Exercices corrigés sur la démonstration par récurrence

Principe de récurrence simple

L'objectif du premier exercice corrigé est de faire le point sur la rédaction d'une démonstration par récurrence.

Exercice

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

- *Quand utilise-t-on une démonstration par récurrence ?*

- *Quand utilise-t-on une démonstration par récurrence ?*

  Très souvent lorsqu'on veut démontrer une propriété valable pour tout entier naturel (au moins à partir d'un certain rang).

- *Quand utilise-t-on une démonstration par récurrence ?*

  Très souvent lorsqu'on veut démontrer une propriété valable pour tout entier naturel (au moins à partir d'un certain rang).

- *Quand n'utilise-t-on pas de démonstration par récurrence ?*

- *Quand utilise-t-on une démonstration par récurrence ?*

  Très souvent lorsqu'on veut démontrer une propriété valable pour tout entier naturel (au moins à partir d'un certain rang).

- *Quand n'utilise-t-on pas de démonstration par récurrence ?*

  Lorsqu'une propriété commence par $\forall n$, c'est souvent une bonne idée d'essayer une démonstration par récurrence **sauf** si la propriété est elle-même une relation de récurrence. On retiendra qu'

une relation de récurrence ne se prouve pas par récurrence mais peut servir dans une démonstration par récurrence

- On commence par donner un nom à la propriété que l'on va démontrer par récurrence (c'est-à-dire **tout** ce qui se trouve après le $\forall n$).

- On commence par donner un nom à la propriété que l'on va démontrer par récurrence (c'est-à-dire **tout** ce qui se trouve après le $\forall n$).

  Ainsi, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

- On commence par donner un nom à la propriété que l'on va démontrer par récurrence (c'est-à-dire **tout** ce qui se trouve après le $\forall n$).

  Ainsi, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Attention !

- On commence par donner un nom à la propriété que l'on va démontrer par récurrence (c'est-à-dire **tout** ce qui se trouve après le $\forall n$).

  Ainsi, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Attention !

$$\boxed{\text{Le } \forall n \text{ ne doit jamais être dans la propriété } \mathcal{P}(n).}$$

- Initialisation :

- <u>Initialisation :</u>

  On commence par démontrer la propriété à son premier rang.

- Initialisation :

  On commence par démontrer la propriété à son premier rang.

  Attention, ici, le premier rang est 1 (et non 0).

- Initialisation :

  On commence par démontrer la propriété à son premier rang.

  Attention, ici, le premier rang est 1 (et non 0).

  Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1^2} = \frac{1}{2},$$

  donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité :

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

- <u>Hérédité :</u>

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n)\end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u>

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \underbrace{- \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}}_{\geqslant 0}
\end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u>

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \underbrace{- \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u>

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \underbrace{- \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- <u>Conclusion :</u>

- <u>Conclusion :</u>

  En vertu du principe de récurrence, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.}$$

Principe de récurrence double

Nous allons illustrer, à travers un exemple, l'application du principe de récurrence double.

Exercice

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ *et la relation de récurrence* $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

- *Quelles sont les caractéristiques d'une récurrence double ?*

- *Quelles sont les caractéristiques d'une récurrence double ?*

  L'initiatilisation consiste à vérifier la propriété que l'on veut démontrer au **deux** premiers rangs.

- *Quelles sont les caractéristiques d'une récurrence double ?*

  L'initiatilisation consiste à vérifier la propriété que l'on veut démontrer au **deux** premiers rangs.

  Pour l'hérédité, on fixe l'entier n, on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ et on la démontre au rang $n+2$.

- *Dans notre exercice, pourquoi doit-on penser à utiliser une récurrence double ?*

- *Dans notre exercice, pourquoi doit-on penser à utiliser une récurrence double ?*

  Parce que la suite est définie par une relation de récurrence qui détermine un terme en fonction des **deux** précédents !

- *Dans notre exercice, pourquoi doit-on penser à utiliser une récurrence double ?*

  Parce que la suite est définie par une relation de récurrence qui détermine un terme en fonction des **deux** précédents !

- *Que faire si l'on ne pense pas immédiatement à faire une récurrence double ?*

- *Dans notre exercice, pourquoi doit-on penser à utiliser une récurrence double ?*

  Parce que la suite est définie par une relation de récurrence qui détermine un terme en fonction des **deux** précédents !

- *Que faire si l'on ne pense pas immédiatement à faire une récurrence double ?*

  Ce n'est pas grave !

- *Dans notre exercice, pourquoi doit-on penser à utiliser une récurrence double ?*

  Parce que la suite est définie par une relation de récurrence qui détermine un terme en fonction des **deux** précédents !

- *Que faire si l'on ne pense pas immédiatement à faire une récurrence double ?*

  Ce n'est pas grave !

  On va s'en rendre compte pendant l'étape d'hérédité et il suffira juste de revenir en arrière pour modifier l'initialisation et le début de l'hérédité.

- Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

- Initialisations :

- <u>Initialisations :</u>

  On a $u_0 = 1$ et $\left(\dfrac{5}{3}\right)^0 = 1$, donc $u_0 \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^0$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- <u>Initialisations :</u>

  On a $u_0 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$, donc $u_0 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^0$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  On a $u_1 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3} \geqslant 1$, donc $u_1 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^1$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- <u>Hérédité :</u>

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

- <u>Hérédité :</u>

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que les assertions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

  $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{par définition de la suite}$$

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que les assertions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad \text{par définition de la suite} \\ &\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \end{aligned}$$

- Hérédité :

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que les assertions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad \text{par définition de la suite} \\ &\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\ &= \frac{24}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \quad \begin{array}{l}\text{on force l'apparition} \\ \text{de l'exposant } n+2\end{array} \end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u>

  Fixons $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que les assertions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad \text{par définition de la suite} \\
&\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\
&= \frac{24}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \quad \begin{array}{l}\text{on force l'apparition} \\ \text{de l'exposant } n+2\end{array} \\
&\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}
\end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u>

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que les assertions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad \text{par définition de la suite} \\ &\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\ &= \frac{24}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \quad \begin{array}{l}\text{on force l'apparition} \\ \text{de l'exposant } n+2\end{array} \\ &\leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- Conclusion :

- Conclusion :

  En vertu du principe de récurrence double, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n.}$$