Équations différentielles correction

Exercice 1

1. *Une équation différentielle est de Bernoulli si elle est de la forme* $(B):\ a(t)y'+b(t)y+c(t)y^2=0$ *où* a,b,c *sont trois fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On rencontre fréquemment ce type d'équation différentielle en sciences physiques, en biologie (dynamique des populations), en géologie, en économie, en chimie, etc. L'objet de cette question est de proposer, sur l'exemple de la propagation d'une rumeur, trois méthodes indépendantes qui permettent de déterminer les solutions (qui ne s'annulent pas) d'une équation de Bernoulli. On modélise la manière dont une rumeur se répand en considérant que sa vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la proportion* $y(t)\in\,]0;1[$ *d'individus qui sont au courant de la rumeur à l'instant* t *par la fraction de ceux qui, au contraire, ne le sont pas. Ainsi, sous l'hypothèse que* $y:\mathbb{R}_+\longrightarrow\,]0;1[$ *est dérivable, il existe* $k>0$ *telle que* y *satisfait l'équation différentielle, dite de la rumeur, suivante* $(R):\ y'=ky(1-y)$.

   a) $\alpha]$ *Résoudre* (R) *en utilisant le changement d'inconnue* $z=1/y$.

   Comme y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Comme $y=1/z$, on a $y'=-z'/z^2$. En conséquence, l'équation (R) est équivalente à

   $$-\frac{z'}{z^2}=k\frac{1}{z}\Big(1-\frac{1}{z}\Big),$$

   c'est-à-dire

   $$z'+kz=k.$$

   Les solutions de l'équation homogène $z'+kz=0$ sont toutes les fonctions de la forme $z_h=\lambda\,\mathrm{e}^{-kt}$ où λ décrit $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, l'équation $z'+kz=k$ admet la fonction constante égale à 1 comme solution particulière évidente. Il s'ensuit que les solutions de $z'+kz=k$ sont toutes les fonctions de la forme

   $$z=\lambda\,\mathrm{e}^{-kt}+1\qquad(\lambda\in\mathbb{R}_+^*).$$

   Donc, comme on a raisonné par équivalence (y réfléchir),

   $$\boxed{\text{les solutions de } (R) \text{ sont toutes les fonctions de la forme } \forall t\geqslant 0,\ y(t)=\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}^{-kt}+1} \text{ où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}_+^*.}$$

   $\beta]$ *Résoudre* (R) *en utilisant une décomposition en éléments simples.*

   Comme $\forall t\geqslant 0,\ y(t)\in\,]0;1[$, l'équation (R) est équivalente à

   $$\frac{y'}{y(1-y)}=k,$$

   c'est-à-dire, après décomposition en éléments simples du membre de gauche,

   $$\frac{y'}{y}-\frac{y'}{1-y}=k.$$

   En intégrant cette relation, on en déduit l'existence de $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

   $$\ln(y)-\ln(1-y)=kt+\ell,$$

   c'est-à-dire, en posant $\mu=\mathrm{e}^{\ell}$,

   $$\frac{y}{1-y}=\mu\,\mathrm{e}^{kt}$$

ou encore
$$y = \frac{\mu}{\mathrm{e}^{-kt} + \mu} \qquad (\mu \in \mathbb{R}_+^*).$$
Donc, comme on a raisonné par équivalence (y réfléchir),

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les solutions de } (R) \text{ sont toutes les fonctions de} \\ \text{la forme } \forall t \geqslant 0,\ y(t) = \dfrac{\mu}{\mathrm{e}^{-kt} + \mu} \text{ où } \mu \text{ décrit } \mathbb{R}_+^*.\end{array}}$$

γ] *Résoudre* (R) *en appliquant la méthode de variation de la constante à l'équation* $y' - ky = f$ *où* $f = -ky^2$.

Les solutions de l'équation homogène $y' - ky = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $y_h = c\,\mathrm{e}^{kt}$ où c décrit $\mathbb{R}_+^*$. Suivant la méthode de variation de la constante, on recherche les solutions y de $y' - ky = -ky^2$ sous la forme $y = c(t)\,\mathrm{e}^{kt}$ où c est une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, l'équation (R) est équivalente à
$$c'\,\mathrm{e}^{kt} = -kc^2\,\mathrm{e}^{2kt},$$
c'est-à-dire, puisque c ne s'annule pas,
$$-\frac{c'}{c^2} = k\,\mathrm{e}^{kt}.$$
En intégrant cette relation, on en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\frac{1}{c} = \mathrm{e}^{kt} + \lambda,$$
c'est-à-dire
$$c = \frac{1}{\lambda + \mathrm{e}^{kt}},$$
puis
$$y = \frac{\mathrm{e}^{kt}}{\lambda + \mathrm{e}^{kt}} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+^*).$$
Donc, comme on a raisonné par équivalence (y réfléchir),

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les solutions de } (R) \text{ sont toutes les fonctions de} \\ \text{la forme } \forall t \geqslant 0,\ y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{kt}}{\lambda + \mathrm{e}^{kt}} \text{ où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}_+^*.\end{array}}$$

b) *Une petite ville compte* 1000 *habitants. À huit heures du matin,* 80 *personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville est au courant. À quelle heure* 90 % *de la population saura ?*

Commençons par noter que la relation
$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = kt + \ell,$$
que nous avons démontré au α] de la question précédente, nous dit que, pour tous $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\ln\left(\frac{y(t_1)}{1-y(t_1)}\right) - \ln\left(\frac{y(t_0)}{1-y(t_0)}\right) = k(t_1 - t_0).$$
Donc, pour tous $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{\ln\left(\dfrac{y(t_2)}{1-y(t_2)}\right) - \ln\left(\dfrac{y(t_0)}{1-y(t_0)}\right)}{\ln\left(\dfrac{y(t_1)}{1-y(t_1)}\right) - \ln\left(\dfrac{y(t_0)}{1-y(t_0)}\right)}.$$
Les données du problème nous disent que
$$y(8) = 0,08 \qquad \text{et} \qquad y(12) = 0,5$$
et le but de la question est de rechercher t_2 tel que
$$y(t_2) = 0,9$$

Cela donne

$$\frac{t_2 - 8}{12 - 8} = \frac{\ln\left(\dfrac{0,9}{1 - 0,9}\right) - \ln\left(\dfrac{0,08}{1 - 0,08}\right)}{\ln\left(\dfrac{0,5}{1 - 0,5}\right) - \ln\left(\dfrac{0,08}{1 - 0,08}\right)},$$

c'est-à-dire

$$t_2 = 15,6$$

Donc

$$\boxed{\text{aux alentours de 15 h 36, la rumeur aura atteint 90 \% de la population.}}$$

2. *Une équation différentielle est de Ricatti si elle est de la forme* $(R): \ a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = d(t)$ *où* a, b, c, d *sont quatre fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On notera, en particulier, que l'équation sans second membre associée à une équation de Ricatti est une équation de Bernoulli. L'objet de cette question est de montrer, sur un exemple, comment on peut ramener l'étude d'une équation de Ricatti à celle d'une équation de Bernoulli.*

   a) *Déterminer une équation de Ricatti* (T) *satisfaite par la fonction* tan.

   On a $\tan' = 1 + \tan^2$, donc

$$\boxed{\text{tan est solution de l'équation de Ricatti } (T) \ : \ y' - y^2 = 1.}$$

   b) $\alpha]$ *On suppose connue une solution particulière* y_p *de* (R). *Quel est l'effet sur* (R) *du changement d'inconnue* $z = y - y_p$. *Résoudre* (T). *On admettra que les solutions de* (T) *ne s'intersectent pas et on ne souciera pas de l'ensemble de définition des solutions.*

   Posons $z = y - y_p$ où y_p est une solution particulière de (R). On a alors

$$y = z + y_p \qquad \text{et} \qquad y' = z' + y_p',$$

   donc

$$\begin{aligned}
(R) \quad &\Longleftrightarrow \quad a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = d(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t)(z' + y_p') + b(t)(z + y_p) + c(t)(z + y_p)^2 = d(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t)z' + a(t)y_p' + b(t)z + b(t)y_p + c(t)z^2 + 2c(t)y_p z + c(t){y_p}^2 = d(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t)z' + \big(b(t) + 2c(t)y_p\big)z + c(t)z^2 = 0 \qquad \text{car } y_p \text{ est solution de } (R).
\end{aligned}$$

   Cela démontre que

$$\boxed{\text{en posant } z = y - y_p, \text{ on ramène une équation de Ricatti à une équation de Bernoulli.}}$$

   Effectuons le changement d'inconnue $z = y - \tan(t)$ dans l'équation (T). On a

$$y = z + \tan(t) \qquad \text{et} \qquad y' = z' + 1 + \tan^2(t),$$

   donc

$$\begin{aligned}
(T) \quad &\Longleftrightarrow \quad y' - y^2 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + 1 + \tan^2(t) - \big(z + \tan(t)\big)^2 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + 1 + \tan^2(t) - z^2 - 2\tan(t)z - \tan^2(t) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad z' - z^2 - 2\tan(t)z = 0,
\end{aligned}$$

   ce qui ramène la résolution de (T) à celle de l'équation de Bernoulli

$$(B) \qquad z' - 2\tan(t)z - z^2 = 0.$$

   Comme les solutions de (T), autres que tan, n'intersectent pas tan, la fonction z ne s'annulent pas. On peut donc effectuer le changement d'inconnue $w = 1/z$. La fonction w est alors dérivable et l'on a

$$z = \frac{1}{w} \qquad \text{et} \qquad z' = -\frac{w'}{w^2},$$

   ce qui nous dit que (B) est équivalente à l'équation

$$-\frac{w'}{w^2} - 2\tan(t)\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2} = 0,$$

c'est-à-dire
$$w' + 2\tan(t)w = -1.$$
Les solutions de l'équation homogène $w' + 2\tan(t)w = 0$ sont toutes les fonctions de la forme
$$w_h = \lambda \exp\Big\{ -\int^t 2\tan(u)\,\mathrm{d}u \Big\} = \lambda \exp\{2\ln|\cos(t)|\} = \lambda\cos^2(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
Suivant la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière w_p de $w' + 2\tan(t)w = -1$ sous la forme $w_p = \lambda(t)\cos^2(t)$ où λ est une fonction dérivable. En reportant dans l'équation $w' + 2\tan(t)w = -1$, on a $\lambda'\cos^2(t) = -1$, c'est-à-dire $\lambda' = -1/\cos^2(t)$, ce qui permet de prendre $\lambda = -\tan(t)$. Donc
$$w_p = -\sin(t)\cos(t).$$
Les solutions de $w' + 2\tan(t)w = -1$ (qui n'intersectent pas tan) sont donc toutes les fonctions de la forme
$$w = \lambda\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t).$$
On en déduit que
$$z = \frac{1}{\lambda\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t)}$$
puis
$$y = \frac{1}{\lambda\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t)} + \tan(t) = \text{ calculs } = \frac{1+\lambda\tan(t)}{\lambda - \tan(t)}.$$
On a ainsi déterminé toutes les solutions de (T) sauf tan. Mais on constate que tan est obtenue en autorisant λ à prendre la valeur $+\infty$. Donc

$$\boxed{\text{les solutions de } (T) \text{ sont toutes les fonctions de la forme } y(t) = \frac{1+\lambda\tan(t)}{\lambda-\tan(t)} \text{ où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.}$$

β] *Reprendre la résolution de (T) en posant $z = \arctan(y)$ et comparer les résultats.*
On pose $z = \arctan(y)$. La fonction z est alors dérivable. On a
$$y = \tan(z) \qquad \text{et} \qquad y' = z'\big(1+\tan^2(z)\big),$$
d'où
$$\begin{aligned}
(T) \quad &\iff \quad y' - y^2 = 1\\
&\iff \quad z'\big(1+\tan^2(z)\big) - \tan^2(z) = 1\\
&\iff \quad z'\big(1+\tan^2(z)\big) = 1+\tan^2(z)\\
&\iff \quad z' = 1\\
&\iff \quad \exists c\in\mathbb{R},\ z = t+c\\
&\iff \quad \exists c\in\mathbb{R},\ y = \tan(t+c).
\end{aligned}$$
Donc

$$\boxed{\text{les solutions de } (T) \text{ sont toutes les fonctions de la forme } y(t) = \tan(t+c) \text{ où } c \text{ décrit } \mathbb{R}.}$$

En posant
$$\lambda = \frac{1}{\tan(c)} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$
on obtient
$$\tan(t+c) = \frac{\tan(t)+\tan(c)}{1-\tan(t)\tan(c)} = \frac{\tan(t)+\dfrac{1}{\lambda}}{1-\dfrac{\tan(t)}{\lambda}} = \frac{\lambda\tan(t)+1}{\lambda-\tan(t)},$$
ce qui démontre que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions trouvé à la question } \alpha] \text{ est bien le même que celui déterminé ci-dessus.}}$$