FEUILLE D'EXERCICES N° 17

INTÉGRATION SUR DES SEGMENTS

Calculs d'intégrales ou de primitives

Exercice 1

Calculer des primitives des fonctions :

- $t \longmapsto t\ln t$, • arcsin et arccos
- $t \longmapsto t \cdot \arctan t$, • $t \longmapsto t^2 \cdot \sin t$
- $t \longmapsto \cos^3 t$.

Exercice 2

Calculer :

- $\int_0^{\pi} t^4 \cdot \sin t \; dt$, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$
- $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^3+1} dx$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\cos^2 u \cdot \sin^2 u}$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+3} dx$, $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2 dx$, $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$
- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4-4}$, $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, $\int_1^2 3^{\sqrt{2t+1}} dt$
- $\int_0^2 \min\{x^2+1, x^2+3x-2\} \; dx$.

Exercice 4

Calculer des primitives des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto x^2 \cdot \ln x$, $x \longmapsto \arcsin x$, $x \longmapsto \arctan x$
- $x \longmapsto e^{3x} \cdot \cos(2x+1)$, $x \longmapsto \frac{1}{x \cdot \ln x}$
- $x \longmapsto e^{e^x+2x+3}$.

Exercice 5

Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) \; dx = \frac{\pi \; \ln 2}{8}$.

Exercice 6

Calculer :

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$,
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \; dx$, $\int_{-2}^2 \sin t \cdot e^{-t^4} dt$, $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+2x+1)^2}$

Exercice 7

Calculer des primitives de :

- $x \longmapsto \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}$, $x \longmapsto \frac{2x-1}{(x+1)^2}$, $x \longmapsto \frac{2x}{x^2-x+1}$
- $x \longmapsto \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\cos^3 x + \sin x}$ et $x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x - 3}$
- $x \longmapsto \frac{x}{x^4-x^2-2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x(x^3+1)}$
- $x \longmapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{\cos x}$.

Aspects théoriques

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que :

$$f(\theta) \cdot \int_\theta^b g = g(\theta) \cdot \int_a^\theta f.$$

Exercice 9

Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \int_x^{x+T} f(t)\; dt$ est constante.
2. Calculer $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \; dt$.

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \cdot e^{int} \; dt = 0$.

Exercice 11

Soit $f : [1,2] \longrightarrow [2,3]$ une bijection continue strictement croissante. Montrer que $\int_1^2 f + \int_2^3 f^{-1} = 4$.

Exercice 12

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\left| \int_0^1 f(t)\; dt \right| = \int_0^1 |f(t)| \; dt$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$

et $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = g(t)\ e^{i\theta}.$$

Sommes de Riemann

Exercice 13

Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ pour :

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{n}{n^2+k^2}$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$
- $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2k}{n} e^{1+3k/n}.$
- $u_n = \displaystyle\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}.$

Exercice 14

Calculer : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{2n} k}.$

Exercice 15

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(n\cdot I - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$

Exercice 16

Soit $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^\pi f(t)\cdot\sin t\ dt = \int_0^\pi f(t)\cdot\cos t\ dt = 0.$$

1. Montrer que la fonction f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $]0,\pi[$.
2. Donner un exemple de fonction f non nulle et vérifiant les hypothèses.

Exercice 17

Soit $f : [0,1] \longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction continue. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f$.

1. Montrer que $I > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdvision :
$$\sigma_n = \left(a_{n,0} = 0 < a_{n,1} < \cdots < a_{n,n} = 1\right)$$
telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{a_{n,k}}^{a_{n,k+1}} f = \frac{I}{n}$.
3. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n,k}).$

Thèmes variés

Exercice 18

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\cdot\sqrt{1-t^2}\ dt$.

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis convergente et calculer sa limite.
3. Montrer que : $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}\cdot a_n$.
4. En déduire un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19

Étudier la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On donnera en particulier les deux premiers termes dans son développement asymptotique en échelle de comparaison $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 20

On suppose que π peut être mis sous la forme $\dfrac{a}{b}$,avec a et b dans $\mathbb{N}^*$. On pose : $P_n(X) = \dfrac{X^n\cdot(a-bX)^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers.
2. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\cdot\sin t\ dt \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $I_n > 0$.
4. Trouver une constante $\xi > 0$ telle que : $I_n \leqslant \pi\dfrac{\xi^n}{n!}$.
5. En déduire une contradiction. Qu'a-t-on montré ?

Exercice 21

1. Pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$.
2. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
3. Calculer de même $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 22

1. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t^2}{\sin t}dt$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{(\varepsilon,M)\longrightarrow(0^+,+\infty)}\int_\varepsilon^M \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\ dx$.
3. Tracer la courbe $y = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

Exercice 23

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 - 2X\cos t + 1$, avec t dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $f(t) = \ln(1 - 2\theta\cos t + \theta^2)$.
   (a) Montrer que f est continue sur $[0, 2\pi]$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\theta\cos t + \theta^2)\ dt$ [intégrale de Poisson].

Exercice 24

On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\ dt$ [intégrale de Wallis]

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente, puis calculer sa limite.
2. Montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
3. En déduire W_{2n} et W_{2n+1}, en fonction de W_0 et W_1.
4. Montrer que l'on a l'équivalent : $W_{n+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} W_n$, puis montrer que : $W_{2n+1} \cdot W_{2n} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$.
5. En déduire un équivalent de W_n.

Exercice 25

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante.

1. Comparer $f(n)$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\ dt$.
2. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Déterminer la nature des suites $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln k}\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln^2 k}\right)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 26

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\ dt$.

1. Calculer a_0, a_1, puis montrer que tous les a_n sont strictement positifs.
2. Déterminer une relation entre a_{n+2} et a_n.

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^{2n} t\ dt$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$ en comparant la courbe $y = \sin x$ à l'une de ses cordes.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.
5. Montrer les formules suivantes :
   - $a_{2n+2} = (2n+2)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ \sin t\ \cos^{2n+1} t\ dt$
   - $\dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)\ b_n - (2n+2)\ b_{n+1}$
   - $2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
6. Montrer que la série $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_1^3 P(\sin t)\ e^{-t^3}\ dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ P(\mathrm{sh}(k)).$$

Un peu plus difficile

Exercice 28

Soit $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine de module 1. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}P'(e^{ix})}{P(e^{ix})}dx$ est égal au nombre de racines de $P(X)$ dans le disque unité.

Exercice 29

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction C^1 telle que la fonction f' soit croissante.
Montrer que la longueur de la courbe $y = f(x)$ est strictement inférieure à 3.

Exercice 30

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\cos\left(\frac{nt}{n+1}\right)}\ dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$.
3. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \dfrac{\pi}{2} \cdot \ln n$.

Exercice 31

1. Montrer qu'il existe deux suites de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients entiers tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n\ e^t\ dt = A_n(x)\ e^x + B_n(x)\ e^{-x}.$$
2. En déduire que si r est un nombre rationnel non nul, alors e^r est un nombre irrationnel.