Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths L
- *NOM Prénom* : CORREIA Corentin

Exercice :

Soit $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polynomiale, homogène de degré k ($\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^k P(X,Y)$) dont la hessienne est de déterminant nul. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que $P = L^k$.

Remarques sur l'oral

J'ai 10 minutes pour réfléchir tout seul. Je commence par utiliser la relation d'homogénéité, je la dérive par rapport à x, par rapport à y. J'écris aussi ce que donne $det(M) = 0$ où M est la hessienne. J'essaye de voir ce que je peux faire avec toutes les relations obtenues.

L'examinateur intervient et me dit que je peux faire autre chose que de dériver par rapport à x et à y. Je propose donc de dériver par rapport à λ. Il me demande d'obtenir une équation écrite seulement avec des fonctions évaluées en (x,y) (car certaines sont évalués en $(\lambda x, \lambda y)$), il s'agit donc d'utiliser les relations trouvées pendant les 10 premières minutes. Il m'indique que la relation que je viens d'obtenir ($x\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = kP(x,y)$) s'appelle "équation d'Euler".

Je propose ensuite de voir ce que donne l'égalité quand on la dérive selon x ou selon y. Une fois que j'ai deux nouvelles égalités, je lui fais part de la difficulté d'exploiter l'hypothèse $det(M) = 0$. Il me conseille alors de considérer la matrice M au lieu de considérer l'expression de son déterminant. Les deux dernières égalités obtenues permettent de remplacer $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$. Je multiplie ensuite M (que j'ai évalué en (x,y)) par une transvection afin d'y voir plus clair, j'obtiens cette matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{k-1}{x}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{k-1}{x}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) & \frac{k-1}{y}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - \frac{x}{y}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

qui est de déterminant nulle (valable pour tout (x,y)). J'utilise alors l'hypothèse du déterminant nul en écrivant une équation de liaison entre les colonnes : $C_1 = \mu C_2$. L'examinateur me dit alors : "Je n'avais pas cela en tête mais voyons si cela aboutit". Après quelques simplications et en utilisant l'équation d'Euler, on aboutit à une équation différentielle ($\star$) vérifiée par la fonction de la seconde variable associée à P. Mais c'est à ce moment-là que nous prenons conscience que μ est une fonction de (x,y) (il restait 5 ou 10 minutes), ($\star$) ne peut pas être résolue sauf si on parvient à trouver l'expression de $\mu(x,y)$. L'examinateur me demande alors de regarder si ($\star$) est vérifiée lorsque $P = L^k$, pour voir si je n'avais pas fait une erreur de calcul quelque part (au passage il m'a demandé comment s'écrivait $L(x,y)$ pour tout (x,y)). Finalement ($\star$) est vérifiée lorsque $\mu(x,y)$ vaut une certaine chose, on n'obtient pas de contradiction donc finalement nous n'avons pas pu aboutir.

Il ne restait plus beaucoup de temps donc il m'a demandé de faire l'exercice pour $k = 2$ (ça marche très bien !). Quand l'oral s'est terminé, j'ai eu le droit à "C'est bien, vous avez pris des initiatives".

NB : En fait, quand j'ai refait mes calculs chez moi afin de rédiger ce rapport, je me suis aperçu que si on écrit la relation **entre les lignes** (au lieu de le faire sur les colonnes), on peut obtenir une expression du coefficient de proportionnalité en fonction de x et de y car on dispose de l'équation d'Euler.