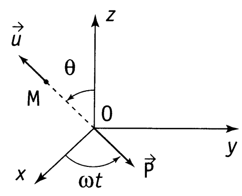
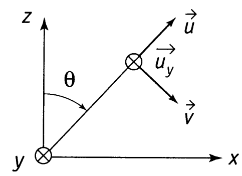
T.D. EM_{12} : Rayonnement dipolaire

Exercice 1 Dipôle tournant





Un dipôle électrique variable $\overrightarrow{p}(t)$ situé en O rayonne, à grande distance r, un champ électromagnétique

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\ddot{\overrightarrow{p}}^{*} \wedge \overrightarrow{u}\right) \wedge \overrightarrow{u} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c}\left(\ddot{\overrightarrow{p}}^{*} \wedge \overrightarrow{u}\right)$$

où
$$\ddot{\overrightarrow{p}}^{*} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}(t^*) \quad \text{avec} \quad t^* = t - \frac{r}{c} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r} = r\,\overrightarrow{u}$$

Le dipôle considéré (en O) est un dipôle tournant dans le plan Oxy avec

$$p_x = p_0 \cos\omega t \qquad p_y = p_0 \sin\omega t \qquad p_z = 0$$

1. Calculer les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ rayonnés en un point M du plan Oxz, repéré par r et θ, en explicitant leurs composantes dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_y})$.
   Quelle remarque peut-on faire ?
2. Préciser la polarisation du champ rayonné pour θ variant de 0 à π.
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle ?

Exercice 2 Interprétation classique de l'effet ZEEMAN

Un électron est lié élastiquement au noyau d'un atome par une force de rappel $-k\,\overrightarrow{r}$. On le plonge dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \mathrm{B}_0\,\overrightarrow{e_z}$. On suppose que ce champ n'est pas intense, c'est-à-dire que $\omega_0 \gg \omega_c$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\omega_c = e\mathrm{B}_0/m$.

1. Avec des conditions initiales quelconques, montrer que le mouvement de l'électron est la superposition d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence ν_0' selon $(\mathrm{O}z)$ et de deux mouvements circulaires en sens inverses de fréquences $\nu_0' \pm \Delta\nu$ dans $(x\mathrm{O}y)$. Déterminer ν_0' et $\Delta\nu$.
2. Montrer qu'un observateur à distance grande par rapport à la longueur d'onde reçoit deux ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques polarisées circulairement gauche et droite s'il se trouve dans la direction $(\mathrm{O}z)$.
3. Montrer qu'un observateur à distance grande par rapport à la longueur d'onde reçoit trois ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement dont on précisera la direction de polarisation s'il est dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.
4. Quel intérêt pratique voyez-vous en conséquence des résultats précédents ?

Exercice 3 Rayonnement d'une antenne demi-onde

L'expression du champ de rayonnement $(r \gg \lambda)$ d'un dipôle placé à l'origine du système de coordonnées obtenue dans le cours est :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(\overrightarrow{r},t) = c\,\overrightarrow{\mathrm{B}}(\overrightarrow{r},t) \wedge \overrightarrow{e_r} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}}(\overrightarrow{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\,\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t-r/c}$$

Une antenne est constituée d'un fil d'épaisseur négligeable, de centre O et de longueur L, coïncidant avec l'axe $(\mathrm{O}z)$, auquel un système électronique impose un courant oscillant $i(z,t) = \mathrm{I}_0\cos(\pi z/\mathrm{L})\cos\omega t$, soit en notation complexe $\underline{i}(z,t) = \mathrm{I}_0\cos(\pi z/\mathrm{L})\exp(\mathrm{j}\omega t)$.

On observe le rayonnement de cette antenne en un point M, repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ).

1. Expliquer l'expression du courant $i(z,t)$ dans l'antenne. Indiquer la relation liant la longueur L de l'antenne et la longueur d'onde λ associée au courant $i(z,t)$.
2. Dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$, peut-on supposer aussi que la longueur d'onde est très grande devant les dimensions de la source, comme dans le cas du rayonnement dipolaire ? Déterminer le champ $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{E}}$ créé en M par un élément de longueur $\mathrm{d}z$ situé en un point P d'abscisse z de l'antenne, puis son amplitude complexe $\mathrm{d}\underline{\mathrm{E}}$. On admettra que l'élément de longueur $\mathrm{d}z$ d'antenne est équivalente à un dipôle, tel que $\mathrm{d}\dot{\overrightarrow{p}} = \dfrac{\partial i}{\partial t}\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$.
3. Calculer le champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ rayonné au point M.
4. Montrer que le vecteur de POYNTING moyen peut se mettre sous la forme $\mathrm{K}\,f(\theta)\,\overrightarrow{r}/r^3$ où $f(\theta)$ est une fonction de valeur maximale 1 appelée indicatrice de rayonnement de l'émetteur.
5. Donner l'allure du diagramme de rayonnement de l'antenne.
6. Calculer la puissance moyenne totale rayonnée $\langle\mathscr{P}\rangle$, ainsi que la résistance de rayonnement R de l'antenne, définie par $\langle\mathscr{P}\rangle = \mathrm{R}\,\mathrm{I}_0^2/2$. Calculer I_0 pour une antenne qui rayonne une puissance moyenne de 1 kW.

Exercice 4 Incidence de Brewster

On constate expérimentalement qu'après réflexion sur un diélectrique (surface d'un lac, piste de ski, vitre, carrelage, etc) la lumière naturelle est essentiellement polarisée rectilignement, avec une direction parallèle au plan de réflexion. On constate expérimentalement que la polarisation par réflexion est d'autant meilleure que l'on est proche d'un angle d'incidence particulier : l'angle de BREWSTER, noté i_B.

L'interprétation est faisable rigoureusement par le calcul (réflexion d'une onde électromagnétique, se propageant dans un milieu ①, en incidence sur un diélectrique ② ; c'est « malheureusement » hors-programme). On va se contenter ici d'une approche du phénomène « avec les mains ».

1. Soit une onde incidente *polarisée dans le plan d'incidence*. En supposant qu'elle pénètre dans le milieu ② en se réfractant et qu'elle y excite des dipôles oscillants dont le rayonnement crée l'onde réfléchie dans le milieu ①, cherchez une condition pour que ces dipôles ne rayonnent pas dans la direction de l'onde réfléchie.
2. En déduire que l'expression théorique de l'angle d'incidence de BREWSTER est $i_B = \text{Arctan}\,\frac{n_2}{n_1}$. Préciser sur un schéma l'état de polarisation obtenu lorsqu'une lumière naturelle se réfléchit avec l'angle i_B sur un isolant.
3. Faire l'application numérique pour les interfaces air-verre et air-eau. Commentaire ?
4. Proposez une méthode simple permettant de connaître la direction de l'axe de polarisation d'un polariseur.

Exercice 5 Durée de vie d'un état excité d'un atome

On adopte ici un modèle planétaire de l'atome pour lequel l'électron d'un atome d'hydrogène est assimilé à une particule de masse m et de charge $-e$ qui gravite sur une trajectoire circulaire de rayon R autour d'un proton, considéré comme infiniment massif, fixe à l'origine O.

1. Exprimer en fonction de R, m et e, la vitesse v, l'accélération a de l'électron, la période T et l'énergie mécanique $\mathscr{E}$ du système. Les évaluer pour $R = 53$ pm, et discuter le caractère relativiste ou non de l'électron.
2. À une distance r très grande devant l'extension spatiale R de son mouvement, une particule non relativiste, de charge q et d'accélération $\overrightarrow{a}$, émet un champ électromagnétique de rayonnement, dont le champ magnétique est

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\overrightarrow{a}(t-r/c)\wedge\overrightarrow{e_r}}{r\,c}$$

Discuter la polarisation de l'onde émise dans le plan de l'orbite de l'électron ou sur son axe de révolution.

3. Établir la formule de LARMOR donnant la puissance rayonnée par l'électron décrivant sa trajectoire circulaire.
4. Quelle est la conséquence de cette émission de rayonnement sur le mouvement de l'électron ? Discuter la rapidité de cette évolution en évaluant le rapport entre l'énergie rayonnée pendant une révolution et l'énergie mécanique obtenue à la question 1.
5. En utilisant les conclusions précédentes, proposer une loi d'évolution du rayon R de la trajectoire électronique en fonction du temps. En déduire une évaluation de la durée de vie τ du niveau excité $2p$ de l'atome d'hydrogène, sachant que l'atome retombe, par émission de rayonnement, dans l'état $1s$. On rappelle que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la loi de quantification $\mathscr{E}_n = -\frac{13,6}{n^2}$ eV, où n désigne le nombre quantique principal. Comparer la valeur obtenue à la valeur expérimentale de ce temps de vie qui est $\tau = 1,6$ ns.

Exercice 6 Rayonnement d'un dipôle magnétique oscillant

Dans la jauge de LORENTZ, les potentiels scalaire V et vecteur $\overrightarrow{A}$ créés à grande distance par un dipôle magnétique de moment dipolaire $\overrightarrow{M}(t)$ variable, placé à l'origine du système de coordonnées, sont :

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\overrightarrow{M}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\dot{\overrightarrow{M}}(t-r/c)}{r\,c}\right)\wedge\overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad V = 0$$

On donne le rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{G}$ en coordonnées sphériques (r,θ,φ) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{G} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,G_\varphi) - \frac{\partial G_\theta}{\partial\varphi}\right]\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,G_\varphi) + \frac{\partial G_r}{\partial\varphi}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e_\varphi}$$

1. Soit un dipôle magnétique oscillant dont le moment dipolaire est, en notation complexe, $\underline{\overrightarrow{M}} = M_0\exp(j\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$. Exprimer le champ électromagnétique créé par ce dipôle dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$). Commenter la structure obtenue et la comparer à celle du champ rayonné par un dipôle électrique oscillant de la forme $\underline{\overrightarrow{p}} = p_0\exp(j\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$.
2. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle magnétique oscillant ?
3. Utilisant le modèle planétaire d'un atome d'hydrogène où l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon $a = 53$ pm à la vitesse $v = c/137$ (orbitale $1s$), évaluer les ordres de grandeurs des moments dipolaires électrique ou magnétique d'un atome. Comparer alors les importances respectives des rayonnements de ces deux types de dipôles, à fréquence d'oscillation identique.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Le vecteur de Poynting moyen est $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{\mu_0\,\omega^4\,{p_0}^2}{32\,\pi^2\,c\,r^2}\,[\cos^2\theta+1]\,\overrightarrow{u}$ *et la puissance moyenne rayonée est* $\langle\mathscr{P}\rangle = \frac{\mu_0\,\omega^4\,{p_0}^2}{6\pi\,c}$.

Exercice 2

Pas d'indications, l'énoncé étant pour le moins détaillé…

Exercice 3

1. *Onde stationnaire et* $L = \lambda/2$.
2. $d\vec{\underline{E}} = j\,\frac{\mu_0 I_0 \omega}{4\pi}\,\frac{\sin\theta\,\cos(\pi z/L)}{r}\,e^{j\omega(t-r/c)}\,e^{j\omega z\cos\theta/c}\,dz\,\vec{e_\theta}$.
3. $\vec{E} = -\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r}\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\,\sin(\omega(t-r/c))\,\vec{e_\theta}$.
4. $K = \frac{\mu_0 c {I_0}^2}{8\pi^2}$ *et* $f(\theta) = \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2$.
5. *Cela revient à représenter* $\rho = K\,f(\theta)$ *en coordonnées polaires (en plaçant correctement* θ *!).*
6. *Le calcul fait intervenir une intégrale sur une fonction de* θ *qui ne peut être calculée que numériquement. On trouve* $R = 73\ \Omega$ *et* $I_0 = 5,2$ *A.*

Exercice 4

Pas d'indication.

Exercice 5

1. $v/c = 1/137 \ll c$, $a = 9.10^{22}$ *m.s*$^{-2}$, $T = 1,52.10^{-16}$ *s et* $\mathscr{E} = -13,6$ *eV (quel hasard…).*
2. *Si vous avez du mal, décomposez le mouvement de l'électron sur une base de deux mouvements oscillants orthogonaux…*
3. $\mathscr{P} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2a^2}{3c^3}$.
4. *Chute lente de l'électron sur le noyau (*$\mathscr{P}T/\mathscr{E} \simeq 10^{-6}$*).*
5. $R(t)^3 = R(0)^3 - \frac{4}{m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 t$ *et* $\tau = \frac{m^2c^3e^2}{128\pi\varepsilon_0}\,({\mathscr{E}_1}^{-3} - {\mathscr{E}_2}^{-3}) \simeq 10^{-9}$ *s.*

Exercice 6

1. $\vec{\underline{E}} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{\omega^2 M_0 \sin\theta}{r}\,e^{j\omega(t-r/c)}\,\vec{e_\varphi}$ *et* $\vec{\underline{B}} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\,\frac{\omega^2 M_0\sin\theta}{r}\,e^{j\omega(t-r/c)}\,\vec{e_\theta}$.
2. $\mathscr{P}_{\text{moy}} = \dfrac{\mu_0\omega^4{M_0}^2}{12\pi c^3}$.
3. *Le rayonnement dipolaire électrique domine…*