Renseignements généraux

— *Concours* : X
— *Matière* : Mathématiques 2
— *NOM Prénom* : BULCKAEN Léo

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soient a, b, x et y des entiers relatifs non nuls et k un entier relatif.

1. Montrer que

$$a \arctan(\frac{1}{x}) \ + \ b \arctan(\frac{1}{y}) \ \equiv \ \frac{k \ \pi}{4} \ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (x+i)^a \ (y+i)^b \ (1-i) \ \in \ \mathbb{R}$$

.

2. Trouver a et x des entiers positifs vérifiant :

$$a \arctan \frac{1}{x} \ - \ \arctan \frac{1}{239} \ = \ \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant au moins deux racines distinctes et vérifiant $P"|P$.

1. Montrer que P est à racines simples.
2. Montrer que les racines de P sont alignées.

Remarques sur l'oral

Examinateur assez bavard et qui me permet en général de ne pas trop rédiger (notamment pour la fin).
Pour l'exercice 1, les angles qui apparaissent suggèrent de considérer l'argument. Il me demande une petite précision si x ou y sont négatifs quant à la définition de l'argument. Rien de bien méchant : j'explique tout à l'oral. La question 2 est plus compliquée. J'utilise tout d'abord naturellement l'équivalence que je viens de montrer. Je dis que la partie imaginaire s'annule mais reste stupéfait de la mocheté de son expression. Après m'avoir laissé faire ces calculs (je pense qu'il voulait voir si je savais le faire rapidement), il me suggère de considérer un complexe qui, élevé à la puissance 4 et multiplié par $(1-i)$, donne le nombre complexe voulu $(-239+i)$. Je lui donne une méthode pour le trouver et je tombe sur 8 candidats en regardant les modules, puisqu'il m'indique que $239^2+1 = 13^4 \times 2$. Il m'épargne les calculs et me donnent le nombre qui fonctionne avant de me faire remarquer que c'est un premier de $\mathbb{Z}[i]$. A partir de là, je dis cette fois qu'un complexe est réel à condition qu'il soit égal à son conjugué, et j'écris le résultat. Je suis un peu perdu, et il me rappelle qu'on cherche à trouver deux entiers qui vérifient l'égalité (je pensais qu'on les cherchais tous). Je pose $a = 4$ et j'obtiens une égalité vérifiée par x à un inversible de $\mathbb{Z}[i]$ près. J'intuite que

le bon inversible est i, et je trouve x=5. Je lui affirme que c'est fini mais il me dit que pas tout à fait. En fait, il faut encore montrer que l'on vaut $\frac{\pi}{4}$ et pas un multiple. Cela se fait en utilisant que arctan est lipschitzienne.
Le deuxième exercice m'a un peu déstabilisé au départ. Je formalise P et j'écris la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$. Je me rends compte que $\frac{P"}{P}$ a une forme bien connue, et ce a fortiori si P a une racine multiple. Je suppose alors par l'absurde que c'est le cas et je montre d'abord la propriété si P est à racines réelles à coups de théorème de Rolle. Il a mis du temps à comprendre cet argument mais a fini par le valider. Pour le cas complexe, j'ai utilisé les deux seules choses que je savais exprimer en fonction des racines de P, toujours en supposant qu'il n'est pas simplement scindé, c'est-à-dire $\frac{P'}{P}$ et $\frac{P"}{P}$. Le souvenir d'un exercice fait cette année m'a alors poussé à dériver le premier pour obtenir le deuxième et puis c'est gagné : j'ai une équation du second degré portant sur la multiplicité de la racine multiple de P considérée. les racines de cette équation sont le degré de P et un nombre négatif, ce qui me permet de conclure puisque P a deux racines distinctes au moins.
Pour la deuxième question, il restait peu de temps, je lui dis que ça me fait penser au théorème de Gauss-Lucas en faisant un dessin. Je montre que P' est simplement scindé (ce qui ne se fait pas trop difficilement). L'idée est alors de voir que si les racines de P ne sont pas alignées, celles de P" ne peuvent pas coïncider avec au moins trois des racines de P (faire un dessin), ce qui suffit pour conclure. Il se dit satisfait de l'intuition et me demande de formaliser un peu en considérant un triangle et en montrant que le barycentre est inclus dans un ouvert strictement compris dans le triangle. J'écris une relation et je lui dit que c'est fini, il met un peu de temps à comprendre et m'explique une histoire de continuité du barycentre que je n'ai pas vraiment comprise. L'oral s'arrête là.