

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIERE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2003

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Propriétés asymptotiques des solutions  
d'une équation différentielle

On désigne par

- $E$  l'espace vectoriel des fonctions complexes continues bornées sur l'intervalle  $J = [1, +\infty[$ , muni de la norme  $f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in J} |f(t)|$  ;
- $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes continus de  $E$ , muni de la norme
 
$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|A(f)\| ;$$
- $I_E$  l'endomorphisme identité de  $E$  ;
- $\Delta$  le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$  formé des couples  $(t, \tau)$  vérifiant  $1 \leq t \leq \tau$ .

## Première partie

Dans cette partie on désigne par  $k$  une fonction complexe continue bornée sur  $\Delta$  et on pose  $\|k\| = \sup_{(t, \tau) \in \Delta} |k(t, \tau)|$ .

1. Vérifier que, pour toute fonction  $u$  de  $E$ , la fonction  $t \mapsto \int_t^\infty k(t, \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}$  est bien définie sur  $J$  et appartient à  $E$ .

2. Vérifier que, si l'on note  $A(u)$  la fonction ainsi définie, on définit un élément  $A$  de  $\mathcal{L}(E)$  ; comparer  $\|A\|$  et  $\|k\|$ .

3. Déterminer une constante  $K \geq 0$  telle que l'on ait, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $t \in J$

$$|(A^n(u))(t)| \leq \frac{K^n \|u\|}{n! t^n}.$$

4. Montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$  est convergente dans  $\mathcal{L}(E)$ , et calculer le produit  $(I_E - A) \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ .

On fixe une fonction  $u_0$  de  $E$  et on considère l'équation intégrale

$$u(t) = u_0(t) + \int_t^\infty k(t, \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} \quad (1)$$

où  $u$  est une fonction inconnue dans  $E$ .

5. Quel est le nombre de solutions de (1) ?

### Deuxième partie

On s'intéresse maintenant à l'équation (1) où l'on prend

$$u_0(t) = e^{\varepsilon it} \quad , \quad k(t, \tau) = \lambda \sin(t - \tau)$$

( $\varepsilon \in \{+, -\}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ ). On note  $u_\varepsilon$  sa solution.

6. Montrer que  $u_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$ .

7. Vérifier que  $u_\varepsilon$  est solution sur  $J$  de l'équation différentielle

$$u''(t) + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) u(t) = 0. \quad (2)$$

8. Le couple  $(u_+, u_-)$  est-il une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans  $E$  ?

### Troisième partie

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la fonction  $u = u_+$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . On dit qu'une fonction  $f$  de  $E$  admet un *développement asymptotique à l'ordre  $k \geq 0$*  s'il existe des constantes  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$  telles que l'on ait

$$f(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)$$

(ce qui signifie que la fonction  $t^{k+1} \left( f(t) - \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{1}{t^j} \right)$  est bornée).

On admettra qu'une telle famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ , si elle existe, est unique. On dit qu'une fonction  $f$  de  $E$  admet un *développement asymptotique à l'ordre  $\infty$*  si elle admet un développement asymptotique à tout ordre  $k$ .

9. On se propose ici de construire un développement asymptotique à l'ordre  $\infty$  pour chacune des fonctions

$$\varphi_n(t) = e^{-it} \int_t^\infty \sin(t - \tau) \frac{e^{i\tau}}{\tau^{n+2}} d\tau \quad (n \text{ entier } \geq 0 \quad , \quad t \in [1, +\infty[),$$

développement asymptotique que l'on écrira

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O\left(\frac{1}{t^{n+k+1}}\right). \quad (3)$$

a) Vérifier que, pour tout entier  $m \geq 1$ , on a  $\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = O\left(\frac{1}{t^m}\right)$ .

b) Établir, pour tous entiers  $n \geq 0$ ,  $k \geq 1$ , la formule

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left[ \sum_{j=1}^k \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j} \frac{1}{t^{n+j}} - \frac{(n+k)!}{(2i)^k} \int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} d\tau \right].$$

c) Conclure.

**10.** On se propose maintenant de construire un développement asymptotique à l'ordre  $\infty$  pour la fonction  $e^{-it}u(t)$ ; on a donc, par définition

$$u(t) = e^{it} + \lambda \int_t^\infty \sin(t-\tau)u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}. \quad (4)$$

On écrira ce développement asymptotique sous la forme

$$e^{-it}u(t) = \sum_{j=0}^k \gamma_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right).$$

a) Vérifier que l'on a

$$e^{-it}u(t) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

b) Supposant construits  $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ , écrire  $\gamma_{n+1}$  en fonction de  $\gamma_0, \dots, \gamma_n$  et des divers  $\alpha_{p,q}$ .

c) Vérifier que l'on a

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i} \left( n + \frac{\lambda}{n+1} \right) \gamma_n.$$

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$ ?

\* \*  
\*