Valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville

1. Il s'agit de l'équation différentielle linéaire $x'' + \lambda x = 0$, les solutions sont de la forme $x = (t \mapsto \alpha_x \cos\sqrt{\lambda}t + \beta_x \sin\sqrt{\lambda}t)$, $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{R}$. pour $\lambda > 0$

Si $x(0) = 0$, $\alpha = 0$ et $x'(0) = 1$ impose $\beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

D'où : $x_\lambda = (t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, t))$.

Ensuite, soit $x \in \Delta$, $x(0) = 0$ impose $\alpha_x = 0$ et $x(1) = 0$ impose $\beta_x \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$.

Si $\sqrt{\lambda} \notin \pi\mathbb{Z}$, $\Delta = \{0\}$. Si $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{Z}$, $\Delta = \mathrm{Vect}(t \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}\, t))$.

Si $\lambda \leq 0$, $\Delta = \{0\}$ et ; $\begin{cases} \lambda = 0 : & x_\lambda = (t \mapsto t) \\ \lambda < 0 : & x_\lambda = (t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}\, t)) \end{cases}$

2. Considérons l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} V_\lambda \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x'(0) \end{cases}$, φ est injective puisque si $x'(0) = 0$, on a également $x(0) = 0$ et par l'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire, $x = 0$.

Ainsi, $\dim V_\lambda \leq \dim \mathbb{R} = 1$.

Ensuite, si $\dim V_\lambda = 1$, il s'agit d'un isomorphisme.

Il existe donc $x \in V_\lambda$ tel que $x'(0) = 1$, il s'agit de x_λ par unicité ~~par~~ et donc, $x_\lambda(1) = 0$.

Réciproquement, si $x_\lambda(1) = 0$, $x_\lambda \in V_\lambda$ et comme $x_\lambda \neq 0$, $\dim V_\lambda \geq 1$, ceci conclut.

3. ⓐ Posons $y = x^2$, $y' = 2x'x$, $y'' = 2(x'^2 + x''x)$.

Or, $x'' = (q - \lambda)x$.

Donc, pour $t \in [0, 1]$, $y''(t) = 2(x'^2 + (q(t) - \lambda)x^2(t)) \geq 0$.

~~Il reste à montrer que x reste positive sur $[0, 1]$~~

x^2 est donc convexe sur $[0, 1]$.

ⓑ Si $\lambda \in \Delta$, $\dim V_\lambda = 1$ et donc, $x_\lambda \in V_\lambda$.

Comme x_λ^2 est convexe ≥ 0 s'annulant en 0 et en 1, x_λ est nulle sur $[0,1]$ et donc nulle partout, c'est absurde.

4. ⓐ On va intégrer deux fois par partie :

$$\int_0^1 x''y = \underbrace{[x'y]_0^1}_{=0} - \int_0^1 x'y' \quad \text{car } y(0)=y(1)=0$$

$$= -\left(\underbrace{[xy']_0^1}_{=0} - \int_0^1 xy''\right) \quad \text{car } x(0)=x(1)=0.$$

$$\int_0^1 x''y = \int_0^1 xy''.$$

Donc, $\int_0^1 (x''y - qxy) = \int_0^1 (xy'' - qxy)$

i.e. $\int_0^1 (x''-qx)y = \int_0^1 (y''-qy)x$.

ⓑ On a $x''-qx = -\lambda x$ et $y''-qy = -\mu y$.

Donc, d'après ⓐ,

$$-\lambda\int_0^1 xy = -\mu\int_0^1 xy.$$

i.e. $(\lambda-\mu)\int_0^1 xy = 0$.

Comme $\lambda \neq \mu$, $\int_0^1 xy = 0$!

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ convergeant vers λ.
Par 2, on a $x_{\lambda_n}(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par le résultat provisoirement admis, $(x_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers x_λ sur $[0,1]$ et donc à fortiori simplement en 1 : $x_\lambda(1) = 0$.
Donc, par la réciproque de 2., $V_\lambda \neq 0$ et donc $\lambda \in \Lambda$.
Λ est donc fermé dans $\mathbb{R}$.

6. $(x_{\lambda_n} x_\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers x_λ^2 sur $[0,1]$.
En effet, $\|x_{\lambda_n}x_\lambda - x_\lambda^2\| \leq \|x_\lambda\|_{\infty} \times \|x_{\lambda_n} - x_\lambda\|_\infty$ qui tend vers 0 !
Alors, la suite $\left(\int_0^1 x_{\lambda_n}x_\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 x_\lambda^2$.
Or, par 4.b., $\int_0^1 x_{\lambda_n} x_\lambda = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il s'ensuit donc que $\int_0^1 x_\lambda^2 = 0$.
Étant continue, positive et d'intégrale nulle, $x_\lambda = 0$.
C'est absurde puisque $x_\lambda'(0) = 1 \neq 0$ par hypothèse.

7. (a) On pose $y_1 = (t \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}\, t))$ et $y_2 = (t \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}\, t))$.
On cherche une solution de $x'' + \lambda x = f$ sous la forme
$x(t) = \lambda(t) y_1(t) + \mu(t) y_2(t)$ et vérifiant $x'(t) = \lambda(t) y_1'(t) + \mu(t) y_2'(t)$.
Ceci impose alors : $\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = f \end{cases}$.
On a alors (système de Kramer) :
$$\lambda' = \frac{-y_2 f}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{y_1 f}{y_1 y_2' - y_1' y_2}.$$
Or, $y_1 y_2' - y_1' y_2 = +\sqrt{\lambda}\, y_1^2 + \sqrt{\lambda}\, y_2^2$ et $y_1^2 + y_2^2 = 1$.
D'où : $\lambda'(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, t) f(t)$ et $\mu'(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}\, t) f(t)$.
D'où : avec $\lambda(t) = \int_0^t \lambda'$ et $\mu(t) = \int_0^t \mu'$, on dispose d'une solution particulière de l'équation.
Ensuite, en notant $x_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s f(t) [\cos(\sqrt{\lambda}\, t) \sin(\sqrt{\lambda}\, s) - \sin(\sqrt{\lambda}\, t) \cos(\sqrt{\lambda}\, s)]$
cette solution particulière, i.e. : $x_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s f(t) \sin(\sqrt{\lambda}(s-t))\, dt$.
On cherche alors y sous la forme :
$$y(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}\, t) + x_1(t).$$
Comme $y(0) = 0$, $\alpha = 0$ et comme $y'(0) = 1$, $\beta = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} x_1'(0) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
i.e. : $\beta = -\frac{1}{\lambda} x_1'(0) + 1$ et $x_1'(0) = 0$!
Donc, $\beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
D'où : $$y(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t (y''(s) + \lambda y(s)) \sin(\sqrt{\lambda}(t-s))\, ds$$

(b) On a $x_\lambda(0) = 0$ et $x_\lambda'(1) = 0$.
Donc, $$x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t (x_\lambda''(s) + \lambda x_\lambda(s)) \sin(\sqrt{\lambda}(t-s))\, ds.$$
Or, comme $x_\lambda'' + \lambda x_\lambda = q x_\lambda$, on a :
$$x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t x_\lambda(s) q(s) \sin(\sqrt{\lambda}(t-s))\, ds.$$

8. (a) On a une inégalité : $\sqrt{\lambda} |x_\lambda| \leq 1 + \int_0^t \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} |\sqrt{\lambda}\, x_\lambda(s)|\, ds$.
On applique le lemme de Gronwall à $t \mapsto |\sqrt{\lambda}\, x_\lambda(t)|$ continue positive, on a :
$$\forall t \in [0,1],\ |\sqrt{\lambda}\, x_\lambda(t)| \leq 1 + \int_0^t \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} e^{(t-s)\frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}}\, ds$$
$$\text{i.e. : } |x_\lambda(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[1 + e^{\frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}} - 1 \right] = \frac{e^{\frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}}}{\sqrt{\lambda}}$$

Comme $\lambda \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq 1$ et $\|x_\lambda\|_\infty \leq \frac{e^{\|q\|_\infty}}{\sqrt{\lambda}}$!

(b) On a $\lambda \left| x_\lambda(1) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \right| = \left| \int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda}(1-s))\, q(s) \sqrt{\lambda}\, x_\lambda(s)\, ds \right|$.

i.e. : ~~$\lambda |x_\lambda(1)| \leq$~~

$$\lambda \left| x_\lambda(1) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \|q\|_\infty \sqrt{\lambda}\, \|x_\lambda\|_\infty \leq \|q\|_\infty e^{\|q\|_\infty}.$$

Donc :

$$x_\lambda(1) \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

9. Sur un segment de $\mathbb{R}$ J, $J \cap \Delta$ est fini puisque $J \cap \Delta$ est compact car borné et fermé comme intersection de deux parties fermées de $\mathbb{R}$. Si $J \cap \Delta$ était infini, étant compact il posséderait un point d'accumulation, ce qui est absurde par 5. On peut donc ranger les éléments de Δ en une suite strictement croissante d'éléments.

Comme $x_\lambda(1) = \frac{\sin(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $(\lambda \mapsto x_\lambda(1))$ change une infinité de fois de signe ~~sur~~ tout voisinage de $+\infty$.

Il existe donc une infinité de λ tels que $x_\lambda(1) = 0$ et des arbitrairement grands par le TVI puisque $(\lambda \mapsto x_\lambda(1))$ est continue.