FONCTIONS

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. Une fonction périodique est bornée.
2. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

1. Non. C'est vrai pour une suite mais pas pour une fonction : penser à tan.
2. Oui.
3. Non. La fonction $x \longmapsto -1/x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais son carré (qui n'est rien d'autre que le produit de cette fonction par elle-même) est $x \longmapsto 1/x^2$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. L'énoncé devient vrai si l'on écrit : Le produit de deux fonctions croissantes **positives** est une fonction croissante.

♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]
Un matin à 9h00, le Petit Chaperon Rouge part de chez sa mère pour aller porter un petit pot de beurre et une galette à sa mère-grand. Flanant dans les bois, cueillant des fleurs et des baies sauvages, discutant avec un loup, la jeune enfant n'arrive chez sa mère-grand que bien plus tard.

Après une sombre histoire de chevillette, de grandes dents, de « c'est pour mieux te manger mon enfant » et de chasseur passant là par hasard, la jeune fille décide de passer la nuit avec sa mère-grand.

Le lendemain à 9h00 tapante, le Petit Chaperon Rouge reprend la route pour rentrer chez sa mère. Là aussi, elle périgrine et n'arrive qu'à l'heure où elle veut bien arriver. Son chemin est par contre exactement le même que celui de la veille (en sens inverse évidemment !).
1. Justifier qu'il existe un horaire, commun aux deux journées, où le Petit Chaperon Rouge est au même endroit.
2. On note $d_1(t)$ la distance parcourue, le premier jour, entre l'instant $t_0 = 9\text{h}$ et l'instant t. On note $d_2(t)$ la distance parcourue, le second jour, entre l'instant $t_0 = 9\text{h}$ et l'instant t. Expliquer comment utiliser les courbes représentatives de d_1 et d_2 pour déterminer la (les) solution(s) de la première question.

1. Il suffit d'imaginer que les deux « voyages » ont lieu le même jour : un premier Chaperon Rouge part de chez sa mère à 9h et un second Chaperon Rouge part de chez sa mère-grand à la même heure. Les deux Petits Chaperons Rouges vont alors nécessairement finir par se croiser ! (le théorème des valeurs intermédiaires est caché derrière tout cela). À cet instant là, le Petit Chaperon Rouge est au même endroit à la même heure, les deux jours. On peut donc bien affirmer que

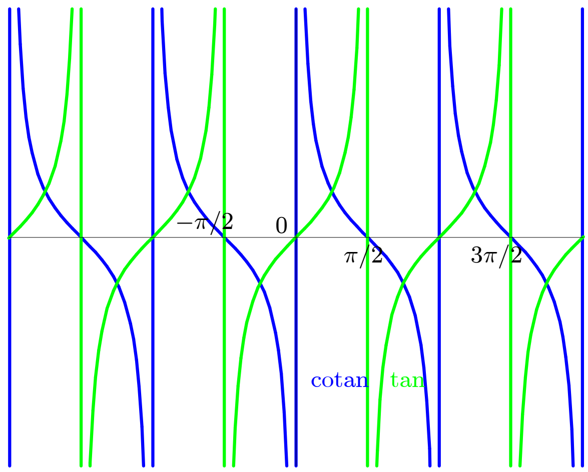
   $\boxed{\text{il existe un horaire, commun aux deux journées, où le Petit Chaperon Rouge est au même endroit.}}$

2. Dans la première question, on recherche les valeurs de t, notées t^*, telles que $d_1(t^*)+d_2(t^*) = D$ où D désigne la distance séparant les maisons de la mère et de la mère-grand (c'est aussi la dernière valeur prise par les fonctions d_1 et d_2). L'égalité $d_1(t^*)+d_2(t^*) = D$ étant équivalente à $d_1(t^*) = D-d_2(t^*)$, il convient donc de rechercher les points d'intersection entre les courbes représentatives des fonctions $t \longmapsto d_1(t)$ et $t \longmapsto D - d_2(t)$. Or le graphe de cette dernière fonction s'obtient en symétrisant celui de d_2 par rapport à la droite horizontale d'ordonnée $D/2$. Par conséquent,

   les solutions de la première question sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe de d_1 et le symétrique de la courbe de d_2 par rapport à la droite $y = D/2$ où D est la distance séparant les maisons de la mère et de la mère-grand.

♦ ***Exercice 3.*** [∘]
Représenter le graphe de la fonction tangente et, sur le même dessin, le graphe de la fonction cotangente définie par cotan = cos / sin. *On notera que* $\cot\!an(x) = \tan(\pi/2 - x)$.

On a
$$\mathscr{D}_{\text{cotan}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
et, pour tout $x \neq k\pi$,
$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
donc le graphe de cotan s'obtient en opérant sur le graphe de tan successivement une symétrie d'axe (Oy) puis une translation vers la droite de $\pi/2$, ce qui donne :



♦ ***Exercice 4.*** [⋆]
Soit $\mathscr{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

1. Démontrer que si $0 \in \mathscr{D}$, alors toute fonction impaire sur $\mathscr{D}$ est nulle en 0.
2. Démontrer que la seule application paire et impaire sur $\mathscr{D}$ est la fonction nulle.
3. Démontrer que toute fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose, de manière unique, sous la forme de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

1. Soit f une fonction impaire. On a
$$\begin{aligned} f(0) &= f(-0) \\ &= -f(0) \qquad \text{car } f \text{ est impaire,} \end{aligned}$$
donc
$$2f(0) = 0,$$
c'est-à-dire
$$\boxed{f(0) = 0.}$$
2. Considérons une fonction f qui soit à la fois paire et impaire sur $\mathscr{D}$. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a
$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \qquad \text{car } f \text{ est paire} \\ &= -f(x) \qquad \text{car } f \text{ est impaire,} \end{aligned}$$
donc
$$2f(x) = 0,$$
c'est-à-dire
$$f(x) = 0.$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathscr{D}.}$$

Remarque : On savait déjà que, pour les fonctions, le contraire de « paire » n'est pas « impaire » puisqu'il existe des tas de fonctions qui ne sont ni paires ni impaires. Cette question nous montre qu'il existe aussi une fonction qui est à la fois paire et impaire !

3. Nous allons procéder par analyse synthèse.

   ► Analyse : Supposons l'existence de $p : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et $i : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que $f = p+i$, c'est-à-dire
   $$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) = p(x) + i(x). \qquad (1)$$
   En évaluant en $-x$ et en tenant compte de la parité de p et de l'imparité de i, on obtient
   $$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = p(x) - i(x). \qquad (2)$$
   En additionnant les relations (1) et (2), on obtient
   $$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$
   et en soustrayant les relations (1) et (2), il vient
   $$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
   On a ainsi démontré l'unicité du couple (p,i) sous réserve d'existence.

   ► Synthèse : Considérons les fonctions $p : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $i : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in \mathscr{D}$, par
   $$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
   On constate alors que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a
   $$p(x)+i(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x),$$
   $$p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$$
   et
   $$i(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -i(x),$$
   ce qui prouve que p est paire et i est impaire et $f = p+i$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{toute fonction } f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ se décompose de manière unique sous la forme } f = p+i \\ \text{où } p : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est paire et } i : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est impaire et l'on a, pour tout } x \in \mathscr{D}, \\ \qquad p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}.\end{array}}$$

Bonus : Retrouvons l'unicité du couple (p,i). Pour cela, on suppose que f se décompose sous la forme $f = p_1+i_1 = p_2+i_2$ où p_1, p_2 sont paires et i_1, i_2 sont impaires. Mézalors, la relation $p_1-p_2 = i_2-i_1$ nous dit que la fonction paire p_1-p_2 est égale à la fonction impaire i_2-i_1, ce qui signifie, d'après la question précédente, que ces deux fonctions sont nulles. Donc $p_1 = p_2$ et $i_1 = i_2$, ce qui redémontre l'unicité de la partie paire et de la partie impaire d'une fonction.

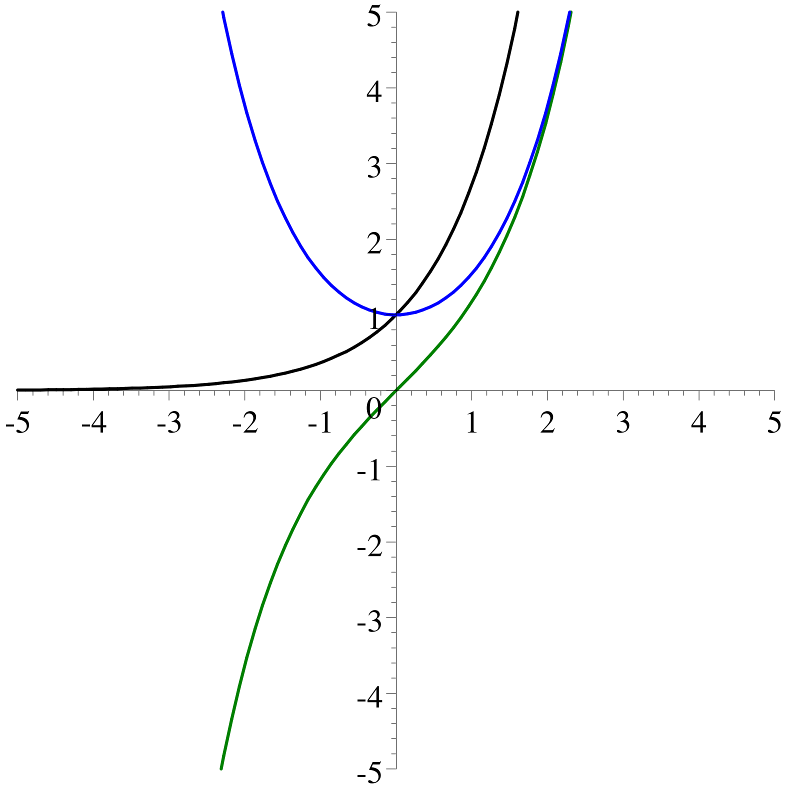
Exemples :

- Pour $f(x) = \mathrm{e}^{ix}$ (oui, oui, je sais, ce n'est pas une fonction réelle mais bon tout marche pareil !), on a
  $$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2} = \cos x \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2} = i\sin x,$$
  ce qui prouve que l'écriture
  $$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x,$$
  qui n'est rien d'autre que la définition de l'exponentielle complexe, est aussi la décomposition de cette fonction en parties paire et impaire.

- La partie paire et la partie impaire de l'exponentielle réelle (i.e. $f(x) = \mathrm{e}^x$) sont le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot$$

Sur les graphes de exp (en noir), de ch (en bleu) et de sh (en vert), on voit bien que exp est la somme de la fonction paire ch et de la fonction impaire sh :



♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]
Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies. On justifiera les réponses.
1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$ alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.

1. C'est vrai. Raisonnons par l'absurde en supposant que $a \geqslant b$. Alors, comme f est croissante, on a $f(a) \geqslant f(b)$, ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{\text{si } f \text{ est croissante et } f(a) < f(b) \text{ alors } a < b.}$$

2. Faux. En effet, une fonction constante est croissante et pourtant on a $f(2) \geqslant f(3)$ sans que $2 \geqslant 3$. Donc

$$\boxed{\text{il n'est pas vrai, en général, que si } f \text{ est croissante et } f(a) \leqslant f(b) \text{ alors } a \leqslant b.}$$

3. C'est vrai. Raisonnons par l'absurde en supposant que $a > b$. Alors, comme f est strictement croissante, on a $f(a) > f(b)$, ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{\text{si } f \text{ est strictement croissante et } f(a) \leqslant f(b) \text{ alors } a \leqslant b.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. On a $\ln(a+b) = \ln(a)\ln(b)$ et $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$.
2. Lorsque $xy > 0$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. Lorsque $xy \geqslant 0$, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt[3]{x^3} = |x|$.
6. Les fonctions $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \longmapsto x^{1/3}$ sont identiques.
7. Pour tout $x > 0$, on a $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.
8. La fonction cosinus est une fonction sinus déphasée.
9. Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont bornées sur leurs ensembles de définition.
10. La fonction tangente est π-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
11. La fonction tangente est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

1. Non !!
2. Non, pas si $x < 0$ et $y < 0$.
3. Non, pas si $x < 0$ et $y < 0$.
4. Oui.
5. Non, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt[3]{x^3} = x$.
6. Non. La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ alors que $x \longmapsto x^{1/3}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Oui.
8. Oui. Plus précisément, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$.
9. Non (globalement). Les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$ entre -1 et 1. Par contre, tan n'est pas bornée sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
10. Oui.
11. Non, tan est strictement croissante sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mais pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ tout entier.
12. Oui.

♦ ***Exercice 7.*** [⋆]

Dans le cours, nous avons admis l'existence du logarithme ln, défini sur $\mathbb{R}_+^*$ comme l'unique fonction strictement croissante qui vaut 1 en e et qui transforme les produits en sommes. De même, nous avons admis l'existence de l'exponentielle exp définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction strictement croissante qui vaut e en 1 et qui transforme les sommes en produits.

L'objectif de cet exercice est de justifier que ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.
   b) Démontrer que $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$.
   c) Démontrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.
   d) On suppose en outre que f est croissante. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
   Indication : Pour cette question, on admettra qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. Ce résultat (que l'on appelle la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) sera démontré plus tard.
2. En utilisant la fonction $f = \ln \circ \exp$, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

1. a) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}_n : f(n) = n$.
   <u>Initialisation :</u> $\mathscr{P}_1$ est vraie par hypothèse.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vérifiée et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. On a

$$\begin{array}{rcll} f(n+1) & = & f(n)+f(1) & \text{par additivité de } f \\ & = & n+1 & \text{par H.R. et hypothèse sur } f(1), \end{array}$$

ce qui établit $\mathscr{P}_{n+1}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n$.

Reste le cas où $n = 0$, c'est-à-dire à démontrer que $f(0) = 0$. On utilise pour cela l'hypothèse d'additivité de f sous la forme : $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, ce qui force bien $f(0) = 0$.

Finalement, nous avons démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) = n.}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La nullité de f en 0 et l'hypothèse d'additivité de f permettent d'écrire que $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, d'où $f(x) = -f(-x)$. Cela traduit le fait que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \mathbb{N}$, on sait, d'après a), que $f(m) = m$. Si, au contraire, $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on note que $-m \in \mathbb{N}^*$, d'où, d'après a), $f(-m) = -m$. De plus, l'imparité de f nous permet d'écrire $f(-m) = -f(m)$. En définitive, on a $f(m) = m$ également dans ce cas. Donc

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{Z}, \qquad f(m) = m.}$$

c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire r sous la forme p/q avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors $qf(r) = f(qr) = f(p) = p$, où l'on a successivement utilisé le résultat de la question a), l'égalité $qr = p$ et le résultat de la question b). Il s'ensuit, après division par q, que $f(r) = p/q = r$. Donc

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q}, \qquad f(r) = r.}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $f(x) \neq x$. Si $x < f(x)$, on sait qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < f(x)$ (c'est l'énoncé qui le dit), mézalors par croissance de f, l'inégalité de gauche implique que $f(x) \leqslant r$ (puisque $f(r) = r$ d'après la question précédente), ce qui est absurde (on aurait à la fois $r < f(x)$ et $f(x) \leqslant r$). Si $x > f(x)$, on sait qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x > r > f(x)$ (c'est l'énoncé qui le dit), mézalors, par croissance de f, l'inégalité de gauche implique que $f(x) \geqslant r$ (puisque $f(r) = r$ d'après la question précédente), ce qui est absurde (on aurait à la fois $r > f(x)$ et $f(x) \geqslant r$). Donc $f(x) = x$. En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x.}$$

2. On a

$$f(1) = (\ln \circ \exp)(1) = \ln(\mathrm{e}^1) = \ln(\mathrm{e}) = 1$$

et, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = (\ln \circ \exp)(x+y) = \ln(\mathrm{e}^{x+y}) = \ln(\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln(\mathrm{e}^y) = (\ln \circ \exp)(x)+(\ln \circ \exp)(y) = f(x)+f(y).$$

Par ailleurs, f est (strictement) croissante comme composée de deux telles fonctions. Ainsi, f satisfait toutes les propriétés de la question précédente, ce qui permet d'affirmer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ (\ln \circ \exp)(x) = x$ ou encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) = \ln(x),$$

où l'on a utilisé le résultat de la question précédente. Comme ln est strictement croissante, cela implique nécessairement que

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]

On considère l'équation
$$e^{x-2}+e^{x+8}=e^{4-x}+e^{3x+2}\,.$$

1. Toto a résolu cette équation en utilisant la formule (archi-fausse) $e^a+e^b=e^{ab}$. Déterminer les solutions trouvées par Toto.
2. Résoudre l'équation. Que dire ?

1. Toto a écrit
$$\begin{aligned} e^{x-2}+e^{x+8}=e^{4-x}+e^{3x+2} &\iff e^{(x-2)(x+8)}=e^{(4-x)(3x+2)}\\ &\iff (x-2)(x+8)=(4-x)(3x+2)\\ &\iff x^2+6x-16=-3x^2+10x+8\\ &\iff 4x^2-4x-8=0\\ &\iff 4(x+2)(x-3)=0\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=3, \end{aligned}$$
donc
$$\boxed{\text{les solutions trouvées par Toto sont } -2 \text{ et } 3.}$$
2. Résolvons correctement l'équation, ce qui donne
$$\begin{aligned} e^{x-2}+e^{x+8}=e^{4-x}+e^{3x+2} &\iff (e^{-2}+e^{8})\,e^{x}=e^{4}\,e^{-x}+e^{2}\,e^{3x}\\ &\iff (e^{-2}+e^{8})\,e^{2x}=e^{4}+e^{2}\,e^{4x}\\ &\iff e^{2}(e^{2x})^2-(e^{-2}+e^{8})\,e^{2x}+e^{4}=0\\ &\iff e^{2}(e^{2x}-e^{-4})(e^{2x}-e^{6})=0\\ &\iff e^{2x}=e^{-4}\ \text{ ou }\ e^{2x}=e^{6}\\ &\iff 2x=-4 \text{ ou } 2x=6\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=3, \end{aligned}$$
donc
$$\boxed{\text{les solutions correctes de l'équation sont } -2 \text{ et } 3.}$$
On en déduit qu'
$$\boxed{\text{il est vraiment trop fort ce Toto ! (même quand il se trompe\dots).}}$$