1, 2, 3, ... DÉNOMBRER !

Cette fiche a pour objectif de faire le point sur les différents principes de dénombrement.

A. Le passage au complémentaire

Le contraire est parfois moins contrariant !

Pour dénombrer une partie d'un ensemble, il est parfois plus simple de dénombrer son complémentaire. Le cardinal de la partie considérée est alors la différence entre le cardinal de l'ensemble global et celui du complémentaire de cette partie.

Exemples :

- On a compté le nombre de personnes sur une photo de classe. Pour connaître le nombre d'élèves de la classe, mieux vaut compter les quelques professeurs et faire la différence avec l'effectif global.

B. Le principe du « et »

Le principe multiplicatif

Si le dénombrement d'un ensemble se décompose en une succession de p étapes offrant respectivement n_1, n_2, $\ldots$, n_p possibilités, où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i, le nombre total d'issues est égal à $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ parce que chaque choix d'une étape doit être associé à chaque choix de tout autre étape.

Dans la rédaction d'une solution de ce type, on dénombre chacune des étapes en les séparant par des « et ».

Exemples :

- Une plaque d'immatriculation est constituée d'une succession de deux lettres, trois chiffres et deux lettres. Les lettres I, O et U ne sont jamais utilisées (du fait de leurs ressemblances respectives avec 0, 1 et V). Pour obtenir une telle plaque, on doit donc choisir successivement :
  - ▶ 1 lettre parmi les 23 autorisées ;
  - ▶ et 1 lettre parmi les 23 autorisées ;
  - ▶ et 1 nombre parmi les 999 autorisés (de 001 à 999) ;
  - ▶ et 1 lettre parmi les 23 autorisées ;
  - ▶ et 1 lettre parmi les 23 autorisées.

  Il existe donc $23 \times 23 \times 999 \times 23 \times 23 = 279\,561\,159$ plaques différentes.

C. Le principe du « ou »

Découper pour mieux compter !

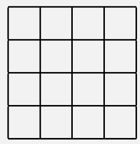
Dans de nombreuses situations où l'on veut dénombrer un ensemble, on est amené à découper celui-ci en plusieurs sous-ensembles complémentaires et disjoints qui sont faciles à dénombrer individuellement. Le cardinal de l'ensemble global est alors la somme des cardinaux des sous-ensembles de la partition considérée.

Dans la rédaction d'une solution de ce type, on distinguera proprement chacun des cas en les séparant par des « ou bien ».

Attention ! Si les sous-ensembles considérés ne sont pas disjoints, le cardinal de l'ensemble global doit être calculé à l'aide de la formule de Poincaré (ou de la formule du crible). Il est alors nécessaire de dénombrer certaines intersections.

Exemples :

- Pour dénombrer le nombre de carrés (de toutes tailles) dans le quadrillage



on constate que l'on a :
  - ou bien des carrés de taille 1×1 : ils sont clairement au nombre de 16 ;
  - ou bien des carrés de taille 2×2 : on en compte 9 (y réfléchir) ;
  - ou bien des carrés de taille 3×3 : ils sont 4 ;
  - ou bien des carrés de taille 4×4 : il n'y en a qu'un seul.

On obtient donc en tout $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ carrés dans ce quadrillage.

L'encadré suivant décrit une situation très importante où il faut penser à scinder le dénombrement en plusieurs sous-cas.

Exactement !

Lorsqu'un ensemble à dénombrer est défini à l'aide de la locution « au moins » ou de sa sœur jumelle « au plus », il est plus commode de partitionner l'ensemble en une famille de parties définies chacunes à l'aide du mot « exactement ».

Il est alors parfois plus simple de passer au complémentaire (si celui-ci se scinde en moins de sous-ensembles).

Exemples :

- Pour dénombrer le nombre de mots de cinq lettres qui contiennent au moins une fois la lettre A, on peut dénombrer successivement les mots de cinq lettres qui ont exactement un A ; exactement deux A ; exactement trois A ; exactement quatre A et exactement cinq A puis ajouter ces cardinaux.
On peut aussi penser à passer au complémentaire en dénombrant le nombre de mots de cinq lettres ne contenant aucun A et en retirant ce résultat au nombre total de mots de cinq lettres. Dans ce cas, le passage au complémentaire est donc économique.
- Pour dénombrer les mots de cinq lettres qui contiennent au plus une fois la lettre Z, on ajoute le nombre de mots de cinq lettres sans aucun Z au nombre de mots de cinq lettres avec exactement un Z. Dans ce cas, le passage au complémentaire complique les choses.

D. Choix simultanés

Indiscernables $\Longrightarrow$ simultanés

Lorsqu'on doit choisir p éléments indiscernables parmi n éléments donnés (sans considération d'ordre et sans répétition), on effectue un choix simultané de ces éléments à l'aide des combinaisons.

Dans la rédaction, on indique alors sobrement que l'on choisit simultanément p éléments parmi n et que l'on a $\binom{n}{p}$ possibilités de le faire.

Dans cet encadré, l'adjectif « indiscernable » ne conserne pas la nature des objets choisis mais seulement leur fonction dans le dénombrement considéré.

Ainsi, lorsque le sympathique professeur de mathématiques choisit deux élèves pour leur donner un bonbon, les deux élèves choisis, bien que parfaitement distincts au sens de l'état civil, doivent être considérés comme indiscernables puisque chacun des deux a la même fonction : recevoir un bonbon.

L'encadré précédent nous invite à choisir des objets indiscernables de façon simultanée. Rien n'interdit pourtant (*a priori*) de les choisir successivement. Cette démarche successive est pourtant très piégeante car elle induit, sur les éléments choisis, un ordre qui n'a pas lieu d'être. En procédant ainsi, on compte donc plusieurs fois chaque choix, ce qui nécessite de corriger l'effectif trouvé (à l'aide, par exemple, du lemme des bergers lorsque chaque configuration a été comptée le même nombre de fois).

On retiendra donc le principe suivant :

si les objets à choisir sont indiscernables, on a toujours intérêt (sauf impossibilité) à les choisir simultanément !

Exemples :

- Dans l'ancienne formule du Loto, un tirage était constitué de 6 numéros dans $[\![1;49]\!]$. Le nombre de tirages possibles était donc le nombre de choix simultanés de 6 numéros parmi 49, ce qui donnait $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ tirages possibles.

E. Choix successifs

Choix successifs $\Longrightarrow$ dénombrement par étapes

Lorsque les objets à choisir sont discernables ou lorsque l'ordre dans lequel on les choisit a de l'importance ou encore lorsqu'il peut y avoir des répétitions (tirages avec remises), on doit effectuer des choix successifs. Pour cela, on utilise le principe du « et » en décomposant le dénombrement en autant d'étapes qu'il n'y a de choix successifs à effectuer.

Exemples :

- Tirages d'unités
  On effectue une suite de p tirages dans un ensemble contenant n éléments en tirant, à chaque fois, un seul élément.
  - ► Avec remise
    On choisit successivement :
    - ○ un premier élément parmi les n éléments disponibles, ce qui laisse n choix ;
    - ○ un deuxième élément parmi les n éléments disponibles, ce qui laisse n choix ;

      $\vdots$
    - ○ un p-ème élément parmi les n éléments disponibles, ce qui laisse n choix ;

    Le principe multiplicatif nous dit alors que le nombre total de choix est n^p.
    On reconnaît le dénombrement des p-listes.

    On retrouve par exemple cette situation lorsqu'on recherche le nombre de codons distincts (séquence de 3 nucléotides). Pour chacun des 3 nucléotides, on a successivement 4 choix possibles (T, A, C, G), ce qui donne $4^3 = 64$ codons possibles.
  - ► Sans remise
    On choisit successivement :
    - ○ un premier élément parmi les n éléments disponibles, ce qui laisse n choix ;
    - ○ un deuxième élément parmi les $n-1$ éléments restants, ce qui laisse $n-1$ choix ;

      $\vdots$
    - ○ un p-ème élément parmi les $n-(p-1)$ restants, ce qui laisse $n-p+1$ choix ;

    D'après le principe multiplicatif, le nombre total de choix est $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
    On reconnaît le dénombrement des p-listes sans répétition.

    On rencontre ces dénombrements dans les problèmes de classements. Le nombre de quintés (dans l'ordre) dans une course de 12 canassons vaut ainsi $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$.
- Tirages d'échantillons
  On considère un ensemble constitué de n_1 éléments d'un premier type, n_2 éléments d'un deuxième type, $\dots$, n_q éléments d'un q-ème type. On veut connaître le nombre de façons de choisir p_1 éléments du premier type, p_2 éléments du deuxième type, $\dots$, p_q éléments du q-ème type.
  Pour cela, on effectue successivement :
  - ○ le choix simultané de p_1 éléments parmi les n_1 éléments du premier type : $\binom{n_1}{p_1}$ choix ;
  - ○ le choix simultané de p_2 éléments parmi les n_2 éléments du deuxième type : $\binom{n_2}{p_2}$ choix ;

    $\vdots$
  - ○ le choix simultané de p_q éléments parmi les n_q éléments du q-ème type : $\binom{n_q}{p_q}$ choix.

  Selon le principe multiplicatif, le nombre total de tirages vaut alors $\binom{n_1}{p_1} \times \binom{n_2}{p_2} \times \cdots \times \binom{n_q}{p_q}$.

  Une corbeille de fruits contient 6 oranges, 4 bananes et 7 pommes. Le nombre de salades de fruits constituées de 3 oranges, 2 bananes et 3 pommes est alors $\binom{6}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{7}{3}$.

  Au nouveau Loto, un tirage est constitué de 5 numéros dans $[\![1;49]\!]$ et d'un numéro chance dans $[\![1;10]\!]$. Il y a donc $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19\,068\,840$ tirages.

F. F.A.Q.

Dans cette foire aux questions, j'ai rassemblé quelques-unes des questions les plus classiques.

- Dans un jeu de 32 cartes, on me demande de dénombrer les paires de cartes qui contiennent au moins un roi.
  Dans un premier raisonnement, je choisis un des quatre rois, ce qui laisse 4 possibilités et je complète ma paire à l'aide de n'importe laquelle des trente et une cartes restantes, ce qui donne 31 choix possibles. Le nombre de mains de deux cartes contenant au moins un roi est donc $4 \times 31 = 124$.
  Dans un second raisonnement, j'ajoute le nombre de paires de cartes avec exactement un roi au nombre de paires avec exactement deux rois. Pour trouver le nombre de paires avec exactement un roi, on choisit un des quatre rois : 4 choix possibles puis on rajoute l'une des vingt-huit cartes qui ne sont pas des rois : 28 possibilités. Cela donne donc $4 \times 28 = 112$ paires avec exactement un roi. Par ailleurs, le nombre de paires de deux rois est le nombre de façons de choisir simultanément deux rois parmi les 4 disponibles dans le jeu, ce qui donne $\binom{4}{2} = 6$ paires de ce type. Au total, on a donc $112 + 6 = 118$ paires avec au moins un roi.
  Je n'arrive pas à décider lequel de ces deux raisonnements est faux et pourquoi.

  Le raisonnement faux est le premier ! En effet, dans ce raisonnement, on compte deux fois toutes les paires qui sont constituées de deux rois : une première fois lorsque le premier roi est choisi d'abord et une seconde fois lorsque le second roi est choisi d'abord.
  Pour éviter cette situation, on respectera scrupuleusement la consigne de l'encadré intitulé « Exactement ! » : lorsqu'un ensemble est défini par un « au moins » ou un « au plus », on le découpe en plusieurs parties définies avec le mot « exactement ».

- Dans mon exercice, je dois choisir 5 boules dans une urne contenant 30 boules rouges. Je ne sais pas si j'ai le droit de numéroter mentalement les boules ou si je dois scrupuleusement respecter le fait qu'elles sont indiscernables les unes des autres.

  En fait, cela n'a strictement aucune importance ! En effet, ce n'est pas la nature (numérotée ou non) des boules qui décide du caractère indiscernable des boules choisies. Dans cet exercice, les boules tirées ont toutes la même fonction : être une boule rouge. Elles sont donc indiscernables, que vous les numérotiez ou non...
  Dans un problème de dénombrement, on peut donc toujours numéroter les éléments considérés si cela facilite le raisonnement (ou tout simplement si cela vous fait plaisir). On verra d'ailleurs que c'est souvent une nécessité lorsqu'on définit un univers en probabilité.

- Dans notre classe de 40 élèves, mon professeur préféré (celui de maths bien sûr) veut choisir trois élèves pour donner un bonbon à deux d'entre eux et une part de gateau au troisième. Dois-je choisir les élèves simultanément ou successivement ?

  Les deux ! En fait, les deux élèves qui vont recevoir un bonbon sont, à ce titre, indiscernables et doivent donc être choisis simultanément : on aura donc $\binom{40}{2}$ choix possibles pour ces deux élèves. Il reste ensuite à choisir le troisième élève (qui se distingue des deux autres) parmi les 38 élèves restants, ce qui laisse $\binom{38}{1}$ possibilités. Il y a donc en tout $\binom{40}{2}\binom{38}{1}$ distributions possibles.

- Lorsque j'effectue des choix successifs, l'ordre dans lequel je les fais a-t-il de l'importance ?

  Que nenni ! Vous pouvez commencer par ce qui vous plaît le mieux... Toutefois, dans certaines situations, un ordre plus logique (par exemple chronologique) s'impose.

- L'an dernier, pour décider quelle méthode de dénombrement je devais utiliser, je me posais souvent la question : « L'ordre dans lequel sont rangés les éléments a-t-il de l'importance ? ». Vous n'en parlez pas beaucoup dans votre cours. Pourquoi ?

  À mon sens, il est plus important de bien répondre à la question : « les tirages sont-ils simultanés ou successifs ». De toute façon, un tirage simultané est sans ordre alors qu'une suite de tirages successifs impose un ordre. On finit donc toujours par répondre, d'une manière ou d'une autre, aux mêmes questions...

- Je ne m'y retrouve pas dans vos histoires de p-listes, p-listes sans répétition et de combinaisons. Pouvez-vous nous résumer ce qu'il faut savoir sur le sujet ?

  À vos ordres ! Le tableau suivant devrait éclairer votre lanterne :

tirages (=choix)	avec remise	sans remise
successifs (= avec ordre)	p-listes	p-listes sans répétition
simultanés (= sans ordre)	$\times$	combinaisons

- Et les permutations, ça intervient quand ?

  Dans le cas d'un tirage sans remise où l'on épuise tous les objets que l'on peut choisir, les listes à considérer sont des permutations.
  Dans la rédaction de votre solution, je vous conseille simplement d'utiliser alors le verbe « permuter ». Ainsi, pour dénombrer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec les lettres M, P, S et I, on se contente d'indiquer : « Pour obtenir un tel mot, on permute les 4 lettres sur les positions possibles, ce qui donne $4! = 24$ anagrammes de MPSI. »
  Il va sans dire que l'anagramme PIM'S est la plus alléchante...

G. *Un petit test . . .*

Cocher l'outil nécessaire pour dénombrer les situations suivantes.

1. On choisit deux élèves dans la classe et on donne un muffin à chacun.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés
2. On choisit deux élèves et on donne à l'un un muffin et à l'autre une paire de claques.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés
3. Chaque jour de l'année scolaire, on choisit un élève au hasard et il gagne une tringle à rideau.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés
4. Chaque jour (jusqu'à épuisement du stock), on choisit un élève de MPSI et on l'envoie en HypoKhâgne.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés
5. On choisit un professeur puis un second et on leur chatouille la plante des pieds.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés
6. On choisit un professeur, puis un élève puis un professeur et on leur demande de chanter le dernier titre de Justin Bieber.
   - ☐ choix successifs avec répétitions
   - ☐ choix successifs sans répétition
   - ☐ permutations
   - ☐ choix simultanés