Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n$^{\text{o}}$ 19 : Algèbre linéaire matricielle

Correction du problème 1 – (Trigonalisation des algèbres nipotentes, d'après X 1996)

Partie I – Questions préliminaires

1. Soit r l'ordre de nilpotence de $\mathcal{A}$, et t un élément de $\mathcal{A}$. En posant pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $t_i = t$, on a, par nilpotence de $\mathcal{A}$:
$$t^r = t_r \circ \cdots \circ t_1 = 0.$$
Ainsi, $\boxed{t \text{ est nilpotent, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à } r}$.
2. Tout d'abord, il s'agit bien d'une sous-algèbre. En effet, elle contient 0 et est clairement stable par combinaison linéaire et produit (ces opérations laissant stables l'ensemble des matrices strictement triangulaires supérieures)
Soit $f_1, \dots, f_n$ des éléments de $\mathcal{T}$. On a alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_n \circ \cdots \circ f_1) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_n) \cdots \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1).$$
Or, les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i)$ sont strictement triangulaires supérieures. En notant $\mathcal{T}_{n,k}$ l'ensemble des matrices triangulaires supéieures dont les k premières diagonales sont nulles, on sait, d'après le cours, que $\mathcal{T}_{n,k_1} \cdot \mathcal{T}_{n,k_2} \subset \mathcal{T}_{n,k_1+k_2}$. Ainsi, en particulier, le produit de n matrices strictement triangulaires supérieures (donc des éléments de $\mathcal{T}_{n,1}$) est dans $\mathcal{T}_{n,n} = \{0\}$.
On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_n \circ \cdots \circ f_1) = 0$, puis que $f_n \circ \cdots \circ f_1 = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{T} \text{ est une sous-algèbre nilpotente.}}$
Ce qui précède nous assure que l'ordre de nilpotence de $\mathcal{T}$ est majoré par n. Par ailleurs, en considérant J la matrice de Jordan constituée de 0 partout sauf sur la diagonale juste au-dessus de la diagonale principale, un calcul fait en cours nous assure que $J^{n-1} \neq 0$ et $J^n = 0$. Ainsi, J est nilpotente, d'indice exactement n. Cet exemple montre que $\mathcal{T}$ est au moins d'ordre de nilpotence n.
Par conséquent, $\boxed{\text{l'ordre de nilpotence de } \mathcal{T} \text{ est exactement } n}$.
3. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace E représentés dans la même base $\mathcal{B}$ par une matrice $\boxed{\text{strictement triangulaire inférieure}}$. Il s'agit, pour les mêmes raisons, d'une sous-algèbre nilpotente.
La seule matrice à la fois strictement triangulaire supérieure et strictement triangulaire inférieure étant la matrice nulle, on a bien $\boxed{\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{0\}}$.
4. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\text{de la forme } \lambda K}$, où K est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à part un 1 en position $(1, n)$. Cette matrice vérifie $K^2 = 0$, et $\mathcal{A}$ est clairement non vide et stable par combinaison linéaire et produit. De plus, $\mathcal{A}$ est clairement nilpotente (d'ordre de nilpotence égal à 2), et non nulle, ni égale à $\mathcal{T}$ (puisque la matrice de Jordan par exemple n'est pas de la forme λK, lorsque $n \geqslant 3$).

Partie II – Le cas de la dimension 2

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur E de dimension 2.

1. Soit t un endomorphisme nilpotent non nul de E, et r son indice de nilpotence.
   (a) t ne peut pas être un automorphisme, sinon t^r serait également bijective, ce qui contredit $t^r = 0$.
   Ainsi, par caractérisation des automorphismes en dimension finie, t ne peut être $\boxed{\text{ni injective, ni surjective}}$.

(b) En particulier, t n'étant pas injective, $\mathrm{Ker}(t)$ n'est pas nul, donc $\dim(\mathrm{Ker}(t)) \geqslant 1$. De plus, t est non nul, donc $\mathrm{Ker}(t) \neq E$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(t)) \leqslant 1$. Ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(t)) = 1}$, et d'après le théorème du rang, $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(t)) = \mathrm{rg}(t) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(t)) = 1.}$

(c)
- Analyse. Une telle base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ doit vérifier $t(b_1) = 0$ et $t(b_2) = b_1 \neq 0$. Ainsi, en particulier, $b_2 \notin \mathrm{Ker}(t)$.
- Synthèse. Soit b_2 non nul dans $E \setminus \mathrm{Ker}(t)$ (ce qui est possible du fait du calcul des dimensions). Si on montre comme on a fait dans le cours que t est nilpotente d'indice 2, on peut poser $b_1 = t(b_2)$, qui sera un élément du noyau. Cela ne semble pas être la philosophie de l'énoncé. On va donc se débrouiller sans ce résultat. Par définition de b_2, $\mathrm{Vect}(b_2) \cap \mathrm{Ker}(t) = \{0\}$, et du fait des dimensions, on a donc $E = \mathrm{Vect}(b_2) \oplus \mathrm{Ker}(t)$. Soit alors $t(b_2) = \lambda b_2 + k$ la décomposition de $t(b_2)$ dans cette somme. On montre alors sans peine par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $t(b_2^m) = \lambda^m b_2 + \lambda^{m-1} k$. Ainsi, si $\lambda \neq 0$, la composante $\lambda^m b_2$ sur le premier facteur de la somme directe est non nulle, donc $t^m(b_2) \neq 0$. Cela contredit la nilpotence de t. Ainsi, $\lambda = 0$, et $t(b_2) \in \mathrm{Ker}(t)$.

  On pose donc $b_1 = f(b_2)$. Comme $b_2 \notin \mathrm{Ker}(t)$, $b_1 \neq 0$, donc forme à lui seul une famille libre. Comme $b_2 \notin \mathrm{Vect}(b_1) = \mathrm{Ker}(t)$, $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ est une famille libre, donc une base de E.

  On a par construction $t(b_1) = 0$ et $t(b_2) = b_1$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct amène $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{t \text{ est nilpotente d'indice } r = 2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle de $\mathcal{L}(E)$. Soit t_0 un élément non nul de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Soit $t \in \mathcal{A}$. On a alors

$$t_0 \circ t(b_1) = t \circ t_0(b_1) = t(0) = 0.$$

Ainsi, $t(b_1) \in \mathrm{Ker}(t_0) = \mathrm{Vect}(b_1)$. On en déduit que $\boxed{t(b_1) \text{ et } b_1 \text{ sont colinéaires.}}$

Ainsi, il existe λ tels que $t(b_1) = \lambda b_1$. En itérant, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $t^m(b_1) = \lambda^m b_1$. Si $\lambda \neq 0$, cela contredit la nilpotence de T. Ainsi, $\lambda = 0$, donc $\boxed{t(b_1) = 0}$.

(b) Si t est non nul, son noyau est de dimension 1, et la question précédente montre que b_1 en est un élément. Donc $\mathrm{Ker}(t) = \mathrm{Vect}(b_1)$. Par ailleurs, l'argument donné dans la question 1(c) montre que $t(b_2) \in \mathrm{Ker}(t)$. Ainsin il existe un scalaire a tel que $t(b_2) = ab_1$. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t_0)$, donc $t = at_0$. Ainsi, $\mathcal{A} \subset \mathrm{Vect}(t_0)$. L'autre inclusion est évidente, puisque $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant t_0.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(t_0)}$.

3. On ne suppose plus que $\mathcal{A}$ est commutative. L'argument de la question 1(c) (ou l'argument du cours) reste valable, et nous assure que tout élément de $\mathcal{A}$ est nilpotent d'indice 2. On a alors, avec les données précédentes, puisque $t + t_0 \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ étant un espace vectoriel)

$$0 = (t + t_0)^2 = t^2 + t \circ t_0 + t_0 \circ t + t_0^2 = t \circ t_0 + t_0 \circ t.$$

Ainsi, $t \circ t_0 = -t_0 \circ t$.

On peut alors remplacer dans l'argument de 2(a) l'égalité de commutation par cette dernière égalité. Le signe qui s'ajoute ne perturbe pas le raisonnement.

Ainsi, $\boxed{\text{le résultat reste vrai même si l'algèbre n'est pas supposée commutative}}$.

Le résultat obtenu nous assure que de fait, l'algèbre obtenue sera bien commutative. On vient en fait de montrer qu'il n'existe pas dans $\mathcal{L}(E)$ de sous-algèbre nilpotente non commutative (en dimension 2).

Partie III – Trigonalisation des endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, E est de dimension $n > 0$. On considère un endomorphisme T nilpotent non nul de E, et on note r son indice de nilpotence. On pose $E_1 = \mathrm{Im}(t) \cap \mathrm{Ker}(t)$.

1. • Puisque t est non nul, $\mathrm{Ker}(t)$ est un sous-espace vectoriel strict de E, donc E_1 aussi. Ainsi, $\boxed{E_1 \neq E}$
   • Puisque t est non nul, $\mathrm{Im}(t) \neq 0$. De plus, $\{0\} = \mathrm{Im}(t^r) = T^{r-1}(\mathrm{Im}(t)) = \mathrm{Im}(\tilde{t}^{r-1})$, où $\tilde{t}$ est l'endomorphisme induit par t sur le sous-espace (trivialement stable) $\mathrm{Im}(t)$. Ainsi, $\tilde{t}^{r-1}$ étant l'endomorphisme nul d'un espace non nul, elle n'est pas une bijection, donc $\tilde{t}$ non plus. Par caractérisation des automorphismes en dimension finie, $\tilde{t}$ n'est pas injective, donc

$$\boxed{\{0\} \neq \mathrm{Ker}(\tilde{t}) = \mathrm{Ker}(t) \cap \mathrm{Im}(t) = E_1}$$

2. $E_1 = \mathrm{Im}(t)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(t) \subset \mathrm{Im}(t)$, si et seulement si $t^2 = 0$. Comme $t \neq 0$, cette dernière égalité équivaut à $\boxed{r = 2}$.
3. (a) Par définition de E_3, $\mathrm{Im}(t) \oplus E_3 = E$. Par définition de E_1, $E_1 \oplus E_2 = \mathrm{Im}(t)$. Par associativité de la somme (et du caractère direct), $\boxed{E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E}$.

   (b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Notons $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les 3 bases associées de E_1, E_2 et E_3. On considère le découpage par blocs sur les lignes et sur les colonnes associée à cette partition de $\mathcal{B}$: ainsi, les différents blocs $T_{i,j}$ ont un nombre de lignes égal à $\dim(E_1)$ si $i = 1$, $\dim(E_2)$ si $i = 2$, et $\dim(E_3)$ si $i = 3$. Et de même pour les colonnes.
   - Pour tout b_i de $\mathcal{B}_1$, $b_i \in E_1 = \mathrm{Im}(t) \cap \mathrm{Ker}(t)$, $T(b_i)$ est nul, donc la colonne correspondante est nulle. Ainsi, les 3 blocs de la première colonne sont nuls, cette première colonne correspondant au groupement des vecteurs de $\mathcal{B}_1$.
   - Pour tout $b_i \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, $t(b_i) \in \mathrm{Im}(t) = E_2 \oplus E_3$. Ainsi, $t(b_i)$ se décompose uniquement sur $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et les coordonnées sur $\mathcal{B}_1$ sont nulles. Cela correspond à la nullité des blocs $A_{3,2}$ et $A_{3,3}$ (avec l'indexation que vous imaginez).

   Ainsi, la matrice de t relativement à la base $\mathcal{B}$ est bien de la forme $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2} & T_{1,3} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   (c) D'après les règles du produit matriciel par blocs, et le fait que les coefficients diagonaux d'un produit de deux matrices triangulaires supérieures sont égaux aux produit des coefficients diagonaux correspondants, on obtient la description suivantepar blocs :

$$0 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t^r) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t))^r = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & T_{2,2}^r & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   où $*$ désigne un bloc quelconque.

   Ainsi, $T_{2,2}^r = 0$. On en déduit que $\boxed{T_{2,2} \text{ est nilpotente, d'indice au plus égal à } r.}$
4. On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ Pour $n = 1$, il n'y a pas grand chose à démontrer, un endomorphisme ayant une matrice scalaire (a) : il ne peut être nilpotent que si $a = 0$. Le cas $n = 2$ découle de la partie II.

   Soit n tel que la propriété soit vraie sur tout espace vectoriel E de dimension strictement inférieure à n, et soit t un endomorphisme nilpotent. On reprend la base et la décomposition en blocs de la question précédente. La matrice $T_{2,2}$ définit sur E_2 un endomorphisme u dont la matrice dans $\mathcal{B}_2$ est $T_{2,2}$. Comme $T_{2,2}$ est nilpotente, u l'est également. Ainsi, par hypothèse de récurrence (puisque $\dim(E_2) \in [\![1, n-1]\!]$ d'après la question 1), il existe une base $\mathcal{B}_2'$ de E_2 telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2'}(u)$ soit strictement triangulaire supérieure. Soit $\mathcal{B}'$ la base obtenue par juxtaposition de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3$, et T' la matrice de t dans cette base, de blocs $T_{i,j}'$. Le bloc $T_{2,2}'$ correspond alors à la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_2'$, soit $T_{2,2}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2'}(u)$. Ainsi, $T_{2,2}'$ est strictement triangulaire inférieure, et d'après les autres blocs, on en déduit que T' est strictement triangulaire supérieure.

   Ainsi, d'après l'axiome de récurrence, pour tout t endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t) \text{ soit strictement triangulaire supérieure}}$.
5. Soit $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t)$. Puisque $T \in \mathcal{T}_n^{++} = \mathcal{T}_{n,1}$, on a d'après le cours, $T^k \in \mathcal{T}_{n,k}$, et donc en particulier, $T^n = 0$. Ainsi, $t^n = 0$, donc $r \leqslant n$. C'est un résultat qu'on avait démontré de façon différente en exemple de cours, en considérant une famille libre formée des $t^k(x)$ où $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(t^{r-1})$.

6. On commence par déterminer l'image et le noyau. On a intérêt à trouver un système générateur le plus simple possible de l'image, afin de simplifier les calculs. On précède donc par pivot (double) sur les colonnes :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique, une base de l'image est $(e_1, e_2, e_3 - e_4)$.
En particulier, t est de rang 3, donc son noyau est de dimension 1. Or, on a une relation simple sur les colonnes de T : $C_2 - C_3 + C_4 = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3 + e_4)$.

Ce vecteur est bien dans $\operatorname{Im}(T)$ (c'est la différence des deux derniers vecteurs de la base de $\operatorname{Im}(T)$). Ainsi, $\operatorname{Ker}(t) \subset \operatorname{Im}(t)$, donc

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Ker}(t) \cap \operatorname{Im}(t) = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3 + e_4)}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc forment une famille libre. Par ailleurs, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas dans $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ (par examen de la première coordonnée). Ainsi, $(e_2 - e_3 + e_4, e_1, e_2)$ est une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Im}(t)$. Cet espace étant de dimension 3, il s'agit d'une base de $\operatorname{Im}(t)$.
Ainsi, un supplémentaire de E_1 dans $\operatorname{Im}(t)$ est (par exemple) $\boxed{E_2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)}$.
Enfin, on remarque que $(e_1, e_2, e_3 - e_4, e_4)$ est échelonnée : la matrice dans la base canonique de cette famille est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls. Il s'agit d'une base de E. Les 3 premiers de ces vecteurs formant une base de $\operatorname{Im}(t)$, on en déduit un supplémentaire de cet espace :

$$\boxed{E_3 = \operatorname{Vect}(e_4)}.$$

On considère donc la base $\mathcal{B}' = (e_2 - e_3 + e_4, e_1, e_2, e_4) = (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$. On a :

- $t(e_2 - e_3 + e_4) = 0$ (c'est un vecteur du noyau)
- $t(e_1) = -e_1 - 3e_2 + 2e_3 - 2e_4 = -2(e_2 - e_3 + e_4) - e_1 - e_2 = -2'b_1 - b'_2 - b'_3$
- $t(e_2) = e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4 = (e_2 - e_3 + e_4) + e_1 + e_2 = b'_1 + b'_2 + b'_3$
- $t(e_4) = e_2 = b'_3$.

Ainsi,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(t) = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On fait de même sur la matrice du milieu $T' = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, représentant, dans E_2, un endomorphisme t', relativement à la base (b'_2, b'_3). On a alors facilement $\operatorname{Im}(t') = \operatorname{Vect}(b'_2, b'_3) = \operatorname{Ker}(t')$. Ainsi, on pose $b_2 = b'_2 + b'_3$.

Il n'y a pas de supplémentaire à prendre dans $\mathrm{Im}(t')$, et un supplémentaire dans E_2 est $\mathrm{Vect}(b'_2)$. Ainsi, on pose $b_3 = b'_2$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{(b_2,b_3)}(t') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose enfin $\boxed{\mathcal{B} = (b'_1, b_2, b_3, b'_4) = (e_2 - e_3 + e_4, e_1 + e_2, e_1, e_4)}$. On a dans cette base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Partie IV – Trigonalisation d'une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$

1. (a) Supposons que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = E$, et soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Si pour tout $u \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Im}(u) \subset F$, leur somme aussi, ce qui contredit $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = E$. Ainsi, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $\boxed{\mathrm{Im}(u) \not\subset F}$.

   (b) On suppose toujours $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = E$. On construit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k \neq 0$.

   On initialise en se donnant u_1 non nul dans $\mathcal{A}$, ce qui existe pas construction.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k \neq 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_k) \neq E$. D'après la question précédente, il existe $u_{k+1} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Im}(u_{k+1}) \not\subset \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_k)$. Ainsi, il existe $y \in E$ tel que $u_{k+1}(y) \notin \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_k)$, donc $u_1 \circ \cdots \circ u_k \circ u_{k+1}(y) \neq 0$. Ainsi, $u_1 \circ \cdots \circ u_{k+1} \neq 0$.

   D'après l'axiome de récurrence, notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite, et contredit la nilpotence de $\mathcal{A}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}) \neq E}$

2. - D'après ce qui précède, $E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A}) \neq E$
   - Supposons $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Comme dans la question précdente, on peut alors construire une suite infinie donc les composées successives sont non nulles. En effet, on considère u_1 non nulle dans $\mathcal{A}$. Alors $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$, donc $\mathrm{Im}(u_1) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \{0\}$. On en déduit l'existence de $u_2 \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Im}(u_1) \not\subset \mathrm{Ker}(u_2)$ (sinon, $\mathrm{Im}(u_1)$ est inclus dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, et l'intersection ne peut pas être $\{0\}$ puisque $\mathrm{Im}(u_1) \neq \{0\}$). Ainsi, $u_2 \circ u_1 \neq 0$. Plus généralement, si $u_k \circ \cdots \circ u_1 \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(u_k \circ \cdots \circ u_1)$ est non nul et inclus dans $\mathrm{Im}(u_k)$ donc dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$. Par le même argument, il existe donc u_{k+1} tel que $\mathrm{Im}(u_k \circ \cdots \circ u_1) \not\subset \mathrm{Ker}(u_{k+1})$, donc $u_{k+1} \circ u_k \circ \ldots u_1 \neq 0$.
     Par axiome de récurrence, on obtient une suite infinie d'éléments de $\mathcal{A}$ dont les composées sont non nulles, ce qui contredit la nilpotence de $\mathcal{A}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A}) \neq \{0\}}$

3. Si $E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$, alors, pour tout $(u, v) \in \mathcal{A}^2$,

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}) = E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ker}(v).$$

   Ainsi, $v \circ u = 0$. Ainsi, $r \leqslant 2$. Puisque $\mathcal{A}$ est non nulle, $\boxed{r = 2}$.

   Réciproquement, si $r = 2$, soit $u \in \mathcal{A}$. On a alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v \circ u = 0$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Cette inclusion étant vérifiée pour tout v de $\mathcal{A}$, on en déduit $\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Puisque ceci est vrai pour tout u de $\mathcal{A}$, et puisque $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de E (donc stable par somme), on en déduit que $\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})}$.

4. Soit $t \in \mathcal{A}$ et T sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Notons $(T_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ sa représentation par blocs associée à la partition de la base $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
   - Soit $b \in \mathcal{B}_1$. Alors $b \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ker}(t)$, donc $t(b) = 0$. Ainsi, la colonne correspondante de la matrice T est nulle. Cela donne $T_{i,1} = 0$, pour $i \in [\![1, 3]\!]$.
   - Soit $b \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$. Alors $t(b) \in \mathrm{Im}(t) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Comme $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, la décomposition de $t(b)$ dans la base $\mathcal{B}$ ne fait intervenir que ces vecteurs, et les coordonnées sur la base $\mathcal{B}_3$ sont nulles. Ainsi, les coordonnées sur $\mathcal{B}_3$ des colonnes correspondantes de T sont nulles. On obtient donc $T_{3,2} = 0$ et $T_{3,3} = 0$.

Ainsi, on a bien la représentation suivante de T :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = T = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2} & T_{1,3} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

De plus, t est niloptente, d'indice inférieur à r, donc $t^r = 0$, soit $T^r = 0$. Or, les règles de produit des matrices triangulaires nous assurent, comme dans la partie III, que

$$T^r = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & T_{2,2}^r & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité T^r assure donc $T_{2,2}^r = 0$. On en déduit que $T_{2,2}$ est nilpotente d'indice au plus r.

5. (a)
   - Pour commencer, puisque $\mathcal{A}$ est non vide, $\mathcal{A}_{2,2}$ est non vide, et de façon évidente, $\mathcal{A}_{2,2} \subset E_2$.
   - Soit s_1 et s_2 dans $\mathcal{A}_{2,2}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe t_1 et t_2 dans $\mathcal{A}$ tels que les matrices T_1 et T_2 aient une représentation par blocs tels que $(T_1)_{2,2}$ soit la matrice de s_1 dans la base $\mathcal{B}_2$ et $(T_2)_{2,2}$ soit la matrice de s_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Alors $T_1 + \lambda T_2$ est la matrice de $t_1 + \lambda t_2 \in \mathcal{A}$ et son bloc central est $(T_1)_{2,2} + \lambda(T_2)_{2,2}$, représentant dans la base $\mathcal{B}_2$ l'endomorphisme $s_1 + \lambda s_2$. Ainsi, $s_1 + \lambda s_2 \in \mathcal{A}_{2,2}$. On en déduit que $\mathcal{A}_{2,2}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
   - Le même argument montre que si s_1 est « associé » à t_1 (par la construction ci-dessus) et s_2 associé à t_2, alors $s_1 \circ s_2$ est associé à $t_1 \circ t_2 \in \mathcal{A}$ (puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre). Donc $s_1 \circ s_2 \in \mathcal{A}_{2,2}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{2,2} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E_2)}$.

   Soit r l'ordre de nilpotence de $\mathcal{A}$, et $s_1, \dots, s_r$ des éléments de $\mathcal{A}_{2,2}$ associés à des éléments $t_1, \dots, t_r$ de $\mathcal{A}$. Par itération de l'argument précédent montrant la stabilité de $\mathcal{A}_{2,2}$ par produit, le produit $s_1 \circ \cdots \circ s_r$ est associé à $t_1 \circ \cdots \circ t_r$. Or cette dernière composée est nulle (car $\mathcal{A}$ est nilpotente d'ordre r), donc $s_1 \circ \cdots \circ s_r = 0$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{A}_{2,2} \text{ est nilpotente.}}$

   (b) Si $\mathcal{A}_{2,2} = \{0\}$, alors pour tout $t \in \mathcal{A}$, $T_{2,2} = 0$, donc $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t)$ est strictement triangulaire supérieure par blocs. Comme il s'agit d'une description par blocs de type $(3,3)$, on en déduit, d'après les règles de produit des matrices triangulaires, que $T^3 = 0$, donc $t^3 = 0$. Ainsi, $r \leqslant 3$. Comme on a supposé $r \geqslant 3$, on a donc $\boxed{r = 3}$.

   (c) Réciproquement, supposons $\mathcal{A}_{2,2} \neq \{0\}$, et soit $s \in \mathcal{A}_{2,2}$ non nul, et $t \in \mathcal{A}$ associé. Il existe donc $x \in E_2$ tel que $s(x) \neq 0$, donc $t(x) \notin E_1$. Ainsi, $t(x) \notin \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Or, $t(x) \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, donc $t(x) \notin \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $t \notin \mathrm{Ker}(u)$, donc $u \circ t(x) \neq 0$.

   Par ailleurs, $x \in E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$, par conséquent, il existe $v_1, \dots, v_k$ dans $\mathcal{A}$ et $y_1, \dots, y_k$ dans E tels que

   $$x = \sum_{i=1}^{k} v_i(y_i).$$

   On en déduit que

   $$0 \neq u \circ t(x) = u \circ t \left(\sum_{i=1}^{k} v_i(y_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} u \circ t \circ v_i(y_i).$$

   Ceci n'est possible que si l'un des vecteurs $u \circ t \circ v_i(y_i)$ est non nul, ce qui nécessite $u \circ t \circ v_i \neq 0$. Ainsi, il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ t \circ v \neq 0$. On en déduit que $\boxed{r > 3}$.

   (d) On procède comme dans la partie III, par récurrence sur n, le résultat étant acquis pour $n = 1$ (trivial) et $n = 2$ (partie I). Soit alors $n \geqslant 3$, telle que la propriété soit vraie pour toute algèbre nilpotente non nulle sur un espace de dimension strictement inférieure à n, et soit $\mathcal{A}$ une algèbre nilpotente non nulle d'indice r. Si $r = 1$, $\mathcal{A} = \{0\}$ et il n'y a rien à montrer. Si $r = 2$, $E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$, donc $E_2 = \{0\}$ et le bloc $T_{2,2}$ est vide. Plus précisément, la matrice T s'écrit alors à l'aide de 4 blocs sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et est donc strictement triangulaire supérieure. Si $r \geqslant 3$, on considère la construction de la question IV-4, et l'algèbre $\mathcal{A}_{2,2}$. Si $r = 3$, cette algèbre est nulle, donc pour tout $t \in \mathcal{A}$, $T_{2,2} = 0$, donc T est strictement triangulaire supérieure. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{A}_{2,2}$, ce qu'on peut faire puisque $1 \leqslant \dim E_2 < n$, d'après 1(b) et 3, et puisque $\mathcal{A}_{2,2}$ est non nulle. On construit alors la nouvelle base comme dans la partie III.

Ainsi, $\boxed{\text{toute algèbre nilpotente non nulle admet une base de trigonalisation stricte commune.}}$

(e) En particulier, puisque pour toute matrice T de $\mathcal{T}_n^{++}$, $T^n = 0$, on en déduit que $\boxed{r \leqslant n}$.

6. L'hypothèse $r \geqslant 4$ nous assure que $\mathcal{A}_{2,2}$ est non nulle.

Soit $t_1, \dots, t_k$ des éléments de $\mathcal{A}$, et soit T_ℓ la matrice associée à t_ℓ relativement à la base $\mathcal{B}$ trouvée précédemment, dont les blocs seront notés $T_{i,j}^\ell$ (sans ambiguïté possible sur la notation en exposant de l'indice, car aucune exponentiation n'est en jeu dans cette question). On a alors

$$T_1 \cdots T_{k-1} T_k = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^{k-1} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^k & T_{1,3}^k \\ 0 & T_{2,2}^k & T_{2,3}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^k & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^{k-1} T_{2,3}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, en faisant le produit dans l'autre sens :

$$T_1 T_2 \cdots T_k = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^1 & T_{1,3}^1 \\ 0 & T_{2,2}^1 & T_{2,3}^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^k & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^1 T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^k & * \\ 0 & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^k & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En remettant ensemble ces deux descriptions (au rang $k-1$), on peut déterminer le dernier coefficient :

$$\begin{aligned} T_1 \cdots T_{k-1} T_k &= \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^1 T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^{k-1} & * \\ 0 & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^{k-1} & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^{k-2} T_{2,3}^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^k & T_{1,3}^k \\ 0 & T_{2,2}^k & T_{2,3}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2}^1 T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^k & T_{1,2}^1 T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^{k-1} T_{2,3}^k \\ 0 & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^k & T_{2,2}^1 \cdots T_{2,2}^{k-1} T_{2,3}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit alors $t_1, \dots, t_{r-1}$ dans $\mathcal{A}$ tels que $t_1 \circ \cdots \circ t_{r-1} \neq 0$ (ce qui est possible par définition de l'indice de nilpotence). On a alors $T_1 \cdots T_{r-1} \neq 0$, donc l'un au moins des blocs de la description ci-dessus (avec $k = r-1$) est non nul. Cela impose en particulier que $T_{2,2}^2 \cdots T_{2,2}^{r-2} \neq 0$ (remarquez que cela a du sens puisque $r \geqslant 4$). Cela définit donc $r-3$ éléments de $\mathcal{A}_{2,2}$ donc le produit est non nul. Ainsi, en notant r' l'ordre de nilpotence de $\mathcal{A}_{2,2}$, on obtient $\boxed{r' \geqslant r-2}$.

Réciproquement, on peut reprendre l'argument de la question 5(c), en remplaçant s par une composition $s_1 \circ \cdots \circ s_{r'-1}$ non nulle. Si $t_1, \dots, t_{r'-1}$ sont associés dans $\mathcal{A}$, cet argument s'adapte bien pour montrer qu'il existe u et v deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $u \circ t_1 \circ \cdots \circ t_{r'-1} \circ u$ soit non nul. Ainsi, $r' + 1 < r$, donc $\boxed{r' \leqslant r-2}$.

Les deux inégalités amènent $\boxed{r' = r-2}$.

7. (a) Soit $t \in \mathcal{A}$. On note T la matrice de t dans la base $\mathcal{B}$, avec sa description par blocs $(T_{i,j})$. Soit s l'endomorphisme de E_2 défini par le bloc $T_{2,2}$.

Soit $y \in s(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}))$, et $x \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$ tel que $y = s(x)$. Il existe donc des applications linéaires $u_\ell \in \mathcal{A}_{2,3} \subset \mathcal{L}(E_3, E_2)$, et des éléments x_ℓ de E_3, pour $\ell \in [\![1, k]\!]$, tels que

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} u_k(x_k).$$

Il vient donc :

$$y = \sum_{\ell=1}^{k} s \circ u_k(x_k).$$

Soit $t_1, \dots, t_k$ des éléments de $\mathcal{A}$ associés aux $u_1, \dots, u_k$, et T_ℓ la matrice associée à t_ℓ, dont les blocs seront notés $T_{i,j}^\ell$. La matrice de $s \circ u_k \in \mathcal{L}(E_3, E_2)$, relativement aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$, est alors $T_{2,2} T_{2,3}^k$, qui, d'après la description de la question 6 des matrices T, correspond à $(TT_k)_{2,3}$, donc au bloc en position $(2,3)$ associé à l'application linéaire $t \circ t_k$ de $\mathcal{A}$. Ainsi, par définition, $s \circ u_k \in \mathcal{A}_{2,3}$, et donc $\sum_{\ell=1}^{k} s \circ u_k(x_k) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$.

On a bien montré que $\boxed{s(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})}$.

(b) Soit $u \in \mathcal{A}_{2,3} \subset \mathcal{L}(E_3, E_2)$. Alors, par définition $\mathrm{Im}(u) \subset E_2$. En sommant ces images, il vient $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}) \subset E_2$.
On note pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{Z} \subset E$, on note $\mathcal{I}^k(\mathcal{Z})$ la somme des images des composées $u_1 \circ \cdots \circ u_k$, où les u_i sont des éléments de $\mathcal{Z}$. On va montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que pour tout $x \in E_2$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{I}^k(Acal_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$

L'initialisation, pour $k = 1$, se fait en remarquant que $x \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Ainsi, il existe des éléments $t_1, \ldots, t_k$ de $\mathcal{A}$ et $x_1, \ldots, x_k$ de E tels que

$$x = \sum_{i=1}^{k} t_i(x_i).$$

En décomposant $x_i = x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3}$ dans $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, et en remarquant que x est égal à son projeté sur E_2 dans la somme directe $E_1 \oplus E_2 \oplus E_2$, on obtient donc :

$$x = \sum_{i=1}^{k} t^i_{2,1}(x_{i,1}) + t^i_{2,2}(x_{i,2}) + t^i_{2,3}(x_{i,3}),$$

où $t^i_{2,j}$ est l'application de E_j dans E_2 définie par t. Par définition de E_1, il vient donc :

$$x = \sum_{i=1}^{k} t^i_{2,2}(x_{i,2}) + t^i_{2,3}(x_{i,3}) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}).$$

Supposons maintenant le résultat acquis pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ (pour tout $x \in E_2$). On a vu que

$$x \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}).$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,2}) \subset \mathcal{I}^{k+1}(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$.
Par stabilité par somme, il suffit de vérifier que pour tout $s \in \mathcal{A}_{2,2}$, et tout $y \in E_2$, $s(y) \in \mathcal{I}^{k+1}(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$. Or, par hypothèse de récurrence, $y \in \mathcal{I}^k(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$, donc

$$s(y) \in s\left(\mathcal{I}^k(\mathcal{A}_{2,2})\right) + s\left(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})\right) \subset \mathcal{I}^{k+1}(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,2}),$$

d'après la question 7(a).
Ainsi, d'après l'axiome de récurrence, pour tout $x \in E_2$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathcal{I}^k(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$. Or, $\mathcal{A}_{2,2}$ étant nilpotente d'indice $r-2$, $\mathcal{I}^{r-2}(\mathcal{A}_{2,2}) = 0$, donc finalement, en prenant $k = r-2$, on obtient $x \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$. Ainsi, $E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$.
La double-inclusion amène $\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}) = E_2}$.

8. On suppose $\mathcal{A}$ nilpotente. Soit t un élément de $\mathcal{A}$ tel que $T_{2,3} = 0$. On note T sa matrice.

(a) Pour tout $s \in \mathcal{A}$, de matrice S dont les blocs sont $(S_{i,j})$, on a $ST = TS$, soit, par un calcul explicite, en utilisant l'hypothèse $T_{2,3} = 0$,

$$\begin{pmatrix} O & T_{1,2}S_{2,2} & T_{1,2}S_{2,3} \\ 0 & T_{2,2}S_{2,2} & T_{2,2}S_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2}T_{2,2} & 0 \\ 0 & S_{2,2}T_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, $T_{1,2}S_{2,3} = 0$ et $T_{2,2}S_{2,3} = 0$. On note $t_{1,2}$ et $t_{2,2}$ les applications linéaires de $\mathcal{L}(E_2, E_1)$ et de $\mathcal{L}(E_2, E_2)$ associées à $T_{1,2}$ et $T_{2,2}$. Les inégalités précédentes se traduisent par le fait que pour tout $s \in \mathcal{A}_{2,3}$, $\mathrm{Im}(s) \subset \mathrm{Ker}(t_{1,2})$ et $\mathrm{Im}(s) \subset \mathrm{Ker}(t_{2,2})$. Par stabilité par somme, il en découle :

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}) \subset \mathrm{Ker}(t_{1,2}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}) \subset \mathrm{Ker}(t_{2,2}).$$

La question précédente amène alors $E_2 \subset \mathrm{Ker}(t_{1,2})$ et $E_2 \subset \mathrm{Ker}(t_{2,2})$, soit $t_{1,2} = 0$ et $t_{2,2} = 0$. On a donc montré que $\boxed{T_{1,2} = 0}$ et $\boxed{T_{2,2} = 0}$.

(b) En revanche, $T_{1,3}$ peut ne pas être nul. On donne l'exemple dans le cadre matriciel, vous transcrirez facilement par des applications linéaires.
Il suffit de considérer l'algèbre $\mathcal{A} = \{aJ + bJ^2 + cJ^3, (a,b,c) \in \mathbb{K}\}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, où J est la matrice de Jordan (nilpotente d'indice 4). Cette algèbre est nilpotente d'indice 4.

On vérifie sans peine que $\mathcal{K}(\mathcal{A}) = \text{Vect}(e_1)$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Ainsi, on peut prendre $E_1 = \text{Vect}(e_1)$, $E_2 = \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $E_3 = \text{Vect}(e_4)$. La base canonique est donc déjà adaptée.

Considérons maintenant la matrice J^3, qui vérifie bien $T_{2,3} = 0$, ainsi que $T_{2,2} = 0$ et $T_{1,2} = 0$. En revanche, $T_{1,3} = (1)$. Ainsi, $\boxed{\text{on n'a pas toujours } T_{1,3} = 0}$.