ISOMÉTRIES VECTORIELLES

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un endomorphisme est orthogonal si, et seulement si, il conserve l'orthogonalité.
2. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.
3. Les projections orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.
4. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{-1;+1\}$ par l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. Une matrice triangulaire orthogonale est diagonale.

1. Faux. L'implication $\Rightarrow$ est évidemment vraie. Par contre, l'implication $\Leftarrow$ est fausse puisque, par exemple, l'application nulle conserve l'orthogonalité mais n'est évidemment pas orthogonale.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux. Il existe plein de matrices de déterminant ± 1 qui ne sont pas orthogonales.
5. Vrai. Les coefficients diagonaux sont non nuls (puisque la matrice est inversible). Ensuite, en regardant les produits scalaires entre les colonnes, on voit que les coefficients au dessus (ou en dessous) de la diagonale sont nécessairement nuls.

♦ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Soit $u : E \longrightarrow E$ une application qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Démontrer que $u \in \mathscr{O}(E)$.
2. Obtient-on le même résultat si $u : E \longrightarrow E$ conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$?

1. Il manque la linéarité ! Pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\|u(\lambda x+\mu y)-\lambda u(x)-\mu u(y)\|^2 &= \|u(\lambda x+\mu y)\|^2+\lambda^2\|u(x)\|^2+\mu^2\|u(y)\|^2\\ &\quad -2\lambda\langle u(\lambda x+\mu y),u(x)\rangle-2\mu\langle u(\lambda x+\mu y),u(y)\rangle+2\lambda\mu\langle u(x),u(y)\rangle\\ &= \|\lambda x+\mu y\|^2+\lambda^2\|x\|^2+\mu^2\|y\|^2\\ &\quad -2\lambda\langle \lambda x+\mu y,x\rangle-2\mu\langle \lambda x+\mu y,y\rangle+2\lambda\mu\langle x,y\rangle\\ &= \|(\lambda x+\mu y)-\lambda x-\mu y\|^2\\ &= 0,\end{aligned}$$
ce qui fournit la linéarité de u. Donc

$$\boxed{\text{si une application conserve le produit scalaire alors c'est un automorphisme orthogonal.}}$$

2. Dans le cas où u conserve la norme, on ne peut pas conclure. Par exemple, si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormale de E, l'application $x \longmapsto \|x\|\, e_1$ conserve la norme mais n'est pas linéaire. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si une application conserve la norme alors ce n'est}\\ \text{pas nécessairement un automorphisme orthogonal.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\star$]
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$. Que dire alors des endomorphismes $u\big|_F^F$ et $u\big|_{F^\perp}^{F^\perp}$?

Comme $u \in \mathscr{GL}(E)$, le sous-espace $u(F)$ est de même dimension que F. Comme $u(F) \subset F$, on a

$$\boxed{u(F) = F.}$$

Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on a $\langle u(x), y\rangle = \big\langle u(x), u(u^{-1}(y))\big\rangle = \big\langle x, u^{-1}(y)\big\rangle = 0$ car $u^{-1}(y) \in F$. Donc $u(x) \in F^\perp$, c'est-à-dire $u(F^\perp) \subset F^\perp$. Comme $u \in \mathscr{GL}(E)$, le sous-espace $u(F^\perp)$ est de même dimension que $F^\perp$. Donc

$$\boxed{u(F^\perp) = F^\perp.}$$

Il est alors immédiat que

$$\boxed{u\big|_F^F \in \mathscr{O}(F) \qquad \text{et} \qquad u\big|_{F^\perp}^{F^\perp} \in \mathscr{O}(F^\perp).}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]
Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. On note $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur d'Attila (envahi par les 1). À l'aide de la quantité ${}^tUAU$, démontrer que la somme de tous les coefficients de A appartient à $[-n;n]$.

Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et exprimons ${}^tUAU$ de deux manières.

D'une part, on a

$${}^tUAU = \begin{pmatrix} 1 & \text{——} & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}.$$

Par ailleurs, si l'on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, on a

$${}^tUAU = \langle U, AU\rangle\,,$$

donc d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$|{}^tUAU| \leqslant \|U\|\,\|AU\| = \|U\|^2 = n.$$

En conclusion, on a

$$\Big|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}\Big| \leqslant n,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\text{la somme de tous les coefficients d'une matrice de } \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ appartient à } [-n;n].}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\bigstar$] (Inégalité d'Hadamard)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. À l'aide d'une orthonormalisation, démontrer que

$$|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|\,.$$

Si la matrice A n'est pas inversible (c'est-à-dire si $\det(A) = 0$), le résultat est évident.

On suppose dorénavant que A est inversible. On propose deux démonstrations.

- ▷ Comme la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale directe, on a $\det(A) = [C_1, \ldots, C_n]$ où $[\cdots]$ désigne le produit mixte.

  Comme $\det(A) \neq 0$, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'orthonormalisation de cette famille par l'algorithme de Gram–Schmidt fournit une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on ait $\mathrm{Vect}(E_1, \ldots, E_k) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_k)$.

Comme le produit mixte d'une famille de vecteurs est le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormale directe, on a

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n) = \begin{vmatrix} \langle C_1, E_1 \rangle & & & \\ & \langle C_2, E_2 \rangle & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \langle C_n, E_n \rangle \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\det(A) = \langle C_1, E_1 \rangle \times \cdots \times \langle C_n, E_n \rangle \, .$$

Comme l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous dit que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on a $|\langle C_k, E_k \rangle| \leqslant \|C_k\|$ puisque $\|E_k\| = 1$, on en conclut que

$$|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\| \, .$$

▷ Avec la décomposition QR

Cela permet d'écrire la décomposition QR de A, c'est-à-dire $A = QR$ où $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$. On garde les notations de l'exercice sur la décomposition QR. Alors

$$|\det(A)| = |\det(Q)| \times |\det(R)| = |\det(R)| = |r_{1,1}| \times \cdots \times |r_{n,n}|$$

où

$$\forall k \in [\![1; n]\!] \, , \qquad r_{k,k} = \langle u_k, e_k \rangle \, .$$

Or l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous dit que

$$\forall k \in [\![1; n]\!] \, , \qquad |r_{k,k}| \leqslant \|u_k\| \times \|e_k\| = \|u_k\| = \|C_k\| \, ,$$

donc

$$|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\| \, .$$

En conclusion,

$$\boxed{|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire et de son orientation canoniques. Décrire géométriquement les applications linéaires a, b, c canoniquement associées aux matrices :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

▷ On a

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/6) & -\sin(-\pi/6) \\ \sin(-\pi/6) & \cos(-\pi/6) \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{a \text{ est la rotation vectorielle d'angle } -\pi/6.}$$

▷ On a $B \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det(B) = -1$ donc b est une réflexion. On obtient, après calculs, que le sous-espace des vecteurs invariant est $\operatorname{Ker}(b - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}\big((1, 2 - \sqrt{3})\big)$. Donc

$$\boxed{b \text{ est la réflexion dont l'axe est la droite dirigée par le vecteur } (1, 2 - \sqrt{3}).}$$

▷ La matrice C n'est pas orthogonale ! L'application c n'est donc pas une isométrie. Sa présence ici n'est donc pas justifiée ! C'est à la fois vrai et faux puisqu'il existe bien un type d'endomorphisme géométrique qui n'est pas un automorphisme orthogonal : les projections. Regardons si c n'en serait pas une (suspense !).

On vérifie sans mal que $C^2 = C$. Par conséquent, c est bien une projection.

On constate que $\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Vect}\big((1, \sqrt{3})\big)$ et que $\operatorname{Ker}(c) = \operatorname{Vect}\big((\sqrt{3}, -1)\big)$.

On remarque enfin que $(1, \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}, -1)$ sont orthogonaux.
On en conclut que

$$\boxed{c \text{ est la projection orthogonale sur la droite dirigée par } (1, \sqrt{3}).}$$

♦ ***Exercice 7.*** [○]
Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. En cours, nous avons vu que la composée de deux réflexions de E_2 est une rotation de E_2. Réciproquement, démontrer que toute rotation de E_2 est la composée de deux réflexions de E_2 dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Soit $r \in \mathscr{SO}(E_2)$. On se donne une réflexion arbitraire $s \in \mathscr{O}(E_2) \setminus \mathscr{SO}(E_2)$. L'isométrie sr est alors une réflexion, puisque $\det(sr) = \det(s)\det(r) = -1$. On la note s', de sorte que $sr = s'$. Cela nous dit que $r = ss'$ et cela suffit à notre bonheur… En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{toute rotation de } E_2 \text{ est la composée de deux réflexions}\\ \text{de } E_2 \text{ dont l'une peut être choisie arbitrairement.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]
Soient $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2, r une rotation et s une réflexion.
1. Reconnaître les isométries rsr et srs.
2. À quelle condition r et s commutent ?

1. On a $\det(rsr) = -1$ donc rsr est une réflexion. On voit que $\det(sr) = -1$ donc sr est une réflexion, ce qui donne $srsr = \mathrm{Id}_E$. On voit ainsi que $rsr = s^{-1} = s$. Donc

$$\boxed{rsr = s.}$$

On a $\det(srs) = 1$ donc rsr est une rotation. On a toujours $srsr = \mathrm{Id}_E$ (cf ci-dessus), donc

$$\boxed{srs = r^{-1}.}$$

2. Dire que r et s commutent, c'est dire que $rs = sr$. Alors, on a $srs = r$, c'est-à-dire $r^{-1} = r$ d'après la question 1. Si θ désigne l'angle de la rotation r, cela signifie que $\theta = -\theta\ [2\pi]$, ce qui donne $\theta = 0\ [\pi]$. Donc $r = \mathrm{Id}_E$ ou $r = -\mathrm{Id}_E$. Réciproquement, s et r commutent lorsque s vaut Id_E ou $-\mathrm{Id}_E$. Donc

$$\boxed{\text{une rotation et une réflexion commutent si, et seulement si, la rotation vaut } \mathrm{Id}_E \text{ ou } -\mathrm{Id}_E.}$$