OUTILS D'ANALYSE CORRECTION

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n la n-ème intégrale de Wallis définie par $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

A. *Généralités*

1. a) *Calculer W_0 et W_1.*

On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t = \big[-\cos t \big]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1,$$

donc

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = 1.}$$

b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.*

On a

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t) \times (\cos t)^{n+1} \, \mathrm{d}t.$$

On effectue une intégration par parties en choisissant

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \cos t & v(t) = (\cos t)^{n+1} \\ u(t) = \sin t & v'(t) = (n+1)(-\sin t)(\cos t)^n \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \big[(\sin t)(\cos t)^{n+1} \big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t)(n+1)(-\sin t)(\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En utilisant la formule $(\cos t)^2 = 1 - (\sin t)^2$, il vient

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n - (\cos t)^{n+2} \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

c) *Démontrer que, pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.*

On procède par récurrence.

<u>Initialisation :</u> Au rang 0, on a, sans difficulté, $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que la propriété soit vérifiée au rang $p \geqslant 0$. Au rang $p+1$, on a

$$\begin{aligned}
W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} & W_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} && \text{d'après la question précédente}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} & &= \frac{2p+2}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!(p+1)!}\frac{\pi}{2} & &= \frac{2^{2p+1}p!(p+1)!}{(2p+1)!(2p+3)} &&\\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}\frac{\pi}{2} & &= \frac{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)!} && \text{en multipliant par } \frac{2p+2}{2p+2}.
\end{aligned}$$

ce qui démontre les propriétés au rang $p+1$.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence affirme que, pour tout $p \geqslant 0$, on a

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

2. a) *Démontrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.*

Soit $n \geqslant 0$. Sur $[0;\pi/2]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $(\cos t)^n \geqslant (\cos t)^{n+1}$. La propriété de croissance de l'intégrale vue en cours permet alors d'affirmer que

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t = W_n.$$

Cela montre bien que

$$\boxed{(W_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite décroissante.}}$$

b) *Démontrer que $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n\pi/(2n+2) \leqslant n{W_n}^2 \leqslant \pi/2$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \pi/2$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$nW_nW_{n-1} = n\frac{n-1}{n}W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2},$$

donc la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 0}$ est constante. Or $1W_1W_0 = \pi/2$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La décroissance de W_n nous dit que

$$W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}.$$

En multipliant par nW_n, qui est positif d'après la question A. 1. c), on obtient

$$nW_{n+1}W_n \leqslant n{W_n}^2 \leqslant nW_nW_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{n+1}(n+1)W_{n+1}W_n \leqslant n{W_n}^2 \leqslant nW_nW_{n-1}.$$

Or, d'après le résultat établi au début de cette question, on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\boxed{\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant n{W_n}^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$

Comme
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$
le théorème des gendarmes nous dit que
$$\lim_{n\to+\infty} n{W_n}^2 = \frac{\pi}{2}$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

B. *Calcul de* $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $M_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. a) *Justifier que* $\forall t \in [0;\pi/2]\,,\ t \leqslant (\pi \sin t)/2$.

On considère la fonction f définie pour tout $t \in [0;\pi/2]$ par
$$f(t) = \pi \sin t - 2t.$$
C'est une fonction dérivable et l'on a, pour tout $t \in [0;\pi/2]$,
$$f'(t) = \pi \cos t - 2.$$
Donc
$$f'(t) \geqslant 0 \iff \pi\cos t - 2 \geqslant 0 \iff \cos t \geqslant \frac{2}{\pi} \iff t \in [0;\alpha]$$
où α est le nombre réel de l'intervalle $[0;\pi/2]$ tel que $\cos\alpha = 2/\pi$. On en déduit que

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0

On constate ainsi que
$$\forall t \in [0;\pi/2]\,, \qquad f(t) \geqslant 0,$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\forall t \in [0;\pi/2]\,, \qquad t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t.}$$

b) *Justifier que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $0 \leqslant M_{2n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{W_{2n}}{2n+2}$ *et en déduire que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall t \in [0;\pi/2]\,, \qquad t^2(\cos t)^{2n} \geqslant 0,$$
donc, d'après la positivité de l'intégrale, on a
$$M_{2n} \geqslant 0.$$
Par ailleurs, le résultat de la question précédente nous dit que
$$\forall t \in [0;\pi/2]\,, \qquad t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}(\sin t)^2,$$
donc, d'après la croissance de l'intégrale, on a
$$M_{2n} = \int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}(\sin t)^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t.$$
Or $(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$, donc
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} - (\cos t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\
&= W_{2n} - W_{2n+2} \\
&= W_{2n} - \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \qquad \text{d'après 1. b)} \\
&= \frac{1}{2n+2}W_{2n},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{W_{2n}}{2n+2}.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{W_{2n}}{2n+2}.}$$

Comme $W_{2n} > 0$ d'après A. 1.c), cela implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \frac{M_{2n}}{W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2} = 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0.}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2 M_{2n}$ puis que $\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big)$.*

On a

$$W_{2n} = \int_0^{\pi/2} 1 \times (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

On effectue une intégration par parties en choisissant

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = (\cos t)^{2n} \\ u(t) = t & v'(t) = 2n(-\sin t)(\cos t)^{2n-1} \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \big[t(\cos t)^{2n}\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t2n(-\sin t)(\cos t)^{2n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + n\int_0^{\pi/2} 2t \times (\sin t)(\cos t)^{2n-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en choisissant

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 2t & v(t) = (\sin t)(\cos t)^{2n-1} \\ u(t) = t^2 & v'(t) = (\cos t)^{2n} + (\sin t)(2n-1)(-\sin t)(\cos t)^{2n-2} \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} W_{2n} &= n\big[t^2(\sin t)(\cos t)^{2n-1}\big]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2} t^2\big((\cos t)^{2n} - (2n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{2n-2}\big)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - n\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\sin t)^2(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} W_{2n} &= -nM_{2n} + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\big(1-(\cos t)^2\big)(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= -nM_{2n} + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t - n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= -nM_{2n} + n(2n-1)M_{2n-2} - n(2n-1)M_{2n}. \end{aligned}$$

Comme $-n-\ n(2n-1) = -2n^2$, on en conclut que

$$\boxed{W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2 M_{2n}.}$$

En divisant cette égalité par $n^2 W_{2n}$, qui est non nulle d'après A. 1. c) , on obtient

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\frac{M_{2n-2}}{W_{2n}} - 2\frac{M_{2n}}{W_{2n}}\cdot$$

Or, d'après A. 1. b), on a

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2},$$

donc

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\frac{M_{2n-2}}{\frac{2n-1}{2n}W_{2n-2}} - 2\frac{M_{2n}}{W_{2n}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big)\cdot}$$

3. *En déduire finalement que* $\lim\limits_{N\to+\infty} \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le résultat de la question précédente nous dit que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} = 2\bigg(\Big(\frac{M_0}{W_0} - \frac{M_2}{W_2}\Big) + \Big(\frac{M_2}{W_2} - \frac{M_4}{W_4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{M_{2N-2}}{W_{2N-2}} - \frac{M_{2N}}{W_{2N}}\Big)\bigg)$$

ce qui donne, après téléscopage,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} = 2\bigg(\frac{M_0}{W_0} - \frac{M_{2N}}{W_{2N}}\bigg)\cdot$$

Or la question B. 1. b) nous dit que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{M_{2N}}{W_{2N}} = 0,$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}\Big) = 2\frac{M_0}{W_0}\cdot$$

Comme

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

et

$$M_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24},$$

on en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

C. *Calcul de l'intégrale de Gauss*

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Démontrer que, pour tout* $u \in [0;\sqrt{n}]$, *on a* $\Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^{-n}\cdot$

Soit $u \in [0;\sqrt{n}]$. On a

$$\Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n = \exp\Big\{n \ln\Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)\Big\} \leqslant \exp\Big\{n \times \Big(-\frac{u^2}{n}\Big)\Big\} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

et

$$\frac{1}{\Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^n} = \exp\Big\{-n \ln\Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)\Big\} \geqslant \exp\Big\{-n \times \frac{u^2}{n}\Big\} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

où les inégalités découlent de $\forall a > -1,\ \ln(1+a) \leqslant a$. Donc

$$\boxed{\forall u \in [0;\sqrt{n}]\,, \qquad \Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{\Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^n}\cdot}$$

2. a) *Effectuer le changement de variable $u=\sqrt{n}\sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1}.*

Dans l'intégrale

$$W_{2n+1}=\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

on effectue le changement de variable

$$u=\sqrt{n}\sin t.$$

▷ Si $t=0$, on a $u=0$.
Si $t=\pi/2$, on a $u=\sqrt{n}$.

▷ L'application $t\longmapsto\sqrt{n}\sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$ et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sqrt{n}\cos t,$$

d'où

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}\cos t}\cdot$$

▷ On a

$$(\cos t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t=(\cos t)^{2n+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}\cos t}=\frac{(\cos^2 t)^n}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u=\frac{(1-\sin^2 t)^n}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1-\frac{u^2}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}u.$$

▷ On en conclut que

$$\boxed{W_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\Big(1-\frac{u^2}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}u.}$$

b) *Effectuer le changement de variable $u=\sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\Big(1+\dfrac{u^2}{n}\Big)^n}\cdot$*

Dans l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\Big(1+\dfrac{u^2}{n}\Big)^n}$$

on effectue le changement de variable

$$u=\sqrt{n}\tan t.$$

▷ Si $u=0$, on a $t=0$.
Si $u=\sqrt{n}$, on a $t=\pi/4$.

▷ L'application $t\longmapsto\sqrt{n}\tan t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$ et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sqrt{n}\big(1+(\tan t)^2\big),$$

d'où

$$\mathrm{d}u=\sqrt{n}\big(1+(\tan t)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

▷ On a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\Big(1+\dfrac{u^2}{n}\Big)^n}=\frac{\sqrt{n}\big(1+(\tan t)^2\big)\,\mathrm{d}t}{\big(1+(\tan t)^2\big)^n}=\sqrt{n}\frac{\mathrm{d}t}{\Big(\dfrac{1}{(\cos t)^2}\Big)^{n-1}}=\sqrt{n}(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

▷ On en conclut que

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\Big(1+\dfrac{u^2}{n}\Big)^n}=\sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t.}$$

3. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$ *puis que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question C. 1. nous dit que

$$\forall u \in \left[0;\sqrt{n}\right], \qquad \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$$

La croissance de l'intégrale implique alors que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$$

Les résultats des questions 2. a) et 2. b) donnent

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} (\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\forall t \in [0;\pi/2]\,,\ (\cos t)^{2n-2} \geqslant 0$, donc

$$\int_0^{\pi/4} (\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t = W_{2n-2},$$

ce qui donne

$$\boxed{\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.}$$

On a

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}}\sqrt{2n-2}W_{2n-2}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2n-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, d'après la question 1. 2. b),

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n-2}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n-2}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Le théorème des gendarmes implique alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot}$$