

T.D. Q1 : Introduction aux idées de mécanique quantique

Exercice 1 Quantique ou classique ?

L'étude des systèmes suivants vous semble-t-elle relever du domaine de la physique quantique ou classique ?

1. Un oscillateur électrique LC portant une charge $q = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ avec $L = 40 \text{ mH}$ et $C = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ F}$.
2. Pour une personne de masse $m = 70 \text{ kg}$, est-il envisageable de mettre en évidence un régime de chute libre quantique dans le champ de pesanteur terrestre ? Même question pour un neutron de masse $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
3. Une « box » Wi-Fi, de puissance $0,10 \text{ W}$, émet sur la fréquence $2,4 \text{ GHz}$. Déterminer le nombre moyens de photons émis par unité de temps. Déterminer l'action caractéristique de ce système. Conclure.
4. L'électron d'un atome d'hydrogène orbitant autour du proton à une fréquence optique a-t-il un comportement classique ou quantique ? Justifier.

Exercice 2 Gaz quantique ou classique

On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est égale à $E = \frac{3}{2} k_B T$, où k_B est la constante de BOLTZMANN.

1. a. Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.
b. Calculer la longueur d'onde de DE BROGLIE correspondante. La comparer à la distance moyenne entre atomes d'hélium.
c. On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle lorsque la longueur d'onde de DE BROGLIE est de l'ordre de grandeur ou plus grande que la distance moyenne interatomique. Expliquer pourquoi et dites si l'étude de ce gaz d'hélium vous semble relever ou pas de la mécanique quantique.
2. Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome du cristal fournit un électron. L'ensemble de ces électrons libre constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'électron-volt. La distance moyenne entre électrons est supposée égale à la distance moyenne entre atomes.
a. Reprendre les arguments développés précédemment pour le gaz d'hélium dans le cas du gaz d'électrons libres dans un métal.
On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes relatives au cuivre : $M(\text{Cu}) = 63 \text{ g.mol}^{-1}$ et $\mu(\text{Cu}) = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.cm}^{-3}$.
b. La conduction de l'électricité dans un métal est liée au gaz d'électrons libres. Relève-t-elle d'un traitement quantique ou classique ?

Exercice 3 Le modèle de BOHR

Pour expliquer la stabilité de l'atome, BOHR imagina que les électrons devaient se mouvoir sur des orbites circulaires. Sur la première orbite, de rayon a_0 , la quantité de mouvement de l'électron vérifie $p_0 = \hbar/a_0$.

1. Afin qu'on puisse parler de trajectoire au sens classique du terme, quelle limitation doit-on imposer aux indéterminations Δr et Δp pour l'orbite de BOHR considérée ?
2. Montrer que ces limitations sont incompatibles avec l'inégalité de HEISENBERG spatiale.
3. Que doit-on en déduire pour le modèle de BOHR ?

Exercice 4 Largeur spectrale

Un atome se trouve dans un état excité dont l'énergie est supérieure à celle du niveau fondamental de $4,7 \text{ eV}$. Le temps de vie de l'état excité est égal à $1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

1. Déterminer la fréquence et la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique émis lors de la désexcitation de l'atome.
2. Quelle est l'indétermination minimale sur l'énergie du photon émis lorsque l'atome se désexcite ?
3. En déduire la largeur spectrale de la raie d'émission correspondante (on l'exprimera à la fois en termes de fréquence puis de longueur d'onde).

Exercice 5 Émission d'un photon par un atome

Un atome, de masse m , émet un photon de fréquence f_0 lorsqu'il est immobile. En mouvement le long de l'axe (Ox), à la vitesse $\vec{v} = v\hat{u}_x$, il émet un photon dont la fréquence f perçue par le récepteur est donnée par la relation suivante, caractéristique de l'effet DOPPLER : $f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. On suppose que l'atome se rapproche du récepteur et que v est une grandeur positive.

1. Le décalage DOPPLER $\Delta f = f - f_0$ est utilisé pour mesurer v . Quelle durée minimale τ de la mesure correspond à une indétermination sur f égale au décalage DOPPLER ?
2. On admet que τ représente la durée pendant laquelle intervient l'émission du photon. En déduire l'indétermination Δx sur la position de l'atome lors de l'émission du photon.
3. En déduire une condition sur l'indétermination Δp_x de la quantité de mouvement de l'atome. Interpréter le résultat.

Exercice 6 Dispositif à trois fentes

On considère une expérience d'interférences, où un faisceau de particules quantiques est dirigé vers trois fentes contenues dans un même plan. La détection des particules est effectuée au voisinage d'un point M à grande distance du plan contenant les trois fentes.

- Lorsque la seule fente 1 est ouverte, l'amplitude de probabilité en M vaut $\psi_1(M) = 1/\sqrt{3}$.
- Lorsque la seule fente 2 est ouverte, l'amplitude de probabilité en M vaut $\psi_2(M) = i/\sqrt{2}$.
- Lorsque la seule fente 3 est ouverte, l'amplitude de probabilité en M vaut $\psi_3(M) = -1/\sqrt{6}$.

Déterminer la probabilité de détection d'une particule au voisinage du point M lorsque : (a) seule la fente 2 est ouverte ; (b) les fentes 1 et 2 sont ouvertes ; (c) les fentes 1 et 3 sont ouvertes ; (d) toutes les fentes sont ouvertes.

Exercice 7 Oscillateur harmonique quantique

On considère une particule quantique, de masse m , soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Dans un état stationnaire d'énergie E , on écrit la fonction d'onde sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp(-iEt/\hbar)$.

1. Écrire l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps dans le cas considéré.
2. Pour l'état fondamental, $\varphi(x)$ est une gaussienne $\varphi(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/a^2)$.
 - a. Déterminer la constante de normalisation \mathcal{N} .
 - b. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire, sans calcul, la valeur de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule.
 - c. Déterminer l'expression de l'énergie E et de a en fonction de \hbar , m et de ω .

Données : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\pi/\alpha}$.

Exercice 8 Diffraction d'une onde électromagnétique par une fente

On considère l'expérience de diffraction d'une onde électromagnétique plane, de longueur d'onde $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$, à travers une fente de largeur $a = 0,070 \text{ mm}$ selon l'axe (Ox), et de longueur infinie selon (Oy). La figure de diffraction est observée sur un écran lointain, placé à une distance $D = 2,00 \text{ m}$. L'éclairement observé sur l'écran se concentre le long de l'axe (Ox). Il est donné par la relation $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$.

1. On admet que la densité de probabilité de présence d'un photon au voisinage d'un point de l'écran est proportionnelle à l'éclairement en ce point : $dP(x,t) = C\mathcal{E}(x)dx$. Déterminer l'expression de la constante C .
2. Déterminer la probabilité P qu'un photon soit détecté à l'intérieur de la tache centrale de diffraction correspondant aux positions $|x| \leq \lambda_0 D/a$.

Données : on fournit les valeurs numériques suivantes $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u du = \pi$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sinc}^2 u du \simeq 2,84$.

Exercice 9 Particule dans une boîte unidimensionnelle

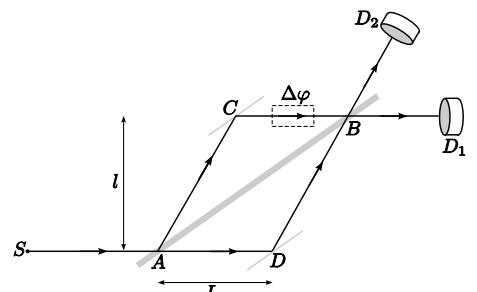
Une particule, de masse m , d'énergie E , est confinée dans l'intervalle $0 \leq x \leq L$ où son énergie potentielle est choisie nulle : $V(x) = 0$.

1. On adopte, dans cette question seulement, un traitement *classique*. On admet que la densité de probabilité de présence classique de la particule entre x et $x + dx$ est proportionnelle à la durée de passage dt entre ces deux abscisses.
 - a. En exploitant la conservation de l'énergie, exprimer la vitesse classique $v(x)$ de la particule à l'abscisse x .
 - b. Montrer qu'après normalisation, la densité de probabilité de présence classique est telle que : $dP_{\text{cl}} = dx/L$.
 - c. Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et $L/4$.
2. On adopte maintenant un traitement quantique. L'énergie E de la particule correspond à un état stationnaire représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t) = A_n \sin(n\pi x/L) \exp(-iEt/\hbar)$ où n est un entier strictement positif.
 - a. Déterminer la constante A_n en normalisant cette fonction d'onde.
 - b. Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et $L/4$.
 - c. Que devient ce dernier résultat dans la limite où $n \gg 1$. Comment ce résultat se compare-t-il au résultat de la théorie classique ?

Exercice 10 Interférométrie neutronique et gravité

On considère l'interféromètre à neutrons réalisé par COLELLA, OVERHAUSER et WERNER en 1975 (expérience COW) et représenté schématiquement sur la figure ci-contre.

Un faisceau incident de neutrons, monochromatique, est émis par la source S . Un cristal de silicium, placé en A et représenté par un rectangle grisé sur la figure, joue le rôle d'une lame séparatrice. Une partie du faisceau est transmise, avec une amplitude de probabilité t , vers le point D . Une autre partie est réfléchie, avec une amplitude de probabilité r , vers le point C . Les amplitudes de probabilité r et t vérifient $|r|^2 + |t|^2 = 1$, avec r réel et $t = i|r|$. Ces deux faisceaux sont ensuite réfléchis par deux lames cristallines en C et D , caractérisées par les mêmes amplitudes de probabilité r et t que la première lame. Ils sont enfin recombinés par une troisième lame en B , caractérisée elle aussi par les mêmes amplitudes de probabilité. Deux compteurs D_1 et D_2 permettent de détecter les neutrons.

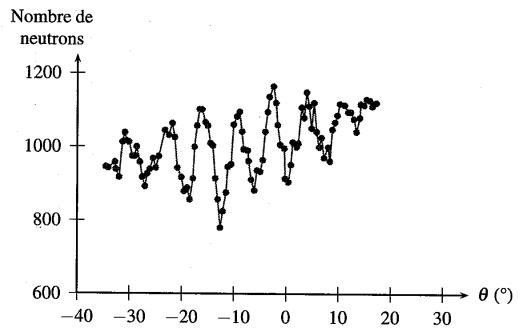


On admet qu'il existe une différence de phase entre le trajet supérieur et le trajet inférieur, que l'on note $\Delta\varphi$. Elle peut avoir diverses origines : différences de longueur entre les deux trajets, influence de la gravité, passage dans un champ magnétique, par exemple. L'interférométrie neutronique a pour but de mesurer cette différence de phase.

1. Montrer que l'amplitude de probabilité qu'un neutron soit détecté par D_1 s'écrit $\psi_1 = \psi_0 r^2 t [1 + \exp(i\Delta\varphi)]$ où ψ_0 est une constante. En déduire la probabilité P_1 de détection d'un neutron par le détecteur D_1 en fonction de $|\psi_0|^2$, $R = |r|^2$ et de $\Delta\varphi$.
2. Exprimer de même l'amplitude de probabilité ψ_2 correspondant à la détection d'un neutron par D_2 . En déduire ensuite la probabilité de détection correspondante P_2 .
3. Normaliser les probabilités P_1 et P_2 .
4. Dans l'expérience COW, le retard de phase $\Delta\varphi$ est lié à la gravité. On note λ_0 , la longueur d'onde de DE BROGLIE des neutrons incidents, et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ la norme du vecteur d'onde correspondant. L'énergie cinétique d'un neutron peut être écrite sous la forme $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$, où k est le module du vecteur d'onde et m_n la masse du neutron.

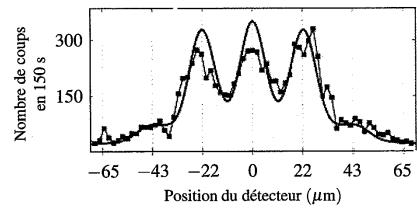
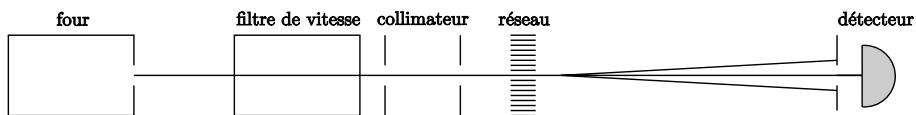
- a. En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer l'expression du module du vecteur d'onde $k(z)$ à une altitude z en fonction du module du vecteur d'onde k_0 à l'altitude $z = 0$, de m_n , g , \hbar et z . Comparer les valeurs numériques des termes constituant $k(z)$. On prendra $z = 1$ cm (conditions expérimentales de l'expérience COW). En déduire une simplification pour l'expression donnant $k(z)$ en fonction de z .
- b. Le plan ABCD est initialement horizontal. On le fait tourner autour de l'axe (AD) d'un angle θ par rapport à la position horizontale. Le bras (AD) reste à l'altitude $z = 0$ tandis que le bras (CB) de l'interféromètre se trouve à altitude $z = l \sin \theta$. On admet que le chemin optique sur chacun des deux bras s'identifie à $k(z)L$ où z est l'altitude du bras considéré. Montrer que la rotation induit un retard de phase pour le trajet supérieur par rapport au trajet inférieur : $\Delta\varphi = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_0}{h^2} \sin \theta$, où $S = Ll$ est l'aire du losange ABCD.
- c. La figure ci-contre représente le nombre de neutrons détectés par le détecteur D_1 en fonction de l'inclinaison θ du plan (ABCD). On distingue le défilement de plusieurs franges d'interférences lorsque θ varie de -30° à 20° . Peut-on déduire une valeur numérique de g grâce à la figure ? Si oui, proposez aussi une évaluation de l'incertitude sur g .

Données : $\lambda_0 = 1,4 \cdot 10^{-10}$ m ; $S = Ll = 9,2 \cdot 10^{-4}$ m² ; $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

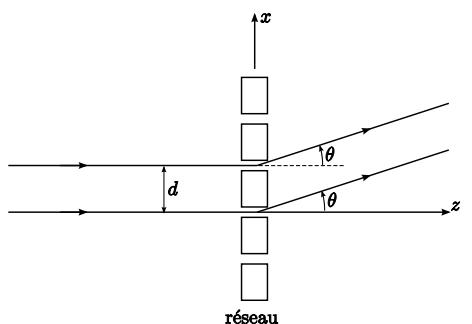


Exercice 11 Diffraction de molécules par une onde lumineuse

On considère une expérience de diffraction de molécules de fullerène C_{60} par une onde stationnaire lumineuse donnant la figure d'interférences ci-contre (résultats de O. Nairz et al, 2001). Un four contenant de la poudre de fullerène est chauffé à une température proche de 900 K. Un dispositif permet de sélectionner dans le faisceau de fullerène sortant du four des molécules de vitesse moyenne égale à $v = 120 \text{ m.s}^{-1}$ et dont la dispersion relative de vitesse est $\frac{\Delta v}{v} = 0,17$. Le faisceau est collimaté par deux fentes verticales successives de largeurs respectivement égales à $a = 7 \mu\text{m}$ et $b = 5 \mu\text{m}$, et séparées de $D' = 1,13 \text{ m}$. Le faisceau de molécules est ensuite diffracté par une onde stationnaire lumineuse. On admettra que du point de vue des molécules de fullerène, l'onde lumineuse stationnaire agit comme un réseau plan de diffraction, constitué de N fentes infiniment fines et équidistantes de $d = 257 \text{ nm}$. Un détecteur, situé à une distance $D = 1,2 \text{ m}$ après le réseau, permet de compter les molécules de C_{60} . Le dispositif expérimental est représenté sur la figure ci-dessous.



1. a. Déterminer la longueur d'onde de DE BROGLIE λ des molécules de fullerène qui sont sélectionnées par le filtre de vitesse.
b. Déterminer la dispersion $\Delta\lambda$ de la longueur de DE BROGLIE.
c. Que représente la longueur $\ell_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$? Calculer sa valeur numérique.
2. Expliquer quel est l'intérêt des fentes de collimation. En utilisant l'inégalité de HEISENBERG spatiale, évaluer l'ouverture angulaire du faisceau moléculaire produite par chacune des deux fentes.
3. On considère la figure d'interférences donnée en début d'énoncé.
 - a. On suppose que le détecteur permet d'observer les interférences à l'infini du faisceau moléculaire diffracté. Pour interpréter les résultats expérimentaux, on se ramène au schéma de la figure ci-contre. On fait de plus l'hypothèse que la longueur d'onde de DE BROGLIE n'est pas modifiée par le passage à travers le réseau. Déterminer les directions θ pour lesquelles il y a interférence constructive des faisceaux diffractés.
 - b. Interpréter l'allure de la courbe expérimentale de la figure d'interférences. En déduire la valeur numérique de la vitesse moyenne des molécules de C_{60} et la comparer à la valeur donnée par les auteurs de l'expérience.
 - c. Montrer, en utilisant des arguments similaires à ceux développés en optique, que le défaut de cohérence temporelle du faisceau permet d'expliquer le nombre limité de franges visibles.



Exercice 12 Niveaux d'énergie du puits de potentiel profond

1. Représenter l'allure de la fonction d'onde propre pour les 3 premiers niveaux d'énergie d'une particule quantique dans un puits de potentiel infiniment profond, de largeur a .
2. En déduire dans chaque cas l'expression de la longueur d'onde de DE BROGLIE en fonction de a , \hbar et de la masse de la particule quantique m , puis la valeur de l'énergie E de chaque niveau.
3. En généralisant, retrouver l'expression de l'énergie E_n du $n^{\text{ème}}$ niveau en fonction de n , m , \hbar et a .

Exercice 13 Étalement du paquet d'ondes

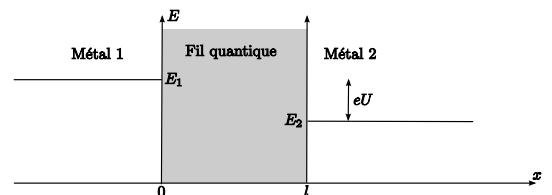
On considère une particule quantique libre de masse m .

- Retrouver rapidement la relation de dispersion correspondante.
- On considère que l'état de la particule quantique est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives, dont les vecteurs d'ondes sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk , qui détermine l'extension spatiale initiale Δx_0 du paquet d'ondes à l'instant $t = 0$. La pulsation moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0 .
 - Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_{g0} et déterminer son expression.
 - Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur Δk correspond une dispersion de la vitesse de groupe Δv_g autour de la valeur moyenne v_{g0} . Exprimer Δv_g en fonction de \hbar , m et Δx_0 .
 - En déduire la largeur du paquet d'ondes $\Delta x(t)$ après un déplacement d'une durée t depuis l'origine. Déterminer l'instant t_0 pour lequel la largeur du paquet d'ondes a doublé.
 - Applications numériques : calculer t_0 pour (i) un électron, de masse $m = 10^{-30}\text{kg}$, initialement confiné dans un atome avec $\Delta x_0 = 10^{-10}\text{m}$; (ii) une gouttelette d'eau, de rayon égal à $10\mu\text{m}$ et de masse $m = 4.10^{-12}\text{kg}$. Commentaires ?

Exercice 14 Fil quantique

On étudie la conduction électronique dans un fil quantique : il s'agit d'un matériau dans lequel des électrons peuvent se déplacer d'une extrémité à l'autre. Sa géométrie est celle d'un parallélépipède, de section carrée, de côté a , et de longueur $l \gg a$ (typiquement, a est l'ordre du nanomètre alors que l est de l'ordre du micromètre, ce qui justifie la dénomination de « fil »). Pour des raisons géométriques, il existe donc un fort confinement latéral de l'électron, qui ne lui laisse plus que la possibilité de se déplacer selon l'axe (Ox) du fil (voir figure ci-dessus). Les électrons à l'intérieur du fil sont traités comme des particules quantiques, de masse m , libres de se déplacer dans la direction (Ox) du fil. La fonction d'onde propre, qui représente alors un état stationnaire d'un électron d'énergie E dans le fil, s'écrit sous la forme suivante : $\varphi(x) = A \exp(ikx)$ où A est une constante réelle de normalisation.

- Commenter la forme choisie pour $\varphi(x)$. Que représente k ? Normaliser la fonction d'onde propre.
- En utilisant l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps, exprimer l'énergie E de l'électron en fonction de k , m et \hbar . Exprimer la vitesse de déplacement v_x d'un électron selon (Ox) en fonction de k , m et \hbar .
- Montrer que la densité de probabilité de présence $\frac{dP(x)}{dx}$ de l'électron est uniforme le long du fil et donner son expression.
- On admet que la probabilité de présence entre x et $x + dx$, d'un électron, dont le vecteur d'onde est compris entre k et $k + dk$ est $dP_k(x) = \frac{dP(x)}{dx} \frac{l}{\pi} dx dk$. Montrer que la contribution au courant électrique qui traverse le fil, dans le sens des x croissants, d'un électron dont le vecteur d'onde est compris entre k et $k + dk$ est $dI = -\frac{ev_x}{\pi} dk$ où e désigne la charge élémentaire.
- Le fil quantique est disposé entre deux métaux, soumis à une différence de potentiel électrique U . La figure ci-contre représente les niveaux d'énergie des électrons dans les deux métaux. Dans le métal 1, du côté $x \leq 0$, les électrons de conduction occupent tous les niveaux d'énergie jusqu'à une valeur maximale notée E_1 . Dans le métal 2, situé de l'autre côté du fil quantique ($x \geq l$), les électrons de conduction occupent tous les niveaux d'énergie jusqu'à une valeur maximale notée $E_2 = E_1 - eU$. Un électron du métal 1 dont l'énergie est comprise entre E_1 et E_2 peut transiter à travers le fil quantique vers le métal 2. Cet électron a un vecteur d'onde k compris entre k_1 et k_2 . Les énergies E_1 et E_2 sont liées à k_1 et k_2 par la relation déterminée à la question 1.c.
 - Montrer que l'intensité I du courant électrique qui traverse le fil dans le sens des x croissants s'exprime en fonction de U sous la forme suivante $I = -GU$, où G s'exprime simplement en fonction de e et de la constante de PLANCK \hbar .
 - Commenter l'expression de G et donner sa valeur numérique, ainsi que celle de la grandeur $R = 1/G$.



Exercice 15 Émission d'un photon

Un électron est confiné dans un puits quantique formé d'une couche de GaAs (matériau semi-conducteur) prise en « sandwich » entre deux couches de GaAlAs. Pour déterminer les états stationnaires de l'électron, on considère une particule quantique de masse $m_e^* = 0,067m_e$ (où $m_e = 9,1.10^{-31}\text{kg}$ est la masse de l'électron) évoluant dans un puits de potentiel infini, de largeur $a = 7,0\text{nm}$. On considère la transition du niveau d'énergie $n = 2$ au niveau d'énergie fondamental $n = 1$.

Déterminer la longueur d'onde de la radiation émise lors de cette transition et la situer dans le spectre électromagnétique.

Exercice 16 Molécule de benzène

Les orbitales π de la molécule de benzène peuvent être modélisées de façon très approximative en considérant les fonctions d'onde et les énergies d'une particule quantique astreinte à se déplacer sur un cercle, de rayon a . On adopte une modélisation unidimensionnelle en supposant qu'une particule contrainte de se déplacer sur le cercle se déplace en fait sur le segment $0 \leq x \leq 2\pi a$, avec une énergie potentielle $V(x) = 0$. Un état stationnaire de cette particule est représenté par la fonction d'onde $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

1. On cherche une fonction d'onde propre sous la forme $\varphi(x) = A \exp(ikx)$. Déterminer k et justifier qu'on peut choisir A réel. Normaliser cette fonction d'onde propre sur l'intervalle $[0; 2\pi a]$.
2. On adopte des conditions aux limites dites périodiques : $\varphi(0) = \varphi(2\pi a)$.
 - a. Interpréter ce choix.
 - b. Montrer qu'on aboutit à une quantification des niveaux d'énergie. On utilisera un nombre quantique, noté n . Interpréter pourquoi certains niveaux d'énergie sont doublement dégénérés (c'est-à-dire que deux valeurs distinctes de n conduisent à une même valeur de l'énergie).
 - c. Représenter sur un diagramme énergétique les premiers niveaux d'énergie.
3. On traite les 6 électrons π du benzène comme des particules quantiques astreintes à se déplacer sur un cercle de rayon a .
 - a. Ces électrons occupent les niveaux d'énergie en respectant les règles de HUND et de PAULI. Représenter l'état fondamental du système sur un diagramme énergétique.
 - b. Sachant que le benzène présente une bande d'absorption à 255 nm, estimer la valeur numérique de a . En réalité, la longueur de la liaison C – C vaut 142 pm. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 17 Puits infini : état non stationnaire

On étudie l'évolution d'une particule quantique, de masse m , piégée dans un puits de potentiel infini de largeur a : $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$ et $V(x) \rightarrow +\infty$ en dehors de cet intervalle. On considère un état stationnaire de la particule quantique, d'énergie E_n , associé à une fonction d'onde propre de la forme $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)$ où $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Donner la valeur de l'énergie E_n . On pose $E_1 = \hbar\omega_0$. Exprimer ω_0 en fonction de a , m et \hbar . Exprimer ensuite E_n en fonction de n , \hbar et ω_0 .
2. On considère l'état décrit par la fonction d'onde $\psi_n(x, t)$ telle que $\psi_n(x, t=0) = \varphi_n(x)$. Donner l'expression de $\psi_n(x, t)$ pour $t > 0$.
3. On considère maintenant l'état décrit par la fonction d'onde $\psi(x, t)$ telle que $\psi(x, t=0) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$.
 - a. En utilisant le résultat de la question précédente, donner l'expression de $\psi(x, t)$ pour $t > 0$.
 - b. On définit les deux états suivants $\varphi_g(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$ et $\varphi_d(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$. Exprimer $\psi(x, t)$ en fonction de $\varphi_d(x)$ et $\varphi_g(x)$. En déduire l'expression de la densité de probabilité de présence $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$. Montrer qu'elle oscille à une fréquence ν que l'on exprimera en fonction de ω_0 , puis en fonction de E_2 , E_1 et \hbar .
 - c. Représenter l'allure de $\varphi_d(x)$ et $\varphi_g(x)$ et des densités de probabilités de présence associées. En déduire l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule quantique en fonction du temps.

Exercice 18 Étoile à neutrons

Une étoile à neutrons se forme à la suite de l'explosion d'une supernova (forme ultime de l'évolution d'une étoile très massive). Elle est caractérisée par un faible diamètre (de l'ordre de la dizaine de kilomètres) et une masse comparable à celle du Soleil. Il en résulte qu'elle forme un astre très dense. On considère une étoile à neutrons de masse $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg (i.e. une masse solaire M_\odot), exclusivement constituée de neutrons de masse $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg. On suppose que la densité de neutrons est uniforme à l'intérieur de l'étoile, qui est assimilée à une boule de rayon R . On fait de plus l'hypothèse que les neutrons forment un gaz de particules quantiques sans interaction.

1. Calculer le nombre N de neutrons dans l'étoile.
2. On admet que l'énergie cinétique de chaque neutron peut être évaluée en supposant qu'il est confiné dans un volume V/N , où V est le volume de l'étoile.
 - a. Exprimer l'échelle de longueur caractéristique du confinement d'un neutron en fonction de V et N .
 - b. En déduire que l'énergie cinétique totale des neutrons s'écrit, à une constante multiplicative près, sous la forme suivante

$$E_c \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}.$$
3. Du fait de l'attraction gravitationnelle que les neutrons exercent entre eux, l'étoile possède une énergie de cohésion gravitationnelle E_g qui s'exprime simplement en fonction de la constante de gravitation universelle G , de sa masse M et de son rayon R . Déterminer, par analyse dimensionnelle, une expression de E_g à une constante multiplicative près. On précisera le signe à donner à E_g .
4. Représenter l'allure de l'énergie totale de l'étoile $E = E_c + E_g$ et montrer qu'il existe un rayon d'équilibre stable pour l'étoile. Calculer ce rayon d'équilibre et en déduire la masse volumique de l'étoile.
5. Comparer cette masse volumique à celle d'un noyau atomique, qu'on peut assimiler à une distribution de masse sphérique de densité uniforme et de rayon $r = r_0 A^{1/3}$ où A est le nombre de nucléons du noyau et $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15}$ m.

Quelques indications ou solutions...

Exercice 1

Et... action !

Exercice 2

Pas d'indication

Exercice 3

Pas d'indication

Exercice 4

Pas d'indication

Exercice 5

Pas d'indication

Exercice 6

Pas d'indication

Exercice 7

Pas d'indication

Exercice 8

Pas d'indication

Exercice 9

Pas d'indication

Exercice 10

Pas d'indication

Exercice 11

Pas d'indication

Exercice 12

Pas d'indication

Exercice 13

2.c. Décomposer le paquet d'ondes en paquets d'ondes infinitésimaux.

Exercice 14

Pas d'indication

Exercice 15

Pas d'indication

Exercice 16

Pas d'indication

Exercice 17

Pas d'indication

Exercice 18

Pas d'indication