DEVOIR MAISON n$^{\text{o}}$ 2

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

MATHÉMATIQUES 2 (ENS ULM, 1987)

Définitions et notations

Dans ce problème, I désigne l'intervalle $[-1,1]$. Étant donné une application $g : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle point fixe de g dans I un nombre $a \in I$ tel que $g(a) = a$. On dit que ce point fixe est stable si $|g'(a)| < 1$, quasi stable si $|g'(a)| = 1$, instable si $|g'(a)| > 1$. L'application itérée n-ième $g \circ g \circ ... \circ g$ (n fois) de g est notée $g^{\circ n}$ pour éviter toute confusion avec la puissance n-ième.

Partie I

1. Soit $\lambda \in [0,2[$. Détermier les points fixes dans I de l'application $x \mapsto 1 - \lambda x^2$ et étudier leur stabilité.
2. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit p un entier ≥ 1. Une partie F de I est appelée orbite périodique de g de période p, si elle remplit les conditions suivantes :
   (a) On a $g(F) \subset F$;
   (b) F a p éléments ;
   (c) Les seules parties F' de F telles que $g(F') \subset F'$ sont $\emptyset$ et F.

   Soit F une telle orbite et soit a un point de F. Quels sont les autres points de F ? Montrer que a est un point fixe de $g^{\circ p}$ et que le fait que ce point fixe soit stable, quasi stable ou instable ne dépend pas du choix de a dans F. Suivant le cas où l'on se trouve, on dira alors que l'orbite F est stable, quasi stable ou instable.
   Supposons F stable. Quel est le comportement de la suite $(g^{\circ n}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $b \in I$ est proche de F ?
3. Soit $\lambda \in [0,2[$. Déterminer les orbites périodiques de période 2 de l'application $f : x \mapsto 1 - \lambda x^2$ dans I, et étudier leur stabilité. Situer le point fixe de f par rapport aux deux points d'une telle orbite.
4. Supposons $0 \leq \lambda \leq 1$. Posons $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Pour $a \in I$, étudier le comportement de la suite $(f^{\circ n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$. (On pourra considérer les sous-suites de cette suite formées par les termes d'indices pair d'une part, d'indice impair de l'autre.)
5. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\lambda_0 \in [0,2[$ tel que 0 appartienne à une orbite périodique de période 3 de l'application $x \mapsto 1 - \lambda_0 x^2$. Combien d'orbites périodique de période 3 l'application $f : x \mapsto 1 - \lambda x^2$ a-t-elle dans I lorsque $\lambda \in [\lambda_0, 2[$?

Partie II

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications $g : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^3$ telles que

$$2g'''(x)g'(x) < 3(g''(x))^2$$

pour tout $x \in I$ tel que $g'(x) \neq 0$.

1. Vérifier que si f, g sont dans $\mathcal{S}$, $g \circ f$ aussi.
2. Soit $g \in \mathcal{S}$ et $J \subset I$ un intervalle sur lequel g' ne s'annule pas. Étudier la convexité de $\frac{1}{\sqrt{|g'|}}$ sur J.
3. Soit $g \in \mathcal{S}$. Montrer que si $|g'|$ admet un minimum local en un point a de $]-1, 1[$, on a $g'(a) = 0$.
4. Soient $a < b < c$ trois points fixes dans I d'une application $g \in \mathcal{S}$. Montrer que si g' ne s'annule pas sur $]a, c[$, on a $g'(b) > 1$.
5. Soient $h : I \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in]-1, 1[$ un point fixe de h tel que $0 < h'(a) < 1$. Montrer qu'il existe $b \in]a, 1[$ remplissant l'une des conditions suivantes :
   (a) $h(b) = b$ et $h'(x) \neq 0$ pour $x \in]a, b[$;
   (b) $h'(b) = 0$ et $h'(x) \geq 0$, $h(x) < x$ pour $x \in]a, b]$;
   (c) $b = 1$ et $h'(x) > 0$, $h(x) < x$ pour $x \in]a, b]$.
   Étudier la suite $(h^{\circ n}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque b remplit la condition (b) et (c).
6. Soit $g \in \mathcal{S}$ et soit $a \in I$ un point fixe stable de g. Montrer qu'il existe $b \in I$ tel que $\underset{n\to+\infty}{lim} g^{\circ n}(b) = a$ et que l'on ait $b = 1$, $b = -1$ ou $g'(b) = 0$. (On pourra commencer par traiter le cas où $0 < g'(a) < 1$.)
7. Étendre les résultats de la question 6 au cas où, au lieu de supposer le point fixe a stable, on le suppose quasi stable.

Partie III

Soit $\lambda \in [0, 2[$. Montrer que si l'application $f : x \mapsto 1 - \lambda x^2$ a une orbite périodique F stable ou quasi stable dans I, la distance de $f^{\circ n}(0)$ à F tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Montrer que f a au plus une orbite périodique stable ou quasi stable dans I, et que pour certaines valeurs de λ elle n'en a aucune.