Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 19

Exercice 1

1. Pour le sens direct, si la suite C est nulle, la quantité Δ_n est le déterminant d'une matrice nulle, donc est nul : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = 0$.

   Pour le sens indirect, si tous les Δ_n sont nuls, montrons par récurrence forte que les c_i sont tous nuls.

   Si $i = 0$, alors $\Delta_0 = 0 = \det(c_0) = c_0$.

   Supposons que les c_i soient nuls pour tout i entre 0 et m.

   Le déterminant Δ_{m+1} est nul. Si la quantité c_{m+1} est non nulle, la matrice A dont le déterminant vaut Δ_{m+1} est une matrice anti-diagonale, cette anti-diagonale n'étant composée que de c_{m+1}. Il est alors clair que le rang de la matrice A vaut $m+2$, c'est-à-dire le nombre de colonnes de A : $\det(A)$ est alors non nul, contredisant la nullité de Δ_{m+1}.

   Conclusion, le coefficient c_{m+1} est nul et ceci achève la récurrence forte : tous les c_i sont nuls.

2. Supposons la suite C pseudo-périodique. On utilise les notations de l'énoncé.

   Choisissons un entier $n \geqslant p$.

   On effectue l'opération dans la matrice A_n associée à Δ_n – la première colonne étant C_0 :

$$C_n \longleftarrow C_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot C_{n-j}.$$

   Cette opération ne modifie pas le déterminant Δ_n. Cette opération remplace l'ancienne colonne C_n par une colonne nulle : car les coefficients de la nouvelle colonne C_n valent :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ c_{n+k} - \sum_{j=1}^{p} \lambda_k \cdot c_{n+k-j} = 0.$$

3. Dans le calcul de Δ_{n-m-1}, on effectue pour tout entier k de $m+1$ à n l'opération suivante :

$$C_k \longleftarrow C_k - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot C_{k-j}.$$

   Ces opérations ne modifient pas le déterminant Δ_{n-m-1} et après ces opérations, des coefficients nuls apparaissent comme ceci :

$$\Delta_{n-m-1} = \begin{vmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ A_m & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \iddots & a \\ & 0 & \iddots & \\ \bigstar & a & & \bigstar \end{vmatrix}.$$

   En développant par rapport à la colonne C_{m+1} puis par rapport à la nouvelle colonne C_{m+1}, etc, on obtient au signe près :

$$\Delta_{n-m-1} = \pm\ \Delta_m \times a^{n-2m-1}.$$

4. Dans la formule précédente, sous les hypothèses, on doit avoir $a^{n-2m-1} = 0$, puis $a = 0$.
5. On a déjà démontré le sens $\boxed{\Longrightarrow}$.
Pour le sens $\boxed{\Longleftarrow}$, on suppose que pour tout $n \geqslant q$, où l'entier q est fixé dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = 0$.
Si tous les Δ_n sont nuls, alors les c_i sont tous nuls et la suite nulle est pseudo-périodique en prenant des scalaires λ_k nuls.
Sinon, on choisit parmi tous les entiers m, le plus grand entier m tel que $\Delta_m \neq 0$. Alors, $\Delta_{m+1} = 0$. Dans la matrice A_{m+1} associée à Δ_{m+1}, la matrice A_{m+1} n'est pas inversible et la sous-matrice constituée des $m+1$ premières lignes et colonnes est la matrice A_m inversible : la dernière colonne de A_{m+1} est combinaison linéaire des premières colonnes. On obtient
$$C_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \cdot C_{m+1-j},$$
ou encore :
$$\forall k \in [\![m+1, 2m+2]\!],\ c_k = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \cdot c_{k-1}.$$
On obtient les hypothèses de la question 3. avec l'entier m, l'entier $p = m+1$ et l'entier $n = 2m+2$.
On amorce alors une récurrence et si on a les hypothèses de la question 3. pour tout k entre $m+1$ et $n-1$, alors on a la relation au rang n.
On a alors la relation pour tout entier $n \geqslant m+1$. La suite C est pseudo-périodique.

Exercice 2

1. Soit λ un complexe.
On en déduit les calculs successifs :
$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - a_{d-1} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{d-1}) \cdot \lambda^{d-1} + \sum_{j=0}^{d-2} (-a_j) \cdot (-1)^{j+1+d} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$
avec B_1 une matrice carrée dans $\mathscr{M}_j(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec des λ sur la diagonale et B_3 une matrice carrée dans $\mathscr{M}_{d-1-j}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec des (-1) sur la diagonale.
On en déduit :
$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= (\lambda - a_{d-1}) \cdot \lambda^{d-1} + \sum_{j=0}^{d-2} (-a_j) \cdot (-1)^{j+1+d} \cdot \lambda^j\ (-1)^{d-1-j} \\ &= \lambda^d - a_{d-1}\ \lambda^{d-1} - \sum_{j=0}^{d-2} a_j\ \lambda^j = P(\lambda). \end{aligned}$$
2. Pour tout entier k entre 1 et d, $P(z_k) = 0$, donc la matrice $z_k \cdot I_d - A$ est non inversible et donc on peut choisir un vecteur colonne non nul X_k dans le noyau de cette matrice non inversible. Ce vecteur X_k sera alors tel que :
$$AX_k = z_k \cdot X_k.$$

3. Soit $R(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Alors, pour tout entier k entre 1 et d, on peut écrire :

$$R(A)X_k = R(z_k) \cdot X_k.$$

Soit $\sum_{k=1}^{d} \alpha_k \cdot X_k = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille. On applique l'application linéaire $R(A)$ à cette combinaison linéaire où $R(A)$ est un polynôme de la matrice A. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{d} R(z_k) \cdot \alpha_k \cdot X_k = 0.$$

Il suffit maintenant de considérer les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_d$ associés aux complexes distincts $z_1, \cdots, z_d$. En appliquant la formule précédente à $R(X) = L_i(X)$, on en déduit :

$$0 = \sum_{k=1}^{d} L_i(z_k) \cdot \alpha_k \cdot X_k = \alpha_i \cdot X_i.$$

Comme chaque vecteur X_i est non nul, alors $\alpha_i = 0$ et donc la famille considérée est libre : c'est une base de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$.

4. En prenant Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ vers la base $(X_1, \cdots, X_d)$, alors $Q^{-1}AQ$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $z_1, \cdots, z_d$ dans cet ordre.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = Q^{-1}\text{Diag}(z_1, \cdots, z_d)^n Q = Q^{-1}\text{Diag}(z_1^n, \cdots, z_d^n)Q.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant la trace :

$$S_n = \text{Tr}(A^n).$$

Comme la matrice A est à coefficients entiers, il est clair que chaque matrice A^n est à coefficients entiers, ainsi que sa trace. On obtient ce qu'il faut.

Remarque : il serait bien de retenir l'idée de cet exercice ! !
Cela peut s'avérer utile lors de certains problèmes d'écrit (même si les choses sont alors détaillées) ou lors de planches d'oral...