Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 25/01/2019

DM n° 11 : Séries

Problème 1 – (Règle de Duhamel pour la convergence des séries)

Le but de ce problème est de proposer une règle pour l'étude de la convergence des séries affinant la règle de d'Alembert dans le cas d'indétermination.

Partie I – Un critère de comparaison de séries à termes positifs

Soit $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries à termes strictement positifs telles que :* $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $b_N a_n \leqslant a_N b_n$
2. En déduire que :
   (a) si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ aussi ;
   (b) si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ aussi ;
   (c) si $\sum a_n$ diverge grossièrement, alors $\sum b_n$ aussi.
3. **Règle de d'Alembert.** *Soit* $\sum u_n$ *une série quelconque telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$.
   Montrer que :
   (a) si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
   (b) si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
4. **Exemples**
   (a) *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$
      i. Déterminer la limite ℓ de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
      ii. Déterminer la nature de $\sum u_n x^n$ pour tout x tel que $|x| \neq \frac{1}{\ell}$.
   (b) Mêmes questions avec la série $\sum v_n x^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$
   (c) Mêmes questions avec la série $\sum w_n x^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Partie II – Règle de Duhamel.

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Quelle est la limite de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) À l'aide d'un équivalent, justifier que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. **Règle de Duhamel.**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que :*
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   (a) Supposons que $\beta > 1$.

i. Justifier l'existence de $\alpha > 1$ tel que, pour n assez grand, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

ii. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

(b) Démontrer de même que si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Partie III – Exemples

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$.

   (a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (b) Quelle est la nature de $\sum u_n x^n$?

   (c) Justifier que $(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.
   Indication : pour la limite, on pourra commencer par montrer, en se servant de la question III-1a, que la série $\sum(\ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n))$ *est divergente*

   (d) En déduire la nature de la série $\sum u_n(-x)^n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$, pour la valeur de ℓ trouvée pour cette suite.

   (a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = 1 - \dfrac{3}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (b) Quelle est la nature de $\sum v_n x^n$? de $\sum v_n(-x)^n$?

Partie IV – Une petite amélioration à la règle de Duhamel

On affine ici le cas où $\beta = 1$ *dans la règle de Duhamel. Soit* a *un réel, et, pour tout* $n > -a$, $y_n = \dfrac{1}{n+a}$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum y_n$?

2. Soit $a \neq -1$. Montrer que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1+a}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ (voir définition de grand-O dans le cours)

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (a) Montrer qu'on peut choisir a assez grand pour que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$

   (b) En déduire la nature de $\sum u_n$.

4. **Exemple.** Déterminer la nature de $\sum w_n x^n$ définie dans la partie II, lorsque $x = \frac{1}{\ell}$.

Problème 2 – Une série dont les séries des sommes partielles itérées sont toutes de somme nulle

Le but de ce problème est de répondre à la question suivante : existe-t-il une série dont toutes les séries des sommes partielles itérées convergent (donc la série des sommes partielles converge, puis la série des sommes partielles de cette série des sommes partielles, etc.)

On répond à cette question dans la partie III. La partie II expose des résultats préliminaires. La partie I répond à une question partielle : on y construit une suite telle que les sommes partielles itérées jusqu'à un certain rang définissent des séries convergentes.

On note $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'opérateur défini par :

$$T((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

associant à une suite sa somme partielle. On notera u la suite (u_n), Tu sont image par T, et on désignera par $(Tu)_n$ le terme d'indice n de cette suite, à savoir :

$$(Tu)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

De façon plus générale, $T^\ell u$ désignera la suite obtenue en itérant ℓ fois la fonction T sur u, et $(T^\ell u)_n$ est son terme d'indice n.
La question posée se traduit donc de la façon suivante : existe-t-il $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non triviale telle que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} (T^\ell u)_n \text{ converge.} \tag{1}$$

On rappelle que si f est continue sur un intervalle $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_a^y f(x)\ \mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour faire un changement de variable ou une intégration par partie sur une intégrale impropre, en l'absence des théorèmes adéquats que vous verrez l'année prochaine, ramenez-vous systématiquement à une intégrale sur un segment dans un premier temps.

Partie I – Construction d'une suite telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (T^\ell u)_n$ converge pour $\ell \in [\![0, N]\!]$

1. Montrer que si u vérifie (1), alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (T^\ell u)_n = 0.$$
2. Montrer que T est surjective.
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle telle que pour tout $\ell \in [\![0, N]\!]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (T^\ell u)_n$ soit convergente de somme nulle.
4. Donner explicitement une série $\sum u_n$ de termes tous non nuls, telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (Tu)_n = 0$.

Partie II – Moments d'une fonction

On pourra admettre dans cette partie le théorème de Stone-Weierstass : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ peut être approchée uniformément par un polynôme : soit f une fonction continue sur $[a, b]$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Une version affaiblie pour f de classe $\mathcal{C}^1$ a été démontrée lors d'un DM.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On appelle moment d'ordre n de f la quantité définie par :

$$\mu_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t.$$

5. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(f) = 0$, alors $f = 0$.

On montre dans la fin de cette partie que ce résultat n'est pas vrai si le domaine de f n'est pas borné.

6. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.
7. Soit $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $s(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt[4]{x}} \sin(\sqrt[4]{x})$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n s(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vérifie :

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}\cdot(\mathrm{i}-1)^{-(n+1)}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^n s(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Partie III – Construction d'une suite vérifiant (1)

8. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \mu_n(c) = \int_0^1 t^n c(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) On suppose que $c(t) = o(1-t)$ au voisinage de 1, et que

$$\int_0^1 c(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{t-1} c(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad (Tu)_n = \int_0^1 t^n \frac{t}{t-1} c(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) On suppose de plus que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $c(t) = o((1-t)^\ell)$ au voisinage de 1, et que

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{t-1}\right)^\ell c(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (T^\ell u)_n = 0$.

9. Construire à l'aide de la fonction s de la partie II une fonction $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ non nulle vérifiant les conditions de 8(c) (on pourra utiliser un changement de variable)

10. Conclure.