Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 23

– à rendre pour le mardi 23 juin –

Exercice 1

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

1. Combien existe-t-il de partitions de l'ensemble $[\![1, np]\!]$ en p parties de cardinal n ? Le résultat final est très simple !
2. Combien existe-t-il d'applications $f : [\![1, np]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ dont tout élément de l'image possède n antécédents ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la matrice $\left(\delta_{i,n+1-j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que la matrice U_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer son inverse.

À présent, soit n un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$. On suppose n pair : $n = 2p$. On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est centro-symétrique si elle est « symétrique par rapport à son centre », c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ M_{n+1-i,n+1-j} = M_{i,j}.$$

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices centro-symétriques.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec U_n.
3. Montrer l'ensemble $\mathscr{C}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\mathscr{C}^* = \mathscr{C} \cap GL_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $\dim(\mathscr{C})$.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U_pAU_p \end{pmatrix}$, où A décrit $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & U_pBU_p \\ B & 0 \end{pmatrix}$, où B décrit $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

6. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. On admet qu'il en est de même pour $\mathscr{B}$.
7. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{C}$. Qu'en est-il de $\mathscr{B}$?
8. Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$. Retrouver ainsi la dimension de $\mathscr{C}$.
9. On note $Q = \begin{pmatrix} I_p & -U_p \\ U_p & I_p \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que Q est inversible et expliciter son inverse.
   (b) Simplifier pour tous A et B dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice :
   $$Q^{-1}\begin{pmatrix} A & U_pBU_p \\ B & U_pAU_p \end{pmatrix}Q.$$
   (c) Montrer que pour toutes matrices M et N dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les matrices M et N le sont.
   (d) Donner une CNS sur A et B dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} A & U_pBU_p \\ B & U_pAU_p \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathscr{C}^*$.