Problème n° 13 : Intégration

Correction du problème 1 – Intégrale de Lebesgue

Partie I – Intégration par rapport à une mesure

1. Soit $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ une fonction étagée, les A_i étant 2 à 2 disjoints (sinon, on peut s'y ramener facilement en considérant toutes les intersections possibles des A_i et leurs complémentaires). Quitte à regrouper certaines parts (ce qui n'est pas gênant, la tribu étant stable par union), on peut même supposer que les α_k sont deux à deux distincts.

   La fonction f ne prend alors que les valeurs $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{-1}(\alpha_k) = A_k$. On a alors, pour tout borélien X,
   $$f^{-1}(X) = \bigcup_{k \mid \alpha_k \in X} A_k,$$
   qui est bien un élément de la tribu $\mathcal{T}$, par stabilité par union. Ainsi, $\boxed{f \text{ est mesurable}}$.

2. Soit f et g mesurables positives. Notons $E^-(f)$ les fonctions étagées minorant f.

   (a) Si $0 \leqslant fleg$, alors toute fonction étagée minorant f minore g : $E^-(f) \subset E^-(g)$. On en déduit que
   $$\sup_{\sum \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \in E^-(f)} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \right) \leqslant \sup_{\sum \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \in E^-(g)} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \right),$$
   c'est-à-dire $\boxed{\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \, \mathrm{d}\mu}$.

   De plus, 0 est une fonction étagée minorant f, donc, par définition de la borne supérieure, $\boxed{\int_E f \, \mathrm{d}\mu \geqslant 0.}$

   (b) Supposons $A \subset B$. On considère $f_A = \mathbb{1}_A \times f$ et de même pour f_B. Soit $h = \sum \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ une fonction étagée minorant f_A. Cette fonction est nécessairement nulle en dehors de A, et minore donc f_B en-dehors de A. Elle minore aussi f_B sur A, puisque f_A et f_B coïncident sur A. Ainsi, $h \in E^-(f_B)$. On en déduit que $E^-(f_A) \subset E^-(f_B)$, et en passant à la borne supérieure, il vient :
   $$\boxed{\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f \, \mathrm{d}\mu}.$$

   (c) Cette propriété résulte du fait que si $h = \sum \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ est étagée, alors aussi ch, et
   $$sum_{k=1}^{n} c\alpha_k \mu(A_k) = c \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$
   Par ailleurs, sauf si $c = 0$ (mais dans ce cas, le résultat est trivial), h minore f ssi ch minore cf. On obtient l'égalité voulue en passant aux bornes supérieures :
   $$\boxed{\int_E cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_E f \, \mathrm{d}\mu}.$$

3. Soit f une fonction mesurable positive telle que $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(a) Soit $A_n = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty[)$. La fonction f étant mesurable, A est un ensemble mesurable. Par ailleurs, de façon évidente, $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}$ minore f, et est étagée. Ainsi, par définition, de l'intégrale,

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\mu(A_n) \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

On en déduit que $\boxed{\mu(A_n) = 0}$.

(b) On a

$$f^{-1}(\mathbb{R}^*) = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty[)$$

On obtient alors

$$\boxed{\mu(f^{-1}(\mathbb{R}^*)) = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty[) = 0}$$

Pour cette dernière affirmation, on utilise une propriété classique des mesures, affirmant que si (B_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Cette propriété s'obtient en écrivant $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (en posant $A_0 = \varnothing$), et en remarquant que l'on a

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k,$$

mais cette fois, les B_i sont 2 à 2 disjoints. Ainsi, la propriété d'additivité et de σ-additivité fournit :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

4. Soit $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée, et $B \in \mathcal{T}$.

(a) s étant une fonction étagée se minorant elle-même, on a

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Soit t une fonction étagée minorant s,

$$t = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbb{1}_{B_i},$$

les B_i étant supposés disjoints. Comme t minore s, t est nulle en dehors de l'union des A_j. Par conséquent

$$B_i = B_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} B_i \cap A_j.$$

Les $B_i \cap A_j$ étant disjoints, on a, pour tout (i,j) tel que $B_i \cap A_j$ soit non vide, $\beta_i \leqslant \alpha_j$ (obtenu en évaluant s et t en un point de l'intersection), donc $\beta_i \mu(B_i \cap A_j) \leqslant \alpha_i \mu(B_i \cap A_j)$.
Cette égalité reste trivialement vraie sur $B_i \cap A_j = \varnothing$. Ainsi, par additivité, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \mu(B_i \cap A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu\left(A_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_j).$$

On en déduit, par passage à la borne supérieure sur t, que

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

Les deux inégalités obtenues amènent :

$$\boxed{\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j)}.$$

(b) On a

$$\nu(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap \varnothing) = 0.$$

Par ailleurs, si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{T}$, et B l'union de ces ensembles,

$$s \times \mathbb{1}_B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B}.$$

L'ensemble B est dans $\mathcal{T}$ (stabilité par union dénombrable), donc aussi les $A_i \cap B$, qui de plus, sont 2 à 2 disjoints. Ainsi, on a toujours une fonction étagée, et

$$\int_B s \, \mathrm{d}\mu = \int_E s \times \mathbb{1}_B = I(s \times \mathbb{1}_B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B).$$

Or, par σ-additivité, les B_i étant 2 à 2 disjoints,

$$\mu(A_i \cap B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu(A_i \cap B_j),$$

donc (on n'a pas de convergence à justifier : il peut y avoir divergence vers l'infini d'une de ces séries mais dans ce cas, l'égalité est trivialement vraie dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$\int_B s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_j} s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \nu(B_j).$$

Ainsi, $\boxed{\nu \text{ est une mesure}}$.

(c) Quitte à ajouter un terme nul $0 \times \mathbb{1}_{A_{n+1}}$ dans la définition de s, où A_{n+1} est le complémentaire de l'union des A_k, on peut supposer que les A_n forment une partition de E. De même pour les B_n.

Soit $E_{i,j} = A_i \cap B_j$. Les $E_{i,j}$ forment alors aussi une partition (au plus dénombrable, et même finie) de E. On a alors

$$\mathbb{1}_{E_{i,j}} \times s = \alpha_i \mathbb{1}_{E_{i,j}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{E_{i,j}} \times t = \beta_j \mathbb{1}_{E_{i,j}},$$

d'où $\mathbb{1}_{E_{i,j}}(s+t) = (\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{E_{i,j}}$.

On en déduit de façon immédiate que

$$\int_{E_{i,j}} (s+t) \, \mathrm{d}\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{i,j}) = \int_{E_{i,j}} s \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_{i,j}} t \, \mathrm{d}\mu.$$

Notons ν_s la mesure définie dans la question précédente, associée à la fonction étagée s. On a alors, pour tout (i,j)

$$\nu_{s+t}(E_{i,j}) = \nu_s(E_{i,j}) + \nu_t(E_{i,j}).$$

Par σ additivité de ν_s, ν_t et ν_{s+t} (on n'utilise en fait que l'additivité), on a donc

$$\nu_{s+t}\left(\bigcup_{(i,j)} E_{i,j}\right) = \nu_s\left(\bigcup_{(i,j)} E_{i,j}\right) + \nu_t\left(\bigcup_{(i,j)} E_{i,j}\right),$$

soit

$$\nu_{s+t}(E) = \nu_s(E) + \nu_s(E),$$

c'est-à-dire $\boxed{\int_E (s+t) \, \mathrm{d}\mu = \int_E s \, \mathrm{d}\mu + \int_E t \, \mathrm{d}\mu.}$

5. **Théorème de convergence monotone de Lebesgue**

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, telles que pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante, et converge vers $f(x)$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \leqslant y \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \leqslant y \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leqslant y,$$

la dernière affirmation provenant de la croissance de la suite (f_n). Ainsi,

$$f^{-1}(]-\infty, y]) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}(]-\infty, y]),$$

ces derniers ensembles étant mesurables, par mesurabilité des f_n. $\mathcal{T}$ étant stable par intersection dénombrable, $f^{-1}(]-\infty, y]) \in \mathcal{T}$. D'après un point admis dans l'énoncé, les $]-\infty, y]$ engendrant la tribu des boréliens, $\boxed{f \text{ est mesurable}}$.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, donc, d'après 2(a),

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu.$$

La suite $\boxed{\left(\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu\right) \text{ est alors croissante donc convergente dans } \overline{\mathbb{R}}}$.

Soit α sa limite.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \leqslant f$, donc

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu,$$

cette inégalité étant éventuellement à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}$. On passe à la limite dans cette inégalité : $\boxed{\alpha \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu.}$

(d) On a

$$\alpha \geqslant \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant c \int_{E_n} s(x) \, \mathrm{d}\mu = c\nu_s(E_n).$$

Or, pour tout $x \in E$,

- si $f(x) = 0$, $f_n(x)$ aussi pour tout x, ainsi que $s(x)$. On a alors trivilement $x \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- si $f(x) > 0$, $cs(x) \leqslant s(x) \leqslant f(x)$, l'une au moins de ces deux inégalités étant stricte. Ainsi, $cs(x) < f(x)$. Par convergence de la suite (f_n), il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f_n(x) \geqslant cs(x)$. Ainsi, $x \in E_n$.

On en déduit que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = E$.

Par ailleurs, la croissance de la suite (f_n) assure immédiatement que (E_n) est une suite croissante. La propriété déjà utilisée en question 3, appliquée à la mesure ν_s, amène :

$$\nu_s(E) = \lim_{n \to +\infty} \nu_s(E_n).$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité obtenue ci-dessus, il vient :

$$\boxed{\alpha \geqslant c\nu_s(E) = c \int_E s \, \mathrm{d}\mu}.$$

(e) En passant à la borne supérieure sur s étagée minorant f, il vient alors :

$$\alpha \geqslant c \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Ceci étant vrai pour tout $c < 1$, on peut passer à la borne supérieure sur $c \in]0, 1[$, et il vient donc :

$$\alpha \geqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

L'inégalité opposée ayant déjà été justifiée, on a donc :

$$\lim \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Partie II – Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann.

1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un borélien, car union dénombrable de singletons, eux-même des boréliens puisqu'ils s'écrivent :

$$a =]-\infty, a] \cap \complement_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]-\infty, a - \frac{1}{n}] \right).$$

   En fait, comme admis dans l'énoncé, tous les intervalles sont des boréliens, en particulier les singletons. L'intervalle $[0,1]$ aussi (construction similaire à ci-dessus), donc $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est aussi un borélien. Ainsi, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est étagée, donc mesurable.

   Par ailleurs,

$$\int_E \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \,\mathrm{d}\lambda = \lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(\{x\}) = 0,$$

   par définition de λ sur les intervalles (en particulier les singletons). Ce raisonnement est valide par σ additivité, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ étant dénombrable.

   Ainsi, le résultat obtenu étant réel, $\boxed{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \text{ est Lebesgue-intégrable}}$.

2. Soit h une fonction en escaliers, $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$ une subdivision associée, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, h_i la valeur de h sur le palier $A_i =]\sigma_{i-1}, \sigma_i[$. On note également, pour $i \in [\![0, n]\!]$, h'_i la valeur de h en σ_i. On a alors :

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{i=0}^{n} h'_i \mathbb{1}_{\{\sigma_i\}},$$

   tous les ensembles intervenant étant mesurables (ce sont des intervalles) et 2 à 2 disjoints. Ainsi, h est une fonction étagée, à support dans $[a,b]$, et

$$\int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} h_k \lambda(A_i) + \sum_{i=0}^{n} h'_i \lambda(\sigma_i).$$

   Les singletons étant de mesure nulle, il reste :

$$\int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} h_k(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b h(t) \,\mathrm{d}t}$$

3. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, et par définition de l'intégrabilité au sens de Riemann, il existe une suite $(\tilde{g_n})$ de fonctions en escalier telles que

$$\int_a^b \tilde{g_n}(t) \,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t.$$

   On construit alors $g_n = \sup_{k\in[\![0,n]\!]} \tilde{g_k}$. Ces fonctions $\boxed{\text{sont encore en escalier, et minorent } f}$. Par contruction, la suite $\boxed{(g_n(x)) \text{ est croissante pour tout } x}$. De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \tilde{g_n}(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g_n(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t.$$

   Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a également

$$\boxed{\int_a^b g_n(t) \,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t}.$$

   On montre de la même manière l'existence d'une suite décroissante (h_n) de fonctions en escalier majorant f telles que

$$\int_a^b h_n(t) \,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t.$$

4. Tel qu'il est écrit, l'énoncé suppose qu'on généralise la construction de l'intégrale aux fonctions de signe quelconque, et qu'on généralise le théorème de convergence monotone à cette situation. Afin de ne pas avoir à faire ces généralisations et à rester avec les notions démontrées jusque là, nous ne suivrons donc pas totalement l'énoncé pour terminer cette partie.

   Pour commencer, on suppose f positive, pour rester dans le cadre étudié jusqu'ici. Par ailleurs, f est bornée, car Riemann-intégrable. En notant m et M un minorant et un majorant de f, quitte à considérer $g'_n = \sup(g_n, m)$ et $h'_n = \inf(h_n, M)$, on peut supposer que les fonctions g_n et h_n sont elles aussi toutes minorées par m et majorées par M. On peut choisir $m = 0$, ce que nous faisons désormais.

   Considérons la suite $g_n - h_n + M$. Il s'agit alors d'une suite de fonctions en escalier (donc Lebesgue-intégrables), croissante (car (g_n) est croissante et (h_n) décroissante). Notons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ la limite de la suite croissante $(g_n(x))$ et $h(x)$ la limite de la suite décroissante $(h_n(x))$. On a alors, d'après le théorème de convergence monotone de Lebesgue :

$$\int_{[a,b]} (g_n - h_n + M) \, \mathrm{d}\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} (g - h + M) \, \mathrm{d}\lambda.$$

   Par ailleurs, d'après la question 2,

$$\int_{[a,b]} (g_n - h_n + M) \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b g_n(x) - h_n(x) + M \, \mathrm{d}x = \int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b h_n(x) + (b-a)M \longrightarrow (b-a)M.$$

   On a donc

$$\int_{[a,b]} g - h + M \, \mathrm{d}\lambda = (b-a)M.$$

   On ne peut pas se ramener directement à la question I-3, car cela nous obligerait à généraliser le résultat à des fonctions négatives. Nous allons donc adapter son argument. On sait ici que $k = g - h + M$ est mesurable (cela provient du théorème de convergence monotone de Lebesgue), et majorée par M. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$, et $A_n = k^{-1}(]-\infty, M - \frac{1}{n}])$. Soit s une fonction étagée minorant k. On a alors $s \leqslant k \leqslant M - \frac{1}{n}$ sur A_n, et $s \leqslant k \leqslant M$ ailleurs. On a alors

$$s \leqslant (M - \frac{1}{n})\mathbb{1}_{A_n} + M\mathbb{1}_{[a,b]\setminus A_n},$$

   donc, par monotonie de l'intégrale, et par description de l'intégrale des fonctions étagées :

$$\int_{[a,b]} s \, \mathrm{d}\lambda \leqslant M(b-a) - \frac{1}{n}\lambda(A_n).$$

   En passant à la borne supérieure, il vient donc

$$M(b-a) = \int [a,b](g - h + M) \, \mathrm{d}\lambda \leqslant M(b-a) - \frac{1}{n}\lambda(A_n),$$

   ce qui n'est possible que si $\lambda(A_n) = 0$. On a donc $\lambda(k^{-1}(]-\infty, M - \frac{1}{n}])) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en considérant l'union dénombrable de ces ensembles, par le même argument qu'en I-3, $\lambda(k^{-1}(]-\infty, M[)) = 0$. Comme k est toujours inférieure à M, il en résulte que $k = M$ sauf sur un ensemble $k^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{M\})$ de mesure nulle. Ainsi, $g - h + M = M$ sauf sur un ensemble de mesure nulle, donc $\boxed{g = h \text{ sauf sur un ensemble de mesure nulle.}}$

   Comme f est coincée entre g et h, on a alors $f = g$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. Par ailleurs, g est mesurable d'après le théorème de convergence monotone de Lebesgue, et

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

   Ainsi, si f est Riemann-intégrable, elle est Lebesgue-intégrable, et

$$\boxed{\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x}.$$

   Évidemment, si on dispose des généralisations pour les fonctions non nécessairement positives, l'argument est le même, mais sans avoir besoin de translater pour se ramener à des fonctions positives, ce qui simplifie un peu l'argument.

Partie III – Théorème de Carathéodory

1. Pour tout $X \in \mathcal{P}(S)$, on a

$$m^*(\varnothing \cap X) + m^*(\overline{\varnothing} \cap X) = m^*(\varnothing) + m^*(X) = m^*(X).$$

Ainsi, $\boxed{\varnothing \in \mathcal{M}}$.
Soit $A \in \mathcal{M}$. On a alors, pour tout $X \in \mathcal{M}$:

$$m^*(X) = m^*(A \cap X) + m^*(\overline{A} \cap X) = m^*(\overline{\overline{A}} \cap X) + m^*(\overline{A} \cap X).$$

par conséquent, $\overline{A} \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{M} \text{ est stable par complémentation}}$.

2. Soit A et B dans $\mathcal{M}$

(a) On a :

$$X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup ((X \cap B) \setminus (X \cap A)) = (X \cap A) \cup (X \cap (B \setminus A)),$$

d'où $\boxed{X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap \overline{A})}$.

(b) Pour commencer, la sous-σ-additivité implique la sous-additivité : il suffit pour cela de compléter une famille finie en une famille dénombrable par ajout de l'ensemble vide, et d'appliquer la sous-σ-additivité à cette famille dénombrable. On a alors, d'après la question précédente :

$$m^*(X \cap (A \cup B)) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap \overline{A}),$$

puis

$$m^*(X \cap (A \cup B)) + m^*(X \cap (\overline{A \cup B})) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap \overline{A}) + m^*(X \cap \overline{A} \cap \overline{B}).$$

Or, B étant dans $\mathcal{M}$, en appliquant la définition de la m^*-mesurabilité avec $X' = X \cap \overline{A}$, on obtient :

$$m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap \overline{A}) + m^*(X \cap \overline{A} \cap \overline{B}) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap \overline{A}) = m^*(X),$$

la dernière égalité provenant de la m^*-mesurabilité de A. Ainsi

$$\boxed{m^*(X \cap (A \cup B)) + m^*(X \cap (\overline{A \cup B})) \leqslant m^*(X)}.$$

(c) D'un autre côté, la sous-additivité amène :

$$m^*(X) = m^*((X \cap (A \cup B)) \cup (X \cap \overline{A \cup B})) \leqslant m^*(X \cap (A \cup B)) + m^*(X \cap \overline{A \cup B}).$$

Ainsi, l'inégalité opposée ayant été démontrée dans la question précédente, $A \cup B \in \mathcal{M}$.
On en déduit que $\mathcal{M}$ est stable par union de 2 éléments, puis par récurrence, $\boxed{\mathcal{M} \text{ est stable par union finie}}$.
Puisque $\mathcal{M}$ est aussi stable par complémentation, d'après les lois de De Morgan, on obtient alors également la $\boxed{\text{stabilité de } \mathcal{M} \text{ par intersection finie}}$.

3. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints.

(a) On a :

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} (A_k \cap A_{n+1}) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap A_{n+1} = A_{n+1}},$$

les ensembles $A_k \cap A_{n+1}$ étant vides pour $k \neq n+1$. De même,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap \overline{A_{n+1}} = \bigcup_{k=1}^{n+1} (A_k \cap \overline{A_{n+1}}) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap \overline{A_{n+1}} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k},$$

puisque $A_k \subset \overline{A_{k+1}}$ pour $k \neq n+1$, et $A_{n+1} \cap \overline{A_{n+1}} = \varnothing$.

(b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : pour tout $X \in \mathcal{P}(S)$, on a :

$$m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k).$$

- Pour $n = 0$, l'égalité se résume à $m^*(X \cap \varnothing) = \sum_{k \in \varnothing} m^*(X \cap A_k)$, soit $0 = 0$.
- On peut remarquer (mais ce n'est formellement pas nécessaire) que la propriété au rang $n = 1$ est également triviale : elle se résume à $m^*(X \cap A_1) = m^*(X \cap A_1)$.
- Soit $n \geqslant 1$ ($n \geqslant 0$ suffit) tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors, par m^*-mesurabilité de A_{n+1} :

$$\begin{aligned} m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)\right) &= m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) + m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap \overline{A_{n+1}}\right) \\ &= m^*\left(X \cap A_{n+1}\right) + m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right). \end{aligned}$$

  Par hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$m^*\left(X \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)\right) = m^*\left(X \cap A_{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k).$$

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est également vérifiée.
- D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On prend $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ dans la propriété $\mathcal{P}(n)$. Les A_i étant deux à deux disjoints, on a alors $X \cap A_k = A_k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On obtient alors :

$$\boxed{m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k)}.$$

Ainsi, $\boxed{m^* \text{ est additive}}$.

4. Les notations étant les mêmes que dans la question précédente, on pose $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

(a) D'après la question 2, B_n est dans $\mathcal{M}$, et

$$m^*(X) = m^*(X \cap B_n) + m^*(X \cap \overline{B_n}) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) + m^*(X \cap \overline{B_n}),$$

d'après la question 3. Par ailleurs, $B_n \subset A$, donc $X \cap \overline{A} \subset X \cap \overline{B_n}$. On déduit alors de la monotonie de m^* que :

$$m^*(X) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) + m^*(X \cap \overline{A}).$$

(b) L'inégalité précédente étant vraie pour tout n, on peut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (ce qui a toujours un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$m^*(X) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k) + m^*(X \cap \overline{A}) \geqslant m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) + m^*(X \cap \overline{A}), \tag{1}$$

par sous-σ-additivité. Ainsi, $\boxed{m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap \overline{A})}$.
L'inégalité opposée s'obtient simplement par sous-additivité, donc

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap \overline{A}).$$

La première chose qu'on en déduit est que $\boxed{A \in \mathcal{M}}$, et d'autre part, pour que l'égalité soit possible, la seconde inégalité de l'expression (1) ne peut pas être stricte, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)}.$$

5. • $\mathcal{M}$ contient $\varnothing$, est stable par complémentaire, et d'après la question précédente, par union dénombrables d'ensembles deux à dexu disjoints. Soit maintenant $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}$ non nécessairement deux à deux disjoints. On définit B_n comme dans la question précédente, ainsi que $B_0 = \varnothing$, et $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$, pour $n \geqslant 1$. Les B_n sont dans $\mathcal{M}$ (on a prouvé la stabilité par union finie), donc aussi les C_n (stabilité par complémentation et intersection finie). Or les C_n sont 2 à 2 disjoints, et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

Donc, d'après la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrables d'élément deux à deux dijoints, on en déduit qu'on a aussi $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable. Ainsi, $\boxed{\mathcal{M} \text{ est une tribu}}$.

• La propriété $m^*(\varnothing)$ et la question 4(b) montrent que $\boxed{m^* \text{ se retreint en une mesure sur } \mathcal{M}}$.

Partie IV – Théorème de prolongement de Hahn

1. (i) Toutes les sommes intervenant dans la définition de μ^* sont positives. Ainsi, pour tout X, $\mu^*(X) \geqslant 0$. Par ailleurs, si $X = \varnothing$, en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \varnothing$, on a

$$\varnothing = X \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_k, \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Ainsi, $\mu^*(\varnothing) \leqslant 0$. Les deux inégalités amènent $\boxed{\mu^*(\varnothing) = 0}$.

(ii) (Monotonie)

Soit $A \subset B$. Notons A^+ l'ensemble des familles (A_k) d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_k$, et définissons de même B^+. l'inclusion $A \subset B$ amène alors de façon évidente $B^+ \subset A^+$, donc

$$\inf_{(A_n)\in B^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)\right) \geqslant \inf_{(A_n)\in A^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)\right),$$

c'est-à-dire $\mu^*(B) \geqslant \mu^*(A)$. D'où la monotonie de μ^*.

(iii) (Sous-σ-additivité). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de S.

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une famille $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*} \in A_n^+$ (mêmes notations que dans la question précédente) telle que

$$\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_{n,k}).$$

On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_{n,k}).$$

Les termes étant tous positifs, soit les familles considérées sont sommables, soit les sommes sont infinies. Dans les deux cas, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \geqslant \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^*} \mu(B_{n,k}).$$

Or, $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{n,k}$. Ainsi, quitte à réindexer $(B_{n,k})$ sur $\mathbb{N}$, on peut dire que $(B_{n,k})$ est un élément de A^+. On a donc, par définition de $\mu^*(A)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \geqslant \mu^*(A).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en découle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \geqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right),$$

c'est-à-dire la sous-σ-additivité de σ.

Ainsi, $\boxed{\mu^* \text{ est une mesure extérieure}}$.

Au passage retenez la méthode employée pour découper un petit epsilon en une infinité de parts : il suffit de prendre des parts de plus en plus petites de sorte à assurer la convergence de la somme de ces parts vers ε. C'est un argument souvent très utile.

2. - Par conséquent, d'après la partie III, μ^* se restreint en une mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu $\mathcal{M}$. Cette tribu $\mathcal{M}$ contient en particulier les ensembles μ^*-mesurables.
   - Une mesure μ sur une algèbre $\mathcal{A}$ est monotone : si $A \subset B$, on peut écrire $B = A \sqcup (B \cap \overline{A})$. L'ensemble $B \cap \overline{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$, et par additivité,

   $$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap \overline{A}) \geqslant \mu(A).$$

   - Par ailleurs, une mesure positive μ sur une algèbre est sous-σ-additive. En effet, soit $(B_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ dont l'union est encore dans $\mathcal{A}$. On définit

   $$C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k.$$

   Les C_i sont 2 à 2 disjoints, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset B_n$ et

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

   On a alors, par monotonie de μ et σ-additivité :

   $$\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n).$$

   - Soit alors (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. On a alors

   $$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap B_n,$$

   les $A \cap B_n$ étant dans $\mathcal{A}$, ainsi que leur union. Par sous-σ-additivité, il vient donc

   $$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n).$$

   Par passage à la borne inférieure, il vient $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$.
   l'inégalité réciproque s'obtient simplement en considérant la suite $B_1 = A$, $B_k = \varnothing$ si $k > 1$. Ainsi $\mu(A) = \mu^*(A)$, donc $\boxed{\mu \text{ et } \mu^* \text{ coïncident sur } \mathcal{A}}$.
   - Soit $A \in \mathcal{A}$ et $X \subset S$. La sous-σ additivité de μ^* amène $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap \overline{A})$.

- Réciproquement, soit (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ et

$$\mu^*(X) + \varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n).$$

On a alors

$$X \cap A \subset (B_n \cap A) \qquad \text{et} \qquad X \cap \overline{A} \subset (B_n \cap \overline{A}),$$

tous les ensembles de ces unions étant dans $\mathcal{A}$. On a alors

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap \overline{A}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n \cap \overline{A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n),$$

par additivité. Ainsi

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap \overline{A}) \leqslant \mu^*(X) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient :

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap \overline{A}) \leqslant \mu^*(X).$$

- Les deux points précédents permettent d'affirmer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Par conséquent, $\mathcal{M}$ étant une tribu, par minimalité, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.
Ainsi, on peut encore restreindre $\tilde{\mu}$ en une mesure $\overline{\mu}$ sur $\sigma(\mathcal{A})$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un prolongement } \overline{\mu} \text{ de } \mu \text{ sur } \sigma(\mathcal{A})}$.

3. On montre dans cette question l'unicité. Soit μ_1 et μ_2 deux prolongements de μ sur $\sigma(\mathcal{A})$. On définit $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < +\infty\}$
   (a) Soit $(A, B) \in \mathcal{C}^2$. On a alors $A \cap B \in \mathcal{A}$, et par monotonie de μ, $\mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) < +\infty$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. $\boxed{\mathcal{C} \text{ est donc un } \pi\text{-système}}$.
   (b) μ étant σ-finie, il existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$ et $S = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
   Soit alors $A \in \mathcal{A}$. On a donc :
   $$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A \cap A_n.$$
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap A_n$ est dans $\mathcal{A}$, et
   $$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n) < +\infty.$$
   Ainsi, $A \cap A_n \in \mathcal{C}$. Par stabilité d'une σ-algèbre par union dénombrable, on en déduit que $A \in \sigma(\mathcal{C})$.
   Par minimalité de la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$, il vient donc $\boxed{\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C})}$. L'inclusion réciproque est immédiate du fait que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Ainsi, $\boxed{\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C})}$.
   (c) Les mesures μ_1 et μ_2 définies sur $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C})$ coincident sur le π-système $\mathcal{C}$. On déduit du dernier point admis dans l'énoncé (théorème d'unicité des mesures, découlant du lemme de classe monotone), que $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$.

La mesure de Lebesgue est alors construite ainsi :

- *On commençe par définir $\lambda(I)$ pour les intervalles I par leur longueur.*
- *Ceci se prolonge assez naturellement aux unions disjointes finies d'intervalles, en faisant tout de même attention au fait qu'un tel ensemble peut s'écrire de plusieurs façons différentes comme union finie d'intervalles 2 à 2 disjoints : il faut donc montrer l'invariance vis-à-vis de cette décomposition.*
- *On montre que l'ensemble $\mathcal{A}$ des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ s'écrivant comme union finie d'intervalles disjoints est une algèbre, et que λ ainsi définie est une mesure sur cette algèbre (c'est là le point délicat, notamment pour montrer la σ-additivité). On peut d'ailleurs noter que c'est pour cette preuve précisément que Borel a énoncé le fameux théorème de Borel-Lebesgue pour les compacts en 1895.*
- *On définit alors λ sur $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ par le théorème de prolongement de Hahn.*