DEVOIR SURVEILLÉ 4

(durée : 3 h 30)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\text{encadrée}}$ ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Suite de Dieudonné

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

1. Démontrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

2. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de
$$\sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

   b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on ait
$$S_n \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon.$$

3. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

4. Déterminer un équivalent du terme général D_n de la suite de Dieudonné donné, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par
$$D_n = \sum_{k=0}^{n} k^n.$$

EXERCICE 2

Nombres parfaits

A. Sommes aliquotes

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_k(n)$ la somme des puissances k-èmes des diviseurs positifs de n, c'est-à-dire

$$\sigma_k(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant d \leqslant n \\ d \mid n}} d^k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en français ce que représentent les quantités $\sigma_0(n)$ et $\sigma_1(n)$ pour l'entier n.
2. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Démontrer que l'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(n) & \longrightarrow & \mathscr{D}(n) \\ d & \longmapsto & n/d \end{array} \right.$$

est une bijection et en déduire que

$$\sigma_k(n) = n^k \sigma_{-k}(n).$$

3. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\sigma_k(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{j=0}^{v_p(n)} p^{kj}$$

et en déduire que

$$\sigma_k(n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{p^{k(v_p(n)+1)} - 1}{p^k - 1} & \text{si } k \in \mathbb{Z}^* \\ \displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}} (v_p(n) + 1) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

4. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$. Démontrer que

$$\sigma_k(nm) = \sigma_k(n)\sigma_k(m).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\sigma_0(n)$ est impair si, et seulement si, n est un carré.

B. Nombres parfaits

Un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit parfait lorsque $\sigma_1(n) = 2n$, c'est-à-dire lorsque la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à lui-même.

1. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
2. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est un nombre premier. On dit que c'est un nombre premier de Mersenne.

   Démontrer que p est un nombre premier et que le nombre $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait. On dit que n est un nombre parfait d'Euclide.

   b) Soit n un nombre parfait pair. On écrit n sous la forme $n = 2^\alpha a$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et a est impair.

   α] Démontrer qu'il existe un entier naturel impair b tel que $a = (2^{\alpha+1} - 1)b$.

   β] Démontrer que $b = 1$. *Indication : On procédera par l'absurde et on distinguera deux cas : $b = 2^{\alpha+1} - 1$ ou $b \neq 2^{\alpha+1} - 1$.*

   γ] Démontrer que a est un nombre premier de Mersenne et en déduire que n est un nombre parfait d'Euclide.

3. a) Soient p, q deux nombres premiers impairs distincts et α, β deux entiers naturels. Démontrer que

$$2p^\alpha q^\beta - \sigma_1(p^\alpha q^\beta) = \frac{p^\alpha q^\beta\big((p-2)(q-2)-2\big) + p^{\alpha+1} + q^{\beta+1} - 1}{(p-1)(q-1)}.$$

Que peut-on en déduire concernant les nombres parfaits impairs ?

b) α] Soient p un nombre premier impair et v un entier naturel. Calculer la valeur modulo 4 de $\sigma_1(p^v)$. *On distinguera les trois cas :* ($p \equiv 1$ [4]) *ou* ($p \equiv -1$ [4] et v impair) *ou* ($p \equiv -1$ [4] et v pair).

β] On suppose qu'il existe un nombre parfait impair n. Démontrer qu'il existe un nombre premier p congru à 1 modulo 4, α un entier naturel et m un entier naturel impair tel que $n = p^{4\alpha+1}m^2$.

4. Démontrer qu'un nombre parfait n'est jamais un carré.

C. Nombres de Ore

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit de Ore lorsque

$$\frac{\sigma_0(n)}{\sigma_{-1}(n)} \in \mathbb{N}^*,$$

c'est-à-dire lorsque la moyenne harmonique des diviseurs de n est un entier.

1. Vérifier que 28 et 140 sont des nombres de Ore.
2. Démontrer que tout nombre parfait est de Ore. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 3

Théorème de Baire

1. Démontrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

(i) Pour toute suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$, l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour toute suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de $\mathbb{R}$ d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$, l'union $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.

L'un ou l'autre de ces énoncés s'appelle le *théorème de Baire*.

L'objet de la question 2 est de démontrer ce résultat, sous la forme de l'énoncé (i). À la question 3, on en donne une application.

2. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

a) Démontrer qu'il existe une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $a_n < b_n$ et $]a_n; b_n[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap]x; y[$.

b) En déduire que l'intersection entre $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ et $]x; y[$ est non vide et conclure.

3. Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Une application de Cesàro

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

On suppose que

$$S_n \sim \frac{1}{a_n}.$$

1. Démontrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite positive ou nulle, notée ℓ. Démontrer ensuite que $\ell = 0$.
2. À l'aide du théorème de Cesàro, démontrer que $S_n \sim \sqrt{2n}$. En déduire un équivalent de a_n.

CORRECTION DU DS 4

(durée : 3 h 30)

EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (1 - k/n)^n$.

1. *Démontrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \leqslant \mathrm{e}/(\mathrm{e}-1)$.*

On introduit la fonction

$$f(x) = x - \ln(1+x)$$

qui est définie sur $]-1;+\infty[$.
Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et l'on a

$$\forall x > -1, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

donc $f'(x)$ est du signe de x, ce qui donne :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La positivité de f sur $]-1;+\infty[$ nous permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leqslant x.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right\}$$

En utilisant l'inégalité $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x = -k/n$, on obtient, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{n\left(-\frac{k}{n}\right)\right\} = \mathrm{e}^{-k},$$

donc

$$S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-k}.$$

La formule de sommation d'une suite géométrique nous dit alors que

$$S_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}.$$

En « oubliant » la quantité $-\mathrm{e}^{-n}$ qui est négative, il vient

$$S_n \leqslant \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\cdot$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\cdot}$$

2. a) *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{N}(1-k/n)^n$.*

Soit $k \in [\![0; N]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right\}.$$

Or

$$n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right) \sim n\left(-\frac{k}{n}\right) \sim -k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -k,$$

ce qui donne

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-k}.$$

Comme N est fixé, le théorème général de sommation des limites nous dit que

$$\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{-k}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{-k} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}},$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\mathrm{e}^{-N}}{\mathrm{e}-1}.}$$

b) *Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on ait $S_n \geqslant \mathrm{e}/(\mathrm{e}-1)-\varepsilon$.*

On constate que

$$\frac{\mathrm{e}^{-N}}{\mathrm{e}-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

donc on peut choisir $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\mathrm{e}^{-N_1}}{\mathrm{e}-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, comme la question précédente nous dit que

$$\sum_{k=0}^{N_1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\mathrm{e}^{-N_1}}{\mathrm{e}-1},$$

il existe $N_0 \geqslant N_1$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on ait

$$\sum_{k=0}^{N_1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\mathrm{e}^{-N_1}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En rassemblant ces inégalités, on en déduit que, pour tout $n \geqslant N_0$, on a

$$\sum_{k=0}^{N_1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon.$$

Or, pour $n \geqslant N_0$ et donc $n \geqslant N_1$, on a clairement

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{N_1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n,$$

d'où

$$S_n \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } N_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que, pour tout } n \geqslant N_0, \text{ on ait } S_n \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon.}$$

3. *En déduire le comportement asymptotique de la suite* $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

En associant les résultats des questions 1. et 2., on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$,
$$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon \leqslant S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$
Cela démontre que
$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.}$$

4. *Déterminer un équivalent du terme général* D_n *de la suite de Dieudonné donné, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *par* $D_n = \sum_{k=0}^{n} k^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue le changement d'indice $\ell = n - k$ dans la somme définissant D_n, ce qui donne
$$D_n = \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell)^n.$$
Par conséquent, on a
$$\frac{D_n}{n^n} = \sum_{\ell=0}^{n} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)^n = S_n,$$
ce qui démontre, en vertu de la question précédente, que
$$\frac{D_n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$
et donc que
$$\boxed{D_n \sim \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} n^n.}$$

EXERCICE 2

A. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_k(n)$ la somme des puissances k-èmes des diviseurs positifs de n, c'est-à-dire $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en français ce que représentent les quantités $\sigma_0(n)$ et $\sigma_1(n)$ pour l'entier n.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$$
donc
$$\boxed{\sigma_0(n) \text{ est le nombre de diviseurs de } n \text{ et } \sigma_1(n) \text{ est la somme des diviseurs de } n.}$$

2. *Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Démontrer que l'application $\varphi : \mathscr{D}(n) \longrightarrow \mathscr{D}(n)$ telle que $\forall d \in \mathscr{D}(n),\ \varphi(d) = n/d$ est une bijection et en déduire que $\sigma_k(n) = n^k \sigma_{-k}(n)$.*

Pour tout $d \in \mathscr{D}(n)$, on a
$$\varphi\big(\varphi(d)\big) = \frac{n}{\varphi(d)} = \frac{n}{n/d} = d,$$
donc
$$\boxed{\varphi \text{ est une involution.}}$$
Comme φ est une bijection, on peut effectuer le changement d'indice $d = \varphi(\delta)$ dans la somme définissant $\sigma_k(n)$, ce qui donne
$$\sum_{d|n} d^k = \sum_{\delta|n} \left(\frac{n}{\delta}\right)^k = n^k \sum_{\delta|n} \delta^{-k},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\sigma_k(n) = n^k \sigma_{-k}(n).}$$

3. *Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a $\sigma_k(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{j=0}^{v_p(n)} p^{kj}$ et en déduire que l'on a $\sigma_k(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \big(p^{k(v_p(n)+1)} - 1\big)/(p^k - 1)$ si $k \in \mathbb{Z}^*$ et $\sigma_0(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (v_p(n) + 1)$.*

Écrivons la décomposition primaire de n sous la forme $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_\ell}^{\alpha_\ell}$. Dès lors, les diviseurs d de n sont exactement les nombres de la forme $d = {p_1}^{\beta_1} \dots {p_\ell}^{\beta_\ell}$ avec $\forall j \in [\![1;\ell]\!]\,,\ 0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$. On a donc
$$\sigma_k(n) = \sum_{\substack{0\leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \leqslant \beta_\ell \leqslant \alpha_\ell}} ({p_1}^{\beta_1} \dots {p_\ell}^{\beta_\ell})^k = \left(\sum_{0\leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1} {p_1}^{k\beta_1}\right) \times \dots \times \left(\sum_{0\leqslant \beta_\ell \leqslant \alpha_\ell} {p_\ell}^{k\beta_\ell}\right)$$
où l'on a pu séparer la somme multiple en un produit de sommes simples puisque les indices sont « séparables ». On ainsi démontré que
$$\boxed{\sigma_k(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{j=0}^{v_p(n)} p^{kj}.}$$
Si $k = 0$, il vient
$$\sigma_0(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{j=0}^{v_p(n)} 1 = \prod_{p\in\mathbb{P}} (v_p(n) + 1)$$
et si $k \neq 0$, la formule de sommation d'un suite géométrique de raison $\neq 1$ nous donne
$$\sigma_k(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{k(v_p(n)+1)} - 1}{p^k - 1}.$$
Donc
$$\boxed{\sigma_k(n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{k(v_p(n)+1)} - 1}{p^k - 1} & \text{si } k \in \mathbb{Z}^* \\ \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} (v_p(n) + 1) & \text{si } k = 0. \end{cases}}$$

4. *Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$. Démontrer que $\sigma_k(nm) = \sigma_k(n)\sigma_k(m)$.*

Comme n et m sont premiers entre eux, on peut écrire leurs décompositions en nombres premiers sous la forme

$$n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_\ell}^{\alpha_\ell} \qquad \text{et} \qquad m = {p_{\ell+1}}^{\alpha_{\ell+1}} \dots {p_{\ell+q}}^{\alpha_{\ell+q}},$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers naturels non nuls, ce qui donne

$$nm = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_\ell}^{\alpha_\ell} {p_{\ell+1}}^{\alpha_{\ell+1}} \dots {p_{\ell+q}}^{\alpha_{\ell+q}}.$$

On a alors

$$\sigma_k(nm) = \prod_{i=1}^{\ell+q} \sum_{j=0}^{\alpha_i} {p_i}^{kj} = \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{\alpha_i} {p_i}^{kj} \times \prod_{i=\ell+1}^{\ell+q} \sum_{j=0}^{\alpha_i} {p_i}^{kj} = \sigma_k(n)\sigma_k(m).$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{si } n \wedge m = 1, \text{ alors } \sigma_k(nm) = \sigma_k(n)\sigma_k(m).}$$

5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\sigma_0(n)$ est impair si, et seulement si, n est un carré.*

On a

$$\begin{aligned}
\big(\sigma_0(n) \text{ est impair}\big) \quad &\iff \quad \Big(\prod_{p \in \mathbb{P}} (v_p(n)+1) \text{ est impair}\Big) \\
&\iff \quad \big(\forall p \in \mathbb{P},\ (v_p(n)+1) \text{ est impair}\big) \\
&\iff \quad \big(\forall p \in \mathbb{P},\ v_p(n) \text{ est pair}\big) \\
&\iff \quad \big(n \text{ est un carré}\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sigma_0(n) \text{ est impair si, et seulement si, } n \text{ est un carré.}}$$

B. *Un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit parfait lorsque $\sigma_1(n) = 2n$, c'est-à-dire lorsque la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à lui-même.*

1. *Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.*

Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. On constate que $6 = 1 + 2 + 3$. Donc 6 est parfait.

Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28. On constate que $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Donc 28 est parfait.

Donc

$$\boxed{\text{6 et 28 sont parfaits.}}$$

2. a) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est un nombre premier. On dit que c'est un nombre premier de Mersenne. Démontrer que p est un nombre premier et que le nombre $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait. On dit que n est un nombre parfait d'Euclide.*

Raisonnons par contraposition. On suppose que p admet un diviseur stricte a, de sorte que $p = ab$ où $a, b \in [\![2; p-1]\!]$. Alors, d'après la formule de Bernoulli, on a

$$2^p - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(\cdots),$$

ce qui prouve que $2^p - 1$ n'est pas premier (car $2^a - 1$ est différent de 1 et $2^p - 1$). En conclusion,

$$\boxed{\text{si } 2^p - 1 \text{ est premier, alors } p \text{ est premier.}}$$

Comme $2^p - 1$ est premier, l'écriture $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est la décomposition primaire de n. Les diviseurs de n sont donc 1, 2, 2^2, ..., 2^{p-1}, $2^p - 1$, $2(2^p - 1)$, $2^2(2^p - 1)$, ..., $2^{p-1}(2^p - 1)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\sigma_1(n) &= 1 + 2 + 2^4 + \cdots + 2^{p-1} + (2^p - 1)(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1}) \\
&= \frac{2^p - 1}{2 - 1} + (2^p - 1)\frac{2^p - 1}{2 - 1} \\
&= 2^p(2^p - 1) \\
&= 2n,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{n = 2^{p-1}(2^p - 1) \text{ est un nombre parfait.}}$$

b) *Soit n un nombre parfait pair. On écrit n sous la forme $n = 2^\alpha a$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et a est impair.*

α] *Démontrer qu'il existe un entier naturel impair b tel que $a = (2^{\alpha+1} - 1)b$.*

Comme $n = 2^\alpha a$ est parfait, on a

$$\sigma_1(2^\alpha a) = 2^{\alpha+1}a,$$

Par ailleurs, compte tenu de la multiplicativité de σ_1 et du fait que $2^\alpha \wedge a = 1$, on a

$$\sigma_1(2^\alpha a) = \sigma_1(2^\alpha) \times \sigma_1(a) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\alpha)\sigma_1(a) = (2^{\alpha+1} - 1)\sigma_1(a).$$

On a donc

$$(2^{\alpha+1} - 1)\sigma(a) = 2^{\alpha+1}a.$$

Comme $2^{\alpha+1} - 1$ et a sont impairs, on en déduit que $2^{\alpha+1}$ est la puissance de 2 que l'on trouve dans la décomposition primaire de $\sigma_1(a)$, autrement dit que $\sigma_1(a)$ se décompose sous la forme

$$\sigma_1(a) = 2^{\alpha+1}{p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_\ell}^{\alpha_\ell},$$

où les p_i sont des nombres premiers impairs et les α_i des entiers naturels. En posant $b = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_\ell}^{\alpha_\ell}$, on en conclut qu'il existe $b \in \mathbb{N}^*$ impair tel que $\sigma(a) = 2^{\alpha+1}b$.
En reportant ce résultat dans l'égalité $(2^{\alpha+1} - 1)\sigma(a) = 2^{\alpha+1}a$, il vient $(2^{\alpha+1} - 1)b = a$
En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe un entier naturel impair } b \text{ tel que } a = (2^{\alpha+1} - 1)b.}$$

β] *Démontrer que $b = 1$.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que $b \neq 1$. Distinguons deux cas :

<u>Premier cas : $b \neq 2^{\alpha+1} - 1$</u>

On constate alors que 1, b, $2^{\alpha+1} - 1$ et $(2^{\alpha+1} - 1)b$ sont des diviseurs distincts de a, ce qui implique que

$$\sigma_1(a) \geqslant 1 + b + (2^{\alpha+1} - 1) + (2^{\alpha+1} - 1)b = 2^{\alpha+1}(1 + b),$$

c'est-à-dire

$$2^{a+1}b \geqslant 2^{\alpha+1}(1 + b)$$

ce qui donne

$$b \geqslant 1 + b.$$

C'est absurde !

<u>Second cas : $b = 2^{\alpha+1} - 1$</u>

On constate alors que 1, $2^{\alpha+1} - 1$ et $(2^{\alpha+1} - 1)^2$ sont des diviseurs distincts de a, ce qui implique que

$$\sigma_1(a) \geqslant 1 + (2^{\alpha+1} - 1) + (2^{\alpha+1} - 1)^2 = 2^{a+1}(2^{\alpha+1} - 1) + 1,$$

c'est-à-dire

$$2^{a+1}(2^{\alpha+1} - 1) \geqslant 2^{a+1}(2^{\alpha+1} - 1) + 1,$$

ce qui donne

$$0 \geqslant 1.$$

C'est absurde !

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{b = 1.}$$

γ] *Démontrer que a est un nombre premier de Mersenne et n est un nombre parfait d'Euclide.*

La question précédente dit que $a = 2^{\alpha+1} - 1$, d'où $\sigma_1(a) = a + 1$. Cela signifie que a est premier (ses seuls diviseurs sont 1 et a) et donc que

$$\boxed{a \text{ est un nombre de Mersenne premier.}}$$

Comme $n = 2^\alpha(2^{\alpha+1} - 1)$, on en conclut que

$$\boxed{n \text{ est un nombre parfait d'Euclide.}}$$

Remarque culturelle :

On a ainsi démontré que les nombres parfaits pairs sont exactement ceux de la forme d'Euclide, c'est-à-dire $2^{p-1}(2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est un nombre premier de Mersenne.

3. a) *Soient p, q deux nombres premiers impairs distincts et α, β deux entiers naturels. Démontrer que $2p^\alpha q^\beta - \sigma_1(p^\alpha q^\beta) = \left[p^\alpha q^\beta\big((p-2)(q-2)-2\big) + p^{\alpha+1} + p^{\beta+1} - 1\right] / \big((p-1)(q-1)\big)$. Que peut-on en déduire concernant les nombres parfaits impairs ?*

D'après A. 3., on a

$$\sigma_1(p^\alpha q^\beta) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1},$$

donc

$$\begin{aligned} 2p^\alpha q^\beta - \sigma_1(p^\alpha q^\beta) &= 2p^\alpha q^\beta - \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \\ &= \frac{2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1) - (p^{\alpha+1}-1)(q^{\beta+1}-1)}{(p-1)(q-1)} \\ &= \frac{2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1) - p^{\alpha+1}q^{\beta+1} + p^{\alpha+1} + q^{\beta+1} - 1}{(p-1)(q-1)} \\ &= \frac{p^\alpha q^\beta(pq-2q-2p+2) + p^{\alpha+1} + q^{\beta+1} - 1}{(p-1)(q-1)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{2p^\alpha q^\beta - \sigma_1(p^\alpha q^\beta) = \frac{p^\alpha q^\beta\big((p-2)(q-2)-2\big) + p^{\alpha+1} + q^{\beta+1} - 1}{(p-1)(q-1)}.}$$

Comme p et q sont impairs et distincts, on a

$$(p-2)(q-2)-2 > 0,$$

donc

$$2p^\alpha q^\beta - \sigma_1(p^\alpha q^\beta) > 0.$$

Cela démontre que $p^\alpha q^\beta$ ne peut pas être parfait. Par conséquent,

$\boxed{\text{un nombre parfait impair possède au moins trois facteurs premiers distincts.}}$

Remarque culturelle :

On sait démontrer qu'un nombre parfait impair possède au moins 10 facteurs premiers distincts et que son plus grand facteur premier est supérieur à 10^8. Les nombres parfaits impairs sont donc très rares. En fait, on conjecture qu'il n'y en a pas ! C'est la conjecture des nombres parfaits impairs.

b) α] *Soient p un nombre premier impair et v un entier naturel. Calculer la valeur modulo 4 de $\sigma_1(p^v)$. On distinguera les cas $p \equiv 1$ [4] et $p \equiv -1$ [4].*

On a

$$\sigma_1(p^v) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^v.$$

Si $p \equiv 1$ [4], on a

$$\begin{aligned} \sigma_1(p^v) &\equiv \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{v+1 \text{ fois}} \ [4] \\ &\equiv v+1 \ [4]. \end{aligned}$$

Si $p \equiv -1$ [4], on a

$$\begin{aligned} \sigma_1(p^v) &\equiv 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^v \ [4] \\ &\equiv \begin{cases} 0 \ [4] & \text{si } v \text{ est impair} \\ 1 \ [4] & \text{si } v \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\sigma_1(p^v) \equiv \begin{cases} v+1 \ [4] & \text{si } p \equiv 1 \ [4] \\ 0 \ [4] & \text{si } p \equiv -1 \ [4] \text{ et } v \text{ est impair} \\ 1 \ [4] & \text{si } p \equiv -1 \ [4] \text{ et } v \text{ est pair} \end{cases}}$$

β] *On suppose qu'il existe un nombre parfait impair n. Démontrer qu'il existe un nombre premier p congru à 1 modulo 4, α un entier naturel et m un entier naturel impair tel que $n = p^{4\alpha+1}m^2$.*

Décomposons n en nombres premiers. Cela donne $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_\ell}^{\alpha_\ell}$ où les p_i sont des nombres premiers impairs et les α_i des entiers naturels. Comme σ_1 est multiplicative, on a

$$\sigma_1(n) = \sigma_1({p_1}^{\alpha_1}) \cdots \sigma_1({p_\ell}^{\alpha_\ell})$$

et comme n est parfait, il vient

$$\sigma_1({p_1}^{\alpha_1}) \cdots \sigma_1({p_\ell}^{\alpha_\ell}) = 2{p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_\ell}^{\alpha_\ell}.$$

Comme $2{p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_\ell}^{\alpha_\ell}$ n'est pas multiple de 4, il n'existe pas de $\sigma_1({p_i}^{\alpha_i})$ qui soit $\equiv 0$ [4] et il y en a un seul qui est $\equiv 2$ [4]. La question précédente nous dit que les cas ($p_i \equiv -1$ [4] et α_i impair) et ($p_i \equiv 1$ [4] et $\alpha_i \equiv 3$ [4]) sont interdits. De plus, il doit y avoir exactement un cas où ($p_i \equiv 1$ [4] et $\alpha_i \equiv 1$ [4]), disons pour $i = 1$. Les cas restants ($p_i \equiv 1$ [4] et $\alpha_i \equiv 0$ [2]) et ($p_i \equiv -1$ [4] et $\alpha_i \equiv 0$ [4]) peuvent en revanche se produire de façon arbitraire. Autrement dit,

$$n = {p_1}^{4\alpha+1}{p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_\ell}^{\alpha_\ell}$$

avec $p_1 \equiv 1$ [4], $\alpha \in \mathbb{N}$, $p_2, \ldots, p_\ell$ des nombres premiers impairs et $\alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ des entiers pairs. Cela démontre qu'

$$\boxed{\text{il existe un nombre premier } p \text{ congru à 1 modulo 4, } \alpha \text{ un entier naturel et } m \text{ un entier naturel impair tel que } n = p^{4\alpha+1}m^2.}$$

Remarque culturelle :

C'est Euler qui a démontré que les nombres parfaits impairs, s'ils existent, étaient de la forme ci-dessus. Depuis, on n'a guère fait de progrès en ce sens. On est donc toujours très loin d'avoir démontré la conjecture des nombres parfaits impairs !

4. *Démontrer qu'un nombre parfait n'est jamais un carré.*

Les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est un nombre premier de Mersenne. La valuation de ce nombre premier de Mersenne n'étant pas paire (pardi, elle vaut 1), on en déduit que $2^{p-1}(2^p - 1)$ n'est pas un carré.

Les nombres parfaits impairs sont de la forme $p^{4\alpha+1}m^2$ où p est congru à 1 modulo 4, α est un entier naturel et m est un entier naturel impair. La valuation de p n'étant pas paire, on en déduit que $p^{4\alpha+1}m^2$ n'est pas un carré.

En conclusion,

$$\boxed{\text{un nombre parfait n'est jamais un carré.}}$$

C. *Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit de Ore lorsque $\sigma_0(n)/\sigma_{-1}(n)$ est un entier naturel non nul, c'est-à-dire lorsque la moyenne harmonique des diviseurs de n est un entier.*

1. *Vérifier que 28 et 140 sont des nombres de Ore.*

Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28. On a donc

$$\frac{\sigma_0(28)}{\sigma_{-1}(28)} = \frac{6}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{28}} = 3$$

ce qui démontre que 28 est de Ore.

Les diviseurs de 140 sont 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70 et 140. On a donc

$$\frac{\sigma_0(140)}{\sigma_{-1}(140)} = \frac{12}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{70} + \dfrac{1}{140}} = 5$$

ce qui démontre que 140 est de Ore.

Donc

$$\boxed{\text{28 et 140 sont des nombres de Ore.}}$$

2. *Démontrer que tout nombre parfait est de Ore. La réciproque est-elle vraie ?*

Si n est parfait, on a $\sigma_1(n) = 2n$. Dès lors, comme $\sigma_{-1}(n) = n^{-1}\sigma_1(n)$ d'après A. 2., on a

$$\frac{\sigma_0(n)}{\sigma_{-1}(n)} = \frac{\sigma_0(n)}{n^{-1}\sigma_1(n)} = \frac{\sigma_0(n)}{2}.$$

Or n n'est pas un carré d'après B. 4. d'où $\sigma_0(n)$ est pair d'après A. 5. et donc

$$\frac{\sigma_0(n)}{\sigma_{-1}(n)} \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui démontre que n est de Ore. On sait ainsi que

$$\boxed{\text{tout nombre parfait est de Ore.}}$$

On a vu que 140 est un nombre de Ore. En revanche, on constate que ce n'est pas un nombre parfait puisque $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 14 + 20 + 28 + 35 + 70 = 196 \neq 140$, donc

$$\boxed{\text{il existe des nombres de Ore qui ne sont pas parfaits.}}$$

Remarque culturelle :

On conjecture qu'il n'existe pas de nombres de Ore impairs. Si l'on démontrait ce résultat, cela impliquerait la conjecture des nombres parfaits impairs.

EXERCICE 3

1. *Démontrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants : (i) Pour toute suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$, l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}$. (ii) Pour toute suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de $\mathbb{R}$ d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$, l'union $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$. L'un ou l'autre de ces énoncés s'appelle le théorème de Baire.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que pour toute suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$, l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fermés de $\mathbb{R}$ d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Adh}(\mathbb{R}\setminus F_n) = \mathbb{R}\setminus \mathrm{Int}(F_n) = \mathbb{R}\setminus\varnothing = \mathbb{R}$ où la première égalité est un résultat du cours. Ainsi $(\mathbb{R}\setminus F_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1}(\mathbb{R}\setminus F_n)$ est dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathbb{R}\setminus(\bigcup_{n\geqslant 1} F_n)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On a donc $\mathrm{Adh}\left(\mathbb{R}\setminus(\bigcup_{n\geqslant 1} F_n)\right) = \mathbb{R}$, ce qui donne $\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} F_n\right) = \varnothing$. L'union $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est donc d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que pour toute suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de $\mathbb{R}$ d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$, l'union $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus U_n) = \mathbb{R}\setminus \mathrm{Adh}(U_n) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \varnothing$ où la première égalité est un résultat du cours. Ainsi $(\mathbb{R}\setminus U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fermés de $\mathbb{R}$ d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que l'union $\bigcup_{n\geqslant 1}(\mathbb{R}\setminus U_n)$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathbb{R}\setminus(\bigcap_{n\geqslant 1} U_n)$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.

On a donc $\mathrm{Int}\left(\mathbb{R}\setminus(\bigcap_{n\geqslant 1} U_n)\right) = \varnothing$, ce qui donne $\mathrm{Adh}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} U_n\right) = \mathbb{R}$. L'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ est donc dense dans $\mathbb{R}$.

En conclusion,

> il revient au même de dire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ou de dire que toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.

2. *Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.*

   a) *Démontrer qu'il existe une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $a_n < b_n$ et $]a_n; b_n[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap]x; y[$.*

   On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « il existe des nombres réels $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$ tels que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $]a_k; b_k[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \cap]x; y[$. »

   Initialisation : Comme U_1 est dense dans $\mathbb{R}$, on sait que $U_1 \cap]x; y[\neq \varnothing$. On considère donc un élément c_1 dans $U_1 \cap]x; y[$. Comme $U_1 \cap]x; y[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (en tant qu'intersection que deux ouverts), il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $[c_1 - \varepsilon_1; c_1 + \varepsilon_1] \subset U_1 \cap]x; y[$. On pose $a_1 = c_1 - \varepsilon_1$ et $b_1 = c_1 + \varepsilon_1$. Cela démontre que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. La propriété $\mathscr{P}(n)$ nous dit qu'il existe des nombres réels $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$ tels que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on ait $]a_k; b_k[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \cap]x; y[$. Nous allons reproduire, en l'adaptant, le raisonnement de l'initialisation. Comme U_{n+1} est dense dans $\mathbb{R}$, on a $U_{n+1} \cap]a_n; b_n[\neq \varnothing$. On introduit donc un élément c_{n+1} de $U_{n+1} \cap]a_n; b_n[$. Comme $U_{n+1} \cap]a_n; b_n[$ est un ouvert, il existe $\varepsilon_{n+1} > 0$ tel que $[c_{n+1} - \varepsilon_{n+1}; c_{n+1} + \varepsilon_{n+1}] \subset U_{n+1} \cap]a_n; b_n[$. On pose $a_{n+1} = c_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$ et $b_{n+1} = c_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$. On a alors $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$ et $]a_{n+1}; b_{n+1}[\subset U_{n+1} \cap]a_n; b_n[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap U_{n+1}) \cap]x; y[$. Cela démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'

   > il existe une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $a_n < b_n$ et $]a_n; b_n[\subset (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap]x; y[$.

b) *En déduire que l'intersection entre $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ et $]x;y[$ est non vide et conclure.*

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par b_1 donc elle converge vers une limite notée a. De même, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par a_1 donc elle converge vers une limite notée b. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n < b_n$, un passage à la limite nous dit que $a \leqslant b$.
Par ailleurs, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ [a;b] \subset [a_n;b_n]$, ce qui implique que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ [a;b] \subset (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap]x;y[$.
Cela nous dit que $[a;b]$ est inclus dans l'intersection de $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ et $]x;y[$ et donc, en particulier, que

$$\boxed{\text{l'intersection entre } \bigcap_{n\geqslant 1} U_n \text{ et }]x;y[\text{ est non vide.}}$$

Comme $]x;y[$ est un intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, on en déduit que $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans } \mathbb{R} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Remarque culturelle :

René Baire a énoncé ce résultat en 1899 comme un lemme (fondamental tout de même), au cours de travaux sur les classes de fonctions intégrales. Le résultat avait déjà été démontré en 1898 par l'américain William Osgood (mais c'est le nom du français que la postérité a gardé).

Ce théorème, dont la démonstration est étonnamment simple, est un outil topologique très puissant, aux conséquences parfois surprenantes. Il est souvent utilisé pour uniformiser des propriétés.

Si vous souhaitez découvrir l'histoire et quelques unes des applications du théorème de Baire, je vous conseille la lecture de l'excellent article de Gilles Godefroy sur le sujet. On le trouve ici : `http://www.apmep.fr/IMG/pdf/godefroy.pdf`. Vous pouvez aussi consulter la BwataBaire, qui se trouve là : `https://lma.metelu.net/BwataBaire/BwataBaire`.

3. *Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.*

Par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$.
On a alors $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\geqslant 1}(\mathbb{R} \setminus U_n)$, ce qui donne $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n\geqslant 1}(\mathbb{R} \setminus U_n)$.
Dès lors, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on sait que $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés (les singletons des éléments de $\mathbb{Q}$ et les $\mathbb{R} \setminus U_n$).
Comme $\mathbb{R}$ n'est pas d'intérieur vide, le théorème de Baire dit que l'un des fermés $\mathbb{R}\setminus U_n$ est d'intérieur non vide, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus U_{n_0}) \neq \varnothing$. Cela signifie que $\mathbb{R}\setminus \mathrm{Adh}(U_{n_0}) \neq \varnothing$ ou encore $\mathrm{Adh}(U_{n_0}) \neq \mathbb{R}$. On en déduit que U_{n_0} n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
Or $\mathbb{Q} \subset U_{n_0}$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui nous donne une contradiction.
En conclusion,

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ n'est pas l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts de } \mathbb{R}.}$$

EXERCICE 4

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. On suppose que $S_n \sim 1/a_n$.

1. *Démontrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite positive ou nulle, notée ℓ. Démontrer ensuite que $\ell = 0$.*

   La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ étant positive, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Par conséquent, le théorème de la limite monotone nous dit que ou bien $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell' > 0$, ou bien $(S_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. Comme $S_n \sim 1/a_n$, on en déduit que $(1/a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ' ou diverge vers $+\infty$. En passant à l'inverse, on en conclut que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $1/\ell'$ ou vers 0. En conclusion,

   $$\boxed{(a_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers une limite positive ou nulle } \ell.}$$

   Pour démontrer que $\ell = 0$, on raisonne par l'absurde en supposant que $\ell > 0$. Comme $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ a_n \geqslant \ell/2$. Par suite, pour tout $n \geqslant N$, on a

   $$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n \geqslant \underbrace{\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} + \cdots + \frac{\ell}{2}}_{n-N+1 \text{ fois}} = (n - N + 1)\frac{\ell}{2}.$$

   Comme $(n-N+1)\ell/2$ tend vers $+\infty$, le théorème du gendarme nous dit que $\lim S_n = +\infty$. Comme $S_n \sim 1/a_n$, on en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, c'est-à-dire $\ell = 0$. C'est absurde ! Donc $\ell = 0$, ce qui signifie que

   $$\boxed{(a_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } 0.}$$

2. *À l'aide du théorème de Cesàro, démontrer que $S_n \sim \sqrt{2n}$. En déduire un équivalent de a_n.*

   Démontrer que $S_n \sim \sqrt{2n}$ revient à démontrer que $({S_n}^2/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 2 ou encore que

   $$\frac{({S_1}^2 - {S_0}^2) + ({S_2}^2 - {S_1}^2) + \cdots + ({S_n}^2 - {S_{n-1}}^2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2,$$

   puisque ${S_0}^2/n$ tend vers 0. Pour cela, il suffit, d'après le théorème de Cesàro, de démontrer que

   $${S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

   Or, pour tout $n \geqslant 0$, on a

   $${S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 = \underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{=a_n}\underbrace{(S_n + S_{n-1})}_{=2S_n - a_n} = 2a_nS_n - {a_n}^2.$$

   Comme $S_n \sim 1/a_n$, on a $\lim a_nS_n = 1$. Par ailleurs, on a vu que $\lim a_n = 0$. Donc

   $${S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

   On peut donc conclure que

   $$\boxed{S_n \sim \sqrt{2n}.}$$

   Comme $S_n \sim 1/a_n$, il vient

   $$\boxed{a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}.}$$