Problème n° 1 : Ensembles

Correction du problème 1 – Topologies et filtres

Partie I – Topologies

1. **Reformulation.**

   - Si la propriété $(\mathcal{O}_2)$ est satisfaite, la propriété $(\mathcal{O}_{2a})$ découle du cas $|I| = 2$, et la propriété $(\mathcal{O}_{2b})$ découle du cas $|I| = 0$, et de la convention adoptée pour les intersections vides.
   - Réciproquement, si $(\mathcal{O}_{2a})$ et $(\mathcal{O}_{2b})$ sont vérifiées, la propriété $(\mathcal{O}_2)$ est vérifiée pour tout $|I|$ de cardinal 0 (d'après $(\mathcal{O}_{2b})$), de cardinal 1 (c'est une trivialité) et de cardinal 2 (d'après $(\mathcal{O}_{2a})$). Montrons par récurrence sur le cardinal de I que cela reste vrai pour I de cardinal fini quelconque. Ce qui précède constitue l'initialisation. Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $(\mathcal{O}_2)$ est vrai pour toute intersection de n termes. Soit alors une famille de cardinal $n+1$ d'éléments de $\mathcal{O}$. Quitte à réindexer les éléments, on peut supposer, sans perte de généralité, que ces éléments sont numérotés $U_1, \dots, U_{n+1}$ Soit alors $U' = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Par hypothèse de récurrence, $U' \in \mathcal{O}$. Comme $U_{n+1} \in \mathcal{O}$, par $(\mathcal{O}_{2a})$, on obtient $U' \cup U_{n+1} \in \mathcal{O}$, ce qui est bien ce qu'il fallait.

   Ainsi, $\boxed{(\mathcal{O}_2) \text{ équivaut à } (\mathcal{O}_{2a}) \wedge (\mathcal{O}_{2b})}$.

2. **Exemples triviaux.**

   (a) Topologie triviale : soit $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$.
   - Toute union d'une famille dont chaque terme est $\varnothing$ ou X est égal à X dès lors qu'au moins un des termes vaut X et à $\varnothing$ sinon. Cela prouve $(\mathcal{O}_1)$.
   - De même, toute intersection d'une famille dont chaque terme est $\varnothing$ ou X est égal à $\varnothing$ dès lors qu'au moins un des termes vaut $\varnothing$ et à X sinon. Cela prouve $(\mathcal{O}_2)$ (et même plus, puisqu'on n'a pas eu à imposer de cardinal fini à I).

   Ces affirmations sont aussi valable dans le cas trivial où $I = \varnothing$, par les conventions adoptées.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{O} = \{\varnothing, X\} \text{ est une topologie.}}$

   (b) Topologie discrète :

   Puisque toute union ou toute intersection de sous-ensembles de X est encore un sous-ensemble de X, (y compris dans le cas trivial où $I = \varnothing$), $\mathcal{P}(X)$ est stable par union quelconque et intersection finie. On en déduit que $\boxed{\mathcal{P}(X) \text{ est une topologie sur } X.}$

3. **Un autre exemple : la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.**

   (a)
   - Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, et $x \in U$. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, vérifiant $|y - x| < \varepsilon$, on a $y \in U$. Soit un tel ε, soit $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. On a alors $|y - x| < \varepsilon$, donc $y \in U$.
   - Réciproquement, si pour tout $x \in U$, on a un $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$, alors pour un tel ε, dès lors que $y \in \mathbb{R}$ vérifie $|y - x| < \varepsilon$, on obtient

     $$y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U, \qquad \text{donc:} \qquad y \in U.$$

     On a bien trouvé, pour tout $x \in U$ un réel $\varepsilon > 0$ validant la définition des ouverts.

   Ainsi, U est ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\boxed{]x-\varepsilon, x = \varepsilon[\subset U}$.

   (b) (i) Soit $U = \varnothing$. La propriété définissant les ouverts est vraie par défaut, puisqu'on quantifie universellement sur l'ensemble vide (souvenez-vous que $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ traduit l'expression $\forall x, x \in E \implies \mathcal{P}(x)$; avec $E = \varnothing$, on est ramené au cas d'une implication dont l'hypothèse est toujours fausse : cette implication est donc toujours vraie).

   Ainsi, $\boxed{U = \varnothing \text{ est un ouvert.}}$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et (par exemple) $\varepsilon = 1$. On a alors évidemment $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\mathbb{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}}$.

(iii) Soit $x = a$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $]a - eps, a + \varepsilon[\not\subset [a, b]$, puisqu'on peut trouver un réel $y \in]a - \varepsilon, a[$, qui est donc dans $]a - eps, a + \varepsilon[$ mais pas dans $[a, b]$. Ainsi, $\boxed{[a, b] \text{ n'est pas un ouvert de } \mathbb{R}}$.

(iv) Soit $x \in]a, b[$, et $0 < \varepsilon < \min(x - a, b - x)$. Un tel choix de ε est possible, puisque $\min(x-a, b-x) > 0$. On a alors :

$$x - \varepsilon > x - \min(x - a, b - x) \geqslant x - (x - a) = a \qquad \text{et} \qquad x + \varepsilon < x + \min(x - a, b - x) \leqslant x + (b - x) = b.$$

Ainsi, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, b[$.
Par conséquent, $\boxed{]a, b[\text{ est un ouvert de } \mathbb{R}}$.

(v) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; un tel x existe car tous les réels ne sopnt pas rationnels. On peut prendre par exemple $x = \sqrt{2}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, tout intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient un élément de $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc $\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ n'est pas un ouvert de } \mathbb{R}}$.

(c) Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble formé de tous les ouverts de $\mathbb{R}$.

- Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, donc une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon \subset U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est inclus dans l'union de tous les U_i, on en déduit :

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ainsi, un tel ε existant pour tout x de $\bigcup_{i \in I} U_i$, on en déduit que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert, d'où la propriété $(\mathcal{O}_1)$.

- Soit I un ensemble fini, disons, sans perte de généralité, $I = [\![1, n]\!]$. Soit $U_1, \dots, U_n$ des ouverts de $\mathbb{R}$. Si $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est vide, alors il est ouvert d'après 3(b)i. Si $n = 0$, l'intersection vaut par convention $\mathbb{R}$ qui est ouverte. Sinon, soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, on en déduit l'existence de $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset U_i$. Soit alors

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$$

(l'inégalité est stricte car on a un nombre fini de termes : le minimum étant l'un des n termes, il est strictement positif). On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_i \qquad \text{donc:} \qquad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset U_i.$$

Cette inclusion étant vérifiée pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on en déduit :

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Ainsi, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est ouvert. D'où la propriété $(\mathcal{O}_2)$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{O} \text{ est une topologie sur } \mathbb{R}.}$

4. **Voisinages.**

(a)
- Soit $x \in X$ et V un voisinage de x. Il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$. Puisque U est ouvert, Par 3(a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$, donc aussi $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$. Alors on peut poser $U =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}$ d'après 3(b)iv, et on a bien $x \in U \subset V$. Donc V est un voisinage de x.

Ainsi, $\boxed{V \text{ est un voisinage de } x \text{ si et seulement s'il existe } \varepsilon \text{ tel que }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V.}$

(b) On peut remarquer que la question précédente et la question 3(a) montre que dans le cas de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, le résultat attendu est vrai. Étudions le cas général.

- Soit U un ouvert. Soit $x \in U$. Il existe alors un ouverte U' (par exemple $U' = U$) vérifiant $x \in U' \subset U$. Ainsi, U est un voisinage de x. Ceci étant vrai pour tout $x \in U$, U est un voisinage de tous ses points.
- Réciproquement, soit U un ensemble qui est voisinage de tous ses points. Soit $x \in U$. Il existe donc par définition d'un voisinage, un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset U$, donc $\{x\} \subset U_x \subset U$. En prenant l'union de ces inclusions pour tout $x \in U$, on obtient :

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

  Par double inclusion, on en déduit que
$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

  Comme les U_x sont ouverts, on déduit de $(\mathcal{O}_1)$ que U est ouvert.

Ainsi, $\boxed{U \text{ est ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ses points.}}$

(c) Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ un voisinage d'un élément x de X, et W un ensemble tel que $V \subset W \subset X$. Par définition d'un voisinage, il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$, donc aussi $x \in U \subset W$. Ainsi, $\boxed{W \text{ est un voisinage de } x.}$

(d) On se restreint au cas d'un nombre fini non nul de voisinage (le cas $n = 0$ étant trivial, l'intersection étant X tout entier, qui est ouvert par $\mathcal{O}_{2b}$, donc voisinage de tous ses points, et en particulier de x). Soit donc $n \geqslant 1$, et $V_1, \dots, V_n$ des voisinages de x. On a alors l'existence d'ouverts $U_1, \dots, U_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x \in U_i$, et $U_i \subset V_i$. On a alors aussi :

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Or, d'après $(\mathcal{O}_2)$, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est ouvert, donc $\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} V_i \text{ est un voisinage de } x}$.

Partie II – Filtres

1. **Des exemples**

(a) Soit $x \in X$, et $\mathcal{F} = \mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Vérifions pour $\mathcal{V}(x)$ les propriétés définissant un filtre :
- $(\mathcal{F}_1)$ est conséquence immédiate de I-4(c).
- $(\mathcal{F}_2)$ est conséquence immédiate de I-4(d).
- $(\mathcal{F}_3)$ provient du fait que tout voisinage de x contient x, donc n'est pas vide.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{V}(x) \text{ est un filtre sur } X}$.

(b) Soit X un ensemble infini, et
$$\mathcal{F} = \{A^c,\ A \subset X,\ A \text{ fini}\},$$
où A^c désigne le complémentaire de A dans X. Vérifions les 3 points de la définition d'un filtre.
- Soit $B \in \mathcal{P}(X)$ tel qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ vérifiant $F \subset B$. On a alors $B^c \subset F^c$, et comme F^c est fini, il en est de même de B^c. Ainsi, $B \in \mathcal{F}$. D'où $(\mathcal{F}_1)$.
- Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{F}$. Si $I = \varnothing$, l'intersection vaut X, de complémentaire $\varnothing \in \mathcal{F}$. Sinon,
$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c.$$
  Cette union est constituée d'un nombre fini d'ensembles finis, donc il s'agit d'un ensemble fini. On en déduit que $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{F}$, d'où $(\mathcal{F}_2)$.
- $\varnothing \notin \mathcal{F}$ car $\varnothing^c = X$, qui est supposé infini. D'où $(\mathcal{F}_3)$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un filtre.}}$

2. **Filtre engendré par une partie de $\mathcal{P}(X)$, base de filtre**

(a) Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ constitué des ensembles $F \subset X$ tels qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ vérifiant $B \subset F$. Vérifions les 3 points de la définition d'un filtre.

- Soit $A \in \mathcal{P}(X)$ tel qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ vérifiant $F \subset A$. Par définition de $\mathcal{F}$, pour un tel F, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset F$. On a alors aussi $B \subset A$, donc $A \in \mathcal{F}$. D'où $(\mathcal{F}_1)$.
- Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{F}$. Si $n = 0$, l'intersection des A_i est X, qui est élément de $\mathcal{F}$ du fait que $\mathcal{B}$ n'est pas vide (d'après $(\mathcal{B}_1)$), et contient donc au moins un élément B, vérifiant $B \subset X$. Supposons donc désormais $n \geqslant 1$.

  Par définition, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $B_i \subset A_i$. On a alors

  $$\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} B_i \subset \bigcap_{i\in I} A_i.$$

  La propriété $(\mathcal{F}_2)$ résultera alors du lemme suivant, dont la démonstration est basée sur une récurrence assez immédiate à partie de la propriété $(\mathcal{B}_1)$:

  Lemme : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et toute famille $(B_1, \dots, B_n)$ d'éléments de $\mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que

  $$B \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i.$$

  Le cas $n = 1$ est trivial en considérant $B = B_1$. Le cas $n = 2$ résulte de $(\mathcal{B}_1)$. Soit donc $n \geqslant 2$ tel que le lemme soit vrai pour tout famille de n éléments de $\mathcal{B}$. Considérons alors $B_1, \dots, B_{n+1}$, $n + 1$ éléments de $\mathcal{B}$. On a donc, par hypothèse de récurrence, l'existence de $B \in \mathcal{B}$ tel que

  $$B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n, \qquad \text{donc:} \qquad B \cap B_{n+1} \subset B_1 \cap \cdots \cap B_{n+1}.$$

  Comme B et B_1 sont dans $\mathcal{B}$, on peut appliquer $(\mathcal{B}_1)$, nous donnant l'existence de $C \in \mathcal{B}$ tel que

  $$C \subset B_1 \cap B \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} B_i.$$

  D'après le principe de récurrence, le lemme est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui termine la preuve de la propriété $(\mathcal{F}_2)$ pour l'ensemble $\mathcal{F}$.
- Soit $F \in \mathcal{F}$. Il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset F$. Par $(\mathcal{B}_3)$, $B \neq \varnothing$, donc $F \neq \varnothing$. On en déduit $(\mathcal{F}_3)$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un filtre.}}$

Montrons la propriété de minimalité de $\mathcal{F}$: soit $\mathcal{G}$ un filtre contenant $\mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Soit pour cela un élément F de $\mathcal{F}$. Il existe donc $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset F$. Or, $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, donc $B \in \mathcal{G}$. La propriété $(\mathcal{F}_1)$ pour le filtre $\mathcal{G}$ nous assure alors que $F \in \mathcal{G}$. Ainsi, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Par conséquent, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est le plus petit filtre contenant } \mathcal{B}}$.

(b) Montrons d'abord que le filtre $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés $(\mathcal{B}_1)$ à $(\mathcal{B}_3)$.

- Soit B et C dans $\mathcal{F}$. Par la propriété $(\mathcal{F}_2)$, $B \cap C \in F$. Ainsi, en posant $D = B \cap C$, on a $D \in \mathcal{F}$ et $D \subset B \cap C$. D'où la propriété $(\mathcal{B}_1)$.
- $(\mathcal{B}_2)$ résulte de $(\mathcal{F}_2)$, en considérant le cas d'une intersection vide : cela nous assure que l'ensemble total X est dans $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \neq \varnothing$.
- $(\mathcal{B}_3)$ résulte de $(\mathcal{F}_3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de filtre, et $\mathcal{F}$ est clairement le plus petit filtre contenant $\mathcal{F}$!

Par conséquent, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de lui-même}}$.

(c) Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ tel qu'aucune intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ ne soit vide. Soit $\mathcal{B}$ constitué de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{D}$. Vérifions les propriétés $(\mathcal{B}_1)$ à $(\mathcal{B}_3)$ pour l'ensemble $\mathcal{B}$.

- Soit B et C dans $\mathcal{B}$. Par définition, il existe des éléments $D_1, \dots, D_n$ et $E_1, \dots, E_m$ de $\mathcal{D}$ tels que

  $$B = D_1 \cap \cdots \cap D_n \qquad \text{et} \qquad C = E_1 \cap \cdots \cap E_m.$$

  Ainsi,

  $$B \cap C = D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap E_1 \cap \cdots \cap E_m \in \mathcal{B},$$

en tant qu'intersection finie d'éléments de $\mathcal{D}$. On peut alors poser $D = B \cap C$, pour obtenir la propriété $(\mathcal{B}_1)$. Ce qu'on a fait s'étend aussi aux intersections vides, même si les notations utilisées sont peu parlantes dans ce cas.

- Puisque $\mathcal{D}$ est non vide, il contient un élément D qui est aussi élément de $\mathcal{B}$ (intersection à 1 terme). Donc $\mathcal{B} \neq \varnothing$, d'où $(\mathcal{B}_2)$.
- Par hypothèse, les intersections finies d'éléments de $\mathcal{D}$ sont non vides, d'où $\varnothing \notin \mathcal{B}$, d'où $(\mathcal{B}_3)$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de filtre.}}$

(d) Tout filtre contenant $\mathcal{D}$ contient aussi toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{D}$ d'après $(\mathcal{F}_2)$, donc il contient $\mathcal{B}$, puis le filtre engendré par $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire $\mathcal{F}_\mathcal{D}$) par la propriété de minimalité prouvée en 2(a).
On en déduit que $\boxed{\mathcal{F}_\mathcal{D} \text{ est le plus petit filtre contenant tous les éléments de } \mathcal{D}.}$

(e) On considère $\mathcal{D} = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{D}$ est non vide. En effet :

- soit A n'est pas un terme de cette intersection, et on est ramené à $(\mathcal{F}_2)$ nous assurant que l'intersection est dans $\mathcal{F}$ et est donc non vide d'après $(\mathcal{F}_3)$;
- soit A est un terme de cette intersection, et en utilisant $(\mathcal{F}_2)$ sur les autres termes, cette intersection peut s'écrire sous la forme $A \cap F$, pour $F \in \mathcal{F}$. Par hypothèse, elle est donc non vide.

Ainsi, $\mathcal{D}$ vérifie les hypothèses de la question 2(c), et on peut construire un filtre $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ contenant les éléments de $\mathcal{D}$, donc vérifiant $A \in \mathcal{F}_\mathcal{D}$ ainsi que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\mathcal{D}$.
Conclusion : $\boxed{\text{il existe un filtre } \mathcal{F}', \text{ plus fin que } \mathcal{F} \text{ et tel que } A \in \mathcal{F}'.}$

3. **Ultrafiltres**

(a) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre et A et B deux sous-ensembles de X. On suppose que $C = A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \notin \mathcal{F}$.

- Montrons tout d'abord par l'absurde qu'il existe F tel que $A \cap F = \varnothing$. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut construire un filtre $\mathcal{F}'$ strictement plus fin que $\mathcal{F}$ d'après la question 2(e).
- Ainsi, soit F tel que $A \cap F = \varnothing$, alors

$$B \cap F = (A \cap F) \cup (B \cap F) = (A \cup B) \cap F \in \mathcal{F},$$

la dernière appartenance provenant de $\mathcal{F}_2$. Soit alors $G = B \cap F$. On a $G \subset B$ et $G \in \mathcal{F}$, donc $B \in \mathcal{F}$ d'après $(\mathcal{F}_1)$.

On a bien montré que si $A \cup B \in \mathcal{F}$ alors $\boxed{A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F}.}$

(b) i. Soit $\mathcal{F}$ un filtre et A un sous-ensemble de X tel que $A \notin \mathcal{F}$. Soit A^C son complémentaire dans X.
Soit $F \in \mathcal{F}$. Si $A^c \cap F = \varnothing$, alors $F \subset A$, et par $(\mathcal{F}_1)$, cela contredit $A \notin \mathcal{F}$. Ainsi, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $A^c \cap F \neq \varnothing$. D'après la question 2(b), il existe un filtre $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}$ et contenant A^c. Ce filtre lui-même est inclus dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$ d'après la propriété admise.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe un ultrafiltre } \mathcal{U} \text{ plus fin que } \mathcal{F} \text{ et contenant } A^c}$.

ii. Soit $U(\mathcal{F})$ l'ensemble des ultrafiltres plus fins que $\mathcal{F}$. Comme pour tout $\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})$, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, on obtient la première inclusion :

$$\mathcal{F} \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})} \mathcal{U}.$$

Pour montrer que cette inclusion est une égalité, on va montrer l'inclusion

$$\mathcal{F}^c \subset \left(\bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})} \mathcal{U} \right)^c,$$

le complémentaire étant pris dans $\mathcal{P}(X)$.
Soit donc $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $A \notin \mathcal{F}$. On a alors, d'après la question précédente, l'existence d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de $U(\mathcal{F})$ tel que $A^c \in \mathcal{U}$. On ne peut alors pas avoir $A \in \mathcal{U}$, sinon, $\varnothing = A \cap A^c$ serait élément de $\mathcal{U}$ ce qui contredit $(\mathcal{F}_3)$. Ainsi, $A \notin \mathcal{U}$, donc

$$A \notin \bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})} \mathcal{U}.$$

Les deux inclusions étant montrées, on a donc :

$$\boxed{\mathcal{F} \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})} \mathcal{U}}$$

Partie III – Une caractérisation de la continuité

1. **Exemple : cas des fonctions réelles**
   - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $x \in \mathbb{R}$ au sens de l'énoncé. Montrons la caractérisation par ε de la continuité. Soit $\varepsilon > 0$, et $W =]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Il s'agit d'un ouvert, donc d'un voisinage de tous ses points, donc notamment de $f(x)$. Par définition de la continuité, il existe donc un voisinage V de x tel que $f(V) \subset W$. Par I-4(a), on en déduit l'existence de $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset V$. On a alors
   $$f(]x - \eta, x + \eta[) \subset f(V) \subset W,$$
   ce qui se réexprime ainsi :
   $$\forall y \in]x - \eta, x + \eta[, \quad f(y) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[,$$
   ou encore :
   $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ |y - x| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon}.$$
   - Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$|y - x| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Soit alors W un voisinage de $f(x)$. D'après I-4(a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset W$. Soit $\eta > 0$ associé à cette valeur de ε découlant de la propriété satisfaite par x. Posons alors $V =]x - \eta, x + \eta[$ voisinage de x. On a alors, pour tout $y \in V$, $|y - x| < \eta$, donc $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, donc $f(y) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset V$. On a bien trouvé un voisinage V de x tel que $f(V) \subset W$.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } x.}$
2. **Reformulation**
   - Supposons que f est continue en $a \in X$. Soit alors W un voisinage de $f(a)$. Il existe V un voisinage de x tel que $f(V) \subset W$. Ainsi, $V \subset f^{-1}(W)$. D'après I-4(c), $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a.
   - Réciproquement, supposons que pour tout voisinage W de $f(a)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a. Soit W un voisinage de $f(a)$. Posons $V = f^{-1}(W)$. Il s'agit d'un voisinage de a, et $f(V) \subset W$. Donc f est continue en a.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } a \text{ ssi pour tout voisinage } W \text{ de } f(a),\ f^{-1}(W) \text{ est un voisinage de } a.}$
3. **Limite d'un filtre**
   Si un filtre converge vers x, de façon évidente, tout filtre plus fin converge vers x, donc tout ultrafiltre plus fin. Réciproquement si tout ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$ converge vers x, en reprenant les notations de la fin de la partie II,
   $$\forall \mathcal{U} \in U(\mathcal{F}), \quad \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U} \qquad \text{donc:} \qquad \mathcal{V}(x) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathcal{F})} \mathcal{U} = \mathcal{F},$$
   la dernière égalité découlant de II-3(b).
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{F} \text{ converge vers } x \text{ ssi tout } \mathcal{U} \text{ de } U(\mathcal{F}) \text{ converge vers } x}.$
4. **Caractérisation de la continuité**
   (a) Soit $f : X \to Y$ une application, et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X. Montrons que $f(\mathcal{B})$ vérifie les propriétés $(\mathcal{B}_1)$ à $(\mathcal{B}_3)$.
   - Soit B et C dans $f(\mathcal{B})$. Il existe B' et C' tels que $B = f(B')$ et $C = f(C')$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de filtre, il existe $D' \in \mathcal{B}$ tel que $D' \subset B' \cap C'$. On a alors
   $$f(D') \subset f(B' \cap C') \subset f(B') \cap f(C'),$$
   soit, en posant $D = f(D') \in f(\mathcal{B})$, $D \subset B \cap C$. D'où $(\mathcal{B}_1)$
   - Comme $\mathcal{B} \neq \varnothing$, il existe $B \in \mathcal{B}$, donc $f(B) \in f(\mathcal{B})$. Ainsi, $f(\mathcal{B}) \neq \varnothing$, d'où $(\mathcal{B}_2)$.
   - Enfin, pour tout $B \in f(\mathcal{B})$, il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que $B = f(B')$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de filtre, B' est non vide, donc aussi $f(B')$ (qui contient au moins $f(x)$, pour un x de B).

   Ainsi, $\boxed{f(\mathcal{B}) \text{ est une base de filtre sur } Y.}$

(b) Soit X et Y deux espaces topologiques, $a \in X$, et $f : X \to Y$. Soit f une fonction continue en a, et $\mathcal{B}$ une base de filtre convergeant vers a. Montrons que $f(\mathcal{B})$ converge vers $f(a)$, donc que tout voisinage W de $f(a)$ appartient au filtre engendré par $f(\mathcal{B})$. Or, par continuité, il existe V un voisinage de a tel que $f(V) \subset W$. Comme $\mathcal{B}$ converge vers a, V est dans le filtre engendré par $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$. On a alors $f(B) \subset f(V) \subset W$. Or, $f(B) \in f(\mathcal{B})$, donc par définition, W est dans le filtre engendré par $f(\mathcal{B})$. Ceci étant vrai pour tout voisinage W de $f(a)$ on en déduit que $\boxed{f(\mathcal{B}) \text{ converge vers } f(a).}$

(c) Récirproquement, supposons que f n'est pas continue en a, et montrons qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{F}$ convergeant vers a tel que $f(\mathcal{F})$ ne converge pas vers a (contraposée de la propriété de l'énoncé).

Puisque f n'est pas continue en a, il existe un voisinage W de $f(a)$ tel que $f^{-1}(W)$ ne soit pas voisinage de a (d'après la question 2). Ainsi, $f^{-1}(W) \notin \mathcal{V}(a)$, et d'après la question II-3(b), il existe $\mathcal{F}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{V}(a)$ et contenant $(f^{-1}(W))^c$. On a alors

$$f(f^{-1}(W)^c) \subset W^c, \qquad \text{donc:} \qquad f(f^{-1}(W)^c) \cap W \subset W^c \cap W = \varnothing.$$

Ainsi, W et $f(f^{-1}(W)^c)$ ne peuvent pas être simultanément dans le filtre $\mathcal{F}'$ engendré par $f(\mathcal{F})$ (cela contredirait $(\mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{F}_3)$). Or, comme $f^{-1}(W)^c \in \mathcal{F}$, $f(f^{-1}(W)^c) \in f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}'$. Ainsi, W n'est pas dans $\mathcal{F}'$. Comme W est un voisinage de $f(a)$, on en déduit que $\mathcal{F}'$ n'est pas plus fin que $\mathcal{V}(f(a))$, donc que $f(\mathcal{B})$ ne converge pas vers $f(a)$.

Par conséquent, si pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ convergeant vers a, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(a)$, alors $\boxed{f \text{ est continue en } a}$.