Mathématiques X

Aline Cahuzac

Juillet 2019

1 Premier oral

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2 + X(C^2 + D^2)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ en posant pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $u(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k a_k$. u est dite positive si $\forall\ P \in \mathbb{R}[X], P \geqslant\ 0 \Rightarrow\ u(P) \geqslant\ 0$. Montrer que la positivité de u est caractérisée par celle des formes quadratiques $(f_n)_n$ définies sur les $\mathbb{R}^n$ par $\forall\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f_n(x) = \sum\limits_{0\leqslant\ i,j\leqslant\ n} x_i x_j u_{i+j}$.

Exercice 2

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}_d[X]$. On note A l'ensemble des racines simples de P dans $\mathbb{R}_+$. Le but est de montrer que *le nombre de changements de signes de la suite* $(a_0, ..., a_d)$ *est supérieur ou égal au cardinal de* A.

Pour ce faire, on admet le résultat suivant : soit ${}^t(x_0...x_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dons tous les mineurs sont positifs. On note $Y = {}^t(y_0...y_n) = AX$. Alors Y a moins de changements de signe X.

Déroulé

La première question m'a paru familière et j'ai vaguement tenté de retrouver une démonstration qui, dans mon souvenirs, comportait une récurrence. L'idée de décomposer P en partie paire et partie impaire a assez vite été rejetée, sur le conseil de s'intéresser au cas P positif sur $\mathbb{R}$ plutôt. La deuxième question a été moins laborieuse. L'examinateur n'hésitait pas à donner des conseils mais il fallait parfois attendre qu'il se détache de son ordinateur : il n'a semblé véritablement s'intéresser à l'oral qu'en donnant la dernière question "pour les 5 minutes qui restent", me demandant si je connaissais ce résultat de Descartes (mais que l'on n'allait pas montrer comme son découvreur).

2 Second oral

Enoncé

1. Soit f la fonction telle que $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas développable en série entière en 0.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est développable en série entière sur un voisinage de 0
   (b) $\exists M, a > 0$ et $\mathcal{V}$ voisinage de 0 tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{V}, |f^{(n)}(x)| \leqslant Mn!a^n$
3. Montrer que $\exists\ \mathcal{V}$ voisinage de 0 et $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathcal{V}} |f^{(n)}(x)| \geqslant a^n (n!)^{\frac{3}{2}}$.

Déroulé

La voix éraillée de l'examinateur était assez déstabilisante, mais après la première question classique, il m'a bien aidée pour la deuxième. Il s'agissais de majorer des restes de série de Taylor, c'est assez sèchement qu'il m'a fait remarquer que je m'étais embarquée dans un raisonnement circulaire pour le sens facile ($(b) \Rightarrow (a)$). La dernière question m'a laissée perplexe dans les 2 minutes dont je disposais pour y réfléchir, mais l'indication donnée gentiment pour le finir chez moi était d'écrire l'égalité de Taylor-Lagrange pour un $x \neq 0$ bien choisi pour chaque entier n. Voyant que je connaissais l'égalité de Taylor-Lagrange, il a paru content ("vos collègues ne la connaissent pas souvent")...