FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Exercice 1. [∘]

Calculer

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right),\qquad \arctan(-1),\qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$$

Exercice 2. [∘]

Calculer

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right),\qquad \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right),\qquad \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right),\qquad \arctan\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)\cdot$$

Exercice 3. [⋆]

Démontrer la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\cdot$$

Exercice 4. [∘]

En remarquant que $\arccos x \underset{x\to 1}{\sim} \sin(\arccos x)$, donner un équivalent de $\arccos x$ en 1.

Exercice 5. [∘]

Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité, ainsi que la dérivée, des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x} - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})$$

Exercice 6. [∘]

Étudier la fonction

$$f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\cdot$$

Exercice 7. [∘]

En vous aidant des « deux » dérivées de la fonction tan, démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

Exercice 8. [$\circ$]

Démontrer la relation suivante sur un intervalle que l'on précisera

$$\arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 9. [$\circ$]

Tracer les graphes de $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$, $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ et $x \longmapsto \arctan(\tan x)$.

Exercice 10. [$\circ$]

Résoudre l'équation

$$\arccos x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{6}\cdot$$

Exercice 11. [$\star$] (Polynômes de Tchebychev de première espèce)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$t_n : x \longmapsto \cos(n \arccos x).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, quel est lien entre la fonction t_n et l'antilinéarisation de $\cos(n\theta)$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction t_n ?
3. Calculer t_0, t_1 et démontrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1;1], \qquad t_{n+2}(x) = 2x t_{n+1}(x) - t_n(x).$$

   En déduire l'antilinéarisation de $\cos(4\theta)$ (où $\theta \in \mathbb{R}$).
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, t_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

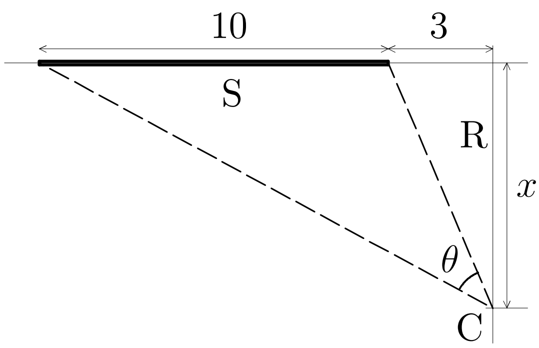
   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale coïncide avec la fonction t_n sur $[-1;1]$.
5. Chercher les zéros de la fonction t_n et en déduire la factorisation sur $\mathbb{R}$ de T_n.

   Application : Donner la valeur du produit

   $$\pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\cdot$$

Exercice 12. [$\star$] (Angle optimal)

La caméra C peut se déplacer sur un rail fixe R. On désire filmer une scène S. Les données sont portés sur le dessin ci-dessous :



Calculer l'angle θ sous lequel est vue la scène et en déduire la valeur de x pour laquelle θ est maximum.