LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1. [$\circ$]

Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n), définies pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \sin\big(\ln(n+1)\big) - \sin(\ln n).$$

Exercice 2. [$\star$]

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général

$$u_n = \sin\big((2+\sqrt{3})^n \pi\big).$$

Exercice 3. [$\circ$] (Limites doubles différentes)

Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\Big) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\Big).$$

Exercice 4. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

Démontrer que

$$S_n \sim n!$$

Exercice 5. [$\circ$]

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_{n+1} \sim u_n$.
2. Démontrer que si (u_n) converge vers 0, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.
3. Démontrer que si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.
4. Démontrer que si (u_n) n'admet pas de limite (divergence de seconde espèce), alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.

Exercice 6. [$\circ$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites qui ne s'annulent (au moins à partir d'un certain rang). On considère les assertions $\mathscr{P}$: $u_n \sim v_n$ et $\mathscr{Q}$: $\lim(u_n - v_n) = 0$. Démontrer que $\mathscr{P}$ n'implique pas $\mathscr{Q}$ et que $\mathscr{Q}$ n'implique pas non plus $\mathscr{P}$.

Exercice 7. [$\star$] (Les additions, oui ! Les soustractions, non !)

On suppose que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites strictement positives. Démontrer que $u_n + v_n \sim a_n + b_n$.

Exercice 8. [$\circ$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. Démontrer que $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$?
3. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$.
   a) La suite $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle nécessairement ?
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge et préciser alors la limite de cette suite.

Exercice 9. [$\circ$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$? Démontrer que $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 1$.

Exercice 10. [$\star$]

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

où le terme de droite comporte n radicaux. *On pourra majorer* $u_{n+1}-u_n$.

Exercice 11. [$\star$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = u_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est donc une suite obtenue en modifiant l'ordre des termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que, malgré ce changement d'ordre, on a $\lim v_n = \ell$.

Exercice 12. [$\star$] (Contre-exemples liés à Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On considère la suite des moyennes de Cesàro $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}.$$

1. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ non bornée telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui diverge sévèrement telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge sévèrement.
3. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ bornée telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge (sévèrement).

Exercice 13. [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Démontrer que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Donnée : On admettra que $\dfrac{x^2-\sin^2(x)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{3}$.

Exercice 14. [$\bigstar$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes de limites respectives ℓ_u et ℓ_v. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Démontrer que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell_u \ell_v$.