Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Anne-Laure Biolley, Jean-Paul Bonnet, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Laurent-Yvon Chaumard, Denis Choimet, Pierre-Jean Desnoux, Jean-Denis Eiden, Stéphane Flon, Cyril Germain, Max Hochart, Jean-Claude Jacquens, Denis Jourdan, Roger Mansuy, Renaud Palisse, Alain Pommellet, Franz Ridde, Eddy Routin, Pierre-Alain Sallard, Cécile Stérin pour leurs contributions à cette liste d'exercices.
Le comité tient à remercier tout particulièrement Igor Kortchemski et Omid Amini, qui l'ont autorisé à exploiter la liste d'exercices mise en ligne à l'adresse suivante :
https ://www.ens.fr/sites/default/files/2019_mathsulm_sujets-1.pdf.
Les lecteurs y trouveront également des indications et de très intéressants commentaires sur la façon dont l'interrogation est menée à l'oral de mathématiques de l'ENS Paris en filière MP. Le comité espère que cette belle initiative sera suivie par d'autres concours.
Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 16 février 2020, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

Écoles Normales Supérieures - MP

1. [P]* L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

2. [PLSR]* $^\diamond$ Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un élément $P \in \mathbb{N}^*$ est parfait si $\sigma(P) = 2P$.
a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier. Montrer que p est premier.
b) Montrer que, si p est un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}\ (2^p - 1)$ est parfait.
On admet dans la suite que tout nombre parfait pair est de la forme précédente. On considère un nombre parfait pair, que l'on écrit donc sous la forme $P = 2^{p-1}\ (2^p - 1)$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est tel que $2^p - 1$ est premier. Dans les question ***c), d), e)***, on suppose $p \neq 2$.
c) Déterminer la classe de P modulo 12.
d) Montrer que $P - 1$ et $P + 1$ ne sont pas des carrés.

e) En considérant la classe de $P-1$ modulo 4 et celle de $P+1$ modulo 3, montrer que $P-1$ et $P+1$ ne sont pas parfaits.
f) Montrer qu'il n'existe pas de couple de nombres parfaits consécutifs.
g) Prouver le résultat admis.

3. [L] ★ ***a)*** Soit α un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (p, q) de $\mathbb{Z} \times [\![1, n]\!]$ tel que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qn}$.
b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est pas un carré parfait.
Montrer que l'équation $a^2 - db^2 = 1$ possède une solution $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $b \neq 0$.

4. [L]★ $^\diamond$ Montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, n divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m^{k \wedge n}$.

5. [P]★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité ; par exemple, $g(5^2) = 2$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{d|n} (-1)^{g(d)}$.

6. [SR] ★ On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\, ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, soit $N(z) = |z|^2$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments inversibles.
b) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et $x \neq 0$, montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $y = qx + r$ et $N(r) < N(x)$. En déduire que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.
c) Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, soit $s_{n,k} = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}[i] \\ N(x) = n}} x^k$. Montrer que $s_{n,k} \in \mathbb{Z}[i]$.

7. [P]★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathcal{S}_n$. Pour quels n l'entier $g(n)$ est-il impair ?

8. [P]★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{g(n)}{n^k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

9. [P] ★ Les sous-groupes stricts de $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils monogènes ?

10. [P]★ Soit G un groupe.
a) On suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.
b) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il en remplaçant « fini » par « dénombrable » ?

11. [P]★ Soient G un groupe, $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$, E_δ l'ensemble des applications f de G dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in G^2, \ |f(xy) - f(x)f(y)| \leqslant \delta$.
a) Montrer que, si $f \in E_\delta$ n'est pas bornée, alors $\forall (x, y) \in G^2, \ f(xy) = f(x)f(y)$.
b) Trouver $C > 0$ tel que, pour toute $f \in E_\delta$, on ait soit $\forall x \in G, \ |f(x)| \leqslant C$, soit $\forall (x, y) \in G^2, \ f(xy) = f(x)f(y)$.

12. [P] ★ Soit $(G, .)$ un groupe. Si f est une fonction de G dans $\mathbb{R}$, on dit que f est un quasi-morphisme s'il existe $C > 0$ tel que $\forall (x, y) \in G^2,\ |f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant C$ et que f est un quasi-caractère si $\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times G,\ f(x^n) = nf(x)$. Montrer que, pour tout quasi-morphisme M de G dans $\mathbb{R}$, il existe un unique quasi-morphisme qui est aussi un quasi-caractère Q de G dans $\mathbb{R}$ tel que $M - Q$ soit bornée.

13. [PLSR] ★ Soient $n \geqslant 2$ un entier, a et b deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $G_{a,b}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $(a\,b)$ et $(1\,2 \ldots n)$. À quelle condition a-t-on $G_{a,b} = \mathcal{S}_n$?

14. [L]★ ◇ Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ ayant huit racines de module 1, deux racines dans $\mathbb{R}^{+*}$, tel que $P(0) = 1$ et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

15. [P]★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + X)^n P$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.

16. [P]◇ ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(XY) \leqslant \min\{f(X), f(Y)\}$.

17. [P] ★ Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (n - \mathrm{rg}(A_i)) \geqslant \mathrm{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^{m} A_i\right)$.

18. [P]★ ◇ Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $B^2 = B$.
Montrer que $\mathrm{rg}(AB - BA) \leqslant \mathrm{rg}(AB + BA)$.

19. [P] ★ Soient $n \geqslant 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_1, \ldots, t_{n+1}$ des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n+1\},\ \det(A + t_i B) = 0$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W, B(V) \subset W$ et $\dim(W) < \dim(V)$.

20. [PLSR] ★ Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(f)(x)\ ;\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.
a) On suppose que f est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par f est cyclique et que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini.
b) On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini. Montrer que f est cyclique.

21. [L] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

22. [P]★ Soient $n \geqslant 2$ un entier, A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, X et Y dans $\mathbb{C}^n$.
a) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = B^k Y$. Montrer que $X = Y$.
b) Déterminer le plus petit N de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{C}^n$, la condition $\forall k \in \{1, \ldots, N\}, A^k X = B^k Y$ implique $X = Y$.

23. [P]★ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.
On pose $P = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$.

a) Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P(x)}{x - z_k}$ pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$.

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer : $c_k = \dfrac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^{k-1}) & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \operatorname{tr}(A^k) & \operatorname{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$.

24. [P] $^\bigstar$ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 1$, $\det(B) > 1$ et $AB = BA$. On s'intéresse aux suites $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telles que $v_0 \neq 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = Av_k$ ou $v_{k+1} = Bv_k$. Montrer qu'il existe v_0 tel que toute suite ainsi définie de premier terme v_0 soit non bornée. Le résultat subsiste-t-il si on omet l'hypothèse $AB = BA$?

25. [P] $^\bigstar$ Soit $n \geqslant 2$ un entier.
a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, L la matrice de $\mathcal{M}_{n(n-1)^2,n}(\mathbb{C})$ dont les lignes sont les $A^i B^j - B^j A^i, 1 \leqslant i, j \leqslant n-1$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si et seulement si $\operatorname{rg}(L) < n$.
b) Montrer que l'ensemble des A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que A et ${}^t A$ n'admettent aucun vecteur propre commun est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

26. [P]$^\bigstar$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E. Si $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $d_i = \|e_i\|$. Soit $m \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- il existe un sous-espace V de E de dimension m telle que les projections orthogonales de $e_1, \ldots, e_n$ sur V ont même norme.
- pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a ${d_i}^2 \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{{d_j}^2} \right) \geqslant m$.

27. [L]$^\bigstar$ Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire donné par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)\, g(\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient E_n le sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales de degré au plus n, Π_n le projecteur orthogonal de E sur E_n. On fixe $g \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $M_{n,g}$ l'endomorphisme de E_n défini par $\forall f \in E_n,\ M_{n,g}(f) = \Pi_n(fg)$. Étudier asymptotiquement la suite $(\operatorname{tr}(M_{n,g}))_{n \in \mathbb{N}}$.

28. [PLSR] $^\bigstar$ $^\diamond$ Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. Comparer $\operatorname{tr}(ABAB)$ et $\operatorname{tr}(A^2B^2)$.

29. [SR] $^\bigstar$ On appelle parfait de $\mathbb{R}$ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé.
a) Donner un exemple de parfait d'intérieur vide de $\mathbb{R}$.
b) Donner un exemple de parfait de $\mathbb{R}$ ne coupant pas $\mathbb{Q}$.

30. [SR] ★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E, $C = \mathbb{R}^+ v_1 + \dots + \mathbb{R}^+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E.

31. [P]★ ***a)*** Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.
b) Peut-on partitionner $\mathbb{R}^2$ en disques ouverts de rayons strictement positifs ?
c) On appelle triade toute partie de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à la réunion des trois segments reliant le point $(0,0)$ aux points $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en triades.

32. [PLSR] ★ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.
a) Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.
b) On pose $F : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (m_{i,j}^2)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comparer $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ à $D_n(\mathbb{R})$.
c) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est dense dans $D_n(\mathbb{R})$?
d) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs ?

33. [PLSR] ★ Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(0) = 0$.
a) Montrer que φ est continue.
b) On note E_φ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\varphi \circ |f|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(2x) \leqslant C\varphi(x)$.

34. [P] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1] \mapsto f((1-t)x + ty)$ est monotone. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ et une application continue monotone g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = g \circ \varphi$.

35. [P]★ Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Soit $f : E \to F$ telle que $f(0) = 0$ et que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
a) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.
b) On suppose que $E = F$ et que la norme est euclidienne. Montrer que f est linéaire.
c) On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.
d) Donner un exemple dans lequel f n'est pas linéaire.

36. [P]★ Soient $s \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n\, u_{n+1}}{n}$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

37. [PLSR]★ Pour $d \in \mathbb{N}^*$, soit $N(d)$ le nombre de couples (m,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant m$ et $\dbinom{m}{n} = d$.
a) Montrer que $(i,j) \mapsto \dbinom{i+j}{j}$ est strictement croissante en i et en j.
b) En considérant $B = \min\left\{ b \in \mathbb{N}^* \ ; \ \dbinom{2b}{b} > d \right\}$, montrer que $N(d) = O(\ln(d))$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{d=1}^{x} N(d) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

38. [P]★ Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

39. [P] ★ Pour $\lambda \in \,]0,1[$, soit A_λ l'ensemble des k de $\mathbb{N}^*$ tels que le nombre de 9 dans l'écriture décimale de k soit majoré par λn_k, où n_k est le nombre de chiffres de k. Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\in A_\lambda}$.

40. [SR]★ Soient f et g deux fonctions convexes continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0,1],\ \max(f(x), g(x)) \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [0,1],\ (1-\lambda)f(x) + \lambda\, g(x) \geqslant 0$.

41. [P]★ Déterminer les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$f(1) = 1$ et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ f(x)\, f(y) \leqslant f(xy)$.

42. [P]★ On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g = f_1 + \cdots + f_n$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que $g = 0$.

43. [SR]★ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit f_t la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = f(x-t)$. Si $\varepsilon > 0$ et $T \in \mathbb{R}$, on dit que T est une ε-presque période de f si $\|f - f_T\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On dit que f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que tout segment de longueur R de $\mathbb{R}$ contienne une ε-presque période de f.
a) Donner des exemples de fonctions presque périodiques.
b) Montrer qu'une fonction presque périodique est bornée.
c) Montrer qu'une fonction presque périodique est uniformément continue.
d) On suppose que f est presque périodique.
Montrer que, si $(t_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle, il existe une extraction φ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p,q \geqslant N \Rightarrow \|f_{t_{\varphi(p)}} - f_{t_{\varphi(q)}}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Qu'en déduit-on ?
e) La réciproque de la question précédente est-elle exacte ?

44. [P] ★ Déterminer l'ensemble des nombres réels c tels qu'il existe une fonction deux fois dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' > f + c$ et $f'' > f' + c$.

45. [L] ★ Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, $M_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Soient f et g dans E telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = M_n(g)$. Montrer que $f = g$.
b) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = \exp\left(-\dfrac{n^2}{10}\right)$?
c) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = \dfrac{1}{1+10n^2}$?

46. [P] ★ Soit f une fonction continue de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\int_{-1/2}^{3/2} xf(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x$.

47. [PLSR] ★ Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(2)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en considérant a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\ln(2) = \frac{a}{b}$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que
$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{\operatorname{ppmc}(1, 2, \ldots, n)}$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \frac{1}{n!}\left(X^n(1-X)^n\right)^{(n)}$. Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{A_n}{b \times \operatorname{ppmc}(1, 2, \ldots, n)}$.
c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On admet que $\pi_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$. Montrer que, pour n assez grand, $\operatorname{ppmc}(1, 2, \ldots, n) \leqslant 3^n$.
d) Conclure.

48. [L] ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et 2π-périodique telle que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x), f'(x)) \neq (0, 0)$.
a) Montrer que l'ensemble Z des zéros de f sur $[0, 2\pi[$ est fini.
b) Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 1 en $+\infty$, vers -1 en $-\infty$.
Montrer que $|Z| = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g'\left(\frac{f'}{f}(x)\right)\left(\frac{f'}{f}\right)'(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Montrer que $|Z| = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f''f - f'^2}{f^2 + f'^2}$.

49. [P] ★ Soit $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $p_0 = p_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$,
$p_n = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \ldots \int_0^{1-x_{n-1}} \mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1} \ldots\right) \mathrm{d}x_1$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(\pi/6)^n$.

50. [P] ★ Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x}\int_0^x f(t)\,e^t\,\mathrm{d}t$.

51. [SR] ★ Soient X une partie non vide d'un espace normé, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.
a) On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur X vers une fonction f. Montrer que f est continue.
b) On suppose que X est compacte et que, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de X et tout x de X tels que $x_n \to x$, on a $f_n(x_n) \to f(x)$. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

52. [P] ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

53. [L] ★ Soit $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geqslant k+1}$ une suite réelle telle que $\sum |a_n|$ converge et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$. Minorer le nombre de zéros de f sur $[-\pi, \pi[$.

54. [P] ★ Déterminer la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}\right)^{1/x}$.

55. [PLSR]★ Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ somme d'une série entière, on ait $f(x) = o(g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

56. [P]★ Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{A}\int_1^A A^{1/x}\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

57. [P] ★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $\lambda \in \,]0, 1[$.

a) Montrer que, pour tout réel t, l'ensemble $A_t = \displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n X_n \leqslant t\right)$ est un événement.

b) Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(A_t)$ est continue.

58. [PLSR] ★ ***a)*** Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit x dans l'enveloppe convexe de A. Montrer que x peut s'écrire comme combinaison convexe d'une famille de $n+1$ points de A.
b) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne standard. Soit T une partie de la boule unité fermée, et x un point de l'enveloppe convexe de T. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe une liste $(x_1, \ldots, x_k) \in T^k$ telle que $\displaystyle\left\| x - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Ind. Introduire des points deux à deux distincts $y_1, \ldots, y_p$ de T et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$ et $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, puis considérer une variable aléatoire X telle que $\mathbf{P}(X = y_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

59. [P] ★ On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire T donnant le premier instant k pour lequel il existe $i \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $k - i$ soit pair, les lancers aux instants k et i aient donné face, et les lancers à tous les instants strictement compris entre k et i aient donné pile. Montrer que T est d'espérance finie, et calculer son espérance.

60. [P] ★ On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

61. [P] ★ Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X_1 \geqslant x) > 0$.
Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
i) pour tout réel $\alpha > 1$, on a $\mathbf{P}(X_1 \geqslant \alpha x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(\mathbf{P}(X_1 \geqslant x)\big)$;
ii) il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ divergeant vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{b_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Écoles Normales Supérieures - PSI

62. ★ $^\diamond$ Dénombrer les permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dont les cycles, dans la décomposition en cycles à support disjoints, sont tous de longueur paire.

Écoles Normales Supérieures - PC

63. ★ Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $I_2 \in V$.
b) Donner un exemple de tel hyperplan V.
c) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}VP$ contienne toutes les matrices diagonales.
d) Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}VQ = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

64. ★ $^\diamond$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie $(*)$ si et seulement si :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
a) Déterminer les fonctions continues vérifiant $(*)$.
b) Si f vérifie $(*)$ et si f n'est pas linéaire, montrer que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.
c) Déterminer les f vérifiant $(*)$ et pour lesquelles il existe $n > 1$ tel que :
$\forall x > 0$, $f(x^n) = f(x)^n$.

65. ★ Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, M_n la matrice aléatoire $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
a) Calculer $\mathbf{E}\left(\mathrm{tr}\left((M_n)^k\right)\right)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
b) Calculer $\mathbf{E}\left(\det(M_n)\right)$ et $\mathbf{E}\left((\det M_n)^2\right)$.
c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
Montrer que $\mathbf{P}\left(|\det(M_n)| \geqslant f(n)\sqrt{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

École Polytechnique - MP

66. ★ $^\diamond$ Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites à valeurs dans un ensemble E, respectivement a-périodique et b-périodique. On suppose qu'il existe $a + b - a \wedge b$ entiers relatifs consécutifs tels que $x_n = y_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

67. $^{\diamond\bigstar}$ Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. On définit l'application v de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ en posant $v(0) = +\infty$ et, si $(a, b, k) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ vérifie $a \wedge b = ab \wedge p = 1$, $v\left(p^k \dfrac{a}{b}\right) = k$.
a) Pour $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, montrer que $v(xy) = v(x) + v(y), v(x + y) \geqslant \min(v(x), v(y))$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $v(n!) < \dfrac{n}{p-1}$.
c) Soit $P = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $v^{(i)}(P) = \min\{v(a_j) \ ; \ j \in \mathbb{N}, \ j \geqslant i\}$.
On fixe $m \in \mathbb{N}$, $R = (X - m)P$. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, \ v^{(i+1)}(R) \geqslant v^{(i)}(P)$.
d) Soient $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k p^k$. Montrer que, si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois, elle est identiquement nulle.

68. $^{\bigstar}$ Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x}$ la classe de conjugaison de x :
$\overline{x} = \{gxg^{-1} \ ; \ g \in G\}$; on dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \overline{x}$.
a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent, alors tous ses éléments le sont.
b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tels que $g^2 = x$. Montrer que $\dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

69. $^{\bigstar\,\diamond}$ Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P.
a) Montrer que P est à racines simples.
b) Montrer que les racines de P sont alignées.

70. $^{\bigstar\,\diamond}$ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} {\lambda_i}^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

71. $^{\bigstar}$ Soient $m_1, \ldots, m_n$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $x_1 < \cdots < x_n$ des nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{x - x_i}$. Montrer que $f^{-1}([\lambda, +\infty[)$ est une réunion finie d'intervalles bornés. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

72. $^{\bigstar}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathcal{S}_n$, soit P_σ la matrice de permutation associée à σ. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $T_n = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \det(I_n + P_\sigma)$.
a) Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathcal{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.
d) Donner une formule simple pour T_n.

73. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

74. ★ Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal X^3+2X+2. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

75. ★ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.
a) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
b) Étudier la continuité de $u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

76. ★ Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

77. ★ Soient $C = [-1,1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^{\circ n})_{n\geqslant 0}$ sous les hypothèses suivantes : ***i)*** $f(C) \subset [-1/2,1/2]^2$, ***ii)*** $f(C) \subset \,]-1,1[^2$, ***iii)*** $f(C) \underset{\neq}{\subset} C$.

78. ★ Soient C l'algèbre des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, A une sous-algèbre de C, $\overline{A}$ l'adhérence de A pour la norme $\| \|_\infty$.
a) Montrer que, si f et g sont dans $\overline{A}$, il en est de même de $\min(f,g)$.
b) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $f_1,\dots,f_m$ dans $\overline{A}$. Montrer que $\min(f_1,\dots,f_m)$ et $\max(f_1,\dots,f_m)$ sont dans $\overline{A}$.
On suppose désormais que A sépare les points : pour a et b dans $[0,1]$ distincts, il existe $f \in A$ telle que $f(a) \neq f(b)$.
c) Soient a et b deux éléments distincts de $[0,1]$, α et β deux nombres réels. Montrer qu'il existe $f \in A$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
On admet que, de tout recouvrement ouvert de $[0,1]$, on peut extraire un recouvrement fini.
d) Soit $f \in C$. Montrer que, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in [0,1]$, il existe $g_x \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x \leqslant f + \varepsilon$.
e) Montrer que $\overline{A} = C$.

79. ★ Soient $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 1$ et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite de terme général $u_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(\pi p\,\theta_j)$ tend vers 0. Montrer : $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $a_j = 0$.

80. ★ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, soit $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $\forall n \geqslant 2,\ v_n = \dfrac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k}$.
a) Que dire de $(v_n)_{n\geqslant 2}$ si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel ℓ ?

b) On suppose que u_n est égal à 1 si le premier chiffre de l'écriture de n en base 10 est 1, à 0 sinon. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\geqslant 2}$, puis celle de (w_n).

81. ★ Si f est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, on note $M(f)$ la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M(f)(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

a) Montrer que, pour toute fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^{(k)}(f)(n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.

b) Montrer que, si f est polynomiale, il en est de même de $M(f)$.

82. ★ Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d(k)$. Donner un équivalent de D_n.

b) Soit γ la constante d'Euler. Montrer que $D_n = n\ln(n) + (2\gamma - 1)n + O\left(\sqrt{n}\right)$.

83. ★ On fixe un nombre premier p. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$, H le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à 1.

a) Soit $s \in H$. Montrer que la famille $(p^{-s\deg(F)})_{F\in\mathcal{P}}$ est sommable : on note $\xi(s)$ sa somme dans la suite de l'énoncé.

b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$ qui sont sans facteur carré, autrement dit sans facteur multiple dans leur décomposition en facteurs irréductibles. Soit $s \in H$. On note $\xi_2(s) = \displaystyle\sum_{F\in\mathcal{D}} p^{-s\deg(F)}$. Montrer que $\xi(2s) = \dfrac{\xi(s)}{\xi_2(s)}$.

c) Soit $k \geqslant 2$ entier. Montrer qu'il y a exactement $p^k - p^{k-1}$ polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré k et sans facteur carré.

84. ★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

a) Montrer qu'il n'existe pas de $R \in \mathbb{R}(X)$ sans pôle dans I tel que $x \in I \mapsto R(x)\,e^{-x^2}$ soit une primitive de $x \in I \mapsto e^{-x^2}$.

b) Soient $G \in \mathbb{R}(X)$ sans pôle dans I, $H \in \mathbb{R}[X,Y]$.
On suppose : $\forall x \in I,\ H(x, e^{G(x)}) = 0$. Montrer que $H = 0$.

85. ★ On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est appelée base de type S lorsque pour tout $f \in E$ il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n$ avec convergence uniforme.

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0,1]$.

b) Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de type S. Montrer que $\left(\dfrac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de type S.

c) Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue, affine sur chaque intervalle ouvert inclus dans $[0,1] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$, et coïncide avec f en $x_0, \dots, x_n$. Montrer que $(F_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
d) En déduire l'existence d'une base de type S.

86. * ***a)*** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, g une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\to} 0$.
b) Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$.

87. * ***a)*** La fonction g est définie par $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est développable en série entière sur aucun intervalle ouvert contenant 0.
b) Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe $a > 0$, $M > 0$, $A > 0$ tels que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a,a],\ |f^{(n)}(x)| \leqslant MA^n n!$.
c) Établir l'existence de $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g^{(n)}(x)| \leqslant (n!)^{3/2} A^n$.

88. * Soient $R > 0$ et $(a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \neq 0$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à R. On cherche à construire $(b_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $g : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ ait un rayon de convergence > 0 et $(f \circ g)(z) = z$ au voisinage de 0.
a) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que : $(*)$:
$\forall N \in \mathbb{N}^*, f\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n z^n\right) = z + o(z^N)$
b) Soit $(A_n)_{n \geqslant 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $A_1 = |a_1|$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \geqslant |a_n|$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum A_n z^n$ est strictement positif. On définit, au voisinage de 0, la fonction $F : z \mapsto A_1 z - \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} A_n z^n$. On considère la suite $(B_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $F\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} B_n z^n\right) = z + o(z^N)$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $B_n \geqslant |b_n|$.
c) Soit $r \in]0, R[$ et $M = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \dfrac{M}{r^N}$. Montrer que les rayons de convergence de $\sum B_n z^n$ et de $\sum b_n z^n$ sont strictement positifs.
d) Conclure.

89. ★ Pour $x \in \,]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k}$.

a) Montrer que, si $x \in \,]-1,1[$, $(P_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge. On note $P(x)$ la limite.

b) Montrer que, pour $x \in \,]-1,1[$, $P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n$, où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est le nombre de façons d'écrire n comme somme d'éléments de $\mathbb{N}^*$ sans tenir compte de l'ordre.

c) Montrer que, lorsque $x \to 1^-$, $P(x) = \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-x)}(1+o(1))\right)$.

d) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $p_n \leqslant \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\,(1+o(1))\right)$.

90. ★ On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique, notée $\| \ \|$ et on considère $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, v une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ρ-lipschitzienne pour $\| \ \|$, X une application de classe C^1 telle que $\forall t \in [0,1],\ X'(t) = v(X(t))$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0,\dots,N\}$, on pose $X_k^N = X\left(\frac{k}{n}\right)$ et on définit par récurrence $\xi_0^N = X(0)$ et si $k \geqslant 1$, $\xi_k^N = \xi_{k-1}^N + \frac{1}{N} v(\xi_{k-1}^N)$. On note pour $k \in \{0,\dots,N\}$, $\varepsilon_k^N = \|\xi_k^N - X_k^N\|$ et $\varepsilon^N = \max\{\rho_k^N \ ; \ k \in \{0,\dots,N\}\}$. Montrer que $\varepsilon^N \to 0$ quand $N \to +\infty$.

91. ★ On note G le groupe des bijections affines du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même.

a) Montrer que G est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

b) Pour $g \in G$, on note (a_g, b_g) l'unique couple de complexes tel que $g : z \mapsto a_g z + b_g$. À quelle condition sur (a_g, b_g) l'application g admet-elle un unique point fixe ?

c) Soit $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$. On pose $h = g_1^3 g_2^3 g_3^3$. Calculer a_h et b_h en fonction des a_{g_i} et b_{g_i}.

d) On admet que si $a_{g_1} a_{g_2} a_{g_3} = j$ et si $a_{g_1}, a_{g_2}, a_{g_3}$ sont tous distincts de j, alors

$$b_h = -j^2 a_{g_1}^2 a_{g_2} (a_{g_1} - j)(a_{g_2} - j)(a_{g_3} - j)(\alpha + \beta j + \gamma j^2),$$

où α, β, γ désignent les points fixes respectifs de $g_2 g_3$, $g_3 g_1$ et $g_1 g_2$.

On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note α l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\alpha})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{C\alpha}, \overrightarrow{CB})$; β l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{A\beta}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\beta})$; γ l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\gamma})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{B\gamma}, \overrightarrow{BA})$.

Montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral. On appliquera ce qui précède en prenant pour g_1 (resp. g_2, g_3) la rotation de centre A (resp. B, C) et d'angle de mesure $\frac{2a}{3}$ (resp. $\frac{2b}{3}$, $\frac{2c}{3}$).

92. ★ Soient φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $Z = \varphi^{-1}\{0\}$.

a) Soit $z \in Z$ tel que $\nabla\varphi(z) \neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?

b) On suppose que Z compacte, non vide, et que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur Z. Quelle est l'image de $z \in Z \mapsto \dfrac{\nabla\varphi(z)}{\|\nabla\varphi(z)\|}$?

93. ★ Soient c et λ deux éléments de $]0,1[$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_0 = c$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ $\mathbf{P}(X_{n+1} = (1-\lambda)x + \lambda \,|\, X_n = x) = x,\ \mathbf{P}(X_{n+1} = (1-\lambda)x \,|\, X_n = x) = 1 - x.$
a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, X_n est presque sûrement à valeurs dans $]0,1[$ et que l'ensemble $\{x \in]0,1[\ ;\ \mathbf{P}(X_n = x) > 0\}$ est de cardinal majoré par 2^n.
b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
c) Montrer qu'il existe $\mu_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathbf{E}({X_n}^2) - c| \leqslant \exp(-\mu_2 n)$.
d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\mu_p > 0$ et $m_p > 0$ tels que
$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathbf{E}({X_n}^p) - c| \leqslant m_p\ \exp(-\mu_p n)$.
e) Si $t \in \mathbb{R}^{+*}$, quelle est la limite de la suite $(\mathbf{E}(t^{X_n}))_{n\geqslant 0}$?

94. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On note A l'événement : la matrice $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible. Montrer que $\mathbf{P}(A) \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big)$.

95. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, N une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})) = \mathbf{P}(N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

96. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.
b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

École Polytechnique - ESPCI - PC

97. ★ ◇ Soient $n \geqslant 3$, $a_1, \dots, a_n$ des complexes de module 1. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |z - a_i| = 1$.

Mines-Ponts - MP

98. ★ ◇ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+,\ \det(A^2 + tI_n) \geqslant 0$.

b) On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

99. ★ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

100. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$.

101. ★ Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[0,1]$ sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ. Montrer que Φ induit un automorphisme φ de V dont la seule valeur propre est 1. En déduire que $\varphi = \mathrm{id}_V$.

102. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.
a) Soit $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelle et imaginaire de A, montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in S_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS} avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

103. ★ Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

104. ★ ***a)*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que, pour $n = 2$ et $n = 3$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour n quelconque ?

105. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$.

106. ★ Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

107. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A,B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A,B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$.
a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A^kB - BA^k = kA^{k-1}[A,B]$.
b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
c) Montrer que $e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\frac{[A,B]}{2}}$.

108. ★ On considère une urne contenant a boules blanches et b boules rouges. Après chaque tirage, on remet c boules de la couleur tirée dans l'urne. On effectue n tirages et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées.

a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
b) On considère Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage pour lequel on tire une boule rouge. Montrer que Y admet une espérance et calculer la loi de Y.

109. * Soient $p \in]0,1[$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ ;\ X_1 = X_2 = \cdots = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.
a) Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
b) Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{\ell \in \mathbb{N}^* \ ;\ X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \cdots = X_{L_1+\ell}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

Mines-Ponts - PSI

110. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Mines-Ponts - PC

111. $^{\diamond\,\star}$ Soient A et B deux événements indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
a) Déterminer $Z(\Omega)$.
b) Montrer qu'il existe $k \in Z(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Z = k) \geqslant 4/9$.

Centrale - MP

112. * Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$. On suppose que $a_n S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
a) Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
b) Donner un équivalent de a_n.

Centrale - PSI

113. * Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
a) Montrer que les boules de E sont convexes.
b) Soit C une partie convexe de E. On suppose que C est dense dans E. Montrer que $C = E$:
i) dans le cas où $E = \mathbb{R}$; ***ii)*** dans le cas général.

Centrale - PC

114. $^{\star\,\diamond}$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose : $e^{2i\pi P(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.