INTÉGRATION

Exercice 1. [$\circ$]
Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Exercice 2. [$\circ$]
1. Démontrer que
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\mathrm{d}x.$$
2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. [$\circ$]
Calculer les primitives des fonctions suivantes :
$$f(x) = \frac{2x^2 - 15x + 33}{(x+1)(x-5)}, \qquad g(x) = \frac{6x - 11}{(x-1)^2}, \qquad h(x) = \frac{x+5}{9x^2 + 6x + 2}.$$

Exercice 4. [$\circ$]
Trouver les primitives sur $]0;\pi[$ de
$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

Exercice 5. [$\star$]
Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th} x}}.$$

Exercice 6. [$\star$]
Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ la fonction qui échange les deux premières décimales, c'est-à-dire $f(0,\overline{a_1a_2a_3\ldots}) = 0,\overline{a_2a_1a_3\ldots}$. Démontrer que f est continue par morceaux sur $[0;1]$ et calculer son intégrale sur ce segment.

Exercice 7. [$\circ$]
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in [0;1], \qquad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0;1/n] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in [1/n;2/n] \\ 0 & \text{si } x \in [2/n;1] \end{cases}$$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;1]$ et que, pour tout $x \in [0;1]$, $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Vérifier cependant que $\left(\int_0^1 f_n\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0.
2. Que pensez-vous de ceci :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} \sin^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}t = 0\,?$$

Exercice 8. [$\star$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Déterminer la limite de $(nu_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 9. [$\bigstar$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On note $M = \sup_{[0;1]} f$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f^n \right)^{1/n} = M.$$

Exercice 10. [$\circ$] (Inégalité de Minkowski)

Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[0;1]$. Démontrer que

$$\sqrt{\int_0^1 (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}.$$

Exercice 11. [$\circ$]

Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que $fg \geqslant 1$. Démontrer que

$$\int_0^1 f \times \int_0^1 g \ \geqslant\ 1.$$

Exercice 12. [$\bigstar$]

Soient $c > 0$ et $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [0;+\infty[, \qquad \int_0^x f^2 \leqslant c\left(\int_0^x f \right)^2.$$

Démontrer que f est la fonction nulle.

Exercice 13. [$\circ$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont la moyenne vaut $1/2$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 14. [$\star$]

1. Soient $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que g est strictement positive sur $]a;b[$. Démontrer l'*identité de la moyenne*, c'est-à-dire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

   $$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

   Quel résultat retrouve-t-on lorsque g est la fonction constante égale à 1 ?
2. Démontrer que la formule de Taylor–reste intégrale implique la formule de Taylor–Lagrange (pour une fonction réelle).

Exercice 15. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{n+2} + 2a_n = 5a_{n+1}$ et en déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = A/2^n$.
3. Déterminer une relation liant a_0 et a_1 et en déduire la valeur de A.

Exercice 16. [○]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'encadrements, démontrer que les suites (I_n) et (J_n) tendent vers 0.
2. Établir une relation entre I_n et J_n pour tout $n \geqslant 0$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 17. [○]

On pose

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de f.
2. Calculer $f(1)$.
3. a) En notant que $\forall x > 1,\ \forall t \in \left[x; x^2\right],\ \ \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que f tend vers $-\infty$ en 0.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Donner l'allure grossière de la courbe.
   Si x_0 désigne le nombre réel où f' s'annule, on donne $x_0 \approx 1,2$ et $f(x_0) \approx 0,03$

Exercice 18. [○]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction ne s'annulant pas sur I.

1. Soit $a \in I$. Démontrer que

$$\forall x \in I, \qquad \exp\left\{\int_a^x \frac{f'}{f}\right\} = \frac{f(x)}{f(a)}.$$

2. On suppose qu'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. Démontrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'}{f} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 19. [★]

1. Démontrer que la relation $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Exprimer f en utilisant l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la régularité de f. Calculer f' et préciser le sens de variation de f.
3. Démontrer que $(-f) \circ (-f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
4. Étudier l'existence éventuelle d'une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 20. [○]

1. Calculer la limite des suites définies par

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}.$$

2. Déterminer un équivalent de

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}.$$

Exercice 21. [⋆]

Calculer la limite, quand $n \longrightarrow +\infty$, de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}.$$

Exercice 22. [$\star$]

On considère l'intégrale de Poisson $P(x)$ définie par

$$P(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $P(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

► Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme de Riemann S_n de P définie par

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left\{ x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right\}.$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{4\pi}{n} \ln |x^n - 1|$.
3. En déduire la valeur de $P(x)$. Représenter P.

Exercice 23. [$\circ$]

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Démontrer que l'intégrale de f est la même sur n'importe quel segment de longueur T.

Exercice 24. [$\circ$]

Soient $a \geqslant 0$ et $f : [-a; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a; a]$.

1. Démontrer que, si f est paire sur $[-a; a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, si f est impaire sur $[-a; a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 25. [$\bigstar$] (Lemme de Riemann–Lebesgue)

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. En utilisant les fonctions en escalier, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Peut-on faire plus simple lorsque l'on sait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$?

Exercice 26. [$\star$]

1. Soit Q un polynôme à coefficients réels.
   a) Démontrer que
   $$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.$$
   Indication : On pourra commencer par regarder ce qui se passe pour un monôme.
   b) En déduire que
   $$\left|\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$
   puis que
   $$\left|\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$
2. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients réels.
   a) Justifier que
   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2.$$
   b) Démontrer que
   $$\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2.$$

Exercice 27. [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'une primitive n-ème de f sur $\mathbb{R}$, notée $F^{[n]}$, et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 28. [$\star$]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\alpha_n = \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$
En utilisant une relation liant α_n et α_{n+1}, déterminer un équivalent de α_n.
2. En déduire un équivalent de $u_n = \sin(\pi\,\mathrm{e}\,n!)$.