Devoir Surveillé n° 4 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $B(c, r)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{C}$, de centre c et de rayon r, et $C(c, r)$ désigne le cercle de centre c et de rayon r. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que :

- *f est une fonction analytique si et seulement si pour tout c de Ω, il existe $r > 0$ tel que f puisse s'écrire, sur $B(c, r)$, sous la forme suivante :*
$$\forall z \in B(c, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - c)^n.$$
Cela revient à dire que f est développable en série entière au voisinage de tous les points de son domaine ;
- *f est holomorphe sur Ω si et seulement si elle est dérivable de la variable complexe en tout point $z_0 \in \Omega$, autrement dit, si pour tout z_0, l'expression $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque z tend vers z_0 (dans $\mathbb{C}$). On note dans ce cas :*
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Le but de ce problème est d'établir qu'une fonction est holomorphe sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est analytique.

On admet sans preuve toutes les propriétés relatives aux sommes, produits, quotients et composées de fonctions holomorphes, dont les énoncés et les preuves sont similaires à ceux relatifs aux fonctions dérivables d'une variable réelle.

Partie I – Exemples de Fonctions holomorphes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $z_0 \in \mathbb{C}$.
   (a) Exprimer, pour tout $z \neq z_0$, $\dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$, sous forme d'un polynôme en z.
   (b) En déduire que $z \mapsto z^n$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et exprimer sa dérivée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $z \mapsto \dfrac{1}{z^n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$
3. On étend la définition de sh et ch à la variable complexe, en posant, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + \mathrm{i}\, y$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :
$$\mathrm{sh}(z) = \mathrm{sh}(x)\cos(y) + \mathrm{i}\,\mathrm{ch}(x)\sin(y) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(z) = \mathrm{ch}(x)\cos(y) + \mathrm{i}\,\mathrm{sh}(x)\sin(y).$$
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(z) + \mathrm{sh}(z) = \mathrm{e}^z$ et $\mathrm{ch}(z) - \mathrm{sh}(z) = \mathrm{e}^{-z}$.
   (b) En déduire une expression de $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ en fonction de e^z et e^{-z}.
   (c) Soit z_1 et z_2 deux complexes. Exprimer $\mathrm{sh}(z_1 + z_2)$ en fonction de $\mathrm{sh}(z_1)$, $\mathrm{ch}(z_1)$, $\mathrm{sh}(z_2)$ et $\mathrm{ch}(z_2)$.
   (d) Soit $z = x + \mathrm{i}\, y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left| \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z} - 1 \right) \right| \leqslant \left| \frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x) - x)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{x^2(\cos(y) - 1)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y\mathrm{ch}(x)(\sin(y) - y)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^2(\mathrm{ch}(x) - 1)}{x^2 + y^2} \right|$$
   (e) En remarquant que $x^2 + y^2 \geqslant y^2$ et $x^2 + y^2 \geqslant x^2$, en déduire que : $\displaystyle\lim_{z \to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z} - 1 \right) = 0$.
   (f) Calculer de même la limite de la partie imaginaire de $\dfrac{\mathrm{sh}(z)}{z} - 1$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^*} \frac{\mathrm{sh}(z)}{z} = 1$.

(g) Déterminer la limite (de la variable complexe) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(z)-1}{z^2}$.

(h) En déduire que sh est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et exprimer sa dérivée en fonction de ch. Exprimer sans preuve un résultat similaire pour ch.

(i) En déduire que $\exp : z \mapsto \mathrm{e}^z$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et exprimer sa dérivée.

Partie II – Les fonctions analytiques sont holomorphes

Soit f une fonction analytique sur un ouvert Ω, et $z_0 \in \Omega$. Notre but est de montrer que f est une fonction holomorphe, et que sa dérivée est elle-même analytique. Un changement de variable $z' = z - z_0$ nous permet de constater qu'on peut se contenter de considérer le cas où $0 \in \Omega$, et d'étudier la dérivabilité en 0. On considère donc r tel que f se développe en série sur $B(0,r)$:

$$\forall z \in B(0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Soit $\rho \in]0,r[$ et $w \in B(0,r)$.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) a_n z^n$ est convergente pour tout $z \in B(0,r)$.

Ainsi, en particulier, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}$ est convergente sur $B(0,\rho)$. On note $g(z)$ sa somme. Soit $\rho \in]0,r[$ et $w \in B(0,r)$. On va montrer que g correspond à la dérivée de f sur $B(0,\rho)$, ce qui prouvera bien que f' est développable en série entière au voisinage de 0.

2. (a) Montrer que pour tous z et w dans $B(0,\rho)$ tels que $z \neq w$,

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n (z-w) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1} \right).$$

(b) En déduire que $\left| \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| \leqslant |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2}$. Conclure.

Partie III – Intégration d'une fonction holomorphe le long d'un chemin

Le but des quatre parties qui suivent est d'établir la réciproque, c'est-à-dire de montrer que les fonctions holomorphes sur un ouvert Ω sont analytiques sur Ω. Nous nous donnons donc une fonction f holomorphe sur un domaine Ω. L'outil essentiel pour parvenir à notre but sera l'intégration le long d'un chemin, notion que nous introduisons dans cette partie.

On appelle chemin de classe $\mathcal{C}^1$ (ou simplement chemin) une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée ne s'annulant pas sur $[a,b]$. On dit que γ est un chemin fermé si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pour éviter toute confusion possible avec la partie imaginaire, on note $\gamma^* = \mathrm{Im}(\gamma)$ l'image de γ, c'est-à-dire l'ensemble des points $\gamma(t)$ du plan complexe, pour $t \in [a,b]$. Un chemin correspond à un paramétrage de la courbe γ^* de $\mathbb{C}$.
On définit l'intégrale de f le long du chemin γ par la formule :

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t.$$

On remarquera que cette définition ne requiert que la continuité de f, et non son caractère holomorphe.
Dans un premier temps, nous étudions l'effet d'un changement de paramétrisation d'une courbe.
Soit $[a_1,b_1]$ et $[a_2,b_2]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$ deux chemins. On dit que γ_1 et γ_2 sont équivalents, et on notera $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si et seulement s'il existe $\varphi : [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$. une application bijective croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

1. Soit γ_1 et γ_2 deux chemins équivalents. Montrer que $\gamma_1^* = \gamma_2^*$, et que $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ et $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$.
2. Montrer que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins.
3. Montrer que si $\gamma_1 \sim \gamma_2$, alors $\int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Ainsi, l'intégrale de f le long d'une courbe ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe, à condition de respecter le sens de parcourt. Un cas particulier important est l'intégration le long d'un segment $[u, v]$ où u et v sont deux nombres complexes. On dispose alors d'une paramétrisation : $\gamma : [0,1] \to [u,v]$ donnée par $\gamma(t) = u(1-t) + vt$. On note alors $\displaystyle\int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ l'intégrale de f le long du segment $[u,v]$, obtenu pour cette paramétrisation γ, ou toute autre paramétrisation équivalente. Remarquez bien que dans cette notation, l'intervalle $[u,v]$ est parcouru de u vers v.

4. Montrer que pour tout couple (u,v) de nombres complexes, $\displaystyle\int_{[v,u]} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z$

5. (a) Soit γ_1 et γ_2 deux chemins équivalents définis sur $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$. Montrer que $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} |\gamma_1'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)| dt$.

   Cette quantité est appelée longueur du chemin γ, et notée $L(\gamma)$. Elle est donc indépendante de la paramétrisation choisie.

   (b) Déterminer $L([u,v])$, en choisissant une paramétrisation de votre choix du segment $[u,v]$.

   (c) Déterminer $L(\mathbb{U})$, où $\mathbb{U}$ est le cercle unité paramétré par $\gamma : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}$ sur $[0, 2\pi]$.

6. Soit f une fonction continue sur Ω, et γ un chemin. Montrer que si pour tout $z \in \gamma^*$, $|f(z)| \leqslant M$, alors

$$\left| \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leqslant M L(\gamma).$$

7. (a) Soit f un fonction holomorphe sur Ω, admettant sur Ω une primitive holomorphe F. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin. Montrer que

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

   Que dire lorsque γ est un chemin fermé ?

   (b) Déterminer $\displaystyle\int_\gamma z^n\ \mathrm{d}z$, pour $n \in \mathbb{N}$, lorsque γ est un chemin fermé dans $\mathbb{C}$.

Partie IV – Théorème de Cauchy sur un triangle

On veut montrer que l'égalité $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ (théorème de Cauchy), reste vraie sans l'hypothèse a priori *d'existence d'une primitive holomorphe, mais avec une hypothèse supplémentaire de convexité sur Ω. On étudie dans cette partie le cas d'une intégrale le long d'un triangle. On se donne Ω un ouvert convexe, c'est-à-dire tel que pour tout $(z_1, z_2) \in \Omega^2$, le segment $[z_1, z_2]$ tout entier est inclus dans Ω. Soit f une fonction holomorphe sur Ω.*
Étant donné 3 éléments u, v et w de Ω, formant les sommets d'un triangle T, on définit l'intégrale sur le triangle $T = (u, v, w)$ par :

$$\int_{(u,v,w)} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v,w]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w,u]} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Il s'agit donc de l'intégrale le long de la courbe fermée $\mathcal{C}^1$ par morceaux définie par les côtés du triangle.
Pour le triangle $T = (u, v, w)$, on note

$$\begin{cases} I(T) & = [\min(\mathrm{Re}(u), \mathrm{Re}(v), \mathrm{Re}(w)), \max(\mathrm{Re}(u), \mathrm{Re}(v), \mathrm{Re}(w))] \\ J(T) & = [\min(\mathrm{Im}(u), \mathrm{Im}(v), \mathrm{Im}(w)), \max(\mathrm{Im}(u), \mathrm{Im}(v), \mathrm{Im}(w))] \end{cases}$$

Soit $u = u_0$, $v = v_0$ et $w = w_0$ trois points de Ω, formant un triangle T_0.

1. Soit u' le milieu de $[v_0, w_0]$, v' le milieu de $[u_0, w_0]$ et w' le milieu de $[u_0, v_0]$. Montrer que l'un des triangles (u, v', w'), (v, w', u'), (w, u', v') et (u', v', w'), qu'on notera $T_1 = (u_1, v_1, w_1)$, vérifie :

$$\left| \int_{(u_0, v_0, w_0)} f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leqslant 4 \left| \int_{(u_1, v_1, w_1)} f(z)\ \mathrm{d}z \right|.$$

2. Montrer que $I(T_1) \subset I(T_0)$ et $J(T_1) \subset J(T_0)$, et que $\ell(I(T_1)) = \dfrac{1}{2}\ell(I(T_0))$ et $\ell(J(T_1)) = \dfrac{1}{2}\ell(J(T_0))$, où $\ell([a,b]) = b - a$ désigne la longueur d'un intervalle.

3. Montrer l'existence de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω formant des triangles $T_n = (u_n, v_n, w_n)$, tels que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_{(u_0,v_0,w_0)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leqslant 4^n \left|\int_{(u_n,v_n,w_n)} f(z)\ \mathrm{d}z\right|$;
- (u_n), (v_n) et (w_n) convergent toutes trois vers un même complexe $z_0 \in \Omega$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{(u_n,v_n,w_n)} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{(u_n,v_n,w_n)} \Big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\Big)\ \mathrm{d}z.$$
5. En déduire que $\displaystyle\int_{(u,v,w)} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.
6. En découpant (u,v,w) en triangles plus petits, montrer que cela reste vrai si f n'est holomorphe que sur $\Omega\setminus\{p\}$, et continue en p, où $p \in \Omega$.

Partie V – Théorème de Cauchy sur un lacet quelconque

On suppose que f est une fonction holomorphe sur Ω, qu'on suppose toujours ouvert convexe. On se donne un chemin fermé $\gamma : [a,b] \to \Omega$. On se fixe z_1 et z_0 deux éléments distincts de Ω, et on définit, pour tout $z \in \Omega$:
$$F(z) = \int_{[z_1,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

1. Montrer que pour tout $z \in \Omega$,
$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$
2. En déduire que $F' = f$, puis que $\displaystyle\int_\gamma f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$.
3. En déduire que pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma^*$:
$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = f(z)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}.$$

Partie VI – Formule de l'indice de Cauchy

Pour $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, on définit $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$*, appelé indice de z par rapport à γ. On pose, pour tout $t \in [a,b]$,*
$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\mathrm{d}s\right).$$

1. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est constante.
2. En déduire que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est un entier.
3. Soit jusqu'à la fin du problème, $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ un paramétrage du cercle $C(c,r)$ de centre c de rayon r, qu'on suppose inclus dans Ω. Montrer que $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est continue sur $\Omega \setminus C(c,r)$.
4. En déduire que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est constante sur $B(c,r)$ et donner sa valeur.
5. En déduire que pour tout $z \in B(c,r)$,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$

Partie VII – Les fonctions holomorphes sont analytiques

1. Déduire de la dernière question de la partie précédente que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, pour tout $c \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in B(c,r)$, on ait :
$$f(z) = \int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,$$
où γ désigne toujours la paramétrisation du cercle $C(c,r)$ introduite dans la partie précédente.
2. En déduire que f est analytique.
3. En déduire enfin que f est infiniment dérivable.