FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tous les exercices, K désigne un corps commutatif.

Exercice 1. [$\star$]

Lorsque α est un pôle d'une fraction rationnelle F, on appelle *résidu* de F en α, le coefficient de l'élément simple $1/(X-\alpha)$ dans la décomposition de F.

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Démontrer que F admet une primitive dans $\mathbb{C}(X)$ si, et seulement si, tous les résidus de F sont nuls.

Ce résultat reste-t-il vrai pour une fraction rationnelle réelle ?

Exercice 2. [$\bigstar$]

Dans le cours, nous avons dit que deux fractions rationnelles F et $G = A/S$ sont composables lorsque $S \circ F \neq 0$. Démontrer que cette condition est en fait équivalente à l'assertion « F n'est pas une fraction rationnelle constante égale à une racine de S ».

Exercice 3. [$\star$]

Soit F une fraction rationnelle sur K de représentant irréductible A/S. Démontrer que F est paire si, et seulement si, A et S sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Exercice 4. [$\bigstar$]

Soit F une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ non constante dont A/S est un représentant irréductible. On note $\widetilde{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction rationnelle associée.

1. Déterminer $\widetilde{F}(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\})$ dans le cas où il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = \alpha S + \beta$. *On distinguera le cas $\beta = 0$ des autres cas.*
2. Déterminer $\widetilde{F}(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\})$ dans le cas où il n'existe pas de couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = \alpha S + \beta$. Que dire dans ce cas ?
3. Application : Trouver tous les couples $(F, G) \in \mathbb{C}(X)^2$ tels que $G \circ F$ est un polynôme.

Exercice 5. [$\circ$]

Soient $n \geqslant 1$ et

$$F = \frac{\alpha_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - a_n} \in \mathbb{C}(X)$$

où les a_i sont deux à deux distincts et les α_i sont non nuls.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $F = P'/P$ et lorsque cette condition est remplie, préciser tous les polynômes P qui conviennent.

Exercice 6. [$\star$]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $P'^2 - P''P$ n'a pas de racines réelles.