VECTEURS ALÉATOIRES

✠ ***Exercice 1.*** [⋆]

On considère une suite de tirages sans remise dans une urne contenant $n-2$ boules blanches et 2 noires. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et Y celui de la seconde.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Dans cette question, on étudie plusieurs méthodes pour déterminer la loi de Y.
   a) Justifier que Y a la même loi que $n+1-X$ et en déduire la loi de Y. Calculer $E(Y)$.
   b) Sans utiliser le a), déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$. Retrouver ainsi la loi de Y.
   c) Sans utiliser ni le a) ni le b), déterminer la loi conjointe du couple (X,Y). Retrouver à nouveau la loi de Y.
3. Donner la loi de $Y-X$. Comparer avec celle de X. Interpréter.

Dans tout cet exercice, on note B_k l'événement « obtenir une boule blanche au k-ème tirage ».

1. On a clairement $X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$.

   Première méthode : avec du dénombrement

   Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Il a en tout $n!$ permutations des n boules. Sur ces $n!$ permutations, recherchons les rangements pour lesquels la première boule noire est en position k. Pour obtenir une telle disposition, il faut d'abord choisir $k-1$ boules blanches parmi les $n-2$ présentes et les permuter sur les $k-1$ premières places. On choisit alors 1 boule noire parmi les 2 disponibles pour occuper la k-ème place. Reste alors à permuter les $n-k$ restantes sur les $n-k$ dernières positions. Par suite, on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\binom{n-2}{k-1}(k-1)! \times \binom{2}{1} \times (n-k)!}{n!} \\ &= \frac{(n-2)! \times (k-1)! \times 2 \times (n-k)!}{(k-1)! \times (n-k-1)! \times n!} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

   Seconde méthode : avec la formule des probas composées

   Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned} & P(X=k) \\ = \ & P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) \\ = \ & \underbrace{P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \times \cdots \times P(B_{k-1} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}) \times P(\overline{B_k} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})}_{\text{formule des probabilités composées}} \\ = \ & \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} \\ = \ & \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

   Bilan :

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n-1]\!], \qquad P(X=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.}$$

2. a) Si l'on inverse la chronologie, c'est-à-dire si l'on énumère les boules de la dernière vers la première, la première boule noire devient la seconde et vice-versa. Cela justifie que

$$\boxed{\text{la variable } n+1-X \text{ a la même loi que la variable } Y.}$$

On a donc $Y(\Omega) = [\![2; n]\!]$ et

$$\forall \ell \in [\![2; n]\!], \qquad P(Y = \ell) = P(n + 1 - X = \ell) = P(X = n + 1 - \ell) = \frac{2(\ell - 1)}{n(n-1)},$$

d'où

$$\boxed{\forall \ell \in [\![2; n]\!], \qquad P(Y = \ell) = \frac{2(\ell - 1)}{n(n-1)}\cdot}$$

b) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. L'ensemble des valeurs possibles de $Y \,|\, (X = k)$ est $[\![k+1; n]\!]$.
Première méthode : avec du dénombrement
Soit $\ell \in [\![k+1; n]\!]$. Si l'on sait que $X = k$, on ne s'intéresse plus qu'aux $n - k$ derniers tirages et le nombre de permutations totales des boules restantes est alors $(n - k)!$ Sur ces $(n - k)!$ permutations, recherchons les rangements pour lesquels la seconde boule noire est en position ℓ. Pour obtenir une telle disposition, on place la boule noire restante en position ℓ et l'on permute les $n - k - 1$ boules restantes sur les $n - k - 1$ places disponibles. Par suite, on a

$$P(Y = \ell \,|\, X = k) = \frac{1 \times (n - k - 1)!}{(n - k)!} = \frac{1}{n - k}\cdot$$

Seconde méthode : avec la formule des probas composées
Pour tout $\ell \in [\![k+1; n]\!]$,

$$\begin{aligned}
& P(Y = \ell \,|\, X = k) \\
= \; & P(B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{\ell-1} \cap \overline{B_\ell}) \\
= \; & P(B_{k+1} \,|\, X = k) P(B_{k+2} \,|\, B_{k+1} \cap X = k) P(B_{k+3} \,|\, B_{k+1} \cap B_{k+2} \cap X = k) \times \cdots \\
& \cdots \times P(B_{\ell-1} \,|\, B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{\ell-2} \cap X = k) \times P(\overline{B_\ell} \,|\, B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{\ell-1} \cap X = k) \\
& \qquad \text{formule des probabilités composées} \\
= \; & \frac{n-k-1}{n-k} \times \frac{n-k-2}{n-k-1} \times \cdots \times \frac{n-\ell+k+1}{n-\ell+k+2} \times \frac{1}{n-\ell+k+1} \\
= \; & \frac{1}{n-k},
\end{aligned}$$

Bilan

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n-1]\!], \quad \forall \ell \in [\![k+1; n]\!], \qquad P(Y = \ell \,|\, X = k) = \frac{1}{n - k}\cdot}$$

Loi de Y
Par suite, pour tout $\ell \in [\![2; n]\!]$, la formule des probabilités totales nous dit que

$$\begin{aligned}
P(Y = \ell) &= \sum_{k=1}^{\ell-1} P(X = k) P(Y = \ell \,|\, X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \frac{1}{n-k} \\
&= \frac{2(\ell-1)}{n(n-1)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\forall \ell \in [\![2; n]\!], \qquad P(Y = \ell) = \frac{2(\ell - 1)}{n(n-1)}\cdot}$$

c) Soient $k, \ell \in [\![1; n]\!]$. Il est clair que $P(X = k\,,\, Y = \ell) = 0$ lorsque $k \geqslant \ell$. On suppose donc que $k < \ell$.
Première méthode : avec du dénombrement
Il a en tout $n!$ permutations des n boules. Sur ces $n!$ permutations, recherchons les rangements pour lesquels la première boule noire est en position k et la seconde boule noire est en position ℓ. Pour obtenir une telle disposition, il suffit de permuter les deux boules noires sur les positions k et ℓ puis de permuter les $n - 2$ boules blanches sur les $n - 2$ autres places. Donc

$$P(X = k\,,\, Y = \ell) = \frac{2! \times (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}\cdot$$

Seconde méthode : avec la formule des probas composées

On a

$$\begin{aligned}
P(X=k\,,\,Y=\ell) &= P(B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\cap B_{k+1}\cap\cdots\cap B_{\ell-1}\cap\overline{B_\ell})\\
&= P(B_1)P(B_2\,|\,B_1)\times\cdots\times P(B_{k-1}\,|\,B_1\cap\cdots\cap B_{k-2})\times\\
&\quad\times P(\overline{B_k}\,|\,B_1\cap\cdots\cap B_{k-1})\times P(B_{k+1}\,|\,B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k})\times\cdots\\
&\quad\cdots\times P(B_{\ell-1}\,|\,B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\cap B_{k+1}\cap\cdots\cap B_{\ell-2})\times\\
&\quad\times P(\overline{B_\ell}\,|\,B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\cap B_{k+1}\cap\cdots\cap B_{\ell-1})\\
&\qquad\qquad\text{formule des probabilités composées}\\
&= \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{2}{n-k+1}\\
&\quad\times\frac{n-k-1}{n-k}\times\cdots\times\frac{n-\ell+1}{n-\ell+2}\times\frac{1}{n-\ell+1},\\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Bilan

$$\boxed{\forall k,\ell\in[\![1;n]\!]\,,\qquad P(X=k\,,\,Y=\ell)=\begin{cases}0 & \text{si } k\geqslant\ell,\\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } k<\ell.\end{cases}}$$

Loi de Y

Pour tout $\ell\in[\![2;n]\!]$, on a, par filtration,

$$P(Y=\ell)=\sum_{k=1}^{\ell-1}P(X=k\,,\,Y=\ell)=\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2(\ell-1)}{n(n-1)},$$

donc, pour ceux qui n'auraient pas compris,

$$\boxed{\forall\ell\in[\![2;n]\!]\,,\qquad P(Y=\ell)=\frac{2(\ell-1)}{n(n-1)}.}$$

3. On a clairement $(Y-X)(\Omega)=[\![1;n-1]\!]$. Pour tout $k\in[\![1;n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y-X=k) &= \sum_{j=1}^{n}P(X=j\,,\,Y-X=k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}P(X=j\,,\,Y=k+j)\\
&= \sum_{j=1}^{n-k}\frac{2}{n(n-1)} \qquad \text{d'après 2. c)}\\
&= \frac{2(n-k)}{n(n-1)},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{Y-X \text{ a la même loi que } X.}$$

On constate donc que le temps d'attente de la première boule noire suit la même loi que le temps d'attente entre la première boule noire et la seconde. On parle de processus sans mémoire !

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]

Soit $n\geqslant 2$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire successivement 2. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au numéro du premier (respectivement du second) jeton obtenu. Enfin, on note $X=\max(X_1,X_2)$ et $Y=\min(X_1,X_2)$.

1. Dans le cas où les tirages se font avec remise, déterminer la loi du couple (X,Y) et préciser les lois marginales.
2. Faire de même lorsque les tirages sont sans remise.

1. On a clairement $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit $i, j \in [\![1;n]\!]$. Si $i < j$, on a clairement $P(X = i, Y = j) = 0$. Dans le cas où $i \geqslant j$, on évalue la probabilité d'obtenir le couple (i, j) dans l'univers des couples (k, ℓ) avec $k \geqslant \ell$, muni de la loi uniforme. Or le nombre de couples (k, ℓ) avec $k \geqslant \ell$ est égal à $n(n+1)/2$ (on peut voir cela comme le nombre de cases au dessus de la diagonale, diagonale incluse, dans un tableau $n \times n$), donc

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n(n+1)/2} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ \dfrac{2}{n(n+1)} & \text{si } i \geqslant j. \end{cases}}$$

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a alors

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{n} P(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{i} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2i}{n(n+1)},$$

donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)}.}$$

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on a alors

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)},$$

donc

$$\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!], \qquad P(Y = j) = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}.}$$

2. Cette fois, on a $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n-1]\!]$. Soit $i \in [\![2;n]\!]$ et $j \in [\![1;n-1]\!]$. Si $i \leqslant j$, on a clairement $P(X = i, Y = j) = 0$. Dans le cas où $i > j$, on évalue la probabilité d'obtenir le couple (i, j) dans l'univers des couples (k, ℓ) avec $k > \ell$, muni de la loi uniforme. Or le nombre de couples (k, ℓ) avec $k > \ell$ est égal à $n(n-1)/2$ (on peut voir cela comme le nombre de cases au dessus de la diagonale, diagonale exclue, dans un tableau $n \times n$), donc

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n(n-1)/2} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![2;n]\!] \times [\![1;n-1]\!], \qquad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant j, \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } i > j. \end{cases}}$$

Pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on a alors

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{n-1} P(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2(i-1)}{n(n+1)},$$

donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad P(X = i) = \frac{2(i-1)}{n(n+1)}.}$$

Pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$, on a alors

$$P(Y = j) = \sum_{i=2}^{n} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2(n-j)}{n(n+1)},$$

donc

$$\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!], \qquad P(Y = j) = \frac{2(n-j)}{n(n+1)}.}$$

✠ ***Exercice 3.*** [★] (Un premier pas vers la conjecture de Netto)

Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. On dit qu'une partie A de $[\![1;n]\!]$ est *stable* par G lorsque $\forall \sigma \in G,\ \forall k \in A,\ \sigma(k) \in A$. En particulier, on dit que $k \in [\![1;n]\!]$ est un *point fixe* de G lorsque $\{k\}$ est stable par G, c'est-à-dire $\forall \sigma \in G,\ \sigma(k) = k$. Enfin, on dit que G est dit *transitif* lorsque $\forall k, \ell \in [\![1;n]\!],\ \exists \sigma \in G,\ \ell = \sigma(k)$.

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme (avec $n \geqslant 2$). On choisit au hasard et indépendamment deux permutations σ et ρ dans $\mathfrak{S}_n$. On note $\langle \sigma, \rho \rangle$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par σ et ρ. On note T l'événement « $\langle \sigma, \rho \rangle$ est transitif ». L'objet de cet exercice est de démontrer que

$$P(T) = 1 - \frac{1}{n} + O_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

Ainsi, lorsqu'on choisit au hasard deux permutations de $[\![1;n]\!]$, elles engendrent un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$ approximativement $n-1$ fois sur n. En particulier, cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Soit A une partie de $[\![1;n]\!]$ de cardinal r. On note I_A l'événement « A est stable par $\langle \sigma, \rho \rangle$ ». Démontrer que
$$P(I_A) = \frac{1}{\binom{n}{r}^2}\cdot$$
2. On note F l'événement « $\langle \sigma, \rho \rangle$ possède (au moins) un point point fixe ». Démontrer que
$$P(F) \geqslant \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et en déduire que
$$P(T) \leqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$
Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Bonferroni : si $A_1, \ldots, A_n$ désignent des événements, on a
$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j).$$
3. Démontrer que
$$\sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et en déduire que
$$P(T) \geqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

1. On a
$$\begin{aligned} P(I_A) &= P(A \text{ est stable par } \langle \sigma, \rho \rangle) \\ &= P\big((A \text{ est stable par } \sigma) \cap (A \text{ est stable par } \rho)\big) \\ &= P(A \text{ est stable par } \sigma) P(A \text{ est stable par } \rho) \qquad \text{par } \perp\!\!\!\perp . \end{aligned}$$
Parmi les $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on veut dénombrer celles qui laissent stable A. Une telle permutation permute les r éléments de A, ce qui laisse $r!$ choix, et permute les $n-r$ autres éléments, ce qui laisse $(n-r)!$ possibilités. Il y a donc $r!(n-r)!$ permutations de $[\![1;n]\!]$ qui laissent stables A. Par conséquent, on a
$$P(A \text{ est stable par } \sigma) = P(A \text{ est stable par } \rho) = \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{r}},$$
ce qui donne
$$\boxed{P(I_A) = \frac{1}{\binom{n}{r}^2}\cdot}$$

2. On a

$$\begin{aligned} P(F) &= P(I_{\{1\}} \cup \cdots \cup I_{\{n\}}) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} P(I_{\{k\}}) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(I_{\{i\}} \cap I_{\{j\}}) \qquad \text{par Bonferroni} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{1}^2} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{\binom{n}{2}^2} \qquad \text{d'après 1.} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{1}} - \frac{1}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(F) \geqslant \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

Si $\langle \sigma, \rho \rangle$ admet un point fixe, il est clair que $\langle \sigma, \rho \rangle$ n'est pas transitif (le point fixe ne peut pas être envoyé sur autre chose que lui-même). On a donc $P(F) \leqslant P(\overline{T})$, c'est-à-dire $P(T) \leqslant 1 - P(F)$. Cela donne

$$\boxed{P(T) \leqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

3. On a

$$\sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{3\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}}$$

et

$$\sum_{3\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} \leqslant \sum_{3\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{3}} \leqslant \frac{n}{2} \frac{1}{\binom{n}{3}} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

donc

$$\boxed{\sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

Lorsque $\langle \sigma, \rho \rangle$ n'est pas transitif, il existe une partie A de $[\![1;n]\!]$, non vide et différente de $[\![1;n]\!]$, qui est stable par $\langle \sigma, \rho \rangle$. Mézalors, $[\![1;n]\!] \setminus A$ est également stable par $\langle \sigma, \rho \rangle$. On peut donc préciser qu'il existe une partie A de $[\![1;n]\!]$, dont le cardinal appartient $[\![1;n/2]\!]$, qui est stable par $\langle \sigma, \rho \rangle$. Autrement dit, on a

$$\overline{T} \subset \bigcup_{\substack{A\subset[\![1;n]\!] \\ 1\leqslant \operatorname{card}(A)\leqslant n/2}} I_A,$$

ce qui implique que

$$P(\overline{T}) \leqslant \sum_{\substack{A\subset[\![1;n]\!] \\ 1\leqslant \operatorname{card}(A)\leqslant n/2}} P(I_A).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A\subset[\![1;n]\!] \\ 1\leqslant \operatorname{card}(A)\leqslant n/2}} P(I_A) &= \sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \sum_{\substack{A\subset[\![1;n]\!] \\ \operatorname{card}(A)=r}} P(I_A) \\ &= \sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \sum_{\substack{A\subset[\![1;n]\!] \\ \operatorname{card}(A)=r}} \frac{1}{\binom{n}{r}^2} \\ &= \sum_{1\leqslant r\leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} \\ &= \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$P(\overline{T}) \leqslant \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

On en conclut que

$$\boxed{P(T) \geqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}\cdot$$

En rassemblant les résultats des questions 2 et 3, on obtient finalement

$$\boxed{P(T) = 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}\cdot$$

Remarque culturelle :

Le résultat démontré dans cet exercice est le premier lemme qui permet d'établir la conjecture de Netto : lorsqu'on choisit deux permutations au hasard, la probabilité qu'elles engendrent $\mathfrak{S}_n$ tend vers $3/4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Conjecturé en 1892 par E. Netto, ce résultat a été démontré par J. Dixon en 1968. La démonstration est difficile ! Cet exercice ne vous proposait que le premier lemme établi par Dixon pour démontrer la conjecture. La démarche proposée ici n'est d'ailleurs pas celle de Dixon mais une version simplifiée donnée par L. Babai en 1987.

✠ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n',p)$ indépendantes. Démontrer que la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=k)$ est $\mathscr{H}\big(n+n', k, n/(n+n')\big)$.

On a

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0;n]\!]}.$$

Pour tout $\ell \in [\![0;n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
P(X=\ell \,|\, X+Y=k) &= \frac{P(X=\ell\,,\,X+Y=k)}{P(X+Y=k)} \\
&= \frac{P(X=\ell\,,\,Y=k-\ell)}{P(X+Y=k)} \\
&= \frac{P(X=\ell)P(Y=k-\ell)}{P(X+Y=k)} && \text{par indépendance} \\
&= \frac{\binom{n}{\ell}p^\ell q^{n-\ell}\binom{n'}{k-\ell}p^{k-\ell}q^{n'-\ell}}{\binom{n+n'}{k}p^k q^{n+n'-k}} && \text{car } \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \\ Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n',p) \\ X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+n',p) \end{array} \\
&= \frac{\binom{n}{\ell}\binom{n'}{k-\ell}}{\binom{n+n'}{k}},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X \text{ sachant } (X+Y=k) \text{ est } \mathscr{H}\Big(n+n', k, \frac{n}{n+n'}\Big)}\cdot$$