IUT d'Évry Val d'Essonne
Département TC (S3)

UE31 M3104C, 2019-2020
D. Fourer

TD1 : Dénombrement et probabilités

Rappels :

Factorielle : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
Combinaisons : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Arrangements : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Permutations : $P_n = A_n^n = n!$

Exercice 1 : On considère que l'on dispose de l'alphabet latin (sans accent) de 26 lettres.

1. Combien de mots différents peut on écrire en utilisant toutes les lettres du mot « facile » ? "Facile" s'écrit avec 6 lettres, donc il existe $P_6 = 6! = 720$ permutations possibles.
2. Combien de mots différents de exactement 6 lettres peut on écrire avec tout l'alphabet ? (on autorise les répétitions) On considère un tirage ordonné de 6 éléments avec remise, soit $26^6 = 308\ 915\ 776$ mots possibles.
3. Combien de mots différents de exactement 6 lettres peut on écrire sans répétition ? On considère un tirage ordonné de 6 éléments sans remise, soit $A_{26}^6 = \frac{26!}{(26-6)!} = 165\ 765\ 600$ mots possibles.
4. Combien de mots différents de 5 lettres ou moins peut on écrire sans répétition (dans le même mot) ? On considère la somme de tous les tirages ordonnés de 5 éléments ou moins sans remise, soit $A_{26}^1 + A_{26}^2 + A_{26}^3 + A_{26}^4 + A_{26}^5 = 26 + 26 \times 25 + 26 \times 25 \times 24 + 26 \times 25 \times 24 \times 23 + A_{26}^5 = 8\ 268\ 676$ mots possibles.
5. On tire désormais au hasard 3 lettres dans l'ordre et sans répétition. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « IUT » si tous les tirages sont équiprobables ?. On considère le nombre d'arrangements de 3 lettres parmi 26 lettres : $\text{Card}(\Omega) = A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 15\ 600$.
   Si on note A l'événement {"obtenir le mot IUT"}, alors $P(A) = \frac{1}{15\ 600}$

Exercice 2 : On propose à un examen un questionnaire à choix multiples (QCM) avec 8 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses possibles dont une seule est correcte. Le candidat décide de répondre au hasard en ne cochant qu'une seule case à chaque question.

1. Combien il y a-t-il de façons différentes de remplir le questionnaire ? On applique la formule d'un choix de 5 éléments ordonnés parmis 3 avec remise : Il y a donc $\text{Card}(\Omega) = 3^8 = 6561$ choix possibles.
2. Combien de grilles différentes ne comportent qu'une seule réponse fausse. Pour chaque question il y a 2 réponses fausses. En supposant, toutes les autres réponses justes, on fait la somme des réponses fausses contenues dans le QCM, soit $2 \times 8 = 16$ grilles différentes avec une seule faute.
3. Combien de grilles différentes possibles sont entièrement fausses ? Pour chaque question il y a 2 réponses fausses. En supposant, toutes les autres réponses justes, on fait la somme des réponses fausses soit $2^8 = 256$ grilles différentes entiȓement fausses.
4. Combien de grilles différentes possibles ont au moins une bonne réponse ? On note A l'événement {"La grille est entièrement fausse"}, donc $A^c =$ {"La grille contient une bonne réponse"}. Comme on sait que $\text{Card}(A) = 256$ (cf. réponse précédente), alors $\text{Card}(A^c) = 6561 - 256 = 6305$.

Exercice 3 : Les membres d'une association de 20 personnes (13 hommes et 7 femmes) souhaitent constituer un bureau de 3 personnes (un(e) président(e), un(e) trésorier(e) et un(e) secrétaire).

1. Combien de bureaux (groupe de 3 personnes) différents peuvent être constitués à partir de ces 20 personnes ? On applique la formule d'un tirage ordonné de 3 éléments parmis 20 $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

2. Combien de bureaux différents ayant une femme présidente peuvent être constitués ? On applique la formule d'un tirage ordonné de 2 éléments parmis 19 : $A_{19}^2 = \frac{19!}{17!} = 19 \times 18 = 342$. Comme il y a 7 femmes, alors au total il y a $7 \times 342 = 2394$ bureaux possibles avec 1 femme présidente. (et donc $13 \times 342 = 4446$ bureaux avec 1 homme président). On vérifie que $2394 + 4446 = 6840$ correspond au total.
3. En supposant équiprobable le choix de chaque candidat. Quelle est la probabilité pour que le bureau soit composé d'au moins une femme ? -On note F l'événement, {"une femme est dans le bureau"} et son complémentaire $F^c =$ {"Il n'y a pas de femme dans le bureau"}. Le tirage de chaque candidat est indépendant donc : $P(F^c) = \frac{13}{20}\frac{12}{19}\frac{11}{18} = \frac{1716}{6840} \approx 0,25$. Donc $P(F) = 1 - P(F^c) \approx 0,75$.

   -Autre solution : Il y a A_{13}^3 arrangements de 3 hommes, donc $P(F^c) = \frac{A_{13}^3}{A_{20}^3} = \frac{\frac{13!}{(13-3)!}}{\frac{20!}{(20-3)!}} = \frac{13\times12\times11}{20\times19\times18} \approx 0,25$

   -Autre solution : On énumère toutes les combinaisons (avec au moins 1F) : 3F : C_7^3, 2F1M : $C_7^2 C_{13}^1$, 1F2M : $C_7^1 C_{13}^2$, donc $P(F) = \frac{C_7^3+(C_7^2C_{13}^1)+(C_7^1C_{13}^2)}{C_{20}^3} = \frac{854}{1140} \approx 0,75$.

Exercice 4 : Un sac contient 13 boules noires et 2 boules rouges. Combien faut il en tirer simultanément pour que la probabilité d'obtenir au minimum une boule rouge soit supérieure à $\frac{6}{7}$?

On note x l'inconnue (le nombre de boules tirées) et A^c l'événement complémentaire {"on ne tire aucune boule rouge"}. On a $\mathrm{Card}(A^c) = C_{13}^x$ et $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{15}^x$.
Il faut alors résoudre l'inéquation : $P(A) = 1 - \frac{C_{13}^x}{C_{15}^x} > \frac{6}{7}$. On a donc :

$$\frac{1}{7} > \frac{\frac{13!}{x!(13-x)!}}{\frac{15!}{x!(15-x)!}} = \frac{13!(15-x)!}{15!(13-x)!} = \frac{(15-x)(14-x)}{15\times14} \quad (1)$$

$$\frac{15\times14}{7} > x^2 - 29x + 210 \quad (2)$$

$$0 > x^2 - 29x + 180 \quad (3)$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ ($b = -29$, $a = 1$ et $c = 180$) donc $\Delta = 121 = 11^2$.
On a donc (la plus petite solution) $x > \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29-11}{2} = 9$.
L'autre solution $x_2 > \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 20$ est bien plus grande que 9 mais sans intérêt car on cherche le nombre minimum de tirage.