Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DS n^o 9

Exercice 1

1. Si x est un réel, alors la fonction $f : t \longmapsto e^{-t^2}$ étant continue sur le segment d'extrémités x et $2x$, l'intégrale de f entre ces deux points existe et $g(x)$ est correctement défini.
Si $x \in \mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $u = -t$, on obtient :
$$g(-x) = -g(x).$$
La fonction g est impaire.
2. Pour $x > 1$, on peut écrire pour tout $t \in [x, 2x]$,
$$0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t},$$
donc par intégration :
$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_x^{2x} e^{-t}\ dt = e^{-x} - e^{-2x}.$$
Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x} - e^{-2x} = 0$, le théorème des gendarmes montre que la fonction g tend vers 0 en $+\infty$.
3. (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ dt$ la primitive de la fonction $f : t \longmapsto e^{-t^2}$ s'annulant en 0. On en déduit :
$$\forall x \geqslant 1,\ g(x) = F(2x) - F(x).$$
La fonction g est donc de classe C^1 (sur l'intervalle $[1, +\infty[$ en fait sur $\mathbb{R}$) et :
$$\forall x \geqslant 1,\ g'(x) = 2F'(2x) - F(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-4x^2}\left(2 - e^{3x^2}\right).$$
Si $x \geqslant 1$, alors $3x^2 \geqslant 3$, puis $2 - e^{3x^2} \leqslant 2 - e^3 < 0$.
La fonction g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
De plus, $g(1) = \displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}\ dx > 0$ en utilisant par exemple le théorème aux quatre hypothèses : $1 < 2$, intégrande continue, intégrande positive, intégrande non nulle, donc intégrale non nulle et donc nécessairement strictement positive. On trouve un entier n_0 tel que $0 < \dfrac{1}{n_0} < g(1)$.
On en déduit que l'équation $g(x) = \dfrac{1}{n}$, pour tout entier $n \geqslant n_0$ admet au moins une solution par le TVI et en fait une seule par la stricte décroissance de la fonction g sur $[1, +\infty[$.

(b) Soit $x > 1$. Alors, on effectue une IPP :

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{-2te^{-t^2}}{-2t}\,dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{-2t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt.$$

On montre maintenant que la quantité $h(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$ est négligeable devant $g(x)$.
Pour tout $x > 1$, on en déduit :

$$|h(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2x^2}\,dt = \frac{g(x)}{2x^2}.$$

On obtient alors ce qu'il faut.

(c) Comme pour tout entier $n \geqslant n_0$, $x_n = g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et que la fonction g^{-1} est la bijection réciproque de la bijection :

$$g : [1, +\infty[\longrightarrow]0, g(1)],$$

la fonction g^{-1} admet comme limite $+\infty$ en 0^+. La quantité x_n tend donc vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.
Par la question précédente, on obtient :

$$\frac{1}{n} = g(x_n) = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_{x_n}^{2x_n} + \circ(g(x_n)).$$

On en déduit :

$$\frac{e^{-x_n^2}}{2x_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_{x_n}^{2x_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} g(x_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi :

$$\frac{e^{-x_n^2}}{2x_n} = \frac{1}{n}(1 + \circ(1)),$$

et en prenant le logarithme,

$$-x_n^2 - \ln 2 - \ln(x_n) = -\ln n + \ln(1 + \circ(1)) = -\ln n + \circ(1).$$

Par les croissances comparées, $\ln(x_n) = \circ(x_n^2)$, donc :

$$x_n^2 = \ln n \times (1 + \circ(1)), \text{ donc } x_n = \sqrt{\ln n} \times (1 + \circ(1)).$$

La quantité x_n est équivalente à $\sqrt{\ln n}$.

Exercice 2

1. (a) On vérifie que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $R^2 = I_2$, donc est une racine carrée de I_2. Il y en a une infinité.

   (b) Si R est une racine carrée de I_2, on vérifie facilement que la matrice :
$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$
sera une racine carrée de I_n. Il y a au moins autant de racines carrées de I_2 que de racines carrées de I_n. Cette matrice en admet donc une infinité.

2. (a) On sait que :
$$\{0\} \subset \ker(A) \subset \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$
Comme A est non nulle, alors $\ker(A) \neq \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Ensuite, comme la matrice A est nilpotente, la matrice A n'est pas inversible et son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Le noyau $\ker(A)$ doit être une droite vectorielle. D'autre part, par les noyaux itérés, on sait qu'en posant $N_k = \ker(A^k)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$N_k \subset N_{k+1},$$
et si $N_k = N_{k+1}$, alors les noyaux N_p sont égaux à partir du rang k.
Comme la matrice A est nilpotente, il existe k tel que $A^k = 0$, donc $N_k = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Ensuite, $N_1 \subset N_2$ imposant à N_2 d'être soit égal à N_1, soit égal à $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, du fait des dimensions.
Si $N_1 = N_2$, alors pour tout entier $p \geqslant 1$, $N_p = N_1$ et en particulier, $N_k = N_1$, ce qui n'est pas le cas.
En conclusion, $N_2 = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A^2 est nulle.

   (b) Soit R une racine carrée éventuelle à la matrice A. Alors, $R^2 = A$, donc $R^{2k} = A^k = 0$. La matrice R est nilpotente. En posant pour tout entier naturel p :
$$K_p = \ker(R^p),$$
alors :
$$\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 = \ker(A) = N_1.$$
L'espace K_2 est de dimension 1 et l'espace K_1 n'est pas réduit à $\{0\}$ car la matrice nilpotente R n'est pas inversible. Par les dimensions, $K_1 = K_2$ et pour tout entier $p \geqslant 1$, $K_p = K_1$.
Par conséquent, $K_2 = K_4$, donc $N_1 = N_2$, ce qui n'est pas le cas, car N_1 est de dimension 1 et N_2 est de dimension 2.
Il n'y a pas de racine carrée à la matrice A.

   (c) La réponse est non. En effet, si B est la matrice :
$$B = E_{1,3},$$
alors la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $R^2 = B$ et $\mathrm{Rac}(B)$ n'est pas l'ensemble vide.

3. (a) On voit que les deux premières colonnes de A forment une famille libre et la troisième colonne de A est l'opposé de la deuxième : $\mathrm{Rg}(A) = 2$.
La matrice $A - I_3$ est :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\mathrm{Rg}(A - I_3) = 2$ puisque la troisième colonne C_3 vaut $C_3 = C_1 + C_2$.

(b) On procède par analyse/synthèse.

Par la question précédente, en notant $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (X_1) est une base de $\ker(A)$ et (X_2) est une base de $\ker(A - I_3)$.
La matrice diagonale D semblable à la matrice A doit être de coefficients diagonaux 0, 1 et λ puisque si a, b, c sont les trois coefficients diagonaux, alors les seuls $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $D - \alpha I_3$ soit non inversible sont les éléments diagonaux. Ainsi, il n'y a que trois α tels que la matrice $A - \alpha\, I_3$ ne soit pas inversible ($\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(D)$, donc $\mathrm{Rg}(A - \alpha I_3) = \mathrm{Rg}(D - \alpha I_3)$ car ces matrices sont semblables). On a déjà $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ qui conviennent. On doit avoir $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$, donc :

$$17 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) = a + b + c = 0 + 1 + \lambda$$

et λ doit être égal à 16.

En synthèse, on regarde la matrice $A - 16\, I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -5 & -13 & -3 \\ 5 & -3 & -13 \end{pmatrix}$. Celle-ci est de rang 2 car $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de cette matrice.

On vérifie finalement que la famille (X_1, X_2, X_3) forme une famille libre, donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et si P est la matrice de passage de la base canonique vers cette base, alors :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit R une racine carrée de la matrice A. Alors, $R^2 = A$, donc $RA = R^3 = AR$.
Il est classique que constater que les espaces $\ker(A)$, $\ker(A - I_3)$ et $\ker(A - 16I_3)$ sont stables par l'endomorphisme R. On en déduit que les vecteurs $R(X_1)$, $R(X_2)$ et $R(X_3)$ sont colinéaires respectivement aux vecteurs X_1, X_2 et X_3 car chacun des trois noyaux est une droite vectorielle stable par R.
Par conséquent, la matrice $P^{-1}RP$ est une matrice diagonale Δ et :

$$\Delta^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D.$$

En notant a, b et c les trois coefficients diagonaux de la matrice Δ, alors $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 16$. On dispose donc au maximum pour l'instant de 4 racines carrées de A : les matrices $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $b \in \{-1, 1\}$ et $c \in \{-4, 4\}$.

Réciproquement, ces matrices conviennent (vérification facile).

La matrice A admet quatre racines carrées.

Exercice 3

1. Le déterminant de $P_1 + t\ P_2$ est par sa formule de la définition une fonction polynomiale en t.
2. On a $f(i) \neq 0$, donc f n'est pas le polynôme nul.
3. Le polynôme f ne peut s'annuler une infinité de fois. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$ et donc $P_1 + a\ P_2$ est inversible pour ce réel a.
4. Sous les hypothèses, il existe P inversible à coefficients complexes telle que :

$$P^{-1}AP = B, \text{ donc } AP = PB.$$

On pose $P = P_1 + i\ P_2$, où P_1 et P_2 sont à coefficients réels.

En prenant les parties imaginaires ou réelles des composantes dans $AP = PB$, sachant que A et B sont à coefficients réels,

$$AP_1 = P_1 B \text{ et } AP_2 = P_2 B.$$

On sait maintenant par le début du problème qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $Q = P_1 + a\ P_2$ soit inversible.

On voit alors que : $AQ = QB$, donc :

$$Q^{-1}AQ = B,$$

avec Q inversible à coefficients réels.

Exercice 4

1. Par les formules trigonométriques,

$$I + J = \int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos(2t)}.$$

On peut utiliser les règles de Bioche. Un bon changement de variable est $u = \tan t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{2\frac{1}{1+u^2} - 1} \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{du}{1-u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/3}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\sqrt{3}/3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= \ln(3+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{6}) = A.
\end{aligned}$$

2. On voit que comme $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$,

$$I - J = \frac{\pi}{6}.$$

Conclusion,

$$I = \frac{A}{2}+\frac{\pi}{12} \text{ et } J = \frac{A}{2}-\frac{\pi}{12}.$$

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve deux entiers k_0 et k_1 tels que :

$$\frac{k_0\,\pi}{n} \leqslant a < \frac{(k_0+1)\pi}{n} \text{ et } \frac{k_1\,\pi}{n} \leqslant b < \frac{(k_1+1)\pi}{n}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\sin(nt)|\,dt &= \int_{\frac{k_0}{n}\pi}^{\frac{k_1+1}{n}\pi} |\sin(nt)|\,dt + \int_a^{\frac{k_0}{n}\pi} |\sin(nt)|\,dt + \int_{\frac{k_1+1}{n}\pi}^{b} |\sin(nt)|\,dt \\
&= \int_{\frac{k_0}{n}\pi}^{\frac{k_1+1}{n}\pi} |\sin(nt)|\,dt + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

car $\left|\frac{k_0}{n}\pi - a\right| \leqslant \frac{\pi}{n}$ et $\left|\frac{k_1+1}{n}\pi - b\right| \leqslant \frac{\pi}{n}$.
Or,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k_0}{n}\pi}^{\frac{k_1+1}{n}\pi} |\sin(nt)|\,dt &= \sum_{i=k_0}^{k_1}\int_{\frac{i\pi}{n}}^{\frac{(i+1)\pi}{n}} |\sin(nt)|\,dt \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=k_0}^{k_1}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin u|\,du \qquad [\text{changement } u = nt] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=k_0}^{k_1}\int_0^{\pi} |\sin u|\,du \qquad [\text{fonction } \pi\text{-périodique}] \\
&= \frac{1}{n}(k_1-k_0+1)\int_0^{\pi} \sin u\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,\frac{k_1+1-k_0}{n}\\
&= \frac{2}{\pi}\,\left(\frac{k_1+1}{n}\,\pi - \frac{k_0}{n}\,\pi\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\,(b-a) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

de limite $\dfrac{2}{\pi}(b-a)$.
Conclusion,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b |\sin(nt)|\;dt = \frac{2}{\pi}\,(b-a).$$

On obtient exactement ce qu'il fallait, pour la fonction $f=1$.

2. Lorsque f est la fonction indicatrice du segment $[\alpha,\beta]$, ce qui précède implique :

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\;|\sin(nt)|\;dt &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\alpha^\beta |\sin(nt)|\;dt\\
&= \frac{2}{\pi}\,(\beta-\alpha) = \frac{2}{\pi}\,\int_a^b f(t)\;dt.
\end{aligned}
$$

3. La formule est linéaire en f. Comme elle est vraie pour toute fonction indicatrice de segments inclus dans $[a,b]$, elle l'est pour toute fonction en escalier.
On suppose la fonction f continue par morceaux.
Soit $\varepsilon>0$. On peut construite $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$ deux fonctions en escalier telles que :

$$\psi-\varphi\leqslant\varepsilon.$$

Il existe n_0 un entier assez grand pour que :

$$\forall n\geqslant n_0,\;\left|\int_a^b \varphi(t)\;|\sin(nt)|\;dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi\right|\leqslant\varepsilon,$$

et idem pour ψ.
Soit $n\geqslant n_0$ un entier. Alors,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_a^b f-\varepsilon-\frac{2}{\pi}(b-a)\varepsilon = \frac{2}{\pi}\int_a^b (f-\varepsilon)-\varepsilon &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi-\varepsilon\\
&\leqslant \int_a^b \varphi(t)\;|\sin(nt)|\;dt\\
&\leqslant \int_a^b f(t)\;|\sin(nt)|\;dt\\
&\leqslant \int_a^b \psi(t)\;|\sin(nt)|\;dt\\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int_a^b \psi+\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_a^b (f+\varepsilon)+\varepsilon \\ &= \frac{2}{\pi}\int_a^b f+\varepsilon+\frac{2}{\pi}(b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient alors ce qu'il faut en remplaçant ε, par $C\ \varepsilon$, où $C = \dfrac{1}{1+\frac{2}{\pi}(b-a)}$ est une constante dépendant de a et b qui ne varient pas.

Exercice 6

1. On va montrer que $\{2\} \in \mathscr{S}$ et que si $E \in \mathscr{S}$, alors $\{2\} \subset E$.
   D'une part, la partie $\{2\}$ est bien sympathique, après vérification facile puisque $\dfrac{2+2}{2\wedge 2} = 2$.
   D'autre part, si $E \in \mathscr{S}$, comme la partie E est non vide, on trouve $a \in E$ et donc :
   $$\frac{a+a}{a\wedge a} = 2 \in E.$$
   L'ensemble $\mathscr{S}$ possède un plus petit élément : le singleton $\{2\}$.
2. Soit $E \in \mathscr{S}$ tel que $1 \in E$. Alors, on va montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \in E$.
   En effet, on a déjà $1 \in E$.
   Si k est un entier strictement positif appartenant à E, alors :
   $$k+1 = \frac{k+1}{k\wedge 1} \in E.$$
   Réciproquement, la partie $\mathbb{N}^*$ est évidemment sympathique, donc l'ensemble considéré est :
   $$\{\mathbb{N}^*\}.$$
3. (a) Supposons l'entier m pair. On pose $m = 2k$. Comme $m > 2$, alors $k > 1$. On sait que 2 appartient nécessairement à E, donc :
   $$\frac{m+2}{m\wedge 2} = \frac{2(k+1)}{2} = k+1$$
   appartient encore à E.
   Cependant, $k+1 > 2$ et $k+1 < m$, contredisant la minimalité de m dans $E \setminus \{2\}$. l'entier m est bien impair.

   (b) Par récurrence ici non détaillée, il suffit de montrer que l'entier impair suivant m, à savoir l'entier $m+2$ appartient à E.
   Or,
   $$m+2 = \frac{m+2}{m\wedge 2} \in E,$$
   ce qui résout la question.

(c) Soit N un entier pair supérieur ou égal à 2. On pose $m' = (N-1) \cdot m$, de sorte que l'entier m' est un entier impair – car étant un produit de deux nombres impairs – supérieur à m. L'entier m' appartient donc à l'ensemble E.
Ensuite, on remarque que $m \wedge m' = m$, donc :
$$\frac{m+m'}{m \wedge m'} = N,$$
entier appartenant à E.
On a ce qu'il faut.

(d) On en déduit que 2 et 4 appartiennent à E, donc aussi :
$$\frac{2+4}{2 \wedge 4} = 3.$$
L'entier m vaut en fait 3.
On sait donc que l'ensemble E contient $2\mathbb{N}^*$ et contient tous les entiers impairs supérieurs ou égaux à 3, donc E contient tous les entiers supérieurs ou égaux à 2 : $\mathbb{N} \setminus \{0,1\} \subset E$ et comme $E \subset \mathbb{N}^*$ et que E ne contient pas 1, alors :
$$E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.$$
Remarque : on peut se poser la question de savoir que la partie $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ est bien sympathique. Si a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2, le quotient $\dfrac{a+b}{a \wedge b}$ est déjà un entier supérieur ou égal à 1. De plus,
$$a \wedge b \leqslant a < a+b,$$
donc le quotient est strictement supérieur à 1. La partie $E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ est bien sympathique.