MP*1

Développements asymptotiques

On pourra consulter également la feuille "Comportement asymptotique d'intégrales à paramètres" ainsi que le paragraphe 4 de la feuille "Séries II".

1 Méthodes de base

1. Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ soit négligeable devant x^α pour tout $\alpha > 0$ et que $\ln(x)^\beta$ soit négligeable devant $f(x)$ pour tout $\beta > 0$?
2. (*) a) Donner le développement limité d'ordre 9 de $(\sin x)^6$ en 0.

   b) Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$ en 0.
3. Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in [-1, 1], \qquad f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$
   Pour n dans $\mathbb{N}$, déterminer $f^{(n)}(0)$.
4. (*) Justifier, sans aucun calcul, l'existence de $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x \in]0, \alpha], \qquad \tan x \; > \; \arcsin x \; .$$
5. (*) Quels sont les réels $\alpha > 0$ tels que :
$$e^{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^\alpha} ?$$
6. (*) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner le développement limité de
$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
   à l'ordre n lorsque x tend vers 0.
7. Soient a, b, c dans $\mathbb{R}$. Asymptote et position en $+\infty$ du graphe de :
$$x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx + c}.$$
8. Donner un développement asymptotique à deux termes en 0 de
$$f(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{\operatorname{cotan}^2(t)}.$$

9. Soient $n \geq 2$ un entier, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ des nombres réels, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels > 0, f la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \qquad f(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{t - \alpha_j}.$$

Pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, soit :

$$g(x) = \max \{t \in \mathbb{R} \,;\, f(t) = f(x)\}.$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si $1 \leq k \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre 2 en α_k et expliciter ce développement.

10. (**) Soient $(p_1, \ldots, p_r)$ et $(a_1, \ldots a_r)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$. Trouver la limite de chacune des suites ci-après :

(a) $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,

(b) $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right) + \cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right)\right)^n$,

(c) $v_n = (p_1 {a_1}^n + \cdots + p_r {a_r}^n)^{1/n}$,

(d) $w_n = \left(p_1 {a_1}^{1/n} + \cdots + p_r {a_r}^{1/n}\right)^n$,

(e) $\left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}$.

11. (*) Donner un équivalent simple quand $x \to 0$ de :

(a) $x(1 + \cos x) - 2 \tan x$,

(b) $x^x - (\sin x)^x$,

(c) $x^{\sin x} - (\sin x)^x$,

(d) $(1 + x)^{1/x} - e^{1/(1+x)}$,

(e) $\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\tan x}$,

(f) $\dfrac{1}{1 - x^x} - \dfrac{1}{x \ln x}$.

12. Donner la limite en 0 de :

(a) $\dfrac{(1 + x)^{\ln x / x} - x}{x(x^x - 1)}$,

(b) $(\cos x)^{\operatorname{cotan}^2 x}$,

(c) $\dfrac{\operatorname{Arccos}(1 - x)}{\sqrt{x}}$,

(d) $\dfrac{(\cos(x))^b - (\cos(x))^a}{x^2}$, où : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

13. (*) *Méthode de Snell*

a) Calculer les longueurs ℓ_n et L_n du polygone régulier à n côtés respectivement inscrit dans et circonscrit au cercle unité.

b) Trouver deux réels α et β tels que

$$(\alpha \sin + \beta \tan)(x) - x = \underset{x\to 0}{O}(x^5).$$

c) Déterminer, si α et β sont comme en b), la partie principale de

$$\alpha \ell_n + \beta L_n - 2\pi.$$ [1]

14. Donner la limite de :

(a) $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\pi/4$,

(b) $(1+\sin x)^{1/\cos(x/2)}$ en π,

(c) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\sin x/\ln(\cos x)}$ en $\pi/2$,

(d) $\dfrac{(\mathrm{Arcsin} x)^2 - \pi^2/6}{2x^2-1}$ en $1/\sqrt{2}$.

15. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de :

(a) $(\mathrm{ch}\ x)^\alpha - (\mathrm{sh}\ x)^\alpha$, où $\alpha > 0$

(b) $\sqrt[3]{\mathrm{ch}\ (x+1)} - \sqrt[3]{\mathrm{ch}\ x}$,

(c) $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x^2}$,

(d) $e^{1/x} - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$,

(e) $\left(\dfrac{2}{\pi}\ \mathrm{Arctan}\ x\right)^x$,

(f) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$.

(g) $(\ln(\ln(ax+b)) - \ln(\ln x))$, avec $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

(h) $\left(\dfrac{1}{x^{1/x}} - \dfrac{1}{(x+1)^{1/x+1}}\right)$.

16. (*) Soient u et v dans $\mathbb{R}^+$, (a_n) et (b_n) deux suites de réels > 0 telles que :

$$a_n^n \to u, \qquad b_n^n \to v.$$

Étudier la convergence de :

$$\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n.$$

---

1. C'est en utilisant les quantités

$$\alpha \ell_{2^m} + \beta L_{2^m} - 2\pi$$

pour m dans $\mathbb{N}^*$ que Snell a obtenu en 1621 une approximation de π à 10^{-34} près.

17. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, avec $\forall n \geq 1,\ a_n \geq -n$. Montrer l'équivalence entre :

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n} \qquad \text{et} \qquad a_n = o\left(\sqrt{n}\right).$$

18. Développement à deux termes de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nH_n}.$$

19. Trouver un équivalent simple de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$$

20. (*) *Asymptotique des coefficients binomiaux : k fixe*
Soit k dans $\mathbb{N}$. Donner un équivalent, puis un développement à deux termes, de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

21. (**) *Asymptotique des coefficients binomiaux : $k = o(\sqrt{n}), k \sim c\sqrt{n}$*
Soit (k_n) une suite d'entiers.
a) On suppose $k_n = o(\sqrt{n})$. Montrer

$$\binom{n}{k_n} \sim \frac{n^{k_n}}{k_n!}.$$

b) On suppose $k_n \sim c\sqrt{n}$, avec $c > 0$. Montrer :

$$\binom{n}{k_n} \sim e^{-c^2/2}\frac{n^{k_n}}{k_n!}.$$

22. *Asymptotique des coefficients binomiaux : $k = o(n^{2/3})$*
Soit (k_n) une suite d'entiers. On suppose $k_n = o(n^{2/3})$. Donner un équivalent simple de $\binom{n}{k_n}$.

23. *Asymptotique des coefficients binomiaux : k linéaire en n*
Soient γ dans $]0,1[$, (k_n) une suite d'entiers telle que :

$$k_n \sim \gamma n.$$

Trouver la limite en $+\infty$ de

$$\frac{\ln\binom{n}{k_n}}{n}.$$

24. Donner un équivalent simple de $\binom{kn}{n}$ quand $n \to +\infty$ où $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$.

25. *Applications injectives*
Soient c un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, $(m_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c\sqrt{n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,m_n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{F}_n$. Déterminer la limite de

$$P(X_n \text{ est injective}).$$

26. *Applications surjectives*
Soient a un élément de $\mathbb{R}$, $(m_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$m_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + an + o(n).$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,m_n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{F}_n$. Déterminer la limite de

$$P(X_n \text{ est surjective}).$$

27. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) = x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}.$$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Trouver un équivalent de $f_n(x)$ lorsque x tend vers 0.

28. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par $u_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Donner un équivalent de u_n.

29. Soient a et b dans $\mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sqrt{(n-a)^2 + b^2}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que

$$\{n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \in \mathbb{N}\}$$

soit infini.

30. (**) a) Donner un développement limité à la précision $o(1/x)$ de

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$$

lorsque x tend vers $\pm\infty$.
b) En déduire que l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ y^2 = x^4 + x^3 + 1\}$$

est fini.

c) En précisant les arguments précédents, déterminer E.

31. On pose, pour $n \geq 2$ entier

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^2-k}.$$

Déterminer la limite ℓ de $(u_n)_{n\geq 2}$, puis un équivalent de $u_n - \ell$.

2 Solutions d'équations à paramètres

32. Vérifier que
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+\ln x \end{array}$$
est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. Trouver un développement asymptotique à 3 termes de $f^{-1}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
Idem lorsque $x \to 0$.

33. Vérifier que
$$f: \begin{array}{ccc}]1/e,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x \end{array}$$
est un C^∞ difféomorphisme de $]1/e,+\infty[$ sur un intervalle à préciser. Trouver un développement asymptotique à 3 termes de $f^{-1}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

34. Vérifier que :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5+x \end{array}$$
est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Trouver un développement asymptotique de $f^{-1}(x)$ quand lorsque $x \to +\infty$.

35. Pour $\lambda \geq 1$, montrer que l'équation
$$e^x + x^2 = \lambda$$
a une unique x_λ dans $\mathbb{R}^+$ et trouver un développement à deux termes de x_λ en $+\infty$.

36. a) Si $m > 0$, montrer que l'équation
$$x^5 + mx = 1$$
a une unique solution réelle x_m.
b) Donner un équivalent puis un développement à deux termes de x_m en $+\infty$.

37. Montrer que le polynôme $X^n + X - 1$ a, si $n \geq 2$, une unique racine x_n sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite l à préciser ; trouver un équivalent de $u_n - l$ lorsque $n \to +\infty$.

38. (**) Montrer que le polynôme $X^n - nX + 1$ a, si $n \geq 2$, une unique racine $x_n > 1$. Montrer que $x_n \to 1$, puis donner un équivalent simple de $x_n - 1$.

39. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) > 1$. On pose :
$$P_n(X) = X^n - P(X).$$
a) Montrer, pour n suffisamment grand, que P_n possède exactement une racine sur $]1,+\infty[$ que l'on note x_n.

b) Montrer que (x_n) converge vers une limite à préciser.

c) Trouver un développement à deux termes de x_n.

40. (**) Soit $n \geq 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \geq 0$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} {x_n}^k = 1.$$

b) Montrer que (x_n) converge vers une limite ℓ à préciser.

c) Trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

41. Soit f une application continue et décroissante de $[0,1]$ dans lui-même. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^n = f(x)$ a une unique racine x_n dans $[0,1]$. Étudier la convergence et la rapidité de convergence de (x_n)

42. a) Pour $n \geq 2$ entier, montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}^+$, que l'on note $u_n < v_n$.

b) Donner des développements à deux termes de u_n et v_n.

43. a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

b) Donner un développement asymptotique à la précision $o(1/n^2)$ de x_n.

c) Montrer que (x_n) admet un développement à tout ordre dans l'échelle des puissances de $1/n$.

44. Montrer que l'équation :

$$1 + x = \frac{e^x}{n}$$

admet une unique racine x_n dans $\mathbb{R}^-$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (x_n) converge vers une limite l, donner un équivalent de $u_n - l$ lorsque $n \to +\infty$.

45. Montrer que l'équation

$$\tan x = \frac{x^2}{1+x^2}$$

admet, si $n \in \mathbb{N}^*$ une unique racine dans l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de x_n à la précision $1/n^2$ lorsque $n \to +\infty$.

46. Montrer que l'équation

$$\text{cotan } x = \ln x$$

admet, si $n \in \mathbb{N}^*$ une unique racine dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$; donner un équivalent de $x_n - n\pi$.

47. Montrer que l'équation

$$\sin(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

admet, si $n \in \mathbb{N}^*$, une unique solution x_n dans $[2n\pi, (2n + \frac{1}{2})\pi]$. Trouver un développement à trois termes de x_n.

48. Soit, pour x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = xe^{-x}$.

a) Pour ε dans $]0, 1/e[$, démontrer que l'équation

$$\varphi(x) = \varepsilon$$

a deux solutions réelles : $x(\varepsilon)$ dans $]0,1[$ et $y(\varepsilon)$ dans $]1, +\infty[$.

b) Donner un développement à deux termes de $x(\varepsilon)$ et $y(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

49. Soit φ dans $\mathbb{R}$ fixé.

a) Pour ε dans $]-1,1[$, montrer que l'équation

$$x = \varphi + \varepsilon \sin(x)$$

a une unique solution $x(\varepsilon)$ dans $\mathbb{R}$.

b) Donner un développement à trois termes de $x(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

50. (*) Trouver un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$u_n = \max_{x \in [0,\pi/2]} \sin x (\cos x)^n \ .$$

51. Trouver un équivalent, quand $n \to +\infty$, de :

$$\max_{x \in [0,1]} \left(x^n \sin(\pi x) \right) .$$

52. (**) Soit, si $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction définie sur $[-n, 0]$ par :

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ .$$

a) Montrer que ${f_n}'$ s'annule une et une seule fois sur $]-n,0[$ si $n \geq 2$, en un point noté x_n.

b) Trouver un équivalent de x_n.

c) Trouver un équivalent de $\max\limits_{x \in [-n,0]} f_n(x)$.

53. (**) Soit, pour $n \geq 1$, $P_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} (x-k)$. On se propose de calculer un équivalent de

$$M_n = \max_{x \in [0,n]} |P_n(x)| \ .$$

a) Montrer que $M_n = |P_n(x_n)|$ où $0 < x_n < 1$.

b) Donner un équivalent de x_n.

c) Donner un équivalent de M_n.

54. (**) Soit $\lambda > 0$. Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$, que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} = \lambda$$

admet une unique solution $x_{n,\lambda}$ dans $]n, +\infty[$. Donner un équivalent de $x_{n,\lambda}$ lorsque $n \to +\infty$.

55. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$\tan(nx) = \lambda \, n \, \tan(x)$$

a une plus petite racine strictement positive, que l'on note x_n.

b) Donner un équivalent de x_n.

56. (**) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, soit d_n la distance de l'origine au graphe de

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (\cos x)^n.$$

Donner un équivalent de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

57. (***) Soit r un réel > 1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iX)^k}{k!}.$$

Autrement dit, P_n est le polynôme de Taylor de degré $n-1$ de l'exponentielle imaginaire :

$$x \mapsto e^{ix}.$$

a) Montrer que l'équation

$$|P_n(x)| = r$$

admet une plus petite solution dans $\mathbb{R}^+$. On note x_n cette solution.

b) Montrer :

$$x_n \sim \frac{n}{e}.$$

58. Soit $\lambda \in]0,1[$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lambda e^x$$

admet une unique solution $x_n > 0$.

b) Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Suites récurrentes

59. *Vitesse de convergence pour un point fixe attractif non superattactif*

Soient f une application de classe C^1 de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans I, a un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est déterminée par

$$u_0 \in I \;; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Montrer que, si u_0 est assez près de a, (u_n) converge vers a.

b) On suppose que $f'(a) \neq 0$ et qu'il existe $r > 1$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a + f'(a)(x-a) + O((x-a)^r).$$

D'après la formule de Taylor-Young, cette condition est réalisée lorsque f est de classe C^2 avec $r = 2$.

On suppose que (u_n) converge vers a et n'est pas stationnaire. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|u_n - a| \sim K\,|f'(a)|^n.$$

60. *Vitesse de convergence pour un point fixe superattractif*
Soient f une application de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans I, a un point fixe de f. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $r > 1$ tels que
$$|f(x) - a| \underset{x \to a}{\sim} C\,|x - a|^r.$$
La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est déterminée par
$$u_0 \in I\ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
On suppose que (u_n) converge vers a et n'est pas stationnaire. Démontrer qu'il existe $K > 0$ et γ dans $]0,1[$ tel que
$$|u_n - a| \sim K\,\gamma^{r^n}.$$

61. *Vitesse de convergence pour un point fixe indifférent*
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une application de l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $[a, b[$. On suppose qu'il existe $c > 0$ et $r > 1$ tels que
$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} a + h - ch^r + o(h^r).$$
La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est déterminée par
$$u_0 \in I\ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
On suppose que (u_n) converge vers a et n'est pas stationnaire. Trouver un équivalent de $u_n - a$.

62. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$u_0 \in]0, 1[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2.$$
Montrer que $u_n \to 0$. Donner un équivalent de u_n puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

63. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$u_0 \in]0, \pi/2[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$
Montrer que $u_n \to 0$. Donner un équivalent de u_n puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

64. (**) Pour chacune des suites suivantes, montrer que $u_n \to +\infty$ et donner un équivalent simple de u_n.
(a)
$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \lambda {u_n}^\alpha \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \alpha \in]-\infty, 1[,$$
(b)
$$u_0 > 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \ln u_n,$$
(c)
$$u_0 > 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\ln u_n}.$$

65. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n}.$$

Prouver l'existence de $k > 1$ tel que :

$$u_n \sim k^{(3/2)^n}.$$

66. Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n en $+\infty$.

67. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 > 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{{u_n}^2+1}{2}.$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim 2\lambda^{2^n}$.

68. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 telle que :

$$x_n \to 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} - x_n \sim -\lambda {x_n}^{-a} e^{-bx_n}$$

avec $b > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

69. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = u_n(1 - \exp(-1/u_n)).$$

Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

70. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in]0,1[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = {u_n}^{1+u_n}.$$

Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

71. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0, \quad u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{1+u_n u_{n+1}}.$$

Montrer que $u_n \to 0$ puis qu'existe k dans $]0,1[$ tel que :

$$u_n \sim k^n.$$

72. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+n{u_n}^2}.$$

Montrer que $u_n \to 0$; donner un équivalent simple de u_n.

73. (*) Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$. Donner un équivalent de u_n puis un développement à deux termes.

74. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n - n|.$$

Donner un équivalent de u_n.

75. (**) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n}.$$

Montrer que $u_n \to +\infty$; donner un équivalent de u_n.

76. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

a) Si $\alpha > 1$, montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ, et donner un équivalent de $\ell - u_n$.

b) Si $\alpha \leq 1$, montrer que $u_n \to +\infty$ et donner un équivalent simple de u_n.

77. Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n^\alpha}.$$

Donner un équivalent simple de u_n.

78. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

79. Soient λ dans $]1, +\infty[$, $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum v_n$ converge et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \lambda u_n + v_n.$$

Étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geq 0}$.

80. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \cdot$$

Trouver un équivalent simple de u_n.

4 Résultats sommatoires

81. (**) Trouver un développement asymptotique à n termes en $+\infty$ de :

(a) $\displaystyle\int_e^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t,$

(b) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$,

(c) $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$,

(d) $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

82. Trouver un développement à trois termes en $+\infty$ de :

(a) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$,

(b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

(c) $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$.

83. (**) Trouver un équivalent de :

(a) $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-(\ln t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \alpha > 1$,

(c) $\displaystyle\int_1^x e^{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \alpha > 0$,

(d) $\displaystyle\int_1^x e^{(\ln t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \alpha > 0$.

84. Trouver un équivalent de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^n (k!)^\alpha$ avec $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^{k\alpha}$ avec $\alpha > 0$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^n (\ln k)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{k^2}$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^n a^k k^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=2}^n a^k (\ln k)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$.

85. Donner un équivalent de

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^{1/n}\right)^n.$$

86. (**) Donner un développement asymptotique à 2 termes de $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ lorsque $n \to +\infty$ si $\alpha \geq -1$.

87. (**) Donner un équivalent de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} .$$

88. a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}(k/n)^n$ a une limite que l'on précisera en $+\infty$.
b) Donner plus généralement un équivalent de :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha n} \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

89. Donner un équivalent de :

$$\sum_{k=1}^{n} (k!)^{-\alpha/n} \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

90. Donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, de :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!} .$$

91. Montrer l'existence de réels $(c_i)_{i\geq 1}$ tels que, si $q \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \sum_{i=1}^{q} \frac{c_i}{n^i} + o\left(\frac{1}{n^q}\right) .$$

Calculer c_1 et c_2.

92. Montrer qu'il existe a, b, c dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^k = an^n + bn^{n-1} + cn^{n-2} + o(n^{n-2}).$$

93. Donner un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$ à la précision $o(1)$.

94. Donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{4/n^2} .$$

95. Soient a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+kb) \qquad B_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a+kb)}.$$

Déterminer la limite de (A_n/B_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

96. Déterminer les couples (α, β) de nombres réels strictement positifs tels qu'il existe une infinité de n dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{\beta}.$$

97. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k}.$$

Montrer qu'il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$v_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + C + o(1).$$

98. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ lorsque $n \to +\infty$.

99. (**) *Le « théorème-maître » pour la complexité d'algorithmes*

Soient $a > 0$, $b > 1$ des nombres entiers, d dans $\mathbb{R}^+$, T une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$T(n) - aT(\lfloor n/b \rfloor) = O(n^d).$$

Démontrer les résultats suivants.

- Si $d > \log_b(a)$, alors $T(n) = O(n^d)$.
- Si $d = \log_b(a)$, alors $T(n) = O(n^d \ \ln(n))$.
- Si $d < \log_b(a)$, alors $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$.

5 Problèmes issus de l'arithmétique

100. Soit $E = \{n^m \ ; \ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ m \geq 2 \ ; \ n \geq 2\}$. Donner un équivalent de

$$|E \cap [1, N]|$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

101. Soit u_n le cardinal de

$$\{\lfloor n/k \rfloor \ ; \ 1 \leq k \leq n\}.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

102. (**) *Problème du cercle*

On note, si $r > 0$, $N(r)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ dans le disque de centre 0 et de rayon r. Montrer :

$$N(r) \underset{r \to +\infty}{=} \pi r^2 + O(r).$$

103. (**) *Nombre moyen de diviseurs d'un entier.*

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$ (dans $\mathbb{N}^*$). Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor.$$

En déduire un équivalent, puis un développement à deux termes de

$$\sum_{k=1}^{n} d(k).$$

104. *Nombre de diviseurs d'un entier*
Avec la définition de l'exercice précédent, montrer, si $\varepsilon > 0$, que

$$d(n) = \underset{n\to+\infty}{=} O(n^{\varepsilon}).$$

105. *Valeur moyenne de la somme des diviseurs d'un entier*
Si $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d.$$

Montrer :

$$\sum_{n\leq x} \sigma(n) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2 x^2}{12}.$$

106. Soit, pour $x > 0$, $A(x)$ le nombre d'entiers $\leq x$ qui s'écrivent $2^m 3^n$ avec m et n dans $\mathbb{N}$. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $A(x)$.

107. *Entiers squarefull*
On note E l'ensemble des « entiers squarefull », c'est-à-dire des éléments n de $\mathbb{N}^*$ tels que pour tout nombre premier p, $v_p(n)$ soit nul ou ≥ 2.
a) Montrer que E est l'ensemble des entiers qui s'écrivent :

$$d^2 m^3$$

avec d et m dans $\mathbb{N}^*$ et où m n'est divisible par aucun carré de nombre premier. Vérifier de plus qu'une telle écriture est unique.
b) Pour $x > 0$, soit $N(x)$ le nombre d'éléments de E majorés par x. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$N(x) \sim C\sqrt{x}.$$

108. *Majoration de $\pi(x)$*
On note $\pi(x)$ le nombre le nombre de nombres premiers $\leq x$.
a) Montrer que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P},\ n<p\leq 2n} p$ divise $\binom{2n}{n}$, et en déduire

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \binom{2n}{n}.$$

b) Montrer que

$$\pi(2n) - \pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

c) Montrer $\pi(x) = O(x/\ln x)$.

109. *Minoration de* $\pi(x)$

On rappelle la formule de Legendre : si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{P}$,

$$v_p(n!) = \sum_{r \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^r} \rfloor \ .$$

a) Montrer :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor \ .$$

b) Déduire de a) :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

c) Montrer :

$$\frac{x}{\ln x} \underset{+\infty}{=} O\left(\pi(x)\right).$$

110. *Formes équivalentes du théorème des nombres premiers*

Soit $a > 0$.

a) On note p_n le n-ième nombre premier. Montrer l'équivalence entre :

i) $\pi(x) \sim a\dfrac{x}{\ln x}$,

ii) $p_n \sim \dfrac{n}{a} \ln n$.

b) Montrer :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{x+1}} \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication. Utiliser la représentation de $\zeta(s)$ comme produit eulérien.

c) On suppose que $\pi(x) \sim a\dfrac{x}{\ln x}$. Montrer que $a = 1$.

111. a) En utilisant la formule de Legendre rappelée dans l'exercice précédent, montrer :

$$\sum_{p \leq x,\ p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p} \underset{+\infty}{\sim} \ln x \ .$$

b) En déduire :

$$\sum_{p \in \mathcal{P},\ p \leq n} \frac{1}{p} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln x) \ .$$

112. (***) Soit, si $k \in \{1, \ldots, n\}$, $r_{k,n}$ le reste de la division euclidienne de n par k. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que le nombre de $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$\frac{r_{k,n}}{n} < \alpha$$

est équivalent, lorsque $n \to +\infty$, à

$$n \int_0^1 \frac{1 - x^\alpha}{1 - x} \mathrm{d}x \ .$$

113. *Entiers sans facteurs carrés*
Soit $q(x)$ le nombre de $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq x$ et que k ne soit divisible par aucun carré de nombre premier. Montrer que :

$$q(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{\pi^2} x.$$

114. *Entiers premiers entre eux*
Soit $f(x)$ le nombre de couples (k, l) de $\mathbb{N}^{*2}*$ tels que $k \leq x$, $l \leq x$ et k et l premiers entre eux. Montrer :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{\pi^2} x^2.$$

115. Soit G l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ dont le plus grand diviseur premier est $> \sqrt{n}$. Donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$|G \cap [1, x].$$

6 Divers

116. (**) *Développement d'une somme de Riemann*
Si f est C^1 sur $[0, 1]$, donner un développement à la précision $o(1/n)$ de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) .$$

Généraliser.

117. Si f est C^1 sur $[0, 1]$, donner un développement asymptotique à la précision $o(1)$ de :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Généraliser.

118. (**) Soient f, g et h trois fonctions sur $[0, 1]$ et :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \times g\left(\frac{k^2}{n^2}\right) \times h\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

On suppose g continue, f et h dérivables en 0. Etudier le comportement de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

119. Trouver un équivalent de

$$u_n = \sum_{0 < s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq n} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} .$$

120. Trouver un équivalent du nombre α_n de cycles dans $\mathcal{S}_n$.

121. (**) Donner un équivalent simple de

$$un = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k .$$

122. Donner un équivalent simple de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor.$$

123. (**) Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n^2+k}{n^2-k} \right) = e + \frac{e}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

124. *Nombres de Bernoulli*

a) Trouver un équivalent du n-ième coefficient de Taylor de $\dfrac{x}{e^x - 1}$ en 0.

b) Généraliser. En particulier, montrer que tan est développable en série entière en 0 et déterminer un équivalent du n-ième coefficient de Taylor.

125. *Marche de l'ivrogne*

Soit $a > 0$. Trouver un équivalent, quand $n \to +\infty$, de :

$$\sum_{|k| \leq a\sqrt{n}} \binom{2n}{n+k}.$$

Cet exercice est motivé par le problème de la « marche de l'ivrogne » ; si un mobile se déplace sur $\mathbb{Z}$ en faisant des pas de 1 ou -1 en partant de 0, il se trouve, au bout de $2n$ pas, à la position $2k$ (où $|k| \leq n$) avec la probabilité

$$\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n+k}.$$

126. Trouver un équivalent de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}.$$

127. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{\alpha}.$$

128. *Nombres de Bell ordonnés*

Si $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-combinaison toute suite ordonnée $(P_1, \dots, P_j)$ de $\{1, \dots, n\}$ telle que :

- $1 \leq j \leq n$,
- $P_1 \cup \dots \cup P_j = \{1, \dots, n\}$,
- $P_i \neq \emptyset$ si $1 \leq i \leq j$,
- $P_i \cap P_k = \emptyset$ si $i \neq k$ et $1 \leq i, k \leq j$.

Soit a_n le nombre de n-combinaisons.

a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer :

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} j! \binom{n}{j}.$$

b) On convient que $a_0 = 1$. Montrer, si $|x| < \ln 2$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}.$$

c) Trouver un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.