THÉORIE DES APPLICATIONS

Exercice 1. [○]

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$ pour tout nombre réel x. Écrire $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces deux applications sont-elles égales ? Sont-elles périodiques ?

Exercice 2. [○]

Soient E, F deux ensembles. Soient $x \in E$, $y \in F$, $f \in F^E$, $g \in E^F$ et $T \in (F^E)^{F^E}$. Parmi les expressions suivantes, dire lesquelles ont un sens, et lesquelles sont égales. Dire également dans quel ensemble elles vivent.

$\mathscr{A} = \big[\big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{B} = g\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	$\mathscr{C} = \big(T(f)\big)(x)$	$\mathscr{D} = T\big(f(x)\big)$
$\mathscr{E} = \big[g \circ \big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{F} = \big[T\big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{G} = T\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	$\mathscr{H} = \big(T(f) \circ g\big)(y)$
$\mathscr{I} = \big((T \circ T)(f)\big)(x)$	$\mathscr{J} = f\big(g(y)\big)$	$\mathscr{K} = g \circ \big(T(f)\big)$	$\mathscr{L} = (g \circ T)(f)$

Exercice 3. [○]

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On note $F = \{x \in E : f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f. Démontrer que $f \circ f = f$ si, et seulement si, $f(E) \subset F$.

Exercice 4. [⋆]

On considère $T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(T(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}$$

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Calculer $\big(T^2(f)\big)(x)$ et $\big(T^3(f)\big)(x)$.
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Proposer une formule générale pour $\big(T^n(f)\big)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la démontrer.

Exercice 5. [○]

1. Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-^*)$, $f(]0;1])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{-1\})$ pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f(x) = \ln x, \qquad f(x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1/x.$$
2. Déterminer $f([-1;1]^2)$, $f(\mathbb{R}_+ \times [1;+\infty[)$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(]-\infty;1])$ pour la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante :
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = x + y.$$

Exercice 6. [○]

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

1. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ admet-elle des solutions ? En déduire l'image de la fonction f (c'est-à-dire $f(\mathbb{R})$).
2. Par quelle autre méthode peut-on déterminer l'image de f ?

Exercice 7. [$\star$]

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On considère A, A_1, A_2 des parties de E ainsi que B, B_1, B_2 des parties de F et enfin C une partie de G. Démontrer que

(i)	$(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)$	(j)	$(B_1 \subset B_2) \Longrightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)$
(ii)	$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$	(jj)	$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(iii)	$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$	(jjj)	$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(iv)	$f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$	(jw)	$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$
(v)	$f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$	(w)	$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$
(vi)	$(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$	(wj)	$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$

Exercice 8.

Remplacer les assertions suivantes par des phrases du type : « L'application de ... vers ... qui à tout ... fait correspondre ... est (ou n'est pas) injective (ou surjective ou bijective) ».

Par exemple, « Deux cercles peuvent avoir même centre » devient « L'application de l'ensemble des cercles vers le plan qui à tout cercle fait correspondre son centre n'est pas injective ».

1. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
2. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
3. Toute ville de France possède au moins une église.
4. Il y a des villes qui ont plusieurs églises.
5. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.

Exercice 9. [$\circ$]

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, par

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}\cdot$$

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. En déduire que f réalise une bijection entre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et son image. Préciser f^{-1}.

Exercice 10. [$\circ$]

Soit ω un nombre complexe tel que $|\omega| \neq 1$. Démontrer que l'application

$$f_\omega \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+\omega}{\overline{\omega} z + 1} \end{array} \right.$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 11. [$\circ$]

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (x-1)/2 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. a) Démontrer que f est injective et non surjective.
   b) Pour tout $y \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$. Retrouver ainsi le fait que f est injective et non surjective.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.
3. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 12. [$\star$]

Soit

$$F \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy). \end{array} \right.$$

1. Soit $(S,P) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x,y) = (S,P)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'application F est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Comment peut-on restreindre F pour qu'elle devienne bijective ? *Au départ, on restreindra sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que $F(A) = F(\mathbb{R}^2)$.*

Exercice 13. [$\circ$]

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Démontrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Démontrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 14. [$\circ$]

Soient E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

Exercice 15. [$\star$]

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

On dit d'une partie A de E qu'elle est un domaine d'injectivité pour f lorsque la restriction de f à A (au départ) est une injection. Ce domaine est dit maximal lorsqu'il n'existe pas de partie B de E, autre que A, telle que $A \subset B$ et la restriction de f à B est injective.

Soit A un domaine d'injectivité de f. Démontrer que ce domaine est maximal si, et seulement si, $f(A) = f(E)$.

Exercice 16. [$\star$] (Antinomie de Cantor)

Soit E un ensemble.

1. Trouver une application injective de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective s de E dans $\mathscr{P}(E)$. *Indication : Penser à $A = \{x \in E : x \notin s(x)\}$.*