DM 8. Enoncé

Ce sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes. Ils sont indépendants.

Exercice

On fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{2ik\frac{\pi}{n}}\right)^n$.

1°) Montrer que $S_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{p} z^{n-p} e^{2ikp\frac{\pi}{n}} \right)$.

2°) En déduire que $S_n(z) = n(z^n + 1)$.

3°) Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant le complexe $z = e^{2ia}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n} - a\right) = \frac{n\cos(na)}{2^{n-1}}.$$

4°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - a\right)$.

Problème 1 : Une formule entre intégrales

Préliminaires

On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une application f de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$: on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires selon lequel, d'après la continuité de f, pour tout $y, y' \in f([a, b])$ avec $y < y'$, pour tout $y'' \in [y, y']$, il existe $x'' \in [a, b]$ tel que $y'' = f(x'')$.

On notera f^{-1} la bijection réciproque.

2°) Sans le démontrer, rappeler la formule donnant la dérivée de f^{-1} en fonction de l'application f.

L'objectif du problème est de démontrer puis d'utiliser la formule suivante :

$$(1) \ : \ \int_a^b f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a).$$

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on vérifie la formule (1) sur un exemple.
Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose, **seulement dans cette partie,** que $a > 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = x^p$

3°) Vérifier que f satisfait les hypothèses des préliminaires.

4°) Vérifier par le calcul que la formule (1) est correcte pour cet exemple.

Partie II : Deux preuves de la formule (1)

5°) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x)$.
Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi'(x) = 0$, puis en déduire la formule (1).

6°) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = \int_a^b uf'(u)\,du$.
En déduire une seconde preuve de la formule (1).

Partie III : Utilisation de la formule (1)

On suppose que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

7°) Déduire de la formule (1) appliquée à f que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\,dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(t^2)\,dt$: on pourra utiliser le fait que lorsqu'une application g est continue en un point x_0 de son domaine de définition, alors $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$.

8°) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$.

9°) Déterminer quatre réels u_1, u_2, u_3, u_4 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{u_1 t + u_2}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{u_3 t + u_4}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}.$$

10°) Exprimer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt$.

11°) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt$.

12°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
En déduire la valeur de $\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1)$.

13°) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\, dt$ aussi simple que possible.

Problème 2 : puissances descendantes

Partie I : Quelques sommes

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose $x^{\underline{m}} = \displaystyle\prod_{i=0}^{m-1}(x-i)$. En particulier, $x^{\underline{0}} = 1$.
$x^{\underline{m}}$ est appelé "x à la puissance m descendante".

1°) On convient que, lorsque $m, k \in \mathbb{N}$ avec $m > k$, le coefficient binomial $\binom{k}{m}$ est nul. Montrer que, pour tout $m, k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{k}{m} = \frac{k^{\underline{m}}}{m!}$.

2°) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $(-1)^{\underline{m}}$ en fonction de $m!$.

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que $x^{\underline{m+1}} = x \times (x-1)^{\underline{m}} = x^{\underline{m}} \times (x-m)$.
b) En déduire que $(m+1)x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m+1}} - x^{\underline{m+1}}$.

4°) **a)** Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}}$: on écrira le résultat en fonction d'une puissance descendante.
b) Retrouver à partir de la question précédente les expressions simplifiées des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^m$ pour $m \in \{1, 2\}$, où $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$: on écrira le résultat sous la forme d'un coefficient binomial.
Donner une preuve combinatoire de cette égalité.

Partie II : une pseudo-formule du binôme

5°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, $(x+y)^{\underline{m}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle\binom{x}{m} = \frac{x^{\underline{m}}}{m!}$.

6°) **a)** Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\binom{-1}{m}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, montrer que $\binom{x}{m} + \binom{x}{m+1} = \binom{x+1}{m+1}$.
Comment s'appelle cette formule lorsque x est un entier naturel ?

c) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k}\binom{y}{m-k} = \binom{x+y}{m}$.

7°) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^m \binom{x-1}{m}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\binom{2k}{k} = (-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$.

c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{2k}{k}\binom{2(m-k)}{m-k} = 4^m$.

Partie III : puissances descendantes négatives

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^{\underline{-m}} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(x+i)}$.

8°) a) Pour quels réels x la quantité $x^{\underline{-m}}$ est-elle définie ?
b) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est défini, montrer que $(m+1)x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m+1}} - x^{\underline{m+1}}$.

9°) Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{m}} = \frac{m}{m-1}$.