RELATIONS

✠ ***Exercice 1.*** [$\star$]

Remplir le tableau suivant en donnant, à chaque fois, un exemple de relation (sur un ensemble non vide) satisfaisant les conditions indiquées par des ✓ :

	réflexive	transitive	symétrique	antisymétrique	exemple
1	✓	✓	✓	✓	
2	✓	✓	✓		
3	✓	✓		✓	
4	✓		✓	✓	
5		✓	✓	✓	
6	✓	✓			
7	✓		✓		
8	✓			✓	
9		✓	✓		
10		✓		✓	
11			✓	✓	
12	✓				
13		✓			
14			✓		
15				✓	
16					

On a

	réfl.	trans.	sym.	antisym.	exemple
1	✓	✓	✓	✓	$=$
2	✓	✓	✓		$\equiv$
3	✓	✓		✓	$\leqslant$
4	✓		✓	✓	n'existe pas
5		✓	✓	✓	relation vide
6	✓	✓			$\mid$ sur $\mathbb{Z}$
7	✓		✓		avoir le même signe sur $\mathbb{R}$
8	✓			✓	$0 \leqslant m - n \leqslant 1$ sur $\mathbb{N}$
9		✓	✓		$(\lvert m-n\rvert \leqslant 1$ et $mn \neq 0)$ sur $\{0,1,2\}$
10		✓		✓	$<$
11			✓	✓	n'existe pas
12	✓				$\big(\lvert m-n\rvert \leqslant 1$ et $(n,m) \neq (0,1)\big)$ sur $\{0,1,2\}$
13		✓			relation pleine sauf 2 en relation avec rien sur $\{0,1,2\}$
14			✓		$\perp$
15				✓	être le fils de
16					aimer

✠ ***Exercice 2.*** (Clôtures)

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.

1. On considère la *clôture réflexive* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\overline{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \overline{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ ou } x = y).$$

   a) Démontrer que $\overline{\mathscr{R}}$ est réflexive.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est transitive, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   d) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est antisymétrique, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

2. On considère la *clôture symétrique* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\widetilde{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \widetilde{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ et } y \,\mathscr{R}\, x).$$

   a) Démontrer que $\widetilde{\mathscr{R}}$ est symétrique.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est réflexive, alors $\widetilde{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est transitive, alors $\widetilde{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

3. On considère la *clôture transitive* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\widehat{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \widehat{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 = x \text{ et } \forall i \in [\![0; n-1]\!]\,,\ a_i \,\mathscr{R}\, a_{i+1} \text{ et } a_n = y).$$

   a) Démontrer que $\widehat{\mathscr{R}}$ est transitive.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est réflexive, alors $\widehat{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $\widehat{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

AQT

✠ ***Exercice 3.*** [○] (Produit de deux relations d'équivalence)

Soient E, F deux ensembles, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et $\mathscr{S}$ une relation d'équivalence sur F. On considère la relation $\mathscr{T}$ sur $E \times F$ définie par

$$\forall (x,y), (a,b) \in E \times F, \qquad \big((x,y)\, \mathscr{T}\, (a,b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \,\mathscr{R}\, a \text{ et } y \,\mathscr{S}\, b\big).$$

Démontrer que $\mathscr{T}$ est une relation d'équivalence sur $E \times F$.

A faire.

✠ ***Exercice 4.*** [○] (Conjonction et disjonction de relations d'équivalence)

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$, $\mathscr{S}$ deux relations déquivalence sur E.

1. On considère la relation $\mathscr{C}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\mathscr{C}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ et } x \,\mathscr{S}\, y)$$

   Est-ce une relation d'équivalence ?

2. On considère la relation $\mathscr{D}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\mathscr{D}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ ou } x \,\mathscr{S}\, y)$$

   Est-ce une relation d'équivalence ?

A faire.

✠ ***Exercice 5.*** [∘]

On appelle *idiôme* un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ tel que E est fini et admet un plus petit et un plus grand élément. Déterminer les diagrammes de Hasse de tous les idiômes de cardinal inférieur ou égal à 5.

A faire.

✠ ***Exercice 6.*** [∘]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère la relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x \leqslant_f y) \iff \big(|y - x| \leqslant f(y) - f(x)\big).$$

1. Vérifier que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre.
2. Démontrer que $\leqslant_f$ est totale si, et seulement si, la fonction f est une dilatation, c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$.
3. Reconnaître $\leqslant_f$ lorsque $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

1. Réflexivité :
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x - x| = 0$ et $f(x) - f(x) = 0$ donc $|x - x| \leqslant f(x) - f(x)$, c'est-à-dire $x \leqslant_f x$.

   Transitivité :
   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant_f y$ et $y \leqslant_f z$. On a $|y - x| \leqslant f(y) - f(x)$ et $|z - y| \leqslant f(z) - f(y)$. En additionnant ces inégalités, on obtient $|y-x|+|z-y| \leqslant f(z)-f(x)$. Comme $|z-x| \leqslant |z-y|+|y-x|$ par l'inégalité triangulaire, il vient $|z - x| \leqslant f(z) - f(x)$. On a donc $x \leqslant_f z$.

   Antisymétrie :
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant_f y$ et $y \leqslant_f x$. On a $|y - x| \leqslant f(y) - f(x)$ et $|x - y| \leqslant f(x) - f(y)$. Or, parmi $f(y)-f(x)$ et $f(x)-f(y)$, l'un de ces deux nombres est négatif ou nul, ce qui force $|x-y| = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

   En conclusion,
   $$\boxed{\leqslant_f \text{ est une relation d'ordre.}}$$

2. Raisonnons par double implication.
   - $\Leftarrow$ Supposons que f est une dilatation.
     Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
     On a $|f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$ puisque f est une dilatation.
     Si $f(x) \leqslant f(y)$, on a $|y - x| \leqslant f(y) - f(x)$, ce qui prouve que $x \leqslant_f y$.
     Si $f(x) \geqslant f(y)$, on a $|y - x| \leqslant f(x) - f(y)$ et donc $|x - y| \leqslant f(x) - f(y)$, ce qui prouve que $y \leqslant_f x$.
     On en conclut que $\leqslant_f$ est totale.
   - $\Rightarrow$ Supposons que $\leqslant_f$ est totale.
     Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
     On a $x \leqslant_f y$ ou $y \leqslant_f x$ puisque $\leqslant_f$ est totale. Autrement dit, on a $|y - x| \leqslant f(y) - f(x)$ ou $|x - y| \leqslant f(x) - f(y)$.
     Cela signifie précisément que $|y - x| \leqslant |f(y) - f(x)|$.
     Donc f est une dilatation.

   En conclusion,
   $$\boxed{\leqslant_f \text{ est totale si, et seulement si, } f \text{ est une dilatation.}}$$

3. Lorsque $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on voit que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
   $$(x \leqslant_f y) \iff (|y - x| \leqslant y - x) \iff (y - x \geqslant 0) \iff (y \geqslant x),$$
   donc
   $$\boxed{\text{lorsque } f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \text{ la relation } \leqslant_f \text{ est l'ordre naturel sur } \mathbb{R}.}$$

✠ ***Exercice 7.*** [$\star$] (Ordre produit)
Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés. On considère l'*ordre produit* $\lll$ sur $E \times F$ défini par

$$\forall (x, y), (a, b) \in E \times F, \qquad \big((x, y) \lll (a, b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \preccurlyeq a \text{ et } y \preccurlyeq b).$$

1. Démontrer que $\lll$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.
2. On suppose de plus que $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ sont totalement ordonnés et qu'ils possèdent tous les deux au moins deux éléments. L'ordre produit $\lll$ est-il un ordre total sur $E \times F$?

1. $\lll$ est clairement une relation.

   Réflexivité : Il est clair que, pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $(x, y) \lll (x, y)$.

   Transitivité : Soient $(x, y), (a, b), (\ell, m) \in E \times F$ tels que $(x, y) \lll (a, b)$ et $(a, b) \lll (\ell, m)$. Alors $x \preccurlyeq a$, $y \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq \ell$ et $b \preccurlyeq m$. Comme $\preccurlyeq$ et $\preccurlyeq$ sont transitives, on en déduit que $x \preccurlyeq \ell$ et $y \preccurlyeq m$, ce qui nous dit que $(x, y) \lll (\ell, m)$.

   Antisymétrie : Soient $(x, y), (a, b) \in E \times F$ tels que $(x, y) \lll (a, b)$ et $(a, b) \lll (x, y)$. Alors $x \preccurlyeq a$, $y \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq x$ et $b \preccurlyeq y$. Comme $\preccurlyeq$ et $\preccurlyeq$ sont antisymétriques, on en déduit que $x = a$ et $y = b$, c'est-à-dire $(x, y) = (a, b)$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\lll \text{ est une relation d'ordre sur } E \times F.}$$

2. Soient $x, a \in E$ et $y, b \in F$ tels que $x \neq a$ et $y \neq b$. Comme $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ sont totalement ordonnés, les éléments x et a sont comparables et les éléments y et b sont comparables. Pour fixer les idées, supposons que $x \preccurlyeq a$ et $y \preccurlyeq b$. Alors les couples (x, b) et (a, y) ne sont pas comparables sinon, par antisymétrie de $\preccurlyeq$ ou $\preccurlyeq$, on aurait $x = a$ ou $y = b$. Donc

   $$\boxed{\lll \text{ n'est pas un ordre total sur } E \times F.}$$

✠ ***Exercice 8.*** [$\star$] (Ordre lexicographique)
Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés (on note $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$). On considère l'*ordre lexicographique* $\ll$ sur $E \times F$ défini par

$$\forall (x, y), (a, b) \in E \times F, \qquad \big((x, y) \ll (a, b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big((x \prec a) \text{ ou } (x = a \text{ et } y \preccurlyeq b)\big).$$

1. Démontrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.
2. On suppose de plus que $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ sont totalement ordonnés. Démontrer que l'ordre lexicographique $\ll$ est un ordre total sur $E \times F$.

1. $\ll$ est clairement une relation.

   Réflexivité : Il est clair que, pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $(x, y) \ll (x, y)$.

   Transitivité : Soient $(x, y), (a, b), (\ell, m) \in E \times F$ tels que $(x, y) \ll (a, b)$ et $(a, b) \ll (\ell, m)$. On distingue quatre cas : $(x \prec a$ et $a \prec \ell)$, $(x \prec a$ et $a = \ell)$, $(x = a$ et $a \prec \ell)$ et $(x = a$ et $a = \ell)$. Dans les trois premiers cas, on a $x \prec \ell$ et donc $(x, y) \ll (\ell, m)$. Dans le quatrième cas, on a d'une part $x = \ell$ et d'autre part $(y \preccurlyeq b$ et $b \preccurlyeq m)$, ce qui donne $y \preccurlyeq m$, d'où $(x, y) \ll (\ell, m)$.

   Antisymétrie : Soient $(x, y), (a, b) \in E \times F$ tels que $(x, y) \ll (a, b)$ et $(a, b) \ll (x, y)$. Alors $x \preccurlyeq a$ et $a \preccurlyeq x$, donc $a = x$ d'après l'antisymétrie de $\preccurlyeq$. Il s'ensuit que $y \preccurlyeq b$ et $b \preccurlyeq y$, d'où $y = b$. Donc $(a, x) = (b, y)$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\ll \text{ est une relation d'ordre sur } E \times F.}$$

2. Soient $(x, y), (a, b) \in E \times F$. On a $x \preccurlyeq a$ ou $a \preccurlyeq x$ puisque $\preccurlyeq$ est un ordre total. Supposons (pour fixer les idées) que $x \preccurlyeq a$. Si $x \prec a$, on a $(x, y) \ll (a, b)$. Sinon, on a $x = a$ et, puisque $\preccurlyeq$ est un ordre total, $y \preccurlyeq m$ ou $m \preccurlyeq y$, c'est-à-dire $(x, y) \ll (a, b)$ ou $(a, b) \ll (x, y)$.

   Par conséquent,

   $$\boxed{\ll \text{ est un ordre total sur } E \times F.}$$

✠ ***Exercice 9.*** [$\star$]
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède à la fois un plus petit et un plus grand élément. Démontrer que E est fini et totalement ordonné.

Raisonnons par l'absurde en supposant que E est infini. Posons

$$x_0 = \min E \qquad x_1 = \min E \setminus \{x_1\} \qquad \ldots \qquad x_n = \min E \setminus \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\} \qquad \ldots$$

Alors l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n, ...\}$ n'a pas de plus grand élément. C'est absurde ! Cela signifie que le processus de choix des x_i qui est décrit ci-dessus s'arrête. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \qquad \text{avec} \qquad x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n.$$

En conclusion,

$$\boxed{E \text{ est fini et totalement ordonné.}}$$

✠ *Exercice 10.* [$\circ$]

On appelle *treillis* tout ensemble ordonné dans lequel toute partie à deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1. Soit E un ensemble. Démontrer que $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ est un treillis.
2. Démontrer que tout ensemble totalement ordonné est un treillis.

Le nom de « treillis » attribué à ce type d'ensemble ordonné est justifié par la forme de leur diagramme de Hasse.

1. Soient A, B deux parties de E. On a $\inf\{A, B\} = A \cap B$ et $\sup\{A, B\} = A \cup B$. Donc

$$\boxed{\big(\mathscr{P}(E), \subset\big) \text{ est un treillis.}}$$

2. Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. Soient $a, b \in E$. Alors $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Supposons par exemple que $a \preccurlyeq b$. Alors $\inf\{a, b\} = a$ et $\sup\{a, b\} = b$. Donc

$$\boxed{\text{tout ensemble totalement ordonné est un treillis.}}$$

✠ *Exercice 11.* [$\star$] (Inégalité du minimax)

On dispose les élèves du lycée Henri IV en un rectangle de n lignes et p colonnes (avec $n, p \geqslant 2$).

On repère le plus grand élève de chaque ligne et on retient le plus petit de ces plus grands. On note x sa taille.

On repère ensuite le plus petit élève de chaque colonne et on retient le plus grand de ces plus petits. On note y sa taille.

Comparer x et y. Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

Notons $(t_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ les tailles des élèves. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \qquad t_{i,j} \leqslant \max\{t_{i,m} : m \in [\![1;p]\!]\}$$

donc

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \qquad \min\{t_{i,j} : i \in [\![1;n]\!]\} \leqslant \min\big\{ \max\{t_{i,m} : m \in [\![1;p]\!]\} : i \in [\![1;n]\!] \big\}$$

d'où

$$\max\big\{ \min\{t_{i,j} : i \in [\![1;n]\!]\} : j \in [\![1;n]\!] \big\} \leqslant \min\big\{ \max\{t_{i,m} : m \in [\![1;p]\!]\} : i \in [\![1;n]\!] \big\},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{y \leqslant x.}$$

Pour la situation

$1,60\,\mathrm{m}$	$1,98\,\mathrm{m}$
$1,87\,\mathrm{m}$	$1,72\,\mathrm{m}$

on a

$$x = 1,87\,\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad y = 1,72\,\mathrm{m}$$

donc

$$\boxed{\text{il n'y a pas nécessairement égalité dans l'inégalité du minimax.}}$$