Planche de colle

Exercice de colle

Soient p et q deux entiers strictement positifs, puis A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^T A = B^T B.$$

1. Comparer $\mathrm{Ker}(A)$ à $\mathrm{Ker}(B)$.
2. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire habituel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que pour tous vecteurs X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
   $$(AX \mid AY) = (BX \mid BY).$$
3. Soient E un espace euclidien, puis $(e_1, \cdots, e_r)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ deux bases de E telles que :
   $$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2,\ (e_i \mid e_j) = (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j).$$
   Montrer qu'il existe $h \in O(E)$ tel que :
   $$\forall i \in [\![1,r]\!],\ h(e_i) = \varepsilon_i.$$
4. Montrer qu'il existe $U \in O_p(\mathbb{R})$ tel que :
   $$A = UB.$$

1. Soit X dans $\mathrm{Ker}(A)$. Alors,
   $$\|AX\|^2 = 0$$
   ce qui se traduit par :
   $$(AX)^T AX = 0$$
   ou encore : $X^T A^T AX = 0$, et donc $X^T B^T BX = 0$, puis :
   $$\|BX\|^2 = 0.$$
   Le vecteur BX est nul :
   $$\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(B).$$
   En inversant les rôles, on a égalité des noyaux.
2. Si X et Y sont deux vecteurs-colonne, alors :
   $$(AX \mid AY) = X^T A^T AY = X^T B^T BY = (BX \mid BY).$$

3. Il existe déjà une seule application linéaire $h \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ h(e_i) = \varepsilon_i,$$

car une application linéaire est uniquement déterminée sur une base.
Il reste à montrer que l'endomorphisme h est orthogonal.
Soit x un vecteur de E.
On pose $x = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot e_i$. Par linéarité de h :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot \varepsilon_i.$$

Or, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\ x_j\ (e_i \mid e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\ x_j\ (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot \varepsilon_i \right\|^2 \\ &= \|h(x)\|^2. \end{aligned}$$

L'endomorphisme h conserve la norme, donc est orthogonal.

4. D'après la première question et le théorème du rang, on sait que les matrices A et B ont le même rang.
Plus précisément, en posant $s = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ puis $(\chi_1, \cdots, \chi_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$, on complète cette famille libre en une base $(\chi_1, \cdots, \chi_s, \rho_1, \cdots, \rho_r)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose pour tout entier i entre 1 et r,

$$e_i = A(\rho_i) \text{ et } \varepsilon_i = B(\rho_i).$$

On sait que les familles $(e_1, \cdots, e_r)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ sont des bases respectives de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$.
On prend une b.o.n $(\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ de $\mathrm{Im}(A)^\perp$ et une b.o.n $(\mu_1, \cdots, \mu_s)$ de $\mathrm{Im}(B)^\perp$.
On dispose de deux bases à savoir : $\mathscr{A} = (e_1, \cdots, e_r, \lambda_1, \cdots, \lambda_s) = (a_1, \cdots, a_n)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \mu_1, \cdots, \mu_s) = (b_1, \cdots, b_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On se donne deux entiers i et j entre 1 et n.
Si i et j sont entre 1 et r, alors :

$$(a_i \mid a_j) = (A(\rho_i) \mid A(\rho_j)) = (B(\rho_i) \mid B(\rho_j)) = (b_i \mid b_j).$$

Si i est entre 1 et r et j est strictement supérieur à r, alors les vecteurs a_i et a_j sont orthogonaux, et de même pour b_i et b_j.

Si i et j sont strictement supérieurs à r, alors :

$$(a_i \mid a_j) = \delta_{i,j} = (b_i \mid b_j).$$

Il existe donc un endomorphisme orthogonal $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ h(b_i) = a_i.$$

On note U la matrice orthogonale représentant l'endomorphisme orthogonal h dans la base canonique (orthonormale).
On va montrer que :

$$A = UB.$$

Il suffit de le vérifier sur une base adaptée, en l'occurrence la base $(\chi_1, \cdots, \chi_s, \rho_1, \cdots, \rho_r)$.
Si i est un entier entre 1 et s, alors le vecteur χ_i est dans $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$, donc :

$$UB(\chi_i) = U(0) = 0 = A(\chi_i).$$

Si j est un entier entre 1 et r, alors :

$$UB(\rho_j) = U(b_j) = a_j = A(\rho_j).$$

On obtient une matrice U convenable.