TD : Probabilités

1 Variable Aléatoire

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$: une v.a. à valeurs réelles (affecte un nombre réel à un événement de Ω)
- x: une valeur possible prise par X
- $P(X = x)$: probabilité que l'événement $\{X = x\}$ se réalise
- $p_X(x)$: loi de probabilité de X définie comme $p_X(x) = P(X = x)$
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: fonction de répartition de X

Exercice 1 : Une entreprise fabrique des interrupteurs avec voyants lumineux. Un relevé statistique indique que 5% des interrupteurs fabriqués sont défectueux. Supposons que l'on prélève successivement et au hasard de la production deux interrupteurs. Notons X la v.a. "nombre d'interrupteurs défectueux dans l'échantillon prélevé".

1. Définir la v.a. X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Définir la fonction de répartition de X.
4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus, un interrupteur soit défectueux?

Exercice 2 : On tire successivement, avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R, une verte V et une blanche B.

1. On gagne 1 euro avec R, 2 euros avec V et on perd 3 euros avec B. Définir la v.a. X qui représente le gain.Définir la variable aléatoire X
2. Déterminer sa loi de probabilité
3. Déterminer sa fonction de répartition
4. Calculer son espérance

2 Lois de probabilité

— Loi binomiale $X \sim \beta(n,p)$: $P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$
— Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \forall \lambda > 0$
— Espérance: $E[X] = \sum_x xP(X=x)$
— Variance: $V[X] = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

Exercice 3 : On jette successivement, cinq fois un dé. On s'intéresse à la v.a. X qui représente le nombre de fois qu'un 3 apparaît.

1. Définir X (seulement les ensembles de départ et d'arrivée).
2. Définir la loi de probabilité de X (avec ses paramètres).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 deux fois?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir le nombre 3?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 au moins une fois?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 au moins 3 fois?
7. Quelle est l'espérance de X?

Exercice 4 : On considère la v.a. X qui modélise le nombre de fois qu'un tireur à l'arc atteint sa cible après n tirs. Sachant que ce tireur a une probabilité $p = \frac{5}{7}$ d'atteindre sa cible.

1. Définir la v.a. X.
2. Quelle est la probabilité que le tireur touche 3 fois sa cible après 5 tirs? Même question après 10 tirs?
3. On suppose que le tireur gagne 1 euro à chaque fois qu'il touche sa cible. Définir cette nouvelle v.a. Y qui définit le gain du tireur après un tir.
4. Calculer l'espérance mathématique de Y après 5 tirs.
5. Calculer la variance de Y après 5 tirs.

Exercice 5 : Une étude réalisée par un technicien a permis d'établir que le nombre moyen des arrivées de pièces à usiner à un certain poste est de 90 à l'heure. En supposant que la v.a. X qui compte le nombre d'arrivées à la minute suit une loi de Poisson.

1. Définir la loi de probabilité de X
2. Quelle est la probabilité qu'entre 10h52 et 10h53 il n'y ait aucune arrivée?
3. Quelle est la probabilité que pendant une minute il y ait entre 2 et 5 arrivées?
4. Quelle est l'espérance de X?
5. Quelle est la variance de X?

3 CAPLP 2018

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}$ pour n entier naturel par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Les définitions et résultats suivants seront utiles dans la suite du problème.

- La fonction f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbf{R}$, positive ou nulle sur $\mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, et si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
- Soit f une densité et X est une variable aléatoire réelle.
  On dit que X a pour densité f si la fonction de répartition F de X est donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
- Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors X admet une espérance notée $E(X)$ donnée par

  $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t.$$

  Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors X^2 admet une espérance $E(X^2)$ donnée par

  $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$$

  et X admet une variance donnée par $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Partie A : préliminaires

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant x^2 + 1$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| \leqslant x^2 + 1$.
   (c) Soit X une variable aléatoire réelle de densité donnée f telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et une variance.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire que Y a pour densité la fonction g_λ définie par $g_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance.
   (b) Montrer que l'espérance de Y est $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ et que la variance de Y est $V(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
   (c) Déterminer la fonction de répartition G de la variable aléatoire Y.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire que X a pour densité la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{x^2}{2})$.

   (a) Montrer que X admet une espérance et une variance.

   (b) Montrer que l'espérance de X est $E(X) = 0$ et que la variance de X est $V(X) = 1$.

Partie B : étude du cas particulier de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_0(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{2})$.

1. Étudier la parité de la fonction f_0 .
2. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de f_0 .
3. Exprimer $f_0(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$.

Partie C : étude du cas particulier de la fonction f_1

1. Étude de la fonction f_1.
   Dans cette partie, on note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 dans un repère orthonormé du plan.

   (a) Étudier la parité de la fonction f_1 .

   (b) Établir le tableau des variations de la fonction f_1 sur $[0; +\infty[$.

   (c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote horizontale et préciser la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à cette asymptote.

   (d) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

   (e) Justifier que f_1 est de classe 2 sur $\mathbf{R}$. Étudier la convexité de f_1 et déterminer les éventuels points d'inflexion.

   (f) Tracer T_0 et $\mathscr{C}_1$ dans un repère orthonormé du plan, en choisissant une unité graphique adaptée.

2. Étude d'une suite
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f_1(u_n)$.

   (a) Montrer que , pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

   (c) Déterminer sa limite L.

   (d) Construire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit rang n_0 à partir duquel, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant 10^{-1}$.

   (e) Déterminer à l'aide de votre calculatrice ce rang n_0.

Partie D : étude du cas général

1. Étude de la fonction f_n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

   On rappelle que la fonction f_n est définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n \exp(-\dfrac{x^2}{2})$.

   (a) Étudier la parité de f_n en fonction de n.

   (b) Donner le sens de variation de f_n sur $\mathbf{R}_+$.

   (c) Construire le tableau des variations de f_n sur $\mathbf{R}$ en fonction de la parité de n.

2. Calcul d'intégrales

   On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t)$. En déduire qu'il existe un réel t_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

   (b) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. En déduire que l'intégrale I_n est convergente.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, $\quad I_{n+2} = (n+1)I_n$.

   (d) Justifier, en utilisant la **Partie B**, que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

   (e) Calculer I_1 .

   (f) Montrer pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, les relations suivantes : $I_{2n+1} = 2^n n!$ et $I_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Partie E : étude d'une variable à densité

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (b) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et déterminer sa valeur.

   (c) Montrer que X admet une variance $V(X)$ et déterminer sa valeur.

3. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité. On note G sa fonction de répartition et g une densité de Y.

   (a) Soit $x \geqslant 0$ et soit x' le réel vérifiant $P(Y \leqslant x) = P(X \leqslant x')$. Exprimer x' en fonction de x. En déduire $G(x)$ en fonction de $F(x)$ si $x \geqslant 0$.

   (b) Déterminer $G(x)$ si $x < 0$.

   (c) Déduire une densité g de la variable aléatoire Y. Reconnaître la loi de Y, donner $E(Y)$ et $V(Y)$.

FIN

Tournez la page S.V.P.