Problème n° 4 : Complexes

Correction du problème 1 – Résolution des équations de degré 3 et 4
On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$.

Partie I – Équation de degré 3 (formules de Cardan)

Soit a, b et c des nombres complexes. On cherche à résoudre l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

1. Le développement du cube $(x-\alpha)^3$ fournit un terme $3\alpha x^2$, qui doit compenser entièrement le terme ax^2 (puisqu'on ne veut pas de terme en y^2. Ainsi, on fait le changement de variable $y = x + \frac{a}{3}$ (remarquez que ce n'est qu'une adaptation de la mise sous forme canonique). On a alors :
$$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{9}x - \frac{a^3}{27} + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$
Ainsi, la résolution de l'équations $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à la résolution de $\boxed{y^3 + py + q = 0}$, avec :
$$\boxed{y = x - \frac{a}{4}, \quad p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.}$$

2. Les complexes y_1, y_2 et y_3 sont solutions de $y^3 + py + q$ si et seulement si on a l'identité polynomiale
$$X^3 + pX + q = (X - y_1)(X - y_2)(X - y_3) = (X - u - v)\left(X - ju - j^2v\right)\left(X - j^2u - jv\right).$$
Un peu de force brute donne l'équivalence de cette égalité avec :
$$X^3 + pX + q = X^3 - (1 + j + j^2)(u + v)X^2 + ((1 + j + j^2)(u^2 + v^2) + 3uv(j + j^2))X - (u + v)(uj + vj^2)(uj^2 + vj).$$
Comme $1 + j + j^2 = 0$ (et donc $j + j^2 = -1$), on simplifie ceci en :
$$X^3 + pX + q = X^3 - 3uvX - (u + v)(uj + vj^2)(uj^2 + vj).$$
On peut encore user de force brute pour développer le dernier terme, ou alors chercher à ruser de la manière suivante : la polynôme en U $(U + v)(Uj + vj^2)(Uj^2 + vj)$ est égal, après multiplication par $j^3 = 1$, à $(U + v)(U + vj)(U + vj^2)$. Ses racines sont donc v, vj et vj^2 qui sont les 3 racines cubiques de v^3. Ainsi, ce polynôme unitaire est égal à $U^3 - v^3$. En évaluant en u, on obtient finalement l'égalité :
$$X^3 + pX + q = X^3 - 3uvX - (u^3 + v^3).$$
Ainsi, par identification des coefficients, y_1, y_2 et y_3 sont solutions de $X^3 + pX + q$ si et seulement si :
$$p = -3uv \qquad \text{et} \qquad q = -(u^3 + v^3).$$

3. Pour que cette condition soir satisfaite, en posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on a alors $-27UV = p^3$ et $U + V = -q$, donc U et V sont les deux solutions de l'équation
$$\boxed{z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0}.$$
(Rappel : le produit et la somme de deux nombres déterminent l'unique polynôme de degré 2 dont ils sont racines, le produit et la somme se lisant sur les coefficients de ce polynôme ; développez $(z - U)(z - V)$ pour vous en assurer).

4. Les couples (u,v) obtenus en résolvant $u^3 = U$ et $v^3 = V$ sont au nombre de 9 (chacun des nombres U et V ayant 3 racines cubiques). Ces racines diffèrent l'une de l'autre par un facteur multiplicatif j ou j^2. En supposant qu'il existe un couple (u_0, v_0) de solutions vérifiant $-3uv = p$, l'ensemble des couples est $\{(j^i u_0, j^k v_0), (i,k) \in [\![0,2]\!]^2\}$. Or $j^i u_0 j^k v_0 = u_0 v_0$ si et seulement si $j^{i+k} = 1$, si et seulement si $i + k = 0$ ou $i + k = 3$ (la somme ne pouvant être supérieure à 4). Cela donne 3 possibilités : $i = k = 0$ (déjà connue), $i = 1$, $k = 2$ ou $i = 2$, $k = 1$. Ainsi, les 3 couples possibles pour u et v sont :

$$\boxed{(u,v) = (u_0, v_0) \text{ ou } (ju_0, j^2 v_0) \text{ ou } (j^2 u_0, jv_0)}.$$

- Le choix de $(u,v) = (u_0, v_0)$ fournit les solutions

$$y_1 = u_0 + v_0, \qquad y_2 = ju_0 + j^2 v_0, \qquad y_3 = j^2 u_0 + jv_0.$$

- Le choix de $(u,v) = (ju_0, j^2 v_0)$ fournit les solutions

$$y_1 = ju_0 + j^2 v_0, \qquad y_2 = j^2 u_0 + jv_0, \qquad y_3 = u_0 + v_0.$$

- Le choix de $(u,v) = (j^2 u_0, jv_0)$ fournit les solutions

$$y_1 = j^2 u_0 + jv_0, \qquad y_2 = u_0 + v_0, \qquad y_3 = ju_0 + j^2 v_0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{on obtient bien à chaque fois les mêmes racines, à permutation près}}$.

5. On commence par effectuer la réduction initiale, en effetuant un changement de variables $y = x + 1$:

$$x^3 + 3x^2 + 3(1-2j)x + 2(3j^2 - 1) = (x+1)^3 - 6jx + 6j^2 - 3 = (x+1)^3 - 6j(x+1) + 6(j^2 + j) - 3.$$

Puisque $j + j^2 = -1$, on obtient :

$$x^3 + 3x^2 + 3(1-2j)x + 2(3j^2 - 1) = (x+1)^3 - 6j(x+1) - 9.$$

Ainsi, on est ramené à la résolution de l'équation $y^3 - 6jy - 9 = 0$. Avec les notations ci-dessus, on a donc $p = -6j$ et $q = -9$, donc U et V sont solutions de l'équation

$$z^2 - 9z + 8.$$

On a une racine évidente $z = 1$, l'autre est alors 8 (leur produit devant faire 8). On pose donc $U = 1$, $V = 8$, et on selectionne des racines cubiques u et v de ces nombres telles que $-3uv = p = -6j$. on peut par exemple prendre $\boxed{u = j \text{ et } v = 2}$.

On trouve alors les racines en y :

$$y_1 = j + 2, \quad y_2 = j^2 + 2j^2 = 3j^2, \quad y_3 = 1 + 2j.$$

On peut donc utiliser le changement de variables initial pour exprimer les solutions de l'équation initiale :

$$\boxed{x_1 = j + 1, \quad x_2 = 3j^2 - 1, \quad x_3 = 2j}.$$

Il est assez rare de tomber sur une équation qui se résolve si bien. Cette équation avait été choisie avec beaucoup de soin. La plupart du temps, on se retrouve avec des expressions de racines cubiques qui ne se simplifient pas bien, même lorsqu'il y a des racines évidentes. On illustre cela dans la question qui suit.

6. On cherche les racines du polynôme $(X-1)(X^2 + X + 2) = X^3 + X - 2$. On a alors $p = 1$ et $q = -2$, donc les complexes U et V sont solutions de $z^2 - 2z - \frac{1}{27}$, donc le discriminant est $\Delta = 4 \cdot \frac{28}{27}$. Ainsi, on peut prendre

$$U = 1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad V = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}.$$

En adoptant les notations précédentes, $(uv)^3 = UV = -\frac{p^3}{27} = -\frac{1}{27}$, qui admet une unique racine cubique réelle. Cette racine réelle est obtenue comme produit des deux racines cubiques réelles de U et V. Ainsi, on peut poser :

$$u = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}.$$

La forme factorisée de l'expression initiale montre qu'il existe une unique solution réelle de l'équation, égale à 1. Comme u et v sont réels, cette solution réelle est, des trois racines, celle qui s'exprime sous la forme $u+v$. Ainsi

$$1 = u + v = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}.$$

En multipliant par $\sqrt{3} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$, il vient :

$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 2\sqrt{7}} + \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}.$$

L'imparité de la fonction racine cubique amène alors :

$$\boxed{\sqrt{3} = \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}}.$$

7. On suppose maintenant que p et q sont des réels. On note $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$.
   (a) On constate que Δ est le discriminant de l'équation $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$. Ainsi, si $\Delta > 0$, cette équation admet 2 racines réelles U et V, et de plus, le produit UV est réel, donc on peut choisir pour u et v les racines cubiques réelles de U et V. On obtient donc

   $$u = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

   Les trois racines sont donc :

   $$\boxed{x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}};\ x_2 = j\sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} + j^2\sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}};\ x_3 = j^2\sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}}.$$

   La racine x_1 est réelle, mais pas x_2 et x_3 (leur partie imaginaire est non nulle, car les deux racines cubiques ne sont pas égales, puisque $\Delta \neq 0$). En revanche, j et j^2 étant conjugués l'un de l'autre, x_2 et x_3 sont conjuguées l'une de l'autre. Ceci est une propriété générale des racines non réelles des équations polynomiales à coefficients réels.

   (b) Si $\Delta < 0$, les complexes U et V sont conjugués, comme le montre leur expression en fonction de Δ (l'un fait intervenir $\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$, l'autre $-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$). Ainsi, les 3 racines cubiques de V sont les conjuguées des 3 racines cubiques de V. Étant donnée une racine cubique u de U, seule la racine $v = \overline{u}$ de V est telle que $uv = |u|^2$ soit réel (les autres étant obtenues en multipliant par j ou j^2). Ainsi, on obtient les 3 racines :

   $$x_1 = u + \overline{u} = 2\mathrm{Re}(u); \quad x_2 = ju + j^2\overline{u} = 2\mathrm{Re}(ju); \quad x_3 = j^2u + j\overline{u} = \mathrm{Re}(j^2u).$$

   Ces trois quantités sont réelles, donc $\boxed{\text{l'équation } x^3 + px + q = 0 \text{ admet 3 racines réelles}}$.

Partie II – Trisection de l'angle

1. • Si on sait trisecter l'angle : à partir de 1 et $\cos(\theta)$, on trace un cercle de rayon 1, de centre O et sur un rayon, un segment OA de longueur $\cos(\theta)$ issu du centre. On sait tracer à la règle et au compas la perpendiculaire à OA passant par A. Par définition géométrique du cosinus, l'un des deux points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle, appelé B, définit un angle $(\widehat{AOB})$ égal à θ. la possibilité de trisecter l'angle à la règle et au compas amène la possibilité de construire l'angle $\frac{\theta}{3}$, donc de construire un point C du cercle tel que $(\widehat{AOB}) = \frac{\theta}{3}$. Projettons alors C orthogoalement sur (OA) (ce qui revient à abaisser une perpendiculaire, ce qu'on sait faire à la règle et au compas). Alors le point D obtenu vérifie $OD = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$.
   • Réciproquement, si on sait construire $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ à la règle et au compas à partir de 1 et de $\cos(\theta)$, étant donné un angle θ, on trace le cercle de côté 1 issu du sommet de l'angle ; en projetant orthogonalement sur 1 côté, on récupère $\cos(\theta)$, et par hypothèse, on sait construire $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$, qu'on reporte sur le rayon. On abaisse une perpendiculaire passant par le point ainsi obtenu, coupant le cercle en un point formant un angle de $\frac{\theta}{3}$ avec le point du cercle coupant le rayon.

   Ainsi, $\boxed{\text{la possibilité de trisecter l'angle à la règle et au compas équivaut à la constructibilité de } \cos(\tfrac{\theta}{3})}$ à partir de 1 et de $\cos(\theta)$.

2. Il s'agit donc de montrer que
$$\cos\theta = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$
donc, en posant $x = \frac{\theta}{3}$, de montrer que
$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$
Ceci est un résultat classique, relié entre autres aux polynômes de Tchébychev. On peut le trouver de façon élémentaire en utilisant par deux fois les formules d'addition, ou alors, utiliser la formule de Moivre :
$$\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}) = \mathrm{Re}((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^3) = \mathrm{Re}\left(\cos^3(x) + 3\,\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x)\right).$$
En utilisant $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, il vient alors :
$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$
Ainsi, avec $a = \cos(\theta)$, le réel $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ est solution de l'équation
$$\boxed{u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{a}{4} = 0}.$$
3. On a ici
$$\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = \frac{a^2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{a^2-1}{16} \leqslant 0,$$
avec égalité seulement si $|a| = 1$, donc $\theta \equiv 0[\pi]$. Ainsi, d'après la remarque faite ci-dessus, « en général », $\boxed{\text{on ne peut pas exprimer } \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \text{ à l'aide de radicaux réels}}$.
4. Si on avait $p \geqslant 0$, on aurait
$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \geqslant 0,$$
ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, $\boxed{p < 0}$.
5. Le changement de variable $y = \lambda x$, avec $\lambda > 0$, amène :
$$\left(\frac{y}{\lambda}\right)^3 + p\left(\frac{y}{\lambda}\right) + q = 0,$$
ce qui équivaut à
$$y^3 + \lambda^2 py + \lambda^3 q = 0.$$
On résout l'équation $\lambda^2 p = -\dfrac{3}{4}$, soit puisque $\lambda > 0$,
$$\boxed{\lambda = \sqrt{-\frac{3}{4p}}},$$
ce qui a du sens puisque $p < 0$. En posant
$$\boxed{a = -4\lambda^3 q = \frac{3q}{p}\sqrt{-\frac{3}{4p}}},$$
on arrive à l'équation $\boxed{y^3 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{a}{4} = 0}$.
6. On a alors
$$a^2 = -\frac{27q^2}{4p^3}.$$
Or, $\Delta < 0$, donc $27q^2 < -4p^3$, et ces quantités étant positives, il vient, en faisant le quotient : $|a|^2 < 1$, puis $\boxed{|a| < 1}$.

7. Soit $\theta = \mathrm{Arccos}(a)$, bien défini puisque $|a| < 1$. D'après la question II-2, l'équation de la question 5 admet une racine, égale à $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Par ailleurs, en considérant $\varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $3\pi \equiv \theta \mod \pi$, et d'après II-2, $\cos(\varphi)$ est aussi solution de l'équation. L'ensemble des solutions obtenues est périodique de période 3. Par ailleurs, ces solutions sont distinctes. En effet, les arguments des cosinus forment sur les cercle trigonométrique les sommets d'un triangle équilatéral. Les cosinus sont égaux si et seulement si deux sommets sont conjugués, ce qui signifierait que le triangle équilatéral est symétrique par rapport à l'axe réel, donc que 1 ou -1 est sommet. Cela implique que $\theta \equiv 0 \mod [\pi]$, cas impossible puisque $\Delta \neq 0$.

   Ainsi, les trois racines obtenues sont distinctes, et on a toutes les racines du polyôme de degré 3 :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\cos\left(\frac{1}{3}\mathrm{Arccos}(a)\right), \cos\left(\frac{1}{3}\mathrm{Arccos}(a) + \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{1}{3}\mathrm{Arccos}(a) - \frac{2\pi}{3}\right)\right\}}.$$

Partie III – Résolution des équations de degré 4 par la méthode de Ferrari

On voit dans cette partie la méthode employée par Ferrari au XVI^e^ siècle pour résoudre les équations du quatrième degré

$$z^4 + \alpha z^3 + bz^2 + \gamma z + \delta = 0, \tag{1}$$

pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Comme dans la partie 1, on fait une espèce de mise sous forme canonique, qui donne, sauf erreur de calcul de ma part :

$$z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta = \left(z + \frac{\alpha}{4}\right)^4 + \left(\beta - \frac{3}{8}\alpha^2\right)\left(z + \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2}\right)\left(z + \frac{\alpha}{4}\right) + c,$$

   avec $\boxed{c = \delta - \frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4}}$ (on peut par exemple remplacer x par $y - \frac{\alpha}{4}$ puis tout développer). Ainsi, en posant le changement de variables $\boxed{x = z + \frac{\alpha}{4}}$, et en posant les constantes

$$\boxed{a = \beta - \tfrac{3}{8}\alpha^2 \qquad \text{et} \qquad b = \gamma + \tfrac{\alpha^3}{8} - \tfrac{\alpha\beta}{2}}$$

   on est ramené au système $\boxed{x^4 + ax^2 + bx + c = 0}$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^2 - x^2y - \frac{y^2}{4} + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(x^2(y - a) - bx + \frac{y^2}{4} - c\right).$$

   Or, le polynôme $X^2(y - a) - bX + \frac{y^2}{4} - c$ s'exprime comme le carré (positif) d'un polynôme de degré 1 en X si et seulement si son coefficient dominant est positif, et son discriminant nul (de sorte à avoir une racine double). La première condition donne $y \geqslant a$, la seconde donne

$$0 = \Delta = b^2 - (y - a)(y^2 - 4c) = b^2 - y^3 + ay^2 + 4cy - 4ac,$$

   soit :

$$y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2 = 0.$$

   Ainsi, il existe des réels m et n tels que pour tout x, on ait

$$\boxed{x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^2 - (mx + n)^2}$$

   si et seulement si $\boxed{y \geqslant a \text{ et } y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2 = 0}$.

   Or, en définissant la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - ax^2 - 4cx + 4ac - b^2,$$

on a $f(a) = -b^2 \leqslant 0$. Comme par ailleurs, f est continue, et la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule sur $[a, +\infty[$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe une solution } y_0 \geqslant a \text{ de l'équation } y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2 = 0}$

3. On suppose $b \neq 0$ (dans le cas contraire, on a une équation bicarrée qu'on sait résoudre en posant $x' = x^2$). On a alors $y_0 > a$. Pour un tel y_0, on a $\Delta = 0$, donc la racine double du polynôme en X ci-dessus est $\dfrac{b}{2(y_0 - a)}$. Il se factorise donc en
$$(y_0 - a)\left(X - \frac{b}{2(y_0 - a)}\right)^2 = \left(\sqrt{y_0 - a} \cdot X - \frac{b}{2\sqrt{y_0 - a}}\right)^2.$$
Ainsi, par identification, on obtient : $\boxed{m = \sqrt{y_0 - a} \text{ et } n = -\dfrac{b}{2\sqrt{y_0 - a}}}$.

4. On exprime notre condition sur a, b et c obtenus après changement de variables. On a obtenu l'égalité polynomiale suivante :
$$X^4 + aX^2 + bX + c = \left(X^2 + \frac{y_0}{2}\right)^2 - (mX + n)^2 = \left(X^2 - mX + \frac{y_0}{2} - n\right)\left(X^2 + mX + \frac{y_0}{2} + n\right).$$
Ainsi, les 4 racines sont réelles (pas nécessairement distinctes) si et seulement si les discriminants des deux facteurs de degré 2 sont positifs ou nuls, à savoir :
$$\boxed{\Delta_1 = m^2 - 2y_0 + 4n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = m^2 - 2y_0 - 4n \geqslant 0}.$$
Les 4 racines sont alors :
$$\boxed{\frac{-m - \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad \frac{-m + \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad \frac{m - \sqrt{\Delta_2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{m + \sqrt{\Delta_2}}{2}}.$$