

DM 2. Enoncé

Exercice 1 :

Résoudre l'équation dans \mathbb{C} suivante : $\bar{z} = 2z + j$, où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 2 :

1°) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i(\alpha+\beta)} \neq -1$.

Montrer que $z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$ est un réel.

2°) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes non nuls de même module.

Démontrer que le nombre $Z = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$ est un réel.

Exercice 3 :

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

Exercice 4 :

Une caractérisation des fonctions exponentielle et logarithme.

1°) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(1) = 1$ et telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Indication : On admettra qu'entre deux réels distincts, il existe toujours au moins un rationnel.

2°) Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$,
- f est croissante,
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$,
- $f(1) = e$.

Montrer que f est l'application exponentielle.

3°) Soit g une application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} vérifiant :

- g est croissante,
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $g(xy) = g(x) + g(y)$,
- $g(e) = 1$.

Montrer que g est le logarithme néperien.

Exercice 5 :

Résoudre l'équation $\cos(\pi \sin(x)) = \sin(\pi \cos(x))$, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Déterminer les racines complexes du polynôme $P(x) = x^5 - 1$ selon deux approches différentes :

- En écrivant les éventuelles racines sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
- En factorisant P sous la forme $P(x) = (x-1)Q(x)$, où Q est un polynôme que l'on écrira sous la forme d'une différence de deux carrés.

En déduire une expression simple de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 7 :

Simplifier $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Exercice 8 :

1°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos((n+1)x) = 2 \cos(nx) \cos(x) - \cos((n-1)x).$$

2°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2 \cos(n\theta) = T_n(2 \cos \theta)$.

3°) Soit P un polynôme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la forme $x \mapsto x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$.

Soit a une racine rationnelle de P . En écrivant a sous la forme $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et p et q premiers entre eux, montrer que $a \in \mathbb{Z}$.

4°) En déduire le théorème de Niven : Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Montrer que si $\cos \theta \in \mathbb{Q}$, alors $\cos \theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.