Planches de révisions : corrigés

Solution 1 : algèbre linéaire

1. On écrit une relation de Bezout :
$$PU + QV = 1.$$
On applique cette relation en l'endomorphisme u :
$$U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}_E \qquad (\bigstar).$$
Il y a plusieurs choses à montrer :
• Soit x dans l'intersection des deux noyaux. Alors,
$$P(u)(x) = 0 = Q(u)(x).$$
En appliquant $\bigstar$ en le vecteur x, on a directement $x = 0$: la somme est directe.
• Soit $x \in \mathrm{Ker}\Big((P \times Q)(u)\Big)$. Alors,
$$x = x_1 + x_2,$$
avec $x_1 = V(u) \circ Q(u)(x)$ et $x_2 = U(u) \circ P(u)(x)$. Il est facile de voir que $x_1 \in \mathrm{Ker}\Big(P(u)\Big)$, puisque :
$$P(u)(x_1) = \Big(P \times U \times Q\Big)(u)(x) = U(u)\Big((P \times Q)(u)(x)\Big) = U(u)(0) = 0.$$
De même, $x_2 \in \mathrm{Ker}\Big(Q(u)\Big)$.
• Si x est dans le premier noyau par exemple, alors $P(u)(x) = 0$, puis $0 = Q(u)\Big(P(u)(x)\Big) = 0$ et donc :
$$0 = (P \times Q)(u)(x),$$
et x dans le noyau de gauche.
2. On applique ce qui précède à $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'endomorphisme u du décalage :
$$u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$
de sorte que :
$$F = \mathrm{Ker}\Big(u^3 - 3u - 2\mathrm{id}_E\Big).$$
Le polynôme $X^3 - 3X - 2$ se factorise comme suit :
$$X^3 - 3X - 2 = (X + 1)(X^2 - X - 2) = (X + 1)^2(X - 2).$$
On en déduit qu'en posant :
$$G = \mathrm{Ker}((u + \mathrm{id})^2) \text{ et } H = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}),$$

alors :

$$F = G \oplus H.$$

Or, G et H sont des ensembles connus car associés à des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou d'ordre 1 (suites géométriques dans ce cas).

Une base de G est :

$$\Big(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n\ n)_{n\in\mathbb{N}} \Big).$$

Une base de H est :

$$\Big((2^n)_{n\in\mathbb{N}} \Big).$$

Il suffit de concaténer ces deux familles pour avoir une base de F.

3. On note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de la matrice A. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$F_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i\ I_n).$$

Chaque matrice $A - \lambda_i\ I_n$ est une matrice triangulaire supérieure avec un coefficient diagonal nul, donc de déterminant nul, donc non inversible.

En réitérant la première question, on obtient que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, l'hérédité provenant du fait que le polynôme $X - \lambda_n$ est premier avec le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X - \lambda_i)$.

Chaque espace F_i est non réduit à $\{0\}$, donc de dimension au moins 1, et exactement de dimension 1 car sinon,

$$\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})) \geqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) > n.$$

On choisit une base (e_i) de F_i, de sorte que la famille $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A(e_i) = \lambda\ \cdot e_i,$$

alors la matrice représentant l'endomorphisme A selon la base $\mathscr{B}$ est exactement la matrice diagonale de diagonale identique à celle de la matrice A.

Solution 2 : probabilités

1. La variable X_1 s'interprète comme une somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant la loi de Bernoulli de paramètre p,

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

avec Z_i la fonction indicatrice de l'événement :

« la $i^{\text{ème}}$ pièce a donné pile *au premier lancer. »*

Ainsi, $X_1 \sim \mathscr{B}(n, p)$.

2. D'une part, $X_2(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

   Ensuite, soit k un entier entre 0 et n. On utilise le SCE $\Big(\{X_1 = i\}\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant n\Big)$ de sorte qu'avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_2 = k, X_1 = i) = \sum_{i=0}^{n-k} \mathbb{P}(X_2 = k, X_1 = i),$$

   car $X_1 + X_2 \leqslant n$. Or,

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = k) = \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(X_2 = k \mid X_1 = i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} \times \begin{pmatrix} n-i \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-i-k},$$

   car la probabilité conditionnelle s'interprète également comme une loi binomiale.
   Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k (1-p)^k \sum_{i=0}^{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ i \end{pmatrix} p^i ((1-p)^2)^{n-k-i} = \mathscr{B}(n, p(1-p))(\{i\}).$$

   Ainsi, $X_2 \sim \mathscr{B}(n, p(1-p))$.
3. La somme compte le nombre de pièces donnant « pile » à l'étape numéro k. La somme vaut exactement X_k.
4. Si $s \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$, l'événement $\{Y_\ell = s\}$ s'interprète comme l'événement : « la pièce numéro ℓ a donné sucessivement face $(s-1)$ fois de suite puis pile. Par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(Y_\ell = s) = p\ (1-p)^{s-1}.$$

5. Les variables $\mathbf{1}_{\{Y_\ell = k\}}$, lorsque ℓ varie sont mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions. Chacune de ces variables suit la loi de Bernoulli de paramètre $\rho = p\ (1-p)^{k-1}$.
   La variable X_k suit donc la loi binomiale :

$$X_k \sim \mathscr{B}(n, p\ (1-p)^{k-1}).$$

6. On montre de même que :

$$X_1 + \cdots + X_k = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_\ell \leqslant k\}}$$

   et donc que :

$$X_1 + \cdots + X_k \sim \mathscr{B}\left(n, \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1}\right).$$

Solution 3 : probabilités

1. Pour la question, cela revient à placer deux livres d'Informatique parmi 15 places et à calculer la probabilité que ces deux livres d'Informatique ne soient pas côte à côte. On passe à l'événement contraire.
   Il y a $\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 105$ placements possibles et parmi ces placements, il y en a 14 favorables.
   La réponse est donc :

$$1 - \frac{14}{105} = \frac{91}{105}.$$

2. On considère tous les livres différents. Il y a donc $15!$ rangements possibles.

   Les rangements favorables s'obtiennent de la manière suivante.

   Il suffit de placer les matières les unes par rapport aux autres, ce qui fait $5!$ dispositions possibles et ensuite, on range par matière. Il y a donc $5! \times 5! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1$ dispositions favorables. La probabilité recherchée vaut donc :

$$\frac{5! \times 5! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1}{15!},$$

   quotient que l'on peut sûrement simplifier...

3. Là encore, on compte les dispositions favorables. Le calcul est ici un peu plus pénible. On choisit une disposition des livres de Français. Le nombre de dispositions favorables du livre d'Anglais dépend fortement de la disposition des livres de Français, ce qui ne permet pas de factoriser simplement les choses. Le plus « simple » est de répertorier toutes les configurations des livres de Français, selon qu'un livre est sur le bord ou non, selon que les livres de Français soient côte à côte ou non.

Solution 4 : suites

1. (a) Les suites u et v ne prennent que des valeurs strictement positives, sont strictement croissantes. Elles divergent vers $+\infty$. On détaille par exemple pour la suite u. Si la suite u convergeait vers $\ell > 0$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on aurait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ ce qui est impossible.

   (b) On établit un équivalent de u_n et de v_n avec la technique de l'exposant.

   • Pour la suite u, on remarque que la suite $\left(w_n = u_{n+1}^2 - u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2. En utilisant le lemme de Cesarò, on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} \sqrt{2n}.$$

   La série à termes positifs $\sum_n u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -2$.

   • Pour la suite v, on remarque que la suite $\left(x_n = v_{n+1}^3 - v_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3. En utilisant le lemme de Cesarò, on obtient :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} \sqrt[3]{3n}.$$

   La série à termes positifs $\sum_n v_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -3$.

2. (a) Par récurrence, tous les termes w_n sont compris entre 0 et 1, car c'est le cas au rang 0 et si c'est le cas au rang n, alors :

$$w_{n+1} \geqslant 0$$

   et d'autre part,

$$w_{n+1} \leqslant \frac{w_n - w_n^2}{1 + w_n^2} \leqslant w_n \leqslant 1.$$

   La suite w est ainsi décroissante minorée par 0, donc convergente de limite $\ell \geqslant 0$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = \frac{\ln(1 + \ell - \ell^2)}{1 + \ell^2}.$$

Si $\ell > 0$, alors
$$\frac{\ln(1+\ell-\ell^2)}{1+\ell^2} < \ell - \ell^2 < \ell,$$
ce qui est faux.

La suite w converge vers 0.

(b) On utilise un développement limité de la forme :
$$\ln(1+u-u^2) = u - \frac{3}{2}u^2 + \circ(u^2),$$
pour obtenir que les réels $\beta = 1$ et $\ell = \dfrac{3}{2}$.

(c) On termine par le lemme de Cesarò pour avoir :
$$w_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \frac{2}{3n}.$$

3. (a) La fonction f est de classe C^1 sur I. Il est clair que $f(I) \subset I$.
De plus, pour tout $x \in I$,
$$f'(x) = \frac{e^{-x} - 2e^x}{(2e^x + e^{-x})^2},$$
donc :
$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2e^x + e^{-x}} \leqslant \frac{1}{3}.$$
La fonction f est $\dfrac{1}{3}$-contractante, en utilisant derrière tout cela le théorème des accroissements finis.

(b) C'est le théorème du point fixe !

(c) i. Si $x_{n+1} = \ell$, alors $f(x_n) = f(\ell)$ et la fonction f étant strictement décroissante sur I, $x_n = \ell$.
Ainsi, par contraposé, comme $x_0 \neq \ell$, alors tous les termes x_n sont différents de ℓ et tous les a_n sont strictement positifs : les quantités c_n sont bien définies.
On établit un développement asymptotique de la quantité positive c_n.
Par la formule de Taylor-Young,
$$x_{n+1} - \ell = f(x_n) - f(\ell) = (x_n - \ell)\ f'(\ell) + \mathcal{O}((x_n - \ell)^2).$$
Ainsi,
$$a_n = |\rho| + \mathcal{O}(x_n - \ell),$$
puis :
$$c_n = \ln\left(1 + \mathcal{O}(x_n - \ell)\right) = \mathcal{O}(x_n - \ell).$$
Or, par le théorème du point fixe, on sait que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3^n}\ |x_0 - \ell|.$$
Ainsi, $x_n - \ell = \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Le résultat est alors maintenant assez clair.

ii. On remarque qu'en posant $d_n = \dfrac{x_n - \ell}{\rho^n}$, alors la quantité $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ est toujours strictement positive car $\rho < 0$ et les quantités d_n et d_{n+1} sont de signe identique par décroissance de la fonction f sur I.
On en déduit :
$$c_n = \ln(d_{n+1}) - \ln(d_n).$$
La série télescopique $\sum\limits_n \Big(\ln(d_{n+1}) - \ln(d_n)\Big)$ converge impliquant que la suite $(\ln(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie λ et donc que la quantité d_n converge vers $C = e^\lambda > 0$. On obtient alors immédiatement le résultat voulu.

Solution 5 : fonctions

1. La fonction $g : t \longmapsto f(t) - t$ est continue. Si la fonction g ne s'annule pas, elle garde un signe constant sur l'intervalle $[0, 1]$, par le TVI. Le théorème aux quatre hypothèses appliqué à la fonction g donne que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g$ ne peut être nulle, alors qu'elle l'est.
2. La fonction f s'annule au moins trois fois sur $[0, 1]$.
En effet, à chaque changement de signe, il y a une valeur d'annulation de la fonction f sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ tel que $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.
Cependant, la fonction f peut s'annuler strictement plus de trois fois ce qui est le cas si la fonction f est nulle sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, puis égale à une fonction affine par morceaux qui changement de signe trois fois sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, les changements de signe ayant lieu en des points irrationnels. Cette fonction f vérifie les hypothèses mais s'annule une infinité de fois.
3. (a) L'espace $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$ est de dimension 2.
Si $a \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{sh}\,(t + a) = \mathrm{sh}\, a \times \mathrm{ch}\, t + \mathrm{ch}\, a \times \mathrm{sh}\, t.$$
On a donc l'inclusion « $\supset$ » et lorsque $a = 0$ ou lorsque $a = 1$, les fonctions sh et $\mathrm{sh}\,(1 + \cdot)$ ne sont pas colinéaires. L'inclusion précédente couplée avec l'égalité des dimensions finies (ici égales à 2) donne l'égalité des espaces.
(b) Par ce qui précède, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{sh}\,(a + t)\, dt = 0.$$
Si la fonction f ne s'annule pas sur $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f \times \mathrm{ch}$ ne peut être nulle, par le théorème aux quatre hypothèses.
Si la fonction f ne s'annule qu'une seule fois sans changer de signe, alors la remarque précédente reste valable. Donc la fonction f change de signe en son point d'annulation a.
La fonction $\mathrm{sh}\,(-a + \cdot)$ change de signe au même moment que la fonction f, donc par le théorème aux quatre hypothèses, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{sh}\,(-a + t)\, dt$ ne peut être nulle : contradiction.

Donc la fonction f change au moins deux fois de signe sur $[0,1]$, donc sur $]0,1[$ et s'y annule au moins deux fois.

Solution 6 : algèbre linéaire

1. En utilisant la méthode classique, on obtient :

$$P = I_n \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui conviennent, le rang r de la matrice A valant 1.

2. La réponse est oui si et seulement si la matrice A est une matrice de projection. On remarque que $A^2 = A$.
La matrice Q précédente vérifie :

$$Q^{-1}AQ = J_1.$$

3. On note $(E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) La matrice A^T reste de rang 1. Une base de F est (X_1).
   Une base de G est :
   $$\Big(-kX_1 + X_k \ ; \ 2 \leqslant k \leqslant n\Big).$$
   (b) On utilise la formule de la comatrice :
   $$B \times (\mathrm{Com}(B))^T = (\mathrm{Com}(B))^T \times B = \det(B) \ I_n.$$
   Or, le déterminant $\det(B)$ doit être nul car sinon, la matrice $\mathrm{Com}(B) = A$ serait inversible ce qui n'est pas le cas.
   Ainsi,
   $$B \times A^T = A^T \times B = 0.$$
   On montre maintenant les stabilités.
   Si $X \in G$, alors $A^T B(X) = BA^T(X) = B(0) = 0$, donc $B(X) \in G$.
   Si $Y \in F$, on écrit : $Y = A^T Z$, pour une matrice colonne Z et donc :
   $$BY = BA^T Z = A^T BZ = 0 \in F.$$
   (c) La matrice A^T est encore une matrice de projection : les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Ce qui précède donne l'idée d'une bonne matrice B car on a vu que $B(X_1) = 0$ et que B laisse stable $\mathrm{Vect}(-kX_1 + X_k \ ; \ 2 \leqslant k \leqslant n)$.
   On remarque que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & \cdots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

En effet, si i et j sont deux indices entre 1 et n. On compare $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ dans la matrice B à $A_{i,j}$.

▷ lorsque $j > 1$, alors $A_{i,j} = 0$ et le mineur $\Delta_{i,j}$ est nul car la première colonne dans $\Delta_{i,j}$ est nulle

▷ lorsque $j = 1$, alors $A_{i,j} = i$ et le mineur $\Delta_{i,1}$ vaut la matrice de format $(n-1)\times(n-1)$ de première ligne $-2, -3, \cdots, -n$, avec $(i-1)$ coefficients 1 strictement en dessous de la diagonale, puis un décrochage où les 1 sont sur la diagonale. On commence par développer le déterminant par rapport aux dernières lignes ce qui donne le déterminant d'une matrice compagnon de format $i \times i$. Ce déterminant vaut $(-1)^{i+1}\, i$ et donc $\mathrm{Com}(B)_{i,1} = i$.

Solution 7 : algèbre bilinéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. C'est du classique. Pour le caractère défini positif interviennent les deux arguments suivants : le théorème aux quatre hypothèses et seul le polynôme nul admet une infinité de racines.
2. Chaque P_k est de degré k. Ensuite, on montre que les polynômes P_k sont orthogonaux. En effet, si $i < j$ sont deux entiers entre 0 et n, alors dans l'intégrale :

$$\int_0^1 P_i(t)\; P_j(t)\; dt,$$

on effectue plusieurs intégrations par parites en dérivant toujours P_i et en intégrant toujours P_j. Au bout de la $k^{\text{ème}}$ étape d'IPP avec $k < i$, on obtient un crochet de la forme :

$$\left[P_i^{(k-1)}\left[X^j(X-1)^j\right]^{(j-k)}\right]_0^1,$$

ce crochet étant nul car 0 et 1 sont des racines du second polynôme dans le crochet.

On obtient une nouvelle intégrale de la forme :

$$\int_0^1 P_i^{(k)}(t)\;\left[X^j(X-1)^j\right]^{(j-k)}(t)\; dt.$$

On peut poursuivre ce processus jusqu'à l'étape $k = i+1 \leqslant j$ et cette nouvelle intégrale est nulle car $P_i^{(i+1)}$ est le polynôme nul.

Il suffit maintenant de prendre les scalaires $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ de telle sorte que chaque $\lambda_k\; P_k$ soir de norme 1 et ait un coefficient dominant strictement positif (ce qui revient à choisir chaque λ_i strictement positif) car alors pour tout i, le produit scalaire $(X^i \mid \lambda_i\; P_i)$ sera strictement positif. En effet, on pourra exprimer X^i sous la forme :

$$X^i = \alpha_i\; P_i + \sum_{j<i} \alpha_j\; P_j$$

et donc $(X^i \mid \lambda_i\; P_i)$ est du signe de $\alpha_i\; \lambda_i$ c'est-à-dire strictement positif.

Par la caractérisation de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt, on obtient ce qu'il faut.

3. On sait que $\lambda_k > 0$ et que $\|\lambda_k \cdot P_k\| = 1$, donc :

$$\lambda_k = \frac{1}{\|P_k\|}.$$

On calcule $I_k = \displaystyle\int_0^1 P_k^2(t)\ dt$.

En effectuant les intégrations par parties, on obtient uniquement des crochets nuls. En fin de processus, la nouvelle intégrale devient :

$$I_k = (-1)^k \int_0^1 P_k^{(k)}(t)(t^k(t-1)^k)\ dt.$$

Or, $P_k(X)$ est un polynôme de degré k : le polynôme $P_k^{(k)}$ est donc constant, la constante étant égale à :

$$\left[X^k(X-1)^k\right]^{(2k)} = \left[X^{2k}\right]^{(2k)} = (2k)!.$$

Il ne reste plus qu'à calculer :

$$(-1)^k \int_0^1 t^k(t-1)^k\ dt = \int_0^1 t^k\ (1-t)^k\ dt.$$

En posant $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^n\ dt$, par IPP, on obtient pour $n > 0$:

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}.$$

Ainsi,

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1}\ \frac{n-1}{p+2}\ \cdots\ \frac{1}{p+n}\ I_{n,p+n} = \frac{n!\ p!}{(p+n)!}.$$

Ainsi,

$$I_{k,k} = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

et donc :

$$I_k = (k!)^2.$$

En conclusion :

$$\lambda_k = \frac{1}{k!}.$$

4. • méthode 1 : par les produits scalaires

On note $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_r < 1$ les abscisses des points entre 0 et 1 strictement où la courbe $y = P_k(x)$ change de signe. Il s'agit des racines de $P_k(X)$ dans $]0,1[$ à multiplicité impaire. On pose :

$$Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - x_i).$$

La fonction $t \longmapsto P_k(t)Q(t)$ est continue et garde un signe constant sur $[0,1]$. Par le théorème aux quatre hypothèses, $(P_k \mid Q) \neq 0$. Or, $\deg(Q) \leqslant k = \deg(P_k)$ et P_k est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \cdots, P_{k-1}) =$

$\mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc Q doit être de degré au moins égal à k, donc égal à k. Les polynômes P_k et Q sont proportionnels et Q est scindé à racines simples dans $]0,1[$; il en est de même pour le polynôme $P_k(X)$.

• méthode 2 : par le théorème de Rolle.
En utilisant le théorème de Rolle, on montre « facilement » la propriété suivante par récurrence sur j, pour $0 \leqslant j \leqslant k$:
$\mathscr{P}(j)$: « *le polynôme* $\left[X^k(X-1)^k\right]^{(j)}$ *admet* 0 *et* 1 *comme racines de multiplicités chacune* $k-j$ *et* j *autres racines différentes* $x_1 < \cdots < x_j$ *entre* 0 *et* 1 *strictement.* »
La propriété $\mathscr{P}(k)$ donne alors ce qu'il faut.

Solution 8 : divers

1. On remarque que $f : t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$. Les primitives de f sont :
$$F : t \longmapsto -\ln|1+e^{-t}| = -\ln(1+e^{-t}) + c = G(t) + c.$$
On cherche la constante c telle que :
$$-\int_0^1 G(t)\ dt + c = 0,$$
donc :
$$c = \int_0^1 G(t)\ dt = \int_0^1 \ln(1+e^{-t})\ dt.$$
Cette intégrale n'est pas calculable avec les moyens de première année. On laisse le résultat tel quel.
2. On procède par récurrence et on constate en dérivant l'expression proposée que la suite de polynômes $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = X\Big((1+X)P_n' - (n+1)P_n\Big),$$
convient, en n'oubliant pas dans les formules les dérivées composées.
Pour l'unicité, si P_n et Q_n conviennent au rang n, le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines, tous les nombres de la forme e^t, pour t décrivant $\mathbb{R}$. Le polynôme $P_n - Q_n$ est nul.
3. Avec la formule de récurrence, on obtient par récurrence que $\deg(P_n) = n$. On détaille un peu car il n'est pas évident que le polynôme $(1+X)P_n' - (n+1)P_n$ soit vraiment de degré n.
On a $P_0(X) = 1$ de degré 0. Si $P_n(X)$ est de degré n, on note aX^n son terme dominant. Alors, le terme dominant dans P_{n+1} sera $-aX^{n+1}$, qui est bien de degré $(n+1)$. De plus, les coefficients dominants valent alternativement ± 1.
4. On le fait par récurrence sur n.
Le résultat est acquis lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.
Supposons le résultat vrai pour un certain entier $n \geqslant 1$.
Au rang $(n+1)$, le polynôme P_{n+1} admet déjà 0 comme racine car X divise P_{n+1}.
On note $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les n racines du polynôme $P_n(X)$.

La fonction $f^{(n)}$ s'annule exactement en les points $y_2 = \ln(x_2) < \cdots < y_n = \ln(x_n)$.
Le théorème du Rolle implique que la fonction $f^{(n+1)}$ aura au moins $n-1$ points d'annulation entrelacés entre les y_k, correspondant à des racines strictement positives e^{y_k} du polynôme P_{n+1}.
La racine 0 est toujours racine de P_{n+1}.
On peut appliquer le théorème de Rolle étendu entre y_n et $+\infty$ pour la fonction $f^{(n)}$ dérivable car par les croissances comparées au voisinage de $+\infty$:

$$f^{(n)}(t) = \frac{\mathcal{O}(e^{nt})}{e^{(n+1)t}(1 + \circ(1))} = \circ(1).$$

On dispose de $(n+1)$ racines différentes positives (dont une nulle) pour P_{n+1}.

Solution 9 : divers

1. • méthode 1 : si f est une solution, en posant $a = f(1)$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = an,$$

puis comme $f(-x) = -f(x)$, alors $f = a$ id sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$, puis enfin sur $\mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de l'application $f - a$ id.
• méthode 2 : si f est solution, on note F une primitive de f. On fixe x et on intègre en y entre 0 et 1 par exemple ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) - F(x) = f(x) + F(1) - F(0).$$

Il apparaît que la fonction F étant dérivable, la fonction f l'est également.
On reprend l'équation initiale et on dérive par rapport à y par exemple :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x+y) = f'(y).$$

Ainsi, pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, en posant $y = b$ et $x = a - b$, alors $x + y = a$ et :

$$f'(a) = f'(b).$$

La fonction f' est constante donc la fonction f est affine et comme $f(0) = 0$, la fonction f est une homothétie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions solutions sont $x \longmapsto a\ x$, où $a \in \mathbb{R}$.

2. Supposons la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Alors, on peut utiliser :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Ainsi, $\sin(n+2) + \sin n = 2\sin(n+1)\cos 1$. Par passage à la limite $2\ell = 2\ell \cos 1$, donc $\ell = 0$, car $2\cos 1 \neq 0$.
Ensuite, comme $\sin(n+1) = \sin n\ \cos 1 + \cos n\ \sin 1$, la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger vers 0 ce qui pose un problème lors du passage à la limite dans $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$...

Supposons la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Alors, on peut utiliser :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Ainsi, $\cos(n+2)+\cos n = 2\cos(n+1)\cos 1$. Par passage à la limite $2\ell = 2\ell\cos 1$, donc $\ell = 0$, car $2\cos 1 \neq 0$.
Ensuite, comme $\cos(n+1) = \cos n\ \cos 1 - \sin n\ \sin 1$, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger vers 0 ce qui pose un problème lors du passage à la limite dans $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$...

3. On voit une dérivation. On pose dans $\mathbb{R}$ commutatif :

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \theta^k = (1+\theta)^n$$

et la première somme vaut $\theta\ f'(\theta)$.
Pour la deuxième somme, on pose :

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

formule que l'on peut simplifier lorsque $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Lorsque cette condition est vérifiée on a :

$$g(\theta) = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}},$$

et la seconde somme vaut :

$$-\Re e(g'(\theta)),$$

que l'on peut calculer assez facilement...
Lorsque $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors la somme proposée est nulle.

4. On fixe $n \in \mathbb{N}$. l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ Q(X) & \longmapsto & Q(2X+1)+Q(5-3X) \end{array} \right.$$

est bien définie et est linéaire. De plus, si k est un entier entre 0 et n, alors $f(X^k)$ est un polynôme de degré exactement k car $2^k + (-3)^k$ n'est jamais nul.
La matrice représentant f selon la base canonique est alors triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls : la matrice est inversible et f est un isomorphisme.
On peut maintenant revenir à la question posée.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On prend n un entier tel que $n \geqslant \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X] = f(\mathbb{R}_n[X])$ et on trouve un polynôme Q convenable dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Si Q_1 et Q_2 sont deux polynômes convenables, en posant n à la fois supérieur à $\deg(Q_1)$ et $\deg(Q_2)$, on obtient :

$$f(Q_1) = P = f(Q_2),$$

donc $Q_1 = Q_2$ par injectivité de l'isomorphisme f.

5. On remarque que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(\ln(n+1)-\ln n)=0$ et que la fonction cos est 1-lipschitzienne car $|\cos'|\leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.
Ensuite, on se donne un réel x dans $[-1,1]$. On pose $\theta=\arccos x$. On fixe $\varepsilon>0$. On va montrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que :

$$|\cos(\ln n)-\cos\theta|\leqslant\varepsilon.$$

On trouve un entier n_0 tel que :

$$\forall n\geqslant n_0,\ |\ln(n+1)-\ln n|\leqslant\varepsilon.$$

On fixe un entier k_0 tel que :

$$\theta+2k_0\pi>\ln n_0.$$

L'ensemble $\mathscr{D}=\Big\{n\geqslant n_0 \mid \ln n<\theta+2k_0\pi\Big\}$ est un ensemble non vide, majoré et inclus dans $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément n_1.
D'une part, $\ln n_1<\theta+2k_0\pi$ et d'autre part,

$$\ln(n_1+1)\geqslant\theta+2k_0\pi,$$

avec la différence : $|\ln n_1-\ln(n_1+1)|$ inférieure à ε.
On en déduit :

$$|\ln(n_1+1)-(\theta+2k_0\pi)|\leqslant\varepsilon.$$

La fonction cos étant 1-lipschitzienne, on en déduit :

$$\Big|\cos(\ln(n_1+1))-\cos(\theta+2k_0\pi)\Big|\leqslant\varepsilon.$$

Or, $\cos(\theta+2k_0\pi)=\cos(\theta)=x$.
On obtient bien ce qu'il faut.

6. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n=S_n-2\sqrt{n}$, de sorte que pour $n\geqslant 2$:

$$u_n-u_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-2\Big(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\Big).$$

De ce fait,

$$\begin{aligned}
u_n-u_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

de série absolument convergente donc convergente.
La série télescopique converge donc la suite u converge.

Solution 10 : informatique

1. Voici le code Python qui a permis d'avoir cette image :

```
from pylab import *

def Trace_Hyperbole(m) :
    LX=linspace(sqrt(m),sqrt(m)+4,1000)
    LY=[sqrt(t**2-m) for t in LX]
    figure()
    grid()
    plot([-0.5,7.5],[0,0],lw=1,color='black')
    plot([0,0],[-0.5,6.5],lw=1,color='black')
    plot(LX,LY,lw=2,color='black')
    text(4,5,'$x^2-y^2=7$')
    savefig('hyperbole.png')
    show()
Trace_Hyperbole(7)
```

2. En posant $m = 2k+1$, on remarque que le point $\Omega(k+1, k)$ est sur l'hyperbole $\mathscr{H}_m$ car $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 = m$.
3. Lorsque $m = 33$, voici ce que donne l'algorithme :
   - $M_0 = (6, 0)$ et $N_0 = (6, 2)$
   - $M_1 = (7, 2)$ et $N_1 = (7, 4)$.
4.
```
def Droite(m,x,y) :
    """calcule à partir du point [x,y] le premier
    point [t,y] à droite de [x,y] et sur ou à
    droite de l'hyperbole"""
    t=x
    while t**2-y**2<m :
        t+=1
    return [t,y]

def Haut(m,x,y) :
    """calcule à partir du point [x,y] le premier
     point [x,t] au-dessus de [x,y] et sur ou
     au-dessus de l'hyperbole"""
    t=y
    while x**2-t**2>m :
        t+=1
    return [x,t]

def Algo(m) :
    """ implémente l'algorithme énoncé """
    k=0
    Liste_M,Liste_N=[],[]
    while k**2<m :
```

```
        k+=1
    Liste_M.append([k,0])
    alterne=1-alterne
    Test_arret= k**2==m
    x,y=k,0

    while not(Test_arret) :
        alterne=1-alterne
        if alterne :
            Liste_M.append(Droite(m,x,y))
            x,y=Liste_M[-1]
        else :
            Liste_N.append(Haut(m,x,y))
            x,y=Liste_N[-1]
        Test_arret=x**2-y**2==m
    return x-y==1
```

5. La droite $y = x$ est au-dessus de l'hyperbole qui est d'équation $y = \sqrt{x^2 - m}$.
   Plaçons-nous à une étape dans l'algorithme, où le point M_{k+1} vient juste d'être calculé. On note les coordonnées $M_k(x_k, y_k)$, $N_k(x_k, y_{k+1})$ et $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$, les trois points consécutifs dans le processus de calcul.
   On va déjà montrer que $x_{k+1} = x_k + 1$.
   En effet, on peut écrire : $x_k^2 - y_k^2 > m$, $x_k^2 - (y_{k+1} - 1)^2 > m$, $x_k^2 - y_{k+1}^2 < m$, puis $x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 \geqslant m$.
   Supposons que $x_{k+1} \neq x_k + 1$. Alors, $x_{k+1} > x_k + 1$ et le point $(x_k + 1, y_{k+1})$ est strictement au-dessus de $\mathscr{H}_m$: $(x_k + 1)^2 - y_{k+1}^2 < m$, donc $x_k^2 - y_{k+1}^2 < m - 2x_k - 1$.
   Or, le point $(x_k, y_{k+1} - 1)$ est strictement à droite de $\mathscr{H}_m$: $x_k^2 - (y_{k+1} - 1)^2 > m$: $x_k^2 - y_{k+1}^2 > m - 2y_{k+1} + 1$.
   On en déduit, puisque toutes les quantités sont des entiers :
   $$m - 2x_k - 1 \geqslant m - 2y_{k+1} + 1 + 1, \text{ donc } 2x_k + 4 \leqslant 2y_{k+1},$$
   puis $x_k < y_{k+1} - 1$. Or, le point $(x_k, y_{k+1} - 1)$ est strictement à droite de $\mathscr{H}_m$, donc strictement en dessous de la droite $y = x$: $y_{k+1} - 1 < x_k$: contradiction.
   Puisque le point M_0 a pour coordonnées $M_0([\sqrt{m}] + 1, 0)$ et qu'il existe un point $P(\alpha, \beta) \in \mathscr{H}_m \cap \mathbb{N}^2$, en choisissant α minimal vérifiant cette propriété il existe un plus petit entier k tel que $x_k = \alpha$ et donc le point M_k ou le point N_k sera égal au point P et on sortira de la boucle `while` au bout d'un nombre fini d'étapes.
   On vient de voir que les abscisses des points M_k augmentaient d'une unité à chaque fois. On sait de plus qu'il existe un point de l'hyperbole à coordonnées entières. On en déduit que le processus s'arrête lorsque le point M_k ou le point N_k est à coordonnées entières sur l'hyperbole et parmi tous ces points, c'est le plus petit possible pour l'ordre lexicographique (comparaison des abscisses avant celle des ordonnées).
   En sortie d'algorithme, on obtient un point $\Omega(X, Y)$ avec (X, Y) minimal pour l'ordre lexicographique et $X^2 - Y^2 = m$, donc $(X - Y)(X + Y) = m$.
   Deux possibilités :
   - soit l'entier m est premier, auquel cas, $X - Y$ et $X + Y$ sont deux diviseurs de m, puis $X - Y = 1$ et $X + Y = m$: l'algorithme renvoie `True`

- soit l'entier m n'est pas premier, auquel cas on écrit $m = pq$, avec $q > \sqrt{m}$ minimal diviant m. Alors, il existe k tel que $x_k = q$ et $y_k = p$ (cela n'arrive pas avant car sinon, on contredit la minimalité de q). Dans ce cas, $q > \sqrt{m} > p$, puis $q - p > 1$ et $x_k - y_k \neq 1$. L'algorithme renvoie `False`.

6. L'algorithme est un test de primalité de l'entier impair m.

Solution 11 : informatique

1.
```
def Decompo(n) :
    L=[]
    while n!=0 :
        L=[n%2]+L
        n//=2
    return L
```

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et est infini car tous les entiers de la forme 2^k, pour $k \in \mathbb{N}$ appartiennent à $\mathscr{A}$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc en bijection avec $\mathbb{N}$. On peut donc décrire l'ensemble $\mathscr{A}$ sous la forme :
$$\mathscr{A} = \{u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots\}.$$

3.
```
def Test(k) :
    D=Decompo(k)
    for i in range(len(D)-1) :
        if D[i]*D[i+1] :
            return False
    return True

def L(k) :
    Res=[]
    i=1
    while len(Res) !=k :
        if Test(i) :
            Res.append(i)
        i+=1
    return Res

def U(k) :
    return L(k)[-1]
```

4. (a)
```
def S(N) :
    Somme=0
    for x in L(N) :
        Somme+=1/x
    return Somme
```

(b)
```
def Seuil(s) :
    N=1
    while S(N)<=s :
        N+=1
    return N-1
```
On peut faire des essais avec $s = 3$ ou $s = 3.6$, mais ne pas prendre s trop grand. La suite $(S(N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ est en fait convergente...

Solution 12 : informatique

1. SELECT COUNT(*) AS nbre_elements,id_ens FROM Appartenance GROUP BY id_ens;
2. SELECT App1.id, App2.id FROM
   (Appartenance AS App1 JOIN Appartenance AS App2 ON App1.id_ens=App2.id_ens)
   WHERE App1.id<App2.id;
3. Voici la phrase en langage relationnelle :

   $$\sigma_{App1.id<App2.id}\Big(\pi_{App1.id,App2.id}\Big(\rho(Appartenance \longleftarrow App1) \bowtie_{App1.id\_ens=App2.id\_ens} \rho(Appartenance \longleftarrow$$

4. SELECT id_ens FROM Appartenance WHERE (ordonnes<1/2*abscisses+3;
5. SELECT id_ens, COUNT(*) AS nbre FROM
   Appartenance WHERE id_ens LIKE "%0" GROUP BY id_ens HAVING nbre>7;

Solution 13 : dualité

1. On considère la base $\mathscr{B} = \Big((X-a)^k \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant n\Big)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.

   On pose $\varphi(1) = \lambda$. On remarque que la forme linéaire $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{ev}_a$ est nulle sur la base $\mathscr{B}$, donc est nulle partout. La famille est bien liée.
2. On note $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   La famille proposée est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ vers $\mathscr{B}$ est la matrice :

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   On « sait » alors que la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_c^*$ vers $\mathscr{B}^*$ est la matrice :

   $$Q = (P^T)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Par conséquent, la base duale est :

   $$\left(\frac{2e_1^* + 3e_2^* - 2e_3^*}{5}, \frac{3e_1^* - 3e_2^* + 2e_3^*}{5}, \frac{-e_1^* + e_2^* + e_3^*}{5}\right).$$

3. (a) La famille $\mathscr{C}$ est génératrice car Vect($\mathscr{C}$) contient tous les vecteurs e_k, pour $k \neq j_0$ et donc ensuite e_{j_0}, donc contient E.

   (b) On a obtenu la base $\mathscr{C}$ par une transvection à partir de la base $\mathscr{B}$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$ est donc la matrice de transvection seule la $j_0^{\text{ème}}$ colonne comporte des coefficients non nuls éventuellement. La matrice de passage de $\mathscr{B}^*$ vers $\mathscr{C}^*$ est $Q = (P^T)^{-1}$. L'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection, donc seule la $j_0^{\text{ème}}$ colonne de Q ne comporte éventuellement des coefficients non nuls.

4. (a) Une base de F est $\Big((X-2)^k\ ;\ 1 \leqslant k \leqslant n\Big)$.

   Une base de G est $\Big(X+1; X^2+X^3\Big)$.

   (b) Comme $X+1 \notin F$ et que F est un hyperplan, alors $F+G = \mathbb{C}_n[X]$, donc par la formule de Grassmann,
$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\mathbb{C}_n[X]) = 1.$$
   Il suffit de choisir un polynôme non nul dans $F \cap G$. Un tel polynôme est de la forme $X^2 + X^3 + \lambda(X+1)$, et l'évaluation en 2 donne :
$$12 + 3\lambda = 0.$$
   On en déduit qu'une base de $F \cap G$ est $\Big(X^3 + X^2 - 4X - 4\Big)$.

   (c) Comme $1 + X + X^2 \notin F$ et que F est un hyperplan, alors $F \oplus H = E$.

   (d) Soit $P \in E$. On pose :
$$P = P_F + \lambda \cdot (1 + X + X^2).$$
   L'évaluation en 2 donne :
$$P(2) = \lambda \cdot 7.$$
   Ainsi, le projeté de P sur F parallèlement à H est :
$$p(P) = P_F = P - \frac{P(2)}{7} \cdot (1 + X + X^2).$$

   (e) Le plus simple est de transposer la question matriciellement.

   On se place dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $F \oplus H = E$. On utilise l'isomorphisme d'algèbres :
$$\Phi : f \longmapsto \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f).$$
   La matrice P représentant le projecteur p est la matrice J_n (de format $(n+1) \times (n+1)$).

   Les matrices $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AP = 0$ sont les matrices de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$
   avec A_2 de format $1 \times n$ et A_4 de format 1×1.

   Ainsi, $\dim(\mathscr{G}) = n + 1$.

   Les matrices $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant $PAP = 0$ sont les matrices de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$
   avec A_2 de format $1 \times n$, A_3 de format $n \times 1$ et A_4 de format 1×1.

   Ainsi, $\dim(\mathscr{H}) = 2n + 1$.

Solution 14 : divers

1. On utilise les règles de Bioche.
   - On pose $u = \tan t$ et la nouvelle intégrale devient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{3+2u^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3/2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3/2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\pi}{2}.$$

   - On pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$ et la nouvelle intégrale devient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{du}{1+u+u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \int_{1/2}^{3/2} \frac{dv}{v^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right)\right]_{1/2}^{3/2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. - On met le polynôme sous forme canonique :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^2 \frac{dt}{(t+1/2)^2+\frac{7}{4}} \\ &= \int_{1/2}^{5/2} \frac{du}{u^2+\frac{7}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{7}}\right)\right]_{1/2}^{5/2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{7}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right). \end{aligned}$$

   - On factorise le polynôme :

$$-6+X+X^2 = (X-2)(X+3).$$

   On effectue la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{-6+X+X^2} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+3},$$

   avec $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = -\dfrac{1}{5}$.

On en déduit l'intégrale :

$$L = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+3}\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 3 - 3\ln 2}{5}.$$

3. On met encore sous la forme canonique :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t+1/2)^2+\frac{3}{4}}} \\ &= \int_{1/2}^{3/2} \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dw}{1+\sqrt{w^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{argsh}(\sqrt{3}) - \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

4. (a) Si n est fixé dans $\mathbb{N}^*$, la fonction :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [n,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_n^u \frac{e^t}{t}\,dt \end{array} \right.$$

est dérivable de dérivée strictement positive sur l'intervalle $]n,+\infty[$. De plus, comme $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$ alors la fonction F tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $F(n)=0$.
Il existe par le TVI un seul réel x_n tel que $F(x_n)=n^2$.
D'autre part, si $x<n$, l'intégrale est soit non définie (si $x<0$), soit strictement négative. Les solutions éventuelles étaient dans le domaine de définition de la fonction F.
Il n'y a donc qu'une seule solution : $x_n = F^{-1}(n^2)$.

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ car $x_n > n$.
Ensuite, on utilise l'équation implicite :

$$F(x_n) = n^2.$$

Or,

$$F\left(n+\frac{1}{n}\right) \geqslant \int_n^{n+1/n} \frac{e^n}{t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\simeq} \frac{e^n}{n}.$$

Pour n assez grand, $F\left(n+\dfrac{1}{n}\right) > n^2$, donc $n < x_n < n+\dfrac{1}{n}$, donc :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} n.$$

En fait, $x_n = n + \circ(1)$.

(c) Pour avoir le terme suivant dans le développement asymptotique, on peut utiliser une forme de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction F entre n et x_n, ce qui donne :

$$F(x_n) = F(n) + F'(n)\ (x_n - n) + \frac{F''(n)}{2}\ \mathscr{O}((x_n - n)^2).$$

Ainsi,

$$n^2 = \frac{e^n}{n}\ (x_n - n) + \frac{ne^n - e^n}{n^2}\ \mathscr{O}((x_n - n)^2).$$

On en déduit :

$$\frac{n^3}{e^n} = x_n - n + \circ(x_n - n).$$

Conclusion,

$$x_n = n + n^3 e^{-n} + \circ(n^3 e^{-n}).$$

5. On utilise au voisinage de 1 en la variable t et donc au voisinage de 0 en la variable h avec $x = 1+h$:

$$\frac{e^{1+h}}{\ln(1+h)} = \frac{e}{h}(1 + \circ(1)).$$

On en déduit :

$$\int_{\cos x - 1}^{\cos^2 x - 1} \frac{e}{h}(1 + \circ(1))\ dh = e \ln \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x - 1} + \circ\left(\ln \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x - 1}\right)$$

quantité équivalente à $e\ln(1 + \cos x)$ de limite $e \ln 2$.

Solution 15 : algèbre linéaire

1. Il est clair que l'application f est linéaire. Il s'agit de montrer que l'image de f est bien incluse dans $\mathbb{C}_n[X]$.
Si P est un polynôme de degré inférieur à $(n-1)$, il est clair que $f(P)$ appartient bien à $\mathbb{C}_n[X]$.
Or, $f(X^n) = nX^n + (n-1)X^{n-1}$, donc par linéarité, l'image de f est bien incluse dans $\mathbb{C}_n[X]$, les termes en X^{n+1} se supprimant toujours.
2. Soit P un polynôme non nul dans $\mathbb{C}_n[X]$. On pose :

$$P = \xi \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où les λ_k sont les racines différentes dans le polynôme P et les α_k sont les multiplicités dans $\mathbb{N}^*$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in E_\lambda(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(P) = \lambda P \\
&\Longleftrightarrow \quad (X^2 + X + 1)P' = (nX + 1 + \lambda)P \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{P'}{P} = \frac{nX + 1 + \lambda}{X^2 + X + 1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k} = \frac{a}{X - j} + \frac{b}{X - j^2},
\end{aligned}$$

avec $a = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(nj + 1 + \lambda)$ et $b = n - a$.
Si P est dans $E_\lambda(f)$, alors les quantités a et $b = n - a$ sont des entiers entre 0 et n, imposant à λ d'être de la forme :

$$\lambda = -\frac{k}{\sqrt{3}} - 1 - nj,$$

avec $k \in [\![0, n]\!]$ et donc au polynôme P de n'avoir que deux racines au maximum, la racine j de multiplicité $a = k$ et la racine j^2 de multiplicité $b = n - a = n - k$.
Réciproquement, si $P = (X - j)^k (X - j^2)^{n-k}$, alors en remontant les calculs faits plus haut, on obtient :

$$f(P) = \lambda\ P, \text{ avec } \lambda = -i\frac{k}{\sqrt{3}} - 1 - nj.$$

En résumé, lorsque λ n'est pas de cette forme, une base est $\emptyset$ et lorsque λ est de cette forme, une base est $\Big(P_k(X) = (X - j)^k (X - j^2)^{n-k}\Big)$.

3. La famille $(P_k(X)\ ;\ 0 \leqslant n \leqslant n)$ compte $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   On montre que la famille est libre. En effet, si la famille était liée, on pourrait exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des précédents. Par exemple :

   $$P_{k_0} = \sum_{\ell=0}^{k_0-1} \alpha_\ell \cdot P_\ell(X).$$

   On en déduit :

   $$(X - j)^{k_0} (X - j^2)^{n-k_0} = \sum_{\ell=0}^{k_0-1} \alpha_\ell \cdot (X - j)^\ell (X - j^2)^{n-\ell}.$$

   Le polynôme de droite est multiple de $(X - j^2)^{n-k_0+1}$ alors que le polynôme de gauche n'est multiple que de $(X - j^2)^{n-k_0}$. Il y a une contradiction.
   La famille envisagée est donc libre et est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, selon laquelle la matrice représentant l'endomorphisme f est diagonale, car :

   $$\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(P_k) = \lambda_k \cdot P_k.$$

4. (a) L'ensemble $\mathbb{C}[D]$ est l'ensemble de toutes les matrices de la forme :

   $$\begin{pmatrix} P(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(d_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(d_n) \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $\mathbb{C}[D]$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, \cdots, E_{n,n})$, espace de dimension n.
   D'autre part, en prenant $L_1, \cdots, L_n$, les polynôme de Lagrange associés aux complexes différents $d_1, \cdots, d_n$, on obtient pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

   $$L_i(D) = E_{i,i}.$$

   Conclusion,

   $$\mathbb{C}[D] = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, \cdots, E_{n,n})$$

   espace de dimension n.

(b) En notant $\mathscr{D}$ le commutant de la matrice D, il est clair que si $M \in \mathbb{C}[D]$, alors $MD = DM$, d'où l'inclusion $\mathbb{C}[D] \subset \mathscr{D}$.

Soit maintenant $M \in \mathscr{D}$. En écrivant $MD = DM$ et en prenant $i \neq j$ deux entiers entre 1 et n, on obtient :

$$(MD)_{i,j} = M_{i,j} \times d_j \text{ et } (DM)_{i,j} = d_i \times M_{i,j}.$$

Comme $d_i \neq d_j$, nécessairement $M_{i,j} = 0$ et la matrice M est diagonale, appartenant à $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, \cdots, E_{n,n}) = \mathbb{C}[D]$.

On a donc l'égalité des espaces vectoriels.

5. En passant matriciellement dans une base de $\mathbb{C}_n[X]$ diagonalisant l'endomorphisme f, on est dans le cadre précédent, la dimension de l'espace ambiant étant égale à $(n+1)$.

   La dimension du commutant de f vaut donc $(n+1)$, ce commutant correspondant aux endomorphismes g pour lesquels la base diagonalisant f diagonalise également l'endomorphisme g.

Solution 16 : développement limités

1. Après calculs, on trouve :

$$f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 2h + \frac{4h^3}{3} + \circ(h^3).$$

2. D'une part, en posant $x = 1 + h$, on obtient :

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{1}{2} + \frac{h}{12} - \frac{h^2}{72} + \circ(h^2).$$

   Par la formule de Taylor-Young, on obtient :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2} + u\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\, u + \frac{2}{3\sqrt{3}}\, u^2 + \circ(u^2).$$

   Conclusion,

$$g(1+h) = \frac{\pi}{6} + \frac{h}{6\sqrt{3}} - \frac{5}{216\sqrt{3}}\, h^2 + \circ(h^2).$$

3. La fonction f correspondante est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Les branches infinies s'étudient aux voisinages de $\pm\infty$.

   • au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \\ &= 2 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

   Ainsi, au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   La courbe admet une asymptote oblique $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ et la courbe est au-dessus au voisinage de $+\infty$.

• au voisinage de $-\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de $-\infty$,

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet une asymptote horizontale $y = -\dfrac{1}{2}$ et la courbe est encore au-dessus au voisinage de $-\infty$.

4. On translate le problème en 0. Le numérateur devient :

$$N(3+h) = e^{3+h} + e^{3-h} - 2e^{3+2h} = -4e^3\ h + \circ(h)$$

alors que le dénominateur devient :

$$D(3+h) = \sqrt{3+h} + \sqrt{3-h} - 2\sqrt{3+2h} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\ h + \circ(h).$$

Conclusion, la limite vaut $2\sqrt{3}e^3$.

5. (a) La fonction $f : x \longmapsto e^{e^x} + \ln x$ est de classe C^∞ sur $I =]0, +\infty[$. De plus, la dérivée est strictement positive sur l'intervalle I. La fonction f réalise une bijection strictement croissante de I vers $f(I) = \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la seule solution à l'équation proposée est :

$$x_n = f^{-1}(e^n).$$

(b) Comme f^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors x_n tend vers $+\infty$ (en croissant d'ailleurs ...) lorsque n tend vers $+\infty$.
On isole x_n dans $e^{e^{x_n}}$ et on utilise donc :

$$e^{e^{x_n}}(1+\circ(1)) = e^n.$$

En prenant deux fois le logarithme, on obtient :

$$x_n = \ln n + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

On réexploite alors la formule utile à savoir :

$$x_n = \ln\left(\ln\left(e^n - \ln x_n\right)\right),$$

ce qui donne après calculs, le développement suivant :

$$x_n = \ln n - \frac{\ln(\ln n)}{n\ e^n} + \circ\left(\frac{\ln(\ln n)}{n\ e^n}\right).$$

Solution 17 : informatique

1. Voici un script possible :

```
from pylab import *

def Euler(h) :
    T=[0]
    X=[3]
    V=[0]
    while T[-1]<6*pi :
        t=T[-1]
        x=X[-1]
        v=V[-1]
        T.append(t+h)
        X.append(x+h*v)
        V.append(v-h*x) # dérivée de v = -x
    return T,X,V
```

2. Voici un script permettant d'avoir cette courbe :

```
def Courbe(h) :
    T,X,V=Euler(h)
    figure()
    grid()
    title('Courbe solution')
    plot(T,X)
    show()
```

3. Voici un script permettant d'avoir le portrait de phase :

```
def Portrait(h) :
    T,X,V=Euler(h)
    figure()
    title('Portrait de phase')
    grid()
    plot(X,V)
    show()
```

   On remarque que lors du portrait de phase, on a un gain d'énergie (spirale divergente), ce qui est dû à l'approximation de la méthode.

Solution 18 : divers

1. L'ensemble $\mathbb{Q}[\alpha]$ est inclus dans $\mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[\alpha]$ est clairement stable par soustraction et par produit.
   Soit x un élément non nul dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. On remarque que le polynôme :

$$\mu(X) = (X-\alpha)(X-(9-\sqrt{65})) = (X-9)^2 - 65 = X^2 - 18X + 16$$

admet α comme racine. De plus, le polynôme $\mu(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ car les racines du polynôme $\mu(X)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}$, donc le polynôme $\mu(X)$ ne peut pas se factoriser sous la forme $R \times S$ avec deux polynômes R et S de degré 1 dans $\mathbb{Q}[X]$ admettant chacun une racine rationnelle.
Comme $P(\alpha) = x \neq 0$, alors le polynôme $\mu(X)$ ne divise pas $P(X)$, donc les polynômes $\mu(X)$ et $P(X)$ sont premiers entre eux.
On trouve une relation de Bezout du type :

$$\mu(X)U(X) + P(X)V(X) = 1.$$

L'évaluation en α donne :

$$P(\alpha)V(\alpha) = 1.$$

Dans l'anneau commutatif $\mathbb{Q}[\alpha]$, l'élément x est inversible d'inverse $V(\alpha)$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[\alpha]$.

2. On montre que la dimension vaut 2. En effet, considérons la famille $\mathscr{B} = (1, \alpha)$.
Il est clair que α est un nombre irrationnel car $\sqrt{65}$ l'est – l'entier 65 n'est pas un carré parfait de 5-valuation impaire – donc le vecteur α n'est pas $\mathbb{Q}$-colinéaire à 1 et la famille $\mathscr{B}$ est libre.
D'autre part, si $y \in \mathbb{Q}[\alpha]$, on écrit :

$$y = P(\alpha) \text{ , où } P \in \mathbb{Q}[X].$$

On pose la division euclidienne de P par $\mu(X)$:

$$P(X) = Q(X) \times \mu(X) + R(X),$$

avec $\deg(R) < 2$. L'évaluation en α donne :

$$y = P(\alpha) = R(\alpha) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}).$$

La famille $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathbb{Q}[\alpha]$.

3. L'application $f : x \longmapsto \alpha\, x$ est une application $\mathbb{Q}$-linéaire. On sait que :

$$f(1) = \alpha \text{ et } f(\alpha) = \alpha^2 = 18\alpha - 16.$$

La matrice représentant f selon la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de f est celui de la matrice A, à savoir :

$$\det(f) = 16.$$

4. La suite $(\xi_n = \alpha^n + \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique :

$$\mu(X) = (X - \alpha)(X - \beta).$$

La suite u vérifie donc le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = 2,\ \xi_1 = 18 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \xi_{n+2} = 18\xi_{n+1} - 16\xi_n \end{array} \right. .$$

Par récurrence double, tous les ξ_n sont des entiers.
On pouvait aussi développer la somme par le binôme.

5. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|\sin\Big(\pi\alpha^n\Big)\right| = \left|\sin\Big(\pi\alpha^n - \pi\ \xi_n\Big)\right| = \left|\sin\Big(\pi\beta^n\Big)\right| = \mathscr{O}(\beta^n),$$
de série absolument convergente car $|\beta| < 1$.
6. (a) Cette fois-ci, on peut poser le polynôme :
$$Q(X) = (X - \gamma)(X - \delta) = X^2 - 9X + 4.$$
La suite ρ considérée vérifie la relation de récurrence linéaire :
$$\rho_{n+2} = 9\rho_{n+1} - 4\rho_n.$$
(b) Comme $\rho_0 = 2$ et $\rho_1 = 9$, alors par récurrence double, tous les ρ_n sont des entiers. Par le même raisonnement que précédemment,
$$|u_n(\gamma)| = \mathscr{O}(\delta^n),$$
de série absolument convergente car $|\delta| < 1$.

Solution 19 : algèbre linéaire

1. On vérifie que $f^2 = f$. L'application f est un projecteur.
2. En tant que projecteur, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Rg}(f)$, donc $\mathrm{Rg}(f) = 2$.
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre donc constitue une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
En résolvant l'équation $f(\vec{u}) = \vec{0}$, on trouve une base de $\mathrm{Ker}(f)$:
$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$
3. On a immédiatement la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 9 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 10 & -21 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$
4. La matrice de passage de la base canonique vers une base adaptée à $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ vérifie :
$$P^{-1}AP = J_2 = E_{1,1} + E_{2,2}.$$
En utilisant l'isomorphisme $M \longmapsto P^{-1}MP$, les dimensions à calculer sont les mêmes qu'en remplaçant la matrice A par la matrice J_2 dans les ensembles.
Or, en adoptant une disposition par blocs $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, où les quatre blocs sont de format 2×2, on obtient :
$$J_2 M = M J_2 \iff M_2 = M_3 = 0$$
et :
$$J_2 M J_2 = 0 \iff M_1 = 0.$$
L'espace H est donc de dimension 8 et l'espace L est de dimension 12.

Solution 20 : polynômes

1. On note $R(X) = aX + b$ les restes, qui sont tous de degré inférieur ou égal à 1.
   Pour $(X-2)^2$, on utilise $R(2) = P(2)$ et $R'(2) = P'(2)$ et on trouve a et b facilement.
   Pour $X^2 + X + 1$, on utilise $R(j) = P(j)$ et $R(j^2) = P(j^2)$ et on trouve a et b facilement. Pour simplifier $P(j)$, on utilise par exemple $1 + j = -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   Pour $X^2 - 3X + 2$, on utilise $R(1) = P(1)$ et $R(2) = P(2)$ et on trouve a et b facilement.
2. Toutes les racines des deux polynômes sont simples. Le PGCD recherché vaut :
   $$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{p+q} \cap \mathbb{U}_{pq}} (X - \omega).$$
   Or, si r est un nombre premier divisant $p+q$ et pq, alors par exemple r divise l'entier p, puis l'entier $q = p + q - p$ et donc $p \wedge q = 1$. On vient de montrer que $(p+q) \wedge (pq) = 1$.
   L'ensemble $G = \mathbb{U}_{p+q} \cap \mathbb{U}_{pq}$ est un sous-groupe des groupes finis $\mathbb{U}_{p+q}$ et $\mathbb{U}_{pq}$, donc son cardinal divise – théorème de Lagrange – à la fois $p+q$ et pq, donc son cardinal vaut 1. On vient de montrer que :
   $$\mathbb{U}_{p+q} \cap \mathbb{U}_{pq} = \{1\}.$$
   Conclusion,
   $$\left(X^{p+q} - 1\right) \wedge (X^{pq} - 1) = X - 1.$$
3. On distingue plusieurs cas :
   - si $a > 0$; on pose $\rho = \sqrt[n]{a}$.
     L'ensemble des racines de l'équation $z^n = a$ est de la forme :
     $$z = \rho\ \omega \text{ ,avec } \omega \in \mathbb{U}_n.$$
     Il s'agit d'un polygone régulier à n côtés dont un des sommets est ρ. Il y a autant de parties réelles différentes de ces solutions que de parties réelles différentes d'éléments dans $\mathbb{U}_n$.
     Lorsque n est pair, il y a $1 + \dfrac{n}{2}$ parties réelles différentes car 1 et -1 sont les seuls réels solutions.
     Lorsque n est impair, il y a $\dfrac{n+1}{2}$ parties réelles différentes car seul 1 est une solution réelle.
   - si $a < 0$; on pose $\rho = \sqrt[n]{-a}$.
     L'ensemble des racines de l'équation $z^n = a = (-a)e^{i\pi}$ est de la forme :
     $$z = \rho\ e^{i\frac{pi}{n}}\ \omega \text{ ,avec } \omega \in \mathbb{U}_n.$$
     Il s'agit d'un polygone régulier à n côtés dont un des sommets est $\rho\ e^{i\frac{pi}{n}}$. Il y a autant de parties réelles différentes que de parties réelles différentes pour les complexes $e^{i\frac{\pi}{n}}\ \omega$, lorsque ω décrit $\mathbb{U}_n$. Cet ensemble est stable par conjugué.
     Lorsque n est pair, il n'y a aucune solution réelle, donc il y a $\dfrac{n}{2}$ parties réelles différentes en regroupant les solutions deux par deux.
     Lorsque n est impair, il y a $\dfrac{n+1}{2}$ parties réelles différentes car seul 1 est une solution réelle.

4. On résout $z^{2n}+z^n+1=0$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
Cela revient à résoudre $z^n=j$ ou $z^n=\overline{j}$.
Or,
$$z^n=j \iff z=\exp\left(\frac{(6k+2)i\pi}{3n}\right)=z_k.$$
On en déduit la factorisation :
$$X^{2n}+X^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-z_k)(X-\overline{z_k}).$$

5. Si Q est un polynôme, par les relations coefficients / racines, la somme des racines de Q comptées avec multiplicités vaut :
$$\sigma_1=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
lorsque Q est de la forme : $Q(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots$.
On pose a et b les coefficients en X^n et X^{n-1} dans le polynôme $P(X)$. Le polynôme $P^{(k)}(X)$ commence donc par :
$$P^{(k)}(X)=a\frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}+b\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}X^{n-1}.$$
La somme des racines de $P^{(k)}$ comptées avec multiplicité vaut donc :
$$A_k=-\frac{b}{a}\,\frac{n-k}{n}.$$
Il apparaît que les A_k sont en progression arithmétique de raison $\dfrac{b}{an}$.

6. Soit P un polynôme non nul solution. En examinant les coefficients dominants, on obtient que P doit être unitaire.
Si P n'est pas constant, soit λ une racine complexe de P. Alors, $(\lambda+1)^2$ et $(\lambda-1)^2$ sont encore des racines de P en évaluant l'équation entre polynômes en $\lambda+1$ et en $\lambda-1$.
En notant $f:z\longmapsto(z-1)^2$ et $g:z\longmapsto(z+1)^2$, alors l'ensemble $Z(P)$ des racines de P est stable par les fonctions f et g.
Cependant l'ensemble $Z(P)$ est fini.
Ensuite, on peut prendre parmi toutes les racines de P, une racine la plus éloignée possible de 0. Alors, z est de module maximal lorsque z décrit les racines de P. Comme $|z-1|$ et $|z+1|$ ne peuvent être de module strictement inférieur à 1 tous les deux, car sinon, la distance séparant -1 de 1 serait strictement inférieure à 2, ce qui est faux.
Donc $|z|\geqslant 1$. On pose $z=a+ib$, avec par exemple $b\geqslant 0$ et $a\leqslant 0$.
Alors, $z-1=(a-1)+ib$ et donc $|z-1|>|z|$ et donc $|z-1|^2>|z|$, ce qui contredit la maximalité du module de la racine z.
Conclusion tous les polynômes solutions sont constants et il n'y a que les polynômes 0 et 1 qui conviennent.

7. (a) Soit $d \in \mathbb{N}$. Si d est pair, alors en posant :

$$P(X) = -X^d,$$

il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \leqslant 0 < e^x$, donc l'ensemble $\mathscr{S}$ est vide.
Ensuite, si d est impair, en posant

$$P(X) = \frac{X^d}{d!},$$

alors pour tout $x \leqslant 0$, on a $P(x) \leqslant 0 < e^x$ et si $x > 0$, alors :

$$P(x) < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ reste vide dans ce cas.

(b) Si l'ensemble $\mathscr{S}$ n'était pas borné, on pourrait trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathscr{S}$ tendant vers $+\infty$ ou tendant vers $-\infty$.
Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$, par les croissances comparées, $P(u_n) = \circ(e^{u_n})$, ce qui est contradictoire.
Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$, donc $P(u_n) = e^{u_n}$ est de limite nulle, imposant au polynôme P d'être le polynôme nul mais dans ce cas, $e^{u_n} = 0$, ce qui est encore contradictoire.

(c) Supposons l'ensemble $\mathscr{S}$ infini.
Soit $N \geqslant 1$ un entier. On trouve $x_1 < \cdots < x_N$ des solutions dans $\mathscr{S}$. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivable $f : x \longmapsto P(x) - e^x$ sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ pour k entre 1 et $N-1$ ce qui donne au moins $N-1$ solutions différentes à l'équation :

$$P'(x) = e^x.$$

Comme l'entier N est arbitraire, on découvre que l'ensemble des solutions à l'équation $P'(x) = e^x$ est infini. Ainsi de suite, en abaissant le degré, l'ensemble des solutions à l'équation $e^x = 0 = P^{(d+1)}(x)$ est infini, ce qui n'est pas le cas.

Solution 21 : arithmétique

1. On suppose que $N = a^2 + b^2$ est multiple de 4. Si l'un des deux entiers a ou b est pair seulement, alors N est impair. Si a et b sont impairs, alors $a^2 \equiv b^2 \equiv 1\ [4]$, donc $N \equiv 2[4]$, ce qui n'est pas le cas.
2. Parmi tous les entiers n, on considère l'entier n minimal tel que l'équation $a^2 + b^2 = 4^n$ admette au moins une solution dans $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$. Il est impossible que n vaille 0 car si (a, b) est une solution, alors $a^2 + b^2 \geqslant 2$.
Ensuite, par la première question, les entiers a et b sont pairs. On pose :

$$a = 2r \text{ et } b = 2s$$

de sorte que $r^2 + s^2 = 4^{n-1}$ et $(r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Ceci contredit la minimalité de l'entier n.

3. On montre par récurrence sur l'entier n que la seule solution est le couple $(a,b) = (2^n, 2^n)$.
Lorsque $n = 0$, les choses sont assez claires. Il n'y a que $(1,1)$ comme solution.
Supposons les choses acquises au rang $n-1$.
Lorsque $n \geqslant 1$, si (a,b) est une solution à l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$, alors a et b sont pairs, donc sous les mêmes notations déjà utilisées, le couple (r,s) est une solution à l'équation :
$$r^2 + s^2 = 2^{2n-1}.$$
Par H.R., $(r,s) = (2^{n-1}, 2^{n-1})$ et donc $(a,b) = (2^n, 2^n)$. On a ce qu'il faut au rang n.

Solution 22 : divers

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = (3-\sqrt{5})^n + (3+\sqrt{5})^n.$$
On pose :
$$P(X) = (X-3+\sqrt{5})(X-3-\sqrt{5}) = (X-3)^2 - 5 = X^2 - 6X + 4.$$
La suite u est donc la solution au problème :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n \end{cases}.$$
Il suffit alors de montrer par récurrence double l'assertion : « *l'entier u_n est multiple de 2^n* », ce qui se fait directement.
2. (a) On pose $A = (10^{10})!$ et $B = 10^{10!}$. Alors,
$$\ln A = \sum_{k=1}^{10^{10}} \ln k \ \text{ et } \ \ln B = 10! \times \ln(10).$$
Or, pour estimer $\ln A$, on peut effectuer une comparaison série / intégrale ce qui donne :
$$\int_1^{10^{10}} \ln x\ dx \leqslant \ln A \leqslant \int_1^{10^{10}+1} \ln x\ dx.$$
On en déduit :
$$10^{10}(10\ln 10) - 10^{10} + 1 \leqslant \ln A \leqslant (10^{10}+1)\ln(10^{10}+1) - 10^{10}.$$
Numériquement, on obtient les approximations suivantes :
$$220258509300 \leqslant \ln A \leqslant 220258509323 \ \text{ et } \ \ln B \simeq 23025850929.9.$$
On observe que $\ln B < \ln A$, donc $B < A$.
(b) Si N est un entier strictement positif, alors la quantité $C_N = \lfloor \log N \rfloor + 1$ est exactement le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier N.
Numériquement,
$$C_A \in [\![95657055182, 95657055193]\!] \ \text{ et } \ C_B = 10! + 1.$$

(c) La réponse est claire pour l'entier B. Cet entier présente exactement 10! zéros à partir de la droite.

On rappelle la formule de Legendre indiquant la p-valuation dans $N!$, où p est un nombre premier :

$$\nu_p(N!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{N}{p^k} \right\rfloor.$$

Le nombre de zéros demandé est le minimum entre $\nu_5(N!)$ et $\nu_2(N!)$, à savoir $\nu_5(N!)$.

On en déduit à l'aide d'un programme informatique par exemple que le nombre de 0 consécutifs à partir de la droite dans l'entier A vaut :

$$2499999997.$$

3. (a) Si f est continue, il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $g : t \longmapsto f(t) - t$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) L'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide car contenant 0, inclus dans $\mathbb{R}$ et majoré par 1, donc admet une borne supérieure τ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\tau - \dfrac{1}{n}$, ne majore pas $\mathscr{A}$. On dispose ainsi d'un réel $c_n \in \left]\tau - \dfrac{1}{n}, \tau\right]$ de limite τ tel que :

$$f(c_n) \geqslant c_n.$$

On en déduit $f(\tau) \geqslant c_n$ et par passage à la limite $f(\tau) \geqslant \tau$.

Ensuite, le nombre $\tau + \dfrac{1}{n}$ ne peut appartenir à l'ensemble $\mathscr{A}$:

$$f\left(\tau + \frac{1}{n}\right) < \tau + \frac{1}{n}.$$

Par croissance, on peut écrire :

$$f(\tau) \leqslant \tau + \frac{1}{n},$$

et le passage à la limite fournit $f(\tau) \leqslant \tau$, donc $f(\tau) = \tau$.

4. On montre par récurrence :

$\mathscr{P}(n)$: pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2.$$

- Lorsque $n = 1$, les choses sont claires.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
- Soient $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ dans $]0, +\infty[$. En posant $\alpha_k = \dfrac{x_k}{x_{n+1}}$, alors on remarque que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k}\right) + 1.$$

Or, pour tout $\alpha > 0$, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} - 2 = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \geqslant 0$, donc en utilisant l'H.R. :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

5. On interprète la somme comme une somme de Riemann.
   Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2x^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

   avec $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+(tx)^2}$.
   La limite demandée vaut en utilisant par exemple un changement de variable $u = tx$:

$$\int_0^1 f = \frac{\arctan x}{x}.$$

6. (a) Il suffit d'étudier les fonctions $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ et $g : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$. On obtient rapidement ce qu'il faut.
   (b) On procède par encadrement puis on utilise le théorème des gendarmes.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, en appliquant la question précédente à $x_k = \dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \geqslant 0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(1+x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

   Or, $x_k^2 = \dfrac{k(n-k)}{n^4} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \circ(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   Enfin, on interprète $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ comme la somme de Riemann associée à la fonction $g : t \longmapsto \sqrt{t(1-t)}$.
   En passant à l'exponentielle continue, la limite recherchée vaut :

$$\exp\left(\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\, dt\right).$$

   Or, pour tout $t \in [0,1]$, le point de coordonnées $\Omega\left(t, \sqrt{t(1-t)}\right)$ est à une distance du point $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ égale à :

$$\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + t(1-t)} = \frac{1}{2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,dt$ est l'aire en dessous du demi-cercle supérieur de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$. L'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{8}$ et la limite vaut donc :

$$\exp\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Solution 23 : divers

1. On note pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_k : P \longmapsto P(\arctan(k))$ l'évaluation en $\arctan k$. Comme les $\arctan k$ sont tous différents, la famille $\mathscr{B} = (\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est libre en utilisant par exemple les polynômes interpolateurs de Lagrange associés. Il s'agit d'une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   Or, l'application $\psi : P(X) \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{P(t)}{\sqrt{2+\sin t}}\,dt$ est également une forme linéaire.
   Les scalaires λ_k correspondent aux coordonnées du vecteur ψ selon la base $\mathscr{B}$ décrite plus haut.
2. L'application :
$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_1^2 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{2+\sin t}}\,dt \end{array}\right.$$
   est un produit scalaire (vérification classique).
   D'après le théorème de Riesz, toute forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ correspond à une expression de la forme :
$$\varphi = \Phi(\cdot, Q).$$
   Il suffit d'appliquer ceci à la forme linéaire :
$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\cos k) \end{array}\right. .$$
3. On fixe x dans $\mathbb{R}$. Si $x = 0$, chaque facteur vaut 1 et le produit vaut constamment 1, de limite 1.
   On se place maintenant dans le cas $x \neq 0$.
   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire la formule de trigonométrie hyperbolique :
$$\operatorname{ch}\theta = \frac{\operatorname{sh}(2\theta)}{2\operatorname{sh}(\theta)}.$$
   On en déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{u_{k-1}}{u_k},$$
   où $u_k = 2^k \times \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.
   On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\prod_{k=0}^{N} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{u_{-1}}{u_N}.$$

Or, $\operatorname{sh} h \sim h$ au voisinage de 0, donc $\lim_{N \longrightarrow +\infty} u_N = x$ et donc le produit tend, lorsque N vers $+\infty$ vers :

$$\frac{u_{-1}}{x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}.$$

4. (a) C'est une condition d'orthogonalité. L'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[A, B]$, avec A d'affixe $-j$ et B d'affixe 1, auquel on enlève le point A.

   (b) C'est une condition de colinéarité. L'ensemble recherché est la droite (CD), avec C d'affixe -1 et D d'affixe -2, droite privée du point D. Il s'agit de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

   (c) Les points z, z^2 et z^3 doivent être non alignés.
   Ensuite, si les points z, z^2 et z^3 sont alignés, alors :

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z^2 - 1}{z - 1} = z + 1$$

$$\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} = \frac{z^2 - z}{1 - z} = -z$$

   et :

$$\frac{z^2 - z^3}{z - z^3} = \frac{z - z^2}{1 - z^2} = \frac{z}{1 + z}$$

   Le triangle est rectangle en z si et seulement si $z + 1 \in i\mathbb{R}$. Le triangle est rectangle en z^2 si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$. Le triangle est rectangle en z^3 si et seulement si z appartient au cercle de diamètre $[-1, 0]$.
   Réciproquement, l'ensemble recherché est la droite $x = 0$, la droite $x = -1$, le cercle de diamètre $[-1, 0]$, le tout où on enlève les points d'affixe 0 et (-1).

5. (a) La fonction f est de classe C^∞. Il y a a priori deux branches infinies à étudier .
   • En $+\infty$, on obtient :

$$\frac{f(t)}{t} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} + \circ\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

   La courbe $y = f(t)$ admet comme droite asymptote la droite $y = t+1$ et la courbe est au-dessus en $+\infty$.
   • En $-\infty$, on obtient :

$$\frac{f(t)}{t} = -\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} + \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)\right).$$

   La courbe $y = f(t)$ admet comme droite asymptote la droite $y = -t - 1$ et la courbe est encore au-dessus en $-\infty$.

   (b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$.
   On prend $M = f(0)$. Il existe $A > 0$ suffisamment grand pour que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

   La fonction f est continue sur le segment $[-A, A]$, donc atteint une valeur minimale en $x_0 \in [-A, A]$.
   Soit finalement x dans $\mathbb{R}$.
   Si $|x| \geqslant A$, alors $f(x_0) \leqslant f(0) = M \leqslant f(x)$.
   Si $|x| \leqslant A$, alors directement $f(x_0) \leqslant f(x)$.
   Quoiqu'il arrive, $f(x_0) \leqslant f(x)$ et f admet un minimum global en x_0.

(c) Il est facile de voir que la fonction f est strictement décroissante au voisinage de $+\infty$ et strictement croissante au voisinage de $+\infty$.
Il existe $B > 0$ tel que sur $]-\infty, -B]$, la fonction f est strictement décroissante et sur $[B, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante.
La fonction f est bornée par M_0 sur le segment $[-B, B]$.
Soit n_0 un entier strictement supérieur à M_0.
On peut appliquer le théorème des valeurs intérmédiaires à la fonction continue f sur l'intervalle $]-\infty, -B]$ et sur $[B, +\infty[$. Par injectivité sur chacune de ces intervalles, il n'y a qu'une seule solution à l'équation $f(t) = n$, d'inconnue t, pour tout entier $n \geqslant n_0$ et l'équation $f(t) = n$, n'admet aucune solution sur $[-B, B]$ par choix de n_0.
On dispose de deux solutions $a_n < -B < B < b_n$.

(d) Il est facile de voir que la suite (a_n) est décroissante et diverge vers $+\infty$, alors que la suite (b_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
On détaille l'étude pour a_n.
Au voisinage de $-\infty$, on peut écrire :

$$f(t) = -t - 1 - \frac{4}{t} + \circ\left(\frac{1}{t}\right).$$

On en déduit lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n = f(a_n) = -a_n - 1 - \frac{4}{a_n} + \circ\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

Il devient clair que :

$$n = -a_n(1 + \circ(1))$$

donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -n$.
Ensuite, $a_n = -n - 1 + \circ(1)$, puis :

$$a_n = -n - 1 - \frac{4}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

(e) De la même façon, on obtient :

$$b_n = n - 1 - \frac{4}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. (a) Il suffit de montrer que les éléments $\{k\alpha\}$ sont tous différents. En posant $\{k\alpha\} = k\alpha - p_k$, où p_k est la partie entière de $k\alpha$, le fait que α soit irrationnel implique que si $k < \ell$ sont deux entiers, alors le nombre $k\alpha - \ell\alpha$ ne peut être un entier, donc les parties décimales de $k\alpha$ et de $\ell\alpha$ sont différentes.

(b) Si le premier point n'est pas réalisé, il s'agit de ranger les n éléments de $\mathscr{A}$ dans les $(n-1)$ tiroirs :

$$I_j = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right[,$$

lorsque j parcourt $[\![1, n-1]\!]$.
L'un au moins des ensembles I_j contient au moins deux éléments différents de $\mathscr{A}$ et ces deux éléments différents seront séparés d'une distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$.

(c) Si le premier point de la question précédente est réalisé, il existe deux entiers $k \geqslant 1$ et p tels que :

$$0 \leqslant k\alpha - p < \frac{1}{n}.$$

Si le second point est réalisé, on écrit avec les notations a et b déjà utilisées,

$$a = k\alpha - p \text{ et } b = \ell\alpha - q,$$

donc en posant $r = |k - \ell|$, alors :

$$|r\alpha - s| < \frac{1}{n},$$

l'entier s étant égal à $\pm(p-q)$. Il est nécessaire que s soit positif sinon, $|r\alpha - s| \geqslant 1$.

Solution 24 : équations différentielles

1. On résout déjà l'équation sur l'un des intervalles $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.
   Sur I, l'équation homogène a pour solutions $\mathrm{Vect}(\mathrm{sh})$.
   Une solution particulière est $-\mathrm{ch}$.
   On effectue le raccord en 0. Le raccord est toujours continu mais pour la dérivabilité, il faut prendre la même constante de part et d'autre de 0.
   L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est la droite affine passant par $-\mathrm{ch}$ et dirigée par le vecteur sh.
2. On résout l'équation sur $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.
   Sur I, les solutions forment la droite affine passant par $t \longmapsto t^3$ et dirigée par le vecteur $t \longmapsto t^2$.
   Tous les raccords sont dérivables en 0.
   L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ forme le plan vectoriel passant par la fonction $t \longmapsto t^3$ et dirigé par $F = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, où

$$y_1 : t \longmapsto \begin{cases} t^2, \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } y_2 : t \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } t \geqslant 0 \\ t^2, \text{ sinon} \end{cases}.$$

3. Le polynôme associé est :

$$P(X) = mX^2 + (m+1)X + m.$$

   Il y a plusieurs cas à distinguer.
   • Si $m = 0$, l'équation devient $y' = \cos x + \mathrm{ch}\, x$, de solutions :

$$y : x \longmapsto \sin x + \mathrm{sh}\, x + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

   • Si $m \neq 0$, le polynôme $P(X)$ a pour discriminent :

$$\Delta = -3m^2 + 2m + 1.$$

   Cette quantité Δ est polynomiale de degré 2 en la variable m, et Δ s'annule lorsque $m_1 = 1$ ou lorsque $m_0 = -\dfrac{1}{3}$.
   • Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{m_0, m_1\}$, Δ est non nul et donc le polynôme P admet deux racines éventuellement complexes λ et μ.

Les solutions y à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont de la forme :

$$y : x \longmapsto ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + (p\ \cos x + q\ \sin x + r\ \text{ch}\, x + s\ \text{sh}\, x),$$

où a et b sont des complexes quelconques et les paramètres p, q, r et s sont calculables en fonction du paramètre m en réinjectant et en identifiant les constantes devant les quatre fonctions.

• Si $m \in \{m_0, m_1\}$, alors Δ est nul. Le polynôme P admet une racine double λ et les solutions sont de la forme :

$$y : x \longmapsto (ax+b)e^{\lambda x} + (p \cos x + q \sin x + r \text{ch}\, x + s\ \text{sh}\, x),$$

où a et b sont des complexes quelconques et les paramètres p, q, r et s sont calculables en fonction du paramètre m en réinjectant et en identifiant les constantes devant les quatre fonctions.

4. On pose la fonction $\varphi = f + f'$.
La fonction f est donc une solution à l'équation différentielle :

$$y' + y = \varphi.$$

Or, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : t \longmapsto k\ e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u)\ du.$$

Quelle que soit la constante k, on sait que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} ke^{-t} = 0.$$

Il reste à montrer que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u)\ du = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction φ tend vers 0 en $+\infty$, il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$\forall t \geqslant t_0,\ |\varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme la fonction φ est continue, alors la fonction φ est bornée sur $[0, t_0]$ par une constante $C > 0$.
Pour tout $t \geqslant t_0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \left| e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u)\ du \right| &\leqslant \left| e^{-t} \int_0^{t_0} e^u \varphi(u)\ du \right| + \left| e^{-t} \int_{t_0}^t e^u \varphi(u)\ du \right| \\ &\leqslant e^{-t} \int_0^{t_0} e^u\ C\ du + e^{-t} \int_{t_0}^t e^u\ \varepsilon\ du \\ &\leqslant e^{-t}\ C' + \varepsilon, \end{aligned}$$

où C' est une autre constante dépendant de t_0 et de C.
La quantité $e^{-t}\ C' + \varepsilon$ tend vers ε lorsque t tend vers $+\infty$. On trouve $t_1 > t_0$ tel que :

$$\forall t \geqslant t_1,\ e^{-t}\ C' + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant t_1$,

$$\left| e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u)\ du \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, on obtient la définition de la convergence de la fonction solution vers 0.
En particulier, la fonction f qui est une solution tend bien vers 0.

5. Soit f une fonction solution. Alors, la fonction f' est dérivable et en dérivant, on obtient :

$$f = f''.$$

Il existe deux constantes a et b telles que :

$$f : t \longmapsto ae^t + be^{-t}.$$

On réinjecte dans l'équation initiale en guise de synthèse.
On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ae^x - a - be^{-x} + b = ae^t - be^{-t} + a + b.$$

Après simplifications, on obtient $a = 0$ et b quelconque.
Les solutions forment la droite vectorielle :

$$\mathrm{Vect}(t \longmapsto e^{-t}).$$

Solution 25 : divers

1. On obtient assez rapidement :
$$f(\mathbb{C} \setminus \{-3\}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

2. La fonction f induit une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et lorsque Z est un complexe différent de 1, l'équation $f(x) = Z$, d'inconnue complexe $x \neq -3$ admet une seule solution :

$$x = \frac{3Z - 2}{1 - Z}.$$

La fonction induite est donc une bijection de bijection réciproque :

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x - 2}{1 - x} \end{array} \right. .$$

3. Cela revient à résoudre l'équation $x(x + 3) = x + 2$, de solutions :

$$-1 \pm \sqrt{3}.$$

Ainsi, dans la suite, on a :
$$\ell_1 = -1 - \sqrt{3} \text{ et } \ell_2 = -1 + \sqrt{3}.$$

4. (a) On le montre par récurrence sur l'entier n.
Lorsque $n = 0$, c'est bon.
Supposons que pour un certain entier n, on ait :

$$u_n \notin \{\ell_1, \ell_2\}.$$

Supposons que u_{n+1} soit égal à ℓ_1 par exemple. Alors, $f(u_n) = f(\ell_1)$, donc par injectivité de la bijection induite f, on obtient $u_n = \ell_1$, ce qui est faux.

(b) Il est facile de voir que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [\ell_2, +\infty[$ et l'intervalle I est donc stable par f car $f(\ell_2) = \ell_2$.
De plus, $u_0 \in I$: la suite u prend ses valeurs dans I et comme l'itératrice y est croissante, alors la suite u est monotone, de sens de monotonie donné par le signe de $u_1 - u_0$ en l'occurrence strictement négatif.
La suite u est donc décroissante, minorée par ℓ_2, donc convergente.
L'itératrice étant continue, la suite u converge vers un point fixe de la fonction f à savoir le seul point fixe supérieur ou égal à ℓ_2 qui n'est autre que $\ell_2 = -1 + \sqrt{3}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, la quantité v_n est correctement définie.
Ensuite :

$$v_{n+1} = \frac{f(u_n) - f(\ell_1)}{f(u_n) - f(\ell_2)} = \frac{3+\ell_2}{3+\ell_1}\, v_n.$$

La suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{3+\ell_2}{3+\ell_1}$.

(d) On en déduit :

$$v_n = v_0\, q^n,$$

avec $v_0 = \dfrac{1-\ell_1}{1-\ell_2} > 0$.
La raison q est strictement supérieure à 1. La suite v diverge vers $+\infty$.
On en déduit en retournant la formule et en posant $\varepsilon_n = \dfrac{1}{v_n}$ de limite nulle :

$$u_n = \frac{\ell_2\, v_n - \ell_1}{v_n - 1} = \frac{\ell_2 - \ell_1\, \varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n}.$$

On en déduit :

$$u_n = \ell_2 + (\ell_2 - \ell_1)\,\varepsilon_n - (\ell_1 + \ell_2)\,\varepsilon_n^2 + \circ(\varepsilon_n^2).$$

On peut simplifier un peu les choses, sachant que :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{v_0\, q^n},$$

on obtient en fonction de ε_n :

$$u_n = \ell_2 + 2\sqrt{3}\,\varepsilon_n + 2\varepsilon_n^2 + \circ(\varepsilon_n^2).$$

Solution 26 : complexes

1. • $\boxed{(1) \implies (2)}$

On suppose le triangle abc équilatéral.

Par exemple, le triangle abc est direct, c'est-à-dire que c est l'image de b par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour du point a.

Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 = 1 + j$. On en déduit :

$$c - a = (1 + j)(b - a),$$

et donc $c = -j^2b - ja$ ou encore $c + j^2b + ja = 0$. Le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ admet j^2 comme racine, ainsi que le polynôme $1 + X + X^2$. Ces deux polynômes ne sont pas premiers entre eux.

Si l'on suppose que le triangle abc est indirect, les deux polynômes admettent j comme racine commune.

• $\boxed{(2) \implies (3)}$

On suppose que les deux polynômes $P = aX^2 + bX + c$ et $1 + X + X^2$ ne sont pas premiers entre eux. Ils ont donc une racine complexe en commun qui est soit j soit j^2.

On en déduit $P(j)\ P(j^2) = 0$. En développant le produit :

$$(aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c)$$

on obtient :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

On obtient alors ce qu'il faut.

• $\boxed{(3) \implies (4)}$

On suppose $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. On remarque que :

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = \frac{(c-a)(a-b) + (b-c)(a-b) + (b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Après développement, le numérateur vaut :

$$-a^2 - b^2 - c^2 + ac + bc + ca = 0.$$

On obtient ce qu'il faut.

• $\boxed{(4) \implies (1)}$

On suppose que l'égalité a lieu. En reprenant les calculs déjà faits, on sait que l'égalité du (3) a lieu, puis que $P(j)\ P(j^2) = 0$.

Par exemple, $P(j) = 0$, donc :

$$c = -j^2\ a - j\ b = (1 + j)\ a - jb.$$

On en déduit que :

$$(c - a) = -j(b - a) = e^{-\frac{i\pi}{3}}\ (b - a).$$

Le point c est l'image du point b par la rotation autour du point a et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Le triangle abc est alors équilatéral indirect.

Si $P(j^2)$ était nul, alors on trouverait que le triangle abc serait équilatéral direct.

2. On effectue déjà le changement de variable $Z = z^2$ et on commence par résoudre :

$$Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = -75 - 100i = -25\ (3 + 4i).$$

On résout ensuite l'équation $\delta^2 = \Delta$, en cherchant δ sous la forme $x + iy$, avec x et y réels. On identifie les parties réelle et imaginaire et on rajoute l'équation aux modules. Après calculs :

$$\delta^2 = \Delta \iff \delta = \pm 5\ (1 - 2i).$$

Les solutions en Z sont donc :

$$Z = \frac{5 - 14i \pm \delta}{2} \text{ ou encore } Z \in \Big\{5 - 12i, -2i\Big\}.$$

On résout maintenant les deux équations $z^2 = 5 - 12i$ et $z^2 = -2i$.
En cherchant là encore les solutions sous forme cartésienne, on obtient les quatre solutions formant l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \Big\{\pm(1 - i), \pm(3 - 2i)\Big\}.$$

Solution 27 : algèbre générale

1. Il n'y en a que deux : $\{1\}$ et $\mathbb{U}_p$ car si H est un sous-groupe de $\mathbb{U}_p$, par le théorème de Lagrange, son cardinal divise celui de $\mathbb{U}_p$, c'est-à-dire p. Le cardinal de H vaut ou bien 1 ou bien p.
2. On vérifie facilement que le polynôme nul convient, que si P et Q sont dans I, alors $P - Q$ aussi et que si P est dans I et R est quelconque dans $\mathbb{Q}[X]$, alors $P \times R$ est encore dans I.
   Finalement, $X^p - 1$ appartient à I.
3. L'anneau $\mathbb{Q}[X]$ est principal. L'idéal I est généré par un seul polynôme unitaire, qui est parmi tous les polynômes unitaires dans I celui de degré minimal. La démonstration fait intervenir une division euclidienne par ce polynôme pour montrer que tous les polynômes dans I sont bien multiples de ce polynôme minimal.
4. Soit $\mu(X) = R(X)S(X)$ une factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$. On évalue en ω. Le produit $R(\omega)S(\omega)$ est nul et par intégrité du corps $\mathbb{C}$, par exemple $R(\omega) = 0$.
   Ainsi, le polynôme $\mu(X)$ divise $R(X)$ ce qui impose au polynôme $S(X)$ d'être constant non nul : le polynôme $\mu(X)$ est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \omega^k = 0$, donc $P \in I$. On obtient alors immédiatement ce qu'il faut.
6. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on sait par le théorème de Gauss que :

   $$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \binom{p}{k} \equiv 0\ [p].$$

   D'autre part, on remarque que :

   $$P(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}.$$

On en déduit que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ commutatif :

$$P(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=1}^{p} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) X^{k-1} = X^{p-1}.$$

7. Si $R(X) = S_1(X)S_2(X)$ est une factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$, les polynômes S_1 et S_2 sont de coefficients dominants inversibles dans $\mathbb{Z}$, donc valant ± 1.
   On passe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. On obtient :
   $$[R] = [S_1] \times [S_2],$$
   et les degrés des polynômes n'ont pas changé dans cette manipulation.
   Or, $[R] = [X]^{p-1}$. Le seul facteur irréductible unitaire dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ divisant $[R]$ est $[X]$. Donc en posant $s_1 = \deg(S_1)$ et $s_2 = \deg(S_2)$ et en supposant sans perte de généralité que les polynômes S_1 et S_2 sont unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$, alors :
   $$[S_1] = [X]^{s_1} \text{ et } [S_2] = [X]^{s_2}.$$
   Il est impossible que $s_1 \geqslant 1$ et $s_2 \geqslant 1$, car sinon les polynômes $[S_1]$ et $[S_2]$ admettraient $[0]$ comme racine dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, impliquant que les entiers $S_1(0)$ et $S_2(0)$ soient multiples de p. L'entier $R(0) = S_1(0)\ S_2(0)$ serait alors multiple de p^2, ce qui n'est pas le cas puisque :
   $$R(0) = P(1) = p.$$
   Conclusion, l'un des deux entiers s_1 ou s_2 est nul et S_1 ou S_2 est constant.
8. Soit $R = S_1\ S_2$ une factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$. Sans perte de généralité, on suppose que les polynômes S_1 et S_2 sont unitaires.
   On va montrer que S_1 et S_2 sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
   On note m_1 (respectivement m_2) le plus petit entier dans $\mathbb{N}^*$ tel que le polynôme $Q_1 = m_1\ S_1$ (respectivement le polynôme $Q_2 = m_2\ S_2$) soit dans $\mathbb{Z}[X]$.
   Ainsi,
   $$m_1 m_2 R(X) = Q_1(X)\ Q_2(X).$$
   On suppose que m_1 ou m_2 ne vaut pas 1. Donc $m_1 m_2$ est supérieur ou égal à 2.
   Soit p un premier divisant $m_1 m_2$. En passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ on obtient :
   $$[0] = [m_1 m_2\ R] = [Q_1][Q_2].$$
   Par intégrité de cet anneau, par exemple, $[Q_1] = [0]$ et tous les coefficients de Q_1 sont multiples de p. L'entier $m_1' = \dfrac{m_1}{p}$ vérifie :
   $$m_1'\ S_1 \in \mathbb{Z}[X].$$
   Ceci contredit la minimalité de l'entier m_1.
   Conclusion, $m_1 = m_2 = 1$ et les polynômes S_1 et S_2 sont bien dans $\mathbb{Z}[X]$. Par la question précédente, l'un de ces deux polynômes est constant : le polynôme R est bien irréuctible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   On termine par le polynôme P. Soit $P = UV$ une factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$. On compose à droite par $(X+1)$, ce qui donne :
   $$R(X) = P(X+1) = U(X+1) \times V(X+1).$$

Les polynômes $U(X+1)$ et $V(X+1)$ restent dans $\mathbb{Q}[X]$. L'un de ces deux polynômes est constant car R est irréductible. Par exemple, $\deg(U(X+1)) = 0$. Or, $\deg(U) = \deg(U(X+1))$, donc U est constant. le polynôme P est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Solution 28 : fonctions usuelles

1. (a) On écrit :
$$\arctan \frac{2}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ de série absolument convergente.}$$
   (b) On utilise la formule « connue » ou à retrouver :
$$\forall 0 < a < b,\ \arctan b - \arctan a = \arctan\left(\frac{b-a}{1+ab}\right).$$
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\arctan \frac{2}{n^2} = \arctan(n+1) - \arctan(n-1).$$
   On fait alors apparaître une série télescopique pour obtenir :
$$\sum_{n=1}^{N} \arctan \frac{2}{n^2} = \arctan N + \arctan(N+1) - \arctan(0) - \arctan(1)$$
   quantité de limite $\frac{3\pi}{4}$, lorsque N tend vers $+\infty$. Il s'agit de la somme à calculer.

2. La fonction $f : x \longmapsto \arcsin(3x) - \arccos(2x)$ est continue sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
   De plus, la fonction f est strictement croissante. Enfin, $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{2}{3}\right) > 0$.
   L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive par le TVI et l'injectivité de f. On note a cette seule solution.
   Ensuite, on utilise $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$, donc :
$$\sqrt{1-9a^2} = \cos(\arcsin(3a)) = \cos(\arccos(2a)) = 2a.$$
   On en déduit en élevant au carré sachant que a est strictement positif :
$$a = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

3. La fonction $g : x \longmapsto \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$ est continue strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Cette fonction est impaire (peu utile ici) de limite $\pm\frac{3\pi}{2}$ en $\pm\infty$. L'équation proposée admet une seule solution et comme $g(0) = 0$, la seule solution est strictement positive. On la note b. On en déduit :
$$\arctan(b+1) + \arctan(b-1) = \frac{\pi}{2} - \arctan b = \arctan \frac{1}{b}.$$
   On prend la tangente, ce qui donne :
$$\frac{2b}{1-(b^2-1)} = \frac{1}{b}, \text{ puis } b = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. La fonction différence $h : x \longmapsto 2\arcsin x - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ est clairement impaire. On détermine maintenant l'ensemble des x admissibles pour cette équation.
Or, $|2x\sqrt{1-x^2}| \leqslant 1$ est équivalent à :

$$4x^2(1-x^2) \leqslant 1$$

ou encore :

$$0 \leqslant (2x^2-1)^2.$$

La fonction h est définie sur $[-1,1]$.
Soit x une solution éventuelle à l'équation. On prend le sinus, ce qui donne :

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

De plus, $2\arcsin x$ doit appartenir à $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc x doit appartenir à $J = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
Réciproquement si x est dans J, alors $2\arcsin x$ est dans I et :

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Conclusion, $2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ et l'ensemble des solutions à l'équation est bien l'ensemble J.

5. Il y a deux méthodes : utiliser une fonction, la dériver et constater que la fonction était nulle ou utiliser les définitions. On choisit cette deuxième approche.
Soit x dans $\mathbb{R}$.
Si $x = 0$, l'égalité est immédiate.
Si $x > 0$, alors $a = \sqrt{1+x^2} - x > 0$ et $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} < 1$, donc $2\arctan a < \dfrac{\pi}{2}$. De plus,

$$\tan(2\arctan a) = \frac{2a}{1-a^2} = \frac{1}{x}$$

donc on a l'égalité souhaitée pour la formule.
Si $x < 0$, alors $a = \sqrt{1+x^2} - x > 1$, donc $\pi > 2\arctan(a) > \dfrac{\pi}{2}$ et :

$$\frac{\pi}{2} - 2\arctan a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

En calculant la tangente, on obtient :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan a\right) = x,$$

d'où l'égalité souhaitée.

Solution 29 : divers

1. Ces polynômes vérifient $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Ils vérifient la relation :
   $$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$
   Ils sont de degré n, de terme dominant $2^{n-1}X^n$ pour $n \geqslant 1$ et sont scindés à racines simples de racines :
   $$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!].$$
2. Ce déterminant est :
   $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$
3. On effectue indifféremment la DES dans $\mathbb{R}(X)$ ou $\mathbb{C}(X)$.
   Si $n = 0$, $\dfrac{1}{P_0} = 1$.
   Si $n \geqslant 1$, en notant $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, la DES est de la forme :
   $$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \cos\theta_k},$$
   avec :
   $$c_k = \frac{1}{P'(\cos\theta_k)}.$$
   Ensuite, on dérive $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ, ce qui donne :
   $$-\sin\theta\ P'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$
   donc $P'(\cos\theta_k) = n\ \dfrac{\sin(n\theta_k)}{\sin\theta_k} = n\dfrac{(-1)^k}{\sin\theta_k}$.
   La DES demandée est :
   $$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{n}\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\ \sin\theta_k}{X - \cos\theta_k}.$$
4. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \cdots, P_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, alors on peut exprimer P_{k+1} sous la forme :
   $$P_{k+1}(X) = 2^k\ X^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \cdot P_j(X).$$
   En effectuant des manipulations sur les colonnes de la matrice A, on obtient une nouvelle matrice B de même déterminant que A, avec la première colonne de B remplie de 1, comme celle de A, et pour $j \geqslant 1$:
   $$B_{i,j} = 2^{j-1}\cos(a_i)^j.$$
   On pose la matrice V de Van der Monde associée aux nombres $2\cos(a_0), \cdots, 2\cos(a_n)$.

Le déterminant de V vaut :

$$\delta = 2^{(n(n+1)/2} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos a_j - \cos a_i).$$

Le déterminant de V n'est pas tout à fait égal à $\det(B)$ car pour tout $j \geqslant 1$, on a :

$$V_{i,j} = 2B_{i,j}.$$

On en déduit par multilinéarité du déterminant :

$$\det(V) = 2^n \ \det(B).$$

Conclusion,

$$\det(A) = 2^{n(n-1)/2} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos a_j - \cos a_i).$$

Solution 30 : algèbre linéaire

1. La matrice A est triangulaire supérieure à diagonale remplie de 1. Le déterminant de A vaut 1, donc A est inversible.
   De plus, en posant la matrice nilpotente dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$:
   $$N = \sum_{k=0}^{n} E_{k,k+1}$$
   alors :
   $$A = \sum_{i=0}^{n} a^i \ N^i.$$
   On en déduit que la matrice $M = (I_n - a \ N)$ commute avec A et :
   $$MA = I_n - a^{n+1} \ N^{n+1} = I_n.$$
   La matrice A est inversible d'inverse $I_n - a \ N$.
2. On considère l'application :
   $$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+a) \end{array} \right. .$$
   En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$, on remarque que B est exactement la matrice représentant l'endomorphisme f selon $\mathscr{B}$.
   L'endomorphisme f est clairement une bijection d'inverse :
   $$f^{-1} : P(X) \longmapsto P(X-a).$$
   La matrice B est inversible d'inverse la matrice représentant f^{-1} selon la base canonique :
   $$B^{-1} = \left(\binom{j}{i} (-a)^{j-i} \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Solution 31 : divers

1. La réponse est oui.
   On cherche déjà à réduire la matrice A.
   On pose pour tout λ dans $\mathbb{R}$,
   $$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix}.$$
   Après développement, on obtient :
   $$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4).$$
   Le polynôme $\chi_A(X)$ admet trois racines différentes a, b et c. Les espaces $E_a(A)$, $E_b(A)$ et $E_c(A)$ sont de dimension au moins 1.
   En utilisant par exemple le premier exercice de ce feuillet, on voit que la somme $E_a(A)+E_b(A)+E_c(A)$ est directe, donc chaque espace est une droite vectorielle et si X_a, X_b et X_c soit des vecteurs non nuls respectivement dans chaque droite, alors la famille (X_a, X_b, X_c) forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et si P est la matrice de passage de la base canonique vers (X_a, X_b, X_c), alors :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
   Or, la même démarche pour A^T conduit à la même fonction polynomiale, donc aux mêmes racines. Dans une autre base, on peut diagonaliser la matrice A^T.
   Les deux matrices A et A^T sont semblables à une même matrice, donc sont semblables entre elles.
2. Soit x dans $\mathbb{R}$. On remarque qu'en posant la suite arithmético-géométrique :
   $$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{3},$$
   alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$ d'une part et convergente de limite $f(\lambda)$, avec $\lambda = -2$, point fixe associé à l'itératrice de la suite convergente. La fonction f est bien constante égale à $f(-2)$.
3. (a) Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors,
   $$f\left(\frac{x}{2}+3\right) = f\circ f\circ f(x) = \frac{f(x)}{2}+3.$$
   (b) On dérive cette relation, ce qui donne en posant $g = f'$:
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\frac{x}{2}+3\right).$$
   En effectuant le même raisonnement que plus haut, la suite arithmético-géométrique v telle que :
   $$v_0 = x \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n}{2}+3,$$
   converge vers 6, donc g vaut $g(6)$ et f' est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc finalement f est affine.
   On peut remarquer que $f : x \longmapsto ax+b$ avec $a^2 = \dfrac{1}{2}$ et $ab+b = 3$.

4. • On a $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Si $k \in U(\Omega)$, alors :
$$\{U \geqslant k\} = \{X \geqslant k\} \cap \{Y \geqslant k\}$$
   donc :
$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)^2 = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2.$$
   On obtient ainsi :
$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = \frac{1}{n^2}\left(2n - 2k + 1\right).$$
   On calcule l'espérance :
$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{n} k \; \frac{2n-2k+1}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$
   • Pour la variable V, on procède de même en utilisant :
$$\{V \leqslant k\} = \{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\}.$$
   On en déduit :
$$\mathbb{P}(V = k) = \frac{2k-1}{n^2} -$$
   et :
$$\mathbb{E}(V) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$
5. L'entier u_p vaut donc :
$$u_p = 9 + 8\sum_{k=1}^{p-1} 10^k + 4\sum_{k=p}^{2p-1} 10^k.$$
   On calcule les sommes géométriques pour en déduit :
$$u_p = \frac{1 + 4 \cdot 10^p + 4 \cdot 10^{2p}}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^p + 1}{3}\right)^2.$$
   La quantité entre parenthèses est bien un entier car la somme des chiffres du numérateur est multiple de 3.
6. On explicite l'entier u_n :
$$u_n = 1 + 2^{n+1}.$$
   On en déduit :
$$u_n^2 = 1 + 2^{n+2} + 2^{2n+2}.$$
   Sa décomposition binaire est :
$$10 \cdots 010 \cdots 01,$$
   avec le groupe gauche de 0 comportant $n-1$ zéros et celui de droite comportant $(n+1)$ zéros.
   Pour u_n^3, on obtient :
$$u_n^3 = 1 + 3 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^{2n+2} + 2^{3n+3} = 1 + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3} + 2^{3n+3}.$$

On dispose aisément de sa décomposition binaire avec 6 chiffres 1 seulement espacés de 0.
Pour $u_n^3 - u_n^2 + u_n$, on obtient :

$$u_n^3 - u_n^2 + u_n = 1 + 2^{n+3} + 2^{2n+3} + 2^{3n+3}.$$

Là encore, il est facile de conclure, avec une décomposition binaire comportant 4 chiffres 1.

7. (a) Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on sait que :

$$(p-1)! = \prod_{k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} k.$$

Or, si $p = 2$, le résultat à montrer est évident car $-1 = 1$ modulo 2.
Si $p \geqslant 3$ est un nombre premier, alors p est impair et il n'y a que deux éléments égaux à leur propre inverse : 1 et -1.
En rangeant dans le produit des éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ les éléments deux par deux par inverses, on obtient après simplifications $(-1) \times 1 = -1$.

(b) Soit $p \geqslant 2$ un entier tel que p n'est pas premier.
Les entiers $(p-1)!$ et p ne peuvent être premiers car il existe un diviseur d strictement supérieur à 1 de p avec de plus $d \leqslant p-1$. L'entier d divisera à la fois p et $(p-1)!$. On ne peut donc avoir l'égalité modulo p précédente dans ce cas.

8. Soit $t > 0$. On remarque que :

$$t \cdot \mathbf{1}_{\{|X|>t\}} \leqslant |X|,$$

en distinguant deux cas selon le choix de ω dans Ω.
En prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{t},$$

d'où le résultat.

9. (a) On pose $p = \lfloor x \rfloor$. On obtient rapidement ce qu'il faut en distinguant deux cas : $x < p + \frac{1}{2}$ et $x \geqslant p + \frac{1}{2}$, sachant que dans ce cas, $\lfloor 2x \rfloor = 2p + 1$.

(b) Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $p = \lfloor x \rfloor$. Il existe un seul entier k entre 0 et $n-1$ tel que :

$$p + \frac{k_0}{n} \leqslant x < p + \frac{k_0 + 1}{n}.$$

D'une part, $\lfloor nx \rfloor = np + k_0$.
D'autre part, si k est un entier entre 0 et $n-1$, alors :
- soit $k < n - k_0$, auquel cas

$$p \leqslant x + \frac{k}{n} < p + 1$$

- soit $k \geqslant n - k_0$, auquel cas :

$$p + 1 \leqslant x + \frac{k}{n} < p + 2.$$

Ainsi, en découpant la somme en deux, on obtient que la somme de gauche de l'énoncé vaut :

$$p \cdot (n - k_0) + (p+1)k_0 = pn + k_0 = \lfloor nx \rfloor.$$

10. • pour l'ensemble $\mathscr{A}$, il y a une borne inférieure car 0 minore $\mathscr{A}$ et 0 est la borne inférieure ; il y a une borne supérieure car 1 majore $\mathscr{A}$ et 1 est la borne supérieure en prenant $m = 1$ et en faisant tendre n vers $+\infty$. Ces bornes ne sont pas dans $\mathscr{A}$. L'ensemble $\mathscr{A}$ n'a ni de plus petit, ni de plus grand élément.
    • pour l'ensemble $\mathscr{B}$, $\inf \mathscr{B} = 0 = \min \mathscr{B}$ et l'ensemble $\mathscr{B}$ n'est pas majoré en prenant $m = 0$ et n tendant vers $+\infty$.
11. La réponse est oui. Si ce n'est pas le cas, on note r cette somme rationnelle.
    En élevant $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$ au carré, on obtient une égalité de la forme :
    $$a + b\sqrt{6} + c\sqrt{5} = 0,$$
    avec a, b et c non nuls.
    En élevant $(a + b\sqrt{6}) = -c\sqrt{5}$ au carré on obtient que $2ab\sqrt{6}$ est rationnel, ce qui n'est pas le cas.

Solution 32 : espaces euclidiens

1. (a) La vérification est classique.
   (b) L'ensemble F est en fait l'orthogonal du polynôme constant égal à 1.
   On en déduit que si p est la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$, alors :
   $$p(1) = 0,$$
   donc :
   $$d(1, F) = \|1 - p(1)\| = \|1\| = \sqrt{n+1}.$$
2. • On pose le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On pose la matrice $M = \dfrac{U\,U^T}{2}$.
   La matrice M vérifie :
   $$M^2 = \frac{1}{4}\,U(U^TU)U^T = \frac{1}{2}\,UU^T = M.$$
   Ensuite, la matrice M est symétrique : la matrice M est donc une projection orthogonale. De plus, $\mathrm{Tr}(M) = \dfrac{1}{2}\,U^TU = 1$. Ainsi, $\mathrm{Rg}(M) = 1$ et il est facile de voir que $MU = U$. La matrice M est bien la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(U)$. Ainsi, la matrice demandée est :
   $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   • On pose le vecteur :
   $$\vec{v} \wedge \vec{w} = (-1, 2, 2) = \vec{h}.$$
   La matrice H de projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\vec{h})$ est :
   $$H = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de symétrie orthogonale par rapport à G est la matrice :

$$S = I_3 - 2H = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le plus simple est que si l'hyperplan est donné par le noyau d'une forme linéaire, alors cet hyperplan est donné par une équation cartésienne de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, y_k = 0,$$

où le vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est non nul. On dispose dans l'espace euclidien habituel de l'orthogonal de H :

$$H^{\perp} = \mathrm{Vect}(a).$$

Enfin, la distance entre x et l'hyperplan H est donnée :

$$d(x, H) = \left| \left(x \mid \frac{a}{\|a\|} \right) \right| = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}.$$

4. C'est presque du cours.
Si A est une matrice de projection orthogonale, alors c'est une projection, donc $A^2 = A$. De plus, selon une base orthnormale obtenue en concaténant une b.o.n. de l'image et une b.o.n du noyau, en posant la matrice de passage orthogonale de la base canonique vers cette b.o.n. adaptée, alors $P^{-1}AP = J_r$, donc $A = PJ_rP^{-1} = PJ_rP^T$ qui est une matrice symétrique.
Si $A^2 = A = A^T$, alors déjà A est une projection. Si $X \in \mathrm{Ker}(A)$ et $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$, on écrit $Y = AZ$, et donc :

$$X^T\, Y = X^T\, (AZ) = (AX)^T\, Z = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}\,(A)^{\perp}$ et on a égalité des dimensions finies, par le théorème du rang. La projection est bien orthogonale car $\mathrm{Ker}(A) \perp \mathrm{Im}\,(A)$.

Solution 33 : séries

1. (a) • Si $P(X)$ n'est pas un polynôme unitaire de degré 3, alors le terme u_n ne tend pas vers 0 et donc la série DVG.
• Supposons que $P(X)$ soit un polynôme unitaire de degré 3. On pose $P(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$.
D'une part,

$$\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

D'autre part,

$$\sqrt[3]{n^3 + pn^2 + qn + r} = n\left(1 + \frac{p}{3n} + \frac{q}{3n^2} - \frac{p^2}{9n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = n + \frac{p}{3} + \frac{q}{3n} - \frac{p^2}{9n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Conclusion, le terme u_n a pour développement asymptotique :

$$u_n = -\frac{p}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{3} + \frac{p^2}{9}\right)\,\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si le polynôme $P(X)$ est de la forme :

$$P(X) = X^3 + \frac{3}{2}X + r,$$

où r est quelconque dans $\mathbb{R}$.

(b) On s'occupe du produit. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \circ(1).$$

Ainsi, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = e^{1/2} - 1$ et la série diverge grossièrement.

(c) On effectue un développement asymptotique.

Pour $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) &= \sin\left(\pi n - \pi + \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Pour $\cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$:

$$\begin{aligned} \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) &= \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \cos\left(-n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\,\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que le terme u_n est de la forme :

$$u_n = (-1)^{n+1}\,\frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

de série convergente en utilisant d'une part le CSSA, et d'autre part l'ACV des séries de Riemann avec $\alpha = 2$.

(d) On fixe $a > 0$.

On s'occupe du premier terme :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}\right) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + \circ\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}-\frac{1}{n^{2a}}+\circ\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n^a}-\frac{3}{2n^{2a}}+\circ\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).
\end{aligned}
$$

On s'occupe du second terme :

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\ln^a n} &= \frac{(-1)^n}{\ln^a n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\ln^a n}}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\ln^a n}\left(1-\frac{(-1)^n}{\ln^a n}+\circ\left(\frac{1}{\ln^a n}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\ln^a n}-\frac{1}{\ln^{2a} n}+\circ\left(\frac{1}{\ln^{2a} n}\right).
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$
u_n=\frac{(-1)^n}{n^a}+\frac{(-1)^n}{\ln^a n}-\left[\frac{1}{\ln^{2a} n}+\circ\left(\frac{1}{\ln^{2a} n}\right)\right].
$$

Le premier et le deuxième terme sont de série convergente par le CSSA.

Le troisième terme entre crochets est équivalent à $\dfrac{1}{\ln^{2a} n}$, strictement positif, de série divergente vers $+\infty$. Le terme entre crochet est donc encore de série divergente vers $+\infty$.

En définitive, le terme u_n est de série divergente vers $-\infty$.

2. (a) Cette série est clairement convergente. En utilisant par exemple une dérivation d'une somme gémétrique, on obtient :

$$
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}.
$$

(b) Cette série est encore clairement convergente. On utilise ici une décomposition en éléments simples pour faire apparaître une série télescopique.

On obtient :

$$
\frac{2X-1}{X^3-4X}=\frac{1/4}{X}+\frac{3/8}{X-2}-\frac{5/8}{X+2}.
$$

Pour tout entier $N \geqslant 3$, on obtient comme simplification de la somme partielle :

$$
\begin{aligned}
S_N=\sum_{k=3}^{N}\frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{N}\frac{1}{k}+\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{N-2}\frac{1}{k}-\frac{5}{8}\sum_{k=5}^{N+2}\frac{1}{k}\\
&= \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{N}\right)\\
&= \frac{89}{96}+\circ(1).
\end{aligned}
$$

La somme vaut $\dfrac{89}{96}$.

3. La série $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est croissante car à termes positifs.

Soit $N \geqslant 1$ un entier. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^N$ habituel pour obtenir l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{N} \sqrt{u_k}\ \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{N} u_k \times \sum_{\ell=1}^{N} \frac{1}{\ell^2}}.$$

Il est alors clair que la série proposée est majorée par $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \times \zeta(2)}$. Cette série est convergente.

4. On voit un lien avec la fonction arctan.

On interprète la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ comme une intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\ dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\ dt \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n\ u_n,
\end{aligned}$$

avec $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

La série proposée vaut donc :

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ u_n.$$

Il est facile de voir que la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n\ u_n$ vérifie le CSSA, car $u_{n+1} - u_n$ est l'intégrale d'une intégrande négative entre 0 et 1 et :

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\ dt = \frac{1}{2n+3}.$$

On passe maintenant au calcul.

Si $N \geqslant 0$, alors :

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\ u_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n\ dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} (1-(-t^2)^{N+1})\ dt,$$

quantité tendant vers :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\ dt,$$

lorsque N tend vers $+\infty$.
Conclusion, la somme de la série proposée vaut :

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt &= -\int_0^1 t\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt \\
&= \left[t\,\frac{1}{2(1+t^2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{2(1+t^2)} \\
&= \frac{2-\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5. (a) Si $\ell > 1$, si $a \in]1, \ell[$, pour n assez grand,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant a \text{ , donc } |u_{n+1}| \geqslant |u_n|,$$

et la suite u ne peut converger vers 0. La série DVG.
Si $\ell < 1$, on choisit $a \in]\ell, 1[$ de sorte que pour n assez grand supérieur à un rang n_1,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant a \text{ , donc } |u_{n+1}| \leqslant a|u_n|,$$

et par une récurrence facile :

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n| \leqslant a^{n-n_1}\ |u_{n_1}|,$$

de série ACV. La série est ACV.
Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire comme l'attestent les exemples $u_n = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ ou $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

(b) Si $z = 0$, la série converge immédiatement.
Si $z \neq 0$, on pose u_n le terme général de la série.
Alors,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z|\ \frac{n+1}{2(2n+1)}, \text{ de limite } \frac{|z|}{4}.$$

Si $|z| > 4$, la série DVG.
Si $|z| < 4$, la série est ACV.
Si $|z| = 4$, on trouve un équivalent de u_n par la formule de Stirling que l'on rappelle ici :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\simeq} \left(\frac{n}{e}\right)^n\ \sqrt{2\pi n}.$$

On obtient :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\simeq} \left(\frac{z}{4}\right)^n\ \sqrt{\pi n}.$$

On obtient alors la DVG lorsque $|z| = 4$. Cet équivalent est en fait plus précis que le critère de d'Alembert qui permet de retrouver les résultats lorsque $|z| \neq 4$.

Solution 34 : probabilités

1. En posant $Y_{i,j} = \dfrac{1+X_{i,j}}{2}$, alors $Y_{i,j} \sim \mathscr{B}(p)$. On en déduit que $\mathrm{Tr}(M) = 2\sum_{k=1}^{n} Y_{k,k} - n = 2Y - n$, avec $Y \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. On peut alors facilement calculer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$ car :
$$\{\mathrm{Tr}(M) = k\} = \left\{Y = \frac{n+k}{2}\right\}.$$
On calcule directement l'espérance et la variance, les variables $X_{i,i}$ étant centrées et mutuellement indépendantes, avec $X_{i,i}^2 = 1$:
$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M)) = 0 \text{ et } V(\mathrm{Tr}(M)) = n.$$

2. On utilise :
$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} X_{\sigma(k),k}.$$
On utilise la linéarité de l'espérance et le fait que l'espérance d'un produit de variables mutuellement indépendantes est le produit des espérances. On trouve :
$$\mathbb{E}(\det(M)) = 0.$$
Ensuite,
$$V(\det(M)) = \mathbb{E}(\det(M)^2).$$
Or,
$$\det(M)^2 = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \prod_{k=1}^{n} X_{\sigma_1(k),k} \prod_{\ell=1}^{n} X_{\sigma_2(\ell),\ell}.$$
Si σ_1 et σ_2 sont deux permutations, soit elles sont égales, auquel cas :
$$\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \prod_{k=1}^{n} X_{\sigma_1(k),k} \prod_{\ell=1}^{n} X_{\sigma_2(\ell),\ell} = 1,$$
soit elles sont différentes et dans le produit $\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \prod_{k=1}^{n} X_{\sigma_1(k),k} \prod_{\ell=1}^{n} X_{\sigma_2(\ell),\ell}$ se retrouve une variable $X_{i,j}$ « toute seule », d'espérance nulle :
$$\mathbb{E}\left(\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \prod_{k=1}^{n} X_{\sigma_1(k),k} \prod_{\ell=1}^{n} X_{\sigma_2(\ell),\ell}\right) = 0,$$
dans ce cas, en utilisant le lemme des coalitions.
En définitive,
$$V(\det(M)) = n!$$

3. C'est du comptage.
Il y a 2^{n^2} matrices à coefficients valant ± 1.
Parmi ces matrices, les matrices de rang un sont exactement les matrices de première colonne quelconque, et toutes les autres colonnes valent $\pm C_1$.
Cela fait 2^n choix de première colonne et 2^{n-1} choix des $(n-1)$ dernières colonnes.
Ainsi :
$$\mathbb{P}(\mathrm{Rg}(M) = 1) = \frac{1}{2^{(n-1)^2}}.$$

Solution 35 : probabilités

1. Il s'agit d'une loi hypergéométrique (loi usuelle hors programme).
   D'une part, $X(\Omega) \subset [\![0, k]\!]$.
   D'autre si j est un entier entre 0 et k, on calcule la probabilité $\mathbb{P}(X = j)$ en utilisant du dénombrement.
   Il y a $\binom{a+b}{k}$ tirages possibles.
   Choisir un tirage favorable à l'événement $\{X = j\}$ revient à choisir j boules parmi les a boules blanches et les $k - j$ boules parmi les b boules noires.
   On obtient alors :
   $$\forall j \in [\![0, k]\!],\ \mathbb{P}(X = j) = \frac{\binom{a}{j}\binom{b}{k-j}}{\binom{a+b}{k}}.$$
2. Il s'agit de la formule de Van der Monde. La somme vaut :
   $$\binom{a+b}{k}.$$
   Pour le montrer, il suffit d'écrire $1 = \sum_{j=0}^{a+b} \mathbb{P}(X = j)$.
3. Cette somme compte le nombre aléatoire de boules blanches piochées. Il s'agit de la variable X.
4. Par linéarité de l'espérance, on obtient :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{a} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{a} \mathbb{P}(A_i).$$
   On calcule la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$ par comptage.
   Il y a $\binom{a+b}{k}$ tirages possibles.
   Compter les tirages favorables à l'événement A_i revient à choisir la boule i et $k - 1$ autre boules parmi les $a + b - 1$ autres boules.
   Ainsi, après simplifications :
   $$\mathbb{P}(A_i) = \frac{k}{a+b}.$$
   On en déduit :
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{k\ a}{a+b}.$$
5. Si Y compte le nombre de boules blanches piochées lors de k tirages avec remise, alors :
   $$Y \sim \mathscr{B}\left(k, \frac{a}{a+b}\right).$$
   Par conséquent,
   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y).$$
   Avec ou sans tirage, on pioche en moyenne le même nombre de boules blanches.

Solution 36 : algèbre linéaire

1. (a) Il suffit d'appliquer la formule du rang pour l'application linéaire u.

   (b) Soit F un espace de dimension finie de dimension paire égale à $2r$. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$.
   Il existe une seule application linéaire $v \in \mathscr{L}(F)$ telle que :

   $$\forall i \in [\![1, r]\!],\ v(e_i) = 0 \text{ et } v(\varepsilon_i) = e_i.$$

   La famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est à la fois à vecteurs dans $\mathrm{Ker}(v)$ et dans $\mathrm{Im}\,(v)$.
   On en déduit que $r \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v))$ et $r \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(v))$. La somme à termes positifs

   $$\Big(\dim(\mathrm{Ker}(v)) - r\Big) + \Big(\dim(\mathrm{Im}\,(v)) - r\Big)$$

   est nulle : chaque terme est nul et les inclusions précédentes sont des égalités. On a bien ce qu'il faut.

   (c) Soit $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. Il est facile de voir que la famille

   $$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_r, u(e_1), \cdots, u_(e_r))$$

   est libre – en appliquant l'endomorphisme u à une combinaison linéaire nulle. Il s'agit d'une base de E.
   Il existe une seule application linéaire $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

   $$\forall i \in [\![1, r]\!],\ w(u(e_i)) = e_i \text{ et } w(e_i) = 0.$$

   Si i est un entier entre 1 et r, alors

   $$(u \circ w + w \circ u)(u(e_i)) = u(w(u(e_i))) = u(e_i)$$

   et :

   $$(u \circ w + w \circ u)(e_i) = w(u(e_i)) = e_i.$$

   Les applications linéaires $u \circ w + w \circ u$ et id_E coincident sur la base $\mathscr{B}$, donc partout.

2. (a) Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. On utilisera les formes linéaires coordonnées e_i^*.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note l'hyperplan :

   $$H_\lambda = \mathrm{Ker}\Big(e_1^* + \lambda \cdot e_2^*\Big).$$

   Soient $a \neq b$ deux réels différents. Le vecteur $x = -a \cdot e_1 + e_2$ appartient à H_a mais :

   $$(e_1^* + b \cdot e_2^*)(x) = -a + b \neq 0.$$

   On en déduit que x appartient à $H_a \setminus H_b$: les deux hyperplans H_a et H_b sont différents.

(b) • On démontre déjà que la réunion des F_i est différente de E.

On peut inclure chaque F_i dans un hyperplan H_i en complétant une base de F_i en une base de E, puis en construisant H_i en prenant l'espace vectoriel des vecteurs de cette base sauf le dernier.

Montrons alors que la réunion des H_i est différente de E.

Il suffit d'utiliser une récurrence sur la dimension de E.

Lorsque E est de dimension 1, il n'y a qu'un seul hyperplan : $\{0\}$.

Si la propriété est vraie en dimension n, soit E de dimension $(n+1)$, puis $H_1, \cdots, H_k$ des hyperplans de E. On trouve un hyperplan H différent des H_j, pour j entre 1 et k.

Par la formule de Grassmann, chaque espace $G_i = H_i \cap H$ est un hyperplan de H. L'espace H est de dimension n. On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace H. La réunion des G_i, pour i variant entre 1 et k est différente de H, donc la réunion des H_i était différente de E.

La réunion des F_i est donc différente de E.

• Pour la seconde partie de la question, on commence par montrer que si $\mathscr{A}$ est une partie finie de $E \setminus \{0\}$, alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(\mathscr{A}) \subset \mathbb{R}^*.$$

On traite le problème par récurrence sur l'entier $s = \text{card}(\mathscr{A})$.

Si $s = 1$, alors l'ensemble $\mathscr{A}$ ne comporte qu'un seul élément x non nul. On complète (x) en une base de E et la forme linéaire $\ell = x^*$ vérifie :

$$\ell(x) = 1 \neq 0.$$

Supposons le résultat vrai dès que $\mathscr{A}$ est une partie de vecteurs non nuls de cardinal s.

Soit $\mathscr{A} = \{x_1, \cdots, x_s, x_{s+1}\}$ une partie de $(s+1)$ vecteurs non nuls dans E.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux parties $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \setminus \{x_s\}$ et $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A} \setminus \{x_{s+1}\}$.

On trouve par H.R. deux formes linéaires $\ell_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$0 \notin \ell_1(\mathscr{A}_1) \text{ et } 0 \notin \ell_2(\mathscr{A}_2).$$

On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$, la forme linéaire :

$$\varphi_a = \ell_1 + a \cdot \ell_2.$$

Alors, si $a \in \mathbb{R}$ vérifie : $0 \in \varphi_a(\mathscr{A})$, alors il existe $i \in [\![1, s+1]\!]$ tel que :

$$\varphi_a(x_i) = 0.$$

Si $i < s+1$, alors $\ell_1(x_i) + a\ \ell_2(x_i) = 0$, donc comme $\ell_2(x_i)$ est non nul, cela donne :

$$a = -\frac{\ell_1(x_i)}{\ell_2(x_i)}.$$

Si $i = s+1$, alors $\ell_1(x_i) \neq 0$, donc $\ell_2(x_2) \neq 0$ et on obtient là encore une seule valeur possible de a.

En définitive, il existe un nombre fini de valeurs de a pour lesquelles $\varphi_a(\mathscr{A})$ contienne la valeur nulle.

Il est donc possible de choisir a réel pour laquelle :

$$\varphi_a(\mathscr{A}) \subset \mathbb{R}^*.$$

On applique maintenant cette propriété en revenant au problème de la question.
On choisit pour tout $i \in I$ un vecteur non nul u_i dans F_i.
On crée l'ensemble fini $\mathscr{A} = \{u_i \ ; \ i \in I\}$.
Il existe une forme linéaire φ telle que :

$$0 \notin \varphi(\mathscr{A}).$$

On pose $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.
Soit i un élément de I. Comme $\varphi(u_i) \neq 0$, alors $u_i \notin H$ et donc $F_i \not\subset H$.
L'espace $F_i + H$ est égal à l'espace E tout entier. Par la formule de Grassmann, on en déduit :

$$\dim(F_i \cap H) = \dim(F_i) + \dim(H) - \dim(F_i + H) = \dim(F_i) - 1.$$

On répond donc au problème posé.

3. (a) Si $k \in \mathbb{N}$, alors $F_{k+1} \subset F_k$ et $N_k \subset N_{k+1}$ assez rapidement.
Ensuite, si $F_j = F_{j+1}$, soit $x \in F_{j+2}$. On écrit :

$$x = f^{j+2}(a),$$

pour un certain $a \in E$. Comme $f^{j+1}(a) \in F_{j+1} = F_j$, il existe $b \in E$ tel que $f^{j+1}(a) = f^j(b)$ et donc $x = f^{j+1}(b) \in F_{j+1}$. Par récurrence facile, tous les F_k sont égaux pour $k \geqslant j$.
Si $N_j = N_{j+1}$, soir $x \in N_{j+2}$. Alos, $f(x) \in N_{j+1} = N_j$, donc $x \in N_{j+1}$. Par récurrence, on a ce qu'il faut.

(b) L'ensemble F en tant qu'intersection de sous-espaces est un sous-espace de E.
On a $N \subset E$, $0 \in N$ et si x et y sont dans N, et λ est dans K, il existe i et j tels que :

$$x \in N_i \text{ et } y \in N_j.$$

On pose $k = \max\{i, j\}$ de sorte que x, y et ensuite $\lambda \cdot x + y$ appartiennent au même espace N_k, donc à N.
Si $x \in F$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x \in F_i$, donc $f(x) \in F_{i+1} \subset F_i$: $f(x) \in F$.
Si $x \in N$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in N_i$. Si $i = 0$, alors $x = 0$ et $f(x) = x = 0$. Si $i \geqslant 1$, alors $f(x) \in N_{i-1}$. Quoiqu'il arrive $f(x) \in N$.

(c) Il suffit de montrer la somme directe pour des raisons de dimensions.
Les suites numériques $(\dim(F_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\dim(N_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones bornées à valeurs entières, donc sont stationnaires à partir d'un certain rang. Par le théorème du rang, elles sont stationnaires à partir du même rang, mais ceci est inutile dans le cas présent.
On trouve i un entier suffisamment grand pour que les suites $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soient stationnaires à partir du rang i, de sorte que :

$$N = N_i \text{ et } F = F_i.$$

Soit maintenant $x \in N \cap F$. Alors $x \in N_i \cap F_i$. Ainsi, $f^i(x) = 0$ et on peut écrire :

$$x = f^i(a),$$

pour un certain vecteur $a \in E$.
Par conséquent, $f^{2i}(a) = 0$, donc $a \in N_{2i} = N_i$ et donc $x = f^i(a) = 0$.

(d) La réponse est non, dans le cas général, lorsque E est de dimension infinie.
Par exemple, prenons $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \longmapsto P'$ la dérivation.
Alors, $F = \mathbb{R}[X]$ car l'application u est surjective et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k = \mathrm{Ker}(u^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

Ainsi, $F = N = \mathbb{R}[X]$, donc la somme $N + F$ n'est pas directe.

Solution 37 : algèbre générale

1. Il est facile de voir que la relation $\mathscr{R}$ est réflexive (car $\mu(X)$ divise 0), symétrique (car si $\mu(X)$ divise R, alors $\mu(X)$ divisera $-R$) et transitive (car si $\mu(X)$ divise R et si $\mu(X)$ divise S, alors $\mu(X)$ divisera $R + S$).
2. Soit $P \in K[X]$. La classe $\overline{P}$ est :
$$\overline{P} = P + \mu(X) \cdot K[X].$$
3. On vérifie facilement que ces opérations sont bien définies. Par exemple pour l'addition, si $P_1 \mathscr{R} P_2$ et $Q_1 \mathscr{R} Q_2$, alors $\mu(X)$ divise $(P_1 - P_2)$ et $\mu(X)$ divise $(Q_1 - Q_2)$, donc $\mu(X)$ divise $(P_1+Q_1)-(P_2+Q_2)$, donc $\overline{P_1 + Q_1} = \overline{P_2 + Q_2}$.
On vérifie facilement que les axiomes des anneaux sont vérifiés, l'élément nul étant $\overline{0}$ et l'élément unité étant $\overline{1}$.
Montrons qu'il s'agit d'un corps.
Soit $\overline{P}$ non nul dans $E/\mathscr{R}$. Alors, les polynômes P et 0 ne sont pas dans la même classe d'équivalence : le polynôme $\mu(X)$ ne divise pas $P(X)$ et comme $\mu(X)$ est irréductible, alors les polynômes $\mu(X)$ et $P(X)$ sont premiers entre eux dans $K[X]$. On trouve une relation de Bezout :
$$\mu(X)\ U(X) + P(X)\ V(X) = 1.$$
Ainsi :
$$\overline{1} = \overline{\mu(X)}\ \overline{U} + \overline{P}\ \overline{V} = \overline{P}\ \overline{V}.$$
L'élément $\overline{P}$ est bien inversible dans l'anneau commutatif $E/\mathscr{R}$, d'inverse $\overline{V}$.
4. Ce corps est identifiable au corps $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme d'anneaux :
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]/\mathscr{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \overline{P} & \longmapsto & P(i) \end{array} \right. .$$
5. Soit $X^3 + 2X + 7 = RS$ une factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$. Si R et S ne sont pas constants, alors l'un des deux polynômes est de degré 1, par exemple R. Comme $R \in \mathbb{Q}[X]$, alors R a une racine rationnelle $\lambda = \dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$.
Cette racine est encore racine de $X^3 + 2X + 7$ et en injectant, on obtient :
$$a^3 + 2ab^2 + 7b^3 = 0.$$
Par le théorème de Gauss, b divise 1 et a divise 7.
En définitive, $\lambda \in \{\pm 1, \pm 7\}$ mais aucun de ces racines ne convient.
Le polynôme est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Solution 38 : séries

1. On pose la somme partielle :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}.$$
On en déduit :
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$
Or, les entiers $\sigma(k)$, lorsque k décrit $[\![n+1, 2n]\!]$, sont n entiers tous différents et strictement positifs. La somme est supérieure à :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Ainsi,
$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{8} + \circ(1),$$
donc la suite des sommes partielles ne peut converger car sinon, $S_{2n} - S_n$ tendrait vers 0.

2. On sait que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\sigma([\![1, N]\!]) \subset [\![1, r]\!]$$
donc
$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma^2(k)} \leqslant T_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{r^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}.$$
La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge vers une valeur ℓ inférieure à $\zeta(2)$.
Inversement, soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\sigma^{-1}([\![1, N]\!]) \subset [\![1, r]\!]$$
donc $[\![1, N]\!] \subset \sigma([\![1, r]\!])$.
On en déduit avec les notations précédentes :
$$T_N \leqslant S_r \leqslant \ell.$$
Lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient : $\dfrac{\pi^2}{6} \leqslant \ell$, donc on a égalité.

3. Non.
Par exemple, si $\sigma = \mathrm{id}_{N^*}$, la série est divergente.
Cependant, en construisant une bijection σ comme suit, on peut aussi avoir la convergence de la série.
Il existe une bijection ψ entre $2\mathbb{N}+1$ et :
$$\mathbb{N} \setminus \{2^k \ ; \ k \in \mathbb{N}^*\},$$

car ces deux ensembles sont infinis et inclus dans $\mathbb{N}$.

On pose alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sigma(k) = \begin{cases} 2^k \text{ , si } k \text{ est pair} \\ \psi(k)\text{, sinon} \end{cases}.$$

De ce fait, si $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier, l'un des deux entiers k ou $k+1$ est pair, donc $\sigma(k)$ ou $\sigma(k+1)$ est supérieur à 2^k et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(k)\sigma(k+1)}} \leqslant \frac{1}{2^{k/2}} = \circ\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

de série convergente.

4. Oui.

   Soit $M > 0$ un réel.

   Soit $N > M$ un entier. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que :

   $$\sigma^{-1}([\![1, N]\!]) \subset [\![1, r]\!].$$

   Ainsi, $[\![1, N]\!] \subset \sigma([\![1, r]\!])$.

   Soit finalement $k > r$. Alors, l'entier $\sigma(k)$ ne peut appartenir à l'ensemble $[\![1, N]\!]$, car sinon, il serait de la forme $\sigma(j)$, avec $j < k$.

   Conclusion,

   $$\forall k > r, \ \sigma(k) > N > M.$$

   On a ce qu'il faut.

Solution 39 : fonctions réelles

On utilise des développements limités ou des croissances comparées. Après calculs, on trouve :

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 2x + 7}{\operatorname{ch}^3(x)} = 8$
2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{8}$
3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$
4. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 9} - 3}{x} = \frac{5}{6}$.

Solution 40 : fonctions réelles

1. La partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc la fonction f aussi.

   Soit $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie que la quantité $f(x)$ tend vers k, lorsque x tend vers k^+ et tend aussi vers $k - 1 + 1 = k$, lorsque x tend vers k^-.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) La fonction g tend vers 1, lorsque x tend vers 0. On peut ainsi la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction h n'admet pas de limite finie en 0, car :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = 0 \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1.$$

(c) La fonction i tend vers 0 lorsque x tend vers -1, car $\sin u \sim u$ en 0 et $u \ln |u|$ tend vers 0 en 0.

3. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels, tendant vers x. Ainsi,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(i_n) = 0.$$

La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet pas de limite finie en x.

Solution 41 : fonctions réelles

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe $b > a$ tel que :

$$\forall x \geqslant b, \ |f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

La fonction f est bornée par $|\ell| + 1$ sur $[b, +\infty[$ et bornée par une constante C sur le segment $[a, b]$. La fonction f est donc bornée par $C + |\ell| + 1$ par exemple sur $[a, +\infty[$.
La fonction f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ en général comme l'atteste l'exemple : $f : x \longmapsto e^{-x}$.

(b) On fait un raisonnement « à la Césarò ».
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant b, \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \geqslant b$. Alors,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x}\int_0^x f - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n}\int_0^x (f - \ell)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f - \ell| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^b |f - \ell| + \frac{x-b}{x}\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers ε, lorsque x tend vers $+\infty$.
On trouve $c > b$ tel que :

$$\forall x \geqslant c, \ \frac{1}{x}\int_0^b |f - \ell| + \frac{x-b}{x}\,\varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

On en déduit ce qu'il faut en remplaçant chaque ε par $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Par inégalité triangulaire, $||A| - |B|| \leqslant |A - B|$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant \varepsilon,$$

d'où la continuité de $|f|$ en x_0.

(b) Non, la fonction $f = 2\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} - \dfrac{1}{2}\right)$ est discontinue sur $\mathbb{R}$, prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et la fonction $|f|$ est constante donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On trouve une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x. En passant à la limite dans l'inégalité $f(r_n) < g(r_n)$, on a ce qu'il faut.
Par exemple, prendre $f = 0$ et $g : x \longmapsto (x - \sqrt{2})^2$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et par irrationnalité de $\sqrt{2}$:

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ 0 = f(r) < g(r)$$

avec $g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

(b) Oui, par densité et passage à la limite, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver deux rationnels r et s tels que $a < r < s < b$ et donc :

$$f(a) \leqslant f(r) < f(s) \leqslant f(b),$$

amenant $f(a) < f(b)$.

4. La fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue et vérifie :

$$g(0) \geqslant 0 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Par le TVI, la fonction g s'annule au moins une fois. On a un point fixe pour la fonction f.

Solution 42 : fonctions réelles

1. On pose $f(x)$ l'intégrale proposée. Alors :

$$f(x) = \ln x(e^{x^2} - x^2) + \int_{x^2}^{e^x} \ln t\ dt.$$

Il est alors clair que f est C^1 et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{x^2} - x^2}{x} + \ln x \cdot (2xe^{x^2} - 2x) + (e^x x - 2x\ln(2x)).$$

2. (a) Pour la fonction g, le seul problème éventuel est en 0. Or, la limite du taux de variations est :

$$\frac{g(x)}{x} \longrightarrow 1.$$

La fonction g est dérivable en 0.
La fonction g est impaire, donc la fonction g' est paire. Si $x > 0$,

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

La fonction g' est bien continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est de classe C^1.

(b) La fonction h est bien dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$ est impaire et sur $]0, +\infty[$,

$$h' : x \longmapsto \sin x + x \ \cos x,$$

de limite nulle. La fonction h est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction i admet le $DL_1(0)$: $i(x) = \circ(x)$. La fonction i est donc dérivable en 0. De plus, sur $\mathbb{R}^*$:

$$i'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

sans limite en 0. La fonction i est seulement dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution 43 : fonctions réelles

(a) On pose au voisinage de 0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a_1 h + \circ(h),$$

ce qui donne :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = a_1 + \circ(1),$$

de limite $a_1 = f'(0)$.

(b) La fonction $f : x \longmapsto |x|$ vérifie lorsque $x_0 = 0$,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = 0,$$

mais la fonction f n'est pas dérivable en 0. On ne peut énoncer de réciproque.

(c) On pose $a_1 = f'(x_0)$ de sorte que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a_1 h + \circ(h).$$

On obtient alors :

$$\frac{(x_0+h)f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h} = f(x_0) - a_1 x_0 + \circ(1),$$

de limite $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

Solution 44 : fonctions réelles

La fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, \text{ si } x \in]0,1] \\ f'(0), \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ car il s'agit d'une fonction dérivable en 0, de classe C^1 sur $]0,1]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[0,x]$, de sorte que :

$$g(x) = f'(c_x),$$

de limite $f'(0)$ lorsque x tend vers 0^+.
La fonction g est à valeurs strictement positives par le TAF et car $f' > 0$.
D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $0 < m < M$ tels que :

$$m \leqslant g \leqslant M,$$

d'où le résultat.

Solution 45 : fonctions réelles

1. On étudie g.
   Pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = (x-1)e^x + 1$ et $g''(x) = xe^x \geqslant 0$.
   La fonction g'' est croissante, donc g' est croissante avec $g'(0) = 0$. La fonction g' est positive, donc g est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Or, $g(0) = 0$, d'où le résultat.
2. La fonction f est clairement de classe C^1 hors de 0.
   En 0, on a :
   $$f(h) = \frac{1}{1 + \dfrac{h}{2} + \circ(h)} = 1 - \frac{h}{2} + \circ(h).$$
   La fonction f admet un $DL_1(0)$: elle est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
   Reste à tester la continuité de f' en 0. Or, $f' : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$.
   Au voisinage de 0, on obtient :
   $$f'(h) = \frac{h + \dfrac{h^2}{2} - h(1+h) + \circ(h)}{(h + \circ(h))^2} = -\frac{1}{2} + \circ(1).$$
   La fonction f' est bien continue en 0.
3. Simple vérification.
4. La fonction f' est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$:
   $$\forall x \geqslant 0,\ -\frac{1}{2} = f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant 0,$$
   et on obtient ce qu'il faut.

5. L'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f et la fonction f y est contractante. Le seul point fixe de la fonction f est $\ln 2$.
   On obtient l'inégalité voulue par récurrence sur l'entier n, en utilisant :
$$\left| \frac{u_{n+1} - \ln 2}{u_n - \ln 2} \right| = |f'(c_n)| \leqslant \frac{1}{2},$$
   par le théorème des accroissements finis.

Solution 46 : fonctions réelles

1. On peut utiliser la formule de Leibniz :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}.$$
   Le polynôme :
$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{(n-k)!} (-1)^{n-k} X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{k!} (-1)^k X^k,$$
   convient.
2. Il suffit de montrer que :
$$XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0.$$
   Soit k un entier entre 0 et n.
   Le coefficient en X^k dans XL_n'' vaut :
$$\left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) \frac{1}{(k+1)!} (-1)^{k+1} (k+1)k.$$
   Le coefficient en X^k dans L_n' vaut :
$$\left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) \frac{1}{(k+1)!} (-1)^{k+1} (k+1).$$
   Le coefficient en X^k dans XL_n' vaut :
$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{k!} (-1)^k k.$$
   Le coefficient en X^k dans nL_n vaut :
$$n \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{k!} (-1)^k.$$
   On remarque que :
$$(k+1) \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = (n-k) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$
   Le coefficient en X^k vaut donc 0 dans le polynôme de gauche de l'équation. On obtient finalement ce qu'il faut.

Exercice 47 : algèbre linéaire

1. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. On cherche une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\begin{cases} B(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 \\ B(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ B(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \\ B(\varepsilon_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_4 \end{cases}.$$

On commence par chercher ε_1 non nul dans $\operatorname{Ker}(B + 2I_4)$. Après calculs, on peut prendre :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche ε_2 tel que

$$B(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

Après calculs, on trouve par exemple :

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On chercher ε_3 non nul dans $\operatorname{Ker}(B + I_4)$. Après calculs, on trouve par exemple :

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche finalement e_4 vérifiant la quatrième équation. On obtient après calculs :

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice P de passage de la base canonique vers la base des ε_k est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et vérifie :

$$P^{-1}BP = A.$$

2. En résolvant par exemple l'équation matricielle $PX = Y$, d'inconnue X matrice-colonne, on obtient :

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 26 & 4 & 3 \\ 32 & -21 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -7 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On fait le même procédé en trouvant un changement de base associé à une matrice de passage R telle que :

$$R^{-1}AR = C.$$

On part de la base canonique des e_k et on cherche une nouvelle base des χ_k.
On prend par exemple $\chi_1 = e_1$, $\chi_2 = e_2$ et $\chi_3 = e_3$.
Il reste à trouver χ_4 tel que :

$$A(\chi_4) = \chi_3 - \chi_4.$$

Après calculs, on trouve : $\chi_4 = -e_4 + \dfrac{1}{3}e_1$.
La matrice :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vérifie : $R^{-1}AR = C$.

4. En notant $C = R^{-1}AR$, puit $\mathscr{C}(A)$ le commutant de A et $\mathscr{C}(C)$ celui de C, on vérifie facilement que l'isomorphisme :

$$\varphi : M \longmapsto R^{-1}MR$$

vérifie :

$$\varphi(\mathscr{C}(A)) = \mathscr{C}(C).$$

L'isomorphisme φ conserve la dimension, donc les deux commutants sont de même dimension.

5. La matrice C est la plus simple. On détermine la dimension de $\mathscr{C}(C)$.
Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, une matrice dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, mise sous la forme de quatre blocs, chacun de format 2×2.
On pose la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice M commute avec la matrice C si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(2I_2 + N) = (2I_2 + N)M_1 \\ M_2(-I_2 + N) = (2I_2 + N)M_2 \\ M_3(2I_2 + N) = (-I_2 + N)M_3 \\ M_4(-I_2 + N) = (-I_2 + N)M_4 \end{array} \right. .$$

La première équation est équivalente à $M_1N = NM_1$.
La deuxième équation est équivalente à :

$$-3M_2 + M_2N = NM_2.$$

En multipliant le tout par la matrice nilpotente N à droite, on obtient :

$$-3M_2N = NM_2N.$$

En multipliant cette nouvelle l'équation initiale à gauche par la matrice N, on obtient :

$$-3NM_2N = 0.$$

On en déduit en cascade : $M_2N = 0$, puis $-3M_2 = NM_2$, donc en multipliant à gauche : $-3NM_2 = 0$, donc $NM_2 = M_2N = 0$, et donc $M_2 = 0$.
De même, la troisième équation est équivalente à $M_3 = 0$.
La quatrième équation est équivalente à $M_4N = NM_4$.
On examine maintenant le commutant de la matrice N. On vérifie facilement qu'une matrice $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice N si et seulement si :

$$a = d \text{ et } c = 0.$$

Le commutant de N est donc $\text{Vect}(I_2, N) = \mathbb{C}[N]$.
On revient au commutant de la matrice C.
Une matrice $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ commute avec C si et seulement si :

$$M_1 \in \text{Vect}(I_2, N),\ \ M_2 = M_3 = 0 \text{ et } M_4 \in \text{Vect}(I_2, N).$$

Le commutant de la matrice C est de dimension 4.

Planche 48 : ENS

Supposons la famille liée. Il existe un vecteur f_n combinaison linéaire des précédents :

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot f_k.$$

On prend l'entier n minimal vérifiant cette propriété : la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est donc libre.
En appliquant cette égalité à $\cos^q(x)$, sachant que $f_k(\cos^q(x)) = f_{q+k}(x)$, alors :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \ f_{q+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot f_{q+k}.$$

Par récurrence, il est facile de voir que chaque f_{n+q} est dans $F = \text{Vect}(f_0, \cdots, f_{n-1})$ espace de dimension finie.
La fonction cos est contractante sur l'intervalle stable $[0, \cos(1)]$. Il est alors facile de voir que la suite $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale au seul point fixe ℓ de cos.
L'espace F étant de dimension finie est fermé pour toute norme. En particulier, la fonction constante égale à ℓ appartient à F.
Chaque fonction f_q est dérivable et :

$$(f_0)' = 1 \text{ et si } q \geqslant 1,\ (f_q)' = (f_{q-1} \circ \cos) = -\sin \times f'_{q-1} \circ \cos\,.$$

On en déduit $(f_q)'(\ell) = (-\sin \ell)^q$. Ainsi, après évaluation en ℓ :

$$\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f_k,$$

puis en dérivant et en évaluant en ℓ, on obtient :

$$\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \ell, \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 1$$

puis en dérivant une nouvelle fois et en évaluant en ℓ comme

$$f''_{q+1} = -\cos \times f'_q \circ \cos + \sin^2 \times f''_q \circ \cos .$$

Si x est fixé dans $\mathbb{R}$, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie alors une relation de récurrence linéaire d'ordre n. On peut montrer [résultat plutôt de deuxième année] qu'alors $f_k(x)$ est une somme finie de termes de la forme $P(k) \cdot \lambda^k$, où $P(X)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Or, la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = x \\ u_{k+1} = \cos(u_k) \end{cases}$ est convergente car l'intervalle $I = [0, \cos(1)]$ est stable par l'itératrice cos l'itératrice est $|\sin(\cos(1))|$-contractante. La suite converge vers le seul point fixe ℓ de cos. De plus, si $x \neq \ell$, et $x \in I$, on montre par récurrence que les termes u_n sont tous différents de ℓ. Ensuite, par récurrence, on a une inégalité du type ;

$$|u_k - \ell| \leqslant |\sin(\cos(1))|^k$$

et en posant $v_k = \dfrac{|u_k - \ell|}{|\sin \ell|^k}$, alors la quantité $\ln \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$ est en $\mathscr{O}(|u_k - \ell|)$, donc de série convergente : la suite $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et la quantité u_k est de la forme :

$$u_k = \ell + C(-\sin \ell)^k + \circ((\sin \ell)^k).$$

On pose $a = (-\sin \ell)$, en prenant $\cos u_k = u_{k+1}$ et en effectuant un développement asymptotique,

$$u_{k+1} = \cos u_k = \cos \ell \left(1 - \frac{C^2\ a^{2k}}{2}\right) + C(-a)^{k+1} + \circ(a^{2k}).$$

En réinjectant, on obtient que u_n est une somme de termes de la forme $\lambda_i\ a^{p_i\ k}$, avec p_i des entiers différents.
Ceci rentre en contradiction avec l'unicité d'une décomposition d'une suite récurrente linéaire sous la forme de tels termes.

Planche 49 : ENS

1. • Par croissance des racines carrées, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_k \geqslant \sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{a_k}}} = a_k^{2^{-k}}.$$

Si u converge, alors u est majorée, donc la suite $(a_n^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

- On suppose que la suite $(a_n^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $M > 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \leqslant M^{2^n}.$$

La suite u est croissante car on passe de u_n à u_{n+1} en remplaçant le dernier radicande a_n par $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$ qui lui est supérieur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme u_n est donc inférieur à :

$$v_n = \sqrt{M^2 + \sqrt{M^4 + \sqrt{\cdots + \sqrt{M^{2^n}}}}}.$$

On étudie plutôt cette suite v.
On peut faire sortir les puissances de M hors des radicaux pour avoir :

$$v_n = |M|\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}.$$

La suite $(w_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n} \end{cases}.$$

Cette suite w est d'itératrice croissante, donc monotone, croissante car $w_2 > w_1$, majorée par $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le point fixe de l'itératrice.
La suite w, donc la suite v puis la suite u sont majorées : cette dernière converge.

2. On est dans le cadre précédent avec :

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)^{2^k}.$$

Or, $\dfrac{\ln a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \ \ln(n-k) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{2^k}$. Ceci est la somme partielle d'une série convergente.
La suite $\left(\dfrac{\ln a_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc la suite $\left(a_n^{2^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée : la suite u associée est bien croissante et convergente.
On suit l'indication en posant $f(n) = n(n+2)$. On en déduit :

$$f(n) = n\sqrt{f(n+1)+1}.$$

On en déduit par récurrence facile que pour tous entiers naturels n et k :

$$f(n) = n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + (n+k+1)\sqrt{1 + f(n+k+2)}}}}}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer cette formule lorsque $n = 1$, puis faire tendre k vers $+\infty$. La valeur 3 de la limite apparaît alors car $f(1) = 3$.

Planche 50 : ENS

Les polynômes $P(X) = X$ et $P(X) = 1 - X$ conviennent par changement de variable.
Soit $P(X)$ convenable. On remarque que $P \circ P$ convient également ...
Si $P([0,1]) \neq [0,1]$, on trouve une valeur de $[0,1]$ non prise par la fonction polynomiale. L'ensemble $P([0,1])$ est un segment ne contenant pas les deux points 0 et 1.
Par exemple, 0 n'est pas une valeur prise. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$[\alpha, 1] \subset P([0,1]).$$

On choisit la fonction continue positive f affine par morceaux, valant 1 en 0, et nulle sur $[\alpha, 1]$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f > 0$ mais $\displaystyle\int_0^1 f \circ P = 0$.
Ainsi, on a bien $P([0,1]) = [0,1]$.
Soient $a < b$ deux réels dans $[0,1]$.
On pose la fonction continue par morceaux g nulle sur $[0,1] \setminus [a,b]$ et valant 1 sur $[a,b]$.
On trouve une suite de fonctions continues (f_n) telle que $\displaystyle\int_0^1 f_n$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g$, et $\displaystyle\int_0^1 f_n \circ P$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g \circ P$. [utiliser une approximation avec les fonctions en escaliers ou le TCD vu en deuxième année...]
Par unicité de la limite, $\displaystyle\int_0^1 g = \int_0^1 g \circ P$. Le polynôme $P(X)$ ne peut être constant car les polynômes constants ne conviennent pour le problème posé.
Supposons qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{|P'(t_0)|} > 1$.
Localement au point t_0, la fonction polynomiale P réalise une bijection strictement monotone que l'on note φ.
Pour tout $h > 0$ suffisamment petit, on obtient en prenant $a = P(t_0) - h$ et $b = P(t_0) + h$:

$$\int_0^1 g = 2h$$

et

$$\int_0^1 g \circ P \geqslant \int_{\varphi^{-1}([a,b])} 1 = |\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a).$$

Au voisinage de $P(t_0)$, on obtient :

$$\varphi^{-1}(P(t_0) + u) = \varphi^{-1}(P(t_0)) + \frac{1}{P'(t_0)}\, u + \circ(u).$$

Conclusion :

$$2h \geqslant \frac{2h}{|P'(t_0)|} + \circ(h).$$

donc :

$$1 \geqslant \frac{1}{|P'(t_0)|}.$$

On vient de montrer que pour tout $t \in]0,1[$, $|P'(t)| \leqslant 1$ et par passage à la limite :

$$\forall t \in [0,1],\ |P'(t)| \leqslant 1.$$

On en déduit puisque P est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$ qu'il existe x et x' dans $[0,1]$ tels que $P(x)=0$ et $P(x')=1$.

On en déduit : $1=|P(x')-P(x)|=\left|\int_x^{x'} P'\right| \leqslant \left|\int_x^{x'} |P'|\right| \leqslant \left|\int_x^{x'} 1\right| = |x'-x| \leqslant 1$.

On n'a que des égalités et $(x,x')\in\{(0,1),(1,0)\}$. De plus, $\int_0^1 (1-|P|)=0$. Par le théorème aux quatre hypothèses :

$$\forall t\in[0,1],\ |P'(t)|=1.$$

Le TVI donne que la fonction continue P' est soit constante à 1, soit constante à -1.
Seuls les polynômes X et $1-X$ conviennent.

Planche 51 : ENS

1. On montre facilement que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0=2,\ T_1=X \text{ et } T_{n+2}=XT_{n+1}-T_n,$$

   est une suite de polynômes telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ T_n\left(X+\frac{1}{X}\right)=X^n+\frac{1}{X^n}.$$

   L'unicité provient du fait que si P_n et Q_n sont deux polynômes convenables au rang n, alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, le nombre $z+\dfrac{1}{z}$ est une racine de P_n-Q_n, ce qui fait une infinité de racines : $P_n=Q_n$.
2. Par récurrence double, les T_n sont bien à coefficients entiers, et de degré n.
3. On vérifie facilement que si l'entier n est fixé dans $\mathbb{N}$, l'équation $z^n+\dfrac{1}{z^n}=0$ admet comme solutions :

$$z_k=\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right),$$

   lorsque l'entier k décrit $[\![0,2n-1]\!]$.
   Les nombres $z_k+\dfrac{1}{z_k}=2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=2\cos\theta_k$, lorsque l'entier k varie de 0 à $(n-1)$ sont tous différents par injectivité de la fonction cos sur l'intervalle $[0,\pi]$. On dispose alors de n racines différentes du polynôme T_n.
   Lorsque $n=0$, la DES demandée est $\dfrac{1}{2}$.
   Lorsque $n\geqslant 1$, alors le polynôme T_n est unitaire et scindé à racines simples. On en déduit :

$$\frac{1}{T_n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{X-2\cos\theta_k}.$$

   Comme le pôle est simple, alors :

$$c_k=\frac{1}{T_n'(2\cos\theta_k)}.$$

Or, en dérivant $T_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^n+\dfrac{1}{X^n}$, on obtient :

$$T_n'\left(X+\frac{1}{X}\right)\times\left(1-\frac{1}{X^2}\right)=nX^{n-1}-\frac{n}{X^{n+1}}.$$

On en déduit :

$$T_n'\left(X+\frac{1}{X}\right)=n\frac{X^n-\dfrac{1}{X^n}}{X-\dfrac{1}{X}}.$$

L'évaluation en z_k donne :

$$T_n'(2\cos\theta_k)=n\ \frac{\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)}=\frac{(-1)^k\ n}{\sin\theta_k}.$$

En définitive, en posant $\theta_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, alors :

$$\frac{1}{T_n(X)}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\ \sin\theta_k}{X-2\cos\theta_k}.$$

Planche 52 : X

On va commencer par montrer le résultat suivant : « si Q est un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$, alors les racines de Q' sont dans l'enveloppe convexe des racines de Q. Autrement dit, si $z_1,\cdots,z_n$ sont les racines de Q, pour toute racine ξ de Q', il existe des réels $a_1,\cdots,a_n$ positifs et de somme 1 tels que :

$$\xi=\sum_{k=1}^{n}a_k\ z_k. \text{ »}$$

Soit $Q=\alpha\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$ un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$.
Soit ξ une racine de Q'.
Il est possible que ξ soit aussi une racine de Q auquel cas, l'égalité $\xi=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,i_0}\ z_{i_0}$, où $\xi=z_{i_0}$ est une combinaison convexe convenable pour ξ.
Si ξ n'est pas une racine de Q, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{Q'}{Q}$ évaluée en ξ donne :

$$0=\frac{Q'(\xi)}{Q(\xi)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_k}.$$

On prend le conjugué, puis on multiplie par le conjugué du dénominateur, ce qui donne :

$$0=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{\xi}-\overline{z_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi-z_k}{|\xi-z_k|^2}.$$

Posons alors $a_k = \dfrac{1}{|\xi - z_k|^2} \times \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{|\xi - z_j|^2}}$. Il est alors évident que les a_k sont tous positifs et de somme 1 et de plus,

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} a_k \, z_k.$$

Maintenant, soient b_j et b_{j+1} deux coefficients consécutifs dans le polynôme P.
L'enveloppe convexe des racines de P est incluse dans le demi-plan $\Re e(z) < 0$, ainsi que toutes les racines de P', puis celles de P'', etc.
Toutes les racines de $P^{(j)}$ sont de partie réelle strictement négative. On note $z_1, \cdots, z_p$ les racines de $P^{(j)}$.
Lorsque l'on calcule la somme des inverses des racines de $P^{(j)}$, on obtient via les relations coefficients / racines, le nombre :

$$\frac{\sigma_{p-1}}{\sigma_p} = -\frac{c_1}{c_0},$$

où c_0 est le coefficient constant dans $P^{(j)}$ et c_1 est le coefficient en X dans $P^{(j)}$.
Or, pour tout complexe non nul Z, les complexes Z et $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{\overline{Z}}{|Z|^2}$ sont de parties réelles de même signe.
On en déduit que la partie réelle de $-\dfrac{c_1}{c_0}$ est strictement négative et il s'agit de plus d'un nombre réel car $P^{(j)}$ est un polynôme à coefficients réels.
Par conséquent, les coefficients c_0 et c_1 sont strictement de même signe. Or, $c_0 = j! \, b_j$ et $c_1 = (j+1)! b_{j+1}$, donc les coefficients b_j et b_{j+1} sont non nuls et strictement de même signe. Ceci étant valable pour tout entier j, alors tous les coefficients de P sont non nuls et strictement de même signe.

Planche 53 : X

On commence par montrer par récurrence sur l'entier s, que si $\mathscr{A}$ est une partie composée de s vecteurs non nuls dans E, alors il existe une forme linéaire ℓ telle que :

$$0 \notin \ell(\mathscr{A}).$$

Dans la suite, on note $n = \dim(E)$.
• Si $s = 1$, alors $\mathscr{A} = \{x_1\}$. On complète la famille (x_1) en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. La forme linéaire $\ell = e_1^*$ répond à la question.
• Supposons le résultat acquis pour toute partie à $(s-1)$ vecteurs non nuls.
• Soit $\mathscr{A} = \{x_1, \cdots, x_{s+1}\}$ une partie à $(s+1)$ vecteurs non nuls dans E.
On pose $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \setminus \{x_{s+1}\}$ et $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A} \setminus \{x_1\}$, deux parties à s éléments non nuls.
Il existe deux formes linéaires $\ell_1 : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell_2 : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$0 \notin \ell_1(\mathscr{A}_1) \text{ et } 0 \notin \ell_2(\mathscr{A}_2).$$

Pour tout réel a, on pose $\varphi_a = \ell_1 + a \, \ell_2$.
Supposons que 0 appartienne à $\varphi_a(\mathscr{A})$. Il existe un entier i entre 1 et $s+1$ tel que :

$$\varphi_a(x_i) = 0.$$

Ainsi, $\ell_1(x_i) + a \, \ell_2(x_i) = 0$.

Si $i \neq 1$, alors comme $\ell_2(x_i) \neq 0$, nécessairement, $a = -\dfrac{\ell_1(x_i)}{\ell_2(x_i)}$.
Si $i = 1$, alors $\ell_1(x_1)$ est non nul, donc le nombre $\ell_2(x_1)$ doit être non nul. Ainsi, $a = -\dfrac{\ell_1(x_1)}{\ell_2(x_1)}$.
On vient de montrer qu'il existe un nombre fini de valeurs de a pour lesquelles :

$$0 \in \varphi_a(\mathscr{A}).$$

Il existe donc au moins un réel a hors de ces valeurs. Si a est un tel nombre, alors la forme linéaire φ_a répond à la question.
Reprenons maintenant la question posée. On trouve une forme linéaire $\ell : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall u \in \mathscr{A},\ \ell(u) \neq 0.$$

Le produit $z = \displaystyle\prod_{u \in \mathscr{A}} \ell(u)$ est non nul. En posant s le cardinal de $\mathscr{A}$ et en notant z_0 une solution à l'équation :

$$z_0^s = z,$$

la forme linéaire $\dfrac{1}{z_0} \cdot \ell$ vérifie bien l'égalité souhaitée.

Planche 54 : Centrale – avec Python

1. Il y a 2^n parties. En effet, en posant $E = [\![1, n]\!]$, l'application :

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array}\right.$$

   est bijective de fonction réciproque :

$$\Phi^{-1} : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E, \{0,1\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ f & \longmapsto & f^{[-1]}(\{1\}) \end{array}\right. .$$

2. On obtient récursivement toutes les sous-listes possibles d'une liste `ens` donnée.
3. On redémontre la loi faible des grands nombres.
   On pose $V_i = U_i - \mathbb{E}(U)$ de sorte que les variables V_i sont mutuellement indépendantes, centrées et admettent une variance égale à $\mathbb{E}(V_i^2)$.
   En posant $S_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} V_i$, alors par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|S_N\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_N)}{\varepsilon^2}.$$

   Or, $V(S_N) = \dfrac{1}{N^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} V(V_i) = \dfrac{V(U)}{N}$.
   On en déduit que la probabilité intervenant dans l'énoncé est inférieure ou égale à :

$$\frac{V(U)}{N\ \varepsilon^2},$$

   quantité de limite nulle lorsque N tend vers $+\infty$.

4. On peut faire le calcul « scolairement », ou bien interpréter la variable X autrement.

   Cela revient à tester de manière indépendante si les éléments $1, 2, \cdots, n$ sont pris ou non. Prenons une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et lançons-la n fois de suite. On construit ainsi une partie aléatoire X' dont les éléments correspondent aux numéros des lancers ayant donné « pile » par exemple.

   Alors, la variable X' suit la loi uniforme comme la variable X. En notant A_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer a donné pile », alors les événements A_i sont mutuellement indépendants et sont de probabilité $\dfrac{1}{2}$.

   Il apparaît que :
$$\mathrm{card}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}.$$
   La variable $\mathrm{card}(X)$ suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, d'espérance $\dfrac{n}{2}$ et de variance $\dfrac{n}{4}$.

5. Voici une simulation possible :

```
from random import *

def Parties(ens) :
    if ens==[] :
        return [[]]
    else :
        paux=ens[1:]
        P=Parties(paux)
        return P+[[ens[0]]+x for x in P]

def P(n) :
    return Parties([k for k in range(1,n+1)])

def X(n) :
    return P(n)[randint(0,2**n-1)]

def Card_X(n) :
    return len(X(n))

def Simulation(n,N) :
    s=0
    for k in range(N) :
        s+=Card_X(n)
    return s/N


for n in range(4,9) :
    print(Simulation(n,1000), ' et ',n/2)

## on obtient :
```

```
>>> 2.073  et  2.0
>>> 2.505  et  2.5
>>> 3.022  et  3.0
>>> 3.601  et  3.5
>>> 3.973  et  4.0
```

6. La variable $\sum_{x \in X} x$ revient à calculer $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$. Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in X} x\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Voici un code permettant de la vérifier numériquement :

```
def Z(n) :
    s=0
    partie=X(n)
    for x in partie :
        s+=x
    return s

def E_Z(n,N) :
    s=0
    for k in range(N) :
        s+=Z(n)
    return s/N

for n in range(4,9) :
    print(E_Z(n,1000),' et ',n*(n+1)/4)

## on obtient :
>>> 4.97  et  5.0
>>> 7.516  et  7.5
>>> 10.55  et  10.5
>>> 14.203  et  14.0
>>> 18.225  et  18.0
```

7. On effectue n fois de suite et de manière indépendante deux lancers d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. À la $i^{ème}$ étape, si au premier lancer, on a « pile », on incorpore i dans X, et si au second lancer on a « pile », on incorpore i dans Y.
On note A_i et B_i les événements « avoir pile à la $i^{ème}$ étape et au premier lancer » et « avoir pile à la $i^{ème}$ étape et au second lancer ». On en déduit :

$$\text{card}(X \cap Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i} = \mathbf{1}_{A_i} \times \mathbf{1}_{B_i}.$$

Il est facile de voir card$(X \cap Y)$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

Voici un code possible pour étudier l'espérance de cette variable par exemple :

```
def E_X_Y(n,N) :
    s=0
    for k in range(N) :
        P_X=X(n)
        P_Y=X(n)
        s+=len([x for x in P_X if x in P_Y])
    return s/N

for n in range(4,9) :
    print(E_X_Y(n,10000), ' et ', n/4)

## on obtient :
>>> 0.9851  et  1.0
>>> 1.2551  et  1.25
>>> 1.5054  et  1.5
>>> 1.7384  et  1.75
>>> 1.9944  et  2.0
```

Planche 55 : X

1. On utilise les formules trigonométriques :

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \ \cos\alpha \text{ et } \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Ainsi, pour tout réel $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, on peut écrire en utilisant par la suite :

$$\begin{aligned} \sin(4\theta) &= 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 4\sin\theta\ \cos\theta\ (2\cos^2\theta - 1) \\ &\text{et} \\ \cos(4\theta) &= 2\cos^2(2\theta) - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin(4n\theta)}{\sin\theta\ \cos\theta} \\ &= \frac{2}{\sin(2\theta)}\,\Im m\left((\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))^n\right) \\ &= \frac{2}{\sin(2\theta)}\,\Im m\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ i^k\sin^k(4\theta)\ \cos^{n-k}(4\theta)\right), \text{ dans } \mathbb{C} \text{ commutatif} \\ &= \frac{2}{\sin(2\theta)}\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k+1}\ (-1)^k\sin^{2k+1}(4\theta)\ \cos^{n-2k-1}(4\theta) \\ &= 2\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k+1}\ (-1)^k\ 2^{2k+1}\cos^{2k+1}(2\theta)\ \sin^{2k}(2\theta)\ \cos^{n-2k-1}(4\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k+1}\ (-1)^k\ 2^{4k+2}(2\alpha-1)^{2k+1}\ (1-\alpha)^k\ \alpha^k(8\alpha^2-8\alpha+1)^{n-2k-1}\ , \text{ avec } \alpha = \cos^2\theta. \end{aligned}$$

Le polynôme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k+1 \end{array} \right) \ (-1)^k \ 2^{4k+2}(2X-1)^{2k+1} \ (1-X)^k \ X^k (8X^2-8X+1)^{n-2k-1}$$

convient pour écrire :

$$A = P(\cos^2\theta).$$

2. Soit k un entier naturel tel que $2k \leqslant n$. Alors, le terme d'indice k dans la somme précédente est un polynôme de degré exactement $2k+1+k+k+2(n-2k-1) = 2n-1$.
Le polynôme $P_n(X)$ est de degré inférieur ou égal à $2n-1$.
Soit ℓ un entier compris en 1 et $2n-1$. Posons $\theta_\ell = \dfrac{\ell\,\pi}{4n}$, puis

$$\lambda_\ell = \cos^2\frac{\ell\,\pi}{4n} = \cos^2(\theta_\ell).$$

Alors, $P_n(\lambda_\ell) = 0$, car $\sin(4n\theta_\ell) = 0$ et que l'angle θ_ℓ n'est pas congru à 0 modulo π.
Les nombres λ_ℓ sont tous racines du polynôme $P_n(X)$. L'application $t \longmapsto \cos^2\dfrac{t\pi}{4n}$ est injective de $[0, 2n]$ vers $\mathbb{R}$. Le polynôme $P_n(X)$ admet au moins $2n-1$ racines, donc exactement $2n-1$ racines : il est scindé à racines simples et $\deg(P_n(X)) = 2n-1$.
Le produit demandé est le produit des racines de $P_n(X)$. Par les relations coefficients / racines, on obtient que la valeur recherchée vaut :

$$(-1)^{2n-1}\ \frac{a_0}{a_{2n-1}},$$

où a_k est le coefficient devant X^k dans $P_n(X)$.
On fait tendre θ vers $\dfrac{\pi}{2}$ dans l'égalité :

$$\frac{\sin(4n\theta)}{\sin\theta\ \cos\theta} = P_n(\cos^2\theta),$$

ce qui donne après éventuellement un développement limité :

$$P_n(0) = -4n.$$

Donc $a_0 = -4n$ **On aurait pu calculer directement $P_n(0)$ ...**
On calcule le coefficient dominant dans $P_n(X)$ qui provient de la contribution de chaque terme de la somme. Ce coefficient dominant vaut :

$$a_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k+1 \end{array} \right) (-1)^k 2^{4k+2} 2^{2k+1} (-1)^k 8^{n-2k-1} = 2^{3n} \sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k+1 \end{array} \right).$$

Or, toujours par le binôme :

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)\ (-1)^k = \sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k \end{array} \right) - \sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k+1 \end{array} \right),$$

ce qui montre que :

$$\sum_{k=0}^{n/2} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k \end{array} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^{n-1}.$$

Conclusion, le coefficient dominant vaut : $a_{2n-1} = 2^{3n}\ 2^{n-1}$ et en définitive :

$$\prod_{\ell=1}^{2n-1} \lambda_\ell = -\frac{a_0}{a_{2n-1}} = \frac{4n}{2^{4n-1}} = \frac{n}{2^{4n-3}}.$$

Planche 56 : Mines-Ponts

1. Si $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, on trouve un vecteur x dans E tel que $u^{n-1}(x)$ ne soit pas le vecteur nul. On montre classiquement que la famille $\mathscr{F} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \cdots, u(x), x)$ est libre, donc est une base de E selon laquelle la matrice J représentant u est celle donnée dans l'énoncé.
   Réciproquement, si on a une telle base, on voit facilement que $J^n = 0$ et $J^{n-1} = E_{1,n} \neq 0$, donc $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
2. Soit A la matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale et des 1 strictement au-dessus de la diagonale.
   On note $(X_1, \cdots, X_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si E était un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   On voit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, en posant $F_k = \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k)$, alors :
   $$A(F_k) \subset F_{k-1}.$$
   On en déduit $A^n(F_n) \subset F_0 = \{0\}$, donc $A^n = 0$.
   Ensuite, la composante de $A(X_n)$ selon X_{n-1} vaut 1. La composante de $A^2(X_n)$ selon X_{n-2} vaut toujours 1 et par récurrence, la composante de $A^{n-1}(X_n)$ selon X_1 vaut 1. Cela montre que $A^{n-1} = E_{1,n}$ et donc la matrice A vérifie la première assertion de la question 1. Les matrices A et J sont semblables.

Planche 57 : Centrale

1. Soit A une matrice nilpotente non nulle. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T et tous les coefficients diagonaux de T doivent être nuls car T reste nilpotente.
   La forme linéaire φ_A n'est pas nulle car :
   $$\varphi_A(E_{i,j}) = A_{j,i}$$
   et il existe deux indices i et j tels que $A_{j,i}$ soit non nul.
   Ensuite, si $M \in \mathrm{Ker}(\tau_A)$, alors la matrice M commute avec la matrice A.
   La matrice AM est encore nilpotente car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(AM)^k = A^k M^k$.
   La trace de toute matrice nilpotente est nulle car si N est nilpotente, alors N est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux doivent être nuls, donc de trace nulle.
   Ainsi, si $\tau_A(M) = 0$, alors $\varphi_A(M) = 0$.

2. (a) Par récurrence facile, on montre que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ BA^k - A^kB = kA^k.$$

On en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$BP(A) - P(A)B = AP'(A).$$

(b) L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$$

est linéaire.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(A^k) = kA^k$.
On montre que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} E_k(f)$ est directe.
Soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} M_k = 0$, une somme nulle avec pour tout k, $M_k \in E_k(f)$. En appliquant f j fois à cette combinaison linéaire, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} k^j \cdot M_k = 0.$$

En combinant ces équations, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$\sum_{k=0}^{N} Q(k) \cdot M_k = 0.$$

On prend les polynômes de Lagrange $L_0, \cdots, L_N$ associés aux nombres différentes $0, 1, \cdots, N$.
En prenant $Q = L_{j_0}$, alors $M_{j_0} = 0$ et la somme est bien directe.
On en déduit :

$$\dim\left(\sum_{k=0}^{N} F_k\right) = \sum_{k=0}^{N} \dim(F_k) \geqslant \sum_{k=0}^{N} 1 = N + 1,$$

le tout dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2.
On ne peut avoir tous les F_k non réduits à $\{0\}$. Il existe k tel que $E_k(f) = \{0\}$. Dans ce cas, la matrice A^k appartenant à $E_k(f)$ est la matrice nulle et A est bien nilpotente.

3. (a) Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$. Par le préambule, il existe une matrice non nulle $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathrm{Ker}(\varphi_C) = H.$$

Il reste à montrer que la matrice C appartient à $\mathrm{Ker}(\tau_A)$.
On sait que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi_C(\tau_A(M)) = 0, \text{ donc } \mathrm{Tr}((CA - AC)M) = 0.$$

La matrice $CA - AC$ doit être la matrice nulle, car la forme linéaire φ_{AC-CA} est la forme linéaire nulle. La matrice C appartient bien à $\mathrm{Ker}(\tau_A)$.

Réciproquement, si C est non nulle dans $\mathrm{Ker}(\tau_A)$, alors l'ensemble $\mathrm{Ker}(\varphi_C)$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, si M est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors comme $CA = AC$ et $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$:

$$\varphi_C(\tau_A(M)) = \mathrm{Tr}(CAM - CMA) = \mathrm{Tr}(CAM) - \mathrm{Tr}(CMA) = \mathrm{Tr}(ACM) - \mathrm{Tr}(CMA) = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi_C)$ est un hyperplan contenant $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$.

(b) Supposons que la matrice A n'appartienne pas à $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$.
On peut compléter une base $\mathscr{B}_I$ de $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$ en rajoutant la matrice A, puis en complétant avec d'autres matrices.
On forme ainsi une base $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_I, A, \cdots)$. On note A^* la forme linéaire coordonnée selon cette base.
D'une part, pour tout $M \in \mathrm{Im}\,(\tau_A)$, $A^*(M) = 0$, donc le noyau de la forme linéaire A^* contient $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$. Il existe donc une matrice C non nulle dans $\mathrm{Ker}(\tau_A)$ telle que :

$$\mathrm{Ker}(A^*) = \mathrm{Ker}(\varphi_C).$$

On en déduit que la matrice C commute avec la matrice A et :

$$\mathrm{Tr}(AC) \neq 0.$$

Cependant, la matrice AC est nilpotente, donc de trace nulle.
Nécessairement, A appartient à $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$ et la conclusion est alors claire sur l'existence d'une matrice B convenable.

Planche 58 : Mines-Ponts

On distingue plusieurs cas :

- si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement ;
- si $\alpha > 1$, la série converge absolument ;
- si $\alpha \in]0, 1[$, on effectue des groupements par paquets :

$$\mathscr{P}_k = [\![k^2, (k+1)^2[\![= \left\{n \in \mathbb{N},\ \mid \lfloor\sqrt{n}\rfloor = k\right\}.$$

On pose $v_k = \displaystyle\sum_{n \in \mathscr{P}_k} \frac{1}{n^\alpha}$.
On utilise une comparaison série / intégrale pour la fonction continue décroissante :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}, \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathscr{P}_k,\ \int_n^{n+1} f \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} f.$$

On en déduit en posant $a = (1 - \alpha)$:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((k+1)^{2a} - k^{2a}\right) \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(((k+1)^2 - 1)^a - (k^2 - 1)^a\right).$$

▷ Si $a \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors :

$$(k+1)^{2a} - k^{2a} = k^{2a}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2a} - 1\right) \sim 2a\ k^{2a-1},$$

et la quantité v_k ne peut pas tendre vers 0.
La série de l'énoncé ne peut donc pas converger car en notant S_n les sommes partielles, alors :

$$v_k = S_{(k+1)^2-1} - S_{k^2-1}.$$

▷ Si $a < \dfrac{1}{2}$, alors comme la quantité $((k+1)^2-1)^a - (k^2-1)^a$ est équivalente à $\dfrac{2a}{k^{1-2a}}$, alors la quantité v_k tend vers 0.
De l'encadrement précédent, on obtient un développement asymptotique de la forme :

$$v_k = \frac{2a}{1-\alpha} \times \frac{1}{k^{1-2a}} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{k^{2-2a}}\right).$$

Il est alors facile de voir que la série $\sum_k (-1)^k\ v_k$ est convergente car la série $\sum_k \dfrac{(-1)^k}{k^{1-2a}}$ vérifie le CSSA et la série $\sum_k \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{k^{2-2a}}\right)$ est absolument convergente.
Finalement, si $n \geqslant 1$ est un entier, l'entier n tombe dans un seul paquet $\mathscr{P}_k$, avec $k = k_n$ la partie entière de $\sqrt{n}$.
Ensuite, :

$$\left| S_n - \sum_{i=1}^{k_n} (-1)^i\ v_i \right| \leqslant v_{k_n},$$

donc la série de l'énoncé converge vers la somme de la série convergente $\sum_k (-1)^k\ v_k$.

En résumé, la série est convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Planche 59 : Mines-Ponts

Supposons la matrice A inversible.
Alors, comme A est un automorphisme, alors A conserve la dimension : les espaces $A(\mathrm{Im}\,(M))$ et $\mathrm{Im}\,(M)$ sont de même dimension : $\mathrm{Rg}(AM) = \mathrm{Rg}(M)$. De plus, $\mathrm{Im}\,(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Rg}(MA) = \mathrm{Rg}(M)$.
Supposons que la matrice A ne soit pas inversible. On note $F = \mathrm{Im}\,(A)$ et on note G un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de F, $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
On peut choisir $M \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ en considérant les images des vecteurs e_k et des vecteurs χ_ℓ (base de G).
On pose : $M(e_k) = \varepsilon_1$ et $M(\chi_\ell) = 0$.
Alors, $AM = 0$, car $\mathrm{Im}\,(M) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
D'autre part, MA est non nulle car on trouve $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$AX = e_1, \text{ puis } MAX = \varepsilon_1 \neq 0.$$

Conclusion, $\mathrm{Rg}(AM) = 0 \neq \mathrm{Rg}(MA)$. On a l'implication par contraposé.

Planche 60 : Mines-Ponts

1. Il y a $(2n)!$ tirages possibles en vidant complètement l'urne.
   En notant k le rang d'apparition de la boule 1, alors l'entier k peut varier entre 1 et $n+1$.
   Si l'entier k est fixé, il faut remplir les n rangs autres que ceux de l'intervalle $[\![k, k+n-1]\!]$ par les n boules paires. L'entier k étant fixé, cela fait $n!$ tirages possibles. Il y a donc $(n+1)\times n! = (n+1)!$ tirages favorables. La probabilité vaut donc :
   $$\frac{(n+1)!}{(2n)!}.$$
2. L'ensemble Ω est partitionné selon les événements A_σ correspondant à l'ordre non forcément consécutif des boules impaires, selon une certaine permutation σ sur les entiers impairs.
   La probabilité des événements A_σ ne dépend pas de σ. On en déduit que chaque événement A_σ est de probabilité $\dfrac{1}{n!}$.
   La probabilité demandée vaut donc $\dfrac{1}{n!}$.
3. On note A_i l'événement : « la dernière boule impaire a été tirée au rang i ».
   On en déduit :
   $$X = \sum_{i=1}^{2n} i\ \mathbf{1}_{A_i}.$$
   Par linéarité de l'espérance, on obtient :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{2n} i\ \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{2n} i\ \mathbb{P}(A_i).$$
   Or, si i est un entier fixé entre 1 et $2n$, alors parmi les $(2n)!$ tirages complets possibles, les tirages favorables à l'événement A_i se dénombrent comme suit, sachant que $A_i = \emptyset$ si $i < n$:
   - choix de la boule impaire en place i : n choix
   - choix des $2n-i$ boules paires à placer strictement après : $\dfrac{n!}{(i-n)!}$ choix
   - choix des boules restantes à placer strictement avant le rang i : $(i-1)!$ choix

   L'espérance vaut donc :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=n}^{2n} i \times \frac{n\cdot\frac{n!}{(i-n)!}\times(i-1)!}{(2n!} = n \times \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}.$$
   Or, on peut facilement montrer par récurrence sur l'entier q que si $0 \leqslant p \leqslant q$ sont deux entiers, alors :
   $$\sum_{i=p}^{q} \binom{i}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$
   Après simplifications, on obtient :
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n+1}(2n+1).$$

Planche 61 : Centrale

1. Si la fonction f est croissante par exemple, soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est majorée par $f(a)$ sur l'intervalle $[a-1, a[$. La fonction f admet une limite finie en a^-.
   De même, la fonction f est minorée par $f(a)$ sur l'intervalle $]a, a+1]$. La fonction f admet une limite finie en a^+.
2. (a) On travaille à droite en a. On pose $\varepsilon = \dfrac{\delta}{4} > 0$.
   Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\alpha[$,
   $$|f(x) - f(a^+)| \leqslant \varepsilon.$$
   Soit alors x dans $]a, a+\alpha[$. Il existe $\beta > 0$ tel que sur le voisinage $V_x =]x-\beta, x+\beta[$ inclus dans $]a, a+\alpha[$,
   $$\forall (y, y') \in V_x^2,\ |f(y) - f(y')| \leqslant |f(y) - f(a^+)| + |f(y') - f(a^+)| \leqslant 2\varepsilon.$$
   En faisant tendre y vers x^- et y' vers x^+, alors :
   $$|f(x^+) - f(x^-)| \leqslant 2\varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$
   On procède de même à gauche en a. On trouve donc $\alpha' > 0$ tel que sur $]a-\alpha', a[$, on a :
   $$|f(y) - f(y')| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$
   Il suffit de poser $\eta = \min(\alpha, \alpha')$ et on a ce qu'il faut.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$|f(a^+) - f(a^-)| \geqslant \frac{1}{n}.$$
   Si l'ensemble $\mathscr{D}_n$ est non vide, soit a dans cet ensemble.
   On applique la question précédente à $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$. On en déduit l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :
   $$[a-\eta, a+\eta] \cap \mathscr{D}_n = \{a\}.$$
   Soit $M > 0$. L'ensemble $\mathscr{D}_n \cap [-M, M]$ doit être fini, car sinon, on trouverait une suite bornée injective $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{D}_n$. On trouverait à cette suite, une sous-suite convergente et donc on trouverait une valeur d'adhérence a pour laquelle pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $\mathscr{D}_n \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ contiendrait une infinité d'éléments, ce qui n'est pas possible par la question précédente.
   En définitive, si $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $M > 0$, l'ensemble $\mathscr{D}_n \cap [M, M]$ est fini.
   La réunion dénombrable :
   $$\mathscr{D}_n = \bigcup_{M\in\mathbb{N}^*} \mathscr{D}_n \cap [-M, M]$$
   est donc au plus dénombrable et l'ensemble
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{D}_n$$
   est encore au plus dénombrable, et cette dernière réunion est l'ensemble des points a tels que $f(a^+) \neq f(a^-)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f.

Planche 62 : ENS

On va montrer que $k = n$.
En prenant $E_i = \{i\}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, alors les hypothèses sont vérifiées.
Supposons données des parties $E_1, \cdots, E_k$ vérifiant les hypothèses.
On pose la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, avec :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, k]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ si } i \in E_j \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que la matrice $A^T A = \left(\sum_{\ell=1}^{k} a_{\ell,i} a_{ell,j} = \#(E_i \cap E_j) \right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible car égale en passant modulo 2 à la matrice I_n dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: le déterminant de $A^T A$ est donc un entier impair nécessairement non nul.
L'endomorphisme $A^T A$ est donc bijectif, imposant l'injectivité de l'application linéaire

$$A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})),$$

puis $k \leqslant n$ par le théorème du rang par exemple.

Planche 63 : Mines-Ponts

On va montrer qu'il s'agit des fonctions constantes.
Soit f une fonction continue réalisant la condition.
Soient $a < b$ deux réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'ensemble :

$$\mathscr{D}_n = \left\{ a + \frac{k}{2^n}(b-a)\ ;\ k \in [\![0, 2^n]\!] \right\}.$$

On montre par récurrence sur n que $f(\mathscr{D}_n) \subset \{f(a), f(b)\}$.
C'est le cas lorsque $n = 0$, car $\mathscr{D}_0 = \{a, b\}$.
Supposons que ce soit le cas au rang n.
Soit k un entier entre 0 et 2^{n+1}.
On distingue deux cas :

- l'entier k est pair. On pose $k = 2r$, de sorte que :

$$\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{r}{2^n}.$$

  L'élément $a + \frac{k}{2^{n+1}}(b-a)$ appartient en fait à $\mathscr{D}_n$.
- l'entier k est impair. On pose $k = 2s+1$, de sorte qu'en posant :

$$\alpha = a + \frac{s}{2^n}(b-a) \text{ et } \beta = a + \frac{s+1}{2^n}(b-a),$$

  alors l'élément $\gamma = a + \frac{k}{2^{n+1}}(b-a)$ est le milieu du segment $[\alpha, \beta]$. Par hypothèse de récurrence, $f(\alpha) \in \{f(a), f(b)\}$ et $f(\beta) \in \{f(a), f(b)\}$, donc par hypothèse :

$$f(\gamma) \in \{f(\alpha), f(\beta)\} \subset \{f(a), f(b)\}.$$

  Le résultat demeure au rang suivant.

L'ensemble $\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$ est dense dans $[a, b]$.
Si $x \in [a, b]$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathscr{D}$ convergeant vers x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \in \{f(a), f(b)\}$, donc il existe une infinité de termes de la suite correspondant par exemple à la valeur $f(b)$. Par continuité de f, $f(x) \in \{f(a), f(b)\}$.
On en déduit $f([a, b]) \subset \{f(a), f(b)\}$. L'ensemble $f([a, b])$ est un intervalle fini, donc est un singleton.
On vient de montrer que pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$: la fonction f est constante.

Planche 64 : Centrale

On commence par montrer qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = a_n\ M_0 + b_n\ M_1 + c_n\ M_2.$$

On posera dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On pose (X_0, X_1, X_2) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$. On a ainsi défini les trois premiers termes des suites a, b et c.
Supposons que les trois suites soient construites jusqu'à un certain rang $n + 2 \geqslant 2$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Au rang suivant $n + 3 \geqslant 3$, on a :

$$P_n = \frac{1}{2}(M_n + M_{n+1}) \text{ et } M_{n+3} = \frac{1}{2}(M_{n+2} + P_n) = \frac{1}{4}M_n + \frac{1}{4}M_{n+1} + \frac{1}{2}M_n.$$

On pose alors :

$$a_{n+3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_{n+2},$$

et les mêmes relations de récurrence concernant les termes b_{n+3} et c_{n+3}.
Intervient alors naturellement l'espace :

$$F = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_{n+2}\right\}.$$

L'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F : & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et l'espace F est de dimension trois sur le corps $\mathbb{C}$.
On pose le polynôme :

$$P(X) = X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{4},$$

de sorte que 1 est une racine évidente puis :

$$P(X) = (X - 1)\left(X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}\right) = (X - 1)\left(X - \frac{j}{2}\right)\left(X - \frac{j^2}{2}\right).$$

La famille $\mathscr{B} = \left(\mathbf{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}}, U = \left(\frac{j}{2}\right)^n_{n\in\mathbb{N}}, V = \left(\frac{j^2}{2}\right)^n_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille libre à trois vecteurs dans F : c'est une base de F et si W appartient à F, on peut écrire :

$$W = \lambda \cdot \mathbf{1} + \mu \cdot U + \nu \cdot V.$$

Il est alors clair que la suite W converge vers λ, sa coordonnée selon le vecteur $\mathbf{1}$ de la base $\mathscr{B}$, puisque les suites U et V convergent vers 0.
Par conséquent, chaque suite a, b ou c converge, et la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.
Pour calculer la limite, il s'agit de déterminer la coordonnée de chaque suite a, b et c, selon la base $\mathscr{B}$.
Les suites a, b et c sont définies selon :

$$a = \varphi^{-1}(1,0,0),\ b = \varphi^{-1}(0,1,0) \text{ et } c = \varphi^{-1}(0,0,1).$$

Dans le cas général, si W est une suite dans F, on pose :

$$W = \lambda \cdot \mathbf{1} + \mu \cdot U + \nu \cdot V,$$

de sorte que :

$$\varphi(W) = \lambda \cdot \varphi(\mathbf{1}) + \mu \cdot \varphi(U) + \nu \cdot \varphi(V).$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ et de plus $z = \dfrac{j}{2}$, puis en appliquant la forme linéaire $X_0^* + 2X_1^* + 4X_2^*$ qui à tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{C}^3$ associe le nombre $x + 2y + 4z$, alors :

$$w_0 + 2w_1 + 4w_2 = 7\lambda,$$

car $1 + j + j^2 = 0$.
En définitive, toute suite $W \in F$ est convergente de limite $\dfrac{w_0 + 2w_1 + 4w_2}{7}$.
En conclusion, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le point :

$$\frac{M_0 + 2M_1 + 4M_2}{7},$$

qui est le barycentre du système de points $\Big((M_0, 1), (M_1, 2), (M_2, 4)\Big)$.

Planche 65 : Mines-Ponts

1. Sans perte de généralité, on peut supposer $a < b < c$, la formule étant symétrique par rapport à ces trois variables.
   Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose la fonction :

   $$\varphi : x \longmapsto f(a)(x - c) + f(x)(c - a) + f(c)(a - x) + A(x - a)(x - c).$$

   La fonction φ est deux fois dérivable. De plus,

   $$\varphi(a) = \varphi(c) = 0.$$

   On peut trouver un réel A tel que :

   $$\varphi(b) = 0.$$

   On choisit dans la suite un tel réel A, qui est en fait unique.
   On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivable φ sur l'intervalle $[a, b]$ et sur l'intervalle $[b, c]$. On trouve deux réels $a < \alpha < b < \beta < c$ tels que :

   $$\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0.$$

On peut de nouveau utiliser le théorème de Rolle à la fonction dérivable φ', ce qui donne l'existence d'un réel $d \in]a,b[$ tel que :

$$\varphi''(d) = 0.$$

Or,

$$\varphi''(d) = f''(d)\ (c-a) + 2A.$$

L'égalité $\varphi(b) = 0$ amène :

$$f(a)(b-c) + f(b)(c-a) + f(c)(a-b) - \frac{1}{2} f''(d)(c-a)(b-a)(b-c) = 0.$$

En divisant le tout par $(c-a)(b-a)(b-c)$, on obtient exactement ce qu'il faut.

2. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$\psi : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)\ (b-x)^k}{k!}.$$

Il existe d entre a et b tel que $\psi'(d) = 0$. Le calcul de ψ' conduit à une somme télescopique qui amène à ce qu'il faut.

Planche 66 : X

1. On pose $\delta : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, puis $\Delta = \delta - \mathrm{id}$ de sorte que :
   - par le binôme :

$$\Delta^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\ \delta^i$$

   - si u est une suite polynomiale de degré inférieur ou égal à $k-1$, alors $\Delta^k(u) = 0$
   - si u est une suite polynomiale de degré k, alors $\Delta^k(u)$ est constante égale à $k!$.
   - si u prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors $\Delta^k(u)$ aussi.

   Ainsi, en posant $\alpha = N - 1 + \beta$ avec $0 \leqslant \beta < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ – en supposant $\beta > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta^N(n^\alpha) &= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\ (-1)^{N-i}\ (n+i)^\alpha \\
&= n^\alpha \left(\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\ (-1)^{N-i} \sum_{p=0}^{N} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!} \left(\frac{i}{n}\right)^p + o\left(\frac{1}{n}\right)^N \right) \\
&= n^\alpha \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{n^p} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!} \Delta^N(X^p)(0) \right) + o\left(\frac{1}{n^{N-\alpha}}\right) \\
&\sim n^{\beta-1}\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-N+1) > 0
\end{aligned}$$

   quantité qui tend vers 0^+, par valeurs strictement positives, mais cette quantité est toujours un entier : contradiction.

   Finalement, $\beta = 0$ et α est un entier.

2. On utilise les polynômes de Lagrange. Soient $a, a+1, \cdots, a+k-1$, k entiers consécutifs en lesquel le polynôme $P(X)$ prend des valeurs entières.
On note $L_0, \cdots, L_{k-1}$ les polynômes de Lagrange associés.
On sait alors que :
$$P(X) = \sum_{i=0}^{k-1} P(i)\ L_i(X).$$
De plus, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$,
$$L_i(X) = \prod_{j=0;j\neq i}^{k-1} \frac{X-a-j}{i-j}.$$
On en déduit :
$$L_i(a+k) = \prod_{j=0;j\neq i}^{k-1} \frac{k-j}{i-j} = (-1)^{k-i} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right).$$
On en déduit que $P(a+k)$ est encore un entier.
On peut réitérer le raisonnement pour le polynôme $P(-X)$ qui vérifie les mêmes hypothèses.
En conclusion, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et donc P prend ses valeurs entières sur tous les entiers.

Planche 67 : X

1. On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ les racines réelles de $P(X)$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$.
On sait que les racines λ_k sont de multiplicités $\alpha_k - 1$ dans $P'(X)$.
On distingue deux cas.
▷ Si $\alpha = 0$, il n'y a rien à montrer.
▷ Si $\alpha \neq 0$, en posant $\chi = \dfrac{1}{\alpha}$, il s'agit de montrer que le polynôme $Q(X) = \chi\ P(X) + P'(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Ce polynôme admet déjà les racines λ_k comme multiplicités $\alpha_k - 1$, ce qui fait déjà :
$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_k - 1) = \deg(P) - r \text{ racines réelles}$$
celles-ci étant comptées avec multiplicités.
Il manque r racines, car $\deg(Q) = \deg(P)$.
La fonction $f : x \longmapsto P(x)\ e^{\chi\ x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule aux points λ_k. Il est possible d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction f sur les intervalles $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, pour k variant de 1 et $r-1$, ce qui donne $(r-1)$ autres racines différentes de celles déjà comptabilisées.
Si $\chi > 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle étendu à f sur $]-\infty, \lambda_1]$ et si $\chi < 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle étendu à f sur $[\lambda_r, +\infty[$, en utilisant à chaque fois les croissances comparées et le fait que si R est un polynôme et si $\rho > 0$, alors :
$$R(x) = \circ(e^{\rho\ x})\ , \text{ au voisinage de } +\infty.$$
On obtient quoiqu'il arrive une dernière racine pour le polynôme $Q(X)$.

2. On fait une récurrence sur $n = \deg(P)$.
Lorsque $n = 1$, alors $P(X) = \xi(X - \lambda_1)$ et dans ce cas,

$$Q(X) = \xi(P' - \lambda_1\ P)$$

qui est scindé par la question précédente.
Supposons le résultat vrai lorsque P est de degré n.
Si P est de degré $(n+1)$, en posant $P = (X-\lambda)S(X)$, alors le polynôme $S(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ est scindé et par hypothèse de récurrence, le polynôme :

$$T(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k\ P^{(k)}(X) \text{ l'est aussi.}$$

Or, il est facile de vérifier que :

$$Q(X) = T'(X) - \lambda\, T(X).$$

Par la première question, le polynôme Q reste scindé dans $\mathbb{R}$.
On a le résultat au rang suivant.

Planche 68 : X

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $F : x \longmapsto \int_0^x f$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[0,1]$ vers $[0, I]$, où $I = \int_0^1 f$.
La seule subdivision possible est :

$$a_k^{(n)} = F^{-1}\left(\frac{k}{n} I\right).$$

Par la relation de Chasles, les $a_k^{(n)}$ répondent au problème posé.
2. On interprète cette somme comme une somme de Riemann. On en déduit que la somme vaut :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{k}{n} I\right).$$

La fonction F^{-1} est continue et la limite vaut :

$$\frac{1}{I}\int_0^I F^{-1}(t)\ dt.$$

En posant le changement de variable $u = F^{-1}(t)$, on obtient comme nouvelle intégrale :

$$\frac{1}{I}\int_0^1 uf(u)\ du.$$

La limite à calculer vaut donc :

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 u\ f(u)\ du}{\displaystyle\int_0^1 f(u)\ du}.$$

Planche 69 : Mines-Ponts

L'égalité se réécrit :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\ z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k\ z_k|.$$

On est dans le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : tous les vecteurs $a_k\ z_k$ sont colinéaires de même sens.
Or, si il existe deux indices k et ℓ tels que $a_k \neq 0$ et $a_\ell \neq 0$, les vecteurs z_k et z_ℓ seraient colinéaires de même sens, donc appartiendraient à l'intersection entre le cercle unité et la même demi-droite issue de 0 : les points d'intersection z_k et z_ℓ seraient les mêmes, mais les complexes sont supposés différents.
On en déduit qu'au plus un indice k vérifie $a_k \neq 0$ et comme la somme des a_k vaut 1, alors un seul indice k vérifie $a_k \neq 0$ et dans ce cas $a_k = 1$ et le vecteur $(a_1, \cdots, a_n)$ est le $k^{ème}$ vecteur de la base canonique.

Planche 70 : ENS

1. L'ensemble K est invariant par translation $+1$ et par homothétie de rapport 2.
   Soient $t \in K$ et $\varepsilon > 0$ tels que :
   $$]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subset K.$$
   Il existe n_0 suffisamment grand dans $\mathbb{N}$ tel que $2^{n_0}\varepsilon$ soit strictement supérieur à 1. Comme $K = 2^{n_0}K$, alors l'intervalle $]2^{n_0}t - 2^{n_0}\varepsilon, 2^{n_0} + 2^{n_0}\varepsilon[$ est inclus dans K et l'ensemble K contient un intervalle de longueur strictement supérieure à 1. Par les translations entières, l'ensemble K contient $\mathbb{R}$ obtenu par réunion des translations entières de tout intervalle de longueur strictement supérieure à 1

2. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$, puis :
   $$K = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid d(x, \mathbb{N} + \mathbb{N}\alpha) \leqslant \varepsilon\Big\}.$$
   Le nombre $\alpha = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel car sinon, on pourrait écrire α sous la forme $\alpha = \dfrac{r}{s}$, avec r et s deux entiers dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Ensuite, on aurait $s \ln 3 = r \ln 2$, puis $3^s = 2^r$, ce qui n'est pas possible par unicité de la factorisation en premiers, par exemple.
   Pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble :
   $$\mathscr{A}_n = \Big\{\{k\alpha\}\ ;\ 1 \leqslant k \leqslant n\Big\}$$
   des parties décimales des réels $k\alpha$ compte exactement n éléments différents dans $[0, 1[$.
   On distingue deux cas.
   - Si $\mathscr{A}_n \cap \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ est non vide, on trouve un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ et donc un entier $p = \lfloor k\alpha \rfloor \geqslant 0$ tels que :
     $$0 < k\alpha - p < \frac{1}{n}.$$
   - Si $\mathscr{A}_n \cap \left[0, \dfrac{1}{n}\right[= \emptyset$, on peut ranger les n éléments de $\mathscr{A}_n$ dans les $(n-1)$ tiroirs $I_j = \left[\dfrac{j}{n}, \dfrac{j+1}{n}\right[$, lorsque j décrit $[\![1, n-1[\![$. L'un des tiroirs I_j contient au moins deux éléments $\{k\alpha\}$ et $\{\ell\alpha\}$, avec $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$.

En posant $r = \ell - k$, il existe un entier q tel que :

$$0 < r\alpha - q < \frac{1}{n}.$$

Nécessairement, q doit être positif.
On fixe alors un entier n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Par ce qui précède, on choisit deux entiers strictement positifs r et s tels que :

$$0 < \xi = r\alpha - s < \frac{1}{n_0}.$$

Lorsque j décrit $\mathbb{N}$, on dispose des multiples de ξ, ce qui fournit un ensemble de nombres :

$$\mathscr{B} = \Big\{ j\xi \ ; \ j \in \mathbb{N}^* \Big\} \cap [0,1[,$$

ce qui fournit un ensemble fini $\mathscr{B} = \Big\{ r_i\alpha - s_i \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant m \Big\}$ tel que :

$$\forall x \in [0,1[, \ d(x, \mathscr{B}) \leqslant \frac{1}{n_0},$$

car le réel x est compris entre deux nombres de la forme $j\xi$ et $(j+1)\xi$, distants d'une quantité strictement inférieure à $\frac{1}{n_0}$.
On pose $a = \max\Big\{ s_i \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant m \Big\}$.
Soit maintenant x un réel dans $[a, +\infty[$.
On pose $p = \lfloor x \rfloor$ sa partie entière supérieure à chaque s_i.
Il existe un élément $r_i\alpha - s_i$ de l'ensemble $\mathscr{B}$ tel que :

$$|\{x\} - (r_i\alpha - s_i)| < \frac{1}{n_0}.$$

On en déduit :

$$|x - (p - s_i + r_i\alpha)| < \frac{1}{n_0}.$$

Or, le réel $(p - s_i) + r_i\alpha$ appartient à $\mathbb{N} + \mathbb{N}\alpha$.
On a montré que :

$$\forall x \geqslant a, \ d(x, \mathbb{N} + \mathbb{N}\alpha) < \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $x \geqslant \frac{a}{\ln 2}$,

$$d\left(x, \mathbb{N}\ln 2 + \mathbb{N}\ln 3\right) = \ln 2 \times d\left(\frac{x}{\ln 2}, \mathbb{N} + \mathbb{N}\alpha\right) \leqslant (\ln 2)\, \varepsilon < \varepsilon.$$

On obtient bien ce qu'il faut.

Planche 71 : ENS

1. On montre que H est un sous-groupe des bijections sur $\mathbb{H}$.
   En premier lieu, si h est une telle fonction dans H, en posant $z = x + iy$, avec $y > 0$, alors $h(z)$ est bien défini et :
   $$\Im m(h(z)) = \frac{\Im m(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$
   Ensuite, toute fonction h dans H est bien une telle bijection car l'équation $\dfrac{az+b}{cz+d} = Z$, d'inconnue z admet comme seule solution,
   $$z = \frac{dZ - b}{-cZ + a},$$
   où les nombres d, $-b$, $-c$ et a sont quatre entiers vérifiant :
   $$da - (-c)(-b) = 1.$$
   En prenant $a = d = 1$ et $b = c = 0$, on obtient l'identité, qui est bien dans H.
   On vient de voir que l'ensemble H est stable par passage à la fonction réciproque.
   Si h_1 et h_2 sont deux éléments de H, avec des notations intuitives, on obtient là où les formules sont bien définies :
   $$h_1 \circ h_2 : z \longmapsto \frac{Az + B}{Cz + D},$$
   où $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, les coefficients a, b, c, d correspondant à la fonction h_1 et les autres à la fonction h_2.
   L'ensemble $SL_2(\mathbb{Z})$ des matrices à coefficients entiers de déterminant 1 est un groupe pour $\times$, donc l'ensemble H est bien stable par $\circ$.
2. Soit z un élément de $\mathbb{H}$. On note :
   $$\mathscr{O}(z) = \Big\{ h(z) \mid h \in H \Big\}.$$
   On pose l'ensemble :
   $$D = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\Re e(z)| \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geqslant 1 \right\}.$$
   Comme l'ensemble des couples (c, d) d'entiers tels que $|cz + d| \leqslant 1$ est un ensemble fini, on peut trouver un élément $h \in H$ correspondant à une quantité $|cz+d|$ minimale, et donc on pourra trouver un élément Z dans $\mathscr{O}(z)$ de partie imaginaire maximale. En faisant intervenir les translations f^k qui ne modifient pas les parties imaginaires, on trouve dans l'ensemble $\mathscr{O}(z) \cap D$ un point d'ordonnée maximale Z_0. De plus, en faisant agir g, alors $g(Z_0)$ est de partie imaginaire inférieure à celle de Z_0 et :
   $$\Im m(g(Z_0)) = \frac{\Im m(Z_0)}{|Z_0|^2}.$$
   Nécessairement, $|Z_0| \geqslant 1$.
   En résumé, on vient de montrer que si $z \in \mathbb{H}$, il existe un élément h_0 appartenant au sous-groupe engendré par les fonctions f et g et tel que :
   $$h_0(z) \in D.$$

Maintenant, soient $h \in H$ différent de id et $z \in D$ tels que $h(z) \in D$.
On va montrer que le point z est sur le bord de l'ensemble D.
Quitte à remplacer h par h^{-1} et à intervertir les rôles de z et de $h(z)$, on peut supposer que :

$$\Im m(h(z)) \geqslant \Im m(z).$$

En associant à l'application h les quatre entiers a, b, c et d, alors $|cz + d| \leqslant 1$ et donc :

$$c^2(\Im m(z))^2 \leqslant 1.$$

Or, dans le domaine D, la partie imaginaire de z est en module supérieure à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $c^2 \leqslant 1$ et c vaut 0 ou ± 1.
$\triangleright$ Si $c = 0$, alors $a = d = \pm 1$ donc $h(z) = z \pm b$. L'entier b n'est pas nul car sinon h serait id. Les points z et $z \pm b$ sont de partie réelle de module inférieur à $\dfrac{1}{2}$. Cela impose $|b| = 1$ et $\Re e(z) = \pm\dfrac{1}{2}$. Le point z est donc sur le bord de D.
$\triangleright$ Si $c = \pm 1$, on écrit :

$$|cz + d|^2 \leqslant 1.$$

Si $\Im m(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors z est d'ordonnée minimale dans l'ensemble D et donc est sur le bord de D, soit $\Im m(z) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, auquel cas

$$(\Re e(z) \pm d)^2 < \frac{1}{2},$$

et cela impose à l'entier d d'être nul. Comme $ad - bc = 1$, alors $b = -c$ et :

$$h(z) = \pm a - \frac{1}{z} = \pm a - \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Si $|z| > 1$, alors on doit avoir $a = 0$ et si $|z| = 1$, alors z est sur le bord de D. Lorsque $a = 0$, alors $h(z) = -\dfrac{1}{z}$, donc z et $h(z)$ sont de module 1.
Dans tous les cas, le point z est sur le bord de D.

On termine finalement l'exercice.
Soit $h \in H$. On prend $z = i$ par exemple, un point intérieur à l'ensemble D.
On pose $Z = h(z)$. Il existe h' obtenu dans le sous-groupe engendré par les fonctions f et g et tel que le point $Z' = h'(Z)$ appartienne à l'ensemble D.
En posant $k = h' \circ h$, alors $k(z) = Z'$ et $k \in H$, les points z et Z' appartenant à l'ensemble D.
Par le point précédent, si $k \neq$ id, alors les points z et Z' doivent être sur le bord de D, ce qui n'est pas le cas pour le point z. Nécessairement, $k =$ id et donc :

$$h = h'^{-1},$$

appartient au sous-groupe engendré par les fonctions f et g.
L'ensemble H est bien inclus dans ce sous-groupe engendré et ce sous-groupe engendré est bien évidemment inclus dans H. On a égalité.

Planche 72 : X

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $r = \mathrm{Rg}(A)$. La matrice A est équivalente à la matrice type J_r : il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$Q^{-1}AP = J_r.$$

On en déduit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda A - QP^{-1} = Q(\lambda\, J_r - I_n)P^{-1}.$$

La fonction $f : \lambda \longmapsto \det(\lambda\, A - QP^{-1})$ est polynomiale en λ et de degré égal à r.
La fonction f est égale à la fonction :

$$f : \lambda \longmapsto \det(\lambda\, T(A) - T(QP^{-1})).$$

On pose $R = T(QP^{-1})$. Comme $\det(R) = \det(QP^{-1}) \neq 0$, alors la matrice R est inversible. On pose s le rang de la matrice $T(A)$ de sorte qu'il existe deux matrices inversibles U et V telles que :

$$U^{-1}T(A)V = J_s.$$

Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ f(\lambda) = \det(\lambda\, T(A) - R) = \det(UV^{-1}) \times \det(\lambda\, J_s - W),$$

avec la matrice $W = U^{-1}RV$ (inversible mais inutile).
La fonction $g : \lambda \longmapsto \det(\lambda\, J_s - W)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à s, en utilisant par exemple la formule sommatoire du déterminant.
On vient de montrer que $r = \deg(f) = \deg(g) \leqslant s$.
L'application linéaire T augmente le rang.
• Soit $A \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors, $T(A) = 0$ de rang nul, et donc :

$$\mathrm{Rg}(A) \leqslant \mathrm{Rg}(T(A)) = 0.$$

La matrice A est nulle et donc l'application T est injective puis bijective par le théorème du rang.
• Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(T^{-1}(A)) = \det(T(T^{-1}(A))) = \det(A).$$

L'application T^{-1} vérifie les mêmes hypothèses que l'application T : l'endomorphisme T^{-1} augmente le rang donc :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Rg}(T(A)) \leqslant \mathrm{Rg}(T^{-1}(T(A))) = \mathrm{Rg}(A).$$

L'endomorphisme T conserve bien le rang.

Planche 73 : X

On note (e_1, e_2), la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour tous entiers i et j entre 1 et 2, on pose :

$$a_{i,j} = B(e_i, e_j).$$

En posant $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la quantité $B(x, x)$ devient :

$$a_{1,1}x_1^2 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2.$$

L'équation $B(x, x) = 0$ est donc une équation de la forme :

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0.$$

On distingue plusieurs cas :

- premier cas : $\alpha \neq 0$
En divisant le tout par α, on obtient une équation du type :
$$x_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$
Cette équation est équivalente :
$$\left(x_1 + \frac{b}{2}x_2\right)^2 - \frac{b^2-4c}{4}x_2^2 = 0.$$
Posons $\Delta = b^2 - 4c$ et distinguons les cas selon le signe de Δ.
Si $\Delta < 0$, l'équation est équivalente à :
$$x_1 + \frac{b}{2}x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 0,$$
qui est le point $(0, 0)$.
Si $\Delta = 0$, l'équation est éuivalente à :
$$x_1 + \frac{b}{2}x_2 = 0,$$
qui est une droite vectorielle.
Si $\Delta > 0$, en posant $\delta = \sqrt{\Delta}$, l'équation est équivalente à :
$$x_1 + \frac{b-\delta}{2}x_2 = 0 \text{ ou } x_1 + \frac{b+\delta}{2}x_2 = 0,$$
qui est la réunion de deux droites vectorielles.
- second cas : $\alpha = 0$
L'équation est de la forme :
$$x_2\,(\beta\; x_1 + \gamma x_2) = 0.$$
Si $\beta = \gamma = 0$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier.
Si $\beta = 0$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est $\mathrm{Ker}(e_2^*) = \mathrm{Vect}(e_1)$ une droite vectorielle.
Si $\beta \neq 0$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est :
$$\mathrm{Ker}(e_2^*) \cup \mathrm{Ker}(\beta\; e_1^* + \gamma\; e_2^*),$$
qui est la réunion de deux droites vectorielles.

Planche 74 : ENS

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note le reste $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$, quantité tendant vers 0.
On obtient par sommation que pour tous entiers n et p :
$$a_{n+p} - a_n \leqslant R_n.$$
On en déduit que la suite a est bornée par $a_0 + R_0$.
Il suffit alors de montrer que la suite a n'admet qu'une seule valeur d'adhérence pour avoir sa convergence.
Supposons que la suite a admettent deux valeurs d'adhérence différentes $\ell_1 < \ell_2$.
On trouve deux extractrices $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} = \ell_1 \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_{\psi(n)} = \ell_2.$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{4} > 0$. Il existe un rang p_0 tel que :

$$\forall p \geqslant p_0,\ 0 \leqslant R_p \leqslant \varepsilon.$$

Il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que :

- $n_1 > p_0$ et $a_{\varphi(n_1)} < \ell_1 + \varepsilon$
- $n_2 > \varphi(n_1) + p_0$ et $a_{\psi(n_2)} > \ell_2 - \varepsilon$.

En posant $n = \varphi(n_1)$ et $p = \psi(n_2) - \varphi(n_1)$, alors :

$$p \geqslant n_2 - \varphi(n_1) \geqslant p_0$$

et d'autre part :

$$a_{n+p} - a_n = a_{\psi(n_2)} - a_{\varphi(n_1)} \geqslant \ell_2 - \ell_1 - 2\varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon$$

alors que :

$$a_{n+p} - a_n \leqslant R_n \leqslant \varepsilon.$$

On obtient une contradiction : la suite a bornée n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, donc est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Planche 75 : X

On suit l'indication.
Une configuration de paquet mélangé est un chemin dans $\mathbb{Z}^2$, composé de n portions verticales et de n portions horizontales, partant du point $(0,0)$ et allant vers le point (n,n).
La correspondance est la suivante.
Le chemin part de $(0,0)$. Si la première carte est noire, le chemin va en $(1,0)$ et si elle est rouge, le chemin va en $(0,1)$.
Si le chemin à la $i^{\text{ème}}$ carte est au point (a,b), si la carte suivante tirée est noire, alors le chemin va en $(a+1,b)$ et sinon, il va en $(a,b+1)$.
La correspondance est bijective car les portions horizontales donnent les emplacements des cartes tirées noires et les portions verticales donnent les emplacements des cartes tirées rouges.
Il y a $\dbinom{2n}{n}$ chemins possibles.
Étant donné un chemin γ correspondant à un paquet mélangé, la variable X_e suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.
On en déduit que l'espérance conditionnelle de X_e calculée avec le probabilité sachant le chemin γ vaut $\dfrac{n}{2}$. On en déduit de plus que l'espérance de X_e vaut $\dfrac{n}{2}$, via le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_e) &= \sum_{\omega\in\Omega} X_e(\omega)\ \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\omega\in\Omega} X_e(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\} \mid \gamma) \right)\ \mathbb{P}(\{\gamma\}) \\
&= \sum_{\gamma} \frac{n}{2} \cdot \mathbb{P}(\{\gamma\}) \\
&= \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

On calcule maintenant l'espérance de la variable X_a.
Étant donné un chemin γ correspondant à un paquet mélangé, comme la stratégie de l'adulte est alors plus ou moins déterministe, sauf en cas d'équiproportion de rouges / noires dans le paquet restant, on peut calculer connaissant le chemin γ la valeur prise par la variable X_e.
Fixons donc un chemin γ. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un point du chemin.
Si le point (a, b) est sur la première bissectrice $\Delta : y = x$, cela signifie que l'on a déjà tiré autant de noires que de rouges, et donc que dans le paquet restant figurent autant de cartes noires ou rouges. L'adulte aura alors une chance sur deux de gagner à la carte suivante.
Si le point (a, b) n'est pas sur la première bissectrice Δ, alors $a \neq b$.

- si $a > b$, on a retourné a cartes noires et b cartes rouges. Il y a donc plus de cartes rouges dans le paquet et l'adulte misera sur une carte rouge pour la suivante. L'adulte gagnera alors un point si et seulement si le chemin va de (a, b) vers $(a, b + 1)$, autrement dit si et seulement si le chemin se rapproche de la droite Δ.
- si $a < b$, les rôles sont inversés. La conclusion reste la même. L'adulte gagnera sur la carte suivante si et seulement si le chemin se rapproche de la droite Δ.

On note alors $M_0 = (0, 0), M_{i_1}(c_1, c_1), \cdots, M_{i_r}(c_r, c_r), M_{r+1}(n, n)$ les points d'intersection entre la droite Δ et l'ensemble des positions du chemin γ, correspondant à des indices de cartes $i_1 < \cdots < i_r < n$ pour lesquels l'adulte choisira aléatoirement pour la carte suivante.
Si j est un entier entre 0 et r, la portion du chemin strictement entre les instants i_j et i_{j+1} correspond à une portion située d'un seul bord de la droite Δ. Entre les positions $M_{i,j}$ et $M_{i_{j+1}}$ du chemin, il y a $n_j = 2(i_{j+1} - i_j)$ cartes dévoilées. Au point $M_{i,j}$, il y a une chance sur deux d'avoir gagné, et sinon, comme le chemin a effectué $i_{j+1} - i_j$ mouvements vers le haut et $i_{j+1} - i_j$ mouvements vers la droite, seulement la moitié des mouvements s'est rapprochée de la droite Δ et l'adulte aura exactement la moitié de bonnes réponses sur cette portion. Sur la portion $]M_{i_j}, M_{i_{j+1}}]$, l'adulte donnera assurément $i_{j+1} - i_j$ bonnes réponses, c'est-à-dire un peu plus de la moitié de bonnes réponses – en fait exactement s bonnes réponses sur $2s - 1$ cartes prédites.
En résumé pour l'instant, si le chemin γ partant de $(0, 0)$ et se terminant en (n, n) admet r points M_{i_j} sur la première bissectrice autres que les points extrêmes, alors, en moyenne, l'adulte donnera un nombre de bonnes réponses égal à :

$$\frac{r+1}{2} + \frac{n}{2}.$$

On note alors Y_n la variable aléatoire qui à un chemin γ décrit ci-dessus associe le nombre de points fixes r strictement entre les deux extrémités du chemin.
On en déduit :

$$\mathbb{E}_(X_a) = \mathbb{E}(X_e) + \mathbb{E}\left(\frac{Y_n + 1}{2}\right).$$

Il reste alors à montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n + 1) \underset{n \to +\infty}{\simeq} \sqrt{\pi n},$$

pour obtenir le résultat escompté, ou encore puisque $\mathbb{E}(Y_n + 1) = \mathbb{E}(Y_n) + 1 = \mathbb{E}(Y_n) + \circ(\sqrt{n})$:

$$\mathbb{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\simeq} \sqrt{\pi n},$$

Ensuite, par la formule de Stirling, on peut écrire :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\simeq} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note l'événement B_k : « le chemin admet (k,k) comme point fixe ».
On en déduit l'égalité :

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{B_k}.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_k}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k).$$

On calcule alors le nombre de chemins favorables à l'événement B_k. Il s'agit de concaténer les chemins allant de $(0,0)$ vers (k,k) et les chemins allant de (k,k) vers (n,n). Cela donne : $\binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k}$.
On en déduit l'espérance de la variable Y_n :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

Il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k} = 1.$$

Dans la suite, on pose :

$$v_k = \frac{\sqrt{\pi\, k}}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

On sait que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
De plus,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\, v_k\, v_{n-k}. \end{aligned}$$

On montre maintenant que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \pi.$$

On note a_n la somme ci-dessus.
En effet, posons la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{array} \right. .$$

La fonction f est continue et en mettant le polynôme $X(1-X)$ sous forme canonique :

$$X(1-X) = \frac{1}{4}\left(1-(2X-1)^2\right),$$

la fonction :

$$F : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(2t-1) \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction f.
On remarque que la fonction F est de classe C^2 sur $]0,1[$ et :

$$F'' : t \longmapsto \frac{2t-1}{2}(t-t^2)^{-3/2}.$$

En fixant des entiers $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction F de classe C^2 sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, ce qui donne l'existence d'un c_k dans l'intérieur de cet intervalle tel que :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}F''(c_k) \\ &= \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ k^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_k \frac{1}{k^{3/2}}$ est convergente, alors, puisque la fonction F est continue en 0 :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\mathscr{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ k^{3/2}}\right) = F(1) - F(0) + \circ(1) = \pi + \circ(1).$$

On montre finalement que la quantité w_n tend vers 1. Dans la suite, on pose :

$$h_k = v_k - 1$$

la quantité h_k tendant vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|h_n| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} - \pi\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit maintenant un entier $n \geqslant n_0$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} |w_n - 1| &\leqslant \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1+h_k)(1+h_{n-k})-1}{\sqrt{k(n-k)}}\right| + \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} - \pi\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|h_k|}{\sqrt{k(n-k)}} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|h_{n-k}|}{\sqrt{k(n-k)}} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|h_k\ h_{n-k}|}{\sqrt{k(n-k)}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $k \longleftarrow n-k$ et en utilisant le fait que la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par une constante C, la suite $\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant bornée par une constante C', alors pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}
|w_n - 1| &\leqslant \frac{C+2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|h_k|}{\sqrt{k(n-k)}} + \varepsilon \\
&\leqslant \frac{(C+2)C}{\pi}\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + \frac{(C+2)\varepsilon}{\pi}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + \varepsilon \\
&\leqslant \frac{(C+2)Cn_0}{\pi}\,\mathscr{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{(C+2)C'\varepsilon}{\pi} + \varepsilon \\
&\leqslant D\,\varepsilon + \frac{D'}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

où les quantités D et D' sont deux constantes. Il existe donc un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ |w_n - 1| \leqslant (D+1)\varepsilon.$$

En remplaçant classiquement ε par $\dfrac{\varepsilon}{D+1}$, on a bien la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 1 terminant la démonstration de l'exercice.