Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths ULCR
— *NOM Prénom* : BULCKAEN Léo

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soient $(a, b) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in [-1; 1], |b(t)| \leq -a(t)$.
Soit pour u dans $[-1; 1]$, x_u la solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ vérifiant $x(0) = u$.

1. Montrer que $\forall u \in [-1; 1], \forall t \in \mathbb{R}^+, |x_u(t)| \leq 1$
2. Montrer que si a et b sont T-périodiques pour un T positif donné, alors il existe des solutions périodiques.

Exercice 2 :

Même exercice mais en dimension n :
On prend $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodiques.
On note de même x_u la solution de $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$ vérifiant $x(0) = u$ pour $u \in \mathbb{R}^n$ et on suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, \|B(t)\| \leq -\gamma(t)$ et $\forall u \in \mathbb{R}^n$, ${}^t u A(t) u \leq \gamma(t)$.
Montrer qu'il existe des solutions périodiques.

Remarques sur l'oral

Examinateur très agréable et bienveillant. Il me laisse dix minutes au début pour m'approprier le problème. Je ne vois pas bien d'autres choses à faire que d'exprimer les x_u en fonction de a, b et u. A partir de là, j'utilise la seule donnée utilisable qui relie a et b pour répondre à la question 1. A ma grande surprise, cette question est inutile pour répondre à la seconde. Il me fait remarquer qu'il existe une solution périodique si et seulement si une solution vérifie x(T)=x(0), (il me semble qu'on l'a vu en cours). A partir de là on fait fonctionner le tout et ça marche !
Le deuxième exercice était un peu plus robuste étant donné qu'on ne peut pas exprimer la solution x_u. Il me dit de considérer $u \longmapsto x_u(t)$ à t fixé et de montrer qu'elle a un point fixe. La seule idée qui me vient c'est dans un premier temps d'essayer de montrer qu'elle est continue. Je regarde $g(t) = \|x_u(t) - x_v(t)\|$ et après un peu de calcul (et après avoir utilisé Gronwall sans le remontrer), je montre que c'est inférieur à $C \times \|u - v\|$ (un passage au carré simplifie tout puisque c'est une norme euclidienne). Il essaie de me faire dire que la fonction de base est alors une fonction *contractante* puisque $C < 1$, et donc qu'elle admet un point fixe (enfin ça, c'est lui qui le dit, puisque c'est fini).