MP*1

Problème

Invariants de similitude d'un endomorphisme

Dans tout ce problème, $\mathbf{K}$ est un corps, n un élément de $\mathbf{N}^*$, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E de polynôme minimal π_u et de polynôme caractéristique χ_u. On note d_u le degré de π_u. Si V est un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|V}$ l'induit de u sur V.

Si P est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbf{K}[X]$, on appelle *matrice compagnon de P* et on note $C(P)$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

On pourra utiliser sans démonstration la relation $\chi_{C(P)} = P$.

Le but de ce problème est de démontrer un théorème résolvant le problème de la réduction des endomorphismes et d'appliquer ce résultat à l'étude du commutant de u [1].

I. Polynôme minimal ponctuel

Pour x dans $E \setminus \{0\}$, soient :

$$I_{u,x} = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(u)(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad V_{u,x} = \{P(u)(x),\ P \in \mathbf{K}[X]\}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire non constant $\pi_{u,x}$ de $\mathbf{K}[X]$ tel que $I_{u,x}$ soit l'ensemble des multiples de $\pi_{u,x}$ dans $\mathbf{K}[X]$. Comparer, pour la relation de divisibilité, les polynômes π_u et $\pi_{u,x}$.

On notera désormais $d_{u,x}$ le degré de $\pi_{u,x}$.

2. Montrer que $V_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u dont $\left(u^i(x)\right)_{0\le i\le d_{u,x}-1}$ est une base.

3. On se propose de montrer que l'ensemble $\{x \in E,\ \pi_{u,x} = \pi_u\}$ n'est pas vide.

a) Traiter le cas où π_u est de la forme P^α où P est un polynôme irréductible unitaire de $\mathbf{K}[X]$ et α un élément de $\mathbf{N}^*$.

b) Traiter le cas général.

1. Ces résultats ont été en substance découverts par Frobenius à la fin du dix-neuvième siècle.

II. Endomorphismes cycliques

On dit que u est *cyclique* s'il existe x dans $E \setminus \{0\}$ tel que $V_{u,x} = E$.

4. Montrer que u est cyclique si et seulement s'il existe une base e de E et un polynôme unitaire P de degré n de $\mathbf{K}[X]$ tel que $Mat_e(u) = C(P)$.

5. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est cyclique,

ii) $\pi_u = \chi_u$,

iii) π_u est de degré n.

6. a) A quelle condition un endomorphisme diagonalisable de E est-il cyclique ?

b) A quelle condition un endomorphisme nilpotent de E est-il cyclique ?

III. Dualité

7. a) Si V est un sous-espace de E, il est clair que :

$$V^{\perp} = \{\mu \in E^*,\ \forall x \in V,\ \mu(x) = 0\}$$

est un sous-espace [2] de E^*. Calculer la dimension de $V^{\perp}$ en fonction de n et de la dimension de V.

b) Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ une base de E^*. Vérifier que l'application φ de E dans $\mathbf{K}^n$ définie par

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x) = (\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire l'existence d'une base de E dont $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est la duale.

c) Si W est un sous-espace de E^*, il est clair que

$$W^o = \{x \in E\ ;\ \forall \mu \in W,\ \mu(x) = 0\}$$

est un sous-espace [3] de E. Calculer la dimension de W^o en fonction de n et de la dimension de W.

d) Montrer que les applications

$$V \longmapsto V^{\perp} \qquad W \longmapsto W^o$$

définies respectivement sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E et sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E^* sont deux bijections réciproques.

8. Soit :

$$\begin{array}{cccc} {}^t u : & E^* & \to & E^* \\ & \lambda & \mapsto & \lambda \circ u \end{array}.$$

Vérifier que ${}^t u$ est un endomorphisme de E^*. Si V est un sous-espace de E, montrer que V est stable par u si et seulement si $V^{\perp}$ est stable par ${}^t u$.

2. On dit que $V^{\perp}$ est l'orthogonal de V dans E^* au sens de la dualité.
3. On dit que W^o est l'orthogonal de W dans E au sens de la dualité.

IV. Invariants d'un endomorphisme

9. Soit x dans $E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$ (il découle immédiatement de la question 3 qu'un tel x existe). On se propose de construire un supplémentaire de $V_{u,x}$ dans E stable par u.

a) Vérifier qu'il existe μ dans E^* telle que :

$$\forall i \in \{0, \cdots, d_u - 1\}, \qquad \mu\left(u^i(x)\right) = \delta_{i,\, d_u - 1}.$$

b) Justifier que $\{P(t_u)(\mu),\ P \in \mathbf{K}[X]\}$ est un sous-espace de E^* stable par t_u ; calculer sa dimension.

c) Conclure.

10. a) Montrer que l'on peut trouver r dans $\mathbf{N}^*$, des vecteurs $x_1, \cdots, x_r$ dans $E \setminus \{0\}$, des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ unitaires et non constants $P_1, \cdots, P_r$ tels que :

i) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{u,x_i}$,

ii) Si $1 \leq i \leq r$, $\pi_{u_{|V_{u,\, x_i}}} = P_i$,

iii) si $1 \leq i \leq r-1$, $P_{i+1} \mid P_i$.

b) D'après les questions 2 et 10.a), on obtient en juxtaposant les familles

$$\left(u^j(x_i)\right)_{0 \leq j \leq d_{u,\, x_i} - 1}$$

pour i dans $\{1, \cdots, r\}$ une base de E. Déterminer la matrice de u dans cette base et exprimer χ_u en fonction de $P_1, \cdots, P_r$.

11. On se propose de montrer que r et les P_i sont déterminés de façon unique par u. A cet effet, on suppose qu'il existe s dans $\mathbf{N}^*$, des polynômes $Q_1, \cdots, Q_s$ unitaires de $\mathbf{K}[X]$ non constants, des vecteurs $y_1, \cdots, y_s$ dans $E \setminus \{0\}$ tels que :

i) $E = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{u,y_i}$,

ii) Si $1 \leq i \leq s$, $\pi_{u_{|V_{u,\, y_i}}} = Q_i$,

iii) si $1 \leq i \leq s-1$, $Q_{i+1} \mid Q_i$.

On veut établir que $s = r$ et que $P_i = Q_i$ pour $i \in \{1, \cdots, r\}$.

a) Montrer que $P_1 = Q_1$.

b) On suppose qu'il existe $j \in \{2, \cdots, \min(r,s)\}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, j-1\}, \qquad P_i = Q_i.$$

Montrer, en considérant $P_j(u)(E)$, que $Q_j \mid P_j$.

c) Conclure [4].

12. Quel résultat déduit-on des questions 10 et 11 si l'endomorphisme u est nilpotent ?

---

4. On appelle les polynômes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ les *invariants de similitude de u*.

V. Invariants d'une matrice carrée

13.a) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Montrer qu'il existe r dans $\mathbf{N}^*$ et des polynômes $(P_i)_{1\leq i\leq r}$ unitaires non constants de $\mathbf{K}[X]$ tels que :

i) M est semblable à $\begin{pmatrix} C(P_1) & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\ \bigcirc & C(P_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bigcirc \\ \bigcirc & \cdots & \bigcirc & C(P_r) \end{pmatrix}$,

ii) si $1 \leq i \leq r-1$, $P_{i+1} \mid P_i$.

Montrer en outre que r et les P_i pour $1 \leq i \leq r$ sont uniquement déterminés par M. Ces polynômes sont appelés *invariants de similitude de* M.

Des résultats de cette question il découle que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables si et seulement si elles ont même invariants de similitude [5].

b) Quels sont les invariants de similitude d'une matrice diagonalisable ?

14. Montrer que, si P est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbf{K}[X]$, l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ \chi_M = P\}$$

est une réunion finie de classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

15. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à sa transposée.

VI. Commutant et bicommutant d'un endomorphisme

A. On note

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est manifestement une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant $K[u]$, que l'on se propose de déterminer précisément. On définit $r, x_1, \cdots, x_r, P_1, \cdots, P_r$ comme dans la question 10. Si $1 \leq i \leq r$, on note n_i le degré de P_i.

16. a) Soit v dans $\mathcal{C}(u)$. Montrer, si $1 \leq j \leq r$, que $v(x_j)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{r} P_{i,j}(u)(x_i)$$

où les $P_{i,j}$ sont dans $\mathbf{K}[X]$ et vérifient :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2, \qquad P_i \mid P_j P_{i,j}.$$

b) Inversement, soit $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ une famille de polynômes de $\mathbf{K}[X]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2, \qquad P_i \mid P_j P_{i,j}.$$

5. On obtient en particulier, l'*inertie de la similitude* : soient $\mathbf{F}$ un sous-corps de $\mathbf{K}$, M et M' dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$. Alors si M et M' sont semblables sur $\mathbf{K}$, elles le sont sur $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{F}$ est infini, on peut donner une preuve plus directe de ce résultat.

Montrer qu'il existe un unique élément v de $\mathcal{C}(u)$ tel que :

$$\forall j \in \{1, \cdots, r\}, \qquad v(x_j) = \sum_{i=1}^{r} P_{i,j}(u)(x_i).$$

17. a) Si $(i, j) \in \{1, \cdots, r\}^2$, soit :

$$E_{i,j} = \{P(u)(x_i),\ P \in \mathbf{K}[X] \text{ tel que } P_i \mid P_j P\}.$$

Calculer la dimension de $E_{i,j}$.

b) En déduire :

$$\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{j=1}^{r} (2j-1) n_j.$$

18. a) Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$ et caractériser le cas d'égalité.

b) Quels sont les u de $\mathcal{L}(E)$ tels que $\mathcal{C}(u) = \mathbf{K}[u]$?

B. Soit $\mathcal{C}'(u)$ le bicommutant de u c'est-à-dire l'ensemble des v de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent à tous les éléments de $\mathcal{C}(u)$.

19. Il est clair que $\mathcal{C}'(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbf{K}[u]$, et on se propose de prouver que $\mathcal{C}'(u) = \mathbf{K}[u]$.

a) Si $1 \leq i \leq r$, montrer qu'il existe ε_i dans $\mathcal{C}(u)$ tel que :

$$\forall j \in \{1, \cdots, r\}, \qquad \varepsilon_i(x_j) = \delta_{j,1} x_i.$$

b) Conclure.

20. Quels sont les u de $\mathcal{L}(E)$ tels que l'algèbre $\mathcal{C}(u)$ soit commutative ?