Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 22

– à rendre pour le mardi 09 juin –

Exercice 1

Soient I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, l'ensemble I étant non réduit à un singleton, puis $G(X)$ une fraction rationnelle non constante dans $\mathbb{R}(X)$ n'admettant aucun pôle dans l'intervalle I.

1. Montrer que pour toute fraction rationnelle $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ non nulle, alors :
$$\frac{F'}{F} \neq G'.$$
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose la fonction :
$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^i \end{array} \right.$$
et :
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \exp(G(t)) \end{array} \right. .$$
Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on note classiquement $\varphi^i : t \longmapsto (\varphi(t))^i$.
Montrer par récurrence sur l'entier m la propriété $\mathscr{P}(m)$ ainsi définie :
$\mathscr{P}(m)$: « *pour tout intervalle J infini inclus dans I, pour toutes fractions rationnelles $F_0, \cdots, F_{m-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ n'ayant aucun pôle dans J, alors* **on ne peut pas avoir l'égalité** *:*
$$\forall t \in J,\ \varphi^m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} F_k(t) \cdot \varphi^k(t).\text{ »}$$
3. En déduire que la famille $\mathscr{F} = \left(f_i \times \varphi^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille libre dans l'espace des fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient m et n deux entiers strictement positifs. On considère un ensemble fini F à m éléments. On suppose que toutes les variables X_i prennent leurs valeurs dans l'ensemble F et que les variables X_i sont centrées et réduites. On suppose que pour tous indices $i \neq j$ entre 1 et n,
$$\mathbb{E}(X_i\, X_j) = 0.$$

1. Montrer que la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires.
2. Montrer que $n + 1 \leqslant m$.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que :
$$\sum_{i=2}^{n} \left\lfloor n^{\frac{1}{i}} \right\rfloor = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor .$$