DM nº 20 : Espaces euclidiens

Je n'ai pas eu le temps de vous préparer un sujet spécifique sur ce thèmte, et comme je le traite en général en toute fin d'année, je n'ai pas d'archive toute prête à votre niveau. Ci-dessous un sujet que j'ai donné lorsque j'enseignais en ECS2. Peut-être un peu plus simple que vos standards habituels, mais un bon entraînement quand même. Il utilise quelques notions de diagonalisation, que vous pourrez aller revoir dans votre précédent DS, et un résultat important qu'on a évoqué sans le démontrer, et qui sera à votre programme l'année prochaine : le théorème spectral. Ce théorème, que vous pouvez admettre ici, dit que toute matrice symétrique réelle S est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une b.o.n. (pour le produit scalaire canonique) telle que $P^{-1}SP$ est diagonale. Qu'est-ce que le fait que la base de diagonalisation de P soit orthonormée apporte comme information sur P ?

Problème 1 – (ESSEC 2012)

Notations

Dans tout le problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Par ailleurs, on note :

- *$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels ; ainsi, tout élément X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne à n lignes.*
- *${}^t\!M$ la matrice transposée de la matrice M.*
- *I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*
- *Pour M appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,*

$$\operatorname{Ker} M = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Im} M = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

- *Pour tout m entier naturel non nul, on munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique ; ainsi :*
  si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^tXY = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, et la norme euclidienne de Y, notée $\|Y\|_m$ par : $\|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^{m} y_i^2$.
- *On admettra que toute matrice et sa transposée ont même rang. De plus, on rappelle que lorsque le produit de deux matrices M et N est possible, on a la relation ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.*

1. **Question préliminaire**

   Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F.

   On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Montrer que $P = \sum_{i=1}^{k} U_i\,{}^tU_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

Partie I – Décomposition spéctrale de la matrice ${}^tAA$ associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

On envisage dans toute cette partir une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

2. (a) Préciser la taille de la matrice ${}^tAA$ et vérifier que $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.

   (b) Montrer que si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$ et établir que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$.
   Montrer que A et ${}^tAA$ sont nulles simultanément.

   (c) Justifier l'égalité : $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Im} {}^tAA$.

3. (a) Établir que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable et en calculant $\|AX\|_n^2$ pour X vecteur propre de la matrice ${}^tAA$, montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

   (b) On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice ${}^tAA$, classée dans l'ordre croissant.
   On rappelle que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA)$, où $E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda_i I_n)$.
   Pour i entier naturel compris entre 1 et p, on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p, P_iP_j est la matrice nulle.
   Justifier les relations : $I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i$ et ${}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de ${}^tAA$.

4. Exemples :

   (a) Déterminer la décomposition spectrale de ${}^tAA$ lorsque A est la matrice 3,3 égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) On envisage la matrice ligne $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, ${}^tAA$ est un réel.
   Montrer que le polynôme $X^2 - (A\,{}^tA)X$ est annulateur pour la matrice ${}^tAA$. Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$.

Partie II – Pseudo solution d'une équation linéaire

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{m;n}(\mathbb{R})$ et $B = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
Une matrice X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *solution* de cette équation si elle vérifie la relation $AX = B$.
Elle est dite *pseudo solution* de cette équation si elle vérifie :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m.$$

5. On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.

6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation.
   Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :
   $$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX - B) \geqslant 0.$$
   En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.

7. Montrer que tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^tAAX = {}^tAB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo solution de l'équation.

8. Exemple : déterminer toutes les pseudo solutions de l'équation $AX = B$ lorsque :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

Partie III – Pseudo inverse d'une matrice

On reprend les notations de la partie 2.
Parmi toutes les pseudo solutions de l'équation AX=B, on se propose de chercher s'il en existe, celle(s) dont la norme euclidienne est minimale.

10. Montrer que l'équation possède une unique pseudo solution de norme minimale notée S et qu'elle est caractérisée par les deux conditions : ${}^tAAS = {}^tAB$ et S est orthogonal à Ker ${}^tAA$.
11. Pour B fixé et appartenant à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, préciser S dans les cas suivants :
    (a) A est de rang n.
    (b) A est la matrice nulle.
12. Lorsque B varie dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui à B associe son unique pseudo solution de norme minimale S est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
    Relativement aux bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette dernière application est représentée par sa matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On convient de l'appeler, jusqu'à la fin de ce problème, *pseudo inverse* de la matrice A et de la noter A^+.
13. On suppose que A est non nulle et on revient à la matrice ${}^tAA$ dont la décomposition spectrale introduite à la question 3(b) est $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$.
    On désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des indices i compris entre 1 et p pour lesquels on a $\lambda_i \neq 0$.
    (a) Pourquoi a-t-on $\Gamma(A) = \varnothing$?
    (b) Vérifier que $A^+ = \displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tA$.
    (c) Reprendre l'exemple de la question 8 en calculant explicitement A^+ ; retrouver ainsi l'unique pseudo solution de norme minimale.
    (d) Lorsque A appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, montrer que :
    $$A^+ = \begin{cases} \dfrac{{}^tA}{A\,{}^tA} & \text{si } A \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie IV – Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

16. Démontrer les relations suivantes :
$$A = AA^+A, \qquad A^+ = A^+AA^+, \qquad {}^t(A^+A) = A^+A, \qquad {}^t(AA^+) = AA^+.$$
17. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$A = AMA, \qquad M = MAM, \qquad {}^t(MA) = MA, \qquad {}^t(AM) = AM \qquad (*)$$
    (a) Montrer que M vérifie les relations suivantes :
    $$M = M\,{}^tM\,{}^tA = {}^tA\,{}^tMM, \qquad A = A\,{}^tA\,{}^tM = {}^tM\,{}^tAA, \qquad {}^tA = {}^tAAM = MA\,{}^tA.$$
    (b) En déduire que $M = A^+$ et qu'ainsi A^+ est l'unique matrice vérifiant les relations $(*)$.
18. Établir les formules suivantes :
    (a) $(A^+)^+ = A$
    (b) $({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$.

19. Soit x un réel strictement positif et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $A^+ = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[({}^t\!AA + xI_n)^{-1} \, {}^t\!A \right]$. (On conviendra, sous réserve d'existence, que la limite en un point d'une matrice est la matrice formée des limites en ce même point de ses coefficients). Utiliser ce procédé pour trouver la pseudo inverse de la matrice A mise en oeuvre dans la question 8.

20. Pour tout α réel différent de 0 et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, exprimer $(\alpha A)^+$ en fonction de α et A^+. La matrice $(\alpha A)^+$ admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?