DM n° 11 : Suites, asymptotique

Problème 1 –

PARTIE I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. On considère l'équation $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Montrer qu'elle admet trois racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < x_3$ vérifiant $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
2. Montrer que $|x_2| < |x_1| < |x_3|$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les conditions initiales $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et la relation $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n > 0$.
4. Expliciter en fonction de x_1, x_2 et x_3 des coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n,$$
et vérifier que les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 sont non nuls.
Dans la suite du problème, il est demandé de ne pas utiliser les expressions explicites de λ_1, λ_2 et λ_3.
5. Montrer que a_n est équivalente à une suite géométrique, qu'on exprimera en fonction de x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 et λ_3.
6. Déterminer, en fonction de x_1, x_2 et x_3, la limite de $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

PARTIE II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = b_n - x_3$. Montrer que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$.
2. En déduire que $|b_n - x_3| = O\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n\right)$.
3. On pose $\beta = \max\left(\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right|, \left|\dfrac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^2\right)$. Vérifier que $\beta < \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$, et montrer que
$$b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n).$$
4. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $c_n = \dfrac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}$. Justifier que $c_n - \dfrac{x_1}{x_3} = O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$.
5. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $d_n = \dfrac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}$. Montrer que $d_n - x_3 = O(\beta^n)$. En quoi peut-on dire qu'on a accéléré la convergence de la suite ?
6. Écrire une fonction en Python prenant en paramètre un entier n, et retournant la valeur de d_n.

Problème 2 – Polynômes de Bernoulli, nombres de Bernoulli et fonction tangente.

Partie I – Polynômes de Bernoulli

On définit dans cette partie les polynômes de Bernoulli.

1. Établir que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = Q$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = 0$.
2. En déduire l'existence d'une unique suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\ \mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

3. Déterminer B_1, B_2 et B_3.

Partie II – Étude des racines dans $[0,1]$ des polynômes de Bernoulli

On étudie dans cette partie les racines des polynômes de Bernoulli situées dans l'intervalle $[0,1]$.

1. En considérant $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\ \mathrm{d}t$, montrer que B_p admet au moins une racine dans $]0,1[$.
2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto f\left(t+\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ soit impaire. Montrer qu'alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f' est impaire, alors f est paire, et que si f' est paire et si $f(0) = 0$, alors f est impaire.
4. Montrer que le polynôme $B_p\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ est pair si p est pair, et est impair si p est impair.
5. En déduire que si p est un entier impair supérieur ou égal à 3, alors $B_p(0) = B_p\left(\dfrac{1}{2}\right) = B_p(1) = 0$.
6. Montrer que si p est un entier pair supérieur ou égal à 2, B_p s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.
7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:
   - si p est pair, B_p admet exactement deux racines distinctes dans $[0,1]$, situées l'une dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'autre dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$
   - si p est impair, les seules racines de B_p dans $[0,1]$ sont 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1.

Partie III – Majorations de B_p

Dans cette partie, on trouve un majorant de B_p sur $[0,1]$.

1. On note $M_p = \max\limits_{x\in[0,1]} |B_p(x)|$. Justifier l'existence de ce maximum.
2. Soit p un entier impair au moins égal à 3. En distinguant trois cas, selon que $x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ ou $x \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|B_p(x)| \leqslant \dfrac{p}{4} \cdot M_{p-1}$.
3. Démontrer de même que si p est un entier pair au moins égal à 2, alors $M_p \leqslant \dfrac{p}{2} \cdot M_{p-1}$.
4. Déterminer M_0, M_1 et M_2.
5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $M_p \leqslant \dfrac{p!}{6 \cdot 2^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \cdot 4^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1}}$.

Partie IV – Nombres de Bernoulli

On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli par $b_n = B_n(0)$. On pourra admettre pour la fin du problème les trois résultats suivants, valables pour des séries à termes complexes :

- *Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. On dit dans ce cas que $\sum a_n$ converge absolument.*
- *Théorème de comparaison des séries à termes positifs : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

- *Théorème du produit de Cauchy : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, et si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k},$$
alors la série $\sum c_n$ est convergente, et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

1. (a) Exprimer pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, m]\!]$, une relation entre $B_m^{(k)}$ et B_{m-k}.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}.$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0.$$

2. (a) Soit $z \in B(0, 2\sqrt{2})$, dans $\mathbb{C}$. Montrer, en utilisant la partie III, que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ est absolument convergente. (Le résultat est en fait valable sur $B(0, 2\pi)$, mais cela nécessite une analyse un peu plus fine).

   (b) À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que pour tout $z \in B(0, 2\sqrt{2})$,
$$(e^z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = z$$

   (c) Montrer que pour tout $z \in B(0, 2\sqrt{2}) \setminus \{0\}$,
$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Partie V – Développement limité de la tangente

1. Montrer que pour tout $x \in E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$, on a
$$\tan(x) = \operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x).$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$,
$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{b_{2n} 2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}.$$
   Ce résultat est en fait valable sur tout l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. Justifier que lorsque x est au voisinage de 0 :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{b_{2k} 2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2n)!} x^{2k-1} = o(x^{2n}).$$
   En déduire le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ de la tangente, exprimé à l'aide des nombres de Bernoulli.