Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 7 h

SÉRIES NUMÉRIQUES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les sommes ;
- les suites ;
- la formule de Taylor–Lagrange.

Dans tout ce chapitre, les lettres $n, m, p, q, r, i, j, k, \ell$ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, la quantité $|x|$ désigne la valeur absolue de x lorsque x est réel et le module de x lorsque x est complexe.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Séries

A.1. Séries

Définition 1

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On appelle série de terme général u_k, et l'on note $\sum_{k\geqslant 0} u_k$, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles de $(u_k)_{k\geqslant 0}$, c'est-à-dire, pour tout $n \geqslant 0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On dit que la série est convergente, lorsque la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite finie. Celle-ci est alors appelée somme de la série et elle est notée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Du point de vue des notations, il ne faut pas confondre $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ (en abrégé $\sum u_k$) qui désigne la série (c'est-à-dire une suite) et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui représente, en cas de convergence, la somme de la série (c'est-à-dire un nombre).

En particulier, on ne peut écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ que si l'on a déjà démontré la convergence de la série !

Le terme général d'une série n'est parfois défini qu'à partir du rang 1 (ou même 2, 3, ...). Il convient alors d'adapter très naturellement les notations : $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ désigne alors la série et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ la somme d'icelle (en cas de convergence).

Connaître le terme général d'une série permet évidemment de déterminer ses sommes partielles (par sommation pardi !). Réciproquement, si l'on connaît la suite (S_n), on reconstitue facilement l'expression de u_k puisque $u_k = S_k - S_{k-1}$. On constate ainsi que l'on définit une série en se donnant ou bien la suite (u_k) ou bien la suite (S_n).

Définition 2

Déterminer la nature d'une série, c'est préciser si elle est convergente ou non.

L'étude d'une série consiste, d'une part, à étudier la nature de la série et, d'autre part, à calculer sa somme (en cas de convergence). Si l'on sait conclure dans de nombreux cas pour la nature, il est en revanche beaucoup plus rare que l'on sache déterminer explicitement la valeur de la somme (et c'est en général assez difficile...).

La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de $(u_k)_{k\geqslant 0}$. Vous êtes donc libre de les modifier ou même de les retirer pour l'étude de la nature de la série (nous verrons qu'il est courant de conclure à partir d'un renseignement qui n'est vrai qu'à partir d'un certain rang). Par exemple, les séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ ont la même nature puisque ce sont deux suites qui ne diffèrent que d'une constante (à savoir u_0).

En revanche, la calcul de la somme dépend de tous les termes de la série !! Pour ce calcul, il est crucial de bien prendre en compte les premiers termes (nous verrons à la proposition 4 qu'ils « pèsent » beaucoup dans la somme...). Ainsi, s'il est vrai que les séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ ont même nature, leurs sommes (en cas de convergence) ne sont par contre pas égales ! Plus précisément, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Dans les exemples qui suivent, on détermine la nature (et parfois la somme) de certaines séries en calculant leurs sommes partielles avant d'établir le comportement asymptotique d'icelles. Cette technique est cependant rarement exploitable (calculer des sommes, c'est difficile !). En outre, si l'étude des séries se limitait à l'étude de la suite des sommes partielles, il ne serait pas nécessaire de faire tout un chapitre sur ce sujet !

L'objet de ce cours est de développer une liste d'outils et de résultats afin d'étudier la nature d'une série sans recourir à ses sommes partielles, mais en travaillant directement sur son terme général. Et pour cela, en revanche, il faut bien tout un chapitre !

Exemples :

- La série $\sum_{k\geqslant 0}(1/2)^k$ est une série convergente et sa somme est égale à 2. En effet, grace à la règle de sommation d'une suite géométrique, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)^{n+1}-1}{(1/2)-1} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

- La série $\sum_{k\geqslant 2} 1/\big(k(k-1)\big)$ est convergente et sa somme vaut 1. En effet, grace au procédé de sommation téléscopique, on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- Le même procédé de sommation téléscopique permet de justifier que $\sum_{k\geqslant 1}\ln(1+1/k)$ est une série divergente. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

- La série $\sum_{k\geqslant 1} 1/\sqrt{k}$ est divergente. En effet, en minorant la n-ème somme partielle par n fois le plus petit de ses termes, il vient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

- La série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} 1/k$ est divergente. On peut le justifier en se rappelant que

$$H_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) - \gamma + o_{n\to+\infty}(1).$$

  On peut aussi le démontrer de manière plus élémentaire. Si l'on adopte la même méthode que dans l'exemple précédent, on obtient $H_n \geqslant n\times(1/n) = 1$ ce qui n'est pas concluant. Il faut ruser davantage : on ne va minorer que la seconde moitié de la somme. Autrement dit, on écrit que

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

  avec

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant n\times\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

  d'où

$$H_{2n} \geqslant H_n + \frac{1}{2}.$$

  Dès lors, si l'on suppose que la série harmonique converge et si l'on note H sa somme, un passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus nous dit que $H \geqslant H + 1/2$, ce qui est absurde. La série harmonique est donc bien divergente.

A.2. Restes

Définition 3

Soit $\sum u_k$ une série convergente. On appelle reste d'indice n de la série la quantité R_n définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \geqslant n+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{m} u_k. \qquad (*)$$

Comme la quantité $\sum_{k=0}^{n} u_k$ ne dépend pas de m, les suites $(\sum_{k=0}^{m} u_k)_{m\geqslant 0}$ et $(\sum_{k=n+1}^{m} u_k)_{m\geqslant n+1}$ ont le même comportement asymptotique. Comme $\sum u_k$ est une série convergente, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ l'est également. Ainsi le nombre R_n est bien défini. ■

La propriété suivante illustre le caractère asymptotique de la nature d'une série : les premiers termes n'influencent pas la nature de la série.

Proposition 1

Soit $\sum u_k$ une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

où S désigne la somme de la série, S_n la somme partielle d'indice n et R_n le reste d'indice n.

En particulier, la suite des restes (R_n) tend vers 0.

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation $(*)$ de la démonstration précédente, on obtient la relation attendue : $S = S_n + R_n$. Comme (S_n) tend vers S, on en déduit immédiatement que (R_n) tend vers 0. ■

Attention, on ne peut pas caractériser la convergence d'une série à l'aide de la suite des restes car l'existence même des restes présuppose la convergence de la série.

La relation $S = S_n + R_n$ signifie que S_n est une estimation de S à R_n près. Par conséquent, toute estimation (aussi fine que possible) de l'ordre de grandeur de R_n lorsque n tend vers $+\infty$ donne une idée de la vitesse de convergence de la série. Vous rencontrerez donc des exercices où l'on recherche un équivalent de R_n.

Exemples :

- Étudions R_n dans le cas de la série convergente $\sum_{k\geqslant 0}(1/2)^k$. Nous avons vu que $S = 2$ et $S_n = 2 - 1/2^n$, donc $R_n = 1/2^n$. La convergence des restes vers 0 est ainsi très rapide. Si l'on souhaite que S_n fournisse une approximation de $S = 2$ à 10^{-3} près (oui bon d'accord, c'est pas super utile d'avoir une approximation de 2 ...), il suffit de choisir n de sorte que $1/2^n \leqslant 10^{-3}$, ce qui donne $n \geqslant 3 \times \ln 10/\ln 2 \approx 9,9$. On choisit donc $n = 10$.

A.3. Addition de séries

Proposition 2

L'addition des séries satisfait les trois règles suivantes :

(i) Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont convergentes, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la série $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$ converge et
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

(ii) Si $\sum u_k$ désigne une série convergente et $\sum v_k$ une série divergente, alors la série $\sum(u_k + v_k)$ diverge.

(iii) Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ désignent deux séries divergentes, on ne peut a priori rien dire de la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum(u_k + v_k)$.

■ Les séries sont des suites et ces résultats sont connus dans le cadre des suites. On pourrait donc se passer de les démontrer. On le fait quand même, na !

(i) La linéarité du symbole $\sum$ pour les sommes finies donne la relation suivante sur les sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$. Le terme de droite tend vers $\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ puisque les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ convergent. On en déduit que le terme de gauche fait de même, c'est-à-dire que la série $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$ converge et qu'elle est de somme $\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

(ii) Par l'absurde, on suppose que la série $\sum(u_k + v_k)$ converge. Comme $\sum u_k$ converge également, (i) nous dit que la série $\sum \big((u_k + v_k) - u_k\big)$ converge, c'est-à-dire $\sum v_k$ converge : c'est absurde !

(iii) Donnons des contre-exemples pour voir que tout peut arriver. La série $\sum(-1)^k$ diverge (ses sommes partielles oscillent). En l'ajoutant à elle-même, on obtient la série $\sum 2(-1)^k$ qui diverge (pour la même raison). Au contraire, en la soustrayant à elle-même (ce qui revient à ajouter les séries $\sum(-1)^k$ et $\sum(-1)^{k+1}$), on obtient la série nulle qui est bien évidemment convergente. La somme de deux séries divergentes peut donc être divergente ou convergente. ■

Cette proposition établit, en particulier, que l'ensemble E des séries convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application de E vers $\mathbb{K}$ qui à une série convergente lui associe sa somme est une forme linéaire.

On retiendra donc les règles suivantes :

$$\boxed{\mathbf{CV + CV = CV} \qquad \mathbf{CV + DV = DV} \qquad \mathbf{DV + DV = ??}}$$

En particulier, on ne pourra « découper une somme en deux » par linéarité que si l'on sait que toutes les séries convergent.

Exemples :

- Admettons que la série $\sum_{k\geqslant 0} k2^{-k}$ est convergente (nous le verrons) et calculons sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} k2^{-k}$ notée T. Nous allons pour cela utiliser le changement d'indice $\ell = k-1$ pour se ramener à la série $\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k}$ dont nous savons qu'elle est convergente de somme $S = 2$. On a

$$\begin{aligned} T = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{+\infty} k2^{-k} &= \sum_{\ell=0}^{+\infty}(\ell+1)2^{-\ell-1} && \text{en posant } \ell = k-1 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell 2^{-\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty} 2^{-\ell} && \text{le (i) s'applique car les séries convergent} \\ &= \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}S \end{aligned}$$

donc
$$T = S = 2.$$

L'énoncé suivant relie la convergence d'une série complexe à celle de ses parties réelles et imaginaires.

Proposition 3

Une série complexe $\sum z_k$ converge si, et seulement si, les séries réelles $\sum \Re\mathrm{e}(z_k)$ et $\sum \Im\mathrm{m}(z_k)$ convergent. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Re\mathrm{e}(z_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \Im\mathrm{m}(z_k).$$

■ On sait qu'une suite complexe (w_n) converge si, et seulement si, les suites réelles $\big(\Re\mathrm{e}(w_n)\big)$ et $\big(\Im\mathrm{m}(w_n)\big)$ et que, dans ce cas, on a $\lim w_n = \lim \Re\mathrm{e}(w_n) + i \lim \Im\mathrm{m}(w_n)$. Il suffit alors d'appliquer ce résultat aux sommes partielles de la série $\sum z_k$ et d'utiliser le fait que la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme finie est la somme des parties réelles (ou imaginaires). ■

On retiendra que la partie réelle (respectivement imaginaire) de la somme d'une série complexe convergente est la somme de la série convergente des parties réelles (respectivement imaginaires).

Exemples :

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{k \geqslant 0} \cos(k\theta)/2^k$ est la partie réelle de la série $\sum_{k \geqslant 0} (\mathrm{e}^{i\theta}/2)^k$. Or

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}/2^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}/2} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-i\theta}/2}{5/4 - \cos\theta},$$

donc $\sum_{k \geqslant 0} \cos(k\theta)/2^k$ est une série convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{2^k} = \Re\mathrm{e}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-i\theta}/2}{5/4 - \cos\theta}\right) = \frac{4 - 2\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}.$$

- Si $\sum z_k$ est une série complexe convergente, alors $\sum \overline{z_k}$ converge aussi et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \overline{z_k} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} z_k}\,.$$

En effet, la série des parties réelles de $\sum z_k$ est la même que la série des parties réelles de $\sum \overline{z_k}$ et la série des parties imaginaires de $\sum z_k$ est l'opposée de la série des parties imaginaires de $\sum \overline{z_k}$.

B. Convergence absolue et semi-convergence

B.1. Théorème de convergence des séries à termes positifs

On dit d'une série qu'elle est positive lorsqu'elle est à termes positifs ou nuls. Dans ce cas, la suite des sommes partielles est clairement croissante. Pour qu'une telle série soit convergente, le théorème de la limite monotone nous dit qu'il suffit que ses sommes partielles soient majorées (en fait, il suffit même qu'une sous-suite de la suite des sommes partielles soit majorée, y réfléchir !). Ce simple constat nous permet d'énoncer ci-dessous le théorème de comparaison des séries à termes positifs, le TCSTP pour les intimes.

Théorème 1

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries réelles positives telles que $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang).

(i) Si $\sum v_k$ est une série convergente, alors $\sum u_k$ converge.

(ii) Si $\sum u_k$ est une série divergente, alors $\sum v_k$ diverge.

■ Notons (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_k$ et (T_n) celle des sommes partielles de $\sum v_k$. Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$, on constate d'une part que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant T_n$ et d'autre part que les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = v_{n+1} \geqslant 0$.

(i) Si $\sum v_k$ converge, cela signifie que la suite (T_n) est convergente. Comme elle est croissante, on sait alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Par suite, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$, ce qui prouve que la suite (S_n) est majorée. Comme elle est croissante, on peut affirmer qu'elle converge, c'est-à-dire que la série $\sum u_k$ converge.

(ii) Si $\sum u_k$ diverge, la suite croissante (S_n) tend vers $+\infty$. L'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant T_n$ associée au théorème du gendarme implique alors que (T_n) tend également vers $+\infty$. Donc $\sum v_k$ diverge.
On peut aussi démontrer ce résultat (ii) en disant qu'il est la contraposée du résultat (i). ■

On retiendra donc qu'une série positive dominée par une série convergente est convergente et qu'une série dominant une série positive divergente est divergente.

Ce théorème concerne les séries à termes positifs. Toutefois, si la série $\sum u_k$ que vous étudiez est à termes négatifs, libre à vous de considérer la série $\sum(-u_k)$ qui est à termes positifs et dont la nature est identique à celle de la série $\sum u_k$.
Par contre, il est formellement interdit d'utiliser le TCSTP avec une série dont le terme général n'est pas de signe constant (ou pire, avec une série dont le terme général n'est pas réel) !

Pour appliquer le TCSTP, on établit une inégalité sur le terme général de la série. On ne travaille donc JAMAIS sur la somme partielle et encore moins sur la somme de la série (dont on ne sait pas encore si elle existe ou non).

Exemples :

- Démontrons la convergence de la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^2$ à l'aide de la convergence de la série téléscopique $\sum_{k\geqslant 2} 1/\big(k(k-1)\big)$. Comme $\forall k \geqslant 2,\ 0 \leqslant 1/k^2 \leqslant 1/\big(k(k-1)\big)$, le TCSTP nous dit que la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^2$ converge.
- Pour tout $\alpha \geqslant 2$, on a $\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant 1/k^\alpha \leqslant 1/k^2$, donc, comme nous venons de voir que la série $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^2$ converge, le TCSTP permet d'affirmer que les séries de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^\alpha$ pour $\alpha \geqslant 2$ sont convergentes.
- On a vu que la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln(1+1/k)$ diverge. Or $\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant \ln(1+1/k) \leqslant 1/k$, donc le TCSTP permet ainsi de retrouver que la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} 1/k$ diverge.

B.2. Convergence absolue

Définition 4

Une série $\sum u_k$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum |u_k|$ converge.

Pour une série réelle qui ne change pas de signe, la convergence et la convergence absolue sont identiques. Dans le cas général, l'énoncé fondamental suivant nous dit que la convergence absolue est une convergence plus forte que la convergence (tout court).

Théorème 2

Toute série absolument convergente est convergente.

■ Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente.

- Cas réel : Pour tout $k \geqslant 0$, posons $v_k = u_k + |u_k|$ de sorte que $\forall k \geqslant 0,\ 0 \leqslant v_k \leqslant 2|u_k|$. Comme la série $\sum |u_k|$ converge, le TCSTP affirme que la série $\sum v_k$ converge. La proposition 2 nous dit alors que la série $\sum (v_k - |u_k|) = \sum u_k$ converge.
- Cas complexe : Pour tout $k \geqslant 0$, on a $0 \leqslant |\Re\mathrm{e}(u_k)| \leqslant |u_k|$ et $0 \leqslant |\Im\mathrm{m}(u_k)| \leqslant |u_k|$ donc le TCSTP nous dit que les séries $\sum |\Re\mathrm{e}(u_k)|$ et $\sum |\Im\mathrm{m}(u_k)|$ convergent. Le cas réel (traité ci-dessus) nous dit alors que $\sum \Re\mathrm{e}(u_k)$ et $\sum \Im\mathrm{m}(u_k)$ convergent. La proposition 3 permet alors de conclure que $\sum u_k$ converge. ■

Lorsque la série $\sum u_k$ converge absolument, on a de plus $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

La réciproque de ce théorème est fausse comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Utilisation de la convergence absolue

Pour étudier la nature d'une série (qui n'est pas positive), on commence toujours par regarder la nature de la série des valeurs absolues (ou des modules), qui a l'avantage d'être à termes positifs !

C'est encore plus vrai en probabilités où la grande majorité des séries que nous rencontrerons devront être absolument convergentes.

Exemples :

- Soit X désigne une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \geqslant 1,\ P(X = k) = (1/2)^k$ de sorte que l'on ait bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k = (1/2)/(1 - 1/2) = 1$. Pour que la variable aléatoire $\cos X$ admette une espérance, nous verrons qu'il faut et suffit que la série $\sum_{k\geqslant 0} (\cos k)P(X = k)$ soit absolument convergente (théorème de transfert). Or

$$|(\cos k)P(X = k)| = \left| \frac{\cos k}{2^k} \right| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

et $(1/2)^k$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique). Par suite, d'après le TCSTP, la série $\sum_{k\geqslant 0} (\cos k)P(X = k)$ est bien absolument convergente et $\cos X$ admet par conséquent une espérance. Sa valeur est alors donnée par

$$E(\cos X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k}{2^k}.$$

On a vu que cela se calcule en passant en complexes ! On trouve $(2\cos 1 - 1)/(5 - 4\cos 1)$.

$\mathcal{B}$.3. Semi-convergence

Définition 5

Une série est dite semi convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

A priori, rien n'assure l'existence de telles séries. Regardons l'exemple ci-dessous.

Exemples :

- Démontrons que la série harmonique alternée $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}/k$ est semi-convergente et de somme $\ln 2$.

  Constatons déjà que la série des valeurs absolues est la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} 1/k$ qui est divergente. Donc la série harmonique alternée ne converge pas absolument.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= H_{2n}-H_n \\
&= \ln(2n)+\gamma-\ln(n)-\gamma+o_{n\to+\infty}(1) \\
&= \ln(2)+o_{n\to+\infty}(1)
\end{aligned}$$

  donc

$$S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

  Par ailleurs,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

  Donc

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2,$$

  ce qui démontre que $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}/k$ est une série convergente de somme $\ln 2$.

C. Etude de la nature d'une série

Les paragraphes de cette section sont organisés selon le plan d'étude habituel d'une série.

C.1. Divergence grossière

Définition 6

On dit qu'une série $\sum u_k$ diverge grossièrement lorsque la suite (u_k) ne tend pas vers 0.

Comme le laisse penser le vocabulaire, la divergence grossière est la forme la plus élémentaire de divergence.

Proposition 4

Une série qui diverge grossièrement est une série divergente.

■ Raisonnons par contraposition en supposant que $\sum u_k$ est une série convergente. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles. Pour tout k, on a $u_k = S_k - S_{k-1}$. Or, la série étant convergente, les suites (S_k) et (S_{k-1}) tendent vers la même limite S. Par conséquent, la suite (u_k) converge vers $S - S = 0$. ■

Par contraposition, cette proposition nous dit que lorsqu'une série converge, son terme général tend vers 0 (c'est même ainsi qu'on a procédé pour la démonstration). Par conséquent, pour qu'une série $\sum u_k$ converge, il est nécessaire que (u_k) tende vers 0.

Mais attention ! Ce n'est pas une condition suffisante de convergence !! La série harmonique nous donne un contre-exemple : la suite $(1/k)$ tend bien vers 0 mais la série $\sum 1/k$ diverge. Il ne faut donc, en aucun cas, justifier la convergence d'une série en affirmant que son terme général tend vers 0 (si un tel résultat était vrai, on ne consacrerait pas tout un chapitre à l'étude des séries !).

En fait, ce qui importe, c'est la vitesse de convergence vers 0 : plus (u_k) tend vite vers 0, plus la série a des chances de converger. Dans le cas de la série harmonique, la suite $(1/k)$ tend bien vers 0 mais pas assez vite pour que la série $\sum 1/k$ converge.

Comme le terme général d'une série convergente devient de plus en plus petit lorsque son indice augmente, ce sont les premiers termes qui sont les « plus gros ». Voilà pourquoi, il ne faut surtout pas les oublier pour le calcul de la somme ! Pour autant, il ne faut pas croire que l'on peut se contenter des quelques premiers termes d'une série pour connaître la valeur de sa somme. En effet, si les « derniers » termes sont effectivement les plus petits, ils sont aussi infiniment nombreux !

Exemples :

- Anick prétend que $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k = 0$ puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k = \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \cdots = 0.$$

Bruno lui rétorque que $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k = 1$ et le démontre en écrivant que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k = 1 + \underbrace{-1+1}_{=0} + \underbrace{-1+1}_{=0} + \underbrace{-1+1}_{=0} + \cdots = 1.$$

Lequel des deux a raison ?...

Réponse : aucun !

La série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k$ est grossièrement divergente puisque $(-1)^k$ ne tend pas vers 0. Il est donc tout simplement interdit d'évoquer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$!

C.2. Comparaison géométrique

a) Séries géométriques

Définition 7

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{k \geqslant 0} q^k$ s'appelle la série géométrique de raison q.

L'énoncé qui suit donne la nature des séries géométriques.

Exemple fondamental

La série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme est donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\cdot$$

■ $\Rightarrow$ Lorsque $|q| \geqslant 1$, la suite (q^k) ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $|q| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = (1-q^{n+1})/(1-q)$. Or (q^{n+1}) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $|q| < 1$, donc (S_n) converge vers $1/(1-q)$, ce qui prouve le résultat attendu. ■

On pourra noter que, lorsqu'elle converge, une série géométrique converge absolument et qu'a contrario, lorsqu'elle diverge, elle diverge grossièrement. C'est tout l'un ou tout l'autre.

La bonne vieille règle de sommation des suites géométriques (« premier terme moins terme suivant le dernier sur 1 moins la raison ») se généralise aux séries géométriques en considérant que le terme qui suit le dernier est q^∞, c'est-à-dire 0 dans le cas où $|q| < 1$.

Cela permet donc de n'avoir rien à apprendre par cœur ! De plus, en procédant ainsi, on ne risque pas de confondre les sommes des séries $\sum_{k \geqslant 0} q^k$ et $\sum_{k \geqslant 1} q^k$, comme l'illustre le deuxième exemple ci-dessous.

Exemples :

- On retrouve le fait que la série $\sum_{k \geqslant 0} (1/2)^k$ est une série convergente de somme égale à 2.
- La série $\sum_{k \geqslant 1} q^k$ a la même nature que $\sum_{k \geqslant 0} q^k$. Elle converge donc si, et seulement si, $|q| < 1$. Par contre les sommes ne sont pas les mêmes puisque les deux séries diffèrent au niveau de leur premier terme. Plus précisément, on a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{q - q^\infty}{1-q} = \frac{q}{1-q}\cdot$$
- Vous vous souvenez du conflit d'intérêt entre Anick et Bruno. La première pensait que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ valait 0 alors que le second lui attribuait plutôt la valeur 1. Nous avions tranché en disant que la série est de toute façon divergente (grossièrement).
  Notons que si l'on s'autorise à faire $z = -1$ dans la formule de sommation d'une série géométrique (ce qui est interdit ! (†)), on trouve cette fois que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ est égale à $1/2$, un peu comme si Anick et Bruno avait chacun à moitié raison.
  Dans le cadre de la sommation de Borel (qui dépasse le programme de MPSI), la valeur de cette série est bien $1/2$.

2 h 10

† « Nous défendre quelque chose, c'est nous en donner envie. » [Montaigne]

b) Règle de d'Alembert

Voici l'énoncé de la règle de d'Alembert. Elle permet d'étudier la nature d'une série par comparaison avec une série géométrique.

Proposition 5

Soit $\sum u_k$ une série positive dont le terme général ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang). On suppose que la suite (u_{k+1}/u_k) converge.

(i) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, alors $\sum u_k$ converge.

(ii) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, alors $\sum u_k$ diverge (grossièrement).

(iii) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, on ne peut a priori rien dire de la nature de $\sum u_k$.

■ Notons ℓ la limite de la suite (u_{k+1}/u_k).

(i) On suppose que $\ell < 1$. Il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$. Il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant u_{k+1}/u_k \leqslant q$, c'est-à-dire $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant q u_k$. La suite $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ est alors sous-géométrique de raison q, ce qui implique $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant u_k \leqslant q^{k-k_0} u_{k_0}$ (par récurrence immédiate). Le TCSTP implique alors que la série $\sum u_k$ converge.

(ii) On suppose maintenant que $\ell > 1$. Il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ u_{k+1}/u_k \geqslant 1$, c'est-à-dire $\forall k \geqslant k_0,\ u_{k+1} \geqslant u_k$. La suite (u_k) est alors croissante et positive, ce qui lui interdit de tendre vers 0. La série $\sum u_k$ diverge donc grossièrement.

(iii) Pour la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} 1/k$, on a $\ell = 1$ et la série diverge. Pour la série $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^2$, on a $\ell = 1$ et la série converge. Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut donc pas conclure. ■

La propriété (i) de la règle de d'Alembert est utile lorsque la série que l'on étudie converge plus vite qu'une série géométrique. Par conséquent, elle ne « marche » pas souvent (on tombe fréquemment sur le cas d'incertitude $\lim(u_{k+1}/u_k) = 1$). C'est tout de même la première chose à essayer pour étudier une série car c'est une règle simple à mettre en place.

La propriété (ii) n'est quasiment jamais utilisée. En effet, si la série diverge grossièrement, on doit s'en être rendu compte dès le début de l'étude de la série.

Lorsque la série $\sum u_k$ n'est pas positive, on peut appliquer le (i) de la règle de d'Alembert à la suite $(|u_k|)$ pour essayer d'établir la convergence absolue de la série.

La règle de d'Alembert est d'autant plus efficace que le quotient u_{k+1}/u_k se simplifie. C'est le cas lorsque le terme général u_k est essentiellement constitué de produits et de quotients. C'est le cas dans l'exemple suivant où l'on traite, à l'aide de la règle de d'Alembert, le cas de la série exponentielle.

Exemples :

- Démontrons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{z^k}{k!}$ converge absolument.

  Si $z = 0$, c'est clair. Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\left|\frac{z^{k+1}/(k+1)!}{z^k/k!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

  donc la règle de d'Alembert permet de conclure que $\sum_{k\geqslant 0} z^k/k!$ converge absolument.

  Nous verrons plus loin que, pour $x \in \mathbb{R}$, la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} x^k/k!$ vaut e^x.

C.3. Comparaison avec les séries de Riemann

a) Séries de Riemann

Définition 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ s'appelle la série de Riemann d'exposant α.

L'énoncé qui suit donne la nature des séries de Riemann. Plus loin dans ce cours, nous dirons quelques mots sur le calcul de leurs sommes (lorsqu'elles convergent et lorsque ce calcul est possible).

Exemple fondamental

La série de Riemann d'exposant α converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

■ Lorsque $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement. Supposons dorénavant que $\alpha > 0$.
Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\forall t \in [k-1; k], \qquad \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(k-1)^\alpha},$$

ce qui donne

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(k-1)^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(k-1)^\alpha}.$$

En sommant, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^\alpha}.$$

- ▷ Lorsque $\alpha \leqslant 1$, l'inégalité de droite nous dit que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)} & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln(n+1) & \text{si } \alpha = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

  ce qui assure la divergence de la série dans ce cas.
- ▷ Lorsque $\alpha > 1$, l'inégalité de gauche nous dit que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1},$$

  ce qui justifie que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha\right)_{n\geqslant 1}$ est majorée. Comme elle est aussi croissante (on ajoute des termes positifs), on peut affirmer qu'elle est convergente et donc aussi que la série converge. ■

Notons que la divergence de la série de Riemann d'exposant $\alpha < 1$ s'obtient très simplement sans utiliser la comparaison avec une intégrale. Il suffit d'adapter la méthode vue pour la série $\sum_{k\geqslant 1} 1/\sqrt{k}$. En minorant la n-ème somme partielle par n fois le plus petit de ses termes, il vient $\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha \geqslant n \times (1/n^\alpha) = n^{1-\alpha}$ et $(n^{1-\alpha})$ tend vers $+\infty$.

De même, nous avons vu que la convergence de la série de Riemann d'exposant $\alpha \geqslant 2$ est assez élémentaire. Elle s'obtient en écrivant que $\forall k \geqslant 2,\ 0 \leqslant 1/k^\alpha \leqslant 1/\big(k(k-1)\big)$ et en invoquant le TCSTP puisque la série téléscopique $\sum_{n\geqslant 2} 1/\big(k(k-1)\big)$ converge.

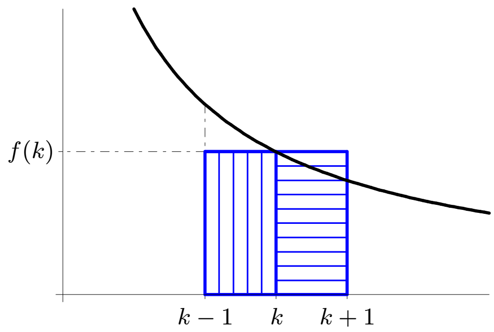
Le résultat sur les séries de Riemann justifie que la fonction $\zeta : \alpha \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} 1/k^\alpha$ est définie sur $]1; +\infty[$. C'est la fonction ζ de Riemann. Nous reparlerons de cette fonction plus loin dans ce cours.

La méthode développée pour étudier la nature des séries de Riemann, c'est-à-dire la comparaison avec une intégrale, est une technique féconde sur laquelle il convient de s'attarder.

Comparaison série-intégrale

La comparaison série-intégrale peut servir pour étudier la nature d'une série $\sum f(k)$ où $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, décroissante qui tend vers 0.

L'essentiel est de savoir refaire le petit dessin tout bête ci-contre :



Les deux rectangles bleus ont une aire égale à $f(k)$. Le rectangle de gauche est sous la courbe et celui de la droite est au dessus la courbe. Donc

$$\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$$

Ces encadrements se recollent agréablement à l'aide de la relation de Chasles, c'est-à-dire qu'en sommant cet encadrement pour k parcourant $[\![1;n]\!]$, on obtient

$$\int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f.$$

Si l'aire sous la courbe de f, comprise entre 0 et $+\infty$, est finie, la suite des sommes partielles de la série $\sum f(k)$ est croissante et majorée donc la série converge. Au contraire, si l'aire sous la courbe de f comprise entre 1 et $+\infty$ est infinie, le théorème du gendarme nous dit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ et donc que la série est divergente.

La technique de comparaison série-intégrale sert, en particulier, pour étudier la nature des séries de Bertrand.

Définition 9

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ s'appelle la série de Bertrand d'exposants (α, β).

On notera que les séries de Bertrand sont des généralisations des séries de Riemann puisque la série de Bertrand d'exposants $(\alpha, 0)$ est la série de Riemann d'exposant α.

La nature des séries de Bertrand est donnée par l'énoncé suivant. Ce résultat n'est pas au programme mais les séries de Bertrand constituent des exemples classiques de séries.

Exemple fondamental

La série de Bertrand d'exposants (α, β) converge si, et seulement si, $(\alpha, \beta) \succ (1, 1)$ où le symbole $\succ$ désigne l'ordre lexicographique (strict).

■ Une partie de la démonstration est disséminée dans les différents exemples qui suivent. ■

La condition de convergence $(\alpha, \beta) \succ (1, 1)$ signifie « $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) ».

On traite ci-dessous un cas de divergence d'une série de Bertrand en utilisant la comparaison série-intégrale. Notons que cette technique permet, en fait, de déterminer la nature d'une série de Bertrand dans tous les cas. Je vous laisse en exercice (excellent exercice) le soin d'adapter les calculs. Nous verrons plus loin que l'on peut également traiter le cas $\alpha \neq 1$ à l'aide du TCSTP et de ses déclinaisons.

Exemples :

- Démontrons la divergence de la série de Bertrand

$$\sum\nolimits_{k \geqslant 2} \frac{1}{k \ln k}.$$

Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\forall t \in [k; k+1], \qquad \frac{1}{k \ln k} \geqslant \frac{1}{t \ln t},$$

ce qui donne

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k \ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

ou encore

$$\frac{1}{k \ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}.$$

En sommant, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}.$$

Or

$$\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \big[\ln \ln t\big]_2^n = \ln \ln n - \ln \ln 2 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty,$$

donc, par le théorème du gendarme,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} = +\infty,$$

ce qui constitue précisément le résultat attendu.

b) Régle $k^\alpha u_k$

Voici l'énoncé de la règle $k^\alpha u_k$. Elle permet d'étudier la nature d'une série par comparaison avec une série de Riemann. C'est une règle plus forte que celle de d'Alembert (si la règle d'Alembert permet de conclure, la règle $k^\alpha u_k$ le permet également mais la réciproque est fausse).

Proposition 6

Soit $\sum u_k$ une série positive.

(i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(k^\alpha u_k)$ est majorée (par exemple si elle converge), alors la série $\sum u_k$ converge.

(ii) Si la suite (ku_k) est minorée par une constante strictement positive à partir d'un certain rang (par exemple si elle converge vers une limite non nulle), alors la série $\sum u_k$ est divergente.

■ (i) Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(k^\alpha u_k)$ est majorée. Il existe alors $M > 0$ tel que $\forall k \geqslant 1,\ k^a u_k \leqslant M$, ce qui donne $\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_k \leqslant M/k^\alpha$. Comme la série de Riemann $\sum 1/k^\alpha$ converge (puisque $\alpha > 1$), le TCSTP nous dit que $\sum u_k$ converge.

(ii) Supposons que la suite (ku_k) est minorée par $m > 0$ à partir du rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que $\forall k \geqslant k_0,\ ku_k \geqslant m$. On a alors $\forall k \geqslant k_0,\ u_k \geqslant m/k$. Comme la série harmonique $\sum 1/k$ diverge, le TCSTP nous dit que $\sum u_k$ diverge également. ■

La règle $k^\alpha u_k$ n'est pas explicitement au programme. Par conséquent, lorsqu'on l'utilise, on réécrit (sobrement) la démonstration ci-dessus pour se ramener au TCSTP.

Lorsque $\sum u_k$ n'est pas une série positive, on travaille évidemment avec la suite $(|u_k|)$. La propriété (i) permet alors de démontrer la convergence absolue de la série. En revanche, lorsqu'on applique (ii) avec une suite (u_k) qui n'est pas positive, on obtient seulement la divergence absolue de la série $\sum u_k$. Les suspense reste entier : divergence ou semi-convergence ?

La propriété (i) est couramment utilisée ainsi : « si $(k^2 u_k)$ converge, alors il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ 0 \leqslant |u_k| \leqslant M/k^2$, donc la série $\sum u_k$ converge absolument d'après le TCSTP ».

Exemples :

- Étudions la nature de la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{(\ln k)^{\ln k}}\cdot$ On a
$$k^2 u_k = \frac{k^2}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{e^{2\ln k}}{e^{(\ln\ln k)\ln k}} = e^{(2-\ln\ln k)\ln k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$
donc il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant u_k \leqslant 1/k^2$ et le TCSTP permet d'affirmer que la série $\sum u_k$ converge.

- Étudions la nature de la série de Bertrand $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ lorsque $\alpha < 1$. En désignant par u_k le terme général de cette série, on a
$$ku_k = \frac{k^{1-\alpha}}{(\ln k)^\beta} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$
donc il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ u_k \geqslant 1/k \geqslant 0$ et le TCSTP permet d'affirmer que la série $\sum u_k$ diverge.

C.4. Techniques de comparaison

Si l'étude d'une série « résiste » au critère de d'Alembert et à la règle $k^\alpha u_k$, on peut essayer d'estimer le terme général à l'aide d'une comparaison par $\sim$, par o, par $\mathcal{O}$ ou enfin par $\leqslant$. Cet ordre de présentation est généralement celui que l'on retient pour l'étude d'une série.

Toutes ces techniques de comparaison reposent sur le TCSTP. Elles ne peuvent donc servir qu'à étudier la nature de séries positives ou la convergence absolue de séries quelconques. Pour la semi-convergence, il faut d'autres outils qui seront présentés après.

a) Comparaison par $\sim$

Si le critère de d'Alembert et la règle $k^\alpha u_k$ ne permettent pas de conclure à propos de la nature d'une série, c'est généralement parce que le terme général de la série est trop compliqué. On peut alors envisager de le simplifier en utilisant un équivalent. Le TCSTP se décline alors sous la forme suivante. C'est le « TCSTP par $\sim$ ».

Proposition 7

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries positives. Si $u_k \sim v_k$, alors $\sum u_k$ et $\sum v_k$ ont même nature.

■ Supposons que $\sum v_k$ est convergente (respectivement divergente). Comme $u_k \sim v_k$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant u_k \leqslant 2v_k$ (respectivement $\forall k \geqslant k_0,\ 0 \leqslant v_k/2 \leqslant u_k$). Le TCSTP justifie alors la convergence (respectivement divergence) de la série $\sum u_k$. ■

Pour déterminer l'équivalent, on peut évidemment utiliser les développements limités (surtout lorsque le terme de la série comporte des soustractions). Cela conduit souvent à un équivalent de la forme c/k^α, ce qui justifie l'intérêt que l'on porte aux séries de Riemann.

Attention, si l'équivalent peut être utilisé pour étudier la nature de la série, il ne peut, en aucun cas, servir à calculer la valeur de la somme.

Lorsque la série $\sum u_k$ n'est pas positive, on travaille sur $|u_k|$. Ainsi, lorsque $|u_k| \sim v_k$ et $\sum v_k$ converge, la série $\sum u_k$ converge absolument. En revanche, si $|u_k| \sim v_k$ et si $\sum v_k$ diverge, on peut seulement conclure que $\sum u_k$ diverge absolument, ce qui laisse deux possibilités : la divergence ou la semi-convergence.

Le second exemple ci-dessous illustre l'importance de l'hypothèse de positivité. Celle-ci est d'ailleurs si fondamentale qu'on a l'habitude d'indiquer que $\forall k \geqslant 0,\ |u_k| \geqslant 0$ alors même que c'est une évidence.

Exemples :

- Étudions la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ où $u_k = 1 - \cos(1/k)$.

  On a $\forall k \geqslant 1,\ |u_k| \geqslant 0$ (pardi !). De plus, $|u_k| \sim 1/(2k^2)$ et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge (car $2 > 1$). Le TCSTP par $\sim$ nous dit que $\sum_{k\geqslant 1} |u_k|$ converge. Donc la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge absolument.

- La série harmonique alternée $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}/k$ est convergente et la série de Bertrand $\sum_{k>2} 1/(k\ln k)$ diverge. En sommant, on obtient la série $\sum_{k>2} u_k$, de terme général $u_k = (-1)^{k-1}/k + 1/(k\ln k)$, qui est divergente. Pourtant l'équivalent $u_k \sim (-1)^{k-1}/k$ prouve que u_k est équivalent au terme général d'une série convergente. Sans hypothèse de positivité, le critère de comparaison par $\sim$ est donc généralement faux !

b) Comparaison par $\mathcal{o}$ ou $\mathcal{O}$ ou $\leqslant$

Voici le « TCSTP par $\mathcal{o}$ ou $\mathcal{O}$ ».

Proposition 8

Soit $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries positives. Si $u_k = \mathcal{o}(v_k)$ ou $u_k = \mathcal{O}(v_k)$ ou $\forall k \geqslant 0,\ u_k \leqslant v_k$ et si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge aussi.

■ Supposons que $\sum v_k$ converge. Comme $u_k = \mathcal{o}(v_k)$ ou $u_k = \mathcal{O}(v_k)$ ou $\forall k \geqslant 0,\ u_k \leqslant v_k$, il existe $M > 0$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_k \leqslant M v_k$. Le TCSTP justifie alors la convergence de la série $\sum u_k$. ■

On notera que les comparaisons par $\mathcal{o}$ ou $\mathcal{O}$ sont placées avant la comparaison par $\leqslant$. Ainsi, le TCSTP, père de tous les théorèmes de comparaison entre séries positives, est relégué en dernière position. Scandale ! En fait, cette disgrace est assumée. En effet, il est évidemment tout à fait possible d'utiliser le TCSTP dans sa version « brut » en effectuant une comparaison par $\leqslant$. Toutefois, il faut comprendre que cette méthode de comparaison est souvent la plus technique, tout simplement parce qu'il est généralement plus facile de donner un ordre de grandeur (par $\sim$, par $\mathcal{o}$ ou $\mathcal{O}$) plutôt que d'établir une majoration précise du terme général.

Lorsque la série $\sum u_k$ n'est pas positive, on travaille sur $|u_k|$ afin d'obtenir la convergence absolue de la série.

L'hypothèse de positivité de la série $\sum v_k$ est fondamentale ! En effet, on a $1/k = \mathcal{O}\left((-1)^{k-1}/k\right)$ mais la convergence de la série harmonique alternée $\sum(-1)^{k-1}/k$ n'implique pas celle de la série harmonique (d'ailleurs, elle ne converge pas !).

Exemples :

- Pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, démontrons la convergence de la série de Bertrand d'exposants (α, β). Comme $\alpha > 1$, il existe α' tel que $1 < \alpha' < \alpha$. Alors

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta} = \mathcal{o}\left(\dfrac{1}{k^{\alpha'}}\right) \\ \forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^{\alpha'}} \text{ est une série positive convergente (car } \alpha' > 1) \end{cases}$$

donc

$$\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\nolimits_{k \geqslant 2} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta} \text{ converge.}$$

C.5. Critère spécial des séries alternées

Lorsqu'une série ne converge pas uniformément, les techniques précédente ne fonctionnent pas pour déterminer si, oui ou non, la série est semi-convergente. Dans ce paragraphe, on présente un outil qui permet d'étudier certaines de ces séries : le critère spécial des séries alternées (CSSA pour les intimes). Il est dû à Leibniz.

Proposition 9

Si (a_k) est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum(-1)^k a_k$ converge.

■ Pour tout $n \geqslant 0$, on note $S_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$ la n-ème somme partielle de la série $\sum(-1)^k a_k$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (a_{2n+2} - a_{2n+1}) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -(a_{2n+3} - a_{2n+2}) \geqslant 0$$

donc (S_{2n}) croît et (S_{2n+1}) décroît. De plus,

$$S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles tendent donc vers la même limite, ce qui démontre la convergence de (S_n) et donc aussi la convergence de la série. ■

Si S_n désigne la n-ème somme partielle d'une série alternée, la démonstration ci-dessus nous dit que la somme S de la série est comprise entre S_n et S_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour appliquer le CSSA, il est nécessaire de vérifier deux hypothèses : la décroissance et la convergence vers 0 de la suite (a_k). Par contre, il n'est pas nécessaire de vérifier la positivité puisque le fait que (a_k) tende vers 0 en décroissant implique nécessairement qu'elle est positive.

Exemples :

- Le CSSA nous dit que, pour $\alpha > 0$, la série de Riemann alternée $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$ converge.

  Pour $\alpha > 1$, la convergence est absolue. Pour $\alpha \in]0;1]$, il y a semi-convergence.

Lorsqu'il est difficile de vérifier la décroissance de (a_k), on peut utiliser la technique suivante.

Éclatement du terme général

Pour étudier la nature d'une série alternée $\sum(-1)^k a_k$ où (a_k) est une suite positive tendant vers 0, il peut être judicieux d'utiliser un développement asymptotique de $(-1)^k a_k$ pour éclater ce terme en plusieurs morceaux. On peut alors appliquer les techniques vues précédemment (y compris le CSSA) à chacun des termes du développement.

Exemples :

- Étudions la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ où $u_k = \dfrac{(-1)^k}{k^{2/3} + (-1)^k}$.

  On voit que $|u_k| \sim 1/k^{2/3}$ qui est le terme d'une série de Riemann divergente. La série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ n'est donc pas absolument convergence. On a

  $$u_k = \frac{(-1)^k}{k^{2/3}} \frac{1}{1 + (-1)^k/k^{2/3}} = \frac{(-1)^k}{k^{2/3}} \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)\right\} = \frac{(-1)^k}{k^{2/3}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{4/3}}\right)}_{=\varepsilon_k}.$$

  Or $\sum(-1)^k/k^{2/3}$ est une série alternée convergente et $\sum \varepsilon_k$ est absolument convergente d'après le TCSTP par $\mathcal{O}$ (en effet, $|\varepsilon_k| = \mathcal{O}(1/k^{4/3})$ et $\sum 1/k^{4/3}$ est une série de Riemann convergente). En conclusion, la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ est semi-convergente. 4 h 30

D. Calculs de séries

D.1. Séries géométriques - Moments géométriques

Nous avons déjà rencontré les séries géométriques. Nous généralisons ci-dessous au cas des séries géométriques dérivées.

Lemme 1

Soit $m \in \mathbb{N}$. La série géométrique dérivée m-ème $\sum_{k \geqslant m} k(k-1)\cdots(k-m+1)q^{k-m}$, où $q \in \mathbb{C}$, converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme est donnée par

$$\sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)q^{k-m} = \frac{m!}{(1-q)^{m+1}}.$$

■ Soient $m \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_k = \binom{k}{m} q^{k-m}.$$

▷ Lorsque $|q| \geqslant 1$, on a $\lim |u_k| \neq 0$, donc la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

▷ Supposons que $|q| < 1$. On constate que

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{\binom{k+1}{m} q^{k+1-m}}{\binom{k}{m} q^{k-m}}\right| = \frac{k+1}{k+1-m}|q| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |q|,$$

donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_k$ converge absolument. On pose alors

$$S_m = \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} q^{k-m}$$

On a

$$\begin{aligned}
S_m + qS_{m+1} &= \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} q^{k-m} + q \sum_{k=m\cancel{+1}\; m}^{+\infty} \binom{k}{m+1} q^{k-m-1} \\
&= \sum_{k=m}^{+\infty} \left\{\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1}\right\} q^{k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k+1}{m+1} q^{k-m} \qquad \text{d'après la formule de Pascal} \\
&= \sum_{m=m+1}^{+\infty} \binom{j}{m+1} q^{j-(m+1)} \qquad \text{en posant } j = k+1 \\
&= S_{m+1}
\end{aligned}$$

donc

$$S_{m+1} = \frac{1}{1-q} S_m.$$

Comme $S_0 = 1/(1-q)$ d'après le résultat sur la série géométrique, on en déduit que

$$S_m = \frac{1}{(1-q)^{m+1}}.$$

En multipliant cette égalité par $m!$, on obtient le résultat attendu. ■

Lorsqu'elle converge, une série géométrique dérivée converge absolument et, lorsqu'elle diverge, elle diverge grossièrement.

En appliquant ce lemme pour $m \in \{0;1;2\}$, on obtient les exemples fondamentaux suivants.

Exemple fondamental

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} q^k$, la série géométrique dérivée $\sum_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ et la série géométrique dérivée seconde $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge si, et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas, leurs sommes sont données par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}\cdot$$

Pour les sommes des séries géométriques dérivées, tout se passe donc comme si l'on dérivait formellement les séries terme à terme par rapport à q.

Exemples :

- On retrouve le fait que la série $\sum_{k\geqslant 0} k(1/2)^k$ est une série convergente de somme égale à 2 car
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2.$$
- Vous rencontrerez l'an prochain des variables aléatoires qui peuvent prendre une infinité de valeurs. Dans ce contexte, on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0;1[$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, lorsque
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = pq^{k-1}.$$
où $q = 1-p$.
La formule de sommation d'une série géométrique nous dit que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{p}{q}\frac{q}{1-q} = 1,$$
ce qui justifie le bien fondé de cette loi.
La formule de sommation des séries géométriques dérivées justifie l'existence de l'espérance et de la variance de X (et oui ! et oui ! dans ce contexte, certaines variables n'auront pas d'espérance ou de variance...). On a
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\cdot$$
Par ailleurs, on a
$$E\big(X(X-1)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) = pq\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$$
donc
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - E(X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}\cdot$$
Les espérance et variance d'une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ sont donc données par
$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2}\cdot$$

D.2. Séries exponentielles - Moments de Poisson

Exemple fondamental

La série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0} x^k/k!$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x\,.$$

■ Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ entre 0 et x assure l'existence de $M_x > 0$ telle, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M_x\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or, d'après les croissances comparées, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_x\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x,$$

ce qui démontre le résultat. ■

On pourra donc retenir que l'exponentielle réelle est égale en tout point à sa série de Taylor. C'est pratique puisque vous connaissez déjà très bien cette série de Taylor : c'est celle qui vous donne le développement limité en 0 de l'exponentielle.

Pour autant, il faut se garder de faire un lien trop étroit entre DL et série. Un DL ne comporte qu'un nombre fini de termes et ne peut pas donner de valeurs exactes : il sert exclusivement à calculer des limites ! Au contraire, une série comporte une infinité de termes, donne une valeur exacte mais n'est pas très maniable pour le calcul de limites !

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{k\geqslant 0} z^k/k!$ converge absolument puisque la série $\sum_{k\geqslant 0} |z|^k/k!$ converge (sa somme vaut $\exp|z|$). L'an prochain, vous définirez l'exponentielle complexe en posant $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k/k!$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il vous faudra alors démontrer que, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a bien $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ et que la fonction réelle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable, égale à sa dérivée. Vous pourrez alors introduire proprement les fonctions trigonométriques sur $\mathbb{C}$ et même définir correctement le nombre π.

Exemples :

- On a

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, lorsque

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,.$$

On constate alors que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} = 1,$$

ce qui est bien évidemment souhaitable.

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)\cdots(X-\ell+1)] &= \sum_{k=\cancel{0}\,\ell}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-\ell+1)P(X=k) \\
&= \sum_{k=\ell}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-\ell+1)\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lambda^\ell\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=\ell}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \\
&= \lambda^\ell\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} \qquad \text{en posant } j=k-\ell \\
&= \lambda^\ell.
\end{aligned}$$

Pour $\ell = 1$, on a

$$E(X) = \lambda.$$

Pour $\ell = 2$, on a

$$E\big(X(X-1)\big) = \lambda^2,$$

donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Les espérance et variance d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ sont donc données par

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda.$$

D.3. Séries de Riemann

Définition 10

Pour tout $x > 1$, on pose
$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$
On définit ainsi sur $]1;+\infty[$ la fonction ζ de Riemann.

■ L'existence de ζ est justifiée par le résultat sur les séries de Riemann. ■

Il est possible d'étendre l'ensemble de définition de ζ à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ (par des moyens qui dépassent de très loin le cadre de la MPSI). L'étude de ce prolongement donne alors de précieux renseignements en arithmétique. En particulier, la conjecture de Riemann (qui énonce qu'outre des zéros triviaux sur les entiers négatifs pairs, tous les autres zéros de ζ sont de partie réelle $1/2$) a de nombreuses conséquences sur la répartition des nombres premiers. Ce résultat constitue aujourd'hui la plus célèbre conjecture des mathématiques.

L'encadré ci-dessous fait le point sur les valeurs de ζ que l'on sait calculer.

Exemple fondamental

À titre culturel, il n'est pas mauvais de savoir qu'on sait calculer les valeurs de ζ aux entiers pairs. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{|B_{2m}|\,(2\pi)^{2m}}{2\,(2m)!}$$
où $B_{2m} \in \mathbb{Q}$ est le $2m$-ème terme de la suite des nombres de Bernoulli, qui se calculent à l'aide de la relation de récurrence
$$B_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.$$
En particulier, on a
$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad\qquad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
$$\zeta(6) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^4}{945} \qquad\qquad \zeta(8) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^6}{9450}.$$

■ Cf devoir maison du chapitre d'intégration. ■

On sait, en revanche, nettement moins de chose concernant les valeurs de ζ aux entiers impairs. En 1977, Roger Apéry a démontré que $\zeta(3)$ est irrationnel. En 2000, Tanguy Rivoal a démontré qu'il existe une infinité de nombres irrationnels parmi les valeurs aux entiers impairs. On conjecture que toutes les valeurs aux entiers impairs sont irrationnelles et même algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(\pi)$, en particulier transcendantes. 5 h 45

E. Varia

E.1. Lien entre suites et séries

L'encadré suivant précise le lien étroit qui unit les suites et les séries.

Liens entre suites et séries

On peut toujours ramener l'étude d'une suite à celle d'une série ! Si (a_n) est donnée, il suffit d'introduire la série dont le terme général est défini par

$$u_0 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1, \quad u_k = a_k - a_{k-1}$$

de sorte que, par télescopage, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le comportement asymptotique de la suite (a_n) est alors identique à la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$.

Nous allons employer cette méthode pour retrouver le développement asymptotique de la somme harmonique que nous avions vu dans le chapitre sur les développements limités.

Exemples :

- Retrouvons l'existence de la constante d'Euler–Mascheroni, noté γ, telle que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n).$$

Alors, pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \ln(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + \ln(k-1) \\ &= \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{k} + \left\{ -\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\} \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 1} 1/k^2$ est une série de Riemann positive et convergente, le TCSTP par $\mathcal{O}$ permet d'en déduire que la série $\sum_{k\geqslant 2}(a_k - a_{k-1})$ converge.
On en déduit la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$. En notant γ sa limite, on obtient le résultat attendu.

E.2. Représentation décimale des nombres réels

Définition 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle k-ème décimale de x le nombre entier a_k de $[\![0;9]\!]$ défini par $a_k = \lfloor 10^k x \rfloor - 10 \lfloor 10^{k-1} x \rfloor$.

■ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $10^k x - 1 < \lfloor 10^k x \rfloor \leqslant 10^k x$ et $10^k x - 10 < 10 \lfloor 10^{k-1} x \rfloor \leqslant 10^k x$, donc $-1 < a_k < 10$. Comme il est clair que a_k est un entier, on en déduit que $a_k \in [\![0;9]\!]$. ■

Le résultat qui suit justifie l'existence et l'unicité du développement décimal propre d'un réel.

Proposition 10

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ des décimales de x est l'unique suite de $[\![0;9]\!]$ qui ne stationne pas à la valeur 9 telle que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Cette écriture constitue le développement décimal propre de x.

■ ▷ On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor 10^k x \rfloor - 10 \lfloor 10^{k-1} x \rfloor}{10^k} = \text{téléscopage} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - \lfloor x \rfloor \xrightarrow[n \to +\infty]{} x - \lfloor x \rfloor,$$

donc la série $\sum_{k \geqslant 1} a_k/10^k$ converge et sa somme vaut $x - \lfloor x \rfloor$, ce qui donne le résultat.

▷ Démontrons que la suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ ne stationne pas à la valeur 9. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, $a_k = 9$. Alors $\sum_{k \geqslant k_0} a_k/10^k$ est une série géométrique convergente (de raison $1/10$) dont la somme vaut $1/10^{k_0-1}$. Cela donne

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{k_0-1}}.$$

On constate alors que $10^{k_0-1} x \in \mathbb{Z}$, donc $a_{k_0} = \lfloor 10^{k_0} x \rfloor - 10 \lfloor 10^{k_0-1} x \rfloor = 10^{k_0} x - 10 \times 10^{k_0-1} x = 0$, ce qui est absurde.

▷ Supposons qu'il existe deux suites $(a_k)_{k \geqslant 1}$ et $(b_k)_{k \geqslant 1}$ d'entiers de $[\![0;9]\!]$ qui ne stationnent pas à la valeur 9 telles que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

Par l'absurde, supposons que $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^* : a_k \neq b_k\}$ existe. En supposant que $a_{k_0} > b_{k_0}$ (quitte à échanger les rôles), on a alors

$$\frac{a_{k_0} - b_{k_0}}{10^{k_0}} = \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} \qquad (*).$$

Or

$$\frac{a_{k_0} - b_{k_0}}{10^{k_0}} \geqslant \frac{1}{10^{k_0}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} < \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{k_0}}$$

où l'inégalité stricte est justifiée par le fait que (b_k) ne stationne pas à la valeur 9. Ces inégalités sont en contradiction avec $(*)$. Absurde ! ■

Les nombres décimaux possèdent une autre écriture décimale, dite impropre, qui stationne à la valeur 9 à partir d'un certain rang. Ainsi, le nombre 1 s'écrit aussi $0,999999\ldots$

Exemples :

- $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,61803398875\ldots$
- $\mathrm{e} = 2,71828182846\ldots$

L'écriture décimale propre permet de caractériser les nombres rationnels.

Proposition 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre x est irrationnel si, et seulement si, la suite de ses décimales est périodique.

■ Nous l'avons déjà démontré dans le chapitre sur les nombres. ■

Exemples :

- $1/7 = 0,142857142857142857\ldots$

Rappelons également que c'est en utilisant le développement décimal que nous avons démontré la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ (à l'aide du procédé diagonal de Cantor).

E.3. Convergence commutative

Nous sommes tellement habitués à la commutativité de l'addition, qu'il nous paraît a priori impossible de modifier la nature, ou pire encore de transformer la valeur de la somme d'une série convergente, en changeant l'ordre de sommation. Et pourtant, nous allons voir que l'ordre dans lequel on somme les termes d'une série a de l'influence sur la nature et la somme d'icelle !

Commençons par un théorème qui prouve que ce phénomène pathologique ne se produit pas pour les séries absolument convergentes.

Théorème 3

Si une série est absolument convergente, une modification de l'ordre des termes ne change ni la nature ni la valeur de la somme de la série. Autrement dit, si $\sum u_k$ est absolument convergente de somme S, alors, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(k)}$ est également absolument convergente et sa somme vaut toujours S.

■ On traite le cas des séries réelles. Le cas complexe en découle en utilisant les parties réelles et imaginaires.

Cas d'une série positive Supposons que la série $\sum u_k$ est à termes positifs et qu'elle est convergente de somme S. Pour tout $n \geqslant 0$, notons T_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_{\varphi(k)}$, c'est-à-dire $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$. Posons $N = \max\{\varphi(0); \varphi(1); \dots; \varphi(n)\}$. Alors tous les termes de la somme $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$ sont dans la somme $\sum_{k=0}^{N} u_k$, ce qui prouve que $T_n \leqslant S_N$. Comme la série est positive, on a $S_N \leqslant S$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant S$. La suite (T_n) est donc majorée par S. Comme elle est croissante, elle converge vers $T \leqslant S$. Par conséquent, la série $\sum u_{\varphi(k)}$ est convergente de somme $T \leqslant S$. En échangeant les rôles de S_n et T_n (et en utilisant σ^{-1}), on obtient $S \leqslant T$. Donc $T = S$.

Cas général Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente. Pour tout $k \geqslant 0$, notons $v_k = u_k + |u_k|$ de sorte que la série $\sum v_k$ converge (car $\forall k \geqslant 0,\ 0 \leqslant v_k \leqslant 2|u_k|$ ce qui permet d'appliquer le TCSTP comme dans la démonstration du théorème 2). Cela permet d'affirmer, en vertu du cas traité ci-dessus, que la série $\sum v_{\varphi(k)}$ converge et que sa somme est $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. La proposition 2 dit alors que la série $\sum(v_{\varphi(k)} - |u_{\varphi(k)}|) = \sum u_{\varphi(k)}$ converge et que sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty}(v_k - |u_k|) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. La même proposition nous dit alors que la série $\sum(v_{\varphi(k)} + u_{\varphi(k)}) = \sum |u_{\varphi(k)}|$ converge, autrement dit que la convergence de $\sum u_{\varphi(k)}$ est absolue. ■

Ce résultat est fondamental en probabilités dans la définition de l'espérance et de la variance. Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, on dit que X admet une espérance si la série $\sum_{k \geqslant 1} x_k P(X = x_k)$ est absolument convergente et dans ce cas, on pose $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$. Le théorème ci-dessus nous dit que l'ordre dans lequel on range les éléments de l'ensemble $X(\Omega)$ n'influence pas la valeur de l'espérance, ce qui est bien évidemment souhaitable. On pourra donc écrire $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$ puisque la somme ne dépend que de $X(\Omega)$ et non de la numérotation de ses éléments.

Voici un théorème surprenant, dû à Riemann, qui illustre pleinement le fait que, pour une série semi-convergente, on ne peut pas faire commuter les termes librement.

Proposition 12

Si une série réelle est semi-convergente, une modification de l'ordre des termes permet de changer la nature et la valeur de la somme de la série comme on le souhaite. Autrement dit, si $\sum u_k$ est une série réelle semi-convergente, alors, d'une part, on peut trouver une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $\sum u_{\varphi(k)}$ diverge et, d'autre part, pour tout nombre réel S, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $\sum u_{\sigma(k)}$ converge et sa somme vaut S.

■ Cf annexe. ■

Niels H. Abel a déclaré en 1826 que « Les séries divergentes sont en bloc une invention du diable ». Comme on le voit ici, ce n'est pas tant les séries divergentes qui sont « diaboliques » mais plutôt les séries semi-convergentes.

E.4. Produits infinis

Étude d'un produit infini

Pour étudier la convergence d'un produit infini $\prod_{k\geqslant 0} u_k$, on passe au logarithme (si le contexte le permet) pour se ramener à une série !

Exemples :

- Étudions le produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

  Pour tout $k\geqslant 1$, on a $1+(-1)^{k-1}/k>0$, ce qui permet de passer au logarithme. Pour tout $n\geqslant 1$, on a

  $$\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

  C'est la somme partielle d'une série qui n'est pas positive. Méfiance !
  On a
  $$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right|\sim\frac{1}{k}$$
  donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\ln\left(1+(-1)^{k-1}/k\right)$ n'est pas absolument convergente (puisque la série harmonique diverge).
  Utilisons une méthode d'éclatement du terme général, on a

  $$\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\underbrace{\mathscr{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=\varepsilon_k}$$

  Or $\sum(-1)^k/k$ est une série alternée convergente et $\sum\varepsilon_k$ est absolument convergente d'après le TCSTP par $\mathscr{O}$ (en effet, $|\varepsilon_k|=\mathscr{O}(1/k^2)$ et $\sum 1/k^2$ est une série de Riemann convergente). En conclusion, la série $\sum_{k\geqslant 1}\ln\left(1+(-1)^{k-1}/k\right)$ est semi-convergente.

  Si S désigne la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1}\ln\left(1+(-1)^{k-1}/k\right)$, on en déduit que le produit $\prod_{k\geqslant 1}\left(1+(-1)^{k-1}/k\right)$ converge (et son produit vaut e^S). 7 h 00