

## Problème n° 22 : Calculs de probabilité

**Correction du problème 1 – (extrait d'ESSEC 2000) – Étude d'un combat à trois.**

### 1. Calcul de probabilités

- (a) Il s'agit de restituer une formule du cours, cas très particulier de la formule du crible de Poincaré :

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V).$$

On ne vous demande pas la démonstration. La question est uniquement là pour vous mettre sur la bonne voie pour la question suivante.

- (b) Notons  $U$  (*resp.*  $V$ , *resp.*  $W$ ) l'événement :  $A$  (*resp.*  $B$ , *resp.*  $C$ ) réussit son tir. Alors l'événement considéré est l'événement  $\overline{U} \cap (V \cup W)$ . Les trois tirs étant indépendants,

$$P(V \cup W) = P(V) + P(W) - P(V \cap W) = P(V) + P(W) - P(V)P(W) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{d'où : } P(\overline{U} \cap (V \cup W)) = P(\overline{U})P(V \cap W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

- (c) Il s'agit cette fois de l'événement  $U \cap (V \cup W)$ . De même qu'avant, les tirs de chaque joueur étant mutuellement indépendants :

$$P(U \cap (V \cup W)) = P(U)P(V \cap W) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

### 2. Détermination de probabilités conditionnelles

- (a)  $AB_0$  est l'événement impossible. De plus, tant que  $A$  et  $B$  ne sont pas éliminés, personne ne vise  $C$ , puisque  $A$  vise  $B$  (son plus dangereux adversaire) et  $B$  vise  $A$ . Donc, tant que  $A$  et  $B$  ne sont pas éliminés,  $C$  ne peut pas être éliminé. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'événement  $\boxed{AB_n \text{ est impossible}}$ .

*Dans la suite, on ne considérera donc que les événements  $ABC_n$ ,  $BC_n$ ,  $CA_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $\emptyset_n$ .*

- (b) Si  $ABC_n$  est vérifié, alors les trois joueurs s'affrontent lors de la  $n+1$ -ième manche, et pour que  $ABC_{n+1}$  ait lieu, ils doivent tous les trois rater leur cible. Avec les notations précédentes ( $U$ ,  $V$  et  $W$  étant ici des événements associés à la  $n+1$ -ième manche), et les événements  $U$ ,  $V$  et  $W$  étant mutuellement indépendants (donc leurs événements contraires aussi) :

$$P(ABC_{n+1} \mid ABC_n) = P(\overline{U} \cap \overline{V} \cap \overline{W}) = P(\overline{U})P(\overline{V})P(\overline{W}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

- (c) De même, pour que  $BC_{n+1}$  soit réalisé si  $ABC_n$  l'est, il faut et il suffit que soit  $B$  soit  $C$  réussisse son tir (ils visent tous deux  $A$ ), et que  $A$  rate son tir. Ainsi :

$$P(BC_{n+1} \mid ABC_n) = P(\overline{U} \cap (V \cup W)) = \boxed{\frac{2}{9}} \quad \text{d'après 1b.}$$

De même, pour que  $AC_{n+1}$  soit réalisé si  $ABC_n$  l'est,  $A$  ne doit pas être éliminé, donc  $A$  et  $C$  ratent leurs tirs, et  $B$  doit être éliminé, donc  $A$  réussit son tir. Ainsi :

$$P(AC_{n+1} \mid ABC_n) = P(U \cap \overline{V} \cap \overline{W}) = P(U)P(\overline{V})P(\overline{W}) = \boxed{\frac{2}{9}},$$

(on a encore utilisé l'indépendance de  $U$ ,  $V$  et  $W$ ; on ne le précisera plus dans les raisonnements similaires suivants).

- (d) Pour que  $A_{n+1}$  ne peut pas être réalisé si  $ABC_n$  l'est, car au  $n$ -ième tournoi dans lequel les trois joueurs s'affronte, personne ne vise  $C$ , qui ne peut donc pas être éliminé. De même,  $B_{n+1}$  ne peut être réalisé si  $ABC_n$  l'est. Ainsi :

$$P(A_{n+1} | ABC_n) = P(B_{n+1} | ABC_n) = 0.$$

Enfin, si  $ABC_n$  est réalisé,  $C_{n+1}$  est réalisé si et seulement si  $A$  est éliminé (soit par  $B$  soit par  $C$ ) et  $B$  est éliminé (par  $A$ ), donc si et seulement si  $A$  réussit son tir, et  $B$  ou  $C$  réussit son tir. Ainsi :

$$P(C_{n+1} | ABC_n) = P(U \cap (V \cup W)) = \frac{4}{9} \quad \text{d'après 1c.}$$

- (e) Si  $AC_n$  est réalisé, seuls  $A$  et  $C$  participent à la  $n + 1$ -ième manche. Bien entendu,  $C$  vise  $A$  et  $A$  vise  $C$ . Ainsi,  $A_{n+1}$  est réalisé si et seulement si  $A$  réussit son tir, et  $C$  rate le sien. Ainsi :

$$P(A_{n+1} | AC_n) = P(U \cap \overline{W}) = P(U)P(\overline{W}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

De même :

$$P(B_{n+1} | BC_n) = P(V \cap \overline{W}) = P(V)P(\overline{W}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$P(C_{n+1} | AC_n) = P(W \cap \overline{U}) = P(W)P(\overline{U}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$P(C_{n+1} | BC_n) = P(W \cap \overline{V}) = P(W)P(\overline{V}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

- (f) Enfin, si  $ABC_n$  est réalisé,  $\emptyset_{n+1}$  ne peut l'être car personne ne vise  $C$  lors de la  $n + 1$ -ième manche, donc

$$P(\emptyset_{n+1} | ABC_n) = 0.$$

Si  $AC_n$  est réalisé, pour que  $\emptyset_{n+1}$  le soit, il faut et il suffit que  $A$  et  $C$ , les deux seuls joueurs s'affrontant lors de la manche  $n + 1$ , réussissent tous deux leurs tirs au cours de cette manche :

$$P(\emptyset_{n+1} | AC_n) = P(U \cap W) = P(U)P(W) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{De même : } P(\emptyset_{n+1} | BC_n) = P(V \cap W) = P(V)P(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

### 3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles le combat s'achève

*On note  $T$  la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est-à-dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.*

- (a)  $[T = 1]$  est réalisé si et seulement si  $A_1, B_1, C_1$  ou  $\emptyset_1$  est réalisé. Comme  $ABC_0$  est l'événement certain, et que les événements  $A_1, B_1, C_1$  et  $\emptyset_1$  sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T = 1) &= P(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup \emptyset_1) = P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) + P(\emptyset_1) \\ &= P(A_1 | ABC_0) + P(B_1 | ABC_0) + P(C_1 | ABC_0) + P(\emptyset_1 | ABC_0). \end{aligned}$$

En utilisant les probabilités conditionnelles calculées dans la question précédente,

$$P(T = 1) = 0 + 0 + \frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{9}.$$

(En effet,  $C$  ne peut pas être éliminé au premier tour, puisque personne ne le vise, alors l'événement  $[T = 1]$  est en fait égal à l'événement  $C_1$ ).

- (b) Soit  $n \geq 2$ . Calculons la probabilité que les trois joueurs soient encore présents après le  $n$ -ième tour :

$$\begin{aligned} P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n) &= P(ABC_0 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n) \\ &= P(ABC_0) \cdot \prod_{k=1}^n P(ABC_k | ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1}) \\ &\quad (\text{formule des probabilités composées}) \\ &= \prod_{k=1}^n P(ABC_k | ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1}) \end{aligned}$$

Or, la suite  $(ABC_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante d'événements, donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{k-1} = ABC_{k-1}$ . Ainsi :

$$P(ABC_n) = P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n) = \prod_{k=1}^n P(ABC_k \mid ABC_{k-1}) = \boxed{\left(\frac{1}{9}\right)^n},$$

d'après la question 2b.

- (c) Soit  $n \geq 2$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Commençons par calculer la probabilité de  $R_k$ , c'est-à-dire de l'événement : « à l'issue du  $n$ -ième tour, seul  $B$  a été éliminé, et il a été éliminé lors du  $k+1$ -ième tour » :

$$\begin{aligned} P(R_k) &= P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \dots \cap AC_n) \\ &= P(ABC_0 \cap ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \dots \cap AC_n) \\ &= P(ABC_0) \cdot \left( \prod_{i=1}^k P(ABC_i \mid ABC_0 \cap \dots \cap ABC_{i-1}) \right) \cdot P(AC_{k+1} \mid ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \prod_{i=k+2}^n P(AC_i \mid ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \dots \cap AC_{i-1}) \right) \end{aligned}$$

(formule des probabilités composées)

Or le résultat à un tour ne dépend que des joueurs présents au début de ce tour, c'est-à-dire des joueurs présents à l'issue du tour précédent. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(R_k) &= \left( \prod_{i=1}^k P(ABC_i \mid ABC_{i-1}) \right) \cdot P(AC_{k+1} \mid ABC_k) \cdot \left( \prod_{i=k+2}^n P(AC_i \mid AC_{i-1}) \right) \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot (P(\overline{U} \cap \overline{W}))^{n-k-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1} = \boxed{\frac{2^{n-k}}{9^n}}. \end{aligned}$$

(L'énoncé semble avoir oublié de nous faire calculer cette probabilité conditionnelle  $P(AC_{k+1} \mid ABC_k)$  dans la question précédente...)

Les événements  $R_k$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont deux à deux incompatibles, donc, par additivité :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} R_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P(R_k) = \frac{1}{9^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} = \frac{1}{9^n} \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2}{9^n} (2^n - 1) = 2 \left( \left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right).$$

Ceci représente la probabilité qu'après  $n$  épreuves,  $B$  et seul  $B$  ait été éliminé lors d'un tour précédent (c'est l'événement  $AC_n$ ). Ainsi :

$$\boxed{P(AC_n) = 2 \left( \left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)}.$$

- (d) Soit  $n \geq 2$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . À nouveau,  $S_k$  désigne l'événement consistant à dire que  $A$  et seul  $A$  est éliminé lors des  $n$  premières épreuves, et ceci à la  $k+1$ -ième épreuve. Ainsi, l'union des  $S_k$  est l'événement : «  $A$ , et seul  $A$ , a été éliminé au cours des  $n$  premières épreuves ».

Calculons pour commencer  $P(S_k)$ ; on procède de la même manière que pour  $P(R_k)$ . Nous avons donc besoin comme précédemment d'une probabilité conditionnelle qui n'a pas été calculée dans la question 2 :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(BC_{i+1} \mid BC_i) = P(\overline{V} \cap \overline{W}) = P(\overline{V})P(\overline{W}) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, le même raisonnement que plus haut amène :

$$\begin{aligned} P(S_k) &= \left( \prod_{i=1}^k P(ABC_i \mid ABC_{i-1}) \right) \cdot P(BC_{k+1} \mid ABC_k) \cdot \left( \prod_{i=k+2}^n P(BC_i \mid BC_{i-1}) \right) \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} = \boxed{\frac{2}{3^{n+k+1}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } P(BC_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} S_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3^{n+k+1}} = \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n}}.$$

- (e) Soit  $n \geq 2$ . L'événement  $[T > n]$  est réalisé si et seulement s'il reste au moins deux joueurs à l'issue du  $n$ -ième tour. Comme  $AB_n$  est impossible, on en déduit que  $[T > n] = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n$ . Ces événements étant deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T > n) &= P(ABC_n) + P(AC_n) + P(BC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} \\ &= \boxed{-2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

Remarquez que  $P(T > 1) = P(\overline{T = 1}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ , donc la formule ci-dessus est encore valable pour  $n = 1$ , comme on s'en assure rapidement.

De plus,  $[T > 0]$  est l'événement certain, donc  $P(T > 0) = 1$ , et la formule ci-dessus est encore valide pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $[T > n] \subset [T > n - 1]$ , et  $[T = n] = [T > n - 1] \setminus [T > n]$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T > n - 1) - P(T > n) \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \boxed{-16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

D'après l'argument concernant  $P(T > 1)$  et  $P(T > 0)$ , ceci redonne bien la valeur  $P(T = 1)$  trouvée précédemment.

- (f) Un petit calcul de sommes géométriques :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= -\frac{16}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{14}{9} \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= -\frac{16}{8} + \frac{14}{7} + 1 = -2 + 2 + 1 = \boxed{1}. \end{aligned}$$

- (g) D'après la formule du binôme négatif, les sommes suivantes (à termes positifs) convergent, et leur somme vaut :

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{9})^2} = \frac{81}{64}, \\ \bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} &= \frac{1}{(1 - \frac{2}{9})^2} = \frac{81}{49}, \\ \bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{9}{4}; \end{aligned}$$

(on pourra s'assurer de la convergence de ces séries avec la règle de d'Alembert, ou avec la règle  $n^\alpha u_n$ )

Or, la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(T = n)$  est une combinaison linéaire de ces trois séries, donc elle converge également. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $nP(T = n) \geq 0$ , elle est à termes positifs, donc elle converge absolument. Ainsi,  $T$  admet une espérance, et :

$$E(T) = -\frac{16}{9} \cdot \frac{81}{64} + \frac{14}{9} \cdot \frac{81}{49} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{18}{7} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{51}{28}}.$$

#### 4. Probabilités pour que $A$ , $B$ et $C$ respectivement remportent le combat

- (a) Notons  $GA_n$  l'événement : «  $A$  gagne le combat à la  $n$ -ième épreuve ».

Si  $n = 1$ ,  $A$  ne peut pas gagner le combat, car il reste au moins  $C$  à l'issue de la première manche :  $P(GA_1) = 0$ .

Si  $n > 1$ , chaque événement  $U_k$  entraîne  $GA_n$ . Réciproquement, si  $GA_n$  est satisfait,  $ABC_{n-1}$  n'est pas

satisfait (sinon personne ne vise  $C$  qui ne peut pas être éliminé au  $n$ -ième tour). Puisque  $AB_{n-1}$  est impossible, l'événement  $AC_{n-1}$  est vérifié (il reste forcément un autre joueur, sinon  $A$  aurait gagné avant le  $n$ -ième tour). Ainsi,  $C$  est éliminé au tour  $n$ , et  $B$  est éliminé auparavant, c'est à dire lors d'une épreuve  $\ell$ ,  $\ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ; pour une telle valeur de  $\ell$ ,  $ABC_{\ell-1}$  est satisfait, mais seulement  $AC_\ell$ . En posant  $k = \ell - 1$ ,  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ , on en déduit que  $U_k$  est satisfait.

$$\text{Par conséquent, d'après le principe de la double-inclusion, } GA_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} U_k.$$

(b) Soit  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ . On calcule d'abord la probabilité de  $U_k$ , à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(U_k) = P(R_{n-1,k} \cap A_n) = P(R_{n-1,k})P(A_n | R_{n-1,k}) = \frac{2^{n-1-k}}{9^{n-1}} \cdot P(A_n | AC_{n-1}) = \frac{2^{n-1-k}}{9^{n-1}} \cdot \frac{4}{9} = \boxed{\frac{2^{n-k+1}}{9^n}}.$$

Ici, on a rajouté un indice  $n$  à  $R_k$  pour indiquer la dépendance par rapport à  $n$ . Les événements  $U_k$ ,  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$  étant deux à deux incompatibles,

$$P(GA_n) = \sum_{k=0}^{n-2} P(U_k) = 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} = 4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \boxed{4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n - 8 \left(\frac{1}{9}\right)^n}.$$

Remarquez qu'on obtient cette égalité beaucoup plus rapidement si on ne suit pas la piste suggérée par l'énoncé (comme quoi, les énoncés sont parfois mal faits; pour information, à part certaines notations, et l'ajout des questions finales, je n'ai pas modifié le sujet)

En effet, on peut se servir des calculs précédents. On se sert du système complet formé de toutes les possibilités à l'issue du  $n-1$ -ième tour :  $(\emptyset_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, AB_{n-1}, AC_{n-1}, BC_{n-1}, ABC_{n-1})$ . Or  $GA_n$  est impossible si un des événements suivants a lieu :  $\emptyset_{n-1}$ ,  $A_{n-1}$  (dans ce cas, il a déjà gagné avant),  $B_{n-1}$ ,  $C_{n-1}$ ,  $BC_{n-1}$  et  $ABC_{n-1}$  (car  $C$  ne peut pas être éliminé), et comme  $AB_{n-1}$  est impossible, la formule des probabilités totales se résume à :

$$P(GA_n) = P(GA_n | AC_{n-1})P(AC_{n-1}) = P(A_n | AC_{n-1})P(AC_{n-1}) = \boxed{\frac{8}{9} \left( \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right)}.$$

On obtient bien la même expression, sans avoir à refaire de calculs de somme.

(c) Soit  $GA$  l'événement : «  $A$  gagne ». Alors  $GA = \bigcup_{n=2}^{+\infty} GA_n$ , ces événements étant deux à deux incompatibles. Ainsi, par  $\sigma$ -additivité de  $P$  :

$$P(GA) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(GA_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n - 8 \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{16}{81} \frac{1}{1-\frac{2}{9}} - \frac{8}{81} \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{63} - \frac{1}{9} = \frac{9}{63} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

(d) On note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $GB_n$  l'événement : «  $B$  gagne au  $n$ -ième tour », et  $GB$  l'événement : «  $B$  gagne ».  $B$  ne peut pas être vainqueur des le premier tour ( $C$  n'est pas éliminé à ce moment), donc  $GB_1$  est impossible. Soit  $n \geq 2$ . On peut bien sûr copier la démonstration précédente, telle que suggérée dans l'énoncé, en introduisant des événements  $V_k$  adéquats. Je vais plutôt utiliser la deuxième méthode que j'ai proposée, en utilisant le même système complet. Maintenant, les seuls événements au rang  $n-1$  pouvant amener  $GB_n$  sont :  $AB_{n-1}$  et  $BC_{n-1}$ , et  $AB_{n-1}$  est impossible. Donc, la formule des probabilités totales se résume à :

$$P(GB_n) = P(GB_n | BC_{n-1})P(BC_{n-1}) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{9^{n-1}} \right) = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{9}\right)^n}.$$

En sommant ces probabilités, on obtient :

$$P(GB) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{81} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

- (e) On note de même  $GC_n$  et  $GC$ . On a déjà eu l'occasion de calculer  $P(GC_1) = \frac{4}{9}$ .

Soit  $n \geq 2$ . On procède de même que pour  $GB_n$ . Les événements au rang  $n - 1$  pouvant amener  $GC_n$  sont cette fois  $ABC_{n-1}$ ,  $AC_{n-1}$  et  $BC_{n-1}$ . Ainsi, la formule des probabilités totales se résume à :

$$\begin{aligned} P(GC_n) &= P(GC_n | ABC_{n-1})P(ABC_{n-1}) + P(GC_n | AC_{n-1})P(AC_{n-1}) + P(GC_n | BC_{n-1})P(BC_{n-1}) \\ &= P(C_n | ABC_{n-1})P(ABC_{n-1}) + P(C_n | AC_{n-1})P(AC_{n-1}) + P(C_n | BC_{n-1})P(BC_{n-1}) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \cdot \left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{9^{n-1}}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n}. \end{aligned}$$

On pourrait bien sûr retrouver ce résultat en définissant des événements du type des  $U_k$ , mais ce sont des prises de tête assurées.

Ainsi, en sommant ces probabilités pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(GC) = \frac{4}{9} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{4}{9} + \frac{1}{162} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{81} \cdot \frac{9}{7} = \frac{603}{1008} = \boxed{\frac{67}{112}}$$

- (f)  $C$  a plus d'une chance sur 2 de gagner, donc beaucoup plus que les deux autres. Il vaut donc mieux ne pas savoir tirer (donc ne pas attirer la foudre des autres).

- (g) L'événement « le combat ne s'arrête pas » est l'événement suivant :  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [T > n]$ .

Ces événements forment une suite décroissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [T > n]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T > n) = 0}.$$

Remarquez que cette question est un peu redondante avec la question 3f.

- (h) Soit  $G\emptyset$  l'événement : « le combat s'arrête sans vainqueur ». D'après la question précédente,  $GA$ ,  $GB$ ,  $GC$ ,  $G\emptyset$  forment un système quasi-complet, donc :

$$P(G\emptyset) = 1 - P(GA) - P(GB) - P(GC) = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{67}{112} = \boxed{\frac{15}{112}}.$$