Mathématiques ENS Lyon

Ulysse Mounoud

Exercice

On définit un polygone comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^2$. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^2$, on définit leur somme comme $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) P est un polygone avec un centre de symétrie.

(ii) P est une somme finie de segments de $\mathbb{R}^2$.

Soient P et Q deux polygones avec un centre de symétrie. Montrer que l'aire de $P + tQ$ pour $t > 0$ est polynomiale en t.

Déroulé

Commencer par le sens réciproque (les propriétés être un polygone et avoir un centre de symétrie sont conservées par somme). Le sens direct se fait par récurrence. Pour l'hérédité il faut réussir à écrire le polygone considéré comme somme d'un polygone avec centre de symétrie et d'un segment (prendre un des côtés du polygone). L'examinateur voulait aborder la question suivante, je n'ai donc pas eu le temps de bien traiter la récurrence.

Pour la deuxième question, je n'ai réussi qu'à traiter des cas simples. Le résultat est vrai pour tout polygone, mais la caractérisation précédente le rend plus facile à démontrer.