MP*1

Espaces préhilbertiens

Ici, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

1 Généralités

1. (*) *Stricte convexité de la norme*
   Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\| = 1$. Si $t \in]0, 1[$, montrer que :
   $$\|(1-t)x + ty\| < 1.$$

2. *Caractérisation des normes euclidiennes*
   Soit $\|\ \|$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E telle que :
   $$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
   Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ dont provient $\|\ \|$.

   Indication. Poser :
   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
   Vérifier successivement que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, que :
   $$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle,$$
   puis que $x \mapsto \langle x, z\rangle$ est linéaire.

3. (**) *Simplexe régulier*
   On suppose E de dimension n. Montrer que l'on peut trouver $n+1$ vecteurs unitaires $x_1, \cdots, x_{n+1}$ de E tels que :
   $$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, n+1\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j\rangle = \frac{-1}{n}\text{ [1]}.$$

4. (**) *Simplexe régulier, suite*
   Soient $p \geq 2$ un entier, $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille liée de vecteurs unitaires deux à deux distincts de l'espace euclidien E telle que tous les produits scalaires $\langle u_i, u_j\rangle$, $i \neq j$ soient égaux à une même constante α.

   a) Calculer α.

   b) Calculer $\sum_{i=1}^{p} u_i$.

   c) Quelle est la dimension de E ?

1. Il résulte de l'étude des matrices de Gram que deux systèmes de vecteurs $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ vérifiant ces relations se déduisent l'un de l'autre par une isométrie.

5. (**) *Familles obtusangles*
On suppose E de dimension n. On appelle *famille obtusangle* de vecteurs de E toute famille $(x_i)_{i\in I}$ telle que :
$$\forall (i,j) \in I^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle\ < 0.$$
Montrer en raisonnant par récurrence sur n que toute famille obtusangle de vecteurs de E est finie de cardinal au plus $n+1$ et que cette majoration est optimale.
6. (**) *Familles obtusangles : autre démonstration*
On considère une famille obtusangle $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E.
a) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i = 0.$$
Indication. Soient P (resp. N) l'ensemble des i de $\{1, \ldots, p\}$ tels que : $\lambda_i > 0$ (resp. ≤ 0), $x = \sum_{i\in P} \lambda_i x_i$. Montrer : $||x||^2 \leq 0$.
b) Montrer que $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre, donc que $p \leq n+1$ si E est de dimension n.
Indication. Dans le cas contraire on aurait une relation de dépendance linéaire à coefficients ≥ 0 non tous nuls entre $x_1, \ldots, x_{p-1}$. Considérer le produit scalaire de cette relation avec x_p.
7. Soit E un espace euclidien de dimension n. Quel est le cardinal maximal d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs non nuls de E tels que :
$$\forall (i,j) \in I^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle \leq 0?$$
8. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace euclidien E telle que :
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j \quad \Rightarrow \quad < e_i, e_j >< 0.$$
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E (les x_i étant des réels).
On suppose :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad < x, e_i >> 0.$$
Montrer :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad x_i > 0.$$
9. Soit A une partie de la sphère unité de l'espace euclidien E. On suppose qu'il existe $c < 1$ tel que :
$$\forall (a, a') \in A^2, a \neq a' \Rightarrow \langle a, a' \rangle \leq c.$$
Montrer que A est finie.
10. Déteminer les couples (u, v) de vecteurs non nuls de l'espace euclidien E tels que les réels :
$$\frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} \quad \text{et :} \quad \frac{\langle u, v \rangle}{|u|^2}$$
soient entiers.

11. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de l'espace euclidien E. On suppose que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$||x_i - x_j|| \geq 2.$$

On suppose que les x_i appartiennent à une même boule de rayon R.
Montrer que :

$$R \geq \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Indication. Supposer la boule centrée sur 0 *et utiliser :* $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ||x_i - x_j||^2$.

12. Soient $u_1, \dots, u_n, v$ des vecteurs de E. Démontrer

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle u_i, v\rangle|\right)^2 \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |\langle u_i, u_j\rangle|\right) \|v\|^2.$$

13. (**) *Familles équiangulaires*
Soient $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ unitaires pour la norme euclidienne canoniques et tels qu'existe α dans $]0,1[$ vérifiant, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, m\}$:

$$\left|{}^t v_i v_j\right| = \alpha.$$

a) Montrer que les matrices $v_i^t v_i,\ 1 \leq i \leq m$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que

$$m \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) On suppose $n = 3$. Montrer que cette inégalité est optimale [2].

14. *Estimation du cardinal d'une partie de* $\mathbb{R}^n$ *dont les distances mutuelles prennent leurs valeurs dans un ensemble de cardinal* m
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On se donne m dans $\mathbb{N}^*$, une partie R de $\mathbb{R}^{+*}$ de cardinal m et $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2,\ i \neq j \Rightarrow \|a_i - a_j\| \in R.$$

Pour j dans $\{1, \dots, p\}$, la fonction f_j est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f_j(x) = \prod_{r \in R} \left(\|x - a_j\|^2 - r^2\right).$$

a) Montrer que $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

b) Majorer la dimension du sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ engendré par $(f_1, \dots, f_p)$.

c) Que déduit-on de a) et b) ?

d) On suppose $n > m$ et on considère l'ensemble X des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant m coordonnées égales à 1 et $n - m$ nulles. Déterminer le cardinal de X et l'ensemble des distances $\|x - x'\|$, $(x, x') \in X^2, x \neq x'$. Conclusion ?

2. On ne connaît pas le cardinal maximal d'une famille de droites équiangulaires dans le cas d'un n « général ».

15. (*) a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad P(0) = \int_0^1 PQ.$$

Quel est le degré de P ?

b) Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P(0) = \int_0^1 PQ?$$

16. L'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire

$$(u, v) \longmapsto \int_{-1}^1 uv.$$

Déterminer l'orthogonal du sous-espace V des polynômes impairs.

17. *Une condition nécessaire pour le théorème du supplémentaire orthogonal*
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien, V un sous-espace de E tel que

$$V \oplus V^\perp = E.$$

Montrer que V est fermé dans E.

18. *Contre-exemple au théorème du supplémentaire orthogonal*
a) On munit l'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire :

$$(f, g) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^1 fg.$$

On note F le sous-espace des fonctions f de E dont la restriction à $[0, 1]$ est nulle. Montrer que F est fermé dans E. Déterminer $F^\perp$. Conclusion ?

b) Même question en prenant cette fois le produit scalaire :

$$(f, g) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^1 fg + f(0)g(0).$$

19. *Suites NM*
Montrer l'équivalence, pour une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs de l'espace préhilbertien E, entre :

(i) pour tout a de E, il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \quad \|x_n - a\| \geq \|x_n\| ;$$

(ii) pour tout v de E,

$$\langle x_n, v\rangle \longrightarrow 0.$$

Que dire si E est de dimension finie ?

20. On munit le cercle S^1 de la distance donnée par la longueur d'arc. Montrer que l'on ne peut pas trouver d'application préservant les distances de S^1 dans un espace préhilbertien réel.

21. (***) Ici, E est de dimension ≥ 2, et $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des applications continues de E dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \perp y \;\Rightarrow\; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

a) Soit f dans $\mathcal{E}$ paire. Montrer qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = a\|x\|^2.$$

b) Soit f dans $\mathcal{E}$ impaire. Montrer qu'il existe $c \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \langle c, x \rangle .$$

c) Déterminer $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de cet espace ?

22. Déterminer les applications f de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \qquad x \perp y \;\Rightarrow\; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2 Sphères, lieux géométriques

23. *Fonction scalaire de Leibniz*
Soient $m_1, \cdots, m_p$ des points distincts de E, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, A$ des réels. Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$ des x de E tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \|x - m_i\|^2 = A.$$

24. (*) a) Soit u un vecteur unitaire de E. Décrire les ensembles suivants :
- $A = \{x \in E,\ \langle x, u \rangle = \|x\|\}$;
- $B = \{x \in E,\ \|x - \langle u, x \rangle u\| = 1\}$.

b) Soient a et b dans E. Décrire

$$\{x \in E\ ;\ \|x - a\| = \|x - b\|\}.$$

25. (**) *Sphère circonscrite*
Soient $m_1, \ldots, m_{n+1}$ des points distincts d'un espace euclidien E de dimension n. A quelle condition existe-t-il une unique sphère de E passant par les m_i ?

26. *Sphère inscrite*
Si $(a_0, \ldots, a_n)$ sont $n+1$ points affinement indépendants de l'espace euclidien E de dimension n, montrer qu'il existe une unique sphère de E tangente intérieurement aux faces du polyèdre de sommets $a_0, \ldots, a_n$.

27. Montrer que si une sphère euclidienne de $\mathbb{R}^n$ contient $n+1$ points de $\mathbb{Q}^n$ non contenus dans un même hyperplan affine, son centre appartient à $\mathbb{Q}^n$.

28. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Soit S une sphère de $\mathbb{R}^n$ de centre appartenant à $\mathbb{Q}^n$, de rayon rationnel. Montrer que si S contient un point de $\mathbb{Q}^n$, alors $S \cap \mathbb{Q}^n$ est dense dans S.

29. Ici $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel. Soient $x_1, \cdots, x_{n+2}$ dans E. On écrit :
$$x_i = \begin{pmatrix} {x_i}^1 \\ \vdots \\ {x_i}^n \end{pmatrix}.$$
On pose $d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$ si $1 \leq i, j \leq n+2$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
i) il existe un hyperplan ou une sphère de E qui contient tous les x_i,
ii) il existe $(a, b, c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{(0, \cdots 0)\}$ tels que :
$$\forall i \in \{1, \cdots, n+2\}, \qquad a\|x_i\|^2 + b + \sum_{j=1}^{n} c_j {x_i}^j = 0,$$
iii) la matrice $\left({d_{i,j}}^2\right)_{1 \leq i,j \leq n+2}$ n'est pas inversible.

30. (**) Soient E un espace euclidien de dimension n, $(E_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite croissante de sous-espace de E avec, pour tout i, dim $E_i = i$, $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite décroissante de réels ≥ 0.

    Décrire l'ensemble des x de E tels que :
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad d(x, E_i) = a_i.$$

31. Soit E un espace euclidien de dimension 3, S sa sphère unité, α un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Démontrer que $\alpha = 2$ si et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n)$ de S^{3n} il existe x dans S tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \|a_k - x\|^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \|b_k - x\|^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \|c_k - x\|^\alpha.$$

3 Problèmes d'extremum, inégalités

32. (**) Soit S la sphère unité d'un espace euclidien de dimension $d \geq 2$. Pour $(v_1, \ldots, v_n) \in S^n$, on pose :
$$f(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle .$$
Décrire $f(S^n)$.

33. Soient a et b dans E et unitaires, $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Pour $x \in S$, soit :
$$\varphi(x) = \|x - a\| + \|x - b\|.$$
Déterminer le minimum et le maximum de φ sur S.

34. Soient a et b dans E et unitaires, $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Pour $x \in S$, soit :
$$\psi(x) = \langle x, a \rangle \langle x, b \rangle .$$
Déterminer le minimum et le maximum de ψ sur S.

35. (***) On suppose E de dimension n, soit $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de E. Déterminer :

$$\mathcal{E} = \left\{ r \in \mathbb{R}^+,\ \bar{B}(0,r) \subset \bigcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}\ 1 \leq i \leq n} \bar{B}(\varepsilon e_i, 1) \right\}.$$

36. Soit f l'application définie par :

$$\begin{cases} f(u) = u \text{ si } \|u\| \leq 1, \\ f(u) = u/\|u\| \text{ si } \|u\| > 1. \end{cases}$$

Montrer :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \ \leq \ \|x - y\|.$$

37. a) Soient $x_1, \dots, x_p$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E. Calculer :

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2.$$

b) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs de E. On suppose qu'existe une constante $C > 0$ tel que, pour toute partie finie F de E, on ait :

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq C.$$

Montrer que la série de terme général $\|x_n\|^2$ converge.

38. Déterminer l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in E^2, \|x\| + \|y\| \leq \lambda \max\ (\|x+y\|, \|x-y\|) \right\}.$$

4 Projecteurs orthogonaux

39. (*) Ici $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien canonique. Donner la matrice, dans la base canonique de E du projecteur orthogonal d'image

$$D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

40. (*) Dans $\mathbb{R}^4$ muni de produit scalaire euclidien canonique, déterminer la matrice canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équations :

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = -x_4.$$

41. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, donner la matrice canonique du projecteur orthogonal sur le plan d'équations

$$x + y + z + t = x - y + 2z + t = 0.$$

42. (*) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire euclidien rendant la base canonique orthonormée. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$. Calculer la projection de 1 sur H et la distance de 1 à H.

43. Soient E l'espace des fonctions de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, V le sous-espace des f de E telles que $f'' = f$, W le sous-espace des f de E nulles en 0 et 1.

    Pour f et g dans E, soit :

$$< f, g >= \int_0^1 (fg + f'g').$$

    a) Vérifier que $<,>$ est un produit scalaire euclidien sur E, pour lequel $W^\perp = V$.

    b) Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur W.

44. (*) Calculer :

$$\inf\left\{\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

45. Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 (\ln(t) - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

46. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la projection orthogonale de M sur l'espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

47. (*) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Quelle est la distance de M au le sous-espace engendré par I et J ?

48. (**) *Distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour la norme de convergence en moyenne quadratique sur $[0,1]$*

    Soient $n \geq 1$ et, pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

    a) Montrer qu'il existe un unique P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad I(Q) \geq I(P).$$

    On écrit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et on pose :

$$F = \frac{1}{X+n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X+j+1}\ .$$

    b) Calculer $F(i)$ si $0 \leq i \leq n-1$; en déduire F et les a_j.

    c) Montrer que $I(P) = F(n)$ et calculer cette quantité.

49. Soient n dans $\mathbb{N}$, E_n l'espace des P de $\mathbb{R}_n[X]$ nuls en 0.
a) Montrer que la fonction :

$$P \in E_n \mapsto \int_0^{+\infty} (1 - P(t))^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

atteint son minimum m_n en unique point Q de E_n.
b) On écrit $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ Montrer que pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$1 - \sum_{i=1}^{n} a_i (k+1) \ldots (k+i) = 0.$$

Montrer aussi :

$$m_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i i!.$$

c) Calculer m_n.

50. Soient V et W deux sous-espaces de l'espace euclidien E, p et q les projecteurs orthogonaux sur V et W respectivement. Montrer que $p - q$ est inversible si et seulement si $V + W = E$.

51. (**) *Caractérisation des projecteurs orthogonaux*
Ici $K = \mathbb{R}$, E est de dimension finie, et p est un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \ \leq \ \|x\|.$$

52. (**) *Norme subordonnée d'un projecteur*
Déterminer la norme triple relative à la norme euclidienne d'une projection orthogonale du plan.

53. (**) *Quand la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteur*
Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien tels que $p \circ q$ soit un projecteur. Montrer que p et q commutent.

54. *Spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux*
Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que toute valeur propre de $p \circ q$ est dans $[0, 1]$.

55. Ici E est de dimension finie, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E et p un projecteur de rang 1 de E. Montrer :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 \ \geq \ 1.$$

Caractériser le cas d'égalité.

56. *Topologie des projecteurs orthogonaux*
Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux de M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Trouver ses composantes connexes par arcs.

57. (***) *Structure d'espace métrique sur les sous-espaces d'un espace euclidien*
Soit E un espace euclidien. Si F est un sous-espace de E, on note π_F le projecteur orthogonal de E sur F. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne. Si F et G sont deux sous-espaces de E, on pose
$$d(F,G) = \|\pi_F - \pi_G\|_{op}.$$
a) Vérifier que d est une distance sur l'ensemble $\mathcal{V}_E$ des sous-espaces [3] de E.
b) Montrer que, pour tout couple (F,G) d'éléments de $\mathcal{V}_E$:
$$d(F,G) \leq 1.$$
Caractériser le cas d'égalité.
c) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{V}_E, d)$ est compact. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

5 Familles orthonormées

58. *Existe-t-il un produit scalaire rendant une famille de vecteurs orthonormée ?*
Soient E un espace vectoriel réel, $(u_1, \ldots, u_m)$ une famille de vecteurs de E. Existe-t-il un produit scalaire pour lequel cette famille est orthonormée ?
59. Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0 < \cdots < a_n$ des réels, $E = \mathbb{R}_n[X]$.
a) Vérifier qu'en posant, pour P et Q dans E :
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k),$$
on définit un produit scalaire sur E.
b) Trouver une base de E orthonormée pour le produit scalaire de a).
60. (**) Soient $v_1, \cdots, v_p$ dans E.
a) On suppose les v_i unitaires. Montrer l'équivalence entre :
i) $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, v_i\rangle^2$,
ii) $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base orthonormée de E.
b) Même question en supposant E de dimension p.
61. (***) *Théorème de Stecklin*
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien canonique et on note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ et V un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

3. On munit ainsi l'ensemble des sous-espaces de E d'une topologie naturelle ; l'ensemble des sous-espaces de dimension d est appelée la *grassmanienne des d-plans* de E.

a) Montrer :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(e_i, V)^2 = n - k.$$

b) En déduire :

$$(1) \qquad \max_{1\leq i\leq n} \mathrm{d}(e_i, V)^2 \;\geq\; \frac{n-k}{n}.$$

c) Si V est équidistant des n points $e_1, \cdots, e_n$, montrer que (1) est une égalité.

d) En utilisant

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

construire un sous-espace V_0 de dimension k de $\mathbb{R}^n$ équidistant des points $e_1, \cdots, e_n$. Ainsi :

$$\min \left\{ \max_{1\leq i\leq n} \mathrm{d}(e_i, V) \;\middle|\; V \text{ sous-espace de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n \right\} = \sqrt{\frac{n-k}{n}}.$$

62. Soit V un sous-espace de dimension finie p de l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_p)$ sont deux bases de V orthonormées pour le produit scalaire « usuel », alors :

$$\sum_{i=1}^{p} {f_i}^2 = \sum_{i=1}^{p} {g_i}^2.$$

63. (***) *Dimension d'un espace de fonctions continues sur lequel les normes uniforme et quadratique sont équivalentes*
Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, V un sous-espace de $\mathcal{C}$ et a un réel > 0. On suppose :

$$\forall f \in V, \qquad \|f\|_\infty \;\leq\; a\,\|f\|_2.$$

a) Montrer que $V \neq \mathcal{C}$.

b) Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une famille de V orthonormée pour le produit scalaire :

$$(u,v) \longmapsto \int_0^1 uv.$$

Montrer, pour x dans $[0,1]$:

$$\sum_{i=1}^{p} {f_i}^2(x) \;\leq\; a^2.$$

c) Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq a^2$.

64. *Espaces propres d'un opérateur à noyau*

Soient K une application continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$, $(f_1,\ldots,f_n)$ une famille de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ orthonormée pour le produit scalaire :

$$(u,v) \longmapsto \int_0^1 uv.$$

a) Pour x dans $[0,1]$, montrer :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 K(x,y)\ f_i(y)\ \mathrm{d}y \right)^2 \leq \int_0^1 K(x,y)^2\,\mathrm{d}y.$$

b) Soient λ dans $\mathbb{R}^*$, E l'espace des fonctions f continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \int_0^1 K(x,y) f(y)\ \mathrm{d}x = \lambda f(x).$$

Déduire de a) que E est de dimension finie et majorer cette dimension en fonction de λ et K.

65. (**) Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E.

a) Montrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que les normes des projections orthogonales des e_i sur D soient toutes égales . Quelle est la valeur commune de ces normes ?

b) Soit F un sous-espace de E tel que les projections orthogonales des e_i sur F soient de même norme. Calculer cette norme.

66. Soient E un espace euclidien de dimension n, F un sous-espace de E de dimension m, p la projection orthogonale de E sur F.

a) Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E, calculer $\sum_{i=1}^{n} ||p(e_i)||^2$.

b) Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de $[0,1]$ de somme égale à m. Montrer l'existence d'une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle l'on ait

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad ||p(e_i)||^2 = a_i.$$

67. (***) *Grandes familles de vecteurs presque orthogonaux*

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est dit de Rademacher si

$$X = \frac{1}{\sqrt{m}}\,{}^t(X_1,\ldots,X_m)$$

où $X_1,\ldots,X_m$ sont des variables de Rademacher mutuellement indépendantes.

a) Soient $X = \frac{1}{\sqrt{m}}{}^t(X_1,\ldots,X_m)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{m}}{}^t(Y_1,\ldots,Y_m)$ deux vecteurs de Rademacher indépendants. Pour t dans $\mathbb{R}^+$, calculer

$$E\left(e^{t\langle X,Y\rangle}\right)$$

et montrer

$$E\left(e^{t\langle X,Y\rangle}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right).$$

En déduire, pour ε dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$P\left(|\langle X, Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\ \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right).$$

b) Soient m dans $\mathbb{N}^*$, $N \geq 2$ un entier, ε dans $]0,1[$, $X^1, \ldots, X^N$ des vecteurs de Rademacher mutuellement indépendants. Alors

$$P\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} \left|\left\langle X^i, X^j\right\rangle\right| \geq \varepsilon\right) < N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right).$$

En particulier, si $\delta \in]0,1]$ et

$$m \geq 2\ \frac{\ln(N^2/\delta)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} \left|\left\langle X^i, X^j\right\rangle\right| \geq \varepsilon\right) < \delta.$$

c) Soient m dans $\mathbb{N}^*$, ε dans $]0,1[$, $N = \left\lfloor \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)\right\rfloor$. Montrer qu'il existe une famille de N éléments de S^{m-1} dont les produits scalaires soient deux à deux soient tous de valeur absolue inférieure ou égale à ε.

6 Matrice de Gram

68. (***) *Action du groupe des isométries sur les familles de vecteurs de E*
On suppose E de dimension finie. Montrer, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles de vecteurs de E, l'équivalence entre :
i) il existe une isométrie vectorielle u de E telle que : $\forall i \in I, u(x_i) = y_i$,
ii) $\forall (i,j) \in I^2,\ \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$.
Indication pour i) $\Rightarrow$ ii). Montrer, pour commencer, que Vect $\{x_i, i \in I\}$ et Vect $\{y_i, i \in I\}$ ont même dimension.
69. (**) *Matrice de Gram*
Si E est euclidien et si $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, la matrice de Gram de $(x_1, \ldots, x_p)$ est :

$$G(x_1, \ldots, x_p) = (< x_i, x_j >)_{1\leq i,j\leq p}\,.$$

a) Montrer que le rang de $G(x_1, \ldots, x_p)$ est celui du système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ et que $G(x_1, \ldots, x_p)$ est symétrique positive.

b) Si G est dans $S_p^+(\mathbb{R})$ et de rang inférieur ou égal à la dimension de E, montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que :

$$G = G(x_1, \ldots, x_p).$$

c) Soit $n = \dim E$. Pour quels couples $(p, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ avec $p \geq n+1$ existe-t-il p vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ unitaires tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, p\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = \alpha \quad ?$$

70. (**) Soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de l'espace euclidien E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad < x_i, x_j >= -1.$$

Montrer :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1 + ||x_i||^2} \leq 1.$$

Caractériser le cas d'égalité.

71. (**) *Déterminant de Gram*

Ici $K = \mathbb{R}$. Si $v_1, \cdots, v_p$ sont de vecteurs de E, on note $G(v_1, \cdots, v_p)$ le déterminant de la matrice $(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$.

a) Montrer que $G(v_1, \cdots, v_p) \in \mathbb{R}^+$, et que $G(v_1, \cdots, v_p) = 0$ si et seulement si $(v_1, \cdots, v_p)$ est liée.

b) Soient $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E, V le sous-espace de E engendré par $(v_1, \cdots, v_p)$, et $x \in E$. Montrer :

$$d(x, V)^2 = \frac{G(v_1, \cdots, v_p, x)}{G(v_1, \cdots, v_p)}.$$

c) Calculer :

$$\inf_{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)^2 e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

72. Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ avec $m \leq n$, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Comparer :

$$\det(G(x_1, \dots, x_n)) \quad \text{et} \quad \det(G(x_1, \dots, x_n)) \times \det(G(x_1, \dots, x_n)).$$

73. *Volume du simplexe régulier*

Soient E un espace euclidien de dimension n, $a_1, \dots, a_{n+1}$ des points de E formant un simplexe régulier de côté 1 : les a_i sont distincts et

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2 \; i \neq j \Longrightarrow \|a_i - a_j\| = 1.$$

a) Calculer $\langle a_i, a_j \rangle$ si i et j sont dans $\{1, \dots, n+1\}$.

b) Calculer le volume du parallépipède de sommets $a_1, \dots, a_{n+1}$, puis celui de l'enveloppe convexe de $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

74. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace de E, p le projecteur orthogonal de E sur F, $f_1, \dots, f_n$ une famille de vecteurs de F. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $f_i = p(e_i)$;

(ii) pour tout x de F, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f_i, x \rangle^2 = \|x\|^2.$$

75. *Duale d'une base obtusangle au sens large*
Soient E un espace euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E.
a) Montrer qu'il existe une unique famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E telle que :
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad \langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}.$$
Montrer de plus que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.
b) Montrer que les matrices de Gram de $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ sont inverses l'une de l'autre.
c) On suppose :
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle \leq 0,$$
c'est-à-dire que les coefficients non diagonaux de la matrice de Gram A de $(u_1, \ldots, u_n)$ sont ≤ 0.
Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les coefficients de $I_n - \varepsilon A$ sont ≥ 0.

En déduire :
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad \langle v_i, v_j \rangle \geq 0.$$

76. (**) *Application des matrices de Gram*
Soient $u_1, \ldots, u_{n+2}$ des points d'un espace euclidien de dimension n. On suppose que les normes :
$$\|u_i - u_j\|, \quad 1 \leq i < j \leq n+2$$
sont des entiers impairs. On peut supposer (pourquoi) que u_{n+2} est nul. C'est ce qu'on fait.

Montrer que, si $1 \leq i < j \leq n+1$:
$$2\langle u_i, u_j \rangle \equiv 1\ [8].$$
En considérant le déterminant de la matrice de Gram de $u_1, \ldots, u_{n+1}$ montrer que 8 divise $n+2$.
On peut en fait montrer que l'existence de $n+2$ points de E à distances mutuelles impaires équivaut au fait que 16 divise $n+2$.

77. *Un théorème de Van der Waerden*
Soient $a_1, \ldots, a_5$ des vecteurs unitaires de l'espace euclidien E. On pose $a_6 = a_1, \quad a_7 = a_2$. On suppose que les produits scalaires
$$\langle a_i, a_{i+1} \rangle \text{ pour } 1 \leq i \leq 5$$
soient égaux à un même réel c et que
$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$$
a) Calculer tous les produits scalaires $\langle a_i, a_{i+2} \rangle, 1 \leq i \leq 5$.

b) Calculer le déterminant de la matrice de Gram $G(a_1, \dots, a_4)$.

c) Calculer les déterminants des matrices de Gram $G(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$.

d) On suppose que E est de dimension 3. Montrer que les a_i sont coplanaires.

e) Si $n \geq 4$ et $n \neq 5$, montrer qu'il existe n vecteurs unitaires $a_1, \dots, a_n$ de l'espace euclidien de dimension 3, non coplanaires et tels que, si on convient $a_{n+1} = a_1$, les produits scalaires $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ sont tous égaux.

7 Polynômes orthogonaux

78. (**) *Polynômes orthogonaux*

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, ω une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que, pour tout p de $\mathbb{R}[X]$, ωp soit intégrable sur I, H l'espace des fonctions continues f de I dans $\mathbb{R}$ telles que ωf^2 soit intégrable sur I.

a) Vérifier qu'en posant, pour f et g dans H, $< f, g >= \int_I \omega f g$, on définit un produit scalaire sur H.

b) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes réels orthogonale pour le produit scalaire précédent et telle que, pour tout n, P_n soit unitaire de degré n.

c) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, en déduire l'existence de deux réels α_n et β_n tels que :

$$P_{n+2} = (X + \alpha_n)P_{n+1} + \beta_n P_n.$$

Déterminer le signe de β_n.

d) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant l'orthogonalité de P_n et de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que P_n a n racines simples dans l'intérieur de I.

e) Ici $I = [-1, 1]$ et ω est la fonction constante égale à 1. Exprimer P_n en fonction du n-ième polynôme de Legendre L_n, défini comme dérivée n-ième de $(X^2 - 1)^n$.

f) Si $I =]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in I, \qquad \omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

relier P_n au n-ième polynôme de Tchébycheff T_n.

g) Ici $I = \mathbb{R}$ et $\omega(x) = e^{-x^2}$. On note, pour n dans $\mathbb{N}$, f_n la fonction dérivée n-ième de $x \mapsto e^{-x^2}$, $H_n(x) = e^{x^2} f_n(x)$. Exprimer P_n en fonction de H_n.

79. *Méthode de Gauss de calcul approché des intégrales*

On adopte les notations de l'exercice précédent, on note, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ les racines de P_n.

a) Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_I \omega P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} P(x_{k,n}).$$

b) Montrer que la formule de a) est vraie pour P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

c) Quel est le signe de $\alpha_{k,n}$?

d) On suppose que I est un segment. Montrer que pour toute fonction f continue de I dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} f(x_{k,n}) \to \int_I \omega f.$$

80. Les notations sont celles de l'exercice précédent. Démontrer que si f est dans H et $\Pi_n(f)$ le projeté orthogonal de f sur l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, alors $f - \Pi_n(f)$ a au moins $n+1$ zéros distincts dans l'intérieur de I.

81. *Théorème d'Erdös-Turan*

On se place dans le cadre des exercices précédents avec $I = [-1, 1]$ et $w = 1$. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on note $x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$ les zéros de Q_n (c'est-à-dire du polynôme de Legendre L_n).

a) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, prouver :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_{-1}^{1} P^2 \leq 2 \sup_{1 \leq k \leq n} P(x_{k,n})^2.$$

Indication. Utiliser les résultats de l'exercice sur la méthode de Gauss.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n(f)$ l'interpolateur de Lagrange de f en les $x_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$. Montrer que $(A_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers f sur $[-1, 1]$.

Indication. Utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.

82. (**) *Explication des formules donnant les suites de polynômes orthogonaux classiques à l'aide de dérivées d'une fonction*

Ici, a et b sont deux réels tels que $a < b$, w une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. L'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire

$$(f, g) \longmapsto \langle u, v \rangle_w = \int_a^b fg\, w.$$

Si n est dans $\mathbb{N}^*$ et si f est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que f est orthogonale à l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus $n - 1$ si et seulement s'il existe une fonction g de classe C^n de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g^{(n)} = fw$ et

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0.$$

8 Systèmes orthonormés totaux

83. (*) Montrer qu'il existe une suite orthonormée totale de vecteurs de E si et seulement si E est de dimension infinie et séparable.

84. Soit $(e_k)_{k \geq 0}$ un système orthonormé total de E. Déterminer les vecteurs de E orthogonaux à tous les e_k, $k \in \mathbb{N}$.

85. *Un théorème de Nina Bari*
Soient $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ deux systèmes orthonormés de vecteurs de E. On suppose $(e_i)_{i\geq 1}$ total et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|e_i - f_i\|^2 < +\infty.$$

Montrer que $(e_i)_{i\geq 1}$ est total.

86. (**) a) Soit $(e_k)_{k\geq 0}$ une suite orthonormée totale de vecteurs de E. Montrer que, si $i \in \mathbb{N}^*$, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{i\}}$ n'est pas totale.

b) On se place dans l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme $\| \|_\infty$. Pour k dans $\mathbb{N}$, soit

$$e_k \ : x \in [0,1] \longmapsto x^k.$$

Soit i dans $\mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace V_i de E engendré par $(e_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{i\}}$ est dense dans E si et seulement si $i \neq 0$. Quelle est son adhérence si $i = 0$?

87. (*) *Que se passe-t-il en cas de convergence uniforme ?*
Soient I un segment de $\mathbb{R}$, w une fonction continue strictement positive de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. On munit $E = C(I,\mathbb{R})$ du produit sclaire euclidien défini par

$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad \langle u, v\rangle = \int_I uv.$$

Soient $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée totale de l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, f dans E. On suppose que la série de fonctions

$$\sum \langle e_n, f\rangle \ e_n$$

converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g. Montrer que $g = f$.

88. (**) *Série de Fourier cosinus sur* $[0,\pi]$
On pose

$$\forall t \in [0,\pi],\ c_0(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ ; \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\pi],\ c_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kt).$$

a) Démontrer que toute fonction continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[0,\pi]$ de fonctions de la forme

$$t \longmapsto p(\cos(t)), \qquad p \in \mathbb{R}[X].$$

b) Montrer que le sous-espace de $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ engendré par $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans cet espace muni de la norme uniforme sur $[0,\pi]$, puis que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée totale de $C([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(u,v) \longmapsto \int_0^\pi uv.$$

Si f est dans E, la série de fonctions (écrite avec un peu d'abus)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\right)\ \cos(kx)$$

est la série de Fourier cosinus de f.

89. (*) *Un exemple de série de Fourier cosinus*
On reprend l'exercice précédent. On pose

$$\forall t \in [0, \pi], \qquad f(t) = t.$$

Déterminer $\langle e_n, f \rangle$ pour n dans $\mathbb{N}$. En déduire

$$\forall t \in [0, \pi], \qquad t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Retrouver $\zeta(2)$. En appliquant l'identité de Parseval, retrouver aussi $\zeta(4)$.

90. (*) *Un autre exemple ; développement eulérien de la cotangente*
Soit α un nombre réel non entier. Déterminer la série de Fourier cosinus de

$$t \in [0, \pi] \longmapsto \cos(\alpha t).$$

En déduire

$$\operatorname{cotan}(\pi\alpha) - \frac{1}{\pi\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

91. Soit f une fonction de classe C^1 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $d_n(f)$ la distance de f, pour la norme $\| \ \|_2$, de f à $\text{Vect}(c_0, \ldots, c_n)$. Démontrer

$$d_n(f) = O\left(1/n\right).$$

92. *Série de Fourier sinus sur* $[0, \pi]$
On pose

$$\forall t \in [0, \pi], \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [0, \pi], \ s_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt).$$

a) Démontrer que toute fonction de classe C^1 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0 est limite uniforme sur $[0, \pi]$ de fonctions de la forme

$$t \longmapsto p(\cos(t)), \qquad p \in \mathbb{R}[X].$$

On pourra considérer la série de Fourier cosinus de f'.

b) Montrer que $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée totale de $C([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(u, v) \longmapsto \int_0^\pi uv.$$

Si f est dans E, la série de fonctions (écrite avec un peu d'abus)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}t \right) \sin(kx)$$

est la série de Fourier cosinus de f.

93. *Série de Fourier-Legendre*
Les notations sont celles des deux exercices précédents, avec $I = [-1, 1]$ et $\omega = 1$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit : $Q_n = P_n / \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2}$.
Si f est une fonction continue, on pose, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$c_n(f) = \int_{-1}^{1} f Q_n, \qquad S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) Q_k.$$

a) Montrer que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f, que :

$$\int_{-1}^{1} f^2 = \sum_{n\geq 0} c_n(f)^2.$$

b) Si la série de terme général $|c_n(f)|$ converge, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n(f) Q_n(x).$$

c) Si f est de classe C^2 sur $[-1, 1]$, montrer que le résultat de b) s'applique.
Indication. On pourra utiliser, après l'avoir établie, l'équation différentielle :

$$(1 - X^2) L_n'' - 2X L_n' + n(n+1) L_n = 0.$$

94. (**) *Système orthonormé total de Laguerre*
On se place dans la situation des exercices sur les polynômes orthogonaux, en prenant $I = \mathbb{R}^+$ et ω définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \omega(x) = e^{-x}.$$

a) Si n est dans $\mathbb{N}$, soit L_n la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{\partial^n (e^{-x} x^n)}{\partial x^n}.$$

Montrer que L_n est un polynôme de degré n, que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

b) Pour $a > 0$, soit f_a l'unique fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f_a(x) = e^{-ax}.$$

Démontrer :

$$||f_a||^2 = \sum_{n\geq 0} < f_a, L_n >^2 .$$

c) Montrer que le sous-espace engendré par les f_a pour $a > 0$ est dense dans l'espace H des fonctions continues f de R^+ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2\omega$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (pour la norme euclidienne provenant du produit scalaire précédent).

d) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé total de $(H, <, >)$.

95. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes centrées réduites.

a) Si Y est une variable aléatoire réelle telle que $E(Y^2)$ soit d'espérance finie, quelle est la limite de $(E(YX_n))_{n\geq 1}$?

b) Montrer que le système orthonormé formé par 1 et les $X_n, n \geq 1$ n'est pas total.

9 Projection sur un convexe fermé

96. (**) *Le théorème de projection*

Soient C un convexe fermé non vide de E, x dans E.

a) Montrer qu'il existe un unique c de c tel que

$$d(x, C) = \|x - c\|.$$

On note $c = \pi_C(x)$.

b) Montrer que c vérifie la condition de l'angle obtus :

$$\forall c' \in C, \qquad \langle x - c, c' - c\rangle \leq 0.$$

c) Montrer que π_C est 1-lipschitzienne.

d) Montrer que la condition de l'angle obtus caractérise $c = \pi_C(x)$.

e) Que dire si C est un sous-espace de E ?

97. (*) Identifier la projection de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique sur chacun des convexes fermés : $B_f(0,1)$, $(\mathbb{R}^+)^n$.

98. Identifier la projection de $S_n(\mathbb{R})$ sur le convexe fermé $S_n^+(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire de Hilbert-Schmidt.

99. (**) Si $(E, \|\ \|)$ est un espace normé de dimension finie, et si C est un convexe de E distinct de E, montrer qu'il existe un demi-espace affine fermé de E contenant C.

100. Montrer que tout convexe compact d'un espace euclidien est intersection des boules fermées qui le contiennent.

101. (***) Soient C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, c un point frontière de C. Montrer qu'il existe x dans $\mathbb{R}^n \setminus C$ dont la projection sur C soit c.

102. (***) *Hyperplans d'appui*

Soit C un convexe fermé de l'espace euclidien E, c_0 un point appartenant à la frontière de C dans E.

Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que

$$\forall c \in C, \qquad \varphi(c) \leq \varphi(c_0).$$

Dans ces conditions, on dit que l'hyperplan affine $c_0 + \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ est un *hyperplan d'appui de C en c_0*.

Cet énoncé est-il véritablement euclidien ?

103. (***) *Théorème de Minkovski*

Montrer que tout convexe compact non vide d'un espace euclidien est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

On raisonnera par récurrence sur la dimension et on utilisera l'exercice précédent.

104. (***) Soit V un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'un des deux sous-espaces V ou $V^\perp$ coupe $(\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0\}$.

105. *Lemme de Farkas*

Soient $\varphi_1, \dots \varphi_n, \varphi$ des formes linéaires sur l'espace de dimension finie E. On suppose que :

$$\forall x \in E, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \varphi_i(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ \varphi(x) \geq 0\,^4.$$

On veut montrer que φ est combinaison linéaire positive de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, la réciproque étant évidente. A cet effet, on munit E d'un produit scalaire euclidien $\langle\ ,\ \rangle$, et on représente φ_i par v_i si $1 \leq i \leq n$ et φ par v. On pose

$$C = \mathbb{R}^+ v_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ v_n.$$

Tout revient à prouver que v appartient au convexe C.

a) On suppose que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre. Montrer que C est fermé dans E.

b) On suppose que $(v_1, \dots, v_n)$ est liée. Montrer que tout x de C est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ de $n-1$ des v_i.

c) Montrer que C est fermé dans E.

d) Conclure en utilisant la séparation.

106. *Lemme de Motzkin*[5]

Soient m et p dans $\mathbb{N}^*$ avec $1 \leq m \leq p$, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- L'ensemble

$$\cap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi_i(x) > 0\} \bigcap \cap_{i=m+1}^p \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi_i(x) \geq 0\}$$

est vide.

- Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ tels que

$$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i.$$

Indication. Pour $m = 1$, c'est le lemme de Farkas. S'y ramener en considérant, pour tout j de $\{1, \dots, m\}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi_j(x) > 0\} \bigcap \left(\bigcap_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq j}} \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi_i(x) \geq 0\} \right).$$

4. Autrement dit : le demi-espace positif de φ contient l'intersection des demi-espaces positifs des φ_i.

5. Cet énoncé et celui de l'exercice suivant sont les résultats de base de la théorie des « inégalités linéaires ». Ils donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'inégalités linéaires admette une solution.

107. *Version matricielle du lemme de Motzkin*

On suppose $1 \leq m \leq p$. Montrer, si A est dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_{p-m,n}(\mathbb{R})$, qu'une et une seule des deux propriétés suivantes est vérifiée.

- Il existe x dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$Ax \geq 0 \ , \quad Bx > 0.$$

- Il existe y dans $\mathcal{M}_{p-m,1}(\mathbb{R}^+)$ et z dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$ tels que

$${}^tBy + {}^tAz = 0.$$

108. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé réel, $B = \{x \in E, \ \|x\| \leq 1\}$, L_1 et L_2 deux formes linéaires sur E, et $L(x) = (L_1(x), L_2(x))$ pour $x \in E$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
i) $L(B) \neq \mathbb{R}^2$,
ii) il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha L_1 + \beta L_2$ soit continue.

10 Espaces préhilbertiens complexes

109. Formuler et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien complexe. Étudier le cas d'égalité.
110. Formuler et démontrer l'inégalité triangulaire dans un espace préhilbertien complexe. Étudier le cas d'égalité.
111. Formuler et démontrer les résultats relatifs aux bases orthonormées dans un espace hermitien.
112. Formuler et démontrer le théorème du supplémentaire orthogonal dans un espace préhilbertien complexe (pour un sous-espace de dimension finie).
113. Définir l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace hermitien. Établir ses propriétés.
114. (**) *Familles équiangulaires*

Soient $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ unitaires pour la norme hermitienne canoniques et tels qu'existe α dans $]0,1[$ vérifiant, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$:

$$\left| \overline{{}^tv_i} v_j \right| = \alpha.$$

Montrer que les matrices $\overline{v_i}\,{}^tv_i, \ 1 \leq i \leq m$ forment une famille $\mathbb{R}$-libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que

$$m \leq n^2.$$

115. *Inégalité d'Hadamard*

Démontrer que le module du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est majoré par le produit des normes hermitiennes de ses colonnes.
116. Quel est le maximum de $|V(z_1, \ldots, z_n)|$ (Vandermonde) pour $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ de modules majorés par 1 ?
117. Formuler et démontrer le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace hermitien [6].

6. Attention à la forme de la condition d'angle obtus, qui fait ici apparaître une partie réelle.