Feuille d'exercices n^o 16 : corrigés

Exercice 1

1. • Pour la première permutation, on trouve :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,3,2,8,6)(5,7,10,9)\\ &= (1,3)(3,2)(2,8)(8,6)(5,7)(7,10)(10,9).\end{aligned}$$

On obtient :
$$\varepsilon(\sigma) = -1.$$

• Pour la deuxième permutation, on trouve :

$$\sigma = (1,2)(3,6)(4,5)$$

qui est à la fois la décomposition en cycles à supports disjoints et la décomposition en transpositions.
On obtient ici la signature :
$$\varepsilon(\sigma) = -1.$$

• Pour la troisième permutation, on distingue deux cas :
▷ l'entier n est pair égal à $2k$; dans ce cas :

$$\sigma = (1,2k)(2,2k-1)\cdots(k,k+1),$$

qui est la décomposition en cycles à supports disjoints et une décomposition en transpositions. Dans ce cas,
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

▷ l'entier n est impair égal à $2k+1$; dans ce cas :

$$\sigma = (1,2k+1)(2,2k)\cdots(k,k+2),$$

qui est la décomposition en cycles à supports disjoints et une décomposition en transpositions. Dans ce cas,
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

• Pour la quatrième permutation :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,2,\cdots,p)\\ &= (1,2)(2,3)\cdots(p-1,p)\end{aligned}$$

et sa signature vaut :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}.$$

- Pour la cinquième permutation, on peut déjà simplifier la permutation σ selon :

$$\sigma = (1,3,2) \circ (1,3,5) \circ (5,6,7) \circ (1,3,4,2).$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \sigma & = & (1,5,6,7,3,4) \\ & = & (1,5)(5,6)(6,7)(7,3)(3,4) \end{array}$$

de signature égale à (-1).

2. Si σ est décomposée en cycles à supports disjoints, alors la suite $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période égale au ppcm des longueurs des cycles qui interviennent dans cette décomposition. Les suites sont respectivement de période 20, 2, 2, p, 12 et 6.
3. Si $f \circ f = \sigma$, alors en prenant la signature, on obtient :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(f)^2 = 1.$$

Si σ est de signature égale à -1, l'équation n'admet pas de solution.
Si σ est de signature égale à 1, on utilise le fait que si c est un cycle de longueur ℓ, alors c^2 est soit un cycle de longueur ℓ si ℓ est impair, soit id si c est une transposition, soit la composée de deux cycles à supports disjoints de même longueur $\dfrac{\ell}{2}$ si ℓ est pair supérieur à 4.
On en déduit que l'équation $f \circ f = \sigma$ admet au moins une solution si et seulement si dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints pour tout entier ℓ pair, il y a un nombre pair de cycles de longueur ℓ. On pourra alors regrouper deux par deux ces cycles pour finalement avoir une solution via l'égalité

$$f^2 = (a_1, \cdots, a_k)(b_1, \cdots, b_k),$$

si k est pair, avec $f = (a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, b_k)$ ou via l'égalité :

$$f^2 = (a_1, \cdots, a_{2k+1}) = c,$$

avec $f = c^{-k}$.
En appliquant ceci aux six permutations, on obtient respectivement les six réponses : non, non, oui si et seulement si n est congru à 0 ou 1 modulo 4, oui si et seulement si p est impair, non et non.

Exercice 10

1. On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice $D(a,b,c)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les calculs qui suivent peuvent être considérés dans le corps $\mathbb{R}(X)$ par exemple.

$$P(X) = \det_{\mathscr{B}_c}\Big(C_1 + X \cdot U, C_2 + X \cdot U, \cdots, C_n + X \cdot U\Big).$$

On peut développer ce déterminant par multilinéarité, ce qui fait apparaître 2^n termes. Ces 2^n termes apparaissent en choisissant pour tout k entre 1 et n, ou bien la colonne C_k, ou bien la colonne $X \cdot U$.

Dès que l'on choisit au moins deux fois la colonne $X \cdot U$, la famille formée contiendra deux fois le même vecteur. Cette famille sera alors de déterminant nul.

Il ne reste que $n+1$ termes après développement, le terme sans X, où on a choisi C_k à chaque fois et n termes de la forme :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(\cdots, X \cdot U, \cdots) = X \cdot \det_{\mathscr{B}_c}(\cdots, U, \cdots)$$

où on a choisi une seule fois le vecteur $X \cdot U$ (en $k^{\text{ème}}$ position) et $n-1$ fois le vecteur C_j sans X.

Il est donc clair que $P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

2. Calculer $P(-b)$ et $P(-c)$ revient à calculer des déterminants de matrices triangulaires, ce qui est facile à faire. On trouve :

$$P(-b) = (a-b)^n \text{ et } P(-c) = (a-c)^n.$$

3. • Lorsque $b \neq c$, on peut poser :

$$P(X) = \alpha\ X + \beta \in \mathbb{R}_1[X].$$

On résout le système :

$$\begin{cases} \alpha\ (-b) + \beta = (a-b)^n \\ \alpha\ (-c) + \beta = (a-c)^n \end{cases}$$

ou plutôt on trouve $\beta = P(0) = D(a,b,c)$, qui est la valeur demandée. On obtient :

$$\beta = \frac{(a-b)^n\ c - (a-c)^n\ b}{c-b}.$$

• Lorsque $b = c$, on a deux méthodes différentes qu'il est bien de comprendre :

▷ l'application $f : h \longmapsto D(a, b, b+h)$ est continue, car en fait polynomiale en la variable h. Lorsque h tend vers 0^+, les nombres b et $b+h$ sont toujours différents, donc on peut appliquer le résultat précédent, ce qui donne :

$$f(h) = \frac{(a-b)^n \times (b+h) - (a-b-h)^n \times b}{h}.$$

On lève la forme indéterminée par un développement limité par exemple, ou on peut y voir un taux de variation. On obtient en utilisant le binôme de Newton par exemple (cela évite de diviser par $(a-b)$ potentiellement nul...) :

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{(a-b)^n \times b + (a-b)^n \times h - \Big[(a-b)^n - n(a-b)^{n-1}\ h + \circ(h)\Big] \times b}{h} \\ &= (a-b)^{n-1}\ \Big(a + (n-1)b\Big) + \circ(1). \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0^+, on obtient :

$$D(a,b,b) = (a-b)^{n-1}\ \Big(a+(n-1)b\Big).$$

▷ on s'occupe la matrice associée à $D(a,b,b)$. On pose la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1. Alors,

$$D(a,b,b) = \det(b\ J + (a-b)\ I_n).$$

Or, la matrice J est de rang 1 et on voit que :

$$\operatorname{Ker}(J) \oplus \operatorname{Im}(J) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

En prenant une base adaptée à cette décomposition, on voit alors que la matrice J est semblable à la matrice $n\ E_{n,n}$. Plus précisément, si P est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors :

$$P^{-1}JP = n\ \cdot E_{n,n}.$$

On vient de diagonaliser la matrice J et donc la matrice $b\ J + (a-b)\ I_n$
On en déduit :

$$b\ J + (a-b)\ I_n = P\Big(\operatorname{Diag}(a-b, a-b, \cdots, a-b, a+(n-1)b)\Big)P^{-1},$$

et donc maintenant :

$$\begin{aligned} D(a,b,b) &= \det\Big(\operatorname{Diag}(a-b, a-b, \cdots, a-b, a+(n-1)b)\Big) \\ &= (a-b)^{n-1}\ \Big(a+(n-1)b\Big). \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On trouve :

$$\sigma \circ (i,j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j)),$$

en testant les images de chaque élément $k \in [\![1,n]\!]$. Voici le détail.
Si k est un entier entre 1 et n, on distingue plusieurs cas :
▷ l'entier k vaut $\sigma(i)$. Alors, $\sigma^{-1}(k) = i$, puis $\tau(i) = j$, puis :

$$\sigma(\tau(\sigma^{-1}(k))) = \sigma(j)$$

▷ l'entier k vaut $\sigma(j)$. Alors, $\sigma^{-1}(k) = j$, puis $\tau(j) = i$, puis :

$$\sigma(\tau(\sigma^{-1}(k))) = \sigma(i)$$

$\triangleright$ l'entier k ne vaut ni $\sigma(i)$, ni $\sigma(j)$. Dans ce cas, l'entier $\sigma^{-1}(k)$ ne vaut ni i, ni j, donc est un point fixe de la transposition τ et :

$$\sigma(\tau(\sigma^{-1}(k))) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k.$$

2. Si $\rho = (k, \ell)$ une transposition dans $\mathfrak{S}_n$, si k ou ℓ vaut 1, alors directement $\rho \in T$, donc la transposition est effectivement un produit d'éléments de T (en fait d'un seul) et si ni k ni ℓ ne valent 1, alors on applique le préambule à la permutation $\sigma = (1, k)$ et à la transposition $\tau = (1, \ell)$ de sorte que $\sigma^{-1} = \sigma$, puis :

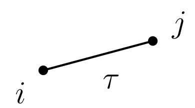
$$\rho = (k, \ell) = (1, k) \circ (1, \ell) \circ (1, k).$$

Ce qui précède montre que toute transposition dans $\mathfrak{S}_n$ est un produit d'éléments de T (produit de 1 ou 3 termes). On conclut alors que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ décomposable en un produit de transpositions est donc décomposable en un produit de produits d'éléments de T, qui est donc un (plus gros) produit d'éléments de T.

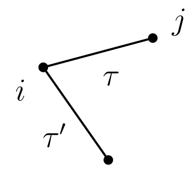
3. Reste le plus difficile : pourquoi est-ce que ça ne marche pas si on prend un ensemble $\mathscr{U} = \{\tau_1, \cdots, \tau_{n-2}\}$ de $(n-2)$ transpositions ?

On va schématiser la situation de la façon suivante : chaque élément de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ sera représenté par un point $\bullet$ et chaque transposition $\tau = (i, j)$ de l'ensemble $\mathscr{U}$ sera représentée par une arête reliant les points i et j. On va alors construire ce qu'on appelle un graphe (avec des sommets et des arêtes) de la façon suivante :

$\triangleright$ On commence par prendre un élément $\tau = (i, j)$ de l'ensemble $\mathscr{U}$, ce qui donne un premier graphe :

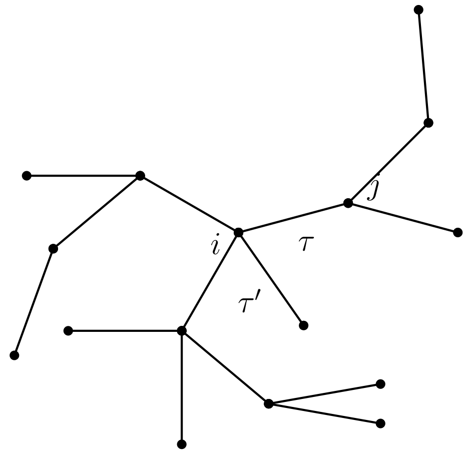


$\triangleright$ Ensuite, on cherche parmi les éléments de $\mathscr{U}$ un élément τ' dont un point du support de la transposition τ' est déjà tracé et le second pas encore, pour donner un deuxième graphe :



$\triangleright$ On recommence le procédé. Si à une certaine étape, on dispose d'un graphe déjà tracé avec un certain nombre de points et d'arêtes (en fait il y a toujours un point de plus qu'il n'y a d'arêtes), on pioche dans $\mathscr{U}$ une transposition (k, ℓ) dont un seul des deux points k ou ℓ est déjà tracé dans le graphe et l'autre non, ce qui rajoute donc un point et une arête dans notre graphe.

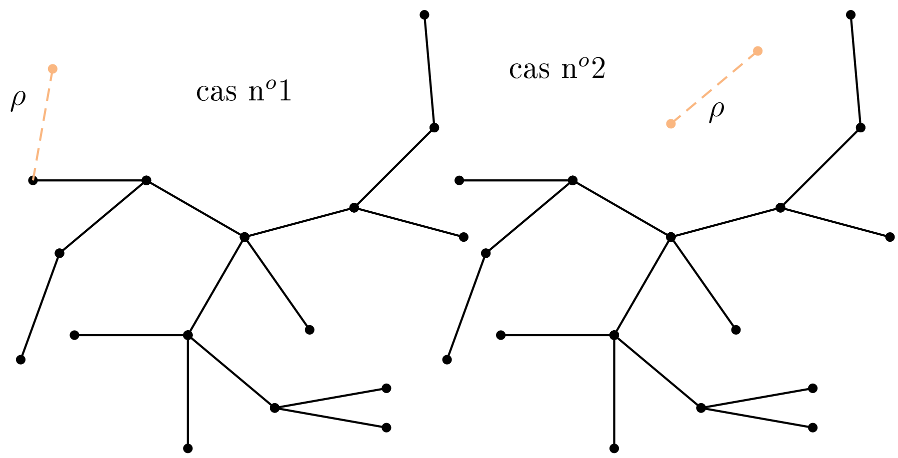
À un moment donné, soit on a épuisé tous les éléments de $\mathscr{U}$, soit il n'est plus possible de trouver des éléments de $\mathscr{U}$ qui conviennent à cette construction. Voici ce que l'on obtient à la fin de la construction :

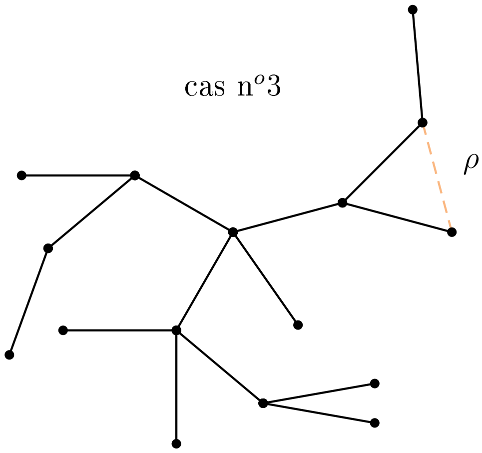


Combien ce graphe final contient-il d'arêtes ? Réponse : autant que l'on a pu prendre de transpositions dans l'ensemble $\mathscr{U}$ pour construire ce graphe, c'est-à-dire au maximum $(n-2)$. Le graphe comportant toujours un point de plus qu'il n'y a d'arêtes, il y a au maximum $(n-1)$ points dans ce graphe.

Il y a donc au moins un élément (donc un point) de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ qui n'est pas représenté dans notre graphe.

Soit maintenant une transposition $\rho = (k, \ell)$ dans l'ensemble $\mathscr{U}$. Voyons comment se place l'arête ρ dans notre graphe : il y a trois possibilités, selon que les deux points k et ℓ figurent ou non dans le graphe :





Le cas n^{o}1 est tout bonnement impossible, sinon, on aurait pu prendre la transposition ρ pour compléter le graphe déjà construit avec un point et une arête de plus.
En ce qui concerne le cas n^{o}2, tous les points du graphe sont des points fixes pour la transposition ρ.
Pour ce qui est du cas n^{o}3, un point du graphe est changé en un autre point du graphe (il se peut que la transposition ρ corresponde à une arête déjà tracée dans le graphe).
En résumé, quoiqu'il arrive, chaque point du graphe est transformé, par n'importe quelle transposition de l'ensemble $\mathscr{U}$ en un point du même graphe.
Or, rappelons-nous qu'il existe au moins un point p de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ qui n'est pas dans le graphe. Si on fixe i un point du graphe, la permutation :

$$\sigma = (i, p)$$

prend le point i du graphe pour l'amener à l'extérieur de celui-ci. Il est donc impossible de décomposer la permutation σ comme un produit d'éléments de l'ensemble $\mathscr{U}$, car sinon les images successives du point i par ces transpositions formeraient un chemin à l'intérieur du graphe, sans jamais pouvoir atteindre le point p.
Il y a donc des permutations qui ne peuvent s'écrire comme un produit d'éléments de $\mathscr{U}$.

Exercice 12

• On calcule le déterminant de la matrice A représentant f selon la base canonique par exemple. Ainsi,

$$\det(f) = \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 14.$$

• Si $r = 0$, alors on pose $Q = a$ qui est un polynôme constant et l'application f est l'homothétie de rapport a sur $\mathbb{C}_n[X]$. On en déduit :

$$\det(f) = a^{n+1}.$$

Si $r > 0$, alors $f(1) = 0$, donc f n'est pas inversible et $\det(f) = 0$.

On peut remarquer que l'application f définie dans l'énoncé est toujours un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, pour n'importe quelle valeur de r. Par exemple, si $r > n$, alors $f = 0$.

• On note d_n le déterminant à calculer. On en déduit les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
d_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \quad [\ \forall k \geqslant 2,\ C_k \longleftarrow C_k - C_1\ ] \\
&= d_{n-1} \quad [\text{ développement première ligne }]
\end{aligned}$$

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante égale à $d_1 = 1$.

• On note δ_n le déterminant à calculer. On en déduit les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [\text{ pour } k \text{ de } n \text{ à } 2,\ C_k \longleftarrow C_k - C_{k-1}\ ] \\
&= (-1)^{n+1}\, n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}\, n.
\end{aligned}$$

Exercice 13

• On note $A_n = A$ la matrice dont on veut calculer le déterminant.

On utilise la formule de Pascal :

$$\binom{j}{i-1} - \binom{j-1}{i-1} = \binom{j-1}{i-2}.$$

On en déduit qu'en effectuant les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1}$, pour j variant de n à 2, on obtient :

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ \star & & & \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}).$$

La suite $(\det(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $\det(A_1) = 1$.

• On note Δ_n le déterminant à calculer. On obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad [\text{ pour } k \text{ de } n \text{ à } 2,\ C_k \longleftarrow C_k - C_{k-1}] \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \ddots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [\ \forall k \in [\![2,n]\!],\ L_k \longleftarrow L_k + L_1\ ] \\
&= (-1)^{n+1}\,(n-1)\,2^{n-2} \quad [\text{ développement dernière ligne }]
\end{aligned}$$

• On note $\Delta_n(\theta)$ le déterminant de la matrice A de format $n \times n$.
On en déduit une fois que l'on développe par rapport à la dernière colonne –développer par rapport à la première colonne est une mauvaise idée car on perdra la matrice au rang inférieur :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\theta) &= 2\cos\theta \times \Delta_{n-1}(\theta) - \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad [\text{ développement dernière colonne }] \\
&= 2\cos\theta \times \Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta) \quad [\text{ développement dernière ligne }].
\end{aligned}$$

On remarque que $\Delta_1(\theta) = \cos(\theta)$ et $\Delta_2(\theta) = \cos(2\theta)$.
En utilisant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux qui ressemble étrangement à celle des polynômes de Tchebychev, on obtient :

$$\Delta_n(\theta) = \cos(n\theta).$$

• On note Σ_n le déterminant demandé. On a :

$$\begin{aligned}
\Sigma_n &= \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= a\ \Sigma_{n-1} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad [\text{ développement première colonne }] \\
&= a\ \Sigma_{n-1} - b\ c\ \Sigma_{n-2} \quad [\text{ développement première ligne }].
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la suite $u = (\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = a,\ u_2 = a^2 - bc \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ u_n = a\ u_{n-1} - bc\ u_{n-2}.$$

On pose le polynôme :

$$P(X) = X^2 - aX + bc.$$

Si $\Delta = a^2 - 4bc \neq 0$, on a deux racines complexes λ et μ et u_n est de la forme :

$$u_n = \alpha\ \lambda^n + \beta\ \mu^n,$$

avec α et β calculés par la condition initiale donnée par le couple (u_1, u_2).
Si $\Delta = 0$, on a une racine double λ et u_n est de la forme :

$$u_n = (\alpha\ n + \beta)\ \lambda^n,$$

avec α et β calculés par la condition initiale donnée par le couple (u_1, u_2).
Ce déterminant s'appelle un déterminant tridiagonal.

Exercice 4

1. On a immédiatement $\mathrm{id} \in \Gamma_\rho$.
   Ensuite, si σ_1 et σ_2 sont dans Γ_ρ, alors :

$$\sigma_2 \circ \rho = \rho \circ \sigma_2.$$

En composant à droite et à gauche par σ_2^{-1}, on obtient :

$$\rho \circ \sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1} \circ \rho.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}) \circ \rho &= \sigma_1 \circ (\sigma_2^{-1} \circ \rho) \\
&= \sigma_1 \circ \rho \circ \sigma_2^{-1} \\
&= \rho \circ \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} \\
&= \rho \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ appartient à Γ_ρ.

2. Soit σ appartenant à Γ_ρ.
Soit i dans $\{1,2,3\}$. Alors, $\rho(i) \neq i$, donc $\sigma \circ \rho(i) \neq \sigma(i)$ et donc $\rho \circ \sigma(i) \neq \sigma(i)$.
On en déduit que $\sigma(i)$ appartient au support de ρ, à savoir $\{1,2,3\}$.
Soit $i \in \{4,5\}$. Alors, $\rho(i) = i$, donc $\sigma \circ \rho(i) = \sigma(i)$ et donc $\rho \circ \sigma(i) = \sigma(i)$. L'élément $\sigma(i)$ est donc un point fixe de ρ.
Ainsi, $\sigma(\{1,2,3\}) \subset \{1,2,3\}$ et $\sigma(\{4,5\}) \subset \{4,5\}$, avec égalités des cardinaux finis, donc égalités des ensembles.
Si $\sigma(1) = 1$, alors $\sigma(2) = \sigma \circ \rho(1) = \rho \circ \sigma(1) = \rho(1) = 2$ et $\sigma(3) = 3$.
Si $\sigma(1) = 2$, alors $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.
Si $\sigma(1) = 3$, alors $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$.
En définitive, σ appartient à :

$$\Big\{\mathrm{id}, \rho, \rho^{-1}, (4,5), \rho \circ (4,5), \rho^{-1} \circ (4,5)\Big\}$$

et on vérifie que ces six permutations conviennent.
En définitive,

$$\Gamma_\rho = \Big\{\mathrm{id}, \rho, \rho^{-1}, (4,5), \rho \circ (4,5), \rho^{-1} \circ (4,5)\Big\}.$$

On veut maintenant établir un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $(\Gamma_\rho, \circ)$.
On pose l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma_\rho \\ \overline{k} & \longmapsto & (\rho \circ (4,5))^k. \end{array} \right. .$$

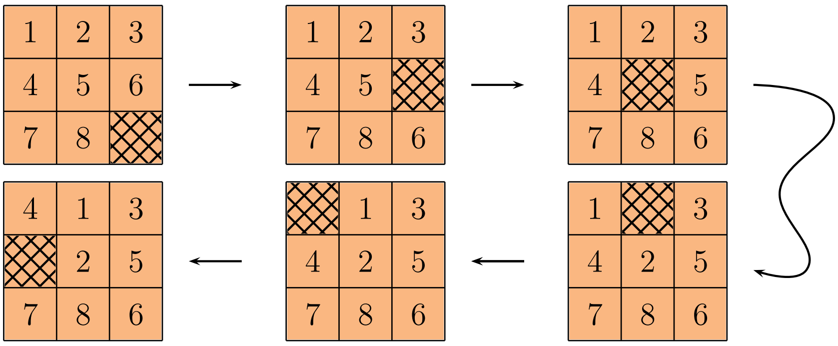
Cette application est bien définie car $(\rho \circ (4,5))^6 = \mathrm{id}$ donc la puissance est identique quel que soit le représentant k dans la classe $\overline{k}$ modulo 6.
Il est facile de voir que :

$$\Phi(\overline{k} + \overline{k'}) = \Phi(\overline{k + k'}) = \Phi(\overline{k}) \circ \Phi(\overline{k'}).$$

Enfin, si $\overline{k} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors $\overline{k} = \overline{0}$ car l'entier k doit être multiple du ppcm des longueurs des cycles de $\rho \circ (4,5)$.
Le morphisme Φ est injectif. Par égalités des cardinaux finis entre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et Γ_ρ, alors Φ est une bijection.

Exercice 5

Attribuons à la case vide le numéro 9. Chaque coup consiste donc à permuter deux cases et la succession de coups consiste donc en une composée de transpositions. Par exemple, la succession des coups suivants :



correspond à la permutation :

$$\sigma = (4,9) \circ (1,9) \circ (2,9) \circ (5,9) \circ (6,9).$$

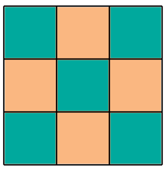
En calculant la composition, on obtient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 9 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1,4,9,6,5,2).$$

S'il était possible de parvenir de la configuration initiale à la configuration proposée dans l'énoncé, on pourrait, à l'aide d'un nombre fini de coups (donc de transpositions contenant le chiffre 9), décomposer la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 8 & 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (3,9,5) \circ (4;8) \circ (6,7)$$

en un nombre fini (autant que de coups) de transpositions (contenant le chiffre 9).
Cette permutation est de signature égale à (-1) donc cette permutation se décompose toujours en un nombre impair de transpositions.
Il faudrait donc un nombre impair de coups pour parvenir de la configuration initiale à la configuration finale.
Cependant, en coloriant les neuf cases en damier :



à chaque coup la case vide se déplace une seule fois vers la droite ou la gauche ou vers le haut ou le bas, bref change de couleur de case sur ce damier. Au bout d'un nombre impair de coups, les cases de départ et d'arrivée de la case vide sont de couleurs opposées, ce qui n'est pas le cas entre les deux configurations proposées dans l'énoncé.
La réponse à la question posée est donc : non !

Exercice 16

1. En utilisant la formule :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^{n} A_{\sigma(k),k},$$

on voit que le déterminant est une somme de produits de coefficients de la matrice A. La quantité $\det(A)$ est donc entière.

2. Si pour tout entier k entre 2 et n, on effectue l'opération $C_k \longleftarrow C_k - C_1$, qui ne modifie pas le déterminant, chaque nouvelle colonne C_k est composée de coefficients valant 0, 2 ou -2.

   On en déduit que l'on peut mettre le facteur 2 en facteur de chaque nouvelle colonne à partir de la deuxième colonne, ce qui fait $(n-1)$ factorisations par 2. On peut donc mettre devant le déterminant $(n-1)$ facteurs 2 par multilinéarité et le déterminant de la matrice qui reste après factorisation est une matrice à coefficients entiers, dont le déterminant restera entier.

   On a bien ce qu'il faut

Exercice 18

Cet exercice me paraît classique : il est donc à ranger en annexe de cours.

On va très fortement utiliser la formule du cours sur la comatrice :

$$A\ (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T\ A = \det(A) \cdot I_n.$$

• Si $\mathrm{Rg}(A) = n$, alors la matrice A est inversible et en multipliant l'égalité $A(\mathrm{Com}(A))^T = \det(A)\ I_n$ par A^{-1} à gauche, on obtient :

$$(\mathrm{Com}(A))^T = \det(A) \cdot A^{-1}.$$

Le nombre $\det(A)$ est non nul et la matrice A^{-1} est inversible.
La matrice $(\mathrm{Com}(A))^T$, puis $\mathrm{Com}(A)$ sont donc inversibles également : le rang de $\mathrm{Com}(A)$ vaut n.

• Si $\mathrm{Rg}(A) = n-1$, alors la matrice A n'est pas inversible et donc son déterminant est nul. On dispose ainsi des égalités :

$$A\ (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T\ A = 0.$$

Dans la suite, on note $B = (\mathrm{Com}(A))^T$ qui est de même rang que $\mathrm{Com}(A)$.
L'égalité $BA = 0$ signifie également :

$$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(B).$$

On en déduit que le noyau $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension au moins $n-1$ et par le théorème du rang, le rang de B est au maximum égal à 1.
Il reste à voir pourquoi le rang de B n'est pas nul, ou encore pourquoi la matrice B n'est pas nulle, ou encore pourquoi la comatrice $\mathrm{Com}(A)$ n'est pas la matrice nulle.

Comme $\mathrm{Rg}(A) = n-1$, il existe une sous-matrice M de A de format $(n-1) \times (n-1)$ avec M inversible. Cette sous-matrice M est obtenue à partir de A en supprimant par exemple la ligne L_i et la colonne C_j.
On en déduit que le cofacteur $(-1)^{i+j}\ \Delta_{i,j} = (\mathrm{Com}(A))_{i,j}$ est exactement égal à :

$$(\mathrm{Com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \det(M) \neq 0.$$

La comatrice $\mathrm{Com}(A)$ admet au moins un coefficient non nul, donc son rang est bien supérieur ou égal à 1, donc égal à 1.

• On suppose pour finir que la matrice A est de rang inférieur ou égal à $(n-2)$. Il s'agit de montrer que la comatrice $\mathrm{Com}(A)$ est nulle, pour que son rang soit nul.
On pose dans la suite $r = \mathrm{Rg}(A)$. On rappelle que r est la taille maximale des sous-matrices inversibles de A.
Si i et j sont deux entiers entre 1 et n, la sous-matrice $M_{i,j}$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne L_i et la colonne C_j est une sous-matrice de taille $(n-1) > r$. Par maximalité de la taille r, on sait que la sous-matrice $M_{i,j}$ est non inversible. Par conséquent,

$$(\mathrm{Com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \det(M_{i,j}) = 0.$$

La comatrice est bien nulle dans ce cas.

Exercice 20

Cet exercice est encore à connaître sur les déterminants par blocs. On peut considérer cet exercice comme « astucieux ». Heureusement qu'il y a les indications. C'est bien de retrouver le truc.

1. Si A, B et C sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

   On en déduit :

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}.$$

   En développant n fois le déterminant $\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(B).$$

   En développant n fois le déterminant $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$ par rapport à la dernière ligne ou la dernière colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \det(A).$$

   Ceci résout la question posée.

2. Si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors on va faire des « opérations par blocs ».
Si l'on effectue les opérations sur les colonnes :

$$C_k \longleftarrow C_k - i\, C_{k-n},$$

avec k variant de $n+1$ à $2n$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B-iA \\ B & A-iB \end{vmatrix}.$$

En effectuant maintenant les opérations sur les lignes :

$$L_k \longleftarrow L_k + i\, L_{k+n},$$

avec k variant de 1 à n, on obtient :

$$\begin{vmatrix} A & -B-iA \\ B & A-iB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix}.$$

En utilisant un raisonnement analogue à la première question – on peut aussi se ramener à la première question grâce à la transposée, on obtient :

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix} = \det(A+iB) \times \det(A-iB).$$

Or, on a les égalités suivantes avec les conjugués de nombres complexes :

$$\begin{aligned} \det(A-iB) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \Big(A-iB\Big)_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \overline{\Big(A+iB\Big)_{\sigma(k),k}} \\ &= \overline{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \Big(A+iB\Big)_{\sigma(k),k}} \\ &= \overline{\det(A+iB)}. \end{aligned}$$

Conclusion, en posant le complexe $z = \det(A+iB)$, alors le déterminant à calculer vaut :

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |z|^2 \geqslant 0.$$

Quelques remarques importantes pour clôturer le sujet.
Si $A_1, \cdots, A_r$ sont des matrices carrées (pas forcément du même format), on a la formule du déterminant triangulaire par blocs (qui n'est pas toujours le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure) :

$$\begin{vmatrix} A_1 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bigstar \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{r} \det(A_k).$$

Ceci se montre par récurrence sur l'entier r, en utilisant très fortement la question 1, même si les coefficients sont dans n'importe quel corps K.
On a une formule similaire pour les matrices triangulaires inférieures par blocs (qui ne sont pas toujours des matrices triangulaires inférieures).

Toutes les autres formules de déterminant par blocs sont compliquées. Par exemple, on n'a pas du tout de formule simple pour $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$, si A, B, C et D sont des blocs avec au moins deux lignes ou colonnes.

Exercice 21

Cet exercice est à placer en annexe de cours.

$\boxed{\Longrightarrow}$
On suppose que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifie :

$$A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}).$$

En prenant le déterminant dans l'égalité $A \times A^{-1} = I_n$, comme les quantités $p = \det(A)$ et $q = \det(A^{-1})$ sont des entiers, alors :

$$p \times q = 1.$$

Résultat des courses,

$$p \in \mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$
On suppose que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ est telle que $\det(A) = \pm 1$.
On utilise la formule :

$$(\mathrm{Com}(A))^T \ A = \det(A) \ I_n.$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \ (\mathrm{Com}(A))^T = \pm \ (\mathrm{Com}(A))^T.$$

Les coefficients de la comatrice $\mathrm{Com}(A)$ et donc de sa transposée sont au signe près des déterminants de matrices de format $(n-1) \times (n-1)$ à coefficients entiers : la comatrice $\mathrm{Com}(A)$ est à coefficients entiers, ainsi que A^{-1}.

Exercice 22

On pose $r = \mathrm{Rg}(A)$. La matrice A est équivalente à la matrice J_r. On écrit :

$$A = QJ_rP^{-1},$$

avec deux matrices inversibles P et Q.
On en déduit dans le corps $K(X)$ par exemple :

$$\det(AX+B) = \det\Big(Q(XJ_r+B')P^{-1}\Big) = \det(Q)\cdot\det(P^{-1})\cdot\det\Big(XJ_r+B'\Big),$$

avec $B' = Q^{-1}BP$.
Or, la matrice XJ_r+B' ne comporte que r coefficients avec un terme en X disposés sur le début de la diagonale.
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, la quantité :

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(XJ_r+B'\Big)_{\sigma(k),k}$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à r car seuls les r premiers facteurs $\Big(XJ_r+B'\Big)_{\sigma(k),k}$ (pour k variant entre 1 et r) sont des polynômes de degré 1, les autres facteurs pour k variant entre $r+1$ et n étant des constantes.
La quantité $\det(XJ_r+B')$ est dans un élément de l'espace $K_r[X]$, ainsi que la quantité $\det(XA+B)$ qui lui est proportionnelle.

Exercice 24

On peut y voir des équations de type Van der Monde ou des polynômes de Lagrange...

Il est facile de voir à l'aide de l'hypothèse de l'énoncé que pour tout polynôme $P(X)$ tel que $P(0)=0$, alors :

$$\sum_{j=1}^{n} P(a_j) = \sum_{j=1}^{m} P(b_j) \qquad \star$$

Le problème est que les a_j ou les b_k ne sont pas tous différents. On va y remédier...
On pose l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \{a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m\} = \{c_1,\cdots,c_s\},$$

ensemble de cardinal s.
Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on pose α_i la multiplicité de la valeur c_i dans la liste $(a_1,\cdots,a_n)$:

$$\alpha_i = \mathrm{card}\Big(\Big\{k \in [\![1,n]\!] \mid a_k = c_i\Big\}\Big).$$

De même pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on pose β_j la multiplicité de la valeur c_i dans la liste $(b_1,\cdots,b_m)$:

$$\alpha_i = \mathrm{card}\Big(\Big\{k \in [\![1,m]\!] \mid b_k = c_i\Big\}\Big).$$

Les listes $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ et $(c_1,\cdots,c_1,c_2,\cdots,c_2,\cdots,c_s,\cdots,c_s)$ où chaque c_k est répété α_k fois sont des listes égales à ordre près.
De même, les listes $(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ et $(c_1,\cdots,c_1,c_2,\cdots,c_2,\cdots,c_s,\cdots,c_s)$ où chaque c_k est répété β_k fois sont des listes égales à ordre près.

Il s'agit de montrer que pour tout $k \in [\![1, s]\!]$,

$$\alpha_k = \beta_k.$$

Fixons un entier k entre 1 et s.
On considère les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_s$ associés aux s complexes différents $c_1, \cdots, c_s$.
On pose $P(X) = XL_k(X)$, polynôme tel que $P(0) = 0$.
En appliquant ★ à ce polynôme $P(X)$, on obtient après simplifications :

$$\alpha_k \cdot c_k = \beta_k \cdot c_k.$$

Comme les a_j et les b_j sont non nuls, alors $c_k \neq 0$ et donc :

$$\alpha_k = \beta_k.$$

On a bien égalité des listes à ordre près.

Exercice 23

Cet exercice traite des matrices de permutation. Il est à placer en annexe de cours.

1. Fixons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Il existe une seule application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ définie sur la base canonique de la façon suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ f(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

   Il est clair que cet endomorphisme f transforme la base canonique en une base de $\mathbb{C}^n$: c'est un isomorphisme.
2. La matrice A_σ est ce qu'on appelle une matrice de permutation.
   Cette matrice A_σ n'admet que des coefficients nuls, sauf un seul 1 par ligne et par colonne. Le fait que chaque ligne ne contienne qu'un seul 1 provient de l'injectivité de la permutation σ.
   Plus précisément, la $j^{ème}$ colonne de la matrice A_σ ne comporte qu'un 1 en $\sigma(j)^{ème}$ position.
3. On va montrer que l'application $\Phi : \sigma \longmapsto A_\sigma$ est un morphisme entre les groupes $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.
   Soient σ_1 et σ_2. On note $\mathscr{B}_c = (X_1, \cdots, X_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de telle sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A_{\sigma_1} \times A_{\sigma_2} \times X_i = A_{\sigma_1} \times X_{\sigma_2(i)} = X_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = A_{\sigma_1 \circ \sigma_2} \times X_i.$$

   Les matrices $A_{\sigma_1} \times A_{\sigma_2}$ et $A_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ admettent des applications linéaires canoniquement associées qui coïncident sur la base canonique $\mathscr{B}_c$: elles sont égales. L'application Φ est bien un morphisme de groupes.
4. On va utiliser la formule sommatoire du déterminant :

$$\det(A_\sigma) = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho) \cdot \prod_{k=1}^{n} (A_\sigma)_{\rho(k),k}.$$

   Fixons une permutation ρ dans $\mathfrak{S}_n$.
   On distingue deux cas :

- la permutation ρ est égale à σ ; dans ce cas, pour tout k entre 1 et n,

$$(A_\sigma)_{\rho(k),k} = (A_\sigma)_{\sigma(k),k} = 1,$$

et le terme $\varepsilon(\rho) \cdot \prod_{k=1}^{n} (A_\sigma)_{\rho(k),k}$ vaut $\varepsilon(\rho)$;
- la permutation ρ est différente de σ ; dans ce cas, il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que :

$$\rho(i) \neq \sigma(i).$$

On en déduit :

$$(A_\sigma)_{\rho(i),i} = 0$$

et le terme $\varepsilon(\rho) \cdot \prod_{k=1}^{n} (A_\sigma)_{\rho(k),k}$ vaut 0.

Conclusion,

$$\det(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

5. La réponse est OUI !!
Si $n = 1$, alors (1) est la seule matrice de permutation.
On se place dans le cas où $n \geqslant 2$.
Déjà, il faut remarquer que si σ est une permutation admettant un point fixe k, en notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors :

$$f_\sigma(e_k) = e_k,$$

et pour toute base contenant le vecteur e_k, la matrice représentant f_σ selon cette base contiendra une colonne pratiquement remplie de zéros sauf un seul coefficient valant 1. Bref, avoir un point fixe pour σ est plutôt de nature à « simplifier » les matrices susceptibles d'être semblables à la matrice de permutation A_σ.
Pour trouver un contre-exemple, on va plutôt choisir une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe.
On choisit par exemple le cycle :

$$\sigma = (n, n-1, \cdots, 1).$$

On en déduit :

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Dans le cas $n = 2$, on a plein d'exemples possibles. Par exemple, si $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et :

$$B = P^{-1} A_\sigma P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice à coefficients tous non nuls et semblable à une matrice de permutation, ici la transposition $(1,2)$.

Lorsque $n=3$, alors on choisit par exemple :

$$\begin{aligned} A_\sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ P^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ P^{-1}AP &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 11 & -7 \\ 3 & 3 & -7 \\ -2 & 12 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 25

Cet exercice reste à la mode dans les exercices d'oraux. Je pense qu'il est bon de le retenir en annexe de cours.

La réponse à l'exercice est :

Tous les complexes z_j sont de module strictement inférieur à 1.

On peut d'ores et déjà remarquer que la réciproque à cet exercice est vraie et facile à montrer...

Passons à l'exercice en lui-même.
On peut traiter cet exercice par récurrence sur l'entier d. On choisit dans cette correction d'utiliser les matrices de Van der Monde.
On pose la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_d \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_d^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{d-1} & z_2^{d-1} & \cdots & z_d^{d-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C}).$$

La matrice V est la transposée d'une matrice de Van der Monde, donc :

$$\det(V) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (z_j - z_i) \neq 0.$$

La matrice V est inversible.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne :

$$X_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot z_1^n \\ \lambda_2 \cdot z_2^n \\ \vdots \\ \lambda_d \cdot z_d^n \end{pmatrix},$$

de telle sorte qu'en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot z_j^n,$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ VX_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix} = Y_n.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = V^{-1}Y_n.$$

Toutes les composantes du vecteur Y_n tendent par hypothèse vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par produit matriciel, toutes les composantes du vecteur $V^{-1}Y_n$ tendent également vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.
On en déduit que pour tout entier j entre 1 et d :

$$\lambda_j \cdot z_j^n = (X_n)_j$$

est une quantité de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.
Comme chaque complexe λ_j est non nul, cela impose pour tout entier j entre 1 et d :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} z_j^n = 0.$$

Nécessairement,

$$\forall j \in [\![1, d]\!],\ |z_j| < 1.$$

Exercice 30

1. On montrer par récurrence sur l'entier n la proposition suivante :

   $\mathscr{P}(n)$: « pour tous réels $b_1 < \cdots < b_n$ et pour tous scalaires réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, si la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e^{xb_k}$ s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$, alors tous les λ_k sont nuls. »

   • Lorsque $n = 1$, on suppose que la fonction $f : x \longmapsto \lambda_1 \cdot e^{xb_1}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, par exemple en ξ.
   Alors, $\lambda_1 \cdot e^{\xi b_1} = 0$, puis $\lambda_1 = 0$ directement.

- On suppose la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
- Soient $\lambda_1 \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ des réels et $b_1 < \cdots < b_n < b_{n+1}$ des réels rangés dans l'ordre strictement croissant, de telle sorte que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot e^{xb_k}$ s'annule en au moins $n+1$ points que l'on note $x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$.

 On pose la fonction $g : x \longmapsto e^{-xb_{n+1}} \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e^{(b_k - b_{n+1})x} + \lambda_{n+1}$ qui s'annule aux mémes points que la fonction f. Dans la suite, on pose $B_k = b_k - b_{n+1} < 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

 On peut appliquer le théorème de Rolle pour avoir au moins n points d'annulation de la fonction $g' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot \lambda_k \cdot e^{xB_k}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour la fonction g avec les scalaires $B_1 < \cdots < B_n$ et les scalaires $\lambda_1\ B_1, \cdots, \lambda_n\ B_n$. Par la propriété $\mathscr{P}(n)$, tous les scalaires $\lambda_k\ B_k$ sont nuls, pour $k \in [\![1, n]\!]$, et donc tous les scalaires λ_k sont nuls pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$. La fonction g devient la fonction $g : x \longmapsto \lambda_{n+1}$ dont on sait qu'elle s'annule au moins $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$: le scalaire λ_{n+1} est lui aussi nul. La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

2. Il suffit de montrer que l'endomorphisme $u_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ canoniquement associé à la matrice A est injectif.

 Soit $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne dans $\mathrm{Ker}(A)$.

 On en déduit à l'aide du produit matriciel $AX = 0$ que pour tout entier i entre 1 et n :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e^{a_i b_j} = 0.$$

 La fonction $f : x \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e^{xb_j}$ s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$ à savoir au moins aux points $a_1 < \cdots < a_n$. Par la question précédente, tous les scalaires λ_j sont nuls et donc le noyau de l'endomorphisme u_A est réduit à $\{0\}$: la matrice A est inversible.

3. On va démontrer ceci par récurrence. On note :

 $\mathscr{Q}(n)$: « pour tous scalaires réels $a_1 < \cdots < a_n$ et $b_1 < \cdots < b_n$, le déterminant de la matrice $A = \left(e^{a_i\ b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est strictement positif. »

- Lorsque $n = 1$, le résultat est clair puisque $e^{a_1\ b_1} > 0$.
- Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
- Soient $a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ et $b_1 < \cdots < b_n < b_{n+1}$ des nombres réels. On pose la matrice $A = \left(e^{a_i\ b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice $B = \left(e^{a_i\ b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Pour tout réel $\beta > b_n$, on pose $g(\beta)$ le déterminant :

$$g(\beta) = \begin{vmatrix} & & & e^{a_1 \ \beta} \\ & A & & \vdots \\ & & & e^{a_n \ \beta} \\ e^{a_{n+1} \ b_1} & \dots & e^{a_{n+1} \ b_n} & e^{a_{n+1} \ \beta} \end{vmatrix}.$$

On sait par hypothèse de récurrence que le déterminant de la sous-matrice A est strictement positif.
Ensuite, on sait que pour tout $\beta > b_n$, le déterminant $g(\beta)$ est le déterminant d'une matrice inversible, donc $g(\beta) \neq 0$.
Par ailleurs, la formule sommatoire du déterminant nous dit que la quantité $g(\beta)$ est une formule continue en la variable β car chaque coefficient de la matrice associée à $g(\beta)$ est continu en la variable β.
Lorsque l'on développe par rapport à la dernière colonne, on obtient une expression de la forme :

$$g(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot e^{a_k \ \beta} + \det(A) \cdot e^{a_{n+1} \ \beta},$$

où les coefficients μ_k sont des constantes.
Cette quantité est du même signe que :

$$h(\beta) = e^{-a_{n+1} \ \beta} \times g(\beta) = \det(A) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot e^{A_k \cdot \beta},$$

où $A_k = a_k - a_{n+1} < 0$.
La fonction $h :]b_n, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $]b_n, +\infty[$ et ne s'annule pas, donc y garde un signe constant. De plus, par hypothèse de récurrence, $\det(A) > 0$ et enfin :

$$\lim_{\beta \longrightarrow +\infty} h(\beta) = \det(A) > 0.$$

Pour tout $\beta > b_n$, le réel $h(\beta)$ est donc strictement positif, ainsi que $g(\beta)$.
En particulier, $g(b_{n+1})$ est strictement positif. Or,

$$g(b_{n+1}) = \det(B),$$

ce qui achève la récurrence : la propriété $\mathscr{Q}(n+1)$ est vérifiée.