STRUCTURES ALGÉBRIQUES

A. Lois de composition interne

Exercice 1. [∘]

Étudier les propriétés de la loi $*$ définie sur $\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par

$$\forall x, y \in \underline{\mathbb{R}}, \qquad x * y = \max(x, y).$$

Exercice 2. [⋆]

Soit $(E, *)$ un magma associatif. Un élément a de E est dit *idempotent* lorsque $a^2 = a$.

1. On suppose que tout élément de E est simplifiable. Démontrer que E possède au plus un idempotent.
2. Démontrer que si E est fini, alors E possède au moins un idempotent. *Indication : Prendre un élément quelconque de E et étudier ses puissances.*

Exercice 3. [⋆]

Soit $(E, *)$ un magma associatif non vide tel que $\forall a, b \in E,\ \exists x \in E,\ b = a * x * a$. Démontrer que $(E, *)$ est un monoïde.

B. Groupes

Exercice 4. [∘]

Dresser les tables de tous les groupes de cardinal 1, 2, 3 et 4. Lorsque plusieurs tables sont isomorphes (c'est-à-dire identiques au nom et à l'ordre près des éléments), on ne gardera qu'une seule table.

Avec quel jeu classique cet exercice a-t-il un lien ?

Exercice 5. [∘]

Sur $]-1;1[$, on considère la loi $\oplus$ définie par

$$\forall a, b \in \left]-1;1\right[, \qquad a \oplus b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

1. Démontrer que $(\left]-1;1\right[, \oplus)$ est un groupe abélien.
2. Justifier que $(\left]-1;1\right[, \oplus)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont isomorphes. *Indication : Connaissez-vous une bijection usuelle de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$?*

Exercice 6. [∘]

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e. On suppose que, pour tout $g \in G$, on a $g^2 = e$. Démontrer que G est abélien.

Exercice 7. [∘]

Soient $(G, *)$ un groupe et $g_1, g_2 \in G$. On suppose que $g_1 g_2$ commute avec tout autre élément de G. Démontrer que g_1 et g_2 commutent.

Exercice 8. [$\star$]

Soit $(G,.)$ un groupe. Soient $a, b \in G$ vérifiant $aba = b^3$ et $b^5 = e$. Démontrer que a et b commutent.

Exercice 9. [$\star$] (Caractérisation régulière des groupes finis)

Soit $(E,*)$ un monoïde fini dans lequel tout élément est simplifiable. Soient $a \in E$ et

$$\gamma \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a * x \end{array} \right.$$

1. Démontrer que l'application γ est injective puis qu'elle est surjective.

   En déduire que $(E,*)$ est un groupe.
2. Ce résultat subsiste-t-il si E est infini ?

Exercice 10. [$\circ$]

On considère les applications suivantes de $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ dans lui même :

$$a : x \longmapsto x\,; \qquad b : x \longmapsto \frac{1}{1-x}\,; \qquad c : x \longmapsto \frac{x-1}{x}\,;$$

$$d : x \longmapsto \frac{1}{x}\,; \qquad e : x \longmapsto 1-x\,; \qquad f : x \longmapsto \frac{x}{x-1}.$$

Démontrer que $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ est un groupe pour la loi $\circ$ dont on dressera la table.

Exercice 11. [$\circ$]

Démontrer que $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n, \times \right)$ est un groupe abélien.

Exercice 12. [$\circ$]

Démontrer qu'une partie stable, finie, non vide d'un groupe en est un sous-groupe. *Indication : Pour la symétrisabilité, on prendra un élément de la partie et on étudiera ses itérés.*

Exercice 13. [$\circ$] (Centre d'un groupe)

Soit $(G,*)$ un groupe. On définit le *centre* de G comme le sous-ensemble $Z(G)$ de G constitué des éléments de G qui commutent avec tous les autres. Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 14. [$\circ$] (Sous-groupes distingués)

Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e. Un sous-groupe H de G est *distingué* dans G lorsque

$$\forall a \in G, \quad \forall x \in H, \qquad a * x * a^{-1} \in H.$$

1. Démontrer que $\{e\}$ et G sont distingués dans G.
2. Que dire lorsque G est abélien ?
3. Démontrer que le noyau d'un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ est distingué dans G.

Exercice 15. [$\circ$] (Union de sous-groupes)

Soient $(G,.)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G tels que $G = H \cup K$. Démontrer que $G = H$ ou $G = K$. *Indication : On pourra raisonner par l'absurde et trouver $x \in K \setminus H$ et $y \in H \setminus K$ puis examiner la position de xy.*

Exercice 16. [$\star$]

Soit $(G,*)$ un groupe, E un ensemble et $f : G \longrightarrow E$ une bijection. Sur E, on définit la loi $\star$ par

$$\forall x, y \in E, \qquad x \star y = f\big(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\big).$$

Démontrer que $(E,\star)$ est un groupe isomorphe à $(G,*)$.

Exercice 17. [$\circ$] (Automorphismes intérieurs)

Soit $(G, *)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on note

$$\tau_a \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a * x * a^{-1} \end{array} \right.$$

1. Soit $a \in G$. Démontrer que τ_a est un endomorphisme de G.
2. Démontrer que $\forall a, b \in G,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a*b}$ et en déduire que τ_a est un automorphisme de G. Préciser ${\tau_a}^{-1}$.

▶ On dit que τ_a est un automorphisme intérieur de G.

Exercice 18. [$\star$]

Démontrer que les groupes $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes. *Indication :* $\sqrt{2}$.

Exercice 19. [$\star$]

Démontrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

C. Anneaux

Exercice 20. [$\circ$]

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Quel est le nom de la propriété « $A \setminus \{0\}$ est stable par $\times$ » ?

Exercice 21. [$\star$] (Nilpotence)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément de A est dit *nilpotent* lorsque $\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0$.

1. Soit $x, y \in A$. Démontrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
2. Soit x un élément nilpotent. Démontrer que $1 - x$ est inversible et calculer son inverse.
3. Dans cette question, on suppose que A est commutatif.
   a) Démontrer que, si x et y sont deux éléments nilpotents, alors $-x$, xy et $x + y$ sont nilpotents.
   b) Démontrer que l'ensemble $G = \{1 - x : x \text{ nilpotent}\}$ est un groupe pour la loi $\times$.

Exercice 22. [$\star$]

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A$. On suppose que a admet un unique inverse à droite (c'est-à-dire $\exists! b \in A,\ ab = 1$). Démontrer que a est simplifiable et en déduire que a est inversible.

Exercice 23. [$\star$]

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $a, b \in A$. On suppose que $1 - ab$ est inversible Démontrez que $1 - ba$ est inversible.

Indication : Pour deviner l'inverse de $(1 - ba)$*, on utilisera (au brouillon et sans le dire à personne) la formule* $(1 - x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ *en précisant d'où elle peut bien sortir.*

Exercice 24. [$\star$]

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des *entiers de Gauß*.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Démontrer que $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}[i] \times (\mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}),\ \exists (q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2,\ u = vq + r$ avec $|r| < |v|$. On dit que $\mathbb{Z}[i]$ est *euclidien*.

D. Corps

Exercice 25. [$\circ$]

L'ensemble $\mathbb{D} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} 10^{-k}\mathbb{Z}$ des décimaux est-il un corps pour l'addition et la multiplication usuelles ?

Exercice 26. [$\star$]

Soit A un anneau commutatif, fini et intègre.

1. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Démontrer que l'application
$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & ab \end{array} \right.$$
est injective. En déduire qu'elle est surjective.
2. Démontrer que A est un corps.

Exercice 27. [$\circ$]

Quels sont les sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$?

Exercice 28. [$\circ$]

On note $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Démontrer que $\big(\mathbb{Q}(i), +, \times\big)$ est un corps, appelé corps des *nombres de Gauß*.

Exercice 29. [$\star$]

Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$.

1. On suppose que les seuls idéaux de A sont les idéaux triviaux ($\{0\}$ et A). Démontrer que A est un corps. *Indication : Si $x \in A \setminus \{0\}$, considérer l'idéal xA.*
2. Un idéal I de A est dit *premier* lorsque $I \neq A$ et $\forall x, y \in A,\ (xy \in I) \Longrightarrow (x \in I \text{ ou } y \in I)$.
   On suppose que tous les idéaux de A (sauf A) sont premiers. Démontrer que A est intègre, puis que $x \in x^2 A$ pour tout x et enfin que A est un corps.

Exercice 30. [$\star$] (Endomorphismes de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

On rappelle un endomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ est une application $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(1) = 1$,
$$\forall x, y \in \mathbb{K},\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K},\quad f(xy) = f(x)f(y).$$

1. Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{Q}$. Démontrer que f est l'identité de $\mathbb{Q}$.
2. Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{R}$. Justifier que f est une fonction impaire vérifiant $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$. Démontrer ensuite que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ puis que f est croissant. En déduire que f est l'identité de $\mathbb{R}$.
3. Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{C}$ tel que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Démontrer que f est ou bien l'identité de $\mathbb{C}$ ou bien la conjugaison complexe.