CONTINUITÉ

Exercice 1. [$\star$] (Lemme de l'escalier, version fonctionnelle)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   a) Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\varepsilon$.
   b) En déduire qu'il existe un nombre réel M, dépendant de ε, tel que
   $$\forall x \geqslant A, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x} + \varepsilon.$$
   c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$.
2. Que se passe-t-il si $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$ admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$?

Exercice 2. [$\bigstar$]

Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 3. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Démontrer que soit f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ soit f tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4. [$\star$]

Pour tout entier naturel n, on note $I_n =]2n\pi\,; 2n\pi + \pi/2[$ et l'on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'existence d'un unique nombre réel u_n appartenant à l'intervalle I_n tel que $f(u_n) = 1$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u_n - 2n\pi$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f(u_n + 2\pi)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un nombre réel ℓ appartenant à $[0; x_0[$.
3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f(x_n) + 2\pi n \sin x_n$ et en déduire que $\sin x_n = \big(1 - f(x_n)\big)/2\pi n$.
   b) En déduire la valeur de ℓ.
   c) Déterminer un équivalent de la suite $(nx_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 5. [$\bigstar$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que l'image de tout segment est un segment et telle que l'image réciproque de tout singleton est un fermé de $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7. [$\star$]

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.

1. Donner un exemple de fonction f non constante vérifiant cette relation.
2. Soit f une fonction continue vérifiant cette relation. Démontrer que f est constante. (Une fois choisi un nombre réel $x > 0$, on pourra considérer la suite $x^{1/2^n}$).