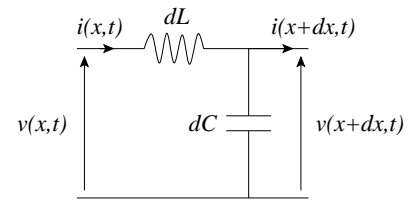


## T.D. EM<sub>8</sub> : Ondes unidimensionnelles - Équation de d'Alembert

### Exercice 1 Propagation dans une ligne bifilaire sans pertes

Une tranche infinitésimale d'épaisseur  $dx$  d'une ligne électrique bifilaire peut être modélisée par le schéma de la figure comportant une inductance élémentaire  $dL = \Lambda dx$  et une capacité élémentaire  $dC = \Gamma dx$ .



- Justifier que l'on peut traiter cette tranche de circuit d'épaisseur  $dx$  dans l'ARQS.
- Établir deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité  $i(x,t)$  et la tension  $v(x,t)$ . En déduire que ces grandeurs sont solutions d'une équation de D'ALEMBERT unidimensionnelle et exprimer la célérité  $c$  correspondante.
- Dans le cas d'une onde plane progressive se propageant selon  $\vec{e}_x$ , montrer que le rapport  $v(x,t)/i(x,t)$  est une constante liée aux caractéristiques de la ligne. Que vaut le même rapport pour une onde plane progressive se propageant selon  $-\vec{e}_x$  ?
- On ferme en  $x = 0$  une ligne semi-infinie, s'étendant de  $x = -\infty$  à  $x = 0$  sur une résistance  $R$  ; on néglige les phénomènes de propagation dans  $R$ . À quelle condition une onde plane progressive peut-elle se propager selon  $\vec{e}_x$  sur cette ligne semi-infinie ?
- Dans le cas où la ligne semi-infinie est fermée en  $x = 0$  par un court-circuit et où une onde plane progressive harmonique incidente  $v_i(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$  est émise en  $x = -\infty$ , déterminer la tension  $v(x,t)$  et le courant  $i(x,t)$  en tout point de la ligne.

### Exercice 2 Aspect énergétique de la propagation dans une corde vibrante

Une corde sans raideur, de masse linéique  $\mu$  et de longueur  $L$  est tendue par une tension  $T_0$ , entre les points  $x = 0$  et  $x = L$ . Le poids de la corde est négligé. Les petits mouvements transversaux de la corde sont décrits par la fonction  $y(x,t)$  repérant le déplacement d'un point  $M$  d'abscisse  $x$  de la corde à la date  $t$ .

- Montrer que les ondes dans la corde sont décrites par une équation de D'ALEMBERT.
- Exprimer l'énergie cinétique linéique  $e_K$  de la corde.
- Montrer que le travail qu'il faut fournir à un élément de corde (de longueur  $dx$  au repos) pour le faire passer de l'état de repos ( $y = 0$ ) à l'état où  $y = y(x,t)$  s'écrit

$$\delta W = \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

En déduire l'énergie potentielle linéique  $e_P$  de la corde.

- Montrer qu'il existe une fonction  $P(x,t)$  telle que

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad e = e_K + e_P$$

Interpréter ce résultat.

- Le mouvement stationnaire d'une corde dans le mode de vibration  $n$  est représenté par

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad k_n = \omega_n / c = n\pi / L$$

Calculer l'énergie totale  $E_n$  dans le mode  $n$ .

- La solution générale de l'équation de propagation est une combinaison linéaire des divers modes de vibration. Calculer l'énergie totale  $E$  de la corde en fonction des  $E_n$ . Conclure.

### Exercice 3 Approche lagrangienne des ondes sonores

On considère une conduite de section  $S$  constante contenant un fluide de masse volumique  $\mu_0$  au repos. Le déplacement, à l'instant  $t$ , d'une particule (mésoscopique) de fluide, à l'abscisse  $x$  lorsque le fluide est au repos, est noté  $\xi(x,t)$ . La position de cette particule est donc  $x + \xi(x,t)$  à l'instant  $t$ .

Puisqu'on suit une particule, on dit que l'on est dans une approche lagrangienne (différente de l'approche eulérienne où l'on ne suit pas une particule mais on regarde ce qui se passe en  $x$  à l'instant  $t$ ).

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique, ce qui revient à supposer la longueur d'onde sonore grande :  $\xi \ll \lambda$  et  $|\partial \xi / \partial x| \simeq |\xi / \lambda| \ll 1$ . On pourra alors linéariser les équations.

- Évaluer la variation de masse volumique d'une tranche élémentaire de fluide, de section  $S$  et d'épaisseur  $dx$  au repos. En faisant intervenir le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$ , en déduire que

$$\chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Établir l'équation du mouvement de cette même tranche de fluide et en déduire que

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

- En déduire l'équation de propagation vérifiée par les champs de vitesse et de pression sonores.
- Évaluer la célérité du son dans l'air dans les conditions ambiantes. Qu'aurait-on obtenu si, au lieu de supposer une évolution isentropique (hypothèse de LAPLACE), on avait opté pour une évolution isotherme (hypothèse de NEWTON) ? Conclure.

### Exercice 4 Approximation des milieux continus

On considère une chaîne linéaire infinie de masses  $m$  disposées le long d'un axe horizontal ( $Ox$ ). Ces masses sont liées consécutivement entre elles par des ressorts sans masse de raideurs  $K$  et de longueurs à vide  $\ell_0$ . On suppose qu'à l'équilibre, les masses sont aux positions  $x_n = na$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a > 0$ ).

Hors-équilibre, on repère la  $n^e$  masse par rapport à sa position d'équilibre par son déplacement algébrique  $u_n(t)$ .

1. Quelle est l'équation qui régit le mouvement de la  $n^e$  masse ?
2. Montrer que cette équation se ramène à une équation d'onde de D'Alembert unidimensionnelle sous une (des) condition(s) à préciser. Quelle est la célérité  $c$  des ondes planes progressives ?
3. À quoi peut servir ce modèle de chaîne linéaire ? La (les) conditions précédentes sont-elles alors justifiées ?

### Exercice 5 Propagation en présence de forces extérieures volumiques

On étudie les petits mouvements dans la direction ascendante  $\vec{e}_z$  d'une corde métallique de longueur  $L$ , fixée en ses deux extrémités d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité  $I = I_0 \cos \omega t$  (orienté dans le sens des  $x$  croissants) et plongée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y$ . On note  $F$  la tension de la corde et  $\mu$  sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement  $z(x, t)$  d'un point de la corde est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \sin(\pi x/L) \cos \omega t \quad (c \text{ et } A \text{ sont à préciser})$$

2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme  $z(x, t) = C \sin(\pi x/L) \cos \omega t$ . Déterminer  $C$  pour  $\omega \neq \pi c/L$ . Que se passe-t-il lorsque  $\omega$  tend vers  $\pi c/L$  ?
3. En réalité, le champ magnétique est créé par un aimant en U dont l'entrefer a une largeur  $e < L$  et peut être modélisé par un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$  pour  $(L - e)/2 < x < (L + e)/2$  et un champ magnétique nul en dehors. On constate alors que le phénomène étudié à la question précédente se produit pour toutes les pulsations  $\omega_n = n\pi c/L$ . Interpréter brièvement *sans calculs*.

### Quelques indications ou solutions...

#### Exercice 1

1.  $dx \ll \lambda$ .
2. Attention aux signes ! On trouve  $c = 1/\sqrt{\Lambda \Gamma}$ .
3. Impédance de ligne  $Z_{opp^+} = v(x, t)/i(x, t) = \sqrt{\Lambda/\Gamma} = -Z_{opp^-}$ .
4.  $Z_{opp^+} = R$ .
5.  $v(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$  et  $i(x, t) = 2\sqrt{\Gamma/\Lambda} A \cos(kx) \cos(\omega t)$ .

#### Exercice 2

Pas d'indication car détaillé...

#### Exercice 3

Pas d'indication car détaillé...

#### Exercice 4

L'approximation des milieux consiste à dire que la longueur d'onde caractéristique  $\lambda$  est très grande devant  $a$ . Alors, on trouve l'équation de D'Alembert avec  $c = a \omega_0$  où  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ .

#### Exercice 5

1. Utiliser la même méthode que pour une corde classique mais penser aux actions de LAPLACE sur celle-ci.

Pour les 3/2, l'action de Laplace sur un morceau de fil conducteur  $d\vec{\ell}$  parcouru par une intensité  $I$  orientée dans le même sens est la force  $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ .

On trouve  $c = \sqrt{F/\mu}$  et  $A = I_0 B_0/\mu$ .

2.  $C = \frac{A}{(\pi c/L)^2 - \omega^2}$ .
3. Penser à un développement en série de FOURIER...