 Samedi 26/09/2020

Devoir Surveillé n° 1 (4h)

Correction du problème 1 – (La série exponentielle)

Questions préliminaires

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On exprime alors :
$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0,$$
donc il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \frac{1}{2}}.$$
Les expressions explicites sont ici suffisamment simple pour qu'on puisse même envisager d'expliciter un n_0 qui connvient en fonction de x, mais c'est inutile.

2. Montrons par récurrence sur $n \geqslant n_0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$.
   - L'initialisation pour n_0 est triviale : l'inégalité se résume dans ce cas à $|u_{n_0}| \leqslant |u_{n_0}|$.
   - Soit $n \geqslant n_0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors, puisque $n \geqslant n_0$,
   $$|u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}| \leqslant \frac{1}{2^{(n+1)-n_0}}|u_{n_0}|.$$
   D'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
   - D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant n_0$,
   $$\boxed{|u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|}.$$

3. On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}| = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Partie I – Somme de la série exponentielle sur $\mathbb{R}_-$

1.
   - L'application exponentielle étant croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,
   $$\boxed{\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^0 = 1}.$$
   - L'application exp étant convexe (de dérivée seconde positive), sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, dont l'équation est $y = x + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$:
   $$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x}.$$
   On pouvait aussi procéder à une étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application S_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynomiale Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi, $\boxed{S_n' = S_{n-1}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,

$$S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x).$$

- Soit $f : x \mapsto S_{2n+2}(x) - \mathrm{e}^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f'(x) = S_{2n+2}'(x) - \mathrm{e}^x = S_{2n+1}(x) - \mathrm{e}^x \leqslant 0,$$

d'après l'hypothèse faite. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Or, $f(0) = 0$, donc $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$, c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad S_{2n+3}(x) \leqslant \mathrm{e}^x}.$$

4. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x).$$

- L'initiation est donnée par la question 1.
- L'hérédité est donnée par la question 3.
- On déduit alors du principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x).}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_-$,

$$S_{2n+1}(x) = S_{2n}(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ainsi, la question précédente amène l'encadrement suivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_-$:

$$\mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x) \leqslant \mathrm{e}^x - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

D'après la troisième question préliminaire,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0,$$

donc, d'après le théorème d'encadrement (utilisé pour chaque valeur fixée de x dans $\mathbb{R}^-$), $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \lim_{n \to +\infty} S_{2n}(x) = \mathrm{e}^x}.$$

6. Puisque, pour $x \in \mathbb{R}_-$ et $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+1}(x) = S_{2n}(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

la question précédente et la troisième question préliminaire amènent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1}(x) = \mathrm{e}^x}.$$

D'après le résultat rappelé dans l'énoncé, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^x} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x}.$$

Partie II – Somme de la série exponentielle sur $\mathbb{R}_+$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall x \in [0, A], \quad S_n(x) \leqslant e^x \leqslant S_n(x) + (e^A - 1)\frac{x^n}{n!}.$$

   - L'initialisation pour $n = 0$ se résume à :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1 \leqslant e^x \leqslant 1 + (e^A - 1) = e^A,$$

   qui provient de la croissance de exp sur l'intervalle $[0, A]$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On définit

   $$f : x \mapsto S_{n+1}(x) - e^x \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto S_{n+1}(x) + (e^A - 1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - e^x,$$

   définies sur $\mathbb{R}_+$. Les applications f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et d'après la question I-2,

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = S_n(x) - e^x \qquad \text{et} \qquad g'(x) = S_n(x) + (e^A - 1)\frac{x^n}{n!} - e^x.$$

   D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g'(x) \geqslant 0.$$

   Donc f est décroissante et g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $f(0) = g(0) = 0$, donc $f \leqslant 0$ et $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{n+1}(x) \leqslant e^x \leqslant S_{n+1}(x) + (e^A - 1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié.
   - Par principe de récurrence, on en déduit que

   $$\boxed{ds\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, A], \quad S_n(x) \leqslant e^x \leqslant S_n(x) + (e^A - 1)\tfrac{x^n}{n!}}.$$

2. On a donc l'encadrement suivant, valable pour tout $x \in [0, A]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x - (e^A - 1)\frac{x^n}{n!} \leqslant S_n(x) \leqslant e^x.$$

Les deux termes encadrant ayant (à x fixé) la même limite e^x lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit du théorème d'encadrement que

$$\forall x \in [0, A], \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = e^x \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in [0, A]$, et ceci pour tout $A > 0$, onn en déduit qu'elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}.$$

Correction du problème 2 – Produits et coproduits dans une catégorie

Partie I – Exemples

1. Catégorie des ensembles
   - Étant donnés deux ensembles C et D, l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}(C, D)$ est bien un sous-ensemble de l'ensemble D^C (il est même égal).
   - L'application id_C est bien un élément de $\mathrm{Hom}(C, C)$ pour tout ensemble C ;
   - La composée d'une application $f \in \mathrm{Hom}(C, D)$ et d'une application $g \in \mathrm{Hom}(D, E)$ est bien une application $g \circ f \in \mathrm{Hom}(C, E)$.

   Ainsi, $\boxed{\textbf{Ens} \text{ est une catégorie.}}$
2. Catégorie des groupes

(a) Soit G un groupe. Supposons que e_1 et e_2 soient tous les deux neutres de G. On a alors :

$$e_1 \times e_2 = e_2$$

car e_1 est un élément neutre, et

$$e_1 \times e_2 = e_1,$$

car e_2 est un élément neutre. On en déduit que $e_1 = e_2$. Donc $\boxed{\text{le neutre est unique}}$.

(b) L'application $g \circ f$ va du groupe G dans le groupe K. On a alors, pour tous $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x \times y) &= g(f(x \times y) \\ &= g(f(x) * f(y)) && \text{(car } f \text{ est un morphisme)} \\ &= g(f(x)) \odot g(f(y)) && \text{(car } g \text{ est un morphisme)} \\ &= g \circ f(x) \odot g \circ f(y). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est un morphisme de groupes.}}$

(c) N'ayant pas de condition particulière à vérifier sur la classe des objets, on doit vérifier les propriétés sur les flèches :

- Soit G et H deux groupes. Par définition, $\mathrm{Hom}(G, H)$ est bien un sous-ensemble de H^G.
- Soit G un groupe. L'application identité id_G vérifie :

  $$\forall (x, y) \in G^2, \quad \mathrm{id}_G(x \times y) = x \times y = \mathrm{id}_G(x) \times \mathrm{id}_G(y).$$

  Ainsi, id_G est bien un morphisme de groupes.
- D'après la question précédente, la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupe, donc on a la propriété de stabilité requise pour la composition des flèches

Ainsi, $\boxed{\textbf{Gr} \text{ est une catégorie.}}$

Partie II – Produits, produits infinis

1. Soit C et C' deux produits directs de A et B, et $p_A : C \to A$, $p_B : C \to B$, $p'_A : C' \to A$ et $p'_B : C' \to B$ les homomorphismes comme dans la définition.
   - Puisque C est un coproduit, en utilisant la définition avec $D = C'$ et $(f_A, f_B) = (p'_A, p'_B)$, il existe (un unique) homomorphisme $f = C' \to C$ tel que $p'_A = p_A \circ f$ et $p'_B = p_B \circ f$:

$$\begin{tikzcd} & & A \\ C' \arrow[urr, "p'_A"] \arrow[r, dotted, "\exists! f"] \arrow[drr, "p'_B"'] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

   - De même, en intervertissant le rôle de C et C', et du fait que C' est aussi un produit de A et B, il existe un unique homomorphisme $f' : C \to C'$ tel que $p_A = p'_A \circ f'$ et $p_B = p'_B \circ f'$:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "p_A"] \arrow[drr, "p_B"'] \arrow[r, dotted, "\exists ! f'"] & C' \arrow[ur, "p'_A"'] \arrow[dr, "p'_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

- On a alors :
$$p_A \circ f \circ f' = p'_A \circ f' = p_A \qquad \text{et} \qquad p_B \circ f \circ f' = p'_B \circ f' = p_B.$$
Ainsi, $f \circ f'$ remplit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "p_A"] \arrow[drr, "p_B"'] \arrow[r, "f \circ f'"] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Or, l'indentité id_C remplit clairement le diagramme ci-dessus, c'est-à-dire vérifie les deux égalités :
$$p_A \circ \mathrm{id}_C = p_A \qquad \text{et} \qquad p_B \circ \mathrm{id}_C = p_B.$$
D'après l'unicité imposée dans la définition d'un produit, on en déduit que $f \circ f' = \mathrm{id}_C$.
- En intervertissant le rôle de f et f' on montre de même que $f' \circ f = \mathrm{id}_{C'}$.
- Ainsi, f et f' sont deux homomorphismes réciproques l'un de l'autre. Cela montre bien qu'ils sont bijectifs et que leur réciproque est un homomorphisme. Ainsi, $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } C \text{ dans } C'}$.

2. On considère C et A tels qu'on puisse trouver f_A surjective. Par exemple $C = A$ et $f_A = \mathrm{id}_A$ convient. On considère f_B quelconque dans $\mathrm{Hom}(A, B)$ (on sait par hypothèse que cet ensemble est non vide). On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \arrow[urr, "\mathrm{id}_A"] \arrow[drr, "f_B"'] \arrow[r, dotted, "f"] & A \sqcap B \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Ainsi, il existe $f : A \to A \sqcap B$ tel que $p_A \circ f = \mathrm{id}_A$ et $p_B \circ f = f_B$. Comme id_A est surjective, $p_A \circ f$ est surjective, et par conséquent, $\boxed{p_A \text{ est surjective}}$.

Un raisonnement similaire montre que $\boxed{p_B \text{ est surjective}}$.

3. Soit A et B deux ensembles. On note $p_A : A \times B \to A$ la projection sur A définie par $(a, b) \mapsto a$ et de même $p_B : A \times B \to B$ la projection sur B. Montrons que $A \times B$ muni de ces homomorphismes est un produit direct de A et B.

   Pour cela, considérons un ensemble D et deux applications $f_A : D \to A$ et $f_B : D \to B$. Raisonnons par analyse-synthèse pour montrer l'existence et l'unicité d'une application $f : D \to A \times B$ répondant à la définition d'un produit.

   - Analyse : On suppose l'existence de $f : D \to A \times B$ vérifiant $p_A \circ f = f_A$ et $p_B \circ f = f_B$. Soit $x \in D$. Son image $f(x)$ est un élément de $A \times B$, donc un couple, qu'on note (a, b). Ainsi,
   $$f_A(x) = p_A \circ f(x) = p_A((a, b)) = a \qquad \text{et} \qquad f_B(x) = p_B \circ f(x) = p_B((a, b)) = b.$$
   On en déduit que
   $$f(x) = (f_A(x), f_B(x)).$$
   Ainsi, si f existe, pour tout $x \in D$, $f(x)$ est déterminé de façon unique. Par conséquent, f est unique sous réserve d'existence.
   - Synthèse : On définit, pour tout $x \in D$:
   $$f(x) = (f_A(x), f_B(x)).$$
   Cela définit bien une application de D dans $A \times B$. On a alors, pour tout $x \in D$:
   $$p_A \circ f(x) = p_A(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x), \qquad \text{donc:} \qquad p_A \circ f = f_A,$$
   et de même $p_B \circ f = f_B$.
   - Ainsi, on a bien obtenu l'existence et l'unicité de f.
   - Cela montre que $\boxed{A \times B \text{ est un produit direct de } A \text{ et } B \text{ dans la catégorie } \mathbf{Ens}}$.

4. Soit $\mathcal{C} = \mathbf{Gr}$. Soit G et H deux groupes, dont on notera $\cdot$ les lois (en utilisant la même notation pour la loi de G et celle de H). On définit sur le produit cartésien $G \times H$ la loi $*$ par :
   $$(g, h) * (g', h') = (gg', hh').$$
   (a) On vérifie les trois propriétés définissant un groupe :
   - Associativité : soit (g, h), (g', h') et (g'', h'') des éléments de $G \times H$. Alors
   $$((g, h) * (g', h')) * (g'', h'') = (gg', hh') * (g'', h'') = ((gg')g'', (hh')h'').$$
   La loi de G ainsi que celle de H (qu'on a notées simplement par juxtaposition gg', comme dans $\mathbb{R}$) sont toutes les deux commutatives, car G et H sont des groupes. Ainsi,
   $$((gg')g'', (hh')h'') = (g(g'g''), h(h'h'')) = (g, h) * (g'g'', h'h'') = (g, h) * ((g', h') * (g'', h'')).$$
   On a donc bien :
   $$((g, h) * (g', h')) * (g'', h'') = (g, h) * ((g', h') * (g'', h'')),$$
   d'où l'associativité de $*$.
   - Existence d'un neutre : on pose $e = (e_G, e_H)$, où e_G et e_H sont les neutres respectifs de G et H. Ainsi, pour tout (g, h) dans $G \times H$:
   $$e * (g, h) = (e_G g, e_H h) = (g, h) \qquad \text{et} \qquad (g, h) * e = (g e_G, h e_H) = (g, h).$$
   Donc e est un élément neutre.
   - Existence des inverses : Soit $(g, h) \in G \times H$. Les éléments g et h sont inversibles respectivement dans G et H. On note g^{-1} et h^{-1} leurs inverses. On a alors $(g^{-1}, h^{-1}) \in G \times H$ et
   $$(g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (e_G, e_H) = e,$$
   et de même :
   $$(g^{-1}, h^{-1}) * (g, h) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (e_G, e_H) = e.$$
   Ainsi, (g^{-1}, h^{-1}) est un inverse de (g, h).

   Par conséquent, $\boxed{G \times H \text{ muni de } * \text{ est un groupe}}$.

(b) Soit (g,h), (g',h') dans $G \times H$. On a alors :

$$p_G((g,h) * (g',h')) = p_G(gg', hh') = gg' = p_G((g,h))p_G((g',h')).$$

Par connséquent, $\boxed{p_G \text{ est bien un morphisme de groupes}}$.

On montre de la même manière que $\boxed{p_H \text{ est un morphisme de groupes}}$.

(c) On procède comme on l'avait fait dans la catégorie **Ens**. Soit D un groupe et $f_G : D \to G$ et $f_H : D \to H$ deux morphismes de groupes.

On remarque que l'analyse-synthèse se déroule exactement de la même façon que dans le cas de **Ens** (puisqu'en oubliant les structures de groupes, on mannipule les mêmes ensembles). Cela fournit l'unicité sous réserve d'existence de $f : D \to G \times H$ complétant le diagramme, et de plus, l'application f définie par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = (f_G(x), f_H(x))$$

vérifie bien les deux identités $p_G \circ f = f_G$ et $p_H \circ f = f_H$.

Il reste un dernier point à vérifier : il faut montrer que cette application f est bien une flèche de la catégorie **Gr**, donc que f est un morphisme de groupes. Soit x et y deux éléments de D :

$$\begin{aligned} f(xy) &= (f_G(xy), f_H(xy)) \\ &= (f_G(x)f_G(y), f_H(x)f_H(y)) && \text{(car } f_G \text{ et } f_H \text{ sont des morphismes de groupes)} \\ &= (f_G(x), f_H(x)) * (f_G(y), f_H(y)) && \text{(définition de la loi } *) \\ &= f(x) * f(y). \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien un morphisme de groupe. On a donc montré l'existence et l'unicité d'un homomorphisme de la catégorie **Gr** complétant le diagramme.

Par conséquent, $\boxed{G \sqcap H \simeq G \times H, \text{ où } G \times H \text{ est muni de la loi } *.}$

5. Produits quelconques (y compris infinis)

(a) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille telle que pour tout sous-ensemble non vide $J \subset I$, la famille $(A_i)_{i \in J}$ admet un produit. Soit J et J' des sous-ensembles non vides de I tels que $J \cup J' = I$ et $J \cap J' = \varnothing$.

On peut penser faire les choses dans un sens ou dans l'autre : montrer que $\left(\prod_{j \in J} A_j\right) \sqcap \left(\prod_{j \in J'} A_j\right)$ est un produit de la famille totale, ou montrer que $\prod_{i \in I} A_i$ est un produit des deux produits sur les sous-familles.

En fait, la deuxième piste est meilleure, puisqu'elle permet au passage de justifier l'existence du produit de $\left(\prod_{j \in J} A_j\right)$ et $\left(\prod_{j \in J'} A_j\right)$.

On note $C = \prod_{i \in I} A_i$, $A = \prod_{j \in J} A_j$ et $B = \prod_{j \in J'} A_j$.

- On construit d'abord les homomorphismes $p_A : C \to A$ et $p_B : C \to B$. On note pour $i \in I$, $p_i : C \to A_i$ les projections définissant le produit C, pour $i \in J$, q_i les projections $q_i : A \to A_i$ définissant le produit A, et de même, pour $i \in J'$, $r_i : B \to A_i$ les projections définissant le produit B. On considère alors pour tout $i \in J$, $f_i = p_i : C \to A_i$. Par définition du produit A, il existe donc un unique morphisme $p_A : C \to A$ telle que pour tout $i \in J$, $q_i \circ p_A = p_i$.
  On définit de la même façon $p_B : C \to B$ tel que pour tout $i \in J'$, $r_i \circ p_B = p_i$.
- Soit alors D un objet et deux homomorphismes $f_A : D \to A$ et $f_B : D \to B$. Il faut montrer l'existence et l'unicité d'un homomorphisme f remplissant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & A \\ D \arrow[urr, "f_A"] \arrow[drr, "f_B"'] \arrow[r, dotted, "f"] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

* Existence : On considère pour tout $i \in I$:

$$f_i = \begin{cases} q_i \circ f_A & \text{si } i \in J \\ r_i \circ f_B & \text{si } i \in J'. \end{cases}$$

Ainsi, par définition du produit C, il existe $f : D \to C$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i = p_i \circ f$. On a alors en particulier, pour tout $i \in J$,

$$f_i = q_i \circ p_A \circ f \qquad \text{donc:} \qquad q_i \circ f_A = q_i \circ p_A \circ f.$$

Ainsi, $p_A \circ f$ et f_A sont deux homomorphismes complétant toutes les deux un même diagramme issu de la définition du produit A. On en déduit, par la propriété d'unicité, que $f_A = p_A \circ f$.
On montre de la même manière que $f_B = p_B \circ f$.
On a donc bien montré l'existence d'un homomorphisme $f : D \to C$ tel que $f_A = p_A \circ f$ et $f_B = p_B \circ f$.
* Montrons maintenant son unicité. Soit f et g deux morphismes remplissant ces conditions. Alors, pour tout $i \in J$:

$$p_i \circ f = q_i \circ p_A \circ f = q_i \circ f_A = q_i \circ p_A \circ g = p_i \circ g,$$

et par un raisonnement similaire, pour tout $i \in J'$, on a aussi $p_i \circ f = p_i \circ g$. Ainsi, cette égalité est satisfaite pour tout $i \in I$. On définit alors pour tout $i \in I$, $f_i : D \to A_i$ par $f_i = p_i \circ f = p_i \circ g$. Il existe alors une unique application $h : D \to C$ telle que pour tout $i \in I$, $f_i = p_i \circ h$. L'unicité de h amène $f = g$,

On a bien montré les propriétés assurant que $C \simeq A \sqcap B$.

Ainsi,

$$\boxed{\left(\prod_{j \in J} A_j\right) \sqcap \left(\prod_{j \in J'} A_j\right) \simeq \prod_{i \in I} A_i}.$$

(b) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- De façon évidente, pour $n = 1$ un produit d'un unique ensemble A est lui-même (cela vérifie bien les conditions requises du produit avec la projection $p : A \to A$ égale à l'indentité). On peut aussi initialiser à $n = 2$, où il n'y a pas grand chose à dire (pas de parenthésage).
- Supposons la propriété vraie pour toute famille indexée sur n termes, et soit $(A_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ une famille de $n+1$ termes. On pose $J = [\![1,n]\!]$ et $J' = \{n+1\}$, vérifiant bien les conditions requises dans la question précedente. On a alors :

$$\prod_{i \in [\![1,n+1]\!]} A_i \simeq \prod_{i \in [\![1,n]\!]} A_i \sqcap A_{n+1}.$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence permet d'obtenir :

$$\prod_{i \in [\![1,n+1]\!]} A_i \simeq (((A_1 \sqcap A_2) \sqcap A_3) \sqcap \cdots \sqcap A_n) \sqcap A_{n+1}.$$

- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\prod_{i \in [\![1,n]\!]} A_i \simeq (((A_1 \sqcap A_2) \sqcap A_3) \sqcap \cdots \sqcap A_{n-1}) \sqcap A_n.}$$

(c) C'est juste une vérification à faire. Soit $C = \left\{ f : I \longrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \mid \forall i \in I,\ f(i) \in A_i \right\}$. On définit

$$p_i : C \to A_i$$

en posant, pour $f \in C$, $p_i(f) = f(i) \in A_i$.
Soit pour tout $i \in I$, $f_i : D \to A_i$. On définit $\varphi : D \to C$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall d \in D,\ \varphi(d) : I &\to \bigcup_{i \in I} A_i \\ i &\mapsto f_i(d). \end{aligned}$$

On a bien $f_i(d) \in A_i$, d'après la description de f_i, donc φ est bien à valeurs dans C. On a alors, pour tout $i \in I$ et tout $d \in D$,

$$p_i \circ \varphi(d) = p_i \circ \varphi(d) = \varphi(d)(i) = f_i(d).$$

Ainsi, $p_i \circ \varphi = f_i$. Enfin, montrons l'unicité de φ. Supposons que $\psi : D \to C$ vérifie aussi $p_i \circ \psi = f_i$. Pour tout d de D, on a donc

$$f_i(d) = p_i(\psi(d)) = \psi(d)(i) = \varphi(d)(i),$$

par définition de φ. Ainsi, $\varphi = \psi$ ce qui montre l'unicité. Ainsi,

$$\boxed{\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \longrightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) \;\middle|\; \forall i \in I,\ f(i) \in A_i \right\}.}$$

(d) Il s'agit ici du cas de la famille $(A_y)_{y\in E}$, où pour tout $y \in E$, $A_y = F$. Ainsi,

$$\bigcup_{y\in E} A_y = F,$$

et la condition $f(y) \in A_y = F$ est alors automatiquement satisfaite pour tout f de F^E. Ainsi, la question précédente amène :

$$\boxed{\prod_{y\in E} F = F^E}.$$

Ce résultat est la raison profonde de la notation F^E, qui dit simplement que F^E est un produit de facteurs F, itéré sur tous les éléments de E, ce qui orrespond bien à une puissance.

Partie III – Coproduits, unions disjointes

1. La démonstration est la même que dans le cas des produits. On considère C et C' deux coproduits de A et B, munis de leurs homomorphismes $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$, $i'_A : A \to C'$, $i'_B : B \to C$. Alors, du fait que C est un coproduit de A et B, en utilisant la définition avec $D = C'$ et avec $(f_A, f_B) = (i'_A, i'_B)$, il existe un homomorphisme $f : C \to C'$ tel que

$$f \circ i_A = i'_A \qquad \text{et} \qquad f \circ i_B = i'_B.$$

De même, en inversant les rôles de C et C', il existe unn homomorphisme $f' : C' \to C$ tel que

$$f' \circ i'_A = i_A \qquad \text{et} \qquad f' \circ i'_B = i_B.$$

Ainsi,

$$f' \circ f \circ i_A = f' \circ i'_A = i_A \qquad \text{et} \qquad f' \circ f \circ i_B = f' \circ i'_B = i_B.$$

Or, on a aussi

$$\mathrm{id}_C \circ i_A = i_A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_C \circ i_B = i_B.$$

Par définition du coproduit, id_C est le seul homomorphisme à cérifier cela. Comme $f' \circ f$ le vérifie aussi, on en déduit que $f' \circ f = \mathrm{id}_C$.
De même $f \circ f' = \mathrm{id}_{C'}$, en échangeant les rôles de f et f'. On en déduit que f et f' sont deux homomorphismes récirpoques l'un de l'autre. Ce sont donc des isomorphismes. Ainsi, $\boxed{C \text{ et } C'}$ sont isomorphes

2. On considère dans la définition de $A \amalg B$, le cas $D = A$ et $f_A = \mathrm{id}_A$ et f_B quelconque, existant par hypothèse. On a alors l'existence de $f : A \amalg B \to A$ tel que $f \circ i_A = \mathrm{id}_A$ et $f \circ i_B = f_B$. La première égalité assure notamment que $f \circ i_A$ est injective, donc $\boxed{i_A \text{ est injective}}$.

   De même, $\boxed{i_B \text{ est injective}}$.

3. Coproduits dans **Ens**.

   (a) Soit A et B deux ensembles disjoints. On note $i_A : A \to A \cup B$ l'application d'inclusion, et $i_B : B \to A \cup B$ de même. Soit D un ensemble et $f_A : A \to D$ et $f_B : B \to D$ deux applications. On construit $f : A \cup B \to D$ par :

$$\forall x \in A \cup B, \quad f(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

   Cette définition est possible puisque A et B sont disjoints. On a alors, pour tout $x \in A$, $f_A(x) = f(x) = f(i_A(x))$, donc $f_A = f \circ i_A$. De même $f_B = f \circ i_B$.
   Montrons que f est unique. Si g vérifie $f_A = g \circ i_A$. De même $f_B = g \circ i_B$, on a, pour tout $x \in A \cup B$:
   - si $x \in A$, $f(x) = f \circ i_A(x) = g \circ i_A(x) = g(x)$;

- si $x \in B$, $f(x) = f \circ i_B(x) = g \circ i_B(x) = g(x)$.

Ainsi, $f = g$.

Ainsi, $\boxed{A \sqcup B \text{ est le coproduit de } A \text{ et } B \text{ dans } \mathbf{Ens}}$.

(b) Supposons que A et B ne sont pas disjoints. On suppose par l'absurde que $A \cup B$ est un coproduit de A et B. On se donne aussi i_A et i_B les applications associées au coproduit.

Soit D un ensemble de cardinal au moins 2, et $d_1 \neq d_2$ dans D. On construit $f_A : A \to D$ constante de valeur d_1 et $f_B : B \to D$ constante de valeur d_2. Il existe donc $f : A \cup B \to D$ tel que $f \circ i_A = f_A$ et $f \circ i_B = f_B$. Puisque A et B sont finis, on peut écrire :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Or, d'après la question III-2, A et B étant non vides (puisque non disjoints), i_A et i_B sont injectifs. Il en résulte que $|i_A(A)| = |A|$ et $|i_A(B)| = |B|$. Ainsi,

$$|i_A(A)| + |i_B(B)| > |A \cup B|.$$

Par conséquent,

$$i_A(A) \cap i_A(B) \neq \varnothing,$$

et on peut trouver $c \in i_A(A) \cap i_B(B)$. On dispose donc de $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = i_A(a) = i_B(b)$. Il vient :

$$f(c) = f \circ i_A(a) = f_A(a) = d_1 \qquad \text{et} \qquad f(c) = f \circ i_B(b) = f_B(b) = d_2.$$

Comme $d_1 \neq d_2$, ceci est contradictoire. Par conséquent, $\boxed{A \cup B \text{ n'est pas coproduit de } A \text{ et } B.}$

(c) On peut adapter la preuve du cas où A et B sont disjoints. Les applications i_A et i_B sont respectivement les applications $a \mapsto (1, a)$, pour $a \in nA$ et $b \mapsto (2, b)$, pour $b \in B$. Si on dispose de D et $f_A : A \to D$, et $f_B : B \to D$, on définit f de $A \uplus B$ dans D de la façon suivante : si $x \in A \uplus B$, $x = (1, a)$ avec $a \in A$, ou $x = (2, b)$, avec $b \in B$. On définit alors :

$$f(x) = \begin{cases} f_A(a) & \text{si } x = (1, a),\ a \in A \\ f_B(x) & \text{si } x = (2, b),\ b \in B. \end{cases}$$

Cette définition est possible car les deux possibilités sont disjointes. Par ailleurs, pour tout $a \in A$, et tout $b \in B$:

$$f \circ i_A(a) = f((1, a)) = f_A(a) \qquad \text{et} \qquad f \circ i_B(b) = f((2, b)) = f_B(b).$$

Ainsi, $f \circ i_A = f_A$ et $f \circ i_B = f_B$.

Enfin, si g est une autre application vérifiant cela, soit $x \in A \uplus B$.

- Si $x = (1, a)$, $a \in A$,

$$g(x) = g((1, a)) = g \circ i_A(a) = f_A(a) = f \circ i_A(a) = f((1, a)) = f(x),$$

- de même, si $x = (2, b)$, $b \in B$:

$$g(x) = g((2, B)) = g \circ i_B(b) = f_B(b) = f \circ i_B(b) = f((1, b)) = f(x),$$

Ainsi, $f = g$. Cela montre l'unicité de f.

On en déduit que $\boxed{A \uplus B = A \amalg B}$ dans la catégorie des ensembles.

4. Coproduits dans la catégorie des groupes.

(a) On vérifie les 3 propriétés définissant un groupe :

- Associativité. On montre par récurrence sur $n + m + k$ que

$$((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k) = (a_1, \dots, a_n) \times ((b_1, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k)),$$

les uplets en jeu vérifiant les conditions définissant les éléments de $G * H$.

  - $*$ si $n + m + k = 0$, alors, ces entiers étant positifs, $n = m = k = 0$. Ainsi, avec le point 1 de la définition du produit, les deux membres de l'égalité sont égaux à $\varnothing$ (n-uplet de longueur nulle)
  - $*$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété d'associativité soit vérifiée pour tous uplets dont la somme est strictement inférieure à N. Supposons donnés trois uplets tels que ci-dessus, avec $n + m + k = N$.
    — Si l'un des entiers n, m ou k est nul, d'après les points 1 et 2 de la définition du produit, les deux membres sont égaux au produit des 2 autres uplets. On suppose désormais n, m et k non nuls.

— Si a_n et b_1 ne sont pas dans le même groupe, ni b_m et c_1, alors les deux produits donnent tous deux le résultat :
$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k).$$
— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, et b_m, c_1 ne sont pas dans le même groupe, et si $a_n b_1 \neq e$:
$$\begin{aligned}((a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k) &= (a_1, \ldots, a_n b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n)((b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k))\end{aligned}$$
Assurez-vous que ça marche aussi si $m = 1$.

— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, et b_m, c_1 ne sont pas dans le même groupe, et si $a_n b_1 = e$:
$$\begin{aligned}((a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k) &= ((a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (b_2, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}) \times ((b_2, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k))\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (b_2, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n) \times ((b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k)),\end{aligned}$$
la deuxième égalité étant obtenue par l'hypothèse de récurrence forte.

— Les deux points précédents s'adaptent facilement au cas où a_n et b_1 ne sont pas dans le même groupe, et b_m et c_1 sont dans le même groupe.

— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, ainsi que b_m et c_1 et si $a_n b_1 \neq e$, $b_m c_1 \neq e$, alors :
$$\begin{aligned}((a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k) &= (a_1, \ldots, a_n b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n b_1, \ldots, b_m c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_n) \times ((b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k)).\end{aligned}$$
On vérifie sans peine que le cas $m = 1$ ne pose pas de problème particulier.

— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, ainnsi que b_m et c_1 et si $a_n b_1 = e$, $b_m c_1 \neq e$, et si $m \geqslant 2$, alors, en utilisant l'HR pour la deuxième égalité :
$$\begin{aligned}((a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k) &= ((a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (b_2, \ldots, b_m)) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}) \times ((b_2, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k))\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (b_2, \ldots, b_m c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \times (b_1, b_2, \ldots, b_m c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \times ((b_1, \ldots, b_m) \times (c_1, \ldots, c_k)).\end{aligned}$$
— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, ainnsi que b_m et c_1 et si $a_n b_1 = e$, $b_m c_1 \neq e$, et si $m = 1$:
$$\begin{aligned}((a_1, \ldots, a_n) \times (b_1)) \times (c_1, \ldots, c_k) &= ((a_1, \ldots, a_{n-1}) \times \varnothing) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, c_1, \ldots, c_k)\end{aligned}$$
car a_{n-1} n'est pas dans le même groupe que a_n, qui lui, est dans celui de $b_1 = b_m$ étant aussi celui de c_1. D'un autre côté, puisque $a_n b_1 = e$ et $c_1 \neq e$, et puisque a_n, b_1 et c_1 sont tous trois dans le même groupe :
$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) \times ((b_1) \times (c_1, \ldots, c_k)) &= (a_1, \ldots, a_n) \times (b_1 c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n b_1 c_1, \ldots, c_k)\\ &= (a_1, \ldots, a_{n-1}, c_1, \ldots, c_k)\end{aligned}$$
Ainsi, on a dans ce cas aussi la relation d'associativité.

— Les deux cas précédents s'adaptent facilement au cas ou $a_n b_1 \neq e$ et $b_m c_1 = e$.

— Il reste donc à étudier le cas où a_n et b_1 sont dans le même groupe, ainsi que b_m et c_1, et $a_nb_1 = e$ ainsi que $b_mc_1 = e$; on suppose dans un premier temps $m = 1$, et on utilise l'HR à la ligne 2 :

$$\begin{aligned}((a_1, \dots, a_n) \times (b_1)) \times (c_1, \dots, c_k) &= ((a_1, \dots, a_{n-1}) \times \varnothing) \times (c_1, \dots, c_k)\\ &= (a_1, \dots, a_{n-1}) \times (c_1, \dots, c_k)\\ &= (a_1, \dots, a_{n-1}, c_1, \dots, c_k),\end{aligned}$$

car a_{n-1} n'est pas dans le même groupe que celui commun de a_n, b_1 et c_1. D'un autre côté,

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) \times ((b_1) \times (c_1, \dots, c_k)) &= (a_1, \dots, a_n) \times (\varnothing \times (c_2, \dots, c_k)\\ &= (a_1, \dots, a_n) \times (c_2, \dots, c_k)\\ &= (a_1, \dots, a_n, c_2, \dots, c_k),\end{aligned}$$

pour les mêmes raisons. Or, par hypothèse,

$$a_n = a_n(b_1b_1^{-1}) = (a_nb_1)b_1^{-1} = b_1^{-1} \qquad \text{et} \qquad c_1 = (b_1^{-1}b_1)c_1 = b_1^{-1}(b_1c_1) = b_1^{-1}.$$

Ainsi, $a_n = c_1$ (tous les deux sont inverses de b_1) On en déduit encore une fois que l'égalité d'associativité est satisfaite.

— Il nous reste le dernier cas, similaire au précédent, avec $m \geqslant 2$. On a alors, en utilisant l'HR forte, (après avoir scindé en 4 facteurs, chacun est de longueur au moins 1, donc 3 d'entre eux ont toujours une longueur strictementy inférieure à N, ce qui nous permet d'utiliser l'associativité sur ces termes, fournie par HR) :

$$\begin{aligned}((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k)) &= ((a_1, \dots, a_n) \times ((b_1) \times (b_2, \dots, b_m))) \times (c_1, \dots, c_k)\\ &= (((a_1, \dots, a_n) \times (b_1)) \times (b_2, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k)\\ &= ((a_1, \dots, a_{n-1}) \times (b_2, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k)\\ &= (a_1, \dots, a_{n-1}) \times ((b_2, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k))\\ &= ((A_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \times (b_1)) \times ((b_2, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k))\\ &= (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \times ((b_1) \times ((b_2, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k))),\end{aligned}$$

le cas $m = 1$ ayant été déjà justifiée, quelle que soit le cas envisagé (notamment en fonction du premier élément de la séquence $(b_2, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k)$. L'hypothèse de récurrence amène alors :

$$\begin{aligned}((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k)) &= (a_1, \dots, a_n) \times (((b_1) \times (b_2, \dots, b_m)) \times (c_1, \dots, c_k))\\ &= (a_1, \dots, a_n) \times ((b_1, b_2, \dots, b_m) \times (c_1, \dots, c_k))\end{aligned}$$

∗ Ayant étudié tous les cas possibles (vérifiez que je n'en ai pas oublié), on a bien prouvé, d'après le principe de récurrence, l'associativité de la loi $\times$. Rassurez-vous, les autres vérifications sont plus rapides !

- Neutre : d'après les propriétés 1 et 2 définissant la loi $\times$, la séquence vide $\varnothing = ()$ est élément neutre.
- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour toute séquence $(a_1, \dots, a_n)$ définissant un élément de $G * H$, son inverse est $(a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1})$.
  ∗ Pour $n = 0$, on obtient que $\varnothing$ est son propre inverse, ce qui est bien le cas.
  ∗ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour des séquences de longueur n. Soit $(a_1, \dots, a_{n+1})$ une séquence de $G * H$. On a alors, puisque $a_{n+1}a_{n+1}^{-1} = e$:

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \times (a_{n+1}^{-1}, a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1}) &= (a_1, \dots, a_n) \times (a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1})\\ &= \varnothing \qquad\qquad (HR)\end{aligned}$$

  Un calcul similaire montre que $(a_{n+1}^{-1}, a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1})(a_1, \dots, a_{n+1}) = \varnothing$.
  Ainsi, $(a_{n+1}^{-1}, a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1})$ est bien inverse de $(a_1, \dots, a_{n+1})$.
  ∗ D'après le principe de récurrence, tout élément est inversible.

Ainsi, $\boxed{G * H \text{ muni de la loi } \times \text{ est un groupe}}$. Son neutre est $\varnothing$.

Les vérifications sont plus rapides à faire si on définit le produit libre par quotient d'un certain ensemble par une relation d'équivalence. Ce point de vue est malheureusement un peu prématuré pour ce début d'année.

(b) Soit G et H deux groupes, de neutres e_G et e_H.

- On définit $i_G : G \to G * H$ par :

$$\forall a \in G, \quad i_G(a) = \begin{cases} (a) & \text{si } a \neq e_G \\ () = \varnothing & \text{si } a = e_G. \end{cases}$$

Montrons que i_G est un morphisme de groupes. Soit a et b deux éléments de G. On a alors :

  - Si $a = e_G$ et $b = e_G$:

$$i_G(ab) = i_G(e_G) = () = () \times () = i_G(e_G) \times i_G(e_G) = i_G(a) \times i_G(b).$$

  - Si $a = e_G$ et $b \neq e_G$:

$$i_G(ab) = i_G(b) = () \times i_G(b) == i_G(e_G) \times i_G(b) = i_G(a) \times i_G(b).$$

  - De même si $a \neq e_G$ et $b = e_G$;
  - Si $a \neq e_G$, $b \neq e_G$ et $ab \neq e_G$:

$$i_G(ab) = (ab) = (a) \times (b) = i_G(a) \times i_G(b).$$

  - Si $a \neq e_G$ et $b \neq e_G$ et $ab = e_G$:

$$i_G(a) \times i_G(b) = (a) \times (b) = () \times () = () = i_G(ab).$$

Ainsi, i_G est un morphisme de groupes.

- On définit de même i_H par :

$$\forall b \in H, \quad i_H(b) = \begin{cases} (b) & \text{si } b \neq e_H \\ () = \varnothing & \text{si } b = e_H. \end{cases}$$

On montre de la même façon que ci-dessus que i_H est un morphisme de groupes.

- Soit alors D un groupe, et $f_G : G \to D$, $f_H : H \to D$ deux morphismes de groupes. On définit $f : G * H \to D$ par :

$$f((a_1, \dots, a_n)) = \begin{cases} f_G(a_1) f_H(a_2) \dots f_G(a_{n-1}) f_H(a_n) & \text{si } n \neq 0 \\ e_D & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La première description est valide si n est pair et $a_1 \in G$; les autres cas d'alternance se définissent de même.
On montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$f((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) = f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_m).$$

  - Pour $m = 0$,

$$f((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) = f(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) f(\varnothing) = f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_m).$$

  - Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie pour une deuxième séquence de longueur m. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_m)$ dans $G * H$. On suppose sans perte de généralité que $a_1 \in G$ et $b_m \in H$ (c'est juste pour simplifier les écritures). On a alors :
    - si a_n et b_1 ne sont pas dans le même groupe, disons $a_n \in H$ et $b_1 \in G$ (l'autre cas se fait de même) :

$$\begin{aligned} f((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) &= f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \\ &= f_G(a_1) \dots f_H(a_n) f_G(b_1) \dots f_H(b_m) \\ &= f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_m). \end{aligned}$$

    - Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, disons $a_n \in H$ et $b_1 \in H$, et si $a_n b_1 \neq e_H$:

$$\begin{aligned} f((a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m)) &= f(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m) \\ &= f_G(a_1) \dots f_H(a_n b_1) \dots f_H(b_m) \\ &= f_G(a_1) \dots f_H(a_n) f_H(b_1) \dots f_H(b_m) \quad \text{(car } f_H \text{ est un morphisme)} \\ &= f(a_1, \dots, a_n) f(b_1, \dots, b_m) \end{aligned}$$

— Si a_n et b_1 sont dans le même groupe, disons $a_n \in H$ et $b_1 \in H$, et si $a_n b_1 = e_H$:

$$\begin{aligned}
f((a_1,\dots,a_n)\times(b_1,\dots,b_m)) &= f((a_1,\dots,a_{n-1})\times(b_2,\dots,b_m)) \\
&= f(a_1,\dots,a_{n-1})f(b_2,\dots,b_m) && \text{(HR)} \\
&= f_G(a_1)\dots f_G(a_{n-1})f_G(b_2)\dots f_H(b_m) \\
&= f_G(a_1)\dots f_G(a_{n-1})f_H(e_H)f_G(b_2)\dots f_H(b_m)
\end{aligned}$$

En effet,

$$e_D f_H(e_H) = f_H(e_H) = f_H(e_H e_H) = f_H(e_H)f_H(e_H).$$

Comme $f_H(e_H)$ est élément d'un groupe, il est inversible. On peut donc mutliplier cette égalité à droite par l'inverse de $f_H(e_H)$ et en utilisant l'associativité, simplifier en

$$e_D = f_H(e_H).$$

Ceci est une proprité générale des morphismes de groupes : un morphisme de groupes envoie le neutre sur le neutre. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f((a_1,\dots,a_n)\times(b_1,\dots,b_m)) &= f_G(a_1)\dots f_G(a_{n-1})f_H(a_n b_1)f_G(b_2)\dots f_H(b_m) \\
&= f_G(a_1)\dots f_G(a_{n-1})f_H(a_n)f_H(b_1)f_G(b_2)\dots f_H(b_m) \\
&= f(a_1,\dots,a_n)f(b_1,\dots,b_m).
\end{aligned}$$

Par conséquent, f est un morphisme de groupes.

- On vérifie $f \circ i_G = f_G$:

$$\forall a \in G\backslash\{e_G\}, \quad f\circ i_G(a) = f((a)) = f_G(a),$$

et

$$f\circ i_G(e_G) = f(\varnothing) = e_D = f_G(e_G),$$

par la propriété des morphismes démontrée ci-dessus.
- De même $f \circ i_H = f_H$.
- Montrons l'unicité de f. Soit $g : G*H \to D$ un morphisme de groupes vérifiant les mêmes propriétés. Soit $(a_1,\dots,a_n) \in G*H$. Sans perte de généralité, on suppose, pour pouvoir écrire facilement les expressions qui suivent, que $a_1 \in G$ et $a_n \in H$. On a alors :

$$\begin{aligned}
g((a_1,\dots,a_n)) &= g((a_1)\times(a_2)\times\cdots\times(a_n)) && \text{(produit associatif dans } G*H\text{)} \\
&= g((a_1))\dots g((a_n)) && \text{(propriété de morphisme de } g\text{, itérée)} \\
&= g\circ i_G(a_1) g\circ i_H(a_2)\dots g\circ i_H(a_n) \\
&= f_G(a_1)f_H(a_2)\dots f_H(a_n) \\
&= f((a_1,\dots,a_n)) && \text{(définition de } f\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G*H \simeq G \amalg H}$ dans la catégorie **Gr**.

(c) Il suffit de considérer $E = G \uplus H$. On définit alors

$$G' = \{(1,g), g\in G\} \qquad \text{et} \qquad H' = \{(2,h), h \in H\}$$

Les structures de groupe de G' et H' se déduisent facilement de celles de G et H, et on vérifie sans peine que G et G' sont isomorphes, ainsi que H et H'. De plus, on peut vérifier aussi facilement que dans ce cas, G et H ont les mêmes coproduits que G' et H' (du fait que deux coproduits sont isomorphes). On est donc ramené au coproduit de deux groupes disjoints.

Partie IV – La catégorie des espaces topologiques

1. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ continues. Soit $x \in X$ et V_3 un voisinage de $g \circ f(x) = g(f(x))$.
   - Par continuité de g, il existe V_2 un voisinage de $f(x)$ tel que $g(V_2) \subset V_3$.
   - Par continuité de f, il existe un voisinage V_1 de x tel que $f(V_1) \subset V_2$.
   - On a alors pour un tel voisinage :

$$g\circ f(V_1) = g(f(V_1)) \subset g(V_2) \subset V_3.$$

Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est continue}}$.

2. La composée de deux applications continues est continue. De plus, pour tout espace topologique X, id_X est continue, puisque si $x \in X$ et si V est un voisinage de $\mathrm{id}_X(x) = x$, alors V est un voisinage de x tel que $\mathrm{id}_X(V) \subset V$.

   Ainsi, **Top** est bien une catégorie.

3. Exemple de $\mathbb{R}$.

   (a)
   - L'ensemble vide est ouvert par défaut, la propriété à vérifier étant quantifiée universellement sur les éléments de $\varnothing$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon = 1$. Alors $]x-1, x+1[\subset \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est ouvert.
   - Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Alors, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Comme A_i est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
   $$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$
   Cela montre bien que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un ouvert.
   - Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Pour tout $i \in I$, $x \in A_i$. Comme A_i est ouvert, pour tout $i \in I$, il existe ε_i tel que $]x-\varepsilon_i, x = \varepsilon_i[\subset A_i$. Comme I est fini, il existe un ε_i minimal. Soit $\varepsilon > 0$ cet ε_i. On a alors :
   $$\forall i \in I, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[\subset A_i.$$
   Cette inclusion étant vraie pour tout $i \in I$,
   $$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcap_{i\in I} A_i.$$
   Ainsi, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est ouvert.

   On en déduit que $\boxed{\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \text{ est bien une topologie}}$.

   (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   - Supposons que f vérifie :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et W un voisinage de $f(x)$.
     * Par définition d'un voisinage, il existe un ouvert $U \subset W$ tel que $f(x) \in U$.
     * Par définition d'un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\subset U$.
     * D'après la propriété satisfaite par f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y vérifiant $|x-y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, c'est à dire $f(y) \in]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$.
     * On a alors pour tout $y \in]x-\delta, x+\delta[$, $f(y) \in]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$.
     * Soit $V =]x-\delta, x+\delta[$. C'est bien un voisinage de x. On peut en effet poser $U' = V$. Alors U' est un ouvert : si $y \in U'$, en posant $\eta = \min(y-(x-\delta), (x+\delta)-y[$, on a clairement $]y-\eta, y+\eta[\subset U'$. Donc il existe bien un ouvert U' tel que $x \in U' \subset V$.
     * Ainsi, il existe un voisinage V de x tel que
     $$f(V) \subset]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\subset U \subset W.$$
     Cela montre bien que f est continue dans le sens de l'énoncé.
   - Supposons f continue. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
     * Posons $W =]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$. Par le même raisonnement que ci-dessus, W est un voisinage de $f(x)$.
     * Par continuité de f, il existe donc un voisinage V de x tel que $f(V) \subset W$.
     * V étant un voisinage de x, il existe U un ouvert tel que $x \in U \subset V$. Par définition d'un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset U$. On a alors :
     $$f(]x-\delta, x+\delta[) \subset f(U) \subset f(V) \subset W =]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[.$$
     * Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y-x| < \delta$. Alors $y \in]x-\delta, x+\delta[$, donc $f(y) \in]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$. Ainsi,
     $$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$
     On retrouve bien l'expression métrique de la continuité.

Ainsi, $\boxed{\text{la définition topologique (par voisinages) et la définition métrique de la continuité sont équivalentes}}$

4. Produit d'espaces topologiques

(a) On montre les propriétés définissant une topologie.
- Comme $A \in \mathcal{O}_A$ et $B \in \mathcal{O}_B$, $A \times B \in \mathcal{O}_{A \cap B}$.
- Comme $\varnothing \in \mathcal{O}_A$ et $\varnothing \in \mathcal{O}_B$, $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{O}_{A \times B}$.
- Soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{A \times B}$. Pour tout $j \in J$, on dispose d'une famille $(A_{i,j} \times B_{i,j})_{i \in I_j}$ de produits cartésiens d'un élément de $\mathcal{O}_A$ et d'un élément de $\mathcal{O}_B$. On a alors
$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_{i,j} \times B_{i,j} = \bigcup_{(i,j) \in K} A_{i,j} \times B_{i,j},$$
où
$$K = \{(i,j) \in \left(\bigcup_{j \in J} I_j \right) \times J \mid \forall j \in J, \quad i \in I_j.\}.$$
Ainsi, par définition de $\mathcal{O}_{A \times B}$, $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}_{A \times B}$.
- Pour montrer la stabilité par intersection finie, on peut se contenter d'étudier une intersection de deux élémennts de $\mathcal{O}_{A \times B}$. Le cas général s'obtient alors en itérant. Soit donc U et V deux éléments de $\mathcal{O}_{A \times B}$. On écrit :
$$U = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \qquad \text{et} \qquad V = \bigcup_{j \in J} C_J \times D_j,$$
où les A_i, C_j sont des éléments de $\mathcal{O}_A$ et les B_i, D_j des éléments de $\mathcal{O}_B$. Ainsi,
$$\begin{aligned} U \cap V &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} C_j \times D_j \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \left(A_i \times B_i \cap \left(\bigcup_{j \in J} C_j \times D_j \right) \right) && \text{(distributivité)} \\ &= \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \times B_i) \cap (C_j \times D_j) && \text{(distributivité)} \\ &= \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j) \end{aligned}$$
Or, $A_i \cap C_j \in \mathcal{O}_A$, par stabilité des ouverts de A par intersection finie. De même $B_i \cap D_j \in \mathcal{O}_B$. On en déduit que $U \cap V$ s'écrit comme union de produits cartésiens d'ouverts de A et B. Ainsi, $u \cap V \in \mathcal{O}_{A \times B}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{O}_{A \times B} \text{ est une topologie sur } A \times B}$ (appelée topologie produit).

(b) Montrons que $p_A : A \times B \to A$ est continue. Soit $(a,b) \in A \times B$ et W un voisinage de $p_A(a,b) = a$ dans A. Soit $V = W \times B$, et $U \subset V$ un ouvert de A tel que $a \in U$. Comme $B \in \mathcal{O}_B$, $U \times B \in \mathcal{O}_{A \times B}$. Puisque $(a,b) \in U \times B \subset W \times B$, $V = W \times B$ est un voisinage de (a,b) et $p_A(V) = W$. Ainsi, $\boxed{p_A \text{ est continue}}$. De même p_B est continue.

(c) Soit D un espace topologique, et $f_A : D \to A$, $f_B : D \to B$ deux applications continues. Du fait que $A \times B$ est le produit direct de A et B dans **Ens**, l'application $f : D \to A \times B$ permettant de compléter le diagramme est nécessairement l'application
$$f : d \mapsto (f_A(d), f_B(d)).$$
Cela fournit en particulier l'unicité de cette application. Pour terminer de répondre à la question, il faut encore montrer que cette application est continue.

Soit donc $d \in D$ et W un voisinage de $f(d) = (f_A(d), f_B(d))$. Alors il existe $U \in \mathcal{O}_{A \times B}$ tel que $(f_A(d), f_B(d)) \in U \subset W$.

Or, par définition de U, U est union de produits cartésiens d'un ouvert de A et d'un ouvert de B. Il existe donc $U_1 \in \mathcal{O}_A$ et $U_2 \in \mathcal{O}_B$ tel que $(f_A(d), f_B(d)) \in U_1 \times U_2 \subset W$.

On a alors $f_A(B) \in U_1$, et U_1 est un ouvert contenant $f_A(B)$, donc aussi un voisinage (en prenant $U = U_1$ dans la définition d'un voisinage). Par définition de la continuité, il existe donc V_1 un voisinage de d dans D tel que $f_A(V_1) \subset U_1$.

Il existe de même un voisinage V_2 de d tel que $f_B(V_2) \subset U_2$.

On vérifie que $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de d. En effet, il existe deux ouverts T_1 et T_2 tels que $x \in T_1 \subset V_1$ et $x \in T_2 \subset V_2$. On a alors
$$x \in T_1 \cap T_2 \subset V_1 \cap V_2.$$

Or, une intersection finie d'ouverts est un ouvert, donc $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{O}_D$. Cela montre bien que $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de d.

De plus, on a alors, pour tout $x \in V_1 \cap V_2$:

$$f_A(x) \in U_1 \qquad \text{et} \qquad f_B(x) \in U_2, \qquad \text{donc:} \qquad f(x) \in U_1 \times U_2.$$

Ainsi,

$$f(V_1 \cap V_2) \subset U_1 \times U_2 \subset W.$$

On en déduit que f est continue.

Ainsi, $\boxed{A \times B \text{ muni de la topologie produit } \mathcal{O}_{A\times B} \text{ est le produit direct de } A \text{ et } B}$ dans la catégorie **Top**.

5. Coproduit d'espaces topologiques

Soit A et B deux espaces topologiques, $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$ leur topologie. On définit

$$\mathcal{O}_{A\uplus B} = \{(\{1\} \times U_1) \times (\{2\} \times U_2, \;\; U_1 \in \mathcal{O}_A, \;\; U_2 \in \mathcal{O}_B\}.$$

On vérifie que c'est une topologie :

- $A \in \mathcal{O}_A$ et $B \in \mathcal{O}_B$ donc
$$A \uplus B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B) \in \mathcal{O}_{A\uplus B}.$$
- $\varnothing \in \mathcal{O}_A$ et $\varnothing \in \mathcal{O}_B$, donc
$$\varnothing = (\{1\} \times \varnothing) \cup (\{2\} \times \varnothing) \in \mathcal{O}_{A\uplus B}.$$
- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{A\uplus B}$, et pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{O}_A$ et $B_i \in \mathcal{O}_B$ tels que
$$U_i = (\{1\} \times A_i) \cup (\{2\} \times B_i).$$
On a alors
$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} U_i &= \bigcup_{i\in I} (\{1\} \times A_i) \cup (\{2\} \times B_i) \\ &= \left(\bigcup_{i\in I} (\{1\} \times A_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} (\{2\} \times B_i)\right) \\ &= \left(\{1\} \times \bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\{2\} \times \bigcup_{i\in I} B_i\right).\end{aligned}$$
Puisque $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}_A$ et $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{O}_B$, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_{A\uplus B}$.
- Avec les mêmes notations, en supposant I fini :
$$\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} (\{1\} \times A_i) \cup \{2\} \times B_i).$$
Or :
  * si $x \in \bigcap_{i\in I} (\{1\} \times A_i) \cup \{2\} \times B_i)$, notons $x = (m, a)$. Si $m = 1$, alors pour tout $i \in I$ $x \notin \{2\} \times B_i$, donc $x \in \{1\} \times A_i$, donc $a \in A_i$. On en déduit que
  $$x \in \{1\} \times \bigcap_{i\in I} A_i.$$
  De même, si $m = 2$, alors
  $$x \in \{2\} \times \bigcap_{i\in I} B_i.$$
  Par conséquent,
  $$\bigcap_{i\in I} (\{1\} \times A_i) \cup \{2\} \times B_i) \subset \left(\{1\} \times \bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\{2\} \times \bigcap_{i\in I} B_i\right).$$
  * L'inclusion réciproque peut se faire directemennt sur les ensembles, puisque
  $$\{1\} \times \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (\{1\} \times A_i) \subset \bigcap_{i\in I} ((\{1\} \times A_i) \cup (\{2\} \times B_i))$$

et de même,
$$\{2\} \times \bigcap_{i\in I} B_i \subset \bigcap_{i\in I} ((\{1\} \times A_i) \cup (\{2\} \times B_i)).$$
Ainsi,
$$\left(\{1\} \times \bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\{2\} \times \bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} ((\{1\} \times A_i) \cup (\{2\} \times B_i)).$$
On en déduit que
$$\bigcap_{i\in I} U_i = \left(\{1\} \times \bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\{2\} \times \bigcap_{i\in I} B_i\right).$$
Or, par propriété des topologies $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}_A$ et $\bigcap_{i\in I} B_i \in \mathcal{O}_B$. Par définition de $\mathcal{O}_{A\uplus B}$ on en déduit que $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_{A\uplus B}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{O}_{A\uplus B} \text{ est une topologie sur } A \uplus B}$.

On vérifie que i_A et i_B définies comme en III-3 sont continues. Il suffit de le faire pour i_A. Soit $x \in A$ et W un voisinage de $i_A(a) = (1, a)$. On dispose donc de $U \in \mathcal{O}_{A\uplus B}$ tel que $(1, a) \in U \subset W$. Par définition des éléments de $\mathcal{O}_{A\uplus B}$, il existe $U_A \in \mathcal{O}_A$ et $U_B \in \mathcal{O}_B$ tels que
$$U = (\{1\} \times U_A) \cup (\{2\} \times U_B).$$
On a alors $(1, a) \in \{1\} \times U_A$, donc $a \in U_A$. L'ouvert U_A est alors un voisinage de a et
$$i_A(U_A) = \{1\} \times U_A \subset (\{1\} \times U_A) \cup (\{2\} \times U_B) = U \subset W.$$
Donc $\boxed{i_A \text{ est continue}}$. De même i_B est continue.

Soit D un espace topologique de topologie $\mathcal{O}_D$, et soit $f_A : A \to D$ et $f_B : B \to D$ deux applications continues. Soit $f : A \uplus B \to D$ une application continue qui complète le diagramme définissant le coproduit. En oubliant la structure topologique, on retrouve le diagramme définissant le coproduit de A et B dans **Ens**, donc f est unique, et nécessairement définie comme dans **Ens** , à savoir :
$$\forall x \in A \uplus B, \quad f(x) = \begin{cases} f_A(a) & \text{si } x = (1, a),\ a \in A, \\ f_B(b) & \text{si } x = (2, b),\ b \in B. \end{cases}$$
Cette application vérifie bien $f \circ i_A = f_A$ et $f \circ i_B = f_B$. Il reste à vérifier sa continuité.

Soit $x \in A \uplus B$ et W un voisinage de $f(a)$.

- Si $x = (1, a)$, avec $a \in A$, alors $f(x) = f_A(a)$. Par continuité de f_A, il existe V_A un voisinage de a tel que $f_A(V_A) \subset W$. Soit alors
$$V = \{1\} \times V_A = \{1\} \times V_A.$$
Par définition d'un voisinage, il existe un ouvert U_A tel que $a \in U_A \subset V$. On définit alors :
$$U = \{1\} \times U_A = (\{1\} \times U_A) \cup (\{2\} \times \varnothing) \in \mathcal{O}_{A\uplus B}.$$
De plus,
$$x = (1, a) \in U \subset V.$$
Donc V est un voisinage de x, et
$$f(V) = f_A(V_A) \subset W.$$
- On fait de même si $x = (2, b)$, en exploitant cette fois la continuité de f_B.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue}}$.

On a bien muni $\boxed{A \uplus B \text{ d'une topologie telle que } A \uplus B \text{ soit le coproduit de } A \text{ et } B}$ dans **Top**.

Questions subsidiaires :

1. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie constituée d'un unique objet A, et de deux flèches id_A et f de A dans lui-même telles que $f \neq \mathrm{id}_A$ et $f \circ f = f$. Par exemple A un ensemble à 2 éléments et f une application constante
   Le seul produit qu'on peut envisager est le produit de A par lui-même. Ainsi, si le produit existe, $A = A \sqcap A$. On doit alors disposer de deux applications $p_1 = A = A \sqcap A \to A$ et $p_2 = A \to A$.

- Si $p_1 = p_2$, alors pour tout $f_1 : A \to A$ et $f_2 : A \to A$, et tout $g : A \to A$ complétant le diagramme, $f_1 = p_1 \circ g = p_2 \circ g = f_2$. Ceci n'est pas possible, puisqu'on peut considérer $f_1 = f$ et $f_2 = \mathrm{id}_A$.
- On doit donc avoir $p_1 \neq p_2$. Par symétrie, on peut donc supposer que $p_1 = \mathrm{id}_E$ et $p_2 = f$. On considère alors $f_1 = f$ et $f_2 = \mathrm{id}$, et g complétant le diagramme. On a en particulier $\mathrm{id}_E = f_2 = p_2 \circ g = f \circ g$. Or, $f \circ \mathrm{id} = f$ et $f \circ f = f$; il n'existe donc pas de g tel que $f \circ g = \mathrm{id}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de produit dans } \mathcal{C}}$.

2. On vérifie que la même catégorie fonctionne (en fait cette catégorie est autoduale : si on retourne toutes les flèches, on retrouve la même catégorie, avec les mêmes propriétés de composition ; cela permet de passer de la propriété sur le produit à la propriété similaire sur le coproduit). Le coproduit de A par lui-même ne peut être égal qu'à A s'il existe, muni de deux homomorphismes $i_1 : A \to A$ et $i_2 : A \to A$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il est nécessaire que $i_1 \neq i_2$. L'une des deux est égale à f, disons p_2. Alors une application $f_2 = \mathrm{id}$ ne peut pas se factoriser en $f_2 = g \circ p_2$.

   Il ne peut donc $\boxed{\text{pas exister de coproduit dans } \mathcal{C}}$.