DIMENSION FINIE

Exercice 1. [∘]

Étudier, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, la liberté de la famille de vecteurs

$$u = (4-\lambda, 4, 4), \qquad v = (3, 3-\lambda, 6), \qquad w = (3, 6, 3-\lambda).$$

Exercice 2. [∘]

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces F et G définis par

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a, a+b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Déterminer une base de F, une base de G et une base de $F \cap G$.
2. Quelle est la dimension de $F + G$? Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. [∘]

Dans $\mathbb{C}^4$, on considère les sous-espaces F et G définis par

$$F : \begin{cases} x + iy - z - it = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a, a+b, a+b, b) : a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Démontrer que F et G sont en somme directe et déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F ainsi qu'une base $\mathscr{B}_G$ de G. Que peut-on en déduire pour F et G et pour $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$?

Exercice 4. [⋆]

Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère le sous-espace

$$F = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. L'espace F est-il de dimension finie ?
2. Déterminer un supplémentaire A de F dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Vérifier que ce supplémentaire est de dimension finie et préciser sa dimension. *Remarque : C'est la codimension de F dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
3. Soir $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quel est le projeté de u sur A dans la direction de F. Faire un dessin.

Exercice 5. [∘]

Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un K-espace vectoriel E et $r < p$. Démontrer que $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_r) \geqslant r - p + \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

Exercice 6. [∘]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux familles finies de vecteurs de E. Démontrer que

$$\max\{\operatorname{rg}\mathscr{F}_1 \,;\, \operatorname{rg}\mathscr{F}_2\} \leqslant \operatorname{rg}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}_1 + \operatorname{rg}\mathscr{F}_2.$$

Exercice 7. [∘]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels tels que $E \times F$ est de dimension finie. Démontrer que E et F sont de dimension finie.

Exercice 8. [$\circ$]

On considère l'endomorphisme $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$s(x,y,z) = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z\,,\; 2x + y + 2z\,,\; -2x + 2y + z).$$

Démontrer que s est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 9. [$\circ$]

Démontrer que l'application $P \longmapsto \big(P(0), P'\big)$ est un isomorphisme entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}[X]$. Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{C}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 10. [$\circ$]

Démontrer que l'application $P \longmapsto \big(P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)\big)$ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 11. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u, v deux endomorphismes de E. On suppose que $uv = \widetilde{0}$. Justifier que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$.

Exercice 12. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E. Démontrer que

$$(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(u^2 = \widetilde{0} \text{ et } \exists v \in \mathscr{L}(E),\ uv + vu = \mathrm{Id}_E\,\big).$$

Indication : Pour l'implication $\Rightarrow$, on pourra considérer une projection p sur $\operatorname{Ker} f$ *sur un supplémentaire S de* $\operatorname{Ker} f$ *dans E et s'intéresser à* $v = \big(f\big|_S^{\operatorname{Im} f}\big)^{-1} \circ p$.

Exercice 13. [$\circ$]

Soient f et g deux formes linéaires non nulles d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x)g(x) \neq 0$.

Exercice 14. [$\star$]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathscr{K}$ l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $F \subset \operatorname{Ker} f$. Démontrer que $\mathscr{K}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 15. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On considère les applications

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & fu \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & uf \end{array} \right.$$

Vérifier que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$ et déterminer leur rang en fonction de celui de f.

Exercice 16. [$\bigstar$]

Quel est le rang de la matrice $A = \big(\sin(i+j)\big)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17. [$\circ$]

Considérons l'application $\varphi : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(A) = {}^tA$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $E_{i,j} = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$.
3. Déterminer le rang de cette matrice et, si possible, son inverse.

Exercice 18. [$\circ$]

Déterminer le rang, l'image et le noyau des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. [$\bigstar$]

Démontrer que le rang est invariant pas extension de corps.

Exercice 20. [$\circ$]

Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui sont équivalentes à une matrice nilpotente ?

Exercice 21.

On souhaite déterminer les racines carrées matricielles de la matrice d'Attila d'ordre 2 (la matrice 2×2 envahie par les 1) donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit on veut résoudre l'équation

$$M^2 = A,$$

d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que A est semblable à la matrice $D = \mathrm{Diag}(2; 0)$. On donnera la matrice de passage P et l'on précisera la relation liant A, D, P et P^{-1}. On ne demande pas P^{-1}.
2. Calculer A^2 et en déduire deux solutions de notre problème.
3. Dans cette question, on considère une solution M de notre problème.
   a) Démontrer que M ne peut être que de rang 1.
   b) Quelle inclusion existe-t-il entre $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}\, M$? En déduire que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, M$.
   Démontrer de même que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, M$.
   c) Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda; 0)$ et P est la matrice de passage de la question 1.
   Quelle relation lie alors λ, M et A ?
   d) Déterminer λ et en déduire que les deux solutions de notre problème déterminée à la question 2 sont en fait les seules solutions de ce problème.

Exercice 22. [$\star$]

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Démontrer que $I_n + M$ est inversible. *Indication : On considèrera $X \in \mathrm{Ker}(I_n + M)$ et on calculera ${}^t(MX)(MX)$ de deux manières.*
2. En déduire que $I_n - M$ est inversible.
3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Démontrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 23.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble F défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + y + z = 0 \text{ et } 4x - 2y + t = 0\}$$

et le sous-espace G défini par

$$G = \text{Vect}\big((1, 3, 0, 2), (2, 7, -3, 6), (1, 1, 6, -2)\big).$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base $\mathscr{F}$ de F.
2. Déterminer une base $\mathscr{G}$ de G. Écrire une représentation paramétrique de G utilisant un minimum de paramètres.
3. Déterminer une base de $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils en somme directe ?
4. a) La famille de vecteurs $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ est-elle génératrice de $F + G$?

   b) Calculer la dimension de $F + G$. La famille $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ est-elle libre ou liée ?

   c) Déterminer une base de $F + G$.

   d) Justifier l'existence de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $ax + by + cz + dt = 0$ soit une équation cartésienne de $F + G$. Déterminer a, b, c, d (on demande une solution).

Exercice 24.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (-8x + 7y + 3z\,,\ -13x + 11y + 4z\,,\ 4x - 3y).$$

1. a) Déterminer la matrice A de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. *On expliquera avec efficacité et sobriété.*

   b) Démontrer que A est inversible et préciser son inverse. En déduire que f est un automorphisme et préciser $f^{-1}(x, y, z)$.
2. a) Déterminer l'image de l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et démontrer que son noyau est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (2, 3, -1)$.

   b) Déterminer une base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de $\text{Ker}\big((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$. On pose $\overrightarrow{e_2} = (9, 13, -4)$. Démontrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_2})$ est liée et donner une relation de dépendance linéaire entre $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

   c) On pose $\overrightarrow{e_3} = (1, 0, 0)$. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}$. Quelle propriété (simple) possède cette matrice ?
3. a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. On écrira ce développement limité sous la forme $\sqrt{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o_{x \to 1}\big((x - 1)^2\big)$.

   b) Déterminer la matrice $R = a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2$. Calculer R^2 et comparer à A. Quelle relation sur f a-t-on ainsi démontrée ?

Exercice 25. [○] (Centrale-Supélec 2003 option TSI, extrait)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale. On souhaite résoudre l'équation $(\mathscr{E})$: ${}^tAP = PA$ où l'inconnue P est une matrice appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer des conditions, portant sur x, y, z et t, qui sont nécessaires et suffisantes pour que P vérifie $(\mathscr{E})$. On ramènera ces conditions à deux relations dont l'une est $y = z$ et l'autre ne porte que sur x, y et t.

2. a) En prenant l'un des deux nombres x ou t nul, l'autre étant égal à $d - a$ et, dans chacun des deux cas, en choisissant convenablement y, déterminer deux matrices P_1 et P_2 qui soient solutions de $(\mathscr{E})$.

   b) Démontrer que l'une au moins des deux matrices P_1 ou P_2 est inversible.

3. Démontrer que A et ${}^tA$ sont semblables.