DM 25

concours CCP 1998

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectifs

Soit une application linéaire U d'un espace vectoriel euclidien E dans un espace vectoriel euclidien F. A partir d'une résolution généralisée de l'équation $Ux = y$ où y est donné dans F, on se propose d'associer à U une application linéaire V de F dans E possédant certaines propriétés de l'inverse d'une application linéaire.

Lorsque U est injective mais non surjective, le remplacement de y par sa projection orthogonale sur l'image de U conduit à la définition de l'inverse à gauche de U ; son étude est faite dans la première partie.

Lorsque U est surjective, mais non injective, on distingue dans l'infinité de solutions de $Ux = y$, celle de norme minimum, ce qui conduit à la définition d'une inverse à droite de U ; son étude est faite dans la deuxième partie.

La troisième partie est consacrée au cas général.

Les espaces vectoriels euclidiens E et F sont les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement munis de leurs bases canoniques, de leurs produits scalaires canoniques notés $(.|.)_E$ et $(.|.)_F$ et des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ induites par ceux-ci. On identifiera applications linéaires et matrices associées, vecteurs et matrices colonnes. Si A est une matrice, ${}^tA$ désigne sa transposée. L'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}$. Grâce à l'identification faite, cette relation désignera donc ainsi l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Ainsi, désormais, on utilisera indifféremment les termes de matrice et d'application linéaire. On rappelle que, sous les conditions d'identifications précédentes, le produit scalaire $(Ax|y)_F$ s'écrit sous forme matricielle ${}^ty\,Ax$ ou ${}^tx\,{}^tAy$ où ${}^ty$ et ${}^tx$ désignent respectivement les transposées des colonnes x et y de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. L'orthogonal d'un sous espace E' de E est noté $E'^{\perp}$. On rappelle alors que $E' \oplus E'^{\perp} = E$ et cette somme directe est dite orthogonale. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_{n,n}$.

PARTIE I - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A GAUCHE POUR A

Dans cette première partie, la matrice A, élément de $\mathcal{M}_{m,n}$, est supposée de rang n. On désigne par P le projecteur orthogonal dans $F = \mathbb{R}^m$ sur le sous espace $\operatorname{Im} A$. On suppose $m > n$ sauf dans la question 3°b).

1. Propriété d'inversibilité et de transposition

a) Montrer que si b est un vecteur de $\operatorname{Im} A$, l'équation $Ax = b$ admet une solution unique.

b) Montrer que l'endomorphisme ${}^tAA$ est symétrique et inversible. On désigne son inverse par $({}^tAA)^{-1}$

c) Pour un élément quelconque M de $\mathcal{M}_{m,n}$, comparer $\ker {}^tM$ et $(\operatorname{Im} M)^\perp$, $(\ker M)^\perp$ et $\operatorname{Im} {}^tM$.

2. Détermination d'une inverse à gauche de A

a) Soit y un élément de F. Prouver qu'il existe un vecteur unique x appartenant à E vérifiant $Ax = Py$ et que l'application $y \mapsto x$ ainsi définie de F dans E est linéaire (cette application linéaire est notée $A^{(g)}$).

b) Prouver que le vecteur x précédent est caractérisé par ${}^tAAx = {}^tAy$ et en déduire une expression de $A^{(g)}$ à l'aide de A et de ${}^tA$.

c) Déduire également de ce qui précède une expression du projecteur P à l'aide de A et de ${}^tA$.

3. Propriétés de $A^{(g)}$. Unicité

a) Prouver que $A^{(g)}A = I_n$ et déterminer le rang de $A^{(g)}$.

b) Déterminer $A^{(g)}$ lorsque $m = n$.

c) Soit B un élément de $\mathcal{M}_{n,m}$, tel que $BA = I_n$ et tel que AB soit un projecteur orthogonal. Prouver que B annule tout vecteur de $(\operatorname{Im} A)^\perp$. En déduire que, pour tout $y \in F$, $By = A^{(g)}y$. Exprimer la propriété d'unicité ainsi mise en évidence.

4. Exemples

a) On suppose que les vecteurs colonnes a_i de A sont orthogonaux deux à deux dans F. Montrer que $A^{(g)}$ s'exprime simplement à l'aide des lignes ${}^ta_i$ et des normes $\|a_i\|$. Peut-on avoir $A^{(g)} = {}^tA$?

b) Soit un vecteur b, élément non nul de F, cet élément représente l'application linéaire qui à s élément de $\mathbb{R}$ associe $sb \in \mathbb{R}^m$. Déterminer $b^{(g)}$ et exprimer la forme linéaire correspondante sur F au moyen du produit scalaire dans F.

5. Description d'une méthode de détermination de $A^{(g)}$.

On se propose, pour le calcul de $A^{(g)}$, de mettre en oeuvre une méthode itérative ne faisant pas appel à des inversions de matrices.

a) Soient F_0 et F_1 deux sous espaces vectoriels de F tels que $F_1 = F_0 + \mathrm{Vect}\{\delta\}$ où $\mathrm{Vect}\{\delta\}$ est le sous espace vectoriel engendré par un vecteur δ donné dans F_1 et n'appartenant pas à F_0. On pose $\delta = d + d'$ où d' est la projection orthogonale de δ sur F_0. On désigne par P_0 et par P_1 les projecteurs orthogonaux de F respectivement sur F_0 et sur F_1. Prouver que, pour tout vecteur y de F, on a : $P_1 y = P_0 y + \beta (d \mid y)_F\, d$, où β est un scalaire que l'on déterminera à l'aide de d.

b) On suppose toujours que A est de rang n et que $m > n$. On note $A_k\ (1 \le k \le n)$ la matrice élément de $\mathcal{M}_{m,k}$ dont les colonnes sont les k premières colonnes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de A. A l'aide de ce qui précède, déterminer un vecteur d_k de F tel que pour $k \ge 2$, on ait :

$$(1) \qquad A_k A_k^{(g)} = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k d_{k-1}^{(g)}.$$

Exprimer d_k à l'aide de $I_m - A_{k-1} A_{k-1}^{(g)}$ et de a_k.

Pour k entier donné $(1 \le k \le n)$ on écrit $A_k^{(g)}$ sous la forme $A_k^{(g)} = \begin{bmatrix} C_k \\ {}^t\gamma_k \end{bmatrix}$ où C_k est une matrice de $\mathcal{M}_{k-1,m}$ et γ_k une matrice colonne à m éléments.

c) Ecrire à l'aide des blocs C_k, γ_k, A_{k-1} et a_k la relation $A_k^{(g)} A_k = I_k$. En utilisant le fait que γ_k est un élément de $\mathrm{Im}\, A_k$, déduire en particulier des relations ainsi obtenues, que $\gamma_k = \dfrac{d_k}{\|d_k\|^2}$.

d) A l'aide de la relation (1), déterminer C_k à l'aide de $A_{k-1}^{(g)}$, de d_k et de a_k. Montrer enfin que $C_k = A_{k-1}^{(g)} \left[I_m - a_k d_k^{(g)} \right]$.

PARTIE II - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A DROITE POUR A

Dans cette partie, sauf dans la question 2.c), $n > m$ et A est supposée de rang m. Parmi l'infinité de solutions de l'équation $Ax = y$, où y est un vecteur donné de F, on choisit la solution $\bar{x}$ de norme minimum dans E. On définit ainsi une application $y \mapsto \bar{x}$ de F dans E.

1. Détermination d'une inverse à droite

a) Soit y un élément fixé dans F. Montrer qu'il existe un vecteur unique noté $\bar{x}$ dans $(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$ vérifiant $A\bar{x} = y$. Prouver que $\bar{x}$ est l'élément de E qui a la norme minimum parmi toutes les solutions x de $Ax = y$.

b) Prouver que l'application $y \mapsto \bar{x}$ ainsi définie est linéaire. Cette application linéaire est notée $A^{(d)}$. Prouver que $AA^{(d)} = I_m$.

2. Propriétés de $A^{(d)}$.

a) Déterminer le rang de $A^{(d)}$.

b) Prouver que $A^{(d)} A$ est un projecteur orthogonal dans E dont on donnera l'image.

c) Déterminer $A^{(d)}$ lorsque $m = n$.

d) Montrer que ${}^t\left(A^{(d)}\right) {}^tA = I_m$ et que ${}^tA\, {}^t(A^{(d)})$ est un projecteur orthogonal ; en déduire une expression de $A^{(d)}$ à l'aide de A et de ${}^tA$.

PARTIE III - GENERALISATION

Dans cette partie, on considère une application linéaire (ou une matrice) notée V de E dans F et dont le rang r vérifie $r \le \text{Inf}(n,m)$. On se propose de généraliser les notions de matrice inverse définies précédemment. On désigne par P le projecteur orthogonal dans F sur Im V et par Q le projecteur orthogonal dans E sur $(\text{Ker}V)^{\perp}$.

1. a) Montrer que la restriction de V à $(\text{Ker}V)^{\perp}$ induit un isomorphisme R sur un sous espace de F que l'on définira. On note R^{-1} l'inverse de cet isomorphisme.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire W de F dans E possédant les propriétés suivantes :

$\text{Ker}W = (\text{Im}V)^{\perp}$
$\text{Im}W = (\text{Ker}V)^{\perp}$
$WV = Q$ et $VW = P$

c) Montrer que l'application linéaire W est la seule qui possède les 3 propriétés :

$WV = Q$
$VW = P$
$WVW = W$

d) Prouver que si $r = n$ alors $W = V^{(g)}$ et que si $r = m$ alors $W = V^{(d)}$.

Dans ce qui suit, W est notée V^+, qui est appelée pseudo inverse de V.

2. **Propriétés**

Etablir que $\left(V^+\right)^+ = V$

Etablir que $\left({}^tV\right)^+ = {}^t\left(V^+\right)$

PARTIE IV - APPLICATION ALGORITHMIQUE

Etant donné une fonction réelle f définie sur l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, un réel $\varepsilon > 0$, m points distincts t_i, $i = 1,2,\dots,m$, de cet intervalle, on souhaite construire une approximation polynomiale de f au sens suivant :

Trouver le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ et $(p+1)$ réels $x_k, k = 0,1,\dots,p$, tels que l'on ait : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(f(t_i) - \sum_{k=0}^{p} x_k t_i^k\right)^2 \le \varepsilon$.

1. Etablir que le problème possède une solution, qui vérifie en outre l'inégalité $p \le m$.

2. A l'aide des résultats obtenus dans les questions précédentes, proposer un algorithme dont la $p-ième$ itération conduise au résultat cherché.