DÉTERMINANTS

Exercice 1. [∘]

Pour tout $n \geqslant 1$, calculer le déterminant suivant (où les blancs désignent des 0) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} = \det\left(\binom{i}{j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant n-1}.$$

Exercice 2. [★]

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A = \big(\cos(i-1)\alpha_j\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 3. [★]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Démontrer qu'il existe $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers.

1. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont impairs et que les autres coefficients sont pairs. Démontrer que A est inversible.
2. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux de A sont pairs et que les autres coefficients sont impairs.
   a) On suppose que n est pair. Démontrer que A est inversible.
   b) On suppose que n est impair. Démontrer que $\operatorname{rg} A \in \{n-1; n\}$.
3. C'est le père Bové qu'a $2n+1$ vaches. Quand qu'y met d'côté l'une quelconque d'ses vaches, ben les $2n$ qui restent, y peut les répartir en deux sous-troupeaux de n vaches chacun qu'ont tous deux le même poids total. Montrer qu'les vaches, è z'ont toutes le même poids.