Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

POLYNÔMES

Exercice 1.

On pose $j = e^{2i\pi/3}$ de sorte que $j^2 = \overline{j} = 1/j$ et $j^2 + j + 1 = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le plan complexe, sur quelle figure simple sont placées les images des solutions de l'équation $z^n = 1$? Même question avec les solutions de l'équation $(z+1)^n = 1$. En déduire les deux valeurs que peut prendre z s'il est solution des deux équations $z^n = 1$ et $(z+1)^n = 1$.
2. Soit E l'ensemble des valeurs de $n \geqslant 1$ pour lesquelles P_n admet au moins une racine multiple complexe.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n admet admet au moins une racine multiple $z_0 \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles de z_0 ?
   b) En déduire que $E = 6\mathbb{N}^*$.
   c) Calculer $P_n \wedge P_n'$ selon que $n \in E$ ou $n \notin E$.
3. a) Factoriser P_6 sur $\mathbb{C}$.
   b) Démontrer que si n est divisible par 6 alors P_6 divise P_n.
   c) Déterminer la valeur de $P_6 \wedge P_n$ selon la classe de congruence de n modulo 6. *On fera un tableau récapitulatif.*
4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $r = m \wedge n$.
   a) Démontrer que les racines de P_n' sont simples.
   b) Démontrer que $\forall Z \in \mathbb{C},\ (Z^m = 1 \text{ et } Z^n = 1) \Longleftrightarrow (Z^r = 1)$ et en déduire que

   $$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \big(P_m'(z) = 0 \text{ et } P_n'(z) = 0\big) \Longleftrightarrow \big(P_r'(z) = 0\big).$$

   c) En déduire $P_m' \wedge P_n'$.