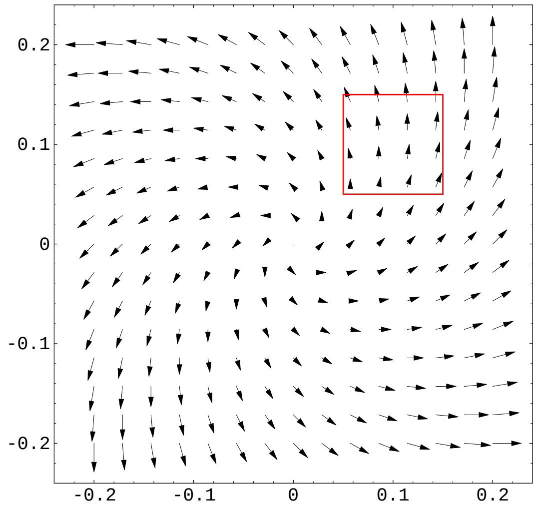
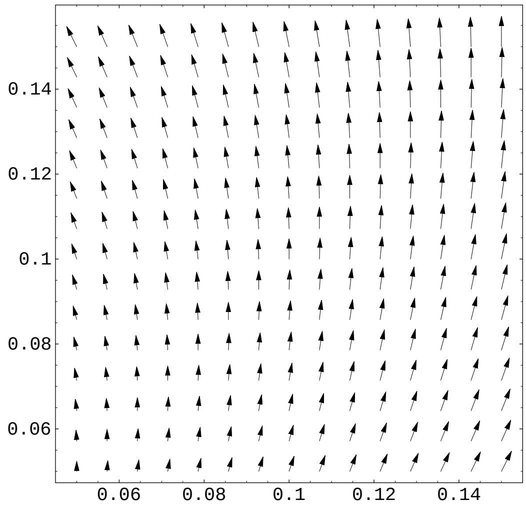
T.D. EM_1 : Applications des notions physiques vues dans le cours d'analyse vectorielle

Exercice 1 Analyse d'un champ de vecteur

On considère le champ de vecteur $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r})$, défini en coordonées cartésiennes par $u_x(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}(x-y)$, $u_y(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}(x+y)$ et $u_z(\overrightarrow{r}) = 0$. Celui-ci est représenté, dans le plan $x\text{O}y$ sur les figures



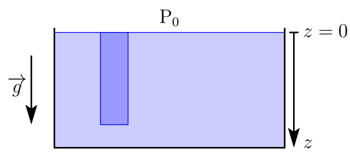


1. Avant tout calcul, que dire de la divergence et du rotationnel à l'origine ? Idem au point $(0,1\,;0,1)$?
2. Confirmer en calculant la divergence et le rotationnel.

Exercice 2 Un petit calcul

Montrer, en utilisant les coordonnées cartésiennes, que $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f(r)\overrightarrow{e_r}\right) = \overrightarrow{0}$ pour toute fonction f de la distance r au centre O du repère ($\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur radial des coordonnées sphériques).

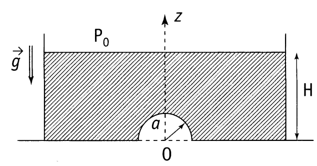
Exercice 3 Bases de la statique des fluides



On considère une piscine remplie d'eau, sur une hauteur H.

1. Pourquoi peut-on supposer le champ de pesanteur uniforme sur le volume de la piscine ?
2. On suppose l'eau de la piscine incompressible et de température uniforme. La masse volumique μ de l'eau est donc uniforme. En appliquant le principe de la statique des fluides, calculer la pression de la piscine en fonction de la profondeur z (prise positive). On appellera P_0 la pression atmosphérique.
3. Retrouver ce résultat en appliquant le principe de la statique à une colonne de fluide de hauteur z
4. À quelle profondeur la pression a-t-elle doublé ?
5. Sachant que le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau vaut $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 5.10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}$, jusqu'à quelle profondeur peut-on supposer l'eau incompressible ? Commenter.

Exercice 4 Forces de pression sur une demi-sphère



Un récipient cylindrique repose sur une surface horizontale. Le fond du récipient présente en son milieu une partie hémisphérique (centre O, rayon a).

On le remplit d'eau (masse volumique ρ_0) sur une hauteur H (H $> a$). On supposera que la pression de l'air enfermé dans la cavité est P_0, pression ambiante régnant au-dessus de l'eau.

Déterminer la force résultante exercée sur la demi-sphère par l'eau et l'air :

1. par un calcul direct ;
2. en traduisant l'équilibre de la colonne d'eau surmontant la partie hémisphérique ;
3. par l'intermédiaire du théorème d'Archimède.

Exercice 5 Modèles de l'atmosphère

L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29.10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}$. (O$z$) est un axe vertical ascendant dont l'origine est prise au niveau du sol. En un point M de l'atmosphère ayant pour altitude z, la pression a la valeur P, la température est T et la masse volumique de l'air a la valeur μ.

Au niveau du sol, la pression est $P_1 = 10^5$ Pa et la température $T_1 = 15\ °\text{C}$.

1. On suppose que la température de l'atmosphère est uniforme. Trouver la loi de variation de la pression avec l'altitude en faisant intervenir dans son expression la pression P_1 et une longueur caractéristique H_1 dont on donnera la valeur numérique.
2. Quelle est maintenant l'expression de $P(z)$ dans le cas où la température varie linéairement avec l'altitude suivant la loi $T = T_1 + \lambda z$ où $\lambda = -6{,}5\ °\text{C.km}^{-1}$ est le gradient thermique de l'atmosphère ?
3. Montrer que si z est "petit" (on précisera devant quoi), les deux résultats précédents sont concordants. Était-ce prévisible ?

4. Calculer numériquement la pression à 500 mètres d'altitude suivant les trois expressions précédentes de P et conclure.
5. Comment est modifié le calcul de la loi d'évolution de la pression dans l'atmosphère si g n'est plus uniforme ? Donner la nouvelle loi $P(z)$ en supposant l'atmosphère isotherme.

Exercice 6 Absorption de neutrons

Un milieu absorbant occupe la portion d'espace $0 \leqslant x \leqslant L$ (modélisation unidimensionnelle d'une barre d'absorption dans une centrale nucléaire, par exemple en Bore qui est dit "neutrophage"). On note $n(x,t)$ la densité de neutrons. Le coefficient d'absorption du milieu est A, tel que An neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume. Une source de neutron "éclaire" la face $x = 0$, de sorte que $n(x = 0,t) = n_0(t)$, fonction du temps que l'on suppose connue. On supposera de plus que dans tout le milieu, les neutrons se propagent dans le sens des x croissants, à la vitesse v.

1. En faisant un bilan de neutrons dans une tranche d'épaisseur dx, établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $n(x,t)$. Comment se généraliserait une telle équation en trois dimensions ?
2. Que vaut n en régime stationnaire, avec $n_0(t) = n_0$? En déduire $n(L)$. On introduira une longueur l définie à partir de A et v.
3. Montrer qu'en régime variable, la solution précédente dans laquelle on remplace n_0 par $n_0(t-x/v)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles, ainsi que de la condition limite en $x = 0$.

Exercice 7 Statique d'une sphère flottant sur un liquide

Une sphère pleine homogène de rayon R et de masse volumique ρ_s peut flotter dans un liquide de masse volumique ρ_l. On désigne par X la partie du diamètre vertical immergée et on pose $\alpha = \rho_s/\rho_l$.

1. Pour quelles valeurs de α y a-t-il immersion totale et demi-immersion ?
2. Montrer que, si la sphère est immobile, X satisfait à l'équation $b - X = c/X^2$. Trouver b et c en fonction de R et α.
3. La sphère est immobile pour X tel que $0 < X < 2R$. On l'enfonce légèrement et on l'abandonne. Quel est son mouvement ?

Exercice 8 Équation de diffusion de neutrons

On considère une assemblée de neutrons dans un milieu leur faisant subir de nombreux chocs, qui leur communiquent une vitesse d'agitation moyenne constante v. On appellera $n(M,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume en M. On notera $\overrightarrow{j}_n(M,t)$ le vecteur densité de flux de neutrons en M à l'instant t ; son flux à travers une surface quelconque est, par définition, égal au nombre de neutrons traversant cette surface par unité de temps. On note D le coefficient de diffusion caractéristique du milieu, tel que $\overrightarrow{j}_n(M,t) = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\, n(M,t)$ (loi de Fick).

1. Commenter physiquement la loi de Fick.
2. Le milieu absorbe les neutrons et on supposera que chaque neutron parcourt une distance λ_a jusqu'à son absorption. Exprimer le nombre C de réactions d'absorption par unité de temps et de volume en fonction de n, v et λ_a.
3. On suppose en outre que le milieu contient des sources de neutrons représentées par la création de $S(M,t)$ neutrons par unité de temps et de volume en M à l'instant t.
   a. Établir, par une méthode de bilan intégral, l'équation aux dérivées partielles générale vérifiée par $n(M,t)$ et faisant intervenir l'opérateur laplacien.
   b. On suppose que l'assemblée de neutrons présente une symétrie sphérique de sorte que $n(M,t) = n(r,t)$ où r est la coordonnée radiale. Que devient l'équation précédente ? On n'utilisera aucun formulaire d'analyse vectorielle…

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1
Pas d'indication !

Exercice 2
Pas d'indication !

Exercice 3
5. On trouve de l'ordre de quelques kilomètres.

Exercice 4
Pour pouvoir appliquer le théorème d'Archimède, on imaginera un corps solide en forme de demi-boule de « centre » O et de rayon a, complètement entouré d'eau…

Exercice 5
1. H_1 *vaut plusieurs kilomètres.*
4. On trouve des pressions autour de 94 kPa.
5. Utiliser la loi de gravitation de NEWTON.

Exercice 6
Cf démo sur l'équation de conservation de la charge vue en cours, à adapter. Bien traiter la dérivation des fonctions composées !

Exercice 7
3. On obtient des oscillations de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3gX(2R-X)}{4\alpha R^3}}$.

Exercice 8
L'équation aux dérivées partielles générale attendue est $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n + S - \dfrac{nv}{\lambda_a}$.