Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir surveillé n^o 8

– durée 4 heures ; calculatrices interdites –

Exercice

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire définie entre deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{C}$. On suppose l'espace E de dimension finie.

1. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie.
2. Montrer l'équivalence suivante :
   - $\mathrm{Rg}(f) = 1$
   - il existe un vecteur non nul $a \in F$ et une forme linéaire non nulle φ telle que :

   $$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x) \cdot a.$$
3. On pose $r = \mathrm{Rg}(f)$ le rang de f. On suppose que $r \geqslant 1$.
   (a) Montrer qu'il existe r applications linéaires $g_1, \cdots, g_r$ chacune de rang 1 et telles que :
   $$f = \sum_{i=1}^{r} g_i.$$
   (b) Montrer que quels que soient les choix des applications linéaires $g_1, \cdots, g_r$ de la question précédente, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\,(g_i)$ est toujours directe.

Endomorphismes et sous-espaces stables

Dans tout le problème, on considère un $\mathbb{C}$-espace E de dimension finie égale à d.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

Soit F un sous-espace de E. On dit que le sous-espace F est stable par f si :

$$f(F) \subset F.$$

Dans ce cas, on peut construire l'endomorphisme induit par f sur F, à savoir l'application linéaire suivante :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

On dit que l'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace E telle que la matrice $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$ représentant l'endomorphisme f selon cette base soit une matrice diagonale.

Partie I : étude d'un exemple

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

Dans cette partie, on considère l'application linéaire suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P^{(k)}(X) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que l'application linéaire f est bien définie.
2. Expliciter la matrice A représentant l'endomorphisme f selon la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

4. Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}_n[X]$ stable par f et tel que $F \neq \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$F \subset \mathbb{C}_s[X] \text{ et } F \not\subset \mathbb{C}_{s-1}[X].$$

   (b) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré égal à r, où r est un entier naturel. Montrer que la famille $\Big(Q, f(Q), \cdots, f^r(Q)\Big)$ forme une base de $\mathbb{C}_r[X]$.
5. En déduire que l'endomorphisme f admet exactement $n+1$ sous-espaces stables.

Partie II : endomorphismes diagonalisables induits

Dans cette partie, on fixe un entier $d \geqslant 2$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, on notera u_A l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. La matrice A est une matrice diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme associé u_A est diagonalisable (autrement dit, la matrice A est semblable à une matrice diagonale).

On fixe dans cette partie une matrice $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^d$ stable par l'endomorphisme u_A. On pose $r = \dim(F)$ et on suppose que l'entier r vérifie :

$$1 \leqslant r < d.$$

6. Établir l'existence d'une matrice $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice de la forme :

   $$M = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

   où les blocs A_1, A_2 et A_3 sont respectivement de formats $r \times r$, $r \times (d-r)$ et $(d-r) \times (d-r)$.
7. Montrer que la matrice transposée M^T est encore diagonalisable.
8. Établir l'existence d'une base $(X_1, \cdots, X_d)$ de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ et de d scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ tels que :

   $$\forall i \in [\![1, d]\!],\ M^T X_i = \lambda_i \cdot X_i.$$

9. On pose pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, la disposition des vecteurs colonnes X_i par blocs selon :

$$X_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

avec $Y_i \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$ et $Z_i \in \mathscr{M}_{d-r,1}(\mathbb{C})$. Montrer que la famille $(Y_1, \cdots, Y_r)$ est une famille génératrice dans $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$.

10. En déduire que la matrice A_1 est une matrice diagonalisable.

11. Montrer la propriété suivante :
« Si E est un espace vectoriel de dimension finie d, $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme diagonalisable, si F est un sous-espace de E stable par f, alors l'endomorphisme induit $f_{|F}$ est encore diagonalisable. »

Partie III : CNS de diagonalisabilité

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant :
« Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *l'endomorphisme f est diagonalisable*

(2) *tout sous-espace F de E stable par l'endomorphisme f admet un supplémentaire G encore stable par l'endomorphisme f. »*

12. Démontrer le sens direct **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)**.

13. Cette question est indépendante de toutes les autres questions.
Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I_d - \dfrac{1}{n}A$ n'est pas inversible.

    (a) Montrer l'existence d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs colonne dans $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ et d'un entier i entre 1 et d tels que les trois points suivants soient réalisés :
    - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
    $$X_n = \frac{AX_n}{n}$$
    - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les composantes de X_n sont de module inférieur ou égal à 1
    - il existe i_0 entre 1 et d tel que pour une infinité d'entiers $n \geqslant 1$, la $i_0^{\text{ème}}$ composante de X_n vaille 1.

    (b) Construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que pour tout i entre 1 et n, la suite $(X_{\varphi(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des $i^{\text{ème}}$ composantes est convergente vers un complexe z_i et $z_{i_0} = 1$.

    (c) Aboutir à une contradiction. Qu'a-t-on montré ?

14. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On veut maintenant montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}$ tel que la matrice $A - \lambda I_d$ ne soit pas inversible.
On suppose dans la suite que la matrice A est inversible. Soit $Y \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne non nul.

    (a) Montrer que l'ensemble :
    $$F = \Big\{P(A)Y \ ; \ P(X) \in \mathbb{C}[X]\Big\},$$
    est un sous-espace de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ stable par u_A.

(b) On pose $r = \dim(F)$. Montrer que la famille $(Y, AY, \cdots, A^{r-1}Y)$ est une base de F.

(c) On pose la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & b_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{r-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_r \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C}),$$

où les coefficients $b_1, \cdots, b_r$ sont des complexes. Soit λ une racine complexe du polynôme :

$$P(X) = X^r - \sum_{k=1}^{r} b_k X^{k-1}.$$

Calculer le rang de la matrice B en fonction des valeurs des b_k.
Montrer que la matrice $B - \lambda I_r$ n'est pas inversible.

(d) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, il existe un complexe μ tel que la matrice $A - \mu\, I_d$ ne soit pas inversible.

15. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant : « *pour tout sous-espace F de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ stable par l'endomorphisme u_A, il existe un sous-espace G de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ tel que :*

$$F \oplus G = \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C}) \text{ et l'espace } G \text{ est stable par } u_A. \text{ »}$$

(a) Par la question 14, on considère un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice $A - \lambda\, I_d$ ne soit pas inversible. Montrer que l'espace :

$$F = \ker(u_A - \lambda \text{ id})$$

est stable par u_A.

(b) On peut donc considérer un supplémentaire G de F dans $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ tel que l'espace G soit encore stable par u_A. Soit H un sous-espace de G stable par u_A. Il existe donc un supplémentaire L de H dans $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ encore stable par u_A. Montrer que les espaces H et $L \cap G$ sont supplémentaires dans G.

(c) En utilisant une récurrence sur l'entier d, montrer que la restriction de u_A à G est un endomorphisme diagonalisable.

16. Démontrer le sens indirect **(2)** $\Longrightarrow$ **(1)**.