POLYNÔMES
CORRECTION

Exercice 1

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in N,\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. a) *Calculer T_2, T_3 et T_4.*

On a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Donc

$$\boxed{T_2 = 2X^2 - 1, \qquad T_3 = 4X^3 - 3X \qquad \text{et} \qquad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1.}$$

b) *Établir que, pour tout $n \in N$, T_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré n tel que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathscr{P}(n) : \qquad T_n \in \mathbb{Z}[X], \quad \deg T_n = n \quad \text{et} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

Initialisation : Les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ sont à coefficients entiers et de degrés respectifs 0 et 1. De plus, on a $T_0(-X) = 1 = (-1)^0 T_0(X)$ et $T_1(-X) = -X = (-1)^1 T_1(X)$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$.

- Le polynôme $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est à coefficients entiers puisque ses coefficients sont obtenus en additionnant et multipliant par des entiers les coefficients de T_n et T_{n+1} qui sont des entiers d'après $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$.
- Comme $\deg T_{n+1} = n+1$ d'après $\mathscr{P}(n+1)$, on a $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ d'après la règle sur le degré d'un produit. Dès lors, puisque $\deg T_n = n$ d'après $\mathscr{P}(n)$, les deux polynômes $2XT_{n+1}$ et T_n sont de degrés distincts et le cas d'égalité de la règle sur le degré d'une somme nous dit que $\deg 2XT_{n+1} - T_n = \max\{\deg 2XT_{n+1} ; \deg T_n\} = n+2$. Donc $\deg T_{n+2} = n+2$.
- On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) && \text{par définition de } (T_n) \\ &= 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) && \text{par H.R.} \\ &= (-1)^{n+2}\big(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\big) && \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2} \\ &= (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) && \text{par définition de } (T_n). \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ est à coefficients entiers, de degré } n \text{ et satisfait } T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).}$$

c) *Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer le coefficient dominant a_n de T_n.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, T_{n+1} est de degré $n+1$ et T_n est de degré n donc le coefficient dominant de $2XT_{n+1} - T_n$ est celui de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire $2a_{n+1}$. Comme $2XT_{n+1} - T_n = T_{n+2}$, on en déduit que $2a_{n+1} = a_{n+2}$. Cela démontre que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2. On en déduit que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = 2^{n-1}a_1$. Or $a_1 = 1$ puisque $T_1 = X$, donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = 2^{n-1}.}$$

d) *Déterminer $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Comme $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on a

$$T_0(0) = 1, \qquad T_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad T_{n+2}(0) = -T_n(0).$$

Cela démontre que la suite $\big(T_{2p+1}(0)\big)$ est constante égale à 0 et que la suite $\big(T_{2p}(0)\big)$ vérifie $\forall p \in \mathbb{N},\ T_{2p}(0) = (-1)^p$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

2. a) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Retrouver ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{Q}(n) : T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
<u>Initialisation :</u> On a $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1 \times \theta)$, donc $\mathscr{Q}(0)$ et $\mathscr{Q}(1)$ sont vraies.
<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ et $\mathscr{Q}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{Q}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) && \text{par définition de } (T_n) \\ &= 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta && \text{par H.R.} \\ &= \cos(n+2)\theta + \cos n\theta - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta, \end{aligned}$$

où l'on a utlisé la formule de trigonométrie $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Donc $\mathscr{Q}(n+2)$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence double, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.}$$

La relation de la question précédente appliquée pour $\theta = \pi/2$ implique que $T_n(0) = \cos(n\pi/2)$, ce qui permet de retrouver que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos n\theta = S_n(\cos\theta)$. Démontrer que $S_n = T_n$.*

On pose

$$R_n = T_n - S_n.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$R_n(\cos\theta) = T_n(\cos\theta) - S_n(\cos\theta) = \cos n\theta - \cos n\theta = 0,$$

où l'on a utilisé le résultat de la question 2.a) et la définition de S_n. Lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, $\cos\theta$ parcourt le segment $[-1;1]$ donc tout nombre réel de l'intervalle $[-1;1]$ est une racine de R_n. Ainsi, R_n admet une infinité de racines. Or le seul polynôme qui admet une infinité de racine est le polynôme nul (car ceux qui ne sont pas nuls ont moins de racines que leur degré), donc $R_n = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{S_n = T_n.}$$

c) *Déterminer les racines de T_n et donner la factorisation de T_n pour tout $n \geqslant 1$.*

Résolvons l'équation $T_n(\cos\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T_n(\cos\theta) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos n\theta = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pour obtenir toutes les valeurs de θ modulo 2π, on prend $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dès lors, on a

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \qquad T_n\Big(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big) = 0,$$

donc
$$\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \cdots,\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\ \text{sont \underline{des} racines de } T_n.$$
On a ainsi n racines pour le polynôme T_n. Comme celui-ci est de degré n d'après 1.b), on peut affirmer, d'après le cours, que l'on a déterminé toutes les racines de T_n et qu'elles sont simples. Donc
$$\boxed{\text{les racines de } T_n \text{ sont } \cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \cdots,\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.}$$

On en déduit que
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Big(X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big).}$$

Exercice 2

Je vous propose un petit jeu très mathématique. J'ai en tête un polynôme P dont les coefficients sont des entiers naturels. Vous avez le droit de me demander des valeurs de $P(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Et c'est tout ! Combien vous faudra-t-il de questions au minimum pour démasquer mon polynôme ?

On demande tout d'abord $P(1)$. On obtient ainsi un majoration (large) de tous les coefficients de P.
On choisit alors une puissance de 10 qui est strictement supérieure à $P(1)$. Disons 10^p.
On demande alors $P(10^p)$.
En découpant le résultat par paquets de p chiffres, on obtient les coefficients.

Traitons un exemple.
Disons que je pense au polynôme $P = 12 + 3X + 5X^3 + 47X^5$.
Le joueur me demande $P(1)$. Je réponds 67.
Le joueur choisit alors de travailler en base 10^2, car $100 > 67$ (si ! si !).
Il me demande $P(100)$. Je réponds 470 005 000 312.
Le joueur découpe alors ce nombre en nombres à 2 chiffres. Cela donne : 12, 03, 00, 05, 00 et 47
Le joueur sait alors que $P = 12 + 03X + 00X^2 + 05X^3 + 00X^4 + 47X^5$.
Damned, je suis fait !

En conclusion,
$$\boxed{\text{on peut déterminer } P \text{ en deux questions !}}$$

Il est important de bien noter que les questions doivent être successives : sans la réponse à la première question, je ne peux pas poser la seconde.