Devoir Surveillé n° 1 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – (La série exponentielle)

Le but de ce petit problème est de montrer par des moyens très élémentaires que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{e}^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

On rappelle que :

- $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ *; en particulier, par la convention usuelle des produits vides, $0! = 1$.*
- *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et (u_n) et (w_n) admettent une limite commune ℓ, alors (v_n) est convergente de limite ℓ (théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes). En particulier, ce théorème justifie l'existence de la limite de (v_n).*
- *Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admette une même limite ℓ, alors (u_n) admet également la limite ℓ.*

Questions préliminaires

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}} |u_{n_0}|.$$
3. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Partie I – Somme de la série exponentielle sur $\mathbb{R}_-$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1$
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée S_n' en fonction de S_{n-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,
$$S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x).$$
En étudiant les variations de $x \mapsto S_{2n+2}(x) - \mathrm{e}^x$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,
$$\mathrm{e}^x \leqslant S_{2n+2}(x), \qquad \text{puis:} \qquad S_{2n+3}(x) \leqslant \mathrm{e}^x$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_-$,
$$S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_{2n}(x).$$
5. En déduire un encadrement de $S_{2n}(x)$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,
$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n}(x) = \mathrm{e}^x$$

6. Montrer enfin que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^x, \qquad \text{soit:} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Partie II – Somme de la série exponentielle sur $\mathbb{R}_+$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

1. En adaptant le raisonnement de la partie précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, A]$,

$$S_n(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant S_n(x) + (\mathrm{e}^A - 1)\frac{x^n}{n!}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Problème 2 – Produits et coproduits dans une catégorie

Le but de ce problème est de définir les notions de produit et de coproduit dans une catégorie, et d'en voir un certain nombre d'exemples.

On appellera « ensemble enrichi » un ensemble E, muni d'une structure supplémentaire. Par exemple, un groupe G est un ensemble enrichi, puisque muni d'une structure définie par la donnée d'une loi interne $\times$ vérifiant un certain nombre de propriétés. Un ensemble ordonné est aussi un ensemble enrichi par la donnée d'une relation d'ordre. Un espace topologique est aussi un ensemble enrichi par la donnée d'une topologie $\mathcal{O}$ constituée de sous-ensembles de X (voir partie IV). Un ensemble sans aucune structure supplémentaire sera aussi considéré comme un ensemble enrichi, la structure supplémentaire étant vide.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

- *d'une collection d'ensembles enrichis C (cette collection formant une classe, qui n'est pas nécessairement un ensemble). Les éléments de cette collection seront appelés les « objets » de la catégorie ; on notera également C sans distinction, l'ensemble sous-jacent à l'objet C (c'est-à-dire l'ensemble obtenu en oubliant la structure enrichissant C). On prendra garde qu'un même ensemble peut être enrichi de plusieurs façons ; ainsi des objets distincts d'une catégorie donnée peuvent avoir le même ensemble sous-jacent ;*
- *pour chaque paire (C, D) d'objets de cette collection, d'un sous-ensemble de D^C, noté $\mathrm{Hom}(C, D)$. Les éléments de $\mathrm{Hom}(C, D)$ sont appelés les « flèches » de la catégorie, ou les « homomorphimes » (de C à D). Les flèches sont donc des applications de C dans D.*

Ces objets et flèches doivent de plus vérifier les deux conditions suivantes :

(i) *Pour tout objet C, $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}(C, C)$;*

(ii) *Pour tous objets C, D et E, si $f \in \mathrm{Hom}(C, D)$ et $g \in \mathrm{Hom}(D, E)$ alors la composée $g \circ f$ est un élément de $\mathrm{Hom}(C, E)$.*

Cette définition est en fait un cas particulier d'une définition plus générale des catégories (où les objets ne sont pas nécessairement des ensembles et les flèches pas nécessairement des applications). Il s'agit des « catégories concrètes ».

Partie I – Exemples

1. Catégorie des ensembles

   Soit **Ens** *dont les objets sont tous les ensembles, et pour tous ensembles C et D, $\mathrm{Hom}(C, D) = D^C$.*

   Montrer que **Ens** est une catégorie, appelée catégorie des ensembles.

2. Catégorie des groupes

   On dit que G est un groupe s'il s'agit d'un ensemble G, enrichi d'une loi interne $\times$ définie pour tout couple d'éléments de G, vérifiant :

   - *$\forall x, y, z \in G, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (associativité) ;*
   - *$\exists e \in G, \quad \forall x \in G, \ e \times x = x \times e = x$ (neutre)*
   - *Pour un tel e, $\forall x \in G, \quad \exists y \in G, \quad x \times y = y \times x = e$ (inversibilité)*

Soit G et H deux groupes. On note $\times$ la loi de G et $*$ la loi de H. On dit qu'une application $f \in H^G$ est un morphisme de groupes si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in G^2, \quad f(x \times y) = f(x) * f(y).$$

(a) Montrer que pour tout groupe G, le neutre e défini par la propriété (ii) est unique (ce qui clarifie un peu le point (iii)).

(b) Soit G, H et K des groupes, dont les lois seront notées respectivement $\times$, $*$ et $\odot$. Montrer que si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont deux morphismes de groupes, $g \circ f$ est aussi un morphisme de groupes.

(c) Soit **Gr** dont les objets sont les groupes, et pour tous groupes G et H, $\mathrm{Hom}(G, H)$ est l'ensemble des morphismes de groupes de G dans H. Montrer que **Gr** est une catégorie.

Un autre exemple, en rapport avec votre DM2, serait la catégorie des espaces mesurables (i.e. des ensembles munis d'une tribu), les flèches de C à D (C étant muni de la tribu $\mathcal{S}$ et D de la tribu $\mathcal{T}$) étant les applications f dites mesurables, c'est-à-dire telles que pour tout $T \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$. Un dernier exemple, développé dans la dernière partie de ce problème, est la catégorie des espaces topologiques.

Partie II – Produits, produits infinis

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit A et B deux objets de $\mathcal{C}$. On dit que l'objet C est un produit direct (ou simplement produit) de A et B s'il existe deux homomorphismes $p_A : C \to A$ et $p_B : C \to B$ tels que, pour tout objet D muni d'homomorphismes $f_A : D \to A$ et $f_B : D \to B$, il existe un unique homomorphisme $f_C : D \to C$ tel que $p_A \circ f_C = f_A$ et $p_B \circ f_C = f_B$.

$$\begin{tikzcd}
& & A \\
D \arrow[urr, "f_A"] \arrow[drr, "f_B"'] \arrow[r, dotted, "\exists! f_C"] & C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

On dit que deux objets C et C' de $\mathcal{C}$ sont isomorphes s'il existe un homomorphisme bijectif entre C et C', dont la réciproque est elle-même un homomorphisme (un tel homormophisme bijectif est appelé isomorphisme). On notera $C \simeq C'$ pour dire que deux objets sont isomorphes.

1. Montrer que si C et C' sont deux produits directs de A et B, alors C et C' sont isomorphes.

Ainsi, le produit est unique « à isomorphisme près ». Quitte à identifier les objets isomorphes, on peut donc noter, sans ambiguïté (à isomorphisme près), $A \sqcap B$ « le » produit direct de A et B, s'il existe. Cette notation est bien définie, « à isomorphisme près ».

2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A et B deux objets tels que $\mathrm{Hom}(A, B)$ et $\mathrm{Hom}(B, A)$ soient non vides. Montrer que si A et B admettent un produit $A \sqcap B$, les homomorphismes $p_A : A \sqcap B \to A$ et $p_B : A \sqcap B \to B$ de la définition d'un produit direct sont surjectifs.

   Indication : On pourra justifier l'existence d'un objet C et d'un morphisme $f_A : C \to A$ tels que f_A soit surjective

3. Soit $\mathcal{C} = \textbf{Ens}$. Soit A et B deux ensembles. Montrer que $A \sqcap B \simeq A \times B$ (autrement dit, $A \times B$ est un produit direct de A et B).

4. Soit $\mathcal{C} = \textbf{Gr}$. Soit G et H deux groupes, dont on notera $\cdot$ les lois (en utilisant la même notation pour la loi de G et celle de H). On définit sur le produit cartésien $G \times H$ la loi $*$ par :

$$(g, h) * (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h').$$

   (a) Montrer que $G \times H$ muni de cette loi $*$ est un groupe.

(b) On définit les applications $p_G : G \times H \to G$ et $P_H : G \times H \to H$ par :

$$\forall (g,h) \in G \times H, \ \ p_G(g,h) = g \qquad \text{et} \qquad p_H(g,h) = h$$

Montrer que p_G et p_H sont des morphismes de groupes (la structure considérée sur $G \times H$ étant celle de la question précédente).

(c) Montrer que le groupe $G \times H$ (avec l'opération $*$) est un produit direct de G par H dans la catégorie **Gr**. Attention au fait que toutes les flèches considérées dans la définition du produit doivent être des homomophismes dans la catégorie **Gr**.

5. Produits quelconques (y compris infinis)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. On dit qu'un objet C est le produit direct des A_i et on note $\prod_{i \in I} A_i$ si et seulement s'il existe des homomorphismes $p_i : C \to A_i$ tels que pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ d'homomorphismes $f_i : D \to A_i$, il existe un unique homomorphisme $f : D \to C$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i = p_i \circ f$. On admettra que s'il existe, le produit est unique à isomorphisme près (la démonstration étant similaire à celle faite pour un produit de 2 objets).

(a) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. On suppose que pour tout sous-ensemble non vide $J \subset I$, la famille $(A_i)_{i \in J}$ admet un produit. Soit J et J' des sous-ensembles non vides de I tels que $J \cup J' = I$ et $J \cap J' = \varnothing$. Montrer que

$$\left(\prod_{j \in J} A_j \right) \amalg \left(\prod_{j \in J'} A_j \right) \simeq \prod_{i \in I} A_i .$$

(b) En déduire qu'avec les mêmes conditions d'existence que dans la questionn précédente avec $I = [\![1, n]\!]$, $(n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\prod_{i \in [\![1,n]\!]} A_i \simeq (((A_1 \amalg A_2) \amalg A_3) \amalg \ \cdots \ \amalg A_{n-1}) \amalg A_n .$$

(c) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de **Ens**. Montrer que

$$\prod_{i \in I} A_i \simeq \left\{ f : I \longrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \ \mid \ \forall i \in I, \ f(i) \in A_i \right\} .$$

(d) E et F étant deux ensembles, comment décririez-vous plus simplement $\prod_{y \in E} F$?

Partie III – Coproduits, unions disjointes

Le coproduit dans une catégorie $\mathcal{C}$ correspond à la notion « duale » de la notion de produit : la définition est obtenue en « retournant » toutes les flèches. Plus précisément, soit A et B deux objets de $\mathcal{C}$. On dit que l'objet C est un coproduit de A et B s'il existe deux homomorphismes $i_A : A \to C$ et $i_B : B \to C$ tels que, pour tout objet D muni d'homomorphismes $f_A : A \to D$ et $f_B : B \to D$, il existe un unique homomorphisme $f_C : C \to D$ tel que $f_C \circ i_A = f_A$ et $f_C \circ i_B = f_B$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
& C \arrow[r, dotted, "\exists ! f_C"] & D \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

1. Montrer que si C et C' sont deux coproduits de A et B, alors C et C' sont isomorphes. On note alors $A \amalg B$ le coproduit de A et B (bien défini et unique à isomorphisme près).

2. Soit A et B deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que $\mathrm{Hom}(A, B)$ et $\mathrm{Hom}(B, A)$ soient non vides. On suppose que $A \amalg B$ existe, et on note i_A et i_B les homomorphismes associés. Montrer que i_A et i_B sont injectifs.
3. Coproduits dans **Ens**.
   (a) Montrer que si A et B sont disjoints, alors $A \cup B$ est un coproduit de A et B dans **Ens**.
   (b) Montrer que si A et B sont fini et non disjoints, $A \cup B$ n'est pas un copoduit de A et B.
   (c) *Plus généralement, on définit l'union disjointe externe de A et B par :*
   $$A \uplus B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B).$$
   C'est donc un sous-ensemble de $\{1, 2\} \times (A \cup B)$. L'union disjointe externe est souvent notée $\uplus$ ou $\sqcup$ (les deux notations sont standard), mais la deuxième notation $\sqcup$ ayant été utilisée dans le cours dans un sens légèrement différent, je préfère utiliser ici la notation $\uplus$.
   Montrer que $A \uplus B$ est un coproduit de A et B dans la catégorie **Ens**.
4. Coproduits dans la catégorie des groupes.
   Soit G et H deux groupes disjoints, dont les éléments neutres sont notés respectivement e_G et e_H. On note $G * H$ l'ensemble des séquences $(a_1, \dots, a_n)$ de longueur quelconque, telle que les a_i soient alternativement des éléments de G et de H, non égaux à e_G et e_H. L'alternance peut commencer par un élément de G ou un élément de H. La séquence peut être vide ($n = 0$). L'hypothèse $G \cap H = \varnothing$ permet d'éviter le cas problématique d'une séquence (a), où a est à la fois élément de G et élément de H.
   On définit le produit de deux séquences $s_1 = (a_1, \dots, a_n)$ et $s_2 = (b_1, \dots, b_m)$ par récurrence sur m :
   - *si $m = 0$, $s_1 \times s_2 = s_1$*
   - *si $m > 0$, et $n = 0$, $s_1 \times s_2 = s_2$.*
   - *Si $m > 0$ et $n > 0$, si a_n et b_1 ne sont pas éléments du même groupe G ou H,*
   $$s_1 \times s_2 = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m),$$
   - *si $m > 0$ et si a_n et b_1 sont éléments du même groupe G ou H, on distingue encore deux cas :*
     * *si $a_n \cdot b_1 \neq e$ (produit dans le groupe G ou H, le neutre e désignant soit celui de G soit celui de H suivant le cas), $s_1 \times s_2 = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \cdot b_1, b_2, \dots, b_m)$;*
     * *si $a_n b_1 = e$, $s_1 \times s_2 = (a_1, \dots, a_{n-1}) \times (b_2, \dots, b_m)$ (défini par récurrence)*

   (a) Montrer que $G * H$ muni de la loi $\times$ est un groupe. Quel est l'élément neutre ? Ce groupe est appelé produit libre de G et H.
   (b) Construire un morphisme de groupe injectif $i_G : G \to G * H$.
   (c) Montrer que le produit libre $G * H$ correspond au coproduit $G \amalg H$ des groupes G et H dans la catégorie **Gr**.
   (d) Comment adapter la construction si G et H ne sont pas disjoints ?

Partie IV – La catégorie des espaces topologiques

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que :
- *$\varnothing$ et X sont des éléments de $\mathcal{O}$*
- *Pour toute famille quelconque $(U_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathcal{O}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$;*
- *Pour toute famille finie $(U_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathcal{O}$, on a $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.*

Un espace topologique est un ensemble X enrichi par la donnée d'une topologie $\mathcal{O}$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont alors appelés les « ouverts » de l'espace topologique X.
Soit $x \in X$ et $V \in \mathcal{P}(X)$. On dit que V est un voisinage de x si et seulement s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subset V$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de X.
Soit X et Y deux espaces topologiques, dont les topologies sont notées $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$. On dit que $f : X \to Y$ est continue ssi :
$$\forall x \in X \quad \forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x), \quad f(V) \subset W;$$
(ici, $f(V)$ représente bien l'image directe de V par f).

1. Soit X, Y et Z des espaces topologiques, dont les topologies sont notées $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_Z$. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues au sens de la définition ci-dessus. Montrer que $g \circ f$ est continue.

2. En déduire que **Top**, dont les objets sont les espaces topologiques, et les flèches sont les applications continues, est une catégorie.
3. Exemple de $\mathbb{R}$.
   Soit $U \subset \mathbb{R}$. On dit que U est un ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des ouverts ainsi définis.
   (a) Montrer que $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est une topologie au sens défini plus haut.
   (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ici, $\mathbb{R}$ est muni de la topologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, aussi bien pour l'ensemble de départ que pour l'ensemble d'arrivée. Montrer que f est continue dans le sens défini ci-dessus si et seulement si :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 \ \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$
   (définition métrique de la continuité, qui est celle que vous connaissez).
4. Produit d'espaces topologiques
   Soit A et B deux espaces topologiques, de topologies respectives $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$. On considère $\mathcal{O}_{A\times B} \subset \mathcal{P}(A \times B)$ l'ensemble dont les éléments sont les unions $\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$, où $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}_A$ et $(V_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}_B$.
   (a) Montrer que $\mathcal{O}_{A\times B}$ est une topologie sur $A \times B$.
   (b) Justifier que les projections $p_A : A \times B \to A$ et $p_B : A \times B \to B$ sont continues ($A \times B$ étant muni de la topologie définie ci-dessus).
   (c) Montrer que $A \times B$ muni de la topologie $\mathcal{O}_{A\times B}$ est le produit direct de A et B dans la catégorie **Top**.
5. Coproduit d'espaces topologiques
   Construire de même une topologie sur $A \uplus B$ telle que muni de cette topologie, $A \uplus B$ soit le coproduit de A et B dans la catégorie **Top**.

Questions subsidiaires :

1. Construire une catégorie non vide dans laquelle il n'existe aucun produit direct.
2. Construire une catégorie non vide dans laquelle il n'existe aucun coproduit.