MÉTHODE D'EULER

L'objet de cette fiche est de vous présenter la méthode d'Euler de résolution approchée des équations différentielles.

A. Principe de la méthode

Résoudre, de manière exacte, une équation différentielle est un problème généralement très difficile. Ainsi, même dans le cadre simple d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, il faut savoir déterminer deux primitives (une pour les solutions homogènes et une autre pour la méthode de la variation de la constante) et il arrive souvent qu'on ne puisse pas exprimer ces primitives à l'aide des fonctions usuelles. À plus forte raison, lorsque l'équation n'est pas linéaire, on ne peut généralement pas espérer une résolution formelle de l'équation.

On peut alors chercher une approximation numérique des solutions en sustituant aux techniques de résolution exacte des méthodes de résolution approchée. La méthode d'Euler (vers 1750) est la plus simple et la plus intuitive de ces méthodes. Elle s'applique aux équations d'ordre 1.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(t, y(t)\big) & (E) \\ y(t_0) = y_0 & (C) \end{cases}$$

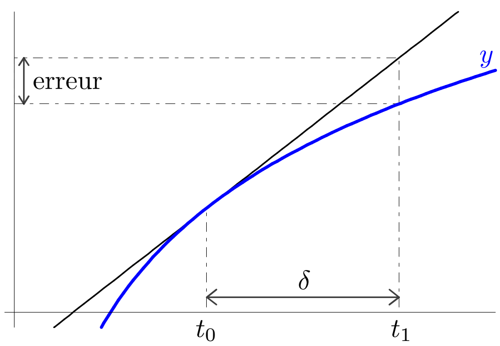
où $F : I \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables, t_0 est un point de l'intervalle I et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz (difficile) assure que, sous certaines hypothèses raisonnables, ce problème de Cauchy possède une unique solution. Dans la suite, nous supposerons ces conditions satisfaites et nous désignerons par y l'unique solution, dont l'existence est ainsi justifiée.

Exemples :

- Pour l'équation différentielle résoluble (E) : $y' + b(t)y = c(t)$, on a (E) : $y' = F\big(t, y(t)\big)$ avec $F(t,y) = -b(t)y + c(t)$. Dans ce cas, le cours nous assure bien de l'existence et de l'unicité d'une solution satisfaisant la condition (C).

L'idée de la méthode d'Euler est la suivante : après avoir choisi un pas $\delta > 0$, on part de t_0 et on avance pas à pas en évaluant la solution aux points $t_k = t_0 + k\delta$ (où $k \in \mathbb{N}^*$) par approximation affine de la courbe intégrale en chaque t_k.



Autrement dit, si δ est suffisamment petit, on peut considérer que $y(t_{k+1})$ est approximativement égale à $y(t_k) + \delta y'(t_k)$, ce qui revient à confondre sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ la courbe de la solution avec sa tangente en t_k.

En tenant compte de l'équation différentielle, on prend donc comme valeur approchée de $y(t_{k+1})$ la quantité $y(t_k) + \delta f\big(t_k, y(t_k)\big)$.

B. Schéma numérique d'Euler

Intuitivement, un schéma numérique est la donnée d'une suite qui permet de résoudre un problème d'approximation. Un tel schéma peut être explicite lorsque chaque terme de la suite peut être calculé à l'aide des précédents ou implicite lorsque le terme général de la suite est défini en fonction de lui-même.

Définition 1

Soient $F : I \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables, t_0 est un point de l'intervalle I et $y_0 \in \mathbb{K}$. Au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(t, y(t)\big) & (E) \\ y(t_0) = y_0 & (C) \end{cases}$$

on associe la suite $(y_k)_{k \geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} t_k = t_0 + k\delta \\ y_{k+1} = y_k + \delta F(t_k, y_k) \end{cases}$$

C'est le schéma explicite d'Euler.

On peut montrer que y_k est une bonne approximation de $y(t_k)$. En particulier, la ligne polygonale reliant les points de coordonnées (t_k, y_k) approche la courbe intégrale solution.

C. Un exemple

On considère le problème de Cauchy sur $I = [0, 2]$ défini par

$$(E) : \; y' + y = 10\,\mathrm{e}^{-t}\cos(10t) \qquad \text{et} \qquad (C)\; y(0) = 0$$

dont la solution est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(10t).$$

La suite $(y_k)_{k \geqslant 0}$ du schéma d'Euler de pas δ est alors définie par

$$y_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad y_{k+1} = y_k + \delta\big(-y_k + 10\,\mathrm{e}^{-k\delta}\cos(10k\delta)\big)$$

En choisissant $\delta = 1/20$, on obtient les graphes de la solution exacte (en pointillés) et de la solution approchée (en trait plein).