

**Devoir Surveillé n° 3 (4h)**

**Correction du problème 1 – Transformée de Fourier discrète**
**Partie I – Préliminaires**

1. Il s'agit d'un résultat du cours, classique :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^j.$$

Puisque  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , si  $k \neq 0$ ,  $\omega^k \neq 1$ , donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \frac{1 - \omega^{kn}}{1 - \omega} = 0.$$

Si  $k = 0$ , la somme vaut  $n$ . Ainsi :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = n\delta_{k,0}}.$$

Comme  $\omega^0 = \omega^n$ , la deuxième somme est égale à la première (on remplace un terme par un autre qui lui est égal) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \omega^{jk} = n\delta_{k,0}}.$$

2. Soit  $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  et notons  $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) = \mathcal{F}_n u$  et  $w = (w_0, \dots, w_{n-1}) = \mathcal{F}_n v$ . On a alors, pour tout  $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$w_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{v_k} \omega^{\ell k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \omega^{-jk} \omega^{\ell k}.$$

En intervertissant les deux sommes, il vient :

$$w_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{\ell-j})^k = \sum_{j=0}^{n-1} u_j n\delta_{\ell-j,0},$$

car  $k-j$  prend ses valeurs dans  $\llbracket -(n+1), n+1 \rrbracket$ , le seul multiple de  $n$  dans cet intervalle étant 0. Ainsi,

$$w_\ell = n \sum_{j=0}^{n-1} u_j \delta_{\ell,j} = nu_\ell.$$

Ainsi,  $\boxed{\mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_n = n \text{id}_{\mathbb{C}^n}}$ . On en déduit que  $\frac{\mathcal{F}_n}{n} \circ \mathcal{F}_n = \text{id}$ , et comme par ailleurs, on vérifie sans peine que pour  $\lambda$  réel,  $\mathcal{F}_n(\lambda u) = \lambda \mathcal{F}_n u$ , on a aussi  $\mathcal{F}_n \circ \frac{\mathcal{F}_n}{n} = \text{id}$ .

Ainsi,  $\boxed{\mathcal{F}_n \text{ est bijective, de réciproque } \frac{\mathcal{F}_n}{n}}$ .

3. On a

$$\mathcal{F}_n(1, 1, 0, \dots, 0) = (v_0, \dots, v_{n-1}),$$

où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_k = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_j} \omega^{jk} = 1 + \omega^k.$$

Ainsi,  $\boxed{\mathcal{F}_n^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{n}(1 + \omega^0, 1 + \omega^1, \dots, 1 + \omega^{n-1})}$ .

De même, on a, en notant

$$\mathcal{F}_n(0, \dots, 0, i, \dots, 0) = (v'_0, \dots, v'_{n-1}),$$

on a, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$v'_k = \omega^{ik}.$$

Ainsi,  $\boxed{\mathcal{F}_n^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0) = \frac{1}{n}(1, \omega^i, \omega^{2i}, \dots, \omega^{(n-1)i})}$ .

## Partie II – Équation de convolution

1. Soit  $u, v$  des éléments de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $w = (w_1, \dots, w_n) = \mathcal{F}_n(u \times v)$ . On a donc, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$w_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j \equiv k [n]} \overline{u_i} \overline{v_j} \omega^{\ell k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j \equiv k [n]} \overline{u_i} \overline{v_j} \omega^{\ell(i+j)}$$

Ainsi, cette somme n'étant que le groupement des couples  $(i, j)$  suivant la classe de congruence de leur somme modulo  $n$ , on peut dégrouper ces termes, ce qui donne :

$$w_\ell = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_i} \omega^{i\ell} \overline{v_j} \omega^{j\ell} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} \overline{u_i} \omega^{i\ell} \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} \overline{v_j} \omega^{j\ell} \right).$$

On a donc bien la description attendue :  $\boxed{\mathcal{F}_n(u \otimes v) = \mathcal{F}_n(u) \times \mathcal{F}_n(v)}$ .

2. (i) Puisque  $\mathcal{F}_n$  est bijective, l'équation  $u \otimes x = y$  est équivalente à  $\mathcal{F}_n(u \otimes x) = \mathcal{F}_n y$ , ou encore à  $\mathcal{F}_n(u) \times \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(y)$ .

Ce produit se définissant coordonnée par coordonnée, pour qu'on puisse définir  $\mathcal{F}_n(x)$  solution de cette équation, il faut et il suffit que chaque fois que la  $i$ -ième coordonnée de  $\mathcal{F}_n(y)$  est non nulle, il en est de même de celle de  $\mathcal{F}_n(u)$ . On trouve la coordonnée  $x'_i$  correspondante de  $\mathcal{F}_n(x)$  en quotientant les 2. Si la  $i$ -ième coordonnée de  $\mathcal{F}_n(y)$  est nulle, on peut poser  $x'_i = 0$ . On pose alors  $x = \mathcal{F}_n^{-1}(x')$ , qui est bien solution de l'équation.

Ainsi, en désignant par  $\text{Supp}(x_1, \dots, x_n) = \{i \mid x_i \neq 0\}$ , une condition suffisante et nécessaire pour l'existence d'une solution au moins à l'équation  $u \otimes x = y$  est que  $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) \subset \text{Supp}(\mathcal{F}_n u)}$ .

- (ii) Cette fois les  $x'_i$  doivent être tous déterminés de façon unique, s'ils existent. C'est le cas si et seulement si la  $i$ -ième coordonnée de  $\mathcal{F}_n(y)$  est non nulle.

Ainsi, l'équation admet au plus une solution si  $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  (autrement dit, aucun coefficient n'est nul).

- (iii) L'existence et l'unicité d'une solution équivaut alors à  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket = \text{Supp}(\mathcal{F}_n y) \subset \text{Supp}(\mathcal{F}_n u)$ , et comme ce dernier est inclus dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on obtient la CNS suivante :  $\boxed{\text{Supp}(\mathcal{F}_n y) = \text{Supp}(\mathcal{F}_n u) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  (autrement dit aucun coefficient nul).

3. La question I-3 nous assure que  $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$  est l'image réciproque de  $n(0, 1, 0, \dots, 0)$ , donc, avec les notations de la question précédente,  $\text{Supp}(\mathcal{F}_n(y)) = \{1\}$

Par ailleurs, la question I-1 (ou la question I-3 avec  $i = 0$ ) permet d'affirmer que  $\mathcal{F}_n(1, \dots, 1) = (n, 0, \dots, 0)$ . Ainsi,  $\text{Supp}(\mathcal{F}_n x) = \{0\}$ .

D'après la caractérisation (i) de la question précédente, on peut donc affirmer que l'équation  $(1, 1, \dots, 1) \otimes x = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$  n'a  $\boxed{\text{pas de solution}}$ .

C'était prévisible : dans la mesure où les coordonnées de  $(1, \dots, 1)$  sont toutes égales, les coefficients  $w_k$  de  $(1, \dots, 1) \otimes x$  doivent aussi tous être égaux :

$$w_k = \sum_{i+j \equiv k} x_j = \sum_{i=0}^{n-1} x_j,$$

puisque à chaque indice  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , il correspond un unique  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $i + j \equiv k [n]$  (reste modulo  $n$  de  $k - j$ ).

Comme le second membre de l'équation n'est pas de cette forme, il ne peut pas exister de solution.

4. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient :

$$(0, n, 0, \times, 0) \times \mathcal{F}_n(x) = (0, n, 0, \dots, 0).$$

Ainsi, il faut et il suffit que  $\mathcal{F}_n(x)$  soit de la forme  $(x'_0, 1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ . On trouve trois solutions distinctes en prenant l'antécédant par  $\mathcal{F}_n$  de trois  $n$ -uplets de ce type, par exemple :

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{F}_n^{-1}(0, 1, 0, \dots, 0) = \boxed{\frac{1}{n}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})}, \\ x &= \mathcal{F}_n^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0) = \boxed{\frac{1}{n}(1 + \omega^0, \dots, 1 + \omega^{n-1})} \text{ ou} \\ x &= \mathcal{F}_n^{-1}(1, 1, \dots, 1) = \frac{1}{n}\mathcal{F}_n(1, \dots, 1) = \boxed{\frac{1}{n}(1, 0, \dots, 0)}. \end{aligned}$$

### Partie III – Algorithme de Cooley-Tukey, transformée de Fourier rapide

1. On suppose  $n = 4$ . On considère  $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^4$  et  $(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathcal{F}_4 u$ . On remarquera que dans cette question, l'hypothèse  $n = 4$  implique que  $\omega = i$ .

(a) On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \overline{u_0} + \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3} \\ v_1 &= \overline{u_0} + i\overline{u_1} - \overline{u_2} - i\overline{u_3} \\ v_2 &= \overline{u_0} - \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3} \\ v_3 &= \overline{u_0} - i\overline{u_1} - \overline{u_2} + i\overline{u_3}. \end{aligned}$$

En posant  $\boxed{a_0 = \overline{u_0} + \overline{u_2}, b_0 = \overline{u_1} + \overline{u_3}, a_1 = \overline{u_0} - \overline{u_2} \text{ et } b_1 = \overline{u_1} - \overline{u_3}}$ , on a bien les relations :

$$\begin{cases} v_0 = a_0 + b_0 \\ v_2 = a_0 - b_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = a_1 + \omega b_1 \\ v_3 = a_1 - \omega b_1 \end{cases}$$

(b) Pour  $n = 2$ ,  $\omega = -1$ . Ainsi,  $\boxed{(a_0, a_1) = \mathcal{F}_2(u_0, u_2)}$ . De même  $(b_0, b_1) = \mathcal{F}_2(u_1, u_3)$ .

2. Notons  $\zeta = \omega^2$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  :

$$v_k = \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_j} \omega^{jk}.$$

Séparons cette somme en deux suivant que les indices sont pairs ou impairs :

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \omega^{2jk} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \omega^{(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \zeta^{jk} + \omega^k \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \zeta^{jk}. \end{aligned}$$

Cela correspond bien à l'égalité attendue :  $\boxed{v_k = a_k + \omega^k b_k}$ .

De même, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} v_{m+k} &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \omega^{2j(m+k)} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \omega^{(2j+1)(m+k)} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j}} \zeta^{jk} - \omega^k \sum_{j=0}^{m-1} \overline{u_{2j+1}} \zeta^{jk}. \end{aligned}$$

puisque  $\omega^{2jm} = \omega^{nj} = 1$  et  $\omega^{(2j+1)m} = \omega^m = -1$ .

On a bien obtenu :  $\boxed{v_{m+k} = a_k - \omega^k b_k}$ .

3. (a) Pour chaque  $v_k$ , il faut sommer  $n$  termes (donc faire  $n - 1$  opérations), chaque terme s'obtenant par une conjugaison, un produit  $jk$  (pour obtenir l'exposant) et un produit de nombres complexes, donc 3 opérations. Ainsi, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul d'un  $v_k$  est  $(n - 1) + 3 \times n = 4n - 1$ . Ainsi,

$$d_n = n(4n - 1) \underset{+\infty}{\sim} 4n^2.$$

- (b) On note  $c'_p = c_n = c_{2^p}$ . On relie  $c'_p$  et  $c'_{p-1}$  : Le calcul de  $\mathcal{F}_{2^p} u$  par la méthode décrite ci-dessus nécessite de calculer  $\mathcal{F}_{2^{p-1}} v$  pour deux suites  $v$ , en appliquant récursivement la méthode décrite, ce qui nécessite  $c'_{p-1}$  opérations pour chaque suite, donc  $2c'_{p-1}$  opérations. Le calcul de chaque  $v_k$  nécessite alors 2 opérations, disons 3 dans la moitié des cas, pour pouvoir passer de  $k$  à  $m + k$ . Ainsi, le calcul total nécessite un nombre d'opérations inférieur à

$$c'_p \leq 2c'_{p-1} + 3 \times 2^{p-1}.$$

On peut résoudre cette récurrence de la même manière que les équations différentielles (en trouvant une solution particulière, et en résolvant l'équation homogène, qui est une équation géométrique). Cela provient de la structure affine de l'ensemble des solutions. Cette technique n'ayant pas encore été bien étudiée, on peut aussi s'en sortir de manière élémentaire ici, en se servant de la forme de la majoration donnée dans l'énoncé. On recherche  $K'$  tel que

$$c'_p \leq K' p 2^p.$$

On fait une analyse synthèse, associée à une récurrence. On suppose que  $K'$  vérifie l'inégalité ci-dessus au rang  $p - 1$ . On a alors :

$$c'_p \leq 2c'_{p-1} + 3 \times 2^{p-1} \leq K'(p-1)2^p + 3 \times 2^{p-1} = K'p2^p + (3 - 2K')2^{p-1}.$$

Ainsi, il suffit de choisir  $K' \geq c'_0 = 1$  (pour avoir l'initialisation) et  $K' \geq \frac{3}{2}$  pour que la récurrence ci-dessus soit valide.

On a donc montré que pour tout  $n = 2^p$ , on a

$$c_n = c'_p \leq \frac{3}{2} p 2^p = \frac{3}{2} n \log_2(n).$$

Cette majoration de la complexité est un cas particulier d'un théorème général permettant d'estimer la complexité d'un algorithme de type diviser pour régner. Vous verrez ce théorème général l'année prochaine si vous faites l'option informatique.

- (c) D'après les croissances comparées,  $c_n = o(d_n)$ . Le gain est en fait énorme pour des grandes valeurs de  $n$ . Une complexité en  $n \ln(n)$  est quasi-linéaire. Par exemple pour  $n = 10000$ , on passe de  $n^2 = 100.000.000$  opérations à à peu près  $n \log_2 n \simeq 130.000$ .

## Correction du problème 2 – Dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor

### Question préliminaire

Soit  $A \subset B$ . Pour commencer,  $A$  et  $B$  admettent une borne inférieure (d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$  s'ils sont minorés, égale à  $-\infty$  sinon). De plus, tout minorant de  $B$  est aussi un minorant de  $A$ . En particulier,  $\inf(B)$  est un minorant de  $A$ . Comme  $\inf(A)$  est le plus grand des minorants de  $A$ , il en découle que  $\inf(B) \leq \inf(A)$ .

### Partie I – Mesure de Hausdorff

1.  $U$  étant bornée, il existe  $M$  tel que pour tout  $x \in U$ ,  $\|x\| \leq M$ . On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout  $x, y \in U$ ,

$$0 \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M.$$

Ainsi,  $\{\|x - y\|, x, y \in U\}$  est un sous-ensemble majoré non vide de  $\mathbb{R}$ , donc admet une borne supérieure  $|U|$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. La suite  $(\sum_{k=0}^n |U_k|^s)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et positive, donc elle converge dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Ainsi  $\ell_s(U)$  est bien définie, et  $\ell_s(U) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ .

3. Soit  $0 \leq \delta \leq \delta'$ . Alors tout  $U_i$  d'un  $\delta$ -recouvrement vérifie  $|U_i| \leq \delta \leq \delta'$ . Donc un  $\delta$ -recouvrement est aussi un  $\delta'$ -recouvrement. On en déduit que  $\boxed{R_\delta(E) \subset R_{\delta'}(E)}$ .

D'après la question préliminaire,  $\mathcal{H}_\delta^s \geq \mathcal{H}_{\delta'}^s$ . Donc  $\boxed{\mathcal{H}_\delta^s \text{ est décroissante}}$ .

4. On peut prendre pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \emptyset$ . Alors pour tout  $\delta \geq 0$ ,  $(U_n)$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $\emptyset$ , donc

$$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \leq \ell_s((U_i)) = 0.$$

Comme par ailleurs, pour tout recouvrement, on a  $\ell_s((U_i)) \geq 0$ , il en résulte que  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \geq 0$ . Ainsi  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ . En passant à la limite lorsque  $\delta$  tend vers 0,  $\boxed{\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0}$ .

5. Soit  $(U_n)$  un  $\delta$ -recouvrement de  $F$ . C'est alors aussi un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ . On en déduit que  $R_\delta(F) \subset R_\delta(E)$ , d'où, d'après la question préliminaire :  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . En passant à la limite, il vient  $\boxed{\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)}$ . Cette inégalité est valide dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

6. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ .

- S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{H}^s(E_{n_0}) = +\infty$ , alors, puisque  $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , la question précédente amène

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = +\infty = \mathcal{H}^s(E_{n_0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}^s(E_n).$$

Ainsi l'inégalité est satisfaite.

- Sinon, soit  $\delta \geq 0$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $(U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E_n$  tel que :

$$\ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

En sommant,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

Par ailleurs, la fusion  $(U_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  de tous les recouvrements est un  $\delta$ -recouvrement de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , encore dénombrable, et

$$\ell_s((U_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_s((U_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}).$$

Par définition de  $\mathcal{H}_\delta^s$ , il vient donc :

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , il vient

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n).$$

On fait ensuite tendre  $\delta$  vers 0 :

$$\boxed{\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n)}.$$

7. Pour  $\lambda > 0$ , on note  $\lambda E = \{\lambda x, x \in E\}$ .

- (a) Soit  $\delta \geq 0$ , et  $(U_i)$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ . Soit  $x \in \lambda E$ . Alors il existe  $y \in E$  tel que  $x = \lambda y$ . Comme  $(U_i)$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ , il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $y \in U_i$ . Ainsi,  $x = \lambda y \in \lambda U_i$ . On en déduit que  $(\lambda U_i)$  est un recouvrement de  $\lambda E$ .

De plus, pour tout  $x, y$  dans  $\lambda U_i$ , il existe  $x', y'$  dans  $U_i$  tels que  $x = \lambda x'$  et  $y = \lambda y'$ . Ainsi (puisque  $\lambda > 0$ ),

$$\|x - y\| = \|\lambda x' - \lambda y'\| = \lambda \|x' - y'\| \leq \lambda \delta.$$

Ainsi,  $(\lambda U_i)$  est un  $\lambda\delta$ -recouvrement de  $\lambda U_i$ . Ainsi

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda U_n|^s = \lambda^s \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s.$$

Ainsi, par définition de  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ , cette inégalité étant vraie pour tout  $\delta$ -recouvrement de  $E$ ,

$$\boxed{\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(E)}.$$

(b) En faisant tendre  $\delta$  vers 0, il vient

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$$

En remarquant que  $E = \frac{1}{\lambda}(\lambda E)$ , on peut intervertir les rôles de  $E$  et  $\lambda E$ , pour obtenir l'inégalité opposée. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)}.$$

## Partie II – Mesure de Hausdorff de $\mathbb{R}^n$

1. Soit  $s > m$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on peut recouvrir  $E$  par  $k^m$  cubes de côté  $\frac{1}{k}$ , en subdivisant chaque côté en  $k$  parts égales. Soit  $d$  le diamètre de  $C_1$  (égal à la longueur de sa diagonale; on peut montrer que  $d = \sqrt{m}$ , mais nous n'en avons pas besoin). Alors le diamètre des petits cubes est  $\frac{d}{k}$ . Soit maintenant  $\delta > 0$ . En prenant  $k \geq \frac{d}{\delta}$ , les petits cubes ont un diamètre inférieur à  $\delta$ . Ainsi, ils forment un  $\delta$ -recouvrement (en complétant la famille par des ensembles vides pour obtenir une famille dénombrable). Notant  $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ce recouvrement, on a alors :

$$\ell_s(U) = k^m \left( \frac{d}{k} \right)^s = \frac{d^s}{k^{s-m}} \leq d^s \left( \frac{\delta}{d} \right)^{s-m},$$

puisque  $s - m > 0$ . On en déduit que

$$\ell_s(U) \leq d^m \delta^{s-m}.$$

On en déduit que  $\mathcal{H}_\delta^s(C_1) \leq d^m \delta^{s-m}$ . Puisque  $s - m > 0$ , on obtient, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\boxed{\mathcal{H}^s(C_1) = 0}$ .

2. On peut écrire  $\mathbb{R}^m$  comme une union dénombrable de cubes de côté 1, en considérant le réseau des points à coordonnées entières. La dénombrabilité provient du fait qu'un cube de ce recouvrement est entièrement déterminé par son sommet de coordonnées minimales, donc par un élément de  $\mathbb{Z}^m$ , qui est dénombrable.

Chaque cube  $U_i$  de ce recouvrement vérifie  $\mathcal{H}^s(U_i) = 0$  d'après la question précédente. En effet il s'agit d'un translaté de  $C_1$ . Ses recouvrements se déduisent de ceux de  $C_1$  par la même translation, qui préserve les diamètres (ce qui assure que la mesure de Hausdorff est invariante par translation). Ainsi,  $\mathcal{H}^s(U_i) = \mathcal{H}^s(C) = 0$ .

Par la question I-6 et la positivité de  $\mathcal{H}^s$ , il vient alors  $\boxed{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0 \text{ (pour } s > m\text{)}}.$

Si  $E \subset \mathbb{R}^m$ , la question I-5 et la positivité de  $\mathcal{H}^s$  amènent  $\boxed{\mathcal{H}^s(E) = 0}$ .

*On pourrait montrer que  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ , mais nous n'en aurons pas besoin ici. Voir les questions subsidiaires !*

## Partie III – Dimension de Hausdorff

1. Soit  $\delta < 1$  et  $0 \leq s < s'$ . Soit  $(U_n)$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|U_n| \leq \delta < 1$ . Par conséquent,

$$|U_n|^s \geq |U_n|^{s'}.$$

En sommant, on obtient

$$\ell_s(U) \geq \ell_{s'}(U).$$

En passant à la borne inférieure sur tous les  $\delta$ -recouvrements,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \mathcal{H}_\delta^{s'}(U).$$

Rappelons que ce passage à la borne inférieure se fait en deux temps. Tout d'abord sur le terme de droite (la borne inférieure en étant un minorant), ce qui amène  $\ell_s(U) \geq \mathcal{H}_\delta^{s'}(U)$ , puis sur le terme de gauche, en disant que

sa borne inférieure  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  étant le plus grand des minorants, elle est plus grande en particulier que le minorant  $\mathcal{H}_\delta^{s'}(U)$ .

On peut maintenant faire tendre  $\delta$  vers 0, ce qui est valide, puisque notre inégalité a été obtenue pour tout  $\delta$  assez petit (inférieur à 1). On a donc  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^{s'}(E)$ , d'où la  $\text{décroissance de } s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ .

2. Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ . Supposons que  $\mathcal{H}_s(E) \neq +\infty$ . Soit  $\delta > 0$ ,  $t > s$ , et  $(U_n)$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ . On a alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^t = \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s |U_n|^{t-s} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s \delta^{t-s}.$$

En passant à la borne inférieure sur les  $\delta$ -recouvrements de  $E$  (comme dans la question précédente), on obtient

$$0 \leq \mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Puisque  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  est fini et  $t - s > 0$ , on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E) = 0 \quad \text{soit:} \quad \boxed{\mathcal{H}^t(E) = 0}.$$

3. • L'ensemble  $S = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$  est non vide, car pour tout  $s > m$ ,  $s \in S$  d'après II-2. Il est minoré par 0 par définition. Ainsi, d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $S$  admet une borne inférieure  $s_0$ .  
 • Soit  $t > s_0$ . Alors par caractérisation de la borne supérieure, il existe  $s \in ]s_0, t[$  tel que  $s \in S$ , donc  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ . D'après la décroissance de  $\mathcal{H}^s(E)$ , il vient  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  (pour  $t \geq s_0$ ).  
 • Soit  $t < s_0$ . Si  $\mathcal{H}^t(E) \neq +\infty$ , d'après la question précédente, pour tout  $s > t$ ,  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ , donc  $]t, +\infty[ \subset S$ , puis  $\inf(S) \leq t$ , ce qui contredit  $t < s_0$ . Ainsi  $\mathcal{H}^t(E) \neq +\infty$  (pour  $t < s_0$ ).

Ce réel  $s_0$  est noté  $\dim_H(E)$  et est appelé dimension de Hausdorff de  $E$ .

4. Soit  $E \subset F$ . Alors, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$  d'après I-5. Par conséquent, pour tout  $t > \dim_H(\mathcal{H}^s(F))$ , d'après la question précédente et la définition de la dimension de Hausdorff,  $\mathcal{H}^t(E) \leq 0$ , d'où, par positivité,  $\mathcal{H}^t(E) = 0$ . On déduit alors de la description de la question précédente que  $t$  n'est pas strictement inférieur à  $\dim_H(E)$ , donc  $t \geq \dim_H(E)$ . Ceci étant vrai pour tout  $t > \dim_H(F)$ , en faisant tendre  $t$  vers  $\dim_H(F)$  par au-dessus, il vient :

$$\boxed{\dim_H(E) \leq \dim_H(F)}.$$

5. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , et  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n \subset E$ , donc  $\dim_H(E_n) \leq \dim_H(E)$ . Ainsi  $\dim_H(E)$  est un majorant des  $\dim_H(E_n)$ , donc, par définition de la borne supérieure,

$$\dim_H(E) \geq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Par ailleurs, d'après la question I-6, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n).$$

Ainsi, si  $s > \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}^s(E_n) = 0$ , donc  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ . On déduit de la définition de la dimension que  $\dim_H(E) \leq s$ . Ceci étant vrai pour tout  $s > \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}$ , il vient

$$\dim_H(E) \leq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Le deux inégalités amènent bien l'égalité :

$$\boxed{\dim_H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sup\{\dim_H(E_n), n \in \mathbb{N}\}}$$

## Partie IV – Ensemble triadique de Cantor

1. On obtient la description suivante de  $E_3$  en enlevant le tiers médian des intervalles décrivant  $E_2$  :

$$E_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

2. On montre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $x \in E_n$  si et seulement si  $x$  admet un développement en base 3 dont les  $n$  premiers chiffres après la virgule sont tous différents de 1 (propriété  $\mathcal{P}(n)$ )

La propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, car non contraignante ! Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Soit  $x \in E_{n+1}$ . Comme  $E_{n+1} \subset E_n$ ,  $E_n$  admet un développement en base 3 dont les  $n$  premiers chiffres de  $x$  (après la virgule) sont différents de 1. Soit  $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$  l'intervalle de  $E_n$  dans lequel se trouve  $x$ .

- On suppose dans un premier temps que  $x \neq \frac{k+1}{3^n}$ . Alors  $k = \lfloor 3^k x \rfloor$ , donc  $k$  est l'entier dont les chiffres sont les  $n$  premiers chiffres de  $x$  après la virgule. Le  $n+1$ -ième chiffre après la virgule dans le développement propre est alors

$$a_{n+1} = \lfloor 3^{k+1} x \rfloor - 3k.$$

Or,  $x \in [\frac{k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^{n+1}}] \cup [\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}]$ , donc

$$3^{k+1} x - 3k \in [0, 1] \cup [2, 3[.$$

Ainsi, sauf lorsque  $x = \frac{3k+1}{3^{n+1}}$ ,  $a_{n+1} = 0$  ou  $a_{n+1} = 2$ . Dans le cas  $x = \frac{3k+1}{3^{n+1}}$ , on obtient  $a_{n+1} = 1$ , et pour tout  $i > n+1$ ,  $a_i = 0$ . Mais on peut remplacer ce développement propre par un développement impropre en remplaçant la séquence 1000000... par 0222222..., qui vérifie bien la condition requise.

- De même, si  $x = \frac{k+1}{3^n}$ ,  $x$  admet deux développements, qui à partir du rang  $n+1$ , ne sont plus constitués que de 0 ou de 2. Donc le  $n+1$ -ième chiffre est nécessairement distinct de 1.

Ainsi, les  $n+1$  premiers chiffres de  $x$  sont distincts de 1.

Réciproquement, si  $x$  admet un développement dont les  $n+1$  premiers chiffres sont distincts de 1, ses  $n$  premiers chiffres sont distincts de 1, donc par hypothèse de récurrence, il existe un intervalle  $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$  de  $E_n$  le contenant. La description précédente des chiffres montre que si le  $n+1$ -ième chiffre est différent de 1,  $x$  n'est pas dans le tiers médian  $[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}]$  (il peut être égal à la borne inférieure de cet intervalle si le développement considéré est impropre). Ainsi,  $x \in E_{n+1}$ .

Par principe de récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On en déduit que  $x \in C$  ssi  $x$  admet un développement triadique sans 1.

3. On a donc une bijection  $C \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , la première application associant à  $x \in C$  la suite de ses chiffres en base 3. Ainsi, le cardinal de  $C$  est égal à celui de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Or  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  peut être mis en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  via les fonctions indicatrices. Donc le cardinal de  $C$  est celui de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Ce cardinal est celui de  $\mathbb{R}$  (montré en DM, en utilisant Cantor-Bernstein), mais on peut se contenter plus élémentairement de dire que d'après le théorème diagonal de Cantor,  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ , donc  $C$  n'est pas dénombrable.

4. Soit  $\varepsilon > 0$ . On remarque que  $E_n$  est constitué de  $2^n$  intervalles de longueur  $\frac{1}{3^n}$ . Ainsi, en définissant pour  $(I_j)_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket}$  la suite de ces intervalles, on obtient

$$C \subset E_n = \bigcup_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket} I_j,$$

avec

$$\sum_{j \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pour  $n$  assez grand  $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ , d'où l'existence d'une famille d'intervalle telle que souhaitée.

Ainsi la mesure de Lebesgue de  $C$  est nulle.

## Partie V – Dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor

1. Soit  $x \in C_g$ . Alors  $x$  admet un développement triadique sans 1, et donc le premier chiffre est 0. Donc  $y = 3x$  (élément de  $[0, 1]$ ) admet aussi un développement triadique sans 1 (obtenu de celui de  $x$  en décalant la virgule). On en déduit que  $y \in C$ , et  $x = \frac{1}{3}y$ , donc  $x \in \frac{1}{3}C$ . Réciproquement, si  $x \in \frac{1}{3}C$ ,  $x \in [0, \frac{1}{3}]$ , et  $3x$  admet un développement triadique sans 1. En décalant la virgule, c'est également le cas de  $x$ , donc  $x \in C \cap [0, \frac{1}{3}]$ .

Ainsi,  $\boxed{C_g = \frac{1}{3}C}$ .

2. De façon immédiate, par construction même,  $C_d$  est translaté de  $C_g$  (de  $\frac{2}{3}$ ), donc possède mêmes mesures de Hausdorff. En utilisant les résultats de la partie 1, on a alors, en notant  $s = \dim_H(C)$  :

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g \cup C_d) \leq \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d).$$

Cette inégalité est même une égalité. En effet, pour tout  $x \in C_g$  et tout  $y \in C_d$ ,  $|y - x| \geq \frac{1}{3}$ . Par ailleurs, pour tout  $\delta$  recouvrement  $U$  de  $C_g$ , si on note  $V$  le recouvrement obtenu en supprimant de  $U$  les parts ne rencontrant pas  $C_g$ , on obtient une famille  $V$  (éventuellement finie, mais ce n'est pas grave car on peut la compléter par des ensembles vides), telle que  $V$  soit toujours un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ , et vérifie  $\ell_s(V) \leq \ell_s(E)$ . Ainsi, pour le calcul de la borne inférieure  $\mathcal{H}_\delta^s$ , on peut se limiter au cas des recouvrements dont toutes les parts non vides rencontrent  $C_g$ . De même pour  $C_d$  et pour  $C_g \cup C_d$ . Or, si  $\delta < \frac{1}{6}$ , un ensemble  $U_i$  rencontrant  $C_g \cup C_d$  rencontre un et un seul des deux ensembles  $C_g$  et  $C_d$ . Ainsi les  $\delta$ -recouvrements  $U$  de  $C_g \cup C_d$  dont toutes les parts non vides rencontrent  $C_g \cup C_d$  sont exactement les recouvrements obtenus en fusionnant deux recouvrements  $V$  et  $W$ , l'un de  $C_g$ , dont les parts non vides rencontrent  $C_g$ , l'autre de  $C_d$ , dont toutes les parts non vides rencontrent  $C_d$ . On a alors

$$\ell_s(U) = \ell_s(V) + \ell_s(W).$$

et passer à la borne inférieure sur  $U$  revient à passer à la borne inférieure indépendamment sur  $V$  et  $W$ , d'où

$$\mathcal{H}_\delta^s(C) = \mathcal{H}_\delta^s(C_g) + \mathcal{H}_\delta^s(C_d).$$

En passant à la limite lorsque  $\delta$  tend vers 0,

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d).$$

On utilise maintenant la question I-7 combinée à V-1 :

$$\mathcal{H}^s(C) = \frac{2}{3^s} \mathcal{H}^s(C).$$

Comme  $\mathcal{H}^s(C)$  est supposé distinct de 0 et  $+\infty$ , on peut simplifier, et on obtient  $3^s = 2$ , soit  $s \ln(3) = \ln(2)$ , donc

$$\boxed{\dim_H(C) = s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}}.$$

3. Les intervalles constituant  $E_k$  forment un  $3^{-k}$ -recouvrement  $U$  de  $C$  constitué de  $2^k$  intervalles de diamètre  $\frac{1}{3^k}$ . Ainsi

$$\ell^s(U) = 2^k \frac{2^k}{3^{ks}}.$$

Par conséquent, la borne inférieure sur les  $\delta$ -recouvrements est inférieure à cette valeur, donc :

$$\boxed{\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq \left(\frac{2}{3^s}\right)^k}.$$

4. Or, par définition de  $s$ ,  $3^s = 2$ , donc

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 1.$$

En passant à la limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ ,  $\boxed{\mathcal{H}^s(C) \leq 1}$

5. On peut dans un premier temps remplacer chaque  $U_n$  par un intervalle fermé  $U'_n$  de même diamètre que  $U_n$  (en prenant  $U'_n = [\inf(U_n), \sup(U_n)]$ ). Comme  $(U_n)$  n'est pas entièrement constitué de singletons (car  $C$  n'est pas

dénombrable),  $\ell^s(U) > 0$ . Soit  $\varepsilon = \ell^s(U)$ . On peut alors inclure chaque intervalle  $U'_n$  dans un intervalle ouvert un peu plus grand  $U''_n$  tel que  $|U''_n|^s \leq |U'_n|^s + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ . Alors

$$\ell^s(U'') \leq \ell^s(U') + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \ell^s(U) + \varepsilon = 2\ell^s(U).$$

Les  $U''_n$  forment un recouvrement de  $C$  par des ouverts. Comme  $C$  est fermé (comme intersection des  $E_n$  qui sont chacun fermés en tant qu'union finie d'intervalles fermés) et borné,  $C$  est compact. Donc d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire de  $U''$  un recouvrement fini. Il existe donc  $I \subset \mathbb{N}$  fini tel que  $(U''_i)_{i \in I}$  recouvre  $C$ . Notons  $\tilde{U}''$  ce recouvrement. On a alors

$$\ell^s(\tilde{U}'') \leq \ell^s(U'') \leq 2\ell^s(U).$$

Enfin, on peut remplacer chaque intervalle ouvert  $U''_i$  de ce recouvrement par l'intervalle fermé  $V_i$  de mêmes bornes. Comme cela ne change pas le diamètre des intervalles, on obtient un recouvrement  $\boxed{\text{fini}} (V_i)_{i \in I}$  constitué d' $\boxed{\text{intervalles fermés}}$ , et vérifiant

$$\boxed{\ell^s(V) \leq 2\ell^s(U)}.$$

6. Soit  $i \in I$ . Il existe  $k_i \in \mathbb{N}$  tel que  $3^{-(k_i+1)} \leq |V_i| < 3^{-k_i}$ . Alors, les écarts entre les intervalles définissant  $E_{k_i}$  étant au moins de  $3^{-k_i}$ ,  $V_i$  rencontre au plus un des intervalles de  $E_{k_i}$ . Cet intervalle contenant 2 des intervalles de  $E_{k_i+1}$ ,  $V_i$  rencontre au plus 2 intervalles de  $E_{k_i+1}$ , puis de même au plus 4 intervalles de  $E_{k_i+2}$ , et plus généralement, au plus  $2^h$  intervalles de  $E_{k_i+h}$ . Ainsi, pour  $j \geq k_i$ ,  $V_i$  rencontre au plus  $2^{j-k_i}$  intervalles de  $E_j$ . Comme  $3^s = 2$  et comme  $|V_i| \geq 3^{-(k_i+1)}$ , on a  $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i|^s$ . Ainsi, le nombre d'intervalles de  $E_j$  rencontrés par  $V_i$  est au plus égal à  $2^{j+1}|V_i|^s$ .

Comme les  $V_i$  sont en nombre fini, on peut considérer  $j \geq \max(k_i)$ . Alors la minoration obtenue est valable pour tout  $i \in I$ . Le nombre total d'intervalles de  $E_j$  rencontrés par l'un des  $V_i$  est alors au plus égal à

$$\sum_{i \in I} 2^{j+1}|V_i|^s = 2^{j+1}\ell^s(V).$$

Soit alors  $I$  un des intervalles de  $E_j$ . On remarque que les bornes de  $I$  sont dans  $C$ . Comme  $V$  est un recouvrement de  $C$ , ces bornes sont dans l'un des  $V_i$ . Ainsi, tout intervalle de  $E_j$  rencontre l'un des  $V_i$ , et ils sont au nombre de  $2^j$ . On en déduit que

$$2^{j+1}\ell^s(V) \geq 2^j, \quad \text{donc:} \quad \boxed{\ell^s(V) \geq \frac{1}{2}}.$$

7. On en déduit que pour tout  $\delta$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(C) \geq \frac{1}{4}$  (un facteur  $\frac{1}{2}$  étant nécessaire pour le passage de  $U$  à  $V$ ), donc, par passage à la limite, et d'après la question 4,  $\mathcal{H}^s(C) \notin \{0, +\infty\}$ . D'après la question III-3, on a alors nécessairement  $s = \dim_H(C)$ , d'où

$$\boxed{\dim_H(C) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}}.$$

### Questions subsidiaires :

1. On procède comme dans la question V-6, en posant  $s = m$ , pour montrer que  $\mathcal{H}^s(C_1) \neq \emptyset$ . Comme  $C_1$  (le cube) est fermé et borné, il est compact. Le même type de réduction qu'en V-6 montre qu'on peut se limiter à un recouvrement fini. En effet, on peut remplacer chaque  $U_n$  par un  $V_n$  contenant  $U_n$  ouvert de diamètre égal à  $|U_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ ,  $\varepsilon$  étant choisi arbitrairement. Il suffit par exemple de considérer

$$V_n = \bigcup_{x \in U_n} B(x, \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}),$$

ouvert comme union d'ouverts, et de diamètre majoré par  $|U_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$  par inégalité triangulaire.

On dispose donc d'un recouvrement  $(V_n)_{n \in I}$  fini de  $C_1$ . Soit  $i \in I$  et soit  $k_i$  tel que  $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i| < 2^{-k_i}$ . Une majoration grossière indique que  $V_i$  ne peut pas rencontrer plus de  $3^m$  cubes de la décomposition de  $C_1$  en  $2^{k_i m}$  cubes de côté  $2^{-k_i}$  (on appellera  $k_i$ -décomposition de  $C_1$  cette décomposition en cubes). En effet, étant

donné un point de  $U_i$  appartenant à l'un des cubes, les autres points de  $V_i$  étant à distance plus petite que  $2^{-k_i}$ , ils restent dans le même cube, ou les cubes qui rencontrent ce cube par au moins un sommet. Chacun de ces cubes se subdivisant en  $2^m$  cubes dans la  $k_i + 1$ -décomposition de  $C_1$ , puis en  $2^{2m}$  cubes dans la  $k_i + 2$ -décomposition etc, on en déduit que  $U_i$  rencontre au plus  $2^{hm}3^m$  cubes de la  $k_i + m$  décomposition de  $C_1$ . Ainsi, pour tout  $j \geq k_i$ ,  $V_i$  rencontre au plus  $2^{m(j-k_i)}3^m$  cubes de la  $j$ -décomposition. Or,  $2^{-(k_i+1)} \leq |V_i|$ ,  $2^{m(j-k_i)}3^m \leq 2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m$ .

En prenant  $k$  plus grand que chaque  $k_i$ , chaque  $U_i$  rencontre au plus  $2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m$  cubes de la  $j$ -décomposition. Cette décomposition admettant  $2^{mj}$  cubes, puisque tout cube est rencontré par au moins un  $V_i$ , on obtient

$$\sum_{i \in I} 2^{m(j+1)}3^m|V_i|^m \geq 2^{mj},$$

donc

$$\ell_m(V) \geq \frac{1}{6^m}.$$

Ainsi,  $\ell_m(V)$  est minoré par une constante strictement positive, et donc  $\ell_m(U)$  également, d'après la réduction initiale. On en déduit après passage à l'infimum et passage à la limite que  $\mathcal{H}^m(C_1) > 0$ .

Puisque  $C_1 \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{H}^m(RR^m) > 0$ . Ainsi, par définition  $\dim_H(\mathbb{R}^m) \geq m$ . On avait prouvé dans la partie II que  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0$  lorsque  $s > m$ , ce qui entraîne  $\dim_H(\mathbb{R}^m) \leq m$ . On en déduit donc que  $\dim_H(\mathbb{R}^m) = m$ .

On pourrait montrer que  $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^m) = +\infty$ , en remarquant que  $\mathbb{R}^m$  est union d'une infinité de cubes. En espaçant ces cubes (ne prendre que des cubes dont le coin de coordonnées minimales est à coordonnées paires), le même argument qu'en V-2 montre que  $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^m)$  est la somme des  $\mathcal{H}^m$  de ces cubes, donc  $+\infty$ .

2. Vous pouvez trouver cette preuve dans tout livre de topologie.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass pour  $n = 1$  : par hypothèse, tous les éléments de la suite  $(u_n)$  sont dans un intervalle  $[a, b]$ . On réalise une dichotomie en partageant l'intervalle en 2 et en conservant à chaque étape une moitié contenant une infinité de termes. Cela donne une suite  $([a_n, b_n])$  d'intervalles, décroissante pour l'inclusion, de longueur tendant vers 0 (elle est divisée par 2 à chaque étape), telle que chacun de ces intervalles contient une infinité de termes de la suite  $u_n$ . Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont alors adjacentes, et convergent donc vers une limite commune  $\ell$ .

On construit alors l'extraction en considérant  $\varphi(0)$  quelconque (par exemple 0), puis  $\varphi(1) > \varphi(0)$  tel que  $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$  (possible car  $[a_1, b_1]$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ ), etc. (construction par récurrence, en s'arrangeant pour que  $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ , et  $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ ).

La suite  $(u_{\varphi(n)})$  est encadrée entre  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , donc converge vers  $\ell$  par théorème d'encadrement.

- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans  $\mathbb{R}^m$  : On fait des extractions successives sur chaque coordonnée : soit  $(X_n) = ((x_{n,1}, \dots, x_{n,m}))_{n \in \mathbb{N}}$  bornée. Alors  $(x_{n,1})$  est bornée. On en extrait  $(x_{\varphi(n),1})$  convergeant vers  $\ell$ . La suite  $(x_{\varphi(n),2})$  est bornée, on en extrait une suite  $(x_{\varphi \circ \psi(n),2})$  (est-ce vraiment le bon sens pour la composée des extractrices ? essayez de bien comprendre ce point !). La suite  $(x_{\varphi \circ \psi(n),1})$  est alors extraite de la suite convergeante  $(x_{\varphi(n),1})$ , donc converge encore. On continue de la sorte avec les coordonnées suivantes, ce qui permet de conclure.
- Existence d'un rayon de sécurité : soit  $(U_i)$  un recouvrement de  $E$  fermé borné. Supposons qu'il n'existe pas  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $B(x, r)$  soit inclus dans l'un des  $U_i$ . On peut alors construire  $(x_n)$  telle que  $B(x_n, \frac{1}{2^n})$  ne soit entièrement inclus dans aucun  $U_i$ . La suite  $(x_n)$  étant bornée (car  $E$  est bornée), on peut en extraire  $x_{\varphi(n)}$  convergeant vers  $x$ . Puisque  $E$  est fermé, il n'est pas dur (par l'absurde) de montrer que  $x \in E$ . Puisque  $(U_i)$  recouvre  $E$ , il existe  $i$  tel que  $x \in U_i$ , et  $U_i$  étant ouvert, il existe  $\varepsilon$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset U_i$ . Par convergence, il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Il existe  $N'$  tel que pour tout  $n \geq N'$ ,  $\frac{1}{2^{\varphi(n)}} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors pour tout  $n \geq \max(N, N')$ ,

$$B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i,$$

ce qui contredit la définition des  $x_i$ .

- Théorème de Borel-Lebesgue : On peut donc trouver  $r$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $U_i$  tel que  $B(x, r) \subset U_i$ . On construit  $(u_n)$  de la façon suivante :  $u_0$  est quelconque dans  $E$ ,  $u_1$  est dans  $E \setminus B(u_0, \varepsilon)$  si cet ensemble est non vide, et plus généralement, si  $E \setminus \bigcup_{i=0}^n B(u_i, \varepsilon) \neq \emptyset$ ,  $u_{n+1}$  est choisi dans cet ensemble.

Si cette construction ne s'arrête pas, cela définit une suite  $(u_n)$  de  $E$ , donc bornée. On peut en extraire une suite convergente  $(u_{\varphi(n)})$  (de limite  $\ell$ ). En particulier, il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{r}{2}$ . En particulier,  $d(u_{\varphi(N)}, u_{\varphi(N+1)}) < r$ , ce qui contredit la construction de  $u_{\varphi(N+1)}$ . Ainsi, la construction s'arrête, c'est à dire qu'on dispose de  $u_0, \dots, u_N$  tels que

$$E \subset \bigcup_{i=0}^N B(u_i, r).$$

Par chaque  $u_i$ , on dispose d'un  $U_{f(i)}$  tel que  $B(u_i, r) \subset U_{f(i)}$ . On a alors

$$E \subset \bigcup_{i=0}^N U_{f(i)}.$$

On a bien extrait un recouvrement fini de  $(U_i)$ .