Planche de colle

Exercice de colle

Dans l'espace euclidien habituel $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $(e_1, \cdots, e_4)$, on pose :

$$F = \text{Ker}\left(\sum_{k=1}^{4} e_k^*\right)$$

et :

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.\right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
2. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer la matrice de symétrie orthogonale par rapport à G.

1. Il est assez visible que :
$$F^\perp = \text{Vect}\Big((1,1,1,1)\Big).$$
2. On note U le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On sait – à savoir redémontrer ... c'est dans le cours – que la matrice
$$Q = \frac{U\,U^T}{U^T\,U},$$
est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(U)$. En fait, ceci est vrai pour n'importe quel vecteur U non nul, pas seulement pour celui qu'on va utiliser.
La matrice recherchée est donc :
$$P = I_4 - \frac{U\,U^T}{U^T\,U} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
C'est bien une matrice symétrique de trace égale à 3 : tout va bien car on projette sur un hyperplan F de dimension 3. Il n'y a pas de coïncidences.

3. Pour l'espace G, il faut faire plus de calculs...
   On commence par calculer la matrice de la projection orthoonale sur G.
   On applique la méthode.
   La question est : pourrez-vous mener les calculs sans erreurs ... ?
   On trouve une base (e_1, e_2) de l'espace G en résolvant la système de deux équations à quatre inconnues.
   Après calculs, on obtient comme base :

$$\mathscr{B} = \Big(e_1 = (-1, 2, 1, 0), e_2 = (1, -1, 0, 1)\Big).$$

   On prend un vecteur $x = (a, b, c, d)$. On pose :

$$p(x) = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$$

   et on a les deux équations :

$$\begin{cases} (x - p(x) \mid e_1) = 0 \\ (x - p(x) \mid e_2) = 0 \end{cases}.$$

   On obtient alors le système d'inconnues λ et μ – et de paramètres a, b, c et d :

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = -a + 2b + c \\ 3\lambda - 3\mu = -a + b - d \end{cases}.$$

   On obtient :

$$\lambda = \frac{b + c + d}{3} \text{ et } \mu = \frac{a + c + 2d}{3}.$$

   Conclusion,

$$p(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a - b + d \\ -a + 2b + c \\ b + c + d \\ a + c + 2d \end{pmatrix}.$$

   La matrice de la projection orthogonale sur G est la matrice :

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   C'est une matrice de rang 2 et elle est symétrique, ce qui est plutôt bon signe...
   Il reste à calculer la matrice de symétrie S :

$$S = 2P - I_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   C'est une matrice de trace nulle (normal car elle est semblable à $\mathrm{Diag}(1, 1, -1, -1)$), dont le carré vaut I_4, symétrique (car orthogonale).