ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Exercice 1. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un endomorphisme est orthogonal si, et seulement si, il conserve l'orthogonalité.
2. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.
3. Les projections orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.
4. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{-1;+1\}$ par l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. Une matrice triangulaire orthogonale est diagonale.

Exercice 2. [$\star$]

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Soit $u : E \longrightarrow E$ une application qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E,\ \ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Démontrer que $u \in \mathscr{O}(E)$.
2. Obtient-on le même résultat si $u : E \longrightarrow E$ conserve la norme : $\forall x \in E,\ \ \|u(x)\| = \|x\|$?

Exercice 3. [$\star$]

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$. Que dire alors des endomorphismes $u\big|_F^F$ et $u\big|_{F^\perp}^{F^\perp}$?

Exercice 4. [$\circ$]

Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. On note $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur d'Attila (envahi par les 1). À l'aide de la quantité ${}^tUAU$, démontrer que la somme de tous les coefficients de A appartient à $[-n;n]$.

Exercice 5. [$\bigstar$] (Inégalité d'Hadamard)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. À l'aide d'une orthonormalisation, démontrer que

$$|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|.$$

Exercice 6. [$\circ$]

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire et de son orientation canoniques. Décrire géométriquement les applications linéaires a, b, c canoniquement associées aux matrices :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. [$\circ$]

Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. En cours, nous avons vu que la composée de deux réflexions de E_2 est une rotation de E_2. Réciproquement, démontrer que toute rotation de E_2 est la composée de deux réflexions de E_2 dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Exercice 8. [$\star$]

Soient $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2, r une rotation et s une réflexion.

1. Reconnaître les isométries rsr et srs.
2. À quelle condition r et s commutent ?