La structure d'espace vectoriel

Table des matières

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.
Selon le programme, "en pratique, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$".

Notation. Symbole de Kronecker : Si i et j sont deux objets mathématiques, on convient que $\delta_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ lorsque $i = j$.

1 Définition et exemples

Définition.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble tel que
- $(E, +)$ est un groupe abélien,
- "." est une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$ (on dit que "." est une loi sur E à domaine d'opérateurs externe $\mathbb{K}$) tel que, pour tout $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
  - $\alpha.(x + y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$,
  - $(\alpha + \beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$,
  - $(\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$,
  - $1_{\mathbb{K}}.x = x$.

Remarque. Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ses éléments seront appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires.

Exemples.
◇ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
◇ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
Alors l'ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées par I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.(x_i)_{i\in I} = (\alpha.x_i)_{i\in I}$.
De même, l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des applications de I dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(I, E)$ et $\alpha \in K$, pour tout $x \in I$, $(f + g)(x) \stackrel{\Delta}{=} f(x) + g(x)$ et $(\alpha.f)(x) \stackrel{\Delta}{=} a.(f(x))$.
◇ En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
◇ Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.
◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
◇ L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
◇ $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en convenant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha.P = \alpha \times P$, le dernier produit étant au sens du produit de deux polynômes.
◇ L'ensemble $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
- $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ et $\lambda.0_E = 0_E$;
- $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$;
- $(\lambda - \mu)x = \lambda.x - \mu.x$;
- $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0)$;
- $(\lambda x = \lambda y) \wedge (\lambda \neq 0) \Longrightarrow x = y$;
- $(\lambda x = \mu x) \wedge (x \neq 0) \Longrightarrow \lambda = \mu$.

Démonstration.
- Pour x fixé dans E, $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un morphisme de groupe, donc $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
  Pour λ fixé dans $\mathbb{K}$, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un morphisme de groupe, donc $\lambda.0_E = 0_E$.
- φ étant un morphisme de groupes additifs, $\varphi(-1_{\mathbb{K}}) = -\varphi(1_{\mathbb{K}})$, donc $(-1_{\mathbb{K}}).x = -(1_{\mathbb{K}}.x) = -x$.
- $(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + ((-1_{\mathbb{K}})\mu)x = \lambda x + (-1_{\mathbb{K}}).(\mu x) = \lambda.x - \mu.x$.
- Si $\lambda \neq 0$, $\lambda x = 0 \Longrightarrow (\lambda)^{-1}(\lambda x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, donc $\lambda x = 0 \Longrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0)$.

□

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $((E_i, +, .))_{i\in\{1,...,n\}}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On structure $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ en un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en convenant que
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in E,\ x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,

— $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\alpha.x = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n)$.

2 Sous-espaces vectoriels

Propriété et définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les restrictions des lois "+" (à F^2) et "." (à $\mathbb{K} \times F$), avec le même élément neutre 0_E si et seulement si

— $F \neq \emptyset$;
— $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ (stabilité de la somme de deux vecteurs) ;
— $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\alpha.x \in F$ (stabilité du produit externe).

Cet ensemble de conditions est équivalent à

— $F \neq \emptyset$;
— $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times F \times F$, $\alpha.x + y \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).

Dans ce cas, on dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E.

Démonstration.
Exercice, en s'inspirant du cours sur les groupes. □

Exemple. $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) et E est le plus grand sous-espace vectoriel de E.

Remarque. En particulier, un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-groupe additif de E, donc
on a toujours que $0_E \in F$: 0_E est appelé le vecteur nul.
Ainsi, pour tout sous-espace vectoriel F de E, l'inclusion $\{0\} \subset F$ est garantie. En pratique, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est égal à $\{0\}$, on se contente de montrer que $F \subset \{0\}$, sans même mentionner l'inclusion réciproque.

Méthode : pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est pratique lorsque c'est possible, de trouver un ensemble E, que l'on sait déjà être un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui contient F. Il suffit alors de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, ce qui évite de vérifier les nombreux axiomes d'espaces vectoriels.

Propriété de transitivité : Un sous-espace vectoriel d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.

— $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
— Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{L}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.
— $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x + y + z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $\left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \ / \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

— $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, l'idéal engendré par A dans $\mathbb{K}[X]$, i.e $A\mathbb{K}[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
— L'ensemble $C^p([0,1],\mathbb{C})$ des applications de classe C^p de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, où $p \in \mathbb{N}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{C})$.
— L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = y' + 2y$ est un sous-espace vectoriel de $D^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
— L'ensemble $l^1(\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ \sum a_n \text{ ACV}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E^I. On dit que c'est une famille presque nulle si et seulement si $\{i \in I/x_i \neq 0\}$ est un ensemble fini.
On note $E^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de E^I.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
$E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I.

Démonstration.
La famille nulle appartient à $E^{(I)}$, donc $E^{(I)} \neq \emptyset$.
Soit $((a_i),(b_i),\alpha,\beta) \in E^{(I)} \times E^{(I)} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Soit $i \in I$. Si $a_i = 0$ et $b_i = 0$, alors $\alpha a_i + \beta b_i = 0$. La contraposée de cette implication est : $\forall i \in I \ \ [\alpha a_i + \beta b_i \neq 0 \Longrightarrow (a_i \neq 0 \text{ ou } b_i \neq 0)]$, donc
$\{i \in I/\alpha a_i + \beta b_i \neq 0\} \subset (\{i \in I/a_i \neq 0\} \cup \{i \in I/b_i \neq 0\})$, ainsi $\{i \in I/\alpha a_i + \beta b_i \neq 0\}$ est fini, ce qui prouve que $\alpha(a_i) + \beta(b_i) \in E^{(I)}$. □

3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Propriété. Soit I un ensemble non vide, éventuellement infini. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, donc $0_E \in F$. Ainsi, $F \neq \emptyset$.
Soit $x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $i \in I$: $x, y \in F_i$ et F_i est un sous-espace vectoriel, donc $\alpha x + y \in F_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $\alpha x + y \in F$.
Ceci démontre que F est bien un sous-espace vectoriel de E. □

> **Exercice.** Qu'en est-t-il avec la réunion ?
> La réponse est contenue dans la feuille d'exercices 5.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A.
$\mathcal{S}$ est non vide car $E \in \mathcal{S}$.

Alors $\bigcap_{F\in\mathcal{S}} F$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A et, par construction, c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemple. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$, puisque $\{0\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathrm{Vect}(F) = F$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B deux parties de E.

$$\text{Si } A \subset B, \text{ alors } \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B).$$

Démonstration.
$\mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel contenant A, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que $\mathrm{Vect}(A)$. $\square$

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle ***combinaison linéaire*** de vecteurs de cette famille tout vecteur s'écrivant sous la forme

$$\boxed{\sum_{i\in I} \alpha_i x_i, \text{ où } (\alpha_i)_{i\in I} \text{ est une famille } \textit{presque nulle} \text{ de scalaires,}}$$

c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Remarque. La précision "*presque nulle*" est inutile lorsque I est fini, mais lorsque I est infini, c'est elle qui garantit que l'expression $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ a bien un sens.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Alors
$\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A, i.e :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a\in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.}$$

Démonstration.
Notons $B = \left\{ \sum_{a\in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$.

$\diamond$ Montrons que B est un espace vectoriel.
$B \neq \emptyset$, car $\mathbb{K}^{(A)}$ possède au moins la famille identiquement nulle, pour laquelle la combinaison linéaire associée est le vecteur nul.
Si $x = \sum_{a\in A} \alpha_a a$ et $y = \sum_{a\in A} \alpha'_a a$ sont deux éléments de B, pour tout $(c, d) \in \mathbb{K}^2$, $cx + dy = \sum_{a\in A} (c\alpha_a + d\alpha'_a)a$ et $(c\alpha_a + d\alpha'_a)_{a\in A} = c(\alpha_a)_{a\in A} + d(\alpha'_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)}$ car $\mathbb{K}^{(A)}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ainsi, $cx + dy \in B$, ce qui prouve que B est un sous-espace vectoriel de E.

$\diamond$ De plus, $A \subset B$. En effet, en convenant que $\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq b \\ 1 \text{ si } a = b \end{cases}$ [c'est le symbole de Kronecker], pour tout $b \in A$, $b = \sum_{a\in A} \delta_{a,b} a \in B$.

$\diamond$ Soit maintenant C un sous-espace vectoriel de E contenant A. Alors il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, donc il contient B. Ainsi, B est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. $\square$

Notation. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E,
on note $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = \mathrm{Vect}(\{x_i \ / \ i \in I\})$.

Remarque. En particulier, lorsque A est fini, en notant $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
$\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ / \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$.
Notamment, si $u \in E$ avec $u \neq 0$, $\mathrm{Vect}(u) = \{\alpha u / \alpha \in \mathbb{K}\}$ est appelé la droite vectorielle engendrée par le vecteur u.

Exemple. Notons $H = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+3y = 0\}$. On vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} y = \lambda \\ x = -3\lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
donc $H = \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}) \triangleq \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple. Notons $F = \{\begin{pmatrix} x+2y \\ x+y \\ x \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

$F = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x, y \in E$ et A une partie de E.
Si $x \in$
$Vect(A)$, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A)$.
S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $a \in A$ tels que $x = \lambda y + a$, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.

Démonstration.
$\diamond$ Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(A)$. $A \subset A \cup \{x\}$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \supset \mathrm{Vect}(A)$.
De plus $A \cup \{x\} \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.
$\diamond$ On suppose que $x = \lambda y + a$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $a \in A$.
$x \in \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, donc $A \cup \{x\} \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, puis $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.
De plus $y = \frac{1}{\lambda}(x - a) \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$, donc $A \cup \{y\} \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$,
puis $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$. $\square$

Théorème. Soit I un ensemble quelconque et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Vect}\Big((x_i)_{i\in I}\Big)$ n'est pas modifié si l'on multiplie l'un des vecteurs x_i par un scalaire non nul, ou bien si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Définition. Soit $E_1, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On note $E_1 + \cdots + E_p \stackrel{\Delta}{=} \{x_1 + \cdots + x_p \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ x_i \in E_i\} = \sum_{i=1}^{p} E_i$.

Propriété. Avec les notations précédentes, $\sum_{i=1}^{p} E_i = \text{Vect}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)$.

4 Les applications linéaires

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application f de E dans F est une application linéaire (on dit aussi un morphisme ou un homomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si et seulement si

$$\forall(\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E \ \ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ \forall x, y \in E,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Un ***isomorphisme*** est un morphisme bijectif.
Un ***endomorphisme*** est un morphisme de E dans lui-même.
Un ***automorphisme*** est un endomorphisme bijectif.
Une ***forme linéaire*** est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple.
- L'application constante $x \longmapsto 0_E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même est un endomorphisme.
- Id_E est un automorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- L'application $z \longmapsto \overline{z}$ est un automorphisme involutif sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais ce n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel . Ce n'est pas une forme linéaire.
- L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$ est une forme linéaire.
- L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & [x \longmapsto f(x+1)] \end{array}$ est un automorphisme, dont le morphisme réciproque est $f \longmapsto (x \longmapsto f(x-1))$.
- $\begin{array}{ccc} C([-1, 1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)t^2\ dt \end{array}$ est une forme linéaire.
- Pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & AP \end{array}$ est un endomorphisme.
- $\begin{array}{ccc} D^2([0, 1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$ est linéaire.

— $\begin{array}{ccc} l^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Définition. Les homothéties (vectorielles) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont les applications de la forme $\lambda.Id_E$, où $\lambda \in \mathbb{K}$. Ce sont des endomorphismes.

Notation.

— On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

— On pose $L(E) \stackrel{\Delta}{=} L(E, E)$.

— On pose $L(E, \mathbb{K}) = E^*$;
c'est l'ensemble des formes linéaires, appelé le dual de E.

Propriété. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont exactement les applications de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_i)_{1\leq i\leq n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{array}$, où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Démonstration.
On vérifie que ces applications sont bien des formes linéaires. Réciproquement, si f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, alors on peut écrire, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i(\delta_{i,j})_{1\leq j\leq n}\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \text{ avec } \alpha_i = f\Big((\delta_{i,j})_{1\leq j\leq n}\Big). \quad \Box$$

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Soit $i \in \mathbb{N}_n$, on note $p_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$.
p_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ ***projection***. C'est un morphisme surjectif d'espaces vectoriels.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in L(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$.
Alors, $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ $u\left(\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i)$.

◇ Pour $n = 1$, $R(1)$ est claire.

◇ Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.

Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
$u\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = u\left(\alpha_{n+1}x_{n+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \alpha_{n+1}u(x_{n+1}) + u\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$, car u est linéaire.

Ainsi, en utilisant $R(n)$, $u\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = \alpha_{n+1} u(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i)$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• Soient $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Notons $J = \{i \in I / \alpha_i \neq 0\}$. J est de cardinal fini.
Premier cas. Supposons que $J = \emptyset$.
D'après les conventions du cours sur les groupes,

$$u\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = u\left(\sum_{i\in\emptyset} \alpha_i x_i\right) = u(0) = 0 = \sum_{i\in\emptyset} \alpha_i u(x_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i).$$

Deuxième cas. Supposons que $J \neq \emptyset$ et posons $n = card(J)$. $n \in \mathbb{N}^*$, donc on peut appliquer $R(n)$, ce qui permet de conclure. □

Propriété. Soit $u \in L(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. Alors $u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I} &= \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i) / (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\} \\ &= \left\{ u(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i) / (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\} = u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big). \end{aligned}$$

□

Propriété. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, f^{-1} est encore un isomorphisme.

Démonstration.
Soit $(x', y') \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$.
$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) = \alpha x' + y'$,
donc $\alpha f^{-1}(x') + f^{-1}(y') = \alpha x + y = f^{-1}(f(\alpha x + y)) = f^{-1}(\alpha x' + y')$. □

Propriété. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors
$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Démonstration.
$L(E, F) \neq \emptyset$.
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u, v \in L(E, F)$. Pour tout $\beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} (\alpha u + v)(\beta x + y) &= \alpha[u(\beta x + y)] + v(\beta x + y) \\ &= \alpha\beta u(x) + \alpha u(y) + \beta v(x) + v(y) \\ &= \beta(\alpha u + v)(x) + (\alpha u + v)(y), \end{aligned}$$

donc $\alpha u + v \in L(E, F)$.
Ainsi, $L(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. □

Propriété. Soit φ une application linéaire. Alors φ reste linéaire si on la restreint ou si on la corestreint à des sous-espaces vectoriels. Plus précisément, en supposant que φ est un morphisme entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors
pour tout sous-espace vectoriel E' de E, $\varphi|_{E'}$ est un morphisme de E' vers F et
pour tout sous-espace vectoriel F' de F, $\boxed{\text{si } \forall x \in E,\ \varphi(x) \in F'}$, alors $\varphi|^{F'}$ est un morphisme de E vers F'.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est ***stable*** par u, ou que u ***stabilise*** F si et seulement si $u(F) \subset F$.
Dans ce cas, l'***endomorphisme induit*** par u sur F est $\begin{array}{rccc} v: & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$.
C'est un élément de $L(F)$, que par abus, on note souvent $u|_F$ et que l'on appelle la restriction de u à F (il y a bien sûr ambiguïté).

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Soit f un morphisme de E dans F.
Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
$\diamond$ $E' \neq \emptyset$, donc $f(E') \neq \emptyset$.
Soit $(x', y') \in f(E')^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe $(x, y) \in E'^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.
$\alpha x' + y' = f(\alpha x + y) \in f(E')$, car, E' étant un sous-espace vectoriel, $\alpha x + y \in E'$.
$\diamond$ $f(0) = 0 \in F'$, car F' est un sous-espace vectoriel, donc $0 \in f^{-1}(F')$.
Ainsi, $f^{-1}(F') \neq \emptyset$.
Soit $(x, y) \in [f^{-1}(F')]^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \in F'$, car $f(x) \in F'$, $f(y) \in F'$ et F' est un sous-espace vectoriel. Ainsi, $\alpha x + y \in f^{-1}(F')$. $\square$

Remarque. Si f est une application linéaire, c'est en particulier un morphisme de groupes additifs, donc on dispose de $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0\}$ et de $Im(f)$.
D'après la propriété précédente, ce sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. De plus,

Propriété. Soit f une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.
Alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et
f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Remarque. Une forme linéaire non nulle est toujours surjective.

Démonstration.
Soit $f \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$, donc il existe $x \in \mathbb{K}^*$ tel que $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Im}(f)$, or $\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}$. $\square$

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u, v) \in L(E)^2$.
Si u et v commutent, alors $Im(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

Démonstration.
- Soit $x \in v(Im(u))$.

Il existe $y \in Im(u)$ tel que $x = v(y)$ et il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.
Ainsi, $x = v \circ u(z) = u(v(z)) \in Im(u)$. On a montré que $Im(u)$ est stable par v.
- Soit $x \in v(\mathrm{Ker}(u))$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $x = v(y)$.

Ainsi $u(x) = u(v(y)) = v(u(y)) = v(0) = 0$ car $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a montré que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v. $\square$

Propriété. Soit $u, v \in L(E)$. Alors $uv = 0 \Longleftrightarrow Im(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Démonstration.
En effet, $uv = 0 \iff [\forall x \in E,\ \ u(v(x)) = 0] \iff [\forall y \in Im(v),\ \ u(y) = 0]$. $\Box$

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Soit $y \in F$. L'équation $(E)\ :\ f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$ est appelée une équation linéaire.

Exemples.
- L'équation différentielle $(E)\ :\ z' + z \sin t = \cos t$ est une équation linéaire, en posant $E = D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $y = (t \longmapsto \cos t)$ et $f\ :\ z \longmapsto z' + z.\sin$.
- L'équation aux différences finies $(E)\ :\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3$ est une équation linéaire, en posant $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F$, $y = (3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f\ :\ (u_n) \longmapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$.
- Lorsque $A, B \in \mathbb{K}[X]$, l'équation de Bezout $(E)\ :\ UA + VB = 1$ est une équation linéaire, en posant $E = \mathbb{K}[X]^2$, $F = \mathbb{K}[X]$, $y = 1$ et $f\ :\ (U, V) \longmapsto UA + VB$.

Propriété. Avec les notations précédentes, l'équation sans second membre associée à (E) est l'équation $(H)\ :\ f(x) = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(f)$: notamment l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'équation (E) est compatible, c'est-à-dire qu'elle possède au moins une solution $x_0 \in E$, si et seulement si $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Dans ce cas, $\mathcal{S}_E = x_0 + \mathcal{S}_H$: la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

Exemple. Pour résoudre l'équation linéaire $(E)\ :\ P(X + 1) - P(X) = 2X + 1$, en l'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$, on résout d'abord $(H)\ :\ P(X + 1) - P(X) = 0$: Si P est solution de (H), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) - P(0) = 0$, donc par rigidité des polynômes, $P(X) - P(0) = 0$, ainsi, la réciproque étant claire, $\mathcal{S}_H = \mathbb{R}$.
On cherche ensuite une solution particulière, ou bien on la devine.
Ainsi $\mathcal{S}_E = \{X^2 + c\ /\ c \in \mathbb{R}\}$.

5 Dessiner des vecteurs

Introduction : Un espace vectoriel possède un élément particulier, le vecteur nul, donc il ne présente pas la propriété d'homogénéité de notre espace physique. Pour modéliser ce dernier à partir de la notion d'espace vectoriel, il faut donc trouver le moyen de faire du vecteur nul un élément indiscernable des autres vecteurs. C'est pourquoi nous compliquons la structure d'espace vectoriel pour définir la notion d'espace affine. C'est indispensable si nous voulons utiliser l'espace physique (le tableau ou votre feuille) pour dessiner des vecteurs.

Définition. On appelle $\mathbb{K}$-***espace affine*** tout triplet $(\mathcal{E}, E, +_{\mathcal{E}})$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (dont la loi additive sera notée $+_E$) et où $+_{\mathcal{E}}$ est une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (M, x) & \longmapsto & M +_{\mathcal{E}} x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes.

i) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & M +_{\mathcal{E}} x \end{array}$ est une bijection.
ii) $\forall (M, x, y) \in \mathcal{E} \times E \times E\ \ (M +_{\mathcal{E}} x) +_{\mathcal{E}} y = M +_{\mathcal{E}} (x +_E y)$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des ***points*** et E est appelé la ***direction*** de $\mathcal{E}$.

Remarque. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.
Le groupe $(E,+)$ opère sur $\mathcal{E}$ selon l'action $\begin{array}{ccc} E\times\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x,M) & \longmapsto & M+x \end{array}$.
De plus, pour tout $M\in\mathcal{E}$, l'orbite de M pour cette action est $\mathcal{E}$ en entier.

Démonstration.
$\mathcal{E}$ vérifie les propriétés i) et ii) de la définition d'un espace affine. En tenant compte de ii), pour montrer que $\begin{array}{ccc} E\times\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x,M) & \longmapsto & M+x \end{array}$ est une action de groupe, il reste à établir que, pour tout $M\in\mathcal{E}$, $M+\overrightarrow{0}=M$.
Soit $M\in\mathcal{E}$. D'après i), $x\longmapsto M+x$ est une bijection de E dans $\mathcal{E}$, donc il existe un unique $x\in E$ tel que $M+x=M$.
Ainsi, $M+\overrightarrow{0}=(M+x)+\overrightarrow{0}=M+(x+\overrightarrow{0})=M+x=M$.
Soit $M\in\mathcal{E}$. L'orbite de M est $\{M+x/x\in E\}$, c'est-à-dire $\mathcal{E}$ d'après la surjectivité de l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & M+x \end{array}$. $\square$

Remarque. Par la suite, pour signifier que le triplet $(\mathcal{E},E,+_{\mathcal{E}})$ est un espace affine, on écrira que "$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E".
De plus, lorsque le contexte permet de connaître la direction sans ambiguïté, on se contentera d'écrire que "$\mathcal{E}$ est un espace affine".

Notation. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $(A,B)\in\mathcal{E}^2$.
D'après i), il existe un unique vecteur x tel que $A+_{\mathcal{E}}x=B$. On note $x=\overrightarrow{AB}$ ou encore $x=B-_{\mathcal{E}}A$.

Remarque. Cette dernière notation est souvent commode car on peut établir que les règles de calcul relatives aux opérations "$+_{\mathcal{E}}$" (point$+_{\mathcal{E}}$vecteur) et "$-_{\mathcal{E}}$" (point$-_{\mathcal{E}}$point) sont formellement les mêmes que celles que vérifient l'addition et la soustraction sur $\mathbb{R}$.
Prenons l'exemple de la relation de ***Chasles*** :
si $(A,B,C)\in\mathcal{E}^3$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(B-A)+(C-B)=C-A=\overrightarrow{AC}$.

Remarque. La loi "$+_{\mathcal{E}}$" du triplet $(\mathcal{E},E,+_{\mathcal{E}})$ est différente de la loi "$+_E$" qui structure E comme un groupe abélien. Cependant il est pratique de les désigner par le même symbole. La propriété ii) devient alors naturelle, car elle ressemble à une propriété d'associativité.
Par la suite, nous désignerons donc "$+_{\mathcal{E}}$" et "$+_E$" par le même symbole additif "$+$".

Définition. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et (A,B,C,D) quatre points de $\mathcal{E}$. $ABCD$ est un ***parallélogramme*** si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Remarque. Dans les propriétés i) et ii) définissant un espace affine, lorsqu'un point M de $\mathcal{E}$ intervient, c'est toujours quantifié de la manière suivante : "$\forall M\in\mathcal{E}\ \ldots$". Ainsi, dans un espace affine, tous les points ont la même importance. C'est bien un espace homogène, contrairement aux espaces vectoriels.

En fait, les propriétés qui suivent montrent que cette différence entre la notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et celle de $\mathbb{K}$-espace affine est la seule qui soit vraiment pertinente.

Propriété. Soient $(\mathcal{E}, E, +)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et A un point de $\mathcal{E}$. On peut structurer $\mathcal{E}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en définissant les lois "+" et "." suivantes :
pour tout $(M, N, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathbb{K}$,

- $M + N = A + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$,
- $\alpha.M = A + (\alpha.\overrightarrow{AM})$.

Remarque. Cette propriété montre que tout $\mathbb{K}$-espace affine est assimilable à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dès lors que l'on a choisi un point A, qui jouera le rôle de vecteur nul. Bien sûr, si l'on change de point origine, on change la structure d'espace vectoriel, puisque les lois "+" et "." dépendent de A. Cet espace vectoriel s'appelle le vectorialisé de $\mathcal{E}$ d'origine A.

Propriété réciproque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le triplet $(E, E, +)$, où "+" est la loi qui structure E en un groupe abélien, est un $\mathbb{K}$-espace affine. Ainsi, E peut être muni d'une structure d'espace affine, que l'on dit canoniquement associé à l'espace vectoriel E.

Remarque. La propriété précédente, dont la démonstration est simple, mérite quelques commentaires.
Une structure algébrique sur un ensemble A peut être interprétée comme un mode d'interaction entre ses éléments. Si un ensemble possède plusieurs structures, c'est que les interactions entre ses éléments peuvent être classifiées selon plusieurs modes.
La propriété précédente affirme que tout espace vectoriel E peut être naturellement structuré comme un espace affine. Les éléments peuvent donc interagir de plusieurs façons selon que l'on privilégie la structure d'espace vectoriel (les éléments sont vus comme des vecteurs) ou la structure d'espace affine (les éléments sont vus comme des points).
Par exemple, si $(x, y) \in E^2$, la quantité $x + y$ admet deux interprétations différentes. C'est la somme de deux vecteurs, ou bien c'est la somme d'un vecteur et d'un point. On peut vérifier que le résultat est le même quelle que soit l'interprétation, mais dans le premier cas, $x + y$ sera interprété comme un vecteur et dans le second cas comme un point.
De la même façon, si $(A, B) \in E^2$, la quantité $A - B$ peut être interprétée comme la somme du vecteur A avec l'opposé du vecteur B, ou bien comme la différence des deux points A et B. On peut également vérifier que le résultat ne dépend pas de l'interprétation, ce qui prouve que, avec d'autres notations :
$\forall (A, B) \in E^2 \ \ \overrightarrow{AB} = B + (-A)$.

Convention. En accord avec le programme, les seuls espaces affines que nous utiliserons sont les espaces affines canoniquement associés à un espace vectoriel.

Remarque. Avant le $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens concevaient la géométrie comme l'étude de l'espace physique et se fondaient sur une axiomatique datant d'Euclide (315-255 avant J.-C.), qui manipulait des notions mal définies (points, droites ...).

Mais au $XIX^{\text{ème}}$, la lente apparition des géométries non euclidiennes (des géométries fondées sur une axiomatique légèrement différente de celle d'Euclide et néanmoins cohérente) a montré qu'il est possible d'imaginer des géométries indépendamment de l'univers dans lequel nous vivons.
Le développement parallèle des structures algébriques et de la logique formelle a permis à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ de donner des bases solides à la géométrie ... mais aussi de la détacher complètement de l'univers physique, auquel il n'est en effet jamais fait mention dans la présentation actuelle.
Le modèle d'espace affine euclidien de dimension 3 est en première approximation cohérent avec les observations que l'on peut faire de notre univers, mais la nature de cette cohérence n'est pas comprise.
Dieudonné écrit : "Il nous semble aujourd'hui que mathématique et réalité sont presque complètement indépendantes, et leurs contacts plus mystérieux que jamais."
Dans ce contexte moderne, pour effectuer des figures et des schémas, nous devons pourtant admettre que la feuille de papier peut être vue comme un espace affine ou un espace vectoriel. Il faut savoir représenter un vecteur (par une flèche) et un point (par une croix), il faut savoir ajouter un point et un vecteur, ajouter deux vecteurs et faire le produit d'un réel par un vecteur (cf figure).
On admettra que la feuille de papier munie de ces lois se comporte comme un plan vectoriel (le point correspondant à $\overrightarrow{0}$ étant choisi arbitrairement).
En général, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B, mais il peut également être représenté par une flèche d'origine C et d'extrémité D, lorsque $ABDC$ est un parallélogramme.
Les figures sont du domaine de l'espace physique. Elles ne peuvent donc constituer une démonstration de propriétés propres à un espace mathématique abstrait. Cependant, elles sont une illustration de la démonstration et un guide pour l'intuition.
Parfois, la transcription d'une figure en une démonstration rigoureuse est une évidence. Dans ce cas, on considère que la figure est en elle-même une démonstration.

6 La structure d'algèbre

Définition. $(A, +, ., \star)$ est une $\mathbb{K}$-***algèbre*** si et seulement si

- $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ,
- $(A, +, \star)$ est un anneau,
- $\forall(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A \;\; \lambda.(a \star b) = (\lambda.a) \star b = a \star (\lambda.b)$.

On dit qu'elle est commutative (ou abélienne) si et seulement si la loi $\star$ est commutative.
On dit qu'elle est intègre si et seulement si l'anneau $(A, +, \star)$ est un anneau intègre.

Exemples.
- $(\mathbb{C}, +, ., .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre,
- $(\mathbb{R}, +, ., .)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre,

- et plus généralement, si $\mathbb{K}'$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}'$-algèbre.
- $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre.
- Soit I un ensemble quelconque.

Sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, en posant pour tout $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in I$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \times g)(x) = f(x)g(x),$$
$$\text{et } (\alpha.f)(x) = \alpha f(x).$$

on obtient une structure d'algèbre commutative.

- De même, on structure $\mathbb{K}^I$ comme une algèbre, en posant,

pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $(y_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I},$$
$$(x_i)_{i\in I} \times (y_i)_{i\in I} = (x_i y_i)_{i\in I},$$
$$\text{et } \alpha.(x_i)_{i\in I} = (\alpha x_i)_{i\in I}.$$

Propriété. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.

Démonstration.

◇ Soit $u, v, w \in L(E)$. Alors, pour tout $x \in E$,
$[(u+v)\circ w](x) = (u+v)(w(x)) = u(w(x)) + v(w(x)) = [u\circ w + v\circ w](x)$, donc $(u+v)\circ w = u\circ w + v\circ w$, et
$[w\circ(u+v)](x) = w(u(x)+v(x)) = w(u(x)) + w(v(x))$, car w est linéaire, donc $[w\circ(u+v)](x) = [w\circ u + w\circ v](x)$, ce qui montre que $w\circ(u+v) = w\circ u + w\circ v$.
On a ainsi établi la distributivité de la composition par rapport à l'addition.

◇ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in L(E)$. Alors, pour tout $x \in E$,
$[\lambda.(u\circ v)](x) = \lambda.u(v(x))$, $[(\lambda.u)\circ v](x) = (\lambda.u)(v(x)) = \lambda.u(v(x))$ et
$[u\circ(\lambda.v)](x) = u(\lambda.v(x)) = \lambda.u(v(x))$, car u est linéaire,
donc $\lambda.(u\circ v) = (\lambda.u)\circ v = u\circ(\lambda.v)$.

◇ Les autres propriétés à vérifier sont immédiates. □

Remarque. Plus généralement, si E, F et G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $f, g \in L(F, G)$ et $h \in L(E, F)$, $(\alpha f + g)\circ h = \alpha f\circ h + g\circ h$ et pour tout $f, g \in L(E, F)$ et $h \in L(F, G)$, $h\circ(\alpha f + g) = \alpha h\circ f + h\circ g$.

Propriété. Soit $(A, +, ., \star)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. B est une ***sous-algèbre*** de $(A, +, ., \star)$ si et seulement si B est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel , donc si et seulement si

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & 1_A \in B. \\ \bullet & \forall (x,y) \in B^2 \quad x+y \in B, \\ \bullet & \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K}\times B \quad \lambda x \in B, \\ \bullet & \forall (x,y) \in B^2 \quad x\star y \in B. \end{array}}$$

Exemples.

— $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{C}$.

— L'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.

— L'ensemble des homothéties sur E est une sous-algèbre de $L(E)$.

Exemple. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $L_F = \{u \in L(E) \ / \ u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $L(E)$.

Définition. Soient $(A+, ., \times)$ et $(B, +, ., \times)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres.
Une application $f : A \longrightarrow B$ est un ***morphisme d'algèbres*** si et seulement si

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & f(1_A) = 1_B, \\ \bullet & \forall (x, y) \in A^2 \ \ f(x + y) = f(x) + f(y), \\ \bullet & \forall (x, y) \in A^2 \ \ f(x \times y) = f(x) \times f(y), \\ \bullet & \forall (x, \alpha) \in A \times \mathbb{K} \ \ f(\alpha.x) = \alpha.f(x). \end{array}}$$

Exemple. En reprenant les notations de l'exemple précédent, $\begin{array}{ccc} L_F & \longrightarrow & L(F) \\ u & \longmapsto & u|_F \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.
En effet, soit $u, v \in L_F$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in F$.

- — $(Id_E)|_F = Id_F$.
- — $(u + v)|_F(x) = (u + v)(x) = u(x) + v(x) = u|_F(x) + v|_F(x) = (u|_F + v|_F)(x)$, donc $(u + v)|_F = u|_F + v|_F$.
- — $(u \circ v)|_F(x) = (u \circ v)(x) = u((v(x)) = u|_F(v(x)) = u|_F(v|_F(x)) = (u|_F \circ v|_F)(x)$, donc $(u \circ v)|_F = u|_F \circ v|_F$.
- — $(\alpha v)|_F(x) = (\alpha v)(x) = \alpha[v(x)] = \alpha[v|_F(x)] = (\alpha v|_F)(x)$, donc $(\alpha v)|_F = \alpha v|_F$.

Exemple. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Alors l'application $w \longmapsto uwu^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $L(E)$. Ce type d'automorphisme est appelé un automorphisme *intérieur*.

Propriété. Une composée de morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbre.
L'application réciproque d'un isomorphisme d'algèbres est un isomorphisme d'algèbres.
L'image directe ou réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre.