DM nº 5 : Relations, réels

Problème 1 – Treillis et algèbres de Boole

Partie I – Treillis

Soit E un ensemble, et $\leqslant$ une relation d'ordre sur E. On dit que E est un treillis si tout couple $(x, y) \in E^2$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. On notera dans ce cas $x \frown y$ la borne inférieure et $x \smile y$ la borne supérieure.

1. Montrer que si $(E, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné, alors E est un treillis.
2. Les ensembles ordonnés suivants sont-ils des treillis ? Si oui, donner l'expression $x \frown y$ et $x \smile y$ pour tout couple (x, y) :
   (i) $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité
   (ii) $\mathcal{P}(X)$, muni de la relation d'inclusion (X étant un ensemble quelconque)

On dit qu'un treillis est borné s'il admet un minimum, qu'on notera 0 et un maximum, qu'on notera 1. Un treillis E borné est dit complémenté si et seulement si pour tout élément x il existe un élément x^c, appelé complémentaire, vérifiant $x \frown x^c = 0$ et $x \smile x^c = 1$. On dit qu'il est distributif si $\frown$ est distributif sur $\smile$, et inversement.

3. Montrer que pour tout ensemble X, $\mathcal{P}(X)$ est un treillis borné complémenté et distributif.
4. Soit $(E, \leqslant)$ un treillis borné, complémenté et distributif.
   (a) Soit $x \in E$. Que valent $x \frown 0$, $x \smile 0$, $x \frown 1$ et $x \smile 1$?
   (b) Montrer que $\frown$ est associatif, à savoir : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad \inf(\inf(x, y), z) = \inf(x, \inf(y, z))$.
   On admet sans justification que $\smile$ est également associatif.
   (c) Montrer que tout $x \in E$ admet un unique complémentaire x^c.
   Indication : Si x' et x'' sont deux complémentaires, on pourra considérer $y = (x \frown x') \smile x''$.
   (d) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in E$, on a les relations (appelées lois de de Morgan) : $(x \frown y)^c = x^c \smile y^c$ et $(x \smile y)^c = x^c \frown y^c$.
5. On définit deux lois $+$ et $\times$ sur E par :
$$\forall (x, y) \in E, \quad x + y = (x \frown y^c) \smile (x^c \frown y) \qquad \text{et} \qquad x \times y = x \frown y$$
   (a) Déterminer, pour tout $x \in E$, $x + 0$, $x \times 1$, x^2 et $x + x$.
   (b) Montrer que $+$ est commutative et associative, que $\times$ est associative et distributive sur l'addition.
   Ces propriétés montrent que tout treillis borné complémenté et distributif peut être muni d'une structure d'algèbre de Boole dans le sens défini dans la partie suivante.

Partie II – Algèbres de Boole

Une algèbre de Boole est un ensemble A, muni d'une loi d'addition notée $+$, et d'une loi de multiplication notée $\times$, telles que :

- *les lois $+$ et $\times$ sont associatives, c'est-à-dire, pour tout $(x, y, z) \in A^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$;*
- *la loi $+$ est commutative (donc vérifie $x + y = y + x$) ;*
- *il existe un élément neutre 0 pour la loi d'addition, c'est-à-dire vérifiant : $\forall x \in A$, $x + 0 = x$;*
- *il existe un élément neutre 1 pour la loi de multiplication $\times$, c'est-à-dire vérifiant : $\forall x \in A$, $x \times 1 = x$;*

- *la multiplication est distributive sur l'addition, c'est-à-dire, pour tout $(x, y, z) \in A^3$, $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$;*
- *tout élément x admet un opposé $-x$ pour l'addition (donc vérifiant $x + (-x) = 0$) ;*
- *tout élément x de A est idempotent pour $\times$, à savoir : pour tout $x \in A$, $x^2 = x$, où x^2 désigne $x \times x$.*

Pour simplifier les notations, on se permettra d'omettre le signe $\times$, donc d'écrire xy à la place de $x \times y$.

Dans ce qui suit, on se donne A une algèbre de Boole.

1. Soit X un ensemble quelconque. En se servant de certains résultats établis précédemment, montrer que $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole, lorsqu'on le munit des opérations suivantes :
   - $\forall (Y, Z) \in \mathcal{P}(X)^2, \quad Y + Z = Y \triangle Z = (Y \cap \complement_X Z) \cup (\complement_X Y \cap Z)$ (différence symétrique)
   - $\forall (Y, Z) \in \mathcal{P}(X)^2, \quad Y \times Z = Y \cap Z$.

   Quels sont les éléments 0 et 1 ?
2. (a) En considérant $(x + y)^2$, montrer que pour tout $(x, y) \in A^2$, $xy + yx = 0$.

   (b) En déduire que :

      i. pour tout $x \in$ E, $-x = x$;

      ii. la loi $\times$ est commutative.
3. On définit sur A une relation $\leqslant$ par :

$$\forall (x, y) \in A, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow xy = x.$$

   (a) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur A.

   (b) Montrer que pour cette relation d'ordre 0 est le minimum de A, et 1 le maximum.

   (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in A^2$, $x \frown y$ existe, et vaut xy.

   (d) Montrer que pour tout $(x, y) \in A^2$, $x \smile y$ existe et vaut $x + y + xy$.

   (e) Montrer que $\frown$ et $\smile$ sont associatives, commutatives, et distributives l'une par rapport à l'autre.

   (f) Montrer que tout élément x de A admet un complémentaire x^c, dans le sens défini dans la partie I.

Ainsi, toute algèbre de Boole peut être muni d'une relation d'ordre qui en fait un treillis borné complémenté distributif. La réciproque avait été établie dans la partie I.

Partie III – Description des algèbres de Boole finies

Le but de cette partie est d'établir que toute algèbre de Boole est isomorphe (c'est-à-dire en bijection, avec conservation de la structure) à l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble.
Étant donné deux algèbres de Boole A et B, munies des relations d'ordre décrites dans la partie II, on dit que l'application $h : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole si pour tout $(x, y) \in A^2$, $h(x \frown y) = h(x) \frown h(y)$ et si $h(x^c) = h(x)^c$. On dit qu'il s'agit d'un isomophisme si de plus h est bijective.
Étant donné une algèbre de Boole A, on appelle atome de A tout élément minimal de $A \setminus \{0\}$, donc tout élément a tel que les seuls éléments x tels que $x \leqslant a$ sont 0 et a lui-même.
Soit A une algèbre de Boole finie.

1. En considérant $m(x)$ l'ensemble des minorants stricts de x, montrer que tout x non nul de A est minoré par au moins un atome.
2. (a) Soit $(x, y) \in A^2$, et a un atome de A. Montrer que si $a \leqslant x \smile y$ et si $a \nleqslant x$, alors $a \leqslant y$

   Indication : on pourra considérer $a \frown (x \smile y)$.

   (b) En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ et tout atome a, si $a \leqslant x_1 \smile x_2 \smile \cdots \smile x_n$, alors $a \leqslant x_1$ ou $a \leqslant x_2$ ou ... ou $a \leqslant x_n$.
3. Soit E l'ensemble des atomes de A, et $h : A \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall x \in A, \quad h(x) = \{a \in E \mid a \leqslant x\}.$$

   (a) Montrer que h est un homomorphisme d'algèbres de Boole

(b) Soit $X = \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathcal{P}(E)$, et $x = a_1 \smile \cdots \smile a_k \in A$. Montrer que $h(x) = X$. Qu'en déduit-on sur h ?

(c) Montrer que h est injective. Conclure.

Problème 2 – Le premier nombre transcendant connu

Soit c la constante de Liouville, définie par :

$$c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}.$$

Le but est de démontrer que c est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers ou rationnels. On établit en fait cette propriété pour une famille plus large de réels, appelés nombres de Liouville. Nous démontrons d'abord dans la question 1 que c est bien défini, puis dans la question 2 que c est irrationnel.

1. **Convergence de la série définissant c**

   En étudiant la convergence de la série, montrer l'existence de la constante de Liouville $c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$.

2. **Irrationnalité de c**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.$$

   (b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. En remarquant que $10^{n!} S_n$ est entier, et en encadrant $p 10^{n!}$, trouver une contradiction. Conclure.

3. **Inégalité des accroissements finis**

   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. À l'aide d'une intégration, montrer que si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, de dérivée continue sur $[a, b]$ et telle que $|f'|$ est majorée par M, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$. Justifiez que cette expression est encore valable si $b \leqslant a$, l'inervalle considéré étant alors $[b, a]$.

4. **Théorème de Liouville (approximation diophantienne)**

   Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

   Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geqslant 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, on ait : $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^d}$.

   Ce théorème affirme que les nombres algébriques non rationnels sont « assez mal » approchés par des rationnels.

   Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.
   On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers tel que $P(\alpha) = 0$, de degré minimal dans l'ensemble de tous les polynômes non nuls vérifiant cette propriété. On se donne désormais un tel polynôme P et on note d son degré.

   (b) Justifier que $d \geqslant 2$.

   (c) Montrer que P ne peut pas avoir de racine rationnelle.

   (d) En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left| q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geqslant 1$.

   (e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$ tel que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqslant 1$, on ait :

   $$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{M q^d}.$$

   (f) En posant $A = \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$, montrer le théorème de Liouville.

5. **Transcendance de c**

On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel x tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}), \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n}.$$

(a) À l'aide du théorème de Liouville, montrer qu'un nombre de Liouville n'est pas algébrique (on dit qu'il est transcendant).

(b) En déduire que c est transcendant.