FEUILLE D'EXERCICES N° 11

ANNEAU DES ENTIERS, ARITHMÉTIQUE

Divisions euclidiennes

Exercice 1

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant 500$ et la division euclidienne de a par b soit $a = 24b + 17$.

—— ○ ——

Exercice 2

Soient p et q deux éléments de $\mathbb{N}^*$ avec $p > q$. Montrer que $\dfrac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$ n'est pas un entier.

—— ○ ——

Exercice 3

Montrer, en travaillant dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, que l'équation

$$15x^2 - 7y^2 = 9,$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ n'admet aucune solution.

—— ○ ——

Exercice 4

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 19 \mid 2^{2^{6n+2}} + 3$.

—— ○ ——

Exercice 5

Soient $d_0 = 1 < d_2 < \cdots < d_p = n$ les diviseurs de n. Montrer que :

$$\left(\prod_{k=0}^{p} d_k\right)^2 = n^{p+1}.$$

—— ○ ——

Exercice 6

Quel est le chiffre des unités des nombres $7^{7^{7^7}}$ et $3^{5^{7^9}}$?

—— ○ ——

Exercice 7

1. Montrer que la somme de n (avec $n \geqslant 2$) entiers impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.
2. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

—— ○ ——

PGCD, PPCM et nombres premiers entre eux

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes d'inconnues entières :

- $221 \cdot x + 247 \cdot y = 15$
- $221 \cdot x + 247 \cdot y = 13$.
- $27x - 33y = 99$

—— ○ ——

Exercice 9

Résoudre l'équation : $x \wedge y + x \vee y = y + 9$, d'inconnue entières x et y.

—— ○ ——

Exercice 10

Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que $a \times b$ est un carré parfait. Montrer que a et b sont deux carrés parfaits.

—— ○ ——

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{d=1;d \mid n} d$. Montrer que si n et m sont premiers entre eux, alors $\sigma(nm) = \sigma(n) \cdot \sigma(m)$.

—— ○ ——

Exercice 12

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = 2^{2^n} + 1$, les nombres de Fermat.

1. Montrer que pour tous entiers naturels $n < m$, F_n divise $(F_m - 2)$.
2. Montrer que pour tous entiers $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$, on a : $F_n \wedge F_m = 1$.
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

—— ○ ——

Nombres premiers, valuations

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que soit le nombre $\sqrt{n}$ est un entier, soit le nombre $\sqrt{n}$ est un irrationnel.

Exercice 14
Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $17 \mid (2a+3b) \iff 17 \mid (9a+5b)$.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.
2. Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 16
En considérant $N = \prod p^2 + 2$, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

Exercice 17
Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

- $\dfrac{a^3+b^3}{2}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$
- $\dfrac{4^{2n+1}+1}{5}$ avec $n \geqslant 2$. On développera une expression

de la forme $(1+2^{2n+1})^2 - 2^r$.

Exercice 18
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Quels sont les entiers entre 1 et n de 2-valuation maximale ?
2. En déduire que H_n n'est pas un entier.

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la 2-valuation dans $5^{2^n} - 1$.

Exercice 20
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il d'entiers dans $[\![1, n]\!]$ multiples de p^α ? Combien y a-t-il d'entiers de p-valuation égale à α ?
2. En déduire que : $\nu_p(n!) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$.
3. Combien de zéros consécutifs à partir de la droite est composé le nombre $1000!$?
4. Montrer que pour tous r et s dans $\mathbb{N}$, le nombre $\dfrac{(2r)!(2s)!}{(r+s)! \cdot r! \cdot s!}$ est un entier.

Exercice 21
Soient $p_1 < p_2 < \cdots$ la suite des nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$ puis I et J deux parties de $\{1, \cdots, n\}$. On pose ; $S_I = \displaystyle\prod_{k \in I} p_k + \prod_{k \in \{1,\cdots,n\} \setminus I} p_k$. Montrer que $S_I = S_J \iff \Big[I = J \text{ ou } I = \{1, \cdots, n\} \setminus J\Big]$.

Thèmes variés

Exercice 22

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers (a_n, b_n) tel que : $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n \cdot \sqrt{2}$.
2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
3. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Exercice 23
Soit p un nombre premier.

1. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, p-1\}$, le nombre $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est divisible par p.
2. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^p - a = 0[p]$. [petit théorème de Fermat]
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n = 0[30]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n = 0[42]$.

Exercice 24
Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathscr{P}$-suite de raison r et de longueur n, tout n-uplet $(p_1, \cdots, p_n)$ tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, $p_{i+1} = p_i + r$ et les $p_1, \cdots, p_n$ sont des nombres premiers.

1. Soit $(p_1, \cdots, p_n)$ une $\mathscr{P}$-suite de longueur $n \geqslant 3$ et de raison r. Montrer que r est pair et que $p_1 > 2$.
2. Montrer que $n \leqslant p_1$.
3. On suppose l'existence d'un nombre premier q strictement inférieur à n ne divisant pas r. On note pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, r_i le reste de la division euclidienne de p_i par q.
   (a) Montrer que : $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $\Big[r_i = r_j\Big] \iff q|(i-j)$.
   (b) En déduire que les nombres $r_1, \cdots, r_q$ sont deux à deux distincts.
   (c) Établir l'existence de $s \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $p_s = q$.
   (d) En déduire une contradiction. Qu'a-t-on montré ?

Exercice 25
Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit parfait si la somme des diviseurs de n est égale à $2n$. Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant d \leqslant n; d|n} d$.

1. Montrer que si p est un nombre premier tel que $2^p - 1$ est encore premier, alors le nombre $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

2. Réciproquement, soit n un nombre parfait pair. On pose $n = 2^r \cdot m$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $m = 1[2]$.
   (a) Montrer que $\lambda_n = \lambda_m \cdot (2^{r+1} - 1)$.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $m = (2^{r+1}-1)\cdot c$ et $\lambda_m = 2^{r+1} \cdot c$.
   (c) Montrer que $c = 1$ et que le nombre $2^{r+1} - 1$ est premier.
   (d) Montrer que $r + 1$ est un nombre premier.
   (e) En déduire que n est de la forme $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, pour un certain nombre premier p.

Exercice 26

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. De tels triplets sont appelés triplets pythagoriciens.

1. Montrer que l'on peut uniquement rechercher les triplets pythagoriciens dont les composantes sont deux à deux premières entre elles. On les appelle triplets pythagoriciens primitifs.
2. Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien primitif. Montrer que l'entier z est impair.

On supposera dans la suite que l'entier y est pair.

3. On pose $y = 2s$, $r = \dfrac{z+x}{2}$, et $t = \dfrac{z-x}{2}$. Montrer que $r \wedge t = 1$.
4. Montrer que r et t sont des carrés parfaits.
5. Montrer que l'ensemble des triplets pythagoriciens est :

$$\left\{\Big(d(u^2-v^2), 2duv, d(u^2+v^2)\Big), \Big(2duv, d(u^2-v^2), d(u^2+v^2)\Big) \ ; \ (d,u,v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^2\right\}.$$

Exercice 27

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Si A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, on note :

$$P(A) = \left\{p \in \mathscr{P} \mid \frac{1}{p} \in A\right\}.$$

1. Montrer que si A et B sont deux sous-anneaux de $\mathbb{Q}$, alors :
$$P(A) = P(B) \Longrightarrow A = B.$$
2. Soit P un sous-ensemble de $\mathscr{P}$. Déterminer un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ tel que $P(A) = P$.

Un peu plus difficile

Exercice 28

Soit $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ et $F = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Montrer que $f(F) \subset F$ et que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{\circ n}(F) = \emptyset$ avec $f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f$, la fonction f composée n fois avec elle-même.

Exercice 29

Soit u la suite définie par :

$$u_0 = 9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4.$$

Montrer que le nombre c_n de 9 consécutifs terminant l'écriture décimale de l'entier u_n est égal à 2^n.

Exercice 30

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On se donne $n + 2$ nombres différents dans l'ensemble $\{1, \cdots, 2n\}$. Montrer que l'un de ces $(n+2)$ nombres est somme de deux autres.

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\max\left\{\prod_{k=1}^{p} x_k \text{ t.q. } p \in \mathbb{N}^* \ , \ (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p \ , \ \sum_{k=1}^{p} x_k = n\right\}.$$