SYSTÈMES LINÉAIRES

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$\begin{cases} 2x + z = -1 & L_1 \\ x + \boxed{y} + z = 0 & L_2 \\ x - 2y + z = -6 & L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + z = -1 & L_1 \\ x + \boxed{y} + z = 0 & L_2 \\ \boxed{x} + z = -2 & (L_3+2L_2)/3 \to L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{-z} = 3 & L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ x + \boxed{y} + z = 0 & L_2 \\ \boxed{x} + z = -2 & L_3 \end{cases}$$

La réduite de Gauß na ni équation auxiliaire, ni inconnue auxilaire. Le système est donc de Cramer. Il admet pour unique solution :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}}$$

2. On a

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 & L_1 \\ 2x - y - z + 3t = 0 & L_2 \\ x - 2y + 2z - t = 1 & L_3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 0 & L_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 & L_1 \\ \boxed{3y} + 3z - t = 0 & -L_2+2L_1 \to L_2 \\ -3y + z - 2t = 1 & L_3 - L_1 \to L_3 \\ -4z + 3t = 0 & L_4 - 2L_1 \to L_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 & L_1 \\ \boxed{3y} + 3z - t = 0 & -L_2+2L_1 \to L_2 \\ \boxed{4z} - 3t = 1 & L_3 + L_2 \to L_3 \\ -4z + 3t = 0 & L_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 & L_1 \\ \boxed{3y} + 3z - t = 0 & -L_2+2L_1 \to L_2 \\ \boxed{4z} - 3t = 1 & L_3 + l_2 \to L_3 \\ 0 = 1 & L_4 + L_3 \to L_4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, donc

$$\boxed{\text{le système n'a pas de solution.}}$$

3. On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & L_1 \\ x & & & - & z & = & 2 & L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & 1 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & & & + & z & = & -2 & L_1-2L_3\to L_1 \\ \boxed{x} & & & - & z & = & 2 & L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & 1 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} & & & & 0 & = & 0 & L_1+L_2\to L_1 \\ \boxed{x} & & & - & z & = & 2 & L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & 1 & L_3 \end{array}\right.$$

La réduite de Gauß admet une équation auxiliaire du type $0=0$ et une inconnue auxilaire. On en déduit que le système admet une infinité de solutions que l'on peut paramétrer à l'aide de l'inconnue auxiliaire :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & \lambda & +2 \\ y & = & -2\lambda & -1 \\ z & = & \lambda & \end{array}\right. \qquad (\lambda\in\mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○]

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres u, v, w, t pour que le système suivant admette des solutions, puis le résoudre.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 6z & = & u \\ 3x & + & y & + & 3z & = & v \\ 6x & + & 6y & + & z & = & w \\ 7x & + & 9y & + & 7z & = & t \end{array}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 3y & + & 6z & = & u & L_1 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & v & L_2 \\ 6x & + & 6y & + & z & = & w & L_3 \\ 7x & + & 9y & + & 7z & = & t & L_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 3y & + & 6z & = & u & L_1 \\ & & \boxed{-8y} & - & 15z & = & v-3u & L_2-3L_1\to L_2 \\ & - & 12y & - & 35z & = & w-6u & L_3-6L_1\to L_3 \\ & - & 12y & - & 35z & = & t-7u & L_4-7L_1\to L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 3y & + & 6z & = & u & L_1 \\ & & \boxed{-8y} & - & 15z & = & v-3u & L_2 \\ & - & 12y & - & 35z & = & w-6u & -8L_3+12L_2\to L_3 \\ & - & 12y & - & 35z & = & t-7u & -8L_4+12L_2\to L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 3y & + & 6z & = & u & L_1 \\ & & \boxed{-8y} & - & 15z & = & v-3u & L_2 \\ & & & & \boxed{100z} & = & -8w+12u+12v & -8L_3+12L_2\to L_3 \\ & & & & 100z & = & -8t+20u+12v & -8L_4+12L_2\to L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 3y & + & 6z & = & u & L_1 \\ & & \boxed{-8y} & - & 15z & = & v-3u & L_2 \\ & & & & \boxed{100z} & = & -8w+12u+12v & L_3 \\ & & & & 0 & = & -8t+8w+8u & L_4-L_3\to L_4 \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas :

- Premier cas : $u+w-t\neq 0$ L'équation auxiliaire est contradictoire donc le système n'a pas de solution.

- <u>Second cas : $u+w-t=0$</u> L'équation auxiliaire n'est pas contradictoire et le système est alors de Cramer. Son unique solution est

$$\left(\frac{-17u+33v+3w}{100},\frac{3u-7v+3w}{20},\frac{3u+3v-2w}{25}\right)$$

◆ ***Exercice 3.*** [○]

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{c}=\dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ ab=c \\ \dfrac{a}{b^2c}=\mathrm{e}^{-6} \end{cases}$$

On pose $x=\ln(a)$, $y=\ln(b)$ et $z=\ln(c)$ et on passe au logarithme, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x \qquad - z = -1 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = -6 \end{cases}$$

Au signe près de z, ce système a été résolu dans un exercice précédent. On a trouvé

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ -z = -3 \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\begin{cases} a = \mathrm{e} \\ b = \mathrm{e}^2 \\ c = \mathrm{e}^3 \end{cases}}$$

◆ ***Exercice 4.*** [⋆]

Résoudre le système $(S)\begin{cases} (4-a)x + 4y - 4z = 0 \\ -x+(5-a)y - 3z = 0 \\ x + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$ en discutant suivant $a\in\mathbb{R}$.

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$(S) \iff \begin{cases} (4-a)x + 4y - 4z = 0 \\ -x+(5-a)y - 3z = 0 \\ \boxed{x} + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-24+7a)y + (16-a-a^2)z = 0 \\ (12-a)y - (8+a)z = 0 \\ \boxed{x} + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

À ce stade, on fait une pause et on envisage deux cas :

- <u>Premier cas : $a=12$:</u> On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} 60y - 140z = 0 \\ 20z = 0 \\ \boxed{x} + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3y - 7z = 0 \\ z = 0 \\ \boxed{x} + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{3y} - 7z = 0 \\ \boxed{z} = 0 \\ \boxed{x} + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Premier cas : $a \neq 12$: On peut alors continuer la méthode du pivot en choisissant $12 - a$ comme pivot, ce qui donne :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & (-24+7\lambda)y & + & (16-a-a^2)z & = & 0 \\ & & \boxed{(12-a)y} & - & (8+a)z & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 7y & - & (5+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (4a-4a^2+a^3)z & = & 0 \\ & & \boxed{(12-a)y} & - & (8+a)z & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 7y & - & (5+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

L'équation $4a - 4a^2 + a^3 = 0$ est équivalente à $a(a^2 - 4a + 4) = 0$, c'est-à-dire $a(a-2)^2 = 0$. On distingue alors deux sous-cas :

  - Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq 2$: Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & \boxed{(4a-4a^2+a^3)z} & = & 0 \\ & & \boxed{(12-a)y} & - & (8+a)z & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 7y & - & (5+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

  - Second cas : $a = 0$ ou $a = 2$: Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ & & \boxed{(12-a)y} & - & (8+a)z & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 7y & - & (5+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

  Le système admet alors une infinité de solutions que l'on peut paramétrer à l'aide de l'inconnue auxiliaire z, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{4-a^2}{12-a}\lambda \\ y & = & \dfrac{8+a}{12-a}\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

  Ainsi,

$$a = 0 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}\lambda \\ y & = & \frac{2}{3}\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad a = 2 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

♦ ***Exercice 5.*** [⋆]

Résoudre le système $(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & az & = & b \end{array}\right.$ en discutant suivant $a, b \in \mathbb{R}$.

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & az & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & \boxed{5y} & - & 5z & = & -5 \\ & & & & (a-3)z & = & b-2 \end{array}\right.$$

À ce stade, on fait une pause et on envisage deux cas :

- Premier cas : $a=3$ La méthode du pivot est alors terminée et l'on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} - 2y + 3z = 2 \\ \boxed{5y} - 5z = -5 \\ 0 = b-2 \end{cases}$$

On distingue alors à nouveau deux sous-cas :

  - Premier sous-cas : $b \neq 2$ La seule équation auxiliaire est contradictoire. Le système n'a donc pas de solution.
  - Second sous-cas : $b=2$ La seule équation auxiliaire est triviale. On a une inconnue auxiliaire (z) qui nous sert à paramétrer les solutions de $\mathscr{S}$:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- Second cas : $a \neq 3$ On peut alors poursuivre la méthode du pivot et écrire que

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} - 2y + 3z = 2 \\ \boxed{5y} - 5z = -5 \\ \boxed{(a-3)z} = b-2 \end{cases}$$

ce qui donne une unique solution (correspondant à $\lambda = (b-2)/(a-3)$ dans le second sous-cas du cas précédent) donnée par

$$\left(\frac{2-b}{a-3}, \frac{b-a+1}{a-3}, \frac{b-2}{a-3}\right).$$

♦ ***Exercice 6.*** [⋆]

Trouver le polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui satisfait les égalités $P(0)=0$ et $P(X)-P(X-1)=X^2$.

Retrouver ainsi l'expression de la deuxième somme d'Euler $E_2(n) = 1^2+2^2+\cdots+n^2$.

Recherchons $P(X)$ sous la forme $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$. Comme $P(0)=0$, on a $d=0$. Alors

$$\begin{aligned} & P(X)-P(X-1) = X^2 \\ \iff\ & aX^3+bX^2+cX-a(X-1)^3-b(X-1)^2-c(X-1) = X^2 \\ \iff\ & 3aX^2+(-3a+2b)X+a-b+c = X^2 \\ \iff\ & \begin{cases} \boxed{3a} = 1 \\ -3a + \boxed{2b} = 0 \\ a - b + \boxed{c} = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1/2 \\ c = 1/6 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X) = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X\cdot}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \big(P(k)-P(k-1)\big) = \text{ téléscopage } = P(n)-P(0) = P(n),$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E_2(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [∘] (Oxydation d'un sulfure de fer)

Équilibrer les coefficients stœchiométriques a, b, c, d de l'équation d'oxydation d'un sulfure de fer (qui produit un oxyde de fer et de l'anhydride sulfureux) :

$$a \ \mathrm{Fe_7S_8} \ + \ b \ \mathrm{O_2} \quad = \quad c \ \mathrm{Fe_3O_4} \ + \ d \ \mathrm{SO_2}$$

Il suffit d'écrire les différentes lois de conservation. La conservation du fer nous dit que $7a = 3c$; celle du souffre nous donne $8a = d$; celle de l'oxygène implique que $2b = 4c + 2d$. On a donc le système suivant que l'on résout à l'aide de la méthode du pivot (les pivots sont encadrés et indexés par ordre d'apparition)

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \boxed{7a}_3 & & & - & 3c & & & = 0 \\ 8a & & & & & & \boxed{-d}_2 & = 0 \\ & & \boxed{2b}_1 & - & 4c & - & 2d & = 0 \end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que l'on peut paramétrer à l'aide de l'inconnue auxiliaire c :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{3}{7}\lambda \\ b & = & \frac{38}{7}\lambda \\ c & = & \lambda \\ d & = & \frac{24}{7}\lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

En prenant $\lambda = 7$, on obtient la solution « optimale » (c'est-à-dire celle où les coefficients sont des entiers naturels les plus petits possible), ce qui donne

$$3 \ \mathrm{Fe_7S_8} \ + \ 38 \ \mathrm{O_2} \quad = \quad 7 \ \mathrm{Fe_3O_4} \ + \ 24 \ \mathrm{SO_2}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On se donne n points dans le plan. Existe-t-il un polygone dont ces n points soient les milieux ?

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points donnés dans le plan. Soient M_1 un point variable, M_2 son symétrique par rapport à A_1, M_3 le symétrique de M_2 par rapport à A_2, …, M_{n+1} le symétrique de M_n par rapport à A_n.

On souhaite que M_{n+1} soit égal à M_1.

Notons $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les affixes (dans le plan complexe) des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}$ celles des points $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$. On a

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1 & = & \frac{m_1 + m_2}{2} \\ a_2 & = & \frac{m_2 + m_3}{2} \\ & \vdots & \\ a_n & = & \frac{m_n + m_{n+1}}{2} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} \boxed{m_1} & + & m_2 & & & & & & = & 2a_1 \\ & & \boxed{m_2} & + & m_3 & & & & = & 2a_2 \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & \boxed{m_{n-1}} & + & m_n & = & 2a_{n-1} \\ & & & & & & & \boxed{m_n} \ + \ m_{n+1} & = & 2a_n \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1 & = & (-1)^n[\lambda - 2a_n + 2a_{n-1} \cdots + (-1)^{n-1}2a_2 + (-1)^n 2a_1] \\ m_2 & = & (-1)^{n-1}[\lambda - 2a_n + 2a_{n-1} \cdots + (-1)^{n-1}2a_2] \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad\qquad \iddots \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad \iddots \\ m_{n-1} & = & \lambda - 2a_n + 2a_{n-1} \\ m_n & = & -[\lambda - 2a_n] \\ m_{n+1} & = & \lambda \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas :

Premier cas : n est pair

Alors

$$\begin{aligned} m_1 = m_{n+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \lambda = \lambda - 2a_n + 2a_{n-1} - \cdots - 2a_2 + 2a_1 \\ & \Longleftrightarrow \quad (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (a_2 - a_1) = 0, \end{aligned}$$

donc

si n est pair, le polygone existe si, et seulement si, $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{0}$ et, dans ce cas, tout point M_1 convient pour commencer à construire le polygone (il y a donc une infinité de solutions).

Second cas : n est impair

Alors

$$\begin{aligned} m_1 = m_{n+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \lambda = -\lambda + 2a_n - 2a_{n-1} + \cdots + 2a_2 - 2a_1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (a_2 - a_1) \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{m_1 + m_{n+1}}{2}, \end{aligned}$$

donc

si n est impair, il existe un unique polygone répondant au problème et, pour le déterminer, on part d'un point M_1 quelconque et l'on trace les points $M_2, \ldots, M_{n+1}$; le « bon » point de départ est alors le milieu de M_1 et M_{n+1}.

♦ *Exercice 9.* [$\star$]

Iznotsobad dit à son fils aîné Izrilybad : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ! Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 112 ans. » À quel âge Iznotsobad est devenu papa ?

Notons p l'âge du père et f l'âge du fils.

Le père avait l'âge actuel du fils il y a $p-f$ années. À cette époque, l'âge du fils était donc $f-(p-f) = 2f - p$. La condition « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ! » se traduit donc par

$$p = 3(2f - p),$$

c'est-à-dire

$$2p - 3f = 0.$$

Le fils aura l'âge acturl du père dans $p - f$ années. À ce moment là, le père aura donc un âge égal à $p + (p - f) = 2p - f$. La condition « Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 112 ans. » se traduit donc par

$$p + (2p - f) = 112,$$

c'est-à-dire

$$3p - f = 112.$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \boxed{2p} & - & 3f & = & 0 \\ 3p & - & f & = & 112 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \boxed{2p} & - & 3f & = & 0 \\ & & \boxed{7f} & = & 224 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} f & = & 32 \\ p & = & 48 \end{array}\right.$$

ce qui signifie qu' Iznotsobad a 48 ans et Izrilybad est un grand bênet de 32 ans.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Iznotsobad est devenu papa à 16 ans !}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$] (Structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

Dans cet exercice, les systèmes considérés sont à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Rappelons que le *système homogène associé* au système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

est le système (S_h) obtenu en annulant le second membre de (S), c'est-à-dire

$$(S_h)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

On considère $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ une solution de (S), appelée *solution particulière. On suppose donc implicitement que* (S) *possède au moins une solution.*

Démontrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (S) est donné par

$$\mathscr{S} = \{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) : (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ est une solution de } (S_h)\}.$$

Autrement dit, toute solution de (S) est la somme d'une solution particulière et d'une solution du système homogène associé (et réciproquement).

On a

$$\begin{array}{cl} & (x_1, x_2, \ldots, x_p) \text{ solution de } (S) \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & a_{1,1}x_1^0 & + & a_{1,2}x_2^0 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p^0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & a_{2,1}x_1^0 & + & a_{2,2}x_2^0 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p^0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & a_{n,1}x_1^0 & + & a_{n,2}x_2^0 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p^0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}(x_1 - x_1^0) & + & a_{1,2}(x_2 - x_2^0) & + & \cdots & + & a_{1,p}(x_p - x_p^0) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1 - x_1^0) & + & a_{2,2}(x_2 - x_2^0) & + & \cdots & + & a_{2,p}(x_p - x_p^0) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x_1 - x_1^0) & + & a_{n,2}(x_2 - x_2^0) & + & \cdots & + & a_{n,p}(x_p - x_p^0) & = & 0 \end{array}\right. \\ \iff & (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_p - x_p^0) \text{ solution de } (S_h) \\ \iff & (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_p - x_p^0) = (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ où } (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ est une solution de } (S_h) \\ \iff & (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ où } (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ est une solution de } (S_h), \end{array}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{toute solution de } (S) \text{ est la somme d'une solution particulière et} \\ \text{d'une solution du système homogène associé (et réciproquement).} \end{array}}$$