LA DROITE RÉELLE

Exercice 1. [$\circ$]

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui possède au moins deux éléments et qui est majorée. Soit $a \in A$ tel que $\sup(A \setminus \{a\}) < \sup A$. Démontrer que $a = \max A$.

Exercice 2. [$\star$]

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$.

1. Démontrer que $\sup A \leqslant \inf B$.
2. Démontrer que $\sup A = \inf B$ si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a; b) \in A \times B,\ b - a \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3. [$\star$]

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. On suppose (dans cette question) que $A \subset B$. Démontrer que $\sup A \leqslant \sup B$.
2. Démontrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure qui est $\max\{\sup A; \sup B\}$.
3. On suppose que $A \cap B \neq \varnothing$. Démontrer que $A \cap B$ admet une borne supérieure. A-t-on $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A; \sup B\}$?
4. On pose $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$. Démontrer que $A+B$ admet une borne supérieure qui est $\sup A + \sup B$.
5. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que λA admet une borne supérieure qui est $\lambda \sup(A)$.

   Que se passe-t-il si l'on remplace λ par un nombre réel μ strictement négatif ?
6. On pose $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$. Démontrer que AB possède une borne supérieure. A-t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?
7. On pose $A^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A,\ ax = 1\}$ et l'on suppose que $A \subset \mathbb{R}_+$ et $A \neq \{0\}$. Démontrer que A^{-1} admet une borne inférieure qui est $(\sup A)^{-1}$.

Exercice 4. [$\circ$]

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et A une partie quelconque de $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout $a \in A$, la partie $U + a = \{x + a : x \in U\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   En déduire que $U + A = \{x + a : x \in U,\ a \in A\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Soient F_1 et F_2 deux fermés de $\mathbb{R}$.
   Peut-on affirmer que $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}$ est un fermé ? *Indication : Prendre* $F_1 = \{n - 1/n : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ *et bien choisir* F_2.

Exercice 5. [$\star$]

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère la relation $\mathscr{U}$ sur U définie par

$$\forall x, y \in U, \qquad (x \mathscr{U} y) \iff ([x; y] \subset U),$$

où $[x; y]$ désigne le segment joignant x à y même lorsque $x > y$.

1. Démontrer que $\mathscr{U}$ est une relation d'équivalence sur U.
2. Démontrer que les classes d'équivalence de $\mathscr{U}$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Justifier que l'ensemble quotient $U/\mathscr{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{U}$) est dénombrable.
3. Qu'a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 6. [$\circ$]

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. (re)Démontrer que

$$\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Adh}(A) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(A).$$

En déduire que

$$\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus A) = \operatorname{Fr} A.$$

Exercice 7. [$\star$]

1. Démontrer que $\{q^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.
2. Plus généralement, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante et D une partie dense de $\mathbb{R}$. Démontrer que $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

Exercice 8. [$\star$]

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On souhaite démontrer l'alternative suivante : ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$, ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

Le cas $G = \{0\} = 0\mathbb{Z}$ étant clair, on suppose que $G \neq \{0\}$.

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. On la note α.
2. On suppose, dans cette question, que $\alpha > 0$. Démontrer $G = \alpha\mathbb{Z}$. *Un tel sous-groupe est dit discret.*
3. On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$. Démontrer G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. [$\bigstar$]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a/b pour que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.
2. a) Soit α un nombre irrationnel. Démontrer que $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que l'écriture en base 10 de 2^n commence par un 7.