Renseignements généraux

— *Concours* : X
— *Matière* : Maths
— *NOM Prénom* : CORREIA Corentin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré d, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ telles que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $|\lambda_k| \leq 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{d} \lambda_k^n$.

1. Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq n_0$, $f(n+p) = f(n)$.
3. Montrer que les λ_k sont dans $\{0\} \cup \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = dim(ker\ u^k)$. Montrer que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est concave.

Exercice 3 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. On considère la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Quelle est cette matrice ?

Remarques sur l'oral

1. Pour la première question, je commence par regarder ce qu'il se passe pour $n = 0, 1, 2$. Pour le cas général, je propose d'essayer de reproduire le raisonnement utilisé pour $n = 2$, je vois vite que cela ne va pas marcher. Je pose ensuite $P_n = \prod (X - \lambda_k^n)$ et lorsque j'allais lui proposer d'utiliser la matrice compagnon de P_n, l'examinateur me demande de faire une interprétation matricielle. Je propose donc $f(n) = Tr(C_{P_n})$ et il me dit qu'il suffit de ne considérer que le polynôme P. Pour la deuxième question, je lui indique qu'il va falloir utiliser le fait que f est bornée et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc à valeurs dans un ensemble fini. Il me demande de montrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers. Après l'avoir montré, je prends du temps à mettre les choses en place et avec son aide, j'ai pu utiliser le principe des tiroirs et conclure. Pour la troisième question, en écrivant $\sum \lambda_k^n (\lambda_k^p - 1) = 0$, je comprends que les λ_k sont dans $\{0\} \cup \mathbb{U}_p$. J'utilise une matrice de Vandermonde pour le montrer (plus précisément, j'ai sommé sur $I \subset [\![1, n]\!]$ tels que les λ_i, $i \in I$, sont deux à deux distincts et tel que toutes les racines sont dans $\{\lambda_i \mid i \in I\}$). L'examinateur ne pensait pas à cela et m'a dit que cela marche bien.

2. Traduire : Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k + d_{k+2} \leq 2d_{k+1}$. Déjà vu cette année, pas de difficulté.
3. L'examinateur cherchait un exo qu'on pouvait faire en 5 minutes. J'ai su dire que la matrice est de déterminant -1 mais je n'ai pas tout de suite vu qu'elle est orthogonale. Après avoir essayé de voir comment elle agissait sur la base canonique, l'examinateur me demande ce que je connais comme matrice de déterminant -1. Après lui avoir parlé des symétries, je me rends compte que c'en est une, je lui dis qu'on écrit $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ et on obtient ce qu'on veut.