PROBABILITÉS FINIES

Exercice 1. [∘]

Soient A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes (union, intersection et passage au contraire) les événements suivants :

1. les trois événements se produisent ;
2. A seul se produit ;
3. deux événements exactement se produisent ;
4. deux événements au moins se produisent ;
5. au plus deux événements se produisent.

Exercice 2. [∘] (Inégalités de Boole et de Bonferroni)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) \leqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Exercice 3. [∘]

Dans un jeu de 32 cartes, Cécile a remplacé une carte, autre que l'as de pique, par un second as de pique. Nicolas prend au hasard et simultanément 3 cartes du jeu. Quelle est la probabilité p que Nicolas s'aperçoive de la supercherie ?

Exercice 4. [∘]

Dans une classe de n élèves, calculer la probabilité que les jours anniversaires soient tous différents. *On oubliera le problème du 29 février.*

Exercice 5. [⋆]

On tire au hasard un entier naturel dont l'écriture décimale possède au plus n chiffres (où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![0;9]\!]$, calculer la probabilité p_k que le nombre tiré possède exactement deux fois le chiffre k. *On traitera le cas $k = 0$ à part.*

Exercice 6. [⋆]

Une urne contient n boules numérotés de 1 à n. On tire n boules dans cette urne, successivement, avec remise. Calculer la probabilité p_n que la boule numérotée 1 soit piochée un nombre impair de fois. Déterminer la limite de p_n.

Exercice 7. [⋆] (Étude probabiliste de l'indicatrice d'Euler)

Pour tout entier naturel m, on rappelle que l'*indicatrice d'Euler* $\varphi(m)$ désigne le cardinal de l'ensemble des entiers de $[\![1;m]\!]$ qui sont premiers avec m.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\Omega = [\![1;n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

1. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'événement « être divisible par d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(A_d)$.
   b) Si $p_1, \ldots, p_r$ désignent les facteurs premiers distincts de n, démontrer que les événements A_{p_i} sont indépendants.
   c) En déduire $\varphi(n)$.
2. Pour tout diviseur d de n, on note B_d l'événement « avoir un pgcd avec n qui vaut d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(B_d)$ à l'aide de φ.
   b) En déduire que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Exercice 8. [$\star$] (Permutations sans point fixe)

Un mot est constitué de n lettres distinctes. On choisit au hasard et de manière équiprobable une anagramme de ce mot.

Calculer la probabilité p_n qu'aucune lettre ne retrouve sa place dans l'anagramme.

Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$? *Donnée :* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/k! = 1/\,\mathrm{e}$.

Exercice 9. [$\circ$]

Est-il plus facile d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un seul dé ou d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés ? *N.B : Cette question, posée par le Chevalier de Méré en 1654 à Pascal, est à l'origine de la théorie mathématique des probabilités...*

Exercice 10. [$\circ$]

Le professeur K. se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il effectue k essais au hasard. Mais, comme il est très distrait, il ne met pas à l'écart les clefs qu'il a déjà essayées. Quelle est la probabilité p_k que la porte s'ouvre au k-ème essai ?

Exercice 11. [$\star$]

Une colonie de n vampires a élu domicile dans un château des Carpates. Une nuit de pleine lune, le comte Drakul en capture cent, leur mord les oreilles, puis les relâche.

La nuit suivante, il en capture cent au hasard. Douze ont une morsure aux oreilles.

Le compte Drakull espère ainsi pouvoir estimer la taille de la population de vampires, c'est-à-dire la valeur la plus probable de n.

On note Ω_n l'ensemble des combinaisons de 100 vampires parmi n (avec $n \geqslant 100$). Les vampires étant indiscernables les uns des autres, on considère qu'ils peuvent être choisis avec équiprobabilité, ce qui revient à considérer sur Ω_n la loi de probabilité uniforme P_n.

On note A_n l'événement « il y a douze vampires mordus parmi les cent capturés ».

Enfin, on considère la suite (u_n) définie pour les entiers $n \geqslant 188$ par $u_n = P_n(A_n)$.

1. Soit $n \geqslant 188$. Déterminer u_n.
2. Démontrer que (u_n) atteint un maximum pour un certain entier $n \geqslant 188$ et déterminer cet entier. On l'appelle le *maximum de vraisemblance*.

Exercice 12. [$\circ$]

Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (respectivement q) avec $q < p$. On suppose que les tirs sont indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint les deux cibles consécutivement.

Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 13. [$\circ$]

Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les évènements: A_n : « obtenir au plus un pile » et B_n : « obtenir au moins un pile et au moins un face ». Démontrer que A_n et B_n ne sont jamais indépendants sauf lorsque $n = 3$.

Exercice 14. [$\circ$]

Un sac contient trois pièces : une avec deux piles, une avec deux faces et la dernière avec un face et un pile. On tire une pièce du sac au hasard et on la pose sur la table. La face visible est pile. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit également pile ?

Exercice 15. [$\star$]

Un être humain a six chances sur mille d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnanbule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. Huit fois sur dix, un des jumeaux est droitier et l'autre est gaucher. Ces deux phénomènes sont indépendants. Nicolas est somnanbule et droitier. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un frère jumeau gaucher et somnanbule ?

Exercice 16. [$\circ$]

Le professeur B. (moins distrait que le professeur K.) se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il essaie les clefs au hasard les unes après les autres en écartant à chaque fois les clefs qui n'ont pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au k-ème essai $(1 \leqslant k \leqslant n)$?

Exercice 17. [$\circ$]

Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain est $0,7$ (il craque !). En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$ (il s'en veut !). Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-ème jour ? Que se passe-t-il si n est grand ?

Exercice 18. [$\star$]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Pour étudier le comportement des MPSI, on a mis au point le protocole suivant. On place un MPSI dans une pièce comportant trois issues A, B et C. Les deux premières conduisent vers un morceau de chocolat alors que la troisième conduit à une calculatrice. Après que le MPSI a choisi son issue, on le remet dans la pièce pour répéter l'expérience. On observe les résultats suivants :
   - si le MPSI choisit la sortie A, il sort la fois suivante en B ou C de façon équiprobable ;
   - si le MPSI choisit la sortie B, il sort la fois suivante en A ou C avec la même probabilité ;
   - si le MPSI choisit la sortie C, il la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

   On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « le MPSI a choisi la sortie A (respectivement B, C) à la n-ème expérience ». On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$. À la première expérience le MPSI sort par l'issue A, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

   b) Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n. Quelle est la limite de (c_n). Interpréter.

Exercice 19. [$\star$]

Un groupe de candidats répond à un QCM constitué de deux questions Q1 et Q2. Lorsqu'un candidat connaît la bonne réponse à l'une des questions, il la donne. Sinon, il choisit au hasard parmi les quatre réponses possibles. On a par ailleurs constaté que trois quarts des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q1 ; deux tiers des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q2 et les trois cinquièmes des candidats ne connaissent la réponse ni à Q1 ni à Q2.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat ait répondu au hasard à la réponse Q1 et qu'il ait trouvé la bonne réponse.
2. Déterminer la probabilité qu'un candidat trouve la bonne réponse aux deux questions.
3. Mathilde a répondu correctement aux deux questions. Quelle est la probabilité qu'elle connaisse 0 réponse ? 1 réponse ? 2 réponses ? Commenter.

Exercice 20. [$\circ$]

Un industriel propose un « kit » pour tester la présence d'une protéine allergisante, notée A, dans la chair de poisson. Le fabricant annonce que le test révèle la présence de la protéine A (test positif) dans 99 cas sur 100 lorsque les poissons ont effectivement la protéine A dans leur chair et dans 10 cas sur 100 lorsqu'ils n'ont pas la protéine A. On suppose que 1 poisson sur 10 contient la protéine A.

1. On choisit un poisson au hasard. On le teste, le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.
2. On choisit un autre un poisson au hasard. On le teste, le test est négatif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.

Exercice 21. [$\circ$]

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Lors d'une épidémie, on constate que, parmi les malades, 20 % ont été vaccinés. De plus, on constate que dans l'ensemble des vaccinés, 1 sur 12 a quand même été malade. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 22. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs S_1, …, S_n. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n + 1 - k)$ jetons rouges. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à $k\alpha$ (pour $k \in [\![1; n]\!]$). Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Le jeton pioché est blanc. Exprimer en fonction de $k \in \{1, \ldots, n\}$ la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k. Simplifier au maximum l'expression obtenue.

Exercice 23. [$\star$] (Urnes de Pólya)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on ajoute dans l'urne k autres boules de la même couleur.

1. On effectue deux tirages consécutifs. Sachant qu'au second on a tiré une boule rouge, déterminer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge également au premier.
2. On effectue n tirages consécutifs. Démontrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ème tirage est indépendante de n.

PROBABILITÉS FINIES

Exercice 1. [$\circ$]
Soient A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes (union, intersection et passage au contraire) les événements suivants :

1. les trois événements se produisent ;
2. A seul se produit ;
3. deux événements exactement se produisent ;
4. deux événements au moins se produisent ;
5. au plus deux événements se produisent.

Exercice 2. [$\circ$] (Inégalités de Boole et de Bonferroni)
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) \leqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Exercice 3. [$\circ$]
Dans un jeu de 32 cartes, Cécile a remplacé une carte, autre que l'as de pique, par un second as de pique. Nicolas prend au hasard et simultanément 3 cartes du jeu. Quelle est la probabilité p que Nicolas s'aperçoive de la supercherie ?

Exercice 4. [$\circ$]
Dans une classe de n élèves, calculer la probabilité que les jours anniversaires soient tous différents. *On oubliera le problème du 29 février.*

Exercice 5. [$\star$]
On tire au hasard un entier naturel dont l'écriture décimale possède au plus n chiffres (où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![0;9]\!]$, calculer la probabilité p_k que le nombre tiré possède exactement deux fois le chiffre k. *On traitera le cas $k = 0$ à part.*

Exercice 6. [$\star$]
Une urne contient n boules numérotés de 1 à n. On tire n boules dans cette urne, successivement, avec remise. Calculer la probabilité p_n que la boule numérotée 1 soit piochée un nombre impair de fois. Déterminer la limite de p_n.

Exercice 7. [$\star$] (Étude probabiliste de l'indicatrice d'Euler)
Pour tout entier naturel m, on rappelle que l'*indicatrice d'Euler* $\varphi(m)$ désigne le cardinal de l'ensemble des entiers de $[\![1;m]\!]$ qui sont premiers avec m.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\Omega = [\![1;n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

1. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'événement « être divisible par d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(A_d)$.
   b) Si $p_1, \dots, p_r$ désignent les facteurs premiers distincts de n, démontrer que les événements A_{p_i} sont indépendants.
   c) En déduire $\varphi(n)$.
2. Pour tout diviseur d de n, on note B_d l'événement « avoir un pgcd avec n qui vaut d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(B_d)$ à l'aide de φ.
   b) En déduire que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Exercice 8. [$\star$] (Permutations sans point fixe)

Un mot est constitué de n lettres distinctes. On choisit au hasard et de manière équiprobable une anagramme de ce mot.

Calculer la probabilité p_n qu'aucune lettre ne retrouve sa place dans l'anagramme.

Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$? *Donnée :* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/k! = 1/\mathrm{e}$.

Exercice 9. [$\circ$]

Est-il plus facile d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un seul dé ou d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés ? *N.B : Cette question, posée par le Chevalier de Méré en 1654 à Pascal, est à l'origine de la théorie mathématique des probabilités…*

Exercice 10. [$\circ$]

Le professeur K. se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il effectue k essais au hasard. Mais, comme il est très distrait, il ne met pas à l'écart les clefs qu'il a déjà essayées. Quelle est la probabilité p_k que la porte s'ouvre au k-ème essai ?

Exercice 11. [$\star$]

Une colonie de n vampires a élu domicile dans un château des Carpates. Une nuit de pleine lune, le comte Drakul en capture cent, leur mord les oreilles, puis les relâche.

La nuit suivante, il en capture cent au hasard. Douze ont une morsure aux oreilles.

Le compte Drakull espère ainsi pouvoir estimer la taille de la population de vampires, c'est-à-dire la valeur la plus probable de n.

On note Ω_n l'ensemble des combinaisons de 100 vampires parmi n (avec $n \geqslant 100$). Les vampires étant indiscernables les uns des autres, on considère qu'ils peuvent être choisis avec équiprobabilité, ce qui revient à considérer sur Ω_n la loi de probabilité uniforme P_n.

On note A_n l'événement « il y a douze vampires mordus parmi les cent capturés ».

Enfin, on considère la suite (u_n) définie pour les entiers $n \geqslant 188$ par $u_n = P_n(A_n)$.

1. Soit $n \geqslant 188$. Déterminer u_n.
2. Démontrer que (u_n) atteint un maximum pour un certain entier $n \geqslant 188$ et déterminer cet entier. On l'appelle le *maximum de vraisemblance*.

Exercice 12. [$\circ$]

Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (respectivement q) avec $q < p$. On suppose que les tirs sont indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint les deux cibles consécutivement.

Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 13. [$\circ$]

Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les évènements: A_n : « obtenir au plus un pile » et B_n : « obtenir au moins un pile et au moins un face ». Démontrer que A_n et B_n ne sont jamais indépendants sauf lorsque $n = 3$.

Exercice 14. [$\circ$]

Un sac contient trois pièces : une avec deux piles, une avec deux faces et la dernière avec un face et un pile. On tire une pièce du sac au hasard et on la pose sur la table. La face visible est pile. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit également pile ?

Exercice 15. [$\star$]

Un être humain a six chances sur mille d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnanbule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. Huit fois sur dix, un des jumeaux est droitier et l'autre est gaucher. Ces deux phénomènes sont indépendants. Nicolas est somnanbule et droitier. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un frère jumeau gaucher et somnanbule ?

Exercice 16. [◦]

Le professeur B. (moins distrait que le professeur K.) se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il essaie les clefs au hasard les unes après les autres en écartant à chaque fois les clefs qui n'ont pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au k-ème essai $(1 \leqslant k \leqslant n)$?

Exercice 17. [◦]

Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain est $0,7$ (il craque !). En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$ (il s'en veut !). Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-ème jour ? Que se passe-t-il si n est grand ?

Exercice 18. [⋆]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Pour étudier le comportement des MPSI, on a mis au point le protocole suivant. On place un MPSI dans une pièce comportant trois issues A, B et C. Les deux premières conduisent vers un morceau de chocolat alors que la troisième conduit à une calculatrice. Après que le MPSI a choisi son issue, on le remet dans la pièce pour répéter l'expérience. On observe les résultats suivants :
   - si le MPSI choisit la sortie A, il sort la fois suivante en B ou C de façon équiprobable ;
   - si le MPSI choisit la sortie B, il sort la fois suivante en A ou C avec la même probabilité ;
   - si le MPSI choisit la sortie C, il la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

   On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « le MPSI a choisi la sortie A (respectivement B, C) à la n-ème expérience ». On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$. À la première expérience le MPSI sort par l'issue A, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

   b) Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n. Quelle est la limite de (c_n). Interpréter.

Exercice 19. [⋆]

Un groupe de candidats répond à un QCM constitué de deux questions Q1 et Q2. Lorsqu'un candidat connaît la bonne réponse à l'une des questions, il la donne. Sinon, il choisit au hasard parmi les quatre réponses possibles. On a par ailleurs constaté que trois quarts des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q1 ; deux tiers des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q2 et les trois cinquièmes des candidats ne connaissent la réponse ni à Q1 ni à Q2.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat ait répondu au hasard à la réponse Q1 et qu'il ait trouvé la bonne réponse.
2. Déterminer la probabilité qu'un candidat trouve la bonne réponse aux deux questions.
3. Mathilde a répondu correctement aux deux questions. Quelle est la probabilité qu'elle connaisse 0 réponse ? 1 réponse ? 2 réponses ? Commenter.

Exercice 20. [◦]

Un industriel propose un « kit » pour tester la présence d'une protéine allergisante, notée A, dans la chair de poisson. Le fabricant annonce que le test révèle la présence de la protéine A (test positif) dans 99 cas sur 100 lorsque les poissons ont effectivement la protéine A dans leur chair et dans 10 cas sur 100 lorsqu'ils n'ont pas la protéine A. On suppose que 1 poisson sur 10 contient la protéine A.

1. On choisit un poisson au hasard. On le teste, le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.
2. On choisit un autre un poisson au hasard. On le teste, le test est négatif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.

Exercice 21. [$\circ$]

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Lors d'une épidémie, on constate que, parmi les malades, 20 % ont été vaccinés. De plus, on constate que dans l'ensemble des vaccinés, 1 sur 12 a quand même été malade. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 22. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs S_1, ..., S_n. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons rouges. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à $k\alpha$ (pour $k \in [\![1; n]\!]$). Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Le jeton pioché est blanc. Exprimer en fonction de $k \in \{1, \dots, n\}$ la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k. Simplifier au maximum l'expression obtenue.

Exercice 23. [$\star$] (Urnes de Pólya)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on ajoute dans l'urne k autres boules de la même couleur.

1. On effectue deux tirages consécutifs. Sachant qu'au second on a tiré une boule rouge, déterminer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge également au premier.
2. On effectue n tirages consécutifs. Démontrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ème tirage est indépendante de n.