$MP^{*}1$

Problème

Le théorème de cotrigonalisation de Lie

Dans tout le problème, n est un élément de $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel finie $n \geq 1$. On note $T_n(\mathbf{K})$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constituée des matrices triangulaires supérieures.

Si a et b sont dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $[a,b] = a \circ b - b \circ a$. On appelle *sous-algèbre de Lie* de $\mathcal{L}(E)$ tout sous-espace $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (a,b) \in \mathcal{G}^2, \qquad [a,b] \in \mathcal{G}.$$

Si ε est une base de E, soit $\mathcal{T}_\varepsilon$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée des f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $Mat_\varepsilon(f)$ appartienne à $T_n(\mathbf{K})$.

Si U et V sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose :

$$[U,V] = UV - VU.$$

I. Cotrigonalisation dans le cas commutatif

1. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont trigonalisables et commutent deux à deux.

   Montrer qu'il existe une base ε de E telle que, pour tout

   $$\forall i \in I, \qquad Mat_\varepsilon u_i \in \mathcal{T}_\varepsilon.$$

2. Si $n \geq 2$, montrer que la sous-algèbre $T_n(\mathbf{K})$ n'est pas commutative.

   Le but essentiel du problème est de déterminer, si $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'endomorphismes de E soit cotrigonalisable. Ce résultat, dû à Sophus Lie, est un des piliers de la théorie élémentaire des algèbres de Lie.

II. Sous-algèbres de Lie de $\mathcal{L}(E)$

3. Justifier ou réfuter par un exemple les assertions suivantes.

   - Un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ tel que

   $$\forall (a,b) \in \mathcal{A}, \qquad a \circ b \in \mathcal{A}$$

   est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$.

- Une droite vectorielle de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$.

- L'espace
$$sl(E) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr} f = 0\}$$
est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$.

- Une sous-algèbre de Lie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ vérifie
$$\forall (a,b) \in \mathcal{A}, \qquad a \circ b \in \mathcal{A}.$$

III. Dérivée d'une sous-algèbre de Lie

Il est immédiat de vérifier qu'une intersection de sous-algèbres de Lie de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$. Ceci permet, si $\mathcal{F}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$, de définir la *sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{L}(E)$ *engendrée par* $\mathcal{F}$: c'est l'intersection des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathcal{F}$, qui est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$.

Si $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{G}'$ la sous-algèbre de Lie engendrée par les :
$$[a,b], \quad (a,b) \in \mathcal{G}^2.$$

On dit que $\mathcal{G}'$ est *l'algèbre de Lie dérivée* de $\mathcal{G}$.

4. On suppose $n \geq 2$. Vérifier :
$$\mathcal{L}(E)' \subset sl(E).$$

5. On suppose $n = 2$, $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2. Montrer :
$$sl(E)' = sl(E).$$
On pourra commencer par calculer $[A,B]$, $[B,C]$ et $[C,A]$ où :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

IV. Sous-algèbres de Lie résolubles

Si $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, on définit une suite $\left(\mathcal{G}^i\right)_{i\geq 0}$ de sous-algèbres de Lie de $\mathcal{L}(E)$ par :
$$\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}, \qquad \forall i \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{G}^{i+1} = \left(\mathcal{G}^i\right)'.$$

La suite $\left(\mathcal{G}^i\right)_{i\geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion.

On dit que $\mathcal{G}$ est *résoluble* s'il existe $p \geq 1$ tel que $\mathcal{G}^p = \{0\}$. Si tel est le cas, on pose :
$$r(\mathcal{G}) = \text{ Min } \{p \geq 1,\ \mathcal{G}^p = \{0\}\}.$$

6. a) Une sous-algèbre de Lie de dimension 1 de $\mathcal{L}(E)$ est-elle résoluble ?

   b) On suppose $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. La sous-algèbre de Lie $sl(E)$ de $\mathcal{L}(E)$ est-elle résoluble ?

7. Soit ε une base de E. Montrer que $\mathcal{T}_\varepsilon$ est une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathcal{L}(E)$.

8. Ici $\mathbf{K}$ est de caractéristique 2 et $n = 2$.

   a) Calculer la dimension de $sl(E)'$ et montrer que $sl(E)$ est résoluble.

   b) On suppose que tout élément de $\mathbf{K}$ est le carré d'un élément de $\mathbf{K}$, ce qui est par exemple le cas si $\mathbf{K} = \mathrm{F}_2$. Montrer que tous les éléments de $sl(E)$ sont trigonalisables.

   c) Montrer qu'il n'existe pas de base ε de E telle que $sl(E) \subset \mathcal{T}_\varepsilon$.

V. Le théorème de cotrigonalisation de Lie

Désormais, $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle. On va montrer que, si $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont trigonalisables, il existe une base ε de E telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}_\varepsilon$.

9. Ici, $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que les éléments de $\mathcal{G}'$ admettent un vecteur propre commun u. Si $g \in \mathcal{G}'$, soit $\lambda(g)$ la valeur propre de g associée à u. Soit enfin :

$$V = \bigcap_{g \in \mathcal{G}'} \mathrm{Ker}\ \left(g - \lambda(g) Id\right).$$

   On veut montrer que V est stable par tous les éléments de $\mathcal{G}$.

   a) Montrer que pour i dans $\mathbf{N}^*$, x dans V et (f, g) dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$, on a :

$$g \circ f^{(i)}(x) - \lambda(g) f^{(i)}(x) \in \ \mathrm{Vect}\ \Big(x, f(x), \cdots, f^{(i-1)}(x)\Big).$$

   b) Soient f dans $\mathcal{G}$, g dans $\mathcal{G}'$ et $V_{f,x} = \ \mathrm{Vect}\ \Big\{f^{(i)}(x),\ i \in \mathbf{N}\Big\}$.
   Montrer que g stabilise $V_{f,x}$ et que : $\mathrm{Tr}\ (g|_{V_{f,x}}) = \lambda(g) \times\ \dim V_{f,x}$.

   c) Déduire de b) :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}', \qquad \lambda\left([f, g]\right) = 0.$$

   d) Conclure.

10. a) En raisonnant par récurrence sur $\dim E + r(\mathcal{G})$, établir le théorème énoncé au début de cette partie.

    b) Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathcal{L}(E)$?

    c) Soient I un ensemble non vide, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments trigonalisables de $\mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E cotrigonalisant les f_i, $i \in I$.