MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EFE MPC 1

SESSION 2023

CAPLP
CONCOURS EXTERNE et 3ème CONCOURS
et CAFEP CORRESPONDANTS

SECTION : MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE-CHIMIE

EPREUVE ECRITE DISCIPLINAIRE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Le candidat rendra deux copies séparées pour chacune des deux parties de l'épreuve

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPLP de l'enseignement public** :

Partie mathématiques

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFE	1315J	101A	9814

Partie Physique-Chimie

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFE	1315J	101B	0725

► **Concours externe du CAFEP/CAPLP de l'enseignement privé** :

Partie mathématiques

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFF	1315J	101A	9814

Partie Physique-Chimie

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFF	1315J	101B	0725

► **3ème Concours du CAPLP de l'enseignement public** :

Partie mathématiques

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFV	1315J	101A	9814

Partie Physique-Chimie

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFV	1315J	101B	0725

► **3ème Concours du CAPLP de l'enseignement privé** :

Partie mathématiques

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFW	1315J	101A	9814

Partie Physique-Chimie

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EFW	1315J	101B	0725

ÉPREUVE ÉCRITE DISCIPLINAIRE

Cette épreuve est constituée de deux parties
à rendre sur des copies séparées

Première partie : mathématiques (pages 1 à 5)

Seconde partie : physique-chimie (pages 6 à 15)
Documents réponses partie physique-chimie 1, 2 et 3
à rendre avec la copie de physique-chimie (page 16)

Correctif

Partie Mathématiques

Exercice 2 - Partie 2- question 8 à la page 3

A la place de : Démontrer que la fonction f admet un unique point d'inflexion sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Il faut lire :

Démontrer que la fonction f admet un unique point d'inflexion sur l'intervalle $\left]\mathbf{0};\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Autrement dit **l'intervalle est ouvert du côté de 0.**

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0736 – D'après documents fournis

PARTIE 1 : MATHÉMATIQUES

La partie Mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le premier exercice est un vrai faux avec justification.
Le deuxième exercice est constitué de quatre parties.

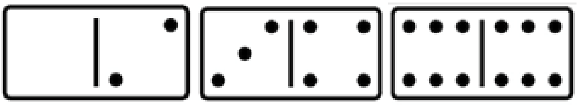
Exercice 1

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Un fabriquant de gâteaux souhaite faire des offres promotionnelles.

Affirmation : « En tant que consommateur, il est préférable d'avoir une réduction tarifaire de 20 % plutôt que 24 % de produit en plus pour le prix initial ».

2. Un domino est constitué de deux cases, chaque case contenant un nombre de points compris entre 0 et 6. Exemples de dominos :



Affirmation : « Il y a 28 dominos différents ».

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

Affirmation : « La suite (u_n) vérifie l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$ ».

4. Soit k un nombre entier naturel non nul. On pose pour tout réel x, $f_k(x) = x - 2 + k\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

On admet que pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k admet un minimum et on appelle A_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ correspondant.

Affirmation : « Les points A_k appartiennent tous à une même droite ».

5. Un sujet de physique est créé par l'un des trois professeurs M. Lavoisier, M. Newton et M. Galilée. Statistiquement, on sait que 35 % des sujets sont écrits par M. Lavoisier, 40 % sont écrits par M. Newton et que les autres sujets sont écrits par M. Galilée.

Les étudiants savent que 20 % des sujets écrits par M. Lavoisier traitent de la relativité, que la moitié des sujets écrits par M. Newton portent sur le thème de la relativité et que 80 % des sujets écrits par M. Galilée portent sur le thème de la relativité.

Lors de l'épreuve, ils découvrent un sujet sur le thème de la relativité.

Affirmation : « La probabilité qu'il ait été écrit par M. Newton est égale à 0,40 ».

6. La fonction f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et telle que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$.

Affirmation : « Seule la fonction identité répond à ces conditions ».

7. On considère l'équation différentielle $4y'' - 12y' + 9y = 1$.

Affirmation : « Il existe une solution à cette équation différentielle qui est strictement négative sur $\mathbb{R}$ ».

8. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère la droite d d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\ (5\,;2)$ et de rayon 4.

Affirmation : « Le point A de la droite d de coordonnées (3 ; 6) dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le point le plus proche du cercle $\mathcal{C}$ ».

9. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Affirmation : « La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 et converge vers 0 ».

10. Soit l'ensemble E des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

Affirmation : « La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans E».

11. On considère la proposition suivante : « Si deux matrices B et C carrées de taille 3×3 sont égales, alors pour toute matrice A carrée de taille 3×3, on a $A \times B = A \times C$ ».

Affirmation : « La proposition réciproque est vraie ».

Exercice 2

Partie 1 : La fonction sinus

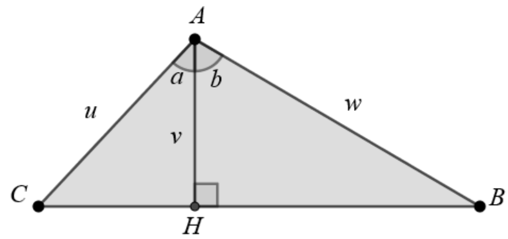
1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note (C) le cercle trigonométrique de centre O et M_x le point de (C) tel que x soit une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{\imath}; \overrightarrow{\mathrm{OM}_x})$.

Rappeler la définition des nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer que l'aire d'un triangle dont on connaît l'un des angles θ et les longueurs α et β des côtés adjacents à cet angle est égale à $\frac{\alpha\beta \sin\theta}{2}$.

3. Sur la figure ci-contre, a et b désignent les mesures en radian des angles $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AH}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB}\right)$ et u, v et w sont respectivement les longueurs AC, AH et AB.



En vous appuyant sur cette figure, démontrer à l'aide de la question précédente l'égalité suivante :

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ pour tous réels positifs a et b vérifiant $0 < a + b < \pi$.

4. À l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que l'égalité de la question 3 est vraie pour tous les réels a et b.

Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^5(x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5.

a. Montrer que la fonction f est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(\frac{\pi}{2} - t) = f(\frac{\pi}{2} + t\ )$.

c. Justifier que l'étude de la fonction f peut être limitée à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire celui de f sur l'intervalle $[-\pi,\ \pi]$.

7. Déterminer l'équation des tangentes à la courbe respectivement aux points d'abscisse 0, d'abscisse $\frac{\pi}{4}$, puis d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

8. Démontrer que la fonction f admet un unique point d'inflexion sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

9. Représenter une allure de la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi,\ \pi]$.

10. En utilisant la méthode des rectangles à gauche et à droite avec 5 rectangles dont la longueur de la base est de $\frac{\pi}{10}$, donner un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\ \mathrm{d}x$.

11. On utilise la méthode des rectangles avec n rectangles dont la longueur de la base est de $\frac{\pi}{2\mathrm{n}}$. Préciser ce qu'il faut écrire à la place du mot TEXTE dans l'algorithme ci-contre, écrit en langage Python, afin d'obtenir une valeur approchée par défaut du nombre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, \mathrm{d}x$. Il n'est pas demandé ici d'en calculer une valeur approchée.

```
from math import *

def integrale (n):
    aire = 0
    for k in range (n):
        aire = aire + TEXTE
    return aire
```

Partie 3 : Les intégrales de Wallis

On considère la suite d'intégrales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

12. ***Les premiers termes.***

a. Calculer S_0 et S_1.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et en déduire la valeur de S_2.

c. Après avoir justifié que, pour tout réel x, on a $\sin^3(x) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)$, calculer la valeur de S_3.

13. ***Sens de variation de la suite.***

a. Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, on a : $0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$.

b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

14. ***Limite de la suite.***

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n,

$$S_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} S_n.$$

b. Montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = (n+1)S_n S_{n+1}$ est constante et donner la valeur de cette constante.

c. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0.

15. ***Application aux calculs des termes.***

a. À l'aide de la relation de récurrence trouvée précédemment, retrouver la valeur de S_3 déjà obtenue à la question **12**.

b. Donner l'expression générale de S_n selon la parité de n.

Partie 4 : Une loi de probabilité

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $g(x)=\frac{15}{16}\sin^5(x)$ et sa courbe Γ dans un repère orthogonal.

16. Dans cette question, on cherche l'expression d'une primitive de la fonction g sur $[0;\pi]$.

a. Rappeler la formule générale du binôme de Newton.

b. Développer l'expression $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^5$.

c. En déduire que pour tout réel x,

$$\sin^5(x)=\frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{5}{16}\sin(3x)+\frac{5}{8}\sin(x)$$

d. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0;\pi]$.

17.

a. Montrer que $\int_0^\pi g(x)\mathrm{d}x=1$.

b. En déduire que g définit la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

On note X la variable aléatoire de densité g et P la probabilité associée définie, pour tout $t\in[0\,;\pi]$ par $P(X\leq t)=\int_0^t g(x)\mathrm{d}x$.

18. Montrer que $P\left(X\leq\frac{\pi}{2}\right)=P\left(X\geq\frac{\pi}{2}\right)=0{,}5$.

19. En admettant que $P\left(X\leq\frac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}02$, donner une valeur approchée de $P\left(\frac{\pi}{2}\leq X\leq\frac{3\pi}{4}\right)$.

20. Montrer qu'il existe un unique $t_0\in\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $P(X\leq t_0)=0{,}3$.

21. Par la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée de t_0 à 0,01 près.

22. Dans cette question, on cherche à calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

a. Pour tout nombre k réel non nul, déterminer l'expression de l'intégrale $\int_0^\pi x\sin(kx)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire l'espérance de X.

PARTIE 2 : PHYSIQUE-CHIMIE

Thème d’étude : en se brossant les dents

Structure de la partie physique-chimie de l’épreuve

La partie physique-chimie de l’épreuve est structurée autour d’un « dossier documentaire » et d’un « travail à réaliser par le candidat ». Elle doit permettre au candidat :

- de montrer sa maîtrise du corpus de savoirs disciplinaires en physique-chimie adapté à l'enseignement en lycée professionnel ;
- de montrer ses capacités à s’approprier et analyser les informations fournies ;
- de montrer sa capacité à communiquer par écrit de manière précise et adaptée, tant dans l’utilisation de la langue française que dans l’utilisation du langage scientifique (utilisation d’un vocabulaire précis et adapté, maîtrise de l’écriture des résultats numériques).

> Dossier documentaire (**documents 1** à **7**)

Le dossier documentaire est organisé en une collection de documentations scientifiques et techniques liée au thème du sujet.

> Travail à réaliser par le candidat (**questions 1** à **46**)

Le sujet de physique-chimie s’appuie sur un ensemble de questionnements structuré en différentes parties et sous-parties indépendantes les unes des autres.

Les références au « dossier documentaire » peuvent être précisées ou non dans le questionnement.

Le cas échéant, le candidat indique dans ses réponses les références des documents sur lesquels il s’appuie.

> Documents réponses partie physique-chimie (**documents réponses partie physique-chimie 1** à **3**)

Le candidat rend, avec son ensemble de copies relatif à cette partie de l'épreuve, les documents réponses partie physique-chimie présents en fin de sujet même s'ils ne sont pas complétés.

DOSSIER DOCUMENTAIRE

Documentations scientifiques et techniques

Document 1 : l'hydroxyapatite (HAp)

L'hydroxyapatite (HAp) est une espèce minérale de la famille des phosphates, de formule $Ca_5(PO_4)_3OH$, usuellement écrite $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ pour souligner le fait que la maille de la structure cristalline comprend deux motifs.

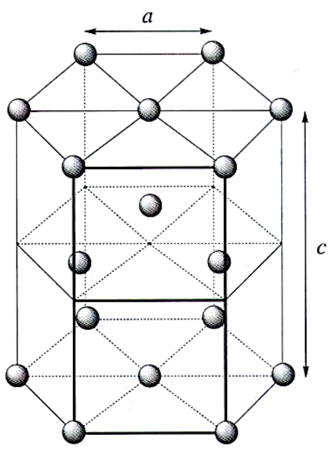
L'hydroxyapatite est le membre hydroxylé du groupe apatite. Les ions hydroxyde HO^- peuvent être remplacés par des ions fluorure F^-, chlorure Cl^- ou carbonate CO_3^{2-}.

L'hydroxyapatite cristallise dans le système hexagonal […]. L'hydroxyapatite est le principal composant minéral de l'émail dentaire, de la dentine et de l'os.

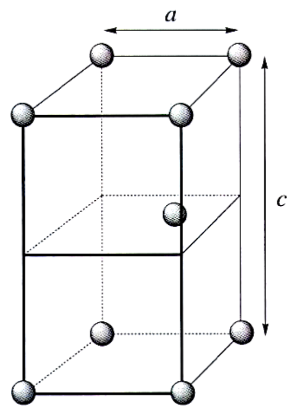
D'après https://fr.wikipedia.org/wiki/Hydroxyapatite

Structure hexagonale compacte

Maille conventionnelle



Maille élémentaire



D'après B. Fosset (dir), *Chimie PC-PC**, Éd. Dunod, 2006

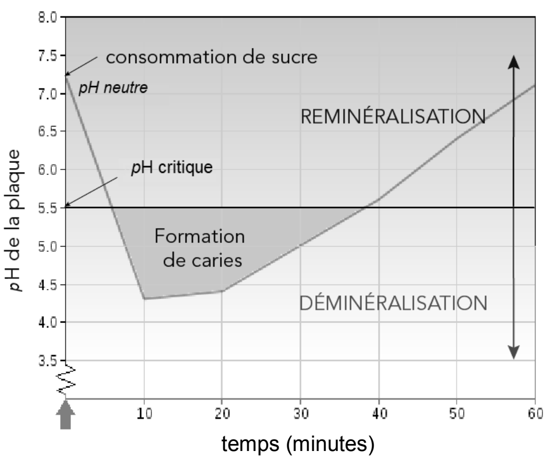
L'expression littérale du volume de la maille élémentaire de la structure hexagonale peut s'écrire $V_{\text{maille}} = a^2 \times c \times \sin(120°)$.

Document 2 : cycle de déminéralisation et de reminéralisation de l'émail dentaire

Dans la cavité buccale (supposée à $37\ °C$), l'émail dentaire subit en permanence une alternance de cycles de déminéralisation et de reminéralisation.

La courbe de Stephan ci-contre montre comment chaque consommation d'aliments fait chuter le pH de la plaque dentaire, ce qui déclenche le processus de déminéralisation.

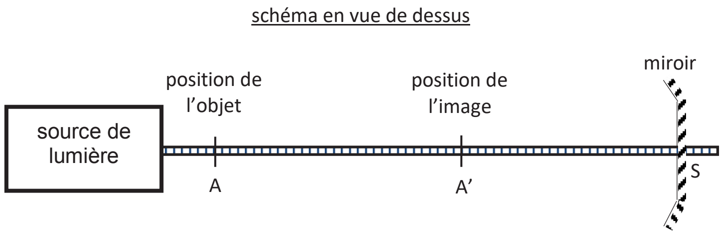
Un déséquilibre de ces cycles en faveur de la déminéralisation se traduit par une lésion carieuse dont le site initial est toujours la surface de l'émail.



D'après https://parlonssciences.ca

Document 3 : expérience avec un miroir de maquillage

L'objet est placé sur un banc d'optique.



On rapproche le miroir de l'objet par pas de 10,0 cm. Pour chaque position du miroir, on mesure la position de l'image sur un écran (voir tableau ci-contre).

numéro de la mesure	$\overline{SA}$ (cm)	$\overline{SA'}$ (cm)
1	-165,0	-52,9
2	-155,0	-55,1
3	-145,0	-56,7
4	-135,0	-58,2
5	-125,0	-59,4
6	-115,0	-62,5
7	-105,0	-65,4
8	-95,0	-70,4

Relation de conjugaison avec origine au sommet S pour les miroirs sphériques, où A et A' sont sur l'axe optique du miroir :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Document 4 : le (−)-menthol

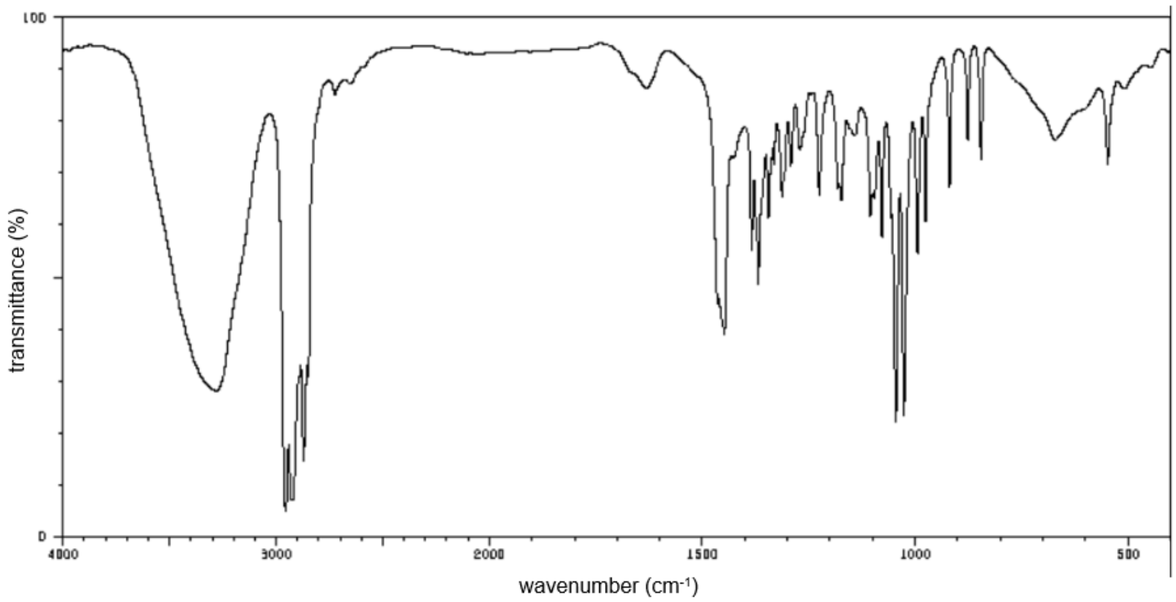
Le menthol naturel est l'énantiomère (−)-menthol.

Le (+)-menthol a lui aussi une odeur de menthe. Mais seul le (−)-menthol apporte une sensation de fraîcheur, par son interaction, non seulement avec des récepteurs olfactifs, mais aussi avec des récepteurs du froid.

(−)-menthol

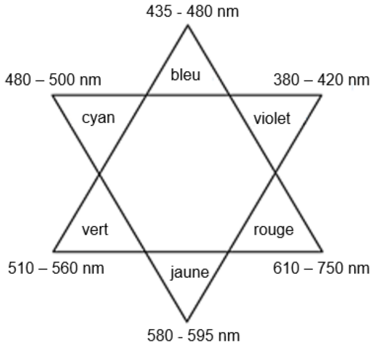
D'après https://www.lajauneetlarouge.com/la-production-de-menthol

Spectre infrarouge de la molécule de menthol

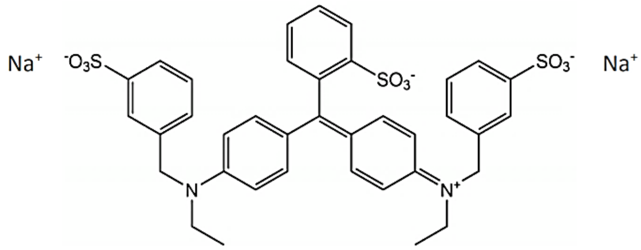


D'après https://sdbs.db.aist.go.jp/sdbs/cgi-bin/direct_frame_top.cgi

Document 5 : colorant E133 dans le bain de bouche

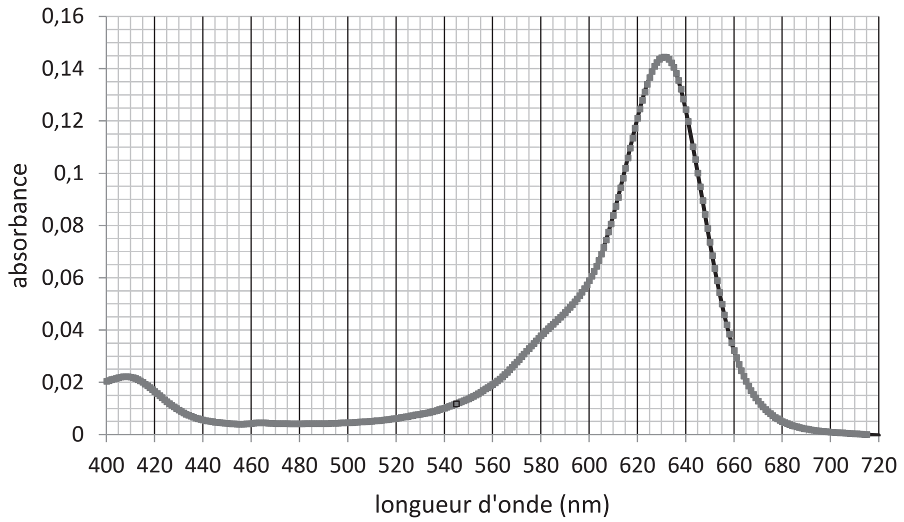


Étoile chromatique

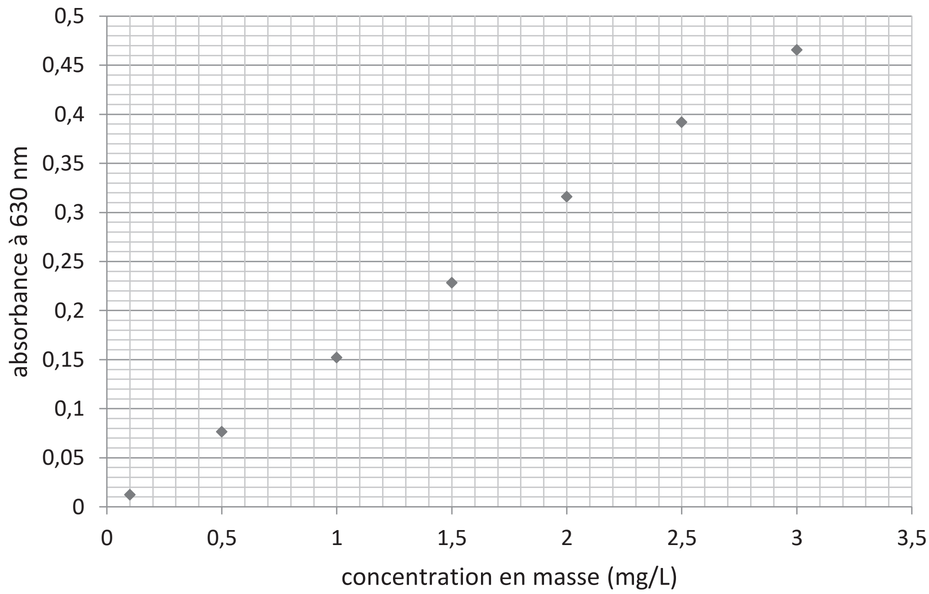


Formule topologique du E133

Absorbance du E133 dans le bain de bouche en fonction de la longueur d'onde



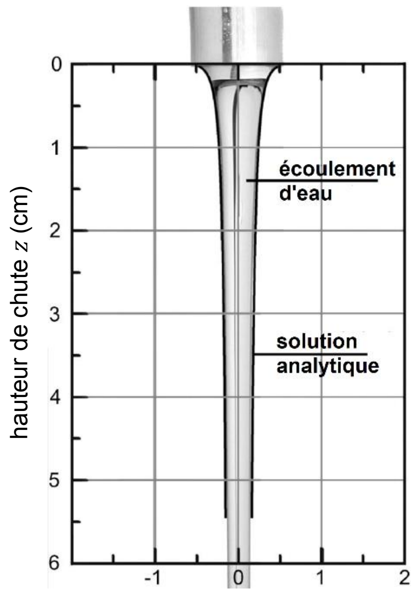
Absorbance du E133 à 630 nm en fonction de sa concentration en masse



Tournez la page S.V.P.

Document 6 : rétrécissement d'un écoulement d'eau en chute libre

La section d'un écoulement d'eau issu d'un robinet se rétrécit au fur et à mesure de sa chute. Nous allons étudier l'évolution du rayon r de l'écoulement stationnaire issu d'un robinet de rayon r_0 et de débit volumique ϕ_v.



rayon de l'écoulement r (cm)

Le rayon r, en fonction de la hauteur de chute z, peut être calculé et les résultats comparés à l'expérience. La photographie, ci-contre, montre un écoulement d'eau et, superposée, la solution analytique obtenue.

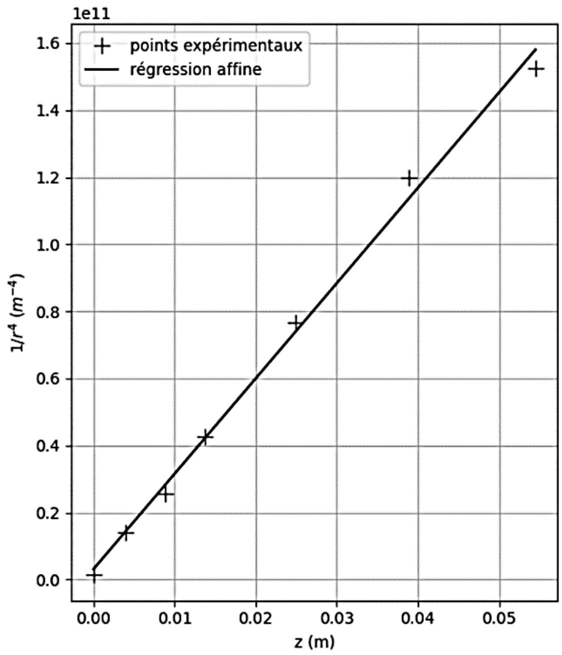
Pour cette étude, le débit de l'eau est mesuré précisément : $\phi_v = 8{,}6\ \mathrm{mL \cdot s^{-1}}$.

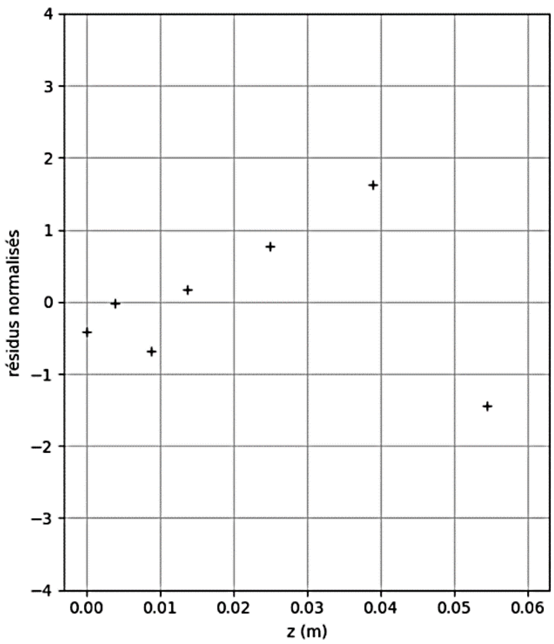
Le rayon initial est : $r_0 = 5{,}0\ \mathrm{mm}$.

Mesures expérimentales

z (mm)	r (mm)
0	5,0
3,9	2,9
8,8	2,5
13,7	2,2
24,9	1,9
38,9	1,7
54,5	1,6

Traitement des mesures expérimentales





D'après Vladimir Grubelnik et Marko Marhl, *American Journal of Physics* **73**, 415 (2005)

Document 7 : données numériques

- L'hydroxyapatite, $\mathrm{Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)}}$, cristallise dans un système hexagonal avec pour paramètres de maille $a = 942$ pm et $c = 688$ pm.

- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.

- Masses molaires atomiques :

Atome	hydrogène (H)	oxygène (O)	phosphore (P)	calcium (Ca)
M $(\mathrm{g \cdot mol^{-1}})$	1,0	16,0	31,0	40,1

- Tableau de données de spectroscopie infrarouge :

Liaison	O-H libre	O-H liée	$C_{tétragonal}$-H	$C_{trigonal}$-H aldéhyde	C=O aldéhyde	C=C
Nombre d'onde σ ($\mathrm{cm^{-1}}$)	3 500 à 3 700	3 200 à 3 400	2 500 à 3 200	2 750 à 2 900	1 650 à 1 730	1 640 à 1 680
Intensité	forte fine	forte large	Forte	moyenne	forte	moyenne

- Numéros atomiques :

  $Z(\mathrm{C}) = 6$; $Z(\mathrm{F}) = 9$; $Z(\mathrm{Sn}) = 50$.

- À un pH d'environ 5, dans la salive :

  $[\mathrm{Ca^{2+}}] = 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; $[\mathrm{H_2PO_4^-}] = 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et $[\mathrm{F^-}] = 1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

- Constantes de solubilité à 37 °C :
  - hydroxyapatite : $K_{s_1}\left(\mathrm{Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)}}\right) = 1 \cdot 10^{-57}$;
  - fluorapatite : $K_{s_2}\left(\mathrm{Ca_5(PO_4)_3F_{(s)}}\right) = 1 \cdot 10^{-60}$.

- Constantes d'acidité de l'acide phosphorique $\mathrm{H_3PO_4}$ à 37 °C :

$$pK_{a_1} = 1{,}9\ ;\ pK_{a_2} = 6{,}8\ ;\ pK_{a_3} = 11{,}7.$$

- Produit ionique de l'eau à 37 °C : $K_e = 2{,}4 \cdot 10^{-14}$.

- Pouvoir rotatoire spécifique du (−)-menthol : $[\alpha]_D^{20} = +49{,}5\ ° \cdot \mathrm{dm^{-1} \cdot g^{-1} \cdot cm^3}$.

- Intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

- Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C : $\eta_{eau} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$.

- Masse volumique de l'eau à 20 °C : $\rho_{eau} = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

TRAVAIL À RÉALISER PAR LE CANDIDAT

Partie A : l'émail dentaire

A.1. L'hydroxyapatite

L'émail dentaire est composé à 95 % d'hydroxyapatite, solide ionique de formule brute $\mathrm{Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)}}$.

1. On note N le nombre de motifs dans la maille élémentaire de la structure hexagonale. Justifier que $N = 2$.

2. Exprimer la masse volumique théorique ρ_{HAp} de l'hydroxyapatite. En déduire sa valeur numérique.

3. En pratique, on observe des variations dans la valeur de la masse volumique de l'hydroxyapatite. Expliquer à l'aide du document 1.

4. Citer une méthode expérimentale utilisée pour déterminer les paramètres de maille d'une structure cristalline.

A.2. L'émail dentaire en milieu acide à $37\ \mathrm{°C}$

La déminéralisation de l'émail dentaire, à l'origine des caries, dépend du pH.

5. Donner le diagramme de prédominance associé à l'acide phosphorique $\mathrm{H_3PO_4}$.

6. Écrire les expressions des constantes d'acidité $K_{\mathrm{a_2}}$ et $K_{\mathrm{a_3}}$ associées à cet acide.

7. Écrire l'équation de dissolution de l'hydroxyapatite en milieu aqueux.

8. À l'aide du document 2, indiquer le pH minimal atteint après un repas.

On considère à présent la réaction suivante de l'hydroxyapatite dans l'eau pour un pH d'environ 5, notée **(1)** :

$$\mathrm{Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)} + 7\ H_3O^+_{(aq)} \leftrightharpoons 5\ Ca^{2+}_{(aq)} + 3\ H_2PO^-_{4\,(aq)} + 8\ H_2O_{(l)}} \qquad \textbf{(1)}$$

9. Montrer que l'expression littérale de la constante d'équilibre K_1° associée à la réaction **(1)** en fonction de $K_{\mathrm{s_1}}$, du produit ionique de l'eau K_{e} et des constantes d'acidité utiles de l'acide phosphorique est :

$$K_1^\circ = \frac{K_{\mathrm{s_1}}}{K_{\mathrm{e}} \times K_{\mathrm{a_2}}^3 \times K_{\mathrm{a_3}}^3}$$

10. Donner l'expression littérale puis calculer le quotient de réaction Q_1 de la réaction **(1)** pour la salive à un pH de 5 (document 7).

11. Conclure sur le sens de l'évolution de la réaction **(1)**. Vérifier si le résultat est en accord avec la courbe de Stephan (document 2).

A.3. Protection de l'émail dentaire

L'utilisation d'un dentifrice au fluor permet la formation de fluorapatite de formule chimique $\mathrm{Ca_5(PO_4)_3F_{(s)}}$.

12. Montrer pourquoi l'utilisation d'un dentifrice « au fluor » prévient l'apparition de caries dentaires.

Il est attendu un raisonnement quantitatif sur la stabilité de la fluorapatite à un pH *de 5.*

<u>Partie B</u> : face au miroir

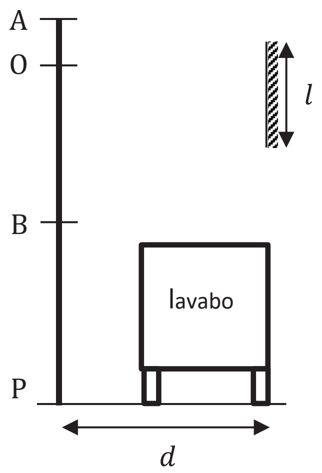
B.1. Position du miroir plan

Une personne qui se brosse les dents se tient face au miroir plan de la salle de bain, fixé au-dessus du lavabo.

On notera :

- d la distance de la personne au miroir ;
- l la hauteur du miroir ;
- A le sommet de la tête ;
- O la position des yeux ;
- B le bas du buste ;
- P les pieds.

On supposera l'épaisseur du miroir plan négligeable.



13. Représenter, sur le **document réponse 1**, l'image $\mathrm{A'B'}$ du buste AB donnée par le miroir.

14. Déterminer l'expression littérale de la hauteur l du miroir pour que la personne ne voie que son buste AB.

15. Préciser si l'on peut accrocher le miroir à n'importe quelle hauteur à partir du sol.

16. Indiquer si la personne peut voir une partie plus importante de son corps si elle recule.

B.2. Utilisation d'un miroir de maquillage

L'utilisateur du miroir souhaite observer plus en détail l'une de ses dents.

Cette dent est considérée comme un objet réel AB.

17. Rappeler en quoi consiste l'approximation de Gauss.

18. Préciser si la personne doit utiliser un miroir concave ou un miroir convexe pour observer cette dent droite et agrandie. Pour répondre à la question, effectuer le tracé des rayons sur le **document réponse 2** en faisant figurer au moins deux rayons particuliers sur chaque exemple proposé. On notera AB la dent-objet et $\mathrm{A'B'}$ l'image de cette dent donnée par le miroir.

19. On note R le rayon de courbure du miroir. À l'aide des données du document 3, donner la valeur du rayon de courbure du miroir grossissant avec l'incertitude-type associée.

On prendra pour la suite du problème $R = \overline{\mathrm{SC}} = -0{,}80\ \mathrm{m}$.

L'œil emmétrope peut accommoder à des distances allant du punctum proximum d_{pp} à l'infini. On supposera que la position de l'œil est confondue avec celle de la dent observée et est sur l'axe optique.

20. Déterminer la distance $\overline{\mathrm{SA_1}}$ pour que l'image de la dent soit à l'infini.

21. Déterminer la distance $\overline{\mathrm{SA_2}}$ pour que l'image de la dent soit au punctum proximum de l'œil, droite et agrandie. On considèrera que $\overline{\mathrm{A_2A_2'}} = d_{pp} = 25{,}0\ \mathrm{cm}$.

La latitude de mise au point correspond à l'intervalle des positions de l'objet par rapport au miroir qui donnent une image nette pour l'observateur.

22. Déduire des questions précédentes la latitude de mise au point associée à ce miroir.

<u>Partie C</u> : le bain de bouche

C.1. Le fluor

Les sources d'ion fluorure varient suivant la marque du bain de bouche : fluorure de sodium (NaF)*, fluorure stanneux* $(\mathrm{SnF_2})$ *ou monofluorophosphate disodique* $(\mathrm{Na_2PO_4F})$*.*

23. Donner la configuration électronique de l'ion fluorure. Proposer une explication à sa stabilité particulière.

24. Proposer une formule de Lewis associée au fluorure stanneux sans charge formelle. On rappelle que l'étain, Sn, est dans la même colonne de la classification périodique que le carbone.

25. Justifier que le fluorure stanneux est un acide au sens de Lewis.

C.2. Le (−)-menthol

Il existe de nombreux arômes pour les bains de bouche, le plus répandu étant celui de la menthe. Le (−)-menthol est le constituant principal de l'arôme menthe fraîche.

26. Interpréter succinctement le spectre infra-rouge de la molécule du (−)-menthol présenté au document 4.

27. Préciser la signification du symbole « (−) » présent dans le nom usuel (−)-menthol.

La loi de Biot, dans le cas d'une solution diluée, peut s'écrire :

$\alpha = [\alpha]_{\mathrm{D}}^{20} \times l \times c$	α : angle de rotation du plan de polarisation $[\alpha]_{\mathrm{D}}^{20}$: pouvoir rotatoire spécifique de la substance optiquement active l : longueur de la cuve c : concentration de la substance dissoute optiquement active

28. Indiquer ce que signifient les mentions « D » et « 20 » dans l'écriture $[\alpha]_{\mathrm{D}}^{20}$.

29. Proposer une méthode pratique permettant de vérifier que le pouvoir rotatoire spécifique du (−)-menthol est de $-\ 49{,}5°$ au lieu de $+310{,}5°$.

30. Sur le **document réponse 3**, entourer les centres stéréogènes du (−)-menthol.

31. Identifier le descripteur stéréochimique (R ou S), de l'un des centres stéréogènes au choix du (−)-menthol. Justifier la réponse.

32. Justifier pourquoi la conformation chaise du (−)-menthol, proposée dans le document 4, est la plus stable.

C.3. Le colorant E133

Le bain de bouche contient du colorant E133 dont on cherche la concentration en masse.

33. Justifier, à partir de sa formule topologique, que cette molécule est un colorant.

34. En utilisant l'étoile chromatique et le spectre d'absorption (document 5), indiquer la couleur du colorant E133 en solution.

35. Rappeler la loi de Beer-Lambert en précisant la signification des différents termes et leurs unités. Donner une condition de validité de cette loi.

36. Préciser pourquoi on choisit en général la longueur d'onde pour laquelle l'absorbance est maximale lorsqu'on utilise la loi de Beer-Lambert dans divers protocoles expérimentaux.

37. Estimer la concentration en masse de E133 dans le bain de bouche (document 5).

Partie D : un filet d'eau

Une fois les dents brossées, la personne remplit un verre d'eau pour se rincer la bouche. Lorsque le robinet est ouvert, elle s'aperçoit que le diamètre du filet d'eau diminue à partir de la sortie.

Le document 6 expose quelques éléments d'une expérimentation réalisée avec le filet d'eau issu d'un robinet. Ce filet est vertical, à l'air libre (pression extérieure P_0) et possède une symétrie de révolution autour d'un axe descendant Oz de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$. On note r son rayon après une hauteur z de chute depuis l'origine du filet située au point O.

On néglige dans toute cette partie le phénomène de tension superficielle et on se place en régime stationnaire.

38. L'écoulement d'eau est supposé incompressible. Préciser la conséquence de cette hypothèse sur le débit volumique ϕ_v.

39. Proposer un protocole expérimental permettant d'accéder à la valeur numérique du débit volumique ϕ_v associé au filet d'eau.

40. Déterminer un ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour l'écoulement étudié dans le document 6. En déduire si ce sont les effets de la viscosité ou ceux de la convection qui prédominent dans cet écoulement.

L'écoulement de l'eau est supposé parfait et son champ des vitesses vérifie l'équation d'Euler :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}\right)=\underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}_{(a)}+\underbrace{\rho\vec{g}}_{(b)}$$

41. Définir un « écoulement parfait ».

42. Donner la signification des termes (a) et (b) qui apparaissent dans l'équation d'Euler.

On considère une ligne de courant quelconque de l'écoulement reliant deux points A et B ; le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ le long d'une telle ligne est colinéaire au vecteur vitesse.

43. En intégrant l'équation d'Euler le long de cette ligne de courant, retrouver la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme :

$$\frac{v_A^2}{2}-gz_A+\frac{P_A}{\rho}=\frac{v_B^2}{2}-gz_B+\frac{P_B}{\rho}$$

Le champ des vitesses du filet d'eau est dorénavant approché par la forme $\vec{v}=v(z)\,\overrightarrow{e_z}$ (toute composante horizontale de la vitesse est négligée, ainsi que la non uniformité éventuelle de sa valeur sur n'importe quelle section de l'écoulement).

44. Montrer à partir de la relation de Bernoulli précédente, et sachant que la pression est continue à l'interface eau-air, que :

$$v(0)^2=v(z)^2-2gz$$

45. Déterminer l'expression de $\frac{1}{r^4}$ en fonction de z, g, ϕ_v et du rayon initial r_0 du filet d'eau.

Le document 6 propose un traitement des mesures expérimentales en considérant la représentation de $\frac{1}{r^4}$ en fonction de z : au nuage des points expérimentaux est superposée une régression affine et le tracé des résidus (ou écarts) normalisés est fourni.

46. Discuter l'accord de la loi obtenue à la question précédente avec l'expérience du document 6.

Modèle CMEN v3

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Candidat : **Né(e) le :** / /

Cadre réservé aux candidats de concours de recrutement et examens professionnels

Concours : .... **Option / Section :** .... **N° d'inscription :**

Cocher une seule case parmi les six types de concours suivants :

☐ externe ☐ 3e externe ☐ externe spécial ☐ interne ou 1er interne ☐ 2nd interne ☐ 2nd interne spécial

Cocher public OU privé UNIQUEMENT pour les concours enseignants : ☐ public ☐ privé

Examen professionnel pour l'avancement au grade de : ....

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : .... **Série / Spécialité :** ....

Epreuve - Matière : .... **Session :** ....

EFE MPC 1

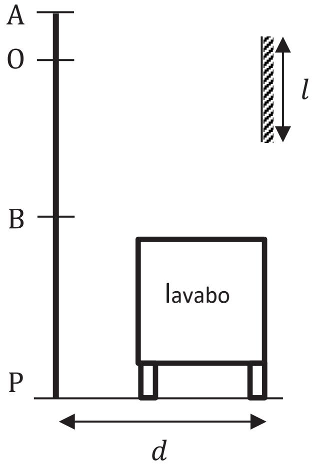
Document réponse

Tous les documents réponses sont à rendre, même non complétés.

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

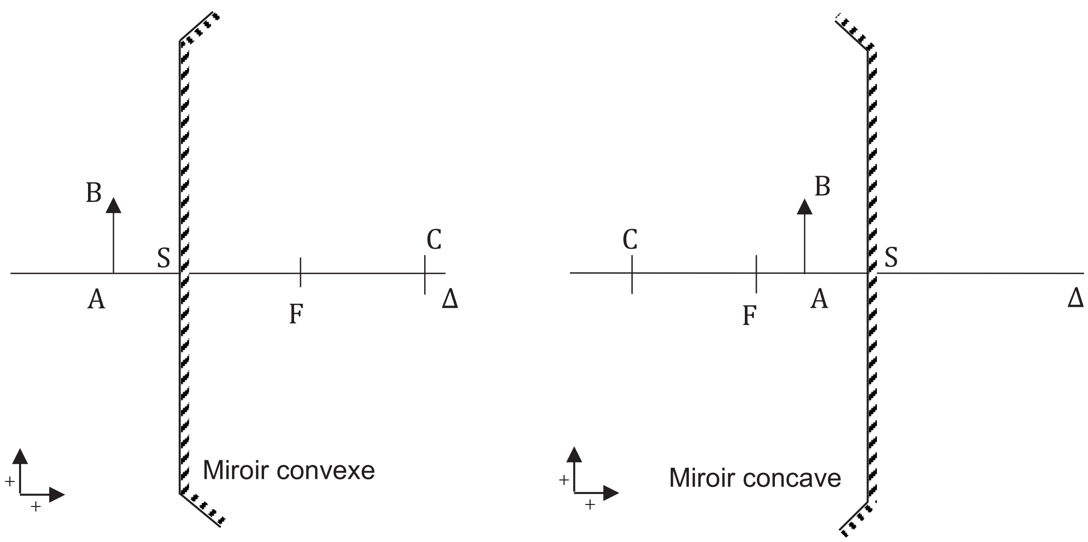
DOCUMENTS RÉPONSES PARTIE PHYSIQUE-CHIMIE

Document réponse 1

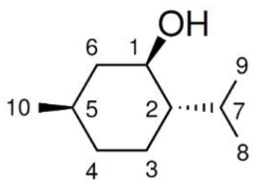


Document réponse 2

On note S le sommet, C le centre de courbure, Δ l'axe de révolution, R le rayon de courbure tel que $R = \overline{SC}$ et F le foyer du miroir.



Document réponse 3



(–)-menthol