MP*1

Approximation uniforme

1 Variations autour du théorème de Weierstrass

1. (**) Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.
2. (*) Soit (P_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_d[X]$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f appartient à $\mathbb{R}_d[X]$.
3. (*) Quelles sont les fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $]0,1[$ d'une suite de polynômes réels ?
4. (*) Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément vers 0 sur $[0,1]$ et vers 1 sur $[2,3]$? Généraliser.
5. (**) *Limites uniformes locales de polynômes*

   Montrer que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes à coefficients réels convergeant vers f uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
6. (**) Quelles sont les fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $[-1,1]$ d'une suite de polynômes pairs ?
7. (**) *Approximation et interpolation*

   Soit f une fonction continue sur le segment S de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Soient $a_1,\ldots,a_n$ des points de S. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geq 1}$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur S et telle que :

   $$\forall j\in\{1,\ldots,n\},\quad \forall k\geq 1,\qquad P_k(a_j)=f(a_j).$$
8. (**) *Approximation avec dérivées*

   Soit f dans $C^k(S,\mathbb{R})$ où S est un segment de $\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une suite $(P_j)_{j\geq 0}$ de polynômes réels telle que, pour tout i de $\{0,\ldots,k\}$, la suite $\left({P_j}^{(i)}\right)_{j\geq 0}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur S.

   Indication. On commencera par le cas $k=1$.
9. *Limite uniforme de polynômes croissants*

   Quelles sont les fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $[0,1]$ de polynômes strictement croissants ?

   On commencera par le cas d'une fonction C^1.
10. (**) *Fonctions à moments nuls sur un segment*

    a) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

    $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \int_a^b f(t)\, t^n\ \mathrm{d}t=0.$$

    Montrer que f est nulle.

b) Soient N dans $\mathbb{N}$, f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow \int_a^b f(t)\, t^n \,\mathrm{d}t = 0.$$

Que dire de f ?

11. (**) Que dire d'une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{-1}^1 f(t)\, t^{2n} \,\mathrm{d}t = 0?$$

12. Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ forment une partie dense de $(C(S,\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.
13. *Il n'y a pas d'ondelette de classe C^∞ à support compact*
    Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que [1]

$$\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \varphi(2^j x - k)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que φ est identiquement nulle.

14. Soit $a > 0$. Montrer que toute fonction continue de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$ y est limite uniforme de polynômes de la forme $t \mapsto P(t^2)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
15. Soient f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'existent P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P \leq f \leq Q \quad \text{et} \quad \int_0^1 (Q-P) \leq \varepsilon.$$

16. Soient u et v deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et p dans $\mathbb{R}[X]$ tel que [2]

$$\forall x \in [0,1], \qquad |p(x) - u(x)| \leq \varepsilon, \quad |p^{(n)}(x) - v(x)| \leq \varepsilon.$$

17. *Théorème de Weierstrass, méthode de Lebesgue*
    Montrer que pour établir le théorème de Weierstrass polynomial il suffit de prouver que la fonction :

$$x \mapsto |x|$$

est limite uniforme de fonctions polynômes sur $[-1,1]$. On pourra utiliser l'approximation des fonctions continues par les fonctions continues affines par morceaux.

18. *Approximation de la fonction valeur absolue via le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$*
    Pour x dans $[0,1]$ soit $f(x) = \sqrt{1-x}$.

1. On peut en revanche, pour $k \in \mathbb{N}$, construire φ de classe C^k à support compact non identiquement nulle telle que les fonctions $x \longmapsto 2^{j/2} f(2^j x - k)$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ forment un système orthonormé total de $L^2(\mathbb{R})$ (« ondelettes de Daubechies »).

2. On déduit de ce résultat l'hypercyclicité de l'opérateur de dérivation sur l'espace des fonctions de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure naturelle d'espace de Fréchet.

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ converge absolument.

b) En déduire que f est limite uniforme sur $[0,1]$ de ses polynômes de Taylor.

c) Conclure que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme de polynômes sur $[-1,1]$, ce qui donne à l'aide de l'exercice précédent une preuve du théorème de Weierstrass.

19. *Approximation uniforme de la racine carrée par des polynômes*
Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - {P_n}^2\right).$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

b) Montrer que (P_n) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

c) Trouver une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

20. *Approximation par des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}^+$ *sur* $[-1,0]$ [3]
a) Soit k dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme sur $[-1,0]$ de la suite (f_n) définie par :

$$\forall x \in [-1,0], \qquad f_n(x) = x^k\left((1+x)^n - 1\right).$$

b) Trouver les fonctions de $[-1,0]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $[-1,0]$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.

21. *Approximation par des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}^+$ *sur* $[0,1]$
Montrer qu'une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ si et seulement si elle est continue sur $[0,1]$, de classe C^∞ sur $[0,1[$ à dérivées ≥ 0 sur cet intervalle [4].

22. (**) *Approximation par des polynômes de* $\mathbb{Z}[X]$ *(1)*
a) Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x(1-x) \end{array}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans $]0,1[$.

b) A quelle condition sur le couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ est-il vrai que toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

3. Théorème dû à Bonsall, 1958.

4. Ce résultat est une reformulation du théorème de Bernstein sur les applications absolument monotones.

23. *Approximation par des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ (2)*
Soient f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ prenant des valeurs entières en 0 et en 1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soient $B_n f$ le polynôme de Bernstein d'indice n de f, C_n le polynôme défini par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lfloor \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \rfloor x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Pour k dans $\{1,\ldots,n-1\}$, montrer : $\binom{n}{k} \geq n$.

b) Montrer :

$$\forall x \in [0,1], \qquad |B_n(f)(x) - C_n(f)(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que f est limite uniforme sur $[0,1]$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$.

24. *Approximation par des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ (3)*
On se propose, dans cet exercice, de trouver l'ensemble E des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[-1,1]$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

a) Vérifier, si $f \in E$, que $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ sont dans $\mathbb{Z}$, et que

$$f(1) \equiv f(-1)\ [2].$$

b) Vérifier que E est un sous-anneau de $C([-1,1],\mathbb{R})$.

c) Étudier la parité des coefficients du polynôme $P_n = (1+X)^{2^n}$.

d) Étudier la convergence uniforme sur $[-1,1]$ de la suite (T_n) de fonctions définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad T_n(x) = x(x^2-1)\left(\frac{1+x^{2^{n+1}} - (1-x^2)^{2^n}}{2}\right)^r.$$

e) Montrer, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$, que la fonction ϕ définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \phi(x) = \frac{x(x^2-1)}{2^r} P(x)$$

est dans E

f) Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$g(1) = g(-1) = g(0) = 0.$$

Montrer que $g \in E$.

g) Déterminer E.

25. (**) *Le phénomène de Runge*[5]
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=1-n}^{n-1} \left(X - \frac{k}{n}\right).$$

5. Mis en évidence par Runge en 1885, ce phénomène montre que l'interpolation de Lagrange ne conduit pas à une démonstration du théorème de Weierstrass.

Pour α dans $\mathbb{R}^{+*}$, soit f_α la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}.$$

Si f est une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, soit $L_n(f)$ l'unique élément p de $\mathbb{R}_{2n-2}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |k| \leq n-1 \quad \Longrightarrow \quad p\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'égalité de polynômes :

$$1 - \left(X^2+\alpha^2\right) L_n(f_\alpha) = \frac{XP_n}{i\alpha P_n(i\alpha)}.$$

b) Déterminer un équivalent simple de $\ln(P_n(1))$.

c) Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer :

$$\frac{1}{n}\ln\left(|P_n(i\alpha)|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\alpha^2)\,\mathrm{d}t.$$

d) Calculer l'intégrale du second membre de l'égalité de c). En déduire que, si α est suffisamment proche de 0, alors :

$$|L_n(f_\alpha(1)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

26. *Interpolation de Lagrange : condition suffisante de convergence uniforme*
Soit f une fonction de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points k/n, $0 \leq k \leq n$. Donner une condition suffisante de convergence uniforme de $(L_n(f))_{n\geq 1}$ vers f sur $[0,1]$ portant sur la suite $\left(\|f^{(n)}\|_{\infty,[0,1]}\right)_{n\geq 1}$.

27. *Approximation de $x \longmapsto x^n$ par des polynômes de petit degré*
Soit $E = C([-1,1])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit e_n l'élément de E défini par

$$\forall x \in [-1,1], \qquad e_n(x) = x^n.$$

a) Linéariser $\cos(\theta)^n$ et décomposer e_n sur la base $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev.

b) Soit $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(d_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, p_n soit de degré au plus d_n et que $\|e_n - p_n\|_{\infty,[-1,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, d un entier tel que $3d \leq n$,

$$I_{n,d} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^n \, e^{i(d+1)t} \left(\sum_{k=0}^{d-1} e^{ikt}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Montrer que $I_{n,d}$ est un entier naturel.

Montrer que, pour tout p de $\mathbb{R}_d[X]$,

$$\|e_n - p\|_{\infty,[-1,1]} \geq I_{n,d}.$$

d) On suppose qu'il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, p_n soit de degré au plus d_n et que $\|e_n - p_n\|_{\infty,[-1,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(d_n)$. [6]

2 Autres résultats d'approximation

28. (*) Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction continue de S dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur S d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.
29. Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit f_n l'unique fonction continue affine par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ coïncidant avec f sur les points k/n, $0 \leq k \leq n$. Montrer
$$\|f - f_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
30. (***) Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
31. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, soit :
$$e_\lambda \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\lambda x} \end{array}$$
Soient λ un réel, $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ telle que $\lambda_k \to \lambda$ quand $k \to +\infty$. Montrer que Vect $(e_{\lambda_k})_{k\geq 0}$ est dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}),\ \| \, \|_\infty)$.
Indication. Commencer par supposer $\lambda = 0$ et montrer alors que tous les monômes sont limites uniformes d'éléments de Vect $(e_{\lambda_k})_{k\geq 0}$.
32. *Densité d'une sous-algèbre monogène de $\mathcal{C}(S,\mathbb{R})$*
Soit f une fonction continue du segment S dans $\mathbb{R}$. A quelle condition la sous-algèbre $\mathbb{R}[f]$ est-elle dense dans $(C(S,\mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$?
33. *Généralisation de l'exercice précédent*
a) Soient S un segment de $\mathbb{R}$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer, avec la définition de l'exercice précédent, l'équivalence entre :
i) g est dans l'adhérence de $\mathbb{R}[f]$ (pour la topologie définie par $\| \, \|_\infty$),
ii) pour tout couple $(x,y) \in S^2$ tel que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$, on a $g(x) = g(y)$.
b) Retrouver le résultat de l'exercice précédent.
34. *Weierstrass via Weierstrass trigonométrique*
On admet ici le théorème de Weierstrass trigonométrique. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions entières. On pourra prolonger f en une fonction continue et périodique.
b) Conclure que f est limite uniforme sur $[a,b]$ de polynômes.

6. Le théorème établi dans cet exercice est dû à Newman et Rivlin (1976).

35. *Weierstrass trigonométrique*[7] *via Weierstrass*

On admet ici le théorème de Weierstrass polynomial. Pour k dans $\mathbb{N}$, soit

$$c_k \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(kt).$$

Pour k dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$s_k \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(kt).$$

Soit f une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose f paire. En approchant

$$g \ : t \in [-1, 1] \longmapsto f(\text{Arccos}(t))$$

par des polynômes, montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de combinaisons linéaires des fonctions $c_k, k \in \mathbb{N}$.

b) On revient au cas général. En considérant

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t) + f(-t) \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto (f(t) - f(-t)) \sin(t),$$

montrer que

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t) \sin^2(t)$$

est limite uniforme de combinaison linéaires des fonctions $c_k, k \in \mathbb{N}$ et $s_k, k \in \mathbb{N}^*$.

Conclure qu'il en est de même de f.

c) Montrer qu'une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$e_k \ : x \longmapsto e^{ikx} \ ; \ k \in \mathbb{Z}.$$

36. *Approximation par convolution : unités approchées*

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues, positives, intégrables sur $\mathbb{R}$, d'intégrales sur $\mathbb{R}$ égales à 1, telles que :

$$\forall \delta > 0, \qquad \int_{|t|\geq\delta} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Si f est une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

a) Justifier la définition de f_n.

b) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

On dit que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'unités approchées.*

7. Le théorème de Weirstrass trigonométrique peut être démontré par convolution avec des unités périodiques, cf cours.

37. *Théorème de Weierstrass : méthode de Landau, application de l'exercice précédent*

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, φ_n est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle hors de $[-1,1]$ et telle que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \varphi_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t}.$$

Montrer que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'unités approchées.

b) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulle hors de $[-1/2,1/2]$. En définissant f_n comme dans l'exercice précédent, montrer que la restriction de f_n à $[-1/2,1/2]$ est un polynôme.

c) Démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass polynomial.

38. *L'algèbre des fonctions continues et 2π-périodiques n'est pas topologiquement monogène*

Soit C l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est dans C, montrer qu'il existe g dans C qui n'est pas limite uniforme d'éléments de $\mathbb{C}[f]$.

39. *Un cas particulier du théorème de Müntz* [8]

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que :
— $\lambda_0 = 0$,
— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n > 0$,
— $\lambda_n \to +\infty$,
— $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\phi_n \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\lambda_n} \end{array}$$

On fixe $m \in \mathbb{N}^*$, et on définit, si $x \in]0,1]$, la suite $\left(Q_n(x)\right)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} Q_0(x) = x^m, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad Q_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \displaystyle\int_x^1 Q_{n-1}(t) t^{-1-\lambda_n} \; \mathrm{d}t \; . \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe, si $n \in \mathbb{N}$, une famille finie $(a_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ de réels telle que :

$$\forall x \in]0,1], \qquad Q_n(x) = x^m - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{\lambda_k}.$$

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$, $R_n(x) = x^m - Q_n(x)$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0,1]$, on a :

$$|R_n(x)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| 1 - \frac{m}{\lambda_k} \right|.$$

8. Le théorème de Müntz (1914) donne une condition nécessaire et suffisante pour que les ϕ_n de l'énoncé engendrent un sous-espace dense de $(C([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$. La preuve proposée ici est due à Golitschek (1983).

En déduire que $(Q_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $]0,1]$.

c) Montrer que le sous-espace de $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ engendré par $(\phi_n)_{n\geq 0}$ est dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

40. (*) *Une variante de Weierstrass*
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et telle que :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Montrer que l'espace :
$$\{P(f),\ P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } P(0) = 0\}$$
est dense dans l'espace des fonctions continues tendant vers 0 en $+\infty$ muni de $\|\ \|_\infty$.

41. *Un énoncé d'approximation à poids*
Soit w une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x^n w(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$
a) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulle hors de $[-T,T], T > 0$. On prolonge la restriction de f/w à $[-T,T]$ en une fonction $2T$-périodique notée g. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

En appliquant le théorème de Weierstrass trigonométrique à g, établir que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions de la forme :
$$x \longmapsto e^{iax}\ w(x), \qquad a \in \mathbb{R}.$$
b) Soient a dans $\mathbb{R}$, m dans $\mathbb{N}$. Pour x dans $\mathbb{R}$ soit :
$$p_{a,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(iax)^k}{k!}.$$
Montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |p_{a,m}(x)| \leq e^{|ax|}.$$
c) On suppose :
$$\forall \alpha > 0, \qquad w(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(e^{-\alpha|x|}\right).$$
Montrer que l'espace des fonctions de la forme $pw, p \in \mathbb{C}[X]$, est dense dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$ pour la norme uniforme sur $\mathbb{R}$.

42. *Approximation de Laguerre*
a) Soit, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f_n(x) = e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}.$$
Montrer que f_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

b) On fixe $\alpha > 0$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, que $x \mapsto e^{-\alpha n x}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de fonctions de la forme $x \mapsto P(x)e^{-\alpha x}$ avec P dans $\mathbb{R}[X]$.

Indication. On utilisera l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left|e^{-\alpha n x} - e^{-\alpha x}P(x)Q(x)\right| \quad &\leq \quad \left|e^{-\alpha n x} - e^{-\alpha n x/2}P(x)\right| \\ &\quad + \left|P(x)e^{-\alpha x/2}\right| \times \left|e^{-\alpha(n-1)x/2} - e^{-\alpha x/2}Q(x)\right|\end{aligned}$$

c) On fixe $\alpha > 0$. Montrer que l'espace des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{-\alpha x}$$

est dense dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ muni de la norme uniforme.

43. *Approximation rationnelle sur* $\mathbb{R}$
Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, soit :

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{(x-a)^2 + b^2} \end{array}.$$

Montrer que toute fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de combinaisons linéaires de $(f_{a,b})$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

Indication. Convoler la fonction f de $C_0(\mathbb{R})$ avec :

$$x \mapsto \frac{n}{1 + n^2 x^2}$$

pour obtenir le résultat.

44. *Vers le théorème de Runge*
Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et, pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & K & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \dfrac{1}{z-a} \end{array}$$

a) Montrer, si a et b sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, que ϕ_b est limite uniforme sur K de polynômes en φ_a.

b) Montrer que si a est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, ϕ_a est limite uniforme sur K de polynômes.

45. *Crashers et théorème de Somorjai*
Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, $E = C([a,b], \mathbb{R})$. On se donne un sous-espace E de $C([a,b], \mathbb{R})$ tel que, pour tout $c \in [a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in E$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$x \leq c - \varepsilon \Rightarrow C(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} \qquad x \geq c + \varepsilon \Rightarrow C(x) \leq \varepsilon.$$

Soient $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et, pour $0 \leq k \leq n$, $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$.

a) Montrer qu'il existe $C_0, \ldots, C_n$ dans E tels que, si $x \in [0,1]$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

$$x \leq x_k - \varepsilon \Rightarrow C_k(x) \geq \frac{C_{k-1}(x)}{\varepsilon}, \qquad x \geq x_{k-1} + \varepsilon \Rightarrow C_k(x) \leq \varepsilon C_{k-1}(x).$$

b) On pose $\Delta = \sum_{k=0}^{n} C_k$. Si $x \in [a,b]$, montrer que

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - x_k| \geq \varepsilon}} \frac{C_k(x)}{\Delta(x)} \leq 2\varepsilon.$$

c) On note $R(E)$ l'ensemble des fonctions de la forme p/q où p et q sont dans E et $q > 0$ sur $[a,b]$. Montrer que $R(E)$ est dense dans $(C[a,b], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$. [9]

46. (***) *Un théorème de Choquet et Deny* [10]
Soit S un segment de $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note V_f le sous-espace de $C(S, \mathbb{R})$ constitué des combinaisons linéaires des fonctions :

$$x \in S \mapsto f(ax+b)$$

avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et b dans $\mathbb{R}$, $\overline{V_f}$ l'ensemble des fonctions de S dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur S d'élément de V_f.
Pour k dans $\mathbb{N}$, soit e_k la fonction :

$$x \in S \mapsto x^k.$$

a) Que dire de V_f si f est un polynôme ?

b) Démontrer par récurrence sur k que pour toute f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et non polynomiale, e_k appartient à $\overline{V_f}$.

c) Montrer que si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et non polynomiale, alors :

$$\overline{V_f} = C(S, \mathbb{R}).$$

d) Étendre c) au cas où f est seulement continue.

3 Démonstrations par approximation

47. (**) *Lemme de Riemann-Lebesgue généralisé*
Soient f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, g une fonction continue par morceaux et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\, g(\lambda t)\, \mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{T} \int_0^T g \times \int_a^b f.$$

9. Théorème de Somorjai, 1976.
10. La généralisation de cet exercice en dimension supérieure découverte par Laurent Schwartz a joué un rôle important dans la genèse de la théorie des distributions.

48. (**) Pour f dans $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, soit :

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(0) & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Montrer que $\tilde{f}$ est dans $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

b) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définie par :

$$f_0=f \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad f_{n+1}=\widetilde{f_n}.$$

Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ vers une fonction à préciser.

49. Soit φ la fonction d'Euler. Si f est une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, prouver :

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\wedge n=1}} f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 f\ .$$

50. a) Si f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose, si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\right)\,\mathrm{d}x_1\dots\,\mathrm{d}x_n.$$

Montrer que $(I_n(f))_{n\geq 1}$ converge vers un réel à préciser[11].

b) Même question avec :

$$J_n(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\,\mathrm{d}x_1\dots\,\mathrm{d}x_n.$$

51. (***) Soit g une fonction continue, positive et d'intégrale 1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$K_n(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)g(x_1)\dots g(x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\,\mathrm{d}x_n.$$

Montrer que $(K_n(f))_{n\geq 1}$ converge vers un réel à préciser.

52. *Itération d'une convolution*

Soient C l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, u dans C à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de moyenne 1. Pour f dans C, on pose :

$$C(f)\ : x\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $C(f)$ est continue et 2π-périodique. b) Soit f dans C. Étudier la convergence uniforme de $(C^k(f))_{k\geq 0}$.

11. Ce résultat et celui de la question suivante se déduisent facilement de la loi forte des grands nombres.

53. *Caractères de $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$*

Soit F une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C(U,\mathbb{C})$, non identiquement nulles et vérifiant :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}(U,\mathbb{C})^2, \qquad F(fg) = F(f) \times F(g).$$

a) Soit $f \in \mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ vérifie $\|f\|_\infty \leq$. Montrer :

$$|F(f)| \leq 1.$$

On pourra observer que $1 - \lambda f$ est inversible dans $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ si $|\lambda| < 1$.

b) Soit e l'identité de U. Montrer que $z = F(e)$ est un complexe de module 1.

c) Montrer que, pour toute f de $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$, on a :

$$F(f) = f(z).$$

54. (**) *Une inégalité intégrale*

On note C l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, concaves, continues, telles que

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \int_0^1 f = 1.$$

Soit par ailleurs F une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans C, on pose

$$I(f) = \int_0^1 F \circ f.$$

a) Si $0 \leq 0 \leq a \leq 1$, soit f_a l'unique élément de C dont les restrictions à $[0,a]$ et $[a,1]$ sont affines. Calculer $I(f_a)$.

b) Montrer que $(f_a)_{a\in[0,1]}$ est une base du sous-espace E de $[0,1]^{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions affines par morceaux f telles que

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Montrer aussi qu'un élément de E est concave si et seulement si ses coefficients dans la base précédente sont ≥ 0.

c) Montrer

$$\sup\{I(f),\ f \in E \cap C\} = \frac{1}{2}\int_0^2 F.$$

d) Montrer finalement

$$\sup\{I(f),\ f \in C\} = \frac{1}{2}\int_0^2 F.$$

e) Si $p \geq 1$, déterminer

$$\sup\left\{\int_0^1 f^p,\ f \in E \cap C\right\}.$$

55. (**) *Critère de Weyl*[12]

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0,1[$. Si f est une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, on dit que f vérifie (W) si et seulement si :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \longrightarrow \int_0^1 f.$$

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) toute fonction en escalier vérifie sur $[0,1]$ vérifie (W),

ii) toute fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ vérifie (W),

iii) toute fonction continue sur $[0,1]$ prenant les mêmes valeurs en 0 et 1 vérifie (W),

iv)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} \longrightarrow 0.$$

On dit alors que (x_n) est *équirépartie modulo 1.*

Indication. On pourra prouver i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i).

b) Déduire de a) que si $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, la suite (x_n) définie par :

$$x_n = n\theta - \lfloor n\theta \rfloor$$

est équirépartie modulo 1.

56. (***) *Le théorème de Kronecker*

Soient $f_1,\ldots,f_p$ des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ une famille $\mathbb{Q}$-libre de nombres réels.

a) Déterminer, en utilisant le théorème de Weierstrass trigonométrique, la limite en $+\infty$ de :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \prod_{i=1}^{p} f_i(\lambda_i x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Démontrer que le sous-groupe de $\mathbb{R}^m$ engendré par $\mathbb{Z}^m$ et la droite ${}^t(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}^m$.

c) Réciproque ?

57. *Un théorème taubérien*

Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels positifs tendant vers $+\infty$, $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que pour tout $t>0$ est définie la somme :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n t}.$$

a) Vérifier que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On suppose désormais qu'il existe α et A dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$S(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{A}{t^\alpha}.$$

12. Résultat fondamental, établi par Weyl en 1916.

b) Si φ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{-ct}, \qquad c > 0,$$

montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi(\lambda_n t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{A \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \varphi(s) \, \mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha) t^{\alpha}}.$$

c) Soient $c > 0$, φ une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tels que, lorsque t tend vers $+\infty$, on ait :

$$\varphi(t) = o(e^{-ct}).$$

Si $\varepsilon > 0$, montrer qu'existe P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad |\varphi(t) - P(e^{-t})| \leq \varepsilon e^{-ct}.$$

En déduire que le résultat de la question précédente s'applique à φ.
d) En déduire finalement un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n.$$

Si tous les a_n égaux à 1, donner un équivalent en $+\infty$ du cardinal $N(\lambda)$ de l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_n \leq \lambda\}.$$

4 Probabilités et approximation uniforme

On trouvera d'autres lien entre les probabilités et l'approximation uniforme dans la feuille Fonctions génératrices.

58. (**) *Polynômes de Bernstein*[13]
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, k dans $\{0,\ldots,n\}$ et x dans $[0,1]$, soit

$$r_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) r_{k,n}(x).$$

On dit que $B_n(f)$ est le n-ième polynôme de Bernstein de f.

a) Soient x dans $[0,1]$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre x. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Vérifier que

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x).$$

13. Dans son travail de 1912, Bernstein utilise explicitement les probabilités, comme ci-dessous.

b) Soit $\delta > 0$, $\omega_f(\delta)$ le module de continuité uniforme de f relatif à δ. Montrer, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\,\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) + \omega_f(\delta).$$

c) Montrer que $(B_n(f))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

59. (**) *Polynômes de Bernstein d'une fonction croissante*

a) Soient p et p' des nombres réels tels que $0 \leq p' \leq p \leq 1$. Montrer que l'on peut trouver deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre respectifs p et p' telles que $X \leq X'$.

b) Soit f une fonction continue et croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $B_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$.

60. *Polynômes de Bernstein d'une fonction convexe*

Soit f une fonction convexe continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \qquad B_n(f)(x) \geq f(x).$$

Indication. La fonction f est l'enveloppe supérieure des fonctions affines qu'elle majore.

61. *Polynômes de Bernstein d'une fonction lipschitzienne*

a) Soit f une fonction C- lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$:

$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \leq C\sqrt{E\left((\frac{S_n}{n} - x)^2\right)}.$$

Calculer le majorant et en déduire

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{C}{2\sqrt{n}}.$$

b) Supposons f définie par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

Estimer $B_nf(1/2)$ de manière à montrer que le facteur $1/\sqrt{n}$ de a) est optimal.

c) Donner une version hölderienne de a).

62. *Polynômes de Bernstein d'une fonction de classe C^2*

Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $[0,1]$, montrer

$$n\left(B_nf(x) - f(x)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x(1-x)f''(x)}{2}.$$

Indication. Intervertir, avec justification, le reste intégral et l'espérance.

63. (***) *Polynômes de Bernstein et urne de Polya*[14]

Une urne contient initialement r boules rouges et v boules vertes. On y effectue des tirages selon le processus suivant : à chaque étape, on remet la boule tirée dans l'urne, et on y ajoute une boule de la même couleur. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges ajoutées dans l'urne après la n-ième remise avec ajout et

$$W_n = \frac{X_n}{n}.$$

Ainsi, W_n est la proportion des boules rouges parmi les boules ajoutées dans l'urne après n ajouts.

a) Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, montrer :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\int_0^1 x^{k+r-1}\,(1-x)^{n-k+v-1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{v-1}\,\mathrm{d}x}.$$

b) Si f est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, montrer :

$$E\left(f\left(W_n\right)\right) = \frac{\int_0^1 B_n f(x)\, x^{r-1}\,(1-x)^{v-1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{v-1}\,\mathrm{d}x}.$$

Qu'en déduit-on lorsque n tend vers $+\infty$?

c) Soient a et b des éléments de $[0,1]$ tels que $a < b$. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$P\left(W_n \in [a,b]\right).$$

64. *Un théorème d'approximation*

Soit f une fonction uniformément continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^+$, soit

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx}\,\frac{(nx)^k}{k!}.$$

a) Soient x dans $\mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre x. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Vérifier

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = P_n(f)(x).$$

b) Montrer que $(P_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que l'espace des fonctions de la forme

$$x \longmapsto P(x)e^{-x}$$

est dense dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ pour la norme de convergence uniforme.

14. Théorème de Polya-Eggenberger, 1923.