DÉRIVATION CORRECTION

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{d}(x)$ la distance de x à l'entier le plus proche, i.e. $\mathrm{d}(x) = \min\{x - \lfloor x \rfloor\,;\, \lceil x \rceil - x\}$. Pour tout $n > 0$, on introduit la fonction $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k}$

1. a) *Soit $x \in [0;1]$. Prouver que la suite $\big(g_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ converge. On note $g(x)$ sa limite. La fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k}$ s'appelle la fonction du blanc-manger.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_{n+1}(x) - g_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \geqslant 0$, donc $\big(g_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a clairement $\mathrm{d}(y) \in [0;1/2]$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1/2}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1,$$

   donc $\big(g_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

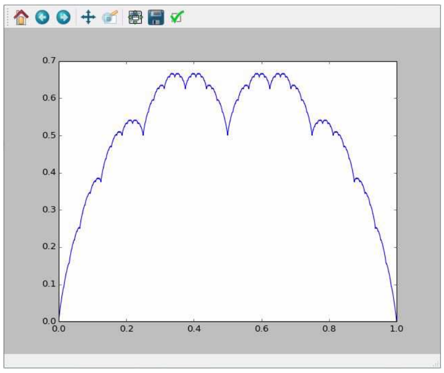
   D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } \big(g_n(x)\big)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente.}}$$

   b) *Écrire un script Python qui représente la fonction du blanc manger. On imprimera le graphe obtenu et on le joindra à la copie.*

   On a

```
def blancmanger(x,n):
    s=0
    for k in range(n):
        s+=abs((2**k)*x-round((2**k)*x))/(2**k)
    return s
m=1000
x=np.linspace(0,1,m)
y=np.linspace(0,1,m)
for k in range(m):
    y[k]=blancmanger(x[k],20)
plt.figure; plt.plot(x,y); plt.show()
```



2. a) *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $[0;1]$.*

   La fonction d coïncide avec Id sur $[0;1/2]$ donc d est continue sur $[0;1/2]$. La fonction d coïncide avec $1 - \mathrm{Id}$ sur $[1/2;1]$ donc d est continue sur $[1/2;1]$. Enfin, la fonction d est 1-périodique avec $\mathrm{d}(0) = 0 = \mathrm{d}(1)$. Donc d est continue sur $\mathbb{R}$.

   Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \longmapsto \mathrm{d}(2^n x)/2^n$ est continue sur $[0;1]$ comme composée de fonctions continues et g_n est continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues.

   Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ g_n \text{ est continue sur } [0;1].}$$

b) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$, $|g(x) - g_n(x)| \leqslant 1/2^{n+1}$.*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant n$, on a

$$0 \leqslant g_m(x) - g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1/2}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

ce qui donne, en passant à la limite ($m \longrightarrow +\infty$),

$$0 \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1], \qquad |g(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

c) *Déduire des deux questions précédentes que g est continue sur $[0;1]$.*

Soient $x \in [0;1]$ et $\varepsilon > 0$.
Comme $(1/2^{n+1})_{n \geqslant 0}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^{N+1} \leqslant \varepsilon/3$. Dès lors, d'après la question précédente, on a $\forall t \in [0;1], \ |g(t) - g_N(t)| \leqslant \varepsilon/3$.
Comme g_N est continue sur $[0;1]$, elle est en particulier continue en x, ce qui permet d'affirmer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in \,]x-\eta; x+\eta[\, \cap [0;1], \ |g_N(x) - g_N(y)| \leqslant \varepsilon/3$.
Dès lors, pour tout $y \in \,]x-\eta; x+\eta[\, \cap [0;1]$, on a

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - g_N(y)| + |g_N(y) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que g est continue en x.
Comme x est quelconque dans $[0;1]$, on en déduit que

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0;1].}$$

3. *Soit $x \in [0;1]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor / 2^{n+1}$ et $b_n = (\lfloor 2^{n+1} x \rfloor + 1)/2^{n+1}$.*

a) *Démontrer que les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ sont convergentes. Quelle est leur limite ?*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^{n+1}x - 1 < \lfloor 2^{n+1} x \rfloor \leqslant 2^{n+1} x$ donc

$$x - \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant a_n \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x \leqslant b_n \leqslant x + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = x.}$$

b) *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

α] *Démontrer que $\forall k > n$, $\mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = 0$.*

Soit $k > n$. Comme $b_n - a_n = 1/2^{n+1}$, on a $2^k b_n - 2^k a_n = 2^{k-n-1}$, ce qui donne $2^k b_n - 2^k a_n \in \mathbb{N}$ puisque $k - n - 1 \geqslant 0$. Mézalors, comme d est 1-périodique, on a $\mathrm{d}(2^k b_n) = \mathrm{d}(2^k a_n)$. Donc

$$\boxed{\forall k > n, \qquad \mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = 0.}$$

β] *Démontrer que $\forall k \in [\![0;n]\!], \ \exists \delta_k \in \{-1;1\}, \ \mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = \delta_k 2^{k-n-1}$.*

Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Démontrons qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $2^{k+1}a_n$ et $2^{k+1}b_n$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{k+1}a_n < m < 2^{k+1}b_n$. En multipliant cet encadrement par 2^{n-k}, on obtient $2^{n+1}a_n < 2^{n-k-1}m < 2^{n+1}b_n$. Or $2^{n+1}b_n = 2^{n+1}a_n + 1$, donc $2^{n-k-1}m$ se retrouve être un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : c'est absurde ! On en conclut qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $2^{k+1}a_n$ et $2^{k+1}b_n$.

Après division par 2, on en déduit que les entiers $2^k a_n$ et $2^k b_n$ appartiennent à un même intervalle qui est ou bien de la forme $[p; p+1/2]$ ou bien de la forme $[p-1/2; p]$ où $p \in \mathbb{N}$.
Si l'on est dans le premier cas, c'est-à-dire si $2^k a_n$ et $2^k b_n$ sont dans $[p-1/2; p]$, alors $\mathrm{d}(2^k a_n) = p - 2^k a_n$ et $\mathrm{d}(2^k b_n) = p - 2^k b_n$, d'où $\mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = 2^k(a_n - b_n) = -2^{k-n-1}$.
Si l'on est dans le second cas, c'est-à-dire si $2^k a_n$ et $2^k b_n$ sont dans $[p; p+1/2]$, alors $\mathrm{d}(2^k a_n) = 2^k a_n - p$ et $\mathrm{d}(2^k b_n) = 2^k b_n - p$, d'où $\mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = 2^k(b_n - a_n) = +2^{k-n-1}$.
En conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \exists \delta_k \in \{-1;1\}, \qquad \mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = \delta_k 2^{k-n-1}.}$$

γ] *Démontrer que* $\big(g(b_n) - g(a_n)\big)/(b_n - a_n)$ *est un entier de même parité que* $n+1$.

On a

$$g(b_n) - g(a_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n)}{2^k},$$

ce qui donne, grace aux résultats des deux questions précédentes,

$$g(b_n) - g(a_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_k 2^{k-n-1}}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \delta_k.$$

Par ailleurs, on a

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n+1}},$$

donc

$$\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n} \delta_k.$$

Cela démontre que

$$\boxed{\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} \text{ est un entier relatif.}}$$

De plus, comme $\forall k \in [\![0; n]\!]\,,\ \delta_k = \pm 1 \equiv 1\ [2]$, on a

$$\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \equiv \sum_{k=0}^{n} 1 \equiv n+1 \quad [2],$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} \text{ est de même parité que } n+1.}$$

c) *Démontrer que* g *n'est pas dérivable en* x.

Raisonnons par l'absurde en supposant que g est dérivable en x. Alors g admet un développement limité à l'ordre 1 en x donné par

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t - x) + \mathscr{O}_{t \to x}(t - x).$$

Comme $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ tendent vers x, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} g(b_n) & = & g(x) + g'(x)(b_n - x) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(b_n - x) \\ g(a_n) & = & g(x) + g'(x)(a_n - x) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(a_n - x) \end{array}$$

ce qui donne, après soustraction,

$$g(b_n) - g(a_n) = g'(x)(b_n - a_n) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(a_n - x) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(b_n - x).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant x - a_n \leqslant b_n - a_n \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant b_n - x \leqslant b_n - a_n,$$

donc

$$g(b_n) - g(a_n) = g'(x)(b_n - a_n) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(b_n - a_n).$$

Après division par $b_n - a_n$, on obtient

$$\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = g'(x) + \mathscr{O}_{n \to +\infty}(1),$$

ce qui démontre que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} = g'(x).$$

Or, d'après la question précédente, $\left(\dfrac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'entiers qui est non constante (puisque la parité de ses termes changent). Comme les seules suites d'entiers qui convergent sont celles qui sont stationnaires (résultat classique), on aboutit à une absurdité ! En conclusion, g n'est pas dérivable en x.

Comme x est quelconque, on en conclut que

$$\boxed{g \text{ n'est dérivable en aucun point de } [0; 1].}$$