DEVOIR MAISON n° 5

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

MATHÉMATIQUES 2 (X, 1986)

Définitions et notations

Dans tout le problème, on note $\|f\|$ la borne supérieure de la valeur absolue de toute fonction f à valeurs réelles définies et bornée sur $\mathbb{R}$. La dérivéee k-ième de f, si elle existe, est notée $f^{(k)}$, et on convient que $f^{(0)}$ est f elle-même.

Partie I. Norme des dérivées des polynômes trigonométriques

Pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dont les valeurs pour tout x réel sont données par

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

où les a_j et les b_j sont des réels.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{F}_n$ et s'il existe un réel α et $2n+1$ réels distincts x appartenant à $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ et tels que $f(x) = 0$, alors f est la fonction nulle.
2. Soient a et b deux réels et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = a \sin(nx + b)$. Montrer que $\|s'\| = n\|s\|$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{F}_n$ et un réel u pour lequel $g'(u) = \|g'\|$, avec $g'(u) > n\|g\|$, et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{n}\|g'\| \sin[n(x-u)] - g(x).$$

   (a) Montrer que h change exactement $2n$ fois de signe sur l'intervalle $[u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$.

   (b) Calculer $h'(u)$ et montrer que h' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi]$.

   (c) Calculer $h''(u)$ et montrer que h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi[$. En déduire une expression explicite de g.

   (d) Les hypothèses faites sur g sont-elles compatibles entre elles ?
4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_n$ et tout entier $k \geq 0$, établir l'inégalité

$$\|f^{(k)}\| \leq n^k \|f\|.$$

   Si k et n sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

Partie II. Norme des dérivées d'une fonction polynôme sur $[-1, 1]$

Pour tout entier n positif ou nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômes d'une variable réelle, à coefficients réels, et de degré au plus égal à n. Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, on pose

$$N(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

et on note $N'(P)$ la plus grande des valeurs absolues des coefficients de P.

1. Soit C la fonction définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $C(x) = \cos[n(\arccos x)]$.
   (a) Montrer que C coïncide sur $[-1, 1]$ avec une fonction de $\mathcal{P}_n$, qu'on notera aussi C, et calculer $N(C)$.
   (b) Établir l'inégalité $|\sin nt| \leq n|\sin t|$ pour tout réel t. En déduire l'inégalité $N(C') \leq n^2$ puis la valeur de $N(C')$.
2. On note $x_1, ..., x_n$ les racines de C, rangées dans l'ordre décroissant.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in [x_n, x_1]$ on a $n\sqrt{1 - x^2} \geq 1$.
   (b) Calculer $|C'(x_i)|$ en fonction des x_i pour $i = 1, ..., n$.
3. Soit $Q \in \mathcal{P}_{n-1}(n \geq 1$. On pose

$$M(Q) = \sup_{x\in[-1,1]} (|Q(x)|\sqrt{1 - x^2}).$$

   (a) Montrer que pour tout x réel n'annulant pas C on a

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\frac{C(x)}{(x - x_i)C'(x_i)}.$$

   (b) Déduire de ce qui précède l'inégalité $N(Q) \leq nM(Q)$.
4. Soient P un polynôme appartenant à $\mathcal{P}_n$ et k un entier appartenant à $[0, n]$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$|P'(x)| \leq nN(P)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

   On pourra utiliser la fonction $t \mapsto P(\cos t)$.
   (b) Établir l'inégalité

$$N(P^{(k)}) \leq \left[\frac{n!}{(n - k)!}\right]^2 N(P).$$

   (c) Vérifier l'équivalence des deux normes N et N' sur $\mathcal{P}_n$ en précisant pour le quotient $N'(P)/N(P)$ un encadrement indépendant de $P \neq 0$.

Partie III. Application à des inégalités de Kolmogorov

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée n-ième.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme

$$P_x(y) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x) \frac{y^k}{k!}.$$

   (a) Majorer $N(P_x)$ à l'aide de $\|f\|$ et $\|f^{(n)}\|$.

   (b) En déduire que, pour tout entier $k \in]0, n[$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en établissant la majoration

$$\|f^{(k)}\| \leq \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 \left(\|f\| + \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right).$$

2. On applique le résultat de la question précédente en remplaçant f par la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(\lambda x)$, où λ est un réel fixé. Par un choix convenable de λ, établir l'inégalité

$$\|f^{(k)}\| \leq 2 \frac{(n!)^{2-\frac{k}{n}}}{[(n-k)!]^2} \|f^{(k)}\|^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}.$$

3. Si de plus $f \in \mathcal{F}_{n_0}$ pour un entier n_0, f appartient à $\mathcal{F}_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ et le résultat de I.4 permet une majoration de $\|f^{(n)}\|$ par $n^k \|f\|$ qui, reportée dans le résultat de III.2, fournit une nouvelle majoration de $\|f^{(k)}\|$. Comparer cette majoration à celle obtenue directement en I.4 en donnant un équivalent simple du logarithme de leur quotient. (On rappelle que, lorsque n tend vers $+\infty$, la différence

$$\ln(n!) - [(n + \frac{1}{2}) \ln n - n]$$

reste bornée.)