Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Marc Becker, Denis Choimet, Christian Devanz, Yves Duval, Jean-Denis Eiden, Serge Francinou, Cyril Germain, Max Hochart, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Roger Mansuy, François Moulin, Cécile Stérin, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.
À noter que, pour compenser l'absence d'oral aux concours à l'exception de l'École Polytechnique, nous avons aussi sélectionné un certain nombre d'exercices posés au cours des cinq dernières années et qui n'avaient pas été corrigés dans la revue. Ils apparaissent à la fin de cette liste. Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 22 février 2021, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com.*

École Polytechnique – MP

Algèbre

1. ⋆ Trouver les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > (f \circ f)(n)$.

2. ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les applications f de $\{0, \dots, n\}$ dans $\{0, \dots, n\}$ telles que $f(0) = 0$ et que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^j(k) = 0$, où l'on note $f^j = f \circ \cdots \circ f$ (j fois).

4. ⋆ Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $e_1 < e_2 < \cdots < e_r$ des éléments de $\mathbb{N}$, $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} 2^{e_i}$. Montrer que, parmi les $\displaystyle\binom{n}{k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, exactement 2^r sont impairs.

6. ⋆ ***a)*** Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini. Déterminer le produit des éléments de G.
b) On suppose que $G = \mathcal{S}_3$. Quels sont les éléments de G que l'on peut écrire comme produits de tous les éléments de G dans un ordre quelconque, chaque élément apparaissant exactement une fois ?

9. ★ Soit G un groupe fini. On suppose que G est engendré par $\{x, y\}$ où x et y sont deux éléments d'ordre 2 de G. Montrer que G contient un sous-groupe de cardinal $\dfrac{|G|}{2}$.

10. ★ Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini. Pour $g \in G$, soit τ_g l'application de G dans G définie par $\forall x \in G, \tau_g(x) = gx$.
a) Soit $g \in G$. Montrer que $\tau_g \in \mathcal{S}(G)$ et calculer la signature de τ_g.
b) On suppose que $|G| = 2^m k$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et k entier impair, et que G contient un élément d'ordre 2^m. Montrer que G contient un sous-groupe de cardinal $\dfrac{|G|}{2}$.

12. ★ Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ de déterminant 1. On note

$$T^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{S}$ est stable par produit matriciel.
b) Soient A et B dans $\mathcal{S}$ tels que $AB = T^+$. Montrer que l'une des deux matrices A et B est égale à I_2. Même question en remplaçant T^+ par T^-.
c) Déterminer l'ensemble des M de $\mathcal{S}$ de la forme T^+U avec $U \in \mathcal{S}$, puis l'ensemble des M de $\mathcal{S}$ de la forme UT^+ avec $U \in \mathcal{S}$.
d) Montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ peut se décomposer comme un produit de facteurs dans $\{T^+, T^-\}$.
e) Quels sont les éléments de $\mathcal{S}$ qui ne peuvent s'écrire comme produit de deux éléments de $\mathcal{S} \setminus \{I_2\}$?

13. ★ Soient G un sous-groupe de $\mathbb{U}$, $\Gamma = \left\{ z \in G \; ; \; |z - 1| < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, H le sous-groupe de G engendré par Γ.
Exprimer une condition pour que H ne soit pas réduit à $\{1\}$ et prouver qu'alors $H = G$.

16. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, $Q = 2XP' - nP$.
a) On suppose que les racines de P sont toutes dans $\mathbb{U}$. Montrer qu'il en est de même de celles de Q.
b) Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On suppose que toutes les racines de P sont de module R. Que dire de celles de Q ?

17. ★ Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $Q^k - P$.

20. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, 1], P(x) \geqslant 0$.
a) On suppose que P est de degré 2. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ et $c \in \mathbb{R}^+$ tels que $P = A^2 + cX(1 - X)$.
b) Dans le cas général, montrer que P s'écrit $A^2 + XB^2 + (1 - X)C^2 + X(1 - X)D^2$ où $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$.

21. ★ On fixe un entier $n \geqslant 1$. On note α et β les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. On fixe $k \in \{0, \dots, n\}$ et on pose $Q = (X-\alpha)^k (X-\beta)^{n-1-k}$.
a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$D^m(Q) = \frac{m!\,Q}{(X^2 - X - 1)^m} \sum_{j=0}^{m} \binom{k}{m-j} \binom{n-1-k}{j} (X-\alpha)^j (X-\beta)^{m-j}.$$

b) On écrit $Q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Montrer que $(a_0, \dots, a_{n-1})$ est vecteur propre de la matrice

$$S = \left(\binom{j-1}{n-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

et préciser la valeur propre associée.

23. ★ Déterminer les couples (A, B) d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ tels que la suite $(A(n) \wedge B(n))_{n \geqslant 1}$ soit périodique.

26. ★ Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(u \circ v - v \circ u) = \mathrm{Ker}(u - v) \oplus \mathrm{Ker}(u + v).$$

32. ★ Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient J l'élément $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $A = \mathrm{Vect}(I_2, J)$.
a) Montrer que A est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
b) Montrer que A est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ commutant à J.
c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que A est isomorphe comme $\mathbb{R}$-algèbre à $\mathbb{C}$.
d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A est isomorphe comme $\mathbb{C}$-algèbre à $\mathbb{C}^2$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'équation $X^n = J$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

33. ★ Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$\mathrm{tr}((A+B)^p) \equiv \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p)\ [p].$$

35. ★ ***a)*** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que toute combinaison linéaire de A et B soit nilpotente. Montrer que $\mathrm{tr}(A^k B) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b) Trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{tr}(A^k B) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ne vérifiant pas l'hypothèse de la question précédente.
c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^k) = 0$.

36. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leqslant i \leqslant n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

41. ★ Soient $\mathbb{K}$ un corps, n, p, r dans $\mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, P dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r telle que $MP = PN$. Montrer que $\chi_M \wedge \chi_N$ est de degré supérieur ou égal à r.

42. ★ Soit $(A,B,M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $AM = MB$ et $\chi_A = \chi_B$. Montrer que $A - MX$ et $B - XM$ ont même polynôme caractéristique pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

44. ★ ***a)*** Soit $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^d = I_2$. Montrer que $N^{12} = I_2$.
b) Que dire de $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ telle que $N^d = I_2$?

46. ★ Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne une base $(g_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.
a) Montrer que la fonction $M \in G \mapsto (\mathrm{tr}(Mg_i))_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est injective.
b) Montrer que, si l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, alors G est fini.

48. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $|G| \leqslant \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(3^n - 3^i)$.

50. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}.$$

52. ★ On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et on pose

$$\Phi : M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \|x_i - Mx_i\|^2.$$

Montrer que la restriction de Φ à $\mathcal{A}$ admet un minimum et le calculer à l'aide de la matrice $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T$.
Ind. Montrer que $\Phi\left(xy^\top\right) \geqslant \Phi\left(xx^\top\right)$ pour tout vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$.

53. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Soit $\| \ \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$. Déterminer la limite de

$$\frac{M^k X}{\|M^k X\|} \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2n \end{pmatrix}.$$

54. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n+1} \in \mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j) tel que $j > i$, on ait $a_{i,j} = 1$ si $j - i \leqslant n$ et $a_{i,j} = -1$ sinon.
a) Montrer que $\operatorname{rg} A = 2n$.
b) On note B_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. Montrer que B_n est de cardinal impair.
c) Calculer $|B_n|$. Déterminer le comportement asymptotique de $(|B_n|)_{n \geqslant 1}$.

55. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \max\{\operatorname{tr}(OM) \ ; \ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$

a) Justifier la définition de φ.
b) Montrer que φ est continue.
c) Calculer $\varphi(M)$ lorsque $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
d) Montrer que, si φ atteint son maximum en O, alors $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

57. ★ Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $M = P^{-1}DP$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note M_j la sous-matrice de M obtenue en retirant les j-èmes ligne et colonne, et $\lambda_1(M_j), \ldots, \lambda_{n-1}(M_j)$ ses valeurs propres.
Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,

$$p_{i,j}^2 \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (\lambda_j - \lambda_k) = \prod_{\ell=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_\ell(M_i)).$$

58. ★ Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Analyse

60. ★ Soient X une partie compacte d'un espace normé $(E, \| \ \|)$, f une application continue de X dans X. On dit que f est expansive s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in X^2, \ x \neq y \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \ \|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)\| \geqslant \delta.$$

a) On suppose que $E = \mathbb{C}$, que $X = \mathbb{U}$, que $k \geqslant 2$ est un entier et que $\forall z \in X, \ f(z) = z^k$. Montrer que f est expansive.
b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut recouvrir X par une réunion finie de boules de rayon ε.
c) On suppose qu'il existe un homéomorphisme expansif de X sur X. Montrer que X est finie.

61. ★ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soient f_θ et g_θ les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} z, \ g_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} z + z^2.$$

On dit que g_θ est topologiquement linéarisable en 0 s'il existe deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{C}$, un homéomorphisme h de U sur V tel que $h(0) = 0$ et que, pour z suffisamment proche de 0, on ait $g_\theta(z) = h^{-1} \circ f_\theta \circ h(z)$.
Construire un nombre irrationnel θ tel que g_θ ne soit pas linéarisable.

62. ★ Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$. On munit $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ de la norme uniforme. On note respectivement $E_0 = \mathcal{C}(D, \mathbb{C}^*)$ et $E_1 = \{\exp \circ f \ ; \ f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})\}$. On se propose d'établir que $E_0 = E_1$.
a) Montrer que E_0 est ouvert dans $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$.
b) Montrer que E_0 est connexe par arcs.
c) Montrer que E_1 est ouvert dans E_0.
d) Montrer que E_1 est fermé dans E_0.
e) Conclure.

63. ★ Soient $n \geqslant 2$ un entier, $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ M^2 = M, \ \mathrm{rg}(M) = k\}$, Π la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les k premiers coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres 0.
Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant Π, un ouvert V de $\mathbb{R}^{2k(n-k)}$ contenant 0, une bijection continue f de V sur $U \cap P$ dont la réciproque est continue.

64. ★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

67. ★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{n^2}.$$

a) Étudier (u_n) si $\alpha = 1$.
b) On suppose $\alpha = 2$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $u_n \sim n\, C^{2^n}$.

68. ★ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on note

$$X_t = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} < t \right\}$$

a) Montrer que $|X_t| = O(t^n)$ quand t tend vers $+\infty$.
b) Montrer que $t^n = O(|X_t|)$ quand t tend vers $+\infty$.
c) Montrer que $|X_t| \sim t^n$ quand t tend vers $+\infty$.
d) Comparer $|X_t|$ à t^n.

69. ★ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

a) On suppose que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Étudier la convergence de u.

b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_{2^k n}}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Étudier la convergence de u.

72. ★ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum y_n^2$ converge, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.
Ind. Considérer, lorsqu'il est défini,

$$y_n = \frac{x_n}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}.$$

73. ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection continue strictement croissante. On suppose que, pour tout x réel, $f(x+1) = f(x) + 1$. On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois). Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, la suite de terme général $\frac{f^k(x)}{k}$ converge vers ρ.

77. ★ Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et une fonction h de classe C^∞ de $[-\alpha, \alpha]$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [-\alpha, \alpha], f(x) = h(x)^2$.

79. ★ On note $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ soit bornée. Soit T un endomorphisme de $\mathcal{S}$ commutant à la dérivation et à la multiplication par l'identité de $\mathbb{R}$. Montrer que T est une homothétie.

81. ★ Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_c$) l'espace des fonctions continues (resp. continues par morceaux) à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit τ_x l'endomorphisme de $\mathcal{K}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau_x(f)(t) = f(t-x).$$

a) Pour $f \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{K}_c$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{K}$.
b) Soit T un endomorphisme de $\mathcal{K}$ commutant à τ_x pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\forall f \in \mathcal{K}, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Montrer que

$$\forall (f,g) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}_c, \quad T(f * g) = T(f) * g.$$

82. ★ ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$. Comparer

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

b) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $\forall x \in]-1, 1[, P(x) > 0$. On note $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} P$ et T l'aire du triangle délimité par l'axe des abscisses et les tangentes au graphe de P en 1 et -1. Montrer que $A \geqslant \dfrac{2}{3}T$.

86. * Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, soit $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in]0,1], \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f \quad \text{et} \quad T(f)(0) = f(0).$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Soit $f \in E$. Étudier la convergence uniforme de $(T^k(f))_{k\in\mathbb{N}}$.

88. * Soient $\ell \in]1, +\infty[$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{\ell a_n}{\ell^{n+1} - 1}.$$

a) Montrer qu'en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.

89. * ***a)*** Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ avec $P \leqslant f \leqslant Q$ et $\displaystyle\int_0^1 (Q - P) \leqslant \varepsilon$.

b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$. Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
On pourra considérer $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = 0$ si $x \in [0, 1/e]$ et $1/x$ sinon.

92. * Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$, E l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à $D_o = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1\}$ est développable en série entière.

a) Soit $f \in E$. On écrit $\forall z \in D_o, \ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que, si $f \in E$, $\max\limits_{z \in D} |f(z)| = \max\limits_{z \in \mathbb{U}} |f(z)|$.
c) Montrer qu'il existe K tel que, pour toute f dans E écrite comme dans la question a) et tout $N \geqslant 0$, on ait $\left| \sum\limits_{n=0}^{N} a_n \right| \leqslant K \|f\|_\infty \ln N$.

93. ★ On fixe $R \in]1, +\infty]$ et on note E l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière sur le disque ouvert D_R de centre 0 et de rayon R.
a) Soit $f \in E$. On écrit

$$\forall z \in D_R, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour $r \in]0, R[$, soit

$$\|f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Montrer que $f \in E \mapsto \|f\|_r$ est une norme sous-multiplicative sur E.
b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $r \in [1/2, R[$, tout $\delta \in]0, 1]$ et toute $f \in E$, on ait

$$\|f'\|_{re^{-\delta}} \leqslant \frac{C}{\delta} \|f\|_r.$$

c) Soit $f \in E$. Montrer que, si f est assez proche de 0 en un sens à préciser, la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = {f_n'}^2$ converge uniformément sur un voisinage de 0.

95. ★ Soients $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ converge. Montrer que l'équation différentielle $y' - ay = f$ admet une unique solution de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

96. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(u + tv)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
b) On suppose que f est convexe. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les dérivées partielles $\partial_i f(x)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ existent. Montrer que f est différentiable en x.

101. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) On note J_n la matrice $(1_{j \equiv i+1\ [n]})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J_n.

b) On suppose que n est premier et on admet que $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On se donne $(X_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Soit M la matrice aléatoire

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X_2 \\ X_2 & & \ddots & \ddots & X_1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

102. ★ Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{2n} X_k\right|\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$

103. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i = k}.$$

Soit $Z = \max\{Y_k \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$.
a) Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\lambda \mathbf{E}(Z)} \leqslant n\, \mathbf{E}(e^{\lambda Y_1})$.
b) Montrer que

$$\mathbf{E}(Z) \leqslant \frac{2 \ln(n)}{\ln(1 + \ln(n))}.$$

104. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi uniforme sur

$$\left\{\frac{k}{n} \ ; \ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}.$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
a) Montrer que $Z \ : \omega \mapsto \inf\{k \in \mathbb{N}^*, \ S_k(\omega) \geqslant 1\}$ est presque sûrement finie.
b) Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

105. ★ Soient $q \geqslant 2$ un entier, $\tau \in \mathbb{R}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\left\{\frac{k}{q} \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant q-1\right\}$. On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires en posant $T_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ T_n = T_{n-1} + \tau + \sin\left(2\pi(T_{n-1} - \varphi_n)\right).$$

a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{E}(T_n)$.
b) Établir l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

108. ★ ***a)*** Soit $n \geqslant 1$ un entier et $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(i) = Q(i)$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $P(n) \neq Q(n)$. Montrer que $|P(n) - Q(n)| \geqslant n!$.
b) Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{Z}[X] \; ; \; \forall i \in \mathbb{N}, |P(i)| \leqslant 2^i\}$ est fini.

117. ★ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ deux à deux non colinéaires. On note, pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, p_i la projection orthogonale sur la droite engendrée par v_j.
Soit $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\{1, \ldots, k\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_{n+1} \neq \sigma_n$. Soient x un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = p_{\sigma_1} \circ p_{\sigma_2} \circ \cdots \circ p_{\sigma_n}(x)$. Étudier la convergence de (x_n).

130. ★ Soit $n \geqslant 1$. Discuter l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{1, \ldots n\}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $(x_1, \ldots, x_n)$ est une énumération de $\{1, \ldots, n\}$, ***ii)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

135. ★ Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, f' est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_0^x f'(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant f\left(x + f(x)\right) - f(x).$$

152. ★ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X)\, P(X+1) = P(X^2 + X + 1).$$

153. ★ ***a)*** Trouver les entiers naturels qui ont un nombre impair de diviseurs.
b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

154. ★ Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On suppose que $(X-1)^k$ divise P. Quel est le nombre minimal de coefficients non nuls de P ?

161. ★ On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ anticommutent si et seulement si $BA = -AB$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles il existe A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui anticommutent.

175. ★ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble A des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe deux matrices $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = \lambda BA$.
b) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout couple $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ vérifiant $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables.

177. ★ Soient x et y deux vecteurs non nuls de E euclidien. Montrer que

$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\max(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

178. ★ Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $\text{rg}(v_i - v_j)_{1\leqslant j<i\leqslant n} \leqslant n-1$.
b) On suppose les v_i deux à deux distincts. Pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on considère les sous-espaces vectoriels $H_k = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_k = 0\}$. Montrer qu'il existe k tel que les projetés orthogonaux des v_i sur H_k sont deux à deux distincts.

194. ★ Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f''\|_\infty$.
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Montrer qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant CN(f)$.
c) Montrer que le réel C optimal est $1/8$.

206. ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $0 \leqslant f'' \leqslant f$ et $0 \leqslant f'$. Montrer que $f \geqslant f'$.

211. ★ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{+\infty} \exp\left(-nt - \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

a) Justifier la définition de u_n.
b) Donner un développement asymptotique à la précision $o\left(1/n^3\right)$ de u_n.

219. ★ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) Déterminer le cardinal de $\left\{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^2,\ A \subset B\right\}$.
b) Déterminer la probabilité que deux parties de $\{1,\ldots,n\}$, choisies au hasard, soient incluses l'une dans l'autre.

223. ★ Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, indépendantes et de même loi. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1$. À quelle condition a-t-on égalité ?

225. ★ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X \neq 0) > 0$ et que $\mathbf{E}(X) < +\infty$. Soit $\widehat{X}$ une variable aléatoire telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\widehat{X} = i) = \dfrac{i\,\mathbf{P}(X = i)}{\mathbf{E}(X)}$.
a) Trouver X telle que X et $\widehat{X}$ suivent la même loi.
b) Déterminer la loi de X si $X+1$ et $\widehat{X}$ suivent la même loi.

228. ★ Soient $N \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$. On pose

$$M_N = \min\{|X_{i+1} - X_i|,\ i \in \{1,\ldots,N-1\}\}.$$

a) Montrer que la suite de terme général $\mathbf{P}(M_N = 0)$ converge et déterminer sa limite.
b) Montrer que la suite de terme général $\mathbf{E}(M_N)$ est bornée.

Exercices issus des années précédentes

231. ★ (RMS-126 n°45 – ENS) *Paris.* Soient A une partie d'un espace euclidien E, et T une fonction 1-lipschitzienne de A dans E. Montrer que T peut-être prolongée en une fonction 1-lipschitzienne de E dans E.

232. ★ (RMS-126 n°46 – ENS) *Paris.* Soit (E, d) un espace métrique. On note M l'ensemble de ses parties fermées et bornées non vides. Pour F et G éléments de M, on pose :
$\rho(F,G) = \max\Big(\sup_{x\in F} d(x,G), \sup_{y\in G} d(y,F)\Big)$.
a) Montrer que ρ est une distance sur M.
b) Montrer que si E est complet alors M l'est également.
c) Montrer que $\{F \in M,\ F \text{ compact}\}$ est une partie fermée de (M, ρ).

233. ★ (RMS-126 n°58 – ENS)
On note c_0 l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$, tendant vers 0, muni de la norme $\| \ \|_\infty$, et ℓ^1 celui des mêmes suites, sommables, muni de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{m\geqslant 0} |u(m)|$.
a) Soit $(w_n) \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour tout m, $w_n(m) \to 0$. Montrer que $\forall x \in \ell^1$, $\|x + w_n\|_1 - \|x\|_1 - \|w_n\|_1 \to 0$. *Ind.* Commencer par supposer que x est à support fini.
b) Soit $(w_n) \in c_0^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour tout m, $w_n(m) \to 0$. Montrer que $\forall x \in c_0$, $\|x + w_n\|_\infty - \max(\|x\|_\infty, \|w_n\|_\infty) \to 0$.
c) Montrer que, si T est une application linéaire continue de c_0 vers ℓ^1, et si B est la boule unité fermée de c_0, alors $\overline{T(B)}$ est compacte.

234. ★ (RMS-126 n°73 – ENS) *Cachan, Rennes.* Soient D et E deux parties de $\mathbb{R}$ dénombrables et denses. Montrer qu'il existe un homéomorphisme croissant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(D) = E$.

235. ★ (RMS-126 n°155 – X)
Soit G un ensemble muni d'une loi interne associative $\cdot$ ayant un neutre à gauche et pour laquelle tout élément admet un inverse à gauche. Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

236. ★ (RMS-126 n°217 – X)
Soient $u_1 > 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Étudier la convergence de la suite u.

237. ★ (RMS-126 n°252 – X)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$ soit bornée. Montrer que f tend en $+\infty$ vers 0.

238. ★ (RMS-126 n°265 – X)
Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que $r : t \mapsto \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ ne s'annule pas et $x'' = -x/r^3$ et $y'' = -y/r^3$.

a) Montrer que $xy' - x'y$ est constante. On notera C sa valeur.
b) On suppose $C = 0$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0$.
c) On suppose $C \neq 0$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $C^2 = \alpha x + \beta y + r$.
d) Montrer que l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$ décrit une conique.

239. ★ (RMS-127 n°126 – ENS)
Lyon. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$ et on note $\|\ \|$ la norme associée.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres réelles strictement négatives. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose : $B(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle \mathrm{e}^{sA}x, \mathrm{e}^{sA}y \right\rangle \, \mathrm{d}s$. Justifier la définition de B et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable. On suppose que $f(0) = 0$ et que $A = \mathrm{d}f(0)$ vérifie les hypothèses de la question précédente. Établir l'existence d'un réel $a > 0$ tel que si $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation $y' = f(y)$ et vérifie $\|f(0)\| \leqslant a$, alors y tend vers 0 en $+\infty$ à vitesse exponentielle.

240. ★ (RMS-127 n°214 – X)
Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction non constante telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.
a) Décrire $\varphi^{-1}(\{0\})$.
b) Montrer qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \psi(\det(M))$.

241. ★ (RMS-127 n°266 – X) Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $c = \max \left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \ ;\ 1 \leqslant i\right.$

et $\ell = \max \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \ ;\ 1 \leqslant j \leqslant n \right\}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Montrer que la norme d'opérateur de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est majorée par $\sqrt{c\ell}$.

242. ★ (RMS-127 n°333 – X)
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k > n\Big)$ et $v_n = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k < n\Big)$.
a) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ sont monotones.
b) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ convergent vers la limite, que l'on précisera.

243. ★ (RMS-128 n°34 – ENS) *Cachan, Rennes.* Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $[A,B] = AB - BA$ et on suppose que $[A,B]$ commute avec A et B.
a) Montrer que $[A,B]e^A = e^A[A,B]$.
b) Montrer que $e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A,B]$ pour tout réel t.

c) Montrer que $\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B]\right)$.
d) On pose $V = \mathrm{Vect}(A, B, [A,B])$. Montrer que V est de dimension 3 si $[A,B] \neq 0$.
e) Montrer que $\{e^M,\ M \in V\}$ est stable par multiplication.

244. ★ (RMS-128 n°46 – ENS) *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On note E l'ensemble des suites sommables de réels, et F l'ensemble des suites réelles u telles que $(u_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit sommable. Pour $u \in E$, on pose $N_1(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et pour $u \in F$ on note $N_2(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n u_n|$.
a) Montrer que F est une partie de E dense pour N_1.
b) Montrer que la boule unité fermée de (F, N_2) est compacte dans l'espace (E, N_1).

245. ★ (RMS-128 n°64 – ENS) *Paris.* Soient $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \epsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

246. ★ (RMS-128 n°135 – ENS) *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.* Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive lorsque $\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tYSY \geqslant 0$.
a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive si et seulement s'il existe, sur un certain espace probabilisé, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées telles que $s_{i,j} = \mathbf{E}(X_i X_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
b) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives. Montrer que $(a_{i,j}b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive.

247. ★ (RMS-128 n°199 – X)
Soient $x,\ y,\ z \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que : $x^2 + y^2 = z^2$ et $\mathrm{PGCD}(x,\ y,\ z) = 1$.
a) Montrer qu'il existe $n > m$ entiers premiers entre eux tels que, à permutation près de x et y, on ait : $x = 2nm, \quad y = n^2 - m^2, \quad z = n^2 + m^2$.
b) En déduire que l'aire du triangle de côté $x,\ y$ et z n'est pas le carré d'un entier.

248. ★ (RMS-128 n°207 – X)
Soit $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ [z| \leqslant 1\}$. Déterminer les (a,b,c,d) de $\mathbb{C}^4$ tels que $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ soit une bijection de D sur D.

249. ★ (RMS-128 n°296 – X) Soient $b \in]0, \sqrt{\pi/2}[$ et $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^b \sin(x)\ \exp\big(it\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x$.
Trouver un équivalent de $f(t)$ quand $t \to +\infty$.

250. ★ (RMS-128 n°303 – X) On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$.
a) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les solutions de (E) sur $] - \eta, \eta[$ sommes d'une série entière autour de 0 sur un tel intervalle.

c) Soient S l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ et $g \in S$. On désigne ici par f la restriction de f à $]0,+\infty[$. Montrer que (f,g) est une base de S si et seulement si g n'est pas bornée au voisinage de 0.

251. ★ (RMS-128 n°306 – X)
Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $x'' = \dfrac{1-x}{x^3}\cdot$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x(0), x'(0))$ pour que x soit bornée.

252. ★ (RMS-128 n°310 – X)
Soient g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, on ait : $-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x,y), \quad f(x,0) = h(x).$
a) Montrer que E contient au plus un élément.
b) On suppose que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $g(x,y) = xy$. Déterminer E.

253. ★ (RMS-129 n°7 – ENS) [PLSR] La suite croissante des nombres premiers satisfait-elle à une relation de récurrence linéaire à coefficients rationnels ?

254. ★ (RMS-129 n°15 – ENS) [PLSR] ***a)*** Donner le nombre minimal de permutations nécessaires pour engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$.
b) Donner le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$.
c) On suppose que pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_n$ et tout n-cycle c de $\mathcal{S}_n$, les permutations τ et c engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que n est premier.
d) Réciproquement, montrer que si n est premier alors pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_n$ et tout n-cycle c de $\mathcal{S}_n$, les permutations τ et c engendrent $\mathcal{S}_n$.

255. ★ (RMS-129 n°16 – ENS) [PLSR] Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative $*$. Montrer que $(G,*)$ possède un élément idempotent.

256. ★ (RMS-129 n°57 – ENS) [P] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A et de B sont toutes dans $\mathbb{R}^{+*}$. La matrice $A+B$ peut-elle avoir une valeur propre dans $\mathbb{R}^{-*}$?

257. ★ (RMS-129 n°85 – ENS) [PLSR] Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit que (u_n) converge *faiblement* si et seulement s'il existe $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$.
a) Comparer la convergence faible et la convergence pour la norme euclidienne.
b) On pose dans la suite $H = \ell^2(\mathbb{R})$. Montrer que de toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement.
c) Soient (e_n) une famille orthonormée totale de H, $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n e_n$.
i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) converge pour la norme hilbertienne.
ii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) converge faiblement.

258. ★ (RMS-129 n°89 – ENS) [PLSR] Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. On suppose que pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Déterminer les morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

259. ★ (RMS-129 n°248 – X) Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer qu'il existe trois éléments $a < b < c$ de $\mathbb{N}^*$ tels que $2f(b) = f(a) + f(c)$. **260.** ★ (RMS-129 n°274 – X)

Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes. On dit que ρ est irréductible lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les éléments de l'image de ρ sont V et $\{0\}$. On note $\chi(\rho) : s \in G \mapsto \mathrm{tr}(\rho(s))$.
a) Montrer que $\chi(1_G) = \dim(V)$. Montrer que $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ pour tout $s \in G$. Montrer que $\chi(st) = \chi(ts)$ pour tout $(s,t) \in G^2$.
Dans la suite, on se donne deux morphismes irréductibles $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$, où V_1 et V_2 sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi qu'une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que $\forall s \in G,\ \rho_2(s) \circ f = f \circ \rho_1(s)$. On dit que ρ_1 et ρ_2 sont isomorphes lorsqu'une telle fonction linéaire bijective existe.
b) Montrer que f est bijective ou nulle.
c) Montrer que si $\rho_1 = \rho_2$ et $V_1 = V_2$ alors f est une homothétie.
On fixe désormais $h : V_1 \to V_2$ et on pose $h_0 = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{s\in G} \rho_2(s)^{-1} \circ h \circ \rho_1(s)$.
d) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes. Montrer que $h_0 = 0$.
e) On suppose que $\rho_1 = \rho_2$ et $V_1 = V_2$. Montrer que $h_0 = \dfrac{\mathrm{tr}(h)}{\dim V_1}\ \mathrm{id}_V$.

261. ★ (RMS-129 n°302 – X) Soient $a_n \leqslant \dots a_2 \leqslant a_1$, $b_n \leqslant \dots \leqslant b_2 \leqslant b_1$ et pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $T_\sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$.
a) Trouver $\max\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} T_\sigma$.
Soient $A = \mathrm{Diag}(a_1,\dots,a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1,\dots,b_n)$. On cherche $\max\limits_{U\in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})} \mathrm{tr}(AUBU^{-1})$.
b) Que dire si U est une matrice de permutation ?
c) Que dire de $\exp(tH)$ pour t réel et H antisymétrique réelle ?
d) Montrer que le maximum est bien atteint en un élément $U_0 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
e) Conclure en considérant l'application $U : t \mapsto \exp(tH)U_0$ et en caractérisant les matrices C telles que $\mathrm{tr}(HC) = 0$ pour tout H antisymétrique réelle.

262. ★ (RMS-129 n°309 – X) Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f = 0 \right\}$.
Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 t\, f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

a) Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi(f)$ est dans E.
b) Montrer que Φ est continue pour $\| \ \|_\infty$.
c) Soit C tel que : $\forall f \in E$, $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Montrer que $C \geqslant 1/4$. Déterminer la constante C optimale.

263. * (RMS-129 n°310 – X)
On fixe un entier naturel $n \geqslant 1$, et on pose $X = [-1, 1]^n$, et A l'algèbre des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.
a) Soit $(g_1, \dots, g_k) \in A^k$. Montrer que l'idéal engendré par $\{g_1, \dots, g_k\}$ est A si et seulement $g_1, \dots, g_k$ n'ont pas de zéro commun.
b) Soient $\epsilon > 0$ et $(f_1, \dots, f_{n+1}) \in A^{n+1}$. Montrer qu'il existe $(g_1, \dots, g_{n+1}) \in A^{n+1}$ tel que l'idéal engendré par $g_1, \dots, g_{n+1}$ soit A et $\|f_k - g_k\|_\infty \leqslant \epsilon$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$.
c) Déterminer les idéaux maximaux de A (c'est-à-dire les idéaux différents de A et n'ayant pas de sur-idéal hormis A et eux-mêmes).

264. * (RMS-130 n°28 – ENS) [L] Quels sont les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leqslant 1$?

265. * (RMS-130 n°231 – X) Soit $(G, .)$ un groupe abélien fini de cardinal n. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de $(G, .)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
a) Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe pour la multiplication ordinaire des fonctions.
b) Montrer que, si $\chi \in \widehat{G}$ n'est pas le morphisme trivial, $\displaystyle\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$.
c) Si χ et χ' sont deux éléments distincts de $\widehat{G}$, montrer que $\displaystyle\sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}\chi'(g) = 0$.
d) Montrer que $|\widehat{G}| \leqslant n$.
e) Si $x \in G$, soit δ_x l'élément de $\widehat{\widehat{G}}$ défini par $\forall \chi \in \widehat{G},\ \delta_x(\chi) = \chi(x)$. Montrer que $x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme de G sur $\widehat{\widehat{G}}$.
f) Quel est le cardinal de $\widehat{G}$?

266. * (RMS-130 n°242 – X)
Si $P \in \mathbb{C}|X] \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r, $|Q(z)| < |P(z)|$, alors $N_r(P + Q) = N_r(P)$.
a) Déduire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
b) Soit $P = X^4 + 6X + 3$. Déterminer $N_2(P), N_1(P), N_{1/3}(P)$.
c) Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ ne s'annulant par sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P}(re^{it})re^{it}\mathrm{d}t$, d'abord en utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, ensuite en l'évitant.
d) Déduire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.

267. * (RMS-130 n°336 – X)

Soient B (resp. S) la boule unité ouverte (resp. la sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique, f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ de restriction à B de classe C^2, $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des fonctions continues de B dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in B$, la matrice $(a_{i,j}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appartienne à $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On suppose que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est identiquement nulle sur B. Montrer que f atteint son maximum sur S.