Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Test de contrôle

- durée 2 heures / calculatrices interdites -

Question 1

Soit $n \geqslant 2$, un entier. On considère un cycle :

$$c = (a_1, \cdots, a_\ell) \in \mathfrak{S}_n.$$

1. Expliciter la décomposition en cycles à supports disjoints de la permutation c^2.
2. On considère l'équation $\mathscr{E}$: $\sigma^2 = c$, d'inconnue $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (a) On suppose que ℓ est pair. Montrer que l'équation $\mathscr{E}$ n'admet pas de solutions.
   (b) On suppose que ℓ est impair. Soit σ une solution éventuelle à l'équation $\mathscr{E}$. On pose :
   $$\sigma = \delta_1 \circ \cdots \circ \delta_r,$$
   sa décomposition en cycles à supports disjoints. On suppose qu'aucun des cycles δ_k n'est une transposition.
   Montrer que la permutation σ^2 se décompose en au moins r cycles à supports disjoints.
   (c) Montrer que lorsque ℓ est impair, il n'y a qu'un seul cycle qui soit solution de l'équation $\mathscr{E}$.

Question 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$\{0\} \not\subset F \not\subset E.$$

On se donne une base $\mathscr{B}$ de E.

1. Peut-on toujours extraire de $\mathscr{B}$ une base de F ? Expliquer.
2. Peut-on trouver une infinité d'hyperplans de E contenant F ? Expliquer.
3. Peut-on trouver une infinité de projecteurs $p \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\mathrm{Im}(p) = F$? Expliquer.

Question 3

Soient $A(X)$, $B(X)$ et $P(X)$, trois polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que si $A \circ P(X)$ divise $B \circ P(X)$, alors le polynôme $A(X)$ divise le polynôme $B(X)$.
2. L'implication « $P \circ A(X)$ divise $P \circ B(X) \Longrightarrow A(X)$ divise $B(X)$ » est-elle vraie ? Expliquer.

Question 4

Étudier la nature de la série :

$$\sum_n \int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1+x}\, dx.$$