Maths Ulm

Dimitri Faure

29 juin 2019

Exercice 1

Montrer qu'on ne peut pas ecrire $\mathbb{R}^2$ comme union disjointe de cercles de rayons strictement positifs.

Exercice 2

On appelle trièdre toute partie T' de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à T où on a
$T = [(0,0),(1,0)] \cup [(0,0),(0,1)] \cup [(0,0),(1,1)]$.
Montrer que l'on ne peut pas ecrire $\mathbb{R}^2$ comme une réunion de trièdres disjoints. On montrera au préalable que si on pouvait paver le plan avec des trièdres, leur nombre serait dénombrable.

Exercice 3

Soit $n \geq 3$, on note u_n la plus petite solution de $x = n\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier $(u_n)_{n\geq 3}$.

Déroulement de l'epreuve

Examinateur très sympathique mais qui ne donnait que très peu d'indications. Il me dit au debut de l'oral que les exercices qu'il me donnera ne seront que des pretextes à une discussion mathématique.

Après m'être assuré qu'il s'agit bien d'un pavage par des cercles et pas par des disques, je remarque qu'en faisant l'union de tous les cercles de rayon strictement positif et de centre 0, on obtient le plan tout entier à l'exception de l'origine. J'en viens donc à penser que l'impossibilité d'un tel pavage se montre en étudiant une suite de cercles imbriqués. Je considère donc une suite de cercles emboités dont le rayon tend donc vers une limite l. J'annonce vouloir utiliser le théorème des compacts emboités sur les disques fermés délimités par la suite de cercles et il me demande de le redémontrer. Ayant déjà du le faire lors de mon oral de maths Cachan, je donne immédiatement la démonstration de l'existence d'un point dans l'intersection des compacts puis justifie que dans le cas où $l = 0$, l'intersection est bien réduite à un point. Reste donc le cas $l > 0$ et je cherche à montrer qu'on peut toujours se ramener au premier cas. Après avoir tenté un temps de regarder des suites de suites de rayons, je comprends qu'il y a plus simple. Je suppose donc par l'absurde que tous les cercles inclus dans notre cercle initial sont de rayon strictement supérieur à $\epsilon > 0$ puis je pose η la borne inférieur des rayons et considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon au plus $\frac{3}{2}\eta$. On aboutit alors à une contradiction en considèrant le cercle passant par le centre de $\mathcal{C}$ en remarquant que son rayon est au plus de $\frac{3}{4}\eta$. Avant de me donner le deuxième exercice, il me demande si à mon avis un pavage du plan par des disques fermés est possible, question à laquelle je réponds non.

Le deuxième exercice est beaucoup plus déroutant. Après avoir posé quelques questions sur la définition d'un trièdre j'en dessine quelques uns au tableau sur demande de l'examinateur. Je tente ensuite d'associer à tout trièdre un point du plan à coordonnées rationnelles mais je remarque qu'il est tout à fait possible qu'aucun des points d'un trièdre ait ses deux coordonnées rationnelles. L'examinateur me demande alors de regarder l'intersection entre un cercle de centre le "noeud" d'un trièdre et ensuite de considérer les autres trièdres ayant leur centre dans le cercle. Je ne vois cependant pas du tout où il veut en venir et dessiner des trièdres et des cercles ne me fait pas voir le rapport avec la dénombrabilité. Après une bonne dizaine voire quinzaine de minutes à tourner en rond, il me dit finalement qu'on va passer à un exercice d'analyse pour terminer cet oral.

Ce dernier est relativement facile mais j'hesite quelques minutes sur la strategie à adopter. Je justifie que la suite est bien définie pour $n \geq 3$ en etudiant le minimum de la fonction $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ puis je montre qu'il y a exactement deux solution à l'équation de l'exercice. J'intuite graphiquement que la suite tend vers 1 et réecrit donc l'equation en isolant les termes en x d'un coté et en posant $v_n = u_n - 1$ pour pouvoir faire plus facilement des développements limités. Je ne vois cependant la façon rigoureuse de montrer que la suite tend bien vers 1 et après m'avoir demandé d'établir que la suite est bornée, il me dit que l'oral est fini. Voulant quand meme absolument donner un équivalent de la suite, je reprends mon équation en supposant que v_n tend vers 0 et j'obtiens immediatement que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$. L'oral se conclut sur ce résulat.

Remarques sur le deuxième exercice

On peut trouver une solution de cet exercice sur le site suivant : http ://elj-jdx.canalblog.com/archives/2009/02/21/12617344.html.
Il est à mon avis complètement introuvable si la démonstration qu'envisageait l'examinateur est celle proposée en lien. Elle utilise par ailleurs des résultats de la théorie de la mesure qui sont totalement hors programme.