TD5 : Lois usuelles et statistiques

Rappels :

- Loi binomiale $X \sim \beta(n,p)$: $P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$
- Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $P(X=x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $\quad , \forall \lambda > 0$
- Espérance : $E[X] = \sum_x x P(X=x)$
- Variance : $V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

Exercice 1 : On jette successivement, cinq fois un dé. On s'intéresse à la v.a. X qui représente le nombre de fois qu'un 3 apparaît.

1. Définir X (seulement les ensembles de départ et d'arrivée).
   $X : \{1,2,3,4,5,6\}^5 \to \{0,1,2,3,4,5\}$
2. Définir la loi de probabilité de X (avec ses paramètres).
   $X \sim \beta(n,p)$ avec $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 deux fois ?
   $P(X=2) = C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = 0,1608$
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir le nombre 3 ?
   $P(X=0) = C_5^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5 = 0,4019$
5. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 au moins une fois ?
   $\sum_{x=1}^{5} P(X=x) = 1 - P(X=0) = 0,5981$
6. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 3 au moins 3 fois ?
   $\sum_{x=3}^{5} P(X=x) = 0,0322 + 0.0032 + 1,28 \times 10^{-4}$
7. Quelle est l'espérance de X ?
   $E[X] = np = \frac{5}{6} \approx 0,83$

Exercice 2 : On considère la v.a. X qui modélise le nombre de fois qu'un tireur à l'arc atteint sa cible après n tirs. Sachant que ce tireur a une probabilité $p = \frac{5}{7}$ d'atteindre sa cible.

1. Définir la v.a. X.
   $X : \Omega \to \{0,1,2,...,n\}$
   $X \sim \beta(n,p)$ avec $p = \frac{5}{7}$
2. Quelle est la probabilité que le tireur touche 3 fois sa cible après 5 tirs ? Même question après 10 tirs ?
   $X \sim \beta(5, \frac{5}{7}) \Rightarrow P(X=3) = C_5^3(\frac{5}{7})^3(\frac{2}{7})^2 \approx 0,2975$
   $X \sim \beta(10, \frac{5}{7}) \Rightarrow P(X=3) = C_{10}^3(\frac{5}{7})^3(\frac{2}{7})^7 \approx 0,0068$
3. On suppose que le tireur gagne 1 euro à chaque fois qu'il touche sa cible. Définir cette nouvelle v.a. Y qui définit le gain du tireur après un tir.
   La nouvelle v.a Y associe un gain de 1 euro à chaque fois qu'un tireur touche sa cible donc on a $Y = X$.
4. Calculer l'espérance mathématique de Y après 5 tirs.
   Y suit une loi binomiale de paramètre $p = 5/7$ et $n = 5$ donc $E[Y] = E[X] = np = \frac{25}{7} \approx 3,5714$
5. Calculer la variance de Y après 5 tirs.
   de même on a $V[Y] = V[X] = np(1-p) = \frac{5\times5\times2}{7} = 5\frac{5\times2}{7\times7} = \frac{50}{49} \approx 1,0204$

Exercice 3 : Une étude réalisée par un technicien a permis d'établir que le nombre moyen des arrivées de pièces à usiner à un certain poste est de 90 à l'heure. En supposant que la v.a. X qui compte le nombre d'arrivées à la minute suit une loi de Poisson.

1. Définir la loi de probabilité de X
2. Quelle est la probabilité qu'entre 10h52 et 10h53 il n'y ait aucune arrivée ?
3. Quelle est la probabilité que pendant une minute il y ait entre 2 et 5 arrivées ?
4. Quelle est l'espérance de X ?
5. Quelle est la variance de X ?