FEUILLE D'EXERCICES N° 3

NOMBRES COMPLEXES

Calculs algébriques

Exercice 1

Déterminer les parties réelles et imaginaires, les modules et les arguments des nombres complexes suivants :

- $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{100}}{1-i}$
- $\dfrac{z^2+1}{z^2+z+2}$, avec $z = 2-3i$.
- $\dfrac{1+2i}{3+e^{i\pi/3}}$

Exercice 2

Soit $\theta \neq \pi[2\pi]$. Mettre le nombre $\dfrac{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}$ sous forme exponentielle.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4

Soient x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$. Calculer :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^{-k} \cdot \cos(kx)$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k x \cdot \cos(kx)$

Exercice 5

Soient u, v et w dans $\mathbb{U}$.

1. Montrer que $|u+v+w| = |uv+vw+wu|$.
2. Montrer que si $u+v+w=0$, alors $u^2+v^2+w^2=0$.

Exercice 6

1. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
3. Indiquer un algorithme de calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$. On pose $A = \omega+\omega^2+\omega^4$ et $B = \omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1. Calculer $A+B$ et $(A-B)^2$.
2. En déduire A et B.

Exercice 8

Soit $(n,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $A = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n/3} \binom{n}{3k}$, $B = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{3}} \binom{n}{3k+1}$ et $C = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-2}{3}} \binom{n}{3k+2}$.

1. Montrer que $A+B+C = 2^n$
2. Montrer que $A+jB+j^2C = (1+j)^n$ et $A+j^2B+jC = (1+j^2)^n$.
3. En déduire les valeurs de A, B et C.

Équations algébriques

Exercice 9

Résoudre les équations trigonométriques :

- $2\cos x = 1$
- $\cos x + \sin x = 1$
- $\cos x \cdot \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
- $\cos x = \sqrt{3}\sin x$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

- $z^3 = 1-i\sqrt{3}$
- $z^2 = 4+4i$
- $z^2 = -33+56i$
- $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$

Exercice 11

1. Déterminer les nombres complexes α pour que l'équation $z^2-(2+i\alpha)z+i\alpha+2-\alpha=0$ admette deux racines complexes conjuguées.

2. Déterminer alors ces deux racines.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes :
- $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
- $e^{2z} + (i-2)e^z = 2i$

Exercice 13

Résoudre les équations :
- $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, en fonction de $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
- $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14

Résoudre les équations trigonométriques :
- $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$
- $\cos^3 x - \sin^2 x \geqslant 2\cos x - 1$

Interprétation géométrique

Exercice 15

Interpréter géométriquement les applications :
- $f : z \longmapsto (2-2i)z + 3 + i$
- $g : z \longmapsto \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \cdot (z+1) + 2$

Exercice 16

1. Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme des racines $n^{ième}$ de l'unité.
2. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 17

Soit $n \geqslant 3$ un entier.

1. Combien y a-t-il de triangles à sommets dans $\mathbb{U}_n$?
2. Parmi ces triangles, combien sont-ils rectangles ?

Exercice 18

1. Déterminer les nombres complexes z tels que les points z, z^2 et z^3 forment un vrai triangle rectangle.
2. Déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ tels que les points z, p et q avec p et q les deux racines carrées de z forment un vrai triangle rectangle en z.

Exercice 19

Soit ABC un triangle du plan.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
2. On construit trois triangles équilatéraux directs de base AB, BC et CA extérieurement au triangle ABC. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment encore un triangle équilatéral direct.

Exercice 20

Soit a dans $\mathbb{U}$. Déterminer les caractéristiques de l'application $z \longmapsto a \cdot \overline{z}$.

Thèmes variés

Exercice 21

On pose $f : z \longmapsto \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer les racines carrées de $8 - 6i$.
2. En déduire les antécédents par f de $1 + i$.
3. Calculer $f(\mathbb{C} \setminus \{2i\})$.
4. Calculer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 22

Montrer que $\{a^2 + b^2 \in \mathbb{N}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble stable par multiplication.

Exercice 23

1. Écrire la formule du binôme de Newton avec $a = \cos\dfrac{\pi}{5}$ et $b = i\sin\dfrac{\pi}{5}$ et $n = 5$.
2. Donner une formule pour $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 24

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et a dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Factoriser le polynôme : $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.
3. En déduire une valeur pour : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 25

Tracer dans le plan les points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$.

Exercice 26

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, puis a et b dans $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$|a| + |b| \leqslant \frac{2}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |a + z \cdot b|.$$

Un peu plus difficile

Exercice 27

Soit ABC un triangle équilatéral. On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle. On partage le diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs $[AF]$, $[FG]$ et $[GC]$. Les deux droites (BF) et (BG) découpent le demi-cercle en trois portions de cercles. Ces trois portions sont-elles de mêmes longueurs ?

Exercice 28

On pose la fonction $f : z \longmapsto \dfrac{1}{z-i}$.

1. Déterminer l'image de la droite d'équation $y = 1$.
2. Déterminer l'image du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 29

Soient $z_1, \cdots, z_n$ des complexes. Montrer qu'il existe $I \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que :

$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Exercice 30

Soient $z_1, \cdots, z_{2n+1}$ des nombres complexes de module 1 et de parties réelles toutes positives ou nulles. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{2n+1} z_k\right| \geqslant 1.$$

Exercice 31

On note $G = \left\{a + ib \in \mathbb{C} \text{ t.q. } (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\} \cap \mathbb{U}$.

1. Donner les formules exprimant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de
$$t = \tan\frac{\theta}{2},$$
en précisant les valeurs de θ admissibles pour ces formules.
2. Montrer que l'ensemble $\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\}$ est infini.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une partie $\mathscr{F}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ telle que la partie $\mathscr{F}$ contient n points et que la distance entre deux points de $\mathscr{F}$ est toujours un entier.