Devoir Surveillé n° 3 (4h)

Correction du problème 1 – Théorème de Liouville

Partie I – Quelques calculs préliminaires

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n(\lambda f+\mu g)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n,k}(\lambda f+\mu g)(\zeta_{n,k})=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n,k}f(\zeta_{n,k})+\mu\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n,k}g(\zeta_{n,k})=\lambda I_n(f)+\mu I_n(g),$$
par linéarité de la somme. Ainsi, si les limites existent (condition d'existence des quantités (intégrales) I) :
$$\lim_{n\to+\infty}I_n(\lambda f+\mu g)=\lambda\lim_{n\to+\infty}I_n(f)+\mu\lim_{n\to+\infty}I_n(g),$$
soit
$$\boxed{I(\lambda f+\mu g)=\lambda I(f)+\mu I(g)}.$$
Remarquez que l'existence de $I(f)$ et de $I(g)$ fournit celle de $I(\lambda f+\mu g)$ d'après les propriétés sur les limites. On s'en servira plus tard.
La linéarité de I obtenue dans cette question n'a rien de surprenant puisqu'il s'agit en fait d'une intégrale.

2. Supposons qu'il existe M tel que $|f|\leqslant M$ sur $\mathbb{U}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:
$$|I_n(f)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_{n,k}|M.$$
Or, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, en mettant l'angle moitié, en facteur,
$$\alpha_{n,k}=\zeta_{n,k}2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$
donc
$$|\alpha_{n,k}|=2\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|\leqslant\frac{2\pi}{n},$$
d'après la majoration classique du sinus. On a donc :
$$\boxed{|I_n(f)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2\pi}{n}M=2\pi M}.$$
En passant à la limite
$$\boxed{I(f)\leqslant 2\pi M}.$$

3. Soit $n\geqslant 2$. La somme définissant $I_n(1)$ est une somme télescopique :
$$I_n(1)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_{n,k+1}-\omega_{n,k}=\omega_{n,n}-\omega_{n,0}=1-1=0.$$
En passant à la limite, il vient $\boxed{I(1)=0}$.

4. Soit $n\geqslant 2$. On a, après mise en facteur de l'angle moitié par symétrisation des arguments :
$$I_n\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\zeta_{n,k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{n}})}{\zeta_{n,k}}=\sum_{k=0}^{n-1}2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{I_n\left(\frac{1}{z}\right) = 2\,\mathrm{i}\,n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Puisque $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$, ici avec $x = \dfrac{\pi}{n}$, on obtient, en passant à la limite :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{z}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi}.$$

5. Soit $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq -1$. On a alors, après avoir mis l'angle moitié en facteur :

$$I_n\left(z^p\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_{n,k}^{p+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}) = 2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_{n,k}^{p+1} = 2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p+1)\pi}{n}})^k.$$

Or, p étant fixé, pour tout n assez grand (par exemple $n > p+1$), on a $p+1$ non congru à $2n$, et donc d'après le cours (ou en utilisant la formule de sommation de suites géométriques, la raison étant une racine n-ième différente de 1), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p+1)\pi}{n}})^k = 0.$$

Ainsi, pour tout $n > p+1$, $I_n(z^p) = 0$, donc en passant à la limite, $\boxed{I(z^p) = 0}$.

6. La question 1 se généralise facilement à une combinaison linéaire finie, par une récurrence triviale. Ainsi, en notant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$,

$$I\left(\frac{P(z)}{z}\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k I\left(z^{k-1}\right).$$

D'après les questions 4 et 5, ces termes sont tous nuls, sauf lorsque $k = 0$, et on obtient

$$I\left(\frac{P(z)}{z}\right) = a_0 I\left(\frac{1}{z}\right) = 2a_0\,\mathrm{i}\,\pi.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(0) = a_0 = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z}\right).}$$

Par la même méthode, et quitte à poser des coefficients nuls pour les a_k, $k > d$, (la somme reste en réalité finie, donc on peut encore utiliser la propriété de linéarité)

$$I\left(\frac{P(z)}{z^{N+1}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k I(z^{k-(N+1)}) = a_N I\left(\frac{1}{z}\right) = 2a_N\,\mathrm{i}\,\pi.$$

Or, par dérivations successives, le terme constant de $P^{(N)}$ est obtenu par dérivation du monôme $a_N z^n$ (les autres s'annulent, ou donne des termes de degré non nul). Ainsi, le terme constant de $P^{(N)}$ est $N!a_N$. On a donc

$$\boxed{P^{(N)}(0) = N!a_N = \frac{N!}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z^{N+1}}\right)}.$$

Partie II – Intégrale circulaire d'une fonction holomorphe

1. Par définition, $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in B(0,R)$. Soit $r \in]1,R[$ (possible puisque R vérifie $R > 1$). On a donc la convergence de $\sum a_n r^n$. En notant S_n sa n-ième somme partielle, (S_n) est donc une suite convergente, disons de limite S. Ainsi, $(S_n - S_{n-1})$ converge vers $S - S$, donc 0. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n - S_{n-1} = a_n r^n$. La suite $(a_n r^n)$ est donc convergente, donc bornée localement au voisinage de $+\infty$; puisque tout voisinage de $+\infty$ contient tout $\mathbb{N}$ sauf éventuellement un nombre fini d'entiers, on en déduit que $\boxed{(a_n r^n) \text{ est bornée}}$ (ce sera plus tard directement une propriété du cours).

2. D'après la question précédente, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leqslant M$ soit $|a_n| \leqslant M r^{-n}$. On a alors, par inégalité triangulaire sur la sum de $N+1$ à un certain p, puis passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ (avec conservation des inégalités), pour tout $z \in \mathbb{U}$:

$$|R_N(z)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} M r^{-N},$$

ceci étant bien défini par convergence de l'intégrale de droite (série géométrique), qui au passage assure la convergence absolue donc la convergence de celle du milieu (par TCSTP). En calculant cette somme géométrique (on peut de souvenir de la formule qu'on a évoquée en cours, ou s'arrêter d'abord à p puis faire tendre p vers $+\infty$), on en déduit :

$$\boxed{|R_N(z)| \leqslant \frac{M r^{-N+1}}{1 - r^{-1}}}.$$

3. On déduit de la question I-2 que

$$\boxed{|I_n(R_N)| \leqslant \frac{2\pi M r^{-N+1}}{1 - r^{-1}}}$$

Puisque $r > 1$, on en déduit que lorsque N tend vers $+\infty$, $I_n(R_N)$ tend vers 0. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que $\dfrac{2\pi M r^{-N+1}}{1 - r^{-1}} < \varepsilon$ (et même tous à partir d'un certain rang). Soit un tel N. Or, pour tout $z \in B(0, R)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k + R_N(z),$$

donc

$$|I_n(f)| = \left| \sum_{k=0}^{N} a_k I_n(z^k) + I_n(R_N(z)) \right|.$$

Au cours du calcul de la question I-5, on a justifié que pour n assez grand, $I_n(z^k)$ est nul, plus précisément lorsque $n > k+1$. Donc ici, pour $n > N$, et tout $k \leqslant N$, $I_n(z^k) = 0$, donc

$$|I_n(f)| = |I_n(R_N)| < \varepsilon.$$

Cela prouve bien que $I_n(f) \to 0$, donc que $\boxed{I(f) = 0}$.

Partie III – Théorème de Liouville et théorème de d'Alembert-Gauss

On garde les notations de la partie précédente. Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. On a :

$$I\left(\frac{f(z)}{z^{N+1}}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k I(z^{k-N-1}) + a_N I(z^{-1}) + I(g),$$

où g est la fonction analytique définie par

$$\forall z \in B(0, R), \quad g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+N+1} z^j,$$

série dont la convergence équivaut à celle de la série définissant f. En utilisant les questions I-4, I-5 et II-3, il vient donc

$$I\left(\frac{f(z)}{z^{N+1}}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi a_N, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{a_N = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{f(z)}{z^{N+1}}\right)}.$$

2. Soit f analytique sur $\mathbb{C}$ bornée par M, $r > 0$ et $g : z \mapsto f(rz)$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$g(rz) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k z^k.$$

La fonction g est donc analytique sur $\mathbb{C}$ également, ses coefficients étant donnés par $a_k r^k$. On applique la question précédente à la fonction g, ce qui donne, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$a_N r^N = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{f(rz)}{z^{N+1}}\right).$$

Or, la fonction $z \mapsto \frac{f(rz)}{z^{N+1}}$ est bornée par M sur le cercle unité, donc d'après I-2,

$$|a_N| r^N \leqslant \frac{1}{2\pi}(2\pi M) = M.$$

On en déduit que

$$\boxed{|a_N| \leqslant \frac{M}{r^N}}.$$

3. Soit f analytique et bornée sur $\mathbb{C}$. L'inégalité de la question précédente étant vraie pour tout $r > 0$, on peut passer à la limite lorsque r tend vers $+\infty$, ce qui nous donne, lorsque $N \geqslant 1$:

$$0 \leqslant |a_N| \leqslant 0, \qquad \text{donc:} \qquad a_N = 0,$$

   Ainsi, le seul coefficient pouvant être éventuellement non nul est a_0, donc $\boxed{f \text{ est constante}}$ (de valeur a_0).
4. Soit P un polynôme à ceofficients complexes ne s'annulant pas. P est alors analytique sur $\mathbb{C}$. Par la propriété admise, la fonction $\frac{1}{P(z)}$ est définie et analytique sur $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, en notant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d \neq 0$,

$$|P(z)| \geqslant |a_d||z|^d - |a_{d-1}||z|^{d-1} - \cdots - |a_0|.$$

   Le comportement en $+\infty$ d'un polynôme à coefficients réels étant déterminé par le comportement de son monôme domnant, on en déduit que $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to 0$. Ainsi, il existe $R > 0$ tel que pour tout z tel que $|z| > R$, $|P(z)| > 1$, donc $\left|\frac{1}{P(z)}\right| < 1$. De plus, la fonction P étant continue de la variable z (produit, combinaison linéaire de fonctions continues), il en est de même de $\frac{1}{P}$. On admet que ceci implique de $\frac{1}{P}$ est bornée sur $B(0, R)$. Par conséquent, la fonction holomorphe $\frac{1}{P}$ est bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante.
   On en déduit que P est constant.
   On a bien prouvé que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine, c'est-à-dire le théorème de $\boxed{\text{d'Alembert-Gauss}}$.

Partie IV – Un cas particulier d'une formule de Cauchy

1. Soit $N \geqslant p$ On utilise la linéarité de I et les résultats de la partie I :

$$I\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{N} z_0^{\ell} I(z^{p-1-\ell}) = \boxed{z_0^p 2\,\mathrm{i}\,\pi},$$

   seul le terme d'indice $\ell = p$ étant non nul.
2. La somme infinie apparaissant dans cette question est bien définie en tant que série géométrique de raison de module strictement majoré par 1. Par ailleurs, on a, pour tout $z \in \mathbb{U}$ (puisque $|z| = 1$, et par inégalité triangulaire)

$$\left|z^{p-1}\sum_{\ell=N+1}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\ell}\right| = \sum_{\ell=N+1}^{+\infty}|z_0|^{\ell} = \boxed{\frac{|z_0|^{N+1}}{1-|z_0|}}.$$

   On utilise la question I-2 pour en déduire qu'alors

$$\boxed{\left|I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=N+1}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\ell}\right)\right| \leqslant 2\pi\frac{|z_0|^{N+1}}{1-|z_0|}}.$$

3. On utilise une sommation de série géométrique à l'envers (i.e. un développement en série de $\frac{1}{1-u}$) :

$$I_n\left(\frac{z^p}{z-z_0}\right) = I_n\left(\frac{z^{p-1}}{1-\frac{z_0}{z}}\right) = I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right).$$

Ceci est justifié par le fait que par hypothèse sur z, la série géométrique considérée est bien convergente. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N > p$ tel que

$$2\pi\frac{|z_0|^{N+1}}{1-|z_0|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

existant du fait de la convergence vers 0 lorsque $N \to +\infty$. On a alors

$$\left|I_n\left(\frac{z^p}{z-z_0}\right) - I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right)\right| = \left|I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=N+1}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

Par ailleurs, $I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right) \to 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p$ quand $n \to +\infty$ d'après IV-1. Donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|I_n\left(\frac{z^p}{z-z_0}\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p\right| \leqslant \left|I_n\left(\frac{z^p}{z-z_0}\right) - I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right)\right| + \left|I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\ell\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Par définition de la limite, il vient :

$$\boxed{I\left(\frac{z^p}{z-z_0}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p}.$$

4. On écrit alors $P(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ et on utilise la linéarité :

$$I\left(\frac{P(z)}{z-z_0}\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k I\left(\frac{z^k}{z-z_0}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi\sum_{k=0}^{d} a_k z_0^k = 2\,\mathrm{i}\,\pi P(z_0).$$

On en déduit bien

$$\boxed{P(z_0) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z-z_0}\right)}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $N \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{U}$. On a, pour tout $k > N$:

$$\left|a_k\frac{z^k}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{|a_k z^k|}{1-|z_0|},$$

et donc

$$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k\frac{z^k}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{1}{1-|z_0|}\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k z^k| = \frac{1}{1-|z_0|}\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k|,$$

calcul justifié par la convergence de cette dernière série (déjà prouvée en II). D'après la partie I, on a donc

$$\boxed{\left|I_n\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k\frac{z^k}{z-z_0}\right)\right| \leqslant \frac{1}{1-|z_0|}\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k|}.$$

Or, puisque $S_N = \sum_{k=0}^{N}|a_k|$ converge vers $S = \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|$ (d'après question 6), en formant la différence,

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k| = 0.}$$

On a bien réussi à majorer $\left| I_n\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k \frac{z^k}{z-z_0}\right)\right|$ par une expression indépendant de n et tendant vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

6. Soit, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \qquad \text{et} \qquad R_N(z) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k z^k.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = I_n\left(\frac{S_N(z)}{z-z_0}\right) + I_n\left(\frac{R_N(z)}{z-z_0}\right).$$

Le dernier terme est majoré indépendamment de n par une expression tendant vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|I_n\left(\frac{R_N(z)}{z-z_0}\right)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme on peut choisir N aussi grand qu'on veut, on peut aussi imposer que $|f(z_0) - S_N(z_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6\pi}$ (puisque tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$).

Par ailleurs, N étant ainsi fixé, d'après la question IV-4,

$$I_n\left(\frac{S_N(z)}{z-z_0}\right) \to 2\,\mathrm{i}\,\pi S_N(z_0),$$

donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left| I_n\left(\frac{S_N(z)}{z-z_0}\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi S_N(z_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour tout $n \geqslant n_0$, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left| I_n\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi f(z_0)\right| &\leqslant \left| I_n\left(\frac{R_N(z)}{z-z_0}\right)\right| + \left| I_n\left(\frac{S_N(z)}{z-z_0}\right) - 2\,\mathrm{i}\,\pi S_S(z_0)\right| + |2\,\mathrm{i}\,\pi S_S(z_0) - 2\,\mathrm{i}\,\pi f(z)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Cela montre bien que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi f(z_0),$$

et en particulier, cela prouve l'existence de cette limite, donc l'existence et la valeur de :

$$\boxed{I\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi f(z_0)}.$$

Question subsidiaire : C'est fait de façon élémentaire dans certains ouvrages, par exemple *Calcul infinitésimal* de Jean Dieudonné.

Correction du problème 2 – Autour de la propriété d'équirépartition

1. Soit $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, et $z = \frac{x+y}{2}$. Soit $I = [z, y[$. Alors, la suite étant équirépartie,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n(I \mod 1)}{n} = y - z > 0, \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} U_n(I \mod 1) = +\infty.$$

En particulier, il existe n tel que $U_n(I \mod 1) > 0$, et donc, par définition, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que la partie décimale $\{u_i\}$ soit dans I. Ainsi, il existe i tel que

$$x < z \leqslant \{u_i\} < y.$$

En oubliant z, cela fournit bien la propriété de $\boxed{\text{densité de l'ensemble des } \{u_i\} \text{ dans } [0,1].}$

2. On considère $u_n = \ln(n)$, pour tout $n \geqslant 1$.

(a) On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par continuité du logarithme, on en déduit alors que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(n) = 0}.$$

(b) Soit $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. Comme $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $0 < u_{n+1} - u_n < y - x$. Soit alors un entier k tel que $k + x > \ln(N)$, et n_0 l'indice minimal tel que $u_{n_0} > k + x$ (un tel n_0 existe par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, et du fait qu'il existe au moins un indice vérifiant cette inégalité, puisque $\ln(n) \to +\infty$). On a alors $u_{n_0-1} \leqslant k + x$, et $n_0 > N$ par choix de k, donc $u_{n_0} - u_{n_0-1} < y - x$. On en déduit que $u_{n_0} < y + k$.

Ainsi, $x+k < u_{n_0} < y+k$. En réduisant modulo 1, on a bien $x < \{u_{n_0}\} < y$, d'où la $\boxed{\text{densité de } (\ln(n)) \text{ modulo 1.}}$

(c) Soit $I = [0, \frac{1}{2}[$, et $n \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a

$$u_i \in I + k \Longleftrightarrow \mathrm{e}^k \leqslant i < \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Or, le nombre d'entiers dans l'intervalle $[\mathrm{e}^k, \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}[$ est $\lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil - \lceil \mathrm{e}^k \rceil$, et ces entiers sont tous dans $[\![1, n]\!]$, donc

$$\boxed{U_n(I + k) = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil - \lceil \mathrm{e}^k \rceil}.$$

(d) Or, $\lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$, et $\lceil \mathrm{e}^k \rceil \leqslant \mathrm{e}^k + 1$, d'où

$$\boxed{U_n(I + k) \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^k - 1 = \mathrm{e}^k(\sqrt{\mathrm{e}} - 1) - 1.}$$

(e) Soit $k \in \mathbb{N}$, et $n = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil$. D'après la question précédente, pour tout $\ell \leqslant k$,

$$U_n(I + \ell) \geqslant \mathrm{e}^\ell(\sqrt{\mathrm{e}} - 1) - 1.$$

Les intervalles $I + k$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$U_n(I \mod 1) = \sum_{\ell \geqslant 0} U_n(I + \ell) \geqslant \sum_{\ell=0}^{k} U_n(I + \ell),$$

et donc

$$U_n(I \mod 1) \geqslant (\sqrt{\mathrm{e}} - 1) \sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{e}^\ell - (\ell + 1) = (\sqrt{\mathrm{e}} - 1) \frac{\mathrm{e}^{k+1} - 1}{\mathrm{e} - 1} - (\ell + 1).$$

En factorisant le dénominateur $\mathrm{e} - 1 = (\sqrt{\mathrm{e}} - 1)(\sqrt{\mathrm{e}} + 1)$, et en majorant n par $\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} + 1$, il vient donc :

$$\boxed{\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \geqslant \frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1} - 1) - (k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} + 1}}.$$

(f) Or,

$$\frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1} - 1) - (k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} + 1} = \frac{\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} - (k+1)\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^{-k}}.$$

Lorsque k tend vers l'infini, d'après les croissances comparées, il vient :

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1} - 1) - (k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} + 1} = \frac{\mathrm{e}}{(\sqrt{\mathrm{e}} + 1)\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}} + 1} > \frac{1}{2},$$

la dernière inégalité provenant du fait que $1 < \sqrt{\mathrm{e}}$ (majoration faite au dénominateur).

Or, si (u_n) est équirépartie modulo 1, l'expression définissant n en fonction de k tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, donc le quotient $\dfrac{U_n(I \mod 1)}{n}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2}$ (équirépartition) lorsque k tend vers l'infini (pour les valeurs de n définies en fonction de k. En passant à la limite dans l'inégalité de la question 2(e), il vient donc :

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1},$$

d'où une contradiction.

Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas équirépartie modulo } 1}$.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$, et $u_n = n^\alpha$, pour $n \geqslant 1$. Soit $I = [a,b[\subset [0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Soit $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$. L'entier $U_n(I \mod 1)$ est alors inférieur à $U_{n_0}(I \mod n)$, où $n_0 = \lfloor (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor$, donc, vu la borne imposée à n,

$$U_n(I \mod 1) \leqslant \sum_{\ell=0}^{k} U_{n_0}(I+\ell).$$

   Or, comme précédemment, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$u_i \in I+\ell \iff a+\ell \leqslant i^\alpha < b+\ell \iff (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant i < (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}},$$

   et ceci restant inférieur à n_0, on a

$$U_{n_0}(I+\ell) \leqslant \lceil (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \rceil - \lceil (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \rceil \leqslant (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1.$$

   Comme par ailleurs, $n \geqslant (a+k)^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient bien, en sommant ces inégalité et divisant par le minorant de n :

$$\boxed{\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant \frac{\sum_{\ell=0}^{n} (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

   (b) La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ étant convexe, avec $\lambda = 1-(b-a) \in]0,1[$, on obtient :

$$((1-(b-a))(a+\ell) + (b-a)(a+1+\ell))^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (1-(b-a))(a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

   donc

$$(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (1-(b-a))(a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}})}.$$

   (c) Ainsi, on déduit des deux questions précédentes que

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{\sum_{\ell=0}^{k} (a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

   On reconnaît une somme télescopique, d'où :

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}} - a^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \boxed{(b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

   (d) En mettant $k^{\frac{1}{\alpha}}$ en facteur, on lève l'indétermination des limites lorsque $k \to +\infty$ (y compris pour le deuxième terme puisque $\frac{1}{\alpha} > 0$) et on trouve

$$\lim_{k \to +\infty} (b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} = (b-a).$$

   Soit alors $I' = [0,a[$ et $I'' = [b,1[$. Les intervalles I, I' et I'' étant disjoints d'union $[0,1[$, et tous les termes de la suite étant dans $[0,1[$ modulo 1, on a

$$1 = U_n([0,1[\mod 1) = U_n(I' \mod 1) + U_n(I \mod 1) + U_n(I'' \mod 1).$$

En notant $M_k(I)$ le majorant trouvé dans la question précédente pour l'intervalle I, et $k(n)$ l'entier k tel que $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[$, on a, pour tout n :

$$1 \leqslant M_{k(n)}(I') + \frac{U_n(I \mod 1)}{n} + M_{k(n)}(I'').$$

Si on suppose que $\frac{U_n(I \mod 1)}{n}$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ (qu'on se donne), tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $\left|\frac{U_n(I \mod 1)}{n} - (b-a)\right| > \varepsilon$ En prenant $N = 0$ on trouve une première valeur n_1 de n vérifiant cette inégalité, puis avec $N = n_1$, on en trouve une deuxième n_2, telle que de plus $n_2 > n_1$. En continuant ainsi, et en prenant successivement pour N les valeurs n_1, n_2, n_2, etc. , on trouve une infinité de termes n_i vérifiant

$$\left|\frac{U_{n_i}(I \mod 1)}{n_i} - (b-a)\right| > \varepsilon$$

S'il existe une infinité de termes parmi ceux là vérifiant

$$\frac{U_{n_i}(I \mod 1)}{n_i} - (b-a) > \varepsilon,$$

alors on peut construire une suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissante (obtenue en sélectionnant les indices fournissant cette inégalité), telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{U_{m_i}(I \mod 1)}{m_i} > (b-a) + \varepsilon.$$

La majoration de la question 3(c) amène alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(b-a) + \varepsilon < M_{k(m_i)}(b-a).$$

Lorsque i tend vers $+\infty$, m_i aussi (car suite strictement croissante d'entiers, donc minorée par i), et donc $k(m_i)$ aussi. Ainsi, en passant à la limite, il vient :

$$(b-a) + \varepsilon \leqslant (b-a),$$

d'où une contradiction.

Ainsi, seul un nombre fini des n_i vérifient l'inégalité dans ce sens, donc il existe i_0 tel que pour tout $i > i_0$,

$$\frac{U_{m_i}(I \mod 1)}{m_i} < (b-a) - \varepsilon.$$

En reprenant l'inégalité établie en début de question, on a alors, pour tout $i > i_0$,

$$1 \leqslant M_{k(n_i)}(I') + (b-a) - \varepsilon + M_{k(n_i)}(I''),$$

et en passant à la limite,

$$1 \leqslant (a-0) + (b-a) - \varepsilon + (1-b) = 1 - \varepsilon,$$

d'où une contradiction.

Ainsi, notre hypothèse initiale est fausse, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n(I \mod 1)}{n} = (b-a)}$. Cela étant vrai pour tout intervalle semi-ouvert à droite de $[0,1[$, par définition, $\boxed{(n^\alpha) \text{ est équirépartie modulo 1 pour tout } \alpha \in]0,1[}$.

Question subsidiaire : *Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de limite $+\infty$, de pas $p_n = u_{n+1} - u_n$ décroissant de limite nulle et vérifiant, pour un certain réel $K > 0$ et un certain réel $\alpha \in]0,1[$, l'inégalité $p_n \geqslant \frac{K}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle équirépartie modulo 1 ?*

Je laisse cette question en suspens pour le moment...