Devoir Surveillé n^{o} 2 (4h)

Correction du problème 1 – Propriété de Sperner et théorème de Dilworth

Partie I – Théorème de Sperner

1. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué de sous-ensembles de E ayant tous même cardinal. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Si A et B sont comparables, disons $A \subset B$ sans perte de généralité, l'égalité des cardinaux de A et B amène $A = B$. Ainsi, si A et B sont distincts, ils ne sont pas comparables. Donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ est une antichaîne}}$.
2. L'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ de cardinal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est donc une antichaîne de $\mathcal{P}(E)$, et son cardinal est $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

   Il existe donc une $\boxed{\text{antichaîne de } \mathcal{P}(E) \text{ constituée de } \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ éléments}}$.
3. (a) • Soit $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1]\!]$. On a alors
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$
   Or, puisque $k \leqslant k+1 \leqslant \frac{n}{2}$, $n-k \geqslant \frac{n}{2}$, donc $\frac{n-k}{k+1} \geqslant 1$. On a donc $\boxed{\binom{n}{k+1} \geqslant \binom{n}{k}}$

   • Soit $k \in [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]$. On a maintenant $k \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ (car n étant entier, $\frac{n}{2}$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diffèrent d'au plus $\frac{1}{2}$), donc $n - k \leqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, et $k+1 \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{n-k}{k+1} \leqslant 1$. On en déduit cette fois que $\boxed{\binom{n}{k+1} \leqslant \binom{n}{k}}$.

   (b) La suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est croissante jusqu'au rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puis décroissante. Elle admet donc son maximum en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:
$$\boxed{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \max_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k}}$$
4. Deux éléments distincts d'une antichaîne sont incomparables. S'ils étaient dans une même chaîne, ils seraient comparables (l'ordre sur une chaîne étant total), d'où une contradiction.
   Ainsi, $\boxed{\text{ils ne sont pas dans une même chaîne}}$.
5. Puisque E_0 est vide, une chaîne maximale est entièrement déterminée par les ensembles
$$E_1 = E_1 \setminus E_0, \quad E_2 \setminus E_1, \quad E_3 \setminus E_2, \dots, E_n \setminus E_{n-1}.$$
   Du fait de leurs cardinaux, ces ensembles sont des singletons. Soit x_k l'unique élément de $E_k \setminus E_{k-1}$ ($k \in [\![1,n]\!]$). Ainsi, une chaîne maximale est entièrement déterminée par le choix, dans cet ordre, de $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux distincts dans $[\![1,n]\!]$, donc par le choix d'une permutation de $[\![1,n]\!]$. $\boxed{\text{Il y en a donc } n!.}$
6. On raisonne de même, mais cette fois, les k premiers éléments $x_1, \dots, x_k$ doivent être choisis dans B, donc forment une permutation de B. Il y en a donc $k!$. Ce choix étant effectué, on peut choisir les $n-k$ termes restants dans l'ordre qu'on veut, ce qui laisse $(n-k)!$ possibilités. Le nombre de chaînes maximales passant par B est donc $\boxed{k!(n-k)!}$.
   Cela revient à utiliser le résultat précédent, en remarquant qu'une chaîne maximale passant par B est obtenue en concaténant une chaîne maximale de $\mathcal{P}(B)$ et une chaîne obtenue à partir d'une chaîne maximale de $\mathcal{P}(E \setminus B)$ en ajoutant B à chaque terme.
7. Soit $\mathcal{A}$ une antichaîne de $\mathcal{P}(E)$, et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, m_k le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de cardinal k. Soit B un élément de cardinal k de $\mathcal{A}$. le nombre de chaînes maximales passant par B est $k!(n-k)!$ d'après ce qui précède. Ainsi, une chaîne ne pouvant pas passer par deux éléments distincts d'une antichaîne, le nombre de

chaînes passant par un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal k est $m_k k!(m-k)!$. En sommant sur les cardinaux, toujours du fait qu'une chaîne et une antichaîne ont au plus un terme en commun, le nombre de chaînes maximales passant par l'un des éléments de $\mathcal{A}$ est $\boxed{\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!}$.

8. Or, ce nombre est inférieur au nombre total de chaînes maximales, donc

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)! \leqslant n!$$

et en divisant par $n!$, il vient :

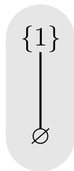
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, d'après la question 3b, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, donc

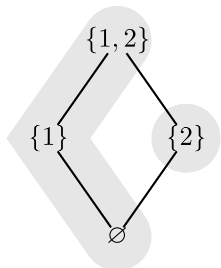
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leqslant 1 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Partie II – Partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes

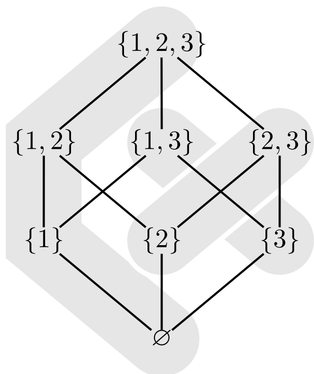
1. Comme on l'a dit, une chaîne ne peut pas rencontrer une antichaîne en plus de deux points. Ainsi, les $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ points de l'antichaîne étudiée dans la partie I sont dans des chaînes distinctes de la partition $\mathcal{C}$. Cette partition est donc constituée d'au moins $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ parts distinctes. Ainsi, $\boxed{k \geqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.
2. On répond simultanément aux 2 questions. Les chaînes symétriques recherchées sont indiquées en grisé.
   - Pour $n = 1$, c'est particulièrement simple :



   - Pour $n = 2$:



   - Pour $n = 3$:



3. • Puisqu'on a les inclusions $E_k \subset \cdots \subset E_{n-1-k}$ et $E_{n-1-k} \subset E_{n-1-k} \cup \{e\}$, $\{E_k, \ldots, E_{n-1-k}, E_{n-1-k} \cup \{e\}\}$ est bien une chaîne (les éléments y sont indiqués par ordre croissant). En notant $E'_i = E_i$ pour $i \in [\![k, n-1-k]\!]$, et $E'_{n-k} = E_{n-1-k} \cup \{e\}$, on a bien, pour tout $i \in [\![k, n-1-k]\!]$, $|E'_i| = i$ et puisque $e \notin E_{n-1-k}$, $|E'_{n-k}| = n-k$. De plus, l'indexation correspond à celle d'une chaîne symétrique pour un ensemble de cardinal n.
   Ainsi, $\boxed{\{E'_i, i \in [\![k, n-k]\!]\} \text{ est une chaîne symétrique couvrante}}$.
   • De même, si la chaîne initiale n'est pas réduite à un élément (sinon, on obtient l'ensemble vide), en posant pour $i \in [\![k+1, n-k-1]\!]$, $E''_i = E_{i-1} \cup \{e\}$, on a aussi une chaîne croissante, et pour tout $i \in [\![k+1, n-k-1]\!]$, $|E''_i| = |E_{i-1}| + 1 = i$.
   L'indexation étant symétrique, $\boxed{\{E''_i, i \in [\![k+1, n-k-1]\!]\} \text{ est une chaîne symétrique couvrante}}$.
4. On montre par récurrence sur le cardinal de E l'existence d'une partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes symétriques couvrantes. L'initialisation est faite dans la question 2 (quitte à renommer les éléments de E). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vérifiée pour tout ensemble E' de cardinal $n-1$. Soit E de cardinal n, et $e \in E$ (puisque $n > 0$, se poser un tel e est possible). Par hypothèse de récurrence, on peut construire une partition $\{A_1, \ldots, A_\ell\}$ en chaînes symétriques couvrantes de E'. Pour chaque chaîne symétrique A_i, on construit les deux chaînes symétriques A'_i, de longueur augmentée de 1 et A''_i (sauf si elle est vide) de longueur diminuée de 1.
   Soit alors $X \subset E$.
   • Si $e \notin E$, X est dans l'un des A_i et un seul, donc dans l'un des A'_i et un seul (les A'_i différant des A_i uniquement d'ensembles contenant e). Il n'est dans aucun des A''_i, les ensembles des A''_i contenant tous e.
   • Si $e \in E$, il y a deux possibilité : dans le premier cas, $X \setminus \{e\}$ est un élément maximal d'un des A_i, et dans ce cas, $X \in A'_i$ (dans un seul, sinon $X \setminus \{e\}$ appartiendrait à plusieurs A_i), et X n'est dans aucun A''_j (sinon cela signifierait que $X \setminus \{e\}$ est élément non maximal d'un A_j, nécessairement avec $i \neq j$, car il ne peut pas être à la fois élément maximal et non maximal de A_i ; cela contredit que les A_j sont disjoints). De même, si $X \setminus \{e\}$ n'est l'élément maximal d'aucun A_i, X est dans l'unique A'_i tel que $X \setminus \{e\}$ soit dans A_i.

   Dans tous les cas, X appartient à une et une seule des chaînes $A'_1, \ldots, A'_\ell, A''_1, \ldots, A''_\ell$. Ces ensembles forment donc bien une partition en chaînes symétriques couvrantes de $\mathcal{P}(E)$.
   Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout ensemble fini E,
   $\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ est partitionnable en chaînes symétriques couvrantes}}$.
5. Pour tout k tel que $k \leqslant n-k$, on a $k \leqslant \frac{n}{2}$ et k étant entier :
   $$k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leqslant \frac{n}{2} \leqslant n-k,$$
   donc dans une chaîne symétrique couvrante $E_k \subset \ldots, \subset E_{n-k}$, il existe un élément d'indice $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Par hypothèse, cet élément E_i est de cardinal $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ainsi, toute chaîne symétrique rencontre au moins un élément de $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et en fait un et un seul, d'après une remarque déjà faite sur l'intersection d'une chaîne et d'une antichaîne.
   Ainsi, étant donnée une partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes symétriques couvrantes, chaque chaîne de la partition rencontre un et un seul élément de $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ et inversement tout élément de $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ est dans une (et une seule) chaîne de la partition. Il y a donc exactement autant de chaîne de la partition que d'éléments dans $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
   Ainsi, une partition en chaînes symétriques couvrantes est constituée de $\boxed{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ parts.}}$
   Par ailleurs, la question précédente nous donne l'existence d'une telle partition.
6. La preuve qu'on vient de faire est indépendante du théorème de Sperner, et permet de retrouver celui-ci. En effet une chaîne ne pouvant rencontrer une antichaîne en plus d'une point, une antichaîne ne peut avoir un cardinal supérieur au nombre de part d'une partition en chaînes. Ainsi, la question précédente implique que toute antichaîne de $\mathcal{P}(E)$ a un cardinal au plus égal à $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. L'antichaîne $\mathcal{P}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(E)$ nous donne donc une antichaîne de cardinal maximal.

Partie III – Théorème de Dilworth

1. Lorsque $|F| = 1$, il n'y a qu'un élément a qui constitue à lui seul l'unique antichaîne. Une antichaîne maximale est donc de cardinal 1. Or $\{a\}$ est aussi une chaîne, donc $\{\{a\}\}$ est une partition de F en chaînes, constituée d'une unique part. Il existe bien un partition en chaînes dont le nombre de part est égal au cardinal maximal d'une antichaîne. Ainsi que le suggère la remarque introduisant cette partie dans l'énoncé, cela suffit pour prouver le $\boxed{\text{théorème de Dilworth lorsque } |F| = 1}$.

2. L'ensemble des chaînes de F est fini, car inclus dans l'ensemble fini $\mathcal{P}(F)$. Il existe donc une chaîne de cardinal maximal, qui est aussi une chaîne maximale au sens de l'inclusion (par maximalité du cardinal, en ajoutant un élément, ce n'est plus une chaîne). Ainsi, $\boxed{\text{il existe une chaîne maximale.}}$ On peut aussi dire que l'ensemble ordonné (par l'inclusion) des chaînes est fini, donc admet un élément maximal.
3. Dans la situation décrite dans l'énoncé, C rencontre chaque antichaîne en exactement un point (car une chaîne et une antichaîne ne peuvent pas avoir deux éléments distincts en commun). Ainsi, étant donnée une antichaîne maximale dans F, en ôtant son unique point d'intersection avec C, on obtient encore une antichaîne de $F \setminus C$, de cardinal $\alpha - 1$. Il s'agit là du cardinal maximal. En effet, sinon, il existerait une antichaîne A de $F \setminus C$ de cardinal β au moins α. il s'agit alors aussi d'une antichaîne de F, donc par définition de α, $\beta \leqslant \alpha$, puis $\beta = \alpha$. Mais alors, par hypothèse, C rencontre A, ce qui contredit $A \subset F \setminus C$.
Ainsi, $\boxed{\text{le cardinal maximal d'une antichaîne de } F \setminus C \text{ est } \alpha - 1.}$
Par hypothèse de récurrence, (C étant non vide, $F \setminus C$ est de cardinal strictement inférieur à n), $F \setminus C$ admet une partition en $\alpha - 1$ chaînes, et en ajoutant à cette partition la part C, on obtient une partition en α chaînes de F. Ainsi, $\boxed{\text{le théorème de Dilworth est vrai pour } F}$.
4. On suppose désormais qu'il existe une antichaîne A de cardinal α, disjointe de C, et on définit :
$$A_+ = \{x \in F \mid \exists a \in A,\ a \leqslant x\} \qquad \text{et} \qquad A_- = \{x \in F \mid \exists a \in A,\ a \geqslant x.\}$$
   - Supposons que $A_+ \cup A_- \neq F$; il existe alors $x \in F$ tel que $x \notin A_+$ et $x \notin A_-$, donc x n'est comparable à aucun élément de A (ni dans un sens ni dans l'autre). Ainsi, $A \cup \{x\}$ est encore une antichaîne de cardinal $\alpha + 1$, ce qui contredit la maximalité du cardinal de l'antichaîne A. Donc $\boxed{A_+ \cup A_- = F}$.
   - Comme $A \subset A_+ \cap A_-$ (par reflexivité), il suffit de montrer la réciproque. Soit donc $x \in A_+ \cap A_-$. On a alors, par définition, l'existence de b et de c dans A tels que $x \geqslant b$ et $x \leqslant c$, d'où par transitivité, $b \leqslant c$. Comme b et c sont dans l'antichaîne A, une telle comparaison n'est possible que si $b = c$. On a donc $x \leqslant b$ et $b \leqslant x$, donc par antisymétrie, $x = b$, de quoi on déduit $x \in A$. Ainsi, $\boxed{A = A_+ \cap A_-}$.
5. L'élément $\min(C)$ n'est pas dans A_+, car sinon, du fait que par hypothèse, C ne rencontre pas A, il existerait $a \in A$ tel qu'on ait l'inégalité stricte $a < \min(C)$. Comme $\min(C)$ est inférieur à tout élément de C, par transitivité, A serait comparable à tout élément de C. Ainsi $C \cup \{a\}$ serait encore une chaîne, contredisant la maximalité de C. Ainsi, $\boxed{A_+ \neq F}$.

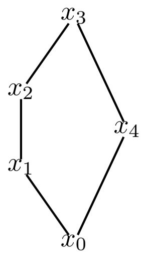
   De la même façon, on prouve que $\max(C)$ n'est pas dans A_-, donc $\boxed{A_- \neq F}$.
6. A_+ et A_- admettent une antichaîne A de cardinal α, qui est le cardinal maximal, car une antichaîne de cardinal plus grand serait aussi antichaîne de F, contredisant la maximalité du cardinal α. Ainsi, A_+ et A_- admettent chacun une partition en α chaînes (on peut appliquer l'hypothsèe de récurrence du fait que A_+ et A_- sont strictement inclus dans F). Chaque part de chacune de ces partitions contient un et un seul élément de A (car tout élément de A doit être dans une part, et il ne peut y en avoir plusieurs dans la même part). En notant $a_1, \dots, a_\alpha$ les éléments de A, on peut donc numéroter $B_1, \dots, B_\alpha$ les parts de la partition de A_+, de sorte que $a_i \in B_i$ pour tout i, et de même, $C_1, \dots, C_\alpha$ les parts de la partition de A_-, de sorte que $a_i \in C_i$ pour tout i. Notons alors, pour tout $i \in [\![1, \alpha]\!]$, $D_i = C_i \cup B_i$ (on met bout-à-bout la chaîne arrivant en a_i et celle repartant de a_i).
   - Les D_i sont encore des chaînes : si x et y sont dans D_i, ils peuvent être tous deux dans C_i ou tout deux dans B_i (dans ces cas, ils sont comparables, ces ensembles étant des chaînes), soit l'un dans B_i (disons x) et l'autre dans C_i. On a alors $x \leqslant a_i \leqslant y$, donc $x \leqslant y$, et x et y sont aussi comparables dans ce cas.
   - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\alpha} D_i = \bigcup_{i=1}^{\alpha} (B_i \cup C_i) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} B_i \cup \bigcup_{i=1}^{\alpha} C_i = A_+ \cup A_- = F$
   - Pour $i \neq j$, $D_i \cap D_j) = (B_i \cap B_j) \cup (B_i \cap C_j) \cup (C_i \cap B_j) \cup (C_i \cup C_j)$.
   Comme les (B_j) sont les parts d'une partition, $B_i \cap B_j = \varnothing$. de même, $C_i \cap C_j = \varnothing$. Par ailleurs, si $x \in B_i \cap C_j$, $x \in A_+ \cap A_- = A$. Or, B_i étant une chaîne, elle contient un unique point commun avec l'antichaîne A, égal à a_i. Ainsi, $x = a_i$, et de même, $x = a_j$, d'où une contadiction. Ainsi, $B_i \cap C_j = \varnothing$, et de même, $C_i \cap B_j = \varnothing$. Ainsi, $D_i \cap D_j = \varnothing$.

   Ainsi, $\boxed{(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} \text{ est bien une partition en } \alpha \text{ chaînes de } F}$. Ainsi, F vérifie la propriété de Dilworth.

   On peut donc conclure que $\boxed{\text{la propriété de Dilworth est vrai pour tout ensemble de cardinal fini}}$, d'après le principa de récurrence.

Partie IV – Ensembles de Sperner bipartis

1. Voici un graphe de couverture d'un ensemble ne pouvant pas être muni d'un rang :



   En effet, par définition, il faudrait que $r(x_1) = r(x_0) + 1$, $r(x_2) = r(x_1) + 1$ et $r(x_3) = r(x_2) + 1$, d'où $r(x_3) = r(x_0) + 3$. En suivant l'autre chemin, on obtient $r(x_3) = r(x_4) + 1 = r(x_0) + 2$, d'où une contradiction. Ainsi, $\boxed{\text{tout ensemble ordonné ne peut pas être rangé}}$.

2. Si $x < y$, il existe une chaîne maximale $x = t_0 < t_1 < \dots, t_n = y$ (maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des chaînes reliant x et y, ou maximales pour le cardinal, ce qui revient au même ; l'existence découle du fait que l'ensemble de ces chaînes est fini). La maximalité de cette chaîne permet d'affirmer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, t_{i+1} couvre t_i (sinon on pourrait rajouter un terme intermédiaire dans la chaîne, contredisant sa maximalité). Ainsi, par définition d'un rang, $r(t_{i+1}) = r(t_i)$, d'où $r(x_{i+1}) = r(x_i) + n$. Ainsi, $r(x_{i+1})$ est déterminé par $r(x_i)$. Si r' est au autre rang, il vérifiera aussi $r'(x_{i+1}) = r'(x_i)$. Ainsi, $r(x_i) - r'(x_i) = r(x_{i+1}) - r'(x_{i+1})$

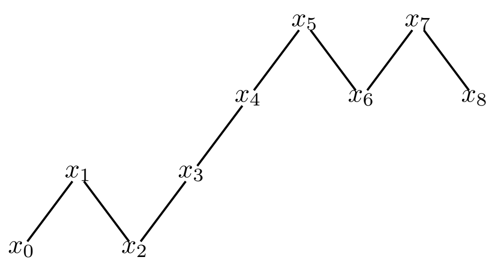
   Supposons maintenant que pour tout x, y, il existe des éléments $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, x_i et x_{i+1} soient comparables. Alors ce qui précède permet d'affirmer que si r et r' sont deux rangs, $r(x_i) - r'(x_i) = r(x_{i+1}) - r'(x_{i+1})$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, (y compris bien sûr s'ils sont égaux !). Par itération, $r(x) - r'(x) = r(y) - r'(y)$.

   Soit r et r' deux rangs normés, qu'on suppose distincts. Il existe alors a tel que $r(a) \neq r'(a)$, disons $r(a) < r'(a)$. Comme r' est normé, il existe b tel que $r'(b) = 0$. Comme a et b peuvent être reliés par une succession d'éléments comparables, ce qui précède permet d'affirmer que $r(b) - r'(b) = r(a) - r'(a)$, donc $r(b) < 0$, ce qui est une contradiction.

   Ainsi, $\boxed{\text{le rang normé, s'il existe, est unique, sous les hypothèses de l'énoncé.}}$

3. On peut considérer l'exemple simple de $E = x, y$, où x et y sont incomparables (ainsi, la relation d'ordre est la relation d'égalité), muni du rang $r(x) = 0$ et $r(y) = 1$. Alors chaque niveau est de cardinal 1, mais on a une antichaîne de cardinal 2 (E tout entier).

   On peut même trouver un exemple vérifiant les conditions de la question précédente :



   Ici, $\{x_1, x_4, x_6, x_8\}$ est une antichaîne, de cardinal strictement supérieur au cardinal maximal d'un niveau.

4. Le but de cette question est de démontrer le théorème des mariages de Hall :

   Théorème : Soit $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble E. Il existe des éléments 2 à 2 distincts $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$ si et seulement si pour tout $J \in [\![1, n]\!]$,

$$|A(J)| \geqslant |J|, \quad \textbf{où } A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

   Un tel n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est alors appelé système de représentants distincts des ensembles $A_1, \dots, A_n$.

   (a) Supposons l'existence d'un système de représentants distincts de $A_1, \dots, A_n$. Alors, pour tout $J \subset [\![1, n]\!]$, et tout $j \in J$, $x_j \in A(J)$. Comme les x_j sont par hypothèse deux à deux distincts, il y a au moins autant d'éléments dans $A(J)$ que d'indices dans J. Donc $|A(J)| \geqslant |J|$.

(b) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n = 1$ et on suppose la condition de Hall satisfaite pour A_1. Soit $J = \{1\} \subset [\![1, n]\!] = \{1\}$. On a $|A(J)| \geqslant |J|$, donc $|A_1| \geqslant 1$. Ainsi, il existe au moins un élément x_1 dans A_1, constituant à lui seul un système de représentants distincts. On aurait pu aussi initialiser, de façon triviale, pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que pour une famille de k ensembles ($k < n$), la condition de Hall assure l'existence d'un système de représentants distincts. Soit $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E, telles que la condition de Hall soit vérifiée. Conformément à l'indication, on dit qu'un ensemble d'indices $J \subset [\![1, n]\!]$ est critique si $|J| = |A(J)|$, et on distingue deux cas :

- Si aucun des sous-ensembles J de $[\![1, n]\!]$ distincts de $\varnothing$ et de $[\![1, n]\!]$ n'est critique, considérons $e \in A_n$ (A_n ne peut pas être vide, car comme plus haut la condition de Hall pour un J de cardinal 1 assure l'existence d'un élément dans chaque A_i, donc aussi dans E). On définit $E' = E \setminus \{e\}$, et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $A'_i = A_i \setminus \{e\}$. On note $A'(J)$ les unions correspondantes. Pour tout $J \in [\![1, n-1]\!]$, distinct de $\varnothing$, $A'(J)$ est inclus dans $A(J)$ et diffère de $A(J)$ d'au plus l'élément e (ils sont égaux seulement si e n'appartient à aucun des A_i, $i \in J$). Ainsi,

$$|A'(J)| \geqslant |A(J)| - 1 > |J| - 1,$$

et comme il s'agit d'une inégalité stricte entre entiers, on en déduit que $|A'(J)| \geqslant |J|$. Cette inégalité est trivialement satisfaite pour $J = \varnothing$. Ainsi, la condition de Hall est vérifiée pour $A'_1, \dots, A'_{n-1}$. On peut donc trouver un système de représentants distincts $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de ces ensembles. Comme les x_i sont différents de e et $e \in A_n$, le n-uplet $(x_1, \dots, x_{n-1}, e)$ est un système de représentants de $A_1, \dots, A_n$.
- S'il existe un sous-ensemble $J \subset [\![1, n]\!]$ critique, distinct de $\varnothing$ et $[\![1, n]\!]$, choisissons-en un de cardinal minimal. On a alors $|A(J)| = |J|$, et comme $|J| < n$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence : la famille $(A_j)_{j \in J}$ admet un système de représentants constitué de $|J|$ éléments distincts de $A(J)$. Pour des raisons de cardinalité, il s'agit de $A(J)$ tout entier. Soit alors K le complémentaire de J dans $[\![1, n]\!]$, et pour tout $i \in K$, $A'_i = A_i \setminus A(J)$. Il s'agit d'une famille de cardinal $n - |J| < n$, et elle vérifie, pour tout $L \subset K$:

$$\begin{aligned} |A'(L)| &= \left| \left(\bigcup_{i \in L} A_i \right) \setminus A(J) \right| = \left| \left(\bigcup_{i \in L \cup J} A_i \right) \setminus A(J) \right| \\ &\geqslant |A(L \cup J)| - |A(J)| \geqslant |L \sqcup J| - |A(J)| = |L| + |J| - |J| = |L|. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(A'_i)_{i \in K}$ vérifie la propriété de Hall, et admet un système de représentants distincts S. L'ensemble S est donc de cardinal $|K|$, disjoint de $A(J)$ (car ses éléments sont dans les A'_i ne contenant aucun élément de $A(J)$), donc $S \cup A(J)$ est constitué de n éléments distincts, ceux de $A(J)$ se répartissant les appartenances aux A_i, $i \in J$, ceux de S se répartissant les appartenances aux A_i, $i \notin J$. Il s'agit donc bien d'un système de représentants distincts de $A_1, \dots, A_n$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, si la condition de Hall est vérifiée pour des sous-ensembles $(A_1, \dots, A_n)$ d'un ensemble E fini, alors $\boxed{(A_1, \dots, A_n) \text{ admet un système de représentants distincts}}$.

5. Soit E un sous-ensemble ordonné rangé normé biparti, tel que $|N_0| \leqslant |N_1|$.
   - Supposons qu'il existe $X \subset N_0$ tel que le nombre d'éléments y de N_1 couvrant un élément de x soit strictement inférieur à $|X|$, et notons $Y \subset N_1$, l'ensemble de ces éléments y. les éléments de $N_1 \setminus Y$ sont donc deux à deux incomparables et chacun incomparables aux éléments de X, qui lui-même est une antichaîne. Ainsi, $X \sqcup (N_1 \setminus Y)$ est une antichaîne, dont le cardinal est $|X| + |N_1| - |Y| > |N_1|$. Il en résulte que E n'est pas de Sperner.
   - Supposons que E n'est pas de Sperner. On peut à peu près refaire tout cet argument dans l'autre sens : on considère une antichaîne $A \subset E$, vérifiant $|A| > |N_1|$, et on note $A_0 = A \cap N_0$, $A_1 = A \cap N_1$. L'ensemble des éléments couvrant A_0 est alors inclus dans $N_1 \setminus A_1$. Il y en a donc au plus : $|N_1| - |A_1| = |N_1| - |A| + |A_1| < |A_1|$.

   Ainsi, il existe un sous-ensemble de N_1 couvert par un nombre d'élément strictement inférieur à son cardinal.

   Ainsi, que E est de Sperner si et seulement si pour tout sous-ensemble X de N_0, le nombre d'éléments y de N_1 tels qu'il existe $x \in X$ vérifiant $y \geqslant x$ est au moins égal à $|X|$.

6. Notons $x_1, \dots, x_\ell$ les éléments de N_0. On peut alors trouver $\boxed{y_1, \dots, y_\ell \text{ des éléments deux à deux distincts de } N_1}$ tels que pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\boxed{x_i \leqslant y_i}$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème des mariages de Hall aux ensembles $A_i = \{y \in N_1 \mid y \geqslant x_i\}$, ces ensembles vérifiant la condition de Hall d'après la question précédente.

On fait juste la remarque suivant, qui peut être utile pour la suite : un niveau est une antichaîne. En effet, si x et y dans un niveau N étaient strictement comparables, leur rang ne pourrait pas être égaux d'après la question IV-2.

Partie V – Une condition suffisante pour être de Sperner

1. Soit $x_1, \dots, x_\ell$ les éléments de N_{k_0}, où k_0 est tel que le cardinal de N_{k_0} soit maximal. La propriété d'unimodalité permet d'affirmer que $(|N_k|)_{0\leqslant k\leqslant k_0}$ est croissante, alors que $(|N_k|)_{k_0\leqslant k\leqslant h}$ est décroissante. La question IV-6 permet alors de construire des injections $\varphi_k : N_k \to N_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, k_0-1]\!]$, telles que pour tout $x \in N_k$, $x \leqslant \varphi_k(x)$ (c'est l'application qui à x_i associe le y_i trouvé en IV-6). De même, on construit de façon symétrique des injections $\psi_k : N_k \to N_{k-1}$ pour tout $k \in [\![k_0+1, h]\!]$, vérifiant $\psi_k(x) \leqslant x$ pour tout $x \in N_k$.

   Soit $x \in N_{k_0}$. Nous allons construire une chaîne passant par x en tirant x vers le bas en remontant, tant que c'est possible, les injections φ_k, et de même, on tire x vers le haut en remontant les ψ_k. Plus concrètement, on définit la chaîne C_x de la manière suivante :

   $$C_x^- = \bigcup_{i=0}^{k_0-1} (\varphi_{k_0-1}\circ\varphi_{k_0-2}\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}(\{x\}), \qquad C_x^+ = \bigcup_{i=k_0+1}^{h} (\psi_{k_0+1}\circ\psi_{k_0+2}\circ\cdots\circ\psi_i)^{-1}(\{x\}), \qquad C_x = \{x\}\cup C_x^+\cup C_x^-.$$

   Certains des ensembles de l'union définissant C_x^- (ou C_x^+) peuvent être vides (si on ne peut plus remonter les flèches), les autres sont constitués d'un unique élément, par injectivité des φ_i et des ψ_i.

   - Montrons que C_x est une chaîne. Soit $(y, z) \in C_x$. On étudie plusieurs cas :
     * Si y et z sont tous les deux dans C_x^-, alors il existe i et j dans $[\![0, k_0-1]\!]$ tels que

       $$y \in (\varphi_{k_0-1}\circ\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}(\{x\}) \qquad \text{et} \qquad z \in (\varphi_{k_0-1}\circ\circ\cdots\circ\varphi_j)^{-1}(\{x\}).$$

       Quitte à échanger y et z, on peut supposer que $i \leqslant j$, et même $i < j$ (car dans le cas $i = j$, $y = z$ par injectivité, donc y et z sont comparables). On a alors

       $$x = \varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_j(z) = \varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_j(\varphi_{j-1}\circ\cdots\circ\varphi_i(y)).$$

       La composée $\varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_j$ étant injective (comme composée d'injections), on en déduit que

       $$z = \varphi_{j-1}\circ\cdots\circ\varphi_i(y)$$

       (cette composée pouvant éventuellement être réduite à un terme). Or, par définition des φ_k :

       $$y \leqslant \varphi_i(y) \leqslant \varphi_{i+1}(\varphi(y)) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_{j-1}\circ\cdots\circ\varphi_i(y) = z.$$

       Par transitivité, on en déduit que $y \leqslant z$, donc y et z sont comparables.
     * Une preuve symétrique à celle-ci nous assure également que deux éléments de C_x^+ sont comparables entre eux.
     * L'argument ci-dessus est aussi encore valable lorsque $z = x$ et $y \in C_x^-$: on obtient alors directement l'égalité

       $$z = x = \varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i(y),$$

       qui permet de conclure comme ci-dessus.
     * De même si $y = x$ et $z \in C_x^+$.
     * De façon évidente, deux éléments de $\{x\}$ sont comparables (par reflexivité)
     * Il reste donc à comparer deux éléments y et z lorsque $y \in C_x^-$ et $z \in C_x^+$. On passe par x pour le faire. En effet les points 3 et 4 ci-dessus nous assurent que $y \leqslant x$ et $x \leqslant z$, d'où $y \leqslant z$ par transitivité.

     Ainsi, pour tout $x \in N_{k_0}$, $\boxed{C_x \text{ est une chaîne}}$.
   - Montrons que les C_x sont deux à deux disjoints. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors x_1 et x_2 dans N_{k_0}, distincts, tels que $C_{x_1} \cap C_{x_2} \neq \varnothing$. Soit $y \in C_{x_1} \cap C_{x_2}$. On ne peut pas avoir $y \in \{x_1\} \cup C_{x_1}^+$ et $y \in \{x_2\} \cup C_{x_2}^-$ (ou l'inverse pour les $+$ et $-$), sinon, on aurait $y \geqslant x_1$ et $y \leqslant x_2$, d'où par transitivité, $x_1 \leqslant x_2$, ce qui contredit le fait que N_{k_0} est une antichaîne.

     On a donc $y \in C_{x_1}^- \cap C_{x_2}^-$ ou $y \in C_{x_1}^+ \cap C_{x_2}^+$. Supposons le premier cas, l'autre étant similaire. Il existe donc i et j vérifiant :

     $$x_1 = \varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i(y) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_j(y).$$

     Ceci impose, au regard des domaines de définition, que $y \in N_i \cap N_j$, ce qui n'est possible que si $i = j$ (les N_j étant deux à deux disjoints). On en déduit alors que $x_1 = x_2$, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

     Ainsi, $\boxed{\text{les } C_x \text{ sont deux à deux disjoints.}}$

- Trivialement, pour tout $x \in N_{k_0}$, $x \in C_x$, donc $\boxed{C_x \neq \varnothing}$.
- Il reste à montrer que l'union des C_x est égal à E. Pour cela, on remarque que :

$$\bigcup_{x\in N_{k_0}} C_x^- = \bigcup_{x\in N_{k_0}} \bigcup_{i=0}^{k_0-1} (\varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{i=0}^{k_0-1} \bigcup_{x\in N_{k_0}} (\varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}(\{x\})$$
$$= \bigcup_{i=0}^{k_0-1} (\varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}\left(\bigcup_{x\in N_{k_0}} \{x\}\right) = \bigcup_{i=0}^{k_0-1} (\varphi_{k_0-1}\circ\cdots\circ\varphi_i)^{-1}(N_{k_0}) = \bigcup_{i=0}^{k_0-1} N_i,$$

d'après les domaines de définition des φ_i. On a de même

$$\bigcup_{x\in N_{k_0}} C_x^+ = \bigcup_{i=k_0}^{h} N_i.$$

d'où :

$$\bigcup_{x\in N_{k_0}} C_x = \bigcup_{x\in N_{k_0}} \{x\} \cup \bigcup_{i=0}^{k_0-1} N_i \cup \bigcup_{i=k_0}^{h} N_i = N_{k_0} \cup \bigcup_{i=0}^{k_0-1} N_i \cup \bigcup_{i=k_0}^{h} N_i = \bigcup_{i=0}^{h} N_i = E.$$

- Ainsi, $\{C_x, x \in N_{k_0}\}$ est une partition en $|N_{k_0}|$ chaînes de E. Comme toute chaîne rencontre au plus un point d'une antichaîne, il en résulte qu'une antichaîne ne peut pas être de cardinal plus grand que $|N_{k_0}|$. Les niveaux de cardinal maximal sont donc bien aussi des antichaînes de cardinal maximal. L'ensemble $\boxed{E \text{ est donc de Sperner}}$.

2. Supposons que E est régulier et unimodal. Montrons que E est de Sperner par niveau. Pour cela, on utiliser la caractérisation de la question IV-5. Soit $k \in [\![0, h-1]\!]$, et supposons $|N_k| \leqslant |N_{k+1}|$ (la démonstration se fait de même dans le cas inverse). Notons $\alpha = |N_k|$ et $\beta = |N_{k+1}|$. Notons ℓ le nombre d'éléments de N_{k+1} couvrant chaque élément de N_k, et m le nombre d'éléments de N_k couvert par chaque élément de N_{k+1}. Le nombre de relations de comparaison entre un élément quelconque de N_k et un élément quelconque de N_{k+1} est alors $\alpha\ell = \beta m$. On a alors $m = \frac{\alpha}{\beta}\ell \leqslant \ell$. Supposons que P_k ne soit pas de Sperner. Il existe alors, d'après IV-5, un sous-ensemble X de N_k tel que l'ensemble X^+ des éléments de N_{k+1} couvrant les éléments de x vérifie $|X^+| < |X|$. Soit Y le complémentaire de X^+ dans N_{k+1}, et Y_- l'ensemble des éléments de N_k couverts par un élément de Y. Par définition de X_+, aucun élément de X n'est couvert par un élément de Y. Ainsi, Y_- est inclus dans le complémentaire de X dans N_k. On en déduit que

$$|Y| = \beta - |X_+| > \beta - |X| \qquad \text{et} \qquad |Y_-| \leqslant \alpha - |X|.$$

Or, le nombre de relations entre un élément de Y et un élément de Y_- est égal à $m|Y|$ (car on prend dans Y_- tous les éléments couverts par un élément de Y), et au plus égal à $\ell|Y_-|$. On en déduit que, puisque m et ℓ sont non nuls,

$$m|Y| \leqslant \ell|Y_-|, \qquad \text{donc:} \qquad m(\beta - |X|) < \ell(\alpha - |X|)$$

Comme $m\beta = \ell\alpha$, et $|X| > 0$, il vient $m > \ell$, d'où une contradiction avec l'inégalité trouvée plus haut.