CONTINUITÉ

♦ **Exercice 1.** [○]
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction $x \longmapsto 1/x$ est discontinue en 0.
2. Une fonction qui admet en un point a une limite finie à droite et une limite finie à gauche qui sont égales est continue en a.
3. La partie entière est continue en 0.
4. La partie entière est continue sur $[0;1[$.
5. Si f est continue et $f(a) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage de a.
6. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
7. Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
8. Une fonction et son prolongement par continuité en un point sont deux applications différentes.
9. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ possède un graphe symétrique par rapport à la première bissectrice.

1. Ce n'est ni vrai, ni faux. Cela n'a pas de sens puisqu'on ne peut parler de continuité ou de discontinuité qu'en un point de l'ensemble de définition.
2. Faux, il faut de plus que les limites à gauche et à droite soient égales à $f(a)$.
3. Faux.
4. Vrai (la restriction de E sur $[0;1[$ se trace sans lever le crayon).
5. Vrai.
6. Faux. L'image de l'intervalle ouvert $]0;4\pi[$ par la fonction sin est $[-1;1]$, qui n'est pas un intervalle ouvert.
7. Faux. Il suffit de prendre $x \longmapsto 1/x$ sur $]0;1[$.
8. Vrai mais on les nomme cependant de la même manière.
9. Vrai.

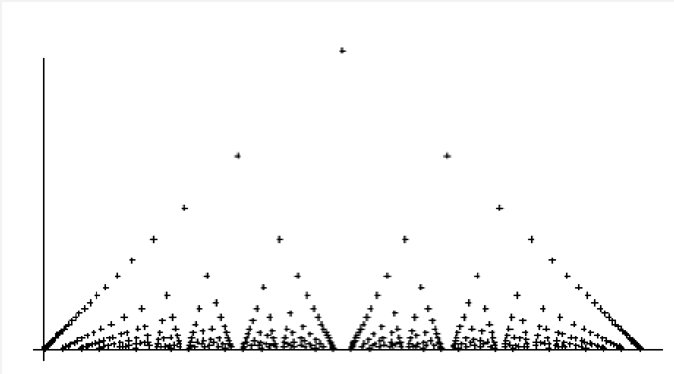
♦ ***Exercice 2.*** [⋆] (La dégoulinante)

Dans tout cet exercice, lorsque l'on écrit p/q, c'est pour faire référence à l'écriture d'un rationnel sous forme irréductible, c'est-à-dire que $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$.

On considère la fonction de Thomae $f :]0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } x = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

dont le graphe est donné ci-dessous (à titre indicatif)



1. Démontrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap]0;1[$.
2. a) Soit $q_0 \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le nombre de rationnels contenus dans $]0;1[$ s'écrivant p/q avec $q \leqslant q_0$ est fini.
   b) Démontrer que f est continue en tout point de $]0;1[\setminus \mathbb{Q}$.

1. Soit $p/q \in \mathbb{Q} \cap]0;1[$. On a $f(p/q) = 1/q$. La densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure l'existence d'une suite (α_n) de nombres irrationnels tendant vers p/q. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f(\alpha_n) = 0$, donc $\big(f(\alpha_n)\big)$ ne tend pas vers $f(p/q) = 1/q \neq 0$. Donc f est discontinue en p/q. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est discontinue en tout point de } \mathbb{Q} \cap]0;1[.}$$

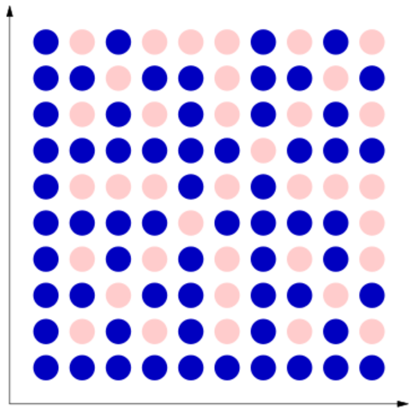
2. a) Si $p/q \in]0;1[$ avec $q \leqslant q_0$, alors $|p/q| \leqslant 1$, d'où $|p| \leqslant q \leqslant q_0$, ce qui laisse un nombre fini de valeurs de p possibles. Comme q est borné, il ne peut également prendre qu'un nombre fini de valeurs. Il s'ensuit que le quotient p/q prend un nombre fini de valeurs. Donc

$$\boxed{\text{le nombre de rationnels contenus dans }]0;1[\text{ s'écrivant } p/q \text{ avec } q \leqslant q_0 \text{ est fini.}}$$

   b) Soient $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$. Considérons $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $q_0 > 1/\varepsilon$. Dans $]0;1[$, il existe un nombre fini de nombres rationnels p/q avec $q \leqslant q_0$ (d'après la question précédente). Prenons alors $\eta = \min\{|x_0 - p/q| : p/q \in I,\ q \leqslant q_0\}$ de sorte que tout nombre rationnel de l'intervalle $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ ait un dénominateur strictement supérieur à q_0. Alors, si $x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, ou bien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$, ou bien $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = f(p/q) = 1/q < 1/q_0 < \varepsilon$ puisque $q > q_0$. Autrement dit, $\forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[,\ f(x) \leqslant \varepsilon$. On a donc démontré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[,\ f(x) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en x_0. Par conséquent,

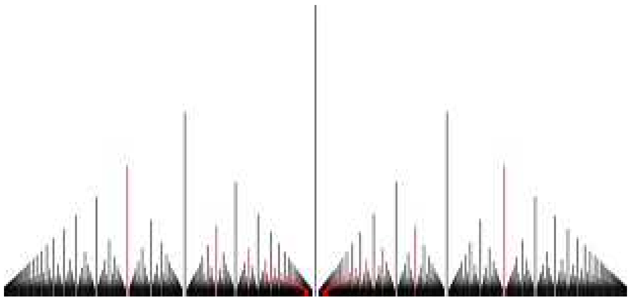
$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.}$$

Remarque (trouvée sur Wikipédia) : Bien que d'apparence étrange, elle peut s'introduire très naturellement, par l'exemple du « verger d'Euclide ». Considérons le réseau formé par les segments de droites verticaux joignant $(i, j, 0)$ *à* $(i, j, 1)$ *, où i et j décrivent l'ensemble N des entiers naturels. Ces segments,* *qui représentent des arbres plantés de façon régulière forment le « verger d'Euclide ».*



Vue plane du verger d'Euclide. Les arbres en bleu sont ceux visibles depuis l'origine.

Les arbres visibles depuis l'origine correspondent aux points du réseau $(i, j, 0)$ *où* i *et* j *sont premiers entre eux. Si le verger est projeté selon une projection 3D relativement à l'origine sur le plan* $x + y = 1$ *(c'est-à-dire s'il est vu en perspective depuis l'origine en regardant dans la direction de la première bissectrice), les sommets des arbres projetés forment le graphe de la fonction de Thomae.*



♦ ***Exercice 3.*** [$\star$]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x) = \sup\{f(t) : t \in [0; x]\}.$$

1. Démontrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant \varphi(x)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\varphi \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Soient $0 \leqslant x < y$. Comme $[0; x] \subset [0; y]$, on a $\sup\{f(t) : t \in [0; x]\} \leqslant \sup\{f(t) : t \in [0; y]\}$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant f(y)$. Donc

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $x \in [0; x]$, on a $f(x) \leqslant \sup\{f(t) : t \in [0; x]\}$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant \varphi(x)$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leqslant \varphi(x).}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour $x > x_0$, on a

$$\varphi(x) = \max\{\varphi(x_0); \sup_{[x;x_0]}(f)\} \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \max\{\varphi(x_0); f(x_0)\} = \varphi(x_0)$$

où l'on a utilisé la continuité de f. De même, on a

$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \varphi(x_0).$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0),$$

ce qui démontre que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \leqslant x$, on a $f(t) \leqslant g(t) \leqslant g(x)$, ce qui donne, après passage à la borne supérieure, $\sup\{f(t) : t \in [0;x]\} \leqslant g(x)$, c'est-à-dire $\varphi(x) \leqslant g(x)$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) \leqslant g(x).}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \longmapsto f(x)/x$ soit décroissante. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \geqslant x_0$, la croissance de f nous dit que

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Par ailleurs, la décroissante de $f/\,\mathrm{Id}$ nous dit que

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x_0)}{x_0},$$

c'est-à-dire (puisque $x > 0$)

$$f(x) \leqslant \frac{x}{x_0} f(x_0).$$

On a donc, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{x_0} f(x_0),$$

ce qui donne, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = f(x_0).$$

En procédant pour $x \leqslant x_0$ *mutatis mutandis*, on obtient

$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = f(x_0).$$

Par conséquent, f est continue en x_0. Et comme x_0 est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Une autre solution (plus théorique) :
Comme f est croissante, elle admet des limites à droite et à gauche en x_0 notées respectivement ℓ et ℓ' avec $\ell \leqslant f(x_0) \leqslant \ell'$. Comme $x \longmapsto f(x)/x$ est décroissante, on a

$$\forall x \geqslant x_0, \qquad \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x_0)}{x_0},$$

d'où, par passage à la limite,

$$\frac{\ell}{x_0} \leqslant \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

On montre de même que

$$\frac{f(x_0)}{x_0} \leqslant \frac{\ell'}{x_0}.$$

On a donc $\ell = \ell' = f(x_0)$, ce qui prouve la continuité de f en x_0.

♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que f^2 est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f^3 est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Il suffit de prendre

$$\boxed{f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}.}$$

2. On a $f = \sqrt[3]{f^3}$ donc f est continue comme composée de fonctions continues. Donc

$$\boxed{\text{si } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction telle que } f^3 \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ alors } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\circ$]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est croissante. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On veut démontrer que $f(x) \leqslant f(y)$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ nous donne l'existence de deux suites $(r_n), (s_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, tendant respectivement vers x et y, telles que $r_n < x < s_n < y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est croissante, on a $\forall n \geqslant 0,\ f(r_n) \leqslant f(s_n)$, ce qui donne après passage à la limite (en tenant compte de la continuité de f) l'inégalité $f(x) \leqslant f(y)$. Donc

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [$\star$]
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur l'intervalle I. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

La fonction f étant croissante, elle admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche (d'après le théorème de la limite monotone). Elle est discontinue en $x_0 \in I$, si et seulement si, le saut de f en x_0, égal à $\lim_{x_0^+} f - \lim_{x_0^-} f$, est strictement positif. Il existe donc autant de points de discontinuité de f que l'on peut trouver d'intervalles ouverts non vides $]\lim_{x_0^+} f ; \lim_{x_0^-} f[$. Or, comme f est croissante, ces intervalles sont disjoints. Il ne reste plus, pour conclure, qu'à dire qu'une famille d'ouverts non vides disjoints est toujours dénombrable (puisque l'on peut piocher dans chaque intervalle un rationnel en vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des points de discontinuité de } f \text{ est dénombrable.}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]
1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que si D est une partie dense dans $\mathbb{R}$ alors $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1; 1]$.

1. Soient $y \in f(\mathbb{R})$. Il existe alors $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$. Comme D est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de D qui converge vers x. Par continuité, la suite $\big(f(d_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x) = y$. Par suite, $y \in \operatorname{Adh} f(D)$, ce qui signifie que
$$\boxed{f(D) \text{ est dense dans } f(\mathbb{R}).}$$
2. Comme 2π est irrationnel, $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. Par conséquent, d'après la question 1, $\sin(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $\sin(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\{\cos(n+2k\pi) : n, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1; 1]$. Or, par 2π-périodicité et parité de cos, on a $\{\cos(n + 2k\pi) : n, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Donc
$$\boxed{\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\} \text{ est dense dans } [-1; 1].}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0; 1]$.
1. On suppose que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. Démontrer que $\exists a \in [0; 1],\ f(a) = a$.
2. On suppose que $[0; 1] \subset f([0; 1])$. Démontrer que $\exists a \in [0; 1],\ f(a) = a$.

Considérons $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0; 1]\,,\ g(x) = f(x) - x$.
1. On a $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Comme g est continue sur $[0; 1]$ comme somme de telles fonctions, le TVI permet d'affirmer l'existence de $a \in [0; 1]$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$. Donc
$$\boxed{\text{lorsque } f([0; 1]) \subset [0; 1],\ f \text{ admet au moins un point fixe.}}$$
2. Deux solutions pour le prix d'une :

- ► Comme $[0;1] \subset f([0;1])$, il existe $\alpha, \beta \in [0;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 1$. Alors $g(\alpha) = -\alpha \leqslant 0$ et $g(\beta) = 1 - \beta \geqslant 0$. Comme g est continue sur $[0;1]$ comme somme de telles fonctions, le TVI permet d'affirmer l'existence de $a \in [0;1]$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$.
- ► La fonction f étant continue, on a $f([0;1]) = [f(x_m); f(x_M)]$ où $x_m, x_M \in [0;1]$. Alors $g(x_m) = f(x_m) - x_m \leqslant 0$ et $g(x_M) = f(x_M) - x_M \geqslant 0$ puisque $[0;1] \subset f([0;1])$. Comme g est continue sur $[0;1]$ comme somme de telles fonctions, le TVI permet d'affirmer l'existence de $a \in [0;1]$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } [0;1] \subset f([0;1]),\ f \text{ admet au moins un point fixe.}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$] (Théorème des cordes de Paul Lévy)

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $\lambda \in]0;1[$, on considère l'équation (E_λ) définie par

$$(E_\lambda) \qquad f(x+\lambda) = f(x).$$

1. Démontrer que l'équation $(E_{1/2})$ possède au moins une solution dans $[0;1/2]$. Proposer une construction graphique qui permette de déterminer la position de ces solutions.

   Démontrer que l'équation $(E_{1/3})$ possède au moins une solution dans $[0;2/3]$.

   Plus généralement, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_{1/n})$ possède au moins une solution dans $[0;1-1/n]$.
2. Démontrer que si un automobiliste parcourt 80 km en 1 h (sans forcément rouler toujours à la même vitesse), il existe un intervalle de temps d'un quart-heure pendant lequel il parcourt 20 km (c'est-à-dire la distance qu'il aurait parcouru s'il avait roulé à vitesse constante).
3. Soit $\lambda \in]0;1[$ tel que λ ne soit pas de la forme $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la fonction f, définie sur $[0;1]$, par
$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{\lambda} - x \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}\cdot$$
   démontrer que l'équation (E_λ) n'a pas forcément de solution dans $[0;1-\lambda]$.

1. Considérons l'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0;\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x) \end{array} \right.$$

C'est une application continue sur $[0;1/2]$ d'après les théorèmes généraux. Par ailleurs, on a

$$\varphi(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \qquad \text{et} \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right),$$

ce qui démontre que $\varphi(0) = -\varphi(1/2)$. En particulier, $\varphi(0)$ et $\varphi(1/2)$ sont de signes opposés. L'application du théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que la fonction φ s'annule au moins une fois sur le segment $[0;1/2]$. Donc

$$\boxed{\text{l'équation } (E_{1/2}) \text{ admet au moins une solution dans } [0;1/2].}$$

On translate la courbe de f de $1/2$ vers la gauche. Les points d'intersection de la courbe de départ et de la translatée donne alors la position des solutions.

Considérons l'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0;1-\frac{1}{n}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) \end{array} \right.$$

C'est une application continue sur $[0;1-1/n]$ d'après les théorèmes généraux. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{n-2}{n}\right) + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ = \ & \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(1-\frac{1}{n}\right) - f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right] + \left[f(1) - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \\ = \ & f(1) - f(0) \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

donc parmi les nombres

$$\varphi\Big(\frac{0}{n}\Big), \qquad \varphi\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad \ldots \qquad \Big(\frac{n-2}{n}\Big), \qquad \varphi\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

il en existe nécessairement deux de signes opposés. En appliquant alors le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que la fonction φ s'annule au moins une fois sur le segment $[0; 1-1/n]$. Donc

$$\boxed{\text{l'équation } (E_{1/n}) \text{ admet au moins une solution dans } [0; 1-1/n].}$$

2. Notons $d(t)$ la distance parcourue (en km) jusqu'à l'instant t (en h) et posons $f(t) = d(t) - 80t$ pour tout $t \in [0; 1]$. La télétransportation n'ayant toujours pas été inventée, la fonction d est continue sur $[0; 1]$ et donc la fonction f l'est aussi. Par ailleurs, on a $f(0) = d(0) = 0$ et $f(1) = d(1) - 80 = 80 - 80 = 0$. Dès lors, le résultat de la question précédente nous dit que l'équation $(E_{1/4})$ admet au moins une solution, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un instant $t_0 \in [0; 3/4]$ tel que $f(t_0 + 1/4) - f(t_0) = 0$, c'est-à-dire $d(t_0 + 1/4) - d(t_0) = 20$. Entre t_0 et $t_0 + 1/4$, l'automobiliste a bien parcourue 20 km. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si l'on parcourt 80 km en une heure, il existe forcément un}\\ \text{intervalle d'un quart-heure pendant lequel on parcourt 20 km}\end{array}}$$

3. Notons que la fonction f proposée est continue sur $[0; 1]$ et que l'on a bien $f(0) = f(1)$ puisque ces deux nombres ont nuls. Par ailleurs, pour tout $x \in [0; 1-\lambda]$, on a

$$\begin{aligned} f(x+\lambda) - f(x) &= \sin^2 \frac{\pi(x+\lambda)}{\lambda} - (x+\lambda)\sin^2\frac{\pi}{\lambda} - \sin^2\frac{\pi x}{\lambda} + x\sin^2\frac{\pi}{\lambda} \\ &= \sin^2\frac{\pi x}{\lambda} - x\sin^2\frac{\pi}{\lambda} - \lambda\sin^2\frac{\pi}{\lambda} - \sin^2\frac{\pi x}{\lambda} + x\sin^2\frac{\pi}{\lambda} \\ &\qquad \text{car } \sin^2 \text{ est } \pi\text{-périodique} \\ &= -\lambda\sin^2\frac{\pi}{\lambda} \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } \lambda \text{ n'est pas de la forme } 1/n, \text{ il existe des fonctions } f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue telle}\\ \text{que } f(0) = f(1) \text{ et telle que l'équation } (E_\lambda) \text{ n'admet aucune solution dans } [0; 1-\lambda].\end{array}}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\star$]
Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $e^{\lambda x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = e^{\lambda x} - x.$$

La fonction f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \lambda\, e^{\lambda x} - 1.$$

À ce stade, on envisage deux cas :

▶ Premier cas : $\lambda \leqslant 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a clairement

$$f'(x) = \lambda\, e^{\lambda x} - 1 < 0,$$

donc

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

On constate alors, avec ce tableau de variation et le théorème de la bijection, que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

► Second cas : $\lambda > 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{\lambda x} \geqslant 1/\lambda \\ &\iff \lambda x \geqslant \ln(1/\lambda) \\ &\iff x \geqslant \frac{\ln(1/\lambda)}{\lambda}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{|c|ccccc|} \hline x & -\infty & & \dfrac{\ln(1/\lambda)}{\lambda} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & \dfrac{1-\ln(1/\lambda)}{\lambda} & \nearrow & +\infty \\ \hline \end{array}$$

On a

$$\frac{1-\ln(1/\lambda)}{\lambda} \geqslant 0 \iff \ln(1/\lambda) \leqslant 1 \iff \lambda \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

On considère alors trois sous-cas :

▷ Premier sous-cas : $\lambda > \mathrm{e}^{-1}$
On a $\big(1-\ln(1/\lambda)\big)/\lambda > 0$, donc, d'après le tableau de variation, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

▷ Deuxième sous-cas : $\lambda = \mathrm{e}^{-1}$
On a $\big(1-\ln(1/\lambda)\big)/\lambda = 0$, donc, d'après le tableau de variation, f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ en e.

▷ Troisième sous-cas : $0 < \lambda < \mathrm{e}^{-1}$
On a $\big(1-\ln(1/\lambda)\big)/\lambda > 0$, donc, d'après le tableau de variation et le théorème de la bijection (appliqué deux fois), f s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$ (une fois sur $]-\infty;\ln(1/\lambda)/\lambda[$ et une fois sur $]\ln(1/\lambda)/\lambda;+\infty[$).

En conclusion,

$\lambda \in$	$]-\infty;0]$	$]0;\mathrm{e}^{-1}[$	$\{\mathrm{e}^{-1}\}$	$]\mathrm{e}^{-1};+\infty[$
nombre de solution(s) de $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$	1	2	1	0

♦ ***Exercice 12.*** [⋆]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f_n(n)$ et $f_n\Big(n+\dfrac{1}{n}\Big)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - n) = 0$.
3. Déterminer un équivalent simple de $u_n - n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ par théorèmes généraux et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x} > 0,$$

ce qui prouve que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$. Le théorème de la bijection nous dit alors que,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique réel } u_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(u_n) = 0.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{f_n(n) = -\,\mathrm{e}^{-n} \qquad \text{et} \qquad f_n\Big(n+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2n^2+1} - \mathrm{e}^{-(n+1/n)}.}$$

On constate d'une part que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(n) < 0.$$

D'autre part, on a

$$f_n\Big(n+\frac{1}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2+1} > 0,$$

ce qui implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad f_n\Big(n+\frac{1}{n}\Big) > 0.$$

On a donc

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad f_n(n) < f_n(u_n) < f_n\Big(n+\frac{1}{n}\Big),$$

ce qui démontre, en vertu de la stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$, que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad n < u_n < n + \frac{1}{n}\cdot$$

On a donc

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 < u_n - n < \frac{1}{n},$$

ce qui donne, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n - n) = 0.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varepsilon_n = u_n - n$. La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) = 0$ se réécrit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(n + \varepsilon_n) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + 2n} = \mathrm{e}^{-\varepsilon_n - n}.$$

Comme $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est de limite nulle, on a

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + 2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varepsilon_n}{2n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-\varepsilon_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n},$$

ce qui donne

$$\frac{\varepsilon_n}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n},$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\,\mathrm{e}^{-n}.$$

En conclusion,

$$\boxed{u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\,\mathrm{e}^{-n}.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Comme $\lim_{-\infty} f = +\infty$, il existe $A < 0$ tel que $\forall x < A,\ f(x) > f(0)$ et comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $B > 0$ tel que $\forall x > B,\ f(x) > f(0)$.

Sur le segment $[A; B]$, le théorème des bornes nous dit que f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $x_m \in [A; B]$ tels que

$$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in [A; B]\}.$$

Mézalors, pour tout $x \in]-\infty; A[\cup]B; +\infty[$, on a

$$f(x) > f(0) \geqslant \inf\{f(x) : x \in [A; B]\} = f(x_m)$$

car $0 \in [A; B]$.

Cela prouve que

$$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

et donc que

$$\boxed{f \text{ est minorée et atteint sa borne inférieure.}}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\circ$]
Soient $f, g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in [a; b]\,,\ 0 < g(x) < f(x)$. Démontrer qu'il existe $m, M \in \,]0; 1[$ tel que $\forall x \in [a; b]\,,\ mf(x) \leqslant g(x) \leqslant Mf(x)$.

Comme $\forall x \in [a; b]\,,\ f(x) > 0$, la fonction $\varphi : x \longmapsto g(x)/f(x)$ est définie et continue sur le segment $[a; b]$, par théorèmes généraux. De plus, l'encadrement $\forall x \in [a; b]\,,\ 0 < g(x) < f(x)$ implique que φ est à valeurs dans $]0; 1[$. Le théorème des bornes nous dit alors qu'il existe $m, M \in \,]0; 1[$ tels que $\forall x \in [a; b]\,,\ m \leqslant \varphi(x) \leqslant M$ (et l'on sait que m et M sont atteintes par f), c'est-à-dire $\forall x \in [a; b]\,,\ mf(x) \leqslant g(x) \leqslant Mf(x)$. En conclusion,

$$\boxed{\exists m, M \in \,]0; 1[\,, \quad \forall x \in [a; b]\,, \qquad mf(x) \leqslant g(x) \leqslant Mf(x).}$$

♦ ***Exercice 15.*** [$\star$] (Une demi-période suffit !)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $2T$-périodique. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f([a; a+T]) = f(\mathbb{R})$.

Le théorème des bornes dit que sur le segment $[0; 2T]$, la fonction f atteint son minimum, disons en x_m, et son maximum, disons en x_M. On peut par exemple supposer que $x_m \leqslant x_M$. Alors $x_m \leqslant x_M \leqslant x_m + 2T$ et l'on peut affirmer que ou bien $|x_M - x_m| \leqslant T$ ou bien $|x_m + 2T - x_M| \leqslant T$. Dans le premier cas, on prend $a = x_m$ et dans le second cas, on prend $a = x_M$. On est alors certain que ou bien $x_m, x_M \in [a; a+T]$, ou bien $x_M, x_m + 2T \in [a; a+T]$, ce qui implique que f atteint son minimum et son maximum sur $[a; a+T]$. Dans ces conditions, on a $f([a; a+T]) = [f(x_m); f(x_M)] = f(\mathbb{R})$. En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f([a; a+T]) = f(\mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\star$] (Classique !)
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{d}(x; A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Démontrer que l'application $x \longmapsto \mathrm{d}(x; A)$ est 1-lipschitzienne.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x - a| : a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car A ne l'est pas) minorée par 0, donc $\inf\{|x - a| : a \in A\}$ existe d'après la propriété de la borne inférieure. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est bien définie.}}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$|x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

Comme $\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - a|$ (évidemment), on a

$$\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

En passant à la borne inférieure sur $a \in A$ dans cette inégalité, il vient alors

$$\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - y| + \mathrm{d}_A(y),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y) \leqslant |x - y|.$$

En échangeant le rôle de x et de y, on obtient

$$\mathrm{d}_A(y) - \mathrm{d}_A(x) \leqslant |y - x|.$$

En combinant ces résultats, on a

$$|\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y)| \leqslant |x - y|.$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Notons T une période de f.

Le théorème de Heine nous dit que f est uniformément continue sur $[0;2T]$ (c'est important de prendre plus qu'une seule période).

Soit $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de f sur $[0;2T]$ nous dit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [0;2T]$, $(|x-y| \leqslant \alpha) \Longrightarrow (|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)$. Posons $\eta = \min\{\alpha; T\}$. Prenons alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. On peut alors trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-kT \in [0;2T]$ et $y-kT \in [0;2T]$. Comme $|(x-kT)-(y-kT)| = |x-y| \leqslant \eta \leqslant \alpha$, on a $|f(x-kT) - f(y-kT)| \leqslant \varepsilon$. Comme f est Tpériodique, cela donne $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\bigstar$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que l'on peut encadrer f par deux fonctions affines.

En prenant $\varepsilon = 1$ dans la propriété d'uniforme continuité, on a l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on ait $(|x-y| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant 1)$.

Traçons le graphe de f entre les abscisses 0 et x. Pour aller de 0 à x, on fait environ a/η pas de longueur η sur chacun desquels le dénivelé est uniformément majoré par 1 d'où un dénivelé total d'au plus a/η. En rajoutant l'ordonnée à l'origine, on a le résultat.

Formalisons. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Considérons l'entier $n = \lfloor x/\eta \rfloor$ de sorte que

$$n\eta \leqslant x < (n+1)\eta.$$

On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| &\leqslant |f(\eta) - f(0)| + |f(2\eta) - f(\eta)| + \cdots + |f(n\eta) - f((n-1)\eta)| + |f(x) - f(n\eta)| \\
&\leqslant 1 + 1 + \cdots + 1 \quad (n+1 \text{ fois}) \\
&= n+1 \\
&\leqslant \left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor \\
&\leqslant \frac{x}{\eta} + 1,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$|f(x)| \leqslant \frac{x}{\eta} + 1 + |f(0)|.$$

Ainsi, on a démontré que

$$\boxed{\text{on peut encadrer } f \text{ par deux fonctions affines.}}$$

♦ ***Exercice 19.*** [$\star$]

Soit $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer que f se prolonge par continuité en 0. *Indication : Utiliser* $g(x) = \sup\{f(t) : t \in]0;x]\}$ et $h(x) = \inf\{f(t) : t \in]0;x]\}$.

Il est clair que g est croissante sur $]0;1]$ et h est décroissante sur $]0;1]$. Le théorème de la limite monotone nous dit que g et h ont chacune une limite en 0 notées ℓ_1 et ℓ_2.

L'uniforme continuité de f nous dit alors ℓ_1 et ℓ_2 sont proches à ε près pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\ell_1 = \ell_2$. Cette valeur est dorénavant notée ℓ.

Comme $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in]0;1]$, le théorème des gendarmes nous dit que f tend vers ℓ en 0. Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [$\star$]
Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos(x)$.

On démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Pour $x \neq 0$ et n assez grand, on a $\sin(x/2^n) \neq 0$, d'où

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(x)}{x},$$

par continuité de f en 0. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie alors que cette fonction convient.

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la seule fonction solution du problème est le sinus cardinal.}}$$

♦ ***Exercice 21.*** [$\star$]
Déterminer les applications continues $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telles que $f \circ f = f$.

Soit f une telle application (il en existe puisque $\mathrm{Id}_{[0;1]}$ convient). Notons $f([0;1]) = [m;M]$ avec $0 \leqslant m \leqslant M \leqslant 1$. Si $x \in [m;M]$, alors $x = f(x')$, donc $f(x) = f\big(f(x')\big) = (f \circ f)(x') = f(x') = x$, donc $f\big|_{[m;M]} = \mathrm{Id}_{[m;M]}$.

Réciproquement, soit $m, M \in [0;1]$ tels que $m < M$. Considérons une fonction continue $f : [0;1] \longrightarrow [m;M]$ telle que $f\big|_{[m;M]} = \mathrm{Id}_{[m;M]}$. Si $x \in [0;1]$, alors comme $f(x) \in [m;M]$, donc $f\big(f(x)\big) = f(x)$, donc $f \circ f = f$.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les applications continues } f : [0;1] \longrightarrow [0;1] \text{ telles que } f \circ f = f \text{ sont les} \\ \text{applications continues } f : [0;1] \longrightarrow [m;M] \text{ telle que } f\big|_{[m;M]} = \mathrm{Id}_{[m;M]}.\end{array}}$$

♦ ***Exercice 22.*** [$\star$]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante. On considère l'ensemble G_f des périodes de f définie par $G_f = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$.

1. Démontrer que G_f est sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Qu'en déduire ?
2. a) On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   b) Donner un exemple d'une fonction φ tel que $G_\varphi = \mathbb{Q}$.
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et périodiques admettant à la fois 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.

1. On a $0 \in G_f$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+0) = f(x)$.
   Soient $T_1, T_2 \in G_f$. On a

$$\begin{aligned} f(x+T_1-T_2) &= f(x-T_2) && \text{car } f \text{ est } T_1\text{-périodique} \\ &= f(x-T_2+T_2) && \text{car } f \text{ est } T_2\text{-périodique} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

   donc $T_1 - T_2 \in G_f$.

On en déduit que

$$\boxed{G_f \text{ est sous-groupe additif de } \mathbb{R}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{G_f \text{ est ou bien de la forme } \alpha\mathbb{Z} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+, \text{ ou bien dense dans } \mathbb{R}.}$$

2. a) Raisonnons par l'absurde en supposant que G_f est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $T \in G_f$, on a $f(T) = f(0)$, ce qui démontre que f est constante sur G_f. Comme G_f est dense dans $\mathbb{R}$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ (en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de G_f qui converge vers x, ce qui implique que la suite $(f(g_n))_{n\geqslant 0}$ tend à la fois vers $f(x)$ (par continuité de f) et vers $f(0)$ (puisque f est constante sur G_f), d'où $f(x) = f(0)$, ce qui démontre bien que f est constante sur $\mathbb{R}$). C'est absurde ! Donc

$$\boxed{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } G = \alpha\mathbb{Z}.}$$

   b) La fonction indicatrice des rationnels, notée $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$, est r-périodique pour tout $r \in \mathbb{Q}$ en vertu du fait que la somme de de deux rationnels est encore un rationnel et que la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel. Donc

$$\boxed{G_{\mathbb{1}_\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}.}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique admettant à la fois 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Alors $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z} \subset G_f$. Or, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, le sous-groupe $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir l'exercice concernant les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ dans le chapitre sur la droite réelle). A fortiori, G_f est dense dans $\mathbb{R}$. La continuité de f permet, comme à la question 2. a), d'en déduire que f est constante. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les seules fonctions } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continues et périodiques admettant} \\ \text{à la fois 1 et } \sqrt{2} \text{ comme périodes sont les fonctions constantes.}\end{array}}$$