

POLYNÔMES

Exercice 1. Polynômes de Tchebychev

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. a) Calculer T_2 , T_3 et T_4 .
b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré n tel que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
c) Pour tout $n \geq 1$, déterminer le coefficient dominant a_n de T_n .
d) Déterminer $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. Retrouver ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos n\theta = S_n(\cos \theta)$. Démontrer que $S_n = T_n$.
c) Déterminer les racines de T_n et donner la factorisation de T_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2. À la recherche des coefficients !

Je vous propose un petit jeu très mathématique.

J'ai en tête un polynôme P dont les coefficients sont des entiers naturels.

Vous avez le droit de me demander des valeurs de $P(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Et c'est tout !

Combien vous faudra-t-il de questions au minimum pour démasquer mon polynôme ?