Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison
facultatif

GROUPES

Exercice 1.

1. Soit $(G, .)$ un groupe fini dont l'élément neutre est noté e. Pour tout $x \in G$, on note $\omega(x)$ l'ordre de x.
   a) Soient x et y deux éléments de G qui commutent.
      α] Démontrer que, si $\omega(x)$ et $\omega(y)$ sont premiers entre eux, alors $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$.
      β] Si $\omega(x)$ et $\omega(y)$ ne sont plus supposés premiers entre eux, peut-on affirmer que $\omega(xy) = \omega(x) \vee \omega(y)$?
   b) On suppose que G est commutatif. Démontrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le p.p.c.m. des ordres des éléments de G.
2. Soit K un corps (commutatif), soit G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif K^*. Démontrer que G est cyclique.