Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 22

Exercice 1

1. Soit $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle non nulle. On pose :
$$F(X) = \frac{P}{Q},$$
avec les polynômes P et Q premiers entre eux, de sorte que :
$$\frac{F'}{F} = \frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}.$$
On sait alors que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{F'}{F}$ ne comporte que des termes de la forme $\dfrac{c}{X-\lambda}$, où c est tantôt la multiplicité de la racine λ dans $P(X)$ ou tantôt l'opposé de la multiplicité de la racine λ dans $Q(X)$.
Si $G(X)$ n'admet aucun pôle, alors $G(X)$ est en fait un polynôme, ainsi que G' et si $G(X)$ admet au moins un pôle μ, alors la fraction rationnelle $G'(X)$ comporte par dérivation au moins un terme de la forme :
$$\frac{d}{(X-\mu)^{\alpha}},$$
où d est non nul et $\alpha \geqslant 2$ est un entier.
Quoiqu'il arrive, la fraction rationnelle G' ne peut être égale à $\dfrac{F'}{F}$.

2. • Si $m = 0$, la propriété à établir est claire car φ^m est la fonction constante égale à 1 et la somme de droite $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}$ est vide, donc nulle.
• Supposons la propriété $\mathscr{P}(m)$ vérifiée.
• Supposons que l'on dispose d'une égalité du type :
$$\forall t \in J,\ \varphi^{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m} F_k(t)\ \varphi^k(t) \qquad (L_1)$$
sur un intervalle J infini.
En dérivant le tout, sachant que $\varphi' = G' \times \varphi$, on obtient :
$$\forall t \in J,\ (m+1)G'(t) \times \varphi^{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m} F_k'(t)\ \varphi^k(t) + \sum_{k=0}^{m} F_k(t)\ k\ G'(t)\ \varphi^k(t) \qquad (L_2)$$
En effectuant l'opération $(m+1)\ G'\ L_1 - L_2$, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{m}(m+1-k)F_k\ G'\ \varphi^k - \sum_{k=0}^{m} F_k'\ \varphi^k = 0.$$
La fraction rationnelle devant φ^m est $F_m\ G' - F_m'$. Cette fraction rationnelle n'est pas nulle, donc on peut trouver un intervalle non trivial K sur lequel cette fraction rationnelle est bien définie et ne prend aucune évaluation nulle.
On arrive alors à exprimer φ^m à l'aide d'une somme de termes de la forme $H_k\ \varphi^k$, où H_k est une fraction rationnelle. Ceci rentre en contradiction avec la propriété $\mathscr{P}(m)$.

3. Dans le cas contraire, on peut choisir un vecteur $f_i \times \varphi^j$ qui s'exprime en fonction des autres et on choisit j maximal pour cette propriété.

   Il est impossible que j soit nul car sinon on aurait une combinaison linéaire non triviale entre les vecteurs f_k qui forment une famille libre.

   Par maximalité, en regroupant les termes $f_i \times \varphi^m$ avec éventuellement plusieurs indices i possibles, on obtient une expression de la forme :

$$P\ \varphi^m = \sum_{k=0}^{m-1} Q_k\ \varphi^k,$$

   où P et les Q_k sont des polynômes, le polynôme P n'étant pas nul.

   On met alors en défaut la propriété $\mathscr{P}(m)$ sur un intervalle J infini sur lequel la fonction $t \longmapsto P(t)$ ne s'annule pas et en divisant alors par P pour obtenir des fractions rationnelles.

   La famille $\mathscr{F}$ est bien libre.

Exercice 2

1. Soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_i = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille.

   On fixe un entier j entre 1 et n. On multiplie la combinaison linéaire nulle par X_j et on prend l'espérance. Après simplifications, on obtient :

$$\lambda_j\ \mathbb{E}(X_j\ X_j) = 0,$$

   donc $\lambda_j = 0$: la famille est libre.

2. L'ensemble $\mathscr{F}(\Omega, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension m, la famille $(\mathbf{1}_{\{x\}})_{x \in F}$ formant une base de cet espace.

   Comme X_i est une variable réduite, donc de variance non nulle, alors X_i n'est pas presque sûrement constante : l'ensemble F contient au moins deux éléments, dont un élément non nul x.

   On note Y la variable aléatoire constante égale à x.

   On va montrer que la famille $(Y, X_1, \cdots, X_n)$ est libre.

   Supposons cette famille liée. Compte tenu de la première question, on peut exprimer Y comme combinaison linéaire des X_i :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ X_i.$$

   Comme Y est constante, sa variance $V(Y)$ est nulle.

   Or,

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\ V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i\ \alpha_j\ \mathbb{E}(X_i\ X_j).$$

   On en déduit puisque $V(X_i) = 1$ et les termes $\mathbb{E}(X_i\ X_j)$ sont nuls, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0.$$

   Ainsi, chaque α_i est nul, conduisant au fait que $Y = 0$, alors que x est non nul.

   La famille $(Y, X_1, \cdots, X_n)$ est donc libre, de cardinal $(n+1)$ dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, F)$ de dimension m : on a ce qu'il faut.

Exercice 3

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_k = \left\{ i \in [\![1, n]\!] \mid \left\lfloor n^{\frac{1}{i}} \right\rfloor = k \right\}.$$

Il est clair que la famille $\left(A_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un découpage de $[\![1, n]\!]$.
Or, si i est un entier entre 1 et n, la quantité $n^{\frac{1}{i}}$ est comprise entre 1 et n, donc dès que l'entier k est strictement supérieur à n, l'ensemble A_k est vide.
Ensuite, si k est un entier entre 1 et n, on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned} i \in A_k &\iff \left\lfloor n^{\frac{1}{i}} \right\rfloor = k \\ &\iff k \leqslant n^{\frac{1}{i}} < k+1 \\ &\iff \frac{\ln n}{\ln(k+1)} < i < \frac{\ln n}{\ln k} \qquad [\text{quantité } +\infty \text{ si } k = 1] \end{aligned}$$

En effet, on détaille le fait que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{\ln n}{\ln k} \leqslant n$ en montrant que $\ln n - n \ln 2 \leqslant 0$.
La fonction $f : t \longmapsto \ln t - t\ \ln 2$ est dérivable sur $[2, +\infty[$ de dérivée $f' : t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \ln 2 < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et $f(2) = 0$, donc :

$$f(n) \leqslant 0.$$

Lorsque $k = 1$, on a l'équivalence :

$$i \in A_1 \iff \frac{\ln n}{\ln 2} < i \leqslant n.$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\beta_k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor.$$

Compte tenu de ce qui précède, pour tout entier k entre 2 et n, l'ensemble A_k compte $\beta_k - \beta_{k+1}$ éléments alors que l'ensemble A_1 compte $n - \beta_2$ éléments.
On obtient alors la manipulation de sommes suivante :

$$\begin{aligned} n + \sum_{i=2}^{n} \left\lfloor n^{\frac{1}{i}} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor n^{\frac{1}{i}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in A_k} k \\ &= (n - \beta_2) + \sum_{k=2}^{n} k \times (\beta_k - \beta_{k+1}) \\ &= (n - \beta_2) + \sum_{k=2}^{n} k \times \beta_k - \sum_{k=3}^{n+1} (k-1) \times \beta_k \\ &= (n - \beta_2) + 2\ \beta_2 - n\ \beta_{n+1} + \sum_{k=3}^{n} \beta_k \\ &= n + \sum_{k=2}^{n} \beta_k. \end{aligned}$$

En retranchant n aux deux termes extrémaux, on obtient ce qu'il faut.