Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : ? h ??

INTÉGRALES IMPROPRES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les intégrales ;
- les séries.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Intégrales impropres

A.1. Intégrales impropres

a) Intégrale impropre en un point

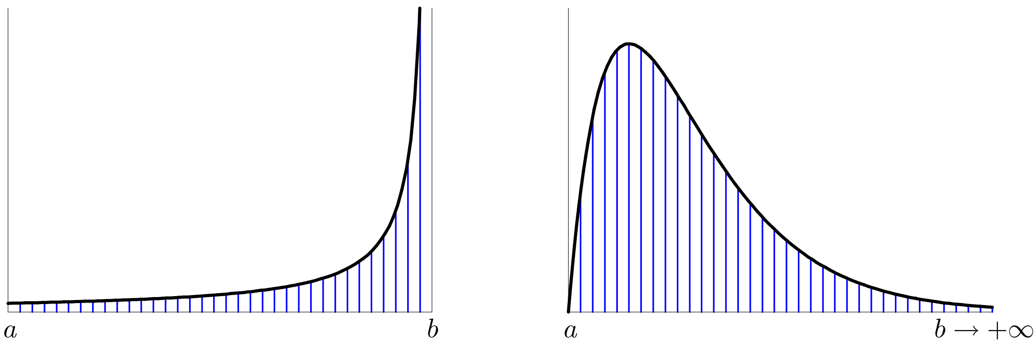
Définition 1

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est convergente lorsque la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b (par la gauche). On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas où la limite n'est pas finie ou n'existe pas, on dit que $\int_a^b f$ est divergente.

Comme l'intervalle $[a;b[$ est ouvert à droite, rien n'interdit à b de valoir $+\infty$. Graphiquement, on rencontre donc essentiellement les deux situations suivantes :

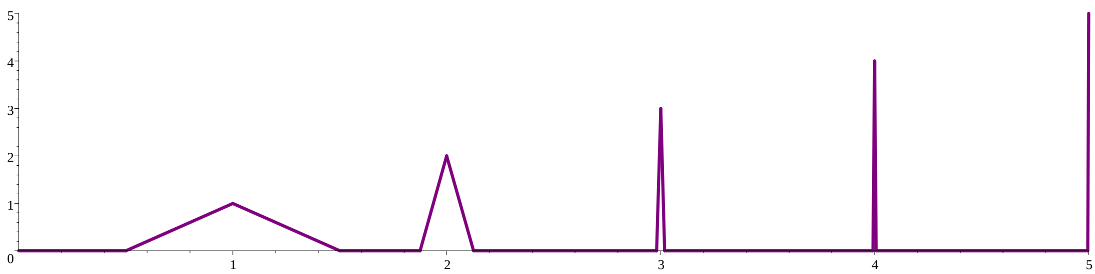


L'intégrale est convergente lorsque l'aire hachurée en bleu est finie. On comprend donc que le comportement de la fonction au point impropre est déterminant pour la convergence : plus la fonction prend de « grandes » valeurs au voisinage de ce point et plus l'intégrale risque de diverger.

On voit immédiatement l'analogie entre la convergence d'une série et la convergence d'une intégrale impropre du type $\int_a^{+\infty} f$.

Il y a pourtant une différence notoire entre ces deux situations. On sait que la convergence d'une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ nécessite la convergence vers 0 de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$. Dans le cas contraire, la série est grossièrement divergente. Il n'en va de même pour les intégrales impropres : l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ peut très bien converger sans que f ne soit bornée au voisinage de $+\infty$!

Pour se convaincre de cette possibilité, donnons l'exemple de la fonction en hérisson ci-dessous :



où chaque pic est un triangle isocèle centré en n dont la base mesure $1/(2n^3)$ et la hauteur vaut n (en dehors de ces pics, la fonction est nulle). L'intégrale de la fonction entre 0 et $+\infty$ vaut alors $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$ et est par conséquent convergente. Et pourtant, la fonction n'est pas bornée !

De façon analogue, on peut définir l'intégrale impropre d'une fonction continue sur $]a;b]$.

Définition 2

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle semi-ouvert de la forme $]a;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est convergente lorsque la fonction $x \longmapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers a (par la droite). On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas où la limite n'est pas finie ou n'existe pas, on dit que $\int_a^b f$ est divergente.

Les différentes remarques faites dans le cas d'une impropreté à la borne droite se transpose évidemment *mutatis mutandis* au cas où l'impropreté se trouve à la borne gauche de l'intervalle.

On retrouve, pour les intégrales impropres, le vocabulaire rencontré pour les séries.

Définition 3

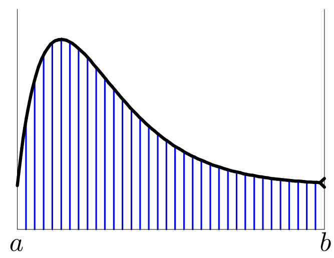
Déterminer la nature d'une intégrale impropre, c'est préciser si elle est convergente ou non.

L'étude d'une intégrale impropre consiste, d'une part, à déterminer la nature de cette intégrale et, d'autre part, à calculer sa valeur (en cas de convergence). Si l'on sait conclure dans de nombreux cas pour la nature, le calcul de l'intégrale est généralement difficile, voire impossible.

L'encadré ci-dessous évoque le cas très simple où la fonction se prolonge par continuité au point où l'intégrale est impropre.

Intégrale faussement impropre

Dans le cas où b est fini et la fonction f admet une limite finie en b (c'est-à-dire dans le cas où f se prolonge par continuité en b), l'intégrale impropre est convergente (elle est en fait égale à l'intégrale « classique » du prolongement de f sur le segment $[a;b]$). On dit alors que l'intégrale est faussement impropre en b. Graphiquement, on obtient le dessin ci-contre :



On pourrait évidemment envisager de fausse impropreté à la borne gauche de l'intervalle d'intégration. C'est d'ailleurs le cas dans l'exemple ci-dessous.

Exemples :

- Soit
$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
La fonction $\varphi : t \longmapsto (\sin t)/t$ est continue sur $]0;1]$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en 0. Or $\lim_{t\to 0}(\sin t)/t = 1$, donc φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$. L'intégrale I est donc faussement impropre en 0 et est, par conséquent, convergente.

Dans les exemples qui suivent, on détermine la nature de certaines intégrales impropres en déterminant une primitive de la fonction intégrée. Cette technique est cependant rarement exploitable (calculer des primitives, c'est difficile !). En outre, si l'étude des intégrales impropres se limitait à la recherche d'une primitive, il ne serait pas nécessaire de faire tout un cours sur ce sujet !

Comme nous allons le voir, l'objet de ce chapitre est de développer une liste d'outils et de résultats afin d'étudier la nature d'une intégrale impropre sans recourir à une primitive, mais en travaillant directement sur la fonction intégrée. Et pour cela, il faut bien tout un cours !

Exemples :

- Posons
$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$
La fonction $t \longmapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0;1[$ et l'intégrale est impropre en 1. On a
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \big[\arcsin t\big]_0^x = \arcsin x - \arcsin 0 \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{\pi}{2},$$
donc I est une intégrale convergente et $I = \pi/2$.
- <u>Loi exponentielle :</u> Soit $\alpha > 0$. Posons
$$E_0 = \int_0^{+\infty} \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$
La fonction $t \longmapsto \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a
$$\int_0^x \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \big[-\mathrm{e}^{-\alpha t}\big]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$
donc E_0 est convergente et vaut 1.
- Soit
$$L = \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t.$$
La fonction ln est continue sur $]0;1]$ et l'intégrale est impropre en 0. On a
$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \big[t\ln t - t\big]_x^1 = -1 - x\ln x + x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1,$$
car $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (croissances comparées). Donc L est convergente et $L = -1$.

Comme pour les séries, on peut introduire le reste d'une intégrale impropre convergente.

Proposition 1

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge. On appelle reste de l'intégrale $\int_a^b f$ la fonction
$$x \in [a;b[\longmapsto \int_x^b f.$$
Ce reste tend vers 0 lorsque x tend vers b^-.

■ Soit F une primitive de f sur $[a;b[$. Pour tout $x \in [a;b[$, on a $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b} F(t) - F(x)$, donc $\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b} F(t) - \lim_{x\to b} F(x) = 0$. ■

On pourrait également définir le reste d'une intégrale impropre en la borne gauche a de l'intervalle d'intégration et démontrer que ce reste tend vers 0 lorsque x tend vers a^+.

b) *Intégrale impropre en plusieurs points*

On envisage d'abord le cas d'une intégrale impropre aux deux bornes du domaine d'intégration.

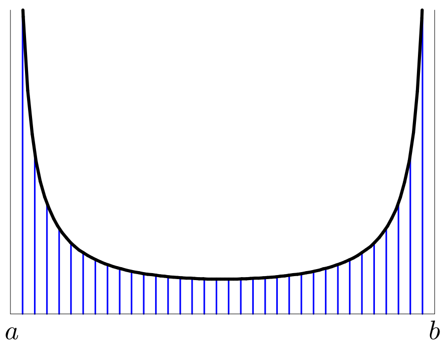
Définition 4

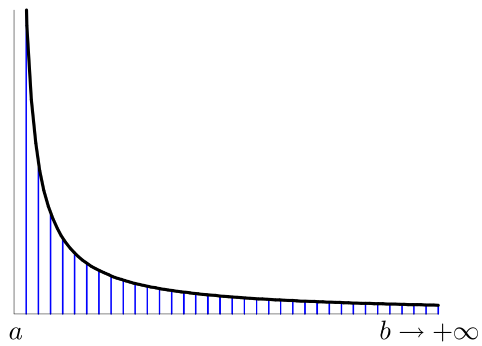
Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle ouvert de la forme $]a;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est convergente lorsque, pour tout $c \in]a;b[$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ La relation de Chasles nous dit que cette définition ne dépend pas du nombre $c \in]a;b[$ utilisé pour se ramener à la somme de deux intégrales impropres sur des intervalles semi-ouverts. ■

Cette situation correspond, par exemple, à des graphes de la forme :





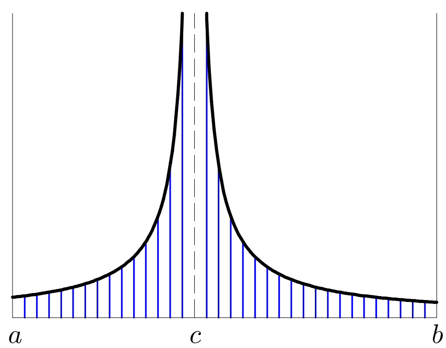
On peut aussi envisager le cas d'une intégrale impropre en un point c situé à l'intérieur du domaine d'intégration. On se ramène alors à deux intégrales impropres : l'une en c^- et l'autre en c^+.

Définition 5

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un segment épointé de la forme $[a;c[\cup]c;b]$ avec $-\infty < a < c < b < +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est convergente lorsque les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette situation correspond, par exemple, à un graphe de la forme :



On peut évidemment généraliser en combinant ces différents types d'intégrales impropres : la fonction f peut ainsi admettre plusieurs points de discontinuité.

Pour ces intégrales avec plusieurs impropretés, on appliquera sans exception le principe suivant :

Un problème à la fois !

Pour étudier la nature d'une intégrale impropre, on la découpe, par la relation de Chasles, en une somme d'intégrales impropres chacune en au plus un point (sur des segments ou des intervalles semi-ouverts). On examine alors, une par une, la convergence de ces intégrales. Elles doivent toutes converger pour que l'intégrale de départ converge.

Exemples :

- Soit
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$$
Cette intégrale est impropre en 0, 1^-, 1^+ et $+\infty$. Pour déterminer sa nature, il convient donc d'étudier la convergence des intégrales
$$\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_1^{2} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$
En l'occurence, nous montrerons (à l'aide de résultats que nous verrons dans la suite de ce cours) que les trois premières sont convergentes mais que la dernière diverge. On en conclut donc que l'intégrale I est divergente.
- Ne pas respecter l'encadré ci-dessus peut conduire à de grosses bétises ! Ainsi, pour examiner la nature de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$, il FAUT séparer les problèmes en $-\infty$ et $+\infty$. En effet, on a
$$\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
et pourtant I diverge puisque
$$\int_x^0 t\,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$
- Loi de Cauchy : Soit
$$C_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}.$$
Cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$. On considère donc séparément
$$C_0' = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} \qquad \text{et} \qquad C_0'' = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}.$$
Or
$$\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_x^0 = -\frac{1}{\pi}\arctan x \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}$$
et
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_0^x = \frac{1}{\pi}\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$
donc C_0', C_0'' et, par conséquent, C_0 convergent. De plus, on a $C_0 = 1$.

c) *Intégrales de Riemann*

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence très utiles en pratique.

Définition 6

On appelle intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ une intégrale impropre en $+\infty$ de la forme

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \qquad (a > 0).$$

On appelle intégrale de Riemann en 0 d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ une intégrale impropre en 0 de la forme

$$\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \qquad (b > 0).$$

On a le résultat suivant à propos de la convergence des intégrales de Riemann en $+\infty$.

Exemple fondamental

Soient $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \text{converge}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha > 1).$$

■ Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\forall x > a, \qquad \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_a^x = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}},$$

ce qui justifie que l'intégrale de Riemann d'ordre α en $+\infty$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, on a

$$\forall x > a, \qquad \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln t\big]_a^x = \ln\frac{x}{a},$$

donc l'intégrale de Riemann diverge si $\alpha = 1$. ■

On a le résultat suivant à propos de la convergence des intégrales de Riemann en 0.

Exemple fondamental

Soient $b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \text{converge}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha < 1).$$

■ Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\forall \varepsilon \in \,]0;b[\,, \qquad \int_\varepsilon^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_\varepsilon^b = \frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}},$$

ce qui justifie que l'intégrale de Riemann d'ordre α en 0 converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$.

Si $\alpha = 1$, on a

$$\forall x \in \,]0;b[\,, \qquad \int_\varepsilon^b \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln t\big]_\varepsilon^b = \ln\frac{b}{\varepsilon},$$

donc l'intégrale de Riemann diverge si $\alpha = 1$. ■

En procédant de même, on obtient que, pour tout $(a, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < c$, l'application $x \longmapsto 1/|x-a|^\alpha$ est intégrable sur $]a;c]$ (ou sur $[a;c[$) si, et seulement si, $\alpha < 1$.

A.2. Propriétés de l'intégrale impropre

Les résultats de ce paragraphe sont des versions « impropres » des propriétés de l'intégrale sur un segment.

a) Relation de Chasles

Proposition 2

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[a; b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). Si $\int_a^b f$ est convergente alors, pour tout $c \in [a; b]$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ <u>Premier cas : l'intégrale n'est pas impropre en c :</u> Dans le cas où l'intégrale possède une seule impropreté en b, il suffit de passer à la limite ($x \longrightarrow b^-$) dans la relation

$$\forall x \in [a; b[\,, \qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

pour obtenir le résultat. On procède de même lorsque l'intégrale est impropre à la borne gauche. Les autres cas (i.e. avec plusieurs points impropres) en découlent en découpant l'intégrale.

<u>Second cas : l'intégrale est impropre en c :</u> Le résultat est alors une conséquence de la définition 5 (qui avait été faite pour cela). ■

b) *Linéarité*

Proposition 3

Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). L'addition des intégrales impropres satisfait les trois règles suivantes :

(i) Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ est convergente et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad \text{(linéarité).}$$

(ii) Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f+g)$ diverge.

(iii) Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent, on ne peut a priori rien dire de la nature de $\int_a^b (f+g)$.

■ (i) Dans le cas où l'intégrale n'est impropre qu'en b, on obtient le résultat en passant à la limite $(x \longrightarrow b^-)$ dans la relation

$$\forall x \in [a;b[\,, \qquad \int_a^x \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g.$$

On procède de même lorsque l'intégrale est impropre à la borne gauche. Les autres cas (i.e. avec plusieurs points impropres) en découlent en découpant l'intégrale.

(ii) Par l'absurde, on suppose que l'intégrale $\int_a^b (f+g)$ converge. Comme $\int_a^b f$ converge également, (i) nous dit que $\int_a^b ((f+g)-f)$ converge, c'est-à-dire $\int_a^b g$ converge : c'est absurde !

(iii) Donnons des contre-exemples pour voir que tout peut arriver. Soit $I = \int_a^b f$ est une intégrale impropre divergente. En l'ajoutant à elle-même, on obtient l'intégrale $2I = \int_a^b 2f$ qui diverge. Au contraire, en la soustrayant à elle-même (ce qui revient à ajouter les intégrales impropres $\int_a^b f$ et $\int_a^b (-f)$), on obtient $\int_a^b \widetilde{0}$ qui est bien évidemment convergente. La somme de deux intégrales divergentes peut donc être divergente ou convergente. ■

Soit I un intervalle donné. Cette proposition établit, en particulier, que l'ensemble E des fonctions réelles continues sur I dont l'intégrale impropre sur I est convergente est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application de E vers $\mathbb{R}$ qui à une fonction de E lui associe son intégrale impropre est une forme linéaire.

On retiendra donc les règles suivantes :

$$\boxed{\textbf{CV+CV=CV} \qquad \textbf{CV+DV=DV} \qquad \textbf{DV+DV=??}}$$

Exemples :

- On prendra garde à ne pas utiliser la linéarité de l'intégrale impropre sans avoir justifié au préalable l'existence des intégrales manipulées. Le non respect de cet avertissement peut vous conduire à une égalité du type :

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t}_{\text{convergente}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{\text{divergente}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t}_{\text{divergente}}$$

L'intégrale du terme de gauche est convergente car faussement impropre en 0 (puisque $1-\mathrm{e}^t \underset{0}{\sim} -t$). La première intégrale du terme de droite est une intégrale de Riemann dont nous avons déjà dit qu'elle est divergente. Enfin, la seconde intégrale du terme de droite est nécessairement divergente sinon deux des trois intégrales de l'égalité ci-dessus seraient convergentes et cela forcerait la troisième (i.e. l'intégrale de Riemann) à converger, ce qui est absurde !

c) *Positivité et croissance*

Proposition 4

Soit f, g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a; b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose que les intégrales impropres $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent. Pour la propriété (iii), on suppose que $\int_a^b |f|$ converge. On a

(i) $(f \geqslant 0) \implies \displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$ (positivité) ;

(ii) $(f \geqslant g) \implies \displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$ (croissance) ;

(iii) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ (inégalité triangulaire).

■ (i) Dans le cas où l'intégrale n'est impropre qu'en b, on obtient le résultat en passant à la limite ($x \longrightarrow b^-$) dans la relation

$$\forall x \in [a; b[\,, \qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

qui résulte de la positivité de l'intégrale sur un segment. On procède de même lorsque l'intégrale est impropre à la borne gauche. Les autres cas (i.e. avec plusieurs points impropres) en découlent en découpant l'intégrale.

(ii) Il suffit d'appliquer (i) à la fonction $f - g$ et d'utiliser la linéarité.

(iii) On applique (ii) à l'encadrement $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ puis on « sort le signe $-$ » à l'aide de (i). ■

(i) reste vrai pour une fonction négative dont l'intégrale est convergente : $(f \leqslant 0) \implies \displaystyle\int_a^b f \leqslant 0$.

Les réciproques de (i) et (ii) sont fausses.

On retiendra de (ii) que l'une des méthodes les plus simples pour majorer, minorer ou encadrer une intégrale consiste à d'abord rechercher une majoration, une minoration ou un encadrement de la fonction intégrée sur le domaine d'intégration considéré.

On peut préciser (i) en ajoutant que sous les mêmes hypothèses (c'est-à-dire : continuité et positivité de f sauf en un nombre fini de points), l'intégrale impropre n'est nulle que si f est nulle, sauf éventuellement en ses points de discontinuité.

$\mathcal{A}$.3. Intégration par parties impropre (IPPI)

Proposition 5

Soient u, v deux fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). Si le produit uv possède une limite finie en a^+ et en b^-, alors les intégrales impropres $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a

$$\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'$$

où $\big[uv\big]_a^b = \lim_b uv - \lim_a uv$.

■ Soit $c \in]a;b[$. Pour tout $x \in [c;b[$, les hypothèses du théorème d'intégration par parties sur le segment $[c;x]$ sont réunies et l'on a donc

$$\int_c^x u'v = \big[uv\big]_c^x - \int_c^x uv'.$$

Comme le produit uv possède une limite finie en b^-, cette relation nous dit que les intégrales $\int_c^x u'v$ et $\int_c^x uv'$ ont le même comportement lorsque x tend vers b^-. Cela signifie donc que $\int_c^b u'v$ et $\int_c^b uv'$ sont de même nature. De plus, lorsqu'elles convergent, un passage à la limite ($x \longrightarrow b^-$) dans la relation ci-dessus, nous dit que

$$\int_c^b u'v = \big[uv\big]_c^b - \int_c^b uv'.$$

On démontrerait de même que les intégrales $\int_a^c uv'$ et $\int_a^c uv'$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, on a

$$\int_a^c u'v = \big[uv\big]_a^c - \int_a^c uv'.$$

On conclut en combinant ces résultats à l'aide de la définition 4 (i.e. la relation de Chasles). ■

Dans la formule d'IPPI, il suffit donc que « deux des trois termes convergent pour que le troisième converge ». En général, on sait que $\int_a^b u'v$ converge. Il suffit alors de contrôler que le produit uv admet une limite finie pour pouvoir effectuer directement l'intégration par parties dans l'intégrale impropre.

L'IPPI peut être utilisée pour des intégrales impropres aux deux bornes du domaine d'intégration. A fortiori, si l'intégrale n'est impropre que sur l'une de ces deux bornes, l'IPPI s'applique en remplaçant $\lim_a uv$ (respectivement $\lim_b uv$) par $u(a)v(a)$ (respectivement $u(b)v(b)$).

Par contre, on ne doit pas utiliser l'IPPI telle quelle dans le cas d'une impropreté à l'intérieur de $[a;b]$. Dans cette situation, on découpe proprement l'intégrale en morceaux pour se ramener aux hypothèses de l'énoncé ci-dessus.

Exemples :

- Moment d'ordre 1 de la loi exponentielle : Soit $\alpha > 0$. On pose

$$E_1 = \int_0^{+\infty} \alpha t \,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

On pose $u(t) = -\mathrm{e}^{-\alpha t}$ et $v(t) = t$. Ce sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ telles que $u(t)v(t) = -t\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, E_1 a la même nature que $\int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Or nous avons vu que $E_0 = \int_0^{+\infty} \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1. Par coséquent, on sait que E_1 converge et l'on a

$$E_1 = \int_0^{+\infty} \alpha t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \big[-t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = 0 - (-0) + \frac{1}{\alpha}E_0 = \frac{1}{\alpha}\cdot$$

Cela signifie qu'une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\alpha)$ admet une espérance qui est égale à $1/\alpha$.

- Considérons l'intégrale, impropre en 0, suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u(t) = -1/(t+1)$ et $v(t) = \ln t$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$. On constate que $[u(t)v(t)]_0^1 = [-(\ln t)/(t+1)]_0^1$ n'est pas une quantité finie. Pas d'IPPI possible ! :-(Mais si ! Il suffit de bien choisir la primitive de $t \longmapsto 1/(1+t)^2$. Pour cela, on prend la primitive qui s'annule en 0, c'est-à-dire $u(t) = 1-1/(t+1) = t/(t+1)$. On garde $v(t) = \ln t$. On constate alors $[u(t)v(t)]_0^1 = [(t\ln t)/(t+1)]_0^1$ vaut 0 (d'après les croissances comparées). Dès lors, l'IPPI nous dit que les intégrales I et $\int_0^1 1/(t+1)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme cette dernière intégrale est convergente (elle n'est pas impropre), on en déduit que I converge et que l'on a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\ln t}{t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = -\big[\ln|t+1|\big]_0^1 = -\ln 2.$$

- Attention, une IPPI peut remplacer une fausse impropreté par une vraie ! Si l'on choisit $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = 1/t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ qui est faussement impropre en 0, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_0^1}_{\text{diverge en 0}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{n'est plus faussement}\\ \text{impropre en 0}}}.$$

L'astuce consiste de nouveau à bien choisir la primitive de $t \longmapsto \sin t$ que l'on utilise ! Ici, il suffit de prendre $u(t) = 1-\cos t$ à la place de $u(t) = -\cos t$ pour avoir

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^1}_{\text{converge}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{faussement}\\ \text{impropre en 0}}}.$$

A.4. Changement de variable impropre

Proposition 6

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $]a;b[$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) et φ une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone sur un intervalle I de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $[a;b] \subset \varphi(I)$. Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ont la même nature et, en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable φ doit donc être un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre I et $\varphi(I)$, avec la convention que $\varphi^{-1}(a) = \lim_{t\to a}\varphi^{-1}(t)$ et $\varphi^{-1}(b) = \lim_{t\to b}\varphi^{-1}(t)$.

■ Soit $c \in]a;b[$. Pour tout $x \in [c;b[$, les hypothèses du théorème de changement de variable sur le segment $[c;x]$ sont réunies et l'on a donc

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(x)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cette relation nous dit que les intégrales $\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(x)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ont le même comportement lorsque x tend vers b^-. Comme φ^{-1} est continue, cela signifie que $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ont la même nature. De plus, en cas de convergence, un passage à la limite $(x \longrightarrow b^-)$ dans la relation ci-dessus, nous dit que

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

On démontrerait de même que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(c)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ont la même nature et qu'en cas de convergence, on a

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(c)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

On conclut en combinant ces résultats à l'aide de la définition 4 (i.e. la relation de Chasles). ■

L'énoncé de ce théorème est technique. On retiendra en subtance que, pour justifier la validité du changement de variable, il convient de déterminer les nouvelles bornes ; de justifier les caractères $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone du changement de variable ; de calculer la nouvelle différentielle ; de déterminer le nouvel intégrant (c'est-à-dire l'expression remplaçant $f(t)\,\mathrm{d}t$) et d'en déduire la nouvelle expression de l'intégrale.

On notera qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une hypothèse de convergence pour effectuer un changement de variable (car cette transformation ne modifie pas la nature de l'intégrale). Cela permet d'utiliser ce type de transformation aussi bien pour démontrer la convergence que la divergence d'une intégrale impropre.

On notera également que l'énoncé précédent permet d'utiliser le changement de variable pour des intégrales impropres aux deux bornes du domaine d'intégration.

Cependant, si l'intégrale n'est impropre que sur l'une de ces deux bornes, le changement de variable s'applique tout aussi bien.

Par contre, on ne doit pas effectuer de changement de variable dans une intégrale comportant une impropreté à l'intérieur de $[a;b]$. Dans cette situation, on découpe l'intégrale afin d'intégrer sur des intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés). Le deuxième exemple ci-après illustre les dangers inhérents au non respect de cette consigne.

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale impropre
$$W_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$
En posant $t = \sin u$, il vient
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n \, \mathrm{d}u.$$
On obtient une intégrale de Wallis qui n'est pas impropre. L'intégrale W_n est donc convergente et sa valeur est celle de l'intégrale de Wallis d'indice n.

- Considérons l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\big|\ln|t|\big|}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ qui est impropre en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$. Malgré les recommandations ci-dessus, ignorons qu'elle admet un point impropre à l'intérieur de son domaine de définition et effectuons le changement de variable $u = 1/t$. On obtient
$$I = -\int_0^0 \frac{\big|\ln|u|\big|}{u^2+1} \, \mathrm{d}u = 0,$$
ce qui est absurde pour l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. Vous voilà avertis, par l'exemple, des risques d'un changement de variable sur un domaine d'intégration qui n'est pas un intervalle !

Le changement de variable permet de simplifier le calcul des intégrales impropres de fonctions paires ou impaires lorsqu'elles sont convergentes.

Parité et imparité

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle ouvert $]-a; a[$ (avec $0 < a \leqslant +\infty$) telle que l'intégrale $\int_{-a}^{a} f$ converge. Alors

$$\boxed{f \text{ paire} \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t) \, \mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \boxed{f \text{ impaire} \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = 0.}$$

■ Ces résultats s'obtiennent en écrivant que $\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^a f(t) \, \mathrm{d}t$ puis en effectuant le changement de variable $t = -u$ dans la première intégrale. ■

Attention !! L'hypothèse de convergence de l'intégrale $\int_{-a}^{a} f$ est cruciale. L'exemple ci-dessous montre que l'on ne peut pas se passer de cette hypothèse.

Exemples :

- Moment d'ordre 1 de la loi de Cauchy : On pose
$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} \, \mathrm{d}x.$$
On intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. Il est donc naturel de penser que C_1 est nulle.
Que nenni ! La fonction $x/(1+x^2)$ admet pour primitive $x \longmapsto \ln\sqrt{1+x^2}$ qui n'a pas de limite finie en $\pm\infty$. L'intégrale C_1 est donc divergente !
Une variable qui suit la loi de Cauchy n'a donc pas d'espérance !

B. Convergence et semi-convergence

B.1. Théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives

a) Comparaison par $\leqslant$

Voici sa majestée le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives (TCIFP).

Théorème 1

Soient f, g deux fonctions réelles définies, continues et positives sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a; b[$ avec $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$ (respectivement $]a; b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$).

On suppose que $f \leqslant g$ sur $[a; b[$ (respectivement sur $]a; b]$).

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge aussi.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g$ diverge aussi.

■ On traite le cas où l'impropreté est en b. L'autre cas s'obtient de façon similaire.

(i) Comme $\widetilde{0} \leqslant f \leqslant g$ sur $[a; b[$, les fonctions $F : x \longmapsto \int_a^x f$ et $G : x \longmapsto \int_a^x g$ sont croissantes sur $[a; b[$ (en tant que primitives de fonctions positives) et vérifient $\forall x \in [a; b[\,,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$. Si $\int_a^b g$ converge, cela signifie que G tend vers $\int_a^b g$ quand x tend vers b^-. Comme G est croissante, on a alors $\forall x \in [a; b[\,,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant \int_a^b g$. Par suite, $\forall x \in [a; b[\,,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_a^b g$, ce qui prouve que la fonction F est majorée. Comme elle est croissante, elle admet une limite finie en b^-, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_a^b f$ converge. Cela démontre (i).

(ii) La propriété (ii) s'obtient en contraposant (i). ■

Pour déterminer la nature de l'intégrale impropre d'une fonction positive compliquée, il suffit donc de comparer cette fonction avec une fonction positive plus simple dont on connait le comportement de l'intégrale. Par contre, cette méthode ne donne pas la valeur de l'intégrale.

Ce théorème concerne les intégrales de fonctions positives. Il s'applique également pour les fonctions négatives, quitte à considérer $-f$. Par contre, il est formellement interdit de l'utiliser avec une fonction n'est pas de signe constant !

Pour appliquer le TCIFP, on établit une inégalité sur la fonction intégrée. Pour utiliser ce théorème, on ne travaille donc JAMAIS directement sur l'intégrale.

Notons qu'il n'est pas indispensable que l'hypothèse de domination $0 \leqslant f \leqslant g$ soit satisfaite sur tout l'intervalle d'intégration mais seulement sur un voisinage de l'impropreté.

Exemples :

- Considérons
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$
Cette intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$ puisque $\varphi : t \longmapsto 1/(1+t^3)$ est continue sur $[0; +\infty[$. Par ailleurs, φ est une fonction positive qui est majorée par $t \longmapsto 1/t^3$ sur $[1; +\infty[$. Comme $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^3$ converge (car $t \longmapsto -1/(2t^2)$ est une primitive qui tend vers 0 en $+\infty$), le TCIFP dit que I converge.
- Soit
$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$
Retrouvons la divergence de cette intégrale (vue dans un exemple précédent). La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t/t$ est positive sur $]0; 1]$ et minorée par $t \longmapsto 1/t$. Or $\int_0^1 \mathrm{d}t/t$ est divergente (car $t \longmapsto \ln t$ est une primitive qui tend vers $-\infty$ en 0), donc I diverge d'après le TCIFP.

b) Comparaison par $\sim$

Le TCIFP est souvent utilisé sous forme asymptotique : plutôt que d'établir une majoration, on se contente d'une estimation. L'énoncé suivant envisage le cas d'une estimation par $\sim$. Attention, comme toutes les conséquences du TCIFP, il n'est valable que pour une fonction positive !

Proposition 7

Soient f, g deux fonctions réelles définies, continues et positives sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a; b[$ avec $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$ (respectivement $]a; b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$).

On suppose que $f \underset{b}{\sim} g$ (respectivement $f \underset{a}{\sim} g$). Alors

$$\int_a^b f \text{ est de même nature que } \int_a^b g.$$

■ Supposons que $\int_a^b g$ est convergente. Comme $f \underset{b}{\sim} g$ (respectivement $f \underset{a}{\sim} g$), on a $\widetilde{0} \leqslant f \leqslant 2g$ au voisinage de b (respectivement de a). Cela justifie la convergence de $\int_a^b f$ d'après le TCIFP.

Supposons que $\int_a^b g$ est divergente. Comme $f \underset{b}{\sim} g$ (respectivement $f \underset{a}{\sim} g$), on a $\widetilde{0} \leqslant g/2 \leqslant f$ au voisinage de b (respectivement de a). Cela justifie la divergence de $\int_a^b f$ d'après le TCIFP. ■

Pour déterminer l'équivalent, on peut utiliser les développements limités. Cela conduit souvent à un équivalent de la forme c/t^α, ce qui justifie l'intérêt que l'on porte aux intégrales de Riemann.

L'hypothèse de positivité est cruciale ! Lorsque la fonction change de signe, nous verrons que l'on travaille sur sa valeur absolue pour établir la convergence absolue de l'intégrale. En revanche, il n'est indispensable de vérifier la positivité des deux fonctions f et g puisque la positivité de l'une entraîne celle de l'autre.

Exemples :

- Soit
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$
C'est une intégrale impropre en 0, 1^-, 1^+ et $+\infty$. Pour déterminer sa nature, on étudie donc la convergence des intégrales
$$I_0 = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t, \quad I_{1^-} = \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t, \quad I_{1^+} = \int_1^2 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_\infty = \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$
  - ▷ Comme $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$, la fonction $t \longmapsto (\ln t)/(t-1)$ se prolonge par continuité en 1 (en prenant la valeur 1). Cela implique que les intégrales I_{1^-} et I_{1^+} sont faussement impropres en 1.
  - ▷ On a $0 \leqslant (\ln t)/(t-1) \underset{0}{\sim} -\ln t$. Comme $\int_0^{1/2}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit, d'après le TCIFP, que l'intégrale I_0 est convergente.
  - ▷ Enfin, on a $0 \leqslant (\ln t)/(t-1) \underset{+\infty}{\sim} (\ln t)/t$. Or $\int_1^{+\infty}(\ln t)/t\,\mathrm{d}t$ est une intégrale divergente (puisque $t \longmapsto (\ln t)^2/4$ est une primitive qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$), donc, d'après le TCIFP, l'intégrale I_∞ est divergente.

  L'intégrale I est donc divergente.
- Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite ℓ en $+\infty$. Si $\ell \neq 0$, le TCIFP par $\sim$ dit que $\int_0^{+\infty} f$ diverge. On peut alors parler de divergence grossière de l'intégrale. Mais attention, au contraire du résultat analogue sur les séries, l'existence de la limite fait partie des hypothèses !

c) Comparaison par o ou O

Voici le TCIFP par o ou O.

Proposition 8

Soient f, g deux fonctions réelles définies, continues et positives sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a; b[$ avec $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$ (respectivement $]a; b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$).

On suppose que $f = o_b(g)$ ou $f = O_b(g)$ (respectivement $f = o_a(g)$ ou $f = O_a(g)$). Alors

$$\left(\int_a^b g \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^b f \text{ converge}\right).$$

■ Comme $f = o_b(g)$ ou $f = O_b(g)$ (respectivement $f = o_a(g)$ ou $f = O_a(g)$), il existe $M > 0$ tel que $0 \leqslant f \leqslant Mg$ au voisinage de b (respectivement de a). La TCIFP dit alors que si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge aussi. ■

Si f change de signe, on travaille sur $|f|$ pour établir la convergence absolue de l'intégrale $\int_a^b f$. Quant à l'hypothèse de positivité de g, on ne peut pas s'en passer !

Exemples :

- Existence des moments d'une loi exponentielle : Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n = \int_0^{+\infty} t^n \, \alpha \, \mathrm{e}^{-\alpha t} \, \mathrm{d}t.$$

Comme $\alpha t^{n+2} \mathrm{e}^{-\alpha t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, on a $\alpha t^n \mathrm{e}^{-\alpha t} = o_{+\infty}(1/t^2)$ où $t \longmapsto \alpha t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}$ et $t \longmapsto 1/t^2$ sont des fonctions positives. Comme $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$ converge, le TCIFP par o nous dit que E_n converge.

$\mathcal{B}$.2. Convergence absolue

Définition 7

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $]a;b[$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Pour une fonction réelle qui ne change pas de signe, la convergence et la convergence absolue sont identiques. Dans le cas général, l'énoncé fondamental suivant nous dit que la convergence absolue est une convergence plus forte que la convergence (tout court).

Théorème 2

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

■ On traite d'abord le cas d'une fonction réelle f qui est continue sur $[a;b[$ (avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$). Posons $g = f + |f|$ de sorte que $0 \leqslant g \leqslant 2|f|$. Comme l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge, le TCIFP affirme que l'intégrale $\int_a^b g$ converge. La proposition 3 nous dit alors que $\int_a^b (g - |f|) = \int_a^b f$ converge. On procède de même lorsque l'intégrale est impropre à la borne gauche. Les autres cas (i.e. avec plusieurs points impropres) en découlent en découpant l'intégrale. ■

Si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente, on a de plus $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (nous l'avons vu).

La réciproque de ce théorème est fausse comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Utilisation de la convergence absolue

Pour étudier la nature de l'intégrale d'une fonction de signe variable, on étudie d'abord la convergence de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction, qui a l'avantage d'être une intégrale de fonction positive !

Exemples :

- L'intégrale $I = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (et donc convergente) puisque pour tout $t \geqslant \pi$, on a $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

$\mathscr{B}$.3. Semi-convergence

Définition 8

Une inégrale impropre est dite semi convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

A priori, rien n'assure l'existence de telles intégrales impropres. Regardons l'exemple ci-dessous.

Exemples :

- On pose
$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
Démontrons que D est semi-convergente.
Convergence : Effectuons une intégration par parties sur en posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = 1/t$. Ce sont bien des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ est nul puisque
$$\frac{1-\cos t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\cos t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$
L'IPPI nous dit donc que
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ a la même nature que } \int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or cette dernière intégrale est faussement impropre en 0 et absolument convergente en $+\infty$ (car $|(\cos t - 1)/t^2| \leqslant 2/t^2$). Donc
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$
Pas d'absolue convergence : Démontrons que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$\begin{aligned}\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t}_{=2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}.\end{aligned}$$
Comme la série harmonique diverge, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty,$$
ce qui implique que
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

C. Calculs d'intégrales impropres

C.1. La fonction gamma d'Euler

Définition 9

La fonction

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On l'appelle la fonction Γ d'Euler.

■ Démontrons que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$.

On a $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$. Comme $t \longmapsto t^{x-1}$ admet une intégrale convergente sur $]0;1]$ si, et seulement si, $1-x<1$ (intégrale de Riemann en 0), le TCIFP par $\sim$ dit que $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$.

On a $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathcal{O}_{+\infty}(1/t^2)$. Comme $t \longmapsto 2/t^2$ admet une intégrale convergente sur $[1;+\infty[$ (intégrale de Riemann en $+\infty$), le TCIFP par $\mathcal{O}$ dit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$. ■

Les valeurs de Γ aux entiers sont calculables.

Proposition 9

La fonction Γ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

■ Notons $u(t) = t^x/x$ et $v(t) = -\,\mathrm{e}^{-t}$ qui sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. On a $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = [-t^x\,\mathrm{e}^{-t}/x]_0^{+\infty} = 0$ donc on peut effectuer directement l'IPP dans l'intégrale impropre, ce qui donne

$$\Gamma(x) = \big[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}/x\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x}(-\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En particulier, si $x = n$ est un entier naturel non nul, on a

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-3) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1).$$

Or $\Gamma(1) = 1$ (c'est E_0 pour $\alpha = 1$), donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$ ■

La fonction Γ interpole donc la factorielle et permet de généraliser celle-ci au cas où la variable n'est pas un entier... C'est très utile, en particulier en probabilités.

Exemples :

- Calcul des moments d'une loi exponentielle : Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que l'intégrale impropre

$$E_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

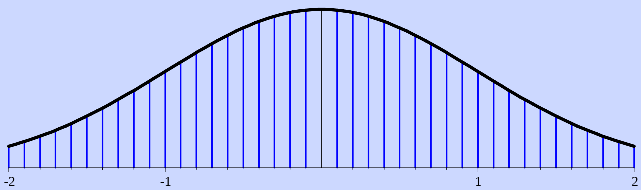
est convergente. En effectuant le changement de variable $u = \alpha t$, on obtient

$$E_n = \frac{1}{\alpha^n}\int_0^{+\infty} u^n\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha^n}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{\alpha^n}$$

C.2. Intégrale de Gauss

Définition 10

On appelle intégrale de Gauss l'intégrale impropre convergente



$$G_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

Plus généralement, le moment d'ordre n de Gauss (avec $n \in \mathbb{N}$) est l'intégrale impropre convergente

$$G_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

■ On a $t^n\,\mathrm{e}^{-t^2/2} = \mathscr{O}_{+\infty}(1/t^2)$. Or $t \longmapsto 1/t^2$ admet une intégrale convergente sur $[1;+\infty[$, donc $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $\int_{-\infty}^{0} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi par parité ou imparité de $t \longmapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. On en conclut que G_n est une intégrale convergente. ■

Bien que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ n'admette pas de primitive calculable, on peut tout de même déterminer la valeur de G_0.

Proposition 10

On a

$$G_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

■ Nous le ferons en TD. ■

Exemples :

- Les moments impairsde Gauss sont nuls puisque ce sont des intégrales convergentes de fonctions impaires sur un domaine d'intégration centré en 0.
- Calculon G_2. Posons $u(t) = -\mathrm{e}^{-t^2/2}$ et $v(t) = t$. Ce sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $[u(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty} = [-t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, donc on peut effectuer directement l'IPP dans l'intégrale impropre, ce qui donne :

$$G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \big[-t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 0 + G_0.$$

Comme nous avons admis que $G_0 = \sqrt{2\pi}$, on a donc

$$G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

C.3. Intégrale de Dirichlet

Définition 11

On appelle intégrale de Dirichlet l'intégrale impropre semi-convergente

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

■ Nous avons déjà démontré la semi-convergence de cette intégrale. ■

L'intégrale de Dirichlet est donc l'intégrale du sinus cardinal sur la demi-droite des nombres réels positifs.

Là encore, bien que l'on ne sache pas déterminer une primitive du sinus cardinal, on sait calculer l'intégrale de Dirichlet.

Proposition 11

On a

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

?h??

■ Nous le ferons en TD. ■