Devoir Surveillé n^o 5 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Exercice 1 – (Système dynamique perturbé)

Soit (v_n) une suite réelle, et (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, et la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 + v_n.$$

On pourra dans cet exercice utiliser sans preuve le théorème de la moyenne de Cesàro : si $u_n \to \ell$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \to \ell$.

1. On étudie dans cette question le cas particulier où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$.
   (a) Étudier, suivant la valeur de u_0, la limite de (u_n). On illustrera les résultats obtenus sur un graphe.
   (b) Soit u_0 tel que $u_n \to 0$. Déterminer un équivalent simple de u_n, sous la forme βn^α.
2. On suppose maintenant (v_n) quelconque de limite nulle, et on suppose de plus que (u_n) est bornée.
   (a) Quelle est la seule limite possible de (u_n) ?
   Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| < \varepsilon^2$
   (b) Montrer que s'il existe $n \geqslant n_0$, tel que $u_n \geqslant \varepsilon$, alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
   (c) Montrer qu'il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $u_{n_1} > -\varepsilon$
   (on pourra montrer que dans le cas contraire, (u_n) convergerait vers une limite strictement négative)
   (d) Montrer que si de plus $\varepsilon < \frac{1}{2}$, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n > -\varepsilon$.
   (e) Qu'en déduit-on sur la convergence de la suite (u_n) ?

Problème 1 – Étude d'une famille de suites récurrentes d'ordre 2 (Centrale 1989, à peu de choses près)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.
On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

$$(\mathcal{R}) : \quad \forall n \geqslant 1, \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2),$$

et telles que, de plus, on ait $U_0 \geqslant 0$ et $U_1 \geqslant 0$.
On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.
Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.
Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ.
La partie IV ne dépend que de la partie I.

Partie I – Généralités

1. (a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.
   (b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?
   (c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.
   (d) Montrer que si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.
   (e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?
2. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à S et *non constante.*
   (a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$, pour $n \geqslant 2$.
   (b) Montrer que, s'il existe $N \geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

   On établirait de même que, s'il existe $N \geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.
   (c) Déterminer les limites des suites $U(x, y)$ pour $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ et pour $x = 2$, $y = 0$.
3. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante.

   On ne cherchera pas, dans cette question, à démontrer l'existence de telles suites.

   Montrer que les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotone et de sens contraire. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. Établir, pour une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non constante* appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $U_N \geqslant 1$ et $U_{N+1} \geqslant 1$;
   (ii) la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang ;
   (iii) la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

   On pourra, pour cela, établir que si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (i), tous ses termes sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1.
5. Établir de même, pour une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S *non constante*, l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $U_N \leqslant 1$ et $U_{N+1} \leqslant 1$;
   (ii) la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ;
   (iii) la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
6. Montrer que E_0, E_1 et E_∞ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Partie II – E_1 a au moins deux éléments

Pour $(x, y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x, y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, y)$.

1. Comparer $\lambda(x, y)$ et $\lambda(x', y')$ dans l'hypothèse où (x, y) et (x', y') vérifient $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.
2. On considère deux couples (x, y) et (x', y') éléments de Q. On suppose de plus que $U(x, y)$ converge vers 1.
   (a) Montrer que si l'on a, pour un entier N :

$$U_{N-1}(x, y) + \varepsilon \leqslant U_{N-1}(x', y') \qquad \text{et} \qquad U_N(x, y) + \varepsilon \leqslant U_N(x', y'),$$

   alors on a, pour tout $n \geqslant N$: $U_n(x, y) + \varepsilon \leqslant U_n(x', y')$.
   (b) Donner la valeur de $\lambda(x', y')$ dans les deux cas suivants :
   - $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$;
   - $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.

3. (a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ borne supérieure de l'ensemble des $x \geqslant 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul.
   (b) Que dire de $\lambda(x, 0)$ pour $0 \leqslant x < a$?
   (c) Justifier que $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$.
4. (a) Montrer que pour tout n, la fonction $x \mapsto U_n(x, 0)$ est continue.
   (b) Montrer que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers 0, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a + \varepsilon, 0)$ tende vers 0 ; on pourra pour cela utiliser la question I-5.
   (c) Montrer de même que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a - \varepsilon, 0)$ tende vers $+\infty$
   (d) En déduire $\lambda(a, 0)$. Que vaut $\lambda(x, 0)$ pour $x > a$?
   (e) Montrer que, pour $y > 0$, la suite $(U_n(a, y))_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Partie III – Étude de E_0, E_1 et $E_{+\infty}$

1. (a) Soit $x \in [0, a]$. Établir l'existence d'un point unique de E_1 ayant l'abscisse x.
   On note désormais $\varphi(x)$ l'ordonnée de ce point et Γ la courbe décrite par le point $(x, \varphi(x))$ quand x varie de 0 à a.
   (b) Décrire à l'aide de Γ les ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$.
2. (a) Montrer que φ décroît. Déterminer $\varphi(1)$ et $\varphi(a)$.
   (b) À l'aide de la relation $U_n(x, y) = U_{n-1}\left(y, \dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)$, établir, pour $x \in [0, a]$, la relation :
   $$x^2 + \varphi^2(x) = 2\varphi(\varphi(x)).$$
   (c) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{a^2}{2}\right)$.
3. (a) Soit y compris au sens large entre 0 et $\varphi(0)$. Montrer qu'il existe un point unique de E_1 d'ordonnée y.
   (b) Montrer que φ est strictement décroissante.
   (c) Montrer que φ est continue.
4. (a) Étudier les variations de $x \mapsto x^2 + \varphi^2(x)$, pour $x \in [0, a]$. En déduire que Γ est située dans une couronne circulaire que l'on précisera.
   (b) Montrer que φ est dérivable en 0 et déterminer $\varphi'(0)$.
   (c) Établir, pour $x \in [0, a]$, l'inégalité $\varphi(x) \leqslant \sqrt{ax - x^2}$.
   On pourra comparer les suites $U(a, 0)$ et $U\left(x, \sqrt{ax - x^2}\right)$
   (d) Qu'en résulte-t-il pour le comportement de φ au voisinage de a ?
   (e) En admettant que φ est dérivable pour $x = 1$, calculer $\varphi'(1)$.
   (f) Tracer la représentation graphique de φ aussi fidèlement que possible.

Partie IV – Étude asymptotique des suites monotones de S

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque appartenant à S. Démontrer, pour tout $n \geqslant 1$, les inégalités :
   $$\frac{1}{2}U_n^2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n + \frac{1}{2}U_n^2.$$
2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$. On pose
   $$V_n = \frac{U_n}{2} \qquad \text{et} \qquad z_n = 2^{-n}\ln(V_n).$$
   (a) En étudiant la série $\sum(z_{n+1} - z_n)$, montrer que la suite (z_n) tend vers une limite L, qu'on ne cherchera pas à déterminer.

(b) Les hypothèses restant les mêmes, établir la double inégalité :

$$L - \frac{1}{2^n V_n} \leqslant z_n \leqslant L$$

pour n assez grand.

(c) En déduire un équivalent de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$ (on posera $\mathrm{e}^L = M$).

(d) Montrer que la différence entre U_n et cet équivalent est bornée.

3. On considère ici une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à S, non constante et tendant vers 0. Établir qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$U_{n+1} \leqslant U_{n-1}^2.$$

4. En déduire l'existence de deux constantes $A > 0$ et $B > 1$ telles que, pour tout n, on ait

$$U_n \leqslant \frac{A}{B^{2^{\frac{n}{2}}}}.$$