Oraux ENS - Maths Lyon

Martin Teuscher

6 juillet 2019

1 Énoncé

1.1

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, de degré 2 et de discriminant non nul. On considère l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid \chi_A = P\}$$

Montrer que toutes les matrices de cet ensemble sont conjuguées, i.e. :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \ \exists Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{Q}), A = Q^{-1}BQ$$

Indication : Se placer dans le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et les racines de P. Quelle est sa dimension en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

1.2

Soit p un nombre premier, $P \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré 2 et de discriminant non nul, $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telle que $\chi_A = P$. On admet que le résultat précédent reste vrai dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, i.e. qu'il existe un surcorps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de dimension 1 ou 2 (en tant que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev) contenant les racines de P et dans lequel travailler.
On munit $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité que $M \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ commute avec A ?
Indication : Trouver une base judicieuse du commutant de A. (Quelles sont les matrices particulières qui s'y trouvent ?)

2 Déroulé de l'oral

Lieu de passage : ENS Ulm, salle Henri Cartan 1.

Examinateur agréable, qui m'**a laissé justifier un grand nombre de choses à l'oral**, quitte à me demander de réexpliquer. Par exemple, j'ai écrit directement $\mathbb{Q}[\lambda_1, \lambda_2] = \{\alpha + \beta\lambda_1 + \gamma\lambda_2, \ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3\}$ (où λ_1 et λ_2 sont les racines de P). Il m'a demandé de justifier : j'ai précisé à l'oral que P étant de degré 2 et annulant λ_1 et λ_2, on allait pouvoir exprimer toutes leurs puissances en fonction de leurs puissances 0 et 1, il a approuvé et j'ai pu passer à la suite sans rédiger un pataquès sur la division euclidienne.

L'indication pour la première partie est venue après que le lui ai présenté la démonstration de $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conjuguées dans $\mathbb{C} \implies A, B$ conjuguées dans $\mathbb{R}$ et dit que j'allais essayer de l'adapter. Il faut donc ici se placer dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}] = \mathbb{Q}[\lambda_1, \lambda_2]$, analogue de l'extension $\mathbb{R}[i]$.

Pour la deuxième partie, j'ai traité le cas $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathbb{K} = 1$ sans aide (on trouve $\mathbb{P} = \frac{1}{p(p+1)}$), mais sans me rendre compte que ce n'était qu'un seul des deux cas. L'examinateur est donc resté interloqué que je ne lui présente qu'une seule réponse, puis m'a indiqué que je n'avais traité que la moitié. Je reprends alors les calculs dans le cas $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathbb{K} = 2$. S'ensuit une discussion avec l'examinateur, où je tente de façon infructueuse plusieurs bases du commutant dans lesquelles compter les éléments : l'examinateur me suivait pour voir à chaque fois si cela allait fonctionner ou pas. Il me dit alors : « certaines matrices du commutant sont particulières. Lesquelles ? » et je comprends que la bonne base à considérer est (I_2, A). Je termine alors le dénombrement à partir de là (cette technique permet aussi de répondre au cas $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathbb{K} = 1$) : j'obtiens cette fois-ci $\mathbb{P} = \frac{1}{p(p-1)}$, et l'oral s'arrête.