DM n° 9 : Intégration

Correction de l'exercice 1 – (Formule de Plouffe, 1995)

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

1. Soit $a \in]0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de sommation des séries géométriques (la raison étant dans $]-1,1[$), on a :

$$\frac{t^k}{1-t^8} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} t^{8\ell+k} = \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k} + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} t^{8\ell+k}.$$

Or,

$$\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} t^{8\ell+k} = \frac{t^{8(n+1)+k}}{1-t^8}$$

Par ailleurs, $0 < t < a$, donc par majoration du numérateur et minoration du dénominateur,

$$0 \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} t^{8\ell+k} \leqslant \frac{a^{8(n+1)+k}}{1-a^8}$$

On en déduit que

$$\boxed{\left|\frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k}\right| \leqslant \frac{a^{8(n+1)+k}}{1-a^8}}.$$

2. En intégrant entre 0 et a, il vient alors, par croissance de l'intégrale, et inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^a \left(\frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^a \left|\frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^a \frac{a^{8n+k}}{1-a^8}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{8(n+1)+k+1}}{1-a^8}.$$

En repartant du premier terme de cette inégalité, et en distribuant l'intégrale, il vient alors :

$$\left|\int_0^a \frac{t^k}{1-t^8}\,\mathrm{d}t - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^{8\ell+k+1}}{8\ell+k+1}\right| \leqslant \frac{a^{8(n+1)+k+1}}{1-a^8}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, car $a \in]-1,1[$, et donc, d'après le théorème d'encadrement, l'expression de gauche tend vers 0 aussi, soit :

$$\boxed{\int_0^a \frac{t^k}{1-t^8}\,\mathrm{d}t = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{a^{8\ell+k+1}}{8\ell+k+1}}.$$

Ainsi, on a, par le changement de variable $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^k}{16-x^8}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\sqrt{2}t)^k}{1-t^8}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\cdot\sqrt{2}^{k+1}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{8n+k+1}(8n+k+1)} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{16^n(8n+k+1)}.$$

On en déduit sans peine, par combinaison linéaire, que

$$\boxed{-16\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16^n}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)}.$$

3. Les racines de $16 - X^8$ sont les racines 8-ièmes de 16, à savoir $\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{4}}$, $k \in [\![0,7]\!]$. On obtient donc :

$$16 - X^8 = -(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\mathrm{i}\sqrt{2})(X-z)(X-\overline{z})(X+z)(X+\overline{z}),$$

où $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. En regroupant les racines conjuguées et en redéveloppant, on arrive à la factorisation dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{16 - X^8 = -(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)(X^2-2X+2)(X+2X+2)}.$$

On remarque ensuite que $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 = (X^2+2)(X^3+X^2-2) = (X^2+2)(X^2+2X+2)(X-1)$.

4. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Pour calculer cette dernière intégrale, effectuons une décomposition en éléments simples, en recherchant a, b, c et d tels que pour tout $x \neq \pm\sqrt{2}$:

$$\frac{1-x}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}} + \frac{cx+d}{x^2-2x+2}.$$

En multipliant par $x-\sqrt{2}$ et en évaluant en $\sqrt{2}$, on trouve a. De même pour b. On trouva alors c en multipliant par x et en prenant la limite en $+\infty$, et enfin d en évaluant en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} &= -\frac{1}{8(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + -\frac{x}{4(x^2-2x+2)} \\ &= -\frac{1}{8(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{8(x+-\sqrt{2})} + \frac{2x-2}{8(x^2-2x+2)} + -\frac{1}{4((x-1)^2+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi, sachant maintenant primitiver l'expression obtenue, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2-2x+2}\right| + \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(x-1)\right]_0^1 = -\frac{\pi}{16}.$$

On en déduit que

$$-16\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x = \pi,$$

donc, d'après la question 2 :

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)}$$

Correction de l'exercice 2 –

1. **Intégrales de Wallis.**

   (a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_0}$; $\qquad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1 = I_1}$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1} x\,\mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}).\end{aligned}$$

   En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\cdot I_{n-1}}$.

(c) On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{H}(p)$: « $\boxed{I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}}$ »

Initialisation : Pour $p = 0$, $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée ssi $I_0 = \frac{\pi}{2}$, ce qui provient de la question 1.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(p-1)$ soit vérifié. Alors, d'après la question 2,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2p(2p-1)}{4p^2} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

La propriété est donc héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

L'expression pour I_{2p+1} se démontre bien sûr de la même manière. Je propose une démonstration alternative (qui, pour être complètement rigoureuse, nécessiterait aussi une récurrence). Il s'agit bien sûr d'une autre façon de mettre en forme la même idée. D'après la question 2,

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1$$
$$\frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \boxed{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = I_{2p+1}}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n+1} x$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_n \leqslant I_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in NN^*$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\boxed{1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}.}$$

(e) On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$

Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.

Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \cdot \frac{2p^2}{2p} \cdot \pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

(a) On obtient, à l'aide de l'indication :

$$S_n - S_{n-1} = \ln \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln \frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right)$$
$$= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(b) Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_{n+1} - S_n| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$. Or, $\sum \dfrac{A}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum S_{n+1} - S_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, la somme partielle de cette série est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_{k+1} - S_k = S_{n+1} - S_1$. Ainsi, la convergence de la série est équvalente à la $\boxed{\text{convergence de la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vers un réel fini } S.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \mathrm{e}^S$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \frac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$.

De plus : $\displaystyle\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.

D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $\boxed{S = \ln\sqrt{2\pi}}$.

(d) La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{soit : } \quad \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)), \quad \text{soit : } \boxed{n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}.$$

Correction de l'exercice 3 – (Transcendance de e**)**

Soit e *la base des logarithmes népériens. Le but de l'exercice est de montrer que* e *est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$, non nul, tel que $P(\mathrm{e}) = 0$.*

1. Si f est nul, c'est trivial. On montre le résultat dans les autres cas, par récurrence sur le degré m de f.

   Soit, pour tout m dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(m)$: pour toute fonction polynomiale f à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré m, on a :

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

   .

   - Si $m = 0$, la fonction f est constante, disons égale à c. On a alors

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u = c\mathrm{e}^t\Big[-\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^t = c(\mathrm{e}^t - 1).$$

     Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $j \in \mathbb{N}^*$, $f^{(j)}(t) = 0$, alors que si $j = 0$, $f^{(0)}(t) = c$. Ainsi, on obtient bien $\mathcal{P}(0)$.
   - Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(m)$ est vrai. Soit f une fonction polynomiale de degré $m+1$. Les fonctions $u \mapsto f(u)$ et $u \mapsto -\mathrm{e}^{t-u}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{t-u}f(u)\Big]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f'(u)\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t f(0) - f(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f'(u)\ \mathrm{d}u$$

     Or, la fonction f' est une fonction polynomiale de degré m ; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u &= \mathrm{e}^t f(0) - f(t) + \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} (f')^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} (f')^{(j)}(t) \\ &= \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m+1} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m+1} f^{(j)}(t).\end{aligned}$$

     C'est exactement $\mathcal{P}(m+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout m dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ entraîne $\mathcal{P}(m+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout m dans $\mathbb{N}$.

   Ainsi, pour toute fonction polynomiale f de degré m : $\boxed{\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des entiers tels que $a_0 + a_1\mathrm{e} + a_2\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\mathrm{e}^n = 0$, et $a_0 \neq 0$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_p(x) = x^{p-1}\prod_{i=1}^{n}(x-i)^p, \qquad I_p(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-u} f_p(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad J_p = \sum_{k=0}^{n} a_k I_p(k)$$

(a) On a, d'après la question précédente, avec $m = \deg(f) = np + p - 1$:

$$\begin{aligned} J_p &= \sum_{k=0}^{n} a_k I_p(k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\mathrm{e}^k \sum_{j=0}^{m+1} f_p^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m+1} f_p^{(j)}(k)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m+1}\left(f_p^{(j)} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k\right) - \sum_{j=0}^{m+1}\sum_{k=0}^{n} a_k f_p^{(j)}(k). \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{e}^k = 0$, donc

$$J_p = -\sum_{j=0}^{m+1}\sum_{k=0}^{n} a_k f_p^{(j)}(k).$$

Par ailleurs, en développant le produit, il est immédiat que f_p est un polynôme à coefficients entiers. Par conséquent, ses dérivées successives sont aussi des polynômes à coefficients entiers. On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $k \in \mathbb{N}$, $f_p^{(j)}(k)$ est entier.

Ainsi, $\boxed{J_p \text{ est entier}}$, en tant que somme d'entiers.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Écrivons f_p sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = (x-k)^p g(x).$$

Alors g est un polynôme à coefficients entiers, donc, comme dans la question précédente, pour tout j, ℓ entiers, $g^{(j)}(\ell)$ est entier. Ainsi, d'après la formule de Leibniz, en notant $h : x \mapsto (x-k)^p$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f_p^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell} h^{(\ell)}(x) g^{(j-\ell)}(x) = \sum_{\ell=0}^{\min(p,j)}\binom{j}{\ell} p(p-1)\ldots(p-\ell+1)(x-k)^{p-\ell} g^{(j-\ell)}(x).$$

Ainsi, en évaluant en k, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad f_p^{(j)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < p \\ p!\,g^{(j-p)}(k) & \text{si } j \geqslant p \end{cases}$$

Puisque $g^{(j-p)}(k)$ est entier, on en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{f_p^{(j)}(k) \text{ est divisible par } p!}$.

(c)
- On étudie maintenant les propriétés de divisibilité par $p!$ ou $(p-1)!$ de $f_p^{(j)}(0)$, en procédant de la même façon. On pose cette fois $h : x \mapsto x^{p-1}$, et on écrit $f_p = hg$, où g est comme précédemment un polynôme à coefficients entiers, dont 0 n'est pas racine. On obtient cette fois :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f_p^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{\min(p-1,j)}\binom{j}{\ell}(p-1)(p-2)\ldots(p-\ell)x^{p-\ell-1}g^{(j-\ell)}(x).$$

  Ainsi,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad f_p^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < p-1 \\ (p-1)!\,g^{(j-p+1)}(0) & \text{si } j \geqslant p \end{cases}$$

  On peut d'ores et déjà conclure que $f_p^{(j)}(0)$ est toujours divisible par $(p-1)!$. Comme c'est aussi le cas des $f_p^{(j)}(k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ (puisqu'ils sont divisibles par $p!$), on en conclut que $\boxed{J_p \text{ est divisible par } (p-1)!}$.
- Si $j = p-1$, $f_p^{(p-1)}(0) = (p-1)!g(0) = (p-1)!(-1)^p(-2)^p\ldots(-n)^p$. Ainsi, si p est un nombre premier strictement supérieur à n, p ne divise pas $(p-1)!$ ni aucun des i^p, pour $i \in [\![1, n]\!]$, donc d'après le lemme d'Euclide contraposé, p ne divise pas $f_p^{(p-1)}(0)$, donc $p!$ ne divise pas $f_p^{(p-1)}$.

- Si $j > p-1$, montrons que $g^{(j-p+1)}(0)$ est divisible par p. pour cela, dérivons une première fois, en utilisant la règle de dérivation d'un produit de n termes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-i)^{p-1} \dots (x-n)^p = pQ(x),$$

où Q est un polynôme à coefficients entiers. On en déduit que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier strictement positif $\ell > 0$, $g^{(\ell)}(k)$ est divisible par p. Ainsi, si $j > p-1$, $g^{(j-p+1)}(0)$ est divisible par p, donc $f_p^{(j)}(0)$ est divisible par $p!$.
- On en déduit que si p est un nombre premier strictement supérieur à n, J_p est la somme de termes tous divisibles par $p!$ sauf 1. Ainsi, $\boxed{J_p \text{ n'est pas divisible par } p!}$

(d) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a, d'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$|I(k)| \leqslant \int_0^k \mathrm{e}^{k-u}|u|^{p-1}|u-1|^p \dots |u-n|^p \, \mathrm{d}u \leqslant \int_0^k \mathrm{e}^n n^{n+1} \, \mathrm{d}u = k\mathrm{e}^n n^{p-1}(n^n)^p \leqslant n\mathrm{e}^n(n^{n+1})^p.$$

On déduit alors de l'inégalité triangulaire que

$$|J| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||I(k)| \leqslant \mathrm{e}^n n(n^{n+1})^p \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

En posant $C = n\mathrm{e}^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, on a bien : $\boxed{J_p \leqslant C(n^{n+1})^p}$.

3. Soit pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{C\alpha^p}{(p-1)!}$, où $\alpha = n^{n+1}$. Un résultat classique de comparaison entre puissances et factoriels (par exemple Stirling, mais on n'a pas beasoin de tant) montre que $\lim_{p\to+\infty} u_p = 0$. On peut retrouver ce résultat par exemple en remarquant que

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{\alpha}{p} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, il existe p_0 tel que pour tout $p \geqslant p_0$,

$$\left| \leqslant \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| \leqslant \frac{1}{2},$$

puis,

$$\forall p \geqslant p_0,\quad |u_p| \leqslant |u_{p_0}| \left(\frac{1}{2}\right)^{p-p_0} \longrightarrow 0.$$

Or, pour p premier assez grand $|J_p| \leqslant C\alpha^p$ et $|J_p| \geqslant (p-1)!$ (puisque $|J_p|$ est divisible par $(p-1)!$ et non nul, puisque non divisible par $p!$). On en déduit que pour p premier grand, $(p-1)! \leqslant C\alpha^p$, ce qui conterdit la limite trouvée pour (u_p), p pouvant être choisi aussi grand qu'on veut puisqu'il existe une infinité de nombres premiers.

Ainsi, l'hypothèse faite sur l'existence des entiers $a_0, \dots, a_n$ est fausse, donc il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers annulant e, donc pas non plus de polynôme à coefficient rationnel (cela fournirait un polynôme à coefficient entier par multiplication par un entier convenable)

Ainsi, $\boxed{\text{e est transcendant.}}$

Correction du problème 1 –

1. **Étude de I**

(a) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, x]$, et prolongeable par continuité en 0. Ainsi, $I(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, x]$, donc $\boxed{I(x) \text{ est bien définie.}}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Or, $\dfrac{\cos(x)}{x} \to 0$ en $+\infty$, et pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge (on peut la calculer facilement !), il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$, d'après le point rappelé en début d'énoncé, ce qui équivaut à dire que $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

On en déduit que $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, donc aussi $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ (les deux expressions diffèrent d'une constante $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$).

Ainsi, $\boxed{I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. **Valeur de I (première méthode)**

(a) i. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Puisque $\sin((2n+1)t) \underset{0}{\sim} (2n+1)t$ et $\sin(t) \sim_0 t$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ admet une limite finie en 0, égale à $2n+1$ (si vous voulez éviter les équivalents sur les fonctions, ramenez-vous aux limites remarquables du sin).

Ainsi, après prolongement par continuité, I_n est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\boxed{I_n \text{ est bien définie}}$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t}{\sin t}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2nt)\sin t}{\sin t}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\Big[\sin(2nt)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{0 = I_n - I_{n-1}}. \end{aligned}$$

iii. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_n}.$$

(b) On reconnaît le lemme de Riemann-Lebesgue, qu'on a déjà rencontré. On fait une IPP, les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$J_n = -\frac{1}{n}\Big[f(t)\cos(nt)\Big]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t.$$

Or, les fonctions f et f' sont continues sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, elle y sont donc bornées (voir point admis en début d'énoncé). Il existe donc M tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leqslant M$ et $|f'(t)| \leqslant M$. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes, puis pour les intégrales, et d'après la propriété de croissance de l'intégrale, que :

$$\begin{aligned} |J_n| &\leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)\cos(nb)| + |f(a)\cos(na)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t\right|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(2M + \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(2M + \int_a^b M\ \mathrm{d}t\right) = \frac{(2+b-a)M}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

(c) On utilise le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: il suffit donc de montrer que f' admet une limite finie en 0. En particulier, il est inutile de justifier l'existence d'une limite en 0 de f : cela vient en bonus.

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}$, on a :

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{-\sin^2 t + t^2\cos t}{t^2\sin^2 t}.$$

Or, $t^2\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$. De plus, en attendant d'avoir des DL, on peut écrire :

$$-\sin^2 t + t^2\cos t = t^2(\cos(t)-1) + t^2 - \sin^2(t) = t^2(\cos(t)-1) + t(t-\sin(t)) + \sin(t)(t-\sin(t)).$$

Or ,

$$t^2(\cos(t)-1) \underset{0}{\sim} -\frac{t^4}{2}, \qquad t(t-\sin(t)) \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{6} \qquad \text{et} \qquad \sin(t)(t-\sin(t)) \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{6}.$$

Pour sommer, on exprime ces équivalents avec o :

$$-\sin^2 t + t^2\cos t = -\frac{t^4}{2} + \frac{t^4}{6} + \frac{t^4}{6} + o(t^4) = -\frac{t^4}{6} + o(t^4).$$

Ainsi, $-\sin^2 t + t^2\cos t \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^4}{6}$.

On fait alors le quotient des deux équivalents trouvés, et on obtient $f'(t) \to -\frac{1}{6}$ lorsque $t \to 0$.

Donc f' admet une limite en 0. On en déduit, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}].}$

(d) La fonction f étant prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, d'après la question I-2b,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin((2n+1)t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

On peut séparer l'integrale en 2, les fonctions intégrées étant toujours prolongeables par continuité en 0. On obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim I_n = \frac{\pi}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variables $u = (2n+1)t$, de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} (2n+1)\frac{\sin u}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2n+1} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u.$$

Ainsi, en passant cette dernière expression à la limite, il vient : $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2}}$.

3. **Valeur de I (deuxième méthode)**

(a) Soit $u > 0$ et $x > 0$. On a :

$$\int_0^u \sin x \mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y = \left[-\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-xy}\right]_{y=0}^{y=u} = -\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ux} + \frac{\sin x}{x}, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y = \frac{\sin x}{x}(1-\mathrm{e}^{-xu})}.$$

(b) On s'assure comme précédemment que les intégrales sont bien définies, les fonctions étant continues sur l'intervalle fermé d'intégration (après éventuel prolongement par continuité). On utilise alors le théoèrme de Fubini :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1-\mathrm{e}^{xu})\ \mathrm{d}x = \int_0^u \int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^u \int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

On calcule alors l'intégrale interne par intégrations par parties, ou en passant aux complexes, au choix :

$$\int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x = -\left[\sin x\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right]_0^u + \frac{1}{y}\int_0^u \cos x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x = -\frac{\sin u}{y}\mathrm{e}^{-uy} + \frac{1}{y}\int_0^u \cos x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x,$$

et une deuxième IPP donne :

$$\int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x = -\frac{\sin u}{y}\mathrm{e}^{-uy} - \frac{1}{y^2}\left[\cos x\mathrm{e}^{-xy}\right]_0^u - \frac{1}{y^2}\int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x.$$

Par conséquent,

$$\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\int_0^u \sin x\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x = -\frac{\sin u}{y}\mathrm{e}^{-uy} - \frac{\cos u}{y^2}\mathrm{e}^{-uy} + \frac{1}{y^2} = -\mathrm{e}^{-uy}\left(\frac{\sin u}{y} + \frac{\cos u}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}$$

Ainsi :

$$\int_0^u \sin x \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-uy}(y \sin u + \cos u)}{1+y^2}.$$

En intégrant par rapport à y, d'après ce qui précède, on obtient bien :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu}) \, \mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1 - \mathrm{e}^{-uy}(y \sin u + \cos u)}{1+y^2} \, \mathrm{d}y.$$

(c) Passons à la limite dans chacun des deux membres de l'égalité obtenue dans la question précédente. Un raisonnement grossier et mal justifié nous laisse penser que dans l'intégrale de gauche, le terme exponentiel va disparaître à la limite, et on récupère note intégrale de Dirichlet. Dans le terme de droite de même, on récupère $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}$, qu'on sait calculer avec la fonction Arctan :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} = \lim_{A \to +\infty} \Big[\mathrm{Arctan}(x) \Big]_0^A = \lim_{A \to +\infty} \mathrm{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}.$$

Ces passages à la limite nécessite des techniques d'inversion limite/intégrale dont nous ne disposons pas encore. Nous allons les justifier par majoration.

- On connaît déjà la limite de $\displaystyle\int_0^u \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y$, et on sait que $\displaystyle\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x$ tend vers I, l'intégrale qu'on cherche à calculer. Il nous reste donc à contrôler les deux autres termes, grâce à l'exponentielle.
- La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ (car admet une limite finie en 0 et en $+\infty$ et continue entre les deux). Soit M un majorant de sa valeur absolue. On a alors :

$$\left| \int_0^u \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{xu} \, \mathrm{d}u \right| \leqslant \int_0^u \left| \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-xu} \right| \, \mathrm{d}u \leqslant M \int_0^u \mathrm{e}^{-xu} \, \mathrm{d}x = \frac{M}{u}(1 - \mathrm{e}^{-u^2}) \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0;$$

  Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\displaystyle\int_0^u \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-xu} \, \mathrm{d}u \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$
- De même, la fonction $y \mapsto \dfrac{\cos(u) + y \sin(u)}{1+y^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour les mêmes raisons). Le même argument montre que

$$\int_0^u \frac{\mathrm{e}^{-yu} y \sin u + \cos y}{1+y^2} \, \mathrm{d}y \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- On peut donc passer à la limite dans l'égalité de la question précédente :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}}.$$

4. **Estimation du reste**

On adapte l'argument de la question 1a, en faisant une deuxième IPP, puis une troisième. On la fait d'abord sur un segment $[n, A]$, puis on fait tendre A vers $+\infty$:

$$\int_n^A \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2} - 2\frac{\cos(t)}{t^3} \right]_n^A + 6 \int_n^A \frac{\cos(t)}{t^4} \, \mathrm{d}t.$$

Tous les autres termes admettant une limite finie lorsque $A \to +\infty$, il en est de même de la dernière intégrale, et on peut écrire :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} - 2\frac{\cos(n)}{n^3} + 6 \int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} \, \mathrm{d}t.$$

Or, $2\dfrac{\cos(n)}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_n^{+\infty} \left| \frac{\cos(t)}{t^4} \right| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^4} \, \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{4t^3} \right]_n^A = \frac{1}{4n^3}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} \, \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il en résulte que :

$$\boxed{\int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$