

Concours d'entrée des ENS Paris-Saclay et Rennes
Sujets posés lors de l'oral spécifique de mathématiques MP
Années 2018 et 2019

Pierre-Antoine Guihèneuf

Table des matières

1	Connexité et convexité	3
2	Domaine fondamental et convexité.	4
3	Une propriété due à A. Fathi	6
4	Une intégrale	6
5	Matrices à diagonales dominantes	7
6	Monoïde engendré par deux matrices	8
7	Matrices 2×2	10
8	Homéomorphismes minimaux – tome 1	11
9	Homéomorphismes minimaux – tome 2	13
10	Ensembles modèle	14
11	Perturbation d'homéomorphismes de l'intervalle	16
12	Perturbation d'homéomorphismes.	17
13	Pierre-feuille-ciseaux-lézard-Spock	19
14	Presque périodicité et densité.	21
15	Lemme de Vitali	22
16	Matrices bistrochastiques — théorème de Birkhoff-Von Neumann	24
17	Centralisateurs dans $SL(2, \mathbb{Z})$	25
18	Points extrémaux de convexes.	26
19	Convergence uniforme et suites	28
20	Entiers de Gauss	29
21	Diagonalisabilité des éléments de $GL_3(\mathbb{Z})$	30
22	Differentiabilité de la projection sur un ensemble	31
23	Fonctions presque périodiques	32
24	Projections sur les ensembles de polynômes	35
25	Espaces de Hölder	36
26	Matrices symétriques à coefficients négatifs	37
27	Distance de Wasserstein sur le cercle et Avatars	39
28	Distances pour des processus ponctuels	40
29	Équidistribution et fonctions non intégrables.	42
30	Équations différentielles et moyennes temporelles	44

Voici une partie des exercices posés lors de l'oral de mathématiques Rennes-Paris Saclay du concours d'entrée de l'ENS, filière MP. Chaque exercice est commenté et corrigé. Comme noté dans le rapport 2019,

"Les exercices sont en grande partie inédits et inspirés de problèmes de recherche. À quelques rares exceptions près, ceux-ci n'ont été posés que deux fois durant toute la durée des oraux, sur deux interrogations successives, et à trois candidats en parallèle. L'inconvénient est qu'avec ce mode de fonctionnement, seulement 6 candidats passent sur une même planche : cela fait un échantillon statistique assez restreint. Celui-ci nous apparaît néanmoins nécessaire : il est impensable d'espérer évaluer une personne ayant eu vent de l'exercice qui lui estposé."

Certains problèmes ayant été peu réussis ont néanmoins été posés à trois candidats supplémentaires; d'autres ont servi à la fin de l'oral de candidats ayant fini leur premier exercice avant la fin du l'oral, comme par exemple l'exercice 22 "Différentiabilité de la projection sur un ensemble", sorte de fil rouge de l'année 2019.

Le fait de poser des exercices inédits a une autre conséquence : leur niveau est relativement hétérogène (les examinateurs posent les exercices qu'ils trouvent!). Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter s'ils ne résolvent que partiellement un problème. Dans tous les cas, les exercices ne sont pas faits pour être résolus seul dans les 45 minutes que dure l'interrogation : certaines questions sont volontairement trop difficiles, ce qui est l'occasion pour l'interrogateur d'engager une discussion avec le candidat et tester ses capacités à utiliser des indications en cours d'épreuve.

Ces énoncés et corrigés sont mis à disposition de tous par souci d'égalité d'accès au contenu d'un concours de la fonction publique : il me semble malheureux que certains taupins n'aient pas connaissance des exercices des années antérieures simplement parce que leur prépa n'a pas pu engranger assez d'annales. Les erreurs qui s'y seraient glissées n'engagent que moi, merci de me les signaler par mail si vous en trouvez!

Je ne peux qu'encourager les futurs candidates et candidats à lire les rapports de jury des années précédentes. Nombreux sont celles et ceux qui auraient pu faire de meilleurs oraux si ils ou elles avaient appliqué quelques unes des règles simples qui y sont données (par exemple concernant l'échange avec l'examinateur ou la gestion du tableau).

Année 2018

1 Connexité et convexité

Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on note $\text{conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A (i.e. l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A).

1. Montrer que l'image d'un ensemble connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
2. Soit I un sous-ensemble connexe par arcs de l'ensemble \mathbb{S}^1 des nombres complexes de module 1. Montrer que le complémentaire de I dans \mathbb{S}^1 est connexe par arcs.
3. Montrer que si $x \in \text{conv}(A)$, avec $A \subset \mathbb{R}^2$ connexe par arcs, alors il existe $a, b \in A$ tels que $x \in [a, b]$.

Indications et commentaires

La première question est une question de cours. La deuxième, géométriquement évidente, est assez délicate et fait appel à la notion de relevé d'un angle. La dernière est vraiment difficile. Dans tous les cas, on attendait des raisonnements sur des dessins aboutissant sur une formalisation rigoureuseuse.

Cet exercice est apparu comme question intermédiaire lors de la rédaction du suivant; les résultats de ces deux planchent montrent que *tout domaine fondamental connexe par arcs de \mathbb{Z}^2 est $\sqrt{2}$ quasi convexe*.

Solution de l'exercice

1. Cours.
- 2a. Première solution : version naturelle en se ramenant à \mathbb{R} . Supposons que le complémentaire de I est non vide, et soit z_0 dans ce complémentaire, d'argument $\theta_0 \in [0, 2\pi[$. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : I &\longrightarrow]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\\ z &\longmapsto \arg(z)\end{aligned}$$

On vérifie que cette application est continue (pas si trivial!), donc son image est un ensemble connexe par arcs de \mathbb{R} , qui est par conséquent un intervalle. Son complémentaire dans $\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ est donc une union d'au plus deux intervalles : un ayant pour extrémité θ_0 et l'autre ayant pour extrémité $\theta_0 + 2\pi$. Dans tous les cas, cela fournit un chemin reliant n'importe quel élément du complémentaire à θ_0 et entièrement inclus dans le complémentaire. Cela implique que le complémentaire de I dans \mathbb{S}^1 est connexe par arcs.

- 2b. Seconde solution : plus astucieuse mais géométrique. Supposons que le complémentaire de I contient au moins deux points z_0 et z_1 . Soit ϕ une forme affine s'annulant exactement sur la droite D passant par z_0 et z_1 . Alors $\phi(I)$ est un connexe de \mathbb{R} , donc un intervalle, et comme 0 n'est pas dedans ($D \cap \mathbb{S}^1 \subset I^\complement$), il est soit dans \mathbb{R}_+^* , soit dans \mathbb{R}_-^* . Dans les deux cas, cela nous donne tout un côté de D qui est dans I^\complement , donc un trouvaille un chemin reliant z_0 et z_1 . Cela montre que I^\complement est connexe par arcs.

3. Soit $x \in \text{conv}(A)$, avec A connexe par arcs. Si $x \in A$, il n'y a rien à montrer, on suppose donc le contraire.

Puisque $x \in \text{conv}(A)$, il existe $a_1, \dots, a_k \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = x \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

On se place en coordonnées polaires centrées en x : quitte à appliquer une translation, on peut supposer $x = 0$. Pour $y \in \mathbb{R}^2$, on écrit $y = r(y)e^{i\theta(y)}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ y &\longmapsto \exp(i\theta(y)) \end{aligned}$$

est continue. L'image de A par cette application est donc un sous ensemble connexe par arcs de \mathbb{S}^1 .

Considérons l'image I de A par cette application. Quitte à réordonner, on peut supposer que les $\theta(a_i)$ sont ordonnés cycliquement sur \mathbb{S}^1 . Par la question précédente, puisque I est connexe par arcs, au plus un des intervalles $[\theta(a_i), \theta(a_{i+1})]$ n'est pas inclus dans I .

Quitte à réordonner, on peut supposer que l'intervalle non inclus dans I est $[\theta(a_k), \theta(a_1)]$. Cela implique que $[\theta(a_1), \theta(a_k)] \subset I$. Or l'arc $[\theta(a_1), \theta(a_k)]$ contient deux points opposés sur le cercle : si ce n'était pas le cas, il existerait une forme linéaire φ telle que $\varphi(a_i) < 0$ pour tout i . Cela impliquerait que

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(a_i) < 0,$$

ce qui est absurde.

Il existe donc deux points $b, b' \in A$ tels que $\theta(b)$ et $\theta(b')$ sont opposés sur le cercle. Cela signifie que $x \in [b, b']$, ce qu'il fallait démontrer.

2 Domaine fondamental et convexité

On dit qu'un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ est un *domaine fondamental* de \mathbb{Z}^2 si :

- i) D est homéomorphe à $[0, 1]^2$;
- ii) $\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^2} (D + v) = \mathbb{R}^2$;
- iii) pour tout $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, $\mathring{D} \cap (\mathring{D} + v) = \emptyset$.

On note

$$B(A, r) = \{a + v \mid a \in A, \|v\|_2 \leq r\}.$$

Le but est de montrer que pour tout domaine fondamental D de \mathbb{R}^2 , et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe $a, b \in D$ vérifiant $x \in [a, b]$, on a $x \in B(D, \sqrt{2} + \varepsilon)$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le carré $[x, x+1] \times [y, y+1]$ est un domaine fondamental de \mathbb{Z}^2 .
2. En déduire que pour tout demi-disque fermé B de rayon $\geq \sqrt{2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x + v \in B$.

Soient $a, b \in D$, et $x \in [a, b] \setminus D$.

3. Montrer qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma(t) \in \mathring{D}$ pour tout $t \in]0, 1[$.
4. Montrer qu'il existe $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ tels que $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in (ab)$ (la droite portée par le segment $[a, b]$), $x \in [\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$ et pour tout $t \in]t_1, t_2[$, $\gamma(t) \notin (ab)$.
5. Conclure. *On admettra le théorème de Jordan : si α est un lacet simple du plan¹, alors le complémentaire α^c au moins deux composantes connexes par arcs ; de plus si on traverse le lacet on change de composante connexe par arcs.*

Indications et commentaires

Les 4 premières questions ne sont pas si dures, mais elles ont largement suffi à départager les candidats. Là encore, on attendait des dessins afin de mettre en place les stratégies de preuve.

La dernière question, très difficile, est une preuve alternative d'une astuce due à A. Douady, et utilisée dans [MZ89] pour montrer la convexité des ensembles de rotation pour le tore de dimension 2.

Solution de l'exercice

1. Il suffit de remarquer que les propriétés sont invariantes par translation, donc on peut le faire pour $x = y = 0$, et dans ce cas c'est trivial par décomposition $z = \{z\} + \lfloor z \rfloor$.
2. Il s'agit de montrer que tout demi-disque de rayon $\sqrt{2}$ contient un carré $[x, x+1] \times [y, y+1]$, ce qui est vrai puisqu'il contient un cercle de diamètre $\sqrt{2}$, qui lui-même contient un tel carré.
3. Il suffit de remarquer que c'est vrai pour $D = [0, 1]^2$, et appliquer l'homéomorphisme.
4. On oriente la droite (ab) telle que $a < b$ (et donc $a < x < b$). On pose $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \leq x\}$. Puisque l'ensemble est fermé et non vide (0 est dedans), on a bien $\gamma(t_1) \in (ab)$ et $\gamma(t_1) < x$ (égalité stricte car $x \notin D$). On considère alors $t_2 = \inf\{t \in [t_1, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \geq x\}$. De nouveau, l'inf est un min, $\gamma(t_1) \in (ab)$ et $\gamma(t_1) > x$. Cela implique que $t_1 < t_2$. Supposons qu'il existe $t \in]t_1, t_2[$ tel que $\gamma(t) \in (ab)$. Le fait que $t < t_1$ implique que $\gamma(t) > x$. Donc par définition de t_2 , on a $\gamma(t) \geq t_2$, contradiction. On a bien la propriété souhaitée.
5. Supposons le contraire, autrement dit $B(x, \sqrt{2}) \cap D = \emptyset$. Alors la courbe α formée de $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ et du segment $[\gamma(t_2), \gamma(t_1)]$ est une courbe de Jordan (elle n'a pas d'auto-intersection par la question précédente). Quitte à inverser la droite et la gauche de (ab) , on peut supposer que $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ est à droite de (ab) . On considère alors le demi-disque A intersection de $B(x, \sqrt{2} + \varepsilon)$ et du demi-plan à droite de (ab) . Alors par la question 2, il existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\gamma(t_1) + v \in A$. Par hypothèse sur A , on ne peut pas avoir $v = 0$. Ce point est alors à l'intérieur de la courbe de Jordan α (considérer un segment partant de ce point et sortant de A par son diamètre). On considère alors les deux courbes α et $\alpha + v$. Si on considère le temps $t \in [t_1, t_2]$ réalisant le max de $d(\gamma(t), (ab))$, on voit que $\gamma(t) + v$ est à l'extérieur de la courbe de Jordan α . Il existe donc $t' \in [t_1, t]$ tel que $\gamma(t') + v$ soit dans l'image de α . On voit que ce point ne peut pas être dans l'image de $[\gamma(t_2), \gamma(t_1)]$; il est donc dans celle de $\gamma|_{[t_1, t_2]}$. On vient de trouver un point appartenant à $\mathring{D} \cap \mathring{D} + v$, avec $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, ce qui contredit la définition de domaine fondamental.

1. Une application injective de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 .

3 Une propriété due à A. Fathi

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(E)$ de E , qui est l'intersection de tous les convexes contenant E , est convexe et coïncide avec l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de E .
2. Soient $k \in \mathbb{N}$, et Γ un sous-ensemble de \mathbb{Z}^k stable par somme (i.e. $\forall x, y \in \Gamma, x + y \in \Gamma$). Montrer que

$$0 \notin \Gamma \implies 0 \notin \text{conv}(\Gamma),$$

Indications et commentaires

La première question est une question de cours. Pour la seconde, on attendait des candidats qu'ils pensent d'eux-mêmes à envisager un raisonnement par contraposée (ou par l'absurde). Rappelons que l'algorithme du pivot de Gauss est aussi utile pour des exercices théoriques!

Solution de l'exercice

On va montrer la contraposée. On suppose que $0 \in \text{conv}(\Gamma)$ et on veut montrer que $0 \in \Gamma$.

Puisque $0 \in \text{conv}(\Gamma)$, on sait qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^n$, ainsi que $v_1, \dots, v_n \in \Gamma^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

On suppose de plus que l'entier n est minimal pour cette propriété.

Si on écrit les vecteurs $v_i \in \mathbb{Z}^k$ en coordonnées : $v_i = \sum_j v_{i,j} e_j$, on obtient que les λ_i sont solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= 1 \\ v_{1,1}\lambda_1 + \dots + v_{1,n}\lambda_n &= 0 \\ \vdots & \\ v_{k,1}\lambda_1 + \dots + v_{k,n}\lambda_n &= 0 \end{cases}$$

On applique le pivot de Gauss à ce système (en commençant par la première ligne) ; on obtient donc un système échelonné réduit à coefficients rationnels (puisque les $v_{i,j}$ sont entiers).

Il n'y a pas de variable libre ici puisqu'on a supposé l'entier n minimal (sinon on pourrait choisir un λ_i égal à 0). Puisque le système obtenu possède une solution, celle-ci est unique, et est donnée par les formules de Cramer. Les λ_i sont donc rationnels. Soit q le ppcm des dénominateurs des λ_i . On a alors $\sum_{i=1}^n q\lambda_i v_i = 0$, donc 0 est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de Γ , qui est stable par addition. On en déduit que $0 \in \Gamma$.

4 Une intégrale

Calculer

$$\int_0^1 x^x dx.$$

Indications et commentaires

Cet exercice a été utilisé comme complément à l'exercice précédent, qui est un peu court. Le calcul de cette intégrale est dû à Johan Bernoulli (1697). Il est malheureusement un peu astucieux car il faut penser au développement en série de l'exponentielle. Les calculs d'intégration par parties permettent de tester les capacités techniques et la rigueur des candidats et candidates.

Solution de l'exercice

Il faut d'abord vérifier que x^x est bien intégrable (car elle se prolonge par continuité par 1 en 0).

Ensuite, on écrit

$$x^x = \exp(x \ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln(x))^n}{n!}.$$

donc (par convergence dominée)

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln(x))^n}{n!} dx.$$

On pose alors

$$I_{j,k} = \int_0^1 x^j (\ln x)^k dx.$$

Par IPP (pour le faire rigoureusement on peut faire le calcul sur $[\varepsilon, 1]$ et faire tendre ε vers 0), on obtient la formule de récurrence

$$I_{j,k} = -\frac{k}{j+1} I_{j,k-1},$$

d'où $I_{j,j} = (-1)^j \frac{j!}{(j+1)^{j+1}}$ et le résultat :

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^k}.$$

5 Matrices à diagonales dominantes

1. Question de cours : si on définit une projection linéaire de \mathbb{R}^n comme une application vérifiant $p \circ p = p$, montrer que $\mathbb{R}^n = \ker p \oplus \text{im } p$.
2. Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. On suppose que pour tout $i \in [1, n]$ et tout $j \neq i$, on a $a_{i,j} \leq 0$, et

$$a_{i,i} \geq -\sum_{j \neq i} a_{i,j}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \text{im } A$.

Indications et commentaires

Les candidats étaient invités à commencer par le cas plus facile où l'inégalité de l'énoncé est stricte (qui est un "classique" taupin) et montrer qu'alors $\ker A = \{0\}$. Énoncé dû à Maxime Zavidovique.

Solution de l'exercice

On suit l'indication!

On suppose l'inégalité stricte et prend $v = (v_1, \dots, v_n) \in \ker A$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j = 0.$$

On choisit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|v_{i_0}|$ soit de valeur absolue maximale parmi les v_i . On peut donc réécrire l'équation précédente $a_{i_0, i_0} v_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} v_j$. L'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$a_{i_0, i_0} |v_{i_0}| \leq -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} |v_j| \leq -|v_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j}, \quad (1)$$

d'où $(a_{i_0, i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j}) |v_{i_0}| \leq 0$. Par hypothèse, le premier terme est strictement positif, ce qui implique que $|v_{i_0}| = 0$. On en conclut donc que $v = 0$.

Dans le cas où l'inégalité n'est pas stricte, il faut travailler un peu plus... Prenons $v \in \ker A \cap \text{im } A$, et supposons que $v \neq 0$. Commençons par analyser le cas d'égalité dans (1) : l'inégalité n'est pas stricte si pour tout j tel que $a_{i_0, j} \neq 0$, on a $v_j = v_{i_0}$. Considérons donc

$$I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid v_i = v_{i_0}\},$$

où on rappelle que v_{i_0} est de valeur absolue maximale.

Quitte à conjuguer par la bonne matrice de permutation (ce qui ne change pas notre problème), on peut supposer que $I = \llbracket 1, k \rrbracket$. Dans ce cas, pour tout $i \in I$ et tout $j > k$ (et donc $j \notin I$), $a_{i,j} = 0$. Cela implique que la matrice A s'écrit par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right),$$

où $\tilde{A} \in M_k(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$; par construction $\tilde{v} \in \ker \tilde{A}$. On a aussi vu que $v_1 = \dots = v_k \neq 0$, on peut donc supposer que $\tilde{v} = (1, \dots, 1)$. Cela implique que pour tout $i \in I$, on a $\sum_j a_{i,j} = 0$.

Mais on sait aussi que $v \in \text{im } A$, donc il existe $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $\tilde{v} = \tilde{A}\tilde{x}$. Considérons $j_0 \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que x_{j_0} soit minimal parmi les x_j . On a alors

$$1 = \sum_{j=1}^k a_{j_0, j} x_j = a_{j_0, j_0} x_{j_0} + \sum_{j \neq j_0} a_{j_0, j} x_j \leq a_{j_0, j_0} x_{j_0} + \sum_{j \neq j_0} a_{j_0, j} x_{j_0} = 0.$$

contradiction. Par conséquent, $v = 0$, donc $\ker A \cap \text{im } A = \{0\}$ et par le théorème du rang, $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \text{im } A$.

6 Monoïde engendré par deux matrices

Considérons les deux matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{1, 2\}^n$, on pose

$$M_\omega \stackrel{\text{def}}{=} M_{\omega_1} M_{\omega_2} \cdots M_{\omega_n}$$

(avec la convention $M_\emptyset = I_2$). On veut montrer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2\}^n &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (\omega_i)_{1 \leq i \leq n} &\longmapsto M_\omega \end{aligned}$$

est injective et que son image n'est constituée que de matrices diagonalisables sur \mathbb{R} .

1. Montrer que M_1 et M_2 sont diagonalisables sur \mathbb{R} et calculer leurs valeurs propres.
2. Si deux matrices réelles sont à valeurs propres réelles, est-ce que leur produit est forcément à valeurs propres réelles?
3. Soit le cône

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq |y|\}.$$

Montrer que $M_1 \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, $M_2 \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, et $M_1 \mathcal{C} \cap M_2 \mathcal{C} = \{0\}$.

4. Conclure.
5. Etudier l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2\}^n &\longrightarrow \mathcal{U} \\ (\nu, \omega) &\longmapsto M_\omega \nu / \|M_\omega \nu\| \end{aligned}$$

Indications et commentaires

La stratégie de preuve de cet exercice est basée sur le “lemme du ping-pong”, grand classique de la théorie géométrique des groupes, qui donne une condition suffisante sur l'action du monoïde pour que celui-ci soit libre. Ici, on fait agir sans le dire le monoïde se fait sur l'espace projectif réel (l'ensemble des droites du plan).

La question 3 est grandement facilitée par des dessins. Attention à bien s'y prendre en considérant des pentes et non des angles!

Solution de l'exercice

1. Échauffement.
2. Non, par exemple le produit de deux symétries axiales donne une rotation.
3. Il suffit de calculer les pentes des images des deux droites $y = x$ et $y = -x$ par les deux matrices.
4. Soit $\omega \neq \omega'$. On a 2 possibilités :
 - Soit l'un des deux mots est préfixe de l'autre, par exemple ω est préfixe de ω' . on peut donc écrire $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_m)$. Alors $M_{\omega_{n+1}} \dots M_{\omega_m}$ envoie le cône \mathcal{C} strictement dans lui-même, donc $M_\omega \mathcal{C}$ est un sous-cone strict de $M_\omega \mathcal{C}$, lui-même sous-cone strict de \mathcal{C} . En particulier, $M_\omega \neq M_{\omega'}$.
 - Il existe un entier k tel que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$ et $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_k, \omega'_{k+1}, \dots, \omega'_m)$. Il s'agit de montrer que $M_{\omega_{k+1}} \dots M_{\omega_n} \neq M_{\omega'_{k+1}} \dots M_{\omega'_m}$. Mais $M_{\omega_{k+1}} \dots M_{\omega_n} \mathcal{C} \subset M_{\omega_{k+1}} \mathcal{C}$ et $M_{\omega'_{k+1}} \dots M_{\omega'_m} \mathcal{C} \subset M_{\omega'_{k+1}} \mathcal{C}$ (puisque $M_i \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$). De plus, $M_{\omega_{k+1}} \mathcal{C} \cap M_{\omega'_{k+1}} \mathcal{C} = \{0\}$, donc $M_{\omega_{k+1}} \dots M_{\omega_n} \mathcal{C} \cap M_{\omega'_{k+1}} \dots M_{\omega'_m} \mathcal{C} = \{0\}$, alors que ces deux ensembles sont des cônes non vides (les matrices M_i sont toutes inversibles). Par conséquent, $M_{\omega_{k+1}} \dots M_{\omega_n} \neq M_{\omega'_{k+1}} \dots M_{\omega'_m}$.

Reste à montrer que les matrices M_ω sont toutes diagonalisables. Supposons $\omega \neq \emptyset$ (sinon c'est trivial). Alors $M_\omega \mathcal{C}$ est un sous-cône strict de \mathcal{C} . Considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ v &\longmapsto M_\omega v / \|M_\omega v\|.\end{aligned}$$

La projection (centrale) de \mathcal{C} sur \mathcal{U} est constituée de deux segments disjoints I et J . Ainsi $\varphi^2(I) \subset I$, et le TVI implique que φ possède au moins un point fixe, qui correspond à une direction propre de M_ω . Le même raisonnement appliqué à M_ω^{-1} et à \mathcal{C}^\complement fournit aussi une direction propre de M_ω , différente de la première (car dans \mathcal{C}^\complement). Ainsi, M_ω est diagonalisable. (pour faire les choses bien, il faudrait travailler dans la droite projective).

5. Question ouverte. Le but est de comprendre l'action de l'ensemble des mots en 1,2 sur \mathcal{U} . En particulier, lorsque la longueur du mot tend vers l'infini, les directions propres s'accumulent sur un ensemble de Cantor (fermé, nulle part dense, totalement discontinu).

7 Matrices 2×2

Soit $M \in GL_2(\mathbb{C})$. On note D son déterminant et T sa trace. On définit la suite $(p_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ par les conditions initiales $p_{-1} = -1/D$ et $p_0 = 0$ et la relation de récurrence $p_{m+1} = Tp_m - Dp_{m-1}$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$p_m^2 - p_{m-1}p_{m+1} = D^{m-1}. \quad (2)$$

$$M^m = p_m M - D p_{m-1} I_2. \quad (3)$$

$$\det(M^m - I_n) = D^m + 1 - p_{m+1} + D p_{m-1}. \quad (4)$$

2. Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$ une matrice inversible dans \mathbb{R} , et $\overline{M} : \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ l'application obtenue par passage au quotient². Montrer que cette application est bien définie³, qu'elle est surjective et calculer le cardinal de $\overline{M}^{-1}(\bar{x})$ (la fibre) pour tout \bar{x} .
3. En déduire le nombre de points périodiques de \overline{M} de période divisant un entier $m \in \mathbb{N}$.

Indications et commentaires

Exercice un peu long, qui a été largement repris de l'article [BRW08]. Il teste les capacités techniques et en particulier la rigueur calculatoire.

Les ensembles quotients n'étant plus au programme, les candidats ont été accompagnés dans la compréhension de l'application \overline{M} .

Solution de l'exercice

1. Pour (2), on écrit

$$\begin{aligned}p_m^2 - p_{m-1}p_{m+1} &= p_m^2 - (Tp_m - Dp_{m-1})p_{m-1} \\ &= Dp_{m-1}^2 + p_m(p_m - Tp_{m-1}) \\ &= D(p_{m-1}^2 - p_m p_{m-2}).\end{aligned}$$

2. $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ est l'ensemble quotient de la relation sur \mathbb{R}^2 définie par $v \sim w \iff v - w \in \mathbb{Z}^2$.

3. Autrement dit que si $x - y \in \mathbb{Z}^2$, alors $Mx - My \in \mathbb{Z}^2$.

On vérifie que $p_1 = 1$ ce qui fait que (2) est vraie pour $m = 0$, et elle est donc vraie pour tout $m \geq 0$ par récurrence. De même, une récurrence inversée montre que la formule est vraie pour tout $m \leq 0$.

Pour (3), on vérifie que $p_2 = T$, et que pour toute matrice 2×2 , on a $M^2 = TM - DI_2$ (en coordonnées ou avec Cayley-Hamilton). La formule est donc vraie pour $m = 2$.

Une récurrence facile donne alors le résultat pour $m \geq 0$. De même, en utilisant la formule $DM^{-1} = TI_2 - M$, on obtient le résultat pour tout $m \leq 0$.

Par (3), on a

$$\det(M^m - I_n) = \det(p_m M - (Dp_{m-1} + 1)I_2).$$

La formule du polynôme caractéristique en dimension 2 donne alors

$$\det(M^m - I_n) = p_m^2 D - (Dp_{m-1} + 1)Tp_m + (Dp_{m-1} + 1)^2.$$

On applique (2) et la définition de la suite (p_m) , et trouve :

$$\begin{aligned} \det(M^m - I_n) &= (D^{m-1} + p_{m-1}p_{m+1})D - (Dp_{m-1} + 1)Tp_m + (Dp_{m-1} + 1)^2 \\ &= D^m - Tp_m + 1 + Dp_{m-1}(p_{m+1} - Tp_m + Dp_{m-1} + 2) \\ &= D^m - (p_{m+1} + Dp_{m-1}) + 1 + 2Dp_{m-1} \\ &= D^m + 1 - p_{m+1} + Dp_{m-1} \end{aligned}$$

2. Le fait que \overline{M} est bien définie découle du fait que M est à coefficients entiers. Elle est surjective car M l'est. Le cardinal de chaque fibre est $\det M$. En effet, par linéarité, ce cardinal est constant égal à celui de la fibre de 0 (noté C). Si on considère $D = [0, 1]^2$, l'aire de MD est égale à $\det M$ mais aussi à C . En effet, MD est un parallélogramme que l'on peut découper en morceaux obtenus comme les intersections avec les translatés par \mathbb{Z}^2 de $[0, 1]^2$. En ramenant ces morceaux sur $[0, 1]^2$, on voit qu'en chaque point on a C morceaux, donc l'aire de MD est C . Conclusion : le cardinal de chaque fibre vaut $\det M$.
3. Le nombre de points périodiques de \overline{M} , de période divisant m est le nombre de points fixes de \overline{M}^m et vaut donc $\det(M^m - I_2)$ si ce déterminant est non nul. Dans ce cas, on sait le calculer par la question 3. Sinon, Cela signifie que 1 est vp de M^n , et dans ce cas le nombre de points fixes de \overline{M}^n est infini.

8 Homéomorphismes minimaux – tome 1

Soit $n \geq 1$, K un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n , et $f : K \rightarrow K$ continue. On dit qu'un ensemble $A \subset K$ est *invariant par f* si $f(A) \subset A$.

On dit que f est *minimal* si les seuls fermés invariants par f sont K et \emptyset .

1. Montrer qu'une application minimale est surjective.
2. On suppose K fini. Décrire les ensembles invariants par f .
3. Montrer f est minimal si et seulement si toute orbite $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans K .
4. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la rotation

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ z &\longmapsto ze^{2i\pi\alpha} \end{aligned}$$

est minimale.

5. Plus généralement, trouver une CNS sur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ pour que la rotation

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathcal{U}^n &\longrightarrow \mathcal{U}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (z_1 e^{2i\pi\alpha_1}, \dots, z_n e^{2i\pi\alpha_n}) \end{aligned}$$

soit minimale.

Indications et commentaires

L'exercice est très modulable : toutes les questions sont indépendantes. Il teste la capacité des candidats à s'approprier une nouvelle notion (ici la minimalité). La question 3. est un grand classique des cours de systèmes dynamiques, la 4. revient simplement à montrer la densité des ensembles $\{k\alpha \bmod 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ lorsque $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (grand classique de prépa). Dans la dernière question, on s'attendait à ce que les candidats proposent eux-mêmes de traiter le cas $n = 2$.

Solution de l'exercice

- On vérifie que $f(K)$ est invariant et fermé (car compact), il est donc égal à K .
- Si f est surjective K fini, c'est une permutation de K , qui se décompose donc en un produit de cycles à supports disjoints. Soit $x \in A$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) \in A$; autrement dit le cycle contenant x est en entier contenu dans A . par conséquent, l'ensemble A est une union de cycles de f . Réciproquement, on vérifie sans peine qu'une union de cycles de f est invariante par f .

Sous ces conditions, f est minimal ssi c'est une permutation cyclique.

- Supposons que toute orbite est dense dans K , et prenons $F \subset K$ invariant par f et non vide. Alors pour $x \in F$, l'orbite de x est dense dans K et contenue dans F . Donc F est dense dans K et puisqu'il est fermé, c'est K .

Réciproquement, si f est minimal, alors l'orbite de tout point de K est invariante par f . On vérifie que l'adhérence de cette orbite est elle aussi invariante par f ; elle est donc égale à K , et donc l'orbite est dense.

- Il s'agit de montrer que les $m\alpha \bmod 1$ sont denses dans $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en n segments de longueur $1/n$. Alors par le principe des tiroirs, parmi les $m\alpha \bmod 1$, avec $0 \leq m \leq n$, deux sont dans le même intervalle, et sont donc à distance au plus $1/n$. On les note $m_1\alpha$ et $m_2\alpha$, avec $m_1 < m_2$, et pose $x = (m_2 - m_1)\alpha$. On a $x \neq 0 \bmod 1$ (sinon cela contredit l'irrationalité de α), mais x proche de $0 \bmod 1$. On voit sans difficulté que les kx sont $1/n$ -denses dans $[0, 1]$.

- La CNS est la suivante : il n'existe pas d'entiers k_0, \dots, k_n non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = k_0$.

Le cas général est vraiment dur et occupera les meilleurs (il se base sur la classification des sous-groupes fermés de \mathbb{R}^d). Le cas $n = 2$ est plus abordable. De nouveau, il s'agit de montrer que sous la condition au-dessus, les $m\alpha \bmod 1$ sont denses dans $[0, 1]^2$. Par le principe des tiroirs (comme avant), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\alpha \bmod 1$ est ε -proche de 0 . Si on trouve $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m'\alpha \bmod 1$ est ε -proche de 0 , et que $(m\alpha, m'\alpha)$ est une base de \mathbb{R}^2 , alors on a gagné⁴. Sinon, soit D la droite engendrée par $\beta = m\alpha \bmod 1$. Le même raisonnement qu'avant implique qu'il existe $m' > 1$ tel que $m'\beta \bmod 1$ est ε proche de 0 . Donc il existe $v \in \mathbb{Z}^2$ ($v \neq 0$) tel que $m'\beta + v \in D$. Or, puisque $\beta \in D$, on a $m'\beta \in D$ et donc $v \in D$. Donc D est à pente rationnelle, ce qui implique la condition sur α .

4. On a trouvé un domaine fondamental de diamètre $\leq 2\varepsilon$, donc l'orbite est 2ε dense dans $[0, 1]^2$.

9 Homéomorphismes minimaux – tome 2

Soit $n \geq 1$, K un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n , et f un homéomorphisme de K (i.e. une bijection bicontinue). On dit qu'un ensemble $A \subset K$ est *invariant par f* si $f(A) = A$.

On dit que l'homéomorphisme f est *minimal* si les seuls fermés invariants par f sont K et \emptyset .

On dit que K est *connexe* si K ne peut pas s'écrire comme l'union disjointe de deux fermés non vides.

1. Montrer que si f est une bijection continue de K , alors c'est un homéomorphisme.
2. Montrer que si K est connexe et f est minimal, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application f^k est elle aussi minimale. Indications :
 - (a) Traiter le cas $k = 2$: prendre F un fermé invariant par f et considérer $G = F \cup f(F)$.
 - (b) Admettre la propriété suivante : il existe un ensemble fermé $F \subset K$, invariant par f^k , tel que $f_{|F}^k$ soit minimal. S'en servir pour traiter le cas k premier et conclure.
 - (c) Traiter le cas k premier sans utiliser cette propriété.

Indications et commentaires

La difficulté des questions va croissante. L'introduction de l'ensemble G à la question 2 est naturelle (on veut appliquer la minimalité de l'application f , donc considérer un ensemble invariant par f) mais demande un peu de recul : les candidats ont été guidés vers sa définition. La propriété admise à la question 2.(b) est vraie en général mais sa preuve fait appel à l'axiome du choix; le raisonnement fait à la dernière question permet de s'en passer.

Bien souvent, la question 2. était d'abord donnée sans indication, les examinateurs attendant quelques minutes pour voir si les candidats pensaient d'eux-mêmes à étudier le cas $k = 2$.

Exercice dû à Maxime Zavidovique.

Solution de l'exercice

1. Il s'agit de montrer que l'image par f de tout fermé est fermée. Or tout fermé de K est compact, donc son image par f continue est compacte, donc fermée.
2. (a) Prenons $k = 2$, et supposons par l'absurde que f^2 n'est pas minimale. Alors il existe un fermé $F \subset K$, invariant par f^2 , et différent de \emptyset et K . Considérons l'ensemble $G = F \cup f(F)$. On a

$$f(G) = f(F) \cup f^2(F) = f(F) \cup F = G;$$

G est donc un sous-ensemble fermé invariant par f . Par minimalité de f , on sait que $G = K$ ($G = \emptyset$ est absurde puisque $F \neq \emptyset$).

Pour aboutir à une contradiction avec la connexité de F , il suffit de montrer que $F \cap f(F) = \emptyset$. Pour cela, posons $F_1 = F \cap f(F)$. Alors par le fait que f est bijective, $f(F_1) = f(F) \cap f^2(F) = F_1$, donc par minimalité de f on a soit $F_1 = K$, ce qui signifie que $F = K$ et qui contredit l'hypothèse faite sur F , soit $F_1 = \emptyset$ et dans ce cas $F \cap f(F) = \emptyset$. L'ensemble connexe K s'écrit donc comme l'union disjointe de deux sous-ensembles fermés, ce qui est absurde.

- (b) Passons au cas k premier. On choisit là aussi un sous-ensemble fermé non trivial, invariant par f^k , minimal, et pose comme avant

$$G = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(F).$$

Cela implique que G est f -invariant et que donc $G = K$. Il s'agit maintenant de montrer que les sous-ensembles $f^i(F)$ sont disjoints.

Supposons le contraire : il existe $0 \leq i < i' < k$ tels que $f^i(F) \cap f^{i'}(F) \neq \emptyset$. En composant par f^{-i} , on obtient que $F_1 = F \cap f^{i'-i}(F) = F \cap f^{j_0}(F) \neq \emptyset$. Alors $F_1 \subset F$ est invariant par f^k et fermé, puisqu'il est non vide cela signifie (par minimalité de F) que $F_1 = F$. Autrement dit, $F \subset f^{j_0}(F)$. On voit facilement que $f^{j_0}(F)$ est aussi minimal pour f , on au donc aussi l'inclusion inverse, et donc $F = f^{j_0}(F)$. Puisque k est premier, par Bézout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $j_0 u \equiv 1 \pmod{k}$, donc $F = f^{uj_0}(F) = f(F)$. Cela implique que $F = K$.

Conclusion : f^k est minimal pour k premier, donc est minimal pour tout $k \geq 1$.

- (c) On ne suppose plus l'ensemble F minimal. Avec les notations du dessus, on voit que si on pose

$$G_1 = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(F_1),$$

alors $G_1 = K$. Ici, on a deux possibilités. Soit les $f^i(F_1)$ sont deux à deux disjoints, auquel cas on obtient une contradiction avec le fait que K est connexe ; soit deux d'entre eux s'intersectent et dans ce cas (comme avant) il existe $j_1 < k$ tel que $F_2 = F_1 \cap f^{j_1}(F_1) \neq \emptyset$.

Ainsi de suite, on définit les F_n par récurrence : tant que les $f^i(F_n)$ ne sont pas deux à deux disjoints (et dans ce cas la propriété est démontrée), il existe j_n tel que $F_{n+1} = F_n \cap f^{j_n}(F_n) \neq \emptyset$, et dans ce cas

$$G_n = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(F_n) = K.$$

Mais alors, on observe que F_n est l'intersection des $f^m(F)$, où m est n'importe quelle somme des j_q , avec $q \leq n$, vus comme éléments de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Or, une infinité de j_q est égale à un même élément $J \neq 0$ de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, leur somme parcourt donc $J\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, qui vaut $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ puisque k est premier. Par conséquent, à partir d'un certain moment, on a

$$F_n = \bigcap_{i=0}^{k-1} f^i(F),$$

qui est non vide et invariant par F . On en déduit que $F_n = K$, et que donc $F = K$.

10 Ensembles modèle

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On appelle *réseau associé* à M l'ensemble $\{Mv \mid v \in \mathbb{Z}^n\} \subset \mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'un réseau Λ associé à une matrice M est un sous-groupe de \mathbb{R}^n .
2. Montrer que Λ est Delone, c'est-à-dire qu'il existe deux réels $r < R$ tels que :
 - Toute boule de rayon r contient au plus un élément de Λ ;
 - Toute boule de rayon R contient au moins un élément de Λ (i.e. Λ est R -dense).
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $y \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$|ax + by| \leq \delta \tag{5}$$

est R' -dense.

On dit qu'un sous-ensemble Γ de \mathbb{R} est un *ensemble modèle* s'il existe un réseau Λ de \mathbb{R}^2 et un sous-ensemble W de \mathbb{R} tels que

$$\Gamma = p_2(\Lambda \cap p_1^{-1}(W)),$$

où p_1 est la projection orthogonale sur la première coordonnée et p_2 est la projection orthogonale sur la dernière.

4. On suppose de plus que 0 est dans l'intérieur de l'ensemble W . Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que toute boule de rayon R (autrement dit tout intervalle de longueur $2R$) contient au moins un élément de Γ .
5. Cas général où \mathbb{R}^2 est remplacé par \mathbb{R}^{n+m} , $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^n$.

Indications et commentaires

La correction de la question 2. est rapide et élégante mais un peu astucieuse ; on peut s'en sortir en utilisant les lipschitzianités de M et M^{-1} . Pour la question 3., les candidats ont été guidés vers l'interprétation en termes de rotations du cercle.

La dernière question est très dure, elle est là pour occuper les meilleurs !

Cet exercice est tiré de [Gui18].

Solution de l'exercice

1. Trivial
2. Par équivalence des normes, on choisit celle qui nous plaît. On prend donc $N(x) = \|M^{-1}x\|_\infty$. Avec cette norme, en conjuguant par M , on se retrouve à démontrer la propriété pour l'ensemble \mathbb{Z}^n et la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors, un peu de géométrie du plan permet de dire que :
 - Si $0 \leq r < 1/2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{Card}(B(x, r)) \cap \mathbb{Z}^n \leq 1$.
 - Si $R > 1/2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{Card}(B(x, r)) \cap \mathbb{Z}^n \geq 1$.
3. L'inéquation (5) se réécrit $|a/bx + y| \leq \delta/b$, autrement dit, posant $\alpha = a/b$ et $\varepsilon = \delta/b$, on cherche à montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant $|\alpha x| \leq \varepsilon \pmod{1}$ est R' -dense. On a alors deux cas :
 - $\alpha = p/q$ est rationnel, dans ce cas on peut prendre $R' = q/2$.
 - $\alpha \notin \mathbb{Q}$, dans ce cas on découpe $[0, 1]$ en N intervalles de longueur identique $\leq \varepsilon$, et on considère $\{\alpha x \pmod{1}\}_{0 \leq x \leq N}$. Par le principe des tiroirs, deux au moins de ces nombres sont dans un même petit intervalle : il existe x, x' tels que $|\alpha x - \alpha x'| \leq \varepsilon \pmod{1}$. Si on pose $z = x - x'$, on a $|\alpha z| \leq \varepsilon \pmod{1}$, avec $z \neq 0$. Il existe donc $M \in \mathbb{N}$ tel que $\{n\alpha z \pmod{1}\}_{1 \leq n \leq M}$ soit ε -dense dans $[0, 1]$. Soit alors $x_0 \in \mathbb{Z}$, alors il existe $n \leq M$ tel que $|\alpha x_0 - n\alpha z| \leq \varepsilon \pmod{1}$, autrement dit il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $|\alpha(x_0 - nz) - y| \leq \varepsilon$, avec $|nz| \leq M|z| \stackrel{\text{def.}}{=} R'$.
4. On suppose que $[-\delta, \delta] \subset W$. On veut montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $([-\delta, \delta] \times [t - R, t + R]) \cap \Lambda \neq \emptyset$. On écrit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La condition voulue se réécrit : pour tout $\delta > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel qu'on ait à la fois (5) et

$$|cx + dy - t| \leq R. \quad (6)$$

Supposons que (5) soit vraie. On suppose $b > 0$. Alors un calcul simple montre que

$$\left(c - \frac{ad}{b}\right)x - \frac{\delta d}{b} - t \leq cx + dy - t \leq \left(c - \frac{ad}{b}\right)x + \frac{\delta d}{b} - t.$$

Donc

$$\begin{aligned} |cx + dy - t| \leq R &\Leftrightarrow \left| \left(c - \frac{ad}{b}\right)x - t \right| \leq R + \frac{\delta d}{b} \\ &\Leftrightarrow \left| x - t \frac{b}{bc - ad} \right| \leq R \left| \frac{b}{bc - ad} \right| + \frac{\delta d}{|bc - ad|} \end{aligned}$$

En prenant R tel que le terme de droite est supérieur à R' , le lemme implique qu'il existe x vérifiant (5) ainsi que cette dernière condition, donc à la fois (5) et (6).

5. Trop long à rédiger : question ouverte ! Cette question est en fait très similaire à la dernière question de l'exercice "Homéomorphismes minimaux 1".

11 Perturbation d'homéomorphismes de l'intervalle

Un homéomorphisme de $[0, 1]$ est une bijection bicontinue de $[0, 1]$ dans lui-même. Sur les homéomorphismes, on a la distance $d_0(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Soit $a, b \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $h \in \text{Homeo}([0, 1])$ tel que $h(a) = b$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de $d_0(h, Id)$?
3. Quelles sont les tailles possibles pour le support⁵ de h ?
4. On suppose de plus h de classe C^1 . Discuter des valeurs possibles de $d_1(h, Id)$ et de la taille du support, où

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x) - g'(x)| ?$$

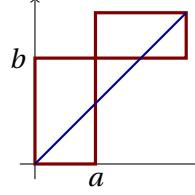
Indications et commentaires

Exercice d'analyse réelle qui a pu en déstabiliser certains puisque les questions sont posées de manière ouverte. On attendait des candidats qu'ils fassent preuve d'autonomie pour proposer des solutions partielles, en s'appuyant sur des dessins des graphes des fonctions.

Solution de l'exercice

1. Il suffit de prendre un application h_0 continue affine par morceaux, telle que $h_0(0) = 0$, $h_0(a) = b$ et $h_0(1) = 1$, et affine entre ces points. Cette application est par construction strictement croissante, c'est donc une injection, et elle est surjective par TVI.
2. On a deux cas, suivant que h est supposé croissant ou décroissant. Commençons par le premier cas. Puisqu'on doit avoir $h(a) = b$, on a forcément $d_0(h, Id) \geq d(a, b)$. De plus, par croissance stricte de h , on voit qu'on doit avoir $d_0(h, Id) < \max(b, 1-b, a, 1-a)$ (considérer les rectangles de la figure).

5. $\text{supp}(h) = \overline{\{x \in [0, 1] \mid h(x) \neq x\}}$.



L'exemple précédent montre qu'on peut choisir $h = h_0$, avec $d_0(h_0, Id) = d(a, b)$. Tentons de généraliser cet exemple. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour $t \in]0, 1[$, on définit l'application croissante, continue et affine par morceaux h_t telle que : $h_t(0) = 0$, $h_t((1-t)a) = (1-\varepsilon)b$, $h_t(a) = b$, $h_t((1-t)a + t) = (1+\varepsilon)b$ et $h_t(1) = 1$, et affine entre ces points (sur un dessin c'est plus simple!). C'est une famille continue d'applications qui vérifie

$$\lim_{t \rightarrow 1} d_0(h_t, Id) = \max(b - \varepsilon, 1 - b - \varepsilon).$$

Avec le même type d'idées, on peut trouver une autre famille continue d'applications croissantes, continues et affines par morceaux f_t qui vérifie

$$\lim_{t \rightarrow 1} d_0(f_t, Id) = \max(a - \varepsilon, 1 - a - \varepsilon).$$

Par conséquent, par continuité de $t \mapsto d_0(h_t, Id)$ et $t \mapsto d_0(f_t, Id)$, et par TVI, cela implique que pour tout $p \in [d(a, b), \max(b, 1 - b, a, 1 - a)[$, il existe un homéomorphisme h de $[0, 1]$ tel que $d_0(h, Id) = p$.

Dans le cas décroissant, on aura toujours $d_0(h, Id) = 1$.

3. On voit que si $b > a$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le support de h contient $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, et de plus on peut construire un homéomorphisme satisfaisant les conclusions et ayant exactement ce segment comme support.
4. On peut toujours modifier un peu h pour que $d_1(h, Id)$ soit aussi grand qu'on veut.
Sans perdre en généralité, on suppose $b > a$.
En lissant le premier exemple donné, on voit que pour $\varepsilon > 0$, on peut prendre h de classe C^1 tel que $h'(x) \in [\frac{1-b}{1-a} - \varepsilon, \frac{b}{a} + \varepsilon]$ (ce qui prend un peu de temps à rédiger proprement!). Si on suppose $d_1(h, Id) \leq \delta$, alors on voit que forcément, le support contient $[a - (b - a)/\delta, a + (b - a)/\delta]$ (et même un voisinage de cet intervalle).

12 Perturbation d'homéomorphismes

Soit (X, d) un espace métrique. On note $\text{Homeo}(X)$ l'ensemble des homéomorphismes de X (i.e. l'ensemble des bijections bicontinues), que l'on munit de la distance $d_0(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

1. Soit φ une application continue bornée de \mathbb{R} , et

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \varphi(x). \end{aligned}$$

Montrer que h est surjective, et qu'elle est injective si φ est contractante.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $h \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ tel que $h(a) = b$, et tel que h soit à support compact (i.e. h coïncide avec Id en dehors d'une boule). Quelles sont alors les valeurs possibles de $d_0(h, Id)$?

3. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ des suites de points deux à deux distincts de \mathbb{R}^2 . Montrer qu'il existe $h \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ tel que pour tout i , $h(a_i) = b_i$, et tel que h soit à support compact (i.e. h coïncide avec Id en dehors d'une boule). Quelles sont alors les valeurs possibles de $d_0(h, Id)$?

Indication éventuelle : que dire du cas réel?

Indications et commentaires

La deuxième question a posé de grandes difficultés à beaucoup de candidats, principalement par manque d'intuition géométrique. La dernière question est très technique, mais on attendait des candidats qu'ils résolvent des cas particuliers. Cet exercice a été tiré de [Guil12].

Solution de l'exercice

1. Facile.
2. On suppose $a \neq b$, et définit $h(x) = x + \varphi(d(a, x))(b - a)$, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une application affine par morceaux, à support compact, valant 1 en 0 et k -lipschitzienne avec $k < 1/d(a, b)$. On vérifie alors que ces conditions impliquent que h est bien bijective, par la question 1 appliquée à toute droite de vecteur directeur $b - a$ (droite qui est préservée par h). On a alors $d_0(h, Id) = d(a, b)$. On peut toujours ajouter du bazar plus loin pour trouver un homéomorphisme qui vérifie $d_0(h, Id) = t$ pour tout $t \geq d(a, b)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, le support de h peut être supposé pris dans une boule de rayon $d(a, b) + \varepsilon$.
3. Assez technique à écrire, surtout lorsque les segments $[a_i, b_i]$ se croisent. S'il n'y a pas de croisement, une petite modification de la construction précédente permet de s'en sortir sans peine : le support de φ du dessus peut être pris dans n'importe quel voisinage de $[a, b]$.

Dans le cas des croisements, il faut les gérer à part et c'est pénible : quitte à modifier un peu les chemins reliant les a_i aux b_i , on peut supposer que les chemins sont affine par morceaux, et que ces croisements se font à angles droits.

L'idée est de composer des applications h_t "rotations locales" au voisinage de chaque croisement, comme suit. Soit O l'origine, et $a \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t > 0$, on définit l'homéomorphisme h_t en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$h_t(r, \theta) = \left(r, \theta + \varphi_t(r/d(O, a)) \right),$$

où $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue affine par morceaux, qui vérifie $\varphi_t(0) = \pi$, $\varphi_t(1) = \pi$, $\varphi_t(1+t) = 0$, $\varphi_t(\infty) = 0$ et φ_t affine entre ces points.

On vérifie que pour tout $t > 0$, h_t est bien un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 à support compact, que $h_t(a) = -a$, $h_t(e^{i\pi/2}a) = -e^{i\pi/2}a$ et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} d_0(h_t, Id) = d(a, b).$$

En chaque croisement, on compose par la conjugaison d'une telle application h_t par une translation amenant O en le croisement. En mettant tout ensemble, on obtient notre homéomorphisme.

Les valeurs possibles de $d_0(h, Id)$ contiennent $\max_i(d(a_i, b_i))$, $+\infty$. Je pense que la borne inf est atteinte (mais s'il n'y a pas de croisement c'est vrai) mais je n'ai pas le courage de l'écrire.

13 Pierre-feuille-ciseaux-lézard-Spock

On considère le jeu à deux joueurs suivant. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque ensemble d'entiers $\{i, j\} \subset [1, n]$, on a une règle disant lequel de i ou de j est gagnant. Chacun des deux joueurs B, C choisit une distribution de probabilités (p_i) et (q_j) sur $[1, n]$, puis chacun tire indépendamment un nombre suivant sa distribution, et on décide du gagnant en comparant les deux nombres obtenus à l'aide de la règle (si les deux nombres tirés sont identiques, le match est nul). Le gagnant gagne 1 et le perdant perd 1.

1. Exprimer l'espérance du gain de B sous forme matricielle, en fonction des vecteurs de proba P et Q .
2. (a) Soit A une matrice antisymétrique (${}^t A = -A$). Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
(b) Soit $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des dérangements de $[1, n]$ (permutations sans point fixe). Montrer que
$$\#\mathfrak{D}_{n+2} = (n+1)(\#\mathfrak{D}_{n+1} + \#\mathfrak{D}_n)$$
3. (a) Exprimer le fait qu'une stratégie du joueur B est optimale, en supposant que le joueur C connaît la stratégie de B et optimise sa stratégie en fonction. On note \tilde{P} une telle stratégie de B .
(b) On admet le théorème du minmax : si on note \mathcal{P} l'ensemble des vecteurs de proba,

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \min_{Q \in \mathcal{Q}} {}^t QAP = \min_{Q \in \mathcal{Q}} \max_{P \in \mathcal{P}} {}^t QAP$$

Montrer que dans ce cas, $A\tilde{P}$ a tous ses coefficients ≥ 0 , et interpréter ce résultat.

- (c) Montrer que le vecteur \tilde{P} optimal est unique.

Indication : trouver une sous-matrice A_I de A telle que $A_I P_I = A_I Q_I = 0$.

Bonus Trouver une forme réduite en BON pour les matrices antisymétriques réelles.

Indications et commentaires

Ce très long exercice a été découpé et a servi pour deux planches différentes. La première question testait les capacités en modélisation. La question 2. peut aussi se résoudre par un calcul direct de déterminant modulo 2.

Cet exercice a été librement adapté d'un exposé de recherche de Benoît Laslier.

Solution de l'exercice

1. On prend la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si i bat j , -1 sinon. La matrice A est antisymétrique par construction, et l'espérance du gain de A est ${}^t QAP$.
2. (a) Soit λ un vp de A et X un vecteur propre associé. Alors

$$-\bar{\lambda} \|X\|^2 = -{}^t \bar{X} {}^t \bar{A} X = {}^t \bar{X} A X = \lambda {}^t \bar{X} X = \lambda \|X\|^2.$$

D'où $\lambda = -\bar{\lambda}$ et le résultat.

- (b) Prenons σ un dérangement de $\{1, \dots, n+2\}$. Il y a évidemment $n+1$ choix pour $\sigma(1)$ et on peut distinguer deux cas : soit $\sigma^2(1) = 1$, soit $\sigma^2(1) \neq 1$. Dans le premier cas, la permutation σ restreinte à $\{1, \dots, n+2\} \setminus \{1, \sigma(1)\}$ est un dérangement de n éléments. Dans le deuxième cas, la permutation σ donne la suite d'images distinctes $\sigma^{-1}(1) \mapsto 1 \mapsto \sigma(1)$ et on obtient un dérangement de $n+1$ éléments en court-court-circuitant 1. L'opération est réversible si on connaît $\sigma(1)$. En sommant les deux cas on a la formule voulue.
- (c) Déjà, puisque toutes les vp de A sont imaginaires pures, et que A est réelle, on voit que le déterminant de A est ≥ 0 . On a alors deux cas.
Si n est pair, on a la formule horrible du déterminant :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

On voit que chacun des produits est nul si σ a un point fixe, et égal à ± 1 sinon (i.e. si $\sigma \in \mathfrak{D}_n$). Or la question précédente implique facilement que $\#\mathfrak{D}_n$ est impair si n est pair (et pair sinon). $\det(A)$ est donc la somme d'un nombre impair de ± 1 , il est donc non nul. Donc $\text{rg}(A) = n$.

Si n est impair, on sait que si λ est vp de A , alors $\bar{\lambda}$ l'est aussi, et avec la même multiplicité (pour faire ça proprement, décomposer χ_A en polynômes réels de degré 2, qui sont tous de discriminant ≤ 0 , par la question 2a). En particulier, on a un nombre pair de vp non nulles, donc au moins une nulle. Par conséquent, $\det A = 0$. En revanche, si on considère la sous matrice de taille $n \times n$ en haut à gauche, elle rentre dans le cas précédent, et est donc de rang $n-1$. Par conséquent, A est de rang $n-1$.

3. (a) C'est un vecteur $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ tel que (penser à vérifier l'existence par compacité)

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \min_{Q \in \mathcal{P}} {}^t QAP = \min_{Q \in \mathcal{P}} {}^t QAP \tilde{P}.$$

- (b) On a :

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \min_{Q \in \mathcal{P}} {}^t QAP = \min_{Q \in \mathcal{P}} \max_{P \in \mathcal{P}} {}^t QAP \stackrel{\text{transpos.}}{=} \min_{Q \in \mathcal{P}} \max_{P \in \mathcal{P}} -{}^t PAQ = -\max_{Q \in \mathcal{P}} \min_{P \in \mathcal{P}} {}^t PAQ.$$

Par conséquent,

$$0 = \max_{P \in \mathcal{P}} \min_{Q \in \mathcal{P}} {}^t QAP = \min_{Q \in \mathcal{P}} {}^t QAP \tilde{P},$$

et donc (puisque les coefficients de Q sont ≥ 0) $A\tilde{P} \geq 0$.

Cela signifie que B a dispose d'une stratégie dont l'espérance de gain est positive pour toute stratégie de C .

- (c) Soient P et Q deux vecteurs de \mathcal{P} vérifiant $AP, AQ \geq 0$. Puisqu'on a aussi $P, Q \geq 0$, ça implique que ${}^t QAP \geq 0$ et ${}^t QAP \geq 0$. Par antisymétrie de A , ça donne ${}^t QAP = 0$. On a aussi ${}^t PAP = 0$. Cela implique que $(AP)_i = 0$ pour tout i tel que $P_i > 0$ ou $Q_i > 0$. Soit donc I l'ensemble des indices i tels que $P_i > 0$ ou $Q_i > 0$. On note A_I la matrice carrée obtenue en extrayant les coefficients à coordonnées dans I . Donc $A_I P_I = 0$. De même, par symétrie, $A_I Q_I = 0$. Puisque A_I est aussi antisymétrique avec des coeffs ± 1 en dehors de la diagonale, on peut appliquer le résultat de la question 2. : la multiplicité de la vp 0 pour A_I est au plus 1. Par conséquent, P_I et Q_I sont proportionnels, et donc P et Q sont égaux. On en déduit que A a au plus un vecteur P vérifiant $AP \geq 0$, et donc (par la question précédente) au plus un vecteur optimal (donc un seul).

Bonus Cette preuve s'inspire grandement de celle du théorème spectral. On montre que pour toute matrice antisymétrique A , il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, où

$$B = \text{diag}(\lambda_1 J, \dots, \lambda_k J, 0, \dots, 0), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer ça, on prend un diviseur irréductible Q de χ_A . Alors Q est de degré 1 ou 2. S'il est de degré 1, puisque toutes les vp sont imaginaires pures, on a $Q = X$. Sinon, c'est un polynôme de degré 2, soit $x \in \ker Q \setminus \{0\}$. Le sev F engendré par x et Ax est stable par A , et $A|_F$ est antisymétrique ; cette matrice est donc de forme λJ dans n'importe quelle base orthogonale de F . On conclut par récurrence par la dimension : on montre facilement que si F est stable par A , alors F^\perp l'est aussi.

14 Presque périodicité et densité

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $B(x, R) = \prod_{i=1}^n [x_i - R, x_i + R]$ et $B_R = [-R, R]^n$.

On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ possède une densité si la quantité

$$D_R(E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Card}(E \cap B_R)}{\text{Vol}(B_R)}$$

converge lorsque $R \rightarrow +\infty$. Ce nombre est appelé la *densité* de E , et est noté $D(E)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble \mathbb{Z}^n possède une densité, et la calculer.
2. On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est *presque-périodique* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tous $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\frac{\text{Card}\left((B(x, R) \cap E) \Delta ((B(y, R) \cap E) - v)\right)}{\text{Vol}(B_R)} \leq \varepsilon,$$

où Δ désigne la différence symétrique. Montrer que \mathbb{Z}^n est presque périodique. Plus généralement, si $F \subset \mathbb{Z}^n$ est fini, montrer que $\mathbb{Z}^n \setminus F$ est presque périodique.

3. Montrer qu'un ensemble presque périodique possède une densité (éventuellement infinie).
4. On suppose de plus E discret (si $x \in E$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap E = \{x\}$). Montrer que la densité de E est finie.
5. Etudier les ensembles presque périodiques E tels que lorsque ε tend vers 0, le rayon R correspondant ne tend pas vers l'infini.

Indications et commentaires

Vive les quantificateurs ! Là encore, un dessin était la clef de la réussite de l'exercice. La difficulté de la question 2 est dans la compréhension de la définition, qui est relativement alambiquée : la tester en dimension 1 et 2 peut énormément aider à s'en faire une intuition.

Pour la question 3, on fournissait une indication aux candidats : penser à faire un pavage du plan par des carrés.

Cet exercice est tiré de [Gui18].

Solution de l'exercice

1. Il suffit de remarquer que $D_R(E) = (2\lfloor R \rfloor + 1)^2$. Cela implique que la densité de \mathbb{Z} est 1.
2. On choisit le vecteur v appartenant à \mathbb{Z}^n mais proche de $y - x$. Avec ce choix, et celui de R assez grand pour que $(4R - 1)/R^2 \leq \varepsilon$, on peut conclure.
Si on enlève un ensemble fini F , on ne modifie pas le numérateur de plus de $2\text{Card } F$. Il suffit donc de prendre R assez grand pour tuer cette quantité.
3. Soit M un réel “grand”, $\varepsilon > 0$ et R le rayon donné par la presque périodicité. On va montrer que E possède une densité à 2ε près pour le rayon $R' = MR$. Commençons par supposer que $M \in \mathbb{N}$. L'idée est de considérer le pavage “canonique” de B_{MR} par les $B(x, R)$, où $x \in 2R\mathbb{Z}^n$. Ainsi, la densité $B_{MR}(E)$ est ε -proche de $B_R(E)$.
Si M n'est pas entier, il suffit d'encadrer $B_R(E)$ entre $B_{\lfloor M \rfloor R}(E)$ et $B_{\lfloor M+1 \rfloor R}(E)$. Cela montre que pour tout M assez grand, $B_{MR}(E)$ est 2ε proche de $B_R(E)$.
Ainsi, la quantité $B_R(E)$ est bornée pour tout R assez grand, et le diamètre de son ensemble de valeurs d'adhérences est majoré par ε pour tout $\varepsilon > 0$. Il est donc de cardinal au plus 1, donc par compacité, il est égal à 1 et la fonction $B_R(E)$ converge quand R tend vers l'infini.
4. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition de presque périodique, qui nous crache un R correspondant. L'ensemble $E \cap B_R$ est fini (c'est un ensemble discret borné, donc il n'a pas de point d'accumulation et on conclut par compacité). Par pavage (comme au-dessus), on voit facilement que la densité de E est bornée par $\text{Card}(E \cap B_R) + 1$.
5. Question ouverte. Conjecture : on obtient les ensembles périodiques.

15 Lemme de Vitali

Soit $\{B_i\}_{i \in I} = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ une famille de boules de \mathbb{R}^n telle que $\sup_{i \in I} r_i < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe une famille $J \subset I$ au plus dénombrable telle que la famille $\{B_j\}_{j \in J}$ est disjointe et que

$$\bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{j \in J} 5B_j,$$

où $5B(x, r) = B(x, 5r)$.

2. La constante 5 est-elle optimale? Et dans le cas où la famille I est finie?
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}^n} |f|$ soit fini. On pose

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\text{Vol}(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f|.$$

Montrer que

$$\text{Vol}\{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > \eta\} \leq \frac{5^n}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Indications et commentaires

Un des lemmes de recouvrement de Vitali, résultat classique en théorie géométrique de la mesure.

L'indication *On pourra poser $M = \sup_i r_i$ et*

$$I_k = \{i \in I \mid M2^{-k} \geq r_i > M2^{-k-1}\}$$

était bien souvent donnée au candidat.

Solution de l'exercice

- Par construction, les ensembles I_k de l'indication vérifient $I = \bigcup_{k \geq 0} I_k$.

Choisissons $J_k \subset I_k$ maximal pour l'inclusion tel que

$$\forall i \in J_k, B_i \cap \left(\bigcup_{j \in J_\ell, \ell \leq k, i \neq j} B_j \right) = \emptyset :$$

on construit l'ensemble J_k par récurrence grâce à cette propriété, en utilisant le fait que tout borné de \mathbb{R}^n ne peut contenir qu'un nombre fini de boules de I_k deux à deux disjointes.

Posons $J = \bigcup_{k \geq 0} J_k$. Alors par construction, la famille $\{B_j\}_{j \in J}$ est disjointe. De plus, choisissons $k \geq 0$ et $i \in I_k$; on veut montrer que $B_i \subset \bigcup_{j \in J} 5B_j$.

- Si $i \in J_k$, il n'y a rien à démontrer.
- Sinon, par maximalité de l'ensemble J_k , on sait que

$$B_i \cap \left(\bigcup_{j \in J_\ell, \ell \leq k, i \neq j} B_j \right) \neq \emptyset.$$

En particulier, il existe $\ell \leq k$ et $j \in J_\ell$ tels que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ces hypothèses — ainsi que la définition de l'ensemble I_k — impliquent que

$$r_j > M2^{-\ell-1} \geq \frac{1}{2}M2^{-k} \geq \frac{1}{2}r_i.$$

Cette inégalité, combinée au fait que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ (donc que $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$), implique que $B_i \subset 5B_j$.

- En changeant, dans la définition des I_k , la constante 2 en un $1 + \varepsilon$, on améliore le 5 en un $3 + \delta$.

La constante 3 est optimale, comme on peut le voir dans \mathbb{R} : on considère $] -1, \varepsilon [\cup] -\varepsilon, 1 [$. Si la famille I est finie, on peut changer le $3 + \delta$ en 3 (et même certainement en $3 - \delta$ par le fait que l'ensemble des constantes possibles est ouvert!).

- On pose $E_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > \eta\}$. Si $x \in E_\eta$, alors $Mf(x) > \eta$, donc existe $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{\text{Vol}(B(x, r_x))} \int_{B(x, r_x)} |f| > \eta.$$

La famille $B(x, r_x)$ recouvre E_η , par la question 1 il existe une famille $\{x_i\}_{i \in I}$ disjointe telle que les $B(x_i, r_{x_i})$ recouvre E_η . Cela implique que

$$\int_{E_\eta} |f| \geq \eta \sum_{i \in I} \text{Vol}(B(x_i, r_{x_i})) \quad \text{et} \quad \text{Vol}(E_\eta) \leq \sum_{i \in I} 5^n \text{Vol}(B(x_i, r_{x_i})).$$

L'inégalité demandée en découle facilement.

Année 2019

16 Matrices bistrochastiques — théorème de Birkhoff-Von Neumann

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *bistochastique* si $a_{i,j} \geq 0$ pour tous i, j et si pour tout j , on a

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} = 1.$$

1. Montrer que l'ensemble des matrices bistrochastiques est convexe.
2. Montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de l'ensemble des matrices bistrochastiques (i.e. ne peut pas s'écrire $tA + (1-t)B$, avec A et B bi-stochastiques distinctes et $t \in]0, 1[$).
3. Montrer que tout point extrémal de l'ensemble des matrices bistrochastiques et une matrice de permutation. Indications :
 - (a) Minorer la dimension de l'espace vectoriel Z_n formé des matrices dont les sommes des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne valent toutes 0
 - (b) Montrer que toute matrice bistochastique ayant au moins $2n$ coefficients non nuls n'est pas un point extrémal.
 - (c) Conclure.

Indications et commentaires

Cette preuve n'en n'est qu'une parmi d'autres pour ce théorème relativement classique. Les indications de la question 3 étaient fournies systématiquement après quelques minutes de réflexion laissées au candidat afin d'évaluer sa réaction face au problème. La question sur la dimension de Z_n a posé des problèmes à beaucoup de candidats. La difficulté de la question 3.(b) est de relier l'indication donnée en 3.(a) avec le problème dont il est question.

Une des clés pour la résolution de cet exercice est de se rendre compte que si une matrice bistochastique est combinaison convexe de deux autres A et A' , alors ses coefficients non nuls sont exactement ceux qui sont non nuls pour au moins une de A ou A' .

Certains candidats ont, à juste titre, traité d'eux-mêmes le cas de la dimension 2.

Solution de l'exercice

1. Vérification triviale.
2. On voit trivialement qu'une matrice de permutation est bistochastique. D'autre part, si P est une matrice de permutation s'écrivant $P = tA + (1-t)B$, par positivité des coefficients, on voit que les coefficients non nuls de A et B donnent des coefficients non nuls de P . Puisqu'il n'y en a qu'un par ligne et par colonne dans P (elle est de permutation), A et B ont elles aussi exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne, qui est identique, et qui vaut 1 car ce sont des matrices bistrochastiques.

3. (a) On a $2n$ équations, mais elles sont liées : la somme des sommes des coefficients sur chaque ligne est la somme des sommes des coefficients sur chaque colonne (et vaut la somme de tous les coefficients). Par conséquent, la codimension de Z_n est inférieure ou égale à $2n - 1$. Une autre solution consiste à exhiber directement une base de Z_n pour en déduire sa dimension $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$.
- (b) Soit A une matrice bistochastique ayant au moins $2n$ coefficients non nuls. On les numérote a_{i_k,j_k} , et définit E le sev engendré par les E_{i_k,j_k} (où les $E_{i,j}$ sont les vecteurs de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$). On a $\dim(E) \geq 2n$, et puisque $\text{codim } Z_n \leq 2n - 1$, il existe $B \in E \cap Z_n \setminus \{0\}$. On voit alors facilement qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|t| \leq \varepsilon$, alors $A + tB$ est encore bistochastique. Ainsi, on peut écrire $A = 1/2((A + tB) + (A - tB))$, ce qui montre que A n'est pas un point extrémal.
- (c) On raisonne par récurrence sur la dimension. Pour $n = 1$ c'est trivial. Sinon, on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques. On sait par la question précédente que A possède au plus $2n - 1$ coefficients non nuls. Il y a donc au moins une ligne possédant au plus un coefficient non nul, qui est donc 1, et qui est par conséquent aussi seul dans sa colonne. La matrice obtenue à partir de A en effaçant la ligne et la colonne de ce coefficient 1 est donc une matrice bistochastique de taille $n - 1$, et on vérifie facilement que c'est un point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques de taille $n - 1$. Par hypothèse de récurrence, c'est une matrice de permutation, ce qui implique que la matrice A elle-même est de permutation.

17 Centralisateurs dans $SL(2, \mathbb{Z})$

On notera $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1. Par abus de langage on identifiera une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ à l'automorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ représenté par cette matrice dans la base canonique.

Cours Montrer que la somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe (sans le lemme des noyaux).

- On définit l'ensemble Λ des valeurs propres d'automorphismes $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ sans valeur propre de module 1. Montrer que l'ensemble $\Lambda \cup \{-1, 1\}$ est une partie discrète de \mathbb{R} , puis calculer

$$\lambda_0 = \min(\Lambda \cap [1, +\infty[).$$

Pour tout groupe G , on appelle *centralisateur* d'un élément $g \in G$ est le sous-groupe $C_G(g)$ des éléments $h \in G$ tels que $gh = hg$.

- Montrer que si $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ est sans valeur propre de module 1, alors $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- On considère l'automorphisme linéaire

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux éléments qui engendrent le centralisateur de A_1 dans $SL_2(\mathbb{Z})$

Indications et commentaires

Cet exercice est tiré d'une feuille de TD de M2 de systèmes dynamiques écrite par Patrice Le Calvez. La première question a posé pas mal de problèmes à beaucoup de candidats, qui cherchaient à tout prix une astuce permettant de résoudre la question, alors que la simple écriture du polynôme caractéristique et l'étude de ses racines suffisent pour s'en tirer sans encombre.

Solution de l'exercice

Cours Se fait directement par récurrence sur le nombre de vecteurs de la famille, ou bien en introduisant une matrice de Vandermonde en appliquant successivement les itérés u^k de l'endomorphisme en question u .

- On note t la trace de A . Si $|t| \leq 1$ alors les deux valeurs propres de A sont complexes conjuguées et de produit égal à 1, elles sont donc de module 1, ce qui est impossible par hypothèse. Les valeurs propres de A sont donc données par

$$\lambda(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \mu(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2},$$

et on voit qu'on a forcément $|t| > 2$. On voit aussi que $\sqrt{t^2 - 4} \leq |t|$, par conséquent :

- si $t \leq 0$, alors les deux valeurs propres de A sont négatives;
- si $t \geq 0$, alors $\lambda(t) \in]0, 1[$ et $\mu(t) > 1$.

De plus, la fonction $t \mapsto \mu(t)$ est croissante sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $\lambda_0 = \mu(3) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Enfin, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mu(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda(t) = -\infty$; on déduit de ces faits que $\Lambda \cup \{-1, 1\}$ est une partie discrète de \mathbb{R} .

- Soit donc $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ sans valeur propre de module 1. Puisqu'elle est diagonalisable et que ses deux valeurs propres sont distinctes, elle admet une unique base de diagonalisation. Soit (e_1, e_2) cette base. Posons

$$H = \{\lambda' \mid \exists A' \in \text{Cent}(A) : A'e_1 = \lambda'e_1\}.$$

Pour tout $A' \in C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$, les matrices A et A' commutent; elles sont donc co-diagonalisables. Si d'autre part $A'' \in C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$, cela implique que A' et A'' commutent elles aussi, et les valeurs propres de $A'A''$ sont les produits des valeurs propres de A' par celles de A'' . Par conséquent, H est un sous-groupe de \mathbb{R}^* .

L'intersection de H avec $]1, +\infty[$ est discrète, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est donc un sous-groupe de \mathbb{R}_+^* de la forme $\{\mu^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Soit $A_0 \in C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$ telle que $A_0e_1 = \mu e_1$, montrons que $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A) = \langle A_0, -I_2 \rangle$.

Soit $A' \in C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$. Quitte à multiplier A' par $-I_2$, on peut supposer que les deux valeurs propres de A sont positives. Soit λ' tel que $Ae_1 = \lambda'e_1$. Alors $\lambda' \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda' = \mu^k$, et donc (puisque le déterminant de A' vaut 1) $A' = A_0^k$.

Pour conclure, on remarque facilement que $\langle A_0, -I_2 \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- On montre que $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A_1)$ est engendré par A_1 et $-I_2$. En reprenant la question précédente, on voit qu'il est engendré par un élément B ainsi que $-I_2$, où B est une matrice co-diagonalisable avec A_1 dont une des valeurs propres est un générateur du groupe H . Or H est inclus dans Λ , et contient λ_0 valeur propre de A_1 . Donc une des valeurs propres de B vaut $\pm \lambda_0$ et donc $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A_1)$ est engendré par A_1 et $-I_2$.

18 Points extrémaux de convexes

Soit E un espace vectoriel normé, et C un convexe compact de E . On suppose qu'il existe une suite $(L_n : E \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ de formes linéaires continues telles que $L_n(x) = L_n(y)$ pour tout entier n implique que $x = y$.

Le but est de montrer l'existence d'un *point extrémal* pour C , i.e. un point $x_0 \in C$ tel que l'écriture $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$, avec $t \in]0, 1[$ et $x_1, x_2 \in C$ implique que $x_0 = x_1 = x_2$.

1. Expliquer pourquoi l'ensemble

$$M_0 = \{x \in C \mid L_0(x) = \sup_{y \in C} L_0(y)\}$$

est une partie convexe compacte non vide de E .

2. On définit par récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$M_{n+1} = \{x \in M_n \mid L_{n+1}(x) = \sup_{y \in M_n} L_{n+1}(y)\}$$

Montrer que $M_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ est réduit à un point, qui est extrémal pour C .

3. Trouver un exemple de telle configuration en dimension infinie.

Indications et commentaires

Cet exercice est lui aussi tiré d'une feuille de TD de M2 de systèmes dynamiques écrite par Patrice Le Calvez.

Un dessin bien choisi, illustrant la procédure en dimension 2, peut beaucoup aider à trouver un cheminement vers la solution. La première partie de la question 2 est relativement accessible pour qui avance pas à pas (il ne faut pas oublier de montrer que M_∞ est non vide!).

La question 3. demande un certain recul sur les espaces normés de dimension infinie : les candidats ont été guidés vers la solution.

Ce problème sert à montrer l'existence de points extrémaux à l'ensemble (convexe) des mesures de proba invariantes par une certaine transformation $f \in C(X)$, où X est compact. Les L_i sont alors les intégrations contre des φ_i , où les φ_i forment une famille dense dans $C^0(X)$ (les L_i ont bien la propriété requise dans la topologie faible-*).

Solution de l'exercice

1. L'application L_0 est continue, ce qui implique que M_0 est fermé (car image réciproque d'un singleton par une application continue) et donc compact (car fermé dans C), et aussi non vide (car une application continue sur un compact atteint ses bornes). La convexité de M_0 se déduit par simple calcul de la linéarité de L_0 .
2. On montre de la même manière qu'au-dessus que M_n est un convexe compact non vide pour tout n . Donc l'ensemble M_∞ est non vide, en tant qu'intersection décroissante de compacts non vides (pour voir ça, on prend une suite $x_n \in M_n$ et on extrait une sous-suite convergente).

De plus, si $x_0, x_1 \in M_\infty$, alors $L_n(x_0) = L_n(x_1)$ pour tout n , donc $x_0 = x_1$; on en déduit que M_∞ est réduit à un point et on écrit $M_\infty = \{x_0\}$.

Enfin, si $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$ avec $t \in]0, 1[$ et $x_1, x_2 \in C$, alors on montre par récurrence que $x_1, x_2 \in M_n$ (en initialisant à $M_{-1} = C$). Supposons donc que $x_1, x_2 \in M_n$. Or

$$L_{n+1}(x_0) = \sup_{y \in M_n} L_{n+1}(y),$$

donc

$$tL_{n+1}(x_1) + (1 - t)L_{n+1}(x_2) = \sup_{y \in M_n} L_{n+1}(y).$$

On voit que cela implique que $L_{n+1}(x_1) = L_{n+1}(x_2) = \sup_{y \in M_n} L_{n+1}(y)$, et que donc $x_1, x_2 \in M_{n+1}$. Ainsi, $x_1, x_2 \in M_\infty$ et donc $x_1 = x_2 = x_0$.

3. Soit $E = \ell^2(\mathbb{N})$, muni de la norme $\|u_k\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2$. Soit

$$C = \{u_n \in E \mid |u_k| \leq 2^{-k}\}.$$

Il faut vérifier que C est bien un convexe (facile) compact (une infinité d'extractions). On choisit $L_n(u_k) = u_n$. On voit alors que la suite $u_k = 2^{-k}$ est un point extrémal.

19 Convergence uniforme et suites

Cours Montrer que si f_n est une suite de fonctions continues cvu vers une fonction f , alors f est continue.

1. Soient (f_n) une suite de fonctions d'un compact K dans \mathbb{R} , et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour toute suite $(x_n) \in K^\mathbb{N}$ convergeant vers $x \in K$, la suite $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$. Montrer que f est continue et que f_n cvu vers f .
2. Soit E un espace normé et (f_n) une suite d'applications de E dans \mathbb{R} . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Pour toute suite convergente (x_n) de points de E , la suite $f_n(x_n)$ converge dans \mathbb{R} ;
 - (ii) Il existe une fonction continue f telle que (f_n) cvu sur tout compact vers f .

Indications et commentaires

Cet exercice est tiré des annales du concours d'entrée aux ENS.

Dans la question 1., il faut rapidement se rendre compte qu'il faut raisonner par l'absurde. Si on s'écarte de la résolution optimale de la question, on se retrouve assez rapidement submergé par les indices différents. Un conseil : après chaque étape de la résolution, essayer de nettoyer le plus possible les notations afin d'y voir plus clair.

Solution de l'exercice

1. Commençons par montrer la continuité de f . Supposons le contraire, alors il existe $\varepsilon > 0$, $x \in K$ et $x_n \rightarrow x$ tels que $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, pour tout n , on a $f_m(x_n) \rightarrow_m f(x_n)$. On peut donc choisir une suite d'entiers (m_n) strictement croissante telle que $|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon/2$. Ainsi, $|f_{m_n}(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon/2$, ce qui contredit l'hypothèse. On montre la convergence uniforme par contraposée : supposons que (f_n) ne cvu pas vers f . Alors il existe $\varepsilon > 0$, ainsi qu'une suite d'entiers n_k strictement croissante et une suite de points (x_k) de K , tels que pour tout k , on ait $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que x_k converge vers x ; par continuité de f , pour tout k assez grand, on a $|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \geq \varepsilon/2$, ce qui contredit l'hypothèse de la question.
2. L'implication $(ii) \implies (i)$ est directe, dès qu'on sait que l'ensemble constitué d'une suite et de sa limite est compact (un peu pénible à faire en toute généralité, mais ici, dans \mathbb{R} , il suffit de remarquer que c'est un fermé borné).

Pour l'autre implication $(i) \implies (ii)$, on commence par définir la fonction f . Soient x_n et x'_n convergeant vers une même limite x . On note respectivement ℓ et ℓ' les limites de $f_n(x_n)$ et $f_n(x'_n)$. Il s'agit de montrer que $\ell = \ell'$. Pour cela, il suffit de considérer la suite y_n définie par $y_n = x_n$ si n pair et $y_n = x'_n$ si n impair. La suite $f_n(y_n)$ converge alors vers une limite ℓ'' qui vérifie $\ell = \ell'' = \ell'$. Par la question 1., cela implique que f est continue et que f_n cvu vers f (en utilisant de nouveau le fait que l'ensemble constitué d'une suite et de sa limite est compact).

20 Entiers de Gauss

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}^2\}$ et $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $N(z) = z\bar{z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau et déterminer ses éléments inversibles pour la multiplication.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, avec $y \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $x = yq + r$ et $N(r) < N(y)$.

On fixe un entier $k \in \mathbb{N}^*$, et pose

$$x_n = \frac{1}{4} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}[i] \\ N(x)=n}} x^k.$$

3. Montrer que $x_n \in \mathbb{Z}$ et que $x_n = 0$ si k n'est pas un multiple de 4.
4. Calculer x_5 , x_{13} et x_{65} . Que remarque-t-on?

Indications et commentaires

Cet exercice relativement classique est lui aussi extrait des annales du concours d'entrée aux ENS. L'intuition à la base de la résolution de la question 2 est donnée par un dessin, et la comparaison avec la division avec reste dans \mathbb{R} .

Solution de l'exercice

1. Anneau : simple vérification. Si $x \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible, alors il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $xy = 1$, d'où (par multiplicativité de N) $N(x)N(y) = 1$, si bien que $N(x) = 1$. On en déduit que $x = \pm 1$ ou $x = \pm i$. Réciproquement, on voit facilement que ces éléments sont inversibles.
2. Soient $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, avec $y \neq 0$. Posons $z = x/y \in \mathbb{C}$. Notons $q \in \mathbb{Z}[i]$ le point de $\mathbb{Z}[i]$ le plus proche de z : on a, par Pythagore, $|z - q|^2 \leq 1/4 + 1/4 = 1/2$. En multipliant par y , on obtient $|x - qy|^2 \leq |y|^2/2$, soit, posant $r = x - qy$, $N(r) \leq N(y)/2$.
3. On vérifie facilement que la somme porte sur un nombre fini de termes et est donc bien définie. Le cas $n = 0$ est trivial. On suppose donc $n > 0$. Posons $A_n = \{x \in \mathbb{Z}[i] \mid N(x) = n\}$. On remarque que si $x \in A_n$, alors les nombres $-x, ix, -ix, \bar{x}, -\bar{x}, i\bar{x}$ et $-i\bar{x}$ sont eux aussi dans A_n .

Si k est un nombre impair, alors A_n peut être partitionné en paires du type $\{x, -x\}$ (d'éléments distincts car $x \neq 0$). Or, on a $x^k + (-x)^k = 0$, si bien que $x_n = 0$.

Si $k = 4p + 2$, alors A_n peut être partitionné en paires du type $\{x, ix\}$ (d'éléments distincts car $x \neq 0$). Or, on a $x^k + (ix)^k = (1 + i^{4p+2})x^k = 0$, si bien que $x_n = 0$.

Enfin, si $k = 4p$, on partitionne A_n en ensembles du type $\{x\}$ si x est réel, et $\{x, \bar{x}\}$ sinon. Cela assure que A_n est réel. D'autre part, on a, pour $x = a + ib$, $x^k = (a^2 - b^2 + 2iab)^{2p} = (a^2 - b^2)^{2p} + 4y$ pour un certain $y \in \mathbb{Z}[i]$. Le fait que x_n soit réel assure que la somme des seconds termes est un entier divisible par 4. Il reste donc à traiter les premiers termes. On utilise alors la partition de A_n en ensembles du type $\{x, ix, -x, -ix\}$, qui sont tous de cardinal 4. On remarque que l'expression $(a^2 - b^2)^2$ est identique pour tous les éléments de ces ensembles (et est un nombre entier!). Cela montre que x_n est bien un entier.

4. Solutions :
 - $N = 5 : (1, 2)$ donc $x_5 = -14$.

- $N = 13$, $(2, 3)$ donc $x_{13} = -238$.
- $N = 65$, $(1, 8)$ et $(4, 7)$ donc $x_{65} = 332 = x_5 x_{13}$.

On peut montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $a_{mn} = a_m a_n$, en commençant par montrer que l'application $n \mapsto \frac{1}{4} \text{card}(A_n)$ est multiplicative.

21 Diagonalisabilité des éléments de $GL_3(\mathbb{Z})$

Soit $n \geq 1$. On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers, dont l'inverse est lui aussi à coefficients entiers.

1. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A) \in \{\pm 1\}$.
2. Montrer que toute matrice de $A \in GL_3(\mathbb{Z})$ n'ayant pas de valeur propre égale à ± 1 est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Indications et commentaires

Ce joli résultat a été énoncé lors d'une conférence par Federico Rodriguez-Hertz.

Dans la question 2, on attendait des candidats qu'ils disent qu'il suffit de montrer que χ_A est à racines simples, qu'ils trouvent une racine réelle et traitent d'eux-mêmes le cas d'une racine complexe. Leur était alors donné l'énoncé du lemme. La fin de l'exercice teste les connaissances concernant l'arithmétique des polynômes et des entiers.

Solution de l'exercice

1. On a $\det(A)I_n = A^t \text{com}(A)$. La matrice de droite est à coefficients entiers, donc $\det(A) \in \mathbb{Z}$. De même, on a $1/\det(A) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\det(A) \in \{\pm 1\}$.
2. Soit $A \in GL_3(\mathbb{Z})$. Il suffit de montrer que le polynôme caractéristique $P \in \mathbb{Z}[X]$ de A est à racines simples dans \mathbb{C} . On commence par le lemme suivant :

Lemme I. *Si un polynôme est irréductible sur \mathbb{Q} , alors ses racines complexes sont simples.*

Démonstration. Soit P irréductible sur \mathbb{Q} , et supposons que $z_0 \in \mathbb{C}$ soit une racine double de P . Alors $(X - z_0)$ divise $\text{PGCD}(P, P')$, qui par l'algorithme d'Euclide est dans $\mathbb{Q}[X]$. Ainsi, $\text{PGCD}(P, P')$ est un diviseur non trivial de P , de degré strictement inférieur à celui de P , contradiction. \square

On sait que P , puisque de degré impair, possède au moins une racine réelle. Si P possède une racine $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\overline{z_0}$ est une autre racine distincte de P , qui possède donc trois racines complexes distinctes.

Dans le cas contraire, P ne possède que des racines réelles. S'il possédait une racine double, alors par la contraposée du lemme il aurait un diviseur non trivial dans $\mathbb{Q}[X]$. P s'écrit donc $P = QR$, avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$, Q de degré 2 et R de degré 1. Puisque P possède une racine double, on peut supposer que $Q = (X - \lambda)^2$ et $R = X - \mu$. Le coefficient en X de Q étant rationnel, λ est lui-même rationnel. Ecrivons $\lambda = p/q$ sous forme irréductible, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $\det(A) = -\lambda^2 \mu = \pm 1$. On a donc $\mu = \pm q^2/p^2$. Le coefficient en X de P est donc $\pm 2q/p + p^2/q^2 = (\pm 2q^3 + p^3)/(pq^2) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $q^2 \mid \pm 2q^3 + p^3$, donc $q \mid p^3$, et par conséquent, tout facteur premier de q divise p^3 et donc p . Cela contredit l'irréductibilité de p/q si $q \neq 1$, donc $q = 1$. En regardant le facteur en X^2 de P , on voit que cela implique que $p = \pm 1$. On vient de montrer que P possède une racine égale à ± 1 , contradiction.

22 Différentiabilité de la projection sur un ensemble

Soit $n \geq 1$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_C(x) = \inf_{c \in C} \|x - c\|.$$

1. Montrer que la borne inf existe et est atteinte.
2. Montrer que d_C est 1-lipschitzienne.
3. Montrer que si C est convexe, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il y a un unique point c_x réalisant ce minimum.
4. Montrer que d_C est différentiable en x ssi il y a un unique point c_x réalisant ce minimum.

Indications et commentaires

Un exercice qui a permis de tester les aptitudes des candidats en géométrie.

Il était attendu des candidats qu'ils sachent résoudre seuls et en temps raisonnable les deux premières questions, qui sont très proches du cours. Bien sûr, il ne s'agit pas de connaître par cœur ces preuves mais plutôt d'être capable, en s'appuyant sur un dessin, d'en retrouver les principes.

La question 3 est relativement classique et se résout traditionnellement avec l'identité du parallélogramme; on attendait des candidats ne connaissant pas cette méthode (et c'est normal!) qu'ils raisonnent par l'absurde à partir d'un dessin, et en déduisent une contradiction à l'aide de raisonnements simples sur le produit scalaire.

Chacune des deux implications de la quatrième question est longue et délicate : nous en avons fait deux planches séparées, et les candidats ont été largement guidés dans leur résolution.

La réciproque de 3. est vraie et est appelée théorème de Motzkin (difficile!).

Solution de l'exercice

1. Classique.
2. Question de cours. Si on a $d_C(x) = \|x - c_x\|$, alors pour $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d_C(y) \leq \|y - c_x\| \leq \|y - x\| + \|x - c_x\| = \|y - x\| + d_C(x).$$

Donc $d_C(y) - d_C(x) \leq \|y - x\|$, et on a l'autre inégalité par symétrie des rôles.

3. Par contraposée et en faisant un dessin : si $c_1 \neq c_2$ réalisent le minimum, on voit avec un peu de géométrie que $]c_1, c_2[\subset C^C$.
4. Tout d'abord, supposons par l'absurde que l'application soit différentiable en x et qu'il existe $c_1 \neq c_2$ réalisant le minimum de d_C pour le point x . Posons $v_i = (x - c_i)/\|x - c_i\|$. Alors pour tout $t \in [0, d_C(x)]$, on a $d_C(x + tv_i) \leq d_C(x) - t$, autrement dit $d_C(x) - d_C(x - tv_i) \geq t$ et par lipschitzianité, on a égalité. Par conséquent, pour tout $t \in [0, d_C(x)]$, on a $d_C(x + tv_i) = d_C(x) - t$. Ainsi, par DL, pour $u, t \leq d_C(x)/2$,

$$d_C(x + tv_1 + uv_2) = d_C(x) - u - t + o(u + t),$$

d'où, par lipschitzianité,

$$d_C(x) - d_C(x + tv_1 + uv_2) = u + t + o(u + t) \leq \|tv_1 + uv_2\|.$$

De cela on déduit, en passant au carré,

$$u^2 + t^2 + 2ut + o(u+t)^2 \leq t^2 + u^2 + 2ut\langle v_1, v_2 \rangle.$$

Considérant la limite $u+t \rightarrow 0$, cela donne

$$\langle v_1, v_2 \rangle \geq 1,$$

d'où par Cauchy-Schwarz $v_1 = v_2$, ce qui contredit l'hypothèse $c_1 \neq c_2$.

Supposons maintenant qu'il y a un unique point c_x réalisant le minimum de $d_C(x)$. Alors si $x_n \rightarrow x$ et c_n réalise le minimum de $d_C(x_n)$, alors $c_n \rightarrow c_x$. En effet, si c'était faux, par compacité de C on aurait une sous-suite de (c_n) tendant vers $c' \neq c_x$, et par continuité on aurait $d_C(x) = \|x - c'\|$, contradiction.

Soit $h \in \mathbb{R}^2$ "petit". Alors d'une part

$$d_c(x+h)^2 \leq \|x+h-c_x\|^2 = d_C(x) + 2\langle x-c_x, h \rangle + \|h\|^2,$$

d'où par DL de la racine carrée,

$$d_c(x+h) \leq d_C(x) + \langle (x-c_x)/d_C(x), h \rangle + o(h).$$

D'autre part, soit c_h réalisant le minimum de $d_C(x+h)$. Alors par ce qu'on a vu au-dessus, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si h est assez petit, alors $\|c_x - c_h\| \leq \varepsilon$ (et de plus $\|x - c_h\| \geq d_C(x)$). Ainsi,

$$\begin{aligned} d_c(x+h)^2 &= \|x+h-c_h\|^2 \\ &= \|x-c_h\|^2 + 2\langle x-c_h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &\geq d_C(x)^2 + 2\langle x-c_x, h \rangle + 2\langle c_x-c_h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &\geq d_C(x)^2 + 2\langle x-c_x, h \rangle - 2\varepsilon\|h\| + \|h\|^2. \end{aligned}$$

par conséquent, par DL de la racine carrée,

$$d_c(x+h) \leq d_C(x) + \langle (x-c_x)/d_C(x), h \rangle - \varepsilon\|h\|/d_C(x) + o(h),$$

ce qui démontre l'autre inégalité, le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

23 Fonctions presque périodiques

On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup sur les fonctions réelles. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\varepsilon > 0$. On note $f_T = f(\cdot - T)$.

Un nombre $T \in \mathbb{R}$ est appelé une ε -presque période si $\|f - f_T\|_\infty \leq \varepsilon$. On dit que f est presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une longueur $R_\varepsilon > 0$ tel que tout segment de longueur R contienne au moins une ε -presque période.

1. Donner des exemples de fonction presque périodique.
2. Montrer qu'une fonction presque périodique est bornée.
3. Montrer qu'une fonction presque périodique est uniformément continue.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ presque périodique. Montrer que pour toute suite $(t_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, on peut trouver une sous-suite $t_{\varphi(n)}$ telle que la suite $(f_{t_{\varphi(n)}})_n$ vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, \|f_{t_{\varphi(p)}} - f_{t_{\varphi(q)}}\|_\infty < \varepsilon.$$

On pourra commencer par le cas $\varepsilon = 1$.

5. Réciproque : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour toute suite $(t_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut trouver une sous-suite $t_{\varphi(n)}$ telle que la suite $(f_{t_{\varphi(n)}})_n$ cvu. Montrer que f est presque périodique.
6. Montrer que la somme de deux fonctions presque périodiques est elle aussi presque périodique. Indications :
 - (a) Montrer que les ε -presque périodes de f_1 et f_2 peuvent être supposées multiples d'un certain $\eta > 0$.
 - (b) Poser

$$\mathcal{E} = \{T_1 - T_2 \mid T_1, T_2 \in \eta\mathbb{Z}, \varepsilon - \text{pér. de resp. } f_1, f_2\}$$

et remarquer que $\mathcal{E} \cap [-R, R]$ est fini. Conclure.

Indications et commentaires

Un exercice long et riche : trois planches distinctes en ont été tirées, chacune commençant par la question 1., continuant sur une des questions parmi 2. et 3., et ayant pour but la résolution des questions 4., 5. et 6.

Beaucoup de candidats sont tombés dans le piège consistant à prendre des multiples d'une presque période. C'est justement pour pallier ce problème qu'est introduite l'hypothèse sur la présence de presque périodes dans tout intervalle de longueur suffisante.

Partant de là, l'idée de base pour chaque question est de se ramener au cas du segment à l'aide d'une presque période bien choisie. Le choix d'une telle presque période a embrouillé certains candidats : dans ce cas le plus simple était de partir des propriétés requises pour cette presque période et de vérifier qu'elles rentraient dans les hypothèses de l'énoncé.

La question 4. a pour but de montrer qu'il existe une sous-suite de translatés qui est de Cauchy, ce qui implique qu'en fait il existe une sous-suite convergente. Combinée à la question 5., cela amène à la caractérisation suivante des fonctions presque périodiques : une fonction est presque périodique si et seulement si son ensemble de translatés est relativement compact.

Pour la question 4., la résolution propre du cas $\varepsilon = 1$ était suffisante pour s'assurer une bonne note, l'extraction diagonale étant délicate à mettre en œuvre en pratique.

La construction de la question 5. n'est pas forcément naturelle et les candidats ont été aidés pour comprendre pourquoi celle-ci est naturelle.

Une des difficultés de la question 6. consistait à comprendre comment se servir de la finitude de l'ensemble \mathcal{E} .

Solution de l'exercice

1. N'importe quelle fonction périodique (par exemple tous les $\sin(\lambda x)$). Les autres exemples sont bien plus durs à trouver, par exemple les polynômes trigonométriques généralisés (les périodes peuvent être incommensurables, comme 1 et $\sqrt{2}$). La preuve de leur presque périodicité est plutôt difficile (approximation diophantienne simultanée des périodes).
2. Soit $\varepsilon = 1$. Par presque périodicité, on peut associer à ce nombre une longueur $R > 0$. Puisque la fonction f est continue sur l'ensemble compact $[-2R, 2R]$, elle y est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que si $x, y \in [-2R, 2R]$, alors $|f(x)| \leq M$. Soit maintenant $x' \in \mathbb{R}$. Alors il existe une presque période $T \in \mathbb{R}$ de f à distance au plus R de x' . Ainsi,

$$|f(x')| \leq |f(x') - f(x' - T)| + |f(x - T)| \leq M + 1.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par presque périodicité, on peut associer à ce nombre une longueur $R > 0$. Puisque la fonction f est continue sur l'ensemble compact $[-2R, 2R]$, elle y est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ ($\eta \leq R$) tel que si $x, y \in [-2R, 2R]$ sont tels que $|x - y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit maintenant $x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $|x' - y'| \leq \eta$. Alors il existe une presque période $T \in \mathbb{R}$ de f à distance au plus R de x' . Ainsi,

$$|f(x') - f(y')| \leq |f(x') - f(x' - T)| + |f(x' - T) - f(y' - T)| + |f(y' - T) - f(y')| \leq 3\varepsilon.$$

4. On se donne $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. L'idée est, à ε fixé, de se ramener à $[-R_\varepsilon, R_\varepsilon]$ par presque périodicité, puis d'utiliser la compacité de ce segment pour trouver une sous-suite. L'arbitraire sur ε sera obtenu en itérant, à l'aide d'une extraction diagonale.

On suppose qu'on a construit une sous-suite indexée par $\varphi_k(n)$ telle que

$$\exists N_k \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N_k, \|f_{t_{\varphi_k(p)}} - f_{t_{\varphi_k(q)}}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pour tout n , il existe $T_n^{k+1} \in \mathbb{R}$ tel que $|t_{\varphi_k(n)} - T_n^{k+1}| \leq R_{2^{-(k+1)}/3}$ et $\|f - f_{T_n^{k+1}}\|_\infty \leq 2^{-(k+1)}/3$. La suite $(t_{\varphi_k(n)} - T_n^{k+1})$ étant dans $[-R_{2^{-(k+1)}/3}, R_{2^{-(k+1)}/3}]$ compact, on peut en extraire une sous-suite indexée par $\varphi_{k+1}(n)$ et convergeant vers une certaine limite. Ainsi, pour tout $p, q \geq N_k$, on a

$$\begin{aligned} \|f_{t_{\varphi_{k+1}(p)}} - f_{t_{\varphi_{k+1}(q)}}\|_\infty &\leq \|f_{t_{\varphi_{k+1}(p)}} - f_{t_{\varphi_{k+1}(p)} - T_{\varphi_{k+1}(p)}^{k+1}}\|_\infty \\ &\quad + \|f_{t_{\varphi_{k+1}(p)} - T_{\varphi_{k+1}(p)}^{k+1}} - f_{t_{\varphi_{k+1}(q)} - T_{\varphi_{k+1}(q)}^{k+1}}\|_\infty \\ &\quad + \|f_{t_{\varphi_{k+1}(q)}} - f_{t_{\varphi_{k+1}(q)} - T_{\varphi_{k+1}(q)}^{k+1}}\|_\infty \\ &\leq 2^{-(k+1)}, \end{aligned}$$

le fait que le second terme est inférieur à $2^{-(k+1)}/3$ pour tout p, q assez grands étant une conséquence de l'uniforme continuité de f .

Un petit calcul montre alors que $f_{t_{\varphi_n(n)}}$ donne une solution à la question.

5. On le fait par contraposée : prenons une fonction f qui n'est pas presque périodique. Autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute longueur $R > 0$, il existe un segment de longueur $\geq R$ ne contenant aucune presque période.

Soit $t_1 > 0$ quelconque. Alors il existe un intervalle $[a_1, b_1]$ de longueur $\geq 2t_1$ ne contenant aucune ε -période. On pose $t_2 = (a_1 + b_1)/2$, si bien que $t_2, t_2 - t_1 \in [a_1, b_1]$ ne sont pas des ε -périodes. Il existe alors un intervalle $[a_2, b_2]$ de longueur $\geq 2(|t_1| + |t_2|)$ ne contenant aucune ε -période. On pose $t_3 = (a_2 + b_2)/2$, si bien que $t_3, t_3 - t_2, t_3 - t_1 \in [a_2, b_2]$ ne sont pas des ε -périodes. Ainsi de suite, on construit une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ de nombres tels que pour tous $i \neq j$, $t_i - t_j$ n'est pas une ε -période. Il n'y a donc aucune sous-suite $t_{\varphi(n)}$ telle que $(f_{t_{\varphi(n)}})_n$ cvu.

6. Soient f_1 et f_2 deux fonctions presque périodiques. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une longueur $R > 0$ tel que tout segment de longueur R contient au moins une ε -presque période de f_1 et une ε -presque période de f_2 .

- (a) Par continuité uniforme, on voit qu'en fait, pour toute fonction presque périodique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une longueur $R > 0$ ainsi qu'un nombre $\eta > 0$ tel que tout segment de longueur R contienne au moins un intervalle de longueur η fait de 2ε -presque périodes. On en déduit le résultat demandé.

- (b) L'ensemble $\mathcal{E} \cap [-R, R]$ est un sous-ensemble de $\eta\mathbb{Z} \cap [-R, R]$ et est donc fini. On peut donc écrire

$$\mathcal{E} \cap [-R, R] = \{T_1^1 - T_2^1, \dots, T_1^k - T_2^k\}.$$

On pose $R' = \max_{1 \leq i \leq k} \{|T_1^i|, |T_2^i|\}$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, et considérons $T_1, T_2 \in [x, x+R] \cap \eta\mathbb{Z}$ deux ε -périodes de resp. f_1 et f_2 . Alors il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $T_1 - T_2 = T_1^i - T_2^i$. Cela implique que $T_1 - T_1^i = T_2 - T_2^i$ est une ε -période d'à la fois f_1 et f_2 , qui appartient à l'intervalle $[x-R', x+R+R']$. Un calcul simple montre alors que c'est une 2ε -période de $f_1 + f_2$.

24 Projections sur les ensembles de polynômes

Soit I un segment de \mathbb{R} et f une application continue de I dans \mathbb{R} . On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur I , et pose $N = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - f\|_\infty$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $N = \|P_n - f\|_\infty$.
2. Soit P_n un tel polynôme. Posons $E = \{x \in I \mid |f(x) - P_n(x)| = N\}$. Montrer que $\text{Card } E \geq n+2$.
3. En déduire l'unicité de P_n .

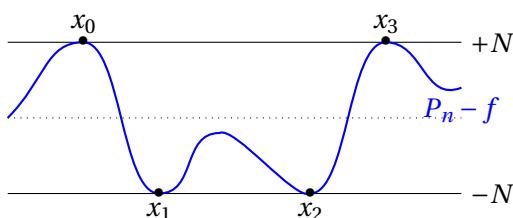
Indications et commentaires

Encore un exercice extrait des annales du concours d'entrée aux ENS.

Pour la question 2, beaucoup de candidats ont pensé d'eux-mêmes à utiliser les polynômes interpolateurs. Survenaient alors deux difficultés différentes : la première pour se rendre compte qu'il faut traiter différemment ce qui se passe au voisinage des x_i de ce qui se passe loin des x_i et la seconde, techniques, de la mise en œuvre assez délicate de cette idée. Là encore, un dessin bien choisi permettait de se faire une idée plus claire de la stratégie à adopter comme des notations à introduire.

Solution de l'exercice

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\|P - f\|_\infty \leq N+1$, on a $\|P\|_\infty \leq N+1+\|f\|_\infty$ (tout existe car les fonctions sont continues sur un segment). Donc on a $N = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X] \cap B_\infty(0, 1+N+\|f\|_\infty)} \|P - f\|_\infty$. Or l'ensemble $\mathbb{R}_n[X] \cap B_\infty(0, 1+N+\|f\|_\infty)$ est un fermé borné en dimension $n+1$, il est donc compact. La fonction $P \mapsto \|P - f\|_\infty$ y atteint donc sa borne inf.
2. On raisonne par l'absurde et suppose que la fonction $P_n - f$ vaut $\pm N$ en exactement les points x_0, \dots, x_k , avec $k \leq n$.



Soit $L \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme interpolateur de Lagrange des points $(x_i, (P_n - f)(x_i))$. On va montrer que pour $t > 0$ assez petit, on a $\|(P_n - tL) - f\|_\infty < N$, ce qui sera une contradiction. On traite différemment ce qui se passe au voisinage des x_i de ce qui se passe loin des x_i .

Tout d'abord, regardons ce qui se passe proche des x_i . Par continuité de $P_n - f$, ainsi que de L , on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout i , $x \in [x_i - \delta, x_i + \delta] \cap I$ implique

que $(P_n - f)(x)$ et $L(x)$ sont (strictement) de même signe que $(P_n - f)(x_i)$ (et inférieurs à $2N$). Pour tout i , si $x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[$ et $t \in]0, 1[$, alors par hypothèse sur les signes, on a $|(P_n - tL - f)(x)| < |(P_n - f)(x)| \leq N$.

D'autre part, posons $A = I \cap \bigcup_i]x_i - \delta, x_i + \delta[$. L'ensemble $I \setminus A$ est compact (car fermé dans un compact), donc la fonction $|P_n - f|$ y atteint son maximum N' , avec $N' < N$ par hypothèse. Notons $M = \|L\|_\infty + 1$, et $T = \min(1, (N - N')/M)$. Alors pour tout $t \in]0, T[$, et tout $x \in I \setminus A$, on a

$$|(P_n - tL - f)(x)| \leq |(P_n - f)(x)| + t|l(x)| < N' + tM < N.$$

On vient de montrer que pour tout $x \in I$ et tout $t \in]0, T[$, on a $|(P_n - tL - f)(x)| < N$. Contradiction.

3. Supposons qu'il existe deux polynômes réalisant le minimum, P et Q . On a

$$N \leq \left\| f - \frac{P+Q}{2} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} (\|f - P\|_\infty + \|f - Q\|_\infty) \leq N,$$

donc $(P + Q)/2$ réalise aussi le minimum. Par conséquent, il existe (x_0, \dots, x_{n+1}) tels que $|f(x_i) - (P + Q)(x_i)/2| = N$. En raisonnant comme au-dessus, on en déduit que pour tout i , on a $P(x_i) = Q(x_i)$. Le polynôme $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ possède donc au moins $n + 1$ racines, il est par conséquent nul.

25 Espaces de Hölder

Pour $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$, on note

$$h_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(v_1) - f(v_2)|}{\|v_1 - v_2\|_\infty^\alpha} \mid v_1 \neq v_2 \in E \right\} \in [0, +\infty].$$

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} . Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in I$, on note

$$\begin{aligned} f_u : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(u, x). \end{aligned}$$

Si $h_\alpha(f) < +\infty$, on note $f \in H^\alpha$.

1. On suppose que I est borné. Montrer que pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si $f \in H^\alpha$, alors $f \in H^\beta$ pour tout $\beta \leq \alpha$.
2. Soit $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(u, x) = |u - x|$. Calculer $h_1(f)$, puis pour $u_1 \neq u_2 \in I$, $h_1(f_{u_1} - f_{u_2})$. En déduire

$$\sup \left\{ \frac{h_1(f_{u_1} - f_{u_2})}{|u_1 - u_2|} \mid u_1 \neq u_2 \in I \right\}.$$

3. Soit $0 < \alpha < \beta \leq 1$, et $f \in H^\beta$. Montrer que

$$\sup \left\{ \frac{h_\alpha(f_{u_1} - f_{u_2})}{|u_1 - u_2|^{\beta-\alpha}} \mid u_1 \neq u_2 \in I \right\} < +\infty$$

Indications et commentaires

Ce problème assez technique est tiré d'un exposé de recherche de Hans-Henrik Rugh, présentant un travail en collaboration avec Julien Sedro. Il teste la capacité des candidats en analyse.

Solution de l'exercice

1. Relativement facile, en utilisant le fait que l'intervalle est de longueur finie.
2. On calcule :

$$|f(u_1, x_1) - f(u_2, x_2)| = ||u_1 - x_1| - |u_2 - x_2|| \leq |u_1 - u_2| + |x_1 - x_2|,$$

ce qui implique que $h_1(f) \leq 2$. En prenant $u_1 = -1/4$, $x_1 = 1/4$, $u_2 = -1/2$ et $x_2 = 1/2$, on voit que $h_1(f) \geq 2$.

D'autre part, si $u_1 < u_2$, alors

$$(f_{u_1} - f_{u_2})(x) = \begin{cases} -(u_2 - u_1) & \text{si } x \leq u_1 \\ 2\left(x - \frac{u_1 + u_2}{2}\right) & \text{si } u_1 \leq x \leq u_2 \\ (u_2 - u_1) & \text{si } x \geq u_2 \end{cases}$$

On en déduit la constante de Lipschitz $h_1(f_{u_1} - f_{u_2}) = 2$.

Par conséquent, la quantité demandée vaut $+\infty$.

3. Fixons $u_1 \neq u_2$, et posons $\Delta = f_{u_1} - f_{u_2}$. Alors

$$\begin{aligned} |\Delta(x) - \Delta(y)| &= |f_{u_1}(x) - f_{u_2}(x) - f_{u_1}(y) + f_{u_2}(y)| \\ &\leq |f(u_1, x) - f(u_2, x)| + |f(u_1, y) - f(u_2, y)| \\ &\leq 2h_\beta(f)|u_1 - u_2|^\beta \quad \text{d'une part} \\ &\leq |f(u_1, x) - f(u_1, y)| + |f(u_2, x) - f(u_2, y)| \\ &\leq 2h_\beta(f)|x - y|^\beta \quad \text{d'autre part} \end{aligned}$$

Ainsi on a, pour $x \neq y$,

$$\frac{|\Delta(x) - \Delta(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 2h_\beta(f) \min\left(|x - y|^{\beta - \alpha}, \frac{|u_1 - u_2|^\beta}{|x - y|^\alpha}\right).$$

Une petite disjonction de cas permet de voir que ce minimum est inférieur à $|u_1 - u_2|^{\beta - \alpha}$. Par conséquent,

$$h_\alpha(f_{u_1} - f_{u_2}) \leq 2h_\beta(f)|u_1 - u_2|^{\beta - \alpha}.$$

26 Matrices symétriques à coefficients négatifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique positive dont les coefficients non diagonaux sont tous strictement négatifs.

Pour tout vecteur colonne $X = {}^t (x_1, \dots, x_n)$ on note $|X| = {}^t (|x_1|, \dots, |x_n|)$.

1. Montrer que pour tous vecteurs colonnes U et V , on a

$$({}^t U A V)^2 \leq ({}^t U A U)({}^t V A V).$$

2. Montrer que

$${}^t |X| A |X| \leq {}^t X A X.$$

3. On suppose A non inversible et on choisit $X \in \ker A \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout vecteur colonne U , on a ${}^t U A |X| = 0$.

4. En déduire que $x_i \neq 0$ pour tout i , puis que $\text{rg } A \geq n - 1$.
5. Soit $\lambda_0 = \min \text{Sp } A$. Montrer qu'il existe X un vecteur propre associé à λ_0 tel que $x_i > 0$ pour tout i . Montrer que $\text{rg}(A - \lambda_0 I_n) = n - 1$.

Indications et commentaires

Un dernier exercice extrait des annales du concours d'entrée aux ENS, qui a été globalement bien réussi par les candidats.

Solution de l'exercice

1. C'est Cauchy-Schwarz. Plein de démonstrations possibles : par calcul du discriminant de ${}^t(U + tV)A(U + tV)$, par calcul direct en dimension 2, par matrice de Gram des vecteurs U et V ...
2. On calcule : posant $A = (a_{i,j})$, on a

$${}^t|X|A|X| = \sum_{i,j} a_{i,j}|x_i||x_j| = \sum_i a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j}|x_i||x_j|.$$

Or pour $i \neq j$, on a $a_{i,j} < 0$, donc $a_{i,j}|x_i||x_j| \leq a_{i,j}x_i x_j$. Finalement,

$${}^t|X|A|X| \leq \sum_i a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j}x_i x_j = {}^t XAX.$$

3. On utilise la question 1 ! On a $({}^tUA|X|)^2 \leq ({}^tUAU)({}^t|X|A|X|)$. Or la question précédente affirme que ${}^t|X|A|X| \leq {}^t XAX = 0$. Par conséquent, ${}^tUA|X| = 0$.
4. Si on avait $x_{i_0} = 0$, alors en choisissant $z_i = 0$ si $i \neq i_0$, $z_{i_0} = 1$, on aurait

$$0 = {}^t Z A|X| = \sum_j a_{i_0,j}|x_j| = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}|x_j|.$$

On observe que tous les termes de la somme sont négatifs et au moins un est strictement négatif (sinon on aurait $X = 0$). Contradiction.

Supposons qu'il existe $Y \in \ker A$ non colinéaire à X . Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $X + tY$ ait un coefficient nul. D'autre part, $X + tY \in \ker A$ est non nul par hypothèse, par conséquent, par la question précédente, il a tous ses coefficients non nuls. Contradiction.

5. Soit $X \in \ker A$. En posant $U = A|X|$, on déduit de la question 3 que $A|X| = 0$. Ainsi, $|X|$ est dans le noyau de A , et puisque cet ensemble est de dimension au plus 1, on sait que les coefficients de X sont de signe constant.

Tout d'abord, A est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles, et puisque par hypothèse elle est positive, ses valeurs propres sont positives. Remarquons que la matrice $A - \lambda_0 I_n$ est symétrique à coefficients non diagonaux strictement négatifs. Si on montre qu'elle est positive, on a gagné.

Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda I_n$ soit non inversible. Donc les valeurs propres de $A - \lambda_0 I_n$ sont les $\{\lambda - \lambda_0 \mid \lambda \text{ vp de } A\}$. Donc les valeurs propres de $A - \lambda_0 I_n$ sont toutes positives.

27 Distance de Wasserstein sur le cercle et Avatars

Soient $F, G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions croissantes continues par morceaux telles que $F(0) = G(0) = 0$ et $F(1) = G(1) = 1$. On pose $H = F - G$.

On pose

$$W_1(F, G) = \min_{b \in \mathbb{R}} \int_0^1 |H(t) - b| dt,$$

et

$$D(F, G) = \left(\min_{c \in \mathbb{R}} \int_0^1 |H(t) - c|^2 dt \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que les deux minimums définissant W_1 et D sont bien définis.
2. Montrer que le minimum c pour D est réalisé par un unique nombre qui est la moyenne de H , i.e. par le nombre

$$c_0 = \int_0^1 H(t) dt.$$

3. Montrer que

$$W_1(F, G) \leq D(F, G)$$

et que

$$D(F, G) \leq \sqrt{2} W_1(F, G)^{1/2}.$$

4. De même, montrer que le minimum b pour W_1 est réalisé par la médiane de H , i.e. par le nombre

$$b_0 = \inf \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) > b} dt < 1/2 \right\} = \sup \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) < b} dt < 1/2 \right\},$$

où $\mathbf{1}$ désigne la fonction indicatrice. *On pourra supposer que l'intervalle $[0, 1]$ est partitionné en un nombre fini d'intervalles sur lesquels H est monotone, pour que les intégrales définies ci-dessus aient un sens.*

Indications et commentaires

L'exercice concerne en fait les distances entre mesures sur le cercle, identifié avec $[0, 1]$. Les fonctions F et G sont les fonctions de répartition de ces mesures, les définitions avec des min sont là pour assurer que les deux distances définies sont indépendantes du choix de l'identification du cercle avec un intervalle du type $[\alpha, \alpha + 1]$.

Dès la question 1., on pouvait tester la rigueur des candidats : il faut appliquer correctement le théorème d'intégration à paramètres et se restreindre à un ensemble compact en étudiant les limites en l'infini.

Bizarrement, la question 2. a bloqué certains candidats, alors qu'il s'agit juste de trouver le minimum d'un polynôme de degré 2.

Les questions suivantes (surtout la dernière) requièrent plus de pratique en analyse.

Solution de l'exercice

1. Il faut vérifier la continuité par un théorème d'intégration à paramètres, et utiliser de la compacité en disant que si $|b|$ est grand alors l'intégrale est grande.

2. Le minimum est atteint en un point critique de la fonction de c , il suffit donc de dériver (ou plus simplement, c'est un polynôme en c , on connaît la formule de l'emplacement du minimum).

3. Première inégalité : Cauchy-Schwarz appliquée à $H - c_0$.

Pour la seconde, on remarque que $H \in [-1, 1]$, si bien que $b_0 \in [-1, 1]$ et $|H - b_0| \leq 2$. Ainsi, $(H - b_0)^2 \leq 2|H - b_0|$ et

$$D(F, G)^2 \leq \int_0^1 (H - b_0)^2 dt \leq 2 \int_0^1 |H - b_0| dt = 2W_1(F, G).$$

4. Il faut commencer par montrer que le nombre b_0 est bien défini. D'une part que les intégrale le sont (ce qui est assuré par l'hypothèse supplémentaire). D'autre part le sup et l'inf existent bien et sont égaux : notons

$$b_0 = \inf \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) > b} dt < 1/2 \right\} \quad \text{et} \quad b_1 = \sup \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) < b} dt < 1/2 \right\}.$$

La fonction $b \mapsto \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) > b} dt$ est décroissante (et vaut 1 en $\inf H - 1$ et 0 en $\sup H + 1$), donc pour tout $b > b_0$, on a $\int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) \geq b} dt \leq \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) > (b+b_0)/2} dt < 1/2$. Donc, puisque

$$1 = \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) > b} dt + \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) = b} dt + \int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) < b} dt,$$

on a $\int_0^1 \mathbf{1}_{H(t) < b} dt > 1/2$. Cela prouve que $b \geq b_1$. Donc $b_0 \geq b_1$ et de même, $b_1 \geq b_0$.

Pour montrer que b_0 est bien un minimum pour W_1 , on prend $b < b' < b_0$. Alors

$$\int_0^1 |H(t) - b| - |H(t) - b'| dt = \int_{H \leq b} (b - b') + \int_{b < H < b'} H - b + H - b' + \int_{H \geq b'} (b' - b).$$

Or si $b < H(t) < b'$, alors $H(t) - b + H(t) - b' \geq b - b'$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 |H(t) - b| - |H(t) - b'| dt &\geq (b' - b)[Leb(H \geq b') - Leb(H \leq b) - Leb(b < H < b')] \\ &\geq (b' - b)[Leb(H \geq b') - Leb(H < b')] \geq 0. \end{aligned}$$

On obtient un résultat similaire pour $b > b' > b_0$, et on en déduit que b_0 est l'unique minimum de la fonction.

28 Distances pour des processus ponctuels

Pour une proba μ sur un sous-ensemble dénombrable de $[0, 1]$, on définit sa *fonction de répartition* par

$$\begin{aligned} G_\mu : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mu([0, x]), \end{aligned}$$

ainsi que $\tilde{G}_\mu(x) = G_\mu(x) - \int_0^1 G_\mu(t) dt$.

On note $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de E . On suppose que μ est portée par les points $(x_i)_{i \in I} \in [0, 1]$, avec I au plus dénombrable.

- Exprimer G_μ en fonction des x_i et des $\mu(\{x_i\})$. Relier $\mathbb{E}_\mu[Id]$ et $\int_0^1 G_\mu$.

2. Soient $p_1, \dots, p_N \in [0, 1]$, et $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{p_k}$. Calculer

$$I = \int_0^1 (\tilde{G}_\mu - \tilde{G}_{\mu_N})^2.$$

3. On suppose que les p_k sont iid de répartition $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{1/2})$. Calculer

$$E = \mathbb{E} \left[\int_0^1 (\tilde{G}_\mu - \tilde{G}_{\mu_N})^2 \right].$$

Interprétation?

Indications et commentaires

Exercice de probabilités devenant assez vite analytique. Il s'agit de mesurer la “distance moyenne” entre les fonctions de répartition d'une mesure μ et un tirage de N points au hasard selon cette mesure.

Attention à ne pas prendre peur face à la quantité de notations introduites.

Solution de l'exercice

1. $G_\mu(x) = \sum_i \mu(\{x_i\}) \mathbf{1}_{[x_i, 1]}(x)$. D'autre part, $\mathbb{E}_\mu(Id) = 1 - \int_0^1 G_\mu$. En effet, si la proba μ est portée par les points x_i , on a

$$\int_0^1 G_\mu = \int_0^1 \sum_i \mu(\{x_i\}) \mathbf{1}_{x_i \leq t} dt = \sum_i \mu(\{x_i\}) \int_0^1 \mathbf{1}_{x_i \leq t} dt = \sum_i \mu(\{x_i\})(1 - x_i).$$

(c'est légal, les termes sont positifs OU par convergence dominée).

2. On calcule facilement \tilde{G}_{μ_N} , ce qui donne :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\tilde{G}_\mu(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k)) \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 (\tilde{G}_\mu(x))^2 dx \end{aligned} \tag{7}$$

$$- \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \int_0^1 \tilde{G}_\mu(x) (\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k)) dx \tag{8}$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \int_0^1 (\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k))^2 dx \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k \neq \ell}}^N \int_0^1 (\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k)) (\mathbf{1}_{[p_\ell, 1]}(x) - (1 - p_\ell)) dx \tag{10}$$

3. On a :

$$E = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{i_1=0,1 \\ \vdots \\ i_N=0,1}} I_{p_k=i_k/2}.$$

Fixons p_1, \dots, p_N et calculons les 4 termes de I séparément. On remarque tout d'abord que $\tilde{G}_\mu \equiv -1/4$ sur $]0, 1/2[$ et $\tilde{G}_\mu \equiv 1/4$ sur $]1/2, 1[$. Donc

$$I_1 = \int_0^1 (\tilde{G}_\mu(x))^2 dx = \int_0^1 1/16 dx = 1/16.$$

On remarque ensuite que si $p_k = 0$, alors $\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k) \equiv 0$ sur $]0, 1[$, et si $p_k = 1/2$, alors $\mathbf{1}_{[p_k, 1]}(x) - (1 - p_k) = 2\tilde{G}_\mu(x)$ sur $]0, 1[$. Donc

$$\begin{aligned} I_2 &= -2 \frac{\#\{k \mid p_k = 1/2\}}{N} \frac{1}{8}, \\ I_3 &= \frac{\#\{k \mid p_k = 1/2\}}{N^2} \frac{1}{4}, \\ I_4 &= \frac{\#\{k, \ell \mid k \neq \ell, p_k = p_\ell = 1/2\}}{N^2} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16} - \frac{\#\{k \mid p_k = 1/2\}}{4N} + \frac{\#\{k, \ell \mid p_k = p_\ell = 1/2\}}{4N^2} \\ &= \frac{1}{16} - \frac{\#\{k \mid p_k = 1/2\}}{4N} + \frac{\#\{k \mid p_k = 1/2\}^2}{4N^2}. \end{aligned}$$

Notons $B(N, 1/2)$ la loi binomiale de paramètres N et $1/2$. On a $\mathbb{E}(B(N, 1/2)) = N/2$ et $V(B(N, 1/2)) = N/4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I] &= \frac{1}{16} - \frac{\mathbb{E}(B(N, 1/2))}{4N} + \frac{\mathbb{E}(B(N, 1/2))^2 - V(B(N, 1/2))}{4N^2} \\ &= \frac{1}{16} - \frac{N/2}{4N} + \frac{N^2/4 - N/4}{4N^2} \\ &= \frac{1}{16N}. \end{aligned}$$

Cela mesure la “distance moyenne” entre les fonctions de répartition de la mesure μ initiale et un tirage de N points au hasard selon cette mesure. Cela tend vers 0 lorsque N tend vers l’infini (on pouvait s’en douter : par la loi des grands nombres, la répartition des p_i tend à ressembler à celle de μ).

29 Équidistribution et fonctions non intégrables

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi nk\alpha}$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. On pose

$$S_N(\varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(n\alpha).$$

Montrer que $S_N(\varphi)/N$ tend vers $\int_0^1 \varphi$.

On pourra utiliser le fait que les fonctions continues 1-périodiques sont approchées en topologie uniforme par les polynômes trigonométriques de la forme $x \mapsto \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi kx}$.

3. Soit maintenant $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_0^1 \varphi = +\infty$. Que dire du comportement de $S_N(\varphi)/N$, où $S_N(\varphi) = \sum_{n=1}^N \varphi(n\alpha \bmod 1)$?
4. On considère le jeu suivant : un point mobile $P(t)$ part de $(x_0, 0) = (\alpha, 0)$, puis se dirige verticalement vers le haut à vitesse 1 jusqu’au point $(x_0, 1/x_0)$. Dès qu’il est arrivé à ce point, il saute directement au point $(x_0 + \alpha \bmod 1, 0) = (x_1, 0)$ et repart vers le haut, toujours à vitesse 1, jusqu’au point $(x_1, 1/x_1)$, etc. Dessiner la région que le point peut éventuellement atteindre. Pour $\delta > 0$, étudier

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \mathbb{1}_{[0, \delta]}(P_1(t)) dt.$$

Indications et commentaires

Exercice très classique pour ses deux premières questions (critère de Weyl), mais sortant des clous à partir de la question 3. Celle-ci fait intervenir le principe d'approximation de fonctions et de raisonnement par densité, classique en analyse fonctionnelle mais sans doute pas pour les élèves de MP : ceux-ci ont été guidés pour la définition des approximations φ_C .

La dernière question, assez difficile, consiste à estimer la répartition temporelle moyenne de l'abscisse du point $M(t)$.

Solution de l'exercice

1. Trivial : si $k = 0$, alors la somme vaut N . Sinon, $e^{2i\pi k\alpha} \neq 1$ (puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$) et donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi nk\alpha} = \frac{1 - e^{2i\pi Nk\alpha}}{1 - e^{2i\pi k\alpha}}.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$, et

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi kx} \end{aligned}$$

un polynôme trigonométrique tel que $\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. Calculons, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned} S_N(\psi) &= \sum_{n=0}^{N-1} \psi(n\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi kn\alpha} \\ &= \sum_{\substack{-K \leq k \leq K \\ k \neq 0}} \sum_{n=0}^{N-1} c_k e^{2i\pi kn\alpha} + \sum_{n=0}^{N-1} c_0 \\ &= \sum_{\substack{-K \leq k \leq K \\ k \neq 0}} \left(c_k \frac{1 - e^{2i\pi Nk\alpha}}{1 - e^{2i\pi k\alpha}} \right) + Nc_0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_N(\psi)}{N} - c_0 \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{-K \leq k \leq K \\ k \neq 0}} \left(c_k \left| \frac{1 - e^{2i\pi Nk\alpha}}{1 - e^{2i\pi k\alpha}} \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{-K \leq k \leq K \\ k \neq 0}} \left(c_k \left| \frac{2}{1 - e^{2i\pi k\alpha}} \right| \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\left| \frac{S_N(\psi)}{N} - c_0 \right| \rightarrow 0$ lorsque N tend vers $+\infty$. Or un calcul simple montre que $c_0 = \int_0^1 \psi$. Or d'une part $|S_n(\varphi)/N - S_n(\psi)/N| \leq \varepsilon$, et d'autre part $|\int_0^1 \varphi - \int_0^1 \psi| \leq \varepsilon$. Cela montre que pour tout N assez grand, $|S_n(\varphi)/N - \int_0^1 \varphi| \leq 3\varepsilon$.

3. Déjà, la somme a un sens : $n\alpha \notin \mathbb{Z}$ pour tout $n > 0$ puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Ensuite, l'intégrale de φ a un sens : par positivité de la fonction φ , si l'intégrale diverge pour l'une des deux bornes de l'intervalle $[0, 1]$, alors elle diverge. On "approche" alors la fonction φ par une fonction continue qui lui est partout inférieure mais d'intégrale grande.

Pour cela, on pose $g_C(x) = \min\{Cx, C, C(1-x)\}$. On montre alors que pour tout $M > 0$, il existe $C > 0$ telle que la fonction $\varphi_C = \min(\varphi, g_C)$ vérifie $\int_0^1 \varphi_C \geq M$. En effet, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \varphi \geq M$, la constante $C = \sup_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} \varphi$ convient. De plus, on voit que la fonction φ_C est continue sur $[0, 1]$ (en tant que minimum de fonctions continues) et se prolonge en une fonction continue 1-périodique (on voit que $\varphi_C(0) = 0 = \varphi_C(1)$). Or par la question précédente, $S_N(\varphi_C)/N$ tend vers $\int_0^1 \varphi_C \geq M$, donc pour tout N assez grand $S_N(\varphi)/N \geq S_N(\varphi_C)/N$ est plus grand que M . Par conséquent, $S_N(\varphi)/N$ tend vers $+\infty$.

4. Posons $\varphi(x) = 1/x$. On commence par montrer que pour tout $C > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq M$, on ait

$$\frac{1}{S_N(\varphi)} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \varphi(n\alpha \mod 1) \geq C}} \varphi(n\alpha \mod 1) \geq 1 - \varepsilon.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, pour une infinité de N on aurait

$$\frac{1}{S_N(\varphi)} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \varphi(n\alpha \mod 1) < C}} \varphi(n\alpha \mod 1) \geq \varepsilon,$$

et donc

$$\varepsilon S_N(\varphi) \leq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \varphi(n\alpha \mod 1) < C}} \varphi(n\alpha \mod 1) \leq C \text{Card}\{n \leq N \mid \varphi(n\alpha \mod 1) < C\} \leq CN,$$

si bien que $S_N(\varphi) \leq (C/\varepsilon)N$ pour une infinité de N , ce qui est impossible.

Remarquons que $\varphi(n\alpha \mod 1)$ représente le temps qu'il faut au point $P(t)$ pour passer de $(n\alpha \mod 1, 0)$ à $((n+1)\alpha \mod 1, 0)$. On remarque que pour une proportion de temps supérieure à $1 - \varepsilon$, si T est assez grand (donc si N est assez grand), ce temps est supérieur à C , donc le point est dans l'intervalle $[0, 1/C]$. Donc l'intégrale demandée converge vers 1.

30 Équations différentielles et moyennes temporelles

Soit $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, et $\nu \in \mathbb{R}^2$ le vecteur unitaire de pente α , i.e. $\sqrt{1 + \alpha^2} \nu = (1, \alpha)$. On considère

$$\begin{aligned} \psi : [-1, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|^2, \end{aligned}$$

ainsi qu'une solution dérivable $\phi : [0, M] \rightarrow [-1, 1]^2$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \phi'(t) = \psi(\phi(t)) \nu \\ \phi(0) = x_0 \end{cases}$$

pour un certain $x_0 \in [-1, 1]^2$ et un nombre $M > 0$. On admet que cette solution est unique.

1. On considère $x_0 \in \{-1\} \times [-1, 0]$. Dessiner sans justification l'orbite

$$\{\phi(t) \mid t \in [0, M]\}.$$

2. Choisissons $x_0 = (-1, -\alpha)$. Que dire de la fonction ϕ ?

Indication : la solution de $\lambda' = \lambda^2$ est $\lambda(t) = \lambda(0)/(1 - \lambda(0)t)$.

3. On considère $x_0 \in \{-1\} \times [-1, 0] \setminus \{(-1, -\alpha)\}$. Calculer le temps qu'il faut à ϕ pour atteindre le côté droit du carré. En donner un équivalent lorsque x_0 tend vers $(-1, -\alpha)$.
4. On considère le problème suivant : on identifie les côtés gauche et droit, ainsi que bas et haut, du carré. On s'intéresse au temps $\tau(y)$ qu'il faut à la trajectoire d'un point $x_0 = (-1, y)$, avec $y \in [-1, 1]$, pour toucher le bord droit du carré. Que dire de $\int_0^1 \tau(y) dy$?

Indications et commentaires

Cet exercice fait appel à la résolution d'EDO non linéaires, qui n'est pas au programme officiel. Les examinateurs étaient conscients de ce fait et ont accompagné les candidats en fonction, leur énonçant le théorème de Cauchy-Lipschitz lorsqu'ils en avaient besoin, et leur fournissant la méthode de résolution par séparation des variables (que bien des candidats connaissaient via leur cours de physique-chimie).

La dernière question permet d'utiliser l'exercice compagnon : on en déduit que l'orbite du point passe en moyenne la plupart de son temps au voisinage de l'origine.

Solution de l'exercice

1. C'est un segment dirigé par v . Si M est maximal, le segment traverse le carré $[-1, 1]^2$ de gauche à droite.
2. On va résoudre l'EDO. Pour cela, on se place dans la base (v, v^\perp) (rappelons que v est unitaire, et que la norme euclidienne est invariante par changement de BON). L'EDO devient alors

$$\begin{cases} \phi'(t) = \psi(\phi(t))v \\ \phi(0) = -\sqrt{1+\alpha^2}v \end{cases}$$

On a alors

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^s \psi(\phi(s))v ds \in \text{vect}(v).$$

Écrivons donc $\phi(t) = \lambda(t)v$. On a donc $\lambda(0) = -\sqrt{1+\alpha^2}$, et

$$\lambda'(t) = \psi(\lambda(t)v) = \lambda(t)^2.$$

Ainsi, $d\lambda/\lambda^2 = dt$, donc par intégration

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(0)}{1 + \lambda(0)t} = \frac{-\sqrt{1+\alpha^2}}{1 - \sqrt{1+\alpha^2}t}.$$

En particulier, λ est croissante, et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc l'orbite de ϕ s'arrête en 0.

3. Écrivons, dans la base (v, v^\perp) , $x_0 = (a, b)$, avec $b \neq 0$. Comme au dessus, on sait que $\phi(t) = \lambda(t)v + bv^\perp$. On a donc $\lambda(0) = a$, et par Pythagore

$$\lambda'(t) = \psi(\lambda(t)v + bv^\perp) = \lambda(t)^2 + b^2.$$

Ainsi, $d\lambda/(\lambda^2 + b^2) = dt$, donc par intégration

$$\int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + b^2} = t,$$

soit

$$t = \frac{1}{b} (\arctan(\lambda(t)/b) - \arctan(\lambda(0)/b)),$$

donc

$$\lambda(t) = b \tan(bt + \arctan(\lambda(0)/b)).$$

D'autre part, pour trouver le temps de traversé, on fait $\lambda(t_0) = -\lambda(0) = -a$, ce qui donne

$$t_0 = \frac{1}{b} (\arctan(-a/b) - \arctan(a/b)) = \frac{-2 \arctan(a/b)}{b}.$$

Si x_0 tend vers $(-1, -\alpha)$, on obtient $t_0 \sim \pi/b$.

4. C'est $+\infty$, simplement parce qu'à la question précédente on a obtenu l'équivalent à π/b et que la fonction $b \mapsto \pi/b$ est d'intégrale infinie sur tout voisinage à droite de 0.

Références

- [BRW08] Michael Baake, John A. G. Roberts, and Alfred Weiss. Periodic orbits of linear endomorphisms on the 2-torus and its lattices. *Nonlinearity*, 21(10) :2427–2446, 2008.
- [Gui12] Pierre-Antoine Guihéneuf. *Propriétés dynamiques génériques des homéomorphismes conservatifs*, volume 22 of *Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.
- [Gui18] Pierre-Antoine Guihéneuf. Model sets, almost periodic patterns, uniform density and linear maps. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(1) :455–474, 2018.
- [MZ89] Michał Misiurewicz and Krystyna Zieman. Rotation sets for maps of tori. *J. London Math. Soc. (2)*, 40(3) :490–506, 1989.