Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Conjecture ABC et grand théorème de Fermat pour les polynômes

1. Soient A, B, C trois polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que $A+B+C=0$ et $A \wedge B = 1$, dont les décompositions sur $\mathbb{C}$ sont données (avec des notations évidentes) par

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{a} (X - a_i)^{\alpha_i}, \qquad B = \mu \prod_{j=1}^{b} (X - b_j)^{\beta_j} \qquad \text{et} \qquad C = \nu \prod_{k=1}^{c} (X - c_k)^{\gamma_k}.$$

On introduit le *noyau* K du produit ABC défini par

$$K = \prod_{i=1}^{a} (X - a_i) \prod_{j=1}^{b} (X - b_j) \prod_{k=1}^{c} (X - c_k).$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on note $r(P)$ le nombre de racines distinctes de P.

On considère enfin les fractions rationnelles

$$F = \frac{A}{C}, \qquad G = \frac{B}{C}, \qquad U = K\frac{F'}{F} \qquad \text{et} \qquad V = K\frac{G'}{G}.$$

   a) Démontrer que U et V sont des polynômes.
   b) Vérifier que $B/A = -U/V$.
   c) Démontrer que $\max\{\deg A ; \deg B\} \leqslant r(ABC) - 1$.
   d) Démontrer que $\max\{\deg A ; \deg B ; \deg C\} \leqslant r(ABC) - 1$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Démontrer qu'il n'existe pas de triplet (P, Q, R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P^n + Q^n = R^n$ et P, Q non associés.
   b) Que peut-on dire dans le cas $n = 2$?

Récréation mathématique

Des fourmis se déplacent sur un cercle à vitesse constante (la même pour toutes les fourmis). Certaines tournent dans un sens et d'autres dans l'autre et quand deux d'entre elles se rencontrent elles font demi-tour pour repartir à la même vitesse mais dans l'autre sens.

Justifier que, quelle que soit la position de départ, on est sûr qu'à un moment donné toutes les fourmis retrouveront leurs positions et leur sens de déplacement initiaux.