Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DS n^o 8

Exercice

1. On redémontre facilement que $\mathrm{Im}\,(f)$ est stable par combinaison linéaire par exemple et que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice finie de E, alors la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille génératrice (finie) dans $\mathrm{Im}\,(f)$.

2. • $\boxed{\Longleftarrow}$

   On suppose le second point. On remarque aisément que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(a)$.

   Ensuite, comme φ est une forme linéaire non nulle, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$.

   On en déduit que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension au moins 1 et comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(a)$, alors $\mathrm{Rg}(f) = 1$.

   • $\boxed{\Longrightarrow}$

   On suppose $\mathrm{Rg}(f) = 1$. Soit (a) une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tel que :

   $$f(x) = \lambda_x \cdot a.$$

   En notant $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on dispose de n scalaires $\lambda_{e_1}, \cdots, \lambda_{e_n}$ tels que :

   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \lambda_{e_k} \cdot a.$$

   Il existe une seule application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_k) = \lambda_{e_k}.$$

   Les applications linéaires f et $x \longmapsto \varphi(x) \cdot a$ coïncident sur la base $\mathscr{B}$ donc partout.

   De plus, comme l'application f est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$, imposant à $\varphi(x)$ et à a de ne pas être nuls.

3. (a) On note $(u_1, \cdots, u_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un antécédent du vecteur u_i par la fonction f. On écrit :

   $$f(\varepsilon_i) = u_i.$$

   La famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ est libre car si on a une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot \varepsilon_i = 0$ entre les vecteurs de cette famille, en appliquant la fonction linéaire f, on obtient immédiatement une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs u_i et donc tous les scalaires μ_i sont nuls.

En notant $(\chi_1, \cdots, \chi_s)$ une base de $\ker(f)$, alors on vérifie assez facilement en appliquant la fonction f que la famille $\mathscr{C} == (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \chi_1, \cdots, \chi_s)$ est libre puis est une base de E car cette famille comporte $r + s = \dim(E)$ [théorème du rang] vecteurs.
Pour tout entier j entre 1 et r, il existe une seule application linéaire $g_j : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ g_j(\varepsilon_k) = \delta_{k,j} \cdot u_j \text{ et } \forall \ell \in [\![1, s]\!],\ g_j(\chi_\ell) = 0.$$

Il est clair que $\mathrm{Im}\,(g_j) = \mathrm{Vect}(u_j)$, donc $\mathrm{Rg}(g_j) = 1$.
Ensuite, pour tout entier k entre 1 et n :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i(\varepsilon_k) = u_k = f(\varepsilon_k)$$

et pour tout entier ℓ entre 1 et s :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i(\chi_\ell) = 0 = f(\chi_\ell).$$

Les applications linéaires f et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} g_i$ coïncident sur une base de E, dons partout.
Les applications linéaires g_i vérifient les conditions requises.

(b) On observe que :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^{r} g_i\right) \subset \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\,(g_i),$$

et en prenant les dimensions, on obtient :

$$r = \mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}\left(\sum_{i=1}^{r} g_i\right) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\,(g_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Im}\,(g_i)) = r.$$

On n'a que des égalités et le fait d'avoir :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\,(g_i)\right) = r = \sum_{i=1}^{r} \dim\left(\mathrm{Im}\,(g_i)\right),$$

impose à la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\,(g_i)$ d'être directe.

Endomorphismes et sous-espaces stables

Partie I : étude d'un exemple

1. On vérifie facilement que si P est un polynôme de degré inférieur à n, alors déjà pour tout entier $k > n$, le polynôme $P^{(k)}(X)$ est nul, donc la somme est bien définie car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, et de plus cette somme finie est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

2. On fixe un entier p entre 0 et n et on calcule :

$$f(X^p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{p!}{(p-k)!} X^{p-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{p!}{k!} X^k.$$

La matrice A est une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle et :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!],\ A_{i,j} = \begin{cases} 0, \text{ si } i \geqslant j \\ \dfrac{(j-1)!}{(i-1)!}, \text{ sinon} \end{cases}.$$

3. On remarque que la famille $(f^{n-1}(X^n), f^{n-2}(X^n), \cdots, f(X^n), X^n)$ est à degrés échelonnés donc est libre et compte $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs. Il s'agit d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ selon laquelle la matrice représentant f est la matrice B.

   Les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes : ces deux matrices sont semblables.

4. (a) On note :

   $$\mathscr{D} = \Big\{ s \in \mathbb{N} \mid \exists P \in\ F,\ \deg(P) = s \Big\}.$$

   L'ensemble $\mathscr{D}$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$ et majoré par n car $F \subset \mathbb{C}_n[X]$. Le plus grand élément s de l'ensemble $\mathscr{D}$ vérifie les conditions requises car si $Q \in F$, alors soit Q est nul, soit Q est non nul et dans ce cas, $\deg(Q) \in \mathscr{D}$, donc $\deg(Q) \leqslant s$ et $Q \in \mathbb{C}_s[X]$.

   De plus, on ne peut avoir $F \subset \mathbb{C}_{s-1}[X]$ car sinon, l'entier $s-1$ majorerait l'ensemble $\mathscr{D}$, contredisant la définition de l'entier s.

   (b) On utilise le fait que si R est un polynôme non constant, alors $\deg(f(R)) = \deg(R) - 1$. La famille considérée est donc une famille à degrés échelonnés dans $\mathbb{C}_r[X]$ avec $r + 1 = \dim(\mathbb{C}_r[X])$ vecteurs.

5. Les espaces $\mathbb{C}_s[X]$, lorsque s décrit $[\![0, n]\!]$ forment déjà $n+1$ sous-espaces stables par f. Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}_n[X]$ stable par f. Si $F = \{0\}$, alors F figure dans la liste déjà produite.

   Sinon, on considère un entier s comme dans la question 4.(a). On considère un polynôme $Q \in F$ de degré exactement s (il est possible d'en trouver un par choix de s) et la famille $(f^k(Q))_{0 \leqslant k \leqslant s}$ est une famille à degrés échelonnés car si R est un polynôme non constant, alors $f(R)$ est de degré $\deg(R) - 1$.

   Il s'agit d'une base de $\mathbb{C}_s[X]$ et ces vecteurs sont tous dans l'espace stable F : $F = \mathbb{C}_s[X]$. L'espace F figure encore dans la liste produite.

Partie II : endomorphismes diagonalisables induits

6. On considère une base $\mathscr{B}_F$ de F. Cette famille est libre et on la complète en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^d$. On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$. La matrice représentant u_A selon la base $\mathscr{B}$ est donc la matrice $M = P^{-1}AP$. Comme F est stable par u_A, alors si x est un des vecteurs de la base $\mathscr{B}_F$, alors le vecteur $u_A(x)$ ne s'exprime qu'à l'aide des vecteurs de $\mathscr{B}_F$, d'où le bloc de zéros en dessous du bloc A_1.

7. La matrice A est diagonalisable, ainsi que toute matrice qui lui est semblable. La matrice M est donc diagonalisable. Il existe une matrice Q inversible telle que $Q^{-1}MQ = D$ soit une matrice diagonale.

   En prenant la transposée, on en déduit :

   $$Q^T M^T (Q^{-1})^T = D^T = D.$$

   Or, en posant $R = Q^T$, la matrice R est inversible et :

   $$RM^T R^{-1} = D.$$

   La matrice M^T est semblable à une matrice diagonale, donc la matrice M^T reste diagonalisable.
8. Ceci provient directement de la définition de la diagonalisabilité de la matrice M^T.
9. Soit $V \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$. On pose le vecteur $W = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$. On exprime W sous la forme :

   $$W = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot X_i.$$

   En ne retenant que les r premières composantes, on obtient :

   $$V = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot Y_i.$$

   La famille des Y_i est bien génératrice dans $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$.
10. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, en effectuant le produit matriciel $M^T X_i = \lambda_i X_i$, on obtient :

    $$A_1^T Y_i = \lambda_i \cdot Y_i.$$

    En extrayant de la famille génératrice $(Y_1, \cdots, Y_d)$ une base de $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$, on obtient une base $(Y_1', \cdots, Y_r')$ de $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{C})$ selon laquelle l'endomorphisme A_1^T se représente selon une matrice diagonale.

    La matrice A_1^T est donc diagonalisable, ainsi que la matrice A_1.
11. Soit E un espace de dimension d. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Soit F un sous-espace de E stable par f. Si $F = E$ ou si $F = \{0\}$, la restriction de f à F est soit f soit l'application linéaire nulle, donc dans les deux cas diagonalisable.

    Si F est de dimension r avec $1 \leqslant r < d$, on remarque avec les notations déjà utilisées que la matrice A_1 est la matrice représentant $f_{|F}$ selon une base $\mathscr{B}_F$ de F telle que selon une base $(\mathscr{B}_F, \mathscr{F})$ de E, on ait la représentation matricielle par blocs de l'endomorphisme f comme dans la question 6.

    On sait que A_1 est diagonalisable, donc la restriction $f_{|F}$ l'est.

Partie III : CNS de diagonalisabilité

12. On suppose f diagonalisable. On dispose d'une base $\mathscr{B} = (x_1, \cdots, x_d)$ de E telle que pour tout i entre 1 et d, le vecteur $f(x_i)$ est colinéaire au vecteur x_i.
    On note $\mathscr{C}$ une base de F. On peut compléter cette famille libre $\mathscr{C}$ en puisant dans la famille génératrice $\mathscr{B}$ pour obtenir une base :
    $$\mathscr{D} = (\mathscr{C}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}) \text{ de } E.$$
    On pose $S = \mathrm{Vect}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_s})$ de sorte que :
    $$E = F \oplus S.$$
    De plus, si x est dans S, en notant $f(x_i) = \lambda_i \cdot x_i$ et de plus :
    $$x = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \cdot x_{i_k},$$
    alors :
    $$f(x) = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \cdot \lambda_{i_k} \cdot x_{i_k} \in S.$$
    Le sous-espace stable F admet bien un sous-espace stable S par la fonction f et qui lui est supplémentaire.

13. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme la matrice $I_d - \dfrac{1}{n}A$ n'est pas inversible, on peut choisir un vecteur non nul Y_n dans son noyau.
    En notant $(Y_n)_k$ ses composantes puis k_n l'indice d'une composante de Y_n qui est de module maximal (donc de module strictement positif), alors le vecteur $X_n = \dfrac{1}{(Y_n)_{k_n}} Y_n$ reste dans le noyau de $I_d - \dfrac{1}{n}A$ donc le vecteur colonne X_n vérifie le premier point. Par choix de k_n, toutes les composantes de X_n sont de module inférieur à 1.
    De plus, chaque vecteur colonne X_n admet une composante égale à 1. En notant :
    $$\mathscr{D}_k = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \; ; \; (X_n)_k = 1 \right\}$$
    alors :
    $$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{d} \mathscr{D}_k.$$
    Comme l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est infini, l'un des ensembles $\mathscr{D}_{i_0}$ est infini et le troisième point est vérifié avec $k = i_0$.

    (b) On note $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ l'extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
    $$X_{\psi(n)} = \frac{AX_{\psi(n)}}{\psi(n)},$$
    chaque composante de $X_{\psi(n)}$ est de module inférieur à 1 et la $i_0^{ème}$ composante de $X_{\psi(n)}$ vaut toujours 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cette extractrice est constructible via l'infinité d'entiers du troisième point précédent.
    Dans la suite, on note $x_{n,i}$ la $i^{ème}$ composante de $X_{\psi(n)}$.

La suite $(x_{n,1})$ est bornée par 1. On en extrait par le théorème de Bolzano-Weierstrass une sous-suite convergente $(x_{\varphi_1(n),1})$ de limite z_1.
La suite $(x_{\varphi_1(n),2})$ est encore bornée par 1. On en extrait une sous-suite convergente $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n),2})$ de limite z_2.
On réitère le processus d fois. En posant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_d$ alors l'application φ est une extractrice qui répond à la question en utilisant le fait que toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.
Comme on a utilisé uniquement des indices $\psi(n)$ pour lesquels les $i_0^{ème}$ composantes sont toutes égales à 1, alors la sous-suite correspondant à la $i_0^{ème}$ composante converge vers $z_{i_0} = 1$.

(c) Par le produit matriciel, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, la suite $((AX_{\varphi(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, donc la suite $((X_{\psi(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par unicité de la limite, on devrait avoir $1 = z_{i_0} = 0$...
On a montré qu'il existait un entier n tel que la matrice $I_d - \dfrac{1}{n}A$ soit inversible.

14. (a) On a $F \subset \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$. De plus, $0 = 0(A)Y \in F$. Si $P(A)Y$ et $Q(A)Y$ sont dans F et α est dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\alpha \cdot P(A)Y + Q(A)Y = (\alpha P + Q)(A)Y$$

reste dans F.
De plus, si $Z = P(A)Y$ est dans F, alors :

$$u_A(Z) = AZ = Q(A)Y,$$

avec $Q(X) = XP(X) \in \mathbb{C}[X]$.
Ainsi, $u_A(Z)$ appartient encore à F.

(b) Parmi tous les polynômes P non nuls (et il en existe) dans $\mathbb{C}[X]$ et tels que $P(A)Y = 0$, on choisit $P_0(X)$ un polynôme de degré minimal dont on note s le degré.
Le polynôme P_0 est un générateur de l'idéal :

$$I = \Big\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A)Y = 0\Big\},$$

idéal non réduit à $\{0\}$ puisque la famille $(A^kY)_{k\in\mathbb{N}}$ est liée.
Soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k A^k Y = 0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de $\mathscr{F} = (Y, AY, \cdots, A^{s-1}Y)$.
Le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k X^k$ est dans l'idéal I, donc est multiple de P_0, imposant $Q = 0$ et la nullité de tous les scalaires.
Si $Z = P(A)Y$ est dans F, en posant la division euclidienne de P par P_0, on écrit :

$$P = QP_0 + R,$$

avec $\deg(R) < \deg(P_0)$.

On voit alors que :

$$Z = P(A)Y = Q(A)P(A)Y + R(A)Y = R(A)Y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}).$$

On en déduit que $s = \dim(F)$ et donc que $r = s$. On a ce qu'il faut.

(c) Le rang de B vaut au moins $r-1$ en prenant les $(r-1)$ premières colonnes. On prend la dernière colonne si et seulement si b_1 est non nul.

Ainsi, si $b_1 = 0$, le rang vaut $r-1$ et si $b_1 \neq 0$, le rang vaut r.

Si $b_1 = 0$, alors la matrice B n'est pas inversible.

Si $b_1 \neq 0$, alors le polynôme $P(X)$ n'admet pas 0 comme racine et donc $\lambda \neq 0$.

En résolvant l'équation $BY = \lambda Y$, d'inconnue Y, on remarque qu'en posant :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix},$$

avec $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{b_j}{\lambda^{i-j+1}}$, alors $BY = \lambda Y$ et Y est non nul : la matrice $B - \lambda I_r$ n'est donc pas inversible.

(d) Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On considère un vecteur colonne non nul Y. On considère l'espace F de la question 14.(a)

On dispose d'une base de F dans la question 14.(b) et la matrice représentant la restriction de u_A sur F selon cette base est de la forme de la matrice B.

Par la question précédente, on trouve un vecteur y non nul dans F tel que $u_A(y)$ soit colinéaire à y, de la forme λy.

La matrice $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible car sa restriction à F ne l'est pas.

15. (a) Soit x un vecteur de F. Alors, $u_A(x) = \lambda \cdot x$. On en déduit :

$$u_A(u_A(x)) = \lambda \cdot u_A(x),$$

et donc $u_A(x)$ est bien dans le noyau de $\ker(u_A - \lambda \,\mathrm{id})$.

(b) Soit x dans $H \cap ((L \cap G))$. Alors, x est dans $H \cap L$ réduit à $\{0\}$: la somme $H + (L \cap G)$ est directe.

Soit maintenant y dans G. On pose :

$$y = y_H + y_L,$$

avec des notations intuitives.

Le vecteur y_L vaut $(y - y_H)$ qui appartient à G : $y_L \in (L \cap G)$ et on a bien ce qu'il faut.

(c) On montre par récurrence forte sur l'entier d l'assertion suivante :

$\mathscr{Q}(d)$: « *si E est un espace de dimension d, si $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie que tout sous-espace F de E stable par u admet un supplémentaire encore stable par u, alors l'endomorphisme u est diagonalisable.* »

Lorsque $d = 1$, tous les endomorphismes de E sont des homothéties et si $d = 0$, également (seule l'application nulle est dans $\mathscr{L}(E)$) et tout est alors diagonalisable.

Supposons $\mathscr{Q}(k)$ vraie jusqu'au rang d.

Soit E un espace de dimension $d+1$. On se donne un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie que si F est stable par u, il existe G supplémentaire encore stable par u.

On distingue deux cas :

- si u est une homothétie, c'est réglé ;
- si u n'est pas une homothétie, on trouve $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda\mathrm{id}$ ne soit pas inversible (question Q.14). L'espace $F = \ker(u - \lambda\mathrm{id})$ est stable par u. Il existe un supplémentaire G de F stable par u.
  On pose $v = u_{|G}$ la restriction de u à G. On va tenter d'appliquer l'hypothèse de récurrence forte sur l'espace G et l'endomorphisme v.
  Soit H sous-espace de G stable par v. Alors H est stable par u et on trouve un supplémentaire L de E encore stable par u. On sait alors par la question précédente que H et $L \cap G$ sont supplémentaires dans G. De plus, $L \cap G$ est stable par u, donc par v. Comme G est de dimension $\dim(E) - \dim(F) < \dim(E)$, on peut appliquer l'H.R. forte et l'endomorphisme v est diagonalisable. On obtient ce qu'il faut en prenant $u = u_A$ et v la restriction de u_A à G.

16. Avec les notations précédentes, on sait que u_A est une homothétie sur l'espace F. On trouve une base $\mathscr{B}_F$ de F.

    On trouve une base $\mathscr{C}$ de G de telle sorte que la matrice $\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(u_{A|G})$ soit diagonale.

    On en déduit que la famille $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ selon laquelle l'endomorphisme u_A est représenté par une matrice diagonale.

    On transpose aisément cet énoncé aux endomorphismes plutôt qu'aux matrices A et aux applications linéaires u_A associées.