Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 03/12/2020

DM n° 7 : Complexes, dérivation

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm08-nom.pdf` (par exemple `dm08-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus des problème ci-dessous obligatoires, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 5 de la sélection de problèmes sur ma page web (exemple de fonction continue partout, dérivable nulle part), et le DS 4 de l'année dernière.

Exercice 1 – (Birapport)

Des points $a_1, \dots, a_n$ de $\mathbb{C}$ sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle, donc s'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ équidistant des a_i :

$$|\omega - a_1| = |\omega - a_2| = \cdots = |\omega - a_n|.$$

Étant donnés quatre nombres complexes a, b, c et d deux à deux distincts, on définit le birapport $[a, b, c, d]$ par :

$$[a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

On montre dans cet exercice que quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. On applique ensuite ce résultat pour montrer un théorème de Miquel.

1. Soit a, b, c, d quatre complexes distincts. On suppose que a, b et c sont alignés. Montrer que les points a, b, c et d sont alignés si et seulement si $[a, b, c, d]$ est réel.
2. (question à enlever) Montrer qu'un système linéaire $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ d'inconnues x et y admet une et une seule solution si $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.
3. Soit α, β, γ des réels, et z un complexe. On suppose que $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont distincts.
En calculant $\operatorname{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right)$ en fonction de $\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)$, $|z|^2$ et $|z - e^{i\alpha}|^2$, montrer que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]$ est réel si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.
4. Montrer que pour tous a, b, c et d complexes distincts, et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$, on a l'égalité :
$$[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu] = [a, b, c, d].$$
5. Montrer enfin le théorème attendu : 4 points distincts sont alignés ou cocycliques ssi leur birapport est réel.
Indication : On pourra se ramener à la question 3 en se souvenant que 3 points non alignés sont toujours cocylciques .
6. **(Formule des six birapports)**. Soit a, b, c, d, a', b', c', d' des complexes deux à deux distincts. Calculer :
$$[a, c, b, d] \times [c', a', d', b'] \times [a', b, a, b'] \times [b, c', c, b'] \times [c, d', c', d] \times [d', a, a', d].$$
7. **(Théorème de Miquel)**. On considère 4 cercles C_1, C_2, C_3 et C_4 tels que C_1 et C_2 se coupent en deux points a et a', C_2 et C_3 se coupent en b et b', C_3 et C_4 en c et c' et C_4 et C_1 en d et d'. On suppose ces 8 points 2 à 2 distincts. Montrer que si a, b, c et d sont cocycliques ou alignés, il en est de même de a', b', c' et d'.

Exercice 2 – (Étude d'une fonction)

On définit la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de f. Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en -2.

2. Étudier les variations de f (on pourra dériver $x \mapsto \ln(f(x))$ afin d'exprimer f' en fonction de f).
3. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition, et déterminer les demi-tangentes aux bornes du domaine et en -2.
4. Montrer que f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et une asymptote oblique (D') en $-\infty$, et exprimer leurs équations.
5. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote (D) sur $]0, +\infty[$.
6. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote (D') sur $]-\infty, -2[$.
7. Étudier la concavité de f.
8. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$. Montrer que f est infiniment dérivable à gauche en 0 et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_g^{(n)}(0)$.
9. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Problème 1 – Discontinuités des fonctions réglées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite réglée si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point où cela est envisageable. Le but de ce problème est de montrer qu'une fonction réglée ne peut pas admettre trop de points de discontinuité (i.e. de points en lesquels elle n'est pas continue). Plus précisément, on montre que le nombre de points de discontinuité d'une fonction réglée sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. Dans une deuxième partie, on montre que réciproquement, tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.

On admettra dans ce problème le théorème de Bolzano-Weierstrass affirmant que de toute suite (u_n) à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite (v_n) convergente dans $[a, b]$, (une sous-suite ou suite extraite étant une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Une preuve de ce résultat a déjà été vue dans un devoir antérieur, et sera rappelée en cours prochainement.

On rappelle également qu'un ensemble est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, et qu'il est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable. On rappelle enfin qu'une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$. Pour simplifier les écritures, on notera $f(a^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche et à droite respectivement de f au point a. On considère dans un premier temps un intervalle fermé borné I.

On note, pour tout $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{a \in I \mid |f(a) - f(a^-)| \geqslant \varepsilon\}$

1. Montrer que $f_{|I}$ n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $a \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose ici que D_ε est infini. Justifier l'existence d'une suite <u>convergente</u> $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 distincts de D_ε. On note a sa limite.
3. Justifier que soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une infinité de termes vérifiant $a_n > a$ soit elle possède une infinité de termes vérifiant $a_n < a$ (disjonction non exclusive).
4. Supposons qu'il existe une infinité de termes tels que $a_n > a$. Quitte à extraire une suite, on peut alors supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a$.
   (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$
   (b) Trouver une contradiction.
5. Adapter ce raisonnement au cas où il existe une infinité de termes a_n vérifiant $a_n < a$.
6. Conclure.

Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé

Soit A un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. On s'interroge dans cette partie sur l'existence d'une fonction réglée dont le domaine de discontinuité est exactement A.

1. Si A est fini, donner une fonction réglée dont l'ensemble des points de disonctinuité est exactement A.
2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{]a_n,+\infty[}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente. On note $f(x)$ sa somme. Cela définit donc une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est croissante.
   (c) Soit $x < y$. Montrer que
   $$f(y) - f(x) = \sum_{n \mid x < a_n \leqslant y} \frac{1}{2^n}.$$
   (d) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement A, et conclure.
   On s'attachera à donner un raisonnement aussi rigoureux que possible dans cette dernière question.