

Corr. 1 Quantique ou classique ?

1. Pour former l'action caractéristique d'un circuit RLC, on peut écrire qu'elle est égale au produit d'une énergie $\frac{q^2}{2C}$ (énergie électrique du condensateur) et d'une durée caractéristique $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}}$ (période des oscillations du circuit LC), soit : $S = \pi q^2 \sqrt{\frac{L}{C}}$. On trouve : $S \simeq 7.10^{23}h$. Il s'agit donc d'un oscillateur **classique** et non quantique.

2. Considérons une chute libre sur une hauteur H. L'énergie potentielle de pesanteur mgH tient lieu d'énergie caractéristique de la chute libre. Le temps de chute est égal à $T = \sqrt{2h/g}$. On peut alors écrire l'action caractéristique : $S = \sqrt{2}mg^{1/2}H^{3/2}$. La hauteur de chute pour laquelle $S \simeq h$ s'écrit : $H \simeq \hbar^{2/3}g^{-1/3}m^{-2/3}/\sqrt{2}$.

Pour une personne de 70kg, on trouve $H \simeq 1.10^{-24}m$. Cette hauteur est inférieure de dix ordres de grandeur à la taille typique du noyau atomique : elle n'a donc aucune signification concrète et il n'existe pas de régime de chute libre quantique pour cette personne : la chute libre est bien décrite **classiquement**.

Pour un neutron, on obtient $H \simeq 20\mu m$: il s'agit d'une échelle caractéristique de hauteur qu'il est envisageable de mesurer et la chute libre est cette fois **quantique**. D'ailleurs, des expériences révélant des hauteurs de rebond quantifiées pour des neutrons dans le champ de pesanteur ont été réalisées en 2002 à l'Institut Laue-Langevin de Grenoble par V. Nesvizhevski.

3. L'énergie dE émise pendant une durée dr s'écrit : $dE = Pdt$ en utilisant la puissance P, mais aussi $dE = hvdN$ en utilisant le nombre dN de photons émis et l'énergie véhiculée par chaque photon. En identifiant ces deux expressions, on obtient : $dN/dt = P/(h\nu)$, soit 6.10^{22} photons par seconde. Avec un flux de photons aussi important, on ne peut pas les détecter un à un et le caractère particulaire de la lumière ne se manifeste pas. L'action caractéristique du système peut s'écrire sous la forme : $S = P/v^2$, soit $S \simeq 3.10^{14}h \gg h$, ce qui confirme le caractère **classique** et non quantique du système.

4. L'électron est en orbite à une distance $r \simeq 1\text{\AA}$. Sa vitesse v est liée à la fréquence du mouvement $v \simeq 5.10^{14}\text{Hz}$ par $v = 2\pi rv$. Ainsi, l'action typique a pour valeur caractéristique $S = \frac{1}{2}m_e v^2 = 2\pi^2 r^2 m_e v \simeq 0,1h$ et le mouvement de l'électron doit être traité par la théorie **quantique**.

Corr. 2 Gaz quantique ou classique

1.a. En écrivant $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$, on obtient

$$v = \sqrt{3k_B T/m} \simeq 1.4.10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

(avec $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, $T = 293 \text{ K}$ et $m = 6,6.10^{-27} \text{ kg} = 4.10^{-3}/\mathcal{N}_A$).

1.b. La longueur d'onde de DE BROGLIE des atomes d'hélium vaut

$$\lambda = h/(mv) \simeq 7,3.10^{-11} \text{ m}$$

Pour estimer la distance moyenne entre atomes d'hélium, il faut d'abord déterminer le nombre d'atomes d'hélium par unité de volume, noté n_V . Pour cela, on utilise la loi des gaz parfaits sous la forme : $P = n_V k_B T$. On en déduit la valeur : $n_V = P/(k_B T) = 2,5.10^{25} \text{ m}^{-3}$. La distance moyenne entre atomes d'hélium s'écrit ainsi :

$$d = n_V^{-1/3} \simeq 3,4 \text{ nm} \simeq 46\lambda$$

1.c. On obtient $\lambda \ll d$: il n'est pas utile d'utiliser une description quantique du gaz d'hélium, une **description classique suffit**.

2.a. Comme précédemment, commençons par calculer la longueur d'onde de DE BROGLIE d'un électron dans le cristal :

$$\lambda = h/\sqrt{2m_e E} \simeq 1,2 \text{ nm}$$

Ensuite, calculons le nombre d'atomes par unité de volume : $n_V = \frac{\mu(\text{Cu})}{M(\text{Cu})} \mathcal{N}_A \simeq 8,5.10^{28} \text{ m}^{-3}$. Déterminons enfin la distance moyenne entre atomes, qui s'identifie à la distance moyenne entre électrons :

$$d = n_V^{-1/3} = 0,23 \text{ nm}$$

2.b. On obtient $\lambda/d \simeq 5$: l'étude de la conduction électrique relève donc de la **mécanique quantique**.

Corr. 3 Le modèle de BOHR

1. Pour que la trajectoire de rayon a_0 soit bien définie, il est nécessaire que $\Delta r \ll a_0$. De même, pour que la quantité de mouvement p_0 sur cette trajectoire soit bien définie, il faut aussi que $\Delta p \ll p_0$.

2. Pour que la trajectoire soit clairement définie, les deux conditions précédentes imposent que $\Delta r \Delta p \ll a_0 p_0$. Comme $a_0 p_0 = \hbar$, on obtient $\Delta r \Delta p \gg \hbar$. Cette relation est clairement incompatible avec l'inégalité de HEISENBERG spatiale.

3. La limite que l'inégalité de HEISENBERG spatiale impose aux indéterminations Δr et Δp est incompatible avec l'existence d'orbites circulaires comme celles qui apparaissent dans le modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène. Ce modèle est semi-classique (ou semi-quantique) et doit être remplacé par un modèle quantique de l'atome.

Corr. 4 Largeur spectrale

1. La fréquence du rayonnement émis est, en notant $E = 4,7 \text{ eV}$

$$v_0 = E/h \simeq 1,1.10^{15} \text{ Hz}$$

On en déduit la longueur d'onde dans le vide correspondante :

$$\lambda_0 = \frac{c}{v_0} = \frac{hc}{E} \simeq 260 \text{ nm}$$

Il s'agit d'un rayonnement ultraviolet.

2. On utilise l'inégalité temps-énergie : $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau}$. L'application numérique donne :

$$\Delta E_{\min} = 5,3.10^{-27} \text{ J} = 3,3.10^{-8} \text{ eV} \ll E$$

3. La largeur spectrale en fréquence s'en déduit immédiatement :

$$\Delta v = \Delta E_{\min}/h \simeq 8 \text{ MHz} \ll v_0$$

Par conséquent les larges spectrales peuvent être traitées comme des infiniment petits. On peut donc utiliser le calcul différentiel pour obtenir : $d\lambda_0 = -\frac{c}{v_0^2} dv_0$ puis (en passant en valeur absolue et aux Δ) :

$$\Delta\lambda = \frac{c}{v_0^2} \Delta v \simeq 2,0 \text{ fm}$$

(on vérifie bien que $\Delta\lambda \ll \lambda_0$). La largeur spectrale que nous venons de calculer correspond à la largeur naturelle de la raie

d'émission considérée. Elle est ridiculement faible devant la largeur vue expérimentalement, qui est plus grande à cause de l'effet DOPPLER qui élargit les raies spectrales, mais aussi et surtout à cause des chocs entre les particules, dus à l'agitation thermique.

Corr. 5 Émission d'un photon par un atome

1. L'inégalité temps-énergie $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$, peut aussi s'écrire sous la forme : $\Delta f \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$. Pour $\Delta f = f_0 v/c$, on obtient

$$\Delta t \geq \tau = \frac{c}{4\pi f_0 v}$$

2. Si l'atome se déplace à la vitesse v , pendant la durée τ de l'émission d'un photon, il se déplace d'une distance

$$\Delta x = v\tau = \frac{c}{4\pi f_0}$$

3. On admet que l'expression de Δx représente l'indétermination quantique sur la position de l'atome. L'inégalité de HEISENBERG spatiale impose alors $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$, soit

$$\Delta p_x \geq \frac{h f_0}{c}$$

Si on suppose le système {atome+photon} isolé, sa quantité de mouvement doit se conserver. Lorsque l'atome émet un photon, ce dernier emporte une quantité de mouvement égale à $p = E/c = h f_0/c$. En conséquence, l'atome a un mouvement de recul et voit sa quantité de mouvement varier de $-h f_0/c$, ce qui redonne la valeur minimale de Δp_x . La quantité de mouvement de l'atome ne peut pas être précisément définie : elle fluctue en raison de l'émission de photons par l'atome.

Corr. 6 Dispositif à trois fentes

La probabilité de détection d'une particule quantique au voisinage de M est donnée par $P = \left| \sum_i \psi_i(M) \right|^2$ où la somme porte sur les fentes i ouvertes.

1. Lorsque seule la fente 2 est ouverte, $P_2 = \frac{1}{2}$.

2. Lorsque les fentes 1 et 2 sont ouvertes,

$$P_{12} = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

3. Lorsque les fentes 1 et 2 sont ouvertes,

$$P_{13} = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

4. Lorsque les fentes 1, 2 et 3 sont ouvertes,

$$P_{123} = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = P_{13} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Corr. 7 Oscillateur harmonique quantique

1. L'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps s'écrit

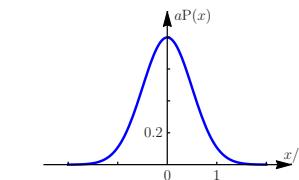
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \phi(x) = E\phi(x)$$

2.a. On détermine la constante \mathcal{N} en normalisant la fonction d'onde propre, i.e. en écrivant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}^2 \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) = 1.$$

$$\text{Or } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi a^2}{2}}, \text{ donc } \mathcal{N} = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}$$

2.b. La densité de probabilité de présence vaut, par définition, $P(x) = |\phi(x)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right)$ et a l'allure suivante



La densité de probabilité de présence est paire, ainsi

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx = 0$$

2.c. D'après l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps écrite à la question 1, il faut calculer la dérivée seconde de $\phi(x)$. Or

$$\frac{d\phi}{dx} = \mathcal{N} \left(-\frac{2x}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) = -\frac{2x}{a^2} \phi(x)$$

d'où

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \left[-\frac{2}{a^2} + \left(-\frac{2x}{a^2} \right)^2 \right] \phi(x)$$

L'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps s'écrit alors

$$\left[\frac{\hbar^2}{ma^2} + \left(-\frac{2\hbar^2}{ma^4} + \frac{1}{2}m\omega^2 \right)x^2 - E \right] \phi(x) = 0$$

Comme $\phi(x)$ ne s'annule pas, il faut que le polynôme entre crochets doit s'annuler pour tout x , autrement dit

$$\frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{2\hbar^2}{ma^4} \quad \text{et} \quad E = \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

d'où

$$a^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Corr. 8 Diffraction d'une onde électromagnétique par une fente

1. On détermine C grâce à la condition de normalisation de la densité de probabilité de présence

$$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x) dx = C \frac{\lambda_0 D}{\pi a} \mathcal{E}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u du$$

L'intégrale vaut π (cf énoncé) et on trouve $C = \frac{a}{\lambda_0 D \mathcal{E}_0}$

2. La probabilité qu'un photon soit détecté dans la tache principale de diffraction située entre $-\frac{\lambda_0 D}{a}$ et $\frac{\lambda_0 D}{a}$ s'écrit

$$P = \int_{-\frac{\lambda_0 D}{a}}^{\frac{\lambda_0 D}{a}} C \mathcal{E}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sinc}^2 u du$$

d'où

$$P \simeq 0,90$$

Corr. 9 Particule dans une boîte unidimensionnelle

1.a. La conservation de l'énergie mécanique de la particule s'écrit $E = \frac{1}{2}mv^2 + 0$ puisque $V(x) = 0$. On en déduit que la

$$\text{vitesse } v \text{ est une constante, égale à } v(x) = v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

1.b. La durée de passage dt entre les abscisses x et $x+dx$ s'écrit $dt = dx/v_0$. La probabilité classique élémentaire que la particule se situe entre x et $x+dx$ est donc égale à $dP_{cl} = Cd\tau = Cd\tau/v_0$ où C est une constante déterminée par la condition de normalisation

$$1 = \int_0^L \frac{C}{v_0} dx = \frac{CL}{v_0}$$

On en déduit que $C = v_0/L$ puis $dP_{cl} = \frac{dx}{L}$, soit une densité de probabilité de présence uniforme, égale à $1/L$. Ceci est en fait évident : classiquement, la particule peut occuper toutes les abscisses avec la même probabilité.

1.c. La probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et $L/4$ s'écrit :

$$P_{cl} = \int_0^{L/4} \frac{dx}{L} = \frac{1}{4}$$

2.a. La densité de probabilité de présence correspondant à la fonction d'onde $\psi_n(x, t)$ s'écrit :

$$|\psi_n(x, t)|^2 = A_n^2 \sin^2(n\pi x/L)$$

La condition de normalisation s'écrit

$$1 = A_n^2 \int_0^L \sin^2(n\pi x/L) dx = A_n^2 \frac{L}{2},$$

dont on déduit $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ (indépendant de n).

2.b. La densité de probabilité de présence s'écrit donc

$$|\psi_n(x, t)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2(n\pi x/L),$$

et la probabilité de présence entre les abscisses 0 et $L/4$ vaut

$$P = \frac{2}{L} \int_0^{L/4} \sin^2(n\pi x/L) dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/4} [1 - \cos(2n\pi x/L)] dx$$

$$\text{d'où } P = \frac{1}{4} - \frac{\sin(n\pi/2)}{2n\pi}$$

On peut remarquer que le sinus de cette formule vaut -1 , 0 ou 1 selon les valeurs de n , avec une formule simple : $\sin(n\pi/2) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^n - 1}{2}$.

2.c. Dans la limite où $n \gg 1$, on obtient $P \rightarrow \frac{1}{4} = P_{cl}$. On

retrouve bien la valeur prévue par la théorie classique dans la limite des grands nombres quantiques, conformément au principe de correspondance de BOHR. En fait, d'après l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps, l'énergie de l'état ψ_n est égale à $E_n = n^2 E_1$ avec $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$. Aux grandes valeurs de n , on a $\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \simeq \frac{1}{2n} \rightarrow 0$: le fait que les niveaux d'énergie soient quantifiés est quasiment invisible, ce qui correspond bien à la limite classique.

Corr. 10 Interférométrie neutronique et gravité

Remarque : l'interféromètre utilisé ici est du type MACH-ZEHNDER.

1. Un neutron qui est détecté par D_1 est passé par les chemins SADB D_1 ou SACB D_1 .

Le long du chemin SADB D_1 , un neutron subit une transmission en A, une réflexion en D, une réflexion en B et parvient au détecteur D_1 . L'amplitude de probabilité correspondant à ce trajet est donc $\psi_1^{(1)} = rrt\psi_0 = r^2t\psi_0$ où ψ_0 est une grandeur complexe inconnue, qu'on suppose être ajustée pour que ψ_1 soit une amplitude de probabilité sans dimension, telle que la probabilité de détection par D_1 soit $P_1 = |\psi_1|$.

Le long du chemin SACB D_1 , un neutron subit une réflexion en A, une réflexion en C, une transmission en B. De plus, le « chemin optique » est allongé, ce qui se traduit par une différence de phase $\Delta\phi$. L'amplitude de probabilité correspondant à ce trajet est donc : $\psi_1^{(2)} = trr\exp(i\Delta\phi)\psi_0 = \exp(i\Delta\phi)\psi_1^{(1)}$.

L'amplitude de probabilité correspondant à la détection d'un neutron en D_1 est la somme des deux amplitudes de probabilités correspondant aux deux voies de l'interféromètre $\psi_1 = \psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)} = [1 + \exp(i\Delta\phi)]\psi_1^{(1)}$, soit

$$\psi_1 = \psi_0 r^2 t [1 + \exp(i\Delta\phi)]$$

La probabilité de détection d'un neutron en D_1 s'en déduit, en utilisant les définitions de R et T :

$$P_1 = |\psi_1|^2 = \psi_1 \psi_1^* = 2|\psi_0|^2 R^2 (1-R)(1+\cos\Delta\phi)$$

2. Le même raisonnement permet d'obtenir l'amplitude de probabilité $\psi_2 = \psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2)}$, avec $\psi_2^{(1)} = trt\psi_0$ (chemin SADB D_2) et $\psi_2^{(2)} = rr\exp(i\Delta\phi)\psi_0$ (chemin SACB D_2), soit

$$\psi_2 = \psi_0 [rt^2 + r^3 \exp(i\Delta\phi)]$$

On en déduit la probabilité de détection correspondante P_2 , en utilisant le fait que r soit réel et que $t = |i|t|$:

$$P_2 = \psi_2 \psi_2^* = |\psi_0|^2 R [(1-R)^2 + R^2 - 2R(1-R)\cos\Delta\phi]$$

3. Un neutron est détecté soit par D_1 soit par D_2 , mais jamais par les deux détecteurs à la fois (à noter qu'il se peut aussi que le neutron envoyé par la source S n'atteigne jamais ni D_1 ni D_2 , en cas de transmission en C ou en D). Donc $P_1 + P_2 = 1$ (on peut normaliser les probabilités ainsi, en ne prenant en compte que les neutrons arrivant en D_1 ou en D_2 , mais pas les autres), ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} 1 &= R|\psi_0|^2 [2R(1-R) + (1-R)^2 + R^2 \\ &\quad + 2R(1-R)\cos\Delta\phi - 2R(1-R)\cos\Delta\phi] \\ &= R|\psi_0|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $|\psi_0|^2 = 1/R$ et les probabilités s'écrivent

$$P_1 = 2R(1-R)(1+\cos\Delta\phi) \quad \text{et} \quad P_2 = 1 - P_1$$

4.a. La référence d'énergie potentielle est prise à l'altitude du faisceau incident ($z = 0$). La conservation de l'énergie mécanique donne : $E_c(z=0) = E_c + m_n g z$, soit encore $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_n} = \frac{\hbar^2 k(z)^2}{2m_n} + m_n g z$. Ainsi

$$k(z) = k_0 \sqrt{1 - \frac{2m_n^2 g}{\hbar^2 k_0^2} z}$$

Avec les données numériques proposées, on trouve

$$k_0 \simeq 4,5 \cdot 10^{10} \text{ rad.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{2m_n^2 g}{\hbar^2 k_0^2} z \simeq 1,6 \cdot 10^{-4}$$

D'où la simplification suivante

$$k(z) \simeq k_0 \left(1 - \frac{m_n^2 g}{\hbar^2 k_0^2} z \right)$$

4.b. La rotation fait que les bras (AD) et (CB) ne sont plus équivalents. Au premier bras (AD) correspond le vecteur d'onde k_0 et au bras (CD) correspond $k(z) = l \sin \theta$. Il en résulte une différence de phase

$$\Delta\phi = k_0 L - k(z)L = \frac{m_n^2 g}{\hbar^2 k_0} l \sin \theta L = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} \sin \theta$$

4.c. La figure d'interférences révèle des franges. Il existe en effet des valeurs de l'inclinaison pour lesquelles le nombre de neutrons détectés est maximum : les deux ondes qui se propagent sur les deux voies de l'interféromètre interfèrent de façon constructive. D'un maximum à un autre, $\Delta\phi$ varie de 2π . On constate que pour θ variant de $\theta_1 = -32^\circ$ à $\theta_2 = 12^\circ$, on voit défiler 6 franges. D'où :

$$6 \cdot 2\pi = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

On en déduit $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. On peut estimer que les angles θ_1 et θ_2 sont estimés à $\Delta\theta = \Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 \simeq 2^\circ = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ près.

L'incertitude qui en résulte sur la différence des sinus $f(\theta_1, \theta_2) = \sin \theta_2 - \sin \theta_1$ est

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right)^2 (\Delta\theta_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right)^2 (\Delta\theta_2)^2}$$

soit $\Delta f = \Delta\theta \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2} \simeq 4,5 \cdot 10^{-2}$

En différentiant logarithmiquement la relation liant g à f , on obtient $\frac{dg}{g} + \frac{df}{f} = 0$, d'où $\Delta g = \frac{\Delta f}{f} g = 0,6 \text{ m.s}^{-2}$. On peut finalement écrire

$$g = 10,0 \pm 0,6 \text{ m.s}^{-2}$$

Cette mesure n'est pas précise du tout, à cause de l'incertitude trop grande sur les angles. Il faudrait donc avoir une précision plus grande sur les angles donnant les interférences constructives pour augmenter la précision sur la valeur de g .

Corr. 11 Diffraction de molécules par une onde lumineuse

1.a. La masse d'une molécule de fullerène est

$$m = 60m_C = 60 \frac{M(C)}{\mathcal{N}_A} \simeq 1,20 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

La longueur d'onde de DE BROGLIE est donc

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \simeq 4,62 \text{ pm}$$

À noter que la longueur d'onde de DE BROGLIE est inférieure à la taille de la molécule C₆₀, qui est de l'ordre de 1000 pm.

1.b. En différentiant logarithmiquement la relation $\lambda = \frac{h}{mv}$, on obtient $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dv}{v}$, d'où

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{\Delta v}{v} \simeq 0,79 \text{ pm}$$

1.c. La longueur $\ell_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ représente la **longueur de cohérence temporelle** de l'onde de DE BROGLIE. Sa valeur numérique est $\ell_c = 27 \text{ pm}$.

2. Les fentes de collimation permettent de limiter la composante transverse de la quantité de mouvement des molécules. On peut alors considérer que l'onde de DE BROGLIE incidente sur le réseau est une onde plane, avec un vecteur d'onde parallèle à l'axe du dispositif. Les fentes de collimation permettent donc d'améliorer la cohérence spatiale de l'onde incidente.

Les molécules qui ont traversé la première fente, peuvent traverser la seconde fente à condition que leur quantité de mouvement forme un angle inférieur à $\frac{b}{2D} \simeq 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ avec l'axe. On obtient bien, à la sortie de la seconde fente, un faisceau de particules très peu divergent ; on dit qu'il est collimaté.

Il reste toutefois à vérifier que la diffraction ne joue pas de rôle significatif et n'augmente pas trop l'ouverture angulaire du faisceau, i.e. que le confinement imposé à l'onde par les fentes est négligeable. L'indétermination quantique sur la position transverse (c'est-à-dire orthogonale à la direction de propagation de l'onde) d'une molécule qui passe à travers une fente est de l'ordre de grandeur de la largeur a de la fente. Selon l'inégalité de HEISENBERG spatiale, il lui correspond une indétermination quantique Δp_x de la quantité de mouvement transverse donnée par (en se plaçant à la limite inférieure, et pour la première fente, de largeur a) :

$$\Delta p_x \simeq \frac{\hbar}{2a} \simeq 7,5 \cdot 10^{-30} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

L'ouverture angulaire correspondante du faisceau moléculaire vaut $\frac{\Delta p_x}{p} \simeq 5,3 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$, ce qui est bien négligeable devant

$\frac{b}{2D} \simeq 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ à travers la première fente : la diffraction ne joue donc pas de rôle significatif dans l'élargissement angulaire du faisceau moléculaire (remarque : on aurait aussi pu évaluer l'angle à l'aide de la formule vue en optique $\sin \theta \approx \theta \approx \lambda/a \simeq 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ ce qui est aussi petit devant $\frac{b}{2D} \simeq 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$).

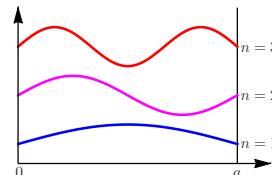
3.a. La différence de marche entre les deux faisceaux représentés se calcule comme en optique et vaut : $\delta = d \sin \theta \approx d\theta$. Les interférences sont totalement constructives si et seulement si $\delta = p\lambda$ où $p \in \mathbb{Z}$. On obtient donc $\theta_p = \frac{\lambda}{d}$.

3.b. Sur la figure d'interférences, on distingue trois pics, correspondant à des interférences totalement constructives. La position du détecteur x est liée à θ par la relation $x = D\theta$. Les maxima correspondent donc à des positions du détecteur données par la relation $x_p = p \frac{D\lambda}{d}$, pour $p = -1, 0$ et 1 . Sur la figure, on lit $\Delta x = x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1} = 22 \mu\text{m}$, dont on déduit $\lambda = \frac{D}{\Delta x} \Delta x \simeq 4,7 \text{ pm}$ et $v = \frac{m\lambda}{\Delta x} \simeq 1,2 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$ en parfait accord avec les résultats de la question 1.a et de la valeur de v donnée dans l'énoncé.

3.c. On peut penser qu'un défaut de cohérence temporelle peut être à l'origine de l'observation d'un nombre limité de franges d'interférences. Utilisons le critère de visibilité vu en optique : $|\delta| \lesssim \ell_c$. Avec la relation $\delta = p\lambda$, la condition s'écrit $|p| \lesssim \frac{\ell_c}{\lambda} \simeq 5,8$. Sur la figure, on peut distinguer les ordres $|p| \lesssim 2$. L'ordre de grandeur est bien le bon (et le critère devient parfait si on écrit $|\delta| < \ell_c/2$, comme on avait écrit $|\Delta p| < 1/2$ en optique).

Corr. 12 Niveaux d'énergie du puits de potentiel infiniment profond

1. L'allure de la fonction d'onde propre pour les 3 premiers niveaux d'énergie est représentée sur la figure suivante.



2. Pour le niveau n , on constate qu'on obtient n demi-longueur d'onde sur la largeur du puits a , i.e. $n\frac{\lambda_n}{2} = a$, soit

$$\text{de manière générale } \lambda_n = \frac{2a}{n}, \text{ ce qui donne en particulier}$$

$$\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{2a}{3}$$

À l'intérieur du puits, l'énergie potentielle de la particule quantique est nulle. L'énergie de la particule se confond par conséquent avec son énergie cinétique $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m\lambda^2}$.

On obtient ainsi $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ et

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad E_2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

3. Cf question 1 et 2, je n'ai pas pu attendre la question 3 pour donner un résultat aussi simple !

Corr. 13 Étalement du paquet d'ondes

1. Voir cours : $E = \hbar\omega$ et $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ donnent

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

2.a. La vitesse de groupe du paquet d'ondes considéré est

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$$

2.b. À partir de $v_g = \frac{\hbar k}{m}$, on obtient $\Delta v_g = \frac{\hbar}{m} \Delta k$. L'inégalité de HEISENBERG spatiale permet d'écrire que : $\Delta k \geq \frac{1}{2\Delta x_0}$. En considérant la limite inférieure, on trouve que

$$\Delta v_g = \frac{\hbar}{2m\Delta x_0}$$

2.c. Le paquet d'ondes étudié, de largeur en vecteur d'ondes finie Δk , peut être décomposé en paquets d'ondes infinitésimaux, quasi-monochromatiques, de vecteur d'onde compris dans l'intervalle $[k, k + \Delta k]$. Ces paquets d'ondes infinitésimaux se déplacent, sans se déformer, à la vitesse de groupe $v_g(k)$. La grandeur Δv_g représente donc l'ordre de grandeur de la différence des vitesses de déplacement de tous ces paquets d'ondes quasi-monochromatiques. À un instant t , l'extension spatiale du paquet d'ondes a augmenté de $\Delta v_g t$. On a donc

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \frac{\hbar}{2m\Delta x_0} t$$

Le paquet d'ondes voit son extension doubler après une durée d'évolution t_0 donnée par

$$t_0 = \frac{2m(\Delta x_0)^2}{\hbar}$$

Remarque : Pour que le paquet d'onde ne se déforme pas, il faut que la vitesse de groupe soit indépendant de k , ce qui impose une relation de dispersion affine $\omega = v_g k + C^\text{le}$, ce qui n'est pas le cas pour une particule libre qui a une relation de dispersion quadratique.

2.d. On réalise les applications numériques demandées.

(i) cas d'un électron : $t_0 = 2.10^{-16}$ s. Cette durée est du même ordre de grandeur que la période de révolution sur une orbite du modèle de BOHR (pour l'état fondamental, $T = \frac{2\pi a_0}{v}$

avec $\sigma = ma_0 v = \hbar$, soit $T = \frac{2\pi m a_0}{\hbar} \simeq 1.5.10^{-16}$ s, puisque $a_0 \simeq 53$ pm). Cela montre que l'hypothèse de BOHR selon laquelle l'électron suit trajectoire localisée est à rejeter : pendant la durée d'une révolution, la probabilité de présence de l'électron s'étale dans tout le volume de l'atome. Cela souligne la nécessité d'un traitement quantique de l'atome.

(ii) cas d'une gouttelette d'eau : $t_0 = 8.10^{12}$ s. Cette durée, de l'ordre de 2.10^5 années, est considérable. Pendant toute la durée de son existence, la goutte reste un système matériel localisé.

Corr. 14 Fil quantique

1.a. Il n'y a pas de confinement de l'électron dans la direction (Ox). Le facteur exponentiel correspond à une **onde plane progressive harmonique** dans le sens des x croissants, où k représente le **module du vecteur d'onde**, puisque la fonction d'onde complète s'écrit $\psi(x, t) = A \exp[-i(Et/\hbar - kx)]$.

La densité de probabilité de présence est par définition $|\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2 = A^2$. La condition de normalisation s'écrit donc $1 = \int_0^l A^2 dx = A^2 l$, ce qui donne $A = \frac{1}{\sqrt{l}}$ et

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \exp(i k x)$$

1.b. L'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps

donne (on suppose le potentiel nul dans le fil) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

(on retrouve bien sûr l'expression de l'énergie cinétique d'une particule libre). En écrivant $E = \hbar\omega$, on obtient la relation de dispersion $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$. La vitesse de déplacement de l'électron est donnée par la vitesse de groupe

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}$$

(on retrouve heureusement $v_x = p_x/m$).

2.a. La densité de probabilité de présence de l'électron est

$$\frac{dP(x)}{dx} = |\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2 = \frac{1}{l}$$

qui est bien **uniforme**.

2.b. On considère une section droite du fil à l'abscisse x et un électron de vecteur d'onde compris entre k et $k + dk$. Comme cet électron se déplace à la vitesse v_x , la probabilité qu'il traverse la section considérée pendant la durée dt est

égale à sa probabilité de présence sur une longueur $dx = v_x dt$ située juste en amont de cette surface, i.e. d'après l'énoncé $dP_k(x) = \frac{dP(x)}{dx} \frac{l}{\pi} v_x dr dk = \frac{1}{\pi} v_x dr dk$. La charge électrique élémentaire qui traverse cette surface, dans le sens des x croissants, du fait du mouvement de l'électron, pendant la durée dt est $d^{(2)}Q = (-e) \frac{1}{\pi} v_x dr dk$, d'où le courant élémentaire

$$dI = \frac{d^{(2)}Q}{dt} = -\frac{ev_x}{\pi}$$

3.a. On intègre l'expression de dI pour k variant entre k_2 et $k_1 > k_2$ (car $E_1 > E_2$), avec $v_x = \hbar k/m$ (cf question 1.b)

$$I = \int_{k_2}^{k_1} -\frac{e}{\pi} \frac{\hbar k}{m} dk = -\frac{e\hbar}{2\pi m} (k_1^2 - k_2^2) = -\frac{e}{\pi\hbar} (E_1 - E_2)$$

Or, $E_1 - E_2 = eU$ et $\hbar = h/(2\pi)$, d'où finalement

$$I = -GU \quad \text{avec} \quad G = \frac{2e^2}{h}$$

3.b. La conductance du fil ne dépend pas de sa géométrie, mais uniquement des constantes fondamentales e et h . L'application numérique donne $G = 7,75 \cdot 10^{-5}$ S. La grandeur inverse $R = 1/G = 12,9$ kΩ est la moitié du « quantum de résistance » $\frac{h}{e^2}$, qui constitue un étalon de résistance électrique (cf effet Hall quantique entier, découvert par von Klitzing en 1980), utile en métrologie (cf balance du watt).

Corr. 15 Émission d'un photon

L'énergie du niveau n est $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$. La différence d'énergie entre les niveaux $n = 1$ et $n = 2$ se calcule donc facilement et donne la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique émis

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2m_e a^2} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{Ainsi } \lambda = \frac{4cm_e^* a^2}{3\pi\hbar} \simeq 3,6 \cdot 10^2 \text{ nm in infrarouge}$$

Corr. 16 Molécule de benzène

1. La fonction d'onde propre vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0$. En injectant la solution proposée, on

$$\text{trouve } k = \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Les deux signes correspondent aux deux sens de propagation possibles (x croissants pour le signe + et décroissants pour le signe -).

On peut choisir A réel (et même réel positif), car un éventuel argument de A peut être compensé par une modification de l'origine des temps. En effet, si $A = |A| \exp(i\theta)$, alors $\psi(x, t) = |A| \exp[-i(Et/\hbar - \theta - kx)]$ et il suffit de poser $t' = t - \hbar\theta/E$ afin d'obtenir $\psi(x, t') = |A| \exp[-i(Et'/\hbar - kx)]$. Normalisons maintenant cette fonction d'onde sur l'intervalle considéré en écrivant $I = \int_0^{2\pi a} |\varphi(x)|^2 dx = 2\pi a A^2$, d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$$

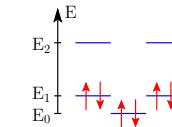
2.a. La prise en compte de conditions aux limites périodiques permet de rendre compte de la possibilité qu'a la particule quantique de tourner sans cesse le long du cercle.

2.b. La condition $\varphi(O) = \varphi(a)$ conduit à $A = \text{Aexp}(2i\pi ka)$, soit $ka = n$ avec n entier. Le vecteur d'onde ne peut prendre que des valeurs quantifiées $k_n = n/a$, avec $n \in \mathbb{Z}$. L'énergie de la particule est donnée par $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et est par conséquent aussi quantifiée :

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

À l'exception de $n = 0$, les valeurs n et $-n$ correspondent à la même valeur de l'énergie E_n et à des valeurs opposées de k . Autrement dit, à chaque valeur d'énergie E_n , pour n non nul, correspondent deux états stationnaires qui correspondent à deux ondes se propageant dans des sens opposés le long du cercle. À ces deux états stationnaires correspondent en fait deux valeurs opposées du moment cinétique orbital de la particule quantique.

4. Le graphe suivant représente les premiers niveaux d'énergie ($n = 0, 1$ et 2), en tenant compte de leur dégénérescence, représentées par des traits horizontaux.



5. Dans l'état fondamental, les électrons remplissent les niveaux d'énergie en respectant les règles de HUND et de PAULI. On obtient alors le diagramme précédent où les électrons sont représentés par des flèches, dont le sens donne le spin.

6. La transition d'énergie la plus faible correspond à une transition d'un niveau $|n| = 1$ à un niveau $|n| = 2$. On en déduit l'énergie correspondante, et la longueur d'onde λ_0 du rayonnement électromagnétique correspondant

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3\hbar^2}{2ma^2} = \frac{hc}{\lambda_0}$$

d'où

$$a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3h\lambda_0}{2mc}} \simeq 153 \text{ pm}$$

Malgré la simplicité des arguments utilisés, on constate que le modèle est en **assez bon accord** avec les valeurs expérimentales puisque $\left| \frac{a - a_{\text{exp}}}{a_{\text{exp}}} \right| \simeq 8\%$.

Corr. 17 Puits infini : état non stationnaire

Pour $0 < x < a$, la fonction d'onde propre $\varphi(x)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0$. En injectant l'expression de $\varphi_n(x)$ dans cette équation on obtient

$$\left(-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \varphi_n(x) = 0$$

On en déduit

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = n^2 E_1 = n^2 \hbar \omega_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$$

La fonction d'onde telle que $\psi_n(x, t = 0) = \varphi_n(x)$ s'écrit, à l'instant $t > 0$, $\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar)$, soit

$$\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) e^{-in^2 \omega_0 t}$$

On considère maintenant la fonction d'onde, telle que $\psi(x, t = 0) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$

1. On utilise le résultat de la question précédente pour écrire que, pour $t > 0$,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x)e^{-i\omega_0 t} + \varphi_2(x)e^{-4i\omega_0 t})$$

2. D'après les définitions de l'énoncé, on a

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_g(x) + \varphi_d(x)}{\sqrt{2}} \text{ et } \varphi_2(x) = \frac{\varphi_g(x) - \varphi_d(x)}{\sqrt{2}}$$

Par conséquent

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2} \{ [\varphi_g(x) + \varphi_d(x)] + e^{-3i\omega_0 t} [\varphi_g(x) - \varphi_d(x)] \}$$

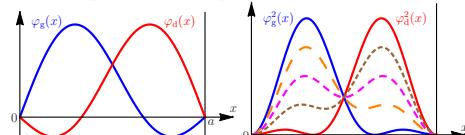
En écrivant $\psi(x,t) = C(A + Be^{-3i\omega_0 t})$, avec $C \in \mathbb{C}$ et $A, B \in \mathbb{R}$ (dont les expressions se lisent sur la formule ci-dessus), on trouve que $|\psi(x,t)|^2 = |C|^2[A^2 + B^2 + 2AB\cos(3\omega_0 t)]$, soit

$$P(x,t) = \frac{1}{2} \{ \varphi_g^2(x) + \varphi_d^2(x) + [\varphi_g^2(x) - \varphi_d^2(x)] \cos(3\omega_0 t) \}$$

Cette densité de probabilité oscille à la fréquence

$$v = \frac{3\omega_0}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

3. Les représentations graphiques sont données ci-dessous



La particule quantique oscille dans le puits de potentiel, entre la moitié gauche et la moitié droite du puits, avec une période $T = 1/v$.

Corr. 18 Étoile à neutrons

$$\text{Le nombre de neutrons est } N = \frac{M}{m} = 1,2 \cdot 10^{57}$$

1. Chaque neutron est confiné dans un volume V/N avec $V = 4\pi R^3/3$. L'échelle de longueur caractéristique de confinement d'un neutron est donc

$$d_c \simeq \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3} \simeq \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{R}{N^{1/3}} \sim \frac{R}{N^{1/3}}$$

2. À une constante multiplicative près, l'énergie de confinement d'un neutron s'écrit

$$E_{c,1} = \frac{\hbar^2}{md_c^2} \sim \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{mR^2}$$

L'énergie cinétique totale des neutrons s'en déduit, d'après l'hypothèse que les neutrons n'interagissent pas, et toujours à une constante multiplicative près

$$E_c \sim N E_{c,1} \sim \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}$$

On procède par analyse dimensionnelle

$$[E_g] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, [M] = \text{kg}, [R] = \text{m} \text{ et } [\mathcal{G}] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Il vient donc

$$E_g \sim -\frac{\mathcal{G}M^2}{R} \sim -\frac{\mathcal{G}N^2 m^2}{R}$$

où le signe $-$ traduit le fait que l'interaction gravitationnelle est attractive et a tendance à faire s'effondrer la matière sur elle-même.

Remarque : on a vu dans le cours d'électrostatique qu'on a en fait $E_g = -\frac{3}{5} \frac{\mathcal{G}M}{R}$

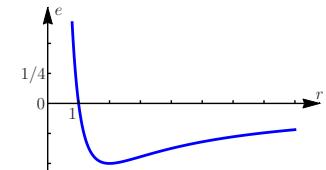
L'énergie totale est

$$E = E_c + E_g \sim \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2} - \frac{\mathcal{G}N^2 m^2}{R}$$

On peut écrire cette énergie $E = \frac{a}{R^2} - \frac{b}{R}$ avec des notations évidentes. Comme $[a] = \text{J.m}^2$ et que $[b] = \text{J.m}$, on peut former une énergie caractéristique $E^* = b^2/a$ et un rayon caractéristique $R^* = a/b$. On peut donc aussi écrire, en posant $e = E/E^*$ et $r = R/R^*$

$$e = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}$$

L'allure de cette fonction est la suivante.



Il existe un rayon r_{eq} tel que e est minimale. Ce rayon vérifie $\frac{de}{dr} = 0 = \frac{-2}{r_{\text{eq}}^3} + \frac{1}{r_{\text{eq}}^2}$, i.e. $r_{\text{eq}} = 2$ (ce qu'on voit bien sur la courbe). Le rayon d'équilibre de l'étoile à neutrons est donc

$$R_{\text{eq}} = R^* r_{\text{eq}} = \frac{2\hbar^2}{\mathcal{G}N^{1/3}m^3} \sim 6 \text{ km}$$

L'ordre de grandeur du diamètre est bien de la dizaine de kilomètres ! La masse volumique de l'étoile à neutrons est environ égale à

$$\mu = \frac{3M}{4\pi R_{\text{eq}}^3} \sim 2 \cdot 10^{18} \text{ kg.m}^{-3}$$

À titre de comparaison, la masse volumique d'un noyau atomique est de l'ordre de

$$\mu_{\text{noyau}} = \frac{3(Am)}{4\pi r_0^3} = \frac{3Am}{4\pi r_0^3 A} = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \simeq 2 \cdot 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$$

Sachant que le calcul de la masse volumique de l'étoile à neutrons était approché, on peut dire que les masse volumique d'une étoile à neutrons et d'un noyau atomique sont comparables.