Compte-rendu d'oral de Mathématiques ENS [ULCR]

Alexandre SHADID

04 juillet 2019

Exercice On définit $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in (M_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{R})) \mid M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\}$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et montrer l'équivalence $M \in GL_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow det(M) = \pm 1$.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, P unitaire, tels que $deg(P) = deg(Q) = n$. On suppose de plus que $\forall \alpha$ racine de P, $|\alpha| = 1$ et $\exists p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, tel que $\forall x \in \mathbb{C}$, $P(x) = p^n \times Q\left(\dfrac{x-1}{p}\right)$. Montrer que $P = (X-1)^n$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$.
   On pose $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ M & \mapsto & \overline{M} \end{array} \right.$.
   Montrer que ψ est un isomorphisme injectif.

Commentaires sur l'oral

L'examinateur, très souriant mais un peu endormi en ce bon jeudi matin 9h00, débute l'oral en m'annonçant qu'il ne parlera pas pendant les 10 premières minutes, mais que moi je peux lui raconter ma vie si je veux. La première question est un classique, et je rédige la démonstration sans hésiter. Pour la deuxième question, je pense à évaluer en 0 et en 1 et j'essaie de me ramener à un problème d'arithmétique. Puis je pense que si on montre que 1 est racine de P, on peut raisonner par récurrence en montrant que P' vérifie les hypothèses. Cependant, l'examinateur me fait remarquer que l'hypothèse sur le module des racines est difficile à montrer et la récurrence ne passera pas si bien. Finalement, en majorant brutalement $P(1)$ au moyen de l'expression $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)$ on montre que $P(1) = 0$ et que $X|Q$. Les polynômes $R = \dfrac{P}{X-1}$ et $S = \dfrac{Q}{X}$ satisfont les hypothèses et on conclut par récurrence. Enfin, pour la dernière question, je montre l'isomorphisme puis j'étudie le noyau de ψ. L'examinateur me demande tout ce que je peux lui dire sur la diagonalisabilité des matrices de G et en manipulant un peu les matrices et en écrivant $M = I_n + pN$ on introduit des polynômes qui satisfont les hypothèses de la question précédente. Je montre sur le fil la conclusion attendue.