Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 1 h 30

SYSTÈMES LINÉAIRES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les nombres.

Dans tout ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne indistinctement l'un des deux ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Systéme linéaire d'équations

A.1. Définition

Définition 1

Une équation linéaire est une relation du type $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_px_p = b$ où $a_1,\dots,a_p,b \in \mathbb{K}$ sont des nombres donnés, appelés coefficients, et $x_1,x_2,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ sont des nombres à déterminer, appelées inconnues.

Lorsque p est petit, on utilise souvent x, y, z, t comme inconnues à la place de x_1, x_2, x_3, x_4.

Exemples :

- L'équation $3x+2y+z=5$ est une équation linéaire.
- L'équation $2x=1+2z$ est aussi une équation linéaire, qui s'écrit aussi $2x-2z=1$.
- L'équation $x^2+y=2$ n'est pas linéaire.

En pratique, nous travaillerons simultanément avec plusieurs équations linéaires.

Définition 2

On appelle système d'équations linéaires la conjonction d'un nombre fini d'équations linéaires rassemblées derrière une accolade :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On dit qu'un p-uplet $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)$ est une solution de ce système si, en donnant à l'inconnue x_1 la valeur α_1, à l'inconnue x_2 la valeur α_2, ... , à l'inconnue x_p la valeur α_p, chacune des n lignes du système est une assertion vraie.

Résoudre un tel système de n équations à p inconnues, c'est rechercher toutes ses solutions.

La famille $(b_1,\dots,b_n)$ est appelée le second membre du système. Lorsque ce second membre est nul (c'est-à-dire $b_1=\cdots=b_n=0$), on dit que le système est homogène. Du coup, logiquement, on appelle système homogène associé à (S) le système obtenu en remplaçant $b_1,b_2,\dots,b_n$ par des 0.

On notera qu'un tel système possède p inconnues mais que la donnée d'un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant le système fournit **une** solution (et non p).

En pratique, il faut souvent réordonner les inconnues d'un système pour lui donner la forme ci-dessus. Cela consiste, d'une part, à basculer toutes les inconnues à gauche du signe $=$ et toutes les constantes à droite et, d'autre part, à disposer en colonnes les diverses inconnues. On dit alors que l'on obtient une écriture de type matriciel du système.

Exemples :

- Le système $\left\{\begin{array}{l} 2=-y-x^2 \\ -y^2+\ln x = x \end{array}\right.$ n'est pas linéaire. Nous l'ignorerons donc avec dédain tout au long de ce cours.
- L'écriture de type matriciel du système $\left\{\begin{array}{l} 1+x=-y \\ -3y+x=2-x \\ 1-x+4y=0 \end{array}\right.$ est $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 3y & = & 2 \\ -x & + & 4y & = & -1 \end{array}\right.$

A.2. Combinaison d'équations et élimination d'inconnues

La définition suivante introduit la notion de combinaison d'équations linéaires.

Définition 3

Si $L_i : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$ et $L_j : \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_px_p = \beta$ sont deux équations d'un système et si λ, μ sont deux éléments de $\mathbb{K}$, la notation $\lambda L_j + \mu L_i$ désigne l'équation $(\lambda a_1 + \mu\alpha_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu\alpha_2)x_2 + \cdots + (\lambda a_p + \mu\alpha_p)x_p = \lambda b + \mu\beta$.

L'opération consistant à remplacer L_j par $\lambda L_j + \mu L_i$ est notée $L_j \leftarrow \lambda L_j + \mu L_i$.

Exemples :

- Si $L_1 : 3x + 2y + z = 5$ et $L_2 : 2x + y - 2z = 1$ alors $L_1 + 2L_2 : 7x + 4y - 3z = 7$.

Nous avons vu que deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions. De la même façon, on peut introduire l'équivalence entre systèmes.

Définition 4

Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

La proposition suivante explique comment utiliser les combinaisons d'équations pour associer à un système de départ un autre système, qui lui est équivalent.

Proposition 1

On considère un système dont les équations sont désignées par $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$. Dans le système, si l'on remplace la j-ème équation L_j par l'équation $\lambda L_j + \mu L_i$ avec $\lambda \neq 0$, on obtient un système équivalent au premier.

Réaliser une suite de combinaisons élémentaires de ce type, c'est travailler par combinaison sur les équations du système.

■ Démontrons que $(L_i \text{ et } L_j) \Leftrightarrow (L_i \text{ et } \lambda L_j + \mu L_i)$ dès que $\lambda \neq 0$.

Pour le sens direct, on remplace la ligne L_j par la ligne $\lambda L_j + \mu L_i$.

Pour le sens réciproque, il suffit de remplacer la ligne $\lambda L_j + \mu L_i$ par la ligne $\dfrac{1}{\lambda}\big((\lambda L_j + \mu L_i) - \mu L_i\big)$, ce qui est licite puisque $\lambda \neq 0$. ■

Combiner deux équations n'a évidemment d'intérêt que si la nouvelle ligne obtenue est « plus simple » que celle qu'elle remplace. La proposition qui suit explique comment obtenir ce gain de simplicité en éliminant au moins une des inconnues.

Proposition 2

Si $L_i : a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + \cdots + a_px_p = b$ et $L_j : \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_kx_k + \cdots + \alpha_px_p = \beta$ sont deux équations d'un système avec $a_k \neq 0$, l'opération de combinaison $L_j \leftarrow a_kL_j - \alpha_kL_i$ donne une nouvelle équation dans laquelle il n'y a plus l'inconnue x_k. On dit que l'on a éliminé x_k.

Exemples :

- Pour éliminer l'inconnue x entre les équations $L_1 : 3x + 2y + z = 5$ et $L_2 : 2x + y - 2z = 1$, on effectue $L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$, ce qui donne $-y - 8z = -7$.
- Il n'est pas interdit d'être intelligent ! Si l'on souhaite éliminer l'inconnue y entre les équations $L_1 : x + 27y + 8z = -1$ et $L_2 : 2x - 27y - 3z = 0$, il n'est pas nécessaire d'effectuer l'opération $L_2 \leftarrow 27L_2 + 27L_1$. Vous pouvez vous contenter d'additionner les deux lignes, c'est-à-dire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, ce qui donne $3x + 5z = -1$.

Lorsque les calculs ne sont pas évidents, on peut déterminer les coefficients de la nouvelle équation (autre que celui de x_k qui, on le sait, devient nul) à l'aide de l'astuce calculatoire décrite dans l'encadré ci-dessous.

Technique du produit en croix

Lorsqu'on élimine l'inconnue x_k de la ligne L_j à l'aide de l'inconnue x_k de la ligne L_i, c'est-à-dire lorsqu'on effectue l'opération $L_j \leftarrow a_k L_j - \alpha_k L_i$, le coefficient α_ℓ de l'inconnue x_ℓ de l'équation L_j est remplacé par un coefficient A_ℓ dans la nouvelle équation $a_k L_j - \alpha_k L_i$, selon le chéma suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \ddots & & \vdots & & \iddots & \\ & a_k\, x_k & & a_\ell\, x_\ell & & {\scriptstyle L_i} \\ \cdots & & & & \cdots & \\ & \alpha_k\, x_k & & \alpha_\ell\, x_\ell & & {\scriptstyle L_j} \\ \iddots & & \vdots & & \ddots & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \ddots & & \vdots & & \iddots & \\ & a_k\, x_k & & a_\ell\, x_\ell & & {\scriptstyle L_i} \\ \cdots & & & & \cdots & \\ & 0 & & A_\ell\, x_\ell & & {\scriptstyle L_j \leftarrow a_k L_j - \alpha_k L_i} \\ \iddots & & \vdots & & \ddots & \end{array}\right.$$

où le coefficient A_ℓ est donné par le calcul suivant :

$$A_\ell = \begin{vmatrix} a_k & a_\ell \\ \alpha_k & \alpha_\ell \end{vmatrix} = a_k \alpha_\ell - \alpha_k a_\ell.$$

On parle de produit en croix parce qu'on effectue la différence (en bleue) entre les produits (en rouge) $a_k \alpha_\ell$ et $\alpha_k a_\ell$ qui « se croisent » sur le système.

Notons que l'opération effectuée sur les lignes est elle-aussi donnée par la technique du produit en croix :

$$L_j \leftarrow \begin{vmatrix} a_k & L_i \\ \alpha_k & L_j \end{vmatrix} = a_k L_j - \alpha_k L_i.$$

Le produit en croix est une opération importante en mathématiques. Elle est à la base de la fameuse « règle de trois » qui permet de gérer les proportionnalités mais aussi de la notion de déterminant que nous verrons plus tard cette année.

Exemples :

- On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & y & = & 1 & {\scriptstyle L_1} \\ 2x & - & 3y & = & 2 & {\scriptstyle L_2} \\ -5x & + & 4y & = & -1 & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & y & = & 1 & {\scriptstyle L_1} \\ & - & 11y & = & 4 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1} \\ & & 17y & = & 2 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_1} \end{array}\right.$$

B. Méthode du pivot

Un système étant donné, nous allons voir que le principe d'élimination des inconnues par combinaison des équations permet de lui associer un autre système, qui lui est équivalent et dont la structure « triangulaire » permet une résolution immédiate. C'est la méthode du pivot de Gauß.

Il existe une autre méthode de résolution des systèmes, dite de substitution, qui est beaucoup moins efficace pour les systèmes linéaires (mais qui peut servir pour les systèmes non linéaires).

Méthode du pivot de Gauß

Cette méthode due à Gauß est un procédé algorithmique de résolution des systèmes linéaires fondé sur le principe de combinaison des équations. Nous décrivons ci-dessous les différentes étapes de cette méthode, en partant d'un système écrit sous forme matricielle.

- À chaque étape, on choisit (en l'encadrant) un coefficient de l'une des inconnues, appelé pivot, avec les deux règles impératives suivantes :
  - un pivot ne peut pas être nul,
  - il y a au plus un pivot par ligne et par colonne.

  On notera que :
  - les meilleurs pivots sont dans les colonnes avec un maximum de coefficients nuls (c'est-à-dire un maximum d'inconnue déjà éliminées) ;
  - on a toujours intérêt à choisir comme pivot un coefficient dont la valeur absolue est la plus petite possible (les meilleurs pivots sont donc les 1 et les -1).
- Avant toute opération, on recopie, sans aucune modification, toutes les lignes qui contiennent un pivot (celle du nouveau pivot et celles des anciens pivots).
- Ensuite, on effectue des combinaisons de la ligne de notre nouveau pivot avec les autres lignes sans pivot afin d'éliminer les inconnues de la colonne du pivot (il faut penser à indiquer à droite du système quelles sont les opérations effectuées sur les lignes).
- Lorsqu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot, le processus s'arrète. Le dernier système obtenu s'appelle une réduite de Gauß du système de départ (et l'on dit que l'on a échelonné le système). Cette réduite n'est pas unique puisqu'elle dépend des pivots choisis.

On ne doit pas parler de « la » réduite de Gauß d'un système mais bien d'« une » réduite de Gauß. Il n'y a effectivement pas unicité puisqu'une réduite dépend des pivots choisis.

Définition 5

Une fois la réduite de Gauß obtenue, on appelle :

- équation principale une équation qui contient un pivot ;
- équation auxiliaire une équation qui ne contient aucun pivot ;
- inconnue principale une inconnue dont l'un des coefficients est un pivot ;
- inconnue auxiliaire une inconnue dont aucun des coefficients n'est un pivot.

Vous trouverez des cours (dans des livres ou sur internet) où les contraintes sur la méthode du pivot sont plus fortes. Certains collègues imposent en effet de choisir, à chaque étape, le pivot dans une colonne la plus à gauche possible (en particulier, à la première étape, ils choisissent leur pivot dans la première colonne). En outre, ils modifient l'ordre des équations afin de placer chaque nouveau pivot le plus haut possible.

Ces deux contraintes sont inutiles voire pénalisantes. D'une part, en obligeant le choix du premier pivot dans la colonne de gauche, on se prive éventuellement d'un meilleur pivot placé ailleurs. D'autre part, l'inversion des lignes, si elle peut avoir un aspect esthétique positif, ne change strictement rien à la résolution proprement dite mais ajoute des étapes inutiles (et même risquées si l'on tient compte des erreurs de recopiage). De plus, si cette modification de l'ordre des équations n'a pas d'importance pour la résolution d'un système, elle peut être ennuyeuse pour d'autres applications de cet algorithme (en algèbre linéaire et en géométrie affine).

S'il existe plusieurs réduites pour un même système, le nombre final de pivots est, quant à lui, un invariant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la réduite obtenue.

Théorème 1

Toutes les réduites de Gauß d'un même système linéaire d'équations ont le même nombre de pivots. Cet entier naturel s'appelle le rang du système. C'est aussi le nombre d'équations principales ou d'inconnues principales de n'importe quelle réduite de Gauß.

■ Admis pour l'instant. ■

Exemples :

- L'algorithme du pivot est particulièrement simple dans le cas d'un système triangulaire (c'est-à-dire un système avec autant d'équations que d'inconnues et dont tous les coefficients au dessus, ou au dessous, de la diagonale sont nuls). Dans ce cas, il n'y a effectivement aucun calcul à faire, à condition de choisir les pivots dans le bon ordre. Par exemple, on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{x}_3 & & & & & = & 1 \\ 2x & + & \boxed{3y}_2 & & & = & 5 \\ 5x & - & 3y & + & \boxed{2z}_1 & = & 8 \end{array}\right.$$

les indices des $\boxed{\cdot}$ indiquent l'ordre de choix des pivots

- Reprenons l'exemple du début de ce cours. On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 1 & L_1 \\ 2x & - & 3y & = & 2 & L_2 \\ -x & + & 4y & = & -1 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 1 & L_1 \\ & - & 5y & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & \boxed{5y} & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 1 & L_1 \\ & & 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & \boxed{5y} & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

La première et la troisième équations sont principales. La deuxième est auxiliaire. Les deux inconnues sont principales. Le système est de rang 2.

- Si l'on ne modifie que les constantes dans l'exemple précédent, on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 0 & L_1 \\ 2x & - & 3y & = & 1 & L_2 \\ -x & + & 4y & = & 2 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 0 & L_1 \\ & - & 5y & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & \boxed{5y} & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & + & y & = & 1 & L_1 \\ & & 0 & = & 3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & \boxed{5y} & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

et l'on constate que le rang n'a pas changé (ni les équations principales et auxiliaires, ni les inconnues principales et auxiliaires, à condition bien sûr de ne pas avoir changé les pivots).

- On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2x} & + & y & - & z & = & 0 & L_1 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 1 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2x} & + & y & - & z & = & 0 & L_1 \\ & & \boxed{-y} & + & 9z & = & 2 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{array}\right.$$

Les deux équations sont principales. Les deux premières inconnues sont principales et la troisième est auxiliaire. Le système est de rang 2.

- Enfin, donnons ce dernier exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & -1 & L_1 \\ x & - & 2y & - & z & = & 4 & L_2 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & 1 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & -1 & L_1 \\ & - & 3y & & \boxed{-2z} & = & 5 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 6y & + & 3z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & -1 & L_1 \\ & - & 3y & & \boxed{-2z} & = & 5 & L_2 \\ & & \boxed{-3y} & & & = & -15 & L_3 \leftarrow -2L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

Toutes les équations et toutes les inconnues sont principales. Le système est de rang 3.

C. Résolution d'un systéme linéaire

Discussion sur l'ensemble des solutions

Pour résoudre un système linéaire, on commence par lui appliquer la méthode du pivot afin de déterminer une réduite de Gauß du système.

On détermine ensuite l'ensemble des solutions selon la nature des équations auxiliaires :

- Si l'une des équations auxiliaires est de la forme $0 = b$ avec $b \neq 0$, l'équation est dite incompatible et le système linéaire n'admet alors aucune solution.
- Si toutes les équations auxiliaires sont compatibles, c'est-à-dire de la forme $0 = 0$, alors le système admet des solutions, données par les équations principales. Là encore, il y a deux cas :
  - S'il n'y a pas d'inconnues auxiliaires, le système possède une solution unique que l'on détermine facilement en calculant les différentes inconnues principales de proche en proche. On dit alors que l'on a affaire à un système de Cramer.
  - S'il y a des inconnues auxiliaires, le système possède une infinité de solutions. Dans ce cas, les inconnues principales sont paramétrables à l'aide des inconnues auxiliaires. Autrement dit, si l'on renomme les différentes inconnues auxiliaires en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, on peut exprimer les inconnues principales à l'aide de ces paramètres. Les solutions sont alors obtenues lorsque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ parcourent $\mathbb{K}$.

On constate qu'un système linéaire admet ou bien aucune solution, ou bien exactement une solution, ou bien encore une infinité de solutions.

Un système homogène possède toujours la solution $(0, 0, \ldots, 0)$. Pour un tel système, il convient donc de déterminer s'il n'y a qu'une seule solution ou une infinité.

Dans le cas où $n \leqslant 3$, on peut interpréter géométriquement l'ensemble des solutions du système : on reconnaîtra un point, une droite, un plan ou même l'espace tout entier.

Exemples :

Reprenons les cinq exemples du paragraphe précédent.

- Pour le premier exemple, pas d'équation auxiliaire ou d'inconnue auxiliaire. Le système est de Cramer. Pour son unique solution (x, y, z), on trouve $x = 1$ puis $y = 1$ puis $z = 3$.
- Dans le deuxième exemple, la deuxième ligne est la seule équation auxiliaire et elle est compatible (c'est-à-dire du type $0 = 0$) donc notre système admet des solutions. Comme il n'y a pas d'inconnue auxiliaire, le système est de Cramer, c'est-à-dire qu'il posséde une unique solution. La troisième puis la première équation donnent $y = 0$ et $x = 1$.
- Au troisième exemple, la deuxième ligne est incompatible. Il n'y a donc pas de solutions.
- Dans le quatrième exemple, il n'y a pas d'équation auxiliaire, donc le système admet au moins une solution. La troisième inconnue étant auxilaire, il y a une infinité de solutions que l'on peut paramétrer à l'aide de cette inconnue. On pose donc $z = \lambda$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{2x} & + & y & - & z & = & 0 \\ & & \boxed{-y} & + & 9z & = & 2 \\ & & & & z & = & \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -4\lambda & + & 1 \\ y & = & 9\lambda & - & 2 \\ z & = & \lambda & & \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

  Géométriquement, l'ensemble des solutions est la droite de l'espace (rapporté à un repère) dirigée par le vecteur $(5, 9, 1)$ et passant par le point $(-1, -2, 0)$.
- Dans le quatrième exemple, il n'y a aucune équation auxiliaire ni aucune inconnue auxiliaire. Le système est donc de Cramer et possède, à ce titre, une unique solution. La troisième équation donne $y = 5$, la deuxième donne $z = -10$ et la première donne $x = 4$.

1 h 30