Mathématiques L

Aline Cahuzac

Juillet 2019

Exercice 1

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, c_n le nombre de triangulations d'un polygone à n côtés. Trouver la série génératrice de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une formule close pour c_n.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\mathbb{R}_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P = n,\ P \text{ unitaire scindé sur } \mathbb{R}\}$$

$$\Lambda_n = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n\}$$

$$\Phi :\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda_n \mapsto \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \in \mathbb{R}_n$$

Montrer que Φ est un homéomorphisme.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, S symétrique. Montrer que ${}^tPSP$ a le même nombre de valeurs propres positives que S.

Déroulé

A l'ouïe de "c_n le nombre de...", ma confiance piétinée le matin même se regonfle, je connais déjà la réponse quelque puisse être la suite de la phrase : nous aurons un bel exercice sur les nombres de Catalan. Comble de joie lorsque je reconnais un TD de M. Bertin. "Pas de mal à connaître les nombres de Catalan surtout aux ENS", me dit mon amical examinateur lorsque j'annonce mon plan de démonstration. Je résiste tout de même à l'envie d'être pleinement sincère : répondre à "je parie qu'un combinatoricien vous trouverait même une bijection explicite avec les arbres binaires" par la solution parachutée de notre professeur d'informatique aurait achevé de vendre la mèche.

Le deuxième exercice est encore un de mes préférés, mais le fait que je ne choisisse pas de norme lors de ma démonstration de la continuité de Φ^{-1} (la bijectivité et la continuité de Φ se voient rapidement) semble le chagriner. Il concède que tout est juste, mais pourrais-je plutôt montrer que Φ^{-1} est lipschitzienne ? Je tente une approche à base de localisation des racines à partir des coefficients mais fais remarquer que cela ne montre que le résultat plus faible suivant : l'image d'une boule centrée autour de X^n est contenue dans une boule centrée autour de $(0, ..., 0)$. Mais cela semble le satisfaire, il me demande même une deuxième preuve de localisation plus courte, j'utilise cette fois les polynômes symétriques élémentaires.

Le troisième exercice est annoncé comme le *théorème de Sylvester*. Le théorème spectral permet de se ramener à utiliser le résultat précédent sur les spectres ordonnés des matrices symétriques inversibles, et étudier les composantes connexes par arcs de Λ_n.