Corrigé du T.D. E *Spé MP¹*

Corr. 1 Adaptation d'impédance

1. Le dipôle absorbe la puissance moyenne

$$\boxed{P_u = R_u I^2}$$

où I est l'intensité efficace le traversant.

2. Dans la maille $(\underline{E}_g, \underline{Z}_g, \underline{Z}_u)$, on peut écrire

$$\underline{E}_g = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_u)\,\underline{i}$$

où $\underline{i}$ est l'intensité complexe imposée par le générateur dans le circuit. La puissance dissipée dans le dipôle est alors (avec E tension efficace du générateur) :

$$P_u = R_u \frac{E^2}{(R_u+R_g)^2+(X_u+X_g)^2}$$

Pour rendre cette puissance maximale, il faut minimiser le dénominateur ; de façon évidente, il faut déjà prendre $X_u = -X_g$. Dans ce cas,

$$P_u(R_u) = R_u \frac{E^2}{(R_u+R_g)^2}$$

Il reste à maximiser cette expression. On écrit

$$\frac{dP_u(R_u)}{dR_u} = 0$$

Le calcul donne la seule solution physiquement acceptable $R_u = R_g$, et qui correspond bien à un maximum de P_u :

$$\boxed{\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^{\,*}}$$

3. Il suffit d'écrire la condition d'adaptation d'impédance à l'entrée du dipôle qui, de ce fait, reçoit une puissance maximale du générateur. **Comme le dipôle est réalisé avec des éléments réactifs, cette puissance est ensuite transmise sans perte à l'utilisation**.
La condition précédente impose

$$R_0 = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}$$

On regroupe les termes réels et imaginaires et on les identifie, d'où

$$LC = \frac{R}{(R-R_0)\,\omega^2} \quad \text{et} \quad \frac{L}{C} = R R_0$$

Connaissant le rapport L/C et le produit LC, on en déduit

$$\boxed{L = \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{R_0}{R-R_0}}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega\sqrt{R_0(R-R_0)}}}$$

Remarque : le cas où $R < R_0$ peut être adapté par un dispositif (L, C) aussi, mais en plaçant cette fois-ci L en amont de C, et non en aval.

Corr. 2 Autour du gyrator

1. R est homogène à une résistance. Le gyrator n'est pas dissipatif car la puissance totale instantanée est nulle :

$$P(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = -R i_1 i_2 + R i_1 i_2 = 0$$

2. Si on note v_3 et i_3 les tensions et courants en sortie du premier gyrator, on a $v_3 = R_1 i_1$ et $v_1 = -R_1 i_3$. Pour le deuxième gyrator, on a alors $v_2 = -R_2 i_3$ (attention au signe ! le courant i_3 n'est pas dans le sens conventionnel pour le deuxième gyrator...) et $v_3 = -R_2 i_2$. On on déduit que

$$\boxed{v_2 = m v_1 \text{ et } i_2 = -i_1/m \text{ avec } m = R_2/R_1}$$

où m est le rapport de transformation.

3. En régime sinusoïdal et avec la notation complexe, on a $\underline{v}_2 = R\underline{i}_1 = -Z i_2$ (attention au signe ! convention générateur en sortie...) et $v_1 = -R i_2$. Ainsi,

$$\boxed{Z_e = R^2/Z}$$

Pour un condensateur, $Z = 1/(jC\omega)$, d'où $Z_e = j(R^2C)\omega$. On reconnaît là l'impédance d'une bobine

$$\boxed{L = R^2C = 4{,}86\ \text{H}}$$

ce qui est énorme pour une inductance ! Une bobine d'une telle inductance serait volumineuse et lourde, et il est avantageux de la simuler grâce à un gyrator.

Corr. 3 Résistance négative

1. La loi des nœuds donne

$$i_e = \frac{v_e}{R_e} + \frac{v_e - A v_e}{R}$$

Soit

$$\frac{i_e}{v_e} = \frac{1}{R_e} + \frac{1-A}{R}.$$

Cette grandeur peut devenir négative (et alors notée $-1/R'$) si

$$\boxed{A > 1 + R/R_e}$$

2. Si $R' = r$, on a une maille contenant un condensateur et une bobine. En notant u la tension aux bornes du condensateur et i le courant associé en convention récepteur (toujours pour le condensateur), on a $i = C\dfrac{du}{dt}$ et $-u = L\dfrac{di}{dt}$ (attention au signe, la bobine est en convention générateur !). Ainsi

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Cette équation d'oscillateur harmonique traduit l'existence d'oscillations de la tension (et donc aussi du courant) à la pulsation ω_0.

Corr. 4 Oscillations de relaxation d'un néon

À $t = 0^+$, c'est-à-dire juste après la fermeture de l'interrupteur, $v(0^+) = 0$ puisque la tension aux bornes du condensateur est continue et qu'il est au départ déchargé. Ainsi, $v(0^+) = 0 < V_a$ et le tube au néon n'est traversé par aucun courant et on assiste à la charge du condensateur. On a alors

$$E = RC\frac{dv}{dt} + v$$

En intégrant en tenant compte de la condition initiale et en posant la constante de temps $\tau = RC$, on tire

$$\boxed{v(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Cette expression ne reste valable que tant que $v(t) < V_a$, soit pour

$$\boxed{t < t_1 = \tau \ln\frac{E}{E - V_a}}$$

Pour $t = t_1$, le tube devient équivalent à une résistance quasi-nulle, de sorte que le condensateur se décharge quasi-instantanément par court-circuit et $v = V_e < V_a$ (noter que tout se passe comme si la tension était discontinue aux bornes de C, mais ce n'est pas le cas car la résistance du tube n'est pas rigoureusement nulle... La pente de transition est élevée mais non infinie).

Pour $t > t_1$, le tube se comporte à nouveau comme une résistance infinie et le condensateur se charge à nouveau. On a alors

$$v(t) = A\,e^{-t/\tau} + E \quad \text{avec} \quad v(t_1^+) = v(t_1^-) = V_e$$

par continuité de la tension aux bornes du condensateur. On en déduit

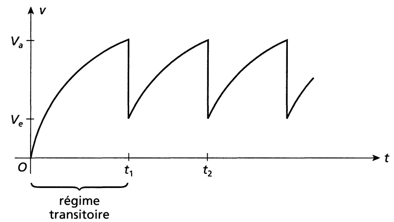
$$\boxed{v(t) = (V_e - E)\,e^{-(t-t_1)/\tau} + E}$$

Cette nouvelle expression reste valable tant que $v < V_a$, c'est-à-dire pour

$$\boxed{t < t_2 = t_1 + \tau \ln\left(\frac{E - V_e}{E - V_a}\right)}$$

Un régime permanent est établi et on observe des oscillations de période

$$\boxed{T = RC \ln\left(\frac{E - V_e}{E - V_a}\right)}$$



Corr. 5 Circuit RC soumis à un créneau puis une impulsion

On commence par la mise en équation commune à toutes les questions. En écrivant que le même courant traverse la résistance R et le condensateur C, on obtient

$$\frac{E(t) - u_C(t)}{R} = C\,\frac{du_C(t)}{dt}$$

En posant $\tau = RC$, on arrive à la forme canonique de l'équation différentielle du système :

$$\boxed{\tau\,\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E(t)}$$

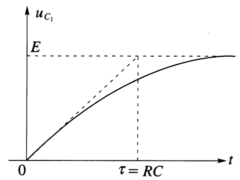
Pour toutes les questions, on a $u_C(t < 0) = 0$.

1. L'équation différentielle d'ordre 1 admet, avec le second membre égal à E pour $t > 0$, des solutions de la forme

$$u_{C1}(t > 0) = A\,e^{-t/\tau} + E$$

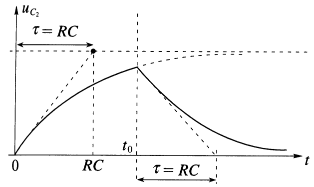
Avec la condition initiale utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_{C1}(0^+) = u_{C1}(0^-) = 0$, on déduit

$$\boxed{u_{C1}(t) = E\left[1 - e^{-t/\tau}\right]u(t)}$$



2. Le créneau s'analyse comme la superposition de deux échelons : $e_2(t) = E\left[u(t) - u(t - t_0)\right]$. De plus, le système est linéaire donc la nouvelle solution s'obtient par application du théorème de superposition et on trouve

$$\boxed{u_{C2}(t) = E\left[1 - e^{-t/\tau}\right]u(t) - E\left[1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right]u(t - t_0)}$$

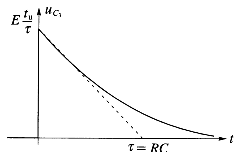


3. On note que $e_3(t > 0) = \displaystyle\lim_{t_0 \to 0^+}\left[\frac{t_u}{t_0}\,e_2(t > t_0)\right]$. La linéarité de l'équation différentielle (et en fait des mathématiques adaptées...) assure que

$$u_{C3}(t > 0) = \lim_{t_0 \to 0^+} E\,\frac{t_u}{t_0}\left[e^{t_0/\tau} - 1\right]e^{-t/\tau}$$

donc

$$\boxed{u_{C3}(t) = E\,\frac{t_u}{\tau}\,e^{-t/\tau}\,u(t)}$$



4. On note que $e_3(t) = t_u\,\dfrac{de_1}{dt}$ (au sens des distributions... La marche d'Heaviside dérivée donne accès à l'impulsion de Dirac). Ainsi, il n'est pas étonnant d'obtenir une relation analogue entre les solutions de l'équation différentielle linéaire.

5. Par définition, $\tilde{u}_{C3}(\omega) \propto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_{C3}(t)e^{-j\omega t}$. Ainsi

$$\boxed{\tilde{u}_{C3}(\omega) \propto \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + 1/\tau)t} \propto \frac{1}{1 + j\omega\tau}}$$

La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle est donc proportionnelle à la fonction de transfert H du filtre (ici $\omega_0 = 1/\tau$). Ceci est en fait vrai quelque soit le filtre pas uniquement le filtre passe-bas d'ordre 1 !

Corr. 6 Filtre correcteur

1. Par utilisation du pont diviseur de tension, on trouve sans problème

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + jT_2\,\omega}{1 + jT_1\,\omega}}$$

avec $\boxed{T_2 = R_2 C \quad \text{et} \quad T_1 = (R_1 + R_2)C > T_2}$

Il s'agit d'un filtre d'ordre 1 (de forme canonique non donnée en cours...) dont on précise le comportement dans la suite.

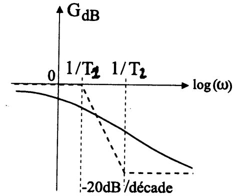
2. Le comportement asymptotique est le suivant :

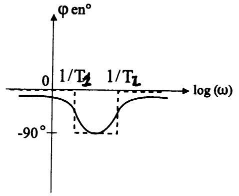
— Pour $\omega \ll \dfrac{1}{T_1}$, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$.

— Pour $\dfrac{1}{T_1} < \omega < \dfrac{1}{T_2}$, $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{jT_1\,\omega}$ donc $G_{dB} \simeq -20\log T_1 - 20\log\omega$ et $varphi \simeq -\dfrac{\pi}{2}$.

— Pour $\omega \gg \dfrac{1}{T_2}$, $\underline{H} \simeq \dfrac{T_2}{T_1}$ donc $G_{dB} \simeq 20\log\dfrac{T_2}{T_1}$ et $\varphi \simeq 0$.

On en déduit aisément les tracés suivants :





La formule théorique du gain réel est

$$\boxed{G_{dB} = 20\log\sqrt{\frac{1+(T_2\,\omega)^2}{1+(T_1\,\omega)^2}}}$$

En ce qui concerne le déphasage φ, il correspond à l'argument de $(1+jT_2\,\omega)(1-jT_1\,\omega)$, soit

$$\varphi = \arg\left[1+T_1\,T_2\,\omega^2 + j(T_2-T_1)\,\omega\right]$$

Ainsi, $\cos\varphi > 0$, $\sin\varphi < 0$ et on écrit sans problème que

$$\boxed{\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{(T_2-T_1)\,\omega}{1+T_1\,T_2\,\omega^2}\right)}$$

ATTENTION, il faut toujours bien regarder le signe du cosinus ou du sinus avant de donner le déphasage en faisant intervenir l'arc-tangente ! Il est de plus vivement conseillé de vérifier sa solution sur les cas asymptotiques ou les cas particuliers pertinents...

3. Ce filtre permet de retarder la phase de 90° sur une bande de fréquences et permet de diminuer le gain au-delà de cette bande. Il s'agit d'un **correcteur à retard de phase**.

Un tel filtre permet de diminuer la bande passante d'un système, ce qui peut s'avérer utile pour mobiliser un système (voir les problèmes de commande de systèmes linéaires étudiés par les SIstes).

Corr. 7 Réseau échelle R/2R

1. La loi des nœuds en P_0 donne

$$\frac{b_0E-V_0}{2R} + \frac{0-V_0}{2R} - i_0 = 0,$$

d'où

$$\boxed{V_0 = \frac{b_0E}{2} - Ri_0}$$

On obtient donc un générateur équivalent de fém $b_0E/2$ et de résistance interne R. Je vous laisse dessiner le schéma équivalent au montage initial.

2. Une fois le remplacement fait, on peut remplacer les deux résistances R apparaissant en série par une résistance 2R, puis appliquer la loi des nœuds en P_1 (on appelle i_1 le courant circulant de P_1 à P_2. Celle-ci fournit

$$\frac{b_1E-V_1}{2R} + \frac{b_0E/2-V_1}{2R} - i_1 = 0,$$

soit

$$\boxed{V_1 = \left(\frac{b_0}{4}+\frac{b_1}{2}\right)E - Ri_1}$$

On peut recommencer toutes ces opérations jusqu'à obtenir

$$V_n = \left(\frac{b_0}{2^{n+1}}+\frac{b_1}{2^n}+\ldots+\frac{b_n}{2}\right)E - Ri_n$$

Sachant que la sortie est à vide, on obtient finalement

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(b_0 2^0 + b_1 2^1 + \ldots + b_n 2^n\right)E}$$

On a donc réalisé un convertisseur numérique-analogique (CNA).

Corr. 8 Filtre à pont de Wien

1. À haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils. On a donc $s = 0$ (tension aux bornes d'un fil).
À basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. On a donc $s = 0$ (tension aux bornes d'une résistance parcourue par un courant nul).
Le filtre rejette les basses et les hautes fréquences et on peut s'attendre à ce qu'il s'agisse d'un passe-bande d'ordre 2.

2. Posons

$$Z_+ = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{jC\omega} = R\left(\frac{1+jx}{jx}\right)$$

et

$$\frac{1}{Z_{/\!/}} = \frac{1}{Z_R}+\frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1}{R}(1+jx),$$

avec $x = RC\omega$. Puisque $i_s = 0$, on a un pont diviseur de tension en sortie.

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{Z_{/\!/}}{Z_+ + Z_{/\!/}} = \frac{1}{1+Z_+/Z_{/\!/}} = \frac{jx}{jx+(1+jx)^2}$$

soit

$$\boxed{\underline{H} = \frac{jx}{1+3jx+(jx)^2}}$$

On vérifie sans problème qu'il s'agit d'un filtre passe-bande en accord avec l'étude asymptotique de la première question.

3. On met la fonction de transfert sous forme canonique

$$\boxed{H = H_0\frac{2\sigma jx}{1+2\sigma jx+(jx)^2} = H_0\frac{1}{1+jQ(x-1/x)}}$$

avec

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{3},\ Q = \frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{3} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

La fréquence centrale est

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 9{,}9.10^2 \text{ Hz}}$$

Le gain s'écrit

$$G = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}$$

Le gain maximal valant $H_0 = 1/3$ (à $x = 1$), les pulsations de coupure à -3 dB vérifient $Q^2(x-1/x)^2 = 1$. On peut résoudre cette équation, et en extraire les deux solutions positives, ce qui donne les fréquences de coupures

$$f_\pm = f_0\frac{\sqrt{4Q^2+1}\pm 1}{2Q}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{f_- = 3{,}0.10^2 \text{ Hz} \quad f_+ = 3{,}3 \text{ kHz}}$$

Le facteur de qualité est par définition

$$\boxed{\frac{f_0}{f_+-f_-} = Q = \frac{1}{3}}$$

Le filtre est donc peu sélectif.

4. Aux basses fréquences (BF),

$$\underline{H}_{BF} \simeq \frac{j\omega}{\omega_0} = \frac{jf}{f_0}$$

donc $\quad G_{dB,BF} = 20\log\frac{f}{f_0} \quad$ et $\quad \varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$

À la résonance ω_0,

$$\underline{H}_{rés} = \frac{1}{3}$$

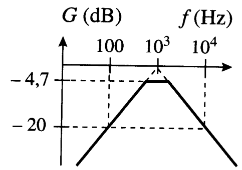
donc $\quad G_{dB,rés} = -20\log 3 = -4{,}7$ dB $\quad$ et $\quad \varphi_{rés} = 0$

Aux hautes fréquences (HF),

$$\underline{H}_{HF} \simeq \frac{\omega_0}{j\omega} = -\frac{jf_0}{f}$$

donc $\quad G_{dB,HF} = -20\log\frac{f}{f_0} \quad$ et $\quad \varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$

Voici le tracé asymptotique du gain (pour celui de la phase, voir le cours... Ce n'est qu'une rotation de phase de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$) :



5. En régime établi, la sortie s sera elle-aussi périodique, de même fréquence f que le signal d'entrée. Un signal créneau comme celui envoyé a une valeur moyenne ($a_0 = 5$V) non nulle, un fondamental à f et des harmoniques à nf (en fait $n = 2p+1$, comme on l'a vu en cours, mais ce n'est pas important pour ce qui nous intéresse ici). La valeur moyenne en sortie sera nulle, car le filtre coupe la composante continue. Ainsi, la réponse est la même que celle à un créneau $e - a0$, prenant alternativement les valeurs $E = 5$ V et $-E = -5$ V. Le fondamental et les harmoniques sont largement en dehors de la bande-passante, et sont dans le domaine asymptotique HF où $\underline{H}_{HF} = \frac{\omega_0}{j\omega}$. Le fondamental et les harmoniques sont intégrés (à cause de la division par $j\omega$) et multipliés par ω_0.
Conclusion : le signal de sortie sera ω_0 fois la primitive du signal créneau alternant entre $+E$ et $-E$. On aura donc un signal triangulaire, de moyenne nulle, oscillant entre $-E_0$ et E_0.
Les pentes de ce signal sont donc $\pm\frac{2E_0}{T/2} = \pm 4E_0 f$. Mais elles valent aussi $\pm\omega_0 E$. On en déduit donc que

$$\boxed{E_0 = \frac{\omega_0 E}{4f} = \frac{\pi E f_0}{2f} \ll E}$$

Corr. 9 Étude d'un filtre coupe-bande

1. Pour obtenir la fonction de transfert proposée par l'énoncé, il faut écrire le théorème de Millmann au point entre les deux résistances R, au point entre les deux capacités C ; il manque alors encore une équation obtenue en écrivant le théorème de Millmann à la sortie (pas difficulté puisqu'aucun courant n'en sort ; pas de charge !). Le calcul passionnant donne le résultat attendu...

2. Par schémas équivalent en HF (C est un fil) et en BF (C est un trou), on voit que dans les deux cas, la fonction de transfert $\underline{H}$ vaut 1, ce qui est en accord avec le résultat de la question précédente.

3. On constate que si l'on pose

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

on a $\underline{H}(j\omega_0) = 0$. Le filtre est donc un **réjecteur de bande**. Le gain maximal du filtre est 1, donc les pulsations de coupure à -3 dB sont telles que

$$G_{dB} = -10\log\left[1+\left(\underbrace{\frac{4RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}}_{X}\right)^2\right] = -3 \text{ dB}$$

Elles correspondent à $X = \pm 1$ et la résolution donne les pulsations de coupure

$$\boxed{\omega_- = \frac{-2+\sqrt{5}}{RC}} \qquad \boxed{\omega_+ = \frac{2+\sqrt{5}}{RC}}$$

soit $\quad \boxed{f_- = 230 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_+ = 4230 \text{ Hz}}$

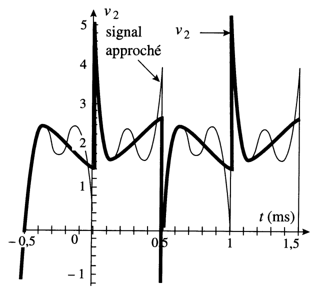
4. Le diagramme asymptotique de Bode est très simple : pour G_{dB} fonction de $\log(\omega/\omega_0)$ ($y = f(x)$), les asymptotes sont sur les axes $y = 0$ et $x = 0$ (pour $y < 0$; $cf\ G_{dB} \to \omega \to \omega_0 - \infty$) ; pour la phase, elle tend vers 0 en HF et en BF et tend vers $\pm\pi/2$ pour $\omega \to \omega_0^{\pm}$.

5.a. Puisqu'il y a réjection de la bande [230 Hz;4230 Hz], le signal $u_1(t)$ est éliminé par le filtre !

5.b. Pour le signal $u_2(t)$, son développement en série de Fourier est

$$u_2(t) = 2 + \frac{8}{\pi}\sum_0^\infty \frac{1}{2p+1}\sin[2\pi(2p+1)ft]$$

On en déduit que le fondamental et l'harmonique 3 sont éliminés (en première approximation ; signal approché). Il reste le continu et les autres harmoniques, transmis sans déphasage, ni atténuation. Les discontinuités sont transmises sans atténuation (pas de capacité en parallèle de la sortie, donc c'est raisonnable). Le tracé informatique de la sortie v_2 est donné sur la figure.



Corr. 10 Analyse harmonique d'un filtre de SALLEN-KEY

Le filtre étudié est un filtre de SALLEN-KEY. A noter : en utilisant divers composants, on peut réaliser un filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande, comme pour le filtre de RAUCH.

1. Le filtre considéré ici est un passe-bas. Il est de plus d'ordre 2 et de fonction de transfert s'écrivant (forme canonique)

$$\boxed{H(\omega) = \frac{K}{1+2\sigma j\omega/\omega_0+(j\omega/\omega_0)^2} = \frac{K}{1+j\omega/(Q\omega_0)+(j\omega/\omega_0)^2}}$$

car l'atténuation est de -40 dB par décade.

La phase passe par $-\pi/2$ quand $f = f_0$, d'où

$$\boxed{f_0 = 64\ \mathrm{Hz}}$$

L'asymptote basse fréquence est à $7{,}6\ \mathrm{dB} = 20 \log \mathrm{K}$, d'où ($\mathrm{K} > 0$ car si $\mathrm{K} < 0$, $\varphi(f_0) = +\pi/2$).

$$\boxed{\mathrm{K} = 2{,}4}$$

Enfin, à la fréquence f_0, le gain du filtre est

$$\mathrm{G_{dB}}(f_0) = 20 \log\left(\frac{\mathrm{K}}{2\sigma}\right) = 20 \log(\mathrm{KQ}) = 12\ \mathrm{dB}$$

donc $$\boxed{\sigma = 0{,}3 \text{ et } \mathrm{Q} = 1{,}7}$$

Remarque $\sigma < 1/\sqrt{2}$ d'où le maximum dans $\mathrm{G_{dB}}$.

2. Par hypothèse, on a des admittances Y_k de la forme $1/\mathrm{R}$ ou $\mathrm{j}\omega\mathrm{C}$. En conséquence, pour que la fonction de transfert précédente s'identifie à celle d'un filtre passe-bas d'ordre 2, il faut que

— le numérateur $\mathrm{Y_1 Y_2}$ soit indépendant de la fréquence, c'est-à-dire que

— les admittances $\mathrm{Y_3}$ et $\mathrm{Y_4}$ soient réalisées avec des condensateurs pour former un terme en $(\mathrm{j}\omega)^2$ au dénominateur :

$$\boxed{\mathrm{Y_1} = \mathrm{Y_2} = \frac{1}{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y_3} = \mathrm{Y_4} = \mathrm{jC}\omega}$$

On obtient alors

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{\mathrm{jRC}\omega - \frac{1}{k}\left[\mathrm{jRC}\omega + (1+\mathrm{jRC}\omega)(1+\mathrm{jRC}\omega)\right]}$$

soit au final

$$\boxed{\mathrm{H} = \frac{k}{1+(3-k)\mathrm{jRC}\omega + (\mathrm{jRC}\omega)^2} = \frac{\mathrm{K}}{1+2\sigma \mathrm{j}x + (\mathrm{j}x)^2}}$$

avec $$\boxed{\mathrm{K} = k, \quad \omega_0 = \frac{1}{\mathrm{RC}}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{3-k}{2}}$$

L'A.N. donne $$\boxed{\mathrm{C} = 250\ \mathrm{nF}}$$

Remarque : on a $k = 2{,}4$ et donc $\sigma = \dfrac{3-2{,}4}{2} = 0{,}3$: c'est bien ce qu'on a trouvé plus haut : ouf !

3. Le maximum de $\mathrm{G_{dB}}$ n'existe que si $\sigma < 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}7$. Ainsi si k diminue, jusqu'à atteindre la valeur $3 - \sqrt{2} \simeq 1{,}6$, le maximum disparaît (et on a alors un filtre de BUTTERWORTH avec une réponse très plate dans la bande passante). Au contraire, si k augmente, arrive un moment où $k > 3$, donc $\sigma < 0$. Le montage devient alors instable car l'équation différentielle entrée-sortie est celle d'un oscillateur harmonique avec une "atténuation négative" ce qui donne un régime transitoire divergent.

Corr. 11 Oscillations amorties avec diodes

Do it yourself ! pour les 5/2 : c'est comme un oscillateur harmonique amorti par frottements solides, cf méca !