INTÉGRATION

Exercice 1. [$\circ$]

Déterminer une primitive de $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ sur $[-2;+\infty[$.

Exercice 2. [$\star$]

1. Soient $a > 0$ et $f : [0;a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0;a]\,,\ f(a-x) = f(x)$.
   a) Interpréter graphiquement la propriété $\forall x \in [0;a]\,,\ f(a-x) = f(x)$.
   b) Démontrer que
   $$\int_0^a x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Déterminer les valeurs de
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. [$\star$]

Soient a et b tels que $0 < a < b$. Démontrer que
$$\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln\frac{b}{a}$$

Indication : On pourra intégrer par parties et encadrer…

Exercice 4. [$\star$] (Démonstration géométrique de l'inégalité de Hölder)

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $1/p + 1/q = 1$.

1. Démontrer que $p \in\,]1,+\infty[$, $q \in\,]1,+\infty[$ et $(p-1)(q-1) = 1$.
   Dans la suite, on suppose, quitte à échanger p et q, que $p \in\,]1,2[$.
2. On pose, pour tout $x \geqslant 0$,
$$\gamma(x) = x^{p-1} \qquad \text{et} \qquad \delta(x) = x^{q-1}.$$
   a) Calculer $\gamma\circ\delta$ et $\delta\circ\gamma$. Tracer alors, sur un même graphe, les courbes des fonctions γ et δ. Pour $(u,v) \in {\mathbb{R}_+}^2$, hachurer les aires correspondant aux valeurs des fonctions
   $$\Gamma(u) = \int_0^u \gamma(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Delta(v) = \int_0^v \delta(t)\,\mathrm{d}t.$$
   b) À l'aide d'un argument géométrique, en déduire que
   $$\forall u,v \in \mathbb{R}_+, \qquad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\cdot$$
3. Démontrer que pour tout couple (f,g) de fonctions continues et strictement positives sur un segment $[a,b]$, on a l'inégalité, dite de Hőlder,
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b g(t)^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$
4. Qu'obtient-on dans le cas $p = 2$?

Exercice 5. [$\star$]

On pose

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$$

1. Justifier l'existence de f. Quelle est sa régularité ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide d'un encadrement de $f(x)$ pour $x > 0$, déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Préciser également la limite de $f(x)/x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on graphiquement ?

Exercice 6. [$\star$]

Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que g tend également vers ℓ en $+\infty$.
2. a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. On note encore g le prolongement ainsi obtenu. Préciser $g(0)$.
   b) On suppose que f est dérivable en 0. Démontrer que g est également dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

Exercice 7. [$\star$]

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \exp\left(\frac{i}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. *On pourra introduire la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(x) = x^2 f(x)$ puis démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et conclure en faisant le lien entre f, g et la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(x) = xf(x)$.*
2. Démontrer que la fonction $|f|$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que les fonctions f^2, $\Re\mathrm{e}(f^2)$ et $\Im\mathrm{m}(f^2)$ admettent chacune des primitives sur $\mathbb{R}$ mais que ce n'est pas le cas ni de $\Re\mathrm{e}(f)^2$ ni de $\Im\mathrm{m}(f)^2$.

Exercice 8. [★]

Soient $n \geqslant 0$ et $t \in [-1;1]$. On pose

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{t + i\sqrt{1-t^2}\cos\theta\}^n \,\mathrm{d}\theta$$

et l'on note

$$f_t(\theta) = t + i\sqrt{1-t^2}\cos\theta.$$

1. Démontrer que
$$|L_n(t)| \leqslant 1.$$

2. On pose
$$c = \sqrt{\frac{1+t}{2}} \qquad \text{et} \qquad s = \sqrt{\frac{1-t}{2}}.$$

   a) Démontrer que, pour tout $\theta \in [0;2\pi]$,
   $$f_t(\theta) = (c + is\,\mathrm{e}^{i\theta})(c + is\,\mathrm{e}^{-i\theta}).$$

   b) En déduire que, pour tout $\theta \in [0;2\pi]$,
   $$f_t(\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}c^{2n-k-\ell}(is)^{k+\ell}\,\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}.$$

   c) En conclure que
   $$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^k c^{2n-2k}s^{2k}$$
   puis que
   $$L_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^k(1+t)^{n-k}(1-t)^k.$$

3. Démontrer que
$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\big[(1-t^2)^n\big].$$

Exercice 9. [★] (Une inégalité de Hilbert)

1. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Démontrer que
$$\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t = -i\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})^2\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. Soient $N \geqslant 1$ et $a_1, \ldots, a_N$ des nombres réels. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{N}\frac{a_n a_p}{n+p+1} \leqslant \pi\sum_{n=0}^{N}{a_n}^2.$$