MP*1

Problème

Sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ est un corps, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(V)$ (resp. un élément f de $\mathcal{L}(V)$), on dit que $\mathcal{F}$ (resp. f) *est irréductible* si les seuls sous-espaces de V stables par tous les éléments de $\mathcal{F}$ (resp. par f) sont $\{0\}$ et V.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on identifie a et l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé, ce qui permet notamment de parler de partie irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si f est un élément de $\mathcal{L}(V)$, on note π_f (resp. χ_f) le polynôme minimal (resp. caractéristique) de f.

Les parties **II** et **III** reposent sur un résultat de Burnside démontré dans la partie **IV** : si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, la seule sous-algèbre irréductible de $\mathcal{M}_n(K)$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I. Généralités, endomorphismes irréductibles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1.a) Soient $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et x dans $E \setminus \{0\}$. On pose :

$$\mathcal{A}_x = \{a(x),\ a \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que :

$$\mathcal{A}_x = E.$$

1.b) Montrer qu'une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $\geq n$.

Soit, dans les questions 2 à 4, f dans $\mathcal{L}(E)$

2. Montrer que la dimension de l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f est le degré de π_f.

3. On suppose que χ_f est un irréductible de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que f est irréductible.

4. On suppose réciproquement que f est irréductible.

a) Montrer :

$$\chi_f = \pi_f.$$

b) Montrer que χ_f est un irréductible de $\mathbb{K}[X]$.

5. On suppose qu'il existe un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ irréductible sur $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une sous-algèbre irréductible commutative de dimension n qui est également un corps.

II. Sous-groupes d'exposant fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

6. On suppose que G est irréductible. Soit $\mathrm{Tr}\ (G) = \{\mathrm{Tr}\ (g),\ g \in G\}$.

a) En utilisant le fait, démontré dans la partie **IV**, selon lequel la seule sous-algèbre irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une famille $(g_i)_{1\leq i\leq n^2}$ d'éléments de G formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit :

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon\ : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^{n^2} \\ & a & \mapsto & (\mathrm{Tr}\ (ag_1), \dots, \mathrm{Tr}\ (ag_{n^2})) \end{array}$$

Montrer que ε est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^{n^2}$.

c) On suppose que $\mathrm{Tr}\ (G)$ est fini de cardinal m. Montrer que G est fini de cardinal majoré par m^{n^2}.

7. On suppose ici qu'il existe N dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall g \in G, \qquad g^N = I_n.$$

a) On suppose que G est irréductible. Montrer que G est fini de cardinal majoré par N^{n^3}.

b) On suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que tout g de G s'écrive :

$$\begin{pmatrix} a(g) & c(g) \\ 0 & b(g) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a(g), b(g), c(g)) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C}).$$

Quels sont les éléments de G tels que $(a(g), b(g)) = (I_r, I_{n-r})$?

c) Montrer que l'on a toujours G fini de cardinal majoré par N^{n^3} (*théorème de Burnside*).

On pourra raisonner par récurrence sur n.

III. Sous-groupes unispectraux de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout g de G, g n'ait qu'une valeur propre $\lambda(g)$.

8. On suppose ici que G est irréductible et contient toutes les homothéties inversibles. On pose $H = G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer, si $g \in G$, que g s'écrit λh avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $h \in H$.

b) En utilisant la question 6, montrer que H est fini.

c) Déduire de b) que les éléments de H sont diagonalisables, puis que ce sont des homothéties.

d) Conclure que $n = 1$.

9.a) On suppose G irréductible. Montrer que $n = 1$.

b) Dans le cas général, démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les éléments de G ont tous une matrice triangulaire supérieure.

IV. Sous-algèbres irréductibles : cas algébriquement clos

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. On se propose de montrer que $A = \mathcal{L}(E)$ (*théorème de Burnside*).

10. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ commutant à tous les éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que f est une homothétie.

Désormais, si $x \in E$, on pose

$$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in \mathcal{A},\ a(x) = 0\}.$$

Il est clair que $\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-espace de $\mathcal{A}$; on ne demande pas de le vérifier.

11. Soient x_1 et x dans E tels que $\mathrm{Ann}(x_1) \subset \mathrm{Ann}(x)$.

a) Montrer qu'il existe f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \qquad f\left(a(x_1)\right) = a(x).$$

b) Déduire de la question 10 que x appartient à $\mathbb{K}x_1$.

12. On se propose de prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ l'assertion (A_p) suivante :

Si $(x_1, \ldots, x_p, x) \in E^{p+1}$ *et* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathit{Ann}(x_i) \subset \mathit{Ann}(x)$, *alors* x *appartient à* $\mathit{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.

L'assertion (A_1) a été établie dans la question 11. Soit p dans $\mathbb{N}^*$ tel que (A_p) est vraie. Considérons $(x_1, \cdots, x_{p+1}, x)$ dans E^{p+2} tel que :

$$\cap_{i=1}^{p+1} \mathrm{Ann}(x_i) \subset \mathrm{Ann}(x).$$

Dans a) et b) on suppose de plus que $\cap_{i=1}^{p} \mathrm{Ann}(x_i)$ n'est pas contenu dans $\mathrm{Ann}(x_{p+1})$.

a) Montrer :

$$\left\{ a(x_{p+1}),\ a \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ann}(x_i) \right\} = E.$$

b) En procédant comme dans la question 11, montrer qu'il existe λ dans K tel que :

$$\forall a \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ann}(x_i), \qquad a(x) = \lambda\, a(x_{p+1}).$$

c) Achever la démonstration.

13. a) Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} F\ : & \mathcal{A} & \rightarrow & E^m \\ & a & \mapsto & (a(e_1), \ldots, a(e_m)) \end{array}$$

est surjective.

b) Conclure : $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

14. Montrer que le théorème de Burnside ne subsiste pas si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos.

V. Algèbres simples de dimension finie

Une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ est dite simple si les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{A}$.

15. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre simple.

16. On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soient $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre simple de dimension finie, I un idéal à gauche non nul de $\mathcal{A}$ de dimension minimale.

En considérant, pour a dans $\mathcal{A}$, l'application θ_a de I dans I définie par :

$$\forall x \in I, \qquad \theta_a(x) = ax,$$

construire un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre des endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel I. Conclusion ?

17. Montrer que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si et seulement si, pour toute algèbre simple $\mathcal{A}$ de dimension finie sur $\mathbb{K}$, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

VI. Sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'admettant qu'un nombre fini de classes de conjugaison

18. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et $g_1, \ldots, g_r$ dans G tel que tout élément de G soit conjugué à l'un des g_i. Montrer que G est fini.

On pourra raisonner comme dans la question 7.