

MP*1

Problème

Fonctions de gradient unitaire

Si g est une fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} , à valeurs réelles, on note :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) \quad (\text{resp. } \underline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t))$$

la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ de $g(t)$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. C'est ainsi que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) = +\infty$$

signifie qu'il existe une suite (t_k) de réels > 0 de limite 0 telle que $g(t_k) \rightarrow +\infty$, et que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) \geq C$$

signifie, si C est réel, qu'il existe une suite (t_k) de réels > 0 de limite 0 telle que $g(t_k) - C \rightarrow 0$.

Ce problème fait établir diverses variantes de l'inégalité des accroissements finis et les applique à la détermination des fonctions de gradient unitaire sur un espace euclidien.

I. Forme forte de l'inégalité des accroissements finis

Dans les questions 1 à 3, u et v sont deux réels tels que $u < v$, f une fonction continue de $[u, v]$ dans \mathbb{R} .

1. On suppose que C est un nombre réel tel que :

$$\forall t \in [u, v[, \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq C.$$

On se propose de montrer :

$$f(v) - f(u) \leq C(v - u).$$

A cet effet on fixe $\varepsilon > 0$ et on considère l'ensemble :

$$E = \{t \in [u, v], f(t) - f(u) \leq (C + \varepsilon)(t - u)\}.$$

- Justifier l'existence de $s = \sup E$; vérifier que E contient s .
- En raisonnant par l'absurde, montrer que $s = v$.
- Conclure.

2. Supposons :

$$\forall t \in [u, v[, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 0.$$

Montrer que f est décroissante.

3. Comment s'énoncent les résultats de 1 et 2 si on suppose f dérivable à droite en tout point de $[u, v[$?

4. Soient $(E, \| \cdot \|)$ et $(F, \| \cdot \|)$ deux espaces normés réels de dimension finie, Ω un ouvert de E , a et b deux points distincts de Ω tels que $[a, b] \subset \Omega$, f une fonction différentiable de Ω dans F telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \|df(x)\|_{\text{op}} \leq C.$$

Montrer :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq C\|b - a\|.$$

II. Une « minoration d'accroissements finis »

Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé réel de dimension finie et a dans E . Pour $r > 0$, soit B_r la boule fermée de $(E, \| \cdot \|)$ de centre a et de rayon r . Soient aussi ρ dans \mathbb{R}^+ , et f une application continue de B_ρ dans \mathbb{R} .

On pose, pour $r \in [0, \rho]$, $\alpha(r) = \max\{f(x), x \in B_r\}$.

5. a) Justifier la définition de α .

b) Montrer que α est continue sur $[0, \rho]$.

Dans la suite, on suppose que la restriction de f à $\overset{\circ}{B}_\rho$ est différentiable, que C est un élément de \mathbb{R}^{+*} tel que :

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\rho, \quad \|df(x)\|_{\text{op}} \geq C.$$

On se propose de montrer :

$$\alpha(\rho) - f(a) \geq C\rho.$$

6. Si r est dans $[0, \rho]$, soit S_r la sphère de E de centre a et de rayon r . Montrer que :

$$\alpha(r) = \max\{f(x), x \in S_r\}.$$

7. a) Montrer, si $0 \leq r < \rho$:

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(r+h) - \alpha(r)}{h} \geq C.$$

c) Conclure.

III. Fonctions de gradient unitaire

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme provenant de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si Ω est un ouvert non vide de E , on note $I(\Omega)$ l'ensemble des fonctions différentiables sur Ω telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \|\nabla f(x)\| = 1.$$

8. a) A quelle condition une application affine de E dans \mathbb{R} est-elle dans $I(E)$?

b) Montrer que :

$$\begin{array}{rccc} N : & E \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

est dans $I(E \setminus \{0\})$.

9. Soient C un convexe fermé de E distinct de E et $\Omega = E \setminus C$. Pour x dans Ω , soit

$$d_C(x) = d(x, C).$$

On rappelle que pour tout x de Ω il existe un unique point $p(x)$ de C tel que

$$\|x - p(x)\| = d_C(x).$$

Soient a dans Ω et $c = p(a)$.

a) Si x est dans $c + \mathbb{R}^+(a - c)$, calculer $p(x)$.

b) Si x est dans Ω , vérifier :

$$d_C(a) - \|x - a\| \leq d_C(x) \leq \|x - c\|.$$

c) Soient, pour x dans Ω , $u(x) = d_C(a) - \|x - a\|$ et $v(x) = \|x - c\|$. Vérifier :

$$\forall b \in]c, a], \quad \nabla u(b) = \nabla v(b).$$

d) Conclure que d_C est différentiable en b , puis que d_C appartient à $I(\Omega)$.

10. Soient f dans $I(E)$ telle que $f(0) = 0$ et n dans \mathbb{N}^* .

a) Montrer en utilisant la partie II qu'il existe x_n et y_n dans E tels que

$$\|x_n\| \leq n, \quad \|y_n\| \leq n, \quad f(x_n) = -f(y_n) = n.$$

b) Prouver :

$$\|x_n\| = \|y_n\| = n \quad \text{et} \quad y_n = -x_n.$$

c) Soit $u_n = x_n/n$. Pour $t \in [-n, n]$, calculer $f(tu_n)$.

d) Démontrer qu'il existe u dans E de norme 1 tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(tu) = t.$$

e) Prouver :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, u \rangle.$$

f) Déterminer $I(E)$.