

Transferts thermiques

Le but de ce chapitre est d'approfondir la compréhension des transferts thermiques. Les applications sont nombreuses, par exemple l'isolation thermique.

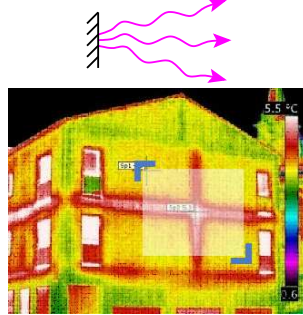
I/ Introduction : les différents modes de transfert thermique

1) Rayonnement thermique

C'est un mode de transport d'énergie qui ne nécessite aucun support matériel, et peut se faire à un travers un milieu transparent. L'agitation thermique des particules chargées (ions, électrons) entraîne un rayonnement électromagnétique (cf EM₁₂).

Exemples : le rayonnement solaire reçu sur Terre (qui s'est propagé dans le vide), chauffage par radiations dans les gares, concert de RAMMSTEIN.

Application : les caméras infra-rouges, basés sur le fait que les corps à température ambiante émettent dans l'infra-rouge, aux alentours de $\lambda = 10 \mu\text{m}$, et que la puissance qu'ils émettent est une fonction rapidement croissante de la température. Sur la figure ci-contre, on voit bien l'effet des ponts thermiques dû aux murs/sols/plafonds.

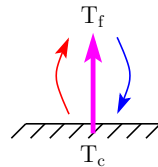


L'étude détaillée de ce type de transfert thermique est HP.

2) Convection thermique

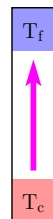
C'est un transport d'énergie propre aux fluides (liquides et gaz), avec un mouvement macroscopique du fluide. Exemple : microprocesseur d'un ordinateur qui est refroidi par convection forcée avec un ventilateur, car la convection naturelle (l'air chaud monte naturellement et est remplacé par de l'air froid) n'est pas suffisante.

L'étude détaillée de ce type de transfert thermique est HP.



3) Conduction thermique

On parle aussi de diffusion thermique. Ce transport nécessite un support matériel, mais se fait sans mouvement macroscopique. Exemple : on met une cuillère en métal, initialement à température ambiante T_f , dans une tasse remplie de café à une température $T_c > T_f$. Au bout d'un temps pas trop long, même le haut du manche de la cuillère est chaud, alors que la cuillère est restée immobile. L'expérience marche beaucoup moins bien avec une cuillère en plastique.



Explication : les entités microscopiques (molécules, atomes, ions, électrons) qui composent le milieu ont une énergie cinétique d'agitation thermique plus grande dans la région de plus grande température. Du fait des chocs au niveau microscopique, les entités les plus énergétiques cèdent de l'énergie aux entités les moins énergétiques. Le phénomène est plus efficace dans un métal car les électrons libres, très mobiles, assurant la conduction électrique, assurent aussi la conduction thermique.

La suite de ce chapitre est essentiellement consacrée à l'étude de ce type de transfert thermique (ainsi qu'à la conducto-convection).

II/ Description de la conduction thermique

1) Équilibre thermodynamique local

Même si la barre est en régime stationnaire, elle n'est pas dans un état d'équilibre thermodynamique, car sa température n'est pas uniforme. (Rappel : dans un état d'équilibre thermodynamique, le système peut être décrit à l'aide d'un petit nombre de variables macroscopiques, comme T , P , ...).

Remarque : on ne peut donc pas écrire l'identité thermodynamique $dU = TdS - PdV$ car T n'est pas définie!

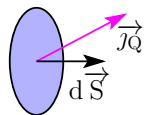
Néanmoins, si l'écart de température $T_c - T_f$ n'est pas trop important, la barre est proche de l'équilibre, et localement, à des échelles mésoscopiques, on peut considérer qu'on a quasiment un état d'équilibre : c'est l'équilibre thermodynamique local. On peut alors définir le champ de température $T(M, t)$ (et de même pour les autres grandeurs).

Remarque : il peut arriver que l'équilibre thermodynamique local ne soit plus applicable si le gradient de "température" devient trop important.

2) Densité de flux thermique et flux thermique

Un transfert thermique par conduction se fait du chaud vers le froid, donc dans une direction et un sens bien précis. Il est donc décrit localement par un champ de vecteur, la densité de flux thermique \vec{j}_Q

(ou \vec{j}_{th}), qui est telle que $\delta^{(3)}Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt$ est le transfert thermique traversant $d\vec{S}$ pendant dt , dans le sens défini par $d\vec{S}$.



Le flux thermique (i.e. la puissance) élémentaire correspondant est $d^{(2)}\mathcal{P} = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ (ou $d^{(2)}\Phi$), tel que $\delta^{(3)}Q = d^{(2)}\mathcal{P} dt$. Unité $[\vec{j}_Q] = \text{W.m}^{-2}$.

Le flux thermique à travers une surface ouverte \mathcal{S} est $\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ (dans le sens défini par $d\vec{S}$) et le transfert thermique associé est $\delta Q = \mathcal{P} dt$ pendant dt .

Enfin, le flux thermique entrant dans une surface fermée S , orientée conventionnellement vers l'extérieur) est $\mathcal{P} = - \oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ et comme précédemment $\delta Q = \mathcal{P}dt$

Ainsi, \vec{j}_Q est à l'énergie thermique ce que \vec{j} est à la charge.

3) Loi de FOURIER – conductivité thermique

Il n'y a pas d'argument exact donnant \vec{j}_Q , comme celui qui a donné $\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$ en EM₁. On écrit donc une loi phénoménologique pour la conduction thermique, comme on l'a fait avec la loi d'OHM locale pour la conduction électrique. La théorie de la réponse linéaire donne la **loi de FOURIER** $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$, où le signe $-$ traduit le fait que les transferts thermiques se font des zones chaudes vers les zones froides. Le coefficient $\lambda > 0$ est la **conductivité thermique** du matériau, et s'exprime en $[\lambda] = \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Les ordres de grandeur (pour des températures aux alentours de 300 K), sont les suivants :

- $\lambda \simeq 400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour un métal bon conducteur thermique (Cu, Ag, ...);
- $\lambda \simeq 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour l'eau, le verre, la pierre, le ciment;
- $\lambda \simeq 0,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour le bois;
- $\lambda \simeq 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour l'air et les gaz (dans les conditions usuelles).

Les gaz étant peu denses sont mauvais conducteurs thermiques car les chocs sont peu nombreux.

III/ Bilans thermiques et équation de la chaleur

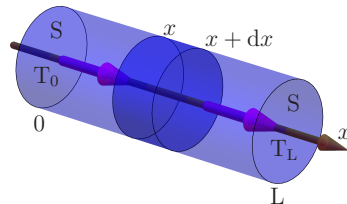
1) Bilans thermiques (sans terme de source)

Dans toute la suite, on travaille à pression constante et on écrit donc le premier principe avec l'enthalpie. On suppose de plus que $E_m = C^{te}$ et qu'il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression. Enfin, on suppose qu'il n'y a pas de terme de source, autrement dit que la variation de l'enthalpie n'est due qu'aux échanges avec l'extérieur (cf III/3) pour les termes de sources). Avec ces hypothèses (il faut s'adapter si l'une d'elles fait défaut), le premier principe s'écrit : $dH = \delta Q$ et s'interprète comme

(variation) = (ce qui entre algébriquement) + (ce qui est créé algébriquement)

a. Problème unidimensionnel

On considère un cylindre droit d'un matériau conducteur thermique comme ci-contre. On suppose que $T(\vec{r}, t) = T(x, t)$ est indépendant de y et z . La loi de FOURIER impose alors $\vec{j}_Q(\vec{r}, t) = j_Q(x, t)\vec{e}_x$ (on peut aussi le déduire des symétries et invariances).



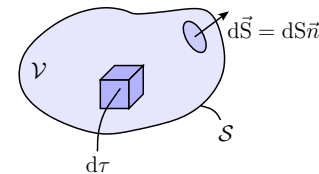
Remarque : cette situation peut par exemple se rencontrer si on impose des températures différentes T_0 et T_L aux extrémités en $x = 0$ et $x = L$, et que soit on néglige les effets de bords, ce qui revient à ne considérer qu'une portion d'aire S d'un système infini dans les directions y et z , soit le système est calorifugé latéralement.

On applique le premier principe à la tranche d'épaisseur dx située entre x et $x + dx$ pour une évolution pendant dt : $d(\delta H) = \delta^{(2)}Q$, où δH est l'enthalpie de la tranche (on utilise la notation δ pour se souvenir que δH est infinitésimal). D'après le II/2), on a $\delta^{(2)}Q = - \oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt = \vec{j}_Q(x, t) \cdot (S\vec{e}_x)dt - \vec{j}_Q(x + dx, t) \cdot (S\vec{e}_x)dt + 0$ car \vec{j}_Q

est uniforme sur les disques de base et orthogonal à $d\vec{S}$ sur la surface latérale (si ce n'est pas le cas, il faut prendre en compte les transferts sur la surface latérale!). Ainsi, $\delta^{(2)}Q = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt$. En notant c_P la capacité thermique massique du milieu et μ sa masse volumique, on a $d(\delta H) = dmc_P dT = \mu c_P S dx dT$. Après simplification par $S dx$,

le premier principe fournit $\mu c_P dT = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dt$ à x fixé, soit $\boxed{\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0}$.

b. Démonstration générale



Avant de voir les bilans en géométries cylindrique et sphérique, voyons la démonstration dans le cas le plus général. Le premier principe s'écrit $dH = \delta Q$, avec

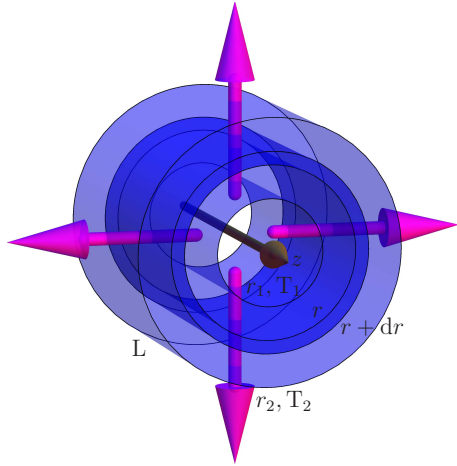
$$\delta Q = - \oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt = - \iiint_V \text{div } \vec{j}_Q d\tau dt \quad \text{et avec}$$

$$\begin{aligned} dH &= \iiint_V \mu c_P T(M, t + dt) d\tau - \iiint_V \mu c_P T(M, t) d\tau \\ &= \iiint_V \mu c_P [T(M, t + dt) - T(M, t)] d\tau \\ &= \iiint_V \mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} d\tau dt \end{aligned}$$

Ainsi $\iiint_V \left[\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q \right] d\tau = 0$ quelque soit \mathcal{V} , donc $\boxed{\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = 0}$.

Cette équation est semblable à l'équation de conservation de la charge (ou à l'identité de POYNTING), mais μ et c_P peuvent dépendre de t donc ne peuvent pas forcément rentrer dans la dérivée temporelle.

c. Géométrie cylindrique



On considère un cylindre creux d'axe (Oz), de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 , dans lequel la température est à symétrie cylindrique : $T(\vec{r}, t) = T(r, t)$ (en coordonnées cylindriques). C'est par exemple le cas d'un cylindre auquel on impose les températures $T(r_1, t) = T_1$ et $T(r_2, t) = T_2$, qu'il soit infini ou calorifugé sur les surfaces de base. La loi de FOURIER implique que $\vec{j}_Q(\vec{r}, t) = j_Q(r, t)\vec{e}_r$ (ce qu'on peut aussi déduire des symétries et invariances).

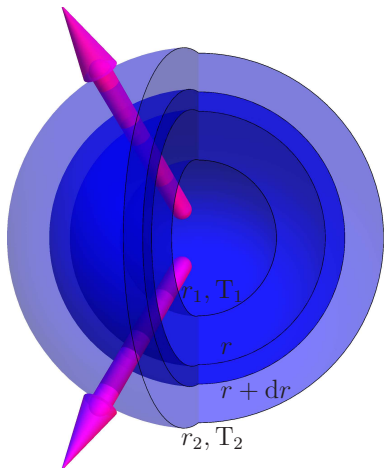
Le premier principe $d(\delta H) = \delta^{(2)}Q$ est appliqué à la coquille cylindrique comprise entre r et $r + dr$ (cf figure ci-contre), de longueur L , ce qui donne

$$\mu(2\pi r L dr) c_P dT = j_Q(r, t) 2\pi r L dt - j_Q(r + dr, t) 2\pi(r + dr) L dt.$$

Après simplification, on obtient $\mu r dr c_P dT = [r j_Q(r, t) - (r + dr) j_Q(r + dr, t)] dt$, et

finalement $\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r j_Q) = 0$. On a retrouvé la divergence en cylindriques...

d. Géométrie sphérique



Dans une situation à symétrie sphérique comme représentée ci-contre, on a, en coordonnées sphériques : $T(\vec{r}, t) = T(r, t)$ ainsi que $\vec{j}_Q(\vec{r}, t) = j_Q(r, t)\vec{e}_r$, distributions de température et de densité de flux thermique pouvant par exemple venir du fait qu'on impose $T(r_1, t) = T_1$ et $T(r_2, t) = T_2$. Les mêmes arguments qu'en cylindriques, mais avec $4\pi r^2$ et $4\pi(r + dr)^2$ comme surfaces au lieu de $2\pi r L$ et $2\pi(r + dr) L$, donne (*Exercice 1* : le prouver)

$$\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_Q) = 0 \text{ et on a bien retrouvé la divergence en sphériques.}$$

2) Équation de la chaleur

Elle est plus justement appelée équation de la diffusion thermique. On la trouve en combinant les bilans thermiques à la loi de FOURIER.

a. Équation de la chaleur unidimensionnelle – diffusivité thermique

Dans le cas le plus simple du problème à une dimension, nous avons vu que $j_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ et $\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0$. Par conséquent, $\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. On pose $D = \frac{\lambda}{\mu c_P}$, appelé diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique. La

température vérifie alors l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ appelée équation de la chaleur / de la diffusion thermique unidimensionnelle, sans terme de source. D'après cette équation, $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Les ordres de grandeurs sont les suivants (pour des températures proches de 300 K) :

- $D \simeq 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour un métal bon conducteur ;
- $D \simeq \text{qqs.} 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour les gaz ;
- $D \simeq 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour la pierre ;
- $D \simeq 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour le bois.

b. Équation de la chaleur générale et dans les autres géométries

La combinaison de la loi de FOURIER $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$ avec l'équation de bilan thermique $\mu c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = 0$ fournit $\Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. En géométries cylindrique et sphérique,

les bilans de III/1)c. et III/1)d. combinés à $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ (même forme dans les deux géométries, mais r a une signification différente!) donnent $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ en cylindriques et $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ en sphériques : nous avons bien retrouvé l'expression du Laplacien.

c. Propriétés qualitatives d'une équation de diffusion

L'équation de la chaleur est linéaire. Elle ne fait intervenir qu'une dérivée première par rapport au temps t et n'est donc pas une équation de propagation comme l'équation de D'ALEMBERT, mais une équation de diffusion comme celle rencontrée lors de l'étude de l'effet de peau, cf EM₁₁. Elle n'est pas invariante par $t \leftarrow -t$ et décrit donc un phénomène irréversible : les transferts thermiques se font du chaud vers le froid.

Dans l'équation de D'ALEMBERT $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ apparaît le paramètre c , avec $[c] = \text{m.s}^{-1}$. Par analyse dimensionnelle, le temps typique τ nécessaire pour parcourir une distance ℓ est tel que $\frac{\ell}{\tau} = c$, i.e. $\tau = \frac{\ell}{c} \propto \ell$. Pour l'équation de la chaleur, le paramètre physique est D , et par les mêmes arguments on trouve $\frac{\ell^2}{\tau} = D$, i.e. $\tau = \frac{\ell^2}{D} \propto \ell^2$, temps typique pour que la diffusion thermique ait lieu sur une distance ℓ , par exemple pour une mise à l'équilibre thermique.

La diffusion est donc plus efficace qu'un phénomène propagatif aux petites distances, mais moins efficace aux grandes distances. Par exemple, dans un métal bon conducteur, il faut $\tau \simeq 1$ s pour parcourir $\ell = 1$ cm, mais $\tau = 10^4$ s $\simeq 3$ h pour parcourir $\ell = 1$ m.

3) Prise en compte d'un terme de source

Il peut exister des processus qui libèrent ou absorbent de l'énergie. On note alors $\Pi_V(\vec{r}, t)$ la densité volumique de puissance libérée algébriquement, telle que $\Pi_V(\vec{r}, t)d\tau dt$ est l'énergie libérée algébriquement entre t et $t + dt$, dans un volume $d\tau$ autour de \vec{r} . Parmi les formes d'énergies pouvant être converties en énergie cinétique d'agitation thermique, citons

- l'énergie électromagnétique, par effet JOULE dans un conducteur électrique. On

$$\text{a alors } \Pi_V = \mathcal{P}_{V,J} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} > 0;$$

- l'énergie nucléaire, lors de réactions nucléaires, pour lesquelles $\Pi_V > 0$;
- l'énergie chimique, lors de réactions chimiques exothermiques ($\Pi_V > 0$) ou endothermiques ($\Pi_V < 0$).

Reprenons le bilan thermique à une dimension pour la tranche d'épaisseur dx :

(variation) = (ce qui entre algébriquement) + (ce qui est créé algébriquement)

qui se traduit en $d(\delta H) = \delta^{(2)}Q$, toujours avec $d(\delta H) = \mu_{CP} S dx dt$, mais cette fois avec

$$\delta^{(2)}Q = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt + \Pi_V(x, t)(S dx) dt = \left(-\frac{\partial j_Q}{\partial x} + \Pi_V(x, t) \right) S dx dt$$

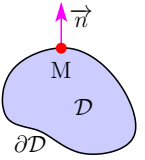
On obtient donc $\mu_{CP} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = \Pi_V$. L'équation de la chaleur devient quant à elle

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\Pi_V}{\lambda}. \text{ La généralisation à trois dimensions font bien sûr intervenir}$$

$$\text{la divergence et le Laplacien : } \mu_{CP} \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = \Pi_V \text{ et } \Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\Pi_V}{\lambda}.$$

4) Conditions aux limites

La résolution de l'équation de la chaleur, nécessite la connaissance de conditions initiales et de conditions aux limites. Ici, c'est la température $T(M, t)$ qu'on cherche à déterminer, mais pour toute équation aux dérivées partielles (comme l'équation de LAPLACE vue en EM₁), on distingue les conditions aux limites suivantes.



- Les conditions aux limites de DIRICHLET imposent la valeur de la fonction à trouver, ici la température $T(M, t)$, sur les bords du domaine considéré, ici les bords du matériau.
- Les conditions aux limites de NEUMANN imposent la valeur du gradient normal, ici de $\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} T(M, t)$, sur les bords du domaine. Pour la diffusion thermique, d'après la loi de FOURIER, ceci revient à imposer la valeur de la densité de courant normale au bord : $j_n(M, t) = \vec{n} \cdot \vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} T(M, t)$.

Quelque soit la situation physique, il y a continuité de $j_n(M, t)$ à l'interface entre le matériau considéré et le milieu avec lequel il est en contact en M , car l'interface a une masse nulle, donc une capacité thermique nulle, et aucune énergie ne peut s'y accumuler : elle doit céder tout ce qu'elle reçoit.

La valeur de $j_n(M, t)$ peut être imposée par le milieu extérieur, un cas particulier étant le suivant : $j_n(M, t) = 0$ en un point d'une surface calorifugée. Un autre cas est celui d'un contact solide-fluide, dont l'étude est reportée à V/.

Enfin un contact thermique est dit parfait s'il y a continuité de T en M .

IV/ Étude du régime stationnaire

1) Généralités

Si un bilan comme ceux vus en III/ a déjà été fait, il suffit d'écrire qu'en régime stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. L'équation de la chaleur sans terme de source devient $\Delta T = 0$: on a donc affaire au problème de LAPLACE. Le second membre devient non nul en présence d'un terme de source. Il reste ensuite à trouver T .

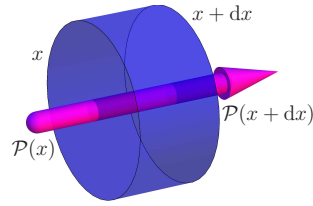
Dans le cas contraire, il faut écrire un bilan directement en régime stationnaire. Rappelons qu'un tel bilan s'écrit

$$0 = (\text{ce qui entre algébriquement}) + (\text{ce qui est créé algébriquement})$$

Ainsi, en l'absence de termes de sources : (ce qui entre) = (ce qui sort).

2) Problème unidimensionnel – résistance thermique

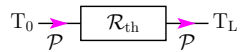
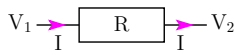
On reprend le système étudié en III/1)a. En régime stationnaire, la puissance thermique $\mathcal{P}(x)$ entrant algébriquement en x est égale à celle $\mathcal{P}(x + dx)$ sortant algébriquement en $x + dx$, car il n'y a ni terme de source, ni échanges sur la surface latérale. Par conséquent, $\mathcal{P}(x + dx) = \mathcal{P}(x)$ est indépendant de x , ainsi que $j_Q(x)$ puisque $\mathcal{P}(x) = S j_Q(x)$.



C'est bien ce que donne le bilan écrit en III/1)a., en régime stationnaire : $\frac{dj_Q}{dx} = 0$.

La loi de FOURIER $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ implique que T est affine en x , conformément à l'équation de la chaleur qui donne $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ en régime stationnaire. Les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$ (cf figure du III/1)a.) imposent la forme suivante de la température $T(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L}x$, puis $j_Q = \frac{\lambda}{L}(T_0 - T_L)$ et enfin $\mathcal{P} = \frac{\lambda S}{L}(T_0 - T_L)$. On écrit cette relation sous la forme $T_0 - T_L = \mathcal{R}_{th}\mathcal{P}$ avec la résistance thermique

$\mathcal{R}_{th} = \frac{L}{\lambda S}$. Cette dénomination vient de l'analogie avec la conduction électrique :

Conduction thermique	Conduction électrique
$\vec{j}_Q, T, \lambda, \quad \vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$	$\vec{j}, V, \gamma, \quad \vec{j} = -\gamma \vec{\nabla} V$
$\mathcal{P} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$	$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$
$T_0 - T_L = \mathcal{R}_{th}\mathcal{P}$ 	$V_1 - V_2 = RI$ 
1D : $\mathcal{R}_{th} = \frac{L}{\lambda S}$	1D : $R = \frac{L}{\gamma S}$
R.S. : $\text{div } \vec{j}_Q = 0$	R.S. : $\text{div } \vec{j} = 0$ (loi des nœuds)

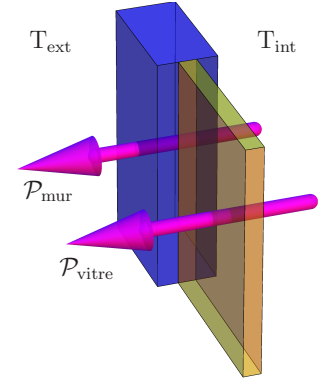
Parmi les autres points de l'analogie, notons la possibilité des ponts diviseurs pour la température, comme on le faisait pour la tension.

Complétons finalement l'analogie en étudiant les associations de résistances.

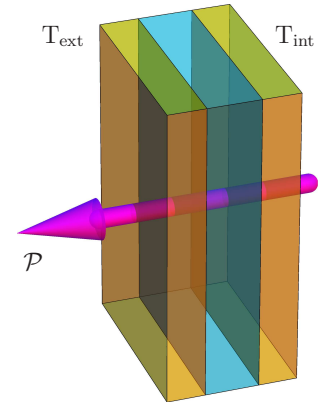
3) Association de résistances – exemples

Les résistances thermiques peuvent être associées en série et en parallèles comme leur analogue électrique. Voyons deux exemples de la vie de tous les jours.

Prenons l'exemple d'un morceau de mur et d'une vitre. On a $\mathcal{P} = \mathcal{G}_{th}(T_{int} - T_{ext})$, où $\mathcal{G}_{th} = 1/\mathcal{R}_{th}$ est la conductance thermique et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{mur} + \mathcal{P}_{vitre}$ est la puissance thermique totale allant de l'intérieur vers l'extérieur. Or on sait que $\mathcal{P}_{mur} = \mathcal{G}_{th,mur}(T_{int} - T_{ext})$ et $\mathcal{P}_{vitre} = \mathcal{G}_{th,vitre}(T_{int} - T_{ext})$. La somme de ces deux équations montre que $\mathcal{G}_{th} = \mathcal{G}_{th,mur} + \mathcal{G}_{th,vitre}$: les deux résistances sont en parallèle, comme on s'en doute puisque la puissance traversant la vitre ne traverse pas le mur !



Prenons cette fois l'exemple d'un double vitrage. On a $T_{int} - T_{ext} = \mathcal{R}_{th}\mathcal{P}$. Le flux thermique \mathcal{P} traverse tout à tour le premier vitrage, le gaz et le deuxième vitrage. L'association est donc en série, donc $\mathcal{R}_{th} = 2\mathcal{R}_{th,vitrage} + \mathcal{R}_{th,gaz}$. Chaque résistance a pour expression $\frac{e}{\lambda S}$. Or les aires S sont toutes égales, les épaisseurs diffèrent peu entre un vitrage et le gaz, et la conductivité thermique d'un gaz est 100 fois plus faible que celle du verre, cf II/3). Ainsi $\mathcal{R}_{th} \simeq \mathcal{R}_{th,gaz} \gg \mathcal{R}_{th,vitrage}$: quasiment toute la résistance aux pertes thermiques par conduction sont dues à la couche de gaz (qui est un isolant thermique), et on a largement augmenté la résistance thermique par rapport à un vitrage simple. Ainsi les pertes thermiques par conduction sont nettement diminuées.



Dans les exemples ci-dessus, les effets de bord ont été négligés : par exemple pour l'association en parallèle, on a négligé les transferts thermiques entre le mur et la vitre !

4) Géométrie cylindrique

On reprend l'exemple de III/1)c. avec $T = T(r)$ et $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$, en coordonnées cylindriques et en régime stationnaire. Pour la coquille cylindrique de rayon r et d'épaisseur dr , le bilan s'écrit $j_Q(r)2\pi rL = j_Q(r + dr)2\pi(r + dr)L = \mathcal{P} = C^{te}$ (flux thermique stationnaire ET uniforme allant algébriquement dans le sens des r croissants). En combinant ceci à la loi de FOURIER, on obtient $-\lambda \frac{dT}{dr} = j_Q(r) = \frac{\mathcal{P}}{2\pi rL}$,

qui s'intègre en $T(r) = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln(r) + C^{\text{te}}$. Les conditions aux limites imposent ici que $T_1 = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln(r_1) + C^{\text{te}}$ et $T_2 = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln(r_2) + C^{\text{te}}$. On pourrait en déduire la constante d'intégration (*Exercice 2*) mais contentons nous de soustraire ces deux équations pour aboutir à : $T_1 - T_2 = \frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln(r_2/r_1)$ et donc à l'expression $\mathcal{R}_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln(r_2/r_1)$ de la résistance thermique (il faut faire attention à bien prendre la convention récepteur pour trouver $\mathcal{R}_{\text{th}} > 0$).

5) Géométrie sphérique

Exercice 3 : Montrer de même que $\mathcal{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

6) Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Quand le régime est lentement variable, les résultats précédents restent approximativement corrects : c'est l'ARQS, comme en électrocinétique. Il faut pour cela que les temps typiques d'évolution soient grands devant les temps typiques de diffusion :

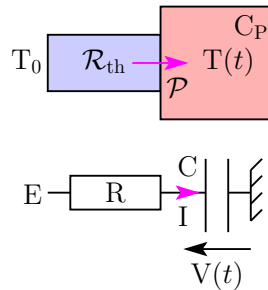
$$\tau_{\text{évolution}} \gg \tau_{\text{diffusion}} = \frac{\ell^2}{D}.$$

Exemple : un barreau conducteur thermique relie un thermostat à température T_0 à un corps de capacité thermique C_P et de température $T(t)$ uniforme (liquide avec un agitateur ou solide de grande conductivité thermique pour que $\vec{\nabla}T = -\frac{1}{\lambda} \vec{\nabla}Q$ soit faible). Le premier principe appliqué à ce corps donne $C_P dT = \mathcal{P} dt = \frac{T_0 - T(t)}{\mathcal{R}_{\text{th}}} dt$, soit encore

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_0 \text{ avec } \tau = \mathcal{R}_{\text{th}} C_P.$$

Ce système a l'équivalent électrocinétique représenté ci-dessus. On comprend maintenant pourquoi le même mot capacité est utilisé pour la capacité thermique et la capacité d'un condensateur !

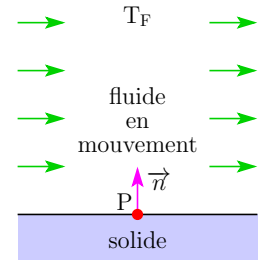
Si le barreau a une longueur ℓ , une section d'aire S , une masse volumique μ et une capacité thermique massique c , l'ARQS est valable si $\mathcal{R}_{\text{th}} C_P \gg \frac{\ell^2}{D}$. Ceci impose la condition $\frac{\ell}{\lambda S} C_P \gg \frac{\ell^2 \mu c}{\lambda}$, soit encore $\ell \ll \frac{C_P}{S \mu c}$.



V/ Transferts thermiques conducto-convectifs à une paroi

1) Problématique – Loi de NEWTON

Les transferts thermiques entre un solide et un fluide en mouvement (convection naturelle ou forcée) mettent en jeu la conduction (dans le solide et le fluide) et la convection (dans le fluide) et sont appelés transferts conducto-convectifs (on néglige le rayonnement). Ces transferts sont courants (échange entre un mur, un microprocesseur, le corps des animaux, etc avec l'air, ou un tuyau avec le fluide qu'il contient, etc).



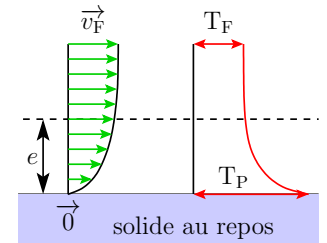
On admet que dans une telle situation, la loi de NEWTON s'applique. Le flux thermique élémentaire passant du solide au fluide, à travers une surface dS centrée en un point P de la paroi, est donné par $d\mathcal{P}_{P \rightarrow F} = h(T_P - T_F)dS$ où T_F est la température du fluide suffisamment loin de la paroi (là où T_F est uniforme). Il y a donc un flux thermique surfacique $\varphi_{P \rightarrow F} = h(T_P - T_F)$ en W.m^{-2} . Le coefficient de transfert conducto-convectif h a pour unité $[h] = \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Calculer ce coefficient est très difficile, parfois même impossible. Nous le supposons connu et donné à l'avance. Les ordres de grandeurs sont les suivants.

h en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$	gaz	liquide
convection naturelle	$\text{qqs} \times 1 - \text{qqs} \times 10$	$\text{qqs} \times 10 - \text{qqs} \times 100$
convection forcée	$\text{qqs} \times 10 - \text{qqs} \times 100$	$\text{qqs} \times 10 - \text{qqs} \times 10000$

Notons enfin que les conditions aux limites pour déterminer la température dans le solide s'écrivent : $j_n(P, t) = \vec{n} \cdot \vec{j}(P, t) = h(T_P - T_F)$, mais on ne peut pas écrire $T_P = T_F$ car T_F est la température au sein du fluide (sauf si $h = \infty$, ce qui modélise un contact thermique parfait).

2) Compléments

Lorsqu'un fluide circule au voisinage d'un solide, le fluide a une vitesse égale à celle du solide à la surface du solide, à cause de la viscosité. La vitesse moyenne du fluide passe de zéro à la valeur loin de la paroi sur une épaisseur typique e , appelée épaisseur de la couche limite. La valeur de e est d'autant plus petite que la vitesse moyenne d'écoulement \vec{v}_F du fluide est grande. Dans la couche limite, le fluide est quasiment au repos et les transferts thermiques sont assimilables à des transferts conductifs.



De plus, dans beaucoup de situations courantes, la température passe de la valeur T_P à la valeur T_F sur une épaisseur quasiment égale à e (ce n'est pas vrai en toute

généralité, la couche limite thermique peut avoir une autre épaisseur que la couche limite fluide).

La conduction dans la couche limite induit une densité de courant thermique qu'on peut approximer par $\overrightarrow{j_{Q,F}} = -\lambda_F \overrightarrow{\text{grad}} T \simeq \frac{\lambda_F}{e} (T_P - T_F) \overrightarrow{n}$, d'où un flux thermique surfacique $\varphi_{P \rightarrow F} = h(T_P - T_F)$ avec $h \simeq \frac{\lambda_F}{e}$. Ce coefficient augmente donc avec la vitesse du fluide. Ceci est en accord avec les valeurs du tableau précédent.

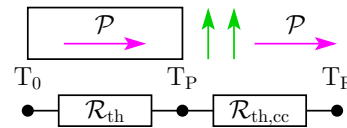
Notons de plus qu'un coefficient h plus grand implique un transfert thermique plus grand. Ce qui précède permet donc de comprendre pourquoi la sensation de froid augmente avec la vitesse du vent. On comprend aussi pourquoi on se refroidit beaucoup plus vite dans l'eau que dans l'air (pour une même température de l'eau et de l'air) et qu'on a faim en sortant d'une piscine !

3) Résistance thermique équivalente

Pour une aire S totale de contact solide-fluide, et en supposant T_P et T_F uniformes, le flux thermique total s'écrit $\mathcal{P}_{P \rightarrow F} = hS(T_P - T_F)$, d'où $T_P - T_F = \mathcal{R}_{th,cc} \mathcal{P}_{P \rightarrow F}$, avec la résistance thermique de conducto-convection $\mathcal{R}_{th,cc} = \frac{1}{hS}$.

Remarque : avec l'expression de h donnée à la partie précédente, $\mathcal{R}_{th,cc} = \frac{e}{\lambda_F S}$, ce qui est cohérent avec l'expression d'une résistance thermique à une dimension.

Considérons l'exemple de la figure ci-contre. On a les relations $T_0 - T_P = \mathcal{R}_{th} \mathcal{P}$ et $T_P - T_F = \mathcal{R}_{th,cc} \mathcal{P}$ (avec la même puissance car le régime est stationnaire). En additionnant ces équations, on obtient $T_0 - T_F = \mathcal{R}_{tot} \mathcal{P}$, avec $\mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_{th} + \mathcal{R}_{th,cc}$: les deux résistances sont en série. Ceci reste vrai en géométries cylindrique et sphérique.



4) Un exemple d'application : les ailettes de refroidissement

Cf exercice de TD. Les ailettes de refroidissement sont par exemple utilisées pour le refroidissement de composants électroniques, ou de moteurs, et sont basées sur un principe simple : augmenter la surface d'échange avec l'air afin d'augmenter les transferts thermiques.



VI/ Régime non stationnaire

L'étude des régimes non stationnaires est compliquée. Il n'existe pas de solution générale simple, car tout dépend des conditions initiales et aux limites. Aucune méthode n'est au programme, mais commençons par reprendre ce qui a été vu en EM₁₁.

1) Solutions OPPM et effet de peau

Pour simplifier l'étude, concentrons-nous sur le cas unidimensionnel sans terme de source et cherchons une solution complexe de la forme $\underline{T}(x, t) = \underline{T}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$ avec $\underline{T}_0 = T_0 e^{i\varphi}$ (rappels : $T = \text{Re}(\underline{T})$ et à 3D, $kx \leftarrow \vec{k} \cdot \vec{r}$). En injectant cette forme dans l'équation de la chaleur, on trouve que $\left(-k^2 + \frac{i\omega}{D}\right) \underline{T}(x, t) = 0$, ce qui impose la relation de dispersion $i\omega = Dk^2$.

Si $k \in \mathbb{R}$, on a $\omega = -iDk^2$, d'où une solution $T(x, t) = T_0 e^{-Dk^2 t} \cos(kx + \varphi)$. C'est une onde stationnaire, décroissant exponentiellement dans le temps, avec un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{Dk^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 D}$. On retrouve que $\tau \simeq \frac{\ell^2}{D}$, avec $\ell = \lambda$.

Si $\omega \in \mathbb{R}^+$, on a $k^2 = \frac{i\omega}{D}$ d'où $k = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$. Si la diffusion se fait dans le sens des x croissants, il faut choisir le signe $-$ et on retrouve la propagation avec atténuation spatiale caractéristique de l'effet de peau : $T(x, t) = T_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta - \varphi)$, avec l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{D\mathcal{T}}{\pi}}$ ($\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période des oscillations, et on retrouve une relation du type $\tau \simeq \frac{\ell^2}{D}$ avec $\tau = \mathcal{T}$ et $\ell = \delta$). Application : les variations journalières et annuelles de température donnent lieu à une onde thermique dans le sol, atténuées au bout de quelques $\delta_j = \sqrt{\frac{D\mathcal{T}_j}{\pi}}$ et $\delta_a = \sqrt{\frac{D\mathcal{T}_a}{\pi}}$ respectivement. Sachant que pour le sol, $\mu = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $c = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda = 2,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\mathcal{T}_j = 1 \text{ jour}$ et $\mathcal{T}_a = 365 \text{ jour}$, on trouve que $\delta_j = 17 \text{ cm}$ et $\delta_a = 3,2 \text{ m}$. Ainsi, à une profondeur de 10 m, la température est pratiquement stationnaire : c'est ce qu'on attend d'une bonne cave à vin !

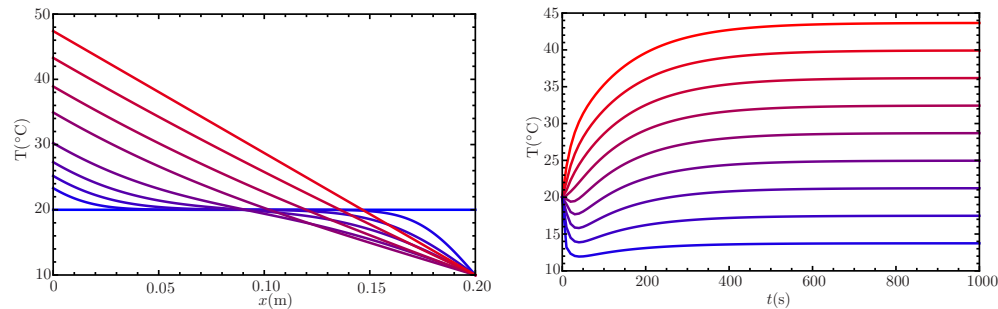
2) Résolution numérique

Quand aucune solution analytique n'existe, on peut bien sûr recourir à une résolution numérique de l'équation de la chaleur (ou de LAPLACE en régime stationnaire et sans terme de source). Pour cela, il faut comme d'habitude discrétiser les dérivées partielles apparaissant dans les équations à résoudre.

Considérons l'exemple suivant utilisé expérimentalement pour déterminer une conductivité thermique. Un barreau de cuivre, de longueur $L = 20$ cm, de section d'aire $S = 2,0$ cm², de masse volumique $\mu = 8,96$ g.cm⁻³ et de capacité thermique massique $c = 3,8.10^2$ J.K⁻¹.kg⁻¹ est calorifugé sur sa surface latérale. Le barreau est initialement à la température ambiante $T(x, t < 0) = T_a = 20$ °C. À partir de $t = 0$, il est mis en contact

- en $x = 0$, avec une résistance électrique libérant une puissance JOULE $\mathcal{P}_J = 15$ W qui est intégralement transmise au barreau ;
- en $x = L$, avec un système de circulation d'eau froide, maintenant une température stationnaire $T(L, t) = T_f = 10$ °C.

Les résultats de simulation numérique, similaires à ceux mesurés expérimentalement, sont les suivants



Sur la figure de gauche la température est représentée en fonction de x , aux instants $t = 0, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$ et 2000 s. Sur la figure de droite, les températures sont celles que relèveraient des capteurs de température disposés régulièrement aux positions $x_i = i\Delta x$ avec $\Delta x = 2,0$ cm et $i = 1, \dots, 9$. Remarque : expérimentalement, on n'aurait accès qu'aux mêmes abscisses pour la figure de gauche.

Exercice 4 : Déterminer la température en régime stationnaire et commenter. En déduire la conductivité thermique du cuivre. Calculer le temps caractéristique de mise à l'équilibre du barreau et commenter.

Corrigé 4 : On a vu qu'en régime stationnaire, sans terme de source et avec la surface latérale calorifugée, la température est affine dans le barreau : $T(x) = ax + b$. Les conditions aux limites imposent

- en $x = L$, $T(x = L) = T_f = aL + b$;
- en $x = 0$, $\mathcal{P}_J = j_Q(x = 0)S = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} S = -\lambda a S$ (d'après la loi de FOURIER).

Par conséquent, $a = -\frac{\mathcal{P}_J}{\lambda S}$, $b = T_f - aL$, d'où $T(x) = -\frac{\mathcal{P}_J}{\lambda S}(x - L) + T_f$. Une fonction affine est bien observée aux grands temps sur la figure de gauche.

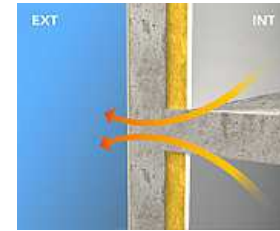
De cette expression de $T(x)$, on peut déduire la valeur de la conductivité avec la figure de gauche ou avec celle de droite. Pour celle de gauche, la mesure de la pente aux grands temps $a \simeq \frac{10 - 47,5}{0,20} = -1,88.10^2$ K.m⁻¹ fournit $\lambda = -\frac{\mathcal{P}_J}{aS} \simeq 4,0.10^2$ W.K⁻¹.m⁻¹, ce

qui est compatible avec la valeur tabulée $\lambda = 401$ W.K⁻¹.m⁻¹. On peut aussi accéder au paramètre a sur la figure de droite, en utilisant les valeurs de la température au temps $t = 1000$ s, ce qui donne la même valeur : $a \simeq \frac{14 - 44}{8,0,02} = -1,88.10^2$ K.m⁻¹.

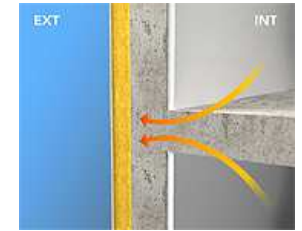
On a vu que $\tau = \frac{L^2}{D}$ avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$. L'application numérique donne approximativement $\tau \simeq 3,4.10^2$ s $\simeq 5$ min40 s. Ceci est parfaitement compatible avec la figure de droite, où on voit que le régime stationnaire est bien atteint au bout de quelques τ , i.e. environ 1000 s, soit un peu plus de 15 min.

VII/ Complément : les ponts thermiques

Revenons sur la deuxième figure du cours, montrant l'image d'un immeuble par une caméra thermique. On voit très nettement que la température est plus grande au niveau des fenêtres (pas de double vitrage ?) et là où les murs/sols/plafonds touche les façades de l'immeuble. Ce dernier phénomène est dû aux ponts thermiques créés par les murs/sols/plafonds, comme expliqué par les figures et textes ci-dessous, pris sur un site :



La dalle interrompt l'isolation ce qui constitue un chemin privilégié pour la fuite de chaleur vers l'extérieur du bâtiment.



La fuite de chaleur vers l'extérieur du bâtiment est atténuée avec une I.T.E. (isolation thermique par l'extérieur).

On notera l'utilisation abusive du mot chaleur ! Le mot à utiliser est énergie !