Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 07/01/2021

DM n° 10 : Calcul intégral

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm10-nom.pdf` (par exemple `dm10-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus des exercices et problèmes ci-dessous obligatoires, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 8 de la sélection de problèmes sur ma page web (moyenne arithmético-géométrique).

Suggestion de travail pour les vacances :

- Reprendre entièrement votre cours de la dernière période (depuis les vacances de la Toussaint). Revoir aussi rapidement les chapitres précédents pour consolider les notions.
- Reprendre les exercices « classiques » des chapitres de la dernière période. (voir liste ci-dessous). Comme lors des dernières vacances, reprendre signifie :
  - essayer de les refaire soi-même ;
  - confronter votre solution ou votre recherche à la correction qu'on en a donnée
  - si vous n'avez pas trouvé la solution par vous-même, bien étudier la correction, en vous demandant d'une part ce qui vous a manqué pour trouver, d'autre part ce qui aurait pu vous mettre sur la piste. Dans ce cas, reprendre l'exercice 3 ou 4 jours plus tard.
- Si vous n'en avez pas eu le temps jusque là : reprendre vos DM et DS, confronter votre copie au corrigé (même si vous avez réussi à répondre aux questions, il est possible que vous trouviez dans le corrigé d'autres méthodes intéressantes). Essayer de voir (avec corrigé si nécessaire) les questions ou parties auquelles vous n'aviez pas eu le temps de répondre.
- Faire le DM ci-dessous.
- Terminer les exercices des chapitres 10 et 11
- Commencer de regarder les exercices du chapitre 12. En rapport avec le cours vu avant les vacances, vous pouvez pour le moment faire les exercices 1 à 10. Les suivants utilisent des propriétés liées à la monotonie (convergence monontone, suites adjacentes etc) que vous connnaissez déjà, vous pouvez les regarder aussi (jusqu'au 16)
- Faire le problème suggéré en plus ci-dessus et d'autres sur d'autres thèmes déjà étudiés.
- Vous reposer. Passer de joyeuses fêtes dans ce contexte morose. Mais en comité restreint.

Liste des exercices importants sur lesquels concentrer vos révisions :
Cette liste est non exhaustive et à adapter pour chacun. Selon votre niveau, vous pouvez avoir intérêt à regarder aussi d'autres exercices, plus simples, ou plus difficiles. Les deux derniers chapitres incluent des exercices que nnous n'avons pas encore vus. Dans ce cas, concentrez votre préparation sur ces exercices. Les exercices agrémentés d'une astérisque sont surtout importants pour la tête de classe.

- Chapitre 6 : 5 - 7 - 9 - 11 - 15 - 18 - 20* - 22 - 23 - 27 - 31 - 32 - 35 - 36 - 41 - 44*
- Chapitre 7 : 3 - 5 - 9* - 12 - 20 - 21 - 27 - 28 - 29 - 30* - 36 - 38 - 43 - 45 - 48* - 49 - 53 - 56
- Chapitre 8 : 1 - 7 - 10 - 11 - 16 - 18 - 22 - 27 - 30 - 31 - 35
- Chapitre 9 : 1 - 2 - 6 - 11 - 15
- Chapitre 10 : 1 - 2 - 7 - 10 - 12 - 14 - 15* - 16 - 21
- Chapitre 11 : 1 - 7 - 8

Exercice 1 – (Exercice technique)

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\ \mathrm{d}x$
   (b) $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$
   Indication : Vous pouvez essayer de « séparer » la contribution des racines en les ramenant au dénominateur. Mais attention en faisant cela au problème de la définition en 0 : il faudra enlever l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans un premier temps. D'autres méthodes, malheureusement plus calculatoires, permettent d'éviter ce problème.
   (c) $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\mathrm{Arccos}(x)}\ \mathrm{d}x$
   (d) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\ \mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)}$
   (e) $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)\ \mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{(x+2)\ \mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+5)}$.
2. Calculer les primitives des fonctions suivantes, sur des domaines à préciser.
   (a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$
   (b) $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{-\ln(x)-\ln(x)^2}$
   (c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$
   (d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$
   (e) $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 2 – (Formule de Plouffe, 1995)

Nous démontrons ici une formule remarquablement simple permettant de calculer assez rapidement et de façon indépendante les chiffres de π en base 2.

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

1. Soit $a \in]0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,a[$, et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\left|\frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k}\right| \leqslant \frac{a^{8(n+1)+k}}{1-a^8}.$$
2. En déduire que
$$\int_0^a \frac{t^k}{1-t^8}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{8n+k+1}}{(8n+k+1)},$$
   puis que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = -16\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\ \mathrm{d}x$$
3. Quelles sont les racines de $16 - X^8$? Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ ce polynôme et remarquer que certains des facteurs apparaissant dans cette décomposition divisent aussi $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$.
4. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\ \mathrm{d}x$ en utilisant une décomposition en éléments simples de la fraction (ne pas oublier de mettre un numérateur de degré 1 lorsque le dénominateur est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ de degré 2). Conclure.

Problème 1 – Démonstration classique de la formule de Stirling

1. **Question préliminaire.** Développement limité du ln.

   Montrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que lorsque x est au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

2. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

   (a) Calculer I_0 et I_1.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

   (c) En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

   (d) Étudier le sens de variation de I_n et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$.

   (e) En déduire la limite de $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

3. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

   (a) Soit $u_n = S_n - S_{n-1}$. Montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   (On pourra utiliser un développement limité du logarithme)

   (b) En déduire que S_n admet une limite finie S dans $\mathbb{R}$.

   (c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En calculant de deux manières la limite de $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S.

   (d) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.

Problème 2 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On note pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

On pourra utiliser, sans le justifier, le développement limité à l'ordre 3 du sin *au voisinnage de* 0*, qu'on rappelle ici exprimé sous forme d'un équivalent :*

$$\sin(t) - t \underset{0}{\sim} -\frac{t^3}{6}.$$

1. **Étude de $I(x)$**

   (a) Montrer que $I(x)$ est bien définie pour toute valeur de x.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$, montrer que $I(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, qu'on note

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

2. **Valeur de I (première méthode)**

   (a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t$.

      i. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.

      iii. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$, alors $J_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) En considérant la fonction $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$, en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

3. **Valeur de I (deuxième méthode)**

On admet dans cette question le théorème de Fubini pour les intégrales : Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y.$$

(a) Montrer que pour tout $u > 0$, et tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y = \frac{\sin(x)}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu})$.

(b) En déduire que pour tout $u > 0$, on a :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu})\ \mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1 - \mathrm{e}^{-yu}(\cos(u) + y\sin(u))}{1 + y^2}\ \mathrm{d}y.$$

(c) À l'aide d'un passage à la limite dont on justifiera soigneusement toutes les étapes, en déduire la valeur de I (on pourra procéder par majorations).

4. **Estimation du reste** À l'aide d'intégrations par parties, montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$