SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. [∘]

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. [∘]

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres u, v, w, t pour que le système suivant admette des solutions, puis le résoudre.

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = u \\ 3x + y + 3z = v \\ 6x + 6y + z = w \\ 7x + 9y + 7z = t \end{cases}$$

Exercice 3. [∘]

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ ab = c \\ \dfrac{a}{b^2c} = \mathrm{e}^{-6} \end{cases}$$

Exercice 4. [⋆]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} (4-a)x + 4y - 4z = 0 \\ -x + (5-a)y - 3z = 0 \\ x + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$ en discutant suivant $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. [⋆]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 2y + az = b \end{cases}$ en discutant suivant $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. [⋆]

Trouver le polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui satisfait les égalités $P(0) = 0$ et $P(X) - P(X-1) = X^2$.

Retrouver ainsi l'expression de la deuxième somme d'Euler $E_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Exercice 7. [∘] (Oxydation d'un sulfure de fer)

Équilibrer les coefficients stœchiométriques a, b, c, d de l'équation d'oxydation d'un sulfure de fer (qui produit un oxyde de fer et de l'anhydride sulfureux) :

$$a\ \mathrm{Fe_7S_8} + b\ \mathrm{O_2} \quad = \quad c\ \mathrm{Fe_3O_4} + d\ \mathrm{SO_2}$$

Exercice 8. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On se donne n points dans le plan. Existe-t-il un polygone dont ces n points soient les milieux ?

Exercice 9. [$\star$]

Iznotsobad dit à son fils ainé Izrilybad : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ! Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 112 ans. » À quel âge Iznotsobad est devenu papa ?

Exercice 10. [$\star$] (Structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

Dans cet exercice, les systèmes considérés sont à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Rappelons que le *système homogène associé* au système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

est le système (S_h) obtenu en annulant le second membre de (S), c'est-à-dire

$$(S_h) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

On considère $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ une solution de (S), appelée *solution particulière*. *On suppose donc implicitement que (S) possède au moins une solution.*

Démontrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (S) est donné par

$$\mathscr{S} = \{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) : (x_1^h, x_2^h, \ldots, x_p^h) \text{ est une solution de } (S_h)\}.$$

Autrement dit, toute solution de (S) est la somme d'une solution particulière et d'une solution du système homogène associé (et réciproquement).