MP*1

Problème

Le théorème diophantien de Fürstenberg

Notations

Dans tout ce texte, $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité du plan complexe :

$$\mathbb{U}_{\text{rat}} = \{e^{2i\pi r},\ r \in \mathbb{Q}\}.$$

On munit $\mathbb{U}$ de sa topologie naturelle, induite par la topologie de $\mathbb{C}$.

Pour α dans $\mathbb{R}$, soit ρ_α l'application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \rho_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z.$$

Pour p dans $\mathbb{Z}$, soit φ_p l'application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \varphi_p(z) = z^p.$$

Si f est une application d'un ensemble non vide E dans lui-même, on note f^n la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n facteurs).

I. Dynamique des applications φ_p

A. Préliminaires

1. Soient (E, d) est un espace métrique, f une application continue de E dans E. Pour x dans E, soit

$$\omega_f(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que $\omega_f(x)$ est l'*orbite de x sous l'action de f*.

a) Soit X une partie de E stable par f. Vérifier que $\overline{X}$ est une partie de E stable par f.

b) Vérifier que $\overline{\omega_f(x)}$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit fermé de E contenant x et stable par f.

c) On dit que f est minimale si les seuls fermés de E stables par f sont $\emptyset$ et E. Caractériser l'assertion « f est minimale » au moyen des orbites $\omega_f(x)$ pour x dans E.

2. Soit α un nombre réel irrationnel. On admet que l'ensemble $\mathbb{N}\alpha + \mathbb{Z}$ est une partie dense[1] de $\mathbb{R}$. En déduire que l'application ρ_α est minimale.

1. Ce résultat pourrait se déduire sans difficulté de la partie **II** du problème.

B. Exemples de fermés stables par φ_p

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes. Elles ont pour but de montrer la diversité des fermés de $\mathbb{U}$ stables par une application φ_p.

3. a) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que φ_p n'est pas minimale.

   b) Soit p un entier ≥ 2. Déterminer les z de $\mathbb{U}$ tels que l'orbite $\omega_{\varphi_p}(z)$ soit finie.

4. On fixe un entier $p \geq 2$ et on pose : $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p^{-n^2}$, $z = e^{2i\pi x}$.

   a) Justifier l'existence de x.

   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} p^{-k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} p^{-n^2}$.

   c) Montrer que :

$$\overline{\omega_{\varphi_p}(z)} = \omega_{\varphi_p}(z) \cup \left\{ \exp\left(\frac{2i\pi}{p^m}\right),\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

   On a ainsi construit un fermé dénombrable de $\mathbb{U}$ stable par φ_p.

5. a) Soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ une suite d'éléments de $\{0,1\}$. Justifier l'existence de

$$s_\varepsilon = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\ \varepsilon_k}{3^k}$$

   et l'appartenance de s_ε à $[0,1]$.

   b) On note

$$K = \left\{ s_\varepsilon,\ \varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}.$$

   Montrer que l'application :

$$s\ : \varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \longmapsto s_\varepsilon$$

   est injective. Par suite, K n'est pas dénombrable.

   c) Montrer que K est un compact de $[0,1]$.

   d) Montrer que K est d'intérieur vide dans $[0,1]$. On pourra montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, K est contenu dans une réunion de 2^n segments deux à deux disjoints de $[0,1]$, tous de longueur 3^{-n}.

   e) Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ e^{2i\pi s},\ s \in K \right\}$$

   est stable par φ_3. Quel est l'intérieur de F dans $\mathbb{U}$?

II. Sous-semi-groupes de $(\mathbb{R}^+, +)$, de $(\mathbb{N}^*, \times)$

6. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain α de $\mathbb{R}^+$.

7. Une partie X de $\mathbb{R}$ est dite *dense en* $+\infty$ si, pour tout ε de $\mathbb{R}^{+*}$, il existe T dans $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [T, +\infty[, \qquad]t, t+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset.$$

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Donner, sans expliciter une démonstration, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense en $+\infty$.

8. Soit M un *sous-semi-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$, i.e. une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x, y) \in M^2, \qquad x + y \in M.$$

On pose :

$$G = M - M = \{x - y, \ (x, y) \in M^2\}.$$

a) Montrer que G est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain α de $\mathbb{R}^+$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

b) On suppose que G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Montrer que M est contenu dans $\alpha\mathbb{Z}$.

c) On suppose que G n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Montrer que M est dense en $+\infty$.

9. Soient α et β dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose :

$$M_{\alpha,\beta} = \mathbb{N}\alpha + \mathbb{N}\beta.$$

a) Justifier que l'on peut ranger les éléments de $M_{\alpha,\beta}$ en une suite strictement croissante $(m_k)_{k \geq 1}$.

b) On suppose β/α rationnel. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad m_{k+1} - m_k \geq \gamma.$$

c) On suppose β/α irrationnel. Montrer :

$$m_{k+1} - m_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

10. Un *sous-semi-groupe de* $(\mathbb{N}^*, \times)$ est une partie non vide S de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall (s, s') \in S^2, \qquad ss' \in S.$$

Soit S un sous-semi-groupe de $(\mathbb{N}^*, \times)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble S contient deux éléments p et q tous deux ≥ 2 et tels que

$$\frac{\ln(q)}{\ln(p)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

(ii) il n'existe pas d'élément c de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$S \subset \left\{c^k,\ k \in \mathbb{N}\right\} ,$$

(iii) on peut écrire

$$S = \{s_k,\ k \geq 1\}$$

où $(s_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} \longrightarrow 1.$$

Un sous-semi-groupe vérifiant ces conditions est dit *non lacunaire*. En particulier, si p et q sont deux entiers vérifiant la condition (ii),

$$S_{p,q} = \left\{p^m q^n,\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$$

est un sous-semi-groupe non lacunaire de $\mathbb{N}^*$.

11. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, s'il existe un nombre premier divisant p mais pas q, $S_{p,q}$ est un sous-semi-groupe non lacunaire de $\mathbb{N}^*$. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

III. Le théorème diophantien de Fürstenberg

Dans cette partie **III**, p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, tous deux ≥ 2 et tels que le sous-semi-groupe $S_{p,q}$ soit lacunaire. On écrit :

$$S_{p,q} = \{s_k,\ k \in \mathbb{N}^*\},$$

où la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante et vérifie :

$$(1) \qquad \frac{s_{k+1}}{s_k} \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} 1.$$

Il est clair qu'une partie de $\mathbb{U}$ est stable par φ_p et φ_q si et seulement si elle est stable par φ_s pour tout s de $S_{p,q}$; la preuve de cette assertion n'est pas demandée. On se propose de démontrer le **théorème diophantien de Fürstenberg** (1967) : une partie fermée de $\mathbb{U}$ stable par φ_s pour tout s de $S_{p,q}$ est soit finie, soit égale à $\mathbb{U}$. Ce résultat contraste avec les exemples de **I.B**.

A. Préliminaires

12. Soient (E,d) un espace métrique, X une partie fermée de E. On dit qu'un point x de E est un point d'accumulation de X si, pour tout voisinage V de x dans E, l'ensemble $V \cap X$ est infini. On note $\mathrm{Acc}(X)$ l'ensemble des points d'accumulation de X.

a) Montrer que $\mathrm{Acc}(X)$ est une partie de X fermée dans E.

b) On suppose (E,d) compact et X infinie. Montrer que $\mathrm{Acc}(X)$ est une partie non vide de E.

Dans toute la suite du problème, Z est une partie fermée non vide de $\mathbb{U}$.

13. a) Montrer que :
$$\widehat{Z} = \left\{ zz'^{-1},\ (z,z') \in Z^2 \right\},$$
est un fermé de $\mathbb{U}$.

b) Si Z est infinie, montrer que $\mathrm{Acc}(\widehat{Z})$ contient 1.

14. Montrer que, si $r \in \mathbb{N}^*$ et si Z est stable par φ_r, alors $\mathrm{Acc}(Z)$ est stable par φ_r.

Désormais, on suppose de plus que Z est non vide, stable par φ_s pour tout s de $S_{p,q}$.

B. Le cas où Z a un point d'accumulation rationnel

15. On suppose que 1 appartient à $\mathrm{Acc}(Z)$. En utilisant la relation (1), montrer que $Z = \mathbb{U}$.

16. On suppose que $\mathrm{Acc}(Z)$ contient un élément de $\mathbb{U}_{\text{rat}}$.

a) Montrer qu'il existe r et t dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que t soit premier à p et à q et que $\mathrm{Acc}(Z)$ contienne $\exp\left(\frac{2i\pi r}{t}\right)$.

b) Montrer qu'il existe α dans $\mathbb{N}^*$ tel que
$$Y = \left\{ \exp\left(-\frac{2i\pi r}{t}\right) z\ ;\ z \in Z \right\}$$
soit stable par φ_s pour tout s de S_{p^α, q^α}. En déduire que $Z = \mathbb{U}$.

C. Fin de la preuve [2]

17. On suppose Z infinie. Montrer que $\widehat{Z} = \mathbb{U}$.

18. On suppose que Z est non vide, stable par φ_s pour tout s de $S_{p,q}$ et ne contient aucun point de U_{rat}. On fixe t dans $\mathbb{N}^*$ premier à p et à q.

On définit une suite finie $(Z_j^t)_{0 \le j \le t-1}$ de parties de U en posant :
$$Z_0^t = Z \quad ; \quad \forall j \in \{0, \ldots, t-2\},\ Z_{j+1}^t = \{z \in Z_j^t,\ \exp\left(\frac{2i\pi}{t}\right) z \in Z_j^t\}.$$

a) Montrer qu'il existe α dans $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout j de $\{0, \ldots, t-1\}$, Z_j^t soit stable par φ_s pour tout s de S_{p^α, q^α}.

b) Montrer que, pour tout j de $\{0, \ldots, t-1\}$, l'ensemble Z_j^t est une partie infinie de $\mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_{\text{rat}}$.

c) En considérant un élément z de Z_{t-1}^t (qui existe grâce à la question b)), montrer que, pour tout u de $\mathbb{U}$, il existe z' dans Z tel que
$$|u - z'| \le \frac{2\pi}{t}.$$
En déduire Z et obtenir une contradiction.

19. Démontrer le théorème diophantien de Fürstenberg.

20. Soit α un nombre réel irrationnel. Quelle est l'adhérence, dans $\mathbb{R}$, de :
$$\{p^m q^n \alpha + \ell\ ;\ (m,n,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}\ ?$$

2. Démonstration due à Boshernitzan, 1994.