Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 3 h 30

SUITES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les nombres ;
- la théorie des applications.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Généralités sur les suites

A.1. Suites numériques

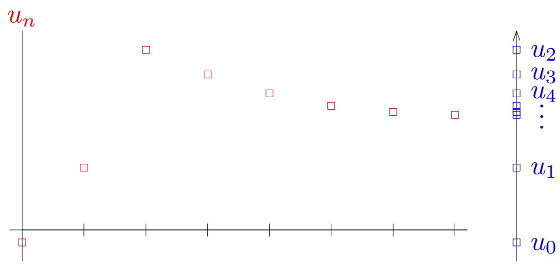
Définition 1

On appelle suite numérique toute application u définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'image de l'entier n par u est généralement notée u_n (lire « u indice n ») plutôt que $u(n)$. La suite est notée $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ ou même (u_n) lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. L'élément u_n s'appelle le n-ème terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Le premier terme de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est u_0.

L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites complexes.

Une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ est donc une famille de nombres réels ou complexes indexée par les entiers naturels.

Se donner une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ revient à se donner deux suites réelles $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + iw_n$. Les suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont appelées les parties réelle et imaginaire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \Re\mathrm{e}(u_n)$ et $w_n = \Im\mathrm{m}(u_n)$.



On peut représenter graphiquement une suite <u>réelle</u> en portant en abscisse d'un repère orthonormé les entiers naturels et en ordonnée les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points (en rouge) qui décrivent l'évolution de la suite.

On peut aussi représenter plus classiquement les termes de la suite par des points (en bleu) sur un axe gradué. Cela revient à projeter les points rouge sur un axe vertical.

On veillera à ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et son terme général u_n. On ne confondra pas non plus la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ avec l'ensemble $\{u_n : n \geqslant 0\}$ des valeurs qu'elle prend. Ainsi, $\big((-1)^n\big)$ et $\big((-1)^{n+1}\big)$ sont différentes mais ont le même ensemble de valeurs (qui est $\{-1; 1\}$).

Il est courant qu'une suite ne soit pas définie sur $\mathbb{N}$ tout entier mais seulement à partir du rang n_0 (où $n_0 \in \mathbb{N}$), c'est-à-dire sur $[\![n_0; +\infty[\![$. Son premier terme est alors u_{n_0} et elle est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On se ramène à une suite définie sur $\mathbb{N}$ en effectuant le changement d'indice $p = n - n_0$.

Pour définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, il faut définir son terme général u_n. Pour cela, on peut soit donner une formule explicite soit définir la suite par récurrence en donnant son (ou ses) premier(s) terme(s) ainsi qu'un procédé permettant de calculer un terme à partir des précédents.

Exemples :

- La suite $(0)_{n\geqslant 0}$ dont tous les termes sont nuls est appelée suite nulle.
- $(1/n)_{n\geqslant 1}$ est une suite réelle de premier terme $u_1 = 1$. C'est la suite harmonique.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle (ou complexe), on appelle valeur absolue (ou module) de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = qu_n$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.

  Pour $q \in \mathbb{C}$, la suite $(q^n)_{n\geqslant 0}$ est le prototype des suites géométriques. Lorsque $q = 2$, on obtient la suite réelle $(2^n)_{n\geqslant 0}$ et lorsque $q = i$, on obtient la suite complexe $(i^n)_{n\geqslant 0}$.
- La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

A.2. Suites constantes, stationnaires et périodiques

Définition 2

Une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite :

- constante lorsque
$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = u_n \ ;$$
- stationnaire lorsque
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_{n_0} \ ;$$
- périodique lorsque
$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+p} = u_n \ ;$$
on dit alors que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est p-périodique et que p est une période de la suite.

Une suite stationnaire n'est rien d'autre qu'une suite constante à partir d'un certain rang.

Pour une suite périodique, tout multiple (dans $\mathbb{N}^*$) d'une période est encore une période.

Exemples :

- La suite nulle est constante.
- Les suites 1-périodiques sont les suites constantes.
- La suite $\left(\lfloor 2/n \rfloor\right)_{n\geqslant 1}$ stationne à la valeur 0 à partir du rang 3.
- La suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ est constante lorsque $q = 1$, stationnaire à partir de $n = 1$ lorsque $q = 0$ (car $0^0 = 1$ par convention), 2-périodique lorsque $q = -1$ et 4-périodique lorsque $q = i$.

A.3. Opérations sur les suites

Les opérations présentées ci-dessous ont déjà été introduites pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle somme de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite dont le terme général est la somme des termes généraux de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire $(u_n+v_n)_{n\geqslant 0}$. On note

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \;+\; (v_n)_{n\geqslant 0} = (u_n+v_n)_{n\geqslant 0},$$

c'est-à-dire

$$(u_0,u_1,u_2,\dots)+(v_0,v_1,v_2,\dots)=(u_0+v_0,u_1+v_1,u_2+v_2,\dots).$$

- On appelle produit de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite dont le terme général est le produit des termes généraux de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire $(u_nv_n)_{n\geqslant 0}$. On note

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \;\times\; (v_n)_{n\geqslant 0} = (u_nv_n)_{n\geqslant 0},$$

c'est-à-dire

$$(u_0,u_1,u_2,\dots)\times(v_0,v_1,v_2,\dots)=(u_0v_0,u_1v_1,u_2v_2,\dots).$$

- On appelle produit de λ par $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite dont le terme général est le produit du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par λ, c'est-à-dire $(\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$. On note

$$\lambda(u_n)_{n\geqslant 0} = (\lambda u_n)_{n\geqslant 0},$$

c'est-à-dire

$$\lambda(u_0,u_1,u_2,\dots)=(\lambda u_0,\lambda u_1,\lambda u_2,\dots).$$

- Si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule pas, on appelle quotient de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite dont le terme général est le quotient des termes généraux de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$. On note

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \;\div\; (v_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0},$$

c'est-à-dire

$$(u_0,u_1,u_2,\dots)\div(v_0,v_1,v_2,\dots)=\left(\frac{u_0}{v_0},\frac{u_1}{v_1},\frac{u_2}{v_2},\dots\right).$$

On retiendra donc que les opérations entre suites s'effectuent terme à terme.

Les propriétés classiques des opérations $+$, $\times$ et $\div$ se transposent aux suites numériques, ce que l'on peut résumer en disant que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est un anneau commutatif dont les éléments inversibles sont les suites qui ne s'annulent jamais.

Mais attention ! L'anneau $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times)$ n'est pas intègre, ce qui signifie qu'un produit de suites peut être la suite nulle sans que l'une des deux suites soit elle-même la suite nulle.

Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}=(0,1,0,1,0,1,\dots)$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}=(1,0,1,0,1,0,\dots)$ pour s'en convaincre. Le produit $(u_n)_{n\geqslant 0}\times(v_n)_{n\geqslant 0}$ est alors la suite nulle sans qu'aucune des deux suites ne soit la suite nulle.

A.4. Suites réelles et relation d'ordre

Les définitions et résultats de ce paragraphe ont déjà été donnés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les suites réelles étant elles-mêmes des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$), on pourrait se passer de ces redites. Par prudence, je préfère passer une seconde couche !

a) Suites majorées, minorées et bornées

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geqslant 0, \qquad u_n \leqslant M.$$

On dit alors que M est un majorant de la suite.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geqslant 0, \qquad u_n \geqslant m;$$

On dit alors que m est un minorant de la suite.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée, c'est-à-dire

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geqslant 0, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M.$$

On dit alors que m et M sont des bornes pour la suite.

Dire qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée (respectivement minorée) équivaut à dire que l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par cette suite est une partie majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$.

Il n'y a jamais unicité du majorant ou du minorant. Il faut donc bien parler d'UN majorant ou d'UN minorant mais jamais du minorant ou du majorant.

On notera avec attention que les quantités m et M ne dépendent pas de n, autrement dit

$$\boxed{\text{un majorant (ou un minorant) ne dépend jamais de } n.}$$

Une suite majorée (respectivement minorée) peut très bien n'atteindre aucun de ses majorants (respectivement minorants). Par exemple, $(1-1/n)_{n\geqslant 1}$ n'est majorée par aucun de ses termes puisque sa borne supérieure est 1 et qu'elle est strictement inférieure à cette valeur.

Exemples :

- Une suite positive est une suite minorée par 0.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \sin n$, on ne doit surtout pas dire que $\sin n$ est un majorant de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (car $\sin n$ dépend de n). On peut, par contre, dire que 1 est un majorant de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \sin n \leqslant 1$.
- La suite $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ est bornée entre -1 et 1. Elle atteint le majorant 1 en $n = 0$. Par contre, elle ne prend jamais la valeur -1.
- Les suites stationnaires et périodiques sont bornées parce qu'elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.
- Une suite bornée à partir du rang n_0 (*i.e.* $\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ m \leqslant u_n \leqslant M$) est en fait bornée (tout court). En effet, comme elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs avant n_0, on peut prendre comme minorant $m' = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, m\}$ et comme majorant $M' = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, M\}$.

Pour démontrer qu'une suite est bornée, il convient de faire très attention aux signes des expressions qui interviennent dans les inégalités que l'on manipule. Pour éviter tout écueil, on préfère souvent travailler en valeurs absolues. La proposition suivante justifie la légitimité de cette démarche.

Proposition 1

La suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si, et seulement si, la suite de ses valeurs absolues $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \quad \forall n \geqslant 0, \qquad |u_n| \leqslant K.$$

■ Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée par K, alors $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K$, ce qui implique que $\forall n \geqslant 0,\ -K \leqslant u_n \leqslant K$ et donc que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (puisqu'elle est minorée par $-K$ et majorée par K).

Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $\forall n \geqslant 0,\ m \leqslant u_n \leqslant M$. Alors, en posant $K = \max\{|m|\,;\,|M|\}$, on a $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K$, ce qui établit bien que $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée. ■

L'équivalence donnée dans cette proposition est uniquement qualitative. Du point de vue quantitatif, il est généralement plus précis de connaître un minorant et un majorant d'une suite que de connaître un majorant de sa valeur absolue. Ainsi, si l'on sait que $\forall n \geqslant 0,\ 2 \leqslant u_n \leqslant 3$, alors $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant 3$ mais l'information est moins précise.

L'exemple ci-dessous donne une situation où il est plus simple de travailler avec des valeurs absolues qu'avec des encadrements et les enquiquineries de signe qui vont avec.

Exemples :

- Démontrons que le produit et la somme de deux suites bornées est encore une suite bornée.

  Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles bornées. Il existe alors $K_u, K_v > 0$ telles que $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K_u$ et $\forall n \geqslant 0,\ |v_n| \leqslant K_v$.

  En multipliant ces inégalités (entre nombres positifs), on obtient $\forall n \geqslant 0,\ |u_n v_n| \leqslant K_u K_v$, ce qui démontre que $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

  En ajoutant ces inégalités, on obtient $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| + |v_n| \leqslant K_u + K_v$. Or l'inégalité triangulaire dit que $\forall n \geqslant 0,\ |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, donc $\forall n \geqslant 0,\ |u_n + v_n| \leqslant K_u + K_v$, ce qui démontre que $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

b) *Suites monotones*

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite croissante (respectivement strictement croissante) lorsque
$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \qquad (\text{respectivement } u_n < u_{n+1}).$$
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) lorsque
$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \geqslant u_{n+1} \qquad (\text{respectivement } u_n > u_{n+1}).$$
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite monotone (respectivement strictement monotone) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

Notons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (respectivement décroissante) si, et seulement si, $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante (respectivement décroissante). Cette remarque vous explique pourquoi on peut souvent se ramener à une suite croissante, quitte à remplacer la suite par son opposée.

Pour dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante), on peut aussi écrire que $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \leqslant q) \Longrightarrow (u_p \leqslant u_q)$ (respectivement $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \leqslant q) \Longrightarrow (u_p \geqslant u_q)$)

Notons qu'une suite croissante est minorée par son premier terme. De même, une suite décroissante est majorée par sa première valeur.

Certaines suites ne sont monotones qu'à partir d'un certain rang. On verra que c'est suffisant pour tous les théorèmes sur les limites.

Du point de vue du vocabulaire, on dit que « $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone ». On ne doit jamais dire que « u_n est monotone pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». Cela signifierait qu'un nombre réel est monotone, ce qui n'a pas de sens.

Exemples :

- Les suites constantes sont les seules suites à la fois croissantes et décroissantes.
- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite croissante puisqu'en passant de n à $n+1$, on ajoute un terme positif.
- La suite $(n-3)^2$ est croissante à partir du rang 3.
- La somme de deux suites de même monotonie est une suite monotone (de même monotonie). Dès que l'une des deux suites est strictement monotone, la somme l'est aussi.
- Le produit de deux suites croissantes positives est une suite croissante.

  Le produit de deux suites décroissantes positives est une suite décroissante.

  Sans l'hypothèse de positivité, tout est possible ! Par exemple, la suite $(-1/n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante mais lorsqu'on la multiplie par elle-même, on obtient la suite $(1/n^2)_{n\geqslant 1}$ qui est strictement décroissante.
- Le produit d'une suite monotone par un réel positif ou nul (respectivement négatif ou nul) est une suite monotone de même monotonie (respectivement de monotonie contraire).
- Une suite monotone est de signe constant à partir d'un certain rang.
- L'inverse d'une suite monotone qui ne s'annule pas est, à partir d'un certain rang, une suite monotone, de monotonie contraire.

L'encadré suivant fait le point sur les techniques classiques d'étude de la monotonie d'une suite.

Étude de la monotonie d'une suite réelle

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, il existe essentiellement trois méthodes :

- ▶ On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet,
  - ▷ si celle-ci est positive ou nulle (respectivement strictement positive) pour tout $n \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (respectivement strictement croissante) ;
  - ▷ si elle est nulle pour tout $n \geqslant 0$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante ;
  - ▷ si elle est négative ou nulle (respectivement strictement décroissante), $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante (respectivement décroissante).
- ▶ Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, on peut aussi étudier la position du quotient u_{n+1}/u_n par rapport à 1. Plus précisément,
  - ▷ si le quotient est supérieur ou égal à 1 (respectivement strictement supérieur à 1) pour tout $n \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (respectivement strictement croissante) ;
  - ▷ si il est égal à 1 pour tout $n \geqslant 0$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante ;
  - ▷ si il est inférieur ou égal à 1 (respectivement strictement inférieur à 1), $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante).
- ▶ Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme $\forall n \geqslant 0,\ u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut étudier le sens de variation de f et en déduire celui de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

On aura intérêt à utiliser le quotient u_{n+1}/u_n lorsque la suite est « multiplicative ».

Exemples :

- Si $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite positive, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

  Mais attention, si le terme que l'on somme dépend de n, on ne peut pas conclure immédiatement. Ainsi, on ne peut pas affirmer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante en disant que l'on somme des termes positifs. D'ailleurs, elle n'est pas croissante mais décroissante (ce qui n'est pas évident) !
- Pour $q \in \mathbb{R}$, la suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante si $q > 1$, strictement décroissante si $0 < q < 1$ et oscille lorsque $q < 0$.

  Pour le démontrer, on utilise le critère en $u_{n+1} - u_n$ (le critère en u_{n+1}/u_n ne fonctionnant pas pour $q < 0$).
- La suite $u_n = (n+1)!/2^n$ est strictement croissante à partir du rang 1 puisque le quotient $u_{n+1}/u_n = (n+2)/2$ est strictement supérieur à 1 pour $n \geqslant 1$
- La suite de terme général $u_n = (\ln n)/n$ est décroissante à partir du rang 3. En effet, la fonction $x \longmapsto (\ln x)/x$ est croissante sur $]0; \mathrm{e}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$ et l'on vérifie avec la boutonneuse que $f(2) < f(3)$.

c) *Relation d'ordre sur les suites réelles*

Définition 6

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est inférieure à $(v_n)_{n\geqslant 0}$ (respectivement $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement inférieure à $(v_n)_{n\geqslant 0}$), et l'on note $(u_n)_{n\geqslant 0} \leqslant (v_n)_{n\geqslant 0}$ (respectivement $(u_n)_{n\geqslant 0} < (v_n)_{n\geqslant 0}$), lorsque

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \leqslant v_n \quad \text{(respectivement } u_n < v_n\text{)}.$$

Ainsi, l'inégalité $(u_n)_{n\geqslant 0} \leqslant (v_n)_{n\geqslant 0}$ signifie que l'on a cette inégalité terme à terme.

Les propriétés classiques de la relation $\leqslant$ se transposent aux suites réelles et donnent à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une structure d'ensemble ordonné, dont la relation d'ordre est compatible avec les opérations $+$ et $\times$.

Mais attention ! L'ordre obtenu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas total, ce qui signifie qu'on peut trouver deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que ni $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ni $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ne soit supérieure à l'autre (on dit alors que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne sont pas compararables).

Par conséquent, le contraire de $(u_n)_{n\geqslant 0} \leqslant (v_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas $(u_n)_{n\geqslant 0} > (v_n)_{n\geqslant 0}$!!

A.5. Suites complexes et relation d'ordre

Toutes les notions concernant les suites réelles qui sont liées à la relation d'ordre $\leqslant$ ne peuvent pas se transposer aux suites complexes. On ne parlera donc pas de suite majorée, minorée, croissante, décroissante, ni même de comparaison entre suites.

Toutefois, par analogie avec le résultat de la proposition 1, on peut étendre au cas des suites complexes la notion de « suite bornée ».

Définition 7

Une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite bornée lorsque son module $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée, c'est-à-dire $\exists K > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K$.

Attention, dans $\mathbb{C}$, une suite bornée n'est pas une suite dont les valeurs restent comprises entre deux quantités fixées (cela n'aurait d'ailleurs aucun sens), c'est une suites dont les images des termes, dans le plan complexe, restent à l'intérieur d'un disque de centre l'origine et de rayon fini.

Exemples :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathrm{e}^{in\theta})_{n\geqslant 0}$ est bornée puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ |\,\mathrm{e}^{in\theta}\,| = 1$ (ici, l'inégalité espérée est une égalité... c'est mieux !).
- Plus généralement, si $q \in \mathbb{C}$ est de module inférieur ou égal à 1 (i.e. $|q| \leqslant 1$), la suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N},\ |q^n| = |q|^n \leqslant 1^n = 1$.

La proposition suivante caractérise les suites complexes bornées à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Proposition 2

Une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si, et seulement si, $\big(\Re\mathrm{e}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ sont des suites bornées.

■ $\Rightarrow$ Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et notons $K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\Re\mathrm{e}(u_n)| \leqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}(u_n)^2 + \Im\mathrm{m}(u_n)^2} = |u_n| \leqslant K$$

et

$$|\Im\mathrm{m}(u_n)| \leqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}(u_n)^2 + \Im\mathrm{m}(u_n)^2} = |u_n| \leqslant K$$

donc $\big(\Re\mathrm{e}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ sont bornées.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\big(\Re\mathrm{e}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ sont bornées et notons $M_1, M_2 > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\Re\mathrm{e}(u_n)| \leqslant M_1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ |\Im\mathrm{m}(u_n)| \leqslant M_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| = \sqrt{\Re\mathrm{e}(u_n)^2 + \Im\mathrm{m}(u_n)^2} \leqslant \sqrt{{M_1}^2 + {M_2}^2},$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. ■

A.6. Sous-suites

Définition 8

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite constituée d'une infinité de termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (mais pas forcément tous) avec les deux règles suivantes : aucun terme n'est répété et les termes sont laissés dans le même ordre.

C'est donc une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On dit que φ est une extraction.

Une sous-suite est donc obtenue en supprimant des termes de sorte qu'il en reste une infinité.

L'extraction φ étant strictement croissante, elle « récite » par ordre croissant une infinité de valeurs entières. Cela assure à la fois le fait que les termes de la sous-suite sont dans le même ordre que dans la suite initiale et le fait qu'il y a une infinité de termes dans la sous-suite.

On voit que l'extraction φ est elle-même une suite. Cela permet d'écrire φ sous la forme $(n_p)_{p\geqslant 0}$ où les n_p sont des entiers rangés par ordre strictement croissant. La suite extraite est alors notée $(u_{n_p})_{p\geqslant 0}$. C'est la notation indicielle des sous-suites. On constate ainsi que le travail de l'extraction φ est de renuméroter les termes de la suite extraite.

Exemples :

- $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est la sous-suite des termes d'indices pairs et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est la sous-suite des termes d'indices impairs.

  Par exemple, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est la suite constante égale à 1 et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est la suite constante égale à -1.
- $(u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est la sous-suite obtenue en retirant le premier terme de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

  Plus généralement, pour $p\in\mathbb{N}$, $(u_{n+p})_{n\geqslant 0}$ est la sous-suite obtenue en otant les p premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
- La suite $(u_{n^2-n})_{n\geqslant 0} = (u_0, u_0, u_2, u_6, \dots)$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ car le terme u_0 est répété (autrement dit l'application $\varphi(n) = n^2 - n$ n'est pas strictement croissante). Par contre, $(u_{n^2-n})_{n\geqslant 1}$ est bien une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
- La suite $(u_1, u_0, u_3, u_2, u_5, u_4, \dots)$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ car l'ordre des termes n'est pas respecté.

L'énoncé suivant s'intéresse aux suites extraites d'une suite extraite.

Proposition 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On extrait de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ à l'aide de l'extraction φ puis on extrait de $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ à l'aide de l'extraction ψ. Alors $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ obtenue à l'aide de l'extraction $\varphi\circ\psi$.

Une sous-sous-suite est donc une sous-suite.

■ $\varphi\circ\psi$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. C'est donc bien une extraction. ■

Attention à l'ordre dans lequel interviennent les extractions φ et ψ ! Habituellement, avec la loi $\circ$, quand on fait agir φ puis ψ, c'est $\psi\circ\varphi$ qui agit globalement. Et bien, pas ici ! Quand on utilise l'extraction φ puis l'extraction ψ, on utilise l'extraction $\varphi\circ\psi$! La raison est simple : la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ n'est rien d'autre que l'application $u\circ\varphi$. Par conséquent, extraire une sous-suite, c'est composer à droite par l'extraction φ. Lorsqu'on réextrait, on compose à nouveau à droite, cette fois par ψ, pour obtenir $u\circ\varphi\circ\psi$. L'extraction composée est donc bien $\varphi\circ\psi$.

Avec la notation indicielle des sous-suites, c'est plus limpide : une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit $(u_{n_p})_{p\geqslant 0}$ et une sous-suite de $(u_{n_p})_{p\geqslant 0}$ s'écrit $(u_{n_{p_q}})_{q\geqslant 0}$. 1 h 30

B. Suites usuelles

B.1. Suites arithmétiques

Définition 9

Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ de raison $r \in \mathbb{C}$ est définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{C}$ et d'une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Lorsque la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est arithmétique, on vérifie aisément que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = (u_n + u_{n+2})/2$, autrement dit que tout terme de la suite est la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant. C'est pour cette raison que les suites arithmétiques s'appellent des suites « arithmétiques ».

Le terme général d'une suite arithmétique s'exprime explicitement à l'aide de son premier terme, de sa raison et de n.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. On a

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

■ On sort la casserole et on récurre. ■

On retrouve aisément la formule ci-dessus en disant que « pour arriver à u_n, il faut partir de u_{n_0} et faire $n - n_0$ pas de longueur r ».

Lorsque la suite arithmétique est réelle, le résultat de cette proposition nous donne le comportement asymptotique de la suite : si la raison est nulle, la suite est constante ; si la raison est strictement positive, la suite diverge vers $+\infty$; si la raison est strictement négative, la suite diverge vers $-\infty$.

Dans le chapitre sur les sommes et les produits, on trouve la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

B.2. Suites géométriques

Définition 10

Une suite géométrique $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ de raison $q \in \mathbb{C}$ est définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{C}$ et d'une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = q\, u_n.$$

Lorsque la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est géométique et positive (pour éviter les soucis de signe), on vérifie aisément que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$, autrement dit que tout terme de la suite est la moyenne géométrique du terme précédent et du terme suivant. C'est pour cette raison que les suites géométriques s'appellent des suites « géométriques ».

Le mot raison vient du latin *ratio* signifiant « rapport ». Étymologiquement donc, seules les raisons des suites géométriques devraient avoir le droit de porter ce nom...

Le terme général d'une suite géométrique s'exprime explicitement à l'aide de son premier terme, de sa raison et de n.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{C}$. On a

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0}\, q^{n-n_0}.$$

■ On ressort la casserole et on rerécurre. ■

Comme dans le cas arithmétique, on retrouve aisément la formule ci-dessus en disant que « pour arriver à u_n, il faut partir de u_{n_0} et faire $n - n_0$ multiplications par q ».

Lorsque la suite géométrique est réelle, le résultat de cette proposition nous donne le comportement asymptotique de la suite : si $q \leqslant -1$, la suite admet une « divergence oscillante » ; si $q = -1$, la suite oscille entre deux valeurs opposées ; si $-1 < q < 1$, la suite converge vers 0 ; si $q = 1$, la suite est constante ; si $q > 1$, la suite diverge vers $\pm\infty$ (le signe est celui du premier terme de la suite).

Dans le chapitre sur les sommes et les produits, on trouve la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

B.3. Suites arithmético-géométriques

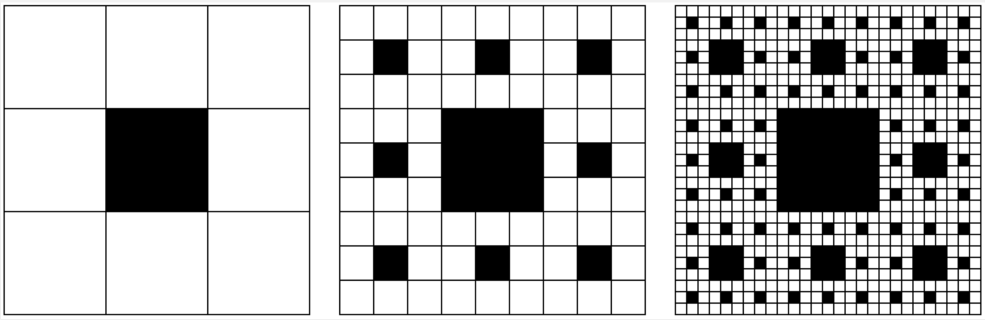
Définition 11

Une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de raisons $q, r \in \mathbb{C}$ est définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{C}$ et d'une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = qu_n + r.$$

Exemples :

- Pour $q = 1$, on retrouve les suites arithmétiques et pour $r = 0$, les suites géométriques.
- Un carré unité est divisé en 9 carrés égaux, le carré central est colorié. Les huit carrés restant sont à leur tour divisés et coloriés selon le même procédé. Ainsi de suite...



Notons u_n l'aire coloriée à la n-ème itération. On a $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n) = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9},$$

puisqu'à chaque étape, on colorie $1/9$ de ce qui reste. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc arithmético-géométrique de raisons $8/9$ et $1/9$.

Comme dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, on peut exprimer explicitement le terme général d'une suite arithmético-géométrique à l'aide de son premier terme, de ses raisons et de n. Le résultat (qui n'est pas à savoir par cœur) s'obtient grâce à la technique décrite ci-dessous.

Formule explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmético-géométrique de raisons q, r avec $q \neq 1$. On souhaite déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de u_{n_0}, q, r et n.

Pour cela, on introduit le point fixe de la suite, c'est-à-dire le nombre réel ℓ tel que $\ell = q\ell + r$ (qui vaut donc $\ell = r/(1-q)$) et l'on effectue, pour tout $n \geqslant n_0$, la soustraction :

$$\begin{array}{ccccc} & u_{n+1} & = & qu_n & + \quad r \\ \ominus & \ell & = & q\ell & + \quad r \\ \hline & u_{n+1} - \ell & = & q(u_n - \ell) & \end{array}$$

ce qui démontre que la suite $(u_n - \ell)_{n\geqslant n_0}$ est géométrique de raison q.

Cela permet d'écrire que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n - \ell = q^{n-n_0}\,(u_{n_0} - \ell)$, c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = \ell + q^{n-n_0}\,(u_{n_0} - \ell).$$

Si $-1 < q < 1$, la suite converge donc vers le point fixe ℓ. Dans les autres cas, le comportement asymptotique est celui d'une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_{n_0} - \ell$.

Exemples :

- Reprenons l'exemple du carré unité traité précédemment. On peut légitimement se demander quelle est la limite de l'aire du domaine colorié si l'on continue indéfiniment le processus de coloriage.
  On a vu que l'aire u_n qui est coloriée à la n-ème itération est telle que $u_0 = 0$ et
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9}.$$
  Le point fixe ℓ est défini par
  $$\ell = \frac{8}{9}\ell + \frac{1}{9}$$
  donc
  $$\ell = 1.$$
  En effectuant la soustraction
  $$\begin{array}{rccccc} & u_{n+1} & = & \frac{8}{9}u_n & + & \frac{1}{9} \\ \ominus & \ell & = & \frac{8}{9}\ell & + & \frac{1}{9} \\ \hline & u_{n+1} - \ell & = & \frac{8}{9}(u_n - \ell) & & \end{array}$$
  on constate que $(u_n - \ell)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison 8/9. On a par conséquent la relation
  $$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n - \ell = \left(\frac{8}{9}\right)^n (u_0 - \ell),$$
  ce qui donne
  $$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$
  Il s'ensuit que $\lim u_n = 1$, ce qui prouve qu'on « finit » par colorier l'intégralité du carré !

B.4. Suites récurrentes doubles

Définition 12

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite récurrente double si $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ sont donnés et s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que la suite satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation caractéristique de cette suite est alors l'équation du second degré

$$q^2 = aq + b.$$

L'équation caractéristique est l'équation que doit satisfaire la raison q d'une suite géométrique qui suit la relation de récurrence double.

Exemples :

- La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est une suite récurrente double d'équation caractéristique $q^2 - q - 1 = 0$.

On peut expliciter le terme général d'une suite récurrente double en fonction des racines de l'équation caractéristique. On commence par le cas où il y a deux racines distinctes.

Proposition 6

Si le discriminant Δ de l'équation caractéristique est non nul, celle-ci admet deux racines complexes distinctes q_1 et q_2. La suite est alors bigéométrique, c'est-à-dire que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \lambda\, {q_1}^n + \mu\, {q_2}^n,$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont déterminés à l'aide des valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1.

Lorsque la suite est réelle et $\Delta > 0$, les quantités q_1, q_2, λ, μ sont toutes réelles.

■ On suppose que les nombres λ et μ ont été déterminés pour que $\lambda {q_1}^0 + \mu {q_2}^0 = u_0$ et $\lambda {q_1}^1 + \mu {q_2}^1 = u_1$. On procède alors par récurrence double pour démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathscr{P}(n)$: $u_n = \lambda {q_1}^n + \mu {q_2}^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ par définition de λ et μ.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et déduisons-en $\mathscr{P}(n+2)$. On a

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & au_{n+1} + bu_n \qquad \text{par définition de } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ & = & a(\lambda {q_1}^{n+1} + \mu {q_2}^{n+1}) + b(\lambda {q_1}^n + \mu {q_2}^{n+1}) \qquad \text{par HR} \\ & = & \lambda {q_1}^n (aq_1 + b) + \mu {q_2}^n (aq_2 + b) \\ & = & \lambda {q_1}^{n+2} + \mu {q_2}^{n+2} \qquad \text{car } aq_1 + b = {q_1}^2 \text{ et } aq_1 + b = {q_2}^2, \end{array}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+2)$.

Conclusion : Le principe de récurrence double permet alors de conclure. ■

Exemples :

- Considérons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 5 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $q^2 - 5q + 6 = 0$ sont $q_1 = 2$ et $q_2 = 3$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Comme $u_0 = 2$, on a $\lambda + \mu = 2$ et, comme $u_1 = 5$, on a $2\lambda + 3\mu = 5$. Cela donne $\lambda = \mu = 1$. Donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = 2^n + 3^n.$$

Dans la proposition ci-dessous, on traite le cas où l'équation caractéristique admet une racine double.

Proposition 7

Si le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul, celle-ci admet une racine complexe double q_0. La suite est alors de la forme

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\, {q_0}^n,$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont déterminés à l'aide des valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1.

Lorsque la suite est réelle, les quantités q_0, λ, μ sont toutes réelles.

■ On suppose que les nombres λ et μ ont été déterminés pour que $(\lambda+\mu\times 0){q_0}^0 = u_0$ et $(\lambda+\mu\times 1){q_0}^1 = u_1$. On procède alors par récurrence double pour démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathscr{P}(n) : u_n = (\lambda+\mu n){q_0}^n$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ par définition de λ et μ.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et déduisons-en $\mathscr{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \qquad \text{par définition de } (u_n)_{n\geqslant 0} \\
&= a\big(\lambda + \mu(n+1)\big){q_0}^{n+1} + b(\lambda + \mu n){q_0}^n \qquad \text{d'après } \mathscr{P}(n+1) \text{ et } \mathscr{P}(n) \\
&= \big\{\lambda(a q_0 + b) + \mu\big(a(n+1)q_0 + bn\big)\big\}{q_0}^n \\
&= \Big\{\lambda {q_0}^2 + \mu\Big(a(n+1)\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}n\Big)\Big\}{q_0}^n \qquad \text{car } \left\{\begin{array}{l} a q_0 + b = {q_0}^2 \\ q_0 = a/2 \\ b = -a^2/4 \text{ (vient de } \Delta = 0) \end{array}\right. \\
&= \Big\{\lambda {q_0}^2 + \mu(n+2)\frac{a^2}{4}\Big\}{q_0}^n \\
&= \big(\lambda + \mu(n+2)\big){q_0}^{n+2} \qquad \text{car } q_0 = a/2
\end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+2)$.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence double permet alors de conclure. ■

Vous aurez noté l'analogie entre les différentes expressions du terme général d'une suite récurrente double et les formules donnant les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Nous expliquerons plus tard ces ressemblances.

Lorsque les premiers termes connus sont u_1 et u_2, il est judicieux de déterminer u_0 à l'aide de la relation $u_2 = a u_1 + b u_0$ afin de faciliter le calcul de λ et μ.

C'est particulièrement efficace dans le cas de l'énoncé précédent puisque u_0 donne immédiatement la valeur de λ.

<u>Exemples :</u>

- Considérons $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$v_1 = -1, \qquad v_2 = -3/2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, \quad 4v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n.$$

La solution double de l'équation caractéristique $4q^2 - 4q + 1 = 0$ est $q_0 = 1/2$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = \frac{\lambda + \mu n}{2^n}.$$

On dispose des valeurs de v_1 et v_2 mais pas de celle de v_0. Pour calculer celle-ci, on utilise la relation $4v_2 = 4v_1 - v_0$, ce qui donne $v_0 = 2$. Cette condition nous dit immédiatement que $\lambda = 2$. Par ailleurs, la condition $v_1 = -1$ nous dit que $\mu = -4$. Donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = \frac{1 - 2n}{2^{n-1}}.$$

Le cas où la suite récurrente double est complexe est entièrement traité par les deux propositions précédentes. Toutefois, dans le cas où la suite est réelle et le discriminant de l'équation caractéristique est strictement négatif, la proposition 6 fournit une expression de la suite réelle utilisant des nombres complexes (c'est balot !). Le corollaire suivant donne une autre expression ne faisant intervenir que des quantités réelles.

Corollaire 1

Si a, b, u_0, u_1 sont réels et si le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement négatif, celle-ci admet deux racines complexes conjuguées $q = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{q} = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$). La suite est alors de la forme

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = r^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont déterminés à l'aide des valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1.

■ Deux démonstrations pour le prix d'une !

La proposition 5 nous dit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n + B(r\,\mathrm{e}^{-i\theta})^n = r^n(A\,\mathrm{e}^{in\theta} + B\,\mathrm{e}^{-in\theta})$ où $A, B \in \mathbb{C}$. Comme $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, on a $A+B \in \mathbb{R}$ et $A\,\mathrm{e}^{i\theta} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta} \in \mathbb{R}$. La première information nous dit que $A = \alpha + i\beta$ et $B = \alpha' - i\beta$ avec $\alpha, \alpha', \beta \in \mathbb{R}$. En reportant dans la seconde information, on a $(\alpha+i\beta)\,\mathrm{e}^{i\theta} + (\alpha'-i\beta)\,\mathrm{e}^{-i\theta} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\alpha\,\mathrm{e}^{i\theta} + \alpha'\,\mathrm{e}^{-i\theta} - 2\beta\sin(\theta) \in \mathbb{R}$ d'après la formule d'Euler $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$. On en déduit que $\alpha\,\mathrm{e}^{i\theta} + \alpha'\,\mathrm{e}^{-i\theta} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $(\alpha - \alpha')\sin(\theta) = 0$ et donc $\alpha = \alpha'$ puisque $\theta \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On a donc $A = \alpha + i\beta$ et $B = \alpha - i\beta$ (autrement dit, A et B sont conjugués). En reportant dans l'expression de u_n, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n\big(\alpha(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}) + i\beta(\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta})\big) = r^n\big(2\alpha\cos(n\theta) - 2\beta\sin(n\theta)\big)$, d'après les formules d'Euler. On pose $\lambda = 2\alpha$ et $\mu = -2\beta$ pour conclure.

On peut aussi raisonner par récurrence double. Pour cela, on suppose que les réels λ et μ ont été déterminés pour que $r^0\big(\lambda\cos(0\times\theta) + \mu\sin(0\times\theta)\big) = u_0$ et $r^1\big(\lambda\cos(1\times\theta) + \mu\sin(1\times\theta)\big) = u_1$ et l'on considère, pour tout $n \geqslant 0$, l'assertion $\mathscr{P}(n) : u_n = r^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big)$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ par définition de λ et μ.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et déduisons-en $\mathscr{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \qquad \text{par définition de } (u_n)_{n\geqslant 0}\\
&= ar^{n+1}\big(\lambda\cos(n+1)\theta + \mu\sin(n+1)\theta\big) + br^n(\lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta) \qquad \text{par H. R.}\\
&= r^n\big\{\lambda\big(ar\cos(n+1)\theta + b\cos n\theta\big) + \mu\big(ar\sin(n+1)\theta + b\sin n\theta\big)\big\}\\
&= r^n\big\{\lambda\Re\mathrm{e}(ar\,\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} + b\,\mathrm{e}^{in\theta}) + \mu\Im\mathrm{m}(ar\,\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} + b\,\mathrm{e}^{in\theta})\big\}\\
&= r^n\big\{\lambda\Re\mathrm{e}\big((ar\,\mathrm{e}^{i\theta} + b)\,\mathrm{e}^{in\theta}\big) + \mu\Im\mathrm{m}\big((ar\,\mathrm{e}^{i\theta} + b)\,\mathrm{e}^{in\theta}\big)\big\}\\
&= r^n\big\{\lambda\Re\mathrm{e}(r^2\,\mathrm{e}^{i(n+2)\theta}) + \mu\Im\mathrm{m}(r^2\,\mathrm{e}^{i(n+2)\theta})\big\} \qquad \text{car } ar\,\mathrm{e}^{i\theta} + b = (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^2\\
&= r^{n+2}\big(\lambda\cos(n+2)\theta + \mu\sin(n+2)\theta\big)
\end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+2)$.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence double permet alors de conclure. ■

<u>Exemples :</u>

- Considérons $(w_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $q^2 - 2q + 2 = 0$ sont $q = 1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$ et $\overline{q} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad w_n = (\sqrt{2})^n\big(\lambda\cos(n\pi/4) + \mu\sin(n\pi/4)\big).$$

Comme $w_0 = 1$ et $w_1 = 2$, on a $\lambda = \mu = 1$. Donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad w_n = (\sqrt{2})^n\big(\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/4)\big).$$

B.5. Suites homographiques

Définition 13

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite homographique si $u_0 \in \mathbb{C}$ est donné et s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que la suite satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

Nous n'évoquerons pas théoriquement les cas où la suite n'est pas définie à partir d'un certain rang à cause du dénominateur qui s'annule. Nous montrerons, au cas par cas, que ce problème ne se pose pas dans les exemples que nous rencontrerons.

Notons que les suites arithmético-géométriques sont des suites homographiques.

Là encore, la détermination d'une forme explicite du terme général de la suite se ramène à l'étude d'une suite arithmétique ou géométrique. C'est ce qui est résumé dans l'encadré ci-dessous.

Formule explicite d'une suite homographique

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite homographique définie par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de u_0, a, b, c, d et n.

Pour cela, on commence par rechercher les points fixes de la suite, c'est-à-dire les nombres complexes ℓ tels que

$$\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d}$$

Cela nous conduit à la résolution d'une équation du second degré. On doit alors distinguer deux cas selon que l'on trouve deux racines distinctes ou une racine double.

- S'il existe deux racines complexes distinctes α et β, on introduit la suite auxiliaire (v_n) dont le terme général est

  $$v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}.$$

  On vérifie alors que cette suite est géométrique, ce qui permet de déterminer son terme général en fonction de n. Il reste ensuite à exprimer u_n en fonction de v_n pour obtenir l'expression attendue de u_n.

- S'il existe une racine complexe double α, on introduit la suite auxiliaire (v_n) dont le terme général est

  $$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

  On vérifie alors que cette suite est arithmétique, ce qui permet de déterminer son terme général en fonction de n. Il reste ensuite à exprimer u_n en fonction de v_n pour obtenir l'expression attendue de u_n.

■ En exercice. ■

Une fois l'expression explicite de u_n déterminée, on peut vérifier a posteriori que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ existe (ce qui revient à dire qu'elle ne prend pas la valeur $-d/c$).

Exemples :

- Déterminons l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0=2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}\cdot$$

Recherchons le(s) point(s) fixe(s) de la suite :

$$\ell=\frac{\ell}{3-2\ell}\iff \ell^2-\ell=0\iff \ell\in\{0;1\}.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{u_n}{3-2u_n}}{\dfrac{u_n}{3-2u_n}-1}=\frac{\dfrac{u_n}{3-2u_n}}{\dfrac{3u_n-3}{3-2u_n}}=\frac{1}{3}\frac{u_n}{u_n-1},$$

donc $\big(u_n/(u_n-1)\big)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $1/3$, ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{u_n-1}=\frac{1}{3^n}\frac{u_0}{u_0-1}=\frac{2}{3^n}\cdot$$

Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_n}{u_n-1}=\frac{2}{3^n}\iff 3^nu_n=2u_n-2\iff u_n=\frac{2}{2-3^n},$$

où la dernière division est justifiée par le fait que $\forall n\in\mathbb{N},\ 3^n\neq 2$.

- Déterminons l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_0=2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_{n+1}=\frac{3v_n-2}{2v_n-1}\cdot$$

Recherchons le(s) point(s) fixe(s) de la suite :

$$\ell=\frac{3\ell-2}{2\ell-1}\iff \ell^2-2\ell+1=0\iff (\ell-1)^2=0\iff \ell=1.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors

Binet ♡

$$\frac{1}{v_{n+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{3v_n-2}{2v_n-1}-1}=\frac{1}{\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}}=\frac{2v_n-1}{v_n-1}=\frac{2v_n-2+1}{v_n-1}=2+\frac{1}{v_n-1},$$

donc $\big(1/(v_n-1)\big)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison 2, ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{v_n-1}=\frac{1}{v_0-1}+2n=2n+1.$$

Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{v_n-1}=2n+1\iff v_n-1=\frac{1}{2n+1}\iff v_n=\frac{2n+2}{2n+1},$$

où la division est justifiée par le fait que $\forall n\in\mathbb{N},\ 2n+1\neq 0$.

3 h 30