Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 5 h

INTÉGRATION

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitre sur :

- les outils d'analyse ;
- la continuité (en particulier la continuité uniforme) ;
- la dérivation.

Dans tout ce chapitre, la notation $[a; b]$ désigne un segment tel que $a \leqslant b$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Dans tout ce chapitre, les lettres $n, m, p, q, r, i, j, k, \ell$ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Intégrale sur un segment

A.1. Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

a) Subdivision d'un segment

Définition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a; b]$ toute famille $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

On notera que le premier élément d'une subdivision est la borne gauche du segment et que le dernier élément est la borne droite. Par conséquent, une subdivision de $n+1$ points découpe le segment en n sous-segments.

Exemples :

- La famille $(1; 2; \pi; 5)$ constitue une subdivision du segment $[1; 5]$.
- Parmi les subdivisions d'un segment $[a; b]$, on distingue celles dites à pas constant telles que l'écart entre deux points consécutifs de la subdivision soit constant :

$$\sigma_n = \left\{ a + k\frac{b-a}{n} : k \in [\![0; n]\!] \right\}.$$

On peut munir l'ensemble des subdivisions de $[a; b]$ d'une relation d'ordre.

Définition 2

Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a; b]$, on dit que σ_1 est plus fine que σ_2 si tout élément de σ_2 est aussi élément de σ_1.

Notons que si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a; b]$, il existe une subdivision plus fine que σ_1 et σ_2. Il suffit de considérer la subdivision obtenue en réunissant les éléments de σ_1 et σ_2 (et en les réordonnant).

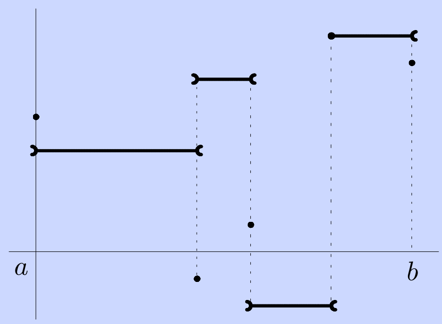
b) Fonctions en escalier

Définition 3

Une fonction $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier sur le segment $[a;b]$ lorsqu'on peut trouver une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a;b]$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la restriction de φ à $]x_{i-1};x_i[$ soit constante. Une telle subdivion est dite adaptée à la fonction en escalier φ.

Par extension, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier sur I lorsqu'elle est en escalier sur tout segment contenu dans I.

L'ensemble des fonctions en escalier sur I est noté $\mathscr{E}(I)$.



Une fonction en escalier est donc une fonction constante par morceaux. Aucune condition n'est imposée sur les images des points de subdivision.

Il n'y a pas du tout unicité de la subdivision adaptée à une fonction en escalier. On peut même constater que toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée est également adaptée.

Exemples :

- Une fonction constante est une fonction en escalier.
- La fonction partie entière est en escalier sur $\mathbb{R}$.

La proposition ci-dessous exprime le caractère localement borné des fonctions en escalier.

Proposition 1

Toute fonction en escalier sur un segment est bornée sur ce segment.

■ Une fonction en escalier sur un segment $[a;b]$ prend un nombre fini de valeurs. Elle est donc bornée sur $[a;b]$. ■

La proposition suivante rassemble les propriétés opératoires des fonctions en escalier.

Proposition 2

Pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(I)$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathscr{E}(I)$ et $\varphi\psi \in \mathscr{E}(I)$. Autrement dit, $\mathscr{E}(I)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

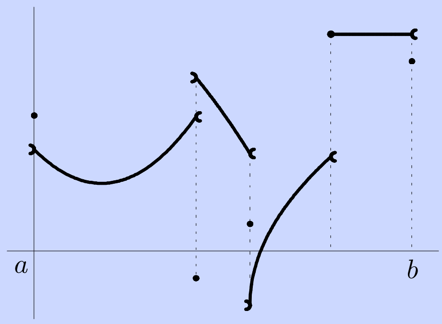
■ Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions adaptées respectivement à φ et ψ. On sait qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ plus fine que σ_1 et σ_2. Cette subdivision est alors adaptée à φ et ψ. Par conséquent, les fonctions φ et ψ sont toutes les deux constantes sur chacun des $]x_{i-1};x_i[$. Il en est donc de même de $\lambda\varphi + \mu\psi$ et $\varphi\psi$. ■

c) *Fonctions continues par morceaux*

Définition 4

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a;b]$ lorsqu'on peut trouver une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a;b]$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1};x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et en x_i. Une telle subdivion est dite adaptée à la fonction continue par morceaux f.

Par extension, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.



L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est noté $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$.

Une fonction continue par morceaux peut avoir une infinité de points de discontinuité mais ceux-ci forment un ensemble discret (on en compte qu'un nombre fini dans chaque partie bornée). En chacun de ces points, la fonction présente une limite finie à droite et une limite finie à gauche. Aucune condition n'est imposée sur les images de ces points de subdivision.

Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux puisque toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée est également adaptée.

Exemples :

- Une fonction continue est continue par morceaux.
- Une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux.
- La fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = 1/x$ n'est pas continue par morceaux car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

La proposition ci-dessous exprime le caractère localement borné des fonctions en escalier.

Proposition 3

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment.

■ Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$. Prenons une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1};x_i[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1};x_i]$. Par conséquent, la fonction f est bornée sur $[x_{i-1};x_i]$ et donc aussi sur $]x_{i-1};x_i[$. En posant $M_i = \sup_{]x_{i-1};x_i[} |f|$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la fonction f est donc bornée sur $[a;b]$ par $\max\{M_1, \ldots, M_n, |f(x_0)|, \ldots, |f(x_n)|\}$. ■

L'énoncé qui suit rassemble les propriétés opératoires des fonctions continues par morceaux.

Proposition 4

Pour tous $f, g \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ et $fg \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$. Autrement dit, $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

■ Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions adaptées respectivement à f et g. On sait qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ plus fine que σ_1 et σ_2. Cette subdivision est alors adaptée à f et g. Par conséquent, f et g sont toutes les deux continues sur chacun des $]x_{i-1};x_i[$. Il en est donc de même de $\lambda f + \mu g$ et fg. ■

Notons que si f est continue par morceaux, alors $|f|$ l'est également.

d) *Approximation des fonctions continues par morceaux*

Nous allons démontrer que toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée (ou encadrée) aussi près qu'on le veut par des fonctions en escalier.

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a;b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

(i) il existe $\phi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que $|f - \phi| \leqslant \varepsilon$;

(ii) il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

■ (i) Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f et soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i; x_{i+1}[$ est continue sur cet intervalle et prolongeable par continuité sur le segment $[x_i; x_{i+1}]$. En vertu du théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ et donc aussi sur $]x_i; x_{i+1}[$, c'est-à-dire que, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, il existe $\eta_i > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \,]x_i; x_{i+1}[\,, \qquad \big(|x - y| \leqslant \eta_i\big) \Longrightarrow \big(|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Posons $\eta = \min_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \eta_i$.
Considérons une subdivision $\sigma' = (x'_j)_{0 \leqslant j \leqslant n'}$ plus fine que σ telle que

$$\forall j \in [\![0; n-1]\!]\,, \qquad |x'_{j+1} - x'_j| \leqslant \eta.$$

Prenons dans chaque intervalle $]x'_j; x'_{j+1}[$ un réel ξ_j et construisons la fonction $\phi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que

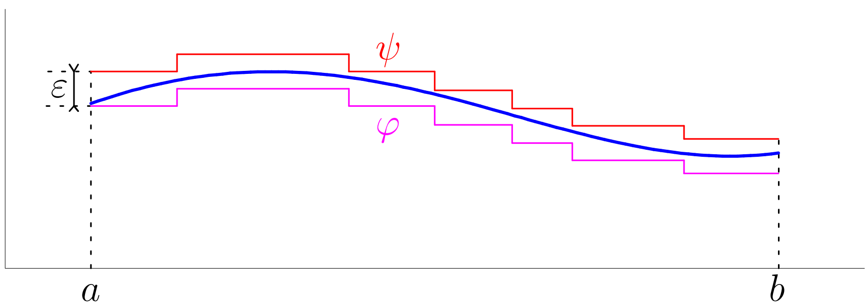
$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad \phi(x) = \begin{cases} f(x'_j) & \text{si } \exists j \in [\![0; n']\!]\,,\ x = x'_j, \\ f(\xi_j) & \text{si } \exists j \in [\![0; n'-1]\!]\,,\ x \in]x'_j; x'_{j+1}[. \end{cases}$$

Soit $x \in [a;b]$. Il se présente alors deux cas :

* Si $x = x'_j$ pour $j \in [\![0; n']\!]$, alors $|f(x) - \phi(x)| = 0$.
* Si $x \in]x'_j; x'_{j+1}[$ pour $j \in [\![0; n'-1]\!]$, alors $|\xi_j - x| \leqslant \eta$, donc $|f(\xi_j) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|\phi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. D'après (i), il existe une fonction $\phi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que $\forall x \in [a;b]\,,\ |\phi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2$. On a alors $\forall x \in [a;b]\,,\ \phi(x) - \varepsilon/2 \leqslant f(x) \leqslant \phi(x) + \varepsilon/2$. Les fonctions en escalier $\varphi = \phi - \varepsilon/2$ et $\psi = \phi + \varepsilon/2$ conviennent. ■

Ce théorème affirme que l'on peut faire passer la courbe de f dans une réunion de « tubes » horizontaux de largeur ε.



A.2. Définition de l'intégrale

a) Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 5

Soient $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$ et $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à φ. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note y_i la valeur de φ sur $]x_{i-1};x_i[$. On pose

$$\int_{[a;b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})y_i.$$

Ce nombre réel ne dépend pas de la subdivision choisie. Il est appelé l'intégrale de φ sur le segment $[a;b]$.

■ Soient σ et σ' deux subdivisions adaptées à φ.

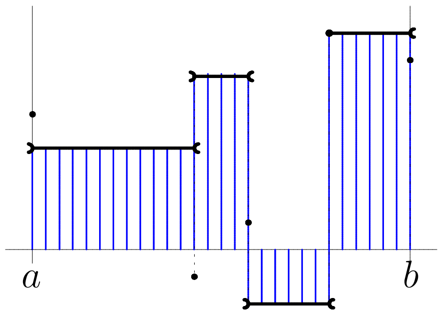
On suppose d'abord que σ' est plus fine que $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$. Comme on passe de σ à σ' en ajoutant un nombre fini de points de subdivision, il suffit de faire la démonstration dans le cas de l'ajout d'un point d entre, par exemple, x_k et x_{k+1}. En ajoutant ce point, on ajoute à la somme $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})y_i$ la quantité $\big((d-x_k)y_k + (x_{k+1}-d)y_k\big) - (x_{k+1}-x_k)y_k$ qui est clairement nulle. La somme n'est donc pas modifiée.

Dans le cas général, on introduit une subdivision σ'' plus fine que σ et σ'. En appliquant le premier cas, on constate que la somme n'est pas modifiée quand on passe de σ à σ'' et quand on passe de σ' à σ''. La somme est donc la même pour la subdivision σ et pour la subdivision σ'. ■

Géométriquement, $(x_i - x_{i-1})y_i$ est l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox), les droites d'équations $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$.

Cette aire est affectée du signe + si le rectangle est au dessus de (Ox) et du signe − dans le cas contraire.

L'intégrale de φ est donc l'aire algébrique de la partie hachurée du dessin ci-contre.



Il est clair que cette définition ne dépend pas de la valeur de f aux points de subdivision. Il en résulte que l'on peut changer la valeur de f en un nombre fini de points sans changer son intégrale.

Le lemme qui suit rassemble les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier. Nous généraliserons plus loin toutes ces propriétés.

Lemme 1

Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a;b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a;b]} \varphi + \mu \int_{[a;b]} \psi$ (linéarité) ;

(ii) $\forall c \in\,]a;b[\,,\ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi = \int_{[a;c]} \varphi + \int_{[c;b]} \varphi$ (relation de Chasles) ;

(iii) $(\varphi \geqslant 0) \implies \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \geqslant 0$ (positivité) ;

(iv) $(\varphi \geqslant \psi) \implies \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \geqslant \int_{[a;b]} \psi$ (croissance) ;

(v) $\displaystyle\left|\int_a^b \varphi\right| \leqslant \int_a^b |\varphi|$ (inégalité triangulaire) ;

■ Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à φ et ψ. On note y_i et z_i les valeurs respectives de φ et ψ sur $]x_i; x_{i+1}[$.

(i) La fonction $\lambda\varphi + \mu\psi$ est alors en escalier et

$$\begin{aligned}
\int_{[a;b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda y_i + \mu z_i) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) z_i \\
&= \lambda \int_{[a;b]} \varphi + \mu \int_{[a;b]} \psi,
\end{aligned}$$

ce qui établit (i).

(ii) Soit $c \in]a; b[$. On suppose, comme on le peut, que σ contient c, c'est-à-dire qu'il existe $j_0 \in [\![0; n]\!]$ tel que $x_{j_0} = c$. La fonction φ est toujours en escalier sur $[a; c]$ et $[c; b]$ et l'on a

$$\begin{aligned}
\int_{[a;b]} \varphi &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i \\
&= \sum_{i=0}^{j_0 - 1} (x_{i+1} - x_i) y_i + \sum_{i=j_0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i \\
&= \int_{[a;c]} \varphi + \int_{[c;b]} \varphi
\end{aligned}$$

ce qui démontre (ii).

(iii) Si l'on suppose $\varphi \geqslant 0$, on a $y_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ et donc

$$\int_{[a;b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i \geqslant 0,$$

en tant que somme de termes positifs. Cela établit (iii).

(iv) La propriété (iv) découle de (iii) puis (i) appliquées à la fonction $\varphi - \psi$.

(v) On a $-|\varphi| \leqslant \varphi \leqslant |\varphi|$, donc (iv) et (i) impliquent (v). ■

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Lemme 2

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$. On note $\mathscr{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ inférieures ou égales à f et $\mathscr{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ supérieures ou égales à f. Alors

(i) l'ensemble $\mathscr{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a;b]} \varphi : \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \right\}$ admet une borne supérieure I^- ;

(ii) l'ensemble $\mathscr{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a;b]} \psi : \psi \in \mathscr{E}^+(f) \right\}$ admet une borne inférieure I^+ ;

(iii) $I^- = I^+$.

■ D'après la proposition 3 , la fonction f est bornée. Notons $m = \inf_{[a;b]} f$ et $M = \sup_{[a;b]} f$.

(i) La fonction constante m appartient à $\mathscr{E}^-(f)$ donc $\mathscr{I}^-(f)$ est non vide. De plus, si $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$, alors $\varphi \leqslant f \leqslant M$, donc

$$\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} M = M(b-a).$$

L'ensemble $\mathscr{I}^-(f)$ est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et possède, à ce titre, une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

(ii) La démonstration est similaire à celle de (i).

(iii) Si $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ et $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$, alors $\psi \geqslant \varphi$ et donc $\int_{[a;b]} \psi \geqslant \int_{[a;b]} \varphi$ par le lemme 1. Il s'ensuit que

$$I^+ = \inf_{\psi \in \mathscr{E}^+(f)} \int_{[a;b]} \psi \geqslant \sup_{\varphi \in \mathscr{E}^-(f)} \int_{[a;b]} \varphi = I^-.$$

Supposons alors que $I^+ > I^-$ et posons $\varepsilon = I^+ - I^-$. D'après la proposition 1, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon/2(b-a)$. On en déduit d'une part que $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ et d'autre part, en utilisant le lemme 1, que

$$\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \varphi = \int_{[a;b]} (\psi - \varphi) \leqslant \int_{[a;b]} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui contredit la définition de ε. Donc $I^- = I^+$ et (iii) est vérifiée. ■

Ce lemme permet de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

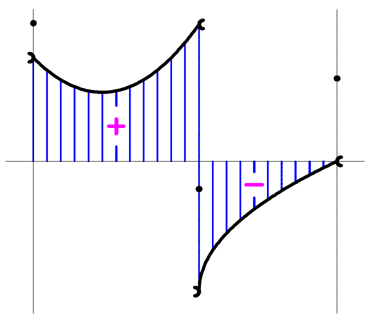
Définition 6

Si $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$, on appelle intégrale de f sur le segment $[a;b]$ le nombre réel

$$\int_{[a;b]} f = \inf_{\psi \in \mathscr{E}^+(f)} \int_{[a;b]} \psi = \sup_{\varphi \in \mathscr{E}^-(f)} \int_{[a;b]} \varphi.$$

Si f est en escalier sur $[a;b]$, alors elle est continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux est la même que son intégrale en tant que fonction en escalier, ce qui permet de noter de la même façon ces deux intégrales.

Par construction, l'intégrale de f sur $[a;b]$ représente l'aire algébrique de la région du plan limitée par l'axe (Ox), la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (en affectant d'un signe + les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe − celles situées en dessous).



L'énoncé suivant fournit une caractérisation de l'intégrale des fonctions continues par morceaux.

Lemme 3

Soient $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$ et I un nombre réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a;b])$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi, \qquad \int_{[a;b]} \varphi \leqslant I \leqslant \int_{[a;b]} \psi \qquad \text{et} \qquad \int_{[a;b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon,$$

alors

$$I = \int_{[a;b]} f.$$

■ Par l'absurde, supposons que $I \neq \int_{[a;b]} f$ et posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left| I - \int_{[a;b]} f \right|.$$

D'après l'hypothèse, il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a;b])$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi, \qquad \int_{[a;b]} \varphi \leqslant I \leqslant \int_{[a;b]} \psi \qquad \text{et} \qquad \int_{[a;b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, la première de ces inégalités implique que

$$\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi$$

Les nombres I et $\int_{[a;b]} f$ sont donc deux éléments de l'intervalle $\left[\int_{[a;b]} \varphi \, ; \int_{[a;b]} \psi \right]$, ce qui permet d'affirmer que

$$\left| I - \int_{[a;b]} f \right| \leqslant \left| \int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \varphi \right|,$$

c'est-à-dire

$$2\varepsilon \leqslant \left| \int_{[a;b]} (\psi - \varphi) \right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est absurde. ■

c) *Extension de l'intégrale aux segments orientés*

Dans ce paragraphe, on ne suppose pas que $a < b$.

Définition 7

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I)$. Pour tous $a, b \in I$, on définit l'intégrale orientée de a vers b, par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\displaystyle\int_{[a;b]} f & \text{si } a < b, \\ 0 & \text{si } a = b, \\ -\displaystyle\int_{[b;a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$$

La variable d'intégration est muette, ce qui signifie que l'on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre qui n'a pas déjà un sens. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il arrive fréquemment que l'on omette cette variable, c'est-à-dire que l'on note $\displaystyle\int_a^b f$ à la place de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela permet de remettre les bornes « dans le bon sens » lorsque $a > b$.

À ce stade, on ne sait calculer que quelques intégrales très simples. Les exemples suivants illustrent l'étendue (restreinte) de nos possibilités.

Exemples :

- Pour toute fonction f, on a $\displaystyle\int_a^a f = 0$.
- Si f est constante sur I, égale à $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, pour tous $a, b \in I$, on a $\displaystyle\int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t = \lambda(b - a)$.

A.3. Propriétés de l'intégrale

a) Linéarité

Nous commençons par démontrer que l'application qui, à une fonction f continue par morceaux, associe son intégrale est une forme linéaire.

Proposition 5

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I)$. Pour tous $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad \text{(linéarité).}$$

■ On traite le cas où $a < b$. Le cas où $a > b$ est similaire et le cas où $a = b$ est trivial.
Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$ et ψ_2 quatre fonctions en escalier telles que

$$(*) \qquad \varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1, \qquad \varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2, \qquad \int_{[a;b]} (\psi_1 - \varphi_1) \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{[a;b]} (\psi_2 - \varphi_2) \leqslant \varepsilon.$$

Ces inégalités impliquent que

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2,$$

$$\int_{[a;b]} (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} (\psi_1 + \psi_2)$$

et

$$\int_{[a;b]} \big((\psi_1 + \psi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2)\big) \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui prouve, d'après le lemme 3, que

$$\int_{[a;b]} (f + g) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Si $\lambda \geqslant 0$, les inégalités $(*)$ impliquent que

$$\lambda\varphi_1 \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_1,$$

$$\int_{[a;b]} \lambda\varphi_1 \leqslant \lambda \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \lambda\psi_1$$

et

$$\int_{[a;b]} (\lambda\psi_1 - \lambda\varphi_1) \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui prouve, d'après le lemme 3, que

$$\int_{[a;b]} \lambda f = \lambda \int_{[a;b]} f.$$

Si $\lambda \leqslant 0$, on montre de même que

$$\int_{[a;b]} \lambda f = \lambda \int_{[a;b]} f$$

en échangeant le rôle de $\lambda\varphi_1$ et $\lambda\psi_1$.
En combinant ces résultats, on obtient le résultat attendu. ■

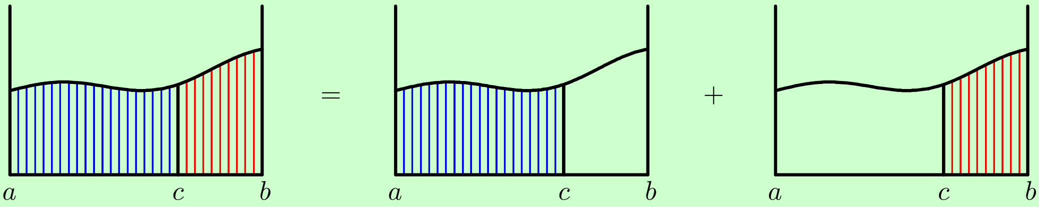
Cette propriété (souvent résumée par « l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales ») est d'une très grande utilité en pratique puisqu'elle permet de « découper » le calcul d'une intégrale en plusieurs étapes.

b) Relation de Chasles

Proposition 6

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I)$. Pour tous $a, b, c \in I$, on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



■ Si a, b et c ne sont pas distincts deux à deux, le résultat est trivial. Il reste donc à traiter les cas où $a < c < b$, $a < b < c$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ et $c < b < a$.

On traite d'abord le cas où $a < c < b$ de sorte que

$$\int_a^b f = \int_{[a;b]} f, \qquad \int_a^c f = \int_{[a;c]} f \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f = \int_{[c;b]} f.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe φ et ψ deux fonctions en escalier telles que

$$(*) \qquad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_{[a;b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{[a;c]} \varphi \leqslant \int_{[a;c]} f \leqslant \int_{[a;c]} \psi \qquad \text{et} \qquad \int_{[c;b]} \varphi \leqslant \int_{[c;b]} f \leqslant \int_{[c;b]} \psi.$$

En additionnant ces deux doubles inégalités et en utilisant les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier (lemme 1), on obtient

$$\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi.$$

Cela prouve, d'après le lemme 3, que

$$\int_a^b f = \int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Si $a < b < c$, le résultat précédent implique que

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

d'où

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Les autres cas sont identiques. ■

L'intégrale étant orientée, il n'est pas indispensable que c se trouve entre a et b pour que la relation de Chasles s'applique !

On prendra bien soin de ne pas mélanger la linéarité de l'intégrale où l'on additionne les intégrales de deux fonctions entre les mêmes bornes et la relation de Chasles où l'on additionne les intégrales d'une même fonction sur deux domaines jointifs.

c) *Positivité de l'intégrale*

Proposition 7

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I)$. Pour tous $a, b \in I$ tel que $a < b$, on a

$$\text{(i)} \quad (f \geqslant 0) \implies \int_a^b f \geqslant 0 \qquad \text{(positivité)} ;$$

$$\text{(ii)} \quad (f \geqslant g) \implies \int_a^b f \geqslant \int_a^b g \qquad \text{(croissance)} ;$$

$$\text{(iii)} \quad \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

■ (i) On remarque que, la fonction f étant positive, elle est supérieure ou égale à la fonction nulle qui est en escalier, donc

$$\int_a^b f = \int_{[a;b]} f \geqslant \int_{[a;b]} 0 = 0,$$

ce qui prouve le résultat.

(ii) Comme $f - g \geqslant 0$, (i) implique que $\displaystyle\int_a^b f - g \geqslant 0$, d'où $\displaystyle\int_a^b f - \int_a^b g \geqslant 0$ par linéarité. Cela donne le résultat.

(iii) Comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, (ii) dit que $\displaystyle\int_a^b -|f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$, c'est-à-dire $\displaystyle -\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$ par linéarité. C'est le résultat (iii). ■

Le résultat (i) est également vraie pour une fonction négative : $(f \leqslant 0) \implies \displaystyle\int_a^b f \leqslant 0$.

La réciproque de la propriétés (i) est fausse. En effet, si l'intégrale de f est positive, on ne peut pas affirmer que f est tout le temps positive.
De même, la réciproque de la propriété (ii) est fausse.

Dans le cas où la fonction est continue, on peut préciser le résultat (i).

Proposition 8

Une fonction f continue et positive sur un segment $[a;b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle sur le segment $[a;b]$.

■ $\Rightarrow$ Si f est nulle sur $[a;b]$, il est clair que son intégrale sur $[a;b]$ est également nulle.

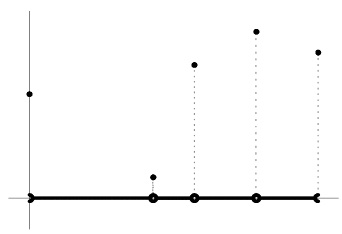
$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que f est continue, positive et non nulle sur $[a;b]$. Il existe alors c dans $]a;b[$ tel que $f(c) > 0$. La continuité de f en c assure l'existence de $\eta > 0$ tel que $[c-\eta; c+\eta] \subset]a;b[$ et $\forall x \in [c-\eta; c+\eta]$, $f(x) \geqslant f(c)/2$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f \geqslant \int_a^{c-\eta} 0 + \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{f(c)}{2} + \int_{c+\eta}^b 0 = 0 + \eta f(c) + 0 > 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale de f est non nulle. ■

Ce résultat est encore valable si la fonction est négative (à la place de positive).

S'il manque la continuité ou si la fonction change de signe, le résultat peut tomber en défaut. Ainsi, la fonction cosinus est continue et non nulle sur $[0;\pi]$ alors que son intégrale y est nulle (il manque l'invariance du signe). Par ailleurs, la fonction ci-contre est positive, d'intégrale nulle mais non identiquement nulle (il manque la continuité).



d) *Valeur moyenne*

Définition 8

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$. Pour tous $a, b \in I$ distincts, on appelle valeur moyenne de f entre a et b le nombre réel m défini par

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples :

- Si f est une fonction constante sur $[a;b]$ égale à λ, alors sa valeur moyenne est égale à λ. En fait, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est la valeur que doit prendre une fonction constante pour avoir la même intégrale que f sur le segment $[a;b]$.
- La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ a pour valeur moyenne $1/2$ sur $[0;2]$.

Pour une fonction continue, on énonce ci-dessous le lemme de la valeur moyenne.

Lemme 4

Toute fonction continue sur un segment atteint sa valeur moyenne. Autrement dit, si f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$ tel que $a \neq b$, alors

$$\exists c \in \,]a;b[\,, \qquad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ Notons m la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ et considérons la fonction $g : x \longmapsto f(x) - m$. La fonction g est alors continue sur $[a;b]$ et d'intégrale nulle sur $[a;b]$ puisque

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(f(t) - m\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b m\,\mathrm{d}t = (b-a)m - (b-a)m = 0.$$

Dès lors, si l'on suppose que g ne s'annule pas sur $]a;b[$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g ne change pas de signe sur $[a;b]$, ce qui est absurde d'après la proposition 8. ■

Ce résultat tombe en défaut pour une fonction non continue. Par exemple, la fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ a pour valeur moyenne $1/2$ sur $[0;2]$ mais n'atteint pas cette valeur sur ce segment.

e) Inégalité de Cauchy--Schwarz

Théorème 2

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I et $a, b \in I$. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2.$$

Si f et g sont continues sur I alors il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz si, et seulement si, f et g sont proportionnelles.

■ ▷ Inégalité

On suppose que $a < b$. Le cas $a = b$ est trivial. Le cas $a > b$ se traite en échangeant les bornes des intégrales (ce qui ne change rien en raison du carré et d'un double changement de signe).
Posons

$$P(\lambda) = \int_a^b (f + \lambda g)^2$$

et développons :

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2.$$

On constate ainsi que P est à la fois une fonction positive sur $\mathbb{R}$ (d'après la première expression) et une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ (d'après la seconde).
On distingue alors deux cas :

- Si l'intégrale entre a et b de g^2 est nulle, alors P est une fonction affine positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que c'est une fonction constante. On en déduit que l'intégrale entre a et b de fg est nulle et donc que l'inégalité attendue est évidente (les deux membres sont nuls).
- Sinon, P est un trinôme du second degré qui reste positif sur $\mathbb{R}$. Son discriminant

$$\Delta = 4\left(\left(\int_a^b fg\right)^2 - \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2\right)$$

est donc négatif ce qui donne l'inégalité annoncée.

▷ Cas d'égalité

$\Leftarrow$ Si f et g sont proportionnelles, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$. Supposons par exemple $f = \lambda g$. Alors

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 = \lambda^2 \left(\int_a^b g^2\right)^2 = \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$$

et l'on a bien égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

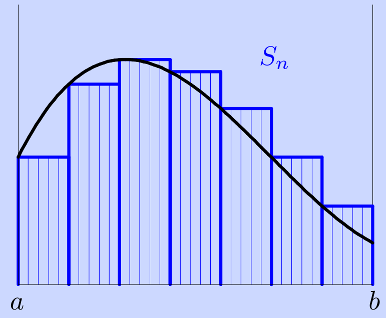
$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que l'égalité ait lieu et reprenons la démonstration ci-dessus en distinguant deux cas :

- Si l'intégrale entre a et b de g^2 est nulle, alors g^2 est nulle, en tant que fonction continue positive d'intégrale nulle. Donc g est nulle et, par conséquent, proportionnelle à f.
- Si l'intégrale entre a et b de g^2 est non nulle, alors l'hypothèse signifie que le polynôme P est de discrimant nul, ce qui assure l'existence d'une racine double λ_0 pour P. Alors $(f + \lambda_0 g)^2$ est une fonction continue, positive d'intégrale nulle, ce qui permet d'affirmer qu'elle est nulle sur $[a; b]$ et donc que $f = -\lambda_0 g$, ce qui prouve que f et g sont proportionnelles. ■

A.4. Sommes de Riemann

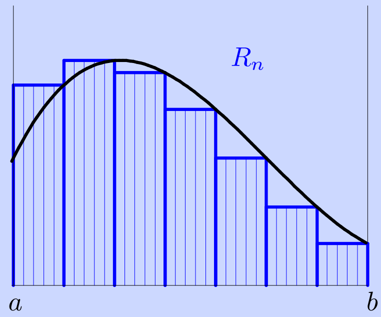
Définition 9

Si $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$ et $n \geqslant 1$, on appelle :



▶ somme de Riemann à gauche la quantité

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big),$$



◀ somme de Riemann à droite la quantité

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\cdot$$

L'énoncé suivant dit que les sommes de Riemann donnent une approximation de l'intégrale de f : c'est la méthode des rectangles. Nous étudierons plus loin la qualité de cette approximation.

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a;b])$. Les suites $\big(S_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(R_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers l'intégrale de f sur $[a;b]$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ Pour simplifier, on traite le cas de $S_n(f)$ lorsque $a < b$ et f est continue sur $[a;b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, la fonction f, qui est continue sur le segment $[a;b]$, est uniformément continue sur ce segment. On peut donc trouver un nombre réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a;b]\,, \qquad (|x-y| \leqslant \eta) \Longrightarrow \Big(|f(x) - f(y)|[\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big)\cdot$$

Considérons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(b-a)/n_0 \leqslant \eta$ de sorte que si $n \geqslant n_0$, on a, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$,

$$\forall x \in \Big[a + k\frac{b-a}{n}\,;\, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\Big], \qquad \Big|f(x) - f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f)\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} \Big(f(x) - f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\Big)\mathrm{d}x\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} \Big|f(x) - f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\Big|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. ■

Les moyennes discrètes $\big(S_n(f)/(b-a)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(R_n(f)/(b-a)\big)_{n\geqslant 1}$ tendent donc vers la valeur moyenne m de f entre a et b. 2 h 00

$\mathcal{B}$. Intégrales et primitives

$\mathcal{B}$.1. Primitives d'une fonction continue

a) Primitives

Définition 10

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction f de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ est dite primitivable sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe une fonction F de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathscr{D}$, telle que $\forall x \in \mathscr{D},\ F'(x) = f(x)$. La fonction F est appelée une primitive de f sur $\mathscr{D}$.

Nous donnerons au paragraphe B. 4. une liste des primitives des fonctions usuelles.

Pour démontrer qu'une fonction est primitivable, la méthode la plus simple consiste bien sûr à trouver l'une de ses primitives. Cependant, cette recherche peut être infructueuse parce qu'il existe des fonctions primitivables dont on ne sait pas exprimer les primitives à l'aide des fonctions usuelles !! Ainsi, avec les fonctions usuelles de Première, il est impossible d'exprimer les primitives de $x \longmapsto 1/x$ (il faut le logarithme). De même, avant le cours sur les fonctions circulaires réciproques, vous ne connaissiez pas de primitive de $x \longmapsto 1/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ (il faut arctan). Ces fonctions, définies comme des primitives « non calculables », sont dites transcendantes.

Il faut prendre garde à ne pas parler de *la* primitive d'une fonction f puisque si F est une primitive de f alors, pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $F + \lambda$ en est une autre.
La réciproque est vraie sur un intervalle comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 9

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont toutes les fonctions de la forme $F + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

■ Les fonctions proposées sont bien des primitives de f sur I.
Réciproquement, si G est une primitive de f alors $(G - F)' = f - f = 0$. Comme on est sur un intervalle, cela implique l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = \lambda$, c'est-à-dire $G = F + \lambda$. ■

Pour assurer l'unicité d'une primitive sur un intervalle, il convient donc de préciser la constante ou d'imposer une condition qui fixe celle-ci (du type condition initiale comme en physique). Une telle condition s'appelle une condition de Cauchy.

Attention !! La constante peut varier d'un intervalle à l'autre.
Par exemple, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$ admet une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et est donc constante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ mais la constante n'est pas la même !! On trouve (à l'aide des valeurs en $x = -1$ et $x = 1$) que $\forall x > 0,\ f(x) = \pi/2$ et $\forall x < 0,\ f(x) = -\pi/2$.
Autre exemple : Sachant que $\ln|x|$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des primitives de h est l'ensemble des fonctions H telles que $\forall x < 0,\ H(x) = \ln(-x) + \lambda_1$ et $\forall x > 0,\ H(x) = \ln x + \lambda_2$ où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

La notion de primitive est intimement liée à l'ensemble sur lequel on définit f.
Ainsi, la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = 0$ est primitivable sur $\mathbb{R}^*$ mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$. En effet, f étant nulle sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que ses primitives doivent être constantes sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Une telle fonction $F : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$. Si, par contre, on recherche une primitive F sur $\mathbb{R}$, il faut que celle-ci soit constante sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$ et donc, par continuité, qu'elle le soit sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui implique que $F'(0) = 0$. C'est en contradiction avec le fait que $f(0) = 1$.

Pour la suite de ce cours, nous introduisons une notation très commode désignant une primitive quelconque d'une fonction.

Définition 11

Soit f une fonction primitivable sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. Par commodité, on note

$$x \longmapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

une primitive (quelconque) de f sur $\mathscr{D}$.

Cette notation désigne donc non pas une fonction mais toute une famille de fonctions ne différant que d'une constante sur chaque intervalle constituant $\mathscr{D}$.

Il faut prendre garde à ne pas donner à la variable d'intégration t (qui est muette) le même nom que la variable x de la fonction.

Nous allons donner, dans le paragraphe suivant, l'argument principal qui justifie la pertinence de cette écriture intégrale des primitives. Avant cela, on peut immédiatement signaler que cette notation permet de traduire la linéarité de la primitivation à travers la linéarité du symbole $\int$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 10

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions primitivables sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est une fonction primitivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\int^x \lambda f + \mu g = \lambda \int^x f + \mu \int^x g.$$

■ AQT ■

Bien qu'évidente, cette propriété est d'une grande importance pratique : lorsqu'on recherche une primitive d'une combinaison linéaire de fonctions, on peut se ramener à la recherche d'une primitive de chacune des fonctions. On retient souvent ce résultat sous la forme : une primitive d'une somme est la somme des primitives.

L'ensemble des fonctions primitivables n'est pas aussi sympathique qu'il n'y paraît. S'il est effectivement stable par combinaison linéaire, il n'est en revanche pas stable pour le produit ! On peut trouver deux fonctions primitivables dont le produit ne l'est pas ! Autrement dit, l'ensemble des fonctions primitivables est un espace vectoriel mais n'est pas une algèbre.

b) Intégrale fonction de sa borne haute

Définition 12

Soient $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ et $a \in I$. On appelle intégrale fonction de sa borne haute en a associée à f la fonction F_a définie par

$$\forall x \in I, \qquad F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On notera que $F_a(a) = 0$.

Proposition 11

Soient $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ et $a \in I$. La fonction F_a est continue sur I.

■ Soit $x \in I$. Démontrons que F_a est continue en x. On traite le cas où x n'est pas une extrémité de I (si x est à une extrémité de l'intervalle, on procède de même avec des continuités latérales). Dès lors, il existe $\eta > 0$ tel que $[x-\eta; x+\eta] \subset I$. Alors, pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta$, on sait que f étant continue par morceaux sur $[x-\eta; x+\eta]$, elle est bornée par M sur ce segment et donc

$$\big|F_a(x+h) - F_a(x)\big| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant M|h|,$$

ce qui établit la continuité de F_a en x (puisqu'elle est lipschitzienne au voisinage de x). ■

Nous en venons maintenant au théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 4

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I. La fonction F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

■ Soit $x \in I$. Prouvons que F_a est dérivable en x et $F_a'(x) = f(x)$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$, on a

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le terme de droite est la valeur moyenne de f sur $[x; x+h]$. Comme f est continue sur $[x; x+h]$, le lemme 4 permet d'affirmer que cette valeur moyenne est atteinte sur $]x; x+h[$, c'est-à-dire

$$\exists c_h \in \,]x; x+h[, \qquad \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_h).$$

Comme f est continue en x et $\lim_{h\to 0} c_h = x$, on en déduit que $\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x).$$

Cela démontre que F_a est dérivable en x et que $F_a'(x) = f(x)$.

On a déjà remarqué que $F_a(a) = 0$. Si G est une primitive de f qui s'annule en a, alors $G = F_a + \lambda$. En évaluant en a, on a $G(a) = F_a(a) + \lambda$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi, on a $G = F_a$, ce qui démontre que F_a est la seule primitive de f qui s'annule en a. ■

Il est en général faux d'affirmer que toutes les primitives de f s'écrivent comme une intégrale fonction de sa borne haute, c'est-à-dire sous la forme $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où a est une constante quelconque de l'intervalle I.

Ainsi, l'ensemble des primitives de cos est égal à $\{\sin + k \ : \ k \in \mathbb{R}\}$ alors que les intégrales fonctions de leur borne haute associées à cos appartiennent à $\{\sin + k : k \in [-1; 1]\}$, puisque

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x - \sin a \qquad \text{et} \qquad \sin a \in [-1; 1]\,.$$

On en déduit le résultat fondamental suivant.

Corollaire 1

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

■ AQT ■

Ce corollaire nous dit que la continuité est une condition suffisante de primitivabilité. L'exemple ci-dessous montre que ce n'est pas une condition nécessaire.

Exemples :

- La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = 2x\sin(1/x) + \cos(1/x)$ est une fonction non continue (en 0) qui est primitivable sur $\mathbb{R}$, dont une primitive est $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ F(x) = x^2\sin(1/x)$.

Le théorème précédent permet de faire le lien entre les notions d'intégrale et de primitive. On obtient ainsi le résultat fondamental du calcul intégral.

Théorème 5

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Si F désigne une primitive (quelconque) de f sur I, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est notée $\big[F(t)\big]_a^b$.

■ On sait que la fonction F_a est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Il s'ensuit que l'on a $F_a = F - F(a)$. On obtient le résultat en évaluant cette égalité en b. ■

Calcul d'une intégrale par primitivation

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue se ramène donc, chaque fois que c'est possible, à la recherche d'une primitive (n'importe laquelle) de cette fonction.

Exemples :

- On a

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan t\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{-\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\big[\ln|\cos t|\big]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ln 3}{2}.$$

- Si $f(x) = \alpha x + \beta$, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t\Big]_a^b = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

On retrouve ainsi l'aire d'un trapèze.

B.2. Intégration et primitivation par parties

a) IPP

Théorème 6

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous $a, b \in I$, on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, il en est de même de uv et l'on a $(uv)' = u'v + uv'$, d'où

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b,$$

ce qui donne le résultat. ■

La formule d'intégration par parties fonctionne par compensation : d'un côté, on dérive (ce qui correspond en général à une simplification) et de l'autre côté, on primitive (ce qui correspond la plupart du temps à une complication). Intégrer par parties n'est donc efficace que si la simplification est plus importante que la complication !

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on intègre un polynôme contre une exponentielle.

Exemples :

- Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on pose $u(t) = t$ et $v(t) = -\,\mathrm{e}^t$, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. La formule d'IPP nous donne alors

$$I = \big[-t\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{e}^{-1} - 0 + \big[-\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

b) PPP

Théorème 7

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tout $x \in I$, on a la formule de primitivation par parties :

$$\int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]^x - \int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

■ On adaptera la démonstration de la formule d'intégration par parties. ■

Tout comme la formule d'intégration par parties, la formule de primitivation par parties fonctionne par compensation : elle permet de dériver (= simplifier) une fonction sous une intégrale à condition d'en primitiver (= compliquer) une autre.

Par exemple, elle se révèle particulièrement adaptée lorsqu'on repère une fonction transcendante (du type ln, arctan ...) dont la dérivée est connue en termes des fonctions usuelles.

Exemples :

- Pour déterminer les primitives de ln, on écrit, pour tout $x > 0$, que

$$\int^x \ln t\,\mathrm{d}t = \big[t\ln t\big]^x - \int^x t\frac{1}{t}\mathrm{d}t = x\ln x - x + \lambda, \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- Pour déterminer les primitives de arctan, on écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned}\int^x \arctan t\,\mathrm{d}t &= \big[t\arctan t\big]^x - \int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]^x\\ &= x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + \lambda, \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

B.3. Changement de variable

a) Changement de variable dans une intégrale

Théorème 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$. Pour toute fonction $\varphi : J \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^1$ (appelée changement de variable) et tous $\alpha, \beta \in J$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (s'ils existent), on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

■ Soit F une primitive de f sur I. Alors $F \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Donc,

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(u)\,\mathrm{d}u = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

où l'on utilisé deux fois le théorème 5. ■

Méthode du changement de variable

On veut effectuer un changement de variable dans l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On décrit ci-dessous les différentes étapes à effectuer dans deux situations.

On exprime l'ancienne variable en fonction d'une nouvelle : $t = \varphi(u)$

- <u>Nouvelles bornes</u>
  On détermine α et β tel que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
- <u>Nouvelle différentielle</u>
  On vérifie que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha; \beta]$ et l'on calcule $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, ce qui donne l'ancienne différentielle $\mathrm{d}t$ en fonction de la nouvelle $\mathrm{d}u$.
- <u>Nouvel intégrant</u>
  On transforme l'intégrant $f(t)\,\mathrm{d}t$ en remplaçant $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et t par $\varphi(u)$. On obtient ainsi un nouvel intégrant de la forme $g(u)\,\mathrm{d}u$.
- <u>Écriture de la « nouvelle » intégrale</u>
  On obtient une nouvelle expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u$.

On exprime une nouvelle variable en fonction de l'ancienne : $u = \psi(t)$

- <u>Nouvelles bornes</u>
  On transforme les bornes : si $t = a$, alors $u = \psi(a)$ et si $t = b$, alors $u = \psi(b)$.
- <u>Nouvelle différentielle</u>
  On vérifie que ψ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$ et l'on calcule $\mathrm{d}u = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- <u>Nouvel intégrant</u>
  On écrit l'intégrant $f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $f(t) = g\big(\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ et l'on remplace $\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}u$ et $\psi(t)$ par u. On obtient ainsi un nouvel intégrant de la forme $h(u)\,\mathrm{d}u$.
- <u>Écriture de la « nouvelle » intégrale</u>
  On obtient une nouvelle expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} h(u)\,\mathrm{d}u$.

Il peut paraître curieux que l'on puisse effectuer des changement de variable de l'ancienne variable vers la nouvelle aussi bien que de la nouvelle vers l'ancienne sans aucune hypothèse de bijectivité. Cette particularité est due à l'existence, pour une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de la propriété des valeurs intermédiaires. Vous verrez que cela ne se produit pas en dimension supérieure (pour les intégrales multiples).

Exemples :

- Calculons
$$J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant} \qquad t = \sin u.$$
Les nouvelles bornes sont $-\pi/2$ et $\pi/2$.
La fonction sin est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et l'on a
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \cos u \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u.$$
On a
$$\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,\mathrm{d}u = |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u = \cos^2 u\,\mathrm{d}u,$$
car la fonction cos est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$.
Il s'ensuit que
$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot$$
Ce résultat n'a rien d'étonnant, car cette intégrale correspond à l'aire du demi disque unité.
- Calculons
$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant} \qquad u = \tan t.$$
Les nouvelles bornes sont 0 et 1.
La fonction $t \longmapsto \tan t$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$ et l'on a
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1+\tan^2 t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2 t}\cdot$$
Alors
$$\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t = \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2 t} = \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan t} = \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\cdot$$
Ainsi,
$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln|1+u|\Big]_0^1 = \ln 2\cdot$$
- Attention ! Il faut toujours bien vérifier la validité du changement de variable sinon on court à la catastrophe. Par exemple, si l'on écrit
$$K = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{\pi} \frac{1+\tan^2 t}{2+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t,$$
puis que l'on effectue le changement de variable $u = \tan t$ de sorte que $\mathrm{d}u = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$, on a
$$K = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^0 = 0,$$
ce qui est clairement absurde puisqu'on intègre une fonction continue strictement positive. L'erreur vient du fait que le changement de variable $u = \tan t$ est crasseux sur $[0;\pi]$ à cause de la singularité de tan en $\pi/2$.

b) Changement de variable dans une primitive

Théorème 9

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x \in I$. Pour toute fonction $\varphi : J \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective (appelée changement de variable), on a

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\varphi^{-1}(x)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

■ On adapte la démonstration de la formule de changement de variable pour une intégrale. ■

On peut très facilement adapter la méthode du changement de variable (décrite dans l'encadré du paragraphe précédent) au cas d'un changement de variable pour le calcul d'une primitive.

Il faut cependant noter une subtilité. Avec un changement de variable de la forme $u = \psi(t)$, on remplace, au final, tous les u par des $\psi(x)$ pour obtenir le résultat. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que ψ soit bijectif. Au contraire, avec un changement de variable de la forme $t = \varphi(u)$, le remplacement final des u par des $\varphi^{-1}(x)$ nécessite que φ soit bijective (c'est-à-dire un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme).

Exemples :

- Calculons
$$F(x) = \int^x (\sin t)\ln(\cos t)\,\mathrm{d}x \qquad \text{en posant} \qquad u = \cos t.$$
La nouvelle borne est $\cos x$.
La fonction $t \longmapsto \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin t}\cdot$$
On a
$$(\sin t)\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = (\sin t)\ln(\cos t)\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\sin t}\right) = -\ln(\cos t)\,\mathrm{d}u = -\ln u\,\mathrm{d}u.$$
Alors
$$F(x) = \int^{\cos x}(-\ln u)\,\mathrm{d}u = \big[-u\ln u + u\big]^{\cos x} = -(\cos x)\ln(\cos x) + \cos x + \lambda,$$
où λ est une constante réelle arbitraire.

B.4. Primitives usuelles

Le tableau suivant rappelle les primitives des fonctions usuelles. Il est à connaître par ♡.

Fonction	Primitive	Ensemble de primitivation
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x \quad \text{ou} \quad -\arccos x$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\, x$	$\mathbb{R}$

$$\int u' u^{n-1} = \frac{u^n}{n} \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} \qquad \int \frac{u'}{u^{n+1}} = -\frac{1}{n}\frac{1}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert \qquad \int u'\,\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$$

$$\int u' \cos u = \sin u \qquad \int u' \sin u = -\cos u$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \qquad \int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u$$

C. Intégrale d'une fonction á valeurs complexes

Cette section généralise l'intégrale au cas des fonctions complexes continues par morceaux.

C.1. Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Définition 13

Une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I, c'est-à-dire si, pour tout $[a;b] \subset I$, il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, dite adaptée à $[a;b]$, telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la restriction de f à $]x_{i-1}; x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et en x_i.

L'énoncé suivant fait le lien entre la continuité par morceaux d'une fonction complexe et les continuités par morceaux de ses parties réelle et imaginaire.

Proposition 12

Une fonction complexe est continue par morceaux si, et seulement si, ses parties réelles et imaginaires le sont.

■ Cela découle des propriétés de continuité et de limites des fonctions à valeurs complexes. ■

Comme dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut démontrer qu'une fonction complexes continues par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment. De plus, l'ensemble des fonctions complexes continues par morceaux est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions. Enfin, si f est une fonction complexe continue par morceaux, alors son module $|f|$ l'est aussi.

Définition 14

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{C}$. Si $a, b \in I$, on appelle intégrale de f de a vers b le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re\mathrm{e}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Im\mathrm{m}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

On notera que

$$\Re\mathrm{e}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \Re\mathrm{e}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Im\mathrm{m}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \Im\mathrm{m}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, la partie réelle d'une intégrale est l'intégrale de la partie réelle et la partie imaginaire d'une intégrale est l'intégrale de la partie imaginaire.

C.2. Propriétés de l'intégrale d'une fonction complexe

Les propriétés de l'intégrale qui ne font pas référence sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ restent vraies pour l'intégrale d'une fonction complexe.

Proposition 13

Soient f et g deux fonctions complexes continues par morceaux sur un intervalle I, $a, b, c \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad \text{(linéarité)}$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \text{(relation de Chasles).}$$

■ AQT ■

Les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale n'ont pas de sens pour une fonction complexe. Cependant, l'inégalité triangulaire subsiste.

Proposition 14

Soient f une fonction complexe continue par morceaux sur un intervalle I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

■ On pose

$$\theta = \arg\left(\int_a^b f \right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f \right| &= \left| \mathrm{e}^{-i\theta} \int_a^b f \right| \\
&= \left| \Re\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-i\theta} \int_a^b f \right) \right| \qquad \text{car } \mathrm{e}^{-i\theta} \int_a^b f \in \mathbb{R} \\
&= \left| \Re\mathrm{e}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-i\theta} f \right) \right| \\
&= \left| \int_a^b \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-i\theta} f) \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-i\theta} f) \right| \\
&\leqslant \int_a^b |f|
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité est l'inégalité triangulaire pour les fonctions réelles et la dernière inégalité découle de la majoration élémentaire $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|\Re\mathrm{e}(z)\right| \leqslant |z|$. ■

Une fonction complexe continue sur un segment n'atteint pas nécessairement sa valeur moyenne. Par exemple, $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$ est de moyenne nulle sur $[0; 2\pi]$, mais elle ne prend jamais la valeur 0.

Les résultats sur les sommes de Riemann restent valables pour des fonctions complexes.

C.3. Primitives d'une fonction à valeurs complexes

Définition 15

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction f de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{C}$ est dite primitivable sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe une fonction F de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{C}$, dérivable en tout point de $\mathscr{D}$, telle que $\forall x \in \mathscr{D},\ F'(x) = f(x)$. La fonction F est appelée une primitive de f sur $\mathscr{D}$.

La proposition suivante fait le lien entre les primitives d'une fonction complexe et les primitives de ses parties réelle et imaginaire.

Proposition 15

Une fonction F de I dans $\mathbb{C}$ est une primitive de f sur I si, et seulement si, $\Re\mathrm{e}(F)$ et $\Im\mathrm{m}(F)$ sont des primitives respectives de $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sur I.

■ AQT ■

Le théorème fondamental de l'analyse reste vrai pour des fonctions à valeurs complexes.

Théorème 10

Soient f une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$. La fonction F_a définie par

$$\forall x \in I, \qquad F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

En particulier, pour toute primitive F de f sur I et tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

■ AQT ■

Comme dans le cas réel, la façon la plus élémentaire de calculer une intégrale complexe est de rechercher une primitive de la fonction intégrée.

Exemples :

- On a
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{it}}{i}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i.$$
- On a
$$\int_0^1 \frac{2}{1+it}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t - i\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \big[2\arctan t\big]_0^1 - i\big[\ln|1+t^2|\big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - i\ln 2.$$

D. Formule de Taylor

La formule de Taylor–Lagrange, que nous avons rencontrée dans le chapitre sur la dérivation, fait apparaître un reste lagrangien assez imprécis (puisqu'il s'exprime en fonction d'un nombre réel c dont on ne connaît pas la valeur mais seulement un encadrement). Cette formule est donc adaptée pour encadrer des fonctions ou pour donner des approximations d'icelles (à travers la formule de Taylor–Young). En revanche, on ne peut espérer l'utiliser pour établir des égalités.

L'objet de cette section est de présenter une version plus précise de la formule de Taylor, c'est-à-dire une formule où le reste, écrit sous forme intégrale, est connu. Ce que l'on gagne en précision, on le perd en simplicité : le nouveau reste n'est pas facile à manipuler.

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

D.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 11

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$. On a la formule de Taylor – reste intégral au point a et à l'ordre n :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{somme de Taylor}} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{reste intégral}}.$$

■ On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors f' est $\mathscr{C}^0$ sur I et $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat établi au rang $n-1$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Elle est alors de classe $\mathscr{C}^n$, ce qui permet de lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*).$$

En intégrant par parties le reste de cette formule, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

puisque $(b-b)^n = 0$ car $n \geqslant 1$. En reportant ce résultat dans $(*)$, on obtient le résultat au rang n.

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Lorsque f est un polynôme et $n \geqslant \deg(f)$, on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Pour une fonction réelle, on peut montrer que la formule de Taylor – reste intégral (T.R.I. pour les intimes) implique celle de Taylor – Lagrange. Par conséquent, T.R.I. permet, comme son ersatz lagrangienne, de démontrer des inégalités ou des approximations (Taylor – Young par exemple).

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} (-1)^n \sin t\,\mathrm{d}t.$

D.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral permet de retrouver l'inégalité de Taylor–Lagrange, dans le cadre général des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 16

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a; b]$, on a l'inégalité de Taylor–Lagrange au point a et à l'ordre n :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

■ On traite le cas $a < b$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f (qui est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I) au rang n et au point a, il vient

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}u \right| \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| \, \mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M \, \mathrm{d}u \\
&= M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\
&= M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue sur I, elle est bornée sur le segment $[a; b]$ ce qui assure l'existence du nombre réel M.

Pour $n = 0$, on retrouve, l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$: si $\forall t \in I,\ |f'(t)| \leqslant M$, alors $\forall a, b \in I,\ |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$. 3 h 45

D.3. Calcul approché d'intégrales

a) Méthode des rectangles

C'est la méthode la plus simple pour obtenir la valeur approchée d'une intégrale. Elle consiste à prendre une somme de Riemann pour approcher l'intégrale.

Proposition 17

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telle que $|f'|$ est bornée par M_1 sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) \right| \leqslant \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$$

La même inégalité est vraie avec $R_n(f)$ à la place de $S_n(f)$.

L'exposant de n valant 1 dans le terme de majoration, on dit que la méthode est d'ordre 1.

■ On traite la démonstration dans le cas de la somme S_n ; l'autre cas étant similaire. Soit $n \geqslant 1$. On pose $x_k = a + k(b-a)/n$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right|. \end{aligned}$$

Si F est une primitive de f, on a, d'après l'inégalité de Taylor–Lagrange,

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| = \left| F(x_{k+1}) - F(x_k) - (x_{k+1} - x_k) F'(x_k) \right| \leqslant \frac{M_1}{2} (x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2.$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n},$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

Un logiciel donne comme valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ la quantité $1,46265175$. Comparons cette valeur à celles obtenues par les sommes de Riemann.

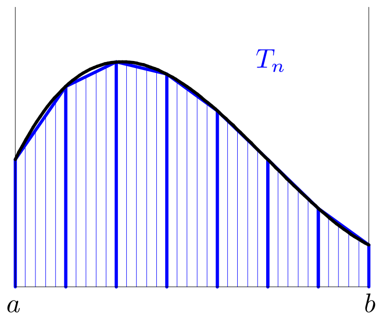
n	2	4	8	16	32	64
$S_n(\mathrm{e}^{x^2})$	1,14201271	1,27589363	1,36231966	1,41072400	1,43624595	1,44933827

On constate donc que, pour $n = 64$, la méthode de Riemann ne donne qu'une seule décimale exacte.

b) *Méthode des trapézes et méthode de Simpson* [✠]

On peut améliorer l'approximation d'une intégrale donnée par la méthode des rectangles en remplaçant la fonction en escalier par une fonction affine par morceaux, c'est-à-dire en remplaçant, sur chaque intervalle de la subdivision, la fonction f par une fonction affine coïncidant avec elle aux bornes.

L'intégrale de la fonction affine par morceaux est alors égale à l'aire de la réunion de trapèzes portés par la courbe (en bleu sur le dessin), c'est-à-dire à



$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Proposition 18

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I telle que $|f''|$ est bornée par M_2 sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n(f) \right| \leqslant \frac{M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

La méthode est donc d'ordre 2.

■ Soit $n \geqslant 1$. On pose $x_k = a + k(b-a)/n$ et on procède comme dans la preuve de la proposition 17 pour avoir

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2n}\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \right|.$$

Soient α et β deux éléments de I tels que $\alpha \leqslant \beta$. On note g la fonction affine qui coïncide avec f en α et β. Alors

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2},$$

donc

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \right| = \left| \int_\alpha^\beta \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Or, en étudiant les fonctions $\varphi : t \longmapsto f(t) - M_2(t-\alpha)(\beta - t)$ et $\psi : t \longmapsto f(t) + M_2(t-\alpha)(\beta-t)$ sur $[\alpha;\beta]$, on constate qu'elles sont respectivement convexe et concave, ce qui permet d'affirmer que $\varphi \leqslant g \leqslant \psi$ sur $[\alpha;\beta]$ et donc que $\forall t \in [\alpha;\beta]\,,\ |f(t) - g(t)| \leqslant M_2(t-\alpha)(\beta-t)/2$. Donc

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \right| \leqslant \frac{M_2}{12} \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(\beta-t)\,\mathrm{d}t = \frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3.$$

Donc

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2n}\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \right| \leqslant \frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3.$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2},$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

Testons la méthode des trapèzes sur l'exemple de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ dont nous connaissons une valeur approchée : $1,46265175$.

n	2	4	8	16	32	64
$T_n(\mathrm{e}^{x^2})$	1,57158317	1,49067886	1,46971228	1,46442031	1,46309410	1,46276235

On constate donc que, pour $n = 64$, la méthode des trapèzes donne trois décimales exactes.

La convergence de la méthode des trapèzes peut être améliorée à l'aide du procédé d'accélération de Richardson–Romberg. Il consiste à combiner linéairement plusieurs termes de la suite $T_n(f)$ pour augmenter l'ordre de la méthode. Plus précisément, avec l'approximation

$$T_n(f) \approx \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{a}{n^2}$$

on voit qu'en calculant $\big(4T_{2n}(f) - T_n(f)\big)/3$, on élimine le terme en $1/n^2$ de sorte que la convergence devient plus rapide. On obtient la méthode de Simpson, consistant à approcher l'intégrale de f entre a et b par la somme

$$U_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{6}\left(f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+4f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Proposition 19

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ sur un intervalle I telle que $|f^{(4)}|$ est bornée par M_4 sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - U_n(f)\right| \leqslant \frac{M_4}{2880}\,\frac{(b-a)^5}{n^4}.$$

La méthode est donc d'ordre 4.

■ Admis. ■

Testons la méthode de Simpson sur l'exemple de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ dont nous connaissons une valeur approchée : $1,46265175$.

n	2	4	8	16	32	64
$U_n(\mathrm{e}^{x^2})$	1,46371076	1,46272341	1,46265632	1,46265203	1,46265176	1,46265175

On constate donc que, pour $n = 64$, la méthode de Simpson donne huit décimales exactes.

Notons que la méthode de Simpson donne la formule dite des trois niveaux

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

qui est en fait exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Cette formule a longtemps été utilisée pour estimer le tonnage des bateaux : le volume d'une cargaison est proche du produit de la hauteur de l'embarcation par la moyenne pondérée d'une fois l'aire du fond de cale plus une fois l'aire du pont plus quatre fois l'aire intermédiaire. 4 h 30