STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Exercice 1. [$\circ$]

Soit E un ensemble fini. On note A le sous-ensemble de E^E constitué des applications qui ne sont pas bijectives. Démontrer que A est stable pour la loi $\circ$.

Cela fournit un exemple de magma associatif, non commutatif et sans élément neutre.

Exercice 2. [$\star$] (Produit ensembliste de sous-groupes)

Soient $(G, *)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On pose

$$HK = \{h * k : h \in H,\ k \in K\} \qquad \text{et} \qquad KH = \{k * h : h \in H,\ k \in K\}$$

1. Dans cette question, on suppose que G est abélien. Démontrer que HK est un sous-groupe de G et que c'est le plus petit sous-groupe de G qui contient H et K.
2. Dans cette question, on ne suppose plus que G est abélien. Démontrer que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.

Exercice 3. [$\star$] (Produits direct et demi-direct de groupes)

Soient $(G, *)$ et $(H, \star)$ deux groupes.

1. (Cours) On définit sur $G \times H$ la loi $\otimes$ par

$$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H, \qquad (g_1, h_1) \otimes (g_2, h_2) = (g_1 * g_2\ ,\ h_1 \star h_2).$$

   Démontrer que $(G \times H, \otimes)$ est un groupe, appelé *produit direct* de G par H.

2. Soit $\varphi : (H, \star) \longrightarrow \big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$ un morphisme de groupe. On définit sur $G \times H$ la loi $\boxtimes$ par

$$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H, \qquad (g_1, h_1) \boxtimes (g_2, h_2) = \big(g_1 * \varphi(h_1)(g_2)\ ,\ h_1 \star h_2\big).$$

   a) Démontrer que $(G \times H, \boxtimes)$ est un groupe, appelé *produit semi-direct* de G par H relativement à φ. On le note $G \rtimes_\varphi H$.
   b) Que reconnait-on lorsque φ est le morphisme trivial (i.e. $\forall h \in H,\ \varphi(h) = \mathrm{Id}_G$).

Exercice 4. [$\star$]

Soient $(A, +, \times)$ un anneau non réduit à $\{0\}$ et $a, b \in A$. On suppose que $ab + ba = 1$ et $a^2 b + ba^2 = a$. Démontrer que $a = 2a^2 b = 2ba^2$. En déduire que a est inversible et donner son inverse.

Exercice 5. [$\bigstar$]

Soient $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall a, b \in A,\ ba = \pm ab$. Démontrer que A est commutatif.