DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f admet un développement limité en a, alors f est définie en a.
2. Si f admet un développement limité en a, alors f admet une limite finie en a.
3. On peut déterminer un développement limité de $x \longmapsto \ln x$ en 0.
4. On peut utiliser un développement limité pour démontrer une inégalité.

1. Faux.
2. Vrai.
3. Faux, sinon ln aurait une limite finie en 0.
4. C'est à la fois vrai et faux. Un DL ne donne qu'un renseignement local. Il peut donc servir à établir une inégalité locale (par exemple pour positionner une tangente ou une asymptote par rapport à la courbe). En revanche, on ne peut pas l'utiliser pour démontrer une inégalité globale.

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Déterminer le

a) $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f(x) = (\sin x)^2$,
b) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \ln(1 + x\cos x)$,
c) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x} - \sqrt{1+x}$,
d) $\mathrm{DL}_3(1)$ de $f(x) = 3^x$,
e) $\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,
f) $\mathrm{DL}_2(\pi/4)$ de $f(x) = (\sin x)/\sqrt{x}$,
g) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = x^2/(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

On obtient

$$\boxed{(\sin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^7)}$$

$$\boxed{\ln(1 + x\cos x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}$$

$$\boxed{x\,\mathrm{e}^{\sin x} - \sqrt{1+x} = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)}$$

$$\boxed{3^x = 3 + (3\ln 3)\,(x-1) + \frac{3}{2}(\ln 3)^2(x-1)^2 + \frac{1}{2}(\ln 3)^3(x-1)^3 + O\big((x-1)^4\big)}$$

$$\boxed{\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}(x-1) - \frac{13}{128}\sqrt{2}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)}$$

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^4).}$$

♦ ***Exercice 3.*** [○]
En relativité restreinte, l'énergie totale d'une particule de masse m et de vitesse v est donnée par l'expression $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Déterminer un développement limité de E à l'ordre 2 au voisinage de $v = 0$. Les termes obtenus vous sont-ils familiers ?

On a

$$E = mc^2\Big(1 + \frac{v^2}{2c^2} + o(v^2)\Big)$$

donc

$$\boxed{E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + o(v^2).}$$

On constate que

$$\boxed{\text{le premier terme } mc^2 \text{ est l'énergie interne et le second } mv^2/2 \text{ est l'énergie cinétique.}}$$

♦ ***Exercice 4.*** [○]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

   En déduire que f se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note encore f le prolongement ainsi obtenu. Préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. Soit $n \geqslant 0$. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction f. Deux fonctions ayant le même DL à tout ordre en 0 sont-elles nécessairement égales ?

1. Par théorèmes généraux,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

   Démontrons par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-1/x^2}/x^{3n}$.
   <u>Initialisation :</u> On prend $P_0(x) = 1$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'on suppose la formule exacte au rang $n \geqslant 0$, on la dérive pour obtenir

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(\frac{x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}}\Big)\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

   ce qui donne le résultat au rang $n+1$ avec $P_{n+1} = X^3P_n' - 3nX^2P_n + 2P_n \in \mathbb{R}[X]$.
   <u>Conclusion :</u> D'après le principede récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}.}$$

   D'après le résultat ci-dessus et l'échelle des croissances comparées des fonctions usuelles, on a $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu du théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit donc que

$$\boxed{f \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec, pour tout } n \geqslant 0,\ f^{(n)}(0) = 0.}$$

2. Le théorème de Taylor–Young permet alors d'affirmer que f admet un développement (très) limité à tout d'ordre en 0 donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{DL}_n(0) : f(x) = o_{x\to 0}(x^n).}$$

   La fonction f et la fonction nulle ont le même développement limité en 0 à tout ordre mais ne sont pas égales au voisinage de 0. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{deux fonctions ayant le même DL à tout ordre en 0}\\ \text{ne sont nécessairement égales au voisinage de 0.}\end{array}}$$

◆ **Exercice 5.** [∘]

1. Soient f, g deux fonctions impaires de classe $\mathscr{C}^7$ au voisinage de 0 telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 1$. Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $g \circ f - f \circ g$ en fonction des coefficients des développements limités à l'ordre 7 en 0 de f et de g.
2. Donner le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $x \longmapsto \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

1. On a

$$f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7) \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7 + o(x^7),$$

donc

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7)) + \alpha(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7))^3 \\ &\qquad + \beta(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7))^5 + \gamma(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7))^7 + o(x^7) \\ &= x + (\alpha + a)x^3 + (b + 3a\alpha + \beta)x^5 + (c + 3a^2\alpha + 3b\alpha + 5a\beta + \gamma)x^7 + o(x^7)\end{aligned}$$

et, de manière symétrique,

$$(f \circ g)(x) = x + (a + \alpha)x^3 + (\beta + 3\alpha a + b)x^5 + (\gamma + 3\alpha^2 a + 3\beta a + 5\alpha b + c)x^7 + o(x^7).$$

Cela donne

$$\boxed{(g \circ f - f \circ g)(x) = (3a^2\alpha - 3\alpha^2 a + 2a\beta - 2\alpha b)x^7 + o(x^7).}$$

2. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7) \qquad \text{et} \qquad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7),$$

donc, comme

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{120} - 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{2}{15} = -\frac{1}{30},$$

on a

$$\boxed{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^7).}$$

◆ **Exercice 6.** [⋆]
Déterminer un $\mathrm{DL}_{100}(0)$ de la fonction $f(x) = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln\left\{\mathrm{e}^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right\} \\ &= \ln\left\{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^{100}}{100!}\,\mathrm{e}^{-x} + o(x^{100})\right)\right\} \\ &= x + \ln\left\{1 - \frac{x^{100}}{100!}\,\mathrm{e}^{-x} + o(x^{100})\right\}\end{aligned}$$

donc, comme $\ln(1+u) = u + o_{u\to 0}(u)$, on a

$$f(x) = x - \frac{x^{100}}{100!}\,\mathrm{e}^{-x} + o(x^{100}).$$

Or $\mathrm{e}^{-x} = 1 + o(1)$, donc

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}).}$$

♦ ***Exercice 7.*** [$\circ$]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x + \arctan x - 1$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f^{-1} après avoir justifié l'existence de f^{-1} et de son $\mathrm{DL}_2(0)$.

La fonction f est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-\pi/2-1;+\infty[.}$$

On a

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x + o(x^2) - 1 = 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^x + 1/(1+x^2) \neq 0$, le cours nous permet d'affirmer que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi/2-1;+\infty[$. Le théorème de Taylor–Young permet alors d'affirmer l'existence d'un $\mathrm{DL}_n(f^{-1};0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$f^{-1}(x) = bx + cx^2 + o(x^2)$$

car $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$. Comme $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, on a

$$\begin{aligned} x &= 2\big(bx + cx^2 + o(x^2)\big) + \frac{\big(bx + cx^2 + o(x^2)\big)^2}{2} + o(x^2) \\ &= 2bx + \Big(2c + \frac{b^2}{2}\Big)x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

ce qui donne, par unicité du développement limité,

$$2b = 1 \qquad \text{et} \qquad 2c + \frac{b^2}{2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$b = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{1}{16}\cdot$$

Donc

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + o\left(x^2\right).}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\circ$]
Déterminer un équivalent simple de

$$f(x) = 1 - \frac{(\sin x)^x}{x^x} \text{ en } 0 \qquad \text{et} \qquad u_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \text{ en } +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \exp\Big\{x \ln\Big[\frac{\sin x}{x}\Big]\Big\} \\ &= 1 - \exp\Big\{x \ln\Big[\frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big]\Big\} \\ &= 1 - \exp\Big\{x \ln\Big[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\Big]\Big\} \\ &= 1 - \exp\Big\{x\Big[-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\Big]\Big\} \\ &= 1 - \exp\Big\{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big\} \\ &= 1 - \Big\{1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big\} \\ &= \frac{x^3}{6} + o(x^3), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}\cdot}$$

On a

$$\begin{aligned}
u_n &= 1-\exp\left\{\frac{1}{n}\ln\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}\\
&= 1-\exp\left\{\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right\}\\
&= 1-\left\{1+\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right\}\\
&= -\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [∘]
Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)},\qquad \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln(\sin x)}\right)\qquad\text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty}\big(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\big)^n.$$

Attention, il n'est pas question de se lancer dans des calculs irréfléchis de DL. En particulier, pour les produits et surtout les quotients, on préférera utiliser les équivalents. En revanche, pour les soustractions et les compositions, le recours à des DL est préférable.

1. On a

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{\Big(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)-x\Big(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)}{x(1-\cos x)} = \frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x(1-\cos x)} \sim \frac{\dfrac{x^3}{3}}{x\times\dfrac{x^2}{2}} \sim \frac{2}{3},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3}.}$$

2. On pose

$$f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln(\sin x)}.$$

On a

$$f\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big) = \frac{2}{\sin^2 h}+\frac{1}{\ln(\cos h)} = \frac{2\ln(\cos h)+\sin^2 h}{\sin^2 h\ \ln(\cos h)}.$$

Or

$$\ln(\cos h) = \ln\Big(1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+o(h^2)\Big) = -\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}-\frac{h^4}{8}+o(h^2) = -\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{12}+o(h^2)$$

et

$$\sin^2 h = \Big(h-\frac{h^3}{6}+o(h^4)\Big)^2 = h^2-\frac{h^4}{3}+o(h^4),$$

donc

$$2\ln(\cos h)+\sin^2 h = -\frac{h^4}{2}+o(h^4).$$

Par conséquent, on a

$$f\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big) \sim \frac{-\dfrac{h^4}{2}}{h^2\times\Big(-\dfrac{h^2}{2}\Big)} \sim 1,$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln(\sin x)}\right) = 1.}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n &= \exp\left\{n\ln\left[3\,\mathrm{e}^{(\ln 2)/n}-2\,\mathrm{e}^{(\ln 3)/n}\right]\right\}\\
&= \exp\left\{n\ln\left[3\Big(1+\frac{\ln 2}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)-2\Big(1+\frac{\ln 3}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\right]\right\}\\
&= \exp\left\{n\ln\left[1+\frac{\ln(8/9)}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right]\right\}\\
&= \exp\left\{n\Big[\frac{\ln(8/9)}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]\right\}\\
&= \exp\{\ln(8/9)+o(1)\},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n=\frac{8}{9}\cdot}$$

♦ ***Exercice 10.*** [○]

Étudier l'existence d'une tangente en $x=1$ et la position de la courbe par rapport à celle-ci pour les fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{\sin(x-1)}\qquad\text{et}\qquad g(x)=\frac{1-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}\cdot$$

On trouve

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2+o_{x\to1}\big((x-1)^2\big),$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l}f \text{ admet en 1 une tangente d'équation } y=1/2-(x-1)/8\\ \text{et se trouve au dessus de cette tangente au voisinage de 1.}\end{array}}$$

On trouve

$$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^3+o_{x\to1}\big((x-1)^3\big)$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l}f \text{ admet en 1 une tangente d'équation } y=-(x-1)/2 \text{ et se trouve au dessus}\\ \text{de cette tangente en } 1^+ \text{ et en dessous en } 1^- \text{ (c'est un point d'inflexion).}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 11.*** [○]

Étudier l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci pour les fonctions

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^4+x^6}}{1+x^2}\qquad\text{et}\qquad g(x)=x^2\arctan\frac{3x-1}{3(x^2+x+1)}\cdot$$

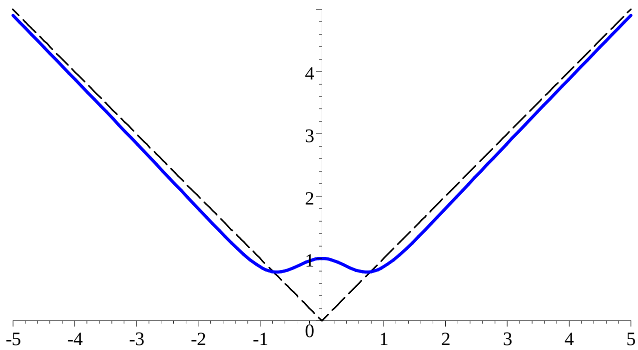
1. Posons $h=1/x$ de sorte que $h\longrightarrow 0$ lorsque $x\longrightarrow\pm\infty$ et effectuons un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $hf(1/h)$. On a

$$\begin{aligned}
hf\Big(\frac{1}{h}\Big) &= h\frac{\sqrt{1+1/h^4+1/h^6}}{1+1/h^2}\\
&= \frac{h^3}{\sqrt{h^6}}\,\frac{\sqrt{h^6+h^2+1}}{h^2+1}\\
&= \frac{h}{|h|}(1+h^2+h^6)^{1/2}\times\frac{1}{1+h^2}\\
&= \frac{h}{|h|}\Big(1+\frac{h^2+h^6}{2}+o(h^2+h^6)\Big)\times\big(1-h^2+o(h^2)\big)\\
&= \frac{h}{|h|}\Big(1+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)\times\big(1-h^2+o(h^2)\big)\\
&= \frac{h}{|h|}\Big(1-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\Big),
\end{aligned}$$

d'où
$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + o_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{x}\Big)$$
et
$$f(x) = -x + \frac{1}{2x} + o_{x\to-\infty}\Big(\frac{1}{x}\Big)\cdot$$
Il s'ensuit que

la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$ et en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -x$ et qu'elle se trouve en dessous de cette asymptote en $+\infty$ comme en $-\infty$.

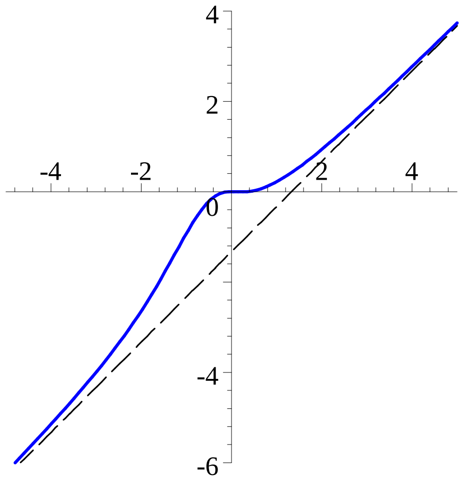
Graphiquement, on obtient



2. Posons $u = 1/x$ de sorte que $u \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$ et effectuons un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $ug(1/u)$. On a
$$ug\Big(\frac{1}{u}\Big) = \frac{1}{u}\arctan\frac{3/u-1}{3(1/u^2+1/u+1)} = \frac{1}{u}\arctan\frac{u(3-u)}{3(1+u+u^2)}\cdot$$
Or
$$\begin{aligned}\frac{u(3-u)}{3(1+u+u^2)} &= \frac{u(3-u)}{3}\{1-(u+u^2)+(u+u^2)^2-(u+u^2)^3+o(u^3)\}\\ &= \frac{u(3-u)}{3}\{1-u+u^3+o(u^3)\}\\ &= u-\frac{4}{3}u^2+\frac{1}{3}u^3+u^4+o(u^4),\end{aligned}$$
donc, comme $\arctan y = y - y^3/3 + o(y^4)$, on a
$$\begin{aligned}\arctan\frac{u(3-u)}{3(1+u+u^2)} &= \Big(u-\frac{4}{3}u^2+\frac{1}{3}u^3+u^4\Big)-\frac{1}{3}\Big(u-\frac{4}{3}u^2+\frac{1}{3}u^3+u^4\Big)^3+o(u^4)\\ &= u-\frac{4}{3}u^2+\frac{7}{3}u^4+o(u^4),\end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$ug\Big(\frac{1}{u}\Big) = 1-\frac{4}{3}u+\frac{7}{3}u^3+o(u^3).$$
Il s'ensuit que
$$\frac{g(x)}{x} = 1-\frac{4}{3}\frac{1}{x}+\frac{7}{3}\frac{1}{x^3}+o_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$$
et donc
$$g(x) = x-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}\frac{1}{x^2}+o_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\cdot$$
On peut en déduire que

la courbe $\mathscr{C}_g$ admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x - 4/3$ et se trouve au dessus de cette asymptote en $+\infty$ comme en $-\infty$.

Graphiquement, on obtient



◆ ***Exercice 12.*** [⋆]
Étudier la fonction
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x},$$
en précisant, à l'aide d'un développement limité, le comportement asymptotique de f en $\pm\infty$.
Donnée numérique : $\sqrt[3]{4}/3 \approx 0,53$.

La racine cubique est défini sur tout $\mathbb{R}$ donc
$$\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}.}$$

La fonction f est la composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition donc, d'après les théorèmes généraux,
$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

La racine cubique étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, les théorèmes généraux de dérivabilité impliquent que f est dérivable lorsque
$$x^3 - 2x^2 + x \neq 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \neq 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ (x-1)^2 \neq 0 \end{array} \right. \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$
Donc
$$\boxed{\text{les théorèmes généraux permettent de dériver } f \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.}$$

On peut préciser que
$$\boxed{\text{en } 0 \text{ et en } 1, \text{ on a une incertitude de dérivabilité.}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, on a
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x})^2}$$
donc
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \qquad f'(x) = \frac{(x-1)(3x-1)}{3(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x})^2}.}$$

On a $\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = +\infty$ donc
$$\boxed{f \text{ admet en } 0 \text{ une tangente verticale.}}$$

Par ailleurs, on a
$$f'(x) = \frac{(x-1)(3x-1)}{3(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^2} = \frac{3x-1}{3(\sqrt[3]{x})^2 \sqrt[3]{x-1}},$$

donc $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$, ce qui prouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ admet en 1 deux demi-tangentes verticales orientées} \\ \text{vers le haut et donc un point de rebroussement.} \end{array}}$$

On en déduit que

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a

$$\begin{aligned} uf\left(\frac{1}{u}\right) &= u\sqrt[3]{\frac{1}{u^3} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u}} \\ &= (1 - 2u + u^2)^{1/3} \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-2u + u^2) - \frac{1}{9}(-2u + u^2)^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \frac{2}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

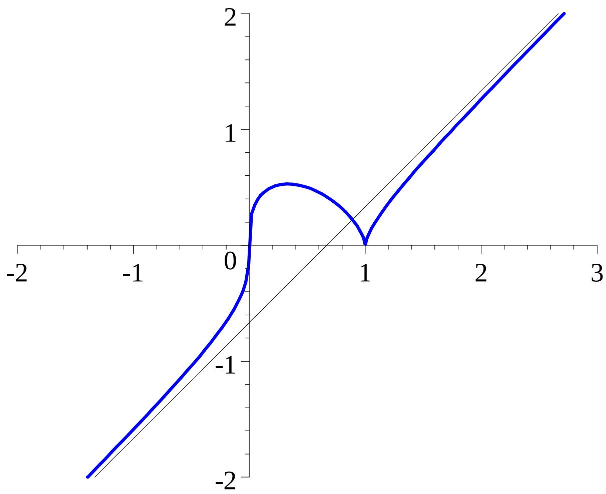
d'où

$$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{1}{9x} + o_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela prouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ de } f \text{ admet en } \pm\infty \text{ une asymptote d'équation } y = x - 2/3 \\ \text{et se trouve au dessus de cette asymptote en } -\infty \text{ et en dessous en } +\infty. \end{array}}$$

Graphiquement, on obtient



♦ ***Exercice 13.*** [○]
En moins d'une minute, calculer $\arctan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction arctan étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Taylor–Young nous dit que arctan admet un DL à tout ordre $2n+1$ donné par la formule de Taylor–Young :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\arctan^k(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1}).$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell x^{2\ell} + o(x^{2n}),$$

donc

$$\arctan(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} x^{2\ell+1} + o(x^{2n+1}).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \arctan^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}}$$

♦ ***Exercice 14.*** [○]
On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ dans laquelle on fait tendre a vers 0^+ tout en maintenant fixes $b>0$ et c.

1. Démontrer que l'une des deux racines $x_1(a)$ tend vers une valeur finie et admet un développement limité dont on donnera les deux premiers termes.
2. Démontrer que l'autre racine $x_2(a)$ tend vers $-\infty$ et en donner un développement asymptotique à trois termes.

On a $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ pour a assez petit, donc

$$x_1(a) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2(a) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

1. On a

$$\begin{aligned} x_1(a) &= \frac{b}{2a}\left(\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1\right) \\ &= \frac{b}{2a}\left(1-\frac{2ac}{b^2}-\frac{2a^2c^2}{b^4}+o(a^2)-1\right) \\ &= \frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+o(a^2) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{x_1(a) = \frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+o(a^2).}$$

2. On a clairement

$$x_2(a) \underset{a\to 0^+}{\sim} -\frac{b}{a},$$

donc

$$\boxed{\lim_{a\to 0^+} x_2(a) = -\infty.}$$

On a

$$x_2(a) + \frac{b}{a} = -x_1(a),$$

donc

$$\boxed{x_2(a) = -\frac{b}{a}-\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}+o(a^2).}$$

♦ ***Exercice 15.*** [$\circ$]

Pour $x \in [0;1]$, établir une relation entre $\arcsin(x-1)$ et $\arcsin\sqrt{x/2}$. En déduire les premiers termes du développement asymptotique de arcsin en -1.

On pose

$$f(x) = \arcsin(x-1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Les fonctions f et g sont continues sur $[0;1]$ et dérivables sur $]0;1[$. Pour tout $x \in]0;1[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

et

$$g'(x) = \frac{1/2}{2\sqrt{x/2}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x/2})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}.$$

Cela démontre qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = 2g(x) + c.$$

Or $f(0) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ et $g(0) = \arcsin(0)$, donc $c = -\pi/2$. Ainsi,

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = 2g(x) - \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad \arcsin(x-1) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{\pi}{2}.}$$

Comme

$$\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + \frac{3u^5}{40} + o(u^6),$$

on en déduit que

$$\boxed{\arcsin(h-1) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}h^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{12}h^{3/2} + \frac{3\sqrt{2}}{160}h^{5/2} + o(h^3).}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\star$]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une et une seule solution, notée x_n, dans $]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$.
2. Déterminer un développement asymptotique de x_n, lorsque n tend vers $+\infty$, à la précision $o(1/n^2)$. *Indication : On commencera par rechercher un équivalent de x_n puis on étudiera la différence entre x_n et cet équivalent. On pourra s'aider de la fonction* arctan.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\varphi(x) = \tan(x) - x$. La fonction φ est définie, continue et dérivable sur $]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$ et l'on a

   $$\forall x \in]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[, \qquad \varphi'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0,$$

   avec φ' qui ne s'annule qu'en $n\pi$. Donc φ est strictement croissante sur $]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$. Or

   $$\lim_{x \to (n\pi - \pi/2)^+} \varphi(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to (n\pi + \pi/2)^-} \varphi(x) = +\infty,$$

   donc, d'après le théorème de la bijection, φ admet une unique solution dans $]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$. En conclusion,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } \tan(x) = x \text{ d'inconnue } x \in]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[\\ \text{admet une et une seule solution, notée } x_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\end{array}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$, donc

$$1 - \frac{2}{n} \leqslant \frac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{2}{n}\cdot$$

Le théorème des gendarmes nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1,$$

donc

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi.}$$

La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tan(x_n) = x_n$ et la π-périodicité de tan nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \tan(x_n - n\pi) = x_n,$$

c'est-à-dire, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n - n\pi \in]-\pi/2; \pi/2[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n - n\pi = \arctan(x_n). \qquad\qquad (*).$$

Cela implique que

$$\boxed{x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\cdot}$$

En combinant $(*)$ et $\forall t > 0,\ \arctan(t) = \pi/2 - \arctan(1/t)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x_n}\cdot$$

Comme

$$\arctan u = u + o\left(u^2\right),$$

et comme $x_n \longrightarrow +\infty$, on en déduit que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{{x_n}^2}\right)\cdot$$

Or

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + \pi/2 + o(1)} = \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + 1/(2n) + o(1/n)} = \frac{1}{n\pi}\left\{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

donc

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot}$$