Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 13 : Analyse (révisions)

Correction du problème 1 – (d'après ENS PLC PC (2009))

Partie I – Fonction d'exclusion associée à un polynôme

1. • Les fonctions $t \mapsto t^k$ ($k \in [\![1, n]\!]$) sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc aussi $t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|P^{(k)}(x)|}{k!} t^k$, tous les coefficients étant positifs, et l'un au moins étant non nul (car $P^{(n)}(x) = a_n$).
   Ainsi, $\boxed{t \mapsto M(x,t) \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$
   • On a $M(x, 0) = |P(x)| \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} M(x,t) = -\infty$, donc, $t \mapsto M(x,t)$ étant strictement décroissante et continue, le théorème de la bijection nous assure l'$\boxed{\text{existence et l'unicité de } m(x) \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } M(x, m(x)) = 0.}$

2. • Pour $P = X^2 - 1$, on obtient, pour x réel fixé :
$$\forall t \in \mathbb{R},\quad M(x,t) = |x^2 - 1| - |2x|t - t^2$$
   Le discriminant de ce polynôme du second degré en t est
$$\Delta = 2(x^2 + |x^2 - 1|).$$
   Sa seule racine positive (égale à $m(x)$) est alors :
$$\boxed{m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}}$$
   • La fonction $x \mapsto x^2 + |x^2 - 1|$ est positive, donc la racine est bien définie. La fonction racine et la fonction valeur absolue étant continues sur leur domaine, par somme et composition, $\boxed{m \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.
   • La fonction $x \mapsto x^2 + |x^2 - 1|$ est même strictement positive. Comme la fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+*$ et que la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit, par les théorèmes de somme et composition, que m est dérivable en tout point tel que $x \neq 0$ et $x^2 - 1 \neq 0$, donc $\boxed{m \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}}$.
   • Pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$m(x) = -|x| + 1.$$
   Comme $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, $\boxed{m(x) \text{ est dérivable à gauche et à droite en } 0.}$
   • La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ est dérivable à gauche et à droite en 1 et -1 (règles de composition, du fait que la valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0), donc aussi $x \mapsto \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}$. La fonction $x \mapsto -|x|$ étant dérivable en 1 et -1, $\boxed{m \text{ est dérivable à gauche et à droite en } 1 \text{ et } -1}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|P(x)| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} m(x)^k = 0$.
   • Si $m(x) = 0$, de façon évidente $P(x) = 0$.
   • Si $P(x) = 0$, alors 0 est solution de l'équation définissant $m(x)$, donc, par unicité, $m(x) = 0$.
   Ainsi, $\boxed{m(x) = 0 \text{ si et seulement si } P(x) = 0}$.

4. • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes,
$$P(y) = P(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} (y - x)^k,$$
   donc, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\boxed{|P(y)| \geqslant |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} |y - x|^k = M(x, |y - x|)}.$$

- Supposons alors que $P(x) \neq 0$, et que $0 \leqslant |y-x| < m(x)$ (remarquez que cette inégalité a un sens puisque $m(x) > 0$. On a alors, par décroissance stricte de $t \mapsto M(x,t)$,

$$M(x, |y-x|) > M(x, m(x)) = 0.$$

On déduit donc du point précédent que $|P(y)| > 0$, donc que $\boxed{P(y) \neq 0}$.

5. - Tout d'abord, $d(x, Z)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, Z est fini (car P est non nul), et tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ possède un minimum.
   - Soit x tel que $P(x) \neq 0$. La contraposée du résultat de la question 4 affirme que si $z \in Z$, alors $|z-x| \geqslant m(x)$. Ainsi, en passant au minimum dans cette inégalité :

$$\boxed{m(x) \leqslant \min_{z \in Z} |z-x| = d(x, Z)}.$$

   - L'inégalité reste trivialement vraie si $P(x) = 0$, donc $x \in Z$, puisque dans ce cas, $m(x) = 0 = d(x, Z)$.

6. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et x appartenant à $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que $m(x) > \varepsilon$.
   - On a alors

$$m(x) - \varepsilon < 0 < m(x) + \varepsilon,$$

donc, par décroissance stricte de $t \mapsto M(t, x)$:

$$\boxed{M(x, m(x)+\varepsilon) < 0 < M(x, m(x)-\varepsilon)}.$$

   - Soit $\varepsilon' = -\frac{1}{2} M(x, m(x)+\varepsilon) > 0$.
   Une fonction polynomiale étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, et la valeur absolue étant continue, pour tout t fixé, la fonction $y \mapsto M(y,t)$ est continue. En particulier, pour $t = m(x)+\varepsilon$ fixé, la fonction $y \mapsto M(y, m(x)+\varepsilon)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   En particulier, sa continuité en x assure l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|x-y| < \eta$,

$$\boxed{M(y, m(x)+\varepsilon) \leqslant M(x, m(x)+\varepsilon) + \varepsilon' = -\varepsilon' < 0.}$$

   On remarquera pour les besoins de la question suivante, que l'on obtient de même l'existence d'un $\eta' > 0$ tel que pour tout y tel que $|x-y| < \eta'$,

$$M(y, m(x)-\varepsilon) > 0.$$

   (b) On a alors, pour tout y tel que $|y-x| < \eta$, par définition de $m(y)$ et décroissance de $t \mapsto M(y,t)$:

$$M(y, m(x)+\varepsilon) < M(y, m(y)) \qquad \text{donc:} \qquad m(y) < m(x)+\varepsilon.$$

   Un raisonnement similaire amène de même, pour tout y tel que $|y-x| < \eta'$, $m(y) > m(x) - \varepsilon$. Ainsi, pour tout y tel que $|y-x| < \min(\eta, \eta')$, $|m(y) - m(x)| < \varepsilon$.
   Cela prouve bien la $\boxed{\text{continuité de } m \text{ sur } \mathbb{R}}$.

7. On désire maintenant étudier la dérivabilité de m, ce que nous allons faire en distinguant plusieurs cas.
   (a) Soit x et h appartenant à $\mathbb{R}$, h étant différent de 0. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k \\
&= \frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k}{hk!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k + \frac{P^{(n)}(x+h) m(x)^n}{hn!} \\
&= \frac{1}{h} \Bigg(|P(x+h)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^k + |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^k + \\
&\qquad\qquad + \frac{P^{(n)}(x+h) m(x)^n - P^{(n)}(x) m(x)^n}{n!} \Bigg).
\end{aligned}$$

   Or, $P^{(n)}$ est contant, donc, d'après la définition de $m(x)$ et $m(x+h)$ (relation (1)), on obtient bien :

$$\boxed{\frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k = 0}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $\sigma(a)$ la fonction qui vaut $+1$ si a est positif, et -1 sinon. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $P^{(k)}(x)$ est non nul pour tout k compris entre 0 et $n-1$. La fonction valeur absolue étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée -1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la non nullité des dérivées $P^{(k)}(x)$ assure la dérivabilité des fonctions $|P^{(k)}|$ en x, la dérivée étant déduite de celle de $P^{(k)}$ par ajout du signe de $P^{(k)}(x)$ (formule de dérivation des fonctions composées), c'est à dire $P^{(k+1)}(x)\sigma(P^{(k)}(x))$.

Partant de cette idée, on isole l'expression $\frac{m(x+h)-m(x)}{h}$ dans la formule précédente, en remarquant que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{h} = \frac{m(x+h)-m(x)}{h} \sum_{i=0}^{k-1} m(x)^i m(x+h)^{k-1-i}.$$

On obtient alors

$$\frac{m(x+h)-m(x)}{h} = \frac{\dfrac{|P(x+h)|-|P(x)|}{h} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x+h)|-|P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+k)|}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} m(x)^i m(x+h)^{k-1-i}}.$$

Le quotient effectué est licite, la somme du dénomiateur étant constituée de termes tous strictement positifs (au moins pour h assez petit, pas continuité de m en x, et du fait que $m(x) \neq 0$). Le membre de droite admet une limite lorsque h tend vers 0, donc aussi le membre de gauche. Cela assure la $\boxed{\text{dérivabilité de } m \text{ en } x}$, et en passant à la limite, on trouve :

$$m'(x) = \frac{P'(x)\sigma(P(x)) - \sum_{k=1}^{n-1} P^{(k+1)}(x)\sigma(P^{(k)}(x))\frac{m(x)^k}{k!}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!}(k-1)m(x)^{k-1}},$$

et donc finalement :

$$\boxed{m'(x) = \frac{P'(x)\sigma(P(x)) - \sum_{k=2}^{n} P^{(k)}(x)\sigma(P^{(k-1)}(x))\frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)|\frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}}.}$$

(c)
- Le calcul précédent s'adapte : le quotient peut toujours s'écrire, du fait que $m(x) \neq 0$, donc $m(x+h)$ aussi pour h suffisamment petit, et du fait qu'au moins le terme d'indice n de la somme est non nul. Par ailleurs, tous les taux d'acroissement apparaissant dans cette formule admettent une limite à droite et à gauche lorsque h tend vers 0, car les $|P^{(k)}|$ sont dérivables à droite et à gauche en 0, en tant que composée d'une fonction dérivable $P^{(k)}$ et d'une fonction dérivable à droite et à gauche. Ainsi, les limites à droite et à gauche de l'expression de la question précédente existent, assurant ainsi l'$\boxed{\text{existence des dérivées à gauche droite de } m}$.
- $\boxed{\text{La fonction } m \text{ peut ne pas être dérivable au point } x}$, comme le montre I-2 (le point $x = 0$ vérifie les hypothèses de cette question).

(d) On suppose que $P(x) = 0$ et $P'(x) \neq 0$. On a alors aussi $m(x) = 0$. Ainsi :

$$\frac{|P(x+h)|-|P(x)|}{h} = \frac{|P(x+h)|}{h} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^k = \frac{m(x+h)}{h}\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^{k-1}.$$

Or, puisque m est continue et $m(x) = 0$,

$$\lim_{h\to 0} m(x+h) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^{k-1} = |P'(x)| \neq 0.$$

En particulier, pour tout h suffisamment petit, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^{k-1} \neq 0$, et on peut écrire :

$$\frac{m(x+h)-m(x)}{h} = \frac{m(x+h)}{h} = \frac{|P(x+h)|-|P(x)|}{h} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^{k-1}} \tag{1}$$

Le polynôme P ayant un nombre fini de racines, il existe η tel que P ne s'annule qu'en x sur $]x-\eta, x+\eta[$. Ainsi, P étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P garde un signe constant sur $]x-\eta, x[$ et sur $]x, x+\eta[$. Comme $P'(x) \neq 0$, l'étude du signe du taux d'accroissement nous assure que P est du signe opposé de $P'(x)$ sur $]x-\eta, x[$, et du signe de $P'(x)$ sur $]x, x+\eta[$. Il vient donc :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|P(x+h)|-|P(x)|}{h} = -\sigma(P'(x)) \lim_{h\to 0^-} \frac{P(x+h)-P(x)}{h} = -\sigma(P'(x))P'(x) = -|P'(x)|,$$

et de même :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|P(x+h)|-|P(x)|}{h} = \sigma(P'(x))P'(x) = |P'(x)|.$$

Ainsi, en passant à la limite dans (1), on obtient la dérivabilité à gauche et à droite de m, et

$$\boxed{m'_g(x) = -1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{m'_d(x) = 1}.$$

8. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x = y$, l'inégalité est triviale. On peut donc supposer $x \neq y$, et vu le rôle symétrique de x et y, on peut supposer que $x < y$.
   - Supposons dans un premier temps que m est dérivable sur $]x,y[$, et plus précisément même, que l'intervalle $]x,y[$ ne contient aucun zéro des dérivées successives $P^{(k)}$ ($k \in [\![0, n-1]\!]$) de P. Alors, en appliquant l'inégalité triangulaire à l'expression obtenue en 7(b) :

     $$\forall z \in]x,y[, \quad |m'(z)| \leqslant \frac{|P'(x)| + \sum\limits_{k=2}^{n} |p^{(k)}(x)| \frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum\limits_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)| \frac{m(x)^{k-1}}{(k-1)!}} = 1.$$

     Ainsi, la fonction m étant continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$, l'inégalité des accroissements finis amène :

     $$|m(y) - m(x)| \leqslant |y - x|.$$

   - Si $]x,y[$ contient des zéros des dérivées $P^{(k)}$, pour $\in [\![0, n-1]\!]$, ces zéros sont en nombre fini (un polynôme non nule admet un nombre fini de racines). Notons-les $x_1, \cdots, x_N$, numérotés de sorte que

     $$x < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < y.$$

     En notant $x = x_0$ et $y = x_{N+1}$, on est dans les hypothèses précédentes sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, pour $i \in [\![0, N]\!]$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

     $$|m(y) - m(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} |m(x_{i+1}) - m(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_{i+1} - x_i| = \sum_{i=1}^{N} (x_{i+1} - x_i) = y - x = |y - x|.$$

   Dans tous les cas, on obtient donc $\boxed{|m(y) - m(x)| \leqslant |y - x|}$.

9. On admet l'existence de :

   $$m_- = \lim_{x\to -\infty} \frac{m(x)}{|x|} \qquad \text{et} \qquad m_+ = \lim_{x\to +\infty} \frac{m(x)}{|x|}.$$

   (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\frac{|P(x)|}{|x|^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!|x|^{n-k}} \cdot \left(\frac{m(x)}{|x|}\right)^k. \tag{2}$$

   Or, $|P^{(k)}(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |a_n| n(n-1)\cdots(n-k+1)|x|^{n-k}$, donc

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!|x|^{n-k}} = |a_n| \binom{n}{k}.$$

   En passant à la limite dans (2), et en simplifiant par $|a_n| \neq 0$:

   $$1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m_+^k \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m_+^k = 0}.$$

   On obtient de même $\boxed{1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m_-^k = 0}$

(b) D'après la formule du binôme, il vient donc :

$$(1+m_-)^n = (1+m_+)^n = 2.$$

Comme m_- et m_+ sont positifs, il vient :

$$\boxed{m_- = m_+ = \sqrt[n]{2}-1}.$$

10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m(x)}{d(x,Z)} & \text{si } x \notin Z \\ 1 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

- La fonction m est continue sur $\mathbb{R}$ (question 6), ainsi que la fonction d. En effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$ et > 0, soit $y \in]x-\varepsilon, x+ \quad [$. On a alors :

$$\forall z \in Z, \quad |x-z| - |x-y| \leqslant |y-z| \leqslant |y-x| + |x-z| \qquad \text{donc:} \qquad |x-z| - \varepsilon \leqslant |y-z| \leqslant |x-z| + \varepsilon.$$

  En passant au minimum dans cette inégalité,

$$d(x,Z) - \varepsilon \leqslant d(y,Z) \leqslant d(x,Z) + \varepsilon.$$

  Cela prouve bien la continuité de d (avec $\eta = \varepsilon$ dans la définition).
  On en déduit que f est continue en tout point x en lequel d ne s'annule par, donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus Z$.
- Soit $x \in Z$, il existe η tel que x soit la seule racine de P dans $]x-2\eta, x+2\eta[$. Ainsi, pour tout $y \in]x-\eta, x+\eta[$, $d(y,Z) = |x-y|$. Par conséquent, pour tout $y \in]x-\eta, x+\eta[$, puisque $m(x) = 0$,

$$f(y) = \frac{m(y)}{d(y,Z)} = \left| \frac{m(y)-m(x)}{y-x} \right| \underset{y \to x^+}{\longrightarrow} |m'_d(x)| = 1 = f(x),$$

  d'après 7(d). De même, $\lim\limits_{y \to x^-} f(y) = |m'_g(x)| = 1$. On en déduit que f est continue en x.
- Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a, pour $x > \max(Z)$:

$$\frac{x}{d(x,Z)} = \frac{x}{x - \max(Z)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

  donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{m(x)}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \sqrt[n]{2}-1$. De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt[n]{2}-1$.
- Ainsi, f est une fonction continue, admettant la même limite $\ell > 0$ en $+\infty$ et $-\infty$.
  * Par définition de la limtie, il existe $A < B$ tels que pour tout $x < A$, $f(x) > \frac{\ell}{2}$ et pour tout $x > B$, $f(x) > \frac{\ell}{2}$
  * f étant continue sur le segment $[A,B]$, elle y admet un minimum β, atteint en un certain point x_0. Par ailleurs, de par sa définition, f est strictement positive, donc $\beta = f(x_0) > 0$.
  * Soit alors $\alpha_n = \min\left(\beta, \frac{\ell}{2}\right) > 0$. On a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant \alpha_n.$$

- On en déduit immédiatement que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Z$,

$$\boxed{\alpha_n d(x,Z) \leqslant m(x)},$$

  l'inégalité étant aussi trivialement vraie pour $x \in Z$ (les deux membres sont nuls dans ce cas).

Partie II – Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P

1. On peut factoriser par x^n, pour que l'unique terme de signe différent des autres soit un constante et disparaisse dans la dérivation. Ainsi, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une fonction

$$g : x \mapsto 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^{k-n}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $Q(x) = x^n g(x)$, Q est de même signe que g, et s'annule aux mêmes points. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|(k-n)x^{k-n-1} > 0.$$

On en déduit que g est strictement croissante, donc s'annule au plus une fois, en passant du signe négatif au signe positif. Comme $Q(0) = -|a_n| < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$, ce changement de signe a bien lieu.

Ainsi, $\boxed{Q \text{ s'annule en une unique valeur } y_0}$, et est négatif sur $[0, y_0]$ et positif sur $[y_0, +\infty[$.

2. Soit $x \in Z$. On a :

$$x^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0 \qquad \text{donc:} \qquad x^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$|x|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||x|^k \qquad \text{donc:} \qquad Q(|x|) \leqslant 0.$$

D'après le signe obtenu pour $Q(y)$ dans la question précédente suivant la position de y par rapport à y_0, on a donc $|x| \leqslant y_0$. Si $r > 0$ vérifie $Q(r) > 0$, il vient donc aussi $r > y_0$ et donc $r \geqslant |x|$.
Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in Z$, $\boxed{r \geqslant x_0 = \max\limits_{x\in Z} |x|}$.

Remarquez qu'on n'a besoin que de $Q(r) \geqslant 0$ pour arriver à cette conclusion, fait qu'on utilisera un peu plus loin.

3. Posons $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$. On a :

$$Q(1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 1 - \alpha \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha) = \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\alpha^k.$$

- Si $\alpha < 1$, alors $Q(1) > 1$, et donc $x_0 \leqslant 1$ puis $x_0 \leqslant \max(1, \alpha)$.
- Si $\alpha \geqslant 1$, alors

$$Q(\alpha) \geqslant \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\alpha^{n-1} = \alpha^n - \alpha^n = 0.$$

On obtient donc $x_0 \leqslant \alpha$ donc $x_0 \leqslant \max(1, \alpha)$, d'après la question précédente, étendue au cas d'égalité.

Ainsi, $\boxed{x_0 \leqslant \max\left(1, \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)}$.

4. Soit $R : x \mapsto (x-1)P(x)$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = (x-1)\left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_i x^i\right) = x^{n+1} + (a_{n-1} - 1)x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} (a_{k-1} - a_k)x^k - a_0.$$

En utilisant le résultat précédent sur R, dont les racines sont $Z \cup \{1\}$, on obtient :

$$x_0 \leqslant \max_{x\in Z\cup\{1\}} |x| \leqslant \max\left(1, |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|\right).$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0| \geqslant \left| a_{n-1} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) + a_0 \right| = 1,$$

donc $\boxed{x_0 \leqslant |a_{n-1} - 1| + \sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|.}$

5. Soit $a_n = 1$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\frac{2a_{i-1}}{a_i}$ soit maximal.

- Supposons dans un premier temps que $\dfrac{2a_{i-1}}{a_i} \geqslant \dfrac{a_0}{a_1}$. On a

$$Q\left(2\frac{a_{i-1}}{a_i}\right) = \left(\frac{2a_{i-1}}{a_i}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{2a_{i-1}}{a_i}\right)^k.$$

Par choix maximal de i, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$; $a_k \frac{a_{i-1}}{a_i} \geqslant a_{k-1}$, donc, en itérant,

$$a_k \left(\frac{a_{i-1}}{a_i}\right)^{k-1} \geqslant a_1.$$

ceci reste trivialement pour $k = 1$. Ainsi, en comparant à $\frac{a_0}{a_1}$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k \left(\frac{a_{i-1}}{a_i}\right)^k \geqslant \frac{1}{2} a_0.$$

On a donc :

$$Q\left(2\frac{a_{i-1}}{a_i}\right) \geqslant \frac{1}{2} a_0 \left(2^n - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - 2\right) = 0.$$

On a alors, d'après II-2, augmenté du cas d'égalité, $x_0 \leqslant 2\frac{a_{i-1}}{a_i}$.
- Supposons maintenant que $2\dfrac{a_{i-1}}{a_i} < \dfrac{a_0}{a_1}$. On calcule de même :

$$Q\left(\frac{a_0}{a_1}\right) = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^k.$$

Cette fois-ci, on a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{a_0}{a_1}$, donc

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^k \leqslant 2^{k-1} a_1 \cdot \frac{a_0}{a_1} = 2^{k-1} a_0.$$

Ainsi :

$$Q\left(\frac{a_0}{a_1}\right) = a_0 \left(2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} - 1\right) = 0.$$

On conclut de même que dans ce cas, $x_0 \leqslant \dfrac{a_0}{a_1}$
- Dans les deux cas, on peut conclure : $\boxed{x_0 \leqslant \max\left(2|a_{n-1}|, 2\dfrac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}, \ldots, 2\dfrac{|a_1|}{|a_2|}, \dfrac{|a_0|}{|a_1|}\right)}$.

6. - Soit $\boxed{P = X^2 + X + 1}$. La question II-4 donne $x_0 \leqslant 1$ alors que la question II-5 donne $x_0 \leqslant 2$. Donne II-4 est meilleur pour ce polynôme. Plus généralement, $P = X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ convient.
   - Soit $\boxed{P = X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}}$. La question II-5 donne $x_0 \leqslant \frac{1}{2}$ alors que la question II-4 donne $x_0 \leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$. D'ailleurs, lors de la preuve de II-4, il est apparu qu'on ne peu pas obtenir par cette inégalité mieux que $x_0 \leqslant 1$.
   Sauriez-vous, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, trouver un polynôme de degré n quelconque tel que II-5 donne $x_0 \leqslant \lambda$?

Partie III – Algorithme d'exclusion

Et voilà le plus beau de l'histoire ! J'ai personnellement trouvé cela magnifique en le découvrant !

1. On a $y_0 = -R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} \geqslant y_n + \frac{\varepsilon}{2}$, où $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Le principe d'Archimède nous garantit qu'$\boxed{\text{il existe } n_0 \text{ tel que } y_{n_0} > R}$.
2. On le montre par récurrence sur n :
   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $Z \cap [-R, y_n[\subset F_{n,\varepsilon}$.
   - C'est trivialement vrai pour $n = 0$, puisque $[-R, y_0[= \varnothing$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai. Alors :

* Si $m(y_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, en particulier, $P(y_n) \neq 0$ (cela nécessiterait $m(y_n) = O)$), et d'après I-4, on a même, pour tout $y \in [y_n, y_n + m(y_n)[$, $P(y) \neq 0$. Donc $[y_n, y_n + m(y_n)[\cap Z = 0$. On a alors :

$$Z \cap [-R, y_{n+1}[= (Z \cap [-R, y_n[) \cup (Z \cap [y_n, y_{n+1}[) = (Z \cap [-R, y_n[) \subset F_{n,\varepsilon} = F_{n+1,\varepsilon}.$$

* Sinon, soit k strictement positif minimal tel que $m(y_n + k\varepsilon) = m(y_{n+1}) =\geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $m(y_{n+1}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, le même raisonnement que plus haut montre que pour tout $y \in]y_{n+1} - m(y_{n+1}), y_{n+1}]$, $f(y) \neq 0$, donc $]y_{n+1} - m(y_{n+1}), y_{n+1}] \cap Z = \varnothing$. Ainsi :

$$Z \cap [-R, y_{n+1}[= (Z \cap [-R, y_n[) \cup (Z \cap [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})]) \subset F_{n,\varepsilon} \cup [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})] = F_{n+1,\varepsilon}.$$

Ainsi, dans les deux cas, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Puisque pour $n = n_0$, $Z \subset [-R, R] \subset [-R, y_n[$, on obtient bien : $\boxed{Z \subset F_{n_0,\varepsilon}}$.

3. Soit $x \in F_{n_0,\varepsilon}$. Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})]$, où $m(y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, et $y_{n+1} = y_n + k\varepsilon$, où k est l'entier strictement positif minimal tel que $m(y_n + k\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $m(y_{n+1}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in [y_n, y_n + (k-1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}]$. Il existe donc $\ell \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $|x - (y_n + \ell\varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, d'après I-8 :

$$|m(x)| - |m(y_n + \ell\varepsilon)| \leqslant |m(x) - m(y_n + \ell\varepsilon)| \leqslant |x - (y_n + \ell\varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, par définition de k, pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$,$m(y_n + \ell\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où :

$$m(x) < \frac{\varepsilon}{\text{puis:}} d(x, Z) < \frac{\varepsilon}{\alpha_n},$$

d'après I-10. Ainsi, il existe $z \in Z$ tel que $x \in B(z, \alpha_n)$, donc $x \in Z_\varepsilon$.

Cela prouve bien l'inclusion $\boxed{F_{n_0,\varepsilon} \subset Z_\varepsilon}$.

4. Si on ne connaît $m(x)$ qu'à η près, qu'on doit supposer petit par rapport à ε (sinon on a du mal à trouver de la pertinence à une comparaison à $\frac{\varepsilon}{2}$, il faut s'arranger pour faire entrer cette approximation dans la marge d'erreur ε souhaitée au bout. Supposons donc η suffisamment petit pour que ce qui suit ait un sens. On note $\tilde{m}(x)$ la valeur calculée de $m(x)$.
   - Si $\tilde{m}(y_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \eta$, alors $m(y_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - 2\eta$, et le même raisonnement que plus haut permet d'affirmer qu'il n'y a pas de racine dans $[y_n, y_n + \tilde{m}(y_n) - \eta]$. On pose donc $y_{n+1} = y_n + \tilde{m}(y_n) - \eta$ et $F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon}$.
   - Si $\tilde{m}(y_n) < \frac{\varepsilon}{2} - \eta$, on recherche comme plus haut le plus entier k tel que $\tilde{m}(y_n + k(\varepsilon - 2\eta)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \eta$, et on construit $y_{n+1} = y_n + k(\varepsilon - \eta)$, et

   $$F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon} \cup [y_n, y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta].$$

   Le même argument que plus haut permet de s'assurer qu'il n'y a pas de racine dans $[y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta, y_{n+1}]$, et par ailleurs,

   $$[y_n, y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta] \subset [y_n, y_n + k(\varepsilon - 2\eta) - \frac{\varepsilon}{2} + 2\eta] = [y_n, y_n + (k-1)(\varepsilon - 2\eta) + \frac{\varepsilon}{2}].$$

   On a alors, comme précédemment, pour tout $x \in [y_n, y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta]$, l'existence d'un $y = y_n + \ell(\varepsilon - \eta)$ tel que :

   $$\tilde{m}(y) < \frac{\varepsilon}{2} - \eta \qquad \text{et} \qquad |y - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Ainsi, d'après I-8 :

   $$|m(x)| \leqslant |m(x) - m(y)| + |m(y)| \leqslant |x - y| + \tilde{m}(y) + \eta < \varepsilon,$$

   et on termine comme plus haut.

   Pour que l'algorithme décrit ainsi se termine, il faut essentiellement que les pas restent minorés par une constante strictement positive, ce qui est assuré dès lors que $\eta < \frac{\varepsilon}{4}$. Pour l'implémentation qui suit, nous prendrons $\eta = \frac{\varepsilon}{8}$

5. Je réponds à toutes les questions de programmation dans un même programme. J'ai renommé certaines fonctions, et j'ai utilisé la réponse de la question III-4 pour absorber l'erreur d'approximation du calcul de m.

```python
def derivepoly(P):
    """Dérivation formelle du polynôme P"""
          # la ligne précédente apparaîtra dans l’aide associée au
          # module dedieuyacoubsohn, après import, lors de la description
          # de toutes les fonctions du modules. Essayez!
    return([i*a for (i,a) in enumerate(P) if i > 0])

def evaluepoly(P, x):
    """évaluation du polynôme P en x"""
    d = len(P)-1
    S = P[d]              #initialisation de la somme
    for i in range(d,0,-1): #calcul par l’algorithme de Hörner
        S = S * x + P[i-1]
    return(S)

def polyM(P,x):
    """Calcul de la fonction M de l’algo de DY,comme polynôme formel en t"""
    M = [abs(evaluepoly(P,x))]
    factorielle = 1
    for k in range(1,len(P)):
        P = derivepoly(P)
        factorielle = k * factorielle
        M.append(-abs(evaluepoly(P, x)) / factorielle)
    return(M)

def zeropolyM(P,x,eta):
    """Recherche du zéro positif de M(x,t), c’est-à -dire m(x), à eta près"""
    M = polyM(P,x) # calcul de M(x,t)
    k = 1         #recherche d’un intervalle de longueur 1 contenant m(x)
    while evaluepoly(M,k) > 0:
        k+=1      #à  la sortie, l’intervalle [k-1,k] contient m(x)
    a = k-1
    b = k         #initialisation des bornes de la dichotomie
    while b - a > eta:
        if evaluepoly(M,(a + b) / 2) < 0:
            b = (a + b) / 2
        else:
            a = (a + b) / 2
    return((a + b) / 2) # on retourne le milieu du segment final

def coefficientspositifs(P):
    """Test de stricte positivité des coefficients de P"""
    k = 0
    n = len(P)
    while k < n:
        if P[k] <= 0:
            return(False)
        k += 1
    return(True)

def borneracines(P):
    """Recherche d’un intervalle [-R,R] contenant les racines de P"""
```

```python
    n = len(P) - 1 # Calcul du polynôme unitaire de mêmes racines
    for (i,a) in enumerate(P):
        P[i] = a / P[n]
    S = 0          #première inégalité
    for i in range(n):
        S += abs(P[i])
    R1 = max(1,S)  #deuxième inégalité
    R2 = abs(P[n-1] - 1) + abs(P[0])
    for i in range(1,n):
        R2 += abs(P[i] - P[i-1])
    if coefficientspositifs(P): #test de validité de la troisième inégalité
        liste = [2 * abs(P[k-1]) / abs(P[k]) for k in range(2,n+1)]
        liste.append(abs(P[0]) / abs(P[1]))
        R3 = max(liste)
    try:
        return(min(R1,R2,R3)) # on retourne la meilleure des 3 valeurs
    except:
        return(min(R1,R2))   # ou des 2, si la troisième n'a pas été définie

def DedieuYacoubsohn(P,eps):
    """Algorithme de Dedieu-Yacoubsohn pour localiser
    finement les racines de P"""
    F = []             #liste des bornes
    R = borneracines(P)
    y = -R             #initialisation de y_0
    eta = eps / 8
    while y <= R:
        m = zeropolyM(P,y,eta)
        if m >= eps / 2 - eta:
            y = y + m - eta
        else:
            k = 1
            pas = eps - 2 * eta
            while zeropolyM(P,y+k*pas,eta) < eps / 2 - eta:
                k += 1
            z = y + k * pas
            m = zeropolyM(P,z,eta)
            if z - m + eta >= y:
                F.append(y)
                F.append(z-m+eta)
            y = z
    return(F)
```

Avec le polynôme $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, et une erreur de 0.00001 la réponse renvoyée est :

`[0.9999999862645166, 1.0000000104345814, 1.9999999882601298,`
`2.000000012430195, 2.999999985453415, 3.0000000096234802]`

Avec le polynôme $X^2 - 1$ et une erreur de 10^{-10}, la réponse renvoyée est :

`[-1.4142135623849021, -1.4142135623592478, 1.4142135623578393, 1.4142135623834937]`

Plutôt pas mal, non ?