ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. [$\circ$]
Démontrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2. [$\bigstar$]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(k)$ le nombre de diviseurs positifs de k. On pose

$$\overline{\tau}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau(k).$$

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}\right) - 1 < \overline{\tau}(n) \leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}.$$
2. En utilisant l'encadrement $\ln(n) \leqslant \sum_{d=1}^{n} \dfrac{1}{d} \leqslant \ln(n) + 1$, donner un encadrement de $\overline{\tau}(n)$.

Exercice 3. [$\circ$]
Résoudre l'équation $42x \equiv 85\ [121]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. [$\circ$]
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
1. Démontrer que $(3a + 7b) \wedge (2a + 5b) = a \wedge b$.
2. Démontrer que $(a^2 + b^2) \wedge (ab) = (a \wedge b)^2$.

Exercice 5. [$\star$]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les entiers a_n et b_n par

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

1. Justifier l'existence de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que $a_n \wedge b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication : Utiliser* $(1 - \sqrt{2})^n$.

Exercice 6. [$\circ$]
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Soit $p \in \mathbb{P}$. Démontrer la *formule de Legendre*
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$
en expliquant pourquoi cette formule a bien un sens.
2. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$. Démontrer que le coefficient multinomial
$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \,\ldots\, k_p!} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7. [★] (Nombres parfaits pairs)

1. Soit $M_p = 2^p - 1$ un nombre de Mersenne premier. On rappelle que cela implique que p est premier. Démontrer que $n = 2^{p-1}M_p$ est un nombre parfait, c'est-à-dire que la somme de ses diviseurs stricts (i.e. sauf lui-même) est égale à lui-même.
2. Démontrer que tout nombre parfait pair est du type précédent.

On conjecture qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs.

Exercice 8. [⋆]

Dans cet exercice, la lettre p désigne un nombre premier.

1. Soit $k \geqslant 1$. Démontrer que si p est un nombre premier tel que $k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1$ alors p divise le coefficient binomial $\binom{2k+1}{k}$. En déduire que
$$\prod_{k+2\leqslant p\leqslant 2k+1} p \leqslant 4^k.$$
2. Démontrer que
$$\forall n \geqslant 0, \qquad \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

Une étude plus fine montre que $\prod_{p\leqslant n} p \leqslant c^n$ *pour tout* $n \geqslant 1$ *avec* $c = 2,82590\ldots$ *C'est le meilleur coefficient possible : il y a égalité pour* $n = 113$ *et seulement dans ce cas (théorème prouvé par Rosser et Schœnfeld en 1962).*

Exercice 9. [◦]

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b\ [n]$. Démontrer que $a^n \equiv b^n\ [n^2]$.

Exercice 10. [◦]

Démontrer qu'un entier n congru à 3 modulo 4 ne peut être la somme de deux carrés.

Exercice 11. [⋆]

Résoudre l'équation $15x^2 - 7y^2 = 9$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$. *Indication :* $\mathbb{F}_3$.

Exercice 12. [★]

1. On appelle *triangle pythagorique* un triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^2 + y^2 = z^2$ où x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
   a) Démontrer que x et y ne sont pas de même parité.
   Quitte à échanger x et y, on suppose par la suite que x est impair et y est pair.
   b) Démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{Q}$ tel que
   $$\frac{x}{z} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{z} = \frac{2t}{1+t^2}.$$
   c) En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et de parités différentes tels que
   $$x = b^2 - a^2, \qquad y = 2ab \qquad \text{et} \qquad z = a^2 + b^2.$$
2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A} = xy/2$ d'un triangle pythagorique (x, y, z) n'est jamais un carré parfait (Lemme de Fermat).
3. Démontrer le grand théorème de Fermat dans le cas $n = 4$: l'équation $x^4 + y^4 = z^4$ n'admet pas de solutions entières non triviales (c'est-à-dire telles que $xy \neq 0$).