Problème

Norme d'une matrice entière

Pour n dans $\mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{Z}[X]$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note K_n l'ensemble des éléments de E_n dont toutes les racines complexes sont de module 1, L_n l'ensemble des éléments de E_n scindés sur $\mathbb{R}$ et dont toutes les racines appartiennent à $[-2, 2]$.

L'ensemble des racines complexes d'un polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ est noté $R(P)$.

I. Une suite de polynômes

La suite de polynômes $(S_n)_{n\geq 0}$ est définie par $S_0 = 1$, $S_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n+2} = XS_{n+1} - S_n.$$

1. a) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, S_n appartient à E_n.

   b) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$ et θ dans $\mathbb{R}$:

   $$\sin(\theta)\ S_n(2\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta).$$

   c) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, S_n appartient à L_n.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La matrice $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est définie par

   $$M_{i,j} = 1_{|i-j|=1}.$$

   Montrer que le polynôme caractéristique [1] de M est S_n.

II. Racines des éléments de K_n, des éléments de L_n

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note

$$\mathcal{K}_n = \bigcup_{P\in K_n} R(P), \qquad \mathcal{L}_n = \bigcup_{P\in L_n} R(P).$$

3. a) Soit P dans K_n. Montrer qu'il existe Q dans K_n tel que

   $$P(X)\ P(-X) = (-1)^n Q(X^2).$$

   b) Montrer que, si z est dans $\mathcal{K}_n$, alors

   $$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad z^{2^j} \in \mathcal{K}_n.$$

1. Rappel : le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

dn distance en
entre graphe $x \mapsto \cos(x)$
et $(e, 0)$

4. a) Montrer que K_n est un ensemble fini.

b) En déduire que, si z est dans $\mathcal{K}_n$, alors il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$z^m = 1.$$

c) Déterminer l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{K}_n.$$

5. a) Soient P dans L_n. Montrer que, si on pose

$$Q(X) = X^n P\left(X + \frac{1}{X}\right),$$

alors Q est dans K_{2n}.

b) Déterminer l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{L}_n.$$

III. Polynôme minimal d'un entier algébrique

Un nombre complexe z est un nombre algébrique (resp. un entier algébrique) s'il existe un polynôme unitaire P de $\mathbb{Q}[X]$ (resp. de $\mathbb{Z}[X]$) tel que

$$P(z) = 0.$$

6. Soit z un nombre algébrique.

a) Vérifier que

$$I_z = \{P \in \mathbb{Q}[X] \; ; \; P(z) = 0\}$$

est un idéal non nul de $\mathbb{Q}[X]$, dont on notera Π_z le générateur unitaire.

b) Montrer que Π_z est un irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

c) Soit P un polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ annulant z. Comparer P et Π_z.

7. a) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\mathbb{Z}$, les nombres

$$\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

sont des entiers algébriques.

b) Déterminer les nombres qui sont à la fois rationnels et entiers algébriques.

8. Soit p un nombre premier.

a) Montrer que la réduction modulo p :

$$P \in \mathbb{Z}[X] \longmapsto \overline{P} \in \mathbb{F}_p[X]$$

est un morphisme d'anneaux.

b) Montrer que, pour P dans $\mathbb{Z}[X]$:

$$\overline{P(X^p)} = \overline{P(X)}^p.$$

9. Pour P dans $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, on note $c(P)$ le p.g.c.d. des coefficients de P ; on dit que P est primitif si $c(P) = 1$.

a) Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est primitif.

Indication. On pourra utiliser la question 8.

b) Si P et Q sont dans $\mathbb{Z}[X]$, comparer $c(PQ)$ et $c(P)\,c(Q)$.

10. a) Soient U et V deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$ tels que le polynôme $W = UV$ soit dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il existe $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ dans $\mathbb{Z}[X]$, respectivement associés à U et V dans $\mathbb{Q}[X]$, tels que

$$W = \tilde{U}\,\tilde{V}.$$

b) Soit z un entier algébrique. Montrer que

$$\Pi_z \in \mathbb{Z}[X].$$

c) Soit x un entier algébrique non nul. Montrer que l'ensemble des q de $\mathbb{N}^*$ tels que x/q soit un entier algébrique est fini.

IV. Polynômes cyclotomiques

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mu_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \; ; \; k \in \{1, \dots, n\}, k \wedge n = 1 \right\}.$$

On pose également

$$\Phi_n = \prod_{z \in \mu_n} (X - z).$$

11. a) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, μ_n est l'ensemble des éléments d'ordre n du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

b) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$X^n - 1 = \prod_{d \in D_n} \Phi_d.$$

c) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, Φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Dans les questions 12 et 13, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et on se propose de démontrer que Φ_n est un irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. On considère une racine z de Φ_n et un nombre premier p ne divisant pas n. On note

$$P \in \mathbb{Z}[X] \longmapsto \overline{P} \in \mathbb{F}_p[X]$$

le morphisme de réduction modulo p de la question 8.

12. On se propose de montrer que

$$\Pi_z(z^p) = 0.$$

a) Justifier que Π_z et Π_{z^p} sont dans $\mathbb{Z}[X]$, puis qu'il existe Q dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\Pi_{z^p}(X^p) = \Pi_z(X)\, Q(X).$$

On suppose, par l'absurde

$$\Pi_z(z^p) \neq 0.$$

Soit U un diviseur irréductible de $\overline{\Pi_z}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

b) En utilisant la question 8.b), montrer que U^2 divise $X^n - \overline{1}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

c) En déduire que U divise $\overline{n}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ et obtenir une contradiction.

13. a) Montrer que, pour tout entier naturel k premier à n :

$$\Pi_z(z^k) = 0.$$

b) En déduire que $\Pi_z = \Phi_n$, puis que Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

V. Norme d'une matrice entière

Pour p dans $\mathbb{N}^*$, on rappelle que le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^p$ est défini par

$$\forall (U,V) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \qquad \langle U, V\rangle = {}^tUV.$$

La norme associée est définie par

$$\forall U \in \mathbb{R}^p, \qquad \|U\| = \sqrt{\langle U, U\rangle}.$$

Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. On identifie $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$).

14. a) Si M est dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, justifier la définition de

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\{\|MX\| \ ; \ X \in \mathbb{R}^n, \ \|X\| = 1\}.$$

b) On suppose $m = n$ et M diagonale. Déterminer $\|M\|_{\text{op}}$ en fonction des coefficients diagonaux de M.

c) Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, B dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Exprimer $\|M\|_{\text{op}}$ en fonction de $\|A\|_{\text{op}}$ et $\|B\|_{\text{op}}$

d) Soit M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\left\{{}^tYMX \; ; \; X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, \|X\| = \|Y\| = 1\right\}.$$

Comparer $\|M\|_{\text{op}}$ et $\|{}^tM\|_{\text{op}}$.

15. a) Soient M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, O dans $O_n(\mathbb{R})$, O' dans $O_m(\mathbb{R})$. Comparer

$$\|O'MO\|_{\text{op}} \quad \text{et} \quad \|M\|_{\text{op}}.$$

b) On rappelle le théorème spectral : si M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice O de $O_n(\mathbb{R})$ telle que OMO^{-1} soit diagonale. En déduire, si M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une expression de $\|M\|_{\text{op}}$ en fonction des valeurs propres de M.

c) Soit M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Exprimer $\|M\|_{\text{op}}$ en fonction des valeurs propres de ${}^tMM$.

Indication. Noter que, pour X dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|MX\|^2 = {}^tX{}^tMMX$$

et appliquer le théorème spectral à ${}^tMM$.

16. Soient M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et N la matrice de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & M \\ {}^tM & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer N^2. Montrer que

$$\|N\|_{\text{op}} = \|M\|_{\text{op}}.$$

17. a) Soit M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. On suppose que

$$\|M\|_{\text{op}} < 2.$$

Montrer qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que

$$\|M\|_{\text{op}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right).$$

b) On suppose $n \geq 2$. Indiquer une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$\|M\|_{\text{op}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$