DM n° 1 : Révisions et logique

Correction du problème – (D'après un vieux sujet de Bac des années 80)

Partie I –

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \textit{ si } x\neq 0 \textit{ et } f(0)=1.$$

1. Encadrement de $\ln(1+x)$.
   (a) • Pour tout $t\geqslant 0$, $1+t\geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{1+t}\leqslant 1$.
   • Pour tout $t\geqslant 0$, l'inégalité $1-t\leqslant \dfrac{1}{1+t}$ équivaut à $(1-t)(1+t)\leqslant 1$, c'est-à-dire à $1-t^2\leqslant 1$, donc à $t^2\geqslant 0$, qui est vérifiée. Ainsi, $1-t\leqslant \dfrac{1}{1+t}$.

   Des deux inégalités on déduit l'encadrement $\boxed{1-t\leqslant \dfrac{1}{1+t}\leqslant 1.}$

   (b) Soit $x\geqslant 0$. On intègre l'encadrement précédent entre 0 et x (l'encadrement étant vrai sur tout l'intervalle $[0,x]$) :
   $$\int_0^x (1-t)\ \mathrm{d}t\leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\leqslant \int_0^1 1\ \mathrm{d}t,$$
   c'est-à-dire :
   $$\boxed{x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.}$$
   Ces inégalités peuvent aussi s'obtenir par étude de fonction. On peut aussi remarquer que l'inégalité de droite affirme que la courbe de $x\mapsto \ln(1+x)$ reste en dessous de sa tangente en 0 (au moins sur l'axe réel positif), ce qui est conséquence de la concavité du logarithme. Vous verrez plus tard que la concavité est caractérisée par la négativité de la dérivée seconde, ce qui fournit une autre démontration, très rapide, de l'inégalité $\ln(1+x)\leqslant x$.

2. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
   $$g(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}.$$
   (a) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables, celle de droite en tant que quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle considéré, celle de gauche en tant que composée de deux fonctions dérivables, l'une ($x\mapsto 1+x$) sur $[0,+\infty[$, et à valeurs dans $[1,+\infty[$, intervalle sur lequel l'autre ($y\mapsto \ln(y)$) est dérivable.
   Pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a alors
   $$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2}=\frac{(2+x)^2-4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}\geqslant 0$$
   D'un autre côté, pour $x\geqslant 0$, $1+x\geqslant 1$ et $2+x\geqslant 2$, donc
   $$\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}\leqslant \frac{x^2}{4}.$$

On a bien obtenu l'encadrement recherché :

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{x^2}{4}}.$$

L'étude de la dérivabilité de g a ici été faite de façon très détaillée, un peu trop. À terme, on éludera un peu cette étude. Mais il est important de savoir qu'on sait faire (notamment la justification correcte pour les composées, en faisant attention aux intervalles sur lesquels considérer la dérivabilité de chacune des fonctions).

(b) On trouve un encadrement de g en intégrant l'encadrement entre 0 et x, pour $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant g(x) - g(0) \leqslant \frac{x^3}{12}, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^3}{12}}.$$

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée donnée par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc le même que celui de

$$h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -g(x) + \frac{x}{1+x} - \frac{2x}{2+x} = -g(x) - \frac{x^2}{(1+x)(2+x)} \leqslant 0,$$

puisque g est positive sur $]0, +\infty[$, ainsi que le terme de droite.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\text{, donc sur } [0, +\infty[}$, par continuité de f en 0.

4. Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition.

(a) Pour tout $x > 0$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ par croissances comparées, puisque $1 + x \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

Il peut être intéressant de noter qu'il n'y a pas une façon unique de parvenir à cette limite : on peut aussi mener le calcul de la sorte pour se ramener aux croissances comparées :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x},$$

ces deux termes tendant vers 0, le premier par croissances comparées, le second n'étant pas une forme indéterminée.

(b) Il est naturel d'essayer dans un premier temps d'utiliser l'encadrement obtenu dans la question 1b : pour tout $x > 0$,

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) - x \leqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad 0 \leqslant \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

On se rend compte que l'encadrement n'est pas assez fin pour conclure. On remarque que l'encadrement de g obtenu dans la question 2b permet aussi d'obtenir un encadrement de $\ln(1+x)$, et a une précision plus importante lorsque x est proche de 0 (d'ordre 3 au lieu de 2). On a donc :

$$0 \leqslant \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2+x} \leqslant \frac{x^3}{12}.$$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leqslant \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2+x}.$$

Lorsqu'on fait tendre x vers 0^+, les deux termes encadrant admettent la limite $\frac{1}{2}$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}}.$$

Cela ne répond qu'à moitié à la question posée, puisqu'il faut aussi étudier la limite à gauche. Cette limite peut s'obtenir de même. Le raisonnement global peut facilement s'adapter, il y a juste à changer le sens de certaines inégalités (notamment du fait qu'on intègre avec des bornes données en sens décroissant).

On peut aussi (mais cela nécessite un peu d'habitude technique) se ramener au cas positif en se rappelant que pour tout $x \in]-1,0]$,

$$\ln(1+x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln\left(1-\frac{x}{1+x}\right).$$

En posant $y = -\dfrac{x}{1+x}$, on a alors $y \geqslant 0$, et $y \to 0^+$ lorsque $x \to 0^-$. On peut alors appliquer le résultat précédent sur y :

$$\frac{1}{2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y-\ln(1+y)}{y^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x}{1+x}+\ln(1+x)}{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2} = \lim_{x\to O^-} \frac{\ln(1+x)-x}{(1+x)x^2} + \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} = 1 \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)-x}{(1+x)x^2} = -\frac{1}{2}.$$

En rétablissant le signe et en multipliant par $x+1$ de limite 1, on a bien $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.}$.

L'égalité de la limite à gauche et de la limite à droite amènent l'existence de la limite et :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Le résultat qu'on vient de démontrer est en fait l'expression du développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. Vous pouvez vérifier qu'on peut en effet reexprimer ce qu'on vient de démontrer sous la forme suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$

où $o(x^2)$ désigne un terme négligeable devant x^2 (c'est-à-dire infiniment plus petit que x^2) au voisinage de 0.

(c) Cela dit, l'étude de la dérivabilité de f ne nécessite que le calcul de la limite à droite de l'expression précédente, puisque f n'est pas définie à gauche de 0. C'est peut-être une erreur d'énoncé, mais qui au passage nous a permis de voir comment exploiter la symétrie du logarithme pour déduire quelque chose sur l'intervalle $]0,1]$ à partir de quelque chose sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

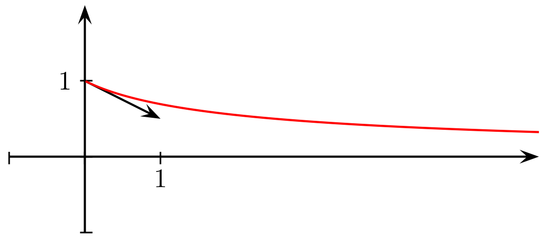
Pour étudier la dérivabilité de f, on exprime le taux d'accroissement à droite : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{2}-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

Connaissant $f(0) = 1$, on a alors aisément une équation de la tangente en 0 : $\boxed{y = 1 - \dfrac{x}{2}}$.

(d) Ci-dessous la courbe de f, avec sa tangente en 0 :



Partie II –

L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définies par les relations :

$$U_0 = c \qquad \textit{et} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n) \ \textit{si}\ n \geqslant 0,$$

où c est un nombre réel strictement positif donné.

1. Avant d'étudier la convergence, remarquons que (u_n) est bien définie, c'est-à-dire que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. cela provient du fait que $]0,+\infty[$ est un intervalle stable par $x \mapsto \ln(1+x)$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in]0,\infty[$, on a aussi $\ln(1+x) \in]0,+\infty[$). On en déduit en effet par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $u_n > 0$.

   L'inégalité qu'on vient d'établir nous permet d'utiliser l'encadrement de la question I-1b (ou juste la majoration) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\ln(1+u_n) \leqslant u_n \qquad \text{donc:} \qquad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

   Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ vers une certaine limite réelle $\ell \in \mathbb{R}_+$. On passe alors à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Comme ln est continue, cela nous donne une relation sur ℓ :

   $$\ell = \ln(1+\ell).$$

   Cette équation admet une solution évidente dans $\mathbb{R}_+$ qui est $\ell = 0$. Montrons que c'est la seule.

   Pour cela, on peut étudier les variations de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$, ou alors, remarquer que ℓ est solution non nulle de l'équation étudiée si et seulement si $f(\ell) = 1$, ce qui est impossible pour $\ell > 0$ d'après les variations de f.

   Ainsi, $\boxed{\ell = 0}$.

On pose désormais $c = 1$. Le but de la fin du problème est de déterminer la limite de (nu_n). Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

2. Pour commencer, remarquons que (v_n) est bien définie, puisqu'on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2} \cdot \frac{u_n}{\ln(1+u_n)}.$$

   D'après l'expression des limites remarquables et la question I-4b (utilisable du fait que $u_n \to 0$), on a

   $$\boxed{\lim v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}}.$$

3. Pour commencer, remarquons que pour tout $x \in]0,1]$,

   $$\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(1+x)} + \frac{1}{x} = \frac{x\ln(1+x) - 2x + 2\ln(1+x)}{2x\ln(1+x)} = \frac{(x+2)\ln(1+x) - 2x}{2x\ln(1+x)} = \frac{(x+2)g(x)}{2x\ln(1+x)},$$

   et là, on comprend mieux pourquoi on a introduit cette fonction g. Elle apparaît naturellement dans les calculs effectués.

   Il reste donc à montrer que pour tout $x \in]0,1]$,

   $$0 \leqslant \frac{(x+2)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leqslant \frac{3x}{16}.$$

L'inégalité de gauche résulte de la positivité de g, prouvée en I-2b. De plus, la majoration obtenue à cette même question montre que

$$\frac{(x+2)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leqslant \frac{x^2(x+2)}{24\ln(1+x)}.$$

Par ailleurs, toujours le même encadrement nous permet de minorer le logarithme :

$$\ln(1+x) \geqslant \frac{2x}{x+2},$$

d'où

$$\frac{(x+2)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leqslant \frac{x(x+2)^2}{48} \leqslant \frac{9x}{48} = \frac{3x}{16},$$

en majorant $2+x$ par 3 sur $]0,1]$. Ainsi, on a bien obtenu l'encadrement voulu :

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{3x}{16} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}}.$$

4. En particulier, la suite (u_n) étant strictement décroissante de limite nulle, et initialisée par $u_0 = 1$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in]0,1]$, et on peut donc utiliser la question précédente avec $x = u_n$:

$$\frac{1}{2} - \frac{3u_n}{16} \leqslant \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Or, $\dfrac{1}{\ln(1+u_n)} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = v_{n+1}$ d'où l'encadrement

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{3u_n}{16} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}.} \tag{1}$$

Puisque $\frac{3u_n}{16} \leqslant \frac{1}{4}$, il vient :

$$\frac{1}{4} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2},$$

et en sommant ces inégalités et par téléscopage, on obtient pour tout $n \geqslant 0$:

$$\frac{n}{4} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_0 = \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant \frac{n}{2}.$$

On en déduit, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\frac{n+4}{4} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{n+2}{2} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\frac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n+4}}.$$

5. On fait cette fois la somme des encadrements (1) :

$$\frac{n}{2} - \frac{3}{16}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant \frac{n}{2}.$$

En divisant par n, il vient :

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Montrons que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$. Vous verrez plus tard que ceci est une conséquence immédiate du théorème de Cesaro assurant que la limite des moyennes successives des termes d'une suite est égale à la limite de la suite, si celle-ci existe. On peut aussi prouver ce résultat en se servant du fait que la somme partielle de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ est de l'ordre de $\ln(n)$, en utilisant l'encadrement obtenu pour u_n. On peut cependant s'en sortir par une étude plus élémentaire ne nécessitant pas de connaître ces deux résultats. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{S_n}{n}.$$

On a alors :

$$w_n - w_{n+1} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n}(S_n - S_{n+1}) + S_{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n}\frac{1}{n+1} + \frac{S_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{S_{n+1}-1}{n(n+1)} \geqslant 0.$$

Ainsi, (w_n) est décroissante, et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ.

Adaptons l'argument de condensation de Cauchy qu'on avait utilisé pour démontrer la divergence de la série harmonique. On remarque que $2w_{2n}$ et w_n se simplifient bien :

$$2w_{2n} - w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1} 2n\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

la positivité de cette expression étant évidente par la première égalité. Le théorème d'encadrement amène alors

$$2w_{2n} - w_n \to 0 \qquad \text{soit:} \qquad 2\ell - \ell = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \ell = 0.$$

Par ailleurs, en encadrant sommant l'encadrement de (u_n) obtenu dans la question précédente,

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+2}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k \leqslant \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+4},$$

c'est-à-dire

$$(w_{n+1} - \frac{1}{n+1}) \times \frac{2(n+1)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k \leqslant (w_{n+3} - \frac{11}{6(n+3)})\frac{4(n+3)}{n}.$$

Les deux encadrant ayant une limite nulle, il vient :

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k = 0,$$

d'où finalement, par encadrement

$$\lim\left(\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\lim nu_n = 2}.$$

Correction de l'exercice 1 – Il s'agit de déterminer le chiffre des unités du quotient de la division euclidienne de 10^{1992} par $10^{83}+7$. Il paraît donc naturel de réduire 10^{1992} modulo $10^{83}+7$:

$$10^{1992} = 10^{83\times 24} = (10^{83})^{24} \equiv (-7)^{24} \equiv 7^{24} \ \ [10^{83}+7].$$

Or, $0 \leqslant 7^{24} < 10^{83}+7$, donc le reste de la division euclidienne de 10^{1992} par $10^{83}+7$ est égal à $r = 7^{24}$.

On peut facilement connaître le chiffre des unités de ce reste, puisque le cycle des puissances de 7 modulo 10 est de longueur 4 :

$$7^1 \equiv 7 \ [10], \quad 7^2 \equiv -1 \ [10], \quad 7^3 \equiv -7 \ [10], \quad 7^4 \equiv 1 \ [10].$$

Ainsi, les puissances de 7 modulo 10 sont périodiques de période 4. On a donc

$$7^{24} \equiv 7^0 \equiv 1 \mod [10]$$

En notant q le quotient de cette division euclidienne, on a donc

$$10^{1992} = q(10^{83}+7) + 1,$$

ce qui donne, en réduisant modulo 10 :

$$0 \equiv 7q + 1 \ [10], \qquad \text{soit:} \qquad 7q \equiv -1 \ [10].$$

En multipliant par -7 et en réduisant, on obtient $q \equiv 7 \ [10]$.

Ainsi, $\boxed{\text{le chiffre des unités de } \left\lfloor \frac{10^{1992}}{10^{83}+7} \right\rfloor \text{ est } 7.}$

Résultat confirmé par un petit calcul sous Python, donnant la valeur complète de ce quotient :

```
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999300000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000489999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999999999999999999999999657000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000240099999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
9999999999831930000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000011764899
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999991764570000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000005764800999999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999999999999999995964639300000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000002824752489999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
9998022673257000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001384128720099999
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999903110989593000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000067822307284899999999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999999999952524384900570000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000033232930569600999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999997673
6948601279300000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001628413597910448999999
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998860110481462685700000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000797922662976120009999999999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999441454135916715993000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000390982104858298804899999999999999999999999999999999999999999999999999999999999972631252659
919083657
```

Correction de l'exercice 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Si p vérifie $50^n < 7^p < 50^{n+1}$, alors
   $$7^{p+3} = 7^3 \times 7^p > 50 \times 50^n = 50^{n+1}.$$
   Ainsi, il ne peut pas y avoir de suite de 4 entiers consécutifs $p, p+1, p+2, p+3$ vérifiant l'encadrement voulu. Les plus longues séries sont donc de longueur au plus 3. Ainsi, $I_n \leqslant 3$.
   - Puisque 7^p tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$, il existe une plus grande valeur p_0 telle que $7^{p_0} \leqslant 50^n$. Par maximalité de cette valeur, 7^{p_0+1} et $7^{p_0+2} > 50^n$. Ainsi,
   $$50^n < 7^{p_0+1} < 7^{p_0+2} = 7^{p_0} \times 49 \leqslant 50^n \times 49 < 50^{n+1}.$$
   On en déduit que $I_n \geqslant 2$.

   Ainsi, $\boxed{I_n \in \{2,3\}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_n = 3$ si et seulement s'il existe p tel que
$$50^n < 7^p < 7^{p+2} < 50^{n+1}$$
donc tel que
$$n\ln(50) < p\ln 7 \qquad \text{et} \qquad (p+2)\ln 7 < (n+1)\ln(50)$$
donc tel que
$$p\ln(7) > n\ln(50) \qquad \text{et} \qquad p\ln 7 < n\ln(50) + \ln\left(\frac{50}{49}\right)$$
donc tel que
$$0 < p\ln(7) - n\ln(50) < \ln\left(\frac{50}{49}\right).$$
Puisque I_n ne peut pas excéder 3, pour chaque valeur de n fixé, il existe au plus une valeur de p vérifiant cet encadrement. Ainsi, pour montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n telles qu'il existe p vérifiant cela, il suffit de montrer qu'il existe une infinité de couples (n,p) tels que
$$0 < p\ln(7) - n\ln(50) < \ln\left(\frac{50}{49}\right).$$

Ceci découle d'une propriété classique des « sous-groupes » de $\mathbb{R}$ qui sont soit de la forme $n\mathbb{Z}$ soit denses dans $\mathbb{R}$. Ici, on peut montrer que l'ensemble $\{p\ln(7) - n\ln(50),\ (n,p) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et ne peut pas être de la forme $n\mathbb{Z}$, car cela contredirait le fait que $\ln\left(\frac{50}{49}\right)$ est irrationnel (ce qui provient du fait que les décompositions en facteurs irréductibles de 49 et 50 ne font pas intervenir les mêmes entiers premiers). La densité de ce groupe permet alors de conclure.

Vous pourrez reprendre cet argument lorsque vous connaîtrez davantage de choses sur les groupes. En attendant, essayons d'atteindre ce résultat de façon élémentaire (en fait, on va faire à peu près la preuve du résultat en question sur les groupes)

Notons pour simplifier $u_{n,p} = p\ln(7) - n\ln(50)$, et $\varepsilon = \ln\left(\frac{50}{49}\right) > 0$.

Commençons par montrer l'existence d'un couple (n,p) tel que $0 < u_{n,p} < \varepsilon$. On verra comment en déduire l'infinité.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de couple $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$0 < u_{n,p} < \varepsilon \quad \text{(hypothèse 1).}$$

Nous allons d'abord montrer qu'il existe un élément minimal parmi les $u_{n,p}$ strictement positifs. En effet, si ce n'est pas le cas (hypothèse 2), considérons un élément a, choisi suffisamment grand de sorte que $]0,a]$ contienne au moins un terme $u_{n,p}$ (un tel a existe, il suffit de prendre par exemple $a = \ln(7)$: l'intervalle considéré contient alors au moins $u_{0,1}$). L'intervalle $]0,a]$ contient alors nécessairement une infinité de valeurs distinctes de $u_{n,p}$ (car un ensemble fini de valeurs admet un minimum, ce qui contredirait l'hypothèse 2). On peut alors subdiviser l'intervalle $]0,a]$ en un nombre fini de sous-intervalles de longueur strictement inférieur à ε. Il suffit pour cela de considérer n tel que $\frac{a}{n} < \varepsilon$ et de considérer les intervalles $I_k =]\frac{ka}{n}, \frac{(k+1)a}{n}]$. Par le principe des tiroirs, l'un au moins de ces intervalles (appelons-le I) contient au moins deux valeurs distinctes u_{n_1,p_1} et u_{n_2,p_2}. Quitte à échanger les indices, on peut supposer que $u_{n_1,p_1} < u_{n_2,p_2}$. Comme I est de longueur strictement inférieure à ε, il vient :

$$0 < u_{n_2,p_2} - u_{n_1,p_1} < \varepsilon \qquad \text{donc:} \qquad 0 < u_{n_2-n_1,p_2-p_1}.$$

Cela contredit l'hypothèse 1. Ainsi, il existe un élément u_{n_0,p_0} minimal parmi l'ensemble des éléments $u_{n,p}$ strictement positifs.

Soit alors (n,p) tel que $u_{n,p} > 0$. Montrons qu'il existe un entier k tel qque $u_{n,p} = ku_{n_0,p_0}$. Pour cela on considère $k = \left\lfloor \frac{u_{n,p}}{u_{n_0,p_0}} \right\rfloor$. On a alors

$$ku_{n_0,p_0} \leqslant u_{n,p} < (k+1)u_{n_0,p_0}.$$

Si la première inégalité est stricte, on obtient alors :

$$0 < u_{n,p} - ku_{n_0,p_0} < u_{n,p} \qquad \text{donc:} \qquad 0 < u_{n-kn_0,p-kp_0} < u_{n_0,p_0},$$

ce qui contredit la minimalité de u_{n_0,p_0}. Ainsi, on a

$$ku_{n_0,p_0} = u_{n,p}.$$

Cela montre que toutes les valeurs positives de $u_{n,p}$ sont multiples de u_{n_0,p_0} (et de même pour les valeurs négatives en fait : on obtient une description de toutes les valeurs possibles sous la forme $a\mathbb{Z}$, comme annoncé). En particulier, il existe deux entiers a et b tels que

$$\ln 7 = u_{0,1} = au_{n_0,p_0} \qquad \text{et} \qquad \ln(50) = u_{-1,0} = bu_{n_0,p_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{\ln 7}{\ln(50)} = \frac{a}{b} \qquad \text{donc:} \qquad \ln(7^b) = \ln(50^a) \qquad \text{donc:} \qquad 7^b = 50^a.$$

ceci est incompatible avec l'unicité de la décomposition en facteurs permiers.

On en déduit donc enfin que l'hypothèse 1 est fausse. Il existe donc un couple (n_1,p_1) tel que $0 < u_{n_1,p_1} < \varepsilon$. On peut remarquer que la valeur précise de ε n'intervient pas dans l'argument ci-dessus. La seule hypothèse à avoir sur ε est $\varepsilon > 0$. On recommence alors avec $\varepsilon' = u_{n_1,p_1}$, et on obtient une deuxième valeur vérifiant $0 < u_{n_2,p_2} < u_{n_1,p_1} < \varepsilon$. On peut alors construire de la sorte une suite strictement décroissante (u_{n_k,p_k}) à valeurs dans $]0,\varepsilon[$. Il faut maintenant montrer qu'on peut trouver un couple $(n,p) \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < u_{n,p} < \varepsilon$. On peut remarquer que si $n \geqslant 0$, on a aussi $p \geqslant 0$ pour obtenir l'inégalité $u_{n,p} \geqslant 0$. On cherche donc un couple acceptable tel que $n \geqslant 0$. S'il en existe un dans la suite décroissante $(u_{n,p})$ contruite, c'est terminé. Sinon, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_k \geqslant n_{k+1}$ (si ce n'est pas le cas, les (n_k) formerait une suite strictement croissante d'entiers négatifs, ce qui n'est pas possible, cela entrant en contradiction avec le principe de la descente infinie, après changement de signe). On a alors

$$0 < u_{n_{k+1},p_{k+1}} < u_{n_k,p_k} < \varepsilon,$$

d'où

$$0 < u_{n_k,p_k} - u_{n_{k+1},p_{k+1}} < \varepsilon \qquad \text{puis:} \qquad 0 < u_{n_k - n_{k+1}, p_k - p_{k+1}} < \varepsilon.$$

En posant $n = n_k - n_{k+1} \geqslant 0$ et $p = p_k - p_{k+1}$, on a bien trouvé $(n,p) \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < u_{n,p} < \varepsilon$.

On termine alors comme plus haut en itérant cette construction avec des valeurs de ε de plus en plus petite, de sorte à construire une suite strictement décroissante (u_{n_k,p_k}) à valeurs dans $]0,\varepsilon[$, mais cette fois-ci en imposant la considiion supplémentaire $n_k \geqslant 0$. Cela termine la preuve de notre résultat.

Ainsi, il existe une $\boxed{\text{infinité de valeurs de } n \text{ telles que } I_n = 3}$.

Correction de l'exercice 3 –

1. **L'archipel – À la recherche de l'île de Maya**

(a) **La première île**

A ne peut pas être un Pur, sinon, il dirait vrai, et B serait un Pur. B dirait donc la vérité, et A serait un Pire, d'où une contradiction.

Ainsi, A est un Pire. Il ment, et par conséquent, B est un Pire ou ce n'est pas l'île de Maya.

Supposons maintenant que ce soit l'île de Maya. D'après ce qui précède, puisque A ment, B est alors un Pire, et en niant son assertion, soit A est un Pur (ce qui n'est pas vrai), soit ce n'est pas l'île de Maya. Ainsi, on arrive à une contradiction : ce n'est pas l'île de Maya.

En passant, on a obtenu que A et B mentent tous les deux, et sont donc deux Pires.

(b) **La deuxième île**

A ne peut pas être Pur, sinon son affirmation serait clairement erronée alors qu'il serait censé dire la vérité. A est donc Pire. Nions son affirmation : soit A et B ne sont pas tous les deux Pires (donc B est Pur), soit ce n'est pas l'île de Maya.

De plus, A disant faux, l'affirmation de B est fausse, donc B est Pire. Il en résulte que ce n'est pas l'île de Maya.

(c) **La troisième île**

Si A est Pur, son affirmation est vraie, donc celle de B aussi. Ainsi B est Pur, ce qui contredit A. Ainsi, A ne peut pas être Pur.

A ment donc, et par conséquent B aussi. A et B sont donc Pires tous les deux. Pour que l'affirmation de A soit fausse, il faut donc que ce ne soit pas l'île de Maya.

(d) **La quatrième île**

A ne peut pas être Pur, sinon il dirait la vérité et serait Pire (contradiction flagrante!). A est donc Pire. Ainsi, soit A et B ne sont pas Pires tous les deux (donc B est Pur), soit ce n'est pas l'île de Maya.

Supposons qu'il s'agisse de l'île de Maya. Alors B est Pur, et dit donc la vérité : en particulier, ce n'est pas l'île de Maya : contradiction!

Donc, il ne peut pas s'agir de l'île de Maya. En passant, on a montré que A est Pire et B est Pur.

(e) **La cinquième île**

Pour la même raison, A est Pire, et soit B est Pur, soit ce n'est pas l'île de Maya. Le même raisonnement que précédemment donne que si c'est l'île de Maya, B est Pur et contredit le fait que c'est l'île de Maya. Ainsi, ce n'est pas l'île de Maya. Comme avant A est Pire et B est Pur.

(f) **La sixième île**

Si A est un Pire, alors, en niant son affirmation, on obtient : B est Pire et ce n'est pas l'île de Maya. Dans ce cas, B étant Pire, A est Pur (contradiction) et ce n'est pas l'île de Maya. Ainsi A ne peut pas être Pire. A étant Pur, il dit la vérité. Supposons que ce ne soit pas l'île de Maya. Dans ce cas, B doit être Pur. L'affirmation de B est donc juste, et comme A n'est pas Pire, c'est l'île de Maya, d'où une contradiction !

Ainsi, il s'agit bien cette fois de l'île de Maya. De plus A et B sont Purs tous les deux.

(g) **La carte de Baal**

E ne peux pas être Pire, car sinon, la première clause de son affirmation serait correcte, et il dirait la vérité. Donc E est Pur. Ainsi, puisqu'il dit la vérité, C et D sont de même espèce.

Si C est Pire, A et B sont tous les deux Pires, et D dit donc vrai et est donc Pur, ce qui contredit le fait que C et D sont de même espèce.

Ainsi, C et D sont Purs. Supposons que A soit Pur. Alors, pour que D dise la vérité, il faut que B soit Pur aussi. Ainsi, X et Y sont toutes les deux les bonnes cartes, ce qui contredit l'unicité de la bonne carte.

A est donc Pire, et puisque A et B ne sont pas tous les deux Pires, B est Pur, puis Y est la bonne carte.

2. **L'île de Baal – À la découverte de la Vérité Vraie**

(a) Si l'individu est Pire, ce qu'il dit est correct, ce qui ne peut être. Ainsi, il est Pur. Ce qu'il dit étant vrai, et la première clause étant fausse, la seconde doit être vraie : c'est un singe Pur.

(b) L'individu ne peut pas être Pur, car ce qu'il dit serait alors faux. Ainsi, il est Pire. En niant son affirmation : c'est un Pur (ce qui est faux), ou c'est un humain. Ainsi, c'est un humain Pire.

(c) L'individu n'est pas un singe. En effet, sinon, s'il est Pur, son affirmation est fausse, et s'il est Pire, son affirmation est vraie, ce qui ne peut être !

L'individu est donc humain, et ce qu'il dit ne peut donc qu'être vrai : il est Pur.

(d) B est forcément Pur, car s'il était Pire, ce qu'il dit serait correct, ce qui est impossible. Ainsi, B étant Pur, il dit vrai, et A est Pire : ce qu'il dit est faux. Par conséquent A et B sont deux humains.

(e) B ne peut pas être Pur, sinon son affirmation serait clairement fausse ! Ainsi B est Pire. Ce qu'il dit étant faux, A est Pur. Ainsi A et B sont deux singes.

(f) Si B est Pur, alors A aussi, et comme il dit la vérité, B est Pire. D'où la contradiction. Ainsi B est Pire, et par conséquent A aussi. Puisque sa première affirmation est fausse, alors que B est effectivement Pire, on déduit que B est un humain. Puisque sa seconde assertion est fausse, A est un singe.

(g) H exprime une implication du type $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Si H est Pire, alors $\mathcal{Q}$ est faux et $\mathcal{P}$ est vrai (négation d'une implication). Mais $\mathcal{P}$ est clairement faux dans ce cas, d'où une contradiction. Donc H est Pur.

Étudions la véracité de l'affirmation de G. Si C est Pur, alors A et B sont Purs, donc X est une bonne porte, et il y en a une autre : Y ou Z. Ainsi, soit X et Y sont deux bonnes portes, soit X et Z sont deux bonnes portes. Par conséquent, soit D soit E dit la vérité, et F dit donc vrai. On a montré que si C est Pur, alors F aussi. Ainsi, G dit vrai, et est donc Pur.

G et H étant Purs, l'affirmation de H implique que A est Pur, et donc X est une bonne porte.

Remarquez qu'au final, on n'a pas montré que Y ou Z est une autre bonne porte : C et F peuvent tous les deux être Pire sans que cela n'amène de contradiction.

(h) Le premier prêtre ne peut pas être Pur, sinon il mentirait. Ainsi, il est Pire. Ce qu'il dit est faux. La première assertion étant vraie (il est Pire), on en conclut qu'il sait pourquoi il y a quelque chose au lieu de rien. Au moins le premier prêtre connaît la réponse.

(i) **La réponse !** Attention, il pourrait aussi s'agir du deuxième prêtre. Cependant, si le deuxième prêtre connaît la réponse, alors il ment, et il est donc Pire. Dans tous les cas (que seul le premier prêtre connaisse la réponse, ou que les deux la connaissent), le prêtre répondant à la question est un Pire. Ainsi, sa réponse est fausse. La vrai réponse est donc : « il n'y a rien ».

Le philosophe et le prêtre n'existent pas, puisqu'il n'y a rien, et si le prêtre n'existe pas, il ne peut pas donner cette réponse. Il y a donc une contradiction dans cette histoire : tout cela n'est que balivernes !