

# DEVOIR SURVEILLÉ 10

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

**La calculatrice n'est pas autorisée.**

**Les exercices doivent obligatoirement être rédigés sur des feuilles séparées. En fin d'épreuve, vous devrez donc impérativement rendre trois copies. Si l'un des exercices n'est pas traité, prévoir une copie vide pour cet exercice.**

## EXERCICE I

### Polynômes ultrasphériques

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on considère le  $m$ -ème polynôme de Gegenbauer  $G_m$  défini par

$$G_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+1}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^k X^{m-2k}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx$$

On note  $T$  l'opérateur défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad T(P) = -3XP' + (1-X^2)P''.$$

- Démontrer que  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien.
- Démontrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Démontrer que, pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$ .
- Démontrer que, pour tout  $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $T(G_m) = -m(m+2)G_m$ .
  - Démontrer que  $\mathcal{B} = (G_0, G_1, \dots, G_n)$  est une base orthogonale de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .
  - Écrire la matrice de  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## EXERCICE 2

### Intégrales elliptiques et moyenne arithmético-géométrique

Pour tout  $x > 0$ , on considère l'intégrale elliptique  $K(x)$  définie par

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}}.$$

1. Calculer  $K(1)$ .
2. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a
 
$$\frac{1}{x} K\left(\frac{1}{x}\right) = K(x).$$
3. Démontrer que  $x \mapsto K(x)$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Démontrer que  $x \mapsto K(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . *Indication : On pourra utiliser les deux questions précédentes.*
5. a) Soit  $x > 0$ . À l'aide du changement de variable  $\theta = \arctan\left(\frac{\cotan \alpha}{x}\right)$ , démontrer que

$$K(x) = 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}}.$$

- b) Déterminer une primitive sur  $[0; \pi/2[$  de la fonction  $1/\cos$ .
- c) En déduire que

$$K(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x \quad \text{et} \quad K(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

*Indication : On pourra remarquer que  $\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta} = (\cos \theta) \sqrt{1 + x^2 \tan^2 \theta}$ .*

6. Soit  $x > 0$ . On pose

$$k = \frac{1 - x}{1 + x}$$

de sorte que

$$k \in ]-1; 1[ \quad \text{et} \quad x = \frac{1 - k}{1 + k}.$$

On pose

$$\theta = \arcsin\left(\frac{(1 + k) \sin \alpha}{1 + k \sin^2 \alpha}\right) \quad (*).$$

- a) Démontrer que

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = (1 + k) \frac{1 - k \sin^2 \alpha}{(1 + k \sin^2 \alpha) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

et

$$\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta} = \frac{1 - k \sin^2 \alpha}{1 + k \sin^2 \alpha}.$$

- b) En effectuant le changement de variable (\*) dans  $K(x)$ , démontrer que

$$K(x) = \frac{2}{1 + x} K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right).$$

7. Soit  $x > 0$ . On considère les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  telles que

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

a) Démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  convergent vers une même limite strictement positive, notée  $\ell(x)$ . *Indication : On pourra démontrer que  $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$  est sous-géométrique de raison  $1/2$ .*

b) Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$K\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} K\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

et en déduire que

$$K(x) = \frac{\pi}{2\ell(x)}.$$

### EXERCICE 3

#### Wronskien

On note  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\tilde{0}$  la fonction nulle.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et toutes fonctions  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , on appelle *wronskien* de  $(f_1, \dots, f_n)$  l'élément de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , noté  $W(f_1, \dots, f_n)$ , défini par

$$W(f_1, \dots, f_n) : x \mapsto \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Pour tout entier naturel  $d$ , on pose

$$d^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad d^{[k]} = d(d-1) \cdots (d-k+1).$$

- Soient  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $W(f_1, \dots, f_n)$  n'est pas la fonction nulle. Démontrer que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.
- L'objet de la suite de cet exercice est d'étudier la réciproque du résultat de la question 1, autrement dit de savoir si la condition  $W(f_1, \dots, f_n) = \tilde{0}$  permet d'affirmer que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée.
- On considère les deux éléments  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  définis par  $g : x \mapsto x^2$  et  $h : x \mapsto x|x|$ . Démontrer que  $(g, h)$  est libre et calculer  $W(g, h)$  après avoir justifié son existence. Quelle conclusion pouvez-vous tirer de cette question ?

3. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes non nuls et  $d_1, \dots, d_n$  des entiers naturels. Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $M_j$  la fonction monomiale définie par

$$M_j : x \longmapsto a_j x^{d_j}.$$

Dans toute la suite, on convient que l'on a  $0 \times x^k = 0$  même lorsque  $k < 0$  et  $x = 0$ .

- a) Dans cette question, on suppose que  $d_1 + \dots + d_n < n(n-1)/2$ . Démontrer que la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée.
- Dans la suite de cette question, on suppose que  $d_1 + \dots + d_n \geq n(n-1)/2$  et on considère l'entier naturel  $D$  défini par

$$D = d_1 + \dots + d_n - \frac{n(n-1)}{2}.$$

- b) On note  $V(d_1, \dots, d_n)$  le déterminant de la matrice  $(d_j^{[i-1]})_{1 \leq i, j \leq n}$ , c'est-à-dire

$$V(d_1, \dots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1^{[2]} & d_2^{[2]} & \dots & d_n^{[2]} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{[n-1]} & d_2^{[n-1]} & \dots & d_n^{[n-1]} \end{vmatrix}.$$

Calculer  $V(d_1, \dots, d_n)$  et en déduire que  $V(d_1, \dots, d_n)$  est non nul si, et seulement si, les nombres  $d_1, \dots, d_n$  sont distincts deux à deux.

- c) Démontrer que

$$W(M_1, \dots, M_n) : x \longmapsto a_1 \dots a_n V(d_1, \dots, d_n) x^D.$$

- d) Démontrer que si  $W(M_1, \dots, M_n) = \tilde{0}$ , alors la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée.

4. On rappelle que la valuation d'un polynôme est le degré de son monôme non nul de plus petit degré. Le coefficient de ce monôme est appelé le coefficient dominé du polynôme. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $P_1, \dots, P_n$  des fonctions polynomiales non nulles de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $d_j$  la valuation de  $P_j$  et  $a_j$  le coefficient dominé de  $P_j$ .

- a) Dans cette question, on suppose que les entiers naturels  $d_1, \dots, d_n$  sont deux à deux distincts. On garde la notation :

$$D = d_1 + \dots + d_n - \frac{n(n-1)}{2}$$

et on admet que  $D$  est un entier naturel (cela a été démontré à la question précédente).

- $\alpha$ ] Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , démontrer l'existence d'une fonction polynomiale  $R_{i,j}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que

$$P_j^{(i-1)} : x \longmapsto a_j x^{d_j-i+1} (d_j^{[i-1]} + x R_{i,j}(x)).$$

- $\beta$ ] Justifier l'existence d'une fonction polynomiale non nulle  $V$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que

$$W(P_1, \dots, P_n) : x \longmapsto a_1 \dots a_n V(x) x^D.$$

- b) On suppose que la famille  $(P_1, \dots, P_n)$  est libre.

- $\alpha$ ] émontrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et une famille  $(Q_1, \dots, Q_n)$  de fonctions polynomiales non nulles de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telles que les valuations des  $Q_j$  sont deux à deux distinctes et

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \cdot A$$

- $\beta$ ] Démontrer que  $W(P_1, \dots, P_n) \neq \tilde{0}$ . Qu'a-t-on ainsi démontré ?

# CORRECTION DU DS10

(durée : 4 h 00)

## EXERCICE I

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on introduit  $G_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+1}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^k X^{m-2k}$  le  $m$ -ème polynôme de

Gegenbauer. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx$ . On note  $T$  l'opérateur défini par  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $T(P) = -3XP' + (1-X^2)P''$ .

1. Démontrer que  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien.

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension finie (à savoir  $n+1$ ). Il nous faut donc démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.

▷ Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x) P(x) dx = \langle Q, P \rangle,$$

donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme symétrique sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

▷ Soient  $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) Q(x) dx \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_1(x) Q(x) dx + \lambda_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_2(x) Q(x) dx \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle. \end{aligned}$$

Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une application linéaire à gauche sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . En combinant le caractère symétrique et la linéarité à gauche de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on en déduit que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

▷ Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a  $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)^2 dx$ . Or la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x^2} P(x)^2$  est positive sur  $[-1; 1]$  donc, d'après la positivité de l'intégrale, on a  $\langle P, P \rangle \geq 0$ . Ainsi,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique positive sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

▷ Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x^2} P(x)^2$  est alors continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[-1; 1]$ . D'après le cours, elle est nulle sur  $[-1; 1]$ . Comme  $\forall x \in ]-1; 1[, \sqrt{1-x^2} \neq 0$ , on en déduit que  $\forall x \in ]-1; 1[, P(x) = 0$ . Cela démontre que le polynôme  $P$  admet une infinité de racines et donc que  $P$  est le polynôme nul. Par conséquent,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On a ainsi démontré que

$(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien.

2. Démontrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Commençons par démontrer la linéarité. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} T(\lambda P + \mu Q) &= -3X(\lambda P + \mu Q)' + (1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' \\ &= \lambda(-3XP' + (1 - X^2)P'') + \mu(-3XQ' + (1 - X^2)Q'') \\ &= \lambda T(P) + \mu T(Q), \end{aligned}$$

donc  $T$  est une application linéaire.

Reste à vérifier que  $\text{Im } T \subset \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a  $\deg(P') \leq n-1$ , donc  $\deg(XP') \leq n$ . De même, on a  $\deg(P'') \leq n-2$ , donc  $\deg((1 - X^2)P'') \leq n$ . Il s'ensuit que

$$\deg(T(P)) = \deg(-3XP' + (1 - X^2)P'') \leq \max\{\deg(XP'), \deg((1 - X^2)P'')\} \leq n,$$

ce qui prouve que  $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Donc  $\text{Im } T \subset \mathbb{R}_n[X]$ .

En conclusion,

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. Démontrer que, pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$ .

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . À l'aide d'une double intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \langle T(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} T(P)(x) Q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \underbrace{(-3x\sqrt{1-x^2}P'(x) + (1-x^2)^{3/2}P''(x))}_{\text{on intègre}} \times \underbrace{Q(x)}_{\text{on dérive}} dx \\ &= [(1-x^2)^{3/2}P'(x) \times Q(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2}P'(x) \times Q'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \underbrace{P'(x)}_{\text{on intègre}} \times \underbrace{(1-x^2)^{3/2}Q'(x)}_{\text{on dérive}} dx \\ &= -[P(x) \times (1-x^2)^{3/2}Q'(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P(x) \times (-3x\sqrt{1-x^2}Q'(x) + (1-x^2)^{3/2}Q''(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) T(Q)(x) dx \\ &= \langle P, T(Q) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\text{pour tous } P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } \langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.}$$

4. a) Démontrer que, pour tout  $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $T(G_m) = -m(m+2)G_m$ .

Supposons dans un premier temps que  $m$  est pair :  $m = 2p$ . Alors

$$G_{2p} = \sum_{\ell=0}^p \binom{2p+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)},$$

d'où

$$\begin{aligned} G'_{2p} &= \sum_{\ell=0}^p 2\ell \binom{2p+1}{2\ell+1} (-1)^{\ell-1} (1-X^2)^{\ell-1} X^{2(p-\ell)+1} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{p-1} 2(p-\ell) \binom{2p+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{p-1} 2(\ell+1) \binom{2p+1}{2\ell+3} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)-1} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{p-1} 2(p-\ell) \binom{2p+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{p-1} 2(\ell+1) \binom{2p+2}{2\ell+3} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)-1} \\ &\quad \text{car } \binom{2p+1}{2\ell+3} + \frac{p-\ell}{\ell+1} \binom{2p+1}{2\ell+1} = \binom{2p+2}{2\ell+3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_{2p}'' &= \sum_{\ell=0}^p (2\ell+2)(2\ell) \binom{2p+2}{2\ell+3} (-1)^{\ell-1} (1-X^2)^{\ell-1} X^{2(p-\ell)} \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^p (2\ell+2)(2p-2\ell-1) \binom{2p+2}{2\ell+3} (-1)^\ell (1-X^2)^\ell X^{2(p-\ell)-2} \\
&= \sum_{\ell=0}^p (2\ell+2)(2\ell) \binom{2p+2}{2\ell+3} (-1)^{\ell-1} (1-X^2)^{\ell-1} X^{2(p-\ell)} \\
&\quad + \sum_{\ell=\cancel{1}^{\text{red}} \text{ } 0}^{\cancel{p+1}^{\text{red}} \text{ } p} (2\ell)(2p-2\ell+1) \binom{2p+2}{2\ell+1} (-1)^{\ell-1} (1-X^2)^{\ell-1} X^{2(p-\ell)} \\
&= \sum_{\ell=0}^p (2\ell+2)(2\ell) \binom{2p+3}{2\ell+3} (-1)^{\ell-1} (1-X^2)^{\ell-1} X^{2(p-\ell)} \\
&\quad \text{car } \binom{2p+2}{2\ell+3} + \frac{2p-2\ell+1}{2\ell+2} \binom{2p+3}{2\ell+3} = \binom{2p+3}{2\ell+3}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
T(G_{2p}) &= -3XG_{2p}'' + (1 - X^2)G_{2p}'' \\
&= -3 \sum_{\ell=0}^p 2(\ell+1) \binom{2p+2}{2\ell+3} (-1)^\ell (1 - X^2)^\ell X^{2(p-\ell)} \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^p (2\ell+2)(2\ell) \binom{2p+3}{2\ell+3} (-1)^{\ell-1} (1 - X^2)^\ell X^{2(p-\ell)} \\
&= - \sum_{\ell=0}^p \left[ 6(\ell+1) \binom{2p+2}{2\ell+3} + 4\ell(\ell+1) \binom{2p+3}{2\ell+3} \right] (-1)^\ell (1 - X^2)^\ell X^{2(p-\ell)} \\
&= -4p(p+1) \sum_{\ell=0}^p \binom{2p+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (1 - X^2)^\ell X^{2(p-\ell)} \\
&\quad \text{car } 6(\ell+1) \binom{2p+2}{2\ell+3} + 4\ell(\ell+1) \binom{2p+3}{2\ell+3} = 4p(p+1) \binom{2p+1}{2\ell+1} \\
&= -(2p)(2p+2)G_{2p}
\end{aligned}$$

Le cas où  $m$  est impair se traite de manière similaire.

En conclusion,

$$\boxed{\forall m \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad T(G_m) = -m(m+2)G_m.}$$

b) Démontrer que  $\mathcal{B} = (G_0, G_1, \dots, G_n)$  est une base orthogonale de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Pour tout  $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on pose

$$\lambda_m = -m(m+2).$$

Démontrons que  $G_0, G_1, \dots, G_n$  sont orthogonaux deux à deux. Soient  $k, \ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$  tels que  $k \neq \ell$ . En particulier, l'un des deux nombres  $\lambda_k, \lambda_\ell$  est non nul ; on suppose (quitte à inverser les rôles) que  $\lambda_\ell \neq 0$ . On a

$$\begin{aligned}\langle G_k, G_\ell \rangle &= \left\langle G_k, \frac{1}{\lambda_\ell} T(G_\ell) \right\rangle && \text{d'après a)} \\ &= \frac{1}{\lambda_\ell} \langle G_k, T(G_\ell) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_\ell} \langle T(G_k), G_\ell \rangle && \text{d'après la question 3.} \\ &= \frac{1}{\lambda_\ell} \langle \lambda_k G_k, G_\ell \rangle && \text{d'après a)} \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} \langle G_k, G_\ell \rangle\end{aligned}$$

d'où

$$\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}\right) \langle G_k, G_\ell \rangle = 0.$$

Or  $\lambda_k/\lambda_\ell \neq 1$  (puisque  $k \neq \ell$ ), donc

$$\langle G_k, G_\ell \rangle = 0.$$

Les polynômes  $G_0, G_1, \dots, G_n$  sont donc orthogonaux deux à deux. Comme ils sont non nuls, ils forment une famille libre d'après le cours. Comme cette famille libre est constituée de  $n+1$  vecteurs de  $\mathbb{R}_n[X]$ , qui est de dimension  $n+1$ , le théorème Bonux nous dit que c'est une base. En conclusion,

$$(G_0, G_1, \dots, G_n) \text{ est une base orthogonale de l'espace euclidien } (\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

*Remarque :* Ce n'est pas une base orthonormale mais tous les vecteurs ont en fait la même norme :  $\sqrt{\pi/2}$ . La famille  $\sqrt{2/\pi}(G_0, G_1, \dots, G_n)$  est donc une base orthonormale.

c) Écrire la matrice de  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Comme  $\forall m \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $T(G_m) = -m(m+2)G_m$ , on a immédiatement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \text{Diag}(0; -3; -8; \dots, -m(m+2); \dots; -n(n+2)).$$

## EXERCICE 2

Pour tout  $x > 0$ , on considère l'intégrale elliptique  $K(x)$  définie par  $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)\sin^2 \theta}}$ .

1. Calculer  $K(1)$ .

On a  $K(1) = \int_0^{\pi/2} d\theta$ , donc

$$K(1) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $K(1/x)/x = K(x)$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}K\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^{-2} - 1)\sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)\sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)(1 - \cos^2 \theta)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)\cos^2 \theta}} \\ &= \int_{\pi/2}^0 \frac{-d\alpha}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)\sin^2 \alpha}} \quad \text{en posant } \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)\sin^2 \alpha}} \\ &= K(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x}K\left(\frac{1}{x}\right) = K(x).$$

3. Démontrer que  $x \mapsto K(x)$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $x_1 \leq x_2$ . Pour tout  $\theta \in [0; \pi/2]$ , on a alors

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (x_1^2 - 1)\sin^2 \theta}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + (x_2^2 - 1)\sin^2 \theta}}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et  $\pi/2$ , on obtient

$$K(x_1) \geq K(x_2).$$

On a ainsi démontré que

$$x \mapsto K(x) \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

4. Démontrer que  $x \mapsto K(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Indication : On pourra utiliser les deux questions précédentes.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .

▷ Pour tout  $x > x_0$ , la décroissance de la fonction  $K$  nous dit que

$$K(x) \leq K(x_0).$$

Comme  $1/x < 1/x_0$ , la même propriété de décroissance nous dit que

$$\frac{1}{x} K\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{x} K\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{x_0}{x} \frac{1}{x_0} K\left(\frac{1}{x_0}\right),$$

ce qui donne, compte tenu de l'équation fonctionnelle de la question 2,

$$K(x) \geq \frac{x_0}{x} K(x_0).$$

On a donc

$$\forall x > x_0, \quad \frac{x_0}{x} K(x_0) \leq K(x) \leq K(x_0),$$

ce qui permet d'affirmer, en vertu du théorème des gendarmes, que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} K(x) = K(x_0).$$

▷ En procédant *mutatis mutandis*, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} K(x) = K(x_0).$$

En définitive, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} K(x) = K(x_0),$$

ce qui signifie que  $K$  est continue en  $x_0$ . Comme  $x_0$  est quelconque dans  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que

$$\boxed{K \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

5. a) Soit  $x > 0$ . Démontrer l'égalité  $K(x) = 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}}$  à l'aide du changement de variable  $\theta = \arctan((\cotan \alpha)/x)$ .

On a

$$K(x) = \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}} + \int_{\arctan(1/\sqrt{x})}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}}.$$

Dans la seconde intégrale du second membre, effectuons le changement de variable

$$\theta = \arctan\left(\frac{\cotan \alpha}{x}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\cotan \theta}{x}\right)$$

▷ Nouvelles bornes

Si  $\theta = \arctan(1/\sqrt{x})$ , on a  $\alpha = \arctan(1/\sqrt{x})$ .

Si  $\theta = \pi/2$ , on a  $\alpha = 0$ .

▷ Nouvelle différentielle

L'application  $\theta : \alpha \mapsto \arctan((\cotan \alpha)/x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\arctan(1/\sqrt{x}); \pi/2]$  et l'on a

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{1}{x} \frac{1 + \cotan^2 \alpha}{1 + \frac{\cotan^2 \alpha}{x^2}} = -x \frac{1 + \cotan^2 \alpha}{x^2 + \cotan^2 \alpha}.$$

▷ Nouvel intégrant

On a

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \left( \arctan \left( \frac{\cotan \alpha}{x} \right) \right) = \frac{\tan^2 \left( \arctan \left( \frac{\cotan \alpha}{x} \right) \right)}{1 + \tan^2 \left( \arctan \left( \frac{\cotan \alpha}{x} \right) \right)} = \frac{\cotan^2 \alpha}{x^2 + \cotan^2 \alpha},$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta}} &= \frac{-x \frac{1+\cotan^2\alpha}{x^2+\cotan^2\alpha}}{\sqrt{1+(x^2-1)\frac{\cotan^2\alpha}{x^2+\cotan^2\alpha}}} d\alpha \\
 &= -x \frac{\frac{1+\cotan^2\alpha}{x^2+\cotan^2\alpha}}{\frac{x\sqrt{1+\cotan^2\alpha}}{\sqrt{x^2+\cotan^2\alpha}}} d\alpha \\
 &= -\frac{\sqrt{1+\cotan^2\alpha}}{\sqrt{x^2+\cotan^2\alpha}} d\alpha \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{x^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} d\alpha \quad \text{car } 1+\cotan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\alpha}} d\alpha.
 \end{aligned}$$

▷ « Nouvelle intégrale »

On a

$$\begin{aligned}
 \int_{\arctan(1/\sqrt{x})}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta}} &= -\int_{\arctan(1/\sqrt{x})}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\alpha}} \\
 &= \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\alpha}}.
 \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$K(x) = 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta}}.$$

b) Déterminer une primitive sur  $[0; \pi/2[$  de la fonction  $1/\cos$ .

Pour  $x \in [0; \pi/2[$ , on pose

$$F(x) = \int^x \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

L'intégrant  $d\theta/\cos\theta$  étant stable par la transformation  $\theta \mapsto \pi - \theta$ , les règles de Bioche nous conduisent à effectuer le changement de variable

$$u = \sin\theta.$$

▷ Nouvelle borne

Si  $\theta = x$ , on a  $u = \sin x$ .

▷ Nouvelle différentielle

L'application  $u : \theta \mapsto \sin\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi/2[$  et l'on a

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad d\theta = \frac{du}{\cos\theta}.$$

▷ Nouvel intégrant

On a

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{du}{\cos^2\theta} = \frac{du}{1-\sin^2\theta} = \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du.$$

▷ « Nouvelle intégrale »

On obtient

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{2} \int^{\sin x} \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\
 &= \frac{1}{2} [\ln|1+u| - \ln|1-u|]^{\sin x} \\
 &= \frac{1}{2} (\ln|1+\sin x| - \ln|1-\sin x|).
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) \text{ est une primitive de } \frac{1}{\cos}.$$

c) En déduire que  $K(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$  et  $K(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\ln x)/x$ .

Soit  $x > 0$ . Le résultat de la question a) nous dit que

$$K(x) = 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{(\cos \theta) \sqrt{1+x^2 \tan^2 \theta}}.$$

Pour  $\theta \in [0; \arctan(1/\sqrt{x})]$ , on a  $0 \leq \tan^2 \theta \leq 1/x$ , donc

$$\int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{(\cos \theta) \sqrt{1+x}} \leq \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{1+x^2 \tan^2 \theta}} \leq \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{\sqrt{1+x}} \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta} \leq K(x) \leq 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$K(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Or, d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin(\arctan(1/\sqrt{x}))}{1 - \sin(\arctan(1/\sqrt{x}))} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\forall \theta \in ]-\pi/2; \pi/2[$ ,  $\sin^2 \theta = (\tan^2 \theta)/(1 + \tan^2 \theta)$ , on en déduit que

$$\sin(\arctan(1/\sqrt{x})) = \sqrt{\frac{1/x}{1+1/x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x+1} + 1) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x+1} - 1). \end{aligned}$$

Or

$$\ln(\sqrt{x+1} + 1) = \ln 2 + o(1)$$

et

$$\ln(\sqrt{x+1} - 1) = \ln \left( 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 \right) = \ln \left( x \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) \right) = \ln x - \ln 2 + o(1),$$

donc

$$\int_0^{\arctan(1/\sqrt{x})} \frac{d\theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{2} \ln x + \ln 2 + o(1).$$

On en conclut que

$$\boxed{K(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.}$$

Dès lors, on a

$$K(x) = \frac{1}{x} K\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left( -\ln \left( \frac{1}{x} \right) \right),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{K(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.}$$

6. Soit  $x > 0$ . On pose  $k = (1-x)/(1+x)$  de sorte que  $k \in ]-1; 1[$  et  $x = (1-k)/(1+k)$ . On pose  $\theta = \arcsin\left(\frac{(1+k)\sin\alpha}{1+k\sin^2\alpha}\right)$  (\*).

a) Démontrer que  $\frac{d\theta}{d\alpha} = (1+k) \frac{1-k\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$  et  $\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta} = \frac{1-k\sin^2\alpha}{1+k\sin^2\alpha}$ .

L'application  $\theta : \alpha \mapsto \arcsin\left(\frac{(1+k)\sin\alpha}{1+k\sin^2\alpha}\right)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi/2]$  et

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\alpha} &= \frac{(1+k)(\cos\alpha)(1+k\sin^2\alpha) - (1+k)(\sin\alpha)(2k\cos\alpha\sin\alpha)}{(1+k\sin^2\alpha)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{(1+k)\sin\alpha}{1+k\sin^2\alpha}\right)^2}} \\ &= (1+k)(\cos\alpha) \frac{1-k\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)^2} \sqrt{\frac{(1+k\sin^2\alpha)^2}{(1+k\sin^2\alpha)^2 - (1+k)^2\sin^2\alpha}} \\ &= (1+k)(\cos\alpha) \frac{1-k\sin^2\alpha}{1+k\sin^2\alpha} \frac{1}{\sqrt{1+2k\sin^2\alpha+k^2\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-2k\sin^2\alpha-k^2\sin^2\alpha}} \\ &= (1+k)(\cos\alpha) \frac{1-k\sin^2\alpha}{1+k\sin^2\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha+k^2(\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha-1)}} \\ &= (1+k)(\cos\alpha) \frac{1-k\sin^2\alpha}{1+k\sin^2\alpha} \frac{1}{(\cos\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\alpha} = (1+k) \frac{1-k\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta} &= \sqrt{1 + \left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 - 1\right) \left(\frac{(1+k)\sin\alpha}{1+k\sin^2\alpha}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + ((1-k)^2 - (1+k)^2) \frac{\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)^2}} \\ &= \sqrt{1 - 4k \frac{\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1+k\sin^2\alpha)^2 - 4k\sin^2\alpha}}{1+k\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{(1-k\sin^2\alpha)^2}}{1+k\sin^2\alpha} \quad \text{car } (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta} = \frac{1-k\sin^2\alpha}{1+k\sin^2\alpha}}$$

- b) En effectuant le changement de variable (\*) dans  $K(x)$ , démontrer que  $K(x) = \frac{2}{1+x} K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ .

Effectuons le changement de variable

$$\theta = \arcsin\left(\frac{(1+k)\sin\alpha}{1+k\sin^2\alpha}\right)$$

dans l'intégrale

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2\theta}}.$$

▷ Nouvelles bornes

Si  $\theta = 0$ , on a  $\alpha = 0$ .

Si  $\theta = \pi/2$ , on a  $\alpha = \pi/2$ .

▷ Nouvelle différentielle

On a vu dans la question précédente que le changement de variable est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi/2]$  et

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = (1+k) \frac{1-k\sin^2\alpha}{(1+k\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

▷ Nouvel intégrant

On a vu que

$$\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta} = \frac{1 - k \sin^2 \alpha}{1 + k \sin^2 \alpha}$$

donc

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta}} = \frac{(1 + k) \frac{1 - k \sin^2 \alpha}{(1 + k \sin^2 \alpha) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha}{\frac{1 - k \sin^2 \alpha}{1 + k \sin^2 \alpha}} = (1 + k) \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

▷ « Nouvelle intégrale »

On a

$$K(x) = (1 + k) \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$K(x) = (1 + k) \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + (1 + \sqrt{1 - k^2}) \sin^2 \alpha}} = (1 + k) K(\sqrt{1 - k^2}).$$

Or

$$1 + k = 1 + \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{2}{1 + x}$$

et

$$\sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1 + x)^2 - (1 - x)^2}}{1 + x} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x},$$

donc

$$\boxed{K(x) = \frac{2}{1 + x} K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right)}.$$

7. Soit  $x > 0$ . On considère les deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = x$  et les relations de récurrence  $\forall n \geq 0$ ,  $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$  et  $\forall n \geq 0$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ .

a) Démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  convergent vers une même limite strictement positive, notée  $\ell(x)$ . Indication : On pourra démontrer que  $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$  est sous-géométrique de raison  $1/2$ .

On pense évidemment à démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes !

Pour cela, on commence par déterminer laquelle de ces deux suites est supérieure à l'autre.

Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0,$$

ce qui démontre que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n \geq b_n.$$

Il suffirait donc de démontrer que  $(a_n)_{n \geq 1}$  est décroissante, que  $(b_n)_{n \geq 1}$  croissante et que  $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$  tend vers 0.

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = -\frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

donc

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante.}$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n} (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0$$

donc

$$(b_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2}}{a_n - b_n} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \leq \frac{1}{2},$$

donc  $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$  est sous-géométrique de raison  $1/2$ . Cela permet de démontrer (par une récurrence immédiate) que

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}.$$

On en déduit, à l'aide du théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Ainsi, les suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes. Cela implique qu'elles convergent vers une limite commune  $\ell(x)$  et que  $\ell(x) \geq b_1 = \sqrt{x} > 0$ . Donc

$$\boxed{(a_n)_{n \geq 0} \text{ et } (b_n)_{n \geq 0} \text{ convergent vers une même limite } \ell(x) > 0.}$$

- b) Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $K(b_{n+1}/a_{n+1}) = (a_{n+1}/a_n)K(b_n/a_n)$  et en déduire que  $K(x) = \pi/(2\ell(x))$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} K\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) &= K\left(\frac{2\sqrt{a_n b_n}}{a_n + b_n}\right) \\ &= K\left(\frac{2\sqrt{b_n/a_n}}{1 + b_n/a_n}\right) \\ &= \frac{1 + b_n/a_n}{2} K\left(\frac{b_n}{a_n}\right) && \text{d'après le résultat de 6. b) avec } x = b_n/a_n \\ &= \frac{a_n + b_n}{2a_n} K\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_n} K\left(\frac{b_n}{a_n}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad K\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} K\left(\frac{b_n}{a_n}\right).}$$

En itérant ce résultat (par une récurrence immédiate), on obtient, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$K\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_n}{a_{n-1}} K\left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} K\left(\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}\right) = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \times \frac{a_1}{a_0} K\left(\frac{b_0}{a_0}\right),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq 0, \quad K\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = a_n K(x).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell(x)$$

donc, en passant à la limite dans la relation ci-dessus et en tenant compte de la continuité de la fonction  $K$ , on obtient

$$K(1) = \ell(x) K(x).$$

Comme  $K(1) = \pi/2$  et  $\ell(x) > 0$ , il vient

$$\boxed{K(x) = \frac{\pi}{2\ell(x)}}.$$

---

Remarque culturelle :

La formule  $K(x)\ell(x) = \pi/2$  établie dans ce problème est due à Gauss (et oui, encore !). Elle permet le calcul approché des intégrales elliptiques  $K(x)$ . En effet, la convergence des suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  vers  $\ell(x)$  est très rapide, ce qui permet d'obtenir, en seulement quelques itérations, une valeur approchée de  $\ell(x)$  de bonne qualité. On en déduit alors une valeur approchée de  $K(x)$ .

Considérons un pendule constitué d'une masse  $m$  attachée à un fil de longueur  $L$ . On suppose que le pendule oscille avec une amplitude angulaire égale à  $\delta$  (avec  $\delta < \pi$ ). On souhaite déterminer la période  $T$  du mouvement.

La conservation de l'énergie entre le point courant (angle  $\theta$ ) et le point le plus haut atteint par le pendule (angle  $\delta$ ) donne

$$\frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgL \cos \theta = 0 - mgL \cos \delta,$$

c'est-à-dire

$$dt = \frac{1}{2\omega_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\delta/2) - \sin^2(\theta/2)}} \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Si  $t_0$  désigne l'instant où le pendule atteint (pour la première fois) l'angle  $\delta$ , on a

$$T = 4 \int_0^{t_0} dt = \frac{2}{\omega_0} \int_0^\delta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\delta/2) - \sin^2(\theta/2)}}.$$

En effectuant le changement de variable

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\delta/2)}\right),$$

on obtient alors

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\delta/2) \sin^2 \alpha}},$$

c'est-à-dire

$$T = \frac{4}{\omega_0} K(\cos(\delta/2)).$$

Lorsque  $\delta$  est petit, on a  $\cos(\delta/2) \approx 1$  et  $K(\cos(\delta/2)) \approx K(1) = \pi/2$ , ce qui donne  $T \approx T_0 = 2\pi/\omega_0$ . On retrouve la période d'un oscillateur harmonique.

Comme  $\sqrt{x} \leq \ell(x) \leq (1+x)/2$ , on a  $\ell(1) = 1$  et la fonction  $\ell$  est dérivable en 1 avec  $\ell'(1) = 1/2$ . Il s'ensuit que  $K$  est dérivable en 1 (en fait, elle est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  mais il faut un théorème de spé pour l'affirmer...) et  $K'(1) = -\pi/4$ . Par conséquent, on a  $K(x) = \pi/2 - \pi(x-1)/4 + o_{x \rightarrow 1}(x-1)$ , ce qui donne

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{16}\right) + o(\delta^2).$$

C'est la *formule de Borda*. Cette formule suffit jusqu'à  $\delta = \pi/2$ , à 3% de précision.

---

### EXERCICE 3

On note  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $\tilde{0}$  la fonction nulle de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et toutes fonctions  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , on appelle wronskien de  $(f_1, \dots, f_n)$  l'élément de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , noté  $W(f_1, \dots, f_n)$ , défini par  $W(f_1, \dots, f_n) : x \mapsto \det (f_j^{(i-1)}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Pour tout entier naturel  $d$ , on pose  $d^{[0]} = 1$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $d^{[k]} = d(d-1) \cdots (d-k+1)$ .

1. Soient  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $W(f_1, \dots, f_n)$  n'est pas la fonction nulle. Démontrer que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

Raisonnons par contraposition. Pour cela, supposons que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée. Il existe alors des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  non tous nuls tels que  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = \tilde{0}$ . En dérivant  $i$  fois cette relation (avec  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ), on obtient  $\lambda_1 f_1^{(i)} + \dots + \lambda_n f_n^{(i)} = \tilde{0}$ . Cela démontre que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les colonnes  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  de la matrice  $(f_j^{(i-1)}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$  vérifient  $\lambda_1 C_1(x) + \dots + \lambda_n C_n(x) = 0$ , autrement dit que ces colonnes sont liées. Par suite, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\det (f_j^{(i-1)}(x))_{1 \leq i, j \leq n} = 0$ , c'est-à-dire  $W(f_1, \dots, f_n) = \tilde{0}$ . En conclusion,

si  $W(f_1, \dots, f_n)$  n'est pas la fonction nulle, alors la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

- L'objet de la suite de cet exercice est d'étudier la réciproque du résultat de la question 1, autrement dit de savoir si la condition  $W(f_1, \dots, f_n) = \tilde{0}$  permet d'affirmer que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée.
2. On considère les deux éléments  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  définis par  $g : x \mapsto x^2$  et  $h : x \mapsto x|x|$ . Démontrer que  $(g, h)$  est libre et calculer  $W(g, h)$  après avoir justifié son existence. Quelle conclusion pouvez-vous tirer de cette question ?

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  par théorèmes généraux.

La fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  par théorèmes généraux. En 0, on a un point d'incertitude. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $h'(x) = 2|x|$ , donc  $h'(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0. Le théorème de la limite de la dérivée nous dit que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $h'(0) = 0$ .

Par conséquent,

$W(g, h)$  existe.

On voit que clairement que  $g$  et  $h$  ne sont pas colinéaires ( $g$  et  $h$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+$  et sont opposées l'une de l'autre sur  $\mathbb{R}_-$ ). Par conséquent,

$(g, h)$  est libre.

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $g(x) = h(x) = x^2$  et  $g'(x) = h'(x) = 2x$ , donc

$$W(g, h)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Pour tout  $x \leq 0$ , on a  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = -x^2$ ,  $g'(x) = 2x$  et  $h'(x) = -2x$ , donc

$$W(g, h)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent,

$W(g, h) = \tilde{0}$ .

On en déduit que

l'implication  $((f_1, \dots, f_n) = \tilde{0}) \Rightarrow ((f_1, \dots, f_n) \text{ est liée})$  est généralement fausse.

3. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes non nuls et  $d_1, \dots, d_n$  des entiers naturels. Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $M_j$  la fonction monomiale  $M_j : x \mapsto a_j x^{d_j}$ . Dans toute la suite, on convient que l'on a  $0 \times x^k = 0$  même lorsque  $k < 0$  et  $x = 0$ .

- a) Dans cette question, on suppose que  $d_1 + \dots + d_n < n(n-1)/2$ . Démontrer que la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée.

Si  $d_1, \dots, d_n$  étaient deux à deux distincts, disons  $d_1 < \dots < d_n$ , on aurait  $d_1 \geq 0$ , puis  $d_2 \geq d_1 + 1 \geq 1$ , ..., puis  $d_n \geq d_{n-1} + 1 \geq n - 2 + 1 = n - 1$ . Par conséquent, on aurait  $d_1 + d_2 + \dots + d_n \geq 0 + 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$ , ce qui est absurde ! Par conséquent,  $d_1, \dots, d_n$  ne sont pas deux à deux distincts, ce qui assure l'existence de  $j_1, j_2 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  distincts tels que  $d_{j_1} = d_{j_2}$ . Mézalors, les fonctions  $M_{j_1} : x \mapsto a_{j_1} x^{d_{j_1}}$  et  $M_{j_2} : x \mapsto a_{j_2} x^{d_{j_2}}$  sont liées (car  $a_{j_2} M_{j_1} - a_{j_1} M_{j_2} = \tilde{0}$ ). A fortiori, la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée. En conclusion,

la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée.

- Dans la suite de cette question, on suppose que  $d_1 + \dots + d_n \geq n(n-1)/2$  et on considère l'entier naturel  $D$  défini par  $D = d_1 + \dots + d_n - n(n-1)/2$ .

- b) On note  $V(d_1, \dots, d_n)$  le déterminant de la matrice  $(d_j^{[i-1]})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Calculer  $V(d_1, \dots, d_n)$  et en déduire que  $V(d_1, \dots, d_n)$  est non nul si, et seulement si, les nombres  $d_1, \dots, d_n$  sont distincts deux à deux.

Tiens, c'est rigolo, ce déterminant est noté de la même façon que le déterminant de Vandermonde. Y a-t-il un lien secret ? Suspense...

Notons  $L_1, \dots, L_n$  les lignes du déterminant  $V(d_1, \dots, d_n)$ .

Laissons les deux premières lignes intactes.

La ligne  $L_3$  est  $(d_1(d_1-1) \quad d_2(d_2-1) \quad \dots \quad d_n(d_n-1))$ . Sur cette ligne, effectuons l'opération  $L_3 + L_2 \rightarrow L_3$ , qui ne modifie le déterminant. On obtient une nouvelle ligne  $L_3$  donnée par  $(d_1^2 \quad d_2^2 \quad \dots \quad d_n^2)$ .

La ligne  $L_4$  est  $(d_1(d_1-1)(d_1-2) \quad d_2(d_2-1)(d_2-2) \quad \dots \quad d_n(d_n-1)(d_n-2))$ , c'est-à-dire que son  $j$ -ème élément est  $d_j^3 - 3d_j^2 + 2d_j$ . Sur cette ligne, effectuons l'opération  $L_4 + 3L_3 - 2L_2 \rightarrow L_4$ , qui ne modifie le déterminant. On obtient une nouvelle ligne  $L_4$  donnée par  $(d_1^3 \quad d_2^3 \quad \dots \quad d_n^3)$ .

Etc.

Le  $j$ -ème coefficient de la ligne  $L_i$  est de la forme  $d_j^{i-1} + \mu_{i-2} d_j^{i-2} + \dots + \mu_1 d_j$  où les  $\mu_k$  sont des entiers. Sur cette ligne, on effectue l'opération  $L_i - \mu_{i-2} L_{i-1} - \dots - \mu_1 L_2 \rightarrow L_i$ , qui ne modifie le déterminant. On obtient une nouvelle ligne  $L_i$  donnée par  $(d_1^{i-1} \quad d_2^{i-1} \quad \dots \quad d_n^{i-1})$ .

Ainsi de suite jusqu'à la ligne  $n$ .

Par conséquent, on a

$$V(d_1, \dots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \dots & d_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde. Par conséquent, d'après le cours, on a

$$V(d_1, \dots, d_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i).$$

On constate alors aisément que

$$V(d_1, \dots, d_n) \neq 0 \text{ si, et seulement si, } d_1, \dots, d_n \text{ sont deux à deux distincts.}$$

c) Démontrer que  $W(M_1, \dots, M_n) : x \mapsto a_1 \cdots a_n V(d_1, \dots, d_n) x^D$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$W(M_1, \dots, M_n)(x) = \begin{vmatrix} a_1 x^{d_1} & a_2 x^{d_2} & \dots & a_n x^{d_n} \\ a_1 d_1 x^{d_1-1} & a_2 d_2 x^{d_2-1} & \dots & a_n d_n x^{d_n-1} \\ a_1 d_1^{[2]} x^{d_1-2} & a_2 d_2^{[2]} x^{d_2-2} & \dots & a_n d_n^{[2]} x^{d_n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 d_1^{[n-1]} x^{d_1-n+1} & a_2 d_2^{[n-1]} x^{d_2-n+1} & \dots & a_n d_n^{[n-1]} x^{d_n-n+1} \end{vmatrix}.$$

En factorisant par  $a_j x^{d_j-n+1}$  dans la colonne  $j$  pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , ce qui revient à factoriser par  $a_1 \cdots a_n x^{d_1+\dots+d_n-n(n-1)}$ , on obtient

$$W(M_1, \dots, M_n)(x) = \prod_{j=1}^n a_j \cdot \begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-1} & \dots & x^{n-1} \\ d_1 x^{n-2} & d_2 x^{n-2} & \dots & d_n x^{n-2} \\ d_1^{[2]} x^{n-3} & d_2^{[2]} x^{n-3} & \dots & d_n^{[2]} x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{[n-1]} x^0 & d_2^{[n-1]} x^0 & \dots & d_n^{[n-1]} x^0 \end{vmatrix} x^{d_1+\dots+d_n-n(n-1)}.$$

En factorisant par  $x^{n-i}$  dans la ligne  $i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , ce qui revient à factoriser par  $x^{(n-1)+(n-2)+\dots+1+0} = x^{n(n-1)/2}$ , on obtient

$$W(M_1, \dots, M_n)(x) = \prod_{j=1}^n a_j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1^{[2]} & d_2^{[2]} & \dots & d_n^{[2]} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{[n-1]} & d_2^{[n-1]} & \dots & d_n^{[n-1]} \end{vmatrix} x^{d_1+\dots+d_n-n(n-1)/2},$$

c'est-à-dire

$$W(M_1, \dots, M_n)(x) = \prod_{j=1}^n a_j \times V(d_1, \dots, d_n) \times x^D.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(M_1, \dots, M_n)(x) = a_1 \cdots a_n V(d_1, \dots, d_n) x^D.}$$

d) Démontrer que si  $W(M_1, \dots, M_n) = \tilde{0}$ , alors la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée.

Supposons que la fonction  $W(M_1, \dots, M_n)$  est la fonction nulle. D'après la question précédente, cela implique que  $a_1 \cdots a_n V(d_1, \dots, d_n) = 0$ . Comme les  $a_k$  ne sont pas nuls, cela signifie que  $V(d_1, \dots, d_n) = 0$ . D'après la question c), on en déduit que les entiers  $d_1, \dots, d_n$  ne sont pas distincts. Cela assure l'existence de  $j_1, j_2 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  distincts tels que  $d_{j_1} = d_{j_2}$ . Mézalors, les fonctions  $M_{j_1} : x \mapsto a_{j_1} x^{d_{j_1}}$  et  $M_{j_2} : x \mapsto a_{j_2} x^{d_{j_2}}$  sont liées (car  $a_{j_2} M_{j_1} - a_{j_1} M_{j_2} = \tilde{0}$ ). A fortiori, la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  est liée. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } W(M_1, \dots, M_n) = \tilde{0}, \text{ la famille } (M_1, \dots, M_n) \text{ est liée.}}$$

4. On rappelle que la valuation d'un polynôme est le degré de son monôme non nul de plus petit degré. Le coefficient de ce monôme est appelé le coefficient dominé du polynôme. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $P_1, \dots, P_n$  des fonctions polynomiales non nulles de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $d_j$  la valuation de  $P_j$  et  $a_j$  le coefficient dominé de  $P_j$ .

a) On suppose, dans cette question, que les entiers naturels  $d_1, \dots, d_n$  sont deux à deux distincts. On garde la notation :  $D = d_1 + \dots + d_n - n(n-1)/2$  et on admet que  $D$  est un entier naturel (cela a été démontré à la question précédente).

$\alpha]$  Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , démontrer l'existence d'une fonction polynomiale  $R_{i,j}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que  $P_j^{(i-1)} : x \mapsto a_j x^{d_j-i+1} (d_j^{[i-1]} + x R_{i,j}(x))$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{P}(i)$  la propriété « il existe une fonction polynomiale  $R_{i,j}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que  $P_j^{(i-1)} : x \mapsto a_j x^{d_j-i+1} (d_j^{[i-1]} + x R_{i,j}(x))$  ».

Initialisation: Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$P_j^{(1-1)}(x) = P_j(x) = a_j x^{d_j} = a_j x^{d_j-1+1} (d_j^{[1-1]} + x R_{1,j}(x))$$

où  $R_{1,j}$  est la fonction polynomiale nulle. Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Hérédité: Fixons  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que  $\mathcal{P}(i)$  est vraie et démontrons  $\mathcal{P}(i+1)$ . On sait, d'après  $\mathcal{P}(i)$ , que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_j^{(i-1)}(x) = a_j d_j^{[i-1]} x^{d_j-i+1} + a_j x^{d_j-i+2} R_{i,j}(x).$$

Il s'ensuit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} P_j^{(i)}(x) &= a_j d_j^{[i]} x^{d_j-i} + a_j (d_j - i + 2) x^{d_j-i+1} R_{i,j}(x) + a_j x^{d_j-i+2} R'_{i,j}(x) \\ &= a_j x^{d_j-i} \left[ d_j^{[i]} + x((d_j - i + 2) R_{i,j}(x) + x R'_{i,j}(x)) \right] \\ &= a_j x^{d_j-i} (d_j^{[i]} + x R_{i+1,j}(x)), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_{i+1,j} : x \mapsto (d_j - i + 2) R_{i,j}(x) + x R'_{i,j}(x),$$

qui est bien une fonction polynomiale. Donc  $\mathcal{P}(i+1)$  est vraie.

Conclusion: D'après le principe de récurrence,  $\mathcal{P}(i)$  est vraie pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , c'est-à-dire

pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , il existe une fonction polynomiale  $R_{i,j}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que  $P_j^{(i-1)} : x \mapsto a_j x^{d_j-i+1} (d_j^{[i-1]} + x R_{i,j}(x))$ .

$\beta]$  Justifier l'existence d'une fonction polynomiale non nulle  $V$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que l'on ait  $W(P_1, \dots, P_n) : x \mapsto a_1 \cdots a_n V(x) x^D$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Le résultat de la question précédente nous dit que

$$W(P_1, \dots, P_n)(x) = \begin{vmatrix} a_1 x^{d_1} (1 + x R_{1,1}(x)) & a_2 x^{d_2} (1 + x R_{1,2}(x)) & \cdots & a_n x^{d_n} (1 + x R_{1,n}(x)) \\ a_1 x^{d_1-1} (d_1 + x R_{2,1}(x)) & a_2 x^{d_2-1} (d_2 + x R_{2,2}(x)) & \cdots & a_n x^{d_n-1} (d_n + x R_{2,n}(x)) \\ a_1 x^{d_1-2} (d_1^{[2]} + x R_{3,1}(x)) & a_2 x^{d_2-2} (d_2^{[2]} + x R_{3,2}(x)) & \cdots & a_n x^{d_n-2} (d_n^{[2]} + x R_{3,n}(x)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 x^{d_1-n+1} (d_1^{[n-1]} + x R_{n,1}(x)) & a_2 x^{d_2-n+1} (d_2^{[n-1]} + x R_{n,2}(x)) & \cdots & a_n x^{d_n-n+1} (d_n^{[n-1]} + x R_{n,n}(x)) \end{vmatrix}.$$

En effectuant exactement les mêmes factorisations qu'à la question 3. d), on obtient l'égalité

$$W(P_1, \dots, P_n)(x) = a_1 \cdots a_n V(x) x^D$$

où

$$V(x) = \begin{vmatrix} 1 + x R_{1,1}(x) & 1 + x R_{1,2}(x) & \cdots & 1 + x R_{1,n}(x) \\ d_1 + x R_{2,1}(x) & d_2 + x R_{2,2}(x) & \cdots & d_n + x R_{2,n}(x) \\ d_1^{[2]} + x R_{3,1}(x) & d_2^{[2]} + x R_{3,2}(x) & \cdots & d_n^{[2]} + x R_{3,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{[n-1]} + x R_{n,1}(x) & d_2^{[n-1]} + x R_{n,2}(x) & \cdots & d_n^{[n-1]} + x R_{n,n}(x) \end{vmatrix}.$$

L'application  $V$  est polynomiale puisque le déterminant est polynomial en ses coefficients. Par ailleurs, on constate que  $V(0) = V(d_1, \dots, d_n)$  ce qui implique que  $V(0) \neq 0$  puisque  $d_1, \dots, d_n$  sont distincts deux à deux. L'application  $V$  n'est donc pas l'application nulle.

En conclusion,

il existe une fonction polynomiale non nulle  $V$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telle que  $W(P_1, \dots, P_n) : x \mapsto a_1 \cdots a_n V(x) x^D$ .

b) On suppose que la famille  $(P_1, \dots, P_n)$  est libre.

$\alpha]$  Prouver qu'il existe  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et une famille  $(Q_1, \dots, Q_n)$  de fonctions polynomiales non nulles de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telles que les valuations des  $Q_j$  sont distinctes et telles que l'on ait  $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \cdot A$ .

On nous demande de faire une méthode du pivot ! Autrement dit, nous devons échelonner en valuation le vecteur  $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$ . Nous allons pour cela multiplier (à droite) ce vecteur par des matrices élémentaires (matrices de transpositions, de dilatations et de transvections) afin d'arriver à nos fins !

Tout d'abord, quitte à multiplier (à droite) le vecteur  $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$  par une matrice de permutation (c'est-à-dire un produit de matrices de transpositions), on peut supposer que  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sont rangés par ordre croissant de valuations, c'est-à-dire  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ .

En ajoutant un dilaté de  $P_1$  à chacun des polynômes  $P_2, \dots, P_n$ , on peut éliminer le terme en  $x^{d_1}$  dans  $P_2, \dots, P_n$ . Cela revient à multiplier à droite par un produit de matrices de transvection. On est alors dans la situation où  $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$ .

On recommence alors avec  $P_2$ , ce qui permet d'éliminer le terme en  $x^{d_2}$  dans  $P_3, \dots, P_n$ . Ainsi de suite...

Au final, on obtient un vecteur  $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$  tel que les valuations des polynômes  $Q_j$  sont deux à deux distinctes. Pour arriver là, il a fallu multiplier à droite le vecteur  $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$  par un produit de matrices élémentaires (qui sont toutes inversibles). Par conséquent, on peut affirmer l'existence d'une matrice  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que l'on ait  $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \cdot A$ .

En conclusion,

il existe une matrice  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et une famille  $(Q_1, \dots, Q_n)$  de fonctions polynomiales non nulles de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telles que les valuations des  $Q_j$  sont deux à deux distinctes et  $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \cdot A$ .

$\beta]$  Démontrer que  $W(P_1, \dots, P_n) \neq \tilde{0}$ . Qu'a-t-on ainsi démontré ?

En dérivant l'égalité vectorielle  $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \cdot A$ , on voit que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(i-1)} & Q_2^{(i-1)} & \dots & Q_n^{(i-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{(i-1)} & P_2^{(i-1)} & \dots & P_n^{(i-1)} \end{pmatrix} \cdot A.$$

Par suite, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} Q_1(x) & Q_2(x) & \dots & Q_n(x) \\ Q_1'(x) & Q_2'(x) & \dots & Q_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1^{(n-1)}(x) & Q_2^{(n-1)}(x) & \dots & Q_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \dots & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) & \dots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) & \dots & P_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot A,$$

ce qui donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$W(Q_1, \dots, Q_n)(x) = W(P_1, \dots, P_n)(x) \times \det(A).$$

Or, d'après la question a),  $W(Q_1, \dots, Q_n)$  n'est pas la fonction nulle. De plus, comme  $A$  est inversible, on a  $\det(A) \neq 0$ . Il s'ensuit que

$$W(P_1, \dots, P_n) \neq \tilde{0}.$$

En conclusion,

pour une famille de fonctions polynomiales  $P_1, \dots, P_n$ , on a l'équivalence  $(W(P_1, \dots, P_n) = \tilde{0}) \Leftrightarrow ((P_1, \dots, P_n) \text{ est liée})$ .