

Corrigé du DM n° 18

Exercice 1

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si i et j sont deux indices entre 1 et n , alors le cofacteur $(\text{Com}(\lambda \cdot A))_{i,j}$ est $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la sous-matrice obtenue à partir de la matrice A en supprimant L_i et C_j , puis en multipliant tous les coefficients par λ . Par multilinéarité du déterminant (ici de format $(n-1) \times (n-1)$), un facteur λ^{n-1} vient se mettre en facteur du tout. On obtient ce qu'il faut.
2. (a) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors en utilisant la formule sommatoire du déterminant pour $f(\lambda)$, on obtient que le déterminant $f(\lambda)$ est une somme de produits de coefficients de la matrice $\lambda \cdot I_n - A$. Chaque coefficient est polynomial en la variable λ , donc $f(\lambda)$ est bien un polynôme en λ .

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Si $\sigma = \text{id}$, alors :

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k} = \prod_{k=1}^n (\lambda - A_{k,k}),$$

est un polynôme unitaire de degré n en la variable λ .

- si $\sigma \neq \text{id}$, alors le produit $\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}$ fait apparaître un produit de facteurs de la forme $\lambda - A_{k,k}$ si k est un point fixe de σ et de la forme $-A_{\sigma(k),k}$ si k n'est pas un point fixe de σ . Comme σ admet strictement moins de n points fixes, alors le produit $\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}$ est polynomial de degré strictement inférieur à n en la variable λ .

On a bien un seul terme en λ^n après développement.

- (b) L'ensemble $Z(f)$ des zéros de la fonction polynomiale f est fini. On peut approcher 0 par une suite d'éléments dans $\mathbb{C} \setminus Z(f)$ et toute suite de complexes $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C} \setminus Z(f))^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 répond à la question.
 - (c) La suite $(B_k = A - \lambda_k \cdot I_n)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles convergeant vers la matrice A .
3. (a) Il suffit de prendre le déterminant dans l'égalité :

$$(\text{Com}(A)) \times A^T = \det(A) \cdot I_n,$$

puis de diviser par la quantité non nulle $\det(A)$.

- (b) Oui. On trouve une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles de limite A .

Les coefficients des comatrices $\text{Com}(B_k)$ sont des formules polynomiales en les coefficients de B_k , donc sont des formules continues en ces coefficients :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Com}(B_k) = \text{Com}(A).$$

De même, l'application \det est une formule polynomiale donc continue en les coefficients des matrices. On peut passer à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ dans l'égalité :

$$\det(\text{Com}(B_k)) = (\det(B_k))^{n-1},$$

et on obtient la même formule pour la matrice A .

4. (a) On pose $B = \text{Com}(A)$ de sorte que :

$$B \cdot A^T = \det(A) \cdot I_n.$$

Or, $\det(A) \cdot I_n$ est une matrice inversible, donc B est inversible et :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^T.$$

De même, on peut écrire :

$$\text{Com}(B) \cdot B^T = \det(B) \cdot I_n,$$

de sorte que :

$$\text{Com}(B) = \det(B) \cdot (B^{-1})^T = \det(A)^{n-2} \cdot A.$$

- (b) La formule précédente est une formule continue en la matrice A (plutôt en les coefficients de la matrice A) et elle est valable dans $GL_n(\mathbb{C})$, donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par densité.

Exercice 2

1. Chaque reste R_n est bien défini par convergence de la série $\sum_n u_n$.

Ensuite, si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$R_{n+1} - R_n = -u_{n+1} \leq 0.$$

Enfin, en posant $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et λ la somme de la série convergente, alors :

$$R_n = \lambda - S_{n+1},$$

quantité de limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. • On trouve $\varphi(0)$ dans \mathbb{N} tel que :

$$\forall \ell \geq \varphi(0), R_\ell \leq 1.$$

- Supposons construits des entiers $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ répondant aux conditions.
- Comme R_ℓ tend vers 0 lorsque ℓ tend vers $+\infty$, il existe un rang $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ à partir duquel tous les R_ℓ sont inférieurs à $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$.

On dispose par ce procédé de construction par récurrence une extractrice convenable.

3. On construit une suite v convenable comme suit.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_k = \min \{ p \in \mathbb{N} \mid k \leq \varphi(p) \}.$$

La suite v est à valeurs dans \mathbb{N} donc est positive.

Si k est dans \mathbb{N} , en notant $\mathcal{D}_k = \{ p \in \mathbb{N} \mid k \leq \varphi(p) \}$, alors $\mathcal{D}_{k+1} \subset \mathcal{D}_k$, donc $v_k \leq v_{k+1}$: la suite v est croissante. De plus, $v_{\varphi(N)} = N$, donc la suite v n'est pas majorée.

Enfin, si N est dans \mathbb{N} , en posant la somme partielle :

$$S_N = \sum_{k=0}^N v_k \times u_k,$$

alors la quantité S_N est croissante en N .

De plus, si $N \in \mathbb{N}^*$, en partitionnant l'ensemble $\llbracket 0, \varphi(N) \rrbracket$ en les ensembles :

$$I_0 = \llbracket 0, \varphi(0) \rrbracket$$

et pour r entre 1 et N ,

$$I_r = \llbracket \varphi(r-1) + 1, \varphi(r) \rrbracket$$

alors

$$\begin{aligned} S_{\varphi(N)} &= \sum_{r=0}^N \sum_{i \in I_r} v_i \times u_i \\ &= \sum_{r=0}^N \sum_{i \in I_r} r \times u_i \\ &= \sum_{r=1}^N r \sum_{i \in I_r} u_i \\ &\leq \sum_{r=1}^N r R_{\varphi(r-1)+1} \\ &\leq \sum_{r=1}^N r R_{\varphi(r-1)} \\ &\leq \sum_{r=1}^N \frac{r}{2^{r-1}} \\ &\leq \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^{r-1}} = C \end{aligned}$$

car la série croissante $\sum_r \frac{r}{2^{r-1}}$ est convergente car par exemple $\frac{r}{2^{r-1}} = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$.

On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N \leq S_{\varphi(N)} \leq C,$$

et la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente.

La suite v construite satisfait toutes les conditions.

4. Voici un exemple :

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Par comparaison série / intégrale, la série $\sum_n u_n$ converge puisque :

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^n$$

est une quantité convergente et la fonction continue $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.

Ensuite, dès que $\alpha > 0$, alors comme $\ln^2 n = o(n^\alpha)$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n \times n = +\infty,$$

et donc à partir d'un certain rang,

$$n^\alpha \cdot u_n \geq \frac{1}{n}.$$

La série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$, entraînant la divergence vers $+\infty$ de $\sum_n n^\alpha \cdot u_n$.