Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Jean-Pierre Barani, Olivier Bouverot, Denis Choimet, Michel Colin, Christian Devanz, Jean-Denis Eiden, Karine Fournier, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Philippe Gallic, Max Hochart, Jean-Claude Jacquens, Antoine Landart, Catherine Long, François Moulin, Renaud Palisse, Philippe Patte, Alain Pommellet, Clément de Seguins-Pazzis, Jean-Claude Sifre pour leurs contributions à cette liste d'exercices.
Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 15 mars 2015, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

1. *Cachan.* * Soit G un groupe fini de cardinal une puissance non nulle d'un nombre premier. Montrer qu'il existe un éléément différent du neutre qui commute avec tous les éléments de G.

2. *Paris.** Soit $r \geqslant 1$.
a) Construire un groupe Γ_r engendré par r éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ tel que, pour tout groupe G engendréé par r éléments $g_1, \ldots, g_r$, il existe un unique morphisme p surjectif de Γ_r dans G tel que $p(\gamma_i) = g_i$ pour tout i. On montrera qu'il est unique à isomorphisme près.
b) Pour K sous-groupe de Γ_r, on note $[\Gamma_r : K]$ le cardinal de $\Gamma_r/K = \{gK,\ g \in \Gamma_r\}$. Pour $n, r \geqslant 1$, déterminer le nombre $N_{n,r}$ de sous-groupes K de Γ_r tels que $[\Gamma_r : K] = n$.

3. *Paris.** ***a)*** Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
b) Soit A une K-algèbre de dimension finie. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que A est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_d(K)$.
c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possédant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant M.

4. *Lyon.** Soient M un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $(G, \cdot)$ un groupe abélien. On se donne une application s de G dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $(g,h) \in G^2$, $s(g) \circ s(h) = s(gh)$. On suppose que, pour tout $g \in G$, $s(g)(M) \subset M$. Montrer qu'il existe x dans M tel que, pour tout $g \in G$, $s(g)(x) = x$.

5. *Paris.*★ Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre commutative engendrée (comme $\mathbb{C}$-algèbre) par $x_1, \ldots, x_n$. On suppose que $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, où les A_i sont des sous-espaces vectoriels de A, et que chaque x_i est dans l'un des A_j. On suppose que : $\forall (i,j)$, $A_i A_j \subset A_{i+j}$. Montrer que A_0 est une sous-algèbre de A et qu'elle est engendrée par un nombre fini d'éléments.

6. *Paris.*★ ***a)*** Soient K un corps, $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$. On suppose que le degré total de P est au plus égal à $t_1 + \cdots + t_n$ et que P contient le monôme $\lambda X_1^{t_1} \ldots X_n^{t_n}$. Soit d'autre part, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $S_i \subset K$ tel que $|S_i| > t_i$. Montrer qu'il existe $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ tel que $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.
b) Soient p un nombre premier, A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que :
$|A + B| \geqslant \min(p, |A| + |B| - 1)$.

7. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ ***a)*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + X\,B^2$.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [-1,1], P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + (1 - X^2)B^2$.

8. *Cachan, Rennes.*★ Une matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de la forme $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

9. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \in \mathbb{Z}^n$ on définit $\lambda(X)$ comme le pgcd des coefficients de X. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det(A) = \pm 1$ si et seulement si, pour tout X, $\lambda(AX) = \lambda(X)$.

10. *Lyon.*★ Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$.

11. *Paris.*★ On considère n et d entiers vérifiant $2 \leqslant d \leqslant n$.
a) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-1, 1]$.
On note $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et on admet que $\lambda_2 \leqslant 1 - 2(1 - \cos(\pi/n))\mu_A$ où $\mu_A = \min \left\{ \displaystyle\sum_{i \in I,\, j \notin I} a_{i,j} \;;\; I \subset \{1, \ldots, n\},\; I \neq \emptyset,\; I \neq \{1, \ldots, n\} \right\}$.
b) Soit Γ un graphe connexe à n sommets. De chaque sommet S partent exactement d arêtes qui vont vers d sommets distincts : on n'exclut pas que l'une des arêtes revienne à S.
Une particule se déplace d'un sommet à l'autre aux instants successifs $k = 0, 1, 2, \ldots$ selon la loi suivante. Si, à l'instant k, la particule est en S :
- avec la probabilité $1/2$ elle reste en S ;
- avec la probabilité $1/(2d)$ elle emprunte l'une des d arrêtes issue de S.
Les choix successifs s'effectuant en toute indépendance mutuelle.

Si S et T sont des sommets et $k \in \mathbb{N}$, on note $P_k(S,T)$ la probabilité pour que la particule étant en S à l'instant 0, elle soit en T à l'instant k. Étudier la convergence de la suite $(P_k(S,T))_{k\geqslant 0}$.

c) Pour $\epsilon > 0$, on note $\ell_{S,T}(\epsilon) = \min\left\{k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1-\epsilon}{n} \leqslant P_k(S,T) \leqslant \dfrac{1+\epsilon}{n}\right\}$. Montrer que $\ell_{S,T}(\epsilon) = O\left(n^2 d \ln(n/\epsilon)\right)$.

12. *Paris.* ★ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On rappelle l'inégalité de Hölder : si $p,q \in]1,+\infty[$ vérifient $1/p + 1/q = 1$, on a, pour $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$,
$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $r_i = \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ et $c_i = \sum_{j\neq i} |a_{j,i}|$. Soit $\alpha \in [0,1]$.

a) On suppose : $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $|a_{i,i}| > {r_i}^{\alpha}{c_i}^{1-\alpha}$. Montrer que A est inversible.
On note, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, D_i le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon ${r_i}^{\alpha}{c_i}^{1-\alpha}$.
b) Montrer que les valeurs propres de A sont dans $D_1 \cup \cdots \cup D_n$.
c) On suppose que les D_i sont disjoints. Montrer que chacun des D_i contient exactement une valeur propre de A.

13. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On munit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Soit u un endomorphisme symétrique de E laissant stables tous les $\mathbb{R}_n[X]$ identifiés à des sous-espaces de E. Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs propres de u telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall f \in E,\ f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle P_n, f\rangle\, P_n$.

14. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ ***a)*** Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
i) $\deg P_n = n$, ii) le coefficient dominant de P_n est strictement positif,
iii) $\int_{-1}^{1} P_m P_n = \dfrac{2}{2n+1}$ si $m = n$, et 0 sinon.
b) Pour $x \in [0,1]$, soit $f_x : w \in]-1,1[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}}$. Montrer que :
$f_x(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, w^n$.

15. *Lyon.*★ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C = \int_0^1 \exp(sA) B\, {}^tB \exp(s\, {}^tA)\,\mathrm{d}s$.
Montrer que C est inversible si et seulement si $\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}(A^i B) = \mathbb{R}^n$.

16. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★

a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c_n, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \displaystyle\int_{\|X\|\leqslant 1} \langle AX, X\rangle \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = c_n \operatorname{tr} A$.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \operatorname{tr} BAB \geqslant 0$.
c) Soient $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $r > 0$. On définit l'ellipsoïde $E(B, X, r)$ comme l'ensemble des Y tels que $\langle Y - X, B(Y - X)\rangle \leqslant r^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Montrer f convexe $\Leftrightarrow \forall X, \forall r > 0, \forall B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ f(X) \leqslant \displaystyle\int_{E(B,X,r)} f$.

17. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On note $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M\,{}^t\overline{M} = I_n$. Soient $(A, B) \in U_n(\mathbb{C})^2$ et $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$. On considère les fonctions $\alpha : z \in \mathbb{C}^n \mapsto Az + a$ et $\beta : z \in \mathbb{C}^n \mapsto Bz + b$.
a) Montrer qu'il existe $C \in U_n(\mathbb{C})$ et $c \in \mathbb{C}^n$ tels que $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} : z \mapsto Cz + c$.
b) Montrer que $|||C - I_n||| \leqslant 2|||A - I_n|||\,|||B - I_n|||$ et $\|c\| \leqslant |||A - I_n|||\,\|b\| + |||B - I_n|||\,\|a\|$.

18. *Lyon.*★ ***a)*** Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet. On suppose que, pour toute famille libre $(x, y) \in X^2$, $t \mapsto \|x + ty\|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer :
$\forall x \neq 0, \exists \phi_x \in \mathcal{L}_c(X, \mathbb{R}), \forall y \in X, \dfrac{\|x + \epsilon y\| - \|x\|}{\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \phi_x(y)$.
b) On suppose de plus que :
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in X^2, \left(\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \left\|\dfrac{x + y}{2}\right\| \geqslant 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \epsilon\right)$.
Montrer que, pour toute forme linéaire continue non nulle f, il existe un unique vecteur unitaire x tel que $f(x) = \|f\|$.
c) Montrer alors que, pour toute forme linéaire continue non nulle f, il existe un unique vecteur unitaire x tel que $f = \|f\|\phi_x$.

19. *Lyon.*★ Soient E un espace de Banach et $B : E \times E \to E$ une fonction bilinéaire continue. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $a \in B_f(0, \alpha)$, il existe un unique $x \in B_f(0, 2\alpha)$ tel que $x = a + B(x, x)$. Généraliser au cas où B est une fonction n-linéaire continue de E^n dans E, l'équation considérée étant $x = a + B(x, \ldots, x)$.

20. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E. Un point x de X est dit extrémal lorsque $\forall (y, z) \in X^2,\ x = \dfrac{y + z}{2} \Rightarrow x = y = z$.
a) Montrer que si X est compact non vide et E est de dimension finie alors X possède un point extrémal.
b) On note X l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
i) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$; ***ii)*** $\forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$; ***iii)*** $\forall j \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
Déterminer les points extrémaux de X.

21. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que la suite $(\phi^k)_{k\geqslant 0}$ est bornée. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \phi^k\right)_{m\geqslant 1}$ converge simplement.

22. *Paris.*★ Le but est de démontrer le théorème de Brouwer en dimension 2 : toute application continue f du disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1 dans lui-même admet un point fixe.
a) Montrer que cette propriétéé équivaut à : ≪ toute application f continue d'un triangle fermé du plan dans lui-même admet un point fixe ≫.
b) On considère un triangle et une triangulation c'est-à-dire un découpage de ce triangle en petits triangles. On numérote les sommets du grand triangle 1, 2, et 3. Puis, on numérote chaque sommet des petits triangles intérieurs 1, 2 ou 3 ; on demande aussi à ce que les sommets (de petits triangles) qui se situent sur le côôté $[1, 2]$ du grand triangle soient numérotés avec des 1 ou 2 uniquement ; de même sur les côtés $[1, 3]$ et $[2, 3]$. Montrer qu'il existe nécessairement un petit triangle numéroté 1, 2 et 3.
c) On considère donc f continue du triangle dans lui-même. On repère chaque point du triangle en coordonnées barycentrique (a, b, c) (avec $a + b + c = 1$) par rapport aux points A,B,C sommets du triangle. On numérote les points de l'intérieur du triangle de la façon suivante : si on note (a', b', c') les coordonnées de $f(M)$ pour $M(a, b, c)$, alors si $a' < a$ on le numérote 1, puis si $a' \geqslant a$ et $b' < b$ on le numérote 2, et si $a' \geqslant b' \geqslant b$ et $c' < c$ on le numérote 3. Que se passe t-il si l'on est dans le cas restant ? Avec la question précédente, montrer l'existence d'un point fixe.

23. *Lyon.*★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique, notée $\| \ \|$. Soit A une partie dense de $[0, +\infty[$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|x - y\| \in A \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
a) Montrer sur un exemple que f peut ne pas être une isométrie lorsque $n = 1$.
b) Montrer que f est une isométrie si $n \geqslant 2$.
c) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \|x - y\| = 1 \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que g est une isométrie.

24. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On munit $\ell^2(\mathbb{N})$ de sa structure préhilbertienne usuelle. On note d_i la suite $(\delta_{i,n})_{n\geqslant 0}$. Soit T un endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{N})$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(d_i)\|^2 < +\infty$. Montrer que T est continu puis que, si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$, $(T(u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

25. *Lyon.*★ Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, 1[, \mathbb{C})$ à support compact. On munit E de la norme $\| \ \|_2$: si $f \in E$, $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$. Soit $D : E \to E$ qui à f associe f'. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $c_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n et tout ϕ de E, on ait : $\|(P(D)(\phi)\|_2 \geqslant c_n \|\phi\|_2$.

26. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Déterminer la nature des séries de termes généraux :
$\dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ et $\dfrac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.

27. *Lyon.*★ Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels, la série $\sum f(a_n)$ soit convergente.

28. *Paris.*★ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étant donné $x \in [0,1]$, on dit que f traverse en x lorsque tout voisinage de x dans $[0,1]$ contient deux points y et z tels que $f(y)\,f(z) < 0$. Donner un exemple où f traverse en une quantité non dénombrable de points de $[0,1]$.

29. *Lyon.*★ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.
a) On suppose que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$, où f^n désigne l'itérée n-ième de f pour la composition des fonctions. Montrer que $f = \mathrm{id}$ ou $f^2 = \mathrm{id}$.
b) On se donne une partie finie A de $[0,1]$ et on suppose que pour tout $x \in [0,1] \setminus A$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$. Montrer que $f = \mathrm{id}$ ou $f^2 = \mathrm{id}$.

30. *Paris.* ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout nombre premier p et tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f\left(x + k/p\right) = 0$. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.

31. *Lyon.*★ ***a)*** Soient S un segment et $f_1, \ldots, f_n$ continues par morceaux de S dans $\{0,\, 1\}$, telles que, pour tous $\ell_1, \ldots, \ell_k$ distincts dans $\{1, \ldots, n\}$, on ait $\displaystyle\int_S f_{\ell_1} \times f_{\ell_2} \times \cdots \times f_{\ell_k} = \frac{(n-k)!}{n!}\cdot$ Lorsque $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_S (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)^m$.
b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe un segment S et une famille $(f_1\,, \ldots\,, f_n)$ satisfaisant toutes ces propriétés.

32. ★ Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$, $p \geqslant 1$ et $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\frac{\left\|\int_0^1 f\right\|^p}{\left(\int_0^1 g\right)^{p-1}} \leqslant \int_0^1 \frac{\|f\|^p}{g^{p-1}}.$$

33. *Paris.*★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Soit $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que g est de carré intégrable et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} g^2 = \int_{\mathbb{R}^+} f^2$.

34. ★ Soit $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que y et y'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
a) Montrer que y' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, que y et y' ont pour limite 0 en $+\infty$.
b) On pose $J(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} (y^2 - (y')^2 + (y'')^2)$. On note $Y : x \mapsto e^{-x/2}\sin(x\sqrt{3}/2 - \pi/3)$. Montrer que $Y + Y' + Y'' = 0$, $Y(0) + Y'(0) = 0$ et $J(Y) = 0$.
c) Montrer que $J(y) \geqslant 0$.

35. *Paris.*★ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ définie par : $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 0$ et $x \in]0,1]$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

36. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On note D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue non constante telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe une suite (P_n) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ convergeant uniformément vers f sur D. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, le polynôme P_n possède une racine de module au plus r.

37. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une famille de $\mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et Q_{2n} le polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$ tel que pour tout entier $k \in [\![-n,n]\!]$, $Q_{2n}(k) = c_k$.
a) Montrer que Q_{2n} est bien défini.
b) On suppose qu'il existe $a \neq b$ des complexes non entiers tels que $(Q_{2n}(a))$ et $(Q_{2n}(b))$ convergent. Montrer que $(Q_{2n}(z))$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. On admettra que les $P_k : z \mapsto z\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$ converge uniformément sur tout compact vers $z \mapsto \dfrac{\sin \pi z}{\pi}$.

38. *Lyon.*★ On note $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telle que $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$ pour tout p premier, et $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \lambda(mn) = \lambda(m)\,\lambda(n)$.
a) Montrer que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \lambda(n)\frac{x^n}{1-x^n}$ converge. On note $N(x)$ sa somme.
b) Soit $x \in \left]-1,1\right[$. Donner une expression de $N(x)$ à l'aide des $\sigma_n = \displaystyle\sum_{d|n} \lambda(d)$.
c) Calculer σ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)N(x)$.

39. *Lyon.*★ Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $g : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que le rayon de convergence de g est $\geqslant 1$.
a) On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(g(z)) \geqslant 0$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leqslant 2\,\mathrm{Re}(a_0)$.
b) On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow |g(z)| \leqslant 1$. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 1/3$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n \leqslant 1$.

40. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bornée, continue avec $g(0) > 0$. On pose $F : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-tx}\mathrm{d}t$. Montrer que si g change au plus N fois de signe, alors F a au plus N zéros.

41. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = a$. On considère $u \in \mathcal{C}^2([1, +\infty[, \mathbb{R})$ bornée et solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - \dfrac{f'}{f}\, y' - \dfrac{y}{f^2} = 0$.
a) Montrer que $u'(x) = O(1/x)$ quand $x \to +\infty$.
b) Montrer que $u(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

42. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On considère l'équation différentielle $A' = A^2$ avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $0 \in I$ et la condition initiale $A(0) = A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la solution de l'équation différentielle. Quel est l'intervalle maximal d'existence de la solution ? Que dire si on ne suppose plus A_0 inversible mais diagonalisable ?

43. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, et $g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ qui à tout $z \in \mathbb{U}$ associe $\sin(k \operatorname{Arg}(z))$. On note E l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur D, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$, dont les dérivées partielles se prolongent continûment à D et dont la restriction à $\mathbb{U}$ est g. Déterminer le minimum de la fonction $u \in E \mapsto \displaystyle\int_D \|\operatorname{grad} u(M)\|^2 \mathrm{d}M$.

44. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ Dans tout l'exercice, F et G désigne deux homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. On dit que (F, G) vérifie l'inégalité de Hölder lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i b_i \leqslant F^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i F(a_i)\right) G^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i G(b_i)\right)$.
a) On fixe p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que le couple formé de $F : t \mapsto t^p$ et $G : t \mapsto t^q$ vérifie l'inégalité de Hölder.
b) Montrer que (F, G) vérifie l'inégalité de Hölder si et seulement si la fonction $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mapsto F^{-1}(x)\, G^{-1}(y)$ est concave.
c) On suppose que (F, G) vérifie l'inégalité de Hölder. On suppose qu'il existe un homéomorphisme croissant $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dont la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et tel que $F : x \mapsto x\, f(x)$ et $G : x \mapsto x\, f^{-1}(x)$.
i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F^{-1}(x)\, G^{-1}(x) = x$.
ii) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $(p, q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ avec $1/p + 1/q = 1$ tels qu'on ait : $F : t \mapsto (t/\lambda)^p$ et $G : t \mapsto (\lambda t)^q$.

45. ★ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique orientée. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x{+}1, y) = F(x, y{+}1) = F(x, y)$ et que $\mathrm{d}F(x, y)$ est une isométrie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
a) Montrer que $\|F\|^2$ admet un maximum en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer qu'il existe trois fonctions a_1, a_2 et b de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour $N(x, y) = \partial_X F(x, y) \wedge \partial_Y F(x, y)$, on ait $\partial_X^2 F(x, y) = a_1(x, y)\, N(x, y)$, $\partial_Y^2 F(x, y) = a_2(x, y)\, N(x, y)$, $\partial_{X,Y}^2 F(x, y) = b(x, y)\, N(x, y)$.

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a_1(x_0,y_0) & b(x_0,y_0) \\ b(x_0,y_0) & a_2(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ est inversible.
d) En calculant $\partial_X N$, $\partial_Y N$ et $\partial^3_{X,X,Y} F$, établir que $a_1 a_2 = b^2$. Conclure.

46. *Lyon.*★ Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan complexe. Est-il possible que les six distances entre ces points soient des entiers impairs ?

47. *Paris, Lyon, Cachan, Rennes.*★ On fixe un réel $\alpha \in [0,1[$ ainsi que trois réels strictement positifs a, b et c tels que $a = b + c$. On se donne trois points A, B, C non alignés du plan.
a) Montrer que la fonction $M \mapsto a^\alpha d(A,M) + b^\alpha d(B,M) + c^\alpha d(C,M)$ possède un minimum, atteint en un point unique P.
b) Donner, lorsque P est distinct de A, B et C, une équation vérifiée par la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BPC}$.
c) On note $\theta = \pi - \widehat{ABC}$. Étudier pour quelles valeurs de θ le point P est distinct de B.

48. *Lyon.*★ Soit Γ une courbe régulière, simple, fermée, du plan, enserrant un convexe. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une trajectoire fermée à n rebonds sur Γ, la loi du rebond étant la réflexion usuelle.

49. ★ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si les coefficients de A sont positifs et si, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} = 1$.
a) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
b) On note $\epsilon = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant} a_{i,j}$. On suppose $\epsilon > 0$. On pose $A^p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Si $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $m_j^{(p)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j}^{(p)}$ et $M_j^{(p)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j}^{(p)}$.
  i) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Montrer : $M_j^{(p+1)} \leqslant (1-\epsilon) M_j^{(p)} + \epsilon m_j^{(p)}$.
  ii) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \dots, n\}$: $M_j^{(p+1)} - m_j^{p+1} \leqslant (1-2\epsilon)\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right)$.
  iii) Que peut-on en déduire sur (A^p) ?

50. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle et 2π-périodique.
a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\int_0^{2\pi} t^k\, f(t) \mathrm{d}t \neq 0$.
b) Soit k le plus petit entier vérifiant la propriété de ***a)***. Soit $u \in \mathcal{C}^k([0, 2\pi])$. Donner un développement asymptotique, à la précision $o(1/n^k)$, de $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} u(x)\, f(nx) \mathrm{d}x$.

51. ★ Soit a un entier impair. Existe-t-il $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(f(k)) = k + a$?

52. ★ Soit $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P est scindé dans $\mathbb{C}$ et que ses racines forment une progression arithmétique de raison r. Exprimer r à l'aide de a_{n-1} et a_{n-2}.

53. ★ Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que $a_0 = 1$ et $P(U_n) \subset \mathbb{R}^+$ où U_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unitéé. Montrer que les a_j sont dans $\{0, 1, -1\}$.

54. ★ ***a)*** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que toutes les racines rationnelles de P sont entières. Quelles sont les racines rationnelles possibles de P si en outre $P(0)$ est premier ?
b) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

55. ★ Soient K un corps infini et $T : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$ une application linéaire qui conserve le déterminant. Montrer que T conserve le rang.

56. ★ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A sont des entiers naturels et que l'ensemble $\left\{(A^k)_{i,j}\ ;\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$ est fini. Montrer que A est une matrice de permutation.

57. ★ Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$ non nulles telles que $\forall (u,v) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{rg}(uA + vB) \leqslant 1$. Montrer que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$ ou $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$.

58. ★ Résoudre l'équation $\exp(X) = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

59. ★ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $X^2 = A$ admet une solution réelle si et seulement si l'équation $\exp X = A$ en admet une aussi.

60. ★ Déterminer tous les triplets (A, B, C) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = 2B$, $AC - CA = -2C$ et $BC - CB = A$.

61. ★ Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E.
a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p$.
b) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal si et seulement si toute valeur propre non nulle λ de $p + q$ vérifie $\lambda \geqslant 1$.

62. ★ Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E. On note $d_i = \|e_i\|$. Soit $m \in [\![0,n]\!]$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
i) il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension m tel que tous les projetés orthogonaux des e_i sur V aient même norme ;
ii) $d_i^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j^2} \geqslant m$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

63. ★ Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que $A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $B^{-1} - A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive, notée $A^{1/2}$, telle que $(A^{1/2})^2 = A$.
c) Montrer que $A^{1/2} - B^{1/2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

64. ★ Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes non nuls dont les coefficients sont dans $\{-1,0,1\}$ et A l'ensemble de leurs zéros réels. Trouver l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$.

65. ★ Soit ρ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$\rho^*(A) = \sup\{\mathrm{tr}(AB)\ ;\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \rho(B) = 1\}$.
a) Montrer que ρ^* est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'application f qui à X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(X) = 1$ associe $\det X$, présente un maximum.
c) Soit A_0 un point en lequel f présente un maximum. Montrer que A_0 est inversible et que $\rho^*({A_0}^{-1}) = n$.

66. ★ Soit (E,N) un espace de Banach, $\|\ \|$ la norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée à N et $f \in \mathcal{L}_c(E)$ avec $\|f\| \leqslant 1$.
a) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\|e^{t(f-\mathrm{id})}\| \leqslant 1$.
b) Montrer que $\|(f-\mathrm{id})e^{t(f-\mathrm{id})}\| \to 0$ quand $t \to +\infty$.

67. ★ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{b_k}{b_{n+1}}\right)a_k$. On suppose que les séries $\displaystyle\sum \left|1 - \frac{b_{n+1}}{b_n}\right|^2$ et $\sum |S_n - T_n|^2$ convergent. Montrer que $\sum a_n$ converge.

68. ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée telle que $\mathrm{Vect}\{x \mapsto f(x+k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ soit de dimension finie. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, une famille $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et une famille $(g_1,\dots,g_n)$ de fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ia_k x} g_k(x)$.

69. ★ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, $f(x)\,f(y) \leqslant f(xy)$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $p \in \{0\} \cup [1,+\infty[$ tel que $f : x \mapsto x^p$.

70. ★ Soient $n \in \mathbb{N}$, m et M dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ tels que :
$\forall x \in [0,1]$, $m \leqslant \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n} \left|f^{(j)}(x)\right|$ et $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n+1} \left|f^{(j)}(x)\right| \leqslant M$. Majorer le nombre de zéros de f en fonction de n, m et M.

71. ★ Soient $\varphi, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec $\varphi > 0$ et $f \geqslant 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_a^b \varphi f^n$.
a) Déterminer la limite de $(\sqrt[n]{I_n})$.
b) Déterminer la limite de (I_{n+1}/I_n).
c) Qu'en est-il si φ est seulement supposée positive ?

72. ★ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
b) On pose $\Delta_n = a_n - a_{n+1}$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n S_n(x)$.
c) Montrer que $\widetilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n \Big(S_n(x) - \dfrac{\sin(nx)}{2} \Big)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que S est intégrable sur $]0, \pi]$ si et seulement si $\widetilde{S}$ est intégrable sur $]0, \pi]$.
d) Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum \Delta_n \ln(n)$ converge.

73. ★ Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |u(x)| \leqslant 1$ et $|u(0)|^2 + |u'(0)|^2 = 4$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $u(x) + u''(x) = 0$.

74. ★ Montrer que toute solution bornée sur $\mathbb{R}$ de $x'(t) = x(t-1)$ est nulle.

75. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue et 1-périodique. On suppose que $\mathrm{Sp}(M) \cap 2i\pi\mathbb{Z} = \emptyset$. Montrer que le système différentiel $X' = MX + B$ possède une unique solution 1-périodique.

76. ★ Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des points distincts du plan. Montrer qu'il existe une bijection σ de l'ensemble des indices telle que les segments $[a_i, b_{\sigma(i)}]$ ne se croisent pas.

77. ★ Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un ellipsoïde $C = \{x \in E, q(x) \leqslant 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ avec $q(x) < 1$. On trace trois droites perpendiculaires issues de x. Elles coupent les bords de l'ellipsoïde en a, b pour la première, c, d pour la seconde, e, f pour la troisième. Montrer que $\dfrac{1}{\overline{xa}.\overline{xb}} + \dfrac{1}{\overline{xc}.\overline{xd}} + \dfrac{1}{\overline{xe}.\overline{xf}}$ ne dépend pas du trièdre orthonormé choisi.

78. ★ On note $\exp$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$.
a) Trouver tous les polynômes complexes non constants qui commutent avec $\exp$.
b) Démontrer qu'il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que $f \circ f = \exp$.

79. ★ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer un équivalent de u_n.

80. ★ Soit (x_n) une suite réelle positive telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_{n+1} \leqslant x_n + 1/n^2$. Montrer que la suite (x_n) converge.

81. ★ Soit G un groupe fini, de centre Z. Le cardinal de Z peut-il être la moitié de celui de G, ou le tiers ?

82. ★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de $\mathcal{L}(E)$, de rang $n-1$. Montrer que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

83. ★ Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}$. Déterminer la limite de (u_n).

84. ★ Soit $p \in]0,1[$.
a) Établir l'existence de $C_p \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour toute suite $a \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général a_n converge, on ait, en posant $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_k$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k}{{R_k}^p} \leqslant C_p\, A^{1-p}$.
b) Trouver la meilleure valeur de C_p.

85. ★ Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, $a \in]0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_n f(u_n) + (1-a_n)u_n$.
a) Étudier la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$.
b) Montrer que si la série de terme général a_n converge alors la suite de terme général u_n converge.
c) Montrer que si (u_n) admet une limite qui n'est pas un point fixe de f alors la série de terme général a_n converge.
d) Montrer que la suite (u_n) est toujours convergente.

86. ★ ***a)*** Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\sqrt{f}$ ne soit pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. On pose $Z = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$. Soit $x \in Z$. Montrer que $\sqrt{f}$ est dérivable en x si et seulement si $f''(x) = 0$.
Dans la suite, on suppose que $\forall x \in Z$, $f''(x) = 0$.
c) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $M_x(a) = \|f''\|_{\infty,[x-a,x+a]}$. Soient $x \in Z$, $t \in [x-a, x+a]$ et h tel que $t+h \in [x-a, x+a]$. Montrer que $f(t) + hf'(t) + \dfrac{h^2}{2}M(a) \geqslant 0$.
d) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in Z$, soit $t \in [x-a/2, x+a/2]$. Montrer que $f'^2(t) \leqslant 2M(a)f(t)$.
e) Montrer que $\sqrt{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

87. *Maple*. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de façons de subdiviser un polygone convexe à $(n+2)$ sommets en n triangles, en reliant entre eux des sommets des segments qui ne se recoupent pas. On pose $a_0 = 1$.
a) Calculer a_3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
b) Calculer a_n pour $n \leqslant 20$. Calculer a_{n+1}/a_n pour $n \leqslant 20$.
c) Étudier la série entière de terme général $a_n x^n$. En déduire une expression de a_n.

88. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par P_n la propriété « Si f est une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f \geqslant \phi$. »

a) Soit g convexe de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que g admet une dérivée à droite en 0. En déduire que P_1 est vraie.
b) Soit n tel que P_n est vraie. Soit f convexe sur $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire h sur $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $(x, x') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, pour tout $(y, y') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\dfrac{h(y') - f(-x', y')}{x'} \leqslant \dfrac{f(x, y) - h(y)}{x}\cdot$ Montrer alors que P_{n+1} est vraie.
c) Montrer que toute fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ est le suprémum d'une famille de fonctions affines.