LA DROITE RÉELLE

Exercice 1. Propriété de Borel–Lebesgue

On dit qu'une partie K de $\mathbb{R}$ vérifie la *propriété de Borel–Lebesgue* lorsque de tout recouvrement d'ouverts de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, autrement dit lorsqu'il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

L'objet de cet exercice est de démontrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Borel–Lebesgue si, et seulement si, cette partie est compacte dans $\mathbb{R}$.

1. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. On suppose qu'il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a; b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
   On note E l'ensemble des $x \in [a; b]$ tels qu'il existe une partie finie J_x de I telle que $[a; x] \subset \bigcup_{j\in J_x} U_j$.
   - α] Démontrer que E est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   - β] Démontrer que $a \in E$.
   - γ] Démontrer que $\sup E \in E$.
   - δ] Démontrer que $\sup E = b$.
   - ε] En conclure qu'il existe une partie finie J de I telle que $[a; b] \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

   b) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Démontrer que K vérifie la propriété de Borel–Lebesgue. *Indication : On pourra utiliser la partie $U = \mathbb{R} \setminus K$.*
2. Soit K une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie la propriété de Borel–Lebesgue.
   a) Soit $a \in \mathrm{Adh}(K)$. En considérant $(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n])_{n\geqslant 1}$, démontrer que $a \in K$ et en déduire que K est fermée.
   b) Démontrer que K est bornée et conclure.

Exercice 2. Ensemble de Cantor

On pose $C_0 = [0; 1]$.
On découpe C_0 en dix morceaux égaux et on ne garde que le premier et le dernier. On obtient $C_1 = [0; 0,1] \cup [0,9; 1]$.
On découpe chacun des deux morceaux de C_1 en dix sous-morceaux égaux et on ne garde, dans chacun des deux morceaux, que le permier et le dernier sous-morceaux. On obtient ainsi $C_2 = [0; 0,01] \cup [0,09; 0,1] \cup [0,9; 0,91] \cup [0,99; 1]$.
Ainsi de suite...
On appelle *ensemble décadique de Cantor* l'ensemble $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

1. Démontrer que C est un compact de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ℓ_n la somme des longueurs des segments constituant C_n. Déterminer ℓ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser la limite de la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$. Interpréter.
3. On admet que C est le sous-ensemble de $[0; 1]$ constitué des nombres dont l'un des deux développements décimaux (le propre ou l'impropre) ne contient que des 0 ou des 9 (c'est technique à démontrer). En déduire que C n'est pas dénombrable.