Planche de colle

Exercice de colle

Soit K un corps infini. On considère une application $\Phi : GL_n(K) \longrightarrow K^*$ qui est un morphisme de groupes tel que pour toute matrice inversible $M \in GL_n(K)$, le nombre $\Phi(M)$ s'exprime comme un polynôme en les coefficients de la matrice M.
On veut montrer que l'application Φ est une puissance du déterminant.

1. Pour tous indices $i \neq j$ et tout scalaire $\lambda \in K$, on pose $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{i,j}$ [matrice de transvection] et $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) \cdot E_{i,i}$ [matrice de dilatation].
   (a) Exprimer la matrice de transposition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme un produit de matrices de transvection ou de dilatation.
   (b) Montrer que toute matrice $M \in GL_n(K)$ est un produit fini de matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ ou $D_i(\lambda)$.
2. Calculer $T_{i,j}(\lambda)^2$.
3. Quels sont les polynômes $P(X) \in K[X]$ tels que $P(X^2) = P(2X)$?
4. En déduire la valeur de $\Phi(T_{i,j}(\lambda))$, pour $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$.
5. Montrer que la fonction polynomiale $\lambda \longmapsto \Phi(D_1(\lambda))$, pour $\lambda \in K^*$ est la fonction $\lambda \longmapsto \lambda^m$, pour un certain entier naturel m.
6. Conclure.

1. (a) On remarque en jouant sur la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour arriver à la matrice I_2 à l'aide d'opérations élémentaires de transvections ou de dilatations, que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) En procédant de même, on peut interpréter toute opération de transposition de ligne $L_i \longleftrightarrow L_j$ comme une suite d'opérations de transvections ou de dilatations. Voici un tel enchaînement :

$$\begin{aligned} L_i &\longleftarrow L_i + L_j \\ L_j &\longleftarrow L_j - L_i \\ L_i &\longleftarrow L_i + L_j \\ L_j &\longleftarrow -L_j. \end{aligned}$$

Ensuite, si $M \in GL_n(K)$, à l'aide d'une suite finie d'opérations élémentaires données par la méthode du pivot de Gauss, on peut transformer la matrice M^{-1} en la matrice I_n. Chaque opération élémentaire revient à multiplier à gauche par une matrice de type « transvection », « transposition » ou « dilatation ».

Il existe donc une suite finie de matrice $P_1, \cdots, P_s$ correspondant aux opérations élémentaires effectuées dans cet ordre dans l'algorithme de façon à avoir :

$$P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 M^{-1} = I_n.$$

On en déduit :

$$M = P_s \cdots P_1.$$

Si P_j est une matrice de transposition, on peut la remplacer par un produit d'une matrice de dilation et de trois matrices de transvections.

La matrice M apparaît comme un produit uniquement de matrices de transvections ou de dilatations.

2. On observe que :

$$T_{i,j}(\lambda)^2 = T_{i,j}(2\lambda),$$

soit par produit matriciel soit en interprétant $T_{i,j}(\lambda)^2$ comme effectuer deux fois l'opération de transvection $L_i \longleftarrow L_i + \lambda \cdot L_j$.

3. Tout polynôme constant convient. Soit $P(X) \in K[X]$, un polynôme non constant tel que :

$$P(X^2) = P(2X).$$

En posant $d = \deg(P)$, on obtient en prenant les degrés dans l'égalité :

$$2d = d.$$

On doit avoir $d = 0$ et il n'y a que les polynômes constants qui vérifient l'équation proposée.

4. Par hypothèse sur l'application Φ, on sait que l'application $g : \lambda \longmapsto \Phi(T_{i,j}(\lambda))$ est polynomiale en les coefficients de la matrice $T_{i,j}(\lambda)$, donc est polynomiale en la variable λ.

D'autre part, toujours par hypothèse sur Φ,

$$\forall \lambda \in K,\ g(\lambda)^2 = \Phi(T_{i,j}(\lambda))^2 = \Phi(T_{i,j}(\lambda)^2) = \Phi(T_{i,j}(2\lambda)) = g(2\lambda).$$

Comme le corps K est infini, il existe un seul polynôme $P(X) \in \mathbb{K}(X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in K,\ P(\lambda) = g(\lambda),$$

ce polynôme $P(X)$ vérifiant :

$$P(X)^2 = P(2X).$$

En prenant les degrés, cela impose au polynôme $P(X)$ d'être constant, éventuellement nul.

La constante c associée à ce polynôme vaut :

$$c = P(0) = \Phi(T_{i,j}(0)) = \Phi(I_n) = 1_K,$$

en tant que morphisme de groupes.

Conclusion,

$$\forall \lambda \in K,\ \forall (i \neq j),\ \Phi(T_{i,j}(\lambda)) = 1_K.$$

5. La fonction f proposée est bien polynomiale en la variable $\lambda \in K^*$. De plus, comme $D_1(\lambda)^2 = D_1(\lambda^2)$, la fonction polynomiale f vérifie :

$$\forall \lambda \in K^*, \; f(\lambda^2) = f(\lambda)^2.$$

On pose $Q(X)$ le seul polynôme dans $K[X]$ tel que :

$$f : \lambda \longmapsto Q(\lambda),$$

sur l'ensemble infini K^*.

On en déduit que le polynôme $Q(X^2) - Q(X)^2$ admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul :

$$Q(X^2) = Q(X)^2.$$

Le polynôme $Q(X)$ ne peut pas être nul car f n'est pas la fonction nulle.

Le coefficient dominant vaur ξ et en le calculant de part et d'autre, on obtient $\xi = \xi^2$, donc $\xi = 1$.

Soit λ une racine complexe non nulle éventuelle du polynôme $Q(X)$. On écrit $\lambda = \rho \, e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On pose $\delta = \sqrt{\rho} \, e^{i\frac{\theta}{2}}$ de telle sorte que :

$$\delta^2 = \lambda, \text{ puis } 0 = Q(\lambda) = Q(\delta^2) = Q(\delta)^2.$$

Le nombre δ est encore une racine.

On peut réitérer le processus de « prise de racine carrée dans les complexes » pour avoir potentiellement une infinité de racines. En effet, si $\theta = 0$, on peut prendre $\theta = 2\pi$ et sinon θ n'est pas nul. Un argument de δ vaudra $\dfrac{\theta}{2}$, puis en réitérant, on aura des racines de $Q(X)$ d'argument $\dfrac{\theta}{2^k}$, donc d'arguments tous différents : $Q(X)$ aurait une infinité de racines.

Conclusion, soit le polynôme $Q(X)$ n'admet aucune racine, auquel cas $Q(X)$ est constant et de constante $\xi = 1$, soit $Q(X)$ admet seulement 0 comme racine et comme $Q(X)$ est unitaire, alors en posant $m = \deg(Q)$:

$$Q(X) = X^m.$$

6. L'application $\Psi : M \longmapsto \det(M)^m$ vérifie les choses suivantes :
   - l'application $\Psi : GL_n(K) \longrightarrow K^*$ est un morphisme de groupes
   - pour toute matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$, on a :

   $$\Psi(T_{i,j}(\lambda)) = 1^m = 1 = \Phi(T_{i,j}(\lambda)).$$

   - pour toute matrice de dilatation $D_i(\lambda)$, on remarque que la matrice $D_i(\lambda)$ est semblable à la matrice $D_1(\lambda)$, avec une matrice de passage de transposition lorsque $i \neq 1$. Par conséquent, en écrivant :

   $$D_i(\lambda) = S \; D_1(\lambda) S^{-1},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\Psi(D_i(\lambda)) &= (\det(D_i(\lambda))^m \\
&= \lambda^m \\
&= \Phi(D_1(\lambda)) \\
&= \Phi(S) \cdot \Phi(D_1(\lambda)) \cdot \Phi(S^{-1}) \\
&= \Phi(S\ D_1(\lambda) S^{-1}) \\
&= \Phi(D_i(\lambda)).
\end{aligned}$$

Comme toute matrice inversible est un produit de matrices de type $T_{i,j}(\lambda)$ ou $D_i(\lambda)$ et que les morphismes Ψ et Φ coïncident sur ces matrices, elles coïncideront sur toute matrice obtenue par produit avec ces matrices, c'est-à-dire pour toute matrice inversible :

$$\Psi = \Phi.$$

Le morphisme Φ est bien une puissance du déterminant.