ESPACES VECTORIELS

Exercice 1. [$\circ$]

À résoudre de tête !

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$; $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geqslant 0\}$;
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$; $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \in \mathbb{Z}\}$;
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$; $H = \{(a+b, a-b) : a, b \in \mathbb{R}^2\}$;
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$; $I = \{(1+x, x) : x \in \mathbb{R}\}$;
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$; $J = \{(\lambda - 2\mu, -3\lambda + 6\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y - z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\Big\}$;
$B = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y - z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\Big\}$.

3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$A = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = n\}$; $D = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) + P(1) = 0\}$;
$B = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$; $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$;
$C = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$; $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(X+1) - P(X) = P'(X)\}$.

4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ injective}\}$; $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = 0\}$;
$B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ discontinue}\}$; $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f' - 2f = 0\}$;
$C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ positive}\}$; $G = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f' - 2f = 1\}$;
$D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ 1-périodique}\}$; $H = \Big\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\Big\}$.

5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ croît}\}$; $D = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim u_n = \pi/17\}$;
$B = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ majorée}\}$; $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$;
$C = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim u_n = 0\}$; $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - {u_n}^2\}$.

6. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

$A = \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$; $C = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M) I_n\}$;
$B = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$; $D = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M) M\}$.

Exercice 2. [$\star$]

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions périodiques est-il un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 3. [$\circ$]

Soit E un K-espace vectoriel et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\big(A \subset B$ ou $B \subset A\big)$.

Exercice 4. [$\circ$]

Soit A une K-algèbre. Soit I un idéal de l'algèbre A (c'est-à-dire un idéal de l'anneau A). Démontrer que I est un sous-espace vectoriel de A.

Exercice 5. [○]

Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_a le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - at = 0 \end{cases}$$

Démontrer que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer, selon a, une base.

Exercice 6. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la famille $\big((X+k)^n\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Indication : Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$ pour tout $p \in [\![0;n]\!]$ et conclure.

Exercice 7. [○]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

1. Démontrer que la famille (f, g, h) est libre à l'aide d'évaluations.
2. Démontrer que la famille (f, g, h) est libre à l'aide de développements limités.
3. Démontrer que la famille (f, g, h) est libre à l'aide des comportements asymptotiques.

Exercice 8. [○]

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les applications

$$f_k \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^k(x) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_k \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(kx) \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_p(x) g_q(x) \, \mathrm{d}x$ et en déduire que $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

Exercice 9. [○]

On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. a) Démontrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre.
   b) En déduire qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
2. Démontrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre ($\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers).

Exercice 10. [○]

Soient E un K-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces de E. Démontrer que $E_1, \ldots, E_n$ sont en somme directe si, et seulement si, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on a $(E_1 + \cdots + E_{k-1}) \cap E_k = \{0_E\}$.

Exercice 11. [○]

Avant tout, un conseil :

> Pour déterminer une base d'un espace vectoriel, on « décortique » un élément générique de l'espace pour voir de quoi il est fait. Cela fournit une famille génératrice (que l'on essaye de choisir la plus petite possible). On vérifie ensuite que cette famille est une base de l'espace. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il faut ôter des vecteurs « inutiles » dans la famille génératrice.

1. Soit $E = \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists a, \varphi \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x + \varphi)\big\}$.
   Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer une base de E.
2. Même question avec $E = \{P \in K_n[X] : P(1) = 0\}$.

Exercice 12. [$\circ$]

1. Démontrer que la famille $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la décomposition de $X^3 - 2X^2 + 2X - 3$ dans cette base. En déduire une expression simplifiée de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3 - 2k^2 + 2k - 3}{k!}.$$

Exercice 13. [$\star$] (Théorème de la base téléscopique)

Soient $K \subset L \subset M$ trois corps commutatifs. On suppose donnée une base $(e_i)_{i\in I}$ du K-espace vectorielle L ainsi qu'une base $(f_j)_{j\in J}$ du L-espace vectorielle M. Démontrer que la famille $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base du K-espace vectoriel M.

Exercice 14. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

1. Démontrer que $(F + G = F \cap G) \iff (F = G)$.
2. Démontrer que $(F + G = F \cup G) \iff (F \subset G$ ou $G \subset F)$.

Exercice 15. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel et F, G, F', G' des sous-espaces de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Démontrer que
$$\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F.$$

Exercice 16. [$\circ$]

Soient A, B, C, D quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B = C \oplus D$. On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Démontrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 17. [$\circ$]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $F_a = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(a) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F_a dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 18. [$\circ$]

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes convergentes. On note E_0 le sous-espace de E constitué des suites qui tendent vers 0. Déterminer un supplémentaire de E_0 dans E.

Exercice 19. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et F_1, F_2, G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, démontrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.
2. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, est-ce que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ sont supplémentaires dans G ?

Exercice 20. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions F et G.

1. On suppose que $F + G = E$. Démontrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'intersectent.
2. On suppose que $F \oplus G = E$. Démontrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'intersectent en exactement un point.

Exercice 21. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines disjoints de E de directions respectives F et G. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces affines $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.