Maths X 1 Victor Dubois

1 Exercice et déroulé de l'oral

Comme l'exercice avait plusieurs questions et se déroulait de manière inhabituelle, voici directement mon oral et son déroulé. C'est un oral qui parcourt plusieurs domaines de l'analyse.

L'examinateur m'avait l'air assez perdu (il m'a confondu avec celui qui devait regarder l'oral), et est reconnaissable à sa voix cassée (très très enrouée, saccadée). Il me propose l'énoncé suivant, valable jusqu'à la fin de l'exercice :

Soient $P \in \mathbb{C}[X],\ r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall z \in \mathcal{C}(0,r),\ P(z) \neq 0$. On nomme $N_r(P) = \{$nombre de zéros de P, comptés avec multiplicité, dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(0,r)\}$.

On a alors le théorème :

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X] \mid \forall z \in \mathcal{C}(0,r),\ |Q(z)| < |P(z)|,\ N_r(P) = N_r(P+Q).$$

L'examinateur me dit que dans un premier temps, nous allons voir quelques applications de ce théorème, pour ensuite éventuellement le démontrer.

1.1 Application 1 : Théorème de d'Alembert-Gauss

De but en blanc, l'examinateur me demande de montrer d'Alembert-Gauss. Je commence un raisonnement par l'absurde, mais avant d'aboutir l'examinateur me demande de changer de méthode. En effet, le raisonnement suivant est plus simple :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X],\ n \geq 1$. $P(z) \underset{|z|\infty}{\sim} a_n z^n$ donc $\exists; r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall z \in \mathcal{C}(O,r),\ |a_n z^n| > |\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|$. Alors, r satisfait les conditions de l'énoncé, donc $N_r(a_nX^n) = N_r(P)$. Comme a_nX^n s'annule en 0, on en déduit finalement que $N_r(P) \geq 1$: P possède donc une racine.

1.2 Application 2 : cas particulier

Soit $P = X^4 + 6X + 3$. Montrer que $N_2(P) = 4$, $N_1(P) = 1$, $N_{\frac{1}{3}}(P) = 0$. J'ai fait les 2 premières égalités avec le théorème en séparant P en deux polynômes (X^4 et $6X + 3$), et la dernière en montrant que le module d'une racine de P ne pouvait être inférieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

1.3 Démonstration du théorème

Il me reste environ la moitié du temps pour montrer le théorème. L'examinateur me donne l'indication : montrer que si r satisfait les hypothèses (en fait il ne me l'a pas dit immédiatement, mais je n'ai traité que ce cas), alors

$$N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta$$

J'introduis la décomposition en produit de racines de P, et par linéarité de l'intégrale, on est amené à montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - \lambda} d\theta &= 1 \text{ si } |\lambda| < r \\ &= 0 \text{ si } |\lambda| > r \end{aligned}$$

Les deux cas se traitent de la même manière : on décompose en série entière la fonction à l'intérieur (pas de la même manière en fonction du rapport $|\frac{r}{\lambda}|$), on justifie l'interversion somme-intégrale, le calcul devient aisé.

Ensuite, si Q, r satisfont les conditions de l'énoncé, $\forall t \in [0; 1]$, tQ satisfait aussi les conditions. On étudie donc :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{N}* \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(P+tQ)'(re^{i\theta})}{(P+tQ)(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta \end{array} \right.$$

On montre que F est continue, par conséquent constante : $F(0) = F(1)$ et $N_r(P) = N_r(P + Q)$.