

Devoir surveillé n° 9

– durée 4 heures ; calculatrices interdites –

Exercice 1

On pose la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \end{cases} .$$

1. Montrer que la fonction g est bien définie et possède une symétrie.
2. Montrer que la fonction g admet une limite finie au voisinage de $+\infty$ et la calculer.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n assez grand, l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution x_n sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
(b) Montrer que si $x > 1$, alors au voisinage de $+\infty$:

$$g(x) = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{2x} + o(g(x)).$$

- (c) Déterminer un équivalent de la quantité x_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une « racine carrée » de la matrice A si :

$$R^2 = A.$$

On note alors $\text{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de la matrice A . L'ensemble $\text{Rac}(A)$ est donc une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que I_2 admet une infinité de racines carrées.
(b) En déduire que si $n \geq 3$, alors I_n admet une infinité de racines carrées.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.
(a) Montrer que $A^2 = 0$.
(b) Montrer que $\text{Rac}(A) = \emptyset$.
(c) Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente non nulle, a-t-on toujours $\text{Rac}(B) = \emptyset$?
3. On pose la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} .$$

- (a) Calculer $\text{Rg}(A)$ et $\text{Rg}(A - I_3)$.
- (b) Montrer que la matrice A est semblable à une matrice diagonale.
- (c) Calculer le nombre de racines carrées de la matrice A . [indication : si R est une racine carrée de A , on vérifiera que R laisse stable $\ker(A)$ ou $\ker(A - I_3)$ par exemple.]

Exercice 3

Soit $n \geq 2$ un entier.

Soient P_1 et P_2 deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice à coefficients complexes

$$P_1 + i P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

soit en fait une matrice inversible. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que la matrice :

$$P_1 + a P_2$$

soit inversible.

On rappelle la formule du déterminant pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n A_{\sigma(k),k}.$$

On rappelle aussi que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

1. Montrer que l'application $f : t \mapsto \det(P_1 + t P_2)$ est polynomiale en la variable t .
2. Montrer que cette fonction polynomiale f n'est pas nulle.
3. Répondre au problème posé dans cet exercice.
4. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (vues comme matrices à coefficients complexes).
Montrer que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

On pose :

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt \text{ et } J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt.$$

1. Calculer $I + J$, en utilisant un bon changement de variable.
2. En déduire I et J .

Exercice 5

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On veut montrer sous certaines conditions que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

1. Répondre au problème lorsque la fonction f est constante égale à 1. [indication : on fera intervenir les segments $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ pour découper l'intégrale par des relations de Chasles.]
2. Répondre au problème lorsque la fonction f est une fonction indicatrice d'un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $a \leq \alpha < \beta \leq b$.
3. Répondre au problème lorsque f est une fonction continue par morceaux.

Exercice 6

Soit E une partie non vide incluse dans \mathbb{N}^* .

On dit que la partie E est **sympathique** si pour tous éléments a et b de E , on a :

$$\frac{a+b}{a \wedge b} \in E.$$

On note \mathcal{S} , l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \left\{ E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \mid \text{la partie } E \text{ est sympathique} \right\}.$$

1. Montrer que l'ensemble \mathcal{S} muni de l'inclusion possède un plus petit élément qui est un singleton.
2. Déterminer :

$$\left\{ E \in \mathcal{S} \mid 1 \in E \right\}.$$

3. Soit E un élément de \mathcal{S} contenant au moins deux éléments et ne contenant pas 1. On pose :

$$m = \min(E \setminus \{2\}).$$

- (a) Montrer que l'entier m est impair.
 - (b) Montrer que l'ensemble E contient tous les entiers impairs plus grands que m .
 - (c) Montrer que E contient $2\mathbb{N}^*$.
 - (d) En déduire E .
-