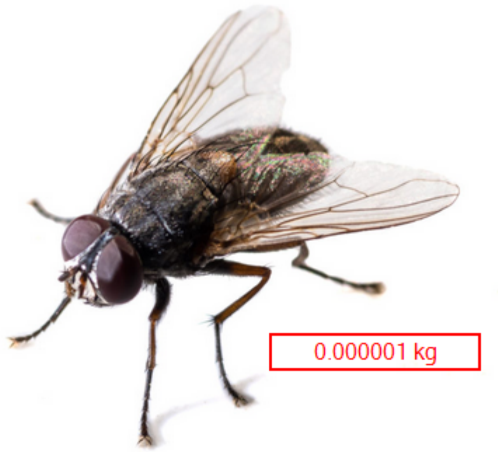
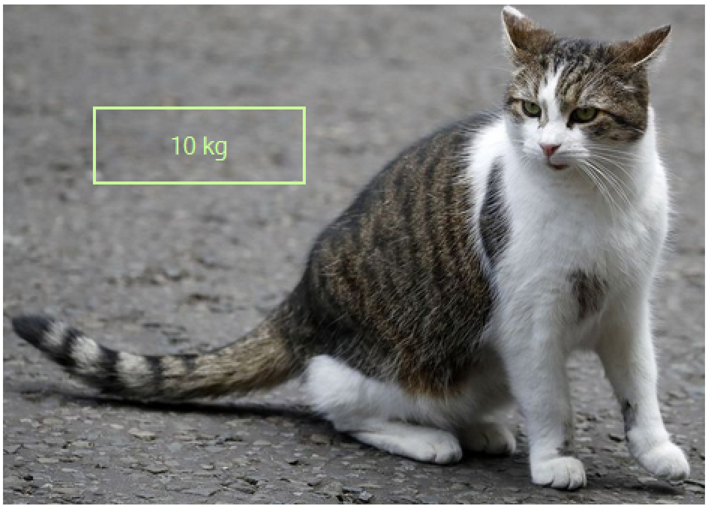
Chapitre M-4

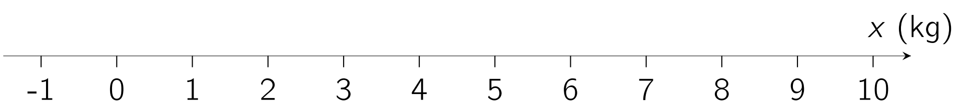
Logarithme décimal

4.1 Activité d'introduction

On se propose de représenter sur un repère les masses de quelques animaux :



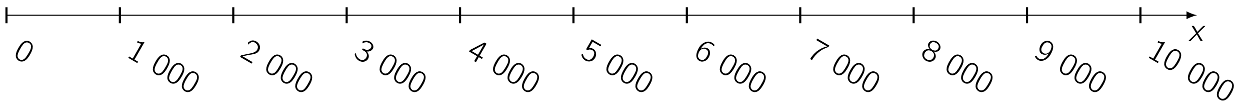




Quel est le problème rencontré ? Quelle solution pour le contourner ?

- 1

On propose un deuxième repère :



Cette échelle convient-elle pour placer tous les éléments ?

-- 2

Est-elle très satisfaisante ? **Expliquer** la réponse.

-- 4

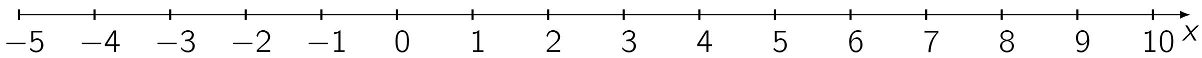
Conclusion :

Il y a quelques années (avant l'invention de la calculatrice !) les scientifiques se sont heurtés à des difficultés similaires quand ils essayaient de faire des calculs compliqués, de comparer des éléments de tailles très différentes ... Ils ont élaboré des solutions pour traiter ce genre de situations.

Donner pour chaque animal sa masse exprimée sous la forme d'une puissance de 10 :

- Cheval : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Chat : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Baleine : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Mouche : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Proposer un placement des animaux en les classant par masse sur le repère en utilisant les résultats précédents :



4.2 Le logarithme décimal

Le logarithme décimal est un extracteur de puissance de 10.

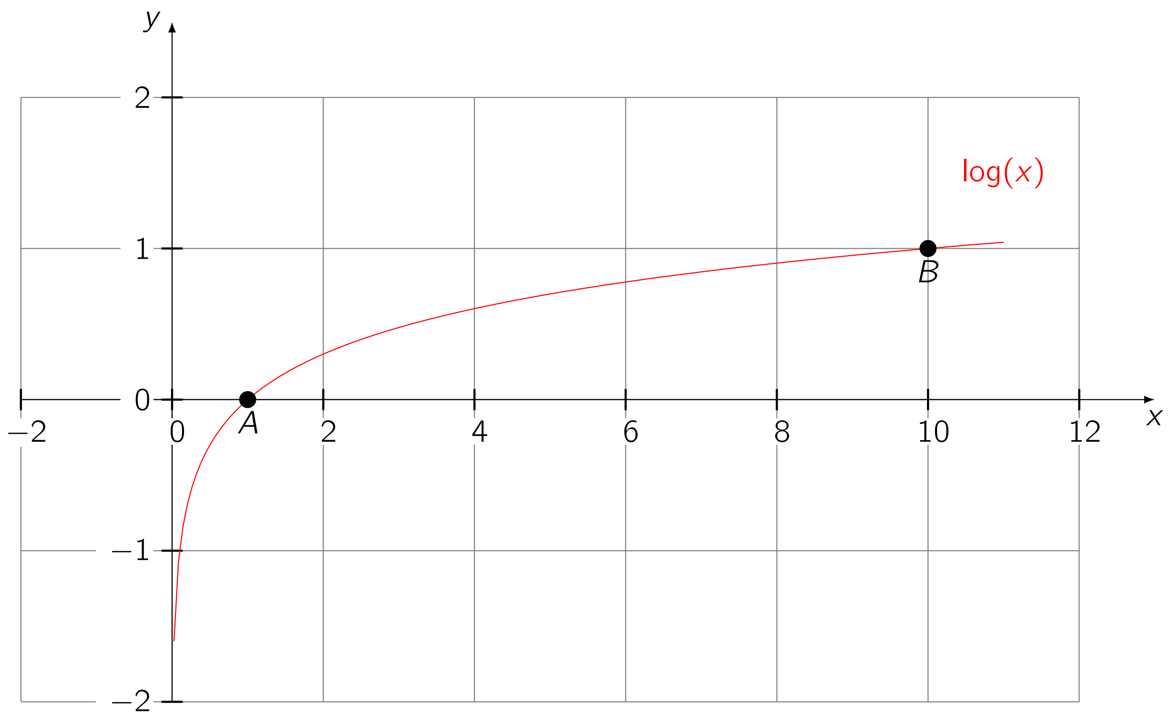
Il se note log et se dit "logarithme de base 10" (il y en a d'autres) et on a :

- $\log(10^4) = 4$
- $\log(10^5) = 5$
- $\log(10^8) = \dots\dots\dots$
- $\log(10^{11}) = \dots\dots\dots$
- $\log(1) = \dots\dots\dots$
- $\log(10) = \dots\dots\dots$

Nouvelle fonction :

On appelle logarithme décimal (ou log base 10) la fonction :

- Définie sur $]0; +\infty[$
- $f(x) = \log x$
- elle s'annule pour $x = 1$ (on a $\log 1 = 0$)



4.3 Activité : Acoustique et Éclairement

On retrouve des logarithmes décimaux quand les échelles des mesures s'étendent du très petit au très grand c'est le cas dans deux domaines de la physique (entre autre) :

- L'acoustique
- L'éclairement

Dans cette activité nous allons étudier quelques paramètres pour l'éclairement.

Notre oeil est un outil formidable qui s'adapte à l'éclairement et qui est sensible pour des valeurs allant de 0,01 lx (lumière de la lune en pleine nuit) à 100 000 lx (la lumière en plein soleil par exemple). Le lx est l'unité de l'éclairement et s'obtient avec un luxmètre :

Quelques questions :

1. Quelle serait la longueur théorique de l'axe permettant de représenter l'échelle d'éclairement visible par l'oeil si on prenait 1 cm = 1 lx ?
2. Serait-il possible de bien distinguer, sur cet axe, la limite basse ?
3. Proposer une méthode pour représenter sur une même échelle et de manière visible ces différents éclairements.
4. Représenter cette échelle.

On pourra s'aider du tableau suivant :

Éclairement (lx)	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000	100000
E (lx) puissance de 10					10^2			
$\log E$								

5. Un court de tennis doit avoir un éclairement minimal de 500 lx. Placer cet éclairement sur l'axe.
6. Une tribune extérieure d'un stade doit avoir un éclairement proche de 10 lx. Placer cette valeur sur l'axe ainsi formé.

4.4 Propriétés du logarithme

Ces propriétés resteront vraies pour les autres logarithmes vus cette année et sont à savoir utiliser !

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux nombres :

- $\log(a \times b) = \log a + \log b$ (transformation d'un produit en somme)
- $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ (transformation d'une division en soustraction)
- $\log \dfrac{1}{b} = -\log b$
- $\log 10^x = x$ ou encore $10^{\log(x)} = x$
- $\log a^n = n \log a$
- $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$

Exemples :

- $\log(5 \times 7) = \log 5 + \log 7$
- $\log 90 = \log 9 \times 10 = \log 9 + \log 10 = \log 9 = \log 3 \times 3 = \log 3 + \log 3 = 2 \log 3$

Activité facultative : vérification des propriétés à l'aide d'un tableur

Travail à destination des plus rapides ou des plus motivés avec pour objectif de prendre en main le tableur et de vérifier les formules ci-dessus.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	log(a*b)	log (a/b)	log (1/a)	- log (a)	log a + log b	log a - log b
2	=ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000)							
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

La formule rentrée dans la case A2 est : =ALEA.ENTRE.BORNES(0 ;1000) et elle permet de générer un nombre aléatoire entre 0 et 1000. Si votre tableur ne reconnait pas cette formule on peut écrire : =ALEA()*1000 à la place.

Travail : reproduire cette feuille de calcul, générer aléatoirement en étirant la formule 10 valeurs de a et b et calculer les résultats dans les colonnes C à H et conclure.

4.5 Exercices

EXERCICE 4.1. Calculer les valeurs décimales arrondies au dixième des nombres :

- $\log 10^{-12}$
- $\log 80$
- $\log 1$
- $\log 5$

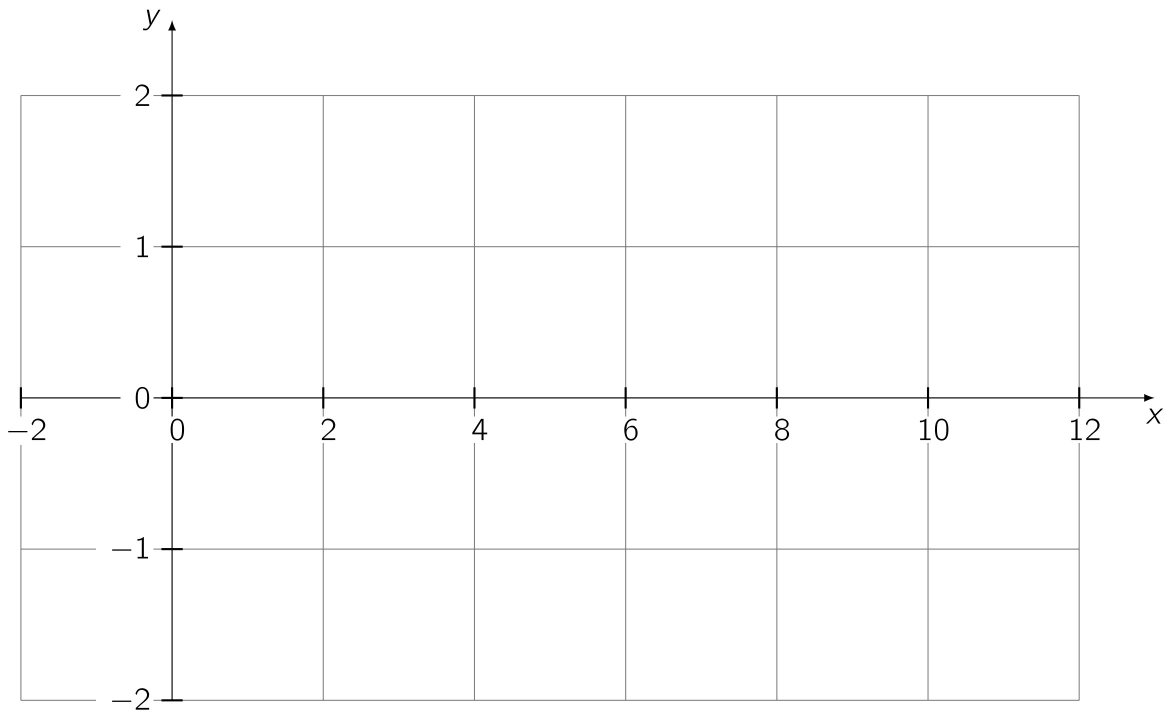
EXERCICE 4.2. Compléter le tableau :

x	1	2	4	8	16	32	64
$\log x$							

1. Donner la nature de la suite formée par la première ligne
2. Donner la nature de la suite formée par la deuxième ligne
3. Donner la raison de la première suite
4. Donner la raison de la deuxième suite
5. Calculer le log de la raison de la première suite. Que remarquez vous ?

EXERCICE 4.3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \log x$.

Représenter la fonction f sur le repère en vous aidant de votre calculatrice : (on pourra utiliser les valeurs remarquables vues dans le cours)



Dresser le tableau de variation de la fonction

EXERCICE 4.4. Acoustique.
En acoustique, le niveau d'intensité acoustique se donne en décibel. Il se calcule avec la formule : $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où :

- I représente l'intensité du son en $\mathrm{W/m^2}$
- I_0 représente l'intensité de référence du son et vaut $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$
- L est le niveau en dB

Une explosion survient et on trouve que :

- A 100 m l'intensité acoustique vaut $I_{100} = 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}$
- A 1 000 m l'intensité acoustique vaut $I_{1000} = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$

1. Calculer sans calculatrice le niveau L_{100} ressenti à 100 m
2. Calculer sans calculatrice le niveau L_{1000} ressenti à 1 000 m

EXERCICE 4.5. En chimie, le pH signifie potentiel hydrogène et mesure l'acidité. C'est en fait une valeur qui dépend de la concentration molaire de l'espèce "acide" : l'ion H_3O^+.
La formule qui définit le pH est : $\boxed{pH = -\log c}$ où c est la concentration en ion H_3O^+ et donnée en mol/L.

1. Calculer sans calculatrice le pH d'une solution où $c = 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$.
2. Calculer sans calculatrice le pH d'une solution où $c = 1\,\mathrm{mol/L}$.
3. La valeur maximale du pH est 14. Calculer la concentration correspondante en ion H_3O^+. (Rappel : il existe une propriété dans le cours pour supprimer un log)

EXERCICE 4.6. En seconde on étudie les capteurs et entre autre la thermistance : un capteur qui est une résistance électrique qui varie selon la température.
On a procédé aux relevés de mesures suivants :

T (°C)	1	10	20	40	60	80	100	110
R ( )	16330	10887	7258	3226	1434	637	283	189

1. Représenter sur votre calculatrice le nuage de point de cette série statistique
2. Afficher la courbe de tendance affine
3. Donner le coefficient R^2
4. La relation entre T et R peut-elle est modélisée par une droite ? Expliquer.
5. Choisir sur la calculatrice une régression LOG au lieu de régression X
6. Donner le nouveau R^2
7. La relation entre T et R peut-elle être modélisée par une fonction logarithmique ? Expliquer.
8. Donner l'équation de la fonction log donnée par votre calculatrice de la forme $y = a + b \ln x$

Note : ln est la fonction logarithme népérien qui sera revue plus tard mais qui est proche de la fonction log

CORRIGE 4.1

- $\log 10^{-12} = -12$
- $\log 80 = \log 8 = 0.9$
- $\log 1 = 0$
- $\log 5 = 0.7$

CORRIGE 4.2 Tableau :

x	1	2	4	8	16	32	64
$\log x$	0	0.30	0.60	0.90	1.2	1.5	1.8

1. géométrique
2. arithmétique
3. $q = 2$
4. $r = 0.3$
5. $\log 2 = 0.3$ c'est la raison de la suite arithmétique

CORRIGE 4.3 Courbe dans le cours :

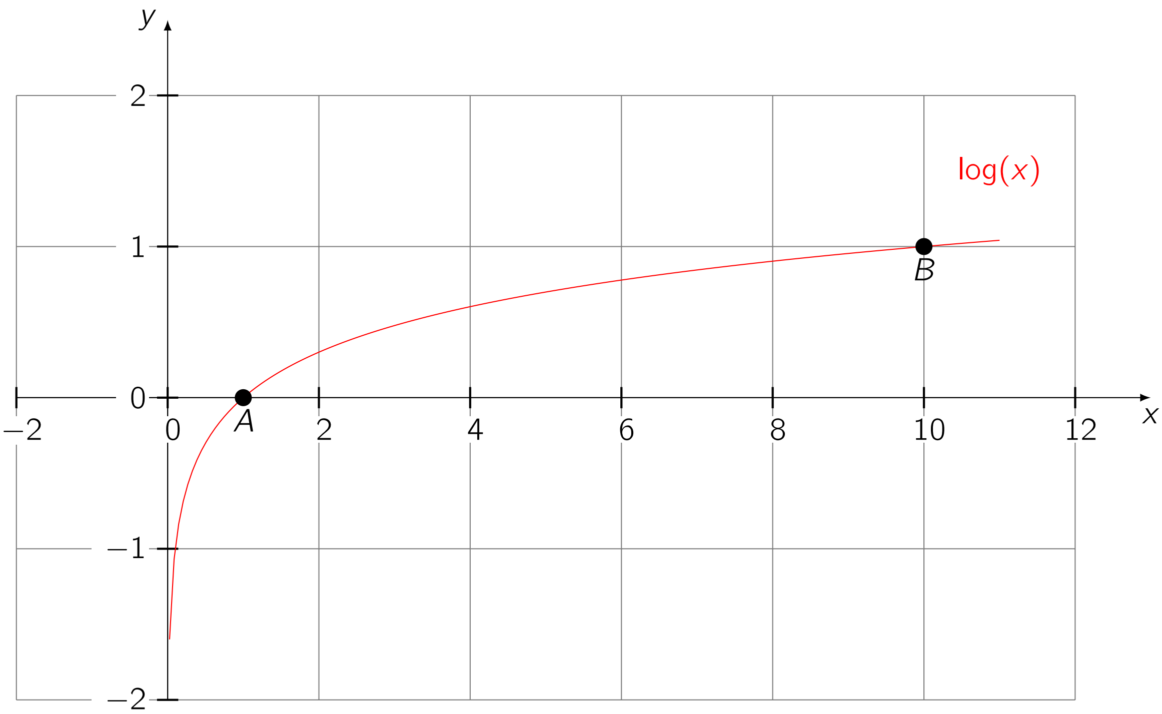


Tableau :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de log	$-\infty \nearrow +\infty$

CORRIGE 4.4 1. $L_{100} = 10 \log \dfrac{10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \log 10^{8} = 10 \times 8 \log 10 = 10 \times 8 = 80\,\text{dB}$

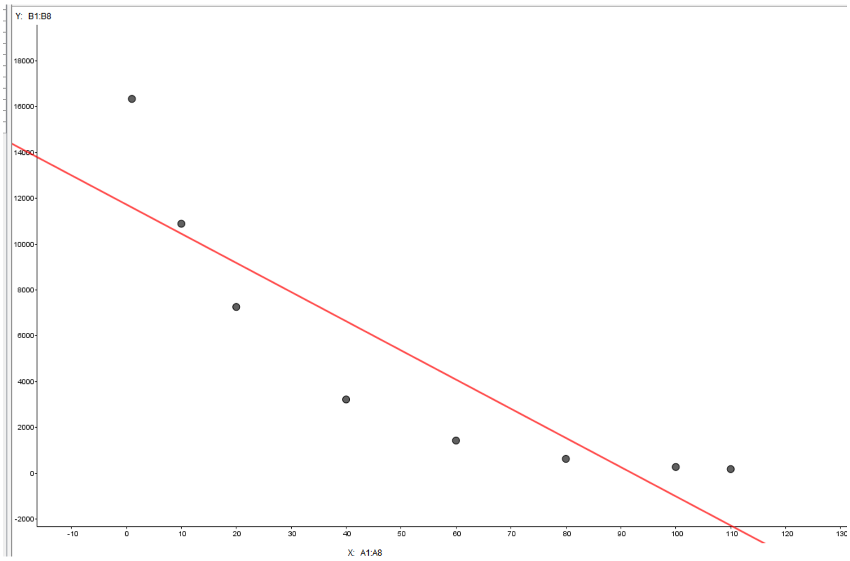
2. Un raisonnement identique donne $L_{1000} = 10 \log \dfrac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 10^6 = 10 \times 6 \log 10 = 10 \times 6 = 60\,\text{dB}$

CORRIGE 4.5 1. $pH = -\log 10^{-2} = +2 \log 10 = 2$

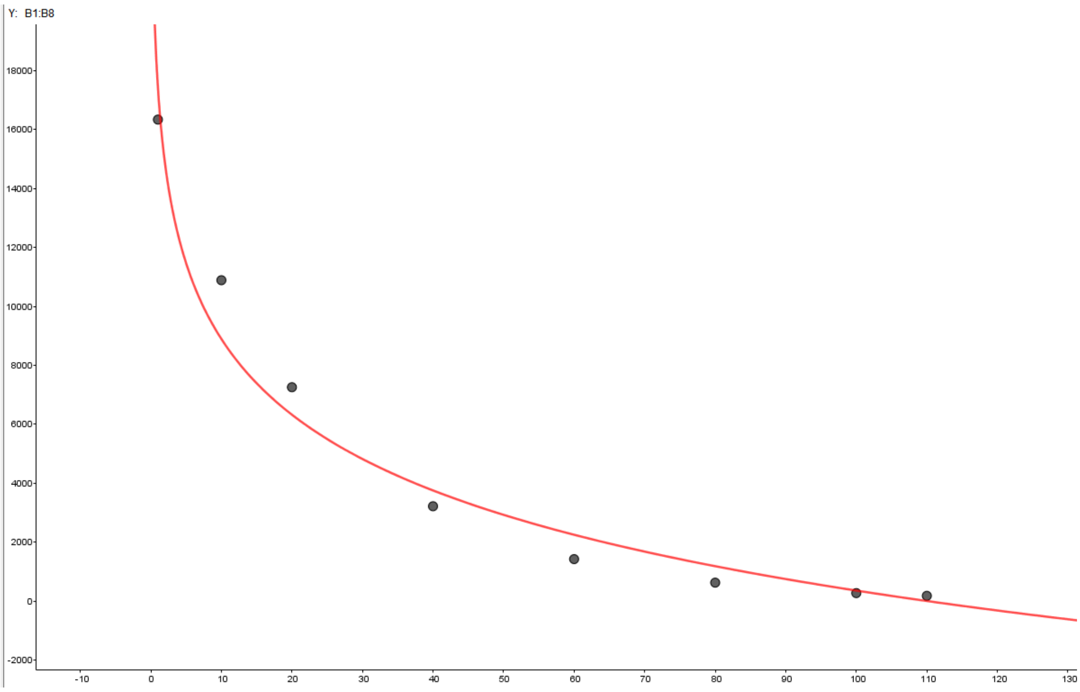
2. $pH = -\log 1 = 0$

3. $c = 10^{-pH} = 10^{-14}\,\text{mol/L}$.

CORRIGE 4.6 On trouve un $R^2 = 0.78$ pour la modélisation affine ce qui est insuffisant :



De plus, la forme du nuage de point n'est pas du tout une droite.



Ici $R^2 = 0.97$ ce qui est acceptable : le modèle convient

On obtient une équation : $y = 17422.2 - 3703 \ln x$