VECTEURS ALÉATOIRES

Exercice 1. [$\star$]

On considère une suite de tirages sans remise dans une urne contenant $n-2$ boules blanches et 2 noires. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et Y celui de la seconde.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Dans cette question, on étudie plusieurs méthodes pour déterminer la loi de Y.
   a) Justifier que Y a la même loi que $n+1-X$ et en déduire la loi de Y. Calculer $E(Y)$.
   b) Sans utiliser le a), déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$. Retrouver ainsi la loi de Y.
   c) Sans utiliser ni le a) ni le b), déterminer la loi conjointe du couple (X,Y). Retrouver à nouveau la loi de Y.
3. Donner la loi de $Y-X$. Comparer avec celle de X. Interpréter.

Exercice 2. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire successivement 2. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au numéro du premier (respectivement du second) jeton obtenu. Enfin, on note $X=\max(X_1,X_2)$ et $Y=\min(X_1,X_2)$.

1. Dans le cas où les tirages se font avec remise, déterminer la loi du couple (X,Y) et préciser les lois marginales.
2. Faire de même lorsque les tirages sont sans remise.

Exercice 3. [$\bigstar$] (Un premier pas vers la conjecture de Netto)

Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. On dit qu'une partie A de $[\![1;n]\!]$ est *stable* par G lorsque $\forall \sigma \in G,\ \forall k \in A,\ \sigma(k) \in A$. En particulier, on dit que $k \in [\![1;n]\!]$ est un *point fixe* de G lorsque $\{k\}$ est stable par G, c'est-à-dire $\forall \sigma \in G,\ \sigma(k)=k$. Enfin, on dit que G est dit *transitif* lorsque $\forall k,\ell \in [\![1;n]\!],\ \exists \sigma \in G,\ \ell=\sigma(k)$.

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme (avec $n \geqslant 2$). On choisit au hasard et indépendamment deux permutations σ et ρ dans $\mathfrak{S}_n$. On note $\langle \sigma,\rho\rangle$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par σ et ρ. On note T l'événement « $\langle \sigma,\rho\rangle$ est transitif ». L'objet de cet exercice est de démontrer que

$$P(T) = 1 - \frac{1}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, lorsqu'on choisit au hasard deux permutations de $[\![1;n]\!]$, elles engendrent un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$ approximativement $n-1$ fois sur n. En particulier, cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Soit A une partie de $[\![1;n]\!]$ de cardinal r. On note I_A l'événement « A est stable par $\langle \sigma,\rho\rangle$ ». Démontrer que
$$P(I_A) = \frac{1}{\binom{n}{r}^2}.$$
2. On note F l'événement « $\langle \sigma,\rho\rangle$ possède (au moins) un point point fixe ». Démontrer que
$$P(F) \geqslant \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en déduire que
$$P(T) \leqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$
Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Bonferroni : si $A_1, \dots, A_n$ désignent des événements, on a
$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j).$$

3. Démontrer que
$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant n/2} \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et en déduire que
$$P(T) \geqslant 1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

Exercice 4. [$\star$]

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n',p)$ indépendantes. Démontrer que la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=k)$ est $\mathscr{H}\big(n+n', k, n/(n+n')\big)$.