APPLICATIONS LINÉAIRES

✠ ***Exercice 1.*** [○]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. Soient A un sous-espace de E et B un sous-espace de F. Démontrer que

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A + \operatorname{Ker} f \qquad \text{et} \qquad f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{Im} f.$$

2. Soient A_1, A_2 deux sous-espaces de E. Démontrer que

$$\big(f(A_1) \subset f(A_2)\big) \iff \big(A_1 + \operatorname{Ker} f \subset A_2 + \operatorname{Ker} f\big).$$

1. Démontrons que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A + \operatorname{Ker} f$.

   $\subset$ Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. On a $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Cela donne $f(x-a) = 0_F$ et donc $x - a \in \operatorname{Ker} f$ ou encore $x \in a + \operatorname{Ker} f$. Donc $x \in A + \operatorname{Ker} f$. Cela démontre que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A + \operatorname{Ker} f$.

   $\supset$ Soit $x \in A + \operatorname{Ker} f$. Il existe $a \in A$ et $y \in \operatorname{Ker} f$ tel que $x = a + y$. Alors $f(x) = f(a) + f(y) = f(a)$, ce qui démontre que $f(x) \in f(A)$ ou encore que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Donc $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A + \operatorname{Ker} f$.

   En conclusion,

   $$\boxed{f^{-1}\big(f(A)\big) = A + \operatorname{Ker} f.}$$

   Démontrons que $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{Im} f$.

   $\subset$ Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. On a $y \in \operatorname{Im} f$. De plus, comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$, c'est-à-dire $y \in B$. Donc $y \in B \cap \operatorname{Im} f$. Ainsi, $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \cap \operatorname{Im} f$.

   $\supset$ Soit $y \in B \cap \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, on en déduit que $x \in f^{-1}(B)$. Mézalors, l'égalité $y = f(x)$ implique que $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Donc $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B \cap \operatorname{Im} f$.

   En conclusion,

   $$\boxed{f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{Im} f.}$$

2. $\Rightarrow$ Supposons que $f(A_1) \subset f(A_2)$. Soit $x \in A_1 + \operatorname{Ker} f$. Il existe donc $a \in A_1$ et $y \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = a + y$. Par suite, $f(x) = f(a)$, ce qui implique que $f(x) \in f(A_1)$. Comme $f(A_1) \subset f(A_2)$, on a $f(x) \in f(A_2)$, d'où l'existence de $b \in A_2$ tel que $f(x) = f(b)$. On écrit alors $x = b + (a - b + y)$ et l'on constate que $f(a-b+y) = f(a) - f(b) = 0$, donc $a - b + y \in \operatorname{Ker} f$. On a donc bien montré que $x \in A_2 + \operatorname{Ker} f$ et, par conséquent, que $A_1 + \operatorname{Ker} f \subset A_2 + \operatorname{Ker} f$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $A_1 + \operatorname{Ker} f \subset A_2 + \operatorname{Ker} f$. Soit $x \in f(A_1)$. Il existe alors $a \in A_1$ tel que $x = f(a)$. Or $a \in A_1 + \operatorname{Ker} f$ (puisque $a = a + 0$), donc $a \in A_2 + \operatorname{Ker} f$, ce qui permet d'écrire $a = b + y$ avec $b \in A_2$ et $y \in \operatorname{Ker} f$. Par conséquent, on a $x = f(b+y) = f(b)$, d'où $x \in f(A_2)$. On a donc démontré que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\big(f(A_1) \subset f(A_2)\big) \iff \big(A_1 + \operatorname{Ker} f \subset A_2 + \operatorname{Ker} f\big).}$$

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Démontrer que f est injectif si et seulement si, pour tous sous-espaces vectoriels U et V en somme directe, $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe.

Supposons f injective. Soient U et V deux sous-espaces tels que $U \oplus V$. Soit $y \in f(U) \cap f(V)$ de sorte qu'il existe $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. L'injectivité de f implique alors que $x_1 = x_2$. Mézalors $x_1 \in U \cap V$, donc $x_1 = 0$ et, par conséquent, $y = 0$. Ainsi $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe.

Supposons réciproquement que f n'est pas injective. Il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = 0$. On peut en outre choisir y tel que $f(y) \neq 0$ puisque $f \neq 0$. Alors (x, y) est libre (en effet, si $\lambda x + \mu y = 0$, alors $\lambda f(x) + \mu f(y) = 0$, d'où $\mu f(y) = 0$ ce qui force $\mu = 0$ puisque $f(y) \neq 0$ puis $\lambda = 0$). Posons $z = x + y$, $U = \mathrm{Vect}(y)$ et $V = \mathrm{Vect}(z)$. Ces deux sous-espaces sont en somme directe (car (x, y) est libre) et leurs images directes $f(U)$ et $f(V)$ sont deux droites vectorielles égales (car $f(y) = f(z)$). On a ainsi démontré qu'il existe deux sous-espaces vectoriels U et V en somme directe tels que $f(U)$ et $f(V)$ ne sont pas en somme directe.

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{un endomorphisme non nul est injectif si, et seulement si, il conserve les sommes directes.}}$$

✠ ***Exercice 3.*** [$\star$]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $fg - gf = \mathrm{Id}_E$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$.
2. Démontrer que la famille $(g^k)_{k \geqslant 0}$ est libre.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad fg^n - g^n f = ng^{n-1}.$$

<u>Initialisation :</u> On a $fg^1 - g^1 f = fg - gf = \mathrm{Id}_E = 1.g^{1-1}$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{array}{rcll} fg^{n+1} - g^{n+1}f & = & (fg)g^n - g^{n+1}f & \\ & = & (gf + \mathrm{Id}_E)g^n - g^{n+1}f & \\ & = & gfg^n + g^n - g^{n+1}f & \\ & = & g(g^n f + ng^{n-1}) + g^n - g^{n+1}f & \text{par H.R.} \\ & = & g^{n+1}f + ng^n + g^n - g^{n+1}f & \\ & = & (n+1)g^n, & \end{array}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad fg^n - g^n f = ng^{n-1}.}$$

2. Soient $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ des entiers naturels et $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_n} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_{k_1} g^{k_1} + \cdots + \lambda_{k_n} g^{k_n} = \widetilde{0}.$$

En composant par f à gauche, on obtient

$$\lambda_{k_1} fg^{k_1} + \cdots + \lambda_{k_n} fg^{k_n} = \widetilde{0}$$

et en composant par f à droite, on a

$$\lambda_{k_1} g^{k_1} f + \cdots + \lambda_{k_n} g^{k_n} f = \widetilde{0}.$$

En soustrayant ces deux inégalités, on obtient

$$\lambda_{k_1}(fg^{k_1} - g^{k_1} f) + \cdots + \lambda_{k_n}(fg^{k_n} - g^{k_n} f) = \widetilde{0},$$

ce qui donne

$$k_1 \lambda_{k_1} g^{k_1 - 1} + \cdots + k_n \lambda_{k_n} g^{k_n - 1} = \widetilde{0}.$$

En réitérant ce raisonnement $k_1 - 1$ fois, on obtient

$$k_1!\lambda_{k_1}\,\mathrm{Id}_E + \frac{k_2!}{(k_2-k_1)!}\lambda_{k_2} g^{k_2-k_1} + \cdots + \frac{k_n!}{(k_n-k_1)!}\lambda_{k_n} g^{k_n-k_1} = \widetilde{0}.$$

En effectuant une fois de plus le raisonnement, on voit que le terme contenant λ_{k_1} disparaît et que les puissances de g diminuent. Cela donne

$$\frac{k_2!}{(k_2-k_1-1)!}\lambda_{k_2} g^{k_2-k_1-1} + \cdots + \frac{k_n!}{(k_n-k_1-1)!}\lambda_{k_n} g^{k_n-k_1-1} = \widetilde{0}.$$

On poursuit donc ce processus $k_n - k_1 - 1$ fois, ce qui donne finalement

$$k_n!\lambda_{k_n}\,\mathrm{Id}_E = \widetilde{0}$$

et donc

$$\lambda_{k_n} = 0.$$

En réitérant ce raisonnement, on démontre que $\lambda_{k_{n-1}} = \cdots = \lambda_{k_1} = 0$. Donc

$$\boxed{(g^k)_{k\geqslant 0} \text{ est libre.}}$$

✠ ***Exercice 4.*** [⋆]

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tels que $p+q$ soit un projecteur.

1. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si $pq = qp = \widetilde{0}$.
2. Dans ce cas, démontrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Im}\,q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$.

Dans cet exercice, on pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par un corps commutatif qui n'est pas de caractéristique 2.

1. On procède par double implication.
   - $\Rightarrow$ Supposons que $p+q$ est un projecteur. Alors $(p+q)^2 = p+q$, c'est-à-dire $p^2+pq+qp+q^2 = p+q$ ou encore $p+pq+qp+q = p+q$, ce qui donne $pq+qp = \widetilde{0}$. En composant la relation $pq+qp = \widetilde{0}$ par p à gauche, il vient $p^2q + pqp = \widetilde{0}$, c'est-à-dire $pq + pqp = \widetilde{0}$. En composant la relation $pq + qp = \widetilde{0}$ par p à droite, il vient $pqp + qp^2 = \widetilde{0}$, c'est-à-dire $pqp + qp = \widetilde{0}$. On a donc $pq = -pqp = qp$. Comme $pq + qp = \widetilde{0}$, il vient $pq = qp = \widetilde{0}$.
   - $\Leftarrow$ Supposons que $pq = qp = \widetilde{0}$. Alors $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + \widetilde{0} + \widetilde{0} + q = p + q$, donc $p+q$ est un projecteur.

   En conclusion,

   $$\boxed{p+q \text{ est un projecteur si, et seulement si } pq = qp = \widetilde{0}.}$$

   a) On démontre que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$ par double inclusion.

   - $\subset$ Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (p+q)(x) = p(x)+q(x)$. Comme $p(x) \in \mathrm{Im}\,p$ et $q(x) \in \mathrm{Im}\,q$, on en déduit que $y \in \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$. Donc $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$.
   - $\supset$ Soit $y \in \mathrm{Im}\,p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Alors $y = p(p(x)) + q(p(x)) = (p+q)(p(x))$ puisque $p^2 = p$ et $qp = \widetilde{0}$. Cela démontre que $y \in \mathrm{Im}(p+q)$.
     De même, on démontre que $\mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}(p+q)$.
     Comme $\mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$ est le plus petit sous-espace de E qui contient à la fois $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Im}\,q$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p+q) \supset \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$.

   Par conséquent, on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$.

   Reste à démontrer que la somme $\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$ est directe. Pour cela, on considère $y \in \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$. Il existe $a \in E$ tel que $y = q(a)$. En appliquant p, on obtient $p(y) = pq(b)$, c'est-à-dire $p(y) = 0_E$ puisque $pq = \widetilde{0}$. Or y est invariant par p puisque $y \in \mathrm{Im}\,p$, donc $y = 0_E$. Cela démontrer que $\mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q = \{0_E\}$, ce qui signifie que $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Im}\,q$ sont en somme directe.

   En conclusion,

   $$\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Im}\,q.}$$

   b) On démontre que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$ par double inclusion.

   - $\supset$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$. Alors $p(x) = q(x) = 0_E$. Donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0_E$, ce qui démontre que $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. Donc $\mathrm{Ker}\,p + \mathrm{Ker}\,q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$.

- $\subset$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x)+q(x) = 0_E$. En appliquant p, on obtient $p^2(x) + pq(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x) = 0_E$ puisque $pq = \widetilde{0}$, ce qui donne $x \in \operatorname{Ker} p$. De même, on démontre que $x \in \operatorname{Ker} q$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Par conséquent, on a $\operatorname{Ker}(p+q) \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soit ℓ une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E. Démontrer que $\Re\mathrm{e}(\ell)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E.
2. Soit m une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E. Démontrer qu'il existe une unique forme $\mathbb{C}$-linéaire ℓ sur E telle que $m = \Re\mathrm{e}(\ell)$.

1. Pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}(\ell)(\lambda x + \mu y) &= \Re\mathrm{e}\big(\ell(\lambda x + \mu y)\big) \\
&= \Re\mathrm{e}\big(\lambda \ell(x) + \mu \ell(y)\big) \\
&= \lambda \Re\mathrm{e}\big(\ell(x)\big) + \mu \Re\mathrm{e}\big(\ell(y)\big) \\
&= \lambda \Re\mathrm{e}(\ell)(x) + \mu \Re\mathrm{e}(\ell)(y).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\Re\mathrm{e}(\ell) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).}$$

2. On raisonne par analyse/synthèse.

<u>Analyse :</u>
Supposons qu'il existe $\ell \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ tel que $m = \Re\mathrm{e}(\ell)$.
Pour tout $x \in E$, on a

$$m(ix) = \Re\mathrm{e}(\ell)(ix) = \Re\mathrm{e}\big(\ell(ix)\big) = \Re\mathrm{e}\big(i\ell(x)\big) = -\Im\mathrm{m}\big(\ell(x)\big).$$

On a donc nécessairement

$$\forall x \in E, \qquad \ell(x) = m(x) - im(ix).$$

On a ainsi démontré l'unicité de ℓ sous réserve d'existence.

<u>Synthèse :</u>
Considérons l'application $\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in E, \qquad \ell(x) = m(x) - im(ix).$$

Pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda = a + ib, \mu = c + id \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\ell(\lambda x + \mu y) &= m(\lambda x + \mu y) - im\big(i(\lambda x + \mu y)\big) \\
&= m(ax + ibx + cy + idy) - im(iax - bx + icy - dy) \\
&= am(x) + bm(ix) + cm(y) + dm(iy) - iam(ix) + ibm(x) - cim(iy) + idm(y) \\
&= a\big(m(x) - im(ix)\big) + ib\big(m(x) - im(ix)\big) + c\big(m(y) - im(iy)\big) + id\big(m(y) - im(iy)\big) \\
&= a\ell(x) + ib\ell(x) + c\ell(y) + id\ell(y) \\
&= (a + ib)\ell(x) + (c + id)\ell(y) \\
&= \lambda \ell(x) + \mu \ell(y),
\end{aligned}$$

donc ℓ est $\mathbb{C}$-linéaire.
Il est clair que $m = \Re\mathrm{e}(\ell)$.
On a ainsi démontré l'existence de ℓ.

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\text{il existe une unique forme } \mathbb{C}\text{-linéaire } \ell \text{ sur } E \text{ telle que } m = \Re\mathrm{e}(\ell).}$$

✠ ***Exercice 6.*** [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. On considère $\mathscr{H}$ un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathscr{H}$ est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathscr{H},\ AB \in \mathscr{H}$. On souhaite démontrer que $I_n \in \mathscr{H}$. Pour cela, on entame un raisonnement par l'absurde en supposant que $I_n \notin \mathscr{H}$.

Pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

1. Que peut-on dire des sous-espaces $\mathscr{H}$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$? En déduire que si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $A^2 \in \mathscr{H}$ alors $A \in \mathscr{H}$.
2. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$. Démontrer que $E_{i,j} \in \mathscr{H}$.
3. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Démontrer que $E_{i,i} \in \mathscr{H}$.
4. Aboutir à une absurdité et conclure. *On a ainsi démontré que $\mathscr{H}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. Comme I_n n'appartient pas à l'hyperplan $\mathscr{H}$, un résultat du cours nous dit que

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ et } \mathrm{Vect}(I_n) \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \in \mathscr{H}$. Comme $\mathscr{H}$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $H \in \mathscr{H}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A = H + \lambda I_n$. En élevant au carré, on obtient $A^2 = H^2 + 2\lambda H + \lambda^2 I_n$, c'est-à-dire $A^2 - H^2 - 2\lambda H = \lambda^2 I_n$. On sait que $A^2 \in \mathscr{H}$. Par ailleurs, comme $\mathscr{H}$ est stable pour le produit matriciel, on a $H^2 \in \mathscr{H}$. Il s'ensuit que $A^2 - H^2 - 2\lambda H \in \mathscr{H}$ puisque $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel. Par conséquent, on a $\lambda^2 I_n \in \mathscr{H}$. Comme $I_n \notin \mathscr{H}$, on en déduit nécessairement que $\lambda = 0$. Dès lors, on a $A = H$, ce qui démontre que $A \in \mathscr{H}$. En conclusion

$$\boxed{\text{si une matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est telle que } A^2 \in \mathscr{H} \text{ alors } A \in \mathscr{H}.}$$

2. On a clairement ${E_{i,j}}^2 = 0_n$ car $i \neq j$. Par conséquent, on a ${E_{i,j}}^2 \in \mathscr{H}$ et la question précédente nous dit que

$$\boxed{E_{i,j} \in \mathscr{H}.}$$

3. Comme $n \geqslant 2$, il existe $j \in [\![1; n]\!]$ tel que $j \neq i$. Dès lors, on a $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$ avec $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ qui appartiennent à $\mathscr{H}$ d'après la question précédente. Comme $\mathscr{H}$ est stable pour le produit matriciel, on en déduit que

$$\boxed{E_{i,i} \in \mathscr{H}.}$$

4. On a $I_n = E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}$ avec $\forall i \in [\![1; n]\!],\ E_{i,i} \in \mathscr{H}$. Comme $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $I_n \in \mathscr{H}$, ce qui est absurde ! Donc

$$\boxed{I_n \in \mathscr{H}.}$$