DÉRIVATION

✠ ***Exercice 1.*** [$\star$]

Soient $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha;\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lambda.$$

Démontrer que f est dérivable en 0.

Indication : On pourra commencer par démontrer que, pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{f(x)-f(x/2^{n+1})}{x} - \lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(\frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x/2^{k+1}} - \lambda\Big) - \frac{\lambda}{2^{n+1}}\cdot$$

1. Soit $x \in]-\alpha;\alpha[$. On remarque d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x/2^k \in]-\alpha;\alpha[$, donc $f(x/2^k)$ est bien défini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(\frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x/2^{k+1}} - \lambda\Big) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda}{2^{k+1}} \\ &= \frac{f(x)-f(x/2^{k+1})}{x} - \lambda\frac{1/2-1/2^{n+2}}{1-1/2} \\ &= \frac{f(x)-f(x/2^{k+1})}{x} - \lambda + \frac{\lambda}{2^{n+1}}\cdot\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in]-\alpha;\alpha[\,,\quad \forall n \in \mathbb{N},\qquad \frac{f(x)-f(x/2^{n+1})}{x} - \lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(\frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x/2^{k+1}} - \lambda\Big) - \frac{\lambda}{2^{n+1}}\cdot}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = \lambda$, on peut choisir $\beta \in]0,\alpha[$ tel que, pour tout $u \in]-\beta,\beta[\setminus \{0\}$, on ait

$$\Big|\frac{f(u)-f(u/2)}{u/2} - \lambda\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Soit $x \in]-\beta,\beta[\setminus \{0\}$. On a $\forall k \in \mathbb{N},\ x/2^k \in]-\beta,\beta[\setminus \{0\}$ donc

$$\Big|\frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x/2^{k+1}} - \lambda\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|\frac{f(x)-f(x/2^{n+1})}{x} - \lambda\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{|\lambda|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\lambda|}{2^{n+1}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}(|\lambda|/2^{n+1}) = 0$, donc on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\frac{|\lambda|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\Big|\frac{f(x)-f(x/2^{n+1})}{x} - \lambda\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Or f est continue en 0, donc par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a obtient, pour tout $x \in \,]-\beta, \beta[\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lambda,$$

ce qui justifie que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \lambda.}$$

✠ *Exercice 2.* [○]

Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ qui est égale à $f(0)$. Démontrer qu'il existe $c \in \,]0;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. C'est le *théorème de Rolle généralisé.*

Indication : On pourra utiliser la fonction g définie par $\forall x \in [0;\pi/2[\,,\ g(x) = f\big(\tan(x)\big)$.

La fonction g est continue sur $[0;\pi/2[$ par théorèmes généraux de continuité (composition de fonctions continues). Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to\pi/2} \tan(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} f(y) = f(0),$$

donc, d'après le théorème de composition des limites, on a

$$\lim_{x\to\pi/2} g(x) = f(0),$$

ce qui prouve que g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(\pi/2) = f(0)$. En conclusion, g se prolonge en une fonction continue sur $[0;\pi/2]$ en posant $g(\pi/2) = f(0)$.

La fonction g est continue sur $[0;\pi/2]$ (on vient de la prolonger) et dérivable sur $]0;\pi/2[$ par théorèmes généraux de dérivabilité (composition de fonctions dérivables). De plus, on a

$$g(0) = f\big(\tan(0)\big) = f(0) \qquad \text{et} \qquad g(\pi/2) = f(0).$$

Toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer le théorème de Rolle à g entre 0 et $\pi/2$. Cela justifie l'existence de $d \in \,]0;\pi/2[$ tel que

$$g'(d) = 0.$$

Or, pour tout $x \in \,]0;\pi/2[$, on a

$$g'(x) = \big(1+\tan^2(x)\big) f'\big(\tan(x)\big),$$

donc

$$\big(1+\tan^2(d)\big) f'\big(\tan(d)\big) = 0.$$

Comme $1+\tan^2(d) \neq 0$, on en déduit que

$$f'\big(\tan(d)\big) = 0.$$

Reste alors à poser $c = \tan(d) \in \,]0;+\infty[$ pour avoir

$$f'(c) = 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{le théorème de Rolle généralisé est établi.}}$$

✠ ***Exercice 3.*** [$\star$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et $\forall x \in [0;1]\,,\ |f'(x)| \leqslant 2$. Démontrer que f est positive sur $[0;1]$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $a \in \,]0;1[$ tel que $f(a) < 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f (qui est de classe $\mathscr{C}^1$) d'une part entre 0 et a et d'autre part entre a et 1, on peut affirmer qu'il existe $c \in \,]0;a[$ et $d \in \,]a;1[$ tels que

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(c) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(1)-f(a)}{1-a} = f'(d),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(a)-1}{a} = f'(c) \qquad \text{et} \qquad \frac{1-f(a)}{1-a} = f'(d).$$

Comme $\forall x \in [0;1]\,,\ |f'(x)| \leqslant 2$, on a

$$\frac{|f(a)-1|}{a} \leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{|1-f(a)|}{1-a} \leqslant 2,$$

c'est-à-dire, puisque $f(a) < 0$,

$$\frac{-f(a)+1}{a} \leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-f(a)}{1-a} \leqslant 2,$$

ce qui donne

$$1-2a \leqslant f(a) \qquad \text{et} \qquad 2a-1 \leqslant f(a).$$

Comme $f(a) < 0$, cela dit que les deux nombres $1-2a$ et $2a-1$ sont tous les deux strictement négatifs. C'est absurde puisqu'ils sont opposés l'un à l'autre. Par conséquent,

$$\boxed{f \text{ est positive sur } [0;1].}$$

✠ ***Exercice 4.*** [$\star$] (Distance à la corde)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. Démontrer que, pour tout $x \in \,]a;b[$, il existe $d \in \,]a;b[$ tel que

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - \frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(d).$$

Interpréter géométriquement.

Considérons la fonction $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in I$, par

$$\psi(t) = f(t) - \frac{b-t}{b-a}f(a) - \frac{t-a}{b-a}f(b) - \frac{f(x) - \dfrac{b-x}{b-a}f(a) - \dfrac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(b-x)}(t-a)(b-t).$$

C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I par théorèmes généraux.

On constate de plus que

$$\psi(a) = \psi(x) = \psi(b) = 0.$$

En appliquant le lemme de Rolle à ψ entre a et x ainsi qu'entre x et b, on peut affirmer l'existence de $\alpha \in \,]a;x[$ et $\beta \in \,]x;b[$ tel que

$$\psi'(\alpha) = \psi'(\beta) = 0.$$

En appliquant le lemme de Rolle à ψ' entre α et β, on sait qu'il existe $d \in \,]\alpha;\beta[$ (et donc $d \in \,]a;b[$) tel que

$$\psi''(d) = 0.$$

Or, pour tout $t \in I$, on a

$$\psi'(t) = f'(t) + \frac{f(a)}{b-a} - \frac{f(b)}{b-a} - \frac{f(x) - \dfrac{b-x}{b-a}f(a) - \dfrac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(b-x)}(-2t+a-b)$$

et

$$\psi''(t) = f''(t) + 2\frac{f(x) - \dfrac{b-x}{b-a}f(a) - \dfrac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(b-x)}.$$

Donc
$$f''(d)+2\frac{f(x)-\dfrac{b-x}{b-a}f(a)-\dfrac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(b-x)}=0,$$
ce qui donne
$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(d).$$
On a donc bien démontré qu'
$$\boxed{\text{il existe } d\in\,]a;b[\text{ tel que } f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(d).}$$

La fonction
$$x\longmapsto\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$
est la corde joignant les points $\big(a,f(a)\big)$ et $\big(b,f(b)\big)$. La formule ci-dessus permet ainsi de majorer l'écart entre cette corde et la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$. On a
$$\forall x\in\,]a;b[,\qquad \Big|f(x)-\Big(\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\Big)\Big|\leqslant\frac{(x-a)(b-x)}{2}\sup\{|f''(t)|:t\in[a;b]\}.$$
On constate en particulier que cette écart est quadratique.

✠ ***Exercice 5.*** [★] (Inégalités de Kolmogorov)

Soien $n\geqslant 2$ et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ soient deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. Dans tout l'exercice, $\|\cdot\|$ désigne la norme infinie.

1. Démontrer que, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. a) Démontrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $h>0$, on a
$$|f'(t)|\leqslant\frac{2}{h}\|f\|+\frac{h}{2}\|f''\|.$$
Améliorer cette majoration en démontrant que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $h>0$, on a
$$|f'(t)|\leqslant\frac{1}{h}\|f\|+\frac{h}{2}\|f''\|.$$
En déduire une majoration de $\|f'\|$.
   b) Démontrer que, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, on a
$$\|f^{(k)}\|\leqslant 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}.$$

1. Pour tout $h\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, le théorème de Taylor–Lagrange nous dit qu'il existe c entre t et $t+h$ tel que
$$f(t+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(t)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c).$$
Dans cette relation, on isole les termes bornés et on majore, ce qui donne
$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(t)\Big| &= \Big|f(t+h)-f(t)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)\Big|\\ &\leqslant |f(t+h)|+|f(t)|+\frac{|h|^n}{n!}|f^{(n)}(c)|\\ &\leqslant 2\|f\|+\frac{|h|^n}{n!}\|f^{(n)}\|\end{aligned}$$
On a ainsi démontré que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, la fonction
$$A_h:t\longmapsto\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(t)$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.

En prenant successivement $h = 1, 2, \ldots, n$, on obtient un système linéaire satisfait par les fonctions $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ qui est de la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1^1}{1!} & \frac{1^2}{1!} & \cdots & \frac{1^{n-1}}{1!} \\ \frac{2^1}{1!} & \frac{2^2}{1!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{1!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(n-1)^1}{1!} & \frac{(n-1)^2}{1!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{1!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Or le déterminant de M est proportionnel à un déterminant de Vandermonde non nul, donc M est inversible et

$$\begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cela prouve que chacune des fonctions $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ est une combinaison linéaire des applications bornées $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ et donc que

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0; n]\!], \text{ la fonction } f^{(k)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

2. a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. L'égalité de Taylor–Lagrange donne l'existence de $c \in]t; t+h[$ tel que $f(t+h) = f(t) + hf'(t) + h^2 f''(c)/2$. Par suite, on a

$$|hf'(t)| = \left| f(t+h) - f(t) - \frac{h^2}{2} f''(c) \right| \leqslant |f(t+h)| + |f(t)| + \frac{h^2}{2}|f''(c)| \leqslant 2\|f\| + \frac{h^2}{2}\|f''\|,$$

ce qui donne, après division par h,

$$\boxed{|f'(t)| \leqslant \frac{2}{h}\|f\| + \frac{h}{2}\|f''\|.}$$

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Le facteur 2 du terme $2\|f\|_\infty/h$ provient de la majoration de $|f(t+h)|$ et de $|f(t)|$. S'il semble difficile de se débarasser du terme $f(t+h)$ (puisque c'est ce terme que l'on exprime par la formule de Taylor), on peut zigouiller $f(t)$ en appliquant l'égalité de Taylor–Lagrange non pas à f mais à la partie impaire de la fonction $x \longmapsto f(t+x)$, c'est-à-dire $x \longmapsto \{f(t+x) - f(t-x)\}/2$. Ce faisant, on obtient l'existence de $c \in]t; t+h[$ tel que

$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{2} = hf'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{f''(t+c) - f''(t-c)}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} |hf'(t)| &= \left| \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(t+c) - f''(t-c)}{2} \right| \\ &\leqslant \frac{|f(t+h)| + |f(t-h)|}{2} + \frac{h^2}{2} \frac{|f''(t+c)| + |f''(t-c)|}{2} \\ &\leqslant \|f\| + \frac{h^2}{2}\|f''\|, \end{aligned}$$

ce qui donne, toujours après division par h,

$$\boxed{|f'(t)| \leqslant \frac{1}{h}\|f\| + \frac{h}{2}\|f''\|.}$$

L'étude de la fonction $h \longmapsto 2\|f\|/h + h\|f''\|/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montre qu'elle atteint son maximum en $h = \sqrt{2\|f\|/\|f''\|}$. En choisissant cette valeur de h dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\boxed{\|f'\| \leqslant \sqrt{2\|f\|\|f''\|}.}$$

b) On pose $\mathscr{P}(n)$:« pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\|f^{(k)}\| \leqslant 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$ ». On va procéder par récurrence forte.

Initialisation : Pour $n = 2$, on doit démontrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a $\|f\| \leqslant 2^0\|f\|^{1-0}\|f''\|^0$, $\|f'\| \leqslant 2^{1/2}\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2}$ et $\|f''\| \leqslant 2^0\|f\|^0\|f''\|^1$. La première et la dernière de ces deux inégalités sont évidentes. La deuxième découle de la question 2. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $k = n+1$, l'inégalité demandée est évidente. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\|f^{(k)}\| &\leqslant 2^{(k-1)(n-k+1)/2}\|f'\|^{1-(k-1)/n}\|f^{(n+1)}\|^{(k-1)/n} \\
&\qquad \text{d'après } \mathscr{P}(n) \text{ appliquée à } f' \text{ au rang } k-1 \\
&\leqslant 2^{(k-1)(n-k+1)/2}\big(2^{(k-1)/2}\|f\|^{1-1/k}\|f^{(k)}\|^{1/k}\big)^{1-(k-1)/n}\|f^{(n+1)}\|^{(k-1)/n} \\
&\qquad \text{d'après } \mathscr{P}(k) \text{ appliquée à } f \text{ au rang } 1
\end{aligned}$$

donc

$$\|f^{(k)}\| \leqslant 2^{(k-1)(n-k+1)(n+1)/(2n)}\|f\|^{(k-1)(n-k+1)/(nk)}\|f^{(k)}\|^{(n-k+1)/(nk)}\|f^{(n+1)}\|^{(k-1)/n}$$

ce qui donne, après simplification par $\|f^{(k)}\|^{(n-k+1)/(nk)}$,

$$\|f^{(k)}\|^{(n+1)(k-1)/(nk)} \leqslant 2^{(k-1)(n-k+1)(n+1)/(2n)}\|f\|^{(k-1)(n-k+1)/(nk)}\|f^{(n+1)}\|^{(k-1)/n}.$$

En passant à la puissance $nk/\big((n+1)(k-1)\big)$, il vient alors

$$\|f^{(k)}\| \leqslant 2^{k(n+1-k)/2}\|f\|^{1-k/(n+1)}\|f^{(n+1)}\|^{k/(n+1)}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence forte, on a

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!] , \qquad \|f^{(k)}\| \leqslant 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [★] (Super TAF et application)

1. Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, pour tout $x \in \mathscr{D}$ et pour tout $h > 0$ tel que $x + nh \in \mathscr{D}$, il existe $c \in]x; x+nh[$ tel que
$$\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+kh) = f^{(n)}(c).$$
2. Soit $p \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \ell^p \in \mathbb{N}$. Démontrer que $p \in \mathbb{N}$.

1. Démontrons par récurrence le prédicat $\mathscr{P}$, défini, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$\mathscr{P}(n)\left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute fonction } f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathscr{D}, \text{ pour tout } x \in \mathscr{D} \text{ et}\\ \text{pour tout } h > 0 \text{ tel que } x+nh \in \mathscr{D}, \text{ il existe } c \in]x;x+nh[\text{ tel que}\\ \displaystyle\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+kh) = f^{(n)}(c).\end{array}\right.$$

<u>Initialisation :</u> Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, $x \in \mathscr{D}$ et $h > 0$ tel que $x + h \in \mathscr{D}$. On a
$$\frac{1}{h^1}\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(-1)^{1-k}f(x+kh) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$
Or le théorème des accroissements finis appliqué à f entre x et $x+h$ nous donne l'existence de $c \in]x; x+h[$ tel que
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(c).$$
En combinant ces relations, on voit que l'on a démontré $\mathscr{P}(1)$.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour cela, on introduit une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, $x \in \mathscr{D}$ et $h > 0$ tel que $x + (n+1)h \in \mathscr{D}$. On pose
$$g(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(t+kh),$$
de sorte que
$$\begin{aligned}
&\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
= \ & \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f\big(x+(k+1)h\big) - \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(t+kh)\right)\\
= \ & \frac{1}{h^{n+1}}\left(\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}(-1)^{n+1-\ell}f(x+\ell h) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(t+kh)\right)\\
= \ & \frac{1}{h^{n+1}}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}(-1)^{n+1-\ell}f(x+\ell h) - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(t+kh)\right) \qquad \text{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0\\
= \ & \frac{1}{h^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)(-1)^{n+1-k}f(x+kh)\\
= \ & \frac{1}{h^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+kh) \qquad \text{d'après la relation de Pascal.}
\end{aligned}$$
L'application du théorème des accroissements finis à g entre x et $x+h$ nous donne l'existence de $d \in]x; x+h[$ tel que
$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(d).$$
Or
$$g'(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f'(t+kh),$$
donc, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ appliquée pour f', on peut affirmer l'existence de $c \in]d; d+nh[$ tel que $g'(d) = (f')^{(n)}(c)$, c'est-à-dire
$$g'(d) = f^{(n+1)}(c).$$

En rassemblant les résultats glanés au cours de cette hérédité, on obtient

$$\frac{1}{h^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+kh)=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(d)=f^{(n+1)}(c),$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on peut affirmer que

> pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f:\mathscr{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, pour tout $x\in\mathscr{D}$ et pour tout $h>0$ tel que $x+nh\in\mathscr{D}$, il existe $c\in\,]x;x+nh[$ tel que
> $$\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+kh)=f^{(n)}(c).$$

2. Considérons la fonction $f(t)=t^p$ défini sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$ et introduisons un entier $n\in\mathbb{N}^*$ que nous choisirons judicieusement plus tard. La propriété $\mathscr{P}(n)$ implique alors que, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, il existe $c\in\,]N;N+n[$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(N+k)^p=p(p-1)\cdots(p-n+1)c^{p-n}\qquad(*),$$

ce qui implique en particulier que, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(N+k)^p\leqslant p(p-1)\cdots(p-n+1)(N+n)^{p-n}.$$

À ce stade, on fixe n à la partie entière supérieure de p, c'est-à-dire l'unique entier naturel tel que

$$n-1\leqslant p<n.$$

Dès lors, $(N+n)^{p-n}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui justifie l'existence de $N\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$0\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(N+k)^p\leqslant\frac{1}{2}\cdot$$

Mais l'hypothèse de l'énoncé (à savoir que $\forall\ell\in\mathbb{N}^*,\ \ell^p\in\mathbb{N}$) implique que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(N+k)^p$ est un entier (en tant que somme d'entiers), donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(N+k)^p=0,$$

c'est-à-dire, tenant compte de la relation $(*)$,

$$p(p-1)\cdots(p-n+1)c^{p-n}=0,$$

ce qui donne

$$p=n-1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{les seuls nombres réels } p \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N},\ n^p\in\mathbb{N} \text{ sont les entiers naturels.}}$$