# DS1 : Probabilités et statistiques appliquées

**Durée 1h30, documents et objets connectés interdits.**

*Chaque réponse devra être rédigée en français, être intelligible et parfaitement justifiée.*

**Exercice 1 :** Questions de cours (2 points)

1. (1 point) Quelle information apporte une mesure de probabilité ? Sur quel intervalle sont bornées ses valeurs ?
Une probabilité donne une indication sur l'intervalle $[0; 1]$ la possibilité qu'un événement aléatoire se réalise. Plus cette probabilité est importante, plus l'événement aléatoire est susceptible de se réaliser.
2. (1 points) Quelles propriétés vérifient 2 événements aléatoires $A$ et $B$ qui sont indépendants entre eux ? 2 événements $A$ et $B$ indépendants vérifient $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$ et resp. $P(B|A) = P(B)$.

**Exercice 2 :** Dénombrement et probabilités (8 points) :

1. (2 points) Dans le film "Stargate", les personnages doivent entrer 7 symboles uniques choisis parmi 39 sur un terminal afin de voyager vers une destination. Sachant que l'ordre dans lequel on entre les symboles est important, calculer le nombre total de séquences de symboles possibles. (tirage ordonné sans remise) Il existe donc $A_{39}^7 = \frac{39!}{32!} = \prod_{x=33}^{39} x = 77\ 519\ 922\ 480$ adresses
2. (2 points) Au poker, les mains comptent 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de mains comportent la reine de Coeur ? (tirage non-ordonné sans remise) La reine de coeur est fixe, pour le reste, il y a $C_{31}^4 = \frac{31!}{27!4!} = 31\ 465$ mains. On peut éventuellement tolérer la solution tenant compte de l'ordre même si ce n'est pas la plus évidente pour une "main" dans un jeu de cartes. $A_{31}^4 = C_{31}^4 4! = 755\ 160$
3. (2 points) Dans une course de F1, 20 pilotes s'affrontent. Combien y a t'il de podiums possibles ? Il s'agit d'un tirage ordonnés sans remise. Il y a donc $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{17!} = 6840$ podiums possibles.
4. (2 points) Combien de mots contenant au maximum 4 lettres peut-on construire avec un clavier disposant de 10 lettres distinctes ? (Les mots ne doivent pas forcément avoir du sens et on autorise les répétitions de lettres) Il s'agit d'une sucession de tirages ordonnés avec remise de $k \in 1, 2, 3, 4$ parmi $n = 10$, soit $\sum_{k=1}^4 n^k = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 = 11110$

**Exercice 3 :** (5 points) Une entreprise a une probabilité de 1% de signer un contrat avec chaque client qu'elle rencontre. Elle se dote d'un logiciel d'IA qui lui permet de prévoir à l'avance si un client va signer un contrat ou non. Lorsqu'un client signe, le logiciel avait su le prédire avec une fiabilité de 95 %. Si un client ne signe pas, le logiciel avait su le prédire avec une fiabilité de 99,5 %.

Ce logiciel d'IA est vraiment efficace ? Pour vous en assurer, vous calculerez la probabilité qu'un client signe un contrat lorsque cela a été prévu par le logiciel et vous la comparerez à un seuil fixé à 60%.

On note $S = \{\text{Un client signe un contrat}\}$ et $T = \{\text{Prediction de signature par le logiciel d'IA}\}$
On a alors $P(T|S) = 0,95$, $P(\bar{T}|\bar{S}) = 0,995$, $P(T|\bar{S}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{S}) = 5 \times 10{-}3$ et $P(S) = 10^{-2}$.
Le théorème des probabilité totales permet de calculer : $P(T) = P(T|S)P(S) + P(T|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,95 \times 10^{-2} + 5 \times 10{-}3 \times (1 - 10^{-2}) = 1,45 \times 10^{-2}$.
Le théorème de Bayes nous permet d'écrire : $P(S|T) = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T)} = \frac{0,95\times10^{-2}}{1,45\times10^{-2}} \approx 0,6552 > 0.6$
On en déduit que le système de détection est bien efficace !

**Exercice 4 :** (5 points) Nous disposons des statistiques présentées dans la Figure 1 concernant les avions de ligne.

1. (1 point) Indiquer la probabilité qu'un avion de ligne en phase de vol se trouve en phase d'atterrissage.
On note pour la suite : $T = \{\text{phase d'aTterrissage}\}$
Selon la Fig.1 on a : $P(T) = 4\% = 0,04$

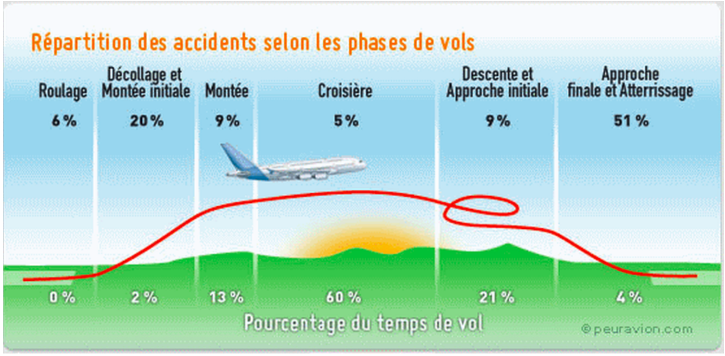


FIGURE 1 – Statistiques des accidents d'avion en fonction des phases de vol (source peuravion.com)

2. (1 point) Indiquer la probabilité qu'un avion accidenté se soit trouvé en phase de croisière au moment de l'accident . On note $A = \{$L'avion a un Accident$\}$ et $C = \{$vol de Croisiere$\}$
Selon la Fig.1 on a : $P(C|A) = 5\% = 0,05$

3. (3 points) Sachant que la probabilité d'avoir un accident d'avion est de 1 sur 12 millions, calculer la probabilité d'avoir un accident si on sait que l'avion se trouve en phase d'atterrissage.
D'après le theoreme de Bayes, on a :
$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T)}$.
L'énoncé nous donne $P(A) = \frac{1}{12\times10^6}$, $P(T|A) = 0,51$ qui conduit à :
$P(A|T) = \frac{0{,}51\frac{1}{12\times10^6}}{0{,}04} \approx 1,0625 \times 10^{-6}$ Le facteur multiplicatif d'avoir un accident d'avion quand un avion est en phase d'atterrissage vaut : $a_T = \frac{P(A|T)}{P(A)} = \frac{P(T|A)}{P(T)} = \frac{0{,}51}{0{,}04} \approx 12,75$.
Pour la phase de décollage : (on note $D = \{Decollage\}$)
on a $P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}2\frac{1}{12\times10^6}}{0{,}02}$
et donc le facteur multiplicatif d'avoir un accident en phase de décollage vaut :
$a_D = \frac{P(A|D)}{P(A)} = \frac{P(D|A)}{P(D)} = \frac{0{,}2}{0{,}02} = 10$