

## DM 2. Enoncé

### Exercice 1 :

Résoudre l'équation dans  $\mathbb{C}$  suivante :  $\bar{z} = 2z + j$ , où  $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ .

### Exercice 2 :

1°) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $e^{i(\alpha+\beta)} \neq -1$ .

Montrer que  $z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$  est un réel.

2°) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes non nuls de même module.

Démontrer que le nombre  $Z = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$  est un réel.

### Exercice 3 :

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

### Exercice 4 :

#### Une caractérisation des fonctions exponentielle et logarithme.

1°) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que  $f(1) = 1$  et telle que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ .

*Indication :* On admettra qu'entre deux réels distincts, il existe toujours au moins un rationnel.

2°) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ ,
- $f$  est croissante,
- Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$ ,
- $f(1) = e$ .

Montrer que  $f$  est l'application exponentielle.

3°) Soit  $g$  une application de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

- $g$  est croissante,
- Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*, g(xy) = g(x) + g(y)$ ,
- $g(e) = 1$ .

Montrer que  $g$  est le logarithme népérien.

**Exercice 5 :**

Résoudre l'équation  $\cos(\pi \sin(x)) = \sin(\pi \cos(x))$ , en l'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 6 :**

Déterminer les racines complexes du polynôme  $P(x) = x^5 - 1$  selon deux approches différentes :

- En écrivant les éventuelles racines sous la forme  $re^{i\theta}$  avec  $r \geq 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .
- En factorisant  $P$  sous la forme  $P(x) = (x-1)Q(x)$ , où  $Q$  est un polynôme que l'on écrira sous la forme d'une différence de deux carrés.

En déduire une expression simple de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .

**Exercice 7 :**

Simplifier  $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ .

**Exercice 8 :**

1°) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\cos((n+1)x) = 2 \cos(nx) \cos(x) - \cos((n-1)x).$$

2°) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $T_n$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $2 \cos(n\theta) = T_n(2 \cos \theta)$ .

3°) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme  $x \mapsto x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $a$  une racine rationnelle de  $P$ . En écrivant  $a$  sous la forme  $a = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , et  $p$  et  $q$  premiers entre eux, montrer que  $a \in \mathbb{Z}$ .

4°) En déduire le théorème de Niven : Soit  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ .  
Montrer que si  $\cos \theta \in \mathbb{Q}$ , alors  $\cos \theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ .