MP*1

Réduction des endomorphismes (I)

1 Éléments propres : dimension quelconque

1. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de dérivation sur l'espace des fonctions de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.
2. Soit E l'espace des fonction continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Pour f dans E, soit
$$T(f)\ : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto f(x+1).$$
Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.
3. (*) Soient E le $\mathbb{C}$-espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et T l'endomorphisme de E qui à l'élément f de E associe sa primitive nulle en 0. Montrer que T n'a pas de valeur propre. En déduire que T n'a pas de sous-espace stable de dimension finie non trivial.
4. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on pose :
$$T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)\ f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que T est un endomorphisme de E. Calculer les valeurs propres de T et les sous-espaces associés.
5. Soient E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, p dans $]0,1[$. Pour f dans E, la fonction f_p est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_p(x) = f(px+1-p).$$
On note T_p l'endomorphisme de E qui à f associe f_p.
a) Montrer que T_p est un automorphisme de E.
b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de T_p est contenu dans $]-1,1]$.
c) Soit f un vecteur propre de T_p. Montrer qu'il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que :
$$f^{(m)} = 0.$$
d) Déterminer les éléments propres de T_p.
6. *Trou spectral*
Soient E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et T l'endomorphisme de E qui à f associe :
$$T(f)\ : x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x}{2})\right).$$

a) Justifier la définition de T.

b) Montrer que les valeurs propres de T sont de module ≤ 1.

c) Déterminer l'espace propre de T associé à 1.

d) On note L le sous-espace des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Vérifier que L est stable par T. Montrer que les valeurs propres de l'induit de T sur L autres que 1 sont de module au plus $\frac{1}{2}$.

7. *Trou spectral, suite*
Déterminer les valeurs propres de T puis de la restriction de T à L.
Indication. Chercher des fonctions propres de la forme

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx}, \quad \text{où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

2 Éléments propres : dimension finie

8. (**) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de :

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - nXP \end{array}.$$

9. Soient R et S deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de PR par S.

a) À quelle condition φ est-il un isomorphisme ?

b) Si $R \wedge S = 1$ et si S n'a que des racines simples, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

10. (*) Montrer que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$.

11. Quels sont les entiers n de $\mathbb{N}^*$ tels que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ait une valeur propre réelle ?

12. *Existence d'un plan ou d'une droite stable si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que u a un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

13. Soient m dans $\mathbb{N}^*$, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, $V_1, \ldots, V_m$ des sous-espaces de E tels que

$$V = \oplus_{i=1}^m V_i.$$

On suppose que u envoie V_1 dans V_2, V_2 dans V_3, ..., V_{m-1} dans V_m et V_m dans V_1. Montrer que, si λ est valeur propre de u, il en est de même de $\omega\lambda$ pour tout ω dans U_m.

14. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et V un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 et stable par u. Montrer que 1 est valeur propre de u.
15. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, u dans $\mathcal{L}(E)$, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des vecteurs propres de u tels que, pour toute partie I de cardinal n de $\{1, \ldots, n+1\}$, $(x_i)_{i \in I}$ soit libre. Que dire de u ?
16. (***) *Sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ sont tout élément non nul est inversible*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et V un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ tel que $V \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}(E)$.

 a) Montrer que $\dim V \leq n$.

 b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\dim V \leq 1$.

 c) Le résultat de b) subsiste-t-il pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
17. Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une matrice de Vect $(A, B, C) \setminus \{0\}$ ayant une seule valeur propre.
18. *L'équation $AB - BA = \alpha A$* [1]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que :
$$AB - BA = \alpha A.$$
Calculer $A^k B - B A^k$ en fonction de A^k. En interprétant cette relation en termes d'éléments propres, en déduire que A est nilpotente.
19. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et α dans $\mathbb{C}^*$ tels que :
$$AB^2 - B^2 A = \alpha B.$$
Montrer que B est nilpotent d'indice impair.
20. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que
$$AB^5 - B^3 A B^2 = B.$$
Montrer que $B = 0$.
21. (*) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda.$$
Si $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, calculer, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}.$$
22. (**) Soit $n \geq 2$ un entier. Existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(M)$ soit une valeur propre de M ?
23. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, λ et μ dans $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tels que $AX = \lambda X$, ${}^t A Y = \mu Y$ et que $A - \lambda I_n$ est de rang $n - 1$. Déterminer la multiplicité de λ dans χ_A.

1. Cette équation, qui intervient fréquemment en théorie de Lie, est à la base de nombreux exercices de concours.

24. Soient u et v deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que $w = [u, v]$ est de rang 1.

a) Montrer que, si x est un élément de l'image de w, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x)$ est dans le noyau de w.

b) Montrer que χ_u n'est pas un irréductible de $\mathbb{K}[X]$.

25. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1 \ldots, c_n$ des nombres complexes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\chi_1 = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i), \quad \chi_B = \prod_{i=1}^{n}(X - b_i), \quad \chi_{A+B} = \prod_{i=1}^{n}(X - c_i).$$

26. *Disques de Gerschgörin* [2]

a) Montrer que si $M = (M_{i,j})_{\leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le spectre de M est contenu dans la réunion des disques fermés D_i pour $1 \leq i \leq n$, où D_i a pour centre $M_{i,i}$ et pour rayon :

$$\sum_{j \neq i} |M_{i,j}|.$$

b) Que se passe-t-il si les n disques D_i sont deux à deux disjoints ?

27. (**) *Valeurs propres des matrices stochastiques* [3]

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad M_{i,j} \in \mathbb{R}^+$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1$.

a) Montrer que les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$ sont de module majoré par 1.

b) On suppose :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad M_{i,j} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Montrer que la seule valeur propre de module 1 de M est 1. Quel est l'espace propre associé ?

c) Dans le cas général, montrer que, pour toute valeur propre λ de M de module 1, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda^j = 1$.

Indication. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ *vérifie* $MX = \lambda X$, *si* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *est tel que* $|x_i|$ *soit maximal, montrer qu'il existe* $i' \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que* $x_i{}' = \lambda x_i$.

2. Variante très utile du théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale strictement dominante, explicitée par le mécanicien Gerschgörin en 1931.

3. Les matrices stochastiques apparaissent naturellement en probabilités comme matrices de transition de chaînes de Markov à ensemble d'états finis. Les résultats de cet exercice ont des applications à ce contexte.

28. (**) *Théorème de Perron-Frobenius*

Le théorème de Perron-Frobenius est un ensemble de résultats spectraux sur les matrices à coefficients ≥ 0 [4]. On étudie dans cet exercice le cas des matrices à coefficients > 0. L'exercice suivant établit le premier énoncé relatif au cas général.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{C}^n$, on note : $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$, on écrit : $X \geq Y$ si et seulement si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $x_i \geq y_i$. Enfin, soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}, \quad A_{i,j} > 0.$$

a) Soit

$$E = \left\{ r \geq 0, \ \exists X \in \mathbb{R}^{+n} \setminus \{0\} \text{ tel que } AX \geq rX \right\}.$$

Montrer que E est non vide majoré et que Sup $E = \rho$ est dans E.

Indication. On pourra utiliser une suite (X_k) d'éléments de $(\mathbb{R}^+)^n$ de norme 1 (pour une norme fixée quelconque) telle que, pour tout k, on ait : $AX_k \geq (\rho - 1/k)X_k$.

b) Soit X dans $\mathbb{R}^{+n} \setminus \{0\}$ tel que $AX \geq \rho X$. On pose $Y = AX - \rho X$.

Montrer que si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$. Obtenir une contradiction avec la définition de ρ.

Ainsi : $AX = \rho X$.

c) Montrer que $\rho = \rho(A)$.

Dans les questions d) à f), λ est une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module ρ, E_λ désigne l'espace propre correspondant.

d) Montrer que si $Y \in E_\lambda \setminus \{0\}$, $M|Y| = \rho|Y|$; en déduire que les coordonnées de Y sont toutes dans $\mathbb{R}^{+*}$.

e) Montrer que dim $E_\lambda = 1$ et que $\lambda = \rho$.

f) Montrer que ρ est racine simple du polynôme caractéristique de A.

g) Étudier $(A/\rho)^k$ lorsque $k \to +\infty$.

29. *Théorème de Perron-Frobenius (suite)*

En utilisant les questions b) et c) de l'exercice précédent, montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $A_{i,j} \geq 0$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^{+n} \setminus \{0\}$ tel que : $AX = \rho(A)X$.

30. Décrire les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que l'image de M soit un sous-espace propre de M.

4. Ces résultats, qui ont de nombreuses applications, remontent au début du vingtième siècle.

31. *Fonctions polynomiales invariantes par similitude sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Montrer que les fonctions polynomiales définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et invariantes par similitude. sont les fonctions polynomiales en les coefficients du polynôme caractéristiques.
32. Soit α un nombre complexe algébrique de degré d sur $\mathbb{Q}$. Quel est le minimum du rang de $M - \alpha I_n$ pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$?

3 Endomorphismes diagonalisables

33. *Endomorphismes de rang* 1
Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il est de trace non nulle.
34. Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \qquad f(P) = (X^2 - 1)P''$$
est diagonalisable.
35. Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$$f(P) = X^n \, P\left(\frac{1}{X}\right),$$
D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que f et $D \circ f$ sont diagonalisables.
36. (*) Soit n dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathbb{R}_n[X]$ et φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi_A(P) = (AP)^{(n)}.$$
L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?
37. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et :
$$u \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(AM)\,B + M \end{array} .$$
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
38. *Transposition*
On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2. Soit
$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} .$$
Vérifier que φ est diagonalisable, déterminer ses espaces propres et son polynôme caractéristique.
39. *Endomorphismes de multiplication par une matrice*
Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

a) Montrer que :
$$L_A \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

est diagonalisable si et seulement si A l'est.

b) Montrer de même que

$$R_B \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & MB \end{array}$$

est diagonalisable si et seulement si B l'est.

40. *L'application* $M \longmapsto AM + MB$

a) Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose A et B diagonalisables. Montrer que les endomorphismes $S_{A,B}$ et $P_{A,B}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définis par

$$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad S_{A,B}(M) = AM + MB, \quad P_{A,B}(M) = AMB$$

sont diagonalisables. On pourra commencer par le cas où A et B sont diagonales.

b) Soient $\mathbb{A}$ un sous-anneau de $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{A}}$ l'ensemble des nombres complexes annulant un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{A}$. Montrer que $\overline{\mathbb{A}}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Indication. Si a et b sont dans $\overline{\mathbb{A}}$ et $\mathbb{A}[a,b]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par a et b, vérifier que $\mathbb{A}[a,b]$ est un $\mathbb{A}$-module de type fini et utiliser la question précédente.

41. (***) *Version géométrique du précédent*

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, a et b dans $\mathcal{L}(E)$ et :

$$\varphi_{a,b} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & a \circ f + f \circ b \end{array}$$

a) Si a et b sont diagonalisables, montrer que $\varphi_{a,b}$ l'est aussi.

b) On suppose que $\varphi_{a,b}$ est diagonalisable et que b admet au moins une valeur propre. Montrer que a est diagonalisable, puis que b l'est aussi.

c) Donner un exemple où $\varphi_{a,b}$ est diagonalisable et a et b n'ont pas de valeur propre.

42. (*) *Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable*

Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Décrire les sous-espaces stables de u. En particulier, si $\mathbb{K}$ est infini, dire à quelle condition u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

43. (**) *Commutant et bicommutant d'un endomorphisme diagonalisable*

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.

a) Décrire le commutant de u et calculer sa dimension.

b) Décrire le bicommutant de u.

44. (**) *Caractérisation des endomorphismes diagonalisables sur un corps algébriquement clos*

Supposons $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Montrer, si $f \in \mathcal{L}(E)$, l'équivalence entre :

i) f est diagonalisable,

ii) tout sous-espace de E a un supplémentaire stable par f,

iii) tout sous-espace de E stable par f a un supplémentaire stable par f.

45. *Endomorphismes cycliques et diagonalisables*
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que u est cyclique et diagonalisable si et seulement si χ_u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$.
46. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes. Décrire les matrices qui sont semblables à A et commutent à A.
47. (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ stables par f tels que $\cap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.

4 Matrices diagonalisables : exemples

48. (*) Montrer que si A est la matrice :
$$\begin{pmatrix} 5 & 6,9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$
tous les coefficients de A^{1024} sont de valeur absolue majorée par 10^{-78}.
49. (*) Montrer que la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, la diagonaliser effectivement et calculer ses puissances.
50. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, la diagonaliser effectivement, et calculer ses puissances.
51. Soient
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, la diagonaliser effectivement. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
52. Montrer que la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La diagonaliser effectivement.

53. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. [5]
54. Montrer qu'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. [6]
55. (*) Décrire l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & y \end{pmatrix}$$

ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

56. A quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

57. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

58. Soient λ et μ deux scalaires distincts et :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

59. (**) Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, $b_1, \dots, b_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}^*$,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice M est-elle diagonalisable ?

---

5. Ce résultat sera généralisé aux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans le cours sur les endomorphismes des espaces euclidiens (« théorème spectral »).
6. Même commentaire que dans l'exercice précédent.

60. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une matrice diagonale réelle semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

61. Soient

$$L = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où les x_i et les y_i sont dans $\mathbb{K}$. Quel est le polynôme caractéristique de CL ? À quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

62. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. Donner une matrice diagonale semblable à $(a_i a_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

63. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$(i,j) \neq (1,n) \Longrightarrow M_{i,j} = a\ ; \quad M_{1,n} = a.$$

Pour quels a la matrice M est-elle diagonalisable ?

64. Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{C}$. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Dans le cas où elle l'est, la diagonaliser.

65. Montrer que la matrice réelle :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable ; donner une matrice diagonale qui lui soit semblable.

66. Quel est le spectre de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Est-elle diagonalisable ?

67. (*) Si $t \in \mathbb{R}$, soit $M(t)$ la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

a) Prouver qu'il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{-*}$, $\beta(t) \in]0,2[$ et $\gamma(t) \in]2,+\infty[$ tels que $M(t)$ soit semblable à :

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}.$$

b) Trouver un équivalent de $\gamma(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est assez grand,$\mathrm{Tr}({M_o}^n)$ est l'entier le plus proche de $\gamma(0)^n$.

68. Soit $M_n = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Déterminer le spectre de M_n. En déduire une matrice diagonale semblable à M_n.

69. Soit

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Montrer que M_n a, si $n \geq 2$, exactement une valeur propre dans chacun des intervalles : $]0,1[$, $]1,2[, \dots,$ $]n-2,n-1[$, et $]n-1,+\infty[$.

70. Soient $a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels avec $a_i > 0$ pour tout i et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Calculer le polynôme caractéristique de

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

et montrer que cette matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

71. (**) Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que : $0 < a_1 < \cdots < a_n$, et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M admet n valeurs propres réelles distinctes.

5 Matrices diagonalisables : exemples, suite

72. *Produit tensoriel*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont diagonalisables, montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres en fonction de ceux de A et B.

On pourra chercher des vecteurs propres de $A \otimes B$ sous la forme $X \otimes Y$ où X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. B.

73. *Produit tensoriel, suite*
Les notations sont celles de l'exercice précédent.

a) On suppose A diagonalisable et non nulle. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

b) On suppose A non diagonalisable. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement si B est nulle.

74. (*) On définit $(A_n)_{n \geq 0}$ par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_n & A_n \\ \hline A_n & -A_n \end{array}\right).$$

Montrer que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et calculer son polynôme caractéristique.

75. *Matrices antidiagonales*
Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ La matrice $M = (m_{i,j})_{\leq i,j \leq n}$ telle que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad m_{i,j} = \delta_{i,n+1-j}\, a_i$$

est-elle diagonalisable ?

76. (**) *Matrices de permutation*
Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, soit P_σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$. [7]

a) Montrer que P_σ est diagonalisable.

b) Quel est le polynôme caractéristique de P_σ ?

c) Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *monomiale* si et seulement s'il existe $\sigma \in S_n$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbb{C}^{*n}$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad Me_i = a_i e_{\sigma(i)}.$$

Montrer qu'une matrice monomiale est diagonalisable.

d) Calculer, en fonction de la décomposition en cycles de σ, la dimension de Ker $(P_\sigma - I_n)$. En déduire le nombre minimum de transpositions dont σ est un produit.

7. On notera que $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, i.e. une représentation de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{C}^n$.

77. *Variante du c) du précédent*
Si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et a au plus un terme non nul par ligne et par colonne, à quelle condition est-elle diagonalisable ?
78. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \bigcirc & A \end{array}\right)$$

est-elle diagonalisable ? Étudier le cas particulier où $AB = BA$.
79. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \bigcirc & \bigcirc \end{array}\right) \quad \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $\text{Im } B \subset \text{Im } A$.
80. (***) *Généralisation des exercices précédents*
Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, M la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \bigcirc & B \end{array}\right).$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et s'il existe X dans$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$AX - XB = C.$$ [8]

81. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \bigcirc & I_n \\ \hline A & \bigcirc \end{array}\right).$$

La matrice B est-elle diagonalisable ?
82. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \bigcirc & I_n \\ \hline 2A & A \end{array}\right).$$

A quelle condition B est-elle diagonalisable ?
83. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline -A & I_n \end{array}\right).$$

La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. Plus généralement, M est semblable à $\text{Diag}(A, B)$ si et seulement s'il existe X dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $C = AX - XB$ (« lemme de Roth », 1955).

6 Diagonalisabilité : divers

84. Soient A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A et B diagonalisables, m dans $\mathbb{N}^*$. On suppose :
$$A^m M B^m = 0.$$
Montrer :
$$AMB = 0.$$
85. (*) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$. Calculer A^n.
86. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable de spectre $\{-1, 2\}$. Montrer que si $k \geq 0$, f^k s'écrit de façon unique $a_k I + b_k f$ où $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$, et calculer a_k et b_k.
87. Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que la comatrice de M soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
88. (*) Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, PA soit diagonalisable.
89. (*) *Sous-espaces constitués de matrices diagonalisables*
Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont diagonalisables. Montrer que la dimension de V est majorée par $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que cette majoration est optimale. [9]
90. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal $q \geq n$. Quel est le nombre de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$?
91. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer D_2 et D_3.
92. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est produit de matrices diagonalisables.
93. (***) Déterminer le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ engendrés par les matrices diagonalisables de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
94. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si :
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k).$$
Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus A et B diagonalisables ?
95. Soit A une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.
96. Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.
97. Soient m un entier ≥ 2, E_m l'espace des fonctions de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{C}$ qui sont m-périodiques par rapport à chaque variable, D_m l'endomorphisme de E_m défini par :
$$\forall u \in E_m, \qquad \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2,$$

9. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut majorer la dimension de V par n. Ce résultat (« théorème de Motzkin-Taussky ») est difficile.

$D_m(u)(p,q) = 4u(p,q) - u(p,q-1) - u(p,q+1) - u(p-1,q) - u(p+1,q)$.

a) Déterminer une base propre de D_m.

b) Si P_m est le polynôme caractéristique de D_m, donner un équivalent de $\ln(|P'_m(0)|)$.

7 Trigonalisabilité

98. Trigonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \\ 17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

99. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose M^2 triangulaire supérieure, de termes diagonaux $1, 2, \dots, n$. Montrer que M est triangulaire supérieure.

100. *Produit tensoriel*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont trigonalisables, montrer que $A \otimes B$ est trigonalisable et déterminer son polynôme caractéristique.

101. *Presque diagonalisabilité dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les termes surdiagonaux sont de module majoré par ε.

102. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit trigonalisable.

103. (**) *Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace*[10]
Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) M est nilpotente,

   ii) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}\ M^j = 0$,

   iii) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Tr}\ M^j = 0$.

104. *Quand* $[A, B]$ *commute à* A
a) Déduire de l'exercice précédent que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et α dans $\mathbb{C}^*$ et que l'on a $AB - BA = \alpha A$, alors A est nilpotente.

   b) Plus généralement, montrer que si $AB - BA = C$ commute à A, la matrice C est nilpotente.

105. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C = AB - BA$. On suppose :

$$AC = 0.$$

   a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$(AB)^k = A^k B^k.$$

   b) Montrer que C est nilpotent. On pourra calculer la trace de C^k pour k dans $\mathbb{N}^*$.

10. Résultat classique et très utile.

106. Soient p dans $\mathbb{N}^*$, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \mathrm{Tr}(M^{pj}) = 0.$$

Montrer que M est nilpotente.

107. Que dire d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \mathrm{Tr}(M^{j}) = n?$$

108. *Que disent les traces des puissances d'une matrice ?*
Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k).$$

109. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Montrer : la congruence

$$\mathrm{Tr}(M^p) \equiv \mathrm{Tr}(M)\ [p].$$

Indication. Soit $\bar{M}$ la projection de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$; trigonaliser $\bar{M}$ dans une extension adéquate de $\mathbb{F}_p$.

110. Déterminer les M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ trigonalisables sur $\mathbb{Q}$ et telles que

$$|\mathrm{Tr}(M)| \geq n.$$

111. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout j on pose :

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

a) On suppose que tous les S_j sont majorés par 1. Montrer que les valeurs propres de A sont de module majoré par 1.

b) On note J l'ensemble des j tels que S_j soit non nul. Montrer que le rang de A est majoré par

$$\sum_{j \in J} \frac{|A_{j,j}|}{S_j}.$$

112. *Déterminant d'une matrice à diagonale strictement dominante*
Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad |M_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |M_{i,j}|.$$

Démontrer

$$|\det(M)| \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|M_{i,i}| - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |M_{i,j}| \right).$$ [11]

11. Ce résultat précise le théorème de Gerschgörin sur la localisation des valeurs propres.

113. (**) *Minoration de la dimension du commutant*

a) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que le commutant $C(M)$ est de dimension $\geq n$.

Indication. Supposer d'abord $M = T$ triangulaire supérieure et considérer l'application qui à une matrice triangulaire supérieure A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe $AT - TA$.

b) Étendre le résultat à un corps quelconque.

114. *Une caractérisation des endomorphismes nilpotents*

Soient u une endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace de dimension finie E. Montrer que u est nilpotent si et seulement si, pour tout sous-espace non nul F de E stable par u, l'induit de u sur F n'est pas inversible.

115. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour z dans $\mathbb{C}$ de module assez petit, prouver

$$\det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\mathrm{Tr}(A^k)}{k} z^k\right).$$

116. *Fonction ζ d'un graphe*

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, G un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est $V_G = \{1, \ldots, m\}$,

$$M_G = (M_{i,j})_{\leq i,j \leq m} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

sa matrice d'adjacence : $M_{i,j} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant i et j.

a) Montrer que le nombre de chemins fermés de longueur n de G est

$$N_n(G) = \mathrm{Tr}({M_G}^n).$$

b) La fonction ζ du graphe est définie par

$$\zeta_G(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N_n(G)}{n} z^n\right).$$

Soit

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(M)\},$$

Montrer, pour z dans $\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à $1/\rho(M_G)$

$$\zeta_G(z) = \frac{1}{\det(I_n - zM_G)}.$$

On démontrera que, pour z dans $\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

117. *Dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices nilpotentes*[12]

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont des matrices nilpotentes.

a) Montrer que, pour A et B dans V, $\mathrm{Tr}(AB) = 0$.

b) On note $T_n^{++}(\mathbb{K})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures strictes, π le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $T_n^{++}(\mathbb{K})$ parallèlement au sous-espace $T_n^{-}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures. Montrer que $V_1 = \mathrm{Ker}(\pi_{|V}$ et $V_2 = \{{}^tM;\ M \in \pi(V)\}$ sont deux sous-espaces du sous-espace $T_n^{--}(K)$ des matrices triangulaires inférieures strictes tels que

$$\forall (M_1, M_2) \in V_1 \times V_2, \qquad \mathrm{Tr}({}^tM_1 M_2) = 0.$$

c) Montrer que la dimension de V est majorée par $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

d) On prend $V = \{M_{a,b}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$, où

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V n'est pas cotrigonalisable.

118. (**) a) Soient U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\chi_U = \chi_V.$$

Montrer :

$$\mathrm{Tr}(U^2) = \mathrm{Tr}(V^2).$$

b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$,

ii) B est nilpotente et $BA = 0$.

119. (***) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que PAQ et PBQ soient triangulaires supérieures.

120. a) À quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ est-elle nilpotente ?

12. Résultat dû à Gerstenhaber (1959).

b) Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \to & \mathbb{Z}^n \\ x=(x_1,\dots,x_n) & \mapsto & (|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\dots,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|) \end{array}.$$

Montrer que l'on a équivalence entre :
i) $\forall z \in \mathbb{Z}^n$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}(x) = 0$,
ii) n est une puissance de 2.

121. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour toute partie non vide de $\{1,\dots,n\}$, la matrice $(M_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ soit non inversible. Montrer qu'il existe σ dans $\mathcal{S}_n$ telle que $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$ soit triangulaire supérieure stricte.

122. *Dimension des sous-espaces stables par un endomorphisme*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose χ_f scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer, si $k \in \{0,\dots,n\}$, que f a un sous-espace stable de dimension k.

b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et χ_f sans racine réelle. Montrer, si $k \in \{0,\cdots,n\}$, il y a équivalence entre :
i) f a un sous-espace stable de dimension k,
ii) k est pair.

c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, décrire en fonction de χ_f l'ensemble des $k \in \{0,\cdots n\}$ tels que χ_f ait un sous-espace stable de dimension k. Que dire si n est impair ?

123. *Analogue réel de la trigonalisation*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base e de E telle que $Mat_e(u)$ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & & (*) & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ -b_p & a_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Interprétation matricielle ?

8 Classes de similitude

124. (*) *Similitude dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

125. *Similitude dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
Montrer que deux matrices non scalaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

126. Montrer que deux matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

127. *Matrices carrées de taille* 2 *sur un corps fini*
Soit $\mathbb{K}$ un corps finie de cardinal q Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dénombrer :
a) les matrices diagonalisables,
b) les matrices trigonalisables,
c) les matrices nilpotentes.
d) les classes de similitude.

128. *Classes de similitude dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Soit M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle. Montrer que M est semblable à une unique matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec}(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}.$$

129. (**) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente. Montrer que l'ensemble des complexes λ tels que A soit semblable à λA est fini de cardinal au plus n.

130. Pour M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, soit $E(M)$ l'ensemble des A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à M et commutant à M. Déterminer les M telles que $E(M)$ soit fini.[13]

131. *Produit de deux symétries en dimension 2*
Montrer, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, qu'il y a équivalence entre :
i) il existe A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = I_2$ et $M = AB$,
ii) la matrice M est inversible et semblable à son inverse.[14]

132. (***) *Lemme de Brauer*
Soient σ et σ' dans S_n. Montrer que σ et σ' sont conjuguées dans S_n si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

133. Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer que soit $A \in \mathbb{C}[B]$, soit $B \in \mathbb{C}[A]$. Cette propriété reste-t-elle vraie dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

134. (**) *Matrices complexes diagonales semblables à une matrice entière*
Soit D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. À quelle condition existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ semblable sur $\mathbb{C}$ à D ? Même question en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$.

135. Combien y-a-t-il de classes de similitude de matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que
$$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n) \ ?$$

136. Soient A et B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telles que A et B commutent à $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Montrer : $C = \pm I_2$.

137. Soit M dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, symétrique et non nulle, telle que[15] :
$${}^tMSM = S.$$

---

13. Le lecteur courageux (et connaissant la réduction de Jordan) pourra résoudre l'exercice en dimension n.

14. Même commentaire que pour l'exercice précédent.

15. Ce résultat signifie qu'un endomorphisme de déterminant 1 d'un plan vectoriel réel préserve une forme quadratique non nulle. Il est facile de voir que cet énoncé est faux en dimension supérieure ou égale à 3, par exemple en déterminant les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'existe S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et non nulles vérifiant ${}^tMSM = S$.

9 Équations matricielles

138. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = I_2$$

139. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

140. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme diagonalisable de E et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

a) Montrer que l'ensemble $L = \{v \in \mathcal{L}(E),\ P(v) = u\}$ est non vide.

b) Si $|\operatorname{Sp} u| = n$, montrer que L est fini.

c) On suppose que $P = X^2$. Calculer le cardinal de L si $|\operatorname{Sp} u| = n$, et montrer que L est infini si $|\operatorname{Sp} u| < n$.

141. (**) Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, à quelle condition existe-t-il $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$?

142. (**) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A^3 = B^3$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si A et B sont diagonalisables, montrer : $A = B$.

b) Le résultat subsiste-t-il si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si on ne suppose pas A diagonalisable ?

143. *Matrice sans racine carrée dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Si $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice n, montrer que l'équation $X^2 = J$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

144. (**) Soit D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il un endomorphisme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $T^2 = D$?

145. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ l'équation

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

146. Soit u un endomorphisme diagonalisable du K-espace vectoriel de dimension finie E. Déterminer la dimension de

$$\{v \in \mathcal{L}(E)\ ;\ v \circ u = -u \circ v\}.$$