STRUCTURES ALGÉBRIQUES CORRECTION

Exercice 1

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'anneau $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$.

1. *L'anneau* $\mathbb{Z}^2$ *est-il intègre ?*

   Que nenni ! En effet, on a $(1,0) \times (0,1) = (0,0)$. Donc

   $$\boxed{\text{l'anneau } \mathbb{Z}^2 \text{ n'est pas intègre.}}$$

2. *Soit* I *un idéal de* $\mathbb{Z}^2$. *On pose* $I_1 = \{x \in \mathbb{Z} : (x,0) \in I\}$ *et* $I_2 = \{y \in \mathbb{Z} : (0,y) \in I\}$.

   a) On a $I_1 \subset \mathbb{Z}$.
   On a $0 \in I_1$ car $(0,0) \in I$.
   Soient $x_1, x_2 \in I_1$. Alors $(x_1,0), (x_2,0) \in I$ et donc $(x_1 - x_2, 0) = (x_1,0) - (x_2,0) \in I$, ce qui démontre que $x_1 - x_2 \in I_1$.
   à ce stade, on sait que I_1 est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

   Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_1$. On a $(nx, 0) = (n,0)(x,0) \in I$ puisque $(x,0) \in I$ et I est un idéal de $\mathbb{Z}^2$. Donc $nx \in I_1$. Cela démontre que I_1 est hyperstable.

   Ainsi, I_1 est un idéal de $\mathbb{Z}$.

   De même on démontre que I_2 est un idéal de $\mathbb{Z}$.

   En conclusion,

   $$\boxed{I_1 \text{ et } I_2 \text{ sont des idéaux de } \mathbb{Z}.}$$

   Remarque : Pour traiter la suite, on aurait pu se contenter de démontrer que I_1 *et* I_2 *sont des sous-groupes de* $(\mathbb{Z}, +)$.

   b) *Démontrer que* $I = I_1 \times I_2$.

   On procède par double inclusion.

   - $\subset$ Soit $(x,y) \in I$. Par hyperstabilité de I, on a $(x,y)(1,0) \in I$, c'est-à-dire $(x,0) \in I$, ce qui signifie que $x \in I_1$. De même, on démontre que $y \in I_2$. On a donc $(x,y) \in I_1 \times I_2$. Par conséquent, on a $I \subset I_1 \times I_2$.
   - $\supset$ Soit $(x,y) \in I_1 \times I_2$. On sait alors que $x \in I_1$ et $y \in I_2$, c'est-à-dire $(x,0) \in I$ et $(0,y) \in I$. Il s'ensuit que $(x,y) = (x,0) + (0,y) \in I$. Donc $I \supset I_1 \times I_2$.

   En concusion,

   $$\boxed{I = I_1 \times I_2.}$$

   c) *En conclure qu'il existe* $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $I = (n_1, n_2)\mathbb{Z}^2$.

   On sait que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $I_1 = n_1\mathbb{Z}$ et $I_2 = n_2\mathbb{Z}$.

   Comme $I = I_1 \times I_2$, on a $I = n_1\mathbb{Z} \times n_2\mathbb{Z} = (n_1, n_2)\mathbb{Z}^2$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{les idéaux de } \mathbb{Z}^2 \text{ sont les } (n_1,n_2)\mathbb{Z}^2 \text{ où } (n_1,n_2) \text{ parcourt } \mathbb{N}^2.}$$

3. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose $B_d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y \equiv x\ [d]\}$.*

a) *Préciser B_0 et B_1.*

On a $B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y \equiv x\ [0]\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y = x\}$ donc

$$\boxed{B_0 \text{ est la première bissectrice de } \mathbb{Z}^2.}$$

On a $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y \equiv x\ [1]\} = \mathbb{Z}^2$ donc

$$\boxed{B_1 = \mathbb{Z}^2.}$$

b) *Vérifier que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, B_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.*

Soit $d \in \mathbb{N}$.

On a $B_d \subset \mathbb{Z}^2$.

On a $(1,1) \in B_d$ puisque $1 \equiv 1\ [d]$.

Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in B_d$. On a $y_1 \equiv x_1\ [d]$ et $y_2 \equiv x_2\ [d]$. Il s'ensuit que $y_1 - y_2 = x_1 - x_2\ [d]$ et $y_1y_2 = x_1x_2\ [d]$, ce qui signifie que $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in B_d$ et $(x_1x_2, y_1y_2) \in B_d$, c'est-à-dire $(x_1,y_1) - (x_2,y_2) \in B_d$ et $(x_1,y_1) \times (x_2,y_2) \in B_d$.

Donc B_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } d \in \mathbb{N},\ B_d \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{Z}^2.}$$

c) *Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, qui est différent de B_0. Après avoir justifier l'existence de $d = \min\{n \in \mathbb{N}^* : (0,n) \in B\}$, démontrer que $B = B_d$.*

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* : (0,n) \in B\}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Pour justifier l'existence de son minimum, il suffit donc de démontrer que cet ensemble est non vide.

Comme $B \neq B_0$, il existe $(a,b) \in B$ tel que $a \neq b$.

Comme B est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, on sait que B contient $(1,1)$ (c'est le neutre multiplicatif).

Dès lors, l'élément $(0, b-a) = (a,b) - a(1,1)$ appartient à B.

Ainsi, $\{n \in \mathbb{N}^* : (0,n) \in B\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $(0, b-a)$ ou son opposé $(0, a-b)$), ce qui démontre que

$$\boxed{d = \min\{n \in \mathbb{N}^* : (0,n) \in B\} \text{ existe.}}$$

Pour démontrer que $B = B_d$, on procède par double inclusion.

- $\subset$ Soit $(a,b) \in B$. Comme $(1,1) \in B$, le couple $(0, b-a) = (a,b) - a(1,1)$ appartient aussi à B. Effectuons la division euclidienne de $b - a$ par d. On obtient $b - a = dq + r$ où $0 \leqslant r < d$. Alors $(0, b-a) = (0, dq + r) = q(0,d) + (0,r)$. Comme $(0, b-a)$ et $(0,d)$ appartiennent à B, on en déduit que $(0,r)$ appartient à B. Par minimalité de d dans $\mathbb{N}^*$, cela impose alors que $r = 0$. Donc $b - a = dn$, c'est-à-dire $b \equiv a\ [d]$. Cela démontre que $(a,b) \in B_d$, d'où $B \subset B_d$.
- $\supset$ Soit $(x,y) \in B_d$ de sorte que $y \equiv x\ [d]$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + kd$. Alors $(x,y) = (x, x+kd) = x(1,1) + k(0,d)$. Comme $(1,1)$ et $(0,d)$ appartiennent à B, on en déduit que (x,y) appartient à B. Donc $B_d \subset B$.

En conclusion, on $B = B_d$, ce qui démontre que

$$\boxed{\text{les sous-anneaux de } \mathbb{Z}^2 \text{ sont les } B_d \text{ où } d \text{ parcourt } \mathbb{N}.}$$