MP*1

Problème

Diamètre transfini d'une partie de $\mathbb{C}$

Dans tout le texte, $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle ; E est une partie non vide de $\mathbb{C}$.

Si a est un élément de $\mathbb{C}$, r un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$C_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z-a| = r\}, \quad C_r = C_{0,r} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = r\},$$

$$D_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z-a| \leq r\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$.

I. Questions préliminaires

Les questions de cette partie « vide-grenier » sont très largement indépendantes mais utilisées plus loin dans le sujet.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle qui converge vers un nombre réel ℓ. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit
$$v_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k.$$
Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad a_{p+q} \leq a_p \, a_q.$$
On note i la borne inférieure de l'ensemble
$$\left\{ a_n^{1/n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
On fixe $\varepsilon > 0$. On choisit N dans $\mathbb{N}^*$ tel que
$$a_N^{1/N} \leq i + \varepsilon.$$
a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$, on écrit la division euclidienne de n par N :
$$n = qN + r \ ; \qquad q \in \mathbb{N}, \ r \in \{0, \ldots, N-1\}.$$
Montrer
$$a_n \leq (i+\varepsilon)^{qN} \ \max\left\{a_s \ ; \ s \in \{0, \ldots, N-1\}\right\}.$$

b) En déduire qu'il existe N' dans $\mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N'$ entier

$$a_n{}^{1/n} \leq i + 2\varepsilon.$$

c) Conclure que la suite $\left(a_n^{1/n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers i.

$|z+3|$

3. On suppose E compacte. Justifier l'existence de

$$\|P\|_E = \max\{|P(z)| \; ; \; z \in E\},$$

puis que, si E est infinie,

$$P \longmapsto \|P\|_E$$

est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

4. On suppose E infinie et compacte. On pose

$$\mu_n(E) = \inf\{\|P\|_E \; ; \; P \in \mathcal{U}_n\}.$$

Montrer qu'il existe Q dans $\mathcal{U}_n$ tel que $\mu_n(E) = \|Q\|_E$.

5. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ non constant, a dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que l'on peut trouver un entier $m \geq 1$, un nombre complexe non nul λ et un élément Q de $\mathbb{C}[X]$ de sorte que

$$P(X) = P(a) + \lambda(X-a)^m + (X-a)^{m+1}Q(X).$$

b) On écrit

$$P(a) = re^{i\alpha}, \qquad \lambda = \rho e^{i\beta}, \qquad r \in \mathbb{R}^+, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que, pour t dans $\mathbb{R}^{+*}$ assez près de 0 :

$$|P(a + te^{\frac{i(\alpha-\beta)}{m}})| > |P(a)|.$$

c) Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\|P\|_K = \|P\|_{\mathrm{Fr}(K)}.$$ [1]

6. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes. On rappelle le résultat suivant [2] : le déterminant de la matrice de Vandermonde

$$\left(z_j{}^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$$

est égal à

$$V(z_1, \ldots, z_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (z_j - z_i).$$

Soit P dans $\mathcal{U}_n$. On remplace dans la matrice de Vandermonde la dernière ligne par

$$(P(z_1), P(z_2), \ldots, P(z_{n+1}))$$

sans modifier les autres lignes. Montrer que le déterminant de la nouvelle matrice est encore $V(z_1, \ldots, z_{n+1})$.

$\frac{1}{n}\ln(a_n)$

e

1. Ce résultat est le « principe du maximum pour les polynômes ».
2. Que l'on ne demande pas de démontrer.

$1+$

$(i+\varepsilon)$

$(i+\varepsilon)(1+\varepsilon)$

$(i+ \quad)(1+\varepsilon)$ $\quad i+\varepsilon$ $\quad M^{\frac{1}{n}} \leq 1$

$(i+\varepsilon)\times$

$i+2\varepsilon \quad \frac{1}{n}\ln(M) \quad 0$

II. Définition du diamètre transfini

Si $n \geq 2$ est un entier et si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, on note $\delta_n(a_1, \ldots, a_n)$ la moyenne géométrique de leurs distances mutuelles :

$n \times (n-j)$

$$\delta_n(a_1, \ldots, a_n) = \left(\prod_{1 \leq j < k \leq n} |a_k - a_j| \right)^{2/n(n-1)} \geqslant r$$

Si X est une partie non majorée de $\mathbb{R}^+$, on convient que la borne supérieure de X, notée $\sup X$, est $+\infty$. On prolonge ainsi la notion de borne supérieure.

L'ensemble

$$\{\delta_n(a_1, \ldots, a_n) \; ; \; (a_1, \ldots, a_n) \in E^n\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$; il admet donc une borne supérieure dans $[0, +\infty]$ que l'on appelle *diamètre d'ordre n de E* et que l'on note $d_n(E)$. Ainsi

$$d_2(E) = \sup \left\{ |a_1 - a_2| \; ; \; (a_1, a_2) \in E^2 \right\}$$

est égal à $+\infty$ si E n'est pas borné, au diamètre usuel de E sinon.

7. Montrer que E est finie si et seulement s'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq p, \qquad d_n(E) = 0.$$

8. On suppose E non bornée. Soit r dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k)_{k \geq 1}$ de points de E telle que

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad k \neq \ell \Rightarrow |z_k - z_\ell| \geq r.$$

En déduire, pour tout $n \geq 2$, la valeur de $d_n(E)$.

9. Si E' est une partie non vide de E et $n \geq 2$ un entier, comparer $d_n(E')$ et $d_n(E)$.

10. On suppose E bornée. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \qquad d_n(E) \leq d_2(E).$$

11. On suppose E bornée. Soient $n \geq 2$ un entier, $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des éléments de E. Pour k dans $\{1, \ldots, n+1\}$, soit $(a_1, \ldots, \widehat{a_k}, \ldots, a_{n+1})$ le n-uplet obtenu en ôtant à $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ le point a_k. Montrer que

$$\delta_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})^{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \delta_n(a_1, \ldots, \widehat{a_k}, \ldots, a_{n+1}).$$

En déduire que la suite $(d_n(E))_{n \geq 2}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers un élément de $\mathbb{R}^+$, noté $d(E)$, est appelé *diamètre transfini* de E.[3]

$d_{n+1}^{n+1}(F) \leq d_n^{n+1}(E)$

3. Notion introduite par Fekete en 1923.

12. On suppose E compacte. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe $(a_1, \dots, a_n)$ dans E^n tel que
$$\delta_n(a_1, \dots, a_n) = d_n(E).$$

13. On suppose E bornée. Montrer que $d(E) = d(\overline{E})$.

Les trois questions suivantes sont deux à deux indépendantes. La question 16 n'est pas utilisée dans la suite.

14. On suppose E bornée. Soient u dans $\mathbb{C}^*$, v dans $\mathbb{C}$, $\sigma_{u,v}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sigma_{u,v}(z) = uz + v.$$
Déterminer $d(\sigma_{u,v}(E))$.

15. On suppose E bornée. Soit π l'application qui associe à un nombre complexe sa partie réelle :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \pi(x + iy) = x.$$
Comparer $d(\pi(E))$ et $d(E)$.

16. Soit $(z_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes convergeant vers 0. On pose
$$E = \{z_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}.$$
Calculer $d(E)$.

4

$i^3 = -i$

$i^6 =$

$i^5 = i^3 \cdot$

$i^3 = -i$

III. Diamètre transfini d'un cercle

Soit U le cercle unité de $\mathbb{C}$:
$$U = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}.$$

17. Étudier la convexité de la fonction f de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad f(x) = \ln(\sin(x)).$$

18. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose
$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$
Calculer $P_n(1)$ et en déduire le produit
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

$\sin^2 \ln(\sin x) < \sin x^2$

$f''(x) = -\sin x \times \frac{1}{\ln(\sin x)} + \left(-\frac{\cos x \times \cos^2}{\ln^2(\sin x)\sin x}\right)$

$= -\left(\frac{\sin^2(x)\ln(\sin x) + \cos^2(x)}{\ln^2(\sin x)\sin x}\right)$

$\sin^2 \ln(\sin x) - \sin^3 x + \cos^2 x$

$\cos^2(x) = -\sin$

$x^n - 1 = (x-1)(\Sigma$

$1 - x^{n+1}$

19. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des points de U, $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_n$ des éléments de $[0, 2\pi]$ tels que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad a_j = e^{i\theta_j}.$$

On pose :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \theta_{n+j} = \theta_j + 2\pi, \qquad a_{n+j} = a_j.$$

Pour k dans $\{1, \ldots, n\}$, soit

$\theta_{k+j} - \theta_j \leq \frac{2k\pi}{n}$

$$p_k = \prod_{j=1}^{n} |a_{j+k} - a_j|.$$

a) Pour j et k dans $\{1, \ldots, n\}$, justifier l'égalité

$$|a_{k+j} - a_j| = 2 \sin\left(\frac{\theta_{k+j} - \theta_j}{2}\right).$$

$\theta_{k+j} - \theta_k$

b) Montrer que, pour k dans $\{1, \ldots, n-1\}$:

$$p_k \leq \left(2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n.$$

c) Exprimer $\delta(a_1, \ldots, a_n)$ à l'aide des p_k et en déduire $d_n(U)$ puis $d(U)$.

20. a) Si a est dans $\mathbb{C}$, r dans $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer $d(C_{a,r})$.

b) Indiquer une partie dénombrable bornée de $\mathbb{C}$ de diamètre transfini strictement positif.

IV. Polynômes unitaires de norme minimale

21. Soient n dans $\mathbb{N}$, P dans $\mathcal{U}_n$. Calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-int} \mathrm{d}t$$

et en déduire $\|P\|_U \geq 1$. Déterminer $\mu_n(U)$.

22. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta),$$

que le terme de plus haut degré de T_n est 2^{n-1}.[4]

a) Calculer $\|T_n\|_{[-1,1]}$, déterminer les x de $[-1, 1]$ tels que $|T_n(x)| = 1$ et les ranger dans l'ordre croissant.

b) Soit Q dans $\mathcal{U}_n$. Montrer

$$\|Q\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Indication. On raisonnera par l'absurde en considérant $U = Q - \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$.

c) Déterminer $\mu_n([-1, 1])$.

4. On ne demande pas d'établir ces résultats.

$e^{i\pi} = -1 \quad -(-2)^{n-1}$

$(i)^{4k-1} = -i$

V. Autre expression du diamètre transfini

On suppose E infinie et compacte.

23. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, montrer

$$\mu_{p+q}(E) \leq \mu_p(E)\, \mu_q(E).$$

En déduire que la suite

$$\left(\mu_n(E)^{1/n}\right)_{n\geq 1}$$

converge vers sa borne inférieure $m(E)$.

24. Montrer

$$\mu_1(E) \leq d_2(E) \leq 2\mu_1(E).$$

25. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que

$$\mu_n(E)\, d_n(E)^{n(n-1)/2} \leq d_{n+1}(E)^{n(n+1)/2},$$

puis comparer $\mu_n(E)^{1/n}$ et $d_{n+1}(E)$.

26. Soit n un entier ≥ 2. Montrer, en utilisant la question 5, que :

$$d_{n+1}(E)^{n(n+1)/2} \leq (n+1)\, \mu_n(E)\, d_n(E)^{n(n-1)/2}.$$

27. Conclure :

$$m(E) = d(E).$$ [5]

VI. Applications

28. a) Retrouver $d(U)$ et calculer $d([-1,1])$ en utilisant le résultat de la question 27. Quelle est la valeur de $d(S)$ lorsque S est un segment $[a,b]$ du plan complexe ?

b) Soient γ une application continue et non constante de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$,

$$\Gamma = \gamma\left([0,1]\right).$$

Montrer

$$d(\Gamma) > 0.$$

29. a) On suppose E infinie et compacte. Montrer

$$d(\mathrm{Fr}(E)) = d(E).$$

b) On suppose $E = D_{a,r}$ avec $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer $d(E)$.

30. On suppose E infinie et compacte. Soient q dans $\mathbb{N}^*$, P un élément de $\mathcal{U}_q$. Déterminer le diamètre transfini de

$$E^* = \{z \in \mathbb{C}\,;\ P(z) \in E\}.$$

---

5. Théorème de Fekete-Szegö, 1930.