SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. [$\star$]

Étudier la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right), \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\left(\pi^{3/5}-(2\arctan n)^{3/5}\right) \qquad \sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\cdot$$

Exercice 2. [$\star$]

Étudier, en fonction de $a>0$ et $\alpha>0$, la convergence de la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)}\cdot$$

Exercice 3. [$\circ$]

Soit $\alpha>1$. Donner un équivalent des sommes suivantes

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\cdot$$

Exercice 4. [$\circ$]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives convergentes. Démontrer que $\sum\sqrt{u_nv_n}$ converge.

Exercice 5. [$\circ$]

Si la série $\sum u_n$ converge, peut-on affirmer que $\sum {u_n}^2$ converge ? Et si la convergence de la série $\sum u_n$ est absolue, peut-on affirmer que $\sum {u_n}^2$ converge ?

Exercice 6. [$\star$] (Règle de Raabe–Duhamel)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}\cdot$$
Démontrer que, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et que, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
2. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot$$
   a) Démontrer que si $\alpha>1$ alors $\sum u_n$ converge.
   b) Démontrer que si $\alpha<1$ alors $\sum u_n$ diverge.
   c) Que peut-on dire si $\alpha=1$?

Remarque : Les résultats de cette question constitue la règle de Raabe–Duhamel qui précise ce qui peut se passer dans le cas d'incertitude de la règle de d'Alembert.

Exercice 7. [$\star$]

1. Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante. Démontrer que les séries $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 1} 2^k u_{2^k}$ ont même nature.
2. En utilisant la première question, étudier la convergence des séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} 1/\big(n(\ln n)^\alpha\big)$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. [$\star$]

Démontrer que la série suivante converge et calculer sa somme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 9. [$\circ$]

Démontrer que la série suivante converge et calculer sa somme

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n!}.$$

Exercice 10. [$\bigstar$]

Démontrer que le nombre N_n de classements à l'issue d'un marathon, auquel ont participé n coureurs, vaut $\lfloor n!\,\mathrm{e}\rfloor$. On tiendra compte du fait que, dans un marathon, il peut y avoir des abandons.

Exercice 11. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Connaissant la valeur de $\zeta(2)$, démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 12. [$\circ$]

Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n\ln n + (-1)^n n}.$$

Exercice 13. [$\star$]

Est-il vrai que si la série de terme général u_n converge, alors pour toute suite (ε_n) positive et de limite nulle, la série de terme général $\varepsilon_n u_n$ converge aussi ?

Exercice 14. [$\star$]

Soit (u_n) une suite réelle décroissante. On suppose que $\sum u_n$ converge. À l'aide de la suite $(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n})_{n\geqslant 0}$ démontrer que $u_n = o(1/n)$.

Exercice 15. [$\circ$] (Une démonstration de la formule de Stirling)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

1. Justifier que la série de terme général u_n est convergente.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite $\ell > 0$.
3. En admettant que $\ell = \sqrt{2\pi}$, trouver un équivalent de $n!$