

Exercices d'oraux : électromagnétisme

Electromagnétisme 1

(CCP)

1. Etude faire en cours. On montre que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$
2. Le théorème de Gauss montre que $\vec{E} = \vec{0}$ si $r < a$ et $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} \vec{u}_r$ où h est la hauteur du cylindre.
3. $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ donc V est constant pour $r < a$. $V(r) = -\frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0} \ln r + C^{\text{te}}$ pour $r > a$.

Electromagnétisme 2

(CCP)

Il faut déterminer le potentiel créé par un fil (pour cela, on trouve le champ $E \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$ avec le théorème de Gauss puis on intègre en $V = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln r$). On a alors pour 2 fils

$$V = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Après un passage en polaire et quelques développements limités, on obtient

$$V = \frac{\lambda a \cos \theta}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Il faut alors représenter les équipotentielles $V = C^{\text{te}}$. Ce sont des courbes d'équation polaire $r = A \cos \theta$ qui sont des cercles de diamètre A passant par l'origine. Utiliser l'antisymétrie de la distribution pour affiner les équipotentielles.

Electromagnétisme 3

(CCP)

1. On calcule $\vec{B}(r, z)$ dans le tore avec le théorème d'Ampère. Le plan de la feuille est plan de symétrie donc \vec{B} est selon \vec{u}_θ . Le théorème d'Ampère donne alors

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On calcule le flux à travers le tore : $\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 a i}{\pi} \ln \frac{a+d}{a-d}$ et

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{a+d}{a-d}$$

2. On calcule alors le champ créé par le fil infini et son flux à travers le tore (calcul quasi identique en fait). Il vient

$$M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \frac{a+d}{a-d}$$

3. Le schéma electrocinétique du tore est une fem en série avec une résistance. La fem vaut

$$e = -\frac{d(Mi' + Li)}{dt} = Ri$$

En régime sinusoïdal forcé (après un temps cours de l'ordre de L/R) $i(t)$ est sinusoïdal à la pulsation ω . On passe en complexe pour résoudre

$$I = \frac{-j\omega M}{R + jL\omega} I'$$

4. La valeur efficace est donc

$$I_0 = \frac{M\omega I'_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

L'intérêt de ce dispositif est de mesurer I' sans placer d'ampèremètre dans le circuit parcouru par I' .

Electromagnétisme 4 (CCP)

1. L'onde incidente est décrite par

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

Cette onde donne naissance à une onde réfléchie qu'on se propose de déterminer.

La condition limite est fixée par la relation de passage $\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = \vec{0}$ soit $\vec{E}(0) = 0$.

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$$

2.

$$\vec{E} = 2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{u}_y$$

On n'écrit surtout pas la relation de structure d'une OPP pour le champ magnétique car l'onde est stationnaire mais

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = 2E_0/c \cos \omega t \cos kx \vec{u}_z$$

On constate que le champ magnétique n'est pas nul en $x = 0$. Cela prouve la présence de courants surfaciques :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_z$$

3. Le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 4 \frac{E_0}{\mu_0 c} \sin \omega t \sin kx \cos \omega t \cos kx \vec{u}_x$$

Il est nul en valeur moyenne ce qui traduit le fait que l'onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.

Electromagnétisme 5 (CCP)

Bien sûr, orienter le circuit ! Dans le bilan mécanique, on remarque des ressorts verticaux. Penser alors à écrire le PFD à l'équilibre puis en mouvement et soustraire pour éliminer g . On obtient alors

$$m \frac{dv}{dt} = -2k(\ell - \ell_{eq}) + iBa$$

L'équation électrique est

$$2L \frac{di}{dt} = -vBa$$

Pour injecter l'équation électrique dans l'équation mécanique, il faut d'abord dériver cette dernière par rapport à t pour faire apparaître $\frac{di}{dt}$. On obtient alors

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{2k}{m} + \frac{B^2 a^2}{2mL} \right) v = 0$$

Electromagnétisme 6 (CCP)

1.

$$i(x + dx) = i(x) - dC \frac{\partial v}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial v}{\partial t}$$

2.

$$v(x + dx) = v(x) - dL \frac{\partial i}{\partial t} - dRi$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t} - \rho i$$

3. En réalisant l'opération demandée et en substituant, on obtient :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \gamma \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \rho \gamma \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

qui diffère de l'équation de D'alembert du fait du dernier terme.

La relation de dispersion est alors

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \rho \gamma i \omega$$

Le vecteur d'onde k sera donc complexe et la propagation s'accompagnera d'une absorption. La vitesse de phase $\omega/\text{Re}(k)$ dépendra de ω et la propagation sera dispersive.**Electromagnétisme 7**

(CCP)

1. On utilise l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -(n_+(x) - n_-(x)) \frac{q}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2 \frac{n_0 q}{\epsilon_0} \operatorname{sh} \frac{qV}{k_B T}$$

2. On suppose $qV(x)/k_B T \ll 1$ donc on peut linéariser l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} V = 0$$

on obtient en intégrant

$$V(x) = V_0 e^{-x/D}$$

$$3. \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = \frac{V_0}{D} e^{-x/D} \vec{u}_x \text{ et } \sigma = \epsilon_0 E(0) = \frac{\epsilon_0 V_0}{D}$$

Electromagnétisme 8

(CCP)

Malgré les apparences cet exercice est facile... Il suffit de faire un dessin pour remarquer qu'en P, \vec{E} est nul selon \vec{u}_y . Cela signifie que le champ créé par A sur y (appelons le E_{Ay}) est opposé au champ créé par B (appelé E_{By}). On connaît q_A donc le champ créé par A et on pourra donc en déduire le champ créé par B et finalement q_B .

$$E_{Ay} = \frac{q_A \sin \theta_A}{4\pi \epsilon_0 A P^2}$$

La carte de champ permet de déterminer AP et θ_A angle que font (AB) et (AP). On fait de même pour E_{By} et on trouve

$$q_B = -q_A \frac{BP^2 \sin \theta_A}{AP^2 \sin \theta_B}$$

Electromagnétisme 9

(CCP)

Tout d'abord orienter le circuit puis remarquer la symétrie du problème qui permet d'obtenir d'emblée $v_A = -v_B$. On applique le PFD à chaque barre de masse nulle (la tension du fil est alors la force de Laplace). On applique le PFD à une des masses $m\ddot{z} = T - mg$ et on remplace la tension par la force de Laplace qu'on a calculée.

Ensuite par un bilan électrocinétique on trouve l'équation

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{2B^2 a^2}{R} v$$

Que l'on sait intégrer sans problème.

Electromagnétisme 10

(CCP)

Le champ électrique induit dans l'espace par un plan infini de charge surfacique uniforme σ est $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$ (on l'a fait en cours, il suffit d'utiliser le théorème de Gauss).

Pour l'autre calcul (bien plus délicat), faire d'abord un dessin où vous représentez les plans de symétrie et le plan (Oyz) d'anti-symétrie. \vec{E} est donc anti-symétrique par rapport à ce plan. Le plus simple est alors de calculer le champ sur la plaque en $x = a$. Pour cela prendre pour surface de gauss, un cylindre demi-infini pour $x \in]-\infty; a]$. Le champ est nul en $-\infty$ car la distribution est globalement neutre (la charge vue à l'infini est nulle). La charge intérieure au cylindre étant nulle, le champ est nul en $x = a$. Après, il suffit d'appliquer le théorème de Gauss à un cylindre compris entre x et a . Il vient

$$\vec{E} = \frac{\rho(|x| - a)}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

On trouve que le champ est nul en dehors de la plaque.

Electromagnétisme 11

(CCP) Il faut d'abord déterminer le champ électrique dans la sphère. On utilise bien sur la symétrie sphérique du problème et le théorème de Gauss pour montrer que

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{q}{4/3\pi R^3}$$

Après, on applique le principe fondamental de la dynamique à la charge $-q$ se déplaçant sur un diamètre (selon r) :

$$m\ddot{r} = -\frac{q\rho}{3\epsilon_0} r$$

La résolution est facile :

$$r = A \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{q\rho}{3m\epsilon_0}}$$

Electromagnétisme 12

(CCP)

Dans ce problème de cadre en mouvement, le point original est que \vec{B} est créé par un fil infini ; il faut donc le calculer. Avec les considérations de symétrie et le théorème d'Ampère, on obtient $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ où r est la distance au fil.

On calcule e en orientant le circuit (ABCD par exemple). En tenant compte de la distance entre AB, CD et l'axe au cours du temps, on obtient

$$e(t) = \frac{2av\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{-a+vt} \right)$$

Electromagnétisme 13
(Centrale)

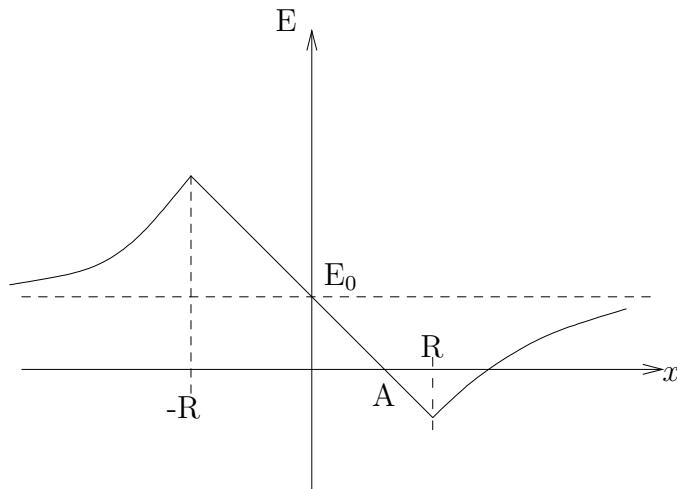
1. On calcule avec le théorème de Gauss le champ créé par une sphère uniformément chargée $-Q$ (en distinguant les cas où M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère). On utilise le théorème de superposition pour trouver

$$f(x) = E_0 - \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \text{si } |x| < R$$

$$f(x) = E_0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad \text{si } x > R$$

$$f(x) = E_0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad \text{si } x < -R$$

Le graphe $E = f(x)$ est



2. Le PFD appliqué à la masse m donne

$$m\ddot{x} = qf(x)$$

Les positions d'équilibre vérifient $f(x) = 0$. Il faut donc que $E_0 < \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Le point A est alors représenté sur le graphe ($f(x) > 0$ si $x < x(A)$ pour que l'équilibre soit stable).

$$x(A) = \frac{E_0\varepsilon_0 4\pi R^3}{Q}$$

3. Pour avoir des oscillations sinusoïdales, il faut que $x(t)$ soit l'équation d'un oscillateur harmonique c'est-à-dire que f soit affine. Il faut donc que $a + x(A) < R$ soit

$$a_m = R - \frac{E_0\varepsilon_0 4\pi R^3}{Q}$$

La pulsation est alors

$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{m4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

Electromagnétisme 14*(Centrale)*

1. On utilise bien sûr l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. L'invariance par translation selon x et y et les plans de symétrie imposent un champ de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$.

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} e^{-z/a} \quad \text{pour } z > 0$$

d'où

$$E = -\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-z/a} \quad \text{pour } z > 0$$

car $E \rightarrow 0$ pour $z \rightarrow +\infty$. $\frac{dE}{dz} = 0$ pour $z < 0$ donc $E = -\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}$ pour $z < 0$.

2. Le champ créé par un plan infini chargé σ est, en appliquant le théorème de Gauss, $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

d'où

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-z/a} \quad \text{pour } z > 0$$

et

$$E = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } z < 0$$

Electromagnétisme 15*(Mines)*

1. \vec{E} obéit à l'équation de d'Alembert dans le vide $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ qui impose

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$$

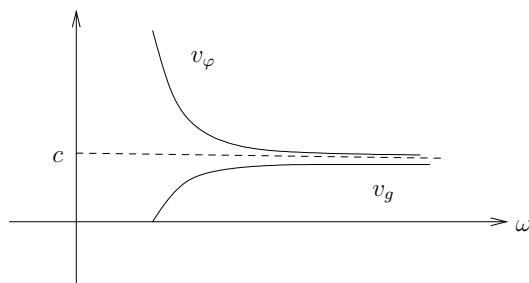
2. On trouve

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$$

et

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}$$

Les allures sont



3. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer \vec{B} : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{B} = E_0 \frac{\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_x + \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

Les courants surfaciques s'obtiennent avec la relation de passage $\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$. On trouve en $z = 0$

$$\vec{j}_s = E_0 \frac{\pi}{\mu_0 a \omega} \sin(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

4. $e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

$$\langle e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right) \right)$$

$$\langle \langle e \rangle \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a \langle e \rangle dz = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

5.

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x - \frac{E_0^2 \pi}{\mu_0 a \omega} \cos \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k}{2 \mu_0 \omega} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \vec{u}_x$$

6. $\langle \langle \vec{\Pi} \rangle \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a \langle \vec{\Pi} \rangle dz = \frac{E_0^2 k}{4 \mu_0 \omega} \vec{u}_x$

On constate que $\langle \langle \vec{\Pi} \rangle \rangle = \vec{v} \langle \langle e \rangle \rangle$ avec $\vec{v} = \frac{k}{\omega} c^2 \vec{u}_x$. La vitesse de l'énergie est ici la vitesse de groupe.

Electromagnétisme 16

(Mines)

Il faut calculer le flux du champ créé par le fil à travers la spire carrée. Le fil crée un champ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ donc le flux à travers la spire est

$$\phi = d \int_{x_0 - a/2}^{x_0 + a/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = d \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a/2}{x_0 - a/2}$$

d'où

$$M = \frac{d \mu_0}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a/2}{x_0 - a/2}$$

Electromagnétisme 17

(CCP)

1. Le plan de la feuille est Π_s donc $\vec{B} = B \vec{u}_\theta$.
2. On applique le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique. Le champ est orthoradial (symétries) et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta \quad \text{si } r < a$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta \quad \text{si } r > a$$

Electromagnétisme 18

(CCP)

- On choisit un contour d'Ampère circulaire de centre un point de l'axe du cable et de rayon $r > r_3$. L'intensité enlacée est $I - I = 0$.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = 0 = 2\pi r B$$

d'où

$$B(r) = 0 \quad \text{pour } r > r_3$$

- On utilise un contour d'Ampère orienté selon \vec{e}_θ avec $r < r_1$. L'intensité enlacée dans le sens direct est $j_1 \pi r^2$ et :

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} \quad \text{pour } r < r_1$$

- On utilise un contour d'Ampère similaire avec $r_1 < r < r_2$. L'intensité enlacée est I et :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{pour } r_1 < r < r_2$$

- On utilise un contour d'Ampère similaire avec $r_2 < r < r_3$. L'intensité enlacée dans le sens direct est $I - j_2 \pi (r^2 - r_2^2)$ et :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \quad \text{pour } r_2 < r < r_3$$

Electromagnétisme 19

(CCP)

Il faut utiliser l'astuce qui consiste à considérer la distribution comme la superposition d'un cylindre de courant \vec{J} et d'un cylindre de courant $-\vec{J}$.

On applique le théorème d'Ampère pour déterminer le champ dans un cylindre. Le champ est orthoradial (symétries) et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J r}{2} \vec{u}_\theta$$

Pour exploiter la superposition, il est astucieux d'écrire $J r \vec{u}_\theta = \vec{J} \wedge \vec{r}$. On trouve alors dans la cavité (dont un point de l'axe est O_2 , O_1 étant un point de l'axe du cylindre principal).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \left(\vec{J} \wedge \overrightarrow{O_1 M} - \vec{J} \wedge \overrightarrow{O_2 M} \right) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Electromagnétisme 20

(Centrale)

L'énergie potentielle d'un dipôle électrostatique est $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Il faut trouver la position de \vec{p} pour que cette énergie soit minimale. Sur Oz , \vec{E} est colinéaire au dipôle. Il faut donc trouver pour quel z le champ créé par les trois charges est maximal (et donc le calculer). En faisant un dessin et après quelques calculs (projeter correctement !) on trouve que

$$E_z(z) = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2/3)^{3/2}}$$

En dérivant, on trouve que la position d'équilibre stable du dipôle est

$$z = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Electromagnétisme 21

(Centrale)

1. Le poids fait tourner le disque conducteur. Celui ci est soumis à un champ stationnaire, il est donc le siège de courants d'induction. Ces courants vont générer une force de Laplace qui va s'opposer à la cause c'est à dire à la gravité (loi de Lenz).

2. La première chose à faire est d'**orienter le circuit**. Orientons vers l'extérieur du disque.

- **étude electrocinétique.**

On calcule $e = \int_b^a r\omega B dr = \frac{\omega B(a^2 - b^2)}{2}$ et on obtient avec l'orientation choisie $i = e/R$ (représenter le schéma electrocinétique).

- **étude mécanique**

On trouve le moment des forces de Laplace par rapport à O en intégrant la force élémentaire de Laplace

$$\vec{\mathcal{M}}_L = -\frac{1}{2}IB(a^2 - b^2)\vec{u}_z$$

On peut vérifier que

$$\mathcal{P}_L = M_L\omega = -ei$$

En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O à la poulie, le TRD à m et en injectant l'expression de I , il vient

$$J \frac{d\omega}{dt} = mgb - \frac{B^2(a^2 - b^2)^2}{4R}\omega - ma\ddot{z}$$

On utilise le non glissement sur la poulie : $a\omega = \dot{z}$ On pose $\omega_\ell = \frac{4Rmgb}{B^2(a^2 - b^2)^2}$ et $\tau = \frac{4R(J + ma^2)}{B^2(a^2 - b^2)^2}$ et il vient

$$\boxed{\omega(t) = \omega_\ell(1 - e^{-t/\tau})}$$

Electromagnétisme 22

(Centrale)

1. On a montré en cours que

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

On dessine une surface de Gauss cylindrique englobant l'armature portant la charge $q(t)$. L'application du théorème de Gauss donne alors facilement

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q(t)}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_z}$$

La densité volumique de courant est nulle entre les armatures. Le théorème d'Ampère généralisé donne alors

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

En utilisant l'expression de E , il vient

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} \frac{dq}{dt} \vec{u}_r}$$

2. En $r = a$,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0 a^3} q(t) \frac{dq}{dt} \vec{u}_r$$

L'énergie électromagnétique emmagasinée dans un condensateur est sous forme électrique (on peut montrer que dans l'ARQS, l'énergie magnétique est négligeable).

$$U = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{q^2 e}{2\epsilon_0 \pi a^2} = \frac{q^2}{2C}$$

3. Faire un dessin pour calculer le flux du vecteur de Poynting à travers le condensateur. On obtient

$$\Phi(\vec{\Pi}) = -\frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 a^3} q(t) \frac{dq}{dt} 2\pi a e = -\frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

On retrouve le bilan

$$\frac{dU}{dt} + \Phi(\vec{\Pi}) = 0$$

en l'absence de courant dans le condensateur.

Electromagnétisme 23

(Centrale)

Toujours la même méthode pour un exercice d'induction !

Orientons de O vers l'extérieur (l'autre choix est possible bien sûr). La méthode de résolution est classique :

- étude electrocinétique.

On calcule $e = \frac{\dot{\theta}BL^2}{2}$ et on obtient avec l'orientation choisie $i = e/R$ (représenter le schéma électrocinétique).

- étude mécanique

On trouve le moment des forces de Laplace par rapport à O

$$\vec{\mathcal{M}}_L = -\frac{1}{2}IBL^2\vec{u}_z$$

En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O et en injectant l'expression de I, il vient

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mgL\sin\theta}{2} - \frac{\dot{\theta}B^2L^4}{4R}$$

Dans l'approximation des petits angles, on obtient une équation du type

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

On résoud cette équation en distinguant les 3 régimes, apériodique, critique et pseudo-périodique.

Electromagnétisme 24

(Centrale)

L'exercice n'est pas facile !

Tout d'abord, on voit que \vec{E} est porté par \vec{u}_z . Il faut alors penser à subdiviser le ruban en ruban infiniment petits, de largeur dx , assimilables à des fils infinis chargés linéairement σdx (bien comprendre cette modélisation). Ensuite, on trouve avec le théorème de Gauss le champ créé par un de ces fils, situé en x ; il faut alors le projeter sur Oz. On trouve alors

$$dE_z = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{zdx}{z^2 + x^2}$$

Pour trouver E, on somme les champs créés par tous les fils pour $x \in [-a; a]$. On trouve alors

$$E = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \operatorname{Arctan} \frac{a}{z}$$

Si $a \rightarrow \infty$, il s'agit d'un plan et on a bien $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Si $a \rightarrow 0$, il s'agit d'un fil de charge linéaire $\lambda = 2a\sigma$ avec un DL de arctan, on a alors

$$E \approx \frac{a\sigma}{\pi\varepsilon_0 z} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}$$

On retrouve l'expression du champ créé par un fil infini.

Electromagnétisme 25

(Mines)

La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et donc $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$.

A l'intérieur du fil, le champ est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

Le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = -\frac{j^2 r}{2\sigma} \vec{u}_r$$

Son flux à travers le cylindre est

$$\Phi = \frac{j^2}{\sigma} \pi a^2 h$$

Electromagnétisme 26

(Mines)

Il faut commencer par l'étude des symétrie de la distribution. Les plans passant par l'axe et perpendiculaire à l'axe sont Π_S donc $\vec{E} = E \vec{u}_r$. L'invariance par translation et rotation donne $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$. Le théorème de Gauss permet d'obtenir

$$E(r) = \frac{\sigma R}{r \epsilon_0} \quad \text{pour } r > R$$

$E=0$ si $r < R$ (R est le rayon du cylindre).

Pour \vec{B} , isoler une hauteur h du cylindre et montrer que le cylindre est parcouru par une intensité orthoradiale $I = \sigma R \omega h$. Il faut alors remarquer que le cylindre est strictement équivalent à un solénoïde infini. Il suffit de remplacer dans le calcul de B , nI par $\frac{I}{h}$ (nI est bien l'intensité parcourue orthoradialement par unité de longueur du cylindre).

d'où

$$\vec{B} = \mu_0 \sigma R \omega \vec{u}_z \quad \text{pour } r < R$$

\vec{B} est nul en dehors du cylindre.

Electromagnétisme 27

(CCP)

1. Faire un dessin en représentant le métal, \vec{k} , \vec{E} (supposé selon \vec{u}_x) et \vec{B} pour l'onde incidente :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Ecrivez alors les relations de passage pour \vec{E} (supposer que le métal est en $z = 0$). Préciser que le champ est nul dans le métal parfait. On en déduit le champ électrique réfléchi puis en utilisant la relation de structure de l'onde plane progressive monochromatique \vec{B} :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

L'onde résultante est alors

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0 \sin \omega t \sin kz \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2 \frac{E_0}{c} \cos \omega t \cos kz \vec{u}_y$$

L'onde résultante est stationnaire.

2. On utilise la relation de passage pour \vec{B} et on montre que

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_y$$

3. Dans ce cas, une partie du champ pénètre dans le métal sous forme d'onde dont l'amplitude décroît exponentiellement. C'est l'effet de peau. On peut déterminer par analyse dimensionnelle la longueur caractéristique en utilisant les équations de Maxwell le dans le métal de conductivité γ . $\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| \approx \frac{B}{\delta}$. On obtient

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Electromagnétisme 28

(Centrale)

1. On a déjà vu en cours cette question.

2. Il suffit d'utiliser l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\underline{\vec{j}} = i \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\vec{E}}$ étant des ondes de pulsation ω , $\underline{\vec{j}}$ l'est également. Les ions étant fixes, $\vec{j} = -ne\vec{v}$. \vec{v} est donc aussi une onde de pulsation ω .

$\text{div } \underline{\vec{E}} = 0$ car le milieu est neutre donc $\underline{\vec{E}}$ et \vec{k} sont perpendiculaires. La relation précédente permet d'en déduire que $\underline{\vec{j}} \perp \vec{k}$ et donc que $\vec{v} \perp \vec{k}$.

En remplaçant $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, on obtient

$$\underline{\vec{j}} = i \left(-\frac{k^2}{\mu_0 \omega} + \varepsilon_0 \omega \right) \underline{\vec{E}}$$

d'où

$$a = \varepsilon_0 \omega^2 - \frac{k^2}{\mu_0}$$

3.

$$a = \varepsilon_0 \omega^2 - \frac{k^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2 K^2 \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = c^2(k^2 + K^2)$$

$$\text{d'où} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}$$

On différencie la relation et

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk \quad \text{d'où} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}}$$

4.

$$\delta t = \frac{L}{v_{g2}} - \frac{L}{v_{g1}}$$

$$\text{Or,} \quad \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}} \approx \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{K^2}{k^2} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \delta t \approx \frac{LK^2}{2c} (1/k_2^2 - 1/k_1^2) \approx \frac{LK^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

Electromagnétisme 29

(Centrale)

1. En utilisant les équation de Maxwell, on obtient

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

2. Cette équation est valable pour

$$\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \ll \|\gamma \vec{E}\| \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 6 \cdot 10^{18} \text{ rad.s}^{-1}$$

On est alors dans l'ARQS. Cete équation est typique d'un phénomène de diffusion (=équation de la chaleur).

3. On écrit $j = Ae^{i(\omega t - kx)}$ et on trouve

$$-\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma i \omega$$

d'où

$$\underline{k} = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)$$

soit

$$j(z) = Ae^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Le courant penètre dans le métal sur une longueur δ appelée épaisseur de peau. f représente le terme exponentiel d'atténuation caractéristique de l'effet de peau.

Electromagnétisme 30

(Mines)

1. On constate que l'impulsion s'est propagée dans le cable à la vitesse $c = \frac{L}{\Delta t} = 100 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$. L'impulsion est atténuée : il y a donc de l'absorption au cours de la propagation.
2. On a fait un exercice analogue. On trouve avec la loi des mailles et la loi des noeuds :

$$LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

C'est une équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'impédance caractéristique est pour une onde progressive selon z ,

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On vient de déterminer c expérimentalement, on peut alors déterminer Z_c (en mesurant $I(z)$ et $V(z)$) pour en déduire L et C .

3. Le modèle n'est pas suffisant car l'équation de propagation obtenue n'implique aucune absorption (or, elle est visible sur l'oscillogramme). Il faut donc modifier le modèle en rajoutant des grandeurs dissipatives (résistances). On avait vu un tel modèle dans le chapitre sur la dispersion et l'absorption (ligne électrique avec pertes)

Electromagnétisme 31

(Centrale)

- 1.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \omega = kc$$

2. Appelons \vec{u} la direction du polariseur :

$$\vec{E} = E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz) \vec{u}$$

L'énergie est proportionnelle à E^2 (voir par exemple le calcul du vecteur de Poynting de l'exercice 1). Le facteur de transmission en énergie est donc $T = \cos^2 \theta$. On retrouve la loi de Malus.

3. Après N traversées, l'amplitude est $E_0 \cos^N \theta$.

Si $\theta = \pi/2N$, l'amplitude est $E_0 \cos^N \theta$. La direction de polarisation a tourné de $N\theta = \frac{\pi}{2}$. Elle est donc maintenant selon \vec{u}_y . Le coefficient de transmission est

$$T = \cos^{2N} \left(\frac{\pi}{2N} \right)$$

Pour N très grand $\frac{\pi}{2N}$ tend vers 0 et $\cos \frac{\pi}{2N}$ tend vers 1. La perte énergétique est donc faible.

Il faut faire un développement limité. On trouve alors :

$$T \approx 1 - \frac{\pi^2}{4N}$$

La perte est inférieure à 1% si $\frac{\pi^2}{4N} < 0,01$.

soit

$$N > \frac{\pi^2}{0,04} = 248$$

Electromagnétisme 32

(Centrale)

1. En utilisant les équations de Maxwell, on obtient

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

2. Cette équation est valable pour

$$\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \ll \|\gamma \vec{E}\| \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 6 \cdot 10^{18} \text{ rad.s}^{-1}$$

On est alors dans l'ARQS. Cet équation est typique d'un phénomène de diffusion (=équation de la chaleur).

3. On écrit $j = Ae^{i(\omega t - kx)}$ et on trouve

$$-k^2 = \mu_0 \gamma i \omega$$

d'où

$$k = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)$$

soit

$$j(z) = Ae^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Le courant pénètre dans le métal sur une longueur δ appelée épaisseur de peau. f représente le terme exponentiel d'atténuation caractéristique de l'effet de peau.

Electromagnétisme 33

(Centrale)

1.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$$

2. Il faut calculer $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour une onde plane progressive monochromatique . On trouve (voir cours !)

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{c\epsilon_0 |E_0|^2}{2} \vec{u}$$

On constate que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u_{em} \rangle c \vec{u}$$

A l'aide d'un bilan d'énergie traversant une surface S entre t et $t + dt$, on montre alors que la vitesse de l'énergie est c (on l'a fait également dans le cours).

3. La puissance par unité de surface transportée par l'onde électromagnétique est (par définition) égale à la norme du vecteur de Poynting (moyen) :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dS} = \langle \Pi \rangle = \frac{c\epsilon_0 |E_0|^2}{2}$$

d'où

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\Pi}{\epsilon_0 c}} = 993 \text{ V.m}^{-1}$$

Electromagnétisme 34

(Centrale)

C'est une diode à vide en cylindrique (voir l'exo traité en cours). L'équation de Poisson donne

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La conservation de l'énergie en prenant $V(R_1) \approx 0$ et une vitesse nulle en R_1 s'écrit

$$\frac{1}{2}mv^2 - eV = 0 \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

L'intensité traversant la diode est $I = j2\pi rh = |\rho| v 2\pi rh$ (elle est bien sûr négative de R_1 vers R_2). Il vient alors

$$\Delta V = \frac{I}{\epsilon_0 2\pi rh} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

En utilisant l'expression du Laplacien et en injectant la solution proposée, on obtient

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad K = \left(\frac{9I}{4\epsilon_0 2\pi h} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{2/3}$$

Electromagnétisme 35

(Centrale)

Il faut reprendre le cours sur la corde vibrante et on ajoute au TRD appliqué à l'élément de corde dx la force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \approx I_0 B_0 \sin(\pi x/L) \cos \omega t dx \vec{u}_z$.

On obtient alors l'équation demandée avec

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{et} \quad A = \frac{I_0 B_0}{\mu}$$

En injectant la solution proposée, on obtient

$$C = \frac{A}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L^2}}$$

Lorsque $\omega \rightarrow \pi c/L$, l'amplitude de la corde est très grande : il y a résonance.

Electromagnétisme 36

(ENS)

On calcule comme on l'a déjà fait le champ magnétique dans l'espace. On a $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ pour $r \in [R_1; R_2]$ et $\vec{B} = \vec{0}$ sinon.

Pour déterminer L, on peut utiliser le flux ou l'énergie ce qui est plus facile ici.

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint \frac{B^2}{\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} L I^2$$

On intègre sur un volume $d\tau = 2h\pi r dr$ et on obtient

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{r dr}{r} 2\pi h$$

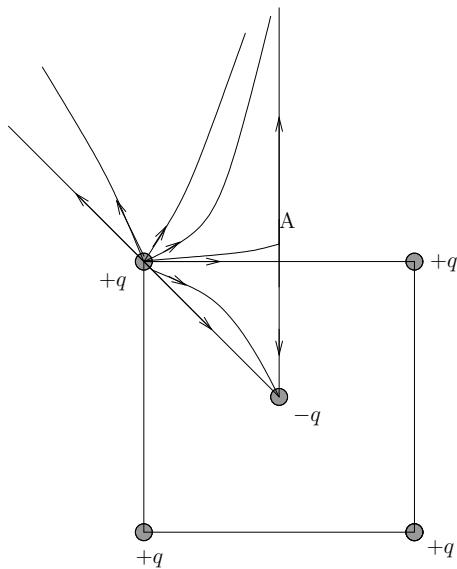
soit

$$L = h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

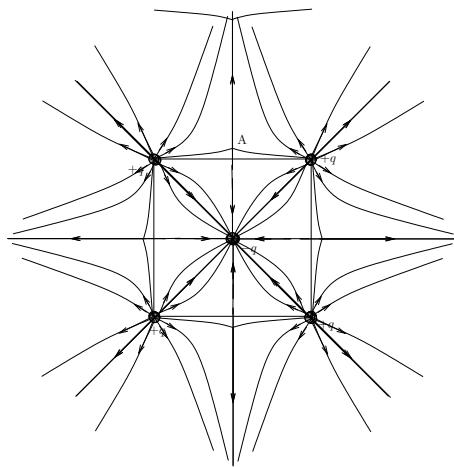
Electromagnétisme 37

(Centrale)

Il faut d'abord repérer les plans de symétrie de la distribution. Les îles appartiennent à ces plans et divergent des charges + vers les charges -.



On en déduit l'existence d'un point d'arrêt en A. Nous avons représenté 1/8 des lignes de champ, les autres s'obtiennent par symétrie.

**Electromagnétisme 38**

(Centrale)

L'énergie potentielle d'interaction est $E_{p1} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ avec $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}i\ell^2 \cos \theta \sin \theta$.

L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{p2} = \frac{1}{2}mg\ell \cos \theta$.

soit $E_p = -\frac{1}{4}i\ell^2 B (\sin 2\theta - \eta \cos \theta)$ avec $\eta = \frac{2mg}{iB\ell}$

Il faut alors étudier la fonction $f(\theta) = \sin 2\theta - \eta \cos \theta$.

On constate que si $\eta < 2$, la position d'équilibre possible est donnée par

$$\boxed{\sin \theta_e = \frac{1}{8} (\eta + \sqrt{32 + \eta^2})}$$

si $\eta < 2$ la position précédente est stable (tracer à la calculette par exemple). Pour $\eta > 2$ la barre descend jusqu'en $\pi/2$.

Pour la période des petites oscillations, on calcule $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2/4\dot{\theta} + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ avec $J = \frac{1}{12}m\ell^2$.

$$E_c = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Le TEC donne

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - \frac{1}{4}i\ell^2B(2\cos 2\theta + \eta \sin \theta) = 0$$

On pose $\theta = \varepsilon + \theta_{eq}$ et

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{3}{4}i\ell^2Bf(\theta_{eq} + \varepsilon)$$

La pulsation est donc $\sqrt{-\frac{3iBf'(\theta_{eq})}{4m}}$

Electromagnétisme 39

(Mines)

- Modélisation i) : $\Phi_2 = Mi_1 + L_2i_2 = Mi_1$.

Or, $i_2 = \frac{e_2}{R_2} = -\frac{1}{R_2} \frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{M}{R_2} \frac{di_1}{dt}$

d'où $F_{1 \rightarrow 2} = i_2 i_1 \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{M}{R_2} \frac{\partial M}{\partial z} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_1^2 \right)$

Comme $\left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_1^2 \right) \right\rangle = 0$ la force est nulle et la modélisation n'est pas conforme à l'expérience.

- Modélisation ii) $R_2 = 0$ donc $e_2 = 0$ et $Mi_1 + L_2 i_2 = C^{\text{te}} = 0$ (à $t = 0$).

d'où

$$F_{1 \rightarrow 2} = -\frac{M}{L_2} \frac{\partial M}{\partial z} i_1^2 \quad \text{et} \quad \langle F_{1 \rightarrow 2} \rangle = -\frac{I_0^2}{2} \frac{M}{L_2} \frac{\partial M}{\partial z}$$

Bien sûr, $\frac{\partial M}{\partial z} < 0$.

C'est là où ça devient subtil : on a vu pour un solénoïde en cours que l'inductance propre L_2 est proportionnelle à N_2^2 alors que la mutuelle est proportionnelle à $N_1 N_2$. M est donc multiplié par 2 ($\frac{\partial M}{\partial z}$ aussi) alors que L_2 est multiplié par 4. Donc la force est identique dans la deuxième expérience ce qui est contredit par l'expérience. le modèle n'est donc pas bon !

- Modélisation iii) $-M \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} = R_2 i_2$ Comme on est en sinusoïdal, on peut passer aux complexes et

$$i_2 = \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} I_0$$

d'où

$$F_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial z} \frac{ML_2\omega^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} I_0^2$$

Dans la deuxième expérience R_2 est multiplié par 2. On constate donc que la force est plus importante dans la deuxième expérience puisque le numérateur est multiplié par 16 et le dénominateur par un peu moins que 16 (L_2^2 est bien multiplié par 16 mais R_2^2 seulement par 4).

La modélisation est bien conforme à l'expérience.

Electromagnétisme 40

(Mines, centrale)

- On oriente le circuit et on fait un bilan électrique en calculant la fem pour les 2 rails (qui ne sont pas orientés dans le même sens!). On obtient

$$(R_1 + R_2)i = \frac{1}{2}Ba^2(\omega - \omega')$$

On applique alors le TMC à chaque rail

$$J \frac{d\omega'}{dt} = -iBa^2/2$$

$$0 = \Gamma_{op} + iBa^2/2$$

Son moment cinétique est constant puisque $\omega' = C^{\text{te}}$.

En éliminant i , on a

$$\boxed{\omega' = \omega_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4J(R + R')}{B^2 a^4}}$$

- On multiplie l'équation électrique par i et chaque équation mécanique par la vitesse de rotation correspondante. On obtient alors

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega \Gamma_{op} - \mathcal{P}_j$$

que l'on peut facilement commenter.

Electromagnétisme 41

(X)

1. Dans ce modèle (de Bohr), le moment cinétique de l'atome est $\vec{\sigma} = mr\dot{\theta}\vec{u}_z$ et le moment magnétique est $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{T}\pi r^2\vec{u}_z = -\frac{e\theta}{2}r^2$. On constate que

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma}}$$

Rem $\gamma = -\frac{e}{2m}$ est appelé rapport gyromagnétique.

2. Pour le moment magnétique, on découpe la sphère en couronnes $Rd\theta$ contenant un courant surfacique $j_s = \sigma R \sin \theta \omega$ et donc un courant $dI = \sigma R \sin \theta \omega R d\theta$. Le moment magnétique associé à cette couronne est donc

$$d\mathcal{M} = \pi(R \sin \theta)^2 \sigma R \sin \theta \omega R d\theta$$

d'où
$$\mathcal{M} = \pi R^4 \sigma \omega \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \omega = \frac{-e}{3} R^2 \omega$$

Le moment cinétique est $\sigma = J\omega = \frac{2}{3} m R^2 \omega$.

d'où
$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma}}$$

On retrouve le même rapport.

Electromagnétisme 42

(X)

1. Pour un moment circulaire, pensez à utiliser le PFD ! Il vient alors

$$-\frac{mv_0^2}{a} = -qv_0 B$$

d'où

$$\boxed{v_0 = \frac{aqB}{m}}$$

2. Dans ce cas,

$$-\frac{mv_0^2}{a} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

soit

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 ma}}}$$

Si la vitesse initiale est supérieure à v_0 la trajectoire pourra être une ellipse, une parabole ou une hyperbole (force en $1/r^2$). Pour déterminer cela, calculons l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2}mb^2v_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_m = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(\frac{b^2}{2} - 1 \right)$$

On en déduit

- Si $0 < b < \sqrt{2}$ la trajectoire est une ellipse.
- si $b = \sqrt{2}$, la trajectoire est une parabole.
- si $b > \sqrt{2}$, la trajectoire est une hyperbole.

3. Dans ce cas, le pfd s'écrit

$$-\frac{mv_0^2}{a} = -qv_0B - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Il s'agit d'une équation du second degré :

$$v_0^2 - \frac{aqB}{m}v_0 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 am} = 0$$

La solution positive est alors

$$v_0 = \frac{aqB}{2m} + \sqrt{\left(\frac{aqB}{m}\right)^2 + \frac{4qQ}{4\pi\epsilon_0 am}}$$

Electromagnétisme 43

(X)

1. Les équations de Maxwell dans le conducteur ohmique donnent

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans l'ARQS, on fait l'approximation que $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \ll \mu_0 \gamma \frac{\partial E}{\partial t}$ qui est valable pour $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} s^{-1}$.

On rappelle que $\gamma \approx 10^7 S.m^{-1}$ pour un conducteur usuel.

2. On a fait ce calcul dans le chapitre sur l'effet de peau. On trouve $k = k' - jk''$ avec $k' = k'' = \frac{1}{\delta}$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

Le champ est donc de la forme $E(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$

3. Calculons δ à 50 Hz (courant EDF), $\delta \approx 3$ cm. Alors qu'à 500 kHz (TP), $\delta \approx 0,3$ mm. Plus ω augmente moins le champ pénètre dans le conducteur ohmique.

4. Le champ se propage dans le conducteur en s'atténuant avec une longueur caractéristique δ . De plus, la propagation est dispersive puisque v_φ dépend de ω .

5. L'équation de la chaleur est

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

où λ est la conductivité thermique. C'est la même équation et donc la même résolution. On trouve

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}$$

6. Les phénomènes sont strictement analogues mais la différences vient du fait que δ de la chaleur augmente avec la conductivité thermique. La physique n'est pas la même dans les deux cas !

Pour la diffusion de T, plus le milieu conduit la chaleur, plus les variations de T en surface vont être répercutées en profondeur et δ va donc augmenter avec λ .

Pour le champ \vec{E} , plus le milieu est conducteur et plus il va dissiper l'énergie sous forme d'effet Joule et plus l'épaisseur de peau sera faible. Il faut être conscient de la puissance des analogies en physique mais aussi que les analogies sont en réalité formelles et dues au fait qu'on modélise les systèmes avec des équations différentielles d'ordre 1 ou 2 : pas étonnant alors qu'on obtienne des équations similaires pour des phénomènes physiques bien différents (voir la discussion de Feynmann : l'unité profonde de la nature *Eléctromagnétisme, tome 2*, chap 12).

C'est ce type de discussion qu'attend l'examinateur de l'X à mon avis.

Electromagnétisme 44

(X)

Il faut d'abord calculer le champ électrique créé par un plan infini chargé σ . On a montré qu'il vaut au dessus de la plaque $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y$. Le champ magnétique créé par la plaque (nappe plane de courant $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}_0$) est lui $\vec{B} = \frac{\sigma v_0}{2\mu_0} \vec{e}_z$.

Le PFD s'écrit alors

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = E - qB\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = 0$$

On pose $u = v_x + jv_y$ et $\omega = -\frac{qB}{m}$; il vient

$$\dot{u} - j\omega u = -\frac{j\omega E}{B}$$

Supposons que la vitesse initiale est nulle. En intégrant, il vient

$$v_x = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{E}{B} \sin \omega t$$

En intégrant, en plaçant l'origine du repère à la position de la charge initiale, on obtient

$$x = \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin \omega t) \quad \text{et} \quad y = \frac{E}{B\omega} (\cos \omega t - 1)$$

La trajectoire est une cycloïde.

Electromagnétisme 45

(X)

On va utiliser une méthode énergétique. Avec le théorème de König et la condition de roulement sans glissement, on trouve

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = ma\dot{\theta}^2$$

La force de gravité et les forces de frottement ne travaillent pas. L'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et \vec{B} est $E_p = -MB \cos \theta$. En appliquant la conservation de l'énergie, on obtient

$$2ma^2\ddot{\theta} + MB \sin \theta = 0$$

Pour θ faible les oscillations sont sinusoïdales et la pulsation des petites oscillations autour de 0 est

$$\omega = \sqrt{\frac{MB}{2ma^2}}$$