LIMITE D'UNE FONCTION

♦ ***Exercice 1.*** [○]

1. Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$a(x) = 5x^3 + 2x - 4$ $\qquad$ $d(x) = \ln(\cos x)$

$b(x) = \cos(\sin x)$ $\qquad$ $e(x) = \ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$

$c(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f(x) = \ln(\sin x)$

2. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a(x) = 5x^3 + 2x - 4$ $\qquad$ $e(x) = \ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$

$c(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $g(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - x + 1}$

3. Déterminer un équivalent simple en 1 des fonctions suivantes :

$h(x) = \ln x + \sin^2(x-1) + \sqrt{x^2-1}$ $\qquad$ $i(x) = \sqrt{1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^x} - 1$

1. a) On a
$$\boxed{a(x) \underset{x\to 0}{\sim} -4.}$$

b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = 1$, on a
$$\boxed{b(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1.}$$

c) On a $c(x) = x^{-1} - x^{-2}$ donc $c(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^{-2}$ (en 0, on garde la plus petite puissance), c'est-à-dire
$$\boxed{c(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x^2}.}$$

d) On a
$$d(x) = \ln\big(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{\longrightarrow 0}\big) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2},$$
donc
$$\boxed{d(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.}$$

e) On a
$$e(x) = \ln\big(1 + \underbrace{(4x^4 + 2(1-\cos x))}_{\longrightarrow 0}\big) \underset{x\to 0}{\sim} 4x^4 + \underbrace{2(1-\cos x)}_{\underset{x\to 0}{\sim} x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^2,$$
car $x^4 = o_{x\to 0}(x^2)$. Donc
$$\boxed{e(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.}$$

f) Si la composition des équivalents étaient licites, on dirait que $\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$, puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Alors, certes, la composition des équivalents est interdite en toute généralité mais cela n'interdit pas de penser que l'on a bien $\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$. Pour savoir si c'est bien le cas, on étudie la limite du quotient $\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x}$ lorsque $x \longrightarrow 0$. Comme on espère que ce quotient tende vers 1, on regarde le comportement en 0 de la différence $\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x} - 1$. On a

$$\frac{\ln(\sin x)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{\ln x} = \frac{\ln \dfrac{\sin x}{x}}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x.}$$

2. a) On a

$$\boxed{a(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} 5x^3.}$$

b) On a $c(x) = x^{-1} - x^{-2}$ donc $c(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x^{-1}$ (en $+\infty$, on garde la plus grande puissance), c'est-à-dire

$$\boxed{c(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}\cdot}$$

c) On a $4x^4 - 2\cos x + 3 \underset{x\to +\infty}{\sim} 4x^4$ donc on peut conjecturer que $\ln(4x^4 - 2\cos x + 3) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln(4x^4)$. Pour le démontrer, on écrit que

$$\frac{\ln(4x^4 - 2\cos x + 3)}{\ln(4x^4)} - 1 = \frac{\ln(4x^4 - 2\cos x + 3) - \ln(4x^4)}{\ln(4x^4)} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{-2\cos x + 3}{4x^4}\right)}{\ln(4x^4)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\cos x + 3}{4x^4} = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0). Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^4 - 2\cos x + 3)}{\ln(4x^4)} = 1,$$

ce qui prouve que

$$\ln(4x^4 - 2\cos x + 3) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln(4x^4).$$

Mais il ne faut pas s'arréter là car $\ln(4x^4)$ n'est pas un équivalent simple (les logarithmes cachent les sommes sous forme de produits). On a

$$\ln(4x^4) = \ln 4 + 4\ln x \underset{x\to +\infty}{\sim} 4\ln x.$$

Au final, on a

$$\boxed{e(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} 4\ln x.}$$

d) On a $\sqrt{4x^2 - x + 1} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{4x^2} \underset{x\to +\infty}{\sim} 2|x| \underset{x\to +\infty}{\sim} 2x$ mais, tel quel, on ne peut pas conclure car la soustractation des équivalentes (qui n'est pas une opération licite puisqu'elle conduit aussi bien à des résultats faux qu'à des résultats justes) mène ici à écrire que $g(x)$ est équivalent à 0 ce qui est très (mais alors très très) caca ! L'idée est alors de faire apparaître une addition à la place de la soustraction à l'aide de la technique de l'expression conjuguée. On a

$$2x - \sqrt{4x^2 - x + 1} = \frac{(2x)^2 - (4x^2 - x + 1)}{2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}} = \frac{x - 1}{2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}}\cdot$$

L'addition des équivalents étant parfaitement autorisée (si ! si ! c'est la soustraction qui ne l'est pas !), on peut alors écrire que

$$2x + \sqrt{4x^2 - x + 1} \underset{x\to +\infty}{\sim} 2x + 2x \underset{x\to +\infty}{\sim} 4x,$$

ce qui donne

$$\frac{x - 1}{2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{x}{4x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

et donc

$$\boxed{g(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{4}\cdot}$$

Et pour les ronchons qui ne veulent pas de l'addition des équivalents (sous prétexte que des petits malins pourraient maquiller une soustraction en addition), on peut justifier que l'on a bien $2x + \sqrt{4x^2 - x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x + 2x$ en factorisant $2x$, ce qui donne

$$2x + \sqrt{4x^2 - x + 1} = 2x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \times 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 4x.$$

3. Lorsqu'on vous demande un équivalent ou une limite en un point $a \in \mathbb{R}$ non nul, il est bon d'avoir en tête le principe suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour étudier le comportement local en } a \in \mathbb{R} \\ \text{d'une fonction } x \longmapsto f(x)\text{, il faut se ramener} \\ \text{en 0 en posant } x = a + h \text{ avec } h \longrightarrow 0.\end{array}}$$

Pour les fonctions usuelles, on utilisera souvent l'une des formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h \\ \cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h \\ \ln(a+h) = \ln a + \ln\left(1 + \dfrac{h}{a}\right) \\ \exp(a+h) = \exp a \times \exp h \\ (a+h)^\alpha = a^\alpha\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)^\alpha\end{array}}$$

a) Posons $x = 1 + u$ avec $u \longrightarrow 0$. On a

$$h(1+u) = \ln(1+u) + \sin^2 u + \sqrt{(1+u)^2 - 1}.$$

Or, d'après les équivalents de référence, on a

$$\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u, \qquad \sin^2 u \underset{u\to0}{\sim} u^2 \qquad \sqrt{(1+u)^2 - 1} \underset{u\to0}{\sim} \sqrt{2u}$$

et

$$u = o_{u\to0}\big(\sqrt{2u}\big) \qquad \text{et} \qquad u^2 = o_{u\to0}\big(\sqrt{2u}\big),$$

donc

$$\boxed{h(1+u) \underset{u\to0}{\sim} \sqrt{2u}.}$$

b) Posons $x = 1 + h$ avec $h \longrightarrow 0$. On a

$$i(1+h) = \sqrt{1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{1+h}} - 1 = \big(1 + \underbrace{\mathrm{e}(1 - \mathrm{e}^h)}_{\to 0}\big)^{1/2} - 1 \underset{h\to0}{\sim} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}(1 - \mathrm{e}^h) \underset{h\to0}{\sim} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}\,h,$$

donc

$$\boxed{i(1+h) \underset{h\to0}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2} h.}$$

♦ ***Exercice 2.*** [∘] (Limites en 0)
Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = x^x \qquad f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} \qquad k(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2}$$

$$b(x) = x\sin\frac{1}{x} \qquad g(x) = (\sin x)\left(\sin\frac{1}{x^2}\right) \qquad \ell(x) = (1+\tan x)^{1/\sin x}$$

$$c(x) = \frac{\tan 5x}{\sin x} \qquad h(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \qquad m(x) = \frac{\sin(x\ln x)}{x}$$

$$d(x) = \frac{x\ln x}{x^x - 1} \qquad i(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$e(x) = \frac{\ln\cos(x)}{1-\cos(2x)} \qquad j(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos x - 1} - 1}{x^2}$$

Avant toute chose, il faut bien évidemment vérifier qu'à chaque fois, on a bien une forme indéterminée. Sinon, on conclut iméédiatement.

1. On a $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$. Les croissances comparées nous disent que $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} a(x) = 1.}$$

2. On a $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $x \longmapsto \sin(1/x)$ qui est bornée donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} b(x) = 0.}$$

3. On a $\dfrac{\tan 5x}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{5x}{x} \underset{0}{\sim} 5$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} c(x) = 5.}$$

4. On a

$$\frac{x\ln x}{x^x - 1} = \frac{x\ln x}{\mathrm{e}^{x\ln x} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{x\ln x}{x\ln x} \underset{0}{\sim} 1,$$

où la première équivalence découle du fait que $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ avec $u = x\ln x$ qui tend vers 0 en 0 d'après les croissances comparées. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} d(x) = 1.}$$

5. On a

$$\frac{\ln\cos(x)}{1-\cos(2x)} = \frac{\ln\big(1+(\cos(x)-1)\big)}{1-\cos(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{\cos(x)-1}{1-\cos(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{2x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e(x) = -\frac{1}{4}\cdot}$$

6. On a

$$\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} \underset{0}{\sim} \frac{+|x|}{-|x|} \underset{0}{\sim} -1,$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -1.}$$

7. On a $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ et $x \longmapsto \sin(1/x^2)$ qui est bornée donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0.}$$

8. On a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{(\sin x)(1-\cos x)}{x^3\cos x} \underset{0}{\sim} \frac{x \times (x^2/2)}{x^3 \times 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}\cdot}$$

9. On a
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} i(x) = 1.}$$

10. On a
$$\frac{\mathrm{e}^{\cos x - 1} - 1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2},$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} j(x) = -\frac{1}{2}.}$$

11. On a
$$\ln(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\ln(x)+1}{x^2}.$$
Les croissances comparées disent que $\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} k(x) = +\infty.}$$

12. On a
$$(1+\tan x)^{1/\sin x} = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad \text{avec} \qquad u(x) = \frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x}.$$
Or
$$\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{\tan x}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{0}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ell(x) = \mathrm{e}.}$$

13. Comme $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées, on a
$$\frac{\sin(x\ln x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x\ln x}{x} \underset{0}{\sim} \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} m(x) = -\infty.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [∘] (Limites en $+\infty$)
Déterminer, si elles existent, les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a(x) = x\sin\frac{1}{x} \qquad e(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \qquad i(x) = (\cos x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$b(x) = \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2} \qquad f(x) = \sqrt{x^2+2x}-x \qquad j(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$
$$c(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad g(x) = \cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x} \qquad k(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+2}}{\mathrm{e}^x}$$
$$d(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}}-x \qquad h(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2)} \qquad \ell(x) = \frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$$

1. On a
$$x\sin\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} a(x) = 1.}$$

2. On a
$$\frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{5x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{5},$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} b(x) = \frac{1}{5}.}$$

3. On a
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad \text{où} \qquad u(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot$$
Or
$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} c(x) = \mathrm{e}.}$$

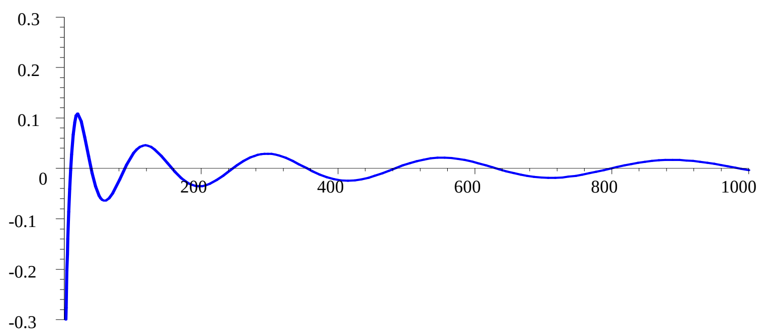
4. On a
$$\sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}} - x = x\left[\left(\frac{x}{x-1}\right)^{1/3} - 1\right] = x\left[\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{1/3} - 1\right] \underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3},$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} d(x) = \frac{1}{3}\cdot}$$

5. On a
$$\frac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2x},$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e(x) = +\infty.}$$

6. On a
$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{x+\ \mathscr{O}_0(x)+x} = \frac{1}{1+\ \mathscr{O}_0(1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$
donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

7. En vertu de la formule $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$, on a
$$\begin{aligned}
g(x) &= -2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\\
&= -2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\\
&= -2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+1)-x}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\\
&= -2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\cdot
\end{aligned}$$

Or $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$ est une fonction bornée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right) = 0$, donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$



8. On a

$$\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2)} = \frac{\ln(x^2+1)-\ln(x^2)}{\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2)}} = \frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$$

9. On a $\lim_{x\to 0}\ln(1+1/x) = 0$ et $x \longmapsto \cos x$ qui est bornée donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} i(x) = 0.}$$

10. On a

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(x+\sqrt{x})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\mathcal{O}_0(\sqrt{x})+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+\mathcal{O}_0(1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} j(x) = 0.}$$

11. On a

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+2}}{\mathrm{e}^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2}}}{\mathrm{e}^x} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{u(x)} \qquad \text{où} \qquad u(x) = \sqrt{x^2+2} - x.$$

Or

$$\sqrt{x^2+2} - x = \frac{(x^2+2)-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} k(x) = 1.}$$

12. On a

$$\frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)} = \frac{x^2}{x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} \underset{+\infty}{\sim} x,$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ell(x) = +\infty.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [○] (Limites en un point fini non nul)
Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^x-1}{\big(\ln(1+\sqrt{x^2-1})\big)^2} \qquad \lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(1-\frac{1}{\tan x}\right)^{\tan x}$$

$$\lim_{x\to1} \left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{x-1}} \qquad \lim_{x\to1} \frac{x^3+2x-3}{\sqrt{x}-1}$$

1. Soit

$$f(x) = \frac{x^x-1}{\big(\ln(1+\sqrt{x^2-1})\big)^2}.$$

Posons $x = 1+h$ de sorte que x tend vers 1^+ si, et seulement si, h tend vers 0^+. On a

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^{1+h}-1}{\big(\ln(1+\sqrt{(1+h)^2-1})\big)^2} = \frac{\exp\{(1+h)\ln(1+h)\}-1}{\big(\ln(1+\sqrt{2h+h^2})\big)^2}$$

Or $\lim_{h\to0}(1+h)\ln(1+h) = 0$ et $\mathrm{e}^u - 1 \sim_0 u$ donc

$$\exp\{(1+h)\ln(1+h)\} - 1 \underset{0}{\sim} (1+h)\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h.$$

De plus, $\lim_{h\to0}\sqrt{2h+h^2} = 0$ et $\ln(1+u) \sim_0 u$ donc

$$\ln(1+\sqrt{2h+h^2}) \underset{0}{\sim} \sqrt{2h+h^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{2h}.$$

Par suite,

$$f(1+h) \underset{0}{\sim} \frac{h}{\sqrt{2h}^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{2}.}$$

2. Soit
$$g(x)=\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{x-1}}$$
Posons $x=1+h$ avec $h\longrightarrow 0$. Alors
$$\begin{aligned}g(1+h) &= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{h}}\\ &= \left\{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{h}}\\ &= \exp\left(\frac{1}{h}\ln\left\{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right\}\right).\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}\ln\left\{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right\} &= \ln\Big\{1+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-1-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}_{\text{tend vers 0 quand } h\longrightarrow 0}\Big\}\\ &\underset{0}{\sim} \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-1-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \qquad \text{car } \ln(1+\varepsilon)\underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\sim}\varepsilon.\end{aligned}$$
De plus, on sait que
$$\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-1\underset{0}{\sim}-\frac{(\pi h/2)^2}{2}=-\frac{\pi^2h^2}{8} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\underset{0}{\sim}\frac{\pi h}{2},$$
donc, puisque $h^2=o_{h\longrightarrow 0}(h)$,
$$\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-1-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\underset{0}{\sim}-\frac{\pi h}{2}.$$
Il s'ensuit que
$$\frac{1}{h}\ln\left\{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right\}\underset{0}{\sim}-\frac{\pi}{2}.$$
D'après le théorème de composition des limites, on en déduit alors que
$$\lim_{h\to 0} g(1+h)=\mathrm{e}^{-\pi/2},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x)=\mathrm{e}^{-\pi/2}.}$$

3. Soit
$$j(x)=\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$$
Posons $x=\pi/3+h$ de sorte que x tend vers $\pi/3$ si, et seulement si, h tend vers 0. On a
$$\begin{aligned}j\Big(\frac{\pi}{3}+h\Big) &= \frac{\sin(\pi+3h)}{1-2\cos(\pi/3+h)}\\ &= \frac{-\sin(3h)}{1-2\cos(\pi/3)\cos h+2\sin(\pi/3)\sin h} \qquad \text{car } \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ &= -\frac{\sin(3h)}{1-\cos h+\sqrt{3}\sin h}\\ &= -3\frac{\frac{\sin(3h)}{3h}}{h\frac{1-\cos h}{h^2}+\sqrt{3}\frac{\sin h}{h}}.\end{aligned}$$
Or, d'après le cours, on a $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(3h)}{3h}=1$, $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$. Par conséquent, on a
$$\lim_{h\to 0} j\Big(\frac{\pi}{3}+h\Big)=-3\frac{1}{0\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times 1}=-\sqrt{3},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3} j(x)=-\sqrt{3}.}$$

4. Soit

$$k(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{\sqrt{x} - 1}.$$

Posons $x = 1 + h$ avec $h \longrightarrow 0$. On a

$$\begin{aligned} k(1+h) &= \frac{(1+h)^3 + 2(1+h) - 3}{\sqrt{1+h} - 1} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 2 + 2h - 3}{\sqrt{1+h} - 1} \\ &= \frac{5h + 3h^2 + h^3}{(1+h)^{1/2} - 1}. \end{aligned}$$

Or

$$(1+h)^{1/2} - 1 \underset{h \to 0}{\sim} \frac{h}{2},$$

donc

$$k(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{5h + 3h^2 + h^3}{\frac{h}{2}} \underset{h \to 0}{\sim} 10 + 6h + 2h^2 \xrightarrow[h \to 0]{} 10,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\lim_{x \to 1} k(x) = 10.}$$

5. Soit

$$\ell(x) = \Big(1 - \frac{1}{\tan x}\Big)^{\tan x}$$

Posons $x = \pi/2 - h$ de sorte que x tend vers $(\pi/2)^-$ si, et seulement si, h tend vers 0^+. On a

$$\ell\Big(\frac{\pi}{2} - h\Big) = \Big(1 - \frac{1}{\tan(\pi/2 - h)}\Big)^{\tan(\pi/2-h)} = \Big(1 - \tan h\Big)^{1/\tan h} = \exp\Big\{\frac{\ln(1 - \tan h)}{\tan h}\Big\}.$$

Or

$$\ln(1 - \tan h) \underset{0}{\sim} -\tan h$$

donc

$$\frac{\ln(1 - \tan h)}{\tan h} \underset{0}{\sim} \frac{-\tan h}{\tan h} = -1,$$

ce qui signifie que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1 - \tan h)}{\tan h} = -1.$$

Par suite, on a

$$\lim_{h \to 0^+} \ell\Big(\frac{\pi}{2} - h\Big) = \mathrm{e}^{-1},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to (\pi/2)^-} \ell(x) = \mathrm{e}^{-1}.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [∘] (Limites à droite et à gauche en 0)
Déterminer, si elles existent, les limites en 0^+ et 0^- des fonctions

$$f(x) = x\Big|1 + \frac{1}{x}\Big| \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}.$$

1. En 0^+, on a

$$f(x) = x\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = x + 1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

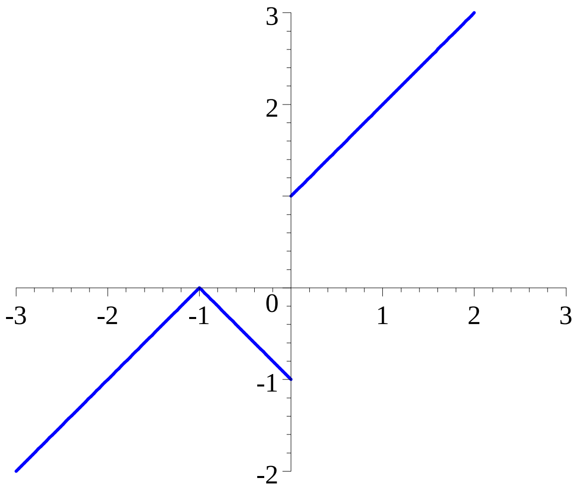
et en 0^-, on a

$$f(x) = x\Big(-1 - \frac{1}{x}\Big) = -x - 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1,$$

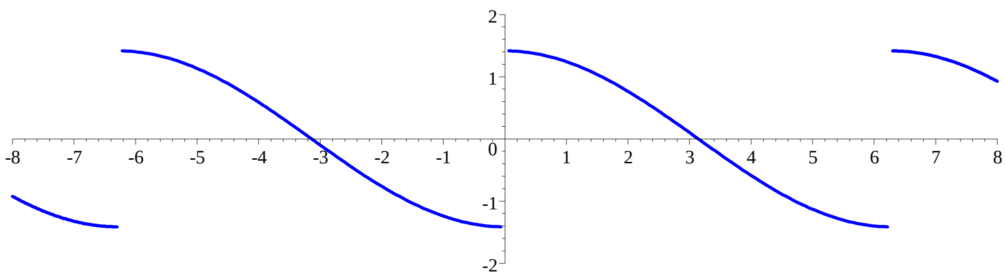
donc

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +1.}$$

Grahiquement, cela donne une fonction affine par morceaux avec un saut en 0 :



2. On a
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2}\frac{x}{|x|},$$
donc
$$g(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} -\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} +\sqrt{2},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\sqrt{2}.}$$
Grahiquement, cela donne une fonction 2π-périodique avec un saut en $0 \pmod{2\pi}$:



♦ ***Exercice 6.*** [○] (Pas de limite)
Étudier le comportement local ou asymptotique de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x+3}$ et $a = +\infty$,

b) $g(x) = (\sin x)\ln(1+x)$ et $a = +\infty$

c) $h(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{\mathrm{e}^{1/x}+1}$ et $a = 0$

1. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sin(x)$ et sin n'a pas de limite en $+\infty$, donc
$$\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } +\infty.}$$

2. On a
$$g(2n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et
$$g\Big(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big) = \ln\Big(1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
donc
$$\boxed{g \text{ n'a pas de limite en } +\infty.}$$

3. On a

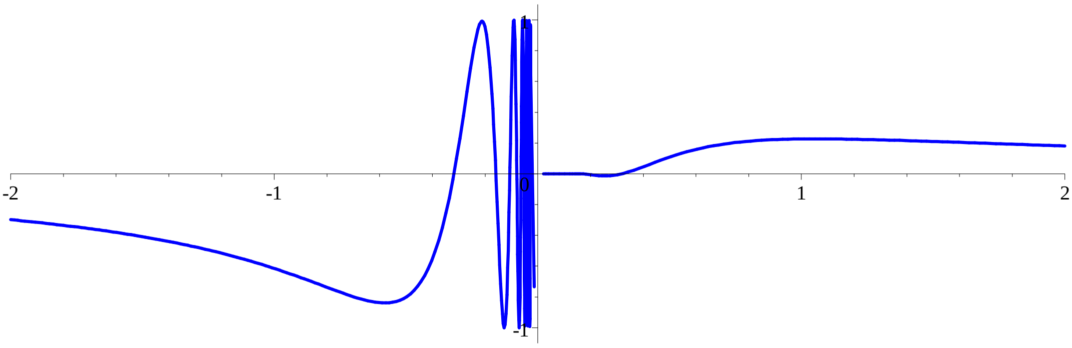
$$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto \sin(1/x) \text{ est bornée} \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1/x}+1} \xrightarrow[n\to 0^+]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$$

et

$$\frac{\sin(1/x)}{\mathrm{e}^{1/x}+1} \underset{x\to 0^-}{\sim} \sin(1/x) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \sin(1/x) \text{ n'a pas de limite.}$$

Donc

$$\boxed{h \text{ tend vers } 0 \text{ à droite de } 0 \text{ et n'a pas de limite à gauche de } 0.}$$



♦ ***Exercice 7.*** [○]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $\big(f(n)\big)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x \geqslant \lfloor x \rfloor$, donc comme f est croissante, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor)$. L'hypothèse nous dit que le gendarme $f(\lfloor x \rfloor)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc, d'après le théorème du gendarme,

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [○]
Étudier le comportement local en 0 puis le comportement asymptotique en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \qquad g(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad \text{et} \qquad h(x) = x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

donc, par le théorème du gendarme,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.}$$

Pour $x > 0$, on a

$$1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

et pour $x < 0$, on a

$$1 \leqslant x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 1.}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) = xg(x)$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = 0.}$$

2. Pour $x \geqslant 2$, on a $1/x \in]0; 1/2[$ donc $f(x) = g(x) = h(x) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]
Soient $a, b > 0$. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto (a^x + b^x)^{1/x}$.

Posons $c = \max\{a; b\}$. Alors, pour tout $x > 0$, on a

$$(c^x)^{1/x} \leqslant (a^x + b^x)^{1/x} \leqslant (2c^x)^{1/x},$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} (a^x + b^x)^{1/x} = c,$$

d'après le théorème des gendarmes. En conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (a^x + b^x)^{1/x} = \max\{a; b\}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [⋆]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante telle que $\lim_{x\to0} f_n(x) = f_n(0)$. On suppose que la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\geqslant0}$ tend vers $+\infty$ et que, pour tout $x > 0$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant0}$ tend, en croissant, vers une limite finie notée $g(x)$. On définit ainsi une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que g tend vers $+\infty$ en 0.

Commençons par démontrer que g est décroissante.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < y$. La décroissance des f_n nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) \geqslant f_n(y)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient $g(x) \geqslant g(y)$, ce qui démontre que g est décroissante.

Comme g est décroissante, le théorème de la limite monotone nous dit que g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0 et que $\forall x > 0,\ \ell \geqslant g(x)$. Comme $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant0}$ tend, en croissant, vers $g(x)$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ell \geqslant f_n(x)$. En faisant tendre x vers 0 dans cette inégalité, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell \geqslant f_n(0)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, il vient $\ell \geqslant +\infty$. Donc $\ell = +\infty$.

En conclusion,

$$\boxed{g \text{ tend vers } +\infty \text{ en } 0.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [○]
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f tend vers ℓ en a et que g tend vers m en a. Démontrer que la fonction $\max(f, g)$ tend vers $\max(\ell, m)$ en a.

Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a

$$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2},$$

donc d'après les théorèmes généraux sur les limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to a} \max(f, g)(x) = \frac{\ell + m}{2} + \frac{|\ell - m|}{2} = \max(\ell, m).$$

En conclusion,

$$\boxed{\max(f, g) \text{ tend vers } \max(\ell, m) \text{ en } a.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application périodique.

1. On suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Démontrer que f est constante.
2. On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f+g$ est monotone et $\lim_{+\infty} g = 0$. Démontrer que f est constante.

On note $T > 0$ une période de f.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(x + nT)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(x + nT) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x + nT) = \ell$. Donc $f(x) = \ell$ (ce qui démontre au passage que $\ell \in \mathbb{R}$). Donc

$$\boxed{f \text{ est constante.}}$$

2. Première méthode

   Comme $f + g$ est monotone, $f + g$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ d'après le théorème de la limite monotone. Comme g tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. D'après la première question, on en déduit que f est constante.

   Seconde méthode

   On suppose par exemple que $f + g$ est décroissante.
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il s'agit de démontrer que $f(a) = f(b)$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $a + mT \leqslant b + nT$, $|g(a + mT)| \leqslant \varepsilon$ et $|g(b + nT)| \leqslant \varepsilon$. La fonction $f + g$ étant décroissante, on a $(f + g)(a + mT) \geqslant (f + g)(b + nT)$, ce qui peut encore s'écrire sous la forme $g(a+mT)+f(a) > g(b+nT)+f(b)$. Ainsi $f(a)-f(b) > g(b+nT)-g(a+mT) > -2\varepsilon$.
   Mais on peut choisir $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $a + mT \leqslant b + nT$ et obtenir $f(a) - f(b) \leqslant -2\varepsilon$.
   On a finalement $|f(b) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout ε. Il en résulte $f(a) = f(b)$.
   Donc f est constante.

   Bilan

$$\boxed{f \text{ est constante.}}$$