

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2020**

**JEUDI 23 AVRIL 2020 - 8h00 – 14h00**

**FILIERE MP - Epreuve n° 7**

**MATHEMATIQUES D  
(U)**

*Durée : 6 heures*

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve*



**Le sujet comprend 9 pages, numérotées de 1 à 9**

\* \* \*

## **Début du sujet**

### **Définitions et notations**

- Si  $A$  est un ensemble fini, on note  $\text{Card } A$  son cardinal.
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Delta_n = \{1, \dots, n\}$ . Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  de cardinal  $n$ , on note  $\beta_A$  l'unique bijection croissante de  $A$  sur  $\Delta_n$ .
- On note  $\Sigma_n$  le groupe des bijections de  $\Delta_n$  sur  $\Delta_n$ . Si  $n \geq 2$ , on note  $\text{MD}(n)$  l'ensemble des éléments  $\sigma \in \Sigma_n$  qui vérifient la condition (de montée-descente) :

pour  $1 \leq k \leq n-1$  :      $\sigma(k) < \sigma(k+1)$  si  $k$  est impair,      $\sigma(k) > \sigma(k+1)$  si  $k$  est pair ;

et on note  $\text{DM}(n)$  l'ensemble des éléments  $\sigma \in \Sigma_n$  qui vérifient la condition (de descente-montée) :

pour  $1 \leq k \leq n-1$  :      $\sigma(k) > \sigma(k+1)$  si  $k$  est impair,      $\sigma(k) < \sigma(k+1)$  si  $k$  est pair.

- Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Un maximum (resp. minimum) relatif de  $f$  est un réel  $x$  tel qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(y) \leq f(x)$  (resp.  $f(y) \geq f(x)$ ) pour tout  $y \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ . Un maximum (resp. minimum) relatif strict de  $f$  est un réel  $x$  tel qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(y) < f(x)$  (resp.  $f(y) > f(x)$ ) pour tout  $y \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \setminus \{x\}$ . Un extremum relatif est un point de  $\mathbb{R}$  qui est soit un maximum relatif, soit un minimum relatif. Un extremum relatif strict est un point de  $\mathbb{R}$  qui est soit un maximum relatif strict, soit un minimum relatif strict.
- La droite réelle sera toujours munie de la norme associée à la valeur absolue.
- Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est dite *simple* si elle est continue, si l'ensemble  $E(f)$  des extrema relatifs de  $f$  est fini et si la restriction de  $f$  à  $E(f)$  est injective.
- On note  $S$  l'ensemble des fonctions simples de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n$  l'ensemble des fonctions  $f \in S$  telles que  $\text{Card } E(f) = n$ . On note enfin  $S_* = \bigcup_{n \geq 2} S_n$ .
- Les *composantes connexes par arcs* d'une partie d'un espace normé seront simplement appelées les *composantes* de cette partie.
- On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace des polynômes à coefficients réels. Si  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\mathcal{A}$  est une algèbre sur  $\mathbb{R}$ , pour  $x \in \mathcal{A}$  on pose  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ .

**Les parties II, III, IV, V sont indépendantes.**

## Partie I

1. a. Vérifier que les extrema relatifs des fonctions de  $S$  sont stricts.
- b. Soit  $f \in S$ . Montrer que la restriction de  $f$  à l'adhérence de chaque composante de  $\mathbb{R} \setminus E(f)$  est strictement monotone. En déduire que si  $x \in E(f) \setminus \{\text{Max } E(f)\}$  est un maximum (resp. minimum) relatif, le plus petit élément  $y$  de  $E(f)$  vérifiant  $y > x$  est un minimum (resp. maximum) relatif.
- c. Soit  $f \in S_n$  avec  $n \geq 2$ . On pose  $\mathcal{E}(f) = f(E(f))$ . Soit  $\sigma_f$  l'élément de  $\Sigma_n$  défini par

$$\sigma_f = \beta_{\mathcal{E}(f)} \circ f \circ \beta_{E(f)}^{-1}.$$

Montrer que  $\sigma_f \in \text{MD}(n) \cup \text{DM}(n)$ .

2. On définit une relation  $\sim$  sur  $S$  de la manière suivante : pour tout couple  $(f, g)$  de  $S^2$ ,  $f \sim g$  si et seulement si il existe deux bijections continues  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , strictement croissantes, qui vérifient  $f = \psi \circ g \circ \varphi$ .

- a. Vérifier que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $S$  et montrer que chaque classe d'équivalence de  $\sim$  est contenue dans l'un des ensembles  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- b. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  des parties de  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $u_1 < \dots < u_n$  et  $v_1 < \dots < v_n$ . Vérifier qu'il existe une bijection continue  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante telle que  $\chi(u_k) = v_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ .
- c. On suppose que  $f$  et  $g$  sont dans  $S_*$  et que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g(x)| = +\infty.$$

Démontrer que  $f \sim g$  si et seulement si  $\sigma_f = \sigma_g$ .

- d. L'équivalence précédente subsiste-t-elle pour deux fonctions  $f$  et  $g$  quelconques de  $S_*$  ?

3. On note  $C_b^0$  l'espace des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , que l'on munit de la norme uniforme :  $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  pour  $f \in C_b^0$ .

- a. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}$  avec  $u_1 < \dots < u_n$  et  $v_1 < \dots < v_n$ . Montrer qu'il existe une application continue  $\zeta : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- pour  $s \in [0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \zeta(s, x)$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ ,
- $\zeta(0, x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $\zeta(1, u_k) = v_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

- b. Démontrer que les classes d'équivalence de la restriction de  $\sim$  à  $S_* \cap C_b^0$  sont connexes par arcs.

- c. Donner un exemple d'arc continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S \cap C_b^0$  tel que  $\gamma(0) \in S_0$  et  $\gamma(1) \in S_2$ .

## Partie II

Dans cette partie, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_n$  l'espace des fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $n$ .

**1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\text{Id}$  l'application identique de  $\mathbb{R}^n$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme notée  $\|\cdot\|$  et l'espace des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  de la norme associée, encore notée  $\|\cdot\|$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ , on note  $B(x, r)$  (resp.  $B(x, r]$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et soit  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  telle que  $f(0) = 0$  et dont la différentielle  $\varphi$  en 0 est inversible.

a. On pose

$$g = \text{Id} - \varphi^{-1} \circ f.$$

Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{O}$  et qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$  et  $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$  pour  $x \in B(0, \varepsilon)$ . En déduire que  $f$  est injective dans  $B(0, \varepsilon)$ .

b. Soit  $0 < r < \varepsilon$  et soit  $z_0 \in B(0, r/2)$ . On pose  $h(x) = g(x) + z_0$  pour  $x \in \mathcal{O}$ . Montrer que

$$h(B(0, r]) \subset B(0, r].$$

c. Montrer qu'il existe  $a \in B(0, r]$  tel que  $f(a) = \varphi(z_0)$ .

d. Soient  $W = \varphi(B(0, r/2))$  et  $V = f^{-1}(W) \cap B(0, \varepsilon)$ . Montrer que  $V$  et  $W$  sont ouverts et que  $f|_V$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $W$ .

**2.** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  dont la différentielle en  $x$  est inversible pour tout  $x \in \mathcal{O}$ . Démontrer que l'image par  $f$  d'un ouvert de  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**3.** Pour  $n \geq 2$ , soit  $O_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}\}$  et soit  $U_{n-1}$  l'ensemble des  $(n-1)$ -uples  $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  tels que

$$0 < y_1, \quad y_i > y_{i+1} \text{ si } i \in \{1, \dots, n-2\} \text{ est impair,} \quad y_i < y_{i+1} \text{ si } i \in \{1, \dots, n-2\} \text{ est pair.}$$

Pour  $x \in O_{n-1}$ , on définit la fonction  $\pi_x \in \mathscr{P}_n$  par  $\pi_x(t) = t(x_1 - t) \cdots (x_{n-1} - t)$ . On définit l'application  $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) : O_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  par

$$Y_i(x) = \int_0^{x_i} \pi_x(u) du, \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O_{n-1}.$$

a. Soient  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $x \in O_{n-1}$ . Montrer que

$$d_{x,j} : t \mapsto \int_0^t u \prod_{1 \leq \ell \leq n-1, \ell \neq j} (x_\ell - u) du$$

est dans  $\mathscr{P}_n$  et s'annule avec sa dérivée en 0. En déduire l'existence de  $\chi_{x,j} \in \mathscr{P}_{n-2}$  vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d_{x,j}(t) = t^2 \chi_{x,j}(t).$$

b. Pour  $x \in O_{n-1}$  et  $(i, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2$ , montrer l'existence de  $\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x)$  et vérifier que

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x) = d_{x,j}(x_i).$$

En déduire que  $Y$  est une application de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $O_{n-1}$ , à valeurs dans  $U_{n-1}$ .

- c. Démontrer que pour  $x \in O_{n-1}$ , la partie  $\{\chi_{x,j} \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}$  est une base de  $\mathcal{P}_{n-2}$ .
- d. En déduire que la différentielle de  $Y$  au point  $x$  est inversible.

**4.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , une fonction de  $\mathcal{P}_n$  est dite unitaire lorsque le coefficient de son terme de degré  $n$  est 1. On note  $\mathcal{P}_n^u$  l'ensemble de ces fonctions. On note  $C_n = \inf \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt \mid f \in \mathcal{P}_n^u \right\}$ .

- a. Montrer que  $C_n > 0$ .
- b. Pour  $n \geq 2$ , démontrer que si  $x \in O_{n-1}$

$$(x_{n-1})^{n+1} \leq \frac{1}{C_n} \left[ Y_1(x) + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (Y_{i+1}(x) - Y_i(x)) \right].$$

- c. Vérifier que l'application  $Y$  se prolonge continûment à l'adhérence de  $O_{n-1}$ .
- d. Montrer que si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$  contenu dans  $U_{n-1}$ ,  $Y^{-1}(K)$  est compact.

**5.** Montrer que  $Y(O_{n-1})$  est ouverte et fermée dans  $U_{n-1}$  et en déduire que  $Y$  est surjective.

**6.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour toute fonction  $f$  de  $S_n$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = \pm\infty$ , il existe un élément  $g \in \mathcal{P}_{n+1}$  tel que  $f \sim g$  (où  $\sim$  est la relation définie en I.2).

## Partie III

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{B}(n, k)$  l'ensemble des applications  $\sigma \in \text{MD}(n+1)$  telles que

$$\sigma(2) - \sigma(1) = k + 1$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{C}(n, s, k)$  l'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $\text{MD}(n+2)$  tels que

$$\sigma(2) - \sigma(1) = s + 1, \quad n + 2 - \sigma(2) = k.$$

**1.** Pour  $m \geq 2$  vérifier que l'application  $\text{Opp} : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ , qui à  $\sigma \in \Sigma_m$  associe  $\eta \in \Sigma_m$  défini par

$$\eta(i) = m + 1 - \sigma(i),$$

est une bijection vérifiant  $\text{Opp}(\text{MD}(m)) = \text{DM}(m)$  et  $\text{Opp}(\text{DM}(m)) = \text{MD}(m)$ . Vérifier que si  $\sigma \in \Sigma_m$  et si  $i, j$  sont des éléments de  $\{1, \dots, m\}$  vérifiant  $\sigma(j) > \sigma(i)$ ,

$$\sigma(j) - \sigma(i) = 1 + \text{Card} \{k \in \Delta_m \mid \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)\}.$$

**2.** À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur  $n$  et  $k$  l'ensemble  $\mathcal{B}(n, k)$  est-il non vide ? À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur  $n, s$  et  $k$  l'ensemble  $\mathcal{C}(n, s, k)$  est-il non vide ?

**3.** Dans cette question et la suivante, on fixe  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  et  $1 \leq s \leq n-k$ . On se propose de construire une bijection de  $\mathcal{C}(n, s, k)$  sur  $\mathcal{B}(n, k)$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{C}(n, s, k)$ .

a. Vérifier que le nombre  $m$  d'entiers  $j \geq 4$  tels que  $\sigma(j) > \sigma(3)$  vérifie  $m \geq k$ . On note  $j_1, \dots, j_m$  ces entiers, que l'on ordonne de telle manière que  $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \dots < \sigma(j_m)$ .

b. On considère la fonction  $\xi : \Delta_{n+1} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\sigma(j_k) + \frac{1}{2}\}$  définie par

$$\xi(1) = \sigma(j_k) + \frac{1}{2}, \quad \xi(2) = \sigma(3), \dots, \xi(n+1) = \sigma(n+2).$$

Montrer que  $\xi$  vérifie

$$\xi(p) > \xi(p+1) \text{ pour } p \text{ impair,} \quad \xi(p) < \xi(p+1) \text{ pour } p \text{ pair,}$$

et que l'intervalle  $\left] \xi(2), \xi(1) \right[$  contient exactement  $k$  éléments de  $\{\xi(3), \dots, \xi(n+1)\}$ .

c. On note  $A = \xi(\Delta_{n+1})$  et on pose  $\bar{\xi} = \beta_A \circ \xi$  (on rappelle que  $\beta_A$  désigne l'unique bijection croissante de  $A$  sur  $\Delta_{n+1}$ ). Montrer que  $\bar{\xi} \in \text{DM}(n+1)$ .

d. Soit  $\eta = \text{Opp}(\bar{\xi})$ . Vérifier que  $\eta \in \mathcal{B}(n, k)$ .

On note  $\Psi_{n,s,k}$  l'application de  $\mathcal{C}(n, s, k)$  dans  $\mathcal{B}(n, k)$  définie par  $\Psi_{n,s,k}(\sigma) = \eta$ .

**4.** Soit  $\eta \in \mathcal{B}(n, k)$  et soit  $\xi = \text{Opp}(\eta)$ .

a. Vérifier que le nombre  $m$  d'entiers  $j \geq 3$  tels que  $\xi(j) > \xi(2)$  vérifie  $m \geq k$ . On note  $j_1, \dots, j_m$  ces entiers, avec  $\xi(j_1) > \xi(j_2) \dots > \xi(j_m)$ .

b. On pose  $u_2 = \xi(j_k) - \frac{1}{2} > \xi(2)$ . Montrer que le nombre  $m'$  d'entiers  $i \geq 2$  tels que  $\xi(i) < u_2$  vérifie  $m' \geq s$ . On les note  $i_1, \dots, i_{m'}$ , avec  $\xi(i_1) > \dots > \xi(i_{m'})$  et on pose  $u_1 = \xi(i_s) - \frac{1}{2}$ .

c. En considérant l'application  $\theta$  définie par

$$\theta(1) = u_1, \quad \theta(2) = u_2, \quad \theta(3) = \xi(2), \dots, \theta(n+2) = \xi(n+1),$$

montrer l'existence de  $\sigma \in \mathcal{C}(n, s, k)$  vérifiant  $\Psi_{n,s,k}(\sigma) = \eta$ .

d. Montrer que  $\Psi_{n,s,k}$  est bijective.

**5.** Donner un procédé de calcul de  $\text{Card MD}(n)$  par récurrence.

## Partie IV

**1.** On note  $E_n = \text{Card MD}(n)$  et  $\mathcal{I}_n$  l'ensemble des nombres impairs de  $\Delta_n$ .

a. Démontrer que pour  $n \geq 1$  :  $E_{n+1} = \sum_{i \in \mathcal{I}_{n+1}} \binom{n}{i-1} E_{i-1} E_{n+1-i}$ .

b. En déduire que pour  $n \geq 1$  :  $2E_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} E_i E_{n-i}$ .

**2.** a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{E_n}{n!} x^n$  est  $\geq 1$ .

b. Pour  $|x| < 1$ , on note  $f(x)$  la somme de la série entière précédente. Démontrer que

$$2f'(x) = f^2(x) + 1, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

c. En déduire que  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos x} + \tan x$ ,  $\forall x \in ]-1, 1[$ , puis que

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

**3.** Pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f^{(n)}$  la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$ , avec la convention  $f^{(0)} = f$ . On note  $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'unique application linéaire telle que

$$D(X^0) = 0, \quad D(X^k) = k(X^{k-1} + X^{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $D^n$  la composée d'ordre  $n$  de  $D$ , avec la convention  $D^0 = \text{Id}$ .

a. Soit  $P_n = D^n(X)$ . Démontrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

b. Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , soit  $V_m$  le sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  engendré par  $\{X, \dots, X^m\}$ . Soit  $\iota_m$  l'injection canonique de  $V_m$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et soit  $\tau_m : \mathbb{R}[X] \rightarrow V_m$  la projection linéaire définie par  $\tau_m(X^k) = X^k$  si  $k \in \{1, \dots, m\}$  et  $\tau_m(X^k) = 0$  sinon. On pose enfin  $\delta_m = \tau_m \circ D \circ \iota_m$ . Vérifier que  $\delta_m$  est une application linéaire de  $V_m$  dans  $V_m$  et écrire sa matrice  $M_m$  dans la base  $(X, \dots, X^m)$ .

**4.** Soit  $C_m \in \mathbb{R}[Y]$  le polynôme caractéristique de  $M_m$ .

a. Vérifier que  $C_1 = Y$ ,  $C_2 = Y^2 - 2$  et

$$C_m = YC_{m-1} - m(m-1)C_{m-2}, \quad m \geq 3.$$

b. Calculer le déterminant de  $M_m$ .

c. Démontrer que, si  $e_m$  désigne la partie entière de  $m/2$ ,

$$C_m = \sum_{k=0}^{e_m} (-1)^k c_{m,k} Y^{m-2k},$$

avec

$$c_{m,0} = 1; \quad c_{m,k} = \sum_{(a_1, \dots, a_k) \in J_k(m)} a_1(a_1+1)a_2(a_2+1) \cdots a_k(a_k+1), \quad 1 \leq k \leq e_m;$$

où  $J_k(m)$  désigne l'ensemble des  $k$ -uples d'entiers de  $\{1, \dots, m-1\}$  tels que  $a_i+2 \leq a_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

**5.** Dans la suite de cette partie,  $p$  désigne un entier premier impair fixé. On pourra utiliser sans démonstration le théorème de Wilson :

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On note  $\mathbb{Z}_p$  le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et si  $a \in \mathbb{Z}$ , on note  $\bar{a}$  sa classe dans  $\mathbb{Z}_p$ . Pour  $1 \leq k \leq e_p$ , on note  $\mathcal{P}_k$  l'ensemble des parties  $P$  à  $k$  éléments de  $\mathbb{Z}_p$  vérifiant la condition

$$\forall \alpha \in P, \quad \alpha + 1 \notin P.$$

a. Pour  $P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \mathcal{P}_k$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ , on pose  $\tau_\alpha(P) = \{\alpha_1 + \alpha, \dots, \alpha_k + \alpha\}$ . Montrer que l'application  $\alpha \mapsto \tau_\alpha$  est un morphisme de  $(\mathbb{Z}_p, +)$  dans le groupe des bijections de  $\mathcal{P}_k$ .

b. On définit une relation  $\mathcal{R}$  entre éléments de  $\mathcal{P}_k$  de la manière suivante : si  $A, B$  sont dans  $\mathcal{P}_k$ ,  $A \mathcal{R} B$  si et seulement si il existe  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$  tel que  $B = \tau_\alpha(A)$ . Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}_k$ , et que chaque classe d'équivalence est de cardinal  $p$  et admet un représentant de la forme  $\{\bar{0}, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k\}$  avec  $0 < a_2 < \dots < a_k < p$ . On choisit un tel représentant pour chaque classe et on note  $R$  l'ensemble des représentants ainsi choisis.

c. Démontrer que

$$\overline{c_{p-1,k}} = \sum_{\{0, \dots, a_k\} \in R} \sum_{1 \leq \ell \leq p-1} \overline{\ell} \overline{\ell+1} \overline{a_2+\ell} \overline{a_2+\ell+1} \cdots \overline{a_k+\ell} \overline{a_k+\ell+1}.$$

6. a. Pour  $q \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_q = \sum_{\ell=0}^{p-1} \ell^q$ . Observer que  $p$  divise  $\sum_{\ell=0}^{p-1} ((\ell+1)^{q+1} - \ell^{q+1})$  et en déduire par récurrence que  $p$  divise  $S_q$  pour  $0 \leq q \leq p-2$ .

b. Soient  $Z = [z_{ij}]$  et  $Z' = [z'_{ij}]$  deux matrices carrées d'ordre  $N$  à éléments dans  $\mathbb{Z}$ . On définit la relation  $Z \equiv Z' [p]$  par  $z_{ij} \equiv z'_{ij} [p]$  pour  $1 \leq i, j \leq N$ . Démontrer que

$$(M_{p-1})^{(p-1)} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \text{Id} \quad [p].$$

c. Que peut-on dire d'un polynôme  $Q$  à coefficients entiers tel que  $Q(M_{p-1}) \equiv 0 [p]$  ?

7. On rappelle que  $\overline{E}_n$  désigne la classe de  $E_n = \text{Card MD}(n)$  dans  $\mathbb{Z}_p$ .

a. Montrer que  $E_{2n+1} \equiv u_{2n} [p]$ , où  $u_m$  est le coefficient sur le terme  $X$  de la décomposition de  $\delta_{p-1}^m(X)$  dans la base  $(X, \dots, X^{p-1})$ .

b. Démontrer que la suite  $(\overline{E}_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique, de période minimale  $(p-1)/2$  si  $p \equiv 1 [4]$  et de période minimale  $(p-1)$  si  $p \equiv 3 [4]$ .

c. Indiquer les modifications à apporter aux questions précédentes pour montrer un résultat analogue pour la suite  $(\overline{E}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Partie V

On note  $\widehat{S}$  l'ensemble des  $f \in S_*$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Dans cette partie, on dira simplement « minimum » pour « minimum relatif » et « maximum » pour « maximum relatif ». On note  $\text{Mi}(f)$  l'ensemble des minimums de  $f$  et  $\text{Ma}(f)$  l'ensemble des maximums de  $f$ , donc  $E(f) = \text{Mi}(f) \cup \text{Ma}(f)$ .

1. Soit  $f \in \widehat{S}$ .

a. Vérifier que  $\text{Card Mi}(f) = \text{Card Ma}(f)$  et que pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(-\infty, y]$  est la réunion d'intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints. On note  $\mathcal{I}(y)$  leur ensemble.

b. Montrer que pour tout élément  $M$  de  $\text{Ma}(f)$ , il existe un unique couple  $(I_-(M), I_+(M))$  d'éléments de  $\mathcal{I}(f(M))$  tels que  $M = \text{Sup } I_-(M) = \text{Inf } I_+(M)$ .

c. Montrer que  $I_+(M)$  est de la forme  $]M, b[$  avec  $b \in ]M, +\infty[$  vérifiant  $f(b) = f(M)$ . Que peut-on dire de  $I_-(M)$  ?

**2.** Soit  $f \in \widehat{S}$ . On note  $\text{Ma}(f) = \{M_1, \dots, M_\mu\}$  avec  $f(M_1) < f(M_2) < \dots < f(M_\mu)$ . Montrer qu'il est possible de définir une bijection  $\Phi$  de  $\text{Ma}(f)$  dans  $\text{Mi}(f)$  par récurrence de la manière suivante :

- $\Phi(M_1)$  est le minimum de  $f$  contenu dans  $I_-(M_1) \cup I_+(M_1)$  dont l'image par  $f$  est la plus grande des images par  $f$  des minimums contenus dans  $I_-(M_1) \cup I_+(M_1)$  ;
- pour  $2 \leq k \leq \mu$ ,  $\Phi(M_k)$  est le minimum de  $f$  contenu dans  $I_-(M_k) \cup I_+(M_k)$  dont l'image par  $f$  est la plus grande des images par  $f$  des minimums contenus dans  $I_-(M_k) \cup I_+(M_k)$  et n'appartenant pas à  $\Phi(\{M_1, \dots, M_{k-1}\})$ .

On dira que  $\Phi$  est la *bijection associée à  $f$* .

**3.** Soit  $f \in \widehat{S}$ . On fixe  $R \in \mathbb{R}^{*+}$  tel que  $E(f) \subset ]-R, R[$  et on note  $\widehat{S}(f, R)$  l'ensemble des fonctions  $g$  de  $\widehat{S}$  qui coïncident avec  $f$  sur le complémentaire de  $] -R, R [$ . Pour  $g \in \widehat{S}(f, R)$ , on pose

$$\|g - f\|_R = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)|.$$

- a. Montrer qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que si  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifie  $\|g - f\|_R < \varepsilon_0$ ,

$$\text{Card } E(g) \geq \text{Card } E(f).$$

b. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier pair  $\mu \geq E(f)$ , il existe  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifiant  $\|g - f\|_R < \varepsilon$  et telle que  $\text{Card } E(g) = \mu$ .

**4.** Soit  $f \in \widehat{S}$  et soit  $\Phi$  sa bijection associée. Le *code* de  $f$  est l'ensemble

$$C(f) = \{f(M) - f(\Phi(M)) \mid M \in \text{Ma}(f)\} \cup \{0\}.$$

On se propose dans la suite de cette partie de montrer que le code varie continûment avec la fonction, dans un sens approprié.

On fixe  $f \in \widehat{S}$  et un réel  $R > 0$  comme dans la question précédente, dont on conserve les notations. On fixe  $\varepsilon > 0$ .

a. On pose

$$\gamma_0(f, R) = \frac{1}{2} \min \left( \min_{(x, x') \in E(f)^2, x \neq x'} |x - x'|, R - \max E(f), \min E(f) + R \right).$$

Vérifier que  $\gamma_0(f, R) > 0$  et vérifier qu'il existe

$$\gamma \in ]0, \gamma_0(f, R)[ \tag{1}$$

tel que

$$\forall x \in E(f), \quad |f(x) - f(x - \gamma)| < \varepsilon/4, \quad |f(x) - f(x + \gamma)| < \varepsilon/4. \tag{2}$$

Dans la suite de cette question on suppose que  $\gamma$  est ainsi choisi.

Pour une fonction  $h \in S$  et pour tout élément  $x \in E(h) \setminus \{\max E(h)\}$ , on appellera *successeur de  $x$  pour  $h$*  le plus petit élément de  $E(h)$  qui est strictement supérieur à  $x$ .

b. Soit  $\overline{m} \in \text{Mi}(f) \setminus \{\max E(f)\}$  et soit  $\overline{M} \in \text{Ma}(f)$  le successeur de  $\overline{m}$  pour  $f$ . Montrer l'existence de  $\alpha_0 > 0$  tel que pour  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifiant  $\|g - f\|_R < \alpha_0$ , pour tout maximum  $M$  de  $g$  dans  $[\overline{m} - \gamma, \overline{M} - \gamma]$ , le successeur de  $M$  pour  $g$  est dans  $[\overline{m} - \gamma, \overline{M}]$ .

c. On conserve les hypothèses de la question précédente sur  $\bar{m}$  et  $\bar{M}$ . Montrer l'existence de  $\alpha_1 \in ]0, \alpha_0[$  tel que pour  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifiant  $\|g - f\|_R < \alpha_1$ , pour tout maximum  $M$  de  $g$  dans  $[\bar{m} - \gamma, \bar{M} - \gamma]$ , le successeur  $m$  de  $M$  pour  $g$  vérifie  $g(M) - g(m) < \varepsilon$ .

d. Soit  $\bar{M} \in \text{Ma}(f) \setminus \{\text{Max } E(f)\}$  et soit  $\bar{m} \in \text{Mi}(f)$  le successeur de  $\bar{M}$  pour  $f$ . Montrer brièvement l'existence de  $\alpha_2 > 0$  tel que pour  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifiant  $\|g - f\|_R < \alpha_2$ , pour tout minimum  $m$  de  $g$  dans  $[\bar{M} - \gamma, \bar{m} - \gamma]$ , le successeur  $M$  de  $m$  pour  $g$  vérifie  $g(M) - g(m) < \varepsilon$ .

e. Étudier sans démonstration le cas des maximums et minimums contenus dans les intervalles  $[-R, \text{Min } E(f) - \gamma]$  ou de la forme  $[\text{Max } E(f) - \gamma, R]$ .

**5.** On fixe  $f \in \widehat{S}$ , de bijection associée  $\Phi$ , et un réel  $R > 0$  comme dans la question précédente.

a. Montrer qu'il existe  $\varepsilon_0$  tel que si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et si  $\gamma > 0$  vérifie (1) et (2), il existe  $\alpha > 0$  tel que pour toute fonction  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifiant  $\|g - f\|_R < \alpha$ , pour tout couple  $(m, M) \in \text{Mi}(f) \times \text{Ma}(f)$  vérifiant  $m = \Phi(M)$ , alors

$$m_g = \Phi_g(M_g)$$

où

$$g(m_g) = \underset{x \in [m-\gamma, m+\gamma]}{\text{Min}} g(x), \quad g(M_g) = \underset{x \in [M-\gamma, M+\gamma]}{\text{Max}} g(x),$$

et où  $\Phi_g$  est la bijection associée à  $g$ .

b. Pour une partie finie  $C$  de  $\mathbb{R}$  et un réel  $x$ , on pose  $d_C(x) = \text{Min} \{ |x - y| \mid y \in C\}$ . Si  $C$  et  $C'$  sont deux parties finies de  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\mathcal{H}(C, C') = \text{Max} \left( \underset{x' \in C'}{\text{Max}} d_C(x'), \underset{x \in C}{\text{Max}} d_{C'}(x) \right).$$

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $g \in \widehat{S}(f, R)$  vérifie  $\|g - f\|_R < \alpha$ , alors  $\mathcal{H}(C(g), C(f)) < \varepsilon$ .

\* \* \*

**Fin du sujet**

