ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. [$\circ$]
Démontrer que

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 2. [$\circ$]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Démontrer que

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 \leqslant p \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2 .$$

Exercice 3. [$\circ$]
Dans $\mathscr{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$, orthonormaliser $\big(t \longmapsto 1; t \longmapsto t; t \longmapsto |t|\big)$.

Exercice 4. [$\circ$]
Soient E un espace préhilbertien réel, A une partie de E et F, G deux sous-espaces de E.

1. Démontrer que $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.
2. Démontrer que $\operatorname{Vect} A \subset A^{\perp\perp}$.
3. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
4. Démontrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que dire lorsque E est un espace euclidien ?

Exercice 5. [$\star$]
Dans $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$, démontrer que

$$\{f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}^\perp = \{\widetilde{0}\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})^\perp = \{\widetilde{0}\}.$$

Que retenir de cet exercice ?

Exercice 6.
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On admet qu'il existe une famille de vecteurs unitaires $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ de E telle que les produits scalaires $\langle x_i \mid x_j\rangle$ $(i \neq j)$ soient tous égaux à un nombre réel strictement négatif δ.

1. Démontrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E.
2. Démontrer que les coordonnées de x_{n+1} dans la base $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont toutes égales à -1 et en déduire la valeur de δ.

Exercice 7. [$\star$] (Les projections orthogonales sont les projections « contractantes »)
Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 8. [$\circ$]

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ et calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (X^2 + aX + b)^2 \mathrm{d}X.$$

Exercice 9. [$\circ$]

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire habituel $(A, B) \longmapsto \langle A\,, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver le projeté orthogonal de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et préciser $\mathrm{d}\big(M; \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big)$.

Exercice 10. [$\star$] (Déterminant de Gram)

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, H un hyperplan de E et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de cet hyperplan.

On note p la projection orthogonale sur H.

Pour $x \in E$, on note $\mathrm{d}(x; H)$ la distance de x à H définie par $\mathrm{d}(x; H) := \inf_{y\in H} \|x - y\|$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{d}(x; H)^2 = \langle x, x - p(x)\rangle$.
2. Soit $(y_1, \ldots, y_p)$ une famille de p vecteurs de E. On définit *le déterminant de Gram* de cette famille par la formule

$$\mathrm{gram}(y_1, \ldots, y_p) = \det \begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \cdots & \langle y_1, y_p\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \cdots & \langle y_2, y_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_p, y_1\rangle & \langle y_p, y_2\rangle & \cdots & \langle y_p, y_p\rangle \end{pmatrix}.$$

   a) Démontrer que $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.
   b) Pour $x \in E$, démontrer que

$$\mathrm{d}(x; H)^2 = \frac{\mathrm{gram}(x, e_1, \ldots, e_n)}{\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n)}.$$

Exercice 11. [$\star$]

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. À l'aide du théorème de Riesz, démontrer l'existence et l'unicité d'un endomorphisme f^* de E, appelé *adjoint* de f, tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\,.$$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*)$.
3. Déterminer Id^*, f^{**} et $(g \circ f)^*$ pour tout endomorphisme g de E.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par f^*.
5. Démontrer les égalités

$$\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp \qquad \mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$$

$$\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \qquad \mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}\, f.$$

6. Soit p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $p = p^*$.

ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. [○]

Démontrer que

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

Exercice 2. [○]

Soient E un espace vectoriel euclidien et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. Démontrer que

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 \leqslant p \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2 .$$

Exercice 3. [○]

Dans $\mathscr{C}^0([-1;1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$, orthonormaliser $\big(t \longmapsto 1; t \longmapsto t; t \longmapsto |t|\big)$.

Exercice 4. [○]

Soient E un espace préhilbertien réel, A une partie de E et F, G deux sous-espaces de E.

1. Démontrer que $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.
2. Démontrer que $\operatorname{Vect} A \subset A^{\perp\perp}$.
3. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
4. Démontrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que dire lorsque E est un espace euclidien ?

Exercice 5. [⋆]

Dans $\mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$, démontrer que

$$\{f \in \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R}) : f(0) = 0\}^\perp = \{\widetilde{0}\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})^\perp = \{\widetilde{0}\}.$$

Que retenir de cet exercice ?

Exercice 6.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On admet qu'il existe une famille de vecteurs unitaires $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ de E telle que les produits scalaires $\langle x_i \mid x_j\rangle$ $(i \neq j)$ soient tous égaux à un nombre réel strictement négatif δ.

1. Démontrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E.
2. Démontrer que les coordonnées de x_{n+1} dans la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont toutes égales à -1 et en déduire la valeur de δ.

Exercice 7. [⋆] (Les projections orthogonales sont les projections « contractantes »)

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 8. [○]

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ et calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (X^2+aX+b)^2 \mathrm{d}X.$$

Exercice 9. [○]

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire habituel $(A,B) \longmapsto \langle A\,, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver le projeté orthogonal de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et préciser $\mathrm{d}\big(M; \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big)$.

Exercice 10. [⋆] (Déterminant de Gram)

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, H un hyperplan de E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de cet hyperplan.

On note p la projection orthogonale sur H.

Pour $x \in E$, on note $\mathrm{d}(x; H)$ la distance de x à H définie par $\mathrm{d}(x; H) := \inf_{y\in H} \|x-y\|$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{d}(x; H)^2 = \langle x, x - p(x)\rangle$.
2. Soit $(y_1, \dots, y_p)$ une famille de p vecteurs de E. On définit *le déterminant de Gram* de cette famille par la formule

$$\mathrm{gram}(y_1, \dots, y_p) = \det \begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \cdots & \langle y_1, y_p\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \cdots & \langle y_2, y_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_p, y_1\rangle & \langle y_p, y_2\rangle & \cdots & \langle y_p, y_p\rangle \end{pmatrix}.$$

   a) Démontrer que $\mathrm{gram}(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.
   b) Pour $x \in E$, démontrer que

$$\mathrm{d}(x; H)^2 = \frac{\mathrm{gram}(x, e_1, \dots, e_n)}{\mathrm{gram}(e_1, \dots, e_n)}.$$

Exercice 11. [⋆]

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. À l'aide du théorème de Riesz, démontrer l'existence et l'unicité d'un endomorphisme f^* de E, appelé *adjoint* de f, tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\,.$$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*)$.
3. Déterminer Id^*, f^{**} et $(g\circ f)^*$ pour tout endomorphisme g de E.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par f^*.
5. Démontrer les égalités

$$\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp \qquad \mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$$

$$\mathrm{Ker}(f^*\circ f) = \mathrm{Ker}\, f \qquad \mathrm{Im}(f\circ f^*) = \mathrm{Im}\, f.$$

6. Soit p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $p = p^*$.