INSPE Antony | 2024-2025
M2 PLP MPC | L. Lagon

TD : Analyse

1 Limites

Exercice 1 : Calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \to +\infty$

a: $x \to \dfrac{x+7}{4x+3}$ b: $x \to \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$ c: $x \to cos(x^2)e^{-x}$ d: $x \to x^4e^{-x}$

e: $x \to \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

Exercice 2 : Calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \to 0$

a: $x \to \sqrt{x}\ln(x)$ b: $x \to \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

Exercice 3 : On considère la parabole représentant la fonction $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0;1]$ et dont on désire calculer la surface sous la courbe S_n par la méthode des rectangles.

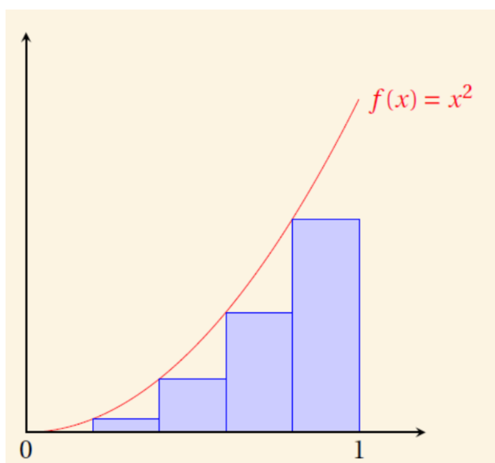

Figure 1 – Methode des rectangles

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer que $S_n = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$
3. Conclure

Exercice 4 : Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = n\sin(\frac{1}{n})$$

2 Dérivation

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

Exercice 6 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$

Exercice 7 : Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, soit f la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \to ax^2$$

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisse x_1 et x_2

Exercice 8 : Soit p un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
2. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(E_p) \quad x^5 - 5x = p$$

3 Equations différentielles

Exercice 9 : Résoudre l'équation différentielle :

$$3y' - 5y = 0$$

Exercice 10 : Résoudre l'équation différentielle :

$$3x^2y' - 6y = 0$$

Exercice 11 : Résoudre l'équation différentielle

$$y' + y = e^x + 1$$

Exercice 12 : (CAPLP 2023)

On considère l'équation différentielle $4y'' - 12y' + 9y = 1$. Est il vrai qu'il existe une solution à cette équation différentielle strictement négative ?

4 CAPLP (Extraits)

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}$ pour n entier naturel par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Partie B : étude du cas particulier de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$.

1. Étudier la parité de la fonction f_0 .
2. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de f_0 .
3. Exprimer $f_0(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$.

Partie C : étude du cas particulier de la fonction f_1

1. Étude de la fonction f_1.
   Dans cette partie, on note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 dans un repère orthonormé du plan.
   (a) Étudier la parité de la fonction f_1 .
   (b) Établir le tableau des variations de la fonction f_1 sur $[0; +\infty[$.
   (c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote horizontale et préciser la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à cette asymptote.
   (d) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.
   (e) Justifier que f_1 est de classe 2 sur $\mathbf{R}$. Étudier la convexité de f_1 et déterminer les éventuels points d'inflexion.

Partie D : étude du cas général

1. Étude de la fonction f_n pour $n \in \mathbf{N}^*$.
   On rappelle que la fonction f_n est définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2})$.
   (a) Étudier la parité de f_n en fonction de n.
   (b) Donner le sens de variation de f_n sur $\mathbf{R}_+$.