Oraux ENS - Maths Ulm-Lyon-Cachan-Rennes

Martin Teuscher

3 juillet 2019

1 Énoncé

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\omega(x)$ son ordre.

1) Soit $x \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $\omega(x^k)$?
2) Soit $x \in G$ tel que $\omega(x) = mn$ avec $m \wedge n = 1$. Montrer qu'il existe $y, z \in G$ tels que $yz = x$, $\omega(y) = m$, $\omega(z) = n$ et y, z commutent entre eux.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\{x \in G \mid \omega(x) = n\}$. Montrer que son cardinal est nul ou bien multiple de $\varphi(n)$. (φ désignant la fonction indicatrice d'Euler.)

   Indication : on pourra étudier la relation suivante sur les éléments de cet ensemble :
   $\forall\,(x, y) \in G^2$ d'ordre n, $x \sim y$ ssi $\{x^k, k \in \mathbb{Z}\} = \{y^k, k \in \mathbb{Z}\}$
4) On note $|G|$ le cardinal de G. Pour d diviseur de $|G|$, on pose $A_d = \{x \in G \mid x^d = 1\}$.
   On suppose que $d = p^\alpha s$ avec p premier et $p \wedge s = 1$. On suppose en outre que $p^{\alpha+1}$ divise $|G|$.
   Soit $A = A_{pd} \setminus A_d$. Montrer que $p^\alpha(p-1)$ divise $|A|$.

   Question subsidiaire de l'examinateur : comment démontre-t-on que $\varphi(p^{\alpha+1}) = p^\alpha(p-1)$?
5) On suppose que $|G| = p^r$ avec p premier. Montrer que si d divise $|G|$, alors d divise $|A_d|$.

2 Déroulé de l'oral

Lieu de passage : ENS Ulm, salle Henri Cartan 2.

Examinateur très agréable, qui, voyant que la liste des candidats était placardée devant toutes les salles sauf la sienne, me confia qu'il allait « être jaloux de ses collègues ». Durant l'oral, il regardait son ordinateur mais restait très attentif à ce que je disais et prenait des notes, en approuvant ou demandant précision quand je lui présentais un résultat.

Connaissant la première question par cœur, j'étais sur le point de la lui expliquer au fur et à mesure que j'écrivais la démonstration, mais il m'a dit d'emblée qu'il me laissait réfléchir deux minutes. J'ai donc choisi, quitte à ce que l'on voit que je connaissais déjà la question, de la rédiger intégralement sans rien dire. Une fois toute la démonstration écrite, je la lui ai présentée directement.

La question 2) s'enchaîne facilement une fois que l'on a écrit la relation de Bezout pour m et n.

À partir de la question 3), l'examinateur commençait par me laisser réfléchir. **Il ne m'a donné des indications que lorsque j'avais déjà proposé des idées valides : ses indications servaient donc plus à m'aider lorsque je n'arrivais pas bien à manipuler ou me servir de mon idée, plutôt qu'à lancer l'idée elle-même.** Par exemple, pour la question 5), je propose de montrer le résultat par récurrence sur d (qui s'écrit $p^k, k \leqslant r$) à l'aide de la question 4) mais l'hérédité bloque. L'examinateur me dit alors : « le faire par récurrence est une bonne idée, mais en fait c'est une récurrence descendante qui va marcher » : j'ai alors pu enchaîner et conclure grâce à cette indication. L'oral s'est d'ailleurs arrêté juste après avoir résolu la question 5).