Planche de colle

Question de cours

Si $n \geqslant 1$ est un entier, alors :

$$\arctan(n^a) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

puis le terme entre parenthèses dans le $\arccos$ est bien dans $[0,1]$: la série est bien définie.
Ensuite, pour tout $x > 0$,

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n^a)\right) &= \arccos\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) \\
&= \arccos\left(1 - \frac{2}{\pi\ n^a} + \circ\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2 \times \frac{2}{\pi\ n^a}}, \text{ car } \arccos(1-h) \sim \sqrt{2h} \text{ en } 0^+ \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{a/2}}, \text{ où } C > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, comme tout est positif, la série proposée est convergente si et seulement si $a > 2$.

Exercice de colle

1. On pose $r = \dfrac{a}{b}$, avec a et b deux entiers premiers entre eux et $b > 0$.
   Soient p un entier relatif et q un entier strictement positif. On suppose que :
   $$\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}.$$
   On en déduit :
   $$\left|r - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{b\ q}.$$
   L'entier $|aq - bp|$ est non nul, donc est supérieur ou égal à 1. La constante $c = \dfrac{1}{b}$ convient.
2. La série proposée est absolument convergente ou bien vérifie immédiatement le CSSA.

Ensuite, on utilise pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle :

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\cos(1) &= \frac{e^i + e^{-i}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}\left(1 + (-1)^k\right)\right) \\
&= \sum_{k \text{ pair}} \frac{i^k}{k!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}, \text{ car } i^{2\ell} = (-1)^\ell.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

La sous-suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car en posant $u_k = \dfrac{1}{(2k)!}$, alors :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0.$$

De même, la sous-suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
On en déduit l'encadrement suivant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} < \cos(1) < S_{2n}.$$

De plus,

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = \frac{1}{(4n+2)!},$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < S_{2n} - \cos(1) < \frac{1}{(4n+2)!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité S_{2n} est rationnelle et peut être mise sous la forme :

$$S_{2n} = \frac{p_n}{(4n)!},$$

où p_n est un entier relatif.

Si la quantité $\cos(1)$ était rationnelle, on trouverait une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left| S_{2n} - \cos(1) \right| \geqslant \frac{c}{(4n)!}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait :

$$\frac{1}{(4n+2)!} \geqslant \frac{c}{(4n)!},$$

ou encore :

$$\frac{1}{(4n+2)(4n+1)} \geqslant c > 0.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtiendrait :

$$0 \geqslant c > 0,$$

conduisant à une contradiction : le nombre $\cos(1)$ est bien un nombre irrationnel.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut refaire le même raisonnement avec :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^{2k}\ (2k)!}.$$

On peut aussi utiliser les polynômes de Tchebychev.
On note $P_n(X)$ le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev, de sorte que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

En particulier,

$$P_n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \cos(1).$$

De plus, le polynôme $P_n(X)$ est un polynôme à coefficients entiers.
Si $\alpha = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ était rationnel, alors il en serait de même de $P_n(\alpha) = \cos(1)$, ce qui n'est pas le cas.
Le nombre α est bien irrationnel.