Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths Lyon
— *NOM Prénom* : Bergerès Martin

Énoncé des exercices

Soit U l'ensemble des racines de l'unité, $\mathbb{F}$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose $F = \{f : A \subset U \longrightarrow \mathbb{C} \mid U \setminus A \text{ est fini}\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.
   Soit $f_k : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall u \in U$, $f_k(u) = (o(u))^k$ où $o(u)$ est l'ordre de u dans U.
2. Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{F}$-libre.

Remarques sur l'oral

Examinateur avenant, il n'hésitait pas à acquiescer ou à rejeter les propositions que je faisais. Il n'exigeait pas que j'écrive tout ce que je disais : une explication claire suffisait parfois. L'énoncé donné au tableau n'est pas très clair, je l'ai reformulé.
La question 1 n'est pas dure. Traiter l'addition et la multiplication par un scalaire (une fraction rationnelle donc) simplifie.
La question 2 est bien moins simple. J'avance un peu seul, puis il me guide un peu. Je propose une idée qui n'est pas son idée de base. On regarde ensemble, puis, ne concluant pas, il décide de me mettre sur sa voie. On s'en sort en se ramenant à des polynômes (en supprimant les dénominateurs), et en faisant tendre correctement des racines de l'unité dont l'ordre est connu. Il faut faire un DL des polynômes de la combinaison linéaire (dont on veut prouver qu'ils sont nuls). Mon DL est alors maladroit : je refais le calcule en écrivant P sans constater que c'est une simple composition de DL. Je m'entends lui dire "Mieux vaut refaire le calcule que faire une erreur". Soufflement du nez. C'est pas faux en même temps.