Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths Ulm
- *NOM Prénom* : Anjolras Philippe

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tels que f est développable en série entière en tout point et $f^{(n)}$ converge simplement vers g quand $n \to +\infty$. Trouver g.

Exercice 2 :

Soit $n > 1$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $B^2 = B$. Montrer que $rg(AB - BA) \leq rg(AB + BA)$.

Exercice 3 :

Soit $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$. Peut-on approximer f par un polynôme à coefficients positifs ? (CN ? CS ? CNS ?)

Remarques sur l'oral

L'examinateur était très gentil (c'est celui qui propose des chocolats). Il a d'emblée expliqué que les exercices étaient un prétexte à une discussion, ... (cf les autres rapports).
J'ai avancé en autonomie sur tout le premier exercice. Certaines idées n'aboutissaient pas, mais on trouve finalement une équation fonctionnelle sur g indépendante de f, et donc une famille de fonctions g qui conviennent.
L'exercice 2 n'est pas très compliqué.
L'exercice 3 m'a posé plus de problèmes (bien qu'on l'ait déjà fait en cours si je me souviens bien). On trouve très facilement une CN ($f(0) \geq 0$), reste à montrer qu'elle est suffisante. J'arrive à montrer que si on arrive à approximer $f(x) = -x$, on aura que c'est bien une CNS. Par la suite, je m'embarque sur une idée qui n'aboutit pas du tout (les polynômes à coefficients positifs sont positifs sur $\mathbb{R}^+$ donc je les écris sous la forme $A^2 + XB^2$ en me souvenant d'un exercice fait pendant la préparation, mais ça ne permet pas d'avancer). Il finit par me guider vers des solutions explicites (bien que je ne comprenne pas tout à fait pourquoi on les prend avant de montrer qu'on a effectivement une approximation convenable), dans les degrés 2 et 3 ($X(X+1)$ et $X(X+1)^2$). Je propose naturellement $X(X+1)^n$ (qui s'écrivent donc bien $X + P$ où P est à coefficients positifs) pour les suivants, donne sans le justifier la norme infinie de ces polynômes à partir des normes infinies calculées précédemment ($\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$) et donc on a gagné, l'oral s'arrête là.