Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths U
— *NOM Prénom* : KIKI Merchrist

Énoncés des exercices

Exercice 1

Soit $(a_i)_{i\geqslant 1}$, $(b_i)_{i\geqslant 1}$, $(c_i)_{i\geqslant 1}$ trois suites réelles positives telles que $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n + c_n$. On suppose que $\sum c_n$. Montrer que $(a_i)_{i\geqslant 1}$ converge.

Exercice 2

P= $\prod\limits_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ où $\forall i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $\mid \alpha_i \mid < 1$.
On suppose que si z $\in \mathbb{U}$ alors $\mid P(z) \mid \leqslant 1$.
Montrer que P(z)=z^n

Remarques sur l'oral

Examinateur très sympa ; il m'a donné du chocolat et une bouteille d'eau quand je suis arrivé. En plus la salle était climatisée.

Exercice 1 pas particulièrement dur et à la portée de tous si on s'y prend bien. Il y avait une erreur au début donc j'ai perdu du temps à réfléchir sur un énoncé faux. Au cours de l'oral il m'a demandé de démontrer que cva entraîne cv (utiliser l'équivalence entre suites de Cauchy et suites convergentes sur les sommes partielles). L'exercice 2 était donné en fin d'oral. J'ai eu 5mn de réflexion, donc je n'ai pas pu le traiter en tant que tel. L'idée est de démontrer une minoration du genre $\mid P(z) \mid > 1+\epsilon$ sur le cercle unité si les $\alpha_i \neq 0$ et donc de conclure que ça ne va pas. (c'est juste une idée)

Étapes de la résolution de l'exercice 1

1. Supposer que $\sum b_n$ converge.
2. Montrer alors que $(a_i)_{i\geqslant 1}$ est bornée.
3. Montrer ensuite qu'elle admet une unique valeur d'adhérence.
4. Montrer que $\sum b_n$ converge.

PS : c'est la démarche de résolution que j'ai proposée, il y a peut être un autre moyen mais il était partant pour cette démarche. La seule difficulté réside dans la démonstration du 3. Une esquisse de preuve pour ceux qui veulent :

On suppose donc par l'absurde qu'il y a deux valeurs l<$l^{'}$, on considère des boules disjointes centrées respectivement en l et $l^{'}$, on construit des a_{n_i} et a_{m_i} de la manière suivante : a_{n_i} est dans la boule centrée en l, a_{m_i} est dans la boule centrée en $l^{'}$, les suites (n_i) et (m_i) sont strictement croissantes et vérifient $m_i > n_i$. On écrit ensuite pour tout i que $a_{m_i} - a_{n_i} \leqslant \sum\limits_{k=n_i+1}^{m_i} \mid d_k \mid$ où $d_k = c_k - b_k$ et $\sum d_k$ absolument convergente par hypothèse et donc $0 \leqslant a_{m_i} - a_{n_i} \leqslant \sum\limits_{k=n_i+1}^{+\infty} \mid d_k \mid \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la contradiction (la positivité de $a_{m_i} - a_{n_i}$ vient de la construction).