SUITES

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Étudier la monotonie des suites définies, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}, \qquad v_n = \frac{5^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(n) + \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \geqslant 0,$$

donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$$

On a $\forall n \geqslant 1,\ v_n \geqslant 0$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5}{n+1} \geqslant 1 \quad \iff \quad n \leqslant 4,$$

donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante à partir du rang 4.}}$$

On pose $f(x) = \ln(x) + 4/\sqrt{x}$. C'est une fonction dérivable sur son ensemble de définition $]0;+\infty[$ et l'on a $\forall x > 0,\ f'(x) = 1/x - 2/x^{3/2}$, donc $f'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \geqslant 4$. Donc f est décroissante sur $]0;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$. Comme $\forall n \geqslant 1,\ w_n = f(n)$, on en déduit que

$$\boxed{(w_n) \text{ est croissante à partir du rang 4.}}$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant c v_n$.

L'hypothèse de l'énoncé se réécrit

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n},$$

ce qui démontre que la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. Elle est donc majorée par son premier terme, c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}. \qquad (*)$$

Posons alors

$$c = \max\left\{\frac{u_0}{v_0}; \frac{u_1}{v_1}; \cdots; \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right\}$$

de sorte que c majore u_n/v_n pour $n \in [\![0; n_0 - 1]\!]$ mais aussi pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$ d'après $(*)$, c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \frac{u_n}{v_n} \leqslant c$$

ou encore

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \leqslant c v_n.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\circ$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique.

On remarque que la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n + u_{n+2})/2$ implique que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, ce qui signifie que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante, égale à son premier terme $r = u_1 - u_0$. Dès lors, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$, ce qui signifie bien que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est arithmétique.}}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la pyramide suivante constituée des entiers impairs (les nombres A_n et B_n désignent respectivement le premier et le dernier entier de la n-ème ligne) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 5 & & \\
 & 7 & & 9 & & 11 & \\
13 & & 15 & & 17 & & 19 \\
. & & & & & & . \\
. & & & & & & . \\
A_n & . & . & . & . & . & . \quad B_n
\end{array}$$

1. Déterminer, en fonction de n, le nombre N_n d'entiers impairs dans cette pyramide.
2. Déterminer B_n et A_n en fonction de n.
3. Déterminer la somme des nombres de la n-ème ligne.
4. Retrouverer ainsi l'expression de la troisième somme d'Euler $E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

1. La ligne k contenant k nombres, on peut dire que $N_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, c'est-à-dire
$$\boxed{N_n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$
2. Le nombre B_n est le N_n-ème nombre impair , donc $B_n = 2N_n - 1$, c'est-à-dire
$$\boxed{B_n = n^2 + n - 1.}$$
On a $A_n = B_{n-1} + 2$, donc $A_n = (n-1)^2 + (n-1) - 1 + 2$, c'est-à-dire
$$\boxed{A_n = n^2 - n + 1.}$$
3. Par suite, les nombres de la n-ème ligne formant une progression arithmétique, on a
$$A_n + \cdots + B_n = \frac{A_n + B_n}{2} \times n = \frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} \times n,$$
c'est-à-dire
$$\boxed{A_n + \cdots + B_n = n^3.}$$
4. Notons S_n la somme de tous les entiers de la pyramide, c'est-à-dire
$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + B_n$$
La somme S_n étant la somme des termes d'une suite arithmétique, on a
$$S_n = \frac{1 + B_n}{2} \times N_n = \frac{1 + n^2 + n - 1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Par ailleurs, S_n est aussi la somme de toutes les sommes de lignes donc, d'après la question précédente, on a

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

En rapprochant ces deux résultats, il vient

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [○]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique.

On remarque que la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$ implique que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}/u_{n+1} = u_{n+1}/u_n$, ce qui signifie que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante, égale à son premier terme $q = u_1/u_0$. Dès lors, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$, ce qui signifie bien que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est géométrique.}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

On recherche le point fixe de la suite, c'est-à-dire la valeur ℓ telle que $\ell = 2\ell + 1$. On a $\ell = -1$. Alors

$$\begin{array}{rcccc} & u_{n+1} & = & 2u_n & +1 \\ \ominus & \ell & = & 2\ell & +1 \\ \hline & u_{n+1} - \ell & = & 2(u_n - \ell) & \end{array}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 1),$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n + 1)$ est géométrique de raison 2, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n + 1 = 2^n(u_0 + 1) = 2^n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n - 1.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [○]
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a $a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n$, donc la suite $(a_n + b_n)$ est constante et vaut constamment $a_0 + b_0 = 1$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n + b_n = 1.}$$

2. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -2a_n + b_n = -2a_n + 1 - a_n = 1 - 3a_n$, c'est-à-dire que (a_n) est une suite arithmético-géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = a_n - \lambda$, de sorte que $c_{n+1} + \lambda = 1 - 3(c_n + \lambda)$, c'est-à-dire $c_{n+1} = -3c_n + 1 - 4\lambda$. On choisit $\lambda = 1/4$ de sorte que (c_n) soit une suite géométrique de raison -3. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = (-3)^n c_0 = (-3)^n(a_0 - 1/4) = -(-3)^n/4$. En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{1 - (-3)^n}{4}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n = 1 - a_n$,donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{3 + (-3)^n}{4}.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [∘] (La « vraie » suite logistique)

La croissance d'une population est proportionnelle à la taille de celle-ci. Toutefois, lorsque cette population évolue dans un milieu fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant contenir une population supérieure à P individus, cette croissance est freinée, et d'autant plus freinée que l'effectif des individus est proche de la limite P.

Soit u_n l'effectif de la population à la génération $n \in \mathbb{N}$. On admet que les mécanismes de régulation interviennent après l'apparition de la génération $n+1$, de sorte que l'accroissement de la population est proportionnel à la différence $P - u_{n+1}$. La dynamique de la population est ainsi régie par une relation de récurrence logistique du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = ku_n(P - u_{n+1})$$

où $k > 0$ désigne une constante.

On suppose que $0 < u_0 \leqslant P$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
2. En utilisant la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 1/u_n$, déterminer l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n, en fonction n, k, P et u_0. Préciser le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n) : u_n > 0$.

   Initialisation : . On a $u_0 > 0$ par hypothèse, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. La relation de récurrence nous dit que
   $$u_{n+1} = \frac{1 + kP}{1 + ku_n} u_n.$$
   Comme $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, on en déduit, puisque $k > 0$ et $P > 0$, que
   $$u_{n+1} > 0.$$
   La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0.}$$

2. Nous venons de voir que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1 + kP}{1 + ku_n} u_n.$$
   En remplaçant u_{n+1} par $1/v_{n+1}$ et u_n par $1/v_n$, il vient
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1 + kP}{1 + k\frac{1}{v_n}} \frac{1}{v_n},$$
   c'est-à-dire
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \frac{v_n + k}{1 + kP}$$
   ou encore
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{1 + kP} v_n + \frac{k}{1 + kP}.}$$

On constate donc bien que

$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$$

Le point fixe de cette suite arithmético-géométrique est le nombre réel ℓ tel que

$$\ell = \frac{1}{1+kP}\ell + \frac{k}{1+kP},$$

c'est-à-dire

$$\ell = \frac{1}{P}.$$

En effectuant alors la soustraction

$$\begin{array}{rrcrcr} & v_{n+1} & = & \dfrac{1}{1+kP}u_n & + & \dfrac{k}{1+kP} \\ \ominus & \ell & = & \dfrac{1}{1+kP}\ell & + & \dfrac{k}{1+kP} \\ \hline & v_{n+1}-\ell & = & \dfrac{1}{1+kP}(u_n-\ell) & & \end{array}$$

on constate que la suite $(v_n-\ell)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{1+kP}$. Il s'ensuit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_n-\ell = \frac{v_0-\ell}{(1+kP)^n},$$

c'est-à-dire

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_n = \frac{\dfrac{1}{u_0}-\dfrac{1}{P}}{(1+kP)^n}+\frac{1}{P}$$

ou encore

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_n = \frac{P-u_0}{u_0P(1+kP)^n}+\frac{1}{P}.}$$

Par conséquent,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n = \frac{1}{\dfrac{P-u_0}{u_0P(1+kP)^n}+\dfrac{1}{P}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n = \frac{P}{1+\dfrac{P-u_0}{u_0(1+kP)^n}}.}$$

Comme $1+kP>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+kP)^n=+\infty$, ce qui donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = P.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [∘]
Déterminer, en fonction de $n\in\mathbb{N}$, l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0=0$, $u_1=1$ et

$$\forall n\geqslant 0,\qquad u_{n+2}=2u_{n+1}-3u_n.$$

On reconnait une suite récurrente double dont l'équation caractéristique est $r^2-2r+3=0$. Les solutions de cette équation sont $r=1+i\sqrt{2}=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où θ est défini par $\cos\theta=1/\sqrt{3}$ et $\sin\theta=\sqrt{2}/\sqrt{3}$ et $\overline{r}=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\theta}$. Dès lors, on sait, d'après le cours, qu'il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=(\sqrt{3})^n(\alpha\cos n\theta+\beta\sin n\theta).$$

On détermine alors α et β à l'aide des valeurs de u_0 et u_1, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{cl} \alpha & = u_0 = 0 \\ (\sqrt{3}\cos\theta)\alpha+(\sqrt{3}\sin\theta)\beta & = u_1 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1/\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\frac{(\sqrt{3})^n\sin n\theta}{\sqrt{2}}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite récurrente double définie par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$.

En cours, nous avons donné l'expression explicite du terme général de la suite en fonction du nombre de racines de l'équation caractéristique $q^2 = aq + b$ et nous avons justifié que ces formules sont exactes à l'aide de récurrences doubles.

Cet exercice vous propose de retrouver ces formules sans utiliser de récurrence double.

On note q_1 et q_2 les deux racines de l'équation caractéristique $q^2 = aq + b$, avec $q_1 = q_2$ si la solution est double. Comme $b \neq 0$, on a $q_1 \neq 0$ (et $q_2 \neq 0$), ce qui permet d'introduire la suite auxiliaire $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dont le terme général est donné, pour tout $n \geqslant 0$, par

$$v_n = \frac{u_n}{{q_1}^n}\cdot$$

Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique de raison géométrique q_2/q_1 et conclure.

On nous demande de démontrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_{n+1} = \frac{q_2}{q_1} v_n + c,$$

autrement dit, on nous demande de prouver que la suite $\left(v_{n+1} - \frac{q_2}{q_1} v_n\right)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(v_{n+2} - \frac{q_2}{q_1} v_{n+1}\right) - \left(v_{n+1} - \frac{q_2}{q_1} v_n\right) &= v_{n+2} - \left(\frac{q_2}{q_1} + 1\right) v_{n+1} + \frac{q_2}{q_1} v_n \\
&= \frac{u_{n+2}}{{q_1}^{n+2}} - \left(\frac{q_2}{q_1} + 1\right) \frac{u_{n+1}}{{q_1}^{n+1}} + \frac{q_2}{q_1} \frac{u_n}{{q_1}^n} \\
&= \frac{u_{n+2} - (q_2 + q_1) u_{n+1} + q_2 q_1 u_n}{{q_1}^{n+2}} \\
&= \frac{u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n}{{q_1}^{n+2}} \qquad \text{car } \begin{cases} q_2 + q_1 = a \\ q_2 q_1 = -b \end{cases} \\
&= 0 \qquad \text{par définition de } (u_n)_{n\geqslant 0},
\end{aligned}$$

donc $\left(v_{n+1} - \frac{q_2}{q_1} v_n\right)_{n\geqslant 0}$ est constante, ce qui signifie que

$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite arithmético-géométrique de raison géométrique } q_2/q_1.}$$

On distingue alors deux cas :

<u>Premier cas : $q_1 \neq q_2$</u>

La méthode de détermination des suites arithmético-géométrique nous dit qu'il existe alors deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = \lambda + \mu \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n,$$

c'est-à-dire, en multipliant cette égalité par ${q_1}^n$,

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \lambda {q_1}^n + \mu {q_2}^n.$$

<u>Second cas : $q_1 = q_2$</u>

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est alors arithmétique, ce qui justifie l'existence de deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = \lambda n + \mu,$$

c'est-à-dire, en multipliant cette égalité par ${q_1}^n$,

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = (\lambda n + \mu) {q_1}^n.$$

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{si } q_1 \neq q_2, \\ \text{si } q_1 = q_2, \end{array}\right\} \text{ il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left\{\begin{array}{l} \lambda {q_1}^n + \mu {q_2}^n \\ (\lambda n + \mu) {q_1}^n \end{array}\right.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et la relation de récurrence multiplicative d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{{u_{n+1}}^4}{{u_n}^3}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

1. C'est une récurrence double immédiate.
2. La question précédente permet d'introduire la suite auxiliaire $v_n = \ln u_n$ qui vérifie alors la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 3v_n.$$

On reconnait une suite récurrente double dont l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$. Les solutions de cette équation étant 1 et 3, on sait d'après le cours qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \alpha 1^n + \beta 3^n = \alpha + \beta 3^n.$$

On détermine alors α et β à l'aide des valeurs de u_0 et u_1, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta 3^0 = v_0 \\ \alpha + \beta 3^1 = v_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = \ln 2 \\ \alpha + 3\beta = \ln 4 \end{array}\right. \iff \text{calculs} \iff \alpha = \beta = \frac{\ln 2}{2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{(3^n + 1)\ln 2}{2}$$

d'où, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\sqrt{2})^{3^n+1}.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [⋆] (Suites définies par une relation de récurrence affine d'ordre 2)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une suite (u_n) définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence affine d'ordre 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c.$$

1. On suppose que $a + b \neq 1$.
   a) En vous inspirant des suites arithmético-géométriques, donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n.
   b) Le faire dans le cas où $a = -1$, $b = 6$, $c = 4$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.
2. On suppose que $a + b = 1$.
   a) En introduisant la suite auxiliaire $(u_{n+1} - u_n)$, donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n.
   b) Le faire dans le cas où $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.

1. a) On commence par rechercher le point fixe de la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ (s'il existe), c'est-à-dire le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda = a\lambda + b\lambda + c \iff \lambda = \frac{c}{1 - a - b},$$

où l'existence de λ est justifiée par le fait que $a + b \neq 1$. Dès lors, en effectuant la soustraction :

$$\begin{array}{cccccc} & u_{n+2} & = & au_{n+1} & +bu_n & +c \\ \ominus & \lambda & = & a\lambda & +b\lambda & +c \\ \hline & (u_{n+2} - \lambda) & = & a(u_{n+1} - \lambda) & +b(u_n - \lambda) & \end{array}$$

on constate que la suite auxiliaire $(u_n - \lambda)$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. La technique classique nous permet donc de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_n - \lambda$ et par suite celle de u_n.

b) Dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n + 4$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 1$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = -v_{n+1} + 6v_n$. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$ et admet comme solution $r_1 = 2$ et $r_2 = -3$. Par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n - 1$. Les valeurs de u_0 et u_1 permettent de déterminer que $\alpha = \beta = 1$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + (-3)^n - 1.}$$

2. a) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = (a-1)u_{n+1} + (1-a)u_n + c$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (a-1)v_n + c$, donc la suite (v_n) est arithmético-géométrique. La technique classique nous permet donc de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_{n+1} - u_n$. Une fois cet écart connu, on en déduit l'expression de u_n en fonction de n par sommation télescopique

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

b) Dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n + 1$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n + 1$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n w_0 = 2^n(u_1 - u_0 + 1) = 2^n$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k - 1\right) = 2^n - 1 - n,$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n - 1 - n.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [⋆]

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 8$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 - 11.$$

1. Déterminer la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ dont le terme général est $v_n = an^2 + bn + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui satisfait la relation de récurrence ci-dessus. *On ne demande pas que $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.*
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} & v_{n+2} = 2v_{n+1} + 8v_n + 9n^2 - 11 \\ \iff \quad & a(n+2)^2 + b(n+2) + c = 2\big(a(n+1)^2 + b(n+1) + c\big) + 8(an^2 + bn + c) + 9n^2 - 11 \\ \iff \quad & 9(a+1)n^2 + 9bn + 9c - 2a - 11 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne, par identification des coefficients,

$$\begin{cases} 9(a+1) = 0 \\ 9b = 0 \\ 9c - 2a - 11 = 0 \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad v_n = -n^2 + 1}$$

2. On effectue la soustraction suivante :

$$\begin{array}{rccccccc} & u_{n+2} & = & 2u_{n+1} & + & 8u_n & + & 9n^2 - 11 \\ \ominus & v_{n+2} & = & 2v_{n+1} & + & 8v_n & + & 9n^2 - 11 \\ \hline & u_{n+2} - v_{n+2} & = & 2(u_{n+1} - v_{n+1}) & + & 8(u_n - v_n) & & \end{array}$$

donc $(u_n - v_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite récurrente double d'équation caractéristique $q^2 = 2q + 8$. Les solutions de cette équation sont -2 et 4 donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n - v_n = \lambda(-2)^n + \mu 4^n.$$

Les conditions $u_0 - v_0 = -1$ et $u_1 - v_1 = 8$ nous disent que $\lambda + \mu = -1$ et $-2\lambda + 4\mu = 8$. Cela donne $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. Donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n - v_n = (-2)^{n+1} + 4^n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = (-2)^{n+1} + 4^n - n^2 + 1.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [○]

Déterminer une expression explicite du terme général de la suite récurrente triple $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 6$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On adapte le résultat vu en cours pour les suites récurrentes doubles.

L'équation caractéristique de cette suite récurrente triple est $q^3 = 2q^2 + q - 2$. Les solutions sont toutes évidentes : ce sont -1, 1 et 2. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \alpha(-1)^n + \beta + \gamma 2^n.$$

Les conditions $u_0 = u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ nous donnent $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $-\alpha + \beta + 2\gamma = 0$ et $\alpha + \beta + 4\gamma = 6$. On obtient $\alpha = 1$, $\beta = -3$ et $\gamma = 2$.

Donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = (-1)^n - 3 + 2^{n+1}.}$$

♦ ***Exercice 15.*** [○]

Déterminer, en fonction de n, l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}\cdot$$

En déduire la valeur de

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

On reconnaît une suite homographique.

Recherchons le(s) point(s) fixe(s) de la suite :

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \iff \ell^2 = \ell + 1 \iff \ell \in \{\varphi, -1/\varphi\} \qquad \text{où} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1} - \varphi}{u_{n+1} + 1/\varphi} = \frac{1 + \dfrac{1}{u_n} - \varphi}{1 + \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{\varphi}} = \frac{-\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{u_n}}{\varphi + \dfrac{1}{u_n}} = \frac{-u_n + \varphi}{\varphi^2 u_n + \varphi} = -\frac{1}{\varphi^2}\,\frac{u_n - \varphi}{u_n + 1/\varphi}$$

donc $\big((u_n - \varphi)/(u_n + 1/\varphi)\big)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $-1/\varphi^2$, ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n - \varphi}{u_n + 1/\varphi} = \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^n \frac{u_0 - \varphi}{u_0 + 1/\varphi} = \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^n \frac{1 - \varphi}{1 + 1/\varphi} = \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1}.$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{u_n - \varphi}{u_n + 1/\varphi} = \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1} \\
\iff \quad & u_n - \varphi = \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1} u_n + \frac{1}{\varphi}\Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1} \\
\iff \quad & \Big(1 - \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1}\Big) u_n = \varphi + \frac{1}{\varphi}\Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^{n+1} \\
\iff \quad & u_n = \varphi \frac{1 - (-1/\varphi^2)^{n+2}}{1 - (-1/\varphi^2)^{n+1}},
\end{aligned}$$

où la dernière division est justifiée par le fait que $\forall n \geqslant 0,\ (-1/\varphi^2)^{n+1} \neq 1$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \varphi \frac{1-(-1/\varphi^2)^{n+2}}{1-(-1/\varphi^2)^{n+1}}.}$$

On a

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1 + \frac{1}{1}, \qquad u_2 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}, \qquad u_3 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}, \qquad \text{etc}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = \Phi.$$

Or, l'expression de u_n trouvée ci-dessus nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi,$$

car $|-1/\varphi^2| < 1$. Donc

$$\boxed{\Phi = \varphi.}$$

Remarques : La formule

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

est le développement en fraction continue du nombre d'or. Ce n'est pas seulement joli, c'est aussi très utile dans les problèmes d'approximation des nombres réels par des rationnels. On a aussi

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

C'est le développement du nombre d'or en racine continue. Pour le coup, au delà de son côté esthétique, cela ne sert pas à grand chose (à ma connaissance).

♦ **Exercice 16.** [$\star$]

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}.$$

Déterminer les valeurs de $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ existe et démontrer qu'alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique.

On reconnaît une suite homographique.

Recherchons le(s) point(s) fixe(s) de la suite :

$$\ell = \frac{1+\ell}{1-\ell} \iff \ell - \ell^2 = 1 + \ell \iff \ell^2 = -1 \iff \ell \in \{-i; i\}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}+i}{u_{n+1}-i} &= \frac{\dfrac{1+u_n}{1-u_n}+i}{\dfrac{1+u_n}{1-u_n}-i} \\
&= \frac{1+u_n+i-iu_n}{1+u_n-i+iu_n} \\
&= \frac{(1-i)u_n+1+i}{(1+i)u_n+1-i} \\
&= \frac{1-i}{1+i} \times \frac{u_n+\dfrac{1+i}{1-i}}{u_n+\dfrac{1-i}{1+i}} \\
&= -i \times \frac{u_n+i}{u_n-i} \qquad \text{car } \frac{1+i}{1-i} = i \text{ et } \frac{1-i}{1+i} = -i,
\end{aligned}$$

donc $\big((u_n+i)/(u_n-i)\big)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $-i$, ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n+i}{u_n-i} = (-i)^n \frac{u_0+i}{u_0-i}\cdot$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{u_n+i}{u_n-i} = (-i)^n \frac{u_0+i}{u_0-i} \\
\iff \quad & u_n+i = u_n(-i)^n \frac{u_0+i}{u_0-i} + (-i)^{n+1}\frac{u_0+i}{u_0-i} \\
\iff \quad & \Big(1-(-i)^n \frac{u_0+i}{u_0-i}\Big)u_n = (-i)^{n+1}\frac{u_0+i}{u_0-i} - i.
\end{aligned}$$

Pour savoir si l'on peut diviser, on résout

$$\begin{aligned}
& 1-(-i)^n \frac{u_0+i}{u_0-i} = 0 \\
\iff \quad & \frac{u_0+i}{u_0-i} = i^n \qquad \text{car } \frac{1}{(-i)^n} = i^n \\
\iff \quad & u_0+i = i^n u_0 - i^{n+1} \\
\iff \quad & (i^n-1)u_0 = i^{n+1}+i \\
\iff \quad & u_0 = i\frac{i^n+1}{i^n-1} \quad \text{et} \quad n \not\equiv 0 \pmod 4 \\
\iff \quad & u_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{si } u_0 \notin \{-1;0;1\}, \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -i\frac{1+(-i)^n \dfrac{u_0+i}{u_0-i}}{1-(-i)^n \dfrac{u_0+i}{u_0-i}}\cdot}$$

Comme la suite $(-i)^n$ est 4-périodique, on en déduit que

$$\boxed{\text{lorsqu'elle existe, } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est 4-périodique.}}$$