MP*1

Intégrales à paramètre

1 Calculs

1. *Intégrale de Gauss*

   Pour $x \in \mathbb{R}$, soit :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que la fonction :

$$x \mapsto f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

   est constante sur $\mathbb{R}$.

   c) Conclure :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. (**) *Intégrale de Dirichlet*

   a) Pour x dans $\mathbb{R}^+$, justifier l'existence de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer $f'(x)$ puis $f(x)$ pour $x > 0$.

   c) Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

   d) Retrouver b) en développant

$$\frac{\sin(t)}{t}$$

   en série entière et en intégrant terme à terme.

3. (*) *Transformée de Fourier d'une gaussienne*

   a) Pour x dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-itx}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, trouver une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 vérifiée par f.

   c) Calculer $f(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

4. a) Calculer, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}\ \mathrm{d}t.$$

b) En déduire

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\ \mathrm{d}t, \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t.$$

5. Calculer, pour $x > -1$,

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + x\sin^2 t\right)\ \mathrm{d}t.$$

6. (*) Calculer, si $0 < x < 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + x\cos t)}{\cos t}\ \mathrm{d}t.$$

7. (*) Domaine de définition et calcul de :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)}{\ln t}\ \mathrm{d}t.$$

8. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - xt}\ \mathrm{d}t.$$

9. (*) Calculer, si $0 < a < b$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)\ \mathrm{d}t.$$

10. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

11. (**) Calculer, pour $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\cos t - e^{-t})e^{-tx}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 ?

12. Calculer, pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

13. (**) *Intégrale de Fresnel*

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it-xt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

a) Justifier l'existence de $f(x)$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, trouver une équation linéaire homogène d'ordre 1 satisfaite par f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que :

$$\sqrt{x}\, f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(1/2).$$

d) Déduire des deux questions précédentes une expression de $f(x)$ valable pour tout $x > 0$.

e) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

f) Déterminer :

$$\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\, du.$$

14. Montrer, si $x \in]-1, 1[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh} t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

15. (*) Si $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-x^2/t^2}\ \mathrm{d}t.$$

16. Soit :

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \end{array}$$

L'application F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Trouver un équivalent de $F(x)$ en 0.

17. En dérivant

$$f(x) = \int_0^{\pi} \ln(x - \cos t)\ \mathrm{d}t,$$

calculer, si $a > 1$ et $b > 1$:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a - \cos t}{b - \cos t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

18. Calculer :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\ \mathrm{d}t.$$

19. Calculer, si $x > 1$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t.$$

4 Transformée de Laplace

46. (**) *Régularité C^∞ de la transformée de Laplace*

    Soient a un réel et f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $x > a$, $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction g définie sur $]a, +\infty[$ par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

    est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

47. (*) *Analyticité de la transformée de Laplace*

    Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t \mapsto f(t)e^t$ soit sommable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

    est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

48. (**) *Étude de la limite en 0 d'une transformée de Laplace*

    a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On suppose que :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

    existe pour tout $x > 0$ et est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

    b) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

    c) Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

    existe pour tout $x > 0$, ait une limite quand $x \to 0$, mais telle que :

$$x \quad \mapsto \quad \int_0^x f$$

    n'ait pas de limite en $+\infty$.

49. *Étude en 0 de la transformée de Laplace d'une fonction périodique*

    Soit f une fonction continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ($T > 0$).
    La fonction :

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

    admet-elle une limite en 0 ?

50. (**) *Continuité en 0 d'une transformée de Laplace (cas semi-convergent)*

    Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ existe.

a) On suppose :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrer :

$$x\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

b) On suppose :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrer :

$$x\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Dans la suite, on suppose $f \geq 0$ et :

$$x\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

On veut montrer que :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Si φ est une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$I_\varphi(x) = x\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \varphi(e^{-xt})\,\mathrm{d}t.$$

c) Montrer, si φ est un polynôme, que :

$$I_\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi.$$

d) Montrer, si ϕ est continue, que :

$$I_\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi.$$

e) Montrer, si ϕ est continue par morceaux, que :

$$I_\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi.$$

f) Conclure.

55. (**) *Injectivité de la transformation de Laplace*

a) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ ayant une limite en $+\infty$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est nulle.

On pourra utiliser le changement de variable $u = e^{-t}$.

b) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $x > a$,

$$t \mapsto f(t)e^{-xt}$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie :

$$\forall x \in]a, +\infty[, \qquad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est nulle.
On pourra se ramener au a) par une intégration par parties.

56. *Transformation de Laplace sur L^2*
Soit f une fonction continue de carré intégrable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$. pour $x > 0$ soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0, \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

a) Vérifier que g est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Si $t > 0$, montrer que :

$$|g(x)|^2 \leq \sqrt{\frac{\pi}{x}} \int_0^{+\infty} |f^2(t)|e^{-xt}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Conclure que g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\int_0^{+\infty} |g|^2 \leq \pi \int_0^{+\infty} |f|^2.$$

d) Montrer que la constante π est optimale dans c).

57. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t+1}$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que

$$L(L(f))(y) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+y}\,\mathrm{d}t.$$

58. (***) *Signe d'une transformée de Laplace*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $t \mapsto e^{xt}\, f(t)$ soit intégrable pour tout x de $\mathbb{R}$. On suppose f strictement positive au voisinage de $+\infty$. Montrer que :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{xt}\,\mathrm{d}t$$

est strictement positive au voisinage de $+\infty$.

59. *Zéros d'une transformée de Laplace*
Soient n dans $\mathbb{N}$, f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ changeant de signe exactement n fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que la transformée de Laplace L_f de f est définie pour tout $x > 0$. Montrer que L_f s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5 La fonction Γ

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

60. *Généralités*

a) Montrer que Γ est bien définie et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Calculer $\Gamma(n)$ pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

c) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

61. (**) *Généralités, suite*

a) Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ et atteint son minimum global en un unique point c de $]1,2[$.

b) Montrer que :

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

c) Montrer que pour tout $c > 0$, on a :

$$\frac{\Gamma(x)}{c^x} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

d) Tracer sommairement le graphe de Γ.

62. (***) *Formule de Stirling pour la fonction* Γ

a) Montrer, si x est dans $]-1,+\infty[$:

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x$$

où la fonction φ_x est nulle sur $]-\infty, -\sqrt{x}]$ et telle que :

$$\forall t > -\sqrt{x}, \qquad \varphi_x(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}t}.$$

b) En déduire la formule de Stirling pour la fonction Γ :

$$\Gamma(x+1) \underset{X\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}.$$

63. *Intégrale de Raabe*

Calculer pour $x > 0$: $\int_x^{x+1} \ln(\Gamma)$.

On pourra utiliser la formule de Stirling pour la fonction Γ.

64. (**) *Caractérisation de Bohr de la fonction* Γ

Soit E l'ensemble des fonctions convexes de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x+1) - f(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad f(1) = 0.$$

a) Montrer que $\ln\Gamma$ appartient à E.

Soit $f \in E$.

b) Montrer :

$$\forall x \in]0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \ln(n-1) \leq \frac{f(x+n)-f(n)}{x} \leq \ln n.$$

c) En déduire :

$$\forall x \in]0,1], \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \qquad x\ln(n-1)-g_n(x) \leq f(x) \leq x\ln n - g_n(x)$$

où

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) - \ln(n-1)!.$$

d) Conclure que $E = \{\ln \Gamma\}$.

Cette caractérisation de la fonction Γ a été exploitée systématiquement par Artin. On en présente ci-dessous quelques applications.

65. *Formules de Gauss et Weierstrass*

a) Si x est dans $\mathbb{R}^{+*}$, établir :

$$\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

b) Montrer , si x est dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \right).$$

66. *Intégrales eulériennes*

Pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}.$$

a) Justifier ces définitions.

b) Montrer, si x et y sont dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

c) En utilisant la caractérisation de Bohr de la fonction Γ, en déduire, pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Indication. Pour y fixé, considérer l'application qui à x associe :

$$\Gamma(x+y)B(x,y).$$

d) Retrouver l'intégrale de Gauss.