FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Exercice 1. [∘]

Calculer

$$A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 \qquad \text{et} \qquad B = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}\cdot$$

Exercice 2. [∘]

Démontrer la relation suivante sur un ensemble que l'on précisera

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 3. [∘]

Compléter :

$$\begin{array}{lll}
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \sin(\arcsin x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \cos(\arcsin x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \tan(\arcsin x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \sin(\arccos x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \cos(\arccos x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \tan(\arccos x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \sin(\arctan x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \cos(\arctan x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots, & \tan(\arctan x) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Exercice 4. [∘]

À l'aide de la dérivation, déterminer une expression simplifiée de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot$$

Exercice 5. [∘]

Résoudre l'équation

$$\arcsin(x+1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}\cdot$$

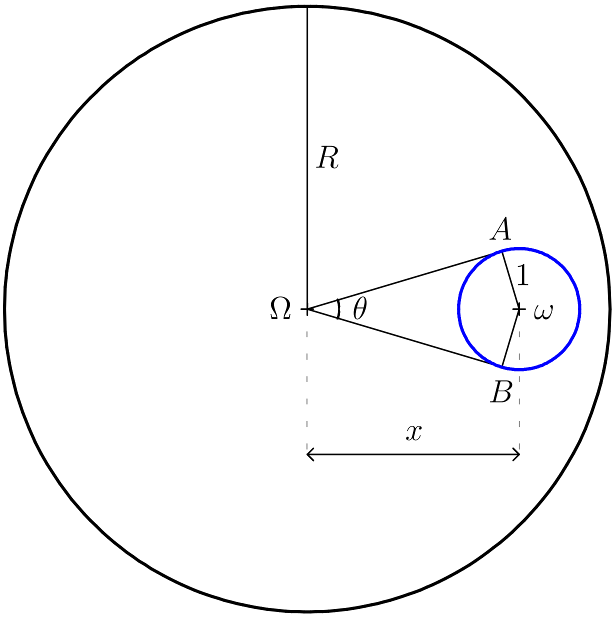
Exercice 6. [★]

Soient $x, y, z \in [0;1]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que $\arccos(x) + \arccos(y) + \arccos(z) = \pi$.

Exercice 7. [$\circ$]

Une fève circulaire de rayon $r = 1$ est placée dans une galette circulaire de rayon R. Le rayon de la galette est supposé très grand devant celui de la fève : mathématiquement, on considèrera que $R = +\infty$.

Le centre ω de la fève est à une distance x du centre Ω de la galette (avec $x \geqslant 1$).



Les deux tangentes à la fève, passant par Ω, touchent la fève en A et B.

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{A\Omega B}$. L'angle θ est appelé le *diamètre apparent* de la fève vu depuis Ω.

La probabilité $p(x)$ qu'un coup de couteau rectiligne, passant par Ω, rencontre la fève est définie par

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi}\cdot$$

1. Justifier que

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot$$

2. Étudier la fonction $x \longmapsto p(x)$ lorsque x varie entre 1 et $+\infty$.
3. Donner un équivalent de $p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. On admet que $\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \sqrt{2\varepsilon}$. Démontrer que

$$1 - p(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{x-1}.$$