

Devoir Surveillé n° 3 (4h)

Correction du problème 1 – Transformée de Fourier discrète

Partie I – Préliminaires

1. Il s'agit d'un résultat du cours, classique :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^j.$$

Puisque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, si $k \neq 0$, $\omega^k \neq 1$, donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \frac{1 - \omega^{kn}}{1 - \omega} = 0.$$

Si $k = 0$, la somme vaut n . Ainsi :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = n\delta_{k,0}}.$$

Comme $\omega^0 = \omega^n$, la deuxième somme est égale à la première (on remplace un terme par un autre qui lui est égal) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \omega^{jk} = n\delta_{k,0}}.$$

2. Soit $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et notons $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) = \mathcal{F}_n u$ et $w = (w_0, \dots, w_{n-1}) = \mathcal{F}_n v$. On a alors, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$w_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{v_k} \omega^{\ell k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \omega^{-jk} \omega^{\ell k}.$$

En intervertissant les deux sommes, il vient :

$$w_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{\ell-j}) k = \sum_{j=0}^{n-1} u_j n \delta_{\ell-j,0},$$

car $k - j$ prend ses valeurs dans $\llbracket -(n+1), n+1 \rrbracket$, le seul multiple de n dans cet intervalle étant 0. Ainsi,

$$w_\ell = n \sum_{j=0}^{n-1} u_j \delta_{\ell,j} = n u_\ell.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_n = \text{id}_{\mathbb{C}^n}}$. On en déduit que $\frac{\mathcal{F}_n}{n} \circ \mathcal{F}_n = \text{id}$, et comme par ailleurs, on vérifie sans peine que pour λ réel, $\mathcal{F}_n(\lambda u) = \lambda \mathcal{F}_n u$, on a aussi $\mathcal{F}_n \circ \frac{\mathcal{F}_n}{n} = \text{id}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F}_n \text{ est bijective, de réciproque } \frac{\mathcal{F}_n}{n}}$.

3. On a

$$\mathcal{F}_n(1, 1, 0, \dots, 0) = (v_0, \dots, v_{n-1}),$$

où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_k = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_j} \omega^{jk} = 1 + \omega^k.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F}_n^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{n}(1 + \omega^0, 1 + \omega^1, \dots, 1 + \omega^{n-1})}.$

De même, on a, en notant

$$\mathcal{F}_n(0, \dots, 0, i, \dots, 0) = (v'_0, \dots, v'_{n-1}),$$

on a, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$v'_k = \omega^{ik}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{F}_n^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0) = \frac{1}{n}(1, \omega^i, \omega^{2i}, \dots, \omega^{(n-1)i})}.$

Partie II – Équation de convolution

1. Soit u, v des éléments de \mathbb{C}^n . On note $w = (w_1, \dots, w_n) = \mathcal{F}_n(u \times v)$. On a donc, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$w_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j \equiv k \pmod{n}} \overline{u_i v_j} \omega^{\ell k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j \equiv k \pmod{n}} \overline{u_i v_j} \omega^{\ell(i+j)}$$

Ainsi, cette somme n'étant que le regroupement des couples (i, j) suivant la classe de congruence de leur somme modulo n , on peut dégrouper ces termes, ce qui donne :

$$w_\ell = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_i} \omega^{i\ell} \overline{v_j} \omega^{j\ell} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \overline{u_i} \omega^{i\ell} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \overline{v_j} \omega^{j\ell} \right).$$

On a donc bien la description attendue : $\boxed{\mathcal{F}_n(u \otimes v) = \mathcal{F}_n(u) \times \mathcal{F}_n(v)}.$

2. (i) Puisque \mathcal{F}_n est bijective, l'équation $u \otimes x = y$ est équivalente à $\mathcal{F}_n(u \otimes x) = \mathcal{F}_n y$, ou encore à $\mathcal{F}_n(u) \times \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(y)$.

Ce produit se définissant coordonnée par coordonnée, pour qu'on puisse définir $\mathcal{F}_n(x)$ solution de cette équation, il faut et il suffit que chaque fois que la i -ième coordonnée de $\mathcal{F}_n(y)$ est non nulle, il en est de même de celle de $\mathcal{F}_n(u)$. On trouve la coordonnée x'_i correspondante de $\mathcal{F}_n(x)$ en quotientant les 2. Si la i -ième coordonnée de $\mathcal{F}_n(y)$ est nulle, on peut poser $x'_i = 0$. On pose alors $x = \mathcal{F}_n^{-1}(x')$, qui est bien solution de l'équation.

Ainsi, en désignant par $\text{Supp}(x_1, \dots, x_n) = \{i \mid x_i \neq 0\}$, une condition suffisante et nécessaire pour l'existence d'une solution au moins à l'équation $u \otimes x = y$ est que $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) \subset \text{Supp}(\mathcal{F}_n u)}$.

- (ii) Cette fois les x'_i doivent être tous déterminés de façon unique, s'ils existent. C'est le cas si et seulement si la i -ième coordonnée de $\mathcal{F}_n(y)$ est non nulle.

Ainsi, l'équation admet au plus une solution si $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ (autrement dit, aucun coefficient n'est nul).

- (iii) L'existence et l'unicité d'une solution équivaut alors à $\llbracket 0, n-1 \rrbracket = \text{Supp}(\mathcal{F}_n y) \subset \text{Supp}(\mathcal{F}_n u)$, et comme ce dernier est inclus dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on obtient la CNS suivante : $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) = \text{Supp}(\mathcal{F}_n u) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ (autrement dit aucun coefficient nul).

3. La question I-3 nous assure que $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ est l'image réciproque de $n(0, 1, 0, \dots, 0)$, donc, avec les notations de la question précédente, $\text{Supp}(\mathcal{F}_n(y)) = \{1\}$

Par ailleurs, la question I-1 (ou la question I-3 avec $i = 0$) permet d'affirmer que $\mathcal{F}_n(1, \dots, 1) = (n, 0, \dots, 0)$. Ainsi, $\text{Supp}(\mathcal{F}_n x) = \{0\}$.

D'après la caractérisation (i) de la question précédente, on peut donc affirmer que l'équation $(1, 1, \dots, 1) \otimes x = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ n'a $\boxed{\text{pas de solution}}$.

C'était prévisible : dans la mesure où les coordonnées de $(1, \dots, 1)$ sont toutes égales, les coefficients w_k de $(1, \dots, 1) \otimes x$ doivent aussi tous être égaux :

$$w_k = \sum_{i+j \equiv k} x_j = \sum_{i=0}^{n-1} x_j,$$

puisque à chaque indice $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il correspond un unique $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $i + j \equiv k \pmod{n}$ (reste modulo n de $k - j$).

Comme le second membre de l'équation n'est pas de cette forme, il ne peut pas exister de solution.

4. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient :

$$(0, n, 0, \times, 0) \times \mathcal{F}_n(x) = (0, n, 0, \dots, 0).$$

Ainsi, il faut et il suffit que $\mathcal{F}_n(x)$ soit de la forme $(x'_0, 1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$. On trouve trois solutions distinctes en prenant l'antécédant par \mathcal{F}_n de trois n -uplets de ce type, par exemple :

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{F}_n^{-1}(0, 1, 0, \dots, 0) = \boxed{\frac{1}{n}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})}, \\ x &= \mathcal{F}^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0) = \boxed{\frac{1}{n}(1 + \omega^0, \dots, 1 + \omega^{n-1})} \text{ ou} \\ x &= \mathcal{F}^{-1}(1, 1, \dots, 1) = \frac{1}{n}\mathcal{F}_n(1, \dots, 1) = \boxed{\frac{1}{n}(1, 0, \dots, 0)}. \end{aligned}$$

Partie III – Algorithme de Cooley-Tukey, transformée de Fourier rapide

1. On suppose $n = 4$. On considère $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^4$ et $(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathcal{F}_4 u$. On remarquera que dans cette question, l'hypothèse $n = 4$ implique que $\omega = i$.

(a) On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \overline{u_0} + \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3} \\ v_1 &= \overline{u_0} + i\overline{u_1} - \overline{u_2} - i\overline{u_3} \\ v_2 &= \overline{u_0} - \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3} \\ v_3 &= \overline{u_0} - i\overline{u_1} - \overline{u_2} + i\overline{u_3}. \end{aligned}$$

En posant $a_0 = \overline{u_0} + \overline{u_2}$, $b_0 = \overline{u_1} + \overline{u_3}$, $a_1 = \overline{u_0} - \overline{u_2}$ et $b_1 = \overline{u_1} - \overline{u_3}$, on a bien les relations :

$$\begin{cases} v_0 = a_0 + b_0 \\ v_2 = a_0 - b_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = a_1 + \omega b_1 \\ v_3 = a_1 - \omega b_1 \end{cases}$$

(b) Pour $n = 2$, $\omega = -1$. Ainsi, $\boxed{(a_0, a_1) = \mathcal{F}_2(u_0, u_2)}$. De même $(b_0, b_1) = \mathcal{F}_2(u_1, u_3)$.

2. Notons $\zeta = \omega^2$. Pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$:

$$v_k = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_j} \omega^{jk}.$$

Séparons cette somme en deux suivant que les indices sont pairs ou impairs :

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \omega^{2jk} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \omega^{(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \zeta^{jk} + \omega^k \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \zeta^{jk}. \end{aligned}$$

Cela correspond bien à l'égalité attendue : $\boxed{v_k = a_k + \omega^k b_k}$.

De même, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} v_{m+k} &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \omega^{2j(m+k)} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \omega^{(2j+1)(m+k)} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \zeta^{jk} - \omega^k \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \zeta^{jk}. \end{aligned}$$

puisque $\omega^{2jm} = \omega^{nj} = 1$ et $\omega^{(2j+1)m} = \omega^m = -1$.

On a bien obtenu : $\boxed{v_{m+k} = a_k - \omega^k b_k}$.

3. (a) Pour chaque v_k , il faut sommer n termes (donc faire $n - 1$ opérations), chaque terme s'obtenant par une conjugaison, un produit jk (pour obtenir l'exposant) et un produit de nombres complexes, donc 3 opérations. Ainsi, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul d'un v_k est $(n - 1) + 3 \times n = 4n - 1$. Ainsi,

$$d_n = n(4n - 1) \underset{+\infty}{\sim} 4n^2.$$

- (b) On note $c'_p = c_n = c_{2^p}$. On relie c'_p et c'_{p-1} : Le calcul de $\mathcal{F}_{2^p}u$ par la méthode décrite ci-dessus nécessite de calculer $\mathcal{F}_{2^{p-1}}v$ pour deux suites v , en appliquant récursivement la méthode décrite, ce qui nécessite c'_{p-1} opérations pour chaque suite, donc $2c'_{p-1}$ opérations. Le calcul de chaque v_k nécessite alors 2 opérations, disons 3 dans la moitié des cas, pour pouvoir passer de k à $m + k$. Ainsi, le calcul total nécessite un nombre d'opérations inférieur à

$$c'_p \leq 2c'_{p-1} + 3 \times 2^{p-1}.$$

On peut résoudre cette récurrence de la même manière que les équations différentielles (en trouvant une solution particulière, et en résolvant l'équation homogène, qui est une équation géométrique). Cela provient de la structure affine de l'ensemble des solutions. Cette technique n'ayant pas encore été bien étudiée, on peut aussi s'en sortir de manière élémentaire ici, en se servant de la forme de la majoration donnée dans l'énoncé. On recherche K' tel que

$$c'_p \leq K' p 2^p.$$

On fait une analyse synthèse, associée à une récurrence. On suppose que K' vérifie l'inégalité ci-dessus au rang $p - 1$. On a alors :

$$c'_p \leq 2c'_{p-1} + 3 \times 2^{p-1} \leq K'(p-1)2^p + 3 \times 2^{p-1} = K'p2^p + (3 - 2K')2^{p-1}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $K' \geq c'_0 = 1$ (pour avoir l'initialisation) et $K' \geq \frac{3}{2}$ pour que la récurrence ci-dessus soit valide.

On a donc montré que pour tout $n = 2^p$, on a

$$c_n = c'_p \leq \frac{3}{2}p2^p = \frac{3}{2}n \log_2(n).$$

Cette majoration de la complexité est un cas particulier d'un théorème général permettant d'estimer la complexité d'un algorithme de type diviser pour régner. Vous verrez ce théorème général l'année prochaine si vous faites l'option informatique.

- (c) D'après les croissances comparées, $c_n = o(d_n)$. Le gain est en fait énorme pour des grandes valeurs de n . Une complexité en $n \ln(n)$ est quasi-linéaire. Par exemple pour $n = 10000$, on passe de $n^2 = 100.000.000$ opérations à à peu près $n \log_2 n \simeq 130.000$.

Correction du problème 2 – Dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor

Question préliminaire

Soit $A \subset B$. Pour commencer, A et B admettent une borne inférieure (d'après la propriété fondamentale de \mathbb{R} s'ils sont minorés, égale à $-\infty$ sinon). De plus, tout minorant de B est aussi un minorant de A . En particulier, $\inf(B)$ est un minorant de A . Comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A , il en découle que $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Partie I – Mesure de Hausdorff

1. U étant bornée, il existe M tel que pour tout $x \in U$, $\|x\| \leq M$. On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $x, y \in U$,

$$0 \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M.$$

Ainsi, $\{\|x - y\|, x, y \in U\}$ est un sous-ensemble majoré non vide de \mathbb{R} , donc $|U|$ admet une borne supérieure dans \mathbb{R} .

2. La suite $(\sum_{k=0}^n |U_k|^s)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et positive, donc elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ainsi $\ell_s(U)$ est bien définie, et $\ell_s(U) \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

3. Soit $0 \leq \delta \leq \delta'$. Alors tout U_i d'un δ -recouvrement vérifie $|U_i| \leq \delta \leq \delta'$. Donc un δ -recouvrement est aussi un δ' -recouvrement. On en déduit que $R_\delta(E) \subset R_{\delta'}(E)$.

D'après la question préliminaire, $\mathcal{H}_\delta^s \geq \mathcal{H}_{\delta'}^s$. Donc \mathcal{H}_δ^s est décroissante.

4. On peut prendre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \emptyset$. Alors pour tout $\delta \geq 0$, (U_n) est un δ -recouvrement de \emptyset , donc

$$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \leq \ell_s((U_i)) = 0.$$

Comme par ailleurs, pour tout recouvrement, on a $\ell_s((U_i)) \geq 0$, il en résulte que $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \geq 0$. Ainsi $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$. En passant à la limite lorsque δ tend vers 0, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

5. Soit (U_n) un δ -recouvrement de F . C'est alors aussi un δ -recouvrement de E . On en déduit que $R_\delta(F) \subset R_\delta(E)$, d'où, d'après la question préliminaire : $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. En passant à la limite, il vient $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Cette inégalité est valide dans \mathbb{R} .

6. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}^s(E_{n_0}) = +\infty$, alors, puisque $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, la question précédente amène

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = +\infty = \mathcal{H}^s(E_{n_0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}^s(E_n).$$

Ainsi l'inégalité est satisfaite.

- Sinon, soit $\delta \geq 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ un δ -recouvrement de E_n tel que :

$$\ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

En sommant,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

Par ailleurs, la fusion $(U_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ de tous les recouvrements est un δ -recouvrement de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, encore dénombrable, et

$$\ell_s((U_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}).$$

Par définition de \mathcal{H}_δ^s , il vient donc :

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

On fait ensuite tendre δ vers 0 :

$$\boxed{\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n)}.$$

7. Pour $\lambda > 0$, on note $\lambda E = \{\lambda x, x \in E\}$.

- (a) Soit $\delta \geq 0$, et (U_i) un δ -recouvrement de E . Soit $x \in \lambda E$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = \lambda y$. Comme (U_i) est un δ -recouvrement de E , il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $y \in U_i$. Ainsi, $x = \lambda y \in \lambda U_i$. On en déduit que (λU_i) est un recouvrement de λE .

De plus, pour tout x, y dans λU_i , il existe x', y' dans U_i tels que $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$. Ainsi (puisque $\lambda > 0$),

$$\|x - y\| = \|\lambda x' - \lambda y'\| = \lambda \|x' - y'\| \leq \lambda \delta.$$

Ainsi, (λU_i) est un $\lambda\delta$ - recouvrement de λU_i . Ainsi

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda U_n|^s = \lambda^s \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s.$$

Ainsi, par définition de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$, cette inégalité étant vraie pour tout δ -recouvrement de E ,

$$\boxed{\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(E)}.$$

(b) En faisant tendre δ vers 0, il vient

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$$

En remarquant que $E = \frac{1}{\lambda}(\lambda E)$, on peut intervertir les rôles de E et λE , pour obtenir l'inégalité opposée. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)}.$$

Partie II – Mesure de Hausdorff de \mathbb{R}^n

- Soit $s > m$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut recouvrir E par k^m cubes de côté $\frac{1}{k}$, en subdivisant chaque côté en k parts égales. Soit d le diamètre de C_1 (égal à la longueur de sa diagonale ; on peut montrer que $d = \sqrt{m}$, mais nous n'en avons pas besoin). Alors le diamètre des petits cubes est $\frac{d}{k}$. Soit maintenant $\delta > 0$. En prenant $k \geq \frac{d}{\delta}$, les petits cubes ont un diamètre inférieur à δ . Ainsi, ils forment un δ -recouvrement (en complétant la famille par des ensembles vides pour obtenir une famille dénombrable). Notant $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce recouvrement, on a alors :

$$\ell_s(U) = k^m \left(\frac{d}{k} \right)^s = \frac{d^s}{k^{s-m}} \leq d^s \left(\frac{\delta}{d} \right)^{s-m},$$

puisque $s - m > 0$. On en déduit que

$$\ell_s(U) \leq d^m \delta^{s-m}.$$

On en déduit que $\mathcal{H}_\delta^s(C_1) \leq d^m \delta^{s-m}$. Puisque $s - m > 0$, on obtient, lorsque $\delta \rightarrow 0$, $\boxed{\mathcal{H}^s(C_1) = 0}$.

- On peut écrire \mathbb{R}^m comme une union dénombrable de cubes de côté 1, en considérant le réseau des points à coordonnées entières. La dénombrabilité provient du fait qu'un cube de ce recouvrement est entièrement déterminé par son sommet de coordonnées minimales, donc par un élément de \mathbb{Z}^m , qui est dénombrable.

Chaque cube U_i de ce recouvrement vérifie $\mathcal{H}^s(U_i) = 0$ d'après la question précédente. En effet il s'agit d'un translaté de C_1 . Ses recouvrements se déduisent de ceux de C_1 par la même translation, qui préserve les diamètres (ce qui assure que la mesure de Hausdorff est invariante par translation). Ainsi, $\mathcal{H}^s(U_i) = \mathcal{H}^s(C) = 0$.

Par la question I-6 et la positivité de \mathcal{H}^s , il vient alors $\boxed{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0 \text{ (pour } s > m)}$.

Si $E \subset \mathbb{R}^m$, la question I-5 et la positivité de \mathcal{H}^s amènent $\boxed{\mathcal{H}^s(E) = 0}$.

On pourrait montrer que $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = +\infty$, mais nous n'en aurons pas besoin ici. Voir les questions subsidiaires !

Partie III – Dimension de Hausdorff

- Soit $\delta < 1$ et $0 \leq s < s'$. Soit (U_n) un δ -recouvrement de E . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leq \delta < 1$. Par conséquent,

$$|U_n|^s \geq |U_n|^{s'}.$$

En sommant, on obtient

$$\ell_s(U) \geq \ell_{s'}(U).$$

En passant à la borne inférieure sur tous les δ -recouvrements,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \mathcal{H}_\delta^{s'}(E).$$

Rappelons que ce passage à la borne inférieure se fait en deux temps. Tout d'abord sur le terme de droite (la borne inférieure en étant un minorant), ce qui amène $\ell_s(U) \geq \mathcal{H}_\delta^{s'}(U)$, puis sur le terme de gauche, en disant que

sa borne inférieure $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ étant le plus grand des minorants, elle est plus grande en particulier que le minorant $\mathcal{H}_\delta^{s'}(U)$.

On peut maintenant faire tendre δ vers 0, ce qui est valide, puisque notre inégalité a été obtenue pour tout δ assez petit (inférieur à 1). On a donc $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^{s'}(E)$, d'où la $\boxed{\text{décroissance de } s \mapsto \mathcal{H}^s(E)}$.

2. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $\mathcal{H}_s(E) \neq +\infty$. Soit $\delta > 0$, $t > s$, et (U_n) un δ -recouvrement de E . On a alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^t = \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s |U_n|^{t-s} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s \delta^{t-s}.$$

En passant à la borne inférieure sur les δ -recouvrements de E (comme dans la question précédente), on obtient

$$0 \leq \mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Puisque $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ est fini et $t - s > 0$, on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E) = 0 \quad \text{soit:} \quad \boxed{\mathcal{H}^t(E) = 0}.$$

3. • L'ensemble $S = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$ est non vide, car pour tout $s > m$, $s \in S$ d'après II-2. Il est minoré par 0 par définition. Ainsi, d'après la propriété fondamentale de \mathbb{R} , S admet une borne inférieure s_0 .
 - Soit $t > s_0$. Alors par caractérisation de la borne supérieure, il existe $s \in]s_0, t[$ tel que $s \in S$, donc $\mathcal{H}^s(E) = 0$. D'après la décroissance de $\mathcal{H}^s(E)$, il vient $\boxed{\mathcal{H}^t(E) = 0 \text{ (pour } t \geq s_0\text{)}}$
 - Soit $t < s_0$. Si $\mathcal{H}^t(E) \neq +\infty$, d'après la question précédente, pour tout $s > t$, $\mathcal{H}^s(E) = 0$, donc $]t, +\infty[\subset S$, puis $\inf(S) \leq t$, ce qui contredit $t < s_0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{H}^t(E) \neq +\infty \text{ (pour } t < s_0\text{)}}$.

Ce réel s_0 est noté $\dim_H(E)$ et est appelé dimension de Hausdorff de E .

4. Soit $E \subset F$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ d'après I-5. Par conséquent, pour tout $t > \dim_H(\mathcal{H}^s(F))$, d'après la question précédente et la définition de la dimension de Hausdorff, $\mathcal{H}^t(E) \leq 0$, d'où, par positivité, $\boxed{\mathcal{H}^t(E) = 0}$. On déduit alors de la description de la question précédente que t n'est pas strictement inférieur à $\dim_H(E)$, donc $t \geq \dim_H(E)$. Ceci étant vrai pour tout $t > \dim_H(F)$, en faisant tendre t vers $\dim_H(F)$ par au-dessus, il vient :

$$\boxed{\dim_H(E) \leq \dim_H(F)}.$$

5. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de \mathbb{R}^n , et $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E$, donc $\dim_H(E_n) \leq \dim_H(E)$. Ainsi $\dim_H(E)$ est un majorant des $\dim_H(E_n)$, donc, par définition de la borne supérieure,

$$\dim_H(E) \geq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Par ailleurs, d'après la question I-6, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n).$$

Ainsi, si $s > \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^s(E_n) = 0$, donc $\mathcal{H}^s(E) = 0$. On déduit de la définition de la dimension que $\dim_H(E) \leq s$. Ceci étant vrai pour tout $s > \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}$, il vient

$$\dim_H(E) \leq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Le deux inégalités amènent bien l'égalité :

$$\boxed{\dim_H \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}}$$

Partie IV – Ensemble triadique de Cantor

1. On obtient la description suivante de E_3 en enlevant le tiers médian des intervalles décrivant E_2 :

$$E_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $x \in E_n$ si et seulement si x admet un développement en base 3 dont les n premiers chiffres après la virgule sont tous différents de 1 (propriété $\mathcal{P}(n)$)

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car non contraignante ! Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $x \in E_{n+1}$. Comme $E_{n+1} \subset E_n$, E_n admet un développement en base 3 dont les n premiers chiffres de x (après la virgule) sont différents de 1. Soit $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ l'intervalle de E_n dans lequel se trouve x .

- On suppose dans un premier temps que $x \neq \frac{k+1}{3^n}$. Alors $k = \lfloor 3^k x \rfloor$, donc k est l'entier dont les chiffres sont les n premiers chiffres de x après la virgule. Le $n+1$ -ième chiffre après la virgule dans le développement propre est alors

$$a_{n+1} = \lfloor 3^{k+1} x \rfloor - 3k.$$

Or, $x \in [\frac{k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^{n+1}}] \cup [\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}]$, donc

$$3^{k+1}x - 3k \in [0, 1] \cup [2, 3[.$$

Ainsi, sauf lorsque $x = \frac{3k+1}{3^{n+1}}$, $a_{n+1} = 0$ ou $a_{n+1} = 2$. Dans le cas $x = \frac{3k+1}{3^{n+1}}$, on obtient $a_{n+1} = 1$, et pour tout $i > n+1$, $a_i = 0$. Mais on peut remplacer ce développement propre par un développement impropre en remplaçant la séquence 1000000... par 0222222..., qui vérifie bien la condition requise.

- De même, si $x = \frac{k+1}{3^n}$, x admet deux développements, qui à partir du rang $n+1$, ne sont plus constitués que de 0 ou de 2. Donc le $n+1$ -ième chiffre est nécessairement distinct de 1.

Ainsi, les $n+1$ premiers chiffres de x sont distincts de 1.

Réciproquement, si x admet un développement dont les $n+1$ premiers chiffres sont distincts de 1, ses n premiers chiffres sont distincts de 1, donc par hypothèse de récurrence, il existe un intervalle $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ de E_n le contenant. La description précédente des chiffres montre que si le $n+1$ -ième chiffre est différent de 1, x n'est pas dans le tiers médian $[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}]$ (il peut être égal à la borne inférieure de cet intervalle si le développement considéré est impropre). Ainsi, $x \in E_{n+1}$.

Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $x \in C$ ssi x admet un développement triadique sans 1.

3. On a donc une bijection $C \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, la première application associant à $x \in C$ la suite de ses chiffres en base 3. Ainsi, le cardinal de C est égal à celui de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Or $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ peut être mis en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via les fonctions indicatrices. Donc le cardinal de C est celui de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ce cardinal est celui de \mathbb{R} (montré en DM, en utilisant Cantor-Bernstein), mais on peut se contenter plus élémentairement de dire que d'après le théorème diagonal de Cantor, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$, donc C n'est pas dénombrable.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que E_n est constitué de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$. Ainsi, en définissant pour $(I_j)_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket}$ la suite de ces intervalles, on obtient

$$C \subset E_n = \bigcup_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket} I_j,$$

avec

$$\sum_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pour n assez grand $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$, d'où l'existence d'une famille d'intervalle telle que souhaitée.

Ainsi la mesure de Lebesgue de C est nulle.

Partie V – Dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor

1. Soit $x \in C_g$. Alors x admet un développement triadique sans 1, et donc le premier chiffre est 0. Donc $y = 3x$ (élément de $[0, 1]$) admet aussi un développement triadique sans 1 (obtenu de celui de x en décalant la virgule). On en déduit que $y \in C$, et $x = \frac{1}{3}y$, donc $x \in \frac{1}{3}C$. Réciproquement, si $x \in \frac{1}{3}C$, $x \in [0, \frac{1}{3}]$, et $3x$ admet un développement triadique sans 1. En décalant la virgule, c'est également le cas de x , donc $x \in C \cap [0, \frac{1}{3}]$.

Ainsi, $C_g = \frac{1}{3}C$.

2. De façon immédiate, par construction même, C_d est translaté de C_g (de $\frac{2}{3}$), donc possède mêmes mesures de Hausdorff. En utilisant les résultats de la partie 1, on a alors, en notant $s = \dim_H(C)$:

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g \cup C_d) \leq \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d).$$

Cette inégalité est même une égalité. En effet, pour tout $x \in C_g$ et tout $y \in C_d$, $|y - x| \geq 13$. Par ailleurs, pour tout δ recouvrement U de C_g , si on note V le recouvrement obtenu en supprimant de U les parts ne rencontrant pas C_g , on obtient une famille V (éventuellement finie, mais ce n'est pas grave car on peut la compléter par des ensembles vides), telle que V soit toujours un δ -recouvrement de E , et vérifie $\ell_s(V) \leq \ell_s(E)$. Ainsi, pour le calcul de la borne inférieure \mathcal{H}_δ^s , on peut se limiter au cas des recouvrements dont toutes les parts non vides rencontrent C_g . De même pour C_d et pour $C_g \cup C_d$. Or, si $\delta < \frac{1}{6}$, un ensemble U_i rencontrant $C_g \cup C_d$ rencontre un et un seul des deux ensembles C_g et C_d . Ainsi les δ -recouvrements U de $C_g \cup C_d$ dont toutes les parts non vides rencontrent $C_g \cup C_d$ sont exactement les recouvrements obtenus en fusionnant deux recouvrements V et W , l'un de C_g , dont les parts non vides rencontrent C_g , l'autre de C_d , donnant toutes les parts non vides rencontrent C_d . On a alors

$$\ell_s(U) = \ell_s(V) + \ell_s(W).$$

et passer à la borne inférieure sur U revient à passer à la borne inférieure indépendamment sur V et W , d'où

$$\mathcal{H}_\delta^s(C) = \mathcal{H}_\delta^s(C_g) + \mathcal{H}_\delta^s(C_d).$$

En passant à la limite lorsque δ tend vers 0,

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d).$$

On utilise maintenant la question I-7 combinée à V-1 :

$$\mathcal{H}^s(C) = \frac{2}{3^s} \mathcal{H}^s(C).$$

Comme $\mathcal{H}^s(C)$ est supposé distinct de 0 et $+\infty$, on peut simplifier, et on obtient $3^s = 2$, soit $s \ln(3) = \ln(2)$, donc

$$\dim_H(C) = s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

3. Les intervalles constituant E_k forment un 3^{-k} -recouvrement U de C constitué de 2^k intervalles de diamètre $\frac{1}{3^k}$. Ainsi

$$\ell^s(U) = 2^k \frac{2^k}{3^{ks}}.$$

Par conséquent, la borne inférieure sur les δ -recouvrements est inférieure à cette valeur, donc :

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq \left(\frac{2}{3^s}\right)^k.$$

4. Or, par définition de s , $3^s = 2$, donc

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 1.$$

En passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$, $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$

5. On peut dans un premier temps remplacer chaque U_n par un intervalle fermé U'_n de même diamètre que U_n (en prenant $U'_n = [\inf(U_n), \sup(U_n)]$). Comme (U_n) n'est pas entièrement constitué de singletons (car C n'est pas

dénombrable), $\ell^s(U) > 0$. Soit $\varepsilon = \ell^s(U)$. On peut alors inclure chaque intervalle U'_n dans un intervalle ouvert un peu plus grand U''_n tel que $|U''_n|^s \leq |U'_n|^s + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Alors

$$\ell^s(U'') \leq \ell^s(U') + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \ell^s(U) + \varepsilon = 2\ell^s(U).$$

Les U''_n forment un recouvrement de C par des ouverts. Comme C est fermé (comme intersection des E_n qui sont chacun fermés en tant qu'union finie d'intervalles fermés) et borné, C est compact. Donc d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire de U'' un recouvrement fini. Il existe donc $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que $(U''_i)_{i \in I}$ recouvre C . Notons \tilde{U}'' ce recouvrement. On a alors

$$\ell^s(\tilde{U}'') \leq \ell^s(U'') \leq 2\ell^s(U).$$

Enfin, on peut remplacer chaque intervalle ouvert U''_i de ce recouvrement par l'intervalle fermé V_i de mêmes bornes. Comme cela ne change pas le diamètre des intervalles, on obtient un recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ constitué d'intervalles fermés, et vérifiant

$$\boxed{\ell^s(V) \leq 2\ell^s(U)}.$$

6. Soit $i \in I$. Il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-(k_i+1)} \leq |V_i| < 3^{-k_i}$. Alors, les écarts entre les intervalles définissant E_{k_i} étant au moins de 3^{-k_i} , V_i rencontre au plus un des intervalles de E_{k_i} . Cet intervalle contenant 2 des intervalles de E_{k_i+1} , V_i rencontre au plus 2 intervalles de E_{k_i+1} , puis de même au plus 4 intervalles de E_{k_i+2} , et plus généralement, au plus 2^h intervalles de E_{k_i+h} . Ainsi, pour $j \geq k_i$, V_i rencontre au plus 2^{j-k_i} intervalles de E_j . Comme $3^s = 2$ et comme $|V_i| \geq 3^{-(k_i+1)}$, on a $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i|^s$. Ainsi, le nombre d'intervalles de E_j rencontrés par V_i est au plus égal à $2^{j+1}|V_i|^s$.

Comme les V_i sont en nombre fini, on peut considérer $j \geq \max(k_i)$. Alors la minoration obtenue est valable pour tout $i \in I$. Le nombre total d'intervalles de E_j rencontrés par l'un des V_i est alors au plus égal à

$$\sum_{i \in I} 2^{j+1}|V_i|^s = 2^{j+1}\ell^s(V).$$

Soit alors I un des intervalles de E_j . On remarque que les bornes de I sont dans C . Comme V est un recouvrement de C , ces bornes sont dans l'un des V_i . Ainsi, tout intervalle de E_j rencontre l'un des V_i , et ils sont au nombre de 2^j . On en déduit que

$$2^{j+1}\ell^s(V) \geq 2^j, \quad \text{donc:} \quad \boxed{\ell^s(V) \geq \frac{1}{2}}.$$

7. On en déduit que pour tout δ , $\mathcal{H}_\delta^s(C) \geq \frac{1}{4}$ (un facteur $\frac{1}{2}$ étant nécessaire pour le passage de U à V), donc, par passage à la limite, et d'après la question 4, $\mathcal{H}^s(C) \notin \{0, +\infty\}$. D'après la question III-3, on a alors nécessairement $s = \dim_H(C)$, d'où

$$\boxed{\dim_H(C) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}}.$$

Questions subsidiaires :

1. On procède comme dans la question V-6, en posant $s = m$, pour montrer que $\mathcal{H}^s(C_1) = 0$. Comme C_1 (le cube) est fermé et borné, il est compact. Le même type de réduction qu'en V-6 montre qu'on peut se limiter à un recouvrement fini. En effet, on peut remplacer chaque U_n par un V_n contenant U_n ouvert de diamètre égal à $|U_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, ε étant choisi arbitrairement. Il suffit par exemple de considérer

$$V_n = \bigcup_{x \in U_n} B(x, \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}),$$

ouvert comme union d'ouverts, et de diamètre majoré par $|U_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ par inégalité triangulaire.

On dispose donc d'un recouvrement $(V_n)_{n \in I}$ fini de C_1 . Soit $i \in I$ et soit k_i tel que $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i| < 2^{-k_i}$. Une majoration grossière indique que V_i ne peut pas rencontrer plus de 3^m cubes de la décomposition de C_1 en $2^{k_i m}$ cubes de côté 2^{-k_i} (on appellera k_i -décomposition de C_1 cette décomposition en cubes). En effet, étant

donné un point de U_i appartenant à l'un des cubes, les autres points de V_i étant à distance plus petite que 2^{-k_i} , ils restent dans le même cube, ou les cubes qui rencontrent ce cube par au moins un sommet. Chacun de ces cubes se subdivisant en 2^m cubes dans la $k_i + 1$ -décomposition de C_1 , puis en 2^{2m} cubes dans la $k_i + 2$ -décomposition etc, on en déduit que U_i rencontre au plus $2^{hm}3^m$ cubes de la $k_i + m$ décomposition de C_1 . Ainsi, pour tout $j \geq k_i$, V_i rencontre au plus $2^{m(j-k_i)}3^m$ cubes de la j -décomposition. Or, $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i|$, $2^{m(j-k_i)}3^m \leq 2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m$.

En prenant k plus grand que chaque k_i , chaque U_i rencontre au plus $2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m$ cubes de la j -décomposition. Cette décomposition admettant 2^{mj} cubes, puisque tout cube est rencontré par au moins un V_i , on obtient

$$\sum_{i \in I} 2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m \geq 2^{mj},$$

donc

$$\ell_m(V) \geq \frac{1}{6^m}.$$

Ainsi, $\ell_m(V)$ est minoré par une constante strictement positive, et donc $\ell_m(U)$ également, d'après la réduction initiale. On en déduit après passage à l'infimum et passage à la limite que $\mathcal{H}^m(C_1) > 0$.

Puisque $C_1 \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^m(RR^m) > 0$. Ainsi, par définition $\dim_H(\mathbb{R}^m) \geq m$. On avait prouvé dans la partie II que $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0$ lorsque $s > m$, ce qui entraîne $\dim_H(\mathbb{R}^m) \leq m$. On en déduit donc que $\dim_H(\mathbb{R}^m) = m$.

On pourrait montrer que $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^m) = +\infty$, en remarquant que \mathbb{R}^m est union d'une infinité de cubes. En espacant ces cubes (ne prendre que des cubes dont le coin de coordonnées minimales est à coordonnées paires), le même argument qu'en V-2 montre que $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^m)$ est la somme des \mathcal{H}^m de ces cubes, donc $+\infty$.

2. Vous pouvez trouver cette preuve dans tout livre de topologie.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass pour $n = 1$: par hypothèse, tous les éléments de la suite (u_n) sont dans un intervalle $[a, b]$. On réalise une dichotomie en partageant l'intervalle en 2 et en conservant à chaque étape une moitié contenant une infinité de termes. Cela donne une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles, décroissante pour l'inclusion, de longueur tendant vers 0 (elle est divisée par 2 à chaque étape), telle que chacun de ces intervalles contient une infinité de termes de la suite u_n . Les suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et convergent donc vers une limite commune ℓ .

On construit alors l'extraction en considérant $\varphi(0)$ quelconque (par exemple 0), puis $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$ (possible car $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n)), etc. (construction par récurrence, en s'arrangeant pour que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$, et $\varphi(n) > \varphi(n-1)$).

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est encadrée entre (a_n) et (b_n) , donc converge vers ℓ par théorème d'encadrement.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R}^m : On fait des extractions successives sur chaque coordonnée : soit $(X_n) = ((x_{n,1}, \dots, x_{n,m}))_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. Alors $(x_{n,1})$ est bornée. On en extrait $(x_{\varphi(n),1})$ convergeant vers ℓ . La suite $(x_{\varphi(n),2})$ est bornée, on en extrait une suite $(x_{\varphi \circ \psi(n),2})$ (est-ce vraiment le bon sens pour la composée des extractrices ? essayez de bien comprendre ce point !). La suite $(x_{\varphi \circ \psi(n),1})$ est alors extraite de la suite convergeante $(x_{\varphi(n),1})$, donc converge encore. On continue de la sorte avec les coordonnées suivantes, ce qui permet de conclure.

- Existence d'un rayon de sécurité : soit (U_i) un recouvrement de E fermé borné. Supposons qu'il n'existe pas $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $B(x, r)$ soit inclus dans l'un des U_i . On peut alors construire (x_n) telle que $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ ne soit entièrement inclus dans aucun U_i . La suite (x_n) étant bornée (car E est bornée), on peut en extraire $x_{\varphi(n)}$ convergente vers x . Puisque E est fermé, il n'est pas dur (par l'absurde) de montrer que $x \in E$. Puisque (U_i) recouvre E , il existe i tel que $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, il existe ε tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Par convergence, il existe N tel que pour $n \geq N$, $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$, $\frac{1}{2^{\varphi(n)}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i,$$

ce qui contredit la définition des x_i .

- Théorème de Borel-Lebesgue : On peut donc trouver r tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe U_i tel que $B(x, r) \subset U_i$. On construit (u_n) de la façon suivante : u_0 est quelconque dans E , u_1 est dans $E \setminus B(u_0, \varepsilon)$ si cet ensemble est non vide, et plus généralement, si $E \setminus \bigcup_{i=0}^n B(u_i, \varepsilon) \neq \emptyset$, u_{n+1} est choisi dans cet ensemble.

Si cette construction ne s'arrête pas, cela définit une suite (u_n) de E , donc bornée. On peut en extraire une suite convergante $(u_{\varphi(n)})$ (de limite ℓ). En particulier, il existe N tel que pour $n \geq N$, $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{r}{2}$. En particulier, $d(u_{\varphi(N)}, u_{\varphi(N+1)}) < r$, ce qui contredit la construction de $u_{\varphi(N+1)}$.
Ainsi, la construction s'arrête, c'est à dire qu'on dispose de u_0, \dots, u_N tels que

$$E \subset \bigcup_{i=0}^N B(u_i, r).$$

Par chaque u_i , on dispose d'un $U_{f(i)}$ tel que $B(u_i, r) \subset U_{f(i)}$. On a alors

$$E \subset \bigcup_{i=0}^N U_{f(i)}.$$

On a bien extrait un recouvrement fini de (U_i) .