

## Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths Paris
- *NOM Prénom* : Cahen Paul

## Énoncés des exercices

### Exercice 1

Soit  $a, r$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . On suppose l'existence de  $\epsilon, M > 0$  tels que  $r(x) \leq x - \epsilon$  pour tout  $x \geq M$

Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $y$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et

$$\forall x \geq 0 \quad y'(x) = a(x)y(x - r(x))$$

Montrer que

$$y(x) \exp \left( - \int_0^x a(t) dt \right)$$

converge vers une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Question en plus : Trouver les solutions de l'équation d'ordre 2 à coefficients constants.

### Exercice 2

1. Soit  $G$  un groupe. Est-il vrai que  $G$  est fini si et seulement  $G$  a un nombre fini de sous-groupes ?
2. Soit  $G$  un groupe. Est-il vrai que  $G$  est fini si et seulement tous les sous-groupes de  $G$  sont d'ordre fini ?
3. Mêmes questions en remplaçant "fini" par "dénombrable"

## Remarques

L'exercice est très difficile ; il nous a occupé toute l'heure, sauf les 5 dernières minutes où j'ai eu le temps de trouver les questions 1. et 2. de l'exercice 2.

L'examineur était très gentil.

Je ne crois pas que nous ayons utilisé l'hypothèse sur  $r : r(x) \leq x - \epsilon$ .

Même exercice que Christophe et Ulysse (MP\*3)

Si vous connaissez Guy Alarcon, et que vous avez un oral avec cet examinateur, vous pourrez peut-être apprécier les similarités à la fois physiques et intellectuelles de ces deux personnes !