CONTINUITÉ

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- la théorie des applications ;
- la droite réelle ;
- les limites de suites ;
- les limites de fonctions.

Par défaut, dans ce cours, les lettres I et J désignent de « vrais » intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'ils sont non vides et non réduits à un point. On dit que ce sont des intervalles d'intérieur non vide.

Dans tout ce chapitre, à l'exception de la section D., les fonctions considérées sont réelles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Continuité

A.1. Continuité locale

a) Continuité en un point

Définition 1

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite ne peut être que $f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad \big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon\big)$$

ou encore

$$\forall W_{f(a)} \in \mathscr{V}_{f(a)}, \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a, \qquad f(V_a \cap \mathscr{D}) \subset W_{f(a)}$$

où $\mathscr{V}_a$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{V}_{f(a)}$ l'ensemble des voisinages de $f(a)$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie !!

Il existe encore une autre façon d'exprimer la continuité de f en a : pour qu'une fonction soit continue en a, il faut vérifier que la restriction de f à $\mathscr{D} \setminus \{a\}$ tend vers $f(a)$ en a, ce que l'on a l'habitude d'écrire sous la forme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Si l'on modifie la fonction f en dehors d'un voisinage de a, la continuité de f en a n'est pas modifiée. Cela traduit le caractère local de la continuité d'une fonction en un point.

Il n'est pas inutile de savoir écrire, avec des quantificateurs, la discontinuité d'une fonction f en un point a. Cela donne

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x_\eta \in \mathscr{D}, \qquad \big(|x_\eta - a| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x_\eta) - f(a)| > \varepsilon_0\big)$$

<u>Exemples :</u>

- Dans le cours sur les limites, nous avons considéré acquis le fait que toutes les fonctions de référence, sauf la partie entière, admettent une limite finie en tout point de leur ensemble de définition (nous avons fait la démonstration dans le cas de la fonction sin).

  Toutes les fonctions de référence (sauf la partie entière) sont donc continues en tout point de leur ensemble de définition.
- Si $\mathscr{D} = \{a\}$, f est nécessairement continue en a.

  Par exemple, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{-x}$, qui est définie sur $\{0\}$, est continue en 0.

  Ce cas, qui semble sans intérêt, est utile pour valider certains théorèmes (ex : une somme de fonctions continues en a est continue en a).
- Dans le même genre de bizarrerie, une suite est continue en tout $n \in \mathbb{N}$.
- La fonction partie entière n'est pas continue en $m \in \mathbb{Z}$ puisqu'elle n'admet pas de limite finie en un tel point (les limites à gauche et à droite sont différentes).
- La fonction indicatrice des nombres rationnels $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

  Démontrons le. Soit $a \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon_0 = 1/2$. Pour tout $\eta > 0$, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ nous dit qu'il existe $x'_\eta \in \mathbb{Q}$ et $x''_\eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $|x'_\eta - a| \leqslant \eta$ et $|x''_\eta - a| \leqslant \eta$. Si $a \in \mathbb{Q}$, on a $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x''_\eta) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)| = 1 \geqslant \varepsilon_0$ et si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x'_\eta) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)| = 1 \geqslant \varepsilon_0$. Dans les deux cas, on voit que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en a.

Pour les fonctions qui admettent une limite finie en un point où elles ne sont pas définies, on introduit ci-dessous la notion de prolongement par continuité.

Définition 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de a mais pas en a. Si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction

$$\widehat{f}\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{D} \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est continue en a. On l'appelle le prolongement par continuité en a de f et, par abus de notation, on la note encore f (c'est-à-dire que l'on confond f et $\widehat{f}$).

■ La continuité de $\widehat{f}$ en a est facile à établir. ■

Exemples :

- La fonction sinus cardinal définie par

$$\operatorname{sinc}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}\right.$$

  se prolonge par continuité en 0 en posant

$$\operatorname{sinc}(0) = 1.$$

- La fonction $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- $x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ se prolonge par continuité en 1 et son prolongement est $x \longmapsto \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
- Lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$, ce qui permet de prolonger par continuité en 0 la fonction puissance d'exposant α (par la valeur 0).

La définition suivante classifie les différents types de discontinuité.

Définition 3

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$ telle que f est discontinue en a.

Si f admet néanmoins une limite finie à gauche en a (lorsque f est définie à gauche de a) et une limite finie à droite en a (lorsque f est définie à droite de a), on dit que f admet une discontinuité de première espèce en a.

Dans le cas contraire, on dit que f admet une discontinuité de seconde espèce (ou sévère) en a.

Lorsque f admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche en a, on appelle saut de f en a le nombre réel $\sigma(f; a) = \lim_{a^+} f - \lim_{a^-} f$.

Exemples :

- La discontinuité de la partie entière en un point entier est de première espèce. Son saut en un tel point vaut 1.
- L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 1/x$ admet une discontinuité de seconde espèce en 0.

b) Continuité à gauche et à droite

Dans la définition suivante, on dit qu'une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie à droite d'un point a de $\mathscr{D}$ (respectivement à gauche de a) lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a; a+\varepsilon[\subset \mathscr{D}$ (respectivement $]a-\varepsilon; a] \subset \mathscr{D}$).

Définition 4

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$. On dit que f est continue à droite en a (respectivement continue à gauche en a) lorsqu'elle définie à droite de a, qu'elle admet une limite à droite en a et que $\lim_{a^+} f = f(a)$ (respectivement lorsqu'elle est définie à gauche de a, qu'elle admet une limite à gauche en a et que $\lim_{a^-} f = f(a)$).

Lorsque f est seulement définie à droite de a, la continuité de f à droite de a est équivalente à la continuité (tout court) de f en a. Dans ce cas, on parle donc de continuité sans préciser qu'elle est à droite.

De même pour les fonctions qui ne sont définies qu'à gauche de a.

Exemples :

- La partie entière est continue à droite mais n'est pas continue à gauche en $m \in \mathbb{Z}$.
- Pour la racine carrée en 0, il est inutile de préciser que la continuité est à droite puisque, de toute façon, la racine carrée n'est pas définie à gauche de 0.

La proposition suivante fait le lien entre la continuité en un point et les continuités latérales en ce même point.

Proposition 1

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite de a. Alors la fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

■ $\Rightarrow$ Si f est continue en a, elle tend vers $f(a)$ en a. Par suite, $\lim_{a^-} f = f(a)$ et $\lim_{a^+} f = f(a)$, ce qui démontre que f est continue à droite et à gauche en a.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que f est continue à droite et à gauche de a. Elle admet alors une limite à gauche égale à $f(a)$ et une limite à droite égale à $f(a)$. Par suite, d'après le résultat analogue sur les limites, on peut affirmer que f tend vers $f(a)$ en a, c'est-à-dire que f est continue en a. ■

Exemples :

- La valeur absolue $|\cdot|$ est continue à droite et à gauche en 0 donc est continue en 0.
- Posons $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ et considérons $m \in \mathbb{Z}$. Regardons les limites latérales. On a $\lim_{m^-} f = (m-1) + (m-(m-1))^2 = m$ et $\lim_{m^+} f = m + (m-m)^2 = m$. Comme $f(m) = m$, on en déduit que f est continue en m.
- La fonction $f : x \longmapsto \lfloor -|x| \rfloor$ est discontinue en 0 puisque $f(0) = 0$ alors que $\lim_{0^-} f = -1$ et $\lim_{0^+} f = -1$. Pour une telle fonction, le saut en 0 est nul mais il n'y a ni continuité à gauche, ni continuité à droite en 0 car la valeur au point ne correspond pas aux limites latérales.

c) *Encadrement local d'une fonction continue en un point*

Voici la version du lemme du tunnel en terme de continuité.

Lemme 1

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, $a \in \mathscr{D}$ et α, β deux nombres réels. Si f est continue en a et $\alpha < f(a) < \beta$, alors, au voisinage de a, on a $f(x) \in]\alpha; \beta[$.

■ Cela découle du résultat similaire sur les limites. ■

Ce résultat signifie que si f est continue en un point a alors les valeurs de f autour de a restent « proches » de $f(a)$.

Dans la pratique, on utilise principalement ce lemme pour préciser le signe d'une fonction au voisinage d'un point où elle est continue et ne s'annule pas. C'est l'objet de l'exemple qui suit.

Exemples :

- Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$. Si $f(a) > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a. Il suffit de prendre $\alpha = f(a)/2$ dans le lemme précédent pour s'en convaincre.

On peut aussi utiliser ce lemme pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 2

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique et $a \in \mathscr{D}$. Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.

■ Prendre $\alpha = f(a) - 1$ et $\beta = f(a) + 1$ dans le lemme précédent. ■

Attention, la version globale de cet énoncé est fausse ! Une fonction continue sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ n'a aucune raison *a priori* d'être bornée sur $\mathscr{D}$ tout entier.

A.2. Continuité globale

Définition 5

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $\mathscr{D}'$ une partie de $\mathscr{D}$. On dit que f est continue sur $\mathscr{D}'$ lorsque la restriction de f sur $\mathscr{D}'$ est continue en tout point de $\mathscr{D}'$.

On note $\mathscr{C}^0(\mathscr{D}', \mathbb{R})$ (ou $\mathscr{C}(\mathscr{D}', \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathscr{D}'$.

La continuité de f se traduit graphiquement : sur chaque intervalle de l'ensemble de définition, la courbe représentant f peut être dessinée « sans lever le crayon ».

Exemples :

- Les fonctions de références (sauf la partie entière) sont continues sur leurs ensembles de définition.
- Soit $k \geqslant 0$. Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne lorsque

$$\forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

  Une fonction lipschitzienne sur $\mathscr{D}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

  Démontrons le. Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne sur $\mathscr{D}$ et $x_0 \in \mathscr{D}$. Pour tout $y \in \mathscr{D}$, on a $|f(x_0) - f(y)| \leqslant k|x_0 - y|$. Or, quand y tend vers x_0, $|x_0 - y|$ tend vers 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, $f(y)$ tend vers $f(x_0)$ quand y tend vers x_0. Cela démontre la continuité de f en x_0 et, par suite, sur $\mathscr{D}$.
- La partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Suivant l'adage « qui peut le plus peut le moins », une restriction d'une fonction continue est encore continue.

Attention !! La continuité globale est une notion plus subtile qu'il n'y paraît. Ainsi, dire qu'une fonction est continue sur un segment $[a;b]$ signifie qu'elle est continue en tout point de $]a;b[$ mais seulement qu'elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Par exemple, dire que la partie entière est continue sur $[0;1[$ est parfaitement exact (on peut tracer son graphe sans lever le crayon). Cela ne signifie pas que la partie entière est continue en 0 (encore heureux !) mais seulement qu'elle est continue à droite en 0.

Du coup, la continuité est une propriété qui ne passe pas systématiquement à l'union ! Autrement dit, lorsque $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $\mathscr{D}_1$ et sur $\mathscr{D}_2$ (avec $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_2 \subset \mathscr{D}$), on ne peut pas affirmer *a priori* que f est continue sur $\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$!!

Ainsi, la partie entière est continue sur $[0;1[$ et sur $[-1;0[$ mais pas sur $[-1;1[$.

Cependant, si $f : [a;c] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a;b]$ et sur $[b;c]$ (avec $a < b < c$), alors f est continue sur $[a;c]$.

B. Théorèmes généraux de continuité

On regroupe ici les résultats, dits théorèmes généraux, qui permettent de justifier la continuité d'une fonction qui est la composée, la somme, le produit ou le quotient de fonctions continues.

B.1. Composition de la continuité

Théorème 1

Soient $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $u(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}'$ et soit $a \in \mathscr{D}$. Si la fonction u est continue en a (respectivement sur $\mathscr{D}$) et si f est continue en $f(a)$ (respectivement sur $\mathscr{D}'$) alors $f \circ u$ est continue en a (respectivement sur $\mathscr{D}$).

■ C'est la traduction du théorème de composition des limites. ■

Exemples :

- Si $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathscr{D}$ alors $|f|$ est également continue sur $\mathscr{D}$.

B.2. Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathscr{D}$. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ convergeant vers a, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

■ C'est la traduction de la caractérisation séquentielle des limites. ■

Le sens direct de ce résultat justifie qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$, définie par une relation de récurrence du type $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ est une fonction continue, ne peut converger que vers un nombre réel ℓ tel que $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire un point fixe de la fonction f.

Le sens réciproque de ce résultat permet de justifier la discontinuité d'une fonction en un point a. Il suffit pour cela de trouver une suite (u_n) tendant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers $f(a)$.

Exemples :

- La fonction $f : x \longmapsto \sin^2(1/x)$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0 car la suite $\big(f(1/n\pi)\big)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0 (pardi, elle est nulle !) alors que la suite $\big(f\big(1/(\pi + 2n\pi)\big)\big)_{n \geqslant 0}$ tend vers 1 (puisqu'elle vaut 1).

On peut combiner la caractérisation séquentielle de la continuité et celle de la densité pour énoncer le résultat suivant.

Proposition 3

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues. Si f et g coïncident sur une partie D qui est dense dans $\mathscr{D}$, alors f et g sont égales sur $\mathscr{D}$ tout entier.

■ Supposons donc que f et g coïncident sur une partie D qui est dense dans $\mathscr{D}$. Soit $x \in \mathscr{D}$. La caractérisation séquentielle de la densité nous permet d'introduire une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de D qui tend vers x. Comme f et g coïncident sur D, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = g(u_n)$. Comme f et g sont continues en x, un passage à la limite $(n \to +\infty)$ dans cette égalité implique que $f(x) = g(x)$. Donc f et g sont égales sur $\mathscr{D}$ tout entier. ■

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 1$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

  ▷ Commençons par démontrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$. Nous l'avons déjà fait en exercice.
  Comme $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, on a $f(0) = 0$.
  Par ailleurs, une récurrence immédiate permet de justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$, ce qui démontre que f est impaire sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$.
  Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on écrit $r = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ d'où

$$f(r) = \frac{b}{b} f(r) = \frac{1}{b} f(br) = \frac{1}{b} f(a) = \frac{1}{b} a = r.$$

  Cela démontre bien que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.

  ▷ On constate ainsi que f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sont deux fonctions continuent qui coïncident sur $\mathbb{Q}$. La proposition précédente nous dit alors qu'elles coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier, autrement dit que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

$\mathcal{B}$.3. Opérations sur la continuité

Théorème 3

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, $a \in \mathscr{D}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f, g sont continues en a (respectivement sur $\mathscr{D}$), alors

(i) $\lambda f + \mu g$ est continue en a (respectivement sur $\mathscr{D}$) ;

(ii) fg est continue en a (respectivement sur $\mathscr{D}$) ;

(iii) si g ne s'annule pas en a (respectivement sur $\mathscr{D}$), alors f/g est continue en a (respectivement sur $\mathscr{D}$).

■ Cela découle des théorèmes généraux sur les limites. ■

On retiendra qu'une combinaison linéaire, un produit ou un quotient de fonctions continues est continu partout où il est défini. Autrement dit, $\mathscr{C}^0(\mathscr{D}, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathscr{D}}$.

Exemples :

- Soient $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On pose $\max(f, g) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathscr{D},\ \max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. On a

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

donc si f et g sont continues sur $\mathscr{D}$, alors $\max(f, g)$ est continue sur $\mathscr{D}$, d'après les théorèmes généraux de continuité.

On peut faire de même avec $\min(f, g)$.

B.4. Les théorèmes bidons

L'encadré suivant insiste sur le fait que les théorèmes généraux vus précédemment sont des conditions suffisantes de continuité mais pas des conditions nécessaires.

Les théorèmes bidons, c'est pas bon !

Il est tout à fait possible de composer, d'additionner, de multiplier, de quotienter ou de restreindre des fonctions discontinues et d'obtenir une fonction continue !!

Autrement dit, s'il existe bien des théorèmes généraux de continuité, il n'existe par contre aucun théorème général sur la discontinuité !

Exemples :

- Une somme de fonctions discontinues en un point peut très bien être continue en ce même point (il suffit d'ajouter des fonctions discontinues opposées, comme $\lfloor \cdot \rfloor$ et $-\lfloor \cdot \rfloor$).
- Nous avons vu que la fonction $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors qu'elle est construite à l'aide de la partie entière qui présente des discontinuités en chaque entier.
- La partie entière est discontinue en 0 mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ n'est plus discontinue en 0.

2 h 15

C. Continuité sur un intervalle

C.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Voici donc le théorème des valeurs intermédiaires, TVI pour les intimes.

Théorème 4

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, k possède au moins un antécédent par f entre a et b.

■ Supposons, pour fixer les idées, que $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $k \in [f(a); f(b)]$.
Deux démonstrations pour le prix d'une !

- Démonstration par dichotomie (« couper en deux » en grec)

  On pose initialement $a_0 = a$ et $b_0 = b$ de sorte que $f(a_0) \leqslant k \leqslant f(b_0)$.
  On pose $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Si $f(c_0) \geqslant k$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$. Si $f(c_0) < k$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$. Dans les deux cas, on a $f(a_1) \leqslant k \leqslant f(b_1)$.
  On pose $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Si $f(c_1) \geqslant k$, on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = c_1$. Si $f(c_1) < k$, on pose $a_2 = c_1$ et $b_2 = b_1$. Dans les deux cas, on a $f(a_2) \leqslant k \leqslant f(b_2)$.
  Etc.
  On construit ainsi par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ croît, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, $(b_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $1/2$ et $\forall n \geqslant 0,\ f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
  Les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont alors adjacentes, ce qui impliquent qu'elles convergent vers une même limite $c \in [a; b]$.
  Comme f est continue, les suites $\big(f(a_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(f(b_n)\big)_{n\geqslant 0}$ convergent vers $f(c)$. En passant à la limite dans $\forall n \geqslant 0,\ f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$, on obtient $f(c) \leqslant k \leqslant f(c)$, c'est-à-dire $f(c) = k$.

- Démonstration par la propriété de la borne supérieure

  Si $k = f(a)$ ou $k = f(b)$, alors $c = a$ ou $c = b$ convient. On suppose dorénavant que $k \in]f(a); f(b)[$.
  Posons $E = \{x \in [a; b] : f(x) \leqslant k\}$.
  L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque $a \in E$) et majorée (par b). On peut donc considérer $c = \sup E$.
  Pour tout entier $n \geqslant 1$, $c - 1/n$ n'étant pas un majorant de E (puisque c est le plus petit des majorants de E), il existe $u_n \in E$ tel que $c - 1/n \leqslant u_n \leqslant c$. D'une part, le théorème des gendarmes assure la convergence de (u_n) vers c et, d'autre part, on a $\forall n \geqslant 1,\ f(u_n) \leqslant k$ (puisque $u_n \in E$). En combinant ces deux résultats, la continuité de f en c et le théorème de passage à la limite dans une inégalité, on en déduit que $f(c) \leqslant k$.
  Comme $f(b) > k$, on est sûr que $c \neq b$. Or, pour tout $x \in]c; b[$, on a $f(x) > k$, donc la limite à droite de f en c (qui n'est autre que $f(c)$ puisque f est continue en c) est supérieure ou égale à k, c'est-à-dire $f(c) \geqslant k$.
  En définitive, on a $f(c) = k$. ■

Ce théorème est très intuitif : il exprime la nécessité, pour aller d'une altitude a à une altitude b, de devoir passer par toutes les altitudes intermédiaires au moins une fois (sauf si l'on peut « casser » la continuité de son périple en se téléportant ...). Néanmoins, cette apparente naïveté ne doit pas vous tromper : le TVI est un outil puissant.

On se sert souvent du TVI pour démontrer qu'une fonction prend la valeur 0.

Utilisation classique du TVI

Une application réelle, continue sur un intervalle, qui prend une valeur positive en un point et une valeur négative en un autre, s'annule au moins une fois entre les deux.

Autrement dit, sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant.

Voici des exemples d'applications de ce principe.

Exemples :

- Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$. En effet, elle admet en $+\infty$ et $-\infty$ deux limites infinies de signes opposés et prend en conséquence des valeurs positives et négatives. Comme elle est continue, le TVI permet de conclure.
- Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue. Démontrons que la fonction f admet au moins un point fixe dans $[0;1]$.
  Pour cela, posons $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [0;1]$. On a alors $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. De plus, g est continue sur $[0;1]$ par théorèmes généraux. Le TVI permet donc d'affirmer l'existence de $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Il est possible d'énoncer le TVI sous une forme plus topologique.

Corollaire 1

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue sur I. Dès que $f(I)$ contient deux éléments k_1 et k_2, il contient tous les éléments intermédiaires. Autrement dit, $\forall k_1, k_2 \in f(I),\ [k_1, k_2] \subset f(I)$, ce qui signifie que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. ■

Le « TVI topologique » nous dit que

$$\boxed{\text{l'image continue d'un intervalle est un intervalle.}}$$

En revanche, il ne dit pas si les intervalles I et $f(I)$ ont le même type (fermé, borné, semi-ouvert, ...). Nous verrons, dans un instant, que la caractéristique « être un segment » est conservée : l'image continue d'un segment est un segment. Par contre, pour les huit autres types d'intervalles, on peut donner des exemples montrant que l'on peut obtenir n'importe lequel des neuf types d'intervalles.

Le « TVI topologique » n'admet pas de réciproque. L'image d'un intervalle par une fonction peut très bien être un intervalle sans que cette fonction soit continue.

C.2. Théorème de la bijection

En amuse-bouche, voici un lemme qui montre qu'en cas de continuité sur un intervalle, la stricte monotonie est synonyme de l'injectivité.

Lemme 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. La fonction f est strictement monotone sur I si, et seulement si, f est injective de I dans $\mathbb{R}$.

■ $\Rightarrow$ Ce sens ne nécessite pas la continuité. Nous avons d'ailleurs déjà fait la démonstration. Nous la reproduisons ici. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose f strictement croissante.

Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_1 \neq x_2$. On a alors $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$, ce qui implique, d'après la stricte croissance de f sur I, que $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$. Dans les deux cas, c'est absurde. Donc $x_1 = x_2$ et f est bien injective sur I.

$\Leftarrow$ Supposons que f est continue et injective sur I et déduisons en qu'elle est strictement monotone. Raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction f n'est pas strictement monotone. Il existe alors $a < b < c$ tels que $f(a) > f(b) < f(c)$ ou $f(a) < f(b) > f(c)$ (les inégalités strictes viennent de l'injectivité). Dans le premier cas, on prend $k \in]f(b); \min\{f(a); f(c)\}[$ et dans le second cas, on prend $k \in]\max\{f(a); f(c)\}; f(b)[$. Dès lors, le TVI (appliqué une fois sur $]a; b[$ et une fois sur $]b; c[$) dit qu'il existe $x_1 \in]a; b[$ et $x_2 \in]b; c[$ tels que $f(x_1) = k$ et $f(x_2) = k$. C'est absurde puisque f est injective. Donc f est bien strictement monotone sur I. ■

On peut alors énoncer le théorème de la bijection.

Théorème 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors

(i) $f(I)$ est un intervalle de même type que I dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I ;

(ii) f réalise une bijection entre I et $f(I)$;

(iii) l'application réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et est strictement monotone de même stricte monotonie que f.

■ Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f est strictement croissante.

(i) Déjà, le TVI dit que $f(I)$ est un intervalle. Notons a, b les bornes (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de intervalle I. Démontrons que $f(I)$ est égal à l'intervalle J défini, selon les cas, de la façon suivante :

I	$[a; b]$	$[a; b[$	$]a; b]$	$]a; b[$
J	$[f(a); f(b)]$	$[f(a); \lim_b f[$	$]\lim_a f; f(b)]$	$]\lim_a f; \lim_b f[$

$\boxed{\subset}$ Comme f est strictement monotone, on a $\forall x \in]a; b[,\ \lim_a f < f(x) < \lim_b f$, donc $f(I) \subset J$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in J$. Il existe alors $c, d \in I$ tels que $f(c) \leqslant y \leqslant f(d)$. Donc, d'après le TVI, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$, ce qui démontre que $y \in f(I)$. Donc $J \subset f(I)$.

(ii) Par définition, f est une surjection de I sur $f(I)$. Par ailleurs, on vient de rappeler dans le lemme précédent que l'injectivité découle de la stricte monotonie. Ainsi f est une bijection entre I et $f(I)$.

(iii) Stricte croissance de f^{-1} : Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Comme f croît, on a $f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big)$, c'est-à-dire $y_1 \geqslant y_2$: absurde ! Donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante.

Continuité de f^{-1} sur $f(I)$: Soit $y_0 \in f(I)$. On pose $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et on suppose que x_0 n'est pas une borne de I (sinon on adapte). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset I$. Comme f est strictement croissante, on a $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Posons $\eta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$. Pour tout $y \in f(I)$, on a alors $(|y - y_0| \leqslant \eta) \Longrightarrow (f(x_0 - \varepsilon) \leqslant y \leqslant f(x_0 + \varepsilon)) \Longrightarrow \big(x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon\big)$, puisque f^{-1} est croissante sur $f(I)$. Donc f^{-1} est continue en y_0 et, par suite, sur $f(I)$. ■

Les courbes de f et f^{-1} étant symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormal), il est logique que si l'une se trace sans lever le crayon, l'autre aussi.

Le théorème de la bijection a de très nombreuses applications. Il peut servir à introduire de nouvelles fonctions (comme les fonctions circulaires réciproques). On l'utilise aussi pour justifier qu'une fonction prend une fois, et une seule, la valeur 0 sur un intervalle.

Utilisation classique du théorème de la bijection

Une application réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle, qui prend une valeur positive en un point et une valeur négative en un autre, s'annule exactement une fois entre les deux. Ce résultat est donc un TVI adapté aux fonctions strictement monotones.

On convient que, dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de f. Dans la rédaction d'une solution, il suffit donc de faire référence à ce tableau et au théorème de la bijection (autant de fois que nécessaire).

Exemples :

- Démontrons qu'il existe un unique $u_n \in \left]2n\pi\,;\,2n\pi+\pi/2\right[$ tel que $u_n \sin u_n = 1$.
  Posons $I_n = \left]2n\pi\,;\,2n\pi+\pi/2\right[$.
  La fonction $g : x \longmapsto x\sin x - 1$ est continue sur I_n par théorèmes généraux.
  De plus, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto x$ sont positives et strictement croissantes sur I_n, donc g est strictement croissante sur I_n.
  Le théorème de la bijection nous dit alors que la fonction g réalise une bijection de I_n sur $f(I_n) = \left]-1; \pi/2 - 1 + 2n\pi\right[$.
  Comme $0 \in f(I_n)$ car $\pi/2 > 1$, on en déduit que 0 possède par g un unique antécédent u_n dans I_n, c'est-à-dire qu'il existe un unique $u_n \in \left]2n\pi\,;\,2n\pi+\pi/2\right[$ tel que $u_n \sin u_n = 1$.

Terminons ce paragraphe par quelques divagations hors-programme.

Une bijection continue dont la réciproque est continue s'appelle un homéomorphisme.

Le lemme 2 et le théorème de la bijection nous disent que les homéomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications continues strictement monotones.

Tout n'est pas si simple dès que l'on ne travaille plus sur $\mathbb{R}$. En effet, si E et F désignent deux espaces topologiques (c'est-à-dire deux ensembles munis d'une collection d'ouverts qui permettent de définir une notion de limite), il est tout à fait possible qu'une application continue bijective ait une réciproque qui n'est pas continue !

C.3. Théorème des bornes

Le théorème ci-dessous est souvent appelé théorème des bornes.

Théorème 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est continue sur $[a; b]$, alors f est bornée sur $[a; b]$ et y atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $c_1, c_2 \in [a; b]$ tels que $f(c_1) = \sup\{f(x) : x \in [a; b]\}$ et $f(c_2) = \inf\{f(x) : x \in [a; b]\}$.

■ Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$. Nous allons démontré que f est majorée sur $[a; b]$ et qu'elle atteint sa borne supérieure. De façon symétrique, on démontrerait que f est minorée sur $[a; b]$ et atteint sa borne inférieure.

Posons $M = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{f(x) : x \in [a; b]\}$. La caractérisation séquentielle de la borne supérieure nous dit qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $f([a; b])$ qui tend vers M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (entre a et b), le théorème de Bolzano–Weierstrass dit que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ convergente. On note $c \in [a; b]$ sa limite. Dès lors, d'une part $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $f(c)$ par continuité de f et, d'autre part, $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\geqslant 0} = (y_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est extraite de $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et converge, à ce titre, vers M. L'unicité de la limite nous dit que $f(c) = M$. Cela démontre que M est fini et atteint, c'est-à-dire que f est majorée et atteint sa borne supérieure. ■

On peut aussi exprimer le fait que $\inf_{[a;b]} f$ et $\sup_{[a;b]} f$ sont atteintes en disant que ce sont les extrema de f sur $[a; b]$, c'est-à-dire $\inf_{[a;b]} f = \min_{[a;b]} f$ et $\sup_{[a;b]} f = \max_{[a;b]} f$.

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x \ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x$ et étudions la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
  La fonction $f : x \longmapsto x \ln x$ est continue sur $]0; 1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0, d'après les croissances comparées. Ce prolongement, toujours noté f, est donc une fonction continue sur le segment $[0; 1]$. Par conséquent, le théorèmes des bornes nous dit que f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0; 1]\,,\ |f(x)| \leqslant M$. Alors
  $$|I_n| \leqslant \int_0^1 \frac{|x \ln x|^n}{n!} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{M^n}{n!} \mathrm{d}x = \frac{M^n}{n!}.$$
  Comme $(M^n/n!)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 par croissances comparées, le théorème des gendarmes nous dit que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
- Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrons que f est bornée sur $[0; +\infty[$.
  On sait qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant A,\ \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. Sur $[0; A]$, le théorème 6 dit que f est bornée. Dès lors, $\min\{\ell - 1; \min_{[0;A]} f\}$ et $\max\{\ell + 1; \max_{[0;A]} f\}$ sont un minorant et un majorant de f sur $[0; +\infty[$. Donc f est bornée sur $[0; +\infty[$.

Dans le théorème des bornes, il est primordial de travailler avec une fonction qui est à la fois définie sur un segment et continue. Les contre-exemples ci-dessous montrent que l'on ne peut pas se passer d'une de ces hypothèses.

Exemples :

- La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Cela montre que l'on ne peut pas appliquer le théorèmes des bornes sur un intervalle non borné.
- La fonction tan, qui est continue sur $]-\pi/2; \pi/2[$ mais qui n'est pas bornée sur cet intervalle, vous prouve l'importance de l'hypothèse du caractère fermé de l'intervalle.
- La fonction $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in\,]0; 1]\,,\ f(x) = 1/x$ n'est pas bornée sur le segment $[0; 1]$. Cela vous montre que l'hypothèse « continue » est indispensable.

On peut donner une forme plus topologique au théorème des bornes.

Corollaire 2

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

■ C'est la traduction du fait que $f([a;b]) = [m;M]$ avec $m = \inf_{[a;b]} f$ et $M = \sup_{[a;b]} f$, où l'on a conservé les notations du théorème 6. ■

Le « théorème des bornes topologique » nous dit donc que

$$\boxed{\text{l'image continue d'un segment est un segment.}}$$

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Démontrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

  Notons T une période de la fonction f. La continuité de f sur le segment $[0;T]$ nous dit que $f([0;T])$ est un segment $[m;M]$ avec $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant M$. Comme la fonction f est T-périodique, on a $f([nT;(n+1)T]) = [m;M]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dès lors, on a $f(\mathbb{R}) = f\big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [nT;(n+1)T]\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f\big([nT;(n+1)T]\big) = [m;M]$, ce qui démontre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

D. Continuité des fonctions complexes

La notion de limite finie de fonctions complexes ayant été définie dans le cours sur les limites, on étend naturellement la notion de continuité au cas d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 6

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe.

Soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite ne peut être que $f(a)$. Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Soit $\mathscr{D}'$ une partie de $\mathscr{D}$. On dit que f est continue sur $\mathscr{D}'$ lorsque la restriction de f sur $\mathscr{D}'$ est continue en tout point de $\mathscr{D}'$. On note $\mathscr{C}^0(\mathscr{D}', \mathbb{C})$ (ou $\mathscr{C}(\mathscr{D}', \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions complexes continues sur $\mathscr{D}'$.

Les résultats suivants restent valables.

Théorème 7

Comme dans le cas des fonctions réelles, on a

(i) une fonction complexe continue en a est bornée au voisinage de a ;

(ii) si $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ est une fonction réelle continue sur $\mathscr{D}$ et si $f : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction complexe continue sur $\mathscr{D}'$ alors $f \circ u$ est continue sur $\mathscr{D}$;

(iii) la caractérisation séquentielle de la continuité des fonctions complexes ;

(iv) une somme de fonctions complexes continues sur $\mathscr{D}$ est continue sur $\mathscr{D}$;

(v) un produit de fonctions complexes continues sur $\mathscr{D}$ est continue sur $\mathscr{D}$;

(vi) un quotient de fonctions complexes continues sur $\mathscr{D}$ (avec le dénominateur qui ne s'annule pas) est continue sur $\mathscr{D}$.

■ On adapte les démonstrations du cas réel. ■

Le théorème suivant permet de ramener l'étude de la continuité d'une fonction complexe à celle des continuités de ses parties réelle et imaginaire.

Théorème 8

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique et $a \in \mathscr{D}$. La fonction f est continue en a si, et seulement si, $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont toutes les deux continues en a.

■ C'est une conséquence du résultat analogue sur les limites. ■

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car cos et sin le sont.
- Si $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur $\mathscr{D}$ alors sa conjuguée $\overline{f}$ et son module $|f|$ sont également continues sur $\mathscr{D}$.

Le TVI et le théorème de la bijection, qui sont intimement liés à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, ne se généralisent pas aux fonctions complexes. Par contre, le théorème des bornes, lui, se généralise.

Théorème 9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Si f est continue sur $[a;b]$, alors f est bornée sur $[a;b]$ et son module $|f|$ atteint ses bornes.

4 h 45

■ Il suffit d'appliquer le théorème des bornes dans le cas réel à la fonction $|f|$. ■

E. Continuité uniforme

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En début d'année, nous avons vu que l'ordre des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ ne peut pas être inversé sans modifier fortement l'assertion qui les contient. Plus précisément, lorsqu'on dispose d'une assertion $\mathscr{T}$: « $\forall x \in E, \exists y_x \in F, \ \ldots$ » énonçant la propriété « tartanpion », l'inversion des quantificateurs donne l'assertion $\mathscr{TU}$: « $\exists y \in F, \ \forall x \in E, \ \ldots$ » que l'on appelle la propriété « tartanpion uniforme ». On notera que « tartanpion uniforme » est plus forte que « tartanpion » au sens où $\mathscr{TU} \Longrightarrow \mathscr{T}$ puisque dans l'assertion $\mathscr{TU}$, on exige l'existence d'un y uniforme, c'est-à-dire valable pour tous les x alors que, dans $\mathscr{T}$, on demandait seulement que, pour chaque x, il existe un y_x dépendant de x (comme l'indique l'indice x).

La continuité de $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ sur l'ensemble $\mathscr{D}$ s'énonce, avec des quantificateurs, sous la forme : $\forall y \in \mathscr{D}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_{y,\varepsilon} > 0, \ \forall x \in \mathscr{D}, \ \big(|x-y| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\big)$. La continuité uniforme introduite ci-dessous uniformise la continuité en déplaçant le « $\forall y \in \mathscr{D}$ » après le « $\exists \eta > 0$ ».

Définition 7

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique (où $\mathscr{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$). On dit que f est uniformément continue sur $\mathscr{D}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad \big(|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans ce cas, f est continue sur $\mathscr{D}$.

■ On vient d'expliquer que la « continuité uniforme » est plus forte que la « continuité ». La « continuité uniforme » implique donc la « continuité ». ■

En fait, l'uniforme continuité correspond (davantage que la continuité simple) à l'idée naïve que l'on se fait de la continuité : lorsque x et y sont proches, $f(x)$ et $f(y)$ le sont aussi.

Parler d'uniforme continuité en un point de $\mathscr{D}$ n'a pas de sens. L'uniforme continuité est, au contraire de la continuité simple, une notion globale qui n'a de sens que si elle est relative à l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel est définie la fonction. Autrement dit, l'uniforme continuité est extrinsèque : on ne doit jamais parler de « continuité uniforme » sans préciser sur quel ensemble cette propriété est satisfaite !

Exemples :

- Une fonction constante est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- L'identité $\mathrm{Id}_\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = \varepsilon$ pour s'en convaincre.
- L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
  La démonstration repose sur l'inégalité $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$. Celle-ci se démontre en considérant $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x > y$ (par exemple) et en écrivant que
  $$\begin{aligned} \big(\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}\big) &\iff \big(\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x-y} + \sqrt{y}\big) \\ &\iff \big(x \leqslant (x-y) + y + 2\sqrt{x-y}\sqrt{y}\big) \quad \text{on élève au carré} \\ &\iff \big(0 \leqslant 2\sqrt{x-y}\sqrt{y}\big) \end{aligned}$$
  et comme cette dernière inégalité est clairement vraie, celle de départ l'est aussi.
  Pour $\varepsilon > 0$ donné, on prend $\eta_\varepsilon = \varepsilon^2$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$. Ainsi $\sqrt{\cdot}$ est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Une restriction sur $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$ d'une fonction uniformément continue sur $\mathscr{D}$ est uniformément continue sur $\mathscr{D}'$.

Complétons notre liste d'exemples avec une fonction continue mais non uniformément continue.

Exemples :

- L'application $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

  Nous devons démontrer que $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x, y \in \mathscr{D},\ \big(|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \text{ et } |x^2 - y^2| > \varepsilon_0\big)$.

  Prenons $\varepsilon_0 = 2$. Soit $\eta > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\eta} + \eta$ et $y = \dfrac{1}{\eta}$. On a $|x-y| = \eta \leqslant \eta$ et

$$|x^2 - y^2| = \left|\left(\frac{1}{\eta} + \eta\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta}\right)^2\right| = |2 + \eta^2| > 2 = \varepsilon_0,$$

  ce qui démontre bien que l'élévation au carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà rencontré les fonctions lipschitziennes réelles. La définition suivante élargit ce concept aux fonctions à valeurs complexes. La définition n'est en rien modifiée sinon que les valeurs absolues sont des modules.

Définition 8

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *k-lipschitzienne* lorsque

$$\forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Dire qu'une fonction f est lipschitzienne sur $\mathscr{D}$ revient à dire que le taux d'acroissement de f est borné sur $\mathscr{D}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathscr{D}^2 : x = y\}$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad (x \neq y) \implies \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant k.$$

Exemples :

- Nous verrons plus tard, grâce au théorème des accroissements finis, que toute fonction dérivable sur un intervalle I, dont la dérivée est bornée sur I, est lipschitzienne sur I.

  Ainsi, sin et cos sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
- $\sqrt{\cdot}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En effet, le taux d'accroissement entre 0 et x, qui vaut $(\sqrt{x} - \sqrt{0})/(x - 0) = 1/\sqrt{x}$, n'est pas borné pour x parcourant $\mathbb{R}_+^*$ (il tend vers $+\infty$ en 0).

Nous avons déjà signalé qu'une fonction lipschitzienne sur $\mathscr{D}$ est continue sur $\mathscr{D}$. La proposition suivante améliore ce résultat.

Proposition 4

Toute fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ lipschitzienne sur $\mathscr{D}$ est uniformément continue sur $\mathscr{D}$.

■ Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction k-lipschitzienne sur $\mathscr{D}$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\eta_\varepsilon = \varepsilon/(k+1)$ où le « $+1$ » au dénominateur est juste là pour éviter les problèmes lorsque $k = 0$. Pour tous $x, y \in \mathscr{D}$, on a alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\frac{\varepsilon}{k+1} \leqslant \varepsilon.$$

Cela démontre que f est uniformément continue sur $\mathscr{D}$. ■

La réciproque de ce résultat est fausse, c'est-à-dire qu'une fonction peut très bien être uniformément continue sur $\mathscr{D}$ sans être lipschitzienne sur $\mathscr{D}$. Par exemple, nous avons vu que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

On peut alors énoncer le théorème de Heine.

Théorème 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur le segment $[a; b]$ est uniformément continue sur $[a; b]$.

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a; b]$.

Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0,\ \exists x, y \in \mathscr{D},\ (|x - y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser cette propriété avec $\eta = 1/n$ pour affirmer l'existence de $u_n, v_n \in [a; b]$ tels que $|u_n - v_n| \leqslant 1/n$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon_0$. On construit ainsi deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $[a; b]$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - v_n| \leqslant 1/n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) - f(v_n) \geqslant \varepsilon_0$.

Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans un segment, le théorème de Bolzano–Weierstrass permet d'en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge, disons vers ℓ.

Comme $(\varphi(n))_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ et $\forall n \geqslant 0,\ |u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}| \leqslant 1/\varphi(n)$, le théorème des gendarmes nous dit que $(v_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Mézalors, par continuité de f, la suite $\big(f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $f(\ell) - f(\ell) = 0$, ce qui contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) - f(v_n) \geqslant \varepsilon_0$. Absurde ! ■

Ce théorème allonge grandement notre liste d'exemples de fonctions uniformément continues.

Exemples :

- N'importe quelle fonction de référence (sauf la partie entière), restreinte à un segment de son ensemble de définition, y est uniformément continue.
- En particulier, la fonction $x \longmapsto x^2$, dont on sait qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, devient uniformément continue sur n'importe quel segment où on la restreint.
- Le théorème de Heine enrichit également notre bestiaire de fonctions uniformément continues mais non lipschitziennes. Il suffit de prendre une application, définie et continue sur un segment, qui admet une tangente verticale sur ce segment.

  Ainsi, la racine cubique est uniformément continue sur $[-1; 1]$ mais n'y est pas lipschitzienne.

Le second exemple illustre le fait qu'un prolongement d'une fonction uniformément continue n'est pas toujours uniformément continu. Autrement dit, restreindre conserve l'uniforme continuité (qui peut le plus peut le moins) mais prolonger peut faire perdre l'uniforme continuité.

Terminons en énonçant le critère séquentiel pour la continuité uniforme. Il permet de donner une nouvelle interprétation de la continuité uniforme en terme de proximité des suites.

Proposition 5

Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est uniformément continue sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, pour toutes suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$, on a $\big(\lim(u_n - v_n) = 0\big) \Longrightarrow \big(\lim(f(u_n) - f(v_n)) = 0\big)$.

■ $\Rightarrow$ Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à valeurs dans $\mathscr{D}$ telles que $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Démontrons que $\big(f(u_n) - f(v_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge aussi vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de f sur $\mathscr{D}$ nous donne l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathscr{D}$ vérifiant $|x - y| \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Comme $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - v_n| \leqslant \eta$. Dès lors, pour tout $n \geqslant N$, on a $|f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \varepsilon$. Donc $\big(f(u_n) - f(v_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge bien vers 0.

$\Leftarrow$ Démontrons la réciproque par contraposition. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathscr{D}$ et construisons deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ telles que $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et $\big(f(u_n) - f(v_n)\big)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0. Comme f n'est pas uniformément continue sur $\mathscr{D}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0,\ \exists x, y \in \mathscr{D},\ (|x - y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser cette propriété avec $\eta = 1/n$ pour affirmer l'existence de $u_n, v_n \in \mathscr{D}$ tels que $|u_n - v_n| \leqslant 1/n$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon_0$. On construit ainsi deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ telles que $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 (d'après le théorème des gendarmes appliqué à $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - v_n| \leqslant 1/n$) et $\big(f(u_n) - f(v_n)\big)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 (puisqu'elle est minorée, en valeurs absolues, par ε_0). ■

Comparons le critère séquentiel pour la continuité et celui pour la continuité uniforme.

Le critère séquentiel pour la continuité affirme que les applications continues sont celles qui conservent la convergence des suites : si u_n se rapproche de ℓ quand n devient grand, alors parallèlement $f(u_n)$ se rapproche de $f(\ell)$.

Le critère séquentiel pour la continuité uniforme, quant à lui, caractérise les applications qui conservent la proximité des suites : dire que « si u_n et v_n se rapprochent l'un de l'autre quand n devient grand, alors parallèlement $f(u_n)$ et $f(v_n)$ se rapprochent l'un de l'autre » revient à dire que f est uniformément continue.

Ce critère séquentielle permet, en particulier, de démontrer simplement qu'une fonction n'est pas uniformément continue : il suffit pour cela de trouver deux suites dont la différence tend vers 0 sans qu'il en soit de même de la différence de leurs images.

Exemples :

- Retrouvons que $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

  Pour cela, on prend $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ alors que

$$ {u_n}^2 - {v_n}^2 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2, $$

6 h 00