Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n° 21 : Déterminants

Correction du problème 1 – Déterminant d'une matrice circulante

Question préliminaire

On a, par permutation des colonnes par un cycle de longueur n :

$$\boxed{\det(C(a_1, \dots, a_{n-1}, a_0)) = (-1)^{n-1} \det(C(a_0, \dots, a_{n-1}))}.$$

Partie I – Utilisation des déterminants de Vandermonde

1. On a :

$$\begin{aligned} b_{i,k} &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{j-i+n} \omega^{(j-1)(k-1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{j-i} \omega^{(j-1)(k-1)} \\ &= \sum_{j=n-i+1}^{n-1} a_j \omega^{(j-n+i-1)(k-1)} + \sum_{j=0}^{n-i} a_j \omega^{(j+i-1)(k-1)}. \end{aligned}$$

   Comme $\omega^n = 1$, on obtient :

$$b_{i,k} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{(j+i-1)(k-1)} = \omega_{i-1}^{k-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{(k-1)j}.$$

   On obtient bien : $\boxed{b_{i,k} = \omega_{i-1}^{k-1} P(\omega_{k-1}).}$

2. Ainsi, la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times \Omega$ est obtenue en multipliant les colonnes d'une matrice de Vandermonde par les coefficients $P(\omega_{k-1})$. Par multilinéarité, on obtient donc :

$$\det(C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times \Omega) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_{k-1}) V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}).$$

   Par ailleurs,

$$\det(C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times \Omega) = \det(C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times \det(\Omega) = \det(C(a_0, \dots, a_{n-1}) \times V(\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{n-1}).$$

   Comme les ω_i sont deux à deux distincts, la formule du déterminant de Vandermonde amène la non nullité de ce déterminant. Ainsi, d'après les deux expressions obtenues ci-dessus, et après simplification par $V(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$, il vient :

$$\boxed{\det(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_{k-1})}.$$

Partie II – Méthode polynomiale

Soit Q le polynôme défini par :

$$Q(X) = \det(C(X, a_1, \dots, a_{n-1})).$$

1. Notons $C(X, a_1, \ldots, a_{n-1}) = c_{i,j}$. Ainsi, $c_{i,j}$ est un coefficient constant si $i \neq j$ et polynomial de degré 1 si $i = j$. L'expression de Q est alors :
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i \in [\![1,n]\!]} c_{i,\sigma(i)}.$$
En tant que somme de produits de polynômes, $\boxed{Q \text{ est un polynôme}}$.
De plus, chaque terme $\displaystyle\prod_{i \in [\![1,n]\!]} c_{i,\sigma(i)}$ est produit de n polynômes de degré au plus 1, donc est de degré au plus n. Ainsi, Q est de degré au plus n. Par ailleurs, $\displaystyle\prod_{i \in [\![1,n]\!]} c_{i,\sigma(i)}$ est de degré exactement n si et seulement si pour tout i, $c_{i,\sigma(i)}$ est de degré 1, donc si pour tout i, $i = \sigma(i)$. Ainsi, cette situation correspond à un seul terme de la somme, correspondant à la permutation $\sigma = \mathrm{id}$.
Q est donc la somme de termes de degré au plus n, un seul d'entre eux étant de degré exactement n. Ainsi, $\boxed{\deg(Q) = n.}$

2. Considérons $a_0 = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_i^j$. On a alors :
$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i-1} a_{n+j-i}\omega_i^j + \sum_{j=i}^{n-1} a_{j-i}\omega_i^j &= \sum_{j=n-i}^{n-1} a_j\omega_i^{j+i} + \sum_{j=0}^{n-i} a_j\omega_i^{j+i} \\
&= \omega_i^i \sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_i^j \\
&= \omega_i^i \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j \right) = 0
\end{aligned}$$
Ainsi, les colonnes de $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ vérifient la relation :
$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega_i^j C_j = 0.$$
On en déduit que la matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ n'est pas inversible, donc son déterminant est nul. Ainsi, a_0 est racine de Q, donc $X - a_0$ divise Q. En reprenant l'expression de a_0, on a bien obtenu :
$\boxed{\text{le polynôme } Q \text{ est divisible par } X + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j}$.

3.
   - Si les quantités $\sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j$ sont deux à deux distinctes, la question précédente nous donne n racines distinctes du polynôme Q de degré n. Ainsi, il existe un complexe λ, ne dépendant que de $a_1, \ldots, a_{n-1}$, tel que
$$Q(X) = \lambda \prod_{i=0}^{n-1} \left(X + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j \right).$$
L'argument de la première question montre que le seul facteur de degré n de Q est X^n (provenant du terme $\sigma = \mathrm{id}$ de la somme définissant ce déterminant). Ainsi, le coefficient dominant de Q est 1. On obtient :
$$Q(X) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(X + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j \right),$$
puis, par évaluation en a_0 :
$$\boxed{\det(C(a_0, \ldots, a_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_i).}$$
   - Soit maintenant $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ quelconques, et notons, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, et tout $h \in \mathbb{R}$,
$$f_i(h) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j\omega_i^j + h\omega_i \right)$$

Soit $m = \min\left(\{|f_i(0) - f_j(0)|,\ 0 \leqslant i \neq j \leqslant n-1\} \setminus \{0\}\right)$ la distance minimale entre les valeurs distinctes prises par les $f_i(0)$. Alors, pour tout $h \in]0, \frac{m}{2}[$, les $f_i(h)$ sont deux à deux distincts. En effet, étant donnés $0 \leqslant i \neq j \leqslant n-1$:

* si $f_i(0) = f_j(0)$, alors $f_i(h) - f_j(h) = h(\omega_i - \omega_j) \neq 0$
* si $f_i(0) \neq f_j(0)$, alors $|f_i(h) - f_j(h)| \geqslant m$, donc $|f_i(h) - f_j(h)| \geqslant m - h|\omega_i - \omega_j| \geqslant m - 2h > 0$.

On est donc dans les conditions d'application du résultat trouvé dans le point précédent, pour le n-uplet $(a_0, a_1 + h, a_2, \dots, a_n)$:

$$\begin{aligned}\det(C(a_0, a_1 + h, a_2, \dots, a_n)) &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(a_0 + (a_1 + h)\omega_i + a_2\omega_i^2 + \cdots + a_{n-1}\omega_i^{n-1}\right) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (P(\omega_i) + h\omega_i).\end{aligned}$$

Par continuité du déterminant par rapport à ces coordonnées, cette expression est continue par rapport à la variable h, et par conséquent, en faisant tendre h vers 0, on trouve :

$$\boxed{\det(C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n} P(\omega_i)}.$$

Partie III – Diagonalisation

Soit $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

1. La description du produit matriciel par les colonnes donne immédiatement l'effet de la multiplication à droite par J :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & \cdots & C_{n-1} & C_n \end{array}\right) J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_n & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{array}\right)$$

En particulier, $C(0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)J = C(0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\quad \boxed{J^k = C(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$$

le 1 étant sur la $k+1$-ième coordonnée. On obtient alors :

$$\boxed{C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}.$$

2. En développant $\det(J - XI_n)$ suivant la première colonne, il vient :

$$\det(J - XI_n) = -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -X & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -X & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient donc $\boxed{\det(J - XI_n) = (-1)^n(X^n - 1).}$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice $J - \lambda I_n$ est non inversible (ce qui équivaut à la non nullité du noyau) si et seulement si $\det(J - \lambda I_n) = 0$, donc si et seulement si λ est racine de $X^n - 1$. Ainsi,

$$\boxed{\{\lambda \in \mathbb{C} \ \mid\ \mathrm{Ker}(J - \lambda I_n) \neq \{0\}\} = \{\omega_i,\ i \in [\![0, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n}.$$

3. Quelques connaissances dans la théorie de la diagonalisation permetraient de répondre directement : J, d'ordre n, admet n valeurs propres deux à deux distinctes donc est diagonalisable, et c'est terminé.

On peut contourner ce résultat par un autre résultat de diagonalisabilité, qui provient en fait du lemme des noyaux : les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(J - \lambda I_n)$ (λ valeur propre de J) sont en somme directe. Cela peut se démontrer par des propriétés arithmétiques sur les polynômes (Bézout), ou alors de façon élémentaire, en considérant $k \in [\![1, n-1]\!]$ et

$$x \in \mathrm{Ker}(J - \omega_k I_n) \cap \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n).$$

On a une décomposition associée à cette somme directe :

$$x = x_0 + \cdots + x_{k-1}.$$

Comme pour tout i $x_i \in \mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n)$, en appliquant J, il vient :

$$\omega_k x = \omega_0 x_0 + \cdots + \omega_{k-1} x_{k-1}.$$

Mais d'un autre côté, en multipliant la décomposition initiale par ω_k, il vient aussi :

$$\omega_k x = \omega_k x_0 + \cdots + \omega_k x_{k-1}.$$

Par unicité de la décomposition dans une somme directe, on a alors, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\omega_k x_i = \omega_i x_i$, et comme les ω_i sont deux à deux distincts, $x_i = 0$, puis $x = 0$.

Cela prouve bien que la somme $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n)$ est directe. Remarquez que ce raisonnement est valable pour toute matrice (ou tout endomorphisme) : les sous-espaces propres forment toujours une somme directe. Cet argument sera du cours l'année prochaine.

En prenant un vecteur non nul $b_i \in \mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n)$ (possible car cet espace n'est pas nul), la somme directe montre que $\mathcal{B} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ est une famille libre, donc une base, par cardinalité. Or, si on note f l'endomorphisme canoniquement associé à J, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{n-1} \end{pmatrix} = D.$$

La formule de changement de base donne l'existence d'une matrice inversible P telle que $\boxed{J = PDP^{-1}}$.

Une autre façon de faire, plus élémentaire, consiste à expliciter un vecteur de $\mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n)$, on obtient sans peine :

$$b_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_i \\ \omega_i^2 \\ \vdots \\ \omega_i^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(J - \omega_i I_n).$$

Or, la famille $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ est une base, car la matrice associée est une matrice de Vandermonde :

$$\det_{bc}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = V(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \neq 0.$$

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé est D, est on termine comme avant.

4. On a $P^{-1} J P = D$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P^{-1} J^n P = P^{-1} J P P^{-1} J P \cdots P^{-1} J P = D^n.$$

Ainsi,

$$P^{-1}C(a_0,\dots,a_{n-1})P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1} J^k P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega_0^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega_1^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{P^{-1}C(a_0,\dots,a_{n-1})P = \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix}}$.

Le déterminant étant un invariant de similitude, il en résulte que

$$\boxed{\det(C(a_0,\dots,a_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega_i)}.$$