Lycée Henri IV
MPSI

Exercices corrigés

MATRICES

Dans cette feuille d'exercices, les lettres $n, m, q, r, \ldots$ désignent des entiers naturels non nuls.

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Expliciter $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans les cas suivants :

a) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = \max\{i, j\}$;

b) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = |i - j|$;

c) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = 1$ si $i \leqslant j$ et $a_{ij} = 0$ sinon ;

d) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = \left\lfloor \dfrac{i+j}{n} \right\rfloor$.

On trouve

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 2 & 2 & 3 & & n \\ 3 & 3 & 3 & & | \\ & & & \ddots & n \\ n & n & — & n & n \end{pmatrix} \qquad\qquad b) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad d) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & 1 \\ 0 & \iddots & & & \vdots \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} ; \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} ; \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} .$$

$\looparrowright$	A	B	C	D	E
A					
B	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 23 \\ -2 & -3 & -23 \end{pmatrix}$		
C				$\begin{pmatrix} 50 & 73 & -19 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -29 & 207 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$
D				$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 0 & 0 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$
E	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 1 \\ -10 & -18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 46 \\ 11 & 9 & 69 \\ -16 & -6 & -46 \end{pmatrix}$		

♦ ***Exercice 3.*** [○]
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ qui commutent. Démontrer que A et B^{-1} commutent puis que A^{-1} et B^{-1} commutent.

On a

$$\begin{array}{lll} & AB = BA & \\ \iff & B = A^{-1}BA & \text{en multipliant par } A^{-1} \text{ à gauche} \\ \iff & BA^{-1} = A^{-1}B & \text{en multipliant par } A^{-1} \text{ à droite} \\ \iff & A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B & \text{en multipliant par } B^{-1} \text{ à gauche} \\ \iff & A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} & \text{en multipliant par } B^{-1} \text{ à droite} \end{array}$$

donc, puisque l'on sait que l'assertion « A et B commutent » est vraie, on en déduit que toutes les assertions de cette série d'équivalence sont vraies et donc que

$$\boxed{A \text{ et } B^{-1} \text{ commutent et } A^{-1} \text{ et } B^{-1} \text{ commutent.}}$$

♦ ***Exercice 4.*** [○]
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   b) Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$. À l'aide de la relation obtenue, retrouver A^{-1}.
2. a) La matrice B est-elle inversible ?
   b) Calculer B^3 et redémontrer par l'absurde que B n'est pas inversible.

1. a) La méthode classique d'inversion montre que

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Après calculs, on trouve

$$\boxed{A^3 - 7A^2 + 13A = 3I_3.}$$

On en déduit donc que

$$A.\frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) = I_3,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3).}$$

2. a) La matrice B ayant une colonne nulle, on ne pourra jamais trouver I_n en la multipliant par une matrice, donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas inversible.}}$$

b) On trouve

$$\boxed{B^3 = 0_3.}$$

Si l'on suppose que B est inversible alors B^3 l'est aussi (car un produit de matrices inversibles est inversible), ce qui est absurde puisque 0_3 n'est pas inversible. Donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas inversible.}}$$

♦ ***Exercice 5.*** [○]
À l'aide de votre calculatrice, inverser les matrices suivantes puis commenter

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H^{\approx} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,33 \\ 0,50 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (H^{\approx})^{-1} \approx \begin{pmatrix} 55,56 & -277,78 & 255,056 \\ -277,78 & 1446,00 & -1349,20 \\ 255,56 & -1349,20 & 1269,80 \end{pmatrix}$$

On constate ainsi que

de petites variations sur les coefficients de la matrice peuvent entrainer de fortes variations sur les coefficients de l'inverse.

Remarque : La matrice H est la matrice de Hilbert d'ordre 3. La matrice de Hilbert d'ordre n est définie par $H = \big(1/(i+j-1)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. En analyse numérique, le conditionnement mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport aux données du problème. Les matrices de Hilbert servent d'exemples classiques de matrices mal conditionnées, ce qui en rend leur usage très délicat en analyse numérique.

♦ ***Exercice 6.*** [○]
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.
2. Calculer $R(0)$. En déduire que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et préciser son inverse.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le déterminant.

1. On trouve que

$$\boxed{R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta).}$$

2. On constate que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I_2$, donc

$$\boxed{\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ R(\theta) \text{ est inversible et } R(\theta)^{-1} = R(-\theta).}$$

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\det R(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0,$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ R(\theta) \text{ est inversible.}}$$

Par ailleurs, on a

$$R(\theta)^{-1} = \frac{1}{\det R(\theta)} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta),$$

donc

$$\boxed{R(\theta)^{-1} = R(-\theta).}$$

♦ ***Exercice 7.*** [○]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que ${}^tAA = I_n$. Démontrer que $A{}^tA = I_n$.
2. On suppose cette fois que $A{}^tAA = I_n$. Démontrer que $A^3 = I_n$.

1. Eh eh eh, piège à c..! Transposer ne donne rien. En fait, il faut faire appel à l'inverse de A ! En effet, l'égalité ${}^tAA = I_n$ dit que ${}^tA = A^{-1}$ (on sait que, dans $\mathscr{M}_n(K)$, un inverse à gauche est un inverse tout court), donc $A{}^tA = AA^{-1} = I_n$. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } {}^tAA = I_n \text{ alors } A{}^tA = I_n.}$$

2. En transposant la relation $A{}^tAA = I_n$, on obtient ${}^tAA{}^tA = I_n$. En multipliant cette dernière relation par A à gauche, il vient $A{}^tAA{}^tA = A$. En remplaçant, dans cette relation, $A{}^tAA$ par I_n, il vient ${}^tA = A$. Reporté dans l'hypothèse de départ, cela donne

$$\boxed{A^3 = I_n.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [○]
Soit $A \in \mathscr{M}_2(K)$. Démontrer que

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I_2 = 0_2$$

et en déduire qu'il existe deux suites $(\alpha_n), (\beta_n) \in K^{\mathbb{N}}$ définies par récurrence telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2.$$

Application : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$.

1. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-(a+d)a+(ad-bc) & ab+bd-(a+d)b \\ ca+dc-(a+d)c & bc+d^2-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I_2 = 0_2.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad \exists \alpha_n, \beta_n \in K,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2.$$

<u>Initialisation :</u> On a $A^0 = 0A + 1I_n$, ce qui démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (\alpha_n A + \beta_n I_2)A \qquad \text{par H.R.} \\ &= \alpha_n A^2 + \beta_n A \\ &= \alpha_n\big((\operatorname{Tr} A)A - (\det A)I_2\big) + \beta_n A \\ &= \big(\alpha_n \operatorname{Tr}(A) + \beta_n\big)A - \alpha_n \det(A) I_2 \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie en posant

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \operatorname{Tr}(A) + \beta_n \qquad \text{et} \qquad \beta_{n+1} = -\alpha_n \det(A)$$

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{il existe deux suites } (\alpha_n), (\beta_n) \in K^{\mathbb{N}} \text{ définies par récurrence telles que } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2.}$$

3. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Le résultat de la question précédente nous dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$$

où

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \beta_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} \alpha_{n+1} = -\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = 2\alpha_n \end{cases}$$

car $\operatorname{Tr}(A) = -1$ et $\det(A) = -2$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_{n+2} = -\alpha_{n+1} + 2\alpha_n.$$

L'équation caractéristique de cette suite récurrente double est $q^2 + q - 2 = 0$ dont les solutions sont $q_1 = 1$ et $q_2 = -2$. Par conséquent, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = A + B(-2)^n.$$

Les conditions $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$ donnent $A = 1/3$ et $B = -1/3$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \alpha_{n+1} + \alpha_n$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \frac{2 + (-2)^n}{3}.$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1 - (-2)^n}{3} A + \frac{2 + (-2)^n}{3} I_2$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 + (-2)^{n+1} & -2 + 2\,(-2)^n \\ 5 - 5\,(-2)^n & -2 + 5\,(-2)^n \end{pmatrix}.}$$

♦ **Exercice 9.** [$\star$]

1. Soient $C \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ une matrice colonne et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(K)$ une matrice ligne.
   On pose $\lambda = LC$. Que dire de λ ?
   On pose $M = CL$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer M^p en fonction de p, λ et M.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

1. On remarque sans mal que

$$\boxed{\lambda \text{ est un scalaire (en fait une matrice } 1 \times 1).}$$

   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M^p = (CL)^p = C(LC)^{p-1}L = C\lambda^{p-1}L = \lambda^{p-1}CL = \lambda^{p-1}M,$$

   donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad M^p = \lambda^{p-1}M.}$$

2. On remarque que

$$M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2$$

   ce qui donne

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad M^p = (a^2 + b^2 + c^2)^{p-1}M.}$$

♦ **Exercice 10.** [$\circ$]

1. Soit $M, P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible. On pose $D = P^{-1}MP$. Démontrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$.
2. Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
   b) Calculer D^k puis M^k pour tout $k \geqslant 0$.

1. La relation est clairement vérifiée pour $k = 0$. Pour $k \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} PD^kP^{-1} &= P\,\overbrace{(P^{-1}MP)(P^{-1}MP)\cdots(P^{-1}MP)}^{k \text{ facteurs}}\,P^{-1} \\ &= \cancel{P}P^{-1}\,M\cancel{P}P^{-1}\,M\cancel{P}\cdots\cancel{P}^{-1}\,M\cancel{P}P^{-1} \\ &= M^k \end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \qquad M^k = PD^kP^{-1}.}$$

2. a) On trouve

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

   et

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

   b) Pour tout $k \geqslant 0$, on pose

$$\mathscr{P}(k) : \; D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.$$

   Initialisation : On a $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^0 \end{pmatrix}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a

$$D^{k+1} = D^k D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^{k+1} \end{pmatrix},$$

donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \qquad D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.}$$

Dès lors, pour tout $k \geqslant 0$, on a, d'après la question 1,

$$M^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ 2-2\,(-2)^k & 1+2\,(-2)^k \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \qquad D^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ 2-2\,(-2)^k & 1+2\,(-2)^k \end{pmatrix}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\star$]
Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=B} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}}_{=B^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B^3} \end{array}$$

Dès lors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^p &= (B + I_3)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k (I_3)^{p-k} \qquad \text{car } I_3 \text{ et } B \text{ commutent} \\ &= I_3 + pB + \frac{p(p-1)}{2} B^2, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall p \geqslant 0, \qquad A^p = \begin{pmatrix} 1 & pa & pa \\ p & 1 + \dfrac{p(p-1)}{2}a & \dfrac{p(p-1)}{2}a \\ -p & -\dfrac{p(p-1)}{2}a & 1 - \dfrac{p(p-1)}{2}a \end{pmatrix}.}$$

♦ **Exercice 12.** [$\star$]
On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de u_0, v_0 et w_0.

On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$A = J - 2I_3.$$

Avec la formule $J^k = 3^{k-1}J$ et le binôme de Newton, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1 + (-1)^{n+1}2^n}{3} J.$$

Une récurrence immédiate nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 3^{n-1}}{3^n} u_0 + \frac{1 + (-1)^{n+1}2^n}{3}(v_0 + w_0).}$$

De même pour v_n et w_n en échangeant les rôles de u, v et w.

♦ **Exercice 13.** [$\circ$]
Soient $M \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $N \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

Notons $A_{i,j}$ les coefficients d'une matrice A. Alors

$$\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{k=1}^{p} (MN)_{k,k} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} M_{k,\ell}N_{\ell,k} = \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} N_{\ell,k}M_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{q} (NM)_{\ell,\ell} = \mathrm{Tr}(NM),$$

ce qui permet donc bien d'affirmer que

$$\boxed{\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM).}$$

♦ **Exercice 14.** [$\circ$]
Démontrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$.

S'il existait deux matrices A, B telles que $AB - BA = I_n$, on aurait $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = n$, ce qui contredit la propriété du cours qui dit que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Donc

$$\boxed{\text{il n'existe pas de matrices } A, B \in \mathscr{M}_n(K) \text{ telles que } AB - BA = I_n.}$$

♦ ***Exercice 15.*** [○]
Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^tA) = 0$?

On a

$$A^tA = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i;k}a_{j,k}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

donc

$$\mathrm{Tr}(A^tA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} {a_{i;k}}^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A^tA) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} {a_{i;k}}^2 = 0 \\
&\iff \quad \forall i,k \in [\![1;n]\!]\,,\ a_{i,k} = 0 \qquad \text{car } \forall i,k \in [\![1;n]\!]\,,\ {a_{i,k}}^2 \in \mathbb{R}_+ \\
&\iff \quad A = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Tr}(A^tA) = 0$ est vraie, on en déduit que

$$\boxed{A = 0.}$$

♦ ***Exercice 16.*** [○]
Résoudre l'équation (E), d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donnée par

$$(E) \qquad X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de sorte que

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} a^2 + bc - 2a & = -1 \\ ab + bd - 2b & = 0 \\ ca + dc - 2c & = 6 \\ bc + d^2 - 2d & = 3 \end{cases}$$

La deuxième équation laisse comme possibilité $b = 0$ ou $a + d = 2$ mais cette dernière égalité est en contradiction avec la troisième équation. Donc $\underline{b = 0}$. La première équation devient alors $a^2 - 2a + 1 = 0$, d'où $\underline{a = 1}$. La quatrième équation donne $d^2 - 2d - 3 = 0$, ce qui donne $d = -1$ ou $d = 3$. Dans le cas $d = -1$, on trouve $c = -3$ et dans le cas $d = 3$, on a $c = 3$. Les solutions sont nécessairement parmi

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie que celles-ci conviennent.

♦ ***Exercice 17.*** [⋆]
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Résoudre l'équation $X + (\mathrm{Tr}\,X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(K)$.

En prenant la trace de cette équation, on obtient

$$(\mathrm{Tr}\,X)(1 + \mathrm{Tr}\,A) = \mathrm{Tr}\,B,$$

ce qui incite à considérer deux cas :

- ▸ <u>Premier cas : $\mathrm{Tr}\,A \neq -1$</u> On trouve alors que

$$X = B - \frac{\mathrm{Tr}\,B}{1 + \mathrm{Tr}\,A}A.$$

- ▸ <u>Second cas : $\mathrm{Tr}\,A = -1$</u> Là encore, on distingue deux sous-cas :

- $\triangleright$ Si $\operatorname{Tr} B \neq 0$, il n'y a pas de solutions.
- $\triangleright$ Si $\operatorname{Tr} B = 0$, alors B est une sol particulière. Soit Y une sol de l'équation, alors $Z = Y - B$ est sol de l'équation homogène $Z + (\operatorname{Tr} Z)A = 0$, donc Z est un multiple de A, c'est-à-dire $Z = \lambda A$. Donc Y est nécessairement de la forme $Y = B + \lambda A$ où $\lambda \in K$. On vérifie que ce sont bien des solutions de l'équation.

En conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \left\{B - \dfrac{\operatorname{Tr} B}{1 + \operatorname{Tr} A} A \right\{ & \text{si } \operatorname{Tr} A \neq -1 \\ \varnothing & \text{si } \operatorname{Tr} A = -1 \text{ et } \operatorname{Tr} B \neq 0 \\ \{B + \lambda A : \lambda \in K\} & \text{si } \operatorname{Tr} A = -1 \text{ et } \operatorname{Tr} B = 0 \end{cases}}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\circ$]
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices symétriques. Démontrer que AB est symétrique si, et seulement si, A et B commutent. Énoncer deux autres résultats analogues.

Supposons que A et B commutent. Alors ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA = AB$ donc AB est symétrique.

Supposons réciproquement que AB est symétrique. Alors $AB = {}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$ donc A et B commutent.

En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } A \text{ et } B \text{ sont symétriques, alors } AB \text{ est symétrique si, et seulement si, } A \text{ et } B \text{ commutent.}}$$

On démontre de même que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{lorsque } A \text{ est symétrique et } B \text{ est antisymétrique, alors} \\ AB \text{ est antisymétrique si, et seulement si, } A \text{ et } B \text{ commutent} \end{array}}$$

et

$$\boxed{\text{lorsque } A \text{ sont antisymétriques, alors } AB \text{ est symétrique si, et seulement si, } A \text{ et } B \text{ commutent}}$$

♦ ***Exercice 19.*** [$\circ$]
Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Démontrer que $M + N$ et MN sont nilpotentes.

Notons p l'indice de nilpotence de M et q celui de N. Comme M et N commutent, on a

$$(MN)^p = M^p N^p = 0_n$$

et

$$(M+N)^{p+q} = \sum_{j=0}^{p+q} \binom{p+q}{j} M^j N^{p+q-j} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+q}{j} M^j \underbrace{N^{p+q-j}}_{=0_n} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{j} \underbrace{M^j}_{=0_n} N^{p+q-j} = 0_n,$$

donc

$$\boxed{M + N \text{ et } MN \text{ sont nilpotentes.}}$$

♦ ***Exercice 20.*** [∘]

Soit $N \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente. Démontrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Notons p l'indice de nilpotence de N. Comme I_n et N commutent, la formule de Bernoulli nous dit que

$$(I_n - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k = I_n - N_p = I_n,$$

donc

$$\boxed{I_n - N \text{ est inversible et } (I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k.}$$

♦ ***Exercice 21.*** [⋆]

Pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotente, on pose

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k.$$

1. Pourquoi cette définition a-t-elle un sens ?
2. Soit N_3 la matrice 3×3 strictement triangulaire supérieure dont tous les coefficients au dessus de la diagonale valent 1. Calculer $\exp(N_3)$.
3. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Démontrer que

$$\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N).$$

4. Soit $N \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente. Démontrer que $\exp(N)$ est inversible et préciser son inverse.

1. La matrice N étant nilpotente, ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang donc la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$ est finie. Cela démontre que

$$\boxed{\text{l'exponentielle d'une matrice nilpotente est bien définie.}}$$

2. On a

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {N_3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant 3,\ {N_3}^p = 0,$$

donc

$$\exp(N_3) = I_3 + N_3 + \frac{1}{2}{N_3}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\exp(N_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Notons p l'indice de nilpotence de M et q celui de N. On sait alors que $(M + N)^{p+q} = 0$. Dès lors,

comme M et N commutent, on a

$$\begin{aligned}
\exp(M+N) &= \sum_{k=0}^{p+q} \frac{(M+N)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{p+q} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j N^{k-j} \\
&= \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant p+q} \frac{1}{j!(k-j)!} M^j N^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{p+q} \frac{1}{j!} M^j \sum_{k=j}^{p+q} \frac{1}{(k-j)!} N^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{p+q} \frac{1}{j!} M^j \sum_{\ell=0}^{p+q-j} \frac{1}{\ell!} N^{\ell} \qquad \text{en posant } \ell = k-j \\
&= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} M^j \sum_{\ell=0}^{q} \frac{1}{\ell!} N^{\ell} \\
&= \exp(M)\exp(N).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N).}$$

4. Comme N et $-N$ commutent, le résultat de la question précédente nous donne

$$\exp(N)\exp(-N) = \exp(N-N) = \exp(0_n) = I_n,$$

donc

$$\boxed{\exp(N) \text{ est inversible et } \big(\exp(N)\big)^{-1} = \exp(-N).}$$

♦ ***Exercice 22.*** [$\star$] (Matrices élémentaires ♡)

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,j}$ le *symbole de Kronecker* défini par $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

Pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, on considère la *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices i, j qui vaut 1.

1. a) Soient $i, j, k, \ell \in [\![1; n]\!]$. Démontrer que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{k\ell})$.
   b) Soient $i, j, k, \ell \in [\![1; n]\!]$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(K)$. Calculer $E_{i,j}M$, $ME_{k,\ell}$ et $E_{i,j}ME_{k,\ell}$. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(E_{i,j}M)$.
2. a) Trouver les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$.
   b) Trouver les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{GL}_n(K)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que, pour toute matrice $C \in \mathscr{M}_n(K)$, on ait $\mathrm{Tr}(AC) = \mathrm{Tr}(BC)$. Démontrer que $A = B$.

1. a) AQT
   Le résultat est $\mathrm{Tr}(E_{i,j}E_{k,\ell}) = \delta_{j,k}\delta_{i,\ell}$.
   b) La matrice $E_{i,j}M$ est la matrice dont la i-ème ligne est la j-ème ligne de M, les autres coefficients étant tous nuls.

   La matrice $ME_{k,\ell}$ est la matrice dont la ℓ-ème colonne est la k-ème colonne de M, les autres coefficients étant tous nuls.

   On a $E_{i,j}ME_{k,\ell} = m_{j,k}E_{i,\ell}$.

   $\mathrm{Tr}(E_{i,j}M) = m_{j,i}$
2. a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ commutant avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(K)$. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$. On a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. L'égalité des coefficients d'indices i, i donne $m_{j,i} = 0$. L'égalité des coefficients d'indices i, j donne $m_{j,j} = m_{ii}$. Par suite la matrice M est scalaire.
   La réciproque est immédiate.
   Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les matrices de } \mathscr{M}_n(K) \text{ qui commutent avec toutes} \\ \text{les matrices de } \mathscr{M}_n(K) \text{ sont les matrices scalaires.}\end{array}}$$

b) On reprend l'étude ci-dessus en étudiant la commutation de M avec $I_n + E_{i,j} \in \mathscr{GL}_n(K)$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les matrices de } \mathscr{M}_n(K) \text{ qui commutent avec toutes} \\ \text{les matrices de } \mathscr{GL}_n(K) \text{ sont les matrices scalaires.}\end{array}}$$

3. L'hypothèse nous dit que $\forall C \in \mathscr{M}_n(K),\ \ \mathrm{Tr}(MC) = 0$ où $M = A - B$. Pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, on a $0 = \mathrm{Tr}(ME_{i,j}) = m_{j,i}$ d'après la question 1. b) β]. Donc $M = 0_n$, c'est-à-dire

$$\boxed{A = B.}$$

♦ ***Exercice 23.*** [$\star$]
Une matrice carrée réelle est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Démontrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un monoïde multiplicatif.

A faire.

♦ ***Exercice 24.*** [$\star$] (Quaternions)

1. On pose
$$\mathscr{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Démontrer que $\mathscr{R}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$.
2. On pose
$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
3. On pose
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & \omega \\ -\overline{\omega} & \overline{z} \end{pmatrix} : z, \omega \in \mathbb{C} \right\}.$$
   a) Démontrer que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif. C'est le corps des *quaternions* d'Hamilton.

   ► On pose
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   b) Établir la table de multiplication de $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$. En déduire que $G = \{\pm\mathbf{1}; \pm\mathbf{i}; \pm\mathbf{j}; \pm\mathbf{k}\}$ est un groupe, appelé *groupe quaternionique*.

   c) Démontrer que tout quaternion $q \in \mathbb{H}$ s'écrit, d'une manière unique, sous la forme $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   d) À tout quaternion $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, on associe son conjugué $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

      α] Pour tout $q \in \mathbb{H}$, calculer $q\overline{q}$.

      β] Pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, démontrer que $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \times \overline{q_1}$.

      γ] Démontrer que l'ensemble des nombres entiers qui sont somme de quatre entiers est stable par multiplication.

      Remarque : Ce résultat est l'une des étapes de la démonstration du théorème des quatre carrés de Lagrange : Tout entier naturel est la somme de quatre carrés.

A faire.

♦ ***Exercice 25.*** [$\star$]
Soit la suite de Fibonaci $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ {f_{n+1}}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$.
   C'est l'identité de Cassini. Lewis Caroll a imaginé un paradoxe géométrique fameux à partir de cette relation : un puzzle rectangulaire de côtés f_n et f_{n+2} forme presque un carré de côté f_{n+1}. Ainsi, pour $n = 5$, on obtient $5 \times 13 = 8^2$, c'est-à-dire $65 = 64$!!
   Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5{f_n}^2 + 4(-1)^n}}{2}.$$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{-n} en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
3. a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer f_{n+p+1} en fonction de f_n, f_{n+1}, f_p et f_{p+1}.
   b) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de f_{2n+1} et de f_{2n} en fonction de f_n et f_{n+1}.
   Écrire un algorithme de calcul de f_n nécessitant $\mathscr{O}(\ln n)$ additions et multiplications.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{cases} f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} &= f_{n+1} \end{cases}$$
c'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix},$$
donc
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. a) Démontrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.
   Initialisation : La relation est clairement vraie puisque $f_0 = 0,\ f_1 = f_2 = 1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la relation vérifiée au rang n. On a
$$\begin{aligned} A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} \qquad \text{par définition de la suite } (f_n)_{n\geqslant 0}. \end{aligned}$$
   La relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.}$$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\det(A^n) = (\det A)^n,$$
   ce qui donne
$$f_{n+1} f_{n-1} - {f_n}^2 = (1 \times 0 - 1 \times 1)^n.$$

Donc, en décalant d'un rang, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad {f_{n+1}}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En tenant compte du fait que $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, on obtient

$${f_{n+1}}^2 - f_n f_{n+1} - {f_n}^2 - (-1)^n = 0.$$

Ceci est une équation du second degré en f_{n+1} dont le discriminant vat $\Delta = {f_n}^2 + 4({f_n}^2 + (-1)^n) = 5{f_n}^2 + 4(-1)^n$. On a donc

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5{f_n}^2 + 4(-1)^n}}{2} \qquad \text{ou} \qquad f_{n+1} = \frac{f_n - \sqrt{5{f_n}^2 + 4(-1)^n}}{2}.$$

La seonde possibilité est à rejeter car elle donne une valeur négative à f_{n+1}. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5{f_n}^2 + 4(-1)^n}}{2}.}$$

Remarque : Ce résultat nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $5{f_n}^2 + 4(-1)^n$ est un carré parfait !

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est inversible puisque $\det(A^n) = (\det A)^n = (-1)^n \neq 0$. De plus, la formule du cours nous dit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^{-n} = (-1)^n \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}.}$$

3. a) En itérant le résultat de la question 1, on a

$$X_{n+p} = A^n X_p,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} f_{n+p+1} \\ f_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{p+1} \\ f_p \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\boxed{f_{n+p+1} = f_{n+1} f_{p+1} + f_n f_p.}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $p = n$ dans la question précédente, ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{2n+1} = {f_{n+1}}^2 + {f_n}^2.}$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $p = n - 1$ dans la question précédente, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{2n} = f_{n+1} f_n + f_n f_{n-1},$$

c'est-à-dire, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{2n} = 2 f_{n+1} f_n - {f_n}^2.}$$

c) En `Python`, on obtient

```
def fiboLog(n):
    """Renvoie F_{n}, F_{n+1}"""
    if n == 0 :
        return (0,1)
    (u,v)=fiboLog(n//2)
    if n%2==0:
        return (2*v*u-u**2,v**2+u**2)
    else
        return (v**2+u**2,2*(u+v)*v-v**2)
```