Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Maths
- *NOM Prénom* : AUFFRAY Vincent

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

1. Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
2. Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})^+$ (ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif).
   Montrer qu'il existe $S \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ tq $S^2 = {}^tPP$
3. Que dire de PS^{-1} ?
4. Soit $\begin{array}{cccc} \varphi & : & S_2^{++}(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R}) & \to & GL_2(\mathbb{R})^+ \\ & & (S, O) & \mapsto & OS \end{array}$
   Montrer que $GL_2(\mathbb{R})^+$ est cpa.
5. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $S_M = \{PMP^{-1}, P \in GL_2(\mathbb{R})\}$.
   Montrer que S_M est connexe par arcs ssi M est diagonalisable.

Exercice 2 :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,
$A = \{S \in S_2(\mathbb{R}), sp(S) = \{\lambda_1, \lambda_2\}\}$
Localiser les diagonales (vues comme des points de $\mathbb{R}^2$) des éléments de A, i.e décrire $d(A)$ où

$$\begin{array}{cccc} d & : & M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a, d) \end{array}$$

Remarques sur l'oral

Pour Le sens iirect dans le 5. de l'exercice 1, on peut remarquer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $N = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ est dans S_M. En considérant

$$\begin{array}{cccc} p & : & M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} & \mapsto & x - y \end{array}$$

et γ un chemin tracé sur S_M reliant M à N, on a $p \circ \gamma(0)$ et $p \circ \gamma(1)$ de signes opposés, donc par TVI il y a une matrice symétrique, donc diagonalisable dans S_M. Ainsi M est diagonalisable.