

Chapitre 7 : fonctions continues et dérivables

Table des matières

1	Premières notions	2
1.1	Intervalles de \mathbb{R}	2
1.2	Limites et continuité	2
1.3	Fonctions et inégalités	3
1.4	Caractérisation séquentielle de la continuité	4
1.5	Opérations sur les limites	4
2	Théorèmes fondamentaux de la continuité	4
2.1	Théorème des valeurs intermédiaires	4
2.2	Théorème des bornes atteintes	5
2.3	Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes	5
2.4	Théorème des fonctions monotones	5
3	Uniforme continuité	6
3.1	Définition	6
3.2	Théorème de Heine	6
3.3	Fonctions lipschitziennes	6
4	Fonctions dérivables, premières propriétés	6
4.1	Définitions	6
4.2	Dérivation et opérations	7
5	Théorèmes fondamentaux de la dérivable	8
5.1	Théorème de Rolle	8
5.2	Théorème des accroissements finis	8
5.2.1	Fonctions C^1 et fonctions lipschitziennes	8
5.2.2	Formule de Taylor-Lagrange	9
5.2.3	Théorème du prolongement de la dérivée	9
6	Extrema et extrema locaux	9
6.1	Définitions	9
6.2	Recherche d'un extrémum local	10

1 Premières notions

1.1 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 1 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On dit que A est un *intervalle* si :

$$\forall(x,y) \in A^2, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad x < \alpha < y \implies \alpha \in A.$$

Exemple 1 Il existe plusieurs types d'intervalles :

- les *segments* ou les intervalles fermés : $[a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- les intervalles *semi-ouverts* : $[a,b[,]a,b], [a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$
- les intervalles *ouverts* : $]a,b[,]a,+\infty[,]-\infty,b[$ ou $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

Exemple 2 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} telle que :

$$\forall(a,b) \in A^2, \quad \frac{a+b}{2} \in A.$$

1. L'ensemble A est-il un intervalle ?
2. L'ensemble A est-il dense dans $\left[\inf A, \sup A\right] ?$

1.2 Limites et continuité

Définition 2 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle, $x_0 \in I$, puis $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1 Lorsqu'il existe, le nombre ℓ est unique et est appelé la *limite de la fonction f en x_0* . Celle-ci est notée $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Définition 3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (autrement dit : $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$).

On dit que la fonction f est *continue* si elle est continue en tout point x_0 de I (autrement dit : $\forall x \in I, \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$).

Remarque 1 • On parle également de limite à droite (resp. à gauche), de continuité à droite (resp. à gauche) en remplaçant dans les définitions précédentes la condition $|x - x_0| \leq \alpha$ par $(|x - x_0| \leq \alpha \text{ et } x > x_0)$ (resp. $(|x - x_0| \leq \alpha \text{ et } x < x_0)$). On adopte les notations suivantes pour désigner les limites à droite et à gauche : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
• On parle également de limites en $\pm\infty$ et on note par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geq x_0, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On parle enfin de limites égales à $\pm\infty$ et on note par exemple $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

Exemple 3 Comment traduire avec les quantificateurs le fait que :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$?
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

Exemple 4 La fonction caractéristique de \mathbb{Q} définie par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$:
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
 est discontinue en tout point de \mathbb{R} . Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

1.3 Fonctions et inégalités

Définition 4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle.

- On dit que f est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x)$. L'ensemble $f(I)$ est dans ce cas non vide, minoré et inclus dans \mathbb{R} et admet par conséquent une borne inférieure. On la note alors : $\inf_{x \in I} f(x) = \inf f(I)$. Si l'ensemble $f(I)$ admet un plus petit élément, on note $\min_{x \in I} f(x)$ ce plus petit élément : c'est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I .
- On dit que f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$. L'ensemble $f(I)$ est dans ce cas non vide, majoré et inclus dans \mathbb{R} et admet par conséquent une borne supérieure. On la note alors : $\sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I)$. Si l'ensemble $f(I)$ admet un plus grand élément, on note $\max_{x \in I} f(x)$ ce plus grand élément : c'est le maximum de la fonction f sur l'intervalle I .
- On dit que f est **bornée** si $\exists M \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$. Dans ce cas, la fonction f est bornée par M . Une fonction est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.
- On dit que f est une fonction **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ (resp. $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$). On parle alors de fonction **monotone** pour désigner une fonction soit tout le temps croissante, soit tout le temps décroissante.
- On dit que f est une fonction **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \implies f(x) > f(y)$). On parle alors de fonction **strictement monotone** pour désigner une fonction soit partout sur I strictement croissante, soit partout sur I strictement décroissante.

Exemple 5 • La fonction $f = \arctan$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{\pi}{2}$. En fait $f(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- La fonction $f = \sin$ est continue, n'est pas monotone et le minimum de la fonction f qui vaut -1 est atteint en tous les points de l'ensemble $-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.
- La fonction **partie entière** notée $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ou bien $x \mapsto E(x)$, qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x (le nombre $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$) est croissante mais non strictement croissante, elle est continue à droite et discontinue en tout point de \mathbb{Z} .

Exemple 6 Quelle est la partie entière du nombre $0,999999\dots$? Quelles sont les limites à gauche et à droite de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en ce point ?

1.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\ell \in I$. La fonction f est continue en ℓ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I et convergeant vers ℓ , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est encore convergente de limite $f(\ell)$.

Exemple 7 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad [\text{équation fonctionnelle}]$$

1.5 Opérations sur les limites

Proposition 3 • La somme, la multiplication, la composée de deux fonctions continues l'est encore.

- La fonction réciproque d'une fonction bijective continue est encore continue.

2 Théorèmes fondamentaux de la continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I . Alors l'ensemble image $f(I)$ est encore un intervalle.

Un autre énoncé équivalent est :

« si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle, si $\alpha = f(a) < \beta = f(b)$ sont deux valeurs prises par la fonction f , alors pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$. »

Méthode : Comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ?

Ce théorème sert surtout à fournir l'existence de solutions à des équations :

- ▶ pour connaître le nombre de solutions à l'équation $f(x) = g(x)$:
 - mettre les x d'un seul bord
 - faire l'étude de la fonction $h = f - g$ par exemple
- ▶ pour avoir des informations sur une valeur d'annulation d'une fonction continue f
 - calculer $f(a)$ et $f(b)$
 - constater que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires
 - conclure que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution entre a et b .
- ▶ pour connaître le signe d'une expression en fonction de x , utiliser le résultat suivant :
 - une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle garde un signe constant.

Exemple 8 • Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction continue. Que peut-on dire de la fonction f ?

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une bijection continue sur un intervalle. Alors la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle I .

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors on a équivalence entre les deux points suivants :
 - la fonction f est continue
 - l'ensemble $f([a, b])$ est un intervalle.

2.2 Théorème des bornes atteintes

Théorème 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors, l'ensemble image $f([a, b])$ est encore un segment.

Méthode : Comment utiliser le théorème des bornes atteintes ?

Sa principale utilisation est :

- une fonction continue sur un segment atteint un minimum et un maximum : elle est donc bornée.

Exemple 9 • Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la fonction f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que la fonction f admet un minimum global.

- Montrer que toute fonction continue et périodique sur \mathbb{R} est bornée sur \mathbb{R} .

2.3 Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Théorème 3 Soient f , g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I et $x_0 \in I$ tels que :

- pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$.

Alors, $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 .

Proposition 4 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $f \leq g$ (c'est-à-dire : $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$). Soit $x_0 \in I$.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

2.4 Théorème des fonctions monotones

Théorème 4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle $I = (a, b)$ (les extrémités a et b de l'intervalle I peuvent ou non appartenir à l'ensemble I).

- Si la fonction f est majorée sur I , alors la limite $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe et est finie.
- Si la fonction f n'est pas majorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
- Si la fonction f est minorée sur I , alors la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie.
- Si la fonction f n'est pas minorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque 2 On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

3 Uniforme continuité

3.1 Définition

Définition 5 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction f est *uniformément continue sur I* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, x') \in I^2, \quad |x - x'| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3 La différence majeure avec la définition de la continuité de f est que le nombre α est ici indépendant du $x \in I$. Par conséquent, toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

Exemple 10 • Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites réelles u et v ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 0.$$

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin(x^3)$ sont continues sur \mathbb{R} . Sont-elles uniformément continues ?

3.2 Théorème de Heine

Proposition 5 Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

3.3 Fonctions lipschitziennes

Définition 6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction f est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in I^2, \quad |f(x) - f(x')| \leq k \cdot |x - x'|.$$

Si une telle constante k convient, on dira alors que la fonction f est *k -lipschitzienne*.

Remarque 4 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si l'ensemble :

$$A = \left\{ \left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \in \mathbb{R} \mid (x \neq x') \in I^2 \right\} \quad \text{est majoré.}$$

Proposition 6 Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle est uniformément continue.

Exemple 11 • La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais non lipschitzienne sur $[0, 1]$.

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue admettant des limites finies en $\pm\infty$, alors la fonction f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

4 Fonctions dérivables, premières propriétés

4.1 Définitions

Définition 7 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est **dérivable** en x_0 si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en x_0** et noté $f'(x_0)$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable** si elle est dérivable en tout point x_0 de I .

Remarque 5 On parle également de dérivabilité à droite ou à gauche en x_0 lorsque les limites suivantes existent et sont finies : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le cas échéant, elles sont notées respectivement $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.

Exemple 12 La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche sur \mathbb{R} tout entier mais elle n'est pas dérivable en 0.

Définition 8 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dit que la fonction f est **n -fois dérivable** si la fonction f est $(n-1)$ -fois dérivable et que sa dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ est encore dérivable. On note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ème}}$. La dérivée seconde est notée f'' .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la fonction f est **de classe C^n** si la fonction f est n -fois dérivable et que la dérivée $n^{\text{ème}} f^{(n)}$ est continue.

On dit que la fonction f est **classe C^∞** si la fonction f est indéfiniment dérivable.

On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n , puis $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

Remarque 6 L'ensemble $C^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Proposition 7 On a les propriétés suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset C^n(I, \mathbb{R})$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, on a : $f' \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$
- $C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, \mathbb{R})$.

Exemple 13 Montrer que la fonction : $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{sur }]0, +\infty[\\ 0, & \text{sur }]-\infty, 0] \end{cases} \end{cases}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

4.2 Dérivation et opérations

Proposition 8 La somme, le produit, la composée de deux fonctions dérivables l'est encore, avec les formules :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.
- $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$ [formule de dérivation de Leibniz pour f et g n -fois dérivables]

Proposition 9 La fonction réciproque d'une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas est encore dérivable selon la formule :

$$\bullet \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

5 Théorèmes fondamentaux de la dérivabilité

5.1 Théorème de Rolle

Théorème 5 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant : $f(a) = f(b) = 0$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

5.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 6 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Méthode : Comment appliquer le théorème des accroissements finis ?

Ce théorème sert à étudier le sens de variations de fonctions

- une fonction f dérivable sur un intervalle telle que $f' \geq 0$ est une fonction croissante
- une fonction f dérivable sur un intervalle telle que $f' > 0$ est une fonction strictement croissante
- une fonction f dérivable sur un intervalle telle que $f' = 0$ est une fonction constante
- une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' < 0$ réalise une bijection strictement décroissante de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$ [théorème de la bijection].

Exemple 14 • Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

5.2.1 Fonctions C^1 et fonctions lipschitziennes

Proposition 10 Toute fonction de classe C^1 sur un segment de \mathbb{R} y est lipschitzienne et donc uniformément continue.

Exemple 15 • Montrer que la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arg\sin(u_n) \end{cases}$ est convergente de limite nulle.

- Montrer que la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$ est convergente.

- Montrer que la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} \end{cases}$ converge vers un nombre irrationnel.

5.2.2 Formule de Taylor-Lagrange

Proposition 11 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ -fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}.$$

Exemple 16 • Montrer que :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

• Montrer que :

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}.$$

• Montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

5.2.3 Théorème du prolongement de la dérivée

Proposition 12 Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$. Alors, il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que la fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \zeta & , \text{ si } x = a \\ f(x) & , \text{ si } x > a \end{cases} \end{array} \quad \text{soit de classe } C^1 \text{ sur } [a, b].$$

6 Extrema et extrema locaux

6.1 Définitions

Définition 9 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

- On dit que la fonction f **admet un maximum en x_0** (resp. un **minimum en x_0**) si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que la fonction f **admet un extrémum en x_0** si f admet un maximum ou un minimum en x_0 .
- On dit que la fonction f **admet un maximum local en x_0** (resp. un **minimum local en x_0**) si : $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que la fonction f **admet un extrémum local en x_0** si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0 .

Exemple 17 Combien la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ admet-elle d'extréma locaux ou globaux sur l'intervalle $[-1, 3[$?

6.2 Recherche d'un extrémum local

Méthode : Comment rechercher les extréma locaux d'une fonction ?

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour rechercher ses extréma locaux :

- s'assurer que f est définie sur un ouvert
- s'assurer que f est de classe C^2
- résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (équation (E))
- pour chaque solution x_0 de (E), calculer $f''(x_0)$:
 - si $f''(x_0) > 0$, x_0 est un minimum local
 - si $f''(x_0) < 0$, x_0 est un maximum local
 - si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire pour l'instant : faire un développement limité en x_0 .

Exemple 18 • Quels sont les rectangles du plan de périmètre fixé et délimitant une aire maximale ?

- Soit \mathcal{D} un disque du plan, de rayon strictement positif. Quels sont les triangles à sommets dans \mathcal{D} et d'aire maximale ?