

DM n° 9 : Intégration

Correction du problème 1 – Autour de la moyenne arithmético-géométrique
Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique
 Soit a et b deux réels positifs. On a

$$m_a(a, b) - m_g(a, b) = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

Ainsi $m_g(a, b) \leqslant m_a(a, b)$.

Partie I – Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{cases}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = m_a(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n, b_n) \end{cases}$$

1. • D'après la question préliminaire, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant b_n$. Alors, étant donné $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

donc la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

- De même pour $n \geqslant 1$,

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

Donc la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

- On obtient alors, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n \geqslant b_n \geqslant b_1 \quad \text{et} \quad b_n \leqslant a_n \leqslant a_1.$$

Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel α , et (b_n) est croissante et majorée, donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel β .

2. En passant à la limite dans la première relation de récurrence, il vient :

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{soit:} \quad \boxed{\alpha = \beta}$$

3. On a $m_a(a, b) = a_1$ et $m_g(a, b) = b_1$. La suite (a_n) étant décroissante de limite α , il vient

$$m_a(a, b) = a_1 \geqslant \lim a_n = M(a, b).$$

De la même manière, la décroissance de (b_n) amène $m_g(a, b) \leqslant M(a, b)$. Ainsi :

$$\boxed{m_g(a, b) \leqslant M(a, b) \leqslant m_a(a, b)}.$$

Partie II – Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout $x \in [0, 1[$, et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} \quad \text{et} \quad J(\lambda, \mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2(x) + \mu^2 \sin^2(x)}}.$$

1. On pose, dans l'intégrale

$$I\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2} \sin^2(u)}} du,$$

le changement de variable $u = \text{Arcsin}\left(\frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right) = \varphi(t)$ Le réel x étant dans $[0, 1[$, la fonction $\psi : t \mapsto \frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout t de cet intervalle :

$$\psi'(t) = \frac{(1+x)\cos(t)(1+x\sin^2(t)) - 2x\cos(t)\sin(t)(1+x)\sin(t)}{(1+x\sin^2(t))^2} = \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))^2} > 0$$

Ainsi, ψ est strictement croissante, et $\psi(0) = 0$, $\psi(\frac{\pi}{2}) = 1$. En particulier, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\psi(t) \in]0, 1[$. Par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , on en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Comme on n'a pas la classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle fermé, on se restreint dans un premier temps à un intervalle $[0, A]$, où $A \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, sur cet intervalle, on a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{(1+x\sin^2(t))^2}}} \\ &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t))^2 - (1+x)^2\sin^2(t)}} \\ &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t) - (1+x)\sin(t))(1-x\sin^2(t) + (1+x)\sin(t))}} \\ &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\sin(t))(1-x\sin(t))(1+\sin(t))(1+x\sin(t))}} \\ &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)(1-x^2\sin^2(t))}} \\ &= \frac{(1+x)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))\sqrt{(1-x^2\sin^2(t))}} \end{aligned}$$

Le plus dur est fait. On a alors (φ étant bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur lui-même d'après le théorème de la bijection, car continue et strictement croissante)

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2} \sin^2(u)}} du &= \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2} \times \frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{(1+x\sin^2(t))^2}}} \times \frac{(1+x)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} dt \\ &= (1+x) \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{(1-x\sin^2(t))}{\sqrt{(1+x\sin^2(t))^2 - 4x\sin^2(t)} \times \sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} dt \\ &= (1+x) \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{(1-x\sin^2(t))}{\sqrt{(1-x\sin^2(t))^2} \times \sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} dt \\ &= (1+x) \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} dt \end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque A tend vers $\frac{\pi}{2}$ (la fonction φ^{-1} étant continue en tant que réciproque d'une fonction continue, donc $\lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$), on obtient :

$$I\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = (1+x)I(x)$$

2. On a, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$J(1, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2(t) + x^2\sin^2(t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - (1-x^2)\sin^2(t)}} = I(\sqrt{1-x^2})$$

D'un autre côté :

$$J\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 \cos^2(t) + x \sin^2 t}} = \frac{2}{1+x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \sin^2(t)}} = \frac{2}{1+x} I\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{1+x} I\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{2}{1+x} \times \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \times I\left(\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 + \frac{1-x}{1+x}}\right) = I(\sqrt{1-x^2}).$$

On en déduit alors $J(1, x) = J\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_n \neq 0$. Alors

$$J(a_{n+1}, b_{n+1}) = J\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = J\left(a_n \times \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{2}, a_n \times \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right).$$

Or, de façon évidente, pour tout $\alpha > 0$, et tout (λ, μ) , on a $J(\alpha\lambda, \alpha\mu) = \frac{1}{\alpha}J(\lambda, \mu)$, donc

$$J(a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{1}{a_n} J\left(\frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{2}, \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right) = \frac{1}{a_n} J\left(1, \frac{b_n}{a_n}\right),$$

d'après la question précédente, d'où, en rentrant de nouveau le facteur a_n :

$$J(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_n, b_n).$$

Comme $a = a_0 > 0$, une récurrence immédiate montre alors que cette propriété est vraie pour tout n et que $(J(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

4. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < M(a, b)$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait à la fois :

$$\forall n \geq N, \quad |a_n - M(a, b)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - M(a, b)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \geq N$:

$$\frac{1}{\sqrt{(M(a, b) + \varepsilon)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}} \leq \frac{1}{\sqrt{(M(a, b) - \varepsilon)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}},$$

soit :

$$\frac{1}{M(a, b) + \varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}} \leq \frac{1}{M(a, b) - \varepsilon},$$

et par croissante de l'intégrale, il vient facilement :

$$\forall n \geq N, \quad \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M(a, b) + \varepsilon} \leq J(a_n, b_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M(a, b) - \varepsilon}}.$$

5. Le terme du milieu de l'encadrement précédent est constant, égal à $J(a_0, b_0) = J(a, b)$, et ε peut être choisi aussi petit qu'on veut. Une fois qu'on a remplacé $J(a_n, b_n)$ par $J(a, b)$, on n'a plus de dépendance en n , on peut donc sans problème faire tendre ε vers 0, et il vient :

$$J(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}, \quad \text{soit:} \quad \boxed{M(a, b) = \frac{\pi}{2J(a, b)}}.$$

Partie III – Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit cette fois (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

1. • Supposons $a \leq b$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : 0 \leq a_n \leq b_n$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite d'après l'hypothèse $a \leq b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors on obtient :

$$0 \leq a_{n+1} \leq b_n \quad \text{puis:} \quad b_{n+1} \geq \sqrt{(a_{n+1})^2} \geq a_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors de la relation définissant a_{n+1} , de la même manière que ci-dessus, que :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_n,$$

puis de la seconde relation, que

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} \leq \sqrt{b_n^2} = b_n,$$

d'où la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n) .

On est dans une situation similaire à celle des suites adjacentes (à part qu'on ne sait pas bien montrer de façon directe que $a_n - b_n$ tend vers 0), la démonstration de la convergence est rigoureusement la même : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0 , et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0 . Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (a_n) et (b_n) convergent.

- Si $a \geq b$, alors on montre strictement par les mêmes arguments que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a_n$, que (b_n) est croissante et majorée par a_0 et (a_n) est décroissante et minorée par b_0 . Ainsi, dans cette situation aussi, (a_n) et (b_n) convergent.
- Appelons α la limite de (a_n) et β la limite de (b_n) . Alors, on montre comme plus haut, en passant à la limite dans la relation définissant a_{n+1} , que $\alpha = \beta$.

2. Le plus simple est de faire une récurrence.

Soit, pour tout n dans \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{P}(n)$: $B_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.

B_0 est un produit vide, donc par convention $B_0 = 1$, ce qui valide $\mathcal{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors

$$B_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n \sin(\alpha)} \times \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$$

Cela montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans \mathbb{N} , $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans \mathbb{N} .

3. On suppose que $a \leq b$. Comme a et b sont positifs, on a alors $\frac{a}{b} \in [0, 1]$, donc $\alpha = \arccos\left(\frac{a}{b}\right)$ est bien défini.

Si $\alpha = 0$, alors $a = b$ et les suites (a_n) et (b_n) sont clairement constantes, d'où le résultat attendu.

On suppose donc désormais que $\alpha \neq 0$. Comme $a_0 = b_0 \cos(\alpha)$, on obtient :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = b_0 \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

puis :

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pour continuer à exprimer les termes b_n , on exprime (b_n) indépendamment de (a_n) : pour tout $n \geq 0$,

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = \sqrt{\frac{\frac{b_{n+1}^2}{b_n} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = b_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}}{2}}.$$

Ainsi, on trouve par exemple :

$$b_2 = b_1 \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}} = b_1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

(les cosinus étant positif, a étant par définition dans $[0, \frac{\pi}{2}]$). Ainsi, on voit apparaître le début du produit de cosinus étudié dans la question précédente. On effectue alors une récurrence.

Soit, pour tout n dans \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{P}(n)$: $b_n = b_0 B_n$.

Nous venons de montrer que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vrais (et même $\mathcal{P}(2)$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vrais. Alors, par les hypothèses de récurrence,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right),$$

donc, d'après la relation établie ci-dessus,

$$b_{n+2} = b_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}{2}} = b_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = b_0 B_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = b B_{n+2}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans \mathbb{N} , $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans \mathbb{N} .

Par conséquent, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{b}{\alpha} \times \frac{\alpha}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \rightarrow \frac{b \sin(\alpha)}{\alpha}.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}}$$

4. On reprend le même argument en l'adaptant aux fonctions hyperboliques. Pour cela, nous démontrons d'abord, par analogie avec le cas trigonométrique :

- **Lemme 1 :** Soit x et y deux réels, alors $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$

Démonstration : On a

$$2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) = \frac{(\operatorname{e}^x + \operatorname{e}^{-x})(\operatorname{e}^x - \operatorname{e}^{-x})}{2} = \frac{\operatorname{e}^{2x} - \operatorname{e}^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x).$$

- **Lemme 2 :** Soit x un réel. Alors $\frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2} = \operatorname{ch}^2(x)$.

Démonstration : on a :

$$\operatorname{ch}^2(x) = \frac{(\operatorname{e}^x + \operatorname{e}^{-x})^2}{4} = \frac{\operatorname{e}^{2x} + 2 + \operatorname{e}^{-2x}}{4} = \frac{2 + 2\operatorname{ch}(x)}{4} = \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}.$$

À l'aide de ces deux résultats, l'argument précédente s'adapte bien, à commencer par le cas $\alpha = 0$ (correspondant comme avant à $a = b$). Nous supposons donc $\alpha \neq 0$.

Tout d'abord, puisque $a \geq b$, $\frac{a}{b} \geq 1$. Comme ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, allant de 1 à $+\infty$, et continue, d'après le théorème de la bijection, ch induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi, il existe un unique réel α tel que $a = \operatorname{ch}(\alpha)b$.

On a alors, d'après le lemme 2 :

$$a_1 = b \frac{1 + \operatorname{ch}(\alpha)}{2} = b \operatorname{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{puis:} \quad b_1 = \sqrt{b^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = b \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La récurrence effectuée dans le cas $a \leq b$ s'adapte bien pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$

Le même calcul vaut aussi pour ce produit, d'après le lemme 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{b}{2^n} \frac{\operatorname{sh}(\alpha)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

Or, tout comme pour le sinus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 0$, d'où le résultat escompté :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b \cdot \operatorname{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}}$$

Correction du problème 2 –

1. Étude de I

- (a) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, x]$, et prolongeable par continuité en 0. Ainsi, $I(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, x]$, donc $I(x)$ est bien définie.
- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Or, $\frac{\cos(x)}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, et pour tout $t \geq 1$,

$$\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (on peut la calculer facilement !), il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, d'après le point rappelé en début d'énoncé, ce qui équivaut à dire que $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On en déduit que $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$, donc aussi $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ (les deux expressions diffèrent d'une constante $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$).

Ainsi, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

2. Valeur de I (première méthode)

- (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Puisque $\sin((2n+1)t) \underset{0}{\sim} (2n+1)t$ et $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ admet une limite finie en 0, égale à $2n+1$ (si vous voulez éviter les équivalents sur les fonctions, ramenez-vous aux limites remarquables du sin).

Ainsi, après prolongement par continuité, I_n est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc I_n est bien définie.

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t}{\sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2nt) \sin t}{\sin t} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nt dt = \frac{1}{2n} \left[\sin(2nt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [0 = I_n - I_{n-1}]. \end{aligned}$$

iii. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_n}.$$

- (b) On reconnaît le lemme de Riemann-Lebesgue, qu'on a déjà rencontré. On fait une IPP, les fonctions étant de classe \mathcal{C}^1 :

$$J_n = -\frac{1}{n} \left[f(t) \cos(nt) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt.$$

Or, les fonctions f et f' sont continues sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, elle y sont donc bornées (voir point admis en début d'énoncé). Il existe donc M tel que pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes, puis pour les intégrales, et d'après la propriété de croissance de l'intégrale, que :

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \frac{1}{n} \left(|f(b) \cos(nb)| + |f(a) \cos(na)| + \left| \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(2M + \int_a^b |f'(t) \cos(nt)| dt \right) \leq \frac{1}{n} \left(2M + \int_a^b M dt \right) = \frac{(2+b-a)M}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$.

- (c) On utilise le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: il suffit donc de montrer que f' admet une limite finie en 0. En particulier, il est inutile de justifier l'existence d'une limite en 0 de f : cela vient en bonus.

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{-\sin^2 t + t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t}.$$

Or, $t^2 \sin^2 t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^4$. De plus, en attendant d'avoir des DL, on peut écrire :

$$-\sin^2 t + t^2 \cos t = t^2(\cos(t) - 1) + t^2 - \sin^2(t) = t^2(\cos(t) - 1) + t(t - \sin(t)) + \sin(t)(t - \sin(t)).$$

Or ,

$$t^2(\cos(t) - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{t^4}{2}, \quad t(t - \sin(t)) \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{6} \quad \text{et} \quad \sin(t)(t - \sin(t)) \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{6}.$$

Pour sommer, on exprime ces équivalents avec o :

$$-\sin^2 t + t^2 \cos t = -\frac{t^4}{2} + \frac{t^4}{6} + \frac{t^4}{6} + o(t^4) = -\frac{t^4}{6} + o(t^4).$$

Ainsi, $-\sin^2 t + t^2 \cos t \underset{0}{\sim} -\frac{t^4}{6}$.

On fait alors le quotient des deux équivalents trouvés, et on obtient $f'(t) \rightarrow -\frac{1}{6}$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Donc f' admet une limite en 0. On en déduit, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , que f est prolongeable par continuité en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- (d) La fonction f étant prolongeable par continuité en une fonction de classe \mathcal{C}^1 , d'après la question I-2b,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) \sin((2n+1)t) dt = 0.$$

On peut séparer l'intégrale en 2, les fonctions intégrées étant toujours prolongeables par continuité en 0. On obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \lim I_n = \frac{\pi}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variables $u = (2n+1)t$, de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} (2n+1) \frac{\sin u}{u} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Ainsi, en passant cette dernière expression à la limite, il vient : $I = \frac{\pi}{2}$.

3. Valeur de I (deuxième méthode)

- (a) Soit $u > 0$ et $x > 0$. On a :

$$\int_0^u \sin x e^{-xy} dy = \left[-\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \right]_{y=0}^{y=u} = -\frac{\sin x}{x} e^{-ux} + \frac{\sin x}{x}, \quad \text{donc:} \quad \boxed{\int_0^u \sin x e^{-xy} dy = \frac{\sin x}{x} (1 - e^{-ux})}.$$

- (b) On s'assure comme précédemment que les intégrales sont bien définies, les fonctions étant continues sur l'intervalle fermé d'intégration (après éventuel prolongement par continuité). On utilise alors le théorème de Fubini :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} (1 - e^{-xu}) dx = \int_0^u \int_0^u \sin x e^{-xy} dy dx = \int_0^u \int_0^u \sin x e^{-xy} dx dy.$$

On calcule alors l'intégrale interne par intégrations par parties, ou en passant aux complexes, au choix :

$$\int_0^u \sin x e^{-xy} dx = -\left[\sin x \frac{e^{-xy}}{y} \right]_0^u + \frac{1}{y} \int_0^u \cos x e^{-xy} dx = -\frac{\sin u}{y} e^{-uy} + \frac{1}{y} \int_0^u \cos x e^{-xy} dx,$$

et une deuxième IPP donne :

$$\int_0^u \sin x e^{-xy} dx = -\frac{\sin u}{y} e^{-uy} - \frac{1}{y^2} \left[\cos x e^{-xy} \right]_0^u - \frac{1}{y^2} \int_0^u \sin x e^{-xy} dx.$$

Par conséquent,

$$\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \int_0^u \sin x e^{-xy} dx = -\frac{\sin u}{y} e^{-uy} - \frac{\cos u}{y^2} e^{-uy} + \frac{1}{y^2} = -e^{-uy} \left(\frac{\sin u}{y} + \frac{\cos u}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}$$

Ainsi :

$$\int_0^u \sin x e^{-xy} dx = \frac{1 - e^{-uy}(y \sin u + \cos u)}{1 + y^2}.$$

En intégrant par rapport à y , d'après ce qui précède, on obtient bien :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} (1 - e^{-xu}) dx = \int_0^u \frac{1 - e^{-uy}(y \sin u + \cos u)}{1 + y^2} dy.$$

- (c) Passons à la limite dans chacun des deux membres de l'égalité obtenue dans la question précédente. Un raisonnement grossier et mal justifié nous laisse penser que dans l'intégrale de gauche, le terme exponentiel va disparaître à la limite, et on récupère note intégrale de Dirichlet. Dans le terme de droite de même, on récupère $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}$, qu'on sait calculer avec la fonction Arctan :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\text{Arctan}(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}.$$

Ces passages à la limite nécessite des techniques d'inversion limite/intégrale dont nous ne disposons pas encore. Nous allons les justifier par majoration.

- On connaît déjà la limite de $\int_0^u \frac{1}{1+y^2} dy$, et on sait que $\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} dx$ tend vers I , l'intégrale qu'on cherche à calculer. Il nous reste donc à contrôler les deux autres termes, grâce à l'exponentielle.
- La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est bornée sur \mathbb{R}_+^* (car admet une limite finie en 0 et en $+\infty$ et continue entre les deux). Soit M un majorant de sa valeur absolue. On a alors :

$$\left| \int_0^u \frac{\sin x}{x} e^{xu} du \right| \leq \int_0^u \left| \frac{\sin x}{x} e^{-xu} \right| du \leq M \int_0^u e^{-xu} dx = \frac{M}{u} (1 - e^{-u^2}) \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0;$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\int_0^u \frac{\sin x}{x} e^{-xu} du \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$.

- De même, la fonction $y \mapsto \frac{\cos(u) + y \sin(u)}{1+y^2}$ est bornée sur \mathbb{R}_+^* (pour les mêmes raisons). Le même argument montre que

$$\int_0^u \frac{e^{-yu} y \sin u + \cos y}{1+y^2} dy \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0.$$

- On peut donc passer à la limite dans l'égalité de la question précédente :

$$I = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}}.$$

4. Estimation du reste

On adapte l'argument de la question 1a, en faisant une deuxième IPP, puis une troisième. On la fait d'abord sur un segment $[n, A]$, puis on fait tendre A vers $+\infty$:

$$\int_n^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2} - 2 \frac{\cos(t)}{t^3} \right]_n^A + 6 \int_n^A \frac{\cos(t)}{t^4} dt.$$

Tous les autres termes admettant une limite finie lorsque $A \rightarrow +\infty$, il en est de même de la dernière intégrale, et on peut écrire :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} - 2 \frac{\cos(n)}{n^3} + 6 \int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} dt.$$

Or, $2 \frac{\cos(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} dt \right| \leq \int_n^{+\infty} \left| \frac{\cos(t)}{t^4} \right| dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{4t^3} \right]_n^A = \frac{1}{4n^3}.$$

Ainsi, $\int_n^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4} dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il en résulte que :

$$\boxed{\int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$