À ajouter à la fin du paragraphe 3.6, page 37 :

Exercice. On pose $P(X) = X^{11} - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ et on note $(x_i)_{1\leq i\leq 11}$ une liste des racines de P, comptées avec multiplicité. Calculer $S = \sum_{i=1}^{11} \frac{x_i}{x_i+2}$.

Seconde solution : $S = \sum_{i=1}^{11} \frac{x_i+2-2}{x_i+2} = 11 - 2\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{y_i}$, où $y_1, \ldots, y_{11}$ sont les racines de $Q(X) = P(X-2) = (X-2)^{11} - (X-2) + 1 = \sum_{i=0}^{11} q_i X^i$.

Ainsi, $S = 11 - 2\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$, où σ_j représente la j-ième fonction symétrique élémentaire des racines de Q. On en déduit que $S = 11 + 2\frac{q_1}{q_0}$, avec $q_0 = Q(0) = -2^{11} + 3$ et $q_1 = 2^{10}\binom{11}{1} - 1 = 11 \times 2^{10} - 1$.

Ainsi, $S = 11 + \frac{11 \times 2^{11} - 2}{3 - 2^{11}} = \frac{31}{3 - 2^{11}}$.

La suite est hors programme.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme à n indéterminées.
On dit que A est symétrique si et seulement si, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$A(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = A(X_1, \ldots, X_n).$$

Exemples.

- Les polynômes de Newton : $X_1^p + \cdots + X_n^p$, où $n, p \in \mathbb{N}^*$. Ils sont symétriques.
- Les polynômes symétriques élémentaires : pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\Sigma_p(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n} X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_p}$ est bien un polynôme symétrique.

  En effet, on peut écrire $\Sigma_p(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{A\subset\{1,\ldots,n\}\\|A|=p}} \prod_{a\in A} X_a$.

  Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\Sigma_p(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \sum_{\substack{A\subset\{1,\ldots,n\}\\|A|=p}} \prod_{a\in A} X_{\sigma(a)} = \sum_{\substack{A\subset\{1,\ldots,n\}\\|A|=p}} \prod_{b\in\sigma(A)} X_b$, car σ est une bijection de A dans $\sigma(A)$.

  Notons $P_p = \{A \subset \{1, \ldots, n\} \ / \ |A| = p\}$ et $\varphi_\sigma : \begin{array}{ccc} P_p & \longrightarrow & P_p \\ A & \longmapsto & \sigma(A) \end{array}$. φ_σ est une bijection dont la bijection réciproque est $\varphi_{\sigma^{-1}}$, donc par changement de variables, $\Sigma_p(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \sum_{A\in P_p} \prod_{b\in\varphi_\sigma(A)} X_b = \sum_{B\in P_p} \prod_{b\in B} X_b = \Sigma_p(X_1, \ldots, X_n)$.

Propriété. (Admise) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ et que A est un polynôme symétrique de $\mathbb{L}[X_1, \ldots, X_n]$.
Alors il existe $B \in \mathbb{L}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $A = B(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$.

Corollaire. On reprend les notations de la propriété précédente. On suppose de plus que $P \in \mathbb{L}[X]$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$, dont les racines dans $\mathbb{K}$, comptées avec multiplicité, sont notées $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Alors $A(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{L}$.

Démonstration.
D'après la propriété, $A(\beta_1, \ldots, \beta_n) = B(\Sigma_1(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, \Sigma_n(\beta_1, \ldots, \beta_n))$, donc d'après les relations de Viète, $A(\beta_1, \ldots, \beta_n) = B\Big((-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n}\Big)_{1 \leq p \leq n}$, où a_i désigne le coefficient de P de degré i. Or P et B sont à coefficients dans $\mathbb{L}$, donc $A(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{L}$. □

Exemple. Avec $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n. Il est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ (cf plus loin), donc en notant $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ses racines complexes, comptées avec multiplicité, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta_1^p + \cdots + \beta_n^p \in \mathbb{Q}$.