

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. [o]

Résoudre sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 + 1)y' + y = \frac{-4x + 2}{(x - 1)^2} e^{-\arctan x}.$$

Exercice 2. [o]

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos 2t.$$

Exercice 3. [o] (Équations de Bernoulli d'ordre α)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . Donner une méthode de résolution d'une équation différentielle de Bernoulli du type

$$(E) \quad a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\alpha = 0.$$

Exercice 4. [*] (Tractrice)

Un enfant marche au bord d'un bassin rectiligne en tirant un bateau au bout d'une corde. À l'instant $t = 0$, l'enfant commence à marcher et la corde est perpendiculaire au bord du bassin. Ensuite, l'enfant se déplace à vitesse constante et la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde, qui reste toujours tendue. On veut étudier la trajectoire du bateau.

On choisit un repère orthonormal dont l'origine est la position initiale de l'enfant, dont l'axe des abscisses est le bord du bassin et dont l'axe des ordonnées pointe vers l'eau. On note $x(t)$, $y(t)$ les coordonnées du bateau B à l'instant t , v la vitesse de l'enfant et ℓ la longueur de la corde.

1. Démontrer que

$$\begin{cases} (x(t) - vt)y'(t) - y(t)x'(t) = 0 \\ (x(t) - vt)^2 + y(t)^2 = \ell^2 \end{cases}$$

et en déduire que la fonction x satisfait l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = \frac{v}{\ell^2} (x(t) - vt)^2.$$

2. On pose

$$u(t) = \frac{1}{x(t) - vt + \ell}.$$

- a) Démontrer que la fonction u est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire x .
 - b) Déterminer y .
3. Tracer la trajectoire du bateau avec la calculatrice dans le cas où $v = 1$ et $\ell = 1$.