Problème n° 23 : Variables aléatoires

Problème 1 – (d'après ESCP)

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité P.
Pour tout événement C de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y \mid C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle P_C (espérance de Y sachant C).

Partie I –

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes ($n \geqslant 3$) numérotées de 1 à n, dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables ($m \geqslant 4$), de sorte que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $\frac{1}{n}$.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
À l'issue de cette expérience, on pose, pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si l'urne numéro } i \textit{ est vide} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On pose $W_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. (a) Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire X_i.
   (b) Calculer la covariance de X_i et X_j. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
2. (a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ de W_n en fonction de n et m.
   (b) On note $V(W_n)$ la variance de W_n. Calculer $V(W_n)$ en fonction de n et m.
   (c) Vérifier que $E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0$
3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(W_n)$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.
   (c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.
   On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :
   $$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n)).$$
   Montrer que la suite de variable aléatoires $(W_n)_{n \geqslant 3}$ converge en loi vers une variable T suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(W_n)$, c'est-à-dire :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} P(W_n = k) = P(T = k).$$

Partie II –

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
Soit M une variable aléatoire définie un un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors

$$P([M \in A]) = \sum_{i \in A} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

et on pose par convention $[M \in \varnothing] = \varnothing$.
On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \mathrm{e}^{\lambda} \left(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P([M \in A]) \times P([M \leqslant k]) \right).$$

1. (a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \varnothing$ et $A = \mathbb{N}$.
   (b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.
   Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A.
2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.
   (a) Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
   (b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.
3. (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A}. \end{cases}$$

   (b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.
4. *Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$. On pose $f_{\{j\}} = f_j$.*
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \geqslant k+1]) & \text{si } k \geqslant j \\ -\dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \leqslant k]) & \text{si } k < j. \end{cases}$$

   (b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.
   (c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, différent de j, $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$.
   En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.
   (d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.
5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0.$$

6. (a) Établir, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)$.
   (On distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$.)
   (b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Partie III –

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, strictement positif.

On pose $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *et, pour tout* i *de* $[\![1, n]\!]$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n *une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre* λ_n. *Soit* A *une partie quelconque de* $\mathbb{N}$, *et* f_A *la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace* M *par* M_n *et* λ *par* λ_n. *On pose* $f = f_A$.

1. (a) Établir, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité des variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

   (b) En déduire pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

   Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i)$.

3. (a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la formule suivante :

$$E(Y_i \mid [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

   (b) Calculer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $E(Y_i \mid [X_i = 0])$.

   (c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

5. À l'aide de la question II-3(a), montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]).$$

   En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{1}{n + i}$.

   (a) Déterminer $\lambda = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$

   (b) Quelle est la limite en loi de la variable aléatoire M_n (ie, la suite $(\lim_{n \to +\infty} P(M_n = k))_{k \in \mathbb{N}}$ définit-elle une loi, et si oui, laquelle ?)

   (c) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geqslant 2}$.

Partie IV –

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ***ne sont pas nécessairement indépendantes.***

1. (a) Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])$.

   (b) En déduire l'égalité suivante :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1]) \Big]$$

2. On suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$

(a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell) - f(j)| \leqslant |\ell - j| \times \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$ et en déduire la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|).$$

(b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n),$$

où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n.

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n)).$$