VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Exercice 1. [∘]

Un dentiste arrache les dents de ses patients au hasard. On note n le nombre de ses patients et l'on suppose que tous ont exactement une dent malade (parmi les trente deux qu'ils possèdent) avant l'intervention des tenailles du praticien.

1. On note M_n le nombre de dents malades extraites à bon escient.
   a) Déterminer la loi de la variable aléatoire M_n.
   b) Combien le dentiste doit-il traiter de personnes (au minimum) pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à $0,6$.
2. Le dernier client se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note S le nombre de dents saines que ce malheureux voit tomber des mâchoires de la redoutable paire de tenailles.
   a) Déterminer la loi de S. Préciser son espérance et sa variance.
   b) Donner la probabilité pour que client reparte entièrement édenté.

Exercice 2. [⋆] (Temps d'attente lors de tirage sans remise)

Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X (respectivement Y) le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on vient de tirer la première boule blanche (respectivement la seconde boule blanche). La variable X (respectivement Y) est le temps d'attente de la première (respectivement dernière) boule blanche.

1. Écrire la loi de X. En déduire une formule combinatoire.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer $E(Y)$ puis $E(X)$.
4. Calculer la variance de X et Y.

Exercice 3. [⋆] (Inégalité de Chernoff)

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé fini.

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Démontrer que, pour tout $d \in \mathbb{R}$, on a l'*inégalité de Chernoff* :
$$P(X \geqslant d) \leqslant \inf_{t>0} \frac{E(\mathrm{e}^{tX})}{\mathrm{e}^{td}}.$$
2. On suppose que X suit la loi $\mathscr{B}(n;p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0;1[$. On admet qu'une étude de fonction (très simple) permet de démontrer que, pour tout $\delta > 1$, on a
$$\inf_{t>0} \exp\{np(\mathrm{e}^t - 1 - t\delta)\} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\delta-1}}{\delta^\delta}\right)^{np}.$$
Démontrer que, pour tout $\delta > 1$, on a
$$P(X \geqslant \delta np) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}^{\delta-1}}{\delta^\delta}\right)^{np}.$$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/4} \binom{n}{k} \leqslant (1,9)^n$.