Questions / Réponses

Question

« Que sont les polynômes de Hilbert et quelle est leur utilité ? »

Réponse

Premièrement, voici la définition des polynômes de Hilbert $(H_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$H_0(X) = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $H_n(X)$ est de degré n, alors la famille $(H_k(X))_{0\leqslant k\leqslant N}$ est une famille libre à vecteurs dans $\mathbb{R}_N[X]$: il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_N[X]$ car la famille libre compte $N+1 = \dim(\mathbb{R}_N[X])$ vecteurs.
De plus, si $Q(X)$ est un polynôme à coefficients réels, on trouve un entier $N \geqslant \deg(Q)$, donc :

$$Q(X) \in \mathbb{R}_N[X] = \operatorname{Vect}\Big(H_k(X)\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant N\Big).$$

On en déduit que le polynôme $Q(X)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par la famille :

$$\mathscr{H} = \Big(H_n(X)\ ;\ n \in \mathbb{N}\Big).$$

La famille des polynômes de Hilbert $\mathscr{H}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

On détaille maintenant quelques utilités des polynômes de Hilbert.

Première application :
« Soit $P(X)$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \iff \exists(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{Z}^{n+1},\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k(X). \text{ »}$$

On démontre cette équivalence.

On commence par démontrer l'implication indirecte.
Supposons que le polynôme $P(X)$ soit de la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k(X),$$

où les scalaires λ_k sont des entiers.
Pour avoir la conclusion requise, il suffit de montrer que pour tout entier r et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$H_k(r) \in \mathbb{Z}.$$

Si $k = 0$, comme $H_0(X) = 1$, alors pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_0(r) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on fixe un entier relatif r. On distingue plusieurs cas :

- si $0 \leqslant r < k$, alors l'entier r est une racine du polynôme $H_k(X)$: $H_k(r) = 0 \in \mathbb{Z}$.
- si $r \geqslant k$, alors on a l'égalité avec le coefficient binomial :

$$H_k(r) = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}.$$

- enfin, si $r < 0$, alors en posant $s = -r > 0$:

$$H_k(r) = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = (-1)^k \, \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!} = (-1)^k \begin{pmatrix} s+k-1 \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}.$$

L'implication indirecte est alors claire car pour tout entier relatif r,

$$P(r) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k(r)$$

apparaît comme une somme d'entiers relatifs, donc est un entier relatif.

On détaille l'implication directe.
Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\overline{P}(k) = \overline{P(k)} = P(k),$$

alors le polynôme $\overline{P} - P$ admet une infinité de racines : le polynôme $P(X)$ est à coefficients réels.
On pose alors puisque P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k(X).$$

On utilise la dérivation discrète :

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ Q(X) & \longmapsto & Q(X+1) - Q(X) \end{array} \right. .$$

On remarque que l'application Δ est linéaire. De plus,

$$\Delta(H_0) = 1,$$

et pour tout entier k dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\Delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) \\
&= \frac{(X+1)X\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!} \times \Big((X+1) - (X-k+1)\Big) \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= H_{k-1}(X).
\end{aligned}$$

Supposons que dans les scalaires λ_k figure au moins un scalaire non entier.
On note i le plus petit entier entre 0 et n tel que $\lambda_i \notin \mathbb{Z}$.
On applique i fois l'application linéaire Δ à l'égalité :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k(X),$$

ce qui donne :

$$\Delta^i(P) = \sum_{k=i}^{n} \lambda_k \cdot H_{k-i}(X) \qquad \bigstar$$

Il est facile de voir que comme pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(r) \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\forall r \in \mathbb{Z},\ \Delta(P)(r) = P(r+1) - P(r) \in \mathbb{Z},$$

et par une récurrence facile :

$$\Delta^i(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.$$

On évalue l'égalité $\bigstar$ en 0 ce qui donne puisque $H_p(0) = \delta_{p,0}$:

$$\Delta^i(P)(0) = \lambda_i \cdot H_0(0) = \lambda_i.$$

D'une part, $\Delta^i P(0)$ est un entier et d'autre part, λ_i n'en est pas un... Tous les λ_k sont bien des entiers.
On obtient l'implication requise.

Voici une deuxième application, en lien direct avec la question posée.
Les polynômes de Hilbert servent à calculer des sommes de la forme :

$$S_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^i\ x^k.$$

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas où le réel x est différent de 1. On raisonne par exemple sur l'intervalle $I =]-1, 1[$, qui jouera un rôle non négligeable l'an prochain pour ce genre de calculs...

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un entier $i \in \mathbb{N}$.

On pose la fonction $S_{n,i} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} k^i \ x^k$ étudiée ici sur l'intervalle I.

On pose par ailleurs la fonction :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - x^{n+1} \times \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right. .$$

On remarque que sur l'intervalle I, la fonction f_n est polynomiale donc i fois dérivable et on voit que :

$$f_n^{(i)} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdots(k-i+1) \ x^{k-i} = i! \cdot x^{-i} \times \sum_{k=0}^{n} H_i(k) \cdot x^k.$$

On connaît donc avec des formules plus ou moins compliquées les quantités :

$$\sum_{k=0}^{n} H_i(k) \cdot x^k,$$

obtenues à partir de la $i^{\text{ème}}$ dérivation de la fonction f_n exprimée sans le signe somme. Par exemple, on voit par une récurrence facile que :

$$\left(x \longmapsto \frac{1}{1-x} \right)^{(i)} = \left(x \longmapsto \frac{i!}{(1-x)^{i+1}} \right),$$

et pour dériver i fois la quantité $x^{n+1} \times \dfrac{1}{1-x}$, on pourra utiliser la formule de Leibniz.

Bref, on peut connaître avec des formules un peu volumineuses les quantités :

$$T_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} H_i(k) \cdot x^k.$$

Pour connaître finalement la quantité

$$S_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^i \cdot x^k,$$

il suffit de calculer la décomposition du polynôme X^i selon la famille $(H_0, \cdots, H_i)$:

$$X^i = \sum_{j=0}^{i} \lambda_j \cdot H_j(X),$$

donc :

$$\begin{aligned} S_{n,i}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^i \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \lambda_j \cdot H_j(k) \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{i} \lambda_j \cdot T_{n,j}(x). \end{aligned}$$

On peut donc théoriquement connaître les $S_{n,i}(x)$.

Une remarque pour conclure.
Intéressons-nous à la quantité :

$$T_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} H_i(k) \cdot x^k,$$

où $|x| < 1$.
Comme $H_i(k)$ est une quantité équivalente à $\frac{k^i}{i!}$ lorsque k tend vers $+\infty$ et que par les croissances comparées,

$$k^i \times x^k = \circ\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

de série absolument convergente, alors la somme partielle $T_{n,i}(x)$ tend vers une limite finie que l'on note

$$T_{\infty,i}(x)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
On peut même calculer cette limite.
En effet, pour x de module strictement inférieur à 1 :

$$T_{n,i}(x) = x^i \frac{f_n^{(i)}(x)}{i!}.$$

Or, dans le calcul de $f_n^{(i)}(x)$ apparaît déjà :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(i)} = \frac{i!}{(1-x)^{i+1}},$$

et un autre terme de la forme x^n multiplié par une quantité qui est une fraction rationnelle en x. Ce produit tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par les croissances comparées.
En conclusion,

$$\forall x \in]-1,1[,\ T_{\infty,i}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} H_i(k) \cdot x^k = \frac{x^i}{(1-x)^{i+1}}.$$