T.D. EM_{11} : Réflexion d'ondes, effet de peau et guides d'ondes

Exercice 1 Onde plane stationnaire entre deux plans

On dispose dans le vide deux plans parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. On se propose d'étudier une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre ces deux plans : $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\, f(x)\cos\omega t\, \overrightarrow{e_y}$.

1. En admettant que les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur, écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ dans le vide en $x = 0$ et $x = a$.
2. Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.
3. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ de cette onde.
4. Calculer l'énergie électrique $\mathscr{E}_{\mathrm{E}}$ et l'énergie magnétique $\mathscr{E}_{\mathrm{B}}$ emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe $(\mathrm{O}x)$, situé entre les deux plans et de section S. Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

Exercice 2 Chauffage par induction

Un solénoïde long, d'axe $\mathrm{O}z$, comprenant n spires par unité de longueur, circulaires de rayon a et parcourues par un courant d'intensité $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0\cos\omega t$, crée en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) un champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}(r > a) = \overrightarrow{0}$ à l'extérieur et $\overrightarrow{\mathrm{B}}(r < a) = \mu_0\, n\, \mathrm{I}\, \overrightarrow{e_z}$ à l'intérieur.

1. On cherche un champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ de la forme $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$. En exploitant la loi de FARADAY pour un contour (C) bien choisi, montrer que dans le solénoïde, on a $\mathrm{E}_\theta(r < a) = (\mu_0\, n\, \mathrm{I}_0\, \omega\, r/2)\sin\omega t$.
2. On place dans le solénoïde un cylindre métallique de conductivité γ, d'axe $\mathrm{O}z$, de hauteur L, et de section circulaire de rayon $b < a$. On suppose dans cette question que le champ magnétique dans le cylindre reste $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\, n\, \mathrm{I}\, \overrightarrow{e_z}$ (approximation $(\mathscr{A})$). Quelle est la puissance moyenne $< \mathscr{P}_{\mathrm{J}} >$ dissipée par effet JOULE à cause des courants de Foucault dans le cylindre ? Ce cylindre évacue par diffusion, convection et/ou rayonnement thermique une puissance surfacique de la forme $\mathrm{d}\mathscr{P}'/\mathrm{dS} = h(\mathrm{T}_s - \mathrm{T}_e)$ où h est une constante, T_s la température à la surface du métal et T_e la température ambiante. Comment faut-il choisir ω pour faire fondre le métal dont la température de fusion vaut T_{F} ? Commenter l'influence de L et b.
3. On suppose le cylindre métallique long et on veut discuter de l'approximation $(\mathscr{A})$. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{dB}'}$ créé sur l'axe $\mathrm{O}z$ par les courants induits dans le métal entre les cylindres de rayons r et $r + \mathrm{d}r$. En déduire le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}'}$ total. À quelle condition sur b, faisant apparaître l'épaisseur de peau δ, l'approximation $(\mathscr{A})$ est-elle valable ? Lorsque cette condition n'est pas du tout vérifiée, on constate que les courants se localisent sur une pellicule d'épaisseur δ au voisinage de la surface ; commenter.

Exercice 3 Guide d'ondes et vitesse de l'énergie

On considère un guide d'ondes G constitué d'un cylindre métallique creux illimité, d'axe $(\mathrm{O}z)$, et dont la section droite est le rectangle $\{0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$; l'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait, c'est-à-dire de conductivité infinie ; dans ces conditions, on admet que les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont nuls dans le métal.

1. Montrer que la composante tangentielle $\overrightarrow{\mathrm{E}}_t$ du champ électrique et la composante normale $\overrightarrow{\mathrm{B}}_n$ du champ magnétique dans le vide doivent s'annuler sur les parois du guide.
2. Dans toute la suite, on cherche en notation complexe un champ électrique de la forme $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \mathrm{A}(x,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_g z)}\,\overrightarrow{e_y}$.
   a. Montrer que $\mathrm{A}(x,y)$ ne dépend pas de y et que $\mathrm{A}(x = 0) = 0$ et $\mathrm{A}(x = a) = 0$. Écrire l'équation différentielle dont est solution $\mathrm{A}(x)$, et montrer que nécessairement $k_g^2 < \omega^2/c^2$. En déduire que les solutions possibles, qu'on appellera *modes* n dans la suite, sont de la forme :
   $$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}_n = \alpha_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_{g,n} z)}\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{avec} \qquad k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\,\pi^2}{a^2}$$
   b. Faire apparaître une pulsation critique $\omega_{n,c}$; discuter brièvement la nature des ondes obtenues. Calculer numériquement la plus petite fréquence permettant de propager une onde progressive dans un guide pour $a = 2b = 5$ cm. Pour $\omega > \omega_{n,c}$, commenter l'expression de E_n d'une part à z fixé et d'autre part à x fixé. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe et commenter.
3. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ du mode n et vérifier qu'il satisfait aux conditions aux limites. Vérifier qu'il n'est pas transversal et interpréter graphiquement ce fait en décomposant le mode étudié en deux ondes planes progressives harmoniques.
4. a. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING et interpréter sa direction. Comment en déduirait-on la puissance moyenne $\langle\mathscr{P}\rangle$ rayonnée à travers une section du guide d'ondes :
   $$\langle\mathscr{P}\rangle = \frac{\alpha_n^2\, k_{g,n}\, a\, b}{4\,\mu_0\,\omega}$$
   Commenter cette expression en liaison avec le modèle du conducteur parfait. Comparer les « variations » de $\langle\mathscr{P}\rangle$ et de l'amplitude des champs lorsqu'on s'éloigne de la source avec le cas du dipôle rayonnant, modèle de la propagation libre.
   b. Que vaut l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide ? En déduire la vitesse de propagation de l'énergie v_e. Comparer v_e, v_g et v_φ et commenter.

Exercice 4 Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère

1. **Propagation ionosphérique.**

   L'ionosphère est une couche atmosphérique située à très haute altitude (au-delà de 60 km), que l'on assimilera à un gaz ionisé (plasma) globalement électriquement neutre, constitué de N électrons libres de masse m et de charge $-e$ et de N ions positifs de masse M et de charge $+e$ par unité de volume. Ce gaz est un milieu raréfié de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique égales à celles du vide, contenant des particules chargées dont les interactions sont négligées.

   On donne $\mathrm{M} = 1{,}67.10^{-27}$ kg et $\mathrm{N} = 6.10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$.

   Une onde électromagnétique plane, monochromatique, de pulsation ω se propage dans ce milieu dans la direction (Oz). Le champ électrique de cette onde s'écrit $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}_2 = \underline{\mathrm{E}}_{02}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_2 z)}\,\overrightarrow{e_x}$.

   a. Étudier les mouvements des électrons et des ions induits par l'onde électromagnétique. On notera $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{v_i}$ les vecteurs vitesses complexes correspondants. Montrer que la conductivité du milieu peut être assimilée à $\gamma = -\mathrm{j}\,\mathrm{N}\,e^2/(m\,\omega)$.
   b. Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $k_2^2 = (1 - \omega_p^2/\omega^2)\,\omega^2/c^2$ et déterminer la fréquence de plasma $f_p = \omega_p/(2\pi)$ en fonction de N, e, m et ε_0. Calculer la valeur numérique de f_p.
   c. L'indice complexe $\underline{n}$ est défini comme le nombre complexe (à partie réelle positive) tel que la relation de dispersion s'écrive $\underline{k} = \underline{n}\,\omega/c$. Exprimer $\underline{n}^2$, pour le plasma ionosphérique, en fonction de ω et ω_p.

2. **Réflexion et réfraction ionosphériques.**

   L'atmosphère (dont les propriétés seront supposées être celles du vide) est dans la région $z < 0$, et l'ionosphère dans la région $z > 0$. Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement se propage de la Terre vers l'ionosphère. Son champ électrique s'écrit $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}_1 = \underline{\mathrm{E}}_{01}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{e_x}$. À l'interface, cette onde donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie dont les champs électriques respectifs sont notés $\overrightarrow{\mathrm{E}}_2$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}}_1'$.

   a. Écrire les conditions aux limites (en $z = 0$) que doivent vérifier les champs électriques et magnétiques de ces trois ondes. En déduire deux relations qui lient les amplitudes $\underline{\mathrm{E}}_{01}$, $\underline{\mathrm{E}}_{01}'$, $\underline{\mathrm{E}}_{02}$ et le seul paramètre $\underline{n}$.
   b. Déterminer l'expression du coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique en fonction de $\underline{n}$. En déduire le facteur de réflexion en puissance R, en fonction de ω et de ω_p.
   c. Pour $\omega < \omega_p$, comment peut-on qualifier l'interface atmosphère-ionosphère ?
   d. Pour $\omega > \omega_p$, calculer les valeurs numériques de R pour les fréquences $f = 7$ MHz et $f = 8$ MHz.
   e. Tracer l'allure du graphe de R en fonction de la fréquence f.
   f. Quelle est la relation entre le facteur de réflexion en puissance R et le facteur de transmission en puissance T ? Sur le schéma de la question précédente, donner l'allure du graphe de T en fonction de la fréquence f.
   g. Un poste émetteur situé au niveau de la mer émet une onde assimilée à une onde plane, monochromatique de fréquence $f > f_p$, qui arrive sous un angle d'incidence oblique i_1 sur l'interface atmosphère-ionosphère. Calculer le cosinus de l'angle limite $i_{1\mathrm{L}}$ à partir duquel l'onde incidente est totalement réfléchie vers le sol, en fonction de la fréquence f de l'émetteur et de la fréquence de coupure f_p. Faire l'application numérique pour une fréquence $f = 12$ MHz.

Exercice 5 Effet de peau dans un métal

On étudie la propagation dans un métal d'une onde plane monochromatique électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, dont le champ électrique est noté $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{\mathrm{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{E}}_0$ réel. Le domaine spectral envisagé correspond à des ondes centimétriques. Pour les applications numériques, on se placera dans le cas du cuivre de conductivité $\gamma_0 = 6{,}0.10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$ en régime indépendant du temps.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes étudiées ? Que peut-on penser de la conductivité γ, *a priori* complexe, du métal dans ce domaine de fréquences ? Comparer les amplitudes des vecteurs densité de courant électrique de conduction et de déplacement. Écrire la forme approchée des équations de MAXWELL dans le milieu métallique pour le cadre de notre étude.
2. Quelle est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le métal ? Donner l'expression du champ électromagnétique de l'onde, qui se propage dans la direction de l'axe (Ox), à x croissants, dans le métal qui occupe la zone $x > 0$.
3. Déterminer la puissance moyenne cédée par l'onde au métal dans un volume cylindrique élémentaire, de section S perpendiculaire à (Ox), dont les faces planes sont situées aux abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.
4. La comparer au flux du vecteur moyen de POYNTING à travers la surface délimitant ce volume et vérifier le bilan énergétique local attendu.

Exercice 6 Pression de radiation

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement arrive sur une surface plane séparant le vide d'un métal assimilé à un milieu conducteur parfait. L'onde incidente fait un angle θ avec la normale à la surface.

1. Rappeler les propriétés du conducteur parfait.
2. Calculer les caractéristiques de l'onde réfléchie. En déduire la densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ et la densité surfacique de charges σ apparaissant à la surface du conducteur.
3. On admet que l'onde exerce une pression électrique dirigée vers l'extérieur du conducteur valant $\sigma^2/(2\varepsilon_0)$ et une pression magnétique dirigée vers l'intérieur valant $\mu_0\,j_s^2/2$. Calculer la pression moyenne, appelée pression de radiation, qu'exerce l'onde sur le conducteur.
4. Retrouver ce résultat à partir de la notion de photons, par une démarche analogue à celle utilisée pour le calcul de la pression cinétique en thermodynamique.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1
Simple donc pas d'indications…

Exercice 2
$\overrightarrow{B'} = {\mu_0}^2\, n\, I_0\, \gamma\, \omega\, \dfrac{b^2}{4}\, \sin \omega t\, \overrightarrow{e_z}$.

Exercice 3
Pas d'indications, l'énoncé étant détaillé…

Exercice 4
1. $f_p = 6{,}95$ *MHz.* $\underline{n}^2 = 1 - {\omega_p}^2/\omega^2$.
2. $R = \left|\dfrac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}\right|^2$. $R + T = 1$. $i_{1L} = 55°$.

Exercice 5
3. $d\mathscr{P} = \dfrac{1}{2}\,\gamma_0\, {E_0}^2\, e^{-2x/\delta}\, S\, dx$.

Exercice 6
1. *Cours…*
2. *Une polarisation rectiligne suivant l'axe* (Oy)*, orthogonale au plan d'incidence, donne des résultats de la forme* $\sigma = 0$ *et* $\overrightarrow{j_s} = 2\,\varepsilon_0\, c\, E_0 \cos\theta \cos(\omega t - \omega \sin\theta\, x/c)\, \overrightarrow{e_y}$ *; une polarisation dans le plan d'incidence donne* $\sigma = 2\,\varepsilon_0\, E_0 \sin\theta \cos(\omega t - \omega \sin\theta\, x/c)$ *et* $\overrightarrow{j_s} = 2\,\varepsilon_0\, c\, E_0 \cos(\omega t - \omega \sin\theta\, x/c)\, \overrightarrow{e_x}$.
3. $P = \varepsilon_0\, {E_0}^2 \cos^2\theta$.
4. $P = 2\, n_v\, h\, \nu_0 \cos^2\theta$ *analogue (*n_v *densité particulaire incidente).*