Oral de Maths Lyon

On note b_n le nombre de parenthésages admissibles de n symboles, tels que chaque couple de parenthèses contient au moins 2 symboles, et qu'il n'y ait pas de parenthèses englobant tous les symboles. (cf oral de Gabriel Chan pour des exemples). Montrer l'inégalité :

$$4b_n \leqslant (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$$

Déroulement de l'épreuve et commentaires

Je commence par dire que le terme de droites dans l'inégalité ressemble au terme d'une suite récurrente d'ordre 2, et donc il va probablement falloir montrer une inégalité entre deux suites, puis expliciter la seconde. L'examinateur me répond que c'est une bonne idée, mais que l'exercice est long donc je ne vais pas trouver tout de suite la suite en question. N'ayant pas d'autre idée, je propose de calculer b_n pour de petites valeurs de n.
On trouve donc $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 3$, $b_4 = 11$. L'examinateur me conseille de déterminer b_5 et b_6 à partir des valeurs précédentes de la suite afin d'en déduire une relation de récurrence. Après quelques erreurs, je trouve $b_5 = 2b_1b_4 + 2b_2b_3 + b_2^2$. Je propose une ou deux relations de récurrence, qui s'avèrent être fausses. Comme je bloque un peu, l'examinateur me guide vers la relation : il faut considérer les partitions de n. En posant

$$A_n = \left\{(a_1, \cdots, a_p) \in (\mathbb{N}^*)^p | p \in [\![2, n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i = n\right\} \tag{1}$$

je trouve donc que, pour $n \geqslant 2$:

$$b_n = \sum_{(a_1,\cdots,a_p)\in A_n} \prod_{i\in[\![1,p]\!]} b_{a_i} \tag{2}$$

L'examinateur me propose ensuite d'étudier la fonction génératrice, c'est-à-dire $f : x \mapsto \sum b_n x^n$. Il me signifie également qu'il porte un intérêt négatif à la rigueur mathématique, comme par exemple la justification du fait que son rayon de convergence est non nul. Je trouve sans mal que f peut s'écrire ainsi :

$$f(x) = x + \sum_{n\geqslant 2} \sum_{(a_1,\cdots,a_p)\in A_n} \prod_{i\in[\![1,p]\!]} (b_{a_i} x^{a_i}) \tag{3}$$

Le terme x seul provient du fait que $b_1 = 1$, et qu'il ne peut pas être décrit par la relation (2).
Je dis alors que, si on restreint p à 2, on obtient un produit de Cauchy, et donc que la série ressemble à une sorte de produit de Cauchy généralisé. Cependant je n'arrive pas à mener mon idée jusqu'au bout. Après discussion avec l'examinateur, je comprends qu'il faut intervertir des sommes pour faire apparaître en premier une somme selon p. Apparemment l'intérêt de l'examinateur pour la rigueur avait encore décrue à ce moment là. C'est donc sans justification aucune que j'écris :

$$f(x) = x + \sum_{p\geqslant 2} \left(\sum_{n\geqslant p,(a_1,\cdots,a_p)\in A_n} \prod_{i\in[\![1,p]\!]} (b_{a_i} x^{a_i}) \right) \tag{4}$$

Puis j'aligne quelques résultats concernant f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sum_{p\geqslant 2} f(x)^p && (5)\\ &= x + \frac{f(x)^2}{1-f(x)} \\ 0 &= 2f(x)^2 - (1+x)f(x) + x && (6)\\ 4f(x) &= (1+x) \pm \sqrt{(1+x)^2 - 8x} && (7) \end{aligned}$$

Comme la rigueur de l'examinateur avait triplé depuis le début de l'épreuve, je n'ai pas eu besoin de justifier la sommabilité de ces sommes, même s'il appert qu'elles le sont sur un voisinage de 0. Cependant, il m'a ensuite dit que, f étant une série entière, elle est continue sur son rayon de convergence, et comme elle est nulle en 0 le $\pm$ se transforme en $-$. Défiant tous les pronostics, il venait donc d'avoir de la rigueur. Heureusement, étant un système bien amorti, il est revenu à son état normal sans aucune oscillation. Il me conseille ensuite de faire le développement en série de la racine carrée, et j'obtiens donc, écrit de façon informelle :

$$4f(x) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-6x + x^2)^n \tag{8}$$

L'épreuve s'est arrêtée là.

L'examinateur était très sympathique. Il parlait bas et avec un accent difficilement compréhensible. Il a passé une grande partie de l'oral à envoyer des messages sur son portable, mais restait attentif à ce que je faisais, ça n'a pas gêné l'épreuve.
Trois élèves de PCSI de Lakanal ont assisté à mon oral, plus pour voir le déroulement que l'exercice en lui-même. En sortant, l'un d'entre eux m'a avoué que je l'avais perdu après le calcul de b_4. De manière générale, ils étaient surpris qu'on puisse faire des exercices sur du parenthésage.