FEUILLE D'EXERCICES N° 5

FONCTIONS USUELLES

Fonctions puissance, logarithmiques ou exponentielles

Exercice 1
Résoudre les équations suivantes :
- $\ln(x^2-1)+\ln 4=\ln(4x-1)$
- $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$
- $2^{x^2}=3^{x^3}$
- $2^{x+1}+4^x=15$

○

Exercice 2
Résoudre l'équation $\alpha^4-585\alpha+584=0$ en testant $\alpha=8$.

○

Exercice 3
Résoudre l'équation $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=1$.

○

Exercice 4
Simplifier les expressions suivantes :
- $(7+5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}-(-7+5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\dfrac{13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{-13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

○

Exercice 5
Soient $0<a\leqslant b$. On pose :

$$f(x)=\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

1. Étudier la fonction f.
2. En déduire l'inégalité :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\times\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2.$$

○

Exercice 6
Soient p et q des réels dans $]1,+\infty[$ tels que : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Montrer que si u et v sont des réels positifs ou nuls, alors :

$$u\,v\leqslant\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}.$$

2. Soient $u_1,\cdots,u_n$ et $v_1,\cdots,v_n$ des nombres complexes. Montrer que [inégalité de Hölder] :

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k\ v_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

[indication : on commencera par montrer cette inégalité lorsque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q=1$.]

○

Exercice 7
On se donne deux réels $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$ et quatre réels x, y, u et v tels que :

$$0<y<v<u<x.$$

Montrer que : $\sqrt{ax+b}+\sqrt{ay+b}\geqslant\sqrt{au+b}+\sqrt{av+b}$.

○

Fonctions circulaires ou circulaires inverses

Exercice 8
Déterminer une valeur des nombres suivants :
- $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\sin\dfrac{7\pi}{15}\right)$
- $\arctan\left(\tan\dfrac{87\pi}{5}\right)$

○

Exercice 9
Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=2\arctan(\sqrt{x}).$$

○

Exercice 10

1. Montrer que $2\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$.
2. Montrer que : $4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$. [formule de Machin]

Exercice 11

- $\arccos x = 2\arccos\dfrac{3}{4}$
- $\arcsin x = \arccos\dfrac{1}{4} + \arcsin\dfrac{1}{3}$

Exercice 12

Tracer les courbes des fonctions $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ et $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 13

Simplifier $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ et $\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Exercice 14

1. Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.
2. Résoudre l'équation :

$$\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 15

Étudier les fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto \arccos(4x^3 - 3x)$
- $g : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 16

Résoudre les équations :

- $5\text{ch}x - 3\text{sh}x = 4$
- $3\text{sh}x - \text{ch}x = 1$

Exercice 17

Calculer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ les sommes :

$$C = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \text{sh}(kx).$$

Exercice 18

1. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.
2. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.
3. Montrer que la fonction $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.

Thèmes variés

Exercice 19

On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Déterminer f^{-1}.

Exercice 20

Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\arctan(\text{th } x) = \arctan(\text{sh}(2x)).$$

Exercice 21

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^x)^x - x^{2^x}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi} \dfrac{\cos x + 1}{(e^x - e^\pi)^2}$

Exercice 22

Résoudre les équations suivantes :

- $\arctan x + 2\arctan(\sqrt{1-x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arccos x = \arcsin 2x$
- $\arccos(\text{th } t) + 2\arctan(e^t) = \pi$

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\cos(n\theta)$ est une expression polynomiale en fonction de $\cos\theta$. Exprimer en fonction de n le terme dominant (le terme en ax^d avec $a \neq 0$ et d entier maximal dans l'expression développée du polynôme $P(x)$).

Exercice 24

Déterminer tous les entiers p et q strictement positifs tels que : $p^q = q^p$.