LIMITE D'UNE SUITE

♦ ***Exercice 1.*** [∘]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La suite définie par $u_n = n$ si $n \leqslant 100000$ et $u_n = 1/n$ si $n > 100000$ converge vers 0.
2. Toute suite croissante diverge vers $+\infty$.
3. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.
4. Toute suite qui tend vers 1 est majorée par 1.
5. Si, à partir d'un certain rang, $u_n < 1/n$ alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
6. La suite de terme général $(1/2)^{-n}$ converge vers 0.
7. Si $\forall n \geqslant 0,\ 0 < u_n < 1$, alors la suite $({u_n}^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
8. Si $\forall n \geqslant 0,\ 0 < u_n < 1/2$, alors la suite $({u_n}^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
9. La suite $(1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, 1, 1/6, \dots)$ converge vers 0 et 1.
10. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
11. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
12. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\pi/17$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\pi/17$ ou vers $-\pi/17$.
13. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
14. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites divergentes, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge également.
15. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.
16. Si $\lim(x_n - y_n) = 0$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ tendent vers la même limite.
17. Le produit d'une suite convergente par une suite de limite nulle est convergente.
18. Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(x_{n^2})_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.
19. $(x_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est la même suite que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
20. Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim u_n = \lim v_n$.
21. Si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ alors $u_n \sim v_n$.
22. On a $n^4\,\mathrm{e}^{2n} \sim \mathrm{e}^{2n}$ car $(\mathrm{e}^{2n})_{n\geqslant 0}$ l'emporte sur $(n^4)_{n\geqslant 0}$ d'après les croissances comparées.
23. On a $n^4 + \mathrm{e}^{2n} \sim \mathrm{e}^{2n}$ car $(\mathrm{e}^{2n})_{n\geqslant 0}$ l'emporte sur $(n^4)_{n\geqslant 0}$ d'après les croissances comparées.
24. La suite $(\mathrm{e}^{n+3})_{n\geqslant 0}$ n'est pas un équivalent simple puisqu'elle contient une addition.
25. La suite $(\ln(4n))_{n\geqslant 1}$ est un équivalent simple puisqu'elle ne contient que des produits.
26. Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim(u_n - v_n) = 0$.
27. Si $\lim(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$.

1. Vrai. Les premiers termes n'influencent pas le comportement asymptotique d'une suite.
2. Faux. Prendre $(1 - 1/n)$ pour s'en convaincre.
3. Faux. Prendre $\big((-n)^n\big)$ pour s'en convaincre.
4. Faux (sauf si elle est croissante).
5. Faux. Prendre $(-n)$ pour s'enconvaincre. Il faut deux gendarmes pour appliquer le théorème des gendarmes !
6. Faux. C'est la suite (2^n) qui tend vers $+\infty$.
7. Faux. Si l'on pose $u_n = \mathrm{e}^{-n}$, on a $\forall n \geqslant 0,\ 0 < u_n < 1$ mais ${u_n}^n = \mathrm{e}^{-1}$ ne tend pas vers 0. Le résultat ne fonctionne que pour les suites géométriques.
8. Vrai. On a $\forall n \geqslant 0,\ 0 < {u_n}^n < 1/2^n$ et le théorème des gendarmes permet de conclure.
9. Faux. On ne peut pas avoir deux limites distinctes. Ici, 0 et 1 sont des valeurs d'adhérence.
10. Faux. Prendre $u_n = \big(1 + (-1)^n\big)/n$ pour s'en convaincre.
11. Faux. Le contre-exemple ci-dessus marche encore.
12. Faux. Prendre $u_n = (-1)^n$ pour le voir.
13. Vrai. C'est la définition de la limite qui le dit.
14. Faux. Prendre $u_n = -v_n = (-1)^n$.
15. Vrai. Raisonner par l'absurde pour le voir.
16. Faux. Il se pourrait que les limites n'existent pas. Prendre $u_n = v_n = (-1)^n$.

17. Vrai.
18. Vrai. Si la suite constituée de tous les termes converge alors la suite constituée seulement des indces carrés converge vers la même limite.
19. Faux. On a retiré le premier terme.
20. Faux. Il se pourrait que les limites n'existent pas. Prendre $u_n = v_n = (-1)^n$.
21. C'est vrai lorsque $\ell \neq 0$ et faux lorsque $\ell = 0$.
22. Faux. D'ailleurs le quotient ne tend pas vers 1.
23. Vrai. On retiendra donc que les croissances comparées permettent de négliger un terme dans une somme mais jamais de négliger un facteur dans un produit.
24. Faux. C'est bien un équivalent simple car l'exponentielle dissimule une produit : $\mathrm{e}^{n+3} = \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^3$.
25. Faux. Cette fois, c'est le logarithme qui dissimule une somme. On a $\ln(4n) = \ln 4 + \ln n \sim \ln n$.
26. Faux. On a $n^2 + n \sim n^2$ mais $(n^2 + n) - n^2$ ne tend pas vers 0.
27. Faux. On a $\lim(1/n - 1/n^2) = 0$ et pourtant $1/n$ n'est pas équivalent à $1/n^2$.

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Étudier le comportement asymptotique des suites, définies pour $n \geqslant 1$, par

a) $n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, b) $\dfrac{\cos n}{n}$, c) $\exp\left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$,

d) $\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$, e) $\ln(n+1) - \ln n$, f) $\sqrt[n]{n^2}$.

a) Il n'y a pas de forme indéterminée, donc
$$\boxed{n\cos(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

b) La suite $(\cos n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et $(1/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, donc
$$\boxed{\frac{\cos n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

c) On a $(-1)^n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0), donc
$$\boxed{\exp\left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.}$$

d) On a
$$\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}},$$
donc
$$\boxed{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

e) On a
$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
donc
$$\boxed{\ln(n+1) - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

f) On a $\sqrt[n]{n^2} = \exp\{(2\ln n)/n\}$. Or $(2\ln n)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc
$$\boxed{\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [∘]
Donner un équivalent simple des suites définies par

a) $4^n - 2n^7 - \ln\sqrt{n}$, b) $\sqrt{n+\sqrt{n}}$, c) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$,

d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, e) $n^{1/n} - 1$, f) $\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} - 1$,

g) $\sqrt{1-\cos(n\,\mathrm{e}^{-n})}$, h) $\ln\dfrac{n}{n+1}$, i) $\sin\big(\sqrt[n]{2} - 1\big)$.

a) Les croissances comparées nous disent que

$$\boxed{4^n - 2n^7 - \ln\sqrt{n} \sim 4^n.}$$

b) Comme n^1 l'emporte sur $n^{1/2}$, on a $n + \sqrt{n} \sim n$, ce qui donne

$$\boxed{\sqrt{n+\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}.}$$

c) On a $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{n^2-1}$ donc

$$\boxed{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \sim \frac{2}{n^2}\cdot}$$

d) La technique de l'expression conjuguée donne $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ donc

$$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot}$$

e) On a $n^{1/n} - 1 = \mathrm{e}^{(\ln n)/n} - 1$, donc, en vertu de la formule $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = (\ln n)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par c.c., on a

$$\boxed{n^{1/n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}\cdot}$$

f) On a $\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} - 1 = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/3} - 1$, donc, en vertu de la formule $(1+\varepsilon_n)^\alpha \sim \alpha\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{3n}\cdot}$$

g) On a $1 - \cos(n\,\mathrm{e}^{-n}) \sim \dfrac{(n\,\mathrm{e}^{-n})^2}{2}$ en vertu de $1 - \cos\varepsilon_n \sim {\varepsilon_n}^2/2$ avec $\varepsilon_n = n\,\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par c.c. En passant à la racine carrée, on obtient

$$\boxed{\sqrt{1-\cos(n\,\mathrm{e}^{-n})} \sim \frac{n\,\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{2}}\cdot}$$

h) On a $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, donc, en vertu de la formule $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\boxed{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n}\cdot}$$

i) On a

$$\sin\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) = \sin\big(\mathrm{e}^{(\ln 2)/n} - 1\big) \sim \mathrm{e}^{(\ln 2)/n} - 1 \sim \frac{\ln 2}{n}$$

où l'on a utilisé successivement les formules $\sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ et $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$. Donc

$$\boxed{\sin\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) \sim \frac{\ln 2}{n}\cdot}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]

Utiliser des équivalents pour étudier le comportement asymptotique des suites définies, pour tout $n \geqslant 1$, par

a) $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^n$, b) $n(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}-1)$, c) $\dfrac{\sqrt{n+1}\big(1-\cos(1/n)\big)}{\tan^3(1/\sqrt{n})}$,

d) $\dfrac{3^n-5^n}{3^n+5^n}$, e) $\dfrac{4n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$.

a) On a
$$\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right\}.$$
Comme $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, on a
$$n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \sim n\frac{2}{n^2} \sim \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc, par le théorème de composition des limites,
$$\boxed{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1.}$$

b) Comme $(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon_n$, on a
$$n(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}-1) \sim n\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-n},$$
donc, d'après les croissances comparées,
$$\boxed{n(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

c) On a
$$\frac{\sqrt{n+1}\big(1-\cos(1/n)\big)}{\tan^3(1/\sqrt{n})} \sim \frac{\sqrt{n}\dfrac{(1/n)^2}{2}}{(1/\sqrt{n})^3} \sim \frac{1}{2}$$
car $1-\cos\varepsilon_n \sim {\varepsilon_n}^2/2$ et $\tan\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$. Donc
$$\boxed{\frac{\sqrt{n+1}\big(1-\cos(1/n)\big)}{\tan^3(1/\sqrt{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.}$$

d) On a
$$\frac{3^n-5^n}{3^n+5^n} \sim \frac{-5^n}{5^n} \sim -1$$
donc
$$\boxed{\frac{3^n-5^n}{3^n+5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.}$$

e) On a
$$\frac{4n+(-1)^n}{3n-(-1)^n} \sim \frac{4n}{3n} \sim \frac{4}{3},$$
donc
$$\boxed{\frac{4n+(-1)^n}{3n-(-1)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{3}.}$$

♦ **Exercice 5.** [○]
Démontrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous n'ont pas de limite

$$u_n = \cos\left(\frac{(n^2+1)\pi}{3n}\right), \qquad v_n = \frac{1}{(-1)^n \ln(1+1/n)} \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{\lfloor n/2\rfloor^{\lfloor n/2\rfloor}}{(n/2)^{n/2}}.$$

1. On a
$$u_{3n} = \cos\left(\frac{(9n^2+1)\pi}{3n}\right) = \cos\left(3n\pi + \frac{\pi}{3n}\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3n}\right) \sim (-1)^n,$$
donc
$$u_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad u_{6n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1,$$
ce qui prouve que
$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge sévèrement.}}$$
2. On a
$$v_n = \frac{1}{(-1)^n \ln(1+1/n)} \sim (-1)^n n,$$
donc
$$v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad v_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$
ce qui prouve que
$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge sévèrement.}}$$
3. On a
$$w_{2n} = \frac{\lfloor n\rfloor^{\lfloor n\rfloor}}{n^n} = \frac{n^n}{n^n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
et
$$w_{2n+1} = \frac{\lfloor n+1/2\rfloor^{\lfloor n+1/2\rfloor}}{(n+1/2)^{n+1/2}} = \frac{n^n}{(n+1/2)^{n+1/2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
car $\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\mathrm{e}}$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc
$$\boxed{(w_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge sévèrement.}}$$

♦ **Exercice 6.** [⋆]
Démontrer que la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.

Tout d'abord, comme $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, elle ne peut tendre vers $\pm\infty$.

Raisonnons alors par l'asburde en supposant que $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une limite finie ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin(n+2) = \sin n \cos 2 + \cos n \sin 2$, donc
$$\cos n = \frac{\sin(n+2) - \sin n \cos 2}{\sin 2}.$$
Cela démontre que $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ converge et que l'on a, par passage à la limite,
$$\lim \cos n = \frac{\ell - \ell\cos 2}{\sin 2}.$$
En passant à la limite dans la formule $\forall n \geqslant 0,\ (\sin n)^2 + (\cos n)^2 = 1$, il vient
$$\ell^2 + \frac{(1-\cos 2)^2}{\sin^2 2}\ell^2 = 1,$$
ce qui donne, après calculs,
$$\ell^2 = (\cos 1)^2.$$
En procédant de même avec l'égalité $\sin(n+4) = \sin n \cos 4 + \cos n \sin 4$, on obtient
$$\ell^2 = (\cos 2)^2.$$

C'est absurde !

En conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (\sin n)_{n\geqslant 0} \text{ n'a pas de limite.}}$$

♦ **Exercice 7.** [$\star$]
Étudier le comportement asymptotique de la suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

- Premier cas : $u_0 \in \mathbb{R}_-$

  La suite stationne clairement à 0 à partir du rang 1.

- Deuxième cas : $u_0 \in \mathbb{R}_+$

  Clairement, la suite est constante égale à u_0.

- Second cas : $u_0 \notin \mathbb{R}$

  On vérifie par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \notin \mathbb{R}$.
  Pour tout $n \geqslant 0$, on pose alors $u_n = r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n}$ où $r_n > 0$ et $\theta_n \in \,]-\pi;0[\cup]0;\pi[$. On obtient, pour tout $n \geqslant 0$,

$$r_{n+1}\,\mathrm{e}^{i\theta_{n+1}} = \frac{r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n} + r_n}{2} = r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n/2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\theta_n/2}+\mathrm{e}^{-i\theta_n/2}}{2} = r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n/2}\cos(\theta_n/2),$$

  En identifiant le module (car $r_n\cos(\theta_n/2) > 0$) et l'argument (car $\theta_n/2 \in \,]-\pi/2;0[\cup]0;\pi/2[$), il vient, pour tout $n \geqslant 0$,

$$r_{n+1} = r_n\cos(\theta_n/2) \qquad \text{et} \qquad \theta_{n+1} = \theta_n/2.$$

  La suite des arguments est donc géométrique de raison 1/2, ce qui donne, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\theta_n = \theta_0/2^n.$$

  Deux solutions pour continuer.

  ▷ On poursuit en déterminant r_n.
  Une récurrence immédiate nous donne, pour tout $n \geqslant 0$,

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_0/2^k).$$

  En multipliant ce produit par $\sin(\theta_0/2^n)$, il vient, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} r_n\sin(\theta_0/2^n) &= r_0 \prod_{k=1}^{n}\cos(\theta_0/2^k)\times\sin(\theta_0/2^n) \\ &= \frac{r_0}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\cos(\theta_0/2^k)\times\sin(\theta_0/2^{n-1}) \\ &= \frac{r_0}{4}\prod_{k=1}^{n-2}\cos(\theta_0/2^k)\times\sin(\theta_0/2^{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= \frac{r_0}{2^n}\sin(\theta_0), \end{aligned}$$

  donc, comme $\sin(\theta_0/2^n) \neq 0$, on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$r_n = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{2^n\sin(\theta_0/2^n)}.$$

  On constate donc que

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad r_n = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{2^n\sin(\theta_0/2^n)} \sim \frac{r_0\sin(\theta_0)}{2^n\theta_0/2^n} \sim \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0},$$

  d'où

$$u_n = r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0}\,\mathrm{e}^{i0} = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0}.$$

▷ On utilise la forme cartésienne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = x_n + iy_n$. La relation de récurrence nous dit alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}}{2} + i\frac{y_n}{2}$$

ce qui donne, après identification des parties imaginaires,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.$$

La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $1/2$, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \frac{y_0}{2^n}.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \frac{y_n}{\sin\theta_n}$$

il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \frac{y_0}{2^n \sin(\theta_0/2^n)}.$$

Dès lors, on a

$$r_n \sim \frac{y_0}{2^n(\theta_0/2^n)} \sim \frac{y_0}{\theta_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{y_0}{\theta_0} = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0},$$

ce qui donne

$$u_n = r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0}\,\mathrm{e}^{i0} = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0}.$$

En définitive, on a démontré que

$$\boxed{\lim u_n = \frac{r_0\sin(\theta_0)}{\theta_0} \quad \text{où} \quad u_0 = r_0\,\mathrm{e}^{i\theta_0}.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]
Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer la limite de $\big((1+z/n)^n\big)_{n\geqslant 0}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication : Mettre $1+z/n$ sous forme exponentielle.*

Posons $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$1+\frac{z}{n} = 1+\frac{a}{n}+i\frac{b}{n} = \sqrt{\Big(1+\frac{a}{n}\Big)^2+\frac{b^2}{n^2}}\,\mathrm{e}^{i\theta_n} = \sqrt{1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}\,\mathrm{e}^{i\theta_n}$$

où

$$\tan(\theta_n) = \frac{b/n}{1+a/n} = \frac{b}{n+a},$$

donc

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \Big(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)^{n/2}\mathrm{e}^{in\theta_n}.$$

D'une part, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\Big(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)^{n/2} = \exp\Big\{\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)\Big\}$$

et

$$\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big) \sim \frac{n}{2}\times\Big(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big) \sim a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,$$

donc

$$\Big(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)^{n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^a.$$

D'autre part, pour tout $n \geqslant 1$,

$$n\theta_n \sim n\tan(\theta_n) \sim \frac{nb}{n+a} \sim \frac{nb}{n} \sim b \xrightarrow[n\to+\infty]{} b,$$

donc

$$\mathrm{e}^{in\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{ib}.$$

Il s'ensuit que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{a}\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{a+ib},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{z}}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
Étudier les comportements asymptotiques des suites, définies pour $n \geqslant 1$, par

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k+n^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor k\pi \rfloor.$$

On commence par encadrer α_n en minorant chacun de ses n termes par le plus petit d'entre eux (c'est-à-dire $(1+n^2)/(1+n^3)$) et en majorant ces mêmes termes par le plus grand d'entre eux (c'est-à-dire $(n+n^2)/(n+n^3)$). Ainsi

$$n\frac{1+n^2}{1+n^3} \leqslant \alpha_n \leqslant n\frac{n+n^2}{n+n^3}\cdot$$

Comme les deux bornes tendent vers 1, le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1.}$$

En utilisant l'encadrement $k\pi - 1 < \lfloor k\pi \rfloor \leqslant k\pi$, on a

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k\pi - 1) < \beta_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\pi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n+1}{2n}\pi - \frac{1}{n} < \beta_n \leqslant \frac{n+1}{2n}\pi,$$

ce qui montre que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall n,k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}\cdot$$

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

La fonction $x \longmapsto x/n + 1/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint son minimum en $\sqrt{n}$. Cela suggère de prendre $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ dans l'hypothèse afin d'avoir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor},$$

ce qui permet de conclure à l'aide du théorème des gendarmes, que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } 0}$$

♦ ***Exercice 11.*** $[\star]$
Étudier la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)\cdot$ *Indication : Couper !*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On coupe le produit en séparant les termes dont l'indice k est dans $[\![1;n]\!]$ et les autres, c'est-à-dire

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{k}{2n}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)\cdot$$

Les facteurs du premier produit sont tous supérieurs ou égaux à $3/2$. Ceux du second produit sont supérieurs ou égaux à 1. Il s'ensuit que

$$u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

donc, d'après le théorème du gendarme (infini), on a

$$\boxed{\lim u_n = +\infty}$$

♦ ***Exercice 12.*** $[\circ]$
Démontrer la convergence des suites $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ dont les termes généraux sont

$$s_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Indication : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\cdot$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $s_{n+1} - s_n = 1/(n+1)^2 \geqslant 0$, donc la suite (s_n) est croissante.

   Comme, pour tout $k \geqslant 2$, on a $k^2 \geqslant k(k-1)$, on a bien $1/k^2 \leqslant 1/(k-1) - 1/k$, ce qui permet d'écrire, pour tout $n \geqslant 2$,

   $$s_n \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

   où l'égalité découle d'une sommation télescopique. Donc la suite (s_n) est majorée par 1.

   Le théorème de la limite monotone nous permet d'affirmer que

   $$\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leqslant 1.}$$

   Remarque : En fait, on a $\ell = \pi^2/6 - 1$ mais c'est assez difficile à démontrer.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

   $$W_n = \int_0^{\pi/2}\underbrace{(\cos t)^n}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

   donc (W_n) est minorée par 0.

   Pour tout $n \geqslant 1$, on a

   $$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2}\underbrace{(\cos t)^n}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos t - 1)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

   donc (W_n) est décroissante.

   Le théorème de la limite monotone nous permet d'affirmer que

   $$\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n \leqslant \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *convexe*.

1. Démontrer que $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. *Distinguer les cas $\ell \leqslant 0$ et $\ell > 0$.*

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n) = u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n \geqslant u_{n+2}-2\frac{u_n+u_{n+2}}{2}+u_n = 0,$$

donc

$$\boxed{(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant bornée, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0,\ m \leqslant u_n \leqslant M$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $m \leqslant u_{n+1} \leqslant M$ et $-M \leqslant -u_n \leqslant -m$, ce qui donne $m-M \leqslant u_{n+1}-u_n \leqslant M-m$. Par conséquent, la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et donc majorée. Comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone nous dit que

$$\boxed{(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente.}}$$

2. Traitons d'abord le cas où $\ell \leqslant 0$. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ tend alors vers une limite négative ou nulle en croissant, ce qui prouve que $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1}-u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante. Comme elle est bornée et donc minorée, le théorème de la limite monotone nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Intéressons nous maintenant au cas où $\ell > 0$. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers ℓ, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1}-u_n \geqslant \ell/2 > 0$, ce qui donne $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante à partir du rang n_0. Comme elle est bornée et donc majorée, le théorème de la limite monotone nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Dans tous les cas, on peut conclure que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente.}}$$

Remarque : On en déduit que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\star$]

Posons, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

   On admet que la limite commune de ces deux suites est e (la base des exponentielles).
2. Démontrer que e est un irrationnel. *Indication : On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{e} = p/q$ et on s'intéressera à l'encadrement $u_q < \mathrm{e} < v_q$.*

1. Il est clair que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante et que $\lim(v_n-u_n) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n.n!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0,$$

donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante. Donc

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont adjacentes.}}$$

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que e est un rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{e} = p/q$. La première question nous dit en particulier que

$$u_q < \mathrm{e} < v_q,$$

c'est-à-dire

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q.q!},$$

ou encore

$$q.q!u_q < p.q! < q.q!u_q + 1.$$

Or

$$q.q!u_q = q \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z},$$

donc $p.q!$ est un entier strictement compris entre deux entiers. C'est absurde ! En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}.}$$

♦ ***Exercice 15.*** [⋆]

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles définies par la donnée de $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$ et des relations de récurrences croisées :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une limite commune. *Cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.*

Une récurrence évidente permet de démontrer que les suites sont à termes positifs ou nuls, et donc que la prise de racine carrée définissant la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est valide.

Démontrons que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes (à partir du rang 1).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geqslant 0,$$

donc

$$\forall n \geqslant 1, \qquad b_n \leqslant a_n.$$

De plus,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0,$$

donc

$$(a_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante.}$$

Par ailleurs,

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geqslant 0,$$

donc

$$(b_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}$$

Dès lors, on sait que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent (car $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par b_0 et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par a_0). On note α et β les limites respectives. En passant à la limite dans la relation $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, on obtient

$$\alpha = \beta.$$

Donc

$$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (b_n)_{n\geqslant 0} \text{ convergent vers une limite commune.}}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\circ$]
Démontrer qu'une suite périodique convergente est constante.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite p-périodique de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n+kp})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donc convergente vers ℓ. Mais elle est aussi constante puisque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est p-périodique. Par suite, $(u_{n+kp})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à ℓ. En particulier, $u_n = \ell$.

Donc (u_n) est constante, ce qui démontre qu'

$$\boxed{\text{une suite périodique convergente est constante.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\star$]
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective. Démontrer que $\big(f(n)\big)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Soit $A \geqslant f(0)$. Posons $E = f^{-1}([\![0; \lfloor A\rfloor]\!])$. L'injectivité de f nous dit que l'ensemble E est fini (on a $\operatorname{card} E \leqslant \lfloor A\rfloor + 1$). La condition $A \geqslant f(0)$ nous dit que $0 \in E$, ce qui prouve que E n'est pas vide. On peut donc poser $N = \max E$. Alors, pour tout $n > N$, on a $n \notin E$ et donc $f(n) > \lfloor A\rfloor$, ce qui implique que $f(n) \geqslant A$. On a donc démontré que $\forall A \geqslant f(0),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ f(n) \geqslant A$, c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty.}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\star$] (Moyennes de Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On considère la suite des moyennes de Cesàro $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \geqslant 0$, par

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tend aussi vers ℓ. *On distinguera les cas $\ell \in \mathbb{R}$ (déjà fait en cours) et $\ell = \pm\infty$.*
2. Démontrer que la réciproque du résultat de la question précédente est fausse.

1. <u>Premier cas : $\ell \in \mathbb{R}$</u>
Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$v_n - \ell = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} - \frac{\ell + \ell + \cdots + \ell}{n+1} = \frac{(u_0 - \ell) + (u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n+1},$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_0 - \ell| + |u_1 - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
La convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. Pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &\leqslant \frac{|u_0 - \ell| + |u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n+1} + \frac{|u_N - \ell| + |u_{N+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1} \\
&\leqslant \frac{N \times M}{n+1} + \frac{(n - N + 1) \times \varepsilon/2}{n+1} \qquad \text{où } M = \max\{|u_0 - \ell|; |u_1 - \ell|; \ldots; |u_{N-1} - \ell|\} \\
&\leqslant \frac{NM}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{car } n - N + 1 \leqslant n + 1.
\end{aligned}$$

Comme $NM/(n+1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{NM}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N'' = \max\{N; N'\}$. Alors, pour tout $n \geqslant N''$, on peut combiner les inégalités ci-dessus, ce qui donne

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc démontré que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N'' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N'',\ |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Second cas : $\ell = +\infty$ (idem pour $-\infty$)

Soit $A > 0$.

La divergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers $+\infty$ dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant 2(A+1)$. Pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n+1} + \frac{u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n}{n+1} \\ &\geqslant \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n+1} + \frac{(n-N+1)2(A+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $(u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1})/(n+1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n+1} \geqslant -1.$$

Comme $(n-N+1)2(A+1)/(n+1)$ tend vers $2(A+1)$ quand n tend vers $+\infty$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N''$,

$$\frac{(n-N+1)2(A+1)}{n+1} \geqslant A+1.$$

Posons $N''' = \max\{N; N', N''\}$. Alors, pour tout $n \geqslant N'''$, on peut combiner les inégalités ci-dessus, ce qui donne

$$v_n \geqslant -1 + (A+1) = A.$$

On a donc démontré que $\forall A > 0,\ \exists N''' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N''',\ v_n \geqslant A$, c'est-à-dire $(v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Bilan

$$\boxed{\text{si } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ alors } (v_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend aussi vers } \ell.}$$

2. Contre-exemple dans le cas d'une limite finie

Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge sévèrement.

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1 - 1 + \cdots + (-1)^n}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Ainsi, la suite des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut tendre vers une limite finie sans que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ait une limite finie.

Contre-exemple dans le cas d'une limite infinie

Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge sévèrement.

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$v_{2n} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n}}{2n+1} = \frac{2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{2n}}{2n+1} = \frac{\dfrac{4^{n+1}-1}{4-1}}{2n+1} = \frac{4^{n+1}-1}{3(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et

$$v_{2n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n+1}}{2n+2} = \frac{2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{2n}}{2(n+1)} = \frac{\dfrac{4^{n+1}-1}{4-1}}{2(n+1)} = \frac{4^{n+1}-1}{6(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

où ces limites découlent des croissances comparées. Donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Ainsi, la suite des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut tendre vers une limite infinie sans que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ait une limite infinie.

Bilan

$$\boxed{\text{la réciproque du théorème de Cesàro est fausse.}}$$

♦ ***Exercice 19.*** [$\star$] (Lemme de l'escalier et « critère ${u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha$ »)

1. Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que $(e_{n+1} - e_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers h (où $h \in \mathbb{R}$). Démontrer que $(e_n/n)_{n\geqslant 0}$ tend vers h. *C'est le lemme de l'escalier : si la hauteur des marches tend vers h alors la hauteur totale d'un escalier de n marches équivaut à nh.*
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $({u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ strictement positive. Démontrer que $u_n \sim (n\ell)^{1/\alpha}$. *C'est le « critère ${u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha$ ». Il est très utile pour déterminer des équivalents, mais hors-programme. Il faut donc réexpliquer à chaque fois !*
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2u_n}\cdot$ Démontrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.

1. Le théorème de Cesàro dit que
$$\frac{(e_1 - e_0) + (e_2 - e_1) + \cdots + (e_n - e_{n-1})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} h.$$
Or
$$\frac{(e_1 - e_0) + (e_2 - e_1) + \cdots + (e_n - e_{n-1})}{n} = \frac{e_n - e_0}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{e_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc
$$\boxed{\frac{e_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} h.}$$
2. En appliquant le lemme de l'escalier avec $\forall n \geqslant 0,\ e_n = {u_n}^\alpha$, on obtient
$$\frac{{u_n}^\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$
c'est-à-dire, puisque $\ell > 0$,
$${u_n}^\alpha \sim n\ell,$$
ce qui donne
$$\boxed{u_n \sim (n\ell)^{1/\alpha}}$$
3. Une récurrence immédiate permet de justifier que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2u_n} > 0,$$
donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Le théorème de la limite monotone dit alors que ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \geqslant 1$, ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$. Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \geqslant 1$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient
$$\ell = \ell + \frac{1}{2\ell} \iff 0 = \frac{1}{2\ell},$$
ce qui est absurde ! Donc
$$(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge vers } +\infty.$$
Vu l'équivalent demandé, on peut essayer le « critère ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2$ ». Pour tout $n \geqslant 0$, on a
$${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = \left(u_n + \frac{1}{2u_n}\right)^2 - {u_n}^2 = 1 + \frac{1}{4{u_n}^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
donc par le théorème de Césàro, on a
$$\frac{({u_1}^2 - {u_0}^2) + ({u_2}^2 - {u_1}^2) + \cdots + ({u_n}^2 - {u_{n-1}}^2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
c'est-à-dire, après téléscopage et utilisation du fait que ${u_0}^2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$$\frac{{u_n}^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
On en déduit que ${u_n}^2 \sim n$, ce qui donne
$$\boxed{u_n \sim \sqrt{n}.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [$\star$] (Comparaison géométrique)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Critère de Cauchy

   On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

   a) Si $0 \leqslant \ell < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

   b) Si $\ell > 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

   c) Que se passe-t-il si $\ell = 1$?

2. Critère de d'Alembert

   On suppose que $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

   a) Si $0 \leqslant \ell < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

   b) Si $\ell > 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

   c) Que se passe-t-il si $\ell = 1$?

3. Démontrer que si $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

   Que peut-on en déduire à propos des critères de Cauchy et de d'Alembert ?

4. Déterminer le comportement asymptotique des suites $\left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\dbinom{2n}{n}^{1/n}\right)_{n\geqslant 0}$.

1. a) Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$. Comme $(\sqrt[n]{u_n})_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, le lemme du tunnel nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant q^n$. Comme $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, le théorème des gendarmes permet d'en déduire que

   $$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } 0.}$$

   b) Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 < q < \ell$. Comme $(\sqrt[n]{u_n})_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, le lemme du tunnel nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \sqrt[n]{u_n} \geqslant q$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant q^n$. Comme $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, le théorème du gendarme permet d'en déduire que

   $$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } +\infty.}$$

   c) Soit $a > 0$. Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = a$, on a $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

   Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = 1/n$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e}^{-(\ln n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par c.c. et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = n$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e}^{(\ln n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par c.c. et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = n^{\pm 1}$ où $\pm$ vaut $+$ si n est pair et $-$ si n est impair, on a $\sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e}^{\pm(\ln n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par c.c. et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge sévèrement.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } \sqrt[n]{u_n} \text{ tend vers 1, tout est possible asymptotiquement pour } (u_n)_{n\geqslant 0}.}$$

2. a) Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$. Comme $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, le lemme du tunnel nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1}/u_n \leqslant q$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \leqslant q u_n$ (la suite est dite sous-géométrique de raison q). Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant q^{n-N} u_N$. Comme $q^{n-N} u_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, le théorème des gendarmes permet d'en déduire que

   $$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } 0.}$$

   b) Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 < q < \ell$. Comme $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, le lemme du tunnel nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1}/u_n \geqslant q$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \geqslant q u_n$ (la suite est dite sur-géométrique de raison q). Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant q^{n-N} u_N$. Comme $q^{n-N} u_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, le théorème du gendarme permet d'en déduire que

   $$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } +\infty.}$$

c) Soit $a > 0$. Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = a$, on a $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = 1/n$, on a $u_{n+1}/u_n = n/(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = n$, on a $u_{n+1}/u_n = (n+1)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Si $\forall n \geqslant 2,\ u_n = ???$, on a $u_{n+1}/u_n = ??? \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge sévèrement. EST-CE QUE CELA EXISTE ?
En conclusion,

$$\boxed{\text{si } u_{n+1}/u_n \text{ tend vers 1, tout est possible asymptotiquement pour } (u_n)_{n\geqslant 0}.}$$

3. On a

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Le théorème de Cesàro nous dit alors que

$$\frac{(\ln u_1 - \ln u_0) + (\ln u_2 - \ln u_1) + \cdots + (\ln u_n - \ln u_{n-1})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln \ell.$$

Or

$$\frac{(\ln u_1 - \ln u_0) + (\ln u_2 - \ln u_1) + \cdots + (\ln u_n - \ln u_{n-1})}{n} = \frac{\ln u_n - \ln u_0}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\ln u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln \ell,$$

ce qui donne, après application de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell.}$$

De plus, si $\forall n \geqslant 0,\ u_n = \mathrm{e}^{(2+(-1)^n)n^2}$, la suite (u_{n+1}/u_n) diverge alors que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ tend vers $+\infty$.
On constate ainsi que

$$\boxed{\text{le critère de Cauchy « marche » strictement plus souvent que celui de d'Alembert.}}$$

4. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$u_n = \frac{n^n}{n!}\cdot$$

Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e},$$

donc, d'après la question précédente,

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$u_n = \binom{2n}{n}\cdot$$

Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}} = \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\dfrac{(2n)!}{n!^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4,$$

donc, d'après la question précédente,

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = 4,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim \binom{2n}{n}^{1/n} = 4.}$$

◆ ***Exercice 21.*** [○]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite monotone dont une sous-suite admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant monotone, le théorème de la limite monotone nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, d'après le cours, toute sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers λ. Comme l'une de ces sous-suites tend vers ℓ, on a $\lambda = \ell$ par unicité de la limite. En conclusion,

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } \ell.}$$

◆ ***Exercice 22.*** [⋆]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ convergent. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Notons α, β, γ les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$.
Comme $(u_{6n})_{n\geqslant 0}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$, on a $\alpha = \gamma$.
Comme $(u_{6n+3})_{n\geqslant 0}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$, on a $\beta = \gamma$.
Alors $\alpha = \beta$, ce qui signifie que $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite.
Donc

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}$$

◆ ***Exercice 23.*** [⋆]
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que, pour tout $k \geqslant 2$, la sous-suite $(u_{kn})_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Peut-on affirmer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ ?

Non, il suffit de prendre la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \begin{cases} \ell + 1 & \text{si } n \text{ est premier,} \\ \ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $k \geqslant 2$, la sous-suite $(u_{kn})_{n\geqslant 0}$ converge bien vers ℓ puisqu'elle est stationnaire à cette valeur à partir du rang 2.
Par contre, la sous-suite $(u_p)_{p \text{ premier}}$ converge vers $\ell + 1$, ce qui démontre la divergence de (u_n).
En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{savoir que , pour tout } k \geqslant 2, \text{ la sous-suite } (u_{kn})_{n\geqslant 0} \text{ converge} \\ \text{vers } \ell \text{ ne suffit pas à assurer la convergence de } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ vers } \ell.\end{array}}$$

◆ ***Exercice 24.*** [⋆] (Un résultat très utile)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une unique valeur d'adhérence λ. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers λ. Que se passe-t-il si l'on supprime la condition « $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée » ?

Notons que l'existence de la valeur d'adhérence est une conséquence de Bolzano–Weierstrass. Ce qu'il y a de remarquable dans l'hypothèse n'est donc pas l'existence de cette valeur d'adhérence mais son unicité.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers λ. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \lambda| > \varepsilon_0$. Pour $N = 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que $|u_{n_0} - \lambda| > \varepsilon_0$. Pour $N = n_0 + 1$, il existe $n_1 \geqslant n_0 + 1$ tel que $|u_{n_1} - \lambda| > \varepsilon_0$. Pour $N = n_1 + 1$, il existe $n_2 \geqslant n_1 + 1$ tel que $|u_{n_2} - \lambda| > \varepsilon_0$. Etc. On construit ainsi une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geqslant 0}$ de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall k \geqslant 0,\ |u_{n_k} - \lambda| > \varepsilon_0$. Cette sous-suite étant elle-même bornée, le théorème de Bolzano–Weierstrass dit qu'elle admet d'une valeur d'adhérence λ', c'est-à-dire qu'il existe une sous-sous-suite $(u_{n_{k_\ell}})_{\ell\geqslant 0}$ qui converge vers λ'. Un passage à la limite dans l'inégalité $\forall \ell \geqslant 0,\ |u_{n_{k_\ell}} - \lambda| > \varepsilon_0$ donne alors $|\lambda' - \lambda| \geqslant \varepsilon_0$. Cela fait ainsi deux valeurs d'adhérence distinctes pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Absurde ! Donc

$$\boxed{\text{une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge vers celle-ci.}}$$

Il n'est pas difficile de voir que la suite de terme général $\big(1 + (-1)^n\big)n$ n'admet que 0 comme valeur d'adhérence et pourtant qu'elle ne converge pas. En fait, elle a deux valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

♦ ***Exercice 25.*** [★]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. On suppose que $(2u_n + u_{2n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. *Indication : On pourra utiliser le résultat de l'exercice 24.*

Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, le théorème de Bolzano–Weierstrass fournit l'existence d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers λ.

L'hypothèse nous dit alors que $(2u_{\varphi(n)} + u_{2\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et donc que $(u_{2\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers -2λ.

Rebelote, l'hypothèse dit que $(2u_{2\varphi(n)} + u_{4\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et donc que $(u_{4\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers 4λ.

Etc.

On voit ainsi que, pour tout $k \geqslant 0$, $(u_{2^k\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers $(-2)^k\lambda$.

Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, la suite de valeurs d'adhérence $\big((-2)^k\lambda\big)_{k\geqslant 0}$ est également bornée. Cela ne laisse qu'une seule possibilité : $\lambda = 0$.

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence : 0. L'exercice 24 nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers cette valeur d'adhérence, c'est-à-dire

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0.}$$

♦ ***Exercice 26.*** [⋆]

Soient F un fermé de $\mathbb{R}$ et K un compact de $\mathbb{R}$. Démontrer que $F+K = \{f+k : f \in F,\ k \in K\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la somme de deux compacts ?

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $F + K$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite notée ℓ. On veut démontrer que $\ell \in F + K$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in F$ et $k_n \in K$ tels que $u_n = f_n + k_n$.

Comme K est compact, la suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$ possède une valeur d'adhérence λ dans K. Autrement dit, il existe une extraction φ telle que $(k_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $\lambda \in K$.

Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est extraite de u, elle converge vers ℓ.

Dès lors, la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, qui est la suite $(u_{\varphi(n)} - k_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, converge vers $\ell - \lambda$. Comme F est fermé et comme $(f_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans F, on sait que $\ell - \lambda$ appartient à F.

Dès lors, on a $\ell = (\ell - \lambda) + \lambda$ avec $\ell - \lambda \in F$ et $\lambda \in K$, ce qui démontre que $\ell \in F + K$. Donc $F + K$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

On en conclut que

$$\boxed{\text{la somme d'un fermé et d'un compact est un fermé.}}$$

Comme la somme de deux parties bornées est clairement bornée, on en déduit que

$$\boxed{\text{la somme de deux compacts est un compact.}}$$

♦ ***Exercice 27.*** [⋆]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Notons L_u l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Si $L_u = \varnothing$, c'est OK puisque $\varnothing$ est une fermé de $\mathbb{R}$.

Si $L_u \neq \varnothing$, on considère une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ de valeurs d'adhérence qui converge vers λ dans $\mathbb{R}$. Démontrons que $\lambda \in L_u$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. La convergence de $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ vers λ donne l'existence de $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon/2$. Comme $\lambda_{N'}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \lambda_{N'}| \leqslant \varepsilon/2$. Dès lors, $|u_n - \lambda| = |u_n - u_{N'} + u_{N'} - \lambda| \leqslant |u_n - \lambda_{N'}| + |u_{N'} - \lambda| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. On a donc démontré que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant N$, $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que λ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire $\lambda \in L_u$. Donc L_u est un fermé de $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, on peut donc conclure que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On peut aussi dire que $L_u = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathrm{Adh}\{u_p : p \geqslant n\}$, *ce qui permet de dire que* L_u *est un fermé en tant qu'intersection de fermés.*

♦ ***Exercice 28.*** [∘]

Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\right\},\qquad B=\left\{\frac{nm}{n^2+m^2} : n,m\in\mathbb{N}^*\right\}\qquad \text{et}\qquad C=\left\{\frac{n+\sqrt{m}}{\sqrt{n}+m} : n,m\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Pour tout $n\geqslant 1$, posons $u_n=(-1)^n+1/n$.
   On a $u_1=0$ et, pour tout $n\geqslant 2$, on a $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ et $0<1/n\leqslant 1/2$, donc $-1<(-1)^n+1/n\leqslant 3/2$. Ainsi
   $$A\subset\left]-1;\frac{3}{2}\right].$$
   Comme $u_2=3/2$, on en déduit tout de suite que
   $$\boxed{\max A=3/2.}$$
   Par ailleurs, on a
   $$u_{2n+1}=-1+\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1,$$
   donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure,
   $$\boxed{\inf A=-1.}$$
2. Pour tous $n,m\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_{n,m}=nm/(n^2+m^2)$.
   Pour tous $n,m\in\mathbb{N}^*$, on a $v_{n,m}>0$ de façon claire et $v_{n,m}\leqslant 1/2$ car
   $$\frac{nm}{n^2+m^2}\leqslant\frac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad 2nm\leqslant n^2+m^2\quad\Longleftrightarrow\quad 0\leqslant(n-m)^2\ :\ \text{O.K.}$$
   donc
   $$B\subset\left]0;\frac{1}{2}\right].$$
   On a $v_{1975,1975}=1/2$, donc
   $$\boxed{\max B=1/2.}$$
   Par ailleurs, on voit que
   $$v_{n,1}=\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$
   donc
   $$\boxed{\inf B=0.}$$
3. Pour tous $n,m\in\mathbb{N}^*$, on pose $w_{n,m}=(n+\sqrt{m})/(\sqrt{n}+m)$.
   Pour tous $n,m\in\mathbb{N}^*$, on a clairement $w_{n,m}>0$, donc
   $$C\subset\left]0;+\infty\right[.$$
   On a
   $$w_{1,m}=\frac{1+\sqrt{m}}{1+m}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{m}}{m}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{m}}\xrightarrow[m\to+\infty]{}0,$$
   donc
   $$\boxed{\inf C=0.}$$
   On a
   $$w_{n,1}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty,$$
   donc
   $$\boxed{\sup\nolimits_{\overline{\mathbb{R}}}C=+\infty.}$$

♦ ***Exercice 29.*** [$\star$]
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ une bijection. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est $\mathbb{R}$.

Notons tout d'abord que l'existence de u est justifiée par le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une infinité de rationnels dans l'intervalle ouvert $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, ce qui signifie qu'il existe une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans cet intervalle. On en déduit qu'il existe $n \geqslant N$ tel que $u_n \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$. On a donc démontré que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ u_n \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, ce qui signifie que x est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 30.*** [$\bigstar$]
On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \qquad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Démontrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. a) Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   b) Démontrer que toute suite de Cauchy est convergente. *Utiliser une valeur d'adhérence.*

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ nous donne l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. Dès lors, si on prend $p, q \geqslant N$, on a

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui démontre que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. En conclusion,

$$\boxed{\text{toute suite convergente est une suite de Cauchy.}}$$

2. a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition. On obtient l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant 1$. En particulier, on a $\forall p \geqslant N,\ |u_p - u_N| \leqslant 1$. Comme $|u_p - u_N| \geqslant |u_p| - |u_N|$ (inégalité triangulaire renversée), on en déduit que $\forall p \geqslant N,\ |u_p| \leqslant 1 + |u_N|$, ce qui démontre que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée à partir du rang N. Dès lors, on a $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|\}$, ce qui signifie que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. En conclusion,

$$\boxed{\text{suite de Cauchy est bornée.}}$$

   b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy.
   Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée d'après la question précédente, le théorème de Bolzano–Weierstrass nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet au moins une valeur d'adhérence.
   On propose deux solutions :

   ▷ Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon/2$. Par ailleurs, comme λ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, il existe $n_0 \geqslant N$ tel que $|u_{n_0} - \lambda| \leqslant \varepsilon/2$. Alors, pour tout $p \geqslant N$ (et $q = n_0$), on a

$$|u_p - \lambda| \leqslant |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0} - \lambda| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

   ▷ Soient λ_1, λ_2 deux valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Nous allons démontrer que $\lambda_1 = \lambda_2$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Posons alors $\varepsilon = |\lambda_1 - \lambda_2| > 0$. Le fait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit une suite de Cauchy donne l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N_1,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon/4$. Le fait que λ_1 soit une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donne l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N_2,\ |u_p - \lambda_1| \leqslant \varepsilon/4$. Enfin, le fait que λ_2 soit une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donne l'existence de $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \geqslant N_3,\ |u_q - \lambda_2| \leqslant \varepsilon/4$. Dès lors, pour tous $p, q \geqslant \max\{N_1, N_2, N_3\}$, on a

$$\varepsilon = |\lambda_1 - \lambda_2| = |(\lambda_1 - u_p) + (u_p - u_q) + (u_q - \lambda_2)| \leqslant |\lambda_1 - u_p| + |u_p - u_q| + |u_q - \lambda_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4},$$

ce qui est absurde ! Donc $\lambda_1 = \lambda_2$.
On a ainsi démontré que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence λ. On a déjà vu que cela implique que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers λ. Rappelons pourquoi. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne convergeait pas vers λ, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \lambda| > \varepsilon_0$. L'ensemble $\{u_n : |u_n - \lambda| > \varepsilon_0\}$ formerait alors une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Cette sous-suite serait elle-même bornée et donc pourvue, d'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, d'une valeur d'adhérence λ' telle que $|\lambda' - \lambda| \geqslant \varepsilon_0$. Cela ferait ainsi deux valeurs d'adhérence distinctes pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ce qui ne se peut pas.

En conclusion,

$$\boxed{\text{toute suite de Cauchy est convergente.}}$$

♦ ***Exercice 31.*** [★] (Lemme de Fekete)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive telle que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad u_{p+q} \leqslant u_p + u_q.$$

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$.
2. Démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas nécessairement décroissante.
3. a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$. On effectue la division euclidienne de m par n de sorte que $m = nq + r$ où $0 \leqslant r < n$. Démontrer que
$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{m}.$$
   b) En déduire que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers sa borne inférieure.

1. L'ensemble $\{u_n/n : n \geqslant 1\}$ est non vide et minorée car (u_n) est positive. Par suite, cet ensemble admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}_+$, ce qui justifie que
$$\boxed{\text{la borne inférieure de la suite } (u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ existe.}}$$
2. Considérons la suite positive (u_n) telle que $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = 1$ si n est impair. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Si $p+q$ est pair, alors $u_{p+q} = 0$ donc on a nécessairement $u_{p+q} \leqslant u_p + u_q$. Si $p+q$ est impair alors, parmi p et q, l'un est pair et l'autre impair donc $u_{p+q} = 1 = u_p + u_q$. Ainsi, (u_n) satisfait bien l'hypothèse $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leqslant u_p + u_q$. Par contre, la suite (u_n/n) n'est pas décroissante car les termes d'indice pair sont nuls et ceux d'indice impair sont strictement positifs. Donc
$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas nécessairement décroissante.}}$$
3. a) On a
$$\frac{u_m}{m} = \frac{u_{nq+r}}{m} \leqslant \frac{u_{nq} + u_r}{m} \leqslant \frac{\overbrace{u_n + \cdots + u_n}^{q \text{ termes}} + u_r}{m} = \frac{qu_n}{m} + \frac{u_r}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{m},$$
où la dernière inégalité découle du fait que $q/m \leqslant n$ car $r \geqslant 0$. Or, si on pose $M_n = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, on a $u_r < M_n$ car $0 \leqslant r \leqslant n-1$, donc
$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{M_n}{m}.$$
Pour conclure, on a démontré que
$$\boxed{\exists M_n \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{M_n}{m}.}$$
   b) Notons $I = \inf\{u_p/p : p \geqslant 1\}$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que $u_n/n \leqslant I + \varepsilon/2$. Par ailleurs, comme la suite $(M_n/m)_{m\geqslant 1}$ tend vers 0, il existe un rang n_0 tel que $\forall m \geqslant n_0,\ M_n/m \leqslant \varepsilon/2$. Considérons alors $m \geqslant \max\{n; n_0\}$ et effectuons la division euclidienne de m par n sous la forme $m = qn + r$ avec $0 \leqslant r < n$ de sorte que, d'après la question précédente, on ait
$$I \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{M_n}{m} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que

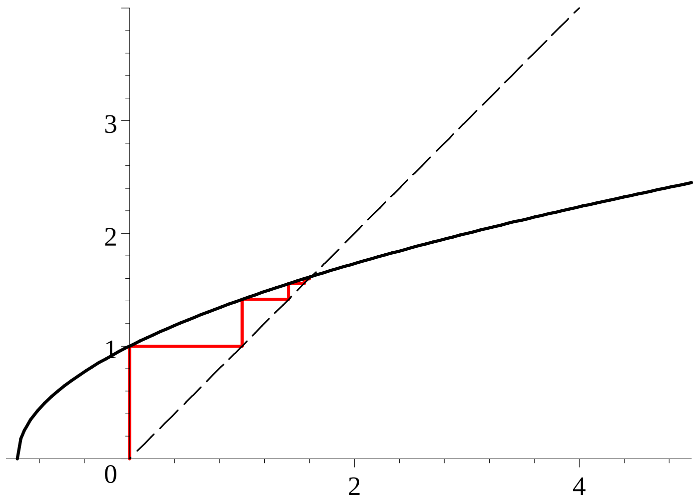
$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers sa borne inférieure.}}$$

♦ ***Exercice 32.*** [○]
Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

et en déduire la valeur du réel $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$.

1. Posons
$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$
Commençons par représenter la dynamique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$:



Graphiquement, on constate que la suite est croissante et majorée par le point fixe φ de f qui vaut (après calculs) le nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. On conjecture donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi.$$

Posons $\mathscr{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi$ et démontrons ce prédicat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : On a $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+0} = 1$ et $\varphi \approx 1,618$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \varphi$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Comme $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi$ et comme f est croissante sur $[-1;+\infty[$, on a $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\varphi)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \varphi$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que (u_n) est croissante et majorée par φ.

Le théorème de la limite monotone implique alors que (u_n) admet une limite finie $\ell \leqslant \varphi$. En passant à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, on obtient $\ell = \sqrt{1+\ell}$, ce qui donne $\ell = \varphi$. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers le nombre d'or } \varphi.}$$

2. On voit que

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \sqrt{1}, \quad u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \quad \ldots \quad u_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}_{n \text{ occurences de } 1}, \quad \ldots$$

donc

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}} = \lim u_n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}} = \varphi.}$$

♦ ***Exercice 33.*** [$\star$] (Approximation de racines carrées par la méthode de Héron d'Alexandrie)
Soit $a \in]1;+\infty[$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = a$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big)\cdot$$

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\cdot$$

   a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par v_{n+1} et v_n pour tout $n \geqslant 0$. En déduire l'expression de v_n en fonction de a et n.
   b) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \sqrt{a}$ quand n tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers $\sqrt{a}$?
   c) Démontrer que

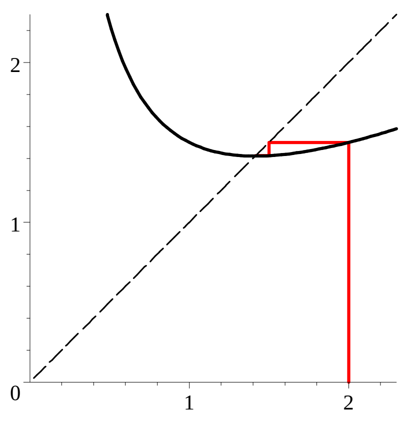
$$\forall n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2a\Big(\frac{a-1}{a+1}\Big)^{2^n}.$$

   Dans le cas $a = 2$, déterminer un rang n_0 pour lequel u_{n_0} approche $\sqrt{2}$ à 10^{-14} près.

1. Posons

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big)\cdot$$

Pour se donner une idée, on représente la dynamique de la suite pour $a = 2$ (de loin et d'un peu plus près) :



La dynamique de la suite nous conduit à conjecturer que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \underbrace{\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}_{\mathscr{P}(n)}.$$

<u>Initialisation :</u> On a $u_0 = a$ et $u_1 = (a + a/a)/2 = (a+1)/2$. On a

$$u_0 \geqslant u_1 \iff a \geqslant \frac{a+1}{2} \iff a \geqslant 1\ :\ \text{O.K.}$$

et

$$u_1 \geqslant \sqrt{a} \iff \frac{a+1}{2} \geqslant \sqrt{a} \iff a+1-2\sqrt{a} \geqslant 0 \iff (\sqrt{a}-1)^2 \geqslant 0 \text{ : O.K.}$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. D'après $\mathscr{P}(n)$, on a $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$. Or f est strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{a};+\infty[$, donc $f(\sqrt{a}) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$, c'est-à-dire $\sqrt{a} < u_{n+2} < u_{n+1}$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, ce qui implique, en vertu du théorème de la limite monotone, qu'elle converge vers une limite finie $\ell \geqslant \sqrt{a}$. En passant à la limite dans la relation $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient alors $\ell = f(\ell)$, ce qui donne $\ell^2 = a$ et donc $\ell = \sqrt{a}$ (puisque $\ell \geqslant \sqrt{a}$). En définitive,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge en décroissant vers } \sqrt{a}.}$$

2. a) Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big) + \sqrt{a}} = \frac{{u_n}^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{{u_n}^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{(u_n+\sqrt{a})^2} = \Big(\frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}\Big)^2,$$

donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad v_{n+1} = {v_n}^2.}$$

Une récurrence immédiate nous permet d'en déduire que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = {v_0}^{2^n}.$$

Comme

$$v_0 = \frac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}} = \frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1},$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = \Big(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\Big)^{2^n}.}$$

b) La question précédente nous dit que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_n - \sqrt{a} = (u_n+\sqrt{a})\Big(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\Big)^{2^n}. \qquad (*)$$

Or $u_n + \sqrt{a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\sqrt{a}$, donc, comme $2\sqrt{a} \neq 0$, on peut écrire que $u_n + \sqrt{a} \sim 2\sqrt{a}$, ce qui donne

$$\boxed{u_n - \sqrt{a} \sim 2\sqrt{a}\Big(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\Big)^{2^n}.}$$

On constate ainsi que

$$\boxed{\text{la convergence de } u_n \text{ vers } \sqrt{a} \text{ est hyper rapide.}}$$

Remarque : C'est un peu flou comme conclusion mais on ne peut pas vraiment faire mieux sans avoir les notions sur les vitesses de convergence.

c) On a déjà dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\sqrt{a}$ en décroissant, donc $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant \sqrt{a}$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0,\ u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$.

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$, comme $u_0 = a$ et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, on a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant a$, ce qui donne

$$u_n + \sqrt{a} \leqslant a + \sqrt{a} \leqslant 2a.$$

On vérifie aussi que $x \longmapsto (x-1)/(x+1)$ est croissante sur $]1;+\infty[$ donc, comme $\sqrt{a} \leqslant a$, on a

$$\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \leqslant \frac{a-1}{a+1}.$$

En reportant dans $(*)$, on a donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2a\Big(\frac{a-1}{a+1}\Big)^{2^n}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2a\Big(\frac{a-1}{a+1}\Big)^{2^n}.}$$

Dans le cas $a = 2$, on a donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant 4\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2^n}.$$

Pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-14} près, il SUFFIT donc

$$4\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2^{n_0}} \leqslant 10^{-14},$$

c'est-à-dire

$$n_0 \geqslant \frac{1}{\ln 2} \ln\Big(\frac{14.\ln(10) + \ln(4)}{\ln(3)}\Big),$$

ou encore

$$n_0 \geqslant 4,94$$

On prend donc

$$\boxed{n_0 = 5.}$$