DM 17 : énoncé

Dans tout le problème, f désigne une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on suppose continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

Partie I

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x),$$

$$d_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x).$$

1°) **a)** Interpréter géométriquement $c_k(x)$ et $C_n(x)$.
b) Établir l'inégalité $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.
c) En déduire que la série de terme général $c_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme $C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)$ vérifie l'inégalité $C(x) \leq f(x)$.

2°) Après en avoir justifié l'existence, déterminer $C(x)$ dans chacun des deux cas suivants :
a) $f(x) = e^{-x}$.
b) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

3°) Montrer que la série de terme général $d_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et exprimer sa somme $D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x)$ au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

Partie II

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées.
Pour tout $g \in E$, on pose $\|g\| = \sup_{x>0} |g(x)|$.

4°) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

Pour toute la suite, on notera d la distance associée à cette norme.

5°) Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de (E,d) et $g \in E$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$.

b) On suppose que g est continue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est aussi continue.
Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$, $\displaystyle\int_x^y g_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^y g(t)\,dt$.

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $g_n(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2 + \frac{1}{n}}}{x+1}$.
Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de E.
Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans (E,d) vers une application g que l'on déterminera.

7°) On note $C^1(E)$ l'ensemble des fonctions de E qui sont de classe C^1.
Montrer que $C^1(E)$ n'est pas un fermé de E.
Est-ce un ouvert ?

8°) On note $C^0(E)$ l'ensemble des fonctions de E qui sont continues.
Montrer que c'est un fermé de E.

9°) Montrer que l'application C définie en partie I est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $C(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) On suppose dans cette seule question que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

a) Montrer que, lorsque x tend vers 0, $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ est négligeable devant $f(x)$.

b) En déduire que $C(x)$ et $f(x)$ sont équivalents lorsque x tend vers 0.

11°) Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C^1(E)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n' \in E$.
On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $g(x) \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$.
On suppose de plus qu'il existe une application $h \in E$ telle que la suite (g_n') converge dans (E,d) vers h.
Montrer que g est de classe C^1 et que $g' = h$.

Partie III

Dans cette partie, on conserve les hypothèses faites sur f en début d'énoncé, auxquelles on ajoute l'hypothèse supplémentaire suivante : f est de classe C^1 et f' est une application croissante.

12°) Montrer que $f'(x)$ possède une limite que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$.

13°) Montrer que la fonction C est de classe C^1 et qu'elle est décroissante (on pourra utiliser la fonction $g = -f'$).

14°) Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+k)+f(x+k+1)) - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\, dt$ et pour $k \geq 1$, on pose $v_k(x) = f(x+k) - \displaystyle\int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\, dt$.

On admet que, f' étant croissante, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, le graphe de $f|_{[a,b]}$ est situé au dessous du segment de droite joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

a) Interpréter géométriquement $u_k(x)$ et en déduire que $u_k(x) \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum u_k(x)$ est convergente et exprimer sa somme $U(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ en fonction de $C(x)$ et de $f(x)$.

15°) Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum v_k(x)$ est convergente et montrer que sa somme $V(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$ vérifie : $V(x) = C(x) - f(x) + \displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\, dt$.

16°) On admet que, f' étant croissante, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big)$.

Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2}f(x) \leq C(x) \leq f(x) - \displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\, dt$.

17°) **a)** Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$.
2. $f(x)$ et $f(x+1)$ sont équivalents.

b) On suppose que $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $C(x) \sim \frac{1}{2}f(x)$.

c) Donner un exemple de fonction f satisfaisant à ces conditions.

18°) **a)** Soit $a > 0$. Lorsque $f(x) = e^{-ax}$, montrer que f vérifie les conditions du début de l'énoncé et du début de cette partie.
Calculer le rapport $\dfrac{C(x)}{f(x)}$.

b) Montrer que, pour tout $m \in]\frac{1}{2}, 1[$, il existe une fonction f satisfaisant les conditions du début de l'énoncé et du début de cette partie et telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{f(x)} = m$.