Ensembles, applications, relations

Les définitions à connaître

- variables muettes ou non dans une assertion
- quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ »
- connecteurs logiques « et », « ou », implications ou équivalences
- appartenance d'un élément à un ensemble, inclusion entre deux ensembles
- produit cartésien d'ensembles, ensemble des parties d'un ensemble
- fonction ou application, image, antécédent
- image directe ou image réciproque d'un ensemble par une fonction
- applications injectives, surjectives, bijectives
- relations d'ordre et d'équivalence ; vocabulaire associé

Les résultats à connaître

- opérations sur les ensembles : lois de Morgan
- opérations sur les fonctions : composition
- compositions d'applications injectives, surjectives ou bijectives
- principes des tiroirs et des bergers sur les ensembles finis
- cardinal de $\mathscr{P}(E)$, $\mathscr{P}_k(E)$, de $A \cup B$, de $A \times B$, de $\mathscr{F}(A, B)$, de $\mathfrak{S}(A)$, pour des ensembles finis,
- utilité des relations d'équivalence pour partitionner
- utilité des relations d'ordre pour comparer des éléments
- existence d'une borne supérieure pour une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée ; existence d'un plus grand élément pour une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée ; idem pour les parties de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ minorées

Les méthodes à savoir appliquer

- montrer une implication directement ou par contraposé
- montrer une équivalence
- montrer une inclusion entre deux ensembles
- montrer une égalité d'ensembles, par double inclusion ou par les cardinalités finies
- montrer qu'une application est injective, surjective ou bijective en utilisant éventuellement les cardinaux finis ou une étude de fonction
- calculer une fonction réciproque d'une bijection
- calculer une borne supérieure, une borne inférieure

Les exercices à savoir refaire

- associativité de la différence symétrique
- si $g \circ f$ est injective, alors f l'est ; si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est
- existence et unicité de la décomposition binaire des entiers naturels
- ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$: toute partie non vide a un plus petit élément
- étude de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$
- f injective $\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \iff A = f^{-1}(f(A))$

Techniques en algèbre

Les résultats à connaître

- factorielles et coefficients binomiaux : formule de Pascal et dénombrement des parties à k éléments dans un ensemble à n éléments
- sommes géométriques, arithmétiques, télescopiques
- binôme de Newton en cas de commutativité

Les méthodes à savoir appliquer

- mettre en œuvre une récurrence normale, multiple ou forte
- manipuler les sommes par changements d'indices
- permuter les symboles « $\sum$ » dans des sommes rectangulaires ou triangulaires
- effectuer une décomposition en éléments simples pour obtenir une somme télescopique
- résoudre un système linéaire pour obtenir un système triangularisé ou trapézoïdal ; gérer les inconnues principales ou auxiliaires
- appliquer la méthode du pivot de Gauss par les opérations élémentaires sur les lignes

Les exercices à savoir refaire

- calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p \cos(k\theta)$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^p \sin(k\theta)$ en décomposant le polynôme X^p selon la base de Hilbert
- démontrer l'existence d'une décomposition selon $n = 2^n(2m+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- montrer que si $x_1, \cdots, x_n$ sont dans $]0, +\infty[$, alors $(x_1 + \cdots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$
- calculer $\displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} \min(p,q)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1}$
- démontrer la formule de Van der Monde par dénombrement
- résoudre un système linéaire avec paramètre
- simplifier $\displaystyle\sum_{X \subset [\![1,n]\!]} 2^{\#(X)}$ et $\displaystyle\sum_{X \subset [\![1,n]\!]} \#(X)$

Nombres complexes

Les définitions à connaître

- parties réelle ou imaginaire
- conjugué
- module et argument (défini modulo 2π)
- affixe de points du plan

Les résultats à connaître

- parties réelles ou imaginaires : propriétés avec la somme
- modules et argument : propriétés avec le produit
- inégalité triangulaire et cas d'égalité
- ensembles $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$: interprétation géométrique en cercle ou polygone régulier
- formules de trigonométrie : $\cos(a+b) = \cdots$ et $\sin(a+b) = \cdots$
- interprétation du module en terme de longueur $|b-a| = AB$
- interprétation de l'argument en terme d'angle : $\arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Les méthodes à savoir appliquer

- passer d'une expression algébrique en notation exponentielle et inversement
- utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour linéariser
- retrouver des formules trigonométriques : $\cos p \times \cos q$ ou $\sin p - \sin q$ par exemple
- utiliser la technique de l'arc moitié
- résoudre des équations trigonométriques du type $\cos x = \cos\theta_0$, $\sin x = \sin\theta_0$, $\tan x = \tan\theta_0$ ou $a\cos x + b\sin x = c$
- résoudre des équations du type $z^n = a$ ou $z^2 = a$
- résoudre les équations $az^2 + bz + c = 0$
- caractériser les transformations $z \longmapsto az + b$ et $z \longmapsto \overline{z}$
- utiliser les outils sur les complexes pour caractériser une colinéarité ou une orthogonalité dans le plan

Les exercices à savoir refaire

- résolution de $e^z = Z_0$, d'inconnue z
- résoudre $\dfrac{z-i}{z+3} \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{z+2i}{z-6+i} \in i\mathbb{R}$
- calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k}$
- trouver les points z tels que z, z^2 et z^3 forment un vrai triangle rectangle
- résoudre $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
- calculer $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ à l'aide de $\mathbb{U}_5$
- montrer que si $z \in \mathbb{U}$, alors $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

Techniques en analyse

Les définitions à connaître

- nombre dérivé et taux de variations
- primitive d'une fonction continue
- équation différentielle linéaire ; équation homogène et second membre

Les résultats à connaître

- équation de la tangente
- formulaires de courbes et des dérivées
- opérations sur les dérivées
- formulaire des primitives
- structure des solutions d'une EDL : $\mathscr{S}_0 + y_1$; principe de superposition

Les méthodes à savoir appliquer

- étudier une fonction ; en particulier, calculer une asymptote en $+\infty$
- établir une inégalité du type « $f(x) \leqslant g(x)$ »
- calculer une intégrale par intégration par parties, par changement de variable
- résoudre une EDL_1 par la méthode de la variation des constantes
- résoudre une EDL_1 à coefficients constants et de second membre particulier
- résoudre une EDL_2 à coefficients constants et de second membre particulier
- raccorder les solutions d'une EDL_1

Les exercices à savoir refaire

- montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$
- étudier la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- calculer la dérivée $n^{ème}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{2+5x-3x^2}$
- calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, où $z \in \mathbb{C}$
- résoudre l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, d'inconnue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
- résoudre $(e^t - 1)y' + e^t\ y = 1$ et $x \cdot y' - 3y = 2x\text{ch}(x) - 6\text{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

Fonctions usuelles

Les définitions à connaître

- fonctions arccos, arcsin et arctan ; importance des intervalles où les fonctions cos, sin et tan sont restreintes
- fonctions ch, sh et th

Les résultats à connaître

- symétrie des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ par rapport à la première bissectrice
- tout sur les fonctions ln, exp, puissance, cos, sin et tan
- croissances comparées en $+\infty$ et en 0^+
- formules pour $\arccos x + \arcsin x$ et $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ [deux démonstrations]

Les méthodes à savoir appliquer

- exploiter des symétries pour réduire le domaine d'étude d'une fonction
- montrer une égalité soit par étude de fonctions, soit en revenant à la définition
- lever une forme indéterminée par changement de variable et l'utilisation de croissances comparées

Les exercices à savoir refaire

- calculer explicitement $\operatorname{argch}(x)$, $\operatorname{argsh}(x)$ et $\operatorname{argth}(x)$ en fonction de ln et x, ainsi que leurs dérivées
- simplifier $2\arctan \dfrac{1}{3} + \arctan \dfrac{1}{7}$
- tracer $y = \arccos(\cos x)$ et $y = \arcsin(\sin x)$
- résoudre $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.
- montrer que $2\arctan(\operatorname{th}(x)) = \arctan(\operatorname{sh}(2x))$ par deux méthodes

Suites de nombres réels ou complexes

Les définitions à connaître

- vocabulaire associé aux suites : suites minorées, majorées, bornées, croissantes, strictement décroissantes, monotones, convergentes, divergentes
- suites adjacentes
- ensemble dense dans $\mathbb{R}$ [deux caractérisations par les intervalles ou les suites]
- sous-suites ; valeurs d'adhérence
- relations de comparaison entre les suites ; importance de la relation de négligeabilité par rapport aux deux autres

Les résultats à connaître

- suite convergente $\Longrightarrow$ suite bornée ; opérations sur les suites convergentes ; formes indéterminées
- caractérisation séquentielle de la limite ; composition par une fonction continue
- théorème des gendarmes
- théorème de la limite monotone
- passage à la limite dans une intégalité (stricte ou large)
- convergence par les sous-suites d'indices pairs ou impairs
- théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
- comparaison des suites de référence : croissances comparées ; formule de Stirling
- théorème du point fixe pour les suites récurrentes d'itératrice contractante
- comportements de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \mathbb{C}$
- théorème de Cesarò

Les méthodes à savoir appliquer

- exprimer avec les quantificateurs une propriété sur les suites (convergence, divergence vers $+\infty$ par exemple)
- passer en exponentielle dans toute expression de type $a_n^{b_n}$
- appliquer le principe du « saute-mouton » pour établir une densité
- manipuler les « $\circ(\cdot)$ » avec aisance
- se ramener à l'étude de suites réelles à partir de l'étude de suites complexes
- étudier une suite arithmético-géométrique
- étudier une suite récurrente linéaire d'ordre deux
- étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ en commençant par étudier un domaine stable par f et contenant u_0 ; étudier la croissance éventuelle ou le caractère contractant de f
- calculer un développement asymptotique dans une suite implicite

Les exercices à savoir refaire

- montrer que le nombre $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est irrationnel

- montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$)
- résoudre l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue [par densité et par dérivation]
- montrer que les suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes
- étudier la suite $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{ch}(u_n)}$
- si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, montrer que u converge ssi $\left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sup_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes
- étudier la suite $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ et calculer la limite en posant $\theta_n = \arccos(x_n)$
- montrer que pour n assez grand, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions $a_n < b_n$ et donner les D.A. à trois termes
- si $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie : $p \neq q \Longrightarrow [z_p - z_q| \geqslant 1$, alors la suite diverge en module
- si $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ puis si $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, montrer que la suite $(\sin(\alpha^n\,\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- une suite d'entiers est convergente ssi elle est stationnaire
- une suite bornée n'ayant qu'une valeur d'adhérence est convergente
- si $z \in \mathbb{C}$, calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$

Fonctions continues

Les définitions à connaître

- intervalles de $\mathbb{R}$
- limite ou continuité d'une fonction par les quantificateurs
- vocabulaire associé aux fonctions réelles : fonctions minorées / majorées ; croissantes / décroissantes, ...
- partie entière
- uniforme continuité : caractérisation par les suites ; fonctions lipschitziennes

Les résultats à connaître

- caractérisation séquentielle de la limite : opérations sur les limites
- théorème des valeurs intermédiaires
- théorème des bornes atteintes
- théorèmes d'encadrement (gendarmes et passage à la limite dans une inégalité)
- théorème des fonctions monotones
- théorème de Heine

Les méthodes à savoir appliquer

- appliquer le TVI pour obtenir l'existence d'une solution à une équation
- appliquer le théorème des bornes atteintes pour établir l'existence d'un extrémum
- utiliser les suites pour étudier une limite

Les exercices à savoir refaire

- que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continue ? d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique de limite nulle en $+\infty$
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, alors f a un minimum global
- si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est continue ou croissante, alors elle admet un point fixe
- quelles sont les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(2x+3) = f(x)$?
- étudier une équation fonctionnelle
- j'ai effectué un trajet de 500 kms en 5 heures. Montrer que j'ai effectué 100 kms en un laps de temps d'une heure.
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, il existe α et β tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta$
- si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue telle que $f\left(x + \dfrac{3}{10}\right)$ est toujours différent de $f(x)$, alors f s'annule au moins 7 fois

Fonctions dérivables

Les définitions à connaître

- nombre dérivé, limite du taux de variation
- fonctions de classe C^k, C^∞

Les résultats à connaître

- opérations sur les dérivées : $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$ et $^{-1}$; formule de Leibniz
- théorème de Rolle et des accroissements finis
- formule de Taylor-Lagrange
- théorème du prolongement de la dérivée

Les méthodes à savoir appliquer

- exploiter le TAF dans un tableau de variations
- exploiter le TAF pour établir le caractère contractant d'une itératrice f dans une suite récurrente
- calculer les extréma locaux d'une fonction réelle

Les exercices à savoir refaire

- montrer que la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_-$ et valant $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ ailleurs est C^∞
- théorème de Rolle étendu
- montrer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$ et $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$ par la formule de Taylor-Lagrange
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$
- étudier la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et déterminer les racines complexes du polynôme au numérateur dans $f^{(n)}(t)$
- montrer que si $f : t \longmapsto e^{-t^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f^{(n)} : t \longmapsto P_n(t)e^{-t^2}$ et chaque P_n est scindé à racines simples

Développements limités

Les définitions à connaître

- développement limité en x_0 à l'ordre n
- partie polynomiale tronquée

Les résultats à connaître

- formulaire des $DL(0)$ des fonctions usuelles
- forme d'un DL(0) pour une fonction paire ou impaire

Les méthodes à savoir appliquer

- manipuler les DL par opérations simples : addition, multiplication, quotient, substitution
- utiliser une intégration pour calculer un DL : retrouver rapidement le $DL(0)$ de tan
- utiliser un DL pour lever une forme indéterminée
- utiliser les DL pour étudier une fonction réciproque localement
- utiliser les DL pour obtenir l'existence d'une asymptote en $\pm\infty$ et obtenir la position courbe / asymptote
- utiliser un DL et Cesaro pour obtenir un équivalent dans une suite récurrente
- calculer un DA dans une suite implicite

Les exercices à savoir refaire

- calculer le $DL_6(0)$ de arcsin par intégration, par fonction réciproque
- calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$
- montrer que $f : x \longmapsto x^2+\sin x - e^{2x}$ réalise une bijection localement en 0 et calculer le $DL_4(-1)$ de f^{-1}
- étudier les branches infinies de $t \longmapsto (t+5)\cdot\exp\left(\dfrac{2t}{t^2-1}\right)$
- établir le DA à trois termes lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ de la seule solution à l'équation $\tan x = x$ sur $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2}, n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$
- donner un équivalent de u_n si $u_0=1$ et $u_{n+1}=\operatorname{argsh}(u_n)$ par la méthode des $\alpha>0$

Structures algébriques

Les définitions à connaître

- structure de groupe $(G, \star)$: vocabulaire associé
- définition de $g^{\star k}$, si $g \in G$ et $k \in \mathbb{Z}$: produit de composition vide valant e
- morphismes de groupes ; isomorphismes ou automorphismes de groupes
- noyau et image d'un morphisme
- structure d'anneau $(A, +, \times)$: vocabulaire associé : intégrité, groupe des inversibles, irréductibilité d'un élément
- morphisme d'anneaux
- idéal d'un anneau commutatif
- corps ; corps de référence $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Les résultats à connaître

- des groupes de référence pour $+$: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...
- des groupes de référence pour $\times$: $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}$, $]0, +\infty[$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, ...
- des groupes de référence pour $\circ$: $\mathfrak{S}(E)$, ensemble des bijections
- sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$: unicité du générateur positif
- caractérisation de l'injectivité d'un morphisme par son noyau
- théorème de Lagrange et corollaire : $g^{\star n} = e$ si $n = \#(G)$
- anneaux de référence : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- formules de sommation dans un anneau en cas de commutativité des éléments a et b :
  $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$ et $a^n - b^n = (a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$
- intégrité des corps

Les méthodes à savoir appliquer

- montrer qu'un ensemble H est un sous-groupe de $(G, \star)$
- montrer qu'un ensemble B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$
- utiliser le noyau d'un morphisme de groupe $\varphi : G \longrightarrow G'$ pour montrer qu'un ensemble H vaut $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et donc est un sous-groupe de G
- utiliser le noyau d'un morphisme d'anneau $\psi : A \longrightarrow A'$ pour montrer qu'un ensemble B vaut $\operatorname{Ker}(\psi)$ et donc est un idéal de A

Les exercices à savoir refaire

- montrer que si G est un groupe abélien de cardinal n, alors $\forall g \in G$, $g^{\star n} = e$
- si $\#(E) \geqslant 2$, montrer que l'anneau $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif non intègre et résoudre $3x^5 + 2x = 7$ dans cet anneau
- montrer que le centre $Z(G)$ d'un groupe est un sous-groupe abélien du groupe G
- dans l'anneau de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, déterminer $\mathbb{Z}[i]^*$ et montrer que 2 est réductible
- éléments nilpotents dans un anneau
- les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$: montrer qu'ils sont soit denses, soit monogènes

Arithmétique des entiers

Les définitions à connaître

- générateur positif d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$: application à $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=(a\wedge b)\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=(a\vee b)\mathbb{Z}$
- pgcd et ppcm de deux entiers ; liens avec $a\wedge b$ et $a\vee b$
- nombres premiers entre eux
- nombres premiers ; valuations p-adiques
- anneaux des congruences $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les résultats à connaître

- théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$
- caractérisation des nombres premiers entre eux par une relation de Bezout
- théorème de Gauss [trois énoncés]
- théorème de factorisation des entiers
- structure des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; équivalences : n premier $\iff$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre $\iff$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps
- le petit théorème de Fermat [conséquence du théorème de Lagrange dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$]

Les méthodes à savoir appliquer

- appliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de deux entiers
- appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour obtenir une relation de Bezout
- résoudre les équations diophantiennes du type $a\cdot x+b\cdot y=c$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$
- lire sur les p-valuations le fait que « a divise b », le fait que « $a\wedge b=1$ », le fait que « a est un carré parfait », ...
- utiliser les congruences pour démontrer une divisiblité
- montrer qu'une équation polynomiale à coefficients rationnels admet une solution irrationnelle

Les exercices à savoir refaire

- calculer le chiffre des unités de $7^{7^{7^7}}$
- montrer que $(a\wedge b)\times(a\vee b)=|a\cdot b|$ pour a et b non nuls
- montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers et une infinité de nombres premiers congrus à $1[4]$
- montrer que si 2^n-1 est premier, alors n est une puissance de 2 : nombres de Fermat
- montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$, avec $a_n\wedge b_n=1$ et en déduire que $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $\sqrt{c}+\sqrt{c+1}$ où $c\in\mathbb{N}$
- calculer la 2-valuation dans $5^{2^n}-1$
- montrer la formule de Legendre : $\nu_p(n!)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$ et en déduire le nombre de 0 consécutifs à partir de la droite dans 1000!
- si p est premier et $k\in[\![1,p-1]\!]$, alors $\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}$ est multiple de p

Polynômes à une indéterminée

Les définitions à connaître

- polynôme en tant que suite à support fini ; addition, produit de Cauchy et multiplication par un scalaire
- degré et valuation d'un polynôme ; coefficient dominant et terme dominant
- polynômes premiers entre eux
- évaluation d'un polynôme ; racines et multiplicités
- dérivation d'un polynôme
- polynômes irréductibles dans $K[X]$
- conjugué d'un polynôme
- polynômes scindés, scindés à racines simples

Les résultats à connaître

- degré d'une somme, d'un produit, d'une composition
- anneau $K[X]$ intègre et principal ; inversibles $K[X]^*$
- théorème de division euclidienne
- générateur unitaire d'un idéal non réduit à $\{0\}$: application à $AK[X] + BK[X] = (A \wedge B)K[X]$ et $AK[X] \cap BK[X] = (A \vee B)K[X]$; liens avec le PGCD et le PPCM de A et B
- caractérisation de $A \wedge B = 1$ par une relation de Bezout
- équivalence : $P(\lambda) = 0 \iff (X - \lambda) \mid P(X)$
- théorème de Gauss [trois énoncés]
- théorème de factorisation dans $K[X]$
- théorème de d'Alembert-Gauss dans $\mathbb{C}[X]$; irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
- factorisation dans $\mathbb{R}[X]$; irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
- opérations sur les dérivations
- formule de Taylor pour les polynômes
- seul le polynôme nul admet strictement plus de racines que son degré
- tout sur les polynômes $T_n(X)$ de Tchebychev : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
- tout sur les polynômes de Lagrange : $L_i(z_j) = \delta_{i,j}$

Les méthodes à savoir appliquer

- appliquer l'algorithme d'Euclide poiur déterminer $A \wedge B$
- appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour déterminer une relation du type $AU + BV = A \wedge B$
- calculer la multiplicité d'une racine λ dans $P(X)$ par divisions euclidiennes successives par $(X - \lambda)$
- calculer la multiplicité d'une racine λ dans $P(X)$ par évaluations successives de $P^{(k)}(\lambda)$
- factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ par regroupement de racines conjuguées
- passer dans des anneaux $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ pour étudier un polynôme à coefficients rationnels
- retrouver les relations coefficients / racines par une comparaison « forme développée / forme factorisée »

Les exercices à savoir refaire

- si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$, alors P' aussi ; s'il est SARS, alors P' aussi
- factoriser $X^6 + X^3 + 1$ ou $X^8 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$
- montrer que si $f : t \longmapsto e^{-t^2+1}$, alors il existe une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f^{(n)} : t \longmapsto P_n(t) \cdot e^{-t^2+1}$ et les P_n sont SARS
- factoriser $X^n - 1$ et $X^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
- montrer que les polynômes $4X^3 + 3X^2 + X + 7$ et $X^n - 2$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$
- le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^{3n+8} + X^{3n+4} + X^{3n}$? le polynôme $(X^2 + X + 1)^2$ divise-t-il $(X + 1)^n - X^n - 1$?
- montrer que si $p \wedge q = 1$, alors $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X - 1)(X^{pq} - 1)$
- déterminer le nombre de racines complexes et réelles du polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$
- déterminer tous les polynômes $P(X)$ tels que P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$
- en utilisant $P(X) = (X + 1)^n - e^{2ina}$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$
- résoudre un système à trois inconnues de type σ_1, σ_2 et σ_3 donnés
- montrer que les polynômes de Legendre $\Big[(X^2 - 1)^n\Big]^{(n)}$ sont SARS dans $]-1, 1[$
- déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$
- déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$
- montrer que si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$, alors P est de la forme $P = Q^2 + R^2$
- résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(3X + 4) = 3^n P(X)$, où n est donné dans $\mathbb{N}^*$

Fractions rationnelles

Les définitions à connaître

- opérations sur les fractions rationnelles
- degré d'une fraction rationnelle
- évaluation d'une fraction rationnelle : zéros et pôles
- décomposition en éléments simples

Les résultats à connaître

- DES dans $\mathbb{C}(X)$
- DES dans $\mathbb{R}(X)$
- DES de $\dfrac{P'}{P}$ où P est un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Les méthodes à savoir appliquer

- se ramener à des polynômes pour établir des propriétés sur les fractions rationnelles : degrés et opérations, infinité de zéros
- calculer la DES d'une fraction $F(X) \in \mathbb{C}(X)$
- calculer la DES d'une fraction $F(X) \in \mathbb{R}(X)$
- calculer à l'aide de deux formules les résidus associés à des pôles simples
- utiliser une symétrie de la fraction pour établir des liens entre les résidus

Les exercices à savoir refaire

- effectuer la DES dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{X^k}{X^n-1}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$
- mettre sous la forme d'un quotient de deux polynômes premiers entre eux la fraction $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^k}{X-\omega}$, où $k \in \mathbb{Z}$
- résoudre $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{a}{X}$, où $a \in \mathbb{C}$, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$
- calculer la DES dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{1}{T_n(X)}$, où $T_n(X)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev
- étudier les suites $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k^2-1)(k+2)}\right)_{n \geqslant 2}$

Espaces vectoriels, applications linéaires

Les définitions à connaître

- structure de K-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$; vecteurs et scalaires
- sous-espace vectoriel
- combinaisons linéaires ; familles de scalaires à support fini
- espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ engendré par une partie : deux caractérisations
- somme $F+G$, somme directe $F \oplus G$, somme ou somme directe de plusieurs sous-espaces ; espaces supplémentaires
- familles libres, liées, génératrices, bases
- coordonnées d'un vecteur selon une base
- espaces vectoriels de dimension finie
- dimension d'un espace vectoriel
- rang d'une famille de vecteurs ; manipulation de combinaisons linéaires
- applications linéaires ; compatiblité de la linéarité avec la composition ; endomorphismes, isomorphismes, automorphismes linéaires
- homothéties, projecteurs, symétries
- noyau et image d'une application linéaire
- espaces $\mathscr{L}(E, F)$ et algèbres $\mathscr{L}(E)$
- équivalences f projecteur $\iff$ $f^2 = f$; f symétrie $\iff$ $f^2 = \mathrm{id}_E$; f homothétie $\iff$ toute famille $(x, f(x))$ est liée
- formes linéaires coordonnées e_k^*
- hyperplans ; dualité hyperplans $\longleftrightarrow$ noyaux de formes linéaires non nulles
- bases duales
- espaces affines, sous-espaces affines : direction et point d'appartenance

Les résultats à connaître

- catalogue d'espaces vectoriels de référence, de sous-espaces vectoriels de référence
- théorème de la base incomplète ; théorème de la base extraite
- théorème des cardinaux des familles libres et génératrices en dimension finie
- bases canoniques des espaces K^n et $K_n[X]$; dimensions de ces espaces
- calculs de dimensions : formule de Grassman, dimension d'une somme
- découpage d'une base pour former des sous-espaces supplémentaires ; concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires pour former une base adaptée
- construction d'applications linéaires par les images des vecteurs d'une base
- caractérisation de l'injectivité de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ par le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ ou le caractère libre des images de vecteurs d'une base ; caractérisation de la surjectivité de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ par l'image $\mathrm{Im}(f)$ ou le caractère générateur des images de vecteurs d'une base
- théorème du rang en dimension finie pour l'espace de départ
- caractériser un projecteur, une symétrie, une homothétie

Les méthodes à savoir appliquer

- montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de référence

- montrer qu'une famille est libre par combinaison linéaire nulle ; montrer qu'une famille est liée : utilisation de la dimension
- montrer qu'une famille est une base par les cardinaux et la dimension finie
- calculer les coordonnées d'un vecteur selon une base
- montrer l'égalité entre deux espaces par une inclusion et l'égalité des dimensions finies ; application à la somme directe de sous-espaces
- calculer une base d'un espace donné par des équations
- construire une application linéaire convenable sur une base adaptée
- exploiter le théorème du rang en dimension finie pour obtenir la bijectivité d'une application linéaire
- utiliser un isomorphisme pour calculer une dimension finie
- interpréter la résolution d'une EDL, d'une suite récurrente linéaire, d'une équation linéaire de type $f(x) = a$ comme un problème de géométrie affine

Les exercices à savoir refaire

- les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires forment deux espaces supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- si E est de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces de E, trouver une CNS pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $\operatorname{Ker}(f) = F$ et $\operatorname{Im}(f) = G$
- polynômes de Lagrange : construction
- calculer une base d'un ensemble donné par des équations
- montrer que les familles $\Big(x \longmapsto \exp(ax)\Big)_{a \in \mathbb{R}}$, $\Big(x \longmapsto |x - a|\Big)_{a \in \mathbb{R}}$, les familles de polynômes à degrés échelonnés, $\Big((X - a)^k (X - b)^{n-k}\Big)_{k \in [\![0, n]\!]}$ sont libres
- la dérivation discrète $\Delta : P(X) \longmapsto P(X + 1) - P(X)$: noyau et image dans $\mathbb{R}_n[X]$
- les noyaux itérés
- si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E, alors $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi) \iff$ la famille (φ, ψ) est liée
- trouver une CNS sur deux sous-espaces de E de dimension finie pour qu'ils admettent un supplémentaire commun

Matrices

Les définitions à connaître

- opérations sur les matrices : addition, multiplication et multiplication par les scalaires
- matrices rectangulaires ou carrées, diagonales, triangulaires supérieures
- matrices élémentaires $E_{i,j}$; base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(K)$
- rang d'une matrice
- matrice représentant une application linéaire selon des bases et application linéaire canonique associée à une matrice
- transposée d'une matrice ; liens avec la dualité
- trace d'une matrice carrée
- matrice de passage entre deux bases
- réduction des matrices : matrices équivalentes et matrices semblables
- matrices nilpotentes

Les résultats à connaître

- la matrice représentant A [application linéaire] selon les bases canoniques est la matrice A
- formule de composition : produit matriciel $\longleftrightarrow$ composition d'applications linéaires : si $\mathscr{B}$ est une base de E de dimension p, $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_p(K) \\ f & \longmapsto & \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres
- polynôme d'endomorphismes : l'application $\Phi_f : \left| \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P(X) & \longmapsto & P(f) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres
- matrices inversibles $\longleftrightarrow$ endomorphismes bijectifs
- interprétation des systèmes linéaires par équations matricielles ; interprétation des opérations sur les lignes par des multiplications à gauche par des matrices inversibles
- $(AB)^T = B^T A^T$; $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$; $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang
- formules de changement de base : $X = PX'$, $B = Q^{-1}AP$ et $B = P^{-1}AP$
- réductions des matrices de projection, de symétrie, d'homothétie : dispositions par blocs

Les méthodes à savoir appliquer

- représenter une application linéaire par une matrice ; utiliser l'application linéaire canoniquement associée à une matrice
- calculer le rang d'une matrice, une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$
- calculer l'inverse d'une matrice par un polynôme annulateur ou par la résolution du système $AX = Y$
- montrer que deux matrices sont équivalentes ; expliciter deux matrices inversibles P et Q telles que $Q^{-1}AP = J_r$
- montrer que deux matrices carrées sont semblables et expliciter une matrice P de changement de base pour $B = P^{-1}AP$

Les exercices à savoir refaire

- calculer les puissances d'une matrice A par le binôme après réduction ; application aux suites numériques couplées
- si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$, montrer que A est semblable à une matrice ne comportant que des 0 et des 1 et en déduire $\mathrm{Rg}(A)$
- montrer que les matrices de rang un sont exactement les matrices de la forme CL, avec C colonne non nulle et L ligne non nulle
- montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un projecteur, alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Rg}(A)$
- montrer que les matrices de trace nulle sont les matrices semblables à une matrice de diagonale nulle
- étant donnée une matrice rectangulaire A, expliciter Q et P inversibles telles que $Q^{-1}AP = J_r$
- si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = 0$ et $A \neq 0$, déterminer la dimension de l'anti-commutant de A par réduction de la matrice A
- montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible
- montrer que les seules matrices qui commutent avec toutes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont les matrices d'homothétie [avec produit matriciel ou par les endomorphismes]
- polynôme minimal de certaines matrices : matrices compagnon, matrices élémentaires $E_{i,j}$, ...

Permutations, déterminants

Les définitions à connaître

- permutations ; groupe symétrique $(\mathfrak{S}_n, \circ)$
- points fixes et support d'une permutation ; orbite d'un élément
- cycles et transpositions
- signature d'une permutation
- déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ; formule avec la somme sur les permutations
- comatrice d'une matrice carrée

Les résultats à connaître

- décomposition unique [à ordre près] des permutations en cycles à supports disjoints
- décomposition des permutations en transpositions
- la signature est un morphisme de groupes
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $\det(\lambda\ A) = \lambda^n \det(A)$ et $\det(A) \neq 0 \iff A$ inversible
- $\mathrm{Com}(A)\ A^T = A^T\ \mathrm{Com}(A) = \det(A)\ I_n$: développement d'un déterminant pour le calcul pratique
- déterminant de Van der Monde ; liens par dualité entre ce déterminant et les polynômes interpolateurs de Lagrange

Les méthodes à savoir appliquer

- décomposer une permutation donnée en cycles à supports disjoints ou en transpositions
- calculer la signature d'une permutation par les cycles, les transpositions ou le nombre d'inversions
- se ramener quoiqu'il arrive au déterminant d'une matrice carrée
- calculer le déterminant d'une matrice par opérations sur les lignes ou les colonnes, puis par développement

Les exercices à savoir refaire

- calculer les puissances d'une permutation donnée
- les permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont produit de transpositions du type $(1, i)$
- configuration impossible dans le jeu du taquin
- calculer des déterminants tridiagonaux par récurrence linéaire d'ordre deux
- montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A| \times |C|$; si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$
- calcul de $\det(J - I_n)$, où J est remplie de 1, par opérations élémentaires, ou par réduction de la matrice J
- liens entre $\mathrm{Rg}(A)$ et $\mathrm{Rg}(\mathrm{Com}(A))$
- si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1$

Intégration

Les définitions à connaître

- fonctions en escalier
- fonctions continues par morceaux sur un segment

Les résultats à connaître

- limite de sommes de Riemann vers l'intégrale sur un segment
- linéarité de l'intégrale
- positivité de l'intégrale ; inégalité triangulaire
- théorème aux quatre hypothèses
- relation de Chasles
- théorème fondamental de l'analyse
- catalogue de primitives usuelles
- formule de Laylor avec reste intégral

Les méthodes à savoir appliquer

- interpréter une moyenne de termes comme une somme de Riemann
- calculer une primitive d'une fonction ou d'une intégrale, par primitivation directe, intégration par parties ou changement de variable
- appliquer les règles de Bioche pour obtenir une intégrande égale à une fraction rationnelle

Les exercices à savoir refaire

- calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{2n}k}$
- soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ est continue telle que $\displaystyle\left|\int_0^1 f\right|=\int_0^1|f|$. Montrer qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in[0,1]$, les vecteurs $f(t)$ et $e^{i\theta}$ soient colinéaires de même sens.
- irrationnalité de π par étude des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi}P_n(t)\ \sin t\ dt$, où $P_n(X)=\dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$
- intégrales télescopiques : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\int_x^{3x}\frac{\cos(t^2)}{\sin t}\,dt$ et étude de $\displaystyle x\longmapsto\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$
- intégrale de Poisson $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-2\theta\cos t+\theta^2)\,dt$, par limite des sommes de Riemann
- intégrales de Wallis : $\displaystyle W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$; étude de la suite et d'un équivalent

Espaces préhilbertiens réels

Les définitions à connaître

- produit scalaire : forme bilinéaire symétrique définie positive
- espace euclidien et préhilbertien sur le corps $\mathbb{R}$
- normes et normes euclidiennes
- familles orthogonales et orthonormales ; bases orthonormales
- orthogonal d'une partie
- endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales
- projections orthogonales, symétries orthogonales
- distance d'un vecteur à un sous-espace

Les résultats à connaître

- identités de polarisation : formules reliant produit scalaire et normes euclidiennes
- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité
- produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$: la base canonique est orthonormale
- orthonormalisation de Gram-Schmidt : procédé pratique et caractérisation théorique
- expression du produit scalaire dans une base orthonormale
- construction de sous-espaces supplémentaires orthogonaux par découpage d'une base orthonormale ; construction d'une base orthonormale par concaténation de bases orthonormales de sous-espaces supplémentaires orthogonaux
- caractérisations des endomorphismes orthogonaux par les produits scalaires, les normes ou sur les bases orthonormales
- l'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un groupe
- liens entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales ; représentations selon une base orthonormale

Les méthodes à savoir appliquer

- orthonormaliser une famille libre
- calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ; interpréter une borne inférieure comme un minimum de distance
- caractérisation géométrique des matrices orthogonales de $O_2(\mathbb{R})$

Les exercices à savoir refaire

- si $\omega : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue positive et non nulle, montrer que $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\omega(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que l'orthonormalisé de la base canonique donne une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SARS dans $]0,1[$
- montrer que si E est un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un seul vecteur $\vec{x}$ tel que $\varphi = (\vec{x} \mid \cdot)$
- calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - a - bx)^2\,dx$
- étude du produit scalaire $(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que les espaces $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux

- soit $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ une symétrie ; montrer que s est un endomorphisme orthogonal si et seulement si s est une symétrie orthogonale
- soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur ; montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$
- matrice de Gram
- si $\alpha > -2$, montrer que la matrice $A = \left(\dfrac{1}{i+j+\alpha}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible, en calculant $X^T AX$
- décomposition $O\ T$ d'une matrice orthogonale

Séries de nombres réels ou complexes

Les définitions à connaître

- série : suite des sommes partielles
- vocabulaire des suites transposé aux séries ; somme d'une série convergente ; divergence grossière d'une série
- séries télescopiques, géométriques ou de Riemann, harmonique ou exponentielle
- séries absolument convergentes
- séries alternées

Les résultats à connaître

- correspondance entre convergence de la série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- comportement de la série géométrique $\sum_n q^n$ et calcul de la somme
- si $\sum_n u_n$ converge, alors u_n tend vers 0
- croissance des séries à termes positifs
- la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
- l'absolue convergence entraîne la convergence ; inégalité triangulaire étendue
- critère spécial des séries alternées

Les méthodes à savoir appliquer

- procéder à une comparaison série / intégrale pour une fonction monotone pour étudier une série
- procéder à l'étude d'une série de manière automatique
- utiliser un développement asymptotique pour étudier une série
- calculer la somme d'une série convergente par simplification des sommes partielles

Les exercices à savoir refaire

- étudier les séries $\sum_n \frac{\cos n}{n^2}$, $\sum_n \frac{\ln n}{n^{3/2}}$, $\sum_n \arccos\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum_n \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
- étudier la série $\sum_n \sin\left(\pi n \exp\left(\sin \frac{1}{n}\right)\right)$
- constante d'Euler : montrer qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1)$
- calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{3^k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k-2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

- en posant $z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k}\right) \in \mathbb{C}$, montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente
- étudier les suites $\left(u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\sum_{n} \frac{1}{(u_n)^2}$

Probabilités et variables aléatoires

Les définitions à connaître

- univers Ω : ensemble des expériences ω
- événements $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: description ensembliste ou probabiliste ; événements incompatibles, négligeables, presque sûrs, événement contraire $\overline{A}$
- probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ et σ-additivité
- probabilité conditionnelle
- système complet d'événements : découpage de l'univers Ω
- événements deux à deux indépendants, mutuellement indépendants
- variable aléatoire ; notations probabilistes $\mathbb{P}(X \in A)$ ou $\mathbb{P}(X = x)$
- loi d'une variable aléatoire
- espérance d'une variable aléatoire [deux formules lorsque Ω est fini]
- variance et écart-type d'une variable aléatoire
- vecteurs aléatoires ; loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelle sachant un événement
- variables aléatoires deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes
- covariance
- lois usuelles : loi uniforme, de Bernoulli et binomiale

Les résultats à connaître

- propriétés sur les probabilités
- formules des probabilités composées
- formules des probabilités totales, formule de Bayes
- lemme des coalitions ; invariance de l'indépendance par passage à l'événement contraire
- SCE $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$
- propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, formule de transfert
- inégalité de Markov
- propriétés de la variance : formule de Huyghens et de dilatation
- inégalité de Bienaymé-Tchebytchev
- formule de transfert pour un vecteur aléatoire ; formule de Huyghens pour la covariance
- lemme des coalitions pour les variables mutuellement indépendantes
- covariance de variables indépendantes
- tout sur les trois lois usuelles finies

Les méthodes à savoir appliquer

- construire une probabilité par la donnée des probabilités des singletons
- calculer la loi d'une variable aléatoire
- calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et appliquer la formule de transfert
- calculer la variance $V(X)$ par la formule de Huyghens
- manipuler les fonctions indicatrices pour obtenir une inégalité de type « Markov »
- rapprocher une situation d'un cadre connu : associer à un protocole expérimental une loi usuelle : loi uniforme $\longleftrightarrow$ équiprobabilité, Bernoulli $\longleftrightarrow$ test Vrai/Faux ; binomiale $\longleftrightarrow$ nombre de succès lors d'essais indépendants
- interpréter la valeur d'une espérance, d'un écart-type

Les exercices à savoir refaire

- calculs de probabilités lors de tirages avec remise, sans remise, simultanés
- calculs de probabilités conditionnelles dans un cadre où la population est partagée en catégories, lors d'un protocole expérimental avec conditions
- lemme de Borel-Cantelli ; singe dactylographe de Borel
- interprétation probabiliste de la formule de l'indicatrice d'Euler $\varphi(n) = \#((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*) = n\prod_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$
- loi hypergéométrique : variable aléatoire de comptage lors d'un tirage simultané
- calculs de lois conjointes lors de lancers de « pile » ou « face » ; loi du maximum ou du minimum, loi de la somme
- calculs de loi de la trace, du rang ou du déterminant pour une matrice aléatoire dont les coefficients indépendants suivent une loi de Rademacher
- étude d'une marche au hasard sur $\mathbb{U}_n$; chaîne de Markov
- matrices stochastiques : stabilité par produit et liens avec les chaînes de Markov
- formule du crible de Poincaré ; problème des dérangements
- principe de réflexion ; problème du suffrage entre deux candidats
- peut-on piper deux dés pour que la somme donne une loi uniforme ?