Mathématiques ENS Ulm

Ulysse Mounoud

Exercice 1

Soient a et r deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et ϵ et M deux constantes strictement positives telles que pour tout $x \geq M$, $x - r(x) \geq \epsilon$.

On suppose que y est un fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $x > 0$:

$$y'(x) = a(x)y(x - r(x))$$

Montrer que

$$y(x)\exp(-\int_0^x a(t)\,dt)$$

admet une limite finie q

Exercice 2

Soit G un groupe. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) G est fini.

(ii) G a un nombre fini de sous-groupes.

(iii) G n'a pas de sous-groupe strict infini.

Déroulé

L'examinateur m'annonce que ce n'est pas l'exercice qui importe mais la discussion mathématique. L'énoncé m'a été fourni imprimé pour que je le recopie au tableau (toutes les hypothèses servent, sauf bizarrement celles sur ϵ et M je crois). Je commence par réfléchir seul. Pour une équation sans retard, l'expression donnée serait constante. Ne sachant pas par où commencer, je dérive, et je remarque que dans les cas où y est de signe constant on sait répondre.

L'examinateur me demande maintenant de donner des exemples de fonctions vérifiant de telles équations avec $a(x) = x$ par exemple, mais je n'en trouve pas (en fait pour r constante on peut sûrement prendre une solution DSE) et je ne vois pas où il veut en venir. Il me dit que plus généralement on va chercher à donner une classification de toutes les solutions, pour a et r fixés. Je ne vois pas comment c'est possible. Il finit par me faire comprendre qu'il veut me faire montrer l'existence et l'unicité d'une solution y qui coïncide avec une fonction continue donnée sur $\mathbb{R}_-$. L'idée est que si on connaît y sur $]-\infty; x]$ on connaît y sur un intervalle un peu plus grand grâce à l'équation.

Le rapport avec la convergence demandée n'est d'abord pas évident, mais en écrivant y comme somme d'une fonction positive et d'une fonction négative continues sur les réels négatifs on conclut.

Il reste 5 minutes pour l'exercice sur les groupes. Je connais déjà la première équivalence, mais je ne trouve pas de contre-exemple pour la deuxième (penser aux racines de l'unité).