DM 15 : énoncé

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on note, $\forall n \geq n_0$, $P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$.

Si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge, on notera $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

Première partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1) On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Montrer que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

2) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

3) a) Vérifier que, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = 1 + \frac{1}{\text{ch}t}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$v_1 = x \text{ et, } \forall n \geq 1, \ \ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_1 = \text{ch}\theta$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right)$, d'abord en fonction de θ, puis en fonction de x.

4) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

a) Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ converge.

Montrer que la série $\sum(\ln(1+u_n)-u_n)$ converge.

En déduire que $\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\Big)$ converge lorsque N tend vers $+\infty$.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et qu'il appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ diverge.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et qu'il vaut 0.

c) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)$.

Seconde partie :

1) a) Montrer que, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n}dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

c) En déduire que, pour tout $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}(\sin t)^{2n}dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n}dt}$ tend vers 0.

Soit $\varphi\ :\ [0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue telle que $\varphi(\frac{\pi}{2})\neq 0$.

d) On admettra que la continuité de φ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ implique que φ est bornée. On admettra que la continuité de φ en $\frac{\pi}{2}$ est équivalente à la phrase suivante :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha\in\Big]0,\frac{\pi}{2}\Big[,\ \forall x\in\Big[\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}\Big],\ |\varphi(x)-\varphi(\frac{\pi}{2})|\leq\varepsilon.$$

Montrer que, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)(\sin t)^{2n}dt \sim \varphi(\frac{\pi}{2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n}dt.$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n}dt$.

a) Pour $n\geq 1$, montrer que $I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$.

b) Calculer I_n en fonction de n puis montrer que lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$I_n\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

3 a) Calculer la limite de la suite $\left(\int_0^{p\pi} e^{-2t}\, dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}\, dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera u_n la limite de cette suite.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = e^{-2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)(\sin t)^{2n}dt$, où φ est une application indépendante de n que l'on précisera.

d) En déduire que lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{1}{2\text{sh}\pi}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

4 a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que $u_n = n \lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\cos t)(\sin t)^{2n-1}dt$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $n(2n-1)u_{n-1} = 2(1+n^2)u_n$.

c) Montrer que $u_n = \dfrac{(n!)^2 I_n}{\pi \prod\limits_{k=1}^{n}(1+k^2)}$.

d) En déduire que $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$ existe et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi}.$$

Troisième partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1) Montrer que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left|1+\dfrac{i}{n}\right|$ existe et donner sa valeur.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$.

Montrer par récurrence que $\left|-1+\prod\limits_{k=1}^{n}(1+z_k)\right| \leq -1+\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|z_k|)$: on commencera par l'établir pour $n=1$ et $n=2$.

3) Lorsque $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on dit que c'est une suite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall q \in \mathbb{N}\ |z_{n+q} - z_n| \leq \varepsilon.$$

On admettra qu'une suite de complexes est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, et telle que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{i\theta_n}$, avec $\theta_n \in]-\pi, \pi[$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

5) Le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ existe-t-il ?