Problème n° 24 : Variables aléatoires

Problème 1 –

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel. Un jeu oppose n joueurs $J_1,\ J_2,\dots,J_n$.
Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour « pile ») ou F (pour « face »). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes, et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.
Par exemple, pour $p=1$, si les lancers donnent trois fois « pile », le joueur ayant noté (P,F,P) a 2 prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P,F,P, le joueur ayant noté (F,P,F) n'a aucune prévision correcte.
Pour tout i de $\{1,2,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de gain du joueur J_i.
L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie I – Quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Décrire un modèle simple $(\Omega,\mathcal{T},P)$ pour l'expérience décrite (le choix des listes de prévision ne faisant pas partie de l'expérience, les listes étant supposées fixées), et justifier que les X_i et G_i sont bien des variables aléatoires.
2. Quelle est la loi des variables X_i ?

On pose alors, pour tout i de $\{1,2,\dots,n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k=P(X_i=k)$ et $r_k=P(X_i\leqslant k)$.

3. Calculer r_p.
4. Étant donné un événement A non quasi-impossible, l'espérance d'une variable aléatoire finie X conditionnellement à A, notée $E(X\mid A)$. est l'espérance de X pour la mesure de probabilité P_A.
   Montrer que si $(A_1,\dots,A_s)$ est un système complet d'événements non quasi-impossibles, alors
$$E(X)=\sum_{k=1}^{s}E(X\mid A_k)P(A_k).$$

Partie II – Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

5. Que vaut $G_1(\Omega)$?
6. Pour tout $k\in X_1(\Omega)$, déterminer la loi de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1=k]$
7. En déduire que $E(G_1)=(n-1)!$, et expliquer en quoi ce résultat est logique.

Partie III – J_1 et J_2 forment un groupe, les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard, mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de J_1. Par exemple, pour $p=1$, si J_1 a choisi (F,P,P), alors J_2 choisit (P,F,F).

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2 : $G' = G'_1 + G'_2$, et $G'_1 = G'_2$.
On pose, pour tout i de $\{1, 3, \ldots, n\}$, et tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leqslant k)$.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

8. Justifier que $Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]$.
9. Pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, montrer que $P(Y = k) = 2q_k$.
10. Établir que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$,
$$E(G' \mid Y = k) = n(n-2)!\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$
11. En déduire que :
$$E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right),$$
et justifier que la stratégie est aavantageuse pour J_1 et J_2.
12. Déterminer $E(G_i)$, pour $i \in [\![3, n]\!]$.