

Nombres réels, suites

29 août 2018

1 Nombres réels

1.1

Déterminer toutes les isométries de \mathbf{R} muni de sa distance usuelle.

✓ 1.2

Dans tout ce qui suit, $I = [a, b]$ est un segment de \mathbf{R} , d'intérieur non vide, et f une fonction continue de I vers \mathbf{R} .

✓ a) Montrer que f est bornée sur I . On pourra introduire $c = \sup\{y \in I \mid f \text{ est bornée sur } [a, y]\}$. Prouver ensuite que f atteint sa borne supérieure sur I .

✓ b) On suppose que $f(a)f(b) < 0$. Montrer que f s'annule sur I .

En déduire que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Que dire si f ne s'annule pas ?

1.3 ~

On conserve les notations ci-dessus : I, f . Soit $J_\lambda, \lambda \in \Lambda$, une famille d'intervalles ouverts de \mathbf{R} recouvrant I (i.e. dont la réunion contient I). Montrer que l'on peut en extraire une sous-famille finie qui recouvre I .

1.4

Soit $(I_n) = (]a_n, b_n[)$ une suite décroissante d'intervalles ouverts bornés non vides de \mathbf{R} . Montrer que l'intersection des I_n est non vide dès qu'aucune des suites $(a_n), (b_n)$ n'est stationnaire.

1.5

Etudier la densité de l'ensemble des nombres de la forme $\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbf{N}^2$.

1.6

(u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que (i) $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$; (ii) $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$. Montrer que $\{u_n - v_m \mid m, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans \mathbf{R} . En déduire que $\{\sin(\log(n)) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

2 Suites réelles : généralités

2.1

Soit (x_n) une suite bornée de réels strictement positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.
La suite (x_n) est-elle convergente ?

2.2

Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels telle que $\forall n, 2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$.
Montrer que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et que la suite (x_n) converge.

2.3

Soit $x_n = \cos(1/n \pi)$. Montrer que la suite converge pour $x \in \mathbb{Q}$ mais aussi pour $x = 2x$.

2.4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes. Montrer que la suite $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ converge.

- 2.5 **Suites presque monotones.** (a) Soit (v_n) une suite de nombres complexes, et σ une permutation de \mathbb{N} . Montrer que (v_n) converge ssi $v_{\sigma(n)}$ converge.
(b) Quelles sont les suites réelles (v_n) telles qu'il existe une permutation σ de \mathbb{N} telle que la suite $v_{\sigma(n)}$ soit monotone à partir d'un certain rang ?

3 Exp et Log

3.1

Soit u_n une suite réelle. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$. Étudier la suite u_n^n .

Application : Étudier la suite $u_n = \left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{4n+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3n+2}\right) \right) \right)^n$.

3.2

Soit $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{k}{n^2}} \right)$. Étudier le comportement de la suite u_n .

3.3

- a) Soit x un réel irrationnel et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers p et q tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^N}$ et $1 \leq q \leq N$.
b) Étudier la suite $u_n = \cos^n(n)$.

$$\frac{f(x_k) - x_k}{x_{k+1} - x_k} = a_m (f(x_k) - x_k) \leq D_m$$

$$l_m - x_0 \leq \sum a_k$$

$$\frac{1}{4} \left| \frac{1}{x_n^2} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} < 1$$

3.4 Cercle de valeurs d'adhérence ✓

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{i}{k})$.

4 Suites récurrentes

4.1

Etudier les suites définies par récurrence par

- $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1/u_n)$ ✓
- $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{u_n})$ ✓
- $u_{n+1} = \sin 2u_n$.
- $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$
- $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n^3 \sin(1/u_n)$

4.2

Soit (a_n) une suite de réels de $[0, 1]$ tendant vers 0, x_0 dans $[0, 1]$ et f continue de $[0, 1]$ dans lui-même. On définit :

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n).$$

- ✓ a) Montrer que si la série de terme général a_n converge, la suite (x_n) converge.
- ✓ b) On suppose que la suite (x_n) converge vers l non point fixe de f . Montrer que la série de terme général a_n converge.
- ✓ c) On suppose f de classe C^1 , avec un unique point fixe l , et que la série de terme général a_n diverge. Montrer que la suite (x_n) converge vers l .
- ~ d) Montrer que la suite x_n est toujours convergente.

4.3 ✓

Soient $a \in [0, 1[$ et u_n la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n^2 E(1/u_n).$$

Montrer que u_n est stationnaire, ou converge vers 0.

4.4

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de $0 < u_0 < v_0$ et récurrence $u_{n+1} = (u_n v_{n+1})^{1/2}$ et $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$.

4.5

On se donne a_0 et a_1 strictement positifs. Nature de la suite définie par récurrence par $a_{n+2} = \log(1 + a_{n+1}) + \log(1 + a_n)$. On pourra introduire les suite récurrentes attachées à $f(x) = 2 \log(1 + x)$.

4.6

Soit u_n une suite réelle telle que $u_{n+1} - \sin u_n$ tende vers 0. Montrer que u_n tend vers 0. *Méthode suggérée.* Montrer que u_n est bornée, introduire l'ensemble A des valeurs d'adhérence de (u_n) et prouver que $\sin(A) = A$.

4.7

Soit u_n la suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$u_0 > \alpha \implies (u_n) \mapsto +\infty ; \quad u_0 < \alpha \implies (u_n) \mapsto 0$$

Etudier le cas restant où $u_0 = \alpha$.

Handwritten notes and calculations:

$f(x_k) - x_k \rightarrow 0$

$(A) \in \{x_k, |f(x_k) - x_k| \leq \varepsilon\}$

$f(x_k) - x_k \rightarrow 0$

$\Rightarrow x_n - x_0 = \sum_{k \in A} \alpha_k (f(x_k) - x_k) + \sum_{k \notin A} \alpha_k (f(x_k) - x_k)$

$> \varepsilon \sum_{k \in A} \alpha_k$

donc $f(x_n) - x_n \rightarrow 0$

$\exists \varphi: f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \rightarrow 0$

$f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \rightarrow 0$

$\frac{x_n - x_0}{(n)} = \sum_{k \in \varphi(N)} \alpha_k (f(x_k) - x_k)$

$\Rightarrow \frac{x_n - x_0}{(n)} \rightarrow 0$