Problème n° 5 : Une fonction continue partout et dérivable nulle part

Correction du problème 1 –
Partie I – Prélimiaires

1. Les graphes (y compris celui de f_4) : voir figure 1.

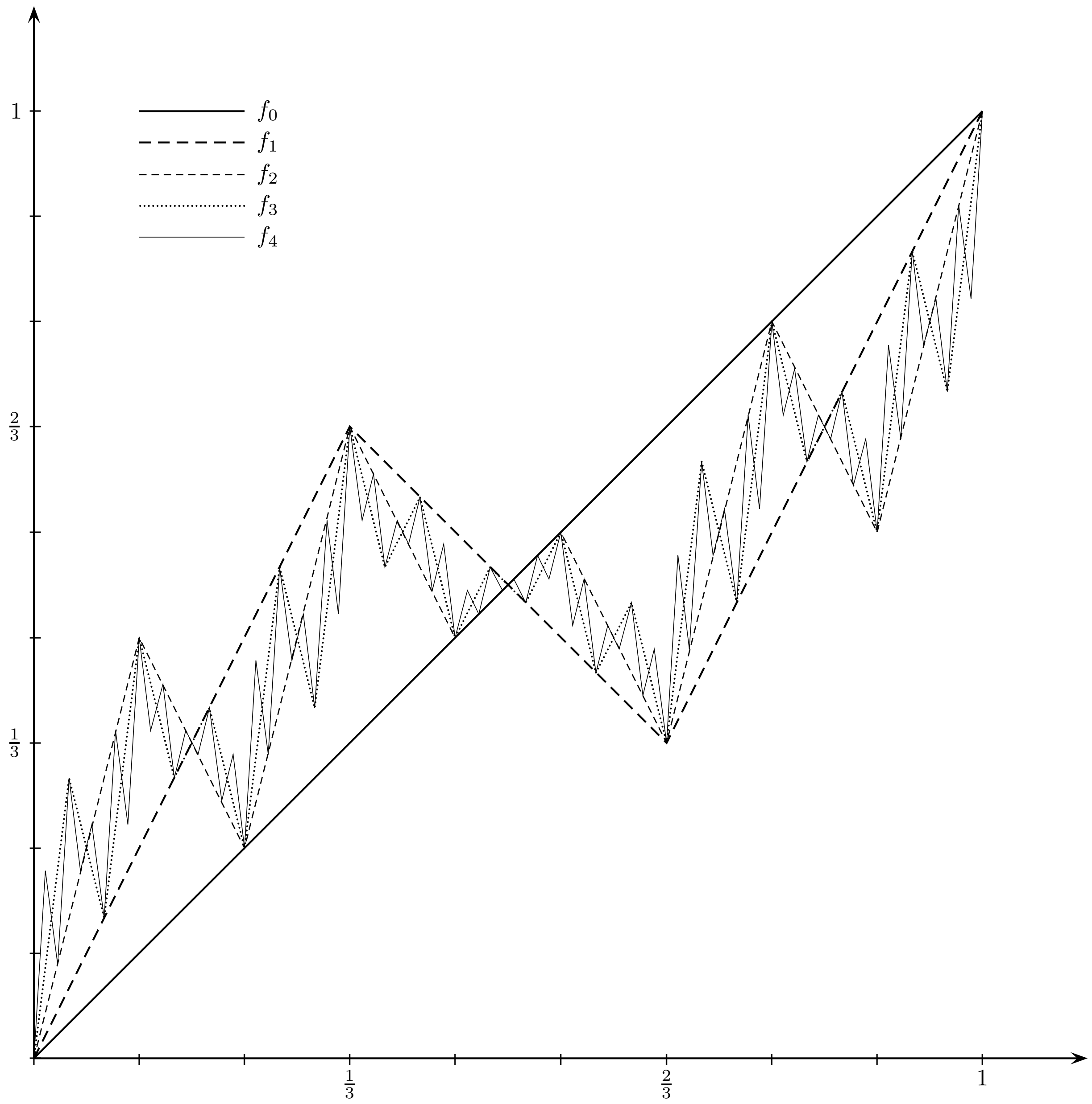

FIGURE 1 – Courbes représentatives de f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.

2. (a) À chaque étape, on subdivise chaque intervalle en 3 : ainsi, on multiplie le nombre de segments par un facteur 3. Par conséquent, $\boxed{\alpha_n = 3^n}$.

   (b) • Pour $n = 0$: $\boxed{p_{0,1} = 1}$.

- Pour $n=1$: $\boxed{p_{1,1}=2,\ p_{1,2}=-1,\ p_{1,3}=2}$
- Pour $n=2$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{2,i}$	4	-2	4	-2	1	-2	4	-2	4

- Pour $n=3$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p_{2,i}$	8	-4	8	-4	2	-4	8	-4	8	-4	2	-4	2	-1	2

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
-4	2	-4	8	-4	8	-4	2	-4	8	-4	8

(c) Pour tout $k \in [\![1,3^n]\!]$,

$$\boxed{\begin{cases} p_{n+1,3k-2} = 2p_{n,k} \\ p_{n+1,3k-1} = -p_{n,k} \\ p_{n+1,3k} = 2p_{n,k} \end{cases}}$$

Cela provient directement de la description de f_n. Cela peut se dire sans plus de justification. Si vous voulez des justifications, en voilà, pour $p_{n+1,3k-2}$ (les autres à l'avenant) :

$$p_{n+1,3k-2} = \frac{f_{n+1}(\frac{3k-2}{3^{n+1}}) - f_{n+1}(\frac{3k-3}{3^{n+1}})}{\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{f_n(\frac{3k-1}{3^{n+1}}) - f_n(\frac{k-1}{3^n})}{\frac{1}{3^{n+1}}} = 2\cdot\frac{f_n(\frac{3k-1}{3^{n+1}}) - f_n(\frac{k-1}{3^n})}{\frac{2}{3^{n+1}}} = 2p_{n,k},$$

car f_n est linéaire sur $\left[\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}\right]$, donc sur $\left[\frac{k-1}{3^n}, \frac{3k-1}{3^{n+1}}\right]$, de pente $p_{n,k}$.

(d) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\boxed{\max\limits_{j\in[\![1,3^n]\!]}(p_{n,j}) = 2^n \text{ et } \min\limits_{j\in[\![1,3^n]\!]}(p_{n,j}) = -2^{n-1}}$.

On devine cette propriété grâce aux tableaux de valeurs précédents.

Les tableaux de valeur précédents montrent que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée.

- Soit $k \in [\![1,3^{n+1}]\!]$, et soit $j = E\left(\frac{k+2}{3}\right)$. Alors la relation de la question précédente amène :
  - $*$ si $p_{n,j} \geqslant 0$,

$$-2^n = -\max(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) \leqslant -p_{n,j} \leqslant p_{n+1,k} \leqslant 2p_{n,j} \leqslant 2\max(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) = 2^{n+1},$$

  - $*$ si $p_{n,j} \leqslant 0$,

$$-2^n = 2\min(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) \leqslant 2p_{n,j} \leqslant p_{n+1,k} \leqslant -p_{n,j} \leqslant -\min(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) = 2^{n-1} \leqslant 2^{n+1},$$

  Ainsi, pour tout $k \in [\![1,3^{n+1}]\!]$, $-2^n \leqslant p_{n+1,k} \leqslant 2^{n+1}$
- De plus, soit j réalisant le maximum de $p_{n,j}$, c'est-à-dire $p_{n,j} = 2^n$. Alors $p_{n+1,3j} = 2^{n+1}$
- Soit j réalisant le minimum de $p_{n,j}$, c'est-à-dire $p_{n,j} = -2^{n-1}$. Alors $p_{n+1,3j} = -2^n$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié puisque -2^n et 2^{n+1} encadrent les valeurs de $p_{n+1,k}$ et sont atteintes.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Remarquez que ceci n'est bien sûr valable que pour $n \geqslant 1$ et pas $n = 0$.

(e) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $\boxed{p_{n,i} \text{ est positif si } i \text{ est impair et négatif si } i \text{ est pair}}$.

$\mathcal{Q}(0)$ est trivialement vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Soit $k \in [\![1,3^n]\!]$. D'après la question (c), on a alors :

- Si k est pair, alors $3k-2$ et $3k$ sont pairs, et d'après la question c, $p_{n+1,3k-2}$ et $p_{n+1,3k}$ sont du signe de $p_{n,k}$ à savoir négatif (hypothèse de récurrence). D'autre part, $3k-1$ est impair, et $p_{n+1,3k-1}$ est du signe opposé de celui de $p_{n,k}$ à savoir positif.
- Si k est impair, alors $3k-2$ et $3k$ sont impairs, et $p_{n+1,3k-2}$ et $p_{n+1,3k}$ sont du signe de $p_{n,k}$ à savoir positif (hypothèse de récurrence). D'autre part, $3k-1$ est pair, et $p_{n+1,3k-1}$ est du signe opposé de celui de $p_{n,k}$ à savoir négatif.

Cela prouve bien $\mathcal{Q}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$. On note $I_{n,k} = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$.

(a) On montre d'abord que $f_{n+1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$:

On note $I_{n,k} = [a, b]$, et c et d les deux réels $c = a + \frac{b-a}{3}$ et $d = a + 2 \cdot \frac{b-a}{3}$. Ainsi, $a < c < d < b$, et $[a, c], [c, d], [d, b]$ est une subdivision de $[a, b]$ en trois intervalles de taille égale. On suppose pour se fixer les idées que f_n est croissante sur $I_{n,k}$ (démonstration semblable dans le cas inverse). Ainsi, $f(a) < f(c) < f(d) < f(b)$. Alors, par définition de le suite de fonctions (f_n),

$$f_{n+1}([a,c]) = [f_n(a), f_n(d)], \qquad f_{n+1}([c,d]) = [f_n(c), f_n(d)] \qquad f_{n+1}([d,b]) = [f_n(c), f_n(b)].$$

Par conséquent,

$$f_{n+1}(I_{n,k}) = [f_n(a), f_n(d)] \cup [f_n(c), f_n(d)] \cup [f_n(c), f_n(b)] = [f_n(a), f_n(b)].$$

Ainsi, f_n étant croissante continue sur $I_{n,k}$, $\boxed{f_{n+1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})}$.

On montre alors la propriété générale par récurrence :

Soit pour tout $\ell \geqslant 0$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}(\ell)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, 3^n - 1]\!],\quad f_{n+\ell}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$

Initialisation : Pour $\ell = 0$, c'est trivial. Pour $\ell = 1$, on vient de le faire.

Hérédité : Soit $\ell > 1$, et supposons que $\mathcal{P}(\ell - 1)$ est vérifiée. Montrons que $\mathcal{P}(\ell)$ l'est aussi. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, 3^n]\!]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$. Or

$$f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}),$$

et d'après le premier cas étudié, pour tout $j \in [\![3^{\ell-1}k, 3^{\ell-1}(k+1) - 1]\!]$,

$$f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}) = f_{n+\ell}(I_{n+\ell-1,j}).$$

Ainsi,

$$f_{n+\ell}(I_{n,k}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell}(I_{n+\ell-1,j}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}) = f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k}).$$

cela achève de montrer $\mathcal{P}(\ell)$

D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $\ell \geqslant 0$, $\boxed{f_{n+\ell}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})}$.

(b) Montrons par récurrence sur ℓ la propriété suivante :

$\mathcal{Q}(\ell)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$ tel que $p_{n,k+1} > 0,\ \forall x \in I_{n+1,3k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x)$.

Initialisation : Trivial pour $\ell = 0$. Assez immédiat pour $\ell = 1$, car la pente (positive) de f_{n+1} sur $I_{n+1,3k}$ est le double de celle de f_n, et leur valeur est la même au bord gauche de cet intervalle.

Hérédité : Soit $\ell > 1$, et supposons que $\mathcal{Q}(k)$ est vérifiée pour tout $k < \ell$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$ tel que $p_{n,k+1} > 0$. On subdivise $I_{n+1,3k}$ en trois : $I_{n+1,3k} = I_{n+2,9k} \cup I_{n+2,9k+1} \cup I_{n+2,9k+2}$

- Étude sur $I_{n+2,9k}$:
  $p_{n+1,3k+1} = 2p_{n,k}$ et est donc positif. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence : pour tout $x \in I_{n+2,9k}$ $f_{n+\ell}(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. De plus, d'après $\mathcal{Q}(1)$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ sur $I_{n+2,9k} \subset I_{n+1,3k}$. Ainsi :

$$\forall x \in I_{n+2,9k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x).$$

- Étude sur $I_{n+2,9k+1}$:
  La fonction f_{n+2} est décroissante sur $I_{n+2,9k+1}$. Ainsi, pour tout $x \in I_{n+2,9k+1}$,

$$f_{n+2}(x) \qquad \geqslant \qquad f_{n+2}\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) \qquad = \qquad f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right).$$

Cette dernière égalité se vérifie sur les graphes, et se montre facilement par la définition des f_n.
Or, d'après la question précédente, $f_{n+\ell}(I_{n+2,9k+1}) = f_{n+2}(I_{n+2,9k+1})$, donc pour tout $x \in I_{n+2,9k+1}$,

$$f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) \geqslant f_n(x),$$

la dernière inégalité résultant de la croissance de f_n. Ainsi :

$$\forall x \in I_{n+2,9k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x).$$

- Étude sur $I_{n+2,9k+2}$:
Enfin, la fonction f_{n+2} est croissante sur $I_{n+2,9k+2}$, de pente $p_{n+2,9k+3} = 2p_{n+1,3k+1} = 4p_{n,k+1}$. Ainsi, pour tout xß$I_{n+2,9k+2}$,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= f_{n+2}\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) + 4\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \\ &= f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) + 4\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \qquad \text{(d'après e point précédent)} \\ &= f_n(x) + 3\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \geqslant f_n(x). \end{aligned}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence au rang $\ell - 2$ sur l'intervalle $I_{n+2,9k+2}$ sur lequel f_{n+2} est croissante :

$$\forall x \in I_{n+2,9k+2}, f_{n+\ell}(x) \geqslant f_{n+2}(x) \geqslant f_n(x).$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in I_{n,3k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x)}$, ce qui est $\mathcal{P}(\ell)$.
Le principe de récurrence nous permet alors de dire que cette propriété est vraie pour tout $\ell \geqslant 0$.

(c) Aidons-nous d'un dessin.

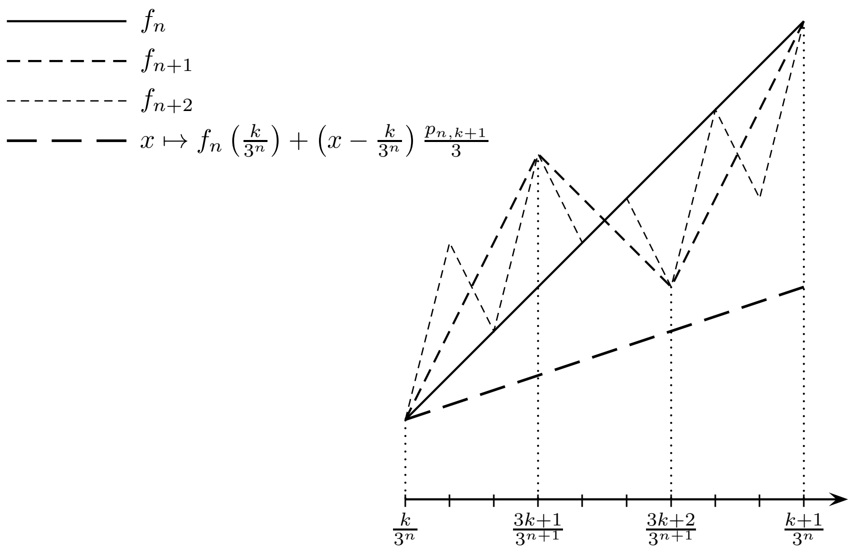

Figure 2 – Sur $I_{n,k}$.

D'après la question 3, pour tout $m > n$,

$$f_m\left(\left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right]\right) = f_{n+1}\left(\left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right]\right) = \left[f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right), f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)\right].$$

De même, pour tout $m > n$,

$$f_m\left(\left[\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) = f_{n+1}\left(\left[\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) = \left[f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right), f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right].$$

Ainsi, pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$, et tout $m > n$, $f_m(x) \geqslant f_n\left(\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}\right)$. Cela reste tricialement vrai pour $m = n$. Or, la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}$ est croissante sur $I_{n,k}$. On en déduit que pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$,

$$f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} \leqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(\frac{k+1}{3^n}-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\frac{1}{3^{n+1}}p_{n,k+1} = f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$, et tout $m \geqslant n$,

$$f_m(x) \geqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_m\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}.$$

Il reste à montrer que cette inégalité reste vraie sur $I_{n+1,3k}$. Cela résulte de la question précédente. En effet, puisque $p_{n,k+1} \geqslant 0$, pour tout $m \geqslant n$ et tout $x \in I_{n+1,3k}$,

$$f_m(x) \geqslant f_n(x) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)p_{n,k+1} \geqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_m\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in I_{n,k}$, et tout entier $m \geqslant n$,

$$\boxed{f_m(x) - f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) \geqslant \left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}}.$$

Voilà, le plus technique est fait.

(d) Dans le cas où $p_{n,k+1}$ est négatif :

i. pour tout $x \in I_{n+1,3k}$ et tout $m \geqslant n$, $\boxed{f_m(x) \leqslant f_n(x)}$.

ii. pour tout $x \in I_{n,k}$, et tout $m \geqslant n$, $\boxed{f_m(x) - f_m\left(\dfrac{k}{3^n}\right) \leqslant \left(x-\dfrac{k}{3^n}\right)\dfrac{p_{n,k+1}}{3}.}$

Partie II – Étude de la fonction limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Existence de la fonction limite f.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$.

- Si $x \in I_{n+1,3k}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+2p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)-\left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{k}{3^n}\right| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\left|\frac{3k+1}{3^{n+1}}-\frac{k}{3^n}\right| = |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

l'avant-dernière inégalité provenant de la question I-2d.

- Si $x \in I_{n+1,3k+1}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)-p_{n,k+1}\left(x-\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right)\right)-\left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3^{n+1}}p_{n,k+1}-p_{n,k+1}\left(x-\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right)-p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right| = |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{2k+1}{3^n}\right|.\end{aligned}$$

Cette dernière expression atteint son maximum aux deux points $\frac{3k+1}{3^{n+1}}$ et $\frac{3k+2}{3^{n+1}}$. On obtient :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- Si $x \in I_{n+1,3k+2}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)-2p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)-\left(f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)-p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{k+1}{3^n}\right| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\boxed{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

(b) Soit $x \in [0,1]$. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car les termes de la somme sont positifs) et

$$\sum_{k=0}^{n} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Ainsi, sa somme partielle étant croissante et majorée, la série $\sum |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ est convergente. D'après le résultat admis, $\sum (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est convergente.
Par télescopage, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une limite finie } f(x)}$.

(c) Pour tout $m \geqslant n$, $f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$. Ainsi, en passant à la limite : $\boxed{f\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)}$.

2. Continuité de f

(a) La suite $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Par définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geqslant n_0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$. Tout entier $n \geqslant n_0$ répond donc à la question posée.

(b) Par définition de la partie entière, $\lfloor 3^n x_0 \rfloor \leqslant 3^n x_0 < \lfloor 3^n x_0 \rfloor + 1$, donc $\alpha \leqslant 3^n x_0 < \alpha + 1$, puis

$$\boxed{\frac{\alpha}{3^n} \leqslant x_0 < \frac{\alpha+1}{3^n}}.$$

(c) Cela résulte de ce que pour tout $m \geqslant n$, $f_m(I_{n,\alpha}) = f_n(I_{n,\alpha})$. Or, f_n est de pente au maximum 2^n (en valeur abolue), sur l'intervalle $I_{n,\alpha}$ de longueur $\frac{1}{3^n}$. Ainsi, $f_n(I_{n,\alpha})$ (et donc $f_m(I_{n,\alpha})$) est un intervalle de longueur au plus $\frac{2^n}{3^n}$: pour tout $x, y \in I_{n,\alpha}$,

$$\boxed{|f_m(x) - f_m(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

En particulier, cela est vrai pour x_0 et y.

(d) On passe à la limite dans l'inégalité de la question précédente lorsque m tend vers $+\infty$: pour tout $y \in I_{n,\alpha}$,

$$|f(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon.$$

De plus, si $x_0 = \frac{\alpha}{3^n}$ (x_0 est au bord de l'intervalle) et $\alpha \neq 0$, un raisonnement similaire amène :

$$|f(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$$

pour tout $y \in I_{n,\alpha-1}$. Par conséquent, soit δ tel que :

- si $x_0 \neq \frac{\alpha}{3^n}$, $\delta = \min\left(x_0 - \frac{\alpha}{3^n}, \frac{\alpha+1}{3^n}\right) > 0$,
- si $x_0 = \frac{\alpha}{3^n}$, $\delta = \frac{1}{3^n}$.

Alors, pour ce choix de δ, pour tout y tel que $|y - x_0| < \delta$ et $y \geqslant 0$, on a $|f(y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f en x_0, pour tout $x_0 \in [0,1[$, y compris en 0 (continuité à droite).

(e) La fonction f admet une symétrie par rapport au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Plus particulièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) + f_n(1-x) = 1$. Cela se montre facilement par récurrence sur n en se servant de la construction de f_n. En passant à la limite, on obtient $f(x) = 1 - f(1-x)$. Alors la continuité en 1 découle de celle en 0.

3. Étude de la monotonie de f.

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point I contient un intervalle $]a,b[$, avec $a < b$. Soit n tel que $\frac{1}{3^{n-1}} < b - a$. Alors l'intervalle $]3^n a, 3^n b[$ est de longueur strictement supérieure à 3, et contient donc au moins 3 entiers consécutifs $k-1$, k et $k+1$. Alors, comme $p_{n,k}$ et $p_{n,k+1}$ sont de signe opposé,

- soit $f_n(\frac{k}{3^n}) > f_n(\frac{k-1}{3^n})$ et $f_n(\frac{k}{3^n}) > f_n(\frac{k+1}{3^n})$; comme pour tout $m \geqslant n$, $f_m(\frac{k}{3^n}) = f_n(\frac{k}{3^n})$, $f_m(\frac{k-1}{3^n}) = f_n(\frac{k-1}{3^n})$, et $f_m(\frac{k-1}{3^n}) = f_n(\frac{k-1}{3^n})$, on en déduit, en passant à la limite, que

$$f(\frac{k}{3^n}) > f(\frac{k-1}{3^n}) \qquad \text{et} \qquad f(\frac{k}{3^n}) > f(\frac{k+1}{3^n});$$

- soit $f_n(\frac{k}{3^n}) < f_n(\frac{k-1}{3^n})$ et $f_n(\frac{k}{3^n}) < f_n(\frac{k+1}{3^n})$ et on en déduit de même que :

$$f(\frac{k}{3^n}) < f(\frac{k-1}{3^n}) \qquad \text{et} \qquad f(\frac{k}{3^n}) < f(\frac{k+1}{3^n});$$

Dans les deux cas, $\boxed{\text{cela contredit la monotonie de } f \text{ sur } I}$.

4. Étude de la dérivabilité de f.

Soit $x \in [0,1[$, et pour tout n, $I_n(x) = I_{n,\alpha_n}$. On note $p_n(x) = p_{n,\alpha_n+1}$ la pente sur $I_n(x)$ de la fonction f_n, affine sur cet intervalle.

(a) Si $p_n(\alpha)$ et $p_{n+1}(\alpha)$ sont de même signe, cela signifie que $I_{n+1}(x)$ est le premier ou le dernier tiers de l'intervalle $I_n(x)$. La description de f_{n+1} en fonction de f_n amène alors $\boxed{p_{n+1}(x) = 2p_n(x)}$.

(b) Premier cas : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. Pour se fixer les idées, supposons ce signe positif (démonstration similaire pour un signe négatif, en s'appuyant sur la question I-3(d)).

Posons pour tout n, $x_n = \dfrac{\beta_n}{3^n}$.

Soit n_0 un tel entier. D'après la question I-3(c), puisque $x \in I_n(x)$, pour tout $m \geqslant n$,

$$f_m(x) - f_m(x_n) \geqslant (x - x_n)\,\frac{p_n(x)}{3},$$

soit, en passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$:

$$f(x) - f(x_n) \geqslant (x - x_n)\,\frac{p_n(x)}{3},$$

. Comme $x - x_n > 0$ (raison pour laquelle on a privilégié la partie entière supérieure), on a :

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \geqslant \frac{p_n(x)}{3} \longrightarrow +\infty.$$

Par le théorème de minoration, il vient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| = +\infty.}$

(c) Deuxième cas : supposons qu'il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n(x) = \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}.$$

En adaptant le raisonnement précédent (en utilisant également I-3(d) pour le cas de pentes négatives), et en remarquant que les pentes sont toutes entières, on obtient :

$$\begin{cases} t_n(x) \geqslant \frac{p_n(x)}{3} \geqslant \frac{1}{3} & \text{si } p_n(x) > 0 \\ t_n(x) \leqslant \frac{p_n(x)}{3} \leqslant -\frac{1}{3} & \text{si } p_n(x) < 0 \end{cases}$$

D'après l'hypothèse faite, chacun des deux cas de figure se produit une infinité de fois, donc, dans la suite $(t_n(x))$, il y aura une infinité de termes $\leqslant -\frac{1}{3}$ et une infinité de termes $\geqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas admettre de limite.

(d) Puisque $x_n \to x$, la non existence d'une limite finie du taux d'accroissement $t_n(x)$ entre x et x_n montre que f n'est pas dérivable en x. Ceci étant vrai pour tout $x \in]0,1]$, f n'est dérivable en aucun point de $]0,1]$. Par symétrie de la courbe par rapport au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on récupère la non dérivabilité (à droite) en 0. Cet argument de symétrie avait déjà été utilisé pour obtenir la continuité en 1 à partir de celle en 0.

Ainsi $\boxed{f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [0,1].}$

Partie III – Résolution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, et plus précisément, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $f_n(I_{n,k_n})$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang n, alors, par construction, cela reste encore le milieu du deuxième des trois segments obtenus en construisant f_{n+1} par subdivision de I_{n,k_n} : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $f_n(I_{n+1,k_{n+1}})$ (puisque $k_{n+1} = 3k_n + 2$).

   De plus, d'après la question I-2e, la pente q_n de f_n sur le segment I_{n,k_n-1} vérifie la relation de récurrence : $q_{n+1} = -q_n$, donc $q_n = (-1)^n q_0$. Comme $q_0 = 1$, on obtient $q_n = (-1)^n$. Ainsi, on obtient :

$$f\left(\frac{k_n}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n}{3^n}\right) = \frac{1}{2} + (-1)^n\left(\frac{k_n}{3^n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (-1)^n\frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

   Cette expression est satisfaisante. On peut aussi remarquer qu'elle vaut $\frac{k_n}{3^n}$ si n est pair et $\frac{k_n+1}{3^n}$ si k_n est impair. On calcule maintenant la pente t_n de f_n sur I_{n,k_n-2} D'après I-2e, on a $t_n = 2q_{n-1}$, donc $t_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$. Par conséquent,

$$f\left(\frac{k_n - 1}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n - 1}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n}{3^n}\right) + 2(-1)^{n-1}\left(\frac{k_n - 1}{3^n} - \frac{k_n}{3^n}\right) = \frac{1}{2} + 3(-1)^n\frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

2. Les deux expressions calculées montrent que $f\left(\frac{k_n - 1}{3^n}\right) - \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{k_n}{3^n}\right) - \frac{1}{2}$ ne sont pas de même signe (et sont non nuls). Comme f est continue, il existe $c_n \in \left]\frac{k_n - 1}{3^n}, \frac{k_n}{3^n}\right[$ tel que $f(c_n) = \frac{1}{2}$, d'après le TVI.

   De plus, ces intervalles sont deux à deux disjoints, car

$$\frac{k_n}{3^n} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} = \frac{3^{n+1} - 3}{2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{k_{n+1} - 1}{3^{n+1}}.$$

   Ainsi, les c_n sont deux à deux distincts : on a bien trouvé une infinité de solutions de l'équation. Une solution particulière : $x = \frac{1}{2}$ (déjà prouvé).