DIAGONALISATION CORRECTION

Exercice 1

Trois moutons sont dans un pré et, bien évidemment, ils jouent à saute-mouton. Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique (par rapport au deuxième mouton) de la position qu'il occupait l'instant d'avant. Puis le deuxième mouton saute au-dessus du troisième. Enfin, le troisième saute au-dessus du premier (qui, rappelons-le, a déjà bougé). Et le jeu recommence indéfiniment... On vous demande de trouver les configurations de départ qui permettent à la partie de saute-mouton de se dérouler entièrement dans un champ, c'est-à-dire telles que la suite des positions successives des trois moutons reste bornée.

On assimile le pré au plan complexe et les moutons à des points de ce plan.

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'étape n du jeu (c'est-à-dire après que chaque mouton a effectué n sauts), on note u_n, v_n et w_n les affixes des moutons et on assimile les points à leurs affixes. En considérant les points des étapes n et $n+1$, on voit que v_n est le milieu de u_n et u_{n+1}, que w_n est le milieu de v_n et v_{n+1} et que u_{n+1} est le milieu de w_n et w_{n+1}. Par suite, on a

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \\ w_n = \dfrac{v_n + v_{n+1}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{w_n + w_{n+1}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_{n+1} - w_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 4v_n - w_n \end{cases}$$

On introduit alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ des matrices colonnes $X_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$. Le résultat ci-dessus nous dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une récurrence immédiate permet d'en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0.$$

L'énoncé nous dit que

$$A = PDP^{-1}$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 & 1 \\ 1 & \varphi & -\varphi \\ 1 & 1 & \varphi^2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = PD^nP^{-1}X_0.$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{5}-2)^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, ce qui revient à faire un changement de base pour se placer dans la base de vecteurs propres. La relation ci-dessus se traduit alors sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_{n+1} = D^n Y_0.$$

Par conséquent, si l'on note $Y_n = {}^t(\widehat{u}_n, \widehat{v}_n, \widehat{w}_n)$ pour tout $n \geqslant 0$, la relation $Y_n = D^n Y_0$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \widehat{u}_n & = & \widehat{u}_0 \\ \widehat{v}_n & = & (\sqrt{5}-2)^n \widehat{v}_0 \\ \widehat{w}_n & = & (-\sqrt{5}-2)^n \widehat{w}_0 \end{array} \right.$$

Pour que la suite des positions des trois moutons reste bornée dans le plan, il faut et suffit que les suites de termes généraux $\widehat{u}_n = \widehat{u}_0$, $\widehat{v}_n = (\sqrt{5}-2)^n \widehat{v}_0$ et $\widehat{w}_n = (-\sqrt{5}-2)^n \widehat{w}_0$ soient bornées. Or la première de ces suites est bornée puisque constante, la deuxième est également bornée puisqu'elle tend vers 0 mais la dernière n'est bornée que si $\widehat{w}_0 = 0$ puisque la suite de terme général $(-\sqrt{5}-2)^n$ n'est pas bornée. Ainsi, la suite des positions des trois moutons reste bornée dans le plan si, et seulement si, la troisième coordonnée du vecteur Y_0 est nulle.

Dire que la troisième coordonnée du vecteur Y_0 est nulle signifie que le vecteur de coordonnées X_0 dans la base canonique est dans le plan engendré par les deux premiers vecteurs propres, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & X_0 \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \iff \quad & \begin{vmatrix} u_0 & 1 & \varphi^2 \\ v_0 & 1 & \varphi \\ w_0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \iff \quad & u_0 - u_0\varphi - v_0 + v_0\varphi^2 + w_0\varphi - w_0\varphi^2 = 0 \\ \iff \quad & w_0 = (1-\varphi)u_0 + \varphi v_0 \end{aligned}$$

La relation $w_0 = (1-\varphi)u_0 + \varphi v_0$ signifie que w_0 est le barycentre de u_0 affecté du coefficient $1-\varphi$ et de v_0 affecté du coefficient φ. Pour conclure,

la suite des positions des trois moutons reste bornée dans le plan si, et seulement si, les moutons sont initialement alignés avec un rapport des distances qui les séparent égal au nombre d'or.