DEVOIR MAISON n° 3

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

Nombres et polynômes de Bernoulli, formule d'Euler-Maclaurin

Partie I

Les notations introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie II.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes B_n dans $\mathbb{R}[X]$ telle que
   (a) $B_0 = 1$;
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$;
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int\limits_0^1 B_n(t)dt = 0$.

   Calculer B_i pour $i = 0, ..., 5$.
2. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(B_n) = n$; pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq k \Rightarrow B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$; $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $B_n(0) = B_n(1)$.
   (b) Comparer, selon la parité de n, $B_n(X)$ et $B_n(1-X)$.
   (c) On pose $b_n = B_n(0)$. Prouver que $b_n = 0$ pour tout n impair ≥ 3.
3. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}^{2n+2}([0,1],\mathbb{R})$. Prouver l'égalité

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}[f'(0)+f'(1)]-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j)}(1)-f^{(2j)}(0))-\frac{1}{(2n+1)!}\int\limits_0^1 B_{2n+1}(x)f^{(2n+2)}(x)dx.$$

4. Soient a un nombre réel, et g une application de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On se donne deux entiers p et q tels que $q > p \geq a$, S_m désigne $\sum\limits_{a \leq k \leq m} g(k)$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_q - S_p = \frac{1}{2}(g(q)-g(p)) + \int\limits_p^q g(t)dt + \sum_{j=1}^{r}\frac{b_{2j}}{(2j)!}[g^{(2j-1)}(q) - g^{(2j-1)}(p)] + R_{p,q,r}$$

où $R_{p,q,r} = \frac{1}{(2r+1)!}\sum\limits_{n=p}^{q-1}\int\limits_n^{n+1} B_{2r+1}(x-n)g^{(2r+1)}(x)dx$.

5. Les notations de la question 4 sont conservées. On suppose de plus que
   (a) $\int_a^{+\infty} g$ converge, $\sum_{n\geq n_0} g(n)$ converge vers une somme S, g tend vers 0 en $+\infty$;
   (b) $\int_a^{+\infty} |g^{2r+1}(t)|dt$ converge.

   Prouver que $R_{p,q,r}$ possède une limite $R_{p,r}$ lorsque q tend vers $+\infty$ et que
   $$S - S_p = -\frac{1}{2}g(p) + \int_p^{+\infty} g(t)dt - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)!} g^{(2j-1)}(p) + R_{p,r}.$$
   On pourra d'abord démontrer les résultats suivants :
   — Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f' aient une limite en $+\infty$, alors la limite de f' est nulle ;
   — Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(m)}$ aient une limite en $+\infty$, les dérivées intermédiaires $f', ..., f^{(m-1)}$ en ont une aussi, et cette limite est nulle.

Partie II

Les sous-parties A, B, C et D sont pour l'essentiel indépendantes.

Partie II-A

1. On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. S_p désigne la p-ième somme partielle de cette série. Montrer que $S - S_p < \frac{1}{2p^2}$. Combien faut-il a priori sommer de termes de la série pour obtenir la somme à une précision 10^{-4} ?
2. On pose ici et dans la suite, $M_n = \|B_n\|_\infty$, la norme sup. étant prise sur $[0, 1]$. Prouver que
   $$|R_{p,r}| \leq \frac{M_{2'+1}}{(2r+1)!} \int_p^{+\infty} |g^{(2r+1)}(t)|dt.$$
   Avce $r = 1$ et $g(x) = \frac{1}{x^3}$, calculer S à 10^{-4} près.

Partie II-B

1. Prouver que la série $\sum_{n\geq 2} [\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})]$ converge. On note $\gamma - 1$ sa somme.
2. Soit p un entier ≥ 1. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $r \geq 1$
   $$\gamma - S_p = -\frac{1}{2p} - \ln(p) + \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{2j}}{(2j)p^{2j}} - \sum_{n=p}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{B_{2r+1}(x-n)}{x^{2r+2}} dx.$$
   En déduire, avec $r = 2$, la valeur de γ à 10^{-4} près.

Partie II-C

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout $m \geq 0$, l'égalité

$$\int_0^1 B_{2m+2}(t) \cos(2\pi n t) dt = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(2\pi n)^{(2m+2)}}.$$

2. Donner une expression intégrale de la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2m+2}}$.
3. Montrer que $\frac{B_{2m+2}(x) - b_{2m+2}}{\sin(\pi x)}$ possède un prolongement sur $[0, 1]$.
4. Soit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}$ et le fait que, pour tout $m \geq 1$, $\zeta(2m)\pi^{-2m}$ est un nombre rationnel.

Partie II-D

En appliquant convenablement les résultats de la partie I à la fonction $x \mapsto \ln(x)$, démontrer, lorsque n tend vers $+\infty$, l'égalité

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2}) \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{n^{2k-1}} + O(n^{-2r}).$$