DÉTERMINANTS

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Pour tout $n \geqslant 1$, calculer le déterminant suivant (où les blancs désignent des 0) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} = \det\left(\binom{i}{j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant n-1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De chaque ligne, en partant de la dernière jusqu'à la deuxième, on retranche la précédente et on utilise la formule de Pascal. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \binom{n-2}{0} & & \ddots & \binom{n-2}{n-2} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est triangulaire par blocs, ce qui donne

$$\Delta_n = \Delta_{n-1}.$$

Donc la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
Comme $\Delta_1 = 1$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta_n = 1.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [★]
Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A = \big(\cos(i-1)\alpha_j\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On sait que $\cos\big((i-1)\alpha_i\big)$ est un polynôme en $\cos\alpha_i$ de degré $(i-1)$ et de terme de plus haut degré $2^{i-2}\cos^{i-1}\alpha_i$ (le polynôme s'appelle le polynôme de Tchebychev). Par multilinéarité et alternance, il reste le déterminant de Vandermonde de la famille $\cos\alpha_i$, multiplié par $2 \times 4 \times \cdots \times 2^{n-2}$. Par conséquent, on a

$$\boxed{\det A = 2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\cos\alpha_j - \cos\alpha_i).}$$

✠ ***Exercice 3.*** [★]
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Démontrer qu'il existe $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.

Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u\det(A) + v\det(B) = 1$. Les matrices $U = u\,{}^t(\mathrm{Com}(A))$ et $V = v\,{}^t(\mathrm{Com}(B))$ conviennent alors. Donc

$$\boxed{\text{il existe } U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ telles que } UA + VB = I_n.}$$

✠ ***Exercice 4.***

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers.

1. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont impairs et que les autres coefficients sont pairs. Démontrer que A est inversible.
2. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont pairs et que les autres coefficients sont impairs.
   a) On suppose que n est pair. Démontrer que A est inversible.
   b) On suppose que n est impair. Démontrer que $\operatorname{rg} A \in \{n-1; n\}$.
3. C'est le père Bové qu'a $2n+1$ vaches. Quand qu'y met d'côté l'une quelconque d'ses vaches, ben les $2n$ qui restent, y peut les répartir en deux sous-troupeaux de n vaches chacun qu'ont tous deux le même poids total. Montrer qu'les vaches, è z'ont toutes le même poids.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers.

1. *Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont impairs et que les autres coefficients sont pairs. Démontrer que A est inversible.*

   En travaillant modulo 2, on a $\det A \equiv \det I_n \equiv 1 \pmod 2$, donc $\det A$ est impair ce qui prouve en particulier que ce déterminant est non nul et donc que

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

2. *Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont pairs et que les autres coefficients sont impairs.*

   a) *On suppose que n est pair. Démontrer que A est inversible.*

   En travaillant modulo 2, on a

$$\det A \equiv \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}}_{J_n} \pmod 2.$$

   Pour calculer $\det J_n$, on procède ainsi

$$\det J_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 1 & & & 0 \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

   ce qui donne, en retirant la première ligne à toutes les autres,

$$\det J_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & & & 0 \\ -1 & & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & 0 & & & -1 \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

   puis, en additionnant alors chacune des lignes (de la deuxième à la dernière) à la première ligne,

$$\det J_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & & 0 \\ -1 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ -1 & & & -1 \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

d'où

$$\det J_n = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Par conséquent,

$$\det A \equiv (-1)^{n-1}(n-1) \equiv 1 \pmod 2,$$

ce qui démontre que $\det A$ est impair et donc aussi non nul. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } A \text{ est inversible.}}$$

b) *On suppose que n est impair. Démontrer que* $\operatorname{rg} A \in \{n-1; n\}$.

La matrice A', obtenue en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne de A, est une matrice d'ordre $n-1$ dont les coefficients diagonaux de A sont pairs et que les autres coefficients sont impairs. Comme $n-1$ est pair, le résultat de la question précédente nous dit que A' est inversible et donc de rang $n-1$. Comme A' est extraite de A, on en déduit, d'après le cours, que

$$\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } \operatorname{rg} A \in \{n-1; n\}.}$$

3. *C'est le père Bové qu'a $2n+1$ vaches. Quand qu'y met d'côté l'une quelconque d'ses vaches, ben les $2n$ qui restent, y peut les répartir en deux sous-troupeaux de n vaches chacun qu'ont tous deux le même poids total. Montrer qu'les vaches, è z'ont toutes le même poids.*

Soient $p_1, \ldots, p_{2n+1}$ les poids des vaches nommées $V_1, \ldots, V_{2n+1}$ (c'est plus pratique que « Marguerite », « la Noiraude », ...). Traduisons l'hypothèse : pour tout $i \in [\![1; 2n+1]\!]$, les vaches V_j, où $j \neq i$, peuvent être réparties en deux sous-troupeaux de même effectif et de même poids total. Il existe donc des coefficients $b_{i,j}$ (avec $1 \leqslant j \leqslant 2n+1$) tels que :

(1) $b_{i,i} = 0$ (*la vache V_i part brouter dans son coin*) ;

(2) $b_{i,j} = \pm 1$ si $j \neq i$; (*le signe dépend du sous-troupeau dans lequel on met la vache V_j*) ;

(3) $b_{i,1} + \cdots + b_{i,2n+1} = 0$ (*les deux sous-troupeaux ont même effectif*) ;

(4) $b_{i,1}p_1 + \cdots + b_{i,2n+1}p_{2n+1} = 0$ (*les deux sous-troupeaux ont même poids total*).

Les propriétés (1) et (2) signifient que la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice d'ordre impair dont les coefficients diagonaux sont pairs (ils valent 0) et les autres coefficients sont impairs (ls valent ± 1). On peut traduire la propriété (3) en disant que le vecteur colonne U de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1 appartient au noyau $\operatorname{Ker} B$. Enfin, la propriété (4) implique que le vecteur colonne P de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées sont $p_1, \ldots, p_{2n+1}$ appartient également au noyau $\operatorname{Ker} B$.

D'après la question précédente, on sait que $\operatorname{rg} B \in \{2n; 2n+1\}$ et donc $\dim \operatorname{Ker} B \in \{0; 1\}$ d'après le théorème du rang. Comme U et P appartiennent à $\operatorname{Ker} B$, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} B \neq 0$ et donc que $\dim \operatorname{Ker} B = 1$. Par suite, P et U sont proportionnels, c'est-à-dire $p_1 = \cdots = p_{2n+1}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{les vaches de José ont toutes le même poids.}}$$