Chapitre 2 : techniques en Algèbre

Table des matières

1 Raisonnements par récurrence

1.1 Énoncés des principes

On rappelle que la lettre $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ et que la lettre $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.
On rappelle que toute partie non vide incluse dans $\mathbb{Z}$ et minorée admet un plus petit élément (pour la relation d'ordre $\leqslant$) et que toute partie non vide incluse dans $\mathbb{Z}$ et majorée admet un plus grand élément. En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1 *récurrence normale*
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant de la variable entière non muette n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose les deux conditions suivantes :
- ***initialisation*** : la propriété $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
- ***hérédité*** : pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Théorème 2 *récurrence forte*
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant de la variable entière non muette n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose les deux conditions suivantes :
- ***initialisation*** : la propriété $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
- ***hérédité*** : pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\Big[\forall k \in \{n_0, \cdots, n\}, \mathscr{P}(k)\Big] \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Méthode : Comment faire une récurrence normale ?
Pour montrer la propriété $\mathscr{P}(n)$ par récurrence normale :
- ▶ montrer $\mathscr{P}(0)$ par exemple [initialisation]
- ▶ supposer que la propriété est vraie pour un certain entier n [hypothèse de récurrence]
- ▶ montrer alors la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ [hérédité]

Méthode : Comment faire une récurrence double ?
Pour montrer la propriété $\mathscr{P}(n)$ par récurrence double :
- ▶ montrer $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ par exemple [initialisation]
- ▶ supposer que les propriétés $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain entier n [hypothèse de récurrence double]
- ▶ montrer alors la propriété $\mathscr{P}(n+2)$ [hérédité]

Méthode : Comment faire une récurrence forte ?
Pour montrer la propriété $\mathscr{P}(n)$ par récurrence forte :
- ▶ montrer $\mathscr{P}(0)$ par exemple [initialisation]
- ▶ supposer que les propriétés $\mathscr{P}(k)$ sont vraies jusqu'à un certain entier n [hypothèse de récurrence forte]
- ▶ montrer alors la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ [hérédité]

1.2 Exemples

Exemple 1 Montrer les formules :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple 2 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{1}{34}, \quad u_2 = \frac{3}{\pi} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{1}{3}(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$.

Exemple 3 Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme : $n = 2^p \cdot (2r+1)$, avec p et r deux entiers naturels.

2 Calculs de sommes

2.1 Sommes arithmétiques

Définition 1 On dit que des nombres $u_1, \cdots, u_n$ sont ***en progression arithmétique*** s'il existe un nombre r appelé ***raison*** tel que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n-1\},\ u_{k+1} = u_k + r.$$

Méthode : Comment calculer une somme de termes en progression arithmétique ?

Si $u_1, \cdots, u_n$ sont en progression arithmétique, pour calculer leur somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$, utiliser la formule :

$$\boxed{\text{somme de termes arithmétiques} = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}}$$

Exemple 4 • Calculer la somme $\sum_{k=10}^{1000} u_k$, lorsque $u_k = 2k+5$.

• Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{i,j=1}^{n} \max\{i,j\}$.

Exemple 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $\alpha \in [0, +\infty[$ et $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. Montrer que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i\ a_j}{i+j+\alpha} \geqslant 0.$$

2.2 Sommes géométriques

Définition 2 On dit que des nombres $u_1, \cdots, u_n$ sont ***en progression géométrique*** s'il existe un nombre q appelé ***raison*** tel que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n-1\},\ u_{k+1} = q \cdot u_k.$$

Méthode : Comment calculer une somme de termes en progression géométrique ?

Si $u_1, \cdots, u_n$ sont en progression géométrique, pour calculer leur somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$,

▶ lorsque la raison est différente de 1, utiliser la formule :

$$\boxed{\text{somme de termes géométriques} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}}$$

▶ lorsque la raison vaut 1, tous les termes de la somme sont égaux puis utiliser la formule :

$$\boxed{\text{somme de termes égaux} = \text{nombre de termes} \times \text{l'un des termes}}$$

Exemple 6 • Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$, lorsque $q \in [0, 1]$, puis $\sum_{k=0}^{n} k \cdot q^{k-1}$, lorsque $q \in [0, 1[$.

• Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} k \ \cos(k\theta)$.

2.3 Sommes du binôme de Newton

2.3.1 Factorielles

Définition 3 Si $n \in \mathbb{N}$, on appelle ***factorielle de*** n, le nombre :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

On admet pour l'instant que $0! = 1$.

Proposition 1 La propriété fondamentale est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)! = (n+1) \times n!$$

2.3.2 Coefficients binomiaux

Définition 4 Si k et n sont deux entiers relatifs, on pose le ***coefficient binomial*** :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{, si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}.$$

Proposition 2 Voici les formules utiles pour les coefficients binomiaux :

• si $0 \leqslant k \leqslant n$ sont deux entiers, $\binom{n}{k} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$

• $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

• $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ [triangle de Pascal]

Méthode : Comment appliquer le binôme de Newton ?

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n, utiliser la formule :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}}$$

Pour calculer les coefficients binomiaux, utiliser le triangle de Pascal.

Exemple 7 • Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

- Linéariser $\cos^3\theta$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \, \sin(k\theta)$.

Proposition 3 Soient k et n deux entiers naturels. Alors, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est exactement le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

2.4 Sommes télescopiques

Méthode : Comment calculer une somme télescopique ?

Pour calculer par télescopage une somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$:

- ▶ écrire chaque terme u_k sous la forme : $u_k = v_{k+1} - v_k$
- ▶ utiliser la simplification :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1}$$

Exemple 8 • Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

- Simplifier pour tout $n \geqslant 2$, $\pi_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

3 Systèmes linéaires

3.1 Mise en place

Définition 5 On appelle ***système linéaire de n équations à p inconnues*** $x_1, \cdots, x_p$, tout ensemble d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1p} \cdot x_p = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2p} \cdot x_p = y_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{np} \cdot x_p = y_n \end{cases},$$

où les nombres a_{ij} sont tous connus lorsque (i,j) varie dans $\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}$ ainsi que les paramètres $y_1,\cdots,y_n$.
Dans un tel système linéaire, la $k^{ème}$ équation est dénommée ***ligne*** L_k.

3.2 Opérations élémentaires

Définition 6 On appelle ***opération élémentaire sur un système linéaire comportant les lignes*** $L_1,\cdots,L_n$, toute opération de l'une des trois formes suivantes :

- $\boxed{L_i \longleftrightarrow L_j}$ qui consiste à échanger deux lignes L_i et L_j
- $\boxed{L_i \longleftarrow \lambda\cdot L_i}$ qui consiste à remplacer une ligne L_i par cette ligne multipliée par une constante λ non nulle
- $\boxed{L_i \longleftarrow L_i+\mu\cdot L_j}$ qui consiste à remplacer une ligne L_i par cette même ligne L_i à laquelle on a ajouté une autre ligne L_j multipliée par une constante μ.

Proposition 4 Si $\mathscr{S}$ est un système linéaire, toute opération élémentaire sur $\mathscr{S}$ transforme $\mathscr{S}$ en un autre système $\mathscr{S}'$ qui lui est équivalent – autrement dit, les systèmes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ ont exactement les mêmes solutions.

Méthode : Comment résoudre un système linéaire par le pivot de Gauss ?

Étant donné un système linéaire $\mathscr{S}$: $\begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ où L_k est $a_{k1} \cdot x_1 + \cdots + a_{kp} \cdot x_p = y_k$, le principe est d'utiliser les opérations élémentaires pour aboutir à sa résolution. Voici l'ordre dans lequel s'effectue l'algorithme du pivot à partir du système $\mathscr{S}$:

■ étape de triangularisation

- ▶ à l'aide d'une opération $L_1 \longleftrightarrow L_i$, amener en première ligne un coefficient non nul devant x_1
- ▶ ensuite, à l'aide des opérations $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot L_1$ pour $i \geqslant 2$, éliminer l'inconnue x_1 à partir de la deuxième ligne
- ▶ recommencer le processus pour x_2 pour le sous-système des lignes $L_2, \cdots, L_n$ système admettant une ligne et une inconnue de moins que le système initial
- ▶ aboutir à la fin de ce processus à un système triangulaire de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots = \cdots \\ \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots = \cdots \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_p \cdot x_p + \cdots = \cdots \\ 0 = \cdots \\ \vdots \\ 0 = \cdots \end{cases}$$

■ étape de résolution

- ▶ si l'une des équations du type $0 = \cdots$ conduit à une incompatibilité, on dit que le système est ***incompatible*** : il n'admet aucune solution
- ▶ sinon, on peut supprimer les lignes $L_{p+1}, \cdots, L_n$ (lorsque $n \geqslant p$). Dans ce cas, tout se joue sur les coefficients diagonaux $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ dans le système ***triangulaire*** obtenu :
  - si tous les coefficients diagonaux α_k sont non nuls, le système admet une seule solution : le système est appelé ***système de Cramer***. Pour obtenir cette seule solution, on calcule x_p dans L_p, puis x_{p-1} en remontant jusqu'à x_1
  - si l'un au moins des coefficients α_k est nul, le système admet une infinité de solutions. Pour calculer ces solutions, on obtient explicitement les x_k devant les α_k non nuls et les x_j non présents deviennent des paramètres, les inconnues étant exprimées en fonction de ces paramètres.

Exemple 9 • Résoudre les systèmes linéaires $\begin{cases} mx + z + t = 2 \\ y - z + 2t = 1 \\ x - y - z - 2t = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \end{cases}$.

• Trouver le point d'intersection de la droite passant par $\Omega(1, 1, 0)$ et dirigée âr $\vec{u}(-1, 1, 1)$ et le plan d'équation $x + y - z = 3$.