Planche de colle

Exercice de colle

Soit $n \geqslant 2$ un entier.
Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Combien y a-t-il de classes de similitude différentes contenant toutes les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?
3. Déterminer le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par toutes les matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des matrices de projections.
4. Déterminer le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par toutes les matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des matrices de projections orthogonales.

1. Ce sont les matrices d'homothétie formant $\text{Vect}(I_n)$.
   Si M est une matrice d'homothétie, il est évident que pour toute matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $MR = RM$.
   Si M commute avec toutes les matrices, il y a plusieurs façons de procéder. Le plus simple est sûrement d'utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$.
   Considérons deux entiers i et j entre 1 et n.
   Alors, pour tous entiers k et ℓ entre 1 et n,
   $$\Big(M\ E_{i,j}\Big)_{k,\ell} = \delta_{j,\ell} \cdot M_{k,i} \text{ et } \Big(E_{i,j}\ M\Big)_{k,\ell} = \delta_{i,k} \cdot M_{j,\ell}.$$
   Par conséquent, si $i \neq j$, alors en prenant $k = \ell = i$, alors :
   $$0 = M_{j,i}.$$
   La matrice M est donc diagonale.
   En prenant $k = i$ et $\ell = j$, on obtient encore :
   $$M_{i,i} = M_{j,j}.$$
   La matrice diagonale M admet tous ses coefficients diagonaux égaux.
2. Il y en a deux.
   On va montrer que si i est un entier entre 1 et n, alors $E_{i,i}$ est semblable à $E_{1,1}$ et que si $i \neq j$ sont deux entiers entre 1 et n, alors $E_{i,j}$ est semblable à $E_{1,2}$.

Soit i un entier entre 1 et n. On note $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ vers la base :

$$\mathscr{C} = (e_i, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \cdots, e_n).$$

On remarque alors que :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(E_{i,i}) = E_{1,1} \text{ ou encore } P^{-1}E_{i,i}P = E_{1,1}.$$

Soient deux entiers différents i et j entre 1 et n. On note Q la matrice de passage de la base canonique vers la base :

$$\mathscr{D} = (e_i, e_j, \text{ les autres vecteurs de la base canonique dans n'importe quel ordre}).$$

On remarque alors que :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{D}}(E_{i,j}) = E_{1,2} \text{ ou encore } Q^{-1}E_{i,j}Q = E_{1,2}.$$

Il s'agit maintenant de montrer que les classes de similitudes de $E_{1,1}$ et de $E_{1,2}$ sont différentes en montrant que les matrices $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ ne sont pas semblables. C'est bien le cas car elles n'ont pas la même trace.

3. On note F l'espace vectoriel envisagé.
   D'une part, chaque matrice élémentaire $E_{i,i}$ est une matrice de projection. Ensuite, si i et j sont deux entiers différents entre 1 et n, on remarque qu'en posant la matrice
   $$P = E_{i,i} + E_{i,j},$$
   alors $P^2 = P$.
   On en déduit que $E_{i,j} = P - E_{i,i} \in F$.
   Résultat des courses,
   $$\boxed{F = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$
4. On munit de manière sous-entendue l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire habituel.
   On note G l'espace vectoriel envisagé. On rappelle que les matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des matrices de projection orthogonale sont les matrices telles que :
   $$P^2 = P = P^T.$$
   D'une part, chaque matrice élémentaire $E_{i,i}$ est une telle matrice.
   On remarque que lorsque i et j sont deux entiers différents entre 1 et n et en posant la matrice :
   $$Q = \frac{1}{2}\Big(E_{i,i} + E_{i,j} + E_{j,i} + E_{j,j}\Big),$$
   alors la matrice Q est une matrice de projection orthogonale (sur $\text{Vect}(e_i + e_j)$.)

On en déduit que pour tous indices $i \neq j$, on a :

$$E_{i,j} + E_{j,i} = 2\,Q - E_{i,i} - E_{j,j} \in G.$$

Résultat des courses, la famille $\mathscr{F} = \Big(E_{i,i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ;\ E_{i,j} + E_{j,i}\ ;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\Big)$ est une famille libre à vecteurs dans G et cette famille libre génère l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
Or, chaque matrice de projection orthgonale est une matrice symétrique :

$$G \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

D'après le fait que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset G$, on a égalité :

$$\boxed{G = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$