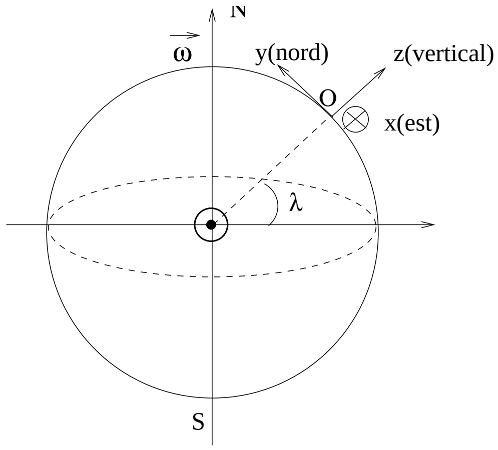
Exercices d'oraux : mécanique

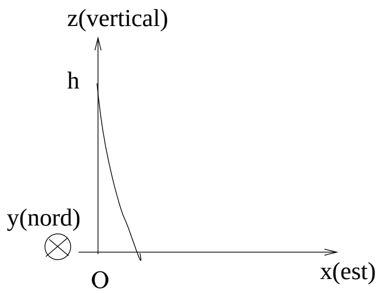
Questions de cours

- Notions de référentiel, galiléen, non galiléen.
- Théorème de Gauss gravitationnel.
- Etats liés et de diffusion.
- Interaction gravitationnelle entre deux corps. Energie potentielle effective. Influence de l'énergie sur les trajectoires
- Lois de Kepler (démonstrations dans le cas circulaire)
- Caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- Lois de Coulomb pour le frottement.
- Solide en rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie, TMC et TEC.

Mécanique du point 1 *(CCP)*

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel de masse m d'une altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre. Les frottements seront négligés.





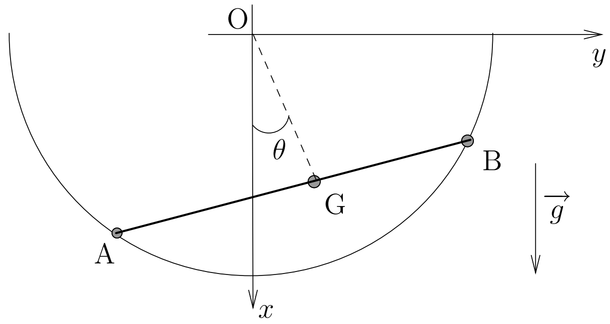
1. En négligeant l'aspect non galiléen du référentiel terrestre, déterminer les expressions de $x(t)$ et $z(t)$, ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$m.
2. Le référentiel terrestre n'est pas réellement galiléen. Pourquoi ? Déterminer l'expression de la force de Coriolis (on négligera la force d'entraînement) et montrer que cette force ne peut que légèrement perturber la trajectoire. Quelle composante de la trajectoire va-t-elle être principalement modifier ?
3. Déterminer alors l'équation différentielle approchée vérifiée par $x(t)$. Intégrer cette équation et en déduire la position du point de chute.

Mécanique du point 2 *(CCP)*

Une balle de fusil est tirée dans la direction du Nord avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_y}$. L'axe $\overrightarrow{e_x}$ est dirigé vers l'Est et $\overrightarrow{e_z}$ suivant la verticale. Une cible est placée à 100 m du tireur et $v = 1000 m.s^{-1}$.

1. On néglige les frottements de l'air et la force de Coriolis. Déterminer la position de l'impact de la balle sur la cible.
2. Prévoir qualitativement l'effet de la rotation de la Terre sur le mouvement de la balle.
3. Écrire les équations du mouvement en prenant en compte la force de Coriolis. Calculer la valeur de la déviation vers l'Est de la balle.

Mécanique du point 3 *(CCP)* Une tige AB homogène de longueur $2b$, de moment d'inertie J par rapport à Oz et de centre G glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.



Déterminer la période des petites oscillations de la barre en utilisant le TMC et le TEC.

Mécanique du point 4 *(CCP)*

On considère un satellite qui orbite autour de la Terre. Il suit une trajectoire elliptique de grand axe $2a$. Le rayon de la Terre est R. Au périgée, le satellite se trouve à une hauteur h de la Terre.

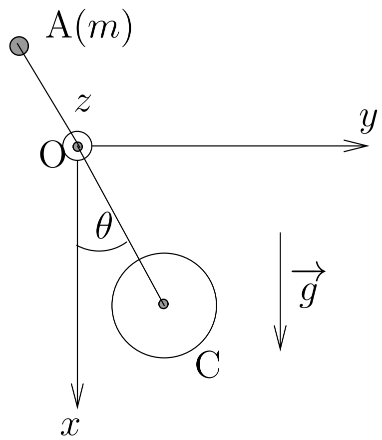
On rappelle que l'énergie mécanique pour un mouvement elliptique est celle du mouvement circulaire si on remplace R par a.

1. Déterminer la hauteur du satellite à l'apogée.
2. Trouver une expression de la période T en fonction de G,M,R, a.
3. Déterminer les vitesses du satellite à l'apogée et au périgée.
4. Trouver une condition sur la vitesse et la position du satellite pour le faire passer sur une trajectoire circulaire.

Mécanique du point 5 *(CCP)*

On considère un métronome modélisé par une boule de centre C, de rayon R, de masse M et de moment d'inertie par rapport à Oz J, et un point matériel A de masse $m <$ M.

$\mathrm{X} = \mathrm{OA}$ et $\ell = \mathrm{OC}$ $\mathrm{J} = \mathrm{M}(\ell^2 + \frac{2}{5}\mathrm{R}^2)$.



1. A l'aide du théorème du moment cinétique, trouver la période T des petites oscillations de θ. Etudier le cas limite du pendule pesant.
2. a) Exprimer l'énergie cinétique E_c du métronome.
   b) Exprimer l'énergie potentielle E_p du métronome (sachant qu'elle est nulle pour $\theta = \pi/2$).
   c) Retrouver l'expression de T.

Mécanique du point 6 *(CCP)*

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical.

On impose $\omega = \omega_0$; déterminer la valeur θ_0 correspondant à un équilibre stable. A quelle condition sur ω la solution $\theta_0 \neq 0$ existe-t-elle ?

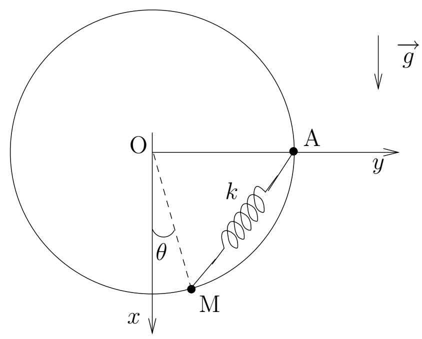
Mécanique du point 7 *(CCP)*

Une comète a un périhélie de $r_p = r_0/2$ où r_0 est la distance Terre-soleil. En P la vitesse vaut $v_\mathrm{P} = 2v_0$ où v_0 est la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil (supposée circulaire).

1. Quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Déterminer $v(r)$.

Mécanique du point 8 *(CCP)*

Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer la position d'équilibre θ_{eq} en fonction de $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mathrm{R}}}$ et $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
3. Déterminer la pulsation des petites oscillations en fonction de ω, Ω et θ_{eq}.

Mécanique du point 9 *(CCP)*

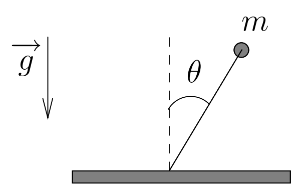
Un hélicoptère de secours possède un filin assimilé à une tige homogène de masse m, de moment d'inertie $\mathrm{J} = \dfrac{m\ell^2}{3}$ par rapport à l'axe de la fixation et de longueur 2ℓ. Il est en accélération constante a_0.

1. Déterminer l'accéleration sachant que le filin fait un angle θ_{eq} avec la verticale.
2. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

Mécanique du point 10 *(CCP)*

Au bout d'une tige de masse nulle fixée en O, de longueur ℓ, faisant un angle θ avec la verticale, on attache une masse m. La tige subit un moment de rappel $-\mathrm{C}\theta$.

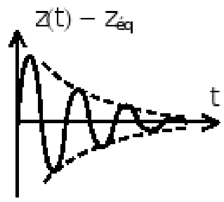
A quelle condition la tige, écartée de sa position d'équilibre vertical, y retourne-t-elle ? Trouver alors la période des petites oscillations.



Mécanique du point 11 *(CCP)*

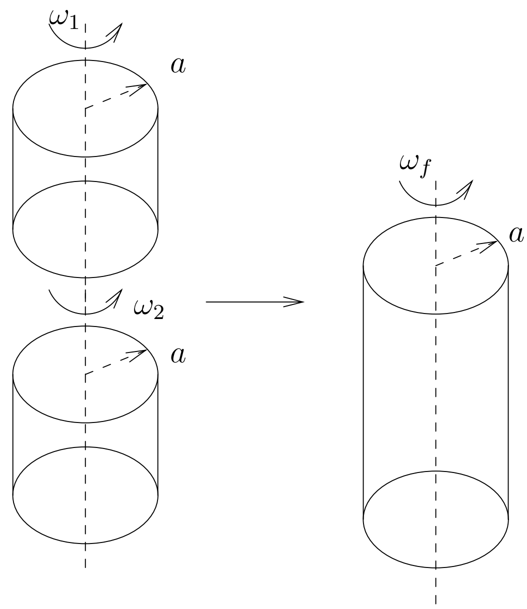
Soit une masse m liée à un bâti fixe par un ressort de raideur k de longueur à vide ℓ_0 colinéaire à la gravité $\overrightarrow{g}$. Le déplacement s'effectue avec un frottement visqueux proportionnel à la vitesse.

1. Exprimer la longueur à l'équilibre du ressort.
2. Donner l'équation différentielle du mouvement sous forme réduite avec une pulsation propre ω_0 et un coefficient d'amortissement λ. La résoudre pour une vitesse initiale v_0, $z(0) = z_{\text{éq}}$ et pour un faible amortissement.
3. Donner un équivalent électrocinétique et développer des analogies.
4. La courbe ci-contre est enregistrée. Déterminer ω_0 et λ_0.



Mécanique du point 12 *(Mines)*

Les deux cylindres en rotation ci-contre ont pour paramètres respectifs : m_i, ω_i, c, T_i $\mathrm{J}_i = \dfrac{1}{2} m_i a^2$ avec $i = 1$ ou 2. c est la chaleur massique (capacité calorifique massique). Le système complet est isolé et calorifugé.
A l'issue d'une mise en contact progressive des deux cylindres, on obtient le système ci-contre de paramètres $m_1 + m_2$, ω_f, c, T_f.
Déterminer ω_f et T_f.



Mécanique du point 13 *(CCP)*

Un satellite tourne autour de la Terre de masse $\mathrm{M_T}$ sur une trajectoire circulaire basse de rayon R. Quelle est sa vitesse ?

Quelle vitesse supplémentaire doit-on lui communiquer pour qu'il quitte une trajectoire bornée ?

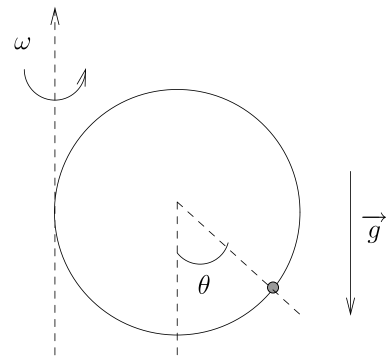
Mécanique du point 14 *(CCP)*

Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant $g_0 = 9,81$ m.s^{-2}, $\mathrm{R_T} = 6400$ km et la durée d'un jour sidéral T = 86100 s. Calculer l'énergie à fournir pour faire varier l'altitude de 50 km.

Mécanique du point 15 *(CCP)*

Une bille glisse sans frotement sur un cercle de rayon R mis en rotation à la vitesse angulaire ω.

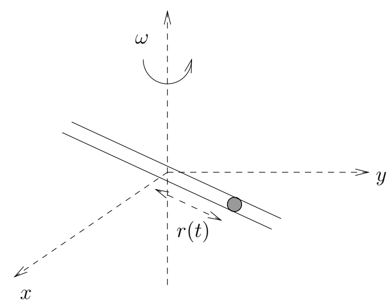
1. Déterminer l'équation donnant les positions d'équilibre.
2. Montrer graphiquement que θ ne peut appartenir aux intervalles $[\pi/2;\pi]$ et $[3\pi/2;2\pi]$. Interpréter physiquement en représentant les forces.



Mécanique du point 16 *(CCP)*

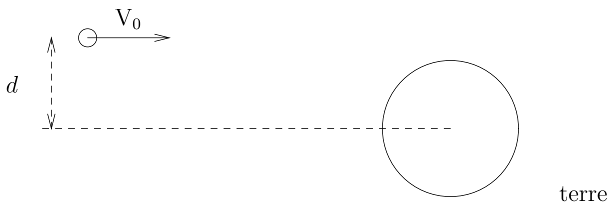
Une bille glisse sans frotement dans une tige en rotation dans le plan Oxy à la vitesse angulaire ω constante.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par r.
2. En déduire $r(t)$ si $r(0) = r_0$ et $v(0) = 0$.
3. Même question si on prend en compte des frottements fluides de type $-h\overrightarrow{v}$.



Mécanique du point 17 *(CCP)*

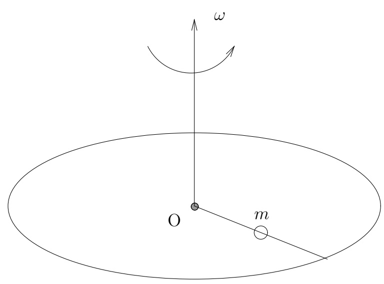
Une météorite décrit une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante V_0 distante de $d = 100.10^3$ km du centre de la Terre. Son rayon est noté R et vaut R=6400km. Pénétrant dans le champ de gravitation terrestre, il décrit une orbite hyperbolique dont le centre de la Terre est l'un des foyers. On note $g_0 = 10$ m.s^{-2} le champ de pesanteur à la surface de la Terre. Les frottements dans l'atmosphère seront négligés.



Calculer la vitesse limite de V_0 pour que la météorite ne percute pas la Terre.

Mécanique du point 18 *(CCP)*

Un disque tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe vertical. Une bille coulisse sans frottement le long d'une gouttière radiale. La bille est liée au centre O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Donner l'équation du mouvement et décrire l'évolution.

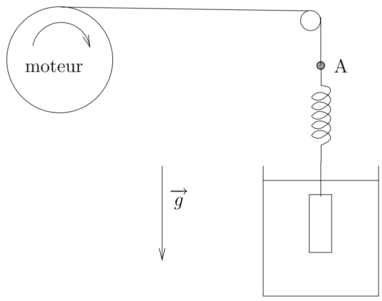


Mécanique du point 19 *(CCP)*

Pour le dispositif ci-contre, donner l'équation différentielle et l'amplitude en fonction de ω sachant que le point A est animé d'un mouvement vertical donné par

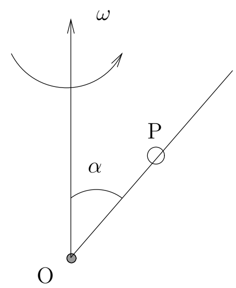
$$z_{\mathrm{A}} = \mathrm{F}_m \cos \omega t$$

Les frottements sont de type fluide en $-\lambda \overrightarrow{v}$ et la constante de raideur du ressort est k.



Mécanique du point 20 *(CCP)*

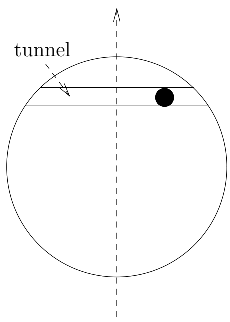
Une tige faisant un angle α constant avec la verticale tourne autour de cette dernière à vitesse angulaire constante ω. Un anneau P de masse m peut glisser sans frottement sur la tige.
Etudier l'équilibre.



Mécanique du point 21 *(Centrale)*

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon R= 6400 km. Un tunnel rectiligne, de faible section, est creusé entre deux points de la surface de la Terre. Une masse m ponctuelle est libre de se déplacer dans ce tunnel ; les frottements sont négligés. On note g_0 l'intensité de la pesanteur au niveau du sol.

1. Déterminer le champ gravitationnel terrestre à l'intérieur du tunnel.
2. Décrire le mouvement de la masse.
3. Comment les résultats précédents sont-ils modifiés si l'on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même ?



Mécanique du point 22 *(Centrale)*

On considère une orbite terrestre de rayon R_0 ; on note M_0 la masse de la Terre et M_{S} celle du soleil.

1. Calculer la vitesse V_0 de la Terre, son énergie cinétique, mécanique et son moment cinétique.
2. Une comète de masse m_c coupe l'orbite terrestre en A et B ; son point le plus proche du Soleil est à $\mathrm{R}_0/2$ et sa vitesse en ce point est $2\mathrm{V}_0$. Donner la nature de sa trajectoire. Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.

Mécanique du point 23 *(Centrale)*

La molécule HF est caractérisée en partie par le degré de polarisation δ compris entre 0 et 1. de la liaison HF. L'énergie potentielle d'interaction est donnée par la relation suivante où A est une constante positive et r la distance interatomique :

$$\mathrm{E}_p(r) = \frac{\mathrm{A}}{r^9} - \frac{\delta^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

1. Représenter $\mathrm{E}_p(r)$ et interpréter concrètement les deux termes.
2. On suppose que dans le référentiel barycentrique les deux atomes évoluent selon une droite. Prévoir les mouvements possibles.

3. Déterminer l'allure du portrait de phase.
4. Calculer A et δ connaissant le moment dipolaire $p = 6.10^{-30}$C.m et la longueur d=92 pm de la liaison.

Mécanique du point 24 *(Centrale)*

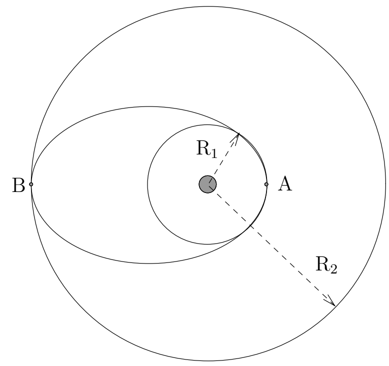
Un satellite est en orbite autour de la Terre de masse $\mathrm{M_T}$ et de rayon $\mathrm{R_T}$.

1. L'orbite est circulaire de rayon r_0. Exprimer la vitesse v_0 du satellite puis son énergie mécanique. On admet que cette relation reste valable pour une orbite elliptique à condition de remplacer r_0 par le demi-grand axe a.
2. L'orbite a pour équation $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ Pour quelle valeur de e a-t-on une ellipse ? Dessiner la trajectoire.
3. Le satellite est en orbite circulaire à v_0 et r_0. Une impulsion est donnée, la vitesse passe à $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0(1+\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$. Pourquoi la trajectoire n'est-elle plus circulaire ? Calculer le demi-grand axe de l'ellipse.

Mécanique du point 25 *(Centrale)*

Un satellite a une trajectoire circulaire autour de la Terre.

1. Donner la relation entre la période de révolution T et le rayon de sa trajectoire.
2. Donner l'expression de E_c, E_p et E_m. Justifier le signe des énergies.
3. On désire passer d'une orbite circulaire de rayon $\mathrm{R_1}$ à une orbite circulaire de rayon $\mathrm{R_2}$. On utilise pour cela une orbite de transfert elliptique. En A une énergie $\Delta\mathrm{E_1}$ est donnée au satellite ; en B une énergie $\Delta\mathrm{E_2}$. Calculer $\dfrac{\Delta\mathrm{E_1}}{\mathrm{E_1}}$, $\dfrac{\Delta\mathrm{E_2}}{\mathrm{E_2}}$ et $\dfrac{\mathrm{T_2}}{\mathrm{T_1}}$ en fonction de $k = \dfrac{\mathrm{R_2}}{\mathrm{R_1}}$. Déterminer le temps de transfert entre A et B en fonction de $\mathrm{T_1}$ et k.



Mécanique du point 26 *(Mines)*

Un point matériel se déplace sur une piste constituée de deux quarts de cercle identiques de rayon a et d'une portion rectigigne de longueur d. Il n'y a pas de frottement sur les lignes courbes mais un frottement $-mhv\overrightarrow{v}$ sur la ligne plate.

a

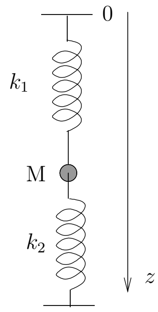
d

Calculer d pour que le point laché de a atteigne une hauteur $a/100$ après 38 allers-retours.

Mécanique du point 27 *(Mines)*

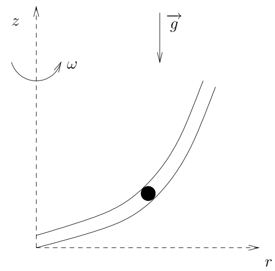
Soit une masse m placée dans le champ de pesanteur entre deux ressorts de raideur k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_0 colinéaires à la gravité $\overrightarrow{g}$.

1. Donner l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la position $z(t)$ de la masse.
2. Calculer la raideur du ressort équivalent.



Mécanique du point 28 *(Mines)*

Une bille glisse sans frotement dans une tringle d'équation $z(r)$ mise en rotation à la vitesse angulaire constante ω. Déterminer l'équation $z(r)$ pour laquelle la bille est en équilibre stable.



Mécanique du point 29 *(Mines)*

Sur un véhicule d'accélération $a_0 = 3m.s^{-2}$ horizontale est pendu un pendule simple de longeuur $\ell = 0,8$ m.

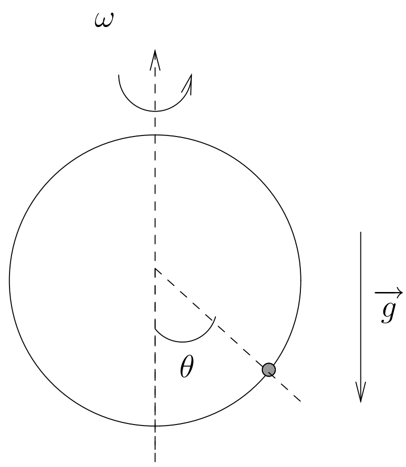
Trouver la position d'équilibre relativement au véhicule.

Trouver la période des petites oscillations que fait le pendule autour de sa position d'équilibre.

Comparer avec la période du pendule si le véhicule est à l'arrêt.

Mécanique du point 30 *(Centrale)*

Un anneau de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon R en rotation autour de son axe à ω.



1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Discuter la stabilité et déterminer la période des petites oscillations autour des positions stables.
3. Tracer l'allure des portraits de phase.

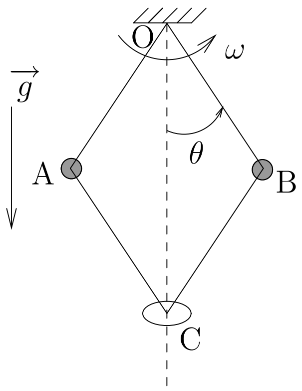
Mécanique du point 31 *(Centrale)*

Un point P de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour de O de masse M. De façon quasi-instantanée, la masse de O de vient αM.

Quelle est la nouvelle trajectoire de P ? La caractériser.

Mécanique du point 32 *(Mines)*

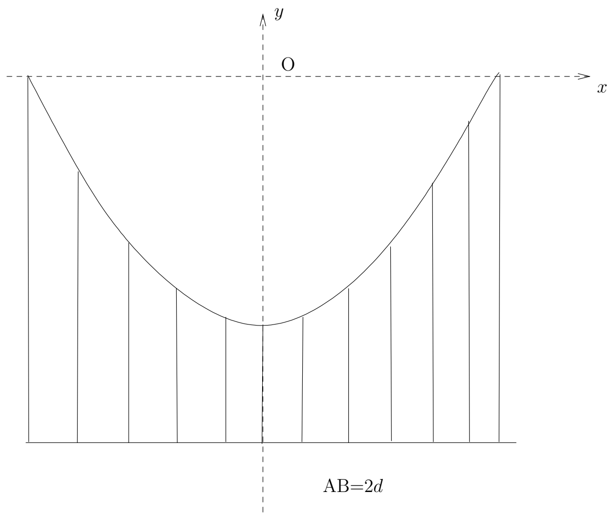
Un losange articulé de côté ℓ tourne autour d'un axe fixe Δ vertical à la vitesse angulaire constante ω. O est fixe alors que en A, B et C sont placées des masses m. Celle placée en C est un anneau qui peut glisser sans frottement sur l'axe Δ.



1. Déterminer la position d'équilibre en fonction de ω.
2. Discuter la stabilité des équilibres.

Mécanique du point 33 *(Mines)*

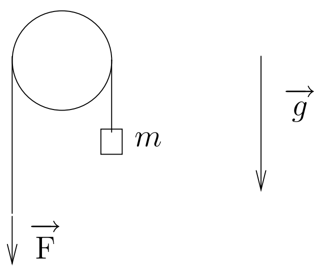
Un pont CD est suspendu à l'aide d'un grand nombre de fils d'acier de masse négligée équidistants.



1. Déterminer la forme du cable porteur AB sachant que l'on néglige sa masse et qu'il doit supporter un pont de masse μ par unité de longueur.
2. Condition à réaliser sachant que la tension du cable AB ne doit pas dépasser une valeur maximale T_{max}.

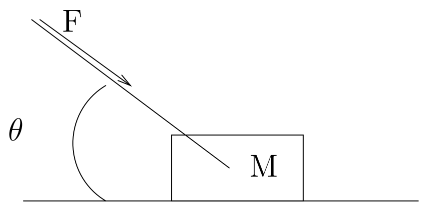
Mécanique du point 34 *(Mines)*

Une corde sans raideur de masse négligeable passe autour d'une tige cylindrique de rayon R horizontale et immobile (la corde fait un demi-tour sur la tige). Le coefficient de frottement de la corde sur la tige est f.



Calculer la valeur minimale de la force F qu'il faut exercer pour empêcher la masse m de tomber.

Mécanique du point 35 *(Mines)* Un pavé solide de masse M glisse sur le sol avec un coefficent de frottement μ. Une tige de masse négligeable permet de tirer ou de pousser celui-ci :

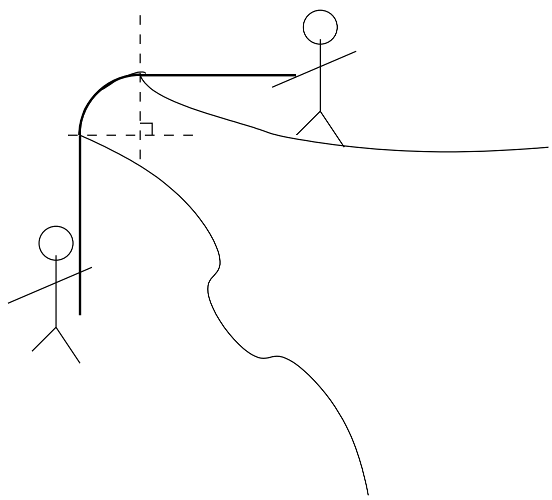


L'opérateur exerce une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$. On désire déterminer l'intensité F de la force en fonction de θ , le bloc étant en translation rectiligne uniforme.

1. Dans le cas où l'opérateur tire l'ustensile, exprimer $\mathrm{F}(\theta)$.
2. Même question dans le cas de la poussée.
3. Tracer le graphe de $\mathrm{F}(\theta)$ et identifier l'existence d'un ange limite dans une des situations. Commenter.

Mécanique du point 36 *(ENS)*

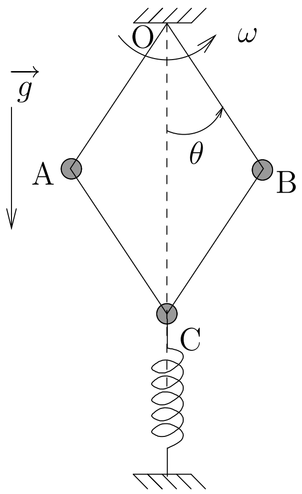
En montagne un sauveteur retient son compagnon qui a dévissé avec une corde qui passe par-dessus un rocher arrondi, l'angle dont elle tourne est $\pi/2$. On note μ le coefficient de frottement et on néglige la masse de la corde.



1. En considérant qu'en tout point du contact rocher-corde la condition de non glissement est respectée quelle est la force nécessaire pour empêcher la descente ?
2. Quelle est la force minimale à exercer pour faire remonter l'alpiniste en détresse ?

Mécanique du point 37 *(X)*

Même exercice mais avec un ressort en plus et la masse en C est différente (m_1) :



Le ressort a sa longueur à vide en $\theta = 0$.

Mécanique du point 38 *(X)*

4 ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k sont aux extrémités d'un carré de côté $\ell_0\sqrt{2}$ et reliés à un point de masse m proche du centre du carré O.

Donner l'équation de la trajectoire.

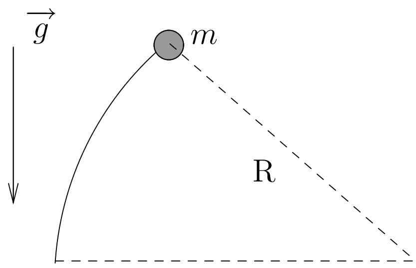
Mécanique du point 39 *(X)*

Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une parabole d'équation $y = ax^2$ telle que $\overrightarrow{g}$ soit selon $\overrightarrow{u_y}$. On le lache de l'origine sans vitesse initiale.

Déterminer la réaction du support en fonction de x. Peut-il y avoir décollement ?

Mécanique du point 40 *(X)*

On considère une barre sans masse surmontée par une masse m. On admet que la barre possède une énergie potentiele fonction de sa courbure 1/R : $\mathrm{E}_{pot} = \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}^2}$.



1. Donner les positions d'équilibre. Equation des petites oscillations autour d'un équilibre stable.
2. Comment appliquer ce résultat aux arbres ?