

# Problème

## Probabilités sur le groupe symétrique

Dans tout ce texte,  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{S}_n$  est l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ ; on rappelle que la loi  $\circ$  fait de  $\mathcal{S}_n$  un groupe.

Si  $\sigma$  est dans  $\mathcal{S}_n$  et  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , soient  $c_k(\sigma)$  le nombre de  $k$ -cycles dans la décomposition canonique de  $\sigma$ ,  $k_n(\sigma)$  le nombre total de cycles dans la décomposition canonique de  $\sigma$ . On a donc

$$k_n(\sigma) = \sum_{k=1}^n c_k(\sigma).$$

Le  $n$ -uplet  $(c_1(\sigma), \dots, c_n(\sigma))$  est le *type cyclique* de  $\sigma$ .

On note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On rappelle qu'il existe un nombre réel  $\gamma$  tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Le but du problème est d'étudier, d'un point de vue probabiliste, certaines fonctions sur  $\mathcal{S}_n$ . Dans ce but, on considère une variable aléatoire  $\sigma_n$  suivant la loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ . On pose

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad C_n^k = c_k(\sigma_n) \quad K_n = \sum_{k=1}^n C_n^k.$$

### I. Quelques calculs élémentaires

Les questions 1 et 2 sont deux à deux indépendantes.

1. a) Soit  $A$  une partie de  $\{1, \dots, n\}$  de cardinal  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Calculer

$$P(\sigma_n(A) = A).$$

- b) Pour  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  soit  $n_k(\sigma)$  le nombre de parties de cardinal  $k$  stables par  $\sigma$ . Soit  $N_n^k$  la variable aléatoire  $n_k(\sigma_n)$ . Calculer

$$E(N_n^k).$$

- c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de parties de  $\{1, \dots, n\}$  stables par  $\sigma_n$ .

2. Pour  $m$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , soit  $A_m^n$  l'événement «  $\sigma_n$  est un cycle de longueur  $m$  », c'est-à-dire :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad C_n^k = \delta_{k,m}.$$

a) Soit  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  fixé. Pour  $n \geq m$ , calculer  $P(A_m^n)$ . En donner un équivalent lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Soit  $\ell$  dans  $\mathbb{N}$  fixé. Donner un équivalent de  $P(A_{n-\ell}^n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

c) Donner un équivalent, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $P(\bigcup_{m=1}^n A_m^n)$ .

## II. Nombre de points fixes

3. a) Soient  $i_1 < \dots < i_k$  des éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . Calculer

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k (\sigma_n(i_j) = i_j)\right).$$

b) En utilisant la formule du crible, montrer

$$P(C_n^1 = 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Quelle est la limite de cette quantité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

c) On fixe  $j$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer, que, pour  $n \geq j$ ,

$$P(C_n^1 = j) = \frac{P(C_{n-j}^1 = 0)}{j!}.$$

Déterminer la limite de la suite  $(P(C_n^1 = j))_{n \geq 1}$ . Qu'en déduit-on ?

4. Calculer  $E(C_n^1)$  et  $V(C_n^1)$ . On pourra écrire  $C_n^1$  comme une somme de variables de Bernoulli dont on calculera les covariances.

## III. Loi faible pour le nombre de cycles

5. a) Démontrer l'égalité de polynômes

$$\sum_{\sigma \in S_n} X^{k_n(\sigma)} = \prod_{k=0}^{n-1} (X+k).$$

b) Déduire de a) la fonction génératrice  $G_{K_n}$  de  $K_n$  et les formules

$$E(K_n) = H_n, \quad V(K_n) = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

6. a) Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P(|K_n - E(K_n)| \geq \varepsilon E(K_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right),$$

b) Si  $\varepsilon > 0$ , montrer que<sup>1</sup>

$$P\left(\left|\frac{K_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

#### IV. Loi asymptotique des cycles courts

##### A. Préliminaire analytique

Les questions 7 et 8 sont indépendantes.

7. Soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. On suppose que la série entière  $\sum b_n x^n$  a un rayon de convergence  $R > 1$ . Pour  $x$  dans  $] -R, R[$  soit

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Pour  $x$  dans  $] -1, 1[$ , soit

$$f(x) = \frac{g(x)}{1-x}.$$

Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . On pose

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer  $a_n$  en fonction des  $b_k$ . En déduire

$$a_n \longrightarrow g(1).$$

8. Soient  $r$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $u$  et  $w$  deux fonctions de classe  $C^\infty$  de  $] -r, r[$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $p$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $v$  la fonction définie sur  $] -r, r[$  par

$$\forall x \in ] -r, r[, \quad v(x) = u(x) + x^{p+1} w(x).$$

Démontrer que, si  $U = \exp(u)$ ,  $V = \exp(v)$ , alors

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad V^{(i)}(0) = U^{(i)}(0).$$

---

<sup>1</sup>On peut démontrer beaucoup mieux. Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , le théorème de Feller-Goncharov assure que :

$$P\left(K_n - \ln(n) \leq x\sqrt{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

## B. Description poissonienne de la distribution des types cycliques

9. Soit  $(c_1, \dots, c_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$  avec

$$\sum_{i=1}^n i c_i = n.$$

Démontrer que l'ensemble des  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  telles que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad c_k(\sigma) = c_k$$

a pour cardinal

$$n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{i^{c_i} c_i!}.$$

Dans la suite,  $(Z_j)_{j \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout  $j$ ,  $Z_j$  suit la loi de Poisson de paramètre  $1/j$ .

10. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $(c_1, \dots, c_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$ , établir

$$P(C_n^1 = c_1, \dots, C_n^n = c_n) = P \left( Z_1 = c_1, \dots, Z_n = c_n \middle| \sum_{j=1}^n j Z_j = n \right).$$

Ainsi, la loi du vecteur aléatoire  $(C_n^1, \dots, C_n^n)$  est la loi du vecteur aléatoire  $(Z_1, \dots, Z_n)$  conditionnellement à l'événement

$$\left( \sum_{j=1}^n j Z_j = n \right).$$

## C. Convergence en loi du vecteur $(C_n^1, \dots, C_n^k)$

Pour  $\ell$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$  avec  $\ell \leq m$ , soit

$$T_{\ell, m} = \sum_{j=\ell+1}^m j Z_j,$$

avec la convention de somme vide :

$$T_{m, m} = 0.$$

Soient  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $(c_1, \dots, c_k)$  dans  $\mathbb{N}^k$ ,  $c = \sum_{i=1}^k i c_i$ .

Les questions 11 et 12 sont indépendantes.

Dans la suite,  $k$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ .

11. a) Soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Rappeler la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

b) Soit  $n \geq k$  un entier. Montrer que la fonction génératrice de  $T_{k,n}$  est donnée par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad G_{T_{k,n}}(x) = \exp(H_k - H_n) \exp\left(\sum_{j=k+1}^n \frac{x^j}{j}\right).$$

12. Soit  $n \geq k$  un entier. Montrer

$$P(C_n^1 = c_1, \dots, C_n^k = c_k) = P(Z_1 = c_1, \dots, Z_k = c_k) \frac{P(T_{k,n} = n - c)}{P(T_{0,n} = n)}.$$

13. a) Soient  $n \geq k$  un entier,  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Montrer que le coefficient de  $x^i$  dans le développement en série entière de  $G_{T_{k,n}}$  est celui de  $x^i$  dans le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{\exp(H_k - H_n)}{1-x} \exp\left(-\sum_{j=1}^k \frac{x^j}{j}\right).$$

b) Si  $\ell$  est un élément de  $\mathbb{N}$ , donner un équivalent de  $P(T_{k,n} = n - \ell)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

14. Conclure que la suite de vecteurs aléatoires

$$(C_n^1, \dots, C_n^k)$$

converge en loi et identifier la loi limite. Retrouver le résultat final de la question 3.

*Le résultat de convergence en loi de la dernière question est dû à Goncharov (1944).*

- Chapitre 1. Quelques calculs élémentaires
- Les questions 1 et 2 sont dans deux indépendances
- a) Soit  $A$  une partie de  $\{1, \dots, n\}$  de cardinalité  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ). Calculer
- $$P(A \cap \{4\}) = \alpha.$$
- b) Pour  $k$  dans  $\{0, 1, \dots, n\}$  soit  $\mu_k$  le nombre de parties de cardinal  $k$  stables par  $\sigma$ . Soit  $N_k$  la variable aléatoire  $\#\{\sigma \in S_n \text{ stable}\}$
- $$E(N_k) = \beta.$$
- c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de parties de  $S_n$  qui sont stables par  $\sigma$ .