GROUPE SYMÉTRIQUE

Exercice 1. [$\star$]

Soit $(G, .)$ un groupe fini tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e$ où e désigne l'élément neutre de G.

1. Démontrer que G est commutatif.
2. Dans cette question, on détermine le cardinal de G et on donne une application de ce résultat.
   a) Soient H un sous-groupe de G et $g \in G$. On note $gH = \{gh : h \in H\}$. Démontrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de G.
   b) En déduire que le cardinal de G est une puissance de 2.
   c) Application : Soit F un groupe de cardinal $2p$ où p est un nombre premier. Démontrer que F contient un élément d'ordre p.
3. Dans cette question, on détermine de deux manières la structure de G, dans le cas où $G \neq \{e\}$.
   a) On pose

$$\mathscr{F} = \left\{ \{a_1, \ldots, a_m\} \subset G \ :\ \forall k \in [\![1; m]\!],\ a_k \notin \langle a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m \rangle \right\}$$

   où $\langle a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m \rangle$ désigne le sous-groupe de G engendré par tous les a_j sauf a_k.

   α] Justifier l'existence d'un élément $\{g_1, \ldots, g_n\}$ de $\mathscr{F}$ qui engendre G. *On pourra ordonner $\mathscr{F}$ par l'inclusion.*

   β] Démontrer que l'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \{e, g_1\} \times \{e, g_2\} \times \cdots \times \{e, g_n\} & \longrightarrow & G \\ (u_1, u_2, \ldots, u_n) & \longmapsto & u_1 u_2 \cdots u_n \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme de groupes et en déduire que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

   b) Démontrer que G admet une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel. Retrouver ainsi que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 2. [$\circ$]

1. Démontrer que $\big((\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*, \times\big)$ est cyclique engendré par 3.
2. Le groupe $\big(U(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}), \times\big)$ est-il cyclique ?

Exercice 3. [$\star$]

Soient $m \in [\![1; n]\!]$ et $c = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ un m-cycle de $\mathfrak{S}_n$.

1. a) Pour tout diviseur d de m, démontrer que la décomposition en cycles de c^d est constituée de d cycles de longueur m/d.
   b) Pour tout entier $k > 0$, quelles sont les longueurs des cycles de la décomposition de c^k.
2. Soit σ un élément d'ordre m de $\mathfrak{S}_m$.
   a) Démontrer, par un contre-exemple, que σ n'est pas nécessairement un m-cycle.
   b) Démontrer que σ est un m-cycle si, et seulement si, pour tout entier $k > 0$ non multiple de m, σ^k n'a pas de point fixe.

Exercice 4. [$\star$]

Pour $n \geqslant 1$, déterminer la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & & 2n & 1 & 3 & & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. [$\star$] (Groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \geqslant 2$. On appelle *groupe dérivé* de $\mathfrak{S}_n$, et on note $D(\mathfrak{S}_n)$, le groupe engendré par les commutateurs, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ de la forme $\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}{\sigma_2}^{-1}$ où $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$.

1. Démontrer que le produit de deux transpositions est un commutateur.
2. Démontrer que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 6. [$\star$] (Jeu du Taquin)

Dans les années 1870, le jeu du *taquin* eut un succès considérable aux Etats–Unis. Il consiste en un carré de 4×4 cases occupées par 15 cubes numérotées de 1 à 15, l'une des cases restant vide, ce qui permet de déplacer par translation les cubes adjacents.

Sam Loyd (1841-1911) offrit une récompense de 1000 dollars à qui serait capable de remettre dans le bon ordre le jeu ainsi disposé :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Pouvez-vous gagner ces 1000 dollars ?

Exercice 7. [$\star$] (Théorème de Cayley)

Soit $(G, *)$ un groupe fini de cardinal n.

1. Démontrer que le groupe $(\mathfrak{S}_G, \circ)$ des permutations de G est isomorphe à $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
2. Pour tout $g \in G$, on considère l'application $\sigma_g : G \longrightarrow G$ définie par $\sigma_g(x) = gx$ pour tout $x \in G$.
   a) Démontrer que $\sigma_g \in \mathfrak{S}_G$ pour tout $g \in G$.
   b) Démontrer que l'application $\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_G$ définie par $\varphi(g) = \sigma_g$ pour tout $g \in G$ est un morphisme de groupes injectif.
3. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.