

# DEVOIR SURVEILLÉ 7

(durée : 2 h 30)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

**La calculatrice n'est pas autorisée.**

## EXERCICE 1

Déjà fait !

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel que, pour tout  $x \in E$ , les vecteurs  $x$  et  $u(x)$  sont colinéaires. Démontrer que  $u$  est une homothétie.

## EXERCICE 2

Fonction cigale

On considère la suite  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , par

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad f_{p+1}(x) = x^{f_p(x)}.$$

de sorte que  $f_0$  est la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_p$  est donnée par

$$f_p : x \longmapsto x^{x^{x^{\cdots^x}}} \quad \left. \vphantom{f_p} \right\} \text{ avec } p \text{ fois } x.$$

1. Justifier que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f_p$  admet un  $\text{DL}_n(1)$  à tout ordre  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Déterminer le  $\text{DL}_3(1)$  de la fonction  $f_3$ .
3.
  - a) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $p \geq n$ , on a  $f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + o(h^n)$ .
  - b) Démontrer qu'il existe une suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \geq n$ , on a  $f_p(1+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)$ .
4. Quel est le  $\text{DL}_3(1)$  de la fonction  $f_{2017}$ .

## EXERCICE 2

### Théorème de Maschke

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

On considère  $\mathcal{G}$  un sous-groupe fini de  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$  dont le cardinal est noté  $m$ .

On note  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  le commutant de  $\mathcal{G}$  défini par  $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall g \in \mathcal{G}, gu = ug\}$ .

On dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $\mathcal{G}$  lorsque  $F$  est stable par tout élément de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire  $\forall g \in \mathcal{G}, g(F) \subset F$ .

L'objet de cet exercice est de démontrer le *théorème de Maschke* :

$$(\mathcal{M}) \begin{cases} \text{si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } \mathcal{G}, \\ \text{alors } F \text{ admet un supplémentaire stable par } \mathcal{G}. \end{cases}$$

1. Démontrer que  $(\mathcal{M})$  est équivalente à

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } \mathcal{G}, \text{ alors il} \\ \text{existe un projecteur } \pi \text{ dont l'image est } F \text{ tel que } \pi \in \mathcal{C}(\mathcal{G}). \end{cases}$$

2. Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on pose

$$\pi_{\mathcal{G}}(u) = \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}ug.$$

- a) Démontrer que  $\pi_{\mathcal{G}}$  est un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$  dont l'image est  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .
- b) Soit  $p$  un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } p$  est stable par  $\mathcal{G}$ . Démontrer que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$  est un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) = \text{Im } p$ .
3. Démontrer le théorème de Maschke.
4. a) Expliquer pourquoi le théorème de Maschke reste vrai lorsqu'on remplace  $\mathbb{C}$  par un corps de base  $K$  dont la caractéristique est ou bien nulle ou bien un nombre premier  $p$  qui ne divise pas  $m$ .
- b) Dans cette question, le corps de base est  $\mathbb{F}_2$ . On pose  $E = \mathbb{F}_2^2$ . On considère l'endomorphisme  $v$  de  $E$  défini par  $v((1, 0)) = (1, 0)$  et  $v((0, 1)) = (1, 1)$ . Démontrer que  $\mathcal{G} = \{\text{Id}_E, v\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$  puis déterminer un sous-espace de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$  qui n'admet pas de supplémentaire stable par  $\mathcal{G}$ . Qu'a-t-on ainsi illustré ?

# CORRECTION DU DS 7

(durée : 2 h 30)

## EXERCICE I

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel que, pour tout  $x \in E$ , les vecteurs  $x$  et  $u(x)$  sont colinéaires. Démontrer que  $u$  est une homothétie.

Pour tout  $x \in E$ , il existe, par hypothèse, un nombre réel  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ . Notre objectif est de démontrer que  $\lambda_x$  ne dépend en fait pas de  $x$  (c'est une « uniformisation » ou, plus concrètement, l'échange d'un quantificateur  $\forall$  avec un quantificateur  $\exists$ ). On propose deux démonstrations.

- Démontrons que l'application  $x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \lambda_x$  est constante. Pour cela, considérons deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  de  $E$  et envisageons deux cas :

- \* Si la famille  $(x, y)$  est libre, alors l'égalité

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

implique que

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

- \* Si, au contraire, la famille  $(x, y)$  est liée alors il existe  $\mu \in K$  tel que  $x = \mu y$  et l'on a

$$\lambda_x x = u(x) = u(\mu y) = \mu u(y) = \mu \lambda_y y = \lambda_y x$$

d'où

$$\lambda_x = \lambda_y.$$

On a ainsi démontré l'existence de  $\lambda \in K$  tel que, pour tout  $x \in E$ , on ait  $u(x) = \lambda x$ . Cela signifie que  $u$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

- Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  (il en existe par zornification). Pour tous  $i, j \in I$  tels que  $i \neq j$ , on a

$$\lambda_{e_i+e_j}e_i + \lambda_{e_i+e_j}e_j = \lambda_{e_i+e_j}(e_i + e_j) = u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_{e_i}e_i + \lambda_{e_j}e_j,$$

donc, puisque  $(e_i, e_j)$  est libre, il vient

$$\lambda_{e_i} = \lambda_{e_i+e_j} = \lambda_{e_j}.$$

On a ainsi démontré l'existence de  $\lambda \in K$  tel que, pour tout  $i \in I$ , on ait  $u(e_i) = \lambda e_i$ . Cela signifie que  $u$  et l'homothétie de rapport  $\lambda$  coïncident sur une base. On sait alors qu'elles coïncident partout.

En conclusion,

$u$  est une homothétie.

## EXERCICE 2

On considère la suite  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , par  $f_0(x) = 1$  et  $\forall p \in \mathbb{N}^*, f_{p+1}(x) = x^{f_p(x)}$ .

1. Justifier que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f_p$  admet un  $DL_n(1)$  à tout ordre  $n \in \mathbb{N}$ .

Les théorèmes généraux nous disent que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f_p$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Dès lors, d'après le théorème de Taylor-Young,

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, f_p \text{ admet un } DL_n(1) \text{ à tout ordre } n \in \mathbb{N}.}$$

2. Déterminer le  $DL_3(1)$  de la fonction  $f_3$ .

Chouette, du calcul !

On a

$$\begin{aligned} f_2(1+h) &= (1+h)^{1+h} \\ &= \exp\{(1+h)\ln(1+h)\} \\ &= \exp\left\{(1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^3)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^3)\right\} \\ &= 1 + \left(h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}h^3 + \mathcal{O}(h^3) \\ &= 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f_3(1+h) &= (1+h)^{f_2(1+h)} \\ &= \exp\{f_2(1+h)\ln(1+h)\} \\ &= \exp\left\{\left(1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^3)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{h + \frac{h^2}{2} + \frac{5h^3}{6} + \mathcal{O}(h^3)\right\} \\ &= 1 + \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{5h^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}h^3 + \mathcal{O}(h^3) \\ &= 1 + h + h^2 + \frac{3h^3}{2} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f_3(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{3h^3}{2} + \mathcal{O}(h^3).}$$

3. a) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $p \geq n$ , on a  $f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + \mathcal{O}(h^n)$ .

Démontrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  l'assertion

$$\mathcal{P}(n) : \exists a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}, \forall p \geq n, f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + \mathcal{O}(h^n).$$

Initialisation : Pour tout  $p \geq 0$ , on a  $f_p(1) = 1$ , donc  $f_p(1+h) = 1 + \mathcal{O}(h)$ . Cela démontre que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie avec  $a_{0,0} = 1$ .

Hérédité : Fixons  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Soit  $p \geq n$ . On a

$$f_{p+1}(1+h) = (1+h)^{f_p(1+h)} = \exp\{f_p(1+h)\ln(1+h)\}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}(n)$ , il existe des nombres réels  $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$  tels que

$$f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + \mathcal{O}(h^n).$$

Par ailleurs, le développement de  $\ln(1+h)$  à l'ordre  $n+1$  (c'est crucial d'aller à l'ordre  $n+1$ ) nous donne

$$\begin{aligned}\ln(1+h) &= h - \frac{h^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{h^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}(h^{n+1}) \\ &= h \left[ 1 - \frac{h}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{n+1} + \mathcal{O}(h^n) \right].\end{aligned}$$

En développant le produit des deux derniers DL, on obtient l'existence de nombres réels  $b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \dots, b_{n+1,n+1}$  indépendants de  $p$  tels que

$$f_p(1+h)\ln(1+h) = h[b_{n+1,1} + b_{n+1,2}h + \cdots + b_{n+1,n+1}h^n + \mathcal{O}(h^n)],$$

ce qui donne, après développement du  $h$ ,

$$f_p(1+h)\ln(1+h) = b_{n+1,1}h + b_{n+1,2}h^2 + \cdots + b_{n+1,n+1}h^{n+1} + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

En composant ce DL avec celui de l'exponentielle en 0 à l'ordre  $n+1$ , on obtient l'existence de nombres réels  $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n+1}$  indépendants de  $p$  tels que

$$\exp\{f_p(1+h)\ln(1+h)\} = 1 + a_{n+1,1}h + a_{n+1,2}h^2 + \cdots + a_{n+1,n+1}h^{n+1} + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

En posant  $a_{n+1,0} = 1$ , on a donc

$$f_{p+1}(1+h) = a_{n+1,0} + a_{n+1,1}h + a_{n+1,2}h^2 + \cdots + a_{n+1,n+1}h^{n+1} + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

Comme tous les  $a_{n+1,j}$  (pour  $j \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$ ) sont indépendants de  $p$ , cela démontre  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion: D'après le principe de récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}, \forall p \geq n, f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \cdots + a_{n,n}h^n + \mathcal{O}(h^n).}$$

- b) Démontrer qu'il existe une suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \geq n$ , on a  $f_p(1+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + \mathcal{O}(h^n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les assertions  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  utilisées pour  $p = n+1$  nous disent respectivement que

$$f_{n+1}(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \cdots + a_{n,n}h^n + \mathcal{O}(h^n)$$

et

$$f_{n+1}(1+h) = a_{n+1,0} + a_{n+1,1}h + \cdots + a_{n+1,n}h^n + \mathcal{O}(h^n).$$

L'unicité du développement limité nous dit que

$$\forall k \leq n, \quad a_{n+1,k} = a_{n,k}.$$

Comme  $n$  est quelconque dans  $\mathbb{N}$ , on en déduit que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la suite  $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, à une valeur que l'on note  $a_k$ . Cela démontre que

$$\boxed{\exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, f_p(1+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + \mathcal{O}(h^n).}$$

4. Quel est le DL<sub>3</sub>(1) de la fonction  $f_{2017}$ .

Pour  $n = 3$ , la question précédente nous dit que toutes les fonctions  $f_p$  pour  $p \geq 3$  ont le même développement limité à l'ordre 3. Vu le résultat trouvé à la question 2, on peut donc affirmer que

$$\boxed{f_{2017}(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{3h^3}{2} + \mathcal{O}(h^3).}$$

### EXERCICE 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On considère  $\mathcal{G}$  un sous-groupe fini de  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$  dont le cardinal est noté  $m$ . On note  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  le commutant de  $\mathcal{G}$  défini par  $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall g \in \mathcal{G}, gu = ug\}$ . On dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $\mathcal{G}$  lorsque  $F$  est stable par tout élément de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire  $\forall g \in \mathcal{G}, g(F) \subset F$ . L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème de Maschke c'est-à-dire l'énoncé  $(\mathcal{M})$  : « si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$ , alors  $F$  admet un supplémentaire stable par  $\mathcal{G}$  ».

1. Démontrer que  $(\mathcal{M})$  est équivalente à  $(\mathcal{P})$  : « si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$ , alors il existe un projecteur  $\pi$  dont l'image est  $F$  tel que  $\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$  ».

$\Rightarrow$  Supposons que  $(\mathcal{M})$  est vraie.

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$ . D'après  $(\mathcal{M})$ ,  $F$  admet un supplémentaire  $F'$  stable par  $\mathcal{G}$ . Considérons la projection  $\pi$  sur  $F$  dans la direction de  $F'$ . Pour établir  $(\mathcal{P})$ , il suffit de démontrer que  $\pi$  commute avec tout élément de  $\mathcal{G}$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $F \oplus F' = E$ , il existe  $a \in F$  et  $a' \in F'$  tels que  $x = a + a'$ . Pour tout  $g \in \mathcal{G}$ , on a

$$\begin{aligned} (\pi g)(x) &= (\pi g)(a + a') \\ &= \pi(g(a) + g(a')) \\ &= g(a) \quad \text{car } g(a) \in F \text{ et } g(a') \in F' \text{ puisque} \\ &\quad F \text{ et } F' \text{ sont stables par } \mathcal{G} \\ &= g(\pi(a + a')) \\ &= (g\pi)(x). \end{aligned}$$

Cela démontre que  $\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

Ainsi,  $(\mathcal{P})$  est démontrée.

$\Leftarrow$  Supposons que  $(\mathcal{P})$  est vraie.

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$ . D'après  $(\mathcal{P})$ , il existe un projecteur  $\pi$  dont l'image est  $F$  tel que  $\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ . Posons  $F' = \text{Ker } \pi$ . Pour établir  $(\mathcal{M})$ , il suffit de démontrer que  $F'$  est un supplémentaire de  $F$  stable par  $\mathcal{G}$ .

Comme  $\pi$  est un projecteur, on a  $\text{Im } \pi \oplus \text{Ker } \pi = E$ , c'est-à-dire  $F \oplus F' = E$ . Donc  $F'$  est un supplémentaire de  $F$ .

Pour tous  $g \in \mathcal{G}$  et  $a' \in F'$ , on a

$$\begin{aligned} \pi(g(a')) &= g(\pi(a')) \quad \text{car } \pi \in \mathcal{C}(\mathcal{G}) \\ &= g(0_E) \quad \text{car } a' \in \text{Ker } \pi \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

donc  $g(a') \in \text{Ker } \pi$ , c'est-à-dire  $g(a') \in F'$ . Cela démontre que  $F'$  est stable par  $\mathcal{G}$ .

Ainsi,  $(\mathcal{M})$  est démontrée.

En conclusion,

$(\mathcal{M})$  et  $(\mathcal{P})$  sont équivalentes.

*Remarque : L'énoncé  $(\mathcal{P})$  est la version projective du théorème de Maschke. Remarquons en effet qu'il y a une correspondance bijective entre les supplémentaires de  $F$  et les projecteurs dont l'image est  $F$ , un supplémentaire de  $F$  étant le noyau d'un tel projecteur. Cette idée est à retenir; elle est parfois bien utile.*

2. Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on pose  $\pi_{\mathcal{G}}(u) = m^{-1} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}ug$ .

a) Démontrer que  $\pi_{\mathcal{G}}$  est un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$  dont l'image est  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

On procède en plusieurs étapes :

▷ Comme  $\mathcal{L}(E)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre, on sait que  $\mathcal{L}(E)$  est stable par somme, par multiplication par un scalaire et par composition. Par conséquent, si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\pi_{\mathcal{G}}(u)$  est un endomorphisme de  $E$ . Cela démontre que  $\pi_{\mathcal{G}}$  est une application de  $\mathcal{L}(E)$  vers  $\mathcal{L}(E)$ . De plus, pour tous  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{G}}(\lambda u + \mu v) &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}(\lambda u + \mu v)g \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} (\lambda g^{-1}ug + \mu g^{-1}vg) \\ &= \frac{\lambda}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}ug + \frac{\mu}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}vg \\ &= \lambda \pi_{\mathcal{G}}(u) + \mu \pi_{\mathcal{G}}(v) \end{aligned}$$

donc  $\pi_{\mathcal{G}}$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .

▷ Soit  $v \in \text{Im } \pi_{\mathcal{G}}$ . Il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $v = \pi_{\mathcal{G}}(u)$ . Soit  $g_0 \in \mathcal{G}$ . On a

$$\begin{aligned} g_0 v &= g_0 \pi_{\mathcal{G}}(u) \\ &= g_0 \left( \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}ug \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g_0 g^{-1}ug \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g_0 g^{-1}u g g_0^{-1} g_0 \quad \text{Binet} \\ &= \left( \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} (g g_0^{-1})^{-1} u (g g_0^{-1}) \right) g_0 \\ &= \left( \frac{1}{m} \sum_{h \in \mathcal{G}} h u h^{-1} \right) g_0 \quad \begin{array}{l} \text{en posant } h = g g_0^{-1}, \text{ ce qui est licite} \\ \text{car } g \mapsto g g_0^{-1} \text{ est une permutation} \\ \text{de } \mathcal{G} \text{ (de réciproque } g \mapsto g g_0) \end{array} \\ &= \pi_{\mathcal{G}}(u) g_0 \\ &= v g_0, \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $v \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ . On sait donc que  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

▷ Soit  $v \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ . On a

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{G}}(v) &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}vg \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} g^{-1}gv \quad \text{car } vg = gv \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in \mathcal{G}} v \\ &= v, \end{aligned}$$

ce qui démontre que tout élément de  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}$ .

▷ Il reste alors à conclure !

Tout d'abord, comme tout élément de  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}$ , on a  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}} \supset \mathcal{C}(\mathcal{G})$ . Combinée avec l'inclusion réciproque démontrée ci-dessus, on obtient  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}} = \mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

Par ailleurs, si l'on considère  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'inclusion  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$  dit que  $\pi_{\mathcal{G}}(u) \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$  et donc que  $\pi_{\mathcal{G}}(u)$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}$ , c'est-à-dire  $\pi_{\mathcal{G}}(\pi_{\mathcal{G}}(u)) = \pi_{\mathcal{G}}(u)$ . Cela démontre que  $\pi_{\mathcal{G}}^2 = \pi_{\mathcal{G}}$ , ce qui prouve que  $\pi_{\mathcal{G}}$  est un projecteur.

En conclusion,

$\pi_{\mathcal{G}}$  est un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$  dont l'image est  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

- b) Soit  $p$  un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } p$  est stable par  $G$ . Démontrer que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$  est un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) = \text{Im } p$ .

Là aussi, on procède en plusieurs étapes.

- ▷ On sait que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$  est un élément de  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .
- ▷ Soit  $y \in \text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p)$ . Il existe alors  $x \in E$  tel que  $y = \pi_{\mathcal{G}}(p)(x)$ . Pour tout  $g \in \mathcal{G}$ , on a  $pg(x) \in \text{Im } p$  (pardi!) donc  $g^{-1}pg(x) \in \text{Im } p$  puisque  $\text{Im } p$  est stable par  $\mathcal{G}$ . On en déduit que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)(x) \in \text{Im } p$ , c'est-à-dire  $y \in \text{Im } p$ . Donc  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) \subset \text{Im } p$ .
- ▷ Soit  $x \in \text{Im } p$ . Comme  $\text{Im } p$  est stable par  $\mathcal{G}$ , on a  $g(x) \in \text{Im } p$  pour tout  $g \in \mathcal{G}$ . Il s'ensuit que, pour tout  $g \in \mathcal{G}$ , on a  $g^{-1}pg(x) = g^{-1}g(x) = x$  puisque tout élément de  $\text{Im } p$  est fixe par  $p$ . Dès lors, on a  $\pi_{\mathcal{G}}(p)(x) = x$ , ce qui signifie que tout élément de  $\text{Im } p$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$ .
- ▷ Comme tout élément de  $\text{Im } p$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$ , on a en particulier  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) \supset \text{Im } p$ . En combinant cette inclusion avec l'inclusion réciproque démontrée ci-dessus, on obtient

$$\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) = \text{Im } p.$$

Par ailleurs, si l'on considère  $x \in E$ , l'inclusion  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) \subset \text{Im } p$  dit que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)(x) \in \text{Im } p$  et donc que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)(x)$  est fixe par  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$ , c'est-à-dire  $\pi_{\mathcal{G}}(p)(\pi_{\mathcal{G}}(p)(x)) = \pi_{\mathcal{G}}(p)(x)$ . Cela démontre que  $\pi_{\mathcal{G}}(p)^2 = \pi_{\mathcal{G}}(p)$ , ce qui prouve que

$\pi_{\mathcal{G}}$  est un projecteur.

En conclusion,

$\pi_{\mathcal{G}}(p)$  est un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) = \text{Im } p$ .

### 3. Démontrer le théorème de Maschke.

Pour démontrer  $(\mathcal{M})$ , nous allons évidemment démontrer  $(\mathcal{P})$ !

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  qui est stable par  $\mathcal{G}$ . Considérons  $F'$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  (qui existe grâce à l'axiome du choix) et considérons la projection  $p$  sur  $F$  dans la direction de  $F'$ .

D'après la question précédente,  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$  est un projecteur de  $E$  tel que  $\text{Im } \pi_{\mathcal{G}}(p) = \text{Im } p = F$ . De plus, on sait que  $\pi_{\mathcal{G}}(p) \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

On a ainsi démontré l'existence d'un projecteur  $\pi_{\mathcal{G}}(p)$  dont l'image est  $F$  tel que  $\pi_{\mathcal{G}}(p) \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ , ce qui démontre que  $(\mathcal{P})$  est vraie.

En conclusion,

le théorème de Maschke est établi!

4. a) Expliquer pourquoi le théorème de Maschke reste vrai lorsqu'on remplace  $\mathbb{C}$  par un corps de base  $K$  dont la caractéristique est ou bien nulle ou bien un nombre premier  $p$  ne divisant pas  $m$ .

C'est très simple! Dans les questions précédentes, la caractéristique de  $K$  ne peut poser problème qu'au moment de diviser par  $m$  (c'est-à-dire  $m1_K$ ) dans la formule de moyennisation : il faut que  $m \neq 0_K$  !! Pour cela, il est nécessaire et suffisant que  $K$  soit ou bien de caractéristique nulle ou bien de caractéristique  $p \in \mathbb{P}$  telle que  $p$  ne divise pas  $m$ . Dans ce cas, la démonstration effectuée dans les questions précédentes est encore valable. En conclusion,

si la caractéristique de  $K$  ne divise pas le cardinal de  $\mathcal{G}$ ,  
le raisonnement tenu dans les questions précédentes  
permet de démontrer le théorème de Maschke.

---

Remarque culturelle :

En mathématiques et plus précisément en algèbre, le théorème de Maschke est un des théorèmes fondamentaux de la théorie des représentations d'un groupe fini. Cette théorie, développée par Frobenius à partir de 1896, est une vaste branche des mathématiques. Elle permet d'obtenir des résultats très forts sur les groupes.

Le théorème de Maschke simplifie la théorie des représentations d'un groupe fini ou de sa  $K$ -algèbre en limitant l'étude aux représentations irréductibles (les autres se déduisent directement par somme directe).

---

- b) Dans cette question, le corps de base est  $\mathbb{F}_2$ . On pose  $E = \mathbb{F}_2^2$ . On considère l'endomorphisme  $v$  de  $E$  défini par  $v((1,0)) = (1,0)$  et  $v((0,1)) = (1,1)$ . Démontrer que  $\mathcal{G} = \{\text{Id}_E, v\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$  puis déterminer un sous-espace de  $E$  stable par  $\mathcal{G}$  qui n'admet pas de supplémentaire stable par  $\mathcal{G}$ . Qu'a-t-on ainsi illustré ?

Ici, on travaille dans un petit espace vectoriel. En effet, on a  $E = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ .

On peut commencer par dire que l'endomorphisme  $v$  existe et est unique puisqu'on l'a défini par son action sur une base (en l'occurrence la base canonique de  $E$ ).

On a  $v^2((1,0)) = (1,0)$  et  $v^2((0,1)) = v((1,1)) = v((1,0)) + v((0,1)) = (1,0) + (1,1) = (0,1)$ , donc  $v^2 = \text{Id}_E$ . Cela démontre que  $\mathcal{G} = \{\text{Id}_E, v\}$  est un sous-groupe fini de  $\mathcal{GL}(E)$ .

On pose  $F = \text{Vect}((1,0)) = \{(0,0), (1,0)\}$ . Il est clair que la droite  $F$  est stable par  $\mathcal{G}$  puisque  $(0,0)$  et  $(1,0)$  sont fixes par  $v$ .

Les autres droites sont  $F' = \text{Vect}((0,1)) = \{(0,0), (0,1)\}$  et  $F'' = \text{Vect}((1,1)) = \{(0,0), (1,1)\}$ . Ce sont les deux seuls supplémentaires de  $F$  dans  $E$ . Or  $v(F') = F''$  puisque  $v((0,1)) = (1,1)$  et  $v(F'') = F'$  puisque  $v((1,1)) = (0,1)$ , donc aucun de ces deux supplémentaires de  $F$  n'est stable par  $\mathcal{G}$ . Par conséquent,  $F$  n'a pas de supplémentaire stable par  $\mathcal{G}$ .

En conclusion,

si la caractéristique de  $K$  divise le cardinal de  $\mathcal{G}$ ,  
le théorème de Maschke peut être mis en défaut !