Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Écoles Normales Supérieures – MP

1. *Lyon.* ★ Soit n un entier. Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, ..., E_k$ parties de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant : ***i)*** $|E_i|$ est impair pour tout i, ***ii)*** si $i \neq j$ alors $|E_i \cap E_j|$ est pair.

2. *Lyon.* ★ Déterminer toutes les applications N de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y),\ N(xy) = N(x)\ N(y)$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N(n) > 1$.

3. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Dans un groupe, une involution est un élément d'ordre 2 et deux éléments x, y sont dits conjugués s'il existe z tel que $zxz^{-1} = y$. Soit G un groupe fini.
a) Soient deux involutions i, j de G. Montrer qu'elles sont conjuguées, ou bien qu'il existe une involution qui commute avec i et avec j.
b) Soit I l'ensemble des involutions de G. On suppose qu'il existe i, j dans I non conjuguées. Soient $C_g = \{x \in G, xg = gx\}$ et $c = \max\{|C_i|, i \in I\}$. Montrer que $|G| < c^3$.

4. *Lyon.* ★ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Dénombrer les $\theta \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$.
b) Montrer que, si $n \neq 6$, un automorphisme du groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$ envoie une transposition quelconque sur une transposition.
c) Que peut-on en déduire sur les automorphismes de $\mathcal{S}_n$ si $n \neq 6$?

5. *Lyon.* ★ Soient $p > 3$ et $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction canonique modulo p. Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\varphi_{|G}$ est injective.

6. *Paris.*★ Soit K un corps. On note $(K^*)^{[2]}$ l'ensemble des carrés des éléments non nuls de K. Une racine carrée sur K^* est un morphisme de groupes φ de $(K^*)^{[2]}$ dans K^* tel que $\varphi(x)^2 = x$ pour tout $x \in (K^*)^{[2]}$. Étudier l'existence et l'unicité d'une racine carrée dans les cas suivants : $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un nombre premier p.

7. ★ On considère la conjecture suivante. « Soit $n \geqslant 1$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tel que, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, P et $P^{(i)}$ aient une racine commune. Alors P a une unique racine. »
a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de Q' est combinaison convexe des racines de Q.
b) Montrer la conjecture pour $n \leqslant 4$.

8. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ P(n) = m^2$.
On veut montrer l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$.
a) Est-il nécessaire que $P \in \mathbb{Z}[X]$?
b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{C}^\infty\big(]a, +\infty[, \mathbb{R}\big)$ qui à f associe la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$. Montrer que
$\forall f \in \mathcal{C}^\infty\big(]a, +\infty[\big),\ \forall x \in]a, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists \theta \in]0, 1[,\ (\Delta^n f)(x) = f^{(n)}(x + n\theta).$
c) Conclure.

9. *Lyon.* ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$, puis $A = \mathrm{Diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $b_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $b_{n,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique famille $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de complexes telle que $M = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} A^i B^j$.

10. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, telle que $ab \neq 0$ pour tous a, b dans $A \setminus \{0\}$.
a) Montrer que tout élément non nul de A est inversible.
b) Montrer que si A est commutative alors elle est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11. *Paris.* ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{3n}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A, B et $A + B$ aient pour liste des valeurs propres, respectivement, $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_n)$.

12. *Paris.* ★ Soient a et b deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et une permutation σ telles que les matrices respectives de a et b dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ soient triangulaires supérieures.

13. *Lyon.* ★ Richard On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note $sl_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de trace nulle.
a) Montrer que $\exp(sl_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, mais que $\exp$ n'est pas surjective de $sl_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. *Ind.* Commencer par trouver un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui n'a pas de racine carrée dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
b) Montrer que $\exp(sl_2(\mathbb{C})) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(M) \neq -2\} \cup \{-I_2\}$.

14. *Paris.* ★ On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée et $(f_1, ..., f_n)$ une famille de vecteurs tels que $\|e_k - f_k\|_2 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, ..., f_n)$ est une base. Le résultat subsiste-il si l'on suppose l'inégalité large ?

15. *Paris.* ★ ***a)*** Un endomorphisme diagonalisable d'un espace euclidien E est-il diagonalisable en base orthonormée ?
b) Même question pour un endomorphisme trigonalisable.

16. *Paris.* ★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, φ et ψ deux produits scalaires sur E. Étudier le groupe $\mathcal{O}(\varphi) \cap \mathcal{O}(\psi)$.

17. *Paris.* ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(A+B)^k = \mathrm{Tr}(A^k) + \mathrm{Tr}(B^k)$. Montrer $AB = 0$.

18. *Paris.* ★ Si (E, N) est un espace normé réel de dimension finie, on appelle isométrie de (E, N) tout endomorphisme u de E tel que $\forall x \in E,\ N(u(x)) = N(x)$. L'ensemble de ces isométries est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
a) Si n est un entier $\geqslant 2$, donner un exemple d'espace normé de dimension n dont le groupe des isométries est infini non dénombrable.
b) Décrire le groupe des isométries de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Le groupe des isométries de (E, N) peut-il être infini dénombrable ?

19. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Si (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont deux espaces normés réels, une application linéaire T de E_1 dans E_2 est dite compacte si, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ bornée de (E_1, N_1), la suite $(T(x_n))_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence dans (E_2, N_2).
Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est compacte, elle est continue. Que dire de la réciproque ?

20. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
On pose $I = \left\{ \dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2},\ f \in F \setminus \{0\} \right\}$
a) Montrer que I est un sous-intervalle de $[1, +\infty[$.
b) On suppose I borné. Montrer que I est fermé. On pourra, étant donné une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de F, s'intéresser, pour $t \in [0,1]$, à la fonction $g_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\, f_i$.
c) Donner un exemple d'espace F pour lequel I n'est pas fermé.

21. *Lyon.* ★ Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles de carré sommable, muni de la norme hilbertienne naturelle. Si $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^{-n/3} x_n^2 - x_n^3)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver l'image par f de l'ensemble de ses points critiques.

22. *Cachan, Rennes.* ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$.
a) Montrer que φ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \varphi(MN) \leqslant \varphi(M)\varphi(N)$ (on dit que φ est sous-multiplicative).
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) = \displaystyle\max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

d) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ est la borne inférieure des $N(B)$ lorsque N parcourt l'ensemble des normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

23. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ ***a)*** Que dire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée ?
b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{zA}Be^{-zA}$ soit bornée. Montrer que $AB = BA$.

24. *Lyon.* ★ Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $\| \ \|$ la norme 2 standard sur $\mathbb{C}^n$, et on suppose qu'il existe un réel $k \in [0, 2[$ tel que $\forall M \in G,\ \forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|MX - X\| \leqslant k\|X\|$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall M \in G,\ M^m = I_n$.

25. *Paris.* ★ Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{a \in A} \frac{1}{a} < +\infty$. Montrer : $|A \cap [1, n]| \underset{n \to +\infty}{=} o(n)$.

26. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(\pi P(n))\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est fini. Montrer que $P - P(0)$ est à coefficients rationnels.

27. *Lyon.* ★ Soit q un réel tel que $1 < q \leqslant \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Soit x un réel tel que $1 < x < \dfrac{1}{q - 1}$. Montrer qu'il existe une infinité de suites $\epsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ telles que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon_i q^{-i}$.

28. *Paris.*★ Soient (a_n) et (b_n) deux suites sommables à valeurs non nulles telles, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^k$. Montrer que les suites sont égales à permutation près.

29. *Paris.* ★ Une fonction continue sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est elle bornée ?

30. *Lyon.*★ Existe-t-il $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}))$ telle que l'image de l'ensemble $\mathcal{C}$ de ses points critiques soit un intervalle non trivial ? *Ind.* Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $f(\mathcal{C})$ est inclus dans une union finie d'intervalles de longueur inférieure à ϵ.

31. *Cachan, Rennes.* ★ Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0\big([a, b], [a, b]\big)$. On définit par récurrence la suite $(f_k)_{k \geqslant 0}$ par les conditions $f_0 = \mathrm{id}_{[a,b]}$ et $f_k = f \circ f_{k-1}$. Soit $k \geqslant 1$. On dit que $x \in [a, b]$ est un point de période minimale k (ce que l'on abrège en ppm$k$) lorsque $f_k(x) = x$ et que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k - 1\}$, $f_i(x) \neq x$.
a) Montrer que f admet un point ppm1.
b) On suppose qu'il existe c et d dans $[a, b]$ tels que $f(d) \leqslant c < d \leqslant f(c)$. Montrer que f admet un point ppm2.
c) On suppose que f admet un point ppm$k$, avec $k \geqslant 2$. Montrer que f admet un point ppm2.

32. *Lyon.* ★ Soient A et B deux parties dénombrables denses de $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ envoyant A sur B.
b) Montrer qu'il existe un difféomorphisme croissant envoyant A sur B.

33. *Paris.*★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Existe-t-il $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ convexe telle que $g \geqslant f$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

34. *Lyon.* ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $x \mapsto \dfrac{f(|x|)}{|x|}$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

35. *Paris.* ★ Soient $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que :
$\forall t \in \mathbb{R}^+, |y(t)| \leqslant \alpha\, |y'(t)|$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
Montrer qu'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, avec $C_2 < 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|y(t)| \leqslant C_1 \exp(C_2 t)$
Que dire dans le cas où $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$? (En remplaçant $|\ |$ par $\|\ \|$)

36. *Cachan, Rennes.*★ ***a)*** Montrer, pour $x \in [0, \pi]$, les inégalités $\sin x \leqslant x$ et $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant \dfrac{x}{\pi}\cdot$
On admet dans la suite que pour tous $0 \leqslant q < n$ entiers et tout $x \in]0, \pi[$,
$$\left|\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(q+1)\sin(x/2)}.$$
b) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \pi + 1$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n : x \in \mathbb{R} \mapsto 2\sin(2nx) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions de terme général $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\, q_{2^{k^3}}(x)$.

d) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'existence de $A_p = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(px)\, S_n(x)\, \mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

37. *Paris.* ★ Soient (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers f et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, 1],\ \ f_n^{(k)}(x) \in [a, b]$.
Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f^{(k)}(x) \in [a, b]$ et que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

38. ★ Trouver la limite lorsque $x \to 1^-$ de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n^2}$.

39. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles non nulles. Pour tout entier non nul N, on pose $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, et on suppose que chacun des P_N est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. On cherche à établir que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $+\infty$.

a) Montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $N \geqslant 2$, $M = \displaystyle\sum_{\lambda \in P_N^{-1}(\{0\})} \frac{1}{\lambda^2}$.

Ind. On utilisera la dérivée logarithmique de P_N.

b) Établir l'existence de $C > 0$ tel que $\forall N \geqslant 2$, $a_N^2 \leqslant \dfrac{C}{N^2}(a_{N-1}^2 - 2a_N a_{N-2})$.

c) Montrer le résultat annoncé.

40. *Lyon.*★ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série de terme général a_n^2 diverge.

a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

b) Montrer qu'il existe $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout z de module R, $\sum a_n \varepsilon_n z^n$ diverge.

41. *Paris.* ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement asymptotique* en 0 lorsqu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, pour tout $N \geqslant 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N)$. Soit $\alpha > 0$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{e^{-t/x}}{1+t}\mathrm{d}t$. Montrer que F admet un développement asymptotique en 0, et le déterminer.

42. *Lyon.* ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On note $df(a)$ la différentielle de f en a. On suppose que $\mathrm{d}f$, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, est injective et que $\dfrac{f(x)}{\|x\|} \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f est strictement convexe et que $\mathrm{d}f$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

43. *Lyon.* ★ Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ qui converge vers x et telle que $(\mathrm{d}f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{d}f(x)$.

44. *Cachan, Rennes.*★ On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on considère la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $-y^2 + x^3 + ax + b = 0$.

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$ tel que $y \neq 0$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente en (x, y).

b) Soient p, q deux points distincts sur $\mathcal{C}$. Si la droite (pq) possède exactement trois points d'intersection avec $\mathcal{C}$, on note $p \oplus q$ celui qui n'est égal ni à p ni à q. Un tel point existe-t-il lorsque p et q ont même abscisse ?

c) On suppose que $p \oplus q$ existe. Montrer que $(p \oplus q) \oplus p = q$.

d) Montrer qu'en tous les cas (pq) possède au plus trois points d'intersection avec $\mathcal{C}$.

e) Montrer que si $(p, q) \cap \mathcal{C} = \{p, q\}$ alors (p, q) est tangente à $\mathcal{C}$ en p ou q.

45. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On suppose qu'il existe des réels $a \geqslant 0$ et $b \neq 0$ tels que $X \sim aX + b$. Montrer que X est presque sûrement constante.

46. *Cachan, Rennes.* ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire σ_n suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de cycles de σ_n. Calculer $E(X_n)$ et déterminer un équivalent de $E(X_n)$ quand $n \to +\infty$.

47. *Paris.*★ Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Calculer $\mathbb{P}(P \wedge Q = 1)$.

48. *Paris.* ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k^n)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Soit T_n la variable aléatoire égale au minimum de l'ensemble des $k > 0$ tels que $\mathrm{Vect}(X_1^n, ..., X_k^n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ si cet ensemble est non vide, à $+\infty$ sinon. Montrer que (T_n/n) tend vers 1 en probabilité.

49. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On pose $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et l'on admet que $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, lorsqu'il est muni de la norme uniforme. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$.
Montrer que $\mathbb{P}\big(\alpha S_n - \lfloor \alpha S_n \rfloor \in [a, b]\big) \to b - a$.

50. *Paris.* ★ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note $R_n = \mathrm{card}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
a) Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$.
b) On suppose que les X_i admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

51. *Paris.* ★ Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilités vers 0 si et seulement si $\prod_{k=1}^{n} E(\sqrt{X_k}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

52. *Paris.* ★ Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilités vers 0 si et seulement si $\prod_{k=1}^{n} E(\sqrt{X_k}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

53. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* ★ ***a)*** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne un réel $p_n \in]0, 1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1, 2 \ldots, n$, tel que, pour tout (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, si $X_{i,j}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i, j) est une arête de Γ_n et 0 sinon, les $X_{i,j}$

sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

b) On suppose que $\dfrac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 0$.

c) On suppose cette fois que $p_n = o(\ln n/n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 1$.

Écoles Normales Supérieures – PSI

54. ★ Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et positive sur $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $f(a) \to +\infty$ quand $\|a\| \to +\infty$.

c) Montrer que f admet un minimum. On note $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ un point où ce minimum est atteint.

d) Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ i! + (i+1)!\, a_1^* + \cdots + (i+n)!\, a_n^* = 0$.

e) On pose $P(X) = 1 + a_1^*(X+1) + a_2^*(X+1)(X+2) + ... + a_n^*(X+1)...(X+n)$.
Montrer que $P(X) = a_n^*(X-1)...(X-n)$ puis que $P(X) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}(X-1)...(X-n)$.

f) Montrer que $f(a_1^*, \dots, a_n^*) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n) \,\mathrm{d}x$. En déduire $f(a^*)$

55. ★ Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} a_k = 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \cdots + a_n$.

a) Montrer que la série de terme général a_n diverge et que la suite (a_n) tend vers 0. Montrer que $S_n \sim S_{n+1}$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{n+1}^2 - S_n^2) = 2$. En déduire que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

c) Réciproquement, soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n \sum_{k=0}^{n} b_k = 1$.

d) Généralisation. Soit α un réel positif. Que dire de a_n si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} a_k^\alpha = 1$?

56. *Cachan.*★ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \dfrac{4}{n^2\,(n+1)^2} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)$.

b) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ est convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ est convergente et qu'il existe une constante $K > 0$ ne dépendant pas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant K \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

c) Montrer que la constante $K = 2$ est optimale.

57. ★ On considère la suite de fonctions (J_n) définie par : $J_n(t) = c_n \left(\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^4$, avec c_n tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On pose, pour $h > 0$, $\omega_g(h) = \max\limits_{|t-s|\leqslant h} |g(t) - g(s)|$. Enfin, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $T_{n,g}(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t|\, J_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{n+1}$.

Ind. On pourra utiliser le résultat suivant : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin t \leqslant t$.

b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0, \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |T_{n,g}(x) - g(x)| \leqslant \omega_g(h) + \dfrac{b}{(n+1)h}$.

c) Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Montrer que $\omega_g(v_n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

d) Montrer que la suite $(T_{n,g})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

58. ★ Si x est un nombre réel, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x. Soien t $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$, $n \mapsto \{n\theta\}$.

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n$ et $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$.

c) En déduire que $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\theta\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle (E), $y'' + 2y' + 2y = f$ où $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est non constante. On suppose que (E) possède deux solutions périodiques y_1 et y_2 de périodes respectives T_1 et T_2. On se propose de montrer que $y_1 = y_2$.

d) Montrer que T_1/T_2 est un nombre rationnel.

e) Montrer que la fonction $y_2 - y_1$ est bornée.

f) Montrer que $y_2 = y_1$.

Écoles Normales Supérieures – PC

59. ★ On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est fade s'il n'existe pas de $(x, y, z) \in A^3$ tel que $x + y = z$. Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \ldots, n\}$.

60. ★ On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne vers ℓ si $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite périodique. Montrer que (u_n) converge en moyenne.

b) Soit $f : x \mapsto x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de p, la convergence en moyenne de (u_n) entraîne-t-elle la convergence en moyenne de $(f(u_n))$?

c) Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout suite (u_n) convergeant en moyenne, la suite $(f(u_n))$ converge en moyenne.

61. ★ Soient $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.
a) Montrer que les suites $(\alpha)_n$ et (β_n) sont monotones.
b) Exprimer α_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

École Polytechnique – MP

62. ★ Soit G un sous-groupe des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que toute fonction de G possède un point fixe. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ fixe pour tous les éléments de G.

63. ★ Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, où $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, avec $r_k \in \mathbb{R}^+$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $\displaystyle\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} r_k \big|\cos(\theta_k - \theta)\big| = \sup_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \left|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k z_k\right|$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \frac{\pi}{2} \sup_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \left|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k z_k\right|$.
c) Montrer que, dans l'inégalité précédente, la constante $\pi/2$ est optimale.

64. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que $\displaystyle\max_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

65. ★ Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

66. ★ Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$. Trouver la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'image par f est incluse dans $\mathbb{R}^-$.

67. ★ Soient $A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ et $B = \beta_0 + \beta_1 X$ à coefficients réels avec $\alpha_2 \neq 0$, tels que $\forall k \in \mathbb{N}, k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$. On définit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], L(P) = AP'' + BP'$.
a) Montrer que, pour tout n, la restriction de L à $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, π_n un polynôme unitaire de degré n vecteur propre de L.
b) On pose $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Soit $\omega \in E$. Si $(f,g) \in E^2$, on pose $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_a^b \omega f g$.
Chercher une condition nécessaire et suffisante sur ω pour que φ soit un produit scalaire pour lequel (π_n) est orthogonale.

68. ★ Tracer la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer le groupe des isométries qui conservent cette surface.

69. ★ On appelle état de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de trace 1, à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.
a) Caractériser les états S tels que $S^2 = S$. On les appelle les états purs.
b) Montrer que l'ensemble des états est une partie convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des états sont les états purs (un état est dit extrémal lorsqu'il ne peut s'exprimer comme barycentre à coefficients strictement positifs de deux états distincts).

70. ★ Déterminer toutes les formes linéaires $u : \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui sont invariantes par conjugaison par toute matrice orthogonale, i.e. telles que
$\forall M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}), \forall P \in \mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R}),\ u(P^{-1}MP) = u(M)$.

71. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(M) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(M)$ la suite ordonnée des valeurs propres de M. Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\lambda_1(A+B) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.
b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B)$.

72. ★ Soient n et d dans $\mathbb{N}^*$. Soient $M_1, \ldots, M_n$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}^t\!M_k M_k = I_d$.
On définit l'endomorphisme L, de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans lui-même, par l'égalité $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ L(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}^t\!M_k X M_k$.
Enfin, si $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on écrit $X \geqslant 0$ lorsque, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, ${}^t Y X Y \geqslant 0$.
a) Soit $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que, si $X \geqslant 0$, alors $L(X) \geqslant 0$.
b) Montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$, de $V \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t V V = I_d$, et d'un morphisme d'algèbres π, de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, tel que $\pi({}^t X) = {}^t\big(\pi(X)\big)$ et $L(X) = {}^t V \pi(X) V$, pour tout $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ L({}^t X X) - {}^t\big(L(X)\big)\, L(X) \geqslant 0$.

73. ★ Montrer qu'une norme qui vérifie l'identité du parallélogramme est une norme euclidienne.

74. ★ ***a)*** On munit $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\,\|_\infty$. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients positifs.
b) On munit $\mathcal{C}^0([-1,0], \mathbb{R})$ de $\|\,\|_\infty$. Déterminer les formes linéaires continues qui envoient les fonctions polynomiales à coefficients positifs sur des réels positifs.

75. ★ Soient $E = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{i\omega t})_{\omega \in \mathbb{R}}$ (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$) et F l'adhérence de E pour la norme infinie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0_{born}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
b) Soient $g \in F \cap \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $f \circ g \in F$.
c) On admet l'équivalence suivante : une suite $(g_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ converge pour la norme infinie si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N, \|g_m - g_n\|_\infty \leqslant \epsilon$. Pour une fonction $g \in F$, on définit, sous réserve d'existence, $\tilde{g} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} e^{-i\omega x} g(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $\tilde{g}$ est toujours bien définie et nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable.

76. ★ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{C}[X]\ ;\ P(u) = e^u\}$ est non vide et contient un unique polynôme de degré minimal P_u.
b) Étudier la continuité de $u \mapsto P_u$.

77. ★ Soit (a_n) une suite décroissante positive, $0 < a < 1$ et $c > 0$. Montrer que $a_n \sim c/n^a$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{c\,n^{1-a}}{1-a}$.

78. ★ Soit A une partie dénombrable et dense de $[0,1]$. Existe-il une bijection continue de $[0,1]$ sur $[0,1]$ envoyant A sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$? Même question en remplaçant « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

79. ★ Soient f dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}$.
a) Pour x dans $\mathbb{R}$, montrer : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{-t}\mathrm{d}t = F(0) - F(x)\,e^{-x}$.
b) Si f est dans $\mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer $\dfrac{f^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.
c) Soient m et p dans $\mathbb{N}^*$, $f_{m,p} = \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X-k)^p$. Montrer que les $f_{m,p}(j)$ pour $j \in \{0, \ldots, m\}$ sont des entiers.
d) En utilisant les questions précédentes et en raisonnant par l'absurde, montrer que e est un nombre transcendant.

80. ★ ***a)*** Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$.
b) Soit (a_k) une suite positive réelle décroissante telle que (ka_k) soit croissante. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k|\sin(kx)|\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} + O(1)$.

81. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, concave, strictement décroissante, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Soit $K = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3\ ;\ x+y+z = 1\}$. Déterminer $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in K} f(x)\,f(y)\,f(z)$.

82. ★ Soit T un triangle dont les angles géométriques sont notés α, β, γ (éléments de $]0,\pi[$).
Montrer que $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta} \geqslant \dfrac{8}{3 + 2\cos\gamma}$.

83. ★ Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma''(t)$ est colinéaire à $\gamma(t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $A(t)$ l'aire de la surface délimitée par les segments $[0_{\mathbb{R}^2}\gamma(0)]$, $[0_{\mathbb{R}^2}\gamma(t)]$ et l'ensemble des points parcourus par γ de 0 à t (aire comptée algébriquement en tenant compte du sens de parcours). Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = at$.

84. ★ Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans le sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$ de $\mathbb{R}$. On suppose les X_i centrées réduites et que les $E(X_i X_j)$ pour $i \neq j$ sont nuls. Montrer $m \geqslant n+1$.

85. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mu(n)$ comme 0 si n est divisible par le carré d'un nombre premier, et sinon par $(-1)^k$ où k est le nombre de diviseurs premiers de n. On fixe $s \in]1, +\infty[$, et on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\cdot$ On admet que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

a) Montrer que $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\cdot$

b) On rappelle que φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}\cdot$

c) Montrer que $\dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\pi^2}\cdot$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on note p_n la probabilité de l'événement $(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite (p_n) converge et préciser sa limite.

86. ★ Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et l'on admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G = 1$. Montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{E}\big(Q(S_n)\big) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} QG.$

École Polytechnique – PSI

87. ★ Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$.

b) On définit la norme p de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ par $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$.
Montrer que $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

c) Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et $F : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \\ f(0) \text{ si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que F est continue et vérifie $\|F\|_p \leqslant \dfrac{p}{p-1} \|f\|_p$.

88. ★ On dispose d'une pièce de monnaie pipée mais on ignore comment. Indiquer comment réaliser avec cette pièce une expérience aléatoire de probabilité $1/2\cdot$

École Polytechnique – PC

89. ★ Trouver les f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on ait $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(x)\,f(y)$.

90. ★ ***a)*** Montrer que la fonction $\cos$ admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe.
b) Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f\circ f=\cos$.

91. ★ Soit $r\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0=1$. Soit $f:x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
a) Montrer que le rayon de convergence de f est >0.
b) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.
c) Exprimer $f(x)$.

Mines-Ponts – MP

92. ★ Soit E un espace euclidien de dimension n. La famille $(x_1,\dots,x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $\forall i\neq j,\langle x_i,x_j\rangle<0$.
a) Montrer que si $(x_1,\dots,x_p)$ est obtusangle, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ sont des réels quelconques, alors $\left\|\sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|x_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_ix_i\right\|$. En déduire que $p\leqslant n+1$.
b) Montrer qu'il existe une famille $(u_1,\dots,u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant, pour $i\neq j$, $\langle u_i,u_j\rangle=-1/n$.
c) Montrer que si les vecteurs $u_1,\dots,u_{n+1}$ sont unitaires et vérifient, pour tous $i\neq j$, $\langle u_i,u_j\rangle=\alpha<0$, alors $\alpha=-1/n$.

93. ★ Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{1}(t^4-a\,t^2-b\,t-c)^2\,\mathrm{d}t$.

94. ★ Soit $q\in]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-q^kx)$.
a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa limite.
b) Montrer que f est l'unique fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :
$f(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(1-qx)f(qx)$.
c) Montrer que f est la somme d'une série entière autour de 0.

95. ★ Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a) Déterminer les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

96. * Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant des moments à tous ordres.
a) Montrer que la fonction génératrice de X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$.
b) On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{k!}$. Déterminer la loi de X.

97. * Soient $N \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, N\}$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de facteurs premiers distincts de X. Si p est un nombre premier, on note Y_p la variable aléatoire $\mathbf{1}_{(p|X)}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
a) i) Calculer $\mathbb{E}(Y_p)$ et $\mathbb{E}(Y_p\, Y_q)$ où p et q sont deux nombre premiers distincts.
ii) Montrer que $\mathbb{E}(Y) \geqslant \displaystyle\sum_{p \in \mathcal{P},\ p \leqslant N} \frac{1}{p} - 1$ (la somme portant sur les nombres premiers p inférieurs à N).
iii) Montrer que $V(Y) \leqslant 2 + 3\,\mathbb{E}(Y)$.
b) i) Montrer que $\displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P},\ p \leqslant N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
ii) Montrer que la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ n'est pas sommable.
iii) Soit $\varepsilon > 0$. Donner la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}\big(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \varepsilon\, \mathbb{E}(Y)\big)$.

Mines-Ponts – PSI

98. * Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Peut-on toujours trouver des sous-espaces de E stables par u de n'importe quelle dimension $k \leqslant n$? Qu'en est-il lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire ?

99. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Centrale – MP

100. * Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini, de cardinal n. On note $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de $(G, \cdot)$ vers $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
a) Dans cette question, on suppose que n est premier. Montrer que G est cyclique, puis que $|\hat{G}| = n$.
Dans les trois questions suivantes, le groupe G est supposé abélien et sa loi de groupe est notée additivement. On appelle E l'ensemble des fonctions de G vers $\mathbb{C}$.
b) Munir E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
c) Soit $a \in G$. On définit $T_a \in \mathcal{L}(E)$ par $\forall (f, x) \in E \times G$, $T_a(f)(x) = f(x + a)$. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les T_a.

d) En déduire que $|\hat{G}| = n$.
e) Montrer par un exemple que ce résultat tombe en défaut lorsque G n'est plus supposé abélien.

101. ★ ***a)*** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}$ si et seulement si M est nilpotente. Est-ce toujours vrai pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices dont le spectre est inclus dans $\{0\}$. Montrer que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$. Cette majoration est-elle optimale ?

102. ★ On note $(p_k)_{k \geqslant 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers et, pour $n \geqslant 1$, $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $d(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n. Pour chaque $n \geqslant 1$, on se donne une variable aléatoire N_n suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, \pi(n)\}$, on note X_i la variable aléatoire donnant l'exposant de p_i dans la décomposition de N_n en facteurs premiers. Donner la loi de X_i.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k}$. Montrer que $\mathbb{E}\big(d(N_n)\big) = H_n + O(1)$ et que $V\big(d(N_n)\big) = O(H_n)$.
c) On admet que $H_n \sim \ln(\ln n)$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer $\mathbb{P}\left(1 - \epsilon \leqslant \dfrac{d(N_n)}{\ln \ln n} \leqslant 1 + \epsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.