MP*1

Espaces préhilbertiens réels

1 Définition et premières propriétés

1.1 Introduction

La géométrie élémentaire aborde deux types de questions.

- Les problèmes de parallélisme et d'incidence. La théorie élémentaire des espaces vectoriels[1] en donne une généralisation de grande portée, permettant d'utiliser l'intuition géométrique dans des contextes variés et parfois surprenants. Outre le degré de généralité, elle a sur la géométrie classique l'avantage d'un système axiomatique simple, donnant d'emblée une place fondamentale au calcul.

- Les problèmes métriques, relatifs aux distances et aux angles. La théorie élémentaire des espaces préhilbertiens donne un cadre général pour ces questions. Les gains sont de même nature que celui qu'apporte l'algèbre linéaire : souplesse de l'axiomatique, possibilité d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre très étendu. De fait, les espaces préhilbertiens interviennent non seulement en géométrie mais aussi en analyse (polynômes orthogonaux, séries de Fourier), en probabilités et statistiques (variance, corrélation). Les espaces de Hilbert sont le cadre naturel des mathématiques de la mécanique quantique.

Le but de ce texte est de rappeler la théorie des espaces préhilbertiens réels étudiée en première année et d'en donner quelques illustrations.

1.2 Formes bilinéaires symétriques, produits scalaires

1.2.1 Généralités

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E toute application B de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes.

- Linéarité à droite : pour u dans E, l'application $B(u, .)$ est une forme linéaire.

- Symétrie : pour u et v dans E, $B(u, v) = B(v, u)$.

Ces propriétés entraînent la linéarité à gauche, c'est-à-dire la linéarité de $B(., v)$ pour v dans E. On a donc, si $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$ sont des éléments de E et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ des scalaires :

$$(1) \qquad B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{m} y_j v_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i y_j \, B(u_i, v_j).$$

1. Et des espaces affines.

En particulier :

$$(2) \qquad B\left(\sum_{i=1}^n x_iu_i, \sum_{i=1}^n x_iu_i\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_ix_jB(u_i,u_j),$$

ou encore :

$$B\left(\sum_{i=1}^n x_iu_i, \sum_{i=1}^n x_iu_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2B(u_i,u_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_jB(u_i,u_j).$$

Supposons E de dimension finie. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La matrice $M = (B(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est appelée *matrice de la forme bilinéaire B dans e*. Supposons que les vecteurs x et y se décomposent sur e en

$$x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_ie_i.$$

Posant

$$X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n),$$

la formule (1) se réécrit :

$$B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i, \sum_{j=1}^n \mu_jy_j\right) = {}^tXMY.$$

Exercice 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Déterminer la dimension de l'espace des formes bilinéaires sur E, celle de l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E.*

Exercice 2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, e et e' deux bases de E, B une forme bilinéaire symétrique sur E. Exprimer la matrice de B dans e' à l'aide de la matrice de B dans e et de la matrice de passage $P_e^{e'}$.*

La géométrie des formes bilinéaires symétriques générales est riche et intéressante. Elle n'est pas abordée en CPGE. On se limite au cas où $K = \mathbb{R}$ et où la forme B vérifie les propriétés supplémentaires suivantes.

- B est positive, i.e.

$$\forall x \in E, \quad B(x,x) \geq 0.$$

- B est définie, i.e.

$$\forall x \in E, \quad B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

On dit alors que *B est un produit scalaire euclidien* et on note plutôt

$$\langle x, y\rangle, \qquad (x|y), \qquad \text{où} \quad x.y$$

que $B(x,y)$. Nous adopterons en général la première notation. On appelle *espace préhilbertien réel* tout couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ où E est un espace vectoriel réel et $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire euclidien sur E. On appelle *espace euclidien* un espace préhilbertien réel de dimension finie.

1.2.2 Exemples d'espaces préhilbertiens réels

1. *Produit scalaire euclidien canonique sur* $\mathbb{R}^n$
   Si $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose
   $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY,$$
   où l'on identifie scalaire et matrice $1, 1$. On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi un produit scalaire euclidien, qui est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On généralise le « $xx' + yy'$ » du plan.
2. *Produit scalaire euclidien canonique sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   Si $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
   $$\langle A, B\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} A_{i,j} B_{i,j} = \mathrm{Tr}({}^t AB).$$
   On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi un produit scalaire euclidien, qui est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On peut bien sûr unifier les exemples 1 et 2 en définissant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. *Espaces L^2 à poids*
   Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, w une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$ (traditionnellement appelée « poids »), E_w l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 w$ soit intégrable sur I. L'inégalité
   $$\forall (f, g) \in {E_w}^2, \qquad |fgw| \le \frac{1}{2}\left(wf^2 + wg^2\right)$$
   montre que, si f et g sont dans E_w, fgw est intégrable sur I. On pose donc
   $$\forall (f, g) \in {E_w}^2, \qquad \langle f, g\rangle = \int_I fgw.$$
   On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi un produit scalaire euclidien sur E_w.

   Certains cas sont très classiques.

   Produit scalaire de Legendre : $I = [-1, 1]$, w identiquement égale à 1.

   Produit scalaire de Tchebychev : $I =]-1, 1[$ et w défini par
   $$\forall t \in]-1, 1[, \qquad w(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$
   Produit scalaire de Laguerre : $I = \mathbb{R}^+$ et w défini par
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad w(t) = e^{-t}.$$
   Produit scalaire de Hermite : $I = \mathbb{R}$ et w défini par
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad w(t) = e^{-t^2}.$$

4. *Espaces* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$
   Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Notons $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires X définies sur Ω, à valeurs réelles, telles que $E(X^2) < +\infty$. Comme dans l'exemple précédent, l'inégalité

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^2, \qquad |XY| \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$$

   montre que, si X et Y sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, XY est d'espérance finie. L'application

$$(X,Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^2 \longmapsto E(XY)$$

   est donc bien définie. C'est une forme bilinéaire symétrique positive. Elle n'est pas définie en général. Mais elle le devient si on remplace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ des classes d'équivalence de variables aléatoires modulo la relation d'égalité presque partout.

Exercice 3. *Pour X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B(X,Y) = Tr(XY)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que la restriction de B à V soit un produit scalaire euclidien ?*

1.3 Norme associée à un produit scalaire euclidien

1.3.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité

Théorème 1. *Soient E un espace vectoriel réel, B une forme bilinéaire symétrique positive sur E. Alors :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad B(x,y)^2 \leq B(x,x)\, B(y,y).$$

Si de plus B est définie, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. On note que, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$0 \leq B(x+ty, x+ty) = B(x,x) + 2tB(x,y) + t^2 B(y,y).$$

Si $B(y,y) = 0$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, on obtient un trinôme degré 2 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc de discriminant négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dire que l'inégalité est une égalité, c'est dire que ce discriminant est nul, ou que le trinôme précédent a une racine réelle t. L'équivalence :

$$B(x+ty, x+ty) = 0 \Longleftrightarrow x + ty = 0$$

achève la démonstration.

On notera les cas particuliers importants.

- Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}.$$

- Si f et g appartiennent à E_w :

$$\left|\int_I fgw\right| \leq \sqrt{\int_I f^2w \times \int_I g^2w}.$$

Exercice 4. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels. Déterminer le maximum de l'ensemble*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ ; \ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 = 1\right\}.$$

Exercice 5. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer*

$$|\,Tr(A)| \leq \sqrt{n}\sqrt{Tr({}^tAA)}.$$

L'exercice ci-après propose quelques minorations plus inattendues.

Exercice 6. *a) Soient $(E, \langle\ ,\rangle)$ un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$, $x, v_1, \ldots, v_n$ des éléments de E. Pour i dans $\{1, \ldots, n\}$, soit*

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} |\,\langle v_i, v_j\rangle\,|.$$

Démontrer que, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|^2 \leq \frac{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < x, v_i >)^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 S_i.}$$

En déduire l'inégalité de Selberg :

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{< x, v_i >^2}{S_i}$$

et l'inégalité de Chung-Erdös :

$$\|x\|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} < x, v_i >)^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i}.$$

b) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_n$ des éléments de $\mathcal{F}$. Démontrer les inégalités

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{P(E_i)^2}{\sum_{j=1}^{n} P(E_i \cap E_j)},$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} P(E_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P(E_i \cap E_j))}.$$

c) Déduire de b) deux minorations du cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis[2].

2. Les résultats de b) et c) peuvent bien sûr être démontrés de manière plus pédestre via la forme numérique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1.3.2 Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application

$$N\ : x \in E \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ne s'annule qu'en 0, vérifie la relation

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne l'inégalité triangulaire pour N. Ainsi, N est une norme, que l'on appelle *norme euclidienne associée au produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$. Désormais, nous noterons plutôt $N(x) = \|x\|$.

Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne immédiatement que la norme N est stricte.[3]Non contentes d'être strictes (propriété qu'elles partagent avec beaucoup d'autres normes, par exemple les normes $\|\ \|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ pour $1 < p < +\infty$), les normes euclidiennes sont celles qui se prêtent le mieux au calcul. Le principe est simple : on utilise systématiquement le carré de la norme, de manière à faire apparaître le produit scalaire.[4] Ainsi, si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, on a, pour x et y dans E :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle, \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

Exercice 7. *Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de normes inférieures ou égales à* 1 *de l'espace préhilbertien réel E. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des éléments de* $[0, 1]$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} p_i\ v_i.$$

Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, soit

$$v_I = \sum_{i \in I} v_i.$$

Montrer que l'un des v_I est à distance au plus $\sqrt{n}/2$ de v. On pourra considérer des variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ telles que, pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ et calculer l'espérance de

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (X_i - p_i)\ v_i\right\|^2.$$

1.3.3 Angle de deux vecteurs

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de définir l'angle non orienté de deux vecteurs non nuls x et y d'un espace euclidien comme l'élément θ de $[0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}.$$

3. Hors-programme, à justifier en cas d'emploi.
4. Ce point est essentiel.

On retrouve la définition du produit scalaire dans le plan vue dans le secondaire. On dit que x et y font un angle *obtus* si $\cos(\theta) < 0$ i.e. si $\langle x, y\rangle < 0$, *aigu* si $\cos(\theta) > 0$, i.e. si $\langle x, y\rangle > 0$, *droit* si $\cos(\theta) = 0$, i.e. si $\langle x, y\rangle = 0$.

La définition précédente implique la formule d'Al-Kashi :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\cos(\theta)\|x\|\,\|y\|.$$

Remarques

1. L'angle non orienté est en fait, si les vecteurs x et y sont non nuls, l'angle entre les deux demi-droites $\mathbb{R}^+x$ et $\mathbb{R}^+y$.
2. Définir un angle orienté entre x et y suppose d'avoir préalablement orienté le plan qui les contient.
3. On voit immédiatement que l'angle entre $-x$ et y est $\pi - \theta$. Si x et y sont non nuls, on peut définir l'angle entre deux droites $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$ comme l'élément de $[0, \pi/2]$ dont le cosinus vaut $|\cos(\theta)|$.

1.3.4 Identités remarquables géométriques

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Les relations ci-dessus donnent d'abord des *formules de polarisation*, qui expriment le produit scalaire à partir de la norme. Pour x et y dans E, on a ainsi

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

On peut utiliser ces formules pour déterminer si une norme provient d'un produit scalaire.

L'*identité du parallélogramme* traduit le fait que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Le résultat de l'exercice ci-après, dû à Von Neumann et P. Jordan, montre que l'identité du parallélogramme caractérise les normes euclidiennes.

Exercice 8. *Soit $\|\ \|$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E telle que :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ dont provient $\|\ \|$. On posera :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

On vérifiera successivement que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, que :

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle,$$

puis que $x \mapsto \langle x, z\rangle$ est linéaire.

En coupant le parallélogramme en deux triangles, on peut réécrire l'identité du parallélogramme comme l'*identité de la médiane*, ainsi nommée parce qu'elle donne la longueur d'une médiane d'un triangle en fonction des longueurs des côtés :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Avec des notations traditionnelles de géométrie plane, si ABC est un triangle et I le milieu de BC :

$$AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2.$$

1.3.5 Continuité du produit scalaire

Sur un espace de dimension finie, une forme bilinéaire est polynomiale donc continue. En particulier, tout produit scalaire est continu. Dans le cas général, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre qu'un produit scalaire est continu par rapport à la norme associée. C'est le résultat ci-après.

Proposition 1. *Si $(E, \langle\, , \,\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, l'application*

$$(x,y) \in E^2 \longmapsto \langle x, y\rangle$$

est continue lorsque E^2 est muni de la structure d'espace normé provenant de la norme euclidienne.

Preuve. Soient a dans E, a' dans E'. Pour x dans E, x' dans E', on a

$$\langle x, x'\rangle - \langle a, a'\rangle = \langle x-a, x'\rangle + \langle a, x'-a'\rangle .$$

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent alors :

$$|\, \langle x, x'\rangle - \langle a, a'\rangle \,| \leq \|x-a\| \; \|x'\| + \|a\| \; \|x'-a'\|,$$

d'où aussitôt

$$\langle x, x'\rangle \underset{(x,x')\to(a,a')}{\longrightarrow} \langle a, a'\rangle .$$

Exercice 9. *Le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (E,N) et (E',N') sont deux espaces normés sur $\mathbb{K}$. Soit B une forme bilinéaire sur $E \times E'$. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall (x,x') \in E \times E', \quad |B(x,x')| \leq C N(x)\; N'(x').$$

1.4 Dualité dans un espace euclidien

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour a dans E, l'application $\langle a, .\, \rangle$ est une forme linéaire sur E. Cette forme linéaire dépend linéairement de a, d'où une application linéaire de E dans E^* :

$$J \;: a \in E \longmapsto \langle a, .\rangle \in E^*,$$

injective car le seul vecteur orthogonal à lui-même est 0. On en déduit le théorème de représentation suivant, étendu dans les rappels d'algèbre linéaire aux espaces munis d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Théorème 2. *Si E est de dimension finie, l'application J est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve. Si n est la dimension de E, E^* est également de dimension n. L'application J, linéaire injective de E dans E^*, est donc bijective.

L'application J est l'*isomorphisme canonique de l'espace euclidien E sur son dual E^*.*

Exercice 10. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. On munit E^* de la norme d'opérateur. Montrer que l'isomorphisme canonique de E sur E^* est une isométrie.*

Exercice 11. *Soit n dans $\mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique élément Q_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad P(0) = \int_0^1 PQ_n.$$

Quel est le degré de Q_n ?

2 Orthogonalité

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$, i.e. s'ils font un angle droit. Si A est une partie de E, on définit l'*orthogonal de A*

$$A^\perp = \{x \in E \ ; \ \forall a \in A, \ \langle a, x\rangle = 0\}\,.$$

La linéarité à droite du produit scalaire fait que $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de A est aussi celui du sous-espace $\mathrm{Vect}(A)$.

Une famille $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite *orthogonale* si les v_i sont deux à deux orthogonaux. Si de plus les v_i sont unitaires (i.e. de norme 1), la famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite *orthonormée* ou *orthonormale*. On vérifie immédiatement qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Comme le suggère l'intuition géométrique, l'orthogonalité est une forme particulièrement forte d'indépendance linéaire.

2.1.2 Exemples de familles orthonormées

1. *Base canonique de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
   La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire euclidien canonique. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire euclidien canonique.
2. *Fonctions $x \mapsto \cos(kx)$*
   Munissons l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire
   $$(u, v) \longmapsto \int_0^\pi uv.$$

Définissons la famille $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad c_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(mx), \qquad c_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}.$$

Alors $(c_m)_{\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

3. *Polynômes de Tchebychev*
Considérons l'espace E_w dans le cas Tchebychev :

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Comme

$$w(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}, \qquad w(t) \underset{t\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1+t)}},$$

E_w contient toutes les fonctions continues et bornées sur $]-1,1[$, en particulier les fonctions qui se prolongent continûment à $[-1,1]$, donc les polynômes.

La famille des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire, comme on le voit en écrivant, si $m < n$:

$$\langle T_m, T_n\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(mu)\ \cos(nu)\,\mathrm{d}u,$$

$$\langle T_m, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(mu)\ \cos(nu)\,\mathrm{d}u = 0,$$

où la dernière égalité résulte d'une linéarisation. Cet exemple est une reformulation du précédent via le changement de variable $t = \cos(u)$.

4. *Polynômes de Legendre*
Considérons l'espace E_w dans le cas Legendre. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = (X^2-1)^n, \quad L_n = U_n^{(n)}.$$ [5]

Pour tout n de $\mathbb{N}$, L_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de terme de plus haut degré $\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$.

Montrons que $(L_n)_{n\geq 0}$ est orthogonale. Comme ± 1 sont des racines de multiplicité n de U_n, ce sont des racines de $U_n^{(k)}$ si $0 \leq k \leq n-1$. Si n et m sont des entiers naturels tels que $n > m$, on démontre donc, par des intégrations par parties successives

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \qquad \int_{-1}^{1} L_n L_m = (-1)^k \int_{-1}^{1} U_m^{(m+k)} U_n^{(n-k)}.$$

Comme $U_m^{(m+n)}$ est nul, l'orthogonalité suit.

5. La suite $(L_n)_{n\geq 0}$ a été découverte par Legendre dans un travail de physique mathématique(propagation des ondes sur la sphère S^2).

2.1.3 Le théorème de Pythagore

Si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs deux à deux orthognaux de E, on a immédiatement

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2.$$

Pour $p = 2$, on a en fait une équivalence

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

L'axiomatique des espaces euclidiens fait ainsi du théorème de Pythagore un résultat immédiat. C'est loin d'être le cas dans une axiomatique à la Euclide-Hilbert, plus intuitive mais beaucoup plus subtile : il faut alors utiliser des arguments d'aire pour faire apparaître les carrés.

2.2 Algorithme de Schmidt et bases orthonormées

2.2.1 L'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. La démonstration du théorème ci-après produit un algorithme qui construit, à partir d'une famille libre donnée, une famille orthogonale associée à un même drapeau.

Théorème 3. *Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ orthogonale de vecteurs de E telle que*

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad u_k - e_k \in \mathit{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}).$$

Preuve. On a nécessairement $u_1 = e_1$. Prenons k dans $\{1, \dots, n-1\}$, et supposons avoir construit k vecteurs $u_1, \dots, u_k$ de E, deux à deux orthogonaux, tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad u_i - e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}).$$

On note alors que $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille orthogonale de vecteurs du sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Ces vecteurs sont non nuls (la i-ième coordonnée de u_i dans la base $(e_1, \dots, e_k)$ est 1). Il s'ensuit que $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Cherchons maintenant u_{k+1} sous la forme $e_{k+1} + v$ avec v dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, mais en écrivant $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$. Le vecteur u_{k+1} est orthogonal à $u_1, \dots, u_k$ si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \qquad \left\langle u_j, e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\rangle = 0.$$

Cette condition se réécrit

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \qquad \lambda_j = -\frac{\langle u_j, e_{k+1} \rangle}{\|u_j\|^2}.$$

Il y a donc une et une seule façon de compléter $(u_1, \dots, u_k)$ en une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_{k+1})$ de sorte que u_{k+1} ait la forme voulue. Existence et unicité sont établies.

Remarques

1. *Orthogonalisée et orthonormalisée de Schmidt*

   Reprenons les notations précédentes. La suite $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est appelée *orthogonalisée de Schmidt* de $(e_k)_{1\leq k\leq n}$. Si on pose

   $$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \qquad v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|},$$

   la famille $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est orthonormée et vérifie

   $$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k),$$
   $$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \langle e_k, v_k\rangle > 0.$$

   Ces conditions caractérisent $(v_k)_{1\leq k\leq n}$, qui est appelée *orthonormalisée de Schmidt* de $(e_k)_{0\leq k\leq n}$.

2. *Cas des suites infinies, version préhilbertienne du théorème de Riesz*

   La démonstration s'applique sans changement au cas d'une suite libre infinie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Le résultat vaut donc dans ce cas. Il en est de même de la remarque 1.

   Ainsi, si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien de dimension infinie, on dispose d'une suite orthonormée $(u_k)_{k\geq 0}$. Pour $k \neq \ell$, on a

   $$\|u_k - u_\ell\| = \sqrt{2},$$

   ce qui montre que $(u_k)_{k\geq 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence. Rappelons que ce résultat vaut dans un espace normé de dimension infinie général, la preuve de ce théorème de F.Riesz consistant à « imiter » dans une certaine mesure le cas euclidien. [6]

3. *Polynômes orthogonaux*

   Reprenons les espaces L^2 à poids : I est un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, w une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. Supposons que toutes les fonctions wp avec p polynomiale soient intégrables sur I, de sorte que E_w contient l'espace des fonctions polynomiales. L'application de l'algorithme de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ nous apprend qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ orthogonale pour $\langle\ ,\ \rangle_w$ et telle que, pour tout n, P_n soit unitaire de degré n.

   Dans le cas de Tchebychev, l'orthogonalité de $(T_n)_{n\geq 0}$ établie plus haut montre que, si $(U_n)_{n\geq 0}$ est définie par

   $$U_0 = T_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{T_n}{2^{n-1}},$$

   alors $(U_n)_{n\geq 0}$ est l'orthogonalisée de Schmidt de $(X^n)_{n\geq 0}$. D'autre part, si n est dans $\mathbb{N}$:

   $$\|T_n\|^2 = \int_0^\pi \cos(nt)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2nt))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

   Ainsi, l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire précédent est la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par

   $$P_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n.$$

6. C'est le « lemme de la presque perpendiculaire », présenté dans le cours de topologie.

Exercice 12. *Déterminer l'orthogonalisée et l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ dans le cas de Legendre.*

2.2.2 Bases orthonormées

Supposons E euclidien de dimension n. Appliquant l'algorithme de Schmidt à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on obtient une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de E. En particulier, E admet au moins une base orthonormée. La notion de matrice orthogonale nous permettra de décrire toutes les bases orthonormées à partir de l'une d'elles.

Pour l'instant, notons que les formules de calcul en base orthonormée sont particulièrement simples. Soient en effet $e = (e_1, \dots, e_n)$ une telle base et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E, on a, en posant

$$X = {}^t(x_1, \dots, x_n), \qquad Y = {}^t(y_1, \dots, y_n),$$

les formule suivantes.

- Les coordonnées de x dans e sont données par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad x_j = \langle e_j, x \rangle .$$

- Le produit scalaire de x et y est donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = tXY.$$

- La norme de x est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{{}^tXX}.$$

- Soient maintenant u un endomorphisme de E, $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans e. Alors

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \qquad M_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle .$$

Remarques

1. *Isométrie de deux espaces euclidiens de même dimension*
   L'existence de bases orthonormées montre que deux espaces euclidiens de même dimension sont isométriques. En effet, toute application linéaire envoyant une base orthonormée sur une base orthonormée est une isométrie.
2. *Structures euclidiennes sur un espace vectoriel de dimension finie*
   Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Il est naturel de se demander « combien » de produits scalaires euclidiens porte E. On peut y répondre de la manière suivante. D'une part, tout espace euclidien

admet une base orthonormée. D'autre part, si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique produit scalaire sur E rendant cette base orthonormée, qui est défini par

$$\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exercice 13. *Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Vérifier qu'en posant*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \qquad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k),$$

on définit un produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}[X]$. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 14. *Soient E un espace euclidien de dimension n, $(E_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite croissante de sous-espace de E avec, pour tout i, dim $E_i = i$, $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite décroissante de réels ≥ 0. Décrire l'ensemble des x de E tels que :*

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad d(x, E_i) = a_i.$$

Exercice 15. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E de trace nulle. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de E est à diagonale nulle. Traduire matriciellement ce résultat.*

Exercice 16. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien séparable. Montrer qu'une famille orthonormée de vecteurs de E est au plus dénombrable. Qu'en déduit-on quant à l'existence d'une base orthonormée de E ?*

Soit, dans la fin de ce paragraphe, exercices compris, ε dans $]0, 1[$. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs unitaires de l'espace préhilbertien E est dite ε-presque orthogonale si, pour tout couple (i, j) d'indices distincts

$$|\langle u_i, u_j \rangle| \leq \varepsilon.$$

Un argument simple de compacité montre que, si E est euclidien, une telle famille est finie.

Exercice 17. *Démontrer ce fait.*

Se pose alors le problème de la majoration du cardinal d'une telle famille. Un argument de volume montre que, si ε est fixé, ce cardinal est majoré par une fonction exponentielle de la dimension.

Exercice 18. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille presque orthogonale de vecteurs unitaires de E. Montrer que les boules ouvertes de centre u_i, $i \in I$ et de rayon $\sqrt{2(1-\varepsilon)}$ sont deux à deux disjointes et en déduire une majoration de $|I|$.*

L'exercice ci-après présente la construction, par une méthode aléatoire[7], d'une grande famille ε-presque orthogonale de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$.

7. Il semble qu'on ne dispose pas de construction déterministe.

Exercice 19. *On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dit de Rademacher si*

$$X = \frac{1}{\sqrt{n}}\,{}^t(X_1, \ldots, X_n)$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables de Rademacher mutuellement indépendantes. On notera que X est unitaire.

a) Soient $X = \frac{1}{\sqrt{n}}\,{}^t(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\,{}^t(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux vecteurs de Rademacher de $\mathbb{R}^n$ indépendants. Pour t dans $\mathbb{R}^+$, calculer

$$E\left(e^{t\langle X,Y\rangle}\right)$$

et montrer

$$E\left(e^{t\langle X,Y\rangle}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

En déduire, pour ε dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$P\left(|\langle X,Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\ \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

b) Soient $N \geq 2$ un entier, ε dans $]0,1[$, $X^1, \ldots, X^N$ des vecteurs de Rademacher de $\mathbb{R}^n$ mutuellement indépendants. Alors

$$P\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} \left|\left\langle X^i, X^j\right\rangle\right| \geq \varepsilon\right) < N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

En particulier, si $\delta \in]0,1]$ et

$$n \geq 2\ \frac{\ln(N^2/\delta)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} \left|\left\langle X^i, X^j\right\rangle\right| \geq \varepsilon\right) < \delta.$$

c) Soit $N = \left\lfloor \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)\right\rfloor$. Montrer qu'il existe une famille de N éléments de S^{n-1} dont les produits scalaires soient deux à deux soient tous de valeur absolue inférieure ou égale à ε.

3 Projections orthogonales

Ce paragraphe est le coeur du chapitre ; $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ y désigne un espace préhilbertien réel, V un sous-espace de E.

3.1 A-t-on $V \oplus V^\perp = E$?

On a aussitôt $V \cap V^\perp = \{0\}$. L'habitude du plan et de l'espace suggère que la somme directe $V \oplus V^\perp$ est égale à E. Ce résultat est vrai si V est de dimension finie (théorème 5 ci-après), mais pas en toute généralité.

Pour construire un contre-exemple, on remarque que, grâce à la proposition 1 (continuité du produit scalaire) l'orthogonal d'un sous-espace V de E dense dans E est nul. Soit, par exemple, E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Munissons E du produit scalaire euclidien

$$(u,v) \in E^2 \longmapsto \int_{-1}^{1} uv,$$

dont la norme associée est la norme de convergence en moyenne quadratique. Si $\| \ \|$ est la norme associée à ce produit scalaire, l'hyperplan H des fonctions f nulles en 0 est dense dans $(E, \| \ \|)$ (le justifier). Par conséquent

$$H^{\perp} = \{0\}, \qquad H \oplus H^{\perp} = H \neq E.$$

L'inclusion $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ est trivialement vraie pour tout sous-espace V de E. L'exemple précédent montre que l'égalité n'a pas lieu en général, car $(H^{\perp})^{\perp} = E$. La proposition suivante, dont la preuve est immédiate, clarifie la situation.

Proposition 2. *On a l'implication*

$$V \oplus V^{\perp} = E \Longrightarrow (V^{\perp})^{\perp} = V.$$

On notera que l'égalité

$$(V^{\perp})^{\perp} = V$$

implique, via la continuité du produit scalaire, que V est fermé dans E.

Exercice 20. *L'espace E des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire*

$$(u,v) \longmapsto \int_{-1}^{1} uv.$$

Déterminer l'orthogonal du sous-espace V des polynômes impairs.

Exercice 21. *On munit l'espace E des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire :*

$$(f,g) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^{1} fg.$$

On note F le sous-espace des fonctions f de E dont la restriction à $[0,1]$ est nulle. Montrer que F est fermé dans E. Déterminer $F^{\perp}$. Conclusion ?

3.2 Interprétation métrique de la projection orthogonale

Supposons $V \oplus V^{\perp} = E$. On dispose alors du projecteur de E sur V parallèlement à $V^{\perp}$, que l'on nomme *projecteur orthogonal de E sur V* et que l'on note ici π_V.[8] L'interprétation de $\pi_V(x)$ est donnée par le résultat suivant, qui est une conséquence triviale du théorème de Pythagore, suffisamment importante pour mériter cependant le nom de théorème.

8. Dessin recommandé. Remarquer par ailleurs une incohérence dans la terminologie : un projecteur orthogonal autre que l'identité n'est pas un endomorphisme orthogonal.

Théorème 4. *Supposons $V \oplus V^\perp = E$. Soit x dans E. Alors :*

$$\forall v \in V \setminus \{\pi_V(x)\}, \qquad \|x - v\| > \|x - \pi_V(x)\|.$$

En d'autres termes, la distance de x à V est atteinte, et elle est réalisée par $\pi_V(x)$ et lui seul.

Preuve. Soit v dans V. Les vecteurs $v - \pi_V(x)$ et $x - \pi_V(x)$ appartiennent respectivement à V et $V^\perp$ (dessin). Le théorème de Pythagore entraîne donc la relation :

$$\|x - v\|^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2 + \|\pi_V(x) - v\|^2.$$

Or, $\|\pi_V(x) - v\|^2$ est dans $\mathbb{R}^+$, nul si et seulement si $v = \pi_V(x)$.

Remarques

1. *Expression de la distance*

   On a donc

   $$d(x, V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2 = \langle x - \pi_V(x), x \rangle\,,$$

   l'égalité venant du fait que $\pi_V(x)$ et $x - \pi_V(x)$ sont orthogonaux. La seconde expression est souvent beaucoup plus agréable que la première.

   Nous allons maintenant mettre le théorème précédent en perspective en rappelant ce qui se passe dans la situation générale suivante : (E, N) est un espace normé, V un sous-espace de E, x un élément de E, V un sous-espace de E. On note

   $$C_V(x) = \{v \in V,\ N(x - v) = d(x, V)\}.$$

2. *La distance est-elle atteinte ?*

   Même si V est fermé dans E, $C_V(x)$ peut être vide. Par un argument de compacité, on a montré dans le cours de topologie que la distance est atteinte si V est de dimension finie.

3. *Quand la distance est atteinte, l'est-elle en un unique point ?*

   Dans le contexte de la remarque 1, il se peut que la distance soit atteinte en plusieurs points. Exemple : on prend $E = \mathbb{R}^2$, $N((x, y)) = \max\{|x|, |y|\}$ et $V = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$: la distance de ${}^t(0, 1)$ à V est réalisée par tout point de la forme ${}^t(x, 0), x \in [-1, 1]$.

   De manière générale, l'ensemble des points qui réalisent la distance est un convexe fermé et borné (pourquoi ?). Si la norme est stricte, $C_V(x)$ est, s'il est non vide, réduit à un point.

4. *Linéarité de la projection*

   Même si $C_V(x)$ est un singleton $\{v_x\}$ pour tout x, v_x ne dépend pas linéairement de x si la norme N ne provient pas d'un produit scalaire euclidien.

Exercice 22. *On suppose V de dimension finie, N stricte. Montrer que la fonction $x \in E \mapsto v_x \in V$ définie dans la remarque 4 est continue.*

3.3 Le cas des sous-espace de dimension finie

Les remarques précédentes permettent de comprendre pourquoi l'approximation d'un élément d'un espace normé par un sous-espace V est particulièrement agréable dans le cas préhilbertien (« approximation aux moindres carrés »), tant sur le plan théorique que sur celui du calcul, tout au moins si $V \oplus V^{\perp} = E$. Le théorème suivant, fondamental, montre que tel est le cas si V est de dimension finie ; le programme officiel se limite d'ailleurs à ce cadre.

Théorème 5. *Si V est un sous-espace de dimension finie de E, on a*

$$V \oplus V^{\perp} = E.$$

Preuve. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V. Soit x dans E. On veut montrer qu'existe un unique vecteur v de V tel que $x - v$ appartienne à $V^{\perp}$. Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V^{\perp}.$$

Cette condition équivaut à

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \left\langle e_j, x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\rangle = 0,$$

ou encore à

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \lambda_j = \langle e_j, x \rangle .$$

Le résultat suit

3.4 Remarques et exemples

1. *Expression de la projection dans une base orthonormée et conséquences*
   La démonstration précédente donne la décomposition de $\pi_V(x)$ dans la base e :

   $$\pi_V(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x \rangle \ e_j.$$

   Cette relation permet donc de calculer $\pi_V(x)$ à condition de disposer d'une base orthonormée de V facile à utiliser. [9]

   On déduit de la formule précédente l'égalité

   $$\|x - \pi_V(x)\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x \rangle^2 = \|x\|^2.$$

   d'où, en particulier, l'*inégalité de Bessel* :

   $$\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x \rangle^2 \leq \|x\|^2,$$

9. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Mais les deux conditions qui déterminent $\pi_V(x)$, à savoir $\pi_V(x) \in V$, $x - \pi_V(x) \in V^{\perp}$ permettent souvent de calculer rapidement $\pi_V(x)$.

d'autant plus proche d'une égalité que x est proche de V. Nous reviendrons sur cette idée dans le cours sur les systèmes orthonormés totaux.

2. *Projection sur une droite*

   Supposons que V soit la droite $D = \mathbb{R}a$, où a est un vecteur non nul de E. Alors

$$\forall x \in E, \qquad \Pi_D(x) = \frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

3. *Autre preuve de l'existence, généralisation*

   On pourrait établir le théorème en montrant d'abord que la distance de $x \in E$ à V est atteinte (compacité), que l'approximation est unique (norme stricte) et en montrant que, si v_x est le point qui réalise la distance de x à V, $x - v_x$ est orthogonal à V. Nous adopterons ce point de vue pour l'étude de la « projection sur un convexe fermé », qui n'est pas une projection au sens de l'algèbre linéaire.

   Si E est de dimension infinie mais si la norme euclidienne rend E complet, on démontre par un argument un peu plus sophistiqué que la distance est atteinte [10].

4. *Interprétation de la moyenne et de l'écart-type*

   Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. La variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée, c'est-à-dire orthogonale aux variables aléatoires déterministes. Si on travaille dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de manière à identifier deux variables aléatoires presque sûrement égales, on obtient que $E(X)$ est la projection orthogonale de X sur la droite des (classes de) variables déterministes. L'écart-type est donc la distance (en norme quadratique) de X à cette droite.

5. *Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs* 1*-lipschitziens*

   Il y a plusieurs caractérisations des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs d'un espace euclidien. La plus classique est la suivante. Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, on a équivalence entre le fait que p soit 1-lipschitzienne (c'est-à-dire de norme opératorielle au plus 1) et que p soit un projecteur orthogonal. Démontrons ce résultat. Si p est un projecteur orthogonal, le théorème de Pythagore assure que

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

   Soit inversement p un projecteur 1-lipschitzien. Montrons que l'image et le noyau de p sont orthogonaux, ce qui établira le résultat désiré. Soient donc x dans $\mathrm{Ker}(p)$, y dans $\mathrm{Im}(p)$. Pour t dans $\mathbb{R}$, on a

$$\|p(x+ty)\|^2 \leq \|x+ty\|^2, \text{ i.e. } \|ty\|^2 \leq \|x+ty\|^2, \text{ i.e. } 2t\ \langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0.$$

   La validité de cette inégalité pour tout t implique que x et y sont orthogonaux.

10. C'est la première manifestation d'un des paradigmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle : en l'absence de compacité, l'ensemble convexité-complétude donne des résultats d'existence.

6. *Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs symétriques*
   Reprenons les notations de l'exemple précédent. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, il y a équivalence entre p est un projecteur orthogonal et le fait que p soit un endomorphisme symétrique de E, i.e.

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in E^2, \qquad \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle .$$

   Dans un sens, on note que (1) implique immédiatement que le noyau et l'image de p sont orthogonaux. Réciproquement, si le noyau et l'image de p sont orthogonaux, on vérifie (1) en décomposant les vecteurs x et y de E comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(p)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 23. *Ici $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien canonique. Donner la matrice, dans la base canonique de E du projecteur orthogonal d'image*

$$D = \mathbb{R}\ {}^t(1, \ldots, 1).$$

Exercice 24. *Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien canonique, déterminer la matrice canonique de π, projection orthogonale sur le plan d'équations :*

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = -x_4.$$

Exercice 25. *On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire euclidien rendant la base canonique orthonormée. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$. Calculer la projection de* 1 *sur H et la distance de 1 à H.*

Exercice 26. *On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, on note $V = S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques. Déterminer $V^\perp$.*

Exercice 27. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X et Y dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, avec X non déterministe. Déterminer la projection orthogonale de Y sur la droite engendrée par X et* 1*. Interpréter le coefficient de corrélation de X et Y.*

Exercice 28. *Soient $n \geq 1$ et, pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:*

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2\, dt.$$

a) Montrer qu'il existe un unique P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad I(Q) \geq I(P).$$

On écrit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et on pose :

$$F = \frac{1}{X + n + 1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X + j + 1} .$$

b) Calculer $F(i)$ si $0 \leq i \leq n - 1$; en déduire F et les a_j. Montrer alors que $I(P) = F(n)$ et calculer cette quantité.

Exercice 29. *On reprend l'exemple 3 de* **2.2.1**. *On identifie fonctions polynomiales et polynômes. Montrer, si $n \in \mathbb{N}$.*

$$\|P_n\|^2 = d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]).$$

Appliquer cette formule dans le cas du produit scalaire de Legendre. Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 30. *Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.*

Exercice 31. *Dans un plan euclidien, deux droites D et D' font un angle α appartenant à $]0,\pi[$. Déterminer la norme d'opérateur de la projection de E sur D parallèlement à D'.*

Exercice 32. *Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Déterminer les droites vectorielles D telles que les normes des projections orthogonales des e_i sur D soient toutes égales. Quelle est la valeur commune de ces normes ?*

Exercice 33. *Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien tels que $p \circ q$ soit un projecteur. Montrer que p et q commutent.*

4 Quelques compléments

4.1 Polynômes orthogonaux

Reprenons l'étude des polynômes orthogonaux : I est un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, w une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$, on suppose que toutes les fonctions wp avec p polynomiale sont intégrables sur I, de sorte que E_w contient l'espace des fonctions polynomiales. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ l'unique suite de polynômes orthogonale pour $\langle\ ,\ \rangle_w$ et telle que, pour tout n, P_n soit unitaire de degré n. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a donc, puisque $(P_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \perp \mathbb{R}P_n.$$

La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ a de très nombreuses propriétés. Nous allons démontrer les plus immédiates.

1. *Racines des polynômes orthogonaux*
   Montrons d'abord que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines appartiennent à l'intérieur de I. À cet effet, on note m le nombre des racines de P_n de multiplicité impaire et appartenant à l'intérieur de I. Il suffit clairement de prouver que $m = n$. Supposons $m < n$ et notons $x_1 < \cdots < x_m$ les racines précédentes. Le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{m}(X - x_i)$ est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc orthogonal à P_n :

   $$\int_I P_n Q w = 0.$$

   Mais, par construction, $P_n Q$ est de signe constant sur I, donc $P_n Q w$ aussi. L'égalité précédente et la continuité de $PQ_n w$ montrent que cette fonction est nulle. Il s'ensuit que $P_n Q$ est nulle sur I, contradiction.

2. *Relation de récurrence vérifiée par une suite de polynômes orthogonaux*
   Montrons ensuite qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = (X - a_n)P_{n+1} + b_n P_n.$$

Il s'agit de montrer, pour n dans $\mathbb{N}$, que $P_{n+2} - XP_n$ appartient au plan engendré par P_n et P_{n+1}. On note d'abord que $P_{n+2} - XP_{n+1}$ appartient à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Le plan précédent est l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, de sorte qu'il suffit d'établir que $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais, si U est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle P_{n+2} - XP_{n+1}, U\rangle = \langle P_{n+2}, U\rangle - \langle XP_{n+1}, U\rangle = \langle P_{n+2}, U\rangle - \langle P_{n+1}, XU\rangle .$$

Comme U est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, XU est dans $\mathbb{R}_n[X]$ et les deux derniers produits scalaires sont nuls, ce qui établit la relation de récurrence annoncée. En faisant le produit scalaire de cette relation de récurrence avec P_n, il vient

$$\langle P_{n+2}, P_n\rangle - \langle XP_{n+1}, P_n\rangle + a_n \langle P_{n+1}, P_n\rangle = b_n \|P_n\|^2.$$

Compte-tenu des propriétés d'orthogonalité, on obtient donc

$$b_n \|P_n\|^2 = \langle XP_{n+1}, P_n\rangle = \langle P_{n+1}, XP_n\rangle = \|P_{n+1}\|^2,$$

la dernière égalité venant du fait que $P_{n+1} - XP_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc orthogonal à P_{n+1}. En particulier, b_n est dans $\mathbb{R}^{+*}$.

3. *La méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales*

Le principe des méthodes de calcul approchées d'intégrales est de remplacer l'intégrale d'une fonction f par une combinaison linéaire de valeurs de f en certains points. Précisons. Si $a \leq x_1, \cdots < x_n \leq b$ sont des réels, les formes linéaires

$$P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto P(a_i)$$

sont linéairement indépendantes (polynômes de Lagrange) et forment donc une base du dual $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Il existe donc $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_a^b P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k).$$

Si f est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, il n'est pas déraisonnable d'espérer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ « approche » $\displaystyle\int_a^b f$.

Revenons maintenant aux polynômes orthogonaux et proposons nous de calculer

$$\int_I fw = \langle 1, f\rangle_w$$

pour f dans E_w. L'idée de Gauss est d'utiliser comme points d'évaluation les racines des P_ℓ. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$, soient

$$x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$$

les racines de P_n. Le discours ci-dessus assure qu'existe un unique n-uplet $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$(1) \qquad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_I Pw = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} P(x_{k,n}).$$

La remarque fondamentale est la suivante : le choix des $x_{k,n}$ fait que (1) est en fait vraie pour P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Pour le voir, on écrit la division euclidienne d'un élément P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$:

$$P = P_n Q + R, \qquad Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad R \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Comme Q est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il est orthogonal à P_n pour $\langle\ ,\ \rangle_w$. Ainsi

$$\int_I Pw = \int_I Rw = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} R(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} P(x_{k,n}).$$

La relation (1) étant valable pour des polynômes de degrés plus élevés que dans un choix de points quelconque (et aussi élevé que possible, cf exercice 36), on peut penser que, si on pose, pour une fonction « raisonnable » f de I dans $\mathbb{R}$,

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} f(x_{k,n}),$$

alors $L_n(f)$ tend vers $\displaystyle\int_I fw$ lorsque n tend vers $+\infty$. Tel est le cas lorsque I est un segment et f continue : c'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 34. *On reprend les notations ci-dessus.*

a) Montrer que les $\lambda_{k,n}$ sont dans $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que I est un segment. Montrer que, pour toute fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$:

$$|L_n(f)| \leq \left(\int_I w\right) \|f\|_{\infty,I}.$$

Conclure que, pour toute fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$:

$$L_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I fw.$$

L'exercice suivant montre que la recherche de formules de quadrature exactes sur des polynômes de degré aussi élevé que possible conduit naturellement aux polynômes orthogonaux.

Exercice 35. *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ avec $m \geq 2n-1$, $a_1 < \cdots < a_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels tels que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \qquad \int_I Pw = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k).$$

Montrer que $m = 2n-1$ et que $(a_1, \ldots, a_n) = (x_{1,n}, \ldots, x_{n,n})$.

Exercice 36. *Expliciter la relation de récurrence démontrée dans le point 2 de ce paragraphe dans les cas des polynômes de Tchebychev et de Legendre.*

4.2 Le simplexe régulier

Dans le plan (resp. l'espace tridimensionnel), la configuration de trois (resp. quatre) points la plus symétrique est le triangle équilatéral (resp. le tétraèdre régulier). Fixons maintenant $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Nous allons construire un système de $n+1$ vecteurs unitaires distincts de E, $u_1, \dots, u_{n+1}$, formant des angles deux à deux égaux :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \qquad \langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

Une telle famille de vecteurs est appelée *simplexe régulier de E*.

L'intuition géométrique suggère la construction par récurrence qui suit. Pour $n = 1$, il suffit de considérer deux vecteurs unitaires opposés d'une droite euclidienne. Supposons avoir démontré, pour tout espace euclidien de dimension $n-1$, l'existence d'un simplexe régulier. Supposons E de dimension $n \geq 2$, fixons un hyperplan H de E, un simplexe régulier $(v_1, \dots, v_n)$ de H, u un vecteur unitaire orthogonal à H. Il est raisonnable de prendre $u_{n+1} = u$ et de choisir $u_1, \dots, u_n$ sous la forme

$$u_i = \alpha v_i + \beta u,$$

en ajustant les paramètres réels α et β de sorte que les u_i soient unitaires et aient pour produits scalaires deux à deux $-\dfrac{1}{n+1}$. Ceci s'écrit

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad -\frac{\alpha^2}{n} + \beta^2 = -\frac{1}{n+1}.$$

Il suffit de choisir

$$\alpha = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}, \qquad \beta = \frac{1}{n+1}.$$

Nous verrons plus loin que le simplexe régulier est unique à isométrie près.

Un problème formellement proche du précédent mais en fait bien plus difficile est celui des *droites équiangulaires* : il s'agit du nombre maximal de vecteurs unitaires distincts de E tels que les valeurs absolues $|\langle u_i, u_j \rangle|$, $1 \leq i < j \leq p$ soient égales, c'est-à-dire tels que les droites $\mathbb{R}u_i$, $1 \leq i \leq p$ forment deux à deux des angles égaux. L'exercice suivant donne une majoration du cardinal d'une telle famille. [11]

Exercice 37. *a) Soient $V_1, \dots, V_p$ des éléments de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux à deux distincts et de norme euclidienne canonique égale à 1, α un nombre réel. On suppose que*

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2,\ i \neq j \Longrightarrow \left|{}^tV_i V_j\right| = \alpha.$$

Montrer que les matrices $V_i {}^tV_i$, $1 \leq i \leq p$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire

$$p \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Montrer que la majoration précédente est optimale pour $n = 2$ et $n = 3$.

11. Le problème du cardinal maximal est encore ouvert.

Le simplexe régulier donne une famille de $n+1$ vecteurs de E formant deux à deux des angles obtus. L'exercice suivant dit qu'on ne peut pas faire mieux.

Exercice 38. *Montrer que, si $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille de vecteurs de E faisant deux à deux des angles obtus, alors $p \leq n+1$.*

4.3 Matrices de Gram

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs de E, la *matrice de Gram* de $(x_1, \ldots, x_p)$ est

$$G(x_1, \ldots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{\leq i,j \leq p} .$$

La matrice de Gram code toutes les relations métriques entre les x_j.[12] Voici la première propriété de cette matrice.

Proposition 3. *Le rang de $G(x_1, \ldots, x_p)$ est le rang du système de vecteur $(x_1, \ldots, x_p)$.*

Preuve. Le vecteur colonne ${}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ est dans le noyau de $G(x_1, \ldots, x_p)$ si et seulement si le vecteur $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ est orthogonal à tous les x_i, c'est-à-dire si ce vecteur est nul. Nous sommes ainsi ramenés à déterminer la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^p$:

$$\left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \ ;\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i = 0 \right\} .$$

On introduit naturellement l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^p$ dans E définie par

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i .$$

L'image de φ est $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Deux applications du théorème du rang complètent la démonstration.

Exercice 39. *On suppose E de dimension n. Soient $p \geq n+1$ et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs unitaires de E deux à deux distincts faisant deux à deux des angles égaux : $\langle x_i, x_j \rangle = \alpha$ pour $i \neq j$. Démontrer que $p = n+1$ et que $\alpha = -1/n$.*

La proposition ci-après donne une autre approche des matrices de Gram.

Proposition 4. *Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, P la matrice de présentation de $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E. Alors*

$$G(x_1, \ldots, x_p) = {}^t P P .$$

En particulier, le déterminant de $G(x_1, \ldots, x_p)$ est positif. Il est strictement positif si et seulement si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

12. L'exercice 61 est une formulation précise de ce phénomène.

Preuve. Posons, pour i dans $\{1, \ldots, p\}$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k}\, e_k, \qquad (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}) \in \mathbb{R}^n.$$

Il vient, si $1 \leq i, j \leq p$:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} x_{i,k}\, x_{j,\ell}\, \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k}\, x_{j,k}.$$

La première assertion suit. La seconde s'en déduit, immédiatement si $p = n$, en utilisant que ${}^tPP$ est symétrique positive dans le cas général.

Remarques

1. *Gram et Cauchy-Schwarz*
   Pour $p = 2$, la positivité du déterminant de $G(x_1, x_2)$ n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. *La proposition 4 implique la proposition 3*
   Si P est dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on vérifie

   $$\mathrm{Ker}({}^tPP) = \mathrm{Ker}(P).$$

   L'inclusion $\mathrm{Ker}(P) \subset \mathrm{Ker}({}^tPP) = \mathrm{Ker}(P)$ est évidente. Pour la réciproque, on note que si X est dans $\mathrm{Ker}({}^tPP)$, alors $Y = PX$ vérifie ${}^tYY = 0$, donc est nul.

   En combinant cette observation et la proposition 5, on retrouve que le rang de $G(x_1, \ldots, x_p)$ est le rang du système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$.
3. *La matrice de covariance est une matrice de Gram*
   Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la *matrice de covariance* de $(X_1, \ldots, X_n)$ est

   $$(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{\leq i,j \leq n}.$$

   Posons, si $1 \leq i \leq n$:

   $$X_i' = X_i - E(X_i),$$

   de sorte que la matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ n'est autre que la matrice de Gram de $(X_1, \ldots, X_n')$. Grâce à la proposition 4, cette matrice est inversible si et seulement si $(X_1', \ldots, X_n')$ est libre, i.e. si et seulement s'il n'existe aucun hyperplan affine auquel le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ appartienne presque sûrement.
4. *Quelles matrices sont des matrices de Gram ?*
   Il est possible de caractériser les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont matrices de Gram d'une famille de vecteurs de E. Énonçons sans démonstration le résultat. Si M est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, les conditions suivantes sont équivalentes.

   (i) Il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que $M = G(x_1, \ldots, x_p)$.

   (ii) La matrice M est symétrique, de rang majoré par n et positive, ce qui signifie que

   $$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \qquad {}^tXMX \geq 0,$$

   ou encore que les valeurs propres de M appartiennent à $\mathbb{R}^+$.

Exercice 40. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de l'espace préhilbertien E, $(e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de cette famille. Démontrer*

$$det(G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle e_i, x_i \rangle .$$

Exercice 41. *Démontrer la caractérisation des matrices de Gram énoncée dans la remarque 3. On utilisera le théorème spectral.*

Exercice 42. *Soient $u_1, \dots, u_{n+2}$ des points d'un espace euclidien de dimension n. On suppose que les distances :*

$$\|u_i - u_j\|, \quad 1 \leq i < j \leq n+2$$

sont des entiers impairs. On peut supposer (pourquoi ?) que u_{n+2} est nul. C'est ce qu'on fait.

a) Montrer que, si $1 \leq i < j \leq n+1$:

$$2 \langle u_i, u_j \rangle \equiv 1 \ [8].$$

b) En considérant le déterminant de la matrice de Gram de $u_1, \dots, u_{n+1}$ montrer que 8 divise $n+2$. [13]

Exercice 43. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $X_1, \dots, X_n, Y$ des éléments de $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose qu'il n'existe aucun hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ auquel le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ appartienne presque sûrement. Expliquer comment calculer la projection orthogonale de Y sur le sous-espace de $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P)$ engendré par $(1, X_1, \dots, X_n)$ en utilisant l'inverse de la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_n)$.*

On peut utiliser les déterminants de Gram pour calculer la distance d'un point à un sous-espace. Voici comment.

Exercice 44. *Soient x dans E, V un sous-espace de E, $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Démontrer*

$$d(x, V)^2 = \frac{det(G(x_1, \dots, x_n, x))}{det(G(x_1, \dots, x_n))}.$$

5 Matrices orthogonales

5.1 Passage d'une base orthonormée à une autre

Nous allons décrire les bases orthonormées d'un espace euclidien à partir de l'une d'entre elles. Ce problème revient à expliciter les matrices de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien. Soit donc $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien, $f = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. On écrit

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i,$$

13. On peut en fait montrer que l'existence de $n+2$ points de E à distances mutuelles impaires équivaut au fait que 16 divise $n+2$.

de sorte que $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de passage de e à f. Écrivons P en colonnes

$$P = (C_1, \dots, C_n).$$

Le fait que f soit orthonormée se traduit par les relations

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \qquad {}^tC_iC_j = \delta_{i,j}.$$

Ces relations s'écrivent de manière plus compacte sous la forme

$${}^tPP = I_n.$$

Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette relation sera dite *orthogonale*. On notera $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices orthogonales peuvent être caractérisées de plusieurs façons.

- Ce sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles et dont l'inverse est égal à la transposée.

- Ce sont les matrices dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

- Ce sont les matrices dont les lignes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

La première caractérisation montre immédiatement que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce que nous retrouverons plus agréablement en utilisant les isométries. La seconde montre en particulier que, si $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $O_n(\mathbb{R})$:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} {p_{i,j}}^2 = 1,$$

ce qui entraîne que les coefficients d'une matrice orthogonale sont dans $[-1, 1]$.

Exercice 45. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 46. *Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 47. *Déterminer le maximum de Tr sur $O_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'ensemble des points en lesquels ce maximum est atteint.*

Exercice 48. *Déterminer l'ensemble $O_n(\mathbb{Z})$ des matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En particulier, montrer que cet ensemble est fini et en calculer le cardinal.*

Exercice 49. *Déterminer l'ensemble $O_n(\mathbb{R}^+)$ des matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.*

Exercice 50. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que u est trigonalisable si et seulement s'il est trigonalisable en base orthonormée.*

5.2 Complément : la décomposition QR

Soit $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont strictement positifs. Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut écrire M comme matrice de passage : $M = P_\varepsilon^e$ où ε est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, e la base de $\mathbb{R}^n$ formé des colonnes de M. Soit u l'orthonormalisée de Schmidt de e. La matrice de passage P_u^e appartient à $T_n^{++}(\mathbb{R})$, alors que la matrice de passage P_ε^u est orthogonale. D'autre part, on a la relation

$$M = P_\varepsilon^e = P_\varepsilon^u \, P_u^e.$$

Ces considérations établissent la partie « existence » du théorème ci-après.

Théorème 6. *Soit M un élément de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple (O, T) de $O_n(\mathbb{R}) \times T_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OT$.*

Preuve de l'unicité. En reprenant l'argumentation précédente, on peut déduire l'unicité de la décomposition de celle de l'algorithme de Schmidt. Donnons une preuve directe. Soient O et O' dans $O_n(\mathbb{R})$, T et T' dans $T_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $OT = O'T'$. Alors $O^{-1}O' = TT'^{-1}$ est dans $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^{++}(\mathbb{R})$. Cette intersection est réduite à $\{I_n\}$. Soit en effet M dans cette intersection. La première colonne de M a pour seul terme non nul $M_{1,1}$, strictement positif et de valeur absolue 1, donc égal à 1. La deuxième colonne de M, ${}^t(M_{1,2}, M_{2,2}, 0, \ldots, 0)$, est orthogonale à la première, donc $M_{1,2}$ est nul. Elle est également unitaire, de sorte que $M_{2,2}$, par hypothèse strictement positif, est aussi égal à ± 1, donc en fin de compte à 1. Continuant de la sorte, on montre que $M = I_n$. La mise en forme complète, facile, est laissée au lecteur.

En analyse numérique, on note plutôt $M = QR$ la décomposition précédente : Q est orthogonale, R triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs. Cette décomposition est à la base d'une méthode très performante de calcul approché des vecteurs propres d'une matrice, l'*algorithme QR*.

L'application

$$\varphi \; : (O, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^{++}(\mathbb{R}) \longmapsto OT \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

est bijective. Ce n'est pas un morphisme de groupes si $n \geq 2$ (problème de commutation). En revanche, c'est un homéomorphisme. C'est ce que montre l'exercice suivant, dont le résultat signifie que l'étude topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se ramène essentiellement à celle de $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 51. *Montrer que l'application φ est un homémorphisme, puis que $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \times O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 52. *En utilisant la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ et la compacité de $O_n(\mathbb{R})$, démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit OT où O est dans $O_n(\mathbb{R})$ et T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux positifs ou nuls.*

Exercice 53. *Montrer que si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant strictement $O_n(\mathbb{R})$, alors G n'est pas borné. Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.*[14]

14. On peut démontrer, mais c'est plus difficile, qu'un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$. L'étude des sous-groupes compacts du groupe topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ conduit donc à inventer la géométrie euclidienne !

5.3 Produit mixte

La formule ${}^tMM = I_n$ entraîne aussitôt qu'une matrice orthogonale est de déterminant ± 1. La réciproque est évidemment fausse dès que $n \geq 2$, comme on le voit en considérant des matrices diagonales

$$\mathrm{Diag}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1, \ldots, 1\right) \qquad \text{avec } \alpha \neq \pm 1.$$

Nous noterons $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1. C'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe spécial orthogonal*.

Orienter un espace vectoriel réel de dimension finie, c'est en choisir une base e et décréter directes les bases e' telles que $P_e^{e'}$ soit de déterminant strictement positif, indirectes les autres. Si l'espace est euclidien, on oriente souvent l'espace en décrétant directe une base orthonormée e. Les bases orthonormées directes sont alors les bases e' de E telles que $P_e^{e'}$ appartienne à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension n, alors, pour deux bases e et e' de E, on a

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \qquad \det_{e'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{e'}(e) \times \det_e(x_1, \ldots, x_n).$$

Il s'ensuit que si e et e' sont deux bases orthonormées de même orientation de E, on a

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \qquad \det_{e'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_e(x_1, \ldots, x_n).$$

On peut donc définir le *produit mixte* (ou *volume orienté*) de $(x_1, \ldots, x_n)$ par la formule

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_e(x_1, \ldots, x_n),$$

pour toute base orthonormée directe e de E. La valeur absolue

$$|[x_1, \ldots, x_n]|$$

est elle évidemment indépendante de l'orientation ; c'est le *volume non orienté*.

Le théorème suivant, hors-programme, est l'*inégalité d'Hadamard*. Il généralise la majoration de l'aire d'un parallélogramme par le produit des longueurs de ses côtés. La démonstration est la même : on trace les « hauteurs » successives.[15]

Théorème 7. *Avec les notations précédentes, on a*

$$|[x_1, \ldots, x_n]| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Si la famille est libre, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ *est orthogonale.*

15. Dessin recommandé.

Preuve. Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, $[x_1, \ldots, x_n]$ est nul et le résultat est trivial. Supposons donc $(x_1, \ldots, x_n)$ libre. Pour $1 \leq k \leq n$, soit y_k le projeté orthogonal de x_k sur $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{k-1})$. On a donc

$$x_k = y_k + z_k, \qquad z_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{k-1})^{\perp}.$$

On montre par récurrence sur k :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad [x_1, \ldots, x_n] = [z_1, \ldots, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Pour $k = 1$, $z_1 = x_1$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons $1 \leq k \leq n-1$ et

$$[x_1, \ldots, x_n] = [z_1, \ldots, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

On remplace x_{k+1} par $y_{k+1} + z_{k+1}$. Comme y_{k+1} appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$, c'est-à-dire à $\mathrm{Vect}(z_1, \ldots, z_k)$, le caractère n-linéaire alterné du déterminant permet de conclure

$$[x_1, \ldots, x_n] = [z_1, \ldots, z_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n].$$

Pour $k = n$, on a donc

$$[x_1, \ldots, x_n] = [z_1, \ldots, z_n].$$

La famille $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant une famille orthogonale de vecteurs non nuls, on peut calculer $|[z_1, \ldots, z_n]|$ en se plaçant dans la base orthonormée obtenue en normant les z_k. Il vient

$$|[z_1, \ldots, z_n]| = \prod_{k=1}^{n} \|z_k\|.$$

Mais, pour tout k, le théorème de Pythagore entraîne que $\|z_k\| \leq \|x_k\|$, avec égalité si et seulement si $y_k = 0$, i.e. si les x_k sont deux à deux orthogonaux.. Le théorème s'en déduit.

Exercice 54. *Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle dont les coefficients appartiennent à $[-1, 1]$.*

a) Montrer que

$$|det(M)| \leq n^{n/2},$$

avec égalité si et seulement si tous les coefficients de M valent ± 1 et les colonnes de M sont deux à deux orthogonales. Les matrices réalisant l'égalité sont appelées matrices d'Hadamard.

b) Soient n un entier ≥ 3, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'Hadamard, C, C', C'' trois colonnes distinctes de M. Calculer le produit scalaire canonique de $C + C'$ et $C + C''$ et en déduire que 4 divise n.

c) Vérifier que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice d'Hadamard, alors

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}$$

est une matrice d'Hadamard. En déduire que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, il existe une matrice d'Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$.

d) Plus généralement, montrer que le produit tensoriel de deux matrices d'Hadamard est une matrice d'Hadamard. Qu'en déduit-on sur l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}^*$ tels qu'existe une matrice d'Hadamard ?[16]

Exercice 55. *On fixe $n \geq 2$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme de Hilbert-Schmidt.*

a) Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{\| Com(A) \|}{\|A\|^{n-1}} \ ; \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \setminus \{0\} \right\}$$

est un segment de $\mathbb{R}$.

b) Soit C_n la borne supérieure du segment précédent. Donner un encadrement de C_n.

6 Isométries d'un espace euclidien

6.1 Généralités

Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien. Nous allons étudier les endomorphismes de E qui préservent la norme.

Proposition 5. *Soient u dans $\mathcal{L}(E)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orhtonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application u conserve la norme :

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|.$$

(ii) L'application u conserve les produits scalaires :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

(iii) La famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthonormée.

Preuve. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ s'obtient par polarisation. Si u vérifie (i), on a, pour x et y dans E :

$$2 \langle u(x), u(y) \rangle = \|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

On en déduit

$$2 \langle u(x), u(y) \rangle = 2 \langle x, y \rangle .$$

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est immédiate. Supposons enfin (iii). Alors, pour $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\left\| u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2,$$

16. La conjecture selon laquelle il existe des matrices d'Hadamard en toute dimension divisible par 4 est ouverte à ce jour. Les matrices d'Hadamard ont de nombreuses applications (codage par exemple).

la seconde égalité provenant du caractère orthonormé de $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Conformément à la terminologie générale, les applications précédentes sont appelées *isométries de l'espace euclidien* E. Nous noterons $O(E)$ l'ensemble de ces isométries ; $O(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 56. *Soit f une application de E dans E telle que*

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in E^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

a) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

En déduire que f est linéaire, donc que $f \in O(E)$.

b) Décrire les applications vérifiant (1). [17]

Exercice 57. *Soit Γ une partie de $GL(E)$. Montrer qu'il existe un produit scalaire pour lequel tous les éléments de Γ sont des isométries si et seulement si Γ est conjugué dans $GL(E)$ à un sous-groupe de $O(E)$.*

Exercice 58. *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Démontrer qu'il existe un produit scalaire sur V pour lequel tous les éléments de G sont des isométries. On fixera un produit scalaire quelconque $(\ ,\ )$ sur V et on posera*

$$\forall (x,y) \in V^2, \qquad x.y = \sum_{g \in G} (g(x), g(y)).$$

Le (iii) de la proposition 5 entraîne aussitôt la conséquence suivante.

Proposition 6. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, e une base orthonormée de E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'endomorphisme u est une isométrie.

(ii) La matrice $Mat_e(u)$ est orthogonale.

Il s'ensuit que, si e est une base orthonormée de l'espace euclidien E, l'application

$$u \longmapsto \mathrm{Mat}_e(u)$$

est un isomorphisme de groupes de $O(E)$ sur $O_n(\mathbb{R})$. En particulier, l'application linéaire canoniquement associée à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une isométrie si et seulement si M appartient à $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 59. *Déterminer le maximum de*

$$M = (M_{i,j})_{\leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} M_{i,j}.$$

On pourra écrire $M_{i,j}$ comme un produit scalaire.

17. Ce résultat s'étend aux isométries bijectives d'un espace normé réel sur lui-même (théorème dû à Mazur et Ulam). La preuve est plus délicate.

Une autre conséquence est qu'une isométrie a pour déterminant ± 1, ce qui est raisonnable : une application qui préserve les longueurs se doit de conserver les volumes non orientés. On note $\mathrm{SO}(E)$ le sous-groupe des isométries de déterminant 1, c'est-à-dire des isométries qui préservent l'orientation, dites *directes* ou *positives*. Bien sûr, si e est une base orthonormée de E, l'appartenance de u à $\mathrm{SO}(E)$ équivaut à celle de $\mathrm{Mat}_e(u)$ à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exemple *Les symétries orthogonales*

Si V est un sous-espace de E, on appelle *symétrie orthogonale par rapport à* V la symétrie de E par rapport à V et parallèlement à $V^{\perp}$. Cette symétrie σ_V est donc l'unique endomorphisme de V tel que

$$\mathrm{Ker}(\sigma_V - Id) = V, \qquad \mathrm{Ker}(\sigma_V + Id) = V^{\perp}.$$

C'est une isométrie de E : si l'élément x de E s'écrit $v + w$ avec v dans V et w dans $V^{\perp}$, on a

$$\sigma_V(x) = v - w, \qquad \|\sigma_V(x)\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|x\|^2.$$

Si V est un hyperplan H, on dit que σ_V est la *réflexion orthogonale d'hyperplan* H.

Exercice 60. *Soient V un sous-espace de E, g un élément de $O(E)$. Reconnaître $g \circ s_V \circ g^{-1}$.*

Exercice 61. *Montrer que les isométries de E diagonalisables sont les symétries orthogonales.*

Exercice 62. *a) Le groupe orthogonal $O(E)$ agit sur lui-même par conjugaison. Combien y-a-t-il de classes de symétries orthogonales ?*

b) On suppose que les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $O_m(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Montrer que $m = n$.

Exercice 63. *a) Déterminer les endomorphisme de E qui commutent avec toutes les isométries de E.*

b) Déterminer les endomorphisme de E qui commutent avec toutes les isométries directes de E.

Exercice 64. *Les groupes $O(E)$ et $SO(E) \times \{-1, 1\}$ sont-ils isomorphes ?*

Exercice 65. *Le groupe $O(E)$ agit sur E. Déterminer les orbites. Même question pour l'action sur les sous-espaces vectoriels de E.*

On peut généraliser la première question de l'exercice précédent et paramétrer les orbites de l'action de $O(E)$ sur E^p par les matrices de Gram. C'est l'objet de l'exercice suivant, qui montre, en particulier, qu'il n'y a, à isométrie près, qu'un simplexe régulier.

Exercice 66. *Soit p dans $\mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ dans E^{2p}. Montrer que $G(x_1, \ldots, x_p) = G(y_1, \ldots, y_p)$ si et seulement s'il existe u dans $O(E)$ tel que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \qquad u(x_i) = y_i.$$

La géométrie euclidienne a un groupe d'isométrie très riche. Pour comparaison, on pourra traiter l'exercice suivant [18].

Exercice 67. *Déterminer les groupes d'isométries des espaces normés* $(\mathbb{R}^n \| \ \|_1)$ *et* $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$.

6.2 Matrices orthogonales et isométries en dimension 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Si la base est directe, i.e. si M est dans $SO_2(\mathbb{R})$, M est de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas contraire, M est de la forme

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

La proposition suivante est immédiate mais fondamentale.

Proposition 7. *L'application*

$$R \ : \theta \longmapsto R_\theta$$

est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ *sur* $SO_2(\mathbb{R})$ *de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$. *En particulier, le groupe* $SO_2(\mathbb{R})$ *est abélien.*

Il en résulte que le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 ; l'isomorphisme naturel défini par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad j(e^{i\theta}) = R_\theta,$$

est de plus un homéomorphisme.

Exercice 68. *a) Montrer que, pour tout* n *dans* $\mathbb{N}^*$, $SO_2(\mathbb{R})$ *a exactement un sous-groupe fini de cardinal* n, *qui est l'ensemble des rotations d'angle appartenant à* $\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$.

b) Démontrer qu'un sous-groupe infini de $SO_2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $SO_2(\mathbb{R})$.

Exercice 69. *a) Montrer qu'un sous-groupe fini de* $SL_2(\mathbb{R})$ *est cyclique.*

b) Soitn $\in \mathbb{N}^*$. *Montrer que tout sous-groupe de cardinal* n *de* $SL_2(\mathbb{R})$ *est conjugué dans* $GL_2(\mathbb{R})$ *à l'unique sous-groupe de cardinal* n *de* $SO_2(\mathbb{R})$ *(cf exercice précédent).*

La matrice S_θ est de trace nulle et de déterminant 1 : le théorème de Cayley-Hamilton, trivial en dimension 2, nous dit que cette matrice est celle d'une symétrie. La recherche des éléments propres montre qu'il s'agit de la réflexion orthogonale d'axe dirigé par le vecteur ${}^t(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$. Il s'ensuit que

$$R_{\theta/2}^{-1} \, S_\theta \, R_{\theta/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. On peut en fait démontrer que tout espace normé de dimension finie dont le groupe des isométries agit transitivement sur la sphère unité este euclidien.

Du fait de la commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2, \qquad R_\varphi R_\theta R_\varphi^{-1}=R_\theta.$$

Si D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,-1)$, c'est-à-dire S_0, l'égalité

$$O_2(\mathbb{R})\setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})=D\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),$$

montre

$$\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2, \qquad S_\varphi R_\theta S_\varphi^{-1}=R_{-\theta}.$$

Une isométrie directe d'un plan euclidien est appelée *rotation*. Pour une telle rotation r, la discussion précédente montre que la matrice de r dans une base orthonormée e est de la forme R_θ avec θ dans $]-\pi,\pi]$. La valeur de θ est déterminée par l'orientation de la base e.

Théorème 8. *Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 2, u une isométrie de E.*

i) Si u est dans $SO(E)$, alors u est une rotation.

ii) Si u est dans $O(E)\setminus SO(E)$, u est une réflexion orthogonale par rapport à une droite.

Remarque *Toute rotation est produit de deux réflexions*

Il découle du théorème précédent que toute rotation r d'un plan euclidien est produit de deux réflexions orthogonales. Plus précisément, si s est une réflexion orthogonale, $s^{-1}r$ est de déterminant 1, donc est une réflexion orthogonale s', d'où $r=ss'$. Si E est de dimension n, on montre que tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus n réflexions orthogonales. Les réflexions orthogonales constituent donc, dans le cas général, un système de générateur de $O(E)$.

Exercice 70. *Soit M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. À quelle condition existe-t-il un produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$ tel que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A soit une rotation pour ce produit scalaire ?*

Le problème de la *restriction cristallographique* est la détermination des groupes finis d'isométries stabilisant un réseau d'un espace euclidien. Le cas plan, très simple, est traité dans l'exercice ci-après.

Exercice 71. *Soit r une rotation d'un plan euclidien P. À quelle condition existe-t-il u et v dans P tels que (u,v) soit libre et que $R=\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v$ soit stable par r ?*

Nous terminons par les *groupes diédraux.*

Exercice 72. *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{D}_n$ le sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ engendré par $R_{2\pi/n}$ et S_0.*

a) Montrer que $\mathcal{D}_n$ est de cardinal $2n$.

b) Donner la table de multiplication de $\mathcal{D}_n$.

c) Montrer que $\mathcal{D}_n$ est le groupe des isométries qui stabilisent le polygone régulier dont les sommets sont les points de coordonnées $(\cos(2k\pi/n),\sin(2k\pi/n))$ pour k dans $\{0,\dots,n-1\}$.

d) Montrer que tout sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{R})$ non contenu dans $SL_2(\mathbb{R})$ est conjugué dans $GL_2(\mathbb{R})$ à un groupe diédral $\mathcal{D}_n$.