Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 8 h

APPLICATIONS LINÉAIRES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitre sur :

- les espaces vectoriels.

Dans tout ce chapitre, les lettres $n, m, p, q, r, i, j, k, \ell$ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Dans tout ce chapitre, la lettre K désigne un corps commutatif quelconque.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Applications linéaires

Définition 1

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une application f de E vers F est dite linéaire, si c'est un morphisme pour chacune des deux lois $+$ et $\cdot$, c'est-à-dire :

(i) $\forall x, y \in E, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$;

(ii) $\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in E, \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

ce qui équivaut à l'unique propriété

$$\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall x, y \in E, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications K-linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Les applications linéaires sont aussi appelées des (homo)morphismes d'espaces vectoriels.

On peut retenir que les applications linéaires sont les applications qui transportent la structure de K-espace vectoriel de E sur celle de F. Autrement dit, les applications linéaires « respectent » les combinaisons linéaires : l'image d'une somme est la somme des images et l'image d'un dilaté est le dilaté de l'image.

La linéarité d'une application peut dépendre du corps de base K. S'il y a ambiguïté, on dira que f est K-linéaire. Par exemple, la conjugaison complexe, c'est-à-dire l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $z \longmapsto \overline{z}$, est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Si A et B sont deux K-algèbres (c'est-à-dire des K-espaces vectoriels et des anneaux), une application $f : A \longrightarrow B$ est appelée un morphisme d'algèbres lorsqu'elle est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Exemples :

- L'application de E vers F qui, à tout vecteur de E, associe le vecteur nul de F est une application linéaire, appelée application nulle et notée $\widetilde{0}$.
- Les applications linéaires de K vers K sont les fonctions $x \longmapsto ax$ avec a décrivant K. En effet, si $f : K \longrightarrow K$ est linéaire, alors $\forall x \in K,\ f(x) = f(x.1) = xf(1) = ax$ où $a = f(1)$.
  Cela explique que l'on présente les applications linéaires au collège sous la forme $x \longmapsto ax$.
- Plus généralement, nous verrons (au paragraphe D. 2.) que les applications linéaires de K^m vers K^n sont de la forme
$$\begin{cases} K^m & \longrightarrow \quad K^n \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto \quad (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m\,,\ \dots\ ,\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m) \end{cases}$$
  où les $a_{i,j}$ sont des scalaires. Ainsi, une application linéaire de K^m vers K^n est une fonction dont les coordonnées du vecteur image sont des combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur de départ.
- Soit $x \in E$. L'application de K vers E qui à λ associe λx est linéaire.
- L'opérateur de dérivation $f \longmapsto f'$ est une application linéaire de $\mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers $\mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soit X un ensemble quelconque, E un K-espace vectoriel et $x \in X$. L'opérateur d'évaluation en x définie de E^X vers E est l'application linéaire ε_x telle que $\forall f \in E^X,\ \varepsilon_x(f) = f(x)$.
- Notons E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites convergentes. L'application $\ell : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in E,\ \ell(u) = \lim u$ est linéaire.
- L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(K) \longrightarrow K$ est linéaire.
  L'application déterminant $\det : \mathscr{M}_2(K) \longrightarrow K$ n'est pas du tout linéaire.

La proposition suivante présente les premières propriétés des applications linéaires.

Proposition 1

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. On a

(i) $f(0_E) = 0_F$;

(ii) $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$;

(iii) $\forall x_1, \ldots, x_p \in E,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K,\ f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k)$.

■ (i) et (ii) découlent du fait que f est un morphisme de groupes entre $(E, +)$ et $(F, +)$.
La propriété (iii) se démontre par récurrence. ■

Lorsque une application linéaire est définie d'un espace vers lui-même ou lorsqu'elle est bijective, on adopte un vocabulaire particulier, donné dans la définition suivante.

Définition 2

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

(i) On dit que f est un endomorphisme lorsque $E = F$.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

(ii) On dit que f est un isomorphisme lorsque f est bijective.
On dit alors que E et F sont isomorphes.

(iii) On dit que f est un automorphisme lorsque $E = F$ et f est bijective.
L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ et s'appelle le groupe linéaire de E.

Un isomorphisme transporte la structure d'un espace vectoriel sur un autre : deux espaces isomorphes ont les mêmes proprités (en tant qu'espaces vectoriels).

Exemples :

- L'application $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est un automorphisme de E.
- L'application $(x, y) \longmapsto (2x + y, x - y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- La restriction de l'opérateur de dérivation à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application $f : (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \longmapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ est un isomorphisme entre K^p et E.
- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. L'application $\varphi : (x, y) \longmapsto x + y$ est un isomorphisme entre $F \times G$ et E.
- Si $k \in K$, l'application $k\,\mathrm{Id}_E : x \longmapsto kx$ de E vers E est un endomorphisme appelé homothétie de rapport k.
  Une telle homothétie est un automorphisme si, et seulement si, $k \neq 0$. Sa réciproque est alors l'homothétie vectorielle de rapport $1/k$.
- L'application $\varphi : P(X) \longmapsto P(X + 1)$ est un automorphisme de $K[X]$.
  Elle est en effet clairement linéaire et sa réciproque est $P(X) \longmapsto P(X - 1)$.

B. Opérations sur les applications linéaires

B.1. Combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 2

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, f, g deux applications linéaires de E vers F et $\alpha, \beta \in K$. La combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ définie par

$$\alpha f + \beta g \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \alpha f(x) + \beta g(x) \end{cases}$$

est une application linéaire de E vers F.

■ Pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\lambda x + \mu y) &= \alpha f(\lambda x + \mu y) + \beta g(\lambda x + \mu y) \\ &= \alpha\big(\lambda f(x) + \mu f(y)\big) + \beta\big(\lambda g(x) + \mu g(y)\big) \\ &= \alpha\lambda f(x) + \alpha\mu f(y) + \beta\lambda g(x) + \beta\mu g(y) \\ &= \lambda\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) + \mu\big(\alpha f(y) + \beta g(y)\big) \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(x) + \mu(\alpha f + \beta g)(y) \end{aligned}$$

donc $\alpha f + \beta g$ est linéaire. ■

Ce résultat nous donne la structure vectorielle de $\mathscr{L}(E, F)$.

Corollaire 1

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

■ L'application nulle est bien linéaire. Par ailleurs, la proposition précédente nous dit que $\mathscr{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire. ■

B.2. Composition des applications linéaires

Proposition 3

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G. La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G.

■ Si $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda x + \mu x) &= g\big(f(\lambda x + \mu y)\big) \\ &= g\big(\lambda f(x) + \mu f(y)\big) \qquad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda g\big(f(x)\big) + \mu g\big(f(y)\big) \qquad \text{par linéarité de } g \\ &= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y), \end{aligned}$$

ce qui démontre la linéarité de $g \circ f$. ■

La linéarité permet de démontrer la distributivité à gauche de la loi $\circ$ sur l'addition $+$. C'est l'objet de la proposition suivante. Rappelons que la distributivité à droite de la loi $\circ$ sur $+$ est une propriété générale qui ne découle pas de la linéarité.

Proposition 4

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, f_1, f_2 deux applications linéaires de E vers F, g une application linéaire de F vers G et $\lambda, \mu \in K$. On a

$$g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda (g \circ f_1) + \mu (g \circ f_2).$$

■ Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2)(x) &= g\big((\lambda f_1 + \mu f_2)(x)\big) \\ &= g\big(\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)\big) \\ &= \lambda g\big(f_1(x)\big) + \mu g\big(f_2(x)\big) \qquad \text{par linéarité de } g \\ &= \lambda (g \circ f_1)(x) + \mu (g \circ f_2)(x) \\ &= \big(\lambda (g \circ f_1) + \mu (g \circ f_2)\big)(x), \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat (sans utiliser les linéarités de f_1 et f_2). ■

Pour exprimer le fait que $\circ$ est distributive sur $+$ à gauche et à droite, on dit que l'application $\varphi : \mathscr{L}(F, G) \times \mathscr{L}(E, F) \longrightarrow \mathscr{L}(E, G)$ telle que $\varphi : (g, f) \longmapsto g \circ f$ est bilinéaire.

On peut alors décrire la structure d'algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

Corollaire 2

Soit E un K-espaces vectoriel. Alors $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ est une algèbre (non commutative en général).

■ On sait que $\big(\mathscr{L}(E), +, \cdot\big)$ est un espace vectoriel. Par ailleurs, la loi $\circ$ est interne sur $\mathscr{L}(E)$ d'après la proposition 3. Elle est associative et l'identité est son élément neutre. Enfin, d'après la proposition 4, la loi $\circ$ est distributive sur $+$. Donc $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$ est un anneau. ■

La loi $\circ$ possède donc toutes les propriétés d'une multiplication interne dans $\mathscr{L}(E)$. C'est pourquoi, on adoptera souvent la notation multiplicative pour désigner la loi $\circ$, c'est-à-dire que l'on écrira uv à la place de $u \circ v$ et u^n pour $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (avec $u^0 = \mathrm{Id}$ par convention).

La loi $\circ$ n'étant pas commutative, il ne faut pas confondre uv et vu. Par exemple, la formule $(u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2$ ne donne $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ que lorsque u et v commutent. Plus généralement, la formule du binôme et la formule de Bernoulli s'appliquent à la condition que les deux endomorphismes commutent.

B.3. Inversion d'une application linéaire

Dans le cadre des applications linéaires (et dans l'esprit du vocabulaire multiplicatif dont nous venons de parler), l'application réciproque est aussi appelée inverse.

Proposition 5

L'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.

■ Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f un isomorphisme entre E et F. Nous savons déjà que f^{-1} est bijective (d'inverse f). Reste à démontrer que f^{-1} est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x+\mu y) &= f^{-1}\Big(\lambda f\big(f^{-1}(x)\big)+\mu f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) \\ &= f^{-1}\Big(f\big(\lambda f^{-1}(x)+\mu f^{-1}(y)\big)\Big) \qquad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda f^{-1}(x)+\mu f^{-1}(y) \end{aligned}$$

ce qui démontre la linéarité de f^{-1}. ■

La proposition suivante est une compilation des résultats connus sur la composition, la bijectivité et la linéarité.

Proposition 6

Si f et g sont deux isomorphismes composables, alors $g \circ f$ est un isomorphisme et l'isomorphisme inverse est donné par $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

■ Cela découle du fait que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire ; du fait que la composée de deux bijections est une bijection et du fait que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. On notera que $(g \circ f)^{-1}$ est un isomorphisme pour deux raisons : d'une part parce que c'est l'inverse de l'isomorphisme $g \circ f$ et d'autre part parce que c'est la composée des deux isomorphismes g^{-1} et f^{-1}. ■

Les deux propositions précédentes (et le fait que l'identité soit un isomorphisme) nous disent que la relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels.

Le corollaire ci-dessous décrit la structure de groupe de $\mathscr{GL}(E)$.

Corollaire 3

Soit E un K-espaces vectoriel. Alors $\big(\mathscr{GL}(E), \circ\big)$ est un groupe (non abélien en général).

■ La proposition 5 dit que $\mathscr{GL}(E)$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$. ■

B.4. Restriction d'une application linéaire

Proposition 7

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, E' un sous-espace de E et F' un sous-espace de F. Si f est une application linéaire de E vers F telle que $f(E') \subset F'$, alors sa restriction de E' vers F', définie par

$$f\big|_{E'}^{F'} \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F' \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est encore linéaire.

■ AQT ■

On retiendra que la linéarité est une propriété intrinsèque de la relation fonctionnelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'espace de départ et d'arrivée (à condition bien sûr que ce soient des espaces vectoriels).

C. Noyau, image et équations linéaires

C.1. Action d'une application linéaire sur un sous-espace vectoriel

Proposition 8

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

(i) Si E' est un sous-espace de E, alors $f(E')$ est un sous-espace de F.

(ii) Si F' est un sous-espace de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace de E.

■ (i) Soit E' un sous-espace de E.
Comme $0_E \in E'$, on a $0_F = f(0_E) \in f(E')$.
Soient $\lambda, \mu \in K$ et $y_1, y_2 \in f(E')$. Il existe alors $x_1, x_2 \in E'$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Donc $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in f(E')$ puisque $\lambda x_1 + \mu x_2 \in E'$.
Donc $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) Soit F' un sous-espace de F.
Comme $f(0_E) = 0_F \in F'$, on a $0_E \in f^{-1}(F')$.
Soient $\lambda, \mu \in K$ et $x_1, x_2 \in f^{-1}(F')$. On a alors $f(x_1) \in F'$ et $f(x_2) \in F'$, ce qui implique que $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in F'$ puisque F' est un sev. Par suite, $\lambda x_1 + \mu x_2 \in f^{-1}(F')$.
Donc $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Cet énoncé signifie que les applications linéaires envoient les droites, les plans, les espaces, ... sur des droites, des plans, des espaces, ... et réciproquement. Qualitativement, la structure vectorielle est donc conservée par action d'une application linéaire. Mais attention, quantitativement, rien ne dit que la nature du sous-espace est conservée : un heptadécaplan (i.e. un sous-espace de dimension 17) peut ainsi s'envoyer sur une droite, un plan, un espace, ... ou même un heptadécaplan.

Exemples :

- Soit ℓ une application linéaire non nulle de E vers K. Une telle application linéaire, dont l'espace d'arrivée est K, est appelé une forme linéaire. Nous allons y revenir.
  D'après la proposition ci-dessus, $\ell(E)$ est un sous-espace de K. Or les seuls sous-espaces de K sont $\{0\}$ et K. Comme ℓ n'est pas la forme linéaire nulle, on a $\ell(E) = K$, ce qui traduit la surjectivité de ℓ.
  On démontre ainsi que toutes les formes linéaires (sauf la forme nulle) sont surjectives.

C.2. Noyau et image

Définition 3

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle noyau de f le sous-espace vectoriel de E, noté $\operatorname{Ker} f$, défini par

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

On appelle image de f le sous-espace vectoriel de F, noté $\operatorname{Im} f$, défini par

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F : \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

■ Pour justifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces, on peut directement utiliser la proposition 8 ou faire une démonstration à la main :

- Comme $f(0_E) = 0_F$, on a bien $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
  Soient $\lambda, \mu \in K$ et $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} f$. On a alors $f(x_1) = 0_F$ et $f(x_2) = 0_F$, ce qui implique que $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = 0_F$. Par suite, $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \operatorname{Ker} f$.
  Donc $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace de E.
- Comme $0_F = f(0_E)$, on a $0_F \in \operatorname{Im} f$.
  Soient $\lambda, \mu \in K$ et $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$. Il existe alors $x_1, x_2 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Donc $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in \operatorname{Im} f$.
  Donc $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de F. ■

Les vecteurs du noyau sont « invisibles » pour l'application linéaire f au sens où, pour $x \in E$ et $k \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(x + k) = f(x)$.

Pour justifier qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il suffit de démontrer que c'est le noyau ou l'image d'une certaine application linéaire.

Exemples :

- L'hyperplan de K^m d'équation cartésienne $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = 0$ est le noyau de l'application linéaire de K^m vers K définie par $(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$.
  Plus généralement, le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations cartésiennes
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,m}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$
  est le noyau de $(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m, \ldots, a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m)$ qui est une application linéaire de K^m vers K^n.
- Soit u un endomorphisme de E. L'ensemble F constitué des vecteurs invariants de u, c'est-à-dire $F = \{x \in E : u(x) = x\}$, est un sous-espace de E car $F = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$.
- L'ensemble constitué des fonctions primitivables sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car c'est l'image de l'opérateur de dérivation (qui est une application linéaire de $\mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Un petit exercice très classique.

Exercice 1.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $(u \circ u = 0) \iff (\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u)$.

◊ Supposons que $u \circ u = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. D'où $u(y) = (u \circ u)(x) = 0$, c'est-à-dire $y \in \operatorname{Ker} u$. Donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in E$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$, d'où $u(x) \in \operatorname{Ker} u$ et donc $u\big(u(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $(u \circ u)(x) = 0$. Donc $u \circ u = 0$. ◊

Le noyau et l'image permettent de caractériser l'injectivité ou la surjectivité.

Proposition 9

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

(i) f est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$;

(ii) f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$.

■ (i) Supposons que f est injective. Considérons $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. On a alors $f(x) = f(0_E)$, d'où $x = 0_E$ par injectivité. On a donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x - y) = 0_F$ et donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$, ce qui implique $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$. Cela assure que f est injective.

(ii) La surjectivité de f équivaut, par définition, à $\operatorname{Im} f = F$. ■

Pour étudier l'injectivité d'une application linéaire, on utilise systématiquement (i). Plus précisément, lorsqu'on souhaite démontrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective, on démontre que $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$ (l'inclusion $\supset$ est évidente). Pour cela, on introduit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$ et on démontre que $x = 0_E$.

Exemples :

- Soit $u = k \operatorname{Id}_E$ une homothétie de rapport $k \neq 0$. Nous avons déjà dit que u est bijective (d'inverse $k^{-1} \operatorname{Id}_E$). Retrouvons son injectivité à l'aide du critère du noyau.
Pour cela, considérons x appartenant à $\operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_E$, c'est-à-dire $kx = 0_E$. Comme $k \neq 0$, on a $x = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ ce qui signifie que u est injective.
- Nous avons déjà dit que l'application $\varphi : P(X) \longmapsto P(X+1)$ est un automorphisme de $K[X]$. Retrouvons son injectivité à l'aide du critère du noyau.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $P(X+1) = 0$, ce qui donne $\deg(P) \times 1 = -\infty$, c'est-à-dire $\deg(P) = -\infty$. Cela signifie que P est le polynôme nul. Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est injective. 2 h 30

C.3. Résolution d'une équation linéaire

Définition 4

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $y \in F$. L'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est appelée une équation linéaire.

Exemples :

- Un système linéaire d'équations est une équation linéaire du type $AX = Y$ où $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ sont donnés et $X \in \mathscr{M}_{m,1}(K)$ est l'inconnue.
- Une équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + b(x)y = c(x)$ est linéaire. Il suffit de prendre pour f l'application linéaire de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ vers $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ définie par $f : y \longmapsto y' + b(x)y$ (où I est un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Rechercher les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2nu_n + 3$ revient à résoudre l'équation linéaire $f(u) = 3$ où f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f : (u_n)_{n\geqslant 0} \longmapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2nu_n)_{n\geqslant 0}$.
- Bien sûr, la plupart des équations n'ont rien de linéaire. Ainsi, résoudre $\arcsin(x) = \pi/17$ n'est pas un problème linéaire.

La résolution d'une équation linéaire passe d'abord par celle de son équation homogène associée. Pour cette étape, le noyau de f intervient.

Proposition 10

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $y \in F$.

L'équation homogène associée à l'équation $f(x) = y$ est l'équation $f(x) = 0_F$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $f(x) = 0_F$ est $\operatorname{Ker} f$.

■ C'est la définition du noyau ! ■

En fait, c'est le besoin de résoudre des équations homogènes qui a motivé l'introduction du noyau en algèbre linéaire.

Exemples :

- Pour rechercher les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = 2X + 1$, on commence par rechercher les solutions de l'équation homogène $P(X+1) - P(X) = 0$, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $\varphi : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$. Ici, on trouve que $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}_0[X]$.

On recherche ensuite une solution particulière de l'équation « complète » $f(x) = y$. Pour cette étape, c'est l'image de f qui compte.

Proposition 11

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $y \in F$.

L'équation linéaire $f(x) = y$ admet des solutions si, et seulement si, $y \in \operatorname{Im} f$.

■ C'est la définition de l'image ! ■

Cet énoncé ne dit pas comment trouver une solution particulière. Cela peut être difficile...

Exemples :

- Pour l'équation linéaire $P(X+1) - P(X) = 2X + 1$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$, on constate que $P_p = X^2$ est une solution particulière évidente.

On peut ensuite en déduire la structure affine de l'ensemble des solutions.

Proposition 12

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $y \in \operatorname{Im} f$.

On note $x_p \in E$ une solution particulière de l'équation $f(x) = y$ (c'est-à-dire $f(x_p) = y$).

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation linéaire $f(x) = y$ est alors le sous-espace affine de E donné par $\mathscr{S} = x_p + \operatorname{Ker} f = \{x_p + x_h : x_h \in \operatorname{Ker} f\}$.

■ On a $f(x) = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(x_p) \;\Leftrightarrow\; f(x - x_p) = 0_F \;\Leftrightarrow\; x - x_p \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; x \in x_p + \operatorname{Ker} f$. ■

Exemples :

- L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation linéaire $P(X+1) - P(X) = 2X + 1$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ est le sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ donné par $\mathscr{S} = X^2 + \mathbb{R}_0[X] = \{X^2 + k : k \in \mathbb{R}\}$.
- Considérons un système linéaire d'équations de la forme $AX = Y$ où $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ sont donnés et $X \in \mathscr{M}_{m,1}(K)$ est l'inconnue. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est ou bien vide ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{M}_{m,1}(K)$ de la forme $\mathscr{S} = X_p + \operatorname{Ker} \varphi$ où X_p est une solution particulière de $AX = Y$ et φ est l'application linéaire $X \longmapsto AX$.

  Lorsque $\mathscr{S}$ n'est pas vide et φ est injective, le système possède une unique solution (système de Cramer). Lorsque $\mathscr{S}$ n'est pas vide et φ n'est pas injective, on obtient une infinité de solutions.
- Recherchons les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2$.
  On reconnaît une équation linéaire.
  On recherche tout d'abord les suites qui satisfont la relation de récurrence homogène $\forall n \in \mathbb{N},\; h_{n+2} = 5h_{n+1} - 6h_n$. On reconnaît une suite récurrente double. L'équation caractéristique $q^2 - 5q + 6 = 0$ admet $q_1 = 2$ et $q_2 = 3$ comme solutions. Les suites $(h_n)_{n\geqslant 0}$ possibles sont donc toutes celles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\; h_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$ où α, β parcourent $\mathbb{R}$.
  On recherche ensuite une suite particulière $(p_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\; p_{n+2} = 5p_{n+1} - 6p_n + 2$.
  Il est clair que la suite constante égale à 1 (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\; p_n = 1$) convient.
  En conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2$ est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donné par $\mathscr{S} = \{(u_n)_{n\geqslant 0} : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_n = 1 + \alpha 2^n + \beta 3^n\}$.
  On reconnaît un plan affine.
- Pour résoudre, sur un intervalle I, une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $y' + b(t)y = c(t)$, on détermine les solutions homogènes $y_h = \lambda\, \mathrm{e}^{-B(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et B est une primitive de b. On recherche ensuite une solution particulière y_p (par la méthode de variation de la constante). L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est alors le sous-espace affine de $\mathbb{R}^I$ donné par $\mathscr{S} = \{y_p + \lambda\, \mathrm{e}^{-B(t)} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. On reconnaît une droite affine.

  La résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 conduit à un ensemble de solutions qui est plan affine de $\mathbb{R}^I$.
- Considérons un nuage de points $(x_k, y_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ de K^2 tel que les x_k sont deux à deux distincts. Soit φ l'application linéaire de $K[X]$ vers K^n telle que $\varphi(P) = \big(P(x_1), \cdots, P(x_n)\big)$.
  Résoudre l'équation linéaire $\varphi(P) = (y_1, \ldots, y_n)$ d'inconnue $P \in K[X]$ revient alors à rechercher les polynômes d'interpolation du nuage de points $(x_k, y_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$.
  Le théorème de Lagrange nous dit qu'il existe un unique polynôme L de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]\,,\; L(x_k) = y_k$, c'est-à-dire $\varphi(L) = (y_1, \ldots, y_n)$. Ce polynôme constitue donc notre solution particulière.
  Par ailleurs, résoudre l'équation homogène $\varphi(P) = (0, \_\_\_, 0)$ revient à rechercher tous les polynômes dont les x_k sont racines. Ce sont clairement tous les polynômes de la forme $P_h = Q \prod_{k\in[\![1;n]\!]} (X - x_k)$ où Q décrit $K[X]$.
  En conclusion, l'ensemble des polynômes d'interpolation du nuage de points $(x_k, y_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ est un sous-espace affine de $K[X]$ passant par le polynôme d'interpolation de Lagrange et dirigé par le sous-espace des multiples de $\prod_{k\in[\![1;n]\!]} (X - x_k)$.

On peut interpréter le résultat de la proposition précédente en terme d'existence et d'unicité, à condition de regarder les solutions modulo le noyau. En effet, sous la condition nécessaire et suffisante que y appartienne à $\operatorname{Im} f$, l'équation linéaire $f(x) = y$ possède une unique solution modulo les solutions homogènes.

Pour formaliser proprement cette idée, il faudrait introduire le concept d'espace vectoriel quotient dans le but d'établir un théorème d'isomorphisme entre l'espace E quotienté par $\operatorname{Ker} f$ et l'image $\operatorname{Im} f$. Tout ceci dépasse largement le cadre du programme de première année et nous nous contenterons d'un théorème d'isomorphisme plus faible, ne nécessitant pas de passage au quotient. C'est l'objet de l'énoncé suivant, parfois désigné comme le théorème géométrique du rang.

Théorème 1

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. La restriction de f à S au départ et $\operatorname{Im} f$ à l'arrivée est un isomorphisme.

■ Notons g la restriction de f de S vers $\operatorname{Im} f$. On sait que g est linéaire. Reste à prouver qu'elle est bijective. On procède classiquement en deux étapes : injectivité puis surjectivité.

- ▷ On a $\operatorname{Ker} g = \{x \in S : f(x) = 0_F\} = S \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ (car S et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe) donc g est injective.
- ▷ On a $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$ par définition de g.
  Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} f$ de sorte qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = S + \operatorname{Ker} f$, il existe $x_1 \in S$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) = g(x_1)$ car $x_2 \in \operatorname{Ker} f$, d'où $y \in \operatorname{Im} g$. On en déduit que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.
  En définitive, on a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, ce qui démontre que g est surjective. ■

On retient généralement cet énoncé en disant que f induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ sur $\operatorname{Im} f$.

Nous verrons que ce résultat implique le très important théorème du rang en dimension finie.

Voici une remarque, toute simple, issue de la démonstration ci-dessus et qu'il n'est pas inutile de retenir à propos du noyau d'une restriction. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si E' est un sous-espace, alors

$$\operatorname{Ker} f\big|_{E'} = \operatorname{Ker} f \cap E'.$$

Autrement dit, lorsqu'on restreint une application linéaire au départ, son noyau est « restreint » par intersection.

La remarque suivante (importante) vous explique comment le théorème géométrique du rang permet de choisir des bases sympathiques (au départ et à l'arrivée) pour une application linéaire.

Bases « adaptées » au noyau et à l'image

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

On souhaite avoir de « bonnes » bases de E et F pour l'application f, c'est-à-dire des bases adaptées à l'étude du noyau et de l'image de f.

Pour cela, on introduit une base $(e_i)_{i\in I}$ du noyau $\operatorname{Ker} f$. On complète cette famille libre en une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I\sqcup J}$ de E. La famille $(e_i)_{i\in J}$ est alors une base d'un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E (c'est le lemme de juxtaposition des bases qui le dit). Par conséquent, le théorème géométrique du rang nous dit que la famille $(f_i)_{i\in J}$ où $\forall i \in J,\ f_i = f(e_i)$ est une base de l'image $\operatorname{Im} f$. Il reste alors à compléter cette famille libre en une base $\mathscr{C} = (f_i)_{i\in J\sqcup L}$ de F.

Nous verrons, dans le chapitre sur la dimension finie, que ce choix de bases permet d'obtenir une écriture matricielle simple de f, particulièrement adaptée à l'étude du rang (bon, pour l'instant, tout cela n'est pas clair mais ça le deviendra bientôt).

D. Applications linéaires et familles de vecteurs

D.1. Image d'une famille génératrice

Proposition 13

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On a

$$f\big(\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}\big) = \operatorname{Vect}\big(f(x_i)\big)_{i\in I}.$$

En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(x_i)\big)_{i\in I}.$$

■ On a

$$\begin{aligned} f\big(\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}\big) &= f\big(\big\{\textstyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i : (\lambda_i)_{i\in I}\in K^{(I)}\big\}\big) \\ &= \big\{f\big(\textstyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\big) : (\lambda_i)_{i\in I}\in K^{(I)}\big\} \\ &= \big\{\textstyle\sum_{i\in I}\lambda_i f(x_i) : (\lambda_i)_{i\in I}\in K^{(I)}\big\} \\ &= \operatorname{Vect}\big(f(x_i)\big)_{i\in I}, \end{aligned}$$

ce qui donne le premier résultat.

Lorsque $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on a

$$\operatorname{Im} f = f(E) = f\big(\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}\big) = \operatorname{Vect}\big(f(x_i)\big)_{i\in I},$$

ce qui donne le second résultat. ■

Cet énoncé signifie que l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image.

Ainsi, pour connaître l'image d'une application linéaire, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une famille génératrice de l'espace de départ.

Notons que ce résultat est remarquable : en général, pour connaître l'image d'une fonction, il est nécessaire de connaître la fonction point par point, alors que pour une application linéaire, il suffit seulement de connaître les images de certains vecteurs, à condition que ceux-ci engendrent l'espace de départ.

D.2. Image d'une base

L'énoncé suivant explique qu'une application linéaire est entièrement déterminée par le calcul des images des vecteurs d'une base.

Proposition 14

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
Le résultat du paragraphe précédent nous dit que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}.$$

Plus précisément, l'application f est donnée par

$$f\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i & \longmapsto & f(x)=\sum_{i\in I}\alpha_i f(e_i)\end{array}\right.$$

où $x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i\in I}$ (la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est presque nulle).

Il suffit donc de connaître la famille $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ pour savoir calculer l'image $f(x)$ de tout vecteur x de E.

■ La démonstration est dans l'énoncé. ■

Il découle de ce résultat que deux applications linéaires de E vers F qui coïncident sur les vecteurs d'une base $(e_i)_{i\in I}$ de E sont nécessairement égales. En particulier, dès qu'une application linéaire f de E vers F est telle que $\forall i\in I,\ f(e_i)=0_F$, on peut affirmer que c'est l'application linéaire nulle.

Exemples :

- Soient f une application linéaire de K^m dans K^n et $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})$ la base canonique de K^m. Si le calcul des images de cette base donne $f(\overrightarrow{\varepsilon_1})=(a_{1,1},\dots,a_{n,1})$, $\dots$, $f(\overrightarrow{\varepsilon_m})=(a_{1,m},\dots,a_{n,m})$ et si $(x_1,\dots,x_n)$ est un vecteur quelconque de K^m, la proposition précédente nous dit que $f(x_1,\dots,x_m)=(a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,m}x_m\ ,\ \dots\ ,\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,m}x_m)$. On obtient ainsi le résultat, énoncé dès le début de ce cours, donnant l'expression générale d'une application linéaire de K^m dans K^n.

On peut donner une autre conséquence de la proposition précédente.

Proposition 15

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de F. Il existe une unique application linéaire f de E vers F telle que $\forall i\in I,\ f(e_i)=f_i$.

■ La proposition précédente nous dit que la seule application linéaire candidate est

$$f\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i & \longmapsto & \sum_{i\in I}\alpha_i f_i\end{array}\right.$$

où $x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i\in I}$ (avec $(\alpha_i)_{i\in I}\in K^{(I)}$).

Vérifions que f est bien linéaire. Soient $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in K$. On décompose x et y sur la base $(e_i)_{i\in I}$, ce qui donne $x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ et $y=\sum_{i\in I}\beta_i e_i$ avec $(\alpha_i)_{i\in I},(\beta_i)_{i\in I}\in K^{(I)}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda x+\mu y) &=& f\big(\lambda\sum_{i\in I}\alpha_i e_i+\mu\sum_{i\in I}\beta_i e_i\big) \ =\ f\big(\sum_{i\in I}(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i)e_i\big) \\ &=& \sum_{i\in I}(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i)f_i \ =\ \lambda\sum_{i\in I}\alpha_i f_i+\mu\sum_{i\in I}\beta_i f_i \ =\ \lambda f(x)+\mu f(y), \end{array}$$

ce qui démontre bien la linéarité de f. ■

L'image d'une base permet de caractériser l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité. C'est le théorème de l'image d'une base.

Proposition 16

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors

(i) f est injective si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre ;

(ii) f est surjective si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de F ;

(iii) f est un isomorphisme si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

■ (i) On a

$$\begin{aligned}
\big(f \text{ injective}\big) &\iff \big(\operatorname{Ker} f = \{0_E\}\big)\\
&\iff \Big(\forall x \in E,\ \big(f(x) = 0_F\big) \Rightarrow \big(x = 0_E\big)\Big)\\
&\iff \Big(\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)},\ \big(f(\textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i) = 0_F\big) \Rightarrow \big(\forall i \in I,\ \lambda_i = 0\big)\Big)\\
&\iff \Big(\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)},\ \big(\textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F\big) \Rightarrow \big(\forall i \in I,\ \lambda_i = 0\big)\Big)\\
&\iff \Big(\big(f(e_i)\big)_{i\in I} \text{ est libre}\Big)
\end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}
\big(f \text{ surjective}\big) &\iff \big(\operatorname{Im} f = F\big)\\
&\iff \Big(\operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I} = F\Big)\\
&\iff \Big(\big(f(e_i)\big)_{i\in I} \text{ est génératrice de } F\Big)
\end{aligned}$$

(iii) On compile (i) et (ii). ■

Le point (iii) nous dit en particulier que l'image d'une base par un isomorphisme est une base.

La proposition 14 peut se généraliser à une décomposition directe de l'espace E.

Proposition 17

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. On suppose que E admet une décomposition directe, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

L'application f est donnée par

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i\in I} x_i & \longmapsto & f(x) = \sum_{i\in I} f(x_i) \end{array} \right.$$

où $x = \sum_{i\in I} x_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la somme directe $\bigoplus_{i\in I} E_i$ (la famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc presque nulle et vérifie $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$).

Il suffit donc de connaître les restrictions $f\big|_{E_i}$ pour tout $i \in I$ pour savoir calculer l'image $f(x)$ de tout vecteur x de E.

■ Là aussi, la démonstration est dans l'énoncé. ■

La proposition 14 est un cas particulier de cet énoncé puisque, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors E admet la décomposition directe $E = \bigoplus_{i\in I} K e_i$.

Il découle de ce résultat que deux applications linéaires de E vers F qui coïncident sur les sous-espaces d'une décomposition directe de E sont nécessairement égales.

La proposition qui suit est à la proposition 17 ce que la proposition 15 était à la proposition 14.

Proposition 18

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $(E_i)_{i\in I}$ une décomposition directe de E (c'est-à-dire $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$) et, pour tout $i \in I$, une application linéaire f_i de E_i vers F. Il existe une unique application linéaire f de E vers F telle que, pour tout $i \in I$, on ait $f\big|_{E_i} = f_i$.

■ La proposition précédente nous dit que la seule application linéaire candidate est

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i\in I} x_i & \longmapsto & \sum_{i\in I} f_i(x_i) \end{array} \right.$$

où $x = \sum_{i\in I} x_i$ désigne l'unique décomposition de x sur $\bigoplus_{i\in I} E_i$ (avec $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} E_i$).

Vérifions que f est bien linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. On décompose x et y sur la décomposition directe $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, ce qui donne $x = \sum_{i\in I} x_i$ et $y = \sum_{i\in I} y_i$ avec $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} E_i$. Alors

$$\begin{array}{rclclcl} f(\alpha x + \mu y) & = & f\big(\lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i\big) & = & f\big(\sum_{i\in I}(\lambda x_i + \mu y_i)\big) & = & \sum_{i\in I} f_i(\lambda x_i + \mu y_i) \\ & = & \sum_{i\in I} \big(\lambda f_i(x_i) + \mu f_i(y_i)\big) & = & \lambda \sum_{i\in I} f_i(x_i) + \mu \sum_{i\in I} f_i(y_i) & = & \lambda f(x) + \mu f(y), \end{array}$$

ce qui démontre bien la linéarité de f. ■

Exemples :

- Soit H un sous-espace de E qui admet pour supplémentaire une droite vectorielle. Autrement dit, il existe $a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

  Le résultat ci-dessus nous dit qu'il existe une unique application linéaire ℓ de E vers K (on parle de forme linéaire) qui (par exemple) est nulle sur H et qui vaut 1 sur a. Elle est donnée par $\forall h \in H,\ \forall \lambda \in K,\ \ell(h + \lambda a) = \lambda$.

4 h 45

E. Formes linéaires et hyperplans

E.1. Formes linéaires

Définition 5

Soit E un K-espaces vectoriel. Une application linéaire de E vers K est appelée une forme linéaire sur E.

Le K-espace vectoriel des formes linéaires sur E est noté E^* et s'appelle le dual de E.

■ $E^* = \mathscr{L}(E, K)$ est bien un K-espace vectoriel d'après la proposition 1. ■

Exemples :

- Nous avons vu au paragraphe D. 2. que les formes linéaires sur K^n sont de la forme $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ où les a_i sont des scalaires.
- L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.
- Soient X un ensemble quelconque et $x \in X$. L'opérateur d'évaluation en x qui est l'application définie de K^X vers K par $f \longmapsto f(x)$ est une forme linéaire.
- Notons E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites convergentes. L'application $\ell : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in E,\ \ell(u) = \lim u$ est une forme linéaire.
- Sur $\mathscr{M}_n(K)$, la trace est une forme linéaire.
- Soient E un K-espaces vectoriel et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour tout $k \in I$, la proposition 14 dit qu'il existe une unique forme linéaire sur E, notée e_k^* et appelée k-ème forme coordonnée, telle que $\forall i \in I,\ e_k^*(e_i) = \delta_{k,i}$ où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker. Cette forme linéaire associe à tout vecteur sa coordonnée d'indice k dans la base $(e_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire

$$e_k^* \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i & \longmapsto & \alpha_k \end{array} \right.$$

  où $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i \in I}$ (la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est donc presque nulle).

Nous avons déjà vu, lors d'un exemple, que toutes les formes linéaires non nulles sont surjectives. L'énoncé suivant reprend ce résultat et en propose une démonstration élémentaire.

Proposition 19

Une forme linéaire non nulle est toujours surjective.

■ Soit $\ell \in E^*$ telle que $\ell \neq \widetilde{0}$. Soit $k \in K$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $\ell(x) \neq 0$. Posons $y = kx/\ell(x)$. Alors

$$\ell(y) = \ell\Big(\frac{kx}{\ell(x)}\Big) = \frac{k}{\ell(x)} \ell(x) = k.$$

Cela démontre que ℓ est surjective. ■

E.2. Hyperplans

Définition 6

Soit E un K-espaces vectoriel. On appelle hyperplan (vectoriel) de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle. Si $H = \operatorname{Ker} \ell$ avec $\ell \in E^*$, on dit alors que $\ell(x) = 0$ est une équation cartésienne de l'hyperplan H.

La forme linéaire ne peut être nulle. Par conséquent, E n'est pas un hyperplan de E.

Exemples :

- Si $a_1, \dots, a_n \in K$ sont des scalaires non tous nuls, l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ définit un hyperplan de K^n.
- L'ensemble $\left\{f \in \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R}) : \displaystyle\int_0^1 f = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices $n \times n$ de trace nulle est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$.

L'énoncé suivant donne une caractérisation géométrique des hyperplans.

Proposition 20

Soient E un K-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E.

S'il existe une droite vectorielle de E qui est supplémentaire de H dans E, alors H est un hyperplan de E.

Réciproquement, si H est un hyperplan de E alors, pour tout $a \notin H$, l'hyperplan H et la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E.

■ ▷ Supposons l'existence de $a \neq 0_E$ tel que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$. La proposition 18 dit qu'il existe une (unique) forme linéaire ℓ qui est nulle sur H et qui vaut 1 en a (c'est-à-dire $\ell(a) = 1$). Tout $x \in E$ s'écrit $x = x_H + \lambda_x a$ où $x_H \in H$ et $\lambda_x \in K$, ce qui donne $\ell(x) = \ell(x_H) + \lambda_x \ell(a) = \lambda_x$. Dès lors, pour $x \in E$, on a $\big(\ell(x) = 0\big) \iff (\lambda_x = 0) \iff (x = x_H) \iff (x \in H)$, d'où $H = \operatorname{Ker} \ell$. Donc H est bien un hyperplan de E.

▷ Supposons réciproquement que H est un hyperplan de E et considérons $a \in E \backslash H$. Notons $\ell \in E^* \backslash \{\widetilde{0}\}$ telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$. Comme $a \notin H$, on a $\ell(a) \neq 0$.

Démontrons que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$ en raisonnant par analyse/synthèse. Soit $x \in E$.

<u>Analyse</u> Supposons qu'il existe $x_H \in H$ et $\lambda_x \in K$ tels que $x = x_H + \lambda_x a$. En appliquant ℓ, on obtient $\ell(x) = \ell(x_H + \lambda_x a) = \lambda_x \ell(a)$, c'est-à-dire $\lambda_x = \ell(x)/\ell(a)$ (car $\ell(a) \neq 0$). Alors $x_H = x - \big(\ell(x)/\ell(a)\big)a$. Ainsi, x_H et λ_x sont uniques (s'ils existent), ce qui prouve que H et $\operatorname{Vect}(a)$ sont en somme directe.

<u>Synthèse</u> On pose $x_H = x - \big(\ell(x)/\ell(a)\big)a$ et $\lambda_x = \ell(x)/\ell(a)$ de sorte que $x = x_H + \lambda_x a$. Alors

$$\ell(x_H) = \ell\Big(x - \frac{\ell(x)}{\ell(a)}a\Big) = \ell(x) - \frac{\ell(x)}{\ell(a)}\ell(a) = \ell(x) - \ell(x) = 0,$$

d'où $x_H \in H$. Comme il est clair que $\lambda_x a \in \operatorname{Vect}(a)$, on en déduit que $E = H + \operatorname{Vect}(a)$. ■

Géométriquement, un hyperplan de E est donc caractérisé par le fait que toute droite non incluse dans l'hyperplan est un supplémentaire de l'hyperplan dans E.

Exemples :

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un hyperplan supplémentaire de la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(e_n)$.
- On note $XK[X]$ l'ensemble des multiples de X dans $K[X]$. C'est un hyperplan de $K[X]$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire de $K[X]$ définie par $P \longmapsto P(0)$. Comme $1 \notin XK[X]$, on en déduit que $\operatorname{Vect}(1) = K_0[X]$ est un supplémentaire de $XK[X]$ dans $K[X]$. On retrouve le résultat fourni par la division euclidienne par X.

L'énoncé suivant fait le lien entre les différentes équations cartésiennes d'un hyperplan.

Proposition 21

Soient E un K-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\ell_1(x) = 0$ et $\ell_2(x) = 0$ sont des équations cartésiennes de H (c'est-à-dire si $H = \operatorname{Ker} \ell_1 = \operatorname{Ker} \ell_2$), alors il existe $k \in K^*$ tel que $\ell_2 = k\ell_1$.

■ Soit $a \notin H$. La proposition précédente nous dit que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$. Pour démontrer l'existence de $k \in K^*$ tel que $\ell_2 = k\ell_1$, on raisonne par analyse/synthèse.

<u>Analyse</u> Supposons qu'il existe $k \in K^*$ tel que $\ell_2 = k\ell_1$. En évaluant en a, on obtient $\ell_2(a) = k\ell_1(a)$. Comme $\ell_1(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$, on en déduit que $k = \ell_2(a)/\ell_1(a)$. Au passage, cela démontre l'unicité du k mais on s'en moque puisque l'énoncé ne le mentionne pas...

<u>Synthèse</u> Évidemment, on pose $k = \ell_2(a)/\ell_1(a)$. Comme $\ell_2(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$, on a $k \in K^*$. Soit $x \in E$. Comme $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$, il existe $x_H \in H$ et $\lambda_x \in K$ tels que $x = x_H + \lambda_x a$. Alors

$$\ell_2(x) = \ell_2(x_H + \lambda_x a) = \lambda_x \ell_2(a) = \lambda_x k\ell_1(a) = k\ell_1(\lambda_x a) = k\ell_1(x_H + \lambda_x a) = k\ell_1(x),$$

ce qui démontre que $\ell_2 = k\ell_1$. Glop ! ■

Les équations cartésiennes d'un hyperplan sont donc proportionnelles entre elles.

Dans un langage plus savant, on peut dire que, dans le dual E^*, les formes linéaires associées à un hyperplan de E (c'est-à-celles dont l'hyperplan est le noyau) forment une droite vectorielle (privée de la forme linéaire nulle).

<u>Exemples :</u>

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation d'un hyperplan (c'est-à-dire un plan) est de la forme $ax + by + cz = 0$. Les autres équations cartésiennes de cet hyperplan sont alors de la forme $kax + kby + kcz = 0$ où $k \in \mathbb{R}^*$.

Dans le cadre affine, on rencontre bien sûr des hyperplans.

Définition 7

Soit E un K-espaces vectoriel muni de sa structure affine. On appelle hyperplan affine tout sous-espace affine $\mathscr{H}$ de E dont la direction H est un hyperplan vectoriel de E, ce qui revient à dire qu'il existe un point $\Omega \in E$ et une forme linéaire ℓ non nulle tels que $\mathscr{H} = \Omega + \operatorname{Ker} \ell$.

L'équation $\ell(M) = \ell(\Omega)$ d'inconnue $M \in E$ est alors une équation cartésienne de l'hyperplan affine $\mathscr{H}$.

<u>Exemples :</u>

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation d'un hyperplan affine (c'est-à-dire un plan affine) est de la forme $ax + by + cz = d$.
- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les solutions de l'équation $\operatorname{Tr}(M) = \pi/17$ forment un hyperplan affine.

6 h 00

F. Endomorphismes géométriques

F.1. Homothéties vectorielles

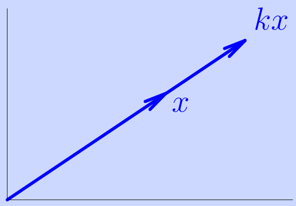
Nous avons déjà rencontré les homothéties vectorielles.

Définition 8

Soient E un K-espace vectoriel et $k \in K$. L'homothétie vectorielle de E de rapport k est l'application $h_k : E \longmapsto E$ telle que

$$\forall x \in E, \qquad h_k(x) = kx.$$

Autrement dit, h_k est l'endomorphisme $k\,\mathrm{Id}_E$.



Exemples :

- L'homothétie de rapport 0 est l'endomorphisme nul $\widetilde{0}$.
- L'homothétie de rapport 1 est l'identité Id_E.

L'énoncé suivant rassemble les propriétés élémentaires des homothéties vectorielles.

Proposition 22

Soient E un K-espace vectoriel et $k, k_1, k_2 \in K$. On a

(i) $h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_2} \circ h_{k_1} = h_{k_1 k_2}$;

(ii) si $k \neq 0$, on a $h_k \in \mathscr{GL}(E)$ et $h_{k^{-1}} = k^{-1}\,\mathrm{Id}_E$.

L'ensemble des homothéties vectorielles non nulles est donc un sous-groupe de $\big(\mathscr{GL}(E), \circ\big)$.

■ AQT ■

L'encadré ci-dessous rassemble tout ce que vous n'avez pas à savoir sur les homothéties affines (ce n'est plus au programme, snif !).

Homothétie-translations affines [✠]

Munissons E de sa structure affine et considérons un point Ω de E ainsi qu'un scalaire $k \in K$. On appelle homothétie (affine) de centre Ω et de rapport $k \in K$, l'application $h_{\Omega,k}$ de E dans E définie par

$$h_{\Omega,k} \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \Omega + k\overrightarrow{\Omega M} \end{array} \right.$$

L'ensemble formé des homothéties de rapport non nul ET des translations est noté $\mathscr{HT}(E)$. Ses éléments sont les homothéties-translations de E. C'est un sous-groupe du groupe $\big(\mathfrak{S}(E), \circ\big)$ des bijections de E. Plus précisément,

(i) si on adopte la convention que les transmations sont de rapport 1, alors les seules homothétie-translations de rapport 1 sont les translations ;

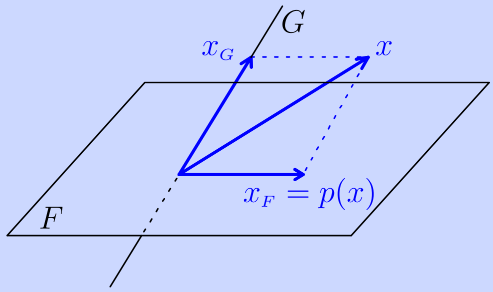
(ii) la composée de deux homothéties-translations de rapport respectifs k_1 et k_2 est une homothétie-translation de rapport $k_1 k_2$;

(iii) une homothétie-translation de rapport k est bijective et admet pour réciproque une homothétie-translation de rapport $1/k$.

F.2. *Projections vectorielles*

Définition 9

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose alors de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.



Avec ces notations, la projection vectorielle sur F dans la direction de G (ou parallèlement à G) est l'endomorphisme $p : E \longrightarrow E$ qui à x associe x_F, c'est-à-dire

$$p \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & p(x) = x_F \end{array} \right.$$

■ On vérifie aisément que p est bien un endomorphisme. ■

Exemples :

- L'application linéaire nulle $\widetilde{0}$ est la projection sur $\{0_E\}$ dans la direction de E.
  L'identité Id_E est la projection sur E dans la direction de $\{0_E\}$.
- L'endomorphisme de K^2 défini par $(x, y) \longmapsto (x, 0)$ est la projection sur $\mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ dans la direction de $\mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$.
- Soit $B \in K[X]$ une polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme de $K[X]$ qui, à un polynôme A, associe son reste dans la division euclidienne de A par B est la projection sur $K_{n-1}[X]$ dans la direction de $BK[X]$.

L'énoncé suivant rassemble les propriétés du noyau et de l'image d'une projection.

Proposition 23

Soient E un K-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et p la projection sur F dans la direction de G. On a

(i) $\mathrm{Im}\, p = F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$;

(ii) $\mathrm{Ker}\, p = G$;

(iii) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$.

■ (i) On a $\mathrm{Im}\, p \subset F$ par définition de p.
Soit $x \in F$. La décomposition de x sur $F + G$ est $x = x + 0_E$, donc $p(x) = x$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. D'où $F \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, alors $p(x) = x$, ce qui démontre que $x \in \mathrm{Im}\, p$.
On ainsi démontré que $\mathrm{Im}\, p \subset F \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\, p$, d'où $\mathrm{Im}\, p = F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

(ii) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p$. Il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tel que $x = x_F + x_G$. Alors $0_E = p(x) = x_F$, donc $x = x_G$, ce qui démontre que $x \in G$. Donc $\mathrm{Ker}\, p \subset G$.
Si $x \in G$, la décomposition de x sur $F + G$ est $x = 0_E + x$. Donc $p(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}\, p$. D'où $G \subset \mathrm{Ker}\, p$.

(iii) Comme $F \oplus G = E$, les résultats de (i) et (ii) impliquent que $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$. ■

Le résultat (i) s'interprète géométriquement : il signifie que le sous-espace sur lequel on projète est à la fois l'ensemble des vecteurs atteints par p mais aussi l'ensemble des vecteurs invariants sous l'action de p (puisque $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E : p(x) = x\}$).

Un projecteur de E est, par définition, un endomorphisme p de E satisfaisant la relation algébrique $p \circ p = p$. L'énoncé ci-dessous dit que « projecteur » et « projection » sont un seul et même objet. On obtient ainsi une caractérisation algébrique des projections vectorielles.

Proposition 24

Soit E un K-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est une projection si, et seulement si, $p \circ p = p$.

■ $\Rightarrow$ Supposons que p soit la projection sur F dans la direction de G (où $F \oplus G = E$). Soit $x \in E$. Alors $p(x) \in F$ et comme F est l'ensemble des points fixes de p d'après la proposition précédente, on en déduit que $p\big(p(x)\big) = p(x)$, c'est-à-dire $(p \circ p)(x) = p(x)$. Donc $p \circ p = p$.

$\Leftarrow$ Soit p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Nous allons démontrer que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$.
Pour cela, on commence par démontrer que les vecteurs de $\operatorname{Im} p$ sont invariants sous l'action de p. Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Il existe $t \in E$ tel que $x = p(t)$. Cela donne $p(x) = p\big(p(t)\big) = (p \circ p)(t) = p(t) = x$. Donc x est bien invariant sous l'action de p.
Démontrons ensuite que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Soit $x \in E$. On a $x = \big(x - p(x)\big) + p(x)$ d'après Binet. Or $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ car $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p\big(p(x)\big) = p(x) - (p \circ p)(x) = 0_E$. Donc $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$. Comme $x \in \operatorname{Im} p$, on sait que $p(x) = x$. Comme $x \in \operatorname{Ker} p$, on a $p(x) = 0_E$. D'où $x = 0_E$. On a donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0_E\}$, ce qui signifie que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont en somme directe.
Alors, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont bien supplémentaires et l'on a $\forall x \in \operatorname{Im} p,\ p(x) = x$ et $\forall x \in \operatorname{Ker} p,\ p(x) = 0_E$. Cela signifie que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$. ■

Cette proposition fournit une démarche pour étudier les projections vectorielles.

Étude d'une projection

Soient E un K-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$. Pour vérifier que p est une projection de E et connaître ses éléments géométriques caractéristiques, on adopte la démarche suivante :

- on vérifie que p est linéaire ;
- on vérifie que $p \circ p = p$ (à ce stade, on sait déjà que p est une projection) ;
- on recherche les vecteurs invariants de p, ce qui nous donne l'espace sur lequel on projète (c'est-à-dire $\operatorname{Im} p$) ;
- on résout l'équation linéaire $p(x) = 0_E$, ce qui nous donne la direction de projection (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} p$) ;
- on conclut que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$.

Exemples :

- Traitons l'exemple de $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right)$.

  L'application p est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (elle en a la forme !).

  On a $(p \circ p)(x,y) = p\big(p(x,y)\big) = p\left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right) = p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $p \circ p = p$. Dès lors, p est une projection. Reste à déterminer $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$.

  Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big(p(x,y) = (x,y)\big) \Leftrightarrow \left(\left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right) = (x,y)\right) \Leftrightarrow (x = y)$, donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big)$.

  Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big(p(x,y) = (0,0)\big) \Leftrightarrow \left(\left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right) = (0,0)\right) \Leftrightarrow (x = -y)$, donc $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\big((1,-1)\big)$.
  En conclusion, p est la projection sur la première bissectrice dans la direction de la seconde bissectrice.

- Soient E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Démontrons que q est aussi une projection de E et déterminons ses éléments caractéristiques.

  L'application $\mathrm{Id}_E - p$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

  On a $q^2 = (\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E\, p - p\,\mathrm{Id}_E + p^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p = \mathrm{Id}_E - p = q$, ce qui prouve que q est une projection vectorielle. Reste à déterminer $\mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, q$.

  On a $\mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, p$ donc $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$.

  On a $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}\, p$.

  En conclusion, q est la projection sur $\mathrm{Ker}\, p$ dans la direction de $\mathrm{Im}\, p$. On l'appelle la projection associée à p.

  On pourra noter que $p + q = \mathrm{Id}_E$ (bien sûr) mais aussi que $p \circ q = q \circ p = \widetilde{0}$.

Terminons, comme dans le cas des homothéties vectorielles, par évoquer ce qui se passe dans le cadre affine.

Projections affines [✠]

Munissons E de sa structure affine et considérons $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines dont les directions F et G sont supplémentaires dans E.

On appelle projection affine sur $\mathscr{F}$ dans la direction de $\mathscr{G}$ (ou parallèlement à $\mathscr{G}$) l'application $p : E \longrightarrow E$ telle que, pour tout point M de E, $p(M)$ est l'unique point P de $\mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{MP} \in G$.

■ Fixons Ω un point de $\mathscr{F}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ se décompose de manière unique suivant la somme directe $E = F \oplus G$ sous la forme $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$. Il existe alors un unique point P tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega P}$ et, par suite, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PM}$. Cela justifie l'existence de P.

Pour l'unicité, on suppose l'existence de P_1 et P_2 deux points de $\mathscr{F}$ tels que $\overrightarrow{P_1M} \in G$ et $\overrightarrow{P_2M} \in G$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ se décompose alors de deux manières sur la somme $E = F \oplus G$ en $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{P_1M}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega P_2} + \overrightarrow{P_2M}$, ce qui assure $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_2M}$, et donc $P_1 = P_2$. ■

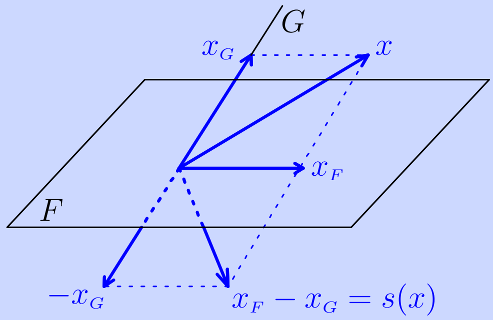
F.3. Symétries vectorielles

Dans ce paragraphe, K désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Définition 10

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose alors de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Avec ces notations, la symétrie vectorielle par rapport à F dans la direction de G (ou parallèlement à G) est l'endomorphisme $s : E \longrightarrow E$ qui à x associe $x_F - x_G$, c'est-à-dire



$$s \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & s(x) = x_F - x_G \end{cases}$$

C'est un automorphisme involutif (c'est-à-dire $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ ou encore $s^{-1} = s$).

■ On vérifie aisément que s est bien un automorphisme involutif. ■

Exemples :

- La symétrie par rapport à E dans la direction de $\{0_E\}$ est Id_E.

  La symétrie par rapport à $\{0_E\}$ dans la direction de E est $-\mathrm{Id}_E$.
- L'endomorphisme de K^2 défini par $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\big((1, 0)\big)$ dans la direction de $\mathrm{Vect}\big((0, 1)\big)$.
- L'endomorphisme σ de $K[X]$ qui, à un polynôme $P(X)$, associe le polynôme $P(-X)$ est la symétrie par rapport au sous-espace des polynômes pairs dans la direction du sous-espace des polynômes impairs.

On peut relier les symétries aux projections.

Lemme 1

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E. Si p désigne la projection vectorielle sur F dans la direction de G et si s désigne la symétrie vectorielle par rapport à F dans la direction de G, alors

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E\,.$$

■ AQT ■

Si $q = \mathrm{Id}_E - p$ désigne la projection associée à p, on a $s = p - q$.

Exemples :

- Sur $\mathbb{C}$, la conjugaison $\sigma : z \longmapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

  Regardons quelle est la projection p qui lui est associée, c'est-à-dire la projection sur $\mathbb{R}$ dans la direction de $i\mathbb{R}$. Si vous avez déjà deviné, chut !

  L'égalité $p = (s + \mathrm{Id}_E)/2$ nous dit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $p(z) = (\overline{z} + z)/2 = \Re\mathrm{e}(z)$. La projection sur $\mathbb{R}$ dans la direction de $i\mathbb{R}$ est donc naturellement la prise de partie réelle !

Une symétrie vectorielle s étant un automorphisme, son noyau $\operatorname{Ker} s$ est réduit à $\{0_E\}$ et son image $\operatorname{Im} s$ est égale à l'espace E tout entier. Autrement dit, le noyau et l'image, qui jouaient un rôle important dans l'étude d'une projection, ne sont guère passionnants dans le cas d'une symétrie. On préfère s'intéresser au sous-espace $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ des vecteurs invariants ainsi qu'au sous-espace $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$ des vecteurs anti-invariants.

Proposition 25

Soient E un K-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. On a

(i) $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$;

(ii) $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$;

(iii) $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E) = E$.

■ On note p la projection vectorielle sur F dans la direction de G de sorte que $s = 2p - \operatorname{Id}_E$.

(i) On a $F = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}\big(2(p - \operatorname{Id}_E)\big) = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$.

(ii) On a $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(2p) = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.

(iii) Comme $F \oplus G = E$, les résultats (i) et (ii) impliquent que $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E) = E$. ■

Une involution linéaire de E est, par définition, un endomorphisme s de E satisfaisant la relation algébrique $s \circ s = \operatorname{Id}_E$. L'énoncé ci-dessous dit que « involution linéaire » et « symétrie » sont un seul et même objet. On obtient ainsi une caractérisation algébrique des symétries vectorielles.

Proposition 26

Soit E un K-espace vectoriel. Un endomorphisme s de E est une symétrie si, et seulement si, $s \circ s = \operatorname{Id}$.

■ $\Rightarrow$ Nous l'avons déjà dit !

$\Leftarrow$ Soit s un endomorphisme de E vérifiant la relation $s \circ s = \operatorname{Id}_E$. Posons $p = (s + \operatorname{Id}_E)/2$. Alors $p^2 = (s^2 + 2s + \operatorname{Id}_E)/4 = (2s + 2\operatorname{Id}_E)/4 = (s + \operatorname{Id}_E)/2 = p$, ce qui prouve que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$. Donc $s = 2p - \operatorname{Id}_E$ est la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$. ■

Cette proposition fournit une démarche pour étudier les symétries vectorielles.

Étude d'une symétrie

Soient E un K-espace vectoriel et $s : E \longrightarrow E$. Pour vérifier que s est une symétrie de E et connaître ses éléments géométriques caractéristiques, on adopte la démarche suivante :

- on vérifie que s est linéaire ;
- on vérifie que $s \circ s = \operatorname{Id}_E$ (à ce stade, on sait déjà que s est une symétrie) ;
- on recherche les vecteurs invariants de s (c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$), ce qui nous donne l'espace par rapport auquel se fait la symétrie ;
- on recherche les vecteurs anti-invariants de s (c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$), ce qui nous donne la direction de la symétrie ;
- on conclut que s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ dans la direction de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.

Notons qu'une autre méthode pour étudier une symétrie s consiste à introduire l'endomorphisme $p = (s + \operatorname{Id}_E)/2$ avant d'appliquer la méthode d'étude d'une projection.

Exemples :

- Traitons l'exemple de $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ s(x,y) = (y,x)$.

  L'application s est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (elle en a la forme !).

  On a $(s \circ s)(x,y) = s\big(s(x,y)\big) = s(y,x) = (x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Dès lors, s est une symétrie. Reste à déterminer $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

  Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big(s(x,y) = (x,y)\big) \Leftrightarrow \big((y,x) = (x,y)\big) \Leftrightarrow (x = y)$, donc $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,\big((1,1)\big)$.

  Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big(s(x,y) = -(x,y)\big) \Leftrightarrow \big((y,x) = -(x,y)\big) \Leftrightarrow (x = -y)$, donc $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,\big((1,-1)\big)$.

  En conclusion, s est la symétrie par rapport à la première bissectrice dans la direction de la seconde bissectrice.

- Soient E un K-espace vectoriel et s une symétrie de E. Démontrons que $-s$ est aussi une symétrie de E et déterminons ses éléments caractéristiques.

  Après quelques secondes de réflexion, on voit que $-s$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

Dernier détour du côté du cadre affine.

Symétries affines [✠]

Munissons E de sa structure affine et considérons $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines dont les directions F et G sont supplémentaires dans E. On note p la projection affine sur $\mathscr{F}$ dans la direction de $\mathscr{G}$.

On appelle symétrie affine par rapport à $\mathscr{F}$ dans la direction de $\mathscr{G}$ (ou parallèlement à $\mathscr{G}$) l'application $s : E \longrightarrow E$ telle que, pour tout point M de E, $s(M)$ est l'unique point S de E tel que $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{PM}$ où $P = p(M)$.

■ L'existence et l'unicité de S découlent immédiatement de celles de P. ■ 7 h 50