LES NOMBRES

Exercice 1. [$\circ$]

Parmi les énoncés suivants, lesquels impliquent que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1. $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \big(\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(2n+1)\big)$.
2. $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies et, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \big(\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(2n+1)\big)$.
3. $\mathscr{P}(1)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \big(\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(2n)\big)$.
4. $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathscr{P}(2n) \Longrightarrow \big(\mathscr{P}(2n-1)$ et $\mathscr{P}(2n+1)\big)$.

Exercice 2.

Soit $a > -1$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Exercice 3. [$\circ$]

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ (1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

Exercice 4. [$\circ$]

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right) > \sqrt{2n+1}$.

Exercice 5. [$\circ$]

1. Résoudre l'équation $z^2+(-1+i)z+2+i=0$. On notera z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 l'autre.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1-i)u_{n+1} - (2+i)u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2{z_1}^n + {z_2}^n$.

Exercice 6. [$\star$]

La suite $(C_n)_{n\geqslant 0}$ des nombres de Catalan est définie par $C_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0.$$

Démontrer que $\forall n \geqslant 0,\ C_n \geqslant 3^{n-2}$.

Exercice 7. [$\star$]

On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad {x_1}^3 + {x_2}^3 + \cdots + {x_n}^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$.

Exercice 8. [$\bigstar$]

La fonction d'Ackermann–Péter est définie récursivement comme suit :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ A(0,n) = n+1 \\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ A(m,0) = A(m-1,1) \\ \forall m,n \in \mathbb{N}^*,\ A(m,n) = A\big(m-1, A(m,n-1)\big) \end{cases}$$

La troisième propriété ci-dessus donne l'impression d'un cercle vicieux, car la fonction « s'appelle elle-même » (on dit qu'elle est definie récursivement). La question de cet exercice est donc toute naturelle : démontrer que la fonction d'Ackermann est bien définie !

Exercice 9. [○]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\mathbb{Z}$ possède des « trous » : il existe deux entiers relatifs $n < m$ tels que $]n; m[\cap \mathbb{Z} = \varnothing$.
2. $\mathbb{Q}$ possède des « trous » : il existe deux nombres rationnels $r < s$ tels que $]r; s[\cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
3. Pour additionner les fractions a/b et p/q, on prend $\operatorname{pgcd}(b, q)$ pour dénominateur commun.
4. Le nombre $0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,20\,21\,22\,23\ldots$ est rationnel.
5. La somme et le produit de deux irrationnels est un irrationnel.

Exercice 10. [○]

Démontrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice 11. [○]

1. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. Démontrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel strictement positif est un nombre irrationnel.
3. Soient r, s deux rationnels positifs tels que $\sqrt{r}$ et $\sqrt{s}$ sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est irrationnel.

Exercice 12. [○]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $|x - y|$ est la distance qui sépare x et y.
2. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
3. $\mathbb{R}^*$ est un intervalle.
4. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément.

Exercice 13. [⋆]

On pose $a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Démontrer que $a = 4$.

Exercice 14. [⋆]

Soient a, b, c trois nombres réels positifs ou nuls. Démontrer que l'un au moins des trois nombres réels $4b(1 - c)$, $4c(1 - a)$ et $4a(1 - b)$ est inférieur ou égal à 1.

Exercice 15. [○]

Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$.

Exercice 16. [○]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$.

Exercice 17. [⋆]

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations

$$\begin{cases} x + y = z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

Exercice 18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{(x + 3)(x - 1)} \geqslant 2x - 1$.

Exercice 19. [○]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$(E_1) \quad \left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2 \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad \lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor.$$

Exercice 20. [$\star$]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 21. [$\circ$] (Passage à la borne supérieure ♡)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. Justifier l'existence de $\sup A$ et démontrer que $\sup A \leqslant M$.
   Ce résultat s'appelle le *principe du passage à la borne supérieure*. Malgré son caractère simplissime, ce principe est la base de la démonstration d'un bon nombre de propriétés concernant les bornes supérieures.
2. Que devient le principe du passage à la borne supérieure lorsque l'inégalité est stricte dans l'hypothèse ? Autrement dit, lorsqu'on sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ x < M$, peut-on en déduire que $\sup A < M$?
3. Énoncer le principe du passage à la borne inférieure.

Exercice 22. [$\circ$]

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup A > 0$. Démontrer qu'il existe au moins un élément de A qui est strictement positif.

Exercice 23. [$\circ$]

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$.

Démontrer que $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 24. [$\star$]

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles bornées. Que peut-on dire de $\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ vis-à-vis de $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 25. [$\star$]

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(A \subset B) \Longrightarrow (\sup A \leqslant \sup B)$.
2. Démontrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.
3. Démontrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Exercice 26. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Deux points du plan complexe sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes affixes.
2. Si $a + ib = c + id$ alors $a = c$ et $b = d$.
3. Un nombre complexe ne peut pas être égale à son conjugué.
4. On a $|2 + i| = \sqrt{2^2 + i^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.
5. Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.
6. Le module d'une somme est la somme des modules.
7. L'ensemble des points dont l'affixe est d'argument nul est la droite réelle.

Exercice 27. [$\circ$]

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes
$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i, \qquad z_3 = \sqrt{3} + i \qquad \text{et} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}\cdot$$
2. Calculer les nombres complexes $Z_1 = (z_1)^{1975}$ et $Z_4 = (z_4)^{20}$.
3. Déterminer les nombres entiers $n \geqslant 0$ tels que $\omega_n = (z_3)^n$ soit un nombre réel.

Exercice 28. [$\star$]

1. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers relatifs. Démontrer qu'il existe des nombres entiers A et B tels que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = A^2+B^2$.
2. Sachant que $29 = 2^2+5^2$, $61 = 5^2+6^2$ et $1769 = 29 \times 61$, déterminer des nombres entiers m et n tels que $1769 = m^2+n^2$.

Exercice 29. [$\circ$]

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} \neq -1$. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe
$$z = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}}{1+\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module. Démontrer que le nombre
$$Z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\cdots z_n}$$
est un nombre réel.

Exercice 30. [$\star$]

Déterminer les nombres complexes u et v tels que $|u+iv|^2 = u^2+v^2$.

Exercice 31. [$\circ$]

1. Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de $-18i$, $1-i$ et $-\sqrt{3}+i$.
2. Calculer sous forme cartésienne les racines carrées de $3-4i$ et $-5-12i$.

Exercice 32. [$\circ$]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(1+i)z^2+iz+(1-i)=0$,

b) $(1+i)z^2+(1-i)z+2(1+i)=0$,

c) $z^2-(5-14i)z-(24+10i)=0$,

d) $1+iz-z^2-iz^3=0$.

Exercice 33. [$\circ$]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} ab = -24-10i \\ a+b = 5-14i \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} uv = 1-8i \\ u^2+v^2 = -2-16i \end{array}\right.$$

Exercice 34. [$\star$]

Dans chacun des cas suivants, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie
$$|z| = |z-6+5i|, \qquad |\overline{z}+i| = 2, \qquad z\big(2\overline{z}+1\big) = 1, \qquad |z^2| = |z|.$$

Exercice 35. [$\star$]

Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie
$$\frac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 36. [$\circ$]

Pour tout nombre complexe z, on pose
$$\cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}.$$

Résoudre les équations
$$\cos(z) = 2 \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = i.$$

Exercice 37. [$\circ$]

Soit $n \geqslant 2$. Calculer la somme et le produit des racines n-èmes de l'unité.

Exercice 38. [$\circ$]

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = i \qquad \text{et} \qquad z^3 = -1.$$

Exercice 39. [$\circ$]

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectives des sommets. On note I, J, K, L les milieux des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 40. [$\star$]

Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\big(|u|^2 + |v|^2\big).$$

En déduire une propriété des parallélogrammes. Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle ?

Exercice 41. [$\star$]

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. À quelle condition les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont-ils alignés ?
2. À quelle condition les points d'affixes z, $-z$ et z^2 forment-ils un triangle rectangle en z^2 ?
3. À quelle condition les vecteurs d'affixes z et $1/z$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 42. [$\star$]

Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et A, B, P trois points distincts de ce cercle. On souhaite démontrer que l'angle géométrique sous lequel O voit les points A et B est le double de l'angle géométrique sous lequel P voit les mêmes points A et B. C'est le théorème de l'angle au centre. *Remarque : un angle géométrique est défini modulo π.*

Pour cela, on choisit de munir le plan de sa structure complexe en choisissant O pour origine et le rayon du cercle pour unité de longueur. Les points A, B et P appartiennent alors au cercle unité, ce qui permet de noter $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$ et $\mathrm{e}^{i\theta}$ leurs affixes respectives. L'angle géométrique sous lequel O voit les points A et B est l'angle $\widehat{AOB}$ dont une mesure (modulo π) est notée φ. De façon similaire, l'angle géométrique sous lequel P voit les points A et B est l'angle $\widehat{APB}$ dont une mesure (modulo π) est notée ψ.

Exprimer φ et ψ en fonction de α et β et conclure.

Exercice 43. [$\circ$]

Écrire l'affixe Z du point N image du point M d'affixe z par :

1. la rotation de centre i et d'angle $2\pi/3$;
2. l'homothétie de centre $1+i$ et de rapport 4 ;
3. la similitude directe de centre 1, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.

Exercice 44. [$\circ$]

Déterminer les caractéristiques géométriques de la similitude s^+ qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe Z où :

$$Z = 2(1+i)z - 7 - 4i.$$