Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 20

– à rendre pour le mardi 26 mai –

Exercice 1

On considère un espace euclidien E, muni d'un produit scalaire. On pose $n = \dim(E)$. On fixe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E.
Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose l'application :

$$f^* : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x \mid f(e_i)) \cdot e_i \end{array} \right. .$$

1. On fixe un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f^* \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme f^* s'appelle l'adjoint de f.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ (f^*(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si $g : E \longrightarrow E$ est une application telle que :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ (g(x) \mid y) = (x \mid f(y)),$$
alors $g = f^*$.
4. Soient f et g dans $\mathscr{L}(E)$, puis λ dans $\mathbb{R}$. Expliciter l'adjoint de f^*, de $(f \circ g)$ et de $\lambda \cdot f + g$.
5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que la définition de f^* ne dépend pas de la base orthonormale $\mathscr{B}$ choisie au départ.
6. Montrer que si $\mathscr{C}$ est une base orthonormale, alors :
$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(f^*) = (\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(f))^T .$$
7. Montrer que :
$$\operatorname{Ker}(f^*) = (\operatorname{Im}(f))^{\perp} \text{ et } \operatorname{Im}(f^*) = (\operatorname{Ker}(f))^{\perp}.$$
8. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^* = p$.

Exercice 2

On considère quatre dés à six faces non pipés. Tous les lancers sont indépendants et les faces sont équiprobables.
Le dé A a pour faces $3, 3, 3, 3, 3, 3$.
Le dé B a pour faces $2, 6, 2, 6, 2, 2$.
Le dé C a pour faces $1, 5, 1, 5, 1, 5$.
Le dé D a pour faces $4, 0, 4, 0, 4, 4$.
Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé – les deux dés étant différents. Le gagnant est celui qui a la plus grande face supérieure.

1. Montrer que si Ying joue avec le dé A et Yang joue avec le dé B, alors Ying a une probabilité de gagner égale à $\dfrac{2}{3}$.

2. Montrer que si Ying joue avec le dé C et Yang joue avec le dé D, alors Ying a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
3. Que se passe-t-il si Ying joue avec le dé D et Yang joue avec le dé A ?
4. On suppose dans cette question que Yinh a le droit de sélectionner un des quatre dés et qu'ensuite Yang peut choisir parmi les trois dés restants. Puis les deux joueurs s'affrontent. Préférez-vous être à la place de Ying ou de Yang ? Justifier.
5. Toujours avec le jeu de la question précédente, on suppose que Ying doit payer un euro à Yang si Ying perd et que Yang doit payer $\alpha \geqslant 0$ euros si Ying gagne. Donner l'ensemble des α pour lesquels Yang est susceptible de jouer.