Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 06/12/2018

DM n° 8 : Fonctions usuelles, calcul intégral

Correction de l'exercice 1 – Soit f la fonction définie là où cela a un sens par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\right)$.

1. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $z = \mathrm{e}^x$. L'équation $(\mathrm{e}^x)^2 - 2\alpha\mathrm{e}^x - 1 = 0$ se traduit sur z par $z^2 - 2\alpha z - 1 = 0$. Le dirscriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = 4\alpha^2 + 4 = 4(\alpha^2 + 1) > 0$. Ainsi, il y a deux racines, dont une seule est valide, puisque $z > 0$ (c'est une exponentielle) :
$$\mathrm{e}^x = z = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} > 0.$$
On trouve alors une unique solution à l'équation proposée : $\boxed{x = \ln(\alpha + \sqrt{1 + a^2})}$.

   (b) Tout d'abord, remarquons que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et de limite $-\infty$ en $-\infty$, et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, sh est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, étant donné $y \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = y$ si et seulement si $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2y$, soit, en multipliant par e^x : $\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1$. On déduit de la question 1 que
$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$
On obtient donc ainsi une expression de la réciproque de sh (appelée Argsh, argument sinus hyperbolique) :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\text{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})}.$$

2. (a) Tout d'abord, pour que $f(x)$ soit défini, il est nécessaire que $x > 0$. Cette condition étant réalisée, $f(x)$ est défini si et seulement si $\text{sh}(\frac{1}{2}\ln(x)) \in [-1, 1]$, et, sh étant croissante, cette condition est réalisée si et seulement si
$$(\frac{1}{2}\ln(x) \in [\text{Argsh}(-1), \text{Argsh}(1)] = [\ln(-1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})],$$
ce qui équivaut à $\ln(x) \in [\ln((-1 + \sqrt{2})^2), \ln((1 + \sqrt{2})^2)$. Ainsi, par croissance de ln, le domaine de définition de f est $\boxed{D_f = [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]}$

   (b)
   - Par composition de fonctions dérivables, f est dérivable en tout réel x de son domaine tel que $\text{sh}(\frac{1}{2}\ln(x))$ soit différent de 1 et -1, donc f est dérivable sur $]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$, et même de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, ce qui permettra de redériver par la suite.
   - Pour tout $x \in]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$:
$$f'(x) = \frac{1}{2x}\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sh}^2\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)}}$$
La fonction ch étant toujours positive, et le domaine de définition étant inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, f' est strictement positive sur $]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$, donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$.
   - La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé $[3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$, les limites aux bords du domaine sont les valeurs prises par f en $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$, à savoir :
$$\boxed{\lim_{x \to (3-2\sqrt{2})^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to (3+2\sqrt{2})^-} f(x) = \frac{\pi}{2}}.$$
On obtient donc le tableau de variations :

x	$3 - 2\sqrt{2}$		$3 + 2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

- Pour cette première dérivation, l'expression à l'aide de sh était plutôt pratique, mais pour continuer la dérivation, on a intérêt à revenir à la définition des fonctions hyperboliques, en remarquant que :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]\mathrm{e}^{-2+2\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{2+2\sqrt{2}}[, \quad f'(x) = \frac{x+1}{4x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4x}}} = \frac{x+1}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-1}}.$$

Une dérivation supplémentaire amène :

$$\forall x \in]3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}[, \quad f''(x) = -\frac{1}{2x^2}\times\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-1}} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{2x}\frac{-2x+6}{(-x^2+6x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Après mise sur le même dénominateur, on obtient :

$$f''(x) = \frac{x^3-x^2-9x+1}{2x^2(-x^2+6x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

On étudie le signe du numérateur. Pour cela, on étudie les variations de la fonction $h : x \mapsto x^3-x^2-9x+1$. La fonction h est dérivable en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 3x^2-2x-9.$$

Les racines de h' sont $\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$. On obtient donc le tableau de variations suivant de h sur le domaine qui nous intéresse :

x	$3-2\sqrt{2}$		$\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$		$3+2\sqrt{2}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Les entiers 3 et 4 appartiennent à la deuxième partie de ce tableau et un calcul simple montre que $h(3) < 0$ et $h(4) > 0$. Donc h s'annule bien entre 3 et 4. D'après le théorème de la bijection, la racine x_0 de h est unique sur $[-\frac{1+2\sqrt{7}}{3}, 3+2\sqrt{2}]$. Par ailleurs, h est strictement négative sur la première moitié du domaine, puisqu'elle y est décroissante et que

$$h(3-2\sqrt{2}) = 20-30\sqrt{2} < 0.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un unique point d'inflexion, en un point } x_0 \in]3,4[.}$

On obtient facilement $\boxed{\text{la concavité de } f \text{ sur } [3-2\sqrt{2}, x_0] \text{ et la convexité sur } [x_0, 3+2\sqrt{2}].}$

(c)
- Les réels $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$ sont les deux racines du polynôme $-x^2+6x-1$, et ce polynôme reste positif entre ses racines, donc sur le domaine de définition de f. Ainsi, d'après l'expression obtenue pour f', on obtient

$$\lim_{x\to(3-2\sqrt{2})^+} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to(3+2\sqrt{2})^-} = -\infty,$$

donc on a $\boxed{\text{deux demi-tangentes verticales en } 3-2\sqrt{2} \text{ et } 3-2\sqrt{2}}$

- On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(0) = \frac{1}{2}$, donc la tengente en 1 est d'équation $\boxed{y = \frac{1}{2}(x-1).}$

(d) Par définition de la dérivée par limite du taux d'accroissement, et du fait que $f(1) = 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{2}.}$$

Pour la deuxième limite, on utilise une formule de Taylor. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 est insuffisante : on obtient bien la bonne expression dans le terme de gauche, mais la majoration obtenue est insuffisante pour conclure. On pourrait penser à la formule de Taylor avec reste-intégrale et essayer d'obtenir

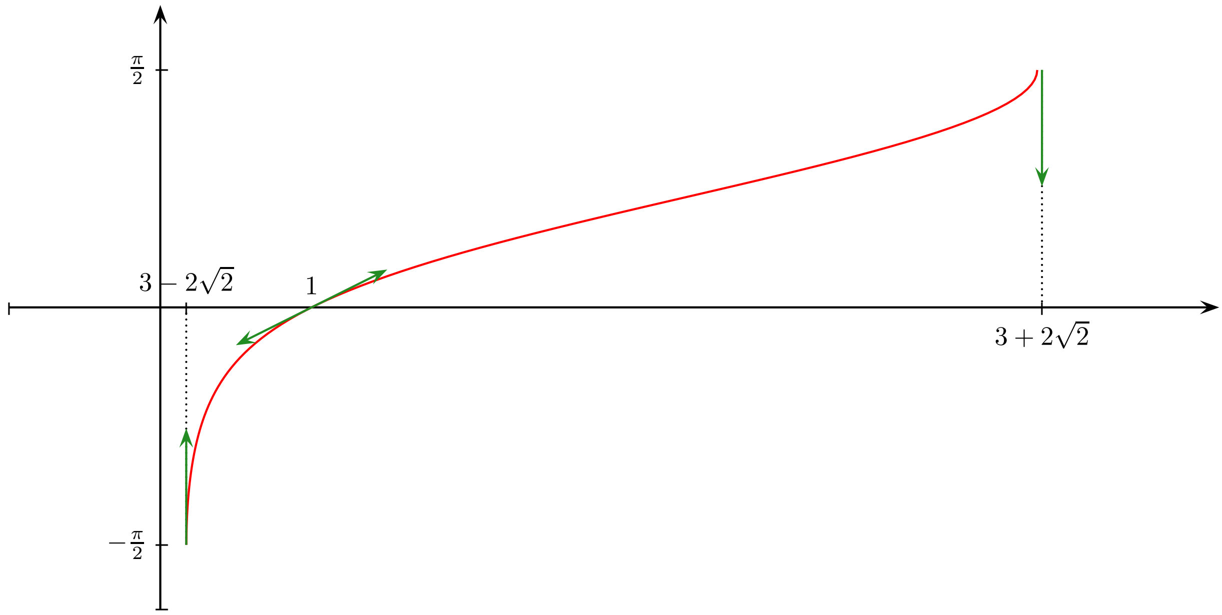

FIGURE 1 – Graphe de f

la limite de l'intégrale. On pourrait s'en sortir, mais cela reste un peu technique. La fonction étant de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur l'intervalle $]3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}[$, on peut en fait pousser l'inégalité de Taylor un peu plus loin, à l'ordre 2. Comme $f^{(3)}$ est continue en 1, il existe un voisinage de 1 sur lequel $f^{(3)}$ reste borné (revenez à la définition, $f^{(3)}$ restera coincé entre $f^{(3)}(1)+\varepsilon$ et $f^{(3)}(1)-\varepsilon$ sur un certain voisinage de 1). Pour le calcul de la limite, on peut se restreindre à un intervalle I contenant 1, sur lequel il existe M tel que pour tout $x \in I$, $|f^{(3)}(x)| \leqslant M$. Étant donné $x \in I$, $x \neq 1$, l'inégalité de Taylor à l'ordre 3 entre 1 et x amène alors :

$$\left| f(x) - f(1) - f'(1)(x-1) - \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \right| \leqslant \frac{M|x-1|^3}{3!}$$

Ainsi, on obtient, après division par $(x-1)^2 > 0$:

$$\left| \frac{f(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \right| \leqslant \frac{M|x-1|}{3!}$$

et en faisant tendre x vers 1, on obtient, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4}}.$$

(e) Voir figure 1.

3. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{f\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(a) La fonction g est définie pour tout x tel que $\frac{1}{x} \in [2-2\sqrt{2}, 0[$ (soit $x < 2-2\sqrt{2}$) et tout x tel que $\frac{1}{x} \in]0, 2+\sqrt{2}]$ (soit $x > 2+2\sqrt{2}$). Sur chacun de ces deux intervalles, $\boxed{g \text{ est décroissante}}$, en tant que composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

(b) Le changement de variable $y = 1 + frac1x$ amène :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{\frac{1}{y-1}f(y)} = \frac{y-1}{f(y)}.$$

Ainsi, d'après 2(d),

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{y \to 1^+} \frac{y-1}{f(y)} = 2.$$

On obtient de même

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{y \to 1^-} \frac{y-1}{f(y)} = 2.$$

(c) On a alors, pour tout $x > 2+2\sqrt{2}$:

$$g(x) - 2x = \frac{1 - 2\frac{f(y)}{y-1}}{f(y)} = \frac{(y-1) - 2f(y)}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)}{f(y)},$$

et donc, toujours d'après 2(d) :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2x = \lim_{y\to 1^+} \frac{(y-1) - 2f(y)}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)}{f(y)} = 1.$$

De même

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) - 2x = 1.$$

On en déduit que g admet la même asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, d'équation $\boxed{y = 2x+1}$.

4. L'expression obtenue pour f' nous incite à faire une intégration par partie, f et $x \mapsto x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x &= \Big[x\mathrm{Arcsin}(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\Big]_1^2 - \int_1^2 xf'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \int_1^2 \frac{x+1}{2\sqrt{-x^2+6x-1}}\ \mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2\sqrt{2}}\right)^2}}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $sin(y) = \frac{x-3}{2\sqrt{2}}$, soit $x = 2\sqrt{2}\sin(y)+3$ est valide car de classe $\mathcal{C}^1$, et amène $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cos(y)\ \mathrm{d}y$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x &= 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \frac{(2\sqrt{2}\sin(y)+4)\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\ \mathrm{d}y \\
&= 2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} (2\sqrt{2}\sin(y)+4)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Une primitivation simple donne alors :

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 4\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\pi}{2} - 1}.$$

Correction de l'exercice 2 – (Exercice technique)

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale I_1 est bien définie.
Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x^2)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut faire une intégration par parties (IPP) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\cdot 2x}{1+x^2} \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - 2 + 2\Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 \\
&= \boxed{\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} = I_1}
\end{aligned}$$

(b) • Première méthode. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[-1,1]$ et paire, donc l'intégrale I_2 est bien définie et $I_2 = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

Par ailleurs,

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)} = \frac{\sqrt{1+x}}{2x} - \frac{\sqrt{1-x}}{2x}.$$

Du fait du facteur $2x$ au dénominateur, on restreint l'intervalle d'intégration, en posant $\varepsilon \in]0,1[$. On effectue alors sur la première intégrale le changement de variables $y = \sqrt{1+x}$, soit $x = y^2 - 1$. La fonction $y \mapsto y^2 - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{2}]$, et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2y$, donc

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1+x}}{2x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{2}} \frac{y}{2(y^2-1)} 2y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{(y-1)(y+1)}\right)\,\mathrm{d}y \\
\sqrt{2} - \sqrt{1+\varepsilon} &+ \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y-1} - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y+1} \\
&= \sqrt{2} - \sqrt{1+\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}+1}{\sqrt{1+\varepsilon}-1}) \\
&= \sqrt{2} - \sqrt{1+\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{2}+1)^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{1+\varepsilon}+1)^2\right) - \frac{1}{2}\ln\varepsilon \\
&= \sqrt{2} - \sqrt{1+\varepsilon} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(\sqrt{1+\varepsilon}+1\right) - \frac{1}{2}\ln\varepsilon
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1-x}}{2x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{y^2}{1-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= -\sqrt{1-\varepsilon} + +\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}y}{1-y} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}y}{1+y} \\
&= -\sqrt{1-\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right) \\
&= -\sqrt{1-\varepsilon} + \ln\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}\ln\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, en effectuant la différence, les termes $\ln\varepsilon$ se simplifient, et les autres termes admettent une limite finie lorsque ε tend vers 0, et on trouve : Ainsi, $\boxed{I_2 = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2})}$.

- Si on veut éviter les intégrales impropres, il y a la méthode suivante, restant de bout en bout avec des intégrales définies, mais un peu plus calculatoire. Je me contente de l'esquisse de la preuve. On commence par effectuer un changement de variable $y = \sqrt{1+x}$ sur I_2, cela donne :

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2-y^2}+y}.$$

On fait alors un changement de variable $u = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$, soit $y = \sqrt{2}\sin(u)$, ce qui donne :

$$I_2 = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)\cos(u)}{\cos(u)+\sin(u)}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{1+\tan(u)}\,\mathrm{d}u.$$

On fait enfin le changement de variable $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ donc $u = 2\operatorname{Arctan} t$, soit $\mathrm{d}u = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Les formules de l'angle moitié amènent alors :

$$I_2 = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)(1-t^2+2t)}\,\mathrm{d}t.$$

On fait avec courage et abnégation une décomposition en éléments simples (ici multiplier par $(t^2+1)^2$ et évaluer en i fournit très facilement les deux premiers coefficients, les coefficients des termes de degré

1 sont un peu plus pénibles à obtenir, et les deux derniers peuvent par exemple s'obtenir en multipliant par t et considérant la limite en $+\infty$, et en évaluant en 0) :

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)(1-t^2+2t)} = \frac{2t+2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}-t} + \frac{1}{t-1+\sqrt{2}}.\right)$$

La seule difficulté réside dans la partie de numérateur constant du premier terme, que l'on calcule par une astuce désormais bien connue de vous :

$$\int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2t\cdot t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Les autres termes s'intègrent facilement en ln ou Arctan, et il vient alors, après quelques simplifications :

$$\boxed{I_2 = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2})}.$$

(c) On effectue le changement de variable $x = \cos(y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On a alors $\mathrm{d}x = -\sin(y)\,\mathrm{d}y$, d'où :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\operatorname{Arccos}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 -\mathrm{e}^{\operatorname{Arccos}(\cos(y))}\sin(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi \mathrm{e}^y \sin(y) = \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})y}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})y}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((1-\mathrm{i})(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi}-1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((1-\mathrm{i})(-\mathrm{e}^\pi - 1)\right). \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{I_3 = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}}$.

On aurait aussi pu s'en sortir sans le passage par les complexes, en intégrant deux fois de suite par parties après avoir fait le changement de variable.

(d) Tout d'abord, $x^4 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - R(x)$, où R est un polynôme de degré 3 (qu'on n'est pas obligé de déterminer). On peut alors écrire la décomposition en éléments simples sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3,-4\} \quad \frac{x^4}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3} + \frac{d}{x+4}.$$

- On multiplie par $x+1$ et on évalue en -1 (après prolongement par continuité), on obtient $a = \frac{1}{6}$
- On obtient de même $b = -8$, $c = \frac{81}{2}$, $d = -\frac{128}{3}$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - 8\frac{\mathrm{d}x}{2+x} + \frac{81}{2}\frac{\mathrm{d}x}{3+x} - \frac{128}{3}\frac{\mathrm{d}x}{4+x} \\ &= 1 + \frac{1}{6}\ln(2) - 8\ln(3) + 8\ln(2) + \frac{81}{2}\ln(4) - \frac{81}{2}\ln(3) - \frac{128}{3}\ln(5) + \frac{128}{3}\ln(4) \\ &= \boxed{1 + \frac{349}{2}\ln(2) - \frac{97}{2}\ln(3) - \frac{128}{3}\ln(5) = I_4}. \end{aligned}$$

(e) On écrit la forme de la décomposition en éléments simples : il existe des réels a, b et c tels que

$$\forall x \neq -1, \quad \frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+d}{x^2+2x+5}.$$

- On multiplie par $x+1$ et on évalue en -1, on obtient $a = \frac{1}{4}$
- On multiplie par x et on fait tendre x vers $+\infty$, on trouve $a+b=0$, soit $b = -\frac{1}{4}$.
- On évalue en 0, on trouve $\frac{2}{5} = a + \frac{c}{5}$, donc $c = -\frac{3}{4}$.

On a alors, pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{(x+2)}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{8}\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{(x+1)^2+4},$$

donc, étant donné $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{(x+2)}{(x+1)(x^2+2x+5)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(A) - \frac{1}{8}\ln(A^2+2A+5) + \frac{1}{8}\ln(5) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{A+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{A^2}{A^2+2A+5}\right) + \frac{1}{8}\ln(5) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{A+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right).$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient donc :

$$\boxed{I_5 = \frac{1}{8}\ln(5) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes, sur des domaines à préciser.
   (a) La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ sont primitivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\int f_1(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2+1},$$

et donc, $\boxed{\int f_1(x)\ \mathrm{d}x = \ln(x^2+2x+2) - \operatorname{Arctan}(x+1) + C}$, $C \in \mathbb{R}$.

   (b) La fonction $g : x \mapsto -\ln(x) - \ln(x)^2$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $-y-y^2 = -y(y+1) \geqslant 0$ si et seulement si $y \in [-1, 0]$, donc f est définie (et continue) sur $[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]$.
   En effectuant le changement de variable $y = \ln(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]$, et tel que $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, il vient :

$$\int f_2(x)\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{-y-y^2}\ \mathrm{d}y = \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(y+\frac{1}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-(2y+1)^2}\ \mathrm{d}y.$$

   Or, puisque x prend ses valeurs dans $[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]$, y prend ses valeurs dans $[-1, 0]$, donc $2y+1$ prend ses valeurs dans $[-1, 1]$.
   On pose un nouveau changement de variable $z = \operatorname{Arccos}(2y+1)$, de classe $\mathcal{C}^1$, soit $y = \frac{1}{2}(\cos(z)-1)$. cette expression est de classe $\mathcal{C}^1$ en z, et $\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\sin(z)\ \mathrm{d}z$. On a alors

$$\int f_2(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \sqrt{1-\cos(z)^2}\sin(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int \sin^2 z\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(2z)}{2}\ \mathrm{d}z.$$

   Ainsi,

$$\int f_2(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{z}{8} + \frac{\sin(2z)}{16} + c,\ \text{ où } z = \operatorname{Arccos}(2\ln(x)+1)\ \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

   En utilisant le fait que pour $z \in [0, \pi]$, $\sin(2z) = 2\cos(z)\sqrt{1-\cos^2(z)}$, on obtient l'expression :

$$\boxed{\int f_2(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\operatorname{Arccos}(2\ln(x)+1) + \frac{1}{4}(2\ln(x)+1)\sqrt{-\ln^2(x)-\ln(x)} + c}.$$

   (c) La fonction f_3 est définie et continue sur $[0, 1[$. On comment par effectuer un changement de variable $y = \sqrt{x}$, soit $x = y^2$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, et telle que $\mathrm{d}x = 2y\ \mathrm{d}y$. On a alors

$$\int f_3(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{2y\operatorname{Arcsin}(y)}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}y.$$

   Les fonctions $y \mapsto \operatorname{Arcsin}(y)$ et $y \mapsto \frac{2}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, on obtient, par intégration par parties :

$$\int f_3(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{Arcsin}(y)}{\sqrt{1-y^2}} - \int \frac{2}{1-y^2}\ \mathrm{d}y,$$

   et en effectuant une DES :

$$\int f_3(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{Arcsin}(y)}{\sqrt{1-y^2}} - \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} - \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{2\operatorname{Arcsin}(y)}{\sqrt{1-y^2}} + \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right| + c,$$

   où $c \in \mathbb{R}$. Comme $y = \sqrt{x}$, et $x \in [0, 1[$, on obtient finalement les primitives suivantes sur l'intervalle $[0, 1[$:

$$\boxed{\int f_3(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} + \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) + c.}$$

(d) La fonction ch étant strictement positive, f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int f_4(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}^2(x)}.$$

On effectue le changement de variable $y = \operatorname{ch}(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et tel que $\mathrm{d}y = \operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}x$. Ainsi

$$\int f_4(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y+y^2} = \int \frac{y+1-y}{y(y+1)}\ \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln(y) - \ln(y+1) + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ (la valeur absolue est inutile, car $y = \operatorname{ch}(x) > 0$). On obtient donc :

$$\boxed{\int f_4(x)\ \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) + c.}$$

(e) La fonction f_5 est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction sh s'annulant en 0). On a alors, sur $\mathbb{R}_+^*$, ou sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\int f_5(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^2(x)}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)(1+\operatorname{sh}^2(x))}.$$

Le changement de variable $y = \operatorname{sh}(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, et tel que $\mathrm{d}y = \operatorname{ch}(x)\ \mathrm{d}x$, donne :

$$\int f_5(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(1+y^2)} = \int \frac{1+y^2-y^2}{y^2(1+y^2)}\ \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} - \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = -\frac{1}{y} - \operatorname{Arctan}(y) + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ (constante à choisir indépendamment sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R} - +^*$). Ainsi, les primitives de f_5 sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions définies pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + c(x)},$$

où c est une fonction constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Correction du problème – Formule de Machin et calcul de π

Dans ce problème, on démontre la formule de John Machin (1706) :

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

et on montre comment cette formule peut être utilisée pour le calcul approché de π. On s'intéresse ensuite à l'existence d'autres formules de type « Machin » reliant 2 arctangentes ou plus.

Partie I – Formule de Machin

On pose $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$

1. D'après la formule d'addition pour la tangente :

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2/5}{1-\frac{1}{25}} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan(2\theta) = \frac{5}{12}}.$$

On refait de même :

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{10/12}{1-\frac{25}{144}} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan(4\theta) = \frac{120}{119}}.$$

Ainsi, une nouvelle application de la formule d'addition amène :

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(4\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}}.$$

2. Or, $\theta \geqslant 0$, donc $4\theta - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{2}$, et

$$\text{Arctan}(\theta) = \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

de quoi on déduit que $\theta < \frac{\pi}{6}$, par croissance de l'Arctan. Ainsi,

$$4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $4\theta - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et par conséquent, l'égalité obtenue dans la question 1 équivaut à :

$$4\theta - \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{239} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239}}.$$

3. On propose ci-dessous une autre présentation de cette démonstration, passant par l'utilisation des nombres complexes.

(a) Par définition, on a :

$$a + \mathrm{i}\,b = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = r\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\,r\sin(\arg(z)),$$

où r est le module de z. Ainsi, a étant non nul (et donc aussi r), on a :

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin(\arg(z))}{r\cos(\arg(z))} = \tan(\arg(z)),$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \mod \pi}$$

(b) On calcule :

$$(5+\mathrm{i})^4 = 625 + 4\,\mathrm{i}\times 125 - 6\times 25 - 4\,\mathrm{i}\times 5 + 1 = 476 + 480\,\mathrm{i}\,.$$

D'un autre côté :

$$2(239+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2(239 - 1 + (239+1)\,\mathrm{i}) = 476 + 480\,\mathrm{i}\,.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\dfrac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}} = 2\times(1+\mathrm{i})}$.

On en déduit, en passant aux arguments, que

$$4\arg(5+\mathrm{i}) - \arg(239+\mathrm{i}) \equiv \arg(1+\mathrm{i}) \mod \pi,$$

et d'après la question précédente :

$$\boxed{4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}},$$

l'égalité étant obtenue par le fait déjà prouvé que $4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ainsi que $\text{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

Partie II – Calcul approché de π

On montre dans cette partie comment la formule de Machin peut être utilisée pour calculer une valeur approchée de π. On note f la fonction Arctan.

1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a, d'après l'expression de la dérivée de Arctan et la formule de sommation des séries géométriques (ici avec une raison $-x^2$) :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}}.$$

2. On a alors :

$$\left|f'(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\right|, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\left|f'(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}.$$

3. Étant donné $x \in [0,1[$, l'inégalité précédente est valable pour tout $t \in [0,x[$, et on peut donc l'intégrer entre 0 et x :
$$\int_0^x \left| f'(t) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{\mathrm{d}t} \leqslant \int_0^x x^{2n+2} \,\mathrm{d}t \leqslant x^{2n+3}.$$
On pourrait gagner un facteur $2n+3$ en nous dispensant de l'avant dernière majoration.
Terminons notre raisonnement en utilisant l'inégalité triangulaire sur le terme de gauche :
$$\int_0^x \left| f'(t) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right| \,\mathrm{d}t \geqslant \left| \int_0^x f'(t)dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k} \,\mathrm{d}t \right| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|.$$
On obtient bien au final :
$$\boxed{\left| \mathrm{Arctan}\,(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant x^{2n+3}}$$

4. - L'inégalité $\left| 16\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 16 \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ est vérifiée dès lors que $\frac{16}{5^{2n_0+3}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut donc prendre
$$\boxed{n_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{32}{\varepsilon}\right)}{\ln(5)} - 3 \right) \right\rceil}.$$
De même, il suffit de prendre :
$$\boxed{m_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)}{\ln(239)} - 3 \right) \right\rceil}$$
pour assurer la seconde inégalité.
   - Pour $\varepsilon = 10^{-15}$, on trouve $\boxed{n_0 = 11 \text{ et } m_0 = 2}$. Ainsi, le calcul de 12 termes de la première somme et 3 de la seconde nous fournit une approximation à 10^{-15} près de π. C'est plutôt rapide !
   - Pour $\varepsilon = 10^{-100}$, on trouve $\boxed{n_0 = 72 \text{ et } m_0 = 20}$, ce qui est encore raisonnable, mais déjà moins agréable à calculer à la main (ce qui nous fait beaucoup admirer John Machin).

5. Attention à la gestion des erreurs. Pour obtenir π à ε près, il faut obtenir $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\varepsilon}{4}$ près.

```python
def Arctangente(N,eps):
    """ Calcule Arctan(1/N) à eps près """
    S = 0
    x = 1/N
    n = 1
    sg = 1
    while x > eps:
        S += sg * x / n
        sg *= -1
        n += 2
        x /= N*N
    return S

def machin(eps):
    """ Calcule pi par la formule de Machin """
    return 4 * (4 * Arctangente(5,eps / 32) - Arctangente(239,eps / 8))

print(machin(1e-15))
```

On trouve la valeur 3.141592653589793, remarquablement correcte (seule la dernière décimale diffère de 1, ce qui n'est pas étonnant du fait des erreurs d'arrondi dans les calculs, que nous avons négligés dans nos calculs d'erreur).

Partie III – D'autres formules de type « Machin »

1. (a) On a $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5(1+\mathrm{i})$, donc, en passant aux arguments :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}}.$$

(on obtient d'abord une congruence modulo π, mais il n'est pas dur de vérifier que la somme des deux arctangentes est nécessairement dans $]0, \frac{\pi}{2}[$)

(b) On adapte la méthode de la partie 1, en utilisant la formule de sommation des tangentes :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1,$$

et comme ci-dessus, chacun des deux arctangentes est dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, donc leur somme est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, d'où :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}.$$

2. Un peu répétitif...

(a) • On a $(2+\mathrm{i})^2 = 3+4\,\mathrm{i}$ et $(7+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 6+8\,\mathrm{i} = 2(3+4\,\mathrm{i})$. Ainsi,

$$\frac{(2+\mathrm{i})^2}{7+\mathrm{i}} = 2(1+\mathrm{i}),$$

et en passant aux arguments,

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

(là encore du fait que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et $\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} < \operatorname{Arctan} 12$, ce qui assure que le membre de gauche est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.)

• On retrouve la même formule par les formules de trigonométrie. Tout d'abord,

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

d'où

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{25/21}{25/21} = 1.$$

On applique l'arctangente avec les mêmes justifications que dans le premier point, ce qui donne :

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}.$$

(b) Und so geht es immer weiter...

•

$$(3+\mathrm{i})^2 * (7+\mathrm{i}) = 50(1+\mathrm{i}),$$

d'où, en passant aux arguments,

$$2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi.$$

Chacune des arctangentes étant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, la somme des 3 est dans $]0, \frac{3\pi}{4}[$, donc la seule valeur possible est :

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

• On trouve dans un premier temps

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \frac{2/3}{1-1/9} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi,

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} 17\right) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{25/28}{25/28} = 1.$$

Le même argument que plus haut permet alors de conclure que

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

3. Nous adoptons la technique complexe :

$$(2+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})(8+\mathrm{i}) = 65(1+\mathrm{i}),$$

et on conclut facilement que

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} 15 + \operatorname{Arctan} 18 = \frac{\pi}{4}},$$

les trois arctangentes étant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, ce qui nous autorise à reprendre la justification de la question précédente.

Pour qu'une formule de Machin converge bien, il faiut que la raison des termes géométriques intervenant dans la somme soit petite. ce n'est pas le cas des formules de cette partie, qui sont donc moins bonnes de la formule de Machin proprement dite. Les formules données en fin de sujet sont en revanche meilleures !

Les calculs à la main pour montrer la formule de Gauss ne sont pas complètement impossibles, mais je n'ai personnellement pas envie de m'y coller. Le type complexe de Python est insuffisant pour s'en sortir (car les coefficients sont flottants et trop grands pour être exprimés de façon exacte). On peut s'en sortir en réécrivant la multiplication de nombres complexes à l'aide des entiers longs.

```
 def multiplication(a,b,c,d):
    """ multiplication de deux complexes longs """
    return(a*c - b * d, a*d + b * c)

def puissance(a,b,n):
    """ puissance d'un complexe long
    non optimisé: on pourrait faire une exponentiation rapide!"""
    c,d = 1,0
    for i in range(n):
        (c,d) = multiplication(a,b,c,d)
    return (c,d)

(a,b)= puissance(18,1,12)
(c,d)=puissance (57,1,8)
(e,f)=multiplication(a,b,c,d)

(a,b)= puissance(239,1,5)
(g,h) = multiplication(a,b,1,1)

print(e,f)
print(g,h)

print(divmod(e,g))
print(divmod(f,h))
```

On obtient le résultat suivant :

```
9099975528812408447265625000 9488919010162353515625000000
763361275208 795988219200
(119209289550781250, 0)
(119209289550781250, 0)
```

Les deux dernières lignes nous assurent que les deux expressions obtenues diffèrent bien d'un facteur multiplicatif réel positif (et même entier). Plus précisément, on a montré, avec un peu d'aide :

$$(18+\mathrm{i})^{12}(57+\mathrm{i})^{8} = 119209289550781250(239+\mathrm{i})^{5}(1+\mathrm{i}),$$

ce qui permet de conclure, au moins modulo π (il faut ensuite contrôler l'ordre de grandeur des Arctan, ce qui peut se faire en remarquant que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$).