Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Math Lyon
- *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

Enoncé des exercices

Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement plus grand que 1, soit il existe k tel que $A^k - I_n$ est nilpotente

(Il restait peu de temps après donc il m'a posé des questions connexes...)

Trouver les ordres possibles pour une matrice d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et donner un exemple de matrice pour chaque ordre.

Discussion rapide sur les polynômes cyclotomiques et pourquoi le polynôme caractéristique d'une matrice avec un ordre est forcément un polynôme cyclotomique si l'ordre vaut $3, 4, 6$.

Remarques sur l'oral

Assez frustrant car l'exercice (ou en tout cas quelque chose qui y ressemble) doit se trouver dans le cours pas loin de "trouver les ordres possibles pour une matrice de taille 2...". Il m'a fallu pas mal de temps pour retrouver les arguments, décidant de chercher plutôt que d'employer ma mémoire me faisant manifestement défaut. L'examinateur ne donnait pas d'indices mais des conseils "donne un nom à tes ensembles, ça va t'aider dans ton idée...". Il était sympa et admettait tout le hors-programme qu'on voulait (assez léger ici mais on a eu quelques conversations connexes, notamment sur les sommes de Newton...)

"Voilà, ça c'était l'exercice. Il reste 7 minutes alors on va regarder une question annexe." Du coup pour trouver les matrices de taille 2 entières d'ordre fini, on déroule en regardant la trace et le déterminant. Pour trouver des exemples de matrices, on regarde la matrice compagnon du polynôme caractéristique ça donne un exemple automatiquement. Après il me demande de retrouver le résultat sur les ordres en passant par les polynômes cyclotomtiques. Je dis que les matrices dans le cas $n = 2$ d'ordre fini sont soit pas intéressantes (des symétries ou des identités) soit des matrices cycliques de valeurs propres non entières donc leur polynôme minimal est Φ_m avec m l'ordre, puis on regarde pour quels m on peut avoir $\phi(m) = 2$ ce qui redonne le résultat. Cet échange des dernières minutes était déjà plus fluide.

Comme je l'imaginais, l'une des personnes passant en même temps que moi a pu "rapidement faire ce premier exercice", grâce à une mémoire plus performante...