Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Devoir Surveillé n° 10 (2h)

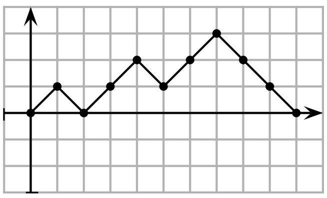
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

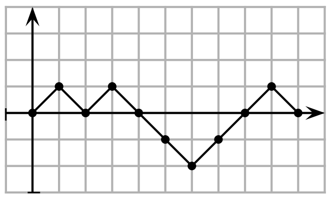
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Problème 1 – Chemins de Dyck.

L'objet de ce problème est de dénombrer de plusieurs façons les chemins de Dyck, constitués de pas montants ou descendants, en nombre égal, tels qu'à aucun moment du chemin, on n'ait effectué davantage de pas descendants que de pas montants. Ainsi, si on se déplace sur un axe orienté positivement vers le haut, le chemin débute et termine en l'origine, et reste entièrement dans la partie positive de l'axe.
Par commodité, on associe ce déplacement vers le haut ou le bas à un déplacement vers la droite, de sorte à mieux visualiser le chemin dans un plan, plutôt que sur une droite. Ainsi, les pas sont des pas diagonaux, progressant de 1 en abscisse et de 1 ou -1 en ordonnée. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est alors un chemin dans le plan reliant $(0,0)$ à $(2n,0)$ par des pas diagonaux vers la droite, montant ou descendant, de sorte à ce que le chemin reste toujours au-dessus (au sens large) de l'axe des abscisses.
Par exemple, la première figure ci-dessous est un chemin de Dyck, mais pas la deuxième.





Le but du problème est de dénombrer de plusieurs façons le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. On note D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$, et d_n son cardinal.
Tous les chemins considérés dans cet énoncé partent de l'origine $(0,0)$, et sont constitués de pas diagonaux vers la droite.

Partie I – Dénombrement par principe de symétrie

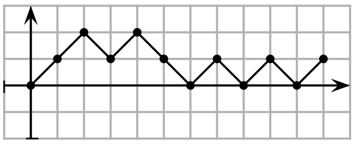
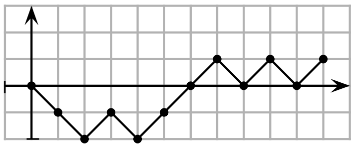
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il y a autant de chemins de Dyck de longueur $2n$ que de chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1,1)$ et ne rencontrant jamais l'axe des abscisses, sauf au point initial.

Soit :
- *A_n l'ensemble de tous les chemins aboutissant en $(2n+1,1)$,*
- *B_n l'ensemble des chemins de A_n qui ne rencontrent l'axe des abscisses qu'en l'origine,*
- *B'_n l'ensemble des chemins de A_n commençant par un pas montant, et rencontrant l'axe des abscisses ailleurs qu'en l'origine*
- *B''_n l'ensemble des chemins de A_n débutant par un pas descendant.*

2. Montrer que $\{B_n, B'_n, B''_n\}$ est une partition de A_n.

Soit $\Gamma \in B'_n$. On construit $\Phi(\Gamma)$ le chemin obtenu en prenant le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la portion de Γ comprise entre $(0,0)$ et le premier point de retour sur l'axe des abscisses et en laissant le reste du chemin inchangé. Dans l'exemple ci-dessous, la seconde figure représente l'image de la première par Φ.

3. Montrer que Φ est une bijection de B'_n dans B''_n.
4. Déterminer $|B''_n|$ et en déduire que
$$d_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan *et sera par la suite noté* C_n.

Partie II – Dénombrement par le lemme cyclique

Soit Γ et Γ' deux chemins, représentés par des suites $(a_1, \dots, a_N)$ et $(b_1, \dots, b_N)$ de 0 (pas montant) et de 1 (pas descendant). On dit que Γ' est un conjugué de Γ s'il existe $p \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\Gamma' = (a_{p+1}, \dots, a_N, a_1, \dots, a_p)$.

1. Montrer que la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée classe de conjugaison.
2. Trouver et représenter graphiquement tous les conjugués de $(1, 1, 0, 0, 0)$ ainsi que ceux de $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$.
3. Soit Γ un chemin de longueur N. On dit que Γ est srtictement périodique si Γ peut être découpée en un nombre $\ell > 1$ de séquences toutes égales. Ainsi, Γ est constitué d'un nombre strictement supérieur à 1 de périodes entières.
   Montrer que si Γ n'est pas strictement périodique, alors il admet exactement N conjugués 2 à 2 distincts.
4. Soit Γ un chemin de Dyck. On lui associe un chemin $\overline{\Gamma}$ en lui rajoutant un dernier pas descendant. Par exemple, si $\Gamma = (1, 0, 1, 0)$, alors $\overline{\Gamma} = (1, 0, 1, 0, 0)$.
   Déterminer en fonction de la longueur $2n$ de Γ le cardinal de la classe de conjugaison de $\overline{\Gamma}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Γ' un chemin quelconque de $(0, 0)$ à $(n, n+1)$.
   Montrer qu'il existe un et un seul chemin de Dyck Γ de longueur $2n$ tel que $\overline{\Gamma}$ soit dans la classe de conjugaison de Γ'.
6. En déduire d_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

Partie III – Bijection de Rémy

1. Montrer que les nombres de Catalan C_n vérifient la relation de récurrence :
$$C_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)C_n = 2(2n-1)C_{n-1}$$
   et que réciproquement cette relation détermine C_n.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, D'_n l'ensemble des chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1, -1)$ et dont les $2n$ premiers pas forment un chemin de Dyck. Soit S_n l'ensemble des chemins de D'_n (notation du I), munis d'un pas marqué (i.e. un couple (Γ, i), où Γ est dans D'_n, et $i \in [\![1, 2n+1]\!]$ est l'indice d'un pas que l'on distingue des autres). On note de même F_n l'ensemble des chemins de B_n avec un pas descendant marqué (i.e. l'indice i ci-dessus doit correspondre à l'indice d'un pas descendant)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On construit une application Ψ de $S_{n-1} \times \{0, 1\} \to F_n$ de la manière suivante : étant donné Γ un élément de S_n de pas marqué p, et $\varepsilon \in \{0, 1\}$:

- *si $\varepsilon = 0$, on remplace dans le chemin Γ, le pas p par une séquence $1\underline{0}p$ le pas souligné étant le pas descendant marqué.*
- *si $\varepsilon = 1$, on repère la séquence s la plus longue commençant au pas p (inclus) et ne descendant pas en-dessous de l'ordonnée initiale (juste avant d'effectuer le pas p). On remarquera que :*
  - *cette séquence s est alors immédiatement suivie d'un pas descendant 0. C'est ce pas descendant qu'on marque.*
  - *cette séquence s est vide si (et seulement si) le pas p est un pas descendant.*

  On remplace alors la séquence s dans le mot Γ par $1s0$ (autrement dit on « surélève » la séquence s). Ainsi, la séquence $s0$ est remplacée par $1s0\underline{0}$.

2. Montrer que Ψ est une bijection.
3. En déduire encore une fois que $d_n = C_n$.

Question subsidiaire hors-barême
Établir une bijection entre l'ensemble des chemins de Dyck et l'ensemble des arbres binaires complets (chaque noeud a exactement 2 fils). À quoi correspond la bijection Ψ ci-dessus sur les arbres ? (bijection de Rémy)

Problème 2 –

On désigne par n un entier naturel non nul et, dans les deux premières parties de ce problème, on considère une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. Trois joueurs notés A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue le premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc. Le gagnant est le premier des trois qui extrait la boule blanche.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note A_k (resp. B_k, C_k) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie lors du k-ième tirage ».
On note A (resp. B, C) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie »
L'objectif de ce problème est de comparer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ selon le mode de tirage et, dans la troisième partie, avec une urne remplie aléatoirement.

Partie I – Les tirages se font avec remise de la boule tirée

1. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $P(A_{3k+1})$, $P(B_{3k+2})$ et $P(C_{3k+3})$.
2. En déduire $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et vérifier que si $n \geqslant 2$ $P(A) > P(B) > P(C)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie II – Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $3k+3 \leqslant n$:
$$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}.$$
2. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, en discutant suivant la classe de congruence modulo 3 de n, et vérifier que $P(A) \geqslant P(B) \geqslant P(C)$. Les inégalités sont-elles nécessairement strictes ?

Partie III – Les tirages se font sans remise, dans une urne remplie aléatoirement.

L'urne est remplie de la façon suivante : on lance une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et « face » avec la probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers.
Si N prend la valeur n ($n \in \mathbb{N}^*$), on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne et on procède à l'expérience décrite dans l'introduction, sans remise des boules tirées.

1. (a) Montrer que $P(A) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p$.
   (b) Trouver des expressions analogues pour $P(B)$ et $P(C)$, et comparer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. (a) Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{p}{3q} \displaystyle\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.
   (b) Établir que, lorsque $p = \frac{1}{2}$, on a $P(A) \geqslant \frac{17}{24}$.
   (c) Expliciter $P(A)$ en fonction de p et q, à l'aide des fonctions usuelles.
3. (a) Déterminer la limite de $P(A)$ lorsque p tend vers 0 et commenter le résultat obtenu.
   (b) Déterminer la limite, lorsque p tend vers 1, de $P(A)$, et commenter le résultat obtenu.
   (c) Étudier les variations de $p \mapsto P(A)$.