RELATIONS CORRECTION

Exercice 1

Soit Ω un ensemble. On appelle clan sur Ω un ensemble $\mathscr{C}$ de parties de Ω tel que $\varnothing \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire et $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie.

1. *Soit $\mathscr{C}$ un clan sur Ω.*

   a) *Démontrer que $\Omega \in \mathscr{C}$.*

   On a $\varnothing \in \mathscr{C}$ et $\Omega = \overline{\varnothing}$ donc, comme $\mathscr{C}$ est stable par passage au contraire, on a

   $$\boxed{\Omega \in \mathscr{C}.}$$

   b) *Démontrer que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cap B \in \mathscr{C}$.*

   Soient $A, B \in \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable par passage au contraire, on a $\overline{A}, \overline{B} \in \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable pas réunion finie, on a $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire $\overline{A \cap B} \in \mathscr{C}$. En utilisant à nouveau la stabilité de $\mathscr{C}$ par passage au contraire, on en déduit que $A \cap B \in \mathscr{C}$. Donc

   $$\boxed{\mathscr{C} \text{ est stable par intersection finie.}}$$

2. a) *Donner le plus petit clan et plus gros clan sur Ω.*

   De façon évidente,

   $$\boxed{\text{le plus petit clan sur } \Omega \text{ est } \{\varnothing, \Omega\} \text{ et le plus gros est } \mathscr{P}(\Omega).}$$

   b) *On note $\mathscr{I}$ l'ensemble formé par toutes les réunions d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathscr{I}$ est un clan sur $\mathbb{R}$.*

   L'ensemble vide est un intervalle de $\mathbb{R}$ par définition donc $\varnothing \in \mathscr{I}$.

   Soit A un élément de $\mathscr{I}$, c'est-à-dire une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. Le complémentaire de A est alors une intersection finie de complémentaires d'intervalles. Or, le complémentaire d'un intervalle est soit un intervalle soit la réunion de deux intervalles, donc $\overline{A}$ est une intersection finie d'union finie d'intervalles, c'est-à-dire une réunion finie d'intersection finie d'intervalles (par distributivité). Comme l'intersection de deux intervalles est un intervalle, il s'ensuit que $\overline{A}$ est une réunion finie d'intervalles, autrement dit $\overline{A} \in \mathscr{I}$.

   Soient A et B deux éléments de $\mathscr{I}$, c'est-à-dire deux réunions finies d'intervalles. Par associativité de $\cup$, la partie $A \cup B$ est aussi une réunion finie d'intervalles, c'est-à-dire $A \cup B \in \mathscr{I}$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{I} \text{ est un clan sur } \mathbb{R}.}$$

3. a) *Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une partition de Ω. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble formé par toutes les réunions d'un certain nombre (éventuellement nul) de E_k. Démontrer que $\mathscr{C}$ est un clan sur Ω, appelé clan engendré par la partition $(E_1, \ldots, E_n)$.*

   On a $\bigcap\limits_{i \in \varnothing} E_i = \varnothing$, donc $\varnothing \in \mathscr{C}$.

   Soit $A \in \mathscr{C}$. Il existe $I \subset [\![1; n]\!]$ tel que $A = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$. Alors

   $$\overline{A} = \overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in \overline{I}} E_i,$$

   où la dernière égalité découle du fait que $(E_1, \ldots, E_n)$ est une partition de Ω. Donc $\overline{A} \in \mathscr{C}$.

Soient $A, B \in \mathscr{C}$. Il existe $I \subset [\![1;n]\!]$ et $I' \subset [\![1;n]\!]$ tels que $A = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$ et $B = \bigcup\limits_{i \in I'} E_i$. Alors

$$A \cup B = \Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I'} E_i\Big) = \bigcup_{i \in I \cup I'} E_i.$$

Donc $A \cup B \in \mathscr{C}$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est un clan sur } \Omega.}$$

b) *Soit $\mathscr{C}$ un clan sur Ω.*

α] *Soit $\mathscr{R}$ la relation sur Ω donnée par $(x \mathscr{R} y) \iff \big(\forall A \in \mathscr{C},\ (x \in A) \iff (y \in A)\big)$ pour tout $x, y \in \Omega$. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur Ω.*

Soit $x \in \Omega$. Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on a $(x \in A) \iff (x \in A)$ (pardi !), donc $x \mathscr{R} x$. Ainsi $\mathscr{R}$ est réflexive.

Soient $x, y \in \Omega$ tels que $x \mathscr{R} y$. Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on a donc $(x \in A) \iff (y \in A)$ et donc aussi $(y \in A) \iff (x \in A)$, ce qui démontre que $y \mathscr{R} x$. Donc $\mathscr{R}$ est symétrique.

Soient $x, y, z \in \Omega$ tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$. Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on a donc $(x \in A) \iff (y \in A)$ et $(y \in A) \iff (z \in A)$, ce qui implique que $(x \in A) \iff (z \in A)$. Donc $x \mathscr{R} z$. Ainsi $\mathscr{R}$ est transitive.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

► *Pour tout $x \in \Omega$, on note $\widehat{x}$ la classe d'équivalence de x module $\mathscr{R}$. Cette classe est appelée l'atome de $\mathscr{C}$ engendré par x.*

β] *Démontrer que tout élément de $\mathscr{C}$ est la réunion de ses atomes.*

Soit $A \in \mathscr{C}$. Démontrons que $A = \bigcup\limits_{x \in A} \widehat{x}$ par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in A$. Comme $y \in \widehat{y}$, on a $y \in \bigcup\limits_{x \in A} \widehat{x}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \bigcup\limits_{x \in A} \widehat{x}$. Il existe alors $x \in A$ tel que $y \in \widehat{x}$, c'est-à-dire $x \mathscr{R} y$. Mézalors, comme $x \in A$, la définition de la relation $\mathscr{R}$ nous dit que $y \in A$.

Donc

$$\boxed{\text{tout élément de } \mathscr{C} \text{ est la réunion de ses atomes.}}$$

γ] *Démontrer que, pour tout $x \in \Omega$, on a $\widehat{x} = \bigcap\limits_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X$.*

Soit $x \in \Omega$. On procède par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \widehat{x}$. Si $X \in \mathscr{C}$ contient x, alors $y \in X$ puisque $x \mathscr{R} y$. Ainsi y appartient à toutes les parties X appartenant à $\mathscr{C}$ et contenant x. Il appartient donc aussi à leur intersection, c'est-à-dire $y \in \bigcap\limits_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \bigcap\limits_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X$. On veut prouver que $y \in \widehat{x}$, c'est-à-dire que $x \mathscr{R} y$ ou encore que $\forall A \in \mathscr{C},\ (x \in A) \iff (y \in A)$. Pour cela, on considère $A \in \mathscr{C}$ et on démontre l'équivalence $(x \in A) \iff (y \in A)$ par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $x \in A$, alors A est l'une des parties de l'intersection $\bigcap\limits_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X$. Dès lors, l'élément y, qui est dans toutes les parties de cette intersection, est a fortiori dans A.

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par contraposition. Si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$ et le raisonnement mené dans le sens $\Rightarrow$ nous dit que $y \in \overline{A}$, c'est-à-dire $y \notin A$.

Donc $y \in \widehat{x}$.

En conclusion,

$$\boxed{\widehat{x} = \bigcap_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X.}$$

$\delta]$ *On suppose que $\mathscr{C}$ est un ensemble fini. Démontrer que $\mathscr{C}$ contient chacun de ses atomes et en déduire que $\mathscr{C}$ est un clan engendré par une partition finie.*

Soit $x \in \Omega$. Comme $\mathscr{C}$ est fini, l'atome $\widehat{x} = \bigcap\limits_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X$ est une intersection finie de parties de $\mathscr{C}$. Comme on a vu que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie (il suffit de généraliser par récurrence le résultat de la question 1. b)), on en déduit que $\widehat{x} \in \mathscr{C}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ contient chacun de ses atomes.}}$$

Comme $\mathscr{C}$ est fini et comme les atomes sont des éléments de $\mathscr{C}$, le nombre d'atomes distincts de $\mathscr{C}$ est fini. Or on sait que, sur un ensemble, les classes d'équivalences modulo une relation forment une partition de cet ensemble donc les atomes forment une partition finie de Ω. Enfin, chaque élément de $\mathscr{C}$ est la réunion de ses atomes (d'après 3. b) β]) donc chaque élément de $\mathscr{C}$ s'écrit bien comme une réunion finie d'atomes, c'est-à-dire comme une réunion finie de certaines parties de la partition. On a ainsi démontré que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est un clan engendré par une partition finie (celle des atomes).}}$$

Commentaires :

En probabilité, lorsqu'on travaille sur un univers fini Ω, les événements de cet univers (qui sont des parties de Ω) doivent former un clan (c'est nécessaire pour définir correctement une probabilité).
En général, on considère le clan total $\mathscr{P}(\Omega)$, mais ce n'est pas obligatoire. Ainsi, lors d'une expérience aléatoire, si un système complet d'événements apparaît naturellement (c'est très souvent le cas), on peut se contenter de travailler avec les événements appartenant au clan engendré par les événements de ce système complet.
Le résultat de cet exercice prouve qu'il en est en fait toujours ainsi : tout clan fini est engendré par un système complet d'événements fini, autrement dit, dans toute expérience aléatoire, il existe un système complet d'événements qui permet d'écrire tous les événements relatifs à cette expérience. La détermination d'un tel système complet d'événements (bien choisis) est d'ailleurs une étape qui se révèle souvent cruciale pour la résolution d'un problème de probabilités. Nous y reviendrons...
Lorsque l'univers n'est plus fini (vous envisagerez ce cas l'an prochain), le notion de clan ne suffit plus : les événements doivent alors former une tribu...