# DÉNOMBREMENT

✠ ***Exercice 1.*** [★] (Dérangements)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $d_n$ le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma$ de $[\![1;n]\!]$ sans point fixe (c'est-à-dire $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $\sigma(i) \neq i$). On convient que $d_0 = 1$.

Démontrer que

$$d_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, notons $\mathfrak{E}_k$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ qui laissent fixe le nombre $k$, de sorte que $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{D}_n \cup \mathfrak{E}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{E}_n$ où l'union est disjointe. En passant aux cardinaux, on obtient

$$n! = d_n + \operatorname{card}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{E}_k\Big).$$

D'après la formule du crible, on a

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{E}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(\mathfrak{E}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{E}_{i_k}).$$

Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et tout $(i_1, \ldots, i_k) \in [\![1;n]\!]^k$, $\mathfrak{E}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{E}_{i_k}$ est l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui laissent $i_1$, $i_2$, $\ldots$, $i_k$ fixes, autrement dit les permutations qui n'agissent que sur les $n-k$ éléments de l'ensemble $[\![1;n]\!] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Par conséquent, on a $\operatorname{card}(\mathfrak{E}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{E}_{i_k}) = (n-k)!$ Donc, comme la somme $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n}$ possède $\binom{n}{k}$ termes, on a

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{E}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}.$$

En conclusion, on a

$$n! = d_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = d_n + n! + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{d_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [★]

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu de 52 cartes telles qu'elles contiennent au moins un carré (quatre cartes de même valeur) ?

- Pour avoir une main avec exactement 3 carrés, on choisit successivement :
  - ∗ 3 carrés parmi les 13 possibles : $\binom{13}{3}$ choix
  - ∗ une carte parmi les 40 restantes : $\binom{40}{1}$ choix.

  Cela donne $\binom{13}{3}\binom{40}{1}$ mains qui contiennent exactement 3 carrés.

- Les mains qui contiennent exactement 2 carrés contiennent 5 autres cartes parmi lesquelles on ne doit pas rencontrer de carré. Pour avoir une telle main, on choisit successivement :

  * 2 carrés parmi les 13 possibles : $\binom{13}{2}$ choix
  * 5 autres cartes sans carré : $\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}$ choix (on doit en effet choisir 5 cartes parmi les 44 restantes : $\binom{44}{5}$ choix, en retirant les tirages de 5 cartes qui contiennent l'un des 11 carrés possibles restant : $\binom{11}{1}$ choix et une autre carte : $\binom{40}{1}$ choix).

  Cela donne $\binom{13}{2}\left[\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}\right]$ mains qui contiennent exactement 2 carrés.

- Enfin les mains qui contiennent exactement 1 carré contiennent 9 autres cartes parmi lesquelles on ne doit pas rencontrer de carré. Pour avoir une telle main, on choisit successivement :

  * 1 carré parmi les 13 possibles : $\binom{13}{1}$ choix
  * 9 autres cartes sans carré : $\binom{48}{9} - \binom{12}{2}\binom{40}{1} - \binom{12}{1}[\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}]$ choix (y réfléchir).

  Cela donne $\binom{13}{1}\left[\binom{48}{9} - \binom{12}{2}\binom{40}{1} - \binom{12}{1}[\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}]\right]$ mains avec exactement 2 carrés.

En conclusion,

$$\boxed{\text{il y a } \binom{13}{3}\binom{40}{1} + \binom{13}{2}\left[\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}\right] + \binom{13}{1}\left[\binom{48}{9} - \binom{12}{2}\binom{40}{1} - \binom{12}{1}[\binom{44}{5} - \binom{11}{1}\binom{40}{1}]\right] \text{ mains de 13 cartes avec au moins un carré}}$$

**✠ *Exercice 3.* [★]**
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ des entiers naturels. Démontrer qu'il existe une somme (non vide) de termes parmi les $a_k$ qui soit divisible par 10.

Considérons les restes des divisions euclidiennes par 10 de $a_1$, $a_1+a_2$, $a_1+a_2+a_3$, ..., $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$. Cela fait 10 restes dans $[\![0;9]\!]$. Si l'un de ces restes vaut 0, c'est terminé. Sinon, les 10 restes sont dans $[\![1;9]\!]$, ce qui prouve qu'il y en a au moins deux égaux (principe des tiroirs). Dès lors, si $a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ (avec $k > \ell$) ont le même reste, alors leur différence $a_{\ell+1} + \cdots + a_k$ est divisible par 10. En conclusion,

$$\boxed{\text{dans une liste de 10 entiers, il existe toujours une somme (non vide) divisible par 10.}}$$

*Remarque : On a même démontré que, peu importe dans quel ordre sont rangés les entiers, on peut trouver une somme de termes consécutifs qui soient divisible par* 10.

**✠ *Exercice 4.* [★]**
Démontrer qu'il existe des entiers non tous nuls $a$, $b$ et $c$ avec $|a| < 10^6$, $|b| < 10^6$, $|c| \leqslant 10^6$ tels que $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

On a $10^{11}|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^{17} < 10^{18}$, ce qui signifie que $10^{11}(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) \in [\![-10^{18}; 10^{18}]\!]$.

Or $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ prend $(2.10^6-1)^3-1$ valeurs lorsque $(a, b, c)$ parcourt $[\![-10^6 + 1; 10^6 - 1]\!]^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Comme $(2.10^6-1)^3-1 > 2.10^{18}$, il s'ensuit qu'il existe deux nombres distincts de la forme $10^{11}(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})$ qui sont distants de moins d'une unité. Notons les $10^{11}(a_1+b_1\sqrt{2}+c_1\sqrt{3})$ et $10^{11}(a_2+b_2\sqrt{2}+c_2\sqrt{3})$.

La condition $|10^{11}(a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3}) - 10^{11}(a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3})| < 1$ signifie alors que $|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} + (c_1 - c_2)\sqrt{3}| < 10^{-11}$ avec $|a_1 - a_2| < 10^6$, $|b_1 - b_2| < 10^6$ et $|c_1 - c_2| < 10^6$ et $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ et $c_1 - c_2$ qui sont des entiers non tous nuls.

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe des entiers non tous nuls } a, b, c \text{ avec } |a| < 10^6,\ |b| < 10^6,\ |c| \leqslant 10^6 \text{ tels que } |a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [$\circ$] (Déjà vu ??)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ ?

Pour déterminer une application strictement croissante de $[\![1; p]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$, il faut et il suffit d'attribuer à chacun des nombres $f(1), \dots, f(p)$ une valeur dans $[\![1; n]\!]$ de sorte que $f(1) < f(2) < \cdots < f(p)$. Pour cela, on choisit $p$ valeurs dans $[\![1; n]\!]$ : $\binom{n}{p}$ choix, puis on ordonne ces valeurs pour les attribuer à $f(1), \dots, f(p)$ : une seule façon de le faire. Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{n}{p} \text{ applications strictement croissantes de } [\![1, p]\!] \text{ vers } [\![1, n]\!].}$$

✠ ***Exercice 6.*** [★] (Nombre de surjections)
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note $s(n, p)$ le nombre de surjections de $[\![1; n]\!]$ sur $[\![1; p]\!]$. Démontrer que

$$s(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

*Indication : Pour $k \in [\![1; p]\!]$, on utilisera l'ensemble $A_k$ des applications $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![1; p]\!]$ qui n'atteignent pas $k$.*

On a

$$\begin{aligned} s(n, p) &= \operatorname{card}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_p}) \\ &= \operatorname{card}(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_p}) \\ &= \operatorname{card}\left( [\![1; p]\!]^{[\![1; n]\!]} \right) - \operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_p) \\ &= p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \end{aligned}$$

Soient $k \in [\![1; p]\!]$ et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p$. L'ensemble $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des applications $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![1; p]\!]$ qui n'atteignent pas $i_1, \dots, i_k$. Choisir une telle application revient à choisir une application de $[\![1; n]\!]$ vers $[\![1; p]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. On sait qu'il existe $(p-k)^n$ applications de ce type. On a donc

$$\operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (p-k)^n.$$

Comme la somme $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p}$ possède $\binom{p}{k}$ termes, on en déduit que

$$s(n, p) = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k} (p-k)^n,$$

ce qui se réécrit

$$s(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} \binom{p}{k} (p-k)^n.$$

En effectuant le changement d'indice $k \leftrightsquigarrow p-k$ et en utilisant la formule de symétrie des coefficients binomiaux, on obtient finalement

$$\boxed{s(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.}$$

✠ ***Exercice 7.*** (Problème des parenthésages de Catalan)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $P_n$ le nombre de façons de parenthèser l'expression $a_1 a_2 \cdots a_n$ (en conservant l'ordre des $a_i$), où les $a_i$ sont des symboles que l'on peut interpréter comme des éléments d'un ensemble muni d'une loi de composition interne a priori non associative. Le nombre $P_n$ est donc le nombre de façons, a priori différentes, de calculer le « produit » $a_1 a_2 \cdots a_n$. Ainsi,

- $P_1 = 1$ car il n'y a qu'une seule façon de mettre des parenthèses autour de $a_1$ ;
- $P_2 = 1$ car le seul parenthèsage de $a_1 a_2$ est $a_1 a_2$ ;
- $P_3 = 2$ car $a_1 a_2 a_3$ se parenthèse des deux façons suivantes : $a_1(a_2 a_3)$ et $(a_1 a_2) a_3$ ;
- $P_4 = 5$ car il existe cinq parenthèsages de $a_1 a_2 a_3 a_4$ qui sont $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$ et $((a_1 a_2) a_3) a_4$.

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Une chose est sure : la première parenthèse ouvrante (que nous appelerons Roméo) est à gauche de l'élément $a_1$ (même si elle est éventuellement omise lorsqu'elle est refermée juste après $a_1$). Sa partenaire (que nous appelerons, cela va de soi, Juliette) peut alors se trouver derrière $a_1$ ou derrière $a_2$ ou … ou derrière $a_{n-1}$ (mais pas derrière $a_n$ car on ne met pas de parenthèses autour de l'expression $a_1 a_2 \cdots a_n$ complète). D'où l'idée de dénombrer les parenthèsages en fonction de la position de Juliette. On distingue alors :

Le cas où Juliette est juste après $a_1$. Il suffit alors de parenthèser l'expression $a_2 a_3 \cdots a_n$, ce qui laisse $P_{n-1}$ possibilités. Il y a donc $P_{n-1} = P_1 P_{n-1}$ parenthèsages de ce type.

ou Le cas où Juliette est juste après $a_2$. Il suffit alors de parenthèser d'une part $a_1 a_2$, ce qui laisse $P_2$ possibilités, et d'autre part $a_3 a_4 \cdots a_n$, ce qui laisse $P_{n-2}$ possibilités. Il y a donc $P_2 P_{n-2}$ parenthèsages de ce type.

ou …

ou Le cas où Juliette est juste après $a_{n-2}$. Il suffit alors de parenthèser d'une part $a_1 a_2 \cdots a_{n-2}$, ce qui laisse $P_{n-2}$ possibilités, et d'autre part $a_{n-1} a_n$, ce qui laisse $P_2$ possibilités. Il y a donc $P_{n-2} P_2$ parenthèsages de ce type.

ou Le cas où Juliette est juste après $a_{n-1}$. Il suffit alors de parenthèser l'expression $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, ce qui laisse $P_{n-1}$ possibilités. Il y a donc $P_{n-1} = P_{n-1} P_1$ parenthèsages de ce type.

Ainsi, en rassemblant ces différents cas, on voit que le nombre $P_n$ de parenthèsages de $a_1 a_2 \cdots a_n$ est égal à $P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \cdots + P_{n-2} P_2 + P_{n-1} P_1$ ce qui prouve la relation pour $n \geqslant 2$.

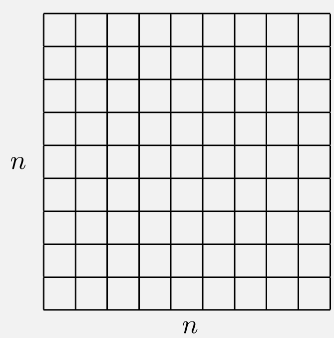
En conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad P_n = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}.}$$

*Notons que cette relation n'a pas de sens pour $n = 1$ car $P_0$ n'existe pas !*

✠ ***Exercice 8.*** [⋆]

Combien y a-t-il de carrés dans le quadrillage de taille $n \times n$ suivant :




Il y a clairement $n^2$ carrés de taille $1 \times 1$.

Repérons les carrés de taille $2 \times 2$ par leur case gauche supérieure. Celle-ci peut occuper les lignes de 1 à $n-1$ et les colonnes de 1 à $n-1$. Il y a donc $(n-1)^2$ carrés de taille $2 \times 2$.

De même, si l'on repère les carrés de taille $3 \times 3$ par leur case gauche supérieure, celle-ci peut occuper les lignes de 1 à $n-2$ et les colonnes de 1 à $n-2$, ce qui fournit $(n-2)^2$ carrés de taille $3 \times 3$.

Ainsi de suite...

On trouve finalement

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

carrés.

✠ ***Exercice 9.*** [$\star$]

Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_p(\mathbb{N})$ l'ensemble des $p$-combinaisons de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal $p$. Pour simplifier, dans cet exercice, lorsqu'on écrit une partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de $\mathbb{N}$, c'est avec la convention que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$. Dès lors, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_p(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N}^p \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{array} \right.$$

est correctement définie et, de façon assez claire, injective. Comme $\mathbb{N}^p$ est dénombrable (produit cartésien d'ensembles dénombrables), on en déduit que $\mathscr{P}_p(\mathbb{N})$ l'est aussi.

Alors $\bigcup\limits_{p=0}^{+\infty} \mathscr{P}_p(\mathbb{N})$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables.

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'ensemble des parties finies de } \mathbb{N} \text{ est dénombrable.}}$$

✠ ***Exercice 10.*** [$\star$]

Le HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA (lire « who moo who moo noo koo noo koo ah pooh ah ah ») est un poisson multicolore emblématique des îles hawaïennes.

Le mot HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA comporte 9 U, 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P, ce qui fait 21 lettres.

Les anagrammes considérées dans cette exercice n'ont pas nécessairement de sens.

1. Démontrer que le nombre $N$ d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par

$$N = \frac{12!}{(2!)^4\, 3!}.$$

► Les résultats des questions suivantes seront donnés sous forme de produits d'entiers, dans lesquels pourra apparaître le nombre $N$. Il n'est pas nécessaire de remplacer $N$ par sa valeur, ni de simplifier les résultats.

2. Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?
3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dîte « jolie » lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet$$

où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

Dénombrer ces jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA.

*Le HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est un poisson multicolore emblématique des îles hawaïennes. Les anagrammes considérées dans cette exercice n'ont pas nécessairement un sens.*

1. *Démontrer que le nombre $N$ d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P est donné par* $N = \dfrac{12!}{(2!)^4 3!}$.

   Pour obtenir une telle anagramme de 12 lettres, on choisit successivement :

   ▷ 2 places pour le H : $\binom{12}{2}$ choix ;

   ▷ 2 places pour le M : $\binom{10}{2}$ choix ;

   ▷ 2 places pour le N : $\binom{8}{2}$ choix ;

   ▷ 2 places pour le K : $\binom{6}{2}$ choix ;

   ▷ 3 places pour le A : $\binom{4}{3}$ choix ;

   ▷ 1 place pour le P : $\binom{1}{1}$ choix.

   Selon le principe multiplicatif, il existe donc $N$ anagrammes avec

$$\begin{aligned} N &= \binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3}\binom{1}{1} \\ &= \frac{12!}{2!10!} \times \frac{10!}{2!8!} \times \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{3!1!} \times \frac{1!}{1!1!} \\ &= \frac{12!}{2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 1!}, \end{aligned}$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{N = \frac{12!}{(2!)^4 3!}.}$$

2. *Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?*

   Pour obtenir une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA, on commence par choisir 9 places pour le U, ce qui laisse $\binom{21}{9}$ choix. Il reste alors 12 places pour positionner les autres lettres, ce qui revient à écrire une anagramme avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P. On a vu à la première question qu'on avait $N$ façons de le faire. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe } \binom{21}{9} \times N \text{ anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA.}}$$

   *Remarque : Après simplification, cela fait* $\dfrac{21!}{9!(2!)^4 3!} \approx 1,5 \times 10^{12}$ *anagrammes.*

3. *Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dîte « jolie » lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme* $\bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet$ *où les 10 symboles* $\bullet$ *désignent chacun une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P. Combien existe-t-il de jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?*

   Si l'un des $\bullet$ représentait 4 lettres ou plus, il resterait alors au plus 8 lettres à placer sur les 9 autres $\bullet$, ce qui est absurde puisqu'aucun $\bullet$ n'est vide ! Par conséquent, il est impossible que l'un des symboles $\bullet$ représente 4 lettres ou plus.

Il y a donc deux cas : ou bien on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ou bien le contraire.

- $\triangleright$ Dénombrons les jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

  On sait que la jolie anagramme est nécessairement de la forme suivante :

$$\bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet$$

  où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

  Comme on trouve, dans l'anagramme, trois lettres consécutives qui ne sont pas des U, l'un des $\bullet$ représente 3 lettres. Il reste alors 9 lettres pour les 9 autres $\bullet$, qui sont donc chacun constitué d'une seule lettre. En résumé, l'un des $\bullet$ représente 3 lettres et les 9 autres représentent chacun 1 lettre.

  Pour dénombrer ces anagrammes, on choisit donc successivement :

  - $\triangleright$ 1 symbole $\bullet$ parmi 10 pour contenir 3 lettres : $\binom{10}{1} = 10$ choix ;
  - $\triangleright$ 9 symboles $\bullet$ parmi 9 pour contenir 1 lettre : $\binom{9}{9} = 1$ choix ;
  - $\triangleright$ 1 mot écrit avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P pour compléter les $\bullet$ : $N$ choix.

  Par conséquent, il existe $10N$ jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U.

- $\triangleright$ Dénombrons les jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

  On sait que la jolie anagramme est nécessairement de la forme suivante :

$$\bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet$$

  où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

  D'après a), les $\bullet$ représentent chacun 1, 2 ou 3 lettres. Or, dans cette question, on suppose que l'on ne trouve pas, dans l'anagramme, trois lettres consécutives qui ne sont pas des U. Par conséquent, les $\bullet$ représentent chacun 1 ou 2 lettres. Comme il y a 10 symboles $\bullet$ et comme on doit y placer 12 lettres au total, cela signifie que deux des $\bullet$ représentent 2 lettres et les 8 autres représentent chacun 1 lettre.

  Pour dénombrer ces anagrammes, on choisit donc successivement :

  - $\triangleright$ 2 symboles $\bullet$ parmi 10 pour contenir 2 lettres : $\binom{10}{2} = 45$ choix ;
  - $\triangleright$ 8 symboles $\bullet$ parmi 8 pour contenir 1 lettre : $\binom{8}{8} = 1$ choix ;
  - $\triangleright$ 1 mot écrit avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P pour compléter les $\bullet$ : $N$ choix.

  Par conséquent, il existe $45N$ jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U.

Les jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA se séparent en celles où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U et celles où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U. Par conséquent, on peut affirmer qu'

$$\boxed{\text{il existe } 55N \text{ jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA.}}$$

*Remarque : Cela fait* $55 \times \dfrac{12!}{(2!)^4 3!} = 274\,428\,000$ *jolies anagrammes.*