SÉRIES NUMÉRIQUES

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+b}\right).$$

On a

$$\sqrt[3]{n^3+an} = n\Big(1+\frac{a}{n^2}\Big)^{1/3} = n\Big\{1+\frac{1}{3}\frac{a}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{a^2}{n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big\}$$

et

$$\sqrt{n^2+b} = n\Big(1+\frac{b}{n^2}\Big)^{1/2} = n\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{b}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{b^2}{n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big\},$$

donc

$$\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+b} = \Big(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\Big)\frac{1}{n}-\Big(\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{8}\Big)\frac{1}{n^3}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Si $2a \neq 3b$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2a-3b}{6n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+b}$ diverge.

Si $2a = 3b$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a^2}{18n^3}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+b}$ converge.

Donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+b}\right)\text{ converge si, et seulement si, }\frac{a}{b}=\frac{3}{2}.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Donner un exemple d'une série réelle convergente $\sum a_n$ telle que la série $\sum {a_n}^3$ diverge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_{3n} = \frac{1}{(3n)^{1/3}}, \qquad a_{3n+1} = \frac{1}{(3n+1)^{1/3}} \qquad \text{et} \qquad a_{3n+2} = -\frac{2}{(3n+2)^{1/3}}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=3}^{3N+2}{a_k}^3 = \sum_{n=1}^{N}({a_{3n}}^3+{a_{3n+1}}^3+{a_{3n+2}}^3) = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}-\frac{8}{3n+2}\Big) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{54n^2+9n-2}{3n\,(3n+1)\,(3n+2)}.$$

Or

$$-\frac{54n^2+9n-2}{3n\,(3n+1)\,(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{=\sim} -\frac{2}{n}$$

et $\sum 1/n$ diverge donc, d'après le théorème de comparaison par $\sim$ des séries de signe constant (ici négative), on en déduit que

$$\sum_{k=3}^{3N+2}{a_k}^3 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 3}{a_k}^3\text{ diverge.}}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=3}^{3N+2} a_k = \sum_{n=1}^{N} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(3n)^{1/3}} + \frac{1}{(3n+1)^{1/3}} - \frac{2}{(3n+2)^{1/3}} \right)\cdot$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(3n)^{1/3}} + \frac{1}{(3n+1)^{1/3}} - \frac{2}{(3n+2)^{1/3}} &= \frac{1}{(3n)^{1/3}} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1/3} - 2\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{-1/3} \right\} \\
&= \frac{1}{(3n)^{1/3}} \left\{ 1 + 1 - \frac{1}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 2 + \frac{4}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{(3n)^{1/3}} \left\{ \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{3^{4/3}.n^{4/3}}
\end{aligned}$$

et $\sum 1/n^{4/3}$ converge donc, d'après le théorème de comparaison par $\sim$ des séries de signe constant (ici positive), on en déduit que

$$\sum_{k=3}^{3N+2} a_k = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(3n)^{1/3}} + \frac{1}{(3n+1)^{1/3}} - \frac{2}{(3n+2)^{1/3}} \right) \text{ tend vers une limite finie } S \text{ lorsque } N \longrightarrow +\infty.$$

Comme la suite (a_n) tend vers 0, on peut aussi affirmer que $\sum_{k=3}^{3N} a_k$ et $\sum_{k=3}^{3N+1} a_k$ tendent vers S lorsque $N \longrightarrow +\infty$ et donc que

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 3} a_k \text{ converge.}}$$

✠ ***Exercice 3.*** [⋆]

Soit (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}\cdot$$

Démontrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

On constate que la suite (u_n) est positive et croissante.

Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell(u_{n+1} - u_n)$. Or $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge donc $\sum a_n$ converge d'après le théorème de comparaison par $\sim$ des séries positives.

Si la série $\sum a_n$ converge alors $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant a_n/u_0$ donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge d'après le théorème de comparaison par $\leqslant$ des séries positives. Il s'ensuit que la suite (u_n) converge.

En conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge si, et seulement si, la série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

✠ ***Exercice 4.*** [★]

Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série positive convergente. Démontrer que $\sum_{n\geqslant 1} {u_n}^{1-1/n}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n > 1/2^n$, on a ${u_n}^{1-1/n} \leqslant 2u_n$. Si $u_n \leqslant 1/2^n$, alors ${u_n}^{1-1/n} \leqslant 1/2^{n-1}$. Par conséquent, on a

$$0 \leqslant {u_n}^{1-1/n} \leqslant 2u_n + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot$$

Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1} 2u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/2^{n-1}$ sont convergentes, on en déduit que

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geqslant 1} {u_n}^{1-1/n} \text{ converge.}}$$

✠ ***Exercice 5.***
Soit $\alpha < 1$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\Big]^{-1}.$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\\
\iff\quad & \int_{1}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\\
\iff\quad & \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha},
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Dès lors, le critère de comparaison par $\sim$ des séries positives nous dit que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 0.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [$\star$]
Déterminer, en fonction de $a > 0$, la nature et la somme (lorsque c'est possible) de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \log n\rfloor},$$

où log désigne le logarithme en base 10.

On a

$$\sigma_k = \sum_{10^k\leqslant n<10^{k+1}} a^{\lfloor \log n\rfloor} = \sum_{10^k\leqslant n<10^{k+1}} a^k = a^k(10^{k+1}-10^k) = 9(10a)^k,$$

donc

$$S_N = \sum_{k=0}^{N}\sigma_k = 9\sum_{k=0}^{N}(10a)^k = \begin{cases} 9\dfrac{1-(10a)^{N+1}}{1-10a} & \text{si } a \neq \dfrac{1}{10},\\ 9(N+1) & \text{si } a = \dfrac{1}{10}.\end{cases}$$

Si $a \geqslant 1/10$, on a $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$, donc la suite des sommes partielles de la série, qui est croissante car cette série est positive, admet une sous-suite divergente, ce qui prouve que la série diverge.

Si $a < 1/10$, on a $\lim_{N\to+\infty} S_N = 9/(1-10a)$, donc la suite des sommes partielles de la série, qui est croissante car cette série est positive, admet une sous-suite convergente, ce qui prouve que la série converge.

Par suite,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \log n\rfloor} \text{ converge si, et seulement si, } a < \frac{1}{10} \text{ et dans ce cas, on a } \sum_{n=1}^{+\infty} a^{\lfloor \log n\rfloor} = \frac{9}{1-10a}.}$$

✠ ***Exercice 7.*** [∘] (Série lacunaire)

Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n},$$

où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

Indication : On commencera par rechercher les valeurs de n pour lesquelles u_n n'est pas nul.

Le terme u_n est non nul si, et seulement si, $n+1$ est un carré parfait, donc

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^2-1}\cdot$$

Or

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big),$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N^2} u_n = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\Big),$$

après téléscopage. En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{3}{4}\cdot}$$

✠ ***Exercice 8.*** [∘]

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\arctan\dfrac{2}{n^2} = \arctan\dfrac{1}{n-1} - \arctan\dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. En déduire la nature et la somme de la série de terme général $\arctan\dfrac{2}{n^2}\cdot$

1. Pour tout $x > 1$, considérons la fonction

$$f(x) = \arctan\frac{2}{x^2} - \arctan\frac{1}{x-1} + \arctan\frac{1}{x+1}\cdot$$

Elle est dérivable sur $]1;+\infty[$ d'après les théorèmes généraux de dérivabilité et l'on a

$$\forall x > 1, \qquad f'(x) = \frac{-4/x^3}{1+4/x^4} - \frac{-1/(x-1)^2}{1+1/(x-1)^2} + \frac{-1/(x+1)^2}{1+1/(x+1)^2} = \cdots \text{ calculs } \cdots = 0,$$

ce qui prouve que la fonction f est constante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Or

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x+1} = 0,$$

donc f est constante égale à 0, c'est-à-dire que c'est la fonction nulle sur $]1;+\infty[$. Par suite,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \arctan\frac{2}{n^2} = \arctan\frac{1}{n-1} - \arctan\frac{1}{n+1}\cdot}$$

2. Soit $N \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \arctan\frac{2}{n^2} &= \sum_{n=2}^{N}\Big(\arctan\frac{1}{n-1} - \arctan\frac{1}{n+1}\Big)\\
&= \arctan\frac{1}{1} - \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{4} + \cdots + \arctan\frac{1}{N-1} - \arctan\frac{1}{N+1}\\
&= \arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{N} - \arctan\frac{1}{N+1},
\end{aligned}$$

ce qui donne, en faisant tendre N vers $+\infty$,

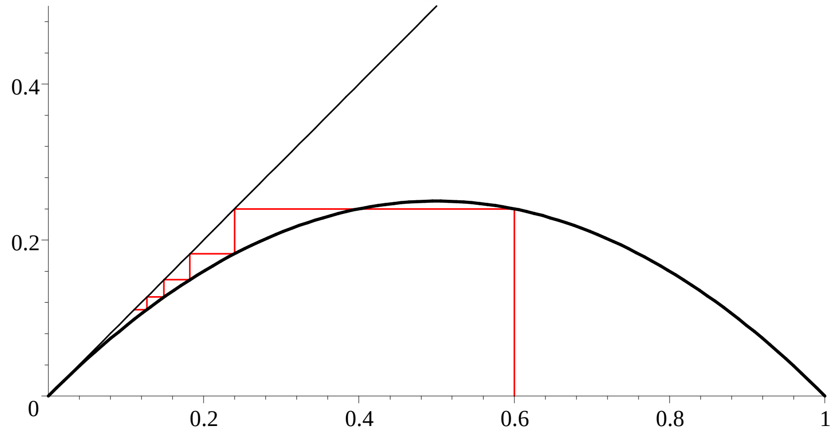
$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \arctan\frac{2}{n^2} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\cdot}$$

✠ ***Exercice 9.*** [∘]
Soit $a \in]0;1[$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = a$ et

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2.$$

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} {u_n}^2$ converge et donner la valeur de sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n/u_{n+1})$ et en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

1. La dynamique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ donne :



donc on conjecture que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 en décroissant.
Pour le démontrer, il suffit de remarquer que l'étude de la fonction $x \longmapsto x - x^2$ (implicitement réalisée pour obtenir le dessin ci-dessus) nous dit que

$$\forall x \in]0;1[\,, \qquad 0 < f(x) < x.$$

En posant $x = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en tenant compte du fait que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_{n+1} < u_n,$$

ce qui démontre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée (par 0). Le théorème de la limite monotone nous dit alors que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n - {u_n}^2$, on obtient $\ell = \ell - \ell^2$, ce qui donne $\ell = 0$.
En conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers 0 en décroissant.}}$$

2. Pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} {u_n}^2 = \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = a - u_{N+1},$$

après téléscopage. Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N = 0$, on conclut que

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geqslant 0} {u_n}^2 \text{ converge et sa somme vaut } a.}$$

3. Pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\prod_{n=0}^{N} \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{a}{u_{N+1}}\right),$$

après téléscopage. Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{N+1} = 0$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(a/u_{N+1}) = +\infty$, donc

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n/u_{n+1}) \text{ diverge.}}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\frac{1}{1-u_n} = -\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,$$

ce qui démontre l'existence de $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \geqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \geqslant 0.$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n/u_{n+1})$ est divergente, le TCSTP permet alors de conclure que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge.}}$$