Chapitre 12 : fractions rationnelles à une indéterminée

Table des matières

1 Construction du corps $K(X)$, opérations

1.1 Définitions

Définition 1 Soit K un corps commutatif. On rappelle que $K[X]$ désigne l'anneau intègre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans le corps K.
On définit sur $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ la relation $\mathscr{R}$ par :

$$\forall \Big((P_1, Q_1), (P_2, Q_2)\Big) \in E^2, \quad (P_1, Q_1)\mathscr{R}(P_2, Q_2) \Longleftrightarrow P_1 \cdot Q_2 = P_2 \cdot Q_1.$$

On vérifie que la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Pour tout élément $(P, Q) \in K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$, on note $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{P(X)}{Q(X)}$, sa classe d'équivalence modulo $\mathscr{R}$. La classe $\frac{P(X)}{Q(X)}$ s'appelle ***fraction rationnelle*** à coefficients dans le corps K.
On note $K(X)$ l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fractions rationnelles. On vérifie facilement que si $\frac{P(X)}{Q(X)}$ est une fraction rationnelle, il existe une seule représentation de cette fraction en $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$ et Q_1 unitaire. Cette représentation est appelée ***fraction irréductible***. Les racines de $P(X)$ sont appelés les ***zéros*** et les racines de $Q(X)$ sont appelés les ***pôles*** de la fraction rationnelle.
On définit sur $K(X)$ les trois opérations suivantes :

- une addition notée $+$: $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot Q_1}{Q_1 \cdot Q_2}$.
- une multiplication notée $\times$: $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}$.
- une multiplication par les scalaires notée $\cdot$: $\lambda \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\lambda \cdot P}{Q}$.

Proposition 1 L'ensemble $(K(X), +, \times)$ est un corps commutatif d'élément nul $0 = \frac{0}{1}$, d'élément unité $1 = \frac{1}{1}$. .

1.2 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 2 Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle. On appelle ***degré*** de cette fraction rationnelle et on note $\deg(F)$ le nombre : $\deg(F) = \deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$ appartenant à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 2 Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles dans $K(X)$. Alors :

- $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max\{\deg(F_1), \deg(F_2)\}$, avec égalité lorsque $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$
- $\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$.

1.3 Dérivée d'une fraction rationnelle

Définition 3 Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle. On appelle ***dérivée*** de cette fraction rationnelle et on note $F'(X)$ la fraction rationnelle :

$$F'(X) = \frac{P'(X) \cdot Q(X) - P(X) \cdot Q'(X)}{Q(X)^2}.$$

Proposition 3 Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles. Alors :

$$(F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' \text{ et } (F_1 \times F_2)' = F_1' \times F_2 + F_1 \times F_2'.$$

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Décomposition en éléments simples générale dans $K[X]$

Théoréme 1 Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible. On pose : $Q(X) = \xi \cdot \prod_{k=1}^{r} \pi_k(X)^{\alpha_k}$, sa factorisation. Alors, on peut écrire la fraction rationnelle $F(X)$ d'une unique manière sous la forme :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{R_{1,k}(X)}{\pi_k(X)} + \frac{R_{2,k}(X)}{\pi_k(X)^2} + \cdots + \frac{R_{\alpha_k,k}(X)}{\pi_k(X)^{\alpha_k}} \right),$$

avec : $E(X)$ un polynôme appelé ***partie entière ou polynomiale*** et $\deg(R_k) < \deg(\pi_k(X))$.
Une telle écriture s'appelle ***décomposition en éléments simples sur*** K de la fraction rationnelle $F(X)$.

2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Méthode : Comment déterminer la D.E.S. d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$?

Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$. Pour effectuer sa D.E.S :

- ▶ vérifier que $F(X)$ est irréductible, sinon la simplifier
- ▶ effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$: le quotient $E(X)$ est la partie polynomiale et $R(X)$ est le reste ; si $\deg(P) < \deg(Q)$, cette étape est inutile
- ▶ factoriser au maximum le dénominateur $Q(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \xi \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$
- ▶ écrire la forme générale de la D.E.S. : $\dfrac{R(X)}{Q(X)} = \sum_{k=1}^{r} \left(\dfrac{c_{1,k}}{X - \lambda_k} + \dfrac{c_{2,k}}{(X - \lambda_k)^2} + \cdots + \dfrac{c_{\alpha_k,k}}{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}} \right)$
- ▶ commencer par calculer chaque constante $c_{\alpha_k,k}$ à droite dans chaque parenthèse :
  - • utiliser la formule : $c_{\alpha_k,k} = \left(\dfrac{(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \cdot P(X)}{Q(X)} \right)_{\text{évalué en } \lambda_k}$
- ▶ lorsque le pôle λ_k est simple ($\alpha_k = 1$), utiliser éventuellement la formule : $c_{\alpha_k,k} = \dfrac{P(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}$
- ▶ pour calculer les autres constantes à gauche dans chaque parenthèse :
  - • utiliser la formule : $c_{1,1} + c_{1,2} + \cdots + c_{1,r} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x \cdot R(x)}{Q(x)}$
  - • calculer la limite en prenant les termes de plus haut degré
- ▶ pour calculer encore d'autres constantes :
  - • effectuer des évaluations pour obtenir d'autres équations
  - • utiliser d'éventuelles symétries de $F(X)$; par exemple $F(-X)$: identifier les deux D.E.S. obtenues.

Exemple 1 • Soit $P(X)$ un polynôme non nul à coefficients complexes. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les racines complexes différentes du polynôme $P(X)$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Montrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$ est :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{X-\lambda_k}.$$

- En déduire tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que le polynôme $P'(X)$ divise le polynôme $P(X)$.

2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Méthode : Comment calculer la D.E.S. dans $\mathbb{R}(X)$?

Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Pour effectuer sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

- ▶ vérifier si la fraction est bien irréductible
- ▶ effectuer le cas échéant la division euclidienne : $P(X) = E(X) \cdot Q(X) + R(X)$
- ▶ factoriser $Q(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$
- ▶ écrire la forme générale de la D.E.S. de $\dfrac{R(X)}{Q(X)}$ avec des termes en $\dfrac{c}{(X-\lambda)^\alpha}$ et $\dfrac{dX+e}{(X^2+aX+b)^\beta}$
- ▶ pour le calcul des constantes $\dfrac{c}{(X-\lambda_k)^{\alpha_k}}$, utiliser $c = \left(\dfrac{(X-\lambda_k)^{\alpha_k} \cdot P(X)}{Q(X)}\right)_{\text{évalué en } \lambda_k}$ ou $c = \dfrac{P(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}$ si λ_k est un pôle simple
- ▶ pour le calcul des constantes sur des irréductibles de degré 2 d'exposant maximal : $\dfrac{cX+d}{\pi(X)^{\beta_k}}$:
  - calculer une racine complexe z_0 de $\pi(X)$
  - utiliser la formule : $cz_0 + d = \left(\dfrac{\pi(X)^{\beta_k} \cdot P(X)}{Q(X)}\right)_{\text{évalué en } z_0}$
  - identifier parties réelle et imaginaire
- ▶ pour les autres constantes :
  - calculer de deux manières différentes : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{xR(x)}{Q(x)}$
  - effectuer des évaluations
  - utiliser des symétries éventuelles de $F(X)$.

Exemple 2 Effectuer les D.E.S des fractions rationnelles suivantes : $\dfrac{1}{X^n-1}$ et $\dfrac{X+2X^3+4X^4}{(X^2+2X-3)^2}$.

Exemple 3 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles :

- $\dfrac{X^7-6X^4+2X^2+1}{(X^2+4)\cdot(X+1)}$
- $\dfrac{X^5+X^4-X^2+X}{(X^2+4)\cdot(X+1)^2}$
- $\dfrac{X^5+X^4-X^2+X}{(X^2+4)^2\cdot(X+1)^2}$
- $\dfrac{X^3+2}{(X^2+4)\cdot(X^2+1)}$.

Exemple 4 Effectuer les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions :

- $\dfrac{X^4 - 5X + 1}{(X^2+1)^7}$
- $\dfrac{X-2}{2X^3 - 6X^2 + 6X - 2}$.

Exemple 5 • Mettre l'expression $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}$ sous la forme d'une fraction rationnelle irréductible.

- On considère le polynôme $Q(X) = X^8 + X^7 - X + 3$.

1. Montrer que $Q(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Simplifier $\displaystyle\sum_{z \in Z(Q)} \frac{1}{3 - z}$.