Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DS n^o 11

Exercice

On pose u_n le terme général. On effectue un développement asymptotique :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie le CSSA (termes alternés qui en module tendent vers 0 en décroissant) et comme :

$$\frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

que tout est positif à partir d'un certain rang et que la série $\sum_n \frac{1}{2n}$ diverge vers $+\infty$ [série de Riemann], alors la série $\sum_n \left(\frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge également vers $+\infty$.
Conclusion, la série de l'énoncé diverge vers $-\infty$.

Problème 1 : différents types de convergence

Partie I : premières propriétés

1. On suppose que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow} X$ et $Y_n \overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow} Y$. On pose :

$$\Omega_1 = \left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n = X\right\} \text{ et } \Omega_2 = \left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty} Y_n = Y\right\}.$$

Il est clair que pour tout $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (X_n + Y_n)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Or,

$$\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2},$$

donc en prenant les probabilités, on obtient :

$$\mathbb{P}(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}) \leqslant 0.$$

L'événement $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est presque sûr et comme l'événement $\left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n + Y_n = X + Y\right\}$ contient cet événement $\Omega_1 \cap \Omega_2$, alors l'événement $\left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n + Y_n = X + Y\right\}$ est encore presque sûr.

2. Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et si λ est un réel, l'inclusion :

$$\left\{ \lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = X \right\} \subset \left\{ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda \cdot X_n = \lambda \cdot X \right\}$$

est claire. L'événement de gauche est de probabilité 1, donc il en est de même de l'événement de droite.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\omega \in \Omega$.
Si ω appartient à $\overline{\left\{ |X_n - X| \geqslant \varepsilon \right\} \cup \left\{ |Y_n - Y| \geqslant \varepsilon \right\}}$, alors $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ et $|Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire,

$$|(X_n + Y_n)(\omega) - (X + Y)(\omega)| \leqslant |X_n(\omega) - X(\omega)| + |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < 2\varepsilon.$$

Ainsi, $\omega \in \overline{\left\{ |X_n + Y_n - X - Y| \geqslant 2\varepsilon \right\}}$.
En passant à l'événement contraire, on obtient l'inclusion voulue car si $\overline{A} \subset \overline{B}$, alors $B \subset A$.

4. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit en utilisant la question précédente pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\Big(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

La quantité de droite tend vers 0 et le théorème des gendarmes fait le reste.

5. On suppose que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et λ est un réel.
Soit $\varepsilon > 0$.
• Si $\lambda = 0$, alors l'événement $\left\{ |\lambda \cdot X_n - \lambda \cdot X| \geqslant \varepsilon \right\}$ est vide, de probabilité nulle pour tout n, et donc de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.
• Si $\lambda \neq 0$, alors l'événement $\left\{ |\lambda \cdot X_n - \lambda \cdot X| \geqslant \varepsilon \right\}$ est égal à :

$$\left\{ |X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right\}$$

événément de probabilité tendant vers 0, car $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$ et par convergence en probabilité.
Quoiqu'il arrive, on a ce qu'il faut.

6. Cela revient à redémontrer la loi faible des grands nombres. On refait les choses avec une rédaction adaptée (ni trop détaillée ni pas assez).
On suppose que les variables X_n sont mutuellement indépendantes, de même loi que X.
En posant $m = \mathbb{E}(X)$, alors comme les variables X_n ont toutes la même loi, elles ont alors toutes la même espérance m et la même variance σ^2.
On distingue deux cas.
Si $\sigma^2 = 0$, alors chaque X_n est presque sûrement égale à m car en posant $Y_n = X_n - m$, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = V(X_n) = 0.$$

Par conséquent, en utilisant la formule de transfert :

$$0 = \mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{y \in Y_n(\Omega)} y^2 \mathbb{P}(Y_n = y),$$

chaque terme positif de cette somme est nul, ce qui donne :

$$\forall y \in Y_n(\Omega) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(Y_n = y) = 0,$$

et donc $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1$.
Dans ce cas, presque sûrement, $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ vaut m (l'intersection finie d'événements presque sûrs le reste) et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Lorsque $\sigma^2 \neq 0$, on pose $Y_k = X_k - m$, qui sont des variables mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions.
Soit $\varepsilon > 0$.
On en déduit par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} V\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot V\Big(Y_1 + \cdots + Y_n\Big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (V(Y_1) + \cdots + V(Y_n)) \\
&= \frac{\sigma^2}{n\ \varepsilon^2},
\end{aligned}$$

l'avant-dernière ligne provenant du fait que pour des variables deux à deux indépendantes, la variance d'une somme est la somme des variances.
Le théorème des gendarmes nous fournit dans ce cas la convergence en probabilité.

Partie II : la convergence en probabilité et la convergence presque sûre

7. Soit k dans $\mathbb{N}$. Soit ω dans $A_{k,\varepsilon}$. Pour tout entier $n \geqslant k$, on a :

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$$

donc pour tout $n \geqslant k + 1$, on a encore :

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Ainsi, ω appartient à $A_{k+1,\varepsilon}$.

8. On voit que si ω est dans Ω_ε, alors ω est par définition de cet ensemble dans la réunion des $A_{k,\varepsilon}$. Cette réunion est en fait exactement Ω_ε.
9. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$B_n = A_{n,\varepsilon} \setminus A_{n-1,\varepsilon},$$
et $B_0 = A_{0,\varepsilon}$.
On en déduit que les B_n sont deux à deux disjoints car si $n_1 < n_2$, alors $B_{n_1} \subset A_{n_1,\varepsilon}$ et B_{n_2} est disjoint de $A_{n_2-1,\varepsilon}$, donc disjoint de $A_{n_1,\varepsilon}$ et donc disjoint de B_{n_1}.
Ensuite, on a l'inclusion évidente :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,\varepsilon}.$$
Si ω est dans la réunion de droite, on prend l'entier k minimal tel que $\omega \in A_{k,\varepsilon}$. Si $k = 0$, alors $\omega \in B_0$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, par minimalité de k, $\omega \in B_k$.
Finalement, par σ-additivité de la probabilité $\mathbb{P}$,
$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \mathbb{P}(A_{0,\varepsilon}) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) - \mathbb{P}(A_{n-1}, \varepsilon)\Big) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \end{aligned}$$
en utilisant la série télescopique.
10. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$. Il existe un entier k tel que :
$$\mathbb{P}(A_{k,\varepsilon}) > 1 - \delta.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(\overline{A_{k,\varepsilon}}) \leqslant \delta.$$
On en déduit que pour tout $n \geqslant k$,
$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\Big|X_n - X\Big| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta.$$
Ceci est la définition de :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\Big|X_n - X\Big| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$
11. (a) On pose X la variable aléatoire nulle. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,
$$\mathbb{P}\left(\Big|X_n - X\Big| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n},$$
quantité de limite nulle. On a égalité lorsque ε est inférieur ou égal à 1.

(b) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $\mathbb{P}\Big(|X_n| > \varepsilon\Big) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ de série divergente. La série proposée diverge dans ce cas.

Pour tout $\varepsilon \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\Big\{|X_n| > \varepsilon\Big\}$ est vide, de probabilité nulle. La série est nulle et convergente dans ce cas.

(c) On choisit $\varepsilon \in]0,1[$.

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $A_n = \Big\{|X_n| > \varepsilon\Big\}$, les événements A_n sont mutuellement indépendants par mutuelle indépendance des X_n.

On en déduit par le deuxième lemme de Borel-Cantelli que presque sûrement, une infinité de A_n de réalise.

On note Ω' cet événément : « une infinité de A_n se réalise. »

On note F l'ensemble :

$$F = \Big\{\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = 0\Big\}.$$

Soit ω dans Ω'. Alors, il existe une infinité d'indices k tels que :

$$|X_k(\omega)| > \varepsilon.$$

On crée ainsi une sous-suite $(X_{\varphi(k)}(\omega))_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |X_{\varphi(k)}(\omega)| > \varepsilon.$$

La suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}*}$ ne peut pas converger vers 0.

On vient de montrer l'inclusion :

$$\Omega' \subset \overline{F}.$$

En prenant les événements contraires,

$$F \subset \overline{\Omega'}.$$

L'événement de droite est de probabilité nulle : l'événement de gauche également.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers la variable $X = 0$.

Partie III : la convergence en loi

12. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On utilise les SCE $\Big(\{X = x\}, \{X \neq x\}\Big)$ et $\Big(\{X_n = x\}, \{X_n \neq x\}\Big)$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x) =$$
$$\mathbb{P}(X_n = x, X = x) + \mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) - \mathbb{P}(X = x, X_n = x) - \mathbb{P}(X = x, X_n \neq x)$$
$$= \mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) - \mathbb{P}(X = x, X_n \neq x).$$

(b) Fixons un réel x.

L'ensemble $X(\Omega)$ est fini car inclus dans F. Il existe donc $\delta > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $y \in X(\Omega) \setminus \{x\}$, $|y - x| > \delta$. [Cela marche aussi si $X(\Omega) = \{x\}$.]

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) = \mathbb{P}(X_n = x, X \in X(\Omega) \setminus \{x\}) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| > \delta).$$

Par la convergence en probabilité, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) = 0$.

(c) Il s'agit de montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x, X_n \neq x) = 0.$$

Or,

$$\{X = x, X_n \neq x\} = \Big\{X = x, X_n \in F \setminus \{x\}\Big\}.$$

On trouve $\delta > 0$ tel que :

$$\forall y \in F,\ y \neq x \Longrightarrow |y - x| > \delta.$$

On en déduit :

$$\{X = x, X_n \neq x\} \subset \Big\{|X_n - X| > \delta\Big\}$$

événement dont la probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
On obtient ce qu'il faut.

(d) Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X_n constante égale à $\dfrac{1}{n+1}$ et X la variable nulle.
D'une part, toutes les variables X_n et X sont finies.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1,$$

donc la convergence en loi n'a pas lieu.
Enfin, si $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$.
Pour n assez grand, on obtient donc :

$$\Big\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\Big\} = \Big\{|X_n| \geqslant \varepsilon\Big\} = \emptyset.$$

La quantité $\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ est nulle à partir d'un certain rang, donc converge vers 0.

13. (a) • Supposons la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre ℓ.
Alors, si $x \in \mathbb{R}$, on distingue trois cas :
- si $x \notin \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X_n = x) = 0 = \mathbb{P}(X = x)$
- si $x = 1$, $\mathbb{P}(X_n = x) = p_n$ de limite $\ell = \mathbb{P}(X = x)$
- si $x = 0$, $\mathbb{P}(X_n = x) = 1 - p_n$ de limite $1 - \ell = \mathbb{P}(X = 0)$.

Quoiqu'il arrive, on a bien ce qu'il faut.
• Si la suite (X_n) converge en loi vers une variable Y, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(Y = 1),$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$: la suite (p_n) converge.

(b) • On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit X la variable aléatoire constante égale à 0. On en déduit pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n,$$

quantité de limite nulle.
De même, si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, on voit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable X constante égale à 1.
Quoiqu'il arrive, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable X constante presque sûrement à 0 ou à 1. Il reste à montrer que X est indépendante des X_n.
En effet, si $n \in \mathbb{N}$, si x et y sont dans $\mathbb{R}$, alors en notant $X = c$ presque sûrement, si $y \neq c$,

$$\mathbb{P}(X_n = x, X = y) = 0 = \mathbb{P}(X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X = y).$$

Si $y = c$, alors $\mathbb{P}(X_n = x, X = c) = \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X = c)$, car :

$$\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X_n = x, X = c) = \mathbb{P}(X_n = x, X \neq c) = 0.$$

On a bien indépendance.
• Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable finie X indépendante des X_n, alors, les hypothèses de la question 12 sont remplies, en prenant l'ensemble $F = \{0,1\} \cup X(\Omega)$ qui contient bien toutes les valeurs prises par les variables X_n ou X. On en déduit la convergence en loi puis :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \ell \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \ell.$$

La variable X prend presque sûrement ses valeurs dans $\{0,1\}$.
De plus, si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple :

$$\mathbb{P}\left(\left|X_n - X\right| \geqslant \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X_n = 0, X = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1, X = 0) = (1-p_n)\cdot\ell + p_n\cdot(1-\ell)$$

quantité de limite à la fois nulle par convergence en probabilité et à la fois égale à

$$2(1-\ell)\ \ell.$$

Par unicité de la limite : $(1-\ell)\ \ell = 0$ et donc $\ell \in \{0,1\}$.

Problème 2

1. On obtient :

$$\mathscr{L}(A) = \sum_{i=1 \text{ et } x_i \in A}^{s} \alpha_i.$$

2. L'ensemble Ω est fini. On sait qu'une probabilité est alors uniquement déterminée sur les singletons. Il s'agit alors de voir si la famille $\mathscr{F} = \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_{i_j}\right)_{\{(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,s]\!]^n\}}$ est à réels positifs (ce qui est évident) et de somme égale à 1.
   Or,
   $$\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{s} \prod_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} = \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \alpha_{i_\ell}\right) = \prod_{j=1}^{n} 1 = 1.$$
   On a ce qu'il faut.
3. (a) On fixe k un entier entre 1 et n. On fixe j un entier entre 1 et s. On calcule $\mathbb{P}(X_k = x_j)$ à l'aide de sommes rectangulaires :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = x_j) &= \sum_{i_\ell=1;\ell\neq k}^{s} \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, \cdots, X_{k-1} = x_{i_{k-1}}, X_k = x_j, X_{k+1} = x_{i_{k+1}}, \cdots, X_n = x_{i_n}) \\ &= \sum_{i_\ell=1;\ell\neq k}^{s} \mathbb{P}\left(\left\{(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}}, x_j, x_{i_{k+1}}, \cdots, x_{i_n})\right\}\right) \\ &= \sum_{i_\ell=1;\ell\neq k}^{s} \left(\prod_{\ell=1;\ell\neq k}^{n} \alpha_{i_\ell}\right) \times \alpha_j \\ &= \alpha_j.\end{aligned}$$
   Conclusion, $\mathbb{P}_{X_k}(\{x_j\}) = \mathbb{P}(X_k = x_j) = \mathscr{L}(\{x_j\})$ et donc $\mathbb{P}_{X_k} = \mathscr{L}$.
   (b) Il suffit de montrer que si $i_1, \cdots, i_n$ sont des entiers entre 1 et s, alors :
   $$\mathbb{P}\Big(X_1 = x_{i_1}, \cdots, X_n = x_{i_n}\Big) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell = x_{i_\ell}),$$
   ce qui est vrai puisque les deux quantités valent $\prod_{\ell=1}^{n} \alpha_{i_\ell}$.
4. (a) On sait que $Y = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'événement présenté vaut $\{Y = n-1\}$ de probabilité :
   $$\binom{n}{n-1}\ p^{n-1}\ q$$
   formule que l'on peut un peu simplifier en : $n\ p^{n-1}\ q$.
   (b) Si k est un entier entre 2 et $n-2$. On exploite le SCE $(\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\})$.
   Ainsi,
   $$d_{k+2} = \mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 0)\ q + \mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1)\ p.$$
   La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 0)$ est égale à d_{k+1} car la première valeur $X_1 = 0$ occasionne un décalage sur les indices et la première valeur 0 « compte pour du beurre » dans l'attente des deux premiers 1 consécutifs. Il y a moyen de formaliser davantage mais c'est un peu technique.

Pour calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1)$, on fait intervenir le SCE $(\{X_2 = 1\}, \{X_2 = 0\})$. On obtient :

$$\mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1, X_2 = 1)\ p + \mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1, X_2 = 0)\ q.$$

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1, X_2 = 1)$ est nulle car sachant $X_1 = X_2 = 1$, le plus petit indice i tel que $X_i = X_{i-1} = 1$ vaut $i = 2$ et l'événement D_{k+2} ne se réalise pas.
La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(D_{k+2} \mid X_1 = 1, X_2 = 0)$ vaut d_k car la deuxième valeur 0 remet les compteurs à zéro (sans jeu de mots). Le temps d'attente du premier indice i tel que $X_i = X_{i-1} = 1$ s'opère à partir de l'indice 3.
Conclusion,

$$d_{k+2} = q\ d_{k+1} + pq\ d_k.$$