Devoir Confiné (4h30)

Correction du problème 1 – Sous-espaces stables par un endomorphisme

Partie I – Quelques résultats préliminaires sur les sous-espaces stables

1. **Intersection et somme de sous-espaces stables.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) $\boxed{E}$ est trivialement stable par u. On peut aussi considérer le sous-espace trivial $\{0\}$.
   (b) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces stables par u.
   - Soit $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $x \in F_i$, donc par stabilité de F_i par u, $u(x) \in F_i$. Ainsi, ceci étant valable pour tout $i \in I$, $u(x) \in \bigcap_{i\in I} F_i$. On en déduit que $\boxed{\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est stable par } u.}$
   - Soit $x \in \sum_{i\in I} F_i$. Il existe donc des $x_i \in I$ (presque tous nuls si I est infini) tels que $x = \sum_{i\in I} x_i$. Par linéarité, on a alors
   $$u(x) = \sum_{i\in I} u(x_i).$$
   Or, les $u(x_i)$ étant dans F_i (et presque tous nuls si I est infini), on en déduit que $u(x) \in \sum_{i\in I} F_i$, donc que $\boxed{\sum_{i\in I} F_i \text{ est stable par } u.}$
2. **Endomorphismes laissant stable un sous-espace donné.** Soit F un sous-espace de E.
   (a) Soit F stable par u et v.
   - Soit $x \in F$. On a $u(x) \in F$ et $v(x) \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, il est stable par combinaison linéaire, donc $\lambda u(x) + v(x) \in F$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est stable par } \lambda u + v.}$
   - Soit $x \in F$. Puisque F est stable par v, $v(x) \in F$, et puisque F est stable par u, $u(v(x)) \in F$, donc $u \circ v(x) \in F$. Ainsi, F est stable par $\boxed{u \circ v}$.
   (b) Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$. Le sous-ensemble A de $\mathcal{L}(E)$ contient le neutre id_E, est stable par combinaison linéaire et par produit d'après la question précédente. Il s'agit donc d'une $\boxed{\text{sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$
   (c) Une algèbre A sur un corps K étant stable par produit et par combinaison linéaire, pour tout $x \in A$, et tout polynôme P à coefficients dans K, $P(x)$ est un élément de A. Ainsi, avec les notations de la question précédente, si $u \in A$, pour tout $P \in K[X]$, $P(u) \in A$. En d'autres termes, si F est stable par u, alors $\boxed{F \text{ est stable par tout élément } P(u)}$ de $K[u]$ ($P \in K[X]$).
3. **Sous-espaces stables définis par des noyaux et images de polynômes en u.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a)
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a $u(x) = 0$, donc $u(u(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \text{ est stable par } u}$.
   - Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. On a évidemment $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ par définition de $\mathrm{Im}(u)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } u}$.

   (b) Soit $P \in K[X]$.
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$. On a donc $P(u)(x) = 0$, donc $u \circ P(u)(x) = 0$, et d'après la règle rappelée dans l'énoncé sur la commutation des polynômes d'endomorphisme, $P(u) \circ u(x) = 0$, c'est-à-dire $P(u)(u(x)) = 0$. Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Ker}(P(u))$. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) \text{ est stable par } u.}$
   - Soit $x \in \mathrm{Im}(P(u))$. On fait de même : il existe y tel que $x = P(u)(y)$. On a alors
   $$u(x) = u \circ P(u)(y) = P(u) \circ u(y) = P(u)(u(y)).$$
   Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Im}(P(u))$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(P(u)) \text{ est stable par } u.}$

4. **Polynôme minimal ponctuel.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.

(a) La famille $(u^k(x))_{k\in[0,n]}$ est liée, car de cardinal $n+1$ alors que E est de dimension n. Ainsi, il existe une relation non triviale entre ces vecteurs, donc il existe des scalaires non tous nuls tels que

$$\boxed{0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k(x) = P(u)(x)},$$

avec $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \neq 0$.

(b) Soit I_x l'ensemble des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$.

- On a évidemment $O \in I_x$
- Si P et Q sont dans I_x, $(P-Q)(u)(x) = P(u)(x) - Q(u)(x) = 0$, donc $P - Q \in I_x$;
- Ainsi, I_x est un sous-groupe additif de $K[X]$.
- Soit $P \in I_x$ et $Q \in K[X]$. On a alors

$$(PQ)(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)(0) = 0.$$

  Ainsi, $PQ \in I_x$.
- On en déduit que $\boxed{I_x \text{ est un idéal de } K[X]}$.

(c) L'idéal I_x n'est par réduit à $\{0\}$ d'après 4(a). Puisque K est un corps, $K[X]$ est principal, donc l'idéal I_x est engendré par un polynôme $\boxed{\pi_{u,x} \text{ qu'on peut choisir unitaire}}$. Ce polynôme divisant tout autre polynôme de I_x, il est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de I_x.

5. **Sous-espaces cycliques.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par u et tels que $X \subset F$. L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas vide, puisqu'il contient trivialement E. On considère alors

$$\boxed{F_0 = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F}.$$

D'après 1(b), F_0 est stable par u. Il contient X car c'est le cas de chaque terme de l'intersection. Il est minimal pour cette propriété car par définition de l'intersection, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $F_0 \subset F$.

(b)
- Puisque $< x >_u$ est stable par u, il est stable par u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (question 2c), donc, puisque x en est un élément, $u^k(x) \in < x >_u$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. S'agissant d'un espace vectoriel, on en conclut que $\mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) \subset < x >_u$.
- Réciproquement, $F = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$ est stable par u. En effet, soit $y = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u^k(x)$ un élément de F (les λ_k étant presque tous nuls). On a alors

$$u(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u^{k+1}(x) \in F.$$

  De plus, F contient x (prendre $k = 1$). Ainsi, par minimalité de $< x >_u$ pour ces propriétés, on a $< x >_u \subset \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
- Ainsi, $\boxed{< x >_u = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})}$
- La famille $(u^k(x))_{k\in[0,d-1]}$ est libre, sinon on pourrait trouver une relation non triviale entre ces vecteurs, contredisant la minimalité du degré de $\pi_{u,x}$.
- Soit $y \in \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$. Il s'écrit donc sous la forme $y = P(u)(x)$, pour un certain polynôme P de $K[X]$. Soit $P = \pi_{u,x}Q + R$ la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$. On a alors $\deg(R) < \deg(\pi_{u,x})$. De plus

$$y = P(u)(x) = Q \circ \pi_{u,x}(u)(x) + R(u)(x) = R(u)(x).$$

  Or, R étant de degré strictement plus petit que d, $R(u)(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $u^k(x)$, pour $k \in [0, d-1]$. Ainsi, $(u^k(x))_{kj\in[0,d-1]}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$, donc de $< x >_u$.
- Par conséquent, $\boxed{\mathcal{B}_x = (u^k(x))_{k\in[0,d-1]} \text{ est une base de } < x >_u.}$

(c) Soit $b_k = u^k(x)$, $k \in [0, d-1]$. Pour tout $k \in [0, d-2]$, on a $u(b_k) = b_{k+1}$, et de plus, en notant

$$\pi_{u,x} = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k,$$

on a, puisque $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$:

$$u(b_{d-1}) = u^d(x) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k b_k.$$

On obtient donc la matrice d'ordre d suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u_x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}}$$

Soit u_x l'endomorphisme de $< x >_u$ induit par u sur le sous-espace stable $< x >_u$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ en fonction des coefficients du polynôme $\pi_{u,x}$.

Partie II – Sous-espaces stables par un projecteur ou une symétrie

Soit p un projecteur de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(p)$ et G un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(p)$. Puisque p est un projecteur et que $F \subset \mathrm{Im}(p)$, pour tout $x \in F$, $p(x) = x \in F$. Donc F est stable par p. Par ailleurs, pour tout $x \in G$, $u(x) = 0 \in G$, donc G est stable par u. On en déduit que $\boxed{F + G \text{ est stable par } u}$ (question I-1(b))
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par p.
   - Puisque p est un projecteur, $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$. Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$, et donc

     $$(H \cap \mathrm{Im}(p)) \cap (H \cap \mathrm{Ker}(p)) = \{0\}.$$

     On en déduit que la somme $(H \cap \mathrm{Im}(p)) + (H \cap \mathrm{Ker}(p))$ est directe.
   - On a évidemment $(H \cap \mathrm{Im}(p)) + (H \cap \mathrm{Ker}(p)) \subset H$, les deux memebres de la somme vérifiant cette inclusion.
   - Soit $h \in H$. Comme $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$, on peut décomposer $h = x + y$, avec $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. On a alors $p(x) = x$ et $p(y) = 0$, donc $p(h) = x$. Comme $h \in H$ et H stable par p, on en déduit que $x \in H$. Puis $y = h - x \in H$. Ainsi, $x \in \mathrm{Im}(p) \cap H$ et $y \in \mathrm{Ker}(p) \cap H$. On a bien obtenu

     $$h \in (H \cap \mathrm{Im}(p)) + (H \cap \mathrm{Ker}(p)),$$

     de quoi on déduit l'inclusion $H \subset (H \cap \mathrm{Im}(p)) + (H \cap \mathrm{Ker}(p))$.
   - Les deux inclusions amènent : $\boxed{H = (H \cap \mathrm{Im}(p)) \oplus (H \cap \mathrm{Ker}(p)).}$
3. La question 1 montre que la somme d'un sous-espace de $\mathrm{Im}(p)$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(p)$ est stable par p. La question 2 montre que tout sous-espace stable est de cette forme.
   Ainsi, les sous-espaces stables sont exactement les sous-espaces s'écrivant sous la forme $\boxed{H = F + G}$, où F est un sev de $\mathrm{Im}(p)$ et G un sev de $\mathrm{Ker}(p)$.

Partie III – Diagonalisation

1. **Valeurs propres et espaces propres**
   (a) Le scalaire λ est valeur propre si et seulement s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$, donc $(u - \lambda\mathrm{id})(x) = 0$, donc si et seulement si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$ n'est pas réduit à 0. Cela équivaut à la non-injectivité de l'endomorphisme $u - \lambda\mathrm{id}$, donc à sa non bijectivité, puisque la dimension est finie.
   Ainsi, $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } u - \lambda\mathrm{id} \text{ est pas un automophisme}}$.
   D'après ce qu'on vient de voir, les vecteurs propres associés à λ sont alors les vecteurs non nuls tels que $(u - \lambda\mathrm{id})(x) = 0$, c'est-à-dire tels que $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})}$.

(b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_k}(u)$. Pour tout $i \in [1, k]$, et tout $x \in F_i$, on a $x \in E_{\lambda_i}(u)$, donc $u(x) = \lambda_i x \in F_i$, puisque F_i est stable par multiplication par un scalaire. Ainsi, pour tout $i \in [1, k]$, F_i est stable par u. D'après la question I-1(b), $\boxed{F_1 + \cdots + F_k \text{ est stable par } u.}$

2. **Valeurs propres et polynôme annulateur**

(a) Soit P un polynôme, et x un vecteur propre de u, associé à une valeur propre λ. On a $u(x) = \lambda x$, puis $u^2(x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, et par une récurrence immédiate, $u^k(x) = \lambda^k x$.
Notant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a alors

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k x. = \boxed{P(\lambda)x}.$$

(b) Soit P un polynôme annulateur de u et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et x un vecteur propre associé à λ. On a alors

$$0 = P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

Par définition d'un vecteur propre, $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$, donc $\lambda \in \mathrm{rac}(P)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{rac}(P).}$

(c) L'argument est à peu près le même que pour le polynôme minimal ponctuel, à part qu'on raisonne sur u au lieu de $u(x)$.

- I_u est non vide puisqu'il contient O le polynôme nul.
- Soit P et Q dans I_u. On a alors $P(u) = 0$ et $Q(u) = 0$, donc $(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0$. Donc $P - Q \in I_u$. On peut déjà conclure que I_u est un sous-groupe additif de $K[X]$.
- Soit P dans I_u et Q dans $K[X]$. On a alors

$$(PQ)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ O_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

Ainsi, $PQ \in K[X]$. On en déduit que $\boxed{I_u \text{ est un idéal de } K[X].}$

- L'espace E étant de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, donc la famille $(u^0, u^1, \dots, u^{n^2})$ est liée, puisqu'on son cardinal est supérieur à la dimension de l'espace $\mathcal{L}(E)$ dans lequel sont les u^i. Une relation non triviale entre les objets de cette famille fournit un polynôme annulateur non nul de u. Ainsi, I_u n'est par réduit à $\{0\}$.
- Puisque $K[X]$ est principal, on en déduit que I_u est engendré par un polynôme π_u (qu'on peut choisir unitaire), de degré minimal parmi les polynômes non nul. On a alors $I_u = (\pi_u)$, donc par définition, tout P de I_u vérifie $\boxed{\pi_u \mid P.}$

(d) Soit λ une racine de π_u. On écrit $\pi_u = (X - \lambda)Q$, avec $Q \in K[X]$. On a alors

$$0 = \pi_u(u) = (u - \lambda \mathrm{id}) \circ Q(u).$$

Si λ n'est pas une valeur propre de u, d'après 1(a), $u - \lambda\mathrm{id}$ est un automorphisme, donc inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, donc régulier. On en déduit que $Q(u) = 0$. Or, π_u étant non nul, $Q \neq 0$, et $\deg Q < \deg \pi_u$, donc π_u ne divise par Q, alors que Q est un polynôme annulateur de u. $\boxed{\text{Cela contredit la définition de } \pi_u}$.

(e) D'après la question précédente, toute racine de π_u est valeur propre de u, donc $\mathrm{rac}(\pi_u) \subset \mathrm{Sp}(u)$. Comme π_u annule u, l'inclusion réciproque est assurée par la question 2(b). Ainsi, $\boxed{\mathrm{rac}(\pi_u) = \mathrm{Sp}(u).}$

(f) Le polynôme π_u étant non nul, il admet un nombre fini de racines, donc d'après la question précédente, $\boxed{\text{l'ensemble } \mathrm{Sp}(u) \text{ est fini.}}$

3. **Lemme de décomposition des noyaux.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit P et Q deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes U et V tels que

$$UP + BV = 1.$$

On a alors, en spécialisant à u :

$$U(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}.$$

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$. On a alors, en appliquant l'identité précédente à x :

$$x = U(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = U(u)(0) + B(u)(0) = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, donc la somme est directe.
- On a trivialement $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}(Q(u) \circ P(u)) = \mathrm{Ker}((PQ)(u))$, et de même pour $\mathrm{Ker}(Q(u))$. Par stabilité par somme, il vient alors

$$\mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u)).$$

- Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(x))$. On applique l'identité obtenue ci-dessus à l'aide d'une relation de Bezout :

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x).$$

Or,

$$Q(u)(U(u) \circ P(u)(x)) = Q(u) \circ U(u) \circ P(u)(x) = U(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = U(u) \circ (PQ)(u)(x) = U(u)(0) = 0,$$

puisque $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(x))$. Ainsi, $U(u) \circ P(u)(x) \in \mathrm{Ker}(Q(u)$. On montre de même que $V(u) \circ Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(P(u))$. Ainsi, on a bien décomposé x comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(P(u))$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(Q(u))$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}((PQ)(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)).$$

- Les deux inclusions amènent $\boxed{\mathrm{Ker}((PQ)(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)).}$

(b) On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\mathrm{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(u)).$$

Le résultat est trivial pour $k = 1$. Il a été démontré dans la question précédente pour $k = 2$. Soit $k \geqslant 2$ tel que le résultat soit vrai pour k polynômes premiers entre eux 2 à 2, et considérons $P_1, \dots, P_{k+1}$ premiers entre eux deux à deux. On a alors $P_1 \cdots P_k$ et P_{k+1} qui sont premiers entre eux (les facteurs irréductibles de P_{k+1} n'étant facteur irréductible d'aucun autre P_i, donc par non plus du produit d'après le lemme d'Euclide). On utilise la question précédente, qui donne :

$$\mathrm{Ker}((P_1 \cdots P_{k+1})(u)) = \mathrm{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_{k+1}(u)).$$

L'hypothèse de récurrence amène alors :

$$\boxed{\mathrm{Ker}((P_1 \cdots P_{k+1})(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_{k+1}(u))}.$$

Le principe de récurrence permet donc de conclure que la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. **Diagonalisabilité.**

(a) Considérons le polynôme $P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$. Les λ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme de décomposition des noyaux, il vient alors :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}) = \bigoplus E_{\lambda_i}(u).}$$

La propriété de somme directe fait partie du résultat fourni par le lemme de décomposition des noyaux.

(b)
- Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Notons m_i son i-ième coefficient diagonal. On a donc, par définition de la matrice d'un endomorphisme, $u(b_i) = m_i b_i$ pour tout $i \in [1, n]$, donc, b_i étant non nul, m_i est une valeur propre, et b_i est dans un espace propre, donc dans la somme des espaces propres. On a donc obtenu :

$$\forall i \in [1, n], \quad b_i \in \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Par stabilité par combinaison linéaire (ou par définition par minimalité de Vect), on a donc :

$$E = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_n) \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

L'incusion réciproque étant évidente, on a $\boxed{E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).}$

- Réciproquement, si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, on obtient une base de E en juxtaposant des bases des $E_\lambda(u)$. Une telle base est constituée de vecteurs b_i appartenant chacun à l'un des espaces propres. Ainsi, pour tout $i \in [1, n]$, il existe $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(u)$ tel que $u(b_i) = \lambda_i$ Par définition de la matrice associée à u, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est donc diagonale, ses coefficients diagonaux étant les λ_i. L'endomorphisme $\boxed{u \text{ est donc diagonalisable.}}$

(c) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de u.

- Si u est diagonalisable, on a donc, en combinant 4a et 4b,

$$E = \mathrm{Ker}(\prod_{i=1}^{k}(u - \lambda_i \mathrm{id})).$$

Ainsi, en posant $P = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$, $\mathrm{Ker}(P(u)) = E$, donc $P(u) = 0$, donc P est un polynôme annulateur de u. Ainsi, π_u divise P. Comme ce dernier est scindé à racines simples, $\boxed{\pi_u \text{ est aussi scindé à racines simples.}}$

- Réciproquement, supposons que π_u est scindé à racines simples. On a alors d'après 2(e) et le caractère unitaire de π_u,

$$\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_k).$$

La question 4a amène alors

$$\mathrm{Ker}(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_k}(u).$$

Or, π_u étant un polynôme annulateur de u, $\mathrm{Ker}(\pi_u(u)) = E$, donc on est ramené à la question 4(b), nous permettant de conclure que $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$.

Partie IV – Description des sous-espaces stables

1. Les $P_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux amène donc :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)).}$$

2. (a) Pour tout $P \in K[X]$, $P(u)$ laisse F stable (question I-2(c)) et coïncide clairement avec $P(v)$. Ainsi, $P(v)$ est l'endomorphisme induit par $P(u)$ sur F. En particulier, son noyau est obtenu en prenant l'intersection avec F du noyau de $P(u)$, d'après le cours. Ainsi, pour tout $i \in [1, k]$,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(v)) = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F.}$$

(b) Par ailleurs, $pi_u(u) = 0$, et comme dit dans la question précédente, $\pi_u(v)$ est l'endomorphisme induit sur F par π_u. On a donc aussi $\pi_u(v) = O_{\mathcal{L}(F)}$. Ainsi, en appliquen le lemme des noyaux à $\pi_u(v)$, on obtient cette fois :

$$F = \mathrm{Ker}(\pi_u(v)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(v)),$$

et en vertu de la question précédente,

$$\boxed{F = \bigoplus_{i=1}^{k}(\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F)}.$$

3. - D'après I-1(b), si F est somme de sous-espaces des $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i} u))$ chacun stable par u, alors $\boxed{F \text{ est stable par } u}$.
   - Réciproquement, si F est stable par u, la question précédente montre que $\boxed{F \text{ est somme de sous-espaces } F_i}$ des $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, chaque F_i étant défini par :

$$F_i = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F.$$

   De plus, F_i est intersection de sous-espaces stables par u (d'après I-3(b) pour le noyau), donc $\boxed{F_i \text{ est stable par } u}$ (d'après I-1(b)).

4. Comme on l'a déjà montré dans III-1(b) tout sous-espace F_i d'un espace propre de u est stable par u (car $x \in F_i$ vérifie $u(x) = \lambda x$). Ainsi, d'après la question précédente, les sous-espaces stables par u sont précisément les sous espaces obtenus comme $\boxed{\text{sommes de sev de chacun des espaces propres de } u.}$
   Cela complète la question III-1(b) en établissant la réciproque.

5. Pour un projecteur, un polynôme annulateur est donné par $X^2 - X$. D'après 2(b), les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1 (éventuellement l'un seul des deux si $p = 0$ ou $p = \mathrm{id}$). D'après le cours, $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$. Cette décomposition correspond donc à celle de la question III-4(b). On en déduit que p est diagonalisable, et d'après ce qui précède, les sous-espaces stables sont bien obtenus comme $\boxed{\text{somme d'un sous-espace de } \mathrm{Ker}(p) \text{ et d'un sous-espace de } \mathrm{Im}(p).}$ C'est bien le résultat obtenu dans la partie II.

6. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes, n étant la dimension de E.
   (a) Par définition, si λ est une valeur propre, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$, donc sa dimension est au moins 1. De plus, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u, d'après III-3b, on a une somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u) \subset E.$$

   En passant aux dimensions,

$$\dim(E) \geqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \geqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

   Ceci implique que $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)\right) = n$, donc que l'inclusion $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u) \subset E$ est une égalité donc d'après III-4(b), $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$
   Par ailleurs, l'enchaînement des inégalités ci-dessus n'est possible que si toutes les inégalités considérées sont des égalités, ce qui nécessite, pour tout $i \in [1, n]$, l'égalité $\boxed{\dim(E_{\lambda_i}(u)) = 1.}$ Ainsi, les sous-espaces propres sont tous des droites.

   (b) Les sous-espaces stables sont alors sommes de sous-espaces vectoriels des $E_{\lambda_i}(u)$. Or, chaque $E_{\lambda_i}(u)$ étant une droite, il n'a que deux sous-espaces possibles, $\{0\}$ et lui-même. On obtient donc une description simple des sous-espaces stables :

$$\boxed{F_I = \bigoplus_{i \in I} E_{\lambda_i}(u)} \; I \in \mathcal{P}([1, n]).$$

   Chaque choix de I fournit un sous-espace différent. En effet, si $I \neq I'$, il existe j tel que $j \in I$ et $j \in I'$ (ou l'inverse, qui se traite de même). Soit $x \in E_{\lambda_{j(u)}}$ non nul. On a alors $x \in F_I$, mais $x \notin F_{I'}$, car sinon, cela contredirait l'unicité de la décomposition de x dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$, une première décomposition étant donnée par son appartenant à $F_{I'}$ ayant une composante nulle sur $E_{\lambda_j}(u)$, puisque $j \notin I'$, et une seconde étant donnée par lui-même sur $E_{\lambda_j}(u)$, et des 0 partout ailleurs.
   Ainsi, il y a autant de sous-espaces stables que de sous-ensembles I de $[1, n]$, à savoir $\boxed{2^n}$.

Partie V – Endomorphismes semi-simples

1. Soit $y \in E$. On a par définition $\pi_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc en particulier $\pi_u(y) = 0$. L'ensemble des polynômes vérifiant cela étant par définition l'idéal engendré par $\pi_{u,y}$ (voir question I-4c), on en déduit que $\boxed{\pi_{u,y} \text{ divise } \pi_u.}$

2. On suppose dans cette question que π_u est irréductible. On souhaite montrer que u est semi-simple.
   (a) Soit y non nul dans E. Dans ce cas, $\pi_{u,y}$ n'est par constant. Comme il divise π_u qui est irréductible, on a nécessairement $\boxed{\pi_{u,y} = \pi_u}$.

   (b) Soit F un sous-espace stable par u tel que $F \neq E$, et soit $x \in E \setminus F$. Comme F et $< x >_u$ sont stables par u, $F \cap < x >_u$ est stable par u. On a alors

   De plus, supposons qu'il existe $y \neq 0$ dans cette intersection. Comme $F \cap < x >_u$ est un sous-espace vectoriel stable par u contenant y, on a, par minimalité de $< y >_u$, une inclusion $< y >_u \subset F \cap < x >_u \subset < x >_u$.

   Par ailleurs x et y étant non nuls, ils ont, d'après 2a, même polynôme minimal ponctuel, égal à π_u. D'après I-5b, on en déduit que $< y >_u$ et $< x >_u$ ont même dimension. On déduit alors que les inclusions précédentes sont des égalités :

   $$< y >_u = F \cap < x >_u = < x >_u \ .$$

   La deuxième égalité contredit le fait que $x \notin F$. Ainsi, il n'existe pas d'élément non nul dans $F \cap < x >_u$, donc $\boxed{F \cap < x >_u = \{0\}}$.

   (c) Soit F un sous-espace stable par u, et G un sous-espace stable par u de dimension maximale tel que $F \oplus G$ soit directe. Un tel sous-espace existe, car l'ensemble des sous-espaces stables en somme directe avec F est non vide (il constient $\{0\}$) et la dimension de ces espaces est bornée par la dimension de E.

   Par I-1b, $F \oplus G$ est alors stable par u. Supposons que $F \oplus G \neq E$. Alors la question précédente donne l'existence de x tel que la somme $F \oplus G \oplus < x >_u$ soit directe. L'espace $G \oplus < x >_u$ est alors stable par u (toujours d'après I-1b), et de dimension strictement supérieur à G (car on a une inclusion stricte, obtenue en considérant x). De plus, sa somme avec F est directe. Cela contredit la maximalité du degré de G.

   Ainsi, G est un supplémentaire de F, stable par u.

   Pour tout sous-espace F stable par u, on a trouvé un supplémentaire de F stable par u, donc $\boxed{u \text{ est semi-simple.}}$

3. On suppose dans cette question que $\pi_u = P_1 \cdots P_k$, les P_i étant irréductibles unitaires distincts.
   (a) Quitte à renuméroter les P_i, on peut se contenter de montrer que $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \neq \{0\}$.

   Si $\mathrm{Ker}(P_1(u)) = \{0\}$, $P_1(u)$ est un automorphisme, donc régulier dans $\mathcal{L}(E)$. L'égalité $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u) = 0$ se simplifie donc en $P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité du polynôme annulateur π_u. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(P_1(u)) \neq \{0\}}$.

   D'après la partie I, $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ est stable par u. On peut donc considérer l'induit φ_i de u sur cet espace. On a alors, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(P_i(u))$

   $$P_i(v)(x) = P_i(u)(x) = 0.$$

   Donc P_i est un polynôme annulateur de v. Le polynôme minimal π_v de v divise donc P_i qui est irréductible, donc $\pi_v = 1$ ou $\pi_v = P_i$. Le premier cas n'est pas possible (cela signifierait $\mathrm{id} = 0$, ce qui contredit que $\mathrm{Ker}(P_i(u)) \neq \{0\}$). Ainsi, $\pi_v = P_i$.

   Donc v_i a un polynôme minimal irréductible, donc d'après la question 2, $\boxed{v_i \text{ est semi-simple.}}$

   (b) Soit F un sous-espace stable par u. On a alors, d'après IV-2b,

   $$F = \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u) \cap F)$$

   Pour tout $i \in [1, k]$, $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u) \cap F$ est stable par v_i, qui est semi-simple. Cet espace admet donc un supplémentaire G_i dans $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)$, stable par v_i, donc aussi stable par u. On a alors

   $$\begin{aligned} E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) &= \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u) \cap F) \oplus G_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u) \cap F) \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} G_i = F \oplus G, \end{aligned}$$

où on a posé $G = \bigoplus_{i=1}^{k} G_i$, stable par u d'après I-1b et la stabilité de chaque G_i.

Ainsi, on a bien trouvé un supplémentaire de F stable par u, donc $\boxed{u \text{ est semi-simple.}}$

4. On suppose inversement qu'il existe un irréductible unitaire P de $K[X]$ tel que P^2 divise π_u. On note $\pi_u = PQ$, avec $Q \in K[X]$. Soit $F = \mathrm{Ker}(P(u))$. Le sous-espace F est stable par u d'après I-3. Supposons qu'il existe un supplémentaire S de F stable par u.

   (a) Soit $x \in S$. On a alors
   $$0 = \pi_u(u)(x) = P(u) \circ Q(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)).$$
   Ainsi, $\boxed{Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(P(u)) = F}$. Or, S étant stable par u, il est stable par $Q(u)$ aussi (I-2). Comme $x \in S$, il vient donc $Q(u)(x) \in S$. On a donc $Q(u)(x) \in S \cap F = \{0\}$, ces deux espaces étant supplémentaires. Ainsi, $\boxed{Q(u)(x) = 0}$.

   (b) Pour tout $x \in F$, $P(u)(x) = 0$, donc aussi $Q(u)(x) = 0$, puisque P est aussi encore facteur de Q par hypothèse. Pour tout $x \in S$, on a aussi $Q(u)(x) = 0$. Ainsi, par linéarité, pour tout $x \in E = F \oplus S$, on a $Q(u)(x) = 0$, donc Q est un polynôme annulateur de u. Cela contredit la minimalité de P.

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u mais n'admet pas de supplémentaire stable par u. On en déduit que $\boxed{u \text{ n'est pas semi-simple.}}$

On a donc montré que u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimale n'a pas de facteur irréductible multiple.

Partie VI – $K[u]$**-modules et sous-espaces stables**

1. L'application $\varphi_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme d'anneau : on a en effet $\varphi_u(1) = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}$, $\varphi_u(P+Q) = (P+Q)(u) = P(u) + Q(u) = \varphi_u(P) + \varphi_u(Q)$ et $\varphi_u(PQ) = (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = phi_u(P) \circ \varphi_u(Q)$.

   Ainsi, l'image de φ_u est un anneau. Or par définition, $\mathrm{Im}(\varphi_u) = K[u]$. Ainsi, $\boxed{K[u] \text{ est un anneau.}}$

   Par ailleurs, par définition, $\mathrm{Ker}(\varphi_u)$ est l'idéal des polynômes annulateurs de u, engendré par π_u. En quotientant par le noyau et en corestreingant à l'image, on obtient donc un isomorphisme d'anneaux $\boxed{K[X]/(\pi_u) \simeq K[u].}$

2. On a déjà la structure de groupe abélien provenant de la structure d'espace vectoriel sur K. Il reste à vérifier les propriétés relatives au produit externe :
   - $(P(u) \circ Q(u)) \cdot x = P(u) \circ Q(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u) \cdot Q(u)(x) = P(u) \cdot (Q(u) \cdot x)$.
   - $\mathrm{id} \cdot x = \mathrm{id}(x) = x$
   - $P(u) \cdot (x+y) = P(u)(x+y) = P(u)(x) + P(u)(y) + P(u)cdotx + P(u) \cdot y$
   - $(P(u) + Q(u)) \cdot x = (P+Q)(u)(x) = P(u)(x) + Q(u)(x) = P(u) \cdot x + Q(u) \cdot x$.

   Ainsi, toutes les propriétés requises sont satisfaites : $\boxed{E \text{ est un } K[u]\text{-module.}}$

3. Soit M un sous-$K[u]$-module de E. Alors M est par définition non vide, stable par somme, et stable par multiplication externe définie comme ci-dessus par un élément de $K[u]$. Les deux autres propriétés étant satisfaites, il suffit de vérifier que M est stable par multiplication par un scalaire λ de K.

   Considérons l'élément $\lambda\mathrm{id} \in K[u]$. Pour tout $x \in M$, on a alors $(\lambda\mathrm{id}) \cdot x \in M$, c'est-à-dire $\lambda x \in M$.

   Ainsi, M est non vide, stable par somme et par multiplication par un scalaire λ de K. Donc $\boxed{M \text{ est un sous-}K\text{-ev de } E.}$

   la réciproque n'est pas vraie en général. Supposons que tout sous-K espace vectoriel de u soit un sous-$K[u]$-module. En particulier, pour tout $x \in E$, la droite Kx est stable par $K[u]$. En prenant $u \in K[u]$, on obtient la stabilité de Kx par u. Ainsi, toute droite est stable par u. En d'autres termes, pour tout $x \in E$, x et $u(x)$ sont liés. Cela ne vous rappelle par quelque chose ?

   On en déduit que $\boxed{u \text{ est une homothétie}}$. Réciproquement, si u est une homothétie, on a un polynôme annulateur de degré 1 (de la forme $\pi_u = X - \lambda$). Ainsi, $K[u] = K/(X - \lambda) \simeq K$ (par division euclidienne). Via cet isomorphisme, la loi externe définie sur $K[u]$ coïncide avec celle définie sur K. Ainsi, les notions de $K[u]$-module et de K-ev coïncident dans cette situation.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Si F est stable par u, il est stable par tout élément $P(u)$ de $K[u]$. Ainsi, il est stable par produit externe par un élément $P(u)$ de $K[u]$. Comme par ailleurs, il est aussi stable par somme (en tant que sev) et contient 0, il s'agit bien d'un $\boxed{\text{sous-}K[X]\text{-module de } E.}$
- Récirpoquement si F est un sous-$K[X]$-module de E, il est stable par muliplication externe par tout $P(u)$ de $K[u]$, donc en particulier, il est stable par muliplication externe par u, ce qui équivaut à la $\boxed{\text{stabilité du sev } F}$ par l'endomorphisme u.

5. On suppose que π_u est irréductible.

 (a) L'anneau $K[u]$ est isomorphe à $K[X]/(\pi_u)$. On a déjà montré que cet anneau est un corps lorsque π_u est irréductible. En effet, si a est un élément non nul, représenté par un polynôme Q, ce polynôme est premier avec π_u (car leur pgcd divisant π_u, il est 1, ou π_u, par irréductibilité, ce dernier cas étant impossible, sinon a serait nul). Soit $UQ + V\pi_u = 1$ une relation de Bezout. On passe dans le quotient : $\overline{U}a = 1$. Cela prouve bien l'inversibilité de a.

 Donc $K[X]/(\pi_u)$ est un corps, donc $\boxed{K[u] \text{ est un corps}}$.

 (b) En particulier, puisque $K[u]$ est un corps, les $K[u]$-modules sont en fait des $K[u]$-ev. Soit alors F stable par u. F est donc un sous-$K[u]$-ev de E. Puisqu'on travaille ici avec des espaces vectoriels et non seulement des modules, F admet donc un supplémentaire G en tant que $K[u]$-ev (on est en dimension finie, et même sinon, on pourrait le faire avec l'axiome du choix). Ainsi, ce supplémentaire est un K-ev muni d'une structure de $K[u]$-ev donc stable par u et est un supplémentaire de F également au sens des K-ev.

 On a bien montré que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable par u.

 Ainsi, $\boxed{u \text{ est semi-simple.}}$

Partie VII – Endomorphismes cycliques et endomorphismes simples

1. On suppose dans cette question que u est cyclique, et on fixe $x \in E$ tel que $< x >_u = E$. Soit F un sous-espace stable par u.

 (a) C'est toujours pareil, il suffit de montrer que I est un idéal de $K[X]$. La stabilité de F par somme nous donne facilement la structure de groupe abélien. Si $P \in I$ et $Q \in K[X]$, $(QP)(u)(x) = Q(u)(P(u)(x))$. Comme $P(u)(x)$ est dans F qui est stable par u, donc aussi par $Q(u)$, on en déduit que $(QP)(u)(x) \in F$, donc $QP \in I$.

 Ainsi, I est un idéal de $K[X]$, non nul puisqu'il contient tout polynôme annulateur de u (donc en particulier π_u). Il est donc engendré par un polynôme unitaire D : $\boxed{I = (D).}$ De plus, puisque $\pi_u \in I$, on a alors $\boxed{D \mid \pi_u}$.

 (b)
 - Puisque $D(u)(x) \in F$ et F est stable par u, par minimalité de $< D(u)(x) >_u$ pour cette propriété, on a l'inclusion $< D(u)(x) >_u \subset F$.
 - Réciproquement, si $y \in F$, comme $< x >_u = E$, et par description de $< x >_u$ (I-5b), il existe P tel que $y = P(u)(x)$. Comme $y \in F$, par définition de I (question précédente), on a $P \in I$, et cet idéal étant engendré par D, il existe un polynôme Q tel que $P = QD$. On a alors $y = Q(u)(D(u)(x)) \in < D(u)(x) >_u$. Par conséquent, $F \subset < D(u)(x) >_u$.
 - Les deux inclusions donnent l'égalité $\boxed{< D(u)(x) >_u = F}$.

 (c) Puisque x est fixé, un sous-espace stable est entièrement déterminé par la seule donnée d'un diviseur unitaire D de π_u (en disant cela, on n'affirme pas que le choix de deux diviseurs distincts fournit deux sous-espaces stables distincts). Comme π_u admet un nombre fini de diviseurs unitaires (donné par le choix, pour chaque facteur irréductible intervenant dans π_u, de sa multiplicité, devant rester inférieur ou égal à la multiplicité totale dans π_u), on en déduit qu'il existe $\boxed{\text{un nombre fini de sous-espaces stables par } u.}$

2. On suppose que K est infini. Supposons que E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u. En particulier, E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces cycliques de la forme $< x >_u$. On note $F_1, \dots, F_k$ les sous-espaces de ce type. Chaque élément $x \in E$ appartient à l'un des F_i (car $x \in < x >_u$, et par définition $< x >_u$ est l'un des F_i). Ainsi, $E = F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

 On a déjà vu en exercice que si K est infini, E n'est pas l'union de sous-espaces vectoriels stricts. En effet, supposons que les F_i sont des sev stricts. On peut alors considérer $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ tel que $x \notin F_n$ (sinon, on a une inclusion, et l'égalité de l'union à E amène F_n, ce qui contredit notre hypothèse). Quitte à supprimer certains des derniers termes de l'union, on peut supposer que $F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1} \neq E$, et on peut faire le même raisonnement de façon symétrique : il existe $y \in F_n$ tel que $y \notin F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$. Considérons alors les vecteurs $x + ty$, pour $t \in K$. Ces vecteurs sont en nombre infini (car K est infini), et sont chacun dans l'un des F_i, qui sont en nombre fini. Il existe donc au moins deux valeurs distinctes t_1 et t_2 tels que $x + t_1 y$ et $x + t_2 y$ sont dans le même F_i (principe des tiroirs). On a alors, par différence, $(t_2 - t_1)y \in F_i$, donc puisque $t_2 - t_1 \neq 0$, $y \in F_i$. Cela contredit la définition de y, sauf si $i = n$. Mais dans ce cas, puisque $x + t_1 y \in F_n$ et $y \in F_n$, on obtient $x \in F_n$, ce qui contredit cette fois la définition de x.

Ainsi, E ne peut pas être une union finie de sous-espaces stricts. On en déduit que l'un des F_i est égal à E. Or, pour un tel i, par définition des F_i, il existe un vecteur x tel que $< x >_u = F_i = E$. On en déduit que $\boxed{u \text{ est cyclique.}}$

3. Dans cette question, on souhaite montrer que u est simple si et seulement si son polynôme minimal est irréductible de degré égal à $n = \dim(E)$.

   (a) Comme précédemment, π_u étant irréductible, $K[u]$ est un corps, isomorphe à $K[X]/(\pi_u)$. Nous avons déjà eu l'occasion de montrer que les classes de 1, X, $\dots$, X^{d-1} forment alors une base sur K de cet espace. Ainsi, $K[u]$ est un K-ev de dimension d. Soit F un sous-$K[u]$-espace vectoriel de E, de dimension k. Soit $c_1, \dots, c_k$ une base de F en tant que $K[u]$-ev. Soit $(b_1, \dots, b_d)$ une base de $K[u]$ en tant que K-ev. La famille $(b_i c_j)$ est alors une base de F en tant que K-ev. En effet,

   - elle est génératrice : soit $x \in F$, il existe des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $K[u]$ tels que
   $$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j.$$
   Comme les λ_j sont dans $K[u]$ et que $(b_1, \dots, b_d)$ est une base de $K[u]$ sur k, il existe, pour tout $j \in [1, k]$, des scalaires $\mu_{1,j}, \dots, \mu_{d,j}$ tels que
   $$\lambda_j = \sum_{i=1}^{d} \mu_{i,j} b_i.$$
   On a donc : $x = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{d} \mu_{i,j} b_i c_j$;
   - elle est libre : en effet, soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires de K tels que
   $$0 = \sum_{(i,j) \in [1,d] \times [1,k]} \mu_{i,j} b_i c_j. = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{d} \mu_{i,j} b_i \right) c_j.$$
   Les éléments $\sum_{i=1}^{d} \mu_{i,j} b_i$ étant dans $K[u]$, par liberté de la famille (c_j) sur $K[u]$, on obtient, pour tout $j \in [0, k]$, $\sum_{i=1}^{d} \mu_{i,j} b_i = 0$, puis par liberté de (b_i), pour tout $j \in [0, k]$, pour tout $i \in [0, d]$, $\mu_{i,j} = 0$.

   Ainsi, la dimension sur K de F est kd, donc $\boxed{\text{divisible par } d.}$

   (b) Si π_u est irréductible de degré n, tout sous-espace stable F sera donc un sous-$K[u]$-ev de E, donc de K-dimension divisible par $n = \dim E$, ceci n'est possible que si $F = \{0\}$ ou $F = E$. Ainsi, u est simple.

   (c) Réciproquement, si u est simple, il est en particulier semi-simple, donc π_u n'admet pas de facteur multiple dans sa décomposition irréductible. S'il admet plusieurs facteurs irréductibles, la décomposition en noyaux de la question IV-1 fournit une décomposition non triviale de E en somme directe de sous-espaces stables, ce qui conredit la simplicité de u. Ainsi, π_u est irréductible. D'après ce qui précède, son degré d va diviser n (car E est un $K[u]$-module). Si $d \neq n$, E est de $K[u]$-dimension strictement supérieure à 1, donc admet des sous-$K[u]$-ev stricts non triviaux, correspondant à des sous-ev stricts non triviaux de E stables par u. cela contredit la simplicité de u.

   Ainsi, $\boxed{\text{le polynôme minimal de } u \text{ est irréductible de degré } n.}$