CONVEXITÉ

♦ ***Exercice 1.*** [∘]

Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique des x_k sont rangées dans cet ordre, c'est-à-dire

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Application : Sur l'autoroute des vacances, une famille a parcouru 80 km à la vitesse de 80 km/h, un peu ralentie par le trafic important. Croyant se rattraper, le conducteur accélère et parcourt les 80 km qui suivent à 160 km/h. Il affirme alors avoir roulé à une moyenne de $(80 + 160)/2 = 120$ km/h. Qu'en pensez-vous ?

L'inégalité

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

est satisfaite car elle est équivalente à

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen écrite pour la fonction concave ln.

En remplaçant x_k par $1/x_k$ dans l'inégalité précédente, il vient

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_2}}{n}.$$

En inversant les deux membres de cette inégalité, on obtient alors

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.}$$

Application : Tout faux ! Il doit calculer la moyenne harmonique de 80 et 160 et non la moyenne arithmétique. Comme la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, sa vitesse moyenne a été plus petite que ce qu'il croît (elle n'a été que de $2/(1/80 + 1/160) = 107$ km/h). Voulant rattraper le temps perdu dans les embouteillages, le conducteur D'où une prise de risque inutile.

♦ ***Exercice 2.*** [∘]

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \geqslant n.$$

On utilise le fait que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique (concavité du logarithme). On a alors

$$\frac{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} + \cdots + \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}+\cdots+\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\geqslant n.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [⋆]

1. Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que
$$1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{1/n}\leqslant\prod_{k=1}^n(1+x_k)^{1/n}.$$
2. Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que
$$\Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n}+\Big(\prod_{k=1}^n b_k\Big)^{1/n}\leqslant\prod_{k=1}^n(a_k+b_k)^{1/n}.$$

1. Considérons la fonction $f:x\longmapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$. C'est une application deux fois dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\mathrm{e}^x/(1+\mathrm{e}^x)$ et $f''(x)=\mathrm{e}^x/(1+\mathrm{e}^x)^2>0$, donc f est convexe sur I. En appliquant l'inégalité de Jensen avec cette fonction, les $\ln x_i$ et les poids uniformes $1/n$, on obtient
$$\ln\Big[1+\exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln x_k\Big)\Big]\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln(1+\mathrm{e}^{\ln x_k}),$$
c'est-à-dire
$$\ln\Big[1+\exp\Big(\ln\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{1/n}\Big)\Big]\leqslant\ln\prod_{k=1}^n(1+x_k)^{1/n}$$
ou encore
$$\boxed{1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{1/n}\leqslant\prod_{k=1}^n(1+x_k)^{1/n}.}$$
2. Appliquons le résultat de la première question pour $x_k=b_k/a_k$. On obtient
$$1+\Big(\prod_{k=1}^n\frac{b_k}{a_k}\Big)^{1/n}\leqslant\prod_{k=1}^n\Big(1+\frac{b_k}{a_k}\Big)^{1/n}$$
ce qui donne, après multiplication par $\Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n}$,
$$\boxed{\Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n}+\Big(\prod_{k=1}^n b_k\Big)^{1/n}\leqslant\prod_{k=1}^n(a_k+b_k)^{1/n}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [★]

Soit $f:I\longrightarrow J$ une bijection croissante entre les intervalles I et J de $\mathbb{R}$. On dit que $y\in I$ est la f-moyenne des n points pondérés $(x_1,\alpha_1),\dots,(x_n,\alpha_n)$ où les coefficients α_i sont strictement positifs lorsque
$$f(y)=\frac{\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}.$$
Si $f:I\longrightarrow J$ et $g:I\longrightarrow J'$ sont deux bijections croissantes sur I, on dit que la f-moyenne est inférieure à la g-moyenne lorsque, pour toute famille de points pondérés $(x_1,\alpha_1),\dots,(x_n,\alpha_n)$ où les coefficients α_i sont strictement positifs, on a
$$f^{-1}\Big(\frac{\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big)\leqslant g^{-1}\Big(\frac{\alpha_1g(x_1)+\cdots+\alpha_ng(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big).$$

1. Démontrer que la f-moyenne est inférieure ou égale à la g-moyenne si, et seulement si, la fonction $f\circ g^{-1}$ est concave.
2. Écrire les inégalités que l'on obtient en utilisant les fonctions $f:x\longmapsto x^2$, $\mathrm{Id}:x\longmapsto x$, $g:x\longmapsto\ln x$ et $h:x\longmapsto -1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Supposons que $f\circ g^{-1}$ est concave
Soient $(x_1,\alpha_1),\dots,(x_n,\alpha_n)$ une famille de points pondérés où les coefficients α_i sont strictement positifs. En appliquant l'inégalité de Jensen à la famille $\big(g(x_1),\alpha_1\big),\dots,\big(g(x_n),\alpha_n\big)$, on obtient
$$f\circ g^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 g(x_1)+\cdots+\alpha_n g(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big)\geqslant\frac{\alpha_1 f\circ g^{-1}\big(g(x_1)\big)+\cdots+\alpha_n f\circ g^{-1}\big(g(x_n)\big)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n},$$
c'est-à-dire
$$f\circ g^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 g(x_1)+\cdots+\alpha_n g(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big)\geqslant\frac{\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\cdot$$
Comme f est croissante, son application réciproque est également croissante, donc on peut appliquer f^{-1} à l'inégalité précédente sans en changer le sens, ce qui donne
$$g^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 g(x_1)+\cdots+\alpha_n g(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big)\geqslant f^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\Big)\cdot$$
Donc la f-moyenne est inférieure à la g-moyenne.
Supposons que la f-moyenne est inférieure à la g-moyenne
Soient $t\in[0;1]$ et $x,y\in J'$. En utilisant les points pondérés $\big(g^{-1}(x),t\big)$ et $\big(g^{-1}(y),1-t\big)$ dans la propriété sur les moyennes, on obtient
$$f^{-1}\Big(\frac{tf\big(g^{-1}(x)\big)+(1-t)f\big(g^{-1}(y)\big)}{t+1-t}\Big)\leqslant g^{-1}\Big(\frac{tg\big(g^{-1}(x)\big)+(1-t)g\big(g^{-1}(y)\big)}{t+1-t}\Big),$$
c'est-à-dire
$$f^{-1}\big(tf\circ g^{-1}(x)+(1-t)f\circ g^{-1}(y)\big)\leqslant g^{-1}\big(tx+(1-t)y\big).$$
En appliquant f, qui est croissante, on obtient alors
$$tf\circ g^{-1}(x)+(1-t)f\circ g^{-1}(y)\leqslant f\circ g^{-1}\big(tx+(1-t)y\big),$$
ce qui prouve que $f\circ g^{-1}$ est concave.
Bilan
$$\boxed{\text{la } f\text{-moyenne est inférieure à la } g\text{-moyenne si et seulement si } f\circ g^{-1} \text{ est concave.}}$$

2. On remarque que $\mathrm{Id}\circ f^{-1}=\sqrt{\cdot}$, $g\circ\mathrm{Id}^{-1}=\ln$ et $h\circ g^{-1}: x\longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, pour toute famille de points pondérés $(x_1,\alpha_1),\dots,(x_n,\alpha_n)$ où les x_i et les α_i sont strictement positifs, on a
$$\sqrt{\frac{\alpha_1{x_1}^2+\alpha_2{x_2}^2+\cdots+\alpha_n{x_n}^2}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}\geqslant\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\geqslant\big({x_1}^{\alpha_1}\times\cdots\times{x_n}^{\alpha_n}\big)^{\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}\geqslant\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{\dfrac{\alpha_1}{x_1}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}},$$
ce qui signifie que
$$\boxed{\text{moyenne quadratique }\geqslant\text{ moyenne arithmétique}\geqslant\text{ moyenne géométrique}\geqslant\text{ moyenne harmonique.}}$$

♦ ***Exercice 5.*** [★]
Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer que
$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\cdot$$
2. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer l'*inégalité de Hölder* :
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n {b_i}^q\Big)^{1/q}.$$
3. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer l'*inégalité de Minkowski* :
$$\Big(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\Big)^{1/p}.$$

1. La concavité du logarithme ($\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \lambda, \mu \in [0;1]$ tels que $\lambda + \mu = 1,\ \ln(\lambda x + \mu y) \geqslant \lambda \ln(x) + \mu \ln(y)$) appliquée avec $x = a^p$, $y = b^p$, $\lambda = 1/p$ et $\mu = 1/q$ donne

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q} = \ln(ab),$$

ce qui implique que

$$\boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\cdot}$$

2. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on applique le résultat de 1 avec

$$a = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}},$$

ce qui donne

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{{a_i}^p}{\sum_{i=1}^n {a_i}^p} + \frac{1}{q}\frac{{b_i}^p}{\sum_{i=1}^n {b_i}^p}\cdot$$

En sommant sur $i \in [\![1;n]\!]$, il vient alors

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}}\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n {a_i}^p}{\sum_{i=1}^n {a_i}^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^n {b_i}^p}{\sum_{i=1}^n {b_i}^p},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}}\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant 1.$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^q\right)^{1/q}.}$$

Remarque : On peut obtenir directement ce résultat (sans utiliser la question 1) en appliquant l'inégalité de Jensen avec $x_i = a_i b_i^{1-q}$, $\lambda_i = b_i^q$ à la fonction convexe $x \longmapsto x^p$.

3. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a

$$(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

En sommant sur $i \in [\![1;n]\!]$, il vient

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des sommes du membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\ &= \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q}\end{aligned}$$

ce qui donne, après simplification,

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{1/p}.}$$

Remarque : On peut obtenir directement ce résultat (sans utiliser l'inégalité de Hölder) en appliquant l'inégalité de Jensen avec $x_i = (b_i/a_i)^p$, $\lambda_i = a_i^q$ à la fonction concave $x \longmapsto (1 + x^{1/p})^p$.

◆ ***Exercice 6.*** [$\circ$]
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bijective sur un intervalle ouvert I. Que peut-on dire de la convexité de f^{-1} sur $f(I)$.

Comme f est convexe sur I, elle est continue sur $\mathrm{Int}(I) = I$ (car I est ouvert). Comme elle est aussi injective, cela implique que f est strictement monotone sur I.

▶ Premier cas : f est strictement croissante sur I

Dans ce cas, f^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle ouvert $f(I)$.
Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ et $t \in [0;1]$. On pose $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Comme f est convexe, on a

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

De plus, comme f^{-1} est (strictement) croissante sur $f(I)$, il vient

$$tx_1 + (1-t)x_2 \leqslant f^{-1}\big(tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\big),$$

c'est-à-dire

$$tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}\big(ty_1 + (1-t)y_2\big).$$

Cela démontre que f^{-1} est concave sur $f(I)$.

▶ Second cas : f est strictement décroissante sur I

En procédant *mutatis mutandis* comme ci-dessus, on voit que f^{-1} est convexe sur $f(I)$.

En conclusion,

la réciproque d'une bijection f convexe strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle ouvert I est concave (respectivement convexe) sur $f(I)$.

◆ ***Exercice 7.*** [$\circ$]
Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dite log-convexe sur I si, et seulement si, $\ln f$ est convexe sur I.
Démontrer que si f est log-convexe sur I alors f est convexe sur I.
La réciproque est-elle vraie ?

Supposons que f est log-convexe sur I et démontrons que f est convexe sur I.
Soient $x, y \in I$ et $t \in [0;1]$. On a

$$\begin{aligned} f\big(tx + (1-t)y\big) &= \exp\big\{\ln f\big(tx+(1-t)y\big)\big\} \\ &\leqslant \exp\{t\ln f(x) + (1-t)\ln f(y)\}\} && \text{car } \ln f \text{ convexe et } \exp \text{ croissante} \\ &\leqslant t\exp\{\ln f(x)\} + (1-t)\exp\{\ln f(y)\} && \text{car } \exp \text{ convexe} \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien convexe sur I.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } f \text{ est log-convexe sur } I \text{ alors } f \text{ est convexe sur } I.}$$

La réciproque n'est pas vraie puisque $x \longmapsto x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et pourtant $x \longmapsto \ln(x)$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

♦ ***Exercice 8.*** [★]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est strictement convexe sur I. Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au plus deux solutions.
2. On suppose seulement que f est convexe sur I. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$.

1. Supposons que l'équation $f(x) = a$ admet trois solutions distinctes $x_1 < x_2 < x_3$. On peut alors écrire $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$ avec $t \in]0;1[$, d'où, d'après la stricte convexité de f sur I, on a
$$a = f(x_2) = f\big(tx_1 + (1-t)x_3\big) < tf(x_1) + (1-t)f(x_3) = ta + (1-t)a = a,$$
ce qui est absurde ! Donc
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = a \text{ admet au plus deux solutions.}}$$
Remarque : On montre facilement sur des exemples qu'une telle équation peut effectivement avoir 0, 1 *ou* 2 *solutions.*

2. Démontrons que si l'équation $f(x) = a$ admet trois solutions distinctes $x_1 < x_2 < x_3$, alors tous les réels de l'intervalle $[x_1; x_3]$ sont solutions de cette équation. Soit $x \in]x_1; x_3[\setminus \{x_2\}$. On suppose par exemple que $x_1 < x < x_2 < x_3$. On peut écrire $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $t \in]0;1[$, d'où, par convexité de f, on a
$$f(x) = f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = ta + (1-t)a = a,$$
c'est-à-dire
$$f(x) \leqslant a.$$
On peut aussi écrire $x_2 = \lambda x + (1-\lambda)x_3$ avec $\lambda \in]0;1[$, d'où, par convexité de f, on a également
$$a = f(x_2) = f\big(\lambda x + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_3) = \lambda f(x) + (1-\lambda)a,$$
d'où
$$a \leqslant f(x),$$
après simplification par λ. Finalement $f(x) = a$ ce qui démontre le résultat annoncé. On en déduit finalement que
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = a \text{ admet } 0,\ 1,\ 2 \text{ ou tout un intervalle de solutions.}}$$

♦ ***Exercice 9.*** [★]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$
Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On commence par démontrer par récurrence que la fonction f est dyadiquement convexe, autrement dit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \{0; 1; \ldots; 2^n\}$, on a
$$f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(y).$$
La propriété est claire pour $n = 0$ et découle de l'hypothèse pour $n = 1$. Si on la suppose vraie au rang $n \geqslant 1$, on écrit alors que
$$\frac{m}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{m}{2^{n+1}}\right)y = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{m_1}{2^n}x + \left(1 - \frac{m_1}{2^n}\right)y\right\} + \left\{\frac{m_2}{2^n}x + \left(1 - \frac{m_2}{2^n}\right)y\right\}\right]$$
où $m_1 = 0$, $m_2 = m$ si $m \in \{0; 1; \ldots; 2^n\}$ et $m_1 = 2^n$, $m_2 = m - 2^n$ si $m \in \{2^n + 1; \ldots; 2^{n+1}\}$. D'où
$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) &\leqslant \frac{1}{2}f\left(\frac{m_1}{2^n}x + \left(1 - \frac{m_1}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{m_2}{2^n}x + \left(1 - \frac{m_2}{2^n}\right)y\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\frac{m_1}{2^n}f(x) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_1}{2^n}\right)f(y) + \frac{1}{2}\frac{m_2}{2^n}f(x) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_2}{2^n}\right)f(y) \\ &\leqslant \frac{m}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^{n+1}}\right)f(y). \end{aligned}$$
Pour conclure, on utilise la densité des nombres dyadiques dans $[0; 1]$ et la continuité de f.