MP*1

Problème

Unicité du développement en série trigonométrique

Si u est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et si $p \in \mathbb{Z}$, on note $c_p(u)$ le coefficient de Fourier d'indice p de u :

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t.$$

I. Préliminaires

Les questions **1** *et* **2** *sont indépendantes.*

1. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \; ; \qquad u_0(x) = c_0.$$

On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(f) = c_p.$$

Ainsi, si f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est nulle. Le but essentiel de ce problème est de montrer que ce résultat subsiste si $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (*théorème d'unicité de Cantor-Riemann*).

2. Soient $(\lambda_n)_{n \geq 1}$, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ et $(\rho_n)_{n \geq 1}$ trois suites réelles. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, λ_n est dans $\mathbb{R}^{+*}$ et ρ_n dans $\mathbb{R}^+$; on suppose également que $\lambda_n \to +\infty$.

On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$.

(a) Montrer :

$$\int_a^b \cos^2(\lambda_n x + \varphi_n) \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{b-a}{2}.$$

On suppose dans la suite de cette question **2** que

$$\forall x \in [a, b], \qquad \rho_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n) \longrightarrow 0.$$

(b) Si la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est bornée, montrer que :

$$\int_a^b (\rho_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n))^2 \ dx \longrightarrow 0.$$

(c) Démontrer

$$\rho_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication. On pourra poser, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[a,b]$, $\rho'_n = \mathrm{Min}\,(1, \rho_n)$ et utiliser la question **2.b**.

II. La pseudo-dérivée seconde de Riemann-Schwarz

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, $\overset{o}{I}$ l'ensemble des points intérieurs à I, F une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

3. (a) On suppose que F est de classe C^2 sur $\overset{o}{I}$. Déterminer, pour x dans $\overset{o}{I}$, la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

On dit que F admet une pseudo-dérivée seconde en x si

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0. Cette limite est la *pseudo-dérivée seconde de F en x*; elle est notée $D^2F(x)$.

(b) Donner un exemple de fonction F continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable en zéro, mais admettant une pseudo-dérivée seconde en 0.

(c) On suppose que F atteint un maximum local au point x de $\overset{o}{I}$ et que $D^2F(x)$ existe. Quel est le signe de $D^2F(x)$?

On suppose maintenant que $D^2F(x)$ existe pour tout x de $\overset{o}{I}$.

4. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$ et $F(a) = F(b) = 0$,

(a) On suppose :

$$\forall x \in]a,b[, \qquad D^2F(x) > 0.$$

Montrer que F est négative ou nulle sur $[a,b]$.

Indication. Utiliser **3.c**.

(b) On suppose :

$$\forall x \in]a,b[, \qquad D^2F(x) \geq 0.$$

Montrer que F est négative ou nulle sur $[a,b]$.

Indication. On pourra construire une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, F_n admette une pseudo-dérivée seconde strictement positive sur $\overset{o}{I}$ et telle que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers F sur I.

x h

5. (a) On suppose :

$$\forall x \in \overset{o}{I}, \qquad D^2F(x) \geq 0.$$

Montrer que la fonction F est convexe sur I.

Indication. Soient a et b dans I avec $a < b$, G la fonction affine coïncidant avec F aux points a et b. Considérer $F - G$.

(b) On suppose que D^2F est nulle sur $\overset{o}{I}$. Que peut-on dire de F ? Même question si D^2F est constante sur $\overset{o}{I}$.

6. Soient x un élément de $\overset{o}{I}$ et h un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $[x-h, x+h] \subset I$

(a) Justifier qu'il existe un unique élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ coïncidant avec F aux points $x-h, x, x+h$. Expliciter le coefficient de X^2 dans P. Lagrange

(b) Soit M dans $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose :

$$\forall x \in \overset{o}{I}, \qquad D^2F(x) \leq M.$$

Montrer :

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) \leq Mh^2.$$

Indication. On pourra considérer $H = F - P$.

III. Le procédé sommatoire de Riemann

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum \alpha_n$ converge.

Dans les questions **8** et **9**, soit φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, la série $\sum \varphi(nx)$ est absolument convergente.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $v_n(x) = \alpha_n \varphi(nx)$.

7. (a) Vérifier que φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note V la somme de cette série :

$$V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

8. Si $n \in \mathbb{N}^*$, soient $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k$ et $\varepsilon_n = \sup\{|r_k|,\ k \geq n\}$.

(a) Prouver, si $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} v_k(x)\right| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^+} |\varphi| + \int_0^{+\infty} |\varphi'|\right) \varepsilon_n.$$

Indication. On pourra écrire, pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\alpha_k = r_k - r_{k+1}$.

$\sum \alpha_n \varphi(nx)$

$(A_{n+1} - A_n)\varphi(nx)$

$\alpha_n - \sum \alpha_n$

$2nx = \pi$

$x = \frac{\pi}{2n}$

(b) Montrer que la fonction V est continue sur $\mathbb{R}^+$.

9. En appliquant la question **8.b** à une fonction φ bien choisie, montrer que :

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n \left(\frac{\sin(nx)}{nx}\right)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n\geq 1} \alpha_n.$$

IV. Le théorème d'unicité de Cantor-Riemann

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\ ; \qquad u_0(x) = c_0.$$

On note C l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ tels que $\sum u_n(x)$ converge. Pour x dans C, soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

10. On suppose que C est d'intérieur non vide.
   (a) Montrer que $c_n \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.
   (b) Justifier qu'en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

   $$F(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{n^2}e^{inx},$$

   on définit une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour p dans $\mathbb{Z}$, calculer $c_p(F)$.

11. Soit x un point de C. Montrer que F admet une pseudo-dérivée seconde en x et exprimer $D^2F(x)$ à l'aide de $f(x)$ et c_0.

12. (a) On suppose que $C = \mathbb{R}$ et que f est identiquement nulle. Montrer :

   $$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p = 0.$$

   (b) On suppose que $C = \mathbb{R}$ et que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer :

   $$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(f) = c_p.$$

   Indication. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, considérer la fonction continue 2π-périodique définie par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n^2\left(F(x+\frac{1}{n}) + F(x-\frac{1}{n}) - 2F(x)\right)$$

   et en calculer les coefficients de Fourier.

Remarque historique. C'est en cherchant les parties C de $\mathbb{R}$ auxquelles le résultat de **12.a** se généralise que Cantor a été conduit à définir quelques notions topologiques, puis à s'intéresser aux ensembles les plus généraux.

$F''(x)$ Σ

$\frac{e^{|h|}+e^{|h|}-2}{h^2}$