CONTINUITÉ CORRECTION

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

1. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$ nous dit que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, ce qui est littéralement la définition de la continuité de f en x_0. Comme x_0 est quelconque, on peut bien affirmer que

   $$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. *Dans le cas où $f(0) = 0$, démontrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.*

   En prenant $y = 0$ dans l'hypothèse, on obtient

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| = |x|,$$

   c'est-à-dire

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \pm x.$$

   On constate ainsi que, sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f ne s'annule pas. En vertu du T.V.I., elle garde donc un signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela prouve que f coïncide avec $\pm\,\mathrm{Id}$ sur $\mathbb{R}_+$. On démontre de même que f coïncide avec $\pm\,\mathrm{Id}$ sur $\mathbb{R}_-^*$. On obtient donc quatre possibilité pour f qui sont

   $$f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \qquad f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \qquad f = |\cdot| \qquad \text{ou} \qquad f = -|\cdot|.$$

   En choisissant $x = 1$ et $y = -1$ dans l'hypothèse, on constate que

   $$|f(1) - f(-1)| = 2 \neq 0,$$

   donc f n'est pas paire. On en déduit que

   $$f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \qquad \text{ou} \qquad f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

   Ces deux fonctions étant clairement des isométries, on en déduit que

   $$\boxed{\text{les seules isométries de } \mathbb{R} \text{ qui s'annulent en 0 sont } \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \text{ et } -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

3. *Traiter le cas général.*

   La fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(0)$ s'annule en 0 et vérifie

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |g(x) - g(y)| = |f(x) - f(0) - f(y) + f(0)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

   donc g est une isométrie de $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. La question précédente nous dit donc que $g = \pm\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire

   $$f = \pm\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + f(0).$$

   Comme toutes les fonctions de la forme $\pm\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + a$ où $a \in \mathbb{R}$ sont clairement des isométries, on en déduit que

   $$\boxed{\text{les isométries de } \mathbb{R} \text{ sont toutes les fonctions de la forme } \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + a \text{ et } -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + a \text{ où } a \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

   On procède par double-implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$ et démontrons que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si $f^{-1}(U) = \varnothing$, c'est terminé. Si $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, on introduit $x \in f^{-1}(U)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[\subset U$. Comme f est contnue en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]x - \alpha; x + \alpha[\,,\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Dès lors, pour $t \in]x - \alpha; x + \alpha[$, on a $f(t) \in]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[$, ce qui implique que $f(t) \in U$. Par conséquent, on a $]x - \alpha; x + \alpha[\subset f^{-1}(U)$. Cela démontre que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et démontrons que f est continue.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'hypothèse nous dit que $f^{-1}(]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme cet ouvert contient x (puisque x est l'antécédent de $f(x)$ qui appartient à $]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[$), il existe $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha; x + \alpha[\subset f^{-1}(]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[)$. Cela implique que $\forall t \in]x - \alpha; x + \alpha[\,,\ f(t) \in]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[$, c'est-à-dire $\forall t \in]x - \alpha; x + \alpha[\,,\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Donc f est continue en x et, par universalité de x, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   En conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est continue si, et seulement si, l'image réciproque par } f \text{ de tout ouvert de } \mathbb{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.}$$

2. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a $f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A)$.*

   On procède encore par double-implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$ et démontrons que $f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A)$. Soit $y \in f(\operatorname{Adh} A)$. Il existe alors $x \in \operatorname{Adh} A$ tel que $y = f(x)$. Il existe donc $(a_n)_{n \geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Mézalors, comme f est continue, $\big(f(a_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est une suite de $f(A)$ qui converge vers $f(x) = y$. Donc $y \in \operatorname{Adh} f(A)$. Ainsi, on a bien $f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A)$.

   $\Leftarrow$ Supposons que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a $f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A)$. Démontrons que f est continue sur $\mathbb{R}$. Utilisons pour cela le critère séquentiel de continuité. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite tendant vers x. On veut démontrer que $\big(f(a_n)\big)_{n \geqslant 0}$ tend vers $f(x)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\big(f(a_n)\big)_{n \geqslant 0}$ ne tend pas vers $f(x)$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |f(a_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Cela permet d'extraire de $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0,\ |f(a_{\varphi(n)}) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Posons $A = \{a_{\varphi(n)} : n \geqslant 0\}$. Comme $(a_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ tend vers x (puisque c'est une suite extraite de $(a_n)_{n \geqslant 0}$ qui tend vers x), on sait que x est adhérent à A. On en déduit que $f(x)$ est adhérent à $f(A)$. Mais la propriété $\forall n \geqslant 0,\ |f(a_{\varphi(n)}) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ dit exactement le contraire puisque $f(A) \cap]f(x) - \varepsilon_0; f(x) + \varepsilon_0[= \varnothing$. Absurde ! Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

   En conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est continue si, et seulement si, pour toute partie } A \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a } f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A).}$$