Chapitre 16 : intégration

Table des matières

1 Construction de l'intégrale de Riemann

1.1 Subdivisions

Définition 1 Soit $[a, b]$ un segment. On appelle ***subdivision*** $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ du segment $[a, b]$, tout uplet de nombres tels que :

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Soient $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ et $\sigma' = (x'_0, \cdots, x'_p)$ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que la subdivision σ est ***plus fine*** que σ' si $\{x_0, \cdots, x_n\} \supset \{x'_0, \cdots, x'_p\}$. Dans ce cas, on notera $\sigma \preceq \sigma'$.
Soit $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle ***pas*** de la subdivision σ, le nombre :

$$h_\sigma = \max\Big\{x_{i+1} - x_i \mid i \in \{0, \cdots, n-1\}\Big\} > 0.$$

Proposition 1 Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors :
- il existe une subdivision plus fine que σ et σ'
- si $\sigma \preceq \sigma'$, alors $h_\sigma \leqslant h_{\sigma'}$.

Exemple 1 • On peut avoir $h_\sigma \leqslant h_{\sigma'}$ sans que σ soit plus fine que σ' : $\sigma = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.
- si σ et σ' sont deux subdivisions, l'ensemble $\{\sigma, \sigma'\}$ admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ?

1.2 Fonctions en escalier

Définition 2 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est ***en escalier*** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit une fonction constante.
Dans ce cas, une telle subdivision σ est dite ***adaptée*** à la fonction en escalier f.

Proposition 2 L'ensemble $Esc([a, b])$ des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ forme une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \times, \cdot)$

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier de subdivision adaptée $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$. On choisit pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, un nombre ξ_i dans $]x_i, x_{i+1}[$.

Définition 3 On appelle ***intégrale*** de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Ce nombre ne dépend ni des nombres ξ_i, ni de la subdivision σ adaptée à la fonction f.

Remarque 1 L'intégrale d'une fonction en escalier correspond géométriquement à l'aire algébrique des rectangles définis entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

1.4 Fonctions RIEMANN-intégrables

Définition 4 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On note :

- $\mathscr{E}_-$ l'ensemble des fonctions en escalier $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$
- $\mathscr{E}_+$ l'ensemble des fonctions en escalier $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant \psi(x)$
- $\mathscr{I}_- = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathscr{E}_- \right\}$ et $\mathscr{I} + - = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathscr{E} + - \right\}$
- $\tau_- = \sup \mathscr{I}_-$ et $\tau_+ = \inf \mathscr{I}_+$.

On dit que la fonction f est RIEMANN-***intégrable*** si $\tau_- = \tau_+$. Dans ce cas, on notera

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\ dx = \tau_- = \tau_+.$$

Exemple 2 • Les fonctions en escalier sont RIEMANN-intégrables.
• Donner un exemple de fonction f ne prenant qu'un nombre fini de valeurs mais n'étant pas Riemann-intégrable.

Proposition 3 L'ensemble des fonctions RIEMANN-intégrables forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

1.5 Fonctions continues par morceaux

Définition 5 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est ***continue par morceaux*** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit continue et prolongeable par continuité à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}. Une telle subdivision σ est dite ***adaptée*** à la fonction continue par morceaux f.

Exemple 3 • Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux.
• La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{, si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$.
• On peut également parler de fonctions de classe C^p ou C^∞ par morceaux.

Théoréme 1 Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est RIEMANN-intégrable.

Proposition 4 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx.$$

Ces sommes sont appelées ***sommes de*** RIEMANN.

Méthode : Comment exploiter une somme de Riemann ?

Pour trouver la bonne fonction f et les bons nombres a et b, dans une somme de Riemann de n termes :

- factoriser la somme par n : $\frac{1}{n}\sum \cdots$
- à l'intérieur de la somme, mettre ensemble la variable d'indexation k et l'entier n sous la forme $\frac{k}{n}$
- remplacer chaque $\frac{k}{n}$ par x
- trouver une fonction f telle que chaque terme soit de la forme : $f(x)$
- prendre $a = 0$ et $b = 1$
- la somme de Riemann tendra vers $\int_0^1 f(x)\ dx$.

Exemple 4 • Étudier la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

1.6 Propriétés de l'intégrale

On peut parler de l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ même si $a > b$. Dans ce cas, l'intégrale vaut $-\int_b^a f(x)\ dx$.
On note E l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables.

1.6.1 Linéarité de l'intégrale

Théoréme 2 Soient a et b dans $\mathbb{R}$. L'application $f \longmapsto \int_a^b f(x)\ dx$ est une forme linéaire.

1.6.2 Positivité de l'intégrale

Théoréme 3 Soit $f \in E$ sur le segment $[a, b]$. On suppose que : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$. Alors : $\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$.

Corollaire 1 • Soient f et g dans E telles que : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

• Soit $f \in E$. Alors, $|f|$ appartient à E et :

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Proposition 5 [théorème aux quatre hypothèses]
Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant :

- $a < b$
- la fonction f est positive
- la fonction f est continue sur $[a, b]$
- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est nulle.

Alors la fonction f est la fonction nulle.

Exemple 5 • Que dire de la fonction $f = \chi_{\{1\}}$ sur $[0, 2]$?

- Quels sont les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\displaystyle\int_0^1 |P(t)|\ dt = 0$?

1.6.3 Relation de Chasles

Théoréme 4 Soit $f \in E$. Soient a, b et c dans $\mathbb{R}$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$.

2 Intégrales et primitives de fonctions continues

2.1 Définitions

Définition 6 On appelle ***primitive*** de la fonction f, toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I telle que $F' = f$.

Théoréme 5 théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle.
Alors pour tout $x_0 \in I$ il existe une seule primitive de f s'annulant en x_0. Il s'agit de la fonction

$$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\ dt.$$

Toutes les primitives de f sont déterminées à une constante près.

Méthode : Comment calculer une primitive d'une fonction ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour en déterminer une primitive

- fixer x_0 dans I
- choisir x dans I
- calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\ dt$
- la formule en x est une primitive de f.

Exemple 6 Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2.2 Primitives usuelles

On dispose du tableau suivant :

- $\int u' \cdot u^{\alpha} = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ avec $\alpha \neq -1$
- $\int \dfrac{u'}{u} = \ln|u| + c$
- $\int u' \cdot e^u = e^u + c$
- $\int u' \cdot \ln u = u \cdot \ln u - u + c$
- $\int u' \cdot \sin u = -\cos u + c$
- $\int u' \cdot \cos u = \sin u + c$
- $\int u' \cdot \tan u = -\ln|\cos u| + c$
- $\int \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \tan u + c$
- $\int u' \cdot \mathrm{sh} u = \mathrm{ch} u + c$
- $\int u' \cdot \mathrm{ch} u = \mathrm{sh} u + c$
- $\int u' \cdot \mathrm{th}\ u = \ln \mathrm{ch} u + c$
- $\int \dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\ u + c$
- $\int \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$
- $\int \dfrac{u'}{u^2+1} = \arctan u + c$

2.3 Intégration par parties (rappels)

Méthode : Comment faire une intégration par parties ?

- ▶ poser $u'(x)$ l'un des termes à intégrer et $v(x)$, l'autre terme
- ▶ trouver $u(x)$ et $v'(x)$
- ▶ utiliser la formule $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx.$

Exemple 7 • Déterminer une primitive de $x \longmapsto \ln x$, de arctan

- Calculer $I_n = \int_0^1 \dfrac{dx}{(x^2+1)^n}$.
- Calculer $\int P(x) \cdot e^{a \cdot x} dx$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

2.4 Changement de variable (rappels)

Méthode : Comment faire un changement de variable dans une intégrale ?

Pour faire le changement de variable $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$:

- ▶ x en fonction de t : $x = \psi(t)$
- ▶ remplacer chaque x dans $f(x)$ par $\psi(t)$, puis simplifier
- ▶ remplacer dx par $\psi'(t)\ dt$
- ▶ changer les bornes d'intégration pour la variable t
- ▶ poser la nouvelle intégrale : $\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\ dt.$

Exemple 8 • Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ à l'aide du changement de variable $x = \cos t$.

• Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^5 x}{1+\cos^4 x} dx$ à l'aide du changement de variable $t = 2\pi - x$.

2.5 Intégrale d'une fraction rationnelle

Méthode : Comment calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle ?

- ▶ faire la D.E.S de cette fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$
- ▶ calculer l'intégrale de chaque terme.

Exemple 9 • Comment calculer une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$?

• Déterminer une primitive de $x \longmapsto \frac{x}{(x+1)^2(x-3)}$.

2.6 Intégrale d'une fraction rationnelle en $\cos$ et $\sin$, règles de Bioche

Méthode : Comment intégrer une fraction rationnelle en $\sin$ et $\cos$?

Si $f(x)$ est une expression rationnelle en $\sin$ et $\cos$, on utilise les règles de Bioche :

- ▶ tester un bon changement de variable :
  - si l'expression $f(x)\ dx$ est invariante en remplaçant x par $(-x)$, poser $t = \cos x$
  - si l'expression $f(x)\ dx$ est invariante en remplaçant x par $(\pi - x)$, poser $t = \sin x$
  - si l'expression $f(x)\ dx$ est invariante en remplaçant x par $(x+\pi)$, poser $t = \tan x$
  - si rien ne marche, poser $t = \tan \frac{x}{2}$
- ▶ aboutir à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Exemple 10 • Calculer $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{\sin(3x)+2} dx$, $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\cos t}$ et $\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

• Déterminer une primitive de $\frac{1}{\sin}$ ou $\frac{1}{\cos}$ sur un intervalle contenant $\frac{\pi}{4}$.

• Peut-on utiliser la règle de Bioche pour $\int_0^{\pi} \frac{\sin(5x)\cdot\cos 6x}{1+\cos^4 x}\ dx$?

2.7 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 6 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(b-t)^n dt.$$

Exemple 11 Montrer que la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite égale à e.