

Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths CR
- *NOM Prénom* : KIKI Merchrist

Énoncé de l'exercice

Soit $p : [0,1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in [0,1]$, $p(t)$ est un projecteur.

1. Montrer que $\text{rg}(p(t))$ est constant (on note r cette constante).
2. Montrer que :

$$\exists (v_1, \dots, v_r) \in C([0,1], \mathbb{R}^n) \text{ tq } \forall t \in [0,1], (v_1(t), \dots, v_r(t)) \text{ est une base de } \text{Im}(p(t))$$

Indication : montrer que c'est vrai sur un voisinage de 0.

Remarques sur l'oral

Examinatrice peu bavarde. Pour la première on utilise le fait que $\text{tr} = \text{rg}$ pour les projecteurs et on utilise la continuité de $\text{tr} \circ p$. Pour l'étude en 0 dans la deuxième question, j'ai proposé de regarder une certaine fonction qui serait continue en 0 et de la composer avec p , puis avec une étude au voisinage de zéro, montrer à coup d'inégalités triangulaires que c'est bon. Mais je n'arrivais pas à trouver la bonne fonction. Elle me conseille de regarder le \det . Pour cela on prend une base (e_1, \dots, e_r) de $\text{Im}(p(0))$, on la complète avec une base (e_{r+1}, \dots, e_n) de $\ker(p(0))$, on regarde la fonction
$$\phi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \det(p(t)(e_1), \dots, p(t)(e_r), e_{r+1}, \dots, e_n) \end{cases}$$
 elle est continue et donc sur un voisinage de 0, la famille $(p(t)(e_1), \dots, p(t)(e_r), e_{r+1}, \dots, e_n)$ est libre. On conclut que $(p(t)(e_i))_{1 \leq i \leq r}$ est libre et c'est donc une base de $\text{Im}(p(t))$.

Enfin elle me demande si on a la propriété sur $[a,b]$ et $[b,c]$ comment on peut raccorder.