

CONTINUITÉ

Exercice 1. Isométries de $\mathbb{R}$

On considère une isométrie de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans le cas où $f(0) = 0$, démontrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. Traiter le cas général.

Exercice 2. Caractérisations topologiques de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a $f(\operatorname{Adh} A) \subset \operatorname{Adh} f(A)$. *Indication : Pour le sens réciproque, on pourra utiliser le critère séquentiel de continuité et raisonner par l'absurde.*