Questions / Réponses

Questions

«

J'aurai une question (pas urgente) sur les matrices P et Q telles que $B = Q^{-1} \times A \times P$.

Si j'ai bien compris, on peut séparer P et Q en deux blocs de colonnes, le premier correspond aux colonnes libres entre elles de A pour Q, et aux bases canoniques associées pour P, et le deuxième bloc correspond à des matrices canoniques utilisées pour compléter ces familles libres en base.

Je me doute que l'ordre des colonnes doit respecter cette séparation en blocs mais dans un même bloc l'ordre est-il important ?

Et je n'ai pas bien compris comment déterminer les matrices P et Q si B n'est pas la matrice J_r... Faut-il utiliser une méthode similaire à celle vue en cours ? »

Réponse

Déjà, je pense que dans la question précédente, je comprends « *aux colonnes libres entre elles de* $\text{Im}(A)$ », dans la troisième ligne.

Passons à la réponse proprement dite.

Imaginons une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ à p lignes et q colonnes. On notera $C_1, \cdots, C_q$ les colonnes de A, qui constituent donc une famille génératrice de $\text{Im}(A)$.
L'objectif : trouver des matrices inversibles P et Q telles que $Q^{-1}AP = J_r$, où $r = \text{Rg}(A)$.
On note $(e_1, \cdots, e_q)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{q,1}(K)$ (espace de départ de l'application u_A canoniquement associée à A et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(K)$ (espace d'arrivée de u_A.
En fait, les vecteurs e_i vont jouer un rôle pour constituer des colonnes de P, alors que les colonnes $C_1, \cdots, C_q$ vont jouer un rôle pour constituer des colonnes de la matrice Q. Mais attention ! Lorsque l'on remplit les colonnes des matrices P et Q, il ne faut pas remplir les colonnes au hasard. On verra ce qui se passe sur un exemple tout à l'heure.
Pour faire simple, lorsque l'on lit les colonnes $C_1, \cdots, C_q$ de la matrice A, à chaque fois que l'on retient une colonne C_j, cela signifie que :

$$C_j \notin \text{Vect}(C_1, \cdots, C_{j-1}),$$

en fait cela signifie que C_j ne fait pas partie de l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C_{i_1}, \cdots, C_{i_s}$ déjà prises, ces colonnes C_{i_k} formant en fait une base de $\text{Vect}(C_1, \cdots, C_{j-1})$.
Donc à chaque fois que l'on retient une colonne C_j, cette colonne C_j sera placée en $\ell^{\text{ème}}$ position dans la matrice Q et il faut absolument placer aussi en $\ell^{\text{ème}}$ position le vecteur e_j car comme $A(e_j) = C_j$, la matrice B représentant l'endomorphisme u_A selon des bonnes bases au

départ et à l'arrivée (le $\ell^{ème}$ vecteur de cette bonne base au départ est e_j et le $\ell^{ème}$ vecteur de cette bonne base à l'arrivée est C_j) aura sa $\ell^{ème}$ colonne remplie de 0, sauf un 1 en $\ell^{ème}$ place justement, car les coordonnées du vecteur $A(e_j)$ de la base $(\star, \cdots, \star, C_j, \star, \cdots, \star)$ seront $0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0$ et ceci quelles que soient les $\star$ correspondant aux autres vecteurs de base. On obtient ainsi le $\ell^{ème}$ chiffre 1 de la future matrice J_r.
Le rôle des vecteurs ε_m de la base canonique de l'espace d'arrivée sera juste de compléter une base de $\mathrm{Im}(A)$ en une base de $\mathscr{M}_{p,1}(K)$ pour compléter toutes les colonnes de notre future matrice inversible Q.

Prenons l'exemple suivant : On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

La question est de trouver deux matrices P et Q telles que $Q^{-1}AP = J_r$.

Avec les notations déjà introduites, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(K)$ et la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Si l'on suit la méthode correctement, voici ce qui se passe.
• On retient la première colonne C_1 pour Q et on prend en conséquence le vecteur e_1 pour P. Ces deux matrices sont placées en premières colonnes par exemple.
• Comme $C_2 = 2C_1$, on ne retient pas la colonne C_2 pour Q, mais l'égalité $C_2 = 2C_1$ se réécrit :

$$C_2 - 2C_1 = 0 \text{ ou encore } u_A(e_2 - 2e_1) = 0 \text{ ou encore } e_2 - 2e_1 \in \mathrm{Ker}(A).$$

Le vecteur $e_2 - 2e_1$ formera une colonne de P. Pour l'instant, on ne sait pas trop où placer cette colonne. Une chose est sûre. Si l'on place cette colonne en deuxième position dans P, alors la matrice $Q^{-1}AP$ aura sa deuxième colonne nulle quoiqu'il arrive mais peut-être qu'il y a d'autres chiffres 1 en attente dans la future matrice J_r et on n'aura pas exactement la matrice J_r, mais une matrice qui lui ressemblera... On garde ce vecteur sous le coude, ou bien on décide de le placer en dernier dans la matrice P. Une chose est alors sûre : la dernière colonne dans $Q^{-1}AP$ aura une dernière colonne nulle et cela coïncide avec ce que l'on souhaite : la dernière colonne de J_r aura aussi sa dernière colonne nulle...
• On retient la troisième colonne C_3 que l'on place en deuxième position dans Q et on place aussi en deuxième position dans P le vecteur e_3.
• On ne retient pas la dernière colonne car $C_4 = -C_1$. Le vecteur $e_4 + e_1$ appartient au noyau de A.
Résultat des courses. En prenant P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice Q n'est pas encore complète. On a pour l'instant :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star \\ 2 & 1 & \star \\ 1 & 1 & \star \end{pmatrix}.$$

Il s'agit maintenant d'utiliser la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ pour compléter cette troisième colonne de façon à ce que la matrice Q soit inversible. On choisit par exemple le vecteur ε_1 et la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si par exemple, on décide de remplir n'importe comment les matrices P et Q, cela donnera la chose suivante. Imaginons que l'on décide de remplir systématiquement les colonnes de P et Q de gauche à droite, que les colonnes C_j qui sont lues soient retenues ou non.
Avec l'exemple ci-dessus, on obtiendrait les matrices P et Q suivantes que l'on note P_1 et Q_1 car ce ne seront pas de bonnes matrices :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors :

$$Q_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors que la bonne matrice J_2 est :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'on intervertit uniquement les vecteurs de $\mathrm{Ker}(A)$, cela ne change rien à $Q^{-1}AP$.
Si l'on complète la dernière colonne de Q avec le vecteur ε_2 au lieu du vecteur ε_1 comme ci-dessus, cela ne change rien non plus.

Pour l'autre question, pour expliciter l'équivalence entre deux matrices A et N données de même format, le plus simple est de calculer $\mathrm{Rg}(A)$ et $\mathrm{Rg}(B)$ pour constater qu'ils sont égaux : les matrices A et B seront équivalentes.
Ensuite, on fait la méthode ci-dessus pour trouver des matrices inversibles P, Q, P' et Q' telles que :

$$Q^{-1}AP = J_r \text{ et } {Q'}^{-1}BP' = J_r.$$

On aura finalement :

$$B = Q' J_r {P'}^{-1} = (Q'Q^{-1})A(P{P'}^{-1}),$$

avec des matrices inversibles $(Q'Q^{-1})$ et $(P{P'}^{-1})$ explicites pour passer d'une matrice à l'autre.