Chapitre 18 : séries de nombres réels ou complexes

Table des matières

1 Premières notions

1.1 Définitions

Définition 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle ***série de terme général*** u_n la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
La série de terme général u_n est désignée par le symbole $\sum_n u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ associée à la série $\sum_n u_n$ s'appelle une ***somme partielle***.

Exemple 1 • La série $\sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est exactement la suite $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• Pour toute suite u de nombres réels, la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est exactement la suite $(u_{n+1} - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce cas, toutes les sommes partielles $S_N = \sum_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k)$ sont des sommes télescopiques. On parle alors de ***série télescopique***.

• Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum_n q^n$ est appelée ***série géométrique***. Lorsque $q \neq 1$, les sommes partielles valent : $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1.2 Vocabulaire associé aux séries

Définition 2 On adopte le même vocabulaire pour les séries que pour les suites, car une série n'est rien d'autre qu'une suite. On parlera donc de séries croissantes, décroissantes, convergentes ou divergentes.
Plus précisément, on dit qu'une série $\sum_n u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, on appelle ***somme de la série convergente***, la valeur de cette limite qui est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 1 • Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne un nombre alors que le symbole $\sum_n u_n$ désigne une série.

• La nature convergente ou divergente d'une série $\sum_n u_n$ ne dépend pas des premiers termes. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ l'est.

Proposition 1 • Pour tous entiers $0 \leqslant p < q$, on a :

$$S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} u_k.$$

• Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle. De manière équivalente, si le terme général u_n d'une série ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_n u_n$ est divergente. On dit que que la série $\sum_n u_n$ ***diverge grossièrement***. La réciproque est fausse.

2 Séries à termes positifs

Proposition 2 Si $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs ou nuls, alors la série $\sum_n u_n$ est croissante : le théorème des suites monotones s'applique donc. Plus précisément : si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries à termes positifs avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors :

- si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ aussi et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ aussi.

Proposition 3 Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature (ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes).

Proposition 4 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\ dt$
- la série $\sum_n f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Ce principe s'appelle l'***encadrement série/intégrale*** qui permet d'encadrer la surface d'un rectangle par deux aires calculables par deux intégrales.

Exemple 2 Les ***séries de Riemann*** sont les séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a la propriété suivante :

$$\text{la série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente } \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

3 Les séries absolument convergentes

Définition 3 On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est ***absolument convergente*** si la série à termes positifs $\sum_n |u_n|$ est convergente.

Proposition 5 Toute série $\sum_n u_n$ absolument convergente est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

La réciproque est fausse.

4 Les séries alternées

Définition 4 On dit qu'une série $\sum_n u_n$ de nombres réels est ***alternée*** si pour tout n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Proposition 6 [critère spécial des séries alternées]
Soit $\sum_n u_n$ une série de nombres réels telle que :

- la série est alternée
- le terme $|u_n|$ tend <u>en décroissant</u> vers 0.

Alors, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

5 Les séries de référence

5.1 Les séries de Riemann

Proposition 7 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

5.2 Les séries géométriques

Proposition 8 Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_n q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

5.3 La série exponentielle

Proposition 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série exponentielle $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est convergente et la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

5.4 Les séries télescopiques

Proposition 10 Soit u une suite. La série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si et seulement si la suite u converge. Dans ce cas, la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n - u_0.$$

5.5 Premiers exemples d'étude

Méthode : Comment étudier une série ?

Soit $\sum_n u_n$ une série. Pour déterminer la nature d'une série, on se pose les questions suivantes :

- a-t-on $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$?
  - ▷ Si oui, on ne peut rien dire pour l'instant.
  - ▷ Si non, la série est divergente grossièrement.
- la série est-elle à termes positifs ?
  - ▷ Si oui, on compare u_n à une série de Riemann – pour montrer que la série diverge, on compare souvent u_n à $\frac{1}{n}$ et pour montrer que la série converge, on compare souvent u_n à $\frac{1}{n^2}$. On peut aussi prendre un équivalent de u_n pour obtenir une forme v_n plus simple avec $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et on raisonne sur la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
  - ▷ Si non, on raisonne sur la série à termes positifs $\sum_n |u_n|$.

    $\longrightarrow$ Si cette série est convergente, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente.

    $\longrightarrow$ Si la série est divergente, on tente un développement asymptotique du terme général puis l'application du CSSA.

Exemple 3 Donner la nature des séries suivantes :

- série harmonique : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{3/2}}$;
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n \ln n}}{n!}$;
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exemple 4 • Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n\cdot\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1}(e^{1/n}-1)$ ou $\sum_{n\geqslant 1} \arccos\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

• Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ou $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$.

• Déterminer la nature de la série $\sum_n \sin\left(\pi n \exp\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right)$.

• On pose $u_0 > 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{e^{u_n}}{n+1}$. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n (-1)^n u_n$.

• Montrer qu'il existe une constante γ [constante d'Euler] telle que :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1).$$

Méthode : Comment calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'une série convergente ?

- on fixe $n\in\mathbb{N}$
- on calcule la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, en utilisant les sommes arithmétiques, géométriques, le binôme de Newton ou une somme télescopique
- on fait tendre n vers $+\infty$.

Exemple 5 • Calculer la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{3^k}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k-2}$.

• Calculer la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.