FEUILLE D'EXERCICES N° 6

SUITES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES

ÉTUDES DE SUITES

Exercice 1

Déterminer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

- $u_{n+1} = 2 \cdot u_n$ et $u_2 = 3$
- $u_{n+1} - u_n = 4$ et $u_5 = -1$
- $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_1 = 3$
- $u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $u_0 = 1$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$
- $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ et $u_0 = 1,\ u_1 = -1$

Exercice 2

Que peut-on dire de la suite u telle que : $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{u_n}{2n+3}$?

Exercice 3

On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$.

1. Résoudre $f(x) = x$. On trouve deux solutions ℓ_1 et ℓ_2.
2. Montrer que la suite $\left(v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de référence.
3. Calculer $\xi = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ puis un équivalent de $u_n - \xi$.

Exercice 4

Étudier les suites récurrentes suivantes :

- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$
- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$
- $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{ch} u_n}$.

Exercice 5

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 2$. On suppose que la suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 6. Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 6

On pose : $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}^2 \leqslant 1 + u_n \cdot \sqrt{2}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 7

Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_0 = a,\ b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{cases}.$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 8

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k(k+1) \leqslant 2k^3$.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ puis la limite quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 9

Soit u une suite bornée.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $v_n = \inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ et $w_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$ existent.
2. Montrer que les suites v et w convergent.
3. Montrer que u converge si et seulement si $\lim v = \lim w$.

Exercice 10

1. Simplifier pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2\mathrm{sh}x}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 11

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}.$$

1. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'on peut donner un sens au produit infini : $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1+x_n}{2}$, puis calculer la valeur C de produit. [indication : on pourra étudier $\theta_n = \arccos x_n$.]

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre d'entiers naturels de n chiffres significatifs ne comportant pas la séquence 13 en notation décimale. Ainsi, $u_0 = 1$ car seul 0 n'admet aucun chiffre significatif et $u_2 = \#([\![10,99]\!]\setminus\{13\}) = 89$ par exemple.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n$.
2. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite. On pose : $v_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ [moyenne de Cesaro].

1. Montrer que si u est convergente de limite ℓ, alors v aussi.
2. Montrer que si u est croissante, la réciproque du 1. est vraie.
3. Montrer que si $u_{n+1}-u_n \longrightarrow 1$, alors $u_n \sim n$.
4. La réciproque du 3. est-elle vraie ?

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telles que :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ u_n \leqslant \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}.$$

On suppose de plus la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ majorée.
Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est constante.

Exercice 15

On prend une feuille de papier et on réalise n fois l'opération suivante : on plie la feuille en deux en portant le côté droit sur le côté gauche.
On déplie ensuite la feuille et on note u_n le nombre de « creux » et v_n le nombre de « bosses ». Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Comportements asymptotiques

Exercice 16

Déterminer un équivalent des suites suivantes ainsi que la nature de la suite (convergente ou divergente) :

- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n\cdot\sin(n^3) + e^{-n}}{3n^4 - 17n^3 + 8\ln n}$
- $u_n = \dfrac{\ln^5 n - (\frac{1}{\sqrt{3}})^n}{(3n\sqrt{n}+1)\times(\ln 3 - \ln n)^5}$
- $u_n = \dfrac{2^n+3^n+4^n}{3^n-4^n+5^n} + \dfrac{2n+3}{\ln n\times(7n-4)}$

Exercice 17

1. Montrer que la suite $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,dt$ est monotone, puis convergente.
2. Simplifier $u_n + u_{n+2}$.
3. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0,+\infty[$ que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19

Déterminer un équivalent des suites suivantes :

- $u_n = \sqrt{n^2 + \dfrac{\ln n}{n}} - n$
- $u_n = \dfrac{2^{n^2}+n!}{3^n\times(n+1)!}$
- $u_n = \left(e^{\frac{\ln n^2}{n^2}} - \dfrac{n}{n+1}\right)\cdot n$
- $u_n = \Big(e^{2n}\times\big(\cos(e^{-n})-1\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20

Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n$, dans les cas suivants :

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$
- $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$
- $u_{n+2} = \dfrac{5}{6}u_{n+1} + \dfrac{1}{6}u_n$ et $u_0 = 1$ et $u_2 = 2$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$

Exercice 21

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
2. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 22

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = |u_n - n|$.

1. Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}\leqslant n_0$.
2. Montrer que $\forall n\geqslant n_0$, $u_n\leqslant n$.
3. Établir une formule entre u_{n+2} à u_n, pour tout $n\geqslant n_0$.
4. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23

Soit u la suite dont la succession des valeurs est 1, puis deux fois 2, puis trois fois 3, puis quatre fois 4, etc.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 24

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution x_n dans $]0,1[$ puis étudier la suite (x_n) et un développement asymptotique à deux termes significatifs.

Exercice 25

1. Montrer que pour tout entier naturel n assez grand supérieur à un entier n_0, l'équation $\operatorname{ch} x = nx + \dfrac{1}{2}$ admet deux solutions réelles $x_n < y_n$.
2. Montrer que les suites $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(y_n)_{n \geqslant n_0}$ sont monotones.
3. Déterminer les deux premiers termes dans les développements asymptotiques des quantités x_n et y_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26

Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ dans les cas suivants :

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{4^k}$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 3k - 1}{2^k}$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Exercice 27

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n > 0,\ x_n^n + x_n = 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante, puis convergente vers une limite ℓ à déterminer.
3. Calculer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 28

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = nx$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. On note $a_n < b_n$ ces deux solutions.
2. Étudier les suites $(a_n)_{n \geqslant 3}$ et $(b_n)_{n \geqslant 3}$.
3. Déterminer les développements asymptotiques des quantités a_n et b_n à trois termes significatifs.

Exercice 29

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $e^x = n - x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet deux solutions réelles $u_n < v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont monotones. Sont-elles convergentes ?
3. Déterminer les deux premiers termes dans le développement asymptotique des quantités u_n et v_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Suites de nombres complexes

Exercice 30

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les deux sous-suites $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.
2. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que : $\forall (p \neq q),\ |z_p - z_q| \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

Exercice 31

Étudier la suite z définie par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 32

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tous $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$, alors $|z_p - z_q| \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

Thèmes variés

Exercice 33

Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel. On pose l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \left\{ p\,\alpha - q \ ;\ (p,q) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\left\{ \{k\alpha\} \ ;\ k \in [\![1,n]\!] \right\}$ contient n éléments, où $\{x\}$ désigne la partie décimale du réel x.
   (b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{A} \cap \left] -\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right[$ contient au moins un élément non nul.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les suites $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont denses dans $[-1,1]$.
3. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ puis $a_1, \cdots, a_r$ des éléments dans $[\![0,9]\!]$, avec $a_1 \neq 0$.
   (a) Montrer que le nombre $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.
   (b) Montrer qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale est de la forme : $a_1 a_2 \cdots a_r \star \cdots \star$.

Exercice 34

On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{-1+x}{3+x}$.

1. Résoudre $f(x) = x$. On trouve une solution ℓ.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \ell$.
3. Montrer que la suite $\left(w_n = \dfrac{1}{u_n - \ell} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de référence.

4. Calculer $\xi = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ puis un équivalent de $u_n - \xi$.

Exercice 35

On pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Calculer la limite de cette suite. On pourra faire intervenir des intégrales.

Exercice 36

1. Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ sont adjacentes.
2. On pose $e = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. On suppose que e est rationnel. On pose : $e = p/q$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < e < v_n$.
   (b) En déduire que e est irrationnel.

Exercice 37

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier.
2. Montrer que la suite $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n \cdot \pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Reprendre les questions en remplaçant $3+\sqrt{5}$ par $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $3-\sqrt{5}$ par $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 38

On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

1. Montrer qu'une suite d'entiers est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
2. Qu'en est-il d'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$?

Exercice 39

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite réelle convergente est de Cauchy.
2. Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) On sait alors que la suite admet une valeur d'adhérence ℓ. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
3. ***application :*** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } R_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$
   Montrer que si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 40

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs strictement positifs de l'entier n. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 41

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe.

Un peu plus difficile

Exercice 42

Soit u une suite réelle telle que : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u forme un intervalle.

Exercice 43

Étudier la suite u définie par : $0 < u_0, u_1 < 1$ et $u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}{2}$.

Exercice 44

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que la suite $\sigma(n) \sim \ell \cdot n$. Montrer que $\ell = 1$.

Exercice 45

Soit $\mathscr{F}$ une figure du plan comportant un nombre infini de points et telle que la distance entre deux points de $\mathscr{F}$ est toujours un entier. Montrer que tous les points de $\mathscr{F}$ sont alignés.

Exercice 46

Déterminer un équivalent du nombre de points à coordonnées entières dans le disque de centre O et de rayon n.

Exercice 47

Peut-on construire un édifice à partir de briques de même taille, en les posant les unes sur les autres de façon à ce que chaque brique soit en contact avec au maximum deux briques et tel que l'aplomb soit arbitrairement grand ?

Exercice 48

Soient $a \in \{0, \cdots, 9\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ le nombre d'entiers $j \in \{0, \cdots, n\}$ tels que le k-ième chiffre après la virgule du développement décimal de $\sqrt{j}$ soit égal à a.

Déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(n)$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n}$.

Exercice 49

Soit r un rationnel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe des entiers $q_1, \cdots, q_n$ tous différents dans $\mathbb{N}^*$ tels que : $r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}$.

2. Combien y a-t-il de possibilités pour les q_k ?

Exercice 50

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels. En utilisant l'application $\Delta : Q(X) \longmapsto Q(X+1) - Q(X)$, montrer que si la suite $\Big(\exp(iP(k))\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence, alors $P(X) - P(0) \in \pi \cdot \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 51

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{n+1} - u_n - u_n^2 = 0$. Montrer que soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.