Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths L
— *NOM Prénom* : MONDON Camille

Énonce des exercices

Exercice :

Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que :

- $u(a) = u(b) = 0$;
- $u|_{]a,b[} > 0$.

Montrer l'inégalité :

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)} \mathrm{d}t \geq \frac{4}{b-a}$$

Remarques sur l'oral

J'ai commencé par discuter de la bonne définition de l'intégrale, quand j'ai fait remarquer que l'intégrale pouvait valoir $+\infty$, il m'a dit que l'inégalité restait vraie.
J'ai ensuite écrit la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, en me demandant à quoi elle servirait ici. L'examinateur m'a conseillé de considérer le maximum $u(x_0) = M$ de u, et de remplacer u par M dans l'intégrale. Ensuite en voulant faire disparaître u' dans la formule de Taylor-Lagrange, j'ai eu l'idée de l'écrire entre a et x_0 puis entre x_0 et b. Ici, l'examinateur a essayé de m'induire en erreur en me parlant d'égalité des accroissements finis (je n'ai pas compris où il voulait m'emmener). Finalement, le résultat découle d'une étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{b-x} + \frac{1}{x-a}$ pour faire apparaître le fameux $\frac{4}{b-a}$.