**Devoir Surveillé n° 5 (4h)**

**Correction du problème 1 – Étude de la vitesse de convergence des séries de Riemann**

1. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $\alpha > 1$.

   (a) En s'inspirant du cours : $\forall n \geqslant 2,\quad \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (car $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[n, n+1]$), donc

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall N > n, \quad \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha(n-1)^{\alpha-1}},$$

   On obtient le résultat en faisant tendre $N$ vers $+\infty$.

   (b) Soit $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Alors, $n^\alpha |u_n|$ tend vers 0, et $\sum u_n$ converge absolument d'après la règle de Riemann.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n^\alpha}$, et donc $|R_n| \leqslant \varepsilon \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, Ainsi, d'après la définition par $\varepsilon$ des $o$, $R_n = o\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}\right) = o\left(O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right) = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n-1} - v_n &= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right)\right) \end{aligned}$$

   Ainsi, en utilisant un DL de $(1+y)^\alpha$ au voisinage de 0, on obtient, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(1 + (\alpha-1)\frac{1}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(-\frac{\alpha}{2n^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right) \end{aligned}$$

   (d) On en déduit, en sommant entre $n+1$ et $+\infty$, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = v_n + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k-1} - v_k) + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \qquad \text{car } v_n \text{ tend vers } 0 \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n, \quad (1) \end{aligned}$$

   où $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$. D'après les questions 2a et 2b, les trois sommes de droite sont respectivement en $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. Toutes les trois sont donc en $o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$. Ainsi, on a, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

(e) Cette égalité est vraie pour tout $\alpha > 1$, donc notamment pour $\alpha + 1$. On peut la réinjecter dans l'équation (1) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{(\alpha)n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

les autres sommes étant, d'après ce qui précède, en $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

(f) Encore une fois, cette égalité est aussi valable pour $\alpha + 1$ et $\alpha + 2$, et on peut la réinjecter dans (1) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).\end{aligned}$$

3. On étudie maintenant la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha = 1$.

(a) $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,
donc $\sum w_n - w_{n-1}$ converge d'après Riemann. Or, c'est une série téléscopique, de somme partielle $w_N - w_1$. Par conséquent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\gamma$, et donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \ln n = w_n - w_1 = \sum_{k=2}^{n}(w_n - w_{n-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k\right)$$

où $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$).

(c) La série $\sum \frac{1}{2k^2}$ est, à une constante près, une série de Riemann convergente ; de même pour $\sum \frac{1}{3k^3}$. Quant à $\sum \varepsilon_k$, elle converge absolument, d'après la règle de comparaison des séries par $o$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \ln n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k\right)\right).$$

D'après la question précédente, cette limite vaut $\gamma - 1$, et par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k = 1 - \gamma.$$

(d) Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k \\ &= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\ &= \ln n + 1 - 1 + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\ &= \ln n + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k.\end{aligned}$$

D'après la question (2f), on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Alors, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1 + (\alpha-1)\frac{1}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1\right) \\ &= -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right). \end{aligned}$$

Dans un premier temps, cela implique que $w_n - w_{n-1} \sim -\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, terme général de signe constant d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum(w_n - w_{n-1})$ converge, c'est à dire : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\gamma_\alpha$. On a alors bien l'égalité voulue.

(b) En sommant l'égalité obtenue dans la question précédente de 2 à $n$, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - 1 = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\frac{1}{k^{\alpha+2}} - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k$$

où $\varepsilon_k = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right)$. Par le même raisonnement que pour le cas $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\ &= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\cdot\frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right). \end{aligned}$$

5. (a) Tout nombre $n$ est au moins divisé par 1, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n \geqslant 1$. Ainsi, $\sum \sigma_n$ diverge grossièrement. Il en est alors trivialement de même pour la série de terme général $\sigma_n x^n$, pour tout $x$ tel que $|x| \geqslant 1$.

Par ailleurs, le nombre de diviseurs de $n$ est inférieur à $n$, donc pour tout $x$ tel que $|x| < 1$,

$$|\sigma_n x^n| \leqslant n|x|^n.$$

Or, $n|x|^n$ est le terme géral d'une série à termes positifs convergente. Donc, d'après le TCSTP, $\sum \sigma_n x^n$ converge.

Ainsi, $\boxed{\sum \sigma_n x^n \text{ converge si et seulement si } |x| < 1.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sigma_k = \sum_{d|k} 1 = \mathrm{Card}\{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } d|k\} = \mathrm{Card}\{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \exists q \in \mathbb{N}^*,\ dq = k\}.$$

Pour tout diviseur $d$ de $k$, cet entier $q$ étant unique, on obtient une bijection :

$$\Phi : \{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \exists q \in \mathbb{N}^*,\ dq = k\} \longrightarrow \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\},$$

en associant à tout diviseur $d$ de $k$ le couple $\Phi(d) = (d,q)$, où $q$ est l'*unique* entier tel que $dq = k$. En effet, on définit une réciproque $\Psi$ en posant pour tout couple $(d,q)$ tel que $dq = k$, $\Psi(d,q) = d$. Clairement $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, donc $\Phi$ est une bijection. On en déduit l'égalité des cardinaux de ces deux ensembles, donc :

$$\sigma_k = \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\}.$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en sommant sur tous les entiers $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\} = \mathrm{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\}$$

les ensembles étant deux à deux disjoints, et par conséquent :

$$\boxed{S_n = \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\},}$$

(c) Les inégalités imposées à $d$ et $q$ dans les définitions de $A_n$, $B_n$ et $C_n$ amènent directement $dq \leqslant n$ pour tous les couples $(d,q)$ de $A_n$, $B_n$ ou $C_n$. Réciproquement, si $dq \leqslant n$, l'un au moins des deux entiers $d$ et $q$ est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, et l'autre est alors inférieur au quotient de $n$ et du premier. Ainsi :

$$\boxed{\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\} = B_n \cup C_n}.$$

Par ailleurs, de façon immédiate $A_n = B_n \cap C_n$. Ainsi,

$$S_n = |B_n \cup C_n| = |B_n| + |C_n| - |A_n|.$$

Puisque l'application $(d,q) \mapsto (q,d)$ est clairement une bijection de $B_n$ sur $C_n$, il vient alors :

$$S_n = 2|B_n| - A_n \qquad \text{puis:} \qquad \boxed{S_n = 2\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor - (\lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2.}$$

(d) Pour tout $d \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]$, $\dfrac{n}{d} - 1 < \left\lfloor \dfrac{n}{d} \right\rfloor \leqslant \dfrac{n}{d}$, donc, en sommant :

$$\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left(\frac{n}{d} - 1\right) < \sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leqslant \sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{n}{d} = n \sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{d}.$$

De plus, $\sqrt{n} - 1 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$, donc $(\sqrt{n}-1)^2 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 \leqslant n$. Ainsi, on obtient un encadrement de $S_n$ :

$$\boxed{G_n = \sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} 2\left(\frac{n}{d} - 1\right) - n \leqslant S_n \leqslant 2n \sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{d} - (\sqrt{n}-1)^2 = D_n}.$$

(e) D'après la partie I,

$$\sum_{d=1}^{\lfloor n\rfloor} \frac{1}{d} = \ln(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) - \gamma - \frac{1}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + o\left(\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right).$$

(f) Le développement asymptotique de $H_n$ amène :

$$\begin{aligned}
G_n &= 2n\ln(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + 2n\gamma + O(\sqrt{n}) - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - n \\
&= 2n\ln\sqrt{n} + 2n\ln\frac{\sqrt{n}+O(1)}{\sqrt{n}} + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n}) \\
&= n\ln(n) + 2n\ln\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n}) \\
&= n\ln(n) + 2nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n}) \\
&= n\ln n + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n})
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$G_n = 2n\ln(\sqrt{n}) + 2n\gamma + O(\sqrt{n}) - n + O(\sqrt{n}) = n\ln(n) + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n}).$$

Ainsi, $S_n - n\ln(n) - n(2\gamma-1)$ étant encadré par deux expressions en $O(\sqrt{n})$ il est lui-même en $O(\sqrt{n})$, d'où :

$$S_n = n\ln(n) + n(2\gamma-1) + O(\sqrt{n}).$$

On en déduit en particulier que $\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln n}$.

**Correction du problème 2 – Étude de la convergence de la méthode de Simpson**

**Partie I – Une première estimation du reste**

1. La fonction $f$ étant de classe $\mathcal{C}^4$, et la valeur absolue étant continue, la fonction $x \mapsto |f^{(4)}(x)|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, donc l'existence d'un $\boxed{\text{maximum } M_4}$ découle essentiellement du théorème de la borne atteinte.

2. On peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 entre $m$ et $m+h$ puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle fermé $[m, m+h]$. On a alors :

$$\boxed{\left|f(m+h) - f(m) - hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right| \leqslant \frac{h^4}{24}M_4},$$

où $M_4$ est le maximum de $|f^{(4)}|$ dont l'existence est justifiée dans la question précédente. On aurait essentiellement pu se contenter d'un majorant de cette dérivée sur l'intervalle restreint $[m, m+h]$, mais pour la suite, $M_4$ sera suffisant.

On obtient de même :

$$\boxed{\left|f(m-h) - f(m) + hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right| \leqslant \frac{h^4}{24}M_4}.$$

3. Il s'agit essentiellement de sommer ces deux inégalités, et d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\frac{h^4}{12}M_4 &\geqslant \left|f(m+h) - f(m) - hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right| \\
&\qquad + \left|f(m-h) - f(m) + hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right| \\
&\geqslant \left|\left(f(m+h) - f(m) - hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(f(m-h) - f(m) + hf'(m) - \frac{h^2}{2}f''(m) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(m)\right)\right|
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{|f(m+h) + f(m-h) - 2f(m) - h^2 f''(m)| \leqslant \frac{M_4 h^4}{12}}.$$

4. Essentiellement, il suffit de simplifier certains termes $f(m)$ afin de se ramener à l'inégalité précédente avec $h = \frac{\beta-\alpha}{2}$ :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\beta-\alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta)) - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24}f''(m)\right)\right| \\
&\qquad = \frac{\beta-\alpha}{6}\left|f(\alpha) + f(\beta) - 2f(m) - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 f''(m)\right| \leqslant \frac{\beta-\alpha}{6}\frac{M_4}{12} \cdot \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée :

$$\boxed{\left|\frac{\beta-\alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta)) - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24}f''(m)\right)\right| \leqslant M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{9 \times 2^7}}.$$

5. On exploite essentiellement le fait que $m$ est le milieu de $[\alpha, \beta]$ : en coupant l'intégrale en deux au niveau de $m$ à l'aide de la relation de Chasles, on a alors deux intégrales sur des intervalles de même longueur, qu'on peut translater par changement de variable de sorte à obtenir deux intégrales sur le même intervalle :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^m f(t)\,\mathrm{d}t + \int_m^\beta f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et par les changements de variable affines (donc $\mathcal{C}^1$) $t = m - u$ dans la première intégrale, et $t = m + u$ dans la deuxième, on obtient

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{m-\alpha}^0 f(m-u)\ \mathrm{d}u + \int_0^{m-\alpha} f(m+u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{m-\alpha} (f(m-u) + f(m+u))\ \mathrm{d}u.$$

Or, $m - \alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\beta-\alpha}{2}$, d'où le résultat attendu :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} (f(m-u) + f(m+u))\ \mathrm{d}u.}$$

6. Il suffit alors essentiellement d'utiliser l'inégalité de la question 3 :

$$\begin{aligned}\left| int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \big(f(m-u) + f(m+u) - 2f(m) - u^2 f''(m)\big)\ \mathrm{d}u \right| &\leqslant \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \big|f(m-u) + f(m+u) - 2f(m) - u^2 f''(m)\big|\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{M_4 u^4}{12}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{M_4}{12}\Big[\frac{u^5}{5}\Big]_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} = M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{15 \times 2^7}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} (2f(m) + u^2 f''(m))\ \mathrm{d}u = 2f(m)\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{f''(m)}{3} \cdot \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 = f(m) + \frac{f''(m)}{24}(\beta-\alpha)^3.$$

Ainsi, on obtient bien, en vertu de la question précédente,

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(m)\right)\right| \leqslant M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{15 \times 2^7}.}$$

7. À l'aide de l'inégalité triangulaire, on peut essentiellement se ramener aux deux inégalités des questions 4 et 6 :

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{\beta-\alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta))\right| \\ &\quad\leqslant \left|\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - \left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(m)\right)\right| \\ &\qquad\qquad + \left|\left((\beta-\alpha)f(m) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(m)\right) - \frac{\beta-\alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta))\right| \\ &\quad\leqslant M_4 \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^7 \times 3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = M_4 \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^7 \times 3} \cdot \times \frac{2^3}{15}.\end{aligned}$$

On obtient bien l'inégalité voulue :

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{\beta-\alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(m) + f(\beta))\right| \leqslant M_4 \times \frac{(\beta-\alpha)^5}{720}.}$$

8. Essentiellement, on utilise l'inégalité précédente sur chaque intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, en remarquant que $\sigma_i - \sigma_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ :

$$\left|\int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{6n}(f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i))\right| \leqslant M_4 \times \frac{(b-a)^5}{720 n^5}.$$

Toujours aussi essentiellement, on peut sommer, utiliser l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles pour recoller les intégrales, et on obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n}(f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i))\right| \leqslant M_4 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^5}{720 n^5},$$

et le nombre de termes dans la somme étant $n$, ces termes ne dépendant pas de l'indice de sommation :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n}(f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i))\right| \leqslant M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{720 n^4}.}$$

**Partie II – Amélioration de la majoration de l'erreur**

1. Un premier changement de variable $y = x - m$ permet de symétriser l'intégrale :
$$\int_\alpha^\beta (x-a)(x-m)(x-\beta)\ \mathrm{d}x = \int_{\alpha-m}^{\beta-m} y(y-\alpha+m)(y-\beta+m)\ \mathrm{d}y = \int_{-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} y\left(y+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(y-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\ \mathrm{d}y$$
Il reste alors essentiellement à faire une homothétie, donc un changement de variable $t = \frac{2y}{\beta-\alpha}$, amenant :
$$\int_\alpha^\beta (x-a)(x-m)(x-\beta)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 t(t+1)(t-1)\frac{\beta-\alpha}{2}\ \mathrm{d}t,$$
d'où
$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-a)(x-m)(x-\beta)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^4 \int_{-1}^1 t(1-t^2)\ \mathrm{d}t}$$
Or, cette dernière intégrale est l'intégrale d'une fonction continue impaire sur un intervalle fermé borné symétrique, donc est nulle. Ainsi, $\boxed{\int_\alpha^\beta \lambda(x-a)(x-m)(x-\beta)\ \mathrm{d}x = 0.}$

2. Ainsi,
$$\int_\alpha^\beta P(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P_\lambda(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{puis:} \qquad \boxed{\int_\alpha^\beta (f(x)-P(x))\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f(x)-P_\lambda(x))\ \mathrm{d}x}.$$

3. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_\lambda'(x) = P'(x) + \lambda Q'(x).$$
où $Q = (X-\alpha)(X-m)(X-\beta)$. Pour que l'équation en $\lambda$ donnée par $P_\lambda'(m) = f'(m)$ admette une solution, il faut essentiellement justifier que $Q'(m)$ est non nul (on est alors ramené à une équation affine). Si on connait des choses sur les multiplicités des racines d'un polynôme, on peut directement affirmer que $Q'(m) \neq 0$ du fait que $m$ est racine simple de $Q$. En attendant le cours correspondant, on peut le vérifier à la main en dérivant $Q$ (comme produit de 3 termes ; il serait ici maladroit de tout développer !) :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Q'(x) = (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)(x-m) + (x-m)(x-\beta).$$
Ainsi, $Q'(m) = (m-\alpha)(m-\beta) \neq 0$.
Il est donc possible de choisir $\lambda$ tel que $\boxed{P_\lambda'(m) = f'(m)}$.

4. On reconnaît essentiellement là une utilisation de Rolle en cascade. Pour commencer la fonction $\theta$ est bien définie, puisque $x$ est fixé distinct de $\alpha$, $\beta$ et $m$. La fonction $\theta$ est de classe $\mathcal{C}^4$, puisque $f$ l'est, ainsi que toutes les fonctions polynomiales qui interviennent dans l'expression. Cela justifie toutes les applications du théorème de Rolle que nous ferons dans cette question. Enfin, du fait que $f$ et $P$ coïncident en $\alpha$, $\beta$ et $m$ (et donc aussi $f$ et $P_\lambda$, vu la définition de $P_\lambda$), on obtient facilement
$$\theta(\alpha) = \theta(\beta) = \theta(m) = \theta(x) = 0.$$
On peut donc appliquer le théorème de Rolle entre ces 4 points (après les avoir rangés dans l'ordre croissant). On obtient $c_1 < c_2 < c_3$, distincts de $\alpha$, $\beta$, $m$ et $x$, tels que $\theta'(c_1) = \theta'(c_2) = \theta'(c_3) = 0$.
Mais le choix de $\lambda$ nous apporte un zéro supplémentaire de $\theta'$. En effet, puisque $P_\lambda'(m) = f'(m)$, et que $m$ est racine double du facteur polynomial de droite, on a $\theta'(m) = 0$. Plus précisément, si on ne connait pas les propriétés des racines multiples :
$$\forall t \in [\alpha,\beta],\ \theta'(x) = (f'(x) - P_\lambda'(x)) - \frac{f(x)-P_\lambda(x)}{(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)} \cdot ((x-\alpha)(x-m)^2 + (x-\beta)(x-m)^2 + 2(x-m)(x-a)(x-\beta)).$$
Il est alors clair que $\theta'(m) = 0$. Comme $m$ est distinct des $c_i$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre les points $c_i$ et $m$, après les avoir rangés dans l'ordre, et on trouve 3 zéros de $\theta''$, puis en recommençant, 2 zéros de $\theta^{(3)}$, et enfin, une dernière application du théorème de Rolle nous donne l'existence d'un réel $c \in ]a,\beta[$ tel que $\boxed{\theta^{(4)}(c) = 0}$.

5. Le polynôme $P_\lambda$ étant de degré 3, sa dérivée 4-ième est nulle. En dérivant $\theta$ quatre fois et en évaluant en $c$, il vient essentiellement :
$$0 = \theta^{(4)}(c) = f^{(4)}(c) - \frac{f(x) - P_l(x)}{(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)} \cdot 4!,$$
d'où
$$|f(x) - P_\lambda(x)| = \frac{|(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)|}{4!} \cdot |f^{(4)}(c)| \leqslant \boxed{\frac{|(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)|}{4!} M_4}$$

6. C'est essentiellement terminé ! Il suffit de calculer l'intégrale entre $\alpha$ et $\beta$ du majorant obtenu. Or, en utilisant un changement de variable similaire à celui utiliser dans la question 1,
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta |(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)| \,\mathrm{d}x &= -\int_\alpha^\beta (x-a)(x-m)^2(x-\beta)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\int_{-1}^1 (t-1)(t+1)t^2\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\int_{-1}^1 (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\right)\frac{4}{15}.\end{aligned}$$
Il découle alors des questions 2 et 5 et de l'inégalité triangulaire intégrale que :
$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta (f(x) - P(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5 \times 15 \times 3!} = M_4 \cdot \frac{(\beta-\alpha)^5}{2880}}$$
On termine essentiellement comme dans la partie I, en appliquant ce résultat sur chaque intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, en remplaçant l'intégrale de $P$ par son expression admise en début de partie en fonction $f(\sigma_{i-1})$, $f(m_i)$ et $f(\sigma_i)$, en sommant et en recollant les morceaux par la colle Chasles (colle extra-forte pour intégrales). On obtient AU FINAL (dans le fracas des timbales et le hurlement des trompettes et des trombones, ce qui justifie musicalement l'emploi de cette expression, n'en déplaise à certains), et ESSENTIELLEMENT :
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^n (f(\sigma_{i-1}) + 4f(m_i) + f(\sigma_i))\right| \leqslant M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880n^4}.}$$