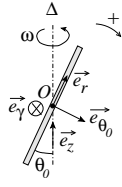


Corr. 1 Moment cinétique d'une barre tournant autour d'un axe

1. On note Σ la barre et on doit mener le calcul du moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R} et l'exprimer dans la base liée à la barre

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_z)$$



Remarque : c'est la base des coordonnées sphériques !
La formule générale du moment cinétique cherché est

$$\vec{L}_O(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{v}(\mathcal{M}/\mathcal{R}) dm$$

On repère les points M de la barre par $\vec{OM} = r \vec{e}_r$. On exprime alors la vitesse des points M, par exemple en profitant de la formule de dérivation en changeant de base (il y a d'autres méthodes) :

$$\vec{v}(\mathcal{M}/\mathcal{R}) = r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = r \left[\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{B}'} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_r}_{\vec{0} \text{ fixe dans } \mathcal{B}'}} \right]$$

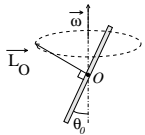
Ainsi, $\vec{v}(\mathcal{M}/\mathcal{R}) = r \omega \sin \theta_0 \vec{e}_\varphi$

$$\text{Alors, } \vec{L}_O(\Sigma/\mathcal{R}) = \int_{-l/2}^{l/2} (r \vec{e}_r) \wedge (r \omega \sin \theta_0 \vec{e}_\varphi) \frac{m dr}{l}$$

$$\text{d'où } \vec{L}_O(\Sigma/\mathcal{R}) = -\frac{m}{l} \omega \sin \theta_0 \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr \vec{e}_{\theta_0}$$

$$\text{soit } \vec{L}_O(\Sigma/\mathcal{R}) = -\frac{ml^2}{12} \omega \sin \theta_0 \vec{e}_{\theta_0}$$

2. Le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont généralement pas colinéaires comme le montre la formule précédente. \vec{L}_O décrit un cône autour de $\vec{\omega}$ qui, dans le cas présent, est de demi-angle au sommet $|\pi/2 - \theta_0|$.



\vec{L}_O n'est colinéaire à $\vec{\omega}$ que lorsque $\theta_0 = 0 [\pi]$ (moment cinétique nul) ou lorsque $\theta_0 = \pi/2 [\pi]$ (moment cinétique maximal en module). Dans ces cas, l'axe de rotation est axe principal d'inertie (logique puisque axe de symétrie).

Attention, les angles $\theta_0 = \pm \pi/2$ donnent, heureusement, le même \vec{L}_O !! Certes, le terme $\sin \theta_0$ change de signe, mais \vec{e}_{θ_0} change aussi de sens... Alors, le vecteur moment cinétique est dans le même sens que $\vec{\omega}$ (le contraire aurait été très gênant).

Corr. 2 Promenades sur support mobile

1. L'ensemble {homme+radeau} est pseudo-isolé. Par conséquent, il y a conservation de la quantité de mouvement de ce système, ce qui donne en intégrant

$$\vec{\Delta r}_r = -\frac{m}{m+M} \vec{\Delta r}_h$$

On note que le déplacement du radeau est indépendant de la vitesse de déplacement de l'homme sur celui-ci.

2. On procède de même que précédemment avec le TMC projeté sur l'axe Δ de rotation du disque pour le système pseudo-isolé {homme+disque} (tout est orienté par rapport à cet axe). Ainsi,

$$L_\Delta = L_\Delta(\mathcal{D}) + L_\Delta(\mathcal{H}) = C^{te} = 0$$

$$\text{où } L_\Delta(\mathcal{D}) = \frac{MR^2}{2} \dot{\phi} \text{ et } L_\Delta(\mathcal{H}) = (\vec{OH} \wedge m \vec{v}_h) \cdot \vec{e}_\Delta$$

soit encore, en notant v'_h la vitesse de l'homme par rapport au plateau,

$$L_\Delta(\mathcal{H}) = m(v'_h + R \dot{\phi})$$

$$\text{Ainsi, } \frac{MR^2}{2} \dot{\phi} = -mR(v'_h + R \dot{\phi})$$

donc

$$\dot{\phi} = -\frac{m}{m+M/2} \frac{v'_h}{R}$$

Pour un demi-tour sur le disque, $\Delta t = \pi R/v'_h$. Par conséquent, le plateau tourne en sens contraire de l'homme :

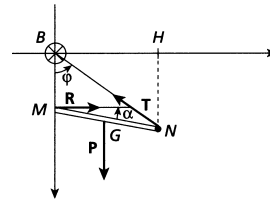
$$\Delta \phi = \dot{\phi} \Delta t = -\frac{\pi}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Corr. 3 Équilibre sans frottement d'une barre

Attention, ce corrigé est loin d'être optimal, il est même bourrin... mais c'est instructif de voir ce qui se passe si on bourrine avant de réfléchir ! Pour une résolution beaucoup plus élégante : cf correction en classe. Elle est basée sur 1) montrer avec le TMC que les trois forces, auxquelles la barre est soumise, sont forcément concourantes puis de **faire un dessin qui respecte ce fait !** (donc pas comme ci-dessous !); 2) d'utiliser des théorèmes élémentaires de géométrie (Thalès, projection, Al Kashi) pour montrer que $x = \frac{a}{2} \cos \varphi$ et $l^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi$, dont la résolution fournit x et φ ; 3) d'achever le travail avec le PFD. Notons finalement qu'il existe encore une troisième méthode pour répondre à la question 1 : 1) on applique Al Kashi pour démontrer que $l^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi$ (ce qui donne $\cos \varphi = f(x)$); 2) on trouve la valeur de $-mgx_G$ en fonction de x et φ , donc de x uniquement, en introduisant les coordonnées des points B, M, N. On trouve que $x_G = \frac{3x^2 + a^2 - l^2}{4x}$ et il ne reste qu'à minimiser l'énergie potentiel pour trouver la valeur de x .

Voilà la version bourrine :

1. Le problème présente les 4 inconnues suivantes : x , φ , \vec{T} (tension du fil colinéaire au fil sans raideur) et \vec{R} (réaction du mur normale car pas de frottements). Il faut donc écrire 4 équations pour les déterminer. On peut alors penser au TRD (2 équations), au TMC (1 équation) et à une relation d'Al Kashi dans le triangle (BMN).



On pose $\vec{T} = T \vec{NB}/NB$ et $\vec{R} = R \vec{BH}/BH$.

Appliquons le TRD sur la barre à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{donc } P - T \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\text{et } R - T \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

Appliquons le TMC à la barre en équilibre, par rapport au point B :

$$\vec{\mathcal{M}}_{B\text{poids}} + \vec{\mathcal{M}}_{B\text{réaction}} + \vec{\mathcal{M}}_{B\text{tension}} = \vec{0}$$

$$\text{soit } \vec{BG} \wedge \vec{P} + \vec{BM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \frac{l}{2} P \sin(\pi/2 - \alpha) - xR = 0$$

et, comme $l \cos \alpha = a \sin \varphi = BH$, on tire

$$xR = \frac{a}{2} P \sin \varphi \quad (3)$$

Enfin, une relation d'Al Kashi dans le triangle (BMN) est

$$l^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi \quad (4)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ! Avec (1) et (2), on tire

$$R = P \tan \varphi \quad \varphi \neq \pi/2$$

et on reporte dans (3), d'où

$$x = \frac{a}{2} \cos \varphi \quad (5)$$

et la relation (4) permet de conclure avec

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - l^2}{3}} = 0,65 \text{ m}$$

L'équation (5) permet alors d'obtenir l'angle d'équilibre

$$\varphi = 30,6^\circ$$

2. On a vu que $R = P \tan \varphi$ et $T = P/\cos \varphi$, donc

$$R = 59,2 \text{ N} \quad \text{et} \quad T = 116,2 \text{ N}$$

Corr. 4 Équilibre d'un câble pesant non tendu

1. Soit \vec{T}_x la tension qu'exerce en M d'abscisse x le câble de droite sur celui de gauche. La souplesse assure \vec{T}_x tangente au câble en tout point. On a donc

$$\vec{T}_x = T_x \cos \varphi_x \vec{e}_x + T_x \sin \varphi_x \vec{e}_y$$



On applique le TRD au tronçon $[MM']$, entre x et $x+dx$, à l'équilibre dans le référentiel galiléen d'étude :

$$\vec{0} = \mu \vec{g} ds - \vec{T}_x + \vec{T}_{x+dx}$$

La projection sur l'horizontale donne

$$-T_x \cos \varphi_x + T_{x+dx} \cos \varphi_{x+dx} = 0$$

soit

$$T_x \cos \varphi_x = C^{te} = T_0 \quad (*)$$

2. La projection du TRD précédent sur la verticale conduit à

$$-T_x \sin \varphi_x + T_{x+dx} \sin \varphi_{x+dx} - \mu g ds = 0$$

soit

$$d[T_x \sin \varphi_x] = \mu g ds$$

Or, avec (*) et en posant

$$x_0 = \frac{T_0}{\mu g}$$

on tire

$$d[\tan \varphi_x] = \frac{ds}{x_0}$$

$$\text{Mais, } \tan \varphi_x = \frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(Remarque que la dimension de x_0 correspond à une longueur...).

On résout l'équation différentielle précédente en posant la variable u telle que

$$\frac{dy}{dx} = \text{sh } u$$

$$\text{donc, avec } \frac{d^2y}{dx^2} = \text{ch } u \frac{du}{dx}$$

l'équation différentielle devient (carrément plus simple !)

$$du = dx/x_0$$

L'intégration, compte tenu de $x=0$ et $dy/dx=0$ en O fournit

$$u = x/x_0$$

On se retrouve avec

$$\frac{dy}{dx} = \text{sh } u = \text{sh } \frac{x}{x_0}$$

intégrable en

$$y(x) = x_0 \left[\text{ch} \left(\frac{x}{x_0} \right) - 1 \right]$$

car en O, on a $x=0$ et $y=0$. On a obtenu l'équation d'une chaînette.

3. En A et B, $x = \pm a/2$ et $y = b$ donc

$$b = x_0 \left[\text{ch} \left(\frac{a}{2x_0} \right) - 1 \right]$$

De plus, la longueur L du câble est, en utilisant la deuxième question,

$$L = \int_A^B ds = \int_{-a/2}^{a/2} dx \text{ch } u = \int_{-a/2}^{a/2} dx \text{ch} \left(\frac{x}{x_0} \right)$$

soit

$$L = 2x_0 \text{sh} \left(\frac{a}{2x_0} \right)$$

On a $\Delta L \ll L$, i.e. le câble est bien tendu, donc $a \simeq L$. Or $L = a \frac{\text{sh } X}{X}$ où $X = \frac{a}{2x_0}$. Un tracé de la fonction $X \mapsto \frac{\text{sh } X}{X}$ convainc facilement que X doit être petit, i.e. que $a \ll 2x_0$. On peut par conséquent développer les expressions de b et L précédentes...

$$b \simeq \frac{a^2}{8x_0}$$

Remarque : on voit que $b \ll a$ et $b \ll L$, c'est logique (le câble est bien tendu !)

et
$$L \simeq 2x_0 \left[\frac{a}{2x_0} + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2x_0} \right)^3 \right]$$

Par conséquent,
$$\Delta L \simeq \frac{a^3}{24x_0^2}$$

Remarque : on a bien $\Delta L \ll a$ et $\Delta L \ll L$: ouf !
Enfin, on arrive à exprimer b en fonction de ΔL sous la forme

$$b \simeq \frac{1}{4} \sqrt{6a\Delta L}$$

4. L'application numérique donne

$$\Delta L = 0,24 \text{ m}$$

(ce qui est effectivement faible devant a et L ...). La tension est

$$T_0 = \mu g x_0 = \mu g \frac{a^2}{8b} \simeq \mu g L \frac{a}{8b}$$

et le poids du câble est

$$P = \mu g L$$

On en déduit le rapport

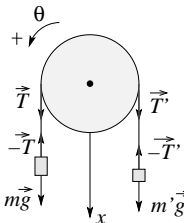
$$\frac{T_0}{P} = \frac{a}{8b} \simeq 4$$

On constate que la tension du câble est environ 4 fois son poids ! Si l'on divise b par 10, la tension devient de l'ordre de 40 fois le poids ! **On ne peut donc pas réduire la flèche des câbles autant que l'on veut sous peine de les rompre par une tension trop élevée due à leur propre poids !** Ceci impose une limite à la longueur des ponts suspendus...

Corr. 5 Machine d'ATWOOD

1. Soit O le centre de la poulie et on note (Oz) son axe de rotation. On oriente l'angle de rotation θ de la poulie en accord avec cet axe. La position de la masse m (resp. m') est indiquée par l'abscisse x (resp. x') sur un axe vertical descendant.

On note $\vec{T} = T' \vec{e}_x$ la tension du fil à droite sur la poulie et $\vec{T} = T \vec{e}_x$ celle à gauche. Attention, les réactions d'axe de la poulie sont inconnues alors on ne doit pas utiliser de théorème les faisant apparaître !



Le mouvement de rotation de la poulie fait penser à l'utilisation du TMC par rapport à Oz pour la poulie (la poulie tournant sans frottement, il n'y a pas de moment d'axe) :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz,ext}$$

soit

$$J \dot{\theta} = R(T - T')$$

Ensuite, les mouvements rectilignes des masses nous poussent à utiliser le TRD sur la verticale sur chacune d'elles séparément, d'où

$$m \ddot{x} = mg - T$$

et

$$m' \ddot{x}' = m'g - T'$$

Le fil étant inextensible, $\ddot{x} = -\ddot{x}'$. De plus, la vitesse en périphérie de la poulie correspond à la vitesse linéaire du fil au point de décollement du fil de la poulie (non glissement), d'où $\dot{x} = R \dot{\theta}$. L'élimination des inconnues conduit finalement à

$$\ddot{x} = \frac{m - m'}{J + m + m'} g$$

Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré. On vérifie que le résultat est cohérent : si $m > m'$, la masse m descend bien... Ouf !

2. L'énergie cinétique de l'ensemble du dispositif (fil, masses, poulie), et l'énergie potentielle sont

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m' \dot{x}'^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

et

$$\mathcal{E}_p = m' g x' - m g x + C^{te'}$$

Le système complet étant conservatif, on écrit par théorème de l'énergie mécanique et en utilisant la condition de non glissement et l'inextensibilité du fil ($\dot{x} = R \dot{\theta} = -R \dot{x}'$)

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{te}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \left[m' + m + \frac{J}{R^2} \right] \dot{x}^2 - (m - m') g x = C^{te}$$

On dérive cette équation par rapport au temps et on simplifie par la solution impossible $\dot{x} = 0$ (sauf si $m = m'$; cf TRC), d'où le même résultat qu'à la première question

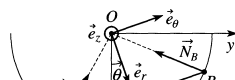
$$\ddot{x} = \frac{m - m'}{J + m + m'} g$$

Corr. 6 Oscillations d'une tige sur un demi-cercle

La tige forme un système conservatif (pas de frottements), en rotation autour de l'axe (Oz) , i.e. à un seul degré de liberté. On peut trouver l'équation du mouvement de la tige (dans le référentiel du labo supposé galiléen) en utilisant le théorème du moment cinétique appliqué sur l'axe (Oz) ou une méthode énergétique.

On commence par noter que $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0$ (\vec{AB} et \vec{OC} orthogonaux) et que $OC = \sqrt{R^2 - l^2} = R/2$ par théorème de PYTHAGORE. Ainsi

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad J_{Oz} = J + m OC^2 = \frac{1}{2} m R^2$$



Seul le poids a un moment non nul sur l'axe (Oz) , donc le théorème du moment cinétique fournit, en utilisant la technique du bras de levier

$$J_{Oz} \ddot{\theta} = -mg OC \sin \theta,$$

ce qui après simplification fournit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Aux petits angles on trouve que $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$. Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Le TPC aboutit au même résultat. En effet, $E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$ et $E_p = -mg OC \cos \theta$ (les forces autres que le poids ne travaillent pas). Ainsi l'énergie mécanique est constante et s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 - mg OC \cos \theta = C^{te},$$

de sorte qu'en la dérivant par rapport au temps et en simplifiant le résultat par $\dot{\theta}$, on trouve $J_{Oz} \ddot{\theta} + mg OC \sin \theta = 0$, comme précédemment.

Corr. 7 Point d'application des forces d'inertie : un exemple

On découpe la tige en éléments de longueur ds . Dans le référentiel tournant, la tige est fixe et il n'y a donc aucune action de Coriolis. Par contre, chaque élément en M (de projeté orthogonal H sur l'axe Oz) subit la force élémentaire d'inertie d'entraînement

$$d\vec{f}_{ie} = -\vec{a}_c^* dm = -(-\omega^2 \overrightarrow{HM}) \frac{m}{l} ds = \frac{m}{l} \omega^2 s \sin \alpha \vec{e}_\rho ds$$

en coordonnées cylindriques. Alors, on tire

$$\vec{F}_{ie} = \int_{tige} d\vec{f}_{ie} = \frac{1}{2} m l \omega^2 \sin \alpha \vec{e}_\rho$$

$$\text{et } \vec{\mathcal{M}}(O) = \int_{tige} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}_{ie} = -\frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_\theta$$

Le point d'application de la force équivalente est le point P tel que

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{ie}$$

En posant

$$\overrightarrow{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

on a

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{ie} = z \frac{1}{2} m l \omega^2 \sin \alpha \vec{e}_\theta$$

donc

$$z = -\frac{2}{3} l \cos \alpha$$

et

$$\rho = |z| \tan \alpha = \frac{2}{3} l \sin \alpha$$

On en conclut que les forces réparties d'inertie d'entraînement se réduisent à un glisseur en P tel que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} l$$

Attention, P n'est pas confondu avec G car les éléments de force d'inertie ne sont pas uniformes sur la tige !

Corr. 8 Tige en référentiel non galiléen

1. On se place dans le référentiel tournant \mathcal{R}' lié à (yOz) . Dans ce référentiel, la barre est soumise à son poids, aux actions de liaison en O , ainsi qu'aux forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Nous allons donner deux méthodes. La première est basée sur le TMC sur l'axe (Ox) et fait appel aux résultats démontrés dans l'exercice précédent. La barre est soumise à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction du support en O (de moment nul). Le TMC s'écrit, en adaptant les notations ($\alpha \rightarrow \theta$, $l \rightarrow 2l$) et en utilisant la technique du bras de levier pour calculer la contribution du poids

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

Il ne reste qu'à multiplier cette équation par $\dot{\theta}$ et à l'intégrer pour obtenir

$$\frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 = mgl \cos \theta + \frac{2}{3} m l^2 \omega^2 \sin^2 \theta + C^{te}$$

d'où le résultat final tant attendu :

$$\frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \underbrace{\left[\cos \theta + \frac{1}{2} \eta \sin^2 \theta \right]}_{\mathcal{E}_p(\theta)} = \mathcal{E}_0 = C^{te}$$

Ceci peut aussi être trouvé en appliquant le TPC à la tige dans le référentiel tournant (en mettant toutes les puissances) :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \mathcal{P}_{\text{poids}} + \mathcal{P}_{\text{liaison}} + \mathcal{P}_{\text{ic}} + \mathcal{P}_{\text{ic}}$$

Or, la liaison est parfaite donc

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = 0$$

De plus, les forces réparties d'inertie de Coriolis sont orthogonales à la vitesse en tout point donc

$$\mathcal{P}_{\text{ic}} = 0$$

En ce qui concerne le poids, on a

$$\mathcal{P}_{\text{poids}} = m \vec{g} \cdot \vec{v}'(G) = -mgl \dot{\theta} \cos \theta$$

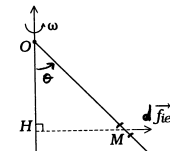
soit

$$\mathcal{P}_{\text{poids}} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,\text{poids}}}{dt}$$

où

$$\mathcal{E}_{p,\text{poids}} = -mgl \cos \theta + C^{te}$$

Enfin, il reste, pour l'action d'inertie d'entraînement, à intégrer les puissances des forces réparties.



$$\mathcal{P}_{\text{ic}} = \int_{tige} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \cdot d\vec{f}_{ie} = \int_{tige} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \cdot (dm \omega^2 \overrightarrow{HM})$$

Or,

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}$$

et

$$\overrightarrow{HM} \cdot \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = 0$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{ic}} = \int_{tige} dm \omega^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} H M^2 \right)$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_{ic} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,ic}}{dt}$$

avec

$$\mathcal{E}_{p,ic} = -\frac{1}{2} \omega^2 \int_{t_{ige}} dm HM^2$$

soit

$$\mathcal{E}_{p,ic} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \theta \underbrace{\int_{t_{ige}} dm OM^2}_{\text{Moment d'inertie } I}$$

donc

$$\mathcal{E}_{p,ic} = -\frac{2}{3} ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

En conclusion, dans le référentiel tournant, le TPC intégré donne

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,poids} + \mathcal{E}_{p,ic} = C^{te}$$

où

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

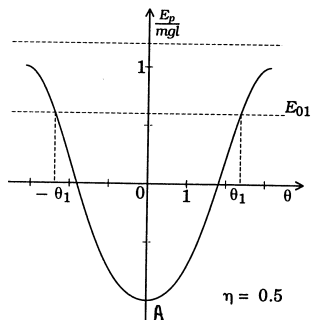
d'où le résultat final, identique à celui trouvé avec la première méthode : ouf !

2. On étudie le mouvement par le tracé de $\mathcal{E}_p(\theta)$. Pour cela, on calcule

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mgl \sin \theta [1 - \eta \cos \theta]$$

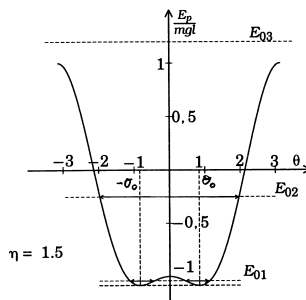
On constate alors que plusieurs cas sont envisageables :

- Cas $\eta < 1$ La dérivée de $\mathcal{E}_p(\theta)$ ne s'annule qu'en $\theta = 0 [\pi]$. On a nécessairement $\mathcal{E}_0 > -mgl$ (énergie cinétique positive !) et si $\mathcal{E}_0 < mgl$, le mouvement est périodique entre $-\theta_1$ et $+\theta_1$ tel que $\mathcal{E}_p(\theta_1) = \mathcal{E}_0$. Si $\mathcal{E}_0 > mgl$, le mouvement est révolutif avec $\mathcal{E}_{c,max}$ en $\theta = 0 [2\pi]$ et $\mathcal{E}_{c,min}$ pour $\theta = \pi [2\pi]$ (portrait de phase à la fin).

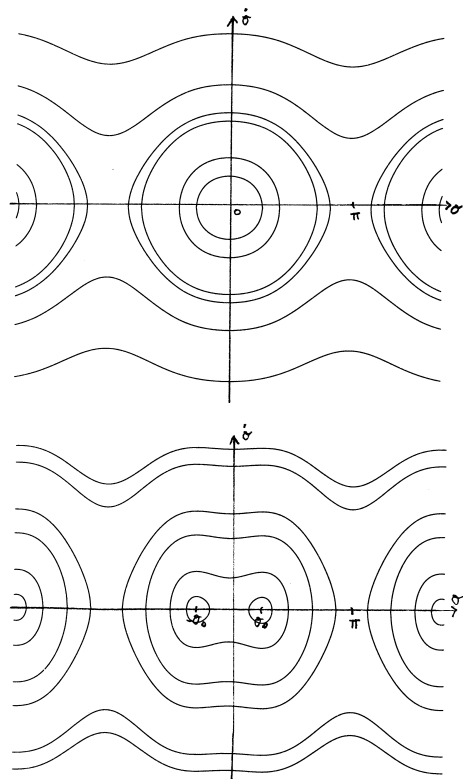


- Cas $\eta = 1$ On a pour $\theta = 0$ les trois premières dérivées de $\mathcal{E}_p(\theta)$ nulles. On trouve des résultats analogues au cas précédent (mais avec une courbe plus plate en A).

- Cas $\eta > 1$ On a deux annulations de plus de la dérivée de l'énergie potentielle en $\theta = \pm \theta_0$ avec θ_0 tel que $\cos \theta_0 = 1/\eta$. On a nécessairement $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_p(\theta_0) = \mathcal{E}_{p,min}$. Si $\mathcal{E}_0 < -mgl$, il y a oscillation de la barre autour de θ_0 ou de $-\theta_0$. Si $|\mathcal{E}_0| < mgl$, le mouvement est périodique entre $-\theta_1$ et θ_1 . Si $\mathcal{E}_0 > mgl$, le mouvement est révolutif d'énergie cinétique maximale maintenant en $\pm \theta_0 [2\pi]$.



L'ensemble des portraits de phase $(\theta, \dot{\theta})$ est donné ci-après :



Dans chaque cas, on a une visualisation des « cuvettes » d'énergie potentielle de dessus...

Remarque: Le diagramme des positions d'équilibre relatif stables (minima d'énergie potentielle) en fonction de η que je vous laisse représenter est appelé **diagramme de bifurcation**. Ici, on a une bifurcation fourche surcritique (forme de fourche).

Corr.9 Choc d'une particule sur une tige en rotation autour d'un axe

On oriente le dessin de l'énoncé dans le sens trigonométrique.

1. On applique, pendant la durée du choc (particule P collée en A sur la tige), le TMC à l'ensemble tige-particule, en O,

projeté sur l'axe de rotation (Oy), le référentiel étant celui du laboratoire, galiléen :

$$\frac{dL_{Oy}}{dt} = \left(\vec{OG} \wedge M \vec{g} + \vec{OA} \wedge m \vec{g} \right) \cdot \vec{e}_y$$

Attention, on a, comme il se doit, tenu compte que des actions extérieures ! Par ailleurs,

$$L_{Oy} = J \dot{\theta} + \vec{e}_y \cdot \left(\vec{OA} \wedge m \vec{v}(A) \right)$$

On suppose que la durée τ du choc est suffisamment brève pour supposer que la tige avec P collée en A reste quasiment verticale pendant le choc. En intégrant le TMC pendant la durée τ , on constate que

$$L_{Oy}(\tau) - L_{Oy}(0^-) = - \underbrace{\int_0^\tau \left(\frac{M}{2} + m \right) ag \sin \theta dt}_{\text{faible et borné}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0$$

Par conséquent, **pendant le choc, le moment cinétique de l'ensemble L_{Oy} se conserve**. On en déduit

$$(J + ma^2) \omega_0 = m a v_0$$

soit

$$\omega_0 = \frac{m v_0}{\left(\frac{M}{3} + m \right) a}$$

2. On exprime la variation d'énergie cinétique du système tige-particule au cours du choc :

$$\mathcal{E}_c(\tau) - \mathcal{E}_c(0) = \frac{1}{2} (J + ma^2) \omega_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

soit

$$\mathcal{E}_c(\tau) - \mathcal{E}_c(0) = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M+3m} v_0^2 < 0$$

Il y a une diminution d'énergie cinétique au cours du choc. Pourtant, il n'y a pas de frottements au niveau de l'axe (pivot parfait), pas de déplacement donc pas de travail du poids pendant le choc... L'énergie cinétique diminue à cause du travail des **actions intérieures liées à l'écrasement de la particule sur la tige**.

3. À l'instant τ , l'ensemble tige-particule possède la vitesse angulaire ω_0 et se met en rotation autour de (Oy). On applique toujours le TMC comme précédemment, après le choc :

$$(J + ma^2) \ddot{\theta} = - \left(\frac{M}{2} + m \right) ag \sin \theta$$

On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre de τ à $t > \tau$, d'où

$$\frac{1}{2} (J + ma^2) (\dot{\theta}^2 - \omega_0^2) = ag \left(\frac{M}{2} + m \right) (\cos \theta - 1)$$

Cette équation s'obtient aussi par le TEM... On en déduit

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - 2\Omega^2 (1 - \cos \theta) \quad (*)$$

avec

$$\Omega = \sqrt{\frac{3g}{2a} \frac{M+2m}{M+3m}}$$

Si $\omega_0^2 > 4\Omega^2$, $\dot{\theta}^2$ est toujours positif pour tout angle θ donc **le mouvement est révolutif**.

Si $\omega_0^2 < 4\Omega^2$, le second membre de (*) n'est positif que si $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ avec θ_0 donné par

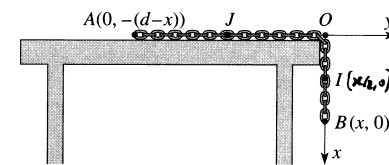
$$\omega_0^2 = 2\Omega^2 (1 - \cos \theta_0)$$

La tige oscille alors autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ (à la pulsation Ω aux petites amplitudes θ_0).

Corr. 10 Mouvement d'une chaîne sur une table

1. On se place dans le référentiel galiléen \mathcal{R} du laboratoire. Il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique de la chaîne est forcément constante. Chaque point de la chaîne a la même vitesse (inextensibilité) donc son énergie cinétique vaut

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$



Seul le poids de la partie OB de la chaîne travaille et il est appliqué en son milieu I donc l'énergie potentielle associée est

$$\mathcal{E}_p = - \left(\frac{m}{d} x g \right) \frac{x}{2} + C^{te}$$

Puisque

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{te'}$$

on tire

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \frac{g}{d} x^2 = C^{te'}$$

On dérive cette relation en éjectant le cas $\dot{x} = 0$ impossible, d'où

$$\ddot{x} = \frac{g}{d} x$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur instable en $x = 0$, ce qui est logique ! La chaîne glisse en accélérant sa chute à cause du poids de sa partie pendante de plus en plus important.

2. Avec les conditions initiales, on trouve

$$x(t) = b \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{g}{d}} t \right)$$

3. On utilise le TRD sur la chaîne dans le référentiel galiléen \mathcal{R} du laboratoire :

$$m \vec{a}(G) = m \vec{g} + \vec{R}$$

On introduit J, milieu de [AO], où A a pour coordonnées $(0, -d+x)$. Alors,

$$m \vec{OG} = \frac{m}{d} \left(x \vec{OI} + (d-x) \vec{OJ} \right)$$

soit

$$m \vec{OG} = \frac{m}{2d} \left(x^2 \vec{e}_x - (d-x)^2 \vec{e}_y \right)$$

On dérive deux fois pour en déduire l'accélération de G et le TRD donne par conséquent les projections

$$\frac{m}{d} (x^2 + x \ddot{x}) = R_x + mg$$

et

$$\frac{m}{d} (-x^2 + (d-x) \ddot{x}) = R_y$$

En remplaçant $x(t)$ de la question précédente, on obtient après calcul

$$R_x = mg \left[\frac{b^2}{d^2} \left(2 \operatorname{ch}^2 \left[\sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - 1 \right) - 1 \right]$$

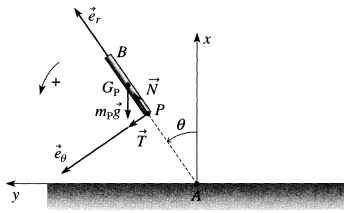
$$\text{et } R_y = mg \left[\frac{b}{d} \operatorname{ch} \left[\sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - \frac{b^2}{d^2} \left(2 \operatorname{ch}^2 \left[\sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - 1 \right) \right]$$

Il ne faut pas s'étonner que $R_y \neq 0$ même s'il n'y a pas de frottements ! C'est dû à l'effet du bord O de la table qui exerce une action non verticale, ce qui explique que le centre de masse de la chaîne ait une composante de déplacement sur (Oy) !

Corr. 11 Rupture d'une tige qui tombe sur le sol

1. On commence par chercher \vec{T} . Le plus simple est d'appliquer le TRC à la portion de tige PB, projeté sur \vec{e}_θ (le TRC appliqué à la portion de tige PA fait intervenir la réaction du sol, qu'il faudrait calculer... c'est plus compliqué !) PB est de longueur $b-a$, de masse $m_P = \frac{b-a}{b}m$, de centre d'inertie G_P se déplaçant sur un cercle de centre A et de rayon

$$AG_P = AP + PG_P = a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$



Ainsi
$$m_P \frac{d^2 AG_P}{dt^2} = m_P \vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

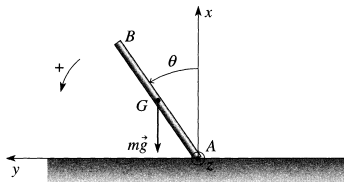
En posant $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ et $\vec{N} = N\vec{e}_\theta^\perp$, les projection sur \vec{e}_θ donne

$$m_P \frac{b+a}{2} \ddot{\theta} = T + m_P g \sin \theta \quad (1)$$

Il faut maintenant réussir à exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de θ . Pour cela, on applique le théorème du moment cinétique à la tige complète, en A point fixe du référentiel terrestre supposé galiléen, en projection sur (Az) (seules les actions extérieures comptent !) :

$$I_{Az} \ddot{\theta} = m \frac{b}{2} g \sin \theta$$

Ainsi
$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2b} \sin \theta \quad (2)$$



L'élimination de $\ddot{\theta}$ entre (1) et (2) fournit alors

$$T = \frac{(3a-b)(b-a)}{4b^2} m g \sin \theta$$

Cherchons maintenant le moment $\mathcal{M}_P = \mathcal{M}_P \vec{e}_z^\perp$. Pour cela, avec les outils au programme, la seule alternative est d'appliquer le TMC sur l'axe (Az) à la portion de tige AP, de longueur a , donc de masse ma/b et de moment d'inertie $I_{Az} = \frac{1}{3} \frac{ma}{b} a^2$. Cette portion de tige est soumise à son poids,

à la réaction du sol de moment nul en A, à la force $-\vec{T} - \vec{N}$

et au moment $-\vec{\mathcal{M}}_P$, les signes - venant du principe d'action-réaction ! La force $-\vec{N}$ a un moment nul en A, et les moments du poids et de $-\vec{T}$ s'expriment facilement et conduisent à

$$I_{Az} \ddot{\theta} = -\mathcal{M}_P - aT + \frac{ma}{b} g \frac{a}{2} \sin \theta$$

soit

$$\mathcal{M}_P = -I_{Az} \ddot{\theta} - aT + \frac{mga^2}{2b} \sin \theta$$

L'utilisation des équations (1) et (2) et la factorisation par $\frac{mga \sin \theta}{2b}$ aboutit alors à

$$\mathcal{M}_P = \frac{mga \sin \theta}{2b} \left[-\frac{a^2}{b} - \frac{(3a-b)(b-a)}{2b} + a \right]$$

Un calcul passionnant montre que le terme entre crochets vaut $\frac{(b-a)^2}{2b}$, ce qui fournit finalement

$$\mathcal{M}_P = \frac{a(b-a)^2}{4b^2} m g \sin \theta$$

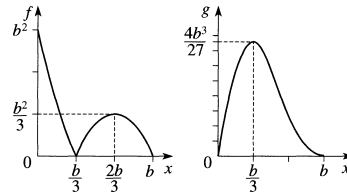
2. On a T_0 qui évolue comme la fonction

$$f(x) = |(3x-b)(b-x)|$$

et \mathcal{M}_{P0} varie comme la fonction

$$g(x) = x(b-x)^2$$

pour $x=a$. Les tracés sont les suivants :



3. On peut donc s'attendre à ce que soit la cheminée casse près de la base, là où T_0 est la plus grande, soit qu'elle casse aux alentours du tiers de la hauteur, là où \mathcal{M}_{P0} est la plus grande. Bien sûr, ce n'est qu'un modèle simpliste et les choses sont plus compliquées en réalité, mais ça donne une idée...

Corr. 12 Pendule avec frottements

Le problème est à un seul degré de liberté cinématique mais on doit écrire deux relations scalaires indépendantes de mécanique pour s'en sortir car on a aussi besoin d'exprimer la réaction tangentielle pour remonter au coefficient de frottement.

On applique le théorème de l'énergie cinétique au point M entre M_1 et M_2 , dans le référentiel galiléen \mathcal{R} du laboratoire :

$$0 = W_{\text{poids}} + W_{\text{réaction}}$$

Or, le travail du poids correspond à l'opposé de la variation d'énergie potentielle de pesanteur, soit

$$W_{\text{poids}} = m g \ell (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \theta_0$$

On vérifie que ce travail est positif pour $\alpha < \beta$. Il reste à exprimer le travail de la réaction et on a besoin pour cela de calculer la réaction tangentielle. Celle-ci est reliée à la réaction normale par la loi de Coulomb du glissement $|R_T| = f |R_N|$. L'application de la relation fondamentale de la dynamique au point M dans \mathcal{R} conduit, en projection sur la normale montante au plan incliné, à

$$0 = R_N - m g \cos \theta_0$$

donc
$$\vec{R}_T = -f m g \cos \theta_0 \vec{e}_T$$

où \vec{e}_T est le vecteur tangent à la trajectoire et orienté dans son sens de parcours (la réaction tangentielle est opposée à ce vecteur, bien sûr). Par conséquent,

$$W_{\text{réaction}} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \int_{-\alpha}^{\beta} -f m g \cos \theta_0 \ell d\theta$$

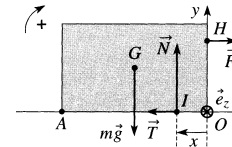
soit
$$W_{\text{réaction}} = -f m g \ell (\alpha + \beta) \cos \theta_0$$

et on vérifie que ce travail est négatif. Finalement, le théorème de l'énergie cinétique déjà écrit donne

$$f = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\alpha + \beta} \tan \theta_0 > 0$$

Corr. 13 Équilibre d'un solide sur le sol

1. On note (\mathcal{S}) le solide (système considéré). On cherche à déterminer la réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ du support et le point I où elle s'applique.



Le solide est immobile : il ne glisse pas, ni ne bascule. À l'équilibre, le TRC impose donc que les composantes de la résultante vérifient

$$N = m g > 0 \quad \text{et} \quad T = F > 0$$

les signes étant cohérents. Le solide ne glisse pas si $T \leq fN$, soit si $F \leq f m g$. On en déduit la résultante :

$$\vec{R} = m g \vec{e}_y + F \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad F \leq f m g$$

On détermine I via le TMC appliqué à (\mathcal{S}) par rapport au point I fixe. À l'équilibre, la somme des moments en I est nulle, soit

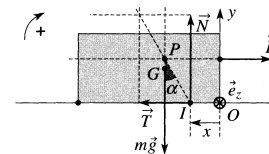
$$\vec{IG} \wedge m \vec{g} + \vec{IH} \wedge \vec{F} + \vec{II} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Les deux derniers termes sont nuls et on en tire :

$$x_I = a - \frac{hF}{mg}$$

Le point I est au centre de la surface de contact si $F = 0$ et se rapproche de O si F augmente, ce qui paraît intuitif...

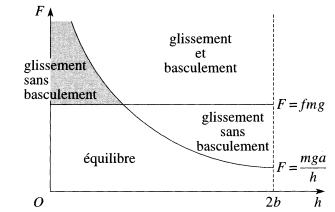
Remarque : on notera que le support de \vec{R} coupe en un même point les supports de \vec{F} et de $m \vec{g}$, et que $\tan \alpha = T/N = F/(mg)$ (figure suivante).



C'est normal pour un solide en équilibre sous l'action de trois forces : celles-ci sont forcément concourantes. Ceci pouvait servir à trouver x_I par un pur argument de géométrie...

2. On doit avoir $F \leq f m g$ pour le non-glissement. Pour le non-basculement, $x_I \in [0; a]$, ce qui impose $F \leq \frac{mga}{h}$. On ré-

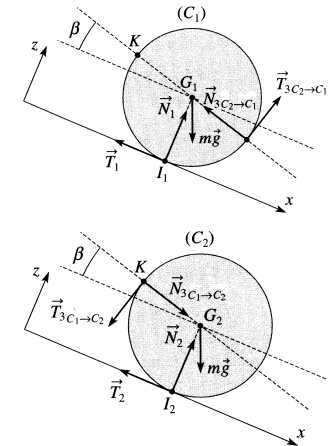
sume ces deux conditions sur le schéma suivant (sur lequel on lira basculement sans glissement dans la partie non grisée où est écrit glissement sans basculement...)



Le point d'intersection est en $h = a/f$.

Corr. 14 Équilibre de deux cylindres sur un plan incliné

1. On note $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{e}_x$ et $\vec{N}_1 = N_1 \vec{e}_z^\perp$ les composantes de la réaction du sol en I_1 sur (\mathcal{C}_1) . De même, on note $\vec{T}_2 = -T_2 \vec{e}_x$ et $\vec{N}_2 = N_2 \vec{e}_z^\perp$ les actions du sol en I_2 sur (\mathcal{C}_2) . Enfin, au point K, on note \vec{T}_3 et \vec{N}_3 l'action de (\mathcal{C}_2) sur (\mathcal{C}_1) et leur orientation choisie est celle de la figure (pour l'action de (\mathcal{C}_1) sur (\mathcal{C}_2) , il suffit de changer de signe par le théorème des actions réciproques).



Le TRC sur (\mathcal{C}_1) dans le référentiel galiléen d'étude conduit aux relations

$$m g \sin \alpha - T_1 + T_3 \sin \beta - N_3 \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\text{et} \quad -m g \cos \alpha + N_1 + T_3 \cos \beta + N_3 \sin \beta = 0 \quad (2)$$

Le TMC en G sur (\mathcal{C}_1) fournit

$$R_1 (T_1 - T_3) = 0 \quad (3)$$

Les mêmes théorèmes traduits pour (\mathcal{C}_2) donnent

$$m g \sin \alpha - T_2 - T_3 \sin \beta + N_3 \cos \beta = 0 \quad (4)$$

$$-m g \cos \alpha + N_2 - T_3 \cos \beta - N_3 \sin \beta = 0 \quad (5)$$

$$\text{et} \quad R_2 (T_2 - T_3) = 0 \quad (6)$$

La résolution à partir des équations (1) à (6) précédentes permet de tirer aisément

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = m g \sin \alpha$$

puis

$$N_3 = m g \sin \alpha \tan \beta$$

$$N_1 = mg \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)$$

$$N_2 = mg \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)$$

2. N_1, N_2 et N_3 sont positifs (car $\beta < \alpha < \pi/6$). Par conséquent, **les contacts sont toujours là** (pour N_1 , $\cos \alpha > \sqrt{3}/2$, $\sin \alpha < 1/2$ et $\cos \beta > \sqrt{3}/2$, d'où $N_1 > mg(\sqrt{3}/2 - 1/\sqrt{3}) = mg/\sqrt{3}$).

Il reste à vérifier que $|T_i| \leq f|N_i|$ pour les 3 contacts en I_1, I_2 et K. Comme $N_1 < N_2$, il faut voir lequel de N_1 et N_3 est le plus grand (rappel : tous les $|T_i|$ sont égaux). On a $N_1 > N_3$ à condition que

$$\left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) > \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha$$

$$\text{soit} \quad \cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) > \sin \alpha$$

$$\text{soit} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta > \alpha$$

$$\text{soit} \quad 2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

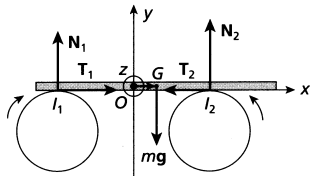
ce qui est vérifié car α et β sont inférieures à $\pi/6$!
Finalement, on doit avoir $T \leq fN_3$, donc

$$\tan \beta \geq \frac{1}{f}$$

3. Pour réaliser la condition précédente et avoir l'équilibre, on a intérêt à choisir f grand et β aussi (cylindres de rayons très différents). L'équilibre devient impossible lorsque $R_1 \rightarrow R_2$ car alors $\tan \beta \rightarrow 0$.

Corr. 15 Un oscillateur curieux

1. Commençons par faire une figure



On note $\vec{R}_i = \vec{N}_i + \vec{T}_i$ la réaction du cylindre i sur la planche et on pose $\vec{N}_i = N_i \vec{e}_y$.

Le TRC pour la planche, dans le référentiel du laboratoire (\mathcal{R}) = (O, x, y, z) supposé galiléen, projeté sur la verticale, donne (G se déplace horizontalement)

$$Mg = N_1 + N_2 \quad (1)$$

On applique ensuite le théorème du moment cinétique appliqué à la planche, en G, dans le référentiel barycentrique de la planche (i.e. (\mathcal{R}^*) = (G, x, y, z) en translation par rapport à (\mathcal{R}) et dans lequel G est immobile). La planche est soumise aux réactions du support, mais la planche étant mince, on peut

négliger les moments des \vec{T}_i qui passent quasiment par G. Le poids et la force d'inertie d'entraînement ont un moment nul en G, car elles s'appliquent en G (pour la force d'inertie d'entraînement, c'est vrai car (\mathcal{R}^*) est en translation par rapport à (\mathcal{R}) !). Il n'y a pas de force de CORIOLIS dans (\mathcal{R}^*) (en

translation !). Dans (\mathcal{R}^*), la planche est immobile, donc son moment cinétique est nul. Le TMC donne par conséquent

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}}_G(\text{actions ext.}) = \vec{0}$$

soit

$$(l-x)N_2 = (l+x)N_1 \quad (2)$$

Finalement, on déduit de (1) et (2) les composantes verticales des réactions sur la planche :

$$N_1 = \frac{l-x}{2l} mg \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{l+x}{2l} mg$$

2. Les cylindres tournent suffisamment vite pour qu'il y ait glissement. Le sens des forces tangentielles est physiquement évident (comme sur la figure du début) : $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_x$ et $\vec{T}_2 = -T_2 \vec{e}_x$ avec $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$. Les conditions de glissement s'écrivent alors $T_1 = fN_1$ et $T_2 = fN_2$.

Le TRC appliqué à la planche dans (\mathcal{R}), projeté sur \vec{e}_x donne

$$m\ddot{x} = T_1 - T_2 = f(N_1 - N_2) \quad (3)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} fx = 0$$

La planche effectue alors des oscillations autour de la position $x = 0$ d'équilibre stable, à la période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{gf}}$$

La mesure de cette période permet d'accéder à f . Je vous laisse montrer, à titre d'exercice, que si le sens de rotation des cylindres est inversé, la position $x = 0$ devient un équilibre instable...

3. L'épaisseur finie (i.e. $2e > 0$) de la planche ne change rien ni à (1), ni à (3), ni au fait que $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_x$ et $\vec{T}_2 = -T_2 \vec{e}_x$ avec $T_1 = fN_1$ et $T_2 = fN_2$. Par contre le théorème du moment cinétique appliqué précédemment devient cette fois

$$0 = -(l+x)N_1 + eT_1 + (l-x)N_2 - eT_2$$

En combinant cette équation avec les expressions $T_i = fN_i$, on obtient

$$(l - ef - x)N_2 = (l - ef + x)N_1 \quad (2')$$

Si on compare (2') à (2), on voit que prendre en compte l'épaisseur de la planche revient à remplacer l par $l - ef$. On aura donc

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l - ef}{gf}}$$

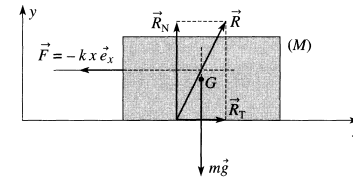
d'où la contrainte $l > ef$.

Corr. 16 Mouvement d'un solide sur un tapis roulant

1. Les actions en jeu, dont les actions de contact

$$\vec{R} = R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_z$$

sur le solide M, sont représentées sur la figure suivante :



Le théorème de la résultante cinétique sur la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à

$$m\ddot{x} = -kx + R_T \quad \text{et} \quad 0 = R_N - mg$$

Au départ, la masse M est fixe par rapport au tapis et cette phase est valable tant que

$$|R_T| \leq f_0 |R_N| = f_0 mg$$

Or, le tapis a une vitesse uniforme, donc la masse aussi (pas de glissement), donc $\dot{x} = 0$, ce qui impose $R_T = -kx$, d'où la condition

$$|x| \leq a_0$$

Cette phase cesse à l'instant t_1 tel que $x(t_1) = v_0 t_1 = a_0$, soit

$$t_1 = \frac{a_0}{v_0} \quad \text{et} \quad x_1 = a_0$$

2. À partir de l'instant t_1 , M glisse sur le tapis avec

$$v_g = \dot{x} - v_0 < 0$$

On en déduit, via les lois de Coulomb, la réaction tangentielle

$$R_T = +fmg$$

d'où l'équation du mouvement

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a$$

Compte tenu des conditions à l'instant t_1 ($x = a_0$ et $\dot{x} = v_0$), la solution est

$$x(t) = a + (a_0 - a) \cos(\omega_0(t - t_1)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_1))$$

qui s'écrit aussi

$$x(t) = a + b \cos(\omega_0(t - t_1) - \varphi)$$

avec

$$b \cos \varphi = a_0 - a \quad \text{et} \quad b \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Cette solution reste valable tant que $v_g < 0$, c'est-à-dire

$$\dot{x} = -\omega_0 b \sin(\omega_0(t - t_1) - \varphi) \leq v_0$$

Le seul instant $t_2 > t_1$ possible, correspondant au cas d'égalité $\sin(\omega_0(t_2 - t_1) - \varphi) = -\frac{v_0}{\omega_0 b} = -\sin \varphi$, vérifie la condition $\omega_0(t_2 - t_1) - \varphi = \varphi + \pi$, i.e.

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi + 2\varphi}{\omega_0}$$

À l'instant t_2 , la masse M est à la position (après calcul simple)

$$x_2 = 2a - a_0$$

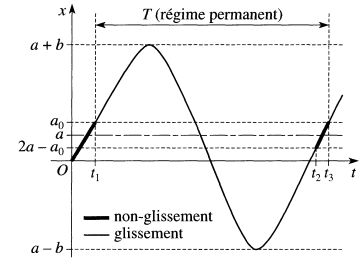
3. On note que $x_2 = 2a - a_0 \in [-a_0; a_0]$. Après l'instant t_2 , M est fixe par rapport au tapis et son mouvement est de nouveau un mouvement uniforme à la vitesse v_0 :

$$x(t) = 2a - a_0 + v_0(t - t_2)$$

Cette phase cesse quand $x = a_0$ à l'instant

$$t_3 = t_2 + \frac{2(a_0 - a)}{v_0}$$

et ainsi de suite (voir figure) !



On note que le mouvement est périodique de période

$$T = (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)$$

soit

$$T = \frac{\pi + 2\varphi}{\omega_0} + \frac{2(a_0 - a)}{v_0} = 0,63 \text{ s}$$

L'amplitude du mouvement est

$$b = \sqrt{(a_0 - a)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 5 \text{ cm}$$

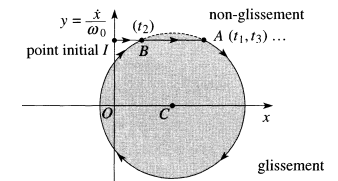
4. Dans la phase sans glissement, $y = C^{\text{te}}$ et on décrit le segment BA (de B vers A) du portrait de phase suivant. Dans la phase avec glissement, on obtient un arc de cercle de centre C(a, 0) et de rayon b car

$$y = -b \sin(\omega_0(t - t_1) - \varphi)$$

et

$$x = a + b \cos(\omega_0(t - t_1) - \varphi)$$

Le cycle est parcouru dans le sens horaire et la partie IB ne représente que le transitoire de départ.



5. Il faut considérer la force de frottement $R_T \vec{e}_x$ sur la masse M et celle sur le tapis $-R_T \vec{e}_x$! Pendant la phase de non-glissement, il n'y a pas de travail des actions de contact. Pendant la phase de glissement de t_1 à t_2 ,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} R_T (\dot{x} - v_0) dt = fmg [x(t_2) - x(t_1) - v_0(t_2 - t_1)]$$

soit

$$W = fmg \left[2(a - a_0) - v_0 \frac{\pi + 2\varphi}{\omega_0} \right] = -0,16 \text{ J}$$

Il est bien heureux d'obtenir $W < 0$! Remarque : on aurait aussi pu écrire $W = fmg(a - a_0)[2 + (\pi + 2\varphi)\tan \varphi]$

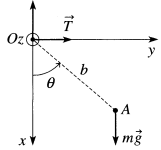
6. Le son du violon présente des harmoniques car la vibration $x(t)$ n'est pas sinusoïdale (équivalent à un portrait de phase non elliptique). Néanmoins, on peut évaluer

$$t_3 - t_2 = 0,02 \text{ s} \simeq 0,03T$$

donc avec les valeurs de l'énoncé, les oscillations sont quasiment sinusoïdales (la partie affine de $x(t)$ n'occupe qu'une faible fraction d'une période).

Corr. 17 Oscillations d'un solide sur son support

1. On étudie le système $\mathcal{S} = \{\text{fil} + \text{masselotte}\}$ dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. Il y a une inconnue cinématique θ lorsque \mathcal{S} ne glisse pas. C'est le cas si $|T| \leq f|N|$, ce que l'on souhaite. On doit donc calculer $|T|$ et $|N|$. On applique les théorèmes de la mécanique pour les déterminer en fonction de θ .



Tout d'abord, le TRC sur \mathcal{S} s'écrit

$$m \vec{a}(A/\mathcal{R}) = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

Or, $\vec{OA} = b \cos \theta \vec{e}_x + b \sin \theta \vec{e}_y$

donc $\vec{a}(A/\mathcal{R}) = -b(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_x + b(-\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_y$

En posant $\vec{N} = -N \vec{e}_x$ et $\vec{T} = T \vec{e}_y$ (algébriques avec $N > 0$ attendu), le TRC projeté conduit aux équations

$$mb(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta) = -mg + N \quad (1)$$

et $mb(-\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta) = T \quad (2)$

Ensuite, on applique le TMC par rapport à l'axe (Oz) fixe (non glissement) :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\text{poids})$$

les actions de contact ne contribuant pas. On en déduit

$$mb^2 \ddot{\theta} = -mgb \sin \theta \quad (3)$$

On peut obtenir une expression de $\dot{\theta}$ en multipliant (3) par $\dot{\theta}$ et en l'intégrant. Compte tenu de $\dot{\theta}(t=0) = 0$ et $\theta(t=0) = \theta_0$, on tire

$$\frac{1}{2} mb^2 \dot{\theta}^2 = mgb(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4)$$

(Remarque : on aurait pu trouver cette équation directement avec une méthode énergétique...). Il ne reste qu'à reporter les expressions de $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ issues de (3) et (4) dans (1) et (2) pour en déduire ensuite

$$T = mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta) \sin \theta$$

et $N = mg(-2 \cos \theta_0 + 3 \cos \theta) \cos \theta$

On vérifie que, puisque $|\theta| \leq \theta_0$, $N > 0$. Il reste à traduire la condition de non glissement $|T| \leq fN$, soit $|\tan \theta| \leq f$ pour tout angle. Par conséquent,

$$\tan \theta_0 \leq f$$

Cela signifie que la réaction du support doit toujours rester dans le cône de frottement pour éviter le glissement (résultat quasiment intuitif, mais pas évident car on est en dynamique et non en statique!).

2. Si $|\theta| \ll 1$, alors (3) donne

$$b \ddot{\theta} = -g \theta$$

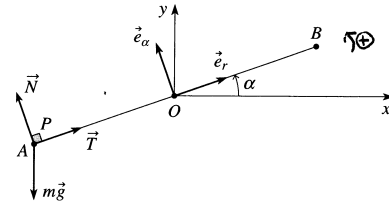
On reconnaît l'équation d'un oscillateur stable de période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}}$$

Ce résultat est logique : le fil est sans masse donc on retrouve la période des oscillations d'un pendule simple (masse m à la distance b de la liaison).

Corr. 18 Point matériel sur une barre en rotation

On pose $\vec{T} = T \vec{e}_r$ et $\vec{N} = N \vec{e}_\alpha$.



Le TRC appliqué à P dans le référentiel galiléen d'étude conduit à

$$ma \dot{\alpha}^2 = T - mg \sin \alpha \quad (1)$$

et $-ma \ddot{\alpha} = N - mg \cos \alpha \quad (2)$

Il faut calculer $\ddot{\alpha}$ et $\dot{\alpha}^2$ en fonction de α . Pour cela, appliquons le TMC par rapport à O et projeté sur (Oz) pour le système total constitué de la barre et de P. Le référentiel d'étude est galiléen. Puisqu'on ne doit pas tenir compte des actions intérieures dans ce théorème, on trouve

$$(J + ma^2) \ddot{\alpha} = mga \cos \alpha$$

soit $\ddot{\alpha} = \omega^2 \cos \alpha \quad (3)$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg}{a(M+3m)}}$$

Remarque : On vérifie que cette équation a un signe cohérent puisque le mouvement de rotation de la barre s'accélère dans le sens des α croissants lorsque $\cos \alpha > 0$.

Ensuite, (3) multipliée par $\dot{\alpha}$ s'intègre avec les conditions initiales $(\alpha_0, \dot{\alpha}_0) = (0, 0)$, d'où

$$\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2 \sin \alpha \quad (4)$$

Remarque : L'équation (4) peut aussi s'obtenir en écrivant la conservation de l'énergie mécanique du système constitué de la barre et de P :

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} (J + ma^2) \dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha = C^{te} = 0$$

donc on peut ensuite déduire (3) par dérivation temporelle. C'est une question de goût...

Les équations (3) et (4) donnent dans (1) et (2)

$$T = mg \sin \alpha + 2ma\omega^2 \sin \alpha$$

et

$$N = mg \cos \alpha - ma\omega^2 \cos \alpha$$

Le point P reste sur la barre tant que $N > 0$ et ne glisse pas tant que $|T| = T \leq fN$. La première condition impose $g > a\omega^2$ ce qui est toujours vérifié car $M > 0$. On s'y attendait : c'est

le point P qui entraîne la barre en rotation, donc on ne voit pas comment P aurait pu décoller de la barre ! Mais c'est toujours bien de vérifier les intuitions physiques par le calcul. La condition de non glissement s'écrit quant à elle

$$\tan \alpha < \tan \alpha_0 = f \frac{g - a\omega^2}{g + 2a\omega^2} = f \frac{M}{M + 9m}$$

En conclusion P quitte la barre en glissant pour $\alpha = \alpha_0$ défini ci-dessus.

Corr. 19 Un cylindre contre un trottoir

1. Avec le projeté de A sur (BC), il est clair que

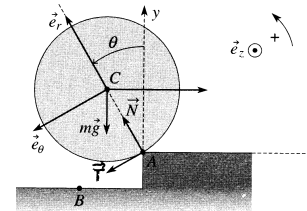
$$BC = AC \cos \theta_0 + h$$

donc

$$h = a(1 - \cos \theta_0)$$

soit

$$h = 2a \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$$



2.a. Le TMC en A par rapport à (Az) sur le cylindre en rotation autour de (Az) fixe car il n'y a pas de glissement donne

$$J_{Az} \ddot{\theta} = \mathcal{M}_z$$

Le théorème de Huygens assure que $J_{Az} = J + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2$ et, toujours avec la fabuleuse technique du bras de levier, on trouve

$$\frac{3}{2} ma^2 \ddot{\theta} = amg \sin \theta - aF \cos \theta \quad (1)$$

Le cylindre décolle si $\ddot{\theta} < 0$ au départ pour $\theta = \theta_0$, donc si

$$amg \sin \theta_0 - aF \cos \theta_0 < 0$$

soit si

$$F > F_0 = mg \tan \theta_0$$

2.b. Lorsque le cylindre monte, θ diminue et \mathcal{M}_z est telle que

$$\mathcal{M}_z = amg \sin \theta - aF \cos \theta$$

soit $\mathcal{M}_z = -a \cos \theta \left(F - F_0 \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \right)$

donc \mathcal{M}_z reste négative, d'où $\ddot{\theta} < 0$: le cylindre continue de monter.

2.c. Puisque le cylindre ne glisse pas en A, C a un mouvement de rotation autour de A. On cherche à exprimer la condition de non-glissement $|T| \leq f|N|$ (on oriente algébriquement \vec{T} et \vec{N} comme sur la figure). Le TRC sur le cylindre dans le référentiel galiléen d'étude donne

$$-ma\dot{\theta}^2 = N - F \sin \theta - mg \cos \theta \quad (2)$$

et $ma\ddot{\theta} = T - F \cos \theta + mg \sin \theta \quad (3)$

Avec les équations (1) et (3), on tire

$$T = \frac{1}{3} (F \cos \theta - mg \sin \theta)$$

À l'instant initial, $\theta = \theta_0$ et pour $F = 2F_0 = 2mg \tan \theta_0$, il vient

$$T = T_0 = \frac{1}{3} mg \sin \theta_0$$

De plus, toujours à l'instant initial, $\dot{\theta}_0 = 0$ donc (2) implique

$$N = N_0 = F \sin \theta_0 + mg \cos \theta_0$$

soit

$$N_0 = mg \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}$$

Remarque : attention à ne pas dire de bêtise pour le calcul de T_0 . À l'instant initial $\dot{\theta}_0 \neq 0$!

Il n'y a pas de glissement au démarrage si $|T_0| \leq fN_0$ donc si

$$f \geq f_0 = \frac{1}{3} \frac{\cos \theta_0 \sin \theta_0}{1 + \sin^2 \theta_0}$$

2.d. On intègre l'équation (1) multipliée par $\dot{\theta}$ entre l'instant initial (où $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$) et l'instant où C est à la verticale de A ($\theta = 0$). On trouve

$$\frac{3}{4} ma^2 (\dot{\theta}^2 - 0) = -mga(1 - \cos \theta_0) - aF(0 - \sin \theta_0)$$

Remarque : On obtiendrait rapidement cette relation par une méthode énergétique...

Pour $F = F_0 = 2mg \tan \theta_0$, on tire $\dot{\theta}^2$ et $\vec{v}(C) = a\dot{\theta} \vec{e}_x$ vaut

$$\vec{v}(C) = \sqrt{\frac{4ga}{3} \frac{1 + \sin^2 \theta_0 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0}} \vec{e}_x$$

Remarque : L'équation obtenue de (1) par intégration peut aussi être écrite entre l'instant initial et un instant quelconque, ce qui fournit $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ . Ceci permet alors d'exprimer N en fonction de θ . Comme on connaît déjà T fonction de θ , ceci permet d'écrire la condition de non glissement $|T| \leq f|N|$ en fonction de θ et d'en déduire la valeur minimale de f permettant d'assurer le non glissement pendant toute la phase de montée. C'est toutefois un calcul bourrin. Avis aux amateurs !