Problème n° 8 : Moyenne arithmético-géométrique

Correction du problème 1 – Autour de la moyenne arithmético-géométrique
Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique
Soit a et b deux réels positifs. On a

$$m_a(a,b) - m_g(a,b) = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

Ainsi $\boxed{m_g(a,b) \leqslant m_a(a,b)}$.

Partie I – Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{cases}, \ \textit{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = m_a(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n, b_n) \end{cases}$$

1. • D'après la question préliminaire, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant b_n$. Alors, étant donné $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

   donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   • De même pour $n \geqslant 1$,

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

   Donc la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   • On obtient alors, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n \geqslant b_n \geqslant b_1 \qquad \text{et} \qquad b_n \leqslant a_n \leqslant a_1.$$

   Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ vers un réel α, et (b_n) est croissante et majorée, donc $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ vers un réel β.
2. En passant à la limite dans la première relation de récurrence, il vient :

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\alpha = \beta}$$

3. On a $m_a(a,b) = a_1$ et $m_g(a,b) = b_1$. La suite (a_n) étant décroissante de limite α, il vient

$$m_a(a,b) = a_1 \geqslant \lim a_n = M(a,b).$$

   De la même manière, la décroissance de (b_n) amène $m_g(a,b) \leqslant M(a,b)$. Ainsi :

$$\boxed{m_g(a,b) \leqslant M(a,b) \leqslant m_a(a,b)}.$$

Partie II – Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} \qquad \textit{et} \qquad J(\lambda,\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2(x) + \mu^2 \sin^2(x)}}.$$

1. On pose, dans l'intégrale
$$I\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2(u)}}\,\mathrm{d}u,$$
le changement de variable $u = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right) = \varphi(t)$ Le réel x étant dans $[0,1[$, la fonction $\psi : t \mapsto \frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout t de cet intervalle :
$$\psi'(t) = \frac{(1+x)\cos(t)(1+x\sin^2(t)) - 2x\cos(t)\sin(t)(1+x)\sin(t)}{(1+x\sin^2(t))^2} = \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))^2} > 0$$
Ainsi, ψ est strictement croissante, et $\psi(0)=0$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. En particulier, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\psi(t) in[0,1[$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Comme on n'a pas la classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé, on se restreint dans un premier temps à un intervalle $[0, A]$, où $A \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, sur cet intervalle, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{(1+x\sin^2 t)^2}}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t))^2-(1+x)^2\sin^2(t)}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t)-(1+x)\sin(t))(1-x\sin^2(t)+(1+x)\sin(t))}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\sin(t))(1-x\sin(t))(1+\sin(t))(1+x\sin(t))}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)(1-x^2\sin^2(t))}} \\
&= \frac{(1+x)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))\sqrt{(1-x^2\sin^2(t))}}
\end{aligned}$$

Le plus dur est fait. On a alors (φ étant bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur lui-même d'après le théorème de la bijection, car continue et strictement croissante)
$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2(u)}}\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\times\frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{(1+x\sin^2(t))^2}}} \times \frac{(1+x)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{(1-x\sin^2(t))}{\sqrt{(1+x\sin^2(t))^2-4x\sin^2(t)}\times\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{(1-x\sin^2(t))}{\sqrt{(1-x\sin^2(t))^2}\times\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$
et donc, en passant à la limite lorsque A tend vers $\frac{\pi}{2}$ (la fonction φ^{-1} étant continue en tant que récirpoque d'une fonction continue, donc $\lim\limits_{A\to\frac{\pi}{2}} \varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$), on obtient :
$$\boxed{I\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = (1+x)I(x)}$$

2. On a, pour tout $x \in]0,1]$:
$$J(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(t)}} = I(\sqrt{1-x^2})$$

D'un autre côté :

$$J\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{1+x}{2}\right)^2\cos^2(t)+x\sin^2 t}}=\frac{2}{1+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\sin^2(t)}}=\frac{2}{1+x}I\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{1+x}I\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{2}{1+x}\times\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\times I\left(\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right)=I(\sqrt{1-x^2}).$$

On en déduit alors $\boxed{J(1,x)=J\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $a_n\neq 0$. Alors

$$J(a_{n+1},b_{n+1})=J\left(\frac{a_n+b_n}{2},\sqrt{a_nb_n}\right)=J\left(a_n\times\frac{1+\frac{b_n}{a_n}}{2},a_n\times\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right).$$

Or, de façon évidente, pour tout $\alpha>0$, et tout (λ,μ), on a $J(\alpha\lambda,\alpha\mu)=\frac{1}{\alpha}J(\lambda,\mu)$, donc

$$J(a_{n+1},b_{n+1})=\frac{1}{a_n}J\left(\frac{1+\frac{b_n}{a_n}}{2},\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)=\frac{1}{a_n}J\left(1,\frac{b_n}{a_n}\right),$$

d'après la question précédente, d'où, en rentrant de nouveau le facteur a_n :

$$J(a_{n+1},b_{n+1})=J(a_n,b_n).$$

Comme $a=a_0>0$, une récurrence immédiate montre alors que cette propriété est vraie pour tout n et que $\boxed{(J(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}\text{ est constante}}$.

4. Soit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<M(a,b)$. Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait à la fois :

$$\forall n\geqslant N,\quad |a_n-M(a,b)|\leqslant\varepsilon\qquad\text{et}\qquad|b_n-M(a,b)|\leqslant\varepsilon.$$

On a alors, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et tout $n\geqslant N$:

$$\frac{1}{\sqrt{(M(a,b)+\varepsilon)^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(M(a,b)-\varepsilon)^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}},$$

soit :

$$\frac{1}{M(a,b)+\varepsilon}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t}}\leqslant\frac{1}{M(a,b)-\varepsilon},$$

et par croissante de l'intégrale, il vient facilement :

$$\forall n\geqslant N,\quad\boxed{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{M(a,b)+\varepsilon}\leqslant J(a_n,b_n)\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{M(a,b)-\varepsilon}}.$$

5. Le terme du milieu de l'encadrement précédent est constant, égal à $J(a_0,b_0)=J(a,b)$, et ε peut être choisi aussi petit qu'on veut. Une fois qu'on a remplacé $J(a_n,b_n)$ par $J(a,b)$, on n'a plus de dépendance en n, on peut donc sans problème faire tendre ε vers 0, et il vient :

$$J(a,b)=\frac{\pi}{2M(a,b)},\qquad\text{soit:}\qquad\boxed{M(a,b)=\frac{\pi}{2J(a,b)}}.$$

Partie III – Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit cette fois (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases}a_0=a\\b_0=b\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\\b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\end{cases}$$

1. • Supposons $a \leqslant b$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite d'après l'hypothèse $a \leqslant b$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors on obtient :

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{puis:} \qquad b_{n+1} \geqslant \sqrt{(a_{n+1})^2} \geqslant a_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors de la relation définissant a_{n+1}, de la même manière que ci-dessus, que :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n,$$

puis de la seconde relation, que

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \leqslant \sqrt{b_n^2} = b_n,$$

d'où la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n).
On est dans une situation similaire à celle des suites adjacentes (à part qu'on ne sait pas bien montrer de façon directe que $a_n - b_n$ tend vers 0), la démonstration de la convergence est rigoureusement la même : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent.}}$

• Si $a \geqslant b$, alors on montre strictement par les mêmes arguments que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant a_n$, que (b_n) est croissante et majorée par a_0 et (a_n) est décroissante et minorée par b_0. Ainsi, dans cette situation aussi, $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent.}}$

• Appelons α la limite de (a_n) et β la limite de (b_n). Alors, on montre comme plus haut, en passant à la limite dans la relation définissant a_{n+1}, que $\boxed{\alpha = \beta}$.

2. Le plus simple est de faire une récurrence.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $B_n = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.
B_0 est un produit vide, donc par convention $B_0 = 1$, ce qui valide $\mathcal{P}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors

$$B_{n+1} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n \sin(\alpha)} \times \frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$$

Cela montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. On suppose que $a \leqslant b$. Comme a et b sont positifs, on a alors $\frac{a}{b} \in [0,1]$, donc $\alpha = \operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)$ est bien défini.
Si $\alpha = 0$, alors $a = b$ et les suites (a_n) et (b_n) sont clairement constantes, d'où le résultat attendu.
On suppose don désormais que $\alpha \neq 0$. Comme $a_0 = b_0 \cos(\alpha)$, on obtient :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = b_0 \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

puis :

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pour continuer à exprimer les termes b_n, on exprime (b_n) indépendamment de (a_n) : pour tout $n \geqslant 0$,

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = \sqrt{\frac{\frac{b_{n+1}^2}{b_n} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = b_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}}{2}}.$$

Ainsi, on trouve par exemple :

$$b_2 = b_1 \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}} = b_1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

(les cosinus étant positif, a étant par définition dans $[0, \frac{\pi}{2}]$). Ainsi, on voit apparaître le déubut du produit de cosinus étudié dans la question précédente. On effectue alors une récurrence.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $b_n = b_0 B_n$.

Nous venons de montrer que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vrais (et même $\mathcal{P}(2)$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vrais. Alors, par les hypothèses de récurrence,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right),$$

donc, d'après la relation établie ci-dessus,

$$b_{n+2} = b_{n+1}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}{2}} = b_{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = b_0 B_{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = bB_{n+2}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{b}{\alpha} \times \frac{\alpha}{2^n}\frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \longrightarrow \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} \dfrac{b\cdot\sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}}$$

4. On reprend le même argument en l'adaptant aux fonctions hyperboliques. Pour cela, nous démontrons d'abord, par analogie avec le cas trigonométrique :
   - **Lemme 1 :** Soit x et y deux réels, alors $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$
     Démonstration : On a
     $$2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x).$$
   - **Lemme 2 :** Soit x un réel. Alors $\dfrac{1+\mathrm{ch}(2x)}{2} = \mathrm{ch}^2(x)$.
     Démonstration : on a :
     $$\mathrm{ch}^2(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{2+2\mathrm{ch}(x)}{4} = \frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}.$$

   À l'aide de ces deux résultats, l'argument précédente s'adapte bien, à commencer par le cas $\alpha = 0$ (correspondant comme avant à $a = b$). Nous supposons donc $\alpha \neq 0$.

   Tout d'abord, puisque $a \geqslant b$, $\frac{a}{b} \geqslant 1$. Comme ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, allant de 1 à $+\infty$, et continue, d'après le théorème de la bijection, ch induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi, il existe un unique réel α tel que $a = \mathrm{ch}(\alpha)b$.

   On a alors, d'après le lemme 2 :

   $$a_1 = b\frac{1+\mathrm{ch}(\alpha)}{2} = b\mathrm{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{puis:} \qquad b_1 = \sqrt{b^2\mathrm{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = b\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

   La récurrence effectuée dans le cas $a \leqslant b$ s'adapte bien pour montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$

   Le même calcul vaut aussi pour ce produit, d'après le lemme 1 :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{b}{2^n}\frac{\mathrm{sh}(\alpha)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

Or, tout comme pour le sinus, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 0$, d'où le résultat escompté :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \begin{cases} \dfrac{b \cdot \mathrm{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}}$$