# SYSTÈMES LINÉAIRES

✠ ***Exercice 1.***

Résoudre $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(5+m)x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -4x & + & (2-m)y & + & 3z & = & 0 \\ -4x & + & y & + & (4-m)z & = & 0 \end{array}\right.$ en discutant suivant $m \in \mathbb{R}$.

On applique la méthode du pivot en encadrant les pivots. On a

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -(5+m)x & + & 2y & + & 4z & = & 0 & {\scriptstyle L_1} \\ -4x & + & (2-m)y & + & 3z & = & 0 & {\scriptstyle L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & (4-m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} (3-m)x & & & - & (4-2m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_1-2L_3\to L_1} \\ (4-4m)x & & & - & (5-6m+m^2)z & = & 0 & {\scriptstyle L_2-(2-m)L_3\to L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & (4-m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} (3-m)x & & & - & 2(2-m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_1} \\ 4(1-m)x & & & - & (m-1)(m-5)z & = & 0 & {\scriptstyle L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & (4-m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

Pour choisir $3-m$ comme pivot, il est nécessaire que $m \neq 3$. On envisage donc deux cas :

- ▶ <u>Premier cas : $m = 3$</u> Alors

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} & & & & \boxed{2z} & = & 0 & {\scriptstyle L_1} \\ \boxed{-8x} & & & - & 4z & = & 0 & {\scriptstyle L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

- ▶ <u>Second cas : $m \neq 3$</u> On peut alors poursuivre la méthode du pivot avec $(3-m)$ comme pivot, ce qui donne

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{(3-m)x} & & & - & (4-2m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_1} \\ & & & & \bigstar\, z & = & 0 & {\scriptstyle (3-m)L_2-(4-4m)L_1\to L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & (4-m)z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

où

$$\begin{array}{rcl} \bigstar & = & (3-m)\times\big(-(m-1)(m-5)\big) - 4(1-m)\times\big(-2(2-m)\big) \\ & = & (m-1)\big((m-3)(m-5)+8(m-2)\big) \\ & = & (m-1)(m^2-1) \\ & = & (m-1)^2(m+1). \end{array}$$

On considère alors trois sous-cas :

- ▷ <u>Premier sous-cas : $m = 1$</u> Alors

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{2x} & & & - & 2z & = & 0 & {\scriptstyle L_1} \\ & & & & 0 & = & 0 & {\scriptstyle L_2} \\ -4x & + & \boxed{y} & + & 3z & = & 0 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

▷ Deuxième sous-cas : $m = -1$ Alors

$$S \iff \begin{cases} \boxed{4x} & & - \ 6z & = & 0 & L_1 \\ & & 0 & = & 0 & L_2 \\ -4x & + \ \boxed{y} & + \ 5z & = & 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & \dfrac{3}{2}\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

▷ Troisième sous-cas : $m \notin \{1; -1\}$ Alors

$$S \iff \begin{cases} \boxed{(3-m)x} & & - \ (4-2m)z & = & 0 & L_1 \\ & & + \ \boxed{\bigstar\ z} & = & 0 & L_2 \\ -4x & + \ \boxed{y} & + \ (4-m)z & = & 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

► Bilan : En conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \{(0;0;0)\} & \text{si } m \neq -1 \text{ et } m \neq 1, \\ \{(\lambda, \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{si } m = 1, \\ \left\{\left(\dfrac{3}{2}\lambda; \lambda; \lambda\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{si } m = -1. \end{cases}}$$

✠ ***Exercice 2.*** [○]

Résoudre $(S) \begin{cases} \alpha x + \ y + \ z = 1 \\ x + \alpha y + \ z = 1 \\ x + \ y + \alpha z = 1 \end{cases}$ en discutant suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha x + \ y + \ z = 1 \\ \boxed{x} + \alpha y + \ z = 1 \\ x + \ y + \alpha z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} & & (1-\alpha^2)y + (1-\alpha)z = 1-\alpha \\ \boxed{x} & + & \alpha y + \ z = 1 \\ & & (1-\alpha)y - (1-\alpha)z = 0 \end{cases}$$

À ce stade, on fait une pause et on envisage deux cas :

- Premier cas : $\alpha = 1$ La méthode du pivot est alors terminée et l'on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} & & 0 = 0 \\ \boxed{x} & + \ y \ + z & = 1 \\ & & 0 = 0 \end{cases}$$

ce qui démontre que le système admet une infinité de solutions que l'on peut paramétrer par les inconnues auxiliaires. On obtient

$$\begin{cases} x = - \ \lambda \ - \mu \ + 1 \\ y = \quad \lambda \\ z = \qquad \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

- Second cas : $\alpha \neq 1$ On peut alors simplifier deux équations par $1 - \alpha$ et continuer la méthode du pivot pour obtenir

$$(S) \iff \begin{cases} & & (1+\alpha)y + z = 1 \\ \boxed{x} & + & \alpha y + z = 1 \\ & & \boxed{y} - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} & & & (2+\alpha)z = 1 \\ \boxed{x} & + \ \alpha y & + & z = 1 \\ & \boxed{y} & - & z = 0 \end{cases}$$

On envisage alors deux sous-cas :

- Premier sous-cas : $\alpha = -2$ La première équation est auxiliaire et contradictoire donc le système n'a pas de solution.
- Second sous-cas : $\alpha \neq -2$ On continue la méthode du pivot pour obtenir

$$(S) \iff \begin{cases} & & & & \boxed{(2+\alpha)z} & = 1 \\ \boxed{x} & + & \alpha y & + & z & = 1 \\ & & \boxed{y} & - & z & = 0 \end{cases}$$

Le système est alors de Cramer et son unique solution est donnée par

$$\left(\frac{1}{2+\alpha}; \frac{1}{2+\alpha}; \frac{1}{2+\alpha}\right).$$

## ✠ *Exercice 3.*

Résoudre $(S) \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$ en discutant suivant $m \in \mathbb{R}$.

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$\mathscr{S} \iff \begin{cases} \boxed{x} - my + m^2 z = 2m & L_1 \\ mx - m^2 y + mz = 2m & L_2 \\ mx + y - m^2 z = 1 - m & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} - my + m^2 z = 2m & L_1 \\ m(1-m^2)z = 2m(1-m) & L_2 - mL_1 \longrightarrow L_2 \\ \boxed{(1+m^2)y} - m^2(1+m)z = 1 - m - 2m^2 & L_3 - mL_1 \longrightarrow L_3 \end{cases}$$

On envisage alors plusieurs cas :

- Premier cas : $m = -1$ : Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z = -2 \\ 0 = -4 \\ \boxed{2y} = 0 \end{cases}$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire incompatible, donc le système n'a pas de solution dans ce cas.

- Deuxième cas : $m = 0$ : Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \begin{cases} \boxed{x} = 0 \\ 0 = 0 \\ \boxed{y} = 1 \end{cases}$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire compatible donc le système admet des solutions. L'inconnue $z$ étant auxiliaire, on la choisit comme paramètre, ce qui donne

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- Troisième cas : $m = 1$ : Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \begin{cases} \boxed{x} - y + z = 2 \\ 0 = 0 \\ \boxed{2y} - 2z = -2 \end{cases}$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire compatible donc le système admet des solutions. L'inconnue $z$ étant auxiliaire, on la choisit comme paramètre, ce qui donne

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

► Quatrième cas : $m \notin \{-1;0;1\}$ : Dans ce cas, on a $m(1-m^2) \neq 0$, ce qui permet de choisir ce coefficient comme dernier pivot. On obtient alors la réduite de Gauß d'un système de Cramer :

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{x} & - & my & + & m^2 z & = & 2m \\ & & & & \boxed{m(1-m^2)z} & = & 2m(1-m) \\ & & \boxed{(1+m^2)y} & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2 \end{array}\right.$$

donc le système possède une unique solution donnée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{m(3+m^2)}{(1+m)(1+m^2)} \\ y & = & \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z & = & \dfrac{2}{1+m} \end{array}\right.$$

► Bilan :

| Valeur de $m$ | Ensemble des solutions | Nature géométrique |
|---|---|---|
| $m=-1$ | $\varnothing$ | Que dalle ! |
| $m=0$ | $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ | Droite passant par le point $(0,1,0)$ et dirigée par le vecteur $(0,0,1)$ |
| $m=1$ | $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda-1 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ | Droite passant par le point $(1,-1,0)$ et dirigée par le vecteur $(0,1,1)$ |
| $m \notin \{-1;0;1\}$ | $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{m(3+m^2)}{(1+m)(1+m^2)} \\ y & = & \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z & = & \dfrac{2}{1+m} \end{array}\right.$ | Un point (c'est tout !) |

## ✠ *Exercice 4.*

Résoudre $(S)$ : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -sx & + & y & & & & & = & 0 \\ x & - & sy & + & sz & & & = & 0 \\ & & sy & - & sz & + & t & = & 0 \\ & & & & z & - & st & = & 0 \end{array}\right.$ en discutant suivant $s \in \mathbb{R}_+$.

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$(S) \quad : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} -sx & + & y & & & & & = & 0 & L_1 \\ \boxed{x} & - & sy & + & sz & & & = & 0 & L_2 \\ & & sy & - & sz & + & t & = & 0 & L_3 \\ & & & & z & - & st & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & (1-s^2)y & + & s^2 z & & & = & 0 & L_1+sL_2 \to L_1 \\ \boxed{x} & - & sy & + & sz & & & = & 0 & L_2 \\ & & sy & - & sz & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & & & z & - & st & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & (1-s^2)y & + & s^2 z & & & = & 0 & L_1 \\ \boxed{x} & - & sy & + & sz & & & = & 0 & L_2 \\ & & sy & - & sz & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & s^2 y & + & (1-s^2)z & & & = & 0 & L_4+sL_3 \to L_4 \end{array}\right.$$

À ce stade, on fait une pause et on envisage deux cas :

- <u>Premier cas : $s = 0$</u>
  Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & \boxed{y} & & & & & = & 0 & L_1 \\ \boxed{x} & & & + & z & & & = & 0 & L_2 \\ & & y & & & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

  Le système est alors de Cramer et son unique solution est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

- <u>Second cas : $s \neq 0$</u>
  Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & (1-s^2)y & + & s^2 z & & & = & 0 & L_1 \\ \boxed{x} & - & sy & + & z & & & = & 0 & L_2 \\ & & y & - & sz & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & \boxed{s^2 y} & + & (1-s^2)z & & & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & & & (2s^2-1)z & & & = & 0 & s^2L_1-(1-s^2)L_4 \\ \boxed{x} & - & sy & + & sz & & & = & 0 & L_2 \\ & & sy & - & sz & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & \boxed{s^2 y} & + & (1-s^2)z & & & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

  ce qui nous ammène à distinguer deux sous-cas :

  - <u>Premier sous-cas : $s = 1/\sqrt{2}$</u>
    Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & & & 0 & & & = & 0 & s^2L_1-(1-s^2)L_4 \\ \boxed{\sqrt{2}x} & - & y & + & z & & & = & 0 & \sqrt{2}L_2 \\ & & y & - & z & + & \boxed{\sqrt{2}t} & = & 0 & \sqrt{2}L_3 \\ & & \boxed{y} & + & z & & & = & 0 & 2L_4 \end{array}\right.$$

    L'inconnue $z$ est auxiliaire donc le système admet une infinité de solutions que l'on peut paramétrer à l'aide de cette inconnue, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\sqrt{2}\lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & \lambda \\ t & = & \sqrt{2}\lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

  - <u>Second sous-cas : $s \neq 1/\sqrt{2}$</u> Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} & & & & \boxed{(2s^2-1)z} & & & = & 0 & L_1 \\ \boxed{x} & - & sy & + & sz & & & = & 0 & L_2 \\ & & sy & - & sz & + & \boxed{t} & = & 0 & L_3 \\ & & \boxed{s^2 y} & + & (1-s^2)z & & & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

    Le système est alors de Cramer et son unique solution est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

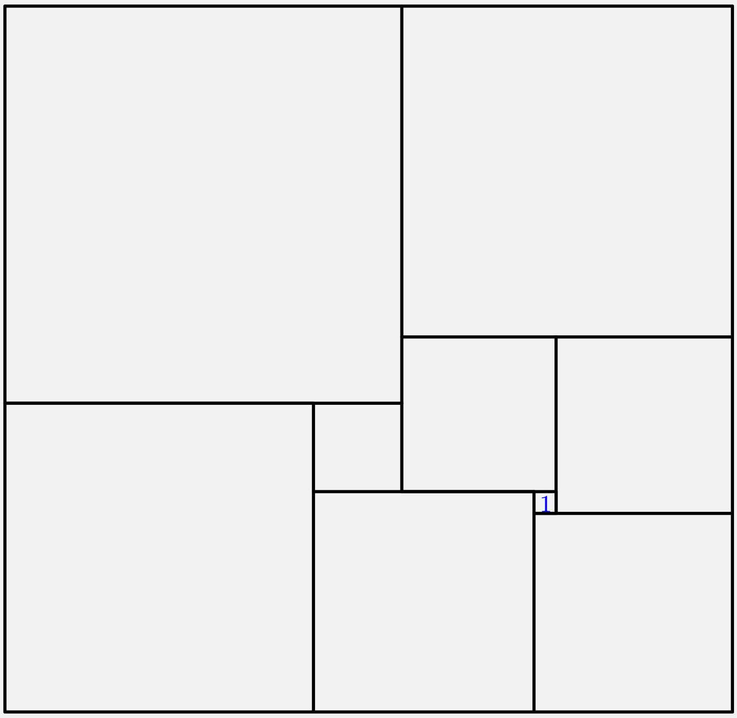
- <u>Bilan :</u>

  L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions du système $S$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \{(0,0,0,0)\} & \text{si } s \neq 1/\sqrt{2}, \\ \{(-\sqrt{2}\lambda, -\lambda, \lambda, \sqrt{2}\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{si } s = 1/\sqrt{2}. \end{cases}}$$

✠ ***Exercice 5.*** [⋆]

Déterminer les dimensions de chacun des carrés de la figure suivante sachant que le côté du plus petit carré est de longueur 1.




On trouve, par ordre croissant, des côtés de longueur 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 et 18.