Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 10/12/2020
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 9 : Dérivation

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm08-nom.pdf` (par exemple `dm08-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus du problème ci-dessous obligatoire, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 6 de la sélection de problèmes sur ma page web (exemple de fonction continue partout, dérivable nulle part).

Correction du problème 1 –

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

1. La fonction f_n est de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$ comme composée de fonctions qui le sont.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_{x_0,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   - si $x \neq x_0$, $(x-x_0)^2 > 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n(x-x_0)^2 = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x) = 0$;
   - si $x = x_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}(x_0) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x_0) = 1$

   Ainsi, $\boxed{(f_{x_0,n}) \text{ converge simplement vers la fonction } f_{x_0} \text{ nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{x_0\}, \text{ et telle que } f_{x_0}(x_0) = 1.}$
3. f_{x_0} n'est évidemment $\boxed{\text{pas continue en } x_0}$, puisque $\lim\limits_{x\to x_0+} f_{x_0}(x) = 0 \neq 1 = f_{x_0}(x_0)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, chaque suite $(f_{x_i,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers 0 si $x \neq x_i$, et vers 1 si $x = x_i$. Les réels x_i, $i \in [\![1,m]\!]$, étant deux à deux distincts, par linéarité de la limite (on a un nombre fini de termes), on en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $x \notin \{x_1,\dots,x_m\}$, et converge vers 1 si $x \in \{x_1,\dots,x_m\}$.
   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction } f}$ égale à 0 en tout point de $\mathbb{R}$, exceptés les points $x_1,\dots,x_m$, où elle vaut 1. Cette fonction n'est évidemment pas continue aux différents points x_i, les limites à droite et à gauche en ces points étant 0, alors que $f(x_i) = 1$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

1. La différence fondamentale entre convergence simple et convergence uniforme est que dans le cas de la convergence uniforme, le même entier N doit convenir pour tous les réels x (de I bien sûr) : on a uniformité de la vitesse de convergence (d'où la terminologie).
   Montrons que $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente, donc que :
   $$\exists \varepsilon > 0,\quad \forall N > 0,\quad \exists x \in \mathbb{R},\quad \exists n > N,\quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$
   L'étude de la partie I (et l'énoncé des résultats qui suivent) indique que le défaut de convergence uniforme se situera probablement en x_0 Pour x proche de x_0, $(f_{x_0,n}(x))$ va rester trop longtemps proche de 1 ; et ne pas tendre assez vite vers 0, l'amplitude de ce comportement étant 1, on va prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
   Soit alors N quelconque. On doit montrer qu'il existe x (qu'on choisit différent de x_0) tel qu'il existe $n \geqslant N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$. Or :
   $$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2} \geqslant \frac{1}{2} \iff (x-x_0)^2 \leqslant \frac{\ln 2}{n} \iff |x - x_0| \leqslant \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}.$$

On peut donc choisir $n > N$ quelconque, et x tel que $x \neq x_0$ dans $\left]x_0 - \frac{\ln 2}{n}, x_0 + \frac{\ln 2}{n}\right[$.

Cela donne bien l'existence de $x \in \mathbb{R}$, et de $n > N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Par conséquent, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente.

2. On a toujours :

$$\exists N, \forall x, P(N,x) \Longrightarrow \forall x, \exists N, P(N,x),$$

expression logique signifiant que s'il existe un N indépendant de x pour lequel une propriété est vérifiée pour tout x, alors il existe aussi un N convenable sans imposer l'indépendance en x. Qui peut le plus, peut le moins !

Or, les deux définitions de convergence simple et de convergence uniforme ne diffèrent que d'une interversion de symboles $\exists$ et $\forall$, traduisant l'indépendance imposée de N par rapport à x pour la convergence uniforme.

Ainsi, d'après la remarque ci-dessus, $\boxed{\text{la convergence uniforme implique la convergence simple.}}$

3. Soit $x \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence uniforme, il existe N tel que pour tout $y \in I$ (donc aussi x) pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons une telle valeur de N, et choisissons $n \geqslant N$ quelconque. Alors,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Par ailleurs, f_n étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Alors, pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Cela montre bien la continuité de f en x.

Ceci étant valide pour tout $x \in I$, $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

4. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que dans la définition.

Montrons pour commencer que $\sum f_n$ converge simplement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant a_n$. Ces termes étant positifs, comme $\sum a_n$ converge, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

Montrons que la convergence est uniforme. La fonction limite est $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme partielle de cette série.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in I$,

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Ce majorant a l'avantage de ne pas dépendre de x.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, il existe N (indépendant de x, donc) tel que pour tout $n \geqslant N$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in I$: $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.
Ce N étant indépendant de x, on a, par définition, convergence uniforme de $\sum f_n$.

Conclusion : $\boxed{\text{si } \sum f_n \text{ converge normalement, et si les } f_n \text{ sont continues, alors la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue.}}$

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$.

Or, $\sum b^n$ converge, puisque $b \in]0,1[$. Ainsi, la somme définissant f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente (d'après II-5), donc simplement convergente (d'après II-2). Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

Par ailleurs, l'uniforme convergence et la continuité du cosinus assurent la $\boxed{\text{continuité de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$. Alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -(ab)^n \pi \sin(a^n \pi x) \qquad \text{donc:} \qquad |f_n(x)| \leqslant (ab)^n \pi.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis entre x et $x+h$, f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|(ab)^n\pi.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité sur $n \in [\![0, m-1]\!]$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m-1} |f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \frac{|h|\pi((ab)^m) - 1}{ab-1} \leqslant \frac{|h|\pi(ab)^m}{ab-1},$$

car $ab - 1 > 0$ par hypothèse. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|S_m(h)| = \left|\sum_{n=0}^{m-1} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|f_n(x+h) - f_n(x)|}{|h|} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|S_m(h)| \leqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}.}$$

3. Par définition de la partie entière, $a^m x - \frac{1}{2} < \alpha_m \leqslant a^m x + \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{2} \leqslant a^m x - \alpha_m < \frac{1}{2} \qquad \text{donc:} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$, donc $|1 - \beta_m| \leqslant \frac{3}{2}$. On en déduit que $\boxed{|h_m| = \frac{|1-\beta_m|}{a^m} \leqslant \frac{3}{2a^m}}$.

4. (a)
- Puisque a est impair $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2].
- On en déduit que $\boxed{a^{n-m}(\alpha_m + 1) \text{ est de même parité que } \alpha_m + 1.}$

  On a : $x + h_m = x + \dfrac{1-\beta_m}{a^m} = \dfrac{a_m x - \beta_m + 1}{a^m} = \dfrac{\alpha_m + 1}{a^m}$, par définition de β_m.
  Or $\cos(\pi a^n(x + h_m)) = \cos(a^{n-m}(\alpha+1)\pi) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha+1)}$.
  Comme a est impair, $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2], et donc

$$\boxed{\cos(\pi a^n(x + h_m)) = (-1)^{(\alpha_m+1)}}.$$

  De la même manière, $a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m, d'où :

$$\boxed{\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m) = (-1)^{a^{n-m}\alpha_m} = (-1)^{\alpha_m}}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m) = 0}.$$

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned}
\cos(a^n\pi x) &= \cos(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \beta_m)) \\
&= \cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)\cos(\pi a^{n-m}\beta_m) - \sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)\sin(\pi a^{n-m}\beta_m) \\
&= \boxed{(-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)}.
\end{aligned}$$

5. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
R_m(h_m) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h_m)) - \cos(a^n\pi x)) \\
&= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n((-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \\
&= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)).
\end{aligned}$$

Les termes de la série ci-dessus sont positifs, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1 + \cos y \geqslant 0$. Ainsi, la somme est supérieure à son premier terme, obtenu pour $n = m$. Par conséquent :

$$|R_m(h_m)| = \frac{1}{|h_m|}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \geqslant \frac{1}{|h_m|}b^m(1 + \cos(\pi\beta_m)).$$

Or, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\cos(\pi\beta_m) \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|} = \dfrac{(ab)^m}{1-\beta_m}}$.

6. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| &= |S_m(h_m)+R_m(h_m)| \\
&\geqslant |R_m(h_m)| - |S_m(h_m)| \\
&\geqslant \frac{(ab)^m}{1-\beta_m} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1} = (ab)^m \frac{ab-1-\pi(1-\beta_m)}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\
&\geqslant (ab)^m \frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\
&\geqslant \boxed{\frac{2(ab)^m}{3}\cdot\frac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}},
\end{aligned}$$

puisque $1-\beta_m \leqslant \frac{3}{2}$ et est positif.

7. Par l'hypothèse sur ab, on a $\dfrac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1} > 0$; de plus, $ab > 1$, donc $\lim\limits_{m\to+\infty}(ab)^m = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| = +\infty.$$

Puisque $a > 1$ (sinon on n'aurait pas $ab > 1$, puisque $b < 1$), $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi, le résultat précédent contredit le critère séquentiel de la convergence du taux d'accroissement en x lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en x.

Le réel x ayant été choisi quelconque, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est dérivable en aucun point de } \mathbb{R}\text{, alors qu'elle est continue sur } \mathbb{R}}$.