DEVOIR SURVEILLÉ 8

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\text{encadrée}}$ *ou* <u>*soulignée*</u>*. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Caractérisation conditionnelle de l'indépendance mutuelle

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements (avec $n \geqslant 2$).

Démontrer que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour toute partie $J \subset [\![1;n]\!]$ telle que $P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \neq 0$ et tout indice $k \in [\![1;n]\!] \setminus J$, on a $P\big(A_k \mid \bigcap_{j\in J} A_j\big) = P(A_k)$.

EXERCICE 2

Action d'un projecteur sur un sous-espace

Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Démontrer que

$$p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p \qquad \text{et} \qquad p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p.$$

EXERCICE 3

Treillis sur les projections

Soient K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E. Sur $\mathscr{P}(E)$, on définit la relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall p, q \in \mathscr{P}(E), \qquad (p \preccurlyeq q) \Longleftrightarrow (pq = qp = p).$$

1. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
   Est-ce une relation d'ordre total ?
2. Démontrer que $\mathscr{P}(E)$ admet un plus grand élément et un plus petit élément (pour $\preccurlyeq$).
3. Soient $p, q \in \mathscr{P}(E)$ tels que $p \preccurlyeq q$. À l'aide de l'inclusion, comparer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$ puis $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$.
4. Soient $p, q \in \mathscr{P}(E)$ tels que $pq = qp$.
   a) On pose $r = p + q - pq$.
      $\alpha]$ Démontrer que r est un projecteur de E tel que

$$\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.$$

      $\beta]$ Démontrer que r est la borne supérieure de $\{p; q\}$ pour l'ordre $\preccurlyeq$.
   b) Déterminer la borne inférieure (pour $\preccurlyeq$) de $\{p; q\}$.

EXERCICE 4

Diagram chasing

Soit K un corps commutatif.

<u>Notations</u>

- Soient $E_0, E_1, \ldots, E_p$ des K-espaces vectoriels (avec $p \geqslant 2$) et des applications linéaires $f_1 \in \mathscr{L}(E_0, E_1), f_2 \in \mathscr{L}(E_1, E_2), \ldots, f_{p-1} \in \mathscr{L}(E_{p-2}, E_{p-1}), f_p \in \mathscr{L}(E_{p-1}, E_p)$. On dit que le diagramme en ligne

$$E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} E_{p-1} \xrightarrow{f_p} E_p$$

  est une suite exacte lorsque

$$\forall k \in [\![1; p-1]\!], \qquad \operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}.$$

- On considère quatre K-espaces vectoriels E_1, E_2, F_1, F_2 et quatre applications linéaires $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2), g \in \mathscr{L}(F_1, F_2), u \in \mathscr{L}(E_1, F_1), v \in \mathscr{L}(E_2, F_2)$. On dit que le diagramme en carré

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & E_2 \arrow[d, "v"] \\ F_1 \arrow[r, "g"] & F_2 \end{tikzcd}$$

  est commutatif lorsque

$$v \circ f = g \circ u.$$

1. <u>Lemme des cinq</u>

   On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_{-2} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & E_{-1} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t"'] & E_0 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "v"'] & E_2 \arrow[d, "w"'] \\
F_{-2} \arrow[r, "\alpha"] & F_{-1} \arrow[r, "\beta"] & F_0 \arrow[r, "\gamma"] & F_1 \arrow[r, "\delta"] & F_2
\end{tikzcd}$$

   dans lequel les dix ensembles sont des K-espaces vectoriels, les 13 applications sont linéaires, les deux lignes sont des suites exactes et les quatre carrés sont commutatifs.

   a) On suppose que s est surjective et que t et v sont injectives. Démontrer que u est injective.

   b) On suppose que t et v sont surjectives et que w est injective. Démontrer que u est surjective.

   c) En déduire le lemme des cinq : si s, t, v, w sont des isomorphismes, alors u est aussi un isomorphisme.

2. <u>Lemme des neuf</u>

   On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "u_1"'] & E_2 \arrow[d, "u_2"'] & E_3 \arrow[d, "u_3"'] \\
F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v_1"'] & F_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v_2"'] & F_3 \arrow[d, "v_3"'] \\
G_1 \arrow[r, "A"] & G_2 \arrow[r, "B"] & G_3
\end{tikzcd}$$

   dans lequel les neuf ensembles sont des K-espaces vectoriels, les 10 applications sont linéaires, les deux lignes et les trois colonnes sont des suites exactes et les deux carrés sont commutatifs.

   On suppose en outre que

$$u_2,\ u_3 \text{ et } A \text{ sont injectives.}$$

   a) Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels et deux applications linéaires $w \in \mathscr{L}(E, G)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Démontrer que

$$\big(\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists u \in \mathscr{L}(E, F), \quad w = v \circ u\big).$$

   Dans ce cas, démontrer que si v est injective, alors u est unique.

   b) Démontrer l'existence et l'unicité de $a \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $b \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$ telles que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u_1"'] & E_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "u_2"'] & E_3 \arrow[d, "u_3"'] \\
F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v_1"'] & F_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v_2"'] & F_3 \arrow[d, "v_3"'] \\
G_1 \arrow[r, "A"] & G_2 \arrow[r, "B"] & G_3
\end{tikzcd}$$

   tous les carrés soient commutatifs.

   c) Démontrer que la première ligne de ce diagramme est une suite exacte.

EXERCICE 5

Distance aléatoire

On considère n urnes (où $n \in \mathbb{N}^*$), notées $U_2, U_3, \ldots, U_{n+1}$, telles que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, l'urne U_k contienne k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard l'une des n urnes puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

Pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on note U_k l'événement « on a choisi l'urne U_k ». Pour tout $d \in [\![1; n]\!]$, on note D_d l'événement « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à d ».

On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n.$$

1. Étude du cas $d = n$

   Donner la valeur de $P(D_n)$.

2. Étude du cas $d = n-1$

   Dans cette question, on s'intéresse à l'événement D_{n-1} : « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à $n-1$ ».

   a) Démontrer que

   $$P(\overline{D_{n-1}} \mid U_{n+1}) = \frac{1}{\binom{n+1}{2}}.$$

   b) En déduire que

   $$P(D_{n-1}) = 1 - \frac{2}{n^2(n+1)}.$$

3. Étude du cas $d = 1$

   Dans cette question, on étudie l'événement D_1 : « les deux numéros obtenus sont consécutifs ».

   a) Démontrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on a

   $$P(D_1 \mid U_k) = \frac{k-1}{\binom{k}{2}}.$$

   b) En déduire que

   $$P(D_1) = \frac{2}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

   et donner un équivalent de $P(D_1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   c) On constate que les deux numéros obtenus sont consécutifs. Exprimer la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_2, en fonction de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$.

4. Étude du cas $d = 2$

   Dans cette question, on s'intéresse à l'événement D_2 : « la différence des deux numéros obtenus est au plus égale à 2 ».

   a) Démontrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on a

   $$P(D_2 \mid U_k) = \frac{4k-6}{k(k-1)}.$$

   b) Démontrer que

   $$P(D_2) = \frac{4}{n} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n(n+1)}$$

   et donner un équivalent de $P(D_2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Étude du cas général

Dans cette question, d est un entier quelconque de l'intervalle $[\![1;n]\!]$. On s'intéresse donc à l'événement D_d : « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à d ».

a) Démontrer que, pour tout $k \in [\![d+1;n+1]\!]$, on a

$$P(D_d \,|\, U_k) = \frac{d(2k-d-1)}{k(k-1)}.$$

b) En déduire que

$$P(D_d) = \frac{2d}{n} \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{d(d+1)}{n(n+1)}.$$

c) La différence moyenne entre les deux numéros obtenus, notée $E(D)$, est définie par

$$E(D) = n + 1 - \sum_{d=1}^{n} P(D_d).$$

Démontrer que

$$E(D) = \frac{n+5}{6}.$$

CORRECTION DU DS 8

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour toute partie $J \subset [\![1;n]\!]$ telle que $P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \neq 0$ et tout indice $k \in [\![1;n]\!] \setminus J$, on a $P\big(A_k \mid \bigcap_{j\in J} A_j\big) = P(A_k)$.

On procède par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
Soient $J \subset [\![1;n]\!]$ telle que $P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \neq 0$.
Si $[\![1;n]\!] \setminus J = \varnothing$, la propriété à démontrer est nécessairement vraie (elle est quantifiée par $\forall k \in \varnothing$).
Supposons dorénavant que $J \neq [\![1;n]\!]$ et considérons $k \in [\![1;n]\!] \setminus J$.
On a

$$\begin{aligned} P\big(A_k \mid \textstyle\bigcap_{j\in J} A_j\big) &= \frac{P\Big(A_k \cap \bigcap_{j\in J} A_j\Big)}{P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big)} \\ &= \frac{P(A_k)P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big)}{P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big)} && \text{A_k est indépendant de $\textstyle\bigcap_{j\in J} A_j$ car $A_1,\dots,A_n$ sont indépendants et $k \notin J$} \\ &= P(A_k). \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que pour toute partie $J \subset [\![1;n]\!]$ telle que $P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \neq 0$ et tout indice $k \in [\![1;n]\!] \setminus J$, on a $P\big(A_k \mid \bigcap_{j\in J} A_j\big) = P(A_k)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que pour toute partie $J \subset [\![1;n]\!]$ telle que $P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \neq 0$ et tout indice $k \in [\![1;n]\!] \setminus J$, on a $P\big(A_k \mid \bigcap_{j\in J} A_j\big) = P(A_k)$.
Pour démontrer l'indépendance mutuelle de $A_1, A_2, \dots, A_n$, il faut démontrer que, pour toute partie $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ incluse dans $[\![1;n]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a $P\big(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\big) = \prod_{1\leqslant k\leqslant r} P(A_{j_k})$.
Soit $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ une partie $[\![1;n]\!]$ (avec $r \geqslant 2$). On distingue deux cas :

▷ Premier cas : $P\big(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\big) \neq 0$
On peut alors utiliser la formule des probabilités composées, ce qui donne

$$P\big(\textstyle\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\big) = P(A_{j_1})P(A_{j_2} \mid A_{j_1})P(A_{j_3} \mid A_{j_1} \cap A_{j_2}) \cdots P\big(A_{j_r} \mid \bigcap_{1\leqslant k\leqslant r-1} A_{j_k}\big).$$

En appliquant l'hypothèse à chacune des probabilités conditionnelles du membre de droite, il vient

$$P\big(\textstyle\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\big) = \prod_{1\leqslant k\leqslant r} P(A_{j_k}),$$

ce qui correspond au résultat attendu.

▷ Second cas : $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\right) = 0$

Pour démontrer l'égalité $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\right) = \prod_{1\leqslant k\leqslant r} P(A_{j_k})$, il suffit alors de démontrer que l'une des probabilités $P(A_{j_k})$ est nulle.

Pour cela, on note m le plus grand entier de $[\![0; r-1]\!]$ tel que $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} A_{j_k}\right) \neq 0$. On est certain de l'existence de m car l'ensemble des entiers $p \in [\![0; r-1]\!]$ tels que $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant p} A_{j_k}\right) \neq 0$ est non vide (il contient 0 puisque $\bigcap_{1\leqslant k\leqslant 0} A_{j_k} = \Omega$) et il est majoré (par $r-1$ pardi).

La définition de m implique que $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m+1} A_{j_k}\right) = 0$ (ceci est aussi vrai lorsque $m = r-1$ puisque $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\right) = 0$). Par conséquent, la formule de conditionnement nous dit que

$$0 = P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m+1} A_{j_k}\right) = P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} A_{j_k}\right) P\left(A_{j_{m+1}} \mid \bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} A_{j_k}\right).$$

Comme $P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} A_{j_k}\right) \neq 0$, on a

$$P\left(A_{j_{m+1}} \mid \bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} A_{j_k}\right) = 0.$$

ce qui donne, d'après l'hypothèse,

$$P(A_{j_{m+1}}) = 0.$$

On a donc bien

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant r} A_{j_k}\right) = \prod_{1\leqslant k\leqslant r} P(A_{j_k})$$

puisque cette relation exprime l'égalité de deux quantités nulles.

Ainsi, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

En conclusion, on a démontré que

$A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour toute partie $J \subset [\![1; n]\!]$ telle que $P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \neq 0$ et tout indice $k \in [\![1; n]\!] \setminus J$, on a $P\left(A_k \mid \bigcap_{j\in J} A_j\right) = P(A_k)$.

EXERCICE 2

Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. *Démontrer que $p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$.*

   On procède par double inclusion.

   $\subset$ Soit $y \in p(F)$.

   Il est clair que $y \in \operatorname{Im} p$.

   Reste à démontrer que $y \in F + \operatorname{Ker} p$. Comme $y \in p(F)$, on sait qu'il existe $f \in E$ tel que $y = p(f)$. Mézalors, comme y est invariant (c'est un élément de $\operatorname{Im} p$), on a $p(y) = p(f)$ c'est-à-dire $p(y - f) = 0_E$, ce qui signifie que $y - f \in \operatorname{Ker} p$ ou encore que $y \in F + \operatorname{Ker} p$.

   Donc $y \in (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$.

   $\supset$ Soit $y \in (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$.

   Comme $y \in F + \operatorname{Ker} p$, on sait qu'il existe $f \in F$ et $k \in \operatorname{Ker} p$ tels que $y = f + k$. Dès lors, on a $p(y) = p(f)$. Or y est invariant par p (puisque $y \in \operatorname{Im} p$), donc $y = p(f)$. Cela démontre que $y \in p(F)$.

   En conclusion,

   $$\boxed{p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p.}$$

2. *Démontrer que $p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p$.*

   Comme p est un projecteur, on sait que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont en somme directe. Dès lors, il est clair que $F \cap \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont également en somme directe.

   Il reste donc à démontrer que $p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$. Là encore, on procède par double inclusion.

   $\subset$ Soit $x \in p^{-1}(F)$.

   On sait, d'après le cours, que la décomposition de x sur $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ est $x = p(x) + (x - p(x))$. Pour démontrer que $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$, il suffit donc de justifier que $p(x) \in F \cap \operatorname{Im} p$. Or on constate que c'est évident car $p(x)$ appartient toujours à $\operatorname{Im} p$ et il appartient ici à F puisque $x \in p^{-1}(F)$. On a donc bien $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$

   $\supset$ Soit $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$.

   Il existe $f \in F \cap \operatorname{Im} p$ et $k \in \operatorname{Ker} p$ tel que $x = f + k$. Dès lors, on a $p(x) = p(f)$. Or f est invariant par p (car $f \in \operatorname{Im} p$) donc $p(x) = f$. Comme $f \in F$, cela nous dit que $p(x) \in F$, c'est-à-dire $x \in p^{-1}(F)$.

   En conclusion,

   $$\boxed{p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p.}$$

EXERCICE 3

Soient K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E. Sur $\mathscr{P}(E)$, on définit la relation $\preccurlyeq$ par $\forall p,q \in \mathscr{P}(E)$, $(p \preccurlyeq q) \Longleftrightarrow (pq = qp = p)$.

1. *Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$. Est-ce une relation d'ordre total ?*

   ▷ Réflexivité : Pour tout $p \in \mathscr{P}(E)$, on a $p \preccurlyeq p$ car $p^2 = p$.

   ▷ Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathscr{P}(E)$ tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq r$. On a $pq = qp = p$ et $qr = rq = q$. Dès lors, $pr = (pq)r = p(qr) = pq = p$ et $rp = r(qp) = (rq)p = qp = p$, donc $pr = rp = p$ ce qui signifie que $p \preccurlyeq r$.

   ▷ Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathscr{P}(E)$ tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$. On a $pq = qp = p$ et $qp = pq = q$, donc $p = q$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\preccurlyeq \text{ est une relation d'ordre sur } \mathscr{P}(E).}$$

   Si E est réduit au vecteur nul, alors le seul projecteur de E est l'application nulle $\widetilde{0}$. Dans ce cas, la relation d'ordre est totale.
   Si E est une droite vectorielle alors $\mathscr{P}(E) = \{\widetilde{0}, \mathrm{Id}_E\}$. Dans ce cas, la relation d'ordre est totale car les éléments $\widetilde{0}$ et Id_E sont bien comparables (en effet $\widetilde{0} \preccurlyeq \mathrm{Id}_E$ puisque $\widetilde{0}\,\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E\,\widetilde{0} = \widetilde{0}$).
   Supposons dorénavant que E n'est pas réduit au vecteur nul et n'est pas non plus une droite vectorielle. On peut alors considérer un sous-espace non trivial F de E (c'est-à-dire $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$) ainsi qu'un supplémentaire G de F dans E, qui n'est pas non plus trivial. Notons p la projection sur F dans la direction de G et q la projection associée à p, c'est-à-dire la projection sur G dans la direction de F. Dès lors, on a $pq = qp = \widetilde{0}$ avec $p \neq \widetilde{0}$ et $q \neq \widetilde{0}$. Cela implique que p et q ne sont pas comparables pour $\preccurlyeq$. La relation d'ordre n'est donc pas totale.
   Pour résumer,

   $$\boxed{\preccurlyeq \text{ est totale sur } E \text{ si, et seulement si, } \dim(E) \leqslant 1.}$$

2. *Soient $p, q \in \mathscr{P}(E)$ tels que $p \preccurlyeq q$. Comparer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$ puis $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$.*

   Comme $p \preccurlyeq q$, on a $pq = p$. Dès lors, si $x \in \operatorname{Ker} q$, alors $q(x) = 0_E$ et donc $pq(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \operatorname{Ker} p$. On a donc $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$.

   Comme $p \preccurlyeq q$, on a $qp = p$. Dès lors, si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $qp(x) = p(x)$, c'est-à-dire $q(x) = x$ puisque x est invariant par p (c'est un vecteur de l'image de p). Mézalors, x est invariant par q, ce qui signifie que $x \in \operatorname{Im} q$. Donc $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } p \preccurlyeq q, \text{ alors } \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p \text{ et } \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q.}$$

3. *Démontrer que $\mathscr{P}(E)$ admet un plus grand élément et un plus petit élément (pour $\preccurlyeq$).*

   La question 2 dit qu'un projecteur est d'autant plus grand qu'il a un petit noyau et une grosse image et vice-versa. On conjecture donc que le plus petit projecteur est $\widetilde{0}$ et le plus grand est Id_E. Prouvons le. Pour $p \in \mathscr{P}(E)$, on a $\widetilde{0} \preccurlyeq p$ car $\widetilde{0}p = p\widetilde{0} = \widetilde{0}$ et $p \preccurlyeq \mathrm{Id}_E$ car $p\,\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E\,p = p$. Donc

   $$\boxed{\widetilde{0} \text{ est le plus petit élément de } \mathscr{P}(E) \text{ pour } \preccurlyeq \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ est le plus grand élément de } \mathscr{P}(E) \text{ pour } \preccurlyeq.}$$

4. *Soient $p, q \in \mathscr{P}(E)$ tels que $pq = qp$.*

   a) *On pose $r = p + q - pq$.*

      $\alpha]$ *Démontrer que r est un projecteur de E tel que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.*

      On a

      $$\begin{aligned} r^2 &= (p+q-qp)(p+q-qp) \\ &= p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp \\ &= p^2 + pq - p^2q + pq + q^2 - pq^2 - p^2q - pq^2 + p^2q^2 && \text{car } pq = qp \\ &= p + pq - pq + pq + q - pq - pq - pq + pq && \text{car } p^2 = p \text{ et } q^2 = q \\ &= p + q - pq \\ &= r, \end{aligned}$$

      donc

      $$\boxed{r \text{ est un projecteur.}}$$

Démontrons que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ par double inclusion.

- $\subset$ Soit $x \in \operatorname{Ker} r$. On a $p(x) + q(x) - pq(x) = 0_E$.
  En appliquant p à cette égalité, on obtient $p^2(x)+pq(x)-p^2q(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x) + pq(x) - pq(x) = 0_E$ ou encore $p(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p$.
  De même, en appliquant q, on obtient $x \in \operatorname{Ker} q$.
  Donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
  Cela démontre que $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
- $\supset$ Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. On a $p(x) = q(x) = 0_E$.
  Alors $r(x) = p(x) + q(x) - pq(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker} r$.
  Cela démontre que $\operatorname{Ker} r \supset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.}$$

Démontrons que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ par double inclusion.

- $\subset$ Soit $y \in \operatorname{Im} r$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x) + q(x) - pq(x)$, c'est-à-dire $y = p(x - q(x)) + q(x)$. Comme $p(x - q(x)) \in \operatorname{Im} p$ et $q(x) \in \operatorname{Im} q$, on en déduit que $y \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Donc $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
- $\supset$ Pour prouver que $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$, démontrons que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} r$ et $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$.
  Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. On peut alors écrire que $y = p^2(x) + qp(x) - qp^2(x) = r(p(x))$, donc $y \in \operatorname{Im} r$. Ainsi $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} r$.
  De même, on démontre que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$.
  Dès lors, $\operatorname{Im} r$ est un sous-espace qui contient à la fois $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$. Cela impose que $\operatorname{Im} r \supset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ puisque $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ est le plus petit sous-espace de E qui contient $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$.

En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.}$$

β] *Démontrer que r est la borne supérieure de $\{p; q\}$ pour l'ordre $\preccurlyeq$.*

On vient de voir que r est un projecteur.

On a $rp = p^2+qp-pqp = p^2+pq-p^2q = p+pq-pq = p$ et $pr = p^2+pq-p^2q = p+pq-pq = p$ donc $p \preccurlyeq r$.
De même, on a $q \preccurlyeq r$.
On sait ainsi que r est un majorant de p et de q.

Reste à démontrer que r est le plus petit des majorants de p et q.
Soit $t \in \mathscr{P}(E)$ tel que $p \preccurlyeq t$ et $q \preccurlyeq t$ de sorte que $pt = tp = p$ et $qt = tq = q$. On a $rt = pt + qt - pqt = p + q - pq = r$ et $tr = tp + tq - tpq = p + q - pq = r$, donc $r \preccurlyeq t$.
Donc r est bien le plus petit des majorants de p et q.

En conclusion,

$$\boxed{\{p; q\} \text{ admet } r \text{ comme borne supérieure.}}$$

b) *Déterminer la borne inférieure (pour $\preccurlyeq$) de $\{p; q\}$.*

<u>Analyse :</u>

Supposons que $s = \inf\{p; q\}$ existe. On a alors $s \preccurlyeq p$ et $s \preccurlyeq q$, c'est-à-dire $sp = ps = s$ et $sq = qs = s$. En composant l'égalité $sp = s = sq$ par q, on obtient $spq = sq$, d'où $spq = s$. De même, on obtient $pqs = s$. Cela signifie que $s \preccurlyeq pq$. Par conséquent, pq semble être un bon candidat pour être la borne inférieure de $\{p; q\}$.

<u>Synthèse :</u>

Tout d'abord, pq est bien un projecteur car $(pq)^2 = pqpq = p^2q^2 = pq$.

On a $pq \preccurlyeq p$ car $(pq)p = p^2q = pq$ et $p(pq) = p^2q = pq$.
De même, on a $pq \preccurlyeq q$.
On sait ainsi que pq est un minorant de p et de q.

Reste à démontrer que pq est le plus grand des minorants de p et q.
Soit $t \in \mathscr{P}(E)$ tel que $t \preccurlyeq p$ et $t \preccurlyeq q$ de sorte que $tp = pt = t$ et $tq = qt = t$. On a $t(pq) = (tp)q = tq = t$ et $(pq)t = p(qt) = pt = t$, donc $t \preccurlyeq pq$.
Donc pq est bien le plus grand des minorants de p et q.

En conclusion,

$$\boxed{\{p; q\} \text{ admet une borne inférieure donnée par } \inf\{p; q\} = pq.}$$

EXERCICE 4

Soit K un corps commutatif. Soient $E_0, E_1, \dots, E_p$ des K-espaces vectoriels (avec $p \geqslant 2$) et des applications linéaires $f_1 \in \mathscr{L}(E_0, E_1), f_2 \in \mathscr{L}(E_1, E_2), \dots, f_{p-1} \in \mathscr{L}(E_{p-2}, E_{p-1}), f_p \in \mathscr{L}(E_{p-1}, E_p)$. On dit que le diagramme en ligne $E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} E_{p-1} \xrightarrow{f_p} E_p$ est une suite exacte lorsque $\forall k \in [\![1; p-1]\!]$, $\operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}$. On considère quatre K-espaces vectoriels E_1, E_2, F_1, F_2 et quatre applications linéaires $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2), g \in \mathscr{L}(F_1, F_2), u \in \mathscr{L}(E_1, F_1), v \in \mathscr{L}(E_2, F_2)$. On dit que le diagramme en carré

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"] & E_2 \arrow[d, "v"'] \\ F_1 \arrow[r, "g"] & F_2 \end{tikzcd}$$

est commutatif lorsque $v \circ f = g \circ u$.

1. *On considère le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} E_{-2} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & E_{-1} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t"'] & E_0 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "v"'] & E_2 \arrow[d, "w"'] \\ F_{-2} \arrow[r, "\alpha"] & F_{-1} \arrow[r, "\beta"] & F_0 \arrow[r, "\gamma"] & F_1 \arrow[r, "\delta"] & F_2 \end{tikzcd}$$

dans lequel les dix ensembles sont des K-espaces vectoriels, les 13 applications sont linéaires, les deux lignes sont des suites exactes et les quatre carrés sont commutatifs.

a) *On suppose que s est surjective et que t et v sont injectives. Démontrer que u est injective.*

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a $u(x) = 0$.
Alors $(\gamma \circ u)(x) = 0$. Comme le troisième carré est commutatif, on en déduit que $(v \circ c)(x) = 0$.
Or v est injective, donc $c(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} c$.
Mézalors $x \in \operatorname{Im} b$ car la première ligne est exacte. Il existe donc $x_1 \in E_{-1}$ tel que $x = b(x_1)$.
Comme $x \in \operatorname{Ker} u$, il s'ensuit que $(u \circ b)(x_1) = 0$. Or le deuxième carré est commutatif, donc $(\beta \circ t)(x_1) = 0$, c'est-à-dire $t(x_1) \in \operatorname{Ker} \beta$.
Ainsi $t(x_1) \in \operatorname{Im} \alpha$ car la seconde ligne est exacte. Il existe donc $x_2 \in F_{-2}$ tel que $t(x_1) = \alpha(x_2)$.
Or s est surjective donc il existe $x_3 \in E_{-2}$ tel que $x_2 = s(x_3)$. Alors $t(x_1) = (\alpha \circ s)(x_3)$.
Comme le premier carré est commutatif, on en déduit que $t(x_1) = (t \circ a)(x_3)$.
Comme t est injective, il s'ensuit que $x_1 = a(x_3)$. On a donc $x_1 \in \operatorname{Im} a$.
L'exactitude de la première ligne nous dit alors que $x_1 \in \operatorname{Ker} b$, c'est-à-dire $b(x_1) = 0$.
Mais n'oublions pas que $x = b(x_1)$. Donc $x = 0$.
On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Donc u est injective.
En conclusion,

$$\boxed{\text{si } s \text{ est surjective et } t, v \text{ sont injectives, alors } u \text{ est injective.}}$$

b) *On suppose que t et v sont surjectives et que w est injective. Démontrer que u est surjective.*

Soit $x \in F_0$.
On a $\gamma(x) \in F_1$. Or v est surjective, donc il existe $x_1 \in E_1$ tel que $v(x_1) = \gamma(x)$.
On a $v(x_1) \in \operatorname{Im} \gamma$ ce qui donne $v(x_1) \in \operatorname{Ker} \delta$ puisque la seconde ligne est exacte.
On a donc $(\delta \circ v)(x_1) = 0$. Or le quatrième carré est commutaif, donc $(w \circ d)(x_1) = 0$.
Comme w est injective, on en déduit que $d(x_1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 \in \operatorname{Ker} d$.
Comme la première ligne est exacte, on a $x_1 \in \operatorname{Im} c$. Il existe donc $x_2 \in E_0$ tel que $x_1 = c(x_2)$.
En appliquant v à cette égalité, il vient $v(x_1) = (v \circ c)(x_2)$. Comme le troisième carré est commutatif, on en déduit que $v(x_1) = (\gamma \circ u)(x_2)$.
Mais n'oublions pas que $v(x_1) = \gamma(x)$. Donc $\gamma(x) = (\gamma \circ u)(x_2)$, c'est-à-dire $x - u(x_2) \in \operatorname{Ker} \gamma$.
L'exactitude de la seconde ligne nous dit que $x - u(x_2) \in \operatorname{Im} \beta$. Il existe donc $x_3 \in F_{-1}$ tel que $x - u(x_2) = \beta(x_3)$.
Or t est surjective, donc il existe $x_4 \in E_{-1}$ tel que $x_3 = t(x_4)$.
D'où $x - u(x_2) = (\beta \circ t)(x_4)$. Or le deuxième carré est commutatif, d'où $x - u(x_2) = (u \circ b)(x_4)$.
On a donc obtenu que $x = u(x_2 + b(x_4))$, ce qui démontre que $x \in \operatorname{Im} u$.
On a ainsi démontré que $\operatorname{Im} u = F_0$. Donc u est surjective.
En conclusion,

$$\boxed{\text{si } t, v \text{ sont surjectives et } w \text{ est injective, alors } u \text{ est surjective.}}$$

c) *En déduire le lemme des cinq : si s, t, v, w sont des isomorphismes, alors u est un isomorphisme.*

Si s, t, v, w sont des isomorphismes alors, d'une part, s est surjective et t, v sont injectives donc u est injective d'après a) et, d'autre part, t, v sont surjectives et w est injective, donc u est surjective d'après b). Dès lors, u est bien un isomorphisme. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } s, t, v, w \text{ sont des isomorphismes, alors } u \text{ est aussi un isomorphisme.}}$$

2. *Soit le diagramme*
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[d, "u_1"'] & E_2 \arrow[d, "u_2"'] & E_3 \arrow[d, "u_3"'] \\ F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v_1"'] & F_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v_2"'] & F_3 \arrow[d, "v_3"'] \\ G \arrow[r, "A"] & G_2 \arrow[r, "B"] & G_3 \end{tikzcd}$$
dans lequel les neuf ensembles sont des K-espaces vectoriels, les 10 applications sont linéaires, les deux lignes et les trois colonnes sont des suites exactes et les deux carrés sont commutatifs. On suppose en outre que u_2, u_3 et A sont injectives.

a) *Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels et deux applications linéaires $w \in \mathscr{L}(E, G)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Démontrer que $\left(\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v\right) \iff \left(\exists u \in \mathscr{L}(E, F),\ w = v \circ u\right)$. Dans ce cas, démontrer que si v est injective, alors u est unique.*

- $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $w = v \circ u$. Soit $y \in \operatorname{Im} w$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = w(x)$. Mézalors, $y = (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big) \in \operatorname{Im} v$. Donc $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.
- $\Rightarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.
  Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on a $w(e_i) \in \operatorname{Im} w$. Or $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$ donc, pour tout $i \in I$, il existe $f_i \in F$ tel que $w(e_i) = v(f_i)$.
  Notons u l'application linéaire de E vers F telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. L'application u existe bien puisqu'on la définit en donnant l'image d'une base.
  On a alors $v \circ u = w$ puisque ces deux applications coïncident sur la base $(e_i)_{i \in I}$ de E.

Donc

$$\boxed{\left(\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v\right) \iff \left(\exists u \in \mathscr{L}(E, F), \quad w = v \circ u\right).}$$

On fait maintenant l'hypothèse que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$ et que v est injective. Supposons qu'il existe deux applications linéaires $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que $w = v \circ u_1 = v \circ u_2$. Pour tout $x \in E$, on a donc $v(u_1(x)) = v(u_2(x))$, ce qui donne $u_1(x) = u_2(x)$ par injectivité de v. Cela démontre que $u_1 = u_2$. Par conséquent,

$$\boxed{\left(\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v \text{ et } v \text{ est injective}\right) \implies \left(\exists! u \in \mathscr{L}(E, F), \quad w = v \circ u\right).}$$

Remarque : La réciproque est également vraie (y réfléchir !).

b) *Démontrer l'existence et l'unicité de $a \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $b \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$ telles que les deux nouveaux carrés qui s'ajoutent au diagramme soient commutatifs.*

Pour démontrer l'existence et l'unicité de $a \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ telle que $\alpha \circ u_1 = u_2 \circ a$, la question précédente nous dit qu'il suffit de démontrer que $\operatorname{Im}(\alpha \circ u_1) \subset \operatorname{Im} u_2$ et que u_2 est injective.

Commençons par dire que l'injectivité de u_2 fait partie des hypothèses.

Il reste donc à démontrer que $\operatorname{Im}(\alpha \circ u_1) \subset \operatorname{Im} u_2$, c'est-à-dire $\operatorname{Im}(\alpha \circ u_1) \subset \operatorname{Ker} v_2$ puisque la deuxième colonne est exacte. Cela revient à prouver que $v_2 \circ \alpha \circ u_1 = \widetilde{0}$. Or le carré en bas à gauche est commutatif, donc $v_2 \circ \alpha = A \circ v_1$. On doit donc démontrer que $A \circ v_1 \circ u_1 = \widetilde{0}$. Comme la première colonne est exacte, on a $\operatorname{Im} u_1 = \operatorname{Ker} v_1$, ce qui implique que $v_1 \circ u_1 = \widetilde{0}$. A fortiori, on a bien $A \circ v_1 \circ u_1 = \widetilde{0}$. Donc $\operatorname{Im}(\alpha \circ u_1) \subset \operatorname{Im} u_2$.

Tout est réuni pour appliquer la question précédente. Cela justifie l'existence et l'unicité de $a \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ telle que le carré en haut à gauche du diagramme soit commutatif.

En procédant de même (en utilisant l'injectivité de u_3, l'exactitude de la troisième colonne, la commutativité du carré en bas à droite et l'exactitude de la deuxième colonne), on démontre qu'il existe une unique application linéaire $b \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$ telle que le carré en haut à droite du diagramme soit commutatif.

On en conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'existence et l'unicité de } a \in \mathscr{L}(E_1, E_2) \text{ et } b \in \mathscr{L}(E_2, E_3) \text{ telles} \\ \text{que les carrés en haut du diagramme soient commutatifs.}\end{array}}$$

c) *Démontrer que la première ligne de ce diagramme est une suite exacte.*

Nous devons démontrer que $\operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} b$. On procède évidemment par double inclusion.

- $\subset$ Pour démontrer que $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Ker} b$, il faut prouver que $b \circ a = \widetilde{0}$.
  Comme u_3 est injective, cela revient à démontrer que $u_3 \circ b \circ a = \widetilde{0}$.
  Comme les deux carrés en haut du diagramme sont commutatifs, on a $u_3 \circ b \circ a = \beta \circ \alpha \circ u_1$.
  Il suffit donc de démontrer que $\beta \circ \alpha \circ u_1 = \widetilde{0}$.
  Or, la deuxième ligne est exacte, donc $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$, ce qui implique que $\beta \circ \alpha = \widetilde{0}$. A fortiori, on a $\beta \circ \alpha \circ u_1 = \widetilde{0}$.
  On a donc démontré que $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Ker} b$.

- $\supset$ Démontrons réciproquement que $\operatorname{Im} a \supset \operatorname{Ker} b$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} b$. On a $b(x) = 0$.
  Alors $(u_3 \circ b)(x) = 0$. Comme le carré en haut à droite est commutatif, on en déduit que $(\beta \circ u_2)(x) = 0$, c'est-à-dire $u_2(x) \in \operatorname{Ker} \beta$.
  Dès lors, on a $u_2(x) \in \operatorname{Im} \alpha$ puisque la deuxième ligne est exacte. Il existe donc $x_1 \in F_1$ tel que $u_2(x) = \alpha(x_1)$.
  En appliquant v_2 à cette égalité, il vient $(v_2 \circ u_2)(x) = (v_2 \circ \alpha)(x_1)$. Comme la deuxième colonne est exacte, on a $\operatorname{Im} u_2 = \operatorname{Ker} v_2$, ce qui implique que $v_2 \circ u_2 = \widetilde{0}$. Par conséquent, on a $(v_2 \circ \alpha)(x_1) = 0$.
  La commutativité du carré en bas à gauche nous dit alors que $(A \circ v_1)(x_1) = 0$.
  Or A est injective, donc $v_1(x_1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 \in \operatorname{Ker} v_1$.
  Comme la première colonne est exacte, on a $\operatorname{Ker} v_1 = \operatorname{Im} u_1$. Par conséquent, on a $x_1 \in \operatorname{Im} u_1$. Cela signifie qu'il existe $x_2 \in E_1$ tel que $x_1 = u_1(x_2)$.
  En appliquant α à cette égalité, on obtient $\alpha(x_1) = (\alpha \circ u_1)(x_2)$. Or le carré en haut à gauche est commutatif, donc $\alpha \circ u_1 = u_2 \circ a$. D'où $\alpha(x_1) = (u_2 \circ a)(x_2)$.
  Mais on sait que $u_2(x) = \alpha(x_1)$, donc $u_2(x) = (u_2 \circ a)(x_2)$.
  Comme u_2 est injective, on en déduit que $x = a(x_2)$, ce qui démontre que $x \in \operatorname{Im} a$.
  On a donc démontré que $\operatorname{Im} a \supset \operatorname{Ker} b$.

On a donc $\operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} b$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{la première ligne du diagramme est une suite exacte.}}$$

EXERCICE 5

On considère n urnes (où $n \in \mathbb{N}^*$), notées $U_2, U_3, \ldots, U_{n+1}$, telles que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, l'urne U_k contienne k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard l'une des n urnes puis on tire simultanément deux boules dans cette urne. Pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on note U_k l'événement « on a choisi l'urne U_k ». Pour tout $d \in [\![1; n]\!]$, on note D_d l'événement « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à d ». On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

1. *Donner la valeur de $P(D_n)$.*

   Le plus petit numéro est 1 et le plus grand est $n+1$, donc la différence la plus grande qui puisse exister entre les numéros obtenus est n. Cela signifie que D_n est l'événement certain et donc que

   $$\boxed{P(D_n) = 1.}$$

2. *Dans cette question, on s'intéresse à l'événement D_{n-1} : « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à $n-1$ ».*

   a) *Démontrer que $P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_{n+1}) = \dfrac{1}{\binom{n+1}{2}}$.*

   L'événement $\overline{D_{n-1}}$ est défini par « la différence des deux numéros obtenus est supérieure ou égale à n ». Comme cette différence ne peut pas dépasser n, cela signifie qu'elle vaut précisément n, ce qui n'est possible que lorsque l'un des numéros vaut 1 et l'autre vaut $n+1$. Donc $\overline{D_{n-1}}$ est l'événement « les deux numéros obtenus sont 1 et $n+1$ ».

   Supposons l'événement U_{n+1} réalisé. On est alors dans la situation où l'on a tiré simultanément 2 boules parmi les $n+1$ boules de l'urne U_{n+1}. Dans cette expérience, l'univers (conditionnel), que l'on note encore U_{n+1}, est donc l'ensemble des paires de l'ensemble $[\![1; n+1]\!]$, ce qui donne

   $$\operatorname{card} U_{n+1} = \binom{n+1}{2}.$$

   D'après la question précédente, on a $\overline{D_{n-1}} \cap U_{n+1} = \big\{\{1; n+1\}\big\}$, donc

   $$\operatorname{card}\big(\overline{D_{n-1}} \cap U_{n+1}\big) = 1.$$

   Comme $P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_{n+1}) = \operatorname{card}\big(\overline{D_{n-1}} \cap U_{n+1}\big) / \operatorname{card} U_{n+1}$, on en déduit que

   $$\boxed{P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_{n+1}) = \frac{1}{\binom{n+1}{2}}.}$$

   b) *En déduire que $P(D_{n-1}) = 1 - \dfrac{2}{n^2(n+1)}$.*

   D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements $(U_2, U_3, \ldots, U_{n+1})$, on a

   $$P(\overline{D_{n-1}}) = \sum_{k=2}^{n+1} P(U_k) P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_k).$$

   Or

   $$P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_2) = \cdots = P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_n) = 0,$$

   puisqu'il est impossible d'obtenir les numéros 1 et $n+1$ dans une urne qui ne contient pas la boule $n+1$. Donc

   $$P(\overline{D_{n-1}}) = P(U_{n+1}) P(\overline{D_{n-1}} \,|\, U_{n+1}) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\binom{n+1}{2}} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{(n+1)n},$$

   ce qui donne, après passage au contraire,

   $$\boxed{P(D_{n-1}) = 1 - \frac{2}{n^2(n+1)}.}$$

3. *Dans cette question, on s'intéresse à l'événement D_1 : « les deux numéros obtenus sont consécutifs ».*

a) *Démontrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on a $P(D_1 \mid U_k) = \dfrac{k-1}{\binom{k}{2}}$.*

Supposons l'événement U_k réalisé. On est alors dans la situation où l'on a tiré simultanément 2 boules parmi les k boules de l'urne U_k. Dans cette expérience, l'univers (conditionnel), que l'on note encore U_k, est donc l'ensemble des paires de l'ensemble $[\![1; k]\!]$, ce qui donne

$$\operatorname{card} U_k = \binom{k}{2}.$$

Pour déterminer une paire de $D_1 \cap U_k$, c'est-à-dire une paire constituée de deux numéros consécutifs pris dans $[\![1; k]\!]$, on choisit une première boule parmi les $k-1$ premières boules, ce qui laisse $k-1$ choix, puis on choisit nécessairement le numéro qui suit (1 choix), donc

$$\operatorname{card}(D_1 \cap U_k) = k - 1.$$

Comme $P(D_1 \mid U_k) = \operatorname{card}(D_1 \cap U_k)/\operatorname{card} U_k$, on en déduit que

$$\boxed{P(D_1 \mid U_k) = \frac{k-1}{\binom{k}{2}}.}$$

b) *En déduire que $P(D_1) = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ et donner un équivalent de $P(D_1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements $(U_2, U_3, \ldots, U_{n+1})$, on a

$$P(D_1) = \sum_{k=2}^{n+1} P(U_k) P(D_1 \mid U_k).$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, il s'ensuit que

$$P(D_1) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} \times \frac{k-1}{\binom{k}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(D_1) = \frac{2}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}.}$$

On a

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n,$$

donc

$$\boxed{P(D_1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2 \ln n}{n}.}$$

c) *On constate que les deux numéros obtenus sont consécutifs. Exprimer la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_2, en fonction de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$.*

On nous demande de calculer $P(U_2 \mid D_1)$. On a

$$P(U_2 \mid D_1) = \frac{P(U_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = \frac{P(U_2)}{P(D_1)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}},$$

où la deuxième égalité découle du fait que U_2 implique D_1. Donc

$$\boxed{P(U_2 \mid D_1) = \frac{1}{2 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}}.}$$

4. *Dans cette question, on s'intéresse à l'événement D_2 : « la différence des deux numéros obtenus est au plus égale à 2 ».*

   a) *Démontrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on a $P(D_2 \,|\, U_k) = \dfrac{4k-6}{k(k-1)}$.*

   Soit $k \in [\![4; n+1]\!]$. Supposons l'événement U_k réalisé. On retrouve alors dans la situation où l'on a tiré simultanément 2 boules parmi les k boules de l'urne U_k. Dans cette expérience, l'univers (conditionnel), que l'on note encore U_k, est donc l'ensemble des paires de l'ensemble $[\![1; k]\!]$, ce qui donne

$$\operatorname{card} U_k = \binom{k}{2}.$$

   Pour déterminer une paire de $D_2 \cap U_k$, on envisage deux cas incompatibles : le cas où les numéros sont consécutifs et le cas où les numéros ont une différence égale à 2, c'est-à-dire

$$D_2 \cap U_k = (D_1 \cap U_k) \cup \big((D_2 \setminus D_1) \cap U_k\big).$$

   Dans le premier cas, on a déjà vu (à la question 3. a) que le nombre de paires constituées de deux numéros consécutifs pris dans $[\![1; k]\!]$ est égal à $k-1$, c'est-à-dire

$$\operatorname{card}(D_1 \cap U_k) = k - 1.$$

   Pour déterminer une paire de $(D_2 \setminus D_1) \cap U_k$, c'est-à-dire une paire constituée de deux numéros (pris dans $[\![1; k]\!]$) qui sont distants de 2, on choisit une première boule parmi les $k-2$ premières boules, ce qui laisse $k-2$ choix, puis on choisit nécessairement le numéro qui se trouve deux rangs après (1 choix), donc

$$\operatorname{card}\big((D_2 \setminus D_1) \cap U_k\big) = k - 2.$$

   Par suite, on a

$$\operatorname{card}(D_2 \cap U_k) = (k-1) + (k-2) = 2k - 3.$$

   Cela donne

$$P(D_2 \,|\, U_k) = \frac{\operatorname{card}(D_2 \cap U_k)}{\operatorname{card} U_k} = \frac{2k-3}{\dbinom{k}{2}} = \frac{2k-3}{\dfrac{k(k-1)}{2}},$$

   c'est-à-dire

$$P(D_2 \,|\, U_k) = \frac{4k-6}{k(k-1)}.$$

   L'urne U_2 ne contient que les boules 1 et 2 et l'urne U_3 ne contient que les boules 1, 2 et 3. Par conséquent, si l'on tire dans l'une de ces urnes, la différence des numéros ne peut excéder 2, ce qui implique que l'événement D_2 est quasi-certain dans ces deux cas. Donc $P(D_2 \,|\, U_2) = P(D_2 \,|\, U_3) = 1$. On constate que c'est ce que donne le résultat ci-dessus pour $k = 2$ et $k = 3$. Donc

$$\boxed{\forall k \in [\![2; n+1]\!], \qquad P(D_2 \,|\, U_k) = \frac{4k-6}{k(k-1)}.}$$

   b) *Démontrer que $P(D_2) = \dfrac{4}{n} \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n(n+1)}$ et donner un équivalent de $P(D_2)$.*

   D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements $(U_2, U_3, \ldots, U_{n+1})$, on a

$$P(D_2) = \sum_{k=2}^{n+1} P(U_k) P(D_2 \,|\, U_k).$$

   En tenant compte du résultat de la question a), il s'ensuit que

$$P(D_2) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} \times \frac{4k-6}{k(k-1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{4k-6}{k(k-1)}.$$

   Or, par décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{4X-6}{X(X-1)} = \frac{6}{X} - \frac{2}{X-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{4k-6}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{6}{k} - \frac{2}{k-1}\right) \\
&= \left.\begin{aligned} &\frac{6}{2} - \frac{2}{1} \\ &+ \frac{6}{3} - \frac{2}{2} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{6}{n} - \frac{2}{n-1} \\ &+ \frac{6}{n+1} - \frac{2}{n} \end{aligned}\right\} \text{téléscopage} \\
&= -\frac{2}{1} + 4\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n+1} \\
&= 4\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{P(D_2) = \frac{4}{n}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n(n+1)}.}$$

On a

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \frac{3}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n,$$

d'où

$$\frac{4}{n}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\ln n}{n}.$$

Or

$$\frac{6}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{n^2} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{4\ln n}{n}\right),$$

donc

$$\frac{4}{n}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{6}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\ln n}{n},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(D_2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\ln n}{n}.}$$

5. *Dans cette question, d est un entier quelconque de l'intervalle $[\![1;n]\!]$. On s'intéresse à l'événement D_d : « la différence des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à d ».*

   a) *Démontrer que, pour tout $k \in [\![d+1;n+1]\!]$, on a $P(D_d \,|\, U_k) = \dfrac{d(2k-d-1)}{k(k-1)}\cdot$*

   Soit $k \in [\![d+1;n+1]\!]$. Supposons l'événement U_k réalisé. On retrouve à nouveau que l'univers (conditionnel), que l'on note encore U_k, est l'ensemble des paires de l'ensemble $[\![1;k]\!]$, ce qui donne

   $$\operatorname{card} U_k = \binom{k}{2}.$$

   Pour déterminer une paire de $D_d \cap U_k$, on envisage d cas incompatibles : le cas où les numéros sont consécutifs, le cas où les numéros ont une différence égale à 2, le cas où les numéros ont une différence égale à 3, ..., le cas où les numéros ont une différence égale à d, c'est-à-dire

   $$D_d \cap U_k = (D_1 \cap U_k) \cup \big((D_2 \setminus D_1) \cap U_k\big) \cup \cdots \cup \big((D_d \setminus D_{d-1}) \cap U_k\big).$$

   Soit $i \in [\![1;d]\!]$. Pour déterminer une paire de $(D_i \setminus D_{i-1}) \cap U_k$ (avec $D_0 = \varnothing$), c'est-à-dire une paire constituée de deux numéros (pris dans $[\![1;k]\!]$) qui sont distants de i, on choisit une première boule parmi les $k-i$ premières boules, ce qui laisse $k-i$ choix, puis on choisit nécessairement le numéro qui se trouve i rangs après (1 choix), donc

   $$\forall i \in [\![2;d]\!], \qquad \operatorname{card}\big((D_i \setminus D_{i-1}) \cap U_k\big) = k - i.$$

Par suite, on a

$$\operatorname{card}(D_d \cap U_k) = \sum_{i=1}^{d} (k-i) = dk - \frac{d(d+1)}{2},$$

où l'on a utilisé l'expression donnant la première somme d'Euler.
Cela donne

$$P(D_d \,|\, U_k) = \frac{\operatorname{card}(D_d \cap U_k)}{\operatorname{card} U_k} = \frac{dk - \dfrac{d(d+1)}{2}}{\dbinom{k}{2}} = \frac{\dfrac{d(2k-d-1)}{2}}{\dfrac{k(k-1)}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(D_d \,|\, U_k) = \frac{d(2k-d-1)}{k(k-1)}}\cdot$$

b) *En déduire que* $P(D_d) = \dfrac{2d}{n} \displaystyle\sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{d(d+1)}{n(n+1)}\cdot$

D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements $(U_2, U_3, \ldots, U_{n+1})$, on a

$$P(D_d) = \sum_{k=2}^{n+1} P(U_k) P(D_d \,|\, U_k).$$

Or

$$P(D_d \,|\, U_2) = P(D_d \,|\, U_3) = \cdots = P(D_d \,|\, U_d) = 1$$

car la différence maximale que l'on peut obtenir entre deux boules des urnes $U_2, U_3, \ldots, U_d$ est égale à $d-1$. Donc, en tenant compte du résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P(D_d) &= \sum_{k=2}^{d} P(U_k) P(D_d \,|\, U_k) + \sum_{k=d+1}^{n+1} P(U_k) P(D_d \,|\, U_k) \\
&= \sum_{k=2}^{d} \frac{1}{n} \times 1 + \sum_{k=d+1}^{n+1} \frac{1}{n} \times \frac{d(2k-d-1)}{k(k-1)} \\
&= \frac{d-1}{n} + \frac{d}{n} \sum_{k=d+1}^{n+1} \frac{2k-d-1}{k(k-1)}\cdot
\end{aligned}$$

Or la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{2X-d-1}{X(X-1)}$ donne

$$\frac{2X-d-1}{X(X-1)} = \frac{d+1}{X} - \frac{d-1}{X-1}\cdot$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
P(D_d) &= \frac{d-1}{n} + \frac{d}{n} \sum_{k=d+1}^{n+1} \left(\frac{d+1}{k} - \frac{d-1}{k-1} \right) \\
&= \text{téléscopage} \\
&= \frac{d-1}{n} + \frac{d}{n} \left(-\frac{d-1}{d} + 2 \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{d+1}{n+1} \right) \\
&= \frac{d-1}{n} - \frac{d-1}{n} + \frac{2d}{n} \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{d(d+1)}{n(n+1)},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{P(D_d) = \frac{2d}{n} \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{d(d+1)}{n(n+1)}}\cdot$$

c) *La différence moyenne entre les deux numéros obtenus, notée $E(D)$, est définie par la formule $E(D) = n+1-\sum_{d=1}^{n} P(D_d)$. Démontrer que $E(D) = \dfrac{n+5}{6}\cdot$*

On a

$$\begin{aligned}
E(D) &= n+1-\sum_{d=1}^{n} P(D_d) \\
&= n+1-\sum_{d=1}^{n}\left(\frac{2d}{n}\sum_{k=d+1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{d(d+1)}{n(n+1)}\right) \\
&= n+1-\frac{2}{n}\sum_{d=1}^{n}\sum_{k=d+1}^{n}\frac{d}{k}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{d=1}^{n} d(d+1) \\
&= n+1-\frac{2}{n}\sum_{1\leqslant d<k\leqslant n}\frac{d}{k}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{d=1}^{n} d^2-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{d=1}^{n} d \\
&= n+1-\frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{d=1}^{k-1}\frac{d}{k}-\frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n+1-\frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{d=1}^{k-1} d\right)-\frac{2n+1}{6}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{2n+1}{3}-\frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\frac{(k-1)k}{2} \\
&= \frac{2n+1}{3}-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(k-1) \\
&= \frac{2n+1}{3}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{2n+1}{3}-\frac{1}{n}\frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{2n+1}{3}-\frac{n-1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{E(D) = \frac{n+5}{6}\cdot}$$