MP*1

Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce problème, E est un espace vectoriel réel de dimension finie n. On munit E d'un produit scalaire euclidien $\langle\ ,\ \rangle$, de la norme associée $\|\ \|$, et de la topologie provenant de cette norme. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, on prendra pour $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique. La boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ de E est notée B_r.

Le but de ce problème est l'étude des sous-groupes du groupe E, pour la loi + bien sûr. Si G est un tel sous-groupe, on note E_G le sous-espace de E engendré par G, et $r(G)$ la dimension de E_G, appelée *rang* de G.

On rappelle que si $G_1, \ldots, G_p$ sont des sous-groupes de E, il en est de même de

$$G_1 + \cdots + G_p = \{g_1 + \cdots + g_p,\ (g_1, \ldots, g_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p\}\,.$$

En particulier, si $a_1, \ldots, a_p$ sont des vecteurs de E, la somme : $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_p$ est un sous-groupe de E.

Si $x \in E$, soit :

$$\begin{array}{cccc} \theta_x : & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \langle x, y\rangle \end{array}.$$

On rappelle que :

$$\begin{array}{cccc} \theta : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \theta_x \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur E^*.

Si X est une partie de E, on dit que X est *discrète* (sous-entendu, dans E) si et seulement si tout point de X est isolé, i.e, si et seulement si pour tout x de X, il existe un voisinage V de x dans E tel que $X \cap V = \{x\}$.

I. Généralités

1. Montrer que, si G est un sous-groupe de E, il en est de même de $\overline{G}$.

2. Soit G un sous-groupe de E.

   a) Montrer que G est discret si et seulement si 0 est un point isolé de G.

   b) Montrer que si G est discret, G est fermé dans E.

   c) Si G est discret et si K est un compact de E, montrer que $G \cap K$est fini.

3. Ici $E = \mathbb{R}$.

   a) Montrer que les sous-groupes discrets de E sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

   b) Si G est un sous-groupe non discret de E, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

   On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur ε coupe G.

   c) Soient α et β dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ est discret si et seulement si β/α est dans $\mathbb{Q}$.

II. Décomposition d'un sous-groupe fermé de E

Dans les questions 4 et 5, G est un sous-groupe fermé de E.

4. On suppose G non discret. Il existe donc une suite $(x_p)_{p \geq 1}$ d'éléments de $G \setminus \{0\}$ convergeant vers 0.

   En considérant une valeur d'adhérence de la suite $(x_p / \|x_p\|)_{p \geq 1}$, montrer que G contient une droite vectorielle.

5. Si V_G contient au moins une droite vectorielle, on note V_G la réunion des droites vectorielles contenues dans G. Sinon, on convient que $V_G = \{0\}$.

   a) Montrer que V_G est un sous-espace vectoriel de E contenu dans G, puis que tout sous-espace vectoriel de E contenu dans G est contenu dans V_G.

   Dans la suite, la dimension de V_G est notée $d(G)$.

   b) Soit S un supplémentaire de V_G dans E. Montrer que $G = V_G + (G \cap S)$ et que $G \cap S$ est discret.

6. Montrer que, si P est une partie de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

   - P est un sous-groupe fermé de E ;

   - il existe un sous-espace vectoriel F de E et un sous-groupe discret D de E tels que $F \cap E_D = \{0\}$ et $P = F + D$.

   On est ainsi ramené à classer les sous-groupes discrets de E, ce qui est l'objet de la partie suivante.

III. Sous-groupes discrets de E

7. Ici, $E = \mathbb{R}^2$, et p est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ défini par :

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x.$$

   Donner un exemple de sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ dont l'image par p ne soit pas discrète dans $\mathbb{R}$.

8. Soit ici G un groupe discret de E non réduit à $\{0\}$; on pose $r(G) = r$.

a) Justifier l'existence de $g_1, \dots, g_r$ dans G tels que $(g_1, \dots, g_r)$ soit une base de E_G. Si $x \in E_G$, on note $\ell(x)$ la dernière coordonnée de x sur cette base.

b) Soit

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i \ ; \ (\lambda_1, \dots \lambda_{r-1}) \in [0,1[^{r-1} \text{ et } \lambda_r \in [0,1] \right\}.$$

Montrer que $P \cap G$ est fini. En déduire qu'il existe h dans $P \cap G$ tel que :

- $\ell(h) > 0$,
- $\forall g \in G,\ \ell(g) > 0 \ \Rightarrow\ \ell(g) \geq \ell(h)$.

c) Soit W le sous-espace de E engendré par $g_1, \dots, g_{r-1}$. Si $g \in G$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $g - \alpha h$ appartienne à $W \cap G$.

9. Montrer, si $1 \leq r \leq n$, que les sous-groupes discrets de E de rang r sont exactement les $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_r$ où $(a_1, \dots, a_r)$ est une famille libre de vecteurs de E.

Si $(a_1, \dots, a_r)$ est libre et si $G = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_r$, on dit que $(a_1, \dots, a_r)$ est une $\mathbb{Z}$-base de G.

10. a) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M)$ est dans $\{-1, 1\}$. On note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ \det(M) \in \{-1, 1\}\}.$$

b) On appelle *réseau* de E tout sous-groupe discret G de E de rang n.

Soient G un réseau de E, $(a_1, \dots, a_n)$ une $\mathbb{Z}$-base de G et $(b_1, \dots, b_n)$ une famille de vecteurs de E. Si $1 \leq i \leq n$, on décompose b_i sur $(a_1, \dots, a_r)$ en :

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} a_j.$$

Montrer que $(b_1, \dots, b_n)$ est une $\mathbb{Z}$-base de G si et seulement si la matrice

$$P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

c) On fixe une base orthonormée e de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et on oriente E par e.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E, quelle est l'interprétation géométrique de $\det_e(x_1, \dots, x_n)$? Que déduit-on alors de b) ?

11. a) Montrer que les endomorphismes continus du groupe $(E,+)$ sont les éléments de $\mathcal{L}(E)$.

b) On munit l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ de la relation d'équivalence définie par $G_1 \sim G_2$ s'il existe un automorphisme du groupe topologique[1] $(E,+)$ tel que $f(G_1) = G_2$. Déterminer les classes de cette relation et préciser leur nombre.

IV. Dualité pour les sous-groupes de E

Soit G un sous-groupe de E. On appelle *associé* de G l'ensemble :

$$G^o = \{y \in E \ ; \ \forall x \in G, \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

12. a) Vérifier que G^o est un sous-groupe fermé de E.

b) Reconnaître F^o si F est un sous-espace vectoriel de E.

c) Montrer que G est dense dans E si et seulement si

$$G^o = \{0\}\,[2].$$

13. Ici $E = \mathbb{R}^n$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels et α le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z}^n + \mathbb{R}\alpha$ est dense dans E si et seulement si :

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i = 0\right\} = \{(0, \ldots, 0)\},$$

c'est-à-dire si et seulement si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

b) Si la condition du a) est satisfaite, calculer, pour $(a_1, \ldots, a_n) \in {\mathbb{R}^+}^n$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n a_i \cos(\alpha_i t + \varphi_i).$$

c) Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}\alpha$ est dense dans E si et seulement si :

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i \in \mathbb{Z}\right\} = \{(0, \ldots, 0)\},$$

c'est-à-dire si et seulement si $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

---

1. C'est-à-dire un endomorphisme de $(E,+)$ qui est continu et dont la réciproque est continue.
2. Critère de Kronecker, 1884

d) Montrer que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a + c\sqrt{2} \\ b + c\sqrt{3} \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^2$.

e) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des vecteurs α de E tels que $\mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}\alpha$ soit dense dans E est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de E, c'est-à-dire que cet ensemble est un G_δ dense de E.

On admettra le théorème de Baire : si (E,d) est un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense (et est donc un $\mathcal{G}_\delta$ dense de E[3].

14. Soit G un sous-groupe fermé de E.

a) Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une base $(a'_1, \ldots, a'_n)$ de E telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad \langle a_i, a'_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

b) Calculer $d(G^o)$ et $r(G^o)$ en fonction de $n, d(G)$ et $r(G)$.

15. Soit G un sous-groupe de E.

a) Si G est fermé, montrer $(G^o)^o = G$.

b) Dans le cas général, montrer :

$$(G^o)^o = \overline{G}.$$

c) Quelle est l'adhérence, si $E = \mathbb{R}^3$, de :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a + d\sqrt{2} \\ b + d\sqrt{3} \\ c + d(\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix}\ ;\ (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \right\} ?$$

3. Par définition, un G_δ d'un espace métrique est une intersection dénombrable d'ouverts de cet espace.