LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La suite définie par $u_n = n$ si $n \leqslant 100000$ et $u_n = 1/n$ si $n > 100000$ converge vers 0.
2. Toute suite croissante diverge vers $+\infty$.
3. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.
4. Toute suite qui tend vers 1 est majorée par 1.
5. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 alors $(u_n + \ell)_{n\geqslant 0}$ (où $\ell \in \mathbb{R}$) converge vers ℓ.
6. Si $\forall n \geqslant 1,\ 10^{-50} < u_n/n < 10^{-30}$ alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
7. Si, à partir d'un certain rang, $u_n < 1/n$ alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
8. La suite de terme général $(1/2)^{-n}$ converge vers 0.
9. Si $\forall n \geqslant 0,\ 0 < u_n < 1$, alors la suite $({u_n}^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
10. Si $\forall n \geqslant 0,\ 0 < u_n < 1/2$, alors la suite $({u_n}^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
11. La suite $(1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, 1, 1/6, \dots)$ converge vers 0 et 1.
12. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
13. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
14. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est convergente, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ l'est aussi.
15. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites divergentes, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge également.
16. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.
17. Si $\lim(x_n - y_n) = 0$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ tendent vers la même limite.
18. Le produit d'une suite convergente par une suite de limite nulle est convergente.
19. Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(x_{n^2})_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.
20. $(x_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est la même suite que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
21. Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim u_n = \lim v_n$.
22. Si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ alors $u_n \sim v_n$.
23. On a $n^4 \,\mathrm{e}^{2n} \sim \mathrm{e}^{2n}$ car $(\mathrm{e}^{2n})_{n\geqslant 0}$ l'emporte sur $(n^4)_{n\geqslant 0}$ d'après les croissances comparées.
24. On a $n^4 + \mathrm{e}^{2n} \sim \mathrm{e}^{2n}$ car $(\mathrm{e}^{2n})_{n\geqslant 0}$ l'emporte sur $(n^4)_{n\geqslant 0}$ d'après les croissances comparées.
25. La suite $(\mathrm{e}^{n+3})_{n\geqslant 0}$ n'est pas un équivalent simple puisqu'elle contient une addition.
26. La suite $\big(\ln(4n)\big)_{n\geqslant 1}$ est un équivalent simple puisqu'elle ne contient que des produits.

Exercice 2. [$\circ$]

Étudier le comportement asymptotique des suites, définies pour $n \geqslant 1$, par

a) $n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, b) $\dfrac{\cos n}{n}$, c) $\exp\left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$,

d) $\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$, e) $\ln(n+1) - \ln n$, f) $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 3. [$\circ$]

Donner un équivalent simple des suites définies par

a) $4^n - 2n^7 - \ln\sqrt{n}$, b) $\sqrt{n + \sqrt{n}}$, c) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$,

d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, e) $n^{1/n} - 1$, f) $\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} - 1$,

g) $\sqrt{1 - \cos(n\,\mathrm{e}^{-n})}$, h) $\ln\dfrac{n}{n+1}$, i) $\sin\big(\sqrt[n]{2} - 1\big)$.

Exercice 4. [○]

Utiliser des équivalents pour étudier le comportement asymptotique des suites définies, pour tout $n \geqslant 1$, par

a) $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^n$, b) $n(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}-1)$, c) $\dfrac{\sqrt{n+1}\big(1-\cos(1/n)\big)}{\tan^3(1/\sqrt{n})}$,

d) $\dfrac{3^n-5^n}{3^n+5^n}$, e) $\dfrac{4n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$.

Exercice 5. [○]

Démontrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous n'ont pas de limite

$$u_n = \cos\left(\frac{(n^2+1)\pi}{3n}\right), \qquad v_n = \frac{1}{(-1)^n \ln(1+1/n)} \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(n/2)^{n/2}}.$$

Exercice 6. [⋆]

Démontrer que la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.

Exercice 7. [⋆]

Étudier le comportement asymptotique de la suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

Exercice 8. [⋆]

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer la limite de $\big((1+z/n)^n\big)_{n\geqslant 0}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication : Mettre $1+z/n$ sous forme exponentielle.*

Exercice 9. [○]

Étudier les comportements asymptotiques des suites, définies pour $n \geqslant 1$, par

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k+n^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor k\pi \rfloor.$$

Exercice 10. [⋆]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Exercice 11. [⋆]

Étudier la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{2n}\right)$. *Indication : Couper !*

Exercice 12. [⋆]

Démontrer la convergence des suites $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ dont les termes généraux sont

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Indication : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

Exercice 13. [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n \leqslant \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\cdot$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *convexe*.

1. Démontrer que $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. *Distinguer les cas $\ell \leqslant 0$ et $\ell > 0$.*

Exercice 14. [$\star$]

Posons, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}\cdot$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

   On admet que la limite commune de ces deux suites est e (la base des exponentielles).
2. Démontrer que e est un irrationnel. *Indication : On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{e} = p/q$ et on s'intéressera à l'encadrement $u_q < \mathrm{e} < v_q$.*

Exercice 15. [$\star$]

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles définies par la donnée de $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$ et des relations de récurrences croisées :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une limite commune. *Cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.*

Exercice 16. [$\circ$]

Démontrer qu'une suite périodique convergente est constante.

Exercice 17. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective. Démontrer que $\big(f(n)\big)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 18. [$\star$] (Moyennes de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On considère la suite des moyennes de Cesàro $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \geqslant 0$, par

$$v_n = \frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\cdot$$

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tend aussi vers ℓ. *On distinguera les cas $\ell \in \mathbb{R}$ (déjà fait en cours) et $\ell = \pm\infty$.*
2. Démontrer que la réciproque du résultat de la question précédente est fausse.

Exercice 19. [$\star$] (Lemme de l'escalier et « critère ${u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha$ »)

1. Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que $(e_{n+1}-e_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers h (où $h \in \mathbb{R}$). Démontrer que $(e_n/n)_{n\geqslant 0}$ tend vers h. *C'est le lemme de l'escalier : si la hauteur des marches tend vers h alors la hauteur totale d'un escalier de n marches équivaut à nh.*
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $({u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ strictement positive. Démontrer que $u_n \sim (n\ell)^{1/\alpha}$. *C'est le « critère ${u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha$ ». Il est très utile pour déterminer des équivalents, mais hors-programme. Il faut donc réexpliquer à chaque fois !*
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2u_n}\cdot$ Démontrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.

Exercice 20. [$\star$] (Comparaison géométrique)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Critère de Cauchy

   On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

   a) Si $0 \leqslant \ell < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

   b) Si $\ell > 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

   c) Que se passe-t-il si $\ell = 1$?

2. Critère de d'Alembert

   On suppose que $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

   a) Si $0 \leqslant \ell < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

   b) Si $\ell > 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

   c) Que se passe-t-il si $\ell = 1$?

3. Démontrer que si $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Que peut-on en déduire à propos des critères de Cauchy et de d'Alembert ?

4. Déterminer le comportement asymptotique des suites $\left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\dbinom{2n}{n}^{1/n}\right)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 21. [$\circ$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite monotone dont une sous-suite admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.

Exercice 22. [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ convergent. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 23. [$\star$]

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que, pour tout $k \geqslant 2$, la sous-suite $(u_{kn})_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Peut-on affirmer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ ?

Exercice 24. [$\star$] (Un résultat très utile)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une unique valeur d'adhérence λ. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers λ. Que se passe-t-il si l'on supprime la condition « $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée » ?

Exercice 25. [$\bigstar$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. On suppose que $(2u_n + u_{2n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. *Indication : On pourra utiliser le résultat de l'exercice 24.*

Exercice 26. [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 27. [$\circ$]

Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad B = \left\{\frac{nm}{n^2+m^2} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{\frac{n+\sqrt{m}}{\sqrt{n}+m} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 28. [$\star$]

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ une bijection. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est $\mathbb{R}$.

Exercice 29. [★]

On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \qquad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Démontrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. a) Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   b) Démontrer que toute suite de Cauchy est convergente. *Utiliser une valeur d'adhérence.*

Exercice 30. [★] (Lemme de Fekete)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive telle que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad u_{p+q} \leqslant u_p + u_q.$$

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$.
2. Démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas nécessairement décroissante.
3. a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$. On effectue la division euclidienne de m par n de sorte que $m = nq + r$ où $0 \leqslant r < n$. Démontrer que

   $$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{m}.$$

   b) En déduire que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers sa borne inférieure.

Exercice 31. [○]

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

et en déduire la valeur du réel $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}$.

Exercice 32. [⋆] (Approximation de racines carrées par la méthode de Héron d'Alexandrie)

Soit $a \in \,]1; +\infty[$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = a$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big).$$

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

   $$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

   a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par v_{n+1} et v_n pour tout $n \geqslant 0$. En déduire l'expression de v_n en fonction de a et n.
   b) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \sqrt{a}$ quand n tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers $\sqrt{a}$?
   c) Démontrer que

   $$\forall n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2a\Big(\frac{a-1}{a+1}\Big)^{2^n}.$$

   Dans le cas $a = 2$, déterminer un rang n_0 pour lequel u_{n_0} approche $\sqrt{2}$ à 10^{-14} près.

Exercice 33. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot$$

0. On souhaite démontrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a

$$\frac{2}{2x-1} < -\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}\cdot$$

   Pour cela, on vous demande de démontrer l'inégalité de gauche et d'expliquer sommairement (et sans aucun calcul) comment on procéderait pour démontrer l'inégalité de droite.

1. a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

   et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   b) Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = u_n\,\mathrm{e}^{-1/(4n)}\,.$$

   a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$?

   b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

   et en déduire le sens de variation de $(v_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$?

   c) Justifier que $\ell > 0$.

3. Démontrer que

$$n! \sim \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot$$

   Remarque : À l'aide des intégrales de Wallis, vous démontrerez que $\ell = \sqrt{2\pi}$. En reportant cette valeur dans l'équivalent ci-dessus, vous obtiendrez la formule de Stirling.