Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 11/10/2018

DM n° 4 : Relations

Les parties V et VI du problème 2 sont facultatives mais fortement conseillées aux meilleurs élèves. Elles offrent une démonstration possible d'un résultat admis lors du DS 1, à savoir l'équipotence entre E et $E \times E$ lorsque E est un ensemble infini. Une alternative de cette preuve est d'utiliser le lemme de Zorn (la démonstration en résultant est plutôt plus simple).

Problème 1 – Saturation d'un sous-ensemble pour une relation d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On définit, pour tout sous-ensemble A de E :

$$A^s = \{y \in E \mid \exists x \in A,\ x \sim y\}.$$

On dit que A^s est la saturation de A pour la relation $\sim$. On dit que l'ensemble A est saturé si $A = A^s$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des parties saturées de E.

Par ailleurs, on note, pour toute partie A de E, A^c le complémentaire de A dans E. Enfin, pour tout $x \in A$, on note $\overline{x}$ sa classe d'équivalence, c'est-à-dire le sous-ensemble de E constitué des éléments y tels que $y \sim x$.

1. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A^s$.
   (b) Déterminer $\varnothing^s$ et E^s.
   (c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $(A^s)^s = A^s$ (on dit que l'application de saturation est « idempotente »)
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que $A^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x}$.
   (b) Montrer que $A^s = \bigcap_{B \in \mathcal{S}(E) \text{ tq } A \subset B} B$
3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que $(A \cup B)^s = A^s \cup B^s$
   (b) Montrer que des deux inclusions $(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s$ et $A^s \cap B^s \subset (A \cap B)^s$, une seule est toujours vraie, et donner un contre-exemple pour l'autre.
4. Établir une inclusion entre $(A^s)^c$ et $(A^c)^s$. À quelle condition a-t-on l'égalité ?
5. Soient p_1 et p_2 définies de $E \times E$ dans E par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,
$$A^s = p_2(p_1^{-1}(A) \cap G),$$
   où $G \subset E \times E$ est le graphe de la relation $\sim$.
6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x \in A,\quad \exists y \in B,\quad x \sim y).$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est reflexive et transitive. La relation $\mathcal{R}$ est-elle en général une relation d'équivalence ?
   (b) Montrer que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ si et seulement si $A^s = B^s$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?
   (c) On définit la relation $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A\mathcal{S}B$ si et seulement $A^s = B^s$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
   (d) Montrer que $\mathcal{S}$ respecte la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire : pour tout (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, si $A\mathcal{R}B$ alors $A'\mathcal{R}B'$.

(e) En déduire l'existence d'une relation $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \overline{A}\,\overline{\mathcal{R}}\,\overline{B}.$$

La barre désigne ici la classe d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{S}$.

(f) Montrer que $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$

Problème 2 – (Vers l'infini et au-delà)

Le but de ce problème est de montrer que le cardinal d'un ensemble E est le même que le cardinal de $E \times E$ lorsque E est un ensemble infini. On rappelle que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont de même cardinal, résultat qu'on pourra utiliser sans démonstration.
Notre démonstration passe par la définition des ordinaux de Cantor généralisant les entiers, en rajoutant à l'ensemble des entiers toute une série d'ordinaux infinis, et par une récurrence transfinie sur l'ensemble des ordinaux, c'est-à-dire une récurrence allant au-delà de l'infini, donc permettant d'atteindre tous les ordinaux. Nous devons également montrer que sous réserve de la validité de l'axiome du choix, que nous supposerons ici, tout ensemble est en bijection avec un ordinal. Ce dernier point est une conséquence directe du théorème de Zermelo, équivalent à l'axiome du choix.
On dit que E est subpotent à F s'il existe une injection de E vers F. On dit que E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F. On dit que E est strictement subpotent à F si E est subpotent à F, mais non équipotent, donc s'il existe une injection de E dans F, mais pas de bijection.
On admettra que deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement si E est subpotent à F et F est subpotent à E (théorème de Cantor-Bernstein).

Vous êtes autorisés à admettre des résultats de certaines questions pour pouvoir les utiliser par la suite, ainsi qu'à ne répondre que partiellement à certaines questions. Indiquez alors clairement et honnêtement ce que vous admettez.

Partie I – Ensembles bien ordonnés et récurrences transfinies

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est antiréflexive si la relation $x\mathcal{R}x$ n'est vérifiée pour aucun x de E.

1. Montrer qu'une relation binaire antiréflexive et transitive sur E est antisymétrique.

On rappelle qu'une relation d'ordre strict (notée $<$) sur E est une relation antireflexive et transitive. Elle est totale si pour tout (x,y) de E^2, $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.
*On considère dorénavant une relation d'ordre strict **totale**.*
Un segment initial X de E est un sous-ensemble X de E tel que si $y \in X$, alors pour tout $z < y$, $z \in X$. On dit que le segment initial X est propre si $X \neq \varnothing$ et $X \neq E$.
On note, pour tout $x \in E$, $S_x = \{y \in E \mid y < x\}$

2. (a) Montrer que si x n'est pas l'élément minimum de E, S_x est un segment initial propre de E.
   (b) Montrer que si Y et Z sont deux segments initiaux de E, on a $Y \subset Z$ ou $Z \subset Y$. Ainsi, la relation l'inclusion est une relation d'ordre totale sur l'ensemble des segments initiaux de E.

Une relation de bon ordre est une relation d'ordre strict, totale, et telle que tout sous-ensemble non vide x de E admette un élément minimum. On dira alors que E est bien ordonné. On remarquera qu'un bon ordre étant total, pour tout couple (x,y) d'éléments d'un ensemble bien ordonné, la quantité $\max(x,y)$ est bien définie.

3. Soit E un ensemble bien ordonné. Montrer que tout segment initial Y de E est soit de la forme $Y = S_x$, pour un unique x de E, soit égal à E.
   Indication : Comment définir x sous forme d'un minimum ?
4. (Récurrence transfinie) Soit E un ensemble bien ordonné, de minimum m. Soit pour tout $x \in E$ une propriété $\mathcal{P}(x)$. Montrer que si $\mathcal{P}(m)$ est vérifiée et si pour tout $x \in E$ distinct de m,
   $$(\forall y < x, \mathcal{P}(y)) \Longrightarrow \mathcal{P}(x),$$
   alors la propriété $\mathcal{P}(x)$ est satisfaite pour tout x de E.
   Quelle propriété retrouve-t-on ainsi pour l'ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$?

Partie II – Comparaison de deux ensembles bien ordonnés

On montre dans cette partie qu'étant donnés deux ensembles bien ordonnés, l'un peut être considéré comme un segment initial de l'autre. Plus précisément, si X et Y sont deux ensembles bien ordonnés, l'une au moins des deux premières propriétés ci-dessous est vérifiée :

(i) il existe un segment initial Y_1 de Y et une bijection strictement croissante $f : X \to Y_1$; de plus, Y_1 et f sont alors uniques ;

(ii) il existe un segment initial X_1 de X et une bijection strictement croissante $g : Y \to X_1$; de plus, X_1 et g sont alors uniques.

(iii) Par ailleurs, si ces deux propriétés sont satisfaites simultanément, alors $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ et f et g sont réciproques l'une de l'autre.

On se donne donc deux ensembles bien ordonnés X et Y.

Dans toute cette partie, la notation S_x désigne le segment initial défini tel que dans la partie I, pour l'ensemble X.

1. Justifier que si (i) est vérifié pour le segment initial Y_1 et la bijection f_1, ainsi que pour le segment initial Y_2 et la bijection f_2, alors $Y_1 = Y_2$ et $f_1 = f_2$.

   Indication : on pourra considérer le minimum de l'ensemble $Z = \{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$, s'il existe.

2. (a) Soit f une bijection croissante de X sur un segment initial Y_1 de Y. Montrer que pour tout segment initial X_1 de X, $f(X_1)$ est un segment initial de Y.

   (b) Dans cette question, f étant une application de X dans Y_1 inclus dans Y, on note encore f la fonction de X dans Y, obtenue en grossissant l'ensemble d'arrivée. De même pour la fonction g.

   Justifier que si (i) et (ii) sont vérifiés, $g \circ f = \mathrm{id}$ et en déduire (iii).

   Indication : on pourra utiliser la question 1.

3. Soit $x \in X$. Montrer que $\bigcup_{y<x} S_y$ est un segment initial de X.

   D'après les résultats de la partie I, cet ensemble peut donc s'écrire

$$\bigcup_{y<x} S_y = S_{y_0},$$

   pour un certain y_0 de X.

4. Montrer que soit $S_x = S_{y_0}$, soit $S_x = S_{y_0} \cup \{y_0\}$.

   Indication : Discuter suivant que $y_0 \in S_x$ ou non.

5. Montrer qu'en décrétant que $x < X$ pour tout $x \in X$, on prolonge le bon ordre de X en un bon ordre sur $X \cup \{X\}$.

*6. Montrer, par récurrence transfinie sur $X \cup \{X\}$, que pour tout $x \in X \cup \{X\}$, soit il existe $y \leqslant x$ et une bijection croissante $g : Y \to S_y$, soit il existe un segment initial Y_x de Y et une bijection croissante $f : S_x \to Y_x$.

7. Conclure.

Partie III – Ordinaux

On dit qu'un ensemble X est transitif si pour tout x, $x \in X$ implique $x \subset X$.

Un ordinal est un ensemble transitif α tel que la relation d'appartenance munisse α d'un bon ordre, c'est-à-dire telle que la relation définie pour x et y dans α par ($x < y$ si et seulement si $x \in y$) est une relation de bon ordre. On remarquera que puisqu'une relation de bon ordre est stricte par définition, si α est un ordinal, on a nécessairement $\alpha \notin \alpha$, et ceci sans avoir à faire appel à l'axiome de fondation. Cette dernière remarque n'est pas anodine, car pour exprimer l'axiome de fondation rigoureusement, il faut avoir construit au préalable les ordinaux.

1. Montrer que $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont des ordinaux.

2. Montrer que si α est un ordinal, et si $\beta \in \alpha$, alors β est un ordinal.

   Indication : utiliser la transitivité de l'ensemble α pour décrire la relation d'ordre sur β en fonction de celle de α, puis en déduire les différentes propriétés requises. Utiliser la transitivité de la relation $\in$ (c'est par définition une relation d'ordre) pour étudier la transitivité de β.

3. Soit X un ensemble transitif dont les éléments sont tous des ordinaux. On suppose que pour tout $(\alpha, \beta) \in X^2$, si α et β sont distincts, alors $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$. Montrer que X est un ordinal.

   Indication : Pour montrer l'existence du minimum d'un sous-ensemble A non vide, considérer, pour un élément $\alpha \in A$ donné, le sous-ensemble B de l'ordinal α défini par : $B = \{\beta \in A \mid \beta \in \alpha\}$.

4. En déduire que :

   (a) si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ aussi, appelé successeur de α, et noté α^+. C'est en itérant cette construction qu'on construit les ordinaux finis représentant les entiers de $\mathbb{N}$, en commençant à 0, représenté par l'ordinal $\varnothing$;

   (b) si α est un ordinal, tout segment initial β de α est un ordinal. Montrer de plus que si de plus $\beta \neq \alpha$, alors $\beta \in \alpha$.

   Indication : pour ce dernier point, considérer le minimum de $\alpha \setminus \beta$.

*5. Soit α et β deux ordinaux, et f une bijection croissante de α sur β. Montrer que $\alpha = \beta$ et que f est l'application identique.

   Indication : considérer le minimum de $\{x \in \alpha \mid f(x) \neq x\}$, et montrer par double inclusion que $f(x_0) = x_0$. On se souviendra que la relation d'ordre est définie par l'appartenance.

6. Montrer que pour tous ordinaux α et β, on a $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$, et que une seule de ces éventualités se produit.

   Indication : cherchez une question antérieure vous permettant d'exploiter la question précédente !

7. Montrer que sur la classe des ordinaux, la relation d'appartenance vérifie les propriétés définissant un bon ordre.

8. Montrer que la classe X des ordinaux n'est pas un ensemble

   Indication : on pourra montrer que sinon, X est un ordinal et aboutir à une contradiction.

Même si la classe des ordinaux n'est pas un ensemble, on ADMETTRA que les propriété de la relation d'appartenance valident le principe de récurrence transfinie sur la classe des ordinaux. Ainsi, pour prouver qu'une certaine propriété est vraie pour tout ordinal supérieur ou égal à α_0, il suffit de montrer qu'elle est vraie pour α_0, et que pour un ordinal $\alpha > \alpha_0$, si la propriété est vraie pour tout ordinal β vérifiant $\alpha_0 \leqslant \beta < \alpha$, alors elle est vraie pour l'ordinal α. Ici, la relation d'ordre désigne la relation d'appartenance.

*9. On montre dans cette question que tout ensemble bien ordonné X peut être mis en bijection croissante avec un ordinal.

   (a) À l'aide des résultats de la partie II, montrer que si ce n'est pas le cas, alors pour tout ordinal α, il existe un unique segment initial X_α de X tel qu'il existe une bijection croissante de α sur X_α.

   (b) En admettant que si les éléments d'une classe C peuvent être mis en correspondance 1 à 1 (donc bijectivement, mais du point de vue des classes) avec les éléments d'un ensemble E, alors C est un ensemble, et en considérant un certain sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, aboutir à une contradiction et conclure.

Partie IV – Ordinaux finis

On note ω le plus petit ordinal distinct de $\varnothing$ qui ne soit pas le successeur d'un ordinal α, donc tel qu'il n'existe pas d'ordinal α tel que $\omega = \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.
On dit qu'un ordinal μ est infini si et seulement $\omega \leqslant \mu$ et qu'il est fini sinon.
On dit qu'un ensemble E est fini s'il existe une bijection entre un ordinal fini et E.
Le but de cette partie est de justifier que le plus petit ordinal infini est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}$ usuel.

1. Montrer que $\omega = \{\alpha, \alpha < \omega\}$, c'est-à-dire $\omega = S_\omega$, cette section initiale pouvant être vue dans l'ordinal ω^+, successeur de ω.

2. Dans cette question, on suppose connue une version intuitive de $\mathbb{N}$, vérifiant notamment le principe de récurrence. On définit par récurrence des ensembles λ_n par $\lambda_0 = \varnothing$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{n+1} = \lambda_n \cup \{\lambda_n\}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n est un ordinal fini. Quel est son cardinal (au sens intuitif) ?

3. Montrer que $\{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble transitif.

4. En déduire que $\omega = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (on procédera par double-inclusion).
5. Conclure que ω et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Partie V – Équipotence de $\lambda \times \lambda$ et λ, lorsque λ est un ordinal infini.

Soit $(E,<)$ un ensemble bien ordonné. On note $\leqslant$ la relation d'ordre large associée à $<$. On définit sur $E \times E$ la relation, que l'on note également $<$, définie pour tout $(x,y) \in E \times E$ et $(x',y') \in E \times E$ par :

$$(x,y) < (x',y') \iff \begin{cases} \max(x,y) < \max(x',y') \\ \textit{ou } (\max(x,y) = \max(x',y') \textit{ et } x < x') \\ \textit{ou } (\max(x,y) = \max(x',y') \textit{ et } x = x' \textit{ et } y < y'). \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une relation d'ordre strict sur $E \times E$.
2. Montrer que $<$ est une relation de bon ordre sur $E \times E$.
3. Montrer que si E et F sont équipotents, alors $E \times E$ et $F \times F$ également.
4. Soit λ un ordinal infini. On suppose que pour tout ordinal infini $\mu < \lambda$, μ est équipotent à $\mu \times \mu$.
   (a) Montrer que s'il existe $\mu < \lambda$ équipotent à λ, alors λ et $\lambda \times \lambda$ sont équipotents.
   *(b) On suppose que pour tout ordinal $\mu < \lambda$, μ est strictement subpotent à λ. On munit $\lambda \times \lambda$ du bon ordre défini en début de partie, à partir du bon ordre de λ. On considère alors α un ordinal et $f : \alpha \to \lambda \times \lambda$ une bijection croissante, l'existence de α et f étant assurée par le résultat de la question III-9. Nous allons prouver que $\alpha \leqslant \lambda$. En supposant le contraire, par définition de la relation d'ordre sur les ordinaux, on a $\lambda \in \alpha$. On note alors $(x_0, y_0) = f(\lambda)$, et $\beta = \max(x_0, y_0)$.
      i. Justifier que β est un ordinal, que $\beta \in \lambda$, puis que β est strictement subpotent à λ.
      ii. En restreignant et corestreignant f, montrer que λ est subpotent à $\beta^+ \times \beta^+$.
      iii. En déduire une contradiction et conclure.
   *(c) En déduire que λ et $\lambda \times \lambda$ sont équipotents.
5. Montrer que pour tout ordinal λ, les ensembles λ et $\lambda \times \lambda$ sont équipotents.

Partie VI – Extension du résultat à tout ensemble

On rappelle qu'on admet ici la validité de l'axiome du choix. On montre sous cette hypothèse que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre (théorème de Zermelo), ce qui va nous permettre d'étendre le résultat de la partie précédente à tous les ensembles.
Soit E un ensemble. On définit X l'ensemble des couples $(F, <_F)$ formés d'un sous-ensemble F de E et d'un bon ordre $<_F$ sur F. On définit sur X une relation $\leqslant$ par :
$(F, <_F) \leqslant (G, <_G)$ si et seulement si $F \subset G$, $<_F$ est la restriction sur F de $<_G$, et si F est un segment initial de G.

1. Montrer que X est un ensemble et que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur X.
2. Montrer que X est inductif.
3. En déduire l'existence d'un bon ordre sur E.
4. Montrer que pour tout ensemble infini E, E et $E \times E$ sont équipotents.