Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 21

Exercice 1

La variable $X+Y$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,n+1]\!]$.
Soit k un entier entre 0 et $n+1$. On utilise le SCE $\Big(\{Y=-1\},\{Y=1\}\Big)$, ce qui donne par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X+Y=k) & = & \mathbb{P}(X+Y=k, Y=-1)+\mathbb{P}(X+Y=k, Y=1) \\ & = & \mathbb{P}(X=k+1, Y=-1)+\mathbb{P}(X=k-1, Y=1) \\ & = & \mathbb{P}(X=k-1)\,\dfrac{1}{2}+\mathbb{P}(X=k+1)\,\dfrac{1}{2}.\end{array}$$

On en déduit que si k vaut 0, 1, n ou $n+1$, alors :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\frac{1}{2n},$$

et si $k\in[\![2,n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\frac{1}{n}.$$

Exercice 2

1. La propriété de Markov nous dit que la variable future X_{k+1} ne dépend pas vraiment du passé (toutes les variables antérieures) mais seulement du présent (uniquement la variable X_k).
2. Pour la loi de X_1, on applique le troisième point des hypothèses.
   Comme X_1 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, alors la variable X_1 suit une loi de Bernoulli (comme toutes les variables X_k d'ailleurs...).
   De plus,
   $$\mathbb{P}(X_1=1\mid X_0=0)=\frac{1}{2}.$$
   Or, comme $X_0=0$, alors :
   $$\mathbb{P}(X_1=1\mid X_0=0)=\frac{\mathbb{P}(X_1=1, X_0=0)}{\mathbb{P}(X_0=0)}=\mathbb{P}(X_1=1).$$
   Ainsi,
   $$X_1\sim\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$
3. Par la quatrième hypothèse portant sur la propriété de Markov, en utilisant la formule des probabilités composées :
   $$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X_1=1, X_2=0, X_3=1) & = & \mathbb{P}(X_3=1\mid X_2=0)\times\mathbb{P}(X_2=0\mid X_1=1)\times\mathbb{P}(X_1=1) \\ & = & \dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{1}{2} \\ & = & \dfrac{1}{4}.\end{array}$$

De la même façon, en utilisant encore les probabilités composées, la propriété de Markov et la deuxième hypothèse :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) &= \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_2 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \star \times 0 \times \star \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. L'événement $\{N = 0\}$ est l'événement :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}.$$

Par la formule des probabilités composées et la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{i+1} = 0 \mid X_i = 0) = 1 \times \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

5. On voit que $T(\Omega) = [\![1, n]\!] \cup \{+\infty\}$.
Soit i un entier entre 1 et n. L'événement $\{T = i\}$ est l'événement :

$$\{T = i\} = \bigcap_{k=0}^{i-1} \{X_k = 0\} \cap \{X_i = 1\}.$$

Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(T = i) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_k = 0 \mid X_{k-1} = 0) \times \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) = \frac{1}{2^i}.$$

On utilise maintenant la σ-additivité pour calculer $\mathbb{P}(T = +\infty)$ ou alors plus simplement :

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}(N = 0) = \frac{1}{2^n}.$$

6. Soit k un entier entre 1 et $n - 1$. On pose $u_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ dans la suite.
Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1, X_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1, X_k = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) \cdot u_k + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 0) \cdot (1 - u_k) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 - u_k).
\end{aligned}$$

Les nombres u_k vérifient une relation arithmético-géométrique avec comme premier terme : $u_0 = 0$.
On obtient après application de la méthode classique :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k} \right).$$

7. (a) Soit k un entier entre 1 et n. L'événement $\{N = 1\} \cap \{X_k = 1\}$ est l'événement :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\} \right) \cap \{X_k = 1\} \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \{X_i = 0\} \right).$$

On en déduit toujours par la propriété de Markov et la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(N=1, X_k=1) =$$

$$\mathbb{P}(X_0=0)\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_i=0 \mid X_{i-1}=0)\right)\times\mathbb{P}(X_k=1 \mid X_{k-1}=0)\times\mathbb{P}(X_{k+1}=0 \mid X_k=1)\times$$

$$\times\prod_{i=k+2}^{n}\mathbb{P}(X_{i+1}=0 \mid X_i=0).$$

On distingue deux cas :
- si $k<n$, alors on en déduit :

$$\mathbb{P}(N=1, X_k=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- si $k=n$, alors on en déduit :

$$\mathbb{P}(N=1, X_n=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

(b) On remarque que l'on peut écrire :

$$\{N=1\} = \bigsqcup_{k=1}^{n}\{N=1, X_k=1\},$$

car lorsque $N=1$, il n'y a qu'un seul indice k tel que X_k vaille 1.
Par σ-additivité, on obtient :

$$\mathbb{P}(N=1) = (n-1)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{2n-1}{2^n}.$$

8. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

(a) On note $\mathscr{L}_{n,k}$ l'ensemble des $(n+1)$-listes $(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_n)$ telles que chaque ε_i vaille 0 ou 1, il y a k indices i tels que $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_n$.
On note $\mathscr{M}_{n,k}$ l'ensemble des $(n-k)$-listes $(\chi_1, \cdots, \chi_{n-k})$ telles que chaque χ_i vaille 0 ou 1, il y a k indices i tels que $\chi_i = 1$.
Il y a exactement $\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}$ éléments dans l'ensemble $\mathscr{M}_{n,k}$, car il suffit de choisir les k places des 1.
On peut construire une bijection entre les deux ensembles $\mathscr{L}_{n,k}$ et $\mathscr{M}_{n,k}$. On pose l'application $\varphi : \mathscr{M}_{n,k} \longrightarrow \mathscr{L}_{n,k}$ qui à tout élément $(\chi_1, \cdots, \chi_{n-k})$ associe la $(n+1)$-liste définie comme suit. On rajoute un 0 avant le premier 1 rencontré dans la liste des χ_i. On rajoute encore un 0 entre deux chiffres 1 espacés peut-être de plusieurs 0 et on rajoute encore un 0 à la fin. On obtient assurément un élément de $\mathscr{L}_{n,k}$. Cette application est bijective car la fonction réciproque revient entre chaque 1 à supprimer exactement un 0 qui les sépare, en supprimer également un à la fin et au début. Cela fait une suppression de $(k+1)$ chiffres 0 pour former une liste de longueur $n-k$.
Conclusion, la réponse à la question est :

$$\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}.$$

(b) On fait intervenir le SCE $\Big(\{X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n\}\Big)_{(x_0,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^{n+2}}$. Par la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{(x_0,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^{n+2}} \mathbb{P}(N = k, X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n).$$

Lorsque x_0 vaut 1, le terme est nul. On ne retient que les listes avec $x_0 = 0$.
Lorsque la liste $(x_1, \cdots, x_n)$ ne contient pas k chiffres 1, l'événement $\Big\{N = k, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big\}$ est vide et le terme correspondant est nul.
Lorsque la liste $(x_1, \cdots, x_n)$ contient k chiffres 1 mais que deux chiffres 1 sont côte à côte, alors la probabilité de l'événement $\Big\{N = k, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big\} = \Big\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big\}$ est nulle car $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 1) = 0$ et on utilise la formule des probabilités composées.
Il ne reste que les termes où $(x_1, \cdots, x_n)$ décrit toutes les n-listes de $\{0, 1\}$ avec k chiffres 1 sans deux 1 côte à côte.
Pour chaque telle liste $(x_1, \cdots, x_n)$, la probabilité de l'événement :

$$\Big\{N = k, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big\} = \Big\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big\}$$

dépend du fait que x_n vaille 0 ou 1.
Lorsque $x_n = 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

en utilisant la formule des probabilités composées. À chaque fois que $X_i = 1$, presque sûrement, $X_{i+1} = 0$ et donc cela supprime k facteurs $\frac{1}{2}$.
Il y a $\binom{n-k}{k}$ telles situations.
Lorsque $x_n = 1$, alors :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}$$

en utilisant la formule des probabilités composées. À chaque fois que $X_i = 1$, presque sûrement on a : $X_{i+1} = 0$ et donc cela supprime $k-1$ facteurs $\frac{1}{2}$, car il y a un 1 en bout de chaîne.
Il y a $\binom{n-k}{k-1}$ telles situations. En effet, le nombre de situations correspond au nombre de n-listes $(x_1, \cdots, x_n)$ terminant par $x_n = 1$, avec k chiffres 1 et sans deux chiffres 1 côte à côte. Il y en a autant que de $(n-1)$ liste $(y_1, \cdots, y_{n-1})$ avec $y_{n-1} = 0$ et la liste des y_i comportant exactement $(k-1)$ chiffres 1 sans deux chiffres 1 côte à côte.
On en déduit maintenant la formule de l'énoncé.