Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 25/01/2019
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 11 : Suites, approximations

Correction du problème 1 – Formule de Stirling Partie I – Intégrales de Wallis.

1. Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$
En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}}$.

2. On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_0}$; $\qquad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1 = I_1}$.
On a alors, pour tout $p \geqslant 1$:
$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-1} = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-3} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0$$
$$\frac{(2p)!}{(2p(2p-1)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = I_{2p}}.$$
On a de même, pour tout $p \geqslant 1$.
$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1$$
$$\frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \boxed{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = I_{2p+1}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Ainsi,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_{n+1} \leqslant I_n.$$
Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :
$$\boxed{1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1}.}$$

4. On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :
$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$
Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement et la question (c), on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.

Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot\frac{2p^2}{2p}\cdot\pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

Partie II – Formule de Stirling.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \ln\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1. On obtient, à l'aide du développement limité de ln donné dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}S_n - S_{n-1} &= \ln\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln\frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right)\\ &= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}}$.

2. Par un argument classique de comparaison avec une intégrale, du fait de la décroissance de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $n\geqslant 2$:

$$\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1+1-\frac{1}{n}\leqslant 2.$$

Ainsi, la somme partielle $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et elle est clairement croissante. Ainsi, elle est convergente. On en déduit la convergence de la série $\sum\frac{1}{n^2}$.

Il s'agit en fait d'une série de Riemann, dont la convergence sera un résultat du cours.

3. Puisque $S_{n-1}-S_n \underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{12n^2}$, par propriété de conservation du signe, $S_{n-1}-S_n$ est positif à partir d'un certain rang. Si on connaît le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, on peut conclure tout de suite à la convergence de $\sum(S_{n-1}-S_n)$, donc aussi de $\sum(S_n-S_{n-1})$. Sinon, on se ramène au TCSTP classique, en remarquant que l'équivalence ci-dessus implique l'existe d'un rang n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$,

$$0\leqslant S_{n-1}-S_n\leqslant\frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(S_{n-1}-S_n)$ converge.

Or, la somme partielle de cette série est $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k - S_{k+1} = S_1 - S_{n+1}$. Ainsi, la convergence de la série est équivalente à la $\boxed{\text{convergence de la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vers un réel fini } S.}$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = \mathrm{e}^S$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \dfrac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$.

De plus : $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.

D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $\boxed{S = \ln\sqrt{2\pi}}$.

5. La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{soit :} \quad \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)), \quad \text{soit :} \quad \boxed{n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}.$$

Correction du problème 2 – Formule de Stirling améliorée

Partie I – Sommation d'équivalents et de o

1. Soit $\sum b_n$ une série à termes positifs convergente et (a_n) une suite telle que $a_n = o(b_n)$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la négligeabilité, il existe N tel que pour tout $k \geqslant N$, $|a_k| \leqslant \varepsilon b_k$. Soit alors $n \geqslant N$. On a alors, pour tout $p \geqslant n$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |a_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} b_k}.$$

   (b) Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum b_n$ converge, il en est de même de $\sum |a_n|$, donc de $\sum a_n$. Ainsi, on peut passer à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente. Par continuité de la valeur absolue, on peut passer à la limite sous la valeur absolue. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on obtient :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

   Par définition de la négligeabilité, il en résulte que

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)}$$

2. Soit $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. On peut donc écrire $a_n = b_n + o(b_n)$. On a donc, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n\right),$$

   c'est-à-dire (par convergence des séries) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n + o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n\right)$$

   On en déduit, par définition des équivalents, que

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n}$$

Partie II – Équivalent et développement de certaines séries de Riemann

1. Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, en sommant et grâce à la relation de Chasles, pour tout $n \geqslant 1$, et tout $p \geqslant n$

$$\int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

En calculant ces intégrales et en passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, il vient alors :

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}} \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Les deux encadrants étant équivalents l'un à l'autre et positifs, il vient, d'après le théorème d'encadrement (auquel on se ramène en divisant par cet équivalent) :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}}.$$

On aurait aussi pu remarquer que $\displaystyle\frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et utiliser la partie 1 pour en déduire que le reste est équivalent à la somme des intégrales qu'on peut relier avec Chasles. Ce n'est pas vraiment une méthode différente, mais un raccourci.

2. Soit pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = H_n - \ln(n)$. On a alors, pour $n \geqslant 2$:

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En particulier, en ne gardant que le premier terme, $\boxed{v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}}$.

3. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs (ou plutôt ici, à termes tous négatifs, ce qui est important, c'est que le signe soit constant, au moins à partir d'un certain rang), puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum v_n - v_{n-1}$ (en effet $|v_n - v_{n-1}|$ sera majorée à partir d'un certain rang par $\frac{1}{n^2}$). Or,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k - v_{k-1} = v_n - v_1 = H_n - \ln(n) - H_1.$$

La convergence de cette série affirme bien l'existence de la limite de $H_n - \ln(n)$, limite qu'on note γ. Ainsi, $\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$.

4. Puisque $v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$, le théorème de sommation démontré en I-2 (appliqué à $v_{n-1} - v_n$ pour récupérer la positivité) amène :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

d'après la question II-1. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$H_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k - v_{k-1} = H_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} v_k - v_{k-1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k - v_{k-1} = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En réinjectant cela dans l'expression trouvée dans la question précédente, il vient :

$$\gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = H_n - \ln(n), \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Partie III – Développement asymptotique de la factorielle

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant positive et croissante sur $[1,+\infty[$, et de primitive égale à $x \mapsto x\ln(x)-x$, le même arguement de comparaison qu'en II-1 permet d'encadrer S_n entre $n\ln(n)-n+C_1$ et $(n+1)\ln(n+1)-(n+1)+C_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes. Or,
$$n = o(n\ln(n)) \qquad \text{et} \qquad C_i = o(n\ln(n)).$$
De plus, $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $\ln(n+1) = \ln(n)+o(1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc
$$n\ln(n)-n+C_1 \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)\ln(n+1)-(n+1)+C_2.$$
On en déduit, par théorème d'encadrement, que $\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)}$.

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - n\ln(n)$. On a alors, pour $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \ln(n) - n\ln(n) + (n-1)\ln(n-1) = (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= (n-1)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \boxed{-1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}. \end{aligned}$$

3. En sommant, il vient :
$$S_n - n\ln(n) - u_1 = u_n - u_1 = \sum_{k=2}^{n} -1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=2}^{n} w_k,$$
où (w_n) est une suite vérifiant $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Les deux dernières sommes sont convergentes. En notant S et T leur somme respective, et en utilisant le développement de H_n trouvée dans la partie II, il vient :
$$S_n - n\ln(n) - u_1 = -(n-1) + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + S + T - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6n^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k.$$
D'après II-1, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et d'après I-1 et II-1, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$. En posant $\ell = u_1 + 1 + \frac{\gamma}{2} + S + T$, il vient donc :
$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ell + \frac{1}{4n} - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
et finalement :
$$\boxed{S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ell + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)},$$

4. On passe à l'exponentielle :
$$n! = \mathrm{e}^{S_n} = \mathrm{e}^{n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+\ell+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\ell}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$
En particulier, on trouve
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n},$$
ce qui, en comparant à la formule de Stirling, permet de déterminer $\mathrm{e}^{\ell} = \sqrt{2\pi}$. En utilisant
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n}, \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
il vient bien :
$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{12n}\right)\right).}$$
On peut donc répondre à la question initiale : si s_n est l'équivalent de Stirling,
$$n! - s_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Correction du problème 3 – Estimation de la complexité d'algorithmes de type diviser pour régner

Question préliminaire

Raisonnons par récurrence forte. Par hypothèse $T(0) > 0$ et $T(1) > 0$.
Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $T(k) > 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors, puisque $n \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor < n$ et $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil < n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux termes. Par ailleurs, $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $\alpha + \beta > 0$, au moins l'un de ces termes est non nul, d'où

$$T(n) = \alpha T\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + \beta T\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + u_n > 0.$$

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{T(n) > 0}$.

Partie I – Cas où $u_n = \Theta(n^\gamma)$

1. On a $0 \leqslant \log_b(n) - \ell(n) \leqslant 1$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell(n) = +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\log_b(n) - \ell(n)}{\ell(n)} = 0}.$$

   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\log_b(n)}{\ell(n)} = 1$, donc $\boxed{\ell(n) \underset{+\infty}{\sim} \log_b(n)}$

2. On a :

$$\begin{aligned} k = \ell(n) &\iff b^k \leqslant n < b^{k+1}n \\ &\iff b^{k-1} \leqslant \frac{n}{b} < b^k n \\ &\iff b^{k-1} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor < b^k n \\ &\iff k - 1 = \ell \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \end{aligned}$$

   l'avant dernière équivalence étant vraie car les bornes sont entières et que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$. Ces équivalences montrent bien que $\boxed{\ell\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) = \ell(b) - 1.}$

   On a de même :

$$\begin{aligned} k = \ell'(n) &\iff b^{k-1} < n \leqslant b^k n \\ &\iff b^{k-2} \leqslant< nb \leqslant b^{k-1} n \\ &\iff b^{k-2} \leqslant \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil < b^{k-1} n \\ &\iff k - 1 = \ell \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil, \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient : $\boxed{\ell'\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right)}$

3. On utilise l'inégalité classique, obtenue par concavité du logarithme : $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. On obtient alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\ln(P(k)) = \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{b-1}{b^i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{b-1}{b^i} \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^i} = \frac{b-1}{b} \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} = 1$$

   Ainsi, $\ln(P(k)) \leqslant 1$, donc $P(k) \leqslant \mathrm{e}$. On en déduit que $\boxed{(P(k)) \text{ est majorée}}$.

4. On a $n \geqslant b^{\ell'(n)-1}$, donc

$$\left(1+\frac{b-1}{n}\right) Q_{\lceil \frac{n}{b} \rceil} \leqslant \left(1+\frac{b-1}{b^{\ell'(n)-1}}\right) \prod_{i=1}^{\ell'(\lceil \frac{n}{b} \rceil)-1} \left(1+\frac{b-1}{b^i}\right)$$
$$\leqslant \left(1+\frac{b-1}{b^{\ell'(n)-1}}\right) \prod_{i=1}^{\ell'(n)-2} \left(1+\frac{b-1}{b^i}\right)$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{\ell'(n)-1} \left(1+\frac{b-1}{b^i}\right) = Q_n.$$

Ainsi, $\boxed{\left(1+\frac{b-1}{n}\right) Q_{\lceil \frac{n}{b} \rceil} \leqslant Q_n}$.

5. Démontrons cette inégalité par récurrence forte.
Par définition de K, elle est vraie pour tout $n \in [\![1, b-1]\!]$.
Soit donc $n \geqslant b$, et supposons l'inégalité satisfaite pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, les entiers $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ et $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ sont dans $[\![1, b-1]\!]$ (le fait de commencer l'hérédité à b nous évite de tomber sur $T(0)$). On peut donc écrire :

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} = \frac{1}{n^\gamma}\left(\alpha T\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + \beta T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + u_n\right)$$
$$\leqslant \frac{\lceil \frac{n}{b} \rceil^\gamma}{n^\gamma}\left(\frac{T\left(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor\right)}{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor^\gamma} + \frac{T\left(\lceil \frac{n}{b} \rceil\right)}{\lceil \frac{n}{b} \rceil^\gamma}\right) + M$$
$$\leqslant \frac{1}{n^\gamma} \cdot \left(\frac{n+b-1}{b}\right)^\gamma (\alpha+\beta) Q^\gamma_{\lceil \frac{n}{b} \rceil}\left(K + M\left(\ell'\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) - 1\right)\right) + M.$$

On a pu regrouper les termes en α et β par croissante de Q_k et de $\ell'(n)$. On obtient alors

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant \frac{a}{b^\gamma}\left(\left(1+\frac{b-1}{n}\right) Q_{\lceil \frac{n}{b} \rceil}\right)^\gamma (K + M(\ell'(n)-2)) + M,$$

et puisque $b^\gamma = a$ par définition et d'après la question 4, on obtient

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant Q_n^\gamma (K + M(\ell'(n)-2)) + M.$$

Le terme $K + M(\ell'(n)-2)$ a été obtenu comme facteur d'un majorant d'une expression positive, donc est lui-même positif. De plus, $Q_n^\gamma \geqslant 1$, ce qui permet d'entrer le dernier facteur M dans la parenthèse, en continuant la majoration :

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant Q_n^\gamma (K + M(\ell'(n)-2) + M) = Q_n^\gamma (K + M(\ell'(n)-1)).$$

On conclut d'après le principe de récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant Q_n^\gamma (K + M(\ell'(n)-1))}.$$

6. On a donc

$$\frac{T(n)}{n^\gamma \log_b(n)} \leqslant \frac{Q_n^\gamma (K + M(\ell'(n)-1))}{\log_b(n)},$$

cette expression restant bornée, car Q_n est bornée et $\frac{\ell'(n)}{\log_b(n)} \to 1$. Ainsi, $T(n) = O(n^\gamma \log_b(n))$, et comme $\log_b(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(b)}$, $\boxed{T(n) = O(n^\gamma \ln(n))}$.

7. La question est délicate, il faut une très grande précision dans la définition des indices pour que l'ensemble tourne comme il faut.
Nous définissons :

$$Q'_n = \prod_{i=1}^{\ell'(n)-1} \left(1-\frac{b-1}{b^i}\right),$$

et $K = \min_{1\leqslant n<b}\left(\frac{T(n)}{n^\gamma {Q'_n}^g}\right) > 0$. Cette positivité nous assurera que tous les termes que nous manipulerons par la suite seront positifs, nous autorisant à faire les minorations convenablement.

De même que plus haut, on a :

$$\left(1-\frac{b-1}{n}\right)Q'_{\lceil\frac{n}{b}\rceil} \geqslant \left(1-\frac{b-1}{b^{\ell'(n)-1}}\right)\prod_{i=1}^{\ell'(n)-2}\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right) = \prod_{i=1}^{\ell'(n)-1}\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right) = Q'_n.$$

De plus, on montre comme précédemment que $\ln(Q'_n)$ est bornée, car la série de terme général $\ln\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right)$ est convergente.

En effet, c'est une série à termes négatifs, et de plus

$$\ln\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b-1}{b^i},$$

donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \geqslant \ln\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right) \geqslant \frac{2(b-1)}{b^i}.$$

Comme ce dernier terme est le terme général d'une série géométrique convergente, on déduit du TCSTP (pris dans sa version négative ici) que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{b-1}{b^i}\right)$ est convergente, donc que $\ln(Q'_n)$ admet une limite finie, donc, en passant à l'exponentielle, que Q'_n admet une limite strictement positive. Ainsi, $Q'_n = \Omega(1)$.

Nous montrons maintenant par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} \geqslant {Q'_n}^\gamma (K + m\ell(n)).$$

L'initialisation se fait pour $n \in [\![1, b-1]\!]$ pour les mêmes raisons que plus haut (éviter de revenir à $T(0)$). Pour ces valeurs, l'initialisation découle de la définition de K, du fait que $\ell(n) = 0$ et que $Q'_n = 1$.

Soit $n \geqslant b$ telle que l'inégalité soit vraie aux rangs 1 à $n-1$. On a alors, de même que plus haut, en utilisant ici aussi la décroissance de Q'_n et la croissance de ℓ :

$$\begin{aligned}
\frac{T(n)}{n^\gamma} &\geqslant \frac{\lfloor\frac{n}{b}\rfloor^\gamma}{n^\gamma}(Q'_{\lceil\frac{n}{b}\rceil})^\gamma(\alpha+\beta)\left(K + m\ell\left(\left\lfloor\frac{b}{n}\right\rfloor\right)\right) + m \\
&\geqslant \frac{1}{n^\gamma}\left(\frac{n-(b-1)}{b}\right)^\gamma (Q'_{\lceil\frac{n}{b}\rceil})^\gamma(\alpha+\beta)\left(K + m\left(\ell(n)-1\right)\right) + m \\
&\geqslant \frac{a}{b^\gamma}\left(\left(1-\frac{b-1}{n}\right)Q'_{\lceil\frac{n}{b}\rceil}\right)^\gamma \left(K + m\left(\ell(n)-1\right)\right) + m \\
&\geqslant {Q'_n}^\gamma\left(K + m(\ell(n)-1)\right).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut rentrer m dans la parenthèses en continuant les minorations, car $Q'_n \leqslant 1$ et la parenthèses est positive. Ainsi,

$$\frac{T(n)}{n^\gamma} \geqslant {Q'_n}^\gamma\left(K + m\ell(n)\right),$$

ce qui conclut la récurrence.

On conclut de façon similaire à la question 6, du fait que $Q'_n = \Omega(1)$: on obtient $T(n) = \Omega(n\log_b(n))$, puis $\boxed{T(n) = \Omega(n\ln(n))}$

Mettant ensemble les deux résultats obtenus, on obtient $\boxed{T(n) = \Theta(n\ln(n))}$.

8. Pour l'algorithme d'exponentiation rapide, on a $a = 1$ et $b = 2$, donc $\gamma = log_2(1) = 0$. Or, $u_n = \Theta(1) = \Theta(n^0)$. On est donc dans les hypothèses d'utilisation du résultat qu'on vient d'établir. On trouve donc $\boxed{T(n) = \Theta(\ln(n))}$. C'est bien le résultat qu'on avait trouvé dans le cours d'informatique.
9. Pour le tri fusion, on a $a = b = 2$, donc $\gamma = 1$. Or $u_n = \Theta(n^1)$, donc on peut encore une fois utiliser le résultat ci-dessus, pour obtenir $\boxed{T(n) = \Theta(n\ln(n))}$.

Partie II – Le cas $u_n = O(n^{\gamma-\varepsilon})$.

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_n = O(n^{\gamma-\varepsilon})$.

1. On définit $K = \max_{1 \leqslant n \leqslant b-1} \left(\frac{T(n)}{n^\gamma} - M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right)$.

   Alors, l'inégalité est trivialement vraie pour $n \in [\![1, b-1]\!]$. Soit $n \geqslant b$, et supposons connues les inégalités aux rangs 1 à $n-1$. Nous avons alors, en suivant les mêmes techniques que dans la partie 1, et avec les mêmes justifications :

$$
\begin{aligned}
\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} &= \frac{1}{n^{\gamma-\varepsilon}} \left(\alpha T \left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \right) + \beta T \left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil \right) \right) + \frac{u_n}{n^{\gamma-\varepsilon}} \\
&\leqslant \frac{\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil^{\gamma-\varepsilon}}{n^{\gamma-\varepsilon}} \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil^{\varepsilon} Q^\gamma_{\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil} \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(\lceil \frac{n}{b} \rceil)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right) + M \\
&\leqslant n^\varepsilon \left(1 + \frac{b-1}{n} \right)^\gamma Q^\gamma_{\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil} \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-2} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right) + M \\
&\leqslant n^\varepsilon \left(Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-2} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right) + \frac{M}{n^\varepsilon} \right) \\
&\leqslant n^\varepsilon Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-2} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} + \frac{M}{n^\varepsilon} \right) \\
&\leqslant n^\varepsilon Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-2} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} + \frac{M}{b^{\varepsilon(\ell'(n)-1)}} \right) \\
&\leqslant n^\varepsilon Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right)
\end{aligned}
$$

   On peut donc conclure, par le principe de récurrence forte, que pour tout $n \geqslant 1$:

$$
\boxed{\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} \leqslant n^\varepsilon Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right)}.
$$

2. On a donc

$$
\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant Q_n^\gamma \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right).
$$

   Or, Q_n est borné et la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{b^{\varepsilon i}}$ est convergente (série géométrique), donc le majorant est borné, d'où on conclut que $T(n) = O(n^\gamma)$.

3. On pose cette fois $K = \min_{1 \leqslant n \leqslant b-1} \left(\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} {Q'_n}^\gamma \right)$, et on démontre par récurrence forte que

$$
\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} \geqslant n^\varepsilon {Q'_n}^\gamma \left(K + m \sum_{i=2}^{\ell(n)+1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right).
$$

   L'initialisation pour $n \in [\![1, b-1]\!]$ est assurée par la définition de K, et le fait que pour ces valeurs de n, $Q'_n = 1$ et $\ell(n) = 0$ (donc la somme est vide).

   Soit $n \geqslant b$ tel que la propriété soient vraie pour tout $k < n$. Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} &= \frac{1}{n^{\gamma-\varepsilon}}\left(\alpha T\left(\left\lfloor \frac{n}{b}\right\rfloor\right) + \beta T\left(\left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil\right)\right) + \frac{u_n}{n^{\gamma-\varepsilon}} \\
&\geqslant \frac{\left\lfloor \frac{n}{b}\right\rfloor^{\gamma-\varepsilon}}{n^{\gamma-\varepsilon}}\left\lfloor \frac{n}{b}\right\rfloor^{\varepsilon}(Q'_{\lceil \frac{n}{b}\rceil})^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=2}^{\ell(\lceil \frac{n}{b}\rceil)+1}\frac{1}{b^{\varepsilon i}}\right) + m \\
&\geqslant n^{\varepsilon}\left(1-\frac{b-1}{n}\right)^{\gamma}(Q'_{\lceil \frac{n}{b}\rceil})^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)}\frac{1}{b^{\varepsilon i}}\right) + m \\
&\geqslant n^{\varepsilon}\left((Q'_n)^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)}\frac{1}{b^{\varepsilon i}}\right) + \frac{m}{n^{\varepsilon}}\right) \\
&\geqslant n^{\varepsilon}(Q'_n)^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)}\frac{1}{b^{\varepsilon i}} + \frac{m}{n^{\varepsilon}}\right) \\
&\geqslant n^{\varepsilon}(Q'_n)^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)}\frac{1}{b^{\varepsilon i}} + \frac{m}{b^{\varepsilon(\ell(n)+1)}}\right) \\
&\geqslant n^{\varepsilon}(Q'_n)^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)+1}\frac{1}{b^{\varepsilon i}}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$

$$
T(n) \geqslant n^{\varepsilon}(Q'_n)^{\gamma}\left(K + m\sum_{i=0}^{\ell(n)+1}\frac{1}{b^{\varepsilon i}}\right).
$$

Comme $Q'_n = \Omega(1)$, et que la somme du membre de droite est convergente donc bornée, on conclut sans problème que $\boxed{T(n) = \Omega(n^{\gamma})}$.

On a donc obtenu $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\gamma})}$.

4. Dans l'algorithme de Karatsuba, nous avons $a = 3$ et $b = 2$, donc $\gamma = \log_2(3) > 1$. Or, $u_n = \Theta(n^1)$, on est donc dans les conditions d'application du résultat de cette partie, et on trouve que $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_2(3)})}$.