

Exercices d'oraux : thermodynamique

Thermodynamique 1

(Centrale)

- On considère que le régime est quasi-stationnaire et obéit donc à $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. On intègre en

$$T(x, t) = T_0(t) + (T_e - T_0(t)) \frac{x}{\ell}$$

Le flux est alors

$$\varphi = -KS \frac{T_e - T_0(t)}{\ell}$$

- On fait un bilan enthalpique entre t et $t + dt$; il vient

$$\ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{K}{L\mu} (T_e - T_0(t))$$

- La continuité du flux entraîne

$$\alpha(T_0(t) - T_a) = \frac{K}{\ell} (T_e - T_0(t))$$

d'où

$$T_0(t) = \frac{T_e + \frac{\alpha\ell(t)}{K} T_a}{1 + \frac{\alpha\ell(t)}{K}}$$

$$(1 + \frac{\alpha\ell}{K}) \frac{d\ell}{dt} = \frac{\alpha}{\mu L} (T_e - T_a)$$

On intègre

$$\ell + \frac{1}{2} \frac{\alpha\ell^2}{2K} = \frac{\alpha}{\mu L} (T_e - T_a) t$$

$$\ell(t) = \frac{K}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{KL\mu} (T_e - T_a)t} - 1 \right)$$

Thermodynamique 2

(Centrale)

Pour les exercices avec changement d'état liquide vapeur, il est important de représenter l'état initial et final sur une isotherme d'Andrews puisque $T = C^{\text{te}}$.

- La pression de vapeur saturante de l'eau est 1 bar à 373 K donc initialement l'eau est sous forme de gaz parfait. Pour avoir à l'état final de l'eau saturante il faut que la pression soit la pression de vapeur saturante 1 bar. En négligeant le volume massique de l'eau liquide devant celui de l'eau vapeur (légitime car il est environ 1000 fois plus faible), on trouve que $V_F = \frac{1}{2}V_A$ où A est le point intermédiaire correspondant à l'eau sous forme de vapeur juste saturante. On applique la loi des gaz parfaits pour déterminer $V_A = 0,4V_0$.

d'où

$$V_F = 0,2V_0$$

2. Calculons ΔS en suivant le chemin $I \rightarrow A \rightarrow B$:

$$\Delta S_{IA} = -nR \ln \frac{V_A}{V_0} = nR \ln 2,5 \quad \text{et} \quad \Delta S_{AF} = -\frac{1}{2} \frac{L_V}{T_0}$$

puisque $x_{VA} = 1$ et $x_{VF} = 0,5$.

soit

$$\boxed{\Delta S = nR \ln 2,5 - \frac{1}{2} \frac{L_V}{T_0}}$$

Thermodynamique 3

(CCP)

Il faut bien sûr faire un bilan d'énergie pour la résistance pendant dt . On obtient

$$CdT = P dt - aC(T - T_0) dt \quad \text{d'où} \quad \frac{CdT}{P - aC(T - T_0)} = dt$$

Il suffit d'intégrer cette relation pour déterminer $T(t)$ (loi exponentielle) et on obtient pour $t \rightarrow \infty$,

$$\boxed{T_f = T_0 + \frac{P}{aC}}$$

Thermodynamique 4

(CCP)

Dans cet exercice, il faut essayer d'extraire du texte toutes les informations intéressantes. Dans (D), la température est T_0 et le volume V . On a donc la pression $p = \frac{nRT_0}{V}$. C'est la pression extérieure à (G) et on peut calculer facilement le travail reçu par (G) :

$$W = nRT_0 \ln \frac{V_0}{2V_0 - V}$$

Il ne reste plus qu'à calculer ΔU pour le système {G}. Pour un gaz parfait, cela revient à connaître la température. On trouve puisque l'équilibre mécanique impose l'égalité des pressions

$$T = \frac{p(2V_0 - V)}{nR} = T_0 \frac{2V_0 - V}{V}$$

On en déduit à l'aide du premier principe appliqué à {G}

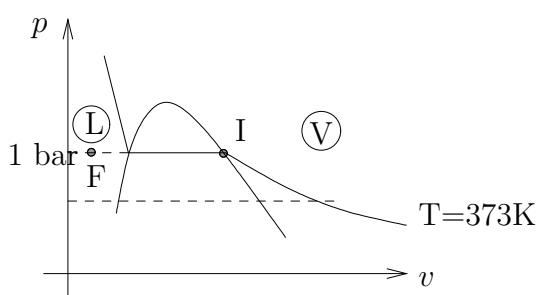
$$\boxed{Q = C_V(T - T_0) - W = 2C_V T_0 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) - nRT_0 \ln \frac{V_0}{2V_0 - V}}$$

Remarque : on retrouve si $V = V_0$, que $Q=0$.

Thermodynamique 5

(CCP)

Pour les exercices de ce type avec changement d'état liquide-vapeur, il est essentiel de représenter l'état initial et l'état final sur un diagramme (p, v) en représentant les isothermes d'Andrews intéressantes (ici à T_1 et T_0).



Avec ce schéma, tout est simple (ou au moins faisable). On trouve alors la variation d'entropie :

$$\Delta S = -\frac{L_v(T_1)}{T_1} + C_\ell \ln \frac{T_0}{T_1}$$

Il faut ensuite calculer $S_e = \frac{Q}{T_0}$. Pour cela, remarquer que la transformation est monobare et donc que $Q = \Delta H$. On trouve ΔH à l'aide du diagramme :

$$\Delta H = -L_v(T_1) + C_\ell(T_0 - T_1)$$

On fait ensuite le bilan d'entropie classique :

$$S_c = \Delta S - S_e = -\frac{L_v(T_1)}{T_1} + C_\ell \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{L_v(T_1)}{T_0} - \frac{C_\ell(T_0 - T_1)}{T_0}$$

Bien se souvenir du calcul de ΔS , de ΔH pour des gaz parfaits, pour des phases condensées (relations issues des identités thermodynamiques). Attention à ne pas utiliser les identités thermodynamiques lorsqu'il y a changement de phase (système hétérogène) où il faut faire intervenir les chaleurs latentes. Ne pas oublier également que pour une transformation monobare

$Q = \Delta H$ et pour transformation isochore $Q = \Delta U$.

Thermodynamique 6

(CCP)

1. On isole une tranche dx de la barre et on y fait un bilan d'énergie pendant dt . On dessine l'élément de volume et on remarque que la surface d'échange est $S = 4adx$. On trouve facilement

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 4ah(T - T_0)$$

En régime stationnaire, on obtient alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2} \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \frac{\lambda}{4ah}$$

¹

2. La résolution donne

$$\theta(x) = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$$

Comme la température ne peut diverger, $B=0$ et comme $\theta(0) = A = T_1 - T_0$, on trouve

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-x/\delta}$$

Le graphe de $\theta(x)$ ne doit pas poser de problème.

Thermodynamique 7

(Mines)

Il suffit de résoudre l'équation fondamentale de la statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ avec $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$. On obtient

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mgdz}{R(T_0 - kz)}$$

soit

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{Rg} \ln \frac{T_0 - kz}{T_0}$$

$$k \approx 7 \text{K. km}^{-1}$$

1. Penser à introduire des grandeurs caractéristiques comme δ dès que vous le pouvez !

Thermodynamique 8

(Mines)

Dans le sol, on trouve facilement que T obéit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec la condition en $z = 0$, la résolution est exactement simialire à celle obtenue pour l'effet de peau.

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ et on obtient

$$T(z, t) = T_0 + a_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

Thermodynamique 9

(Ensam)

- La loi de Fourier est $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$. Le - signifie que les échanges se font de manière à rétablir l'homogénéité de T . En r la puissance thermique est

$$\varphi_{th}(r) = 2\pi r L j_{th}$$

- On isole (et dessine !) une tranche dr du fusible (de volume $dV = 2\pi r L dr$) et on y fait un bilan. en régime stationnaire. On rappelle que la puissance Joule volumique est $\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$. Cette puissance est **apportée** au système. On a alors :

$$\varphi(r + dr) - \varphi(r) - \frac{j^2}{\sigma} 2\pi r L dr = 0$$

On trouve alors avec la première question

$$\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$$

- On intègre

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{j^2}{\sigma \lambda} \frac{r^2}{2} + A$$

$A=0$ sinon le gradient diverge.

d'où

$$T(r) = -\frac{j^2}{4\sigma\lambda} (r^2 - R^2) + T_0$$

La température est maximale en $r = 0$ et vaut

$$T_{\max} = T_0 + R^2 \frac{j^2}{4\sigma\lambda}$$

Thermodynamique 10

(Centrale)

Comme pour tout exercice avec changement d'état, il faut représenter les états sur un diagramme. Ici, il y a deux états initiaux et un état final. Appelons $m_1 = 1$ g, $T_0 = 150^\circ\text{C}$, $T_1 = 10^\circ\text{C}$ et m_X la masse d'eau à introduire cherchée.

Justifier la relation $\Delta H = Q = 0$, puis en utilisant l'extensivité de H , on obtient

$$m_X = \frac{m_1 (\ell_v + c_p(T_0 - T_f))}{c_e(T_f - T_1)} = 6,2 \text{ g}$$

A l'aide du diagramme, le bilan entropique ne pose pas de difficulté :

$$\Delta S = S_c = m_X c_e \ln \frac{T_f}{T_1} + m_1 c_p \ln \frac{T_f}{T_0} - m_1 \frac{\ell_v}{T_f}$$

Application numérique :

$$S_c = 0,95 \text{ J.K}^{-1}$$

La transformation est irréversible.

Thermodynamique 11

(Centrale)

1. C'est un diagramme classique de moteur ditherme avec $\delta W < 0$, $\delta Q_c > 0$ et $\delta Q_f < 0$. On représente toujours le travail et le transfert thermique **algébriquement reçus** par le fluide.
2. Entre t et $t + dt$, le deuxième principe appliqué au fluide donne

$$dS = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0$$

On suppose le moteur réversible. En appliquant le premier principe à la source chaude, on a $\delta Q_c = -CdT_c$ (bien comprendre l'origine du « - »). De même $\delta Q_f = -CdT_f$ et $\frac{dT_c}{T_c} = -\frac{dT_f}{T_f}$.

Comme $\delta Q_c > 0$ et $\delta Q_f < 0$, T_c diminue et T_f augmente au cours des cycles. Quand $T_c = T_f$, le moteur s'arrête car il devient monotherme. En intégrant on a

$$\ln \frac{T_c}{T_{0c}} = -\ln \frac{T_f}{T_{0f}} \quad \text{d'où} \quad T_c T_f = T_{0c} T_{0f}$$

La température finale est donc

$$T_F = \sqrt{T_{0c} T_{0f}} = 325 \text{ K}$$

3. Intégrer le premier principe appliqué au fluide pour obtenir :

$$W = C((T_F - T_{of}) + (T_F - T_{0c})) = -32.10^6 \text{ J}$$

$$4. \quad r = \frac{\text{grandeur valorisable}}{\text{grandeur coûteuse}} = -\frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{T_F - T_{of}}{T_{0c} - T_F} = 12,5\%$$

Le rendement de Carnot est $r = 1 - \frac{T_F}{T_C}$. Il vaut 24% en $t = 0$ et 0 en $t = t_F$. Le rendement de ce moteur évolue entre ces deux valeurs et le rendement global est bien compris entre ces deux valeurs limites.

Thermodynamique 12

(Centrale)

1. Il faut ici refaire la démonstration détaillée pour un système ouvert (type détente de Joule Kelvin) pour arriver à la relation valable pour chaque fluide

$$D_m(h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}) = \mathcal{P}_{\text{th}}$$

2. Le système {eau+air} est calorifugé ce qui permet de justifier que le transfert thermique du système est nul :

$$\delta Q_{\text{air}} + \delta Q_{\text{eau}} = 0$$

3. On a donc

$$d\Delta h_{\text{eau}} + D_m \Delta h_{\text{air}} = 0$$

soit

$$\theta_s = \theta_e + \frac{D_m C_p}{dc} (T_1 - T_0) = 15,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

4. On fait un bilan entropique sur le système fermé suivi au cours du temps (comme dans le 1). L'entropie échangée est nulle puisque l'échangeur est calorifugé.

Thermodynamique 13

(Centrale)

Il faut représenter l'état initial et l'état final du système {glaçon} sur un diagramme P,T pour bien visualiser la situation. On calcule ensuite la variation d'entropie :

$$\Delta S = C_{\text{glace}} \ln \frac{T_f}{T_{-10}} + \frac{L_f}{T_f} + C_{\text{liquide}} \ln \frac{T_{20}}{T_f}$$

On utilise le fait que la transformation se fait à pression atmosphérique et est donc monobare pour calculer $Q = \Delta H$ pour en déduire ensuite $S_e = \frac{Q}{T_{20}}$:

$$\Delta H = C_{\text{glace}}(T_f - T_{-10}) + L_f + C_{\text{liquide}}(T_{20} - T_f)$$

On trouve ensuite $S_c = \Delta S - S_e$.

Pour évaluer le temps de fonte, $P_{\text{échangée}} \cdot t = L_f$. On peut prendre une surface d'échange de 10 cm^2 , un glaçon de 10 g et donc

$$t \approx 3000 \text{ s}$$

Ce qui correspond à l'ordre de grandeur attendu. .

Thermodynamique 14

(Centrale)

On applique le PFD au bouchon :

$$m\ddot{z} = -mg + (P_{\text{int}} - P_{\text{ext}})s$$

A l'équilibre,

$$0 = -mg + (P_0 - P_{\text{ext}})s$$

Si la pression augmente de $\delta P = P_{\text{int}} - P_0$ dans le ballon, on a en soustrayant :

$$m\ddot{z} = \delta Ps$$

Reste à relier la variation de pression à celle de l'altitude du bouchon (qui fait varier le volume du ballon de $\delta V = sz$) et pour cela utiliser la loi de Laplace qui donne sous forme différentielle :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

En remplaçant les différentielles par de petites variations, on a :

$$\delta P = -\gamma \frac{P_0}{V_0} \delta V = -\gamma \frac{P_0}{V_0} sz$$

L'équation devient alors

$$m\ddot{z} + \gamma \frac{P_0}{V_0} s^2 z = 0$$

Le bouchon oscille avec une pulsation

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{P_0 s^2}{m V_0}}$$

Thermodynamique 15

(Mines)

T obéit à l'équation de la chaleur qu'il faudrait démontrer encore une fois

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec pour condition initiale

$$T(x, t) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

On cherche une solution à variables séparées $T(x, t) = T_0 + f(t)g(x)$. L'identification en 0 donne immédiatement $g(x)$. En utilisant l'équation de la chaleur on obtient facilement

$$f(t) = e^{-\frac{K\pi^2}{\rho c \ell^2} t}$$

et donc $T(x, t)$.

Thermodynamique 16

(CCP)

1. On identifie facile l'adiabatique car la pente est plus importante en valeur absolue que l'isotherme (car $\gamma > 1$). A → B est donc l'isentropique. Le cycle est décrit dans le sens trigonométrique ce qui est en accord avec une machine réceptrice comme une pompe à chaleur. C → A est une isotherme. On a ensuite $T_c = T_A > T_B$ puisque sous P₁ V_C > V_B. Finalement on repère sans difficulté que le transfert avec la source froide est réalisé de B → C et avec la source chaude, de C → A.
2. Par définition $\eta = \frac{-Q_{CA}}{W}$. La loi de Laplace s'applique de A à B donc $PT^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = C^{te}$

Sur l'isotherme

$$Q_{CA} = -W_{CA} = \int pdV = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = nRT_A \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT_A \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln \frac{T_A}{T_B}$$

$$Q_{BC} = C_p(T_c - T_B) = C_p(T_A - T_B) = nR \frac{\gamma}{1-\gamma} (T_A - T_B)$$

Comme sur un cycle $\Delta U = 0 = W + Q_{BC} + Q_{CA}$ l'efficacité s'écrit

$$\eta = -\frac{Q_{CA}}{Q_{CA} + Q_{BC}} = -\frac{T_A \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln \frac{T_A}{T_B}}{\frac{\gamma}{1-\gamma} (T_A - T_B) + T_A \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln \frac{T_A}{T_B}}$$

soit

$$\eta = \frac{\ln \frac{T_A}{T_B}}{\ln \frac{T_A}{T_B} - 1 + \frac{T_B}{T_A}} = 5,62$$

Thermodynamique 17

(Centrale)

1. Pour étudier la transformation

liquide à $T_0 \rightarrow$ solide à T_1

on imagine le chemin fictif

liquide à $T_0 \rightarrow$ liquide à $T_f \rightarrow$ solide à $T_f \rightarrow$ solide à T_1

On utilise souvent des chemins fictifs pour calculer les variations de H ou de S qui ne dépendent pas du chemin suivi (fonctions d'état).

Après avoir justifié que $\Delta H = Q = 0$, on trouve sans difficulté

$$T_1 = T_0 + \frac{\ell_f}{C}$$

2. Utiliser le même chemin pour obtenir

$$\Delta S = S_c = m \left(c \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{\ell_f}{T_f} \right)$$

La condition est bien sûr $S_c > 0$ qui devient

$$T_0 < \frac{\ell_f/c}{\exp\left(\frac{\ell_f}{cT_f}\right) - 1}$$

Thermodynamique 18

(Centrale)

1. Comme on l'a montré en cours, la résistance thermique est

$$R_{th} = \frac{L}{KS}$$

2. le flux traversant la barre est $\Phi(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{th}}$. Le premier principe donne

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = -\Phi(t) = -C_2 \frac{dT_2}{dt}$$

d'où

$$C_1 T_1 + C_2 T_2 = C_1 T_{10} + C_2 T_{20}$$

On résoud le système d'équadiff en déterminant $T_1(t) - T_2(t)$ par exemple et on obtient

$$T_1 = T_f + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \Delta T e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R_{th} C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

et

$$T_2 = T_f - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Delta T e^{-t/\tau}$$

3. L'entropie de la barre est constante car sa capacité thermique est nulle donc

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \frac{\delta S_c}{dt} + \frac{\delta S_e}{dt}$$

La tige reçoit le flux $\Phi(t)$ de 1 et fournit $\Phi(t)$ à 2 de sorte que

$$\frac{\delta S_e}{dt} = \frac{\Phi(t)}{T_1} - \frac{\Phi(t)}{T_2}$$

d'où

$$\frac{\delta S_c}{dt} = \Phi(t) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

Thermodynamique 19

(CCP)

1. C'est du cours.
2. A trois dimensions, sans apport ni perte d'énergie on a montré en cours que

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

3. En régime stationnaire,

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{dr} = C^{\text{te}}$$

soit

$$T = A + \frac{B}{r}$$

Les conditions limites permettent d'obtenir

$$A = \frac{r_1 T_1 - r_2 T_2}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad B = \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2}$$

- 4.

$$\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{\lambda B}{r^2} \vec{u}_r$$

On intègre sur une demi-sphère de surface $2\pi r^2$.

d'où

$$\Phi = 2\pi \lambda B = 2\pi \lambda \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2}$$

La résistance thermique est définie en régime stationnaire et vaut

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{2\pi\lambda}$$

Thermodynamique 20

(Centrale)

C'est un exercice proche de l'exercice 16 que je vous conseille de chercher avant celui-ci.

1. C'est le schéma classique d'une machine frigorifique ditherme entre t et $t + dt$ avec

$$\delta W > 0 \quad \delta Q_f > 0 \quad \text{et} \quad \delta Q_c < 0$$

2. Le deuxième principe appliqué au fluide (comme dans l'exo 6) permet de montrer en notant C_f et C_c les capacités thermiques des sources (qui sont différentes car les masses sont différentes)

$$C_c \ln \frac{T_{cf}}{T_0} = -C_f \ln \frac{T_{ff}}{T_0} \quad \text{d'où} \quad T_{cf} = T_0 \left(\frac{T_0}{T_{ff}} \right)^{C_f/C_c} = 295K$$

3. Le transfert thermique reçu par la piscine de masse $m = 250.000$ kg, est

$$Q_1 = -Q_c = m_c c (T_{cf} - T_0) = 2.10^6 \text{ kJ}$$

Le transfert thermique reçu par la patinoire est

$$Q_2 = -Q_f = m_f c (T_{ff} - T_0) = -2.10^6 \text{ kJ}$$

4. Entre t et $t + dt$, $\delta W + \delta Q_c + \delta Q_f = 0$ et donc lors du fonctionnement global

$$W = -Q_c - Q_f = Q_1 + Q_2 = 0$$

Il va de soi que ce résultat est inacceptable physiquement et montre que la modélisation est trop grossière. Si on prend un volume de la piscine différent, le résultat peut sembler cohérent mais la modélisation reste inadaptée (en particulier on ne tient pas compte du changement d'état et le moteur ne peut pas être réversible).

La durée de fonctionnement est

$$t = \frac{W}{P}$$

5. Le rendement (ou plutot l'efficacité est)

$$r = \frac{Q_f}{W}$$

Thermodynamique 21

(Mines)

On applique le PFD au piston de masse m . L'axe Ox est orienté vers la droite.

$$m\ddot{x} = (P_{int} - P_{ext})s + k(\ell - \ell_0)$$

On rappelle que pour le signe de la force de rappel, il est indispensable de raisonner physiquement. La longueur du ressort diminue si x augmente : $\ell = \ell_0 - x$.

On remarque que lorsque le volume varie de $\delta V = Sx$ la pression varie de

$$\delta P = -\gamma \frac{P_0}{V_0} sx$$

(voir l'exercice 19 où on applique la loi de Laplace).

On obtient finalement, en prenant la valeur $x = 0$ pour équilibre,

$$m\ddot{x} + (\gamma \frac{P_0}{V_0} s^2 + k)x = 0$$

Le piston oscille avec une pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma P_0 s^2 + k V_0}{m V_0}}$$

Thermodynamique 22

(Centrale)

1. Dans la glace la conservation du flux et la loi de Fourier permettent d'obtenir $\Phi_{th} = -2\pi r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ donc

$$T(r) = \frac{\Phi_{th}}{2\pi r \lambda} + C. Il faut donc diminuer r pour augmenter T.$$

2. $h_2 > h_1$ car le vent augmente les échanges de chaleur avec l'extérieur. Le flux thermiques est 240W.
On a

$$\Phi_{th} = h_1(T_1 - T(R_1)).2\pi R_1^2 = h_2(T(R_2) - T_2)2\pi R_2^2$$

Il nous manque une relation (deux températures et R_2 sont inconnues). Elle est donnée par la loi

$$T(r) : T(r) = T_2 + \frac{\Phi_{th}}{\lambda 2\pi r} - \frac{\Phi_{th}}{\lambda 2\pi R_2}$$

On peut ensuite déterminer R_1 .

3. Il ne faut pas qu'il y ait perte ou création d'énergie dans le milieu (c'était le cas ici).

Thermodynamique 23

(Mines)

1. La pression finale est $p_F = p_0$ (équilibre mécanique). Il faut appliquer le premier principe au système {gaz}. Le calcul de ΔU pour un gaz parfait ne pose pas de problème :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0)$$

Remarquer que la pression extérieure est p_0 et

$$W = -p_0(V_f - V_0)$$

la température finale est alors

$$T_f = T_0 \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$$

2. Utiliser la relation obtenue à l'aide de l'identité thermodynamique pour un gaz parfait :

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_f}{T_0} - nR \ln \frac{p_f}{p_i}$$

d'où

$$\Delta S = S_c = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{\gamma + 1}{2\gamma} + nR \ln 2$$

La transformation est non quasi-statique et donc irreversible.

Thermodynamique 24

(Centrale)

- On a traité le début de l'exercice en cours (révisions d'EM). La quantité de mouvement cédée à la plaque est $2\frac{h\nu}{c}$.
- La pression est $P = 2nh\nu = 2\langle u_{em} \rangle = \frac{2I}{c}$ où I est l'intensité du laser.
- On équilibre les forces et $PS = \rho g e S$.
- On écrit le premier principe à la plaque :

$$C_m dT = \alpha IS dt - h(T - T_{air})S dt \quad \text{d'où} \quad C_m \frac{dT}{dt} + hS(T - T_{air}) = \alpha IS$$

que l'on sait intégrer sans problème :

$$T = T_{air} + \frac{\alpha I}{h} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_m}{hS}$$

Thermodynamique 25

(Centrale)

Il faut en fait déterminer le flux thermique traversant la coquille et $t = \frac{m\ell_V}{\Phi_{th}}$.

Le plus simple est alors de raisonner à l'aide de résistance thermiques. On trouve trois résistances thermiques en série :

- la résistance intérieur/coquille $R_{int} = \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}$.
- la résistance thermique de la coquille (calcul qu'il faut savoir refaire, cf l'exercice 25) $R_{coq} = \frac{1}{4\pi R_1 \lambda} - \frac{1}{4\pi R_2 \lambda}$

- la résistance extérieur/coquille $R_{ext} = \frac{1}{h_1 4\pi R_2^2}$.

On a alors simplement

$$Phi_{th} = \frac{T_2 - T_1}{R_{int} + R_{coq} + R_{ext}}$$

Thermodynamique 26

(Mines)

1.

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 1L$$

2. Il faut utiliser la condition d'équilibre mécanique $p_f S = kx_f$ puis appliquer le premier principe au système {gaz+ressort} : la pression extérieure est nulle et le système est calorifugé donc

$$\Delta(U + E_p) = 0 = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) + \frac{1}{2}kx_f^2 = 0$$

Pour éliminer l'inconnue T_f , on utilise la loi des gaz parfait $p_f(V_0 + Sx_f) = nRT_f$. On obtient alors l'équation du second degré

$$\frac{\gamma + 1}{2}x_f^2 + \frac{V_0}{S}x_f - \frac{nRT_0}{k} = 0$$

dont la solution positive est $x_f = 3,7$ cm. Il vient ensuite

$$V_f = 2,86 L \quad T_f = 255K \quad \text{et} \quad p_f = 0,074 \text{ bar}$$

Thermodynamique 27

(Centrale)

En cherchant une solution à variable séparable $T(x, t) = f(x)g(t) + \frac{T_2 + T_1}{2}$ à l'équation $\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ on aboutit à

$$a\frac{f''}{f} = \frac{g'}{g} = -C^e$$

g doit décroître donc la C^e est positive. Initialement f est un créneau de période $2L$ et d'amplitude $\frac{T_2 - T_1}{2}$.
Donc

$$f(x) = \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2n + 1)\frac{\pi x}{L}}{2n + 1}$$

On a alors $g(t) = e^{-a(\frac{(2n+1)\pi}{L})^2 t}$

Thermodynamique 28

(Centrale)

- La résistance thermique due à la diffusion thermique a été calculée en cours $R = \frac{e}{\lambda S}$. Pour des échanges conductoconvectifs la puissance thermique échangée est $h(T_1 - T_2)S$ de sorte que la résistance thermique est $\frac{1}{hS}$. On trouve donc que le système est équivalent, en régime permanent à 4 résistances thermiques en série :

- $R_{int} = \frac{1}{h_1 S}$ qui caractérise les échanges conductoconvectifs à l'intérieur
- $R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S}$ qui caractérise la diffusion dans le bois
- $R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S}$ qui caractérise la diffusion dans la glace

- $R_{2ext} = \frac{1}{h_2 S}$ qui caractérise les échanges conductoconvectifs à l'extérieur.
2. le plus simple est d'utiliser le théorème de Millman. On cherche la température T_c juste à l'intérieur de la couche de neige. Il faut que cette température (la plus importante de la couche de neige) soit inférieure à 0°C. Faire un schéma des 4 résistances pour comprendre la situation :

$$T_c = \frac{\frac{T_1}{R_{1int} + R_1} + \frac{T_2}{R_{2ext} + R_2}}{\frac{1}{R_{1int} + R_1} + \frac{1}{R_{2ext} + R_2}}$$

Thermodynamique 29

(Mines)

1. On applique le premier principe à une tranche dx contenant une masse dm_1 du liquide 1 entre t et $t + dt$.

$$dU = dm_1 c_1 dT_1 = -G(T_1 - T_2) dx dt$$

Le débit massique est $D_1 = \frac{dm_1}{dt}$ et on obtient l'équation différentielle

$$D_1 c_1 \frac{dT_1}{dx} = -G(T_1 - T_2)$$

De même pour le liquide (2), on a

$$D_2 c_2 \frac{dT_2}{dx} = G(T_1 - T_2)$$

2. La résolution n'est pas difficile en introduisant les variables $S(x) = T_1(x) + T_2(x)$ et $D(x) = T_1(x) - T_2(x)$.

Thermodynamique 30

(Mines)

1. On applique le premier principe à une tranche dx pendant dt en régime stationnaire. La chaleur apportée est $\frac{j^2 a^2}{\gamma} dx dt$ avec $j = \frac{I}{a^2}$. On trouve alors facilement l'équation différentielle

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{j^2}{\gamma}$$

On suppose les extrémités en $L/2$ et $-L/2$ où la température est T_0 et après calculs, la solution est

$$T(x) = -\frac{j^2}{2\gamma\lambda} x^2 + T_0 + \frac{j^2}{8\gamma\lambda} L^2$$

2. On remarque que le système est parfaitement calorifugé donc d'énergie interne totale constante. On a donc $\int_{\rho}^a c(T(x) - T_f) dx = 0$ soit

$$T_f = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} T(x) dx$$

On trouve alors, après calculs

$$T_f = T_0 + \frac{j^2 L^2}{12\gamma\lambda}$$

3. L'analyse dimensionnelle donne rapidement le résultant

$$\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$$

Thermodynamique 31
(Centrale)

1. On calcule la résistance du fil, $R = \frac{L}{\gamma \pi a^2}$ et on applique le premier principe en régime permanent au fil :

$$0 = \frac{U^2}{R} - \varepsilon \sigma T_0^4 S \quad \text{avec} \quad S = 2\pi La$$

2. Même chose en régime variable et on trouve l'équadiff :

$$\mu c L \pi a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{U_{\text{eff}}^2 \cos^2 \omega t}{2R} - \varepsilon \sigma T_0^4 S$$

On peut résoudre l'équation avec Python par exemple.