ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. [$\circ$]
Sous la condition de Cauchy $y(0) = 0$, résoudre les équations suivantes :

$$y' - 3y = 2, \qquad y' + 2y = 4\,\mathrm{e}^{2t}, \qquad y' + ty = t^3, \qquad y' - 3t^2 y = t^2, \qquad y' - 3y = t\,\mathrm{e}^{2t},$$

$$y' + 3y = (5t+1)\,\mathrm{e}^{-3t}, \qquad y' + 3t^2 y = t^2 + \mathrm{e}^{-t^3}, \qquad y' - y = \sin t.$$

Exercice 2. [$\circ$]
Résoudre les équations suivantes :

$$xy' + (1-2x)y = 1, \qquad x^3 y' - 4(1+x^2)y = 0, \qquad (1-x^2)y' - 2xy = 1,$$

$$(\cos x)y' - (\sin x)y + \mathrm{e}^{-x} = 0, \qquad y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x.$$

Exercice 3. [$\star$] (Solutions périodiques)
Soient $b, c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + b(x)y = c(x).$$

1. Résoudre (E) à l'aide d'intégrales.
2. On suppose que b et c sont T-périodiques (où $T > 0$).
   a) Soit y une solution de (E). À l'aide de la fonction $x \longmapsto y(x+T)$, démontrer que y est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
   b) Prouver que (E) admet une unique solution T-périodique si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^T b \neq 0$.

Exercice 4. [$\star$] (Lemme de Grönwall différentiel)
Soient $u, v : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues. On s'intéresse à l'inéquation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$(I) \qquad y' \leqslant u(t)y + v(t).$$

Pour toute solution y de (I), on souhaite déterminer une sursolution de y, c'est-à-dire une fonction φ telle que $y \leqslant \varphi$ sur $\mathbb{R}_+$.

En général, pour traiter ce type de problème, on commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée puis on applique une méthode de variation de la constante dans l'inéquation différentielle.

1. Démontrer que toute solution y de l'inéquation différentielle (I_H) : $y' \leqslant u(t)y$ vérifie l'inégalité $\forall t \geqslant 0,\ y(t) \leqslant y(0)\,\mathrm{e}^{U(t)}$ où U désigne la primitive de u qui s'annule en 0.
2. Passer ensuite au cas général de l'inéquation (I).

Exercice 5. [$\circ$]
Résoudre les équations suivantes :

$$y''+2y'-8y = \mathrm{e}^{3t}, \qquad y''-3y'-18y = 324t, \qquad y''-10y'+41y = \sin t, \qquad y''-2y'+2y = (\sin t)\,\mathrm{e}^{t}.$$

Exercice 6. [$\circ$]
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \max\{1, \mathrm{e}^x\}$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 7. [$\circ$]

On souhaite résoudre sur $[0;\pi/2[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad (\cos x)y'' + (\sin x)y' - (\cos^3 x)y = 0.$$

1. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\sin x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre (E) en faisant varier la constante λ. Autrement dit, rechercher les solutions de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{\sin x}$ où λ est deux fois dérivables sur l'intervalle $[0;\pi/2[$. C'est la méthode de *Liouville*.

Exercice 8. [$\circ$] (Équations d'Euler)

On appelle équation différentielle d'Euler une équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par une relation du type

$$(E) \qquad ax^2y'' + bxy' + cy = d(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et d est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Expliquer comment résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.

Application : Résoudre $x^2y'' - 5xy' + 9y = x + 1$.

Exercice 9. [$\circ$]

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''' = y$.

On constate que les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, sont clairement des solutions de (E).

Résoudre (E) en faisant varier la constante (méthode de Liouville).

Exercice 10. [$\star$] (Phénomène de relaxation)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $f + f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. [✠] On suppose que $f + f' + f''$ tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. On suppose que $f + f' + f'' + f'''$ tend vers 0 en $+\infty$. La fonction f tend-elle nécessairement vers 0 en $+\infty$?

Exercice 11. [$\circ$]

Résoudre les équations différentielles suivantes où y est une fonction inconnue de x :

$$(E_1) \quad y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy} \qquad\qquad (E_2) \quad y' = \frac{1+x^2}{1+y^2} \qquad\qquad (E_3) \quad y' = \mathrm{e}^{x+y}\,.$$

Exercice 12. [$\circ$]

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel toutes les fonctions de la forme

$$(S) \begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où $\omega > 0$ est la pulsation cyclotron (qui dépend de la masse, de la charge et du champ magnétique).

1. Résoudre (S) en formant une équation différentielle du second ordre satisfaite par x'.
2. Résoudre à nouveau (S) en considérant la fonction complexe $u = x' + iy'$.

Exercice 13. [$\star$]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(a - x)$.

Exercice 14. [$\circ$]

Résoudre l'équation (E) : $y' + y = \displaystyle\int_0^1 y$.