

Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

1. Paris.★ Soient Ω un ensemble, H un ensemble de parties de Ω . Si S est une partie de Ω , on pose $\pi_H(S) = \{S \cap x ; x \in H\}$. On dit que S est saturée lorsque $\pi_H(S) = \mathcal{P}(S)$. On suppose que $d = \max_{S \text{ saturée}} |S|$ existe et est fini. Montrer que pour tout S , $|\pi_H(S)| \leq \sum_{i=0}^d \binom{|S|}{i}$.

2. Lyon.★ Soient n dans \mathbb{N}^* , G un groupe fini de cardinal $2n$. Montrer que le nombre de sous-groupes de G de cardinal n est différent de 2.

3. Cachan, Rennes.★ a) Soit (G, \cdot) un groupe fini. On suppose qu'il existe $\varphi : G \rightarrow G$ automorphisme involutif admettant un unique point fixe. Montrer que G est de cardinal impair, qu'il est commutatif et que φ est l'application $x \mapsto x^{-1}$. *Ind.* Considérer les éléments du type $\varphi(x)x^{-1}$.

b) Exhiber un groupe non commutatif (G, \cdot) possédant un automorphisme involutif qui n'a qu'un seul point fixe.

4. Cachan, Rennes.★ Soient G un groupe fini d'élément neutre e et Φ un automorphisme involutif qui n'a que e comme point fixe. Montrer que G est abélien. Réciproquement, si G est un groupe abélien fini et Φ un automorphisme involutif différent de l'identité, Φ peut-il avoir un point fixe différent de e ?

5. Cachan, Rennes.★ Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que $\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

6.★ On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles H_n est entier.

b) On note A_3 l'ensemble des fractions irréductibles p/q telles que q soit premier avec 3. Montrer que A_3 est un sous-anneau de \mathbb{Q} .

c) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et s la surjection canonique de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}/3^k\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique prolongement de s à A_3 qui soit un morphisme de groupes.

d) Soit $m \in \{1, 2\}$. On suppose que $H_{3n+m} \in A_3$. Montrer que $H_n \in 3A_3$.

7. Lyon. ★ Pour $n \geq 1$, on note d_n le nombre de diviseurs strictement positifs de n .

a) Montrer que $\left(\sum_{k|n} d_k\right)^2 = \sum_{k|n} d_k^3$.

b) Trouver les fonctions f de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* vérifiant :

(1) $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{pgcd}(m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k|n} f(k)\right)^2 = \sum_{k|n} f(k)^3$.

c) Soit f une fonction de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R} telle que :

(1) $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{pgcd}(m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k|n} f(k)\right)^2 = \sum_{k|n} f(k)^3$.

Montrer que f est à valeurs dans \mathbb{Z} .

8. ★ Soient z_0, \dots, z_n des complexes distincts. On suppose que, pour tout polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $P(z_0) = \frac{P(z_1) + \dots + P(z_n)}{n}$. Montrer que z_0 est le centre d'un polygone régulier de sommets z_1, \dots, z_n .

9. Lyon. ★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.

a) Montrer que l'on peut écrire $P = P_1 + P_2$, avec P_i de degré n et de racines complexes de module inférieur ou égal à 1.

b) Montrer que l'on peut écrire $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, avec P_i de degré n et de racines complexes de module 1. Ind. On pourra utiliser l'application $z \rightarrow \frac{z-u}{1-z\bar{u}}$, lorsque $|u| \leq 1$.

10. Paris. ★ Pour P dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, soit $n(P)$ le nombre de racines distinctes de P . Soient A, B, C trois éléments de $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A + B + C = 0$. Montrer que $n(ABC) \geq 1 + \max\{\deg(A), \deg(B), \deg(C)\}$.

11. Paris. ★ Soient n et m deux entiers naturels non nuls tels que $n > m$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. On note $K = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$. Montrer que le système linéaire $AX = 0$ possède une solution dont

tous les coefficients sont entiers et majorés en valeur absolue par $(nK)^{m/(n-m)}$.

12. Paris. ★ a) Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai dans $\mathcal{M}_n(A)$ pour n'importe quel anneau commutatif A .

b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On note $d = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Montrer qu'il existe des polynômes P_0, \dots, P_{d-1} de $\mathbb{C}[X]$ tels que $B^d = \sum_{k=0}^{d-1} P_k(A)B^k$.

13. Lyon. ★ Soit \mathcal{P} un polygone convexe du plan, d'aire a et de périmètre p . Montrer que \mathcal{P} inclut un disque de rayon a/p . Dans le cas où \mathcal{P} est un triangle, quel est le rayon maximal pour un disque inclus dans \mathcal{P} ?

14. Lyon. ★ Soient S la sphère unité de \mathbb{R}^3 canoniquement euclidien et $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha = 2$ si et seulement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in S^{3n}, \exists x \in S$,

$$\sum_{k=1}^n \|x - a_k\|^\alpha = \sum_{k=1}^n \|x - b_k\|^\alpha = \sum_{k=1}^n \|x - c_k\|^\alpha.$$

15. ★ Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ la liste ordonnée de ses valeurs propres.

a) On note G_p l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension p . On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et l'on note S sa sphère unité. Montrer que $\lambda_p = \min_{V \in G_p} \max_{X \in S \cap V} \langle AX, X \rangle$.

b) Montrer que $A \mapsto \lambda_p(A)$ est 1-lipschitzienne.

c) Soit aussi $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour $i+j \leq n+1$, $\lambda_{i+j-1}(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$.

16. ★ Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et E l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n |z_k|^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^n a_k |z_k|^2 = 1$.

Montrer que E est connexe par arcs.

17. ★ Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace \mathbb{R}^d d'une norme N . Si B est une boule ouverte de \mathbb{R}^d et $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$, on note γB la boule ouverte de \mathbb{R}^d de même centre que B et de rayon γR où R est le rayon de B .

a) Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille finie de boules ouvertes de \mathbb{R}^d . Établir l'existence de $J \subset I$ telle que : $\forall (i, j) \in J^2, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$; $\bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{j \in J} 3B_j$.

b) Soient $c > 1$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de boules de \mathbb{R}^d dont l'ensemble des rayons est majoré. Établir l'existence de $J \subset \mathbb{N}^*$ telle que : $\forall (i, j) \in J^2, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$; $\bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{j \in J} (2c+1)B_j$.

18. Paris. ★ On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles sommables et ℓ^∞ celui des suites réelles bornées. On munit ces espaces vectoriels, respectivement, de la norme $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$. Si $b \in \ell^\infty$, on pose, pour $u \in \ell^1$, $\phi_b(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n b_n$.

a) Montrer que ϕ_b est continue.

b) Montrer que $b \mapsto \phi_b$ réalise une bijection entre ℓ^∞ et $(\ell^1)'$, et qu'elle est continue lorsque l'ensemble $(\ell^1)'$ des formes linéaires continues sur ℓ^1 est muni de la norme subordonnée à la norme $\| \cdot \|_1$, et qu'elle est bijective.

c) Soient $(a_k) \in (\ell^1)^\mathbb{N}$ et $a \in \ell^1$. On suppose que, pour tout $\phi \in (\ell^1)'$, $\phi(a_k) \rightarrow \phi(a)$. Montrer que $a_k \rightarrow a$.

19. Paris. ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe \mathcal{C}^1 , croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et de dérivée bornée. On pose $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note b_n la solution de $F(x) = n$. On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}$. Montrer que $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

20. Lyon. ★ Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes de module 1. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+n}} z_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. *Ind.* Étant donnée une extraction φ et un nombre complexe ℓ tels que $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} z_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, examiner, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, la suite de terme général $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} \left| \sum_{i=0}^{N-1} (z_{k+i} - \ell) \right|^2$.

21. Cachan, Rennes. ★ Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de carré sommable et $v \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n = 1$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Que dire de u et v ?

22. ★ Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $g \circ g = \text{id}$ et $g \neq \text{id}$. Établir l'existence d'un homéomorphisme $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $s \circ g \circ s^{-1} = -\text{id}$.

23. Paris. ★ Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x + g(x)$ soit strictement monotone. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. On suppose que la fonction $t \mapsto u(t) + \int_{t-1}^t g(u(s))ds$ est constante sur $[1, +\infty[$. Montrer que u admet une limite en $+\infty$. *Ind.* On commencera par prouver que u est de classe \mathcal{C}^1 et que $(u')^2$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

24. ★ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

25. Paris. ★ a) Soit X un espace métrique. Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(r_i)_{i \in I}$ deux familles finies d'éléments de X et \mathbb{R}^{+*} , respectivement. Montrer qu'il existe une partie finie J de I telle que les boules $B_o(x_j, r_j)$, pour j dans J , soient deux à deux disjointes, et

$$\bigcup_{i \in I} B_o(x_i, r_i) \subset \bigcup_{j \in J} B_o(x_j, 3r_j).$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. On pose :

$Mf : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sup_{r>0} \frac{1}{V(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, où $V(B(x, r))$ désigne le volume de la boule fermée $B(x, r)$. Montrer que pour tout réel $a > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d, Mf(x) > a\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^d .

c) Montrer qu'il existe une constante $C_d > 0$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable et pour tout $\lambda > 0 : V((Mf)^{-1}([\lambda, +\infty])) \leq \frac{C_d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f$.

26. *Paris.* ★ Soient $Y_0 \in \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R}^+)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} : x \mapsto 2 \int_0^x \sqrt{Y_n(t)} dt$. Étudier la suite de fonctions (Y_n) .

27. *Cachan, Rennes.* ★ On pose $A = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n\}$.
a) Montrer que A est une algèbre.

b) Montrer que, si $f \in A$, f est développable en série entière autour de 0 sur \mathbb{R} .

c) On pose $B = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n\}$. Soit $f \in B$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $g \in A$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(a) = (x - a)g(x)$.

d) Trouver tous les morphismes d'algèbres de A dans \mathbb{R} .

28. ★ On note $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. On considère le système différentiel $(S) : \begin{cases} yy'' - (y')^2 + (x')^2 = 0 \\ x''y - 2x'y' = 0. \end{cases}$ On admet que pour tout quadruplet $(x_0, y_0, x'_0, y'_0) \in H \times \mathbb{R}^2$, il existe un réel $\epsilon > 0$ et une solution (x, y) de (S) de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\epsilon, \epsilon[$ telle que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x'(0) = x'_0$ et $y'(0) = y'_0$. Montrer que le système considéré possède une solution de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans H .

29. ★ On dit qu'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^p et à valeurs réelles est harmonique lorsque son laplacien est nul. On admet que, si une telle fonction est nulle sur la sphère unité S , elle est identiquement nulle.

a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_p]$, il existe un unique polynôme harmonique Q , avec $\deg Q < \deg P$, tel que $Q|_S = P|_S$.

b) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_p]$ homogène de degré d'homogénéité p , il existe un unique couple (Q, R) de polynômes homogènes, avec $\deg Q = p - 2$, $\deg R = p$, R harmonique et $P = \|X\|^2 Q + R$.

c) Montrer le résultat admis.

30. *Lyon.* ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et a dans \mathbb{R}^n . On note $D^+f(a)$ (resp. $D^-f(a)$) l'ensemble des $dg(a)$ où g est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) et $f(a) = g(a)$.

a) Montrer que f est différentiable en a si et seulement si $D^+f(a)$ et $D^-f(a)$ sont non vides.

b) On suppose f différentiable en a . Déterminer $D^+f(a)$ et $D^-f(a)$.

31. *Paris.* ★ Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et A_1, \dots, A_n des événements. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on note C_k l'événement « appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i ».

Montrer que $\prod_{k=1}^n P(C_k) \leq \prod_{k=1}^n P(A_k)$.

32. ★ a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Montrer que la loi de X est déterminée par les $E(X^k)$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . On suppose qu'il existe un réel $a \in]0, 1[$ tel que $P(Y = k) = o(a^k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Montrer que $E(Y^n)$ existe, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les $E(Y^n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, déterminent la loi de Y .

33. Cachan, Rennes. ★ Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles d'espérance finie. On considère les propriétés :

i) X ou Y sont presque sûrement constantes ;

ii) X et Y sont indépendantes ;

iii) XY est d'espérance finie et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

a) Montrer que : **i)** \Rightarrow **ii)** \Rightarrow **iii)** .

b) Montrer que **ii)** n'implique pas **i)** .

c) Que dire d'une variable aléatoire réelle indépendante d'elle-même ?

d) Montrer que **iii)** n'implique pas **ii)** .

On suppose désormais qu'il existe une variable aléatoire Z et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes telles que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$. On cherche à établir l'équivalence de **i)** , **ii)** et **iii)** . On suppose donc que **iii)** est réalisée.

e) Soit \tilde{Z} une variable aléatoire de même loi que Z et indépendante de Z . Quelle est la loi de (Z, \tilde{Z}) ?

f) On pose $A(Z, \tilde{Z}) = (f(Z) - f(\tilde{Z})) (g(Z) - g(\tilde{Z}))$. Montrer que $A(Z, \tilde{Z})$ est d'espérance finie et calculer son espérance.

g) Conclure.

34. ★ Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$; une relation de réécriture sur Σ^* notée $m \rightarrow m'$ est définie, pour tous $u, v \in \Sigma^*$ par $umv \rightarrow um'v$; en d'autres termes, la réécriture $m \rightarrow m'$ permet de remplacer un facteur m par un facteur m' .

La relation $m \rightarrow m'$ termine s'il n'existe pas de suite (infinie) de mots $(m_k)_k$ telle que $m_k \rightarrow m_{k+1}$ pour tout k .

a) Déterminer parmi les relations suivantes celles qui terminent :

i) $a^2b \rightarrow ba$, **ii)** $ab^2 \rightarrow ba^2$, **iii)** $ab \rightarrow ba$, **iv)** $a^2b^2 \rightarrow b^2a^2$, **v)** $ab \rightarrow b^2a$,

vi) $ab \rightarrow ba^2$, **vii)** $ab \rightarrow b^na$, **viii)** $ab \rightarrow b^2a^2$, **ix)** $a^2b \rightarrow b^2a^3$.

b) Déterminer un critère sur les entiers α, β, α' et β' pour que la relation $a^\alpha b^\beta \rightarrow b^{\beta'} a^{\alpha'}$ termine.

35. ★ Un circuit logique est un graphe orienté sans cycle dont :

- les sommets de degré entrant nul sont appelés entrées,

- les sommets de degré sortant nul sont de degré entrant 1 et sont appelés sorties,

- les autres sommets sont des portes, qui peuvent être de type NON, ET ou OU ; pour ces deux dernières, on suppose que le degré entrant est 2.

Un circuit n -inverseur est un circuit qui prend n entrées booléennes b_1, \dots, b_n et dont les sorties sont leurs négations $\neg b_1, \dots, \neg b_n$.

a) Montrer qu'un circuit 1-inverseur contient au moins une porte NON, qu'un circuit 2 ou 3-inverseur en contient au moins deux.

b) On suppose désormais que les portes ET et OU peuvent avoir un degré entrant supérieur à 2. Montrer que le nombre minimal de portes NON nécessaires à la construction d'un circuit n -inverseur demeure inchangé.

c) On admet que le 3-inverseur à 2 portes NON existe et est unique en un sens que l'on précisera. En déduire un tel circuit.

d) Écrire un algorithme qui détermine les 3-inverseurs à 2 portes NON en un temps raisonnable et calculer sa complexité. Retrouver le résultat admis.

e) Traiter le cas $n \geq 3$.

36. ★ a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(x) > 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs tels que $P = \frac{A}{B}$.

37. ★ On pose $\cos : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels. On suppose : $a_n > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cos(kz)$. Montrer que les zéros de f sont réels.

38. ★ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe indexée par \mathbb{Z} . On suppose que les séries de termes généraux $|c_n|^2$ et $n|c_n|$ convergent, que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = 1$ et que : $\forall k \in \mathbb{Z}^*, \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{c_{n+k}} = 0$. On veut montrer que $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n|c_n|^2$ est un entier.

a) Montrer que la série de terme général $n|c_n|^2$ converge.

b) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Montrer que g est à valeurs dans le cercle unité et que g est de classe \mathcal{C}^1 .

c) Montrer que $S = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g'}{g}$.

d) Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $g = e^{if}$. Conclure.

39. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

a) On suppose f intégrable sur $]0, 1]$. Montrer l'existence et l'unicité de $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1]$, telle que : $u'' = -f$ sur $]0, 1]$, $u(0) = u'(1) = 0$.

b) On suppose que $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Montrer que le résultat de **a)** est encore vrai. Existe-t-il toujours $C \geq 0$ tel que : $\forall x \in]0, 1], |u(x)| \leq Cx$?

40. ★ a) Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \mathbb{R}$ et $(a_k(n))_{n \geq 0}$ une suite réelle de limite a_k . On suppose que, pour tout n , le produit $\prod_{k=1}^{+\infty} (a + a_k(n))$ converge. On suppose de plus qu'il existe une

suite $(m_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |a_k(n)| \leq m_k$ et que la série des m_k converge. Montrer que $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k)$ converge. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k).$$

b) On pose $n = 2m + 1$. Montrer que $\sin(nx) = n \sin x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/n)}\right)$.

c) Montrer que $\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$.

41. ★ Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 2^j) = 1/2^j$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer, si $\epsilon > 0$, que $P\left(\left|\frac{\ln(2) S_n}{n \ln n} - 1\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

42. ★ Si X appartient à \mathbb{R}^n , on note $X \geq 0$ pour signifier que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \geq 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous strictement positifs. On pose : $\Omega_A = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \geq 0, X \neq 0, AX - \lambda X \geq 0\}$ et $\rho_A = \sup \Omega_A$.

a) Montrer que $\rho_A < +\infty$.

b) Montrer que ρ_A est une valeur propre de A .

c) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, b_{i,j} \geq 0$. Montrer que B possède une valeur propre réelle.

43. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathbb{K} un corps. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ le polynôme caractéristique de A . Montrer que :

$${}^t\text{Com}(A) = (-1)^{n-1} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n).$$

44. ★ Soient G un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ et F le sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par G .

a) Que dire si G est abélien ?

b) Montrer que F est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si les éléments de G ont un vecteur propre commun.

45. ★ On se donne $(v_1, \dots, v_{n+1}) \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$ telle que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = -1$.

a) Donner l'exemple d'un tel triplet lorsque $n = 2$.

b) On pose $p_i = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n+1} p_i v_i = 0$.

c) Montrer que toute sous-famille stricte de $(v_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est libre.

d) Soit $(w_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ telle que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, w_i = Uv_i$.

46. ★ Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leq n$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P} = \{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$. Pour $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{P}$, on note $A_I = (a_{i_k, \ell})_{1 \leq k, \ell \leq p}$.

a) Montrer que $\det({}^tAA) = 0$ si et seulement si : $\forall I \in \mathcal{P}, \det(A_I) = 0$.

b) Montrer que $\det({}^tAA) = \sum_{I \in \mathcal{P}} (\det(A_I))^2$.

47. ★ Montrer que les endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec la transposition sont les applications de la forme $M \mapsto OMO^{-1}$ pour un $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

48. ★ Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Sur E , on définit la norme N par : $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

a) Montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$.

b) Trouver la meilleure constante C telle que : $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq CN(f)$.

c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

49. ★ On note T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que T_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que c'est l'adhérence de D_n .

50. ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note d_n la distance de l'origine au graphe de la fonction $x \mapsto \cos^n x$ (distance au sens de la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^2). Étudier la convergence de (d_n) puis en donner un équivalent simple.

51. ★ Montrer qu'il existe un unique réel a tel que la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin(n)$ soit bornée et à valeurs positives.

52. ★ Trouver les applications f de \mathbb{N} vers \mathbb{N} telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3 \text{id}_{\mathbb{N}}$.

53. ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que x est un point de discontinuité de f de première espèce si $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent et que f est discontinue en x . Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de première espèce de f est au plus dénombrable.

54. ★ Soient $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ et $r \geq 1$. On suppose que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0$ et que $f^{(r)} > 0$ sur $[0, 1]$. On pose $b = f(1)$. Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, b]$ et qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty([0, b^{1/r}], \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in [0, b], f^{-1}(x) = g(x^r)$.

55. ★ Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f^2(x) f'^2(x)}{1 + |x|} + f''(x) = -1$?

56. ★ Soit f de classe \mathcal{C}^2 telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge et f'' soit intégrable sur \mathbb{R}^+ .

a) Montrer que f et f' ont une limite nulle en $+\infty$.

b) Montrer que la série de fonction $\sum_n f'(x + n)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

c) Montrer que la série de fonction $\sum_n f(x+n)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

57. ★ Soit $(p_n) \in (\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ telle que $n = o(p_n)$. Montrer que $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

58. ★ Soit β une fonction continue et strictement positive sur \mathbb{R} . Donner une condition nécessaire et suffisante sur β pour que le système différentiel $x'' = -\beta(t)y'$; $y'' = \beta(t)x'$ admette une solution périodique non constante.

59. ★ a) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

b) Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Cette matrice B est notée dans la suite \sqrt{A} .

c) Montrer que $A \mapsto A^2$, de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$, est de classe \mathcal{C}^∞ et que, pour tout $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $df(A)$ est injective.

d) Montrer que $A \mapsto \sqrt{A}$, de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$, est de classe \mathcal{C}^∞ .

60. ★ Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de loi définie par $P(\{1\}) = p$ et $P(\{-1\}) = q$ pour un couple $(p, q) \in]0, 1[^2$ tel que $p + q = 1$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n B_k$. On introduit la variable aléatoire $T : \omega \mapsto \inf\{k \in \mathbb{N}, S_k(\omega) = 1\}$ variable à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et on pose $f_n = P(T = n)$.

a) Montrer que $f(1) = p$ et que $\forall n \geq 2$, $f(n) = q \sum_{k=2}^{n-1} f(k-1)f(n-k)$.

b) Montrer que $g : s \mapsto E(s^T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}})$ est bien définie au voisinage de 0 et que, au voisinage de 0, $g(s) = ps + qsg(s)^2$.

c) En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

61. ★ Soient $n \geq 1$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ pour un $p \in]0, 1[$.

a) Montrer que pour tout $a > 0$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \sup_{s \in \mathbb{R}^+} (sa - \ln(1 - p + pe^s))}$.

b) Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall \epsilon > 0$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \leq e^{-nh(\epsilon)}$, h étant indépendante de n .

c) Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall \epsilon > 0$, $P\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \epsilon\right) \leq e^{-nh(\epsilon)}$.

d) Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall \epsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq 2e^{-nh(\epsilon)}$.

62. ★ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans \mathbb{Z} . On suppose Y d'espérance finie.

a) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(X)$ soit d'espérance finie et, pour toute fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, on ait $E(Y f(X)) = E(g(X) f(X))$.

b) Montrer que g est unique à un ensemble de probabilité nulle (pour la loi de X) près.

63. ★ a) i) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est le carré d'une matrice symétrique définie positive.

ii) Montrer que toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ avec une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique définie positive.

b) Soient E un espace euclidien de dimension n et $d \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in E^d$, on pose $m(x_1, \dots, x_d) = |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_d)|$ si (x_1, \dots, x_d) est libre, où \mathcal{B} est une base orthonormale du sous-espace $\text{Vect}(x_1, \dots, x_d)$, et $m(x_1, \dots, x_d) = 0$ si (x_1, \dots, x_d) est liée.

On note $X_d = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x_1, \dots, x_d) \in E^d, m(f(x_1), \dots, f(x_d)) = m(x_1, \dots, x_d)\}$.

i) Justifier la définition de m .

ii) Montrer que les éléments de X_d sont des automorphismes et que X_d contient les isométries vectorielles.

iii) On suppose $d < n$. Quels sont les endomorphismes symétriques de X_d ? En déduire que X_d est l'ensemble des isométries vectorielles.

64. ★ On note $\| \cdot \|$ l'application distance aux entiers relatifs. Soit \mathcal{E} l'ensemble des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} développables en série entière sur \mathbb{C} tout entier. Soient $g \in \mathcal{E}$ et $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation fonctionnelle notée $(*)$ consistant à déterminer les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(qz) - f(z) = g(z)$.

a) On suppose $|q| \neq 1$. Montrer que $(*)$ possède une solution si et seulement si $g(0) = 0$. Donner alors l'ensemble des solutions de $(*)$.

b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$, et $q = \exp(2i\pi\theta)$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4 \|n\theta\| \leq |q^n - 1| \leq 2\pi \|n\theta\|$.

ii) On dit que θ est *lentement approché* si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c^n \leq \|n\theta\|$. Un nombre rationnel peut-il être lentement approché?

iii) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) θ est lentement approché. (2) $(*)$ a une solution si et seulement si $g(0) = 0$.

65. ★ Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-intégrale* qui est la fonction $\mathcal{I}_{1/2}f$ définie par $\mathcal{I}_{1/2}f(0) = 0$ et $\mathcal{I}_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-dérivée* qui est la fonction $\mathcal{D}_{1/2}f$ définie pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par $\mathcal{D}_{1/2}f(x) = \frac{d}{dx} \mathcal{I}_{1/2}f(x)$.

a) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Vérifier que $\mathcal{I}_{1/2}f$ est définie et continue sur \mathbb{R}^+ . Montrer :

$$\mathcal{I}_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} dt.$$

b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{D}_{1/2}f$ est bien définie et que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathcal{D}_{1/2}f(x) = \mathcal{I}_{1/2}(f')(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}.$$

c) Soit $f : x \mapsto x^n$. Calculer $\mathcal{I}_{1/2}f$. Ind. Considérer $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$.

d) Soit $f : x \mapsto x^{n+1/2}$. Calculer $\mathcal{I}_{1/2}f$.

e) En déduire les relations suivantes pour toute fonction polynôme f :

$$\mathcal{I}_{1/2} \mathcal{I}_{1/2} f(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{1/2} \mathcal{I}_{1/2} f = f.$$

f) Établir les résultats obtenues en **e)** pour f développable en série entière. Discuter enfin le cas où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

66. ★ Soit $K \in \mathcal{C}^0([a, b]^2, \mathbb{C})$ telle que $K(x, y) = 0$ si $y \geq x$. Soit T_k l'endomorphisme de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ qui à u associe $T_k(u) : x \mapsto \int_a^b K(x, y)u(y)dy$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, T_K^n la n^{e} itérée de T_K .

a) Construire une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}^0([a, b]^2, \mathbb{C})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $K_n(x, y) = 0$ si $y \geq x$ et : $\forall u \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), \forall x \in [a, b], T_K^n(u)(x) = \int_a^b K_n(x, y)u(y)dy$.

b) Montrer que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |K_2(x, y)| \leq \|K\|_\infty^2 |x - y|$ et généraliser cette inégalité pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $u \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ fixés. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_K^n(u)}{\lambda^n}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

67. ★ On considère un dé pipé à six faces numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir la face k est notée $p(k)$. On considère une suite de n lancers d'affilée (x_1, \dots, x_n) où x_k est la face obtenue au k -ième lancer.

a) On note N_k le nombre d'apparitions de la face k dans la suite des n lancers. Que peut-on dire de N_k lorsque n tend vers l'infini ?

b) En supposant que pour tout k on a $np(k) \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité d'obtenir une suite (x_1, \dots, x_n) de lancers telle que : $\forall k \in \{1, \dots, 6\}, N_k = np(k)$?

68. ★ Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. Montrer l'existence de Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $Q^p - P$.

69. ★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Trouver l'image de l'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^t X M X$.

70. ★ a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$. On suppose ${}^t A A$ inversible. Comparer n et m .

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit B_1, \dots, B_m des parties distinctes de $\{1, \dots, n\}$. On suppose que : $\forall i \neq j, |B_i \cap B_j| = p$. Montrer que m est inférieur ou égal à n .

71. ★ Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un sous-espace de dimension 2 stable par A .

72. ★ Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S} = \{X M X^{-1}, X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{S} = \{\lambda I_n\}$ avec $\lambda \neq 0$ si et seulement si toutes les matrices de \mathcal{S} ont leurs coefficients diagonaux tous non nuls.

73. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il $P \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $P A P^{-1}$ ait ses coefficients diagonaux égaux ?

74. ★ Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

75. ★ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = 1$ et, pour tout n , $x_{n+1} = x_0 \times \cdots \times x_n + 2$. Déterminer un équivalent de x_n .

76. ★ Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injective. Nature de la série de terme général $f(n)/n^2$?

77. ★ Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2.$$

78. ★ Soit E l'ensemble des $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitziennes et telles que $u(0) = 0$. Déterminer $\sup_{u \in E} \int_0^1 (u - u^2)$.

79. ★ On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'on obtienne la séquence pile-face. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués. Calculer $E(X)$.

80. ★ a) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une unique façon $n = \sum_{k=0}^n \epsilon_k 2^k$ avec

$\epsilon_k \in \{0, 1\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = 1/2^{n+1}$.

On suppose que $X = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n 2^n$ où les X_n sont des variables de Bernoulli. Calculer $E(X_n)$.

81. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ comme les coefficients du polynôme : $X(X+1) \cdots (X+n-1) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$.

a) Montrer : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

b) On admet que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ dont la décomposition en cycles à supports disjoints comporte k cycles. On munit l'ensemble Ω des permutations de $\{1, \dots, n\}$ de la loi uniforme. Si $\sigma \in \Omega$, on pose $X(\sigma)$ le nombre de cycles de σ . Calculer $E(X)$.

82. ★ Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité P . Si X est une variable aléatoire réelle, on dit que X est symétrique si X et $-X$ suivent la même loi.

a) Soient Y et Y' deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} . On pose $f_X : t \mapsto E(e^{itX})$. Montrer que f_X détermine entièrement la loi de X . Si X est à valeurs dans \mathbb{Z} , donner une condition nécessaire et suffisante sur f_X pour que X soit symétrique.

83. ★ Existe-t-il une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'espace vectoriel des matrices qui commutent avec A soit de dimension impaire ?

84. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les couples (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que l'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \text{tr}(AM) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

85. ★ a) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto XP$ soit continu ?

b) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto P'$ soit continu ?

c) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto XP'$ soit continu ?

86. ★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ sont-elles sommables ?

87. ★ Soient $a < 0 < b$ et F l'ensemble des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a, b[$, dont toutes les dérivées sont positives sur $]a, b[$.

a) Montrer que F est stable par somme et par produit.

b) Soit $R_n(x)$ le reste de Taylor d'ordre n entre 0 et x . Montrer que R_n est une fonction croissante sur $]0, b[$.

c) Montrer que f est développable en série entière autour de 0 sur $]a, b[$.

88. ★ Résoudre $\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ x & x'' & x' \\ x' & x & x'' \end{vmatrix} = 0$.

89. ★ a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

b) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

90. PYTHON. ★ Pour $n \geq 1$, on note $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et S_n le groupe des permutations de E_n . En PYTHON, une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$. Pour $i \in E_n$, la *période* de i pour $\sigma \in S_n$ est le plus petit entier p tel que $\sigma^p(i) = i$. On le note $\text{Per}(\sigma, i)$.

a) Justifier l'existence de $\text{Per}(\sigma, i)$ et montrer qu'elle est plus petite que n . Préciser l'ordre de σ en fonction des $\text{Per}(\sigma, i)$.

b) Écrire une fonction qui retourne la période d'un élément i pour une permutation σ .

c) Écrire une fonction qui retourne la liste des périodes, pour une permutation σ , des éléments de E_n . Application : $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9]$.

d) Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation R_σ sur E_n par : $xR_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$.

e) Montrer que R_σ est une relation d'équivalence.

On appelle *orbite* d'un élément x de E_n sa classe d'équivalence. On la note $\Omega_\sigma(x)$.

f) Montrer que $\Omega_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$ où $p = \text{Per}(\sigma, x)$.

g) Écrire une fonction qui retourne la liste des orbites d'une permutation σ .

91. PYTHON. ★ On note \mathcal{A} l'ensemble des polynômes réels à coefficients dans $\{0, 1\}$.

- a) Soient P et Q dans \mathcal{A} . Montrer que $P(-2) = Q(-2)$ si et seulement si $P = Q$.
 b) Soit $N \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{A}$ tel que $N = P(-2)$. Écrire une fonction PYTHON de variable d'entrée N et calculant P . Donner P pour $N = 2015$.

92. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$, $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que : $P(0) = 1$, $\deg P = n - 1$ et $\forall k \in \{0, \dots, n - 1\}$, $P(\omega^k) \in \mathbb{R}^+$.

a) i) On note (L_0, \dots, L_{n-1}) la base de Lagrange relative à $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Exprimer L_j .

ii) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $P = \lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_{n-1} L_{n-1}$.

b) Soient j et k dans $\{0, \dots, n - 1\}$. Montrer : $\frac{L_j^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\omega^{-kj}}{n}$.

c) Prouver que P a ses coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

93. PYTHON. ★ On considère $n \geq 2$ joueurs, numérotés de 1 à n , participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre. On définit la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de la manière suivante : $a_{i,i} = 0$, $a_{i,j} = 1$ si i a gagné contre j , $a_{i,j} = -1$ si j a gagné contre i .

a) Écrire une fonction renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.

b) Calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers n pairs et impairs. Qu'observe-t-on ?

c) Démontrer la propriété postulée pour les n impairs.

d) i) Soit $J_n = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer $\det(J_n - I_n)$.

ii) Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrer que $\det M$ et $\det N$ ont même parité.

iii) Démontrer la propriété postulée pour les n pairs.

94. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A si $AB = BA$, $A = ABA$ et $B = BAB$. Montrer que A possède un pseudo-inverse si et seulement si $\text{rg } A = \text{rg } A^2$, et qu'un tel pseudo-inverse est alors unique.

95. ★ Soit $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer les $(k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que : $\exists g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, $g^k = D^p$.

96. PYTHON. ★ Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $A \otimes B$ la matrice de

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}) : A \otimes B = \left(\begin{array}{c|cc} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{array} \right).$$

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Définir une fonction $Aotimes(B)$ retournant $A \otimes B$. Calculer $A \otimes B$

lorsque $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ puis lorsque $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices obtenues sont-elles

diagonalisables ?

b) Montrer que \otimes est bilinéaire. Calculer $\text{tr}(A \otimes B)$.

c) Montrer que pour tout $(A, A', B, B') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on a : $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$. Qu'en déduire sur $A \otimes B$ si A et B sont inversibles ?

- d) On suppose A semblable à A' et B semblable à B' . Que dire de $A \otimes B$ et $A' \otimes B'$?
 e) Quel est le rang de $A \otimes B$?
 f) On suppose A et B diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.
 g) Réciproquement, on suppose $A \otimes B$ diagonalisable, avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
 i) Montrer que B n'est pas nilpotente.
 ii) On suppose A triangulaire ; montrer que B est diagonalisable.
 iii) Conclure dans le cas général. iv) Le résultat reste-t-il le même pour des matrices à coefficients réels ?

97. ★ Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A - (p-1)I_n = J$ où $p \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que J est diagonalisable. Étudier ses éléments propres.
 b) On pose $U = {}^t(1, \dots, 1)$. Soit X une valeur propre de A associé à la valeur propre λ tel que (X, U) est libre. Montrer que $\lambda^2 + \lambda = p - 1$.
 On suppose A symétrique avec ses éléments dans $\{0, 1\}$ telle que $\text{tr}(A) = 0$.
 c) Montrer que $AU = dU$
 d) Montrer que $n = d^2 + 1$.
 e) Montrer que d peut prendre 5 valeurs différentes.

98. ★ a) Déterminer le domaine de définition réel de $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \tan \theta)}{\tan \theta} d\theta$.

b) Calculer $F(x)$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta$ et de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta$.

99. ★ Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $(E) : xy' + ay - xy^2 = a$.

- a) Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que g est définie sur $] -r, r[$ avec $r > 0$ et est solution de (E) . Déterminer une relation de récurrence sur les a_n .
 b) Montrer que (E) possède une solution $\varphi :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière.
 c) Montrer que $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

d) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. En considérant l'intégrale

$$I = \int_0^1 t^a (f'(t) + f(t) \varphi(t))^2 dt, \text{ montrer : } \int_0^1 t^a f'^2(t) dt \geq a \int_0^1 t^{a-1} f^2(t) dt.$$

100. PYTHON. ★ a) Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X et N une variable

aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans \mathbb{N} . Pour $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

a) Soient $\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_S, \mathcal{G}_N$ les séries génératrices de X, S et N . Montrer : $\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_S(t) = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X(t)$.

b) On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

c) On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $E(S^2)$.

d) On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n -ième génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

i) Écrire une fonction python renvoyant le nombre de descendants masculins à la n -ième génération.

ii) Fixer λ et n . Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants masculins. Comparer à $E(Z_n)$.

101. ★ PYTHON. a) i) Écrire une fonction $S(n, p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

ii) En déduire une fonction $test(n, p)$ qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k) , puis $\left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

b) i) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$.

ii) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $E(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que : $E(\exp(tX)) \leq \cosh t \leq \exp(t^2/2)$.

c) i) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires centrée indépendantes telles que, pour tout i , $|X_i| \leq a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer $E(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

ii) Soit $\epsilon > 0$. Montrer : $P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-t\epsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

a) En choisissant une bonne valeur de t , montrer : $P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(\frac{-\epsilon}{2 \sum_{i=1}^n a_i^2}\right)$.

d) Commenter le résultat observé à la première question.

102. PYTHON. ★ Soit $P_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$.

a) Tracer le graphe de P_n pour n allant de 2 à 7 sur l'intervalle qui vous paraît le plus judicieux. Que dire des racines de P_n ?

b) Déterminer des valeurs approchées des racines complexes de P_n pour n allant de 2 à 7 en utilisant la méthode de Newton.

c) Représenter ces racines sur le plan complexe et commenter.

d) Montrer que P_n est scindé à racines simples sur \mathbb{C} .