

RELATIONS

Exercice 1. [$\star$]

Remplir le tableau suivant en donnant, à chaque fois, un exemple de relation (sur un ensemble non vide) satisfaisant les conditions indiquées par des ✓ :

	réflexive	transitive	symétrique	antisymétrique	exemple
1	✓	✓	✓	✓	
2	✓	✓	✓		
3	✓	✓		✓	
4	✓		✓	✓	
5		✓	✓	✓	
6	✓	✓			
7	✓		✓		
8	✓			✓	
9		✓	✓		
10		✓		✓	
11			✓	✓	
12	✓				
13		✓			
14			✓		
15				✓	
16					

Exercice 2. (Clôtures)

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.

1. On considère la *clôture réflexive* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\overline{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \overline{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ ou } x = y).$$

   a) Démontrer que $\overline{\mathscr{R}}$ est réflexive.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est transitive, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   d) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est antisymétrique, alors $\overline{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

2. On considère la *clôture symétrique* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\widetilde{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\widetilde{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ et } y \,\mathscr{R}\, x).$$

   a) Démontrer que $\widetilde{\mathscr{R}}$ est symétrique.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est réflexive, alors $\widetilde{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est transitive, alors $\widetilde{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

3. On considère la *clôture transitive* de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la relation $\widehat{\mathscr{R}}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\widehat{\mathscr{R}}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 = x \text{ et } \forall i \in [\![0; n-1]\!]\,,\ a_i \,\mathscr{R}\, a_{i+1} \text{ et } a_n = y).$$

   a) Démontrer que $\widehat{\mathscr{R}}$ est transitive.
   b) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est réflexive, alors $\widehat{\mathscr{R}}$ l'est aussi.
   c) Démontrer que, si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $\widehat{\mathscr{R}}$ l'est aussi.

Exercice 3. [$\circ$] (Produit de deux relations d'équivalence)

Soient E, F deux ensembles, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et $\mathscr{S}$ une relation d'équivalence sur F. On considère la relation $\mathscr{T}$ sur $E \times F$ définie par

$$\forall (x, y), (a, b) \in E \times F, \qquad \big((x, y) \,\mathscr{T}\, (a, b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \,\mathscr{R}\, a \text{ et } y \,\mathscr{S}\, b\big).$$

Démontrer que $\mathscr{T}$ est une relation d'équivalence sur $E \times F$.

Exercice 4. [$\circ$] (Conjonction et disjonction de relations d'équivalence)

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$, $\mathscr{S}$ deux relations déquivalence sur E.

1. On considère la relation $\mathscr{C}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\mathscr{C}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ et } x \,\mathscr{S}\, y)$$

   Est-ce une relation d'équivalence ?

2. On considère la relation $\mathscr{D}$ sur E définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \,\mathscr{D}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\mathscr{R}\, y \text{ ou } x \,\mathscr{S}\, y)$$

   Est-ce une relation d'équivalence ?

Exercice 5. [$\circ$]

On appelle *idiôme* un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ tel que E est fini et admet un plus petit et un plus grand élément. Déterminer les diagrammes de Hasse de tous les idiômes de cardinal inférieur ou égal à 5.

Exercice 6. [∘]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère la relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x \leqslant_f y) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(|y-x| \leqslant f(y) - f(x)\big).$$

1. Vérifier que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre.
2. Démontrer que $\leqslant_f$ est totale si, et seulement si, la fonction f est une dilatation, c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$.
3. Reconnaître $\leqslant_f$ lorsque $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7. [⋆] (Ordre produit)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \curlyeqprec)$ deux ensembles ordonnés. On considère l'*ordre produit* $\lll$ sur $E \times F$ défini par

$$\forall (x,y), (a,b) \in E \times F, \qquad \big((x,y) \lll (a,b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \preccurlyeq a \text{ et } y \curlyeqprec b).$$

1. Démontrer que $\lll$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.
2. On suppose de plus que $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \curlyeqprec)$ sont totalement ordonnés et qu'ils possèdent tous les deux au moins deux éléments. L'ordre produit $\lll$ est-il un ordre total sur $E \times F$?

Exercice 8. [⋆] (Ordre lexicographique)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \curlyeqprec)$ deux ensembles ordonnés (on note $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$). On considère l'*ordre lexicographique* $\ll$ sur $E \times F$ défini par

$$\forall (x,y), (a,b) \in E \times F, \qquad \big((x,y) \ll (a,b)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big((x \prec a) \text{ ou } (x = a \text{ et } y \curlyeqprec b)\big).$$

1. Démontrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.
2. On suppose de plus que $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \curlyeqprec)$ sont totalement ordonnés. Démontrer que l'ordre lexicographique $\ll$ est un ordre total sur $E \times F$.

Exercice 9. [⋆]

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède à la fois un plus petit et un plus grand élément. Démontrer que E est fini et totalement ordonné.

Exercice 10. [∘]

On appelle *treillis* tout ensemble ordonné dans lequel toute partie à deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1. Soit E un ensemble. Démontrer que $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ est un treillis.
2. Démontrer que tout ensemble totalement ordonné est un treillis.

Le nom de « treillis » attribué à ce type d'ensemble ordonné est justifié par la forme de leur diagramme de Hasse.

Exercice 11. [⋆] (Inégalité du minimax)

On dispose les élèves du lycée Henri IV en un rectangle de n lignes et p colonnes (avec $n, p \geqslant 2$).

On repère le plus grand élève de chaque ligne et on retient le plus petit de ces plus grands. On note x sa taille.

On repère ensuite le plus petit élève de chaque colonne et on retient le plus grand de ces plus petits. On note y sa taille.

Comparer x et y. Donner un exemple où il n'y a pas égalité.