

DIAGONALISATION

Exercice 1. Bêêêhhh

Trois moutons sont dans un pré et, bien évidemment, ils jouent à saute-mouton. Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique (par rapport au deuxième mouton) de la position qu'il occupait l'instant d'avant. Puis le deuxième mouton saute au-dessus du troisième. Enfin, le troisième saute au-dessus du premier (qui, rappelons-le, a déjà bougé). Et le jeu recommence indéfiniment...

On vous demande de trouver les configurations de départ qui permettent à la partie de saute-mouton de se dérouler entièrement dans un champ, c'est-à-dire telles que la suite des positions successives des trois moutons reste bornée.



Donnée : Si $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ désigne le nombre d'or, on a

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} - 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 & 1 \\ 1 & \varphi & -\varphi \\ 1 & 1 & \varphi^2 \end{pmatrix}.$$