Planche de colle

Exercice de colle

Soient p et q deux nombres irrationnels strictement supérieurs à 1 tels que :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

On pose :

$$\mathscr{A}=\Big\{\lfloor np\rfloor\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\Big\} \text{ et } \mathscr{B}=\Big\{\lfloor nq\rfloor\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\Big\}.$$

1. Montrer que les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont disjoints.
2. En déduire que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, le cardinal de l'ensemble $(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})\cap[\![1,N]\!]$ vaut N.
3. En déduire que la famille $\left(\mathscr{A},\mathscr{B}\right)$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.

1. Soit x un élément éventuel dans l'intersection $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$. On peut écrire :

   $$x=\lfloor np\rfloor=\lfloor mq\rfloor,$$

   où n et m sont dans $\mathbb{N}^*$.
   On en déduit :

   $$np=x+\alpha \text{ et } mq=x+\beta,$$

   avec α et β des parties décimales dans $[0,1[$.
   On en déduit :

   $$n+m=x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}.$$

   Par conséquent, en posant :

   $$\gamma=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}\in[0,\max\{\alpha,\beta\}[\subset[0,1[,$$

   alors :

   $$n+m=x+\gamma.$$

   Les quantités n, m et x sont entières, imposant à γ d'être nul, puis aux quantités α et β d'être également nulles.
   En conclusion,

   $$np=x=mq, \text{ donc } p=\frac{x}{n}\in\mathbb{Q},$$

   ce qui est contraire aux hypothèses.
   Les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont bien disjoints.

2. Soit N un entier dans $\mathbb{N}^*$. Les ensembles $\mathscr{A} \cap [\![1, N]\!]$ et $\mathscr{B} \cap [\![1, N]\!]$ sont finis.

   Les éléments de $\mathscr{A} \cap [\![1, N]\!]$ sont les entiers de la forme $\lfloor kp \rfloor$, avec k entre 1 et A, avec A tel que :
$$N < Ap < N + 1.$$
   En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, la quantité kp est irrationnelle donc n'est pas un entier. De plus, comme $p > 1$, alors les nombres kp et $(k+1)p$ ne peuvent pas avoir la même partie entière car ces deux nombres sont espacés d'une quantité p strictement supérieure à 1.

   L'ensemble $\mathscr{A} \cap [\![1, N]\!]$ compte donc exactement A éléments, avec :
$$A = \left\lfloor \frac{N+1}{p} \right\rfloor.$$
   De la même façon, l'ensemble $\mathscr{B} \cap [\![1, N]\!]$ compte exactement B éléments, avec :
$$B = \left\lfloor \frac{N+1}{q} \right\rfloor.$$
   L'ensemble $(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap [\![1, N]\!]$ compte donc $A + B$ éléments, en utilisant la première question – on ne compte pas deux fois le même élément car il n'y a pas d'éléments en commun dans les deux ensembles.

   Il ne reste plus qu'à montrer que :
$$A + B = N.$$
   Or, on dispose des encadrements :
$$A < \frac{N+1}{p} < A + 1 \text{ et } B < \frac{N+1}{q} < B + 1,$$
   donc :
$$A + B < (N+1)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = N + 1 < A + B + 2.$$
   Par conséquent,
$$N - 1 < A + B < N + 1,$$
   et la quantité $A + B$ étant entière, on obtient $A + B = N$.

3. L'inclusion $(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap [\![1, N]\!] \subset [\![1, N]\!]$ couplée avec l'égalité des cardinaux finis montre que l'on a l'égalité :
$$(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap [\![1, N]\!] = [\![1, N]\!].$$
   On montre maintenant la question.

   Chaque ensemble $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$ n'est pas vide et ces deux ensembles sont disjoints.

   Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Alors,
$$N \in [\![1, N]\!] = (\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap [\![1, N]\!]$$
   donc $N \in (\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$. On a bien la réunion totale entre les deux ensembles : c'est une partition.