INTÉGRALES IMPROPRES

Exercice 1. [$\circ$]

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \sqrt{\ln x}}.$$

Exercice 2. [$\circ$]

Nature et, si possible, calcul de l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \alpha}$.

Exercice 3. [$\star$]

Nature et, si possible, calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \mathrm{d}t$.

Exercice 4. [$\circ$]

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier la convergence des intégrales impropres I et J.
2. Calculer $I + J$.
3. Démontrer que $I = J$.
4. Calculer I et J.

Exercice 5. [$\star$] (Intégrale de Gauss)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$m_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x, \qquad M_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale M_n.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$m_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant M_n.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
$$m_n = \sqrt{n} W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad M_n = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$
4. On admet que $W_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$. Déterminer la valeur de I.

Exercice 6. [★] (Intégrale de Dirichlet)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \qquad T_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est arithmétique. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer l'expression de T_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n/n)_{n \geqslant 1}$ et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

L'exercice suivant généralise le précédent.