Lycée Louis-le-Grand — MPSI 2

Programmes de colles 2019–2020

D'après Monsieur Merle, compilé par Quentin De Muynck

36 semaines de mathématiques, dont 14 à distance...

Table des matières

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 1 : du lundi 23 septembre au vendredi 27.

Liste des questions de cours

1°) Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, comment déduit-on le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f ? Démontrez-le.

2°) Montrer à l'aide des complexes que $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

3°) Résoudre l'équation $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

4°) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

5°) Tracer les graphes des fonctions tan et arctan.

6°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.

7°) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

8°) Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, déterminer la dérivée de $t \longmapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$.

9°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

10°) Montrer que $\frac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

11°) Tracer le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$, en distinguant les cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

12°) Présenter l'étude de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$.

13°) Comment le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit-il du graphe de f ? Le démontrer.

14°) Graphes des fontions sh, ch et th.

15°) Donner (en justifiant) une expression logarithmique de $\text{argch}(x)$.

Les thèmes de la semaine

Il s'agit d'une première approche de la dérivation et de l'intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet les théorèmes nécessaires et aucune maîtrise théorique n'est attendue des élèves à ce sujet. On définit et l'on étudie les fonctions usuelles.
Concernant l'intégration, les formules de changement de variable et d'intégration par parties seront seulement au programme en semaine 2.

1 Généralités sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Domaine de définition, graphe d'une fonction.

Image, antécédent.
Définition de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité (pour des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$). Application réciproque d'une bijection.
Construction du graphe de l'application réciproque par symétrie par rapport à la première diagonale.

Parité, imparité, périodicité.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Fonctions monotones, fonctions strictement monotones.

Combinaison linéaires de fonctions, produit et quotient de fonctions.
Composition.

2 Applications polynomiales

Les définitions et propriétés de ce paragraphe sont admises pour le moment. Aucune maîtrise théorique des polynômes n'est attendue à ce stade de l'année.
Définition des polynômes à coefficients réels (vus comme des applications polynomiales pour le moment), degré, racine.
Degré d'un produit.
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de P, il existe un polynôme Q tel que
$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.

3 Trigonométrie

3.1 Les fonctions circulaires

Remarque. Concernant l'usage des complexes, on s'appuie pour le moment sur les connaissances de Terminale des élèves. Les complexes seront développés en cours ultérieurement.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).
On pose $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$, c'est-à-dire :

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition des fonctions tangente et cotangente.

Dans un triangle rectangle, formules donnant les cosinus, sinus et tangente d'un angle en fonction des longueurs des côtés.

Graphes des fonctions cos, sin et tan.

3.2 Formulaire de trigonométrie

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formules de symétries : Passage de θ à $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$, $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$.
Visualisation de ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :
$\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\tan(a + b)$, $\tan(a - b)$.

Formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Premières formules de linéarisation :
$\cos^2 a$, $\sin^2 a$, $2\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $2\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Formules de factorisation : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
et formules analogues pour $\cos p - \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.
Ces formules sont hors programme, mais l'étudiant doit savoir les retrouver.

Formules (hors programme) : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a
$\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

3.3 Equations trigonométriques

$\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v$ modulo 2π.
$\sin u = \sin v \iff (u \equiv v$ modulo $2\pi) \vee (u \equiv \pi - v$ modulo $2\pi)$.
$\tan u = \tan v \iff u \equiv v$ modulo π.
Écriture de $A\cos x + B\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

4 Dérivation

4.1 Définition

Equation de la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1.

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, dérivée de f en $x_0 \in I$. Equation de la tangente.

Remarque. Les aspects théoriques concernant les notions de limite et de dérivée seront abordés ultérieurement. L'objectif de ce chapitre est essentiellement de mettre en place des techniques de calculs.

Applications dérivables sur I, de classe D^1 ou C^1 sur I.
Applications n fois dérivables, de classe D^n ou C^n, de classe C^∞.

4.2 Formulaire de dérivation

Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
Dérivée d'une bijection réciproque.

Dérivées des fonctions trigonométriques.

$\dfrac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$,
$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$,
$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

4.3 Dérivation et monotonie

Théorème admis pour le moment : Soit f dérivable sur un intervalle I. f est constante (resp : croissante, décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$ (resp : $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$).
Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

5 Intégration

Définition informelle de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ lorque f est continue, en tant qu'aire algébrique.
Propriétés de l'intégrale (admises) : linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.
Si $f\ :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive avec $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

6 Primitivation

Primitive d'une application continue, unicité à une constante additive près.
Théorème fondamental de l'analyse (admis) : Si $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
Application au calcul d'intégral. Notation $\int f(t)dt$ pour désigner une primitive à une constante près.

7 Fonctions Logarithmes et puissances

7.1 Quelques théorèmes d'analyse

On admet pour le moment le théorème de la limite monotone, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Definition puis caractérisation d'un C^n difféomorphime entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.

7.2 Les fonctions $\ln$ et exp

Définition : Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. Propriétés de la fonction logarithme.
On note exp le C^∞-difféomorphisme réciproque, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Propriétés de $x \longmapsto e^x$.
Graphe de ln et exp.

7.3 Fonctions puissances

Graphes de $x \longmapsto ax^n$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, graphe de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

8 Etude d'une fonction

Plan d'étude, recherche d'asymptotes obliques, de branches paraboliques.

9 Déformations du graphe

— Le graphe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
— Le graphe de $x \longmapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
— Le graphe de $x \longmapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
— Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$
— Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par l'affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a.

10 D'autres fonctions usuelles

Les fonctions ch, sh et th. Propriétés et graphes.
Formules : $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$.

Définitions de arccos, arcsin et arctan. Propriétés, dérivées, graphes.

Définitions (hors programme) de argch, argsh et argth. Propriétés, dérivées, graphes. Expressions logarithmiques.

Prévision pour la semaine prochaine :

Changement de variable, intégration par parties.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 2 : du lundi 30 septembre au vendredi 4 octobre.

Liste des questions de cours

1°) Montrer à l'aide des complexes que $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

2°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.

3°) Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, déterminer la dérivée de $t \longmapsto \displaystyle\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$.

4°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

5°) Tracer le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$, en distinguant les cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

6°) Comment le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit-il du graphe de f ? Le démontrer.

7°) Graphes des fontions argsh, argch et argth.

8°) Donner (en justifiant) une expression logarithmique de $\mathrm{argch}(x)$.

9°) Enoncer et démonter le théorème de changement de variable dans une intégrale.

10°) Enoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties.

Les thèmes de la semaine

On reprend le programme de la première semaine en ajoutant seulement :

Calculs d'intégrales

Théorème de changement de variable dans une intégrale.
Intégrale d'une application paire (resp : impaire) sur un intervalle centré en 0.
Si f est continue et T-périodique, $\displaystyle\int_t^{T+t} f(t)\,dt$ ne dépend pas de t.

Intégration par parties.

Prévision pour la semaine prochaine :

Théorie des ensembles et logique.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 3 : du lundi 7 octobre au vendredi 11.

Liste des questions de cours

1°) Présenter le paradoxe de Russell.

2°) Montrer que $A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$.

3°) Donner une définition du couple (a, b). Montrer que $(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$.

4°) Expliquer la différence entre les formules
"$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x, y)$" et "$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y)$".

5°) A l'aide d'une table de vérité, démontrer l'une des lois de Morgan.

6°) Proposer plusieurs méthodes pour montrer que $(A \wedge B) \Longrightarrow C$ est logiquement équivalente à $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$.

7°) Traduire la non-convergence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vers 0 :
$\neg[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geq N \Longrightarrow |x_n| \leq \varepsilon] \Longleftrightarrow \cdots$.

8°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.

Les thèmes de la semaine

1 Les ensembles

1.1 Vocabulaire

Appartenance et inclusion. Parties d'un ensemble.
Prédicat, différentes manières de définir un ensemble.
Paradoxe de Russell.
Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$.

1.2 Opérateurs sur les ensembles

Intersection, réunion, union disjointe, différence ensembliste, différence symétrique, complémentaire.
Propriétés d'associativité et de distributivité relativement à l'union et l'intersection.
Produit cartésien de n ensembles.

2 Récurrence

Définition de $\mathbb{N}$ par les axiomes de Peano.
Principe de récurrence. Récurrence finie ascendante ou descendante, récurrence forte, récurrence double.

3 Formules propositionnelles

Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.
Définition inductive des formules propositionnelles.
Valeurs de vérité d'une formule propositionnelle, tables de vérité.
Condition nécessaire, condition suffisante.
Exemples de tautologies : associativité et distributivité relativement à $\wedge$ et $\vee$, lois d'absorption, loi de Morgan, contraposition, modus ponens.
Propositions logiquement équivalentes.
Négation d'une proposition, éventuellement avec quantificateurs.
Propriétés sur le complémentaire d'une union ou d'une intersection.

Prévision pour la semaine prochaine :

Relations binaires, relations d'ordre et d'équivalence.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 4 : du lundi 14 octobre au vendredi 18.

Liste des questions de cours

1°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.

2°) Si $F \subset \mathcal{P}(E)$, déterminer les bornes supérieures et inférieures de F, pour la relation d'inclusion.

3°) Montrer qu'un ensemble ordonné fini et non vide possède au moins un élément minimal.

4°) Montrer que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum.

5°) Énoncer et démontrer la propriété définissant la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

6°) Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

7°) Donner des exemples de relations d'équivalence.

8°) Montrer que si R est une relation d'équivalence sur E alors E/R est une partition de E.

9°) Montrer que si $\mathcal{P}$ est une partition de E, il y a unicité de la relation d'équivalence dont l'ensemble quotient est $\mathcal{P}$ (on ne demande pas de prouver l'existence).

10°) Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Les thèmes de la semaine

1 Ensembles et formules propositionnelles

Révision du programme de la semaine précédente.

2 Relations binaires

2.1 Définition

Relations binaires réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

2.2 Relations d'ordre

Les notions de bornes supérieures et de bornes inférieures ont été définies, mais aucune connaissance technique à leur sujet n'est attendue. Elles seront approfondies plus tard.

Eléments comparables.
Ordre partiel, ordre total.
Exemples : l'inclusion, la divisibilité dans $\mathbb{N}$, l'ordre lexicographique.

Majorants et minorants.
partie majorée, minorée, bornée.

Minimum et maximum d'une partie.
Un ensemble ordonné dont toute partie non vide possède un minimum est dit bien ordonné.
Élément minimal, élément maximal d'une partie.

2.3 L'ordre naturel des entiers

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

Principe de la "descente infinie" : pour montrer que "$\forall n \in \mathbb{N},\ R(n)$", une alternative à la récurrence est de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\neg[R(n)]$. Ainsi, l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} / \neg R(n)\}$ possède un minimum n_0. On aboutit parfois à une contradiction en construisant un entier vérifiant $m < n_0$ et $m \in F$.

2.4 Relations d'équivalence

Exemple canonique : Soit E et F deux ensembles et $f\ :\ E \longrightarrow F$ une application.
En posant $[x\ R\ y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)]$, on définit une relation d'équivalence R sur E.

Définition. Classes d'équivalence, ensemble quotient E/R.
pour tout $x, y \in E$, $xRy \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

Définition. Une partition $\mathcal{P}$ de E est une partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que :
- pour tout $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$,
- pour tout $A \in \mathcal{P}$, $A \neq \emptyset$,
- et $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = E$.

Théorème. Si R est une relation d'équivalence sur E, son ensemble quotient E/R est une partition de E. Réciproquement, si $\mathcal{P}$ est une partition de E, il existe une unique relation d'équivalence R sur E telle que $\mathcal{P} = E/R$: Elle est définie par $\forall x, y \in E,\ \ [xRy \Longleftrightarrow (\exists C \in \mathcal{P},\ \ x, y \in C)]$.

3 Quelques techniques et conseils de démonstration

La structure d'une démonstration se construit avant tout en fonction de la structure de la propriété à démontrer.

Démontrer une disjonction.
Raisonner par disjonction de cas.
Résoudre une équation.

Démontrer une implication, contraposée, raisonnement par l'absurde.
Démontrer une équivalence, une série d'équivalences.

Pour montrer que $[\forall x \in E,\ \ P(x)]$, le plus souvent, on prend x quelconque dans E,
en écrivant "soit $x \in E$", puis on démontre $P(x)$.

Pour montrer que $\neg(\forall x \in E,\ \ P(x))$, on peut rechercher un x dans E tel que $P(x)$ est fausse. Dans ce contexte, x est appelé un contre-exemple du prédicat $P(x)$.

Démonstration d'une propriété d'existence et unicité.
Raisonnement par analyse-synthèse.

Démonstrations par récurrence., récurrences double, forte, finie.

Prévision pour la semaine prochaine : Arithmétique sur $\mathbb{Z}$.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 5 : du lundi 4 novembre au vendredi 8.

Liste des questions de cours

1°) Présenter la construction de $\mathbb{Z}$ en tant qu'ensemble quotient de $\mathbb{N}^2$ par une certaine relation d'équivalence. Expliquer comment on définit l'addition.

2°) Soit D une partie de $\mathbb{R}$ possédant au moins 2 éléments. Après avoir expliqué rapidement pourquoi l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ est un anneau, montrez qu'il n'est pas intègre.

3°) Décrire les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, en justifiant.

4°) Lorsque B est une partie de $\mathbb{Z}$, préciser quels sont les éléments de $Gr(B)$, le groupe engendré par B, en justifiant.

5°) Montrer que p est premier ssi p est premier avec tout nombre premier contenu dans $[\![2, \sqrt{p}]\!]$. Présenter le crible d'Ératosthène (sans justifications supplémentaires).

6°) Montrer que $\mathbb{P}$ est de cardinal infini.

7°) Donner la définition du PGCD $a \wedge b$ de deux entiers relatifs, puis montrer que $a \wedge b = \inf_{|}\{|a|, |b|\}$.

8°) Démontrer l'associativité du PGCD et la distributivité de la multiplication par rapport au PGCD.

9°) Démontrer les théorèmes de Bézout et de Gauss.

10°) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $|ab| = (a \wedge b)(a \vee b)$.

11°) Enoncer et démontrer le théorème fondamental de l'arithmétique.

12°) Présenter l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD et pour le calcul de coefficients de Bézout de deux entiers premiers entre eux.

13°) Résoudre l'équation de Bézout $au + bv = c$ en l'inconnue $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

Les thèmes de la semaine

Remarque. L'arithmétique est pour le moment présentée sans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On admet (pour le moment) le petit théorème de Fermat.

1 Relations d'ordre, relations d'équivalence

En révision.

2 Les entiers relatifs

2.1 Construction de $\mathbb{Z}$

Addition et multiplication, ordre sur $\mathbb{Z}$, valeur absolue, inégalité triangulaire.

Propriété. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un maximum.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un minimum.

Propriété. $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.
Exemple d'anneau non intègre.

2.2 Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Définition d'un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Définition du sous-groupe engendré par une partie de $\mathbb{Z}$.
$Gr(B) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i / n \in \mathbb{N}, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n, (b_1, \ldots, b_n) \in B^n \Big\}$.

2.3 Divisibilité

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $b \mid a_i$, alors $b \mid \sum_{i=1}^{p} c_i a_i$. Si $b \mid a$ et $d \mid c$, alors $bd \mid ac$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a|b \Longleftrightarrow b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si les seuls diviseurs communs de a et b sont 1 et -1.
Famille de n entiers deux à deux premiers entre eux ou bien globalement premiers entre eux.

Si $p \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors ou bien $p|a$, ou bien p et a sont premiers entre eux.

p est premier ssi p est premier avec tout nombre premier contenu dans $[\![2, \sqrt{p}]\!]$.
Crible d'Ératosthène.

$\mathbb{P}$ est de cardinal infini.

2.4 Congruence

Relation de congruence modulo k, lien avec la division euclidienne par k.
Compatibilités de la congruence avec l'addition et la multiplication.

Petit théorème de Fermat (admis pour le moment).

2.5 PGCD

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. le PGCD de a et b (noté $a \wedge b$) est l'unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
Pour la relation d'ordre de divisibilité dans $\mathbb{N}$, $a \wedge b = \inf_{|}\{|a|, |b|\}$.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a \wedge b = 1$.

Généralisation au PGCD d'une famille de n entiers relatifs, au PGCD d'une partie de $\mathbb{Z}$.

Propriété. Soit $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ et $h \in \{1, \ldots, k\}$.
— Commutativité du PGCD :
$PGCD(a_1, \ldots, a_k)$ ne dépend pas de l'ordre de $a_1, \ldots, a_k$.

— Associativité du PGCD :
$PGCD(a_1,\dots,a_k) = PGCD(a_1,\dots,a_h) \;\wedge\; PGCD(a_{h+1},\dots,a_k)$.
— Distributivité de la multiplication par rapport au PGCD : pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$,
$PGCD(\alpha a_1,\dots,\alpha a_k) = |\alpha| PGCD(a_1,\dots,a_k)$.

2.6 PPCM

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Le PPCM de a et b (noté $a \vee b$) est l'unique entier naturel m tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Alors $a \vee b = \sup_{|}\{|a|,|b|\}$.

Généralisation au PPCM d'une famille de n entiers relatifs, au PPCM d'une partie de $\mathbb{Z}$.

Propriété. Soit $k \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{Z}$ et $h \in \{1,\dots,k\}$.
— Commutativité du PPCM :
$PPCM(a_1,\dots,a_k)$ ne dépend pas de l'ordre de $a_1,\dots,a_k$.
— Associativité du PPCM :
$PPCM(a_1,\dots,a_k) = PPCM(a_1,\dots,a_h) \;\vee\; PPCM(a_{h+1},\dots,a_k)$.
— Distributivité de la multiplication par rapport au PPCM :
pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, $PPCM(\alpha a_1,\dots,\alpha a_k) = |\alpha| PPCM(a_1,\dots,a_k)$.

2.7 Les théorèmes de l'arithmétique

Théorème de Bézout.
Si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, il existe $(a',b') \in \mathbb{Z}^2$, avec a' et b' premiers entre eux, tel que $a = a'd$ et $b = b'd$.

Théorème de Gauss.
Si $p \mid ab$ et si p est premier, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Propriété. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z}$.
◇ Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$.
◇ Si $a|b$, $c|b$ et $a \wedge c = 1$ alors $ac|b$.
◇ $|ab| = (a \wedge b)(a \vee b)$.

Théorème fondamental de l'arithmétique. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique famille presque nulle d'entiers naturels $(\nu_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{P})}$ telle que $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p}$.

Si $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p}$ et $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\mu_p}$, Alors $a \mid b \iff [\forall p \in \mathbb{P},\;\; \nu_p \le \mu_p]$.
De plus, $a \wedge b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(\nu_p,\mu_p)}$ et $a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\nu_p,\mu_p)}$.

Lemme d'Euclide : Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $a \wedge b = b \wedge r$.
Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD et pour le calcul de coefficients de Bézout de deux entiers premiers entre eux.

Exercice. Équation de Bézout $au + bv = c$ en l'inconnue $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, bornes supérieures

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 6 : du lundi 11 novembre au vendredi 15.

Liste des questions de cours

1°) Forme irréductible d'un rationnel : montrer l'existence et l'unicité.

2°) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3°) Dans un ensemble ordonné quelconque, si A et B sont deux parties possédant des bornes supérieures et si $A \subset B$, comparez $\sup A$ et $\sup B$. Démontrez-le.

4°) Si S et T sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup(S+T) = \sup S + \sup T$.

5°) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.

6°) Montrer qu'une union d'intervalles possédant un point commun est un intervalle.

7°) Enoncer l'inégalité triangulaire. En déduire son corollaire.

8°) Donner deux définitions d'une partie dense dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elles sont équivalentes.

9°) Enoncer et démontrer les CNS de divisibilité par 2, 5, 10, 3, 9 et 11.

10°) Donnez un nombre décimal qui approche le réel x par défaut à 10^{-p} près. Démontrez-le.

11°) Si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite de chiffres compris entre 0 et 9, montrer qu'on peut définir $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n a^{-n}$, où $x \in [0,1]$. Montrer que $[x = 1 \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = 9)]$.

12°) Soit $x \in [0,1[$. Montrer que si x est rationnel alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

13°) Soit $x \in [0,1[$. On suppose que le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang. Montrer que x est un rationnel.

Les thèmes de la semaine

1 Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

En révision.

2 Les rationnels

Construction de $\mathbb{Q}$.

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps, c'est-à-dire que
- $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau,
- $\mathbb{Q}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (on note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$),
- $\mathbb{Q}$ est commutatif,
- tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ est inversible : $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \ \exists y \in \mathbb{Q}^*, \ xy = 1$.

Comme tout corps, $\mathbb{Q}$ est intègre.

Ordre sur $\mathbb{Q}$, valeur absolue.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle.

3 Les réels

3.1 Bornes supérieures

Définition de $\sup A$ et $\inf A$ dans un ensemble ordonné quelconque, lien avec la notion de maximum.

$B \subset A \Longrightarrow \sup(B) \leq \sup(A)$, $B \subset A \Longrightarrow \inf(B) \geq \inf(A)$.

Passage à la borne supérieure (resp : inférieure) : $[\forall a \in A, \ \ a \leq e] \Longleftrightarrow \sup(A) \leq e$.

3.2 Une caractérisation de $\mathbb{R}$.

Caractérisation de $\mathbb{R}$: (admise)
Il existe au moins un corps K totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Il est unique à un isomorphisme de corps ordonnés près.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

$s = \sup(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A, \ \ a \leq s] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists a \in A, \ \ s - \varepsilon < a]$.
$m = \inf(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A, \ \ a \geq m] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists a \in A, \ \ m + \varepsilon > a]$.

3.3 La droite réelle achevée

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

3.4 Les intervalles

Définition. Intervalles ouverts et fermés, segments.

On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a, b \in A$ avec $a < b$, $[a, b] \subset A$.
Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement ses intervalles.

Une intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une union d'intervalles possédant un point commun est un intervalle.

3.5 la valeur absolue

L'inégalité triangulaire et son corollaire.

Distance entre réels : $d(x, y) = |x - y|$. Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

3.6 Propriétés usuelles des réels

$\mathbb{R}$ est archimédien : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $na > b$.

Parties entières inférieure et supérieure.

$A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leq a \leq y$, ou bien ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4 Développement décimal

4.1 Développement décimal d'un entier naturel

Développement d'un entier naturel en base a, où $a \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

CNS de divisibilité par 2, 5, 10, 3, 9 et 11.

4.2 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition. $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} / n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$.

Développement décimal d'un élément de $\mathbb{D}$.

4.3 Approximation d'un réel

Définition d'une valeur approchée à ε près, éventuellement par défaut ou par excès.
Le réel x est approché par défaut à 10^{-p} près par le nombre décimal $\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}$.

4.4 Développement décimal d'un réel

Soit $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$.

Si (v_n) est une suite de "chiffres" entre 0 et $a-1$, définition de $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n a^{-n} \in [0,1]$: On dit que $(v_n)_{n\geq 1}$ est un développement de x en base a et on note $x = 0, \overline{v_1 v_2 \cdots v_n v_{n+1} \cdots}$.
De plus, $x \in [0,1]$ et $[x = 1 \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = a-1)]$.

Théorème. Tout réel de $[0,1[$ admet un unique développement en base a dans $\mathcal{V}$, où $\mathcal{V} = \{(v_n)_{n\geq 1} / \forall n \in \mathbb{N}^* \ v_n \in \mathbb{N} \cap [0, a[\text{ et } \forall N \in \mathbb{N}^* \ \exists n \geq N \ v_n \neq a-1\}$.

Théorème hors programme : caractérisation d'un rationnel. Soit $x \in [0,1[$. x est un rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Applications, images directe et réciproque, injectivité et surjectivité. Lois internes.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 7 : du lundi 18 novembre au vendredi 22.

Liste des questions de cours

1°) Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, exprimer en justifiant les fonctions indicatrices de $E \setminus A$, $A \cap B$ et $A \cup B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et B.

2°) Montrer que $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, mais que l'inclusion réciproque peut être fausse.

3°) Enoncer et démontrer une propriété concernant l'image réciproque d'une réunion.

4°) Quelles relations d'inclusion a-t-on entre A et $f(f^{-1}(A))$ et entre B et $f^{-1}(f(B))$? Démontrez-le.

5°) Pour une application $f : E \longrightarrow F$ quelconque, montrer que l'application $\begin{array}{rccl} \overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection, pour une relation d'équivalence R bien choisie.

6°) Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective et $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

7°) Montrer que les applications injectives sont simplifiables à gauche et que les applications surjectives sont simplifiables à droite.

8°) Si $E \neq \emptyset$, montrer que $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

9°) Montrer que $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

10°) Dans un monoïde, si x est inversible à gauche et à droite, montrer qu'il possède un unique inverse. Si x et y sont inversibles, donner en justifiant l'inverse de xy.

Les thèmes de la semaine

1 Les réels

En révision.

2 Applications

2.1 Généralités

Définition d'une application de E dans F, d'une famille d'éléments de E indexée par I.

Exemples : la fonction vide, l'application identité, l'indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Indicatrice du complémentaire, d'une intersection, d'une réunion.

Majorant, minimum, borne supérieure etc. d'une fonction ou d'une famille.

Restriction et corestriction d'une application.

Composée d'applications. Associativité de la composition.

Applications croissantes, décroissantes, monotones.
Propriétés des applications monotones vis à vis de la composition, l'addition, le produit.

2.2 Images directes et réciproques

Définition des images directes et réciproques d'une partie par une application.

Propriétés des images directes et réciproques vis à vis de la réunion, l'intersection et le complémentaire.

2.3 Injectivité et surjectivité

Injections, surjections, bijections.

Si $f\ : E \longrightarrow F$ alors $\begin{array}{rccc} \overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection, où R est la relation d'équivalence sur E définie par $xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$.

Une composée d'injections (resp : surjections, bijections) est une injection (resp : surjection, bijection).

$g \circ f$ injective $\implies f$ injective et $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Bijection réciproque d'une bijection f.
Si f et g sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$ et $f^{-1}(f(A)) = A$.

Propriété. (HP) Les applications injectives sont simplifiables à gauche et les applications surjectives sont simplifiables à droite.

Propriété. (HP) Si $E \neq \emptyset$, alors $f\ :\ E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

Propriété. (HP) $f\ :\ E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

3 Lois internes

Lorsque Δ est une loi interne sur E, on dit que (E, Δ) est un magma.

Magma associatif, magma unitaire.
Un monoïde est un magma associatif et unitaire.

Élément d'un monoïde inversible à gauche ou à droite, unicité de l'inverse.

Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Définition d'un anneau.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Dénombrement et sommes finies.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 8 : du lundi 25 novembre au vendredi 29.

Liste des questions de cours

1°) Enoncez puis démontrez une formule relative à $|A \cup B|$.

2°) Exprimez le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction de celui de E. Démontrez-le.

3°) Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Montrer que, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.

4°) Enoncer et démontrer le principe des bergers.

5°) Déterminer la probabilité que 2 élèves au moins aient la même date d'anniversaire dans une classe de 47 élèves.

6°) Donner une preuve combinatoire de la formule "comité-président".

7°) Donner une preuve combinatoire de la formule du triangle de Pascal.

8°) Combien le mot MISSISSIPPI possède-t-il d'anagrammes, qu'ils aient un sens ou non ?

9°) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

10°) Enoncer et démontrer la formule du multinôme.

11°) Enoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.

12°) Pour une famille $(u_{k,\ell})$ d'éléments d'un monoïde commutatif $(G, +)$, écrire en justifiant la somme $\sum\limits_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell}$ sous la forme "$\sum\limits_{k} \sum\limits_{\ell}$" puis sous la forme "$\sum\limits_{\ell} \sum\limits_{k}$".

Les thèmes de la semaine

Dénombrement et sommes finies

Cardinal d'un ensemble

Ensembles finis, ensembles infinis
Le cardinal d'un ensemble fini E est noté Card(E), $\#E$ ou $|E|$.

Propriété. Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit B un ensemble quelconque.
B est fini de cardinal n si et seulement si il existe une bijection de A sur B.

Propriété. Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de A.
Alors B est un ensemble fini et $|B| \leq |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

Propriété. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. A est finie si et seulement si elle est majorée.
En particulier, $\mathbb{N}$ est infini.

Cardinaux d'ensembles usuels

Cardinal d'une réunion disjointe finie.
Cardinal du complémentaire.
Cardinal de $A \cup B$.
Formule du crible (hors programme).

Propriété. Si E est fini, alors E/R est aussi de cardinal fini.

Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.
$|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Sommes et produits finis

Les termes des sommes considérées sont des éléments d'un monoïde commutatif $(G, +)$.

Commutativité généralisée : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

Définition. Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille de G indexée par A.
Notons $n = |A|$. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ dans A. On pose $\sum_{a \in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.
Cette quantité ne dépend pas de la bijection f.

Propriété d'additivité : $\sum_{a \in A} (x_a + y_a) = \left(\sum_{a \in A} x_a\right) + \left(\sum_{a \in A} y_a\right)$.

Distributivité généralisée : Dans un anneau, $\sum_{a \in A} (\lambda x_a) = \lambda \sum_{a \in A} x_a$.

Changement de variable dans une somme finie : Soit B un ensemble fini, $(x_b)_{b \in B}$ une famille d'éléments de G. Soit φ une bijection d'un ensemble A dans B. Alors $\sum_{b \in B} x_b = \sum_{a \in A} x_{\varphi(a)}$.

Sommation par paquets : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. On suppose qu'il existe un ensemble fini B et une famille $(A_b)_{b \in B}$ de parties de A telles que $A = \bigsqcup_{b \in B} A_b$.
Alors $\sum_{a \in A} x_a = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A_b} x_a$.

Sommation par paquets, seconde formulation : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. Soit R une relation d'équivalence sur A. Alors $\sum_{a \in A} x_a = \sum_{c \in A/R} \sum_{a \in c} x_a$.

Applications et cardinaux

Propriété. Soit E un ensemble fini et $f : E \longrightarrow F$. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si f est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ avec $|E| = |F| < \infty$, alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective .

Propriété. S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.
S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs.
Principe des bergers.

Listes et combinaisons

p-listes, p-arrangements, p-combinaisons.
Bijection entre les p-arrangements de E et les injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.

Nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n : $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
$|\mathcal{S}_n| = n!$.

Nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n : $\dbinom{n}{p} \triangleq \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\dbinom{k}{p} \times \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{p} \times \dbinom{n-p}{k-p}$.

Formule du triangle de Pascal : Si $n \geq 1$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

Remarque. On convient parfois que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\dbinom{n}{p} = 0$.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1a_2 = a_2a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k\ a_2^{n-k}.$$

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1+\cdots+i_p=n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!}\ a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

Petit théorème de Fermat : Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $n^p \equiv n$ modulo p.
En particulier, si $n \notin p\mathbb{Z}$, alors $n^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

Sommes et produits : quelques techniques

Sommes et produits télescopiques.

Séparation des indices pairs et impairs.

Fonction génératrice d'une famille de complexes $(u_k)_{m\leq k\leq n}$: $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Sommes des termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

Formule de Bernoulli : Si a et b commutent dans un anneau A, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Sommes doubles : $\displaystyle\sum_{\substack{m\leq k\leq n \\ p\leq \ell\leq q}} u_{k,\ell}$.

Sommes triangulaires : $\displaystyle\sum_{m\leq k\leq \ell\leq n} u_{k,\ell}$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Reprise de ce programme, formule de Leibniz, formules de Taylor.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 9 : du lundi 2 décembre au vendredi 6.

Liste des questions de cours

1°) Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Montrer que, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.

2°) Combien le mot MISSISSIPPI possède-t-il d'anagrammes, qu'ils aient un sens ou non ?

3°) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

4°) Enoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.

5°) Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties itérée.

6°) Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

7°) Enoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

8°) Pour $t \in \mathbb{R}$, développer e^t en série (entière).

9°) Enoncer et démontrer la formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

Les thèmes de la semaine

Dénombrement et sommes finies

À réviser.

Formules de Taylor

Intégration par parties itérée (Hors programme) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt = \Big[\sum_{i=0}^{n-1} f^{(n-1-i)}(t)g^{(i)}(t)(-1)^i\Big]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt$.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Formule de Taylor-Young.

Remarque. Aucune connaissance n'est pour le moment attendue des étudiants concernant les développements limités. On a cependant commencé à utiliser les "$\sim$" et "o".

Prévisions pour la semaine prochaine :

Les complexes.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 10 : du lundi 9 décembre au vendredi 13.

Liste des questions de cours

1°) Démontrer l'inégalité triangulaire, pour $|z + z'|$, avec son cas d'égalité.

2°) CNS pour que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$: énoncé et démonstration.

3°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0.

4°) Montrer que $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

5°) Montrer que, pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

6°) Montrer que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

7°) Etablir les développement en série entière de cos et sin.

8°) Proposer deux méthodes pour calculer $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$.

9°) Résoudre l'équation $e^z = \rho e^{i\theta}$ en l'inconnue z. Qu'en déduit-on au sujet de l'application $z \longmapsto e^z$?

10°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

11°) Linéariser $\cos^3 \theta$ en utilisant les complexes.

12°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

13°) Expliquer comment déterminer les racines n-ièmes du complexe $z = re^{i\varphi}$.

14°) Présenter la méthode de calcul des racines carrées d'un complexe lorsqu'il est donné sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

15°) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$.

Les thèmes de la semaine

Les complexes, sans géométrie

Pour construire l'exponentielle complexe, j'ai mis en place quelques notions portant sur les séries (cf 6.1), qui pourront faire l'objet d'une question de cours (cf ci-dessus), mais ces notions ne seront pas utilisées dans les exercices pour le moment.

Ce programme de colles ne comprend pas la géométrie du plan complexe : angles, colinéarité et orthogonalité, similitudes directes et indirectes.

1 Construction de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps.

Partie réelle, partie imaginaire, écriture algébrique d'un complexe.
Imaginaires purs.

2 Le plan complexe

Affixe d'un point M, image $M(z)$ d'un complexe z.
Affixe d'un vecteur, vecteur image d'un complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes.

$z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel.

3 La conjugaison

Propriété. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4 Le module

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriété. $|z| = |\overline{z}|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Inégalité triangulaire, corollaire de l'inégalité triangulaire.

Parties bornées.

5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

5.1 Dérivation

Définition. On admet pour le moment que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est k fois dérivable si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont k fois dérivables et que $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des formules usuelles de dérivation : linéarité, produit, quotient, puissance entière, composition (pour $f \circ g$ avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Formule de Leibniz.

5.2 Intégration

Si $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.
On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des propriétés usuelles de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0, changement de variable, intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young.

6 L'exponentielle complexe

6.1 Quelques résultats sur les séries

Définition d'une suite convergente de complexes, d'une série convergente.

Si $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0, mais la réciproque est fausse.

L'absolue convergence implique la convergence (admis pour le moment).

Définition d'une série alternée, théorème spécial des séries alternées (TSSA), admis pour le moment.

6.2 Construction de l'exponentielle complexe

$\forall z \in \mathbb{C},\ \ e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$: c'est un prolongement de l'exponentielle réelle.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Définition de cos et sin par les formules d'Euler.
Développement en série entière de cos et sin.

Décroissance de cos entre 0 et 2, définition de $\frac{\pi}{2}$ comme unique racine de cos sur $[0, 2]$.

Etude des variations et de la périodicité de cos et sin

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

6.3 Arguments d'un complexe

Ecriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$.
Lorsque $\rho \geq 0$, on a $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z noté $\arg(z)$, défini à 2π près.

Argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière.
Argument de l'opposé, $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \text{ modulo } 2\pi) \Longleftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$.

$e^z = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi)$.

L'application exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Formule de Moivre.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \triangleq e^{\alpha \ln x}$, $\dfrac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha - 1}$.

Technique de l'angle moyen.

Technique de linéarisation.

Polynômes de Tchebychev.

7 Équations polynomiales

7.1 Racines n-ièmes d'un complexe

$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$. C'est le groupe cyclique d'ordre n, engendré par $e^{2i\frac{\pi}{n}}$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
Racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

7.2 Équations du second degré

7.2.1 Racines carrées

Méthode de calcul des racines carrées d'un complexe donné sous forme cartésienne $x + iy$.

7.2.2 Racines d'un trinôme

Discriminant, formule donnant les racines d'un trinôme, racine double.

$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si $\{z_1, z_2\}$ est l'ensemble des racines du trinôme $X^2 - sX + p$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Géométrie du plan complexe.

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 11 : du lundi 16 décembre au vendredi 20.

Liste des questions de cours

1°) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

2°) Linéariser $\cos^3 \theta$ en utilisant les complexes.

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

4°) Expliquer comment déterminer les racines n-ièmes du complexe $z = re^{i\varphi}$.

5°) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$.

6°) Etablir les différentes conditions de colinéarité de deux vecteurs, en fonction de leurs affixes.

7°) Etablir les différentes conditions d'orthogonalité de deux vecteurs, en fonction de leurs affixes.

8°) Définir la similitude directe de centre $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Préciser sa bijection réciproque, ses points fixes. Montrer qu'elle conserve les proportions et les angles.

9°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation $z \longmapsto az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

10°) Montrer que l'ensemble des similitudes affines directes est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

11°) Montrer que l'application $z \longmapsto e^{2i\theta}\overline{z}$ est une réflexion selon une droite que l'on précisera.

Les thèmes de la semaine

Les complexes

Le programme de colles précédent est à réviser, il pourra faire l'objet d'exercices.

Complexes et géométrie

1 Distances et angles

Affixe d'un vecteur.
Traduction en termes de complexes de la distance entre 2 points et de l'angle entre deux vecteurs.

2 Orthogonalité et colinéarité

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes $u = a + ib$ et $v = c + id$.

— $\overrightarrow{u} \mathbin{//} \overrightarrow{v} \iff \frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(\overline{u}v) = 0 \iff ad - bc \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
  $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est le déterminant (aussi appelé le produit mixte) des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

— $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(\overline{u}v) = 0 \iff ac + bd \stackrel{\Delta}{=} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = 0$.
  $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Corollaire. Conditions pour que trois points soient alignés, pour qu'ils forment un triangle rectangle.

3 Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation
$|z - \alpha| = r \iff (z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$.
Réciproquement, un ensemble admettant une équation cartésienne de la forme
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ est un cercle éventuellement réduit à un point ou à l'ensemble vide.

4 Les similitudes directes

Définition. Une isométrie est une application qui conserve les distances.

Translations, rotations de centre z_0 et d'angle θ, homothéties, similitude directe de centre $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: étude des points fixes, conservation des proportions et des angles.

Définition. On dit que f est une similitude affine directe si et seulement si c'est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \longmapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
C'est une similitude vectorielle directe lorsque $f(0) = 0$.

Une similitude directe est ou bien une translation, ou bien une similitude définie par un centre, un angle et un rapport.

Propriété. L'ensemble S^+ des similitudes affines directes est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$, dont l'ensemble des similitudes vectorielles directes est un sous-groupe.

Propriété. L'application qui à la similitude $z \longmapsto az + b$ associe a (resp : $|a|$) est un morphisme de groupes, dont le noyau est le sous-groupe des translations (resp : des rotations et des translations).

Corollaire. Une composée, quel que soit l'ordre, de translations, de rotations dont la somme des angles est égale à θ et d'homothéties dont le produit des rapports est égal à λ est une similitude directe de la forme $z \longmapsto \lambda e^{i\theta} z + b$.

5 Les similitudes indirectes

Définition d'une réflexion.
La conjugaison $z \longmapsto \overline{z}$ est la réflexion d'axe Ox

Remarque. La suite de ce paragraphe est hors programme.

Propriété. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. L'application $z \longmapsto e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0$ est la réflexion (affine) selon la droite (affine) $z_0 + e^{i\theta}\mathbb{R}$.

Propriétés d'une réflexion : involutif, points fixes, conservation des distances, transformation des angles en leurs opposés.

Définition. On dit que f est une similitude affine indirecte si et seulement si c'est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \longmapsto a\overline{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Définition. Une réflexion glissée d'axe D est la composée commutative d'une réflexion d'axe D avec une translation selon un vecteur parallèle à D.

Propriété. La composée d'une homothétie et d'une réflexion glissée est une similitude affine indirecte.

Propriété. Soit $f \ : \ z \longmapsto \lambda e^{2i\theta}\overline{z} + b$ une similitude affine indirecte. C'est la composée d'une homothétie de rapport λ avec une réflexion glissée selon une droite parallèle au vecteur $e^{i\theta}$.

Définition. On note S^- l'ensemble des similitudes indirectes et $S = S^- \sqcup S^+$.
S est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.
La composée de k éléments de S^+ avec h éléments de S^-, quel que soit l'ordre, est un élément de S^+ si h est pair et de S^- si h est impair.

Propriété. (Admise pour le moment) : Soit $f \ : \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.
$f \in S$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|f(z) - f(z')| = \lambda|z - z'|$.

Propriété. L'application qui associe à toute similitude $z \longmapsto az + b$ ou $z \longmapsto a\overline{z} + b$ la quantité $|a|$ est un morphisme de groupes, donc le noyau est le sous-groupe des isométries noté I.

La composée de deux réflexions $r_{D'} \circ r_D$ est la rotation dont le centre est l'unique point de $D \cap D'$ et d'angle $2(\widehat{D, D'})$ lorsque D et D' ne sont pas parallèles. Sinon, c'est une translation.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Groupes et anneaux.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 12 : du lundi 6 janvier au vendredi 10.

Liste des questions de cours

1°) Si $(G..)$ est un groupe et A un ensemble quelconque, montrer qu'on peut définir une structure de groupe sur G^A.

2°) Si E est un ensemble quelconque, montrer qu'on peut définir une structure de groupe sur l'ensemble des bijections de E dans E.

3°) Que peut-on dire d'une intersection de sous-groupes ? Démontrez-le.

4°) Lorsque A est une partie d'un groupe $(G, .)$, quels sont les éléments de $Gr(A)$? Démontrez-le.

5°) Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$? Démontrez-le.

6°) Si a et b commutent dans $(G, .)$, montrer que a^k et b^h commutent, pour tout $k, h \in \mathbb{Z}$.

7°) Dans un groupe $(G, .)$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- i) $Gr(a)$ est cyclique de cardinal n.
- ii) $\{k \in \mathbb{N}^*/a^k = 1\}$ est non vide et son minimum est égal à n.
- iii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $[a^k = 1 \Longleftrightarrow k \in n\mathbb{Z}]$.
- iv) Les éléments de $Gr(a)$ sont exactement $1, a, \ldots, a^{n-1}$ et ils sont deux à deux distincts.

8°) Si f est un morphisme de groupes, montrer que $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

9°) Montrer que l'image directe (resp : réciproque) d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.

10°) CNS pour qu'un morphisme soit injectif, portant sur son noyau.

11°) Montrer qu'un groupe est monogène non cyclique si et seulement si il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Les thèmes de la semaine

1 Les complexes

À réviser : les complexes pourront faire l'objet d'exercices.

2 Les groupes

Le cours sur le groupe symétrique de degré n et les anneaux est connu des étudiants, ainsi que le début du cours portant sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mais nous n'avons fait pour le moment aucun exercice à ce sujet. Ces notions feront l'objet du prochain programme de colles. Même chose concernant le théorème de Lagrange.

Les notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients ont été évoquées, mais aucune connaissance à ce sujet n'est attendue des étudiants.

2.1 Définition d'un groupe

Notations multiplicative et additive.

Les éléments d'un groupe sont réguliers (ou simplifiables) à gauche et à droite.

Ordre d'un groupe fini.

2.2 Construction de groupes

Groupe produit $G_1 \times \cdots \times G_n$.

Groupe G^A des fonctions à valeurs dans un groupe G.

Groupe symétrique d'un ensemble.

2.3 Sous-groupes

Caractérisation d'un sous-groupe.

Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.
Groupe engendré par une partie A, noté $Gr(A)$.

Propriété. Si $A \subset B$, alors $Gr(A) \subset Gr(B)$.

Propriété. Soit $(G, .)$ un groupe et $A \subset G$. $Gr(A) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} a_i / n \in \mathbb{N},\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \ a_i \in A \cup A^{-1} \right\}$.

Partie génératrice d'un groupe.

2.4 Puissances d'un élément d'un groupe

Définition de a^n où a est un élément d'un groupe $(G, .)$ et où $n \in \mathbb{Z}$.

Propriété. Si $(G, +)$ est un groupe abélien et A une partie de G,
$Gr(A) = \left\{ \sum_{a \in A} n_a.a / (n_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^{(A)} \right\}$ où $\mathbb{Z}^{(A)}$ désigne l'ensemble des familles presque nulles d'entiers.

2.5 Groupe monogène

En notation multiplicative, $Gr(a) = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$.
En notation additive, $Gr(a) = \mathbb{Z}.a$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Groupe monogène, groupe cyclique, ordre d'un élément.

Caractérisation des groupes cycliques : Soit $(G, .)$ un groupe, $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- i) $Gr(a)$ est cyclique de cardinal n.
- ii) $\{k \in \mathbb{N}^* / a^k = 1\}$ est non vide et son minimum est égal à n.
- iii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $[a^k = 1 \Longleftrightarrow k \in n\mathbb{Z}]$.
- iv) Les éléments de $Gr(a)$ sont exactement $1, a, \ldots, a^{n-1}$ et ils sont deux à deux distincts.

Morphisme de groupes

homomorphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.

Le morphisme $n \longmapsto a^n$ de $\mathbb{Z}$ dans $(G, .)$.

Si f est un morphisme,
$f(1) = 1$, $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$, $f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$, $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Traduction en notation additive.

Composée de morphismes, isomorphisme réciproque.
Le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G.

Propriété. Soient G et H deux groupes, G' un sous-groupe de G et H' un sous-groupe de H. Soit f un morphisme de G dans H.
Alors $f(G')$ est un sous-groupe de H et $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Noyau et image d'un morphisme. CNS d'injectivité.

Propriété. Un groupe est monogène non cyclique si et seulement si il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Groupe symétrique de degré n, anneaux, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 13 : du lundi 13 janvier au vendredi 17.

Liste des questions de cours

1°) Avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, ou sur un autre exemple, décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer l'ordre de σ.

2°) Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose en un produit de transpositions.

3°) Que peut-on dire de l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux ? Démontrez-le.

4°) Enoncer et démontrer le théorème de Lagrange.

5°) Montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

6°) Quels sont les sous-groupes (resp : les idéaux) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

7°) Déterminer l'ensemble des générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$.

8°) Enoncer et démontrer le théorème chinois.

9°) Pour $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{Z}$, méthode de calcul de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
$\ell \equiv h_i$ modulo a_i, où $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux,

10°) Si $a \wedge b = 1$, montrer que l'indicatrice d'Euler vérifie $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

11°) Montrer que $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

12°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $n = \sum_{d \in \mathbb{N}, d|n} \varphi(d)$.

13°) Montrer que la caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ vaut soit 0, soit un nombre premier p et que dans ce dernier cas, le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Thème de la semaine : groupes, anneaux et corps.

1 Le Groupe symétrique

Groupe symétrique de degré n, noté $\mathcal{S}_n$.

Cycles : définition, longueur et support d'un cycle.
Deux cycles dont les supports sont disjoints commutent toujours entre eux.
Les transpositions.

Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose de manière unique en un produit (commutatif) de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints.

Toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ se décompose en un produit de transpositions.
Dans une telle décomposition, la parité du nombre de transpositions ne dépend que de σ. On la note $\varepsilon(\sigma)$, c'est la signature de σ.
La signature est l'unique morphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ qui envoie toute transposition sur -1.

Le groupe alterné de degré n est l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des permutations paires. C'est $Ker(\varepsilon)$.
Son cardinal vaut $\frac{n!}{2}$ lorsque $n \geq 2$.

2 La structure d'anneau

Définition d'un anneau, règles usuelles de calcul dans un anneau.

Si A n'est pas l'anneau nul, alors $1_A \neq 0_A$.

Sous-anneaux.

Groupe des inversibles. Définition d'un corps (toujours commutatif). Sous-corps.

Formule du binôme de Newton et du multinôme, formule de Bernoulli.

Diviseurs de 0, anneaux intègres.

Morphismes d'anneaux. Composée, isomorphisme réciproque,
image directe ou réciproque d'un sous-anneau.
Un morphisme de corps est toujours injectif.

Anneau produit.

3 Les idéaux

Idéal à gauche ou à droite d'un anneau. Les idéaux sont des sous-groupes.
Si I est un idéal, $1 \in I \iff I = A$.
Intersection d'idéaux, idéal engendré par une partie B, noté $Id(B)$.

Notation. Pour la suite, on fixe un anneau $(A, +, .)$ **que l'on suppose commutatif**.

$Id(B) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i / n \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_n) \in A^n, (b_1, \dots, b_n) \in B^n\}$.

Idéal principal, anneau principal.
$\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

Somme de deux idéaux, image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux.

4 Groupes et anneaux quotients

Si H est un sous-groupe de $(G, .)$, les classes à gauche de H partitionnent G.
Théorème de Lagrange.
Dans un groupe G fini, $\forall a \in G,\ a^{|G|} = 1_G$.

Si $(G, +)$ est commutatif, définition du groupe quotient G/H. Surjection canonique de G dans G/H.
Cas particulier fondamental : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Tout groupe cyclique est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition de l'anneau quotient A/I, lorsque I est un idéal de l'anneau commutatif A.
Règles de calcul dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps (resp : est intègre) si et seulement si $n \in \mathbb{P}$.
Théorème chinois : Si $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux premiers entre eux,
$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/(a_1\times\cdots\times a_n)\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z})\times\cdots\times(\mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}) \\ \overline{k} & \longmapsto & (\overline{k},\dots,\overline{k}) \end{array}$ est un isomorphisme d'anneaux.
Pour $h_1,\dots,h_n \in \mathbb{Z}$, méthode de calcul de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\ell \equiv h_i$ modulo a_i.

Indicatrice d'Euler : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(n) = |U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|$.
Si p est premier et si $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
Si $a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Euler-Fermat : si $k \wedge n = 1$, alors $k^{\varphi(n)} \equiv 1$ modulo n.
Petit théorème de Fermat : Si p est un nombre premier, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k^p \equiv k$ modulo p.

6 Compléments hors programme

On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes du groupe G.

L'application $\begin{array}{ccc} U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ x & \longmapsto & [y \longmapsto xy] \end{array}$ est un isomorphisme.

Si $(G,.)$ un groupe fini d'ordre n, alors $n = \sum_{d|n} r_d\varphi(d)$, où r_d désigne le nombre de sous-groupes cycliques de G de cardinal d.
$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Si $\mathbb{K}$ est un corps, tout sous-groupe fini de $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\times)$ est cyclique.
Si $(G,.)$ un groupe de cardinal $p \in \mathbb{P}$, alors $\mathrm{Aut}(G)$ est cyclique.

7 Caractéristique d'un anneau commutatif

$\mathrm{car}(A) = n \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$, où $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ m & \longmapsto & m.1_A \end{array}$.
Deux anneaux isomorphes ont la même caractéristique.
Le plus petit sous-anneau de A est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n = \mathrm{car}(A)$.

Un anneau de caractéristique nulle est de cardinal infini.

Si A est intègre et $\mathrm{car}(A) \neq 0$, alors $\mathrm{car}(A) \in \mathbb{P}$.

Endomorphisme de Frobenius, sur un anneau de caractéristique $p \in \mathbb{P}$.

La caractéristique d'un corps est ou bien nulle, ou bien un nombre premier.
Description du sous-corps premier de $\mathbb{K}$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 14 : du lundi 27 janvier au vendredi 31.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre.

2°) Quelles sont les solutions de l'équation $(H)\ :\ y' = a(t)y$? Justifiez.

3°) Présenter la méthode de variation de la constante.

4°) Résoudre $(E)\ :\ y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}}$.

5°) Résolution de $(E)\ :\ y" = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ lorsque l'on dispose d'une solution particulière de l'équation sans second membre qui ne s'annule pas.

6°) Etablir les formules donnant les solutions de $(H)\ :\ y" + ay' + by = 0$, où a et b sont des constantes.

7°) Enoncer et démontrer le théorème indiquant la forme d'une solution particulière de $(E)\ :\ y" + ay' + by = e^{\lambda x}P(x)$, où a et b sont des constantes, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et où P est une application polynomiale.

8°) Résoudre $(E) : y" - 2y' + y = \text{ch}t$.

9°) Résoudre $(E)\ :\ y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos t$.

Thèmes de la semaine

1 Groupes, anneaux et corps, en révisions

2 Équations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On s'intéresse aux équations différentielles $(E)\ :\ y' = a(t)y + b(t)$ et $(H)\ :\ y' = a(t)y$ en l'inconnue y, où I est un intervalle, et où a et b sont deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
(H) est l'équation homogène (ou bien l'équation sans second membre, ESSM) associée à (E).

Courbes intégrales.

Problème de Cauchy relatif à (E) et à une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$.

La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

Principe de superposition des solutions.

Solutions de l'équation (H).
Méthode de variation de la constante.
Existence et unicité au problème de Cauchy.

2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

2.2.1 Équations à coefficients quelconques

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme $(E)\ :\ y" = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ où a, b, c sont trois applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'équation homogène associée est $(H)\ :\ y" = a(x)y' + b(x)y$.

$S_E = \{y_0 + y/y \in S_H\} = y_0 + S_H$.
Principe de superposition des solutions.

Problème de Cauchy relatif à (E) et à des conditions initiales de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour tout $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0).

Résolution de (E) lorsque l'on dispose d'une solution particulière de (H) qui ne s'annule pas.

Exemples de raccordements de solutions.

2.2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E)\ :\ y" + ay' + by = f(x)$, où $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes.
L'équation homogène associée est $(H)\ :\ y" + ay' + by = 0$.

Solutions de (H) en fonction des racines du polynôme caractéristique $\chi = X^2 + aX + b$.

Solution particulière de (E), lorsque $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et où P est un polynôme.

Prévisions pour la semaine prochaine :

La structure d'espace vectoriel.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 15 : du lundi 3 février au vendredi 7.

Liste des questions de cours

1°) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

2°) Si A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, précisez les éléments de $\text{Vect}(A)$, en justifiant.

3°) Montrer que $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4°) Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire : énoncé et démonstration.

5°) Décrire les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$.

6°) Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.

7°) Établir une CNS portant sur les images et noyaux de u et v pour que $uv = 0$.

8°) On considère l'équation suivante en l'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$; $(E)\ :\ P(X+1) - P(X) = 2X + 1$. Montrer que (E) est une équation linéaire puis la résoudre.

9°) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, montrer que $L(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

10°) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Montrer que $w \longmapsto uwu^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $L(E)$.

Thèmes de la semaine

1 Équations différentielles linéaires en révisions

2 La structure algébrique d'espace vectoriel

Il s'agit d'un premier chapitre sur les espaces vectoriels. Aucune connaissance n'est attendue des élèves concernant les matrices, les sommes directes, les bases ou la théorie de la dimension.

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

2.1 Définition et exemples

Vecteurs et scalaires.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, E^I, sur-corps de $\mathbb{K}$, produit d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$.

Droite vectorielle.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :
- échanger x_{i_0} et x_{i_1}, où $i_0, i_1 \in I$ avec $i_0 \neq i_1$;
- multiplier x_{i_0} par $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$;
- ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Somme de p sous-espaces vectoriels.

2.3 Les applications linéaires

Morphisme, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

Dual de E : $E^* = L(E, \mathbb{K})$.

Si u est linéaire, $u\Big(\text{Vect}(x_i)_{i \in I}\Big) = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Composée de deux applications linéaires.
Isomorphisme réciproque.

$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Noyau et image d'une application linéaire.

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.

$uv = 0 \Longleftrightarrow Im(v) \subset Ker(u)$.

Équation linéaire (E) : $f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$, où $f \in L(E, F)$ et $y \in F$.
Equation homogène associée : l'ensemble des solutions est $\text{Ker}(f)$.
(E) est compatible si et seulement si $y \in \text{Im}(f)$. Dans ce cas, la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

2.4 Espaces affines

Si A et B sont deux points d'un $\mathbb{K}$-espace affine, $\overrightarrow{AB} = B - A$ est l'unique vecteur x tel que $A + x = B$.
Relation de Chasles.
Définition d'un parallélogramme.

Si l'on fixe un point d'un espace affine $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ possède naturellement une srructure d'espace vectoriel.
Réciproquement, tout espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace affine.

2.5 La structure d'algèbre

Algèbre commutative ou non commutative, intègre ou non intègre.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.

Sous-algèbres.

morphismes d'algèbres.

Automorphismes intérieurs.

Compositioin de morphismes d'algèbres, isomorphisme réciproque, images directe et réciproque d'une sous-algèbre.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Normes, suites de vecteurs

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 16 : du lundi 24 février au vendredi 28.

Liste des questions de cours

1°) Si l'on pose, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

2°) Si l'on pose, pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, montrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

3°) Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

4°) Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E, montrer que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

5°) Si E_1, …, E_p sont p espaces vectoriels normés, montrer que sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

6°) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|.\|$, montrer que, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} l$.

7°) Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $\alpha_n.x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.x$.

8°) Sans démonstration, indiquer comment exprimer en fonction de n une suite u_n satisfaisant une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

9°) Déterminer la limite en $+\infty$ de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

10°) Enoncer le théorème de la limite monotone. Démontrer-le dans le cas d'une suite croissante majorée.

11°) Montrer que a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N \ d(x_n, a) < \varepsilon$.

12°) Enoncer et démontrer le lemme des pics.

13°) Théorème de Bolzano-Weierstrass : énoncé et démonstration.

Thèmes de la semaine

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définition d'une norme

Corollaire de l'inégalité triangulaire.

Vecteurs unitaires.

Restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel.

Les normes 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^n$.

Hors programme : pour $p \in [1, +\infty[$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Normes 1,2, ∞, et plus généralement normes $p \in [1, +\infty[$ (hors programme), sur un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

1.2 Distance

Distance associée une norme.

Définition d'un espace métrique.
Seul cas au programme : une partie A d'un espace vectoriel normé munie de la restriction sur A^2 de la distance associée à la norme est un espace métrique.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.
Boule unité.
Les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Dans un espace métrique, distance d'un point à une partie non vide, distance entre deux parties non vides, diamètre d'une partie non vide A noté $\delta(A)$.
Le diamètre d'une boule fermée de rayon r est inférieur à $2r$. Il est égal à $2r$ dans le cas d'un espace vectoriel normé.
Si $\emptyset \neq A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Parties bornées d'un espace vectoriel normé.

Soient A un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé . On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E. Pour $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\|$.

Alors $(\mathcal{B}(A, E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .

Soit E un espace vectoriel normé. On note $l^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E.
Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(E)$, on note $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$: $(l^\infty(E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

1.3 Applications k-Lipschitziennes

Une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Si E est un espace vectoriel normé, l'application $\|.\|$ est 1-lipschitzienne.

Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

L'application $i^{\text{ème}}$ projection $p_i : \begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$ est 1-lipschitzienne lorsque $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de l'une de ses trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

1.4 Normes équivalentes

$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id_E : (E, \|.\|_1) \longrightarrow (E, \|.\|_2)$ et
$Id_E : (E, \|.\|_2) \longrightarrow (E, \|.\|_1)$ sont lipschitziennes.

Si E_1, …, E_p sont p espaces vectoriels normés, alors sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes équivalentes sur E, alors une partie A de E est bornée pour $\|.\|_1$ si et seulement si elle est bornée pour $\|.\|_2$.

Si f est une application lipschitzienne de E dans F, alors elle reste lipschitzienne si l'on remplace dans E et F les normes par des normes équivalentes.

2 Limite d'une suite dans un espace métrique (E, d)

Unicité de la limite.
Suites convergentes, suites divergentes.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|.\|$, alors, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} l$.

Toute suite convergente est bornée.

Notation. Pour la fin de ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel normé.

La somme de deux suites convergentes de vecteurs converge vers la somme des limites.
Si $(x_n + y_n)$ converge, alors (x_n) et (y_n) ont la même nature.

Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.
- Si l'une des suites est bornée et si l'autre tend vers 0, alors $\alpha_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, alors $\alpha_n.x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.x$.

Une suite (x_n) à valeurs dans un produit cartésien de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses p suites composantes convergent et dans ce cas, la limite de (x_n) est égale au p-uplet dont les composantes sont les limites des suites composantes.

3 Suites de complexes

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.

Suites arithmético-géométriques.
Suites homographiques.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4 Suites de réels

4.1 Limites infinies

Divergence vers $+\infty$ (resp : $-\infty$) pour une suite de réels.
Divergence vers ∞ pour une suite d'un espace métrique.

Composition des limites : si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (où $x_n \in E$) et $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ avec $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Pour $x_n \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites, avec des limites éventuellement infinies.
Formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour étudier $a_n^{b_n}$ lorsque a_n et b_n dépendent de n, on remplace $a_n^{b_n}$ par $e^{b_n \ln(a_n)}$.

4.2 limites et relation d'ordre

Principe des gendarmes.

Lemme du tunnel : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Si $a < \ell < b$. apcr, $a < u_n < b$.
Le lemme du tunnel est faux avec des inégalités larges.

Si $a_n \leq b_n$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, sous condition d'existence des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Ce résultat est faux avec des inégalités strictes.

Si X est une partie non vide de $\mathbb{R}$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(X)$.

Théorème de la limite monotone.
Comportement asymptotique d'une suite géométrique.

4.3 Suites adjacentes

Si (x_n) et (y_n) sont adjacentes avec (x_n) croissante, alors ces deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq \ell \leq y_q$.

Théorème des segments emboîtés : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, décroissante au sens de l'inclusion, dont les longueurs tendent vers 0. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

5 Les suites extraites

On se place dans un espace métrique quelconque.
Si une suite dans E converge vers ℓ, toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.

Une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est une suite extraite de (x_n).

valeurs d'adhérence d'une suite en tant que limite d'une suite extraite.

Propriété. (hors programme). a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N\ \ d(x_n, a) < \varepsilon$,
c'est-à-dire si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \ \{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Lemme des pics : De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.
Hors programme : $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.
Théorème de Bolzano-Weierstrass pour une suite de complexes.

6 Suites de Cauchy (hors programme)

Toute suite convergente de E est une suite de Cauchy.

Toute suite de Cauchy de E est bornée.

Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Espaces métriques complets.
Si toute suite bornée de E possède au moins une valeur d'adhérence, alors E est complet.
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries de vecteurs

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 17 : du lundi 2 mars au vendredi 6.

Liste des questions de cours

1°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0. La réciproque est-elle vraie ?

2°) Nature de $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{C}$ et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ en cas de convergence. Justifier.

3°) Montrer que l'absolue convergence implique la convergence dans un Banach.

4°) Lorsque $\sum a_n$ une série de complexes absolument convergente montrer qu'elle converge sans utiliser le critère de Cauchy, à l'aide de $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \max(-a_n, 0)$.

5°) Présenter la technique de comparaison entre séries et intégrales. En déduire le théorème du même nom.

6°) Etablir la nature des séries de Riemann.

7°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{(n^\alpha)}$.

8°) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

9°) Déterminer la nature des séries de Bertrand.

10°) Enoncer et démontrer le critère de D'Alembert.

Thème de la semaine

Séries de vecteurs

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E est un espace de Banach, c'est-à-dire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.

1 Définitions

Définition de la série formelle $\sum a_n$. Sommes partielles d'une série.
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries de vecteurs de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si (A_n) est une suite de vecteurs, la série télescopique $\sum(A_n - A_{n-1})$ est l'unique série dont la suite des sommes partielles est (A_n).

Série tronquée $\sum_{n \geq n_0} a_n$.

2 Convergence d'une série de vecteurs

$\sum a_n$ et $\sum_{n \geq n_0} a_n$ sont de même nature.

La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, $\sum (a_n + \lambda b_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fausse.
Lorsque a_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Définition. Si $\sum a_n$ converge, son n-ième reste de Cauchy est $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. On a $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(a_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(a_n)$ convergent,
et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.

Une série à valeurs dans un produit de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses séries composantes sont convergentes.

3 Convergence absolue

Critère de Cauchy, séries absolument convergente.
L'absolue convergence implique la convergence (car E est de Banach).
Séries semi-convergentes.

4 Séries de réels positifs

4.1 Théorèmes généraux

$\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ avec $a_n = O(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Théorème. Soit $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec b_n de signe constant à partir d'un certain rang.
Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Les espaces vectoriels normés $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{converge } \}$
et $l^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{converge } \}$.

Méthode par défaut pour étudier la nature d'une série $\sum a_n$: rechercher un équivalent de a_n.

4.2 Séries de Riemann

Technique de **comparaison entre séries et intégrales** (TCSI).
Théorème de comparaison entre séries et intégrales : lorsque f est continue positive et décroissante, la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ a même nature que la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt \right)_{n \geq n_0}$.

La **série de Riemann** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Critère de Riemann (étude de $n^\alpha a_n$).

Constante d'Euler : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Séries de Bertrand (hors programme : à savoir établir lorsque c'est nécessaire dans un exercice).

Critère de D'Alembert.

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ (démontrée en DM).

Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries alternées et transformation d'Abel, topologie.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 18 : du lundi 9 mars au vendredi 13.

Liste des questions de cours

1°) Présenter la technique de comparaison entre séries et intégrales. En déduire le théorème du même nom.

2°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{(n^\alpha)}$.

3°) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

4°) Déterminer la nature des séries de Bertrand.

5°) Enoncer et démontrer le théorème spécial des séries alternées.

6°) Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

7°) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

8°) Enoncer et démontrer le théorème d'Abel.

Séries de vecteurs

1 Révision du programme précédent de colles

2 Séries alternées

Théorème des séries spéciales alternées.
Non commutativité des séries semi-convergentes.

3 La transformation d'Abel (hors programme)

Théorème d'Abel : Soient (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et $\sum x_n$ une série de complexes dont les sommes partielles sont bornées. Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Topologie.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 19 : du lundi 30 mars au vendredi 3 avril.

Après deux semaines blanches de colles, pour cette semaine, on considèrera qu'il s'agit bien de la semaine 19 du colloscope.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.

2°) Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n/n \geq N\}}$.

3°) Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

4°) Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 - \sin(zy) \geq y^3\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

5°) Montrer que tout compact de E est fermé et borné.

6°) Soit A une partie d'un espace métrique. On suppose que, pour tout ensemble I et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ tels que $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie J finie de I telle que $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. Montrer que A est compact.

7°) Pour la notion de limite d'une fonction en un point, montrer l'équivalence entre la caractérisation séquentielle et la caractérisation par ε.

8°) Démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas d'une fonction croissante et majorée sur un intervalle majoré.

9°) Montrer qu'un produit cartésien d'un nombre fini de compacts est compact.

10°) Enoncer et démontrer le TVI.

11°) Enoncer et démontrer le théorème de caractérisation de la continuité par des ouverts.

12°) Que dire de l'image directe d'un compact par une application continue ? Démontrez-le.

13°) Enoncer et démontrer l'équivalence entre la caractérisation par ε et la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

Première partie

Topologie dans un espace métrique

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

1 Ouverts et fermés

Voisinage d'un point. On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Intersection d'un nombre fini de voisinages.
Une partie contenant un voisinage est un voisinage.

U est ouvert si et seulement si U est voisinage de tous ses points.
Intersection finie d'ouverts, réunion quelconque d'ouverts.
Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.

Les fermés sont les complémentaires des ouverts.
Intersection quelconque de fermés, réunion finie de fermés.
Les boules fermées (donc en particulier les singletons) sont des fermés.
Toute partie de E de cardinal fini est un fermé de E.

1.1 Adhérence et intérieur

Intérieur d'une partie A : $a \in \mathring{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

$A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Adhérence de A : $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(a) \;\; V \cap A \neq \emptyset]$.

$E \setminus \overline{A} = \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ et $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\displaystyle\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n / n \geq N\}}$.

Points isolés, points d'accumulation d'une partie.

Les points adhérents de A sont les points de E situés à une distance nulle de A.

Une partie de E est dense si et seulement si elle rencontre toutes les boules ouvertes de E.
Une partie A de E est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$.

1.2 Caractérisation par les suites

$a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.
Caractérisation séquentielle des fermés.

1.3 Topologie induite sur une partie

Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur A sont les traces sur A des boules centrées dans A, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de E.
Si B est une partie de A, l'adhérence de B pour la topologie induite sur A est la trace sur A de l'adhérence de B pour la topologie globale sur E.
B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

1.4 Les compacts

Une partie A de E est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.
Tout compact de E est fermé et borné.
Soit A un compact de E et $B \subset A$: B est compact si et seulement s'il est fermé.

Les compacts de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées.

Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue : A est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors l'ensemble $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.

2 Continuité ponctuelle

Par défaut, E et F sont deux espaces métriques et f est une fonction de E dans F, définie sur $\mathcal{D}_f$.

2.1 Limite en un point

Notation. On fixe une partie A de $\mathcal{D}_f$. On fixe également a, qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

2.1.1 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right)$.

Unicité de la limite.

Lorsque $F = \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

2.1.2 Caractérisation par "ε"

Si $a \in E$ et $l \in F$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x,a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x),l) \leq \varepsilon)$.
Adaptation aux cas des limites infinies.

2.1.3 Caractérisation par voisinages

Voisinages de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$, voisinages de ∞ dans E.
Propriétés locales (sur un voisinage de a), propriétés asymptotiques (sur un voisinage de $\pm\infty$).

Propriété. $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l) \ \exists U \in \mathcal{V}(a) \ \ f(U \cap A) \subset V$.

Caractère local de la notion de limite : Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cap U_0}}{\longrightarrow} l$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, limite à gauche et à droite en a de $f(x)$.
$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} l$.

2.2 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$.

Propriété. Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), f est toujours continue en a.
Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$.

Les applications lipschitziennes sont continues.

Si f est continue en a, alors $f|_A$ est aussi continue en a.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, continuité à gauche et à droite.

Prolongement par continuité.
Si f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A, alors f et g coïncident sur A.

2.3 Théorèmes de composition

Pour que $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} m$, il suffit que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(y) \underset{\substack{y \to l \\ y \in B}}{\longrightarrow} m$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} b$ et si g est continue en b, alors $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} g(b)$.
Continuité d'une composée.

Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

2.4 Opérations algébriques sur les limites

2.4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l + l'$.
C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$.

La somme de deux applications continues est continue.

2.4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(fg)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} ll'$.
C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
La $\mathbb{K}$-algèbre des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans $\mathbb{K}$.

2.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Passage à la limite sur une inégalité *large*.

Principe du tunnel : Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, $\alpha < f(x) < \beta$.

Principe des gendarmes.

2.6 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème de la limite monotone.
Si $f\ :\ ]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$ est monotone, elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

3 Continuité globale

3.1 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection.

3.2 Continuité et ouverts

f est continue si et seulement si les images réciproques des ouverts (resp : fermés) sont des ouverts (resp : fermés) relatifs de $\mathcal{D}_f$.

3.3 Continuité d'une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normésE et F.

$f \in L(E,F)$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E, ou encore si et seulement si il existe k tel que $\forall x \in E \ \ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

En exercice : le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé des endomorphismes continus sur E.

3.4 Continuité et compacité

L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.
Si $f \ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue avec A compact, alors f est bornée et elle atteint ses bornes,
L'image directe d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment.

3.5 La continuité uniforme

Caractérisation par ε et caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

Composée d'applications uniformément continues.

"lispchitzienne"$\Longrightarrow$"uniformément continue"$\Longrightarrow$"continue", mais les réciproques sont fausses.

Théorème de Heine.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Calculs asymptotiques : o, O, $\sim$ et développements limités, application aux séries.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 20 : du lundi 20 avril au vendredi 24.

Sur décision ministérielle, les colles sont annulées en totalité à compter du 31 mars. Ce programme n'est donc fourni qu'à titre indicatif.

Comparaison au voisinage d'un point et séries

Liste des questions de cours

1°) Montrer que $\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$.

2°) Montrer que $o(f) + o(f) = o(f)$.

3°) Sous des conditions à préciser, montrer que $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

4°) Enoncer précisément puis démontrer le théorème de changement de variable pour les o, O et $\sim$.

5°) Enoncer et démontrer l'unicité du développement limité.

6°) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $e^{(\cos\sqrt{t})}$.

7°) Enoncer le théorème de sommation des relations de comparaison. Démontrez-le pour les "o" en cas de divergence.

8°) Moyennes de Cesaro : énoncé et démonstration.

9°) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

10°) Nature des séries de Bertrand : énoncé et démonstration.

1 o, O et $\sim$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation. A est une partie d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Soit $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de a rencontre A.

Les applications considérées sont définies sur A et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1.1 La relation de domination

$f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x)) \Longleftrightarrow [\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \ \forall x \in V \cap A\ \ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|]$.
Cas particulier des suites.
Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a, $f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $x \longmapsto \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$ est bornée au voisinage de a.

$\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$, $\mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f)$,
Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $\mathbf{O}(\varphi).\mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi.f)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)$.

Si $f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ et si $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

(Hors programme) Si $(u_n), (v_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ vérifient $\forall n \geq N\ \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.

1.2 La relation de prépondérance

$f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{o}(g(x)) \Longleftrightarrow [\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ \exists V \in \mathcal{V}(a)\ \ \forall x \in V \cap A\ \ \|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|]$.
Cas particulier des suites.
Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a, $f = o(g)$ si et seulement si $\dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

$o(f) = \mathbf{O}(f)$, $o(\mathbf{O}(f)) = o(f)$ et $\mathbf{O}(o(f)) = o(f)$ (donc aussi $o(o(f)) = o(f)$).
$o(f) + o(f) = o(f)$, Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $o(\varphi).\mathbf{O}(f) = o(\varphi.f)$ et $\mathbf{O}(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$ (donc aussi $o(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$). Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $o(f)^\alpha = o(f^\alpha)$.

Théorème des croissances comparées : Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 1$.

1. Les suites $\ln^\alpha(n)$, n^β, a^n et $n!$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $\ln^\alpha x$, x^β et $e^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de 0^+, $|\ln x|^\alpha = o\Big(\dfrac{1}{x^\beta}\Big)$.
4. Au voisinage de $-\infty$, $e^{\gamma x} = o\Big(\dfrac{1}{|x|^\beta}\Big)$.

1.3 La relation d'équivalence

1.3.1 Définition

$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.
On suppose qu'il existe un voisinage de a sur lequel $g(x)$ ne s'annule jamais et que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $f \sim g \Longleftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 1$.
La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A, F)$.

1.3.2 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

Stabilité du produit. Si $\varphi \sim \Psi$, avec φ et Ψ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et si $f \sim g$, alors $\varphi.f \sim \Psi.g$.
Si $f \sim g$, alors $\|f\| \sim \|g\|$, $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$, $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$.

Si $f \sim g$, $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a,
elles ont même limite en cas d'existence.

La condition $f = \mathbf{O}(g)$ (respectivement $f = o(g)$, $f \sim g$) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant f et g par des applications équivalentes.

(Hors programme :) Sous de bonnes conditions, $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

Théorème de changement de variable pour les o, O et $\sim$.

1.3.3 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

En général, si $f(x) \sim g(x)$, $\varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))$.

L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable pour la somme.

1.4 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, on suppose que $E = \mathbb{K}$ et que a est un point d'accumulation de A.

1.4.1 Définitions

Développements limités au sens faible et fort, partie principale.

unicité du développement limité.
Cas des fonctions paires ou impaires.

1.4.2 Opérations sur les développements limités

Les règles de calcul établies pour les "o" et les "O" permettent d'additionner, de multiplier et de composer des développements limités entre eux.

Il est souvent pratique d'écrire le DL $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ sous sa forme normalisée $a_m x^m(1 + \cdots + o(x^{n-m}))$.

1.4.3 Applications

Détermination de la tangente et positionnement local du graphe par rapport à cette tangente.
Détermination d'une asymptote oblique et positionnement asymptotique du graphe par rapport à cette asymptote.

2 Séries

Réviser ce qui a déjà été fait.

Théorème de sommation des relations de comparaison.
Application aux moyennes de Cesaro.

Séries de Bertrand (hors programme).

Prévisions pour la semaine suivante :

Dérivation.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 21 : du lundi 27 avril au vendredi 1er mai.

Sur décision ministérielle, les colles sont annulées en totalité à compter du 31 mars. Ce programme n'est donc fourni qu'à titre indicatif.

Dérivation

Liste des questions de cours

1°) Dérivée d'un produit de la forme $B(f, g)$: énoncé et démonstration.

2°) Dérivée d'une composée : énoncé et démonstration.

3°) Montrer qu'une composée de deux applications de classe C^n est de classe C^n.

4°) Enoncer et démontrer le lemme de Rolle généralisé au cas non borné.

5°) Si P est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que P' l'est aussi.

6°) Enoncer et démontrer le théorème de la limite de la dérivée.
Que se passe-t-il lorsque $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} +\infty$?

7°) Enoncer et démontrer l'égalité de Taylor-Lagrange.

8°) CNS pour que f^{-1} soit dérivable en $f(t)$: énoncé et démonstration.

9°) CNS pour que f soit un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$: énoncé et démonstration.

10°) Représentez graphiquement le comportement d'une suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$.

11°) Présentez l'étude de la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ avec $x_0 > 0$.

12°) Lorsque $f(\ell) = \ell$ avec $|f'(\ell)| < 1$, montrer que ℓ est un point d'équilibre localement stable.

13°) Enoncer et démontrer la propriété d'associativité du barycentre.

14°) Donner la définition de la convexité ainsi que son interprétation géométrique.

15°) Montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.

16°) Enoncer et démontrer l'équivalence entre la convexité et la croissance des pentes.

17°) Si f est dérivable, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Dérivation

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle d'intérieur non vide et $a \in I$.
Les applications considérées sont définies sur I et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.

1 Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivées à gauche et à droite.
f est dérivable en a si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que $f(t) = f(a) + (t-a)l + o(t-a)$.

dérivable $\Longrightarrow$ continue.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivation d'une application à valeurs dans un produit cartésien d'espaces vectoriels normés.
Dérivation d'une application à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, en fonction de ses applications coordonnées.
Cas particulier : $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a ssi $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Re}(f)$ sont dérivables en a.

Linéarité de la dérivation,
Dérivée de $u \circ f$, où u est linéaire continue et f dérivable.

Définition d'une application bilinéaire,
dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire continue et où f et g sont dérivables.

Dérivation d'une composée.

Dérivée de l'inverse lorsque $f(I) \subset \mathbb{K}$.
Dérivée logarithmique.

3 Dérivées d'ordre supérieur

Applications D^n et C^n.

Formule de Leibniz pour la dérivée d'ordre n de $B(f,g)$.

Composée d'applications D^n ou C^n.

4 L'égalité des accroissements finis

Dans ce paragraphe, toutes les applications utilisées sont définies sur I et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les extremums locaux sur $\overset{\circ}{I}$ de $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sont des points critiques de f. Réciproque faussse.

lemme de Rolle
Généralisation : Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée, généralisation aux dérivées d'ordre supérieur.

5 Formules de Taylor

L'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme) pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalite de Taylor-Lagrange.

Primitivation d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young.

6 Monotonie et dérivabilité

Lien entre sens de variation et signe de la dérivée.
Condition de stricte monotonie.

Dérivée de f^{-1}.
CNS pour que f soit un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$.

7 Suites récurrentes d'ordre 1

Étude de suites (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$, lorsque x_0 est dans un intervalle I tel que $f : I \longrightarrow I$ est continue et monotone.

Représentation graphique de (x_n) .

Limites et points fixes de f.

Lorsque $f|_I$ est croissante, (x_n) est monotone, toujours à gauche ou toujours à droite d'un point fixe.

Lorsque $f|_I$ est décroissante. les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.

Lorsque $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| < 1$ (resp : $|f'(\ell)| > 1$), ℓ est un point d'équilibre localement stable (resp : instable).

8 Fonctions convexes

8.1 Sous-espaces affines

Repère affine.

Dimension d'un sous-espace affine.
Sous-espaces affines parallèles.

L'ensemble des solutions d'une équation linéaire compatible est un sous-espace affine.

Intersection de sous-espaces affines.

8.2 Barycentres et convexité

Notation. On fixe un espace affine $\mathcal{E}$, p points $A_1, \dots, A_p$ de $\mathcal{E}$ et p scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$.

Fonction vectorielle de Leibniz : $\forall M \in \mathcal{E}$, $\varphi(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$.

Homogénéïté et associativité du barycentre.

Parties convexes.
Les sous-espaces affines sont des convexes.
Une intersection de parties convexes est convexe.
Enveloppe convexe.

8.3 Inégalités de convexité

Notation. On fixe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Convexité et concavité, stricte convexité.
Interprétation géométrique.
Sommes de fonctions convexes.

Points d'inflexion.

L'épigraphe de f, égal à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$, est convexe si et seulement si f est convexe.

Inégalité de Jensen.
la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$ est inférieure à la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

8.4 Croissance des pentes

Convexité et croissance des pentes : en posant $p_x(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = p_y(x)$, f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_a(b) \leq p_a(c)$ (resp : $p_b(a) \leq p_b(c)$, ou encore $p_c(a) \leq p_c(b)$).

Hors programme : Si f est convexe sur I, elle est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

8.5 Fonctions convexes dérivables

Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si f' est croissante, ou bien si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.

Prévisions pour la semaine suivante :

Polynômes.

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 22 : du lundi 04 mai au vendredi 8 mai.

Polynômes et arithmétique

Liste des questions de cours

1°) Déterminer les polynômes inversibles de $A[X]$ lorsque A est un anneau commutatif intègre.

2°) Enoncer et démontrer une propriété portant sur le degré de la composée de deux polynômes.

3°) Enoncer et démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne entre polynômes.

4°) Montrer que a est racine de P si et seulement si $(X-a) \mid P$.

5°) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

6°) Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si il ne possède aucune racine dans $\mathbb{K}$.

7°) Montrer que, dans un anneau principal, ab et $(a \wedge b)(a \vee b)$ sont associés.

8°) Dans $\mathbb{K}[X]$, énoncer et démontrer le théorème d'existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes d'irréductibles.

9°) Montrer que $a_1, \ldots, a_k$ sont racines de P si et seulement si $(X-a_1) \times \cdots \times (X-a_k)$ divise P.

10°) Ecrire (en justifiant) tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

11°) Enoncer et démontrer la formule de Taylor.

12°) Enoncer et démontrer une propriété qui fait le lien entre multiplicité de a pour P et dérivées successives de P en a.

13°) Soit $P(X) = X^3+aX^2+bX+c \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$, dont les racines, comptées avec multiplicité sont notées x_1, x_2 et x_3. Calculer $S = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1} + \dfrac{1}{x_3+1}$ en fonction de a, b, c.

14°) Montrer que α est racine de P de multiplicité m ssi $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P}$ de multiplicité m.

1 L'anneau des polynômes

Notation. A désigne un anneau quelconque.

Polynômes formels de $A[X]$. Addition entre polynômes. $(A[X], +)$ est un groupe.

Degré d'un polynôme. $A[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n[X]$.
Degré d'une somme de polynômes.

Produits de polynômes. $(A[X], +, \times)$ est un anneau contenant A.

$A[X]$ est commutatif intègre si et seulement si A est commutatif intègre.

Pour toute la suite, on suppose que A est commutatif intègre.

Degré d'un produit de polynômes.

Ensemble des polynômes inversibles.

Application polynomiale $\tilde{P} \in A^A$ associée à un polynôme formel $P \in A[X]$.
$P \longmapsto \tilde{P}$ est un morphisme d'anneaux.

Algorithme d'Hörner.

Définition de $A[X_1, \dots, X_n]$: aucune connaissance n'est exigible sur les polynômes à plusieurs indéterminées.

Composition de polynômes.
Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Dérivation formelle. Dérivée d'ordre n.
$\deg(P') \leq \deg(P) - 1$: **Le cas d'égalité n'est pas envisagé pour le moment.**
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, formule de Leibniz, dérivée d'une composée.

Pour la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps .

Division euclidienne.
Reste de la division de P par $X - a$. a est racine de P si et seulement si $(X - a)|P$.
Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, les quotient et reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{L}[X]$ par $B \in \mathbb{L}[X] \setminus \{0\}$ sont les mêmes que l'on regarde A et B comme des polynômes de $\mathbb{L}[X]$ ou de $\mathbb{K}[X]$.

2 Arithmétique

2.1 Divisibilité

La relation de divisibilité dans l'anneau A.
$a|b \iff bA \subseteq aA$.
La relation de divisibilité est réflexive et transitive.
Eléments de A associés.

Hypothèse : on suppose que A est intègre et commutatif.

Soit $a, b \in A$. a et b sont associés si et seulement s'il existe $\lambda \in U(A)$ tel que $a = \lambda b$.
La relation de divisibilité est un ordre sur $\mathbb{N}$ et sur l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Eléments irréductibles de A.

Eléments de A premiers entre eux, deux à deux ou globalement.

Si $p \in A$ est irréductible, pour tout $a \in A$, $p|a$, ou bien p et a sont premiers entre eux.

2.2 PGCD et PPCM

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

Notation. Dans ce chapitre, A désigne un anneau principal.
PGCD et PPCM de deux éléments : définition par idéaux, caractérisation par divisibilité.
PGCD et PPCM de k éléments, d'une partie quelconque de A.

Commutativité et associativité des PGCD et PPCM,
distributivité du produit par rapport au PGCD et au PPCM.

2.3 Bezout et Gauss

Identité de Bezout, théorème de Gauss.
Si $p \mid ab$ avec p irréductible, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$.
Si $a|b$, $c|b$ et $a \wedge c = 1$ alors $ac|b$.
ab et $(a \wedge b)(a \vee b)$ sont associés.

2.4 $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont factoriels

Notation. Ici, $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{K}[X]$. Si $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}$ désigne $\mathbb{P}$,
et si $A = \mathbb{K}[X]$, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires.

Existence et unicité de la décomposition en produit d'irréductibles.
Si $a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p}$ et $b = v \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\mu_p}$, alors $a \mid b \iff [\forall p \in \mathcal{P},\ \nu_p \leq \mu_p]$,
$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(\nu_p, \mu_p)}$ et $a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(\nu_p, \mu_p)}$.

2.5 Algorithme d'Euclide

Lemme d'Euclide : si $a = bq + r$, alors $a \wedge b = b \wedge r$.
Algorithme d'Euclide. Utilisation de l'algorithme d'Euclide pour calculer des coefficients de Bezout de deux polynômes (ou de deux entiers) premiers entre eux.

En exercice : pour $a, b \in A$, solutions de l'équation de Bézout $(B) \ : \ au + bv = c$ en l'inconnue $(u, v) \in A^2$.

Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $(A, B) \in \mathbb{L}[X] \times (\mathbb{L}[X] \setminus \{0\})$, les PGCD et PPCM de A et B sont les mêmes, que l'on regarde A et B comme des polynômes de $\mathbb{L}[X]$ ou de $\mathbb{K}[X]$.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Identification entre polynômes formels et applications polynomiales

$a_1, \ldots, a_k$ sont racines de P si et seulement si P est un multiple de $(X - a_1) \times \cdots \times (X - a_k)$.
Un polynôme non nul admet au plus $\deg(P)$ racines.

Principe de rigidité des polynômes : si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines, alors $P = 0$.
Lorsque $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, si $\{x \in \mathbb{K} \ / \ \tilde{P}(x) = \tilde{Q}(x)\}$ contient au moins $n + 1$ scalaires, alors $P = Q$.

Identification entre polynômes formels et applications polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ lorsque $\mathbb{K}$ est infini.

Polynômes d'interpolation de Lagrange.

3.2 Polynôme dérivé, lorsque car($\mathbb{K}$) $= 0$

$\deg(P) \geq 1 \Longrightarrow \deg(P') = \deg(P) - 1$.

Formule de Taylor. Reste de la division euclidienne par $(X-a)^k$.

3.3 Racines multiples

Racine de multiplicité au moins m de P ou exactement m de P.

Les a_h sont racines de P de multiplicité au moins m_h si et seulement si $\prod_{h=1}^{k}(X-a_h)^{m_h}$ divise P.

Le nombre de racines de P (non nul), comptées avec multiplicité est inférieur ou égal au degré de P.

Lorsque car($\mathbb{K}$) $= 0$, lien entre multiplicité de a et dérivées successives en a.

3.4 Polynômes scindés

Polynômes scindés, simplement scindés.

Relations de Viète entre coefficients et racines.

3.5 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$

$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$ est un isomorphisme d'anneaux.

α est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P}$ de multiplicité m.

Théorème de d'Alembert.
Dans $\mathbb{C}[X]$, le nombre de racines avec multiplicité, de tout polynôme non nul est égal à son degré.
$P \mid Q$ si et seulement si toute racine de P est racine de Q avec une multiplicité pour Q supérieure ou égale à celle pour P.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Polynômes (à nouveau) et fractions rationnelles.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 23 : du lundi 11 mai au vendredi 15 mai.

Fractions rationnelles et polynômes

Liste des questions de cours

1°) Enoncer et démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne entre polynômes.

2°) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

3°) Dans $\mathbb{K}[X]$, énoncer et démontrer le théorème d'existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes d'irréductibles.

4°) Enoncer et démontrer une propriété qui fait le lien entre multiplicité de a pour P et dérivées successives de P en a.

5°) Pour une fraction rationnelle, montrer l'existence et l'unicité de sa forme irréductible unitaire et préciser quels sont ses autres représentants.

6°) Montrer l'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle puis présenter la méthode des divisions successives pour la DES de $\dfrac{B}{S^m}$ où S est irréductible.

7°) Donner en justifiant la DES de $\dfrac{P'}{P}$ et deux expressions du coefficient λ de l'élément simple $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la DES de $F = \dfrac{A}{S}$ lorsque a est un pôle simple de F.

8°) DES de $F(X) = \dfrac{2X^2+6}{(X^2-1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

9°) DES dans $\mathbb{C}(X)$ de $F = \dfrac{1}{X^n-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

10°) Méthode permettant le calcul de $\displaystyle\int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2}dt$.

11°) Présenter les règles de Bioche et calculer $\displaystyle\int \cos^4 t \sin^3 t\; dt$.

1 Les polynômes

En révisions.

2 Fractions rationnelles

2.1 Le corps des fractions rationnelles

Corps des fractions d'un anneau intègre commutatif.

Forme irréductible unitaire d'une fraction rationnelle.

Degré d'une fraction rationnelle, degré d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Racines et pôles, multiplicité d'une racine ou d'un pôle.

$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$ est un isomorphisme de corps.
α est racine (resp : pôle) de $F \in \mathbb{C}(X)$ de multiplicité m si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine (resp : pôle) de $\overline{F}$ de multiplicité m.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.

Si deux fractions rationnelles coïncident pour une infinité de valeurs de $\mathbb{K}$, elles sont égales.

Composition $P \circ F$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$.
Composition $F \circ G$ où $F \in \mathbb{K}(X)$ et $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$.

Dérivation d'une fraction rationnelle, dérivée n-ième.
$\deg(F') \leq \deg(F) - 1$, avec égalité lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $\deg(F) \notin \{0, -\infty\}$.
Degré d'une somme, d'un produit, d'un quotient, formule de Leibniz, degré d'une composée.

2.2 Décomposition en éléments simples.

Partie entière d'une fraction rationnelle.

Méthode des divisions successives pour la DES de $\dfrac{B}{S^m}$ où S est irréductible.

Le théorème de décomposition en éléments simples. Cas particuliers où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

DES de $\dfrac{P'}{P}$.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de $F = \dfrac{A}{S}$ de multiplicité m, le coefficient λ de l'élément simple $\dfrac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = [\widetilde{(X-\alpha)^m F}](\alpha) = \dfrac{m!\tilde{A}(\alpha)}{\widetilde{S^{(m)}}(\alpha)}$.

2.3 Application au calcul intégral

Primitives d'une fraction rationnelle.

Primitives d'une fraction rationnelle en sin et cos.
règles de Bioche.

Primitives d'une fraction rationnelle en sh et ch.

Prévisions pour la semaine suivante :

En raison du pont de l'Ascension, la prochaine semaine de colle sera du 25 au 29 mai.
Algèbre linéaire.

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 24 : du lundi 25 mai au vendredi 29 mai.

Une partie de l'algèbre linéaire

Pour cette semaine, les élèves ne disposent pas

- des notions de rang d'une application linéaire ou d'une matrice, mais seulement de la notion de rang d'une famille de vecteurs ;
- de la notion de matrice de passage entre 2 bases ;
- de la théorie des systèmes linéaires, sauf en dimension 2 ;
- de la notion de somme directe d'espaces vectoriels, ni de celle de projecteurs ;
- de la notion d'hyperplan ;
- des déterminants, sauf en dimension 2.

Les étudiants sont sensibilisés aux notions de valeurs propres, éléments propres, matrices diagonalisables mais aucune maîtrise de ces notions n'est attendue.

Liste des questions de cours

1°) Montrer l'associativité du produit matriciel.

2°) En notant $\tilde{M}$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice M, montrer que $M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer pour un système de Cramer de deux équations linéaires.

4°) Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $c_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $F_i = \text{Vect}(c_k)_{1 \leq k \leq i}$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que M est triangulaire supérieure ssi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, F_j est stable par $\tilde{M}$.

5°) Enoncer et démontrer une propriété concernant la transposée du produit de deux matrices.

6°) Enoncer et démontrer une propriété relative à la trace du produit de deux matrices. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

7°) Sans aucune connaissance sur les espaces vectoriels de dimensions finies, montrer que toute famille de $n + 1$ vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

8°) Enoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

9°) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés étagés : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(P_n) = n$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

10°) Montrer que $f \in L(E)$ est une homothétie si et seulement si pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est lié.

11°) $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = ?$: énoncé et démonstration.

12°) Définir l'application linéaire associée à une famille de vecteurs. Condition portant sur cette application pour que la famille soit libre (resp : génératrice). Justifier.

13°) Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $f = (f_i)_{i \in I} \in F^I$, montrer qu'il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ et donner une CNS portant sur (f_i) pour que u soit injective (resp : surjective).

14°) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et B une sous-algèbre de A de dimension finie. Soit $b \in B$. Montrer que si b est inversible dans A, alors $b^{-1} \in B$.

15°) Montrer que la matrice d'une composée de deux applications linéaires est le produit de leurs matrices.

1 Espaces vectoriels

Révision du programme de la semaine 15

2 Les matrices

2.1 Vocabulaire

Matrices rectangles, carrées, matrices lignes, colonnes.
Matrices triangulaires supérieures et inférieures, matrices diagonales, matrices scalaires.

On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, 1)$ (ensemble des matrices colonnes).

2.2 Opérations sur les matrices

$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Convention : Lorsque A est une matrice, on notera $A_{i,j}$ son coefficient de position (i, j).

Produit matriciel. Associativité, distributivité par rapport à l'addition.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, on note $\tilde{M}$ l'application linéaire canoniquement associée à M.
$M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ dans $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Noyau et image d'une matrice.

2.3 L'algèbre des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, ni commutative ni intègre dès que $n \geq 2$.

matrices nilpotentes.

$M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ dans $L(\mathbb{K}^n)$.
$A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ est inversible si et seulement si $\tilde{A}$ est inversible dans $L(\mathbb{K}^n)$, auquel cas $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$.
$A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ est inversible ssi pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $Y \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = Y$.

Inverse d'une matrice carrée de taille 2.
Formule de Cramer pour un système de 2 équations linéaires.

Sous-algèbres des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures et inférieures.

2.4 Transposée d'une matrice

$A \longmapsto {}^tA$ est un isomorphisme involutif d'espaces vectoriels.

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Matrices symétriques et antisymétriques.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par passage à l'inverse.

2.5 Différentes interprétations du produit matriciel

La j-ème colonne de AB est égale à $A \times$ (la j-ème colonne de B).
Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A.

Transposition de ces propriétés en termes de lignes.

2.6 Trace d'une matrice

$Tr(AB) = Tr(BA)$.

Matrices semblables.
Deux matrices semblables ont la même trace (réciproque fausse).

Définition d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable.

2.7 Matrices décomposées en blocs

2.7.1 Matrices extraites

Lorsque I et J sont deux parties finies de $\mathbb{N}$, identification d'une famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ avec une matrice possédant $|I|$ lignes et $|J|$ colonnes.

Matrices extraites.

2.7.2 Matrices blocs

Matrices décomposées en blocs.
Matrices diagonales par blocs, triangulaires supérieures ou inférieures par blocs.

Produit matriciel de matrices décomposées en blocs.
Produits et puissances de matrices diagonales par blocs, ou bien triangulaires supérieures par blocs.

3 Familles de vecteurs

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

3.1 Familles libres et génératrices

Familles libres, liées, génératrices, bases.
Coordonnées d'un vecteur dans une base.

3.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition. E est de dimension finie si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

Lemme : Toute famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est liée.

Théorème de la base incomplète.
Famille libre maximale.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
Si $\dim(E) = n$, e est une base de E si et seulement si e est libre et de cardinal n, ou encore si et seulement si e est génératrice et de cardinal n.

Si $F \subset G$, $\dim(F) \leq \dim(G)$, avec égalité si et seulement si $F = G$.

$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$.

3.3 Base canonique

Bases canoniques de $\mathbb{K}^{(I)}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$.
En exercice, produit de deux matrices élémentaires : $E_{i,j}E_{h,k} = \delta_{j,h}E_{i,k}$.

3.4 Exemples

Dans $\mathbb{K}^2$, deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

Base des polynômes d'interpolation de Lagrange.
Famille de polynômes de degrés étagés.

Exercice : $f \in L(E)$ est une homothétie si et seulement si pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est lié.

3.5 Application linéaire associée à une famille de vecteurs

Si $x = (x_i) \in E^I$, on note $\begin{array}{cccc} \Psi_x : & \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow & E \\ & (\alpha_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \end{array}$.

x est une famille libre (resp : génératrice) si et seulement si Ψ_x est injective (resp : surjective).
Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^{(I)}$.

3.6 Image d'une famille par une application linéaire

Notation. Si $u \in L(E,F)$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in E^I$, on notera $(u(x_i))_{i\in I} = u(x)$. Alors $\Psi_{u(x)} = u \circ \Psi_x$.
Image d'une famille libre (resp : génératrice) par une injection (resp : surjection) linéaire.

Deux espaces de dimensions finies ont la même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.
$\dim(u(G)) \leq \dim(G)$, avec égalité lorsque u est injective.

Théorème. Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $f = (f_i)_{i\in I} \in F^I$, il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $u(e_i) = f_i$. CNS portant sur (f_i) pour que u soit injective (resp : surjective).

Soit $u \in L(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors u injective $\Longleftrightarrow$ u surjective $\Longleftrightarrow$ u bijective.
Une matrice carrée ou bien un endomorphisme en dimension finie est inversible si et seulement si il l'est à droite (resp : à gauche).

CNS pour qu'une matrice triangulaire supérieure soit inversible. Dans ce cas, son inverse est encore triangulaire supérieure.

Si E admet une base $(e_i)_{i\in I}$, alors $L(E,F)$ est isomorphe à F^I.
$\dim(L(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

3.7 Rang d'une famille de vecteurs

Si x est une famille de vecteurs de E, $\mathrm{rg}(x) \leq \#(x)$ et $\mathrm{rg}(x) \leq \dim(E)$. CNS d'égalité.

$\mathrm{rg}(u(x)) \leq \mathrm{rg}(x)$, avec égalité lorsque $\mathrm{rg}(x) < +\infty$ et u injective.

$\mathrm{rg}(x_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si l'on échange l'ordre de deux vecteurs, si l'on multiplie l'un des vecteurs x_i par un scalaire non nul, ou bien si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

3.8 Matrice d'une application linéaire

Notation. $\mathrm{mat}(u, e, f)$, où $u \in L(E, F)$, e base de E et f base de F.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, l'application linéaire canoniquement associée à M est $\begin{array}{rccc} \tilde{M} : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & \tilde{M}(X) = MX \end{array}$.
C'est aussi l'unique application linéaire telle que $\mathrm{mat}(\tilde{M}, \text{bases canoniques}) = M$.

$u \longmapsto \mathrm{mat}(u, e, f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $L(E, F)$ dans $\mathrm{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.
$u \longmapsto \mathrm{mat}(u, e)$ est un isomorphisme d'algèbres de $L(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème. $\mathrm{mat}(v \circ u) = \mathrm{mat}(v) \times \mathrm{mat}(u)$.

$\mathrm{mat}(u, e, f)^{-1} = \mathrm{mat}(u^{-1}, f, e)$.

$u(x) = y \Longleftrightarrow MX = Y$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Fin de l'algèbre linéaire (sans les déterminants).

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 25 : du lundi 1er au vendredi 5 juin.

Algèbre linéaire (sans les déterminants)

Liste des questions de cours

1°) Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$.

2°) Définir les opérations élémentaires sur les lignes et interprétez-les en termes de produit matriciel.

3°) Présenter en détails l'algorithme du pivot partiel.

4°) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer leurs dimensions.

5°) Si H est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, montrer que $u|_H^{\mathrm{Im}(u)}$ est un isomorphisme.

6°) Montrer que $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$ et préciser le cas d'égalité.

7°) Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.

8°) Montrer que si $p^2 = p$, alors il existe F, G tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

9°) Que peut-on dire de la somme d'un nombre fini de sous-espaces propres ? Démontrez-le.

10°) Enoncer et démontrer la formule de changement de bases pour un vecteur.

11°) Enoncer et démontrer la formule de changement de bases pour une application linéaire.

12°) Enoncer 4 définitions d'un endomorphisme diagonalisable et établir qu'elles sont équivalentes.

13°) Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

14°) Montrer que $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r désigne le rang de M.

15°) Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est égal à la taille maximale des matrices inversibles extraites de A.

16°) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle, laquelle est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

1 Révisions du programme de colles précédent

2 Les systèmes linéaires

2.1 Trois interprétations d'un système linéaire

Interprétation par combinaison linéaire de vecteurs colonnes. Condition de compatibilité.

Interprétation matricielle.
Système de Cramer.

Interprétation par une application linéaire.
Structure de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

2.2 Les opérations élémentaires

Pour les lignes : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection), $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ (affinité) et $L_i \longleftrightarrow L_j$ (transposition).
Interprétation par multiplication à gauche par une matrice inversible particulière.

Opérations élémentaires sur les colonnes. Interprétation par multiplication matricielle à droite.

Principe de la résolution d'un système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice globale du système.
Principe du calcul de l'inverse de M par opérations élémentaires sur les lignes de $\boxed{M}\boxed{I_n}$.

2.3 Méthode du pivot de Gauss

Algorithme du pivot partiel, où le pivot de l'étape r est cherché uniquement dans la colonne r.
Algorithme du pivot total.
Résoudre un système, c'est exprimer les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales.

2.4 Méthode de Gauss-Jordan, lorsque le système est de Cramer

Toute matrice inversible est un produit de matrices de transvections, d'affinités et de transpositions.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

3.1 Sommes et sommes directes de k sous-espaces vectoriels

3.2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

3.3 Rang d'une application linéaire

Si H est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, alors $u|_H^{\mathrm{Im}(u)}$ est un isomorphisme.
Formule du rang.

$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

Rang d'une matrice.
On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.

3.4 Propriétés des sommes directes

Si $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$, pour définir une application linéaire u de E dans F, il suffit de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

$\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$, $\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.

Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Associativité des sommes directes.

$E_1, \ldots, E_k$ sont en somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2, \ldots, k\}\ E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.

Théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe.

3.5 Les projecteurs

projecteur sur F parallèlement à un supplémentaire de F.
p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Symétrie par rapport à F parallèlement à un supplémentaire de F.
Lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, s est une symétrie si et seulement si $s^2 = Id_E$.

4 Sous-espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre.

La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres de u est toujours directe.

Si $v \in L(E)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

5 Changement de base

Matrice de passage entre deux bases e et e'. C'est $\mathrm{mat}(Id_E, e', e)$.
Formules de changement de base, pour des vecteurs, puis des applications linéaires.
Si e, e' et e'' sont trois bases de E, $P_e^{e"} = P_e^{e'} P_{e'}^{e"}$ et $\left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^{e}$.

6 Diagonalisation et trigonalisation

Différentes caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : existence d'une matrice diagonale, existence d'une base de vecteurs propres, la somme des sous-espaces propres recouvre tout l'espace, la somme des dimensions des sous-espaces propres est celle de l'espace.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Définition d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

7 Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$.

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

8 Matrices équivalentes

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases de départ différentes et des bases d'arrivée différentes.

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si il est possible de transformer l'une en l'autre par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, M est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r désigne le rang de M.
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

9 Propriétés du rang d'une matrice

$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$.
Le rang de M est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Le rang d'une matrice est égal au nombre d'étapes dans la méthode du pivot global.

Si P est une matrice extraite de M, alors $\mathrm{rg}(P) \leq \mathrm{rg}(M)$.
$\mathrm{rg}(A)$ est égal à la taille maximale des matrices inversibles extraites de A.

10 Matrices semblables

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes, en imposant de prendre une même base au départ et à l'arrivée.

Si $M' = PMP^{-1}$, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(M') = PQ(M)P^{-1}$.
Si M' et M sont inversibles, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$.

11 Les hyperplans

11.1 En dimension quelconque

Soit H un hyperplan et D une droite non incluse dans H. Alors $H \oplus D = E$.

H est un hyperplan de E si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle, laquelle est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

11.2 En dimension finie

Base duale d'une base de E.
Equation d'un hyperplan vectoriel.

11.3 Application aux systèmes linéaires

Équation d'un hyperplan affine.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est une intersection d'hyperplans affines.

En dimension p, l'intersection de r hyperplans vectoriels est de dimension supérieure à $p - r$.
Réciproquement tout sev de dimension $p - r$ où $r \geq 1$ est une intersection de r hyperplans de E.

Tout sous-espace affine différent de $\mathcal{E}$ peut être caractérisé par un système d'équations linéaires. C'est une intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines.

Prévisions pour la semaine suivante :

Déterminants.

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 26 : du lundi 8 au vendredi 12 juin.

Algèbre linéaire (sans les déterminants)

On reprend les programmes de colles précédents, relatifs à l'algèbre linéaire, sans les déterminants.

Les questions de cours sont celles de la semaine précédente.

Prévisions pour la semaine suivante :

Déterminants, espaces vectoriels normés en dimension finie.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 27 : du lundi 15 au vendredi 19 juin.

Déterminants et analyse sur un espace de dimension finie

Liste des questions de cours

1°) Enoncer puis établir les liens entre “antisymétrique” et “alternée” pour une application p-linéaire.

2°) Lorsque e est une base de E, donner la définition de $\det_e$: on proposera deux formules et l'on montrera qu'elles sont égales.

3°) Si e est une base de E, montrer que $\det_e$ est alternée.

4°) Montrer que pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e)\det_e$.

5°) Donner et justifier la définition du déterminant d'un endomorphisme.

6°) Si $f, g \in L(E)$, que peut-on dire de $\det(fg)$? Démontrez-le.

7°) Enoncer et démontrer la formule du développement de $\det(M)$ selon l'une de ses colonnes.

8°) Montrer que $M^tCof(M) = {}^tCof(M)M = \det(M)I_n$.

9°) Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ? Démontrez-le.

10°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer.

11°) Calcul du déterminant de Vandermonde.

12°) Montrer que toute application linéaire définie sur un espace de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est continue.

13°) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Révisions des programmes précédents concernant l'algèbre linéaire

2 Déterminants

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

2.1 Applications multilinéaires

Formes p-linéaires, formes bilinéaires.

Formes p-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.
alternée$\Longrightarrow$antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque $car(\mathbb{K}) \neq 2$.

2.2 Les trois notions de déterminants

2.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $n > 0$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le "volume algébrique" de l'hyperparallélépipède défini par $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est nécessairement une forme n-linéaire alternée en fonction de x.

Notation. On note $A_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, si e est une base de E, on pose
$\det_e(x_1, \ldots, x_n) \triangleq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_j(x_{\sigma(j)})$.

Si e est une base de E, pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e) \det_e$.
$A_n(E)$ est la droite vectorielle dirigée par $\det_e$.

2.2.2 Déterminant d'une matrice

$\det(M) = \det({}^tM)$.

Formule de Sarrus.

2.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. $\det(u)$ est l'unique scalaire tel que $\forall f \in A_n(E),\ \forall x \in E^n,\ f(u(x)) = (\det(u))f(x)$.

Si e est une base de E et $u \in L(E)$, $\det_e(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \ldots, x_n)$.
$\det(u) = \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $det(u) = det(Mat(u, e))$.

2.3 Propriétés du déterminant

Modification du déterminant lors d'une opération élémentaire portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Pour tout $f, g \in L(E)$, $\det(fg) = \det(f) \times \det(g)$.

x est une base si et seulement si $\det_e(x) \neq 0$.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.
$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
Groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E) \ /\ \det(u) = 1\}$.

Le déterminant est un invariant de similitude.

2.4 Calcul des déterminants

Mineurs et cofacteurs.
Développement de $\det(M)$ selon l'une des ses lignes ou de ses colonnes.

Comatrice $Com(M)$. $M^tCom(M) = {}^tCom(M)M = \det(M)I_n$.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Formules de Cramer.

2.5 Exemples de déterminants.

Déterminant de Vandermonde.

Déterminants tridiagonaux : relation de récurrence.

Déterminants circulants : On ajoute toutes les lignes (ou colonnes).

2.6 Le polynôme caractéristique

Les élèves savent seulement que le polynôme caractéristique de M en λ est $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ et qu'il permet de déterminer les valeurs propres de M.

3 Espaces vectoriels normés de dimensions finies

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont exactement ses fermés bornés.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est complet, donc fermé.

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Toute application linéaire (resp : p-linéaire) définie sur un espace de dimension finie est continue.
Les applications polynomiales de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_p]$ sont continues.

Prévisions pour la semaine suivante :

Espaces euclidiens.

MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 28 : du lundi 22 au vendredi 26 juin.

Espaces euclidiens

Liste des questions de cours

1°) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2°) Montrer que $A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

3°) Montrer que dans $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ muni d'un p.s à préciser, le sous-espace vectoriel $F = \{(x_n) \ / \ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0\}$ ne possède pas de supplémentaire orthogonal.

4°) Si E est un espace euclidien, montrer que E et son dual sont naturellement isomorphes.

5°) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, montrer que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

6°) Enoncer et démontrer le théorème de la projection orthogonale.

7°) Enoncer le procédé de Gram-Schmidt et démontrer la partie existence.

8°) Présenter en justifiant l'interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

9°) CNS pour qu'une projection soit un endomorphisme symétrique. Justifiez.

10°) Donner trois définitions d'un automorphisme orthogonal (conservation du produit scalaire, isométrie, condition matricielle) et montrer qu'elles sont équivalentes.

11°) Déterminer les matrices de $SO(2)$, en justifiant.

12°) Si f est une application d'un espace euclidien E dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, montrer que f est un automorphisme orthogonal.

13°) Si a et b sont deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe e, donner les coordonnées dans e de $a \wedge b$ en fonction de celles de a et de b, et prouver ces formules.

1 Produits scalaires

Un produit scalaire est une forme billinéaire symétrique définie positive.
Espaces préhilbertiens réels.

Exemples : p.s canoniquement associé à une base, p.s canonique de $\mathbb{R}^n$: $(X, Y) \longmapsto {}^tXY$,
$l^2(\mathbb{R})$, p.s usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Identités de polarisation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$,

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y)$.
Formule du parallélogramme ou de la médiane : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Théorème de Pythagore.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski.

Les espaces préhilbertiens sont des espaces vectoriels normés.

2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel

2.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Couples de vecteurs orthogonaux, couples de parties orthogonales.
Orthogonal d'une partie : c'est un sous-espace vectoriel.

$A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$,
$A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

$\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Famille orthogonale, orthonormale. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.

Somme directe orthogonale d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Unicité du supplémentaire orthogonal. Exemple de sous-espace sans supplémentaire orthogonal.

2.2 Orthogonalité en dimension finie

Si E est de dimension finie, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E,\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

Dans un espace euclidien, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Matrice du produit scalaire dans une base quelconque, matrice d'une forme bilinéaire.
Si $\Omega = \mathrm{mat}(< .,. >, e)$, $< x, y >= {}^tX\Omega Y$.

2.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Projection orthogonale.

Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F, $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$.

Théorème de la projection orthogonale, inégalité de Bessel.

Si $H = a^\perp$, $p_H(x) = x - \dfrac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$ et $s_H(x) = x - 2\dfrac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$.

Formules donnant la distance d'un point à un hyperplan affine.

2.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille libre finie ou dénombrable de vecteurs.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

Existence de bases orthonormées, complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.

3 Endomorphismes d'un espace euclidien E

3.1 Endomorphismes symétriques

$u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, u(y) >$,
u est symétrique si et seulement si sa matrice en base orthonormée est symétrique.

Une projection (resp : une symétrie) est un endomorphisme symétrique ssi elle est orthogonale.

3.2 Groupe orthogonal.

u est un automorphisme orthogonal si et seulement si il conserve le produit scalaire, ou bien si et seulement si il conserve la norme (isométrie vectorielle), ou bien si et seulement si sa matrice M en base orthonormée est inversible et vérifie $M^{-1} = {}^t M$.

Le groupe orthogonal $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.
Sous-groupe des rotations. Isométries indirectes.

La symétrie orthogonale selon F est une rotation si et seulement si $dim(E) - dim(F)$ est paire.
Réflexions, retournements.

3.3 Matrices orthogonales.

Les groupes $O(n)$ et $SO(n)$.

$$\begin{aligned} M \in O(n) &\iff \text{ses colonnes sont orthonormées} \\ &\iff \text{c'est une matrice de passage entre bases orthonormées.} \end{aligned}$$

Si e est orthonormée, $u \in O(E) \iff \text{mat}(u, e) \in O(n) \iff$u(e) est une base orthonormée.

3.4 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Partitionnement de l'ensemble des bases selon deux orientations.
Orientation de l'hyperplan $D^\perp$ selon un vecteur non nul de D.

Si e est une base orthonormée directe, $P_e^{e'} \in SO(n)$ ssi e' est orthonormée directe.
Si e est orthonormée directe, $u \in SO(E) \iff \text{mat}(u, e) \in SO(n) \iff u(e)$ est orthonormée directe.

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

4 Géométrie plane

Description de $SO(2)$.

$$R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}, S_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}.$$

$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.

Les morphismes $\theta \longmapsto R_\theta$ et $R_\theta \longmapsto e^{\imath\theta}$.
Si $\text{mat}(s, e) = S_\theta$, s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$.

Angle d'une rotation de $SO(E)$.

Angle orienté entre deux vecteurs non nuls du plan. $\cos\widehat{(x, y)} = \dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\widehat{(x, y)} = \dfrac{\det(x, y)}{\|x\|\|y\|}$.
Relation de Chasles.

Dans un espace préhilbertien quelconque, l'angle non orienté est $\widehat{(x, y)} = \arccos\left(\dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}\right)$.

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une similitude ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|f(z) - f(z')| = \lambda |z - z'|$.

Démontré en passant par : si f est une application d'un espace euclidien E dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, alors f est un automorphisme orthogonal.

Équation d'une droite affine.

5 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

5.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition : $\forall x \in E \quad \det(a, b, x) =< a \wedge b, x >$.

$(a, b) \longmapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

(a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Lorsque a et b sont deux vecteurs indépendants, caractérisation géométrique de $a \wedge b$.

Identité de Lagrange : Pour tout $(a, b) \in E^2$, $< a, b >^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$.

Coordonnées de $a \wedge b$ dans une base orthonormée directe.

5.2 Equations de plan et de droites en dimension 3

5.3 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème (admis) de réduction en base orthonormée d'un automorphisme orthogonal en dimension n sous la forme d'une matrice diagonale par blocs de tailles 1 ou 2.

Rotation définie par un axe et un angle.

Il existe une base orthonormée directe dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Ensembles dénombrables et familles sommables.

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 29 : du lundi 29 juin au vendredi 3 juillet.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

2°) Montrer qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

3°) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

4°) Sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

5°) Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille au plus dénombrable de complexes que l'on suppose sommable. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I dont la réunion est égale à I. Montrez que $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in J_n} u_j$.

6°) Lorsque I est dénombrable, définir $l^2(I,\mathbb{R})$ puis montrer que c'est un espace préhilbertien.

7°) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme de la suite double $\left(\dfrac{\cos(p+q)\theta}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

8°) Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de K dans I. Montrer que $(u_{\varphi(k)})_{k\in K}$ est sommable avec $\displaystyle\sum_{k\in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i\in I} u_i$.

9°) Lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes montrer que $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

10°) Enoncer puis démontrer un théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries de complexes.

Espaces euclidiens

Le programme précédent est à réviser.

Ensembles dénombrables et familles sommables

1 Ensembles dénombrables

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I. On dit alors que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

2 Familles sommables de réels positifs

Si $u=(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}_+^I$, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sup_{\substack{J\in\mathcal{P}(I)\\ J\text{ finie}}}\sum_{i\in J}u_i\ \in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.
La famille u est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i<+\infty$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\{i\in I/u_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable.
Pour la suite, on suppose que I est au plus dénombrable.

Lorsque $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée à I, les $\displaystyle\sum_{i\in J_n}u_i$ sont appelés des sommes partielles de u.
Lien entre la sommabilité de u et la convergence des sommes partielles.
Lorsque $I=\mathbb{N}$, u est sommable si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Lorsqu'on travaille dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, avec la convention $0\times(+\infty)=0$:
$\displaystyle v_i\le w_i\Longrightarrow\sum_{i\in I}v_i\le\sum_{i\in I}w_i,\ \sum_{i\in I}(\alpha v_i+w_i)=\alpha\sum_{i\in I}v_i+\sum_{i\in I}w_i.$

3 Familles sommables de complexes

Notation. I est au plus dénombrable, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I et $u=(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$.

$(u_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire ssi $\displaystyle\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j\in J_n}u_j$.

Inégalité triangulaire.

4 Propriétés des familles sommables

Linéarité.

Les espaces $l^p(I,\mathbb{K})$ lorsque $p\in\{1,2\}$.

Commutativité de la somme d'une famille sommable.

Sommation par paquets.
Théorème de Fubini.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
et $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}a_pb_q=\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}}a_p\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}}b_q\Big)$.

Produit de Cauchy de deux séries.

Prévisions pour la semaine suivante :

Probabilités, théorie de l'intégration.