

Problème

Probabilités sur le groupe symétrique

Dans tout ce texte, n est un élément de \mathbb{N}^* , \mathcal{S}_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$; on rappelle que la loi \circ fait de \mathcal{S}_n un groupe.

Si σ est dans \mathcal{S}_n et k dans $\{1, \dots, n\}$, soient $c_k(\sigma)$ le nombre de k -cycles dans la décomposition canonique de σ , $k_n(\sigma)$ le nombre total de cycles dans la décomposition canonique de σ . On a donc

$$k_n(\sigma) = \sum_{k=1}^n c_k(\sigma).$$

Le n -uplet $(c_1(\sigma), \dots, c_n(\sigma))$ est le *type cyclique* de σ .

On note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Le but du problème est d'étudier, d'un point de vue probabiliste, certaines fonctions sur \mathcal{S}_n . Dans ce but, on considère une variable aléatoire σ_n suivant la loi uniforme sur \mathcal{S}_n . On pose

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad C_n^k = c_k(\sigma_n) \quad K_n = \sum_{k=1}^n C_n^k.$$

I. Quelques calculs élémentaires

Les questions 1 et 2 sont deux à deux indépendantes.

1. a) Soit A une partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $k \in \{0, \dots, n\}$. Calculer

$$P(\sigma_n(A) = A).$$

- b) Pour k dans $\{0, \dots, n\}$ soit $n_k(\sigma)$ le nombre de parties de cardinal k stables par σ . Soit N_n^k la variable aléatoire $n_k(\sigma_n)$. Calculer

$$E(N_n^k).$$

- c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ stables par σ_n .

2. Pour m dans $\{1, \dots, n\}$, soit A_m^n l'événement « σ_n est un cycle de longueur m », c'est-à-dire :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad C_n^k = \delta_{k,m}.$$

- a) Soit m dans \mathbb{N}^* fixé. Pour $n \geq m$, calculer $P(A_m^n)$. En donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
- b) Soit ℓ dans \mathbb{N} fixé. Donner un équivalent de $P(A_{n-\ell}^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- c) Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $P(\bigcup_{m=1}^n A_m^n)$.

II. Nombre de points fixes

3. a) Soient $i_1 < \dots < i_k$ des éléments de $\{1, \dots, n\}$. Calculer

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k (\sigma_n(i_j) = i_j)\right).$$

- b) En utilisant la formule du crible, montrer

$$P(C_n^1 = 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Quelle est la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$?

- c) On fixe j dans \mathbb{N}^* . Montrer, que, pour $n \geq j$,

$$P(C_n^1 = j) = \frac{P(C_{n-j}^1 = 0)}{j!}.$$

Déterminer la limite de la suite $(P(C_n^1 = j))_{n \geq 1}$. Qu'en déduit-on ?

4. Calculer $E(C_n^1)$ et $V(C_n^1)$. On pourra écrire C_n^1 comme une somme de variables de Bernoulli dont on calculera les covariances.

III. Loi faible pour le nombre de cycles

5. a) Démontrer l'égalité de polynômes

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{k_n(\sigma)} = \prod_{k=0}^{n-1} (X + k).$$

- b) Dédurre de a) la fonction génératrice G_{K_n} de K_n et les formules

$$E(K_n) = H_n, \quad V(K_n) = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

6. a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|K_n - E(K_n)| \geq \varepsilon E(K_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right),$$

b) Si $\varepsilon > 0$, montrer que¹

$$P\left(\left|\frac{K_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

IV. Loi asymptotique des cycles courts

A. Préliminaire analytique

Les questions 7 et 8 sont indépendantes.

7. Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 1$. Pour x dans $] -R, R[$ soit

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Pour x dans $] -1, 1[$, soit

$$f(x) = \frac{g(x)}{1-x}.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$. On pose

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer a_n en fonction des b_k . En déduire

$$a_n \longrightarrow g(1).$$

8. Soient r dans \mathbb{R}^{+*} , u et v deux fonctions de classe C^∞ de $] -r, r[$ dans \mathbb{R} , p dans \mathbb{N} , v la fonction définie sur $] -r, r[$ par

$$\forall x \in] -r, r[, \quad v(x) = u(x) + x^{p+1}w(x).$$

Démontrer que, si $U = \exp(u)$, $V = \exp(v)$, alors

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad V^{(i)}(0) = U^{(i)}(0).$$

¹On peut démontrer beaucoup mieux. Pour x dans \mathbb{R} , le théorème de Feller-Goncharov assure que :

$$P(K_n - \ln(n) \leq x \sqrt{\ln(n)}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

B. Description poissonnienne de la distribution des types cycliques

9. Soit (c_1, \dots, c_n) dans \mathbb{N}^n avec

$$\sum_{i=1}^n i c_i = n.$$

Démontrer que l'ensemble des σ de \mathcal{S}_n telles que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad c_k(\sigma) = c_k$$

a pour cardinal

$$n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{i^{c_i} c_i!}.$$

Dans la suite, $(Z_j)_{j \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout j , Z_j suit la loi de Poisson de paramètre $1/j$.

10. Pour n dans \mathbb{N}^* , (c_1, \dots, c_n) dans \mathbb{N}^n , établir

$$P(C_n^1 = c_1, \dots, C_n^n = c_n) = P\left(Z_1 = c_1, \dots, Z_n = c_n \mid \sum_{j=1}^n j Z_j = n\right).$$

Ainsi, la loi du vecteur aléatoire (C_n^1, \dots, C_n^n) est la loi du vecteur aléatoire (Z_1, \dots, Z_n) conditionnellement à l'événement

$$\left(\sum_{j=1}^n j Z_j = n\right).$$

C. Convergence en loi du vecteur (C_n^1, \dots, C_n^k)

Pour ℓ et m dans \mathbb{N} avec $\ell \leq m$, soit

$$T_{\ell, m} = \sum_{j=\ell+1}^m j Z_j,$$

avec la convention de somme vide :

$$T_{m, m} = 0.$$

Soient k dans \mathbb{N}^* , (c_1, \dots, c_k) dans \mathbb{N}^k , $c = \sum_{i=1}^k i c_i$.

Les questions 11 et 12 sont indépendantes.

Dans la suite, k est un élément de \mathbb{N}^* .

11. a) Soit λ dans \mathbb{R}^+ . Rappeler la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
- b) Soit $n \geq k$ un entier. Montrer que la fonction génératrice de $T_{k,n}$ est donnée par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad G_{T_{k,n}}(x) = \exp(H_k - H_n) \exp\left(\sum_{j=k+1}^n \frac{x^j}{j}\right).$$

12. Soit $n \geq k$ un entier. Montrer

$$P(C_n^1 = c_1, \dots, C_n^k = c_k) = P(Z_1 = c_1, \dots, Z_k = c_k) \frac{P(T_{k,n} = n - c)}{P(T_{0,n} = n)}.$$

13. a) Soient $n \geq k$ un entier, i dans $\{1, \dots, n\}$. Montrer que le coefficient de x^i dans le développement en série entière de $G_{T_{k,n}}$ est celui de x^i dans le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{\exp(H_k - H_n)}{1 - x} \exp\left(-\sum_{j=1}^k \frac{x^j}{j}\right).$$

- b) Si ℓ est un élément de \mathbb{N} , donner un équivalent de $P(T_{k,n} = n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
14. Conclure que la suite de vecteurs aléatoires

$$(C_n^1, \dots, C_n^k)$$

converge en loi et identifier la loi limite. Retrouver le résultat final de la question 3.

Le résultat de convergence en loi de la dernière question est dû à Goncharov (1944).