DM n° 3 : Ensembles, applications, sommes

Exercice 1 – Formules d'inversion de Pascal

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p(p-1)\dots(p-k+1)\binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m),$$

où δ_k est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_k(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En déduire que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$,

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m).$$

4. En déduire enfin la formule d'inversion polynomiale : si pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k,$$

alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$a_m = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} b_m(n-j).$$

Exercice 2 – (Produit de Cauchy de deux séries exponentielles)

On admet que pour tout x de $\mathbb{R}$ (et même de $\mathbb{C}$), l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(x, y) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{n-\ell}}{(n-\ell)!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{y^k}{k!}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} c_k(x, y) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right).$$

2. En déduire que $e(x+y) = e(x)e(y)$.
3. Généraliser pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

Problème 1 – Théorème de Cantor-Bernstein

Dans ce problème, nous proposons plusieurs preuves du théorème de Cantor-Bernstein. Ce théorème affirme qu'étant donnés deux ensembles E et F, s'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection de E dans F.
Nous nous donnons, dans tout le problème, deux ensembles E et F, et deux injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

Dans ce problème, on désigne par $\complement_E A$ le complémentaire dans E d'un sous-ensemble A de E (et de même pour la complémentation dans F).

Question préliminaire

Soit E et F deux ensembles, et $\{E_1, E_2\}$ une partition de E et $\{F_1, F_2\}$ une partition de F. Ainsi, $E = E_1 \sqcup E_2$ et $F = F_1 \sqcup F_2$. On suppose qu'il existe deux bijections $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$. À l'aide de f_1 et f_2, construire une bijection $f : E \to F$ (on ne se contentera pas de décrire la construction, on s'appliquera également à prouver que la fonction f est bien bijective).

Partie I – Une première démonstration

1. Dans cette question, nous montrons un lemme préliminaire, cas particulier du lemme du point fixe de Knaster-Tarski. Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante définie sur les parties de E. La croissance de φ s'entend au sens de l'inclusion ; ainsi, pour tous sous-ensembles A et B de E, si $A \subset B$, alors $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. On pose $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ défini par :
$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \varphi(A) \subset A\},$$
et on définit M par :
$$M = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A.$$
   (a) Justifier que $\mathcal{S}$ est non vide.
   (b) Montrer que $\varphi(M) \subset M$
   (c) Montrer que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$ et en déduire que $M \subset \varphi(M)$.

   Ainsi, toute $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire vérifiant $\varphi(M) = M$.
2. On définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ par :
$$\varphi(A) = \complement_E \left(g\left(\complement_F f(A)\right)\right),$$
c'est-à-dire le complémentaire de l'image directe par g du complémentaire de l'image directe par f de l'ensemble A.

   Montrer que φ admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, qu'on se donne pour la suite de cette partie.
3. Montrer que f définit par restriction et corestriction une application $f_1 : M \to f(M)$, et que f_1 est bijective.
4. Soit $N = \complement_F f(M)$.
   (a) Décrire $g(N)$.
   (b) Montrer que g définit par restriction et corestriction une application $g_1 : N \to \complement_E M$, et que g_1 est une bijection.
5. Construire à l'aide de f_1 et g_1 une bijection $h : E \to F$.

Partie II – Une deuxième démonstration

1. Dans cette question, on montre le lemme suivant : si B est un sous-ensemble de E, et s'il existe une application injective $u : E \to B$, alors il existe une bijection $v : E \to B$. Soit donc B un sous-ensemble de E et $u : E \to B$ une application injective. On pose $C_0 = \complement_E B$, et on définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E par $C_{n+1} = u(C_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on définit :

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n \qquad \text{et} \qquad C' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

   Soit enfin $D = \complement_E C$.

   (a) Montrer que $D \subset B$,

   (b) Montrer que $\{D, C\}$ est un partage de E (i.e. une partition à parts éventuellement vides), et $\{D, C'\}$ est un partage de B.

   (c) Montrer que $u(C) = C'$.

   (d) En déduire, à l'aide de la question préliminaire, l'existence d'une bijection v de E dans B.

2. En considérant $u = g \circ f$ dans le problème de Cantor-Bernstein, montrer l'existence d'une bijection de E sur F.

Partie III – Une troisième démonstration

Soit x un élément de E. On définit une suite (éventuellement finie) associée à x par récurrence de la manière suivante : on pose $u_0(x) = x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n(x)$ est défini, on pose $u_{n+1}(x)$ l'unique antécédent (s'il existe) de $u_n(x)$ par f ou g (selon que $u_n(x)$ est dans E ou F). Si cet antécédent n'existe pas, ou si $u_n(x)$ n'est pas défini, alors $u_{n+1}(x)$ n'est pas défini.

Ainsi, la suite est définie en commençant par prendre un antécédent par f, puis par g, puis par f, et à nouveau par g, etc., tant que c'est possible. Trois cas peuvent se produire :

- La suite $(u_n(x))$ est finie et s'arrête dans E (donc le dernier terme défini est dans E). On définit l'ensemble E_E comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.
- La suite $(u_n(x))$ est finie et s'arrête dans F (donc le dernier terme défini est dans F). On définit l'ensemble E_F comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.
- La suite $(u_n(x))$ est infinie. On définit l'ensemble E_∞ comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.

1. Justifier que $\{E_E, E_F, E_\infty\}$ est un partage de E (i.e. une partition à parts éventuellement vides).
2. En définissant de la même manière F_E, F_F et F_∞ en partant des points de F, montrer que f définit par restriction une bijection de E_E dans F_E, et que g définit par restriction une bijection de F_F dans E_F.
3. Montrer que f définit une bijection de E_∞ dans F_∞ et conclure.

Partie IV – Quelques applications classiques

On dit que deux ensembles E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de E dans F. On montre par des exemples l'intérêt du théorème de Cantor-Berstein dans la théorie des cardinaux. Attention, tous les exemples donnés ci-dessous n'utilisent pas nécessairement ce théorème. Les trois dernières questions sont indépendantes des précédentes.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal (on pourra construire explicitement une bijection en associant à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ une certaine application ; on vérifiera scrupuleusement qu'il s'agit bien d'une bijection)
2. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal (on pourra construire explicitement une bijection en construisant pour une fonction f à valeurs dans $\mathbb{N}$, une fonction à valeurs dans $\{0,1\}$, la valeur des $f(i)$ déterminant la position des 1 dans la suite des images).
3. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal.
4. Montrer que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $[0,1[$ ont même cardinal (on pourra utiliser le développement en base 10, en admettant l'unicité d'un développement propre, c'est-à-dire ne terminant pas par une infinité de 9)

5. Montrer que $[0,1[$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.
6. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.
7. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal (on pourra se servir d'un exemple vu en cours d'une application mélangeant les développements de deux réels)
8. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ont même cardinal.
9. Trouver une deuxième preuve du résultat de la question précédente.