Lycée Henri IV — **Cours**

MPSI — Durée : 6 h

OUTILS D'ANALYSE

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Pour ce chapitre (comme pour les autres d'ailleurs), quelques souvenirs de vos années de lycée ne sont pas inutiles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

Dans ce chapitre, on s'intéresse, par anticipation, à plusieurs outils mathématiques liés aux fonctions réelles (dérivation, primitivation, équations différentielles à coefficients constants, dérivées partielles, ...). L'objectif est de se familiariser dès maintenant avec ces concepts parce qu'ils sont particulièrement utiles en sciences physiques.

La rigueur théorique est donc provisoirement mise de côté au profit de l'efficacité.

De plus, certaines notions, moins importantes dans un premier temps, ne sont pas abordées. En particulier, les limites et la continuité ne sont pas révisées dans ce chapitre. On les utilise tout de même, de façon modérée, en s'appuyant sur vos souvenirs de Terminale.

A. Dérivation

A.1. Généralités

Nous consacrerons tout un chapitre à la notion de dérivée et à ses applications. Pour l'instant, on peut se contenter de la définition intuitive suivante.

Définition 1

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. La fonction f est dite dérivable sur $\mathscr{D}$ lorsque, en tout point de $\mathscr{D}$, son graphe admet une tangente (non verticale). La fonction, notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, qui, à tout point de $\mathscr{D}$, associe la pente de la tangente en ce point est appelée la dérivée de f sur $\mathscr{D}$.

Lorsque f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que sa dérivée est continue sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.

En un point a où f est dérivable, l'équation de sa tangente est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemples :

- Les fonctions de référence sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs ensembles de définition (sauf $\lfloor \cdot \rfloor$ aux entiers, $\sqrt{\cdot}$ en 0 et $|\cdot|$ en 0). Vous devez connaître sur le bout des doigts les dérivées des fonctions usuelles (elles sont rappelées dans votre formulaire de dérivation).

L'encadré suivant rassemble les règles de dérivation les plus utiles. Elles seront démontrées ultérieurement.

Règles de dérivation

Les théorèmes généraux de dérivation donnent les règles opératoires sur les dérivées :

- Une somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et la dérivée de cette somme est la somme des dérivées :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$
- Un produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et l'on a la formule de dérivation terme à terme suivante :
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
- Un quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (là où il existe) et l'on a :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
- Une composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on a la « formule du fou » :
$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u).$$
Cette formule généralise les dérivées des composées de référence, que vous avez vues en Terminale et qui vous sont rappelées dans le formulaire.

Exemples :

- La fonction $\tan = \sin / \cos$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et l'on a

$$\tan' = \left(\sin \times \frac{1}{\cos}\right)' = \cos \times \frac{1}{\cos} + \sin \times \left(-\frac{-\sin}{\cos^2}\right) = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

  et

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos \times \cos - \sin \times (-\sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

- La fonction $f(x) = x^{(x^x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln(x)} \ln(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\big(\ln(x) + 1\big)\, \mathrm{e}^{x \ln(x)} \ln(x) + \mathrm{e}^{x \ln(x)} \frac{1}{x}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln(x)} \ln(x)} \\ &= \left[x \ln^2(x) + x \ln(x) + 1\right] x^{x - 1 + (x^x)}. \end{aligned}$$

La principale utilisation de la dérivation est le principe de Lagrange, énoncé ci-dessous.

Proposition 1

Une fonction, dérivable sur un intervalle I, est croissante (respectivement décroissante) sur I si, et seulement si, sa dérivée est positive ou nulle (respectivement négative ou nulle) sur I. Si, de plus, le nombre de points d'annulation est fini, la monotonie est stricte.

■ Admis (pour l'instant). ■

On essaiera toujours de factoriser l'expression de la dérivée afin de pouvoir déterminer aisément son signe, par exemple à l'aide d'un tableau de signes.

On peut par exemple utiliser le principe de Lagrange lorsque l'on souhaite démontrer une inégalité fonctionnelle. L'exemple ci-dessus illustre cette méthode.

Exemples :

- Démontrons que

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1 + x) \leqslant x.$$

  Pour cela, on introduit la fonction

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

  qui est définie sur $]-1; +\infty[$.
  Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ et l'on a

$$\forall x > -1, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x},$$

  donc $f'(x)$ est du signe de x, ce qui donne :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

  La positivité de f sur $]-1; +\infty[$ nous permet alors d'affirmer que

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1 + x) \leqslant x.$$

A.2. Etude d'une fonction

L'encadré ci-dessous vous rappelle les grandes étapes de l'étude d'une fonction.

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction $x \longmapsto f(x)$, on effectue une à une les étapes suivantes :

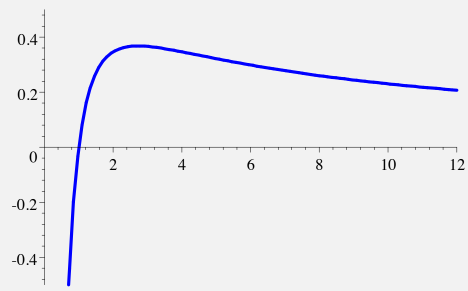
- On détermine l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
- On essaye de réduire le domaine d'étude à un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{D}_f$ en utilisant les éventuelles propriétés de périodicité, de parité ou d'imparité.
- On étudie la régularité de la fonction f (c'est-à-dire ses propriétés de continuité et de dérivabilité) et l'on calcule f' afin d'étudier son signe.
- On dresse le tableau de variation de f (c'est-à-dire que l'on place dans un tableau le signe de la dérivée ainsi que les variations de la fonction qui en découlent). On indique dans ce tableau les informations glanées jusqu'ici à propos de valeurs remarquables de f et f' et l'on y rajoute les limites aux bornes des intervalles du domaine d'étude. On repère ainsi les tangentes remarquables et les asymptotes horizontales et verticales.
- Si f tend vers $\pm\infty$ et $\pm\infty$, on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie. Il est alors légitime de regarder si cette branche infinie possède une asymptote oblique. La méthode est décrite ci-après.
- Une fois tout cela terminé, on prend son plus beau stylo pour représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère (si possible orthonormal). L'utilisation de la couleur est alors fortement conseillée !

Cette étude peut être grandement simplifiée par l'utilisation d'une calculatrice. Il est donc indispensable de connaître les fonctionnalités graphiques de votre boutonneuse ! Cela passe peut-être par la lecture de ce petit bouquin (traduit du japonais au français par un finlandais) que Casio, HP ou TI appellent un mode emploi.

Exemples :

- Étudions la fonction
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$
La fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux et l'on a
$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$
Donc $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $0 < x < \mathrm{e}$, ce qui donne

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$1/\mathrm{e}$	↘	0



La suite de ce paragraphe est dédiée à la méthode de recherche des asymptotes obliques.

Définition 2

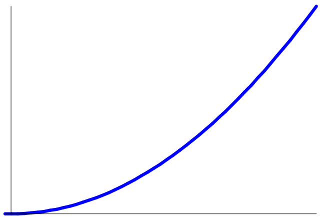
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque $f(x) - ax - b$ tend vers 0 en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

La détermination d'une asymptote se fait en deux étapes. On commence par rechercher le coefficient a et, si ce dernier existe, on recherche le coefficient b.

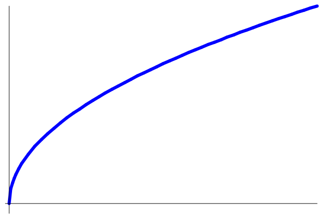
Recherche d'une direction asymptotique

Pour trouver le coefficient a (s'il existe), on étudie la limite en $\pm\infty$ du quotient $\dfrac{f(x)}{x}\cdot$

- Si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors f augmente plus vite que x. Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}_f$ ressemble à une parabole en $\pm\infty$. On dit alors que la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) :

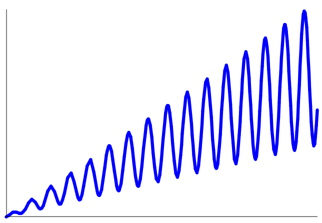


- Si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors f augmente moins vite que x. Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}_f$ ressemble à une fonction $\sqrt{\cdot}$ en $\pm\infty$. On dit alors que la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) :



- Si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, f augmente à la même vitesse que $x \longmapsto ax$. Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}_f$ va dans la direction de la droite de pente a en $\pm\infty$. On dit alors que la courbe admet une direction asymptotique de pente a. Dans ce cas, on passe à la recherche de b, telle qu'elle est décrite dans l'encadré ci-après.

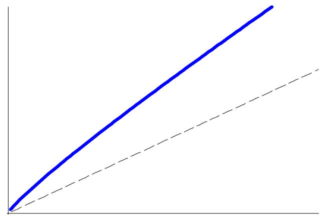
Il existe un dernier cas non évoqué dans ce cadre : celui où le quotient $f(x)/x$ n'a pas de limite en $\pm\infty$. On obtient alors généralement des branches infinies oscillantes :



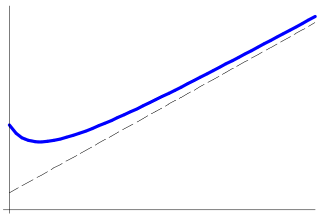
Recherche d'une asymptote

Lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on recherche b (s'il existe) en étudiant la limite en $\pm\infty$ de $f(x) - ax$.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = \pm\infty$, alors $f(x)$ part dans la direction de la droite $y = ax$ tout en s'éloignant de cette droite. On dit alors que la courbe admet une branche parabolique de pente a :

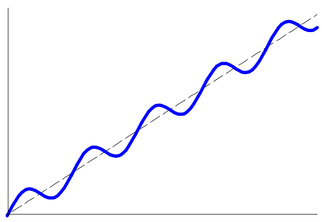


- Si $\lim\limits_{\pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ se rapproche de la droite d'équation $y = ax + b$. Cette droite est alors asymptote à la courbe en $\pm\infty$:



Une fois l'asymptote déterminée, on peut regarder sa position par rapport à la courbe en étudiant le signe de $f(x) - ax - b$ au voisinage de $\pm\infty$. Cette étape, souvent technique, peut en fait être menée de front avec la recherche de l'asymptote, en utilisant des développements limités.

Là encore, l'encadré ne dit pas tout ! Il est possible que $f(x) - ax$ n'admette pas de limite. On obtient alors des oscillations dans la direction de pente a :



<u>Exemples :</u>

- Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

  En $+\infty$, une fonction rationnelle se comporte comme le quotient de ses monômes de plus haut degré, donc (en utilisant l'équivalence $\sim$ que nous verrons plus tard mais qui est ici transparente) :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

  ce qui justifie l'existence en $+\infty$ d'une branche infinie. Or, on a successivement

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) - x = \frac{x^2+2x+5}{x+1} - x = \frac{x+5}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$

  donc $y = x + 1$ est asymptote de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

A.3. Dérivée d'une fonction complexe

Dans ce paragraphe, on traite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ étant donnée, on lui associe sa partie réelle $\Re\mathrm{e}(f)$ et sa partie imaginaire $\Im\mathrm{m}(f)$.

Définition 3

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathscr{D}$. On dit que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ lorsque les fonctions $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ le sont. Dans ce cas, on pose

$$f' = \big(\Re\mathrm{e}(f)\big)' + i\big(\Im\mathrm{m}(f)\big)'.$$

Les règles de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée sont formellement inchangées lorsqu'on travaille avec une fonction complexe par rapport au cas d'une fonction réelle.

Exemples :

- Si $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction dérivable à valeurs complexes alors la fonction e^u est également dérivable sur $\mathscr{D}$ et l'on a

$$(\mathrm{e}^u)' = u' \, \mathrm{e}^u \, .$$

Pour le voir, écrivons u sous forme cartésienne : $u = a + i\theta$ où a et θ sont deux fonctions réelles dérivables. Alors

$$\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{a+i\theta} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^a \cos(\theta) + i\, \mathrm{e}^a \sin(\theta),$$

ce qui démontre que e^u est dérivable (puisque $\mathrm{e}^a \cos(\theta)$ et $\mathrm{e}^a \sin(\theta)$ le sont) et

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{e}^u)' & = & \big(\mathrm{e}^a \cos(\theta)\big)' + i\big(\mathrm{e}^a \sin(\theta)\big)' \\
& = & a' \, \mathrm{e}^a \cos(\theta) - \mathrm{e}^a \, \theta' \sin(\theta) + ia' \, \mathrm{e}^a \sin(\theta) + i\, \mathrm{e}^a \, \theta' \cos(\theta) \\
& = & a' \, \mathrm{e}^a \, \big(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\big) + i\theta' \, \mathrm{e}^a \, \big(i \sin(\theta) + \cos(\theta)\big) \\
& = & a' \, \mathrm{e}^a \, \mathrm{e}^{i\theta} + i\theta' \, \mathrm{e}^a \, \mathrm{e}^{i\theta} \\
& = & (a' + i\theta') \, \mathrm{e}^{a+i\theta} \\
& = & u' \, \mathrm{e}^u,
\end{array}$$

ce qui justifie notre affimation.

- L'exemple précédent nous dit que la fonction $u : \theta \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad u'(\theta) = i\, \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta+\pi/2)},$$

ce qui fait parfois dire aux physiciens que la dérivation d'une fonction complexe fait tourner d'un quart de tour (même si ce n'est en fait exact que pour les exponentielles complexes).

A.4. Dérivées usuelles

a) Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant rappelle les dérivées des fonctions usuelles. Il est à connaître par ♡.

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
c	0	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$

b) Dérivées des composées usuelles

La formule générale donnant la dérivée d'une fonction composée est

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

Elle est souvent utilisée dans les cas suivants :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u \qquad (\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin u)' = u'\cos u \qquad (\cos u)' = -u'\sin u \qquad (\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

A.5. Dérivées successives

Définition 4

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle ou complexe.

Lorsque f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que f' est elle-même dérivable sur $\mathscr{D}$, on dit que f est deux fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et on note f'' la fonction dérivée seconde définie par $f'' = (f')'$. Lorsque f est deux fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et que sa dérivée seconde est continue sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$.

Lorsque f est deux fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et que f'' est elle-même dérivable sur $\mathscr{D}$, on dit que f est trois fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et on note f''' la fonction dérivée tierce définie par $f''' = (f'')'$. Lorsque f est trois fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et que sa dérivée tierce est continue sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathscr{D}$.

Etc.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque f est n fois dérivable sur $\mathscr{D}$, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème. Lorsque f est n fois dérivable sur $\mathscr{D}$ et que sa dérivée n-ème est continue sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathscr{D}$.

Enfin, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathscr{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

On a donc

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Exemples :

- La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous verrons plus tard des applications des dérivées successives (par exemple pour obtenir des approximations d'une fonction plus précise que l'approximation affine donnée par la tangente). Signalons tout de suite que la dérivée seconde permet d'étudier la courbure du graphe d'une fonction.

Proposition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I.

Si f'' est positive ou nulle sur I, alors f est au dessus de chacune de ses tangentes sur I. On dit alors que f est convexe sur I.

Si f'' est négative ou nulle sur I, alors f est en dessous de chacune de ses tangentes sur I. On dit alors que f est concave sur I.

Si f'' s'annule en $x_0 \in I$ et change de signe en ce point, on dit que x_0 est un point d'inflexion de f. En ce point la tangente traverse la courbe.

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

A. 6. Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

De nombreux systèmes physiques dépendent de plusieurs grandeurs (en particulier, en thermodynamique). Les fonctions liées à ces systèmes dépendent par conséquent de plusieurs variables. Nous envisageons dans ce paragraphe le cas où la fonction possède deux variables.

Définition 5

On appelle fonction de deux variables toute fonction (à valeurs réelles) définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

Exemples :

- La fonction qui associe à un vecteur du plan (de composantes x et y) sa norme est la fonction de deux variables :
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$
- Pour un gaz dit parfait, la relation liant la pression P, le volume V et la température T est $PV = nRT$ où n désigne le nombre de moles et $R = 8,31\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits. Pour un tel gaz, on a
$$P = \frac{nRT}{V}$$
ce qui signifie que P dépend des deux variables T et V.

Pour étudier les variations d'une fonction de plusieurs variables, on introduit la notion de dérivée partielle.

Définition 6

Soit $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables.

Sous réserve d'existence, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la fonction de deux variables obtenue en dérivant f par rapport à x tout en laissant y constant.

De même, on peut définir la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

En physique, on insiste sur la variable qui reste constante en adoptant la notation $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$.

Exemples :

- Pour $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
On notera que, dans ce cas, f est définie sur $\mathbb{R}^2$ mais les dérivées partielles n'existent que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Pour un gaz parfait, on a $P = nRT/V$, donc
$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V} \qquad\qquad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2}.$$

2 h 00

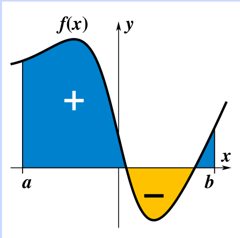
B. Intégrales et primitives

B.1. Généralités

Nous consacrerons tout un chapitre à la notion fondamentale d'intégrale. Pour l'instant, on peut se contenter de la définition intuitive suivante :

Définition 7

L'intégrale d'une fonction continue f entre a et b, notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, est l'aire comprise entre l'axe (Ox) et le graphe de f sur le domaine $[a;b]$, en comptant positivement les aires au dessus de (Ox) et négativement celles en dessous.



L'énoncé suivant donne les propriétés élémentaires de l'intégrale.

Proposition 3

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I. Pour tous $a, b, c \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad \text{(linéarité)}$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \text{(Chasles)}$$

$$(f \geqslant 0) \implies \int_a^b f \geqslant 0 \qquad \text{(positivité)}$$

$$(f \geqslant g) \implies \int_a^b f \geqslant \int_a^b g \qquad \text{(croissance).}$$

■ Admis (pour l'instant). ■

Parallèlement à l'intégrale, on introduit la notion de primitive.

Définition 8

La fonction F est une primitive de f lorsque F est dérivable et vérifie $F' = f$.

Si F est une primitive de f alors, pour toute constante c, la fonction $F+c$ est aussi une primitive de f. Réciproquement, sur un intervalle, deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

La primitive d'une somme est la somme des primitives (à une contante près).

Exemples :

- Vous devez connaître les primitives des fonctions usuelles et celles des composées de référence. Tout cela vous est rappelé dans le formulaire d'intégration.

L'énoncé suivant fait le lien entre les notions d'intégrale et de primitive.

Proposition 4

Si F est une primitive d'une fonction continue f, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

■ Admis (pour l'instant). ■

Exemples :

- On a
$$\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\Big]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}\cdot$$

La dérivation des fonctions complexes ayant été définie au paragraphe A. 3., il n'y a pas d'obstable à l'introduction de la primitivation des fonctions complexes. Les calculs ne sont cependant pas simples en général, sauf dans le cas de l'exponentielle. L'exemple suivant illustre le parti que l'on peut tirer de cette primitivation complexe de l'exponentielle.

Exemples :

- Soient $a, \omega \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls. Déterminons une primitive des fonctions
$$f : t \longmapsto \mathrm{e}^{at}\cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad g : t \longmapsto \mathrm{e}^{at}\sin(\omega t).$$
Pour cela, on introduit la fonction complexe
$$\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{i\omega t} = \mathrm{e}^{(a+i\omega)t}$$
de sorte que
$$f = \Re\mathrm{e}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad g = \Im\mathrm{m}(\varphi).$$
Une primitive de φ est donnée par
$$\Phi : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\cdot$$
Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{(a+i\omega)t}}{a+i\omega} &= \frac{(a-i\omega)\,\mathrm{e}^{(a+i\omega)t}}{a^2+\omega^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{at}}{a^2+\omega^2}(a-i\omega)\big(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\big)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{at}}{a^2+\omega^2}\Big[\big(a\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\big)+i\big(a\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)\big)\Big]\end{aligned}$$
donc
$$F = \Re\mathrm{e}(\Phi) : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{at}}{a^2+\omega^2}\big(a\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\big)$$
et
$$G = \Im\mathrm{m}(\Phi) : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{at}}{a^2+\omega^2}\big(a\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)\big)$$
sont respectivement une primitive de f et une primitive de g.

B.2. Intégration par parties et primitivation par parties

a) IPP

Proposition 5

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous $a, b \in I$, on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, il en est de même de uv. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \big(u(t)v'(t) + u'(t)v(t) - u'(t)v(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Binet}\\
&= \int_a^b \big(u(t)v'(t) + u'(t)v(t)\big)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat attendu. ■

La formule d'intégration par parties fonctionne par compensation : d'un côté, on dérive (ce qui correspond en général à une simplification) et de l'autre côté, on primitive (ce qui correspond la plupart du temps à une complication). Intégrer par parties n'est donc efficace que si la simplification est plus importante que la complication !

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on intègre un polynôme contre une exponentielle.

Exemples :

- Calculons
$$I = \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Pour cela, on pose
$$\begin{aligned} u(t) &= t & u'(t) &= 1\\ v\prime(t) &= \mathrm{e}^{-t} & v(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$
où u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. La formule d'IPP nous donne alors
$$I = \big[-t\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{e}^{-1} - 0 + \big[-\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

b) IPP

Dans cet énoncé, la notation $\int^x f$ désigne une primitive de f et $\big[f(t)\big]^x$ désigne $f(x)$.

Proposition 6

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tout $x \in I$, on a la formule de primitivation par parties :

$$\int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]^x - \int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ On adapte la démonstration de la formule d'IPP. ■

Exemples :

- Pour déterminer les primitives de la fonction logarithme néperien, on écrit que

$$\begin{aligned} \int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x 1 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[t \times \ln(t)\big]^x - \int^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - x + \lambda, \end{aligned}$$

  où λ est une constante arbitraire.

- Déterminon, à nouveau, une primitive de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(\omega x)$ où $a, \omega \in \mathbb{R}$ sont non tous les deux nuls.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$F(x) = \int^x \mathrm{e}^{at}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

  Introduisons les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \mathrm{e}^{at}$, $u(t) = \mathrm{e}^{at}/a$, $v(t) = \cos(\omega t)$ et $v'(t) = -\omega\sin(\omega t)$. La formule de primitivation par parties donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\cos(\omega t)\right]^x - \int^x \frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\big(-\omega\sin(\omega t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{a}\int^x \mathrm{e}^{at}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

  Effectuons une seconde primitivation par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \mathrm{e}^{at}$, $u(t) = \mathrm{e}^{at}/a$, $v(t) = \sin(\omega t)$ et $v'(t) = \omega\cos(\omega t)$. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{a}\left[\frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\sin(\omega t)\right]^x - \frac{\omega}{a}\int^x \frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\omega\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}\sin(\omega x) - \frac{\omega^2}{a^2}F(x), \end{aligned}$$

  donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)F(x) = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}\sin(\omega x),$$

  ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + \omega^2}\big(a\cos(\omega x) + \omega\sin(\omega x)\big).$$

B.3. Changement de variable

Les encadrés ci-après présentent la méthode du changement de variable en pratique. Le bien fondé de cette méthode viendra plus tard.

De l'ancien vers le neuf !

On présente dans cet encadré la méthode du changement de variable appliquée à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

dans le cas où l'

$$\boxed{\text{on exprime l'ancienne variable en fonction d'une nouvelle : } x = \varphi(t)}$$

On décrit ci-dessous les différentes étapes à effectuer.

- Nouvelles bornes
  On détermine α et β tel que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
- Nouvelle différentielle
  On vérifie que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ et l'on calcule $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne l'ancienne différentielle $\mathrm{d}x$ en fonction de la nouvelle $\mathrm{d}t$.
- Nouvel intégrant
  On transforme l'intégrant $f(x)\,\mathrm{d}x$ en remplaçant $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et x par $\varphi(t)$. On obtient ainsi un nouvel intégrant de la forme $g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Écriture de la « nouvelle » intégrale
  On obtient une nouvelle expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples :

- Calculons
$$J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
en posant
$$x = \sin t.$$
Les nouvelles bornes sont $-\pi/2$ et $\pi/2$.
La fonction sin est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et l'on a
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t.$$
On a
$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = |\cos t|\,\cos t\,\mathrm{d}t = \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$
car la fonction cos est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$.
Il s'ensuit que
$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$
Ce résultat n'a rien d'étonnant, car cette intégrale correspond à l'aire du demi disque unité.

L'encadré précédent traitait le cas où l'ancienne variable d'intégration x est remplacée par une expression dépendant de la nouvelle variable d'intégration t. La situation contraire, où la nouvelle variable t est exprimée en fonction de l'ancienne x, se présente également. La démarche reste très similaire.

Du neuf vers l'ancien !

On présente dans cet encadré la méthode du changement de variable appliquée à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

dans le cas où l'

$$\boxed{\text{on exprime une nouvelle variable en fonction de l'ancienne : } t = \psi(x)}$$

On décrit ci-dessous les différentes étapes à effectuer.

- <u>Nouvelles bornes</u>
  On transforme les bornes : si $x = a$, alors $t = \psi(a)$ et si $x = b$, alors $t = \psi(b)$.
- <u>Nouvelle différentielle</u>
  On vérifie que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et l'on calcule $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$.
- <u>Nouvel intégrant</u>
  On écrit l'intégrant $f(x)\,\mathrm{d}x$ sous la forme $g\big(\psi(x)\big)\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ et l'on remplace $\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}t$ et $\psi(x)$ par t. On obtient ainsi un nouvel intégrant de la forme $h(t)\,\mathrm{d}t$.
- <u>Écriture de la « nouvelle » intégrale</u>
  On obtient une nouvelle expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} h(t)\,\mathrm{d}t$.

<u>Exemples :</u>

- Calculons

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$$

en posant

$$t = \tan x.$$

Les nouvelles bornes sont 0 et 1.
La fonction $x \longmapsto \tan x$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1+\tan^2 x \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 x}\cdot$$

Alors

$$\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 x} = \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan x} = \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\cdot$$

Ainsi,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \ln 2\cdot$$

On peut très facilement adapter la méthode du changement de variable pour le calcul d'une primitive.

Changement de variable dans une primitive

Tout fonctionne de la même manière que pour une intégrale, à ceci près qu'il n'y a qu'une seule borne.

Exemples :

- Calculons
$$F(x) = \int^x (\sin t) \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$
en posant
$$u = \cos t.$$
La nouvelle borne est $\cos x$.
La fonction $t \longmapsto \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin t}\cdot$$
On a
$$(\sin t)\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = (\sin t)\ln(\cos t)\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\sin t}\right) = -\ln(\cos t)\,\mathrm{d}u = -\ln u\,\mathrm{d}u.$$
Alors
$$F(x) = \int^{\cos x} (-\ln u)\,\mathrm{d}u = \big[-u\ln u + u\big]^{\cos x} = -(\cos x)\ln(\cos x) + \cos x + \lambda,$$
où λ est une constante réelle arbitraire.

B.4. Primitives usuelles

a) Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant rappelle les primitives des fonctions usuelles. Il est à connaître par ♡.

Fonction	Primitive	Ensemble de primitivation
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x \quad \text{ou} \quad -\arccos x$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$

b) Primitives des composées usuelles

$$\int u' u^{n-1} = \frac{u^n}{n} \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} \qquad \int \frac{u'}{u^{n+1}} = -\frac{1}{n}\frac{1}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert \qquad \int u'\,\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$$

$$\int u' \cos u = \sin u \qquad \int u' \sin u = -\cos u$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \qquad \int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u$$

C. Equations différentielles á coefficients constants

C.1. Ordre 1

Définition 9

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme

$$(E) \qquad ay'(t) + by(t) = c,$$

où y est une fonction inconnue dérivable et a, b, c sont des nombres réels (avec $a \neq 0$, sinon l'équation n'a rien de « différentielle »).

En divisant l'équation par a, on obtient sa forme résoluble :

$$(E) \qquad y'(t) + \beta y(t) = \gamma,$$

où $\beta = b/a$ et $\gamma = c/a$.

Dans la suite, on suppose que $\beta \neq 0$ (sinon l'équation revient à la recherche d'une primitive).

Pour simplifier les notations, il est habituel d'omettre les (t) dans l'écriture de l'équation, ce qui donne

$$(E) \qquad y' + \beta y = \gamma.$$

Pour résoudre une telle équation, on procède en quatre étapes. La première consiste à résoudre l'équation différentielle homogène associée.

Proposition 7

L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_h) \qquad y' + \beta y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y_h(t) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\beta t}$$

où λ est une constante réelle arbitraire.

■ On multiplie (E_h) par $\mathrm{e}^{\beta t}$, ce qui donne

$$(E_h) \iff \mathrm{e}^{\beta t} y' + (\beta \, \mathrm{e}^{\beta t}) y = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\beta t} y\right) = 0 \iff \mathrm{e}^{\beta t} y = \lambda \iff y = \lambda \, \mathrm{e}^{-\beta t},$$

où λ est une constante réelle. ■

Exemples :

- En dynamique des populations, le modèle de Malthus (1798) décrit la vitesse de croissance d'une population lorsqu'elle est de taille raisonnable et placée dans des conditions idéales : espace illimité, nourriture suffisante, absence de prédateurs, résistance aux maladies... En notant $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant t, le taux de croissance est alors proportionnel à la population, ce qui donne l'équation différentielle suivante :

  $$N'(t) = rN(t),$$

  où $r > 0$ désigne le taux de croissance relatif. La solution est de la forme

  $$N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{rt}$$

  où N_0 est la population initiale (i.e. à $t = 0$). On observe donc une croissance exponentielle.

La deuxième étape consiste à rechercher une solution particulière de (E). Dans le cas présent, les coefficients de l'équation étant constant, il existe une solution évidente constante.

Proposition 8

L'équation $(E) : y' + \beta y = \gamma$ admet une solution particulière évidente qui est la fonction constante
$$y_p(t) = \frac{\gamma}{\beta}.$$

■ AQT ■

Cette solution particulière étant constante, on dit que c'est un régime permanent de fonctionnement du phénomène modélisé par l'équation. Cette solution particulière joue généralement un rôle primordial dans l'interprétation du modèle.

Exemples :

- Un circuit électrique composé en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R alimentés par un générateur de force électromotrice V s'appelle un circuit RC. Si on note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t, la loi des mailles permet d'établir que q satisfait l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = \frac{V}{R}.$$
On constate qu'une solution particulière est donnée par
$$q_p(t) = VC.$$

Dans la troisième étape, on « reconstitue » les solutions générales de (E).

Proposition 9

Les solutions de $(E) : y' + \beta y = \gamma$ sont obtenues en additionnant les solutions homogènes à la solution particulière : $y = y_h + y_p$, c'est-à-dire
$$y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\gamma}{\beta},$$
où λ est une constante réelle arbitraire.

■ On effectue la soustraction :
$$\begin{array}{rl} & y' + \beta y = \gamma \\ \ominus & y_p' + \beta y_p = \gamma \\ \hline & (y - y_p)' + \beta(y - y_p) = 0 \end{array}$$
ce qui prouve que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène, c'est-à-dire $y - y_p = y_h$ ou encore $y = y_h + y_p$.

Réciproquement, on vérifie aisément que $y = y_h + y_p$ est une solution de (E). ■

Exemples :

- Dans le cas du circuit RC, l'équation homogène $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}q = 0$ admet pour solutions
$$q_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
Par ailleurs, on a vu que $q_p(t) = VC$ est une solution particulière.
En conclusion, les solutions sont toutes les fonctions de la forme
$$q(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} + VC \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Dans de nombreuses situations (en physique tout particulièrement), on dispose d'une condition initiale qui permet de déterminer la constante λ dans la solution. La dernière étape de la résolution de l'équation consiste donc à tenir compte de cette éventuelle condition (que l'on appelle condition de Cauchy en mathématiques).

Proposition 10

La connaissance de la valeur de $y(0)$ permet de préciser de manière univoque la solution de $(E) : y' + \beta y = \gamma$.

■ La valeur de $y(0)$ permet de déterminer, de façon unique, la valeur de λ. ■

Cette détermination de λ doit nécessairement se faire à la fin de la résolution et en aucun cas sur la solution homogène !

Exemples :

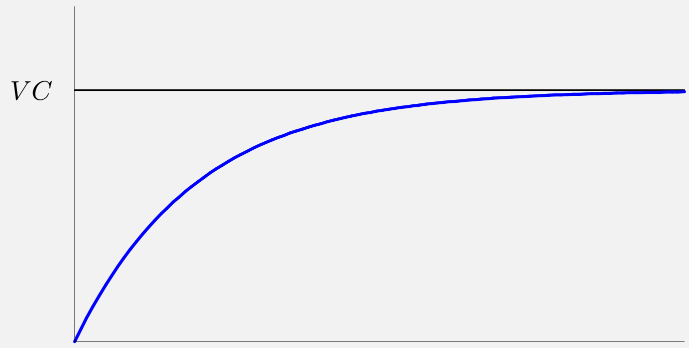
- Dans le cas du circuit RC, la charge initiale du condensateur est souvent nulle (simplement parce que l'origine des temps à été fixée au début de la charge). Dans ce cas, on a

$$q(0) = 0 \iff \lambda + VC = 0 \iff \lambda = -VC,$$

ce qui donne

$$q(t) = VC(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}).$$

Graphiquement, on obtient la courbe typique des phénomènes de charge :



4 h 30

C.2. Ordre 2

Définition 10

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d,$$

où y est une fonction inconnue deux fois dérivable et a, b, c, d sont des nombres réels (avec $a \neq 0$, sinon l'équation est du premier ordre).

Dans la suite, on suppose que $c \neq 0$ (sinon (E) est une équation d'ordre 1 d'inconnue y').

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, on a omis les (t) derrière y, y' et y''.

Pour résoudre ce type d'équation, on adapte les quatre étapes rencontrées lors de la résolution des équations d'ordre 1. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée.

Proposition 11

L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_h) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

Pour la résoudre, on commence par rechercher les solutions de l'équation caractéristique

$$(*) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

Il se présente alors trois cas :

- Si $(*)$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, on a :
$$y_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$
- Si $(*)$ admet une racine réelle double r_0, on a :
$$y_h(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{r_0 t} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$
- Si $(*)$ admet deux racines conjuguées $\alpha \pm i\omega$, on a :
$$y_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

■ On vérifie sans difficulté que les fonctions proposées dans les trois cas sont bien des solutions de (E_H).

Réciproquement, soit y une solution de (E_H). Notons r l'une des solutions de l'équation caractéristique et considérons la fonction $z = y\,\mathrm{e}^{-rt}$ (ce qui revient à utiliser le facteur intégrant e^{-rt}). On a alors $y = z\,\mathrm{e}^{rt}$, $y' = z'\,\mathrm{e}^{rt} + rz\,\mathrm{e}^{rt}$ et $y'' = z''\,\mathrm{e}^{rt} + 2z'r\,\mathrm{e}^{rt} + zr^2\,\mathrm{e}^{rt}$. En introduisant ces expressions dans (E_H), il vient $0 = ay'' + by' + cy = \left(az'' + (2ar + b)z' + (ar^2 + br + c)z\right)\mathrm{e}^{rt} = \left(az'' + (2ar + b)z'\right)\mathrm{e}^{rt}$ et donc $z'' + (2r + b/a)z' = 0$. Cela revient à dire que z' vérifie l'équation différentielle du premier ordre $f' + (2r + b/a)f = 0$ et donc que $z' = C_1\,\mathrm{e}^{-(2r+b/a)t}$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$. Il distingue alors trois cas :

- Si $\Delta = 0$, on a $r = r_0 = -b/(2a)$ et donc $z' = C_1$. Dans ce cas, $z = C_1 t + C_2$, ce qui donne $y = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{rt}$. On a donc le résultat annoncé avec $\lambda = C_1$ et $\mu = C_2$.
- Si $\Delta > 0$, on a, par exemple, $r = r_1$ et $2r + b/a = r_1 - r_2$, d'où $z' = C_1\,\mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t}$. En primitivant cette expression, il vient $z = -\left(C_1/(r_1 - r_2)\right)\mathrm{e}^{-r_1 t}\,\mathrm{e}^{r_2 t} + C_2$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et donc $y = \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t} + \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t}$ où $\lambda = C_2$ et $\mu = -C_1(r_1 - r_2)$.
- Si $\Delta < 0$, le même raisonnement, effectué dans $\mathbb{C}$, nous dit que les solutions complexes de (E) sont les fonctions de la forme $y = \lambda\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t} + \mu\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \mu\,\mathrm{e}^{-i\omega t})$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Cette fonction est réelle si, et seulement si, $\Im\mathrm{m}(y) = 0$, i.e. $\left(\Re\mathrm{e}(\lambda) - \Re\mathrm{e}(\mu)\right)\sin(\omega t) + \left(\Im\mathrm{m}(\lambda) + \Im\mathrm{m}(\mu)\right)\cos(\omega t) = 0$. Pour $t = 0$, on a $\Im\mathrm{m}(\lambda) = -\Im\mathrm{m}(\mu)$ et pour $t = \pi/(2\omega)$, on a $\Re\mathrm{e}(\lambda) = \Re\mathrm{e}(\mu)$, ce qui nous dit que $\mu = \overline{\lambda}$. On en déduit alors que $y = 2\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\Re\mathrm{e}(\lambda\,\mathrm{e}^{i\omega t}) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(2\Re\mathrm{e}(\lambda)\cos(\omega t) + 2\Im\mathrm{m}(\lambda)\sin(\omega t)\right)$, ce qui donne le résultat. ■

On détermine ensuite une solution particulière de (E).

Proposition 12

L'équation (E) : $ay'' + by' + cy = d$ admet une solution particulière évidente qui est la fonction constante

$$y_p(t) = \frac{d}{c}.$$

■ AQT ■

Là encore, on dit que cette solution particulière constante est un régime permanent de fonctionnement du phénomène modélisé par l'équation.

On « reconstitue » ensuite les solutions générales de (E).

Proposition 13

Les solutions de (E) : $ay'' + by' + cy = d$ sont obtenues en additionnant les solutions homogènes à la solution particulière : $y = y_h + y_p$.

■ On adapte sans mal la démonstration du premier ordre. ■

On termine la résolution à l'aide des éventuelles conditions initiales (conditions de Cauchy).

Proposition 14

La connaissance des valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ permet de préciser de manière univoque la solution de (E) : $ay'' + by' + cy = d$.

■ Les valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ permettent de déterminer, de façon unique, les valeurs de λ et μ. ■

La détermination de λ et μ doit nécessairement se faire à la fin de la résolution !

<u>Exemples :</u>

- Traitons l'exemple de l'oscillateur harmonique soumis au champ de pensanteur :

$$(E) \qquad y''+\omega^2 y = g.$$

avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

  ▷ Résolvons tout d'abord son équation homogène (E_h) $y''+\omega^2 y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ admet comme solutions les deux nombres complexes conjugués $r = \pm i\omega$. Les solutions homogènes de (E_h) sont donc toutes les fonctions de la forme

$$y_h(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t).$$

  Les physiciens préfèrent mettre les solutions sous la forme $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, où A désigne l'amplitude du signal et φ son déphasage.

  ▷ Une solution particulière de (E) est donnée par $y_p(t) = g/\omega^2$.

  ▷ Les solutions de l'équation complète (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + g/\omega^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

  ▷ Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent $\lambda = -g/\omega^2$ et $\mu = 1/\omega$, d'où

$$y(t) = \frac{g}{\omega^2}\big(1 - \cos(\omega t)\big) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

C. 3. Séparation des variables

L'objectif de ce paragraphe est d'expliquer la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparables que vous utiliserez en physique. La rigueur est mise de côté ;-)

Proposition 15

Soient F et G deux fonctions. Si $t \longmapsto y(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$F(y)\, y' = G(t)$$

où t_0, t_1 sont tels que $y(t_0) = y_0$ et $y(t_1) = y_1$, on a

$$\int_{y_0}^{y_1} F(y)\, \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t_1} G(t)\, \mathrm{d}t.$$

■ On a

$$\int_{t_0}^{t_1} G(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} F\big(y(t)\big) y'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y_1} F(u)\, \mathrm{d}u$$

où la dernière égalité découle du changement de variable $u = y(t)$. ■

On parle de séparation des variables parce qu'on écrit

$$F(y)\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = G(t)$$

c'est-à-dire

$$F(y)\, \mathrm{d}y = G(t)\, \mathrm{d}t,$$

avant d'intégrer sous la forme

$$\int_{y_0}^{y_1} F(y)\, \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t_1} G(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exemples :

- Comme on l'a vu, le modèle de Malthus permet de décrire l'évolution d'une population qui bénéficie de conditions idéales. Dans la réalité, ces conditions sont rares et ne restent valables que sur de courtes durées (un environnement clos suppose vraisemblablement des ressources limitées). Par conséquent, dès que l'on s'approche de la surpopulation (manque de nourriture, interactions dues à la promiscuité, ...), le taux de croissance baisse afin que la population ne dépasse pas une certaine limite.

  Le modèle de Verhulst (1838) a pour but de tenir compte de ces contraintes imposés par le milieu. Pour cela, Verhulst choisit de remplacer le taux de croissance constant r du modèle de Malthus par un taux de croissance variant avec la taille de la population.
  Plus précisément, Verhulst corrige le taux de croissance per capita r en le multipliant par le facteur correctif limitant $1 - N(t)/K$ où K désigne la capacité de charge du milieu (c'est-à-dire l'effectif de population que l'on ne peut dépasser).
  Ainsi, lorsque la population est faible devant K, le facteur $1 - N(t)/K$ est proche de 1 et le taux de croissance est proche de r. On retrouve alors le modèle malthusien et sa croissance exponentielle (compatible avec une population faible dans un milieu idéal).
  A contrario, lorsque la population s'approche de sa limite K, le facteur $1 - N(t)/K$ tend vers 0 et le taux de croissance s'affaiblit. Le modèle tient ainsi compte de la stabilisation de la population au palier K.

  Verhulst aboutit alors à la relation différentielle suivante :

$$N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) N(t).$$

Ce type de modèle est classique. On ne le rencontre pas seulement en dynamique des populations mais aussi en géologie, en économie, en sciences physiques, en chimie, etc. Il est alors communément désigné sous le nom de modèle logistique.
L'équation différentielle de Verhulst n'est pas linéaire. On peut toutefois la résoudre en procédant par séparation des variables (une technique de résolution des équations différentielles que vous utiliserez souvent en sciences physiques).
Pour cela, on suppose tout d'abord que la population initiale N_0 est strictement comprise entre 0 et K (ce qui est fort logique du point de vue biologique). Un théorème difficile (de Cauchy–Lipschitz) implique alors que $N(t)$ reste constamment comprise entre 0 et K (au sens strict). On peut alors réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{N'(t)}{\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)N(t)} = r,$$

ce qui donne, après décomposition de la fraction,

$$\frac{N'(t)}{K-N(t)} + \frac{N'(t)}{N(t)} = r.$$

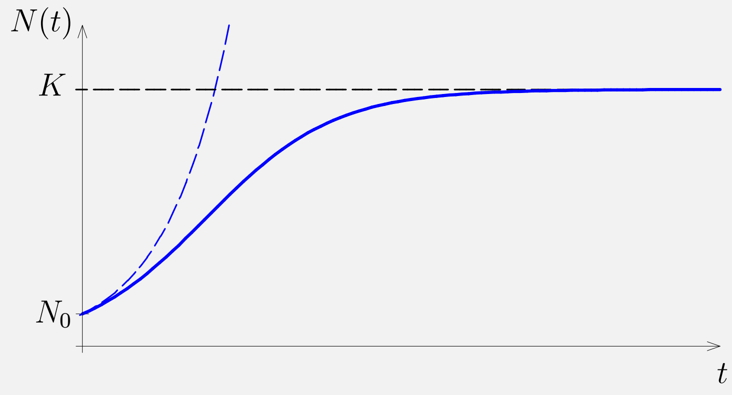
L'intégration de cette relation entre les instants 0 et t donne alors

$$-\ln\frac{K-N(t)}{K-N_0} + \ln\frac{N(t)}{N_0} = rt,$$

ce que l'on peut réécrire (après quelques calculs laissés au soin du lecteur) sous la forme

$$N(t) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}\cdot$$

On observe cette fois, qu'après un début en croissance exponentielle (la courbe de Malthus est en pointillés sur le dessin), la courbe de Verhulst (en trait plein) se stabilise asymptotiquement à la valeur K :



6 h 00

On parle d'une courbe logistique.