Questions / Réponses

Questions

Détails des démonstrations de la propriété 3 et du théorème 2 sur le cours d'Intégration.

Réponse

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On montre déjà que la fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ deux fonctions en escalier telles que :

$$\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

• Supposons f Riemann-intégrable. Par définition de $\sup(\mathscr{I}_-) = \displaystyle\int_a^b f$ que l'on note τ, il existe $\varphi \in \mathscr{E}_-$ telle que :

$$\int_a^b \varphi \geqslant \tau - \varepsilon,$$

car $\tau - \varepsilon$ ne majore pas $\mathscr{I}_-$.
De même, comme $\tau + \varepsilon$ ne minore par $\mathscr{I}_+ = \tau$, alors il existe $\psi \in \mathscr{E}_+$ telle que :

$$\int_a^b \psi \leqslant \tau + \varepsilon.$$

Résultat des courses, on a $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec φ et ψ en escalier :

$$\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \tau + \varepsilon - (\tau - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, on a la première implication.

• Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ en escalier telles que :

$$\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon,$$

soit $\varepsilon > 0$. On trouve φ et ψ comme ci-dessus. Donc $\varphi \in \mathscr{E}_-$, $\psi \in \mathscr{E}_+$. On pose $A = \displaystyle\int_a^b \varphi \in \mathscr{I}_-$ et $B = \displaystyle\int_a^b \psi \in \mathscr{I}_+$.

On note $\tau_- = \sup(\mathscr{I}_-)$ et $\tau_+ = \inf(\mathscr{I}_+)$ de sorte que :

$$A \leqslant \tau_- \leqslant \tau_+ \leqslant B,$$

donc :

$$0 \leqslant \tau_+ - \tau_- \leqslant B - A \leqslant \varepsilon,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient $\tau_+ = \tau_-$ et la fonction f est Riemann-intégrable.

Bien, maintenant, on va montrer la propriété 3 et le théorème 2 « en même temps ».

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut montrer deux choses. Premièrement, que la fonction $\lambda f + g$ est Riemann-intégrable, et ensuite :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Lorsque $\lambda = 0$, tout est facile à faire.
Suite à la question posée en ligne, je détaille le cas $\lambda > 0$ (qui est légèrement plus facile que le cas $\lambda < 0$).
Soit $\varepsilon > 0$. Par le préambule vu plus haut, on trouve quatre fonctions en escalier $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$, avec :

$$\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1) \leqslant \varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2) \leqslant \varepsilon.$$

On multiplie le premier encadrement de f par λ ce qui conserve les inégalités (c'est la petite différence avec le cas $\lambda < 0$ où l'on obtient dans ce cas $\lambda\psi_1 \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi_1$, cas non détaillé ici mais le raisonnement ressemble beaucoup).
Ainsi,

$$\lambda\varphi_1 \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_1.$$

Par conséquent, en posant $\Phi = \lambda\varphi_1 + \varphi_2$ et $\Psi = \lambda\psi_1 + \psi_2$ qui restent deux fonctions en escalier, alors :

$$\Phi \leqslant \lambda f + g \leqslant \Psi.$$

D'autre part, on sait que pour les fonctions en escalier, on a par la définition :

$$\int_a^b \Phi = \lambda \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2,$$

et :

$$\int_a^b \Psi = \lambda \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2.$$

On en déduit :

$$\int_a^b (\Psi - \Phi) = \lambda \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1) + \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2) \leqslant (\lambda + 1)\varepsilon.$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\lambda+1} > 0$, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve $\Phi \leqslant \lambda f + g \leqslant \Psi$, avec :

$$\int_a^b (\Psi - \Phi) \leqslant \varepsilon.$$

Par le préambule, la fonction $\lambda f + g$ est bien Riemann-intégrable. On a donc la propriété 3, mais on ne s'arrête pas en si bon chemin car il ne reste plus beaucoup de choses à faire pour avoir le théorème 2.
Continuons !
En reprenant le fil, en posant τ_f, τ_g les intégrales de f et g entre a et b (ceci pour alléger les futures notations) et en posant ρ l'intégrale de $\lambda f + g$ entre a et b, maintenant calculable puisque $\lambda f + g$ est Riemann-intégrable, alors :

$$\int_a^b \Phi \leqslant \rho \leqslant \int_a^b \Psi.$$

D'une part, comme $\displaystyle\int_a^b \varphi_1 \leqslant \tau_f \leqslant \int_a^b \psi_1$ et que $\displaystyle\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1) \leqslant \varepsilon$, l'écart séparant deux des trois nombres de l'encadrement $\displaystyle\int_a^b \varphi_1 \leqslant \tau_f \leqslant \int_a^b \psi_1$ est inférieur à ε. De même pour l'encadrement $\displaystyle\int_a^b \varphi_2 \leqslant \tau_g \leqslant \int_a^b \psi_2$.
On en déduit :

$$\int_a^b \Phi = \lambda \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 \geqslant \lambda(\tau_f - \varepsilon) + (\tau_g - \varepsilon) = (\lambda \tau_f + \tau_g) - (\lambda + 1)\varepsilon.$$

De même,

$$\int_a^b \Psi = \lambda \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \leqslant \lambda(\tau_f + \varepsilon) + (\tau_g + \varepsilon) = (\lambda \tau_f + \tau_g) + (\lambda + 1)\varepsilon.$$

En définitive,

$$(\lambda \tau_f + \tau_g) - (\lambda + 1)\varepsilon \leqslant \int_a^b \Phi \leqslant \rho \leqslant \int_a^b \Psi \leqslant (\lambda \tau_f + \tau_g) + (\lambda + 1)\varepsilon.$$

On conclut que :

$$\Big|\rho - (\lambda \tau_f + \tau_g)\Big| \leqslant 2(\lambda + 1)\varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, la quantité $\Big|\rho - (\lambda \tau_f + \tau_g)\Big|$ indépendante de ε est donc nulle en faisant tendre ε vers 0^+. On obtient donc :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \rho = \lambda \tau_f + \tau_g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

On a démontré le théorème 2 ! ! (mais uniquement lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. À vous de faire le cas $\lambda < 0$ partiellement détaillé en ligne.)