MP*1

Quelques propriétés de la marche de Bernoulli symétrique

I. Généralités

1.a) Clairement, S_n a, presque sûrement, la parité de n. Ainsi, $P(S_n = k) = 0$ si n et k n'ont pas la même parité. Il en est de même si $k \notin \{0, \dots, n\}$.

On suppose $k \in \{0, \dots, n\}$ et $k \equiv n\,[2]$. On a :

$$n = 2\left(\frac{n-k}{2}\right) + k \qquad \text{et} \qquad k = -\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left[k + \frac{n-k}{2}\right].$$

Pour que $S_n = k$, il faut et il suffit que :

$$|\{i \in \{1, \dots, n\},\ X_i = 1\}| = k + \frac{n-k}{2} \quad \text{et} \quad |\{i \in \{1, \dots, n\},\ X_i = -1\}| = \frac{n-k}{2}.$$

Ainsi :

$$P(S_n = k) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\},\\ |I|=(n-k)/2}} = P\left(\left(\cap_{i\in I}(X_i = -1)\right) \cap \left(\cap_{i \in \{1,\dots,n\}\setminus I}(X_i = 1)\right)\right) = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

b) Il suffit de montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad \binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Or, si $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Ce quotient est supérieur ou égal à 1 si et seulement si $k \leq \dfrac{n-1}{2}$. On en déduit que

$$k \longmapsto \binom{n}{k}$$

est unimodale et atteint son maximum en $\frac{n}{2}$ si n est pair, en $\frac{n\pm1}{2}$ si n est impair. Le résultat suit.

c) Supposons n pair $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. Alors

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}.$$

La formule de Stirling assure que

$$p! \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}.$$

En l'appliquant aux factorielles mises en jeu

$$(2m)! \sim 4^m m^{2m} e^{-2m} \sqrt{4\pi m}, \quad (m!)^2 \sim m^{2m} e^{-2m} 2\pi m, \quad \binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}.$$

C'est l'équivalent demandé pour n pair. Le cas n impair est analogue. Notant $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$, on a

$$(2m+1)! \sim (2m+1)^{2m+1} e^{-2m-1} \sqrt{4\pi m} \sim (2m)^{2m+1} \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{2m+1} e^{-2m-1} \sqrt{4\pi m} \sim (2m)^{2m+1} e^{-2m} \sqrt{4\pi m},$$

$$m!(m+1)! \sim m^{2m+1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m e^{-2m-1} 2\pi m \sim m^{2m+1} e^{-2m} 2\pi m.$$

2.a) On utilise le développement de $(1+u)^\alpha$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pour u dans $]-1, 1[$, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2k+1}{2} \right) \right) u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \, n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n \, (n!)^2} u^n.$$

Par suite, pour t dans $]-1, 1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \, (n!)^2} t^{2n}.$$

Si n est impair le coefficient de t^n est nul donc égal à $P(S_n = 0)$. Si n est pair, ce coefficient est égal à :

$$\binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n} = P(S_n = 0).$$

On a montré l'égalité :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

b) La série

$$\sum_k P(T_m = k)$$

converge absolument. La série entière de terme général $P(T_m = k)\, x^k$ converge donc normalement sur l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction g est définie et continue sur $[-1, 1]$.

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. l'événement $(S_n = 0)$ implique $(T \in \{1, \ldots, n\})$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = 0, T = k) = \sum_{k=1}^{n} P(T = k, S_n - S_k = 0).$$

Acceptons provisoirement que

$$S_n - S_k \sim S_{n-k},$$

ce qui entraîne

$$P\left(S_n - S_k = 0\right) = P\left(S_{n-k} = 0\right),$$

d'où l'égalité :

$$P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(T = k)\, P(S_{n-k} = 0).$$

Justifions le point admis. Soit $j \in \{1, ..., k\}$. On a : $S_{m+j} - S_m = X_{m+1} + \cdots + X_{m+j}$. Donc :

$$(S_{m+1} - S_m, S_{m+2} - S_m, \ldots, S_{m+k} - S_m) = (X_{m+1}, X_{m+1} + X_{m+2}, \ldots, X_{m+1} + \cdots + X_{m+k}).$$

Comme les $X_i, i \in \mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, les variables aléatoires vectorielles $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_{m+1}, \ldots, X_{m+k})$ sont égales en loi. Leurs images par la fonction déterministe

$$\Phi\ : (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \longmapsto x_1 + \cdots + x_k$$

le sont aussi, c'est-à-dire :

$$(X_{m+1}, X_{m+1} + X_{m+2}, \ldots, X_{m+1} + \cdots + X_{m+k}) \sim (X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + \cdots + X_k).$$

3.b) On a, si $t \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)\, t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = 0)\, t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} P(T = k)\, P(S_{n-k} = 0) \right) t^n.$$

On reconnaît le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon supérieur ou égal à 1. On en déduit :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n)\, t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)\, t^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} P(T = k)\, P(S_{n-k} = 0) \right) t^n,$$

d'où, pour $t \in]-1, 1[$:

$$f(t) = 1 + f(t)\, g(t).$$

c) En combinant les questions 2.a) et 3.b), il vient

$$\forall t \in]-1, 1[, \qquad f(t)\,(1 - g(t)) = 1, \qquad g(t) = \frac{f(t) - 1}{f(t)} = 1 - \sqrt{1 - t^2}.$$

Par conséquent,

$$P(T < +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) = g(1) = 1.$$

d) On développe la fonction g en série entière. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2} u^n.$$

En intégrant cette série entière, pour $u \in]-1, 1[$:

$$-2\left(\sqrt{1-u} - 1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2} \frac{u^{n+1}}{n+1}, \qquad \sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2} \frac{u^{n+1}}{2(n+1)},$$

et

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\frac{t^{2n+2}}{2n+2}.$$

On a donc (unicité des coefficients d'une série entière) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(T = 2n+1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = 2n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{1}{4^{n-1}(2n)}.$$

II. La marche visite tout site

4.a) On sait que $(M_n \geq 0$ est presque sûr. Pour $m = 0$, on a

$$(M_n \geq 0) \cap (S_n < 0) = (S_n < 0).$$

Comme $(X_1, \dots, X_n)$ et $(-X_1, \dots, -X_n)$ ont même loi, $S_n \sim -S_n$, d'où

$$P(S_n < 0) = P(-S_n < 0) = P(S_n > 0).$$

Supposons $m \geq 1$. Alors, puisque X est à valeurs dans $\{\pm 1\}$, $(M_n \geq m)$ implique $(T_m \leq k)$. La formule des probabilités totales amène que

$$P((M_n \geq m) \cap (S_n < m)) = \sum_{k=1}^{m} P((T_m = k) \cap (S_n < m)).$$

Mais, pour $1 \leq k \leq m$,

$$(T_m = k) \cap (S_n < m) = (T_m = k) \cap (X_{k+1} + \cdots + X_n < 0).$$

L'argument employé dans la fonction 3.a) entraîne que

$$P((T_m = k) \cap (S_n < m)) = P(T_m = k)\; P(S_{n-k} < 0).$$

Par symétrie de S_{n-k}, on en tire

$$P((T_m = k) \cap (S_n < m)) = P(T_m = k)\; P(S_{n-k} > 0) = P((T_m = k) \cap (S_n > m)).$$

Mais l'événement $(S_n > m)$ est réunion disjointe des $(T_m = k) \cap (S_n > m)$ pour k dans $\{1, \dots, m\}$, d'où l'égalité

$$P(S_n > m) = \sum_{k=1}^{n} P((T_m = k) \cap (S_n > m)).$$

On en déduit le résultat.

b) L'événement $(M_n \geq m)$ est réunion disjointe de $(M_n \geq m) \cap (S_n < m)$, de $(S_n > m)$ et de $(S_n = m)$. Par additivité de P.

$$P(M_n \geq m) = P((M_n \geq m) \cap (S_n < m)) + P(S_n > m) + P(S_n = m) = 2P(S_n > m) + P(S_n = m)$$

où la dernière égalité vient de la question a).

c) La probabilité $P(M_n = m)$ est égale à

$$P(M_n \geq m) - P(M_n \geq m+1) = 2(P(S_n > m) - P(S_n > m+1)) + (P(S_n = m) - P(S_n = m+1)).$$

Autrement dit

$$P(M_n = m) = P(S_n = m+1) + P(S_n = m).$$

Puisque S_n a presque sûrement la parité de n, on en déduit le résultat de l'énoncé.

5. a) On a

$$P(M_n \leq m) = \sum_{k=0}^{m} P(M_n = k).$$

Mais, grâce aux questions 4.c, 1.b) et 1.c), on a

$$\forall k \in \{0, \ldots, m\}, \qquad P(M_n = k) \longrightarrow 0.$$

Le résultat suit.

b) Il suffit de noter que $(T_m > n) = (M_n \leq m)$ pour obtenir que

$$P(T_m > n) \longrightarrow 0,$$

d'où, par continuité décroissante de P, $P(T_m = +\infty) = 0$.

III. Fonction génératrice de T_m

6.a) Comme dans la question précédente,

$$(T_1 > 2k+1) = (M_{2k+1} \leq 0) = (M_{2k+1} = 0).$$

b) Ainsi

$$P(T_1 > 2k+1) = P(S_{2k+1} = 1) = \frac{\binom{2k+1}{k}}{2^{2k+1}}.$$

Donc

$$P(T_1 = 2\ell+1) = P(T_1 > 2\ell-1) - P(T_1 > 2\ell+1) = P(M_{2\ell-1}0) - P(M_{2\ell+1} = 0).$$

Cette probabilité vaut donc

$$\frac{1}{2^{2\ell-1}}\binom{2\ell-1}{\ell-1} - \frac{1}{2^{2\ell+1}}\binom{2\ell+1}{\ell} = \frac{1}{2^{2\ell-1}} \times \frac{(2\ell-1)!}{(\ell-1)!\,\ell!} - \frac{1}{2^{2\ell+1}} \times \frac{(2\ell+1)!}{\ell!\,(\ell+1)!}$$

$$= \frac{1}{2\ell+1} \times \frac{(2\ell-1)!}{\ell!\,(\ell+1)!}\,[4\ell(\ell+1) - (2\ell+1)2\ell] = \frac{1}{2^{2\ell+1}(\ell+1)}\binom{2\ell}{\ell}.$$

7. a) On a :

$$g_1(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(T_1 = 2m+1)\, t^{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2m+1}(m+1)}\binom{2m}{m}\, t^{2m+1}.$$

Or, on a vu à la question 3.d) que :

$$g(t) = 1 - \sqrt{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\frac{t^{2n+2}}{2n+2}.$$

En divisant par t, on obtient, pour $t \in]-1,1[$:

$$\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\frac{t^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{t^{2n+1}}{n+1} = g_1(t).$$

b) La variable aléatoire T_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa fonction génératrice n'est pas dérivable en 1.Il s'ensuit que $E(T_1) = +\infty$.

8.a) Les variables aléatoires T_i sont presque sûrement finies d'après la question 5.b). Posons, pour k dans $\{1,\ldots,m\}$

$$A_k = (T_1 = t_1, T_2 - T_1 = t_2, \ldots, T_k - T_{k-1} = t_k)\,.$$

Alors

$$A_{k+1} = A_k \cap B_k,$$

où on a posé

$$B_k = \bigcap_{j=0}^{t_{k+1}-1} (S_{t_1+t_2+\cdots+t_k+j} - S_{t_1+\cdots+t_k} \neq 0) \cap (S_{t_1+t_2+\cdots+t_k+t_{k+1}} - S_{t_1+\cdots+t_k} = 0).$$

Comme 1_{A_k} est fonction déterministe de $X_1,\ldots,X_{t_1+\cdots+t_k}$, alors que 1_{B_k} est fonction déterministe des $X_{t_1+\cdots+t_k+j}$, $1 \le j \le t_{k+1}$, les événements A_k et B_k sont indépendants. Ainsi

$$P(A_{k+1}) = P(A_k)\;P(B_k).$$

Il reste à calculer $P(B_k)$. Posons $t = t_1 + \cdots + t_k$. On a l'égalité en loi

$$(S_{t+1} - S_t, S_{t+2} - S_t, \ldots, S_{t+t_{k+1}} - S_t) \sim (S_1, S_2, \ldots, S_{t_{k+1}}),$$

ce qui montre que

$$P(B_k) = P(T = t_{k+1}).$$

b) La loi du vecteur aléatoire $(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_m - T_{m-1})$ est, d'après la question 8.a), celle d'un vecteur aléatoire dont les composantes sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de T_1. Les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_m - T_{m-1}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de T_1.

c) Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \ge 2$. On a :

$$T_m = (T_m - T_{m-1}) + (T_{m-1} - T_{m-2}) + \cdots + (T_2 - T_1) + T_1.$$

Les variables aléatoires étant mutuellement indépendantes, pour $t \in]-1,1[$:

$$g_m(t) = G_{T_1}(t) \times G_{T_2-T_1}(t) \times \cdots \times G_{T_m-T_{m-1}}(t) = (g_1(t))^m\,.$$

IV. Comportement asymptotique en loi de T_m

9. Soient f dans C, ℓ la limite de f en $+\infty$, ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction g définie par

$$\forall x \in]0,1], \quad g(x) = f(\ln(1/x)) \quad \text{et} \quad g(0) = \ell$$

est continue sur $[0,1]$. Elle vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = g(e^{-t}).$$

Le théorème de Weierstrass donne un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \qquad |P(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad E(t) = P(e^{-t}).$$

Alors E est dans le sous-espace de C engendré par $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Si t est dans $\mathbb{R}^+$, e^{-t} est dans $[0,1]$ et donc

$$|f(t) - E(t)| \leq \varepsilon.$$

10.a) Prenons d'abord $f = e_\lambda$ avec λ dans $\mathbb{R}^+$. Alors, d'après la formule admise (1) et l'hypothèse (2) :

$$E(f(Z_n)) = E(\exp(-\lambda Z_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e_\lambda \varphi.$$

Par linéarité de l'espérance, de l'intégrale et de la limite, cette relation s'étend en particulier aux éléments de V.

On démontre le cas général par approximation. Soient f dans C, ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ et g dans V tel que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Alors, pour n dans $\mathbb{N}$

$$|E(f(Z_n)) - \int_0^{+\infty} f\varphi| \leq |E(f(Z_n)) - E(g(Z_h))| + |E(g(Z_n) - \int_0^{+\infty} g\varphi| + |\int_0^{+\infty} g\varphi - \int_0^{+\infty} f\varphi|.$$

Par ailleurs

$$|E(f(Z_n)) - E(g(Z_h))| \leq E\left(|f(Z_n) - g(Z_n)|\right) \leq \varepsilon,$$

$$\left|\int_0^{+\infty} g\varphi - \int_0^{+\infty} f\varphi\right| = \left|\int_0^{+\infty} (g-f)\varphi\right| \leq \int_0^{+\infty} \varphi|f-g| \leq \varepsilon.$$

Enfin, on dispose de N tel que

$$\forall n \geq N, \qquad |E(g(Z_n) - \int_0^{+\infty} g\varphi| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour $n \geq N$:

$$|E(f(Z_n)) - \int_0^{+\infty} f\varphi| \leq 3\varepsilon.$$

b) Il s'agit d'étendre le résultat de a) à la fonction bornée mais non continue $f = 1_{]x,+\infty[}$. On ne peut évidemment pas procéder par approximation uniforme, mais une technique d'encadrement est possible. Soit ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. On considère les deux fonctions f^- et f^+ définies de la façon suivante.

La fonction f^- vaut 0 sur $[0,x]$, 1 sur $[x+\varepsilon,+\infty]$ et est affine sur $[x,x+\varepsilon]$. La fonction f^+ vaut 0 sur $[0,x-\varepsilon]$, 1 sur $[x,+\infty]$ et est affine sur $[x-\varepsilon,x]$. On a

$$f^- \leq f \leq f^+ \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty}(f^+-f^-)\varphi \leq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi.$$

Par croissance de l'espérance, on a, pour tout n :

$$E(f(^-(Z_n)) \leq E(f(Z_n)) \leq E(f^+(Z_n)).$$

Puisque f^+ et f^- sont dans C, on peut appliquer a). Il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \qquad E(f^-(Z_n)) \geq \int_0^{+\infty} f^-\varphi - \varepsilon \geq \int_0^{+\infty} f\varphi - \varepsilon - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi$$

et tel que

$$\forall n \geq N, \qquad E(f^+(Z_n)) \leq \int_0^{+\infty} f^+\varphi + \varepsilon \leq \int_0^{+\infty} f\varphi + \varepsilon + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi.$$

Ainsi, pour $n \geq N$:

$$\int_0^{+\infty} f\varphi - \varepsilon - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi \leq E(f(Z_n)) \leq \int_0^{+\infty} f\varphi + \varepsilon + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi.$$

Il reste à observer que,

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Les derniers détails de rédaction entièrement taupinale, faciles, sont pour le lecteur.

11. Soit λ dans $\mathbb{R}^+$. On a, grâce à la question 8.c) :

$$E(\exp(\lambda Z_n) = G_{T_n}\left(\exp(-\frac{\lambda}{m^2})\right) = g_1\left(\exp(-\frac{\lambda}{m^2})\right)^m.$$

Pour conclure, il faut donc déterminer le comportement asymptotique de g_1 en 1. Posant $t = 1-h$, on a aussitôt le développement :

$$g_1(t) \underset{h\to 0}{=} 1 - \sqrt{2h} + o(\sqrt{h})$$

Comme

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{m^2}\right) = 1 - \frac{\lambda}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

il vient bien

$$g_1\left(\exp(-\frac{\lambda}{m^2})\right)^m = \exp\left(m\ln(1-\frac{\sqrt{2\lambda}}{m}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-\sqrt{2\lambda}).$$ [1]

1. Ce résultat a été établi par Paul Lévy. On observera que l'on vient d'étudier le comportement asymptotique en loi d'une somme de variables i.i.d qui n'ont pas de moment d'ordre 2 (ni même d'ordre 1) et ne vérifie donc pas le théorème limite central. On a cependant, avec une normalisation par m^2 plutôt que $\sqrt{m}$, convergence vers la loi de densité φ.

V. Un calcul de transformée de Laplace

12.a) La fonction

$$t \longmapsto \exp\left(-y^2t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$$

tend vers 0 en 0, est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est majorée par

$$t \longmapsto \exp\left(-y^2t^2\right),$$

donc $O(1/t^2)$, donc intégrable en $+\infty$, d'où le résultat.

b) La fonction u définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad u(t) = yt - \frac{x}{t}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad u'(t) = y + \frac{x}{t^2}.$$

Elle tend vers $-\infty$ en 0, vers $+\infty$ en $+\infty$ et réalise donc un C^1-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

c) La question précédente légitime le changement de variable. Pour $t > 0$ et u réel, on a :

$$yt - \frac{x}{t} = u \Longleftrightarrow t = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4xy}}{2y}.$$

D'autre part, la formule précédente entraîne

$$y^2t^2 - 2xy + \frac{x^2}{t^2} = u^2.$$

La fonction

$$u \longmapsto \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4xy}} \exp\left(-u^2\right)$$

est impaire, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut donc 1. Il s'ensuit bien que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} \exp(-2xy).$$

13. a) On effectue le changement de variable $s = t^2$, i.e. $t = \sqrt{s}$. Il vient

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-y^2s - \frac{x^2}{s}\right)}{2\sqrt{s}} \mathrm{ds}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-y^2s - \frac{x^2}{s}\right)}{\sqrt{s}} \mathrm{ds} = \frac{\sqrt{\pi}}{y} \exp(-2xy).$$

b) Posons

$$v(x,s) = \frac{\exp\left(-y^2s - \frac{x^2}{s}\right)}{\sqrt{s}}.$$

On a, pour x et s dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,s) = \frac{-2x\ \exp\left(-y^2 s - \frac{x^2}{s}\right)}{s^{3/2}}.$$

Si $b > a > 0$, on a, pour $x \in [a,b]$ et $s > 0$:

$$\left|\frac{-2x\ \exp\left(-y^2 s - \frac{x^2}{s}\right)}{s^{3/2}}\right| \leq \frac{2b\ \exp\left(-y^2 s - \frac{a^2}{s}\right)}{s^{3/2}}.$$

La fonction majorante est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, indépendante de x. Elle se prolonge continûment par 0 en 0 car, par croissance comparée,

$$u^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{u}\right) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Elle est $O(1/s^2)$ en $+\infty$ donc intégrable. Grâce au théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2x\ \exp\left(-y^2 s - \frac{x^2}{s}\right)}{s^{3/2}} \mathrm{ds}.$$

c) En utilisant les deux questions précédentes, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-y^2 s - \frac{x^2}{s}\right)}{s^{3/2}} \mathrm{ds} = \frac{\sqrt{\pi}}{x} \exp(-2xy).$$

En prenant

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \qquad y = \sqrt{\lambda},$$

on obtient bien

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2s}\right)}{s^{3/2}} \exp(-\lambda s) \mathrm{ds} = \sqrt{2\pi} \exp(-\sqrt{2\lambda}).$$