THÉORÈME DE RIEMANN

On énonce et on démontre le théorème de réarrangement des séries semi-convergentes.

Théorème 1

Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ une série réelle semi-convergente. Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_{\sigma(k)}$ vaut ℓ.

■ On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. Le cas de la divergence vers $\pm\infty$ est laissé en exercice.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sépare la partie positive de u_k de sa partie négative, en posant

$$a_k = \max\{0; u_k\} = \frac{u_k + |u_k|}{2} \qquad \text{et} \qquad b_k = \min\{u_k; 0\} = \frac{u_k - |u_k|}{2}$$

de sorte que

$$u_k = \begin{cases} a_k & \text{si } u_k \geqslant 0 \\ b_k & \text{si } u_k \leqslant 0. \end{cases}$$

En particulier, on remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_k \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad b_k \leqslant 0.$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est semi-convergente (c'est-à-dire $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge et $\sum_{k\geqslant 0} |u_k|$ diverge), on sait que

$$(*) \begin{cases} \text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geqslant 0} \text{ tend en croissant vers } +\infty \\ \text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\geqslant 0} \text{ tend en décroissant vers } -\infty. \end{cases}$$

On construit une permutation σ de $\mathbb{N}$ de la façon suivante. On commence à sommer les termes positifs ou nuls (dans l'ordre et sans en omettre) jusqu'à dépasser ℓ (c'est possible d'après $(*)$). Puis on somme des termes strictement négatifs (toujours dans l'ordre et sans en omettre) jusqu'à ce que la somme partielle soit strictement inférieure à ℓ (là encore, c'est possible d'après $(*)$). Puis on itère le procédé, en sommant les termes positifs à partir de là où on s'était arrêté, puis les termes négatifs, etc. On construit bien ainsi une permutation σ de $\mathbb{N}$.

Notons $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles obtenues à chaque fin de sommation de termes positifs, et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ celle des sommes partielles à chaque fin de sommation de termes négatifs. La suite complète des sommes partielles croît jusqu'à x_0, puis décroît jusqu'à y_0, puis croît jusqu'à x_1, etc. Pour démontrer qu'elle converge vers ℓ, il suffit donc de justifier que les deux sous-suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers ℓ.

Si u_{k_n} désigne le dernier terme de la somme partielle x_n, la construction effectuée ci-dessus nous dit que $x_n - u_{k_n} \leqslant \ell < x_n$, c'est-à-dire

$$0 < x_n - \ell \leqslant u_{k_n}.$$

Comme la suite des indices $(k_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante, elle tend vers l'infini. Comme la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, cela implique que $(u_{k_n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Le théorème des gendarmes nous dit alors que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

De même, on démontre que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell.$$

Cela achève la preuve. ■