

## Aide à la compréhension sur le cours sur les déterminants

### Les formes multilinéaires et le théorème $\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$

On va très fortement utiliser dans cette seconde partie de chapitre la notion de signature  $\varepsilon(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ .

On se donne un  $K$ -espace vectoriel  $E$  et une application  $\Phi : E^n \rightarrow K$ . Cette application  $\Phi$  agit sur des  $n$ -uplets dont les composantes sont des vecteurs de  $E$ .

Dire que l'application  $\Phi$  est  $n$ -linéaire (ou multilinéaire) revient à dire que si l'on fixe un indice  $i$  entre 1 et  $n$ , si l'on fixe toutes les composantes sauf la  $i^{\text{ème}}$  que l'on fait varier, on dispose alors d'une application que l'on note :

$$\Phi_i : x \mapsto \Phi(\dots, x, \dots)$$

et qui est linéaire. Le symbole  $(\dots, x, \dots)$  signifie que le  $x$  est en  $i^{\text{ème}}$  place et que les composantes en pointillés sont fixes et ne varient donc pas. Le fait que l'on parle de forme signifie que l'on considère des applications qui arrivent le  $K$ -espace vectoriel  $K$ .

On définit alors les formes multilinéaires symétriques (pour dire que si l'on échange deux composantes, cela ne change rien au résultat donné pour  $\Phi$ ), les formes multilinéaires anti-symétriques (pour dire que si l'on échange deux composantes, cela modifie le résultat donné pour  $\Phi$  en le résultat opposé) et les formes multilinéaires alternées (pour dire que dès qu'un  $n$ -uplet de vecteurs comporte deux fois le même vecteur, alors l'image par  $\Phi$  est toujours nulle).

On verra par la suite que les notions de [formes multilinéaires anti-symétriques](#) et de [formes multilinéaires alternées](#) sont étroitement liées sans être équivalentes lorsque dans le corps  $K$ , on a  $2_K = 0_K$  (par exemple dans un corps du type  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )...

La propriété 5 provient assez directement du fait que n'importe quelle permutation  $\sigma$  peut se décomposer en un produit de composition de transpositions.

On démontre les deux premiers points comme cela.

Donnons-nous une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . On décompose (de manière non unique) notre permutation selon :

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s,$$

où les  $\tau_k$  sont des transpositions. On sait alors que la signature vaut :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^s.$$

Maintenant, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un élément de  $E^n$ , on passe du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  au  $n$ -uplet  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  en procédant à  $s$  échanges d'indices, selon les transpositions dans cet ordre  $\tau_1, \tau_2$  jusqu'à  $\tau_s$  sur les  $n$ -uplets successivement transformés.

- Lorsque la forme multilinéaire  $\Phi$  est symétrique, chaque transposition ne modifie pas l'image par  $\Phi$ . Les  $s$  changements sur les  $n$ -uplets ne modifient en rien leur image par  $\Phi$ . Au début, on avait  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  et à la fin on a  $\Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  qui sont deux scalaires égaux.
- Lorsque la forme multilinéaire  $\Phi$  est anti-symétrique, chaque transposition amène un signe « moins ». Les  $s$  changements sur les  $n$ -uplets amènent donc globalement un facteur  $(-1)^s$ . Au début, on avait  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  et à la fin on a  $\Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^s \Phi(x_1, \dots, x_n)$ . Dans ce cas, on a bien la formule avec la signature  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$  que l'on peut faire passer de l'autre côté de l'égalité.
- Passons au troisième point.

Supposons la forme  $n$ -linéaire  $\Phi$  alternée. On se donne un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $E^n$ . On considère deux indices  $i < j$  entre 1 et  $n$ . La question est :

« a-t-on  $\Phi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\Phi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$  ? »

Considérons le  $n$ -uplet  $(y_1, \dots, y_n)$  de vecteurs dans  $E$  tel que si  $k$  est différent de  $i$  et  $j$ , alors :

$$y_k = x_k,$$

et  $y_i = y_j = x_i + x_j$ .

Le  $n$ -uplet  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  peut alors se noter :

$$\vec{y} = (\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots),$$

où le premier  $x_i + x_j$  est en  $i^{\text{ème}}$  position et le second est en  $j^{\text{ème}}$  position.

On remarque que dans le  $n$ -uplet  $\vec{y}$  figurent deux vecteurs identiques, à savoir  $x_i + x_j$ . Par hypothèse sur  $\Phi$  :

$$\Phi(\vec{y}) = 0.$$

On peut maintenant utiliser la multi-linéarité de l'application  $\Phi$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{y}) &= \Phi(\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) \\ &= \Phi(\dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots) + \Phi(\dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) \\ &= \Phi(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) + \Phi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \Phi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) + \Phi(\dots, x_j, \dots, x_j, \dots). \end{aligned}$$

Parmi les quatre termes apparaissent encore deux termes nuls car il y a deux  $n$ -uplets possédant deux fois le même vecteur dans leurs composantes. On aboutit à :

$$\Phi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \Phi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = 0.$$

C'est bien ce que l'on voulait pour avoir l'anti-symétrie de la forme  $n$ -linéaire  $\Phi$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $2_K \neq 0_K$ . Supposons la forme  $\Phi$  anti-symétrique. Soit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un  $n$ -uplet de vecteurs dans  $E$  possédant deux composantes identiques, par exemple  $x_i = x_j$  avec  $1 \leq i < j \leq n$ .

Le fait d'échanger dans le  $n$ -uplet  $\vec{x}$  les composantes numéros  $i$  et  $j$  ne modifie pas globalement le  $n$ -uplet  $\vec{x}$ , mais par le caractère anti-symétrique, l'image par  $\Phi$  est devenue son opposé. On en déduit :

$$\Phi(\vec{x}) = -\Phi(\vec{x}),$$

ou encore :

$$2_K \cdot \Phi(\vec{x}) = 0.$$

Comme  $2_K \neq 0_K$ , alors  $\Phi(\vec{x}) = 0$  et  $\Phi$  est bien une forme  $n$ -linéaire alternée.

Voici quelques exemples :

- l'application  $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & x x' + y y' \end{array}$  est une forme 2-linéaire (ou bilinéaire) symétrique.

Dans le chapitre suivant intitulé « *Espaces préhilbertiens réels* », on étudiera très largement certaines formes bilinéaires symétriques...

- l'application  $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & x y' - x' y \end{array}$  est une forme 2-linéaire (ou bilinéaire) alternée.

On étudiera dans la suite de ce chapitre largement certaines formes multilinéaires alternées...

Dans toute la suite, comme le concept de « formes multilinéaires alternées » est plus fort et plus contraignant à montrer que le concept de « formes multilinéaires anti-symétriques », on utilisera et on démontrera les résultats à venir avec le concept de « *formes multilinéaires alternées* » plutôt.

Dans cette section, on aborde maintenant LE théorème du chapitre sur les déterminants. Voici cela en douceur. Le résultat est très important pour démontrer la suite du chapitre, moins important lors des résolutions de nos futurs exercices.

On considère  $n \geq 1$  un entier,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On autorise ici les corps bizarres du type  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ou autres...

On note  $\Lambda_n^*(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur l'ensemble  $E$ .

On décompose la démonstration du théorème 1 en plusieurs étapes... Je choisis de distinguer selon les couleurs les différentes étapes du raisonnement.

On commence par montrer que l'ensemble  $\Lambda_n^*(E)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

On va montrer qu'il s'agit en fait d'un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(E^n, K)$  de toutes les fonctions définies de  $E^n$  vers le corps  $K$ .

On a déjà l'inclusion :

$$\Lambda_n^*(E) \subset \mathcal{F}(E^n, K).$$

Ensuite, l'application nulle  $\Phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto 0_K$  est bien un élément de  $\Lambda_n^*(E)$  car il est évident que si  $i$  est un indice fixé entre 1 et  $n$ , alors l'application partielle  $\Phi_i : x \mapsto \Phi(\dots, x, \dots)$  (où seule la  $i^{\text{ème}}$  composante varie) est linéaire puisqu'il s'agit de l'application linéaire nulle entre  $E$  et  $K$ . De plus, cette forme  $n$ -linéaire nulle est bien alternée puisque dès que la famille  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  contient deux fois le même vecteur, alors :

$$\Phi(\vec{x}) = 0_K,$$

car cette égalité a lieu tout le temps, pas forcément lorsque  $\vec{x}$  compte deux composantes identiques.

On montre enfin que l'ensemble  $\Lambda_n^*(E)$  est stable par combinaison linéaire, et c'est cela le plus technique pour l'instant.

On se donne  $\Phi$  et  $\Psi$  deux éléments dans  $\Lambda_n^*(E)$  et on se donne un scalaire  $\lambda$ . Alors,

$$\lambda \cdot \Phi + \Psi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & K \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \lambda \cdot \Phi(\vec{x}) + \Psi(\vec{x}) \end{array} .$$

Si  $i$  est un indice fixé entre 1 et  $n$ , si  $\vec{x}$  est un  $n$ -uplet fixé, en notant  $(\dots, u, \dots)$  le  $n$ -uplet où on a pris  $\vec{x}$  et on a juste remplacé le  $i^{\text{ème}}$  vecteur  $x_i$  par le vecteur  $u$  qui varie dans  $E$ , les autres composantes étant fixes, alors l'application :

$$u \mapsto \lambda \cdot \Phi(\dots, u, \dots) + \Psi(\dots, u, \dots)$$

est linéaire, par linéarité des applications partielles  $u \mapsto \Phi(\dots, u, \dots)$  et  $u \mapsto \Psi(\dots, u, \dots)$ . On vérifie enfin que l'application  $\lambda \cdot \Phi + \Psi$  est alternée. Si  $\vec{x}$  est un  $n$ -uplet de vecteurs qui comporte deux fois le même vecteur, alors :

$$\Phi(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}) = 0_K,$$

donc :

$$(\lambda \cdot \Phi + \Psi)(\vec{x}) = 0_K.$$

Résultat des courses :

$$\lambda \cdot \Phi + \Psi \in \Lambda_n^*(E).$$

On fixe maintenant une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de l'espace  $E$  de dimension  $n$  – à noter que l'entier  $n$  est à la fois la dimension de  $E$  et le nombre de composantes dans les formes  $n$ -linéaires dans  $\Lambda_n^*(E)$ .

On pose l'application que l'on note pour l'instant  $\Delta$ , définie par :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & K \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k) \end{array} ,$$

où rappelons-le le nombre  $e_{\sigma(k)}^*(x_k)$  est la coordonnée du vecteur  $x_k$  selon le vecteur  $e_{\sigma(k)}$  de la base  $\mathcal{B}$ .

On va montrer que  $\Delta$  est un vecteur non nul dans l'espace  $\Lambda_n^*(E)$ .

Déjà, l'application  $\Delta$  est non nulle car si l'on prend comme  $n$ -uplet, le  $n$ -uplet  $\vec{x} = \mathcal{B}$  formé de la base elle-même, on va « tranquillement » calculer  $\Delta(\mathcal{B})$ .

Soit  $\sigma$  une permutation quelconque dans  $\mathfrak{S}_n$ .

On distingue deux cas :

- premier cas :  $\sigma = \text{id}$  ; dans ce cas,  $\varepsilon(\sigma) = 1$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$e_{\sigma(k)}^*(x_k) = e_{\sigma(k)}^*(e_k) = e_k^*(e_k) = 1_K.$$

Le produit  $\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k)$  vaut  $1_K$  ;

- second cas :  $\sigma \neq \text{id}$  ; cela signifie qu'il existe un entier  $i$  entre 1 et  $n$  tel que :

$$\sigma(i) \neq i.$$

On obtient alors :

$$e_{\sigma(i)}^*(x_i) = e_{\sigma(i)}^*(e_i) = 0_K$$

et donc le produit  $\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k)$  vaut  $0_K$ .

Résultat des courses,

$$\Delta(\mathcal{B}) = 1_K \neq 0_K,$$

et la fonction  $\Delta$  n'est pas la fonction nulle.

On montre maintenant que l'application  $\Delta$  est une forme  $n$ -linéaire. C'est déjà une forme. On montre que  $\Delta$  est linéaire par rapport à sa  $i^{\text{ème}}$  variable, où  $i$  est un entier fixé entre 1 et  $n$ . On fixe un  $n$ -uplet  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et on notera  $(\dots, u, \dots)$  le  $n$ -uplet obtenu à partir de  $\vec{x}$  en remplaçant seulement le vecteur  $x_i$  par le vecteur  $u$  qui va varier, les autres composantes étant fixes.

Si  $\sigma$  est une permutation fixée dans  $\mathfrak{S}_n$ , alors le produit associé à  $\sigma$  dans le calcul de  $\Delta(\dots, u, \dots)$  fait apparaître un terme de la forme :

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \left( \prod_{k \neq i} e_{\sigma(k)}^*(x_k) \right) \times e_{\sigma(i)}^*(u).$$

Ceci est une expression linéaire en le vecteur  $u$ , ce qui montre que l'application  $\Delta$  est linéaire par rapport à sa  $i^{\text{ème}}$  variable : l'application  $\Delta$  qui atterrit dans le corps des scalaires est bien une forme multilinéaire.

Il reste maintenant à montrer que l'application  $\Delta$  est alternée.

On considère alors un  $n$ -uplet  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  qui contient deux vecteurs identiques, par exemple  $x_i = x_j$ , avec  $1 \leq i < j \leq n$  deux entiers différents.

On pose la transposition  $\tau = (i, j)$  de sorte que l'application :

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{A}_n & \longrightarrow \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \longmapsto \sigma \circ \tau \end{cases},$$

est une bijection entre l'ensemble des permutations paires (celles de signature valant 1) et l'ensemble des permutations impaires (celles de signature valant -1).

On peut alors décomposer la somme :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k),$$

en deux, en partitionnant  $\mathfrak{S}_n$  selon :

$$\mathfrak{S} = \mathcal{A}_n \sqcup (\mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n).$$

Ensuite, on peut mettre en place le changement de variable  $\sigma' = \Gamma(\sigma)$ , lorsque  $\sigma$  décrit  $\mathcal{A}_n$ , car alors les permutations  $\sigma'$  décriront le complémentaire de  $\mathcal{A}_n$  dans  $\mathfrak{S}_n$ .

On obtient alors cette belle formule :

$$\begin{aligned}\Delta(\vec{x}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left( \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k) + \varepsilon(\Gamma(\sigma)) \prod_{k=1}^n e_{\Gamma(\sigma)(k)}^*(x_k) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left( \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k) - \prod_{k=1}^n e_{\sigma \circ \tau(k)}^*(x_k) \right)\end{aligned}$$

Fixons maintenant une permutation paire  $\sigma$ . Lorsque  $k$  décrit  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , alors on a trois cas :

- soit  $k \notin \{i, j\} = \text{supp}(\tau)$  le support de la transposition  $\tau$ , auquel cas :

$$e_{\sigma(k)}^*(x_k) = e_{\sigma \circ \tau(k)}^*(x_k),$$

$$\text{car } \tau(k) = k$$

- soit  $k = i$ , auquel cas :

$$e_{\sigma(k)}^*(x_k) = e_{\sigma(i)}^*(x_i) \text{ et } e_{\sigma \circ \tau(k)}^*(x_k) = e_{\sigma(j)}^*(x_i) = e_{\sigma(j)}^*(x_j),$$

$$\text{car } x_i = x_j$$

- soit  $k = j$ , auquel cas :

$$e_{\sigma(k)}^*(x_k) = e_{\sigma(j)}^*(x_j) \text{ et } e_{\sigma \circ \tau(k)}^*(x_k) = e_{\sigma(i)}^*(x_j) = e_{\sigma(i)}^*(x_i),$$

$$\text{car } x_j = x_i.$$

Par commutativité du produit, on remarque alors que :

$$\prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k) - \prod_{k=1}^n e_{\sigma \circ \tau(k)}^*(x_k) = 0_K,$$

et donc que chaque terme de la somme pour  $\Delta(\vec{x})$  est nul :

$$\Delta(\vec{x}) = 0_K.$$

Tout cela pour avoir dans cette étape :

$$\Delta \in \Lambda_n^*(E) \setminus \{0\}.$$

On termine par le fait que l'espace  $\Lambda_n^*(E)$  est de dimension 1, droite vectorielle générée par le vecteur  $\Delta$  du paragraphe précédent.

Soit  $\Phi$  un élément de  $\Lambda_n^*(E)$ . On pose le scalaire :

$$\alpha = \Phi(\mathcal{B}) = \Phi(e_1, \dots, e_n) \in K.$$

On va montrer que :

$$\Phi = \alpha \cdot \Delta.$$

On se donne un  $n$ -uplet  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs dans  $E$ .

Pour tous indices  $i$  et  $j$  entre 1 et  $n$ , on pose :

$$e_i^*(x_j) = a_{i,j},$$

de sorte que  $a_{i,j}$  est la coordonnée du vecteur  $x_j$  selon le vecteur  $e_i$  de la base  $\mathcal{B}$ . De plus, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i.$$

On peut écrire maintenant en utilisant la multilinéarité de  $\Phi$  cette joyeuse somme qui comporte la bagatelle de  $n^n$  termes :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n) &= \Phi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \cdot e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} \cdot e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} \cdot e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n \left( \prod_{k=1}^n a_{i_k, k} \right) \cdot \Phi(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}). \end{aligned}$$

Or, si on fixe des indices  $i_1, i_2, \dots, i_n$  entre 1 et  $n$  et si la liste  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  comporte deux fois le même indice, cela implique que le  $n$ -uplet  $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$  comporte deux fois le même vecteur, conduisant inexorablement à cette formidable égalité par le caractère alterné de la forme  $\Phi$  :

$$\Phi(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0_K.$$

Les seuls termes éventuellement non nuls dans  $\Phi(\vec{x})$  sont ceux pour lesquels les indices

$$i_1, i_2, \dots, i_n$$

sont tous différents. Chaque tel  $n$ -uplet d'indices  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  de composantes toutes différentes est associé à une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma(k) = i_k.$$

En effectuant ce changement d'indices sur la somme, on obtient – une fois les  $n^n - n!$  termes nuls éliminés correspondant aux indices  $i_k$  où il y a deux fois le même entier dans  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  – cette formule un peu moins monstrueuse :

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k), k} \right) \cdot \Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Comme la forme  $\Phi$  est alternée, alors elle est anti-symétrique et par la propriété 5 déjà vue,

$$\Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \Phi(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha.$$

Conclusion temporaire,

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k} \right) \cdot \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha = \alpha \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k} \right) = \alpha \cdot \Delta(\vec{x})$$

car :

$$a_{\sigma(k),k} = e_{\sigma(k)}^*(x_k).$$

Conclusion définitive,

$$\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}(\Delta)$$

et comme le vecteur  $\Delta$  – qui est ici une forme  $n$ -linéaire alternée – est non nul, alors l'espace  $\Lambda_n^*(E)$  est une droite vectorielle.

Dans la suite, l'application  $\Delta$  de la démonstration précédente est appelée **déterminant selon la base  $\mathcal{B}$**  et notée  $\det_{\mathcal{B}}$ .

Si l'on exploite le résultat précédent, on sait que  $\det_{\mathcal{B}}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée, que :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1_K,$$

et donc que pour toute forme  $\Phi$   $n$ -linéaire alternée définie de  $E^n$  vers  $K$ , comme le vecteur  $\Phi$  est dans la droite vectorielle  $\Lambda_n^*(E)$  générée par le vecteur  $\det_{\mathcal{B}}$ , alors il existe  $\lambda \in K$  tel que :

$$\Phi = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}} \quad \star$$

et en évaluant l'égalité entre formes multilinéaires dans  $\star$  en la base  $\mathcal{B}$ , on obtient cette formule que l'on utilisera assez souvent par la suite (pour les démonstrations du cours, pas tellement pour les résolutions d'exercices ...) :

$$\boxed{\Phi = \Phi(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}}$$

Ceci complète la démonstration du théorème 4.

## Le déterminant d'une famille de vecteurs

On va maintenant très fortement utiliser ce résultat dans la suite des démonstrations...

La définition d'un déterminant d'une famille  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  vecteurs d'un  $K$ -espace  $E$  de dimension  $n$  selon une base  $\mathcal{B}$  vaut donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(x_k).$$

Démontrons la propriété 6.

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , en posant  $\Delta = \det_{\mathcal{B}}$  et  $\Phi = \det_{\mathcal{C}}$ , alors on sait que  $(\Delta)$  forme une base de  $\Lambda_n^*(E)$ , que  $\Phi$  appartient également à  $\Lambda_n^*(E)$  et que l'on a la formule :

$$\Phi = \Phi(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}.$$

Cette formule appliquée à n'importe quel  $n$ -uplet  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $E^n$  nous donne exactement ce qu'il faut.

En particulier, en évaluant en la base  $\mathcal{C}$ , sachant que  $\Phi(\mathcal{C}) = 1_K$ , alors :

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1_K \quad [\text{formule } \star]$$

On découvre que le déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$  d'une base  $\mathcal{C}$  par rapport à n'importe quelle base  $\mathcal{B}$  est toujours non nul.

On termine en montrant la chose importante suivante :

*« si  $\mathcal{B}$  est une base de l'espace  $E$ , si  $\mathcal{F}$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , alors les deux points suivants sont équivalents :*

- *la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$*
- *le déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est non nul. »*

Pour le sens direct, on refait les choses déjà formulées précédemment. Si  $\mathcal{F}$  est une base, alors :

$$1_K = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \cdot \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}),$$

amenant à la non nullité de la quantité  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ .

Pour le sens indirect, on suppose que la famille  $\mathcal{F}$  n'est pas une base de  $E$ . Comme la famille  $\mathcal{F}$  comporte  $n = \dim(E)$  vecteurs, alors la famille  $\mathcal{F}$  n'est ni libre, ni génératrice.

La famille  $\mathcal{F}$  est donc liée. L'un des vecteurs  $x_i$  est combinaison linéaire des autres :

$$x_i = \sum_{k \neq i} \lambda_k \cdot x_k.$$

En utilisant la linéarité de déterminant par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable, on en déduit :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \det_{\mathcal{B}}(\dots, x_i, \dots) \\ &= \det_{\mathcal{B}}\left(\dots, \sum_{k \neq i} \lambda_k \cdot x_k, \dots\right) \\ &= \sum_{k \neq i} \lambda_k \cdot \det_{\mathcal{B}}(\dots, x_k, \dots). \end{aligned}$$

Si  $k$  est un entier entre 1 et  $n$ , avec  $k \neq i$ , alors la quantité ci-dessus  $\det_{\mathcal{B}}(\dots, x_k, \dots)$  est nulle. En effet, il ne faut pas perdre de vue que le vecteur  $x_k$  dans la notation  $(\dots, x_k, \dots)$  est placé en  $i^{\text{ème}}$  position. La liste  $(\dots, x_k, \dots)$  comporte alors deux fois le même vecteur à savoir le vecteur  $x_k$  placé à la fois en  $i^{\text{ème}}$  position et bien sûr le vecteur  $x_k$  placé aussi en  $k^{\text{ème}}$  position. Comme le déterminant est alterné, alors chaque terme  $\det_{\mathcal{B}}(\dots, x_k, \dots)$  est nul et donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  également.

## Le déterminant d'un endomorphisme

On passe à la proposition 7, pour les déterminants d'endomorphismes.

On se fixe un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

On pose l'application  $\Phi_u$  comme dans la proposition 7.

On montre déjà que l'application  $\Phi_u$  appartient à  $\Lambda_n^*(E)$ . Pour simplifier les notations, on note  $\Delta = \det_{\mathcal{B}}$  le déterminant selon la base  $\mathcal{B}$ .

En fixant un élément  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $E^n$ , en fixant un indice  $i$  entre 1 et  $n$ , en écrivant  $(\dots, y, \dots)$  le  $n$ -uplet dans  $E^n$  obtenu à partir de  $\vec{x}$  en remplaçant le vecteur  $x_i$  par le vecteur  $y$  qui varie dans  $E$ , en notant  $(\dots, u(y), \dots)$  le  $n$ -uplet dans  $E^n$  obtenu en remplaçant dans le  $n$ -uplet  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$  le vecteur  $u(x_i)$  par le vecteur  $u(y)$  qui varie, alors on dispose de l'égalité :

$$\forall y \in E, \Phi_u(\dots, y, \dots) = \Delta(\dots, u(y), \dots).$$

Il apparaît que l'application  $y \mapsto \Phi_u(\dots, y, \dots)$  est la composée de deux applications linéaires, à savoir l'application linéaire  $\Delta_i$  qui est l'application partielle où seule la  $i^{\text{ème}}$  composante varie et l'application linéaire  $u$ .

De ce fait, l'application  $\Phi_u$  est déjà une forme multilinéaire.

Enfin, l'application  $\Phi_u$  est alternée car si  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  est  $n$ -uplet de vecteurs comportant deux fois le même vecteur  $x_i = x_j$ , alors le  $n$ -uplet  $\vec{X} = (u(x_1), \dots, u(x_n))$  comportera deux fois le même vecteur à savoir  $u(x_i) = u(x_j)$ . Comme l'application  $\Delta$  est alternée, alors :

$$\Delta(\vec{X}) = 0_K.$$

On en déduit :

$$\Phi_u(\vec{x}) = \Delta(\vec{X}) = 0_K,$$

et la forme multilinéaire  $\Phi_u$  est bien alternée.

On sait donc que :

$$\Phi_u = \Phi_u(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}.$$

On va maintenant montrer que le scalaire  $\Phi_u(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie pour l'espace  $E$ .

En effet, considérons une autre base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de l'espace  $E$ .

Pour alléger les notations, si  $\mathcal{F} = (y_1, \dots, y_n)$  est un  $n$ -uplet de vecteurs de  $E$ , on notera  $u(\mathcal{F})$  la famille  $(u(y_1), \dots, u(y_n))$ .

Les formes multilinéaires alternées  $\det_{\mathcal{B}}$  et  $\det_{\mathcal{C}}$  sont proportionnelles, avec la relation :

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}} \quad \star$$

De plus, on rappelle que :

$$\Phi_u = \Phi_u(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}} \quad \star$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{C})) &= \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{C})) \quad [\star \text{ appliquée en } u(\mathcal{C})] \\ &= \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \quad [\star \text{ appliquée en } \mathcal{C}] \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \cdot [\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})] \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \cdot 1_K \quad [\text{formule } \star] \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})). \end{aligned}$$

On vient de montrer ce qu'il faut.

L'égalité que l'on avait avant :

$$\Phi_u = \Phi_u(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}},$$

se transforme maintenant en :

$$\Phi_u = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}},$$

ou encore :

$$\forall \vec{x} \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u(\vec{x})) = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}).$$

On passe maintenant à la propriété 8.

Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $E$ , où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , alors si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , on sait que :

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}(u \circ v)(\mathcal{B}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u \circ v)(\mathcal{B}) &= \det_{\mathcal{B}}(u(v(\mathcal{B}))) \\ &= \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(v(\mathcal{B})) \quad [\star \text{ appliquée en } v(\mathcal{B})] \\ &= \det(u) \cdot \det(v). \end{aligned}$$

On va maintenant montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

- l'endomorphisme  $u$  est un isomorphisme
- le déterminant  $\det(u)$  est non nul.

Pour le sens direct, si  $u$  est un isomorphisme, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors la famille  $\mathcal{F} = u(\mathcal{B})$  sera encore une base de  $E$ , car  $u$  étant un isomorphisme transformera toute base de  $E$  en une base de  $E$ .

On sait alors par la proposition 6 que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$  est non nul. Or, ce déterminant vaut exactement  $\det(u)$ , par définition de ce déterminant.

Pour le sens indirect, si  $\det(u)$  est non nul, cela signifie que si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors la quantité :

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

est non nulle.

La famille  $u(\mathcal{B})$  est donc une base de  $E$ . L'endomorphisme  $u$  transforme donc une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  en une autre base  $u(\mathcal{B})$  de  $E$  : il s'agit d'un isomorphisme.

L'application  $\det$  est donc bien un morphisme de groupes entre  $GL(E)$  et  $K^*$ , en utilisant le début de la proposition 8, pour  $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$ , formule valable non pas seulement pour les isomorphismes mais pour tous les endomorphismes de  $E$ .

Les éléments mis dans la remarque 2 apparaissent alors sans difficulté.

- Il n'y a pas de formule simple pour  $\det(u + v)$  : n'en cherchez pas !!
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et si  $\lambda \in K$ , en notant  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on obtient par multilinéarité du déterminant, ce qui a pour effet de pouvoir placer chacun des  $n$  scalaires  $\lambda$  devant le déterminant :

$$\begin{aligned} \det(\lambda \cdot u) &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot u(\mathcal{B})) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot u(e_1), \dots, \lambda \cdot u(e_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^n \cdot \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad , \text{ par multilinéarité} \\
&= \lambda^n \cdot \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \\
&= \lambda^n \cdot \det(u).
\end{aligned}$$

L'erreur courante est d'oublier la puissance  $n$  sur le  $\lambda$  en disant que le déterminant est linéaire, ce qui n'est pas du tout le cas : le déterminant est multilinéaire, ce qui n'est pas la même chose !!

- Si  $u \in GL(E)$ , en posant  $v = u^{-1}$ , alors :

$$u \circ v = \text{id}_E,$$

puis en prenant le déterminant :

$$\det(\text{id}_E) = \det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v).$$

Or, en prenant n'importe quelle base  $\mathcal{B}$  de  $E$  :

$$\begin{aligned}
\det(\text{id}_E) &= \det_{\mathcal{B}}(\text{id}_E(\mathcal{B})) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\
&= 1_K.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\det(v) = (\det(u))^{-1} \text{ ou encore } \det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

## Le déterminant d'une matrice carrée

Les choses vont maintenant aller beaucoup plus facilement en utilisant le fait qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est associée à l'endomorphisme  $u_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(K))$ .

On va faire constamment le lien avec le déterminant d'endomorphismes.

La définition 9 nous donne la définition d'une matrice carrée  $A$ , à l'aide de ses coefficients. On va montrer ici que cette définition coïncide avec la formule très importante suivante :

$$\boxed{\det(A) = \det(u_A)}.$$

En effet, afin d'alléger les notations, on pose  $E = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ , puis  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E$ .

Par définition de  $\det(u_A)$ , on sait que :

$$\begin{aligned}
\det(u_A) &= \det_{\mathcal{B}_c}(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(u_A(e_k)).
\end{aligned}$$

Or, pour tous indices  $i$  et  $j$  entre 1 et  $n$ , la formule très importante :

$$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(u_A),$$

montre que :

$$A_{i,j} = e_i^*(u_A(e_j)).$$

En d'autres termes, en reprenant les calculs faits plus haut :

$$\begin{aligned}\det(u_A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k)}^*(u_A(e_k)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n A_{\sigma(k),k} \\ &= \det(A).\end{aligned}$$

La proposition 9 fait alors office de révisions. Montrons malgré tout les choses en détail...

- Soient  $A$  et  $B$  deux matrices dans  $\mathcal{M}_n(K)$ . Alors,

$$\begin{aligned}\det(A \times B) = \det(u_{A \times B}) &= \det(u_A \circ u_B) \\ &= \det(u_A) \times \det(u_B) \\ &= \det(A) \times \det(B).\end{aligned}$$

- Soit  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_n(K)$  – remarque soit dit en passant : dans votre polycopié, les matrices sont de format  $p \times p$  alors que dans cette aide, les matrices sont de format  $n \times n$  ce qui ne change pas grand chose ...

Si la matrice  $A$  est inversible, alors  $u_A$  est un isomorphisme et donc  $\det(u_A)$  est non nul :  $\det(A) \neq 0$ .

Si la matrice  $A$  n'est pas inversible, alors  $u_A$  n'est pas un isomorphisme et donc  $\det(u_A) = 0$ , puis  $\det(A) = 0$ .

Lorsque la matrice  $A$  est inversible, on peut alors écrire :

$$\det(A^{-1}) = \det(u_{A^{-1}}) = \det(u_A^{-1}) = \frac{1}{\det(u_A)} = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Le fait que le déterminant soit un morphisme de groupe est moins fort que ce que l'on a montré puisque la formule  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$  n'est pas seulement valable pour toutes les matrices inversibles ; elle l'est pour toutes les matrices carrées.

- Si  $A$  est une matrice dans  $\mathcal{M}_n(K)$  et si  $\lambda$  est un scalaire, alors :

$$\det(\lambda \cdot A) = \det(u_{\lambda \cdot A}) = \det(\lambda \cdot u_A) = \lambda^n \cdot \det(u_A) = \lambda^n \cdot \det(A).$$

On montre maintenant que deux matrices semblables ont le même déterminant. En effet, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices semblables dans  $\mathcal{M}_n(K)$ , alors on peut écrire :

$$B = P^{-1}AP,$$

où  $P$  est une matrice inversible.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\
&= \det(A) \times (\det(P^{-1}) \cdot \det(P)) \\
&= \det(A) \times 1_K \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la remarque 3, qui nous amène cependant une mauvaise nouvelle : le fait de savoir que deux matrices carrées ont à la fois la même trace, le même rang et le même déterminant n'est pas suffisant pour savoir que les deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables. Détaillons ceci à l'aide de contre-exemples.

Plaçons-nous dans  $\mathcal{M}_2(K)$ . Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice quelconque de format  $2 \times 2$ , on peut facilement calculer son déterminant grâce à la formule – **pour l'instant, on n'a rien d'autre en magasin de toutes façons...** :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) \cdot (A_{\sigma(1),1} \cdot A_{\sigma(2),2}).$$

Cette somme ne comporte que  $2! = 2$  termes, correspondant aux deux seules permutations de  $\mathfrak{S}_2$  à savoir  $\sigma = \text{id}$  et  $\sigma = (1, 2)$ .

On en déduit :

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} - A_{2,1} \cdot A_{1,2} = ad - cb = ad - bc,$$

formule d'ores et déjà à retenir, peut-être déjà connue de Terminale, et qui sera très utile en pratique.

Si l'on considère les deux matrices :

$$A = I_2 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dans  $\mathcal{M}_2(K)$ , où  $K$  est n'importe quel corps, on constate que :

- ▷  $\text{Tr}(A) = 2_K = \text{Tr}(B)$  : mêmes traces
- ▷  $\text{Rg}(A) = 2_{\mathbb{Z}} = \text{Rg}(B)$  : mêmes rangs (les matrices sont inversibles)
- ▷  $\det(A) = 1_K = \det(B)$  : mêmes déterminants (déterminants non nuls qui confirment l'inversibilité des matrices).

Cependant, comme  $A$  est la matrice d'une homothétie (de rapport  $1_K$ ), la seule matrice semblable à  $A$  est  $A$  et  $B \neq A$  n'est pas semblable à la matrice  $A$ .

Développons l'autre contre-exemple donné dans la remarque 3, en considérant les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où les matrices sont à coefficients dans le corps  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- $\text{Tr}(A) = 2_K = 0_K = \text{Tr}(B)$  : mêmes traces
- $\text{Rg}(A) = 2_{\mathbb{Z}} = \text{Rg}(B)$  : mêmes rangs (matrices encore inversibles)
- $\det(A) = 1_K = -1_K = \det(B)$  : mêmes déterminants (non nuls d'où l'inversibilité)

Là encore, comme  $B \neq A$  et que  $A$  est la matrice d'une homothétie, alors  $B$  n'est pas semblable à  $A$ .

## La méthode synthétique : comment faire le tri dans tous ces déterminants ?

La méthode qui suit est très importante pour faire le point sur tous ces déterminants.

**Quel que soit le déterminant à calculer, on se ramène toujours à un calcul de déterminant d'une matrice carrée.**

Question subsidiaire : comment se ramener à un tel déterminant ?

Réponse : il y a trois situations possibles :

- première situation : on vous demande de calculer le déterminant d'une matrice carrée. Que fait-on alors ? Eh bien, on calcule le déterminant de cette matrice carrée... On verra par la suite comment faire en pratique pour ne pas à avoir à utiliser la formule monstrueuse de la définition du déterminant...
- deuxième situation : on vous demande de calculer le déterminant d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ . Dans ce cas, il faudra choisir une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Ensuite, on calcule :

$$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(K).$$

Enfin, on calcule  $\det(A)$  et on aura :

$$\det(A) = \det(f).$$

Montrons cette formule.

Par définition du déterminant d'un endomorphisme, on sait qu'en posant  $\mathcal{B} = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ , alors :

$$\begin{aligned} \det(f) &= \det_{\mathcal{B}}(f(\chi_1), \dots, f(\chi_n)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n \chi_{\sigma(k)}^*(f(\chi_k)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n A_{\sigma(k), k} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, quelle que soit la base  $\mathcal{B}$  choisie pour l'espace  $E$ , on aura des matrices  $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$  toutes semblables entre elles, lorsque la base  $\mathcal{B}$  varie, et il n'est donc pas étonnant d'obtenir toujours  $\det(f)$  pour ces matrices. Le but du jeu sera peut-être de choisir une base  $\mathcal{B}$  adaptée de façon à ce que la matrice  $A$  soit « simple »...

- troisième situation : on vous demande de calculer le déterminant de la famille de  $n$  vecteurs  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  selon la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ . On crée alors la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  où la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$  renferme exactement les  $n$  coordonnées du vecteur  $x_j$  selon la base  $\mathcal{B}$ . Lorsque la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ , alors la matrice  $A$  ainsi construite est exactement la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{F}$ . Lorsque la famille  $\mathcal{F}$  n'est pas une base, la matrice  $A$  n'est pas une matrice de passage...

Ensuite, en revenant à la définition de  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  sous forme de somme sur les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on constate facilement que :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(A).$$

Une fois de plus, on a troqué le calcul d'un déterminant contre le déterminant d'une matrice carrée.

## Encore d'autres propriétés sur le déterminant : la comatrice

Passons à la propriété 10, qui nous dit que calculer le déterminant d'une matrice carrée  $A$  ou de sa transposée  $A^T$  donne toujours le même résultat.

On remarque que l'application :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{array}$$

est une involution car  $F \circ F = \text{id}_{\mathfrak{S}_n}$  et par conséquent il s'agit d'une bijection.

A priori, il n'y a aucun rapport avec ce que l'on doit montrer dans la propriété 10.

Donnons-nous maintenant une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

Le fait que la fonction  $F$  soit une bijection va autoriser le changement de variable  $\rho = F(\sigma)$  dans ce qui va suivre.

En effet,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n A_{\sigma(k), k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(F(\sigma)) \cdot \prod_{k=1}^n A_{F(\sigma)(k), k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{k=1}^n A_{\sigma^{-1}(k), k}. \end{aligned}$$

Or, comme la signature  $\varepsilon(\cdot)$  est un morphisme de groupe à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , on peut écrire :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma).$$

Ensuite, si  $\sigma$  est une permutation quelconque, en effectuant le changement de variable  $\ell = \sigma^{-1}(k)$ , lorsque  $k$  varie dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'entier  $\ell$  varie également dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et ne prend chaque valeur de cet ensemble qu'une seule fois.

Par conséquent, par commutativité du produit dans le corps  $K$  :

$$\prod_{k=1}^n A_{\sigma^{-1}(k),k} = \prod_{\ell=1}^n A_{\ell,\sigma(\ell)}.$$

Lorsque l'on compile les deux informations précédentes, on en déduit la poursuite du calcul de  $\det(A)$  de la manière suivante, en posant  $B = A^T$  :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{k=1}^n A_{\sigma^{-1}(k),k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{\ell=1}^n A_{\ell,\sigma(\ell)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{\ell=1}^n B_{\sigma(\ell),\ell} \\ &= \det(B) = \det(A^T). \end{aligned}$$

La propriété 11 est un peu en marge du chapitre, mais donne une petite application de ce qui précède pour accéder au corollaire 2 dont on connaît déjà le résultat. En première lecture, ce paragraphe 4.2 n'est pas important.

Passons à la démonstration de la propriété 11, qui est un peu technique.

Premièrement, si  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$  est une matrice rectangulaire, une sous-matrice carrée de  $A$  de format  $r \times r$  – avec  $1 \leq r \leq \min\{p, q\}$  – s'obtient de la manière suivante :

- considérer  $r$  entiers  $i_1 < \dots < i_r$  entre 1 et  $p$
- considérer  $r$  entiers  $j_1 < \dots < j_r$  entre 1 et  $q$
- considérer dans la matrice  $A$  uniquement les colonnes  $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$  et les lignes  $L_{i_1}, \dots, L_{i_r}$ . À la croisée de toutes ces lignes / colonnes se trouvent  $r^2$  coefficients, qui permettent de définir la sous-matrice  $B \in \mathcal{M}_r(K)$  telle que :

$$B = \left( A_{i_k, j_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq r}.$$

Tout se passe comme si on ne retenait que les  $r$  lignes sélectionnées et les  $r$  colonnes sélectionnées pour former un sous-tableau carré de la matrice rectangulaire  $A$  : c'est une sous-matrice carrée de  $A$ .

Dans une matrice rectangulaire  $A$ , il y a plusieurs sous-matrices carrées de format  $r \times r$ , avec  $r$  pouvant varier entre 1 et  $\min\{p, q\}$ . Cela nous donne un nombre fini de sous-matrices carrées. Parmi toutes ces sous-matrices carrées, certaines sont inversibles et certaines non. On considère parmi toutes les sous-matrices carrées inversibles (il en existe si et seulement si la matrice rectangulaire  $A$  n'est pas nulle), une sous-matrice carrée de taille maximale. Cette taille maximale  $s \times s$  vérifie toujours :

$$s = \text{Rg}(A),$$

avec lorsque  $A$  est la matrice nulle :  $s = 0$ . (on dit que lorsqu'il n'y a aucune sous-matrice carrée inversible, la taille maximale des sous-matrices carrée inversible est  $0 \times 0\dots$ )

Démontrons ce résultat.

Lorsque  $A$  est la matrice rectangulaire nulle, le résultat est vrai. On vient juste de l'expliquer. Lorsque  $A$  n'est pas la matrice rectangulaire nulle, l'un au moins des coefficients  $A_{i,j}$  est non nul. La sous-matrice  $(A_{i,j})$  à un seul coefficient est inversible et donc la matrice  $A$  admet au moins une sous-matrice inversible. On note  $s$  le nombre maximal de lignes (ou de colonnes) d'une sous-matrice carrée inversible. Il peut y avoir plusieurs sous-matrices carrées inversibles possibles de format  $s \times s$ .

On note  $B$  une sous-matrice carrée inversible de format maximal  $s \times s$ . On note  $L_{i_1}, \dots, L_{i_s}$  et  $C_{j_1}, \dots, C_{j_s}$  les colonnes de  $A$  qui ont servi à construire la sous-matrice inversible  $B$ .

On va montrer que :

$$s = \text{Rg}(A).$$

Les notations qui vont suivre vont être un peu inconfortables. Accrochez-vous !!

Dans toute la suite, si  $C$  est une colonne de  $A$  (avec donc  $p$  coefficients dans la colonne  $C$ ), on notera  $\tilde{C}$  la sous-colonne de  $C$  obtenue en ne retenant dans  $C$  que les coefficients en positions  $i_1, \dots, i_s$ . Autrement dit, si  $C_{j_k}$  est une colonne de  $A$  qui a servi à construire la sous-matrice  $B$ , alors la colonne  $\tilde{C}_{j_k}$  est exactement la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $B$ .

On commence par la partie la plus facile, c'est-à-dire montrer que :

$$s \leq \text{Rg}(A).$$

On montre que la famille  $\mathcal{F} = (C_{j_1}, \dots, C_{j_s})$  est une famille libre dans  $\text{Im}(A)$ .

Il s'agit déjà d'une famille de vecteurs dans  $\text{Im}(A)$ , puisqu'il s'agit de colonnes de  $A$ .

Ensuite, soit  $\sum_{k=1}^s \lambda_k \cdot C_{j_k} = 0$ , une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille  $\mathcal{F}$ .

En ne prélevant que les coefficients d'indices  $i_\ell$  dans cette égalité, on forme la nouvelle combinaison linéaire :

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k \cdot \tilde{C}_{j_k} = \tilde{0}.$$

Ceci est une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille  $\mathcal{G} = (\tilde{C}_{j_1}, \dots, \tilde{C}_{j_s})$  qui est en fait une base de  $\text{Im}(B)$ , puisque la matrice  $B$  est inversible. Tous les scalaires  $\lambda_k$  sont nuls et la famille  $\mathcal{F}$  est bien libre dans  $\text{Im}(A)$ . On sait alors que :

$$s = \text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(\text{Im}(A)) = \text{Rg}(A).$$

On continue avec la partie la plus délicate. On va montrer que la famille  $\mathcal{F} = (C_{j_1}, \dots, C_{j_s})$  est une famille génératrice dans  $\text{Im}(A)$ .

Il suffit de montrer que pour toute colonne  $C_\ell$  de la matrice  $A$ , alors :

$$C_\ell \in \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

Donnons-nous un indice de colonne  $\ell$  entre 1 et  $q$ .

- ▷ Si  $\ell \in \{j_1, \dots, j_s\}$ , alors la colonne  $C_\ell$  fait déjà partie de la famille  $\mathcal{F}$ .
- ▷ Si  $\ell \notin \{j_1, \dots, j_s\}$ , on considère la colonne  $\tilde{C}_\ell \in \mathcal{M}_{s,1}(K) = \text{Im}(B)$ . On pose alors :

$$\tilde{C}_\ell = \sum_{k=1}^s \alpha_k \cdot \tilde{C}_{j_k}.$$

On va montrer que :

$$C_\ell = \sum_{k=1}^s \alpha_k \cdot C_{j_k}.$$

Fixons un entier  $m$  entre 1 et  $p$  et n'appartenant pas à l'ensemble  $\{i_1, \dots, i_s\}$ . (On se place dans la situation où il est possible de choisir un tel  $m$ . Dans le cas contraire,  $s = p$  et donc on ne peut pas avoir dans ce cas  $\text{Rg}(A) > s$ , et on aboutit à ce qu'il faut, à savoir :  $\text{Rg}(A) = s$ ) Dans toute la suite, si  $C$  est une colonne de la matrice  $A$ , on notera  $C'$  la colonne obtenue à partir de  $C$  en ne retenant que les coefficients placés aux positions  $i_1, \dots, i_s, m$ . La colonne  $C$  comporte  $p$  coefficients, la colonne  $\tilde{C}$  comporte  $s$  coefficients et la colonne  $C'$  comporte  $s + 1$  coefficients.

On considère maintenant la sous-matrice  $B'$  de  $A$  obtenue en ne retenant que les lignes  $L_{i_1}, \dots, L_{i_s}, L_m$  et les colonnes  $C_{j_1}, \dots, C_{j_s}, C_\ell$  de la matrice  $A$ . La matrice  $B'$  est donc une sous-matrice carrée de  $A$  de format  $(s + 1) \times (s + 1)$ . Par maximalité de l'entier  $s$ , la sous-matrice  $B'$  n'est pas inversible. On dispose donc d'une combinaison linéaire non triviale entre ses colonnes :

$$\sum_{k=1}^s \beta_k \cdot C'_{j_k} + b \cdot C'_\ell = 0',$$

avec les scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_s, b$  non tous nuls.

Si  $b = 0_K$ , alors on obtient :

$$\sum_{k=1}^s \beta_k \cdot C'_{j_k} = 0',$$

puis en considérant les coefficients sauf celui placé en  $m^{\text{ème}}$  position, alors :

$$\sum_{k=1}^s \beta_k \cdot \tilde{C}_{j_k} = \tilde{0}.$$

La famille  $\mathcal{G} = (\tilde{C}_{j_1}, \dots, \tilde{C}_{j_s})$  est libre : tous les scalaires  $\beta_k$  sont nuls, mais cette configuration n'est pas possible, car au moins un des scalaires n'est pas nul.

On sait alors que  $b$  est non nul. On peut donc exprimer la colonne  $C'_\ell$  comme combinaison linéaire des colonnes  $C'_{j_1}, \dots, C'_{j_s}$  :

$$C'_\ell = \sum_{k=1}^s \gamma_k \cdot C'_{j_k}.$$

En ne retenant dans cette égalité que les coefficients placés en positions  $i_1, \dots, i_s$ , alors :

$$\tilde{C}_\ell = \sum_{k=1}^s \gamma_k \cdot \tilde{C}_{j_k}.$$

On remarque les scalaires  $\gamma_k$  sont exactement les coordonnées du vecteur  $\tilde{C}_\ell$  dans la base  $\mathcal{G}$  de  $\text{Im}(B) = \mathcal{M}_{s,1}(K)$ . Ces coordonnées dépendent de l'entier  $\ell$ , mais ne dépendent pas de l'entier  $m$ . Lorsque l'on fait varier cet entier  $m$ , la relation :

$$C'_\ell = \sum_{k=1}^s \gamma_k \cdot C'_{j_k}$$

permet d'accéder à la relation :

$$C_\ell = \sum_{k=1}^s \gamma_k \cdot C_{j_k},$$

entre les colonnes de la matrice  $A$  :

$$C_\ell \in \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

La famille  $\mathcal{F}$  est donc une base de  $\text{Im}(A)$  :

$$s = \text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{Rg}(A).$$

On montre maintenant le corollaire 2. Vous devez être en mesure de pouvoir démontrer ce résultat avec les matrices équivalentes. On utilise ici la proposition 11.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$  une matrice rectangulaire.

On pose  $s = \text{Rg}(A)$ . On trouve une sous-matrice  $B$  inversible de  $A$  et de format  $s \times s$ .

On remarque que la matrice  $B^T$  est une sous-matrice de  $A^T$  encore de format  $s \times s$ . Comme  $B$  est inversible, alors  $B^T$  l'est également. C'est un résultat que l'on connaît déjà mais qu'on peut retrouver grâce au déterminant, puisque :

$$\det(B) \neq 0_K,$$

donc  $\det(B^T) = \det(B) \neq 0_K$  et la matrice  $B^T$  est inversible.

La matrice  $A^T$  admet donc la sous-matrice  $B^T$  de format  $s \times s$  et inversible. Par la propriété 11, on sait que :

$$s \leq \text{Rg}(A^T).$$

On vient de montrer :

$$\text{Rg}(A) \leq \text{Rg}(A^T).$$

Ceci est valable pour toutes les matrices rectangulaires  $A$ , en appliquant ceci à la matrice  $A^T$ , on obtient :

$$\text{Rg}(A^T) \leq \text{Rg}((A^T)^T) = \text{Rg}(A).$$

On obtient bien ce qu'il faut.

Il est à noter que la démonstration que l'on connaît est moins coûteuse et plus performante. Retenez cette ancienne démonstration plutôt.

On définit maintenant la **comatrice**  $\text{Com}(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

La comatrice  $\text{Com}(A)$  est une matrice de même format que la matrice  $A$ . Ensuite, pour calculer le coefficient ligne  $i$  et colonne  $j$  dans la comatrice  $\text{Com}(A)$ , voici la démarche :

- prendre la matrice  $A$  et lui enlever sa  $i^{\text{ème}}$  ligne  $L_i$  et sa  $j^{\text{ème}}$  colonne  $C_j$
- on obtient ainsi une sous-matrice  $B_{i,j}$  de la matrice  $A$ , la sous-matrice  $B$  étant de format  $(n-1) \times (n-1)$
- calculer le déterminant de cette sous-matrice carrée  $B_{i,j}$ . On note  $\beta_{i,j}$  le déterminant obtenu
- multiplier le déterminant  $\beta_{i,j}$  par  $(-1)^{i+j}$ ; le nombre obtenu :

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \beta_{i,j},$$

s'appelle un cofacteur de la matrice  $A$

- mettre en ligne  $i$  et en colonne  $j$ , le cofacteur  $\Delta_{i,j}$ : on vient de calculer un seul coefficient  $(\text{Com}(A))_{i,j}$  de la comatrice  $\text{Com}(A)$
- on utilise cette démarche « très sympathique » pour les  $n^2$  coefficients de la comatrice  $\text{Com}(A)$ .

Bref, calculer une comatrice est une opération assez monstrueuse...

Il y a assez peu de choses à savoir sur les comatrices : premièrement, il faut connaître sa définition et deuxièmement, il faut connaître la formule :

$$A \cdot (\text{Com}(A))^T = (\text{Com}(A))^T \cdot A = \det(A) \cdot I_n.$$

On démontre cette égalité qui nous dit que quelle que soit la matrice carrée  $A$  choisie dans  $\mathcal{M}_n(K)$ , alors les matrices  $A$  et  $(\text{Com}(A))^T$  [la transposée de la comatrice] commutent et que leur produit est une matrice simple : c'est la matrice d'homothétie de rapport  $\det(A)$ .

Une fois de plus, la démonstration est « *un peu lourde* » – *léger euphémisme...* – mais on commence à en avoir l'habitude dans ce chapitre.

On se donne une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

On se donne un entier  $j$  entre 1 et  $n$ .

On va déjà commencer par montrer la formule suivante :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n A_{k,j} \cdot (\text{Com}(A))_{k,j}.$$

Dans la suite, on note  $C_1, \dots, C_n$  les différentes colonnes de la matrice  $A$ .

On note également  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ .

On sait qu'en renotant  $A$  l'endomorphisme  $u_A$  canoniquement associé à la matrice  $A$ , on a :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(A(e_1), \dots, A(e_n)) = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n).$$

Ensuite, on sait également que la  $j^{\text{ème}}$  colonne  $C_j$  de la matrice  $A$  est exactement  $A(e_j)$ , donc :

$$C_j = A(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot e_i.$$

On utilise maintenant la multilinéarité du déterminant  $\det_{\mathcal{B}_c}$ , et plus particulièrement de la linéarité du déterminant par rapport à sa  $j^{\text{ème}}$  composante.

Dans la suite, la notation  $(\dots, \star, \dots)$  désigne la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  des colonnes de la matrice  $A$  où la colonne  $C_j$  de cette famille a été remplacée par  $\star$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, C_j, \dots) \\ &= \det_{\mathcal{B}_c} \left( \dots, \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot e_i, \dots \right) \\ &= \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot \det_{\mathcal{B}_c} (\dots, e_i, \dots).\end{aligned}$$

On va noter :

$$\xi_{i,j} = \det_{\mathcal{B}_c} (\dots, e_i, \dots).$$

C'est le déterminant de la matrice carrée obtenue à partir de la matrice  $A$  où sa  $j^{\text{ème}}$  colonne  $C_j$  a été remplacée par le  $i^{\text{ème}}$  vecteur  $e_i$  de la base canonique. La matrice obtenue que l'on note par exemple  $M_{i,j}$  est un peu plus simple que la matrice  $A$  de départ car elle comporte un peu plus de zéros...

Calculons maintenant le déterminant  $\xi_{i,j} = \det(M_{i,j})$ .

On va très fortement exploiter le fait que le déterminant est une forme multilinéaire **anti-symétrique**.

Dans la suite des événements, on va modifier cette matrice à l'aide d'opérations de permutations sur les lignes et les colonnes de la matrice  $M_{i,j}$  pour que le  $1_K = (M_{i,j})_{i,j}$  de la  $j^{\text{ème}}$  colonne se retrouve finalement en position  $(n, n)$  tout en bas à droite.

On va déjà permutez les colonnes de  $M_{i,j}$  ...

On considère la permutation  $\sigma = (j, n, n-1, \dots, j+1)$ . Il s'agit soit de l'identité si  $j = n$ , soit d'un cycle de longueur  $n - j + 1$ . Bref, quoiqu'il arrive, la signature de cette permutation  $\sigma$  vaut :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-j}.$$

On rappelle que les colonnes de la matrice  $M_{i,j}$  sont :

$$C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n.$$

On note  $N_{i,j}$  la matrice dont les colonnes sont maintenant :

$$C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n, e_i.$$

On passe de la matrice  $M_{i,j}$  à la matrice  $N_{i,j}$  en permutant les colonnes de  $M_{i,j}$  selon la permutation  $\sigma$ . Comme le déterminant est anti-symétrique, on sait que :

$$\det(N_{i,j}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det(M_{i,j}) = (-1)^{n-j} \cdot \det(M_{i,j}).$$

On va maintenant permutez les lignes de  $N_{i,j}$ . Cela revient à permutez les colonnes de la transposée  $(N_{i,j})^T = S_{i,j}$ .

On considère la permutation  $\rho = (i, n, n-1, \dots, i+1)$  qui est soit l'identité si  $i = n$ , soit un cycle de longueur  $n - i + 1$  sinon. Quoiqu'il arrive, la signature de la permutation  $\rho$  est égale à :

$$\varepsilon(\rho) = (-1)^{n-i}.$$

On observe que la matrice  $R_{i,j}$  obtenue en permutant les colonnes de  $S_{i,j}$  selon la permutation  $\rho$  est une matrice où la  $n^{\text{ème}}$  ligne n'est constituée que de zéros, sauf le dernier coefficient en place  $(n, n)$  qui vaut  $1_K$ .

En notant  $T_{i,j} = (R_{i,j})^T$ , toujours par anti-symétrie du déterminant, on sait que :

$$\det(T_{i,j}) = \det(R_{i,j}) = \varepsilon(\rho) \cdot \det(S_{i,j}).$$

Lorsque l'on regarde la matrice  $T_{i,j}$  obtenue, on obtient cette matrice de la manière suivante :

- prendre la matrice  $M_{i,j}$
- permuter ses colonnes selon la permutation  $\sigma$  définie plus haut
- permuter ses lignes selon la permutation  $\rho$  définie plus haut : on a la matrice  $T_{i,j}$ .

On sait alors que :

$$\det(M_{i,j}) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\rho) \cdot \det(T_{i,j}) = (-1)^{n-j} \times (-1)^{n-i} \cdot \det(T_{i,j}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(T_{i,j}).$$

Or, en notant  $B_{i,j}$  la sous-matrice obtenue à partir de la matrice  $A$  en lui enlevant sa  $i^{\text{ème}}$  ligne et sa  $j^{\text{ème}}$  colonne, on remarque dans la construction de la matrice  $T_{i,j}$  que cette matrice  $T_{i,j}$  est une matrice du type :

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B_{i,j} & \vdots \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

On va maintenant montrer que :

$$\det(T_{i,j}) = \det(B_{i,j}).$$

On utilise la formule du déterminant avec les permutations. Comme les notations  $\sigma$  et  $\rho$  ont déjà été prises, je choisis d'utiliser la notation  $\chi$  pour indexer les permutations. On note dans la suite  $\theta_{k,\ell}$  le coefficient ligne  $k$  et colonne  $\ell$  dans la matrice  $T_{i,j}$  de sorte que si  $k$  et  $\ell$  sont entre 1 et  $n - 1$ , alors le coefficient dans  $T_{i,j}$  ou dans  $B_{i,j}$  est le même en place  $(k, \ell)$ .

On obtient avec les notations ci-dessus :

$$\det(T_{i,j}) = \sum_{\chi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^n \theta_{\chi(k), k}.$$

On partitionne la somme selon que la permutation  $\chi$  vérifie  $\chi(n) = n$  ou non.

Si  $\chi \in \mathfrak{S}_n$  est une permutation telle que  $\chi(n) \neq n$ , alors le coefficient  $\theta_{\chi(n), n}$  est un des zéros de la dernière colonne de la matrice  $T_{i,j}$ , ce qui a pour effet d'annuler le produit  $\prod_{k=1}^n \theta_{\chi(k), k}$ .

Résultat des courses :

$$\det(T_{i,j}) = \sum_{\substack{\chi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \chi(n)=n}} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^n \theta_{\chi(k), k}.$$

Ensuite, si  $\chi \in \mathfrak{S}_n$  est une permutation  $\chi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\chi(n) = n$ , on peut poser la permutation  $\omega : \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  qui est la restriction de la permutation  $\chi$  à l'ensemble  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

Lorsque l'on calcule la décomposition en cycles à supports disjoints pour la permutation  $\chi$ , on obtient une décomposition de la forme :

$$\chi = c_1 \circ \cdots \circ c_r,$$

et comme  $n$  est un point fixe de  $\chi$ , alors l'entier  $n$  ne fait partie d'aucun support des cycles  $c_k$ . Si l'on note  $c'_k$  la restriction du cycle  $c_k$  à l'ensemble  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , alors  $c'_k$  reste un cycle, de même support que  $c_k$ , donc de même longueur que  $c_k$ , donc de même signature que  $c_k$ .

Tout cela pour dire que :

$$\varepsilon(\chi) = \prod_{k=1}^r \varepsilon(c_k) = \prod_{k=1}^r \varepsilon(c'_k) = \varepsilon(\omega).$$

Les permutations  $\chi$  et  $\omega$  sont respectivement dans  $\mathfrak{S}_n$  et dans  $\mathfrak{S}_{n-1}$  mais ont même signature. On en déduit :

$$\begin{aligned} \det(T_{i,j}) &= \sum_{\chi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^n \theta_{\chi(k), k} \\ &= \sum_{\substack{\chi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \chi(n)=n}} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \theta_{\chi(k), k} \times 1_K, \text{ car } \theta_{n,n} = 1_K \\ &= \sum_{\substack{\chi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \chi(n)=n}} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \theta_{\chi(k), k} \\ &= \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\omega) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \theta_{\omega(k), k} \\ &= \det(B_{i,j}). \end{aligned}$$

En résumé, on a montré la chose suivante : le déterminant de la matrice  $M_{i,j}$  obtenue en remplaçant la  $j^{\text{ème}}$  colonne  $C_j$  de la matrice  $A$  par le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique  $e_i$  est égal à :

$$\xi_{i,j} = \det(M_{i,j}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(B_{i,j}).$$

Le coefficient  $\xi_{i,j}$  est donc le cofacteur  $(\text{Com}(A))_{i,j}$ .

Par conséquent, en poursuivant les calculs commencés il y a pas mal de lignes plus haut, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot \xi_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot (\text{Com}(A))_{i,j}. \end{aligned}$$

De la même manière, en travaillant plutôt sur les transposées de la matrice  $A^T$ , on obtiendrait :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n A_{i,j} \cdot (\text{Com}(A))_{i,j}.$$

On retient ces deux formules importantes pour la suite :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} \cdot (\text{Com}(A))_{i,j} \quad [\text{formule } \star]$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n A_{i,j} \cdot (\text{Com}(A))_{i,j} \quad [\text{formule } \star]$$

On a tout ce qu'il faut pour maintenant montrer la formule de la comatrice de la propriété 12.

On fixe un entier  $\ell$  entre 1 et  $n$ .

On calcule :

$$\begin{aligned} \left( A \cdot (\text{Com}(A))^T \right)_{\ell,\ell} &= \sum_{k=1}^n A_{\ell,k} \cdot \left( (\text{Com}(A))^T \right)_{k,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{\ell,k} \cdot (\text{Com}(A))_{\ell,k} \\ &= \det(A), \text{ par la formule } \star \text{ avec } i = \ell \\ &= \left( \det(A) \cdot I_n \right)_{\ell,\ell}. \end{aligned}$$

On calcule ensuite,

$$\begin{aligned} \left( (\text{Com}(A))^T \cdot A \right)_{\ell,\ell} &= \sum_{k=1}^n \left( (\text{Com}(A))^T \right)_{\ell,k} \cdot A_{k,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^n (\text{Com}(A))_{k,\ell} \cdot A_{k,\ell} \\ &= \det(A), \text{ par la formule } \star \text{ avec } j = \ell \\ &= \left( \det(A) \cdot I_n \right)_{\ell,\ell}. \end{aligned}$$

On fixe maintenant  $k \neq \ell$  deux indices entre 1 et  $n$ . On va commencer par montrer que :

$$\left( A \cdot (\text{Com}(A))^T \right)_{k,\ell} = 0_K = \left( \det(A) \cdot I_n \right)_{k,\ell},$$

l'autre formule que l'on démontrera ensuite :

$$\left( (\text{Com}(A))^T \cdot A \right)_{k,\ell} = 0_K = \left( \det(A) \cdot I_n \right)_{k,\ell},$$

est en fait un peu plus directe car elle évite de devoir passer par la transposée.

On considère la matrice  $B$  obtenue à partir de la matrice  $A$  en remplaçant la  $\ell^{ème}$  ligne de  $A$  par sa  $k^{ème}$  ligne.

La matrice  $B$  admet donc deux lignes égales : les lignes numéros  $k$  et  $\ell$  sont égales à la  $k^{ème}$  ligne de la matrice  $A$ .

La matrice  $B^T$  admet donc deux mêmes colonnes. Le rang de  $B^T$  n'est pas égal à  $n$  ou encore le déterminant de  $B^T$  est nul car le déterminant est alterné. Le déterminant de la matrice  $B$  est donc nul, car  $\det(B) = \det(B^T) = 0_K$ .

Appliquons maintenant la formule  $\star$  à la matrice  $B$  pour  $i = \ell$ .

Cela nous donne :

$$0_K = \det(B) = \sum_{j=1}^n B_{\ell,j} \cdot (\text{Com}(B))_{\ell,j}.$$

Fixons maintenant un entier  $j$  entre 1 et  $n$ .

D'une part, le coefficient  $B_{\ell,j}$  est le  $j^{\text{ème}}$  coefficient de la  $\ell^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $B$ , c'est-à-dire le  $j^{\text{ème}}$  coefficient de la  $k^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$  :

$$B_{\ell,j} = A_{k,j}.$$

De plus, le coefficient  $(\text{Com}(B))_{\ell,j}$  vaut  $((\text{Com}(A))_{\ell,j})$ , car le nombre  $(\text{Com}(B))_{\ell,j}$  vaut  $(-1)^{\ell+j} \cdot \xi_{\ell,j}$ , où  $\xi_{\ell,j}$  est le déterminant de la sous-matrice de  $B$  obtenue en lui enlevant sa  $\ell^{\text{ème}}$  ligne et sa  $j^{\text{ème}}$  colonne. Comme les matrices  $B$  et  $A$  ne diffèrent que par leur  $\ell^{\text{ème}}$  ligne et que celle-ci est supprimée dans le calcul des sous-matrices, on découvre que la sous-matrice issue de  $B$  obtenue en enlevant  $L_\ell$  et  $C_j$  est exactement égale à la sous-matrice issue de  $A$  obtenue en enlevant  $L'_\ell$  et  $C'_j$  :

$$(\text{Com}(B))_{\ell,j} = (\text{Com}(A))_{\ell,j}.$$

Résultat des courses :

$$\begin{aligned} 0_K = \det(B) &= \sum_{j=1}^n B_{\ell,j} \cdot (\text{Com}(B))_{\ell,j} \\ &= \sum_{j=1}^n A_{k,j} \cdot (\text{Com}(A))_{\ell,j} \\ &= \sum_{j=1}^n A_{k,j} \cdot ((\text{Com}(A))^T)_{j,\ell} \\ &= (A \cdot (\text{Com}(A))^T)_{k,\ell}. \end{aligned}$$

De la même façon, considérons la matrice  $D$  obtenue à partir de la matrice  $A$  en remplaçant la  $\ell^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par sa  $k^{\text{ème}}$  colonne.

La matrice  $D$  obtenue possède deux mêmes colonnes, donc n'est pas inversible et est de déterminant nul.

On applique maintenant la formule  $\star$  à la matrice  $D$  et pour  $j = \ell$ , ce qui donne :

$$0_K = \det(D) = \sum_{i=1}^n D_{i,\ell} \cdot (\text{Com}(D))_{i,\ell}.$$

Or,  $D_{i,\ell} = A_{i,k}$  et  $(\text{Com}(D))_{i,\ell} = (\text{Com}(A))_{i,\ell}$  car les matrices  $A$  et  $D$  ne diffèrent que par leur  $\ell^{\text{ème}}$  colonne qui est supprimée dans le calcul du cofacteur  $(\text{Com}(D))_{i,\ell}$  ou  $(\text{Com}(A))_{i,\ell}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
0_K = \det(D) &= \sum_{i=1}^n D_{i,\ell} \cdot (\text{Com}(D))_{i,\ell} \\
&= \sum_{i=1}^n A_{i,k} \cdot (\text{Com}(A))_{i,\ell} \\
&= \sum_{i=1}^n (A^T)_{k,i} \cdot (\text{Com}(A))_{i,\ell} \\
&= \left( A^T \cdot \text{Com}(A) \right)_{k,\ell} \\
&= \left( \text{Com}(A)^T \cdot A \right)_{\ell,k}, \text{ car } \left( A^T \cdot \text{Com}(A) \right)^T = \text{Com}(A)^T \cdot A.
\end{aligned}$$

On a bien ce que l'on voulait en interchangeant les rôles des indices  $k$  et  $\ell$  pour cette dernière égalité : la matrice  $\text{Com}(A)^T \cdot A$  est bien diagonale.

On obtient bien la formule matricielle de la propriété 12, car on a bien établi l'égalité coefficient par coefficient des matrices  $A \cdot (\text{Com}(A))^T$ ,  $(\text{Com}(A))^T \cdot A$  et  $\det(A) \cdot I_n$ .

Cette formule – surtout les formules  $\star$  et  $\star\star$  vont maintenant être utiles pour calculer des déterminants en pratique.

On détaille déjà la méthode de la page 9.

Premièrement, on montre que si  $A$  est une matrice dans  $\mathcal{M}_n(K)$ , le fait de remplacer n'importe quelle colonne  $C_i$  par la colonne :

$$C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot C_j,$$

opération qui consiste à remplacer la colonne  $C_i$ , par cette même colonne  $C_i$  plus une combinaison linéaire des autres colonnes, eh bien tout ceci ne modifie pas le déterminant de la matrice.

Avec ces opérations, on pourra modifier la matrice  $A$  afin de créer des coefficients nuls pour simplifier un peu le tout.

Démontrons ceci.

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ , puis  $B$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $i^{ème}$  colonne  $C_i$  par :

$$C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot C_j.$$

On note  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ . On utilise la linéarité du déterminant  $\det_{\mathcal{B}_c}$  par rapport à la  $i^{ème}$  composante et le fait que le déterminant est alterné. Voici les calculs :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det_{\mathcal{B}}(B(e_1), \dots, B(e_n)) \\
&= \det_{\mathcal{B}} \left( C_1, \dots, C_{i-1}, C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot C_j, C_{i+1}, \dots, C_n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det_{\mathcal{B}} \left( \dots, C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot C_j, \dots \right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(\dots, C_i, \dots) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot \det_{\mathcal{B}}(\dots, C_j, \dots) \\
&= \det(A) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot \det_{\mathcal{B}}(\dots, C_j, \dots).
\end{aligned}$$

Or, si  $j$  est un entier différent de  $i$ , alors la famille  $(\dots, C_j, \dots)$  comporte deux fois la même colonne : la colonne  $C_j$  en  $i^{\text{ème}}$  et en  $j^{\text{ème}}$  places. Chaque déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(\dots, C_j, \dots)$  est nul et il ne reste que :

$$\det(B) = \det(A).$$

L'opération que l'on vient de faire sur les colonnes et qui ne modifie pas le déterminant est aussi valable sur les lignes.

Dans une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ , le fait de remplacer n'importe quelle ligne  $L_i$  par :

$$L_i + \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot L_j$$

ne modifie pas non plus le déterminant de  $A$ . En effet, cela revient à considérer la matrice  $A^T$ , puis à effectuer l'opération  $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot C_j$  pour obtenir une matrice  $B'$  telle que :

$$\det(B') = \det(A^T) = \det(A).$$

Ensuite, la matrice  $B'^T$  est de même déterminant que  $\det(B) = \det(A)$  et la matrice  $B'^T$  revient à effectuer l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot L_j$  sur la matrice  $A$  de départ.

Ces opérations sur les lignes pourront également le cas échéant amener des coefficients nuls.

Une fois que l'on a transformé notre matrice  $A$  en une autre matrice  $B$  peut-être un peu plus simple, on repère une ligne ou une colonne de la matrice  $B$  avec un maximum en zéros. S'il s'agit d'une ligne avec plein de zéros dans la matrice  $B$ , on utilise la formule  $\star$  et s'il s'agit d'une colonne avec plein de zéros dans la matrice  $B$ , on utilise la formule  $\star$ .

Le principe est de troquer le calcul d'un déterminant contre le calcul de potentiellement  $n$  déterminants de format  $(n - 1) \times (n - 1)$ . Il est à noter que lors de tout développement, on aura affaire à une somme alternée car le cofacteur fait apparaître un terme en  $(-1)^{i+j}$  dont le signe alterne dans le parcours de la ligne (l'indice  $i$  est donc constant) ou de la colonne (l'indice  $j$  est alors constant).

La méthode est efficace lorsque l'on développe dans la matrice  $B$  par rapport à une ligne ou une colonne qui comporte vraiment beaucoup de zéros. On verra cela sur les exemples...

Détaillons l'exemple 6.

• La formule :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

a déjà été démontrée à l'aide de la somme sur les deux permutations  $\text{id}$  et  $(1, 2)$  de  $\mathfrak{S}_2$ . On peut aussi obtenir cette formule désormais par développement par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

Essayez d'effectuer le développement par rapport à la ligne ou la colonne qui vous fait plaisir : vous obtiendrez cette formule en utilisant le fait que le déterminant de n'importe quelle matrice de format  $1 \times 1$  vaut :

$$\det((\alpha)) = \alpha.$$

Pour le calcul de n'importe quelle matrice de format  $3 \times 3$ , je conseille d'effectuer immédiatement un développement, sans vraiment se préoccuper d'amener des zéros supplémentaires.

On détaille le calcul pour  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

La meilleure ligne ou colonne est au choix la première ligne ou la première colonne ou la deuxième ligne ou la dernière colonne, car chacune comporte un zéro.

Je choisis par exemple de développer par rapport à la première colonne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

On vient de troquer le calcul d'un déterminant  $3 \times 3$  contre trois déterminants  $2 \times 2$  (en fait ici réellement uniquement deux tels déterminants car le deuxième coefficient nul de la première colonne rend inutile le calcul du déterminant  $2 \times 2$  qui lui est associé).

On calcule ensuite chaque déterminant  $2 \times 2$  avec la formule désormais bien connue  $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ .

On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (3 \times 2 - ((-1) \times (-5) - 0 + (-4) \times (2 \times (-5) - 0 \times 3)) = 41.$$

Que nous apprend ce déterminant ?

Premièrement, que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est inversible car cette matrice

est de déterminant non nul non  $\mathbb{R}$  alors que cette matrice vue à coefficients dans  $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$  – le nombre 41 est premier – est une matrice non inversible.

La famille  $\mathcal{F} = \{(1, 0, -4), (2, 3, -1), (0, -5, 2)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et la famille  $\mathcal{G} = \{(1, 2, 0), (0, 3, -5), (-4, -1, 2)\}$  est aussi une base de  $\mathbb{R}^3$  (on peut y voir de la dualité entre les deux familles, mais bon...)

Désormais, pour tester si une famille à  $n$  vecteurs est une base de  $\mathbb{R}^n$  par exemple, on peut répondre à la question grâce à un déterminant plutôt que de gérer des systèmes linéaires...

À partir d'un déterminant  $4 \times 4$ , je conseille la manipulation des lignes ou des colonnes pour amener un certain nombre de zéros sur une même ligne ou une même colonne, pour ensuite développer. Il y a plein de façons différentes de mener les calculs, suivant les opérations choisies

sur les lignes ou les colonnes. Pour le déterminant  $4 \times 4$  proposé, voici une séquence de calculs possibles :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 5 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad [C_2 \leftarrow C_2 + C_3]$$

$$= 0$$

car les deux premières colonnes sont identiques. On peut également continuer le calcul comme suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 5 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad [C_1 \leftarrow C_1 - C_2]$$

$$= 0 \quad [\text{développement première colonne}]$$

On apprend ainsi que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible, ou encore que la famille :

$$\mathcal{H} = \left( (1, -3, 0, 5), (2, 4, 1, 1), (-1, -7, -1, 4), (3, 9, -5, 1) \right)$$

est une famille liée dans  $\mathbb{R}^4$ .

- Soit  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire supérieure par exemple.

On va montrer cette formule très utile :

$$\boxed{\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n \lambda_k.}$$

Cette formule se montre en développant successivement le déterminant par rapport à la première colonne (ou la dernière ligne). Voici l'étape cruciale qui peut s'incorporer dans une récurrence si l'on veut faire les choses rigoureusement :

$$\left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array} \right| = \lambda_1 \times \left| \begin{array}{cccc} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array} \right|.$$

On aboutit facilement à ce qu'il faut.

On a de même cette formule :

$$\left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{array} \right| = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

Pour démontrer cette formule – légèrement moins utile que l'autre – on peut passer à la transposée pour troquer la matrice triangulaire inférieure contre une matrice triangulaire supérieure. On peut aussi obtenir cette formule en développant par rapport à la dernière colonne (ou la première ligne)

On redécouvre le fait que si  $A$  est une matrice triangulaire, alors la matrice  $A$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

- Pour le troisième point, on se réfère scrupuleusement à la méthode décrite plus haut dans ce chapitre, en troquant le calcul de déterminant d'un endomorphisme contre le calcul d'un déterminant d'une matrice carrée.

On choisit la base canonique  $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On note  $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(f)$  et  $B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(g)$ .

Les calculs de huit produits matriciels avec les matrices  $E_{i,j}$  pour  $f$  et pour  $g$  donnent en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  :

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors facilement calculer ces deux déterminants de formats  $4 \times 4$ , ce qui donne :

$$\det(f) = \det(A) = 9 \text{ et } \det(g) = \det(B) = 9.$$

On passe à l'exemple 7.

- Pour la première question, il suffit de résoudre l'équation :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right| \neq 0,$$

d'inconnue  $a \in \mathbb{R}$ .

On résout plutôt l'équation inverse pour ensuite enlever ces solutions.

Or,

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 2-a & 1-a^2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right| \quad [L_2 \leftarrow L_2 - a \cdot L_1] \\ &= \left| \begin{array}{cc} 2-a & 1-a^2 \\ 3 & 1 \end{array} \right| \quad [\text{développement dernière colonne}] \\ &= 3a^2 - a - 1. \end{aligned}$$

Les réels  $a$  qui conviennent à la question posée initialement forment l'ensemble :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right\}.$$

- L'application  $f$  proposée est une symétrie vectorielle sur  $\mathbb{C}_n[X]$  car :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad f(f(P)) = f\left(X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = X^n \left(\frac{1}{X^n} P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = P(X).$$

L'application  $f$  est clairement linéaire (et bien définie de  $\mathbb{C}_n[X]$  vers  $\mathbb{C}_n[X]$ ).

On sait alors que  $f^2 = \text{id}_{\mathbb{C}_n[X]}$ . En prenant le déterminant dans cette égalité, on obtient :

$$1 = \det(\text{id}_{\mathbb{C}_n[X]}) = \det(f^2) = \det(f \circ f) = \det(f)^2.$$

On sait déjà sans trop de calculs que :

$$\det(f) = \pm 1.$$

On va calculer plus précisément ce déterminant.

On va calculer  $\det(f)$  en calculant le déterminant de la matrice  $A$  représentant  $f$  selon une certaine base. On peut essayer la base canonique pour représenter l'endomorphisme  $f$ . On obtient la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

On note  $\Delta_n$  le déterminant de cette matrice de format  $(n+1) \times (n+1)$ .

On va établir une formule de récurrence entre les  $\Delta_k$  pour finalement obtenir  $\Delta_n$ .

On choisit par exemple de calculer  $\Delta_n$  en développant par rapport à la première colonne. Sachant que la matrice est de format  $(n+1) \times (n+1)$ , alors :

$$\Delta_n = (-1)^{1+(n+1)} \Delta_{n-1}.$$

On en déduit que les  $\Delta_n$  sont définis par les formules :

$$\Delta_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (-1)^n \times \Delta_{n-1}.$$

On montre alors facilement par récurrence la formule :

$$\Delta_n = (-1) \left( \sum_{k=0}^n k \right) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

On peut remarquer la chose suivante : comme  $f$  est une symétrie, alors il s'agit d'une symétrie par rapport à  $F = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{C}_n[X]})$  parallèlement à  $G = \text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{C}_n[X]})$ . Selon une base adaptée à la somme :

$$F \oplus G = \mathbb{C}_n[X],$$

on représente l'endomorphisme  $f$  selon la disposition diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix},$$

avec  $r = \dim(F)$  et  $s = \dim(G)$  de sorte que  $r + s = n + 1$ .

Les matrices  $A$  et  $D$  étant semblables ont le même déterminant. De plus, le déterminant de n'importe quelle matrice diagonale est facile à calculer : c'est le produit des coefficients diagonaux (tout comme le déterminant de n'importe quelle matrice triangulaire supérieure). On en déduit :

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \det(A) = \det(D) = (-1)^s.$$

La dimension de l'espace  $G$  est de même parité que  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Plus précisément, si l'on veut calculer  $\dim(G)$ , on distingue deux cas.

→ Si  $n$  est pair, alors  $n + 1$  est impair. On pose  $n + 1 = 2k + 1$ . On remarque que pour tout  $i$  entre 0 et  $k - 1$ , alors le vecteur  $X^i + X^{n-i}$  appartient à  $F$  et  $X^i - X^{n-i}$  appartient à  $G$ . De plus, le vecteur  $X^k$  appartient à  $F$ . Dans ce cas, on a déjà les inclusions :

$$F' = \text{Vect}(1 + X^n, X + X^{n-1}, \dots, X^{k-1} + X^{k+1}, X^k) \subset F$$

et :

$$G' = \text{Vect}(1 - X^n, X - X^{n-1}, \dots, X^{k-1} - X^{k+1}) \subset G.$$

Comme  $\dim(F) + \dim(G) = n + 1$  et  $\dim(F') + \dim(G') = k + 1 + k = n + 1$ , alors :

$$(\dim(F) - \dim(F')) + (\dim(G) - \dim(G')) = 0,$$

et cette somme nulle de deux termes positifs n'est composée que de termes nuls.

On obtient alors par égalités des dimensions finies :  $F = F'$ , de dimension  $k + 1$  et  $G = G'$  de dimension  $k$ .

Lorsque  $n$  est pair, valant  $2k$ , on obtient :

$$\dim(G) = k$$

et donc :

$$\det(f) = (-1)^k.$$

Les entiers  $k$  et  $\frac{n(n+1)}{2} = k$  ( $2k + 1$ ) ont bien la même parité. Tout concorde dans ce cas.

→ Si  $n$  est impair, alors  $n+1$  est pair. On pose  $n+1 = 2\ell$ . On remarque que pour tout  $i$  entre 0 et  $\ell-1$ , alors le vecteur  $X^i + X^{n-i}$  appartient à  $F$  et  $X^i - X^{n-i}$  appartient à  $G$ . Dans ce cas, on a les inclusions :

$$F' = \text{Vect} (1 + X^n, X + X^{n-1}, \dots, X^{\ell-1} + X^{\ell+1}) \subset F$$

et :

$$G' = \text{Vect} (1 - X^n, X - X^{n-1}, \dots, X^{\ell-1} - X^{\ell+1}) \subset G.$$

Comme  $\dim(F) + \dim(G) = n+1$  et  $\dim(F') + \dim(G') = 2\ell = n+1$ , alors :

$$(\dim(F) - \dim(F')) + (\dim(G) - \dim(G')) = 0,$$

et cette somme nulle de deux termes positifs n'est encore composée que de termes nuls. On obtient alors par égalités des dimensions finies :  $F = F'$ , de dimension  $\ell$  et  $G = G'$  de dimension  $\ell$  également.

Lorsque  $n$  est impair, valant  $2\ell-1$ , on obtient :

$$\dim(G) = \ell$$

et donc :

$$\det(f) = (-1)^\ell.$$

Les entiers  $\ell$  et  $\frac{n(n+1)}{2} = (2\ell-1) \cdot \ell$  ont bien encore la même parité. Tout concorde finalement.

- On se donne une matrice carrée inversible  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . On se donne un vecteur colonne  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ . On sait que l'équation matricielle :

$$AX = Y, \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

n'admet qu'une seule solution qui est :

$$X = A^{-1}Y.$$

On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

On va montrer la formule vraie pour tout entier  $i$  entre 1 et  $n$  :

$$x_i = \frac{\det(\tilde{A}_i)}{\det(A)}.$$

Il y a plusieurs façons de démontrer ceci. On peut passer par la comatrice en utilisant le fait que :

$$A \cdot (\text{Com}(A))^T = \det(A) \cdot I_n,$$

donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T.$$

On va faire autrement. On va utiliser la linéarité du déterminant par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  composante.

On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $A$ , puis  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
\det(\tilde{A}_i) &= \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \dots, C_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, Y, \dots) \\
&= \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, AX, \dots) \\
&= \det_{\mathcal{B}_c}\left(\dots, A\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k\right), \dots\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}_c}\left(\dots, \sum_{k=1}^n x_k \cdot C_k, \dots\right) \\
&= \sum_{k=1}^n x_k \cdot \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, C_k, \dots) \\
&= x_i \cdot \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, C_i, \dots), \text{ car } \det \text{ alterné} \\
&= x_i \cdot \det(A).
\end{aligned}$$

On obtient la formule voulue.

Cette formule de Cramer est peu utile en pratique. Elle trouvera une utilité dans le chapitre sur les équations différentielles en deuxième année, mais c'est à peu près tout...

L'exemple 8 est beaucoup plus important et d'utilité beaucoup plus répandue.

La formule du déterminant de Van der Monde est à retenir, même si elle peut paraître « *un peu monstrueuse* ».

Il y a là encore plusieurs façons de procéder.

On va par exemple montrer par récurrence sur  $n$  la formule. On pose :

$\mathcal{P}(n)$  : « pour tous nombres complexes  $z_0, \dots, z_n$ ,

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^n \end{array} \right| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i). \text{ »}$$

▷ Lorsque  $n = 0$ , le produit  $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$  est vide et vaut donc 1 et la matrice de Van der

Monde vaut (1) de déterminant 1.

▷ Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie.

▷ On se donne  $(n + 2)$  nombres complexes  $z_0, \dots, z_{n+1}$ .

On distingue deux cas.

→ Si la liste  $z_0, \dots, z_{n+1}$  comporte deux fois le même nombre, alors le produit

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (z_j - z_i)$$

est nul et la matrice de Van der Monde comporte deux lignes identiques, donc est de déterminant nul.

→ On suppose maintenant que les nombres complexes  $z_0, \dots, z_{n+1}$  sont tous différents.

On pose le polynôme :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n & z_0^{n+1} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n & z_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n & z_n^{n+1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^n & X^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Lorsque l'on développe le déterminant par rapport à la dernière ligne – pour ceux qui se demanderaient : « mais on calcule ce déterminant dans quel corps ? » Une réponse est : « Facile ! Dans le corps  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles !!! » – on remarque que l'expression  $P(X)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $X^{n+1}$  et que le coefficient en  $X^{n+1}$  vaut exactement :

$$V_n(z_0, \dots, z_n).$$

Par hypothèse de récurrence, ce déterminant vaut  $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$  et n'est pas nul. le polynôme  $P(X)$  est exactement de degré égal à  $(n + 1)$ .

De plus, lorsque l'on évalue ce polynôme  $P(X)$  en  $z_k$ , pour  $k$  variant entre 0 et  $n$ , il apparaît que  $P(z_k)$  est le déterminant d'une matrice de Van der Monde qui comporte deux fois la même ligne. Par conséquent,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(z_k) = 0.$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme :

$$P(X) = V_n(z_0, \dots, z_n) \times \prod_{k=0}^n (X - z_k).$$

Il n'y a plus qu'à évaluer ce polynôme en  $z_{n+1}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_n(z_0, \dots, z_{n+1}) &= P(z_{n+1}) \\ &= V_n(z_0, \dots, z_n) \times \prod_{k=0}^n (z_{n+1} - z_k) \\ &= \left( \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i) \right) \times \prod_{k=0}^n (z_{n+1} - z_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (z_j - z_i). \end{aligned}$$

On obtient la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  quoiqu'il arrive.

## La dualité polynômes de Lagrange $\longleftrightarrow$ matrices de Van der Monde

On termine ce chapitre en mettant en lumière le lien « « dual » » qui existe entre les polynômes de Lagrange et les matrices de Van der Monde.

On considère  $n$  nombres complexes différents  $z_1, \dots, z_n$ .

On peut définir d'une part les polynômes de Lagrange associés  $L_1, \dots, L_n$ . Ce sont les seuls polynômes dans  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad L_i(z_j) = \delta_{i,j} \quad [\text{symbole de Kronecker}].$$

Par ailleurs, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$L_i(X) = \prod_{j=1; j \neq i}^n \frac{X - z_j}{z_i - z_j}.$$

On sait de plus que la famille  $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$  forme une base de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  et que pour tout polynôme  $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , la décomposition du vecteur  $P(X)$  selon la base  $\mathcal{L}$  est :

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(z_i) \cdot L_i(X).$$

En notant  $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{n-1})$  la base canonique de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ , alors on sait que la base duale de  $\mathcal{L}$  est la base :

$$\mathcal{L}^* = (L_1^*, \dots, L_n^*) = (\text{ev}_{z_1}, \dots, \text{ev}_{z_n}),$$

la base des formes linéaires des évaluations en  $z_1, \dots, z_n$ .

On peut par ailleurs considérer la matrice de Van der Monde associée aux complexes  $z_1, \dots, z_n$  :

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On vient de démontrer que :

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i).$$

Il s'agit d'une matrice inversible.

On fait maintenant le lien entre ces deux paragraphes.

On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{n-1})$  vers la base  $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ . Ici, cette matrice de passage n'est pas très simple à calculer tout simplement car les polynômes  $L_i(X)$  eux-mêmes ne sont pas très simples à mettre sous forme développée.

Tentons notre chance avec la matrice  $Q = P^{-1}$ , qui est la matrice de passage de la base  $\mathcal{L}$  vers la base  $\mathcal{B}_c$ . Comme pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$X^k = \sum_{i=1}^n z_i^k \cdot L_i(X),$$

alors on découvre que :

$$Q = V_n.$$

Passons pour finir dans le dual et examinons la matrice de passage  $R$  de la base  $\mathcal{B}_c^*$  vers la base  $\mathcal{L}^*$  des évaluations.

La matrice  $R$  est une matrice inversible dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$  et pour tout indice  $j$  entre 1 et  $n+1$ , on peut écrire :

$$L_j^* = \sum_{i=1}^{n+1} R_{i,j} \cdot (X^{i-1})^*.$$

Fixons un entier  $\ell$  entre 1 et  $n$  et évaluons cette égalité entre formes linéaires en le polynôme  $X^{\ell-1}$ , ce qui donne puisque  $(X^{i-1})^*(X^{\ell-1}) = \delta_{i-1, \ell-1} = \delta_{i, \ell}$  :

$$L_j^*(X^{\ell-1}) = R_{\ell, j}.$$

Or, la forme linéaire  $L_j^*$  est exactement l'évaluation :

$$\text{ev}_{z_j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P(X) & \longmapsto & P(z_j) \end{array} .$$

Par conséquent,

$$R_{\ell, j} = L_j^*(X^{\ell-1}) = \text{ev}_{z_j}(X^{\ell-1}) = z_j^{\ell-1}.$$

La matrice  $R$  est exactement la transposée  $V_n^T$  de la matrice de Van der Monde  $V_n$ .

On vient de vérifier sur cet exemple le fait que si  $S$  est la matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}$  vers une base  $\mathcal{C}$ , alors la matrice de passage de la base duale  $\mathcal{B}^*$  vers la base duale  $\mathcal{C}^*$  est exactement la matrice

$$(S^T)^{-1} = (S^{-1})^T.$$