

Mathématiques X

Ulysse Mounoud

Exercice 1

Soient $n \geq 1$ un naturel, x_1, x_2, \dots, x_n des réels distincts, et m_1, m_2, \dots, m_n des réels strictement positifs. On pose la fraction rationnelle $G(X) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X-x_i}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\{x \in \mathbb{R} \mid G(x) > \lambda\}$ est une réunion finie d'intervalles, et que si on note $L(\lambda)$ la somme des longueurs de ces intervalles, $L(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n m_i$.

Exercice 2

Soit P un polynôme réel scindé sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 3

Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels distincts et A la matrice de terme général $A = (\exp(-(x_i - x_j)^2))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que A est symétrique définie positive.

Indication : Calculer $\int_{\mathbb{R}} \exp(-(x - x_i)^2) \exp(-(x - x_j)^2) dx$

Exercice 4

Soient a, b, c trois points du plan non alignés. Montrer que $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de a, b, c .

Comment montrer que dans \mathbb{C} les racines de P' sont dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des racines de P ?

Déroulé

Le premier exercice n'est finalement pas très difficile, le deuxième est classique et avait déjà été traité en préparation (l'examineur a dû comprendre que je le connaissais déjà, il faut utiliser P'/P). Pour le troisième il restait peu de temps, donc il m'a directement donné l'indication, et ne m'a même pas fait faire le calcul de l'intégrale finalement. Il m'a demandé comment on se ramenait à l'étude de la liberté d'une certaine famille de fonctions et m'a fait faire cette étude. Pour le dernier exercice, je me suis ramené au cas où les points étaient $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Pour la question sur le théorème de Gauss-Lucas j'ai dit que tous les coefficients barycentriques obtenus dans la démonstration étaient strictement positifs. Si une des racines de P' est sur un segment extérieur du polygône défini par les racines de P , on considère une forme linéaire non nulle de noyau la droite qui prolonge le segment. On obtient une contradiction, sauf dans le cas où toutes les racines sont alignées (je n'ai pas évoqué ce cas pendant l'oral).

L'examineur semblait bienveillant, il suivait attentivement l'oral et était toujours prêt à me diriger sur la bonne piste. Les exercices ne demandaient pas de réflexion poussée ou de longs calculs, donc je pense qu'il était attendu que le candidat en traite plusieurs et soit réactif (pour les deux derniers je n'ai presque rien écrit).