Probabilités (supplément)

À ajouter à la page 12.

Remarque. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Ils sont mututellement indépendants si et seulement si toute sous-famille finie $(G_i)_{i\in J}$ (avec $J \subset I$ et J finie) est constituée d'événements mutuellement indépendants.

Propriété. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Si l'on remplace dans cette famille certains G_i par leur conjugué $\overline{G_i}$, alors la famille est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit $b = (G_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n événements mutuellement indépendants. Posons $b' = (\overline{G_1}, G_2, \ldots, G_n)$ et montrons que ces événements sont mutuellement indépendants.
Renommons $b' = (G'_1, G'_2, \ldots, G'_n)$.
Soit $J \subset \{1, \ldots, n\}$ avec J non vide.
Premier cas : Supposons que $1 \notin J$.
Alors pour tout $i \in J$, $G_i = G'_i$, donc $P\left(\bigcap_{i\in J} G'_i\right) = \prod_{i\in J} P(G'_i)$.

Second cas : Supposons que $1 \in J$. Alors $P\left(\bigcap_{i\in J} G'_i\right) = P\left(\overline{G_1} \cap \bigcap_{i\in J\setminus\{1\}} G_i\right)$, or G_1 et $\bigcap_{i\in J\setminus\{1\}} G_i$ sont indépendants, donc $\overline{G_1}$ et $\bigcap_{i\in J\setminus\{1\}} G_i$ sont également indépendants.

On en déduit que $P\left(\bigcap_{i\in J} G'_i\right) = \prod_{i\in J} P(G'_i)$.

$\diamond$ Par récurrence sur $p \in \{2, \ldots, n\}$, on en déduit que $\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_p}, G_{p+1}, \ldots, G_n$ sont mutuellement indépendants.

$\diamond$ Notons maintenant $f = (G_i)_{i\in I}$ et f' la famille déduite de f en remplaçant certains G_i par leur conjugué $\overline{G_i}$. Alors le point précédent prouve que toute sous-famille finie de f' est constituée d'événements mutuellement indépendants, donc c'est aussi le cas pour la famille f'. $\square$

À ajouter à la page 18.

Ce qui suit est hors programme.

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle (pas nécessairement discrète). La fonction de répartition de X est l'application $x \longmapsto P(X \leq x)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une autre variable aléatoire réelle. On dit que X_n converge en loi vers X et on note $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ si et seulement si , pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) = 0$, $P(X_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq x)$.

Ainsi, $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ si et seulement si la suite des fonctions de répartition de X_n converge simplement vers la fonction de répartition de X sur $\{x \in \mathbb{R} \ / \ P(X = x) = 0\}$.

Propriété. Cette définition est bien une généralisation de celle donnée lorsque X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires entières et X une autre variable aléatoire entière. Notons (1) : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_k = n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = n)$
et (2) : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = 0 \Longrightarrow P(X_k \leq x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq x)$.
Il s'agit de montrer que (1) $\Longleftrightarrow$ (2).
◇ Supposons (2). Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Posons $x = n + \frac{1}{2}$: $P(X = x) = 0$, car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc d'après (2), $P(X_k \leq x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq x)$.
Or $P(X \leq x) = P(X \leq n + \frac{1}{2}) = P(X \leq n)$. Ainsi, $P(X_k \leq n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$: $P(X = n) = P((X \leq n) \setminus (X \leq n-1)) = P(X \leq n) - P(X \leq n-1)$ et de même, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_k = n) = P(X_k \leq n) - P(X_k \leq n-1)$. On en déduit que $P(X_k = n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = n)$.
◇ Réciproquement, supposons (1). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) = 0$.

$P(X \leq x) = P(X \leq \lfloor x \rfloor) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X = n)$.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_k \leq x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X_k = n)$,

donc d'après (1), $P(X_k \leq x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq x)$. □

Remarque. Une situation assez usuelle est le cas d'une suite de variables aléatoires discrètes qui convergent en loi vers une variable aléatoire réelle non discrète : cf le théorème de la limite centrée, où une certaine suite de variables aléatoires discrètes (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale (gaussienne), c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(Z_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

page 29 : démonstration du théorème de transfert :

◇ $g(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\Big(|yP(g(X)=y)|\Big)_{y\in g(X)(\Omega)}$ est sommable, or en travaillant dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{y\in g(X(\Omega))}|y|P(g(X)=y) &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}|y|P(X\in g^{-1}(\{y\}))\\ &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}|y|\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tq\ \ g(x)=y}}P(X=x)\\ &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}\ \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tq\ \ g(x)=y}}|g(x)|P(X=x),\end{aligned}$$

or $X(\Omega)=\bigsqcup\limits_{y\in g(X(\Omega))}\{x\in X(\Omega)\ /\ g(x)=y\}$, donc par sommation par paquets pour des familles de réels positifs, $\sum\limits_{y\in g(X(\Omega))}|y|P(g(X)=y)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)}|g(x)|P(X=x)$.

Ainsi $g(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(g(d).P(X=d))_{d\in X(\Omega)}$ est sommable.

◇ Supposons que c'est le cas. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}E(g(X))=\sum_{y\in g(X(\Omega))}yP(g(X)=y) &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}yP(X\in g^{-1}(\{y\}))\\ &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}y\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tq\ \ g(x)=y}}P(X=x)\\ &= \sum_{y\in g(X(\Omega))}\ \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tq\ \ g(x)=y}}g(x)P(X=x),\end{aligned}$$

or $X(\Omega)=\bigsqcup\limits_{y\in g(X(\Omega))}\{x\in X(\Omega)\ /\ g(x)=y\}$, donc par sommation par paquets pour des familles **sommables** de réels, $E(g(X))=\sum\limits_{x\in X(\Omega)}g(x)P(X=x)$.