Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 22/02/2019

DM n° 13 : Groupes

Problème 1 – Structure des groupes abéliens de type fini

On dit qu'un groupe abélien G (noté additivement) est de type fini s'il existe un système générateur (ou famille génératrice) fini(e) X de G, autrement dit, s'il existe un nombre fini d'éléments $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que

$$G = \langle x_1\rangle + \langle x_2\rangle + \cdots + \langle x_n\rangle = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n\}.$$

Le but de ce problème est de montrer le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, stipulant que tout groupe abélien de type fini est isomorphe à un groupe

$$\mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z}),$$

où on a une chaîne de divisibilité $d_\ell \mid d_{\ell-1} \mid \cdots \mid d_1$, avec $d_1 \geqslant 2$.
Dans tout le problème, les groupes sont supposés abéliens, et notés additivement.

Partie I – Sommes directes

Soit G un groupe abélien (additif), et H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. On définit la somme

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}.$$

On dit que la somme est directe si pour tout $x \in H_1 + H_2$, l'écriture de x sous la forme $x = h_1 + h_2$ est unique (avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$) On désigne dans ce cas par $H_1 \oplus H_2$ la somme directe.

1. Dans $\mathbb{Z}^2$, soit $H_1 = \mathbb{Z}\cdot(2,1) = \{n(2,1), n\in\mathbb{Z}\}$ et $H_2 = \mathbb{Z}\cdot(0,2)$. Décrire la somme $H_1 + H_2$. Est-elle directe ?
2. Dans $(\mathbb{Z},+)$, décrire la somme $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, où $(a,b)\in(\mathbb{Z}^*)^2$. Est-elle directe ?
3. Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe abélien G.
   (a) Montrer que $H_1 + H_2$ est un sous-groupe de G.
   (b) Montrer que si $H_1 + H_2$ est directe, alors les groupes $H_1 \oplus H_2$ et $H_1 \times H_2$ sont isomorphes.
4. Montrer que si H_1, H_2 et H_3 sont des sous-groupes d'un groupe abélien G, on a :

   $$(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + (H_2 + H_3),$$

   et que si les deux sommes du membre de gauche sont directes, il en est de même des deux sommes du membre de droite. Cela nous autorise à écrire plus simplement $H_1 + H_2 + H_3$, et dans le cas où les sommes sont directes, $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$, et plus généralement $H_1 + \cdots + H_n$ et $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$.

Partie II – Groupes abéliens libres de type fini

- *On définit de façon plus générale une somme d'une infinité de sous-groupes $(H_i)_{i\in I}$ par*

  $$\sum_{i\in I} H_i = \left\{\sum_{i\in I} h_i \mid h_i \in H_i,\ \textit{presque tous nuls}\right\},$$

  ce qui signifie que dans chacun des sommes, seul un nombre fini *de termes h_i est non nul. On dit que la somme est directe si tout élément de la somme se décompose de façon unique de cette manière.*

- *On dit qu'un groupe abélien G est libre s'il existe un système générateur $X = \{x_i, i \in I\} \subset G$ tel que pour tout tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x_i \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et tel que*

$$G = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle \,,$$

  notation synthétique signifiant que G est la somme directe de la famille infinie de groupes $\langle x_i \rangle$.
  On dit dans ce cas que $(x_i)_{i \in I}$ est une base de G.
- *On dit qu'un groupe abélien libre G est de type fini s'il existe une base finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de G.*

On se donne un groupe abélien G, supposé libre et de type fini, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de G.

1. Soit $(y_i)_{i \in I}$ une base infinie de G. En considérant les décompositions des x_i en sommes de y_i, montrer qu'il existe une sous-famille finie $(y_i)_{i \in J}$ de $(y_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $x_\ell \in \bigoplus_{j \in J} \langle y_j \rangle$.

   En déduire que toute base de G est finie.
2. Soit $\varphi : G \mapsto G$ définie par $x \mapsto 2x$.
   (a) Montrer que φ est un morphisme de groupes.
   (b) Montrer que $\varphi(G)$ est un groupe libre dont une base est donnée par $(2x_1, \ldots, 2x_n)$.
   (c) Quel est le cardinal de l'ensemble des classes de G modulo $\varphi(G)$?
3. Déduire du résultat précédent que toute base de G est de cardinal n. Ce cardinal commun est appelé rang du groupe libre G.

Partie III – Groupes abéliens sans torsion

- *On dit qu'un groupe abélien G est sans torsion si tout $x \neq 0$, x est d'ordre infini.*
- *On dit qu'un groupe abélien G est un groupe de torsion si tout $x \in G$ est d'ordre fini.*

1. $\mathbb{Q}$ est-il un groupe de torsion ? un groupe sans torsion ? Même question pour le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Même question pour $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer qu'un groupe abélien libre est sans torsion.
3. On veut montrer que réciproquement, un groupe sans torsion de type fini est libre. Soit G un groupe abélien de type fini, sans torsion.
   (a) On suppose que G n'admet pas de base. Justifier, pour toute famille génératrice X de cardinal fini, l'existence du minimum m_X de l'ensemble

$$C_X = \left\{ \sum_{x \in X} |n_x| \;\middle|\; n_x \in \mathbb{Z} \text{ non tous nuls et } \sum_{x \in X} n_x x = 0. \right\},$$

   puis l'existence d'une famille génératrice X de cardinal minimal n telle que m_X soit minimale parmi les familles génératrices de cardinal n. On se donne une telle famille et des coefficients n_x associés réalisant le minimum m_X.
   (b) Montrer que l'existence d'un élément $x \in X$ tel que $|n_x| = 1$ contredirait la minimalité du cardinal de X.
   (c) On suppose donc que pour tout $x \in X$, $|n_x| \neq 1$. Justifier qu'il existe x et y dans X tels que $0 < |n_x| < |n_y|$ et $|n_x|$ ne divise pas $|n_y|$.
   (d) En effectuant la division euclidienne de $|n_y|$ par $|n_x|$, trouver une famille génératrice de G contredisant la minimalité de m_X.
4. En déduire que tout groupe libre de type fini sans torsion est isomorphe à un groupe $\mathbb{Z}^n$, et ceci pour une unique valeur de n.

Partie IV – Groupes de torsion

On suppose ici que G est un groupe abélien de torsion de type fini non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que G est un groupe fini.

2. Soit x un élément de G d'ordre maximal, cet ordre étant noté d_1. Montrer que pour tout y de G, l'ordre de y divise d_1.

3. Soit H le sous-groupe de G engendré par x. Justifier que la loi de groupe de G passe au quotient sur l'ensemble G/H des classes d'équivalence modulo H, et qu'elles définissent sur G/H une structure de groupe.

*4. Justifier que G est isomorphe à $H \times G/H$.

   Indication : Il faut contruire un isomorphisme de G sur H prolongeant l'identité de H. Pour cela considérer l'ensemble des couples (K, φ) où K est un sous-groupe intermédiaire entre H et G, et φ prolonge l'identité, et le munir d'un ordre (inclusion, et prolongement des fonctions). Considérer un élément maximal, et si $K \neq G$, essayer de prolonger en un $x \notin K$. Pour $nx \in K$, avec $n > 0$ minimal, cela implique de choisir $\varphi(x)$ tel que $n\varphi(x) = \varphi(nx)$, ce dernier étant connu. Donc il faut réussi à « diviser » $\varphi(nx)$ par n dans K. On peut le faire directement, ou bien en remarquant que H est isomorphe à un $\mathbb{U}_m$, et donc plonger le problème dans $\mathbb{U}$ où la division (multiplicativement, c'est la racine) se fait bien, puis revenir à $\mathbb{U}_m$, en se servant de la maximalité de x.

5. En déduire qu'il existe une chaîne d'entiers strictement supérieurs à 1, tels que $d_\ell \mid d_{\ell-1} \mid \cdots \mid d_1$, telle que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z}$.

Partie V – Théorème de structure des groupes de type fini

On démontre ici le résultat annoncé dans l'introduction. On se donne G un groupe abélien de type fini, et on définit $T(G)$ le sous-ensemble de G formé des éléments d'ordre fini de G.

1. Montrer que $T(G)$ est un sous-groupe de G, et que le groupe quotient $G/T(G)$ est un groupe libre de type fini et sans torsion.

2. En déduire le théorème de structure donné dans l'introduction du problème.

3. Démontrer l'unicité des exposants n et d_i.