Lycée Henri IV
MPSI

Annexe

MÉTHODE DE GAUSS – JORDAN

On présente ici une méthode alternative d'inversion des matrices, dite de Gauss–Jordan.

Soit $A \in \mathscr{GL}_n(K)$. En n'effectuant sur A que des opérations sur les lignes, on peut se ramener par équivalence à la matrice I_n. Ce faisant, on a multiplié A à gauche par une matrice inversible Q pour obtenir I_n de sorte que $QA = I_n$. La matrice Q est donc l'inverse de A. Pour déterminer Q, il suffit d'appliquer les mêmes opérations sur les lignes de I_n, car $QI_n = Q = A^{-1}$.

On peut aussi appliquer la méthode du pivot sur les colonnes. Mais il ne faut pas mélanger les opérations sur les lignes et sur les colonnes.

Dans la pratique, on mène les deux calculs en parallèle : en même temps que l'on transforme A en I_n, on transforme I_n en A^{-1}.

Exemples :

- On a

$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-2} & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow -2L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$I_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$