Lycée Saint-Louis
Spé MP[1]

2018-19

T.D. EM_2 : Électrostatique et Gravitation

Exercice 1 Charges entre deux plans

Entre deux plans parallèles (infiniment étendus) de cotes $z = -e/2$ et $z = +e/2$ se trouve de la matière chargée. La densité volumique de charge est uniforme et égale à ρ entre ces deux plans. Cette densité est nulle ailleurs.

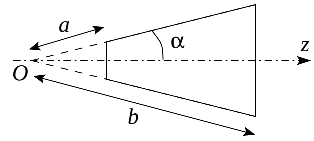
1. Déterminer le potentiel et le champ électrostatique partout.
2. Définir la densité surfacique σ de charges associée à ce système lorsque e est "petit". Exprimer le champ en fonction de σ.
3. Que devient l'expression du champ électrique dans la limite $e \to 0$, σ restant finie. Commentaire ?
4. Retrouver cette expression de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ pour un plan chargé (e nulle) considéré comme un ensemble de fils élémentaires juxtaposés.

Exercice 2 Détermination d'une répartition de charges

On considère une répartition volumique de charges électriques présentant la symétrie sphérique, contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R. Soit M un point à l'intérieur de la sphère. On pose $\mathrm{OM} = r < \mathrm{R}$.

1. Déterminer cette répartition caractérisée par la densité volumique $\rho(r)$ pour que le champ à l'intérieur de la sphère soit de la forme $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}/r$.
2. Calculer la charge totale de la sphère et caractériser le champ à l'extérieur de la sphère.

Exercice 3 Tronc de cône

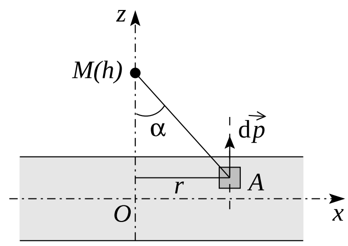


Calculer le champ électrostatique créé en son sommet par une portion de cône creux, de sommet O, d'axe Oz, de demi-angle au sommet α, limité entre les distances a et b du sommet, uniformément chargé en surface avec la densité σ.

Exercice 4 Tunnel en ligne droite

1. Entre deux points A et B de la surface terrestre, on a creusé un tunnel en ligne droite. Celui-ci est suffisamment étroit pour ne pas perturber le champ de gravitation. Un wagon glisse le long de ce tunnel sans frottement. Déterminer l'équation différentielle du mouvement et la durée du trajet.
2. Les problèmes techniques et financiers inhérents à ce mode de transport sont résolus depuis 2046. La MP One World Travel Company a mis en place un réseau planétaire de tunnels avec un nœud de communications dans le jardin du Luxembourg. Estimer la durée du voyage entre Paris et Hong-Kong.

Exercice 5 Dipôles répartis entre deux plans parallèles



L'espace compris entre deux plans de côtes $-e/2$ et $e/2$ est rempli de dipôles microscopiques régulièrement répartis. Un volume mésoscopique élémentaire $\mathrm{d}\tau$ possède un moment dipolaire $\mathrm{d}\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}\tau$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}}$, densité volumique de moment dipolaire encore appelé *polarisation*, est ici uniforme : $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \mathrm{P}\,\overrightarrow{e_z}$.

1. Un point A situé entre les plans de côtes $-e/2$ et $e/2$ est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). Exprimer le potentiel dV créé par les dipôles situés dans l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ situé au voisinage de A, en un point M situé sur l'axe (Oz) à la côte h. On pourra utiliser l'angle α.
2. En déduire le potentiel et le champ électrique en tout point M.
3. Montrer que cette distribution de dipôles est équivalente à une distribution de charges que l'on précisera.

Exercice 6 Accrétion d'une étoile

1. On considère une sphère chargée de rayon r et de densité volumique uniforme. Rappeler l'expression du champ électrique et du potentiel en tout point M situé à la surface de la sphère. On posera $\mathrm{V} = 0$ à l'infini.
2. Calculer le travail d'un opérateur qui amène une particule de charge q, initialement à l'infini, sur la surface de la sphère de rayon r.
3. Soit une sphère chargée de rayon R et de densité volumique uniforme ρ. Déterminer l'énergie potentielle du système en fonction de sa charge totale Q et de son rayon R.
4. Par analogie, déterminer l'énergie potentielle de gravitation d'une étoile de masse M et de rayon R. On suppose que cette étoile s'est constituée par accrétion de poussières initialement très éloignées les unes des autres.
5. Le Soleil s'est constitué il y a environ 4,5 milliards d'années. Sa masse est $\mathrm{M} = 2.10^{30}$ kg et son rayon $\mathrm{R} = 7.10^{8}$ m. En supposant qu'il rayonne une puissance constante depuis sa formation et qu'il n'y a pas d'autre source d'énergie, quel serait l'ordre de grandeur de la puissance rayonnée par le Soleil ?
6. Le flux solaire est en fait de l'ordre de $3,9.10^{26}$ W. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 7 Champ de pesanteur au centre d'un lac hémisphérique

1. Calculer le champ électrique créé au centre de la face plane d'une demi-sphère de rayon R uniformément chargée en volume avec une densité uniforme ρ.
2. On représente un lac comme un trou hémisphérique, de surface de centre O, de rayon R, pratiqué dans un sol de masse volumique uniforme ρ_0 et rempli d'eau de masse volumique ρ_1. Soit $\overrightarrow{g_0} = -g_0\,\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur au niveau du sol loin du lac et $\overrightarrow{g_1} = -g_1\,\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur au centre O de la surface du lac.
Calculer $\Delta g = g_1 - g_0$ et faire l'application numérique. On donne $\rho_0 = 3,0.10^3$ kg.m^{-3}, $\rho_1 = 1,0.10^3$ kg.m^{-3} et $\mathrm{R} = 1$ km.

Exercice 8 Sphère avec répartition surfacique inhomogène

On considère une sphère de centre O et de rayon a qui porte la densité surfacique de charges non uniforme définie en coordonnées sphériques par $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

1. Montrer que cette distribution est dipolaire et calculer le moment dipolaire correspondant.
2. Montrer qu'on peut considérer cette distribution comme la superposition de deux sphères voisines de même rayon a, portant les densités volumiques de charge uniformes ρ et $-\rho$, décalées d'une distance e le long de Oz, à condition que $e \to 0$ et $\rho \to \infty$, avec une certaine relation entre e et ρ que l'on déterminera.
3. Calculer les potentiel et champ créés partout dans l'espace par la sphère de répartition surfacique de charges σ et commenter.

Exercice 9 Deux cercles chargés

Deux cercles de même rayon a, de même axe Oz, sont disposés à la distance D l'un de l'autre. Ils portent la même charge Q uniformément répartie le long de chaque cercle. On appelle O le milieu des centres des deux cercles.

1. Calculer le champ électrostatique en un point quelconque M de l'axe Oz en fonction de a, z, Q et de la permittivité du vide dans lequel le système est disposé.
2. Évaluer, à l'ordre le plus bas en ρ, le champ électrostatique en un point M situé à faible distance ρ de l'axe. En ce début d'année, l'utilisation d'un formulaire d'analyse vectorielle est autorisé.

Exercice 10 Pression au centre de la Terre

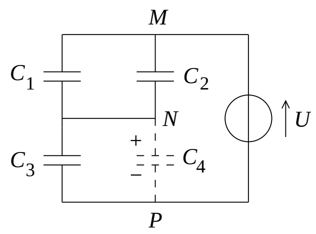
Evaluer avec un modèle aussi simple que possible, la pression au centre de la Terre, et la comparer à celle estimée par les géologues : 360 GPa.

Exercice 11 Cube conducteur

Un cube creux de centre O est formé de six plaques planes carrées conductrices de côté a. Cinq faces sont au potentiel V_0 et la sixième est au sol. Déterminer le potentiel en O.

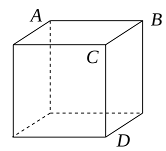
Exercice 12 Système de condensateurs

On considère un système de 4 condensateurs de capacités identiques C. Initialement, le condensateur C_4 dessiné en pointillés entre N et P n'est pas branché. Les trois autres condensateurs sont chargés par le générateur de tension U. On branche alors le condensateur C_4 après l'avoir chargé sous la d.d.p. U, le sens du branchement étant celui indiqué sur la figure.



1. Déterminer la charge et la tension de chacun des condensateurs, avant et après le branchement, une fois l'équilibre atteint.
2. Quelle est la charge qui a traversé le générateur après le branchement ?
3. Calculer l'énergie du système avant et après le branchement. Commenter.

Exercice 13 Réseau cubique

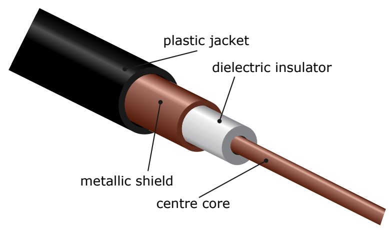


Considérons le cube ci-contre, dont chacune des arêtes représente une résistance notée r. Déterminer la résistance équivalente entre A et D, puis entre A et C et enfin, entre A et B, pour le réseau de la figure ci-contre.

On pourra mettre à profit les symétries du problème.

Exercice 14 Capacité linéique d'un câble coaxial

On considère un câble coaxial comme représenté ci-contre (figure tirée de Wikipedia), formé d'un conducteur intérieur appelé âme, et d'un conducteur extérieur appelé gaine. Entre ces conducteurs se trouve un isolant diélectrique. On supposera que son effet est de remplacer ε_0 par ε dans les calculs.

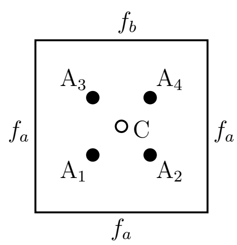


L'âme et la gaine forment un condensateur cylindrique. Si une longueur h de l'âme porte une charge q (en surface), alors une même longueur de la gaine porte la charge $-q$ (en surface aussi).

1. Calculer le champ électrique dans le diélectrique.
2. En déduire la capacité linéique Γ du câble coaxial. On notera R_a le rayon de l'âme et R_g le rayon intérieur de la gaine.
3. Calculer de deux façons l'énergie linéique stockée dans le câble coaxial lorsqu'une différence de potentiel U est imposée entre l'âme et la gaine.

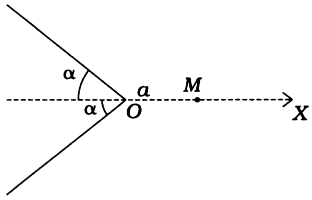
Exercice 15 Résolution d'un problème de Laplace discret

On considère un problème de LAPLACE bidimensionnel défini sur un carré de côté a, et vérifié par la fonction $f(x,y)$. On impose les conditions aux limites suivantes : sur trois des bords du carré, f doit prendre la valeur f_a et sur l'autre côté, la valeur f_b. On discrétise le carré afin de résoudre l'équation de LAPLACE discrète.



1. On utilise la discrétisation la plus grossière possible, à savoir un seul point au centre C du carré. Quelle est la valeur prise par f en ce point ?
2. On discrétise maintenant le carré à l'aide des quatre points A_i représentés sur la figure. Quelles sont les valeurs prises par f en ces quatre points ? Quelle valeur peut-on en déduire de f en C ? Commenter.

Exercice 16 Champ créé par deux demi-droites



Les deux demi-droites infinies portent une densité linéique de charges uniforme de valeur λ.

Calculer le champ électrostatique au point M (tel que $\mathrm{OM} = a$), sur la bissectrice formée par les fils (voir figure).

Exercice 17 Fil fini

On considère un fil fini, de longueur $2c$, disposé le long de l'axe $(z'\mathrm{O}z)$ symétriquement autour du point O, qui porte la charge q uniformément répartie. On considère le potentiel créé par ce fil en un point caractérisé par les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) d'axe $(z'\mathrm{O}z)$.

1. Déterminer l'expression du potentiel créé en un point quelconque M.
2. Étudier la limite de l'expression du potentiel :
   a. pour un point situé à très grande distance de O sur l'axe $(z'\mathrm{O}z)$;
   b. pour un point situé à très grande distance de O sur le plan $z = 0$;
   c. pour un point situé à très courte distance de O sur le plan $z = 0$.
3. Montrer que toute surface d'équation $z^2/a^2 + \rho^2/(a^2 - c^2) = 1$ est équipotentielle. Déterminer son potentiel.

Quelques indications ou solutions...

Exercice 1
Pas d'indication.

Exercice 2
La voie la plus naturelle pour aborder ce problème consisterait à utiliser l'équation de Maxwell-Gauss mais l'énoncé ne donne pas l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques... Il faut donc songer à une méthode intégrale, plus sûre.

Exercice 3
$\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{O}) = -\frac{\sigma \cos\alpha \sin\alpha}{2\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}\, \overrightarrow{e_z}$

Exercice 4
Pas d'indication, en dehors du fait que Paris est la capitale de la France, et que Hong-Kong n'est pas celle de la Chine...

Exercice 5
Que dire du potentiel à l'infini ? Pour la deuxième question, on obtient un champ électrique nul à l'extérieur du milieu polarisé et, à l'intérieur, il vaut $-\mathrm{P}/\varepsilon_0\, \overrightarrow{e_z}$.

Exercice 6
Pas d'indication.

Exercice 7
$\Delta g = 4{,}2.10^{-4}\ m.s^{-2}$.

Exercice 8
1. $\overrightarrow{p} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 a^3\, \overrightarrow{e_z}$.
2. $\rho = \sigma_0/e$.
3. *À l'extérieur, la structure du champ est dipolaire électrique et à l'intérieur, le champ électrique est uniforme* ($-\sigma_0/(3\varepsilon_0)\,\overrightarrow{e_z}$). *Commenter en traçant l'allure des lignes de champ.*

Exercice 9
$\mathrm{E}_{z,\mathrm{axe}}(z) = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-\mathrm{D}/2}{((z-\mathrm{D}/2)^2+a^2)^{3/2}} + \frac{z+\mathrm{D}/2}{((z+\mathrm{D}/2)^2+a^2)^{3/2}}\right]$

Exercice 10
Pas d'indication !

Exercice 11
$\mathrm{V}(\mathrm{O}) = 5\,\mathrm{V}_0/6$.

Exercice 12
La charge qui a traversé le générateur après le branchement est $\mathrm{CU}/6$ *et entre avant et après le branchement, il y a une perte d'énergie du système complet (condensateur et générateur) qui vaut* $\mathrm{CU}^2/24$.

Exercice 13
$\mathrm{R_{AD}} = 5r/6$, $\mathrm{R_{AC}} = 3r/4$ *et* $\mathrm{R_{AB}} = 7r/12$.

Exercice 14
Pas d'indication

Exercice 15
Pas d'indication.

Exercice 16
On trouve $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\, a}\,\overrightarrow{e_x}$, *indépendant de* α.

Exercice 17
Le plus dur est d'obtenir le potentiel $\mathrm{V}(\mathrm{M}) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 c}\ln\left[\frac{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}}{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}\right]$.