DM n° 11 : Suites, asymptotique

Correction du problème 1 –

Partie I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
   - $P(-2) = -7$, et $P(-1) = 1$, et P est continue sur $[-2, -1]$, donc P admet une racine x_1 dans $]-2, -1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   - De même $P(0) = 1$ et $P(1) = -1$, et P est continue sur $[0, 1]$, donc P admet une racine x_2 dans $]0, 1[$.
   - De même $P(1) = -1$ et $P(2) = 1$, et P est continue sur $[1, 2]$, donc P admet une racine x_3 dans $]1, 2[$.

   Comme P est de degré 3, il ne peut pas avoir plus de trois racines, donc les réels x_1, x_2 et x_3 trouvés ci-dessus sont les seules racines de P, et elles vérifient $\boxed{-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2}$.

   Par ailleurs, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme nous permettent d'affirmer que $x_1 + x_2 + x_3$ est l'opposé du coefficient de degré 2 (si vous n'êtes pas convaincu, développez $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ et identifiez avec P). Ainsi $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$.
2. Vu les intervalles contenant les racines x_1, x_2 et x_3, on a bien $|x_2| < |x_1|$. De plus $x_3 = 1 - x_1 - x_2 > -x_1$ car $x_2 < 1$, et comme $x_1 < 0$ et $x_3 > 0$, cela implique $|x_3| > |x_1|$. Ainsi, on a bien $\boxed{|x_2| < |x_3| < |x_1|}$.
3. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$.

   D'après les conditions initiales, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifié.

   Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors Alors, en particulier, puisque $a_0 = 0$, on a $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. De plus, d'après la relation de récurrence vérifiée par (a_n),

   $$a_{n+1} - a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

   Or, $a_{n-1} \geqslant 0$ d'après ce qui précède, et $a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant 0$ d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$. Ainsi, $a_{n+1} \geqslant a_n$, puis $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

   Ainsi, $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante, et strictement positive à partir du rang 2, puisque } a_2 = 1}$.
4. D'après le cours, les racines de P étant deux à deux distinctes, il existe λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n.$$

   En considérant $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, λ_1, λ_2 et λ_3 satisfont le système d'équations suivant :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 & = & 1, \end{cases}$$

   et on trouve facilement :

   $$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}, \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}.$$

   En particulier, ces expressions sont bien définies (car x_1, x_2 et x_3 sont distincts) et non nulles.
5. Puisque $|x_3| > |x_2|$, $x_2^n = o(x_3^n)$. De même, $x_1^n = o(x_3^n)$. Par conséquent, λ_3 étant non nul,

   $$\boxed{a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n \underset{+\infty}{\sim} \lambda_3 x_3^n}.$$

6. De l'équivalent de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit l'équivalent suivant de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_3 x_3^n} = x_3.$$

Ainsi, $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } x_3}$.

Partie II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = b_n - x_3 &= \frac{\lambda_1 x_1^{n+1} + \lambda_2 x_2^{n+1} + \lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - x_3 \\ &= \frac{\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n}\end{aligned}$$

Or, puisque $|x_1| > |x_2|$, le numérateur est équivalent à $\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3)$, et le dénominateur, égal à u_n est équivalent à $\lambda_3 x_3^n$. En faisant le quotient de ces deux équivalents, on obtient bien

$$\boxed{\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n}.$$

2. Ainsi, en posant $M = 2(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, il, par définition des équivalents, un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant |\varepsilon_n| \leqslant 2(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n = M\left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n.$$

Par définition des O, il en résulte que

$$\boxed{\varepsilon_n = |b_n - x_3| = O\left(\left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n\right)}.$$

3. Puisque $|x_2| < |x_1| < |x_3|$, on a : $\left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1$, $\left|\frac{x_2}{x_3}\right| < 1$, et $\left|\frac{x_1}{x_3}\right| < 1$, et par conséquent :

$$\left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|, \qquad \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{x_1^2}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|.$$

Ainsi, $\boxed{\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n &= \frac{\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n \\ &= \frac{\lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n}, \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_3 x_3^n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(x_2 - x_3)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3^2}\right)^n. \end{aligned}$$

Par définition de β, $\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n = O(\beta^n)$, $\left(\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$ et $\left(\frac{x_1 x_2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$. Par conséquent :

$$\boxed{b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n)}.$$

4. D'après la question précédente,

$$b_n = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^{n+1}).$$

Or, $\beta^{n+1} = \beta \cdot \beta^n$, donc $O(\beta^{n+1}) = O(\beta^n)$. Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 3, \quad c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}, \qquad \text{donc:}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) - \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_3}O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} = \frac{O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}.$$

Or, lorsque (w_n) tend vers 0, $(1 + w_n)^{-1} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -w_n$, donc en appliquant cela à $w_n = O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$, qui tend vers 0 car d'après le début de la question 3, $\left|\frac{\beta x_3}{x_1}\right|^n < 1$, on obtient :

$$c_n = \left(\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)\right),$$

puis finalement :

$$\boxed{c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}.$$

5. À l'aide des résultats des questions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 \\
&= x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^n) - \left((x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)\right)\left(\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)\right) - x_3 \\
&= O(\beta^n) + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) + O(\beta^n) O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

et que

$$O(\beta^n) O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\beta \cdot \frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

car $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$. Ainsi, $b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 = O(\beta^n)$, et ainsi, en divisant par $1 - c_n$ de limite $1 - \frac{x_1}{x_3} \neq 0$, on obtient, d'après la question (3c), $\boxed{d_n - x_3 = O(\beta^n)}$.
On peut dire qu'on a accéléré la convergence puisqu'on a construit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_3, plus vite que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$.

6. ```
def P(x,y,z):
    return z+2*y-x

def suite(n):
    a1 = 0 # initialisation décalée pour que b soit bien définie
    a2 = 1
    a3 = 1
    b1 = 0 # valeur arbitraire ; b est définie à partir du rang 2.
    b2 = a3 / a2
    for i in range(2,n+1):
        a1, a2, a3 = a2, a3, P(a1,a2,a3)
        b0, b1, b2 = b1, b2, a3 / a2
        c = (b2 - b1) / (b1 - b0)
        d = (b2 - c * b1) / (1 - c)
    return d
```
Quelques expérimentations semblent indiquer que $d_{50}$ donne une valeur approchée de $x_3$ avec à peu près 15 décimales correctes, alors que $b_{50}$ n'en donne que 7.

**Correction du problème 2 – Polynômes de Bernoulli, nombres de Bernoulli, et fonction tangente**

Tout d'abord, une remarque générale : tout polynôme est intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, puisqu'il y est continu. Cette remarque nous dispensera par la suite de justifier l'existence des diverses intégrales apparaissant dans ce problème.

**Partie I – Polynômes de Bernoulli**

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme $Q$ admet une primitive $T$ dans $\mathbb{R}[X]$ (car $\mathbb{R}$ est de caractéristique nulle), et toute primitive de $Q$ s'écrit sous la forme $P = T + c$, où $c$ est une constante. Or, l'équation
$$0 = \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 T(t)\ \mathrm{d}t + c$$
détermine $c$ de façon unique. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } P}$.
2. Il s'agit d'une récurrence immédiate, en utilisant la question 1 avec le polynôme $Q = pB_{p-1}$.
3. - $B_1$ est une primitive de $B_0$, donc il existe $c$ tel que $B_1 = X + c$. De plus :
$$0 = \int_0^1 B_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (t+c)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + c, \qquad \text{donc:} \qquad c = -\frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$.
   - $B_2$ est une primitive de $2B_1$, donc il existe $c$ tel que $B_2 = X^2 - X + c$. De plus :
$$0 = \int_0^1 B_2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 - t + c)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c, \qquad \text{donc:} \qquad c = \frac{1}{6}.$$
Ainsi, $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$.
   - De même, on trouve : $\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X}$.

**Partie II – Étude des racines dans $[0,1]$ de $B_p$**

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $B_p$ ne s'annule pas dans $]0,1[$, alors, par la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, $B_p$ étant continue sur $]0,1[$, $B_p$ est de signe constant sur $]0,1[$ et strict. La propriété de stricte positivité de l'intégrale amène alors $\displaystyle\int_0^1 B_p(x)\ \mathrm{d}x > 0$ ou $\displaystyle\int_0^1 B_p(x)\ \mathrm{d}x < 0$, suivant le signe de $B_p$. Cela contredit la définition de $B_p$. Ainsi, $\boxed{B_p \text{ s'annule au moins une fois dans } ]0,1[}$.
2. La fonction $f$ étant continue sur $[0,1]$, l'intégrale est bien définie, et on peut y faire des changements de variable de classe $\mathcal{C}^1$, en particulier des changements de variable affines. Posons pour commencer $u = t - \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Alors :
$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(u + \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(g(u) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\ \mathrm{d}u + f\left(\frac{1}{2}\right),$$
```

où on a posé, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) = f\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Or g est impaire, donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\ du = 0$, puis

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}}.$$

3. Puisque f' est continue, et f étant la primitive de f' prenant en 0 la valeur $f(0)$, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt.$$

   - si f' est paire, et $f(0) = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} f'(t)\ dt = \int_0^x -f'(-u)\ du = -\int_0^x f'(u)\ du = -f(x),$$

     donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
   - et, si f' est impaire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(0) + \int_0^{-x} f'(t)\ dt = f(0) + \int_0^x -f'(-u)\ du = f(0) + \int_0^x f'(u)\ du = f(x),$$

     donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

4. Effectuons une récurrence sur $p \in \mathbb{N}$

   Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $B_p\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ est pair si p est pair, et est impair si p est impair.

   $B_0\left(X+\frac{1}{2}\right) = 1$, donc est pair, d'où $\mathcal{P}(0)$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai. Alors, $B_p'\left(X+\frac{1}{2}\right) = pB_{p-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)$.
   - si p est pair, alors $pB_{p-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)$ est impair d'après l'hypothèse de récurrence, donc $B_p\left(X+\frac{1}{2}\right)$ est pair, d'après la question 3.
   - de même, si p est impair, le polynôme $Q = B_p\left(X+\frac{1}{2}\right) - B_p\left(\frac{1}{2}\right)$ dont la dérivée est aussi $pB_{p-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)$ vérifie de plus $Q(0) = 0$, donc, sa dérivée étant paire d'après l'hypothèse de récurrence, Q est impaire d'après la question 3.

     On en déduit, d'après la question 2(c), que $B_p\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\ dt = 0$, donc en fait, $Q = B_p\left(X+\frac{1}{2}\right)$. Ce dernier polynôme est donc impair.

   Cela prouve $\mathcal{P}(p+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}$.

   Ainsi, $\boxed{B_p\left(X+\dfrac{1}{2}\right) \text{ est pair si } p \text{ est pair, et est impair si } p \text{ est impair.}}$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, impair, $p \geqslant 3$. L'égalité $B_p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ a été prouvée ci-dessus. Par ailleurs, $B_p\left(X+\frac{1}{2}\right)$ étant impair, $B_p(0) = -B_p(1)$. Enfin, B_p est une primitive de pB_{p-1}, ainsi

$$0 = p\int_0^1 B_{p-1}(t)\ dt = p(B_p(1) - B_p(0)),$$

   d'où $B_p(0) = B_p(1)$. Il en résulte que $\boxed{B_p(0) = B_p(1) = 0}$

6. Soit p un entier pair supérieur ou égal à 2. Alors, d'après II-5, $B_{p+1}(0) = B_{p+1}(\frac{1}{2}) = B_{p+1}(1)$ et B_{p+1} est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. Donc, d'après le théorème de Rolle, $\boxed{B_{p+1}' = (p+1)B_p \text{ s'annule deux fois au moins}}$ sur $]0,1[$: une fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et une fois sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

7. Soit, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$ suivante :
   - si p est pair, B_p admet exactement deux racines distinctes dans $[0,1]$, situées l'une dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'autre dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$
   - si p est impair, les seules racines de B_p sont 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1.

   La propriété $\mathcal{P}(2)$ découle de façon immédiate de la description de B_2.
   Soit $p \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Alors :

- si p est pair, alors B_{p+1} admet au moins les trois racines 0, $\frac{1}{2}$, et 1 sur $[0,1]$. S'il en admet une autre, il admet donc quatre racines distinctes. En appliquant le théorème de Rolle entre chaque paire de racines consécutives on obtient trois racines distinctes dans $]0,1[$ pour B'_{p+1}, donc pour B_p, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.
- De même, si p est impair, B_{p+1} admet au moins deux racines, situées comme on le veut d'après 2(g). S'il en admet une troisième, alors sa dérivée (et donc B_p) admet au moins deux racines dans l'intervalle *ouvert* $]0,1[$ (même raisonnement). Or d'après l'hypothèse de récurrence, la seule racine dans $]0,1[$ de B_p est $\frac{1}{2}$, d'où une contradiction.

Ainsi, $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Partie III – Majorations de B_p

1. La fonction $x \mapsto B_p(x)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$ car elle est polynomiale. Il en est donc de même de la fonction $x \mapsto |B_p(x)|$. Le théorème de compacité assure alors l'existence de $\boxed{\max\limits_{[0,1]} |B_p(x)|}$.
2. Soit p impair supérieur ou égal à 3. Les utilisations ci-dessous de l'IAF sont justifiées par le fait que B_p étant un polynôme, la fonction polynomiale associée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc dérivable !) sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, sur $[0,1]$, $|B'_p| = p|B_{p-1}|$ est majoré par pM_{p-1}. Ainsi, puisque 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont racines de B_p :
   - $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right], \qquad |B_p(x)| = |B_p(x) - B_p(0)| \leqslant |x-0|pM_{p-1} \leqslant \dfrac{p}{4}M_{p-1}.$
   - $\forall x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right], \qquad |B_p(x)| = \left|B_p(x) - B_p\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \leqslant \left|x - \dfrac{1}{2}\right| pM_{p-1} \leqslant \dfrac{p}{4}M_{p-1}.$
   - $\forall x \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right], \qquad |B_p(x)| = |B_p(x) - B_p(1)| \leqslant |x-1|pM_{p-1} \leqslant \dfrac{p}{4}M_{p-1}.$

   En regroupant les 3 résultats, il vient :
   $$\boxed{\forall x \in [0,1], \qquad |B_p(x)| \leqslant \frac{p}{4}M_{p-1}.}$$
3. Soit p un entier pair au moins égal à 2. On raisonne de même avec les deux racines $r_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $r_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ de B_p, nous assurant que tout x est situé à une distance inférieure à $\frac{1}{2}$ d'une racine de P. On obtient donc :
   $$\forall x \in [0,1], \qquad \boxed{|B_p(x)| \leqslant \frac{p}{2}M_{p-1}}.$$
4. On vérifie facilement que $\boxed{M_0 = 1}$ et $\boxed{M_1 = \frac{1}{2}}$

   Par ailleurs, une étude de la fonction $B_2 : x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{6}$ montre sans peine que $\boxed{M_2 = \frac{1}{6}}$
5. Soit, pour tout p dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $M_p \leqslant \dfrac{p!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1}}$.

   La propriété $\mathcal{P}(2)$ est immédiate.

   Soit $p \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifié. Alors :
   - Si p est pair, alors $M_{p+1} \leqslant \frac{p+1}{4}M_p$ d'après 2, donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,
   $$M_{p+1} \leqslant \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1}} = \frac{(p+1)!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor - 1}}.$$
   - Si p est impair, alors $M_{p+1} \leqslant \frac{p+1}{2}M_p$, donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,
   $$M_{p+1} \leqslant \frac{p+1}{2} \cdot \frac{p!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1}} = \frac{(p+1)!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor - 1}}.$$

   Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\boxed{M_p \leqslant \dfrac{p!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1}}}.$

Partie IV – Nombres de Bernoulli

1. (a) Par définition des nombres de Bernoulli, $\boxed{B_m^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!}B_{m-k}.}$

   (b) Ainsi, B_n étant de degré n (on augmente le degré à chaque primitivation), la formule de Taylor fournit :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k}(0)\frac{n!}{(n-k)!k!}X^k \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}},$$

   par changement d'indice $k \leftarrow n-k$.

   (c) On a, d'après la question précédente, pour $n > 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = B_n(1) - B_n(0) = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_n = 0}.$$

   L'égalité reste trivialement vraie pour $n = 0$, la somme étant vide, mais pas pour $n = 1$

2. (a) La majoration de la partie III amène :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ b_n \leqslant \frac{n!}{6(\sqrt{2})^{n-1}2^{n-3}} \leqslant \frac{n!}{12}(2\sqrt{2})^{n-3}.$$

   Ainsi, pour tout $z \in B(0, 2\sqrt{2})$, et tout $n \geqslant 2$:

$$\left|\frac{b_n}{n!}z^n\right| \leqslant \frac{|z|^3}{12} \cdot \left(\frac{|z|}{2\sqrt{2}}\right)^{n-3},$$

   ce majorant étant le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, donc convergente. La théorème de comparaison des séries à termes positif, et le théorème de convergence absolue nous assure alors la $\boxed{\text{convergence (absolue) de la série } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n}$ lorsque $z \in B(0, 2\sqrt{2})$.

   (b) On a $e^z - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}$. On effectue le produit de Cauchy des deux séries $\mathrm{e}^z - 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n$, toutes deux absolument convergentes sur $B(0, 2\sqrt{2})$. Ainsi, pour $z \in B(0, 2\sqrt{2})$:

$$(e^z - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z),$$

   où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!}z^k \cdot \frac{z^{n-k+1}}{(n-k+1)!} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k.$$

   D'après la question 1(c), cette expression est nulle, sauf pour $n = 0$. Puisque $b_0 = 1$, on obtient alors :

$$c_n(z) = \begin{cases} z & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Ainsi, pour $z \in B(0, 2\sqrt{2})$, $\boxed{(e^z - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n = z}$.

   (c) Du fait que $b_n = B_n(0) = 0$ lorsque $n \geqslant 3$ est impair, et $b_1 = -\frac{1}{2}$, on déduit immédiatement que pour tout $z \in B(0, 2\sqrt{2}) \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}z^{2n}}.$$

   Cette égalité se prolonge par continuité en 0.

Partie V – Développement limité de la tangente

1. Soit $x \in E$. On a :

$$\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)},$$

d'où : $\boxed{\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) = \tan(x)}$.

2. En utilisant le résultat de la partie IV avec $z = 2\,\mathrm{i}\,x$ et $z = 4\,\mathrm{i}\,x$, tous deux dans $B(0, 2\sqrt{2})$, les deux séries étant convergentes, on a, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{b_{2n}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} &= \frac{1}{x}\left(\frac{2\,\mathrm{i}\,x}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}-1} + \mathrm{i}\,x - 1\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{4\,\mathrm{i}\,x}{\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,x}-1} + 2\,\mathrm{i}\,x - 1\right) = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}+1}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}-1} - 2\,\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,x}+1}{\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,x}-1}\\ &= \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}} - 2\,\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}+\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x}}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x}}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{b_{2n}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} = \operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) = \tan(x)},$$

égalité se prolongeant sans problème pour $x = 0$.

3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in B(0, 2\sqrt{2})$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}x^{2k-1}.$$

Cette série est convergente pour $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc en particulier pour $x = \frac{1}{2}$. La série

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}x^{2k-2n-2}$$

également. Alors, le terme général de cette série tend vers 0 (la différence de deux sommes partielles successives tend vers 0, les deux sommes partielles successives ayant même limite), donc est majoré par 1 à partir d'un certain rang (pour $x = \frac{1}{2}$) :

$$\exists N,\quad \forall k \geqslant N, \left|(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2n-2}\right| \leqslant 1$$

on a alors, pour tout $|x| < \frac{1}{2}$ et $k \geqslant N$:

$$\left|(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}x^{2k-2n-2}\right| < (2|x|)^{2k-2n-2},$$

terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi, pour $|x| < \frac{1}{2}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}x^{2k-2n-2}$ est absolument convergente et pour tout $x < \frac{1}{4}$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}x^{2k-2n-2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|b_{2k}|2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k-2n-2} = C_n.$$

Il convient de remarquer que ce réel C_n dépend de n mais pas de x. On a alors, pour tout $|x| < \frac{1}{4}$,

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{2n+1}C_n.$$

Ainsi, lorsque x tend vers 0 (à n fixé), on a : donc $R_n(x) = O(x^{2n+1})$, donc $\boxed{R_n(x) = o(x^{2n})}$.
On en déduit que, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\tan(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}x^{2k-1} = o(x^{2n})}.$$