

# SYSTÈMES LINÉAIRES

## Exercice 1. [o]

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \quad \quad + z = -1 \\ x + \quad y + z = 0 \\ x - 2y + z = -6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x \quad \quad - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right.$$

## Exercice 2. [o]

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres  $u, v, w, t$  pour que le système suivant admette des solutions, puis le résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 6z = u \\ 3x + y + 3z = v \\ 6x + 6y + z = w \\ 7x + 9y + 7z = t \end{array} \right.$$

## Exercice 3. [o]

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{c} = \frac{1}{e} \\ ab = c \\ \frac{a}{b^2c} = e^{-6} \end{array} \right.$$

## Exercice 4. [★]

Résoudre le système (S)  $\left\{ \begin{array}{l} (4-a)x + 4y - 4z = 0 \\ -x + (5-a)y - 3z = 0 \\ x + 7y - (5+a)z = 0 \end{array} \right.$  en discutant suivant  $a \in \mathbb{R}$ .

## Exercice 5. [★]

Résoudre le système (S)  $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 2y + az = b \end{array} \right.$  en discutant suivant  $a, b \in \mathbb{R}$ .

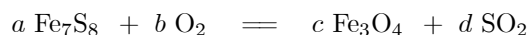
## Exercice 6. [★]

Trouver le polynôme  $P$ , de degré inférieur ou égal à 3, qui satisfait les égalités  $P(0) = 0$  et  $P(X) - P(X-1) = X^2$ .

Retrouver ainsi l'expression de la deuxième somme d'Euler  $E_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

## Exercice 7. [o] (Oxydation d'un sulfure de fer)

Équilibrer les coefficients stœchiométriques  $a, b, c, d$  de l'équation d'oxydation d'un sulfure de fer (qui produit un oxyde de fer et de l'anhydride sulfureux) :



**Exercice 8.** [★]

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ . On se donne  $n$  points dans le plan. Existe-t-il un polygone dont ces  $n$  points soient les milieux ?

**Exercice 9.** [★]

Iznotsobad dit à son fils aîné Izrilybad : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ! Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 112 ans. » À quel âge Iznotsobad est devenu papa ?

**Exercice 10.** [★] (Structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

Dans cet exercice, les systèmes considérés sont à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Rappelons que le système *homogène associé* au système

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

est le système  $(S_h)$  obtenu en annulant le second membre de  $(S)$ , c'est-à-dire

$$(S_h) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

On considère  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$  une solution de  $(S)$ , appelée *solution particulière*. On suppose donc implicitement que  $(S)$  possède au moins une solution.

Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(S)$  est donné par

$$\mathcal{S} = \{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) + (x_1^h, x_2^h, \dots, x_p^h) : (x_1^h, x_2^h, \dots, x_p^h) \text{ est une solution de } (S_h)\}.$$

Autrement dit, toute solution de  $(S)$  est la somme d'une solution particulière et d'une solution du système homogène associé (et réciproquement).