Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Test de contrôle Corrigés

Question 1

Soit $n \geqslant 2$, un entier. On considère un cycle :

$$c = (a_1, \cdots, a_\ell) \in \mathfrak{S}_n.$$

1. Expliciter la décomposition en cycles à supports disjoints de la permutation c^2.
2. On considère l'équation $\mathscr{E}$: $\sigma^2 = c$, d'inconnue $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (a) On suppose que ℓ est pair. Montrer que l'équation $\mathscr{E}$ n'admet pas de solutions.
   (b) On suppose que ℓ est impair. Soit σ une solution éventuelle à l'équation $\mathscr{E}$. On pose :
   $$\sigma = \delta_1 \circ \cdots \circ \delta_r,$$
   sa décomposition en cycles à supports disjoints. On suppose qu'aucun des cycles δ_k n'est une transposition.
   Montrer que la permutation σ^2 se décompose en au moins r cycles à supports disjoints.
   (c) Montrer que lorsque ℓ est impair, il n'y a qu'un seul cycle qui soit solution de l'équation $\mathscr{E}$.

1. Le calcul classique montre qu'il faut distinguer trois cas.
   - Si $\ell = 2k$ est pair avec $k \geqslant 2$, alors :
   $$c^2 = (a_1, a_3, \cdots, a_{2k-1}) \circ (a_2, a_4, \cdots, a_{2k}).$$
   - Si $\ell = 2$, alors c est une transposition donc $c^2 = \mathrm{id}$ et c'est un produit vide de cycles à supports disjoints.
   - Si $\ell = 2k+1$ est impair, alors :
   $$c^2 = (a_1, a_3, \cdots, a_{2k+1}, a_2, a_4, \cdots, a_{2k}).$$
2. (a) Si l'équation $\mathscr{E}$ admet une solution σ, alors en prenant la signature dans $\sigma^2 = c$, on obtient :
   $$1 = \varepsilon(\sigma)^2 = \varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(c) = (-1)^{\ell-1} = -1.$$
   On obtient une contradiction et l'équation n'a pas de solutions.

(b) Comme les cycles δ_k commutent, alors :

$$\sigma^2 = \delta_1^2 \circ \cdots \circ \delta_r^2.$$

Chaque calcul δ_k^2 rentre dans l'une des deux situations extrémes de la question précédente : soit δ_k^2 est un produit de deux cycles à supports disjoints de même longueur et dont les supports sont inclus dans celui de δ_k, soit δ_k^2 est un cycle de même support que celui de δ_k.

En décomposant les δ_k^2 éventuellemen en deux cycles, on obtient que σ^2 se décompose en au moins r cycles à supports disjoints.

(c) Soit σ un cycle qui est solution à l'équation. Par la première question, le cycle σ est de même longueur que c, c'est-à-dire ℓ.

On remarque que $\sigma^\ell = \mathrm{id}$, donc en posant $\ell = 2k+1$:

$$\sigma^{2k+1} = \mathrm{id} \text{ ou encore } \sigma \circ c^k = \mathrm{id} \text{ et donc } \sigma = c^{-k}.$$

Réciproquement, en posant $\rho = c^{-k}$, alors :

$$\rho^2 = c^{-2k} = \mathrm{id} \circ c^{-2k} = c^{2k+1} \circ c^{-2k} = c.$$

De plus, la permutation ρ doit être un cycle car le support de ρ est inclus dans celui de c et comme ρ^2 est un cycle, alors la permutation ρ ne peut pas faire apparaître une décomposition en cycles de longueurs strictement plus petites que ℓ.

Il n'y a bien qu'un seul cycle solution : c^{-k}.

Question 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$\{0\} \not\subset F \not\subset E.$$

On se donne une base $\mathscr{B}$ de E.

1. Peut-on toujours extraire de $\mathscr{B}$ une base de F ? Expliquer.
2. Peut-on trouver une infinité d'hyperplans de E contenant F ? Expliquer.
3. Peut-on trouver une infinité de projecteurs $p \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\mathrm{Im}(p) = F$? Expliquer.

1. La réponse est non. Voici un contre-exemple : $E = \mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $F = \mathrm{Vect}((0,1))$ et une base $\mathscr{B} = ((1,0),(1,1))$. On ne peut extraire de $\mathscr{B}$ que deux familles de cardinal 1 et aucune de ces deux familles n'est une base de F.
2. La réponse est oui si et seulement si F n'est pas un hyperplan.

   Si F est déjà un hyperplan de E, alors il n'y a qu'un seul hyperplan contenant F, à savoir F lui-même.

   Si F n'est pas un hyperplan, alors en posant $n = \dim(E)$ et $r = \dim(F)$, on a :

$$1 \leqslant r \leqslant n-2.$$

On pose $s = n - r \geqslant 2$.
On considère une base $\mathscr{B}$ de F, que l'on complète en une base : $\mathscr{D} = (\mathscr{B}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note l'hyperplan :

$$H_\lambda = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-2}, \varepsilon_{s-1} + \lambda \cdot \varepsilon_s).$$

On vérifie assez facilement (ceci a déjà été traité) que si a et b sont deux complexes, alors $H_a \neq H_b$ et chaque tel hyperplan contient l'espace F.

3. La réponse est oui.
   On peut trouver une infinité de sous-espaces supplémentaires S au sous-espace F. Pour cela, si a est un complexe, il suffit de compléter une base $\mathscr{B}$ de F en une base $(\mathscr{B}, \chi_1, \cdots, \chi_s)$ de E, de noter par exemple e_1 le premier vecteur de $\mathscr{B}$ et de poser :

$$S_a = \mathrm{Vect}(a \cdot e_1 + \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s).$$

   Chaque espace S_a est de dimension s car la famille $(e_1, \chi_1, \cdots, \chi_s)$ est libre. Ensuite, si $a \neq b$, on ne peut pas avoir $S_a = S_b$ car sinon, on aurait :

$$a \cdot e_1 + \chi_1 \in S_b$$

   donc on pourrait écrire $a \cdot e_1 + \chi_1$ sous la forme :

$$a \cdot e_1 + \chi_1 = \lambda_1 \cdot (b \cdot e_1 + \chi_1) + \sum_{k=2}^{s} \lambda_k \cdot \chi_k.$$

   Ceci implique en prenant χ_1^* par exemple : $\lambda_1 = 1$, puis en prenant e_1^*, $a = b$...
   De plus, la somme $F \cap S_a$ est bien directe, en faisant un peu le même raisonnement qu'avant... Par les dimensions,

$$F \oplus S_a = E.$$

   Enfin, pour tout $a \in \mathbb{C}$, on peut considérer le projecteur p_a sur F parallèlement à S_a. Chaque tel projecteur sera d'image F et si $a \neq b$, alors $S_a \neq S_b$, donc $\mathrm{Ker}(p_a) \neq \mathrm{Ker}(p_b)$ pour avoir finalement $p_a \neq p_b$.
   Il y a donc au moins autant de complexes que de projecteurs convenables.

Question 3

Soient $A(X)$, $B(X)$ et $P(X)$, trois polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que si $A \circ P(X)$ divise $B \circ P(X)$, alors le polynôme $A(X)$ divise le polynôme $B(X)$.
2. L'implication « $P \circ A(X)$ divise $P \circ B(X) \Longrightarrow A(X)$ divise $B(X)$ » est-elle vraie ? Expliquer.

1. Posons la division euclidienne de B par A, ce qui donne :

$$B = AS + R \text{ , avec } \deg(R) < \deg(A).$$

On compose à droite par le polynôme P, ce qui donne :

$$B \circ P = A \circ P \times S \circ P + R \circ P.$$

Par hypothèse, le polynôme $A \circ P$ divise donc le polynôme $R \circ P$.
Comme $\deg(P) \geqslant 1$ et que $\deg(A \circ P) = \deg(A) \times \deg(P) > \deg(R) \times \deg(P) = \deg(R \circ P)$, cela impose au polynôme $R \circ P$ d'être le polynôme nul. Nécessairement, le polynôme $R(X)$ est nul.

Conclusion, le reste dans la division euclidienne de B par A est nul et finalement on a ce qu'il faut.

2. Cette implication est fausse. Voici un contre-exemple :

$$A(X) = X,\ B(X) = X^2 + X - 1 \text{ et } P(X) = X + 1.$$

Alors, A ne divise pas B, mais le polynôme $P \circ A(X) = X + 1$ divise le polynôme $P \circ B(X) = X^2 + X = X(X + 1)$.

Question 4

Étudier la nature de la série :

$$\sum_n \int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1+x}\, dx.$$

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1+x}\, dx$, pour tout $n \geqslant 1$.
Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, sur l'intervalle $I_n = \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right]$,

$$0 \leqslant \sin x \leqslant x,$$

ce qui amène :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} x\, dx = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de série ACV, donc CV.
Dans ce qui précède, ne pas oublier « $0 \leqslant u_n$ », sinon écrire seulement : $u_n \leqslant \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ sans autres conditions ne sert absolument à rien.