

ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. [★] (Famille de vecteurs équidistants)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et u_1, \dots, u_p des vecteurs unitaires vérifiant $\forall i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket, (i \neq j) \implies \|u_i - u_j\| = 1$. Démontrer que (u_1, \dots, u_p) est une famille libre.

Exercice 2. [★] (Polynômes de Lagrange)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit de l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k). \end{cases}$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une famille (L_0, \dots, L_n) de $n + 1$ polynômes de E telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, L_i(j) = \delta_{i,j}$.
3. Démontrer que (L_0, \dots, L_n) est une base orthonormale de E .
4. Soit $P \in E$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_0, \dots, L_n) .

Exercice 3. [o] (Polynômes de Legendre)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit de l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx. \end{cases}$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E et qu'il vérifie, pour tout $P, Q, R \in E$, $\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle$.
2. Démontrer qu'il existe une unique famille orthonormale (P_0, \dots, P_n) telle que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,
 - (i) $\deg P_k = k$;
 - (ii) le coefficient dominant de P_k est strictement positif;
 - (iii) $\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$.

► On pose

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} P_k.$$

3. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2 et L_3 .
4. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On suppose que L_k change ℓ fois de signe (où $\ell \in \llbracket 0; k \rrbracket$) dans l'intervalle $] -1; 1[$ pour les valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ (ce sont les racines de multiplicités impaires de L_k dans $] -1; 1[$) et l'on considère le polynôme $K = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_\ell)$. Si $\ell = 0$, on pose $K = 1$.
 - a) Démontrer que $\langle K, L_k \rangle > 0$.
 - b) Démontrer que $\deg K = k$.
 - c) En déduire finalement que le polynôme L_k possède k racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $] -1; 1[$.

Exercice 4. [o] (Polynômes de Tchebychev)

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t) Q(\cos t) dt.$$

1. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme T_n , appelé n -ème polynôme de Tchebychev, tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. Justifier que T_n est de degré n , qu'il vérifie la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer son coefficient dominant. Préciser T_0, T_1 et T_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Démontrer que $(T_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
 - b) Démontrer que $(T_p / \|T_p\|)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée au sens de Gram-Schmidt de $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
4. Démontrer que

$$\inf \left\{ \int_0^\pi P(\cos t)^2 dt : P \in \mathbb{R}[X], P \text{ unitaire, } \deg(P) = n \right\}$$

est atteint en $T_n/2^{n-1}$ et calculer la valeur de cette borne inférieure.

Exercice 5. [★]

1. Déterminer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (\sin x - ax - bx^2)^2 dx.$$

2. Déterminer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt.$$