

FRACTIONS RATIONNELLES

CORRECTION

Exercice 1

1. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non constants tels que $A + B + C = 0$ et $A \wedge B = 1$. Leurs décompositions sur \mathbb{C} sont données par $A = \lambda \prod_{i=1}^a (X - a_i)^{\alpha_i}$, $B = \mu \prod_{j=1}^b (X - b_j)^{\beta_j}$ et $C = \nu \prod_{k=1}^c (X - c_k)^{\gamma_k}$. On introduit le noyau K du produit ABC défini par $K = \prod_{i=1}^a (X - a_i) \prod_{j=1}^b (X - b_j) \prod_{k=1}^c (X - c_k)$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on note $r(P)$ le nombre de racines distinctes de P . On considère enfin les fractions rationnelles $F = A/C$, $G = B/C$, $U = KF'/F$ et $V = KG'/G$.

- a) Démontrer que U et V sont des polynômes.

On a $F'/F = A'/A - C'/C$ et $G'/G = B'/B - C'/C$, donc

$$\frac{F'}{F} = \sum_{i=1}^a \frac{\alpha_i}{X - a_i} - \sum_{k=1}^c \frac{\gamma_k}{X - c_k} \quad \text{et} \quad \frac{G'}{G} = \sum_{j=1}^b \frac{\beta_j}{X - b_j} - \sum_{k=1}^c \frac{\gamma_k}{X - c_k}.$$

Comme $\forall i \in \llbracket 1; a \rrbracket$, $X - a_i \mid K$ et $\forall k \in \llbracket 1; c \rrbracket$, $X - c_k \mid K$, on en déduit que $U = KF'/F$ est un polynôme.

De même, $V = KG'/G$ est un polynôme.

Donc

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont des polynômes.}}$$

- b) Vérifier que $B/A = -U/V$.

Notons que $F + G = (A + B)/C = -C/C = -1$, donc $F' + G' = 0$, c'est-à-dire $F' = -G'$. Par suite, on a

$$-\frac{U}{V} = -\frac{K \frac{F'}{F}}{K \frac{G'}{G}} = -\frac{\frac{F'}{F}}{\frac{G'}{G}} = -\frac{F'}{F} \frac{G}{G'} = \frac{G}{F} = \frac{B/C}{A/C} = \frac{B}{A}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{B}{A} = -\frac{U}{V}.$$

- c) Démontrer que $\max\{\deg A; \deg B\} \leq r(ABC) - 1$.

Par suite, on a $BV = -AU$, donc $A \mid BV$ et $B \mid AU$. Comme $A \wedge B = 1$, le lemme de Gauß implique que $A \mid V$ et $B \mid U$, ce qui implique

$$\deg A \leq \deg V = \deg \left(K \frac{G'}{G} \right) = \deg K + \deg \frac{G'}{G} \leq a + b + c - 1 = r(ABC) - 1$$

et

$$\deg B \leq \deg U = \deg \left(K \frac{F'}{F} \right) = \deg K + \deg \frac{F'}{F} \leq a + b + c - 1 = r(ABC) - 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\max\{\deg A; \deg B\} \leq r(ABC) - 1.}$$

- d) Démontrer que $\max\{\deg A; \deg B; \deg C\} \leq r(ABC) - 1$.

Comme $A + B + C = 0$ et $A \wedge B = 1$, on a $A \wedge C = 1$. On peut donc reprendre le raisonnement des questions précédentes pour démontrer que $\max\{\deg A; \deg C\} \leq r(ABC) - 1$. En définitive,

$$\boxed{\max\{\deg A; \deg B; \deg C\} \leq r(ABC) - 1.}$$

On a ainsi démontré la conjecture ABC dans les polynômes (qui n'est donc pas une conjecture). Dans les entiers, le problème reste ouvert. Formulé par Esterlé et Masser en 1985, cette conjecture énonce que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour chaque triplet (a, b, c) d'entiers premiers entre eux tels que $a + b + c = 0$, on a $\max\{a, b, c\} \leq C_\varepsilon k(abc)^{1+\varepsilon}$ où $k(abc)$ désigne le noyau du produit abc , c'est-à-dire le produit des facteurs premiers distincts de abc .

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Démontrer qu'il n'existe pas de triplet (P, Q, R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P^n + Q^n = R^n$ et P, Q non associés.

Supposons qu'il n'existe un triplet (P, Q, R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants tel que $P^n + Q^n = R^n$, c'est-à-dire $P^n + Q^n - R^n = 0$. Quitte à diviser par $P^n \wedge Q^n \wedge R^n$, on peut supposer que $P \wedge Q \wedge R = 1$. Par suite, on a $P \wedge Q = 1$. Alors, d'après la question précédente, on a

$$\max\{\deg P^n, \deg Q^n, \deg R^n\} \leq r(P^n Q^n R^n) - 1,$$

c'est-à-dire

$$n \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\} \leq r(PQR) - 1.$$

Or, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ayant moins de racines distinctes que son degré, on a

$$r(PQR) \leq \deg P + \deg Q + \deg R \leq 3 \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\},$$

donc

$$n \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\} < 3 \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\},$$

ce qui implique $n < 3$ puisque $\max\{\deg P, \deg Q, \deg R\} \neq 0$ (car P, Q non associés): absurde! Donc

$$\boxed{\text{pour } n \geq 3, \text{ il n'existe pas de triplet } (P, Q, R) \in \mathbb{C}[X]^3 \text{ de polynômes non constants tel que } P^n + Q^n = R^n.}$$

On a ainsi démontré le théorème de Mason, c'est-à-dire le grand théorème de Fermat pour les polynômes. Dans les entiers, le résultat est resté l'une des conjectures les plus célèbres pendant plus de 300 ans avant d'être démontrée en 1996 par Andrew Wiles (aidé de Richard Taylor). Dire que leur démonstration est plus difficile que celle que nous venons de faire est un doux euphémisme.

- b) Que peut-on dire dans le cas $n = 2$?

On a

$$(X^2 + 1)^2 = (X^2 - 1)^2 + (2X)^2,$$

donc

$$\boxed{\text{le résultat de la question précédente est en défaut pour } n = 2.}$$

Récréation mathématique

Des fourmis se déplacent sur un cercle à vitesse constante (la même pour toutes les fourmis). Certaines tournent dans un sens et d'autres dans l'autre et quand deux d'entre elles se rencontrent elles font demi-tour pour repartir à la même vitesse mais dans l'autre sens. Justifier que, quelle que soit la position de départ, on est sûr qu'à un moment donné toutes les fourmis retrouveront leurs positions et leur sens de déplacement initiaux.

On va supposer que les fourmis portent des dossards et qu'elles échangent leur dossard lorsqu'elles se rencontrent.

Les dossards tournent à vitesse constante et vont donc se retrouver en position initiale simultanément au bout d'un tour.

Par contre, ils seront portés par des fourmis vraisemblablement différentes.

Si N fourmis sont présentes dans l'anneau, il y a $N!$ façon de distribuer les dossards aux fourmis, donc au bout de $N! + 1$ tours, on est sûr (d'après le principe des tiroirs) que les dossards seront portés selon une distribution déjà rencontrée.

Donc le mouvement des fourmis est périodique! On en déduit (y réfléchir) qu'à un moment donné toutes les fourmis retrouveront leurs positions et leur sens de déplacement initiaux.