Problème n° 12 : Intégration

Correction du problème 1 – Théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Riemann

Partie I – Réduction du problème

1. Il suffit de considérer $(f - f_n)$, suite de fonctions intégrables (comme différence de deux fonctions intégrables), qui converge simplement vers 0. On trouve alors l'énoncé général par linéarité de l'intégrale.
   Ainsi, on peut restreindre l'étude au cas de $\boxed{\text{fonctions de limite nulle}}$.
2. Si g est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors $|g|$ aussi, et donc $g^+ = \frac{g+|g|}{2}$ et $g^- = \frac{|g|-g}{2}$ aussi.
   Ainsi, étant donnée une suite (f_n) de fonctions intégrables convergeant simplement vers 0, les deux suites (f_n^+) et (f_n^-) sont aussi constituées de fonctions intégrables. De plus, comme pour tout $x \in [a, b]$, et tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leqslant f_n^+(x) \leqslant |f_n(x)| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant f_n^-(x) \leqslant |f_n(x)|,$$
   les suites (f_n^+) et (f_n^-) convergent simplement vers la fonction nulle de $[a, b]$. En outre, les fonctions f_n^+ et f_n^- sont positives.
   Ainsi, si le théorème de convergence dominé est acquis pour les fonctions intégrables positives de limite nulle, on obtient :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n^+(x)\ \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n^-(x)\ \mathrm{d}x = 0$$
   puis, par linéarité de l'intégrale et de la limite et du fait que $f_n(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$:
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n^+(x)\ \mathrm{d}x - \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n^-(x)\ \mathrm{d}x = 0,$$
   ce qui est bien ce qui nous intéressait
   Ainsi, il suffit de montrer le théorème pour des $\boxed{\text{fonctions positives de limite nulle}}$.
3. La fonction g étant intégrable, elle est majorée. Donc si les hypothèses du théorème de convergence dominé sont vérifiées, il existe M tel que pour tout n, $|f_n| \leqslant M$. Si le théorème de convergence dominé est acquis dans ce cas, on peut conclure.
   On peut donc se contenter d'étudier le cas d'une suite (f_n) de $\boxed{\text{fonctions positives majorées par un certain } M}$.
4. (a) La fonction f_n étant intégrable, il existe une fonction ψ dans $\mathrm{Esc}^-(f)$ (ensemble des fonctions en escalier minorant f) telle que $\displaystyle\int_a^b (f_n(x) - \psi(x)) \leqslant \frac{1}{2n}$.
   Soit $(\sigma) = (\sigma_0 < \cdots < \sigma_k)$ une subdivision associée à ψ et $q = \min\limits_{i\in[\![0,k-1]\!]} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)$ la longueur du plus petit intervalle défini par cette subdivision. On note ψ_i la valeur constante de ψ sur $]\sigma_{i-1}, \sigma_i[$ ($i \in [\![1, k]\!]$). Alors, on peut définir, pour tout $\delta \in [0, \frac{q}{2}[$, une fonction g_δ, affine par morceaux, obtenue :
   - en remplaçant l'expression de ψ_n l'intervalle intervalle $[\sigma_i, \sigma_i + \delta]$ par une fonction affine rejoignant les points (σ_i, ψ_i) et $(\sigma_i + \delta, \psi_{i+1})$, pour tout i tel que $\psi_i < \psi_{i+1}$,
   - en remplaçant l'expression de ψ_n sur tout intervalle $[\sigma_i - \delta, \sigma_i]$ par une fonction affine rejoignant les points $(\sigma_i - \delta, \psi_i)$ et (σ_i, ψ_{i+1}), pour tout i tel que $\psi_i > \psi_{i+1}$.
   - En posant $g_\delta(a) = \psi_1$ et $g_\delta(b) = \psi_k$

   On a alors de façon immédiate la continuité de g_δ sur $[a, b]$, l'inégalité $g_\delta \leqslant \psi \leqslant f_n$, et :
   $$\left| \int_a^b (g_\delta - \psi) \right| \leqslant \int_a^b |g_\delta - \psi| = \frac{\delta}{2} \sum_{i=0}^{k-1} |\psi_{i+1} - \psi_i|.$$

Comme cette expression tend vers 0 lorsque δ tend vers 0, il existe δ_0 tel que $\left|\int_a^b |(g_\delta - \psi)\right| < \frac{1}{2n}$. On pose alors $\boxed{\varphi_n = g_{\delta_0}, \text{ qui est bien continue, vérifie } 0 \leqslant \varphi_n \leqslant f_n}$, et

$$0 \leqslant \int_a^b (f_n - \varphi_n) = \int_a^b (f_n - \psi) + \int_a^b (\psi - \varphi_n) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}, \qquad \text{soit:} \qquad : \boxed{0 \leqslant \int_a^b (f_n - \varphi_n) \leqslant \frac{1}{n}}.$$

(b) Supposons le résultat acquis pour les suites (φ_n) de fonctions continues positives, convergeant simplement vers 0 et majorées par un réel M. Soit alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $[a,b]$, positives, convergeant simplement vers 0, et majorées par M, et (φ_n) une suite de fonctions vérifiant les propriétés de la question précédente. D'après le théorème d'encadrement, (φ_n) converge simplement vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f_n \leqslant M$. Ainsi, on peut appliquer la version continue du théorème, nous affirmant que $\int_a^b \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x \to 0$. Mais la majoration $\int_a^b (f_n - \varphi_n) \leqslant \frac{1}{n}$ amène :

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x \right| \longrightarrow 0 \qquad \text{donc:} \qquad \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

C'est bien ce à quoi il nous faut parvenir.

Ainsi, on peut se limiter au cas de suites de $\boxed{\text{fonctions continues}}$, positives, uniformément majorées, convergeant simplement vers 0

Partie II – Théorème de Dini

1. Pour tout $x \in [a,b]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par croissance et positivité de f_n : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(b)$.
Or, $f_n(b) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f_n(b) < \varepsilon$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(b) < \varepsilon.$$

Cela fournit bien la $\boxed{\text{convergence uniforme de } (f_n) \text{ vers 0 sur } [a,b]}$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant simplement vers la fonction nulle (ainsi, pour tout x de $[a,b]$, la suite $(f_n(x))$ converge en décroissant vers 0). On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$:

$$g_n(x) = \sup_{t\in[a,x]} f_n(t).$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$. On a :

$$\forall t \in [a,x], \ 0 \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t), \qquad \text{donc:} \qquad 0 \leqslant \sup_{t\in[a,x]} f_{n+1}(t) \leqslant \sup_{t\in[a,x]} f_n(t) \qquad \text{soit:} \qquad 0 \leqslant g_{n+1}(t) \leqslant g_n(t).$$

Donc pour tout $x \in [a,b]$, $\boxed{(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante positive.}}$

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(g_n(x)) \text{ converge}}$. Soit $g(x)$ sa limite. La positivité de $g_n(x)$ implique que sa limite vérifie aussi $\boxed{g(x) \geqslant 0}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe $t_n \in [a,x]$ tel $g_n(x) - \frac{1}{n} < f_n(t_n) \leqslant g_n(x)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ le théorème d'encadrement assure l'existence de la limite de $f_n(t_n)$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(t_n) = g(x)}$.

(c) Comme $[a,x]$ est compact, on peut extraire de (t_n) une suite $(t_{\varphi(n)})$ convergeant vers un réel $t \in [a,x]$. On a toujours $f_{\varphi(n)}(t_{\varphi(n)}) \longrightarrow g(x)$, donc, en supposant $g(x) > 0$, il existe N tel que pour tout $m \geqslant N$

$$f_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) \geqslant \frac{g(x)}{2}.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, il existe $N' \geqslant N$ tel que $\varphi(N') \geqslant n$. On a alors, pour tout $m \geqslant N'$, $\varphi(m) \geqslant n$, et donc, par décroissante de la suite (f_n) :

$$\forall m \geqslant N', \quad f_n(t_{\varphi(m)}) \geqslant f_{\varphi(m)}(t_{\varphi(m)}) \geqslant \frac{g(x)}{2}.$$

Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, la fonction f_n étant continue, il vient : $\boxed{f_n(t) \geqslant \dfrac{g(x)}{2}}$.

(d) La définition de g_n amène de façon immédiate la croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de g_n sur $[a,b]$. Ainsi (g_n) est une suite de fonctions croisantes convergeant simplement vers 0. D'après la question 1, cette convergence est donc uniforme.

Par ailleurs, on a bien évidemment $0 \leqslant f_n \leqslant g_n$. Soit alors $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ (cenvergence uniforme de (g_n). On a alors

$$\forall n \geqslant N, \quad \forall x \in [a,b], \quad 0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon,$$

d'où la $\boxed{\text{convergence uniforme de } (f_n) \text{ vers la fonction nulle.}}$

Partie III – Preuve du théorème de convergence dominée

On se donne (f_n) une suite de fonctions continues et positives, majorées par un réel M, convergeant simplement vers la fonction nulle, et on suppose par l'absurde que $\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$ ne converge pas vers 0.

1. Supposons qu'on sache aboutir à une contradiction dès lors qu'on suppose qu'une suite (g_n) de fonctions continues, positives, majorées par un réel M et convergeant simplement vers 0 vérifie en outre la propriété suivante :
$$\exists \alpha > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b g_n(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \alpha.$$
Par hypothèse, $\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc cette suite positive admet une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}_+^*$. Ainsi, il en existe une suite extraite $\left(\int_a^b f_{\varphi(n)}(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément strictement positif $\beta \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < \beta$. Il existe donc N tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$\int_a^b f_{\varphi(n)}(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \alpha.$$
La suite extraite $\left(\int_a^b f_{\varphi(n+N)}(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par α. On peut poser $g_n = f_{\varphi(n+N)}$. Cette suite vérifie les mêmes conditions que (f_n) (continuité, positivité, majoration, convergence simple), et d'après la supposition faite en début de question, on aboutit à une contradiction, nous permettant de conclure.
Ainsi, $\boxed{\text{on peut se contenter de supposer que } \left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right) \text{ est minorée par un certain } \alpha > 0,}$ et montrer que dans ce cas, on parvient à une contradiction.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La suite de fonctions $(\sup(f_n, \dots, f_{n+p}))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M, donc par croissance de l'intégrale, la suite $\left(\int_a^b \sup(f_n, \dots, f_{n+p})\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, et majorée par $\int_a^b M\ \mathrm{d}x = M(b-a)$. Le théorème de la limite monotone donne donc :
$\boxed{\text{l'existence d'une limite finie } \lambda_n \text{ de la suite } \left(\int_a^b \sup(f_n(x), \dots, f_{n+p}(x))\ \mathrm{d}x\right)_{p\in\mathbb{N}}.}$

On peut donc trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier $p(n)$ tel que la fonction $g_n = \sup(f_n, \dots, f_{n+p(n)})$ vérifie :

$$\int_a^b g_n(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \lambda_n - \frac{\alpha}{2^{n+2}}.$$

3. Par définition même, la suite (h_n) est décroissante et positive. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant h_n(x) \leqslant g_n(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, (h_n) converge simplement vers la fonction nulle de $[a,b]$.

On déduit alors du théorème de Dini que (h_n) converge uniformément vers 0, et le résultat admis en début d'énoncé nous permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b 0\ \mathrm{d}x = 0}.$$

4. On a : $g_n = \sup(f_n,\dots,f_{n+p(n)})$, et comme $[\![n, n+p(n)]\!] \subset [\![i, n+i+p(n)+p(i)]\!]$, on a alors :

$$g_n \leqslant \sup(f_i,\dots,f_{n+i+p(n)+p(i)}), \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{g_n - g_i \leqslant \sup(f_i, f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)}) - g_i.}$$

Comme $[\![i, = p(i)]\!] \subset [\![i, n+i+p(n)+p(i)]\!]$, on obtient

$$\sup(f_i, f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)}) - g_i \geqslant 0.$$

La fonction $x \mapsto x^+$ étant croissante, il vient alors :

$$(g_n - g_i)^+ \leqslant \big(\sup(f_i, f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)}) - g_i\big)^+ = \sup(f_i, f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)}) - g_i.$$

Or, la croissance de la suite $\left(\int_a^b \sup(f_i,\dots,f_{i+p})\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et sa convergence vers λ_n amènent :

$$\int_a^b \big(\sup(f_i, f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)}) - g_i\big)\ \mathrm{d}x \leqslant \lambda_n - \int_a^b g_i(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \lambda_n - \left(\lambda_n - \frac{\alpha}{2^{i+2}}\right) \leqslant \frac{\alpha}{2^{i+2}},$$

et donc finalement, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\int_a^b (g_n - g_i)^+ \leqslant \frac{\alpha}{2^{i+2}}}$$

5. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: pour tous réels $a_0,\dots,a_n,x$, on a :

$$\inf(a_0,\dots,a_{n-1},x) \geqslant x - \sum_{i=0}^{n-1}(x-a_i)^+.$$

.

Lorsque $n=1$, on a

$$x - \inf(a_0,x) = x + \sup(-a_0,-x) = \sup(x-a_0,0) = (x-a_0)^+.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifié (on a même l'égalité dans ce cas).
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai, et soit $(a_0,\dots,a_n$ et x des réels. On a

$$\inf(a_0,\dots,a_{n-1},a_n,x) = \inf(\inf(a_0,\dots,a_{n-1},x),a_n) \geqslant \inf(a_0,\dots,a_{n-1},x) - (\inf(a_0,\dots,a_{n-1},x) - a_n)^+,$$

d'après $\mathcal{P}(1)$ vérifié ci-dessus. Par croissance de $y\mapsto y^+$, on a

$$(\inf(a_n,\dots,a_{n-1},x) - a_n)^+ \leqslant (x-a_n)^+,$$

d'où, en utilisant sur l'autre terme l'hypothèse de récurrence :

$$\inf(a_0,\dots,a_{n-1},a_n,x) \geqslant x - \sum_{i=0}^{n-1}(x-a_i)^+ - (x-a_n)^+ = x - \sum_{i=0}^{n}(x-a_i)^+.$$

Ainsi, on a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
En particulier,

$$h_n \geqslant g_n - \sum_{i=0}^{n-1}(g_n-g_i)^+,$$

et par croissance de l'intégrale, la définition de g_n et la question 4 donnent :

$$\int_a^b h_n \geqslant \left(\lambda_n - \frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{2^{i+2}}.$$

L'hypothèse faite sur la minoration des intégrales de f_n amène alors facilement $\lambda_n \geqslant \alpha$, d'où

$$\int_a^b h_n \geqslant \alpha \left(1 - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}\right) > \alpha \left(1 - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\right),$$

d'où enfin : $\boxed{\int_a^b h_n > \frac{\alpha}{2}}$.

Ceci contredit la question 3, ce qui permet d'achever la démonstration par l'absurde.

On en déduit que $\boxed{\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x \longrightarrow 0.}$

D'après la réduction faite dans la partie 1, ceci implique bien le théorème de convergence dominée dans sa version la plus générale donnée en début d'énoncé.