

# Oral ENS - Mathématiques Lyon

Garrigou Romain

3 juillet 2019

## Exercice

Soit  $G$  groupe d'ordre  $n$ . Construire un morphisme injectif de  $G$  dans  $S_n$ .  
CNS pour que ce morphisme soit à valeurs dans  $A_n$ .

## Corrections

On identifie  $S(G)$  à  $S_n$  et on prend  $f : g \in G \mapsto (h \mapsto gh) \in S(G)$ . Les cycles de la décomposition de  $f(g)$  sont tous de la forme  $(h, gh, \dots, g^{w(g)-1}h)$ , comprenant exactement  $w(g)$  éléments. Ils sont au nombre de  $\frac{n}{w(g)}$ .

Ainsi,  $\epsilon(f(g)) = (-1)^{(w(g)-1)\frac{n}{w(g)}}$ . On écrit  $n = 2^\alpha \beta$  avec  $\beta$  impair.

— Si il existe  $g \in G$  tel que  $w(g) = 2^\alpha q$ , alors  $w(g^q) = 2^\alpha$  et par la formule précédente  $\epsilon(f(g^q)) = -1$ .

— Sinon, on a pour  $g \in G$ ,  $w(g) = 2^\gamma q$  avec  $\gamma \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket$  et par la formule  $\epsilon(f(g)) = 1$  (car  $\frac{n}{w(g)}$  est alors pair).

Ainsi,  $f$  est à valeurs dans  $A_n$  ssi il n'existe pas de  $g \in G$  d'ordre  $2^\alpha q$ .