

THÉORIE DES APPLICATIONS

Exercice 1. Saturation d'une partie par une application

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

On appelle *saturation par* f l'application s définie par

$$s \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & f^{-1}\big(f(X)\big) \end{array} \right.$$

Pour toute partie X de E, la partie $s(X)$ est appelée la *saturée* de X par f. On a vu en cours que, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $X \subset s(X)$.

Une partie X de E est dite *saturée* par f lorsqu'elle est égale à sa saturée par f, c'est-à-dire lorsque $X = s(X)$. L'ensemble des parties de E saturées par f est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ noté $\mathscr{S}(E)$.

On pourra utiliser, sans les redémontrer, toutes les propriétés des images directes et réciproques énoncées dans le cours.

1. Démontrer que $\varnothing$ et E appartiennent à $\mathscr{S}(E)$.
2. Démontrer que s est une application croissante (lorsque $\mathscr{P}(E)$ est ordonné par l'inclusion).
3. a) Soit X une partie de E. Démontrer que $s(X)$ appartient à $\mathscr{S}(E)$.
   b) Que vaut $s \circ s$?
4. a) Démontrer que, pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, on a
   $$s(X \cup Y) = s(X) \cup s(Y) \qquad \text{et} \qquad s(X \cap Y) \subset s(X) \cap s(Y).$$
   b) Démontrer que $\mathscr{S}(E)$ est stable par réunion, par intersection.
5. Démontrer que $\mathscr{S}(E)$ est stable par passage au complémentaire.
6. Soient X et Y deux parties de E. Démontrer que si X et Y sont disjointes et que X est saturée alors X et $s(Y)$ sont encore disjointes.
7. Démontrer que l'application $\Phi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}\big(f(E)\big) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} \right.$ est une bijection.

Récréation mathématique

Super-Concombre pesait ce matin 5 kg et contenait 99 % d'eau. Après un bain de soleil sur les plages de Saint-Trop', il ne contient plus que 98 % d'eau. Calculer le pourcentage de poids perdu par Super-Concombre.