T.D. EM$_9$: Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 1 Ondes sphériques (exo de cours !)

1. Quelle est, à trois dimensions, l'expression de l'équation de D'ALEMBERT ? La démontrer pour des ondes électromagnétiques dans le vide.
2. Les plans d'onde d'une onde sont théoriquement d'extension infinie, mais le concept d'onde plane n'est *a priori* envisageable que dans des zones d'extension limitée, l'énergie d'une onde ne pouvant être infinie. Les ondes sphériques, d'amplitude variable au cours de leur propagation, permettent une description des ondes émises, par exemple, par une source lumineuse de petite taille placée en un point O.
   a. Établir la forme générale des ondes sphériques, solutions de l'équation de propagation de D'ALEMBERT scalaire 3D, dont l'amplitude ne dépend que de t et de la distance $r = \mathrm{OM}$ au point origine O.
   b. Interpréter les deux termes intervenant dans cette expression. Que dire si le point O est uniquement une source lumineuse ?
   c. Commenter l'intervention d'un facteur décroissant comme $1/r$ dans l'amplitude de l'onde, en admettant qu'un tel facteur intervient dans les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ d'une onde électromagnétique sphérique.

On donne le Laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r,\theta,\varphi) = f(r)$: $\quad \Delta f(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2\, r\, f(r)}{\mathrm{d}r^2}$

Exercice 2 Polarisation circulaire

Une oeppm est polarisée circulairement et se propage dans le vide. Expliciter les champs électrique et magnétique puis calculer le vecteur de POYNTING. Commenter.

Exercice 3 Puissance d'un laser

Un laser émet en continu, avec une puissance de 10 W, une onde plane d'étendue transversale 1 mm^2. Calculer les amplitudes des champs électrique et magnétique.

Exercice 4 Superposition de deux oeppm

Une oeppm électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est $\overrightarrow{k_1} = k_1\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_z})$ et son champ électrique est noté $\overrightarrow{\mathrm{E}}_1$. Elle est polarisée rectilignement suivant $(\mathrm{O}y)$.

1. Que vaut k_1 ? Justifier. Quel est le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}_1$ associé à l'onde ?
2. Une deuxième oeppm, de mêmes fréquence, amplitude et polarisation est superposée à la première. Son vecteur d'onde est le symétrique de $\overrightarrow{k_1}$ par rapport à $\overrightarrow{e_x}$. Ces deux ondes sont en phase à l'origine des coordonnées.
   Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale.
3. Quelle est la direction de propagation de cette onde globale ? Est-elle plane ? Stationnaire ? Quelle vitesse de phase peut-on associer à cette onde ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?
4. Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ du vecteur de POYNTING de l'onde globale ? A-t-on $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi}_1 + \overrightarrow{\Pi}_2$? $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \langle\overrightarrow{\Pi}_1\rangle + \langle\overrightarrow{\Pi}_2\rangle$? Commenter.
5. Quelle est l'énergie moyenne transportée par unité de temps et de surface à travers un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde résultante ?
6. Quelle vitesse d'énergie « moyenne » peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.

Exercice 5 Analyseur à pénombre

On intercale successivement (le long d'un axe $(\mathrm{O}z)$) sur le faisceau d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique naturelle : un polariseur (P), une lame demi-onde (L) ne couvrant que la moitié du faisceau ($y < 0$) et un analyseur (A). On suppose que la lame n'atténue pas l'intensité du faisceau qui la traverse.

On admet que pour la lame demi-onde, il existe deux directions particulières orthogonales, parallèles à $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$ appelées axes rapide et lent de la lame. Une onde incidente polarisée ressort avec une polarisation symétrique par rapport à l'axe rapide.

On pose α l'angle (variable) entre l'axe rapide de la lame (L) et l'axe du polariseur (P) et β l'angle (faible et fixé) entre l'axe lent de (L) et l'axe de l'analyseur (A). Les angles sont orientés en accord avec $(\mathrm{O}z)$.

1. Déterminer le rapport des intensités lumineuses de chaque plage.
2. Pour quelles valeurs de α les deux moitiés du faisceau sortant de (A) ont-elles la même intensité ? Commentaire sur l'intensité des plages dans chaque cas ? Quelle situation est la plus intéressante ?

Exercice 6 Création d'un champ électromagnétique

Soit une distribution surfacique plane (plan $x\mathrm{O}y$) illimitée de vecteur densité de courant surfacique alternatif $\overrightarrow{j_s} = \mathrm{J}_0\cos\omega t\,\overrightarrow{e_x}$. Déterminer le champ électromagnétique hors du plan, créé par ces courants.

Exercice 7 Étude d'un faisceau laser

Un fin faisceau laser est mal représenté par une onde plane, nécessairement d'extension transverse infinie dans l'espace libre. On se propose de chercher une approximation de l'équation de propagation convenant mieux à l'étude particulière d'ondes lumineuses conservant une direction de propagation proche de l'axe (Oz), et d'extension transverse finie.

Comme l'onde est essentiellement dirigée selon l'axe (Oz), on écrit le champ électrique sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}(x,y,z,t) = \underline{u}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{e_x} + \underline{v}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{où} \quad k = \omega/c$$

On ne s'intéressera qu'à la fonction $\underline{u}(x,y,z)$.

1. En supposant que la variation de $\underline{u}$ selon z est très petite devant les variations selon x et y et aussi qu'elle varie peu sur une longueur d'onde, montrer que $\underline{u}$ satisfait à l'équation $(\mathscr{U})$:

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} - 2\mathrm{j}k\,\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = 0 \qquad (\mathscr{U})$$

2. Soit une onde sphérique émise du point de l'axe d'abscisse $z = 0$.
   a. Donner l'expression exacte de l'amplitude complexe $\underline{u}_s$ de l'onde en fonction de x, y et z.
   b. Que devient cette expression dans l'approximation $z \gg x, y$? On notera $\underline{u}'_s$ cette amplitude approchée.
   c. Montrer que $\underline{u}'_s$ est solution de l'équation $(\mathscr{U})$.
3. On cherche une solution plus générale de l'équation $(\mathscr{U})$ sous une forme inspirée de celle de l'onde sphérique : $\underline{u}(x,y,z) = \underline{\mathrm{A}}(z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\,\frac{x^2+y^2}{2\underline{q}(z)}}$ où $\underline{\mathrm{A}}$ et $\underline{q}$ sont deux fonctions de z.
   a. Montrer que l'équation $(\mathscr{U})$ implique que $\underline{q}$ et $\underline{\mathrm{A}}$ sont de la forme : $\underline{q}(z) = \underline{q}_0 + z$ et $\underline{\mathrm{A}}(z) = \underline{\mathrm{A}}_0\,\underline{q}_0/\underline{q}(z)$.
   b. On suppose qu'en $z = 0$, u est, avec a_0 une constante réelle donnée, de la forme $u(x,y,0) = \underline{\mathrm{A}}_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{a_0^2}}$. Mettre l'amplitude sous la forme de faisceau gaussien suivante, en exprimant les fonctions réelles $\mathrm{R}(z)$ et $a(z)$:

$$\underline{u}(x,y,z) = \underline{u}_0\left(\frac{1}{\mathrm{R}(z)} - \mathrm{j}\,\frac{2}{k\,a(z)^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\,\frac{x^2+y^2}{2\mathrm{R}(z)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{a(z)^2}}$$

   c. Que représente $a(z)$? Représenter $a(z)$ pour $z \leqslant 0$. Montrer que, à une distance suffisante de l'origine, le faisceau lumineux peut être considéré comme conique. Calculer le demi-angle au sommet θ de ce cône pour $\lambda = 632{,}8$ nm et $a_0 = 0{,}3$ mm.
   d. Que représente $\mathrm{R}(z)$? Pour quelle valeur z_0 de z, R est-il minimum ? Calculer les valeurs numériques de z_0 et de $\mathrm{R}_{\min}$ en reprenant les valeurs de λ et de a_0 de la question précédente.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Pas d'indication.

Exercice 2

Pas d'indication. Il suffit de connaître son cours !

Exercice 3

Much too easy !

Exercice 4

Onde totale : $\overrightarrow{\mathrm{E}} = 2\mathrm{E}_0\cos\left(\frac{\omega}{c}\,z\sin\alpha\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\,x\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{2\mathrm{E}_0}{c}\left[-\sin\left(\frac{\omega}{c}\,z\sin\alpha\right)\sin\alpha\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\,x\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_x} + \cos\left(\frac{\omega}{c}\,z\sin\alpha\right)\cos\alpha\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\,x\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_z}\right]$

Vitesse de l'énergie : $v_e = c\cos\alpha$.

Exercice 5

1. *On trouve* $r = \dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$.
2. *Un indice se trouve dans le titre de l'exercice pour déterminer la bonne situation (argumenter sur le contraste).*

Exercice 6

Pas d'indication mais pensez quand même aux symétries, comme d'habitude…

Exercice 7

Revoir l'exercice sur les ondes sphériques. A part ça, il faut bien réfléchir !