

Devoir Surveillé n° 5 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Problème 1 – Étude de la vitesse de convergence des séries de Riemann

1. Rappeler pour quelles valeurs de α la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

2. On suppose que $\alpha > 1$.

(a) En comparant $\frac{1}{n^\alpha}$ à une intégrale, montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

(b) Soit $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Après avoir justifié la convergence de $\sum u_n$, montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

Indication : ε et la question précédente.

(c) Soit pour tout $n \geq 1$, $v_n = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. En utilisant un développement limité à l'ordre 3 de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}$, montrer que

$$v_{n-1} - v_n = -\frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$$

(d) En sommant cette égalité entre $n+1$ et $+\infty$, en déduire que pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

(e) En déduire que pour tout $\alpha > 1$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Indication : L'égalité de la question précédente est vraie pour tout α , donc en particulier pour $\alpha+1$. Injecter ce résultat dans l'expression de obtenue pour $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_{n-1} - v_n$.

(f) En déduire que pour tout $\alpha > 1$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

3. On étudie maintenant la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha = 1$.

- (a) Soit $w_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$. En considérant la série de terme général $w_n - w_{n-1}$, montrer qu'il existe une constante γ telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

- (b) En utilisant un développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^n \varepsilon_k,$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

- (c) Après avoir justifier la convergence des séries, montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k = 1 - \gamma.$$

- (d) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Indication : faire intervenir les restes dans l'expression de la question (3b), et utiliser (2f).

4. On suppose enfin que $\alpha \in [0, 1[$.

- (a) Démontrer qu'il existe une constante γ_α telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + o(1)$.

- (b) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

5. Une application : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, σ_n le nombre de diviseurs de n et $S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k$.

- (a) Déterminer, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la nature des séries $\sum \sigma_n x^n$.

- (b) En considérant les ensembles

$$\begin{aligned} A_n &= \{(d, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d \leq \sqrt{n} \text{ et } q \leq \sqrt{n}\} \\ B_n &= \left\{ (d, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d \leq \sqrt{n} \text{ et } q \leq \frac{n}{d} \right\} \\ C_n &= \left\{ (d, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid q \leq \sqrt{n} \text{ et } d \leq \frac{n}{q} \right\} \end{aligned}$$

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor - (\lfloor \sqrt{n} \rfloor)^2$.

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n \leq S_n \leq D_n$, où :

$$G_n = 2 \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left(\frac{n}{d} - 1 \right) - n, \quad \text{et} \quad D_n = 2n \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{d} - (\sqrt{n} - 1)^2.$$

- (d) En déduire que $S_n = n \ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$. Donner un équivalent simple de S_n .

Problème 2 – Étude de la convergence de la méthode de Simpson

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^4 sur un intervalle compact $[a, b]$, où $a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(\sigma_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la subdivision régulière de $[a, b]$ en n pas, donnée explicitement par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sigma_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}.$$

On note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_i = \frac{\sigma_{i-1} + \sigma_i}{2}$ le milieu de l'intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$.

On rappelle qu'on a vu dans le cours d'informatique qu'en approchant f sur chaque intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ par un polynôme de degré 2 interpolant f aux points σ_{i-1} , m_i et σ_i , on obtient une valeur approchée de l'intégrale de f donnée par :

$$\int_a^b f(t) \, dt \approx \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n} (f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i)).$$

Cette phase du calcul est admise pour la suite du problème.

On cherche dans ce problème à estimer la vitesse de convergence de cette méthode, en fonction de n .

Partie I – Une première estimation du reste

On étudie ici f sur un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$ (avec $\alpha < \beta$), et on note m le milieu de $[\alpha, \beta]$.

1. Justifier l'existence du maximum M_4 de $|f^{(4)}|$ sur $[a, b]$.
2. Soit $h \in \left[0, \frac{\beta-\alpha}{2}\right]$. Rappeler l'inégalité de Taler-Lagrange pour $f(m+h)$, centrée en m , à l'ordre 3. Qu'obtient-on pour $f(m-h)$?
3. Montrer que pour tout $h \in \left[0, \frac{\beta-\alpha}{2}\right]$, on a

$$|f(m+h) + f(m-h) - 2f(m) - h^2 f''(m)| \leq \frac{M_4 h^4}{12}.$$

4. En déduire que

$$\left| \frac{\beta-\alpha}{6} (f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta)) - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(m) \right) \right| \leq M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{9 \times 2^7}.$$

5. Montrer que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt = \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} (f(m-u) + f(m+u)) \, du.$$

6. En déduire que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(m) \right) \right| \leq M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{15 \times 2^7}.$$

7. Montrer que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt - \frac{\beta-\alpha}{6} (f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta)) \right| \leq M_4 \times \frac{(\beta-\alpha)^5}{720}.$$

8. En déduire enfin que : $\left| \int_a^b f(t) \, dt - \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n} (f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i)) \right| \leq M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{720n^4}.$

Ainsi, la convergence est en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

On montre dans la suite du problème qu'on peut améliorer la constante 720 dans cette majoration.

Partie II – Amélioration de la majoration de l'erreur

On reprend les notations de la partie précédente : $[\alpha, \beta]$ est un sous-intervalle de $[a, b]$, et m est son milieu.

On rappelle (et on admettra) qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus 2 tel que $f(\alpha) = P(\alpha)$, $f(\beta) = P(\beta)$ et $f(m) = P(m)$, et conformément à l'introduction, on admet que l'approximation de l'intégrale de f par l'intégrale de P fournit la somme de Simpson, autrement dit, que

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(t) \, dt = \frac{\beta-\alpha}{6} (f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta)),$$

ce qui relève uniquement de l'explicitation du polynôme P (obtenu par interpolation de Lagrange) et de calculs élémentaires d'intégrales de fonctions polynomiales de degré 2.

On essaye dans cette partie d'améliorer la majoration obtenue dans la partie 1, en montrant qu'on peut modifier légèrement ce polynôme P en lui ajoutant un terme de degré 3 sans changer la valeur de l'approximation obtenue.

1. Montrer que $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-m)(x-\beta) \, dx = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^4 \int_{-1}^1 t(1-t^2) \, dt$, et en déduire la valeur de cette intégrale.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et P_{λ} le polynôme défini par

$$P_{\lambda} = P + \lambda(X - \alpha)(X - m)(X - \beta).$$

$$\text{Montrer que } \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - P(x)) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - P_{\lambda}(x)) \, dx.$$

3. Justifier qu'on peut choisir λ tel que $P'_{\lambda}(m) = f'(m)$. On suppose dorénavant que λ est choisi ainsi.
4. Soit $x \in [\alpha, \beta]$ fixé, distinct de α , β et m . On définit la fonction θ sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$\theta : t \mapsto (f(t) - P_{\lambda}(t)) - (f(x) - P_{\lambda}(x)) \frac{(t - \alpha)(t - m)^2(t - \beta)}{(x - \alpha)(x - m)^2(x - \beta)}.$$

Montrer qu'il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $\theta^{(4)}(c) = 0$.

Indication : utiliser plusieurs fois le théorème de Rolle, en cherchant autant de valeurs que possible annulant θ et θ' .

5. En déduire que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$: $|f(x) - P_{\lambda}(x)| \leq \frac{|(x - \alpha)(x - m)^2(x - \beta)|}{4!} M_4$.
6. En déduire que : $\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - P(x)) \, dx \right| \leq M_4 \cdot \frac{(\beta - \alpha)^5}{2880}$,
puis que : $\left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n (f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i)) \right| \leq M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880n^4}.$