

## Problème n° 6 : Étude d'une fonction réciproque

### Correction du problème 1 – Etude d'une fonction réciproque

#### PARTIE I – Étude de $g$

##### 1. Variations de $g$ .

- (a) La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et dérivable (et même de classe  $C^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}$ , puisque c'est une fonction polynomiale. Sa dérivée est :

$$f'(t) = 3t^2 + 1.$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , et y est toujours positive. D'où le tableau de variation de  $f$  :

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	$+\infty$

Déterminons les points d'inflexion de  $f$ . Pour cela, étudions la dérivée seconde :  $f''(t) = 6x$ . Ainsi,  $f''$  s'annule en 0, est négative pour  $t < 0$  et positive pour  $t > 0$  (elle change donc de signe en 0).

Ainsi,  $0$  est un point d'inflexion, et  $f$  est concave sur  $\mathbb{R}_-$  et convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

- (b) Voir figure 1. La pente de la tangente au point d'inflexion  $(0, 0)$  est  $f'(0) = 1$ . Ainsi, l'équation de la tangente en ce point d'inflexion est  $y = x$ .

- (c) Comme  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. Ainsi, d'après le théorème de la bijection,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle image  $f(\mathbb{R})$ . D'après les valeurs des limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ , cet intervalle image est  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Ainsi,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une fonction réciproque  $g$ , définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Par définition,  $g$  vérifie  $f \circ g = \text{id}$ , c'est-à-dire :

$$g^3(x) + g(x) = x. \quad (1)$$

- (d)  $f$  étant strictement croissante et impaire, sa réciproque  $[g \text{ est aussi strictement croissante et impaire}]$

Puisque  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , son image est  $\mathbb{R}$ . Comme elle est croissante, elle admet des limites (dans  $\overline{\mathbb{R}}$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ ). Si par exemple en  $-\infty$ , cette limite est  $\ell > -\infty$ , on obtient, par croissante,  $g(\mathbb{R}) \subset [\ell, +\infty[$ , ce qui contredit  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et de même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

- (e) D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, puisque  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée ne s'annule pas, sa réciproque  $g$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$ , le cours nous assure même que  $[g \text{ est de classe } C^\infty \text{ également}]$ . On obtient alors l'expression de la dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{3g^2(x) + 1}. \quad (2)$$

- $g$  étant croissante et négative sur  $\mathbb{R}_-$ ,  $g^2$  est décroissante et positive, donc  $g'$  est croissante.
- De la même manière, on montre la décroissance de  $g'$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Les limites de  $g$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ , et la valeur en 0 amènent sans difficulté les valeurs des limites et extrêmes de  $g'$ .

On obtient alors le tableau de variation suivant :

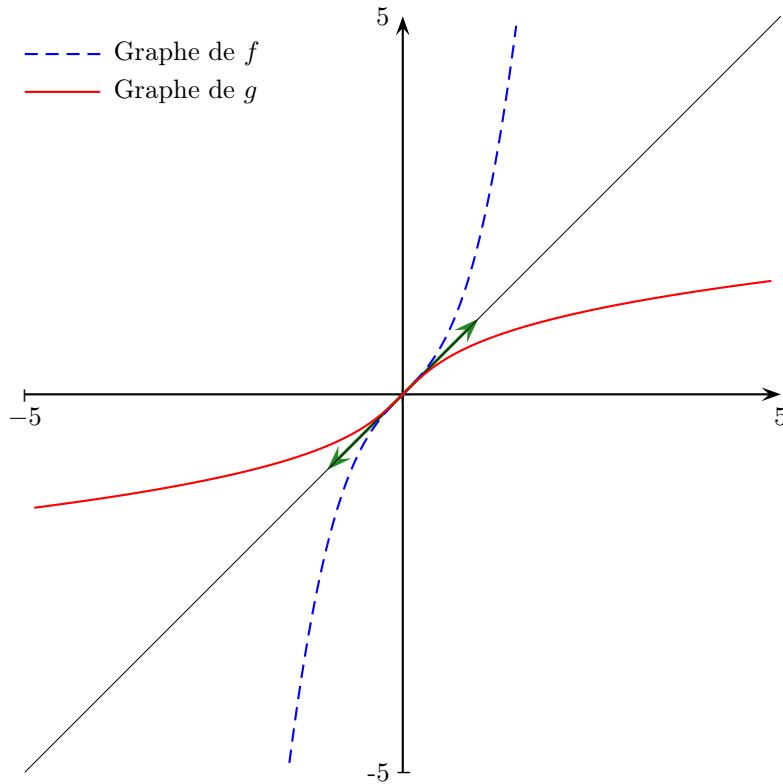


FIGURE 1 – Graphes de  $f$  et de  $g$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	1	0

Les variations de  $g'$  permettent de conclure que  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}_-$  et concave sur  $\mathbb{R}_+$ . En particulier, la courbe admet un unique point d'inflexion en 0.

(f) On l'a justifié dans la question précédente.

(g) Voir figure 1. On obtient le graphe de  $g$  en prenant le symétrique du graphe de  $f$  par la droite d'équation  $y = x$ .

Les résultats précédents sur  $g$  (variations, limites, points d'inflexion) se déduisent bien de cette symétrie !

## 2. Étude de $g'$ – Certaines propriétés de $g'$ ne se déduisent pas de $f'$ .

(a) Comme  $f^{(3)} = 6$ ,  $f^{(3)}$  ne s'annule pas et par conséquent,  $f'$  n'a pas de point d'inflexion.

(b) Le point essentiel est de réussir à se ramener à un intervalle fermé borné afin de pouvoir utiliser le théorème de compacité.

Si  $\alpha$  est constante sur  $[a, +\infty[$ , le résultat est évident (tout point convient).

Sinon, soit  $x \in ]a, +\infty[$  tel que  $\alpha(x) \neq \alpha(c)$  et soit  $y = \frac{\alpha(x) + \alpha(c)}{2}$ . La valeur  $y$  est strictement comprise entre  $\alpha(x)$  et  $\alpha(c)$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $\alpha$  étant supposée continue, il existe  $x_1 \in ]c, x[$  et  $x_2 \in ]x, +\infty[$  tels que  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = y$ . La fonction  $\alpha$  étant continue sur l'intervalle fermé borné  $[x_1, x_2]$ , elle y admet un maximum et un minimum (théorème de compacité). Puisque  $x \in [x_1, x_2]$  et  $\alpha(x) \neq y$ , soit le maximum, soit le minimum est obtenu en au moins un point de  $]x_1, x_2[$ , et est donc un extremum local de  $\alpha$  sur l'ouvert  $]x_1, x_2[$ , donc aussi sur  $[a, +\infty[$ . Attention, ce raisonnement ne serait pas valable pour un extremum sur le bord !

Ainsi, il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $\alpha$  présente un extremum local en  $c$ .

(c) On calcule  $g''$  en dérivant (2) : D'après le théorème de composition des limites,  $g$  admettant des limites  $-\infty$

et  $+\infty$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g''(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-6t}{(3t^2 + 1)^3} = 0, \quad \varepsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} g''(x) = 0 \quad \text{et} \quad g''(0) = 0.$$

En appliquant la question précédente à  $g''$  sur les deux intervalles  $]-\infty, 0]$  et  $[0, +\infty[$ , on trouve  $c_1 < 0$  et  $c_2 > 0$  tels que  $g''$  admet un extremum local en  $c_1$  et en  $c_2$  (pour  $c_1$  on utilise la propriété symétrique à celle de la question précédente, en  $-\infty$ ). Ceci équivaut bien à dire que  $g'$  admet un point d'inflexion en ces points.

Ainsi,   $g'$  admet au moins deux points d'inflexion.

On pouvait aussi répondre à cette question par l'étude des variations de  $g'' = h \circ g$ , avec  $h(t) = \frac{-6t}{(3t^2 + 1)^3}$ . Comme  $g$  est bijective strictement croissante, cela revient à étudier les variations de  $h$ . Or,

$$h'(t) = \frac{-6(3t^2 + 1)^3 + 6t(18t(3t^2 + 1)^2)}{(3t^2 + 1)^6} = \frac{-6(3t^2 + 1) + 108t^2}{(3t^2 + 1)^4} = \frac{90t^2 - 6}{(3t^2 + 1)^4}.$$

Ainsi,  $h'(t)$  est du signe de  $15t^2 - 1$ .  $h$  change donc de sens de variation en  $-\frac{1}{\sqrt{15}}$  et en  $\frac{1}{\sqrt{15}}$ . On en déduit que  $g''$  change de sens de variation en  $g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) < 0$  et en  $g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) > 0$ . Ces deux valeurs correspondent à des points d'inflexion de  $g'$ . On peut même les expliciter puisque  $g^{-1} = f$ .

### 3. Étude locale et asymptotique de $g$

- (a) La relation  $\underset{a}{\sim}$  est clairement reflexive et symétrique. Par ailleurs, si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g \underset{a}{\sim} h$ , on considère un voisinage  $V$  de  $a$  sur lequel aucune des 3 fonctions ne s'annule (en prenant l'intersection de voisinages convenables sparément pour chacune des fonctions). On a alors

$$\forall x \in V, \quad \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow 1.$$

Ainsi,  $f \underset{a}{\sim} h$ , donc  $\underset{a}{\sim}$  est transitive.

Ainsi,  $\underset{a}{\sim}$  est une relation d'équivalence.

- (b) On peut utiliser la définition de la dérivée, la fonction  $g$  étant dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \longrightarrow g'(0) = 1.$$

On obtient bien, par définition,  $g(x) \underset{0}{\sim} x$ .

- (c) On peut éléver un équivalent à une puissance d'exposant constant (revenir au quotient : le cube d'une expression tendant vers 1 tend encore vers 1!). Ainsi,  $g^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$

En utilisant la relation de la question 1(c), il vient donc :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{g(x) - x}{-x^3} = \frac{g(x)^3}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Ainsi,  $g(x) - x \underset{0}{\sim} -x^3$

- (d) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $g$  est négligeable devant  $x^3$  en  $+\infty$  :

$$\frac{g(x)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{g(x)^3 + g(x)}{g(x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{soit:} \quad \frac{x}{g(x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{puis:} \quad \frac{x^{\frac{1}{3}}}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi  $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}$

- (e) La fonction  $h$  est définie par la formule :  $h(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1$ . Cette formule a un sens pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . Ainsi,  $h$  est bien définie. De plus, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1, \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}.$$

- (f) D'après (1), pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$x(1+h(x))^3 + x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) = x, \quad \text{soit} \quad x^{\frac{2}{3}}(1+h(x))^3 + 1+h(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Ainsi,  $x^{\frac{2}{3}}((1+h(x))^3 - 1) = -(1+h(x)) \underset{+\infty}{\sim} -1$  puisque  $h(x)$  tend vers 0. Par ailleurs, d'après le cours,

$$\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} \alpha,$$

donc, puisque  $h(x) \rightarrow 0$  en  $+\infty$ ,

$$(1+h(x))^3 - 1 \underset{+\infty}{\sim} 3h(x)$$

On en déduit, que

$$3x^{\frac{2}{3}}h(x) \underset{+\infty}{\sim} -1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}}h(x) = -\frac{1}{3}}.$$

#### 4. Étude d'une primitive de $g$

- (a) Tout d'abord, remarquons que  $G$  est bien définie, car  $g$  est continue. Faisons le changement de variables proposé  $u = f(t)$ , possible puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Les bornes en  $u$  sont  $u_1 = 0$  et  $u_2 = x$ , ainsi, les bornes en  $t$  sont

$$t_1 = f^{-1}(u_1) = g(u_1) = g(0) = 0 \quad \text{et} \quad t_2 = f^{-1}(u_2) = g(u_2) = g(x).$$

De plus, la relation entre les différentielles est :  $du = f'(t) dt$  Ainsi, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(u) du = \int_0^{g(x)} g(f(t))f'(t) dt = \int_0^{g(x)} t \cdot f'(t) dt = \int_0^{g(x)} (3t^3 + t) dt = \\ &= \left[ \frac{3}{4} \cdot t^4 - \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^{g(x)} = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x). \end{aligned}$$

On obtient donc :  $\boxed{G = \frac{3}{4}g^4 - \frac{1}{2}g^2}$

- (b) On commence par la parité. La fonction  $g$  étant impaire,

$$G(-x) = \frac{3}{4} \cdot g^4(-x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(-x) = \frac{3}{4} \cdot (-g(x))^4 - \frac{1}{2} \cdot (-g(x))^2 = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x) = G(x)$$

Ainsi,  $\boxed{G \text{ est pair}}$ .

Par définition, la dérivée de  $G$  est  $g$ , qui est négative sur  $\mathbb{R}_-$  et positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi,  $\boxed{G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+}$ .

- (c) La limite de  $g$  en 0 est 0. Ainsi,  $g^4(x) = o(g^2(x))$  au voisinage de 0. Par conséquent,

$$\boxed{G(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot g^2(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x^2}.$$

La limite de  $g$  est  $+\infty$  en  $+\infty$ , ainsi  $g^2(x) = o(g^4(x))$  au voisinage de  $+\infty$ , et par conséquent

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot g^4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}}.$$

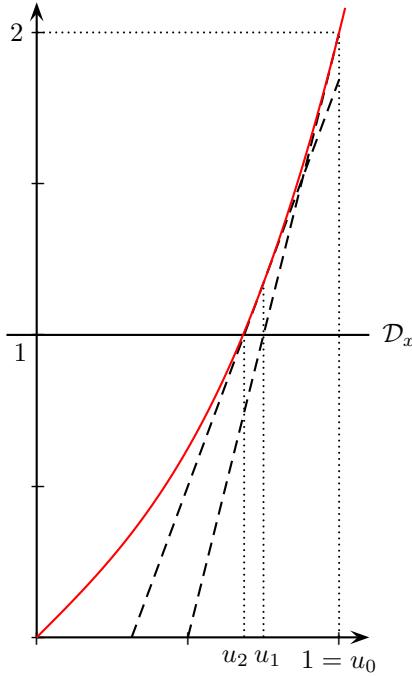


FIGURE 2 – Premières valeurs de  $u_n(1)$

### 1. Construction de l'algorithme d'approximation

- L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $t$  est :

$$Y = (X - t)f'(t) + f(t) = (X - t)(3t^2 + 1) + t^3 + t = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3.$$

L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation  $Y = x$  vérifie donc :

$$x = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3, \quad \text{soit} \quad X = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

- Par conséquent, par définition de la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , cette suite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}.$$

Cette relation d'ordre 1, et la condition initiale  $u_0(x) = x$  déterminent entièrement la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 2. Étude graphique d'un exemple.

On note  $u_n$  pour  $u_n(1)$ . Voir figure 2.

### 3. Étude de l'algorithme

- (a) On calcule  $\varphi(g(x))$  :  $\varphi(g(x)) = \frac{2g^3(x) + x}{3g^2(x) + 1} = g(x) \cdot \frac{2g^3(x) + x}{3g^3(x) + g(x)}$ . Or, d'après la relation (1),

$$2g^3(x) + x = 2x - 2g(x) + x = 3x - 2g(x), \quad \text{et de même,} \quad 3g^3(x) + g(x) = 3x - 2g(x).$$

Ainsi,  $\boxed{\varphi(g(x)) = g(x)}$ .

- (b)  $t - \varphi(t) = t - \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1} = \frac{t^3 + t - x}{3t^2 + 1} = \frac{f(t) - x}{3t^2 + 1}$ . Ainsi, le signe de  $t - \varphi(t)$  est celui de  $f(t) - x$ .

- (c) La fonction  $\varphi$ , définie sur  $\mathbb{R}_+$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2 + 1) - 6t(2t^3 + x)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t^4 + 6t^2 - 6tx}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t(f(t) - x)}{(3t^2 + 1)^2}.$$

Ainsi,  $\boxed{\text{le signe de } \varphi' \text{ est celui de } f(t) - x \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

Tout d'abord, l'intervalle  $[g(x), x]$  n'est pas vide, car d'après la partie I,  $g(x) \leq x$ . Par ailleurs, par définition de  $g$ , on a  $f(g(x)) = x$ , et comme  $f$  est croissante, pour tout  $t \in [g(x), x]$ ,  $f(t) \geq x$ . Comme  $\varphi'$  est du signe de  $f(t) - x$ , on en déduit que  $\varphi'$  est positive sur  $[g(x), x]$ , donc  $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [g(x), x]}$ .

(d)  $\varphi$  est croissante sur  $[g(x), x]$ . Ainsi

$$\varphi([g(x), x]) \subset [\varphi(g(x)), \varphi(x)].$$

On a montré plus haut que  $\varphi(g(x)) = g(x)$ . Par ailleurs,

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 + x}{3x^2 + 1} = x \cdot \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 1} \leq x \cdot \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} = x.$$

Ainsi,  $\boxed{\varphi([g(x), x]) \subset [g(x), x]}$ .

(e) Soit  $t \in [g(x), x]$ . On a déjà montré dans la question 3c que  $f(t) - x \geq 0$ , donc  $t^3 + t - x \geq 0$ . De plus  $t - x \leq 0$ , donc  $t^3 + t - x \leq t^3$ . Par conséquent, pour tout  $t \in [x, g(x)]$  :

$$0 \leq \varphi'(t) = \frac{6t(t^3 + t - x)}{(3t^2 + 1)^2} \leq \frac{6t^4}{(3t^2 + 1)^2} \leq \frac{6t^4}{(3t^2)^2} \quad \text{soit: } \boxed{0 \leq \varphi'(t) \leq \frac{2}{3}}.$$

#### 4. Étude de la convergence

- (a) •  $u_0(x) \in [g(x), x]$ . Comme cet intervalle est stable par  $\varphi$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$ , on en déduit par une récurrence immédiate que  $u_n(x) \in [g(x), x]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Puisque  $u_1(x) \in [g(x), x]$  et  $u_0(x) = x$ , on a  $u_1(x) \leq u_0(x)$ . La croissance de  $\varphi$  permet de propager cette inégalité aux rangs suivants par une récurrence immédiate : si  $u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$ , en appliquant la fonction croissante  $\varphi$ , et d'après la relation satisfaite par les  $u_n(x)$ , on obtient  $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ . Ainsi,  $\boxed{\text{la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$ .
  - Comme elle est aussi minorée par  $g(x)$ , elle converge. Puisque  $\varphi$  est continue, sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = \varphi(\ell)$ , c'est-à-dire :

$$\ell = \frac{2\ell^3 + x}{3\ell^2 + 1},$$

ou encore :

$$3\ell^3 + \ell = 2\ell^3 + x, \quad \text{d'où} \quad \ell^3 + \ell = x.$$

La fonction  $t \mapsto t^3 + t$  étant bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $t^3 + t = x$  admet une unique solution.

Cette solution est par définition  $g(x)$ . Ainsi,  $\boxed{\ell = g(x)}$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $\varphi$  est continue sur  $[g(x), u_n(x)]$ , dérivable sur  $]g(x), u_n(x)[$ , et  $\varphi'$  est compris entre 0 et  $\frac{2}{3}$  sur  $[g(x), u_n(x)] \subset [g(x), x]$ . Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$0 \leq \varphi(u_n(x) - g(x)) \leq \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x)) \quad \text{soit: } \boxed{0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x))}.$$

(c) Soit  $x \in [0, a]$ . L'inégalité de la question précédente donne, par une récurrence immédiate :

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0(x) - g(x)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - g(x)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

Ainsi, cette inégalité étant vérifiée pour tout  $x \in [0, a]$ , il en résulte que

$$\boxed{\beta_n = \sup_{x \in [0, a]} (u_n(x) - g(x)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a}.$$

(d) On part de la seconde expression :

$$(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \frac{g^3(x) - 3t^2g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{x - g(x) - 3t^2g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{2t^3 + x - (3t^2 + 1)g(x)}{3t^2 + 1},$$

$$\text{puis enfin: } \boxed{(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \varphi(t) - g(x)}.$$

(e) Soit  $\psi$  la fonction définie par  $\psi(t) = \frac{3t}{3t^2 + 1}$ . Son domaine de définition est  $\mathbb{R}$ . Elle est impaire : il suffit de l'étudier sur  $\mathbb{R}_+$ .  $\psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée :

$$\psi'(t) = \frac{(3t^2 + 1) - 6t(3t)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{3 - 9t^2}{(3t^2 + 1)^2}.$$

On en déduit les variations de  $\psi$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

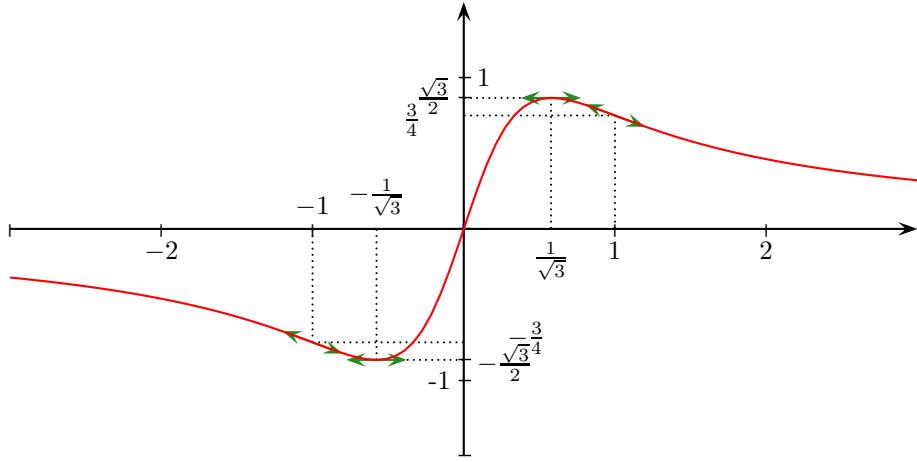


FIGURE 3 – Graphe de  $\psi$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$\psi'(x)$	+	0	-
$\psi(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ainsi,  $g$  admet un maximum égal à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  en  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , et un minimum égal à  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  en  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Pour déterminer ses points d'inflexion et sa convexité, on calcule la dérivée seconde (calculs à votre charge !) :

$$\psi''(t) = \frac{54(t^3 - t)}{(3t^2 + 1)^3}.$$

On en déduit le tableau de signe de  $\varphi''$  :

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\varphi''(x)$	-	+	-	+	

Ainsi,  $\psi$  est concave sur  $]-\infty, -1]$  et sur  $[0, 1]$ , et est convexe sur  $[-1, 0]$  et sur  $[1, +\infty[$ . Elle admet trois points d'inflexion en  $-1$ ,  $0$  et  $1$ . On en déduit le tracé de la courbe de  $\psi$  (figure 3)

Evidemment, cette étude complète est inutile ici, seule la valeur des extrema nous intéresse.

- (f) • Si  $t \in [g(x), x] \subset \mathbb{R}_+$ ,  $g(x) \leq t$ , et donc, d'après la question 4d,

$$\varphi(t) - g(x) \leq (t - g(x))^2 \frac{3t}{3t^2 + 1},$$

et comme pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$0 \leq \frac{3t}{3t^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'après l'étude précédente, on en déduit que pour tout  $t \in [g(x), x]$  :

$$0 \leq \varphi(t) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(t - g(x))^2.$$

- En particulier, étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $t = u_n(x)$ , on obtient :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2. \quad (3)$$

- On montre maintenant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (u_0(x) - g(x))^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (x - g(x))^{2^n}. \quad (4)$$

*Initialisation* : Pour  $n = 0$ , les deux termes de l'inégalité sont égaux.

*Hérité* : Supposons la propriété vérifiée au rang  $n$ . Ainsi, la relation (4) est satisfaite pour cette valeur de  $n$ . De plus, (3) est satisfaite. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n-1} (x - g(x))^{2^n} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^{n+1}-1} (x - g(x))^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On peut donc conclure que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n-1} (x - g(x))^{2^n}.$$

- De plus, d'après la relation (1),  $x - g(x) = g^3(x)$ ; comme  $u_n(x) \in [g(x), x]$ , on en déduit que  $x - g(x) \leq u_n(x)^3$ . On obtient donc :

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n-1} u_n(x)^{3 \cdot 2^n}.$$

- (g) L'inégalité précédente ne permet de contrôler la convergence que lorsque  $u_n^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ . C'est pour cette raison qu'on se limite à l'intervalle  $[0, 1]$ .

```
import math

def phi(t,x):
    return (2 * t**3 + x) / (3 * t**2 + 1)

def g(x,err):
    u = x
    m = math.sqrt(3) / 2
    majorant = 1
    n = 0
    while majorant * (u ** (3 * 2 ** n)) > err:
        u = phi(u,x)
        n+=1
    return(u)
```

On peut même faire un tracé de la courbe sur  $[0, 1]$ , en utilisant les fonctions du module `matplotlib` :

```
import matplotlib.pyplot as plt

absc = []
ordo = []
for i in range(101):
    x = i * 0.01
    absc.append(x)
    ordo.append(g(x,1e-10))
plt.plot(absc,ordo)
plt.grid()
plt.savefig('pb_cnt017.eps')
plt.show()
```

On obtient le tracé suivant :

