MP*1

Réduction des endomorphismes (II)

1 Algèbres monogènes

1. (*) Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, a dans A et P dans $\mathbb{K}[X]$. À quelle condition $P(a)$ est-il dans A^* ?
2. Les notations sont celles de l'exercice précédent. À quelle condition $\mathbb{K}[a]$ est-il un anneau à division ? un anneau réduit ?
3. (***) *Produits d'algèbres monogènes*

   a) Soient $\mathbb{K}$ un corps infini, A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie et monogènes : $A = \mathbb{K}[x]$, $B = \mathbb{K}[y]$ avec $x \in A$ et $y \in B$.

   Montrer que $A \times B$ est une $\mathbb{K}$-algèbre monogène.

   b) Donner un exemple prouvant que le résultat de a) ne subsiste pas pour un corps fini.
4. (**) *Éléments $\mathbb{K}$-conjugués*

   Soient x et y deux éléments algébriques d'une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{A}$. À quelle condition existe-t-il un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres σ de $\mathbb{K}[x]$ dans $\mathbb{K}[y]$ envoyant x sur y ?
5. Soient u dans $\mathcal{L}(E)$, P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, $\Delta = P \wedge Q$ et $M = P \vee Q$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta(u))$, $\mathrm{Im}(\Delta(u))$, $\mathrm{Ker}(M(u))$ et $\mathrm{Im}(M(u))$.
6. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace de dimension finie E. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E de la forme $\mathrm{Ker}(P(f))$ avec P dans $\mathbb{K}[X]$ est fini. Quel est son cardinal ?
7. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace de dimension finie E. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E de la forme $\mathrm{Im}(P(f))$ avec P dans $\mathbb{K}[X]$ est fini. Quel est son cardinal ?
8. (***) *Sous-algèbres monogènes*

   a) Montrer que la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée des matrices diagonales est de la forme $\mathbb{C}[A]$.

   b) Montrer qu'il n'existe pas de sous-algèbre monogène de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ contenant $E_{1,2}$ et $E_{1,3}$.
9. Décrire les couples (A, B) de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :
$$B \in \mathbb{K}[A] \quad \text{et :} \quad A \in \mathbb{K}[B].$$
10. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer
$$A \in \mathbb{R}[B].$$
    Le résultat subsiste-t-il en remplaçant partout $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

11. a) Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de dimension finie. Montrer $A = \mathbb{C}1_A$.

b) Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme N sur A telle que

$$\forall (a,b) \in A^2, \qquad N(ab) = N(a)\,N(b).$$

Que dire de A ?

2 Polynômes annulateurs

12. (*) Calculer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une matrice de dilatation (resp. transvection.

13. (**) Calculer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une matrice de permutation.

14. Soient $n \geq 2$, m un réel, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice réelle à diagonale nulle telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \qquad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = m^{j-i}.$$

a) Trouver le polynôme minimal de A.

b) Prouver que A est inversible, calculer A^k si $k \in \mathbb{Z}$.

15. (*) Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le polynôme minimal de :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & B \end{array}\right)$$

en fonction de Π_A et Π_B.

16. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \bigcirc & B \end{array}\right).$$

Que peut-on dire de Π_M ?

17. (**) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline 0 & A \end{array}\right).$$

Calculer Π_B en fonction de Π_A.

18. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$, P dans $\mathbb{C}[X]$ non constant. Déterminer le polynôme minimal de $P(D)$.

19. (**) *Lien entre le rang et le degré du polynôme minimal*
Montrer que si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de rang r, Π_A est de degré au plus $r+1$.

20. Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, P dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\ P(u)) \geq \deg\,(P \wedge \Pi_u).$$

21. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + 3M = I_3$. Montrer, si M n'est pas une homothétie, que M est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$$

si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

23. (***) *Endomorphismes semi-simples*
Un endomorphisme u du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E est dit *semi-simple* si et seulement si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u. [1]

a) Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, montrer que les endomorphismes semi-simples de E sont les endomorphismes diagonalisables.

b) Dans le cas général, montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si et seulement si Π_u s'écrit $\prod_{i=1}^{r} P_i$ où $r \in \mathbb{N}^*$ et où les P_i sont des polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts.

c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est semi-simple si et seulement s'il existe une base e de E telle que $Mat_e\, u$ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_m & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 & & \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ -b_p & a_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

24. *Matrices annulées par un polynôme*
Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, à quelle condition existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P(M) = 0$?

c) Si $\mathbb{K}$ est quelconque et P irréductible sur $\mathbb{K}$, à quelle condition existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(M) = 0$?

d) Généraliser.

---

1. La terminologie vient de la théorie des modules : un module est semi-simple si tout sous-module est facteur direct. Il s'agit ici de la structure de $\mathbb{K}[X]$-module sur E définie par l'endomorphisme u.

25. *Action d'un couple d'endomorphismes sur un produit*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$ et v dans $\mathcal{L}(F)$, F l'endomorphisme de $E \times F$ défini par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad F(x, y) = (u(x), v(y)).$$

a) On suppose $\Pi_n \wedge \Pi_v = 1$. Montrer que les sous-espaces de $E \times F$ stables par F sont les $E' \times F'$ où E' (resp. F') est un sous-espace de E (resp. F) stable par u (resp. v).

b) On suppose $u = v$ et E non nul. Montrer que le résultat de a) est faux.

3 Spectre et annulateurs

26. (*) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(M^3 - 3M^2 + 2M)^4 = 0$. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{N}$.
27. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace n et telles que

$$M^5 = M^2.$$

28. (*) Soit E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M = 6I_n$. Quel est l'image de E par l'application déterminant ?
29. (*) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que det $A > 0$.
30. Soit n un entier ≥ 3. Trouver les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que toutes les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P(A) = 0$ aient un déterminant > 0.
31. Trouver toutes les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(A) = 8.$$

32. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2. Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme minimal P ?
33. Montrer qu'il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace rationnelle telle que :

$$I + A + A^2 + A^3 + A^4 = 0$$

si et seulement si 4 divise n.
34. Soient p un nombre premier, $A \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{C})$ telle que

$$A^{p+1} = A \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(A) = 0.$$

Montrer que $A = 0$.

Indication. Le polynôme $\Phi_p = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
35. *Valeurs propres de $M \longmapsto AM - MB$*
Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad \Phi_{A,B}(M) = AM - MB.$$

a) On suppose que A et B sont trigonalisables et sans valeur propre commune. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est inversible.

Indication. Soit M dans le noyau de $\varphi_{A,B}$. Montrer

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad P(A)M = MQ(B).$$

b) Montrer que, si α (resp. β) est une valeur propre de A (resp. B), alors $\alpha - \beta$ est une valeur propre de $\Phi_{A,B}$. En déduire la réciproque de a).

c) On ne fait plus d'hypothèse de trigonalisabilité. À quelle condition nécessaire et suffisante $\Phi_{A,B}$ est-il inversible ?

4 Diagonalisabilité, trigonalisabilité et polynômes annulateurs

36. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^3 - M^2 - 2M \neq 0$ et $(M^3 - M^2 - 2M)^2 = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
37. Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^q = M$.
38. Soient $n \in \mathbb{N}*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose :

$$\forall (i,j,k) \in \{1,\ldots,n\}^3, \qquad A_{i,k}A_{k,j} = A_{i,j}A_{k,k}.$$

Étudier le spectre de A et sa diagonalisabilité.

39. Soit P un polynôme de $K[X]$ scindé à racines simples de degré $r \geq 1$. Il est clair que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ P(M) = 0\}$ est stable par similitude. Montrer que E est, en fait, réunion d'un nombre fini à préciser de classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
40. (*) Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

- $\exists s \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^s = I_n$,

- $\mathrm{Tr}(A) = n$.

41. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -\lambda A$ où $\lambda > 0$. Montrer que le rang de A est pair.
42. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^q = I_n$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\dim \mathrm{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{Tr}(A^i).$$

43. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
- $\forall j \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\mathrm{Tr}(M^j) = 0$,
- $\mathrm{Tr}(M^n) \neq 0$.
Montrer que M est diagonalisable.
44. (**) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, X une partie génératrice finie de E, u un endomorphisme de E tel que $u(X) = X$. Montrer que u est diagonalisable.

45. (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f, u et v dans $\mathcal{L}(E)$, α et β dans $\mathbb{K}$. On suppose que si $i \in \{1, 2, 3\}$, $f^i = \alpha^i u + \beta^i v$. Montrer que f est diagonalisable.
46. Soient C dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, L dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & C \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
47. (*) a) Montrer que s'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = -I_n$, alors n est pair.

b) Supposons n pair. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$ si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale par blocs dont la diagonale est formés de $n/2$ blocs : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
48. Donner le nombre de classes de similitude de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = M$. Même question avec les équations $M^3 = M$, $M^4 = M$.
49. Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq -I_3$ et $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$. Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

50. (*) *Matrice de la transformation de Fourier discrète*

Soit $M = \left(e^{2i\pi(j-1)(k-1)/n}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$. Calculer M^4, et en déduire que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
51. *Matrice circulante ($K = \mathbb{C}$)*
Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que M est diagonalisable ; préciser une matrice diagonale semblable à M.
52. *Matrice circulante ($K = \mathbb{F}_p$)*
Soient p un nombre premier, $(a_0, \ldots, a_{p-2}) \in {\mathbb{F}_p}^{p-1}$, et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{F}_p).$$

Montrer que M est diagonalisable ; préciser une matrice diagonale semblable à M.

53. (**) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

54. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à quelle condition $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right)$ est-elle diagonalisable ?

55. (**) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ est-elle diagonalisable ?

56. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$ est-elle diagonalisable ?

57. *Lien entre la daigonalisabilité de u et celle de u^2*

    a) Soit u un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

    b) Que dire si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

58. (**) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable.

59. Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que $u^2 - 4u$ soit diagonalisable. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

60. Soient m dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A^m diagonalisable. Montrer que A^{m+1} est diagonalisable.

61. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $P(u)$ soit diagonalisable et $P'(u)$ inversible. Montrer que u est diagonalisable.

62. Soient A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A - A^{-1}$ l'est.

63. (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des complexes deux à deux distincts.

    a) On suppose qu'existent des endomorphismes $u_1, \dots, u_r$ de E tels que :

    $$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) u_i.$$

    Montrer que u est diagonalisable.

    b) On suppose que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Montrer qu'il existe un unique $(u_1, \dots, u_r)$ de $\mathcal{L}(E)^r$ tel que :

    $$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) u_i.$$

    Décrire les u_i.

64. Calculer le polynôme minimal de

    $$L_A \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

    où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est fixé. À quelle condition L_A est-il diagonalisable ?

65. (*) *Trigonalisabilité d'un induit*

Soient f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et V un sous-espace de E stable par f. Montrer que si f est trigonalisable, il en est de même de $f|_V$.

66. Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est trigonalisable si et seulement si $(M^q - M)^n = 0$.

5 Sous-espaces caractéristiques

67. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, la valuation de Π_u est le plus petit entier p de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1}).$$

68. Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer, si λ est valeur propre de u, que le projecteur sur le sous-espace caractéristique de u associé à λ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques est un polynôme en u.

69. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = \{0\}.$$

70. Combien y-a-t-il de classes de similitude de matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = M^5$? Même question en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

71. *Décomposition $D + N$*

Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E dont le polynôme minimal est scindé.

a) Montrer qu'il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que

$$f = d + n \quad , \quad d \circ n = n \circ d.$$

b) Montrer que d et n appartiennent à $\mathbb{K}[u]$.

72. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. À quelle condition f n'a-t-il qu'un nombre fini de sous-espaces stables ?

73. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. À quelle condition f n'a-t-il qu'un nombre fini de drapeaux stables ?

74. *Valeur propre semi-simple*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ dans $\mathbb{K}$.

a) Montrer l'équivalence entre :

i) $\mathrm{Ker}(f - \lambda I_d) = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^2$,

ii) $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda Id) = E$,

iii) il existe un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f - \lambda \text{ Id })$ dans E stable par f,

iv) la multiplicité de λ dans χ_f est égale à $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$,

v) λ est racine simple de Π_f.

b) Si les conditions de a) sont réalisées [2], montrer que Im $(f - \lambda \text{ Id })$ est le seul supplémentaire de $\text{Ker}(f - \lambda Id)$ stable par f.

75. (**) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Im}(P(u)) = E.$$

76. (**) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent à au moins une matrice nilpotente non nulle ?

77. *Décomposition semi-simple - unipotent pour $GL_n(\mathbb{F}_p)$*
Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, g dans $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer qu'il existe un unique couple (u, s) d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ tels que $g = u \circ s$, $us = su$, $u - I_n$ soit nilpotent et s d'ordre premier à p.

6 Équations matricielles

78. *Racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*
a) Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, montrer que l'équation $X^2 = \lambda I + N$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a au moins une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, montrer que l'équation $X^2 = M$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a au moins une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

79. *Les puissances n-ièmes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*
Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une puissance n-ième dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2).$$

80. Quelles sont les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ non constant, l'équation $P(M) = A$ d'inconnue M admette au moins une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

81. Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que l'application

$$M \mapsto P(M)$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est surjective si et seulement si pour tout complexe λ, il existe un antécédent μ de λ tel que $P'(\mu) \neq 0$.

82. Déterminer l'image de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par l'application $M \mapsto M^3$.

7 Topologie

83. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. On dit alors que λ est une valeur propre semi-simple de u.

84. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

85. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

86. (**) Trouver l'adhérence et l'intérieur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } M^p = I_n\}.$$

87. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.

b) Réciproquement, si 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que M est nilpotente.

88. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Montrer que D est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.

89. (***) *Classe de similitude fermée*
Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a sa classe de similitude fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si elle est diagonalisable. [3]

90. (**) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^2 = M\}$ est un fermé non compact d'intérieur vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ? Quels sont ses points isolés ?

91. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^2 = I_n\}$ est un fermé non compact d'intérieur vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ? Quels sont ses points isolés ?

92. *Points isolés d'une classe de similitude*
Le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non scalaire. Montrer que la classe de similitude de M n'a pas de points isolés.

93. *Généralisation des deux exercices précédents*
Soit P dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que l'ensemble

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(M) = 0\}$$

est un fermé d'intérieur vide ; est-il borné ? Déterminer ses composantes connexes par arcs et ses points isolés.

94. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1, à racines simples et

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(M) = 0\}.$$

Si $M_0 \in \mathcal{E}$, montrer que toute matrice de $\mathcal{E}$ proche de M_0 est semblable à M_0. Le résultat est-il vrai si on ne suppose pas les racines simples ?

95. a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la classe de similitude de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la classe de similitude de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a au plus deux composantes connexes par arcs et caractériser le cas d'égalité.

3. La réduction de Jordan permet de calculer l'adhérence d'une classe de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

96. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.
97. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ et A diagonalisable. Montrer qu'il existe une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad AB_k = B_kA \quad \text{et} \quad B_k \longrightarrow B.$$

98. Quelle est l'adhérence de $\{(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \text{A est semblable à B}\}$?

8 Puissances d'un endomorphisme, d'une matrice

99. (**) *Étude asymptotique des puissances d'une matrice*
a) Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^k \to 0$ quand $k \to +\infty$.
b) Même question avec d'abord $(A^k)_{k\geq 0}$ bornée, puis avec $(A^k)_{k\geq 0}$ convergente.
100. (**) *Somme des puissances d'une matrice*
Montrer , si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\sum_{k\geq 0} A^k \text{ converge } \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Quelle est la somme de la série ?
101. Montrer, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Tr}(A^k) \to 0 \ \Leftrightarrow \ A^k \to 0.$$

102. (**) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour une certaine norme d'algèbre N, on ait $N(A) \leq 1$. Montrer que la multiplicité de 1 dans le polynôme minimal de A est ≤ 1 [4].
103. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ soit bornée et que $(A - I_n)^2B = 0$. Montrer que $(A - I_n)B = 0$
104. *Absence d'hypercyclicité en dimension finie*
Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il n'existe pas de x dans $\mathbb{C}^n$ tel que

$$\{A^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

soit dense dans $\mathbb{C}^n$.
105. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E)$. Déterminer l'ensemble des x de E tels que

$$f^{(k)}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

106. (**) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer l'ensemble des f de $\mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout x de E :

$$\{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

soit fini.

4. C'est-à-dire que 1 est valeur propre semi-simple de A s'il en est valeur propre.

107. (***) *Dynamique associée à un élément de $SL_2(\mathbb{R})$*
Soit A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \ \|$. La suite $(X_k)_{k\geq 0}$ est définie par son premier vecteur X_0 tel que $\|X_0\| = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_{k+1} = \frac{AX_k}{\|AX_k\|}.$$

Étudier le comportement de $(X_k)_{k\geq 0}$.

108. (**) *Moyennes de Cesàro des puissances d'un endomorphisme*
Soient E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $(f^n)_{n\geq 0}$ bornée et, si $n \geq 0$, on pose :

$$g_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k.$$

a) Étudier la convergence de $(g_n(x))$ si x est dans le noyau, puis dans l'image, de l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}$.

b) Montrer que (g_n) converge vers un endomorphisme que l'on précisera.

109. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres de module 1, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour k dans $\mathbb{N}^*$:

$$U_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^i M A^{-i}.$$

Montrer que la suite $(U_k)_{k\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

110. *Itérées d'un opérateur de Bernstein*
Soient E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, p dans $\mathbb{N}$, B l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction polynomiale définie par

$$\forall x \in [0,1], \qquad B(f)(x) = \sum_{k=0}^{p} f\left(\frac{k}{p}\right)\binom{p}{k} x^k (1-x)^{p-k}.$$

Montrer que, pour f dans E, $(B^n(f))_{n\geq 0}$ converge vers un élément de E que l'on précisera.

111. Soient g une surjection continue et croissante de $[0,1]$ sur lui-même, V un sous-espace de dimension finie de l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que V est stable par composition à droite par g i.e :

$$\forall f \in V, \qquad f \circ g \in V.$$

Montrer que pour tout $f \in V$, $f \circ g = f$.

Considérer l'endomorphisme Φ de V défini par

$$\forall f \in V, \qquad \Phi(f) = f \circ g.$$

112. Soit A dans $\mathrm{GL}n(\mathbb{Z})$ telle que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ soit bornée. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ est périodique.

113. *Jeu de saute-mouton*

On considère trois suites $(A_n)_{n\geq 0}$, $(B_n)_{n\geq 0}$ et $(C_n)_{\geq 0}$ de points de $\mathbb{R}^3$ obéissant aux relations suivantes :

- B_n est le milieu de $[A_n, A_{n+1}]$,
- C_n est le milieu de $[B_n, B_{n+1}]$,
- A_{n+1} est le milieu de $[C_n, C_{n+1}]$.

Quels sont les triplets (A_0, B_0, C_0) tels que $(A_n)_{n\geq 0}$, $(B_n)_{n\geq 0}$ et $(C_n)_{n\geq 0}$ soient toutes trois bornées ?

114. Soient n un entier ≥ 2 et $\alpha \in]0,1]$. On définit n suites $\theta^i = (\theta^i_k)_{k\geq 0}$ pour $1 \leq i \leq n$ par : $(\theta^1_0, \theta^2_0, \ldots, \theta^n_0) \in \mathbb{C}^n$ et, si $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $k \geq 1$,

$$\theta^i_k = \alpha\theta^i_{k-1} + (1-\alpha)\theta^{i+1}_{k-1},$$

en convenant que $\theta_{n+1} = \theta_1$.

Montrer que les n suites θ^i pour $1 \leq i \leq n$ convergent.

9 Sous-groupe du groupe linéaire

115. (*) *Les éléments d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ sont diagonalisables*

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les éléments de G sont diagonalisables.

116. Soit M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. Montrer :

$$M^{12} = I_2.$$

117. (**) *Ordre d'un élément de $GL_n(\mathbb{Z})$*

Soient n un entier ≥ 2 et $E = \{\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \exists s \geq 1,\ M^s = I_n \,\}$.

Montrer qu'il existe $\gamma_n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall M \in E, \qquad M^{\gamma_n} = I_n.$$

118. (***) *Un théorème de Minkovski*

Soit d un entier ≥ 3.

a) Montrer, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ s'écrit $I_n + dM$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et vérifie $A^k = I_n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, que $A = I_n$.

b) Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$.

c) Conclure : il n'y a, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

119. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que G est cyclique ; quels sont les ordres possibles pour G ?

Indication. On montrera que G est conjugué dans $GL_2(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $SO_2(\mathbb{R})$.

120. *Majoration du cardinal d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$*
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

a) Montrer que, pour tout P dans $\mathbb{Z}[X]$, $\sum_{g\in G} P(\mathrm{Tr}(g))$ est divisible par $|G|$.

Indication. Pour $P = X$: la dimension de l'espace des points fixes communs aux éléments d'un groupe fini est la moyenne des traces des éléments de ce groupe ; puis produit tensoriel pour $P = X^k, k \geq 2$.

b) On écrit $\mathrm{Tr}(G) = \{t_1, \ldots, t_r\}$ où $t_1 = n$. Montrer que $|G|$ divise

$$\prod_{i=2}^{r}(n - t_i)$$

et que ce nombre divise $(2n)!$.

c) Retrouver le théorème de Minkovski deux exercices plus haut. Comparer les bornes obtenues dans les deux exercices.

121. *Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini.*
Soient N dans $\mathbb{N}^*$, G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall g \in G, \qquad g^N = I_n.$$

a) Quels sont les éléments de G de trace égale à n ?

b) On choisit $g_1, \ldots, g_r$ dans G formant une base de Vect G dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \to & \mathbb{C}^r \\ & g & \mapsto & (\mathrm{Tr}(gg_1), \ldots, \mathrm{Tr}(gg_r)) \end{array}$$

est injective.

c) Conclure que l'on a le théorème de Burnside :

$$|G| \leq N^{n^3}.$$

122. *Généralisation du précédent*
a) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé de matrices diagonalisables et tel que $\mathrm{Tr}(G)$ soit fini. On se propose de montrer que G est fini. À cet effet, on choisit $g_1, \ldots, g_r$ dans G formant une base de Vect G dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \to & \mathbb{C}^r \\ & g & \mapsto & (\mathrm{Tr}(gg_1), \ldots, \mathrm{Tr}(gg_r)) \end{array}$$

est injective, et conclure.

b) Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

123. (***) *Formule de Molien*
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On fait agir G de façon naturelle sur l'espace des polynômes homogènes de degré k de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, et on

note $\alpha_k(G)$ la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré k de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ fixes sous l'action de G. Si $|z| < 1$, montrer :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(G) z^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det\,(I_n - zg)}.$$

Indication. Dimension de l'espace des points fixes communs aux éléments d'un groupe fini.

124. *« Petits » sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$*
Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que le seul sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule ouverte de centre I_n et de rayon r soit $\{I_n\}$.

125. *Variante de l'exercice précédent*
Si $\| \ \|$ est subordonnée à la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$, montrer que l'on peut prendre $r = \sqrt{3}$ dans l'exercice précédent, et que cette valeur est optimale.

126. *Autre variante : voisinages de l'identité dans $GL_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe infini*
Soit $| \ \|$ la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$.
a) Montrer que la boule ouverte de centre I_n et de rayon 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient un sous-groupe infini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Désormais, on fixe $r < 2$, on considère un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule fermée de centre I_n et de rayon r.
b) Montrer qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall g \in G, \qquad g^p = I_n.$$

c) Soient g_1 et g_2 dans G tels que :

$$\forall g \in G, \qquad \mathrm{Tr}(g_1 g) = \mathrm{Tr}(g_2 g).$$

Montrer : $g_1 = g_2$.

d) Montrer que G est fini.

e) Montrer que la boule ouverte (resp. fermée) de centre I_n et de rayon 2 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contient pas de (resp. contient un) sous-groupe compact infini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

127. a) Soient G un sous-groupe discret non nul de $(\mathbb{C}, +)$, γ dans $\mathbb{C}^*$ tel que :

$$\gamma G = G.$$

Montrer que γ est racine de l'unité, puis que, pour tout k dans $\mathbb{Z}$ non multiple de l'ordre de γ, on a :

$$|\gamma^k - 1| \geq 1.$$

On pourra considérer un élément non nul de G de module minimal.
Conclure que l'ordre de λ divise 4 ou 6. Réciproque ?

b) Soient λ dans $\mathbb{C}^*$, G_λ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les deux matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de λ le sous-groupe G_λ est-il discret ?

128. (***) Déterminer l'adhérence du sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

10 Suites récurrentes linéaires

129. *Le résultat de base*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ avec $a_0 \neq 0$ et E_a l'espace des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}.$$

Donner une base de E_a formée de suites de la forme : $(n^j \lambda^n)_{n \geq 0}$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

130. (**) *Stabilité*

Les notations sont celles de l'exercice précédent.

Soient $a = (a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et $b = (b_0, \ldots, b_{q-1}) \in \mathbb{C}^q$ avec $a_0 b_0 \neq 0$, $u \in E_a$ et $v \in E_b$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $c = (c_0, \ldots, c_r) \in \mathbb{C}^r$ avec $c_0 \neq 0$ tels que uv appartienne à E_c.

Même question avec $u + v$.

131. (**) *Exemples*

a) Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré d. Donner une relation de récurrence linéaire à coefficients constants satisfaite par $(P(n))$.

b) Donner une relation de récurrence linéaire à coefficients constants satisfaite par $(n^2 2^n)$. Idem avec $(n^2 + 2^n)$.

132. *Suites périodiques*

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ périodiques.

a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

b) En donner une base.

Indication. On pourra utiliser l'exercice précédent.

c) Reprendre les questions a) et b) en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

133. (***) Soient $t_1, \ldots, t_p$ des entiers, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des complexes tels que :

$$\forall n \in \{0, \ldots, p-1\}, \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i^n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i^n \in \mathbb{Z}.$$

134. (**) *Sous-espaces de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ stables par le shift*
Soit E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bornées. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans E, soit $T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Il est clair que T est un endomorphisme de E.

Quels sont les sous-espaces de dimension finie de E stables par T ?

135. (**) *Équations différentielles*
Utiliser le lemme de décomposition des noyaux pour déterminer, si $a_0, \ldots, a_{m-1}$ sont dans $\mathbb{C}$, l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont m fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$y^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} a_i y^{(i)} = 0.$$

136. (**) Déterminer les sous-espaces de dimension finie de l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ stables par dérivation.