

Corr. 1 Distributions électrostatiques

1. L'équation de Poisson donne

$$\rho = -\epsilon_0 \Delta V$$

On prend le formulaire d'analyse vectorielle, et on en déduit que

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d\left(r^2 \frac{dV(r)}{dr}\right)}{dr}$$

Le calcul donne alors

$$\rho(r > a) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(r < a) = -6\epsilon_0 k$$

Ensuite, on calcule le champ électrique

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

dans chaque domaine ($r < a$ et $r > a$) et on écrit la relation de passage à l'interface $r = a$, le champ y étant normal :

$$E_r(r = a^+) - E_r(r = a^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On en déduit la charge surfacique σ en $r = a$:

$$\sigma = 3\epsilon_0 k a$$

2. Il y a invariance des sources parallèlement au plan yOz

donc V ne dépend que de x , de même que \vec{E} . On note aussi, en coordonnées cartésiennes, que

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(x) = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

Le champ électrique est suivant \vec{e}_x , ce qui était prévisible par les symétries puisque tout plan contenant cette direction est de symétrie positive pour les sources.

Ensuite, plutôt que d'utiliser l'équation de Poisson, il est plus rapide de considérer l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

On l'intègre dans chaque domaine et on fixe une constante d'intégration grâce à la relation de passage en $x = 0$ pour le champ électrique qui est normal. L'autre constante est déterminée :

- soit en affirmant que le champ électrique doit s'annuler très loin de $x = 0$, puisqu'il n'y a pas de sources à l'infini (mais c'est un peu discutable car l'extension des sources est infinie suivant yOz) ;
- soit en notant que pour $\rho_0 \rightarrow 0$, il ne doit plus y avoir de champ !

Finalement on trouve le champ électrique

$$\vec{E}(x < 0) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} e^{x/a} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}(x > 0) = \vec{0}$$

Corr. 2 Distribution de courants

1. D'après les relations de passage, le champ magnétique, tangentiel en $r = a$, est discontinu avec

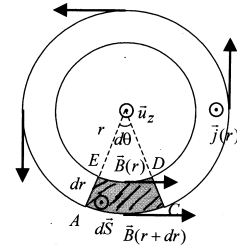
$$\vec{B}_{2,T}(r = a^+) - \vec{B}_{1,T}(r = a^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\text{soit} \quad B(a^+) - B(a^-) = \mu_0 j_{s,z}$$

$$\vec{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0} \vec{u}_z$$

2. Pour trouver la distribution volumique de courant, deux méthodes s'offrent *a priori* à nous : soit on résout directement l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (régime stationnaire), soit on utilise le théorème d'Ampère (forme intégrale de l'équation précédente). La première méthode est ici à écarter car on ne dispose pas de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques...

Utilisons donc la seconde méthode. Au vu des directions de \vec{B} et \vec{j} , on a tout intérêt à choisir comme contour d'Ampère celui qui délimite le secteur hachuré sur la figure, entre les cercles de rayon r et $r + dr$ et les segments pour θ et $\theta + d\theta$.



On applique le théorème d'Ampère au contour fermé (ACDEA) orienté en sens trigonométrique. Cela donne

$$(r + dr) d\theta B(r + dr) - r d\theta B(r) = \mu_0 \underbrace{j(r) r d\theta dr}_{\text{courant enlacé}}$$

d'où

$$j(r) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB(r))}{dr}$$

C'est bien sûr l'équation que l'on aurait trouvée si l'on avait regardé un formulaire d'analyse vectorielle (pour avoir le rotationnel en coordonnées cylindriques). Finalement,

$$\vec{j}(r < a) = \frac{B_0}{\mu_0 a} \left(2 - 3 \frac{r}{a}\right) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}(r > a) = \vec{0}$$

Corr. 3 Sphère radioactive

1. Les distributions de charges et de courants sont à symétrie sphérique donc $\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t) = j(r, t) \vec{e}_r$. Pour un point M donné, tout plan contenant M et O (origine au centre de la sphère) est de symétrie Π^+ pour les distributions sources qui sont en plus invariantes par rotation de centre O, donc

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0}$$

Le théorème de Gauss, valable en régime quelconque, appliqué à une sphère de rayon r donne (en posant $Q(r > R, t) = Q(R, t)$) :

$$\vec{E} = \frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2. Si l'on avait $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, alors on déduirait $\vec{j} = \vec{0}$. Or, la loi locale de conservation de la charge $\text{div} \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ se traduit en bilan global pour une sphère de rayon r :

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r, t)$$

d'où

$$\vec{j} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \vec{e}_r$$

Ce dernier résultat est le bon, la conservation de la charge étant

fondamentale ! On constate ici que l'on ne doit pas oublier dans l'équation de Maxwell-Ampère le terme du courant de déplacement (on n'est pas dans l'ARQS) :

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \vec{e}_r = -\vec{j}$$

Ainsi, on constate que $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_d \right) = \vec{0}$ marche !

C'est ainsi que Maxwell a rajouté le terme de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère : il fallait vérifier la conservation de la charge...

Corr. 4 Condensateur plan en régime variable

1. Par symétrie de révolution autour de Oz , les composantes des champs en coordonnées cylindriques ne dépendent que de r, z et t .

Un plan méridien est un plan de symétrie des sources donc le champ magnétique est orthoradial : **les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe Oz .**

En ce qui concerne le champ électrique, le plan méridien est toujours plan de symétrie des sources donc il est dans le plan méridien. De plus, d'après les relations de passage sur chaque

armature (conducteurs parfaits), on sait que \vec{E} est normal aux armatures en chacun de leur point. Enfin, le plan xOy est

plan d'antisymétrie des sources donc \vec{E} est orthogonal en ses points. Finalement, on sait que sur les armatures et sur xOy ,

\vec{E} est suivant \vec{e}_z . Il en est de même sur l'axe de révolution Oz . **Seulement, ça ne prouve pas que le champ électrique est partout suivant cette direction !** L'énoncé en fait l'hypothèse à la question suivante (c'est une approximation).

2. Puisque \vec{B}_1 est orthoradial, on prend pour contour d'Ampère un cercle de rayon r et d'axe Oz , orienté en accord avec les coordonnées cylindriques. L'application du théorème d'Ampère **généralisé** donne alors

$$\vec{B}_1 = \frac{r}{2c^2} \frac{dE_0}{dt} \vec{e}_\theta$$

3. L'équation de Maxwell qui n'est pas vérifiée est celle de Maxwell-Faraday. Pour qu'elle soit vérifiée, il faut rajouter

au champ uniforme \vec{E}_0 une correction \vec{E}_1 que l'on calcule en écrivant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday.

Pour respecter les propriétés de symétrie, \vec{E}_1 doit être suivant \vec{e}_z , ce qui permet de choisir le contour adéquat d'intégration : un rectangle orienté de hauteur $h' < h$ totalement contenu dans l'espace inter-armatures dans un plan méridien, dont un côté est sur Oz et le côté opposé à la distance r . L'intégration conduit à

$$\vec{E}_1 = \frac{r^2}{4c^2} \frac{d^2 E_0}{dt^2} \vec{e}_z$$

4. Maintenant, le champ \vec{B}_1 ne vérifie plus l'équation de Maxwell-Ampère car le champ électrique est « devenu » $\vec{E}_0 + \vec{E}_1$. On doit donc calculer le terme correctif \vec{B}_2 orthoradial permettant au champ magnétique de vérifier cette équation. Pour ce faire, on procède de même que pour le calcul de \vec{B}_1 , en utilisant \vec{E}_1 , et on trouve

$$\vec{B}_2 = \frac{r^3}{16c^4} \frac{d^3 E_0}{dt^3} \vec{e}_\theta$$

Ensuite, c'est l'équation de Maxwell-Faraday qui n'est plus vérifiée par $\vec{E}_0 + \vec{E}_1$ car le champ magnétique est maintenant $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ donc on calcule le terme correctif \vec{E}_3 en procédant de même qu'à la question précédente et on tire

$$\vec{E}_2 = \frac{r^4}{64c^4} \frac{d^4 E_0}{dt^4} \vec{e}_z$$

5. La récurrence se fait en procédant comme à la question précédente ; en postulant que

$$\vec{E}_n = \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2c} \right)^{2n} \frac{d^{2n} E_0}{dt^{2n}} \vec{e}_z$$

on trouve par le théorème d'Ampère généralisé

$$\vec{B}_{n+1} = \frac{r^{2n+1}}{2(n+1)(n!)^2 c^2 (2c)^{2n}} \frac{d^{2n+1} E_0}{dt^{2n+1}} \vec{e}_\theta$$

puis on trouve par la version intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E}_{n+1} = \frac{1}{[(n+1)!]^2} \left(\frac{r}{2c} \right)^{2n+2} \frac{d^{2n+2} E_0}{dt^{2n+2}} \vec{e}_z$$

ce qui achève la démonstration de la forme \vec{E}_n postulée, puisqu'elle est vraie au rang $n = 0$ (et aussi $n = 1$ d'ailleurs). On conclut que

$$\vec{E} = e_0 J_0(ix/2) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad x = \frac{r\omega}{c}$$

6. Une façon de construire, à la louche, un critère sur ω pour pouvoir négliger les termes correctifs est de dire que l'approche avec \vec{E}_0 seul suffit s'il est très grand devant la première correction \vec{E}_1 . En ordre de grandeur, cette condition s'écrit

$$\frac{|E_1|}{|E_0|} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\left| \frac{r^2}{4c^2} \frac{d^2 E_0}{dt^2} \right|}{E_0} \ll 1$$

donc

$$\frac{a^2}{4c^2} \omega^2 E_0 \ll 1$$

d'où

$$\omega^2 \ll \frac{4c^2}{a^2}$$

Cette condition, réalisée en pratique (essayez des valeurs numériques), revient à supposer que le régime variable ω est assez faible pour avoir l'ARQS à l'échelle du condensateur (le retard propagatif des ondes électromagnétiques dans le condensateur est négligeable).

Corr. 5 Prise de terre

1. En régime stationnaire, la loi de conservation de la charge s'écrit

$$\text{div} \vec{j} = 0$$

donc \vec{j} est à **flux conservatif**. La conservation du flux pour une demi-sphère de rayon r donne

$$2\pi r^2 j(r) = I$$

d'où

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

2. On donne γ donc on peut supposer la conduction ohmique. La loi locale d'Ohm s'écrit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Alors,

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\gamma r^2} \vec{e}_r$$

Or, en régime stationnaire (seulement), $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. Par conséquent,

$$V(r) = \frac{1}{2\pi\gamma r}$$

3. La différence de potentiel entre les deux pieds vaut

$$\Delta V \simeq \frac{1\delta}{2\pi\gamma D^2}$$

Or, $\Delta V \simeq RI_{\text{max}}$ à la limite d'électrocution, soit la condition pour survivre :

$$D \geq \sqrt{\frac{1\delta}{2\pi\gamma RI_{\text{max}}}} = 110 \text{ m}$$

Corr. 6 Décharge d'un condensateur plan
Do it yourself !

Corr. 7 Résistance en géométrie cylindrique
Corrigé succinct !

1. À l'intérieur du conducteur, $\rho = 0$, donc V vérifie l'équation de LAPLACE $\Delta V = 0$.

$V = V(r)$ peut satisfaire les conditions aux limites : $V(r_1) = V_1$, $V(r_2) = V_2$, et $\vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ sur les deux surfaces de base, puisque $\vec{j} = -\vec{\text{grad}} V$ est parallèle à \vec{e}_r si $V = V(r)$ et que $d\vec{S}$ est parallèle à \vec{e}_z sur les surfaces de base. L'équation de LAPLACE s'écrit par conséquent $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dV(r)}{dr} \right] = 0$. Ceci se résout en

$$V(r) = -\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1) + C^{\text{te}}$$

On en déduit $\vec{E} = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \vec{e}_r$, puis $\vec{j} = \frac{\gamma U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \vec{e}_r$ et enfin $I = 2\pi r h j(r) = \frac{2\pi\gamma h U}{\ln(r_2/r_1)}$, dont on déduit

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\gamma h}$$

2. Les courants étant radiaux, ils traversent une surface $rd\theta dz$ et parcourent une longueur dr . La résistance de l'élément de volume vaut donc $d^{(1,2)}R = \frac{\rho dr}{rd\theta dz}$ (les nombres en exposants donnent le nombre d'élément différentiel au numérateur et au dénominateur) avec $\rho = 1/\gamma$. La conductance vaut $d^{(2,1)}G = \frac{1}{d^{(1,2)}R} = \frac{rd\theta dz}{\rho dr}$. Par association en parallèle, on peut intégrer sur θ et z : $d^{(0,1)}G = 2\pi h \frac{r}{\rho dr}$, soit une résistance $d^{(1,0)}R = \frac{\rho dr}{2\pi hr}$. Par association en série, on peut intégrer sur r et trouver $R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\gamma h}$ comme précédemment.

3. La puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit $\mathcal{P}_{V,j} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \right)^2$. La puissance totale dissipée dans le conducteur vaut donc

$$\mathcal{P}_j = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \left(\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \right)^2 2\pi r h dr = \frac{2\pi\gamma h U^2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{U^2}{R}$$

On trouve bien le résultat d'électrocinétique, à savoir que $\mathcal{P}_j = U^2/R = RI^2$.

Corr. 8 Effet de magnétorésistance *

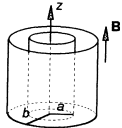
1. Compte tenu de la géométrie et en négligeant tout effet de bord, on a nécessairement en coordonnées cylindriques

$$\vec{j} = j_\rho \vec{e}_\rho + j_\theta \vec{e}_\theta$$

et

$$\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho + E_\theta \vec{e}_\theta$$

De plus, les quatre composantes ne dépendent que de ρ d'après l'invariance cylindrique du problème.



La loi d'Ohm généralisée s'écrit alors

$$j_\rho = \gamma E_\rho + \gamma A_H B j_\theta$$

et

$$j_\theta = \gamma E_\theta - \gamma A_H B E_\rho$$

2. On commence par remarquer que **le champ électrique est le même qu'en l'absence de champ magnétique**. En effet, on a $\Delta V = 0$ dans le conducteur et les conditions aux limites sont les mêmes sur le potentiel que \vec{B} statique soit là ou non. Par conséquent, le potentiel $V(M)$ dans le conducteur est le même que s'il n'y avait pas le champ magnétique statique (théorème d'unicité du problème de Laplace), d'où $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ inchangé par rapport au cas sans \vec{B} et il est radial.

Une autre façon de sentir ce résultat est de remarquer qu'un champ magnétique **statique** ne peut être la cause d'un champ électrique ou de sa modification (cf équations de Maxwell en statique).

On calcule donc le champ électrique radial par application du théorème de Gauss a une surface cylindrique. Ensuite, en calculant sa circulation, on trouve

$$\vec{E} = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_\rho$$

En utilisant la première question, on déduit

$$\vec{j} = \frac{\gamma U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{1 + \gamma^2 A_H^2 B^2} \left[\vec{e}_\rho - \gamma A_H B \vec{e}_\theta \right]$$

Les lignes de champ électrique sont des droites et il reste à déterminer les lignes de courant :

$$\frac{j_\rho}{dp} = \frac{j_\theta}{\rho d\theta}$$

soit

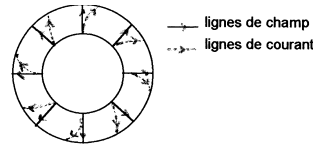
$$\rho d\theta = -\gamma A_H B dp$$

donc

$$\theta(\rho) = -\gamma A_H B \ln \frac{\rho}{a} + \theta(a)$$

Les lignes de courant sont par conséquent des **spiraales logarithmiques** de courbure faible (l'effet de magnétorésistance

étant très faible d'après les questions suivantes). Le tracé suivant est fait pour $U > 0$.



3. On a une loi d'Ohm radiale

$$j_\rho = \gamma' E_\rho \quad \text{avec} \quad \gamma' = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2 A_H^2 B^2}$$

Les seules composantes des champs qui interviennent dans les calculs de la différence de potentiel et du courant sont les composantes radiales :

$$U = \int_a^b E_\rho d\rho \quad \text{et} \quad I = \int_{\theta=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} j_\rho \rho d\theta dz$$

et tout se passe comme si la conductivité γ du matériau était remplacée par la conductivité γ' **plus faible** : la résistance augmente (effet de magnétorésistance).

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = +\gamma^2 A_H^2 B^2$$

4. On se place à $T = 300 \text{ K}$ (conditions usuelles). Pour le cuivre (conducteur), $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ et $n \simeq 10^{29} \text{ m}^{-3}$. De plus, $q = -e$. Ainsi,

$$\frac{\Delta R}{R} = 1,3 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

Pour le silicium (semi-conducteur), $\gamma = 3 \cdot 10^4 \text{ S.m}^{-1}$ et $n \simeq 10^{16} \text{ m}^{-3}$. De plus, $|q| = e$. Ainsi,

$$\frac{\Delta R}{R} = 3,5 \%$$

L'effet de magnétorésistance, bien que faible, est plus important pour un semi-conducteur que pour un conducteur.

Corr. 9 Espace rendu conducteur

1. On note S_1 la sphère intérieure (rayon r_1) et S_2 la sphère extérieure (rayon $r_2 > r_1$).

Quand le gaz devient conducteur, les charges réparties sur la surface de S_1 peuvent migrer à travers ce dernier vers S_2 . On peut même s'attendre à ce que dans l'état final, **toutes les charges aient migré sur la sphère extérieure**. En effet, la situation où les charges sont sur S_2 est énergétiquement plus stable (l'énergie électrostatique de la distribution de charge sur S_2 est plus faible que sur S_1 à charge égale). Une autre façon de prévoir cet état final, avec les mains, est de dire que les charges sont plus éloignées les unes des autres sur S_2 que sur S_1 , à charge totale identique, ce qui est plus favorable en raison de la répulsion électrostatique.

Quand bien même on ne serait pas convaincu de cet état final, les calculs vont en montrer la validité... Allons-y !

Champ magnétique : le système présente une symétrie sphérique et les courants ne peuvent être que radiaux. Alors, tout plan contenant le centre O des sphères et un point M donné est de symétrie positive des sources et le champ magnétique en M devrait être orthogonal à tous ces plans. On en déduit que

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}$$

Champ électrique : en reprenant pour le champ électrique

l'argumentation précédente, on note que (l'invariance sphérique aidant)

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_r$$

Pour $r < r_1$

$$\vec{E}(r < r_1, t) = \vec{0}$$

par application directe du théorème de Gauss (une sphère de Gauss de rayon $r < r_1$ ne contient pas de charge). Il reste à trouver une équation vérifiée par $E(r, t)$ (pour $r \in]r_1; r_2[$). Pour cela, le plus simple est de traduire l'équation de Maxwell-

Ampère, sachant que $\vec{B} = \vec{0}$, d'où

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Or,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

avec $\gamma = C^{\text{te}}$ par hypothèse (plus sympa). On tire

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

On reconnaît en τ le temps de relaxation du milieu rendu conducteur, ce qui n'est pas très étonnant. On en déduit que le champ électrique est

$$E(r, t) = E(r, 0) e^{-t/\tau}$$

$E(r, 0)$ se détermine en exprimant que l'état initial est un état d'équilibre électrostatique de charge totale Q où le théorème de Gauss donne simplement

$$E(r, 0) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Finalement, } \vec{E}(r \in]r_1; r_2[, t) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} e^{-t/\tau} \vec{e}_r$$

Pour $r > r_2$, la charge intérieure à une sphère de Gauss de rayon $r > r_2$ reste Q à tout instant et le champ vaut

$$\vec{E}(r > r_2, t) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Détermination des sources : en reportant le champ électrique dans l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient de façon évidente (car c'est le champ d'une charge variable ponctuelle en O)

$$\rho(M, t) = 0$$

Le vecteur densité de courant de charge \vec{j} vérifie la loi locale d'Ohm $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et est non nul. **Attention**, on voit bien ici que ce n'est pas parce que le milieu est localement neutre ($\rho = 0$) qu'il n'y a pas de courant ! Cela serait le cas s'il n'y avait qu'une famille de porteurs auquel cas $\vec{j} = \rho \vec{v}$ donnerait $\vec{j} = \vec{0}$! Cela veut dire ici qu'il y a au moins deux familles de porteurs qui interviennent ! Par exemple, pour deux familles, on peut bien avoir

$$\rho = n_1 q_1 + n_2 q_2 = 0$$

et

$$\vec{j} = n_1 q_1 \vec{v}_1 + n_2 q_2 \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

Finalement, lors du pompage optique du gaz, le flash lumineux ionise le gaz en (au moins) deux types de porteurs (des anions et des cations) qui se déplacent en sens contraire. Le milieu reste neutre mais le courant n'est pas nul (deux familles de

charges de signes contraires et de vitesses opposées donnent des courants qui se cumulent dans le même sens !).

Vérification de l'état final : on vérifie que l'état final correspond bien à ce qui était prévu puisque le champ électrique devient nul dans le gaz pour $t \rightarrow \infty$. Les charges se retrouvent toutes sur S_2 .

2. La puissance volumique dissipée par effet Joule à l'instant t en M à la distance r de O est non nulle seulement dans le gaz et vaut

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\gamma Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} e^{-2t/\tau}$$

On en déduit la puissance dissipée à l'instant t dans l'ensemble :

$$\mathcal{P}(t) = \int_{r_1}^{r_2} \mathcal{P}_{\text{vol}} 4\pi r^2 dr = \frac{\gamma Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] e^{-2t/\tau}$$

L'énergie totale dissipée par effet Joule dans le conducteur est finalement

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty \mathcal{P}(t) dt = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Comme le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting est nul partout de sorte qu'il n'y a pas de puissance rayonnée par le système du gaz conducteur. Par conséquent, on doit vérifier que la diminution d'énergie électromagnétique (électrostatique ici puisque $\vec{B} = \vec{0}$) du système entre l'état initial et l'état final correspond à \mathcal{E}_J .

Dans l'état initial, la charge Q est sur S_1 et l'énergie totale vaut

$$\mathcal{E}_{\text{ini}} = \int_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int_{r_1}^\infty \frac{Q^2}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

soit
$$\mathcal{E}_{\text{ini}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}$$

Dans l'état final, la charge Q est sur S_2 et l'énergie totale vaut (par analogie en remplaçant r_1 par r_2) :

$$\mathcal{E}_{\text{fin}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_2}$$

On vérifie bien le bilan d'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{ini}} = \mathcal{E}_{\text{fin}} + \mathcal{E}_J$$