Lycée Henri IV
MPSI 2015/2016

Devoir surveillé
10/10/2015

DEVOIR SURVEILLÉ 2

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée *ou* soulignée*. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Divers (presque) déjà faits...

1. Linéariser $\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Donner l'expression de l'homothétie $h_{a,\lambda} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.
Démontrer que la composée de deux homothéties est ou bien une homothétie ou bien une translation.
3. Si A et B désignent deux parties d'un ensemble E, on rappelle que la différence symétrique de A et B est la partie, notée $A\Delta B$, définie par $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application de E vers F.
   a) Démontrer que $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A)\Delta f(B) \subset f(A\Delta B)$.
   b) Démontrer que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

EXERCICE 2

De quatre en quatre

L'objet de cet exercice est de démontrer que tout nombre entier $n \in \mathbb{Z}$ peut s'écrire sous la forme $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$.

1. En constatant que $(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists m \in \mathbb{N}^*,\ \exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1; +1\},\ n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \exists m \in \mathbb{N}^*,\ \exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1; +1\},\ n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2$ puis terminer l'exercice.

EXERCICE 3

Qui suis-je ?

On considère la fonction r, dont la variable est un nombre complexe z, définie par

$$r(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}.$$

1. Démontrer que l'ensemble de définition de r est $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $r(x)$.
3. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a $r(z)^2 = z$.
4. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(\omega) > 0$. Démontrer que $r\big(\omega^2\big) = \omega$.
5. Démontrer que r est injective.
6. Justifier que $r\big(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\big) = \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}$.
7. Quelques questions pour voir si vous avez compris...
   a) Quel nom donneriez-vous à l'application r ?
   Que sont les nombres $r(z)$ et $-r(z)$ pour le nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$?
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$. *Donnée :* $\sqrt{289} = 17$
   b) Si vous deviez prolonger r en 0, quelle valeur donneriez-vous à $r(0)$?
   Quel problème rencontre-t-on lorsqu'on souhaite prolonger r à $\mathbb{C}$ tout entier ?

EXERCICE 4

Relations d'ordre maximales

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des relations d'ordre de E. Pour $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ appartenant à $\mathscr{O}(E)$, on dit que $\mathscr{R}_2$ est plus fine que $\mathscr{R}_1$ lorsque :

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \mathscr{R}_1 y) \implies (x \mathscr{R}_2 y),$$

c'est-à-dire lorsque, si deux éléments sont comparables par $\mathscr{R}_1$, ils le sont aussi par $\mathscr{R}_2$ (et dans le même sens). On écrit alors $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$.

1. Sur $\mathbb{N}^*$, donner un exemple de deux relations d'ordre $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ telles que $\mathscr{R}_1 \prec \mathscr{R}_2$.
2. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{O}(E)$.
3. Donner le plus petit élément pour $\preccurlyeq$ dans $\mathscr{O}(E)$.
4. Rappelons que dans un ensemble ordonné, un élément est dit maximal s'il n'y a pas d'élément strictement plus grand que lui.
   a) Démontrer qu'une relation d'ordre totale est un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.
   b) Soient $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E qui n'est pas totale et a, b deux éléments non comparables par $\mathscr{R}$. On considère la relation $\mathscr{S}$ définie par :

   $$\forall x, y \in E, \qquad (x \mathscr{S} y) \iff \big(x \mathscr{R} y \quad \text{ou} \quad (x \mathscr{R} a \text{ et } b \mathscr{R} y)\big).$$

   Démontrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre sur E strictement plus fine que $\mathscr{R}$.
   c) En déduire quels sont les éléments maximaux de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.

EXERCICE 5

Polygones réguliers

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On appelle polygone régulier à n cotés (ou n-agone régulier) un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de nombres complexes tels que :

- ▷ $a_0 = 1$ et $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont tous de module 1 ;
- ▷ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux ;
- ▷ $|a_1 - a_0| = |a_2 - a_1| = \cdots = |a_{n-1} - a_{n-2}| = |a_0 - a_{n-1}|$.

Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont appelés les sommets du polygone. Les couples (a_0, a_1), (a_1, a_2), $\ldots$, (a_{n-2}, a_{n-1}) et (a_{n-1}, a_0) sont appelés les cotés du polygone. La distance qui sépare deux sommets consécutifs (c'est-à-dire la distance $|a_1 - 1|$) est appelée la longueur des cotés du polygone.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $|\,\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta}\,|$.

2. a) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un polygone régulier à n cotés. On note $\theta \in [0; 2\pi[$ un argument de a_1 de sorte que $a_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$.

   $\alpha]$ Démontrer que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]\,,\ a_k = \mathrm{e}^{ik\theta}$.

   $\beta]$ Démontrer qu'il existe $p \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{2p\pi}{n}\cdot$

   $\gamma]$ Démontrer que p et n sont premiers entre eux.

   b) Soit $p \in [\![1; n-1]\!]$ un nombre entier premier avec n. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose $a_k = \mathrm{e}^{2ikp\pi/n}$. Démontrer que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un n-agone régulier dont on précisera la longueur des cotés.

   ▶ Ce n-agone régulier est appelé le « polygone $\{n|p\}$ ».

3. a) Soient $p_1, p_2 \in [\![1; n-1]\!]$ deux entiers premiers avec n. Démontrer que les polygones $\{n|p_1\}$ et $\{n|p_2\}$ ont la même longueur de cotés si, et seulement si, $p_2 = p_1$ ou $p_2 = n - p_1$.

   b) En déduire que le nombre de n-agones réguliers dont les longueurs de cotés sont distinctes vaut $\varphi(n)/2$ où $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers de $[\![1; n-1]\!]$ qui sont premiers avec n.

   c) Dessiner tous les pentagones réguliers, tous les heptagones réguliers ($2\pi/7 \approx 51°$) et tous les octogones réguliers.

CORRECTION DU DS 2

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

1. *Linéariser* $\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ *où* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. *En déduire* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

   On a

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)\\
=\ &\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\beta}+\mathrm{e}^{-i\beta}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\gamma}+\mathrm{e}^{-i\gamma}}{2}\\
=\ &\frac{\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta+\gamma)}+\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta-\gamma)}+\mathrm{e}^{i(\alpha-\beta+\gamma)}+\mathrm{e}^{i(\alpha-\beta-\gamma)}+\mathrm{e}^{-i(\alpha-\beta-\gamma)}+\mathrm{e}^{-i(\alpha-\beta+\gamma)}+\mathrm{e}^{-i(\alpha+\beta-\gamma)}+\mathrm{e}^{-i(\alpha+\beta+\gamma)}}{8}\\
=\ &\frac{2\cos(\alpha+\beta+\gamma)+2\cos(\alpha+\beta-\gamma)+2\cos(\alpha-\beta+\gamma)+2\cos(-\alpha+\beta+\gamma)}{8},
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) = \frac{1}{4}\big(\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)\big).}$$

   On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos(6x)+\cos(0)+\cos(2x)+\cos(4x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{\sin(6x)}{6}+x+\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(4x)}{4}\Big]_0^{\pi/2}\\
&= \frac{1}{4}\Big(0+\frac{\pi}{2}+0+0-0-0-0-0\Big),
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\cdot}$$

2. *Donner l'expression de l'homothétie* $h_{a,\lambda} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *de centre* $a \in \mathbb{C}$ *et de rapport* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Démontrer que la composée de deux homothéties est ou bien une homothétie ou bien une translation.*

   On a

$$\boxed{h_{a,\lambda}\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \lambda(z-a)+a\end{array}\right.}$$

   Soient $h_{a,\lambda}$ et $h_{b,\mu}$ deux homothéties (avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(h_{b,\mu}\circ h_{a,\lambda})(z) = \mu\big[\big(\lambda(z-a)+a\big)-b\big]+b = \lambda\mu z + \big(\mu(1-\lambda)a+(1-\mu)b\big).$$

   Lorsque $\lambda\mu \neq 1$, on retrouve l'expression d'une homothétie de rapport $\lambda\mu$ (dont l'affixe du centre n'est pas très jolie…) et lorsque $\lambda\mu = 1$, on retrouve l'expression d'une tranlation (dont l'affixe du vecteur n'est là aussi pas chouette). Donc

$$\boxed{\text{la composée de deux homothéties est ou bien une homothétie ou bien une translation.}}$$

3. *Si A et B désignent deux parties d'un ensemble E, on rappelle que la différence symétrique de A et B est la partie, notée $A\Delta B$, définie par $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application de E vers F.*

   a) *Démontrer que* $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A)\Delta f(B) \subset f(A\Delta B)$.

   Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

   Soit $y \in f(A)\Delta f(B)$.

   On a $y \in f(A) \setminus f(B)$ ou $y \in f(B) \setminus f(A)$. On distingue donc deux cas :

   ▷ Premier cas : $y \in f(A) \setminus f(B)$
   Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $f(x) \notin f(B)$, on a nécessairement $x \notin B$.
   Donc $x \in A \setminus B$ et, par conséquent, $x \in A\Delta B$.
   On en déduit que $y \in f(A\Delta B)$.

   ▷ Second cas : $y \in f(B) \setminus f(A)$
   En raisonnant comme ci-dessus, on obtient que $y \in f(A\Delta B)$.

   On a donc $f(A)\Delta f(B) \subset f(A\Delta B)$.

   En conclusion,
$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \qquad f(A)\Delta f(B) \subset f(A\Delta B).}$$

   b) *Démontrer que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.*

   Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est constante égale (évidemment) à $\pi/17$. Prenons $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$. On a $A\Delta B = \{0; 1\}$ donc $f(A\Delta B) = \{\pi/17\}$. Par ailleurs, on a $f(A) = f(B) = \{\pi/17\}$ donc $f(A)\Delta f(B) = \varnothing$. Avec cet exemple, on voit qu'

$$\boxed{\text{il est possible que } f(A\Delta B) \text{ ne soit pas inclus dans } f(A)\Delta f(B).}$$

EXERCICE 2

On veut démontrer que tout nombre $n \in \mathbb{Z}$ peut s'écrire sous la forme $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n): \qquad \exists m \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1; +1\}, \qquad n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2.$$

1. *En constatant que $(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
   Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2 = m^2+2m+1-m^2-4m-4-m^2-6m-9+m^2+8m+16 = 4,$$

   donc

   $$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4 \qquad (*)}$$

   <u>Initialisation :</u> On a clairement

   $$1 = +1^2, \qquad 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, \qquad 3 = -1^2 + 2^2, \qquad 4 = -1^2 - 2^2 + 3^2,$$

   donc $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$, $\mathscr{P}(3)$ et $\mathscr{P}(4)$ sont vraies.
   <u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$, $\mathscr{P}(n+2)$, $\mathscr{P}(n+3)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+4)$. D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1; +1\}$ tels que

   $$n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2.$$

   Dès lors, d'après la formule $(*)$, on a

   $$\begin{aligned} n+4 &= \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 \\ &= \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2 + \varepsilon_{m+1}(m+1)^2 + \varepsilon_{m+2}(m+2)^2 + \varepsilon_{m+3}(m+3)^2 + \varepsilon_{m+4}(m+4)^2 \end{aligned}$$

   où l'on a posé $\varepsilon_{m+1} = +1$, $\varepsilon_{m+2} = -1$, $\varepsilon_{m+3} = -1$ et $\varepsilon_{m+4} = +1$. Cela démontre $\mathscr{P}(n+4)$.
   <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence quadruple,

   $$\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

2. *Démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et terminer la démonstration.*
   Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
   Si $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie d'après la question précédente.
   Si $n \leqslant -1$, on a $-n \geqslant 1$ donc $\mathscr{P}(-n)$ est vraie. Il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1; +1\}$ tels que $-n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_m m^2$. Mézalors, on a $n = (-\varepsilon_1)1^2 + (-\varepsilon_2)2^2 + \cdots + (-\varepsilon_m)m^2$ avec $\forall j \in [\![1; m]\!]\,, \ -\varepsilon_j \in \{-1; +1\}$, donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   On a ainsi démontré que

   $$\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{Z}^*.}$$

   Pour terminer, il convient de vérifier $\mathscr{P}(0)$. On peut tatonner pour trouver le résultat mais le plus simple est de noter que $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$ d'après $\mathscr{P}(4)$ et $4 = 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$ d'après $(*)$. Il s'ensuit par soustraction que

   $$0 = -1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2,$$

   ce qui démontre $\mathscr{P}(0)$. En définitive,

   $$\boxed{\text{tout nombre } n \in \mathbb{Z} \text{ peut s'écrire sous la forme } n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2.}$$

EXERCICE 3

On considère la fonction r, de la variable complexe z, définie par $r(z) = \big(z + |z|\big)/\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}$.

1. *Démontrer que l'ensemble de définition de r est $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.*

   Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ écrit sous forme cartésienne (c'est-à-dire $x, y \in \mathbb{R}$), on a

$$\begin{aligned}\big(r(z) \text{ existe}\big) &\iff \big(z + \overline{z} + 2|z| \in \mathbb{R}_+^*\big)\\ &\iff 2x + 2\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+^*\\ &\iff \sqrt{x^2 + y^2} > -x \qquad (*).\end{aligned}$$

   On distingue alors deux cas :

   ▷ Premier cas : $x > 0$
   Dans ce cas, l'inégalité $\sqrt{x^2 + y^2} > -x$ est toujours satisfaite puisqu'elle exprime qu'une racine carrée (qui est toujours un nombre positif ou nul) est strictement supérieure à un nombre strictement négatif.

   ▷ Second cas : $x \leqslant 0$
   Deux nombres positifs étant rangés dans le même ordre que leurs carrés, on peut passer au carré dans l'inéquation $(*)$, ce qui donne

$$(*) \iff x^2 + y^2 > (-x)^2 \iff y^2 > 0 \iff y \neq 0.$$

   En rassemblant les résultats précédents, on voit donc que la quantité $r(z)$ existe toujours sauf lorsque $x \leqslant 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire lorsque $z \in \mathbb{R}_-$. En conclusion,

$$\boxed{r \text{ est définie sur } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.}$$

2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $r(x)$.*

   On a

$$\begin{aligned}r(x) &= \frac{x + |x|}{\sqrt{x + \overline{x} + 2|x|}}\\ &= \frac{x + x}{\sqrt{x + x + 2x}}\\ &= \frac{2x}{\sqrt{4x}}\\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}},\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{r(x) = \sqrt{x}.}$$

3. *Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a $r(z)^2 = z$.*

   Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$\begin{aligned}r(z)^2 &= \frac{(z + |z|)^2}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}^2}\\ &= \frac{z^2 + |z|^2 + 2z|z|}{z + \overline{z} + 2|z|}\\ &= \frac{z^2 + z\overline{z} + 2z|z|}{z + \overline{z} + 2|z|} \qquad \text{car } |z|^2 = z\overline{z}\\ &= \frac{z(z + \overline{z} + 2|z|)}{z + \overline{z} + 2|z|}\\ &= z,\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \qquad r(z)^2 = z.}$$

4. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(\omega) > 0$. Démontrer que $r(\omega^2) = \omega$.*

On a

$$\begin{aligned} r(\omega^2) &= \frac{\omega^2 + |\omega^2|}{\sqrt{\omega^2 + \overline{\omega^2} + 2|\omega^2|}} \\ &= \frac{\omega^2 + |\omega|^2}{\sqrt{\omega^2 + \overline{\omega}^2 + 2|\omega|^2}} \\ &= \frac{\omega^2 + \omega\overline{\omega}}{\sqrt{\omega^2 + \overline{\omega}^2 + 2\omega\overline{\omega}}} \qquad \text{car } |\omega|^2 = \omega\overline{\omega} \\ &= \frac{\omega(\omega + \overline{\omega})}{\sqrt{(\omega + \overline{\omega})^2}} \\ &= \frac{\omega\, 2\Re\mathrm{e}(\omega)}{\sqrt{\big(2\Re\mathrm{e}(\omega)\big)^2}} \qquad \text{car } \omega + \overline{\omega} = 2\Re\mathrm{e}(\omega) \\ &= \frac{\omega\, 2\Re\mathrm{e}(\omega)}{\big|2\Re\mathrm{e}(\omega)\big|} \\ &= \frac{\omega\, 2\Re\mathrm{e}(\omega)}{2\Re\mathrm{e}(\omega)} \qquad \text{car } \Re\mathrm{e}(\omega) > 0 \\ &= \omega, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{r(\omega^2) = \omega.}$$

5. *Démontrer que r est injective.*

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ tels que $r(z_1) = r(z_2)$. En élevant au carré, il vient $r(z_1)^2 = r(z_2)^2$, c'est-à-dire $z_1 = z_2$ d'après la question 3. Donc

$$\boxed{r \text{ est injective.}}$$

6. *Justifier que $r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}$.*

On procède par double-inclusion.

$\subset$ Soit $Z \in r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$. Il existe alors $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tel que $Z = r(z)$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}(Z) &= \Re\mathrm{e}\big(r(z)\big) \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}\Big) \\ &= \frac{\Re\mathrm{e}(z) + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}} \qquad \text{car } |z| \text{ et } \sqrt{z + \overline{z} + 2|z|} \text{ sont des nombres réels} \\ &= \frac{\frac{z + \overline{z}}{2} + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}} \qquad \text{car } \Re\mathrm{e}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \\ &= \frac{z + \overline{z} + 2|z|}{2\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|} \\ &> 0 \qquad \text{d'après la question 1,} \end{aligned}$$

donc

$$Z \in \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}.$$

Par conséquent, on a

$$r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) \subset \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}.$$

$\supset$ Soit $Z \in \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}$. Le résultat de la question 4 nous dit que $Z = r(Z^2)$. Comme $\arg(Z) \in]-\pi/2; \pi/2[$, on a $\arg(Z^2) \in]-\pi; \pi[$, c'est-à-dire $Z^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, ce qui démontre que $Z \in r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$. Donc

$$r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) \supset \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}.$$

Donc

$$\boxed{r(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \{\omega \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}(\omega) > 0\}.}$$

7. *Quelques questions pour voir si vous avez compris...*

a) *Quel nom donneriez-vous à l'application r ? Que sont les nombres $r(z)$ et $-r(z)$ pour le nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$? Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3-2i)z + (5-i) = 0$.*

L'application r associe à un nombre complexe z (avec $z \notin \mathbb{R}_-$) un nombre complexe $r(z)$ tel que $\big(r(z)\big)^2 = z$ et $\Re\mathrm{e}\big(r(z)\big) > 0$. L'application r prolonge donc sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$. Par conséquent,

$$\boxed{r \text{ est la racine carrée complexe.}}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, le nombre $r(z)$ est la racine carrée, de partie réelle strictement positive, de z. Dès lors $-r(z)$ est l'autre racine carrée de z (celle de partie réelle strictement négative). Autrement dit,

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,\ r(z) \text{ et } -r(z) \text{ sont les deux racines carrées complexes de } z.}$$

Le discriminant Δ de l'équation du second degré $z^2 - (3-2i)z + (5-i) = 0$ vaut

$$\Delta = \big(-(3-2i)\big)^2 - 4 \times 1 \times (5-i) = -15 - 8i.$$

On a

$$\begin{aligned} r(-15-8i) &= \frac{-15-8i+|-15-8i|}{\sqrt{-15-8i+\overline{-15-8i}+2|-15-8i|}} \\ &= \frac{-15-8i+\sqrt{289}}{\sqrt{-15-8i-15+8i+2\sqrt{289}}} \\ &= \frac{-15-8i+17}{\sqrt{-30+2\times 17}} \\ &= \frac{2-8i}{2} \\ &= 1-4i, \end{aligned}$$

donc les racines carrées de Δ sont

$$\delta = 1-4i \qquad \text{et} \qquad -\delta = -1+4i.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{(3-2i)+(1-4i)}{2} = 2-3i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{(3-2i)-(1-4i)}{2} = 1+i.$$

Pour résumer,

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } z^2 - (3-2i)z + (5-i) = 0 \text{ sont } z_1 = 2-3i \text{ et } z_2 = 1+i.}$$

b) *Si vous deviez prolonger r en 0, quelle valeur donneriez-vous à $r(0)$? Quel problème rencontre-t-on si l'on souhaite prolonger r à $\mathbb{C}$ tout entier ?*

Dans $\mathbb{R}$, on a $\sqrt{0} = 0$, donc

$$\boxed{\text{il est naturel de poser } r(0) = 0.}$$

Si x est un nombre réel strictement négatif, ses racines carrées sont $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$. Comme aucune des deux n'est de partie imaginaire strictement positive, on ne sait pas choisir si l'on doit poser $r(x) = i\sqrt{-x}$ ou $r(x) = -i\sqrt{-x}$. On peut résumer ce dilemme en disant que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{prolonger } r \text{ à } \mathbb{C} \text{ tout entier induit une discontinuité du} \\ \text{prolongement en tout nombre réel strictement négatif.}\end{array}}$$

EXERCICE 4

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des relations d'ordre de E. Pour $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ appartenant à $\mathscr{O}(E)$, on dit que $\mathscr{R}_2$ est plus fine que $\mathscr{R}_1$ lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}_1 y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}_2 y)$, c'est-à-dire lorsque, si deux éléments sont comparables par $\mathscr{R}_1$, ils le sont aussi par $\mathscr{R}_2$ (et dans le même sens). On écrit alors $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$.

1. *Sur $\mathbb{N}^*$, donner un exemple de deux relations d'ordre $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ telles que $\mathscr{R}_1 \prec \mathscr{R}_2$.*

   Le symbole $\mid$ désignant la divisibilité, il est clair que
   $$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \qquad (x \mid y) \implies (x \leqslant y),$$
   donc
   $$\boxed{\text{sur } \mathbb{N}^*\text{, la comparaison par } \leqslant \text{ est strictement plus fine que la divisibilité.}}$$

2. *Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{O}(E)$.*

   ▷ Réflexivité :
   Pour tout $\mathscr{R} \in \mathscr{O}(E)$, il est vrai que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}\, y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}\, y)$, donc $\mathscr{R} \preccurlyeq \mathscr{R}$.
   Par conséquent, $\preccurlyeq$ est réflexive.

   ▷ Transitivité :
   Soient $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3 \in \mathscr{O}(E)$ telles que $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_2 \preccurlyeq \mathscr{R}_3$. Démontrons que $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_3$.
   Soient $x, y \in E$ tels que $x \mathscr{R}_1 y$. Dans un premier temps, comme $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$, on en déduit que $x \mathscr{R}_2 y$. Dans un second temps, comme $\mathscr{R}_2 \preccurlyeq \mathscr{R}_3$, on en déduit que $x \mathscr{R}_3 y$. On a ainsi démontré que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}_1 y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}_3 y)$, ce qui démontre que $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_3$.
   Donc $\preccurlyeq$ est transitive.

   ▷ Antisymétrie :
   Soient $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \in \mathscr{O}(E)$ telles que $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_2 \preccurlyeq \mathscr{R}_1$. Démontrons que $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$.
   Comme $\mathscr{R}_1 \preccurlyeq \mathscr{R}_2$, on a $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}_1 y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}_2 y)$ et comme $\mathscr{R}_2 \preccurlyeq \mathscr{R}_1$, on a aussi $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}_2 y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}_1 y)$. Il s'ensuit que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R}_1 y) \Longleftrightarrow (x \mathscr{R}_2 y)$, ce qui signifie que $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$.
   Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

   En conclusion,
   $$\boxed{\preccurlyeq \text{ est une relation d'ordre sur } \mathscr{O}(E).}$$

3. *Donner le petit élément pour $\preccurlyeq$ dans $\mathscr{O}(E)$.*

   La relation d'égalité $=$ est une relation d'ordre (c'est dans le cours !).
   Pour toute relation d'ordre $\mathscr{R}$, on a $\forall x, y \in E,\ (x = y) \Longrightarrow (x \mathscr{R}\, y)$ car $\mathscr{R}$ est réflexive, ce qui démontre que $= \preccurlyeq \mathscr{R}$.
   On en conclut que
   $$\boxed{\text{le petit élément pour } \preccurlyeq \text{ dans } \mathscr{O}(E) \text{ est l'égalité.}}$$

4. *Rappelons que dans un ensemble ordonné, un élément est dit maximal s'il n'y a pas d'élément strictement plus grand que lui.*

   a) *Démontrer qu'une relation d'ordre totale est un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.*

   Soient $\mathscr{R}$ une relation d'ordre totale sur E et $\mathscr{T}$ une autre relation d'ordre telles que $\mathscr{R} \preccurlyeq \mathscr{T}$.
   Nous allons démontrer que $\mathscr{T} = \mathscr{R}$.
   Comme $\mathscr{R} \preccurlyeq \mathscr{T}$, on a $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y) \Longrightarrow (x \mathscr{T} y)$.
   Reste donc à démontrer que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{T} y) \Longrightarrow (x \mathscr{R} y)$. Pour cela, on introduit $x, y \in E$ tels que $x \mathscr{T} y$ et l'on raisonne par l'absurde en supposant que $x \not\mathscr{R} y$. Comme $\mathscr{R}$ est totale, cela implique que $y \mathscr{R} x$. Or $\mathscr{T}$ est plus fine que $\mathscr{R}$ donc on a aussi $y \mathscr{T} x$. La conjonction de $x \mathscr{T} y$ et $y \mathscr{T} x$ implique alors que $x = y$ puisque $\mathscr{T}$ est antisymétrique. Mézalors, on a $x \mathscr{R} y$ par réflexivité, ce qui contredit l'hypothèse de notre raisonnement. C'est absurde ! On a ainsi démontré que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{T} y) \Longrightarrow (x \mathscr{R} y)$.
   On sait donc que $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y) \Longleftrightarrow (x \mathscr{T} y)$, ce qui signifie que $\mathscr{R} = \mathscr{T}$.
   Ce raisonnement prouve que $\mathscr{R}$ est un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\text{une relation d'ordre totale est un élément maximal de } \mathscr{O}(E) \text{ pour } \preccurlyeq.}$$

b) *Soient $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E qui n'est pas totale et a, b deux éléments non comparables par $\mathscr{R}$. On considère la relation $\mathscr{S}$ définie par $(x\,\mathscr{S}\,y) \iff \big(x\,\mathscr{R}\,y \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)\big)$. Démontrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre sur E strictement plus fine que $\mathscr{R}$.*

- ▷ Commençons par démontrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre sur E.

  Réflexivité :
  Soit $x \in E$. Comme $\mathscr{R}$ est réflexive, on a $x\,\mathscr{R}\,x$. L'assertion $\big(x\,\mathscr{R}\,x \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,x)\big)$ est alors vraie, ce qui signifie que $x\,\mathscr{S}\,x$.
  Par conséquent, $\mathscr{S}$ est réflexive.

  Transitivité :
  Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\,\mathscr{S}\,y$ et $y\,\mathscr{S}\,z$. On a alors $\big(x\mathscr{R}y \text{ ou } (x\mathscr{R}\,a \text{ et } b\mathscr{R}\,y)\big)$ et $\big(y\mathscr{R}z \text{ ou } (y\mathscr{R}\,a \text{ et } b\mathscr{R}\,z)\big)$, ce qui laisse a priori quatre possibilités :

  - ∗ Si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ alors $x\,\mathscr{R}\,z$ par transitivité de $\mathscr{R}$. Alors, on a $\big(x\,\mathscr{R}\,z \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)\big)$, c'est-à-dire $x\,\mathscr{S}\,z$.
  - ∗ Si $x\mathscr{R}y$ et $(y\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)$ alors $x\,\mathscr{R}\,a$ par transitivité de $\mathscr{R}$. Alors, on a $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)$ et donc aussi $\big(x\,\mathscr{R}\,z \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)\big)$, c'est-à-dire $x\,\mathscr{S}\,z$.
  - ∗ Si $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)$ et $y\mathscr{R}z$ alors $b\,\mathscr{R}\,z$ par transitivité de $\mathscr{R}$. Dès lors, on a $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)$ et donc aussi $\big(x\,\mathscr{R}\,z \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)\big)$, c'est-à-dire $x\,\mathscr{S}\,z$.
  - ∗ Enfin, si $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)$ et $(y\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,z)$ alors $b\,\mathscr{R}\,a$ par transitivité de $\mathscr{R}$, ce qui n'est pas possible (a et b ne sont pas $\mathscr{R}$-comparables). Ce cas ne se présente donc pas.

  On voit donc que, dans tous les cas possibles, on a $x\,\mathscr{S}\,z$.
  Cela démontre que $\mathscr{S}$ est transitive.

  Antisymétrie :
  Soient $x, y \in E$ tels que $x\,\mathscr{S}\,y$ et $y\,\mathscr{S}\,x$. On a alors $\big(x\mathscr{R}y \text{ ou } (x\mathscr{R}\,a \text{ et } b\mathscr{R}\,y)\big)$ et $\big(y\mathscr{R}x \text{ ou } (y\mathscr{R}\,a \text{ et } b\mathscr{R}\,x)\big)$, ce qui laisse a priori quatre possibilités :

  - ∗ Si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ alors $x = y$ par antisymétrie de $\mathscr{R}$.
  - ∗ Si $x\mathscr{R}y$ et $(y\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,x)$ alors $b\,\mathscr{R}\,a$ par transitivité de $\mathscr{R}$, ce qui n'est pas possible (a et b ne sont pas $\mathscr{R}$-comparables). Ce cas ne se présente donc pas.
  - ∗ Si $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)$ et $y\mathscr{R}x$ alors $b\,\mathscr{R}\,a$ par transitivité de $\mathscr{R}$, ce qui n'est pas possible (a et b ne sont pas $\mathscr{R}$-comparables). Ce cas ne se présente donc pas.
  - ∗ Enfin, si $(x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)$ et $(y\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,x)$ alors $b\,\mathscr{R}\,a$ par transitivité de $\mathscr{R}$, ce qui n'est pas possible (a et b ne sont pas $\mathscr{R}$-comparables). Ce cas ne se présente donc pas.

  On voit donc que, dans le seul cas possible, on a $x = y$.
  Cela démontre que $\mathscr{S}$ est antisymétrique.

  En conclusion, $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre sur E.

- ▷ Démontrons ensuite que $\mathscr{S}$ est plus fine que $\mathscr{R}$.

  Soient $x, y \in E$ tels que $x\mathscr{R}y$. On a alors $\big(x\mathscr{R}y \text{ ou } (x\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,y)\big)$, ce qui signifie que $x\,\mathscr{S}\,y$. On a ainsi démontré que $\forall x, y \in E,\ (x\mathscr{R}y) \Longrightarrow (x\,\mathscr{S}\,y)$, autrement dit que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre plus fine que $\mathscr{R}$.

- ▷ Démontrons enfin que $\mathscr{S}$ est strictement plus fine que $\mathscr{R}$.

  On sait a et b ne sont pas en relation par $\mathscr{R}$. Par contre, l'assertion $\big(a\,\mathscr{R}\,b \text{ ou } (a\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,b)\big)$ est vraie (car $(a\,\mathscr{R}\,a \text{ et } b\,\mathscr{R}\,b)$ est vraie puisque $\mathscr{R}$ est réflexive), ce qui démontre que $a\,\mathscr{S}\,b$. Les éléments a et b sont donc en relation par $\mathscr{S}$. Cela justifie le fait que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre strictement plus fine que $\mathscr{R}$.

En conclusion,

si $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E non totale, alors il existe une relation d'ordre sur E qui est strictement plus fine que $\mathscr{R}$.

c) *En déduire quels sont les éléments maximaux de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.*

La question a) dit qu'une relation d'ordre totale est un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.
La question b) dit qu'une relation d'ordre non totale n'est pas un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$.
En conclusion,

les éléments maximaux de $\mathscr{O}(E)$ pour $\preccurlyeq$ sont exactement les relations d'ordre totales.

EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On appelle polygone régulier à n cotés (ou n-agone régulier) un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de nombres complexes de module 1 deux à deux distincts tels que l'on ait $a_0 = 1$ et $|a_1 - a_0| = |a_2 - a_1| = \cdots = |a_{n-1} - a_{n-2}| = |a_0 - a_{n-1}|$. Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont appelés les sommets du polygone. Les couples (a_0, a_1), (a_1, a_2), $\ldots$, (a_{n-2}, a_{n-1}) et (a_{n-1}, a_0) sont appelés les cotés du polygone. La distance qui sépare deux sommets consécutifs (c'est-à-dire la distance $|a_1 - 1|$) est appelée la longueur des cotés du polygone.

1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $|\,\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta}\,|$.*

   La technique de l'angle moyen nous dit que

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta}\,| &= \left|\,\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{i(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-i(\alpha-\beta)/2}\right)\right| \\ &= \left|\,\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\,\right| \times \left|2i \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \\ &= 2\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \qquad \text{car } \left|\,\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\,\right| = |i| = 1, \end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{|\,\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta}\,| = 2\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|\cdot}$$

2. a) *Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un polygone régulier à n cotés. On note $\theta \in [0; 2\pi[$ un argument de a_1 de sorte que $a_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$.*

   $\alpha]$ *Démontrer que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]\,,\ a_k = \mathrm{e}^{ik\theta}$.*

   Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on note

$$\mathscr{P}(k): \quad a_k = \mathrm{e}^{ik\theta}\,.$$

   <u>Initialisation :</u> On a $a_0 = 1 = \mathrm{e}^{i0\theta}$, ce qui démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Fixons $k \in [\![0; n-2]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Notons α un argument de a_{k+1}. On sait que $|a_{k+1} - a_k| = |a_1 - 1|$. Or

$$\begin{aligned} |a_{k+1} - a_k| = |a_1 - 1| &\iff \left|\sin\frac{\alpha - k\theta}{2}\right| = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \\ &\iff \sin\frac{\alpha - k\theta}{2} = \pm\sin\frac{\theta}{2} \\ &\iff \frac{\alpha - k\theta}{2} \equiv \pm\frac{\theta}{2}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \frac{\alpha - k\theta}{2} \equiv \pi \mp \frac{\theta}{2}\ [2\pi] \\ &\iff \alpha - k\theta \equiv \pm\theta\ [2\pi] \\ &\iff \alpha \equiv (k \pm 1)\theta\ [2\pi], \end{aligned}$$

   ce qui laisse deux possibilités pour α, c'est-à-dire

$$\alpha \equiv (k+1)\theta\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad \alpha \equiv (k-1)\theta\ [2\pi].$$

   Or a_{k+1} est distinct de a_{k-1}, donc on doit rejeter la seconde possibilité. On en déduit que

$$\alpha \equiv (k+1)\theta\ [2\pi]$$

   et donc

$$a_{k+1} = \mathrm{e}^{i(k+1)\theta}\,.$$

   Cela démontre que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0; k-1]\!]$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n-1]\!]\,, \qquad a_k = \mathrm{e}^{ik\theta}.}$$

β] *Démontrer qu'il existe $p \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\theta = 2p\pi/n$.*

On sait que $|1 - a_{n-1}| = |a_1 - 1|$. Or

$$\begin{aligned}
|1 - a_{n-1}| = |a_1 - 1| \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\sin\frac{(n-1)\theta}{2}\right| = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin\frac{(n-1)\theta}{2} = \pm\sin\frac{\theta}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n-1)\theta}{2} \equiv \pm\frac{\theta}{2}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \frac{(n-1)\theta}{2} \equiv \pi \mp \frac{\theta}{2}\ [2\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad (n-1)\theta \equiv \pm\theta\ [2\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad (n-2)\theta \equiv 0\ [2\pi] \ \text{ ou } \ n\theta \equiv 0\ [2\pi]
\end{aligned}$$

ce qui laisse deux possibilités pour θ, c'est-à-dire

$$\exists p \in [\![1; n-3]\!],\ \theta = \frac{2p\pi}{n-2} \qquad \text{ou} \qquad \exists p \in [\![1; n-1]\!],\ \alpha = \frac{2p\pi}{n}\cdot$$

Or, si la première possibilité était la bonne, on aurait $a_{n-2} = 1 = a_0$, ce qui n'est pas possible. On ne garde donc que la seconde possibilité, ce qui démontre que

$$\boxed{\text{il existe } p \in [\![1; n-1]\!] \text{ tel que } \theta = \frac{2p\pi}{n}\cdot}$$

γ] *Démontrer que p et n sont premiers entre eux.*

Par l'absurde : supposons que p et n ne soient pas premiers entre eux, c'est-à-dire que p et n admettent un diviseur commun d tel que $d > 1$. Dès lors, on a

$$a_{n/d} = \exp\left\{i\frac{n}{d}\theta\right\} = \exp\left\{i\frac{n}{d}\frac{2p\pi}{n}\right\} = \exp\left\{i\frac{p}{d}2\pi\right\} = 1,$$

où la dernière égalité découle du fait que p/d est un entier. Comme les a_k sont distincts deux à deux, l'égalité $a_{n/d} = a_0$ est absurde ! En conclusion,

$$\boxed{p \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux.}}$$

b) *Soit $p \in [\![1; n-1]\!]$ un entier premier avec n. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose $a_k = \mathrm{e}^{2ikp\pi/n}$. Démontrer que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un n-agone régulier dont on précisera la longueur des cotés. Ce n-agone régulier est appelé le « polygone $\{n|p\}$ ».*

Il est clair que $a_0 = 1$ et que les a_k sont tous de module 1.

Démontrons que les a_k sont deux à deux distincts. Pour cela, on considère $k, \ell \in [\![0; n-1]\!]$ tels que $a_k = a_\ell$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \mathrm{e}^{2i\ell p\pi/n}$. Cela donne $2kp\pi/n \equiv 2\ell p\pi/n\ [2\pi]$, ce qui se réécrit sous la forme $(k-\ell)p \equiv 0\ [n]$. L'entier n divise donc le produit $(k-\ell)p$. Comme n est premier avec p, le lemme de Gauss implique que n divise $k-\ell$. Comme $k-\ell \in [\![-(n-1); n-1]\!]$, cela implique que $k - \ell = 0$, c'est-à-dire $k = \ell$. Par conséquent, les a_k sont distincts deux à deux.

Par ailleurs, si l'on pose $a_n = \mathrm{e}^{2inp\pi/n} = 1$, on a, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$|a_{k+1} - a_k| = \left|\,\mathrm{e}^{2i(k+1)p\pi/n} - \mathrm{e}^{2ikp\pi/n}\,\right| = 2\left|\sin\frac{\dfrac{2(k+1)p\pi}{n} - \dfrac{2kp\pi}{n}}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{p\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{p\pi}{n},$$

ce qui permet d'affirmer, puisque le résultat ne dépend pas de k, que

$$|a_1 - a_0| = |a_2 - a_1| = \cdots = |a_{n-1} - a_{n-2}| = |a_0 - a_{n-1}|.$$

Donc

$$\boxed{(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \text{ est un } n\text{-agone régulier dont la longueur des cotés est } 2\sin\frac{p\pi}{n}.}$$

3. a) *Soient $p_1, p_2 \in [\![1; n-1]\!]$ deux entiers premiers avec n. Démontrer que les polygones $\{n|p_1\}$ et $\{n|p_2\}$ ont la même longueur de cotés si, et seulement si, $p_2 = p_1$ ou $p_2 = n - p_1$.*

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(\{n|p_1\} \text{ et } \{n|p_2\} \text{ ont la même longueur de cotés}) &\iff \left(\sin\frac{p_1\pi}{n} = \sin\frac{p_2\pi}{n}\right)\\
&\iff \left(\frac{p_1\pi}{n} = \frac{p_2\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1\pi}{n} = \pi - \frac{p_2\pi}{n}\right)\\
&\iff (p_1 = p_2 \quad \text{ou} \quad p_1 = n - p_2),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{les polygones } \{n|p_1\} \text{ et } \{n|p_2\} \text{ ont la même longueur de cotés si, et seulement si, } p_2 = p_1 \text{ ou } p_2 = n - p_1.}$$

b) *En déduire que le nombre de n-agones réguliers dont les longueurs de cotés sont distinctes vaut $\varphi(n)/2$ où $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers dans $[\![1; n-1]\!]$ qui sont premiers avec n.*

Les différents résultats de la question 2 nous disent que l'ensemble des n-agones réguliers est exactement l'ensemble des polygones $\{n|p\}$ pour p décrivant l'ensemble des nombre entiers dans $[\![1; n-1]\!]$ qui sont premiers avec n.

Par ailleurs, le résultat de la question précédente nous dit que si p est dans l'ensemble des nombre entiers dans $[\![1; n-1]\!]$ qui sont premiers avec n, chaque polygone est exactement compté deux fois. En effet : $\{n|n-p\}$ est bien défini car $n-p$ est clairement premier avec n ; les polygones $\{n|p\}$ et $\{n|n-p\}$ ont la même longueur de cotés, qu'ils ne partagent avec aucun autre n-agone régulier et enfin $\{n|p\}$ et $\{n|n-p\}$ sont bien distincts puisque $n - p \neq p$ (sinon p ne serait pas premier avec n).

On en déduit que

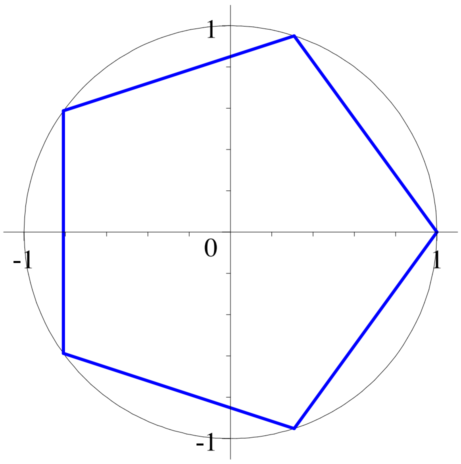
$$\boxed{\text{le nombre de } n\text{-agones réguliers dont les longueurs de cotés sont distinctes vaut } \varphi(n)/2 \text{ où } \varphi(n) \text{ désigne le nombre d'entiers dans } [\![1; n-1]\!] \text{ qui sont premiers avec } n.}$$

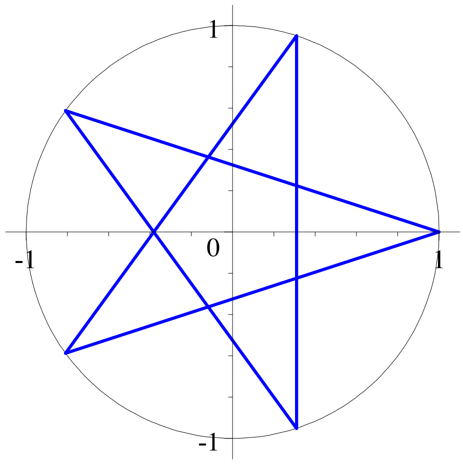
c) *Dessiner tous les pentagones, tous les heptagones (donnée : $2\pi/7 \approx 51°$) et tous les octogones.*

On a

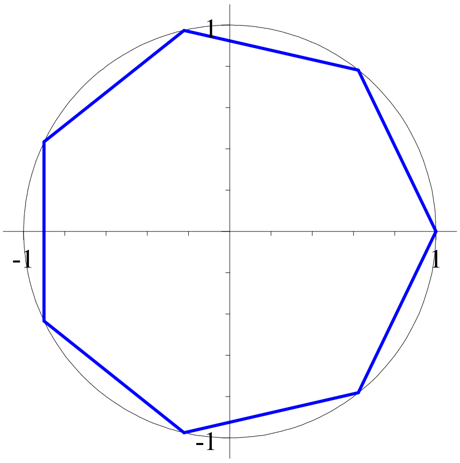
n	5 pentagone	6 hexagone	7 heptagone	8 octogone	9 nonagone	10 décagone	11 endécagone	12 dodécagone
$\frac{\varphi(n)}{2}$	2	1	3	2	3	2	5	2

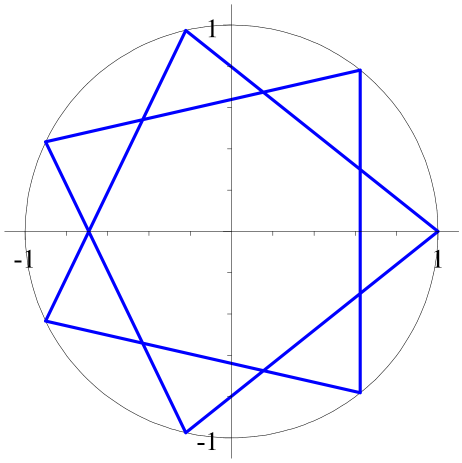
Voici les deux pentagones :

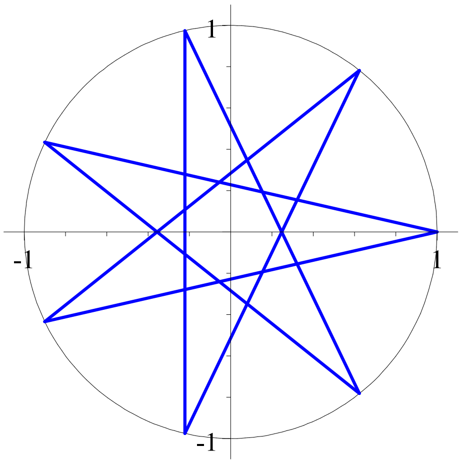




Voici les trois heptagones :







Voici les deux octogones :