Samedi 30/05/2020

A. Troesch

Troisième Devoir Confiné - DS 8 (4h)

Correction du problème 1 – Autour du théorème de Cayley et Hamilton

1. Invariance par similitude.

   (a) Soit P un matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$. On a alors

   $$\chi_B(X) = \det(XI_n - B) = \det(XI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(XI_n - A)P) = \det(P)\det(P^{-1})\det(XI_n - A) = \boxed{\chi_A(X)}.$$

   (b) Avec les mêmes notations, $A = PBP^{-1}$. Comme de plus $\chi_A = \chi_B$, et pour tout k, $A^k = PB^kP^{-1}$, on obtient :

   $$\boxed{\chi_A(A) = P\chi_A(B)P^{-1} = P\chi_B(B)P^{-1} = 0}.$$

2. Expression d'un coefficient du polynôme caractéristique.

   (a) Soit (i, j) tel que $i \neq j$. En supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice I, on supprime le les coefficients diagonaux en position (i, i) et en position (j, j). Ainsi, il ne reste plus que $n - 2$ coefficients de degré 1, les autres étant des constantes. Lorsqu'on calcule le déterminant avec la formule développée (somme sur $\mathfrak{S}_n$), les différents produits intervenant dans cette somme étant pris sur des coefficients 2 à 2 distincts, au plus $n - 2$ d'entre eux sont donc de degré 1, les autres étant des constantes. Ainsi, chacun de ces produits est de degré au plus $n - 2$, donc leur somme aussi, soit :

   $$\boxed{\deg(\Delta_{i,j}(XI_n - A)) \leqslant n - 2}$$

   (b) On effectue un développement suivant la première colonne pour le calcul de

   $$\det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -B \\ -C & XI_{n-1} - A' \end{pmatrix}.$$

   On obtient :

   $$\chi_A(X) = (X - a_{11})\chi_{A'}(X) - \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \Delta_{i,1}(XI_n - A).$$

   D'après la question précédente, la somme est de degré au plus $n - 2$, d'où l'existence de $R \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ tel que

   $$\boxed{\chi_A(X) = (X - a_{11})\chi_{A'}(X) + R(X)}.$$

   (c) On montre par récurrence sur n que χ_A s'écrit sous la forme

   $$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + Q(X),$$

   où $\deg(Q) \leqslant n - 2$. Lorsque $n = 1$, $A = (a)$, $\chi_A(X) = X - a = X - \mathrm{tr}(A)$, et la propriété est donc vraie. Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie pour des matrices d'ordre $n - 1$. On utilise alors l'hypothèse sur la matrice A' de la question 2(b) :

   $$\chi_A(X) = (X - a_{1,1})(X^{n-1} - \mathrm{tr}(A')X^{n-2} + Q(X)) + R = X^n - (a_{1,1} - \mathrm{tr}(A'))X^n + S(X),$$

   où Q est de degré au plus $n - 3$ et S de degré au plus $n - 2$ Ainsi, la propriété est encore vraie au rang n D'après le principe de récurrence, $\boxed{\chi_A(X) \text{ est unitaire de coefficient de degré } n - 1 \text{ égal à } \mathrm{tr}(A)}$.

3. Étude du cas $n = 2$.

(a) On a donc pour $n=2$, $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \alpha$, et on trouve α en évaluant en 0 :

$$\alpha = \chi_A(0) = \det(-A) = \det(A).$$

Ainsi, $\boxed{\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)}$.

(b) Pour une matrice carrée d'ordre 2, la comatrice s'exprime facilement (règle d'inversion des matrices 2×2 en cas d'inversibilité) ; En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$^t\mathrm{Com}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (a+d)I_2 - A = \boxed{\mathrm{tr}(A)I_2 - A}.$$

(c) On a alors, par la formule de la comatrice :

$$A\ ^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_2, \qquad \text{soit:} \qquad A(\mathrm{tr}(A)I_2 - A) = \det(A)I_2,$$

ce qui, d'après l'expression de χ_A obtenue ci-dessus, correspond bien à $\boxed{\chi_A(A) = 0}$.

4. (a) Soit u canoniquement associée à A, et x un vecteur propre de u, associé à une valeur propre a. On pose $b_1 = x$ et on complète en une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Comme $u(b_1) = ab_1$, la matrice de u dans la base B est bien de la forme A'', donc $\boxed{A \text{ est semblable à une matrice du type } A''}$.

(b) D'après les règles de produit matriciel par blocs, et la description des puissances d'une matrice triangulaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice ligne B_k telle que

$$(A'')^k = \begin{pmatrix} a^k & B_k \\ 0 & (A')^k \end{pmatrix}.$$

En posant $\chi_{A'} = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k X^k$, il vient alors

$$\chi_{A'}(A'') = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k (A'')^k = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k a^k & B' \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k (A')^k \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \chi_{A'}(a) & B' \\ 0 & \chi_{A'}(A') \end{pmatrix}},$$

où on a posé $B' = \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k B_k$.

(c) On raisonne alors par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est trivial, le cas $n=2$ a déjà été traité (même si ce n'est pas utile pour la récurrence). On suppose le théorème démontré pour des matrices carrées d'ordre $n-1$, et on considère A d'ordre n, et A'' définie comme ci-dessus. On utilise alors la question précédente, et l'hypothèse de récurrence sur A', ce qui nous assure que

$$\chi_{A'}(A'') = \begin{pmatrix} \chi_{A'}(a) & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, le calcul des déterminants de matrices triangulaires par blocs amène :

$$\chi_{A''}(X) = (X - a_{11})\chi_{A'}(X)$$

, donc

$$\chi_{A''}(A'') = (A'' - a_1 1 I_n)\begin{pmatrix} \chi_{A'}(a) & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & A' - a_1 1 I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_{A'}(a) & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, A'' étant semblable à A, d'après la question 1(b), $\chi_A(A) = 0$.

Le principe de récurrence nous assure donc que pour toute matrice carrée A, $\boxed{\chi_A(A) = 0}$.

(d) Pour montrer le théorème dans le cas général, il suffit alors de se placer dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ et d'appliquer ce qui précède.

5. Deuxième démonstration.

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

(a) On a déjà justifié que si $i \neq j$, $\Delta_{i,j}(XI_n - A)$ est de degré au plus $n-2$. Si $i = j$, $\Delta_{i,i}(XI_n - A)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A_{i,i}$ extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne i. Ces déterminants étant, à signe près, les coefficients de la comatrice, $\mathrm{Com}(XI_n - A)$ est constitué de $\boxed{\text{coefficients dans } \mathbb{K}_{n-1}[X]}$.

En séparant chaque coefficient suivant les puissances de X, on peut donc écrire

$$ {}^t\mathrm{Com}(XI_n - A) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k, $$

où les C_k sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note également $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

(b) On a l'égalité

$$ (XI_n - A) \times {}^t\mathrm{Com}(XI_n - A) = \det(XI_n - A)I_n = \chi_A(X)I_n. $$

On développe un peu le terme de gauche :

$$ \begin{aligned} (XI_n - A) \times {}^t\mathrm{Com}(XI_n - A) &= (XI_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} AC_k X^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k-1} - AC_k)X^k + C_{n-1}X^n - AC_0. \end{aligned} $$

On identifie cela à $\chi_A(X)I_n = \sum_{k=0}^{n} a_k I_n X^k$. On peut faire cette identification avec des coefficients matriciels, puisque cela revient à isoler les relations sur chaque coefficient des matrices et faire l'identification coefficient par coefficient, puis tout regrouper à nouveau dans une matrice. Ainsi,

$$ \boxed{\begin{cases} AC_0 = -a_0 I_n \\ C_{n-1} = a_n I_n \\ AC_k - C_{k-1} = -a_k I_n \quad \text{pour } k \in [\![1, n-1]\!]. \end{cases}} $$

(c) On calcule alors $\chi_A(A)$:

$$ \begin{aligned} \chi_A(A) &= \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k I_n \\ &= -AC_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A^k(AC_k - C_{k-1}) + a_n A^n \\ &= -AC_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1}C_k - A^k C_{k-1} + A^{n+1}C_{n-1} \\ &= -AC_0 - A^n C_{n-1} + AC_0 + A^n C_{n-1} = 0 \end{aligned} $$

Ainsi, $\chi_A(A) = 0$.

Cette dernière démonstration est en fait valide en remplaçant $\mathbb{K}$ par un anneau quelconque.

Correction du problème 2 – Algorithme de Lewis Carroll (d'après Mines PSI 2010)

Partie I – Formule de condensation de Desnanot-Jacobi

Dans cette partie, on montre la formule suivante (formule de condensation de Desnanot-Jacobi), pour tout $n \geqslant 3$, permettant de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n à des calculs de déterminants d'ordre $n-1$ et $n-2$:

$$ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n). \tag{1} $$

1. On commence par un développement du déterminant de M^* suivant la première ligne :

$$\det(M^*) = \det([M]_1^1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+2}\det([M]_n^2) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -\det([M]_{n,n-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \det([M]_{n,n}) \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}\det([M]_n^1)\begin{vmatrix} -\det([M]_1^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \det([M]_1^3) & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ (-1)^{n+1}\det([M]_1^n) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant est diagonal, donc se calcule facilement. Le deuxième peut être redéveloppé suivant sa dernière ligne :

$$\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_{n,n}) + (-1)^{n-1+1}(-1)^{n+1}\det([M]_n^1)\det([M]_1^n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

d'où finalement

$$\boxed{\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_{n,n}) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)}.$$

2. On rappelle que $M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M) = \det(M)I_n$ (formule de Cayley). On remarque ensuite que le produit peut se faire colonne par colonne. En effet, en notant $C_k(M)$ la k-ième colonne d'une matrice M, on a :

$$C_k(M \cdot M^*) = M \cdot C_k(M^*).$$

Ainsi :
   - $C_1(M \cdots M^*) = M \cdot C_1(M^*) = M \cdot C_1({}^t\mathrm{Com}(M)) = C_1(M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)) = C_1(\det(M)I_n)$;
   - $C_n(M \cdots M^*) = M \cdot C_n(M^*) = M \cdot C_n({}^t\mathrm{Com}(M)) = C_n(M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)) = C_n(\det(M)I_n)$;
   - Pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $C_k(M \cdot M^*) = M \cdot C_k(M^*) = M \cdot C_k(I_n) = C_k(M \cdot I_n) = C_k(M)$.

On en déduit la description du produit $M \cdot M^*$:

$$\boxed{M \cdot M^* = \begin{pmatrix} \det(M) & M_{1,2} & \dots & M_{1,n-1} & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & \det(M) \end{pmatrix}}.$$

3. On développe la matrice précédente suivant la première colonne (ce qui revient à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs), puis suivant la dernière colonne (même remarque) :

$$\det(M{\cdot}M^*) = \det(M)\begin{vmatrix} M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & \det(M) \end{vmatrix} = \det(M)^2\begin{vmatrix} M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n-1,2} & \cdots & M_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \det(M)^2\det([M]_{1,n}^{1,n}).$$

Or, $\det(M \cdot M^*) = \det(M)\det(M^*)$, donc, en supposant M inversible, on peut simplifier par $\det(M) \neq 0$, d'où :

$$\det(M^*) = \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}).$$

En associant cela au résultat de la question 1, il vient :

$$\boxed{\det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n).}$$

4. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nécessairement inversible. Si on est sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut utiliser un argument de densité. Comme on n'a pas cette hypothèse, on utilise la deuxième technique qu'on avait vue, en se plaçant sur le corps $\mathbb{K}(X)$. Le déterminant de $M - XI_n$ est de degré n (polynôme caractéristique, au signe près), c'est donc un polynôme non nul. Ainsi, $\det(M - XI_n)$ est non nul dans $\mathbb{K}(X)$. On en déduit que $M - XI_n$ est inversible dans $\mathbb{K}(X)$. La question précédente amène donc l'égalité formelle dans $\mathcal{M}(\mathbb{K}(X))$:

$$\det(M - XI_n)\det([M - XI_n]_{1,n}^{1,n}) = \det([M - XI_n]_1^1)\det([M - XI_n]_n^n) - \det([M - XI_n]_n^1)\det([M - XI_n]_1^n).$$

Ces déterminants sont tous polynomiaux, et l'égalité est vraie formellement, donc elle est vraie pour toute évaluation, en particulier en 0. On retrouve alors

$$\boxed{\det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)}.$$

Partie II – Algorithme de Dodgson (Lewis Carroll)

Nous présentons et justifions dans cette partie un algorithme mis au point par le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll. Et oui ! Le papa d'Alice était aussi mathématicien ! Cet algorithme, basé sur la formule de condensation démontrée dans la partie précédente, permet de ramener le calcul de certains déterminants à des calculs de plusieurs déterminants de taille 2.

L'algorithme fonctionne comme suit :

- *Donnée initiale : une matrice M de taille $n \times n$.*
- *On construit itérativement des couples $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{K})$, pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, dont on note les coefficients $A_{i,j}^{(k)}$ et $B_{i,j}^{(k)}$:*
  - *$A^{(0)} = M$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des 1*
  - *Si pour $k \leqslant n-3$, $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ sont construits, on définit, si c'est possible, $A^{(k+1)}$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-1]\!]^2, \quad A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_i^{(k)}, j} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

  et $B^{(k+1)}$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-2]\!], \quad B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}.$$

- *Si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ a pu être défini, et si $B_{1,1}^{(n-2)}$ est non nul, l'algorithme s'arrête en retournant la valeur :*

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{\det(A^{(n-2)})}{B_{1,1}^{(n-2)}}.$$

- *Si au cours de l'algorithme, l'un des coefficients $B_{i,j}^{(k)}$ est nul, on décrète l'échec de l'algorithme LC. Sinon, l'algorithme peut être mené à don terme, et on dit que M est LC-déterminable.*
- *Remarquez qu'à chaque étape, la matrice $B^{(k)}$ est un peu plus petite que $A^{(k)}$.*

1. (a) On obtient successivement :

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1} & \frac{4}{-1} \\ \frac{-8}{-2} & \frac{-2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = (-1)$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$$

Les coefficients des matrices $B^{(k)}$ ne s'annulent jamais, ce qui prouve que $\boxed{M \text{ est LC-déterminable}}$, et la valeur retournée par l'algorithme de Lewis Carroll est $\boxed{-8}$.

(b) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\det(M) = -8}$. On retrouve bien la valeur trouvée dans la question précédente.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose dans cette question que la matrice M est LC-déterminable. On notera, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et tout $(r, s) \in [\![1, n-k+1]\!]$, $M^{(r,s,k)}$ la matrice d'ordre k extraite de M en ne conservant que les lignes r à $r+k-1$ et les colonnes s à $s+k-1$.

(a) Soit $(r, s) \in [\![1, n-2]\!]$. On a, par définition :

$$A_{r,s}^{(2)} = \frac{1}{B_{r,s}^{(1)}} \begin{pmatrix} A_{r,s}^{(1)} & A_{r,s+1}^{(1)} \\ A_{r+1,s}^{(1)} & A_{r+1,s+1}^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{r+1,s+1}^{(0)}} (A_{r,s}^{(1)} A_{r+1,s+1}^{(1)} - A_{r+1,s}^{(1)} A_{r,s+1}^{(1)}).$$

Or, on constate que par définition :

$$A_{r,s}^{(1)} = \det([M^{(r,s,3)}]_3^3), \qquad A_{r+1,s+1}^{(1)} = \det([M^{(r,s,3)}]_1^1),$$

$$A_{r+1,s}^{(1)} = \det([M^{(r,s,3)}]_1^3), \qquad A_{r,s+1}^{(1)} = \det([M^{(r,s,3)}]_3^1), \qquad A_{r+1,s+1}^{(0)} = \det([M^{(r,s,3)}]_{1,3}^{1,3})$$

Ainsi, d'après la formule de condensation de Desnanot-Jacobi,

$$\boxed{A_{r,s}^{(2)} = \det(M^{r,s,3})}.$$

(b) On montre par récurrence d'ordre 2 sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: pour tout $(r, s) \in [\![1, n-k]\!]^2$,

$$A_{r,s}^{(k)} = \det(M^{(r,s,k+1)}).$$

L'initialisation est évidente pour $k = 0$ et 1, et on vient aussi de le vérifier pour $k = 2$.

Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$ tel que les propriétés $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k-1)$ soient vérifiées. Soit alors $(r, s) \in [\![1, n-k-1]\!]^2$:

$$A_{r,s}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{r,s}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{r,s}^{(k)} & A_{r,s+1}^{(k)} \\ A_{r+1,s}^{(k)} & A_{r+1,s+1}^{(k)} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_{r+1,s+1}^{(k-1)}} (A_{r,s}^{(k)} A_{r+1,s+1}^{(k)} - A_{r+1,s}^{(k)} A_{r,s+1}^{(k)}).$$

L'expression de B en fonctin de A est possible du fait que $k > 0$. Par hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned}
A_{r,s}^{(k+1)} &= \frac{1}{\det(M^{(r+1,s+1,k)})} (\det(M^{(r,s,k+1)}) \det(M^{(r+1,s+1,k+1)}) - \det(M^{(r+1,s,k+1)}) \det(M^{(r,s+1,k+1)}) \\
&= \frac{1}{\det([M^{(r,s,k+2)}]_{1,k+2}^{1,k+2})} (\det([M^{(r,s,k+2)}]_{k+2}^{k+2}) \det([M^{(r,s,k+2)}]_1^2) - \det([M^{(r,s,k+2)}]_1^{k+2}) \det([M^{(r,s,k+2)}]_{k+2}^1) \\
&= \det(M^{(r,s,k+2)}),
\end{aligned}$$

d'après la formule de condensation de Desnanot-Jacobi.

D'après le principe de récurrence, on en déduit donc que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $(r, s) \in [\![1, n-k]\!]^2$

$$\boxed{A_{r,s}^{(k)} = \det(M^{(r,s,k+1)})}.$$

En particulier, pour $k = n-1$,

$$\boxed{A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M^{(1,1,n)}) = \det(M)}.$$

3. Le nombre de déterminants 2×2 calculés pour passer de $A^{(k-1)}$ à $A^{(k)}$ est égal au nombre de coefficients de $A^{(k)}$, à savoir $(n-k)^2$ Ainsi, le nombre total de déterminants 2×2 calculés est

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \boxed{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$$

4. Le calcul d'un déterminant $n \times n$ se ramène au calcul (indépendant) de n déterminants $n-1 \times n-1$. Ainsi, $u_n = nu_{n-1}$, et $u_2 = 1$. Par conséquent,

$$u_n = 1 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n = \frac{n!}{2}.$$

D'après les croissances comparées, $\boxed{v_n = o(u_n)}$ (et très largement !)

On peut se rendre compte aussi que la complexité de cet algorithme de calcul est comparable à celui du pivot de Gauss.

Partie III – Le λ-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable (dans un sens qu'on précisera), de la manière suivante :

- *Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$*
- *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.*
- *On impose de plus pour tout matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule suivante, généralisant (1) :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det_\lambda(M)\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) = \det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n). \qquad (2)$$

Cette formule permet donc de calculer $\det_\lambda(M)$ par récurrence sur l'ordre de M, à condition que $\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})$ soit non nul, et que les déterminants d'ordre plus petit aient pu être calculés (ce qui donne d'autres conditions de non nullité). Si le λ-déterminant de M peut être défini de la sorte, on dira que M est λ-déterminable.

1. On pose $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\det_\lambda(AB) = 1 \qquad \text{et} \qquad \det_\lambda(A)\det_\lambda(B) = \lambda^2.$$

Dès lors que $|\lambda| \neq 1$, on a donc $\boxed{\det_\lambda(AB) \neq \det_\lambda(A)\det_\lambda(B)}$.

2. On montre par récurrence d'ordre 2 sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout matrice λ-déterminable $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et tout $t \in \mathbb{K}^*$, si M' est une matrice obtenue de M en multipliant toute une colonne de M par t, alors M' est aussi λ-déterminable, et $\det_\lambda(M') = t\det_\lambda(M)$.
   - Pour $n = 1$ c'est évident
   - Pour $n = 2$ on vérifie que

$$\det_\lambda \begin{pmatrix} ta & b \\ tc & d \end{pmatrix} = tad + \lambda tcc = t(ad + \lambda bc) = t \cdot \det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De même :

$$\det_\lambda \begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix} = atd + \lambda ctc = t(ad + \lambda bc) = t \cdot \det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ soit vérifiées. Soit M une matrice d'ordre n, et $t \in \mathbb{K}^*$. On considère M' la matrice obtenue de M en multipliant la colonne j par t ($j \in [\![1,n]\!]$). On distingue 3 cas :
  * Si $j \in [\![2,n]\!]$, alors la colonne j intervient encore (partiellement) dans toutes les matrices $[M']_{1,n}^{1,n}$, $[M']_1^1$, $[M']_1^n$, $[M']_n^1$, $[M']_n^n$. Toutes ces matrices sont donc obtenue des matrices similaires définies par M en multipliant une de ses colonnes par t. Elles sont par ailleurs d'ordre $n-1$ ou $n-2$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, qui amène l'existence de leur λ-déterminant et l'égalité ci-dessous :

$$\begin{aligned}\det_\lambda(M')\det_\lambda([M']_{1,n}^{1,n}) &= \det_\lambda([M']_1^1)\det_\lambda([M']_n^n) + \lambda\det_\lambda([M']_n^1)\det_\lambda([M']_1^n)\\ &= t^2\det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n)\end{aligned}$$

  Par ailleurs, on a aussi $\det_\lambda([M']_{1,n}^{1,n}) = t\cdot\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})$, et puisque M est λ-déterminable, et $t \neq 0$, on peut diviser par ce coefficient. Ceci nous assure que M' est λ-déterminable, et que

$$\begin{aligned}\det_\lambda(M') &= \frac{t}{\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})}\left(\det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\right)\\ &= t\cdot\det_\lambda(M).\end{aligned}$$

  * Si $j=1$, on raisonne de même, mais dans ce cas, la colonne C_1 intervient encore seulement dans $[M']_1^n$ et dans $[M']_n^n$, qui sont donc des matrices obtenues des matrices similaires définies par M en multipliant une colonne par t (la première). En revanche,

$$[M']_{1,n}^{1,n} = [M]_{1,n}^{1,n}, \qquad [M']_1^1 = [M]_1^1 \qquad \text{et} \qquad [M']_n^1 = [M]_n^1.$$

  Ainsi, comme précédemment, toutes ces matrices sont λ-déterminables par HR, et on obtient

$$\begin{aligned}\det_\lambda(M')\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) &= \det_\lambda(M')\det_\lambda([M']_{1,n}^{1,n})\\ &= \det_\lambda([M']_1^1)\det_\lambda([M']_n^n) + \lambda\det_\lambda([M']_n^1)\det_\lambda([M']_1^n)\\ &= t\det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n)\end{aligned}$$

  Puisque $\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) \neq 0$ (car M est λ-déterminable), on en déduit comme avant en divisant que

$$\det_\lambda(M') = t\cdot\det_\lambda(M).$$

  * Le dernier cas $j=n$ est complètement similaire au cas $j=1$.

  Ainsi, dans tous les cas, on a montré que $\det_\lambda(M') = t\cdot\det_\lambda(M)$, ce qui prouve bien $\mathcal{P}(n)$.
- On déduit donc du principe de récurrence, que pour tout matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice M' obtenue en multipliant une colonne de M par $t \in \mathbb{K}^*$,

$$\boxed{\det_\lambda(M') = t\cdot\det_\lambda(M)}.$$

3. - Pour $n=1$:

$$V_\lambda(x_1) = \det_\lambda(1) = 1.$$

   - Pour $n=2$:

$$V_\lambda(x_1,x_2) = \det_\lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix} = x_2 + \lambda x_1.$$

- Pour $n = 3$, d'après la formule (2), et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
V_\lambda(x_1,x_2,x_3) &= \det\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_2}\left(\det\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \det\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} + \lambda\det\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \det\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{x_2}\left(V_\lambda(x_1,x_2)x_2x_3V_\lambda(x_2,x_3) + \lambda V_\lambda(x_2,x_3)x_1x_2V_\lambda(x_1,x_2)\right) \\
&= \frac{1}{x_2}V_\lambda(x_1,x_2)V_\lambda(x_2,x_3)(x_2x_3+\lambda x_1x_2) \\
&= V_\lambda(x_1,x_2)V_\lambda(x_2,x_3)(x_3+\lambda x_1),
\end{aligned}$$

  puisque x_2 est supposé non nul. On a donc

$$V_\lambda(x_1,x_2,x_3) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_j+\lambda x_i),$$

  ce qui correspond bien à la formule connue, lorsque $\lambda = -1$.
- On montre donc par récurrence d'ordre 2 sur n, qu'avec les conditions de l'énoncé,

$$V_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i).$$

  L'initialisation vient d'être faite. On suppose la propriété vérifiée pour $n-1$ et $n-2$ variables, et on considère $V(x_1,\ldots,x_n)$. De même qu'avant, on se rend compte qu'en supprimant la dernière ligne et l'une des colonnes, on se retrouve encore avec une matrice de Vandermonde, et en supprimant la première ligne et une colonne, il suffit de factoriser chaque colonne par le x_i correspondant pour se ramener à une matrice de Vandermonde. La propriété de la question 2 amène alors

$$V_\lambda(x_1,\ldots,x_n)x_2\ldots x_{n-1}V_\lambda(x_2,\ldots,x_{n-1}) = V_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1})V_\lambda(x_2,\ldots,x_n)(x_2\ldots x_n+\lambda x_1\ldots x_{n-1})$$

  Par les hypothèses de non nullité de l'énoncé, et du fait de l'expression de $V_\lambda(x_2,\ldots,x_{n-1})$ obtenue par HR, on peut diviser, et il vient :

$$V_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j+\lambda x_i)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)}{\displaystyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j+\lambda x_i)}(x_n+\lambda x_1).$$

  Le produit du dénominateur permet de supprimer les redondances (les couples (i,j) qui sont dans les deux produits du numérateur). Ainsi, tout couple (i,j) tel que $1\leqslant i<j\leqslant n$ contribue à 1 et 1 seul terme $(x_j+\lambda x_i)$, y compris le couple $(1,n)$, qui est le facteur qu'on a à côté de la fraction. Par conséquent,

$$\boxed{V_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)}.$$

- Cela prouve la propriété pour des matrices d'ordre n, et donc, d'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour toute matrice de Vandermonde vérifiant les hypothèses précisées dans l'énoncé.