

TRIGONOMÉTRIE

Les énoncés et parties suivis du symbole [X] ne seront pas traités en cours.

A. Les lignes trigonométriques	3
A. 1. Définitions	3
A. 2. Formules de trigonométrie	5
B. Résolutions d'équations trigonométriques	9
B. 1. L'équation $\cos x = c$	9
B. 2. L'équation $\sin x = s$	10
B. 3. Le système $\cos x = c$ & $\sin x = s$	11
B. 4. L'équation $\tan x = t$	12
B. 5. L'équation $A \cos x + B \sin x = C$	13
C. Linéarisation et antilinéarisation	14
C. 1. Linéarisation	14
C. 2. Antilinéarisation	15



Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les nombres.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

Dans ce chapitre, on fait de la trigonométrie en évoquant *a minima* la nature fonctionnelle du cosinus, du sinus et de la tangente. Ces quantités sont ainsi définies géométriquement à partir des coordonnées d'un point du cercle unité. Pour souligner ce contexte non fonctionnel, on ne parle d'ailleurs pas de « fonctions circulaires » mais de « lignes trigonométriques ».

L'étude des fonctions circulaires est traitée dans le chapitre sur les outils d'analyse.

A. Les lignes trigonométriques

A.1. Définitions

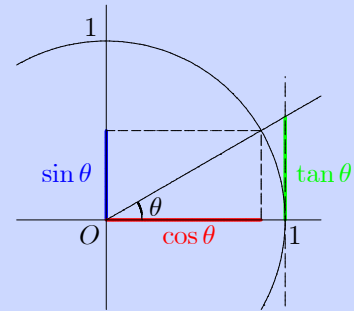
Nous rappelons ici la définition du cosinus, du sinus et de la tangente en les désignant comme des « fonctions ». Dans la suite de ce chapitre, leur nature fonctionnelle ne sera pas étudiée.

Définition 1

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

Pour tout nombre réel θ , le point M de \mathcal{C} tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure θ , a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$. On définit ainsi sur \mathbb{R} deux fonctions 2π -périodiques : le **sinus** et le **cosinus**.


Leur quotient $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ est la fonction **tangente**. Elle est définie et π -périodique sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



On peut également définir la fonction **cotangente** sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par

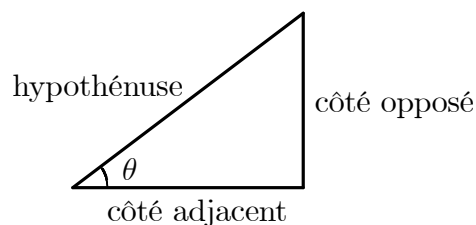
$$\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Les principales valeurs des fonctions trigonométriques sont données dans le tableau ci-dessous :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Expressions par les éléments du triangle

Le théorème de Thalès permet de déduire, de la définition du cosinus, du sinus et de la tangente que dans un triangle rectangle



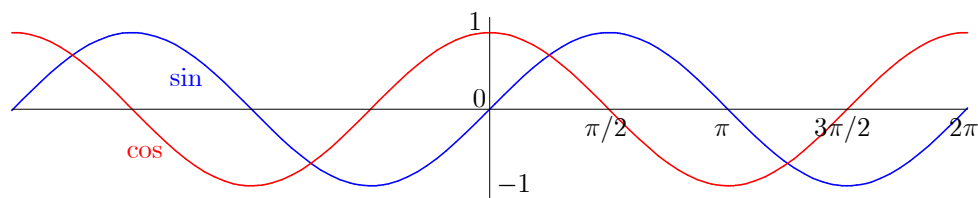
on a les formules bien connues :

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad \sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

L'encadré suivant fait le point sur les propriétés graphiques des fonctions cosinus et sinus.

Sinusoïdes

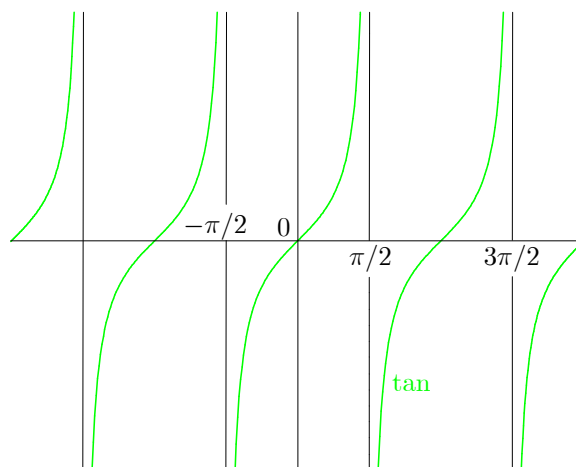
Graphiquement, les fonctions cosinus et sinus sont représentées par deux [sinusoïdes](#) déphasées de $\pi/2$. La fonction cosinus est paire sur \mathbb{R} et la fonction sinus est impaire sur \mathbb{R} .



L'encadré suivant fait le point sur les propriétés graphiques de la fonction tangente.

« Tangentoïde »

La fonction tangente est représentée, quant à elle, par une succession de « branches verticales » réparties π -périodiquement et admettant en chaque point $x_k = \pi/2 + k\pi$ une asymptote verticale. La fonction tangente est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



A.2. Formules de trigonométrie

Ce paragraphe fait le tour des principales formules de trigonométrie qu'il est nécessaire de connaître. Au passage, on les démontre!!

Commençons par la plus importante des formules de trigonométrie.

Proposition 1

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

■ Cela découle du fait que $(\cos \theta, \sin \theta)$ est un point du cercle unité. ■

Exemples :

- Lorsque $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{et} \quad \sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}.$$

En effet,

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1} = \cos^2 \theta$$

et

$$\sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}.$$

Ces formules ne sont pas à apprendre : elles se retrouvent à partir des deux expressions (à connaître) de la dérivée de \tan .

L'énoncé suivant rassemble les différentes propriétés de symétries des lignes trigonométriques. Je vous conseille de ne pas apprendre par cœur ces formules mais plutôt de savoir les retrouver rapidement en dessinant un cercle trigonométrique.

Proposition 2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\theta \neq 0$ si nécessaire, on a

$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$

■ Ces formules découlent de la définition des fonctions circulaires et de quelques remarques très simples de symétrie dans le cercle trigonométrique. ■

Les formules de la première ligne ci-dessus expriment la parité de la fonction \cos et les imparités des fonctions \sin et \tan .

Passons maintenant aux très importantes formules d'addition.

Proposition 3

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a, b, a \pm b \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ si nécessaire, on a

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

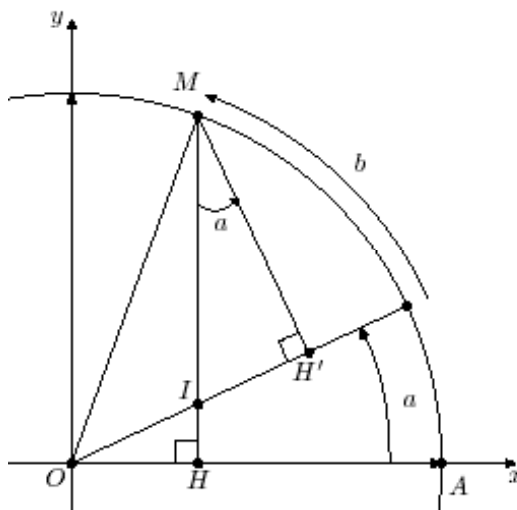
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

■ Toutes ces formules s'obtiennent aisément (en utilisant les formules de symétrie de la proposition précédente) dès lors que l'on connaît la formule

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Il suffit donc de donner une démonstration géométrique de cette formule. Nous le faisons lorsque a, b et $a+b$ sont trois angles compris entre 0 et $\pi/2$. Si l'on n'est pas dans cette situation, il est possible de s'y ramener en utilisant à nouveau les formules de symétrie de la proposition précédente.

Considérons le dessin suivant :



On a

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= OH \\ &= OI \cos a \quad \text{car } OHI \text{ est rectangle en } H \\ &= (OH' - IH') \cos a \\ &= (\cos b - IH') \cos a \quad \text{car } OH'M \text{ est rectangle en } H' \\ &= (\cos b - MH' \tan a) \cos a \quad \text{car } MH'I \text{ est rectangle en } H' \\ &= (\cos b - \sin b \tan a) \cos a \quad \text{car } OH'M \text{ est rectangle en } H' \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration. ■

Nous avons déjà utilisé les formules d'addition pour démontrer les propriétés de l'exponentielle complexe. La démonstration ci-dessus justifie donc *a posteriori* tout le travail effectué avec la notation $e^{i\theta}$.

Lorsque $a = b$, les formules d'addition fournissent les formules de duplication.

Corollaire 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $2a \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ si nécessaire, on a

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

■ Faire $a = b$ dans la proposition précédente. Les trois formules donnant $\cos 2a$ découlent les unes des autres à l'aide de la formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. ■

Exemples :

- Les formules de duplication donnent en particulier

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

Ces formules, dite de linéarisation de $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ (nous y reviendrons au paragraphe C.), permettent de primitiver les fonctions \cos^2 et \sin^2 . Pour cette raison, elles sont très utiles en physique dans certains calculs énergétiques ondulatoires.

Continuons avec les non moins importantes formules de factorisation.

Proposition 4

Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p, q, p \pm q \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ si nécessaire, on a

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

■ On se contente de démontrer la première formule, laissant le lecteur courageux s'attaquer aux autres. Les formules d'addition ayant justifié les propriétés de l'exponentielle complexe, on peut dorénavant utiliser les complexes pour démontrer les formules de trigonométrie sans risquer de cercle vicieux. Ne nous en privons pas ! On a

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= \Re(e^{ip} + e^{iq}) \\ &= \Re(e^{i(p+q)/2}(e^{i(p-q)/2} + e^{-i(p-q)/2})) \\ &= \Re\left(e^{i(p+q)/2} \times 2 \cos \frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \cos \frac{p-q}{2} \Re(e^{i(p+q)/2}) \\ &= 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}, \end{aligned}$$

où l'on aura noté le rôle crucial de la technique de l'angle moyen. ■

Les formules de factorisation ne sont pas simples à retenir. Le programme officiel ne demande d'ailleurs pas de les connaître par cœur mais de savoir les retrouver très vite. Il faut donc parfaitement maîtriser la démonstration ci-dessus.

On termine avec les formules de paramétrisation du cercle unité. Nous verrons qu'elles sont très utiles dans certains calculs d'intégrales.

Proposition 5

Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ si nécessaire, si l'on pose

$$t = \tan \frac{\theta}{2},$$

on a

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

■ Pour la première formule, on écrit :

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}}{1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}} = \frac{\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)} = \frac{\cos \theta}{1} = \cos \theta.$$

Pour la deuxième formule, on procède de même. ■

Les formules donnant le cosinus et le sinus en fonction de la tangente de l'angle-moitié fournissent un paramétrage du cercle unité \mathcal{C} (privé du point $(-1, 0)$) à l'aide de fractions rationnelles :

$$\mathcal{C} \setminus \{(-1, 0)\} = \left\{ \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce paramétrage se révèle fort utile dans bien des situations (par exemple en arithmétique).

B. Résolutions d'équations trigonométriques

Cette section est consacrée aux méthodes de résolution des équations trigonométriques de référence. Les résultats sont énoncés sans démonstration. Ces justifications viendront plus tard au moment de l'étude des fonctions trigonométriques réciproques.

B.1. L'équation $\cos x = c$

Résolution de $\cos x = c$

Soit $c \in [-1; 1]$. L'équation $\cos x = c$, d'inconnue réelle x , possède une unique solution x_0 dans $[0; \pi]$. L'ensemble de ses solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Le nombre $x_0 \in [0; \pi]$ s'appelle l'**arc cosinus de c** et est noté $\arccos c$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche $\boxed{\cos^{-1}}$.

Il découle de ce résultat que l'on a

$$\cos u = \cos v \iff \begin{cases} u = v + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ u = -v + 2\ell\pi & (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

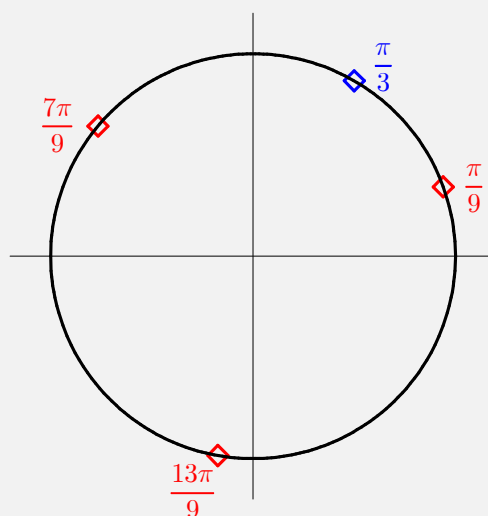
ce qui peut être utile pour résoudre certaines équations.

Exemples :

- L'équation $\cos x = 2$ n'a pas de solution.
- L'ensemble des solutions de $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z} \right\}$.
- On a

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2x + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2x + 2\ell\pi & (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\ell\pi & (\ell \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

On peut représenter graphiquement les solutions sur le cercle unité :



B.2. L'équation $\sin x = s$

Résolution de $\sin x = s$

Soit $s \in [-1; 1]$. L'équation $\sin x = s$, d'inconnue réelle x , possède une unique solution x_0 dans $[-\pi/2; \pi/2]$. L'ensemble de ses solutions est

$$\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Le nombre $x_0 \in [-\pi/2; \pi/2]$ s'appelle l'**arc sinus de s** et est noté $\arcsin s$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche $\boxed{\sin^{-1}}$.

Il découle de ce résultat que l'on a

$$\sin u = \sin v \iff \begin{cases} u = v + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ u = \pi - v + 2\ell\pi & (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ce qui peut être utile pour résoudre certaines équations.

Exemples :

- L'ensemble des solutions de $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.3. Le système $\cos x = c$ & $\sin x = s$

Résolution du système \cos & \sin

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} \cos x = c \\ \sin x = s \end{cases}$$

Si $c^2 + s^2 \neq 1$, ce système ne possède pas de solution.

Si la condition $c^2 + s^2 = 1$ est vérifiée, ce système possède une unique solution x_0 dans $[0; 2\pi[$. L'ensemble de ses solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut retenir de ce résultat qu'une mesure d'angle est connue sans ambiguïté (c'est à dire connue modulo 2π) dès que l'on connaît son cosinus et son sinus.

Exemples :

- L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B.4. L'équation $\tan x = t$

Résolution de $\tan x = t$

Soit $t \in \mathbb{R}$. L'équation $\tan x = t$, d'inconnue réelle x , possède une unique solution x_0 dans $] -\pi/2; \pi/2[$. L'ensemble de ses solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{x_0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Le nombre $x_0 \in] -\pi/2; \pi/2[$ s'appelle l'**arc tangente de t** et est noté $\arctan t$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche $\boxed{\tan^{-1}}$.

Il découle de ce résultat que l'on a

$$\tan u = \tan v \iff u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ce qui peut être utile pour résoudre certaines équations.

Exemples :

- L'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = 1$ est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- L'équation $\tan x = -\sqrt{3}$ admet $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ comme ensemble de solutions.

B.5. L'équation $A \cos x + B \sin x = C$

Transformation de $A \cos x + B \sin x$ en $r \cos(x - \varphi)$

Pour transformer la quantité $E = A \cos x + B \sin x$ (où $A, B \in \mathbb{R}^*$) en une expression de la forme $r \cos(x - \varphi)$, on effectue les étapes suivantes :

- on calcule $r = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$;
- on factorise E par r pour obtenir $E = r(\alpha \cos x + \beta \sin x)$ avec $\alpha = A/r$ et $\beta = B/r$;
- comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \cos \varphi$ et $\beta = \sin \varphi$, ce qui donne

$$E = r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x),$$

c'est-à-dire

$$E = r \cos(x - \varphi).$$

On notera que r et φ sont le module et un argument du nombre complexe $A + iB$.

Cette transformation a plusieurs applications :

- Elle permet, en physique, de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal (électromagnétique, sonore, ...) défini comme la somme de deux signaux.
- On peut aussi l'utiliser pour résoudre les équations du type $A \cos x + B \sin x = C$ où A, B, C sont trois nombres réels, en se ramenant à une équation du type $\cos x = c$. Des exemples sont donnés ci-dessous.

Exemples :

- Considérons l'équation $-3 \cos x + 4 \sin x = 10$. On a $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ donc l'équation est équivalente à

$$-\frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x - \varphi) = 2,$$

où $\cos \varphi = -3/5$ et $\sin \varphi = 4/5$. L'équation n'a donc aucune solution.

- Résolvons l'équation (E) : $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2$. On a $r = \sqrt{3+1} = 2$, donc

$$\begin{aligned} (E) \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ & \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. Linéarisation et antilinéarisation

C.1. Linéarisation

Linéarisation d'un produit trigonométrique

Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de fonctions cos et sin en une somme de telles fonctions. Pour cela, on effectue les étapes suivantes :

- on remplace chaque occurrence des fonctions cosinus et sinus par leur expression en nombres complexes à l'aide des formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i};$$

- on développe les différents produits qui apparaissent dans l'expression ;
- on réutilise les formules d'Euler pour revenir en nombres réels.

Exemples :

- Linéarisons $\cos^3 \theta$. On a

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta. \end{aligned}$$

- Les formules

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)], \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)], \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \end{aligned}$$

sont des cas particuliers de linéarisation d'expressions trigonométriques.

C.2. Antilinéarisation

L'antilinéarisation (ou délinéarisation) est l'opération contraire de la linéarisation.

Écriture de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

À l'inverse du paragraphe précédent, nous voulons, pour tout entier n , exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. Pour cela, on effectue les étapes suivantes :

- on écrit la formule de de Moivre $\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n$ et on développe le terme de droite ;
- on identifie les parties réelles et imaginaires de l'égalité obtenue ;
- on simplifie (si besoin) les résultats en utilisant la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Cette technique permet de ramener le calcul de la valeur de certains cosinus et sinus à la résolution d'équations polynomiales. Un exemple est donné ci-dessous.

Exemples :

- Les formules

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

et

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

peuvent se démontrer en utilisant la technique d'antilinéarisation.

- Exprimons $\cos 3x$ et $\sin 3x$ comme des polynômes respectivement en $\cos x$ et $\sin x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i3x} = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

On en déduit que

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

et

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

- Calculons $\cos(\pi/8)$. On a $\cos(\pi/4) = 2 \cos^2(\pi/8) - 1$, c'est-à-dire $\sqrt{2}/2 = 2 \cos^2(\pi/8) - 1$, d'où $\cos^2(\pi/8) = (2 + \sqrt{2})/2$, ce qui donne

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}},$$

puisque $\cos(\pi/8) > 0$.

2 h 00