Corr. 1 Analyse d'un champ de vecteur

Do it yourself !

Corr. 2 Un petit calcul

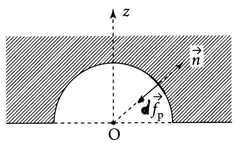
Do it yourself !

Corr. 3 Bases de la statique des fluides

Do it yourself !

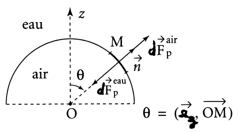
Corr. 4 Forces de pression sur une demi-sphère

1. Les efforts de pression sont équivalents à une répartition surfacique continue de forces dont les supports passent par le point O. Leur moment en O y est nul : ces efforts sont donc réductibles à une force unique $\vec{F_p} = F_{p,z}\,\vec{e_z}$ appliquée en O (il y a symétrie de révolution autour de l'axe Oz). On prévoit que $F_{p,z} < 0$.



L'expression de $dF_{p,z}$ pour un élément dS de surface en M est

$$dF_{p,z} = \Big[\underbrace{P_0\,dS\,\vec{n}}_{\text{côté air}}\ \underbrace{-P(M)\,dS\,\vec{n}}_{\text{côté eau}}\Big].\vec{e_z}$$



Ainsi $$F_{p,z} = \iint_{\text{hémisp.}} [P_0 - P(M)]\cos\theta\,dS$$

La symétrie de révolution assure que $P(M) = P(\theta)$ donc on peut intégrer sur une couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$ et il reste

$$F_{p,z} = 2\pi\int_0^{\pi/2}[P_0 - P(\theta)]\cos\theta\,a^2\sin\theta\,d\theta$$

La loi de l'hydrostatique intégrée entre M et un point de la surface de l'eau, *sachant que l'eau est incompressible*, donne

$$P(M) - P_0 = \rho_0\,g\,(H - a\cos\theta)$$

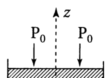
On reporte ce résultat dans l'intégrale précédente et on achève le calcul. On trouve

$$\boxed{\vec{F_p} = -\pi a^2\rho_0 g\left(H - \frac{2a}{3}\right)\vec{e_z}}$$

L'orientation de cette force est correcte. Ouf !

2. La force s'exerçant sur la demi-sphère s'écrit

$$\vec{F_p} = \vec{F}_{p\,\text{air}} + \vec{F}_{p\,\text{eau}}$$



Pour déterminer $\vec{F}_{p\,\text{eau}}$, traduisons l'équilibre de la colonne d'eau (partie hachurée sur le schéma) surmontant $\mathscr{S}$. On a, en désignant par M la masse correspondante de cette colonne :

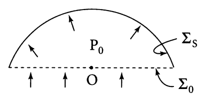
$$\vec{0} = M\vec{g} + \underbrace{-P_0\pi a^2\vec{e_z}}_{\text{air sur surf. libre}}\ \underbrace{-\vec{F}_{p\,\text{eau}}}_{\text{action réaction}}$$

la résultante des forces latérales de pression étant nulle. Or,

$$M = \rho_0\left(\pi a^2 H - \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi a^2\right) = \pi\rho_0 a^2\left(H - \frac{2a}{3}\right)$$

soit $$\vec{F}_{p\,\text{eau}} = -\pi\rho_0 g a^2\left(H - \frac{2a}{3}\right)\vec{e_z} - P_0\pi a^2\vec{e_z}$$

Il reste à exprimer la résultante $\vec{F}_{p\,\text{air}}$ des forces de pression dues à l'air. P_0 étant à répartition uniforme, cette force sur Σ_s est la même que celle qui s'exercerait sur le disque Σ_0, de centre O et de rayon a (en effet, cela vient de la force totale nulle sur tout système fermé entouré d'une pression uniforme ; voir $\oint\!\!\oint d\vec{S} = \vec{0}$ ou le flux conservatif du champ uniforme de forces de pression).



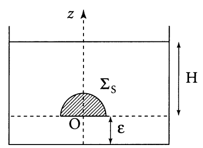
Par conséquent,

$$\vec{F}_{p\,\text{air}} = P_0\pi a^2\vec{e_z}$$

Finalement, en combinant $\vec{F}_{p\,\text{eau}}$ et $\vec{F}_{p\,\text{air}}$, on retrouve

$$\boxed{\vec{F_p} = -\pi a^2\rho_0 g\left(H - \frac{2a}{3}\right)\vec{e_z}}$$

3. **Attention**, pour appliquer le théorème d'Archimède, il est nécessaire que le corps considéré soit **entièrement** entouré de fluides en équilibre hydrostatique dans le référentiel considéré.



Considérons alors un solide (demi-boule de rayon a) immergé dans l'eau, à une profondeur H et dont la face plane se trouverait à une distance ε du fond du récipient.
D'après le théorème d'Archimède, on aurait pour la résultante des forces de pression exercées par l'eau

$$\vec{F}_{p\,\text{eau}} = \rho_0\,\frac{2}{3}\pi a^3 g\,\vec{e_z}$$

Or, dans cette force se trouve la contribution suivante des forces de pression sur la base plane de la demi-boule :

$$\vec{F}_{p\,\text{base}} = P(O)\,\pi a^2\vec{e_z}$$

avec $P(O) = P_0 + \rho_0 g H$ (loi de l'hydrostatique en fluide incompressible). Par soustraction, on en déduit la seule contribution des forces de pression sur la partie Σ_S :

$$\vec{F}_{p\,\text{eau}} = -P_0\pi a^2\vec{e_z} - \pi a^2\rho_0 g\left(H - \frac{2a}{3}\right)\vec{e_z}$$

Il ne reste qu'à faire tendre ε vers 0 et à finir le raisonnement comme à la question précédente...

Remarque: On pouvait remarquer que la pression P_0 ne devait pas intervenir puisqu'elle s'exerce également en dessous de la surface bombée ; il était donc possible, dès le départ, de ne considérer que le champ de pression de l'eau, référencé à P_0, soit $p(M) = P(M) - P_0$ (surpression). Il suffit alors, dans l'expression précédente de $\vec{F}_{p\,\text{eau}}$ d'éliminer le terme en P_0 pour aboutir à $\vec{F_p}$!

Corr. 5 Modèles de l'atmosphère

1. La loi de l'hydrostatique $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{F}_{\text{vol}}$ en ne tenant compte que de la pesanteur et projetée sur l'axe vertical *ascendant* (attention aux signes !!!) donne

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)\,g$$

On suppose raisonnablement ici g uniforme (sinon voir question 5) mais la densité varie ! On connaît son évolution via la loi du gaz parfait

$$P(z) = \rho(z)\,\frac{RT_1}{M}$$

La température étant uniforme, la combinaison des deux équations précédentes donne

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_1}P$$

On intègre cette équation différentielle à variables séparables, d'où

$$\boxed{P(z) = P_1\,e^{-z/H_1}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_1 = \frac{RT_1}{Mg} = 8{,}4\ \text{km}}$$

2. Maintenant, l'équation différentielle à variables séparables à intégrer est

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{R(T_1 + \lambda z)}P$$

d'où $$\boxed{P(z) = P_1\left(1 + \frac{\lambda z}{T_1}\right)^{-\frac{Mg}{\lambda R}}}$$

3. Si $z \ll H_1$ et si $z \ll T_1/|\lambda| = 44$ km, i.e. si $z \ll H_1$, les développements limités des deux résultats précédents conduisent au même résultat :

$$\boxed{P(z) \simeq P_1\left(1 - \frac{z}{H_1}\right)}$$

Il s'agit d'une évolution linéaire décroissante que l'on aurait obtenu en supposant directement ρ uniforme (valable sur une faible hauteur).

4. On obtient respectivement, à 500 mètres d'altitude, des pressions de $94{,}23.10^{-2}$ bar, $94{,}20.10^{-2}$ bar et $94{,}06.10^{-2}$ bar (en prenant $g = 9{,}81$ m.s^{-1}, $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{-1} et $T_1 = 288$ K). Cela correspond à un écart relatif maximal $\Delta P/P$ de 0,18 %. L'hypothèse de ρ uniforme reste cohérente pour évaluer la pression à une telle altitude.

5. La loi de gravitation de NEWTON permet d'obtenir $g(z)$ puisque le poids d'une particule de masse m est

$$\frac{GM_T\,m}{(R_T + z)^2} = m\,g(z)$$

Ainsi, $$g(z) = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2} = g_0\,\frac{{R_T}^2}{(R_T+z)^2}$$

En menant l'intégration de la loi de l'hydrostatique de la même manière qu'à la question 1 avec $g(z)$ (les variables sont toujours séparables), on déduit en faisant attention aux constantes d'intégration (comme d'hab') :

$$\boxed{P(z) = P_1\exp\left[-\frac{M g_0 R_T}{RT_1(R_T + z)}\,z\right]}$$

Un traitement numérique non demandé permettrait de comparer plus avant ce résultat avec celui de la première question...

Corr. 6 Absorption de neutrons

Do it yourself !

Corr. 7 Statique d'une sphère flottant sur un liquide

1. L'immersion est totale si

$$4\pi\rho_s\frac{R^3}{3} - 4\pi\rho_l\frac{R^3}{3} \geqslant 0$$

soit pour $\boxed{\alpha \geqslant 1}$

Il y a demi-immersion si

$$4\pi\rho_s\frac{R^3}{3} - 2\pi\rho_l\frac{R^3}{3} = 0$$

soit pour $\boxed{\alpha_{1/2} = 0{,}5}$

2. La sphère est immobile si

$$4\pi\rho_s\frac{R^3}{3} - \rho_l V_i = 0$$

Le volume immergé V_i vaut :

$$V_i = 2\pi\int_{R-X}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r\,dr = \pi X^2\left(R - \frac{X}{3}\right)$$

On en déduit l'équation $4\rho_s R^3 = X^2(3R - X)\rho_l$ et on aboutit à la forme de l'énoncé en prenant

$\boxed{b = 3R}$ et $\boxed{c = 4\alpha R^3}$

3. En tenant compte de la poussée d'ARCHIMÈDE, le théorème du centre de masse C sur la sphère s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3\ddot{x}\,\vec{e_x} = -\rho_l\,\Delta V_i\,g\,\vec{e_x}$$

si x désigne le déplacement du centre de masse à partir de sa position de repos. Or,

$$\Delta V_i = \pi(2XR - X^2)\,\Delta X = \pi X(2R - X)\,x$$

donc $$\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3\ddot{x} = -\rho_l\,x\,\pi X(2R - X)\,g$$

Finalement, $\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0}$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}}}$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique stable : la sphère oscille verticalement avec la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Corr. 8 Équation de diffusion de neutrons

Cet exercice se trouve dans cette feuille de TD car la méthode de résolution est proche du bilan de charge vu en cours. De plus, son intérêt sera encore plus évident lorsqu'on aura traité la diffusion thermique où les méthodes utilisées sont encore analogues...

1. Considérons une zone où la densité de neutrons est la plus élevée. Cette concentration va avoir tendance à « s'étaler » en raison du second principe de la thermodynamique (imaginez que tous les neutrons se regroupent en un même point, ce serait hallucinant !). Cet étalement est décrit par le vecteur densité de courant de particules $\overrightarrow{j}_n$ qui est bien orienté des zones de densités élevées vers les zones de densités faibles (puisque **opposé** au gradient de n). Finalement, le signe $-$ dans la loi de Fick traduit **l'irréversibilité** du phénomène de diffusion de particules.

2. Considérons un neutron de vitesse v. Avant d'être absorbé, celui-ci parcourt la distance λ_a. Il lui faut donc pour être absorbé un laps de temps $\Delta t = \lambda_a/v$.
Un volume V contient nV neutrons qui seront absorbés au bout du temps $\Delta t = \lambda_a/v$. Il y a par conséquent nV absorption pendant Δt dans ce volume. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{n\mathrm{V}}{\mathrm{V}\,\Delta t} = \frac{n\,v}{\lambda_a}}$$

3.a. On considère un volume (V) **fixe** quelconque délimité par une surface fermée (S). Le nombre de neutrons contenus à l'instant t dans ce volume est

$$\mathrm{N}(t) = \iiint_{(\mathrm{V})} n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$$

L'augmentation de ce nombre par unité de temps est, par bilan,

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\oint\!\!\!\oint_{(\mathrm{S})} \overrightarrow{j}_n.\overrightarrow{\mathrm{dS}}_{\mathrm{ext}}}_{\text{flux entrant}} + \underbrace{\iiint_{(\mathrm{V})} \mathrm{S}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{taux créé}} - \underbrace{\iiint_{(\mathrm{V})} \mathrm{C}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{taux absorbé}}$$

Le volume (V) étant fixe, on rentre la dérivée temporelle et on en déduit l'équation intégrale bilan de particules :

$$\iiint_{(\mathrm{V})} \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = -\oint\!\!\!\oint_{(\mathrm{S})} \overrightarrow{j}_n.\overrightarrow{\mathrm{dS}}_{\mathrm{ext}} + \iiint_{(\mathrm{V})} [\mathrm{S}(\mathrm{M},t) - \mathrm{C}(\mathrm{M},t)]\,\mathrm{d}\tau$$

Ensuite, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, puis en remarquant que le raisonnement est valable pour tout volume (V) fixe, on déduit la loi locale

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{j}_n = \underbrace{\mathrm{S}(\mathrm{M},t) - \mathrm{C}(\mathrm{M},t)}_{\text{Création de part. par m}^3\text{ et par s}}}$$

Il s'agit d'une loi locale de conservation très importante dont on aura l'occasion de reparler. Il ne reste qu'à remplacer C et l'expression de $\overrightarrow{j}_n$ grâce à la loi de Fick, d'où l'équation de diffusion avec sources :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \mathrm{D}\,\Delta n + \mathrm{S} - \frac{n\,v}{\lambda_a}}$$

3.b. Puisqu'on ne dispose pas du formulaire d'analyse vectorielle, on ne peut pas parachuter l'expression du laplacien. **La seule façon de procéder, et c'est archi-classique, est de redémontrer l'équation précédente par un bilan local respectant les symétries du problème**.

D'après la symétrie sphérique, $n(r,t)$ impose $\overrightarrow{j}_n$ radial avec $\overrightarrow{j}_n = j_n(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$. On effectue un bilan de neutrons sur le volume délimité par les deux sphères de rayons r et $r+\mathrm{d}r$ (pour profiter de la symétrie sphérique). Le nombre de neutrons dans ce volume à l'instant t est

$$\mathrm{N}'(t) = n(r,t)\,\underbrace{4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r}_{\text{volume}}$$

Le nombre de neutrons créés par unité de temps dans ce volume est :

$$\frac{\mathrm{dN}'}{\mathrm{d}t} = \underbrace{j_n(r,t)\,4\pi\,r^2}_{\text{flux entrant en } r} - \underbrace{j_n(r+\mathrm{d}r,t)\,4\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2}_{\text{flux sortant en } r+\mathrm{d}r} + \underbrace{\mathrm{S}(r,t)\,4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r}_{\text{taux créé dedans}} - \underbrace{\mathrm{C}(r,t)\,4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r}_{\text{taux absorbé dedans}}$$

Ainsi, on tire l'équation

$$r^2\,\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{\frac{j_n(r,t)\,r^2 - j_n(r+\mathrm{d}r,t)\,(r+\mathrm{d}r)^2}{\mathrm{d}r}}_{-\frac{\partial r^2\,j_n}{\partial r}} + \mathrm{S}(r,t)\,r^2 - \mathrm{C}(r,t)\,r^2$$

Finalement, on trouve l'équation bilan en symétrie sphérique (et vous pouvez vérifier que ça marche avec le formulaire pour l'opérateur divergence par rapport à la question précédente) :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r^2\,j_n}{\partial r} + \mathrm{S}(r,t) - \mathrm{C}(r,t)}$$

Il ne reste qu'à remplacer $\overrightarrow{j_n} = -\mathrm{D}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n(r,t) = -\mathrm{D}\,\frac{\partial n}{\partial t}\,\overrightarrow{e_r}$ pour trouver

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mathrm{D}}{r^2}\,\frac{\partial r^2\,\frac{\partial n}{\partial r}}{\partial r} + \mathrm{S}(r,t) - \mathrm{C}(r,t)}$$

Vous pouvez vérifier que ça marche avec le formulaire pour l'opérateur laplacien par rapport à la question précédente… Une bonne façon de vous assurer que vous avez tout compris et de reprendre cette question pour une symétrie cylindrique cette fois…