AP - Objectif BTS

Primitives

Objectifs :

- Découvrir la notion de primitive
- Déterminer une primitive d'une fonction donnée
- Ouvrir vers le calcul intégral

En cours de terminale ou de première a été abordée une notion : la dérivation. Cette notion consiste à partir d'une fonction (notée f) et à déterminer sa fonction dérivée (notée f').

Primitive

Détermine une primitive d'une fonction revient à procéder au chemin "inverse" de la dérivation : on part de la dérivée pour remonter à une fonction.

On dit que F, une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$, est une primitive de f si on a :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque : contrairement à la dérivée, il n'y a pas qu'une seule primitive possible pour une fonction f !

Soit la fonction $f(x) = 2x$ pour laquelle on cherche une primitive.

1. On regarde dans le tableau des dérivées usuelles si la fonction se trouve dans la colonne $f'(x)$;
2. On déduit la forme générale des primitves $F'(x)$
3. On en choisit une (imposée ou non par l'énoncé).

On remarque que $f(x) = 2x$ est la dérivée de la fonction $F(x) = x^2$, on peut donc poser que $F(x) = x^2$ est une primitive de f. Mais :

- $G(x) = x^2 + 7$ est aussi une primitive de f.
- $H(x) = x^2 - 144$ est aussi une primitive de f.

Important

Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a; b]$ alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies telles que, pour tout x appartenant à $[a; b]$, on ait :

$$G(x) = F(x) + c$$

avec c une constante quelconque.

Exercice 1 - Déterminer pour chaque fonction une primitive.

1. $f(x) = 6x$
2. $g(x) = 3x^2 + 2x$
3. $h(x) = 2x - 3$
4. $i(x) = 6x^2 - 4x$

Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ si F est une primitive de f et G une primitive de g.
- Si F est une primitive de f alors kF est une primitive de kf avec k un nombre réel

Exercice 2 - Trouver LA primitive respectant la condition donnée

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

avec $F(1) = 0$

Exercice 3 - Trouver LA primitive respectant la condition donnée

$$f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$$

avec $F(0) = 4$

Exercice 4 - Déterminer LA primitive de constante d'intégration nulle de la fonction

$$f(x) = -0.104x^2 + 5.86$$

.

Exercice 5 - Déterminer LA primitive de constante d'intégration nulle de la fonction

$$f(x) = -5x^3 + 2x - x^2$$

.

Tableau des primitives usuelles

	La fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$
1	0	a
2	a	$ax+b$
3	x	$\frac{1}{2}x^2$
4	x^2	$\frac{1}{3}x^3$
5	x^n avec $n>0$ entier	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
6	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
7	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
8	e^x	e^x

Exercice 1

1. $F(x) = 3x^2$
2. $G(x) = x^3 + x^2$
3. $H(x) = x^2 - 3x$
4. $I(x) = 2x^3 - 2x^2$

Exercice 2 :

Déterminons d'abord une primitive de forme générale : $F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C$

Utilisons ensuite la condition initiale : $F(1) = 0$ ce qui veut dire que :

$$1 - \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} \times 1^4 + C = 0$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -C$$

$$\frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = -C$$

$$\frac{3}{4} = -C$$

$$C = -\frac{3}{4}$$

La fonction primitive recherchée est donc : $F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}$

Exercice 3 :

Déterminons d'abord une forme générale de la primitive : $F(x) = 2x^5 + 1.5x^4 - x + C$.
Il faut maintenant déterminer la constante C en utilisant la condition définie. On sait que $F(0) = 4$. Ce qui donne :

$$2 \times 0^5 + 1.5 \times 0^4 - 0 + C = 4$$

$$C = 4$$

La fonction primitive F est donc $F(x) = 2x^5 + 1.5x^4 - x + 4$

Exercice 4

On sait déjà que $C = 0$ (constante d'intégration nulle). Il reste à utiliser le formulaire.

$$F(x) = -0.104 \times \frac{1}{3}x^3 + 5.86 \times x$$

Exercice 5

On sait déjà que $C = 0$ (constante d'intégration nulle). Il reste à utiliser le formulaire.

$$F(x) = -5 \times \frac{1}{4}x^4 + 2 \times \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$F(x) = - \times \frac{5}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{3}x^3$$