DIMENSION FINIE

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Étudier, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, la liberté de la famille de vecteurs

$$u = (4-\lambda, 4, 4), \qquad v = (3, 3-\lambda, 6), \qquad w = (3, 6, 3-\lambda).$$

Notons M la matrice de la famille (u, v, w) dans la base canonique. On utilise la méthode du pivot pour déterminer le rang de la matrice M (les pivots sont encadrés) :

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 4 & 3-\lambda & 6 \\ 4 & 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 7\lambda-\lambda^2 & 0 & 9+3\lambda \\ 6\lambda-12 & 0 & -9-3\lambda \end{pmatrix}.$$

À ce stade, on fait une pause pour distinguer deux cas :

- Premier cas : $\lambda = -3$ Alors

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{-30} & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{-30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

- Second cas : $\lambda \neq -3$ On peut alors continuer la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} M &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 7\lambda-\lambda^2 & 0 & \boxed{9+3\lambda} \\ 6\lambda-12 & 0 & -9-3\lambda \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 7\lambda-\lambda^2 & 0 & \boxed{9+3\lambda} \\ -3(\lambda-1)(\lambda-12)(\lambda+3) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Là encore, on doit distinguer plusieurs sous-cas :

  - Premier sous-cas : $\lambda = 1$ ou $\lambda = 12$ Alors

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 7\lambda-\lambda^2 & 0 & \boxed{9+3\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

  - Second sous-cas : $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 12$ Alors

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4-\lambda & \boxed{3} & 3 \\ 7\lambda-\lambda^2 & 0 & \boxed{9+3\lambda} \\ \boxed{-3(\lambda-1)(\lambda-12)(\lambda+3)} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Ainsi

λ	$\lambda \in \{-3; 1; 12\}$	$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 12\}$
$\operatorname{rg}(u, v, w)$	2	3

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]

Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère le sous-espace

$$F = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. L'espace F est-il de dimension finie ?
2. Déterminer un supplémentaire F' de F dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Vérifier que ce supplémentaire est de dimension finie et préciser sa dimension. *Remarque : C'est la codimension de F dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
3. Soit $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quel est le projeté de u sur F' dans la direction de F. Faire un dessin.

1. L'espace F contient la famille libre infinie $\big(x \longmapsto x^p\big)_{p \geqslant 2}$ donc

$$\boxed{F \text{ est de dimension infinie.}}$$

2. Procédons par analyse/synthèse.

<u>Analyse :</u>
Supposons connu un supplémentaire F' de F dans E.
Soit $u \in E$. Comme $E = F \oplus F'$, il existe $f \in F$ et $g \in F'$ telles que $u = f + g$.
En évaluant en 0 cette égalité, on a $g(0) = u(0)$. En dérivant et en évaluant en 0, on a $g'(0) = u'(0)$.
Ce sont d'ailleurs les seules conditions qui portent sur g ! On peut donc prendre pour g une fonction affine qui vaut $u(0)$ en 0 et dont la dérivée vaut $u'(0)$ en 0.
De là à penser que l'on peut prendre pour F' le sous-espace des fonctions affines, il n'y a qu'un pas...

<u>Synthèse :</u>
Notons F' le sous-espace de E constitué des fonctions affines.
Si u appartient à $F \cap F'$, alors u est une fonction affine nulle en 0 et de dérivée nulle en 0, donc c'est la fonction nulle. On a donc $F \cap F' = \{\widetilde{0}\}$, ce qui signifie que F et F' sont en somme directe.
Soit $u \in E$. Notons g la fonction affine telle que $g(0) = u(0)$ et $g'(0) = u'(0)$ (c'est la fonction $x \longmapsto u'(0)x + u(0)$). Dès lors, la fonction $f = u - g$ s'annule en 0 et sa dérivée s'annule également en 0, ce qui démontre que $f \in F$. On a donc $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F'$. Cela démontre que $E = F + F'$.
En conclusion, on a $E = F \oplus F'$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{le sous-espace } F' \text{ des fonctions affines est un supplémentaire de } F \text{ dans } E.}$$

Le sous-espace F' s'identifie à $\mathbb{R}_1[X]$ (un résultat du cours dit que, sur un corps infini, on peut identifier un polynôme et sa fonction polynomiale associée). Par conséquent, F' est de dimension 2.
On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est de codimension 2.}}$$

3. D'après la question précédente,

$$\boxed{\text{le projeté de } u \text{ sur } F' \text{ et la fonction } x \longmapsto u(x) - u'(0)x - u(0).}$$

Graphiquement, ce projeté est la fonction u à laquelle on retire sa tangente en 0.

✠ ***Exercice 3.*** [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux familles finies de vecteurs de E. Démontrer que

$$\max\{\operatorname{rg}\mathscr{F}_1\,;\,\operatorname{rg}\mathscr{F}_2\} \leqslant \operatorname{rg}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}_1 + \operatorname{rg}\mathscr{F}_2.$$

L'inégalité de gauche découle de

$$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 et \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2.$$

Pour celle de droite, on écrit que

$$\operatorname{rg}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F}_1 + \operatorname{Vect}\mathscr{F}_2) \leqslant \dim \operatorname{Vect}\mathscr{F}_1 + \dim \operatorname{Vect}\mathscr{F}_2 = \operatorname{rg}\mathscr{F}_1 + \operatorname{rg}\mathscr{F}_2.$$

Donc

$$\boxed{\max\{\operatorname{rg}\mathscr{F}_1\,;\,\operatorname{rg}\mathscr{F}_2\} \leqslant \operatorname{rg}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}_1 + \operatorname{rg}\mathscr{F}_2.}$$

✠ ***Exercice 4.*** [★] (Inégalité de Frobenius)

Soient E, F, G, H quatre K-espaces vectoriels de dimension finie. On considère $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et $h \in \mathscr{L}(G, H)$.

1. Démontrer l'*inégalité de Frobenius* :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(h \circ g \circ f) + \operatorname{rg}(g).$$

2. En déduire l'*inégalité de Sylvester* :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim F.$$

1. On applique le théorème du rang à $h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)}$, ce qui donne

$$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)} + \dim \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(h \circ g \circ f) + \dim \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)}.$$

On applique à nouveau le théorème du rang, cette fois à $h\big|_{\operatorname{Im} g}$, ce qui donne

$$\dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Im} h\big|_{\operatorname{Im} g} + \dim \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im} g},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(h \circ g) + \dim \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im} g}.$$

On remarque que Ker $h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)} \subset$ Ker $h\big|_{\operatorname{Im} g}$, donc

$$\dim \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im}(g \circ f)} \leqslant \operatorname{Ker} h\big|_{\operatorname{Im} g}.$$

En combinant ces résultats, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{rg}(h \circ g) + \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(h \circ g \circ f) + \operatorname{rg}(g).}$$

2. Appliquons l'inégalité de Frobenius avec $F = G$ et $g = \operatorname{Id}_F$. On obtient

$$\operatorname{rg}(h \circ \operatorname{Id}_F) + \operatorname{rg}(\operatorname{Id}_F \circ f) = \operatorname{rg}(h \circ \operatorname{Id}_F \circ f) + \operatorname{rg}(\operatorname{Id}_F),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg}(h) + \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(h \circ f) + \dim F.$$

En renommant h en g, on obtient

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim F.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [★]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E.

1. Démontrer que

$$(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u) \iff (u^2 = \widetilde{0} \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} u).$$

2. Démontrer que

$$(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u) \iff \big(u^2 = \widetilde{0} \text{ et } \exists v \in \mathscr{L}(E),\ uv + vu = \operatorname{Id}_E\big).$$

Indication : Pour l'implication ⇒, on pourra considérer la projection p sur $\operatorname{Ker} u$ *dans la direction d'un supplémentaire S de* $\operatorname{Ker} u$ *dans E.*

1. On procède par double implication.
   - ⇒ On suppose que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
     L'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ implique classiquement que $u^2 = \widetilde{0}$.
     Le théorème du rang dit que $n = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = 2 \operatorname{rg} u$.

$\Leftarrow$ On suppose que $u^2 = \widetilde{0}$ et $n = 2\,\mathrm{rg}\,u$.
L'égalité $u^2 = \widetilde{0}$ implique classiquement que $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u$.
Le théorème du rang dit que $n = \mathrm{rg}\,u + \dim \mathrm{Ker}\,u$. Comme $n = 2\,\mathrm{rg}\,u$, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\,u = \mathrm{rg}\,u$.
En combinant ces deux informations, on obtient $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u$.

En conclusion

$$\boxed{(\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u) \quad \Longleftrightarrow \quad (u^2 = \widetilde{0} \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}\,u).}$$

2. On procède à nouveau par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose que $u^2 = \widetilde{0}$ et qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uv + vu = \mathrm{Id}_E$.
L'égalité $u^2 = \widetilde{0}$ implique classiquement que $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,u$. Comme $uv + vu = \mathrm{Id}_E$, on a $u(v(x)) + v(u(x)) = x$, ce qui donne $u(v(x)) = x$ puisque $u(x) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Im}\,u$. Cela démontre que $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Im}\,u$.
Donc $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u$.

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u$.
L'inclusion $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u$ implique classiquement que $u^2 = \widetilde{0}$.
Reste à démontrer l'existence de $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uv + vu = \mathrm{Id}_E$. Pour cela, on introduit un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E et on note p la projection sur $\mathrm{Ker}\,u$ dans la direction de S. Le théorème géométrique du rang nous dit $\widehat{u} = u\big|_S^{\mathrm{Im}\,u}$ est un isomorphisme. On peut donc poser $v = \widehat{u}^{-1} \circ p$, qui est bien définie puisque $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,u$, on a

$$\begin{aligned}
(uv+vu)(x) &= u(v(x)) + v(u(x)) \\
&= u\big(\widehat{u}^{-1}(p(x))\big) + \widehat{u}^{-1}\big(p(u(x))\big) \\
&= u\big(\widehat{u}^{-1}(x)\big) + \widehat{u}^{-1}\big(p(0_E)\big) \qquad \text{car } x \in \mathrm{Ker}\,u \\
&= \widehat{u}\big(\widehat{u}^{-1}(p(x))\big) + 0_E \\
&= x
\end{aligned}$$

et pour tout $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}
(uv+vu)(x) &= u(v(x)) + v(u(x)) \\
&= u\big(\widehat{u}^{-1}(p(x))\big) + \widehat{u}^{-1}\big(p(u(x))\big) \\
&= u\big(\widehat{u}^{-1}(0_E)\big) + \widehat{u}^{-1}\big(p(\widehat{u}(x))\big) \qquad \text{car } x \in S \\
&= 0_E + \widehat{u}^{-1}\big(\widehat{u}(x)\big) \qquad \text{car } \widehat{u}(x) \in \mathrm{Im}\,u = \mathrm{Ker}\,u \\
&= x,
\end{aligned}$$

donc, comme $\mathrm{Ker}\,u$ et S sont supplémentaires dans E, on a $uv + vu = \mathrm{Id}_E$, comme voulu.

En conclusion

$$\boxed{(\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(u^2 = \widetilde{0} \text{ et } \exists v \in \mathscr{L}(E),\ uv + vu = \mathrm{Id}_E\,\big).}$$

✠ ***Exercice 6.*** [$\circ$]
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et ℓ, m deux formes linéaires non nulles sur E. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\ell(x)m(x) \neq 0$.

Par l'absurde, supposons que $\forall x \in E,\ \ell(x)m(x) = 0$. On a alors $\forall x \in E,\ \big(\ell(x) = 0 \text{ ou } m(x) = 0\big)$, ce qui signifie que $\mathrm{Ker}\,\ell \cup \mathrm{Ker}\,m = E$. Comme ℓ et m sont des formes linéaires non nulles, $\mathrm{Ker}\,\ell$ et $\mathrm{Ker}\,m$ sont des hyperplans de E, donc des sous-espaces stricts de E. Or il est connu que E ne peut pas êtr ela réunion fini de sous-espaces stricts. On tient donc notre absurdité ! Par conséquent,

$$\boxed{\ell m \neq \tilde{0}.}$$

✠ ***Exercice 7.*** [$\star$]
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathscr{K}$ l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $F \subset \operatorname{Ker} f$. Démontrer que $\mathscr{K}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Il est clair que l'endomorphisme nul appartient à $\mathscr{K}$ car $\operatorname{Ker}\widetilde{0} = E \supset F$. Par ailleurs, si f et g appartiennent à $\mathscr{K}$ et si $\lambda, \mu \in K$ alors, pour tout $x \in F$, on a $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g) \supset F$ et donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{K}$. Par suite,

$$\boxed{\mathscr{K} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).}$$

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, on considère l'endomorphisme $\varphi_{i,j}$ définie par $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j} e_i$ (où $\delta_{k,j}$ désigne le symbole de Kronecker) de sorte que la famille $(\varphi_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ forme une base de $\mathscr{L}(E)$. En conservant que les endomorphismes $(\varphi_{i,j})_{(i,j) \in [\![p+1;n]\!] \times [\![1;n]\!]}$, on obtient alors clairement une base de $\mathscr{K}$, donc

$$\boxed{\mathscr{K} \text{ est de dimension } (n-p)n.}$$

✠ ***Exercice 8.*** [$\star$]
Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On considère les applications

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & fu \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & uf \end{array} \right.$$

Vérifier que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$ et déterminer leur rang en fonction de celui de f.

L'un des deux théorèmes de factorisation (vus dans le chapitre sur les applications linéaires) nous dit que $\operatorname{Im}\varphi = \{v \in \mathscr{L}(E) : \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} f\}$. Par conséquent, $\operatorname{Im}\varphi$ est isomorphe à $\mathscr{L}(E, \operatorname{Im} f)$, ce qui donne

$$\boxed{\operatorname{rg}\varphi = n\operatorname{rg}(f).}$$

L'autre théorème de factorisation nous dit que $\operatorname{Im}\psi = \{v \in \mathscr{L}(E) : \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} v\}$. Par conséquent, si S désigne un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, $\operatorname{Im}\psi$ est isomorphe à $\mathscr{L}(S, E)$. Comme $\dim S = \operatorname{rg} f$, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{rg}\psi = \operatorname{rg}(f) \times n.}$$

✠ ***Exercice 9.*** [$\star$]
Démontrer que le rang est invariant pas extension de corps.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et L un sur-corps de K. Le rang de A se calcule avec la méthode du pivot. Celle-ci effectue les calculs dans le corps K. Lorsqu'on se place dans le corps L, les calculs restent inchangés. Le rang aussi, du coup. Donc

$$\boxed{\text{le rang est invariant par extension de corps.}}$$

✠ ***Exercice 10.*** [$\circ$]
Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui sont équivalentes à une matrice nilpotente ?

Si N est nilpotente, elle n'est pas inversible dont son rang est strictement inférieur à n.

Réciproquement, si N est de rang r avec $r < n$, alors N est équivalente à une matrice J'_r où J'_r est la matrice dont la $(n-r)$-ème surdiagonale (la diagonale est la 0-ème surdiagonale) est remplie de 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls (on le démontre comme le résultat du cours en modifiant l'ordre des vecteurs de la base, y réfléchir ...). Comme J'_r est nilpotente, on est content.

En conclusion,

$$\boxed{\text{les matrices de } \mathscr{M}_n(K) \text{ qui sont équivalentes à une matrice nilpotente sont les matrices non inversibles.}}$$