DM n° 21 : Analyse globale, combinatoire

Correction du problème 1 – (Théorème de Sunyer y Balaguer)

Partie I – Théorème de Baire

1. • Soit U dense dans $\mathbb{R}$ au sens de l'énoncé, et soit x et y deux réels tels que $x < y$. En prenant $V =]x, y[$, et $F = \mathbb{R}$, on a $V \cap F \neq \varnothing$, donc $U \cap V \cap F \neq \varnothing$, donc il existe $z \in U$ tel que $x < z < y$. Ainsi, U est bien dense dans $\mathbb{R}$ au sens usuel.
   • Réciproquement, supposons que U est dense dans $\mathbb{R}$ au sens usuel. Alors en prenant $F = \mathbb{R}$, et V un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $V \cap F \neq \varnothing$ (donc $V \neq \varnothing$), V contient une boule ouverte $B(x, \eta)$. Par densité, il existe $z \in U$ tel que $x - \eta < z < x + \eta$, donc $z \in B(x, \eta) \subset V$. Ainsi, $U \cap V \cap F \neq \varnothing$

   $\boxed{\text{La notion de densité définie dans l'énoncé coïncide donc avec la notion usuelle lorsque } F = \mathbb{R}.}$

2. On se donne $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans F, et V un ouvert de $\mathbb{R}$ rencontrant F.
   (a) Par densité de U_1 dans F, $U_1 \cap V \cap F \neq \varnothing$. Soit $x \in U_1 \cap V \cap F$. Comme $U_1 \cap V$ est un ouvert (intersection finie d'ouverts), il existe η tel que $B(x, \eta) \subset U_1 \cap V$. On pose $a_1 = x - \frac{\eta}{2}$ et $b_1 = x + \frac{\eta}{2}$. On a bien $\boxed{a_1 < b_1}$, $x \in]a_1, b_1[$, donc $\boxed{]a_1, b_1[\cap F \neq \varnothing}$, et

   $$[a_1, b_1] \subset B(x, \eta) \subset U_1 \cap V \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{[a_1, b_1] \cap F \subset U_1 \cap V \cap F}.$$

   (b) On construit les intervalles $[a_n, b_n]$ par récurrence sur n, l'initialisation ayant été faite ci-dessus. Supposons $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ construites telles que souhaitées. On applique la construction de la question précédente avec l'ouvert $V' =]a_n, b_n[\subset V$, et en considérant U_{n+1} au lieu de U_1. Par hypothèse de récurrence, V' rencontre bien F, et il existe donc a_{n+1} et b_{n+1} tels que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset]a_n, b_n[$, $]a_{n+1}, b_{n+1}[\cap F \neq \varnothing$, et

   $$[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap F \subset U_{n+1} \cap]a_n, b_n[\cap F.$$

   Comme par ailleurs, l'hypothèse de récurrence amène

   $$]a_n, b_n[\cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap V \cap F,$$

   on en déduit que

   $$[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} U_i\right) \cap V \cap F.$$

   L'inclusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset]a_n, b_n[$ permet de prolonger la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n). Ainsi, le principe de récurrence permet d'établir l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$, $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$, et

   $$\boxed{[a_n, b_n] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap V \cap F} \qquad \text{et} \qquad \boxed{]a_n, b_n[\cap F \neq \varnothing}.$$

   (c) La suite (a_n) est croissante et majorée (par b_0) et (b_n) est décroissante et minorée. Elles convergent donc vers des éléments a et b respectivement, satisfaisant à l'inégalité $a \leqslant b$.
   Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a, b] \subset [a_n, b_n]$, donc

   $$[a, b] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap V \cap F.$$

Ainsi, $[a, b]$ est aussi inclus dans l'intersection de tous ces ensembles à savoir :

$$\boxed{[a, b] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i\right) \cap V \cap F.}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F \cap]a_n, b_n[$. La suite (x_n) étant bornée (ses valeurs sont dans $[a_1, b_1]$), le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'en extraire une suite convergente. Notons x sa limite. Le théorème de prolongement des inégalités larges permet de justifier que

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Par ailleurs, F étant fermé, $x \in F$, en tant que limite d'éléments de F. Ainsi, $\boxed{[a, b] \cap F \neq \varnothing}$.

(d) La question précédente nous donne bien, pour tout ouvert V rencontrant F, l'existence d'un élément x dans $\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i\right) \cap V \cap F$.

Par définition, cela prouve $\boxed{\text{la densité de } \bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i \text{ dans } F}$.

Partie II – Théorème de Sunyer y Balaguer

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in U_n$. Soit $y = f^{(n)}(x)$. On a donc $y \neq 0$. Posons $\varepsilon = \frac{|y|}{2}$. Par continuité de $f^{(n)}$ (la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x' \in B(x, \eta')$,

$$|f^{(n)}(x')| > |f^{(n)}(x)| - \varepsilon = \frac{|y|}{2} > 0.$$

Ainsi, $\boxed{B(x, \eta) \subset U_n}$.

On en déduit que U_n est voisinage de tous ses points, donc que $\boxed{U_n \text{ est ouvert}}$.

2. Soit $x \in \Omega$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que f coïncide avec un polynôme P sur $B(x, \eta)$. Or, pour tout $y \in B(x, \frac{\eta}{2})$, on a l'inclusion

$$B(y, \frac{\eta}{2}) \subset B(x, \eta),$$

provenant de l'inégalité triangulaire. Ainsi f et P coïncident sur $B(y, \frac{\eta}{2})$, ce qui prouve que $y \in \Omega$. On a donc

$$B(x, \frac{\eta}{2}) \subset \Omega,$$

et par conséquent, Ω est un voisinage de x. Ceci étant vrai pour tout $x \in \Omega$, $\boxed{\Omega \text{ est un ouvert}}$.

3. Supposons que U et V sont deux ouverts non disjoints et que f coïncide avec un polynôme P sur U et avec un polynôme Q sur V. L'intersection $U \cap V$ est un ouvert non vide, donc contient une boule $B(x, \eta)$, donc $U \cap V$ contient une infinité de points. La fonction f étant égale à la fois à P et Q sur $U \cap V$, les éléments de $U \cap V$ sont racines du polynôme $P - Q$. Ainsi, ce dernier a une infinité de racines, il s'agit donc du polynôme nul. Il en découle que $\boxed{P = Q}$.

4. Soit $x \in \Omega$, et $\eta > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que f coïncide avec P sur $B(x, \eta)$. On considère

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} \mid f = P \text{ sur } [y, x] (\text{ou } [x, y]).\}.$$

(a) • On montre d'abord que I_x est un intervalle. Soit y_1 et y_2 des éléments de I_x. On suppose sans perte de généralité que $y_1 < y_2$. Soit alors $y \in]y_1, y_2[$. On a alors, quelle que soit la position respective de x par rapport à ces trois réels y, y_1 et y_2 :

$$[y, x] \subset [y_1, x] \cup [y_2, x]$$

(les intervalles $[a, b]$ désignant ici $[b, a]$ lorsque $b < a$, par convention). Or, f et P coïncident sur $[y_1, x]$ et $[y_2, x]$, donc sur leur union, donc sur $[y, x]$. Ainsi, $y \in I_x$.

On a montré que I_x est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$, donc $\boxed{I_x \text{ est un intervalle}}$

- Notons α et β la borne inférieure et la borne supérieure de I_x. Si $\alpha \neq -\infty$, on a $f(y) = P(y)$ pour tout $y \in]\alpha, \beta[$, et donc, en passant à la limite lorsque y tend vers α^+, les deux fonctions étant continues, on obtient $f(\alpha) = P(\alpha)$. Ainsi, $\alpha \in I_x$.
  De la même manière $\beta \in I_x$ si $\beta \neq +\infty$.
  On en déduit que $\boxed{I_x \text{ est un intervalle fermé}}$.

(b) - Soit $y \in]\alpha, \beta[$. Comme cet intervalle est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset]\alpha, \beta[\subset I_x$, donc f coïncide avec le polynôme P sur toute la boule $B(y, \varepsilon)$. Par définition de Ω, on en déduit que $y \in \Omega$. Ainsi, $\boxed{]\alpha, \beta[\subset \Omega.}$
  - Supposons $\alpha \neq -\infty$. Si $\alpha \in \Omega$, alors par définition, f coïncide avec un polynôme Q sur une boule $B(a, \varepsilon)$. Or, f coïncide avec P sur $]\alpha, b[$ non vide (car cet ouvert contient au moins $B(x, \eta)$). Comme les deux ouverts $B(\alpha, \varepsilon)$ et $]\alpha, \beta[$ ne sont pas disjoints, on déduit de la question II-3 que $P = Q$. Ainsi, f et P coïncident sur $]\alpha - \varepsilon, \beta[$, ce qui contredit la minimalité de α.
  Ainsi, $\alpha \neq \Omega$, donc $\boxed{\alpha \in F}$.

(c) Soit I un intervalle tel que $I \subset \Omega$. Si I est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $x \in I$, et P coïncidant avec f sur I_x.

On a nécessairement $I \subset I_x$. En effet, en notant comme plus haut α et β les bornes inférieure et supérieure de I_x, et a et b celles de I, comme I_x est un intervalle fermé, on aurait nécessairement $a < \alpha$ ou $b > \beta$. Plaçons-nous dans le premier cas, à savoir $a < \alpha$. Alors, il existe $a' \in I$ tel que $a \leqslant a' < \alpha$. Comme $x \in I$ et $x > \alpha$, on obtiendrait, par convexité de l'intervalle I, l'appartenance $\alpha \in I$. Mais $I \subset \Omega$, ce qui contredit le fait que $\alpha \notin \Omega$.

Le raisonnement est le même dans le cas où $b > \beta$.

Ainsi, $I \subset I_x$, donc $\boxed{f \text{ coïncide avec } P \text{ sur } I}$.

5. On suppose qu'il existe $x \in F$ et $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \cap F = \{x\}$. Puisque Ω et F sont complémentaires, il découle de l'hypothèse que $]x - \eta, x[$ et $]x, x + \eta[$ sont inclus dans Ω. D'après la question précédente, il existe donc deux polynômes P et Q tels que f coïncide avec P sur $]x - \eta, x[$, et avec Q sur $]x, x + \eta[$. On note n le maximum des degrés de P et Q. On utilise alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, en constatant que pour tout $c \in]x - \eta, x[$, $f^{(n+1)}(c) = P^{(n+1)}(c) = 0$, et de même si $c \in]x, x + \eta[$, $f^{(n+1)}(c) = Q^{(n+1)}(c) = 0$. Par conséquent, pour tout $y \in B(x, \eta) \setminus \{x\}$, il existe c compris strictement entre x et y tel que

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y - x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k.$$

L'expression polynomiale obtenue ci-dessus coïncide avec P sur $]x - \eta, x[$ qui est infini, donc il s'agit de l'expression du polynôme P. De même, elle coïncide sur $]a, a + \eta[$ avec Q, donc il s'agit de l'expression du polynôme Q. Ainsi $P = Q$ et f coïncide avec P sur $B(x, \eta) \setminus \{x\}$. La continuité de P et de f permet alors de conclure que f et P coïncident sur $B(x, \eta)$, ce qui contredit le fait que $x \notin \Omega$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ n'admet pas de point isolé}}$.

6. On suppose F non vide.

(a) Les U_i sont des ouverts, et on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap F = \varnothing$, donc il s'agit d'une intersection non dense dans le fermé F (contradiction avec $V = \mathbb{R}$, voisinage d'un point quelconque de F, existant par l'hypothèse $F \neq \varnothing$)). Par la contraposée du théorème de Baire, l'un au moins des U_k n'est pas dense dans le fermé F.

Ainsi, en niant la propriété de densité, on obtient l'existence d'un élément $x \in F$ et d'un voisinage V de x tel que

$$V \cap U_k \cap F = \varnothing.$$

Comme V est un voisinage de x, il contient une boule $B(x, \eta)$, pour un certain $\eta > 0$. On a alors

$$\boxed{\forall y \in B(x, \eta) \cap F, \quad y \notin U_k \qquad \text{donc:} \qquad f^{(k)}(y) = 0}.$$

(b) Soit $y \in B(x, \eta) \cap F$. Comme F ne possède pas de point isolé, y est un point d'accumulation de F. En d'autres termes, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 distincts de F, convergeant vers y. On utilise alors le lemme des pics pour extraire de (y_n) une sous-suite monotone (donc strictement monotone, les éléments étant 2 à 2 distincts). En notant (x_n) la suite extraite ainsi obtenue, on a bien trouvé une suite (x_n), $\boxed{\text{strictement monotone}}$, constituée d'$\boxed{\text{éléments de } F}$, et $\boxed{\text{convergeant vers } x}$.

(c) On suppose que (x_n) est strictement croissante et à valeurs dans F. Comme $x_n \to y$ et que $B(x, \eta)$ est un voisinage de y, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in B(x, \eta)$. Quitte à faire une extraction supplémentaire (en supprimant les termes initiaux), on peut supposer que $x_n \in B(x, \eta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, d'après 6(a), $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_1) = \cdots = f^{(k)}(x_n) = \cdots = 0$. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$: on obtient une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, telle que $\boxed{f^{(k+1)}(y_i) = 0}$. La suite (x_n) étant strictement croissante, il en est de même de la suite y_n. Par ailleurs l'encadrement,

$$x_n < y_n < x_{n+1}$$

et la convergence de x_n et x_{n+1} vers y assure que $\boxed{y_n \to y}$.

(d) La continuité de $f^{(k+1)}$ associée au critère séquentiel pour la suite (y_n) amène alors $\boxed{f^{(k+1)}(y) = 0}$.

On peut continuer de la même façon, en insérant entre les y_i, d'après Rolle, des éléments $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formant une suite strictement croissante, tels que $f^{(k+2)}(z_n) = 0$, d'où, par encadrement, $z_n \to y$, et par continuité, $f^{(k+2)}(y) = 0$.

Évidemment, on peut continuer comme cela et on obtient $\boxed{f^{(\ell)}(y) = 0}$, pour tout $\ell \geqslant k$.

(e) Comme $y \in B(x, \eta) \cap I_y$, si aucune des deux bornes de I_y n'est dans $B(x, \eta)$, par convexité, cela impose que $\alpha \leqslant x - \eta$ et $\beta \geqslant x + \eta$, donc $x \in I_y \subset \Omega$, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse $x \in F$.

Ainsi, soit $\alpha \in B(x, \eta)$, soit $\beta \in B(x, \eta)$. Par ailleurs, d'après la question 4(b), α et β sont dans F. Ainsi, l'une des deux bornes de I_y est dans $B(x, \eta) \cap F$. Pour se fixer les idées, supposons que $\alpha \in B(x, \eta) \cap F$.

On a alors, pour tout $\ell \geqslant k$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$. Or, en notant d le degré de P, polynôme coïncidant avec f sur I_y, $P^{(d)}$ est un polynôme constant non nul, coïncidant sur I_y avec $f^{(d)}$. Notons c cette constante. Par continuité de g en α, en prenant la limite en α^+, on obtient alors :

$$f^{(d)}(\alpha^+) = c \neq 0.$$

Or, la question 6(a), et le fait que $\alpha \in B(x, \eta) \cap F$ nous apprennent que pour tout $\ell \geqslant k$, $f^{(\ell)}(\alpha) = 0$. Ainsi, $\boxed{d < k}$.

(f) La question précédente nous assure que $f^{(k)}(y) = 0$ pour $y \in B(x, \eta) \cap \Omega$. Nous avons la même égalité pour $y \in B(x, \eta) \cap F$. Ainsi, $f^{(k)}$ est identiquement nul sur l'intervalle $B(x, \eta)$, donc f se retreint sur cet intervalle en un polynôme de degré au plus $k - 1$ (par primitiviations successives). Donc, par définition de Ω, $\boxed{x \in \Omega}$.

Cela entre en contradiction avec l'hypothèse $x \in F$, obtenue de l'hypothèse $F \neq \varnothing$. On en déduit que $\boxed{F = \varnothing}$.

7. On a alors $\Omega = \mathbb{R}$, et en appliquant 4(c) à l'intervalle $\mathbb{R} \subset \Omega$, on obtient le $\boxed{\text{théorème de Sunyer y Balaguer}}$.

Correction du problème 2 –

Partie I – Lemme de Kaplansky (cas linéaire)

1. Notons $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ constitués d'éléments séparés les uns des autres par au moins ℓ autres éléments, et soit Φ l'application de $\mathcal{P}_k(n - (k-1)\ell)$ dans $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ définie sur tout $E = \{x_1 < \ldots < x_k\}$ par :

$$\Phi(E) = \{x_i + (i-1)\ell, i \in [\![1, k]\!]\}$$

Alors, on a bien, pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$,

$$x_{i+1} + i\ell - x_i - (i-1)\ell = x_{i+1} - x_i + \ell > \ell,$$

donc les éléments sont séparés d'au moins ℓ autres éléments, et de plus, on obtient bien un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$.

Soit Ψ de $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ dans $\mathcal{P}_k(n-(k-1)\ell)$ définie pour tout $F = \{y_1 < \ldots < y_k\}$ de $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ par :

$$\Psi(F) = \{x_i = y_i - (i-1)\ell, i \in [\![1,k]\!]\}$$

De même que dans la partie I, puisque les éléments y_i sont séparés les uns des autres par au moins ℓ autres points, la famille $(x_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est croissante, et on vérifie facilement que $x_1 \geqslant 1$ et $x_k \leqslant n-(k-1)\ell$. Ainsi, $\Psi(F)$ est bien un sous-ensemble à k éléments de $[\![1, n-(k-1)\ell]\!]$.

Les applications Φ et Ψ sont clairement réciproques l'une de l'autre, donc Φ est une bijection, puis :

$$\boxed{b_{n,k} = |\mathcal{E}_{\ell,k}(n)| = |\mathcal{P}_k(n-(k-1)\ell)| = \binom{n-(k-1)\ell}{k}}.$$

2. Soit $n \geqslant \ell+1$; b_n est donc le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ constitués d'éléments séparés d'au moins ℓ autres. Notons $\mathcal{F}_\ell(n)$ l'ensemble de ces sous-ensembles, et $\mathcal{F}'_\ell(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}_\ell(n)$ contitué des ensembles contenant n, et $\mathcal{F}''_\ell$ celui contitué des ensembles ne contenant pas n. Ainsi :

$$|\mathcal{F}_\ell(n)| = |\mathcal{F}'_\ell(n)| + |\mathcal{F}''_\ell(n)|.$$

   - Un élément de $\mathcal{F}'_\ell(n)$ est constitué de n, et d'autres éléments, forcément dans $[\![1, n-\ell-1]\!]$, puisqu'ils sont éloignés de l'élément n de plus de ℓ. Ces autres éléments forment alors un sous-ensemble de $[\![1, n-\ell-1]\!]$ constitué d'éléments séparés par au moins ℓ. Ainsi :

$$|\mathcal{F}'_\ell(n)| = |\mathcal{F}_\ell(n-\ell-1)| = b_{n-\ell-1}.$$

   - De façon évidente, $\mathcal{F}''_\ell(n) = \mathcal{F}_\ell(n-1)$, donc $|\mathcal{F}''_\ell(n)| = |\mathcal{F}_\ell(n-1)| = b_{n-1}$.

   Par conséquent, pour tout $n \geqslant \ell+1$, $\boxed{b_n = b_{n-1} + b_{n-\ell-1}}$.

   Trouvons les valeurs initiales. Soit $i \in [\![0,\ell]\!]$. Tous les éléments de $[\![1,i]\!]$ étant proches de moins de ℓ, un sous-ensemble de $[\![1,i]\!]$ contitué d'éléments séparés d'au moins ℓ autres ne peut pas avoir plus d'un élément : ces ensembles sont donc les singletons (qui conviennent effectivement), au nombre de i, et l'ensemble vide. Ainsi, $\boxed{b_i = i+1}$.

Partie II – Lemme de Kaplansky (cas circulaire)

1. Construisons un élément (E,x) de $B(n,k,\ell)$.
   - On choisit x quelconque sur le cercle, ce qui nous laisse n possibilité.
   - On complète x en un ensemble E en ajoutant $k-1$ points. Puisque x est séparé des autres points par au moins ℓ points, ces $k-1$ autres points ne peuvent pas être choisis parmi les ℓ points à droite de x, ni parmi les ℓ points à gauche de x ; il reste donc le choix parmi $n-2\ell-1$ éléments (éventuellement 0 si cette quantité est négative, mais cela est pris en compte par la nullité du coefficient binomiale dans ce cas). Ces $n-2\ell-1$ éléments sont des éléments consécutifs sur le cercle (n et 1 sont consécutifs sur le cercle, même s'il ne s'agit pas d'entiers consécutifs). Ainsi, il nous faut choisir $k-1$ éléments parmi $n-2\ell-1$ éléments consécutifs, les éléments choisis étant séparés les uns des autres par au moins ℓ autres points. On est ramené au cas linéaire : le nombre de choix possibles est $\binom{n-2\ell-1-(k-2)\ell}{k-1} = \binom{n-k\ell-1}{k-1}$.

   Ces deux choix étant successifs, on en déduit que :

$$\boxed{|B(n,k,\ell)| = n\binom{n-k\ell-1}{k-1}}.$$

2. Supposons dans un premier temps $k \neq 0$.

   Soit $f : B(n,k,\ell) \longrightarrow A(n,k,\ell)$ l'application consistant à oublier le pointage. Ainsi, pour tout $(E,x) \in B(n,k,\ell)$, $f(E,x) = E$.

   Soit $E \in A(n,k,\ell)$. L'image réciproque de E par f est contitué de tous les couples (E,x) où $x \in E$; il y en a donc autant que de façons de choisir $x \in E$. Ainsi,

$$|f^{-1}(E)| = |E| = k.$$

Comme $k \neq 0$, on en déduit que les images réciproques ne sont jamais vides (donc f est surjectives) et ont toutes même cardinal k. Ainsi, d'après le lemme du berger,

$$|A(n,k,\ell)| = \frac{1}{k}|B(n,k,\ell)| = \frac{n}{k}\binom{n-k\ell-1}{k-1} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{|A(n,k,\ell)| = \frac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k}}.$$

Supposons maintenant que $k = 0$. Alors $A(n,k,\ell) = \{\varnothing\}$, donc $|A(n,k,\ell)| = 1$. Or,

$$\frac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k} = \frac{n}{n}\binom{n}{0} = 1,$$

donc la formule est encore valable dans ce cas.

Partie III – Le problème des ménages de Lucas

1. Le placement des dames consiste en une permutation de $[\![1,n]\!]$, donc $\boxed{\text{il y a } n! \text{ façons de faire}}$.
2.
   - Un placement des messieurs correspond également à une permutation σ de $[\![1,n]\!]$, où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i)$ est la place occupée par le monsieur n° i.

     Or, pour tout i, le monsieur n° i ne doit pas être assis aux places voisines de celle de sa femme, donc aux places i et $i+1$. Par conséquent, pour tout i, il faut $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(i) \neq i+1$ (modulo n). Ainsi, pour tout $j \in [\![1,2n]\!]$, $\sigma \notin E_i$. Il n'y a pas d'autre contrainte, donc les placements admissibles correspondent aux permutations de $\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}$. Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de façons de placer les hommes est } |\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}|}$.
   - Montrons d'abord que si parmi les indices $i_1, \ldots, i_k$, deux sont consécutifs (modulo n), alors $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} = \varnothing$. Soit $(i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$, tel que $i < j$.
     - $*$ Supposons que $j = i+1$. Supposons qu'il existe $\sigma \in E_i \cap E_j$. Alors :
       - — Si i est pair, notons $i = 2k$, alors $\sigma(k) = k+1$, et, puisque $\sigma \in E_{2k+1} = E_j$, $\sigma(k+1) = \sigma(k+1)$. Ainsi, $k+1$ admet deux images réciproques distinctes, ce qui contredit son injectivité.
       - — Si i est impair, notons $i = 2k-1$, alors $\sigma(k) = k$, et puisque $\sigma \in E_{2k} = E_j$, $\sigma(k) = k+1$. Cela ne se peut pas, car k ne peut pas avoir deux images différentes.

       Ainsi, $\boxed{\text{si deux indices parmi } i_1, \ldots, i_k \text{ sont consécutifs (modulo } n\text{), alors } E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} = \varnothing.}$
     - $*$ Supposons que $i = 1$ et $j = 2n$. Alors $\sigma(1) = 1$, et $\sigma(n) = 1$, d'où encore une contradiction (il faut supposer que $n > 1$).
   - Soit alors $(i_1, \ldots, i_k) \in [\![1,2n]\!]$ formé d'indices deux à deux non consécutifs sur le cercle. Alors l'appartenance de σ à $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ impose la valeur de $\sigma\left(\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor\right)$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$.
     - $*$ Comme les indices sont deux à deux non consécutifs, les entiers $\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor$ sont deux à deux distincts, donc on ne définit pas deux fois l'image du même élément.
     - $*$ De plus, les différentes valeurs imposées de $\sigma\left(\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor\right)$ sont deux à deux distinctes. En effet, si deux indices i_j et i_ℓ imposent la même valeur i comme image d'un élément de $[\![1,n]\!]$ par σ, cela signifie qu'on considère les deux ensembles E_{2i-1} et E_{2i-2} (si $i > 1$), ou E_1 et E_{2n} (si $i = 1$), qui correspondent à des indices consécutifs sur le cercle. Ce cas de figure n'est donc pas possible ;

     Ainsi, un élément de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ est une permutation quelconque pour laquelle on a déjà k valeurs imposées (et cohérentes). Il nous reste à attribuer une image pour les $n-k$ autres, à prendre parmi les images possibles restantes : il s'agit donc de faire une permutation de $n-k$ éléments. Ainsi,

     $$|E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| = (n-k)!$$
   - On utilise pour terminer la formule du crible de Poincaré :

     $$\begin{aligned} |\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| &= \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{2n} E_i}\right| = |\mathfrak{S}_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{2n} E_i\right| \\ &= n! - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sum_{\substack{(i_1<\ldots<i_k) \in [\![1,2n]\!]^k \\ \text{2 à 2 non consécutifs sur le cercle}}} |E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| \end{aligned}$$

On s'est limité aux indices 2 à 2 non consécutifs dans la somme, car, d'après 3a, si deux indices sont consécutifs, l'intersection est vide, donc le cardinal est nul.

Or, si $k > n$, il est bien entendu impossible de choisir des indices 2 à 2 non consécutifs, et par conséquent, la somme interne est vide, donc de valeur nulle. Ainsi, on peut arrêter la sommation à $k = n$:

$$|\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{(i_1 < \ldots < i_k) \in [\![1,2n]\!]^k \\ \text{2 à 2 non consécutifs sur le cercle}}} (n-k)!$$

Ainsi, le terme général de la somme interne ne dépend pas de l'indice de sommation $(i_1, \ldots, i_k)$. Pour calculer cette somme, il suffit de connaître le nombre de termes dans la somme, donc le nombre de sous-ensembles $\{i_1 < \ldots < i_k\}$ de $[\![1, 2n]\!]$ constitués d'éléments deux à deux non consécutifs sur le cercle. Cela correspond au cas circulaire du lemme de Kaplansky, pour $\ell = 1$. Ainsi, le nombre de termes dans la somme est :

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

On en déduit que le nombre de façons de placer les hommes est :

$$\boxed{|\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!}$$

3. Tout d'abord, on remarque que dans la formule précédente, le $n!$ correspond au terme $k = 0$ de la somme. Ainsi, le nombre de façon de placer les hommes est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Si la table est numérotée, on a à faire le choix du placement des femmes, puis du placement des hommes, ainsi, le nombre de façons de faire est :

$$n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Or, à chaque placement correspond n façons de numéroter la table (souvenez-vous que les femmes occupent les places impaires, donc le début de la numérotation se fait toujours par l'une des n femmes). Ainsi, l'oubli de la numérotation est une surjection de l'ensemble des placements avec numérotation vers l'ensemble des placements sans numérotation, le cardinal de chaque image réciproque étant n. D'après le lemme du berger, le nombre de placements sur une table non numérotée est donc obtenu en divisant le résultat précédent par n. Ainsi :

$$\boxed{\mu(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!}$$