FEUILLE D'EXERCICES N° 1

ENSEMBLES, FONCTIONS ET RELATIONS

Ensembles

Exercice 1
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Établir l'égalité :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

— ○ —

Exercice 2
Soient A, B et C trois parties de E. Montrer que si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, alors $B \subset C$.

— ○ —

Exercice 3
Soient A et B deux parties de E. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \subset E$:
- $A \cup X = B$
- $A \cap X = B$
- $A \triangle X = B$

— ○ —

Exercice 4
Soient E et I deux ensembles et $(A_i)_{i\in I}$ puis $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles de E. Montrer que :

$$\bigcap_{X\in\mathscr{P}(I)} \left[\left(\bigcup_{i\in X} A_i \right) \bigcup \left(\bigcup_{j\in I\setminus X} B_j \right) \right] = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_i).$$

— ○ —

Fonctions

Exercice 5
Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les images directes de $[-2,2]$, $]-2,2]$, $]0,2]$, $]-1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$.
2. Déterminer les images réciproques de $[-4,0]$, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.
3. L'application $g : A \longmapsto f(A)$ est-elle injective, surjective de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{P}(\mathbb{R})$?

— ○ —

Exercice 6
On pose $f : n \longmapsto n+1$ et $g : n \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ , si } n = 0 \\ n-1 \text{ , sinon.} \end{cases}$ définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Reprendre la première question avec ces deux fonctions.

— ○ —

Exercice 7
Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer f^{-1} :
- $f : x \longmapsto 2 + \cos(2x)$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[1,3]$
- $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$
- $f : x \longmapsto \ln(x^2+x+1)$ de $[2,+\infty[$ vers $[\ln 7,+\infty[$.

— ○ —

Exercice 8
Les fonctions suivantes sont-elles monotones ?
- $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
- $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^*$.

— ○ —

Exercice 9
On pose : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-3}$, puis $g : x \longmapsto \dfrac{5x-4}{x-3}$.

1. Déterminer les nombres complexes a, b, c et d tels que les fonctions $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{b\}$ et $g : \mathbb{C} \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{d\}$ soient bien définies et soient bijectives.
2. Montrer qu'exactement l'une des compositions $g \circ f$ ou $f \circ g$ est autorisée.
3. Expliciter les fonctions f^{-1}, g^{-1}, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ puis $f^{-1} \circ g^{-1}$.

— ○ —

Exercice 10
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Lorsque cela est possible, déterminer f^{-1}.
- $f : (x,y) \longmapsto (x-y, x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
- $f : (x,y) \longmapsto (x+y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
- $f : z \longmapsto e^z$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$
- $f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x^2+1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- $f : (p,q) \longmapsto p + \dfrac{1}{q}$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ dans $\mathbb{Q}$
- $f_a : x \longmapsto 2x^3 - 9ax^2 + 6(a^2+1)x + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

—— ○ ——

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $[f\circ g = f\circ h \Longrightarrow g = h]$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toutes fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a : $[g\circ f = h\circ f \Longrightarrow g = h]$.

—— ○ ——

Exercice 12

Soit $f : E \longrightarrow E$ une fonction entre deux ensembles. On pose $\Phi : g \longmapsto g\circ f$ et $\Psi : g \longmapsto f\circ g$, définies sur l'ensemble $\mathscr{F}(E,E)$ de toutes les fonctions de E vers E.

1. Déterminer une CNS sur la fonction f pour que l'application Φ soit bijective.
2. Déterminer une CNS sur la fonction f pour que l'application Ψ soit bijective.
3. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(E,E)$.
   (a) Déterminer $\Phi(\mathscr{A})$, lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{F}(E,E)$.
   (b) Déterminer $\Psi(\mathscr{A})$, lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{F}(E,E)$.
   (c) Déterminer $\Phi^{[-1]}(\mathscr{A})$, lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{F}(E,E)$ ou lorsque $\mathscr{A}$ est un singleton.
   (d) Déterminer $\Psi^{[-1]}(\mathscr{A})$, lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{F}(E,E)$ ou lorsque $\mathscr{A}$ est un singleton.

—— ○ ——

Relations

Exercice 13

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence ?

- $x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x < y$ sur $\mathbb{R}$
- $x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*,\ x = y^n$ sur $\mathbb{N}$
- $z\mathscr{R}z' \Longleftrightarrow \Re e(z) \leqslant \Re e(z')$ et $\Im m(z) \leqslant \Im m(z')$
- $f\mathscr{R}g \Longleftrightarrow \forall x\in[0,1],\ f(x) \leqslant g(x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $f\mathscr{R}g \Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{Z},\ f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $f\mathscr{R}g \Longleftrightarrow f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

—— ○ ——

Exercice 14

Soit $(E,\preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $\mathfrak{A}$ une partie de E. Montrer que la partie $\mathfrak{A}$ admet un plus grand élément si et seulement si elle admet une borne supérieure et $\sup\mathfrak{A}\in\mathfrak{A}$.

—— ○ ——

Exercice 15

On munit $E = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathscr{R}$:

$$(p_1,q_1)\mathscr{R}(p_2,q_2) \Longleftrightarrow p_1\cdot q_2 = p_2\cdot q_1.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1,5)$.

—— ○ ——

Exercice 16

Soient E un ensemble, puis $\mathscr{U}$ une partie finie de $\mathscr{P}(E)$. On munit l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'ordre d'inclusion.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{U}$ admet une borne supérieure et la calculer.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{U}$ admet une borne inférieure et la calculer.

—— ○ ——

Exercice 17

Soit E un ensemble. Montrer qu'une relation $\mathscr{R}$ sur E est à la fois une relation d'équivalence et d'ordre si et seulement si les classes d'équivalence de tout élément est un singleton.

—— ○ ——

Exercice 18

Soient E un ensemble et $\mathscr{U} = \{A_i ; i\in I\}$ une partition de l'ensemble E. Montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur E telle que l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ soit égal à $\mathscr{U}$.

—— ○ ——

Exercice 19

On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$(a,b)\preceq(c,d) \Longleftrightarrow \Big[a < c \quad \text{ou} \quad a = c \text{ et } b \leqslant d\Big]$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. S'agit-il d'une relation d'ordre totale ? L'ensemble $\mathbb{N}^2$ a-t-il un plus grand élément ?
2. Les parties $A = \Big\{(p,p), p\in\mathbb{N}\Big\}$ et $B = \Big\{(2,10^p), p\in\mathbb{N}\Big\}$ sont-elles majorées ? Si oui, ont-elles un plus grand élément ? une borne supérieure ?
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ a un plus petit élément.
4. En déduire que toute partie majorée de $\mathbb{N}^2$ admet une borne supérieure.

—— ○ ——

Thèmes variés

Exercice 20

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et f l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B) \\ & X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$$

1. Montrer l'équivalence :
$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow A\cup B = E.$$
2. Montrer l'équivalence :
$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow A\cap B = \emptyset.$$

—— ○ ——

Exercice 21

Soient E un ensemble et A une partie de E. On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation $\mathscr{R}$ par : $X\mathscr{R}Y \Longleftrightarrow X\cap A = Y\cap A$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que l'application : $\Phi : \xi \longmapsto X \cap A$, où X est bien définie de $\mathscr{P}(E)/\mathscr{R}$ dans $\mathscr{P}(A)$ et est bijective.

—— ∘ ——

Exercice 22

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Montrer que $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

—— ∘ ——

Exercice 23

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A).$$

—— ∘ ——

Exercice 24

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe jamais de fonction surjective $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ en utilisant $\Big\{x \in E \mid x \notin f(x)\Big\}$.

—— ∘ ——

Exercice 25

On pose $f : z \longmapsto \dfrac{1+iz}{1-iz}$ avec z dans $\mathbb{C}$.

1. Donner le domaine de définition de f et déterminer l'ensemble d'arrivée pour que f soit bijective. Déterminer alors f^{-1}.
2. Calculer $f(\mathbb{R})$ et l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par f.

—— ∘ ——

Exercice 26

Calculer $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{x\in]0,\pi[} \sin(nx) \right)$ et $\inf\limits_{x\in]0,\pi[} \left(\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \sin(nx) \right)$.

—— ∘ ——

Exercice 27

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\preceq$ la relation définie par :

$$f \preceq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation est-elle totale ?
2. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$: $\varphi_m : x \longmapsto e^{mx}$ puis $\mathscr{U} = \{\varphi_m\ ;\ m > 0\}$. La partie $\mathscr{U}$ est-elle minorée, majorée, admet-elle une borne inférieure, supérieure, admet-elle un plus petit élément, un plus grand élément ?
3. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\psi_m : x \longmapsto \sin(mx)$, puis $\mathscr{V} = \{\psi_m\ ;\ m > 0\}$. Mêmes questions pour $\mathscr{V}$.
4. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\chi_m : x \longmapsto \arctan(mx)$, puis $\mathscr{W} = \{\chi_m\ ;\ m > 0\}$. Mêmes questions pour $\mathscr{W}$.

—— ∘ ——

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)}| \geqslant n$. [on construira une fonction φ par principe de récurrence.]
2. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone. [on distinguera le cas où l'ensemble $I = \Big\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geqslant n,\ u_m \geqslant u_n\Big\}$ est fini ou infini.]

—— ∘ ——

Exercice 29

Soit $B \subset \mathbb{N}^2$. On dit que le point $(a,b) \in B$ est au sud-ouest de B si $\{(a,b)\} = B \cap (]-\infty, a] \times]-\infty, b])$.

1. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ contient au moins un point au sud-ouest.
2. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ admet un nombre fini de points au sud-ouest.

—— ∘ ——

Exercice 30

On range aléatoirement $(n+1)$ objets dans n tiroirs d'un meuble, les rangements étant équiprobables et indépendants. Quelle est la probabilité qu'il existe au moins un tiroir vide ?

—— ∘ ——

Un peu plus difficile

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que :

- pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$
- il existe $k > 1$ tel que $f(k) = k$.

Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

—— ∘ ——

Exercice 32

Soient E et F deux ensembles, pius $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections. On pose $h = g \circ f$ et $G = E \backslash g(F)$.

1. On pose $\mathscr{F} = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid G \cup h(X) \subset X\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est non vide, que $\mathscr{F}$ est stable par intersection quelconque et que si $X \in \mathscr{F}$, alors $G \cup h(X) \in \mathscr{F}$.
2. On pose $A = \bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}} X$, $B = E \setminus A$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer que $G \cup h(A) = A$, puis $A' \cap B' = \emptyset$ et que $A' \cup B' = F$.
3. Montrer que pour tout $x \in B$, l'élément x admet un unique antécédent noté $\xi(x)$ par l'application g.
4. Montrer que la fonction $\varphi : E \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in A$, $\varphi(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $\varphi(x) = \xi(x)$ est une bijection.

—— ∘ ——

Exercice 33

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\max \left\{ \prod_{k=1}^{p} x_k \mid p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p\ ,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = n \right\}.$$

—— ∘ ——

Exercice 34

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{D}$ par : $M \mathscr{R} M'$ si set seulement si il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathscr{D}$ reliant M à M'.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. On prend $\mathscr{D}$ le graphe de la fonction $\tan$ sur son ensemble de définition. Déterminer l'ensemble quotient $\mathscr{D}/\mathscr{R}$.

——— ○ ———

Exercice 35

On pose la fonction $f : z \longmapsto \dfrac{z-1}{z+i}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. Déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer géométriquement l'ensemble $f^{[-1]}(\mathbb{R})$.
3. Si $\mathscr{C}$ est un cercle du plan complexe ne passant pas par $-i$, déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathscr{C})$.
4. Si $\mathscr{C}$ est un cercle du plan complexe passant par $-i$, déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathscr{C} \setminus \{-i\})$.

——— ○ ———

Exercice 36

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une fonction. On appelle racine carrée de f, toute fonction $g : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ g = f$.

1. La racine carrée d'une bijection est-elle une bijection ?
2. La fonction $f : n \longmapsto n+1$ définie sur $\mathbb{Z}$ admet-elle une racine carrée ?

——— ○ ———