Devoir Surveillé n° 10 (2h)

Correction du problème 1 – Chemins de Dyck

Partie I – Dénombrement par principe de symétrie

1. Soit, conformément à la question suivante, B_n l'ensemble des chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1, 1)$, et restant strictement au-dessus de l'axe, sauf en $(0, 0)$.

   On a alors une bijection de D_n dans B_n en ajoutant un pas montant au début d'un chemin de Dyck : cela le surélève et empêche un retour à l'axe des abscisses.

   Réciproquement, un chemin de B_n commence nécessairement par un pas montant, sinon on ne peut plus traverser d'axe pour se retrouver au dessus après le dernier pas. Puisque B_n est strictement au-dessus de l'axe, en supprimant le premier pas, on obtient un chemin restant encore au-dessus de l'axe (au sens large cette fois), et aboutissant en $(2n+1, 0)$, donc un chemin de Dyck.

   Ces deux constructions étant réciproques l'une de l'autre, elle définissent bien une bijection, et $\boxed{d_n = |B'_n|}$.

2. - Tout chemin aboutissant en $(2n+1, 1)$ commence par un pas vers le haut ou un pas vers le bas ; ceux qui commence par un pas vers le haut peuvent recroiser ou non l'axe des abscisses. Ainsi, B_n, B'_n et B''_n énumèrent tous les cas possibles. Leur union est donc A_n
   - Ces ensembles sont clairement disjoints, et non vides (on construit facilement un élément dans chacun d'eux).

   Ainsi, $\{B_n, B'_n, B''_n\}$ est une partition de A_n.

3. Si Γ est un élément de B'_n, il recroise l'axe des abscisses. Par conséquent, la portion entre $(0, 0)$ et le premier point de retour à l'axe est bien défini. Donc $\Phi(\Gamma)$ est bien défini.

   De plus, Γ commence par un pas montant, donc $\Phi(\Gamma)$ commence par un pas descendant. Les derniers pas n'étant pas modifiés, il aboutit toujours en $(2n+1, 1)$. Ainsi $\Phi(\Gamma)$ est bien à valeurs dans B''_n

   On peut faire la même construction en partant de B''_n en symétrisant la portion définie par le premier retour à l'axe (cette fois-ci, on la fait remonter). On peut remarquer que cette construction est définie sur tout élément de B''_n, puisqu'on commence par un pas vers le bas, et qu'on veut aboutir au-dessus de l'axe : on croise nécessairement l'axe quelque part.

   Ces constructions ne modifiant pas l'abscisse du premier retour sur l'axe, elles sont bien réciproques l'une de l'autre.

   Ainsi, Φ est bijective de $\boxed{B_n \text{ dans } B''_n}$.

4. Or, un chemin de B''_n est la donnée d'un pas descendant, puis d'un chemin quelconque de longueur $2n$ avec $n+1$ pas montants et $n-1$ pas descendants. Ainsi

   $$|B'_n| = |B''_n| = \binom{2n}{n-1}.$$

   On en déduit que

   $$|A_n| = 2\binom{2n}{n-1} + |B_n|,$$

   c'est-à-dire, d'après la question 1 :

   $$\boxed{d_n = \binom{2n+1}{n} - 2\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}}.$$

   La dernière égalité résulte d'une manipulation élémentaire sur les factorielles.

Partie II – Dénombrement par le lemme cyclique

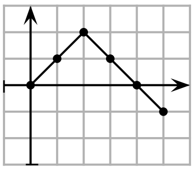
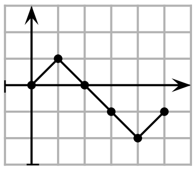
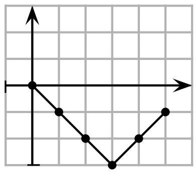
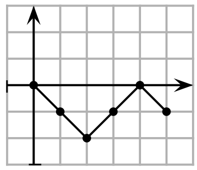
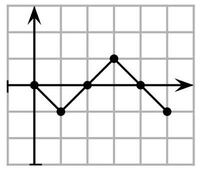
1. Pour simplifier un peu les notations, on définit pour une permutation σ de $[\![1, N]\!]$ et $\Gamma = (a_1, \dots, a_N)$,

$$\Gamma^\sigma = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(N)}).$$

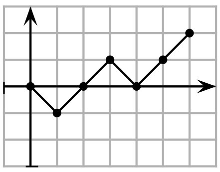
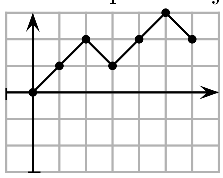
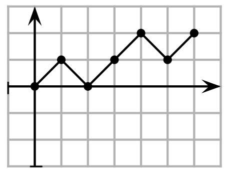
Ainsi, en notant σ la permutation circulaire directe, du fait que $\sigma^N = \mathrm{id} = \sigma^0$, Γ_2 est un conjugué de Γ_1 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_2 = \Gamma_1^{(\sigma^p)}$. On remarque que $(\Gamma^{\sigma^p})^{\sigma^q} = \gamma^{\sigma^{p+q}}$. On remarque que ceci s'étend sans problème aux exposants néghatifs (y compris la caractérisation). Ainsi, la vérification du fait que c'est une relation d'équivalence est alors immédiate :
- réflexivité : $\Gamma = \Gamma^{(\sigma^0)}$
- symétrie : si $\Gamma_2 = \Gamma_1^{\sigma^p}$, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2^{\sigma^{-p}}$,
- transitivité : si $\Gamma_2 = \Gamma_1^{\sigma^p}$ et $\Gamma_3 = \Gamma_2^{\sigma^q}$, alors $\Gamma_3 = \Gamma_1^{\sigma^{p+q}}$.

Ainsi, la relation de conjuguaison est une relation d'équivalence.

2. Les conjugués de $(1, 1, 0, 0, 0)$ sont :

Du fait de la période de $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$, ce chemin n'a que 3 conjugués différents :

3. Soit $\Gamma = (a_1, \dots, a_N)$ un chemin de longueur N. Montrons que les Γ^{σ^p} sont deux à deux distincts pour $p \in [\![1, N]\!]$ (ou de façon équivalente pour $p \in [\![0, N-1]\!]$). Pour cela, on suppose que ce n'est pas le cas, et on se donne p et q distincts dans $[\![0, N-1]\!]$ tels que $\Gamma^{\sigma^p} = \Gamma^{\sigma^q}$. On étend la définition de (a_n) aux indices dans $\mathbb{Z}$, par N-périodicité. Ainsi, l'égalité $\Gamma^{\sigma^q} = \Gamma^{\sigma^q}$ se réécrit $a_{n+p} = a_{n+q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (a_n) est $q-p$-périodique. Elle est aussi N-périodique. L'ensemble des périodes d'une suite indexée sur $\mathbb{Z}$ étant un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $a\mathbb{Z}$. Ainsi, a divise $q - p$ et N, donc leur pgcd d, qui est aussi période, et vérifie $d \leqslant q - p < N$ et $d \mid N$. On a donc trouvé une période de (a_n) divisant strictement N, il s'agit donc aussi d'une période stricte de $(a_n)_{n \in [\![1,N]\!]}$ (la divisibilité permet de s'assurer qu'on a un nombre entier de périodes dans la séquence). Ceci est une contradiction.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \Gamma \text{ n'admet pas de période, son nombre de conjugués est égal à sa longueur.}}$

4. Si Γ est un chemin de Dyck, $\overline{\Gamma}$ ne peut pas présenter de périodicité. En effet, sinon, on aurait une période T répétée k fois, avec $k > 1$. Si la période T nous amène en position (a, b), alors $\overline{\Gamma}$ obtenue en mettant bout-à-bout des périodes T nous amène en $(ka, kb) = (2n+1, -1)$. Ceci signifierait que k divise -1, ce qui est impossible.

Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\overline{\Gamma} \text{ admet } 2n+1 \text{ conjugués}}$.

5.
- Soit Γ' un chemin aboutissant en $(2n+1, -1)$. On note p l'abscisse du point en lequel Γ' atteint pour la première fois son ordonnée la plus basse. Considérons Γ'' le conjugué d'ordre p de Γ'. Le chemin Γ'' est la concaténation de Γ_2 et Γ_1 où Γ_1 est le chemin des p premiers pas de Γ' et Γ_2 la fin.
  * Puisqu'on a coupé Γ' en son point le plus bas, Γ_2 ne descend pas en dessous de l'axe des abscisses.
  * Le chemin Γ_2 termine en une hauteur de $k-1$, où $-k$ est l'ordonnée minimale atteinte par le chemin Γ' (en effet, depuis cette ordonnée, on remonte jusqu'à l'ordonnée -1). Puisqu'on coupe au premier point minimal, le chemin Γ_1 ne fait pas descendre de plus de $k-1$, sauf sur son dernier pas. Ainsi, en recollant Γ_1 à Γ_2 (ce qui le surélève de $k-1$), cette portion reste au-dessus de l'axe des abscisses, sauf le dernier pas, aboutissant en -1.
  * Le chemin obtenu en enlevant le dernier pas de Γ'' est donc bien un chemin de Dyck Γ, et $\Gamma'' = \overline{\Gamma}$.

  Ainsi, il existe au moins un chemin de Dyck dans la classe d'équivalence de Γ'. Alors le conjugué d'ordre p de Γ
- Réciproquement, soit $\Gamma' = \overline{\Gamma}$, obtenu en prolongeant vers le bas un chemin de Dyck. Considérons-en un conjugué strict, obtenu en coupant Γ' en deux chemins Γ_1 et Γ_2 non vides. Le sous-chemin Γ_2 commence au-dessus de l'axe, et termine strictement en-dessous. Un chemin de Dyck ne peut donc pas commencer par le chemin Γ_2.

  Ainsi, Γ' n'admet pas d'autre conjugué que lui-même obtenu d'un chemin de Dyck.
- On en déduit que dans chaque classe d'équivalence, il existe $\boxed{\text{un et un seul chemin issu d'un chemin de Dyck}}$.

6. L'application qui à un chemin de Dyck Γ associe la classe d'équivalence de $\overline{\Gamma}$ est donc une bijection de D_n dans l'ensemble des classes d'équivalence des chemins aboutissant en $(2n+1,-1)$. Ces chemins sont en nombre $\binom{2n+1}{n}$, et toutes les classes d'équivalence ont $2n+1$ éléments. Il y a donc $\dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n}$ classes d'équivalence.
   On en déduit que :
$$d_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \Gamma_n.$$

Partie III – Bijection de Rémy

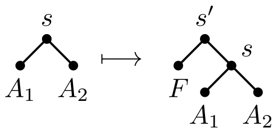
1. Il suffit de vérifier, à l'aide de l'expression factorielle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{(2n+1)!n!(n-1)!}{n!(n+1)!(2n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n)}{n(n+1)} = \frac{2(2n-1)}{n+1}.$$
   On a bien $\boxed{(n+1)C_n = 2(2n-1)C_{n-1}}$. Par ailleurs, on vérifie facilement que $\boxed{C_0 = 1}$
   Une récurrence immédiate montre que cette relation détermine (C_n) (c'est une relation de récurrence d'ordre 1).
2. On s'assure bien que cette construction donne bien un élément de D'_{n-1}.
   On exhibe une réciproque de Ψ. Soit Γ dans F_n. On repère le pas descendant marqué d.
   - S'il est précédé d'un pas montant, on supprime la séquence $1\underline{0}$, et on marque le pas suivant, et on définit $\varepsilon = 0$
   - S'il est précédé d'un pas descendant, on repère la séquence s la plus longue précédent ces deux pas descendents, et telle que les deux points extrémaux de s aient même hauteur, et soient la hauteur minimale de s. Ainsi, la séquence s est précédée d'un pas montant (sinon elle pourrait être prolongée). On a donc une séquence $1s0\underline{0}$, où les extrémités de s ont même hauteur et les points intermédiaires ne descendent pas en dessous. On remplace cette séquence par $s0$, et on marque le premier pas de s (si s est vide, on marque le seul pas de cette séquence, à savoir 0). On pose $\varepsilon = 1$.

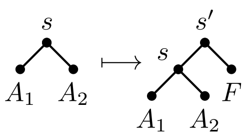
   Il apparaît assez facilement que cette construction est réciproque de Ψ, donc $\boxed{\Psi \text{ est bijective}}$.
3. Ainsi, $|S_{n-1} \times \{0,1\}| = |F_n|$. Or :
   - L'ajout d'un dernier pas descendant (et dans l'autre sens, la suppression du dernier pas, nécessairement déscendant) donne une bijection de D_n dans D'_n. Ainsi, $|D'_n| = |D_n| = d_n$.
   - un élément de S_{n-1} est déterminé par le choix d'un chemin de D'_{n-1}, et d'un pas quelconque marqué parmi les $2n-1$ pas possibles. D'après le lemme du berger et la question II
$$|S_{n-1}| = (2n-1)d_{n-1}.$$
   - De même, un élément de F_n est déterminé par le choix d'un chemin de D'_n et d'un des $n+1$ pas descendant, d'où :
$$|F_n| = nd_n.$$

   On en déduit que $\boxed{2(2n-1)d_{n-1} = nd_n.}$ Comme de plus, $d_0 = 1$, on déduit de III-1 que $\boxed{d_n = C_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question subsidiaire

Partant d'un arbre binaire complet, faire un parcours en profondeur, en notant 1 pour chaque noeud qu'on rencontre pour la première fois, et 0 pour chaque feuille. On ne recompte pas le 2e passage sur un noeud. Vérifiez que ceci définit une bijection de l'ensemble des arbres binaires complets à n noeuds dans D'_n. L'ensemble S_n correspond via cette bijection aux arbres avec un sommet marqué (feuille ou noeud) et F_n aux arbres avec une feuille marquée. Tiens, la notation s'éclaire.
Vérifiez que la bijection Ψ consiste alors à dédoubler le sommet marqué s de la façon suivante :

- Si $\varepsilon = 0$: 

- Si $\varepsilon = 1$: 

Ainsi on dédouble le noeud, en un noeud s' dont l'un des fils sera s avec toute sa descendance, et l'autre sera une feuille ajoutée. La valeur de ε détermine la latéralisation de cette construction. Remarquez que si s est une feuille, cette construction a un sens aussi : dans ce cas, la feuille s est remplacée par un noeud s' auquel sont attachées deux feuilles, l'une des 2 étant marquée, suivant la valeur de ε.
C'est sous cette forme qu'a été décrite la bijection de Rémy. C'est évidemment un peu moins tiré par les cheveux que sur les chemins de Dyck.

Correction du problème 2 – (adapté de EDHEC 2007)

Partie I – Les tirages se font avec remise de la boule tirée

1. Appelons pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, G_ℓ l'événement « l'un des joueur remporte la partie lors du ℓ-ième tirage ».
   Étant donné que le joueur A joue toutes les parties $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, que B joue toutes les parties $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$ et que C joue toutes les parties $3k+3$, $k \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad G_{3k+1} = A_{3k+1}, \qquad G_{3k+2} = A_{3k+2} \qquad \text{et} \qquad G_{3k+3} = A_{3k+3}.$$
   Ces événements G_k ne sont pas complètement indispensables à la rédaction, mais permettent de simplifier un peu les expressions ensemblistes lors des calculs, du fait d'une plus grande homogénéité des notations.
   À condition de supposer que l'on prolonge indéfiniment l'expérience (même après la victoire d'un des joueurs), les événements G_k sont mutuellement indépendants (car un tirage donné ne modifie pas le contenu de l'urne, puisqu'on procède avec remise de la boule tirée, et n'influe donc pas sur les tirages suivants), et à chaque étape, la réalisation de G_k est une épreuve de Bernoulli de paramètre constant égal à $\frac{1}{n}$ (équiprobabilité du tirage dans l'urne).
   Ainsi, le temps d'attente de la première réalisation d'un événement G_k est une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. L'événement A_{3k+1} est réalisé si et seulement si A tire la boule blanche lors du $3k+1$-ième tirage, et qu'aucun des joueurs ne tire la boule blanche lors des tirages précédents.
   Ainsi :
   $$A_{3k+1} = [X = 3k+1],$$
   et, puisque X suit une loi géométrique :
   $$\boxed{P(A_{3k+1}) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k}}.$$
   Ce résultat peut évidemment être retrouvé directement, sans référence à la loi géométrique, en écrivant
   $$A_{3k+1} = \bigcap_{\ell=1}^{3k} \overline{G_\ell} \cap G_{3k+1}.$$
   On raisonne de même pour B_{3k+2} et C_{3k+3} :
   $$\boxed{P(B_{3k+2}) = P(X = 3k+2) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+1}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P(C_{3k+3}) = P(X = 3k+3) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+2}}$$

2. Puisque A ne joue que les tirages $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, l'événement A est réalisé si et seulement si l'un des événements A_{3k+1}, $k \in \mathbb{N}$, est réalisé. Ainsi :
   $$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{3k+1}.$$
   Les événements A_{3k+1}, $k \in \mathbb{N}$ étant 2 à 2 incompatibles (le joueur A ne peut pas tirer pour la première fois la boule blanche lors de 2 tirages distincts !), et l'union étant constituée d'un nombre dénombrable d'événements, on obtient, par σ-additivité de la mesure de probabilité :
   $$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3},$$
   d'après la formule des sommes géométriques. Ainsi :
   $$\boxed{P(A) = \frac{n^2}{n^3-(n-1)^3}}.$$

De la même façon, on obtient :

$$P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+1} = \frac{n-1}{n} P(A),$$

d'où $\boxed{P(B) = \dfrac{n(n-1)}{n^3 - (n-1)^3}}$.

En raisonnant encore de même :

$$P(C) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 P(A),$$

d'où $\boxed{P(C) = \dfrac{(n-1)^2}{n^3 - (n-1)^3}}$.

Les égalités $\geqslant$ $P(B) = \frac{n-1}{n} P(A)$ et $P(C) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 P(A) = \frac{n-1}{n} P(B)$ amènent immédiatement $P(A) \geqslant P(B) \geqslant P(C)$, du fait de l'inégalité $0 \leqslant \frac{n-1}{n} < 1$ et du fait de la positivité des probabilités. Si $n \geqslant 2$, $\boxed{P(A) > P(B) > P(C)}$, puisque $P(A)$ et $\frac{n-1}{n}$ sont non nuls.

Ce résultat est bien sûr prévisible : si personne n'a gagné au bout de $3k$ tirages, les 3 joueurs ont la même chance de tirer la boule blanche lors des 3 tirages suivants, mais comme A joue en premier, A a plus de chance d'obtenir la boule blanche en premier !

Partie II – Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1. Je propose deux méthodes pour ce calcul
   - **Première méthode (la plus naturelle)**

     Soit k tel que $3k + 3 \leqslant n$.

     L'événement A_{3k+1} est réalisé si et seulement si la boule blanche n'est pas tirée lors des $3k$ premiers tirages, et l'est au $3k+1$-ième tirage. Ainsi, comme on l'a écrit pour la question 1 :

     $$A_{3k+1} = \bigcap_{\ell=1}^{3k} \overline{G_\ell} \cap G_{3k+1}.$$

     La différence par rapport à la situation précédente réside dans le fait que les événements G_k ne sont plus indépendants maintenant. Nous utilisons donc la formule des probabilités composées, l'événement $\bigcap_{\ell=1}^{3k} \overline{G_\ell}$ n'étant clairement pas quasi-impossible (puisque $3k + 3 \leqslant n$, on n'a pas épuisé l'ensemble des boules noire au $3k$-ième tirage, donc à chaque tirage, on a possibilité, avec probabilité non nulle, de tirer une boule noire). On a alors :

     $$P(A_{3k+1}) = P(\overline{G_1}) P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \cdots P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{3k-1}}}(\overline{G_{3k}}) P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{3k}}}(G_{3k+1}).$$

     Or, étant donné $\ell \in [\![1, 3k-1]\!]$, l'événement $\overline{G_\ell}$ est réalisé sachant que $\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{\ell-1}}$ l'est si et seulement si on tire lors du ℓ-ième tirage l'une des boules noires restantes, sachant qu'on en a tiré $\ell - 1$ lors des $\ell - 1$ premiers tirages : il reste donc à ce moment $n - \ell$ boules noires, sur un total de $n - \ell + 1$ boules. Ainsi :

     $$P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{\ell-1}}}(\overline{G_\ell}) = \frac{n-\ell}{n-\ell+1}.$$

     De même, sachant que $\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{3k}}$ est réalisé, il reste, à l'issue du tirage $3k$, 1 boule blanche sur un total de $n - 3k$, donc

     $$P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{3k}}}(G_{3k+1}) = \frac{1}{n-3k}.$$

     On obtient donc

     $$P(A_{3k+1}) = \prod_{\ell=1}^{3k} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} \cdot \frac{1}{n-3k} = \frac{\prod_{\ell=1}^{3k} (n-\ell)}{\prod_{\ell=1}^{3k} (n-\ell+1)} \cdot \frac{1}{(n-3k)} = \frac{\prod_{\ell=1}^{3k} (n-\ell)}{\prod_{\ell=0}^{3k-1} (n-\ell)} \cdot \frac{1}{(n-3k)}.$$

Après simplifications des termes du produit, il vient donc :

$$P(A_{3k+1}) = \frac{n-3k}{n} \cdot \frac{1}{n-3k} \qquad \text{soit:} \qquad : \boxed{P(A_{3k+1}) = \frac{1}{n}}.$$

De la même façon, toujours pas utilisation de la formule des probabilités composées (ne redétaillez pas le calcul !) on obtient :

$$P(B_{3k+2}) = \prod_{\ell=1}^{3k+1} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} \cdot \frac{1}{n-3k-1} = \frac{\prod_{\ell=1}^{3k+1}(n-\ell)}{\prod_{\ell=0}^{3k}(n-\ell)} \cdot \frac{1}{(n-3k-1)},$$

et donc

$$P(B_{3k+2}) = \frac{n-3k-1}{n} \cdot \frac{1}{n-3k-1} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{P(B_{3k+2}) = \frac{1}{n}}.$$

En raisonnant encore de même,

$$P(C_{3k+3}) = \prod_{\ell=1}^{3k+2} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} \cdot \frac{1}{n-3k-2} = \frac{n-3k-2}{n} \cdot \frac{1}{n-3k-2},$$

et encore une fois, on trouve $\boxed{P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}}$.

- **Deuxième méthode**
  La simplicité de ces résultats suggère une deuxième méthode, plus combinatoire.
  Supposons que l'on continue l'expérience jusqu'à vidage complet de l'urne (donc au-delà de la victoire d'un des joueurs).
  Le résultat d'une expérience correspond à un ordre de tirage des boules, donc à une numérotation des boules de 1 à n, la boule numérotée k étant la boule tirée au k-ième tirage.
  Toute numérotation possible des boules correspond à un résultat possible des tirages, et ces différents résultats sont équiprobables.
  Par ailleurs, soit Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule blanche, c'est-à-dire au rang de tirage de la boule blanche. Lors d'une numérotation quelconque des boules, il y a autant de chances que la boule blanche soit numérotée 1, 2, ou n. Ainsi, la variable Y suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Or, pour tout k tel que $3k+3 \leqslant n$

  $$P(A_{3k+1}) = P(Y = 3k+1), \qquad P(B_{3k+2}) = P(Y = 3k+2), \qquad P(C_{3k+3}) = P(Y = 3k+3),$$

  donc, Y suivant une loi uniforme sur un ensemble de cardinal n :

  $$\boxed{P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}}$$

2. - On suppose que $\boxed{n = 3m+1}$, avec $m \in \mathbb{N}$. On a alors :

  $$A = A_1 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{3m+1} = \bigcup_{k=0}^{m} A_{3k+1}.$$

  Ces événements étant 2 à 2 incompatibles,

  $$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(A) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+1}}.$$

  De même,

  $$P(B) = \sum_{k=0}^{m-1} P(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(B) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}}.$$

  (on s'arrête ici à l'indice $k = m-1$, car il n'y a pas de tirage $3m+2$, puisqu'il n'y a que $3m+1$ boules)
  De même

  $$P(C) = \sum_{k=0}^{m-1} P(C_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(C) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}}.$$

- On suppose que $\boxed{n = 3m+2}$, avec $m \in \mathbb{N}$.
Cette fois-ci, A a droit à $m+1$ tirages, B aussi, mais C n'a droit qu'à m tirages (le tirage $3m+3$ n'ayant pas lieu). Ainsi, par le même argument que dans la question précédente, on obtient :
$$\boxed{P(A) = P(B) = \frac{m+1}{3m+2}, \qquad P(C) = \frac{m}{3m+2}}.$$
- On suppose que $\boxed{n = 3m+3}$, avec $m \in \mathbb{N}$.
Cette fois-ci, A, B et C ont tous les trois droit au même nombre de tirages, à savoir $m+1$ (le nombre total de boules étant un multiple de 3). Ainsi
$$\boxed{P(A) = P(B) = P(C) = \frac{m+1}{3m+3} = \frac{1}{3}}.$$

3. Dans toutes les situations, $\boxed{P(A) \geqslant P(B) \geqslant P(C)}$, mais on peut avoir l'égalité. Tout dépend du nombre de tirage possible pour chaque joueur : suivant les propriétés de congruence modulo 3 du nombre total de boules, les premiers joueurs peuvent avoir plus de tirages que les derniers.

Partie III – Les tirages se font sans remise, dans une urne remplie aléatoirement.

1. (a) D'après la question II-2, les conditions fixant le nombre de boules dans l'urne :
$$P_{[N=3m+1]}(A) = \frac{m+1}{3m+1}, \qquad P_{[N=3m+2]}(A) = \frac{m+1}{3m+2}, \qquad P_{[N=3m+3]}(A) = \frac{1}{3}.$$
La variable aléatoire N suit une loi géométrique de paramètre p. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi, $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet dénombrable d'événements non quasi-impossibles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :
$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{[N=n]}(A).$$
En triant les valeurs de n suivant leur reste dans la division euclidienne par 3, il vient donc (toutes les séries étant absolument convergentes) :
$$P(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(N = 3m+1) P_{[N=3m+1]}(A) + \sum_{m=0}^{+\infty} P(N = 3m+2) P_{[N=3m+2]}(A) + \sum_{m=0}^{+\infty} P(N = 3m+3) P_{[N=3m+3]}(A).$$
En remplaçant par les expressions des probabilités conditionnelles obtenues dans la question précédente, et d'après l'expression d'une loi géométrique (qui se retrouve facilement si on ne la connaît pas : il faut assurer $n-1$ échecs et 1 succès) :
$$P(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m} \frac{m+1}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1} \frac{m+1}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3} \frac{1}{3}.$$
Cette dernière somme vaut :
$$\sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3} \frac{1}{3} = \frac{pq^3}{3} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{q^{3m}} = \frac{pq^3}{3(1-q^3)}.$$
Ainsi,
$$\boxed{P(A) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p}$$

(b) Le même calcul, basé sur la formule des probabilités totales, amène :
$$P(B) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m} \frac{m}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1} \frac{m+1}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3} \frac{1}{3}.$$
d'où, d'après le calcul de cette dernière somme, effectuée juste au-dessus :
$$\boxed{P(B) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p.}$$

Toujours la même méthode permet de parvenir à :

$$P(C) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m} \frac{m}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1} \frac{m}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3} \frac{1}{3},$$

donc à :

$$\boxed{P(C) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p.}$$

Puisque $m < m+1$, et que les séries sont à termes strictement positifs, on a :

$$\frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p < \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p,$$

et

$$\frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p < \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p,$$

donc

$$\boxed{\text{P(A)>P(B)>P(C)}}.$$

2. (a) On remarque dans un premier temps que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{+\infty} q^{3m+1} p + \frac{p}{3q} \sum_{m=O}^{+\infty} \frac{q^{3m+2}}{3m+2}.$$

En admettant provisoirement qu'on peut primitiver terme à terme, il vient donc :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p &= \frac{pq}{3(1-q^3)} + \frac{p}{3q} \int_0^q \left(\sum_{m=0}^{+\infty} x^{3m+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{pq}{3(1-q^3)} + \frac{p}{3q} \int_0^q \frac{x}{1-x^3} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m+1} p &= \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m} + \frac{2p}{3q} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} \\ &= \frac{p}{3(1-q^3)} + \frac{2q}{3q} \int_0^q \frac{\mathrm{d}t}{1-t^3}.\end{aligned}$$

Il vient donc :

$$P(A) = \frac{p(1+q+q^2)}{3(1-q^3)} + \frac{p}{3q} \int_0^1 \frac{x+2}{1-x^3} \mathrm{d}x.$$

Comme $1-q^3 = (1+q+q^2)(1-q) = p(1+q+q^2)$, il vient :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3q} \int_0^q \frac{x+2}{1-x^3} \mathrm{d}x.}.$$

Il reste donc à justifier l'intégration terme à terme des séries. Cela provient de la convergence uniforme sur $[0, q]$ de la suite (S_n) des sommes partielles, cette convergence uniforme provenant de la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{m=n+1}^{+\infty} x^{3m+1} \leqslant \sum_{m=n+1}^{+\infty} q^{3m+1} = \frac{q^{3m+4}}{1-q^3}.$$

La convergence uniforme s'obtient alors du fait que cette dernière suite tend vers 0 indépendamment de x. Le théorème alors utilisé est du ressort du programme de Spé. On rappelle l'argument :

$$\left| \int_0^q \sum_{m=0}^{+\infty} x^{3m+1} \mathrm{d}x - \sum_{m=0}^{n} \int_0^q x^{3m+1} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^q \sum_{m=n}^{+\infty} x^{3m+1} \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^q \left| \sum_{m=n}^{+\infty} x^{3m+1} \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^q \frac{q^{3m+4}}{1-q^3} \mathrm{d}x \leqslant \frac{q^{3m+5}}{1-q^3}.$$

Le théorème d'encadrement assure alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n} \int_0^q x^{3m+1}\ \mathrm{d}x = \int_0^q \sum_{m=0}^{+\infty} x^{3m+1}\ \mathrm{d}x.$$

ce qui est bien l'expression souhaitée.
On fait de même pour la seconde somme.

(b) On pose $p = \frac{1}{2}$, dans cette question uniquement. On a donc :

$$\forall x \in [0,q] = [0, \frac{1}{2}], \quad \frac{x+2}{1-x^3} \geqslant x+2,$$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3} \geqslant \int_0^q (x+2)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (x+2)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}.$$

Ainsi,

$$P(A) \geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{8+9}{24},$$

et on obtient bien la minoration $\boxed{P(A) \geqslant \frac{17}{24}}$.

(c) On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \frac{x+2}{1-x^3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

On a alors

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\ \mathrm{d}x = \int_0^q \frac{-1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = -\ln(1-q) + \int_0^q \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$$

(ici on peut manipuler les intégrales sans danger : elles ne sont pas impropres) Or :

$$\int_0^q \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x+x^2)\Big]_0^q = \frac{1}{4}\ln(1+q+q^2)$$

et

$$\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\Big)\Big]_0^q \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

On obtient au final :

$$\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\ \mathrm{d}x = -\ln(1-q) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3(1-p)}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)}.$$

3. (a) Lorsque p tend vers 0 (donc q tend vers 1), tous les termes de la dernière parenthèse admettent une limite finie, sauf $-\ln(p)$ qui tend vers $+\infty$. Ce terme est donc prépondérant sur les autres, et

$$\frac{p}{3(1-p)}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-p\ln p}{3}.$$

D'après les croissances comparées, il vient donc

$$\lim_{p\to 0} \frac{p}{3(1-p)} \left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) = 0,$$

donc $\boxed{\lim_{p\to 0} P(A) = \frac{1}{3}}$.

Ce résultat est logique : lorsque p tend vers 0, la probabilité de succès est quasi-nulle, la variable aléatoire N va donc prendre des valeurs très grandes, ce qui équilibre les chances des différents joueurs (le nombre de tirage nécessaire pour obtenir la première boule blanche va être grand, et dans ce cas, le fait d'avoir joué en premier perd de son importance)

(b) Effectuons un DL à l'ordre 1 en q de l'expression entre parenthèse :

$$-\ln(1-q) = q + o(q) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) = \frac{1}{2}q + o(q).$$

Par ailleurs, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2},$$

donc $f'(0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. D'après la formule de Taylor-Young, on a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}q + o(q),$$

d'où finalement :

$$-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q + o(q) = 2q + o(q).$$

Ainsi,

$$\frac{p}{3q}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) \underset{p\to 1}{\sim} \frac{2q}{q} = \frac{2}{3}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{p\to 1} P(A) = 1}$.

Ce résultat est encore une fois très logique : lorsque p s'approche de 1, on tend vers une situation pour laquelle le premier succès est obtenu tout de suite, donc il n'y a qu'une boule dans l'urne (la boule blanche) : dans ce cas, A jouant en premier, c'est lui qui la tire.

4. On revient à l'expression intégrale de $P(A)$, que l'on dérive, par rapport à p, en se servant des règles usuelles de dérivation des intégrales dépendant de leur borne. En notant $g(p) = P(A)$, on obtient :

$$\forall p \in]0,1[, \; g'(p) = \frac{1}{3}\left(\frac{(1-p)+p}{(1-p)^2}\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x - \frac{p}{1-p}\cdot\frac{q+2}{1-q^3}\right) = \frac{1}{3(1-p)^2}\left(\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x - \frac{pq(q+2)}{1-q^3}\right).$$

Or,

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^q 2\,\mathrm{d}x = 2q$$

et

$$\frac{pq(q+2)}{1-q^3} = \frac{q(q+2)}{1+q+q^2}.$$

Une étude de la fonction $q \mapsto \dfrac{q+2}{1+q+q^2}$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc strictement inférieure à sa valeur en 0, égale à 2. Ainsi

$$\frac{pq(q+2)}{1-q^3} < 2q.$$

On en déduit donc de $g'(p) \geqslant 0$, donc que $\boxed{P(A) \text{ croit en fonction de } p}$.