Planche de colle

Question de cours

• déterminant de n vecteurs selon une base $\mathscr{B}$: définition et propriétés ; démonstration du fait que le déterminant ainsi défini est une forme multilinéaire alternée non nulle

Exercice de colle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des complexes $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ tels que pour tous i et j, $a_i + b_j$ soit non nul.

On pose la matrice $A_n = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que le déterminant de la matrice $B_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}(X))$ obtenue en rajoutant à A_{n-1} la dernière ligne : $\dfrac{1}{X+b_1}, \cdots, \dfrac{1}{X+b_n}$ et la dernière colonne : $\dfrac{1}{a_1+b_n}, \cdots, \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n}, \dfrac{1}{X+b_n}$ est une fraction rationnelle $F(X)$.
2. Calculer $\det(A_n)$ lorsque les complexes $b_1, \cdots, b_n$ ne sont pas tous différents. On suppose dans la suite qu'ils sont tous différents.
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que
$$F(X) = \lambda \, \frac{(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)\cdots(X+b_n)}.$$
4. Montrer que dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$ apparaît le terme :
$$\frac{\det(A_{n-1})}{X+b_n} = \lambda \, \frac{(b_n+a_1)\cdots(b_n+a_{n-1})}{(b_n-b_1)\cdots(b_n-b_{n-1})} \, \frac{1}{X+b_n}.$$
5. Proposer une formule de $\det(A_n)$ sous forme d'un quotient de produits.