Problème

Meilleure approximation par un sous-espace de dimension finie

Soient $(E, \| \|)$ un espace normé réel et V un sous-espace non nul de dimension finie. Si $x \in E$, on note :

$$\mathrm{d}(x, V) = \inf \{\|x - v\|, \ v \in V\}$$

et :

$$C_V(x) = \{v \in V, \ \|x - v\| = \mathrm{d}(x, V)\}.$$

On montrera dans la première question du problème que $C_V(x)$ n'est pas vide. Les éléments de $C_V(x)$ sont les meilleures approximations de x dans V.

On dit que deux vecteurs x et y sont *positivement colinéaires* si et seulement si $x = 0$ ou $y \in \mathbb{R}^+ x$ (avec $\mathbb{R}^+ x = \{\lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$).

Soient S le segment $[-1, 1]$, $\mathcal{C}(S)$ l'espace des fonctions continues de S dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soient V_n le sous-espace de $\mathcal{C}(S)$ constitué des fonctions polynomiales de degré majoré par $n-1$, f_n la fonction définie sur S par :

$$\forall x \in S, \qquad f_n(x) = x^n.$$

On rappelle qu'en posant, pour $f \in \mathcal{C}(S)$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_S |f|, \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\int_S f^2\right)^{1/2},$$

on définit trois normes sur $\mathcal{C}(S)$.

I. Généralités

1. Soit $x \in E$.

a) Montrer que $C_V(x)$ n'est pas vide.

b) Vérifier que $C_V(x)$ est convexe.

2. On dit que la norme $\| \|$ est *stricte* si et seulement si les seuls couples $(x, y) \in E^2$ tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ sont ceux tels que x et y soient positivement colinéaires.

a) Si $\| \|$ est une norme stricte, montrer que, pour tout x de E, $C_V(x)$ est un singleton.

b) Montrer que si la norme $\| \|$ est euclidienne (i.e. provient d'un produit scalaire), elle est stricte. Que peut-on dire de $C_V(x)$ dans ce cas ?

3. Ici $E = \mathcal{C}(S)$. Pour p dans $\{1, 2, \infty\}$, la norme $\| \|_p$, est-elle stricte ?

III. Cas de l'approximation en moyenne sur $\mathcal{C}(S)$

Dans cette partie, $E = \mathcal{C}(S)$, $\| \ \|$ est la norme $\| \ \|_1$ définie en **I.5**.

A. Unicité de la meilleure approximation

On fixe un élément f de $E \setminus V_n$.

14. Soit $p \in C_{V_n}(f)$. On se propose de montrer que $f - p$ s'annule au moins n fois sur S.

On suppose par l'absurde que $f - p$ s'annule au plus $n-1$ fois.

On note σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

a) On fixe h dans V_n. Soit :

$$F_h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|f - p - th\| \end{array}.$$

Montrer que F_h est dérivable en 0 de dérivée :

$$F_h{}'(0) = -\int_a^b \sigma(f-p)\, h.$$

b) Montrer qu'il existe h dans V_n tel que :

$$\int_a^b \sigma(f-p)\, h > 0.$$

c) Conclure.

15. Soient p_1 et p_2 dans $C_{V_n}(f)$.

a) Montrer l'égalité de fonctions :

$$\left| f - \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \right| = \frac{1}{2}\left(|f - p_1| + |f - p_2| \right).$$

b) En appliquant la question 14 à $p = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$ montrer que $C_V(f)$ est un singleton.

B. Un exemple

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer $C_{V_n}(f_n)$ et $d(f_n, V_n)$.

On fixe f dans $C(S)$.

16. Soit p dans V_n tel que l'ensemble des zéros de $f - p$ soit fini et que :

$$\forall q \in V_n, \qquad \int_S \sigma(f-p)\, q = 0.$$

Montrer que $C_{V_n}(f) = \{p\}$.

17. Soit m un entier tel que $|m| \leq n$.

a) Soit g une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t+\pi) = -g(t).$$

Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g((n+1)t)e^{imt} \, \mathrm{d}t = 0.$$

En déduire :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma((\sin((n+1)t))\, e^{imt} \, \mathrm{d}t = 0.$$

18. Soient p dans V_n l'interpolateur de Lagrange de f aux points $x_{1,n+1}, \ldots, x_{n,n+1}$ définis dans la question 11.

a) On suppose que $f - p$ change de signe en $x_{1,n+1} \ldots, x_{n,n+1}$. Montrer que

$$C_{V_n}(f) = \{p\}.$$

b) Montrer que T'_{n+1} s'annule en changeant de signe en $x_{1,n+1}, \ldots, x_{n,n+1}$.

En déduire $C_{V_n}(f_n)$ et $d(f_n, V_n)$.

Soit p dans $\mathbb{N}$. Préciser le terme de plus haut degré de T_p et montrer :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_p(\cos\theta) = \cos(p\theta).$$

11. a) Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels de degré n. Montrer ;

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Indication. Raisonner par l'absurde en supposant $\|P\| < 1/2^{n-1}$ et en considérant le polynôme

$$P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$$

et les points

$$x_{k,n} = \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right) \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

b) Déterminer $C_{V_n}(f_n)$ et $d(f_n, V_n)$.

C. Nécessité de la condition de Haar

On revient à la situation générale et on suppose que V ne vérifie pas la condition de Haar.

On dispose donc de q dans $V \setminus \{0\}$ tel que $q^{-1}(\{0\})$ contienne au moins n points distincts ; quitte à multiplier q par un réel $\lambda > 0$, on peut de plus supposer que $\|q\| < 1$. On considère $x_1, \ldots, x_n$ n points distincts de $q^{-1}(\{0\})$. Enfin, on choisit une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V.

12. a) Montrer que la matrice :

$$(e_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

n'est pas inversible.

b) Déduire de a) l'existence de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$\forall p \in V, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p(x_j) = 0.$$

13. On fixe f dans E telle que $\|f\| = 1$ et :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad f(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_j > 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_j \leq 0 \end{cases}.$$

Soit $g = (1 - |q|)f$.

a) Si $p \in V$, montrer : $\exists j \in \{1, \ldots, n\}, \ |g - p|(x_j) \geq 1$.

b) Si $\lambda \in [0,1]$, montrer : $\|g - \lambda q\| = 1$.

c) Que peut-on en conclure ?

A. Condition de Haar et unicité de la meilleure approximation

Dans ce **A**, on suppose que V vérifie la condition de Haar.

7. Soient $x_1, \ldots, x_n$ n points deux à deux distincts de S, et :

$$\psi : \begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{R}^n \\ f & \mapsto & (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \end{array}.$$

Montrer que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans la suite de **II.**A, soient f dans $E \setminus V$, p dans $C_V(f)$, $M = \|f - p\|_\infty$.

8. On se propose de montrer que $|f - p|$ prend la valeur M en au moins $n+1$ points de S. On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble

$$\{x \in S,\ |f - p|(x) = M\}$$

est fini de cardinal $k \leq n$, et on note $x_1, \ldots, x_k$ les points de cet ensemble.

a) Justifier l'existence de $q \in V$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \quad q(x_i) = f(x_i).$$

Dans b) et c), q est ainsi choisi, on pose $A = \|q - f\|_\infty$ et on fixe $\varepsilon > 0$.

b) Justifier l'existence d'un voisinage ouvert V_ε de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ dans S tel que :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \qquad |f - q|(x) \leq \varepsilon.$$

c) Si $t \in [0, 1]$, soit $p_t = (1 - t)p + tq$. Montrer :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \qquad |f - p_t|(x) \ \leq\ (1 - t)M + t\varepsilon,$$

et

$$\forall x \in S \setminus V_\varepsilon, \qquad |f - p_t|(x) \ \leq\ tA + (1 - t) \times \left(\sup_{y \in S \setminus V_\varepsilon} |f - p|(y) \right).$$

d) Conclure.

9. Montrer que $C_V(f)$ est un singleton.

Indication. On pourra prendre p_1 et p_2 dans $C_V(f)$, et appliquer le résultat de la question 8 à :

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

B. Un exemple

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer $C_{V_n}(f_n)$ et $d(f_n, V_n)$.

10. On définit une suite $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

4. Dans cette question, on suppose que la norme $\| \ \|$ n'est pas stricte. Il existe donc deux vecteurs u et v de E non positivement colinéaires tels que :

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|.$$

a) Vérifier que (u, v) est libre.

b) Montrer, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{+2}$:

$$\|\lambda u + \mu v\| = \lambda\|u\| + \mu\|v\|.$$

c) Soient :

$$u' = \frac{u}{\|u\|} \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{v}{\|v\|}.$$

Montrer, si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda(u'-v') + (u'+v')\| \geq 2.$$

d) Montrer que l'on peut trouver une droite D de E et un vecteur x de E tels que $C_D(x)$ ne soit pas un singleton.

5. On suppose ici que, pour tout x de E, $C_V(x)$ est réduit à un point noté $\varphi(x)$. Montrer que l'application φ ainsi définie est continue.

Indication. On pourra montrer que, si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E convergeant vers x, alors $\varphi(x)$ est la seule valeur d'adhérence de $(\varphi(x_n))_{n\geq 0}$.

6. Ici $E = \mathcal{C}(S)$. On identifie un élément de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction qu'il induit sur S. Pour n dans $\mathbb{N}$, soient $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (dérivée n-ième).

a) Si k, m et n sont dans $\mathbb{N}$ et tels que $n \geq m$, $n \geq k$, montrer :

$$\int_S L_n L_m = (-1)^k \int_S P_n^{(n-k)} P_m^{(m+k)}.$$

En déduire que, si $n > m$, alors : $\int_S L_n L_m = 0$.

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer le coefficient dominant de L_n et l'intégrale :

$$\int_S L_n^2.$$

Indication. On admettra la relation :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1}\, \mathrm{d}t = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

c) En déduire $C_{V_n}(f_n)$ et $d(f_n, V_n)$ pour la norme $\| \ \|_2$.

II. Cas de l'approximation uniforme sur $\mathcal{C}(S)$

Dans toute cette partie, E est l'espace $\mathcal{C}(S)$, $\| \ \|$ est la norme $\| \ \|_\infty$ définie en **I.**5, V est de dimension $n \geq 1$.

On dit que V vérifie la *condition de Haar* si et seulement si, pour tout p de $V \setminus \{0\}$, $p^{-1}(\{0\})$ est un ensemble fini de cardinal majoré par $n-1$ (où n est toujours la dimension de V).