DS 3

Les calculatrices sont autorisées.

1 Coefficients optimaux de Bezout

1.1 Algorithme d'Euclide

Dans toute cette partie, on fixe deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2. On pose $a_0 = a$, $a_1 = b$ et, pour tout $i \geq 1$, tant que a_i est non nul, on note a_{i+1} le reste de la division euclidienne de a_{i-1} par a_i.

1°) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{N+1} = 0$.

2°) Montrer que a_N est égal au PGCD de a et b, que l'on notera $a \wedge b$.

3°) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,
on note q_i le quotient de la division euclidienne de a_{i-1} par a_i.
On pose $\alpha_{N-1} = 0$, $\beta_{N-1} = 1$ et,
pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, on pose $\alpha_{i-1} = \beta_i$ et $\beta_{i-1} = \alpha_i - \beta_i q_i$.
Montrer que $\alpha_0 a + \beta_0 b = a \wedge b$.

1.2 Application

4°) En utilisant les questions précédentes, calculer le PGCD de 67 et de 35 ainsi que deux entiers relatifs α et β tels que $67\alpha + 35\beta = 1$.

5°) Un restaurant japonais propose la livraison de sushis. Pour ranger ses sushis, le restaurant dispose de deux types de boîtes : des boites permettant de ranger 35 sushis et des boites permettant de ranger 67 sushis.
Un client vient d'appeler et a commandé, pour un banquet, un certain nombre de sushis. Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 35, on s'aperçoit qu'après avoir rempli le plus de boîtes possibles, il reste 21 sushis. Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 67, on constate qu'il reste 4 sushis.
Sachant que ce client a commandé moins de 5000 sushis mais plus de 500, combien ce client a-t-il commandé de sushis ?

1.3 Optimalité

On fixe deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 **que l'on suppose premiers entre eux.**

6°) Montrer qu'il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_0 a + v_0 b = 1$, puis déterminer en fonction de u_0 et v_0 l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ua + vb = 1$.

7°) Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$ua + vb = 1 \text{ avec } 0 < u < b \text{ et } -a < v < 0.$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$ua + vb = 1 \text{ avec } -b < u < 0 \text{ et } 0 < v < a.$$

8°) Montrer que le couple (α_0, β_0) défini en question 3 est l'un des deux couples (u, v) de la question 7. Dans quel cas s'agit-il du couple (u, v) pour lequel $u > 0$?

1.4 Un second algorithme de calcul des coefficients de Bezout

On fixe à nouveau deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 **que l'on suppose premiers entre eux.** On reprend les notations de la première partie.
On pose $(u_0, v_0) = (1, 0)$, $(u_1, v_1) = (0, 1)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on pose $u_{i+1} = u_{i-1} - q_i u_i$ et $v_{i+1} = v_{i-1} - q_i v_i$.

9°) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, $u_i a + v_i b = a_i$.

10°) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, u_i et v_i sont premiers entre eux.

11°) La question 9 construit un couple $(u_N, v_N) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_N a + v_N b = a_N = 1$. Avec les notations de la question 3, montrer que $(u_N, v_N) = (\alpha_0, \beta_0)$.

2 Autour de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$

2.1 Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) \, dt = 0$.

2°) Déterminer $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc poser $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\, dt$.

3°) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

4°) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

On "rappelle" qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

5°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

6°) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$.

7°) En déduire la limite de la suite (J_n) ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2.2 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

8°) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ est prolongeable en une application continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a \in\,]0, \pi[$. On admettra que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$.

9°) Montrer que $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

10°) Montrer que $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt \underset{\substack{A\to+\infty \\ A\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

On résume ce résultat par la formule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

On "rappelle" que toute suite croissante de réels converge vers un réel ou bien diverge vers $+\infty$.

11°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

12°) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = +\infty$.