Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 4 h

RELATIONS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- le langage mathématique.

Une connaissance des propriétés élémentaires des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est nécessaire pour aborder les exemples proposés dans ce chapitre.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Relations

A.1. Relation entre deux ensembles

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.

On appelle relation de E vers F la donnée d'un prédicat $\mathscr{R}$ dépendant de deux paramètres x et y tels que $x \in E$ et $y \in F$. Dans le cas où $\mathscr{R}(x, y)$ est vraie, on dit que x est en relation avec y et on note $x \mathscr{R} y$. Dans le cas contraire, on note $x \not\mathscr{R} y$ (ou $\not\mathscr{R}$ se lit « $\mathscr{R}$ barré »).

On dit que E est l'ensemble de départ de $\mathscr{R}$ et que F est l'ensemble d'arrivée de $\mathscr{R}$.

Le sous-ensemble de $E \times F$ défini par $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F : x \mathscr{R} y\}$ s'appelle le graphe de $\mathscr{R}$.

$\not\mathscr{R}$ est elle-même une relation de E vers F que l'on appelle la relation contraire de $\mathscr{R}$. Elle est caractérisée par $\forall (x, y) \in E \times F,\ (x \not\mathscr{R}\ y) \iff (\overline{x \mathscr{R} y})$. Son graphe est $\overline{\Gamma}$, le complémentaire de Γ dans $E \times F$.

L'énoncé $x \mathscr{R} y$ se traduit par une phrase du type « x *phrase avec un verbe* y » où le verbe dépend évidemment de la nature de la relation.

Exemples :

- Nous étudierons en détail les fonctions, qui sont des relations telle que chaque élément de l'ensemble de départ est en relation avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.
- L'association des symboles des cartes à jouer $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ à l'une des couleurs $\{$**rouge**, **noir**$\}$ est une relation.
- L'association entre un individu et son (ses) prénom(s) est une relation de l'Humanité vers l'ensemble des prénoms.
- La relation de E vers F telle que chacun des éléments de E n'est en relation avec aucun des éléments de F s'appelle la relation vide (on a $\Gamma = \varnothing$). À l'opposé, la relation de E vers F telle que chacun des éléments de E est en relation avec tous les éléments de F s'appelle la relation pleine (on a $\Gamma = E \times F$). Ces deux relations n'ont pas beaucoup d'intérêt.

a. 2. Relation sur un ensemble

Définition 2

Soit E un ensemble. Une relation $\mathscr{R}$ est dite interne sur E si $\mathscr{R}$ est une relation de E vers E. On dit alors que $\mathscr{R}$ est une relation sur E.

Une relation interne est donc une relation qui lie deux éléments d'un même ensemble.

Exemples :

- Sur tout ensemble E, l'égalité $=$ est une relation. Son graphe est la diagonale de E^2, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, x) \in E^2 : x \in E\}$
- Sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on dispose des relations de comparaison $<$, $\leqslant$, $>$ et $\geqslant$.
- Pour tout ensemble E, l'inclusion $\subset$ est une relation sur $\mathscr{P}(E)$.
- Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la relation de congruence modulo 2π par $x \equiv y \pmod{2\pi}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.
- Sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace, on dispose des relations de parallélisme $/\!/$ et de perpendicularité $\perp$.
- Dans la classe de MPSI, on dispose de la relation « être amis avec ».
- Dans $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même signe » définie par $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \mathscr{R} y) \Longleftrightarrow (xy \geqslant 0)$ est une relation interne.

On ne confondra pas les « relations » ($\leqslant$, $\subset$, $/\!/$, ...) et les « opérations » ($+$, $\times$, $\div$, ...). Les premières retournent une valeur booléenne qui indique si, oui ou non, deux éléments sont reliés. Les secondes renvoient un résultat, issu de l'interaction des deux éléments. Autrement dit, les relations sont des assertions et les opérations n'en sont pas.

Par exemple, la divisibilité est une relation alors que la division est une opération.

Les propriétés classiques des relations internes sont listées par la définition suivante.

Définition 3

Une relation interne $\mathscr{R}$ dans un ensemble E est dite

(i)	réflexive	lorsque $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$,
(ii)	transitive	lorsque $\forall x, y, z \in E,\ (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \Longrightarrow (x \mathscr{R} z)$,
(iii)	symétrique	lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y) \Longrightarrow (y \mathscr{R} x)$,
(iv)	antisymétrique	lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x) \Longrightarrow (x = y)$,

Attention, le vocabulaire est trompeur : l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie !

Dans une ville, si $\mathscr{R}$ désigne la relation « être relié par une rue », alors la symétrie de $\mathscr{R}$ s'interprète comme l'absence de sens unique alors que l'antisymétrie signifie qu'il n'y a que des sens uniques !

Exemples :

- La relation d'égalité $=$ est réflexive, transitive symétrique et antisymétrique.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leqslant$ est réflexive, transitive, non symétrique et antisymétrique.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même signe » n'est pas transitive car -1 et 0 ont le même signe, 0 et 1 ont le même signe et pourtant -1 et 1 n'ont pas le même signe.
- L'orthogonalité sur les droites est symétrique mais n'est ni réflexive, ni antisymétrique ni transitive.

a.3. Représentation d'une relation

Il existe diverses manières de représenter le graphe d'une relation :

- **Représentation en tableau ou par une matrice d'incidence** : Si les ensembles E et F sont finis, on peut représenter une relation en utilisant un tableau ou une matrice binaire. Dans les deux cas, le nombre de lignes est le nombre d'éléments de E et le nombre de colonnes est le nombre d'éléments de F. À l'intersection de la ligne correspondant à l'élément $x \in E$ et de la colonne correspondant à l'élément $y \in F$, on place une $\times$ ou un 1 si x est en relation avec y. Dans le cas contraire, on laisse un vide ou on met un 0.

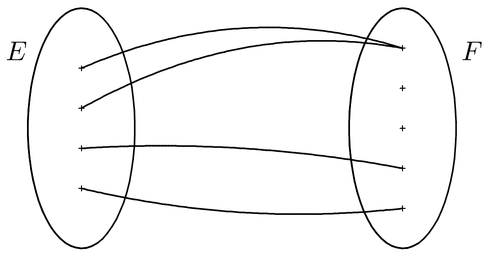
  Dans le cas de la relation entre les symboles des cartes à jouer et les couleurs de ces symboles, on obtient :

	♠	♡	♢	♣
rouge		$\times$	$\times$	
noir	$\times$			$\times$

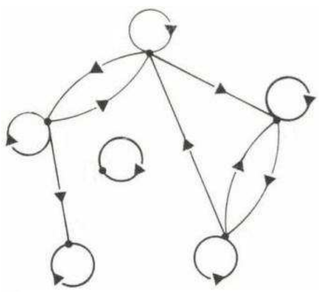
ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Représentation patatoïdale** : On représente la relation par un diagramme saggital dans lequel une flèche va de x vers y si, et seulement si, $x\mathscr{R}y$:

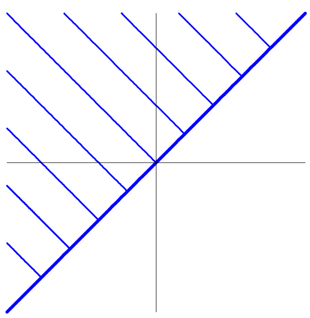


  Lorsque la relation est interne, les flèches relient les points d'un seul ensemble. On obtient donc un graphe orienté du type :



- **Représentation fonctionnelle** : Les ensembles E et F sont portés respectivement par deux droites perpendiculaires formant un repère du plan. La relation entre $x \in E$ et $y \in F$ est représentée par une croix au point de coordonnées (x, y).

  Dans le cas de la relation $\leqslant$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on obtient :



A.4. Opérations sur les relations [✠]

a) Composition

Définition 4

Soient E, F, G trois ensembles et $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ deux relations respectivement de E vers F et de F vers G. On définit la relation composée de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, notée $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$, de E vers G par

$$\forall (x,z) \in E \times G, \qquad (x \, \mathscr{S} \circ \mathscr{R} \, z) \Longleftrightarrow \left(\exists y \in F, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \, \mathscr{R} \, y, \\ y \, \mathscr{S} \, z. \end{array} \right. \right)$$

Il faut faire très attention à l'ordre !! Lorsqu'on compose une relation $\mathscr{R}$ de E vers F avec une relation $\mathscr{S}$ de F vers G, la composée s'écrie « à l'envers » : $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$. Ainsi, dans une composée de relations, la relation de droite agit avant celle de gauche.

Exemples :

- Si $E = F = G$ est l'ensemble des droites du plan et $\mathscr{R} = \mathscr{S} = \perp$, alors $\mathscr{S} \circ \mathscr{R} = //$ est le parallélisme. On peut donc écrire que $\perp \circ \perp = //$.

La proposition suivante justifie l'associativité de la composition des relations.

Proposition 1

Soient E, F, G, H quatre ensembles et $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ trois relations respectivement de E vers F, de F vers G et de G vers H. Alors

$$(\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R} = \mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}).$$

■ Les relations $(\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R}$ et $\mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R})$ ont bien mêmes ensembles de départ et d'arrivée. Soit $(x,t) \in E \times H$. On a

$$\begin{aligned} x \, (\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R} \, t & \Longleftrightarrow \left(\exists y \in F, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \, \mathscr{R} \, y \\ y \, \mathscr{T} \circ \mathscr{S} \, t \end{array} \right. \right) \Longleftrightarrow \left(\exists y \in F, \ \exists z \in G, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \, \mathscr{R} \, y \\ y \, \mathscr{S} \, z \\ z \, \mathscr{T} \, t \end{array} \right. \right) \\ & \Longleftrightarrow \left(\exists z \in G, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \, \mathscr{S} \circ \mathscr{R} \, z \\ z \, \mathscr{T} \, t \end{array} \right. \right) \Longleftrightarrow x \, \mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}) \, t. \end{aligned}$$

ce qui démontre l'associativité de la composition. ■

Si la composition des relations est une opération associative, ce n'est, en revanche, pas une opération commutative. D'une part, l'existence de $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ n'assure pas celle de $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$. D'autre part, même lorsque $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ et $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ existent toutes les deux, elles peuvent être différentes.

Exemples :

- Dans une population, les relations $\mathscr{R}$: « être l'enfant de » et $\mathscr{S}$: « être l'ami de » ne commutent pas car les parents de mes amis ne sont pas nécessairement les amis de mes parents.

b) Relation réciproque

Définition 5

Soient E, F deux ensembles, $\mathscr{R}$ une relation de E vers F. On définit la relation réciproque de $\mathscr{R}$, notée $\mathscr{R}^{-1}$, de F vers E, par

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad (y\,\mathscr{R}^{-1}\,x) \Longleftrightarrow (x\,\mathscr{R}\,y).$$

Attention, il ne faut pas confondre la relation réciproque et la relation contraire.

Exemples :

- La relation $\leqslant$ admet $\geqslant$ comme réciproque (alors que sa relation contraire est $>$).
- La relation réciproque qui lie un individu à son groupe sanguin est la relation qui associe à un groupe sanguin l'ensemble de tous les individus qui ont ce groupe sanguin.

La proposition suivante rassemble les deux principales propriétés de la relation réciproque.

Proposition 2

Soient E, F, G trois ensembles et $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ deux relations respectivement de E vers F et de F vers G. On a

(i) $(\mathscr{R}^{-1})^{-1} = \mathscr{R}$.

(ii) $(\mathscr{S} \circ \mathscr{R})^{-1} = \mathscr{R}^{-1} \circ \mathscr{S}^{-1}$.

■ (i) est immédiat.

Démontrons (ii). Pour tout $(x,z) \in E \times G$, on a

$$\begin{aligned} z\,(\mathscr{S}\circ\mathscr{R})^{-1}\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad x\,\mathscr{S}\circ\mathscr{R}\,z \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists y \in F, \quad \left\{ \begin{array}{l} x\,\mathscr{R}\,y \\ y\,\mathscr{S}\,z \end{array} \right. \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists y \in F, \quad \left\{ \begin{array}{l} z\,\mathscr{S}^{-1}\,y \\ y\,\mathscr{R}^{-1}\,z \end{array} \right. \right) \quad \Longleftrightarrow \quad z\,\mathscr{R}^{-1}\circ\mathscr{S}^{-1}\,x \end{aligned}$$

ce qui démontre bien que $(\mathscr{S} \circ \mathscr{R})^{-1} = \mathscr{R}^{-1} \circ \mathscr{S}^{-1}$. ■

Le résultat (ii) est souvent appelé la « propriété des chaussettes et des chaussures ». Le matin, en enfilant vos chaussettes puis vos chaussures, vous créez une relation $\mathscr{R}$ entre vos pieds et vos chaussettes puis une relation $\mathscr{S}$ entre vos pieds munis de chaussettes et vos chaussures. Le soir, pour retrouver vos beaux petits petons, vous devez d'abord appliquer la relation $\mathscr{S}^{-1}$ qui retire les chaussures puis la relation $\mathscr{R}^{-1}$ qui otent vos chaussettes.

c) Restriction

Définition 6

Soient E, F deux ensembles et $\mathscr{R}$ une relation de E vers F. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. On appelle restriction de $\mathscr{R}$ de A vers B la relation, notée $\mathscr{R}\Big|_A^B$, définie par

$$\forall (x, y) \in A \times B, \qquad x\, \mathscr{R}\Big|_A^B\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x\, \mathscr{R}\, y.$$

Exemples :

- Sur $\mathbb{N}$, on note $\mid$ la relation de divisibilité. La relation induite par $\mid$ sur l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers est alors l'égalité. En effet, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \mid p_2$ alors p_1 est un diviseur de p_2. Or, comme p_2 est premier, ses seuls diviseurs sont 1 et p_2, ce qui implique que $p_1 = p_2$ puisque $p_1 \neq 1$ (le nombre 1 n'étant pas premier).

B. Relations d'équivalence

B.1. Définition

Définition 7

Une relation $\sim$ sur E est une relation d'équivalence lorsqu'elle est :

(i) réflexive, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ x \sim x$;

(ii) transitive, c'est-à-dire $\forall x, y, z \in E,\ (x \sim y \text{ et } y \sim z) \Longrightarrow (x \sim z)$;

(iii) symétrique, c'est-à-dire $\forall x, y \in E,\ (x \sim y) \Longleftrightarrow (y \sim x)$.

Une relation d'équivalence soit se comprendre comme « une égalité modulo certains critères ».

Par conséquent, on peut (presque) toujours exprimer l'assertion $x \sim y$ par une phrase du type « x a le même .... que y »

Exemples :

- L'équivalence logique $\boxed{\Longleftrightarrow}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des assertions d'une théorie mathématique.
- L'égalité $=$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence sur E.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation de congruence $\equiv$ modulo un nombre réel T (définie par $x \equiv y \pmod{T}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + kT$) est une relation d'équivalence.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même signe » n'est pas une relation d'équivalence (nous avons dit qu'elle n'est pas transitive). Par contre, sa restriction à $\mathbb{R}^*$ est bien une relation d'équivalence.
- Le parallélisme dans le plan ou l'espace est une relation d'équivalence.

  Par contre, la perpendicularité n'en est pas une puisqu'elle n'est ni réflexive ni transitive.
- On considère en général que la relation d'amitié est une relation d'équivalence (même s'il n'est pas toujours évident qu'un individu soit ami avec lui-même ni même avec les amis de ses amis).[†]

(†) L'amour n'est pas une relation d'équivalence. Elle n'est ni réflexive, ni transitive ! Ginette aime Raymond. Mais Raymond aime Berthe. Et curieusement, Ginette n'aime pas du tout Berthe (mais alors pas du tout !).

$\mathcal{B}$.2. Classe d'équivalence et ensemble-quotient

Définition 8

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

Pour tout $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$ l'ensemble noté $\widehat{x}$ défini par

$$\widehat{x} = \{y \in E : x \sim y\},$$

c'est-à-dire l'ensemble constitué de tous les éléments équivalents (au sens de $\sim$) à x.

Tout élément de $\widehat{x}$ est appelé un représentant de $\widehat{x}$.

On appelle ensemble-quotient de E par $\sim$ l'ensemble, noté $E/\sim$, des classes d'équivalence modulo $\sim$, c'est-à-dire

$$E/\sim = \{\widehat{x} : x \in E\}.$$

Si $x \sim y$, alors $\widehat{x} = \widehat{y}$.

Pour trouver la classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ modulo une relation d'équivalence $\sim$, il faut donc résoudre l'équation $x \sim y$, où y est l'inconnue.

On notera bien que $E/\sim$ est un ensemble de parties de E (c'est un ensemble d'ensembles).

Exemples :

- Dans un ensemble quelconque E, la classe d'équivalence de x modulo l'égalité $=$ est $\{x\}$, c'est-à-dire $\widehat{x} = \{x\}$. On a donc $E/_{=} = \big\{\{x\} : x \in E\big\}$.
- Dans l'ensemble des droites du plan muni de la relation de parallélisme, la classe d'équivalence de la droite $\mathscr{D}$ est la direction de $\mathscr{D}$.
- En MPSI munie de la relation d'amitié, l'ensemble quotient contient les groupes d'amis.
- L'ensemble quotient obtenu en munissant $\mathbb{R}$ de la relation de congruence modulo 2π est noté $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Il correspond à l'ensemble des angles.
- L'ensemble quotient obtenu en munissant $\mathbb{Z}$ de la relation de congruence modulo n (où $n \in \mathbb{N}^*$) est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est dans cet ensemble que l'on effectue des calculs lorsqu'on travaille modulo n en arithmétique.

La proposition suivante montre que les classes d'équivalence permettent de découper l'ensemble E en regroupant les éléments qui ont une propriété en commun.

Proposition 3

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors

(i) une classe d'équivalence n'est jamais vide ;

(ii) l'union de toutes les classes d'équivalence est égale à E ;

(iii) deux classes d'équivalence sont ou bien égales, ou bien disjointes.

Autrement dit, $E/\sim$ forment une partition de E.

■ (i) AQT

(ii) La réunion de toutes les classes vaut E car $\forall x \in E,\ x \in \widehat{x}$.

(iii) Soient $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ deux classes non disjointes. Alors il existe $z \in \widehat{x}$ et $z \in \widehat{y}$, c'est-à-dire $x \sim z$ et $y \sim z$. Par transitivité, on obtient $x \sim y$, ce qui prouve que $\widehat{x} = \widehat{y}$. ■

En algèbre, le passage au quotient est un outil puissant de création d'ensembles. Il permet en particulier de supprimer les doublons : lorsque plusieurs éléments partagent une même propriété qui les relie, le passage au quotient permet de considérer que ces éléments n'en forment qu'un seul ! 2 h 00

C. Relations d'ordre

C.1. Ordre

Définition 9

Une relation $\preccurlyeq$ sur E est une relation d'ordre (ou plus simplement un ordre) lorsqu'elle est :

(i) réflexive, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ x \preccurlyeq x$;

(ii) transitive, c'est-à-dire $\forall x, y, z \in E,\ (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z) \Longrightarrow (x \preccurlyeq z)$;

(iii) antisymétrique, c'est-à-dire $\forall x, y \in E,\ (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x) \Longrightarrow (x = y)$.

On dit alors que le couple $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ étant donnée (sur un ensemble non vide), on lui associe :

- un ordre strict, noté $\prec$, défini par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \prec y) \Longleftrightarrow (x \preccurlyeq y \text{ et } x \neq y)$$

(la relation $\prec$ n'est plus une relation d'ordre puisqu'elle n'est pas réflexive) ;

- un ordre réciproque, noté $\succcurlyeq$, défini par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \succcurlyeq y) \Longleftrightarrow (y \preccurlyeq x).$$

Exemples :

- Sur tout ensemble, l'égalité $=$ est une relation d'ordre mais, en tant que relation d'ordre, elle n'est pas très intéressante car elle ne permet d'ordonner un élément qu'avec lui-même.
- Sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des relations d'ordre.
- Sur $\mathbb{N}$, la divisibilité est une relation d'ordre. Par contre, ce n'est plus une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ car elle n'y est pas antisymétrique ($n \mid m$ et $m \mid n$ implique seulement $n = \pm m$).
- Si E désigne un ensemble, l'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
- Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, on appelle ordre produit sur $E \times E$ l'ordre $\mathscr{P}$ défini par $(x, y)\mathscr{P}(a, b) \iff (x \preccurlyeq a \text{ et } y \preccurlyeq b)$.
- Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, on appelle ordre lexicographique sur $E \times E$ l'ordre $\mathscr{L}$ défini par $(x, y)\mathscr{L}(a, b) \iff \big((x \neq a \text{ et } x \preccurlyeq a) \text{ ou } (x = a \text{ et } y \preccurlyeq b)\big)$. C'est l'ordre qui permet de ranger les mots dans un dictionnaire.

Définition 10

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et a, b deux éléments de E. On dit que a et b sont comparables lorsque $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$.

Attention, dans un ensemble ordonné, les éléments ne sont pas toujours tous comparables. C'est piègeant lorsque l'on procède à une négation : en général, le contraire de $x \preccurlyeq y$ n'est pas $x \succ y$!!

Exemples :

- Sur $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité, les éléments 2 et 6 sont comparables (car 2 divise 6) mais 3 et 4 ne le sont pas (car 3 ne divise pas 4 et 4 ne divise pas 3).
- Dans $\mathscr{P}(E)$, toutes les parties ne sont pas comparables pour l'inclusion. Cela implique en particulier que le contraire de $A \subset B$ n'est pas $B \subsetneq A$!!

Lorsque l'ensemble ordonné est fini, il est possible de représenter sa structure ordonné à l'aide d'un diagramme.

Diagramme de Hasse

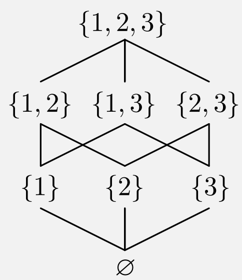
Pour représenter une relation d'ordre sur un ensemble fini E, on peut utiliser un diagramme de Hasse. Cela consiste à ordonner verticalement les éléments de E en reliant (par un trait) chaque paire d'éléments comparables.

Plus précisément, dans un tel diagramme :

- on représente les éléments de l'ordre par des points ;
- si un élément y est plus grand qu'un autre élément x, on place y plus haut que x ;
- le fait que deux éléments sont en relation est représenté par un segment entre ces deux points (du fait de la disposition des points, on n'a pas besoin d'orienter ces segments avec une flèche : on sait que l'on va du bas vers le haut) ;
- pour ne pas charger le schéma, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement ce qui est utile : si $x \preccurlyeq y$, mais qu'il existe z différent de x et de y tel que $x \preccurlyeq z$ et $z \preccurlyeq y$, alors on ne trace pas le segment entre x et y ;
- on ne représente pas les boucles d'un élément vers lui-même ;
- on veille autant que possible à ne pas croiser les segments.

Exemples :

- Si l'on travaille sur l'ensemble $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$ muni de l'inclusion, on obtient le diagramme de Hasse suivant :



C.2. Ordre total

Parmi les relations d'ordre, on distingue celles où tous les éléments sont comparables.

Définition 11

Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E est dite totale lorsque $\forall x, y \in E,\ x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. On dit alors que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Dans le cas où l'ordre n'est pas total, on dit qu'il est partiel.

Le diagramme de Hasse d'une relation d'ordre total est un arbre à une seule branche. Autrement dit, dans un ensemble totalement ordonné, il est possible de ranger les éléments par ordre croissant.

Dans un ensemble totalement ordonné, le contraire de $x \preccurlyeq y$ est $x \succ y$ et le contraire de $x \succcurlyeq y$ est $x \prec y$.

Exemples :

- Sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des relations d'ordre total.
- Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné, l'ordre lexicographique sur $E \times E$ induit par $\preccurlyeq$ est un ordre total.

  Par contre, l'ordre produit sur $E \times E$ induit par $\preccurlyeq$ n'est pas un ordre total (dès que E possède plus de deux éléments).
- Sur $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité n'est pas un ordre total.
- Sur $\mathscr{P}(E)$, l'inclusion n'est pas un ordre total (dès que E possède plus de deux éléments).

C.3. Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément

Définition 12

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

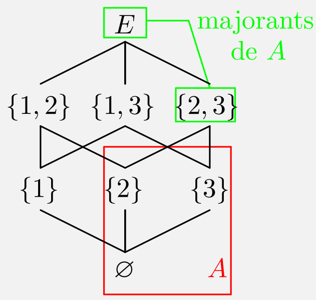
(i) On dit qu'un élément M de E est un majorant de A dans E lorsque
$$\forall a \in A, \quad a \preccurlyeq M.$$

(ii) On dit qu'un élément m de E est un minorant de A dans E lorsque
$$\forall a \in A, \quad m \preccurlyeq a.$$

On dit que A est majorée (respectivement minorée) dans E lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement au moins un minorant) dans E. On dit qu'elle est bornée dans E lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Exemples :

- Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, les minorants de $[0; \pi[$ forment $]-\infty; 0]$ et les majorants forment $[\pi; +\infty[$.
- Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $|$, l'ensemble des minorants de $\{2; 6; 14\}$ est $\{1; 2\}$ et l'ensemble des majorants est l'ensemble des multiples de 42.
- Sur un diagramme de Hasse, les majorants d'une partie sont les éléments reliés directement ou indirectement (i.e. par l'indermédiaire d'un ou plusieurs autres éléments) à tous les éléments de cette partie.
  Si l'on reprend l'exemple de $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$ ordonné par l'inclusion, la partie $A = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}\}$ admet $\{2,3\}$ et $E = \{1,2,3\}$ comme majorants :



L'énoncé suivant évoque le cas où une partie est majorée ou minorée par l'un de ses éléments.

Définition 13

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

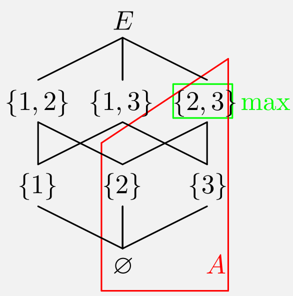
(i) Si A possède un majorant dans E qui est dans A, alors ce majorant est unique. On l'appelle le plus grand élément de A (ou maximum de A) et on le note $\max A$.

(ii) Si A possède un minorant dans E qui est dans A, alors ce minorant est unique. On l'appelle le plus petit élément de A (ou minimum de A) et on le note $\min A$.

■ Supposons que $\alpha, \beta \in A$ sont des majorants de A dans E. Alors $\alpha \preccurlyeq \beta$ et $\beta \preccurlyeq \alpha$, donc $\alpha = \beta$. D'où l'unicité du plus grand élément. On procède de même pour justifier (ii). ■

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$, on a $\min [0; \pi[= 0$ et $\max [0; \pi[$ n'existe pas.
- Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $|$, on a $\min\{2; 6; 14\} = 2$ et $\max\{2; 6; 14\}$ n'existe pas.
- Toujours dans $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $|$, on a $\min \mathbb{N} = 1$ et $\max \mathbb{N} = 0$ (si ! si !).
- Sur le diagramme de Hasse de $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$ ordonné par $\subset$, la partie $A = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$ admet $\{2,3\}$ comme plus grand élément :



C.4. Bornes supérieure et inférieure

Les notions simples de « plus grand » et de « plus petit élément » se révèlent souvent inutilisables en pratique, parce qu'on n'est pas assuré de l'existence de ces éléments. On leurs préfère bien souvent les notions de bornes supérieure et inférieure (telles qu'elles sont introduites ci-dessous) pour lesquelles les problèmes d'existence sont moins épineux.

Définition 14

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

(i) Si l'ensemble des majorants de A dans E admet un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de A (dans E) et est noté $\sup A$.

(ii) Si l'ensemble des minorants de A dans E admet un plus grand élément, il est appelé borne inférieure de A (dans E) et est noté $\inf A$.

■ Rappelons que, en cas d'existence, un plus petit ou un un plus grand élement est unique. Le singulier utilisé dans cette définition est donc parfaitement justifié. ■

On peut retenir qu'en cas d'existence la borne supérieure est le meilleur des majorants et que la borne inférieure est le meilleur des minorants.

La différence principale entre un plus grand élément et une borne supérieure, c'est que le plus grand élément appartient nécessairement à la partie considérée alors que la borne supérieure peut être en dehors de cette partie.

Nous manipulerons essentiellement les notions de bornes inférieure et supérieure dans le cadre de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre naturel $\leqslant$, on a $\inf\, [0; \pi[\,= \inf\, [0; \pi] = 0$ et $\sup\, [0; \pi[\,= \sup\, [0; \pi] = \pi$.
- Lorsqu'on travaille dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, les bornes inférieures et supérieures sont souvent données dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Par exemple, on a $\sup\, [2; +\infty[\,= +\infty$.
- Une fonction strictement croissante qui tend en $+\infty$ vers une limite finie ℓ admet une borne supérieure (qui est ℓ) alors qu'elle n'admet pas de maximum.
- Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre de divisibilité, on a $\inf\{2; 6; 14\} = \operatorname{pgcd}(2; 6; 14) = 2$ et $\sup\{2; 6; 14\} = \operatorname{ppcm}(2; 6; 14) = 42$. La borne inférieure est donc un minimum alors que la borne supérieure n'est pas un maximum.
- Dans $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$, la partie $\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leqslant 2\}$ n'admet pas de borne supérieure (cela revient à dire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
- $\sup_E \varnothing$ est le plus petit élément de E (s'il existe) et $\inf_E \varnothing$ est le plus grand élément de E (s'il existe). En particulier, on a $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing = +\infty$ et $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing = -\infty$.

Rechercher une borne supérieure consiste donc à remplacer la question : « qui est le plus grand dans l'ensemble ? » par la question : « qui est le plus petit de tous ceux qui majorent l'ensemble ? ». Évidemment, lorsque le plus grand existe dans l'ensemble, les deux questions sont synonymes. C'est ce que justifie la proposition suivante.

Proposition 4

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

(i) Si $\max A$ existe alors $\sup A$ existe et $\sup A = \max A$.

(ii) Si $\min A$ existe alors $\inf A$ existe et $\inf A = \min A$.

■ AQT ■

Terminons ce paragraphe en donnant le principe qui permet d'utiliser une borne supérieure dans le cas d'un ordre total.

Caractérisation de la borne supérieure pour un ordre total

Soient E un ensemble totalement ordonné, A une partie de E et s un élément de E.

Alors s est la borne supérieure de A si, et seulement si, s est un majorant de A (i.e. $\forall a \in A,\ a \preccurlyeq s$) et tout élément de E qui est strictement plus petit que s n'est pas un majorant de A (i.e. $\forall x \prec s,\ \exists a \in A,\ x \prec a$).

■ On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que s est la borne supérieure de A.
Par définition, s est un majorant de A.
Soit $x \prec s$. Comme s est le plus petit des majorant de A, x n'est pas un majorant de A, ce qui signifie qu'il existe $a \in A$ tel que $x \prec a$.

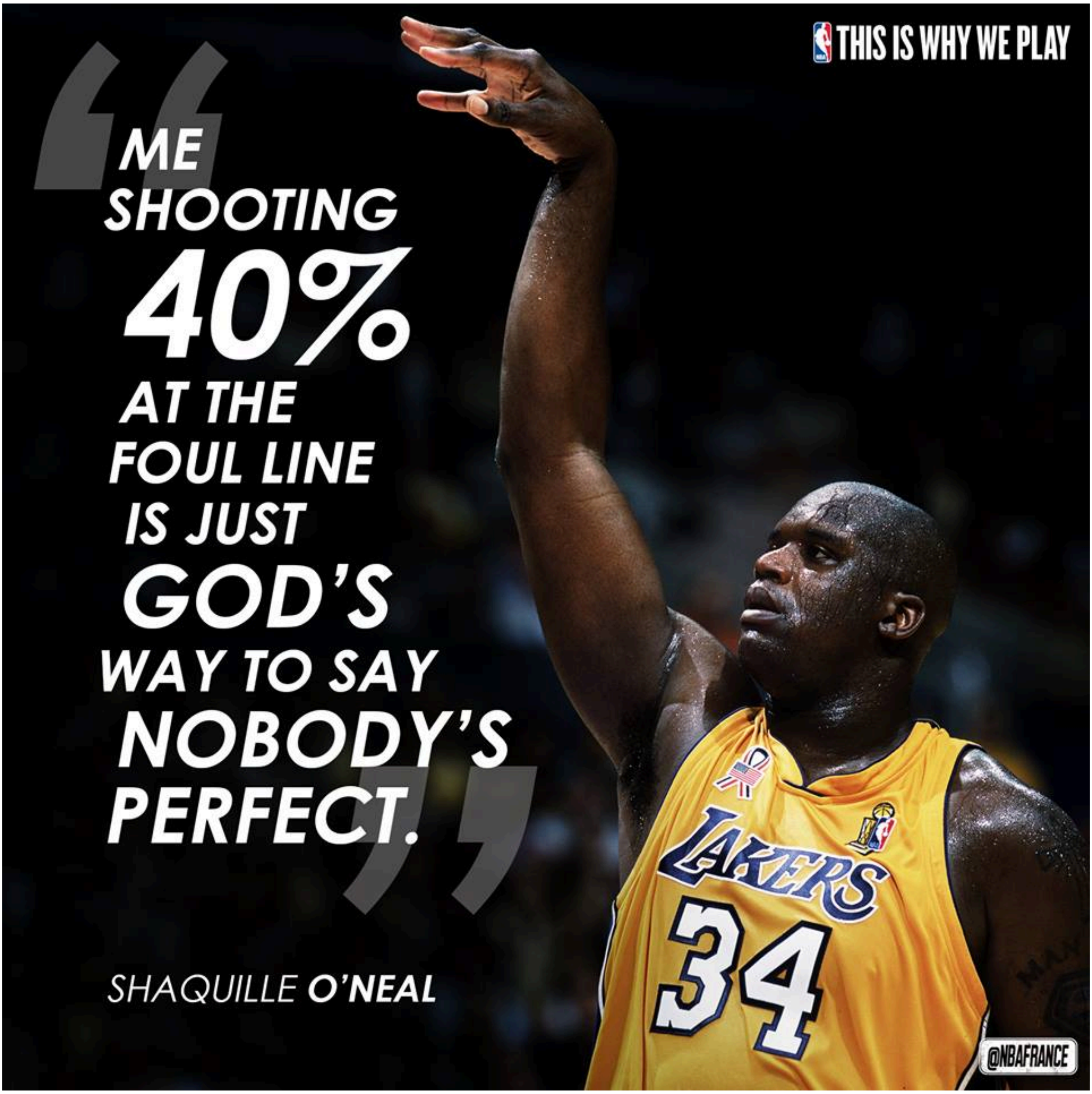
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons réciproquement que s est un majorant de A et que $\forall x \prec s,\ \exists a \in A,\ x \prec a$.
Démontrons que s est la borne supérieure de A, c'est-à-dire que c'est le plus petit des majorants de A. Constatons tout d'abord que s est bien un majorant de A (c'est un bon début). Prenons m un autre majorant de A et démontrons que $s \preccurlyeq m$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $m \prec s$ (ce qui est bien le contraire de $s \preccurlyeq m$ puisque l'ordre est total). Alors, d'après la seconde hypothèse, il existe $a \in A$ tel que $m \prec a$, ce qui signifie que m n'est pas un majorant de A. C'est absurde ! On en déduit que $s \preccurlyeq m$, ce qui démontre que s est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire que s est la borne supérieure de A. ■

En pratique, on utilise la seconde partie de cette caractérisation de la façon suivante : lorsque l'on sait que s est la borne supérieure d'une partie A (non vide) d'un ensemble totalement ordonné E, on sait que, pour tout $x \in E$ strictement plus petit que s, il possible de trouver un élément a de A qui s'intercale entre x et s (i.e. $x \prec a \preccurlyeq s$).

En itérant le raisonnement, on voit que si $s \notin A$, alors, pour tout $x \in E$ strictement plus petit que s, il existe une infinité d'éléments de A entre x et s.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$, si s est la borne supérieure d'une partie A non vide, on peut affirmer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre dans A qui soit une approximation de s à ε près. En effet, on a $s - \varepsilon < s$, donc $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, ce qui implique qu'il existe un élément $a \in A$ tel que $s - \varepsilon \leqslant a \leqslant s$. 4 h 00


THIS IS WHY WE PLAY
ME SHOOTING 40% AT THE FOUL LINE IS JUST GOD'S WAY TO SAY NOBODY'S PERFECT.
SHAQUILLE O'NEAL
LAKERS
34
@NBAFRANCE