Exercice 1

Soient $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x \in [0,1]$, $P_0(x) = Q_0(x) = 0$ et :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \begin{cases} P_i(x) = \left(1 - x + \int_0^x Q_{i-1}(z)dz\right)^2 \\ Q_i(x) = 1 - \left(1 - \int_0^x P_{i-1}(z)dz\right)^2 \end{cases}$$

Calculer la limite :

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(1 - x + \int_0^x Q_k(z)dz\right)^3 dx$$

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre ces deux propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad (detP(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0) \tag{2}$$

Déroulement de l'épreuve et commentaires

L'examinateur me donne le premier exercice sur un bout de papier et me demande de le recopier au tableau avant de le reprendre. Il me donne dix minutes pour y réfléchir pendant lesquelles il ne me parle pas et ne fait pas vraiment attention à ce que j'écris. Après le temps de préparation, je lui montre que j'ai démontré par récurrence que les suites (P_i) et (Q_i) sont à valeurs dans $[0,1]$, j'ai calculé P_1, P_2, Q_1, Q_2, et j'ai séparé les définitions des suites (elles peuvent être définies par une récurrence d'ordre 2). Ce dernier résultat s'est avéré inutile par la suite.
Comme je n'ai pas d'idée concernant la direction à prendre, il me conseille de chercher le plus d'informations sur ces suites. J'essaie d'étudier les monotonies et régularités des objets en question. De fil en aiguille je montre que $\forall i$, P_i est décroissant avec $P_i(0) = 1$, et Q_i est croissant avec $Q_i(0) = 0$. Puis par récurrence $P_{i+1} \geqslant P_i$ et $Q_{i+1} \geqslant Q_i$. On en déduit immédiatement que ces suites convergent simplement.
Tandis que je réfléchis à un moyen de montrer qu'elles convergent uniformément, l'examinateur me propose d'admettre temporairement ce résultat et d'étudier la suite. Je note P et Q les limites uniformes, qui vérifient donc : $P(x) = (1 - x + \int_0^x Q)^2$, $Q(x) = 1 - (1 - \int_0^x P)^2$. Ce sont des équations intégrales, je propose de les dériver pour obtenir des équations différentielles, mais elles sont non linéaires et ne mènent à rien.
L'examinateur me propose de poser $f : x \mapsto 1 - x + \int_0^x Q$ et $g : x \mapsto 1 - \int_0^x P$. Ces fonctions vérifient des équations différentielles un peu plus propres. En dérivant deux fois, je montre qu'elles vérifient la même équation, et en étudiant les conditions initiales, j'en déduit qu'elles sont égales.
Je m'arrête là pour cet exercice, l'examinateur me fait passer au suivant.

L'examinateur m'a laissé très peu de temps pour faire le second exercice. Cette fois l'énoncé était donné à l'oral, et soit l'examinateur a fait une erreur, soit j'avais mal entendu, car j'ai noté pour la première proposition "P *a* une racine rélle". J'ai donc réfléchi quelque temps, puis je lui ai dit que je ne voyais pas de sens évident. Il me propose de montrer $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Comme je ne trouve toujours rien, il finit par se rendre compte de l'erreur, et donc après correction je trouve immédiatement un contre-exemple. Mais l'oral se termine là, donc j'ai à peine entamé l'exercice.

L'examinateur était assez neutre. Contrairement à son collègue de mon épreuve de Maths Lyon, il était assez rigoureux et me demandait de justifier chacune de mes affirmations pour vérifier que je savais ce que je faisais. Il donnait des chocolats à la fin.
Il y avait une climatisation dans la salle, certes bruyante mais bienvenue après une heure d'attente dans un couloir où l'effet de serre était intense, et où la salle d'attente se composait d'une unique chaise en face du bureau de Thomas Blomme.