

Planche de colle

Question de cours

- soit $a > 0$; étudier la nature de la série :

$$\sum_n \arccos \left(\frac{2}{\pi} \arctan(n^a) \right).$$

Exercice de colle

1. Soit r un nombre rationnel. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \frac{p}{q} \neq r \implies \left| r - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

2. Montrer que $\cos(1)$ est la somme de la série convergente :

$$\cos(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

3. Montrer que $\cos(1)$ est un nombre irrationnel.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est irrationnel.