

## Corrigé du DM n° 15

### Exercice 1

1. On calcule  $A^2 = I_3$ .
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le scalaire  $\lambda$  répond à la question si et seulement si la matrice  $A - \lambda I_3$  n'est pas inversible si et seulement si le système de matrice augmentée :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5-\lambda & -8 & -4 & 0 \\ 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 3-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

n'est pas de Cramer. Or, ce système est successivement équivalent à :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ 5-\lambda & -8 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 3-\lambda & 0 \end{array} \right) &\iff \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & \frac{3-7\lambda}{4} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1-\lambda}{2} & 1-\lambda & 0 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & \frac{3-2\lambda-\lambda^2}{4} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1-\lambda}{2} & 1-\lambda & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Lorsque  $\lambda = 1$ , le système n'est pas de Cramer.

Lorsque  $\lambda \neq 1$ , en divisant par  $1 - \lambda$  les lignes  $L_2$  et  $L_3$ , le système devient équivalent à :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & \frac{3+\lambda}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right) \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -7-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2(1+\lambda) & 0 \end{array} \right).$$

Conclusion, les scalaires recherchés forment l'ensemble  $\{-1, 1\}$

3. On résout le système précédent avec  $\lambda = 1$  pour résoudre l'équation matricielle  $(A - I_3)X = 0$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

On obtient le système triangulaire suivant :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \iff (1 \ -2 \ -1 | 0).$$

Les solutions en  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  sont donc les matrices colonnes de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

formant  $\text{Vect}(U, V)$ , avec  $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On obtient une base  $(U, V)$  de l'espace  $F$ .

De la même façon, le système triangulaire associé à  $\lambda = -1$  est :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions en  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  sont donc les matrices colonnes de la forme :

$$\begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}.$$

En posant le vecteur  $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , alors il est clair que la famille  $(W)$  forme une base de l'espace  $G$ .

4. Il est clair que les espaces  $F$  et  $G$  sont respectivement de dimension égale à 2 et à 1.

Montrons que la somme  $F + G$  est directe. Soit  $X \in F \cap G$ . Alors,  $AX = X$  et  $AX = -X$ , donc  $X = 0$ .

L'espace  $F + G$  est donc de dimension trois, inclus dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  lui-même de dimension trois. On a donc égalité  $F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et la famille  $(U, V, W)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

On note  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  est donc la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  vers la base  $(U, V, W)$ . La matrice représentant l'application linéaire  $A$  selon cette dernière base est la matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et la formule de changement de base nous indique que la matrice  $P$  proposée répond à la question.

5. En résolvant le système  $PX = Y$ , de paramètre  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , on obtient tous calculs faits :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) On sait que  $AM = M^k M = M M^k = MA$ .

(b) Soit  $X \in F$ . Alors,

$$MAX = MX, \text{ donc } A(MX) = MX,$$

donc  $MX \in F$ .

De même, si  $X \in G$ , alors :

$$A(MX) = AMX = MAX = M(-X) = -MX,$$

et donc le vecteur  $MX$  appartient à  $G$ .

- (c) On suppose l'entier  $k$  pair. Alors comme  $G = \text{Vect}(W)$  est stable par  $M$ , on peut poser  $MW = \lambda \cdot W$ . Ainsi,

$$M^k W = \lambda^k \cdot W, \text{ donc } -W = AW = \lambda^k \cdot W,$$

imposant  $\lambda^k = -1$ . Comme  $\lambda$  est un scalaire réel et que  $k$  est pair, alors  $\lambda^k \geq 0$ . On obtient une contradiction, lorsque l'on suppose l'existence d'une solution en l'inconnue  $M$ .

- (d) i. En remarque que  $A^2 = I_3$ , donc  $A^k = A$  et une solution est  $M = A$ .  
ii. Comme l'application  $\varphi : M \mapsto P^{-1}MP$  est un automorphisme d'algèbres sur l'algèbre des matrices carrées, on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M^k = A \iff \varphi(M)^k = D.$$

Il suffit de montrer que l'équation  $N^k = D$ , d'inconnue  $N$  admet une infinité de solutions. En donnant une disposition par blocs :

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice  $N$  est solution de  $N^k = D$  si et seulement si la matrice  $N_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifie  $N_1^k = I_2$ . Il suffit de montrer que cette dernière équation admet une infinité de solutions.

On remarque que la matrice de rotation d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{k}$  :

$$N_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

vérifie que  $N_1^k$  est la rotation d'angle  $k\theta = 2\pi$ , donc il s'agit de l'identité.

Ensuite, pour toute matrice inversible  $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ , alors :

$$(Q^{-1}N_1Q)^k = Q^{-1}(N_1)^kQ = Q^{-1}Q = I_2,$$

et donc les matrices  $Q^{-1}N_1Q$  restent des solutions intéressantes.

On pose  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$  puis on prend la matrice inversible :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ puis } Q^{-1}N_1Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} a - xb & -b(1 + x^2) \\ b & a + bx \end{pmatrix}.$$

Lorsque  $x$  varie dans  $\mathbb{R}$ , cela donne une infinité de blocs  $N_1$  différents chacun correspondant à un bloc d'une solution de  $N^k = D$ , chaque telle solution correspondant à une solution de  $M^k = A$ . Il y a une infinité de telles solutions.

## Exercice 2

1. Dans cette question, la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ou de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  est  $(e_1, e_2, e_3)$ .

- On cherche  $P$  tel que  $P^{-1}AP = B$  par un changement de base. On cherche une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  telle que :

$$A(\varepsilon_1) = 0, A(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \text{ et } A(\varepsilon_3) = -\varepsilon_2.$$

Le vecteur  $\varepsilon_1$  est dans  $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A^2)$ .

Or,  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On prend  $\varepsilon_1 = e_1$ . On choisit  $\varepsilon_2 = e_2$ . On choisit le vecteur  $\varepsilon_3 = e_2 - e_3$ .

La matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $P^{-1}AP = B$ .

• De la même façon, on cherche une matrice de changement de base  $Q$  telle que  $Q^{-1}CQ = B$ . On cherche une base  $(u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$C(u_1) = 0, C(u_2) = u_1 \text{ et } C(u_3) = -u_2.$$

Le vecteur  $u_1$  doit appartenir à  $\text{Ker}(C) \cap \text{Im}(C^2)$ .

Or,  $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On prend alors  $u_1 = e_3$ ,  $u_2 = e_2$  et  $u_3 = -e_1 + 2e_2$ .

La matrice  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  vérifie  $Q^{-1}CQ = B$ .

2. On note  $(X_i)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{R})$ .

On prend la première colonne  $C_1$  de  $A$  pour un premier vecteur de base. On prend  $X_1$  le premier vecteur de base canonique de  $\mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{R})$ . On dispose ainsi des premières colonnes des matrices  $P$  et  $Q$ .

La deuxième colonne vérifie :  $C_2 = 3C_1$ . On prend un premier vecteur  $-3X_1 + X_2$  dans  $\text{Ker}(A)$ .

La troisième colonne est non colinéaire à  $C_1$  : on la prend pour la deuxième colonne de  $Q$  et on prend  $X_3$  pour la deuxième colonne de  $P$ .

La quatrième colonne de  $A$  n'est pas dans  $\text{Vect}(C_1, C_3)$ . On la prend pour former la troisième colonne de  $Q$ . On prend  $X_4$  pour former la troisième colonne de  $P$ .

La cinquième colonne vérifie  $C_5 = -2C_4$ . On retient un deuxième vecteur dans le noyau de  $A$  à savoir le vecteur  $X_5 + 2X_4$ .

La sixième colonne vérifie  $C_6 = -C_1 + 2C_4$ . On rajoute le vecteur  $X_1 - 2X_4 + X_6$  dans le noyau de  $A$ .

La dernière colonne n'est pas combinaison linéaire des colonnes  $(C_1, C_3, C_4)$ . On forme ainsi la quatrième colonne de  $Q$  et on prend  $X_7$  pour former la quatrième colonne de  $P$ .

On a donc les quatre premières colonnes de  $P$  et de  $Q$ . Pour compléter les colonnes de  $P$ , on dispose d'une famille libre (en fait une base) de vecteurs de  $\text{Ker}(A)$ .

Pour compléter les colonnes de  $Q$ , on complète en piochant dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$  par exemple. Le plus simple est de prendre le dernier vecteur de cette base canonique qui n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par les colonnes déjà choisies pour la matrice  $Q$

Tous calculs faits, voici des matrices convenables :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

