FEUILLE D'EXERCICES N° 16

PERMUTATIONS ET DÉTERMINANTS

PERMUTATIONS

Exercice 1

1. Calculer une décomposition de cycles à supports disjoints, en transposition et la signature pour :
   - $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 7 & 1 & 10 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$
   - $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   - $\sigma = (1, 2, \cdots, p)$
   - $\sigma = (1, 3, 2) \circ (1, 5, 3)^{-1} \circ (5, 7, 6)^2 \circ (1, 3, 4, 2)$.
2. Calculer la période des suites $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces permutations.
3. L'équation $f \circ f = \sigma$, d'inconnue $f \in \mathfrak{S}_n$, pour chacune de ces permutations admet-elle au moins une solution ?

— ○ —

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Pour tout $i < j$ dans $\{1, \cdots, n\}$, calculer $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1}$.
2. On pose $\mathscr{T} = \{(1, p) \in \mathfrak{S}_n \mid p \in \{2, \cdots, n\}\}$. Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de l'ensemble $\mathscr{T}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucun ensemble $\mathscr{U}$ composé de $(n-2)$ transpositions tel que chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ soit un produit de composition d'éléments de $\mathscr{U}$.

— ○ —

Exercice 3

Soit c un cycle dans $\mathfrak{S}_n$.

1. Calculer c^2.
2. Résoudre l'équation $f^r = c$, où $r \in \mathbb{N}^*$, d'inconnue $f \in \mathfrak{S}_n$.

— ○ —

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in \mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que $\Gamma_\rho = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
2. On prend $n = 5$ et $\rho = (1, 2, 3)$. Déterminer l'ensemble Γ_ρ et montrer que ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

— ○ —

Exercice 5

Au jeu du taquin, on dispose d'un carré de taille 3×3 avec neuf cases dont une est vide :

1	2	3
4	5	6
7	8	

On peut à chaque coup changer la disposition des huit carrés numérotés en faisant pivoter les carrés grâce à la case vide (hachurée).
À l'aide d'un nombre fini de coups, peut-on arriver à la configuration suivante :

2	1	
8	3	7
6	4	5

— ○ —

Exercice 6

Montrer que toute permutation dans $\mathfrak{S}_n$ peut se décomposer en un produit où n'apparaissent que $\tau = (1, 2)$ et $c = (1, 2, \cdots, n)$.

— ○ —

Exercice 7

On rappelle que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps.

1. Montrer que $x \longmapsto x^{-1}$ est une bijection.
2. Déterminer sa signature.
3. Même question en remplaçant 5 par un nombre premier.

— ○ —

Exercice 8

Soit $\Phi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ un morphisme de groupes, avec $n \geqslant 2$.
On suppose que $\Phi(1, 2) = -1$.

1. Montrer que pour toute transposition τ, $\Phi(\tau) = -1$.

2. Déterminer tous les morphismes de groupes possibles entre $\mathfrak{S}_n$ et $\{-1, 1\}$.

——— ○ ———

Exercice 9
Déterminer $\min \mathfrak{A}$ et $\max \mathfrak{A}$, où :

$$\mathfrak{A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sigma(k) \ ; \ \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\}.$$

——— ○ ———

Calculs pratiques de déterminants

Exercice 10
Soient a, b, c dans $\mathbb{R}$. On pose $D(a, b, c)$ le déterminant de la matrice ne comportant que des a sur la diagonale, que des b en dessous et que des c au-dessus.

1. Montrer que $P(X) = D(a + X, b + X, c + X)$ est un polynôme de degré inférieur à 1.
2. Calculer $P(-b)$ et $P(-c)$.
3. En déduire $D(a, b, c)$ lorsque $b \neq c$ puis lorsque $b = c$.

——— ○ ———

Exercice 11 Soients $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des nombres complexes. On pose la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Exprimer la matrice $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \ J^k$.
2. Montrer que la matrice J est semblable à une matrice diagonale. Déterminer la matrice diagonale et une matrice de passage.
3. Montrer que la matrice A est inversible si et seulement si le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \ X^k$ est premier avec $X^n - 1$.

——— ○ ———

Exercice 12
Calculer les déterminants :
- $\det f$, avec $f(x, y, z) = (y+z, -x+y+3z, 6x-7y-5z)$
- $\det f$, avec $f(P) = Q \times P^{(r)}$ sur $\mathbb{C}_n[X]$ où $\deg(Q) = r$
- $\det\Big((\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big)$
- $\det\Big((\max(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big)$.

——— ○ ———

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
- $A = \left(\begin{pmatrix} j \\ i-1 \end{pmatrix} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $A = (|i - j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$
- A la matrice avec que des a sur la diagonale, des b juste en dessous et des c juste au dessus.

——— ○ ———

Exercice 14
Soient $a_1, \cdots, a_n$ différents dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice où la $j^{ème}$colonne ne comporte que a_j, sauf un x sur la diagonale ;

——— ○ ———

Exercice 15
Calculer $\det f$, lorsque :
- $f : A \longmapsto A^T$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
- $f : A \longmapsto MA$ lorsque M est donnée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

——— ○ ———

Déterminants : aspects théoriques

Exercice 16
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\{-1, 1\})$.

1. Montrer que $\det A \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

——— ○ ———

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f : P(X) \longmapsto X^n \cdot P(1/X)$ est une symétrie dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ selon laquelle l'endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale ? Combien peut valoir $\det f$?
3. Calculer $\det f$.

——— ○ ———

Exercice 18
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer les implications
- $\mathrm{Rg}(A) = n \Longrightarrow \mathrm{Rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$
- $\mathrm{Rg}(A) = n - 1 \Longrightarrow \mathrm{Rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$
- $\mathrm{Rg}(A) \leqslant n - 2 \Longrightarrow \mathrm{Rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

——— ○ ———

Exercice 19
Soit A dans $GL_p(K)$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$, On note α_i le déterminant de la matrice issue de A en remplaçant sa $i^{ème}$ colonne par Y. Montrer que la seule solution de l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$ est : $\dfrac{1}{\det A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ [formules de Cramer].

——— ○ ———

Exercice 20

1. Si A, B et C sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$.
[indication : on pourra simplifier le produit $\begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.]
2. Si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$. [indication : on pourra faire des opérations sur les lignes ou colonnes pour se ramener à la première question. On commencera par exemple par les opérations $C_k \longleftarrow C_k - i\ C_{k-n}$, où i est le nombre complexe.]

Exercice 21

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible d'inverse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.

Exercice 22

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(K)$.
Montrer que : $\deg(\det(AX + B)) \leqslant \mathrm{Rg}(A)$.

Thèmes variés

Exercice 23

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Justifier que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe un seul isomorphisme $f_\sigma \in GL(\mathbb{C}^n)$ tel que :
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$
2. Décrire alors la matrice A_σ représentant f_σ.
3. Montrer que $\sigma \longmapsto A_\sigma$ est un morphisme de groupes.
4. Calculer le déterminant de chaque matrice A_σ.
5. On se place dans le cas $n \leqslant 3$. Existe-t-il un exemple de matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont aucun coefficient ne soit nul et qui soit semblable à une matrice de permutation ?

Exercice 24

Soient $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_m$ des nombres complexes non nuls. On suppose que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^k = \sum_{j=1}^{m} b_j^k.$$
Montrer que les listes $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_m)$ sont identiques à ordre près.

Exercice 25

Soient $z_1, \cdots, z_d$ des nombres complexes différents. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ d'autres nombres complexes tous non nuls. On suppose que :
$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot z_j^k = 0.$$
Que peut-on en déduire sur les modules des nombres $z_1, \cdots, z_d$?

Exercice 26

Soient A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que les entiers $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux.
Montrer qu'il existe deux matrices U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :
$$AU + BV = I_n.$$

Exercice 27

1. Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles dans $GL_n(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB)$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $\chi_M : t \longmapsto \det(tI_n - M)$ est polynomiale unitaire de degré n.
3. Montrer que la formule $\mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB)$ est valable pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 28

Montrer que deux matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29

Quelles sont toutes les matrices $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice M : $\det(M + N) = \det M$?

Exercice 30

On se donne des réels $a_1 < \cdots < a_n$ et $b_1 < \cdots < b_n$.

1. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que si la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ e^{xb_k}$ s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$, alors tous les λ_k sont nuls.
2. Montrer que la matrice $A = \left(e^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\det(A) > 0$.

Un peu plus difficile

Exercice 31

Soient A et H dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Rg} H \leqslant 1$. Montrer que : $\det(A - H) \cdot \det(A + H) \leqslant \det A^2$.

Exercice 32

Soit A dans $GL_n(\mathbb{R})$. On pose B la matrice issue de A en enlevant 1 à tous les coefficients et α la somme des coefficients de A^{-1}. Montrer que $\det B = (1 - \alpha) \cdot \det A$.

Exercice 33

1. Pour $n \geqslant 1$, soit α_n le nombre de permutations de $\{1, \cdots, n\}$ dont tous les cycles sont de longueur inférieure à $\dfrac{n}{2}$.

2. Calculer α_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n!}$.
4. Un dictateur enferme 100 mathématiciens dans une pièce et leur tient le discours suivant :

   « J'ai écrit chacun de vos noms sur un papier et j'ai mis chaque papier dans un des 100 coffres de la pièce voisine. Chacun de vous va venir ouvrir 50 coffres qu'il choisira et ira ensuite dans une troisième pièce isolée. Vous serez libres si chacun de vous trouve le coffre contenant le papier portant son nom. Dans le cas contraire, on recommence tout (et bien sûr, je change le contenu des coffres). »

   Imaginer une stratégie permettant aux mathématiciens de s'en sortir en un temps raisonnable.

——— ○ ———

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme : $\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X^{\omega(\sigma)}$.

——— ○ ———

Exercice 35

Soient p un nombre premier puis $A \in GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ainsi, l'application A est une permutation sur l'ensemble fini $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
Établir une formule entre la signature de cette permutation et $\det A$.

——— ○ ———

Exercice 36

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dispose de $(2n+1)$ cailloux et d'une balance à deux plateaux. On suppose que si l'on enlève n'importe quel caillou, on peut placer les $2n$ cailloux restants en deux tas de n cailloux sur les deux plateaux de façon à avoir l'équilibre.
Que peut-on dire des $(2n+1)$ cailloux ?

——— ○ ———