DM n° 12 : Séries

Correction du problème 1 – Convergence radiale des séries entières

Partie I – Généralités sur les séries entières

1. Si $z_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $z_0 \neq 0$. et notons M un majorant de $(|a_n z^n|)$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant |z_0|$:
$$|a_n z^n| \leqslant |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$
Or, la série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, donc convergente. Ainsi, d'après le TCSTP, $\sum |a_n z^n|$ converge, donc $\boxed{\sum a_n z^n \text{ converge absolument.}}$

2. L'ensemble dont on prend la borne supérieure est non vide puisqu'il contient au moins 0. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ nous assure $\boxed{\text{l'existence de } R}$, fini si cet ensemble est majoré, $+\infty$ sinon.
   (i) Soit z tel que $|z| < R$. Par définition de R, il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que $(a_n r^n)$ soit bornée. D'après la première question appliquée avec $z_0 = r$, $\boxed{\sum a_n z^n \text{ est absolument convergente.}}$
   (ii) Soit z tel que $|z| > R$. Par définition de R, $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc ne tend pas vers 0. Ainsi, $\boxed{\sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}}$.

3. (i) On a pour tout $n \geqslant 0$ et $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$. Or,
$$\left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = |z|,$$
donc, d'après le critère de d'Alembert, la série converge si $|z| < 1$, et diverge si $|z| > 1$. De plus, si $|z| = 1$, $|z^n| = 1$, donc la série est grossièrement divergente. On en déduit que $\boxed{D = B(0,1)}$.
   (ii) On a $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$. Ainsi, $a_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, donc $\sum a_n$ converge. On déduit de la description du domaine de convergence que $R \geqslant 1$. Par ailleurs, si $r > 1$, $\frac{\ln(n)}{n^2} r^n \to +\infty$ d'après les croissances comparées, donc par définition de R, $R \leqslant 1$. On en déduit que $R = 1$. De plus, pour tout z tel que $|z| = 1$, $\sum |a_n z^n| = \sum a_n$, et est donc convergente, ainsi, $\sum a_n z^n$ converge absolument. On en déduit que le domaine de convergence est $\boxed{D = \overline{B}(0,1).}$

4. (a) On peut soit revenir à la définition du rayon de convergence en remarquant que $(a_n z^n)$ tend vers 0 pour tout $|z| < 1$ (donc est bornée) et est non bornée lorsque $|z| > 1$, soit utiliser le critère de d'Alembert, en formant le quotient
$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \to |z|.$$
Le critère de d'Alembert fournit alors la convergence si $|z| < 1$ et la divergence si $|z| > 1$.
Les deux méthodes amènent $\boxed{R = 1}$.
   (b) On a, pour tout $k \geqslant 1$, $z^k = S_k - S_{k-1}$, donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1}.$$
En remettant ensemble les deux sommes sur leurs indices communs,
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}.$$

De plus, pour z fixé, puisque $|z|=1$ et $z\neq 1$ la suite (S_n) vérifie :

$$|S_n| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}.$$

donc $\boxed{(S_n) \text{ est bornée}}$.

(c) Puisque (S_n) est bornée, $\frac{S_n}{n}\to 0$. Ainsi, la convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ équivaut à la convergence de $\sum S_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, en notant A un réel majorant $(|S_n|)$,

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right| \leqslant \frac{A}{n(n+1)} \leqslant \frac{A}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann de paramètre 2, et d'après le TCSTP, on en déduit la convergence de la série $\sum S_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, donc la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$.
En revanche pour $z=1$, la série est divergente (série harmonique).
On en déduit que le domaine de convergence est ici $\boxed{D=\overline{B}(0,1)\setminus\{1\}.}$

Partie II – Étude de la continuité de la somme

1. (a) Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, et tout $x\in I$,

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit un tel N. Soit $(x,y)\in I^2$. L'inégalité ci-dessus est alors aussi valable pour y. On a donc, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n\geqslant N$:

$$|f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+|f_n(y)-f_n(x)|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

On a bien prouvé l'existence de $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$ et tout $(x,y)\in I^2$,

$$\boxed{|f(y)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon+|f_n(y)-f_n(x)|}.$$

(b) En particulier, on peut se fixer un $n\geqslant N$ et un $x\in I$, puis utiliser la continuité de f_n en x : il existe δ tel que pour tout y dans I tel que $|y-x|<\delta$, on ait $|f_n(y)-f_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. On obtient alors, en utilisant la question précédente (et puisqu'on se restreint à $y\in I$), pour tout $y\in I$ tel que $|y-x|\leqslant\delta$,

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\boxed{f_{|I} \text{ est continue}}$ (mais on ne peut pas conclure quant à la continuité de f au bord de l'intervalle, même si I contient son extrémité : on aura alors juste la continuité à gauche ou à droite).

2. (a) Soit $\rho\in[0,R[$ et $x\in[-\rho,\rho]$. On a alors, par l'inégalité triangulaire, la série étant absolument convergente d'après la partie I :

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k||x|^k \leqslant \boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|\rho^k.}$$

(b) Puisque $\rho\in[0,R[$, d'après la partie I, la série $\sum a_k\rho^k$ est absolument convergente, donc $\sum|a_k|\rho^k$ converge. Son reste tend donc vers 0. Soit donc $\varepsilon>0$. Il existe N tel que pour tout $n>N$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|\rho^k \leqslant \varepsilon \qquad \text{donc:} \qquad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

On remarquera que N ne dépend pas de $x\in[-\rho,\rho]$, puisqu'il a été déterminé à partir d'une série indépendante de x. Ainsi, l'expression ci-dessus affirme la $\boxed{\text{convergence uniforme de } (f_n) \text{ vers } f \text{ sur } [-\rho,\rho]}$.
D'après la question 1, la restriction de f à $[-\rho,\rho]$ est continue, les f_n étant tous continues en tant que fonctions polynomiales. En particulier, f est continue sur $]-\rho,\rho[$ (c'est-à-dire continue en tout point de

$]-\rho,\rho[$. La continuité étant une notion ponctuelle, elle est stable par union. Ainsi, f est aussi continue sur $\bigcup_{\rho\in[0,R[}]-\rho,\rho[=]-R,R[$.

Cela revient à dire plus explicitement que tout $x \in]-R,R[$ est dans un intervalle du type $]-\rho,\rho[$, d'où la continuité de f en x.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur }]-R,R[}$.

3. On peut reprendre exactement le même argument avec $\rho = R$ cette fois, les convergences étant assurées par l'hypothèse de convergence absolue de $\sum a_n R^n$. On obtient donc la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[-R,R]$, donc la continuité de $f_{|[-R,R]}$. Or, d'après la partie I, et par définition de R, f ne peut pas être défini sur un ensemble plus gros, donc $f_{|[-R,R]} = f$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } [-R,R]}$.

4. (a) On fait une transformation d'Abel, en écrivant $a_k x^k = (r_{k-1} - r_k)\left(\frac{x}{R}\right)^k$. On a alors, pour tous n,p tels que $p > n$:

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (r_{k-1} - r_k)\left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n}^{p-1} r_k \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} r_k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

En remettant les deux sommes ensemble sur leurs indices communs, il vient bien :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right) + r_n \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - r_p \left(\frac{x}{R}\right)^p.}$$

(b) La suite (r_n) converge vers 0 (reste d'une série convergente). Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $|r_n| < \varepsilon$. On a alors, pour tout $p > n > N$, par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p-1} r_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p-1} \varepsilon \left|\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right| = \sum_{k=n+1}^{p-1} \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right),$$

puisque $\frac{x}{R} \leqslant 1$. On obtient donc une somme télescopique :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p-1} r_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^k\right)\right| \leqslant \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^p\right) \leqslant \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, toujours par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k\right| \leqslant \varepsilon + |r_n| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + |r_p| \left(\frac{x}{R}\right)^p \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

En faisant tendre p vers l'infini (on peut le faire puisque N est indépendant de p), on obtient, pour tout $n > N$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

Cette majoration ayant été obtenue pour tout $x \in [0,R]$, et l'entier N étant indépendant de x (obtenu par convergence d'une suite indépendante de x), on en déduit que $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,R].}$

Par conséquent, les f_n étant continues, la restriction de f à $[0,R]$ est continue. Comme f n'est pas définie à droite de R, f est en particulier $\boxed{\text{continue en } R}$. Avec les résultats précédents, on obtient donc la $\boxed{\text{continuité de } f \text{ sur }]-R,R].}$

5. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$, et que $\sum a_n R^n$ diverge.

(a) Les termes a_n étant positifs pour tout $0 < x < y < R$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n x^n \leqslant a_n y^n$, et donc, en sommant $f(x) \leqslant f(y)$. Ainsi, f est croissante sur $]0,R[$, et $\boxed{\text{admet donc une limite } \ell \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} \text{ en } R^-.}$

(b) Tous les termes étant positifs,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x),$$

et la fonction f étant croissante, elle est, en tout point de $[0,R[$, inférieure à sa limite à gauche en R. On a bien la double-inégalité :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x) \leqslant \ell}.$$

Cette inégalité a aussi un sens lorsque $\ell = +\infty$.

(c) L'inégalité ci-dessus étant vérifiée pour tout $x \in [0, R[$, on peut faire tendre x vers R^-, et on obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell$$

Puisque $\sum a_n$ est divergente et à terme positif, sa somme partielle tend vers $+\infty$, et on obtient donc $\ell = +\infty$. Ainsi, $\boxed{\lim_{x \to R^-} f(x) = +\infty.}$

6. On peut considérer $\boxed{\sum (-x)^n}$, convergente pour $|x| < 1$, grossièrement divergente pour $|x| > 1$. Ainsi, $R = 1$. De plus, $\sum (-1)^n$ est divergente. Cependant, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, qui admet une limite finie en 1.

Partie III – Série de Fourier et approximations polynomiales

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx))\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos(k(x-t)) f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(x-t)) \right) f(t)\ \mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(b) Pour simplifier l'intégrale, on commence par un changement de variable $u = t - x$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi - x}^{\pi + x} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(-ku) \right) f(x+u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) \right) f(x+u)\ \mathrm{d}u,$$

la deuxième égalité provenant de la 2π-périodicité de l'intégrande (on peut donc intégrer sur la période qu'on veut) et de la parité du cosinus.
On calcule la somme de cosinus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) &= \mathrm{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, ku} \right) \\
&= \mathrm{Re} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, u} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)u}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, u}} \right) \\
&= \mathrm{Re} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{n+1}{2} u} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \frac{nu}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{nu}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \frac{u}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{u}{2}}} \right) \\
&= \mathrm{Re} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{n+1}{2} u} \frac{\sin\left(\frac{n}{2} u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2} u\right) \sin\left(\frac{n}{2} u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(-\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u}$$

Or, par le changement de variable $u' = 2\pi - u$, et en utilisant les symétries du sinus, on obtient

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} f(x-u')\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u'\right)}{\sin\left(\frac{u'}{2}\right)}\,\mathrm{d}u'.$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u}$$

2. On calcule alors $\sigma_n(x)$ par une nouvelle sommation :

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u)-f(x-u))\frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)u\right).$$

On a cette fois une somme de sinus à calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{u}{2}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nu}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}}\right)\\ &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nu}{2}})\frac{\sin\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{nu}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.\end{aligned}$$

En remettant ce résultat dans l'intégrale trouvée précédemment, il vient :

$$\boxed{\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u.}$$

3. Prenons f la fonction constante égale à 1. On a alors pour tout $k \geqslant 1$, $a_k = b_k = 0$, et $a_0 = 2$, par un calcul immédiat. On a donc, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = 1$, puis $\sigma_n = 1$. Puisque $f(x+u)+f(x-u)$ est constante de valeur 2, la question précédente amène donc :

$$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} 2\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = n\pi.}$$

Reprenant f quelconque continue périodique, on a alors :

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} 2f(x)\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = f(x),$$

d'où, en reprenant l'expression de la question précédente :

$$\boxed{|\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u.}$$

4. (a) Sur l'intervalle $[\delta,\pi]$, la fonction $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}$ est définie et continue, et strictement positive, donc d'après le théorème de compacité, minoré par un réel $\alpha > 0$ (elle admet un minimum lui-même strictement positif). La fonction f est elle-même continue sur $[0,\pi]$ donc $|f|$ ets majorée par un réel M, et le sinus du numérateur est majoré par 1. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient alors :

$$\int_{\delta}^{\pi}\left|(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\right|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\delta}^{\pi} 4M\alpha\,\mathrm{d}u \leqslant 4M\alpha\pi.$$

On peut poser $\boxed{A = 4M\alpha\pi}$, dépendant de δ (car α dépend de δ), mais indépendant de n et x.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur chaque intervalle $[2k\pi,(2k+4)\pi]$, car continue. il existe donc δ, dépendant a priori de k, tel que pour tout $x,y \in [2k\pi,(2k+4)\pi]$, $|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. En fait, on peut choisir δ indépendamment de k, puisque f est 2π-périodique et que ces intervalles sont translatés les unes des autres d'un multiple de 2π. De plus, on peut choisir δ inférieur à 2π, puisque si un choix de δ convient, tout choix plus petit également.

Soit alors x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \delta$. Comme $\delta < 2\pi$, et comme les intervalles $[2k\pi, (2k+4)\pi]$ recouvrent tout $\mathbb{R}$ (lorsque $k \in \mathbb{Z}$), en se chevauchant sur des intervalles de longueur 2π, il existe au moins un entier naturel k tel que x et y soient dans $[2k\pi, (2k+4)\pi]$. On a alors, par définition de δ, $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Soit alors δ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leqslant \delta$ implique $|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, pour tout u tel que $|u| \leqslant \delta$:

$$|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \leqslant |f(x+u) - f(x)| + |f(x-u) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\boxed{|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \leqslant \varepsilon.}$$

(c) On choisit un tel δ. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta (f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta \left|(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\right|\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta \frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon n\pi}{2n\pi} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour ce δ fixé, il existe d'après la question précédente une constante A telle que

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^1 (f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^1 |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{A}{2n\pi}.$$

Ce majorant tendant vers 0, on en déduit qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^1 (f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On remarquera que ce choix de N ne dépend pas de x. Ainsi, en utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on a trouvé N tel que pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 (f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{(\sigma_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$

5. On a donné dans le cours des développements en séries entières du sinus et du cosinus (voir cours sur les formules de Taylor). Ces séries sont convergentes sur tout $\mathbb{R}$, donc le rayon de convergence est $+\infty$. Par composition on obtient également un développement en séries entières de $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$, de rayon de convergence $+\infty$; On déduit alors de II-2(b) que les sommes partielles convergent uniformément vers f_k et g_k sur tout iontervalle $]-\rho, \rho[$, donc aussi sur $[0, 2\pi]$ qui est inclus dans un intervalle de ce type. Or les sommes partielles sont des fonctions polynomiales. Ainsi, f_k et g_k sont limites uniformes de fonctions polynomiales sur $[0, 2\pi]$.

6. Clairement, si f et g sont limites uniformes de fonctions polynomiales, il en est de même de $f + \lambda g$ (c'est du découpage d'ε), et par une récurrence immédiate, toute combinaison linéaire de fonctions qui sont limites uniformes de polynômes sur un intervalle donné est aussi limite uniforme sur cet intervalle. Comme σ_n est une combinaison linéaire de f_k et g_k définis dans la question précédente, on en déduit que σ_n est limite uniforme de polynômes sur $[0, 2\pi]$, donc peut être approchée uniformément par un polynômes d'aussi près qu'on veut sur cet intervalle.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque (σ_n) converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$, il existe n (tout n suffisamment grand convient) tel que pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, σ_n étant limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[0, 2\pi]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $|\sigma_n(x) - Q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Par inégalité triangulaire, il vient, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\boxed{|f(x) - Q(x)| \leqslant |f(x) - \sigma_n(x)| + |\sigma_n(x) - Q(x)| \leqslant \varepsilon.}$$

Partie IV – Approximations polynomiales de certaines fonctions continues par morceaux

1. Soit $\varepsilon' = \min(\varepsilon, 1)$. On définit alors les fonctions affines par morceaux g_1 et g_2 de la sorte :
   - g_1 coïncide avec χ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2} + \varepsilon', 1]$ et est affine sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon']$, de façon à avoir la continuité : ainsi, elle est définie sur cet intervalle par
   $$g_1(x) = \frac{1}{\varepsilon'}(x - \frac{1}{2}) \leqslant \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'} = 1 = \chi(x).$$
   On vérifie facilement l'égalité des limites à gauche et à droite en $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \varepsilon'$, donc g_1 est continue, et vérifie $g_1 \leqslant \chi$ sur $[0, 1]$.
   - g_2 coïncide avec χ sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon'[$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ et est affine sur $[\frac{1}{2} - \varepsilon', \frac{1}{2}]$, de façon à avoir la continuité : ainsi, elle est définie sur cet intervalle par
   $$g_1(x) = \frac{1}{\varepsilon'}(x - \frac{1}{2} - \varepsilon') \geqslant \chi(x).$$
   On vérifie facilement l'égalité des limites à gauche et à droite en $\frac{1}{2} - \varepsilon'$ et $\frac{1}{2}$, donc g_2 est continue, et vérifie $g_2 \geqslant \chi$ sur $[0, 1]$.
   - $(g_2 - g_1)(x)$ est nulle sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon']$ et sur $[\frac{1}{2} + \varepsilon', 1]$, et égal à $\frac{1}{\varepsilon'}(x - \frac{1}{2})$ si $x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon', \frac{1}{2}]$ et à $\frac{1}{\varepsilon'}(2\varepsilon' - (x - \frac{1}{2}))$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon']$. Ainsi
   $$\begin{aligned}\int_0^1 g_2 - g_1 &= \frac{1}{\varepsilon'}\left(\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon'}^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} (2\varepsilon' - (x - \frac{1}{2})\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon'}\left(\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]_{\frac{1}{2}-\varepsilon'}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{2}\left(2\varepsilon' - (x - \frac{1}{2})\right)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon'}\left(\frac{\varepsilon'^2}{2} + \frac{\varepsilon'^2}{2}\right) = \varepsilon' \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

   Ainsi, on a bien construit g_1 et g_2 continues telles que $\boxed{g_1 \leqslant f \leqslant g_2 \text{ et } \int_0^1 g_2 - g_2 \leqslant \varepsilon.}$

   On illustre cette construction dans la figure 1. On remarque la nécessité d'avoir $\varepsilon' \leqslant \frac{1}{2}$ pour la bonne définition de g_1 et g_2, et on constate facilement sur ce graphe les inégalités souhaitées, ainsi que le calcul de l'intégrale, qui se ramène au calcul de l'aire d'un parallélogramme.

2. Notons $a = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \varphi(x) - \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \varphi(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \varphi(x)$. On peut effacer la discontinuité en $\frac{1}{2}$ en retranchant $a\chi$. On vérifie facilement que $\varphi - a\chi$ admet même limite à droite et à gauche en $\frac{1}{2}$, égales à la valeur prise en $\frac{1}{2}$. Ainsi, $\varphi - a\chi$ est continue en $\frac{1}{2}$, et aussi sur le reste de l'intervalle $[0, 1]$, puisque φ et χ le sont. Si $a = 0$, φ est continue, et l'encadrement trivial $\varphi \leqslant \varphi \leqslant \varphi$ convient. On peut donc supposer $a \neq 0$.
   Soit alors g_1 et g_2 construits comme dans la question précédente pour χ, pour le réel $\frac{\varepsilon}{2|a|}$.
   - Si $a > 0$, on a alors
   $$\varphi - a\chi + ag_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi - a\chi + ag_2.$$
   On pose $h_1 = \varphi - a\chi + ag_1$ et $h_2 = \varphi - a\chi + ag_2$, qui sont bien continues comme somme de deux fonctions continues, et vérifient $\boxed{h_1 \leqslant \varphi \leqslant h_2}$. On a de plus
   $$\boxed{\int_0^1 (h_2 - h_1) = a\int_0^1 (g_2 - g_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.}$$
   - Si $a < 0$ on fait de même en échangeant les inégalités :
   $$h_1 = \varphi - a\chi + ag_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi - a\chi + ag_1 = h_2,$$
   et on conclut de même.

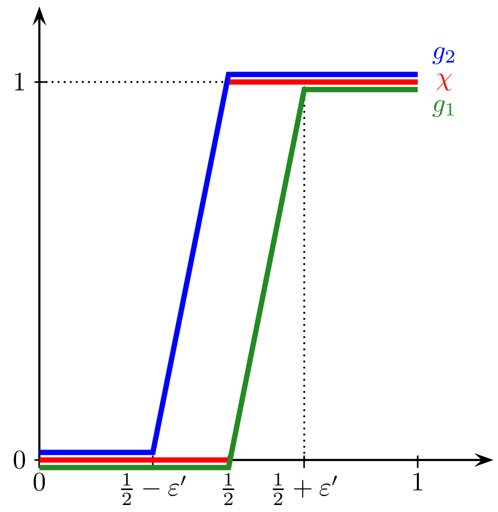

FIGURE 1 – Encadrement de χ

3. (a) La fonction $h_2 + \frac{\varepsilon}{8}$ est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstass, il existe donc une fonction polynomiale B_2 telle que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|g_2(x) + \frac{\varepsilon}{8} - B_2(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{8} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{g_2(x) \leqslant B_2(x) \leqslant g_2(x) + \frac{\varepsilon}{4}}.$$

(b) De la même façon, on construit B_1 un polynôme tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$g_1(x) - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant B_1(x) \leqslant g_1(x).$$

On a en particulier pour tout $x \in [0,1]$:

$$\boxed{B_1(x) \leqslant g_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_2(x) \leqslant B_2(x)},$$

et

$$\int_0^1 (B_2 - B_1) = \int_0^1 (B_2 - g_2) + \int_0^1 (g_2 - g_1) + \int_0^1 (g_1 - B_1) \leqslant \int_0^1 \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{4},$$

et donc

$$\boxed{\int_0^1 (B_2 - B_1) \leqslant \varepsilon},$$

la majoration des deux intégrales provenant des encadrements $g_1 - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant B_1 \leqslant g_1$ et $g_2 \leqslant B_2 \leqslant g_2 + \frac{\varepsilon}{4}$.

(c) On recherche Q_1 et Q_2 tels que pour tout $x \in [0,1]$

$$x(1-x)Q_1(x) + x \leqslant \chi(x) \leqslant x(1-x)Q_2(x) + x,$$

avec une condition d'approximation supplémentaire portant sur une intégrale. Cet encadrement se traduit, pour tout $x \in]0,1[$, par :

$$Q_1 \leqslant \frac{\chi(x) - x}{x(1-x)} \leqslant Q_2(x).$$

Or, $\chi(x) - x = -x$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $\chi(x) - x = 1 - x$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi, $x \mapsto \frac{\chi(x)-x}{x(1-x)}$ admet des limites finies à droite en 0 et à gauche en 1, et se prolonge donc par continuité en ces points, définissant ainsi une fonction φ, continue en 0, 1, et tout autre point de $[0,1]$, sauf en $\frac{1}{2}$, où elle n'est que continue à droite. On applique alors la question 3(b) à cette fonction, définissant Q_1 et Q_2 tels que pour tout $x \in [0,1]$,

$$Q_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant Q_2(x), \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 (Q_2 - Q_1)(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

On a alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$x(1-x)Q_1(x) + x \leqslant \chi(x) \leqslant x(1-x)Q_2(x) + x,$$

donc, en posant $P_1 = X(1-X)Q_1 + X$ et $P_2 = X(1-X)Q_2 + X$,

$$\forall x \in [0,1],\ \boxed{P_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant P_2(x)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P_1(0) = P_2(0) = 0,\quad P_1(1) = P_2(1) = 1}.$$

De plus,

$$\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(P_2(x) - x) - (P_1(x) - x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (Q_2(x) - Q_1(x))\,\mathrm{d}x,$$

de quoi on déduit finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.}$

Partie V – Théorème Taubérien

1. (a) Il suffit de montrer cette propriété pour tout monôme $P = X^k$, le cas général en découlera par combinaison linéaire.
Or pour $P_k = X^k$, $\sum a_n P_k(x^n) = \sum a_n x^{kn} = \sum a_n (x^k)^n$. Puisque $x \in]-1,1[$, $x^k \in]-1,1[$, et en posant $y = x^k$, le réel y est donc dans le domaine convergence de la série $\sum a_n y^n$. Donc $\boxed{\sum a_n P_k(x^n) \text{ converge}}$ pour les monômes $P_k = X^k$, donc pour tout P. Par ailleurs, on a obtenu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_k(x^n) = f(x^k),$$

et puisque f admet une limite ℓ en 1^-, en faisant tendre x vers 1^-, on obtient :

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_k(x^n) = \ell.$$

On considère maintenant P quelconque, qu'on décompose en

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P_k.$$

Par linéarité de la limite, on a alors

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) = \sum_{k=0}^{d} a_k \ell = \ell P(1).}$$

(b) Toujours par linéarité, il suffit de montrer la convergence et l'égalité pour un monôme $P_k = X^k$. On a alors, pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum x^n P_k(x^n) = \sum x^{(1+k)n}.$$

Il s'agit donc d'une série géométrique de raison $x^{1+k} \in]-1,1[$, donc $\boxed{\text{elle converge}}$.
De plus, on peut alors calculer sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P_k(x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(1+k)n} = \frac{1}{1 - x^{1+k}}.$$

On en déduit que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P_k(x^n) = \frac{1}{1 + x + \cdots + x^{k-1}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1} = \boxed{\int_0^1 P_k(x)\,\mathrm{d}x}.$$

2. On reprend la fonction χ et les fonctions polynomiales P_1 et P_2 ainsi que Q_1 et Q_2 construites à la fin de la partie précédente, pour un $\varepsilon > 0$ fixé.

(a) Pour tout $x \in [0,1[$, (x^n) tend vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x^n < \frac{1}{2}$. On a alors $\chi(x^n) = 0$. Ainsi, les termes de la série $\sum a_n\chi(x^n)$ sont nuls à partir d'un certain rang, d'où la $\boxed{\text{convergence de } \sum a_n\chi(x^n).}$

On a, pour $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
\delta_1(x) &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(\chi(x^n) - P_1(x^n)) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A}{n}(\chi(x^n) - P_1(x^n)) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A}{n}(P_2(x^n) - P_1(x^n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A}{n} x^n(1-x^n)(Q_2(x^n) - Q_1(x^n)) = (1-x)\frac{A}{n}\sum_{n=0}^{+\infty}(1+x+\cdots+x^{n-1})x^n(Q_2(x^n) - Q_1(x^n)) \\
&\leqslant (1-x)\frac{A}{n}\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n(Q_2(x^n) - Q_1(x^n)) = \boxed{A(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(Q_2(x^n) - Q_1(x^n))}
\end{aligned}$$

Un calcul similaire est aussi valable pour $\delta_2(x)$.

(b) On applique 1(b) à $Q_2 - Q_1$:

$$\lim_{x\to 1^-} A(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(Q_2(x^n) - Q_1(x^n)) = A\int_0^1 (Q_2 - Q_1) \leqslant A\varepsilon$$

Ainsi, par définition de la limite, il existe $\alpha_1 \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in [\alpha_1, 1[$

$$A(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(Q_2(x^n) - Q_1(x^n)) \leqslant A\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\alpha_1, 1[$,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant A\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} P(1)\ell = \ell$, donc il existe $\alpha \in [\alpha_1, 1[$ tel que pour tout $x \in [\alpha, 1[$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in [\alpha, 1[$, on a donc : $\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\chi(x^n) - \ell\right| \leqslant (A+1)\varepsilon.}$

(c) La série $\sum a_n\chi(x^n)$ est constituée de termes a_n lorsque $x^n \leqslant \frac{1}{2}$ et de termes nuls pour n tel que $a_n < \frac{1}{2}$. Ainsi, (x^n) étant décroissante, sa somme est en fait une somme partielle de la série $\sum a_n$. Plus précisément, pour retrouver la somme partielle de rang N, il faut que l'inégalité $x^n < \frac{1}{2}$ soit équivalente à $n > N$, donc $x^N \geqslant \frac{1}{2}$ et $x^{n+1} < \frac{1}{2}$. On peut par exemple considérer $x_N = \frac{1}{\sqrt[N]{2}}$.

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\chi(x_N^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

De plus, $x_N \to 1$ lorsque $N \to +\infty$. Donc il existe un rang N_1 à partir duquel $x_N > \alpha$. On a alors pour tout $N \geqslant N_1$:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leqslant (A+1)\varepsilon.$$

Ainsi, la somme partielle $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, égale à ℓ. On a bien prouvé la $\boxed{\text{convergence de } \sum a_n.}$

Sa valeur ℓ nous assure d'ailleurs la continuité de f en 1 (mais cela découle aussi des résultats de la partie II)