

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Équations de Bernoulli et de Ricatti

1. Une équation différentielle est dite de Bernoulli lorsqu'elle est de la forme

$$(B) \quad a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = 0$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On rencontre fréquemment ce type d'équation différentielle en sciences physiques, en biologie (dynamique des populations), en géologie, en économie, en chimie, etc.

L'objet de cette question est de proposer, sur l'exemple de la propagation d'une rumeur, trois méthodes indépendantes qui permettent de déterminer les solutions (qui ne s'annulent pas) d'une équation de Bernoulli.

On modélise la manière dont une rumeur se répand en considérant que sa vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la proportion $y(t) \in]0; 1[$ d'individus qui sont au courant de la rumeur à l'instant t par la fraction de ceux qui, au contraire, ne le sont pas. Ainsi, sous l'hypothèse que la fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0; 1[$ est dérivable, il existe $k > 0$ telle que y satisfait l'équation différentielle, dite équation de la rumeur, suivante :

$$(R) \quad y' = ky(1 - y).$$

- a) $\alpha]$ Résoudre (R) en utilisant le changement d'inconnue $z = 1/y$.
 $\beta]$ Résoudre (R) en utilisant une décomposition en éléments simples.
 $\gamma]$ Résoudre (R) en appliquant la méthode de variation de la constante à l'équation $y' - ky = f$ où $f = -ky^2$.
b) Une petite ville compte 1000 habitants. À huit heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville est au courant. À quelle heure 90 % de la population saura ?

2. Une équation différentielle est dite de Ricatti lorsqu'elle est de la forme

$$(R) \quad a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = d(t)$$

où a, b, c, d sont quatre fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . On notera, en particulier, que l'équation sans second membre associée à une équation de Ricatti est une équation de Bernoulli.

L'objet de cette question est de montrer, sur un exemple, comment on peut ramener l'étude d'une équation de Ricatti à celle d'une équation de Bernoulli.

- a) Déterminer une équation de Ricatti (T) satisfaite par la fonction \tan .
b) $\alpha]$ On suppose connue une solution particulière y_p de (R) . Quel est l'effet sur (R) du changement d'inconnue $z = y - y_p$.
Résoudre (T) . On admettra que deux solutions distinctes de (T) ne s'intersectent pas ; on ne s'occupera pas de l'ensemble de définition des solutions et on exprimera les solutions sous forme d'une fraction ne faisant intervenir que la fonction \tan et une constante λ qui décrit $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
 $\beta]$ Reprendre la résolution de (T) en posant $z = \arctan(y)$ et comparer les résultats.