DM n° 12 : Analyse (révisions)

Problème 1 –

Le but de ce problème est de décrire une méthode permettant de calculer les racines réelles d'un polynôme P d'une variable réelle. Le problème est décomposé en trois parties. La première partie est consacrée à l'étude d'une fonction construite à partir de P appelée fonction d'exclusion, la seconde partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines de P soient contenues dans l'intervalle $[-R, R]$. La dernière partie est consacrée à l'étude d'un algorithme qui utilise la fonction d'exclusion présentée dans la première partie. cet algorithme permet de calculer une approximation aussi fine que l'on veut de toutes les racines réelles du polynôme P.

Partie I – Fonction d'exclusion associée à un polynôme

Soit n un entier strictement positif et $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ nombres réels avec a_n différent de 0. On considère le polynôme de degré n défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n x^k$. On notera Z l'ensemble fini des racines réelles de P, que l'on suppose non vide.

1. Soit x un réel **fixé**, on considère la fonction polynomiale qui à t réel associe $M(x,t)$ définie par :
$$M(x,t) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} t^k.$$
Montrer que cette fonction est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et en déduire l'existence d'un unique réel positif pour lequel cette fonction s'annule. Comme ce réel dépend de x, on le notera $m(x)$, et on aura donc $M(x, m(x)) = 0$, soit :
$$|P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^k = 0. \tag{1}$$
2. On choisit pour P le polynôme défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 1$. Montrer que :
$$m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}.$$
Montrer que la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui à x associe $m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Montrer que pour les trois points -1, 0 et 1, la fonction est dérivable à gauche et à droite.

On va désormais étudier, pour un polynôme P quelconque mais non constant, les propriétés de la fonction m qui à x associe $m(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction qui est bien définie, d'après la première question, est appelée la fonction d'exclusion associée au polynôme P. Nous montrerons dans la question I-5 la propriété caractéristique de cette fonction.

3. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que $m(x) = 0$ si et seulement si $P(x) = 0$.
4. Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a :
$$|P(y)| \geqslant |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} |y - x|^k = M(x, |y - x|).$$
Soit x tel que $P(x)$ est non nul, montrer que pour tout y tel que $|y - x| < m(x)$, $M(x, |y - x|) > 0$ et donc que $P(y)$ est aussi non nul.
5. Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note
$$d(x, Z) = \min_{z \in Z} |x - z|.$$
Montrer en utilisant la question précédente que pour tout x réel, $m(x) \leqslant d(x, Z)$.

6. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et x appartenant à $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que $m(x) > \varepsilon$. Montrer que
   $$M(x, m(x) + \varepsilon) < 0 < M(x, m(x) - \varepsilon).$$
   Montrer également qu'il existe η strictement positif tel que pour tout y tel que $|x - y| < \eta$,
   $$M(y, m(x) + \varepsilon) < 0.$$
   (b) En déduire que la fonction m est continue sur $\mathbb{R}$.
7. On désire maintenant étudier la dérivabilité de m, ce que nous allons faire en distinguant plusieurs cas.
   (a) Soit x et h appartenant à $\mathbb{R}$, h étant différent de 0, montrer que
   $$\frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k = 0.$$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $\sigma(a)$ la fonction qui vaut $+1$ si a est positif, et -1 sinon. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $P^{(k)}(x)$ est non nul pour tout k compris entre 0 et $n-1$, déduire de la question précédente que la fonction m est dérivable en x et que :
   $$m'(x) = \frac{P'(x)\sigma(P(x)) - \sum\limits_{k=2}^{n} P^{(k)}(x)\sigma(P^{(k-1)}(x)) \frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum\limits_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)| \frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}}.$$
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \neq 0$, et tel qu'il existe au moins un entier dans $[\![1, n-1]\!]$ tel que $P^{(k)}(x) = 0$. Montrer que m est dérivable à gauche et à droite en x, mais pas nécessairement dérivable en x.
   (d) On suppose désormais, et jusqu'à la fin de la partie I, que toutes les racines de P sont simples, donc telles que $P'(x) \neq 0$. Soit x l'une de ces racines. Calculer la limite de $\dfrac{m(x+h) - m(x)}{h}$ quand h tend vers 0 par valeurs négatives et par valeurs positives.
   En déduire que m est dérivable à gauche et à droite en x, et déterminer $m'_g(x)$ et $m'_d(x)$.
8. Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a :
   $$|m(y) - m(x)| \leqslant |y - x|.$$
   On pourra, sans perte de généralité, supposer que $x \leqslant y$ et distinguer les cas où m est dérivable sur $]x, y[$ ou non.
9. On admet l'existence de :
   $$m_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{m(x)}{|x|} \qquad \text{et} \qquad m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{m(x)}{|x|}.$$
   (a) Montrer, en utilisant la formule (1), que :
   $$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_-^k = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_+^k = 0.$$
   (b) En déduire m_- et m_+.
10. Montrer qu'il existe une constante α_n strictement positive telle que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
   $$\alpha_n d(x, Z) \leqslant m(x).$$
   On étudiera pour cela la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m(x)}{d(x, Z)} & \text{si } x \notin Z \\ 1 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Partie II – Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P

Cette partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines du polynôme P soient contenues dans l'intervalle $[-R, R]$. On note

$$x_0 = \max_{x \in Z} |x|,$$

et on supposera désormais que $a_n = 1$ et que les n réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ne sont pas tous nuls.

1. Soit Q la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$Q(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k.$$

   Montrer l'existence d'un unique réel strictement positif pour lequel cette fonction s'annule.

2. Montrer que si r est un réel strictement positif tel que $Q(r)$ est aussi strictement positif, alors on a $x_0 \leqslant r$.

3. Montrer que : $x_0 \leqslant \max\left(1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

4. Montrer également que :

$$x_0 \leqslant |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|.$$

   On pourra utiliser pour cela le polynôme défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $(x-c)P(x)$, où c est une constante convenablement choisie.

5. Montrer enfin que si on suppose que tous les a_k pour k variant de 0 à $n-1$ sont strictement positifs, on a

$$x_0 \leqslant \max\left(2|a_{n-1}|, 2\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}, \ldots, 2\frac{|a_1|}{|a_2|}, \frac{|a_0|}{|a_1|}\right).$$

6. Donner un exemple de polynôme pour lequel la question II-4 donne une meilleure estimation de x_0 que la question II-5.

   Donner de même un exemple de polynôme pour lequel la question II-5 donne une meilleure estimation de x_0 que la question II-4.

Partie III – Algorithme d'exclusion

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que P a au moins une racine réelle et que ses racines sont toutes simples. On note $x_1, \ldots, x_p$ ($p \leqslant n$) les racines 2 à 2 distinctes de P, de sorte que

$$Z = \{x_1, \ldots, x_p\}.$$

En utilisant α_n introduit dans la question I-10, on note pour $i \in [\![1, p]\!]$:

$$B_{i,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha_n}\}.$$

On note enfin

$$Z_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{p} B_{i,\varepsilon}.$$

Dans cette dernière partie, on utilise les résultats des parties I et II pour construire un ensemble F_ε tel que

$$Z \subset F_\varepsilon \subset Z_\varepsilon.$$

On choisit R tel que Z soit inclus dans $[-R, R]$ et on construit une suite de réels $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

(i) On pose $y_0 = -R$ et $F_{0,\varepsilon} = \varnothing$.

(ii) • *Si $m(y_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on pose $y_1 = y_0 + m(y_0)$ et $F_{1,\varepsilon} = \varnothing$.*

- *Sinon on cherche le plus petit entier k strictement positif tel que $m(y_0+k\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et on pose $y_1 = y_0 + k\varepsilon$. On définit alors :*

$$F_{1,\varepsilon} = \begin{cases} F_{0,\varepsilon} \cup [y_0, y_1 - m(y_1)] & \text{si } y_0 \leqslant y_1 - m(y_1) \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Plus généralement, pour n supérieur ou égal à 1 :

- *Si $m(y_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on pose :*

$$y_{n+1} = y_n + m(y_n) \qquad \text{et} \qquad F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon},$$

- *sinon, on recherche le plus petit entier k strictement positif tel que $m(y_n+k\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et on pose*

$$y_{n+1} = y_n + k\varepsilon.$$

On définit alors :

$$F_{n+1,\varepsilon} = \begin{cases} F_{n,\varepsilon} \cup [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})] & \text{si } y_n \leqslant y_{n+1} - m(y_{n+1}), \\ F_{n,\varepsilon} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un entier n_0 pour lequel $y_{n_0} > R$.
2. Montrer en utilisant I-4 que $Z \subset F_{n_0,\varepsilon}$.
3. Montrer en utilisant I-8 et I-10 que l'on a $F_{n_0,\varepsilon} \subset Z_\varepsilon$.
4. Comment peut-on adapter cet algorithme si l'on ne connait que des valeurs approchées à un certain η près des $m(y_n)$, pour n compris entre 0 et n_0 ?

L'idée d'un tel algorithme a été proposée par Jean-Pierre Dedieu et Jean-Claude Yacoubsohn. Il fournit un moyen efficace de calculer une bonne approximation des racines du polynôme et s'étend aussi au cas où P a des racines multiples. Il demande seulement de calculer une approximation des valeurs de la fonction m, ce qui est très simple cas la fonction introduite en I-1 est strictement décroissante

5. **Programmation (vous avez droit à un ordinateur)**

   On représentera informatiquement un polynôme $\sum\limits_{k=0}^{d} a_i X^i$ sous forme de la liste $[a_0, \ldots, a_d]$ de ses coefficients. Toutes les fonctions sont à écrire en Python. On prendra soin à bien commenter le code, de sorte à le rendre facilement compréhensible à la lecture.

   (a) Écrire une fonction `derivepoly(P)` prenant en argument un polynôme P, et retournant le polynôme P'.

   (b) Écrire une fonction `evaluepoly(P,x)` prenant en argument un polynôme P et un réel x, et retournant la valeur de $P(x)$. On utilisera pour ce faire l'algorithme de Hörner.

   (c) Écrire une fonction `M(P,x)` prenant en argument un polynôme P et un réel x, et retournant la liste des coefficients du polynôme $t \mapsto M(x,t)$ en la variable t.

   (d) Écrire une fonction `m(P,x,eta)` prenant en argument un polynôme P et deux réels x et `eta`, et retournant une valeur approchée de $m(x)$ à `eta` près. On pourra commencer par déterminer un intervalle de longueur 1 contenant $m(x)$, en effectuant un balayage de $\mathbb{R}_+$, puis utiliser un procédé vu en cours d'informatique.

   (e) Écrire une fonction `approcheracines(P,eps)` prenant en argument un polynôme P (supposé à racines simples) et un réel `eps` , et retournant la liste des bornes successives des intervalles dont est formé $F_{n_0,\varepsilon}$.