ISOMÉTRIES VECTORIELLES

✠ ***Exercice 1.*** [○] (Recollement d'endomorphismes orthogonaux)
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires, $u \in \mathscr{O}(F)$ et $v \in \mathscr{O}(F^\perp)$. On pose $w = up_F + vp_{F^\perp}$. Démontrer que $w \in \mathscr{O}(E)$.

Il est clair que w est linéaire. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|w(x)\|^2 &= \|(up_F + vp_{F^\perp})(x)\|^2 \\
&= \|u(p_F(x)) + v(p_{F^\perp}(x))\|^2 \\
&= \|u(p_F(x))\|^2 + \|v(p_{F^\perp}(x))\|^2 \qquad \text{par Pythagore} \\
&= \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \qquad \text{car } u \in \mathscr{O}(F) \text{ et } v \in \mathscr{O}(F^\perp) \\
&= \|p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\|^2 \qquad \text{par Pythagore} \\
&= \|x\|^2,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{w \in \mathscr{O}(E).}$$

✠ ***Exercice 2.*** [⋆]
On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un vecteur invariant lorsqu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $MX = X$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
   a) Démontrer que $A+I_n$ et $A-I_n$ sont inversibles. *On calculera ${}^tXAX$ de deux manières où $X \in \operatorname{Ker}(A+I_n)$.*
   b) Démontrer que $(A+I_n)(A-I_n)^{-1}$ est une matrice orthogonale qui n'admet pas de vecteur invariant.
2. Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale qui n'admet pas de vecteur invariant. Démontrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A telle que $U = (A+I_n)(A-I_n)^{-1}$.

1. a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A+I_n)X = 0$, c'est-à-dire $AX = -X$. Alors ${}^tXAX = -{}^tXX$ et ${}^tXAX = -{}^tX{}^tAX = -{}^t(AX)X = -{}^t(-X)X = {}^tXX$, donc ${}^tXX = -{}^tXX$, ce qui prouve que $X = 0$ (car ${}^tXX$ est la norme euclidienne de X). Donc 0 n'est pas valeur propre de $A+I_n$, ce qui démontre que $A+I_n$ est inversible. On procède de même avec $A-I_n$. En définitive,

$$\boxed{A+I_n \text{ et } A-I_n \text{ sont inversibles.}}$$

   b) On a

$$\begin{aligned}
{}^t\big((A+I_n)(A-I_n)^{-1}\big) &= {}^t\big((A-I_n)^{-1}\big){}^t(A+I_n) \\
&= \big({}^t(A-I_n)\big)^{-1}{}^t(A+I_n) \\
&= ({}^tA-I_n)^{-1}({}^tA+I_n) \\
&= (-A-I_n)^{-1}(-A+I_n) \\
&= (A+I_n)^{-1}(A-I_n) \\
&= \big((A+I_n)(A-I_n)^{-1}\big)^{-1},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(A+I_n)(A-I_n)^{-1} \text{ est une matrice orthogonale.}}$$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A+I_n)(A-I_n)^{-1}X = X$, c'est-à-dire $(A-I_n)^{-1}(A+I_n)X = X$ puisque $(A-I_n)^{-1}$ et $A+I_n$ commutent. Alors $(A+I_n)X = (A-I_n)X$ i.e. $AX+X = AX-X$ ou encore $X = 0$. Donc

$$\boxed{1 \text{ n'est pas une valeur propre de } (A+I_n)(A-I_n)^{-1}.}$$

2. Analyse : S'il existe une matrice antisymétrique A telle que $U = (A+I_n)(A-I_n)^{-1}$, alors on a $U(A-I_n) = A+I_n$, c'est-à-dire $(U-I_n)A = U+I_n$ ou encore $A = (U-I_n)^{-1}(U+I_n)$. Cela prouve l'unicité sous réserve d'existence.

   Synthèse : Posons $A = (U-I_n)^{-1}(U+I_n)$ (où l'existence de $(U-I_n)^{-1}$ découle du fait que 1 n'est pas une valeur propre de U). L'analyse ci-dessus nous montre que $U = (A+I_n)(A-I_n)^{-1}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\big((U-I_n)^{-1}(U+I_n)\big)\\
&= {}^t(U+I_n)\,{}^t\big((U-I_n)^{-1}\big)\\
&= {}^t(U+I_n)\big({}^t(U-I_n)\big)^{-1}\\
&= ({}^tU+I_n)({}^tU-I_n)^{-1}\\
&= (U^{-1}+I_n)(U^{-1}-I_n)^{-1}\\
&= (I_n+U)U^{-1}\big((I_n-U)U^{-1}\big)^{-1}\\
&= (I_n+U)U^{-1}U(I_n-U)^{-1}\\
&= (I_n+U)(I_n-U)^{-1}\\
&= -(U+I_n)(U-I_n)^{-1}\\
&= -(U-I_n)^{-1}(U+I_n)\\
&= -A,
\end{aligned}$$

   où l'avant-dernière égalité découle du fait que $U-I_n$ et $U+I_n$ commutent.

   Bilan : On a démontré que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour toute matrice } U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ qui n'admet pas de vecteur invariant}\\ \text{il existe une matrice antisymétrique } A \text{ telle que } U = (A+I_n)(A-I_n)^{-1}.\end{array}}$$

✠ ***Exercice 3.*** [⋆] (Décomposition QR)
Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence de $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

Nous allons voir que la décomposition QR est l'application du procédé de Gram-Schmidt sur les colonnes de A, en partant de la première colonne.

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique pour lequel la base canonique $\mathscr{B}_{\text{can}}$ est orthonormale.

Notons $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ la famille de colonnes de A. Comme la matrice A est inversible, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et A est la matrice de passage de $\mathscr{B}_{\text{can}}$ à $\mathscr{C}$.

Par orthonormalisation de $\mathscr{C}$, on construit une base orthonormale $\mathscr{E} = (E_1, \dots, E_n)$ tels que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on ait $\text{Vect}(E_1, \dots, E_k) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_k)$.

On note R la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{U}$ qui est alors triangulaire supérieure.

On note également Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_{\text{can}}$ à $\mathscr{E}$, qui est orthogonale puisque $\mathscr{B}_{\text{can}}$ et $\mathscr{E}$ sont des bases orthonormales.

Comme $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{E}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{U}}\, P_{\mathscr{U}\to\mathscr{E}}$, on a $Q = AR^{-1}$, c'est-à-dire $A = QR$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour toute matrice inversible } A, \text{ il existe } Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } R \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = QR.}$$

Remarque : La décomposition QR permet de résoudre les systèmes linéaires (les matrices orthogonales et les matrices triangulaire sont faciles à inverser). Cela nécessite de déterminer au préalable la décomposition QR de la matrice, ce qui est couteux en calculs. Ainsi, la méthode de résolution par l'algorithme de Gauss est moins couteuse (environ deux fois moins). Toutefois, la méthode de résolution par la décomposition QR est plus stable numériquement (elle commet moins d'erreurs de calcul).

✠ ***Exercice 4.*** [★]

Soit $n \geqslant 3$. Résoudre l'équation $\mathrm{Com}(M) = M$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : Calculer* $\|M\|^2$.

On raisonne par analyse/synthèse.

▷ Analyse :

Considérons une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle $\mathrm{Com}(M) = M$.

On a

$$\|M\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tMM) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(M)M\right) = \mathrm{Tr}\left(\det(M)I_n\right) = n\det(M).$$

Si $\det(M) = 0$, on a $\|M\| = 0$ et donc $M = 0_n$.

Si $\det(M) \neq 0$, on a $\det(M) > 0$ et la matrice M est inversible. Comme ${}^t\mathrm{Com}(M)M = \det(M)I_n$, on a ${}^tMM = \det(M)I_n$. En prenant le déterminant dans cette égalité, il vient $\det(M)^2 = \det(M)^n$. Comme $n \neq 2$ et $\det(M) > 0$, on en déduit que $\det(M) = 1$. Par conséquent, on a ${}^tMM = I_n$, ce qui démontre que M est une matrice orthogonale.

▷ Synthèse :

Si $M = 0_n$, on a clairement $\mathrm{Com}(M) = M$.

Si M est orthogonale, alors M est inversible et l'on a $\mathrm{Com}(M) = \det(M){}^tM^{-1} = M$ puisque $\det(M) = 1$ et ${}^tM = M^{-1}$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour } n \geqslant 3, \text{ on a } \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Com}(M) = M\} = \{0_n\} \cup \mathscr{O}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque : si $n = 2$, les solutions de l'équation $\mathrm{Com}(M) = M$ sont les matrices multiples des matrices spéciales orthogonales.