Lycée Henri IV | **Cours**
MPSI | Durée : 5 h 45

# THÉORIE DES APPLICATIONS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

# Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- le langage mathématique ;
- les relations ;
- les nombres.

Dans ce cours, les lettres $E$, $F$, $G$, $H$ désignent des ensembles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

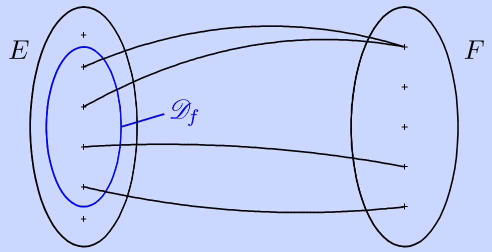
# A. Applications

## A.1. Fonctions et applications

**Définition 1**

On appelle fonction la donnée de deux ensembles $E, F$ et d'une relation $f$ de $E$ vers $F$ telle que tout élément de $E$ est en relation avec au plus un élément de $F$.

Lorsque $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ par la relation $f$, on note $y = f(x)$ à la place de $x\,f\,y$. On écrit alors $x \longmapsto f(x)$ pour dire que $x$ est en relation avec $f(x)$.




Comme pour toute relation, $E$ est appelé l'ensemble de départ, $F$ est l'ensemble d'arrivée et $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F : y = f(x)\}$ s'appelle le graphe.

Par ailleurs, dans le cadre fonctionnel, on introduit plus spécifiquement le vocabulaire et les notations suivantes :

- l'ensemble $\mathscr{D}_f$ des éléments de $E$ qui sont en relation avec un élément de $F$ est appelé l'ensemble de définition de la fonction $f$, autrement dit $\mathscr{D}_f = \{x \in E : \exists! y \in F,\ y = f(x)\}$ ;
- pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, l'élément $f(x)$ de $F$ est appelée l'image de $x$ par $f$ ;
- si $y$ désigne un élément de $F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est un antécédent de $y$ par $f$ (mais ce n'est pas forcément le seul...).

L'ensemble des fonctions de $E$ vers $F$ est noté $\mathscr{F}(E, F)$.

Une fonction est donc une relation univoque : un élément de l'ensemble de départ ne pouvant être en relation qu'avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Pour les antécédents, tout est par contre possible : un élément de l'ensemble d'arrivée peut n'admettre aucun antécédent ; un seul ou même plusieurs.

Lorsqu'on vous donne une fonction $x \longmapsto f(x)$ de $E$ vers $F$, vous devez toujours commencer par déterminer son ensemble de définition.

Attention, il ne faut pas confondre la fonction $f$ (qui est un élément de $\mathscr{F}(E, F)$) et la valeur $f(x)$ de $f$ en $x$ qui est un élément de $F$.

Par exemple, il ne faut pas écrire « la fonction $\sin(x)$ » mais « la fonction sin » ou encore « la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ ».

Les fonctions dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ sont appelées des fonctions réelles. Parmi celles-ci, celles dont l'ensemble de départ est également $\mathbb{R}$ sont appelées fonctions réelles de la variable réelle ou, plus sobrement, « fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ». Attention, cela ne signifie pas que leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$ mais seulement qu'il est inclus dans $\mathbb{R}$.

**Exemples :**

- Dans notre beau pays, la relation qui associe à un individu le prénom de son (sa) conjoint(e) est une fonction. Son ensemble de définition est l'ensemble des individus mariés. Mon image s'appelle Isabelle. Je suis donc un antécédent d'Isabelle. Mais je ne suis pas le seul car d'autres que moi ont épousé des Isabelles (mais pas la mienne !).
- Dans une société polygame, la relation précédente n'est pas une fonction car certaines personnes ont plusieurs conjoint(e)s.
- La relation $f : x \longmapsto 1/x$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. Son graphe est l'ensemble $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R}^*\}$ que l'on représente par deux branches d'hyperbole. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent et tout autre nombre réel $x$ possède un unique antécédent, qui est $1/x$.

En pratique, une fois l'ensemble de définition déterminé, on envisage des cas où l'ensemble de départ est contenu dans cet ensemble de définition.

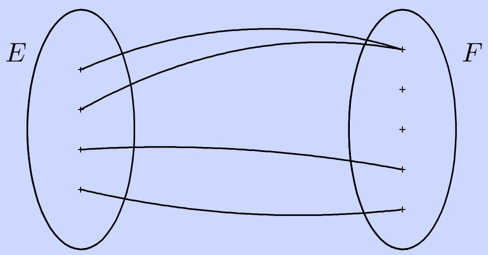
**Définition 2**

On appelle application une fonction $f$ de $E$ vers $F$ telle que tout élément de $E$ est en relation avec exactement un élément de $F$, ce qui revient à dire que $E \subset \mathscr{D}_f$. L'application $f$ est notée :

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array} \right.$$

pour dire qu'à tout élément $x \in E$, on fait correspondre un et un seul élément de $F$, noté $f(x)$.

L'ensemble des applications de $E$ vers $F$ est noté $F^E$.




L'application $f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est souvent notée $f : E \longrightarrow F$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation fonctionnelle sous-jacente (c'est-à-dire la relation $x \longmapsto f(x)$).

La donnée de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée fait partie intégrante de la définition d'une application. Ainsi, deux applications ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle.

On notera la subtile différence qui existe entre une fonction et une application. Dans le premier cas, un élément de l'ensemble de départ possède 0 ou 1 image alors que, dans le second cas, un élément de l'ensemble de départ possède exactement 1 image.

Une fonction $f$ étant donnée, on lui associe naturellement l'application $f$ dont l'ensemble de départ est l'ensemble de définition de la fonction $f$. Cette association est d'ailleurs si forte que l'on confond bien souvent les mots « fonction » et « application » dans ce cas.

Ainsi, on parle indistinctement de la fonction ln de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en précisant que son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+^*$) ou de l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Exemples :**

- L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ admet pour graphe l'ensemble $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ que l'on représente par une parabole. Aucun réel strictement négatif n'a d'antécédent ; tout réel strictement positif possède deux antécédents et 0 admet un unique antécédent.
- L'identité de $E$ est l'application définie par
$$\mathrm{Id}_E \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x. \end{array} \right.$$
- Soit $A$ une partie de $E$. On appelle fonction indicatrice de $A$ dans $E$ l'application définie par
$$\mathbb{1}_A \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{array} \right. \end{array} \right.$$
- On peut associer à la fonction $f : x \longmapsto 1/x$ les deux applications :
$$f_1 \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x, \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x, \end{array} \right.$$
qui n'ont pas du tout les mêmes propriétés : la première est impaire et non monotone alors que la seconde est strictement décroissante mais n'est plus impaire.

## A.2. Images directes et réciproques

### a) Images directes

**Définition 3**

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $A$ une partie de $E$. On appelle image (directe) de $A$ par $f$ l'ensemble, noté $f(A)$, contenant les images des éléments de $A$. Autrement dit,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F : \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

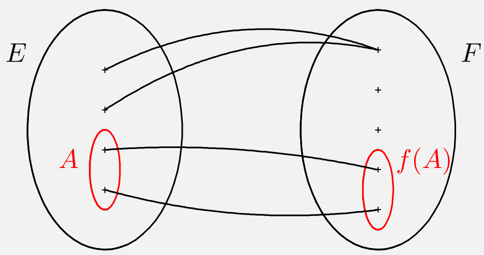
L'image de $f$ (sans préciser de quelle partie) désigne $f(E)$.

Attention, l'écriture $f(A)$ ne désigne pas l'image d'un élément de $E$ mais l'ensemble constitué de toutes les images des éléments de $A$. Déterminer une image directe permet ainsi de calculer simultanément les images de tout un tas d'éléments de l'ensemble de départ.

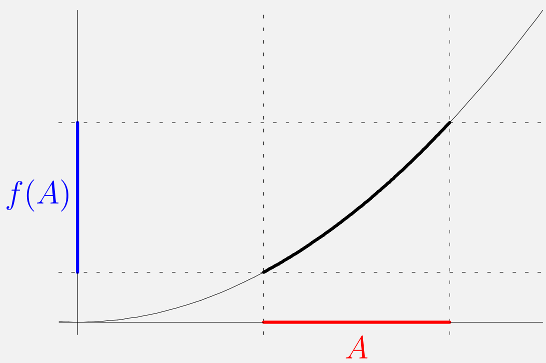
On notera qu'en général l'image $f(E)$ d'une fonction est plus petite que l'espace d'arrivée car tous les éléments de $F$ n'ont pas forcément d'antécédent par $f$. Autrement dit, l'ensemble d'arrivée d'une application se contente d'indiquer quel est le type de valeurs que prend $f$ alors que l'image de $f$ décrit très exactement les valeurs prises par $f$.

**Exemples :**

- On a toujours $f(\varnothing) = \varnothing$.
- On a $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.
- Plus généralement, si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $f(A) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ mais rien ne dit que les $f(x_i)$ sont distincts.
- Du point de vue des patatoïdes, on a :




- Pour déterminer l'image directe d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ par une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut s'aider de son graphe. Pour cela,
  - $*$ on représente sur $(Ox)$ la partie $A$ (en rouge sur le dessin ci-dessous),
  - $*$ on précise les portions du graphe de $f$ qui sont dans la zone du plan dont les abscisses appartiennent à $A$ (en gras sur le dessin) ;
  - $*$ on « écrase » sur $(Oy)$ ces portions de courbes pour avoir $f(A)$ (en bleu sur le dessin).




Par exemple, on a

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*, \quad \cos\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0;1], \quad \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \tan\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \text{ non défini}$$

### b) Images réciproques

**Définition 4**

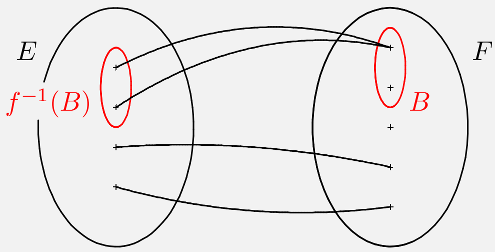
Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $B$ une partie de $F$. On appelle image réciproque de $B$ par $f$ l'ensemble des antécédents des éléments de $B$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $E$ dont l'image est dans $B$. On le note $f^{-1}(B)$. On a donc

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

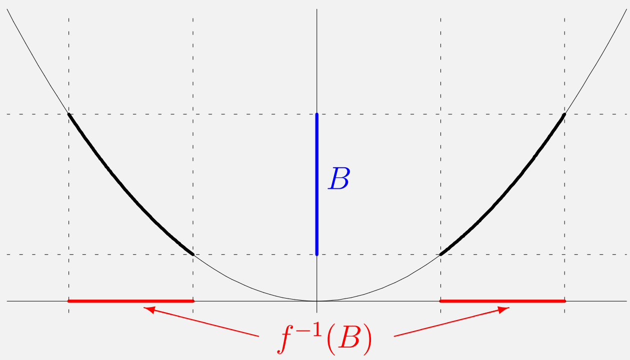
Attention, l'écriture $f^{-1}(B)$ est trompeuse : elle n'implique pas l'existence d'une fonction $f^{-1}$. Déterminer une image réciproque ne consiste pas à faire agir une fonction sur des éléments de l'ensemble d'arrivée mais à rechercher simultanément les antécédents de tout un tas d'éléments de l'ensemble d'arrivée.

**Exemples :**

- On a toujours $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$.
- Si $A \subset E$, on a $(\mathbb{1}_A)^{-1}(\{1\}) = A$.
- Pour ceux qui aiment les patatoïdes, on a :




- Pour déterminer l'image réciproque d'une partie $B$ de $\mathbb{R}$ par une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut s'aider de son graphe. Pour cela,
  - ∗ on représente sur $(Oy)$ la partie $B$ (en bleu sur le dessin ci-dessous),
  - ∗ on précise les portions du graphe de $f$ qui sont dans la zone du plan dont les ordonnées appartiennent à $B$ (en gras sur le dessin) ;
  - ∗ on « écrase » sur $(Ox)$ ces portions de courbes pour avoir $f^{-1}(B)$ (en rouge sur le dessin).




Par exemple, on a

$$\ln^{-1}(\mathbb{R}_+) = [1 ; +\infty[, \quad \cos^{-1}(\{1\}) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \exp^{-1}(\mathbb{R}_-) = \varnothing.$$

### c) Propriétés des images directes et réciproques [✠]

L'encadré ci-dessous donne les deux réflexes qu'il est bon de cultiver lorsque l'on veut apprendre à travailler avec des images directes ou réciproques.

**Manipulations d'images directe et réciproque**

Lorsqu'il voit « $y \in f(A)$ », un bon taupin a le réflexe d'écrire « il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ ».

Et lorqu'il est face à l'écriture « $x \in f^{-1}(B)$ », le même taupin a une envie irrépressible d'écrire « Donc $f(x) \in B$ ».

Les propriétés de la proposition suivante ne sont pas à connaître par cœur. Il faut savoir les conjecturer à partir d'un graphe (dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et les redémontrer rapidement.

**Proposition 1**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère $A$, $A_1$, $A_2$ des parties de $E$ ainsi que $B$, $B_1$, $B_2$ des parties de $F$. On a

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) | $(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)$ | (j) | $(B_1 \subset B_2) \Longrightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)$ |
| (ii) | $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ | (jj) | $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ |
| (iii) | $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ | (jjj) | $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ |
| (iv) | $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$ | (jw) | $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$ |
| (v) | $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$ | (w) | $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ |

■ (i) Supposons que $A_1 \subset A_2$. Soit $y \in f(A_1)$. Il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Comme $A_1 \subset A_2$, on a $x \in A_2$ et, par suite, $y = f(x) \in f(A_2)$. Donc $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(j) Supposons que $B_1 \subset B_2$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$. Alors $f(x) \in B_1$. Comme $B_1 \subset B_2$, on a $f(x) \in B_2$ et, par suite, $x \in f^{-1}(B_2)$. Donc $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in A_1 \cup A_2,\ y = f(x) \\ &\iff \exists x \in A_1,\ y = f(x) \text{ ou } \exists x \in A_2,\ y = f(x) \\ &\iff y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2), \end{aligned}$$

donc $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(jj) On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff y \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(iii) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A_1 \cap A_2$, on a $x \in A_1$ et $x \in A_2$. Par conséquent, on a $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$. Donc $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

On voit clairement que si $f$ est une fonction constante et si $A_1$ et $A_2$ sont disjoints, il n'y a pas nécessairement égalité.

(jjj) On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff y \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(iv) Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme $y \notin f(A)$, on peut affirmer que $x \notin A$. Donc $x \in E \setminus A$ et comme $y = f(x)$, on a bien $y \in f(E \setminus A)$. Donc $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

On voit clairement que si $f$ est une fonction constante et si $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$, il n'y a pas égalité.

(jw) On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus B) &\iff f(x) \in F \setminus B \\ &\iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff y \in E \setminus f^{-1}(B), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

(v) Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, ce qui implique que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Donc $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On voit clairement que si $f$ est une fonction constante et si $A \neq E$, il n'y a pas égalité.

(w) Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mézalors $f(x) \in B$ puisque $x \in f^{-1}(B)$. Il s'ensuit que $y = f(x) \in B$. Donc $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

On voit clairement que si $f$ est une fonction constante égale à $b$ et si $B$ est une partie de $F$ qui contient au moins un élément différent de $B$, il n'y a pas égalité. ■

## A. 3. Restriction

Pour distinguer certaines applications associées à une même fonction, on est amener à introduire la notion de restriction d'une application.

**Définition 5**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Si $A$ est une partie de $E$, on appelle restriction de $f$ sur $A$ l'application $f\big|_A$ définie par

$$f\big|_A \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$

Plus généralement, si $A$ est une partie de $E$ et $B$ est une partie de $F$ telles que $f(A) \subset B$ (c'est-à-dire $\forall x \in A,\ f(x) \in B$), on appelle restriction de $f$ de $A$ vers $B$ l'application $f\big|_A^B$ définie par

$$f\big|_A^B \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$

On dit que $f$ est un prolongement de $g$ si $g$ est une restriction de $f$.

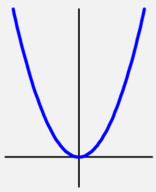
Restreindre une application revient donc à modifier son ensemble de départ ou/et son ensemble d'arrivée. L'action de l'application n'est par contre pas modifiée.

La restriction influe sur les propriétés de l'application. En particulier, nous verrons qu'elle permet d'obtenir les propriétés fondamentales d'injectivité, de surjectivité et (par conséquent) de bijectivité que nous étudierons à la section B.

**Exemples :**

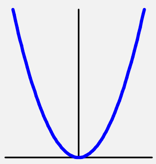
- Les graphes ci-dessous illustrent des restrictions de l'élévation au carré :

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

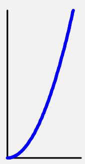


$$f\big|_{\mathbb{R}_+} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

$$f\big|^{\mathbb{R}_+} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$



$$f\big|_{\mathbb{R}_+}^{\mathbb{R}_+} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$



- Si $A$ est une partie d'un ensemble de $E$, la restriction (au départ) de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ à la partie $A$ est la fonction constante égale à 1, ce que l'on note $\mathbb{1}_A\big|_A \equiv 1$.
- Le module complexe est un prolongement de la valeur absolue réelle.

On termine ce paragraphe en introduisant la notion de partie stable.

**Définition 6**

Soient $f : E \longrightarrow E$ une application et $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est stable par $f$ lorsque $f(A) \subset A$, c'est-à-dire $\forall x \in A,\ f(x) \in A$. Dans ce cas, l'application $f\big|_A^A$ est bien définie.

2 h 00

## A.4. Composition des applications

**Définition 7**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle application composée de $f$ et $g$ l'application de $E$ dans $G$ notée $g \circ f$ définie par

$$g \circ f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big). \end{array} \right.$$

---

Pour composer deux applications $f$ et $g$, il n'est pas absolument nécessaire que l'ensemble d'arrivée de $f$ soit le même que l'ensemble de départ de $g$. Il suffit en fait que l'image de $f$ soit contenue dans l'ensemble de départ de $g$. On dit alors tout naturellement que $f$ et $g$ sont composables.

Attention à l'ordre !! La composée de $f$ et $g$ (dans cet ordre) est notée $g \circ f$ pour tenir compte du fait que $f$ agit avant $g$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Du point de vue ensembliste, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

L'existence de $g \circ f$ n'implique pas celle de $f \circ g$, sauf lorsque $E = G$. Même dans ce cas, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont en général différentes. Par exemple, si enfiler son slip puis son pantalon est normal, enfiler son pantalon puis son slip est plus original (sauf pour Superman ...).

**Exemples :**

- Pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
- Si

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

  on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

- Si

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

  on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (g \circ f)(x) = \mathrm{e}^{\ln x} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = \ln \mathrm{e}^x = x.$$

  Cependant, $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales puisqu'elles n'ont ni le même ensemble de départ, ni le même ensemble d'arrivée.

On constate donc que la loi $\circ$ n'est pas commutative. Elle est par contre associative.

**Proposition 2**

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. On a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

■ Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et l'on a

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) \quad \text{et} \quad \big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\big(g(f(x))\big),$$

pour tout $x \in E$. Cela démontre bien le résultat. ■

Dans une série de composition, les parenthèses sont donc inutiles !

## A.5. *Ordres et applications*

**Définition 8**

Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \trianglelefteq)$ deux ensembles ordonnés dont les ordres stricts respectifs sont notés $\prec$ et $\triangleleft$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite :

- croissante lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \preccurlyeq y) \Longrightarrow \big(f(x) \trianglelefteq f(y)\big)$ ;
- décroissante lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \preccurlyeq y) \Longrightarrow \big(f(y) \trianglelefteq f(x)\big)$ ;
- strictement croissante lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \prec y) \Longrightarrow \big(f(x) \triangleleft f(y)\big)$ ;
- strictement décroissante lorsque $\forall x, y \in E,\ (x \prec y) \Longrightarrow \big(f(y) \triangleleft f(x)\big)$.

Le mot monotone signifie indistinctement croissante ou décroissante.

Une application $f : (E, \preccurlyeq) \longrightarrow (F, \trianglelefteq)$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) si et seulement si, en munissant $F$ de l'ordre réciproque, l'application $f : (E, \preccurlyeq) \longrightarrow (F, \trianglerighteq)$ est croissante (respectivement strictement croissante).

La plupart des exemples que nous rencontrerons cette année concernent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre naturel $\leqslant$.

Attention ! Les adjectifs « croissante » et « décroissante » ne sont pas des contraires : une application qui n'est pas croissante n'est pas nécessairement décroissante. En effet, il existe des tas d'applications qui ne sont ni croissantes ni décroissantes. Quant aux applications constantes, elles sont à la fois croissantes et décroissantes.

**Exemples :**

- La fonction partie entière (qui associe à un nombre réel $x$ le plus grand entiers relatifs inférieur ou égal à $x$) est croissante de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
- L'application $f \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{N}^*, \mid) & \longrightarrow & (\mathbb{N}^*, \mid) \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array} \right.$ est strictement croissante.
  En effet, si $n, m \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $n \mid m$ et $n \neq m$, alors $n^2 \mid m^2$ et $n^2 \neq m^2$, c'est-à-dire $f(n) \mid f(m)$ et $f(n) \neq f(m)$.
- Soit $E$ un ensemble. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{P}(E), \subset) & \longrightarrow & (\mathscr{P}(E), \subset) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ décroît strictement.
- La fonction de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$ définie par $x \longmapsto x^2$ n'est pas monotone.

L'ensemble des applications à valeurs dans un ensemble ordonné est lui-même ordonné. Cela permet de comparer entre-elles des applications... lorsque celles-ci sont comparables !

**Proposition 3**

Soient $E$ un ensemble et $(F, \trianglelefteq)$ un ensemble ordonné. La relation dans $F^E$, encore notée $\trianglelefteq$, définie par

$$(f \trianglelefteq g) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in E,\ f(x) \trianglelefteq g(x)),$$

est une relation d'ordre sur $F^E$.

■ AQT ■

Même dans le cas où $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre total sur $F$, l'ordre induit sur $F^E$ n'est en général pas total !

Par exemple, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les applications $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ ne sont pas comparables.

# B. Injectivité, surjectivité et bijectivité

## B.1. Injection

### a) Définition et exemples

**Définition 9**

On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, ou que c'est une injection de $E$ dans $F$, lorsque, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution, c'est-à-dire lorsque tout élément de $F$ possède au plus un antécédent par $f$. Ainsi, $f$ est injective si, et seulement si,

$$\forall x_1, x_2 \in E, \qquad \big((f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow (x_1 = x_2),$$

ou encore

$$\forall x_1, x_2 \in E, \qquad (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow \big((f(x_1) \neq f(x_2)\big).$$

En terme ensembliste, l'injectivité de $f : E \longrightarrow F$ signifie que, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des antécédents de $y$ est ou bien l'ensemble vide, ou bien un singleton.
Autrement dit,

$\boxed{\text{une fonction est injective si elle ne prend jamais deux fois la même valeur.}}$

L'injectivité est donc une propriété d'unicité sous réserve d'existence.

On gardera à l'esprit que la plupart des applications ne sont pas injectives.

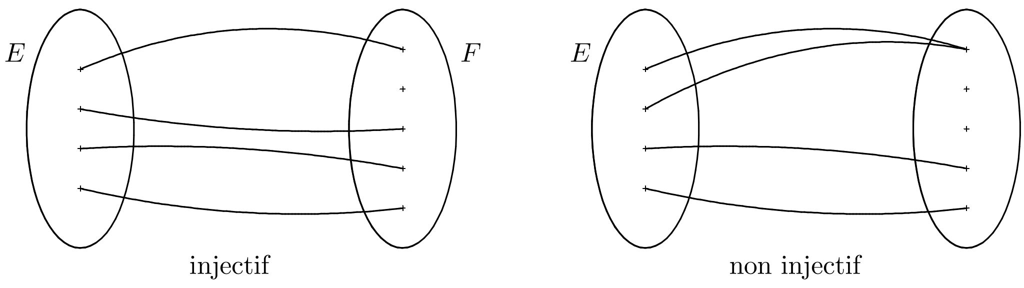
**Exemples :**

- L'application qui à tout individu fait correspondre ses empreintes digitales est injective.
- L'application qui à tout individu fait correspondre son prénom n'est pas injective puisque, par exemple, il existe plein de Sébastien (mais un seul vraiment exceptionnel !).
- Toute application dont l'ensemble de départ est l'ensemble vide est injective.

L'encadré suivant explique comment visualiser l'injectivité sur un diagramme saggital.

**Interprétation patatoïdale**

Une application est injective si toutes les croix de l'ensemble d'arrivée sont atteintes par au plus une flèche :

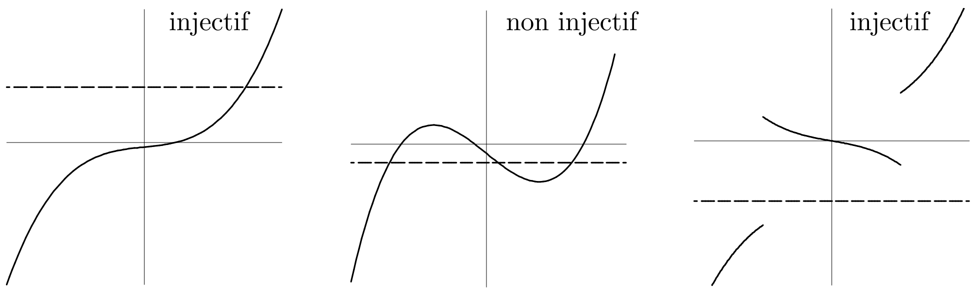



Ces représentations patatoïdales nous montrent qu'une injection de $E$ dans $F$ n'existe que si l'ensemble $E$ est « plus petit » que l'ensemble $F$.
Nous verrons que, dans le cadre des ensembles finis, cette interprétation est parfaitement vérifiée puisque l'existence d'une injection d'un ensemble à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments est équivalente à l'inégalité $p \leqslant n$.

L'encadré suivant explique comment visualiser l'injectivité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

### Interprétation pour une fonction numérique

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'injectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale : celle-ci doit toujours rencontrer au plus une fois le graphe.




**Exemples :**

- L'application $x \longmapsto e^x$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective.
- L'application $x \longmapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais le devient si on la restreint à $\mathbb{R}_+$.

L'encadré suivant fait le point sur les différentes façons de démontrer l'injectivité.

### Comment démontrer l'injectivité ?

Une démonstration classique d'injectivité doit commencer par « Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ » et se poursuivre par un raisonnement dans le but d'établir que $x_1 = x_2$.

On peut aussi justifier l'injectivité en démontrant que l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet au plus une solution, pour tout $y \in F$. Dans ce cas, trouver les solutions n'est même pas nécessaire, il suffit de prouver qu'il n'y en a pas plus d'une.

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la stricte monotonie est une condition suffisante d'injectivité (mais que ce n'est pas une condition nécessaire...).

■ Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante (par exemple). Soient $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_1 \neq x_2$, c'est-à-dire $x_1 < x_2$ (par exemple). La stricte croissance de $f$ dit alors que $f(x_1) < f(x_2)$. C'est absurde ! Donc $x_1 = x_2$ et $f$ est bien injective. ■

**Exemples :**

- $\mathrm{Id}_E$ est injective.
- Si $A$ est une partie d'un ensemble $E$, l'application $i_{A,E}\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ est une injection appelée injection canonique de $A$ dans $E$.
- L'application qui à un parent associe son premier enfant n'est pas injective (car un enfant a deux parents). Elle le devient si l'on se restreint au départ à l'ensemble des mères. Cet exemple nous inspire la remarque suivante.

### Comment obtenir une injection ?

Le caractère injectif d'une application est lié à son ensemble de départ. Ainsi, si $f$ n'est pas injective, il est « possible » de restreindre $f$ au départ pour obtenir une injection.

### b) Propriétés

La proposition suivante résume les principales propriétés de l'injectivité.

**Proposition 4**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est une injection de $E$ dans $G$.

(ii) Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est une injection de $E$ dans $F$.

■ (i) Supposons que $f$ et $g$ sont injectives. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Alors $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, ce qui implique d'abord que $f(x_1) = f(x_2)$, par injectivité de $g$, puis $x_1 = x_2$, par injectivité de $f$. On a donc démontré que $g \circ f$ est injective.

(ii) Supposons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant $g$, on obtient $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$. On a donc démontré que $f$ est injective. ■

La propriété (i) signifie que la composée de deux injections est une injection.

## B.2. Surjection

### a) Définition et exemples

**Définition 10**

On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, ou que c'est une surjection de $E$ sur $F$, lorsque, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution, c'est-à-dire lorsque tout élément de $F$ possède au moins un antécédent par $f$. Autrement dit, $f$ est surjective si, et seulement si,

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \qquad y = f(x).$$

En terme d'image directe, la surjectivité de $f : E \longrightarrow F$ est équivalente à l'égalité $f(E) = F$.

En terme d'image réciproque, la surjectivité de $f : E \longrightarrow F$ signifie que, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des antécédents de $y$ n'est pas vide.

Autrement dit,

une fonction est surjective si tout élément à l'arrivée est atteint.

La surjectivité est donc une propriété d'existence sans condition d'unicité.

Évidemment, la plupart des applications ne sont pas surjectives.

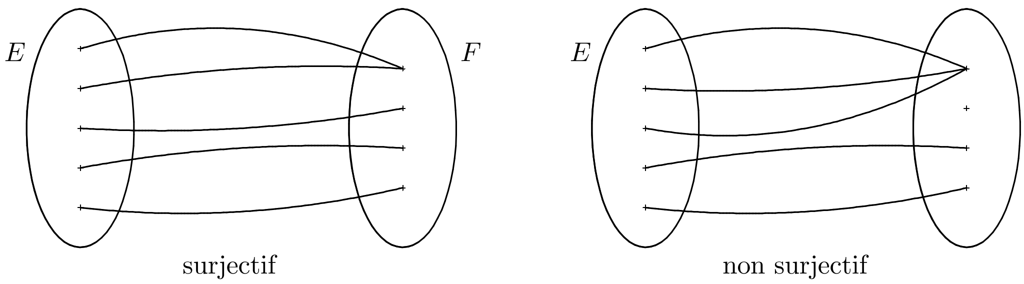
**Exemples :**

- L'application qui à tout individu fait correspondre son sexe est surjective.
- L'application qui à tout individu fait correspondre son âge n'est pas surjective puisque, par exemple, personne n'a 1975 ans.

L'encadré suivant explique comment visualiser la surjectivité sur un diagramme saggital.

**Interprétation patatoïdale**

Une application est surjective si toutes les croix de l'ensemble d'arrivée sont atteintes par au moins une flèche :



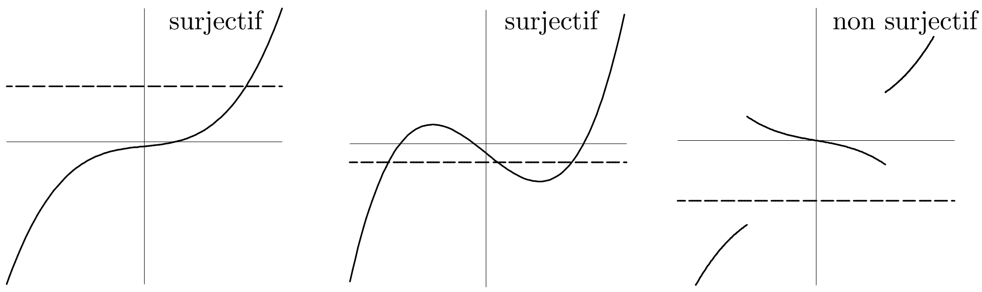

Ces représentations patatoïdales nous montrent qu'une surjection de $E$ sur $F$ n'existe que si l'ensemble $E$ est « plus gros » que l'ensemble $F$.

Dans le cadre des ensembles finis, nous démontrerons la pertinence de cette interprétation puisque l'existence d'une surjection d'un ensemble à $p$ éléments sur un ensemble à $n$ éléments est équivalente à l'inégalité $p \geqslant n$.

L'encadré suivant explique comment visualiser la surjectivité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

### Interprétation pour une fonction numérique

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la surjectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale : celle-ci doit toujours rencontrer au moins une fois le graphe.




**Exemples :**

- L'application $x \longmapsto \ln x$, définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, est surjective.
- La fonction $x \longmapsto \sin x$ n'est pas surjective lorsqu'elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais le devient lorsqu'on la restreint à l'arrivée au segment $[-1; 1]$.

L'encadré suivant fait le point sur les différentes façons de démontrer la surjectivité.

### Comment démontrer la surjectivité ?

Une démonstration classique de surjectivité doit commencer par « Soit $y \in F$ » et se poursuivre par un raisonnement dans le but d'établir l'existence de $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Il est aussi possible de justifier la surjectivité en démontrant que l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet au moins une solution pour tout $y \in F$. À noter : il n'est alors pas nécessaire de déterminer explicitement l'ensemble des solutions de l'équation $y = f(x)$ mais seulement de démontrer que cet ensemble n'est pas vide.

Dans le cas d'une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, nous verrons que l'outil priviligié pour démontrer la surjectivité est le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exemples :**

- $\mathrm{Id}_E$ est surjective.
- L'application, allant de l'Humanité vers $\mathbb{N}$, qui associe à un individu son nombre de dents n'est pas surjective. Si l'on restreint cette application à $\{0; 1; 2; \cdots ; 32\}$ à l'arrivée, elle devient surjective. Cela nous inspire la remarque suivante.

### Comment obtenir une surjection ?

Le caractère surjectif d'une application $f : E \longrightarrow F$ est lié à son ensemble d'arrivée $F$. Ainsi, si $f$ n'est pas surjective, il est possible de restreindre $f$ sur son ensemble d'arrivée pour obtenir une surjection : il suffit de se limiter à l'arrivée à l'image de $f$, c'est-à-dire $f(E)$.

### b) Propriétés

La proposition suivante résume les principales propriétés de la surjectivité.

**Proposition 5**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est une surjection de $E$ sur $G$.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est une surjection de $F$ sur $G$.

■ (i) Supposons que $f$ et $g$ sont surjectives. Soit $z \in G$. La surjectivité de $g$ fournit l'existence de $y \in F$ tel que $z = g(y)$. La surjectivité de $f$ fournit ensuite l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par suite, on a $z = g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$, ce qui démontre que $x$ est un antécédent de $z$ par $g \circ f$. On a donc démontré que $g \circ f$ est surjective.

(ii) Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. La surjectivité de $g \circ f$ fournit l'existence de $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$, c'est-à-dire $z = g\big(f(x)\big)$. En posant $y = f(x)$, on obtient $z = g(y)$, ce qui démontre que $y$ est un antécédent de $z$ par $g$. On a donc démontré que $g$ est surjective. ■

La propriété (i) signifie que la composée de deux surjections est une surjection. 4 h 15

## B.3. Bijection

### a) Définition et exemples

**Définition 11**

On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, ou que c'est une bijection entre $E$ et $F$, lorsque, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution, c'est-à-dire lorsque tout élément de $F$ possède exactement un antécédent par $f$.

Autrement dit, $f$ est bijective si, et seulement si, elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \qquad y = f(x).$$

En terme ensembliste, la bijectivité de $f : E \longrightarrow F$ signifie que, pour tout $y \in F$, l'ensemble des antécédents de $y$ est un singleton.

Autrement dit,

| |
|---|
| une fonction est bijective si tout élément à l'arrivée est atteint exactement une fois. |

La bijectivité est une condition d'existence et d'unicité.

On gardera à l'esprit que la plupart des applications ne sont pas bijectives.

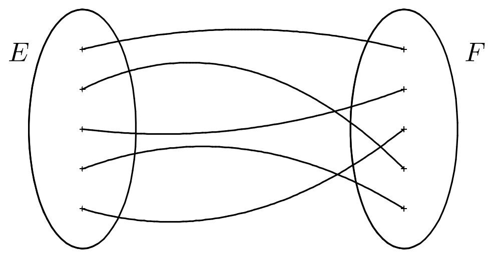
**Exemples :**

- L'application qui à tout individu fait correspondre son cerveau est bijective puisque tout individu possède exactement un cerveau, qui n'appartient qu'à lui !
- L'application qui à tout individu lui associe son père n'est pas bijective. Elle a à la fois un défaut d'injectivité puisque certains hommes sont le père de plusieurs enfants et un défaut de surjectivité puisque certains hommes n'ont pas de descendance.
- $\mathrm{Id}_E$ est bijective (puisqu'on a vu qu'elle était à la fois injective et surjective).
- Une bijection entre un ensemble $E$ et lui-même est appelée une permutation de $E$. Nous étudierons plus particulièrement ces objets plus tard.

L'encadré suivant explique comment visualiser la bijectivité sur un diagramme saggital.

**Interprétation patatoïdale**

Une application est bijective si toutes les croix de l'ensemble d'arrivée sont atteintes par exactement une flèche :




bijectif

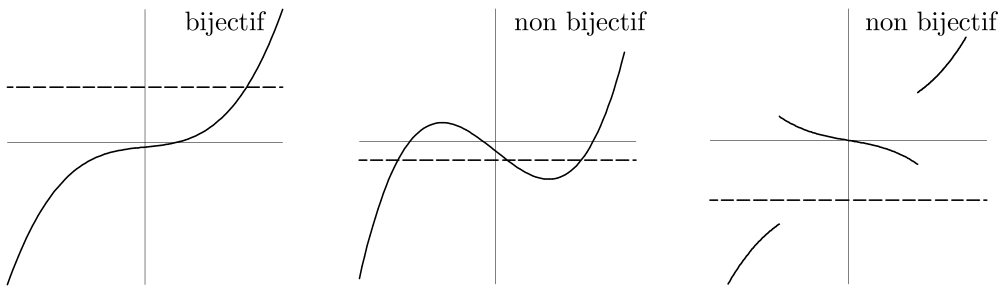
Ces représentations patatoïdales nous montrent qu'une bijection de $E$ sur $F$ n'existe que si les ensembles $E$ et $F$ sont « de même taille ».

Nous démontrerons plus tard la pertinence de cette interprétation : l'existence d'une bijection entre un ensemble à $p$ éléments et un ensemble à $n$ éléments est équivalente à l'égalité $p = n$.

L'encadré suivant explique comment visualiser la bijectivité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

## Interprétation pour une fonction numérique

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la bijectivité s'observe graphiquement : une droite horizontale, balayant le plan, doit toujours rencontrer exactement une fois le graphe.




**Exemples :**

- L'application $x \longmapsto e^x$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection.
- L'application $x \longmapsto \ln x$ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas bijective lorsqu'elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais l'est lorsqu'on la considère de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $x \longmapsto \sin x$ n'est pas bijective lorsqu'elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais est bijective lorsqu'on la restreint au départ à l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$ et à l'arrivée au segment $[-1; 1]$. Cet exemple et le précédent nous inspirent la remarque suivante.

## Comment obtenir une bijection ?

Le caractère bijectif d'une application $f : E \longrightarrow F$ est lié à son ensemble de départ et à son ensemble d'arrivée $F$. Ainsi, si $f$ n'est pas bijective, on peut essayer de la restreindre au départ et à l'arrivée pour obtenir une bijection.

### b) Application réciproque

**Théorème 1**

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une application de $F$ dans $E$, appelée application réciproque de $f$ et notée $f^{-1}$, telle que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F\,.$$

■ $\Rightarrow$ Supposons $f$ bijective. Tout élément $y \in F$ possède un unique antécédent $x_y$ par $f$. On définit la fonction $f^{-1} : F \longrightarrow E$ par $f^{-1} : y \longmapsto x_y$. Il est alors clair que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons l'existence de $f^{-1}$ telle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. Démontrons que $f$ est bijective de deux manières.

- ▷ Si $x_1, x_2 \in E$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f^{-1}\big(f(x_1)\big) = f^{-1}\big(f(x_2)\big)$, d'où $x_1 = x_2$. Ainsi $f$ est injective.
  Si $y \in F$, on pose $x = f^{-1}(y)$ de sorte que $f(x) = f\big(f^{-1}(y)\big) = y$. Ainsi $f$ est aussi surjective.
- ▷ Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Id}_E$ est injective, le (ii) de la proposition 4 dit que $f$ est injective.
  Comme $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $\mathrm{Id}_F$ est surjective, le (ii) de la proposition 5 dit que $f$ est surjective.

Donc $f$ est bijective. ■

Ce théorème exprime la réversibilité des bijections : si $f$ est l'application de tricotage de l'ensemble des pelotes de laine vers l'ensemble des pulls, son application réciproque $f^{-1}$ est l'opération de détricotage qui associe à un pull la pelote que l'on obtient en défaisant les mailles.

L'application $f^{-1}$ n'existe que pour une application bijective. C'est une faute grave de l'évoquer sans vérifier que l'on a bien affaire à une bijection.

**Courbe représentative de $f^{-1}$**

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la courbe représentative de $f^{-1}$ (dans un repère orthonormal) est l'image de celle de $f$ par la réflexion par rapport à la première bissectrice. Les deux courbes sont donc image l'une de l'autre dans un miroir oblique penché à 45°.

En particulier, si $f$ est impaire alors $f^{-1}$ est également impaire.

■ On a en effet $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$. Or la transformation géométrique qui associe au point de coordonnées $(x,y)$ celui de coordonnées $(y,x)$ est bien la réflexion par rapport à la première bissectrice. ■

On peut noter que toute tangente horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ se transforme en une tangente verticale pour la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$. Nous verrons que cela a des conséquences sur la dérivabilité de $f^{-1}$.

L'encadré suivant fait le point sur les différentes façons de démontrer la bijectivité.

**Comment démontrer la bijectivité ?**

Classiquement, pour démontrer la bijectivité, on prouve l'injectivité et la surjectivité.

Il est aussi possible de justifier la bijectivité en démontrant que l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, admet exactement une solution pour tout $y \in F$. À noter : il n'est alors pas nécessaire de déterminer explicitement la solution $x_y$ de l'équation $y = f(x)$ mais seulement de justifier qu'elle existe et qu'elle est unique. Cependant, si l'on réussit à déterminer $x_y$, la correspondance $y \longmapsto x_y$ est la réciproque $f^{-1}$ de $f$.

Parfois, il est possible de « deviner » une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On peut alors affirmer que $f$ est bijective et que $g$ est la réciproque de $f$.

Dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, nous verrons que l'on peut utiliser le théorème de la bijection.

**Exemples :**

- $\mathrm{Id}_E$ est sa propre réciproque.
- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.
- L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto x^3$ est bijective et son application réciproque est la racine cubique $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$.
- L'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $n \longmapsto n+1$ est bijective et sa réciproque est l'application définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ par $n \longmapsto n-1$.
- L'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par $x \longmapsto 1/x$ est bijective et son application réciproque est elle-même (on parle d'involution).
- Étudions la bijectivité de la fonction $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}\cdot$ Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y \qquad &\iff \qquad \frac{3x-2}{x-1} = y \\ &\iff \qquad 3x - 2 = y(x-1) \\ &\iff \qquad (y-3)x = y-2 \\ &\iff \qquad x = \frac{y-2}{y-3} \quad \text{et} \quad y \neq 3, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ telle que

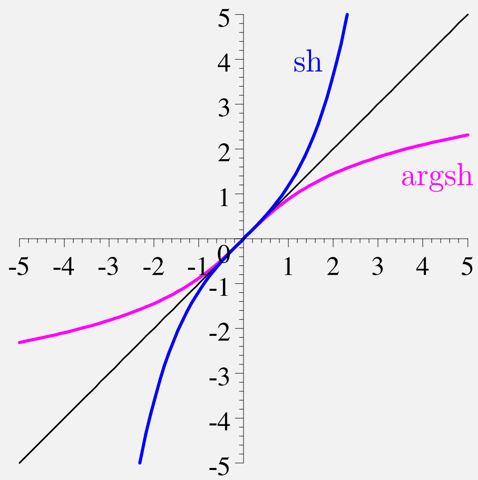
$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y-2}{y-3}\cdot$$

- L'application $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc sh est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ (d'après le théorème de la bijection). Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y \qquad &\iff \qquad \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\ &\iff \qquad (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \qquad \Delta = 4y^2 + 4 \\ &\iff \qquad \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0 \\ &\iff \qquad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \end{aligned}$$

donc la réciproque de sh, appelée argument sinus hyperbolique et notée argsh, est

$$\mathrm{argsh} \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \quad \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{cases}$$



La proposition suivante dresse la liste des principales propriétés des fonctions réciproques.

**Proposition 6**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. Alors

(i) $f^{-1}$ est une bijection entre $F$ et $E$ et $(f^{-1})^{-1} = f$ ;

(ii) $g \circ f$ est une bijection entre $E$ et $G$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (Attention !!).

■ (i) L'application $f$ étant une bijection, on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Pour savoir si $f^{-1}$ est elle aussi bijective, on se pose alors la question suivante : « Par quelle application dois-je composer $f^{-1}$ pour obtenir l'identité ? ». Les relations $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ nous disent que la réponse est : « $f$ ». Ainsi, $f^{-1}$ est une bijection entre $F$ et $E$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.

(ii) On constate que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$ donc $g \circ f$ est bien une bijection entre $E$ et $G$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

La propriété (ii) signifie que la composée de deux bijections est une bijection.

Pour ne pas se tromper dans l'ordre des applications de la propriété $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, on peut retenir que si l'on a enfilé ses chaussettes puis ses chaussures, on doit d'abord retirer ses chaussures avant d'oter ses chaussettes pour retrouver ses jolis petits petons.

Lorsqu'un application $f$ est bijective entre $E$ et $F$, la notation $f^{-1}(B)$ (où $B$ est une partie de $F$) désigne à la fois l'image réciproque par $f$ de $B$ et l'image directe par $f^{-1}$ de $B$. La proposition suivante explique que cela ne pose pas de problème.

**Proposition 7**

Soient $f : E \longrightarrow F$ une bijection et $B$ une partie de $F$. L'image directe de $B$ par $f^{-1}$ coïncide avec l'image réciproque de $B$ par $f$.

■ AQT ■

## C. Familles

Il est courant d'avoir à numéroter les éléments d'une collection d'objets. C'est par exemple le cas lorsqu'on indexe les éléments d'une $n$-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ; lorsqu'on utilise des indices pour distinguer des événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ; lorsqu'on paramètre des fonctions trigonométiques par leur pulsation $f_\omega : t \longmapsto \cos(\omega t)$ ; lorsqu'on travaille avec les termes d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ; etc.

Si cette opération de numérotation paraît naturelle, il convient cependant d'en donner une définition propre, qui recouvre de surcroît toutes les possibilités : indexation par des entiers (en nombre fini ou non) ou par un paramètre parcourant un ensemble plus compliqué (ensemble de nombres réels ou autre).

**Définition 12**

Soient $E$ et $I$ deux ensembles. On appelle famille (d'éléments) de $E$ indexée par l'ensemble $I$ toute application de $I$ dans $E$.

Dans le contexte des familles, la notation habituelle $x : \begin{cases} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x(i) \end{cases}$ est avantageusement remplacée par $(x_i)_{i\in I}$. Les éléments de $I$ sont appelés les indices.

L'ensemble des familles d'éléments de $E$ indexées par $I$ est donc l'ensemble $E^I$.

La notion de famille n'est ainsi pas différente de celle d'application. Toutefois, le point de vue change : dans le cas des familles, il s'agit seulement d'utiliser des indices pour étiqueter une collection d'objets par les éléments de $I$.

On peut parler de majorant, de plus grand élément, de borne supérieure… d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un ensemble ordonné $E$. Il s'agit en fait du majorant, du plus grand élément, de la borne supérieure… de la partie $\{x_i \in E : i \in I\}$.

**Exemples :**

- Une $n$-liste de $E$ (c'est-à-dire un élément de $E^n = E \times \cdots \times E$) est une famille de $E$ indexée par $\{1, 2, \ldots, n\}$. Le produit cartésien $E^n = E \times \cdots \times E$ s'identifie donc naturellement avec l'ensemble $E^{\{1,2,\ldots,n\}}$ des applications de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers $E$.
- Une suite réelle est une famille de nombres réelles indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Soient $E$ un ensemble et $I$ un ensemble d'indice. Une famille de parties de $E$ indexée par $I$ est une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{P}(E)$.

  On peut généraliser à la famille $(A_i)_{i\in I}$ les notions d'intersection et de réunion par

  $$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I,\ x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

- Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides indexée par $I$. On note $E$ la réunion des $E_i$. Le sous-ensemble de $E^I$ constitué des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ est appelé le produit cartésien de la famille $(E_i)_{i\in I}$ et est noté $\prod_{i\in I} E_i$.

  Lorsque $I$ est un ensemble fini, on retrouve le produit cartésien tel qu'on l'a déjà défini.

  Lorsque $I$ est infini, les choses sont nettement plus subtiles. En effet, même avec l'hypothèse que les $E_i$ sont tous non vides, rien ne dit a priori que l'ensemble $\prod_{i\in I} E_i$ est non vide. Kurt Gödel (1938) et Paul Cohen (1963) ont même démontré que l'énoncé affirmant la non-vacuité de $\prod_{i\in I} E_i$, que l'on appelle l'axiome du choix, est indécidable dans la théorie des ensembles de Zermelo–Fraenkel. Autrement dit, admettre l'axiome du choix ou son contraire n'entraîne aucune contradiction ! Du coup, l'axiome du choix fait partie des axiomes optionnels et controversés de la théorie des ensembles, certains mathématiciens se montrant plus satisfaits d'une démonstration dénuée de cet axiome. Cela dit, la plupart du temps, on l'utilise sans réticence particulière. 5 h 45