

LES NOMBRES

♦ Exercice 1. [o]

Parmi les énoncés suivants, lesquels impliquent que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n) \implies (\mathcal{P}(2n) \text{ et } \mathcal{P}(2n+1))$.
2. $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{P}(n) \implies (\mathcal{P}(2n) \text{ et } \mathcal{P}(2n+1))$.
3. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{P}(n) \implies (\mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(2n))$.
4. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{P}(2n) \implies (\mathcal{P}(2n-1) \text{ et } \mathcal{P}(2n+1))$.

1. Oui. On démontre que $\mathcal{H}(n) : \ll \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(2^{n-1}) \text{ sont vraies} \gg$ est initialisée (à $n = 1$) et héréditaire.
2. Non. $\mathcal{P}(3)$ n'est pas nécessairement vraie.
3. Oui. C'est le principe de récurrence de Cauchy. On démontre que $\mathcal{H}(n) : \ll \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(2^{n-1}) \text{ sont vraies} \gg$ est initialisée (à $n = 1$) et héréditaire.
4. Non. On est incapable de démontrer les $\mathcal{P}(n)$ où n est pair (sauf $n = 0$).

♦ Exercice 2.

Soit $a > -1$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : (1+a)^n \geq 1+na.$$

Initialisation : On a $(1+a)^0 = 1 \geq 1+0.a$, ce qui démontre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\ &\geq (1+a)(1+na) && \text{par H.R.} \\ &= 1+(n+1)a+na^2 \\ &\geq 1+(n+1)a, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geq 1+na.}$$

♦ Exercice 3. [o]

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, (1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, \quad (1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}.$$

Initialisation : On a $(1+\sqrt{5})^0 = 1 = 1 + 0\sqrt{5}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{5})^{n+1} &= (1+\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) && \text{(H.R.)} \\ &= (a_n + 5b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{5}, \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ avec $a_{n+1} = a_n + 5b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♦ **Exercice 4.** [o]

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) > \sqrt{2n+1}$.

Considérons, pour tout $n \geq 1$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) : \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) > \sqrt{2n+1}.$$

Initialisation: La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $(1 + 1/1) = 2 > \sqrt{2 \times 1 + 1} = \sqrt{3}$.

Hérédité: Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) > \sqrt{2n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \quad \text{par H.R.}$$

Or

$$\begin{aligned} & \sqrt{2n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) > \sqrt{2n+3} \\ \iff & 2n+2 > \sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} \\ \iff & (2n+2)^2 > (2n+1)(2n+3) && \text{car deux nombres positifs sont rangés} \\ & && \text{dans le même ordre que leurs carrés} \\ \iff & 4n^2 + 8n + 4 > 4n^2 + 8n + 3 \\ \iff & 4 > 3, \end{aligned}$$

donc, puisque cette dernière inégalité est vraie, on peut écrire que

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) > \sqrt{2n+3}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) > \sqrt{2n+1}.$$

♦ **Exercice 5.** [o]

1. Résoudre l'équation $z^2 + (-1+i)z + 2+i = 0$. On notera z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 l'autre.
2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (1-i)u_{n+1} - (2+i)u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2z_1^n + z_2^n$.

1. Résoudre l'équation $z^2 + (-1+i)z + 2+i = 0$. On notera z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 l'autre.

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-1+i)^2 - 4 \times 1 \times (2+i) = -8 - 6i.$$

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 & (1) \\ ab = -3 & (2) \end{cases}$$

En prenant le module dans l'égalité $\delta^2 = \Delta$, on a $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 = 10 \quad (3).$$

En ajoutant (1) et (3), on obtient $2a^2 = 2$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -1$. Lorsque $a = 1$, l'équation (2) implique que $b = -3$ et lorsque $a = -1$, l'équation (2) implique que $b = 3$. Par suite, on a

$$\delta = 1 - 3i \quad \text{ou} \quad \delta = -1 + 3i.$$

Dès lors, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1-i-1+3i}{2} = i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i+1-3i}{2} = 1-2i.$$

Ainsi, on a

$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = 1-2i.$$

2. On considère la suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1-i)u_{n+1} - (2+i)u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2z_1^n + z_2^n$.

Procédons par récurrence double. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2i^n + (1-2i)^n.$$

Initialisation: On a $2i^0 + (1-2i)^0 = 2 + 1 = 3 = u_0$ et $2i^1 + (1-2i)^1 = 2i + 1 - 2i = 1 = u_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité: Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-i)u_{n+1} - (2+i)u_n && \text{par définition de la suite} \\ &= (1-i)(2i^{n+1} + (1-2i)^{n+1}) - (2+i)(2i^n + (1-2i)^n) && \text{par hyp. de réc.} \\ &= ((1-i)i - (2+i))2i^n + ((1-i)(1-2i) - (2+i))(1-2i)^n \\ &= -2i^n + (-3-4i)(1-2i)^n \\ &= i^{n+2} + (1-2i)^{n+2} && \text{car } -1 = i^2 \text{ et } -3-4i = (1-2i)^2 \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion: Le principe de récurrence double permet alors de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2i^n + (1-2i)^n.}$$

♦ Exercice 6. [★]

La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ des nombres de Catalan est définie par $C_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0.$$

Démontrer que $\forall n \geq 0$, $C_n \geq 3^{n-2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : C_n \geq 3^{n-2}.$$

Initialisation: On a $C_0 = 1 \geq 3^{0-2}$, $C_1 = 1 \geq 3^{1-2}$, $C_2 = 2 \geq 3^{2-2}$, $C_3 = 5 \geq 3^{3-2}$ et $C_4 = 14 \geq 3^{4-2}$, donc $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(4)$ sont vraies.

Hérédité: Fixons $n \geq 4$ tel que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0 \\ &= C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \underbrace{C_3C_{n-3} + \cdots + C_{n-3}C_3}_{\geq 3^{1 \cdot 3^{n-5} + \dots + 3^{n-5} \cdot 1}} + C_{n-2}C_2 + C_{n-1}C_1 + C_nC_0 \\ &\geq 1 \times 3^{n-2} + 1 \times 3^{n-3} + 2 \times 3^{n-4} + (n-5) \times 3^{n-4} + 2 \times 3^{n-4} + 1 \times 3^{n-3} + 1 \times 3^{n-2} \\ &= 3^{n-4}(9 + 3 + 2 + n - 5 + 2 + 3 + 9) \\ &= 3^{n-4}(n + 23) \\ &\geq 3^{n-1} \quad \text{car } n + 23 \geq 3^3 \text{ puisque } n \geq 4, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n \geq 3^{n-2}.$$

♦ Exercice 7. [★]

On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}(n) : x_n = n$.

Initialisation: Si $n = 1$, on a $x_1^3 = x_1^2$, donc $x_1 = 1$ (car $x_1 \neq 0$). Ainsi, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(1), \dots, \mathcal{Q}(n)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{Q}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
 x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 + x_{n+1}^3 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^2 \\
 \iff 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + x_{n+1}^3 &= (1 + 2 + \dots + n + x_{n+1})^2 \quad \text{d'après } \mathcal{Q}(n) \\
 \iff \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + x_{n+1}^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + x_{n+1}\right)^2 \quad \text{d'après 1.} \\
 \iff \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + x_{n+1}^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n(n+1)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
 \iff x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)) &= 0 \\
 \iff x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) &= 0 \quad \text{car } x_{n+1} \neq 0 \\
 \iff (x_{n+1} + n)(x_{n+1} - n - 1) &= 0 \\
 x_{n+1} &= n + 1,
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = n.}$$

♦ Exercice 8. [★]

La fonction d'Ackermann-Péter est définie récursivement comme suit :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, A(0, n) = n + 1 \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, A(m, 0) = A(m - 1, 1) \\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*, A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)) \end{cases}$$

La troisième propriété ci-dessus donne l'impression d'un cercle vicieux, car la fonction « s'appelle elle-même » (on dit qu'elle est définie récursivement). La question de cet exercice est donc toute naturelle : démontrer que la fonction d'Ackermann est bien définie !

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(m)$ la propriété

$$\mathcal{P}(m) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, A(m, n) \text{ existe et est un entier naturel}$$

- Initialisation : On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, A(0, n) = n + 1$ ce qui démontre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Fixons $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(m)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$. Pour cela, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$ définie par

$$\mathcal{Q}(n) : \quad A(m+1, n) \text{ existe et est un entier naturel}$$

- Initialisation : On a $A(m+1, 0) = A(m, 1)$ et $A(m, 1)$ existe et est un entier naturel d'après $\mathcal{P}(m)$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{Q}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
 A(m+1, n+1) &= A(m, \underbrace{A(m+1, n)}_{\substack{\text{existe et } \in \mathbb{N} \\ \text{d'après } \mathcal{Q}(n)}}) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{existe et } \in \mathbb{N} \text{ d'après } \mathcal{P}(m)}
 \end{aligned}$$

ce qui démontre que $A(m+1, n+1)$ existe et est un entier naturel, c'est-à-dire que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, A(m+1, n)$ existe et est un entier naturel.

On en déduit que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, A(m, n)$ existe et est un entier naturel. Donc

$$\boxed{\text{la fonction d'Ackermann est bien définie.}}$$

Remarque : La fonction d'Ackermann croît très très rapidement. En particulier, la suite $(A(n, n))_{n \in \mathbb{N}}$ croît plus rapidement que n'importe quelle fonction polynôme ou même exponentielle.

♦ **Exercice 9.** [o]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. \mathbb{Z} possède des « trous » : il existe deux entiers relatifs $n < m$ tels que $]n; m[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.
2. \mathbb{Q} possède des « trous » : il existe deux nombres rationnels $r < s$ tels que $]r; s[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
3. Pour additionner les fractions a/b et p/q , on prend $\text{pgcd}(b, q)$ pour dénominateur commun.
4. Le nombre $0,1234567891011121314151617181920212223\dots$ est rationnel.
5. La somme et le produit de deux irrationnels est un irrationnel.

1. Vrai. Il suffit de prendre pour n et m deux nombres entiers consécutifs.
2. Faux. S'il existait $r, s \in \mathbb{Q}$ tel que $]r; s[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$, alors $(r + s)/2$ serait un rationnel dans $]r; s[$, ce qui est contradictoire.
3. Faux. On utilise le ppcm.
4. Faux. Le développement décimal n'est pas périodique.
5. Faux prendre $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ (pour la somme et le produit).

♦ **Exercice 10.** [o]

Démontrer que $\frac{\ln 2}{\ln 5}$ est irrationnel.

Supposons que $(\ln 2)/(\ln 5)$ est rationnel. On peut alors l'écrire sous la forme $(\ln 2)/(\ln 5) = a/b$ où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Alors $b(\ln 2) = a(\ln 5)$, c'est-à-dire $2^b = 5^a$. Comme $b \neq 0$, 2^b est divisible par 2 et donc 5^a l'est aussi, ce qui est absurde ! Donc

$$\frac{\ln 2}{\ln 5} \text{ est irrationnel.}$$

♦ **Exercice 11.** [o]

1. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. Démontrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel strictement positif est un nombre irrationnel.
3. Soient r, s deux rationnels positifs tels que \sqrt{r} et \sqrt{s} sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est irrationnel.

1. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $r + \alpha \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $r + \alpha = s$. Alors $\alpha = s - r \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde ! Donc

la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

2. Soit α un nombre irrationnel strictement positif. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Alors $\alpha = \sqrt{\alpha}^2 \in \mathbb{Q}$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. Donc

$$\sqrt{\alpha} \text{ est irrationnel.}$$

3. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est un rationnel, noté t . Alors $\sqrt{r} = t - \sqrt{s}$, ce qui donne $r = t^2 - 2t\sqrt{s} + s$ et donc $\sqrt{s} = (t^2 + s - r)/2t \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde ! Donc

$$\sqrt{r} + \sqrt{s} \text{ est irrationnel.}$$

♦ **Exercice 12.** [o]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $|x - y|$ est la distance qui sépare x et y .
2. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
3. \mathbb{R}^* est un intervalle.
4. Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} possède un plus grand élément.

1. Vrai.
2. Faux. Le membre de gauche peut-être défini (si $x < 0$ et $y < 0$) sans que celui de droite le soit.
3. Faux. \mathbb{R}^* est la réunion de deux intervalles disjoints : $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
4. Faux. Par contre, toute partie non vide majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure.

♦ **Exercice 13.** [★]

On pose $a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Démontrer que $a = 4$.

Posons $\alpha = 20 + 14\sqrt{2}$ et $\beta = 20 - 14\sqrt{2}$ de sorte que $\alpha + \beta = 40$ et $\alpha\beta = 400 - 196 \times 2 = 8$. Élevons ensuite a au cube. On obtient

$$a^3 = \alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} = 40 + 3\sqrt[3]{8\alpha} + 3\sqrt[3]{8\beta} = 40 + 6a,$$

ce qui signifie que a est une racine réelle du polynôme $X^3 - 6X - 40$. On peut alors vérifier, par une petite étude de fonction, que ce polynôme ne s'annule qu'en 4 ou encore factoriser par $X - 4$, ce qui donne $X^3 - 6X - 40 = (X - 4)(X^2 + 4X + 10)$ puis contrôler que $X^2 + 4X + 10$ n'a pas de racine réelle (car $\Delta = 16 - 40 = -24 < 0$). Donc

$$\boxed{a = 4.}$$

♦ **Exercice 14.** [★]

Soient a, b, c trois nombres réels positifs ou nuls. Démontrer que l'un au moins des trois nombres réels $4b(1 - c)$, $4c(1 - a)$ et $4a(1 - b)$ est inférieur ou égal à 1.

Posons

$$A = 4b(1 - c), \quad B = 4c(1 - a) \quad \text{et} \quad C = 4a(1 - b).$$

Si l'un des trois nombres a, b, c est supérieur ou égal à 1, alors l'un des trois nombres A, B, C est négatif ou nul et le tour est joué!

Dans le cas où $a, b, c \in [0; 1]$, on constate que

$$ABC = 4a(1 - a) \times 4b(1 - b) \times 4c(1 - c).$$

Or $4a(1 - a)$, $4b(1 - b)$ et $4c(1 - c)$ sont tous les trois dans $[0; 1]$ (car, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $4x(1 - x) \geq 0$ et $4x(1 - x) = 4x - 4x^2 = 1 - (1 - 4x + 4x^2) = 1 - (1 - 2x)^2 \leq 1$) donc

$$ABC \leq 1.$$

Dès lors, A, B, C ne peuvent pas tous être supérieurs ou égaux à 1 sinon leur produit le serait.

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'un au moins des trois nombres réels } 4b(1 - c), 4c(1 - a) \text{ et } 4a(1 - b) \text{ est inférieur ou égal à 1.}}$$

♦ **Exercice 15.** [○]

Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta_m = 4m^2 - 4(-m + 6) = 4(m^2 + m - 6)$. Les valeurs de m pour lesquelles on a $\Delta_m = 0$ sont $m = 2$ et $m = -3$. On sait donc, d'après le cours, que $\Delta_m > 0$ pour $m \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$ et $\Delta_m < 0$ pour $m \in]-3; 2[$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 - 2mx - m + 6 = 0 \text{ admet deux racines réelles distinctes lorsque } m \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[, \\ \text{une racine double lorsque } m = -3 \text{ ou } m = 2 \text{ et aucune racine réelle lorsque } m \in]-3; 2[. \end{array}}$$

♦ **Exercice 16.** [o]

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.

L'équation est définie si, et seulement si, $2x+3 \geq 0$ et $x+2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -3/2$, donc

$$\mathcal{D} = [-3/2; +\infty[.$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2 &\iff \sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{x+2} \\ &\iff 2x+3 = (2 + \sqrt{x+2})^2 \quad \text{tout est positif} \\ &\iff 2x+3 = 4 + 4\sqrt{x+2} + (x+2) \\ &\iff x-3 = 4\sqrt{x+2} \\ &\iff (x-3)^2 = 16(x+2) \quad \text{et } x \geq 3 \\ &\iff x^2 - 22x - 23 = 0 \quad \text{et } x \geq 3 \\ &\quad \Delta = 22^2 - 4 \times 1 \times (-23) = 576 = 24^2 \\ &\iff (x = 23 \text{ ou } x = -1) \quad \text{et } x \geq 3 \\ &\iff x = 23, \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{S} = \{23\}.$$

♦ **Exercice 17.** [★]

Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système d'équations

$$\begin{cases} x + y = z \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \end{cases}$$

L'ensemble de définition de ce système est

$$\mathcal{D} = (\mathbb{R}^*)^3.$$

Pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^*)^3$, on a

$$\begin{cases} x + y = z, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = z, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = z, \\ \frac{z}{xy} = \frac{1}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = z \\ xy = z^2 \end{cases}$$

donc x et y sont les solutions de l'équation

$$X^2 - zX + z^2 = 0.$$

Or

$$\Delta = z^2 - 4z^2 = -3z^2 < 0$$

donc

$$\text{il n'y a pas de solution réelle.}$$

♦ **Exercice 18.**

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$.

• Ensemble de définition

L'inéquation est définie, et seulement si, $(x+3)(x-1) \geq 0$, c'est-à-dire pour

$$x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[.$$

• Résolution

On distingue deux cas :

► Premier cas: $2x - 1 < 0$, c'est-à-dire, dans notre cas, $x \in]-\infty; -3]$.

L'inégalité $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x - 1$ est vraie car un nombre négatif est toujours inférieur à une racine carrée.

► Second cas: $2x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [1; +\infty[$.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs et que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x - 1 &\iff (x+3)(x-1) \geq (2x-1)^2 \\ &\iff x^2 + 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \\ &\iff 3x^2 - 6x + 4 \leq 0. \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée (car $\Delta = -12$). Il n'y a donc pas de solution pour $x \geq 1/2$.

• Bilan

L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'inéquation est

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -3].}$$

♦ **Exercice 19.** [o]

Résoudre dans \mathbb{R} les équations

$$(E_1) \quad \lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2 \quad \text{et} \quad (E_2) \quad \lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor.$$

On a

$$\begin{aligned} (E_1) \quad &\iff 2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3 \\ &\iff 4 \leq x^2 + 1 < 9 && \text{car des nombres positifs sont rangés} \\ &&& \text{dans le même ordre que leurs carrés} \\ &\iff 3 \leq x^2 < 8 \\ &\iff \sqrt{3} \leq |x| < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{S}_1 =]-2\sqrt{2}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2\sqrt{2}[.}$$

On a

$$\lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor \implies |(2x + 1) - (x + 4)| < 1 \iff |x - 3| < 1 \iff x \in]2; 4[,$$

donc les solutions sont nécessairement dans $]2; 4[$. Or

| $x \in$ | $]2; 2,5[$ | $]2,5; 3[$ | $]3; 3,5[$ | $]3,5; 4[$ |
|----------------------------|------------|------------|------------|------------|
| $\lfloor 2x + 1 \rfloor =$ | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\lfloor x + 4 \rfloor =$ | 6 | 6 | 7 | 7 |

donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left] \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right[.}$$

♦ **Exercice 20.** [★]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

On a

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

d'où

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

On distingue deux cas :

► Premier cas : $x \geq \lfloor x \rfloor + \frac{1}{n}$

L'encadrement ci-dessus associé à cette inégalité nous dit que

$$\lfloor x \rfloor < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x,$$

donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

► Second cas : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{n}$

Alors

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + 1,$$

ce qui prouve que

$$\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor.$$

Alors

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

En conclusion,

$$\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

♦ **Exercice 21.** [○] (Passage à la borne supérieure ♥)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

1. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x \leq M$. Justifier l'existence de $\sup A$ et démontrer que $\sup A \leq M$.

Ce résultat s'appelle le *principe du passage à la borne supérieure*. Malgré son caractère simplissime, ce principe est la base de la démonstration d'un bon nombre de propriétés concernant les bornes supérieures.

2. Que devient le principe du passage à la borne supérieure lorsque l'inégalité est stricte dans l'hypothèse ? Autrement dit, lorsqu'on sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x < M$, peut-on en déduire que $\sup A < M$?
3. Énoncer le principe du passage à la borne inférieure.

1. L'hypothèse $\forall x \in A, x \leq M$ nous dit que A est majorée par M . Comme A est non vide par hypothèse, on sait que $\sup A$ existe. Par ailleurs, l'hypothèse $\forall x \in A, x \leq M$ nous dit que M est un majorant de A . Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, on a nécessairement $\sup A \leq M$. Ainsi,

le principe du passage à la borne supérieure est validé.

2. Avec l'hypothèse $\forall x \in A, x < M$, le résultat ne change pas : on démontre « seulement » que $\sup A \leq M$. Autrement dit,

le passage à la borne supérieure élargit les inégalités.

3. Le principe du passage à la borne inférieure dit évidemment que

s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x \geq m$, alors $\inf A$ existe et vérifie $\inf A \geq m$.

♦ **Exercice 22.** [o]

Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} telle que $\sup A > 0$. Démontrer qu'il existe au moins un élément de A qui est strictement positif.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall x \in A, x \leq 0$. Par le principe du passage à la borne supérieure, on en déduit que $\sup A$ existe et $\sup A \leq 0$. C'est contraire à l'hypothèse. Donc

il existe au moins un élément de A qui est strictement positif.

♦ **Exercice 23.** [o]

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} tels que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

Démontrer que $\sup A \leq \inf B$.

Soit $b \in B$. L'hypothèse nous dit que $\forall a \in A, a \leq b$. Le principe du passage à la borne supérieure implique alors que $\sup A$ existe et $\sup A \leq b$. On a donc démontré que $\forall b \in B, \sup A \leq b$. Le principe du passage à la borne inférieure entraîne alors que $\inf B$ existe et

$\sup A \leq \inf B$.

♦ **Exercice 24.** [★]

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles bornées. Que peut-on dire de $\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ vis-à-vis de $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$?

Les ensembles $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ et $\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ étant non vide et bornés dans \mathbb{R} , on sait que $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ et $\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ existent.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ et $g(t) \leq \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ donc $f(t) + g(t) \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$. En passant à la borne supérieure sur t , on obtient alors

$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}.$

Il n'y a pas forcément égalité comme le montre le cas où $f = -g$.

♦ **Exercice 25.** [★]

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(A \subset B) \implies (\sup A \leq \sup B)$.
2. Démontrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.
3. Démontrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Les parties A et B étant non vides et majorées dans \mathbb{R} , on peut affirmer l'existence de $\sup A$ et $\sup B$.

1. Comme $A \subset B$, on en déduit que $\sup B$ est un majorant de A et donc que $\forall a \in A, a \leq \sup B$. En passant à la borne supérieure, on en déduit alors que $\sup A \leq \sup B$. Donc

$(A \subset B) \implies (\sup A \leq \sup B).$

2. Posons $M = \max\{\sup A; \sup B\}$. On sait que $\forall a \in A, a \leq \sup A \leq M$ et $\forall b \in B, b \leq \sup B \leq M$, ce qui implique que $\forall c \in A \cup B, c \leq M$. Donc $A \cup B$ est majorée. Comme $A \cup B$ n'est pas vide (car A ne l'est pas), on en déduit que $A \cup B$ admet une borne supérieure. De plus, en passant à la borne supérieure dans l'assertion $\forall c \in A \cup B, c \leq M$, on a $\sup(A \cup B) \leq M$. Considérons alors un majorant m de $A \cup B$. C'est aussi un majorant de A et de B car $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\sup A \leq m$ et $\sup B \leq m$. Il s'ensuit que $M \leq m$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout majorant m de $A \cup B$, un passage à la borne inférieure nous dit que $M \leq \sup(A \cup B)$. Au final,

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A; \sup B\}.$

3. On a $A \cap B \subset A$ donc $A \cap B$ est majorée par $\sup A$. De même, $A \cap B \subset B$ donc $A \cap B$ est également majorée par $\sup B$. Il s'ensuit que $A \cap B$ est majorée par $\min\{\sup A; \sup B\}$. Mais on ne peut pas déterminer $\sup(A \cap B)$ car $A \cap B$ peut être vide et ne pas avoir de borne supérieure. Et si A et B ne sont pas disjoints, on a $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A; \sup B\}$ mais l'on a pas nécessairement égalité comme le montre l'exemple $A = \{0; 1\}$ et $B = \{0; 2\}$ où l'on a $\sup(A \cap B) = 0$ et $\min\{\sup A; \sup B\} = 1$. En conclusion, on peut seulement dire que, sous réserve d'existence,

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A; \sup B\}.$$

♦ **Exercice 26.** [o]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Deux points du plan complexe sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes affixes.
2. Si $a + ib = c + id$ alors $a = c$ et $b = d$.
3. Un nombre complexe ne peut pas être égale à son conjugué.
4. On a $|2 + i| = \sqrt{2^2 + i^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.
5. Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.
6. Le module d'une somme est la somme des modules.
7. L'ensemble des points dont l'affixe est d'argument nul est la droite réelle.

1. Vrai.
2. Sans préciser que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ce n'est pas vrai. Par exemple, $1 + i.i = 0 + i.0$ sans que $1 = 0$ ni $i = 0$.
3. Faux. Il y a égalité pour les nombres réels.
4. Faux. On a $|2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.
5. Vrai.
6. Faux.
7. Faux. C'est seulement la demi-droite des nombres réels positifs ou nuls.

♦ **Exercice 27.** [o]

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}.$$

2. Calculer les nombres complexes $Z_1 = (z_1)^{1975}$ et $Z_4 = (z_4)^{20}$.
3. Déterminer les nombres entiers $n \geq 0$ tels que $\omega_n = (z_3)^n$ soit un nombre réel.

1. On a

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

On a

$$z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}.$$

On a

$$z_3 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\pi/6}.$$

On a

$$z_4 = \frac{z_3}{z_2} = \frac{2 e^{i\pi/6}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2} e^{i5\pi/12}.$$

2. On a

$$Z_1 = (z_1)^{1975} = \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4} \right)^{1975} = 2^{987} \sqrt{2} e^{i1975\pi/4} = 2^{987} \sqrt{2} e^{-i\pi/4},$$

donc

$$Z_1 = 2^{987} (1 - i).$$

On a

$$Z_4 = (z_4)^{20} = \left(\sqrt{2} e^{i5\pi/12} \right)^{20} = 2^{10} e^{i25\pi/3} = 2^{10} e^{i25\pi/3} = 2^{10} e^{i\pi/3},$$

donc

$$Z_4 = 2^9 (1 + i\sqrt{3}).$$

3. On a

$$\omega_n \in \mathbb{R} \iff 2^n e^{in\pi/6} \in \mathbb{R} \iff \frac{n\pi}{6} = k\pi \iff n = 6k,$$

donc

$$\omega_n \text{ est réel si, et seulement si, } n \text{ est un multiple de 6.}$$

♦ **Exercice 28.** [★]

1. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers relatifs. Démontrer qu'il existe des nombres entiers A et B tels que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2$.
2. Sachant que $29 = 2^2 + 5^2$, $61 = 5^2 + 6^2$ et $1769 = 29 \times 61$, déterminer des nombres entiers m et n tels que $1769 = m^2 + n^2$.

1. Soit $z = a + ib$ et $w = c + id$. Alors

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= |a + ib|^2 |c + id|^2 \\ &= |(a + ib)(c + id)|^2 \\ &= |(ac - bd) + i(ad + bc)|^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\end{aligned}$$

et le résultat est démontré avec $A = ac - bd \in \mathbb{Z}$ et $B = ad + bc \in \mathbb{Z}$.

2. On a

$$1769 = (2 \times 5 - 5 \times 6)^2 + (2 \times 6 + 5 \times 5)^2 = 20^2 + 37^2.$$

♦ **Exercice 29.** [○]

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i(\alpha+\beta)} \neq -1$. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe

$$z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes non nuls de même module. Démontrer que le nombre

$$Z = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$$

est un nombre réel.

1. On a

$$\begin{aligned}z &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)/2} e^{i(\alpha-\beta)/2} + e^{-i(\alpha-\beta)/2}}{e^{i(\alpha+\beta)/2} e^{-i(\alpha+\beta)/2} + e^{i(\alpha+\beta)/2}} \quad \text{angle moyen} \\ &= \frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)},\end{aligned}$$

donc

$$z = \begin{cases} +\frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} e^{i0} & \text{si } \frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} > 0 \\ -\frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} e^{i\pi} & \text{si } \frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} < 0 \end{cases}$$

2. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose $z_k = r e^{i\theta_k}$. On a

$$\begin{aligned}Z &= \frac{(r e^{i\theta_1} + r e^{i\theta_2})(r e^{i\theta_2} + r e^{i\theta_3}) \cdots (r e^{i\theta_{n-1}} + r e^{i\theta_n})(r e^{i\theta_n} + r e^{i\theta_1})}{r e^{i\theta_1} \times r e^{i\theta_2} \times \cdots \times r e^{i\theta_n}} \\ &= \frac{(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})(e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3}) \cdots (e^{i\theta_{n-1}} + e^{i\theta_n})(e^{i\theta_n} + e^{i\theta_1})}{e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}} \\ &= \frac{e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} (e^{i(\theta_1 - \theta_2)/2} + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)/2}) \cdots e^{i(\theta_{n-1} + \theta_n)/2} (e^{i(\theta_{n-1} - \theta_n)/2} + e^{-i(\theta_{n-1} - \theta_n)/2}) e^{i(\theta_n + \theta_1)/2} (e^{i(\theta_n - \theta_1)/2} + e^{-i(\theta_n - \theta_1)/2})}{e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}} \\ &= \frac{e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)} \times 2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \times \cdots \times 2 \cos \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{2} \times 2 \cos \frac{\theta_n - \theta_1}{2}}{e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}} \\ &= 2^n \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \times \cdots \times \cos \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{2} \times \cos \frac{\theta_n - \theta_1}{2} \\ &\in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{Z \in \mathbb{R}.$$

♦ **Exercice 30.** [★]

Déterminer les nombres complexes u et v tels que $|u + iv|^2 = u^2 + v^2$.

On a

$$\begin{aligned} |u + iv|^2 = u^2 + v^2 &\iff (u + iv)(\bar{u} - i\bar{v}) = (u + iv)(u - iv) \\ &\iff u + iv = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{u} - i\bar{v} = u - iv \\ &\iff u = -iv \quad \text{ou} \quad u - \bar{u} = i(v - \bar{v}) \\ &\iff u = -iv \quad \text{ou} \quad \Im(u) = i\Im(v) \\ &\iff u = -iv \quad \text{ou} \quad \Im(u) = \Im(v) = 0 \\ &\iff u = -iv \quad \text{ou} \quad u, v \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donc

$$(|u + iv|^2 = u^2 + v^2) \iff (u = -iv \quad \text{ou} \quad u, v \in \mathbb{R}).$$

♦ **Exercice 31.** [○]

- Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de $-18i$, $1 - i$ et $-\sqrt{3} + i$.
- Calculer sous forme cartésienne les racines carrées de $3 - 4i$ et $-5 - 12i$.

1. AQT

- Cherchons $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = 3 - 4i$. On a $\alpha^2 - \beta^2 = 3$, $2\alpha\beta = -4$ et, puisque $|\delta|^2 = |\Delta|$, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 5$. On en déduit que $\alpha^2 = 4$ d'où $\beta = -1$ si $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ si $\alpha = -2$ ce qui donne $\delta = 2 - i$ et $-\delta = -2 + i$. Donc

$$\text{les racines carrées de } \Delta = 3 - 4i \text{ sont } \delta = 2 - i \text{ et } -\delta = -2 + i.$$

On fait de même pour l'autre et on trouve que

$$\text{les racines carrées de } -5 - 12i \text{ sont } \delta' = 2 - 3i \text{ et } -\delta' = -2 + 3i.$$

♦ **Exercice 32.** [○]

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- $(1 + i)z^2 + iz + (1 - i) = 0$,
- $(1 + i)z^2 + (1 - i)z + 2(1 + i) = 0$,
- $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$,
- $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$.

a) On a $\Delta = -9 = (3i)^2$ donc les solutions de l'équation sont $z = (-i + 3i)/(2 + 2i) = (1 + i)/2$ et $z' = (-i - 3i)/(2 + 2i) = -1 - i$.

b) On a $\Delta = -18i = (3 - 3i)^2$ d'après l'exercice ???. Donc $z = (-1 + i + 3 - 3i)/(2 + 2i) = -i$ et $z' = (-1 + i - 3 + 3i)/(2 + 2i) = 2i$ sont les solutions de l'équation.

c) On a $\Delta = -25(3 + 4i) = -25(3 - 4i) = (i5(2 - i))^2 = (-5 + 10i)^2$ d'après l'exercice ??. Donc $z = (5 - 14i - 5 + 10i)/2 = -2i$ et $z = (5 - 14i + 5 - 10i)/2 = 5 - 12i$ sont les solutions de l'équation.

d) 1, -1 et i sont solutions évidentes.

♦ **Exercice 33.** [○]

Résoudre dans \mathbb{C} les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} ab = -24 - 10i \\ a + b = 5 - 14i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} uv = 1 - 8i \\ u^2 + v^2 = -2 - 16i \end{cases}$$

Pour le premier système, a et b sont solutions de l'équation $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$. D'après l'exercice précédent, on a donc $a = -2i$ et $b = 5 - 12i$ ou l'inverse.

Pour le second système, on a $u^2v^2 = -63 - 16i$ donc u^2 et v^2 sont solutions de l'équation $z^2 + 2(1 + 8i)z - (63 + 16i) = 0$. On a $\Delta' = 32i = (4(1 + i))^2$ donc $u^2 = -1 - 8i + 4 + 4i = 3 - 4i$ et $v^2 = -1 - 8i - 4 - 4i = -5 - 12i$ ou l'inverse. On en déduit, d'après l'exercice ??, que $u = \pm(2 - i)$. Comme $uv = 1 - 8i$, on en déduit que $(u, v) = (2 - i, 2 - 3i)$ ou $(u, v) = (-2 + i, -2 + 3i)$. On peut évidemment échanger le rôle de u et v .

♦ **Exercice 34.** [★]

Dans chacun des cas suivants, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'afixe z vérifie

$$|z| = |z - 6 + 5i|, \quad |\bar{z} + i| = 2, \quad z(2\bar{z} + 1) = 1, \quad |z^2| = |z|.$$

1. L'ensemble des points M d'afixe z tels que $|z| = |z - 6 + 5i|$ est l'ensemble des points équidistants de O et $A(6 - 5i)$, c'est-à-dire

la médiatrice de $[OA]$.

2. On a $(|\bar{z} + i| = 2) \iff (|z - i| = 2)$, donc

on reconnaît le cercle de centre i et de rayon 2.

3. On a $z(2\bar{z} + 1) = 1 \iff (x(2x + 1) + 2y) + i(y(2x + 1) - 2xy) = 1$. Il est donc nécessaire et suffisant que $2x^2 + x + 2y = 1$ et $y = 0$, c'est-à-dire $2x^2 + x - 1 = 0$ et $y = 0$. On trouve alors deux solutions pour le couple (x, y) qui sont $(-1, 0)$ et $(1/2, 0)$. Donc

l'ensemble des solutions est la réunion des deux points d'affixes -1 et $1/2$.

4. On a $|z^2| = |z| \iff |z|(|z| - 1) = 0 \iff (z = 0 \text{ et } |z| = 1)$ donc

l'ensemble des solutions est la réunion du cercle unité et de l'origine.

♦ **Exercice 35.** [★]

Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'afixe z vérifie

$$\frac{z + 4i}{5z - 3} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{z - 1}{z + 1} \in i\mathbb{R}.$$

1. On a $z \neq 3/5$ et

$$\begin{aligned} & \frac{z + 4i}{5z - 3} \in \mathbb{R} \\ \iff & \frac{z + 4i}{5z - 3} = \overline{\frac{z + 4i}{5z - 3}} \\ \iff & \frac{z + 4i}{5z - 3} = \frac{\bar{z} - 4i}{5\bar{z} - 3} \\ \iff & (z + 4i)(5\bar{z} - 3) = (\bar{z} - 4i)(5z - 3) \\ \iff & 5|z|^2 - 3z + 20i\bar{z} - 12i = 5|z|^2 - 3\bar{z} - 20iz + 12i \\ \iff & -20i(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = -24i \\ \iff & -40i\Re(z) + 6i\Im(z) = -24i \\ \iff & 20x - 3y = 12 \quad \text{où } z = x + iy. \end{aligned}$$

Donc

l'ensemble des solutions est donc celui des nombres complexes $z = x + iy$ dont les images $M(z)$ sont sur la droite $20x - 3y = 12$ privée du point d'affixe $3/5$.

2. On a $z \neq -1$ et

$$\begin{aligned} & \frac{z - 1}{z + 1} \in i\mathbb{R} \\ \iff & \frac{z - 1}{z + 1} = -\overline{\frac{z - 1}{z + 1}} \\ \iff & \frac{z - 1}{z + 1} = -\frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1} \\ \iff & (z - 1)(\bar{z} + 1) = -(\bar{z} - 1)(z + 1) \\ \iff & |z|^2 + z - \bar{z} - 1 = -|z|^2 - \bar{z} + z + 1 \\ \iff & |z|^2 = 1 \\ \iff & |z| = 1. \end{aligned}$$

Donc

l'ensemble des solutions est donc le cercle unité \mathbb{U} privé du point d'affixe -1 .

♦ **Exercice 36.** [o]

Pour tout nombre complexe z , on pose

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Résoudre les équations

$$\cos(z) = 2 \quad \text{et} \quad \sin(z) = i.$$

A faire.

♦ **Exercice 37.** [o]

Soit $n \geq 2$. Calculer la somme et le produit des racines n -èmes de l'unité.

A faire.

♦ **Exercice 38.** [o]

Résoudre sur \mathbb{C} les équations :

$$z^4 = i \quad \text{et} \quad z^3 = -1.$$

On a

$$\begin{aligned} z^4 = i &\iff r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi/2} \\ &\iff \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $k = 0, 1, 2, 3$, on détermine, modulo 2π , toutes les solutions de la deuxième équation de ce système. On obtient ainsi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{8}, \quad \theta_1 = \frac{5\pi}{8}, \quad \theta_2 = \frac{9\pi}{8} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{13\pi}{8},$$

ce qui nous dit que

$$\text{les solutions de } z^4 - i = 0 \text{ sont } e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8} \text{ et } e^{i13\pi/8}.$$

On a

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\iff (-z)^3 = 1 \\ &\iff -z \in \mathbb{U}_3 \\ &\iff -z \in \{1; j; j^2\}, \end{aligned}$$

donc

$$\text{les solutions de } z^3 + 1 = 0 \text{ sont } -1, -j \text{ et } -j^2.$$

♦ **Exercice 39.** [o]

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectives des sommets. On note I, J, K, L les milieux des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Avec des notations transparentes, on a $z_{\overrightarrow{IJ}} = z_J - z_I = (z_B + z_C)/2 - (z_A + z_B)/2 = (z_C - z_A)/2$ et $z_{\overrightarrow{LK}} = z_K - z_L = (z_C + z_D)/2 - (z_D + z_A)/2 = (z_C - z_A)/2$ et donc $z_{\overrightarrow{IJ}} = z_{\overrightarrow{LK}}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et donc que

$$IJKL \text{ est un parallélogramme.}$$

Et cela, sans aucune hypothèse sur le quadrilatère de départ !

♦ **Exercice 40.** [★]

Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

En déduire une propriété des parallélogrammes. Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle ?

On a

$$\begin{aligned} |u + v|^2 + |u - v|^2 &= (u + v)\overline{(u + v)} + (u - v)\overline{(u - v)} \\ &= (u + v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u - v)(\bar{u} - \bar{v}) \\ &= |u|^2 + u\bar{v} + \bar{u}v + |v|^2 + |u|^2 - u\bar{v} - \bar{u}v + |v|^2 \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2), \end{aligned}$$

donc

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Dans le parallélogramme porté par les vecteurs d'affixes u et v , $|u + v|$ et $|u - v|$ sont les longueurs de chacune des diagonales et $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs de deux côtés consécutifs. Ainsi,

dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

Dans le cas d'un rectangle, on retrouve le théorème de Pythagore.

♦ **Exercice 41.** [★]

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. À quelle condition les points d'affixes z , z^2 et z^4 sont-ils alignés ?
2. À quelle condition les points d'affixes z , $-z$ et z^2 forment-ils un triangle rectangle en z^2 ?
3. À quelle condition les vecteurs d'affixes z et $1/z$ sont-ils orthogonaux ?

1. Les points d'affixes z , z^2 et z^4 sont alignés si, et seulement si,

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad z = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R},$$

ce qui est équivalent à l'unique assertion

$$z(z + 1) \in \mathbb{R}.$$

En écrivant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, cette condition devient

$$x(x + 1) - y^2 + i(y(x + 1) + xy) \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$2xy + y = 0$$

ou encore

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

En conclusion,

les points d'affixes z , z^2 et z^4 sont alignés si, et seulement si, z est réel (axe des réels) ou de partie réelle égale à $-1/2$ (droite verticale).

2. A faire
3. A faire.

♦ **Exercice 42.** [★]

Dans le plan, on considère un cercle \mathcal{C} de centre O et A, B, P trois points distincts de ce cercle. On souhaite démontrer que l'angle géométrique sous lequel O voit les points A et B est le double de l'angle géométrique sous lequel P voit les mêmes points A et B . C'est le théorème de l'angle au centre. *Remarque : un angle géométrique est défini modulo π .*

Pour cela, on choisit de munir le plan de sa structure complexe en choisissant O pour origine et le rayon du cercle pour unité de longueur. Les points A, B et P appartiennent alors au cercle unité, ce qui permet de noter $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ et $e^{i\theta}$ leurs affixes respectives. L'angle géométrique sous lequel O voit les points A et B est l'angle \widehat{AOB} dont une mesure (modulo π) est notée φ . De façon similaire, l'angle géométrique sous lequel P voit les points A et B est l'angle \widehat{APB} dont une mesure (modulo π) est notée ψ .

Exprimer φ et ψ en fonction de α et β et conclure.

On a

$$\varphi = \arg(z_{\overline{OB}}) - \arg(z_{\overline{OA}}) = \arg(e^{i\beta}) - \arg(e^{i\alpha}) = \beta - \alpha \pmod{\pi},$$

donc

$$\boxed{\varphi = \beta - \alpha \pmod{\pi}}$$

On a

$$\begin{aligned} \psi &= \arg(z_{\overline{PB}}) - \arg(z_{\overline{PA}}) \pmod{\pi} \\ &= \arg(e^{i\beta} - e^{i\theta}) - \arg(e^{i\alpha} - e^{i\theta}) \pmod{\pi} \\ &= \arg \frac{e^{i\beta} - e^{i\theta}}{e^{i\alpha} - e^{i\theta}} \pmod{\pi} \\ &= \arg \left(\frac{e^{i(\beta+\theta)/2} (e^{i(\beta-\theta)/2} - e^{-i(\beta-\theta)/2})}{e^{i(\alpha+\theta)/2} (e^{i(\alpha-\theta)/2} - e^{-i(\alpha-\theta)/2})} \right) \pmod{\pi} && \text{technique de} \\ &= \arg \left(e^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{2i \sin((\beta-\theta)/2)}{2i \sin((\alpha-\theta)/2)} \right) \pmod{\pi} && \text{l'angle moyen} \\ &= \arg(e^{i(\beta-\alpha)/2}) + \underbrace{\arg \left(\frac{\sin((\beta-\theta)/2)}{\sin((\alpha-\theta)/2)} \right)}_{=0 \pmod{\pi} \text{ car c'est un nombre réel}} \pmod{\pi} \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\psi = \frac{\beta - \alpha}{2} \pmod{\pi}}.$$

On constate donc que $\psi = \varphi/2 \pmod{\pi}$, ce qui démontre bien que

le théorème de l'angle au centre est vraie.

♦ **Exercice 43.** [○]

Écrire l'affixe Z du point N image du point M d'affixe z par :

1. la rotation de centre i et d'angle $2\pi/3$;
2. l'homothétie de centre $1+i$ et de rapport 4 ;
3. la similitude directe de centre 1, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.

A faire.

♦ **Exercice 44.** [○]

Déterminer les caractéristiques géométriques de la similitude s^+ qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe Z où :

$$Z = 2(1+i)z - 7 - 4i.$$

A faire.