LIMITE D'UNE SUITE CORRECTION

Exercice 1

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = (n!\,\mathrm{e}^n)/n^{n+1/2}$.

A. *Convergence de (S_n)*

0. *On veut démontrer que, pour tout $x \in\,]1;+\infty[$, on a $2/(2x-1) < -\ln(1-1/x) < (2x-1)/\big(2x(x-1)\big)$. Pour cela, on vous demande de démontrer l'inégalité de gauche et d'expliquer sommairement (et sans aucun calcul) comment on procéderait pour démontrer l'inégalité de droite.*

Introduisons la fonction
$$f(x) = \frac{2}{2x-1} + \ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\cdot$$
C'est une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ par théorèmes généraux et l'on a, pour tout $x \in\,]1;+\infty[$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-1/x} \\ &= -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{-4x(x-1)+(2x-1)^2}{(2x-1)^2x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(2x-1)^2x(x-1)}, \end{aligned}$$
ce qui permet de dresser le tableau de variation suivant de la fonction f sur $]1;+\infty[$:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$ $\nearrow$	0

On en conclut que $\forall x \in\,]1;+\infty[\,,\ f(x) < 0$, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall x \in\,]1;+\infty[\,, \qquad \frac{2}{2x-1} < -\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\cdot}$$
En étudiant sur $]1;+\infty[$ la fonction
$$g(x) = \frac{2x-1}{2x(x-1)} + \ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big),$$
on démontrerait que $\forall x \in\,]1;+\infty[\,,\ g(x) > 0$, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall x \in\,]1;+\infty[\,, \qquad -\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}\cdot}$$

1. a) *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $S_n/S_{n-1} = \exp\{(n-1/2)[2/(2n-1)+\ln(1-1/n)]\}$ et en déduire le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.*

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{S_{n-1}} &= \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\,\mathrm{e}^{n-1}} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{n-1}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{n^n\sqrt{n}} \\
&= n \times \mathrm{e} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n+1/2}} \\
&= \mathrm{e} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}} \\
&= \mathrm{e} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2} \\
&= \exp\left\{1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}.}$$

Le résultat de la question 0 nous dit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < 0.$$

Comme $\forall n \geqslant 2,\ n - 1/2 > 0$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] < 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\} < 1$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{S_n}{S_{n-1}} < 1,$$

ou encore (puisque la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est positive)

$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n < S_{n-1}.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$$

b) *Démontrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.*

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et elle est minorée par 0 (puisqu'elle est positive) donc, d'après le théorème de la limite monotone, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0.}$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n\,\mathrm{e}^{-1/(4n)}$.*

a) *Quelle est la limite de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$?*

Comme $(S_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ et $(\mathrm{e}^{-1/(4n)})_{n\geqslant 1}$ tend vers 1, on voit clairement que

$$\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \ell.}$$

b) *Démontrer que, pour $n \geqslant 2$, on a $T_n/T_{n-1} = \exp\{(n-1/2)[(2n-1)/\big(2n(n-1)\big)+\ln(1-1/n)]\}$ et en déduire le sens de variation de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on dire de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$?*

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{T_n}{T_{n-1}} &= \frac{S_n}{S_{n-1}} \frac{\mathrm{e}^{-1/(4n)}}{\mathrm{e}^{-1/\left(4(n-1)\right)}} \\
&= \frac{S_n}{S_{n-1}} \exp\left\{\frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n}\right\} \\
&= \frac{S_n}{S_{n-1}} \exp\left\{\frac{1}{4n(n-1)}\right\} \\
&= \exp\left\{1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{4n(n-1)}\right\} \qquad \text{d'après 2. a)} \\
&= \exp\left\{1 + \frac{1}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{4n^2-4n+1}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{(2n-1)^2}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{T_n}{T_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}.}$$

Le résultat de la question 0 nous dit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) > 0,$$

ce qui donne

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\} > 1$$

c'est-à-dire, puisque la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est positive,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad T_n > T_{n-1}.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et les deux suites tendent vers la même limite ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$. Par conséquent, on peut dire que

$$\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

c) *Justifier que $\ell > 0$.*

Comme $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_1 \geqslant S_n \geqslant \ell \geqslant T_n \geqslant v_1$. En particulier, on a $\ell \geqslant v_1$ avec $v_1 = \mathrm{e}^{3/4} > 0$, donc

$$\boxed{\ell > 0.}$$

B. *Calcul de la limite de (S_n)*

3. *Démontrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive.*

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n) : W_n > 0$.

Initialisation : Les propriétés $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies car $W_0 > 0$ et $W_1 > 0$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$. On a $W_{n+2} = (n+1)W_n/(n+2) > 0$ d'après $\mathscr{P}(n)$. Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, on peut affirmer que

$$\boxed{(W_n)_{n\geqslant 0} \text{ est strictement positive.}}$$

4. a) *Démontrer que* $W_n \sim W_{n+1}$.

Comme $(W_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, on a $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Or $\forall n \geqslant 0,\ W_n > 0$, donc

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

En tenant compte de l'hypothèse, on obtient, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

Associé au théorème des gendarmes, cet encadrement implique que $\lim W_{n+1}/W_n = 1$, ce qui signifie que

$$\boxed{W_n \sim W_{n+1}.}$$

b) *Calculer, pour tout* $n \geqslant 1$, *la valeur de* nW_nW_{n-1}.

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$nW_nW_{n-1} = n\frac{n-1}{n}W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2},$$

donc $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 0}$ est constante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $nW_nW_{n-1} = 1W_1W_0 = \pi/2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.}$$

c) *En déduire un équivalent de* W_n *quand* $n \to +\infty$, *puis la limite de la suite* $(W_n)_{n\geqslant 0}$.

En tenant compte des résultats des deux questions précédentes, il vient

$$n{W_n}^2 \sim \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique que

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad \text{et} \qquad \lim W_n = 0.}$$

5. *Prouver que* $\forall p \geqslant 0,\ W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ *et* $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$. *En déduire que* $\lim \dfrac{2^{4p+1}(p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = \pi$.

On procède par récurrence.

<u>Initialisation :</u> Au rang 0, on a, sans difficulté, $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$.

<u>Hérédité :</u> Fixons $p \in \mathbb{N}$ et supposons que les égalités soient vérifiées au rang p. On a

$W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}W_{2p}$	$W_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1}$	d'après la question précédente
$= \dfrac{2p+1}{2p+2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$	$= \dfrac{2p+2}{2p+3}\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$	par hypothèse de récurrence
$= \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!(p+1)!}\dfrac{\pi}{2}$	$= \dfrac{2^{2p+1}p!(p+1)!}{(2p+1)!(2p+3)}$	
$= \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}\dfrac{\pi}{2}$	$= \dfrac{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)!}$	en multipliant par $\dfrac{2p+2}{2p+2}$

ce qui démontre les propriétés au rang $p+1$.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence affirme que

$$\boxed{\forall p \geqslant 0, \qquad W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

Par suite,

$$\frac{2^{2p+1}(p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = \pi\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}},$$

donc, d'après le résultat de la question 2.a),

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p+1}(p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = \pi.}$$

6. *Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général ${S_n}^4/{S_{2n}}^2$.*

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\frac{{S_n}^4}{{S_{2n}}^2} = \frac{(n!)^4\, \mathrm{e}^{4n}}{n^{4n+2}} \times \frac{(2n)^{4n+1}}{\big((2n)!\big)^2\, \mathrm{e}^{4n}} = \frac{(n!)^4 2^{4n+1}}{n\big((2n)!\big)^2} = \frac{(n!)^4 2^{4n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\,\frac{2n+1}{n}.$$

Donc, d'après le résultat de la question précédente, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{{S_n}^4}{{S_{2n}}^2} = 2\pi.}$$

7. *Déterminer ℓ et en déduire que $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$ (formule de Stirling).*

Sachant que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel $\ell > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} {S_n}^4/{S_{2n}}^2 = \ell^4/\ell^2 = \ell^2$, donc, d'après la question précédente,

$$\boxed{\ell = \sqrt{2\pi}.}$$

Par suite, on a $S_n \sim \sqrt{2\pi}$, donc $(n!\,\mathrm{e}^n)/n^{n+1/2} \sim \sqrt{2\pi}$, c'est-à-dire

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

8. *Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \mathrm{d}t$. Démontrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie toutes les hypothèses faites au début de l'énoncé.*

Soit $n \geqslant 0$. Sur $[0;\pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $(\sin t)^n \geqslant (\sin t)^{n+1}$. La propriété de croissance de l'intégrale vue en cours permet alors d'affirmer que

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, \mathrm{d}t = W_n.$$

Cela montre bien que

$$\boxed{(W_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite décroissante.}}$$

On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\, \mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1,$$

donc

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = 1.}$$

Nous effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} \mathrm{d}t$ en choisissant $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = (\sin t)^{n+1}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$. On a alors $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = (n+1)(\cos t)(\sin t)^n$, d'où

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\, \mathrm{d}t = \big[-(\cos t)(\sin t)^{n+1}\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)(\cos t)^2 (\sin t)^n\, \mathrm{d}t.$$

On constate que le crochet est nul puisque $(\sin)^{n+1}$ s'annule en 0 (car $n+1 \geqslant 1$) et cos en $\pi/2$. En utilisant la formule $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ dans la dernière intégrale, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\, \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} (n+1)(1-\sin^2 t) \sin^n t\, \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, \mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En ajoutant $(n+1)W_{n+2}$ aux deux membres de cette égalité, il vient $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ pour tout $n \geqslant 0$, donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$