

DEVOIR SURVEILLÉ 9

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

VOUS DEVEZ IMPÉRATIVEMENT RÉDIGER
CHAQUE EXERCICE SUR UNE FEUILLE SÉPARÉE.
CHACUNE DES FEUILLES DOIT PORTER VOTRE NOM.

EXERCICE 1

Déjà fait

Démontrer que tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

EXERCICE 2

Le problème des prisonniers

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1/2; 1[$ tels que $pn \in \mathbb{N}^*$.

Les gardiens d'une prison promettent de libérer leurs n prisonniers tous ensemble s'ils réussissent l'épreuve suivante.

Les gardiens numérotent les prisonniers de 1 à n puis écrivent ces numéros sur n cartons qu'ils disposent dans n boîtes fermées et alignées sur une grande table. Les boîtes sont elles-mêmes numérotées de 1 à n .

Les prisonniers sont conduits les uns après les autres devant les boîtes. Sans savoir ce qu'ont fait les prisonniers précédents, chaque prisonnier doit ouvrir au plus une proportion p de boîtes et y trouver le carton avec son numéro. Les prisonniers ne peuvent déplacer ni les boîtes ni les cartons, et doivent refermer les boîtes ouvertes avant de sortir. L'épreuve n'est réussie que si chaque prisonnier trouve son numéro !

Avant que l'épreuve commence, les prisonniers peuvent se concerter pour convenir d'une stratégie, mais une fois l'épreuve commencée, ils n'ont plus aucun échange.

1. Dans cette question, on suppose que les prisonniers n'ont pas convenu d'une stratégie particulière. Chacun choisit donc pn boîtes au hasard. C'est la stratégie « hasard ».

Déterminer la probabilité h_n que les prisonniers soient libérés. Quelle est la limite de h_n lorsque n tend vers $+\infty$? Commenter.

2. Cette fois, les prisonniers décident de se coordonner en adoptant la stratégie suivante. Quand un prisonnier se trouve devant les boîtes, il ouvre d'abord celle correspondant à son numéro. Si le prisonnier y trouve son numéro, il s'arrête. S'il ne le trouve pas, il ouvre la boîte correspondant au numéro trouvé dans la boîte qu'il vient d'ouvrir. S'il trouve son numéro dans cette deuxième boîte, il s'arrête. Sinon, il continue de la même façon : il va ouvrir la boîte correspondant au numéro qu'il vient de trouver dans la dernière boîte ouverte. Le processus se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'il trouve son numéro ou qu'il ouvre pn boîtes. C'est la stratégie « suivre ».

On note σ la permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui à un numéro de boîte associe le numéro du carton qu'elle contient.

- a) Justifier que les prisonniers sont libérés si, et seulement si, la permutation σ ne contient pas de cycle de longueur strictement supérieure à pn .
- b) En déduire que la probabilité s_n que les prisonniers soient libérés est donnée par

$$s_n = 1 - \sum_{j=pn+1}^n \frac{1}{j}$$

et déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter.

EXERCICE 3

Parterre de fleurs

Robert le jardinier dispose d'un grand stock de fleurs bleues et de fleurs rouges. Les fleurs bleues sont en proportion p et les rouges en proportion $q = 1 - p$ (où $p \in [0; 1]$). Robert en choisit au hasard nm (avec $n, m \in \mathbb{N}^*$) et les plante, également au hasard, dans un parterre rectangulaire constitué de n lignes et m colonnes.

On dit qu'une ligne ou une colonne est bleue lorsqu'elle est constituée uniquement de fleurs bleues. On note $X_{n,m}$ le nombre de lignes bleues et $Y_{n,m}$ le nombre de colonnes bleues.

1. Préciser les lois de $X_{n,m}$ et $Y_{n,m}$. Donner les espérances et les variances.

Les variables $X_{n,m}$ et $Y_{n,m}$ sont-elles indépendantes ?

2. a) Pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on note C_j l'événement « la colonne j est bleue » et on pose $A_j = (X_{n,m} = 0) \cap C_j$.

α] Soit $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$. On considère k nombres distincts de $\llbracket 1; m \rrbracket$ notés j_1, \dots, j_k . Démontrer que

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = p^{kn}(1 - p^{m-k})^n.$$

β] En déduire que

$$P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} = 0) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} p^{kn}(1 - p^{m-k})^n.$$

- b) Soient $(x, y) \in \llbracket 0; n \rrbracket \times \llbracket 0; m \rrbracket$. Justifier que

$$P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) = \binom{n}{x} \binom{m}{y} p^{xm+ny-xy} P(X_{n-x,m-y} = 0, Y_{n-x,m-y} = 0)$$

et en déduire l'expression de $P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y)$ à l'aide d'une somme.

3. Dans cette question, on vous demande de traiter ou bien la question a) ou bien la question b). Les deux questions sont notées sur le même nombre de points. Il est interdit de traiter les deux questions. À vous de (bien) choisir !

- a) À l'aide de la loi du couple $(X_{n,m}, Y_{n,m})$ déterminée à la question précédente, démontrer que

$$\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = nmp^{n+m-1}q.$$

- b) Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (respectivement $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$) on note U_i (respectivement V_j) la variable indicatrice de l'événement L_i : « la ligne i est bleue » (respectivement C_j : « la colonne j est bleue »). Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, déterminer les lois de U_i , V_j et $U_i V_j$. En déduire que

$$\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = nmp^{n+m-1}q.$$

EXERCICE 4

Déterminant de Casorati

Soient K un corps commutatif, X un ensemble non vide et n un entier naturel non nul.

Soient f_1, \dots, f_n des applications de X vers K . On appelle déterminant de Casorati de (f_1, \dots, f_n) l'application $C_{(f_1, \dots, f_n)} : X^n \longrightarrow K$ définie par

$$C_{(f_1, \dots, f_n)} : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

En l'absence d'ambiguïté, on pose $C_n = C_{(f_1, \dots, f_n)}$.

1. Dans cette question, on pose $f_1 : x \longmapsto \cos(x)$, $f_2 : x \longmapsto \sin(x)$ et $f_3 : x \longmapsto \sin(x + \pi/17)$. Calculer C_2 et C_3 .
2.
 - a) On suppose que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée (dans le K -espace vectoriel des applications de X dans K). Démontrer que C_n est l'application nulle.
 - b) Réciproquement, on suppose que C_n est l'application nulle. On veut démontrer que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.
 - α] Traiter le cas où C_1 est l'application nulle.
 - β] On suppose maintenant que C_1 n'est pas l'application nulle. On introduit alors l'entier $r = \min\{k \in \llbracket 2; n \rrbracket : C_k = \tilde{0}\}$ et l'on considère $(u_1, \dots, u_{r-1}) \in X^{r-1}$ tel que $C_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \neq 0$. À l'aide de l'application $\varphi : x \longmapsto C_r(u_1, \dots, u_{r-1}, x)$, établir que (f_1, \dots, f_r) est liée et conclure.
3. Dans cette question, on suppose que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre. D'après ce qui précède, il existe $(u_1, \dots, u_n) \in X^n$ tel que $C_n(u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $F_j : X \longrightarrow K$ la j -ème application partielle de C_n en (u_1, \dots, u_n) , c'est-à-dire

$$F_j : x \longmapsto C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

- a) Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Démontrer qu'il existe des scalaires $a_{1,j}, \dots, a_{n,j} \in K$ tels que

$$\forall x \in X, \quad F_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i(x).$$

- b) Démontrer que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible et en déduire que

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \text{Vect}(F_1, \dots, F_n).$$

- c) Soient g_1, \dots, g_n des applications de X vers K . On pose $D_n = C_{(g_1, \dots, g_n)}$. Démontrer qu'il existe un scalaire non nul λ tel que $D_n = \lambda C_n$ si, et seulement si, $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

CORRECTION DU DS 9

(durée : 4 h 00)

EXERCICE I

Démontrer que tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Soit G un groupe monogène. On propose trois solutions.

▷ À la main :

Soient g un générateur de G et H un sous-groupe de G .

Si $H = \{e_G\}$, c'est terminé. On suppose donc que $H \neq \{e_G\}$.

Il existe alors $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $g^k \in H$. Quitte à remplacer k par $-k$, on en déduit que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* : g^k \in H\}$ est non vide. Notons b le minimum de cet ensemble, c'est-à-dire le plus petit entier naturel non nul tel que $g^b \in H$, et démontrons que $H = \langle g^b \rangle$.

Comme $g^b \in H$, on a immédiatement $H \supset \langle g^b \rangle$.

Soit $h \in H$. Comme g est générateur de G , il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $h = g^a$. Effectuons la division euclidienne de a par b , ce qui donne $a = bq + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0; b-1 \rrbracket$. Alors $h = g^{bq+r} = (g^b)^q g^r$ ou encore $g^r = (g^b)^{-q} h$. Comme g^b et h sont des éléments de H , on en déduit que $g^r \in H$. La minimalité de b implique alors que $r = 0$. Donc $a = bq$ et $h = (g^b)^q$. On a ainsi démontré que tout élément de H est une puissance de g^b , c'est-à-dire que $H \subset \langle g^b \rangle$.

On a donc $H = \langle g^b \rangle$, ce qui démontre que H est monogène.

▷ Avec un morphisme :

Soient g un générateur de G et H un sous-groupe de G .

Considérons le morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}, \varphi(k) = g^k$. Le cours nous dit que $\varphi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} . Il est donc de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $h \in H$, il existe $\ell \in n\mathbb{Z}$ tel que $h = \varphi(\ell)$. On a $\ell = mn$ où $m \in \mathbb{Z}$, donc $h = \varphi(mn) = \varphi(n)^m$. Cela démontre que H est engendré par $\varphi(n)$. Donc H est monogène.

▷ Par isomorphie :

Si G est infini, on sait qu'il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Or tous les sous-groupes de \mathbb{Z} sont monogènes (puisque'ils sont de la forme $n\mathbb{Z}$) donc, par isomorphisme, tous les sous-groupes de G sont monogènes.

Si G est fini, on sait qu'il est isomorphe à (\mathbb{U}_n, \times) . Si H désigne un sous-groupe de \mathbb{U}_n d'ordre d , on sait que tous les éléments de H ont un ordre qui divise d (c'est une conséquence du théorème de Lagrange) et donc que $\forall z \in H, z^d = 1$. Par suite, H est inclus dans \mathbb{U}_d . Comme ces deux ensembles ont le même cardinal, on en déduit que $H = \mathbb{U}_d$. En particulier, H est bien cyclique et, par isomorphisme, tout sous-groupe de G est cyclique.

En conclusion,

tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Remarque :

La démonstration par isomorphie en dit un peu plus sur les sous-groupes d'un groupe cyclique : si G est un groupe cyclique de cardinal n , alors pour tout diviseur d de n , il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d . Par exemple, dans le cas du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, l'unique sous-groupe d'ordre d (où d divise n) est le sous-groupe cyclique engendré par la classe modulo n de n/d . Ce sous-groupe est bien sûr isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$ tels que $pn \in \mathbb{N}^*$. Les gardiens d'une prison promettent de libérer leurs n prisonniers s'ils réussissent l'épreuve suivante. Les gardiens numérotent les prisonniers de 1 à n puis écrivent leurs numéros au fond de n boîtes alignées sur une table. Les prisonniers sont conduits les uns après les autres devant les boîtes. Sans savoir ce qu'ont fait les autres prisonniers, chaque prisonnier doit ouvrir au plus une proportion p de boîtes et y trouver son numéro. Les boîtes sont refermées après chaque sortie. L'épreuve n'est réussie que si chaque prisonnier trouve son numéro ! Avant que l'épreuve commence, les prisonniers peuvent se concerter, mais une fois l'épreuve commencée, ils n'ont plus aucun échange.

1. Dans cette question, on suppose que les prisonniers n'ont pas convenu d'une stratégie particulière. Chacun choisit donc pn boîtes au hasard. C'est la stratégie « hasard ». Déterminer la probabilité h_n que les prisonniers soient libérés. Quelle est la limite de h_n lorsque n tend vers $+\infty$? Commenter.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note A_k l'événement « le prisonnier k trouve son numéro ». Comme chaque prisonnier choisit une proportion p de boîtes au hasard, on a $P(A_k) = p$. Or, pour que les prisonniers soient libérés, il faut et suffit que tous découvrent leur numéro, donc $h_n = P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$. Comme chaque prisonnier agit indépendamment des autres, on a $h_n = P(A_1) \dots P(A_n)$. D'où

$$h_n = p^n.$$

Comme $p \in]0; 1[$, on en déduit que

la suite (h_n) tend vers 0 et donc que, contrairement à ce que dit l'adage, le hasard ne fait pas toujours bien les choses.

2. Les prisonniers décident d'adopter la stratégie suivante. Chaque prisonnier ouvre d'abord la boîte correspondant à son numéro. S'il y trouve son numéro, il s'arrête. Sinon il ouvre la boîte correspondant au numéro qu'il vient de trouver. S'il y trouve son numéro, il s'arrête. Sinon, il continue : il ouvre la boîte correspondant au numéro qu'il vient de trouver. Le processus se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'il trouve son numéro ou qu'il ouvre pn boîtes. C'est la stratégie « suivre ». On note σ la permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui à un numéro de boîte associe le numéro qu'elle contient.

- a) Justifier que les prisonniers sont libérés si, et seulement si, la permutation σ ne contient pas de cycle de longueur strictement supérieure à pn .

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Avec la stratégie « suivre », le prisonnier k ouvre successivement les boîtes numérotées $\sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{pn}(k)$ (il ne les ouvre pas forcément toutes s'il trouve son numéro en cours de route). Ainsi, pour que le prisonnier k trouve son numéro, il faut et suffit que k appartienne à l'ensemble $\{\sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{pn}(k)\}$, autrement dit qu'il existe $m_k \in \llbracket 1; pn \rrbracket$ tel que $\sigma^{m_k}(k) = k$. Cette condition signifie précisément que k est un point fixe de σ ou que le cycle contenant k est de longueur inférieure ou égale à pn .

Par conséquent, les prisonniers sont libérés si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a l'alternative suivante : ou bien k est un point fixe de σ , ou bien le cycle contenant k est de longueur inférieure ou égale à pn . On peut reformuler ce résultat sous la forme :

les prisonniers sont libérés si, et seulement si, la permutation σ ne contient pas de cycle de longueur strictement supérieure à pn .

- b) En déduire que la probabilité s_n que les prisonniers soient libérés vaut $s_n = 1 - \sum_{j=pn+1}^n 1/j$ et déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter.

Pour tout $j \in \llbracket np+1; n \rrbracket$, on note B_j l'événement « σ possède un cycle de longueur j ». La question précédente nous dit que

$$\begin{aligned} s_n &= P(\overline{B_{np+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}) \\ &= P(\overline{B_{np+1} \cup \dots \cup B_n}) \\ &= 1 - P(B_{np+1} \cup \dots \cup B_n). \end{aligned}$$

Or, comme $p \geq 1/2$, la permutation σ ne peut pas avoir plusieurs cycles de longueur supérieure à pn (sinon la somme des longueurs de ces cycles dépasserait n). Cela implique que les événements B_{np+1}, \dots, B_n sont deux à deux incompatibles. Il s'ensuit que

$$s_n = 1 - P(B_{np+1}) - \dots - P(B_n).$$

Pour tout $j \in \llbracket np+1; n \rrbracket$, il convient donc de déterminer la probabilité de B_j . Fixons un tel j . Pour déterminer une permutation admettant (exactement) un cycle de longueur j , on choisit j éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ pour créer ce cycle, ce qui laisse $\binom{n}{j}$ choix. Avec ces j éléments, on peut fabriquer $(j-1)!$ cycles; en effet, chaque cycle a j écritures distinctes, donc, d'après le lemme des bergers, on obtient le nombre de cycles en divisant par j le nombre de permutations des j éléments, ce qui donne $j!/j = (j-1)!$ cycles. Enfin, pour terminer, les $n-j$ éléments restants doivent être permutés, ce qui donne $(n-j)!$ choix. Il y a donc $\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)! = n!/j$ permutations avec un cycle de longueur j . En conclusion, comme il y a au total $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$P(B_j) = \frac{1}{j}.$$

On en déduit que

$$s_n = 1 - \sum_{j=np+1}^n \frac{1}{j}.$$

On a vu en cours que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

donc

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - [\ln(n) + \gamma + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty}(1)] + [\ln(np) + \gamma + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty}(1)] \\ &= 1 + \ln(p) + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty}(1). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1 + \ln(p).$$

Comme $p \geq 1/2$, on a $1 + \ln(p) \geq 1 - \ln(2)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \geq 1 - \ln(2) \approx 0,307,$$

autrement dit

avec la stratégie « suivre », les prisonniers ont plus de 30 % de chance d'être libérés.

On peut remarquer que

$$\lim_{p \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1.$$

En particulier, lorsque $p > 1/\sqrt{e}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \geq 1/2$, ce qui signifie que l'épreuve devient favorable aux prisonniers.

Remarque culturelle : _____

Le problème des prisonniers est connu depuis 2003. Il a été proposé par les chercheurs danois en informatique Peter Bro Miltersen et Anna Gál, qui étaient persuadés que, lorsque le nombre de prisonniers augmente, la probabilité de gagner tend vers 0. Leur collègue Sven Skyum les convainquit de leur erreur et leur montra que, quel que soit le nombre de prisonniers, il existe une stratégie qui leur garantit la liberté dans plus de 30 % des cas.

Les prisonniers ne pouvant pas communiquer une fois l'épreuve commencée, il semble qu'ils ne peuvent que jouer au hasard indépendamment et, en conséquence, que rien ne leur permet d'avoir collectivement mieux que ce que donne la stratégie « hasard » qui aboutit à une probabilité minimale de réussir (lorsque $p = 1/2$ et $n = 50$, on a $h_n = 1/2^{50} \approx 10^{-15}$). Cependant, ce raisonnement est faux : s'ils sont malins, les prisonniers peuvent trouver un moyen de se coordonner et faire ainsi monter leur chance de réussite au dessus de 30 %. Pour cela, il faut qu'ils s'arrangent pour perdre souvent en même temps, s'ils veulent en contrepartie pouvoir souvent gagner tous en même temps. C'est le principe de la stratégie « suivre » ! Les prisonniers ne peuvent pas communiquer, mais ils peuvent adopter des comportements corrélés et, par conséquent (et c'est là que se trouve l'erreur du raisonnement qui semblait prouver qu'on ne peut pas faire mieux que la stratégie « hasard »), ils peuvent faire des choix liés.

En revanche, ne chercher pas d'amélioration ! On peut en effet démontrer qu'il n'existe pas de stratégie qui fasse mieux que la stratégie « suivre ».

Si vous souhaitez en savoir plus sur ce problème, consultez l'article de Jean-Paul Delahaye dans le magazine Pour la Science N°465 de juillet 2016.

EXERCICE 3

Un jardinier dispose d'un grand stock de fleurs bleues et de fleurs rouges. Les fleurs bleues sont en proportion p et les rouges en proportion $q = 1 - p$ (où $p \in [0; 1]$). Il en choisit au hasard nm (avec $n, m \in \mathbb{N}^*$) et les plante, également au hasard, dans un parterre rectangulaire avec n lignes et m colonnes. On dit qu'une ligne ou une colonne est bleue lorsqu'elle est constituée uniquement de fleurs bleues. On note $X_{n,m}$ le nombre de lignes bleues et $Y_{n,m}$ le nombre de colonnes bleues.

1. Préciser les lois de $X_{n,m}$ et $Y_{n,m}$. Donner les espérances et les variances. Les variables $X_{n,m}$ et $Y_{n,m}$ sont-elles indépendantes ?

Pour qu'une ligne soit bleue, il faut que le jardinier ait planté, successivement et indépendamment, m fleurs bleues dans cette ligne. Comme la probabilité de choisir chaque fleur bleue vaut p , la probabilité que la ligne soit bleue vaut p^m .

Dès lors, $X_{n,m}$ compte le nombre de succès (obtenir une ligne bleue) dans une suite de n lignes bleues indépendantes avec une probabilité de succès p^m , donc

$$X_{n,m} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p^m)$$

et

$$E(X_{n,m}) = np^m, \quad V(X_{n,m}) = np^m(1 - p^m).$$

De même, on a

$$Y_{n,m} \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p^n)$$

et

$$E(Y_{n,m}) = mp^n, \quad V(Y_{n,m}) = mp^n(1 - p^n).$$

L'événement $(X_{n,m} = n, Y_{n,m} = 0)$ est impossible puisque si toutes les lignes sont bleues, toutes les colonnes aussi. Par ailleurs, $P(X_{n,m} = n)$ et $P(Y_{n,m} = 0)$ ne sont pas nuls. Par conséquent, on a

$$P(X_{n,m} = n, Y_{n,m} = 0) \neq P(X_{n,m} = n)P(Y_{n,m} = 0),$$

ce qui démontre que

$$X_{n,m} \text{ et } Y_{n,m} \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

2. a) Pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on note C_j l'événement « la j -ème colonne du parterre est bleue » et on pose $A_j = (X_{n,m} = 0) \cap C_j$.

$\alpha]$ Soit $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$. On considère k nombres distincts de $\llbracket 1; m \rrbracket$ notés j_1, \dots, j_k . Démontrer que $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = p^{kn}(1 - p^{m-k})^n$.

Notons $X'_{n,m-k}$ le nombre de lignes bleues dans le parterre privé des colonnes numérotées j_1, \dots, j_k . On a

$$\begin{aligned} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) &= P((X_{n,m} = 0) \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_k}) \\ &= P((X'_{n,m-k} = 0) \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_k}) \\ &= P(X'_{n,m-k} = 0)P(C_{j_1}) \dots P(C_{j_k}) \quad \text{par } \perp \\ &= P(X_{n,m-k} = 0)P(C_{j_1}) \dots P(C_{j_k}) \quad \text{car } X'_{n,m-k} \text{ et } X_{n,m-k} \\ &\quad \text{ont la même loi} \\ &= (1 - p^{m-k})(p^n)^k \quad \text{car } X_{n,m-k} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p^{m-k}) \\ &\quad \text{et } P(C_{j_1}) = \dots = P(C_{j_k}) = p^n \end{aligned}$$

donc

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = p^{kn}(1 - p^{m-k})^n.$$

β] En déduire l'expression de $P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} = 0)$ à l'aide d'une somme.

On a

$$\begin{aligned}
 P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} \neq 0) &= P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) \quad \text{formule du crible} \\
 &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} p^{kn} (1 - p^{m-k})^n \\
 &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} p^{kn} (1 - p^{m-k})^n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} = 0) &= P(X_{n,m} = 0) - P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} \neq 0) \\
 &= (1 - p^m)^n - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} p^{kn} (1 - p^{m-k})^n \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} p^{kn} (1 - p^{m-k})^n.
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} = 0) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} p^{kn} (1 - p^{m-k})^n.$$

Remarque : En développant $(1 - p^{m-k})^n$ avec la formule du binôme, on obtient une formule symétrique en k et ℓ :

$$P(X_{n,m} = 0, Y_{n,m} = 0) = \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0;n \rrbracket \times \llbracket 0;m \rrbracket} (-1)^{k+\ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell} p^{nk+\ell m-k\ell}.$$

b) Soient $(x, y) \in \llbracket 0;n \rrbracket \times \llbracket 0;m \rrbracket$. Exprimer $P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y)$ à l'aide de la probabilité $P(X_{n-x,m-y} = 0, Y_{n-x,m-y} = 0)$ et en déduire l'expression de $P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y)$ à l'aide d'une somme.

Évaluons la probabilité de l'événement $(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y)$.

Pour réaliser cet événement, on commence par choisir x lignes parmi n et y colonnes parmi m pour y placer des fleurs bleues. On a $\binom{n}{x} \times \binom{m}{y}$ façons de faire ces choix.

Ces x lignes et ces y colonnes définissent $xm + ny - xy$ emplacements pour des fleurs bleues. En effet, on compte xm positions pour les x lignes, ny positions pour les y colonnes et, ce faisant, on a compté deux fois les xy positions situées aux intersections de ces x lignes et y colonnes, ce qui justifie la soustraction de xy . Comme chaque fleur bleue est choisie avec probabilité p , indépendamment des autres, la probabilité de remplir ces lignes et colonnes de fleurs bleues est $p^{xm+ny-xy}$.

Il nous reste alors un parterre « extrait » constitué de $n - x$ lignes et $m - y$ colonnes. La probabilité de le remplir sans créer de nouvelles lignes bleues ou de nouvelles colonnes bleues est $P(X_{n-x,m-y} = 0, Y_{n-x,m-y} = 0)$.

Par indépendance, on en déduit que

$$P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) = \binom{n}{x} \binom{m}{y} p^{xm+ny-xy} P(X_{n-x,m-y} = 0, Y_{n-x,m-y} = 0).$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, il vient

$$P(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) = \binom{n}{x} \binom{m}{y} p^{xm+ny-xy} \sum_{k=0}^{m-y} (-1)^k \binom{m-y}{k} p^{k(n-x)} (1 - p^{m-y-k})^{n-x}.$$

3. a) À l'aide de la loi du couple $(X_{n,m}, Y_{n,m})$ déterminée à la question précédente, démontrer que $\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = nmp^{n+m-1}q$.

On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^n xP(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) \\
&= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} \binom{m}{y} p^{x+m+n-y-xy} \sum_{k=0}^{m-y} (-1)^k \binom{m-y}{k} p^{k(n-x)} (1-p^{m-y-k})^{n-x} \\
&= \binom{m}{y} p^{ny} \sum_{k=0}^{m-y} (-1)^k \binom{m-y}{k} p^{kn} \underbrace{\sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^{(m-y-k)x} (1-p^{m-y-k})^{n-x}}_{\text{espérance de } \mathcal{B}(n, p^{m-y-k})} \\
&= \binom{m}{y} p^{ny} \sum_{k=0}^{m-y} (-1)^k \binom{m-y}{k} p^{kn} np^{m-y-k} \\
&= n \binom{m}{y} p^{m+(n-1)y} \sum_{k=0}^{m-y} \binom{m-y}{k} (-p^{n-1})^k \\
&= n \binom{m}{y} p^{m+(n-1)y} (1-p^{n-1})^{m-y} \quad \text{binôme,}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=0}^n \sum_{y=0}^m xyP(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) \\
&= \sum_{y=0}^m y \left(\sum_{x=0}^n xP(X_{n,m} = x, Y_{n,m} = y) \right) \\
&= \sum_{y=0}^m y n \binom{m}{y} p^{m+(n-1)y} (1-p^{n-1})^{m-y} \\
&= np^m \underbrace{\sum_{y=0}^m y \binom{m}{y} p^{(n-1)y} (1-p^{n-1})^{m-y}}_{\text{espérance de } \mathcal{B}(m, p^{n-1})} \\
&= np^m mp^{n-1} \\
&= nmp^{n+m-1}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) &= E(X_{n,m}Y_{n,m}) - E(X_{n,m})E(Y_{n,m}) \\
&= nmp^{n+m-1} - np^m mp^n \\
&= nmp^{n+m-1}(1-p),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = nmp^{n+m-1}q.}$$

- b) Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (respectivement $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$) on note U_i (respectivement V_j) la variable indicatrice de l'événement L_i : « la ligne i est bleue » (respectivement C_j : « la colonne j est bleue »). Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, déterminer les lois de U_i , V_j et U_iV_j . Retrouver ainsi la valeur de $\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m})$.

Soient $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$. On a déjà justifié que $P(L_i) = p^m$ et $P(C_j) = p^n$. Dès lors, on a clairement

$$\boxed{U_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^m) \quad \text{et} \quad V_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n).}$$

Par ailleurs, U_iV_j est l'indicatrice de l'événement $L_i \cap C_j$. Pour que la i -ème ligne et la j -ème colonne soient bleues, on choisit (successivement et indépendamment) $n+m-1$ fleurs bleues pour les $n+m-1$ emplacements de ces deux rangées (le -1 est là pour ne pas compter deux fois l'emplacement situé à l'intersection des deux rangées). Par suite, on a $P(L_i \cap C_j) = p^{n+m-1}$, ce qui nous dit que

$$\boxed{U_iV_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p^{n+m-1}).}$$

Il s'ensuit que

$$\text{Cov}(U_i, V_j) = E(U_i V_j) - E(U_i)E(V_j) = p^{n+m-1} - p^m p^n = p^{n+m-1} q.$$

Or

$$X_{n,m} = \sum_{i=1}^n U_i \quad \text{et} \quad Y_{n,m} = \sum_{j=1}^m V_j,$$

donc, d'après la bilinéarité de la covariance, on a

$$\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(U_i, V_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p^{n+m-1} q = nmp^{n+m-1} q.$$

On a bien retrouvé que

$$\boxed{\text{Cov}(X_{n,m}, Y_{n,m}) = nmp^{n+m-1} q.}$$

EXERCICE 4

Soient K un corps commutatif, X un ensemble non vide et n un entier naturel non nul. Soient f_1, \dots, f_n des applications de X vers K . On appelle déterminant de Casorati de (f_1, \dots, f_n) l'application $C_{(f_1, \dots, f_n)} : X^n \longrightarrow K$ définie par $C_{(f_1, \dots, f_n)} : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. En l'absence d'ambiguïté, on pose $C_n = C_{(f_1, \dots, f_n)}$.

1. Dans cette question, on pose $f_1 : x \longmapsto \cos(x)$, $f_2 : x \longmapsto \sin(x)$ et $f_3 : x \longmapsto \sin(x + \pi/17)$. Calculer C_2 et C_3 .

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$C_2(x, y) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(y) \\ \sin(x) & \sin(y) \end{vmatrix} = \cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y) = \sin(x - y),$$

donc

$$C_2 : (x, y) \longmapsto \sin(x - y).$$

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} C_3(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \sin(x) & \sin(y) & \sin(z) \\ \sin(x + \pi/17) & \sin(y + \pi/17) & \sin(z + \pi/17) \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \sin(x) & \sin(y) & \sin(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \cos(\pi/17)L_2 - \sin(\pi/17)L_1 \end{matrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$C_3 : (x, y, z) \longmapsto 0.$$

2. a) On suppose que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée (dans le K -espace vectoriel des applications de X dans K). Démontrer que C_n est l'application nulle.

Comme (f_1, \dots, f_n) est liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = \tilde{0}$. Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, les colonnes U_1, \dots, U_n de la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ sont liées par la relation de dépendance linéaire $\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n = 0_{n,1}$, ce qui donne $C_n(x_1, \dots, x_n) = \det (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0$. Donc

si la famille (f_1, \dots, f_n) est liée, C_n est l'application nulle.

- b) Réciproquement, on suppose que C_n est l'application nulle. On veut démontrer que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.

$\alpha]$ Traiter le cas où C_1 est l'application nulle.

Supposons que C_1 est l'application nulle. On a alors $\forall x \in X, f_1(x) = 0$, c'est-à-dire $f_1 = \tilde{0}$. Dès lors, la famille (f_1, \dots, f_n) est liée. Donc

si C_1 est l'application nulle, alors la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.

- $\beta]$ Supposons que $C_1 \neq \tilde{0}$. On pose $r = \min\{k \in \llbracket 2; n \rrbracket : C_k = \tilde{0}\}$. Soit $(u_1, \dots, u_{r-1}) \in X^{r-1}$ tel que $C_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \neq 0$. À l'aide de l'application $\varphi : x \longmapsto C_r(u_1, \dots, u_{r-1}, x)$, établir que (f_1, \dots, f_r) est liée et conclure.

On sait que l'ensemble $\{k \in \llbracket 2; n \rrbracket : C_k = \tilde{0}\}$ est une partie de \mathbb{N} qui est non vide (puisque n y appartient), donc $r = \min\{k \in \llbracket 2; n \rrbracket : C_k = \tilde{0}\}$ existe. Comme C_{r-1} n'est pas l'application nulle (cela découle de la définition de r et du fait que C_1 n'est pas l'application nulle), il existe bien $(u_1, \dots, u_{r-1}) \in X^{r-1}$ tel que $C_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \neq 0$.

Considérons l'application $\varphi : X \longrightarrow K$ définie, pour tout $x \in X$, par

$$\varphi(x) = C_r(u_1, \dots, u_{r-1}, x) = \begin{vmatrix} f_1(u_1) & f_1(u_2) & \cdots & f_1(u_{r-1}) & f_1(x) \\ f_2(u_1) & f_2(u_2) & \cdots & f_2(u_{r-1}) & f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_r(u_1) & f_r(u_2) & \cdots & f_r(u_{r-1}) & f_r(x) \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, on obtient, pour tout $x \in X$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_{i,r} f_i(x),$$

où $\alpha_{i,r} \in K$ est le cofacteur d'indice (i, r) . Comme C_r est la fonction nulle (d'après la définition de r), il vient

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i,r} f_i = \tilde{0}.$$

Or

$$\alpha_{r,r} = \begin{vmatrix} f_1(u_1) & f_1(u_2) & \cdots & f_1(u_{r-1}) \\ f_2(u_1) & f_2(u_2) & \cdots & f_2(u_{r-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r-1}(u_1) & f_{r-1}(u_2) & \cdots & f_{r-1}(u_{r-1}) \end{vmatrix} = C_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \neq 0,$$

donc l'égalité $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,r} f_i = \tilde{0}$ est une relation de dépendance linéaire, ce qui démontre que

$$(f_1, \dots, f_r) \text{ est liée.}$$

Dès lors, (f_1, \dots, f_n) est liée en tant que sur-famille d'une famille liée. On a ainsi démontré que

$$\text{si } C_n \text{ est l'application nulle, alors la famille } (f_1, \dots, f_n) \text{ est liée.}$$

3. On suppose maintenant que (f_1, \dots, f_n) est libre. D'après ce qui précède, il existe $(u_1, \dots, u_n) \in X^n$ tel que $C_n(u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $F_j : X \rightarrow K$ la j -ème application partielle de C_n en (u_1, \dots, u_n) , c'est-à-dire $F_j : x \mapsto C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_n)$.

- a) Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Démontrer qu'il existe $a_{1,j}, \dots, a_{n,j} \in K$ tels que $F_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$.

Pour tout $x \in X$, on développe le déterminant

$$F_j(x) = C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} f_1(u_1) & \cdots & f_1(u_{j-1}) & f_1(x) & f_1(u_{j+1}) & \cdots & f_1(u_n) \\ f_2(u_1) & \cdots & f_2(u_{j-1}) & f_2(x) & f_2(u_{j+1}) & \cdots & f_2(u_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(u_1) & \cdots & f_n(u_{j-1}) & f_n(x) & f_n(u_{j+1}) & \cdots & f_n(u_n) \end{vmatrix}$$

par rapport à sa j -ème colonne, ce qui donne

$$F_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i(x)$$

où $a_{i,j}$ désigne le cofacteur d'indice (i, j) , c'est-à-dire

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} f_1(u_1) & \cdots & f_1(u_{j-1}) & f_1(u_{j+1}) & \cdots & f_1(u_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i-1}(u_1) & \cdots & f_{i-1}(u_{j-1}) & f_{i-1}(u_{j+1}) & \cdots & f_{i-1}(u_n) \\ f_{i+1}(u_1) & \cdots & f_{i+1}(u_{j-1}) & f_{i+1}(u_{j+1}) & \cdots & f_{i+1}(u_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(u_1) & \cdots & f_n(u_{j-1}) & f_n(u_{j+1}) & \cdots & f_n(u_n) \end{vmatrix}.$$

On constate que ces cofacteurs ne dépendent pas de x , donc on a bien démontré que

$$\text{il existe des scalaires } a_{1,j}, \dots, a_{n,j} \in K \text{ tels que } \forall x \in X, F_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i(x).$$

- b) Démontrer que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible et en déduire que les familles (f_1, \dots, f_n) et (F_1, \dots, F_n) engendrent le même sous-espace vectoriel de K^X .

D'après la question précédente, la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la comatrice de la matrice dont le déterminant est $C_n(u_1, \dots, u_n)$. Comme ce déterminant est non nul, la formule d'inversion vue en cours (c'est-à-dire la formule $M({}^t \text{Com } M) = ({}^t \text{Com } M)M = \det(M)I_n$, valide pour tout $M \in \mathcal{M}_n(K)$) nous dit que

$$\boxed{\text{la matrice } (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est inversible.}}$$

Les relations $F_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ nous disent que

$$\text{Vect}(F_1, \dots, F_n) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

Par ailleurs, comme la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible, le système donnant les F_j en fonctions des f_i peut être inversé, ce qui permet d'écrire les f_i en fonction des F_j . D'où

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(F_1, \dots, F_n).$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \text{Vect}(F_1, \dots, F_n).}$$

- c) Soient g_1, \dots, g_n des applications de X vers K . On pose $D_n = C_{(g_1, \dots, g_n)}$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $D_n = \lambda C_n$ si, et seulement si, $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

On procède par double implication.

\Leftarrow Supposons que $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$. Il existe alors une famille de scalaires $(\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on ait $g_i = \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} f_j$. Dès lors, on a $D_n = \det((\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) \cdot C_n$. On distingue deux cas.

Si $C_n = \tilde{0}$, on a vu que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée et donc que $\text{rg}(f_1, \dots, f_n) < n$. Comme $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, il vient $\text{rg}(g_1, \dots, g_n) = \text{rg}(f_1, \dots, f_n) < n$. La famille (g_1, \dots, g_n) est donc également liée, ce qui démontre que $D_n = \tilde{0}$. Dans ce cas, en posant $\lambda = 1$, on a $D_n = \lambda C_n$.

Si $C_n \neq \tilde{0}$, on sait que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre et donc que $\text{rg}(f_1, \dots, f_n) = n$. Comme $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, on a $\text{rg}(g_1, \dots, g_n) = \text{rg}(f_1, \dots, f_n) = n$. La famille (g_1, \dots, g_n) est donc également libre, ce qui démontre que $D_n \neq \tilde{0}$. Dans l'égalité $D_n = \det((\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) \cdot C_n$, on est alors certain que $\det((\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) \neq 0$. En posant $\lambda = \det((\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) \in K^*$ on a donc $D_n = \lambda C_n$.

\Rightarrow Supposons réciproquement qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $D_n = \lambda C_n$. Considérons alors les applications F_1, \dots, F_n définies précédemment ainsi que leurs homologues G_1, \dots, G_n relatives à g_1, \dots, g_n . La relation $D_n = \lambda C_n$ implique alors que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $G_j = \lambda F_j$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{Vect}(g_1, \dots, g_n) &= \text{Vect}(G_1, \dots, G_n) && \text{d'après b)} \\ &= \text{Vect}(F_1, \dots, F_n) && \text{car } \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, G_j = \lambda F_j \\ &= \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) && \text{d'après b)}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } D_n = \lambda C_n \text{ si, et seulement si, } \text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).}$$