Renseignements généraux

— *Concours* : ENS Ulm
— *Matière* : Mathématiques
— *NOM Prénom* : LAMY Raphaël

Énoncé des exercices

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $x \geqslant 0$, $P(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $(1+X)^n P(X)$ soit à coefficients strictement positifs.

Exercice 2

Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et 1-périodiques. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx$$

Remarques sur l'oral

Examinateur sympathique qui propose du chocolat et précise que les exercices sont un prétexte à la discussion avant de me laisser 10 minutes initiales d'autonomie. Pour le premier exercice, j'écris plusieurs idées distinctes dont je juge la pertinence avant de lui exposer. Ainsi je lui explique que l'approche par l'absurde me semble difficilement exploitable (l'existence d'un coefficient négatif ou nul ne permettant pas de faire des combinaisons linéaires agréables), ce qu'il semble apprécier. Puis je lui expose l'approche brutale où j'exprime les coefficients de $(1+X)^n P(X)$ où $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, ce qui m'amène à devoir démontrer la stricte positivité de chaque $\displaystyle\sum_{i=0}^k a_i \binom{n}{k-i}$. Or ces derniers sont équivalents à $a_0 \dfrac{n^k}{k!}$ car $a_0 = P(0) > 0$, donc positifs apcr. Cependant l'examinateur m'explique que ce renseignement asymptotique est difficilement exploitable puisque $0 \leqslant k \leqslant m+n$. Je lui expose donc une autre idée qui exploite plus profondément l'hypothèse sur P et qui consiste à remarquer que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que $P = A^2 + XB^2$. Il me demande de détailler la preuve de ce résultat puis, une fois celle-ci faite, je lui explique que je ne vois pas bien comment utiliser ce résultat pour notre problème, ce à quoi il répond que le résultat en lui même n'aide pas mais que le schéma de preuve oui. Je comprends alors que je dois me ramener à la décomposition en produits d'irréductibles, montrer la validité du résultat pour les facteurs de degré 1 et 2, puis montrer la stabilité par produits. La stabilité par produit est évidente (somme des n) tout comme le cas des facteurs de degré 1 (de la forme $X + \lambda$ avec $\lambda > 0$ par non nullité de P sur $\mathbb{R}_+$ donc $n = 1$ convient). Il reste donc le cas des polynômes de degré 2 dont j'exprime les coefficients (module de la racine complexe et partie réelle) ainsi que les coefficients du produit avec $(1+X)^n$. Finalement on revient à étudier la positivité d'un terme polynomial en k et n, ce que l'examinateur qualifie de long et fastidieux.

Le deuxième exercice est un classique de cours que je fais classiquement en passant par les indicatrices d'intervalle puis les fonctions en escalier et finalement l'approximation des fonctions continues par les fonctions en escalier.