LA DROITE RÉELLE

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui possède au moins deux éléments et qui est majorée. Soit $a \in A$ tel que $\sup(A \setminus \{a\}) < \sup A$. Démontrer que $a = \max A$.

Comme $\sup(A \setminus \{a\}) < \sup A$, il existe nécessairement $b \in A$ tel que $\sup(A \setminus \{a\}) < b \leqslant \sup A$. Mézalors, $b \notin A \setminus \{a\}$, donc $b = a$. Il s'ensuit que $\forall x \in A \setminus \{a\},\ x < a$, ce qui signifie que

$$\boxed{a = \max A.}$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$.

1. Démontrer que $\sup A \leqslant \inf B$.
2. Démontrer que $\sup A = \inf B$ si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a;b) \in A \times B,\ b - a \leqslant \varepsilon$.

1. Soit $b \in B$. L'hypothèse nous dit que $\forall a \in A,\ a \leqslant b$. Le principe du passage à la borne supérieure implique alors que $\sup A$ existe et $\sup A \leqslant b$. On a donc démontré que $\forall b \in B,\ \sup A \leqslant b$. Le principe du passage à la borne inférieure entraîne alors que $\inf B$ existe et
$$\boxed{\sup A \leqslant \inf B.}$$
2. Supposons que $\sup A = \inf B$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sup A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon/2 \leqslant a$. De même, comme $\inf B + \varepsilon/2$ n'est pas un minorant de B, il existe $b \in B$ tel que $b \leqslant \inf B + \varepsilon/2$. Tenant compte de l'hypothèse, on a donc $\sup A - \varepsilon/2 \leqslant a \leqslant b \leqslant \inf B + \varepsilon/2$, ce qui implique que $b - a \leqslant \varepsilon$.

   Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a;b) \in A \times B,\ b - a \leqslant \varepsilon$. Comme $\inf B - \sup A \leqslant b - a$ pour tout $(a,b) \in A \times B$, on a $\forall \varepsilon > 0,\ \inf B - \sup A \leqslant \varepsilon$. En passant à la borne inférieure sur ε, on en déduit que $\inf B - \sup A \leqslant 0$, c'est-à-dire $\inf B \leqslant \sup A$. En associant cette inégalité à celle de la question précédente, on en déduit que $\sup A = \inf B$.

   Donc
$$\boxed{\sup A = \inf B \text{ si, et seulement si, } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a;b) \in A \times B,\ b - a \leqslant \varepsilon.}$$

   Remarque : Cela se produit par exemple lorsque $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$. Y réfléchir !

♦ ***Exercice 3.*** [$\star$]
Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. On suppose (dans cette question) que $A \subset B$. Démontrer que $\sup A \leqslant \sup B$.
2. Démontrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure qui est $\max\{\sup A; \sup B\}$.
3. On suppose que $A \cap B \neq \varnothing$. Démontrer que $A \cap B$ admet une borne supérieure. A-t-on $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A; \sup B\}$?
4. On pose $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Démontrer que $A + B$ admet une borne supérieure qui est $\sup A + \sup B$.
5. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que λA admet une borne supérieure qui est $\lambda \sup(A)$.
   Que se passe-t-il si l'on remplace λ par un nombre réel μ strictement négatif ?
6. On pose $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$. Démontrer que AB possède une borne supérieure. A-t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?
7. On pose $A^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A,\ ax = 1\}$ et l'on suppose que $A \subset \mathbb{R}_+$ et $A \neq \{0\}$. Démontrer que A^{-1} admet une borne inférieure qui est $(\sup A)^{-1}$.

Les parties A et B étant non vides et bornées dans $\mathbb{R}$, on peut affirmer l'existence de $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$.

1. Comme $A \subset B$, on en déduit que $\sup B$ est un majorant de A et donc que

$$\forall a \in A, \qquad a \leqslant \sup B.$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit alors que

$$\boxed{\sup A \leqslant \sup B.}$$

2. On sait que $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup A \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}$ et $\forall b \in B,\ b \leqslant \sup B \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}$, ce qui implique que

$$\forall c \in A \cup B, \qquad c \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}.$$

Donc $A \cup B$ est majorée. Comme $A \cup B$ n'est pas vide (car A ne l'est pas), on en déduit que $A \cup B$ admet une borne supérieure. De plus, en passant à la borne supérieure dans l'assertion $\forall c \in A \cup B,\ c \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}$, on a

$$\sup(A \cup B) \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}.$$

Considérons alors un majorant m de $A \cup B$. C'est aussi un majorant de A et de B car $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\sup A \leqslant m$ et $\sup B \leqslant m$. Il s'ensuit que $\max\{\sup A; \sup B\} \leqslant m$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout majorant m de $A \cup B$, on en déduit que

$$\max\{\sup A; \sup B\} \leqslant \sup(A \cup B).$$

Au final,

$$\boxed{\sup(A \cup B) = \max\{\sup A; \sup B\}.}$$

3. On a $A \cap B \subset A$ donc $A \cap B$ est majorée par $\sup A$. De même, $A \cap B \subset B$ donc $A \cap B$ est également majorée par $\sup B$. Il s'ensuit que $A \cap B$ est majorée par $\min\{\sup A; \sup B\}$ et donc que

$$\boxed{A \cap B \text{ admet une borne supérieure.}}$$

Mais on ne peut pas déterminer $\sup(A \cap B)$ car $A \cap B$ peut être vide et ne pas avoir de borne supérieure. Si A et B ne sont pas disjoints, on a

$$\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A; \sup B\}$$

mais l'on a pas nécessairement égalité comme le montre l'exemple $A = \{0; 1\}$ et $B = \{0; 2\}$ où l'on a $\sup(A \cap B) = 0$ et $\min\{\sup A; \sup B\} = 1$.

4. Pour tout $x \in A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Comme $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$, on en déduit que $x \leqslant \sup A + \sup B$. Ainsi, $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$, ce qui démontre que $A + B$ admet une borne supérieure. De plus, en passant à la borne supérieure dans l'inégalité $\forall x \in A + B,\ x \leqslant \sup A + \sup B$, on a

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sup A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon/2 \leqslant a$. De même, comme $\sup B - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de B, il existe $b \in B$ tel que $\sup B - \varepsilon/2 \leqslant b$. Dès lors, on a $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant a + b$, ce qui démontre que $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant \sup(A + B)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on peut passer à la borne inférieure sur ε, ce qui donne

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup(A + B).$$

En conclusion,

$$\boxed{\sup(A + B) = \sup A + \sup B.}$$

5. Comme $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup A$ et comme $\lambda > 0$, on en déduit que

$$\forall a \in A, \qquad \lambda a \leqslant \lambda \sup A.$$

Cela démontre que λA est majorée par $\lambda \sup A$ et donc que $\sup(\lambda A)$ existe (la non-vacuité de λA découlant immédiatement du fait que A n'est pas vide). De plus, en passant à la borne supérieure dans l'assertion $\forall a \in A,\ \lambda a \leqslant \lambda \sup A$, on obtient

$$\sup(\lambda A) \leqslant \lambda \sup A.$$

Considérons alors un majorant m de λA. On a $\forall a \in A,\ \lambda a \leqslant m$, ce qui donne $\forall a \in A,\ a \leqslant m/\lambda$ (car $\lambda > 0$). Ainsi, m/λ est un majorant de A, ce qui implique que $\sup A \leqslant m/\lambda$ ou encore $\lambda \sup A \leqslant m$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout majorant m de λA, on en déduit que

$$\lambda \sup A \leqslant \sup(\lambda A).$$

Donc

$$\boxed{\sup(\lambda A) = \lambda \sup A.}$$

Si $\mu < 0$, on démontre de même que

$$\boxed{\sup(\mu A) = \mu \inf A.}$$

6. A faire
7. A faire

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et A une partie quelconque de $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout $a \in A$, la partie $U + a = \{x + a : x \in U\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   En déduire que $U + A = \{x + a : x \in U,\ a \in A\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Soient F_1 et F_2 deux fermés de $\mathbb{R}$.
   Peut-on affirmer que $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}$ est un fermé ? *Indication : Prendre $F_1 = \{n - 1/n : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ et bien choisir F_2.*

1. Soit $a \in A$. Soit $y \in U + a$. Il existe alors $x \in U$ tel que $y = x + a$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset U$. Mézalors, $]x + a - r; x + a + r[\subset U + a$, c'est-à-dire $]y - r; y + r[\subset U + a$. Cela démontre que

$$\boxed{U + a \text{ est un ouvert.}}$$

On a

$$U + A = \bigcup_{a \in A} (U + a),$$

donc, comme une réunion d'ouverts est toujours un ouvert, on en déduit que

$$\boxed{U + A \text{ est un ouvert.}}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{une somme de parties est ouverte dès que l'une des deux parties l'est.}}$$

2. Prenons

$$F_1 = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \mathbb{Z}.$$

On sait que $F_2 = \mathbb{Z}$ est fermé.
Par ailleurs, on a

$$\mathbb{R} \setminus F_1 = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\cup \bigcup_{n \geqslant 2} \left]n + \frac{1}{n}; n + 1 + \frac{1}{n+1}\right[$$

donc $\mathbb{R} \setminus F_1$ est un ouvert en tant qu'union d'ouverts. Cela démontre que F_1 est fermé.
Enfin, on remarque que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{n} = \left(n + \frac{1}{n}\right) + (-n) \in F_1 + F_2,$$

donc

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}\right\} \subset F_1 + F_2,$$

ce qui démontre que 0 est sur la frontière de $F_1 + F_2$. Comme 0 n'appartient pas à $F_1 + F_2$ puisqu'on ne peut pas obtenir 0 en ajoutant un nombre non entier (dans F_1) à un nombre entier (dans F_2), on voit donc que $F_1 + F_2$ ne contient pas tous les points de sa frontière. Par conséquent, $F_1 + F_2$ n'est pas un fermé.
On voit ainsi que

$$\boxed{\text{la somme de deux fermés n'est pas toujours un fermé.}}$$

Remarque : Si l'on suppose que F_1 est bornée (en plus d'être fermée), on peut démontrer que $F_1 + F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas à notre portée en MPSI.

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère la relation $\mathscr{U}$ sur U définie par

$$\forall x, y \in U, \qquad (x \mathscr{U} y) \quad \Longleftrightarrow \quad ([x; y] \subset U),$$

où $[x; y]$ désigne le segment joignant x à y même lorsque $x > y$.

1. Démontrer que $\mathscr{U}$ est une relation d'équivalence sur U.
2. Démontrer que les classes d'équivalence de $\mathscr{U}$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Justifier que l'ensemble quotient $U/\mathscr{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{U}$) est dénombrable.
3. Qu'a-t-on ainsi démontré ?

1. Si $x \in U$, on a $[x; x] \subset U$ donc $x \mathscr{U} x$. Donc $\mathscr{U}$ est réflexive.

   Soient $x, y \in U$ tels que $x \mathscr{U} y$. On a $[x; y] \subset U$ donc aussi $[y; x] \subset U$, c'est-à-dire $y \mathscr{U} x$. Donc $\mathscr{U}$ est symétrique.

   Soient $x, y, z \in U$ tels que $x \mathscr{U} y$ et $y \mathscr{U} z$. Alors $[x; y] \subset U$ et $[y; z] \subset U$, donc $[x; y] \cup [y; z] \subset U$. Or $[x; z] \subset [x; y] \cup [y; z]$, donc $[x; z] \subset U$. Donc $\mathscr{U}$ est transitive.

   En conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{U} \text{ est une relation d'équivalence sur } U.}$$

2. Soit $x \in U$. On note $I_x = \{y \in U : x \mathscr{U} y\}$ la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{U}$.

   Démontrons que I_x est convexe. Soient $y, z \in I_x$. On veut montrer que $[y, z] \subset I_x$. Soit $t \in [y, z]$. Alors $[x, t] \subset [x, y] \cup [x, z]$ et comme $[x, y]$ et $[x, z]$ sont inclus dans U puisque $y, z \in I_x$, on en déduit que $[x, t] \subset U$. Donc $t \in I_x$, ce qui prouve que $[y, z] \subset I_x$. On sait ainsi que I_x est convexe et donc que I_x est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   Soit $a \in I_x$. En particulier, on a $a \in U$. Comme U est un ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que $]a - r; a + r[\subset U$. Mézalors, pour tout $t \in]a - r; a + r[$, on a $[a; t] \subset U$, c'est-à-dire $a \mathscr{U} t$. Comme $x \mathscr{U} a$, la transitivité de $\mathscr{U}$ implique que, pour tout $t \in]a - r; a + r[$, on a $x \mathscr{U} t$. Autrement dit, on a $]a - r; a + r[\subset I_x$. Cela démontre que I_x est un ouvert.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{les classes d'équivalence de } \mathscr{U} \text{ sont des intervalles ouverts de } \mathbb{R}.}$$

   Par conséquent, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure que dans chaque classe d'équivalence, on peut trouver un rationnel. L'application qui à chaque classe d'équivalence lui associe ce rationnel définit alors une injection de $U/\mathscr{U}$ vers $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en déduit que

   $$\boxed{\text{l'ensemble quotient } U/\mathscr{U} \text{ est dénombrable.}}$$

3. Les classes d'équivalence de $\mathscr{U}$ sur U fomant une partition de U, on a ainsi démontré que

   $$\boxed{\text{tout ouvert de } \mathbb{R} \text{ est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\circ$]

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. (re)Démontrer que

$$\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \mathrm{Int}(A).$$

En déduire que

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathrm{Fr}\, A.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\forall \varepsilon > 0,\ \ ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0,\ \ ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A = \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0,\ \ ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A) \end{aligned}$$

ce démontre bien que

$$\boxed{\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh}(A).}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) &= \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus A)\big) \\
&= \mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh}\big(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)\big) \qquad \text{d'après l'égalité ci-dessus} \\
&= \mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh} A,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(A).}$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus A) &= \operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A) \\
&= (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Int} A) \setminus (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh} A) \\
&= (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Int} A) \cap \big(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh} A)\big) \\
&= (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Adh}(A) \\
&= \operatorname{Adh}(A) \setminus \operatorname{Int}(A) \\
&= \operatorname{Fr} A,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus A) = \operatorname{Fr} A.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [$\star$]

1. Démontrer que $\{q^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.
2. Plus généralement, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante et D une partie dense de $\mathbb{R}$. Démontrer que $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

1. Soient x et y deux nombres réels positifs ou nuls tels que $x < y$. Alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, donc la densité de $\mathbb{Q}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ assure l'existence de $r \in \mathbb{Q}_+$ tel que $\sqrt{x} < r < \sqrt{y}$. Mézalors, $x < r^2 < y$. On a donc trouvé un rationnel r^2 entre x et y ce qui assure que

$$\boxed{\{q^2 : q \in \mathbb{Q}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}_+.}$$

2. L'application f étant strictement croissante, elle est injective. Elle est également surjective si on la restreint à $f(\mathbb{R})$ à l'arrivée. On note encore f cette restriction et on désigne par f^{-1} sa réciproque. On sait que celle-ci est strictement croissante (comme f).
Soient x et y deux éléments de $f(\mathbb{R})$ tels que $x < y$. Alors $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ puisque f^{-1} est strictement croissante. Dès lors, la densité de D dans $\mathbb{R}$ assure l'existence de $d \in D$ tel que $f^{-1}(x) < d < f^{-1}(y)$. Mézalors, en appliquant la fonction strictement croissante f à cet encadrement, on obtient $x < f(d) < y$. On a donc trouvé un élément de $f(D)$ entre x et y ce qui assure que

$$\boxed{f(D) \text{ est dense dans } f(\mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On souhaite démontrer l'alternative suivante : ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$, ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

Le cas $G = \{0\} = 0\mathbb{Z}$ étant clair, on suppose que $G \neq \{0\}$.

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. On la note α.
2. On suppose, dans cette question, que $\alpha > 0$. Démontrer $G = \alpha\mathbb{Z}$. *Un tel sous-groupe est dit discret.*
3. On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$. Démontrer G est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Comme $G \neq \{0\}$, il existe $g \in G$ tel que $g \neq 0$. Dès lors, $-g \in G$. Par conséquent, on a $\pm g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide.
   Par ailleurs, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minorée par 0.
   Donc, par la propriété de la borne inférieure,
   $$\boxed{\text{la borne inférieure } \alpha \text{ de } G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ existe.}}$$
2. Démontrons que $G = \alpha\mathbb{Z}$ par double-inclusion.
   $\boxed{\supset}$ Démontrons que $\alpha \in G$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $\alpha \notin G$. Comme $2\alpha > \alpha$, on sait que 2α n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, il existe une infinité de $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < g < 2\alpha$. Prenons en deux : g_1 et g_2 tels que $\alpha < g_1 < g_2 < 2\alpha$. Alors $0 < g_2 - g_1 < \alpha$ et $g_2 - g_1 \in G$ (puisque G est un groupe), ce qui est absurde ! Donc $\alpha \in G$.
   Dès lors, tous les itérés de α doivent appartenir à G, ce qui donne $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
   $\boxed{\subset}$ Soit $g \in G$. Quitte à remplacer g par $-g$ (qui est aussi dans G), on peut supposer que $g \geqslant 0$. Pour démontrer que g est un multiple de α, l'idée consiste à effectuer une espèce de division euclidienne de g par α en écrivant $g = n\alpha + r$ où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < \alpha$ avant de démontrer que r est nul.
   Si l'on ne peut pas rigoureusement parler de division euclidienne (puisque g et α ne sont pas des entiers), rien n'interdit de poser $n = \lfloor g/\alpha \rfloor$ de sorte que l'on a bien $g = n\alpha + r$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < \alpha$. Dès lors, on a $r = g - n\alpha$ ce qui démontre que $r \in G$ en tant que différence de deux éléments du groupe G. Comme $r \in [0; \alpha[$ et comme il n'y a pas d'élément de G dans $]0; \alpha[$, on en déduit que $r = 0$. Donc $g = n\alpha$ ce qui prouve que $g \in \alpha\mathbb{Z}$.
   Ainsi a-t-on démontré que $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\text{dans le cas où } \alpha > 0, \text{ on a } G = \alpha\mathbb{Z}.}$$
3. On adapte la démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Vite, vite, on renfile notre déguisement de grenouille!
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On traite le cas où $0 < x < y$. Les autres cas sont similaires ou évidents.
   Prenons $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$ (c'est possible puisque $\alpha = 0$). Si aucun élément de la famille $(ng)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartenait à l'intervalle $]x; y[$, on aurait deux éléments consécutifs pg et $(p+1)g$ (où $p \in \mathbb{N}$) tels que $pg \leqslant x < y \leqslant (p+1)g$, c'est-à-dire $(p+1)g - pg \geqslant y - x$ ou encore $g \geqslant y - x$, ce qui est absurde ! D'où l'existence d'un terme $ng \in G$ dans l'intervalle $]x; y[$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\text{dans le cas où } \alpha = 0, G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [★]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a/b pour que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.
2. a) Soit α un nombre irrationnel. Démontrer que $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que l'écriture en base 10 de 2^n commence par un 7.

1. Le sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est discret si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. Alors $a\mathbb{Z} \subset \alpha\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} \subset \alpha\mathbb{Z}$, ce qui implique qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a = n\alpha$ et $b = m\alpha$. Alors, on a $a/b = n/m$ ce qui démontre que a/b est un rationnel.
   Réciproquement, supposons que a/b est rationnel, c'est-à-dire $a/b = n/m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}^*$. Posons $\beta = a/n = b/m$. Alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \beta n\mathbb{Z} + \beta m\mathbb{Z} \subset \beta\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ et donc que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe discret.
   En conclusion,
   $$\boxed{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ soit un sous-groupe discret de } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } a/b \text{ est rationnel.}}$$
2. a) On adapte la démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On traite le cas où $0 < x < y$, laissant au lecteur besogneux le soin de traiter le cas $x < y < 0$ (le cas $x < 0 < y$ étant évident puisque $0 \in \alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$).
   Comme α est irrationnel, la question précédente nous dit que $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha u + v \in]0; y - x[$. On distingue alors deux cas :

- ▷ <u>Premier cas : $u \in \mathbb{N}$</u> En reprenant le raisonnement grenouillesque adopté pour prouver que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on voit que l'un des itérés positifs de $\alpha u + v$ (c'est-à-dire un nombre de la forme $k(\alpha u + v)$ où $k \in \mathbb{N}$) est dans l'intervalle $]x; y[$. Comme un tel itéré est aussi dans $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$, on en coasse de joie !
- ▷ <u>Second cas : $u \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$</u> On passe à l'opposé ! L'élément $\alpha(-u) - v$ est dans $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ mais aussi dans $]-(y-x); 0[$. En remarquant alors que l'intervalle $]x - \lceil y \rceil\,; y - \lceil y \rceil[$ est inclus dans $\mathbb{R}_-$, on peut à nouveau reprendre le raisonnement de la grenouille pour justifier que l'un des itérés positifs de $\alpha(-u) - v$, disons $\alpha k(-u) - kv$ où $k \in \mathbb{N}$, appartient à $]x - \lceil y \rceil\,; y - \lceil y \rceil[$. Mézalors, $\alpha k(-u) - kv + \lceil y \rceil \in]x; y[$ et $\alpha k(-u) - kv + \lceil y \rceil \in \alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$, ce qui conclut.

En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } \alpha \text{ est irrationnel, } \alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

b) On s'intéresse aux entiers $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $7 \times 10^p \leqslant 2^n < 8 \times 10^p$. Or

$$\begin{aligned} & 7 \times 10^p \leqslant 2^n < 8 \times 10^p \\ \iff \quad & \ln 7 + p \ln 10 \leqslant n \ln 2 < \ln 8 + p \ln 10 \\ \iff \quad & \ln 7 \leqslant n \ln 2 - p \ln 10 < \ln 8 \\ \iff \quad & \log 7 \leqslant n \log 2 - p < \log 8, \end{aligned}$$

où log désigne le logarithme en base 10. Comme $\log 2$ est irrationnel (sinon il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\log 2 = a/b$, ce qui donne $2^b = 2^a 5^a$, en contradiction avec l'unicité de la décomposition primaire), la question précédente nous dit que $(\log 2)\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une infinité d'éléments de $(\log 2)\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ dans l'intervalle $]\log 7; \log 8[$, c'est-à-dire une infinité de couples $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tels que $\log 7 \leqslant n \log 2 - p < \log 8$. On a nécessairement n, p de même signe une infinité de fois sinon $n \log 2 - p$ devient trop grand. Donc il existe une infinité de couples $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\log 7 \leqslant n \log 2 - p < \log 8$. Cela signifie qu'

$$\boxed{\text{il existe une infinité d'entiers } n \in \mathbb{N} \text{ tels que l'écriture en base 10 de } 2^n \text{ commence par un 7.}}$$