T.D. Θ_3 : Diffusion thermique

Exercice 1 Temps de cuisson d'une dinde

Soit une dinde de Noël, pesant $3,5$ kg, à faire cuire. L'an passé, la dinde pesait $2,5$ kg et était (bien) cuite au bout de 1 heure et 30 minutes.

On suppose que toutes les dindes ont les mêmes conductivité thermique, capacité thermique et masse volumique.

1. Évaluer la loi de variation liant le temps de cuisson avec la masse de la dinde à cuire. Déterminer le temps de cuisson de la dinde de $3,5$ kg.
2. Que pensez-vous des lois de cuisson du type « tant de minutes par kilo » généralement proposées par les manuels de cuisine ? En suivant une telle loi, la dinde précédente est-elle trop ou trop peu cuite ?
3. Traiter le cas d'une tarte et d'une merguez. Que pensez-vous des résultats obtenus ?

Exercice 2 Isolation thermique d'une conduite cylindrique

Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de longueur L suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les perturbations dues aux bords, canalise de la vapeur d'eau à la température $\mathrm{T}_i = 453$ K. L'air extérieur est à la température $\mathrm{T}_e = 293$ K. On se place en régime permanent et on suppose que les transferts thermiques se font radialement. On note T_1 la température de la paroi intérieure du tuyau et T_2 la température de sa paroi extérieure. Le matériau dans lequel est faite la conduite a pour conductivité thermique κ_1. On suppose que la seule variable d'espace pertinente est la distance r à l'axe du tuyau.

1. **Cas de la conduction pure**
   a. Déterminer l'expression de la température $\mathrm{T}(r)$ dans la conduite.
   b. Définir (par une analogie) la résistance thermique du tuyau et la calculer. Faire l'application numérique pour les données suivantes : $\mathrm{R}_1 = 15$ cm, $\mathrm{R}_2 = 16$ cm, $\mathrm{L} = 10$ m, $\kappa_1 = 16$ W.m^{-1}.K^{-1}.
2. **Bilan thermique complet**
   On tient compte maintenant des transferts thermiques conducto-convectifs se produisant aux interfaces solide–fluide. Ces échanges sont décrits par la loi de NEWTON. On attribue aux deux parois extérieure et intérieure de la conduite le même coefficient de transfert $h = 23$ W.m^{-2}.K^{-1}.
   a. Montrer que l'on peut modéliser le transfert thermique se produisant entre la vapeur d'eau et l'extérieur à l'aide de la méthode des résistances thermiques. Déterminer la résistance thermique globale $\mathscr{R}_0$. Application numérique ?
   b. Calculer numériquement la puissance thermique perdue $\mathscr{P}_0$.
   c. Calculer numériquement T_1 et T_2. Commenter.
   d. Représenter graphiquement les variations de la température avec r.
   e. Calculer l'entropie créée par unité de temps au sein du tuyau. Interpréter.
3. **Isolation de la conduite et paradoxe de l'isolant en géométrie cylindrique**
   On dispose sur le tuyau une couche d'isolant d'épaisseur constante, de conductivité thermique $\kappa_2 = 4$ W.m^{-1}.K^{-1}. Le rayon externe est noté R_3. On pose $y = \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_3$.
   a. Montrer que la résistance thermique totale du tuyau isolé se met sous la forme $\mathscr{R}_{\text{tot}} = \mathscr{R}_0 + \mathrm{A}\,[f(y) - \ln y]$ où $f(y)$ est une fonction affine.
   b. Discuter graphiquement, selon la valeur de κ_2, la position relative des courbes représentatives de $f(y)$ et $\ln y$.
   c. À quelle condition sur κ_2 la pose de l'isolant diminue-t-elle les pertes thermiques quelle que soit l'épaisseur ?
   d. Si cette condition n'est pas vérifiée, montrer graphiquement que pour un domaine de valeurs de y à préciser, la pose augmente les fuites thermiques. Proposer une explication simple de ce phénomène apparemment paradoxal.

Exercice 3 Flux géothermique

La croûte continentale terrestre a une épaisseur l d'environ 35 km ; elle est équivalente à une couche homogène de conductivité $\lambda = 2,3$ SI. Au niveau du sol, la température est $\mathrm{T}_2 = 273$ K, et à la profondeur l, elle vaut $\mathrm{T}_1 = 873$ K.

1. Calculer la puissance géothermique par unité de surface J_{th} issue de la croûte continentale.
2. Les éléments radioactifs de la croûte dissipent une puissance volumique $\sigma_u = 3\ \mu$W.m^{-3}. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la température dans la croûte. En déduire la puissance géothermique par unité de surface, J'_{th}, au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs. Conclure.

Exercice 4 Température dans un câble électrique

Un conducteur électrique de section circulaire de rayon r_1, de conductivité électrique σ, de conductivité thermique λ_1, est entouré d'une gaine isolante de rayon r_2 et de conductivité thermique λ_2.

Ce conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité I, dont la densité est uniforme. On se place en régime permanent et on néglige tout effet de bord. On suppose que le contact thermique entre le conducteur et la gaine isolante est parfait. En revanche, on admettra qu'entre la gaine isolante et l'air ambiant, dont la température est égale à T_0, il s'établit des échanges thermiques superficiels caractérisés par la loi de NEWTON : une section s de la surface latérale de la gaine, dont la température vaut $\mathrm{T}(r_2)$, échange avec l'air un flux thermique $\phi = h(\mathrm{T}(r_2) - \mathrm{T}_0)s$, où h est une constante.

1. Déterminer la température T à une distance r de l'axe dans le conducteur et dans la gaine.
2. Calculer $\mathrm{T}(0)$, $\mathrm{T}(r_1)$ et $\mathrm{T}(r_2)$.

Données : $\sigma = 5.10^7\ \Omega^{-1}$.m^{-1}, $\lambda_1 = 400$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\lambda_2 = 0,4$ W.m^{-1}.K^{-1}, $r_1 = 0,5$ cm, $r_2 = 2$ cm, $\mathrm{I} = 100$ A, $\mathrm{T}_0 = 300$ K et $h = 20$ W.m^{-2}.K^{-1}.

Exercice 5 Étude de la sensation de froid et de chaud

On étudie ici deux modèles destinés à interpréter l'observation suivante : quand on pose sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température, on a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.

1. **Modèle statique**

   On adopte le modèle suivant : deux cylindres, isolés latéralement, de même section S, de même axe $(\mathrm{O}x)$, de conductivités λ_1 et λ_2, de masses volumiques μ_1 et μ_2, de capacités thermiques massiques C_1 et C_2 et de longueurs L_1 et L_2, sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x=0$. On maintient les extrémités $x=-\mathrm{L}_1$ et $x=+\mathrm{L}_2$ des deux cylindres aux températures respectives T_1 et T_2. On étudie un régime stationnaire pour lequel la température $\mathrm{T}(x,t)$ est indépendante du temps.

   a. Quelle est l'expression de la résistance thermique de chaque cylindre en fonction de leur longueur, de leur conductivité thermique et de S ? En déduire la résistance thermique $\mathrm{R_{th}}$ de l'ensemble des deux cylindres placés en série.

   b. En s'appuyant sur l'analogie avec la loi d'Ohm, montrer que la température T_i à l'interface $x=0$ est telle que $\mathrm{T}_i-\mathrm{T}_1=\alpha(\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_1)$, α étant une quantité que l'on exprimera en fonction des résistances thermiques $\mathrm{R_{th,1}}$ et $\mathrm{R_{th,2}}$ des deux cylindres. En déduire que la température T_i est un barycentre de T_1 et T_2.

   c. La température T_1 correspond à 37°C (main) et T_2 à 20°C (acier ou bois), et on suppose $\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_2$. On donne les conductivités thermiques en unités SI : $\lambda_{\text{main}}=10$, $\lambda_{\text{bois}}=1$, $\lambda_{\text{acier}}=100$. Préciser l'unité de ces conductivités. Calculer T_i pour un contact main-bois puis main-acier et conclure.

2. **Modèle dynamique**

   On suppose dans cette partie que les deux cylindres sont illimités et emboîtés en $x=0$. Le cylindre 1 s'étend entre $x=-\infty$ et $x=0$ et le cylindre 2 s'étend entre $x=0$ et $x=+\infty$.

   Initialement à $t=0$, le cylindre 1 est à la température T_1 uniforme et le cylindre 2 à la température T_2 uniforme.

   Puis, pour les dates positives, les extrémités des cylindres sont maintenues à température constante, soit :

   $$\mathrm{T}(-\infty,t)=\mathrm{T}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(+\infty,t)=\mathrm{T}_2$$

   On admet qu'à l'interface, il s'établit instantanément une température stationnaire T_i.

   a. Pour un corps de section S, de conductivité λ, de capacité calorifique thermique C et de masse volumique μ, on définit son coefficient de diffusion (ou diffusivité) thermique a par $a=\frac{\lambda}{\mu \mathrm{C}}$. Montrer qu'une solution de l'équation de diffusion thermique à une dimension est de la forme :

   $$f_a(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

   Tracer l'allure du graphe de $f_a(x,t)$ en fonction de x à divers instants t. Que devient cette courbe lorsque t tend vers 0 ?
   On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   b. Expliquer pourquoi on peut chercher une solution de l'équation de diffusion thermique dans le demi-espace $x<0$ de coefficient de diffusion a_1 de la forme $\mathrm{T}(x,t)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\,f_{a_1}(x,t)$ avec A et B des constantes. Déterminer A et B en fonction de T_1 et T_i.

   c. Chercher de même une solution $\mathrm{T}(x,t)=\mathrm{C}+\mathrm{D}\,f_{a_2}(x,t)$ dans le demi-espace $x>0$ de coefficient de diffusion a_2. Déterminer C et D en fonction de T_2 et T_i.

   d. Établir les expressions des densités de flux thermiques $j_{\mathrm{th},1}$ et $j_{\mathrm{th},2}$ dans les deux matériaux, en fonction de x, a_1, a_2, λ_1, λ_2 et t. En déduire l'expression de T_i en fonction de T_1, T_2 et des effusivités E_1 et E_2 des deux matériaux, si on définit l'effusivité par $\mathrm{E}=(\mu \mathrm{C}\lambda)^{1/2}$.

   e. On donne, en unités SI, les effusivités $\mathrm{E}_{\text{main}}=1,8.10^3$, $\mathrm{E}_{\text{acier}}=14.10^3$ et $\mathrm{E}_{\text{bois}}=0,4.10^3$.
   Calculer T_i pour un contact main-bois et un contact main-acier en reprenant pour les températures les valeurs numériques de la première partie. Commenter.

   f. Comment expliquer que la température T_i à l'interface s'établisse instantanément lorsqu'on met en contact les deux cylindres à T_1 et à T_2 ?

Exercice 6 Efficacité d'une ailette de refroidissement

Pour améliorer le refroidissement d'un milieu et assurer la constance de sa température T_1, on met à son contact en $x=0$ une barre cylindrique de cuivre (longueur L, rayon a, conductivité thermique κ, axe Ox). La surface latérale de la barre est en contact avec l'air ambiant de température uniforme et constante T_0 et les échanges thermiques avec l'air sont caractérisés par une puissance surfacique égale à $h(\mathrm{T_S}-\mathrm{T}_0)$ où $\mathrm{T_S}$ désigne la température de la surface latérale au point considéré. On fait les hypothèses suivantes :

- **(i)** la température est uniforme sur une section donnée du cylindre (« approximation de l'ailette ») ;
- **(ii)** on suppose le cylindre de longueur infinie ;
- **(iii)** on se place en régime stationnaire ;
- **(iv)** le contact thermique entre le milieu et la barre est supposé parfait.

On posera $\delta=\sqrt{\dfrac{a\kappa}{2h}}$ et on donne $\kappa=400$ W.m^{-1}.K^{-1}, $h=15$ W.m^{-2}.K^{-1}, $a=1$ mm, L $=10$ cm.

1. Déterminer la répartition de température $\mathrm{T}(x)$ au sein de l'ailette.
2. Proposer une définition de l'efficacité η de l'ailette et l'évaluer.
3. Les hypothèses **(i)** et **(ii)** sont-elles vérifiées ?
4. Dans le cas où l'hypothèse **(ii)** n'est pas vérifiée, reprendre les deux premières questions en remarquant que $\kappa/\delta \gg h$.

Exercice 7 Diffusion thermique le long d'un fil en régime sinusoïdal

On considère un fil cylindrique de révolution de section s, de rayon r, de longueur l, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On le suppose parfaitement calorifugé sur sa surface latérale.

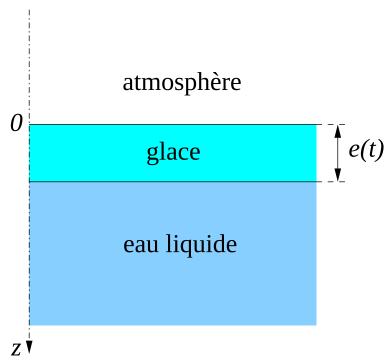
1. On désigne par λ la conductivité thermique supposée constante du matériau. Au point M d'abscisse x et à l'instant t, la température est notée $\mathrm{T}(x,t)$; au point M', d'abscisse $x+\mathrm{d}x$, et au même instant, elle est notée $\mathrm{T}(x+\mathrm{d}x,t)$. Trouver l'équation de la chaleur vérifiée par $\mathrm{T}(x,t)$.
2. L'extrémité en $x=0$ du fil est maintenue à la température T_1, alors que l'autre extrémité en $x=l$ est maintenue à la température $\mathrm{T}_2<\mathrm{T}_1$. Établir, en régime stationnaire, la loi de variation de T en fonction de x. Sachant que le flux thermique à travers une section s de fil est de 2400 $\mathrm{J.min^{-1}}$, trouver la valeur de la conductivité thermique λ du matériau constituant le fil. On donne $s=100\ \mathrm{cm^2}$, $\mathrm{T}_1=300$ K, $\mathrm{T}_2=280$ K et $l=1$ m.
3. On impose à l'origine la température variable suivante : $\mathrm{T}(0,t)=\mathrm{T}_0+\mathrm{A}\cos(\omega t)$.
   a. Chercher une solution de l'équation différentielle précédente de la forme
   $$\mathrm{T}(x,t)=\mathrm{T}_0+\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-mx}\cos[\omega t-\phi(x)]$$
   Déterminer m en fonction de ω et de la diffusivité thermique $a=\frac{\lambda}{\rho c}$. En déduire $\phi(x)$.
   b. La solution précédente est aussi valable pour étudier l'onde thermique dans le sol. On a observé les amplitudes suivantes d'oscillation de la température, au cours d'une année :

profondeur (m)	0	1	2	3	4
amplitude (K)	19,5	11,5	6,8	4,0	2,35

   En déduire une valeur approchée de a. Avec quel retard sont ressenties les oscillations à la profondeur de 4 m ? On appelle profondeur d'inversion l'abscisse minimale x_1 pour laquelle les oscillations thermiques sont en opposition de phase avec celles de l'extérieur. Calculer x_1.

Exercice 8 Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface S est à une température T_a inférieure à la température de fusion de la glace T_f, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement, proportionnellement à $\sqrt{t}$ aux grands t. On note T_f la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $\mathrm{T}(z,t)$ la température de la glace pour $0\leqslant z\leqslant e(t)$. On suppose que le profil de température $\mathrm{T}(z,t)$ est le même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires).



On donne la température de fusion $\mathrm{T}_f=273$ K et la chaleur latente de fusion $l_f=330\ \mathrm{kJ.kg^{-1}}$ de la glace, ainsi que sa masse volumique μ, sa capacité calorifique massique $c=4,18\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$ et sa conductivité thermique λ. On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide.

1. On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(0,t)=\mathrm{T}_a$ (hypothèse $(\mathscr{H})$).
   a. Exprimer le flux thermique ϕ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de λ, $e(t)$, S, T_a et T_f.
   b. En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, montrer que $e(t)$ est solution de l'équation différentielle
   $$e\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda(\mathrm{T}_f-\mathrm{T}_a)}{\mu l_f}$$
   Déterminer $e(t)$ avec la condition initiale $e(0)=e_0$.
   c. En déduire une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.
2. En réalité, l'hypothèse $(\mathscr{H})$ n'est pas satisfaisante en général : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu simultanément la diffusion thermique selon $\overrightarrow{u_z}$ et la convection selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. On parle de transport *conducto-convectif*. Dans ce cas, la loi phénoménologique de NEWTON donne l'expression du flux thermique $\phi_{cc}=h\mathrm{S}(\mathrm{T}_s-\mathrm{T}_a)$ où $\mathrm{T}_s=\mathrm{T}(0,t)$ est la température de la surface du lac et h un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au-dessus du lac.
   a. Justifier brièvement la continuité du flux thermique en $z=0$.
   b. En déduire l'expression de T_s en fonction de T_a, T_f, h et λ. À quelle condition le modèle de la première question est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de $e(t)$.

Exercice 9 Création d'entropie en régime stationnaire

Les extrémités d'une barre calorifugée en acier inox ($\lambda=16$ SI), de longueur $l=1$ m, sont maintenues aux températures suivantes : $\mathrm{T}_1=300$ K et $\mathrm{T}_2=400$ K. On étudie le régime stationnaire.

1. Quelle est la variation d'entropie d'un élément de volume de section $\mathscr{S}$ et de longueur $\mathrm{d}x$? Établir l'expression de l'entropie reçue par cet élément.
2. Calculer l'entropie σ_s produite dans la barre par unité de volume et pendant l'unité de temps, au point de la barre où elle est maximale.

Quelques indications ou solutions...

Exercice 1
1. Temps de cuisson de la dinde de $3{,}5$ kg de 1 h 53 min.
2. Dinde trop cuite.
3. Suivant la géométrie, le temps de cuisson n'évolue pas de la même façon avec la masse...

Exercice 2
Pas d'indications... Courage, c'est assez détaillé et proche du cours !

Exercice 3
1. $J_{th} = 39{,}4\ mW.m^{-2}$.
2. Penser que la croûte est fine, ce qui simplifie les calculs. $J'_{th} = 920\ mW.m^{-2}$.

Exercice 4
$T(0) \simeq T(r_1) = 302{,}4$ K *et* $T(r_2) = 301$ K.

Exercice 5
1. T_i *est le barycentre des températures avec des poids* λ_1/L_1 *et* λ_2/L_2.
2. Penser à utiliser la continuité du flux thermique en $x = 0$ *; cette fois-ci, les poids sont les effusivités.*

Exercice 6
1. $T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp(-x/\delta)$.
2. L'efficacité de l'ailette est le rapport de la puissance thermique prélevée au milieu avec l'ailette avec la puissance prélevée sans celle-ci. On trouve $\eta = \kappa/(\delta h) \simeq 231$.
3. Lire la question suivante...
4. $T(x) = T_0 + \dfrac{T_1 - T_0}{2}\,\dfrac{\exp(\frac{L-x}{\delta}) + \exp(\frac{x-L}{\delta})}{cosh(\frac{L}{\delta})}$ *;* $\eta = \frac{\kappa}{\delta h}\, tanh(\frac{L}{\delta}) \simeq 162$.

Exercice 7
2. $\lambda = 200\ W.m^{-1}.K^{-1}$.
3. $\phi(x) = mx$ *;* $a = 3{,}6.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$ *; retard de 122 jours ;* $x_1 \simeq 6$ *m.*

Exercice 8
Cet exo est tombé plusieurs fois à l'X sous la forme bien plus brève : « étudier le gel d'un lac »... L'énoncé proposé ici est assez détaillé pour qu'il n'y ait pas d'indication ;-).

Exercice 9
$\sigma_s \simeq 1{,}78\ W.K^{-1}.m^{-3}$.