DIMENSION FINIE

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4)\,, \quad v_2 = (3,3,3,9)\,, \quad v_3 = (0,2,4,2)\,, \quad v_4 = (3,3,-1,3)\,, \quad v_5 = (2,3,0,1)\,.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$.

1. Déterminer la dimension et une base des sous-espaces F, G, $F \cap G$ et $F + G$.
2. Trouver un supplémentaire de F et un supplémentaire de G.

A faire.

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une famille de nombres réels deux à deux distincts. On note E le sous-ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions polynomiales $L_1, \ldots, L_n$ associées aux polynômes élémentaires de Lagrange. Démontrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Quelle est la dimension de F ? *C'est la codimension de E.*

1. Nous allons démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. La fonction nulle s'annulant partout, elle s'annule à plus forte raison sur chacun des a_k et l'on donc bien dire qu'elle appartient à E. Si f et g appartiennent à E et si λ et μ sont deux scalaires, alors $\lambda f + \mu g$ vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!]\,,\ (\lambda f + \mu g)(a_k) = \lambda f(a_k) + \mu g(a_k) = 0$, donc $\lambda f + \mu g$ appartient à E. On a donc bien démontré que

   $$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

   Si l'on note $Q(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$, l'espace E contient la famille de polynômes $Q(x)$, $Q(x)x$, $Q(x)x^2$, ..., $Q(x)x^n$, ... qui est une famille infinie et libre (car constituée de polynômes de degrés échelonnés), donc

   $$\boxed{E \text{ n'est pas de dimension finie.}}$$

2. Soit $f \in E \cap F$. Alors, d'une part, $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$ et, d'autre part, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n$. En évaluant cette relation en a_k où $k \in [\![1;n]\!]$ est fixé, on obtient $0 = \lambda_k$. Donc tous les λ_k sont nuls et l'on a $f = 0$. Ainsi, $E \cap F = \{0\}$, c'est-à-dire $E \oplus F$.
   Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a

   $$f = \underbrace{\big(f - f(a_1)L_1 - \cdots - f(a_n)L_n\big)}_{\in E} + \underbrace{\big(f(a_1)L_1 + \cdots + f(a_n)L_n\big)}_{\in F},$$

   donc $f \in E + F$. Par suite, on a $E + F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   En définitive,

   $$\boxed{E \text{ et } F \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.}$$

   Démontrons que la famille $L_1, \ldots, L_n$ est libre. Considérons pour cela une famille de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. En évaluant cette relation successivement en $a_1, \ldots, a_n$, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $L_1, \ldots, L_n$ est libre. Il s'ensuit que

   $$\boxed{F \text{ est de dimension } n.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces de E. On suppose que $\dim F + \dim G > n$. Démontrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Par l'absurde, supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Alors on a $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G > n$, ce qui est absurde ! Donc

$$\boxed{\text{si } \dim F + \dim G > n, \text{ alors } F \cap G \neq \{0_E\}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'une famille $\mathscr{E}$ de vecteurs de E est *positivement génératrice* si tout vecteur de E est une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls d'éléments de $\mathscr{E}$. Quel est le cardinal minimum d'une telle famille ?

La famille $\mathscr{E}$ étant génératrice, elle possède au moins n vecteurs. Elle ne peut pas en avoir exactement n sinon ce serait une base de E et le vecteur $-e$ où $e \in \mathscr{E}$ n'aurait qu'une seule décomposition sur $\mathscr{E}$, à savoir $-e = (-1)e$, qui n'est pas une combinaison linéaire à coefficients positifs. Montrons par contre qu'il existe une famille positivement génératrice de taille $n+1$. Il suffit pour cela de considérer une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et de lui adjoindre le vecteur $e_{n+1} = -(e_1 + \cdots + e_n)$. En effet, si x est alors un vecteur de E, il se décompose sur $\mathscr{B}$ sous la forme $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ où $\forall i = 1, \ldots, n,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ et l'écriture

$$x = (\lambda_1 + \lambda_0)e_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda_0)e_n + \lambda_0 e_{n+1} \qquad \text{où} \qquad \lambda_0 = \max\{-\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$$

fournit une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\mathscr{E}$ pour le vecteur x. Donc

$$\boxed{\text{le cardinal minimum d'une famille positivement génératrice est } n+1.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Démontrer que F et G admettent un supplémentaire commun si, et seulement si, $\dim F = \dim G$.

- $\Rightarrow$ Si F et G admettent un supplémentaire commun S, alors $F \oplus S = G \oplus S$, d'où $\dim F + \dim S = \dim G + \dim S$, ce qui donne $\dim F = \dim G$.
- $\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\dim F = \dim G = r$. On effectue une récurrence descendente sur $r \leqslant \dim E$ pour déterminer un supplémentaire commun S à F et G.

  I Si $r = \dim E$, alors $F = G = E$ et $S = \{0_E\}$ convient.

  H Supposons le résultat établi au rang $r + 1 \leqslant \dim E$ et démontrons le au rang r. Soient F et G deux sous-espaces de dimension r. Si $F = G$, c'est du tout cuit et si $F \neq G$, alors $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace de E (c'est un exercice classique). En particulier, $F \cup G \neq E$ et l'on peut considérer un vecteur non nul x de E n'appartenant ni à F ni à G. On pose alors $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(x)$ de sorte que F' et G' soient tous les deux de dimension égale à $r + 1$ et que l'on puisse leur appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe un supplémentaire commun S' à F' et G'. Alors $E = (F \oplus \mathrm{Vect}\{x\}) \oplus S' = F \oplus (\mathrm{Vect}\{x\} \oplus S')$ c'est-à-dire $E = (G \oplus \mathrm{Vect}\{x\}) \oplus S' = G \oplus (\mathrm{Vect}\{x\} \oplus S')$. Donc $S = \mathrm{Vect}\{x\} \oplus S'$ est un supplémentaire commun de F et G dans E et l'hérédité de la démonstration par récurrence est établie.

  C D'après le principe de récurrence, si $\dim F = \dim G$, alors F et G admettent un supplémentaire commun.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{en dimension finie, deux sous-espaces ont un supplémentaire} \\ \text{commun si, et seulement si, ils sont de même dimension.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]
On considère l'endomorphisme $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$p(x, y, z) = \frac{1}{9}(8x + 2y - 2z\,,\, 2x + 5y + 4z\,,\, -2x + 4y + 5z).$$

Démontrer que p est une projection et préciser ses éléments caractéristiques.

A faire.

♦ ***Exercice 7.*** [○]
Soit $n \geqslant 1$. On considère l'opérateur de dérivation discrète $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\Delta P = P(X+1) - P(X).$$

Démontrer que Δ est une application linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda\big(P(X+1) - P(X)\big) + \mu\big(Q(X+1) - Q(X)\big) \\ &= \lambda \Delta P(X) + \mu \Delta Q(X),\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X]\big).}$$

2. Il est clair que si P est constant, alors $\Delta P = 0$.
   Réciproquement, supposons que $\Delta P(X) = 0$, c'est-à-dire $P(X+1) = P(X)$. Posons $Q(X) = P(X) - P(0)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$Q(n) = P(n) - P(0) = P(n-1) - P(0) = \cdots = P(0) - P(0) = 0,$$

   ce qui signifie que le polynôme Q admet tout entier naturel comme racine et donc que Q est le polynôme nul (puisque c'est le seul polynôme qui admet une infinité de racines). Par suite, P est constant et l'on a bien démontré que $\operatorname{Ker}\Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$.
   En définitive, on a donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X].}$$

3. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = n a_n X^{n-1} + \cdots$, donc $\deg \Delta P \leqslant n - 1$, ce qui démontre que $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que $\dim \operatorname{Im}\Delta + \dim \operatorname{Ker}\Delta = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire $\dim \operatorname{Im}\Delta + 1 = n + 1$ ou encore $\dim \operatorname{Im}\Delta = n$.
   Comme $\operatorname{Im}\Delta$ est inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que ces deux espaces ont la même dimension, on a

$$\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme $P(X) = Q(X+a) + Q(X)$ pour un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $n = \deg P$ et l'on considère l'application $T : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, par $T\big(Q(X)\big) = Q(X+a) + Q(X)$. On constate alors aisément que T est linéaire. Or, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, le coefficient dominant de $T(Q)$ est le double du coefficient dominant de Q. Cela prouve tout d'abord que T est un endomorphisme et cela démontre ensuite que si $T(Q) = 0$ alors nécessairement $Q = 0$, autrement dit que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ou encore que T est injectif. Comme nous sommes en dimension finie, l'endomorphisme T est alors également surjectif. Cela prouve que $T^{-1}(P)$ est la seule solution à notre problème. Donc

$$\boxed{\text{tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ s'écrit sous la forme } P(X) = Q(X+a) + Q(X) \text{ pour un unique polynôme } Q \in \mathbb{R}[X].}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$] (Endomorphismes nilpotents)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit f un *endomorphisme nilpotent* de E, c'est-à-dire un endomorphisme pour lequel il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$. On note p_0 le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. C'est l'*indice de nilpotence* de f.
   a) Démontrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p_0-1}(x_0)\big)$ est libre.
   b) Démontrer que $f^n = \widetilde{0}$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = 0_E$.
   a) Démontrer que f est nilpotent.
   b) Démontrer que le résultat du a) tombe en défaut lorsque E n'est pas supposé de dimension finie.

1. a) La minimalité de p_0 nous dit qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p_0-1}(x_0) \neq 0$. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p_0-1}$ tels que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p_0-1} f^{p_0-1}(x_0) = 0$. En composant par f^{p_0-1} à gauche, on obtient $\lambda_0 f^{p_0-1}(x_0) + \lambda_1 f^{p_0}(x_0) + \cdots + \lambda_{p_0-1} f^{2p_0-2}(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_0 f^{p_0-1}(x_0) = 0$ puisque $f^j(x_0) = 0$ dès que $j \geqslant p_0$. Il s'ensuit que $\lambda_0 = 0$. Alors $\lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p_0-1} f^{p_0-1}(x_0) = 0$ et l'on poursuit en composant à gauche par f^{p_0-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$. Ainsi de suite. Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p_0-1} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p_0-1}(x_0)\big) \text{ est libre.}}$$

   b) Le cardinal d'une famille libre étant toujours inférieur à la dimension, le cardinal de la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p_0-1}(x_0)\big)$ est inférieur à n, c'est-à-dire $p_0 \leqslant n$. Par suite, $f^n = f^{p_0} f^{n-p_0} = \widetilde{0}$, donc

$$\boxed{f^n = \widetilde{0}.}$$

2. a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Posons $p = \max\{p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_n}\}$. Alors, pour tout $x \in E$ qui se décompose sous la forme $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, on a

$$f^p(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^p(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^p(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 0_E = 0_E,$$

donc

$$f^p = \widetilde{0}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } \forall x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = 0_E \text{ alors } f \text{ est nilpotent.}}$$

   b) Sur $K[X]$, l'opérateur de dérivation D vérifie $\forall P \in K[X],\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ D^p(P) = 0$ et pourtant D n'est pas nilpotent (sinon si p_0 désignait son indice de nilpotence, il n'y aurait dans $K[X]$ que des polynômes de degré inférieur ou égal à $p_0 - 1$). Donc

$$\boxed{\text{si } E \text{ n'est pas de dimension finie, le résultat du a) tombe en défaut.}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\circ$]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. En utilisant la restriction $\widehat{f}$ de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ au départ, démontrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f.$$

On a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, donc

$$\operatorname{Ker} \widehat{f} = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f.$$

Soit $y \in f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big)$. Il existe alors $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. Comme $g\big(f(x)\big) = 0$, on en déduit que $g(y) = 0$ et donc que $y \in \operatorname{Ker} g$. On a donc

$$f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big) \subset \operatorname{Ker} g.$$

On en déduit que $\widehat{f} \in \mathscr{L}\big(\operatorname{Ker}(g\circ f), \operatorname{Ker} g\big)$. En appliquant le théorème du rang à $\widehat{f}$, on a $\dim \operatorname{Ker} \widehat{f} + \operatorname{rang} \widehat{f} = \dim \operatorname{Ker}(g\circ f)$. Comme $\operatorname{Ker} \widehat{f} = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{rang} \widehat{f} \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$ puisque $\operatorname{Im} \widehat{f} \subset \operatorname{Ker} g$, il s'ensuit que

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(g\circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\circ$]
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E qui est derang r (où $r \in [\![0;n]\!]$). Démontrer que l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ est un sous-espace vectoriel de K^n de dimension $n-r$.

Notons F l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$. Considérons l'application linéaire de K^n dans E donnée par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ de sorte que $F = \operatorname{Ker} \varphi$. Le théorème du rang nous dit que $\operatorname{rg} \varphi + \dim F = n$. Or $\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_n) = r$, donc

$$\boxed{\dim F = n - r.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [$\star$]
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u, v des endomorphismes de E.

1. Démontrer que
$$\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(v) - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(u) - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u).$$
2. En déduire l'encadrement de Sylvester :
$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(uv) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}.$$

1. Notons $\widehat{u}$ la restriction de v à $\operatorname{Im} v$ au départ. On a $\operatorname{Im} \widehat{u} = \operatorname{Im} uv$ et $\operatorname{Ker} \widehat{u} = \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang appliqué à $\widehat{u}$ nous dit alors que $\dim \operatorname{Im} v = \dim \operatorname{Im} uv + \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u)$, c'est-à-dire
$$\boxed{\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(v) - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u).}$$
Comme la formule de Grassmann dit que $\dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} v) + \dim(\operatorname{Ker} u) - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u)$, il vient
$$\operatorname{rg}(uv) = \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u) - \dim \operatorname{Ker} u.$$
Or le théorème du rang appliqué à u dit que
$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg}(u),$$
donc
$$\boxed{\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(u) - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u).}$$
2. On a
$$\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(v) \underbrace{- \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u)}_{\leqslant 0} \leqslant \operatorname{rg}(v)$$
et
$$\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(u) \underbrace{- \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u)}_{\leqslant 0 \text{ car } \operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u \subset E} \leqslant \operatorname{rg}(u),$$
donc
$$\operatorname{rg}(uv) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}.$$
Par ailleurs,
$$\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(u) - \dim E + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u)}_{\geqslant \operatorname{rg}(v) \text{ car } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u} \geqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E.$$
En conclusion,
$$\boxed{\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(uv) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K n'est pas de caractéristique 2.

1. Soient p et q deux projecteurs de E. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $pq = qp = 0$.
2. Soient $p_1, \dots, p_k$ une famille de projecteurs. On pose $P = p_1 + \cdots + p_k$.
   a) On suppose que $\forall i \neq j,\ p_i p_j = 0$. Démontrer que P est un projecteur.
   b) On suppose que P est un projecteur. Démontrer que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_k$. En déduire que $\forall i \neq j,\ p_i p_j = 0$.

1. Si $pq = qp = 0$, on a $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ donc $p+q$ est un projecteur. Réciproquement, si l'on suppose que $p+q$ est un projecteur alors $p+q = (p+q)^2 = p^2+pq+qp+q^2 = p + pq + qp + q$ donc $pq = -qp$ $(*)$. Dès lors, en composant $(*)$ par p à gauche, il vient $p^2q = -pqp$, c'est-à-dire $pq = -pqp$. En réutilisant $(*)$, il s'ensuit que $pq = -(-qp)p = qp$. On a donc $pq = -qp$ et $pq = qp$ ce qui implique bien que $pq = qp = 0$ (car K n'est pas de caractéristique 2).
Ainsi
$$\boxed{p+q \text{ est un projecteur si, et seulement si, } pq = qp = 0.}$$

2. a) On a
$$P^2 = (p_1 + \cdots + p_k)^2 = {p_1}^2 + \cdots + {p_k}^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j = p_1 + \cdots + p_k = P,$$
donc
$$\boxed{\text{si } \forall i \neq j,\ p_i p_j = 0, \text{ alors } P \text{ est un projecteur.}}$$
b) Le rang d'un projecteur étant aussi sa trace, on a
$$\operatorname{rg} P = \operatorname{Tr} P = \operatorname{Tr} p_1 + \cdots + \operatorname{Tr} p_k = \operatorname{rg} p_1 + \cdots + \operatorname{rg} p_k,$$
donc
$$\boxed{\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} p_1 + \cdots + \operatorname{rg} p_k.}$$
Comme $P = p_1 + \cdots + p_k$, on a clairement $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k$. Couplé à l'égalité des dimensions ci-dessus, cette inclusion nous dit qu'il y a en fait égalité et que la somme est nécessairement directe. Donc
$$\boxed{\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_k.}$$
Soient $i \in [\![1;k]\!]$ et $x \in E$. Posons $y = p_i(x)$. Alors $y \in \operatorname{Im} p_i$ donc $y \in \operatorname{Im} P$ puisque $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Im} P$. Par suite, on peut écrire que
$$y = p_i(y) \qquad \text{et} \qquad y = P(y) = p_1(y) + \cdots + p_k(y),$$
ce qui donne
$$0 = p_1(y) + \cdots + p_{i-1}(y) + p_{i+1}(y) + \cdots + p_k(y).$$
Or le résultat de la question précédente implique qu'une telle décomposition ne peut être qu'unique, donc
$$p_1(y) = \cdots = p_{i-1}(y) = p_{i+1}(y) = \cdots = p_k(y) = 0.$$
On a ainsi démontrer que $\forall j \neq 1,\ p_j \circ p_i = 0$. Comme i est quelconque, on en déduit alors que
$$\boxed{\text{si } P \text{ est un projecteur, alors } \forall i \neq j,\ p_i p_j = 0.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\star$]
Soient H un hyperplan d'un K-espace vectoriel de dimension et f un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in H,\ f(x) = x$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) - \lambda x \in H$.

A faire.

♦ ***Exercice 15.*** [⋆]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. L'endomorphisme u est dit cyclique.

On pose $K[u] = \mathrm{Vect}\,\big((u^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$. C'est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, appelé *sous-espace des polynômes en u.*

1. Démontrer que $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est une base de $K[u]$.
2. Démontrer qu'un endomorphisme v de E commute avec u si, et seulement si, $v \in K[u]$.

1. Liberté

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que $\lambda_0 \,\mathrm{Id}_E + \lambda_1 u + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = \widetilde{0}$. En évaluant en x_0, on obtient $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} u(x_0) = 0_E$. Comme $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E, on en déduit que $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0_K$. Cela démontre que $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre.

Caractère générateur

Soit $v \in K[u]$.
Comme $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E, il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ tels que $v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \cdots + a_{n-1} u(x_0)$.
Posons $w = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n-1} \,\mathrm{Id}_E$.
On a $v(x_0) = w(x_0)$. En appliquant u à l'égalité, on obtient $uv(x_0) = uw(x_0)$. Comme v et w sont des polynômes en u, ils commutent avec u, ce qui donne $vu(x_0) = wu(x_0)$. En appliquant de nouveau u à cette égalité et en tenant compte du fait que u commute avec v et w, on obtient $vu^2(x_0) = wu^2(x_0)$. Etc. On montre ainsi que $\forall k \in \mathbb{N},\ vu^k(x_0) = wu^k(x_0)$. Mézalors, v et w coïncident sur la base $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$, ce qui démontre que $v = w$.
Donc $v = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n-1} \,\mathrm{Id}_E$, ce qui démontre que $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est une famille génératrice de $K[u]$.

Conclusion

$$\boxed{(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1}) \text{ est une base de } K[u].}$$

$\Leftarrow$ Si v est un polynôme en u, il est clair que v commute avec u.

$\Rightarrow$ Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uv = vu$. On reprend la démonstration de la question 1.
Comme $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E, il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ tels que $v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \cdots + a_{n-1} u(x_0)$.
Posons $w = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n-1} \,\mathrm{Id}_E$.
On a $v(x_0) = w(x_0)$. En appliquant u à l'égalité, on obtient $uv(x_0) = uw(x_0)$. Comme v et w commutent avec u, ob obtient $vu(x_0) = wu(x_0)$. En appliquant de nouveau u à cette égalité et en tenant compte du fait que u commute avec v et w, on obtient $vu^2(x_0) = wu^2(x_0)$. Etc. On montre ainsi que $\forall k \in \mathbb{N},\ vu^k(x_0) = wu^k(x_0)$. Mézalors, v et w coïncident sur la base $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$, ce qui démontre que $v = w$.
Donc $v = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n-1} \,\mathrm{Id}_E$, ce qui démontre que $v \in K[u]$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{un endomorphisme } v \text{ de } E \text{ commute avec } u \text{ si, et seulement si, } v \in K[u].}$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\mathscr{C}(u) = K_{n-1}[u] \text{ est un espace de dimension } n.}$$

♦ ***Exercice 16.*** [⋆] (Matrices à diagonale dominante : théorème d'Hadamard)

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On suppose que M est *à diagonale dominante*, c'est-à-dire
$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$
Démontrer que M est inversible. *Indication : On pourra raisonner par l'absurde et écrire une relation de dépendance entre les colonnes de la matrice.*
2. Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\max\{|a_{ij}| : i, j \in [\![1;n]\!]\} < 1/n$. Démontrer que $A + I_n$ est inversible.

1. Par l'absurde, supposons que M n'est pas inversible. Les vecteurs colonnes de la matrice forment alors une famille liée, ce qui justifie l'existence de n nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on ait
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j m_{i,j} = 0.$$
Considérons l'un des indices $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k|$. Alors
$$|\lambda_{i_0,i_0} m_{i_0,i_0}| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \lambda_{i,j} m_{i,j} \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_{i,j} m_{i,j}| \leqslant |\lambda_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |m_{i,j}| < |\lambda_{i_0,i_0} m_{i_0,i_0}|$$
ce qui est absurde. Donc
$$\boxed{\text{une matrice à diagonale dominante est toujours inversible.}}$$

2. Il suffit de constater que $I + A$ est à diagonale dominante. Donc
$$\boxed{A + I_n \text{ est inversible.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\star$]
Soit $n \geqslant 1$. On considère l'application
$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X], \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1). \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer M^{-1} si elle existe.
2. Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites. Démontrer la formule d'inversion de Pascal :
$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k \right)$$

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a
$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$
donc $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X])$. Or, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a
$$\deg\big(\varphi(P)\big) = \deg\big(P(X+1)\big) = \deg(P) \times \deg(X+1) = \deg(P) \leqslant n,$$
donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour conclure, on peut dire que
$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a
$$\varphi(X^k) = (X+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j$$
donc
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n}{0} \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & & & \vdots \\ & & \binom{2}{2} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbb{O} & & & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ & & & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.}$$

Il est clair que φ est un automorphisme d'inverse

$$\varphi^{-1}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array}\right.$$

Or, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a

$$\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^j$$

donc

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & & & \vdots \\ & & \binom{2}{2} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbb{O} & & & \ddots & -\binom{n}{n-1} \\ & & & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_n = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = U_n M\Big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n M^{-1} = U_n\Big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{la formule d'inversion de Pascal est exacte.}}$$

Remarque : Si l'on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$, on peut (assez facilement) démontrer que

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}.$$

La formule d'inversion de Pascal nous permet d'en déduire que

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$

♦ ***Exercice 18.*** [○]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = \widetilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \widetilde{0}$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & I_{n-1} & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

A faire.

♦ ***Exercice 19.*** [$\star$]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que tout endomorphisme de E peut s'écrire comme la somme de deux automorphismes de E.

Cela revient à démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ est la somme de deux matrices de $\mathscr{GL}_n(K)$. Il suffit pour cela d'écrire la matrice que l'on se donne comme la somme d'une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls et d'une matrice triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux non nuls.

♦ ***Exercice 20.*** [$\circ$]

Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$ et $(0, 0, 2)$ engendrent l'image de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.

Il est clair que le rang de cette famille est 2 car les deux premiers vecteurs sont liés (puisque proportionnels) et que le troisième vecteur $(0, 0, 2)$ est linéairement indépendant de $(1, 1, 0)$. On en déduit que $\big((1, 1, 0); (0, 0, 2)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Le deuxième vecteur étant le double du premier, on a $2f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $f(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0$ ou encore $f(2, -1, 0) = 0$ ce qui prouve que le vecteur $(2, -1, 0)$ appartient au noyau de f. Comme le théorème du rang nous dit que $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$, on peut en déduire que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(2, -1, 0)$.

♦ ***Exercice 21.*** [$\circ$]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\operatorname{rg} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. On précisera une base $\mathscr{B}_1$ de l'image et $\mathscr{B}_2$ du noyau.
2. Démontrer que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

1. On a

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \boxed{-1} & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 \end{pmatrix} = 2.$$

On sait que les vecteurs $\big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\big)$ engendre l'image de f. La réduction de Gauß ci-dessus montre qu'en ne conservant que les vecteurs principaux (ceux correspondant aux colonnes avec un pivot), on obtient une base de $\operatorname{Im} f$. Donc les vecteurs $u_1 = (2, -1, -1)$ et $u_2 = (-1, 2, -1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Pour déterminer le noyau, on recherche les vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que $f(u) = 0$, c'est-à-dire ceux vérifiant la relation matricielle $AX = 0$ où $X = {}^t(x, y, z)$. Or, d'après la réduction de Gauß effectuée ci-dessus, cette relation est équivalente au système

$$\begin{cases} \boxed{-x} & +2y & - \ z & = 0 \\ & \boxed{3y} & -3z & = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont obtenues en paramétrant par z, d'où

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $u_3 = (1,1,1)$.
Donc

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \big((2,-1,-1);(-1,2,-1)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_2 = \big((1,1,1)\big)}$$

2. Soit $\mathscr{B} = \big((2,-1,-1);(-1,2,-1);(1,1,1)\big)$. On a

$$\operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}(\mathscr{B}) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ \boxed{-12} & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

donc

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

3. On a

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(u_1) = 3u_1, \qquad f(u_2) = 3u_2 \qquad \text{et} \qquad f(u_3) = 0,$$

ce qui donne

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♦ ***Exercice 22.*** [$\star$]
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1. Démontrer que $(AB - BA)^2 = 0$.

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $AB - BA$. Comme cette matrice est de rang 1, il en va de même l'endomorphisme u. Le théorème du rang nous dit alors que $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$. Prenons, en conséquence, une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} u$ et complétons la en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice U de u est de la forme

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le 0 dans le coin inférieur droit découle du fait que $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0$. On constate alors aisément que U^2 est la matrice nulle, ce qui signifie que u^2 est l'endomorphisme nul. Comme l'endomorphisme nul est représenté, dans toute base, par la matrice nulle, on en conclut que

$$\boxed{(AB - BA)^2 = 0.}$$

♦ ***Exercice 23.*** [$\star$]
Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(AB)^2$.
2. Déterminer le rang de AB et en déduire que BA est inversible.
3. En déduire que $BA = I_2$.

1. On vérifie que

$$\boxed{(AB)^2 = AB.}$$

2. On vérifie, par la méthode du pivot, que

$$\boxed{\mathrm{rg}(AB) = 2.}$$

La multiplication par une matrice ne pouvant que faire chuter le rang, on a $\mathrm{rg}(BA) \geqslant \mathrm{rg}(ABAB) = \mathrm{rg}(AB) = 2$ donc BA est une matrice 2×2 de rang 2, c'est-à-dire que

$$\boxed{BA \text{ est inversible.}}$$

3. Par suite, on a $ABAB = AB$ d'où $BABABA = BABA$. Comme BA est inversible, il s'ensuit que

$$\boxed{BA = I_2.}$$

♦ ***Exercice 24.*** [$\star$]

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\big(\mathrm{rg}(A) \leqslant 1\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ A = U\,{}^tV\big).$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice de rang 1.
   a) Démontrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $A^2 = \alpha A$.
   b) On suppose $\alpha \neq -1$. Démontrer que $(I_n + A)^{-1} = I_n - (1+\alpha)^{-1}A$.

1. $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ soit vérifié. Si $\mathrm{rg}(A) = 0$ alors $A = 0$ et $U = 0$, $V = 0$ conviennent. Si $\mathrm{rg}(A) = 1$ alors au moins l'une des colonnes de A est non nulle : disons la première que l'on note U. Toutes les autres colonnes lui sont alors proportionnelles : disons que la i-ième colonne est égale à $\lambda_i U$. Alors $A = U\,{}^tV$ où $V = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ avec $\lambda_1 = 1$.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement qu'il existe $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$. Alors chaque colonne du produit $U\,{}^tV$ est proportionnelle à U et l'on a bien $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$.

   En conclusion,

$$\boxed{\big(\mathrm{rg}(A) \leqslant 1\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ A = U\,{}^tV\big).}$$

2. a) On a

$$A^2 = (U\,{}^tV)(U\,{}^tV) = U({}^tVU)V = \alpha A$$

   où

$$\alpha = {}^tVU.$$

   Donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ est une matrice de rang 1, il existe } \alpha \in K \text{ tel que } A^2 = \alpha A.}$$

   b) Pour $\alpha \neq -1$, on a

$$\begin{aligned}(I_n + A)\big(I_n - (1+\alpha)^{-1}A\big) &= I_n - (1+\alpha)^{-1}A + A - (1+\alpha)^{-1}A^2\\ &= I_n - (1+\alpha)^{-1}A + A - (1+\alpha)^{-1}\alpha A\\ &= I_n,\end{aligned}$$

   car

$$-\frac{1}{1+\alpha} + 1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha+1}{1+\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

   Donc

$$\boxed{\text{si } \alpha \neq -1, \text{ on a } (I_n + A)^{-1} = I_n - (1+\alpha)^{-1}A.}$$

♦ ***Exercice 25.*** [◦]
Soient

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A et D sont semblables. On donnera la matrice de passage P et l'on précisera la relation liant A, D, P et P^{-1}. On précisera P^{-1}.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, justifier que A est inversible et préciser son inverse. Que remarque-t-on ?

1. Pour prouver que A est semblable à D, on doit trouver une base (X, Y, Z) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que
$$AX = X, \qquad AY = -Y \qquad \text{et} \qquad AZ = -Z.$$
Si X désigne le vecteur colonne ${}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, on a
$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5x & + & 2y & + & 4z & = & x \\ -4x & + & y & + & 4z & = & y \\ -4x & + & 2y & + & 3z & = & z \end{array}\right. \iff \text{calculs} \iff X \in \operatorname{Vect}\left\{{}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
Si Y ou Z désigne le vecteur colonne ${}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, les égalités $AY = -Y$ et $AZ = -Z$ se traduisent par le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5x & + & 2y & + & 4z & = & -x \\ -4x & + & y & + & 4z & = & -y \\ -4x & + & 2y & + & 3z & = & -z \end{array}\right. \iff \text{calculs} \iff Y, Z \in \operatorname{Vect}\left\{{}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
On pose alors
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et l'on vérifie (le faire !) que P est inversible d'inverse
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
On a alors
$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$
ce qui signifie bien que
$$\boxed{A \text{ et } D \text{ sont semblables.}}$$
2. La matrice $D = \operatorname{Diag}(1; -1; -1)$ est clairement inversible d'inverse elle-même. Par suite, la matrice A est inversible puisqu'elle est le produit des trois matrices inversibles P, D et P^{-1}. De plus, on a $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PDP^{-1} = A$. En conclusion,
$$\boxed{A \text{ est inversible et son inverse est elle-même.}}$$

♦ ***Exercice 26.*** [◦]
Soient $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $r \in [\![0; n]\!]$. Démontrer que A est semblable à J_r si, et seulement si, $A^2 = A$ et $\operatorname{rg}(A) = r$.

Soit $a \in \mathscr{L}(K^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Si $A^2 = A$ et $\operatorname{rg}(A) = r$ alors a est un projecteur tel que $\dim \operatorname{Im} a = r$. Si l'on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E adaptée à la décomposition directe $E = \operatorname{Im} a \oplus \operatorname{Ker} a$ (ce qui signifie que $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im} a$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Ker} a$), la matrice de a dans la base $\mathscr{B}$ est J_r. Donc A et J_r sont semblables puisqu'elles représentent toutes les deux le même endomorphisme (dans des bases différentes).

Réciproquement, supposons que A est est semblable à J_r. Il existe alors $P \in \mathscr{GL}_n(K)$ tel que $A = PJ_rP^{-1}$. Il s'ensuit que $A^2 = PJ_r{}^2P^{-1} = PJ_rP^{-1} = A$ et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(J_r) = r$.

En conclusion,
$$\boxed{A \text{ est semblable à } J_r \text{ si, et seulement si, } A^2 = A \text{ et } \operatorname{rg}(A) = r.}$$

♦ ***Exercice 27.*** [$\star$]

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On considère un endomorphisme f de E tel que $f \neq \widetilde{0}$ et $f^2 = \widetilde{0}$.
   a) Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire $\operatorname{rg} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f$.
   b) Prouver qu'il existe une base dans laquelle f est représentée par $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à J.

1. a) Il est clair que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ car $f^2 = 0$. Donc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$ et, comme $f \neq 0$, le théorème du rang dit que

$$\boxed{\operatorname{rg} f = 1 \text{ et } \dim \operatorname{Ker} f = 2.}$$

   b) <u>Analyse :</u> S'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de f est J alors nécessairement $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 0$. Autrement dit, e_2 est nécessairement dans l'image et le noyau de f (mais de toute façon, s'il est dans $\operatorname{Im} f$, il est dans $\operatorname{Ker} f$ puisque $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$), e_1 est un antécédent de e_2 et e_3 est dans le noyau de f (sans être colinéaire à e_2 évidemment).
   <u>Synthèse :</u> Prenons e_2 un vecteur directeur non nul de la droite $\operatorname{Im} f$. Il existe alors $e_1 \in E$ tel que $e_2 = f(e_1)$. Par ailleurs, on sait que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ donc $e_2 \in \operatorname{Ker} f$. Comme $\operatorname{Ker} f$ est un plan, on peut trouver dans $\operatorname{Ker} f$ un vecteur e_3 non colinéaire à e_2. Vérifions alors que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E. Comme cette famille contient 3 vecteurs et que nous sommes en dimension 3, il suffit de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Pour le prouver, on introduit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. En appliquant f et en tenant compte de sa linéarité, il vient $\lambda_1 e_2 = 0$ car $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = f(e_3) = 0$. Comme $e_2 \neq 0$, on a $\lambda_1 = 0$. En reportant cette information dans la relation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, on obtient $\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Or la famille (e_2, e_3) est libre (puisque e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires) donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En définitive, (e_1, e_2, e_3) est bien libre, ce qui prouve que c'est une base de E. Les relations $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = f(e_3) = 0$ nous disent que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est bien J.
   <u>Bilan :</u> On peut conclure que

$$\boxed{\text{il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ est } J.}$$

2. On constate que $A \neq \mathbb{O}$ et $A^2 = \mathbb{O}$, donc l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice A vérifie $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. D'après la question précédente, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = J$. Matriciellement, cela signifie que

$$\boxed{A \text{ et } J \text{ sont semblables.}}$$

♦ ***Exercice 28.*** [$\circ$]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la trace de l'endomorphisme $u : P \longmapsto P(aX + b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer la trace de l'endomorphisme $\varphi : M \longrightarrow {}^tM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$u(X^k) = (aX + b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j} X^j,$$

donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a & & * & \\ & & a^2 & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a^n \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathrm{Tr}(u) = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = 1, \\ \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}}$$

2. L'endomorphisme $\varphi : M \longrightarrow {}^tM$ est la symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans la direction de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de l'endomorphisme $M \longrightarrow {}^tM$ est une matrice diagonale avec $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ fois le nombre $+1$ sur la diagonale et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ fois le nombre -1 sur la diagonale. Donc

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\varphi) = n.}$$