DS 1

Les calculatrices sont interdites.

Thème 1 : Inéquation et Équation.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$.

2°) Résoudre l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Thème 2 : Calculs d'intégrales.

3°) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{1+\tan x} dx,\ \int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt,\ \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \text{ et } \int \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\, dx.$$

Thème 3 : Trigonométrie.

4°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

5°) Simplifier les expressions suivantes : $\cos(2\arccos x)$, $\sin(2\arccos x)$ et $\tan(2\arcsin x)$.

6°) On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. Donner le tableau de variations de f puis tracer son graphe (on ne demande pas de chercher les points d'inflexion).

Thème 4 : Inégalités entre fonctions.

7°) Montrer que, pour tout $a \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $\ln(1+a) < a$.

8°) Montrer que, pour tout $b \geq 0$ et $a \in]0,1[$, $(1-a)^b \leq \dfrac{1}{1+ab}$.

9°) Pour tout $x \geq 1$, posons $f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1)$.
Soit $x \in [1,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Montrer que $|f''(x)| \leq x-1$.
En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{(x-1)^2}{2}$, puis que $|f(x)| \leq \dfrac{(x-1)^3}{6}$.

Thème 5 : Équations fonctionnelles.

10°) Déterminer les applications $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) + zf(-z) = 1 + z.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que, si f_0 est une solution particulière de cette équation, alors f est solution si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, \ (f - f_0)(z) + z(f - f_0)(-z) = 0$.

11°) **a)** Montrer que l'application $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x-2}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans lui-même et préciser son application réciproque.
b) On fixe un réel a. Déterminer les applications f de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) - af(x) = e^x$.

12°) Déterminer les applications continues $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que $f \circ f = f$.

13°) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Thème 6 : Arithmétique.

14°) On admet le théorème de Bezout suivant : pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on convient de noter $a \equiv b \ [c]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kc$ (on dit que a est congru à b modulo c).
Soit Q un nombre premier. Pour tout $a \in \{1, \dots, Q-1\}$, montrer qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1 \ [Q]$.

15°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le n-ième nombre premier (on admet qu'il existe une infinité de nombres premiers, on ne demande pas de le démontrer).
Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne satisfait aucune relation de récurrence linéaire à coefficients rationnels, c'est-à-dire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{Q}$, avec $\alpha_0 \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{n+k} \neq \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p_{n+i}$.