

MP\*1

# Problème

## Fonctions de gradient unitaire

Si  $g$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , à valeurs réelles, on note :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) \quad (\text{resp. } \underline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t))$$

la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence dans  $\bar{\mathbb{R}}$  de  $g(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . C'est ainsi que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) = +\infty$$

signifie qu'il existe une suite  $(t_k)$  de réels  $> 0$  de limite 0 telle que  $g(t_k) \rightarrow +\infty$ , et que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} g(t) \geq C$$

signifie, si  $C$  est réel, qu'il existe une suite  $(t_k)$  de réels  $> 0$  de limite 0 telle que  $g(t_k) - C \rightarrow 0$ .

Ce problème fait établir diverses variantes de l'inégalité des accroissements finis et les applique à la détermination des fonctions de gradient unitaire sur un espace euclidien.

### I. Forme forte de l'inégalité des accroissements finis

Dans les questions 1 à 3,  $u$  et  $v$  sont deux réels tels que  $u < v$ ,  $f$  une fonction continue de  $[u, v]$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $C$  est un nombre réel tel que :

$$\forall t \in [u, v[, \quad \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq C.$$

On se propose de montrer :

$$f(v) - f(u) \leq C(v - u).$$

A cet effet on fixe  $\varepsilon > 0$  et on considère l'ensemble :

$$E = \{t \in [u, v], f(t) - f(u) \leq (C + \varepsilon)(t - u)\}.$$

- Justifier l'existence de  $s = \sup E$  ; vérifier que  $E$  contient  $s$ .
- En raisonnant par l'absurde, montrer que  $s = v$ .
- Conclure.

2. Supposons :

$$\forall t \in [u, v[, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 0.$$

Montrer que  $f$  est décroissante.

3. Comment s'énoncent les résultats de 1 et 2 si on suppose  $f$  dérivable à droite en tout point de  $[u, v[$  ?

4. Soient  $(E, \| \cdot \|)$  et  $(F, \| \cdot \|)$  deux espaces normés réels de dimension finie,  $\Omega$  un ouvert de  $E$ ,  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\Omega$  tels que  $[a, b] \subset \Omega$ ,  $f$  une fonction différentiable de  $\Omega$  dans  $F$  telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \|df(x)\|_{\text{op}} \leq C.$$

Montrer :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq C\|b - a\|.$$

## II. Une « minoration d'accroissements finis »

Soient  $(E, \| \cdot \|)$  un espace normé réel de dimension finie et  $a$  dans  $E$ . Pour  $r > 0$ , soit  $B_r$  la boule fermée de  $(E, \| \cdot \|)$  de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Soient aussi  $\rho$  dans  $\mathbb{R}^+$ , et  $f$  une application continue de  $B_\rho$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose, pour  $r \in [0, \rho]$ ,  $\alpha(r) = \max\{f(x), x \in B_r\}$ .

5. a) Justifier la définition de  $\alpha$ .

b) Montrer que  $\alpha$  est continue sur  $[0, \rho]$ .

Dans la suite, on suppose que la restriction de  $f$  à  $\overset{\circ}{B}_\rho$  est différentiable, que  $C$  est un élément de  $\mathbb{R}^{+*}$  tel que :

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\rho, \quad \|df(x)\|_{\text{op}} \geq C.$$

On se propose de montrer :

$$\alpha(\rho) - f(a) \geq C\rho.$$

6. Si  $r$  est dans  $[0, \rho]$ , soit  $S_r$  la sphère de  $E$  de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Montrer que :

$$\alpha(r) = \max\{f(x), x \in S_r\}.$$

7. a) Montrer, si  $0 \leq r < \rho$  :

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(r+h) - \alpha(r)}{h} \geq C.$$

c) Conclure.

### III. Fonctions de gradient unitaire

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\| \cdot \|$  la norme provenant de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $E$ , on note  $I(\Omega)$  l'ensemble des fonctions différentiables sur  $\Omega$  telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \|\nabla f(x)\| = 1.$$

8. a) A quelle condition une application affine de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est-elle dans  $I(E)$  ?

b) Montrer que :

$$N : \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

est dans  $I(E \setminus \{0\})$ .

9. Soient  $C$  un convexe fermé de  $E$  distinct de  $E$  et  $\Omega = E \setminus C$ . Pour  $x$  dans  $\Omega$ , soit

$$d_C(x) = d(x, C).$$

On rappelle que pour tout  $x$  de  $\Omega$  il existe un unique point  $p(x)$  de  $C$  tel que

$$\|x - p(x)\| = d_C(x).$$

Soient  $a$  dans  $\Omega$  et  $c = p(a)$ .

a) Si  $x$  est dans  $c + \mathbb{R}^+(a - c)$ , calculer  $p(x)$ .

b) Si  $x$  est dans  $\Omega$ , vérifier :

$$d_C(a) - \|x - a\| \leq d_C(x) \leq \|x - c\|.$$

c) Soient, pour  $x$  dans  $\Omega$ ,  $u(x) = d_C(a) - \|x - a\|$  et  $v(x) = \|x - c\|$ . Vérifier :

$$\forall b \in ]c, a], \quad \nabla u(b) = \nabla v(b).$$

d) Conclure que  $d_C$  est différentiable en  $b$ , puis que  $d_C$  appartient à  $I(\Omega)$ .

10. Soient  $f$  dans  $I(E)$  telle que  $f(0) = 0$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

a) Montrer en utilisant la partie II qu'il existe  $x_n$  et  $y_n$  dans  $E$  tels que

$$\|x_n\| \leq n, \quad \|y_n\| \leq n, \quad f(x_n) = -f(y_n) = n.$$

b) Prouver :

$$\|x_n\| = \|y_n\| = n \quad \text{et} \quad y_n = -x_n.$$

c) Soit  $u_n = x_n/n$ . Pour  $t \in [-n, n]$ , calculer  $f(tu_n)$ .

d) Démontrer qu'il existe  $u$  dans  $E$  de norme 1 tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(tu) = t.$$

e) Prouver :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, u \rangle.$$

f) Déterminer  $I(E)$ .