Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths ULCR
- *NOM Prénom* : Anjolras Philippe

Énoncé des exercices

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Déterminer une famille de matrices linéairement indépendantes et commutant deux à deux de cardinal exactement $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.
2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation.
3. On veut montrer que la borne trouvée en 1. est optimale. Chercher. (Quelques minutes là-dessus puis il donne la question 4.)
4. On raisonne par récurrence par l'absurde et on se donne une famille $(A_1, ..., A_k)$ vérifiant les hypothèses de 1, avec $k > \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$. Montrer qu'il existe dans l'espace engendré par les A_i des matrices dont toutes les lignes sont nulles sauf éventuellement la première. Quelle est la dimension (minimale) de l'espace de ces matrices ? Même question pour des matrices dont toutes les colonnes sont nulles sauf éventuellement la dernière. (Indication : construire à partir des A_i des matrices de taille $n-1$ vérifiant la même hypothèse de commutation.)
5. En écrivant $t_1, ..., t_r$ une base des lignes trouvées précédemment, et en posant $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ ... \\ t_r \end{pmatrix}$, trouver une contradiction en considérant le rang et le noyau.

Remarques sur l'oral

Cet exercice correspond fondamentalement à l'exercice 33 de la RMS. Coup de bol, je l'avais eu en colle avec M. Becker pendant la préparation (même si la méthode divergeait au-delà de la question 3 et que je n'avais pas eu le temps de finir alors).
Inspiré par cette chance inouïe, je trouve sans trop de problème la réponse à la 1. (Si bien que le silence de l'examinateur n'a pas duré tout à fait 10 minutes.) En revanche, à la 2, je ne me souviens plus exactement de la forme de la récurrence et je commence par un raisonnement par récurrence un peu confus. Il me reprend sèchement à la fin de celui-ci, trouvant que ça manque de rigueur et que c'est trop fait "avec les mains", et que j'aurais notamment dû faire l'initialisation dès le début, puis il donne la question suivante.
Sur la 3, je commence par montrer que, si on se donne une famille de matrices vérifiant la condition de 1, qu'on peut toutes supposer triangulaires supérieures par le 2, chacune d'entre elles possède exactement une valeur propre. Il acquiesce, mais m'oriente ensuite par 4 vers une autre piste. La suite se passe bien.
Finalement, il revient sur son emportement à la question 2 et tente de me rassurer (je crois ?) en m'expliquant que c'était bien mais qu'il faut que je fasse attention à ne pas être trop vague et que c'était un peu dommage.