

DM n° 4 : Applications

Problème 1 – Théorème de Cantor-Bernstein

Dans ce problème, nous proposons plusieurs preuves du théorème de Cantor-Bernstein. Ce théorème affirme qu’étant donnés deux ensembles E et F , s’il existe une injection $f : E \rightarrow F$ et une injection $g : F \rightarrow E$, alors il existe une bijection de E dans F .

Nous nous donnons, dans tout le problème, deux ensembles E et F , et deux injections $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Dans ce problème, on désigne par $\complement_E A$ le complémentaire dans E d’un sous-ensemble A de E (et de même pour la complémentation dans F).

Question préliminaire

Soit E et F deux ensembles, et $\{E_1, E_2\}$ une partition de E et $\{F_1, F_2\}$ une partition de F . Ainsi, $E = E_1 \sqcup E_2$ et $F = F_1 \sqcup F_2$. On suppose qu’il existe deux bijections $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$. À l’aide de f_1 et f_2 , construire une bijection $f : E \rightarrow F$ (on ne se contentera pas de décrire la construction, on s’appliquera également à prouver que la fonction f est bien bijective).

Partie I – Une première démonstration

1. Dans cette question, nous montrons un lemme préliminaire, cas particulier du lemme du point fixe de Knaster-Tarski. Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante définie sur les parties de E . La croissance de φ s’entend au sens de l’inclusion ; ainsi, pour tous sous-ensembles A et B de E , si $A \subset B$, alors $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. On pose \mathcal{S} le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ défini par :

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \varphi(A) \subset A\},$$

et on définit M par :

$$M = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A.$$

- (a) Justifier que \mathcal{S} est non vide.
- (b) Montrer que $\varphi(M) \subset M$
- (c) Montrer que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$ et en déduire que $M \subset \varphi(M)$.

Ainsi, toute $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ croissante admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, c’est-à-dire vérifiant $\varphi(M) = M$.

2. On définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par :

$$\varphi(A) = \complement_E (g(\complement_F f(A))),$$

c’est-à-dire le complémentaire de l’image directe par g du complémentaire de l’image directe par f de l’ensemble A .

Montrer que φ admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, qu’on se donne pour la suite de cette partie.

3. Montrer que f définit par restriction et corestriction une application $f_1 : M \rightarrow f(M)$, et que f_1 est bijective.
4. Soit $N = \complement_F f(M)$.
 - (a) Décrire $g(N)$.
 - (b) Montrer que g définit par restriction et corestriction une application $g_1 : N \rightarrow \complement_E M$, et que g_1 est une bijection.
5. Construire à l’aide de f_1 et g_1 une bijection $h : E \rightarrow F$.

Partie II – Une deuxième démonstration

1. Dans cette question, on montre le lemme suivant : si B est un sous-ensemble de E , et s'il existe une application injective $u : E \rightarrow B$, alors il existe une bijection $v : E \rightarrow B$. Soit donc B un sous-ensemble de E et $u : E \rightarrow B$ une application injective. On pose $C_0 = \complement_E B$, et on définit une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E par $C_{n+1} = u(C_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on définit :

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n \quad \text{et} \quad C' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

Soit enfin $D = \complement_E C$.

- (a) Montrer que $D \subset B$,
 - (b) Montrer que $\{D, C\}$ est un partage de E (i.e. une partition à parts éventuellement vides), et $\{D, C'\}$ est un partage de B .
 - (c) Montrer que $u(C) = C'$.
 - (d) En déduire, à l'aide de la question préliminaire, l'existence d'une bijection v de E dans B .
2. En considérant $u = g \circ f$ dans le problème de Cantor-Bernstein, montrer l'existence d'une bijection de E sur F .

Partie III – Une troisième démonstration

Soit x un élément de E . On définit une suite (éventuellement finie) associée à x par récurrence de la manière suivante : on pose $u_0(x) = x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n(x)$ est défini, on pose $u_{n+1}(x)$ l'unique antécédent (s'il existe) de $u_n(x)$ par f ou g (selon que $u_n(x)$ est dans E ou F). Si cet antécédent n'existe pas, ou si $u_n(x)$ n'est pas défini, alors $u_{n+1}(x)$ n'est pas défini.

Ainsi, la suite est définie en commençant par prendre un antécédent par f , puis par g , puis par f , et à nouveau par g , etc., tant que c'est possible. Trois cas peuvent se produire :

- La suite $(u_n(x))$ est finie et s'arrête dans E (donc le dernier terme défini est dans E). On définit l'ensemble E_E comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.
 - La suite $(u_n(x))$ est finie et s'arrête dans F (donc le dernier terme défini est dans F). On définit l'ensemble E_F comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.
 - La suite $(u_n(x))$ est infinie. On définit l'ensemble E_∞ comme étant l'ensemble des x de E pour lesquels cette situation se produit.
1. Justifier que $\{E_E, E_F, E_\infty\}$ est un partage de E (i.e. une partition à parts éventuellement vides).
 2. En définissant de la même manière F_E , F_F et F_∞ en partant des points de F , montrer que f définit par restriction une bijection de E_E dans F_E , et que g définit par restriction une bijection de F_F dans E_F .
 3. Montrer que f définit une bijection de E_∞ dans F_∞ et conclure.

Partie IV – Quelques applications classiques

On dit que deux ensembles E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de E dans F . On montre par des exemples l'intérêt du théorème de Cantor-Bernstein dans la théorie des cardinaux. Attention, tous les exemples donnés ci-dessous n'utilisent pas nécessairement ce théorème. Les trois dernières questions sont indépendantes des précédentes.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal (on pourra construire explicitement une bijection en associant à un sous-ensemble de \mathbb{N} une certaine application ; on vérifiera scrupuleusement qu'il s'agit bien d'une bijection)
2. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal (on pourra construire explicitement une bijection en construisant pour une fonction f à valeurs dans \mathbb{N} , une fonction à valeurs dans $\{0, 1\}$, la valeur des $f(i)$ déterminant la position des 1 dans la suite des images).
3. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal.
4. Montrer que $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ et $[0, 1[$ ont même cardinal (on pourra utiliser le développement en base 10, en admettant l'unicité d'un développement propre, c'est-à-dire ne terminant pas par une infinité de 9)
5. Montrer que $[0, 1[$ et \mathbb{R} ont même cardinal.
6. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} ont même cardinal.
7. Montrer que \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} ont même cardinal (on pourra se servir d'un exemple vu en cours d'une application mélangeant les développements de deux réels)
8. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ont même cardinal.
9. Trouver une deuxième preuve du résultat de la question précédente.