Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch
Pour le 09/01/2020

DM n° 8 : Intégration

Le problème 1 a pour but d'introduire en douceur certains résultats et certaines techniques qu'on retrouvera dans le problème 2.

Problème 1 –

Dans tout ce problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x + 1$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Étude de la fonction f et existence de (u_n).**
   (a) Justifier que f peut être prolongée par continuité en 0. Si on désigne encore par f la fonction prolongée, quelle est alors la valeur de $f(0)$?
   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer l'existence et la valeur d'un minimum de f, en un point que l'on déterminera.
   (c) En déduire que f est positive sur $\mathbb{R}_+$, puis que la suite (u_n) est bien définie, quel que soit le choix de u_0 dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Montrer que f est strictement convexe sur $]0,1[$ et strictement concave sur $]1,+\infty[$.
   (e) En considérant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1, en déduire l'existence et l'unicité d'un point fixe égal à 1.
   (f) Tracer l'allure du graphe de f.

2. **Convergence de la suite (u_n).**
   (a) On suppose ici que $u_0 \in]0,1]$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$, et en déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ?
   (b) Étudier de la même façon le cas où $u_0 \in]1,+\infty[$.

3. **Un résultat classique : la moyenne de Cesaro.**
   Cette question est indépendante des précédentes. Le résultat qui y est démontré sera utile pour la fin de l'exercice, et pourra éventuellement être admis.
   On considère ici une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on définit m_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

   Ainsi, m_n est la moyenne des n premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le but de cette question est de montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ dans $\mathbb{R}$, alors $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ :

   (a) On suppose dans un premier temps que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
      i. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$|m_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(|a_0| + \cdots + |a_{n_0-1}| + (n-n_0)\varepsilon\right).$$

      ii. Soit, pour tout $n \geqslant n_0$, $b_n = \dfrac{1}{n}\left(|a_0| + \cdots + |a_{n_0-1}| + (n-n_0)\varepsilon.\right)$ Déterminer la limite de b_n lorsque n tend vers $+\infty$ (ε et n_0 étant fixé comme dans la question précédente).

iii. En déduire l'existence de n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|m_n| < 2\varepsilon$.

iv. Conclure.

(b) On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En appliquant le résultat précédent à la suite $(a_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

4. **Un équivalent de** $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que, au voisinage de 0, $f(1+x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$.

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{y\to 1} \frac{1}{(f(y)-1)^2} - \frac{1}{(y-1)^2} = \frac{1}{12}$.

(c) On suppose que $u_0 \neq 1$, ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$ et $w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}^2} - \dfrac{1}{v_n^2}$. Déduire de ce qui précède la limite de w_n

(d) En considérant la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, justifier que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, le signe étant donné par la position de u_0 par rapport à 1.

5. **Quelques séries**

On suppose ici $u_0 > 1$.

(a) Quelle est la nature de $\sum u_n$?

(b) Quelle est, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de $\sum (u_n - 1)^\alpha$?

(c) Étudier la nature de $\sum (-1)^n (u_n - 1)$ (on pourra montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) des sommes partielles sont adjacentes).

Problème 2 – Autour du lemme de la moyenne de Cesàro

Partie I – Variantes du lemme de Cesàro

1. (a) Soit (a_n) une suite d'éléments strictement positifs, telle que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow +\infty$. Montrer que pour toute suite (u_n) de réels convergeant vers un réel ℓ, on a $\displaystyle\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k \longrightarrow \ell$.

(b) Justifier que le résultat est encore valable si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

(c) Justifier que le résultat est encore valable pour des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(d) Qu'obtient-on lorsque (a_k) est la suite constante égale à 1 ?

(e) Montrer que si $u_n \longrightarrow \ell$ (dans $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$), alors $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k$ converge vers ℓ.

2. (les questions suivantes ne dépendent pas de cette question)

*(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la question 1(a), montrer que si $\displaystyle\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} k u_k \longrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

**(b) Montrer que cela reste vrai pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, α étant supposé strictement positif.

(c) Sous les mêmes hypothèses, que peut-on dire de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\frac{1}{n^{p+1}u_n}\sum_{k=1}^{n} k^p u_k$?

Partie II – Une application classique du lemme de Cesàro

Dans cette partie, nous mettons en place, sur un exemple, une méthode permettant d'obtenir un équivalent de $u_n - \ell$ *lorsque* (u_n) *est une suite récurrente définie par une relation* $u_{n+1} = f(u_n)$*, et convergeant vers un point fixe* ℓ *de* f*, en lequel* $f'(\ell) = 1$.

On considère dans cette question la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(x) + \sin(x))$.

1. (a) Montrer que g induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On note f sa réciproque

   (b) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que pour toute suite (v_n) de limite nulle,

$$g(v_n) = v_n + \frac{1}{5!}v_n^5 + o(v_n^5).$$

   (c) En déduire que pour toute suite (v_n) de limite nulle,

$$f(v_n) \sim v_n \qquad \text{et} \qquad f(v_n) - v_n \sim -\frac{1}{5!}v_n^5.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $\lim u_n = 0$.

   (b) Déterminer l'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{1}{f(u_n)^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ admette une limite finie non nulle.

   (c) En déduire un équivalent de la suite (u_n).

Partie III – Une généralisation de la partie I

1. (a) Montrer que si $u_n \longrightarrow \ell$ (on se limitera au cas d'une suite réelle telle que $\ell \in \mathbb{R}$), alors $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k \longrightarrow \ell$.

   (b) Ce résultat est-il un cas particulier de I-1 ?

2. *Dans cette question, on donne un résultat de type Cesàro, englobant aussi bien la situation de la question I-1 que l'exemple de la question II-1. On définit une suite doublement indexée* $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ *à valeur réelles strictement positives, telle que pour tout* $k \geqslant n$, $a_{n,k} = 0$*. On note, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.$$

   On définit alors $T : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *pour tout* (u_n) *par :*

$$T(u_n) = (v_n) \qquad \text{où} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}u_k.$$

   On dit que T *est régulière si et seulement si pour toute suite* (u_n) *convergeant vers un réel* ℓ, $T(u_n)$ *converge aussi vers* ℓ.

   (a) Montrer que T est régulière si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$.

   (b) Montrer que les questions I-1 et III-1 sont des cas particuliers de ce résultat.

Partie IV – Adaptation du lemme de Cesàro pour des valeurs d'adhérence.

On considère une suite (u_n) *admettant* p *valeurs d'adhérences, supposées toutes réelles, et notées* $a_1, \dots, a_p$*. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *tout* $i \in [\![1,p]\!]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note :*

$$A_{n,i}(\varepsilon) = \{k \in [\![0,n]\!] \mid |u_k - a_i| \leqslant \varepsilon\}.$$

On note alors $b_{n,i}(\varepsilon)$ *le cardinal de* $A_{n,i}(\varepsilon)$*. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *(au moins suffisamment petit),* $\dfrac{b_{n,i}(\varepsilon)}{n}$ *admet une limite lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *; on note* $p_i(\varepsilon) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n,i}(\varepsilon)}{n}$ *;*

(ii) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $p_i(\varepsilon)$ admet une limite lorsque ε tend vers 0. On note p_i cette limite.

1. Expliquer la signification intuitive des hypothèses (i) et (ii).
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$
3. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers $\displaystyle\sum_{i\in[\![1,p]\!]} p_i a_i$
4. Expliquer en quoi le lemme de Cesàro est un cas particulier de ce résultat.
5. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que sa moyenne de Cesàro converge.
6. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont toutes les valeurs d'adhérences sont finies, et en nombre fini, et telle que la moyenne de Cesàro de (u_n) diverge.
7. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n le reste modulo 6 de n^2 et (u_n) une suite convergeant vers 1. Montrer que la moyenne de Cesàro de $(u_n r_n)$ converge, et déterminer sa limite.