Planche de colle

Question de cours

La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 9 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ (1,4,2,8)^{833} \circ (7,6,1,2)^{-2} \circ (1,7) \in \mathfrak{S}_{10}$$

peut se simplifier selon :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1,6,3,4)\circ(7,9)\circ(8,10)\circ(1,4,2,8)\circ(7,1)\circ(6,2)\circ(1,7) \\ &= (2,3,4)\circ(6,10,8) \text{ [décomposition en cycles à supports disjoints]} \\ &= (2,3)\circ(3,4)\circ(6,10)\circ(10,8) \text{ [décomposition en transpositions]} \end{aligned}$$

Exercice de colle

1. L'expression $8n+7$ impose de travailler dans l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
   Voici le tableau des carrés parfaits dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$:

$\overline{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{k}^2$	0	1	4	1	0	1	4	1

   La somme de trois éléments de la seconde ligne ne peut jamais faire 7, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, ce qui démontre la question.
2. Si N est un entier dans $\mathbb{N}^*$, on sait que le nombre de chiffres en base 10 de l'entier N est $\lfloor \log N + 1 \rfloor$.
   On en déduit que le nombre de chiffres en base 10 de l'entier 2^n tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. On peut donc écrire la négation de l'assertion :

   « $\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M$ »

   qui est donc l'assertion :

   « $\exists M > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ u_n < M$ »

On choisit un tel réel $M > 0$. L'ensemble $\mathscr{D} = \Big\{n \in \mathbb{N},\ u_n < M\Big\}$ est donc infini.
On peut ainsi construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in [0, M[.$$

Or, chaque u_k est un entier, donc en posant l'ensemble fini $I = [0, M[\cap\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots, r\}$, on peut ranger chaque entier n dans un tiroir J_k, avec k un entier entre 0 et r tel que :

$$u_{\varphi(n)} = k.$$

Il y a un nombre fini de tiroirs J_k et une infinité de termes $u_{\varphi(n)}$ à ranger. L'un des tiroirs J_k contient donc une infinité de termes $u_{\varphi(n)}$.
On peut donc extraire de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite que l'on note $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que chaque $u_{\psi(n)}$ soit égal à l'entier k constant vis-à-vis de l'entier n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $u_{\psi(n)}$ est la somme des chiffres en base 10 de l'entier $2^{\psi(n)}$. Il y a donc un nombre fini de possibilités pour les chiffres non nuls. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $\mathscr{L}_n = (\ell_1, \cdots, \ell_{s_n})$ la liste des chiffres non nuls lus de gauche à droite dans l'écriture en base 10 de $2^{\psi(n)}$, alors le nombre s_n de chiffres non nuls est inférieur ou égal à k ce qui laisse au maximum 10^k possibilités de listes $\mathscr{L}_n$.
Là encore, on peut ranger chaque entier dans un tiroir $\mathscr{L}$ correspondant à une liste de chiffres non nuls. Il y a un nombre fini de tiroirs et on doit ranger une infinité d'entiers. L'un des tiroirs contient une infinité d'entiers n. Un tel tiroir correspond à une liste $\mathscr{L} = (b_1, \cdots, b_m)$ de m chiffres non nuls et on peut extraire de la sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ encore une sous-suite que l'on note $(u_{\chi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $u_{\chi(n)}$ vale k et de plus les seuls chiffres non nuls qui apparaissent dans l'écriture décimale de $2^{\chi(n)}$ soient dans cet ordre $b_1, \cdots, b_m$, avec donc :

$$\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell = k.$$

Bien entendu, rien n'empêche que dans l'écriture en base 10 de l'entier $2^{\chi(n)}$ figurent beaucoup de 0 entre les b_ℓ et c'est d'ailleurs ce qui se passe car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2^{\chi(n)} = +\infty$.
Les m chiffres $b_1, \cdots, b_m$ délimitent $(m-1)$ intervalles dans lesquels peuvent se loger un nombre arbitraire de 0.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers $C_{1,n}, \cdots, C_{m-1,n}$ comptant le nombre de zéros, l'entier $C_{\ell,n}$ comptant dans l'écriture décimale de 2^{χ_n} le nombre de zéros figurant entre les chiffres b_ℓ et $b_{\ell+1}$. On peut remarquer que comme chaque puissance de 2 n'est jamais multiple de 5, alors il n'y a jamais de zéros après le chiffre b_m.
Parmi les $m-1$ suites d'entiers naturels $(C_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(C_{m-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, on considère le plus grand entier ℓ tel que la suite $(C_{\ell,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.
Les suites $(C_{\ell+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(C_{m-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bornées.
La suite $(C_{\ell,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et est à valeurs positives. On peut en extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Quitte à reprendre une sous-suite de la suite $(2^{\chi_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} C_{\ell,n} = +\infty,$$

ce que l'on fera dans la suite.

Les suites $(C_{\ell+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(C_{m-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc encore bornées.Ces $m-\ell-1$ suites prennent leurs valeurs dans un ensemble fini. En utilisant de nouveau le principe des tiroirs, on peut extraire une sous-suite que l'on note $(2^{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier p entre $\ell+1$ et $m-1$, les suites $(C_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes égales à d_p.

En résumé, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'écriture décimale de l'entier 2^{ρ_n} commence en lisant les chiffres par la droite : b_m, puis d_{m-1} zéros, puis le chiffre b_{m-1}, puis d_{m-2} zéros, etc. jusqu'au chiffre $b_{\ell+2}$, puis $d_{\ell+1}$ zéros, puis le chiffre $b_{\ell+1}$, puis $C_{\ell,n}$ zéros, puis encore d'autres chiffres jusqu'à finalement le chiffre b_1 tout à gauche.

On note S l'entier dont l'écriture décimale est en lisant les chiffres par la droite : le chiffre b_m, puis d_{m-1} zéros, puis le chiffre b_{m-1}, puis d_{m-2} zéros, jusqu'au chiffre $b_{\ell+2}$, puis $d_{\ell+1}$ zéros, pour terminer par le chiffre $b_{\ell+1}$.

On en déduit que l'entier 2^{ρ_n} est de la forme :

$$2^{\rho_n} = S + 10^{C_{\ell,n}}\ R_n,$$

où l'entier R_n est un entier dont le chiffre des unités est b_ℓ.

Pour tout entier n, on écrit :

$$S = 2^{\rho_n} - 10^{C_{\ell,n}}\ R_n$$

de sorte que l'entier S est multiple $2^{\min\{\rho_n,C_{\ell,n}\}}$. Or, cette puissance de 2 tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci est impossible car la 2-valuation dans l'entier S est une quantité constante interdisant une 2-valuation arbitrairement grande.

Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in}$ de départ tend bien vers $+\infty$.