DM nº 21 : Analyse globale, combinatoire

Problème 1 – (Théorème de Sunyer y Balaguer)

L'objet de ce problème est de montrer le théorème suivant (Sunyer y Balaguer) : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe n_x tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est une fonction polynomiale.

Pour montrer ce résultat, on passe par un théorème de Baire affimant qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$ est encore dense dans $\mathbb{R}$, résultat que nous démontrons et utilisons dans une situation légèrement plus générale, en considérant des intersections avec un fermé donné de $\mathbb{R}$.

Partie I – Théorème de Baire

Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans F si pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$ tel que $F \cap V \neq \varnothing$, on a aussi $E \cap F \cap V \neq \varnothing$.

1. Montrer que lorsque $F = \mathbb{R}$, la définition donnée ci-dessus correspond à la notion usuelle de densité dans $\mathbb{R}$.
2. On se donne $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans F, et V un ouvert de $\mathbb{R}$ rencontrant F.
   (a) Justifier l'existence de deux réels $a_1 < b_1$ tels que
   $$[a_1, b_1] \cap F \subset U_1 \cap V \cap F \qquad \text{et} \qquad]a_1, b_1[\cap F \neq \varnothing.$$
   (b) Justifier l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, croissant, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, décroissante, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < b_n$ et
   $$[a_n, b_n] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap V \cap F \qquad \text{et} \qquad]a_n, b_n[\cap F \neq \varnothing.$$
   (c) Justifier l'existence de réels a et b tels que $a \leqslant b$ et
   $$[a, b] \cap F \subset \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i\right) \cap V \cap F \qquad \text{et} \qquad [a, b] \cap F \neq \varnothing.$$
   (d) En déduire que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i$ est dense dans F.

Partie II – Théorème de Sunyer y Balaguer

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$.

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) \neq 0\}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un ouvert, et que $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} U_n = \varnothing$.

2. On note
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \eta > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \quad \forall y \in B(x,\eta), \; f(y) = P(y)\}.$$
Ainsi, Ω est l'ensemble des points x tels que f coïncide avec un polynôme P sur un voisinage de x.
Montrer que Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. On note F son complémentaire dans $\mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction coïncidant avec un polynôme P sur un ouvert U et avec un polynôme Q sur un ouvert V. Montrer que si $U \cap V \neq \varnothing$, alors $P = Q$
4. Soit $x \in \Omega$, et $\eta > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que f coïncide avec P sur $B(x,\eta)$. On considère
$$I_x = \{y \in \mathbb{R} \mid f = P \text{ sur } [y,x] (\text{ou } [x,y]).\}.$$
   (a) Montrer que I_x est un intervalle fermé. On note α et β ses bornes inférieure et supérieure, dans $\overline{\mathbb{R}}$).
   (b) Montrer que $]\alpha,\beta[\subset \Omega$, et que si α et β ne sont pas infinis, ils sont des éléments de F.
   (c) En déduire que pour tout intervalle I tel que $I \subset \Omega$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que f coïncide avec P sur I.
5. On montre dans cette question que F n'a pas de points isolés.
On suppose qu'il existe $x \in F$ et $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \cap F = \{x\}$. En remarquant que $]x-\eta, x[$ et $]x, x+\eta[$ sont inclus dans Ω, et en utilisant une formule de Taylor, montrer que $x \in \Omega$ et conclure
6. On suppose F non vide.
   (a) En appliquant le théorème de Baire, montrer qu'il existe $x \in F$ (qu'on pose), $k \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x,\eta) \cap F$, $f^{(k)}(y) = 0$.
   (b) Soit $y \in B(x,\eta) \cap F$. Montrer l'existence d'une suite strictement monotone $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F convergeant vers y. On supposera par la suite sans perte de généralité que (x_n) est strictement croissante.
   (c) Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et convergeant vers y telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k+1)}(y_n) = 0$.
   (d) Montrer que pour tout $\ell \geqslant k$, $f^{(\ell)}(y) = 0$.
   (e) Soit $y \in B(x,\eta) \cap \Omega$, et $I_y =]\alpha,\beta[$ l'intervalle maximal inclus dans Ω contenant y. On note P le polynôme coïncidant avec f sur I_y. Montrer que soit $\alpha \in B(x,\eta) \cap F$, soit $\beta \in B(x,\eta) \cap F$, et en déduire que $\deg(P) < k$.
   (f) En déduire que $x \in \Omega$ et conclure que $F = \varnothing$.
7. Terminer la preuve du théorème de Sunyer y Balaguer.

Problème 2 –
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Le but de ce problème est de répondre au problème des ménages de Lucas, qui se pose en ces termes :

> *On dispose d'une table circulaire de $2n$ places autour de laquelle on veut placer n couples de sorte que :*
> - *on ait alternance entre les hommes et les femmes*
> - *aucune femme ne soit assise à côté de son conjoint (et réciproquement bien sûr).*
>
> *Combien existe-t-il de façons de faire ?*

On appelle un placement *une répartition des convives autour de la table satisfaisant ces deux critères. On suppose que deux répartitions admissibles obtenues par rotation l'une de l'autre correspondent au même placement (autrement dit, on n'a pas de repère initial sur la table ronde, les places sont indiscernables, à leur ordre près).*
On note $\mu(n)$ le nombre de placements. Le but du problème est de calculer $\mu(n)$.

Partie I – Lemme de Kaplansky (cas linéaire)

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, et $n \in \mathbb{N}$. Dans cette partie, on compte le nombre b_n de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ dont les éléments sont séparés d'au moins ℓ autres éléments de $[\![1,n]\!]$. Autrement dit, si $i_1 < \cdots < i_k$ sont les éléments de E, rangés par ordre croissant, on doit avoir, pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $i_{j+1} - i_j > \ell$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle $b_{n,k}$ le nombre de ces sous-ensembles dont le cardinal est k.

1. Montrer que $b_{n,k} = \binom{n-(k-1)\ell}{k}$.
2. Montrer par un raisonnement combinatoire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite déterminée par :

$$\forall i \in [\![0,\ell]\!],\ b_i = i+1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant \ell+1,\ \ b_n = b_{n-1} + b_{n-\ell-1}.$$

Partie II – Lemme de Kaplansky (cas circulaire)

*On considère maintenant n points répartis sur un cercle, numérotés de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre. On recherche maintenant le nombre de façons de choisir un sous-ensemble E constitué de k de ces points de sorte que deux points quelconques de ce sous-ensemble soient séparés par au moins ℓ autres points (sur le cercle). Autrement dit, si $x_0, \dots, x_k$ sont les k points de E, rangés par ordre croissant, il faut avoir, pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > \ell$, mais il faut aussi avoir $x_1 + (n - x_k) > \ell$ (distance entre x_1 et x_k **sur le cercle**).*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, et $\ell \in \mathbb{N}^*$, on note $A(n,k,\ell)$ l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ vérifiant ces conditions. On note également

$$B(n,k,\ell) = \{(E,x) \text{ où } E \in A(n,k,\ell) \text{ et } x \in E\}$$

1. Montrer que $|B(n,k,\ell)| = n\binom{n-k\ell-1}{k-1}$.
2. En déduire que $|A(n,k,\ell)| = \dfrac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k}$.

Partie III – Le problème des ménages de Lucas

On suppose que $n > 1$. Dans un premier temps, on suppose que les places autour de la table sont numérotées dans le sens des aiguilles d'une montre (donc il y a un point de départ), et on décide d'attribuer les places impaires aux dames, les places paires aux messieurs.

1. *On commence par placer les dames sur les places impaires, dans le sens des aiguilles d'une montre.*
   Combien y a-t-il de façons de faire ?
2. *Les dames étant placées, il faut repartir les messieurs. On numérote les dames de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre ; on numérote également les messieurs en leur donnant le même numéro que leur épouse. Enfin, on renumérote les places vides, en décrétant que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la place située à droite de la dame i est la place i. Ainsi, la place à gauche de la dame i est la place $i+1$ si $i < n$, et la place 1 si $i = n$.*
   On définit la famille de sous-ensembles de $\mathfrak{S}_n$ suivante :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad E_{2i-1} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$$

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\quad E_{2i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i+1\} \qquad \textit{et} \qquad E_{2n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = 1\}$$

   Exprimer le nombre N de façons de placer les hommes en fonction des E_i, et en déduire :

$$N = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

3. Montrer que le nombre de placements possibles sur une table non numérotée est :

$$\mu(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)! \qquad \text{(Formule de Touchard, 1953)}$$