

# APPLICATIONS LINÉAIRES

## Exercice 1. [o]

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ .

- Soient  $A$  un sous-espace de  $E$  et  $B$  un sous-espace de  $F$ . Démontrer que

$$f^{-1}(f(A)) = A + \text{Ker } f \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im } f.$$

- Soient  $A_1, A_2$  deux sous-espaces de  $E$ . Démontrer que

$$(f(A_1) \subset f(A_2)) \iff (A_1 + \text{Ker } f \subset A_2 + \text{Ker } f).$$

## Exercice 2. [★]

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme non nul. Démontrer que  $f$  est injectif si et seulement si, pour tous sous-espaces vectoriels  $U$  et  $V$  en somme directe,  $f(U)$  et  $f(V)$  sont en somme directe.

## Exercice 3. [★]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes tels que  $fg - gf = \text{Id}_E$ .

- Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$ .
- Démontrer que la famille  $(g^k)_{k \geq 0}$  est libre.

## Exercice 4. [★]

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  tels que  $p + q$  soit un projecteur.

- Démontrer que  $p + q$  est un projecteur si, et seulement si  $pq = qp = \tilde{0}$ .
- Dans ce cas, démontrer que  $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$  et  $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

## Exercice 5. [★]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

- Soit  $\ell$  une forme  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $E$ . Démontrer que  $\Re(\ell)$  est une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $E$ .
- Soit  $m$  une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $E$ . Démontrer qu'il existe une unique forme  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\ell$  sur  $E$  telle que  $m = \Re(\ell)$ .

## Exercice 6. [★]

Soit  $n \geq 2$ . On considère  $\mathcal{H}$  un hyperplan du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\mathcal{H}$  est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire  $\forall A, B \in \mathcal{H}, AB \in \mathcal{H}$ . On souhaite démontrer que  $I_n \in \mathcal{H}$ . Pour cela, on entame un raisonnement par l'absurde en supposant que  $I_n \notin \mathcal{H}$ .

Pour  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on désigne par  $E_{i,j}$  la matrice élémentaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne qui vaut 1.

- Que peut-on dire des sous-espaces  $\mathcal{H}$  et  $\text{Vect}(I_n)$ ? En déduire que si une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est telle que  $A^2 \in \mathcal{H}$  alors  $A \in \mathcal{H}$ .
- Soient  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$ . Démontrer que  $E_{i,j} \in \mathcal{H}$ .
- Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Démontrer que  $E_{i,i} \in \mathcal{H}$ .
- Aboutir à une absurdité et conclure. *On a ainsi démontré que  $\mathcal{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .*