Planche de colle

Exercice de colle

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré 4.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- les racines de $P(X)$ forment un parallélogramme dans le plan complexe
- les polynômes P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune.

[indication : on pourra utiliser une translation pour obtenir $\displaystyle\sum_{\lambda \in Z(P)} \lambda = 0$.]

On note a, b, c et d les quatre racines complexes du polynôme $P(X)$, ces racines étant comptées avec multiplicités.
On pose l'isobarycentre du quadrilatère $abcd$, à savoir le point d'affixe :

$$g = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

On considère maintenant le polynôme $Q(X) = P(X+g)$. Les racines du polynôme $Q(X)$ sont avec multiplicité les nombres complexes suivants :

$$a-g, b-g, c-g, d-g.$$

En notant α, β, γ et δ ces quatre racines, alors on voit que :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

L'ensemble $Z(P)$ des racines de $P(X)$ est exactement le translaté de l'ensemble $Z(Q)$ par le vecteur de translation d'affixe g.
Le polynôme $P(X)$ vérifie la première assertion de l'énoncé si et seulement si le polynôme $Q(X)$ également.
Comme $P' = Q(X-g)' = Q'(X-g)$ et $P^{(3)} = Q^{(3)}(X-g)$, alors le polynôme $P(X)$ vérifie la deuxième assertion de l'énoncé si et seulement si il en est de même pour le polynôme $Q(X)$ car on fait jouer la translation de vecteur d'affixe g entre les racines pour les dérivées de $P(X)$ et celles des dérivées de $Q(X)$.
En raisonnant plutôt sur le polynôme $Q(X)$ au lieu du polynôme $P(X)$, on peut donc se ramener au cas où la somme des racines de $P(X)$ est nulle. On suppose ceci dans la suite.
D'après les relations coefficients / racines, la somme nulle des quatre racines de $P(X)$ vaut σ_1, donc $P(X)$ est un polynôme de la forme :

$$P(X) = \lambda_4\, X^4 + \lambda_2\, X^2 + \lambda_1\, X + \lambda_0,$$

donc :

$$P^{(3)} = 24\ \lambda_4\ X.$$

Le polynôme $P^{(3)}$ n'admet qu'une seule racine : 0.

On suppose maintenant que $P(X)$ vérifie la première assertion. Cela signifie que les quatre racines de $P(X)$ forment un parallélogramme dont 0 est le centre. Le parallélogramme est donc symétrique par rapport à 0 ce qui signifie que les quatre racines du polynôme $P(X)$ sont de la forme a, b, $-a$ et $-b$.
Ainsi, le polynôme $P(X)$ est de la forme :

$$P(X) = \xi\ (X-a)(X+a)(X-b)(X+b) == \xi\ (X^2-a^2)(X^2-b^2) = R(X^2),$$

où $R(X)$ est un polynôme. Par conséquent,

$$P'(X) = 2X\ R'(X^2)$$

est un polynôme admettant 0 comme racine.
Les deux polynômes P' et $P^{(3)}$ admettent donc tous les deux 0 comme racine.

Réciproquement, si P vérifie la deuxième assertion, alors $P^{(3)}$ n'admettant que 0 comme racine, alors P' admet 0 comme racine.
Le polynôme P ayant un terme nul en X^3, alors P' est de la forme :

$$P'(X) = \lambda\ X^3 + \mu\ X.$$

Le polynôme $P(X)$ est donc de la forme :

$$P(X) = \lambda_4\ X^4 + \lambda_2\ X^2 + \lambda_0.$$

On remarque alors que si z est une racine de $P(X)$, alors $-z$ également. Le quadrilatère $Z(P)$ des racines de $P(X)$ est de centre 0 et symétrique par rapport à 0. Les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieu à savoir 0 : il s'agit d'un parallélogramme.