Chapitre 15 : permutations et déterminants

Table des matières

1 Permutations

1.1 Définitions

Définition 1 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***permutation sur l'ensemble*** E, toute bijection $\sigma : E \longrightarrow E$. On note $\mathfrak{S}(E)$ ou bien $S(E)$ l'ensemble des permutations de E.

Proposition 1 L'ensemble $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ forme un groupe de cardinal $n!$, l'élément neutre est $e = \mathrm{id}_E$ et l'inverse de la permutation σ est la bijection réciproque σ^{-1}.

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Proposition 2 Soit $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$ un ensemble fini de cardinal n. L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}(E) \\ \sigma & \longmapsto & \Big(\Phi(\sigma) : a_i \longmapsto a_{\sigma(i)}\Big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

Par conséquent, plutôt qu'étudier le groupe $\mathfrak{S}(E)$, il suffit d'étudier le groupe $\mathfrak{S}_n$, ce qu'on fera dans toute la suite.

Définition 2 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle ***point fixe*** de σ, tout élément $k \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$\sigma(k) = k.$$

On appelle ***support*** de σ le complémentaire dans $[\![1, n]\!]$ de l'ensemble des points fixes. On note $\mathrm{supp}(\sigma)$ le support de σ :

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \Big\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) \neq k\Big\}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On appelle ***orbite de k selon*** σ l'ensemble : $\mathscr{O}(k) = \{\sigma^i(k) \in [\![1, n]\!] \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 3 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Si $r = \mathrm{Card}(\mathscr{O}(k))$, alors : $\mathscr{O}(k) = \{k, \sigma(k), \cdots, \sigma^{r-1}(k)\}$. Ainsi :

$$\Big\{p \in \mathbb{Z} \mid \sigma^p(k) = k\Big\} = r \cdot \mathbb{Z}.$$

- Le support de σ correspond aux entiers k tels que $\mathscr{O}(k)$ est de cardinal supérieur ou égal à 2.
- La relation $\mathscr{R}$ définie sur $[\![1, n]\!]$ par :

$$\forall (k_1, k_2) \in [\![1, n]\!]^2,\ k_1 \mathscr{R} k_2 \Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z}, \quad k_2 = \sigma^i(k_1)$$

est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont exactement les orbites des éléments de $[\![1, n]\!]$ selon la permutation σ. Les orbites forment donc une partition de $[\![1, n]\!]$.

Définition 3 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que la permutation σ est un ***cycle*** si la permutation σ n'admet qu'une seule orbite de cardinal supérieur ou égal à 2 (les points des autres orbites étant donc des points fixes pour σ).

Si σ est un cycle, on appelle ***longueur du cycle*** σ et on note $\ell(\sigma)$ le cardinal de la seule orbite de σ de cardinal supérieur ou égal à 2. En notant $p = \ell(\sigma)$ et $\mathcal{O} = \{a_1, \cdots, a_p\}$ l'orbite de cardinal supérieur ou égal à 2 pour σ, on note :

$$\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_p),$$

pour signifier que la permutation σ laisse fixe tous les entiers k de $[\![1, n]\!]$ hors de $\mathcal{O}$ et que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p-1\}, \quad \sigma(a_i) = a_{i+1} \text{ et } \sigma(a_p) = a_1.$$

Remarque 1 Les permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont notées :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

1.2 Décomposition en produits de cycles disjoints

Proposition 4 Soient σ et σ' deux permutations dans $\mathfrak{S}_n$ à supports disjoints. Alors, les deux permutations commutent : $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.

Théoréme 1 Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de cycles à supports disjoints et la décomposition est unique à ordre près.

Méthode : Comment trouver la décomposition d'une permutation en cycles à supports disjoints ?

Soit σ une permutation donnée dans $\mathfrak{S}_n$. Pour trouver sa décomposition :

- prendre un entier k entre 1 et n
- calculer $\sigma(k)$, $\sigma^2(k)$, etc. jusqu'à reboucler à $\sigma^r(k) = k$
- écrire le cycle correspondant : $c_1 = (k, \sigma(k), \cdots, \sigma^{r-1}(k))$
- recommencer avec un autre entier k non déjà rencontré : on obtient des cycles $c_1, c_2 \cdots, c_s$
- écrire finalement $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_s$.

Exemple 1 Quelle est la décomposition de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_7$?

Méthode : Comment calculer les puissances d'une permutation ?

Soit σ une permutation donnée dans $\mathfrak{S}_n$. Pour calculer σ^p

- écrire la décomposition de σ en cycles à supports disjoints $c_1, \cdots, c_s$
- calculer le ppcm L des longueurs des cycles c_i
- calculer le reste R dans la division euclidienne de p par L
- calculer chaque c_i^R
- calculer $c_1^R \circ c_2^R \circ \cdots \circ c_s^R = \sigma^R$.

Exemple 2 Calculer σ^{1001} avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 2 & 7 & 5 & 11 & 1 & 3 & 4 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

1.3 Décomposition en produit de transpositions

Définition 4 On appelle ***transposition***, tout cycle de longueur 2. En notant $\{i, j\}$ la seule orbite de cardinal supérieur ou égal à 2, la transposition (i, j) échange les éléments i et j.

Théoréme 2 Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit (non unique) de transpositions.

Méthode : Comment trouver une décomposition d'une permutation en transpositions ?

Soit σ une permutation donnée dans $\mathfrak{S}_n$. Pour voir une décomposition en transpositions :

- décomposer σ en produit de cycles àsupports disjoints
- pour chaque cycle $c_i = (a_1, \cdots, a_p)$ écrire :

$$(a_1, \cdots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_{p-1}, a_p)$$

- écrire σ comme produit de produits de transpositions.

Exemple 3 • Décomposer tout cycle en produit de transpositions.

• Décomposer en produit de transpositions la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ telle que : $\forall k \in \{1, \cdots, 2n\}$, $k = 0[2] \Longrightarrow \sigma(k) = k - 1$ et $k = 1[2] \Longrightarrow \sigma(k) = k + 1$.

1.4 Signature

Définition 5 Soit $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_r$ une permutation donnée par sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. On appelle ***signature*** de la permutation σ le nombre :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{r} \ell(c_i) - r\right)}.$$

L'exposant est égal à la somme des longueurs des cycles c_i moins le nombre de cycles qui interviennent dans la décomposition. Par unicité à ordre près, la signature ne dépend uniquement que de la permutation σ.
La signature est toujours égale à ± 1.

Exemple 4 Calculer la signature pour un cycle de longueur ℓ, pour une transposition, pour id.

Théoréme 3 L'application

$$\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe entre le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Méthode : Comment calculer la signature d'une permutation ?

Soit σ dans $\mathfrak{S}_n$. Pour calculer $\varepsilon(\sigma)$:
- écrire σ comme produit de cycles à supports disjoints et utiliser la définition
- écrire σ comme produit de transpositions et écrire $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nombre de transpositions}}$
- utiliser la formule : $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Exemple 5 Quelles sont les signatures des permutations dans les exemples précédents ?

Définition 6 On dit que la permutation σ est ***paire*** si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et ***impaire*** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Corollaire 1 Si $n \geqslant 2$, l'ensemble $\mathscr{A}_n$ des permutations paires forme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ de cardinal $\frac{n!}{2}$.

2 Formes multilinéaires

2.1 Définitions

Définition 7 Soit E un K-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une application $\Phi : E^n \longrightarrow K$ est une ***forme multilinéaire*** ou une ***forme n-linéaire***, si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application

$$\Phi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \Phi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{array} \right.$$

est linéaire .

Une forme multilinéaire est une application linéaire par rapport à chaque variable et à valeurs dans le corps K.

Soit $\Phi : E^n \longrightarrow K$ une forme n-linéaire. On dit que la forme Φ est
- ***symétrique*** si pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_n$, on a : $\Phi(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)})$
- ***anti-symétrique*** si pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_n$, on a : $\Phi(x_1, \cdots, x_n) = -\Phi(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)})$
- ***alternée*** si pour tout uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs dans E^n, dès que la liste $(x_1, \cdots, x_n)$ contient au moins deux éléments égaux, alors :

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

Proposition 5 Soit $\Phi : E^n \longrightarrow K$ une forme n-linéaire.
- La forme est symétrique ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: $\Phi(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$.
- La forme est anti-symétrique ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a : $\Phi(x_1, \cdots, x_n) = \varepsilon(\sigma) \cdot \Phi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$.
- Toute forme n-linéaire alternée est anti-symétrique. Lorsque $2_K \neq 0_K$, toute forme anti-symétrique est alternée.

2.2 Formes n-linéaires alternées

Théoréme 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un K-espace vectoriel de dimension égale à n. Alors l'ensemble $\Lambda_n^*(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E^n forme un K-espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément, si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, l'application :

$$\det_{\mathscr{B}} : \left| \begin{array}{ccl} E^n & \longrightarrow & K \\ (x_1 \cdots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \times a_{\sigma(2)2} \times \cdots \times a_{\sigma(n)n} \end{array} \right. ,$$

avec $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i$ est la seule forme n-linéaire alternée sur E^n valant 1 en $(e_1, \cdots, e_n)$.
De plus, pour toute forme n-linéaire alternée $\Phi : E^n \longrightarrow K$, on a : $\Phi = \Phi(e_1, \cdots, e_n) \cdot \det_{\mathscr{B}}$.

3 Déterminants

3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace E. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i$.
On appelle ***déterminant*** de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ selon la base $\mathscr{B}$, le nombre

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \times a_{\sigma(2)2} \times \cdots \times a_{\sigma(n)n}.$$

Proposition 6 Avec les notations précédentes, la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ forme une base de l'espace E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. De plus, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on dispose de la formule :

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \cdots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \cdots, e_n) \cdot \det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n).$$

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de l'espace E et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors, l'application

$$\Phi_u : \left| \begin{array}{ccl} E^n & \longrightarrow & K \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) \end{array} \right.$$

est une forme n-linéaire alternée. De plus, le nombre $\Phi_u(e_1, \cdots, e_n) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ de l'espace E et ne dépend donc que de l'endomorphisme u. On appelle ***déterminant de l'endomorphisme*** u et on note $\det u$ le nombre :

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \cdots, u(e_n)).$$

Ainsi,

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \det u \cdot \det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n).$$

Proposition 8 Soient u et v deux endomorphismes dans $\mathscr{L}(E)$. Alors :

$$\det(u \circ v) = \det u \times \det v.$$

De plus, l'endomorphisme u est un automorphisme si et seulement si $\det u \neq 0$. Par conséquent, l'application :

$$\det : \left| \begin{array}{ccc} GL(E) & \longrightarrow & K^* \\ u & \longmapsto & \det \end{array} \right.$$

est un morphisme entre les groupes $(GL(E), \circ)$ et $(K^*, \times)$.

Remarque 2 • Si u et v sont dans $\mathscr{L}(E)$, il n'existe aucune formule pour $\det(u+v)$.
- Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in K$, alors : $\det(\lambda \cdot u) = \lambda^n \times \det u$.
- Si $u \in GL(E)$, alors : $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 9 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$. On appelle ***déterminant de la matrice carrée*** A, le déterminant de l'endomorphisme $A \in \mathscr{L}(K^p)$ canoniquement associé à A. Les coefficients a_{ij} correspondant à la coordonnée de l'image $A(e_j)$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique selon le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de K^p, on en déduit :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \times \cdots \times a_{\sigma(p)p}.$$

Proposition 9 Les propriétés suivantes découlent directement de celles du paragraphe précédent :
- pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_p(K)$, on a :
$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$
- pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(K)$, on a :
$$A \in GL_p(K) \Longleftrightarrow \det A \neq 0 \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$
- le déterminant est un morphisme de groupes entre $(GL_p(K), \times)$ et $(K^*, \times)$.
- pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(K)$ et tout scalaire $\lambda \in K$, on a :
$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^p \cdot \det(A).$$

Remarque 3 • Deux matrices semblables ont donc mémes traces, rangs et déterminants.
- La réciproque est fausse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Méthode : Comment faire le tri entre tous ces déterminants ?

Pour s'y retouver entre déterminants d'une famille de vecteurs, d'endomorphisme ou de matrice carrée
▶ se ramener toujours au déterminant d'une matrice carrée ; pour ce faire :
- pour calculer $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n)$, écrire la matrice A dont la $j^{\text{ème}}$ colonne renferme les n coordonnées de x_j selon $\mathscr{B}$ puis calculer $\det A$
- pour calculer $\det f$, représenter l'endomorphisme f par une matrice A selon une certaine base puis calculer $\det A$.

4 Application des déterminants

4.1 Déterminant et transposée

Proposition 10 Pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_p(K)$, on a :

$$\det A = \det(A^T).$$

4.2 Déterminant et rang

Proposition 11 Soit $A \in \mathscr{M}_{pq}(K)$ une matrice. Alors, la taille maximale des matrices extraites de A qui sont carrées et inversibles est égale au rang de la matrice A.

Corollaire 2 Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{pq}(K)$,

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^T).$$

4.3 Cofacteurs et comatrice

Définition 10 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$.
On adopte la notation suivante pour désigner le déterminant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Pour tout $(i_0, j_0) \in \{1, \cdots, p\}^2$, on appelle ***cofacteur*** de la matrice A le nombre :

$$\Delta_{i_0 j_0} = (-1)^{i_0 + j_0} \times \det\Big((a_{ij})_{i \neq i_0 ; j \neq j_0}\Big).$$

Il s'agit au signe près du déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne numéro i_0 et la colonne numéro j_0.
On appelle ***comatrice*** de la matrice A et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice de ses cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = \Big(\Delta_{ij}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(K).$$

Proposition 12 Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(K)$, on a :

$$A \cdot (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T \cdot A = \det(A) \cdot I_p.$$

Méthode : Comment calculer le déterminant d'une matrice carrée ?

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice carrée. Pour calculer $\det A$:

- utiliser les opérations $C_i \longleftarrow C_i + aC_j$ ou $L_i \longleftarrow L_i + aL_j$, avec $i \neq j$ pour faire apparaître des zéros sur une colonne ou une ligne
- repérer alors une ligne ou une colonne avec un maximum de zéros
- effectuer le développement par rapport à une colonne par exemple :
  - commencer par le premier coefficient : prendre $i = 1$
  - supprimer la ligne et la colonne de A au croisement de a_{ij}
  - calculer le déterminant de la matrice obtenue
  - multiplier ce résultat par $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij}$
  - recommencer pour i variant de 1 à n
  - faire la somme des résultats obtenus : c'est $\det A$.

Exemple 6 • Calculer $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

• Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

• Calculer $\det f$, avec $f : M \longmapsto M \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $g : M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times M$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

Exemple 7 • Pour quels réels a, la famille $\Big((1,2,3), (a,1,1), (1,a,0)\Big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

• Calculer le déterminant de $f : P(X) \longmapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ agissant sur $\mathbb{C}_n[X]$.

• Étant donné un système linéaire de p équations à p inconnues mis sous forme matricielle $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, si l'on suppose A inversible, montrer les formules de Cramer : le $i^{\text{ème}}$ coefficient x_i de la seule solution X est donné :

$$x_i = \frac{\det(\tilde{A}_i)}{\det(A)},$$

où $\tilde{A}_i$ est la matrice A où la $i^{\text{ème}}$ colonne de A a été remplacée par la colonne Y.

Exemple 8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \cdots, x_n$, $(n+1)$ nombres complexes. On pose $V_n(x_0, \cdots, x_n) = \det \left(x_i^j\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ appelé le ***déterminant de Van der Monde***. Montrer la formule :

$$V_n(x_0, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$