Cours de mathématiques 3ème Prépa Métiers

T.MOUNIER

Année 2019/2020

Table des matières

Chapitre 1

Proportionnalité

1.1 Définition et méthodes

Deux grandeurs sont **proportionnelles** l'une par rapport à l'autre si on peut retrouver les valeurs de l'une en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre. Ce nombre est le **coefficient de proportionnalité**.

Pour vérifier si deux grandeurs sont proportionnelles plusieurs méthodes possibles :

Avec un tableau

On place les différentes grandeurs dans un tableau avec deux lignes :

x_1	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3

On calcule ensuite les trois rapports :

$$\frac{y_1}{x_1} \qquad \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{y_3}{x_3}$$

Si les trois rapports sont égaux alors les grandeurs sont proportionnelles

Exemple :

4	6	8
2	3	4

On calcule ensuite les trois rapports :

$$\frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{6}{3} = 2 \qquad \frac{8}{4} = 2$$

Les trois rapports sont égaux à 2, le tableau est un tableau de proportionnalité.

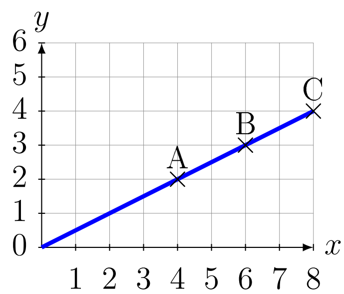
Avec un graphique

On place les couples de valeur dans un repère et on essaye de tracer une droite qui passe par les points.

A	B	C
x_A	x_B	x_C
y_A	y_B	y_C

Si la droite formée passe par tous les points **et** par l'origine du repère ; alors le tableau est un tableau de proportionnalité

	A	B	C
x	4	6	8
y	2	3	4



Les points sont alignés, la droite passe par 0 $\rightarrow$ c'est un tableau de proportionnalité.

1.2 Applications

Parmi les (nombreuses) applications de la proportionnalité on peut citer :

- Les conversion d'unité
- Les calculs de pourcentages
- La quatrième proportionnelle (produit en croix)

La méthode de la quatrième proportionnelle :

Sur deux couples de valeurs, l'une des 4 est manquante, on va se servir d'une règle de proportionnalité pour retrouver la dernière.

Poids (g)	100	150	200	300	350
Prix (euro)	2	3	4	x	7

Le calcul à écrire est : $x = 4 \times 300 \div 200 = 6$

Cette technique sert énormément ! (On peut tracer un tableau tout simple de 4 cases.)

Application aux pourcentages :

Un article est vendu HT (hors taxe) à un prix de 254e. Comme tout produit en France il est soumis à une taxe sur la valeur ajoutée (TVA) qui dépend de sa catégorie. Ici la TVA est fixée à 20%.
Quel sera le nouveau prix de l'objet ?

254	100%
P_{TTC}	120%

$$P_{TTC} = 120 \times 254 \div 100 = 304.8\ €$$

Note : Sur cette page le symbole $\div$ a été utilisé mais on préfèrera écrire les calculs sous la forme d'une fraction en seconde.

1.3 Exercices

EXERCICE 1.1. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifier la réponse en calculant les rapports.

x	3	1.5	2.1	6.5
y	2.1	1.05	1.47	4.55

EXERCICE 1.2. Compléter le tableau suivant pour en faire un tableau de proportionnalité :

x	2	1		
y	7.2		32.4	55.8

EXERCICE 1.3. Le cout de fonctionnement d'une machine est proportionnel au temps d'utilisation.
Compléter le tableau suivant en mettant les temps au format xh $y$min.

Prix (€)	112	98		
Temps	2h		4h30	3h30

EXERCICE 1.4. Un supermarché vend du soda par pack de 6 ou 24 canettes. Le pack de 6 est à un tarif de 2.19€ et celui de 24 est à 8.39€.

a. Calculer le prix unitaire des canettes pour chaque pack.
b. Les prix sont ils proportionnels en passant de 6 à 24 canettes ? Justifier la réponse.

EXERCICE 1.5. Le viaduc de Millau mesure 2450m de long. Sur une carte il est représenté par un trait de $4.9cm$.
Déterminer l'échelle (ou rapport de réduction) de cette carte.

EXERCICE 1.6. Un automobiliste roule à vitesse constante et parcourt 180km en $1h30$.

- Quelle distance roule t'il en $2h30$?
- Combien de temps lui faut-il pour rouler 90km ?

EXERCICE 1.7. Quatre employés d'une société ont travaillé sur un même projet. Une prime est donnée à l'équipe pour un montant de 2400€ et doit être partagée proportionnellement au temps passé sur le projet.
Alex a travaillé 58h, Bella 17h, Céline 19h et enfin Dris 26h.
Calculer la part de chacun.

EXERCICE 1.8. Monsieur Machin achète une imprimante chez son fournisseur. Le prix catalogue est de 115€. Le fournisseur lui annonce une légère augmentation de 10% de ce prix mais monsieur Machin étant bon client il lui fait une remise de 10% sur le nouveau prix.
Combien va t'il payer cette imprimante ?

CORRIGE 1.1 $\dfrac{2.1}{3} = 0.7$, $\dfrac{1.05}{1.5} = 0.7$, $\dfrac{1.47}{2.1} = 0.7$ et $\dfrac{4.55}{6.5} = 0.7$. Les rapports sont égaux, c'est un tableau de P.

CORRIGE 1.2 On commence par calculer le rapport de proportionnalité pour passer de la ligne d'en haut à celle d'en bas : $a = \dfrac{7.2}{2} = 3.6$. Pour passer du haut en bas on multiplie par a et pour passer de bas en haut on divise par a.

x	2	1	9	15.5
y	7.2	3.6	32.4	55.8

CORRIGE 1.3 Attention aux minutes dans cet exercice ... 30 min = 0.5h On calcule par exemple avec le produit en croix : $\dfrac{2 \times 98}{112} = 1.75h$. Ce qui donne 1h45 pour 98€. Et ainsi de suite ...

Prix (€)	112	98	252	196
Temps	2h	1h45	4h30	3h30

CORRIGE 1.4 a. Pour le pack de 6 : $\dfrac{2.19}{6} = 0.365$€. Pour le pack de 24 : $\dfrac{8.39}{24} = 0.350$€.
b. Si les tarifs étaient proportionnels, alors le prix unitaire serait le même, donc non.

CORRIGE 1.5 On effectue une proportionnalité

1	2450
x	4.9

$x = 0.049 \times 1 \div 2450 = 0.00002$. Souvent on exprimera l'échelle comme un nombre fractionnaire dans ce cas on prend l'inverse : $e = \dfrac{1}{0.00002} = 50000$ Ce plan est à l'échelle 1 : 50000 (un cm sur le dessin correspond à 50 000cm dans la réalité)

CORRIGE 1.6 On peut utiliser la technique du retour à l'unité (pour varier) et dire qu'en $1h$ il roule $120km$. (on découpe une heure et demi en trois et on prend deux parts). Ce qui donne une vitesse de $120km/h$. De là, on déduit qu'en $2h30$ il roule $300km$ et qu'il lui faut 45 minutes pour rouler $90km$.

CORRIGE 1.7 On calcule le total d'heures travaillées et après on fait le ratio : $N = 58 + 17 + 19 + 26 = 120$.

$$P_{Alex} = \frac{58 \times 100}{120} \approx 48\% \text{ et donc } 2400 \times 0.48 = 1152€$$
$$P_{Bella} = \frac{17 \times 100}{120} \approx 14\% \text{ et donc } 2400 \times 0.14 = 336€$$
$$P_{Cline} = \frac{19 \times 100}{120} \approx 16\% \text{ et donc } 2400 \times 0.16 = 384€$$
$$P_{Dris} = \frac{26 \times 100}{120} \approx 22\% \text{ et donc } 2400 \times 0.22 = 528€$$

CORRIGE 1.8 Attention au piège ! $115 \times 1.10 = 126.5$€ et ensuite $126.5 \times 0.90113.85$€.
Ne pas dire que l'opération est transparente

Rappels de Statistiques

Une enquête statistique est l'étude d'un ou plusieurs **caractères** au sein d'une **population**.

Définitions

Un caractère mesurable, pouvant être compté, est dit **quantitatif**. Autrement il est **qualitatif**.
Les données peuvent être représentées :

- De manière brute (on écrit tout)
- Dans un tableau
- Sous forme d'un graphique

On appelle **effectif total** noté N le nombre de personnes interrogées.

On interroge des élèves concernant leur sport préféré :

Sport	Effectif
Boxe	1
Football	5
Handball	3
Tennis	2
Badminton	1

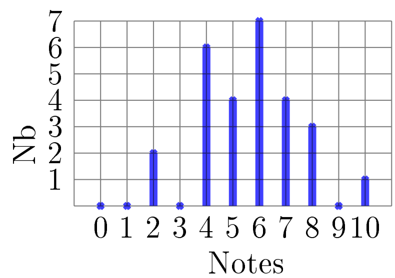
La population est : la classe de 14 élèves. Le caractère étudié est : Le sport préféré
La réponse donnée par un élève est un MOT donc le caractère est QUALITATIF.
On peut calculer l'effectif total : $N = 1 + 5 + 3 + 2 + 1 = 12$.

2.1 Diagrammes

2.1.1 Diagramme en barres (ou en bâtons)

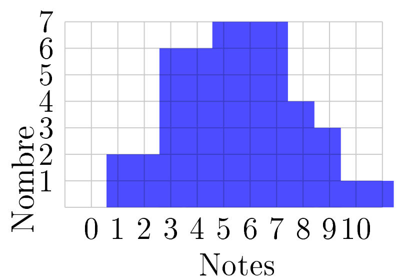
On trace un bâton de hauteur l'effectif.

Le diagramme est ici tracé à la verticale mais il peut l'être à l'horizontale.



2.1.2 Histogramme

Un histogramme s'utilise principalement pour des caractères quantitatifs continus : c'est à dire qu'il y a un lien entre les différentes valeurs pouvant être obtenues.
En reprenant l'exemple des notes on peut tracer, au lieu de barres fines, des rectangles (de même largeur) :



2.1.3 Diagramme à secteurs circulaires

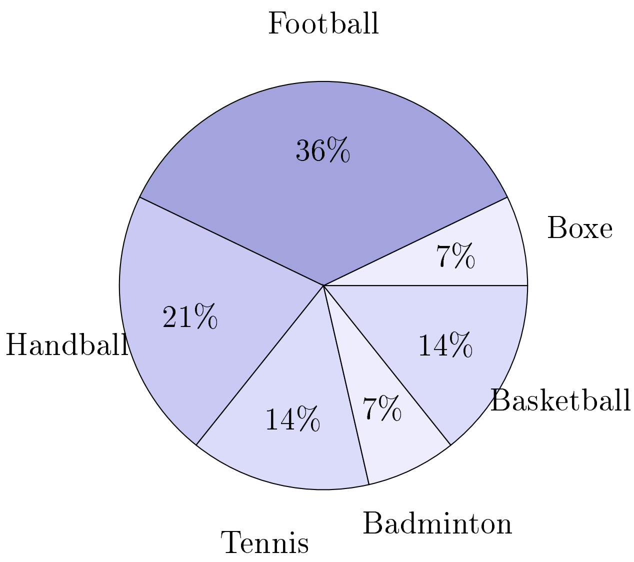
Pour ce type de diagramme reprenons l'exemple de la classe et des sports page 1 :

Sport	Boxe	Football	Handball	Tennis	Badminton	Basketball
Effectif	1	5	3	2	1	2
Angle	25.7	128.6	77.1	51.4	25.7	51.4

On va représenter sur un cercle la proportion de chaque sport exprimé en pourcentage. Pour cela on doit diviser le cercle en secteurs en calculant un angle pour chaque secteur :

$$\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360$$

α_i est l'angle du secteur en degrés.
n_i est l'effectif du secteur et N l'effectif total de la série.Ici $N = 14$.



2.2 Moyenne médiane

Moyenne

La moyenne d'une série statistique se calcule en additionnant toutes les valeurs d'une série et en divisant par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N}$$

Exemple :
Avec trois valeurs 4 - 16 - 11 :

$$\bar{x} = \frac{4 + 16 + 11}{3} = 10.3$$

Médiane

La médiane d'une série représente une valeur qui sépare la série en deux groupes de même effectif. Cela peut être une valeur de la série ou non.
Pour la déterminer il faut connaître l'effectif total de la série et couper en deux. S'il y a un nombre pair de données, on prend la moyenne des deux valeurs centrales. (Voir exemple)

Exemple :
Avec trois valeurs 4 - 1|1 - 16 :

$$Med = 11$$

Avec quatre valeurs : 4 - 10 -|- 12 - 16 :

$$Med = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

2.3 Exercices

EXERCICE 2.1. Activité : Notes à un devoir
Les notes du premier devoir de maths d'une classe de lycée sont :

$13-5-4-12-17-6-4-8-18-14-15-7-20-6-7-8-9-5-16-15-8-7-16-15-20$

L'arrangement avec les parents était pour un des élèves de la classe d'obtenir une note $\geqslant 10$.
En rentrant il dit à son père : "La moyenne de la classe est 11, j'ai pile poil autant de gens devant moi que derrière moi !".
Son père valide : "Tu as eu la moyenne, très bien, je te laisse ton portable !".

Selon vous, l'élève aurait-il du conserver le téléphone ? Expliquer.

EXERCICE 2.2. Pour les caractères suivants dire s'ils sont qualitatifs ou quantitatifs en justifiant.

1. L'âge des joueurs d'une équipe
2. La couleur de cheveux des garçons d'une classe
3. Le nombre de frères et soeurs
4. La taille de la pointure des élèves
5. L'équipe de sport préférée
6. La matière préférée à l'école.

EXERCICE 2.3. Une enquête statistique a été menée sur la couleur de T shirt de quelques personnes et les résultats sont : blanc - bleu - rouge - rose - rose - noir - noir - noir - blanc - blanc - vert - vert - rouge - rose - noir - noir - blanc - noir - vert - noir.

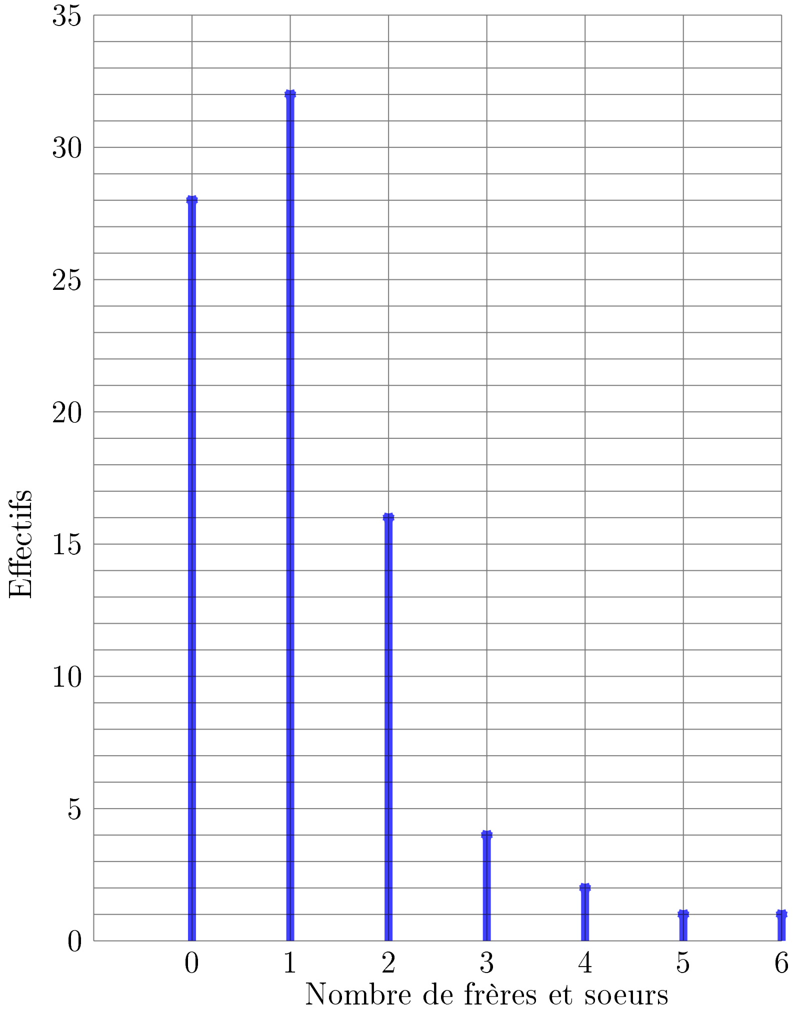
1. Calculer l'effectif total de cette série.
2. Dire en justifiant si le caractère est qualitatif ou quantitatif.
3. Trier les données dans un tableau.
4. Représenter les données par un diagramme en bâtons.
5. Donner la couleur la plus représentée.

EXERCICE 2.4. On a relevé la couleur des cheveux de personnes présentes dans une salle et on a compilé les résultats :

Couleur	Blonds	Roux	Bruns	Châtains	Blancs
Effectif	4	2	9	4	1

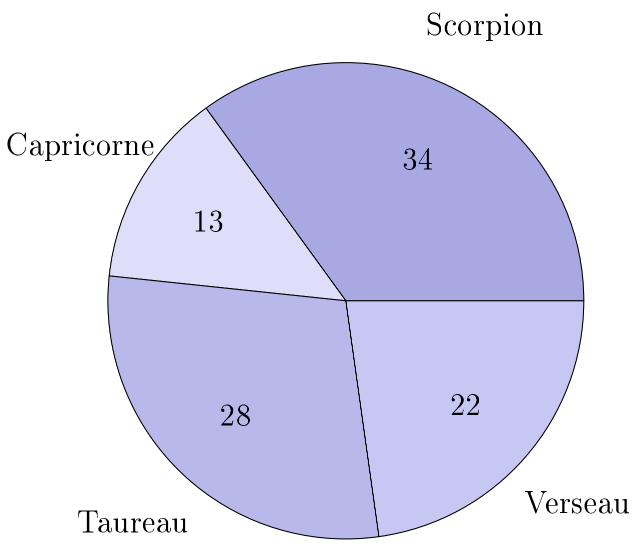
1. Donner le nombre de personnes étudiées (on justifiera par un calcul).
2. Représenter la série sur un diagramme en bâtons.
3. Donner la couleur la plus représentée.
4. Calculer le pourcentage que cela se représente par rapport au total.

EXERCICE 2.5. Le diagramme suivant représente le nombre de frères et sœurs des élèves d'un niveau au collège.



Transformer ce diagramme en tableau de valeurs.

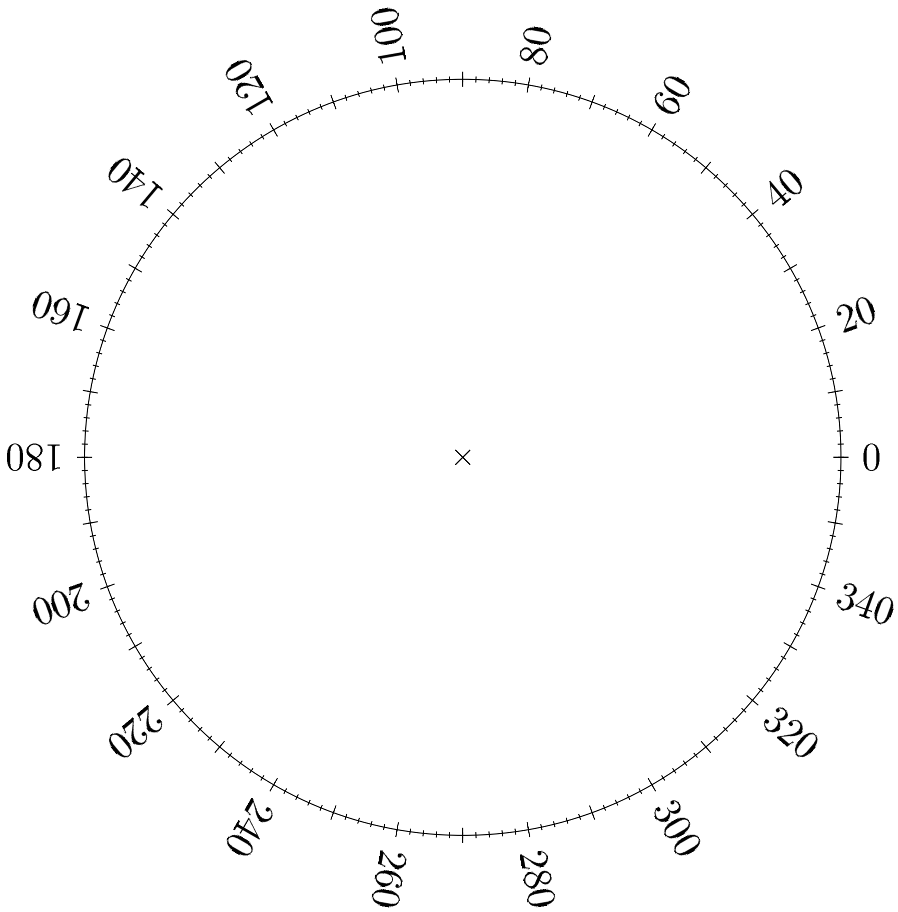
EXERCICE 2.6. On donne le diagramme à secteurs circulaire suivant et on demande de représenter la série sous la forme d'un tableau.



EXERCICE 2.7. On a étudié la couleur des T shirt de quelques personnes.

Couleur	Blanc	Rouge	Bleu	Vert
Effectif	25	10	17	11
Angle	143			

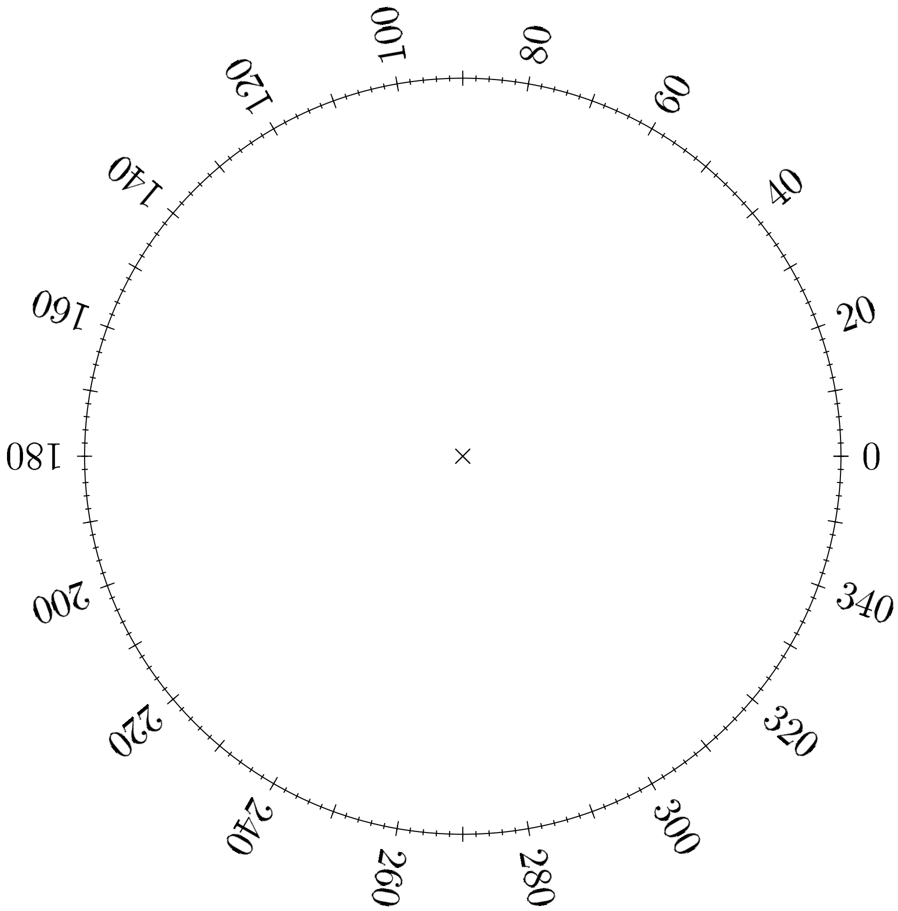
1. Calculer les angles manquants en vous aidant de la formule $\alpha_i = \dfrac{n_i}{N} \times 360$
2. Réaliser un diagramme circulaire représentant la série. On pourra s'aider du cercle ci-après.



EXERCICE 2.8. Un prof de maths a mené l'enquête dans toutes ses classes concernant le temps de transport pour venir au lycée. Il a compilé les résultats dans le tableau :

Temps	$[0;15[$	$[15;30[$	$[30;45[$	$[45;60[$
Effectif	9	18	6	17
Angle				

1. Calculer l'effectif total.
2. On va représenter les angles pour tracer un diagramme circulaire dans la troisième ligne du tableau. Remplir cette ligne en détaillant les calculs.
3. Représenter la série sous forme d'un diagramme circulaire. (page suivante)
4. Conclure sur le temps de transport des élèves.



EXERCICE 2.9. Lors d'un week end de contrôles, une brigade de gendarmerie a relevé sur une autoroute les vitesses présentées dans le tableau.

1. Calculer l'effectif total de la série.
2. Donner le caractère étudié dans cette série.
3. Ce caractère est-il qualitatif ou quantitatif ? Expliquez la réponse.
4. Représenter la série par un histogramme.
5. La vitesse maximale en France sur autoroute est de $130 km/h$. Donner le nombre de véhicules en infraction

Vitesse (km/h)	**Effectif**
$[70; 90[$	15
$[90; 110[$	38
$[110; 130[$	93
$[130; 150[$	86
$[150; 170[$	21
$[170; 190[$	2

CORRIGE 2.1 La moyenne ne sert à rien ici. La médiane est l'indicateur qui place l'élève au centre. On doit remettre les notes dans l'ordre et les compter.
Il y a 25 notes, la médiane est donc la 13ème. $4-4-5-5-6-6-7-7-7-8-8-8-9-12-13-14-15-15-15-16-16-17-18-20-20$

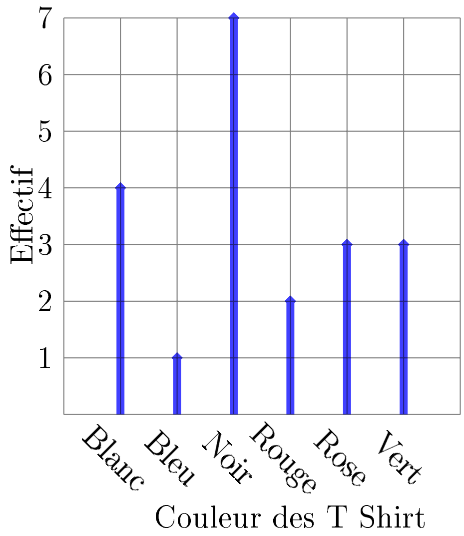
CORRIGE 2.2 Rappel : quantitatif si la réponse est un nombre, une quantité, qualitatif si la réponse est un mot.

1. L'âge des joueurs d'une équipe : QUANTITATIF
2. La couleur de cheveux des garçons d'une classe : QUALITATIF
3. Le nombre de frères et soeurs : QUANTITATIF
4. La taille de la pointure des élèves : QUANTITATIF
5. L'équipe de sport préférée QUALITATIF
6. La matière préférée à l'école. QUALITATIF

CORRIGE 2.3 Corrigé :

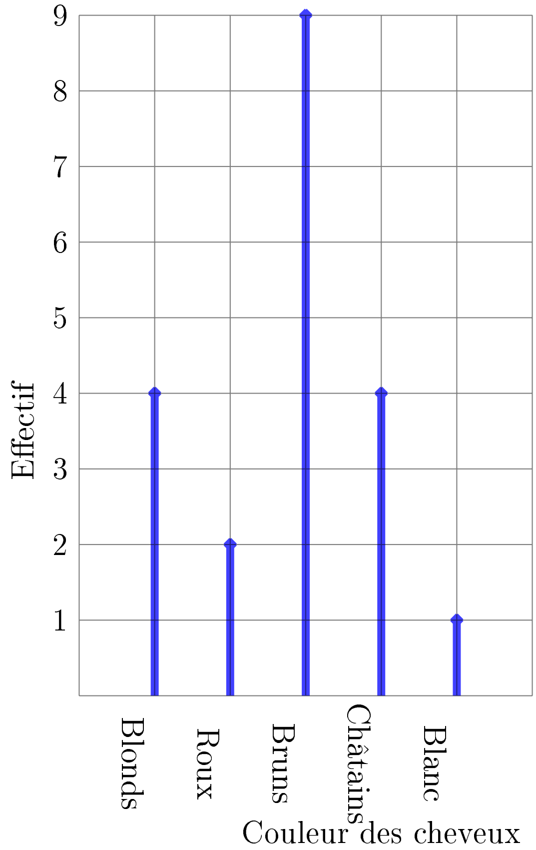
L'effectif total est $N = 20$ personnes.
Le caractère est qualitatif car la réponse donnée est un mot.

Couleur	Blanc	Bleu	Noir	Rouge	Rose	Vert
Effectif	4	1	7	2	3	3



La couleur la plus représentée est le noir (graphique).

CORRIGE 2.4 L'effectif total est $N = 4 + 2 + 9 + 4 + 1 = 20$ personnes.



La couleur la plus représentée est le brun. On calcule le % : $P = \dfrac{9}{20} \times 100 = 45\%$.

CORRIGE 2.5 Le tableau :

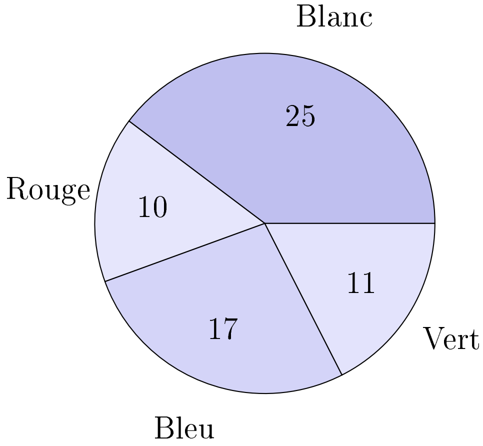
Nb frère/sœur	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	28	32	16	4	2	1	1

CORRIGE 2.6 Le tableau :

Signe astrologique	Scorpion	Verseau	Capricorne	Taureau
Effectif	34	22	28	13

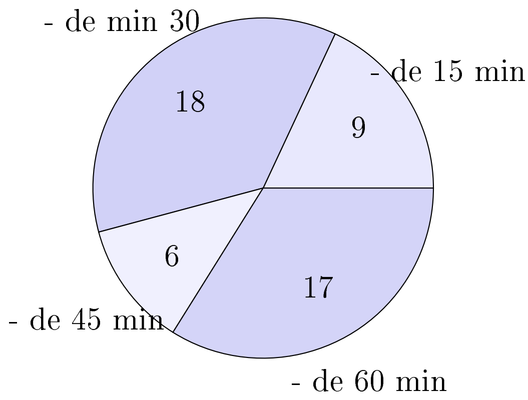
CORRIGE 2.7 Le tableau et le diagramme :

Couleur	Blanc	Rouge	Bleu	Vert
Effectif	25	10	17	11
Angle	143	57	97	63

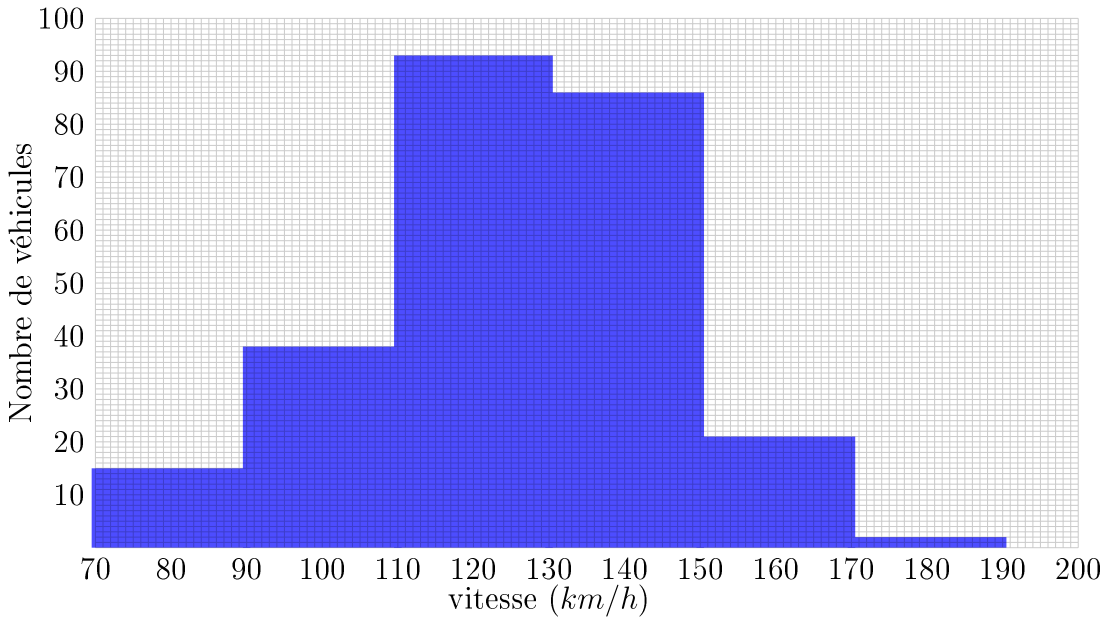


CORRIGE 2.8 1. $N = 50$ / 2. Voir tableau et diagramme :

Temps	$[0; 15[$	$[15; 30[$	$[30; 45[$	$[45; 60[$
Effectif	9	18	6	17
Angle	65	130	43	122



CORRIGE 2.9 L'effectif total est $N = 255$ véhicules contrôlés.
Le caractère étudié est la vitesse, il est quantitatif car c'est une donnée numérique.



D'après le tableau (ou l'histogramme) les véhicules dont la vitesse dépasse $130km/h$ sont en infraction : $N_{infraction} = 86 + 21 + 2 = 109$.

Chapitre 3

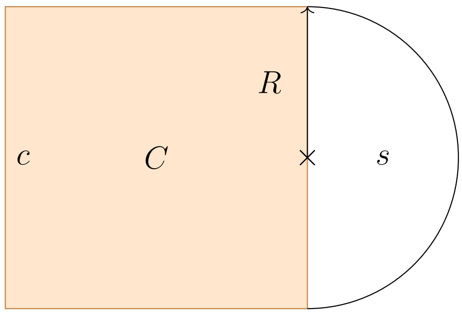
Calcul littéral

3.1 Activité d'introduction

Dans un centre de vacances, une piscine est à disposition des clients.
Lors de travaux de rénovation en 2012 le directeur du centre de l'époque a ciblé deux types de publics pour cette piscine :

- Les personnes souhaitant se baigner pour le plaisir.
- Les personnes souhaitant nager.

Il a ainsi dessiné la piscine ci-contre :



Un carré pour les nageurs et une partie demi circulaire pour la baignade. **On note R le rayon du demi cercle S et c le côté du carré C** L'objectif est de déterminer l'aire totale de la

piscine de deux manières différentes.

1. Choisir la bonne mesure de la longueur c :

$$C = R \qquad\qquad C = 2R \qquad\qquad C = \frac{1}{2}R$$

2. On prend $R = 5m$. Calculer la longueur C avec la formule choisie.
3. Calculer l'aire de la partie carrée (rappel : $A_{carr} = c \times c$
4. Calculer l'aire de la partie s (on pourra calculer le cercle entier avec la formule $A_{cercle} = \pi R^2$ et couper en deux ensuite)
5. Déduire l'aire totale de la piscine en additionnant les deux résultats.
   Pour déterminer l'aire occupée par la piscine, la société d'installation a une autre méthode : elle utilise la formule suivante :
   $$A_{totale} = 4R^2 + \frac{\pi R^2}{2}$$
6. Vérifier que la formule fonctionne pour $R = 5cm$. Un camping voisin souhaite copier le modèle mais avec $C = 8m$.
7. Donner le rayon de leur demi cercle de piscine.
8. Calculer, avec la formule, l'aire totale de leur piscine.

3.2 Cours

Le calcul littéral est l'utilisation de formules avec des lettres que l'on remplace par des valeurs.

Ces formules servent à pouvoir appliquer le même calcul à différentes situations.

Exemple : La formule qui donne la vitesse est $v = \frac{d}{t}$.
Cette formule contient trois variables : v la vitesse, d la distance et t le temps. Chacune de ces variables possède une unité, ici c'est souvent v en km/h, d en km et t en h. On peut utiliser

cette formule pour calculer la vitesse de deux véhicules par exemple :

Un train effectue un trajet de $600km$ en $2h$:

$$v = \frac{600}{t} = 300km/h$$

La vitesse de ce train est de $300km/h$.

Une voiture effectue un trajet de 47 en une demi heure :

$$v = \frac{47}{0.5} = 94km/h$$

La vitesse de la voiture est de $94km/h$.

Remarque : on peut transformer la formule pour obtenir d ou t selon les besoins !

Développement simple

Quand une expression est de la forme $k(a + b)$ on peut développer (c'est à dire supprimer les parenthèses) en multipliant par k les termes de la parenthèse et en appliquant la règle des signes :

- $-$ multiplié par $-$ donne $+$
- $-$ multiplié par $+$ donne $-$
- $+$ multiplié par $+$ donne $+$

soit :

$$A = 4(x + 3)$$
$$A = 4 \times x + 4 \times 3$$
$$A = 4x + 12$$

C'est la forme développée de A

Développement double

C'est la même chose mais pour une expression du type $(a + b) \times (c + d)$:

- On commence par multiplier le contenu de la seconde parenthèse par a
- On multiplie ensuite le contenu de la seconde parenthèse par b
- On applique la règle des signes pour réduire et regrouper.

soit :

$$B = (x - 2) \times (x + 3)$$
$$B = x \times x + x \times 3 + (-2) \times x + (-2) \times 3$$
$$B = x^2 + 3x - 2x - 6$$
$$B = x^2 + 1x - 6$$

C'est la forme développée de B

Entraînement : développer $C = 5(x - 9)$ *et* $D = (2x + 3)(x + 5)$

3.3 Exercices

EXERCICE 3.1. Utilisation de formule.
Calculer $A = (a + b) \times c$ dans les cas suivants :

1. $a = 3.1$ $b = 5.3$ et $c = 4$.
2. $a = 5.8$ $b = 6.4$ et $c = 2.5$.

EXERCICE 3.2. Calculer $y + xz$ avec $x = 4.3$, $y = -2.1$ et $z = 3$.

EXERCICE 3.3. Compléter le tableau suivant :

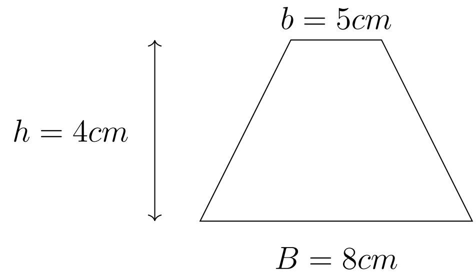
a	7	2.3	5.4	8.1
b	2	5.7	3.6	6.5
$a + b$				
$3a - b$				
$5a + 2b$				
$4(a + b)$				

EXERCICE 3.4. On calcule l'aire d'un trapèze avec la formule :

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Où B représente la grande base, b la petite base et h la hauteur.

Calculer l'aire du trapèze ci-contre.



EXERCICE 3.5. Quelques calculs de vitesse. On rappelle que : $v = \dfrac{d}{t}$ ou encore $d = v \times t$ ou bien : $t = \dfrac{d}{v}$.

1. En 1990 Linford Christie a couru le $100m$ en $10s$. Calculer sa vitesse en m/s.
2. L'escargot a une vitesse moyenne de $0.05km/h$. Calculer le temps nécessaire pour faire $1km$.
3. Un guépard peut courir $20s$ a une vitesse de $27m/s$. Calculer la distance qu'il va parcourir pendant cette course.

EXERCICE 3.6. Développer les expressions suivantes :

- $A = 4(x + 3)$
- $B = (x - 6) \times 9$
- $C = -3(4x + 8)$

EXERCICE 3.7. Développer et réduire les expressions suivantes :

- $A = (2y + 4)(y + 6)$
- $B = (t + 7)(3t + 5)$
- $C = (2 + 3z)(z + 1)$
- $D = (b - 5)(2b + 3)$
- $E = (-c + 3)(c - 6)$

EXERCICE 3.8. Bilan 1 : Le routier
Un routier quitte l'entrepôt à 7h45. Le compteur du camion indique $45678km$. Il roule non stop et arrive à 10h45. Le nouveau nombre affiché sur le compteur est 45873.

1. Calculer le temps passé sur la route.
2. Calculer la distance parcourue.
3. Calculer la vitesse moyenne du camion sur le trajet.
4. La vitesse maximale de ce camion sur autoroute est de 90km/h. Selon vous, les limitations ont elles été respectées ? Expliquez.

EXERCICE 3.9. Bilan 2 : IMC
L'indice de masse corporelle (IMC) d'une personne permet d'évaluer des risques liés à la maigreur ou au surpoids. On la calcule avec la relation :

$$IMC = \frac{m}{T^2}$$

m représente la masse en kg et T la taille en **mètres**.
Pour un adulte il y a trois zones d'IMC :

- $16 \leqslant IMC \leqslant 18$: zone de maigreur
- $18 \leqslant IMC \leqslant 25$: zone de poids normale
- $25 \leqslant IMC \leqslant 32$: zone de surpoids.

1. Calculer l'IMC arrondie à l'unité d'un adulte de taille 1.64m et de masse 69kg.
2. Donner la zone pour cette personne.
3. Un adulte mesure 1.68m et a un IMC de 22. Calculer sa masse en kg arrondie à l'unité.
4. Pour un adulte de 1.64m, quelles sont les masses minimales et maximales pour garder un IMC correspondant à une zone "normale" ?

CORRIGE 3.1 Calculer $(a+b) \times c$ dans les cas suivants :

1. $a = 3.1$ $b = 5.3$ et $c = 4$. $A = (3.1 + 5.3) \times 4 = 8.4 \times 4 = 33.6$
2. $a = 5.8$ $b = 6.4$ et $c = 2.5$. $A = (5.8 + 6.4) \times 2.5 = 12.2 \times 2.5 = 30.5$

CORRIGE 3.2 $y + xz = -2.1 + 4.3 \times 3 = -2.1 + 12.9 = 10.8$

CORRIGE 3.3 Tableau corrigé :

a	7	2.3	5.4	8.1
b	2	5.7	3.6	6.5
$a+b$	9	9	9	14.6
$3a-b$	19	1.2	12.6	17.8
$5a+2b$	39	22.9	34.2	53.5
$4(a+b)$	36	32	36	58.4

CORRIGE 3.4 $A = \dfrac{(5+8) \times 4}{2} = 26cm^2$

CORRIGE 3.5

1. $v = \dfrac{100}{10} = 10m/s.$
2. $t = \dfrac{1}{0.05} = 20h.$
3. $d = 27 \times 20 = 540m$

CORRIGE 3.6 Corrigé :

- $A = 4(x+3) = 4x + 12$
- $B = (x-6) \times 9 = 9x - 54$
- $C = -3(4x+8) = -12x - 24$

CORRIGE 3.7 Correction :

- $A = (2y+4)(y+6) = 2y^2 + 12y + 4y + 24 = \boxed{2y^2 + 16y + 24}$
- $B = (t+7)(3t+5) = 3t^2 + 5t + 21t + 35 = \boxed{3t^2 + 26t + 35}$
- $C = (2+3z)(z+1) = 2z + 2 + 3z^2 + 3z = \boxed{3z^2 + 5z + 2}$
- $D = (b-5)(2b+3) = 2b^2 + 3b - 10b - 15 = \boxed{2b^2 - 7b - 15}$
- $E = (-c+3)(c-6) = -c^2 + 6c + 3c - 18 = \boxed{-c^2 + 9c - 18}$

CORRIGE 3.8

1. Il a passé 3h sur la route (on peut faire 10-7 = 3 et 45 - 45 = 0 min dans cet exercice
2. Pour trouver la distance on fait $d = 45873 - 45678 = 195km$
3. $v = \dfrac{195}{3} \approx 65km/h$
4. La vitesse est largement respectée en moyenne mais il peut avoir fait des périoes à 30 km/h et compensé nous ne pouvons pas savoir !

CORRIGE 3.9

1. $IMC = \dfrac{69}{1.64^2} = 26$
2. La zone est donc surpoids.
3. $m = IMC \times T^2 = 62kg$
4. On calcule la masse min donc pour un IMC de 18 : $m_{min} = 18 \times 1.64^2 = 48kg$. On fait de même pour la masse max : $m_{max} = 25 \times 1.64^2 = 67kg$. Cette personne doit donc rester entre 48 et 67 kg.

Chapitre 4

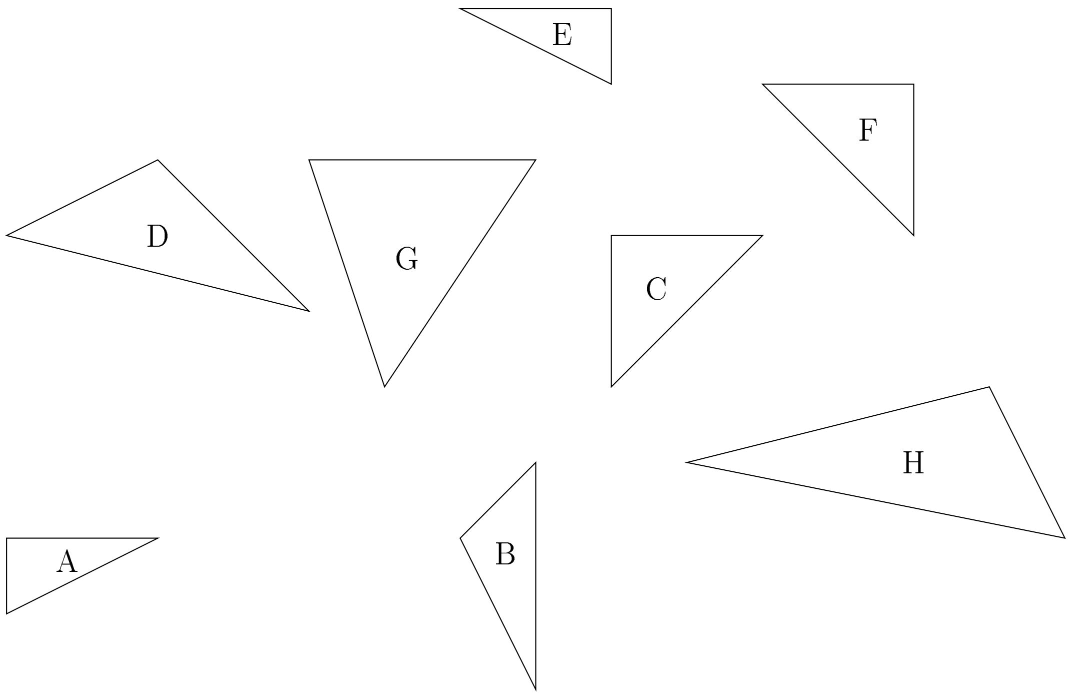
Théorème de Pythagore

Objectifs à maîtriser :

- Reconnaitre un triangle rectangle à partir d'un schéma.
- Déterminer l'hypoténuse d'un triangle rectangle.
- Écrire l'égalité du théorème de Pythagore et l'utiliser pour calculer une longueur.
- Déterminer si un triangle est rectangle ou non en utilisant la réciproque.

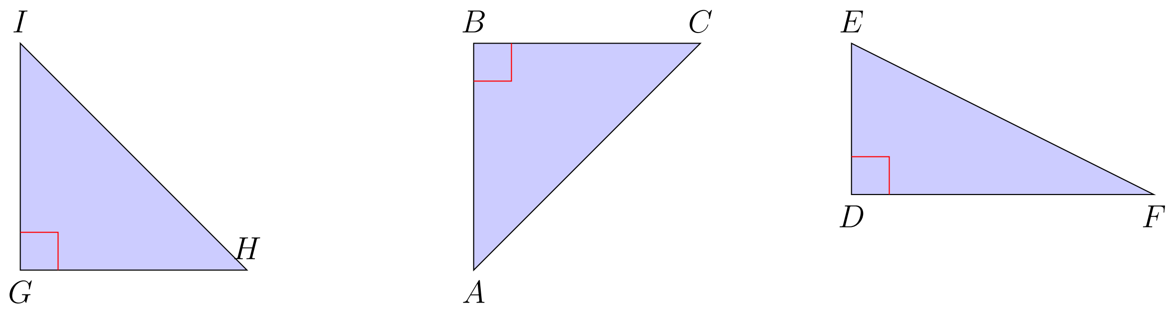
4.1 Triangles rectangles

Activité : Entourer les triangles rectangles. On pourra utiliser une équerre pour vérifier les angles.



Règle 1 : Un triangle est rectangle s'il possède : ....

Règle 2 : On appelle **hypoténuse** d'un triangle rectangle le plus grand côté (ou le côté opposé à l'angle droit).



Repasser en couleur pour chaque triangle l'hypoténuse et donner le nom du côté :

- Triangle IGH : ....
- Triangle ABC : ....
- Triangle EDF : ....

4.2 Théorème de Pythagore

Outil indispensable pour le collège ce théorème permet de calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle.

Théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en C alors :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

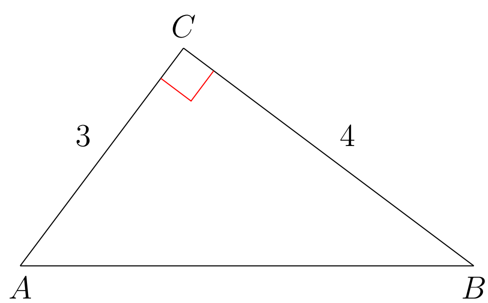
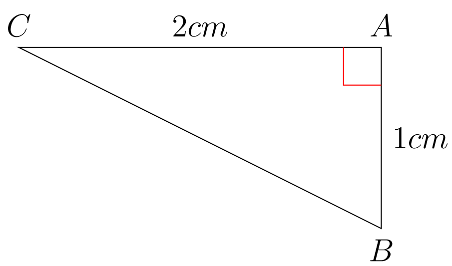


Figure 4.1 – Pythagore

Dans cet exemple (les longueurs sont données en cm) :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$AB = \sqrt{25} = 5$
Le côté AB mesure 5 cm.

Un exemple où on calcule l'hypoténuse :
Dans le triangle suivant on ne connait pas BC.
Le triangle est rectangle en A.
On a le droit d'utiliser le théorème de Pythagore :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = ... + ...$$

$$BC^2 = ...$$

Donc $BC = ... \approx .....$

Un exemple où on calcule un des petits côtés :
Dans le même triangle on ne connait pas AC.
Le triangle est rectangle en A.
On a le droit d'utiliser le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

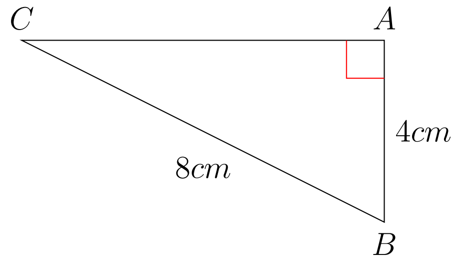
Cette fois le côté inconnu n'est pas isolé ! Il faut donc transformer :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = ... - ....$$

$$AC^2 = ...$$

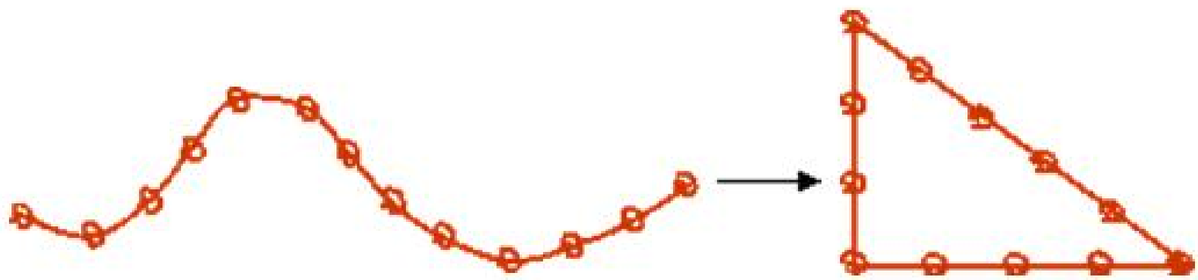
Donc $AC^2 = ... \approx .....$



4.3 Réciproque du théorème de Pythagore

4.3.1 Activité de découverte

En maçonnerie on parle souvent de corde $3-4-5$ pour placer des angles droits.



Sur le schéma 1 noeud correspond à 1 mètre.
Le triangle formé par la corde fabrique t'il vraiment un angle droit ?

On va nommer le triangle formé par la corde ABC et le sommet A sera placé à l'angle à priori droit.

1. Placer les points sur le triangle
2. Compléter les mesures des côtés (rappel : entre 2 nœuds il y a un mètre)
   - $AB = ...$
   - $AC = ...$
   - $BC = ...$
3. Quelle est la plus grande longueur de ce triangle ? .....
4. Calculer le carré de chaque côté et compléter :
   - $AB^2 = ...$
   - $AC^2 = ...$
   - $BC^2 = ...$
5. Recopier la valeur du plus grand côté au carré : .....
6. Ajouter les deux autres côtés au carré : ....
7. Que remarquez vous ? ....

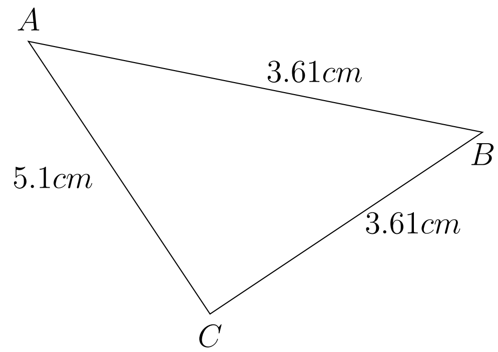
Conclusion : ....

4.3.2 Réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du Théorème de Pythagore

ABC est un triangle mais nous ne savons pas s'il est rectangle.
Méthode :

1. On calcule le carré du plus grand côté.
2. On calcule les carrés des deux autres côtés.
3. On additionne les deux carrés des plus petits côtés.
4. On compare avec le carré du grand côté : **si les résultats sont égaux alors le triangle est rectangle**.
   Sinon, le triangle n'est PAS rectangle.

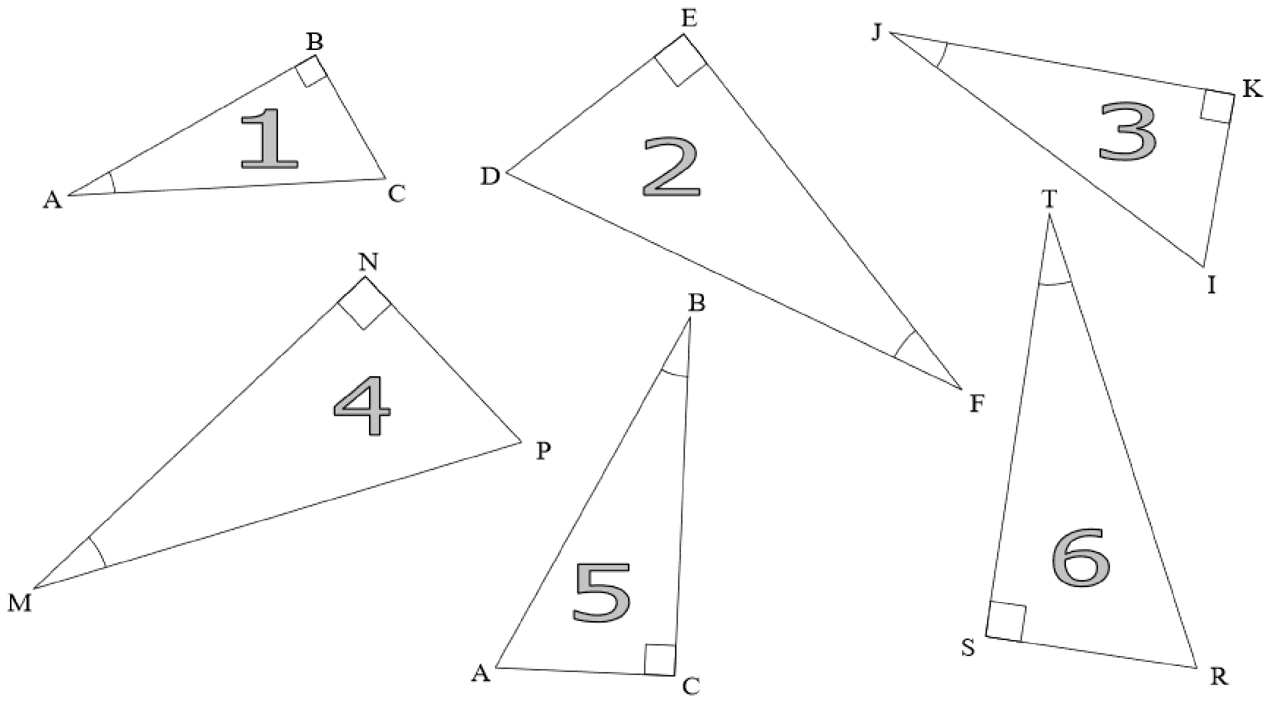


Vérifions si le triangle ABC est rectangle :

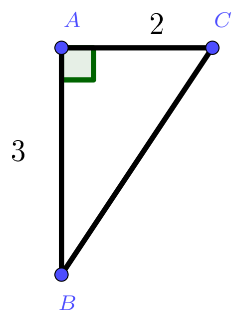
1. Calcul du plus grand côté au carré : $AC^2 = 5.1^2 = 26$
2. Calcul des autres carrés : $AB^2 = 3.61^2 = 13.0321$ et $BC^2 = 13$
3. Additionnons les deux petits côtés au carré : $AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26$
4. Conclusion : On a bien $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle (en C)

4.4 Exercices

EXERCICE 4.1. Pour chacun des triangles repasser en couleur l'hypoténuse :

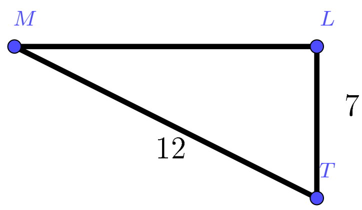


EXERCICE 4.2.



Soit le triangle suivant :

Calculer la longueur BC en utilisant le théorème de Pythagore



EXERCICE 4.3. On donne le triangle rectangle suivant :

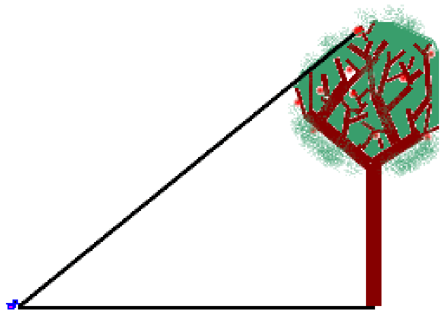
Calculer la longueur manquante.

EXERCICE 4.4. Soit le triangle ABC tel que $AB = 5.5cm$, $AC = 4.8cm$ et $BC = 7.3cm$. En utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, préciser si ce triangle est rectangle.

EXERCICE 4.5. Soit le triangle DEF tel que $DE = 2.8cm$, $DF = 8.1cm$ et $EF = 7.6cm$. En utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, préciser si ce triangle est rectangle.

EXERCICE 4.6.

Un petit oiseau (O) est posé sur le sol et souhaite aller manger une cerise (C) dans un arbre dont le pied (P) est situé à 20m à l'horizontale de lui. On sait que le cerisier forme un angle droit avec le sol et qu'il mesure 4m de haut. On a représenté la situation par un schéma :

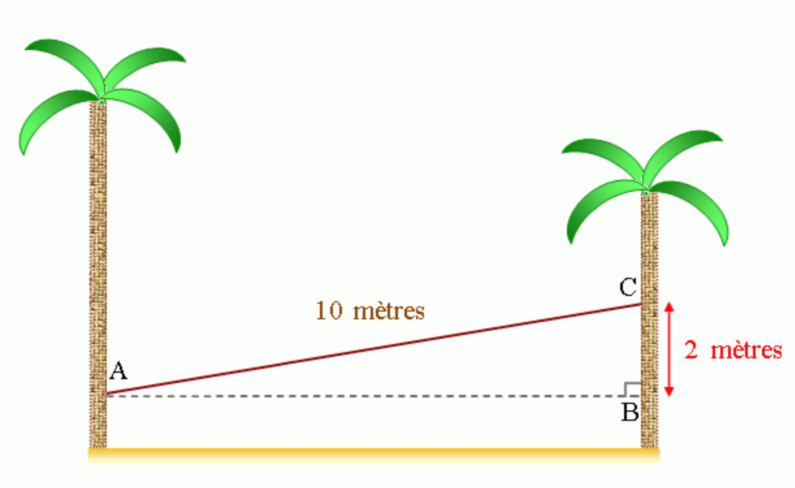


1. Placer les points sur le dessin.
2. Calculer la distance à parcourir en volant pour l'oiseau

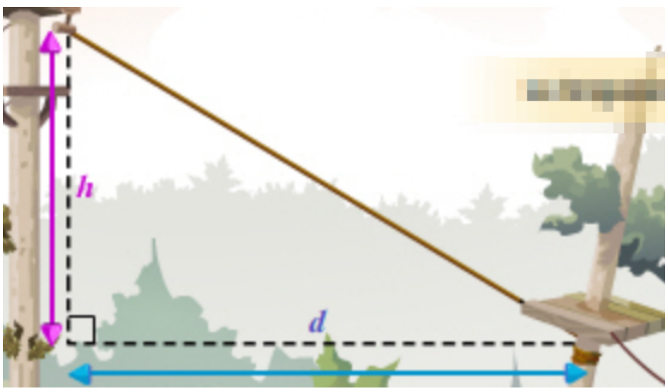
EXERCICE 4.7. Un avion (V) se situe à la verticale d'une ville (V) et doit encore descendre 50km en ligne droite pour toucher la piste d'un aéroport (P) qui se situe à 49.7km de la ville en ligne droite.

1. Faire un schéma
2. Déterminer l'altitude en mètres (AV) de l'avion à ce moment.

EXERCICE 4.8. On donne la situation suivante et on demande de calculer la distance entre les arbres :



EXERCICE 4.9. On donne $h = 10m$ et $d = 24$ et on demande de calculer la longueur l de la corde.



CORRIGE 4.1
1. AC
2. DF
3. IJ
4. MP
5. AB
6. TR

CORRIGE 4.2 $BC^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$
$BC = \sqrt{13} \approx 3.6cm$

CORRIGE 4.3 $MT^2 = ML^2 + TL^2$ donc $ML^2 = MT^2 - LT^2 = 12^2 - 7^2 = 95$.
Donc $MT = \sqrt{95} \approx 9.7cm$

CORRIGE 4.4 $BC^2 = 53.29 \mid AC^2 + AB^2 = 5.5^2 + 4.8^2 = 53.29$ On a donc égalité, le triangle ABC est rectangle en A.

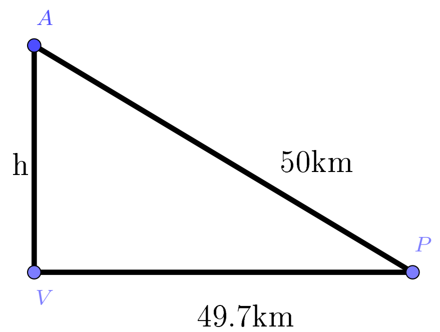
CORRIGE 4.5 $DF^2 = 65.61 \mid DE^2 + EF^2 = 2.8^2 + 7.6^2 = 65.60$ Il n'y a pas égalité, le triangle n'est pas rectangle.

CORRIGE 4.6 Théorème de Pythagore :

$$OC^2 = OP^2 + PC^2$$

Ce qui donne : $OC^2 = 20^2 + 4^2 = 416$ et on a donc $OC = \sqrt{416} \approx 20.4m$

CORRIGE 4.7 Schéma :



Pythagore : $AP^2 = VP^2 + AV^2$ donc $AV^2 = AP^2 - VP^2 = 50^2 - 49.7^2 = 29.91$
Ce qui donne $h = \sqrt{29.91} \approx 5.5km$. L'altitude est donc de $h = 5500m$ environ.

CORRIGE 4.8 Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc $AB^2 = 10^2 - 2^2 = 96$ et $AB = \sqrt{96} \approx 9.8m$

CORRIGE 4.9 Pythagore : $l^2 = h^2 + d^2 = 100 + 576 = 676$ et donc $l = \sqrt{676} = 26m$

Chapitre 5

Multiples, Diviseurs, Fraction

5.1 Activité d'introduction

Dans un centre de vacances, des courses sont organisées en relai selon les deux types :

- Courses féminines : Les 24 filles doivent toute participer et chaque équipe doit être composée du même nombre de personnes.
- Courses mixtes : Les 30 garçons et 24 filles doivent former des équipes de même composition (autant de filles que de garçons dans toutes les équipes)

1. Pour la course féminine peut-on créer 4 équipes ? 5 équipes ? Pourquoi ?
2. Quelles sont les différentes combinaisons d'équipe valides ?
3. Pour la course mixte peut-on former 3 équipes ? 8 équipes ? Pourquoi ?

   Les diviseurs de 30 sont : $1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 10 - 15 - 30$. Ce sont tous les nombres qui, quand on divise 30, donnent un résultat entier.
4. Donner tous les diviseurs de 24 :
5. A partir des derniers résultats déterminer les combinaisons d'équipe possibles pour la course mixte :

5.2 Vocabulaire et définitions

Diviseurs et multiples

On note a, b et c trois nombres entiers positifs.

Si on a $c = a \times b$ alors on dit que :

- a et b sont des diviseurs de c.
- c est un multiple de a **ET** un multiple de b

Prenons le nombre 30. On peut le partager en deux : $30 = 15 \times 2$.
On peut donc dire que :

- 15 et 2 sont deux diviseurs de 30
- 30 est un multiple de 15
- 30 est un multiple de 2

Trouver les diviseurs d'un nombre va servir à simplifier des fractions ou à partager des quantités.

Critères de divisibilités

On peut retrouver par quelques astuces simples si un nombre peut être divisé par les nombres suivants :

- La division par 2 : ....
- La division par 3 : ....
- La division par 5 : ....
- La division par 9 : ....
- La division par 10 : ....

Pour savoir par exemple si 425 est divisible par 3 :
J'ajoute les 3 chiffres le composant : $4 + 2 + 5 = 11$. Si besoin j'ajoute encore les chiffres composant le nombre obtenu : $1+1 = 2$. Si le résultat est un multiple de 3 alors le nombre de départ est divisible par 3. Ce qui n'est pas le cas ici.

Pour savoir si le nombre 456 est divisible par 4 je vais d'abord le couper en deux si possible :
$456 \div 2 = 228$. Je regarde si le résultat est pair : c'est le cas, je peux encore couper en deux. Conclusion, 456 est divisible par 4.

Simplification de fraction

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont qu'un seul diviseur commun : 1.

Pour réduire une fraction, on cherche les diviseurs du numérateur et ceux du dénominateur et on prend le plus grand commun.

Soit la fraction $A = \frac{64}{24}$. Cette fraction n'est pas irréductible.

- Div 64 : 1-2-4-8-16-32-64
- Div 24 : 1-2-3-4-6-8-12-24
- communs : 1 - 2 - 4 - 8
- PGCD : 8

On a $A = \frac{8 \times 8}{8 \times 3} = \frac{8}{3}$ qui est la fraction irréductible.

5.3 Exercices

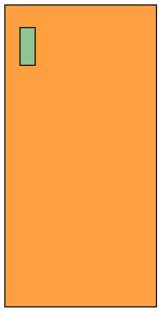
EXERCICE 5.1. Le produit de deux nombres donne 18. Donner toutes les possibilités pour les deux nombres.

EXERCICE 5.2. Parmi les phrases suivantes une seule est vraie. Préciser laquelle en expliquant.

1. 15 est un multiple de 4
2. 12 est un diviseur de 84
3. 14 est un diviseur de 46

EXERCICE 5.3. Sur un panneau de bois dont les dimensions sont $100cm$ par $120cm$ on va placer des photos dont les dimensions sont $13 \times 18cm$.

Arthur pense qu'on peut placer 42 photos maximum dans la configuration qu'il propose sur son schéma.
Lina pense qu'en tournant le tableau, on pourra en mettre plus.



1. Présenter les calculs faits par Arthur pour trouver 42.
2. Présenter les calculs faits par Lina et donner le nombre de photos.
3. Conclure sur le sens du tableau pour optimiser.

EXERCICE 5.4. Pour chaque série donner la liste des diviseurs puis entourer les diviseurs communs.

1. 4 et 8 :
2. 35 et 20
3. 21 et 27
4. 45 et 15
5. 24 et 32

EXERCICE 5.5. Pour les nombres proposés dans le tableau, dire s'ils sont divisibles par 2,5,10 et 3 en inscrivant oui ou non dans le tableau.

Nombre	Divisible par 2	par 5	par 10	par 3
45				
150				
93				
430				
54				

EXERCICE 5.6. Rendre irréductibles les fractions :

1. $A = \dfrac{36}{45}$
2. $B = \dfrac{36}{27}$
3. $C = \dfrac{90}{75}$

EXERCICE 5.7. Rendre irréductible sans calculatrice les fractions :

1. $A = \dfrac{20}{24}$
2. $B = \dfrac{100}{75}$
3. $C = \dfrac{84}{49}$

1. $D = \dfrac{18}{6}$
2. $E = \dfrac{111}{22}$
3. $F = \dfrac{99}{33}$

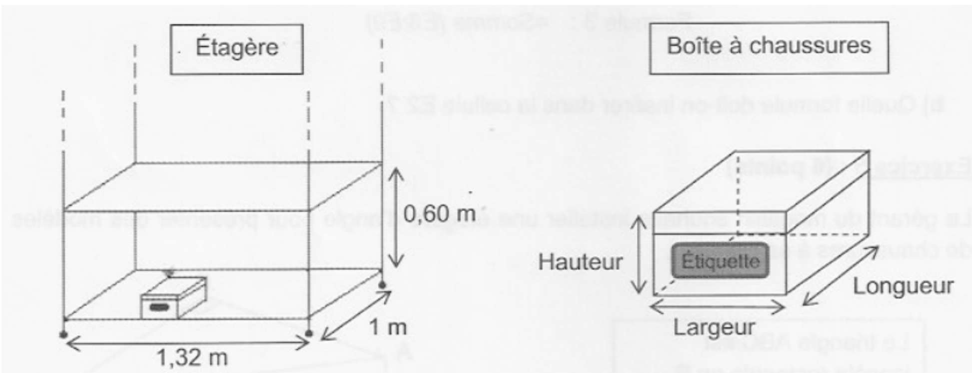
EXERCICE 5.8. Rendre irréductible sans calculatrice les fractions :

1. $A = \dfrac{164}{216}$
2. $B = \dfrac{208}{65}$
3. $C = \dfrac{21}{427}$

1. $D = \dfrac{615}{435}$
2. $E = \dfrac{396}{660}$
3. $F = \dfrac{315}{210}$

EXERCICE 5.9. Extrait de DNB

Dans un magasin de chaussure, la réserve est composée d'étagères pouvant stocker des boites :



On a pour consignes :

- L'étiquette doit être placée devant
- On doit pouvoir placer le maximum possible de boites
- Uniquement des boites de même taille à choisir entre les deux modèles du tableau ci-après

boites	Modèle 1	Modèle 2
Longueur (en cm)	30	35
Largeur (en cm)	22	24
Hauteur (en cm)	11	13

1. Avec le modèle 1, combien de boites pourra-t-on placer au maximum ?
2. Quel modèle choisir pour en mettre le plus au final ?

CORRIGE 5.1 On cherche les diviseurs de 18 : 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 18. Les paires sont donc : 1-18 / 2-9 / 3-6

CORRIGE 5.2 C'est la deuxième, la première est fausse, la table de 4 : 4-8-12-16. La troisième aussi : 14-28-42-56. Pour expliquer la seconde on peut faire pareil : 12-24-36-48-60-72-84 ou tester à la calculatrice.

CORRIGE 5.3 1. Pour Arthur : $\dfrac{100}{13} \approx 7$ et $\dfrac{120}{18} \approx 6$. Il a ensuite fait $6 \times 7 = 42$ photos.
2. Pour Lina dans l'autre sens : $\dfrac{120}{13} \approx 9$ et $\dfrac{100}{18} \approx 5$ Ce qui donne $9 \times 5 = 45$ photos.
Elle a donc raison !

CORRIGE 5.4 Corrigé :

- 4 et 8 : La liste des diviseurs entiers de 4 est : [1, 2, 4]
  La liste des diviseurs entiers de 8 est : [1, 2, 4, 8]
  La liste des diviseurs communs de 8 et 4 est : [1, 2, 4]
- 35 et 20 : La liste des diviseurs entiers de 35 est : [1, 5, 7, 35]
  La liste des diviseurs entiers de 20 est : [1, 2, 4, 5, 10, 20]
  La liste des diviseurs communs de 20 et 35 est : [1, 5]
- 21 et 27 : La liste des diviseurs entiers de 21 est : [1, 3, 7, 21]
  La liste des diviseurs entiers de 27 est : [1, 3, 9, 27]
  La liste des diviseurs communs de 27 et 21 est : [1, 3]
- 45 et 15 : La liste des diviseurs entiers de 45 est : [1, 3, 5, 9, 15, 45]
  La liste des diviseurs entiers de 15 est : [1, 3, 5, 15]
  La liste des diviseurs communs de 15 et 45 est : [1, 3, 5, 15]
- 24 et 32 : La liste des diviseurs entiers de 24 est : [1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24]
  La liste des diviseurs entiers de 32 est : [1, 2, 4, 8, 16, 32]
  La liste des diviseurs communs de 32 et 24 est : [1, 2, 4, 8]

CORRIGE 5.5 Tableau :

Nombre	Divisible par 2	par 5	par 10	par 3
45	NON	OUI	NON	OUI
150	OUI	OUI	OUI	OUI
93	NON	NON	NON	OUI
430	OUI	OUI	OUI	NON
54	OUI	NON	NON	OUI

CORRIGE 5.6 Pour rendre irréductible deux techniques : petit à petit en trouvant des diviseurs simples, ou en trouvant le PGCD.

$A = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4}{5}$
$B = \dfrac{36}{27} = \dfrac{4}{3}$
$C = \dfrac{90}{75} = \dfrac{18}{15} = \dfrac{6}{5}$

CORRIGE 5.7 Ici on peut trouver le PGCD ou y aller par étapes.

1. $A = \dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6}$
2. $B = \dfrac{100}{75} = \dfrac{4}{3}$
3. $C = \dfrac{84}{49} = \dfrac{12}{7}$

1. $D = \dfrac{18}{6} = \dfrac{3}{1} = 3$
2. $E = \dfrac{111}{22}$: Irréductible.
3. $F = \dfrac{99}{33} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{3}{1} = 3$

CORRIGE 5.8 Dans cet exercice il est préférable de simplifier en premier par un nombre évident.

1. $A = \dfrac{164}{216} = \dfrac{41}{54}$
2. $B = \dfrac{208}{65} = \dfrac{16}{5}$
3. $C = \dfrac{21}{427 = \dfrac{3}{61}}$

1. $D = \dfrac{615}{435} = \dfrac{41}{29}$
2. $E = \dfrac{396}{660} = \dfrac{3}{5}$
3. $F = \dfrac{315}{210} = \dfrac{3}{2}$

CORRIGE 5.9 Avec le modèle 1 on peut placer en longueur 3 boites (90cm), en largeur on peut placer exactement 6 boites ($132 \div 22$) et en hauteur on peut en placer 5. Ce qui donne $N = 6 \times 3 \times 5 = 90$.
Il nous reste à calculer pour le modèle 2 et à comparer pour répondre à la deuxième question : En longueur $100 \div 35 = 2,85$ donc 2 boites, en largeur $132 \div 245.5$ donc 5 et en hauteur $60 \div 13 = 4.6$ donc 4. Ce qui donne un total $N_2 = 5 \times 4 \times 2 = 40$. On choisira donc le modèle 1

Chapitre 6

Probabilités

Quelles sont vos chances de gagner à un jeu de grattage ? D'être assis à côté d'une personne sympathique dans votre prochain voyage en avion ? De réussir votre prochain test ? Beaucoup de questions !

Ces questions relèvent du domaine des **probabilités** et vont être traitées en maîtrisant quelques notions et du vocabulaire.

6.1 Définitions et Vocabulaire des probabilités

Ces définitions sont à savoir.

- **Expérience aléatoire** : Une expérience où seul le hasard décide du résultat.
- **Issue** : Un des résultats possibles pour une expérience aléatoire.
- **Univers** : La liste de toutes les issues possibles pour une expérience aléatoire.
- **Événement** : Regroupement d'une ou plusieurs issue.
- **Probabilité** : Expression des chances qu'un événement se produise.

Un exemple complété :

Je jette un dé non truqué à 6 faces sur une table.

- L'expérience aléatoire est : Jeter un dé non truqué
- Une des issues possibles est : Obtenir la face 2
- L'univers (liste des issues possibles) est : { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }
- Un événement noté A peut être : Obtenir un nombre pair

- La probabilité d'obtenir cet événement est alors :

$$P_A = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues au total}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Que l'on peut exprimer en pourcentage en multipliant par 100 : $P_A = 50\%$

6.2 Remarques et notations

Quelques remarques importantes :

- Une probabilité est toujours comprise entre 0 (l'événement n'a aucunes chances de se produire) et 1 (l'événement est certain de se produire). Ou encore si on parle en pourcentages ; les chances sont toujours entre 0% (impossible) et 100% (certain).

- Une probabilité se note sous forme fractionnaire ou d'un nombre décimal tel que $0 \leqslant p \leqslant 1$.
- Si un événement est nommé A alors il existe son contraire noté $\bar{A}$ tel que si l'on note P_A et $P_{\bar{A}}$ leur probabilité alors $P_A + P_{\bar{A}} = 1$ (voir schéma ci-dessous).

- Quand une situation met en jeu plusieurs expériences aléatoires consécutives ou/et une situation complexe, on ne peut pas calculer directement la probabilité, on passera alors par l'utilisation d'un tableau ou d'un arbre de probabilités.

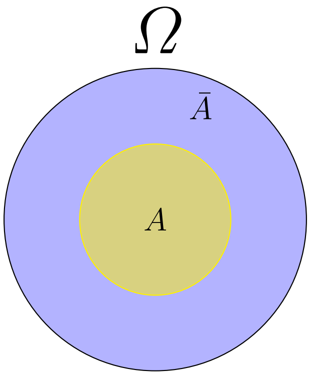


FIGURE 6.1 – Illustration : $P_A + P_{\bar{A}} = 1$

6.3 Arbres de probabilités

Comment traiter les cas où par exemple on lance deux fois une pièce de monnaie à la suite et où l'on chercherait à estimer les chances d'avoir deux fois le même côté de la pièce ? On va représenter la situation sous forme de schéma en dessinant les possibilités sous formes de branches :

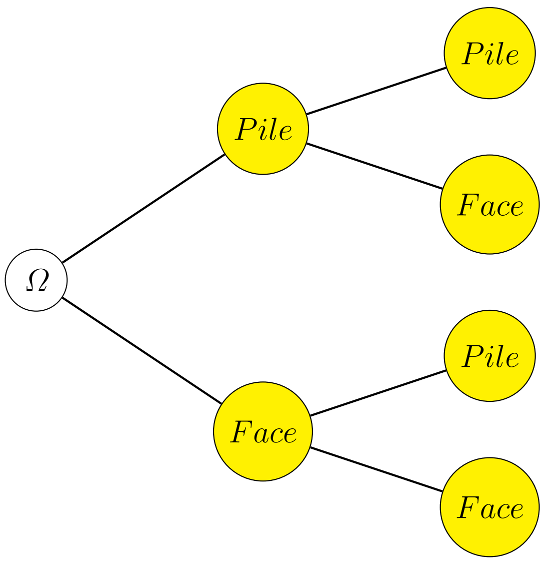


FIGURE 6.2 – Arbre représentant deux lancers de pièces successifs

L'arbre de la page précédente représente la totalité des résultats possibles qui se lisent sur la droite de l'arbre : il y a ainsi 4 combinaisons avec 2 lancers :

$$\{PP, PF, FP, FF\}$$

Dans ce cas précis où la probabilité est toujours la même, on devine que la probabilité d'obtenir par exemple l'événement A : obtenir pile pile sera de $P_A = \frac{1}{4}$ mais si on veut retenir une méthode générale on doit commencer par écrire sur l'arbre, au dessus de chaque branche, la probabilité.

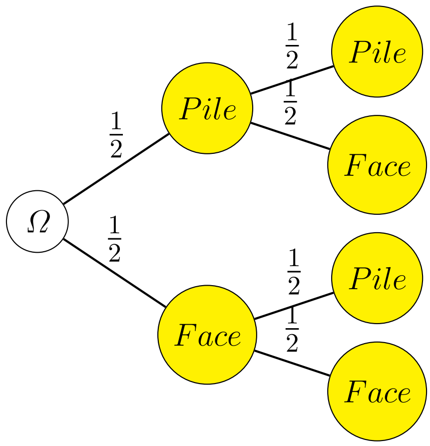


FIGURE 6.3 – Arbre avec probabilités

Propriétés de calcul sur l'arbre :

- La probabilité d'un chemin (entre le début de l'arbre et la fin) est égale au résultat de la **multiplication entre elles** de toutes les probabilités rencontrées.
- Si plusieurs chemins réalisent un événement, on calcule séparément la probabilité de chaque chemin et **ensuite on additionne** les résultats.

Donc pour calculer la probabilité de l'événement A : obtenir pile et pile (ou B : obtenir face et face) on doit écrire $P_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On retrouve le résultat intuitif. Mais nous souhaitions trouver les chances d'obtenir la même face ! Il y a deux chemins possibles :

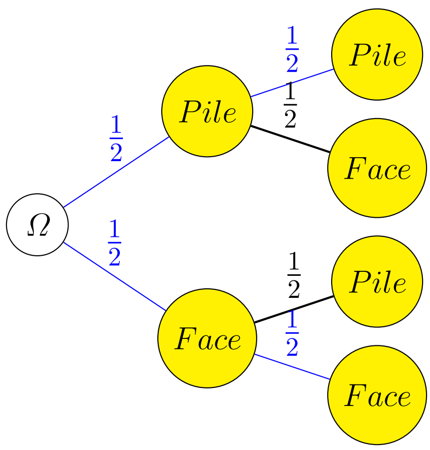


FIGURE 6.4 – Arbre de probabilités - Deux fois la même face

Chaque chemin $P-P$ ou $F-F$ possède une probabilité totale de $\frac{1}{4}$ donc l'événement C : "obtenir deux fois la même face" se réalise avec une probabilité de

$$P_C = P_A + P_B = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

6.4 Exercices

EXERCICE 6.1. On possède une urne contenant 15 boules de couleurs : 4 rouges (R), 5 bleues (B) et 6 jaunes (J). Je prélève une boule au hasard, je regarde sa couleur et je la repose dans l'urne. Compléter les phrases avec le vocabulaire du cours.
On ne peut pas prévoir le résultat, l'expérience est donc .... On peut dire que "Rouge" "Bleu" et "Jaune" sont les .... possibles de cette expérience. Un .... peut être "piocher une boule rouge".

EXERCICE 6.2. Un élève lance 20 fois un dé à 6 faces non truqué et il note le nombre de 2 obtenus. Il a obtenu 6 fois le chiffre 2 en 20 lancers.

1. Donner toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité théorique d'obtenir un 2 en lançant le dé.
3. Calculer la fréquence d'apparition du 2 dans le cas de l'exercice (rappel : $f_2 = \frac{N_2}{N_{total}}$).
4. Le résultat est-il cohérent par rapport à la question 2 ?

> Pour les exercices suivants on demande d'exprimer les résultats des probabilités sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal arrondi au centième et enfin d'un pourcentage.

EXERCICE 6.3. Une urne contient 6 boules rouges, 4 vertes, 3 jaunes. On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

A. De tirer une boule rouge.
B. De tirer une boule verte.
C. De tirer une boule verte OU jaune.
D. De ne pas tirer une boule rouge.

EXERCICE 6.4. Sur un parking de 40 places sont garées 10 voitures de type "berline", 12 "monospace" , 6 "4x4" et 3 "coupés". En prenant une place numérotée de 1 à 40 au hasard quelles sont les chances de :

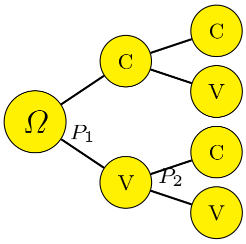
A. De tomber sur une place occupée par un monospace.
B. De ne pas tomber sur une place occupée par un 4x4.
C. De tomber sur une place vide.

EXERCICE 6.5. Dans une classe de 28 élèves, 6 font une activité sportive, 5 autres participent au club photo et enfin 10 autres jouent d'un instrument de musique. Les autres ne font rien. On interroge un élève au hasard. Quelles sont les probabilités de chacun des événements suivants ?

A. De tomber sur un élève jouant de la musique.
B. De tomber sur un élève ne faisant pas partie du club photo.
C. De tomber sur un élève sans activité.

EXERCICE 6.6. Un sac d'un jeu de société contient des lettres. Il y a 10 voyelles (a,e,i,o,u,y) et 15 consonnes. On effectue le tirage d'une lettre **sans remise**. Calculer les probabilités :

A. De piocher une voyelle au premier tirage.
B. De piocher une voyelle au second tirage si une consonne a été tirée en premier.
C. De piocher une consonne au second tirage si une voyelle a été tirée en premier.
D. De piocher deux voyelles à la suite. (On pourra s'aider de l'arbre).



EXERCICE 6.7. Je joue au Monopoly et je jette 2 dés non truqués à 6 faces. Je rejoue si je fais un double (c'est à dire si les deux dés tombent sur la même figure.

1. Donner toutes les combinaisons de double qui existent avec 2 dés.
2. Sachant qu'il y a 36 combinaisons possibles avec un dé, déterminer par la méthode de votre choix les chances de faire un double (peu importe lequel) en jetant deux dés.

EXERCICE 6.8. Un avion est constitué de 20 rangées de sièges. Chacune de ces rangées étant coupée en deux par une allée centrale. A gauche de cette allée on peut placer 4 sièges, à droite on peut placer 3 sièges. Un voyageur achète un billet aléatoirement placé dans l'avion.

1. Calculer le nombre de siège au total dans l'avion.
2. Faire un schéma à main levé de deux rangées de sièges en indiquant l'allée centrale.
3. Quelles sont les chances de réaliser l'événement A : avoir une place côté hublot ?
4. Quelles sont les chances de réaliser l'événement B : avoir une place côté allée centrale ?
5. Déduire (ou calculer) des réponses précédentes les chances d'avoir deux voisins, un de chaque côté.

Pour les exercices suivants l'utilisation d'un arbre de probabilités est recommandée.

EXERCICE 6.9. Dans un sac se trouvent 12 jetons : 4 blancs , 4 verts et 4 rouges.
On pioche **sans remise** trois jetons. Déterminer les probabilités d'obtenir les événements suivants :

A. Trois jetons de la même couleur
B. Trois jetons avec au moins deux couloirs parmi les 3
C. Trois jetons dans l'ordre exact : V - B - R

EXERCICE 6.10. Dans une armoire on dispose de 4 T.Shirt (V N B R), de 2 casquettes (N R) et de 3 paires de chaussures (G N O). La personne apprécie de pouvoir changer de tenue et surtout de ne pas porter la même couleur sur les trois parties. Il choisit aléatoirement une pièce de chaque pour s'habiller. L'événement A est "Sortir avec trois objets de la même couleur".

1. Dessiner un arbre de probabilités correspondant à la situation (On pourra dessiner un arbre partiel).
2. Déterminer la probabilité de réaliser l'événement A.
3. Il espère avoir moins de 5% de chance que l'événement se produise. Est-ce le cas ?

EXERCICE 6.11. David va acheter un croissant à la boulangerie. Dans sa poche se trouvent cinq pièces de monnaie : une de 50 centimes, deux de 20 centimes et une de 10 centimes. Il est un peu pressé et sort trois pièces au hasard de sa poche.

1. En construisant un arbre, déterminer toutes les possibilités de choix des trois pièces.
2. Sachant qu'un croissant coute 80 centimes, quelles sont les chances de réaliser l'événement A : "je peux payer le croissant" ?

CORRIGE 6.1 On possède une urne contenant 15 boules de couleurs : 4 rouges (R), 5 bleues (B) et 6 jaunes (J). Je prélève une boule au hasard, je regarde sa couleur et je la repose dans l'urne. Compléter les phrases avec le vocabulaire du cours.
On ne peut pas prévoir le résultat, l'expérience est donc aléatoire On peut dire que "Rouge" "Bleu" et "Jaune" sont les issues possibles de cette expérience. Un événement peut être "piocher une boule rouge".

CORRIGE 6.2 1. Les issues sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. $P_2 = \dfrac{1}{6}$
3. $f_2 = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$
4. Le résultat est plus grand, il faudrait lancer bien plus de fois pour voir la fréquence tendre vers la probabilité.

CORRIGE 6.3 A. $P_A = \dfrac{6}{13}$ B.$P_B = \dfrac{4}{13}$ C. $P_C = \dfrac{7}{13}$ D. $P_C = P_D$

CORRIGE 6.4 A. $P_A = \dfrac{12}{40}$ B.$P_B = \dfrac{34}{40}$ C. $P_C = \dfrac{9}{40}$

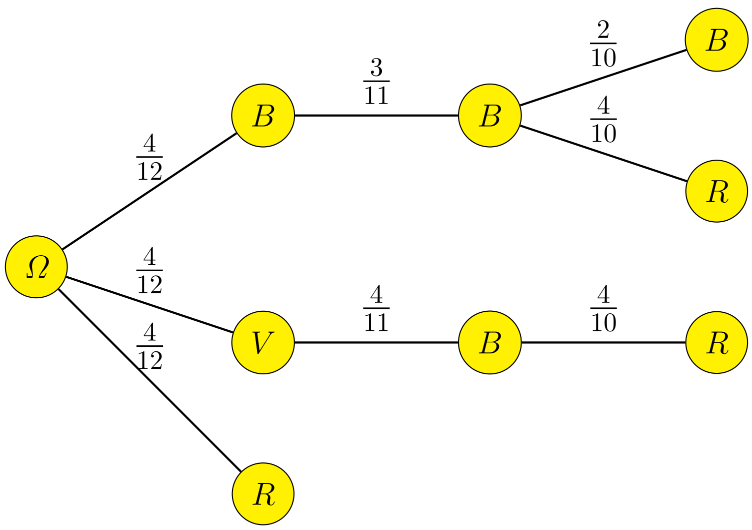
CORRIGE 6.5 A. $P_A = \dfrac{10}{26}$ B.$P_B = \dfrac{21}{26}$ C. $P_C = \dfrac{7}{28}$

CORRIGE 6.6 $P_A = \dfrac{10}{25}$, $P_B = \dfrac{10}{24}$, $P_C = \dfrac{15}{24}$ et $P_D = \dfrac{10}{25} \times \dfrac{9}{24} = \dfrac{90}{600} = \dfrac{3}{20} = 0.15$

CORRIGE 6.7 1. Les couples sont : 1-1 2-2 3-3 4-4 5-5 6-6
2. On a 6 combinaisons donnant un double sur 36 au total ; $P_{double} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

CORRIGE 6.8 1. $N = 20 \times 7 = 140$ places
2. 3. Il y a deux hublots par rangée (un de chaque côté) donc $P_H = \dfrac{40}{140} = \dfrac{2}{7}$
4. Il y a autant de places côté allée centrale que de hublots donc $P_{AC} = P_H = \dfrac{2}{7}$
5. Par déduction ce sont toutes les autres places donc le complément : $P_{autre} = \dfrac{7}{7} - \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{7}$

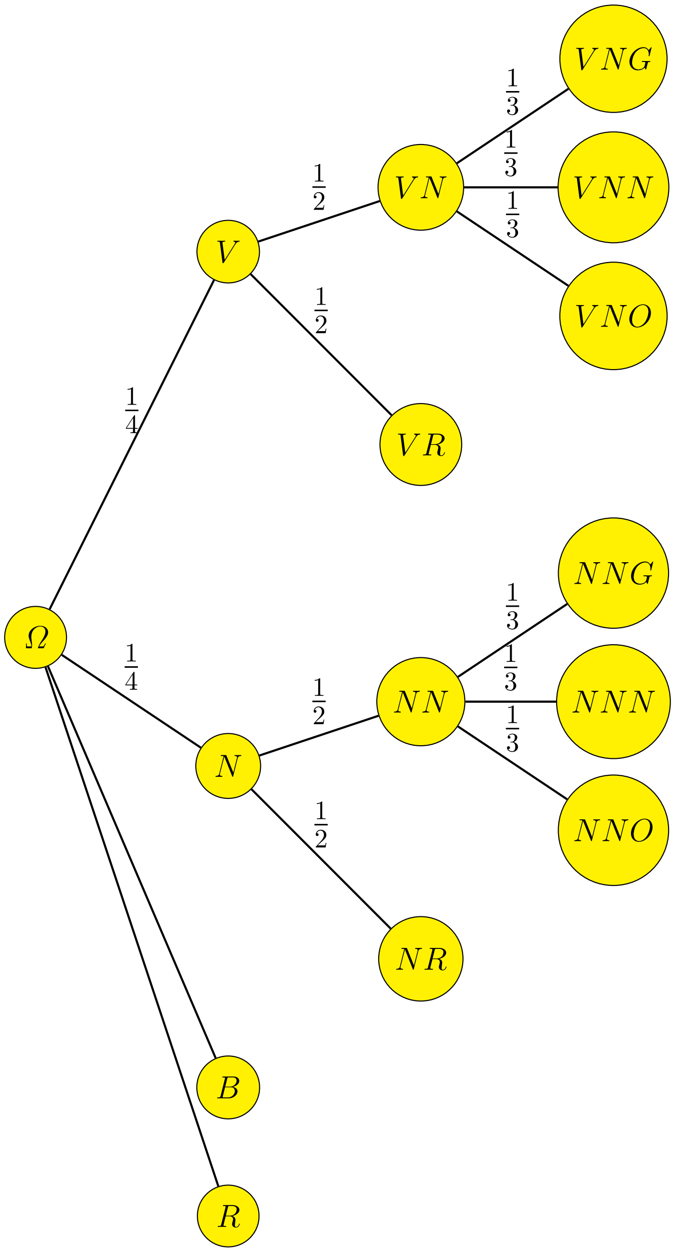
CORRIGE 6.9 Un arbre est recommandé pour les questions A et C. La B est une question qui va se déduire de la A. Nous allons le dessiner partiellement.



Pour trois jetons de la même couleur calculons les chances de faire par exemple B-B-B et multiplions par 3 le résultat (trois couleurs, les chemins seraient les mêmes).
$P_{BBB} = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{55}$ Donc finalement $P_A = \frac{3}{55} \approx 0.05$
La probabilité d'avoir au moins deux couleurs dans le tirage est donc l'événement contraire à avoir trois couleurs et vaut donc $P_B = \frac{52}{55} \approx 0.95$
Pour déterminer l'ordre exact V B R il faut dessiner cette branche de l'arbre et le calcul s'écrit :

$P_{VBR} = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165} \approx 0.05$ en arrondissant au centième.

CORRIGE 6.10 Par soucis de clarté l'arbre est tronqué :

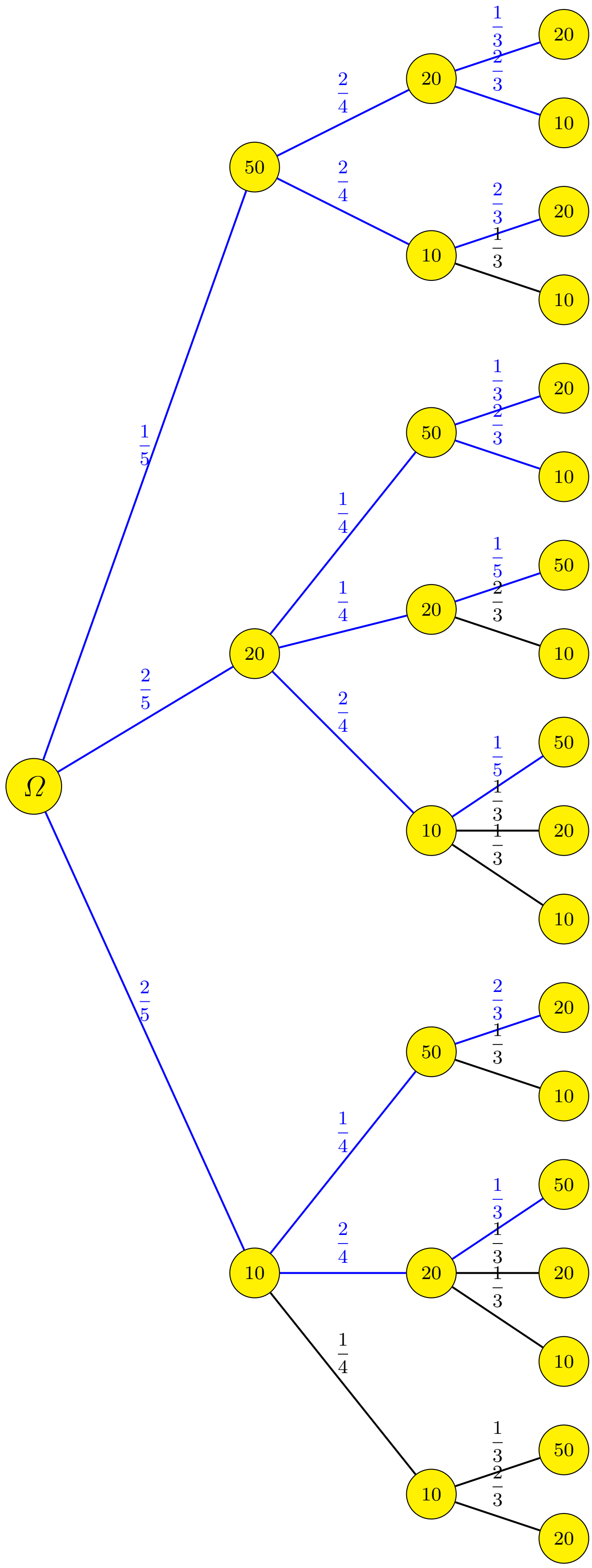


Le chemin menant à trois vêtements de même couleur est N N N dont la probabilité est

$$P_A = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \approx 0.042$$

Concernant la question des 5% on multiplie le résultat précédent par 100 et on trouve 4.2%.

CORRIGE 6.11 L'arbre est conséquent mais attention en le remplissant, certaines branches n'ont plus de pièces !



Les branches colorées en bleu sont les branches permettant d'avoir au minimum 80 centimes.

Il ne reste plus qu'à calculer ... Chaque chemin !

$P_{5-2-2} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{60}$

$P_{5-2-1} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{60}$

$P_{5-1-2} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{60}$

$P_{2-5-2} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{60}$

$P_{2-2-5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{60}$

$P_{2-1-5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{60}$

$P_{1-5-2} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{60}$

$P_{1-2-5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{60}$

On laisse toutes les fractions sur le même dénominateur pour les additionner facilement !

Au final :

$$P_A = \sum P_i = 3 \times \frac{2}{60} + 5 \times \frac{4}{60} = \frac{26}{60} = \frac{13}{30} \approx 0.43$$

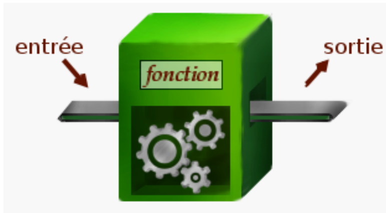
Un petit peu moins d'une chance sur deux.

Chapitre 7

Notion de fonction

7.1 Définition et notations

En mathématiques une **fonction** est un objet qui transforme (via un ou plusieurs calculs) un nombre en un autre nombre. On peut représenter la situation par le schéma suivant :



Le mécanisme à l'intérieur est différent pour chaque fonction.

Quelques notations importantes pour la suite :

- Une fonction se note par une lettre. Exemple : **f** est la fonction f
- Le nombre qui entre dans la fonction se note **x**
- Le nombre qui sort de la fonction après transformation se note $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et se nomme *image de* **x** *par la fonction* **f**
- On dit aussi que **x** est un antécédent de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par la fonction **f**

De manière générale une fonction relie deux grandeurs : le poids en fonction de la masse, le nombre de personnes dans un endroit en fonction de l'heure de la journée ...

Un exemple : La fonction f prend un nombre et le transforme en le multipliant par 3 et en ajoutant ensuite 2.

On prend quelques nombres :
Si je choisi le nombre 0, j'obtiens $0 \times 3 + 2 = 2$
Si je choisi le nombre 5, j'obtiens $5 \times 3 + 2 = 17$
Si je choisi le nombre -2 j'obtiens $-2 \times 3 + 2 = -4$
Que l'on peut résumer dans un tableau :

x	-2	0	5
$f(x)$	-4	2	17

7.2 Différentes formes de représentation

Il faut être capable de jongler entre les différentes formes de représentation des fonctions que nous allons découvrir avec un exemple guidé :
La fonction f prend un nombre, l'élève au carré et enlève 3

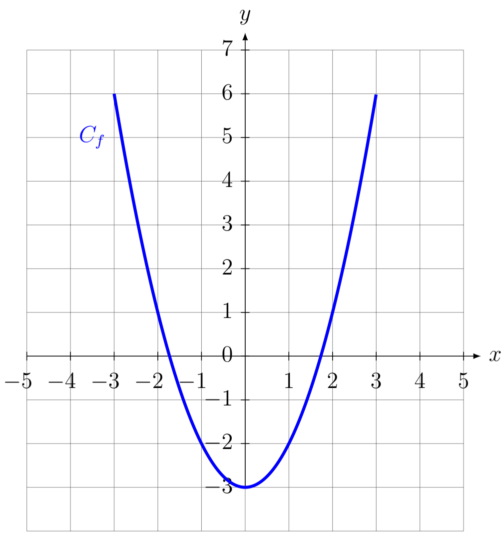
$$f(x) = x^2 - 3$$

Cette écriture se nomme **forme algébrique** de la fonction f. Elle permet de calculer, connaissant le nombre de départ, le nombre résultant par la fonction.

Exemple : $f(1) = 1^2 - 3 = -2$ (on remplace x par 1) Elle permet de passer au **tableau de valeurs** de la fonction :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

Ce qui permet de tracer la **représentation graphique** de la fonction :



La courbe passe par les points du tableau et est tracée à main levée (surtout pas à la règle). On remarque que ce n'est pas une droite et qu'il y a deux parties : une partie "descendante" et une partie "ascendante" : approche du **tableau de variations**.

x	-3		0		3
variations de $f(x)$	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

Cet outil sera revu au lycée et n'est pas à savoir pour cette année !

7.3 exercices

EXERCICE 7.1. Traduire par une expression algébrique les fonctions suivantes :

1. La fonction f prend le nombre de départ, le multiplie par 2 et enlève 4.
2. La fonction g prend le nombre de départ et le multiplie par 4
3. La fonction h prend deux fois le nombre de départ et ajoute 1.

EXERCICE 7.2. Traduire par une phrase les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + 2$
2. $g(x) = 2x - 2$
3. $h(x) = 3x + 2$

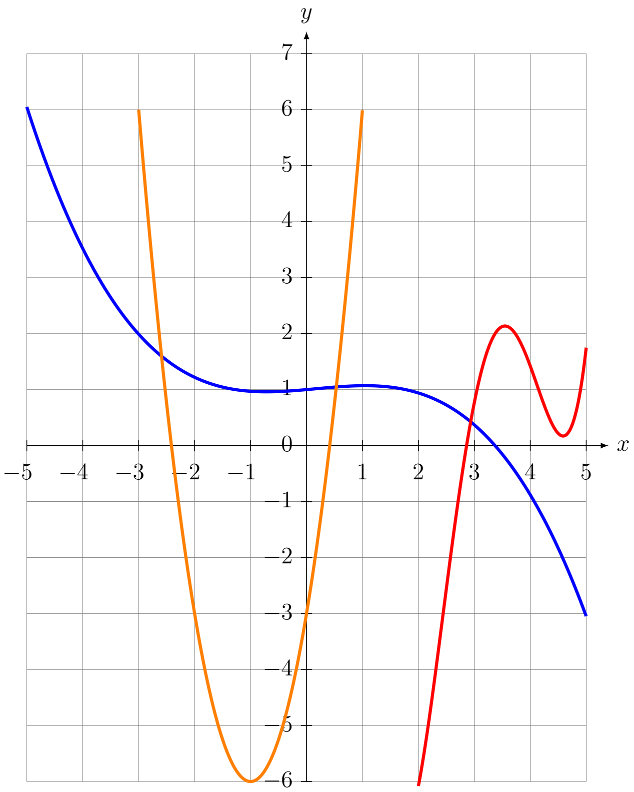
EXERCICE 7.3. Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x$. En détaillant les calculs, compléter le tableau suivant :

x	-2	0	3	10
$f(x)$				
$g(x)$				

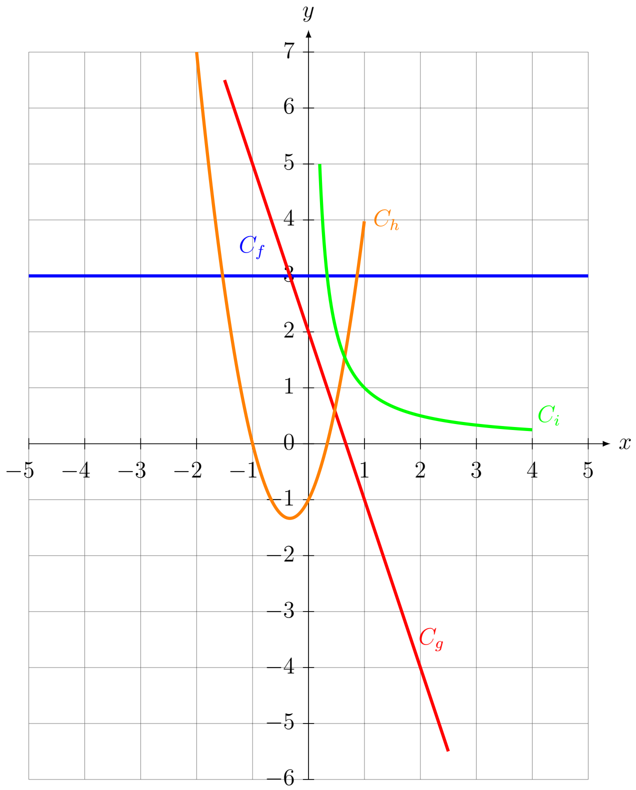
EXERCICE 7.4. On donne trois courbes qui représentent trois fonctions f , g , h et on sait que :

* La courbe représentative de f passe par le point $A(-3; 2)$
* La courbe représentative de g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -3
* L'ordonnée du point d'abscisse 3 est de 1 pour la courbe de la fonction h

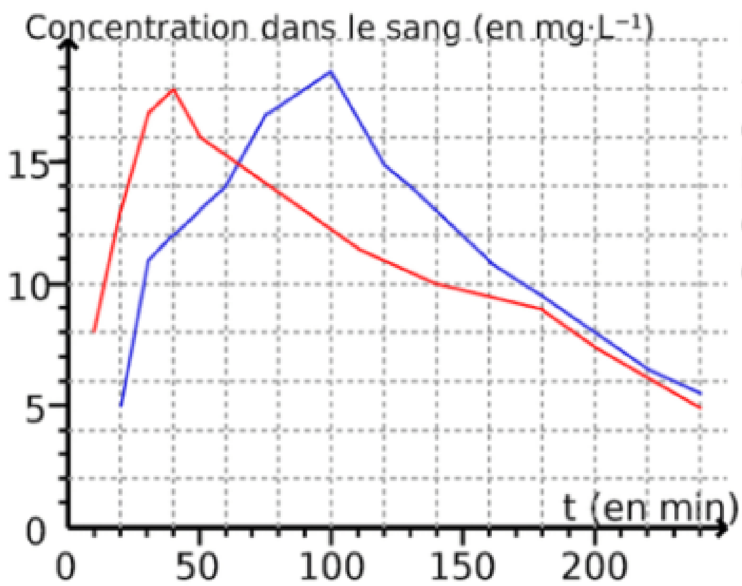
Associer à chaque courbe la fonction correspondante



EXERCICE 7.5. Pour chacune des 4 fonctions tracées sur le graphique, dire si elles sont : croissantes - décroissantes - constantes.



EXERCICE 7.6. On donne le graphique suivant qui représente la concentration dans le sang de paracétamol suivant la forme prise (en cachet en bleu, effervescent en rouge).
Plus la concentration est forte, plus le médicament agit.



1. Pour chaque forme du médicament donner la concentration au bout de 30 min.
2. En combien de temps, pour chaque forme, la dose maximale est-elle atteinte ?
3. Pour chaque forme, donner la durée pendant laquelle la concentration est croissante.
4. Au bout de combien de temps, en minutes, atteint-on une concentration de 13 mg/L pour chaque forme ?
5. Quelle forme choisiriez vous si vous vouliez calmer une douleur le plus rapidement possible ? Justifier la réponse.

EXERCICE 7.7. Les tarifs d'entrée dans une salle d'un club de basket d'une ville en France sont les suivants :

- Tarif grand public : 15€ par match
- Tarif supporter : 45€ abonnement (à payer une fois) + 10€ par match

On donne deux expressions de fonctions : $f(x) = 45+10x$ et $g(x) = 15x$ qui correspondent aux deux propositions de tarifs du club.

1. Donner le prix à payer pour 1 match pour chaque offre.
2. Associer à chaque offre tarifaire la fonction correspondante.
3. Calculer le prix à payer pour chaque offre pour 4 matchs vus dans la saison.
4. Calculer le prix à payer pour chaque offre pour 12 matchs vus dans la saison.
5. En vous aidant du graphique, déterminer le nombre de matchs à voir pour que la formule supporter soit intéressante.

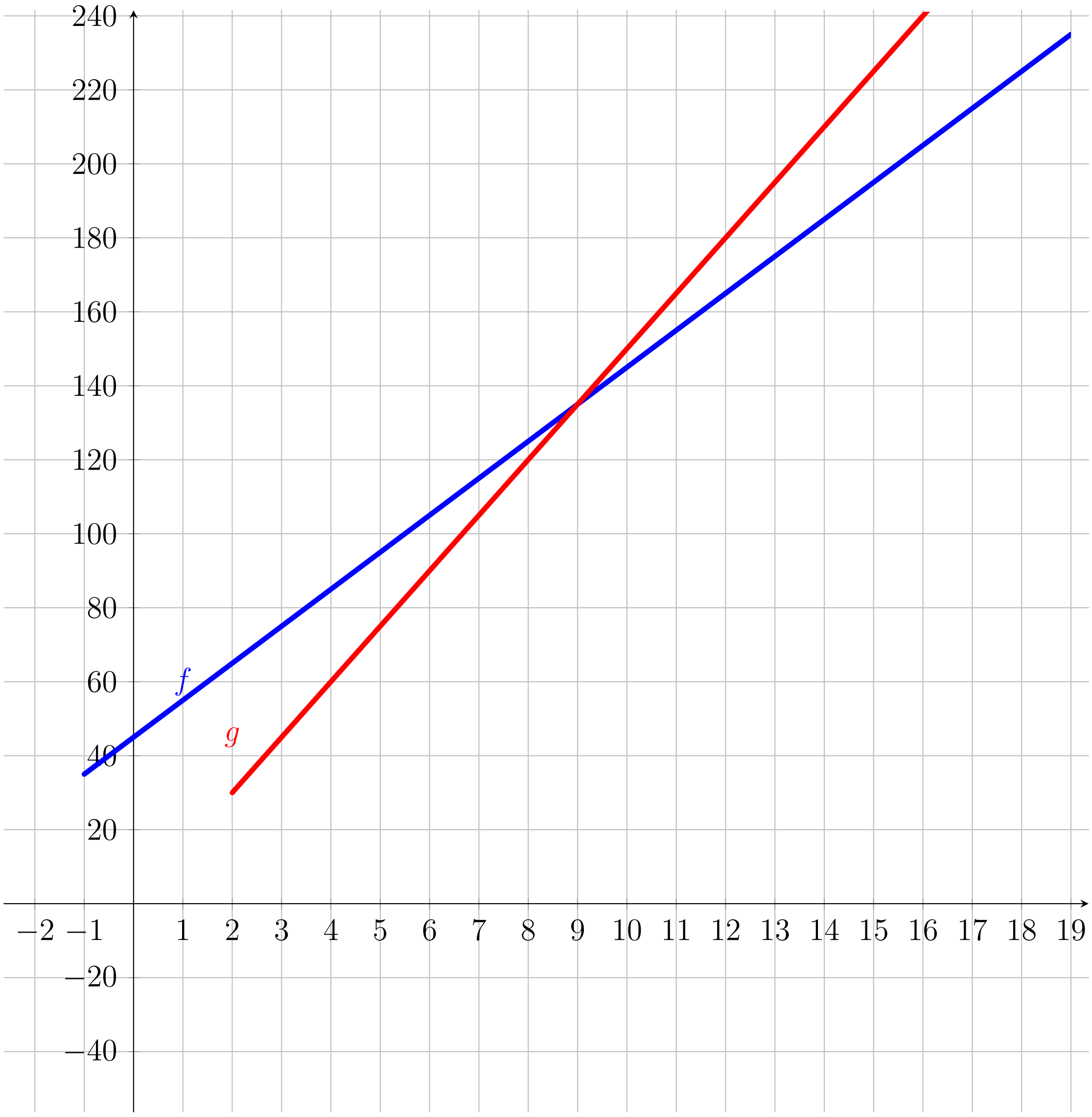


Figure 7.1 – Graphique exercice 7

CORRIGE 7.1 1. $f(x) = 2x - 4$
2. $g(x) = 4x$
3. $h(x) = 2x + 1$

CORRIGE 7.2 1. La fonction f prend le nombre de départ et ajoute deux.
2. La fonction g prend le nombre de départ deux fois et retire deux.
3. La fonction h prend le nombre de départ trois fois et ajoute deux.

CORRIGE 7.3 Les calculs sont à rédiger sur feuille

x	-2	0	3	10
$f(x)$	-3	1	7	21
$g(x)$	6	0	-9	-30

CORRIGE 7.4 La courbe qui coupe les ordonnées à -3 est la parabole en orange, c'est donc la fonction g. La courbe qui passe par le point A est la bleue (celle qui commence la plus à gauche), c'est la fonction f. La dernière est donc la fonction h, cela se vérifie grâce au point $B(3;1)$.

CORRIGE 7.5 La courbe C_f est constante ; la courbe C_h est d'abord décroissante puis croissante, la courbe C_g est décroissante et la courbe C_i aussi.

CORRIGE 7.6 1. Pour la courbe en rouge on est autour de 16 mg/L, pour la bleue autour de 10.
2. Pour la rouge le max est atteint en 40 min. Pour la bleue en 100 min.
3. Pour la forme en rouge l'intervalle de croissance est $[0;40]$ et pour l'autre $[0;100]$
4. La concentration de 13 mg/L est atteinte deux fois pour chaque courbe ; admettons que nous cherchons la première occurrence (action croissante du médicament !) : en rouge atteint pour environ 20 min, en bleu atteinte pour environ 50 min.
5. Je choisirai la forme rouge qui atteint le pic plus vite que la bleue.

CORRIGE 7.3 1. Offre grand public 15€ , offre supporter 55€ pour un match
2. Offre grand public : fonction g, offre supporter fonction f
3. Pour 4 matchs : $f(4) = 45 + 4 \times 10 = 85$ et $g(4) = 15 \times 4 = 60$.
4. Pour 12 matchs : $f(12) = 45 + 12 \times 10 = 165$ et $g(4) = 15 \times 12 = 180$
5. Sur le graphique on voit que le point d'intersection entre les deux courbes se situe pour 9 matchs. Donc à partir de 9 matchs la formule supporter est plus intéressante.

Chapitre 8
Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est un outil permettant :

- De calculer des longueurs (via le théorème)
- De prouver que des droites sont parallèles (via la réciproque)

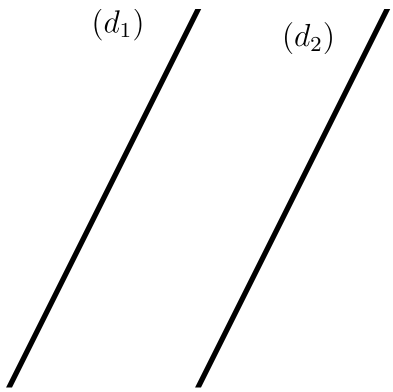
8.1 Droites parallèles

Définition

Deux droites sont parallèles si elles ne se croisent jamais.

Soient 2 droites (d_1) et (d_2) parallèles alors on peut noter

$$(d_1) \mathbin{/\!/} (d_2)$$



8.2 Théorème de Thalès

Théorème de Thalès

Soient les droites (BC) et (MN) parallèles, les points A, M, B alignés et les points A, N, C alignés alors :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

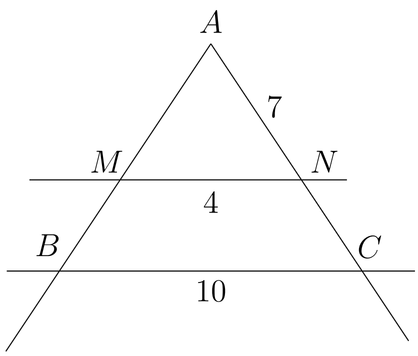


FIGURE 8.1 – Première configuration

Dans cet exemple (les longueurs sont en cm) :
Cherchons la longueur AC :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

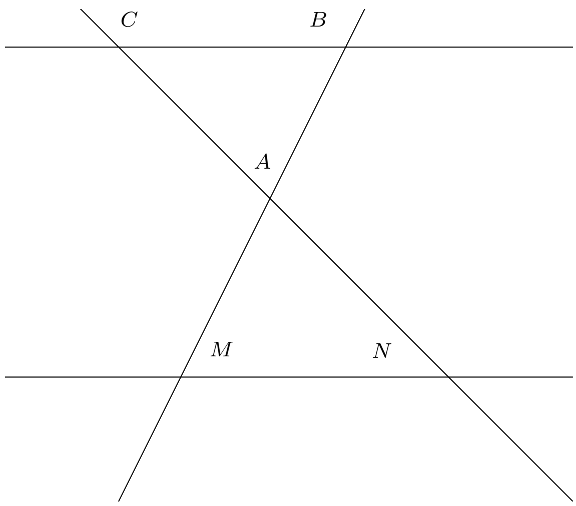
$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$$

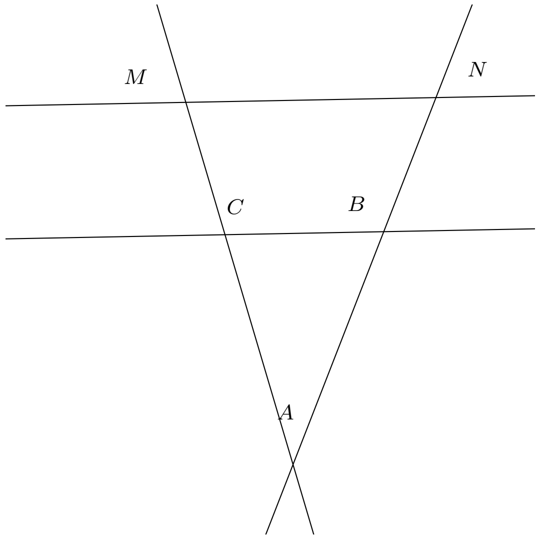
$$AB = \frac{BC \times AN}{MN}$$

$$AB = \frac{10 \times 7}{4} = 17.5$$

Le côté AB mesure 17.5 cm.

On peut rencontrer ce théorème dans trois configurations (donc deux supplémentaires par rapport à la page précédente) :





A part la configuration, rien ne change dans la démarche.

8.3 Réciproque

Ici, l'objectif est de déterminer si deux droits sont parallèles.

Réciproque

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A.

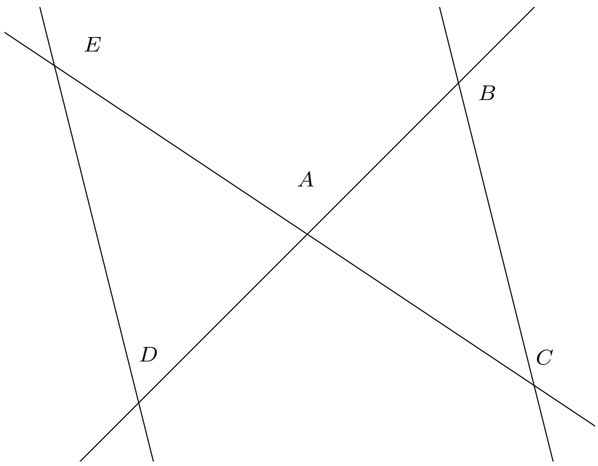
Soit D un point de la droite (AB) distinct de A.

Soit E un point de la droite (AC) distinct de A.

Si les points A,B et D d'une part et A,C et E d'autre part sont alignés et dans le même ordre

Et si : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ alors les droites (DE) et (BC)

sont parallèles.



On donne les longueurs : $AD = 3.15$, $AB = 2.83$, $AE = 4.02$ et $AC = 3.61$. Démontrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.
On a bien EAC alignés dans le même ordre que DAB donc on calcule :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3.15}{2.83} = 1.113 \quad \text{et} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{4.02}{3.61} = 1.113$$

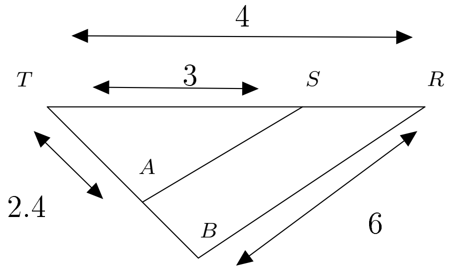
Les deux rapports sont égaux, les droites sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

8.4 Exercices

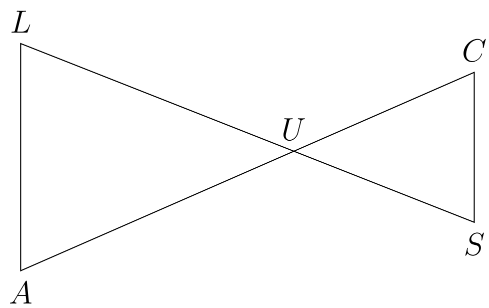
EXERCICE 8.1. On donne la configuration suivante :

Les droites (AS) et (BR) sont parallèles

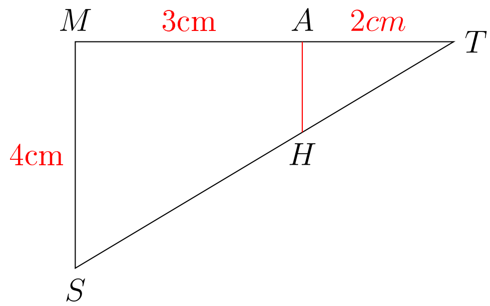
1. Écrire l'égalité du théorème de Thalès.
2. Calculer la longueur du segment $[AS]$.



EXERCICE 8.2. On sait que les droites (LA) et (CS) sont parallèles. Écrire l'égalité du théorème de Thalès.

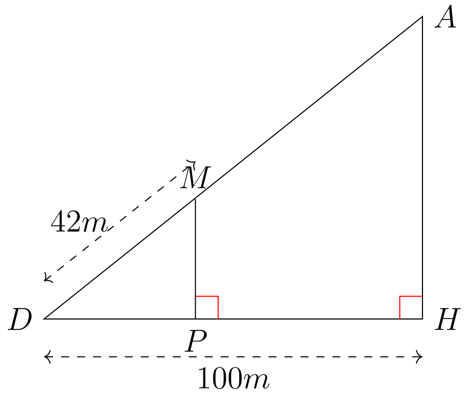


EXERCICE 8.3. Les droits (MS) et (AH) sont parallèles. Calculer AH.



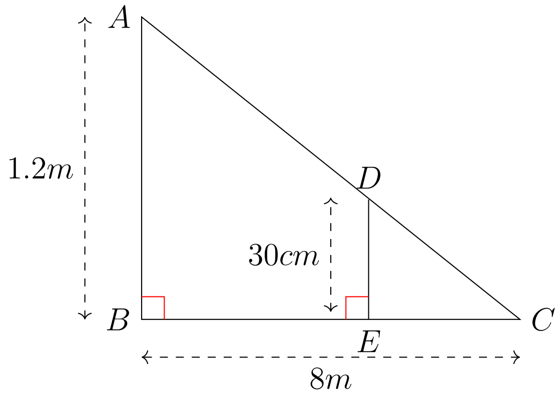
EXERCICE 8.4. Sujet de DNB :
Dans une station de montagne, une remontée mécanique permet de remonter une forte pente comme le suggère le schéma.
Le point de départ D et celui d'arrivée A sont distants de $DA = 125m$.
La différence d'altitude AH est de $AH = 75m$.

1. Placer sur le schéma la longueur DA ainsi que la longueur AH.
2. Expliquer pourquoi les droites (MP) et (AH) sont parallèles.
3. En utilisant le théorème de Thalès, calculer la longueur MP.



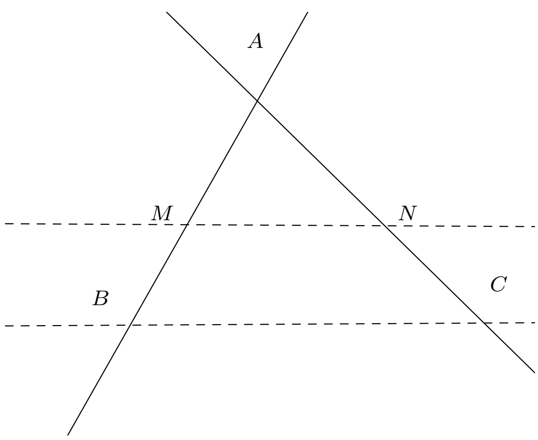
EXERCICE 8.5. Sujet de DNB :
Un spectacle de marionnettes est fait en jeu d'ombre. L'objectif est de projeter une marionnette qui mesure $30cm$ en une ombre de $1.2m$. La source est une lampe modélisée par le point C et se situe à $8m$ de la toile (AB). La marionnette est représentée par la droite (DE).

1. Expliquer pourquoi les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
2. En utilisant le théorème de Thalès, calculer la longueur EC pour savoir où placer la marionnette..

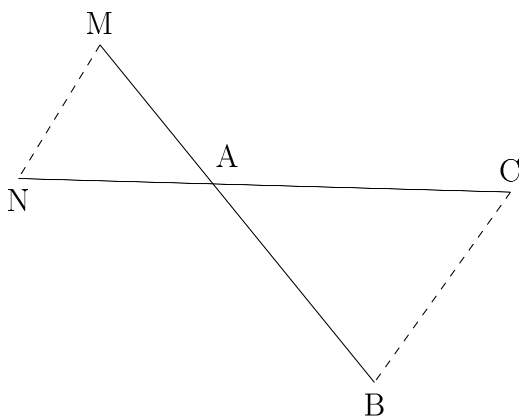


EXERCICE 8.6. Les droites en pointillés sont-elles parallèles ?

AM=7 - AB=8 - AN=8.4 - AC=9.6.



AM=4.5 - AB=7.5 - AN=6 - AC=10.



CORRIGE 8.1 Égalité de Thalès : $\dfrac{TR}{TS} = \dfrac{BR}{AS} = \dfrac{BT}{AT}$
Calcul de AS : $\dfrac{AS}{BR} = \dfrac{TS}{TR} \implies AS = \dfrac{TS \times BR}{TR} = \dfrac{3 \times 6}{4} = 4.5cm$

CORRIGE 8.2 $\dfrac{LU}{US} = \dfrac{AU}{AC} = \dfrac{AL}{CS}$

CORRIGE 8.3 Théorème de Thalès : $\dfrac{AH}{MS} = \dfrac{AT}{MT} \implies AH = \dfrac{AT \times MS}{MT} = \dfrac{2 \times 4}{5} = 1.6cm$

CORRIGE 8.4 Schéma : a vous de vous débrouiller. Les droites sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même troisième (voir schéma.
Pour le calcul avec Thalès : $\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{DM}{DA} \implies MP = \dfrac{DM \times AH}{DA} = 25.2m.$

CORRIGE 8.5 Les droites sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même troisième (voir schéma.
Pour le calcul avec Thalès : $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{DE}{BA} \implies EC = \dfrac{DE \times BC}{BA} = \dfrac{0.30 \times 8}{1.2} = 2m.$

CORRIGE 8.6 Il faut utiliser la réciproque du théorème de Thalès. $\dfrac{AB}{AM}$ doit être égal à $\dfrac{AC}{AN}$

1. Pour ce dessin : $\dfrac{AB}{AM} = 1.14$ et $\dfrac{AC}{AN} = 1.14$. Les droites sont parallèles.
2. Pour ce dessin : $\dfrac{AB}{AM} = 1.67$ et $\dfrac{AC}{AN} = 1.66$. Les droites sont parallèles.

Chapitre 10

Puissances

10.1 Activité d'introduction

Le jeu télévisé.

Dans un jeu télévisé, un candidat doit répondre à des questions.
Il gagne 2€ à la première bonne réponse et on double à chaque nouvelle bonne réponse.
Il y a au maximum 15 questions et un palier se trouve à la 8ème.

Problématique : Comment déterminer les gains du joueur s'il répond aux 15 questions ?

Proposition de réponse : ....

S'il échoue à la 9ème question, quel sera son gain ? ....

Peut-on trouver une méthode rapide pour calculer les gains ? C'est l'objectif du chapitre !

10.2 Puissances

Point à retenir

Dans le cas de calculs répétitifs comme dans l'activité précédente où on avait :

$$\underbrace{2 \times 2 \times ... \times 2}_{n \text{ fois}}$$

Une nouvelle notation a été introduite : 2^n qui se lit "2 à la puissance n".

Par exemple on pourra écrire le calcul de 4^5 :

....

....

....

....

....

Résultat (calc) : $4^5 = ...$

Règles de calcul

Ces règles sont à retenir ! m et n sont des entiers.

- $a^m \times a^n = a^{n+m}$ — $2^2 \times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — $\dfrac{4^4}{4^2} = 4^{4-2} = 4^2$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$ — $(7^2)^3 = 7^6$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ — $(4 \times 9)^2 = 4^2 \times 9^2$

Nous pouvons vérifier pour un exemple que la première formule fonctionne.

Calculer $4^5 \times 4^3$: ....

....

....

Calculer 4^8 : ....

....

....

Conclusion : ....

....

10.3 Notation Scientifique

Activité 2 : La Terre

Le rayon de la Terre 6400km.
On souhaite parcourir le tour de la planète en restant sur la ligne imaginaire de l'équateur. Pour connaître la distance ainsi parcourue on va calculer le périmètre de la planète.

1. Calculer le périmètre de la Terre en utilisant la formule $P = 2\pi R$
   ....
   ....
2. Convertir le résultat en mètres ....
   ....
   ....
3. Donner le principal défaut à l'écriture du résultat précédent ....
   ....
   ....

Écriture scientifique

Devant la taille de certains nombres (très grands ou très petits) une nouvelle méthode d'écriture a été inventée et basée sur les puissances de 10.

Cette nouvelle technique se nomme écriture scientifique et revient à écrire un nombre sous la forme

$$a \times 10^n$$

avec a un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$.

Exemple : Le nombre 95668 s'écrit en notation scientifique : 9.57×10^4.

La plupart des calculatrices utilisent cette notation que l'on retrouve symbolisée par un petit E ou un $\times 10$.

10.4 Exercices

EXERCICE 10.1. Calculer les puissances suivantes en détaillant le calcul :

1. 5^3 : ....
2. 3^5 : ....
3. 6^2 : ....
4. 11^6 : ....

EXERCICE 10.2. Calculer les puissances suivantes :

1. 2^2 : ....
2. 4^2 : ....
3. 2^4 : ....
4. 3^2 : ....
5. 9^2 : ....
6. 3^4 : ....

EXERCICE 10.3. Calculer :

1. $A = 2^3 - 3^2$ ....
2. $B = 4^4 - 4^2$ ....
3. $C = 2 + 3^3$ ....
4. $D = 5 - 3^2$ ....

EXERCICE 10.4. Sujet de DNB
En informatique on utilise comme unité de mesure les multiples suivants de l'octet :
$1ko = 10^3$ octets, $1Mo = 10^6$ octets, $1Go = 10^9$ octets et $1To = 10^12$ octets.
On partage un disque dur de $1.5To$ en dossiers de $60Go$ chacun.

Affirmation : On obtient 25 dossiers.

Vérifier si l'affirmation est vraie ou fausse en expliquant.

EXERCICE 10.5. Un cadenas à 4 chiffres compris entre 0 et 9 possède une seule combinaison permettant de l'ouvrir. Elle a été oubliée par son propriétaire. On considère qu'il faut $5s$ pour essayer une combinaison sur le cadenas.

1. Combien de combinaisons existent ?
2. Combien de temps faudrait-il pour toutes les essayer ?
3. Si on suppose qu'il devra essayer au moins $\frac{2}{3}$ (ou 66%) des combinaisons avant de trouver la bonne, combien de temps cela prendra t'il ?
4. Les cartes bancaires utilisent aussi un code à 4 chiffres. Pensez vous qu'un blocage au bout de 3 essais ratés est une bonne protection contre cette technique de la "force brute" ?

EXERCICE 10.6. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants en arrondissant au centième.

1. $A = 4778999$
2. $B = 4445788111$
3. $C = 0.0000088$
4. $D = 0.378$

EXERCICE 10.7. Le roi fou

Le roi des Indes promit une énorme récompense à quiconque réussirait à l'amuser.
Sissa proposa un jeu au roi : les échecs. Il se joue sur un plateau de 8x8 cases.
Ce dernier adora le jeu et vit le potentiel. Il récompensa donc Sissa en lui demandant ce qu'il souhaitait. Ce dernier répondit du riz.
Il voulait que le roi pose un grain sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième etc.

1. Calculer le nombre de grains de riz à la case 4.
2. Calculer le nombre de grains de riz à la case 5.
3. Donner sous la forme d'une puissance le nombre de grains de riz en case 6.
4. Même question pour la case 7.
   Le conseiller du roi a essayé de le prévenir de la stupidité du jeu en précisant qu'ils n'auraient jamais assez de grain de riz. Le roi n'a pas écouté.
5. Donner sous la forme d'une puissance le nombre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier.
6. Calculer ce nombre avec votre calculatrice et donner le résultat sous la forme d'une écriture scientifique.

Pour aller plus loin : en 2010 la production mondiale de riz était de 699 000 000 tonnes et un grain pèse en moyenne 0.04g.

- Calculer le nombre de grains de riz contenus dans 699 000 000 tonnes (attention aux unités). Donner le résultat sous la forme d'une écriture scientifique.
- En utilisant le résultat de la question 5 : donner le nombre d'années de production mondiale nécessaires pour remplir la dernière case.
- Qui avait raison ? Le roi ou le conseiller ?

CORRIGE 10.1 Résultat :

1. $5^3 = 125$
2. $3^5 = 243$
3. $6^2 = 36$
4. $11^6 = 1771561$

CORRIGE 10.2 Résultat :

1. $2^2 = 4$
2. $4^2 = 16$
3. $2^4 = 16$
4. $3^2 = 9$
5. $9^2 = 81$
6. $3^4 = 81$

CORRIGE 10.3 résultats : $A = 8 - 9 = -1$ - $B = 256 - 16 = 240$ - $C = 2 + 27 = 29$ - $D = 5 - 9 = -4$

CORRIGE 10.4 Méthode 1 : on peut multiplier la taille d'un dossier par 25 : $60 \times 25 = 1500Go$. On convertit le résultat en To en divisant par 1000 et on obtient bien 1.5.
Méthode 2 : on peut diviser $1.5TO$ c'est à dire $1500GO$ en 25 et on obtient bien $60GO$ par dossier.

CORRIGE 10.5

1. S'il y a 4 chiffres on peut les permuter et on obtient $N = 10^4$ combinaisons c'est à dire 10000
2. On multiplie par 5 et on obtient 50000 secondes soit 833 minutes soit 13 heures.
3. On multiplie le résultat par $\frac{2}{3}$: $\frac{50000 \times 2}{3} = 33333s$ Ce qui donne environ 9 heures !
4. La probabilité d'obtenir le bon code en 3 tentatives est de $p = \frac{3}{10000} = 3.0 \times 10^{-4}$ ce qui donne 0.03% de trouver le bon code ! C'est donc une protection solide.

CORRIGE 10.6 Attention au sens et aux arrondis :

1. $A = 4778999 = 4.78 \times 10^6$
2. $B = 4445788111 = 4.45 \times 10^9$
3. $C = 0.0000088 = 8.0 \times 10^{-6}$
4. $D = 0.378 = 3.78 \times 10^{-1}$

CORRIGE 10.7 Attention aux notations ici :

1. Case 1 : 1 grain / $C_2 = 1 \times 2 = 2$ grains / $C_3 = 2 \times 2 = 4$ et $C_4 = 8$ grains.
2. On multiplie encore par deux : 16 grains.
3. Sur la case 4 il y a 2^3 grains, sur la case 5 il y a 2^4, sur la case 6 : 2^5
4. et sur la case 7 : 2^6
5. Sur la case 64 il y a donc $2^6 3$ grains de riz !
6. Ce nombre donne $9.22.10^{18}$ grains !

Pour aller plus loin :

- 1 grain pèse $0.04 \div 10^6$ tonnes donc il y a $\frac{699000000}{0.04.10^{-6}} = 1.75.10^{16}$ grains dans la production mondiale.
- On divise le nombre nécessaire par le nombre par an : $\frac{9.22.10^{18}}{1.75.10^{16}} = 528$ années !
- le conseiller avait bien évidemment raison.

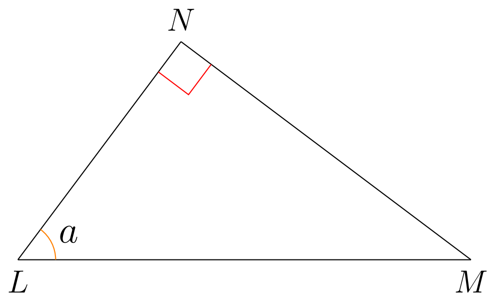
Chapitre 11

Trigonométrie dans le triangle rectangle

Objectif du chapitre : introduire un nouvel outil de calcul de longueurs dans le triangle rectangle.

11.1 Identifier les angles et les côtés

On donne un triangle rectangle LMN :



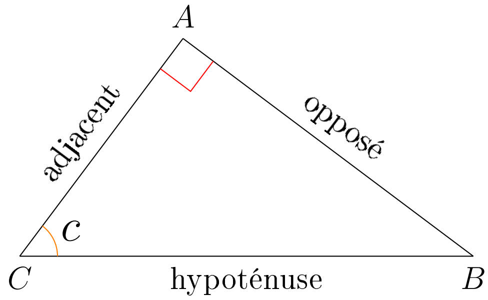
- En quel point ce triangle est-il rectangle ? ....
- Donner la valeur de l'angle $\widehat{LNM}$ en degrés : ....
- Donner l'autre nom de l'angle a : ....
- Donner le nom de l'hypoténuse de ce triangle : ....
- Selon vous quel serait le côté opposé à l'angle a ? ....

Angles et côtés

Soit un triangle rectangle ABC rectangle en A.
On appelle c l'angle au sommet C, abréviation de ACB.

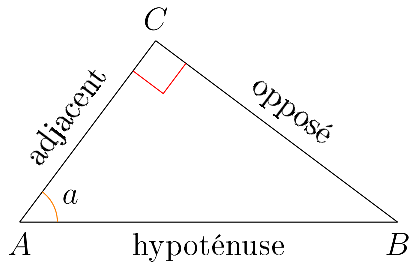
L'hypoténuse du triangle est BC.
Le côté issu de C et qui rejoint A est appelé **côté adjacent** à l'angle c.

Le côté issu de A et qui rejoint B est appelé **côté opposé** à l'angle c.



11.2 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Les formules trigonométriques donnent la possibilité de calculer un angle ou une longueur dans un triangle rectangle.



♣ Attention aux unités d'angle sur la calculatrice. ♣

Les relations donnent pour l'angle α :

Sinus

$$\sin a = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CB}{AB}$$

Cosinus

$$\cos a = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$

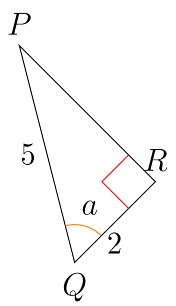
Tangente

$$\tan a = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AC}{CB}$$

On pourrait écrire les mêmes formules pour l'angle b (angle au sommet B). *A faire en exercice d'entraînement*

On peut retenir ces formules avec le moyen mnémotechnique : SOH CAH TOA (sin opp hyp, cos adj hyp, tan opp adj).

Exercice d'application :
On donne un triangle PQR rectangle en R tel que $PQ = 5$ et $RQ = 2$. On demande de calculer l'angle $\widehat{RQP}$ et la mesure du côté PR avec les formules trigonométriques. On pourra faire un schéma.
Solution dirigée :
Commençons par faire un schéma :



On cherche l'angle a et on connait son côté adjacent ainsi que l'hypoténuse : il faut donc utiliser la formule du cosinus.

$$\cos a = \frac{QR}{PQ} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Pour trouver l'angle on utilise ensuite la touche $\boxed{\cos^{-1}}$: $a = \cos^{-1} 0.4 \approx 66.4°$.

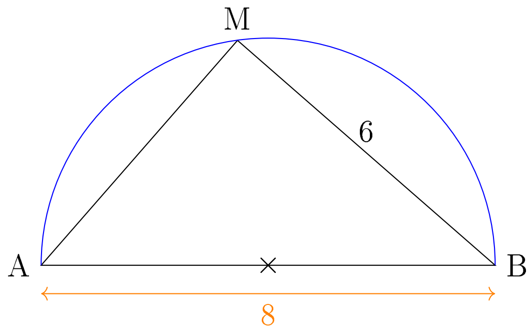
On cherche maintenant le côté PR. On pourrait utiliser Pythagore mais on va plutôt utiliser une formule trigonométrique : on cherche le côté opposé de l'angle a et on connaît l'hypoténuse et le côté adjacent. On peut utiliser au choix tangente ou sinus.
Prenons tangente : $\tan a = \dfrac{PR}{QR} \implies PR = \tan a \times QR = \tan 66.4 \times 2 \approx 4.58$

11.3 Exercices

EXERCICE 11.1. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = 5$ et $\widehat{ABC} = 40°$.

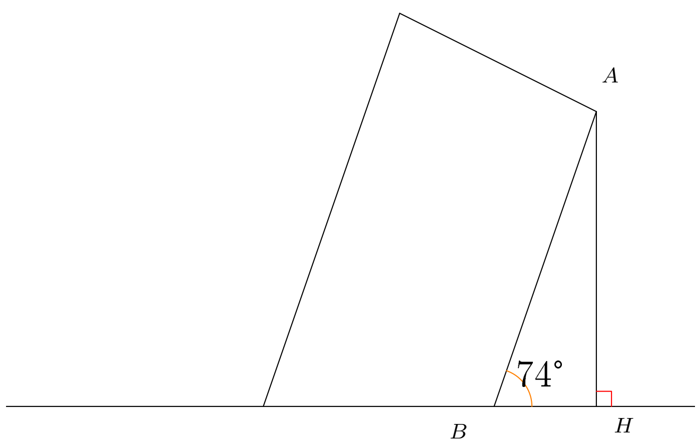
1. Construire le triangle.
2. Calculer AC et BC.

EXERCICE 11.2. Soit le demi-cercle de diamètre AB et un point M tel que $BM = 6cm$:



1. Expliquer pourquoi le triangle est rectangle en M.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABM}$.

EXERCICE 11.3. La tour de Pise fait un angle de 74° avec le sol horizontal. Quand le soleil est au zénith (rayon vertical), la longueur de l'ombre sur le sol est de $BH = 15m$. On a représenté la situation par le schéma :

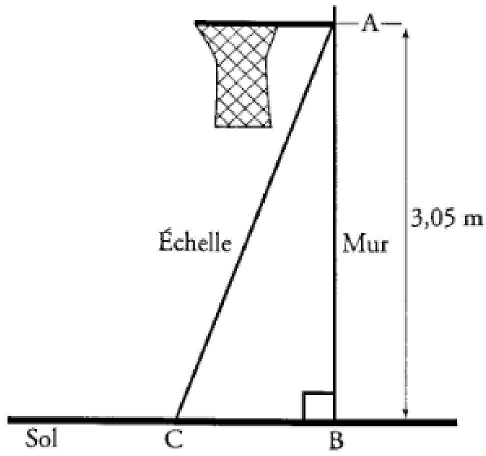


1. Déterminer la hauteur du point A en calculant la longueur AH.
2. Déterminer la distance AB, hauteur de la tour.

EXERCICE 11.4. Soit le triangle LOG rectangle en L et tel que $OL = 4cm$ et l'angle au sommet G noté $g = 30°$.

1. Calculer l'angle au sommet O
2. Calculer en utilisant une relation de votre choix le côté OG.
3. Calculer la longueur du côté GL.

EXERCICE 11.5. On souhaite installer un panneau de basket fixé à 3.05m du sol en hauteur contre un mur.



L'échelle utilisée mesure 3.2m de long.

1. Calculer la distance entre le mur et l'échelle où placer cette dernière pour que le sommet de l'échelle atteigne parfaitement la hauteur désirée pour le panier.
2. Calculer l'angle ainsi formé avec le sol.

EXERCICE 11.6. ABCD désigne un rectangle tel que $AB = 7.2cm$ et $BC = 5.4cm$.

1. Reproduire ce rectangle en grandeur réelles
2. Tracer la diagonale AC
3. Calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{ACD}$
4. Prouver que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.
5. La médiatrice du ségment $[AC]$ coupe la droite (AB) en E. Placer le point E.
6. Prouver que le triangle ACE est isocèle.
7. Déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{DCE}$

CORRIGE 11.1 Pour calculer BC on sait qu'on connait le côté adjacent à l'angle et l'angle, on va donc utiliser le cosinus : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} \implies BC = \dfrac{5}{\cos 40} \approx 6.53cm$.
Pour calculer l'autre côté on peut utiliser le sinus : $AC = \sin 40 \times 6.53 \approx 4.2cm$

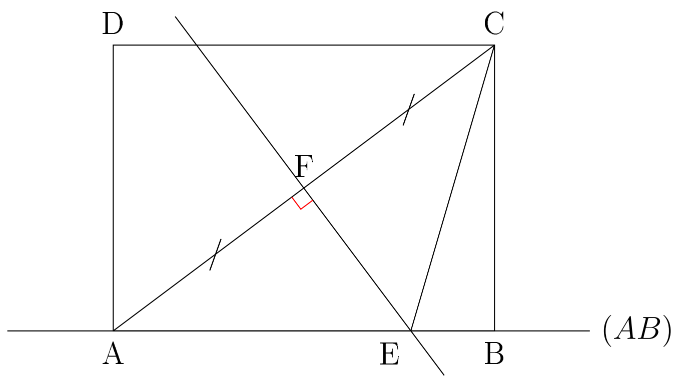
CORRIGE 11.2 Le triangle est rectangle car les trois points sont sur le cercle et que le centre est le milieux d'un des côtés du triangle.
On peut donc calculer avec la formule $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{6}{8} = 0.75 \implies \widehat{AMB} = 41.4°$.

CORRIGE 11.3 Pour déterminer AH il faut utiliser la tangente : $tanb = \dfrac{AH}{BH} \implies AH = tan74 \times 15 \approx 52m$.
Pour déterminer la hauteur de la tour on utilise par exemple le cos : $\cos b = \dfrac{BH}{AB} \implies AB = \dfrac{15}{\cos 74} \approx 54.4m$.

CORRIGE 11.4 On sait que la somme des angles d'un triangle fait 180 donc le dernier mesure $180 - 90 - 30 = 60°$.
$OG = \dfrac{OL}{\sin g} = \dfrac{4}{\sin 30} = 8cm$.
$GL = \dfrac{OL}{\tan g} = \dfrac{4}{\tan 30} \approx 6.9cm$.

CORRIGE 11.5 Il faut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver BC connaissant AC et AB : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 0.9375 \implies BC = \sqrt{0.9375} \approx 0.97m$.
Pour trouver l'angle on utilise le sinus : $\sin c = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3.05}{3.20} \approx 0.953$ ce qui donne $= \sin^{-1} 0.953 \approx 72.4°$.

CORRIGE 11.6 Commençons par la figure complète :



Pour calculer l'angle $\widehat{ACD}$ on utilise $\widehat{ACD} = \tan^{-1}\dfrac{5.4}{7.2} = 37°$.
Deux droites (AB) et (CD) coupées par une sécante (AC) forment des angles alternes internes donc les angles $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$.
On note F le milieu de $[AC]$ alors le triangle FAE est rectangle en F (définition de la médiatrice) et AF est la moitié de la longueur de la diagonale AC grâce à la formule $AC = \dfrac{7.2}{\cos\widehat{ACD}} = \dfrac{7.2}{\cos 37} \approx 9cm$. On en déduit que $AF = 4.5cm$.
De là on peut calculer $AE = \dfrac{4.5}{\cos 37} = 5.6cm$.
Il faut maintenant calculer EC : en utilisant le théorème de Pythagore pour trouver $EF^2 = 5.6^2 - 4.5^2 = 11.11 \implies EF = \sqrt{11.11} \approx 3.3cm$ et encore une fois Pythagore pour avoir $EC^2 = 3.3^2 + 4.5^2 = 31.36 \implies EC = \sqrt{31.36} \approx 5.6cm$. Le triangle est donc isocèle.