en ces points ont une expression assez peu intéressante, et toute personne saine d'esprit passe ce calcul...

8. On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle R_n (donc un quotient de deux polynômes) tel que pour tout $x \neq -2, 0$, on ait :

$$f^{(n)}(x) = R_n(x)f(x).$$

L'initialisation est évidente pour $n = 0$, et les calculs précédents montrent que notre conjecture est vraie pour $n = 1$ (ce qu'on utilisera dans le calcul suivant) et $n = 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que pour tout $x \neq 0, -2$, on a $f^{(n)}(x) = R_n(x)f(x)$. Alors,

$$f^{(n+1)}(x) = R_n'(x)f(x) + R_n(x)f'(x) = (R_n'(x) + R_n(x)R_1(x))f(x).$$

En posant $R_{n+1} = R_n' + R_nR_1$, on obtient bien ce qu'on veut (il s'agit bien d'une fraction rationnelle).
Ainsi, d'après le principe de récurrence, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = R_nf$, sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable à gauche en 0 et $f_g^{(n)}(0) = 0$.
Pour $n = 0$, cela provient de la définition du prolongement.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est n fois dérivable à gauche en 0 et que $f_g^{(n)}(0) = 0$. On forme alors le taux d'accroissement (à gauche en 0) de la dérivée n-ième à gauche (égale à la dérivée n-ième lorsque $x \neq 0$). Ainsi, pour $-2 < h < 0$:

$$\frac{f_g^{(n)}(h) - f_g^{(n)}(0)}{h} = \frac{R_n(h)}{h}\sqrt{|h(h+2)|}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}.$$

Comme dans les calculs de limite précédents, le comportement de l'exponentielle est plus fort que celui de la fraction rationnelle (en particulier du pôle 0), donc ce taux d'accroissement tend vers 0 lorsque h tend vers 0^-.
Ainsi, f est $n+1$ fois dérivable à gauche, et $f_g^{(n+1)}(0) = 0$
On a bien montré que f est infiniment fois dérivable à gauche en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_g^{(n)}(0) = 0$.

9. Sans le tracé des tangentes et points d'inflexion, on obtient la courbe de la figure 1.

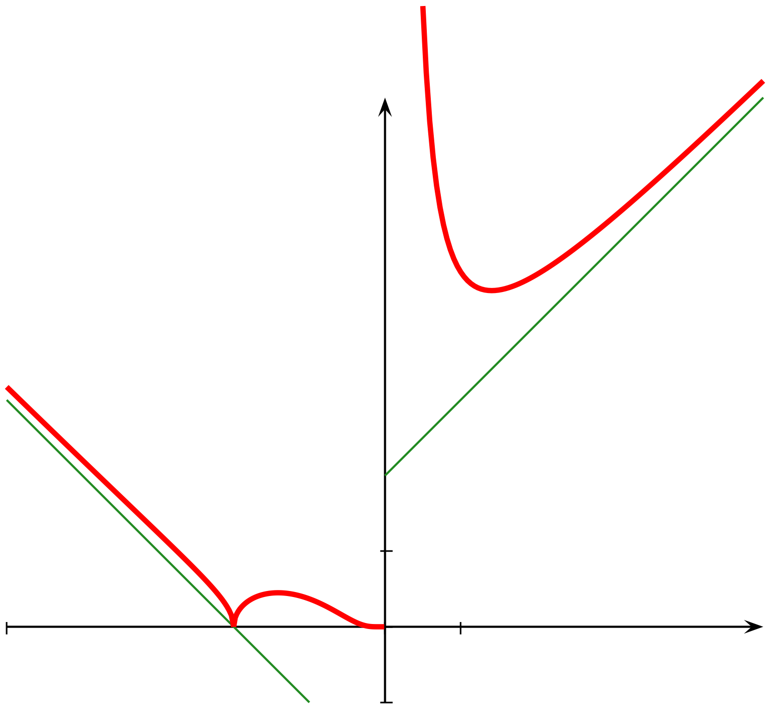

Figure 1 – Graphe de Φ

Correction du problème 1 – Formule de Machin et calcul de π

Dans ce problème, on démontre la formule de John Machin (1706) :

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

et on montre comment cette formule peut être utilisée pour le calcul approché de π. On s'intéresse ensuite à l'existence d'autres formules de type « Machin » reliant 2 arctangentes ou plus.

Partie I – Formule de Machin

On pose $\theta = \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$

1. D'après la formule d'addition pour la tangente :

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2/5}{1-\frac{1}{25}} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan(2\theta) = \frac{5}{12}}.$$

   On refait de même :

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{10/12}{1-\frac{25}{144}} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan(4\theta) = \frac{120}{119}}.$$

   Ainsi, une nouvelle application de la formule d'addition amène :

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(4\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}}.$$

2. Or, $\theta \geqslant 0$, donc $4\theta - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{2}$, et

$$\operatorname{Arctan}(\theta) = \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

   de quoi on déduit que $\theta < \frac{\pi}{6}$, par croissance de l'Arctan. Ainsi,

$$4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $4\theta - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et par conséquent, l'égalité obtenue dans la question 1 équivaut à :

$$4\theta - \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{239} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239}}.$$

3. On propose ci-dessous une autre présentation de cette démonstration, passant par l'utilisation des nombres complexes.

   (a) Par définition, on a :
   $$a + \mathrm{i}\,b = r e^{\mathrm{i}\arg(z)} = r\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\,r\sin(\arg(z)),$$
   où r est le module de z. Ainsi, a étant non nul (et donc aussi r), on a :
   $$\frac{b}{a} = \frac{r\sin(\arg(z))}{r\cos(\arg(z))} = \tan(\arg(z)),$$
   ce qui donne bien :
   $$\boxed{\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \mod \pi}$$

   (b) On calcule :
   $$(5+\mathrm{i})^4 = 625 + 4\,\mathrm{i} \times 125 - 6 \times 25 - 4\,\mathrm{i} \times 5 + 1 = 476 + 480\,\mathrm{i}\,.$$
   D'un autre côté :
   $$2(239+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2(239 - 1 + (239+1)\,\mathrm{i}) = 476 + 480\,\mathrm{i}\,.$$
   Ainsi, on a bien $\boxed{\dfrac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}} = 2 \times (1+\mathrm{i})}$.
   On en déduit, en passant aux arguments, que
   $$4\arg(5+\mathrm{i}) - \arg(239+\mathrm{i}) \equiv \arg(1+\mathrm{i}) \mod \pi,$$
   et d'après la question précédente :
   $$\boxed{4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}},$$
   l'égalité étant obtenue par le fait déjà prouvé que $4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ainsi que $\text{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

Partie II – Calcul approché de π

On montre dans cette partie comment la formule de Machin peut être utilisée pour calculer une valeur approchée de π. On note f la fonction Arctan.

1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a, d'après l'expression de la dérivée de Arctan et la formule de sommation des séries géométriques (ici avec une raison $-x^2$) :
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}}.$$

2. On a alors :
$$\left|f'(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\right|, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\left|f'(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}.$$

3. Étant donné $x \in [0,1[$, l'inégalité précédente est valable pour tout $t \in [0,x[$, et on peut donc l'intégrer entre 0 et x :
$$\int_0^x \left|f'(t) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{\mathrm{d}t} \leqslant \int_0^x x^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant x^{2n+3}.$$
On pourrait gagner un facteur $2n+3$ en nous dispensant de l'avant dernière majoration.

Terminons notre raisonnement en utilisant l'inégalité triangulaire sur le terme de gauche :

$$\int_0^x \left| f'(t) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right| \,\mathrm{d}t \geqslant \left| \int_0^x f'(t)dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k} \,\mathrm{d}t \right| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|.$$

On obtient bien au final :

$$\boxed{\left| \operatorname{Arctan}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant x^{2n+3}}$$

4. • L'inégalité $\left| 16 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 16 \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ est vérifiée dès lors que $\frac{16}{5^{2n_0+3}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut donc prendre

$$\boxed{n_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{32}{\varepsilon}\right)}{\ln(5)} - 3 \right) \right\rceil}.$$

De même, il suffit de prendre :

$$\boxed{m_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)}{\ln(239)} - 3 \right) \right\rceil}$$

pour assurer la seconde inégalité.

• Pour $\varepsilon = 10^{-15}$, on trouve $\boxed{n_0 = 11 \text{ et } m_0 = 2}$. Ainsi, le calcul de 12 termes de la première somme et 3 de la seconde nous fournit une approximation à 10^{-15} près de π. C'est plutôt rapide !

• Pour $\varepsilon = 10^{-100}$, on trouve $\boxed{n_0 = 72 \text{ et } m_0 = 20}$, ce qui est encore raisonnable, mais déjà moins agréable à calculer à la main (ce qui nous fait beaucoup admirer John Machin).

5. Attention à la gestion des erreurs. Pour obtenir π à ε près, il faut obtenir $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\varepsilon}{4}$ près.

```
def Arctangente(N,eps):
    """ Calcule Arctan(1/N) à eps près """
    S = 0
    x = 1/N
    n = 1
    sg = 1
    while x > eps:
        S += sg * x / n
        sg *= -1
        n += 2
        x /= N*N
    return S

def machin(eps):
    """ Calcule pi par la formule de Machin """
    return 4 * (4 * Arctangente(5,eps / 32) - Arctangente(239,eps / 8))

print(machin(1e-15))
```

On trouve la valeur 3.141592653589793, remarquablement correcte (seule la dernière décimale diffère de 1, ce qui n'est pas étonnant du fait des erreurs d'arrondi dans les calculs, que nous avons négligés dans nos calculs d'erreur).

Partie III – D'autres formules de type « Machin »

1. (a) On a $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5(1+\mathrm{i})$, donc, en passant aux arguments :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}}.$$

(on obtient d'abord une congruence modulo π, mais il n'est pas dur de vérifier que la somme des deux arctangentes est nécessairement dans $]0, \frac{\pi}{2}[$)

(b) On adapte la méthode de la partie 1, en utilisant la formule de sommation des tangentes :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1,$$

et comme ci-dessus, chacun des deux arctangentes est dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, donc leur somme est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, d'où :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}.$$

2. Un peu répétitif...

(a)
- On a $(2+\mathrm{i})^2 = 3+4\,\mathrm{i}$ et $(7+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 6+8\,\mathrm{i} = 2(3+4\,\mathrm{i})$. Ainsi,

$$\frac{(2+\mathrm{i})^2}{7+\mathrm{i}} = 2(1+\mathrm{i}),$$

et en passant aux arguments,

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

(là encore du fait que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et $\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} < \operatorname{Arctan} 12$, ce qui assure que le membre de gauche est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.)

- On retrouve la même formule par les formules de trigonométrie. Tout d'abord,

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

d'où

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{25/21}{25/21} = 1.$$

On applique l'arctangente avec les mêmes justifications que dans le premier point, ce qui donne :

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}.$$

(b) Und so geht es immer weiter...

-

$$(3+\mathrm{i})^2 * (7+\mathrm{i}) = 50(1+\mathrm{i}),$$

d'où, en passant aux arguments,

$$2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi.$$

Chacune des arctangentes étant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, la somme des 3 est dans $]0, \frac{3\pi}{4}[$, donc la seule valeur possible est :

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

- On trouve dans un premier temps

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \frac{2/3}{1-1/9} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi,

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} 17\right) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{25/28}{25/28} = 1.$$

Le même argument que plus haut permet alors de conclure que

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

3. Nous adoptons la technique complexe :

$$(2+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})(8+\mathrm{i}) = 65(1+\mathrm{i}),$$

et on conclut facilement que

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} 15 + \operatorname{Arctan} 18 = \frac{\pi}{4}},$$

les trois arctangentes étant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, ce qui nous autorise à reprendre la justification de la question précédente. Pour qu'une formule de Machin converge bien, il faiut que la raison des termes géométriques intervenant dans la somme soit petite. ce n'est pas le cas des formules de cette partie, qui sont donc moins bonnes de la formule de Machin proprement dite. Les formules données en fin de sujet sont en revanche meilleures !

Les calculs à la main pour montrer la formule de Gauss ne sont pas complètement impossibles, mais je n'ai personnellement pas envie de m'y coller. Le type complexe de Python est insuffisant pour s'en sortir (car les coefficients sont flottants et trop grands pour être exprimés de façon exacte). On peut s'en sortir en réécrivant la multiplication de nombres complexes à l'aide des entiers longs.

```
def multiplication(a,b,c,d):
    """ multiplication de deux complexes longs """
    return(a*c - b * d, a*d + b * c)

def puissance(a,b,n):
    """ puissance d'un complexe long
    non optimisé: on pourrait faire une exponentiation rapide!"""
    c,d = 1,0
    for i in range(n):
        (c,d) = multiplication(a,b,c,d)
    return (c,d)

(a,b)= puissance(18,1,12)
(c,d)=puissance (57,1,8)
(e,f)=multiplication(a,b,c,d)

(a,b)= puissance(239,1,5)
(g,h) = multiplication(a,b,1,1)

print(e,f)
print(g,h)

print(divmod(e,g))
print(divmod(f,h))
```

On obtient le résultat suivant :

```
90999755288124084472656250000 94889190101623535156250000000
763361275208 795988219200
(119209289550781250, 0)
(119209289550781250, 0)
```

Les deux dernières lignes nous assurent que les deux expressions obtenues diffèrent bien d'un facteur multiplicatif réel positif (et même entier). Plus précisément, on a montré, avec un peu d'aide :

$$(18+\mathrm{i})^{12}(57+\mathrm{i})^8 = 119209289550781250(239+\mathrm{i})^5(1+\mathrm{i}),$$

ce qui permet de conclure, au moins modulo π (il faut ensuite contrôler l'ordre de grandeur des Arctan, ce qui peut se faire en remarquant que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$).

Correction du problème 2 – Etude d'une fonction réciproque

PARTIE I – Étude de g

1. **Variations de** g.

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction polynomiale. Sa dérivée est :

$$f'(t) = 3t^2 + 1.$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et y est toujours positive. D'où le tableau de variation de f :

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminons les points d'inflexion de f. Pour cela, étudions la dérivée seconde : $f''(t) = 6x$. Ainsi, f'' s'annule en 0, est négative pour $t < 0$ et positive pour $t > 0$ (elle change donc de signe en 0).

Ainsi, $\boxed{\text{0 est un point d'inflexion, et } f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_- \text{ et convexe sur } \mathbb{R}^+}$.

(b) Voir figure 2. La pente de la tangente au point d'inflexion $(0, 0)$ est $f'(0) = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente en ce point d'inflexion est $\boxed{y = x}$.

(c) Comme f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est continue et strictement croissante. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle image $f(\mathbb{R})$. D'après les valeurs des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, cet intervalle image est $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une $\boxed{\text{fonction réciproque } g}$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par définition, g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{g^3(x) + g(x) = x}. \tag{1}$$

(d) f étant strictement croissante et impaire, sa réciproque $\boxed{g \text{ est aussi strictement croissante et impaire}}$
Puisque g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, son image est $\mathbb{R}$. Comme elle est croissante, elle admet des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Si par exemple en $-\infty$, cette limite est $\ell > -\infty$, on obtient, par croissante, $g(\mathbb{R}) \subset [\ell, +\infty[$, ce qui contredit $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$ et de même $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

(e) D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule pas, sa récirpoque g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le cours nous assure même que $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ également}}$. On obtient alors l'expression de la dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{3g^2(x) + 1}. \tag{2}$$

- g étant croissante et négative sur $\mathbb{R}_-$, g^2 est décroissante et positive, donc g' est croissante.
- De la même manière, on montre la décroissance de g' sur $\mathbb{R}_+$.
- Les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, et la valeur en 0 amènent sans difficulé les valeurs des limites et extrema de g'.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Les variations de g' permettent de conclure que $\boxed{g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_- \text{ et concave sur } \mathbb{R}_+}$. En particulier, la courbe admet un $\boxed{\text{unique point d'inflexion en } 0}$.

(f) On l'a justifié dans la question précédente.

(g) Voir figure 2. On obtient le graphe de g en prenant le symétrique du graphe de f par la droite d'équation $y = x$.
Les résultats précédents sur g (variations, limites, points d'inflexion) se déduisent bien de cette symétrie !

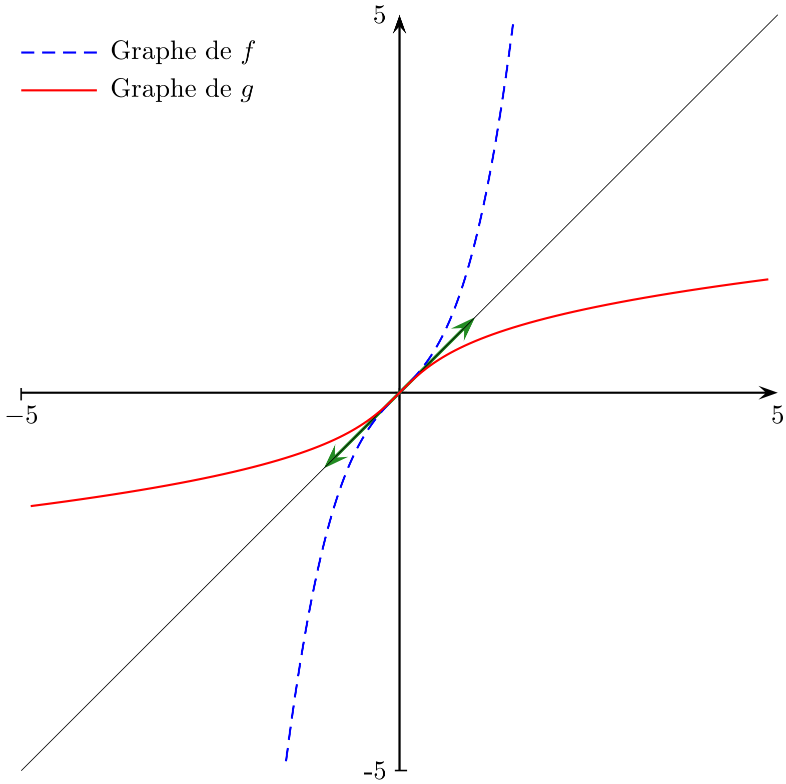

FIGURE 2 – Graphes de f et de g

2. **Étude de** g' – Certaines propriétés de g' ne se déduisent pas de f'.

   (a) Comme $f^{(3)} = 6$, $f^{(3)}$ ne s'annule pas et par conséquent, $\boxed{f' \text{ n'a pas de point d'inflexion}}$.

   (b) Le point essentiel est de réussir à se ramener à un intervalle fermé borné afin de pouvoir utiliser le théorème de compacité.

   Si α est constante sur $[a, +\infty[$, le résultat est évident (tout point convient).

   Sinon, soit $x \in]a, +\infty[$ tel que $\alpha(x) \neq \alpha(c)$ et soit $y = \dfrac{\alpha(x) + \alpha(c)}{2}$. La valeur y est strictement comprise entre $\alpha(x)$ et $\alpha(c)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction α étant supposée continue, il existe $x_1 \in]c, x[$ et $x_2 \in]x, +\infty[$ tels que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = y$. La fonction α étant continue sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$, elle y admet un maximum et un minimum (théorème de compacité). Puisque $x \in [x_1, x_2]$ et $\alpha(x) \neq y$, soit le maximum, soit le minimum est obtenu en au moins un point de $]x_1, x_2[$, et est donc un extremum local de α sur l'ouvert $]x_1, x_2[$, donc aussi sur $[a, +\infty[$. Attention, ce raisonnement ne serait pas valable pour un extremum sur le bord !

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \in]a, +\infty[\text{ tel que } \alpha \text{ présente un extremum local en } c.}$

   (c) On calcule g'' en dérivant (2) : D'après le théorème de composition des limites, g admettant des limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} g''(x) = \lim_{t \to -\infty} \frac{-6t}{(3t^2 + 1)^3} = 0, \varepsilon \lim_{x \to +\infty} g''(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(0) = 0.$$

   En appliquant la question précédente à g'' sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, on trouve $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$ tels que g'' admet un extremum local en c_1 et en c_2 (pour c_1 on utilise la propriété symétrique à celle de la question précédente, en $-\infty$). Ceci équivaut bien à dire que g' admet un point d'inflexion en ces points.

   Ainsi, $\boxed{g' \text{ admet au moins deux points d'inflexion.}}$

   On pouvait aussi répondre à cette question par l'étude des variations de $g'' = h \circ g$, avec $h(t) = \dfrac{-6t}{(3t^2 + 1)^3}$.
   Comme g est bijective strictement croissante, cela revient à étudier les variations de h. Or,

$$h'(t) = \frac{-6(3t^2 + 1)^3 + 6t(18t(3t^2 + 1)^2)}{(3t^2 + 1)^6} = \frac{-6(3t^2 + 1) + 108t^2}{(3t^2 + 1)^4} = \frac{90t^2 - 6}{(3t^2 + 1)^4}.$$

Ainsi, $h'(t)$ est du signe de $15t^2-1$. h change donc de sens de variation en $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ et en $+\frac{1}{\sqrt{15}}$. On en déduit que g'' change de sens de variation en $g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)<0$ et en $g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)>0$. Ces deux valeurs correspondent à des points d'inflexion de g'. On peut même les expliciter puisque $g^{-1}=f$.

3. **Étude locale et asymptotique de g**

(a) La relation $\underset{a}{\sim}$ est clairement reflexive et symétrique. Par ailleurs, si $f\underset{a}{\sim}g$ et $g\underset{a}{\sim}h$, on considère un voisinage V de a sur lequel aucune des 3 fonctions ne s'annule (en prenant l'intersection de voisinages convenables sparément pour chacune des fonctions). On a alors

$$\forall x\in V,\quad \frac{f(x)}{h(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{g(x)}{h(x)}\longrightarrow 1.$$

Ainsi, $f\underset{a}{\sim}h$, donc $\underset{a}{\sim}$ est transitive.

Ainsi, $\boxed{\underset{a}{\sim}\text{ est une relation d'équivalence}}$.

(b) On peut utiliser la définition de la dérivée, la fonction g étant dérivable en 0 :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad \frac{g(x)}{x}=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\longrightarrow g'(0)=1.$$

On obtient bien, par définition, $\boxed{g(x)\underset{0}{\sim}x.}$

(c) On peut élever un équivalent à une puissance d'exposant constant (revenir au quotient : le cube d'une expression tendant vers 1 tend encore vers 1 !). Ainsi, $g^3(x)\underset{0}{\sim}x^3$

En utilisant la relation de la question 1(c), il vient donc :

$$\forall x\neq 0,\quad \frac{g(x)-x}{-x^3}=\frac{g(x)^3}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1.$$

Ainsi, $\boxed{g(x)-x\underset{0}{\sim}-x^3}$

(d) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, g est négligeable devant g^3 en $+\infty$:

$$\frac{g(x)}{g^3(x)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi,

$$\frac{g(x)^3+g(x)}{g(x)^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1\qquad\text{soit:}\qquad\frac{x}{g(x)^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1,\qquad\text{puis:}\qquad\frac{x^{\frac{1}{3}}}{g(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

Ainsi $\boxed{g(x)\underset{+\infty}{\sim}x^{\frac{1}{3}}}$

(e) La fonction h est définie par la formule : $h(x)=\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}}-1$. Cette formule a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. Ainsi, h est bien définie. De plus, d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}}=1,\qquad\text{donc}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}h(x)=0}.$$

(f) D'après (1), pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$x(1+h(x))^3+x^{\frac{1}{3}}(1+h(x))=x,\qquad\text{soit}\qquad x^{\frac{2}{3}}(1+h(x))^3+1+h(x)=x^{\frac{2}{3}}$$

Ainsi, $x^{\frac{2}{3}}((1+h(x))^3-1)=-(1+h(x))\underset{+\infty}{\sim}-1$ puisque $h(x)$ tend vers 0. Par ailleurs, d'après le cours,

$$\frac{(1+u)^\alpha-1}{u}\underset{u\to 0}{\longrightarrow}\alpha,$$

donc, puisque $h(x)\to 0$ en $+\infty$,

$$(1+h(x))^3-1\underset{+\infty}{\sim}3h(x)$$

On en déduit, que

$$3x^{\frac{2}{3}}h(x)\underset{+\infty}{\sim}-1,\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}h(x)=-\frac{1}{3}}.$$

4. **Étude d'une primitive de g**

(a) Tout d'abord, remarquons que G est bien définie, car g est continue. Faisons le changement de variables proposé $u = f(t)$, possible puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$. Les bornes en u sont $u_1 = 0$ et $u_2 = x$, ainsi, les bornes en t sont

$$t_1 = f^{-1}(u_1) = g(u_1) = g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad t_2 = f^{-1}(u_2) = g(u_2) = g(x).$$

De plus, la relation entre les différentielles est : $\mathrm{d}u = f'(t)\ \mathrm{d}t$ Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_0^x g(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{g(x)} g(f(t))f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{g(x)} t \cdot f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{g(x)} (3t^3 + t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{4} \cdot t^4 - \frac{1}{2} \cdot t^2\right]_0^{g(x)} = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x).$$

On obtient donc : $\boxed{G = \frac{3}{4}g^4 - \frac{1}{2}g^2}$

(b) On commence par la parité. La fonction g étant impaire,

$$G(-x) = \frac{3}{4} \cdot g^4(-x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(-x) = \frac{3}{4} \cdot (-g(x))^4 - \frac{1}{2} \cdot (-g(x))^2 = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x) = G(x)$$

Ainsi, $\boxed{G \text{ est pair}}$.
Par définition, la dérivée de G est g, qui est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $\boxed{G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

(c) La limite de g en 0 est 0. Ainsi, $g^4(x) = o(g^2(x))$ au voisinage de 0. Par conséquent,

$$\boxed{G(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot g^2(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x^2}.$$

La limite de g est $+\infty$ en $+\infty$, ainsi $g^2(x) = o(g^4(x))$ au voisinage de $+\infty$, et par conséquent

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot g^4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}}.$$

PARTIE II – Approximation rationnelle de g

1. **Construction de l'algorithme d'approximation**

- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t est :

$$Y = (X - t)f'(t) + f(t) = (X - t)(3t^2 + 1) + t^3 + t = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3.$$

L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $Y = x$ vérifie donc :

$$x = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}}.$$

- Par conséquent, par définition de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, cette suite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}}.$$

Cette relation d'ordre 1, et la condition initiale $\boxed{u_0(x) = x}$ déterminent entièrement la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **Étude graphique d'un exemple.** On note u_n pour $u_n(1)$. Voir figure 3.

3. **Étude de l'algorithme**

(a) On calcule $\varphi(g(x))$: $\varphi(g(x)) = \dfrac{2g^3(x) + x}{3g^2(x) + 1} = g(x) \cdot \dfrac{2g^3(x) + x}{3g^3(x) + g(x)}$. Or, d'après la relation (1),

$$2g^3(x) + x = 2x - 2g(x) + x = 3x - 2g(x), \qquad \text{et de même,} \qquad 3g^3(x) + g(x) = 3x - 2g(x).$$

Ainsi, $\boxed{\varphi(g(x)) = g(x)}$.

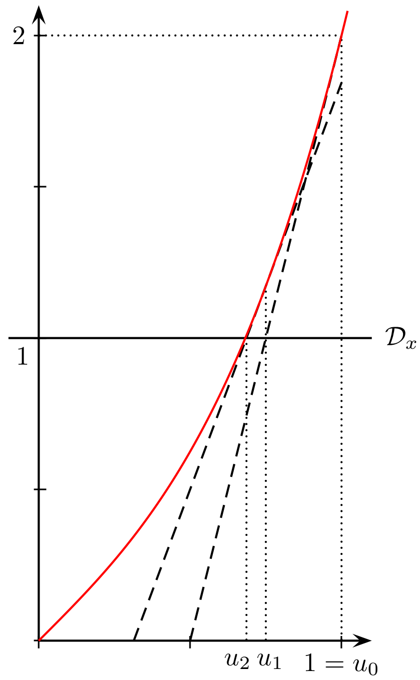

FIGURE 3 – Premières valeurs de $u_n(1)$

(b) $t - \varphi(t) = t - \dfrac{2t^3 + x}{3t^2 + 1} = \dfrac{t^3 + t - x}{3t^2 + 1} = \dfrac{f(t) - x}{3t^2 + 1}$. Ainsi, le signe de $\boxed{t - \varphi(t) \text{ est celui de } f(t) - x}$.

(c) La fonction φ, définie sur $\mathbb{R}_+$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2+1) - 6t(2t^3+x)}{(3t^2+1)^2} = \frac{6t^4 + 6t^2 - 6tx}{(3t^2+1)^2} = \frac{6t(f(t) - x)}{(3t^2+1)^2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{le signe de } \varphi' \text{ est celui de } f(t) - x \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

Tout d'abord, l'intervalle $[g(x), x]$ n'est pas vide, car d'après la partie I, $g(x) \leqslant x$. Par ailleurs, par définition de g, on a $f(g(x)) = x$, et omme f est croissante, pour tout $t \in [g(x), x]$, $f(t) \geqslant x$. Comme φ' est du signe de $f(t) - x$, on en déduit que φ' est positive sur $[g(x), x]$, donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [g(x), x]}$.

(d) φ est croissante sur $[g(x), x]$. Ainsi

$$\varphi([g(x), x]) \subset [\varphi(g(x)), \varphi(x)].$$

On a montré plus haut que $\varphi(g(x)) = g(x)$. Par ailleurs,

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 + x}{3x^2 + 1} = x \cdot \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 1} \leqslant x \cdot \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} = x.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi([g(x), x]) \subset [g(x), x]}$.

(e) Soit $t \in [g(x), x]$. On a déjà montré dans la question 3c que $f(t) - x \geqslant 0$, donc $t^3 + t - x \geqslant 0$. De plus $t - x \leqslant 0$, donc $t^3 + t - x \leqslant t^3$. Par conséquent, pour tout $t \in [x, g(x)]$:

$$0 \leqslant \varphi'(t) = \frac{6t(t^3 + t - x)}{(3t^2+1)^1} \leqslant \frac{6t^4}{(3t^2+1)^2} \leqslant \frac{6t^4}{(3t^2)^2} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{2}{3}}.$$

4. **Étude de la convergence**

(a)
- $u_0(x) \in [g(x), x]$. Comme cet intervalle est stable par φ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$, on en déduit par une récurrence immédiate que $u_n(x) \in [g(x), x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Puisque $u_1(x) \in [g(x), x]$ et $u_0(x) = x$, on a $u_1(x) \leqslant u_0(x)$. La croissance de φ permet de propager cette inégalité aux rangs suivants par une récurrence immédiate : si $u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x)$, en appliquant la fonction croissante φ, et d'après la relation satisfaite par les $u_n(x)$, on obtient $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

- Comme elle est aussi minorée par $g(x)$, elle converge. Puisque φ est continue, sa limite ℓ vérifie $\ell = \varphi(\ell)$, c'est-à-dire :
$$\ell = \frac{2\ell^3 + x}{3\ell^2 + 1},$$
ou encore :
$$3\ell^3 + \ell = 2\ell^3 + x, \qquad \text{d'où} \qquad \ell^3 + \ell = x.$$
La fonction $t \mapsto t^3 + t$ étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $t^3 + t = x$ admet une unique solution. Cette solution est par définition $g(x)$. Ainsi, $\boxed{\ell = g(x)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction φ est continue sur $[g(x), u_n(x)]$, dérivable sur $]g(x), u_n(x)[$, et φ' est compris entre 0 et $\frac{2}{3}$ sur $[g(x)u_n(x)] \subset [g(x), x]$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,
$$0 \leqslant \varphi(u_n(x) - \varphi(g(x)) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x)) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x))}.$$

(c) Soit $x \in [0, a]$. L'inégalité de la question précédente donne, par une récurrence immédiate :
$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0(x) - g(x)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - g(x)) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n x \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$
Ainsi, cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \in [0, a]$, il en résulte que
$$\boxed{\beta_n = \sup_{x \in [0,a]} (u_n(x) - g(x)) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a}.$$

(d) On part de la seconde expression :
$$(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \frac{g^3(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{x - g(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{2t^3 + x - (3t^2 + 1)g(x)}{3t^2 + 1},$$
puis enfin : $\boxed{(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \varphi(t) - g(x).}$

(e) Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = \dfrac{3t}{3t^2 + 1}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Elle est impaire : il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$$\psi'(t) = \frac{(3t^2 + 1) - 6t(3t)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{3 - 9t^2}{(3t^2 + 1)^2}.$$
On en déduit les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Ainsi, g admet un maximum égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et un minimum égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour déterminer ses points d'inflexion et sa convexité, on calcule la dérivée seconde (calculs à votre charge !) :
$$\psi''(t) = \frac{54(t^3 - t)}{(3t^2 + 1)^3}.$$
On en déduit le tableau de signe de φ'' :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\psi''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

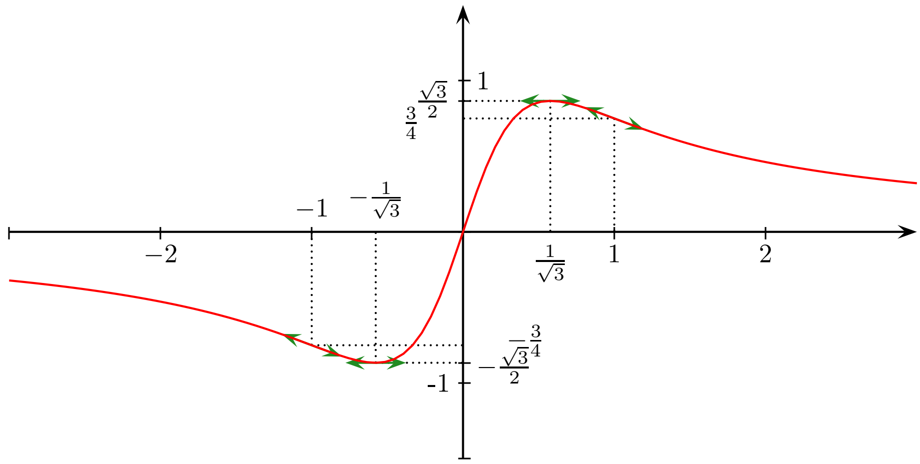

FIGURE 4 – Graphe de ψ

Ainsi, ψ est concave sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,1]$, et est convexe sur $[-1,0]$ et sur $[1,+\infty[$. Elle admet trois points d'inflexion en -1, 0 et 1. On en déduit le tracé de la courbe de ψ (figure 4)

Evidemment, cette étude complète est inutile ici, seule la valeur des extrema nous intéresse.

(f) • Si $t \in [g(x),x] \subset \mathbb{R}_+$, $g(x) \leqslant t$, et donc, d'après la question 4d,

$$\varphi(t) - g(x) \leqslant (t-g(x))^2 \frac{3t}{3t^2+1},$$

et comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant \frac{3t}{3t^2+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'après l'étude précédente, on en déduit que pour tout $t \in [g(x),x]$:

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(t-g(x))^2.$$

• En particulier, étant donné $n \in \mathbb{N}$, pour $t = u_n(x)$, on obtient :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x)-g(x))^2. \tag{3}$$

• On montre maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (u_0(x)-g(x))^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (x-g(x))^{2^n}. \tag{4}$$

Initialisation : Pour $n=0$, les deux termes de l'inégalités sont égaux.
Hérédité : Supposons la prépriété vérifiée au rang n. Ainsi, la relation (4) est satisfaite pour cette valeur de n. De plus, (3) est satisfaite. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) &\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x)-g(x))^2 \\ &\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}(x-g(x))^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^{n+1}-1}(x-g(x))^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (x-g(x))^{2^n}.}$$

- De plus, d'après la relation (1), $x - g(x) = g^3(x)$; comme $u_n(x) \in [g(x), x]$, on en déduit que $x - g(x) \leqslant u_n(x)^3$. On obtient donc :

$$\boxed{0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n - 1} u_n(x)^{3 \cdot 2^n}}.$$

(g) L'inégalité précédente ne permet de contrôler la convergence que lorsque $u_n^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. C'est pour cette raison qu'on se limite à l'intervalle $[0, 1]$.

```
import math

def phi(t,x):
    return (2 * t**3 + x) / (3 * t**2 + 1)

def g(x,err):
    u = x
    m = math.sqrt(3) / 2
    majorant = 1
    n = 0
    while majorant * (u ** (3 * 2 ** n)) > err:
        u = phi(u,x)
        n+=1
    return(u)
```

On peut même faire un tracé de la courbe sur $[0, 1]$, en utilisant les fonctions du module `matplotlib` :

```
import matplotlib.pyplot as plt

absc = []
ordo = []
for i in range(101):
    x = i * 0.01
    absc.append(x)
    ordo.append(g(x,1e-10))
plt.plot(absc,ordo)
plt.grid()
plt.savefig('pb_cnt017.eps')
plt.show()
```

On obtient le tracé suivant :