Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

INTÉGRATION

Exercice 1. Valeurs de ζ aux entiers pairs

On considère la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée de son premier terme :

$$P_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x) = \int_0^x tP_n(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

où, dans ces deux formules, x désigne un nombre réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$m_n = \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

la valeur moyenne du polynôme P_n sur $[0;1]$. On remarquera bien que cette quantité (qui intervient dans la relation de récurrence donnée ci-dessus) ne dépend pas de x.

1. Calculer m_1 et m_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer P'_{n+1} et P''_{n+1}. Que valent $P'_{n+1}(0)$ et $P'_{n+1}(1)$?
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite

$$\left(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$$

est géométrique et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Justifier l'existence d'une fonction polynômiale Q_n tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(t) = tQ_n(t)$.
   b) Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \,]0;1]$, on pose

$$f(t) = \frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}.$$

   a) Démontrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu. On précisera $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0;1]$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\cdot$$

Justifier que cette relation reste valable en $t = 0$.

c) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = m_n\,\pi^{2n} - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Démontrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ce résultat constitue un cas particulier (simple) du lemme de Riemann–Lebesgue.

7. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = m_n\pi^{2n}.$$

En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\cdot$$

INTÉGRATION

Exercice 1. Valeurs de ζ aux entiers pairs

On considère la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée de son premier terme :

$$P_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x) = \int_0^x tP_n(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

où, dans ces deux formules, x désigne un nombre réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$m_n = \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

la valeur moyenne du polynôme P_n sur $[0;1]$. On remarquera bien que cette quantité (qui intervient dans la relation de récurrence donnée ci-dessus) ne dépend pas de x.

1. Calculer m_1 et m_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer P'_{n+1} et P''_{n+1}. Que valent $P'_{n+1}(0)$ et $P'_{n+1}(1)$?
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite

$$\left(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$$

est géométrique et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Justifier l'existence d'une fonction polynômiale Q_n tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(t) = tQ_n(t)$.
   b) Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in]0;1]$, on pose

$$f(t) = \frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}.$$

   a) Démontrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu. On précisera $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0;1]$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\cdot$$

Justifier que cette relation reste valable en $t = 0$.

c) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = m_n\,\pi^{2n} - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Démontrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ce résultat constitue un cas particulier (simple) du lemme de Riemann–Lebesgue.

7. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = m_n\pi^{2n}.$$

En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}\cdot$$