

## Test de contrôle

- durée 3 heures / calculatrices recommandées -



### Question 1

Soit  $n \geq 2$  un entier. On note  $A$  la matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < n \text{ ou } j < n \\ n - j, & \text{si } i = n \\ n - i, & \text{si } j = n \end{cases}.$$

Soit  $a$  un nombre réel. On pose :

$$\Delta_n(a) = \det(A + a I_n).$$

1. Exprimer  $\Delta_n(a)$  en fonction de  $\Delta_{n-1}(a)$ , lorsque  $n \geq 3$ .
2. Montrer que :

$$\Delta_n(a) = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

### Question 2

On pose la fonction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n + \varphi(n) \end{array}.$$

1. Calculer  $\psi(\mathbb{N})$ . [indication : on pourra calculer  $\varphi(k^2 - k)$  et  $\varphi(k^2 - k + 1)$ ]
2. Déterminer la nature des séries  $\sum_k \frac{1}{\varphi(k)}$  et  $\sum_k \frac{(-1)^k}{\varphi(k)}$ .

## Question 3

On pose la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\ln(1+x)}^x \frac{e^{\cos t}}{t + \sin t} dt \end{array} .$$

1. Montrer que la fonction  $f$  admet une limite finie en  $0^+$  et la calculer.
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. Montrer que la courbe  $y = f(x)$  n'admet pas d'asymptote au voisinage  $+\infty$ .
4. Déterminer la nature de la série  $\sum_n \frac{1}{f(n)}$ .
5. Déterminer la nature de la série  $\sum_n f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

## Question 4

On travaille dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ .

On pose :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \text{ et } G = \text{Vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\right).$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .
2. Calculer la matrice  $S$  représentant la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , par rapport à la base canonique.
3. Calculer  $\det(S)$  de deux manières différentes, l'une numériquement à l'aide de la question précédente, l'autre sans calculs numériques sur les coefficients.
4. Déterminer l'expression de la matrice de projection  $P$  sur  $G$  parallèlement à  $F$ .
5. Déterminer la dimension de l'espace composé des matrices  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $S$ .
6. Montrer que l'équation :

$$\text{Com}(M) = S,$$

d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  admet exactement une seule solution.

7. Montrer que l'équation :

$$\text{Com}(M) = P,$$

d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  n'admet aucune solution. [indication : on pourra utiliser le rang dans cette équation.]