Renseignements généraux

— *Concours* : Écoles Normales Supérieures
— *Matière* : Mathématiques
— *NOM Prénom* : D'ANELLO Yohann

Énonce des exercices

Exercice 1 :

Soit G un groupe fini de cardinal n. On dit que G vérifie $(*)$ si pour tout entier d divisant n, il existe au plus un sous-groupe de G de cardinal d.

1. On suppose G cyclique. Montrer que G vérifie $(*)$.
2. Réciproquement, si G vérifie $(*)$, montrer que G est cyclique.
3. Soit $\mathbb{F}$ un corps fini dont on admet l'existence. On note $\mathbb{F}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}$ et on rappelle que $(\mathbb{F}^*, \times)$ forme un groupe. Montrer que $\mathbb{F}^*$ est cyclique.
4. On suppose que $|\mathbb{F}| = p^2$ où p est un entier premier supérieur ou égal à 3, en admettant que cela est possible. Montrer que $X^4 + 1$ admet une racine dans $\mathbb{F}$.

Exercice 2 :

Soit $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(XYXY) \leq \operatorname{tr}(X^2Y^2)$.

Exercice 3 :

Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$ possède un cycle de taille strictement supérieure à $\frac{n}{2}$.

Remarques sur l'oral

En entrant dans la salle, l'examinateur me rappelle qu'il me laisse réfléchir devant l'exercice pendant 10 minutes seul et me donne la première question. Elle ne m'a personnellement posé aucune difficulté, et je profite du délai pour rédiger correctement la question. Je regrette après coup d'avoir perdu du temps à tout écrire au lieu de profiter de l'aspect oral. L'examinateur était satisfait de mon raisonnement et me donne la question suivante, sur laquelle je galère un peu plus. Je lui donne une idée de mon raisonnement, en voyant qu'il n'y avait pas la place dans G pour avoir des sous-groupes de tout ordre (divisant n) avec des trous, mais ne parvient pas à le formaliser. Je conclus correctement une fois avoir écrit $G = \bigsqcup_{d|n} \{x \in G,\ |<x>| = d\}$ et justifié $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Pour la troisième question, je voulais exploiter le fait que le nombre de racines de $X^n - 1$ est majoré par n et exploiter $(*)$, et mets un certain temps à le mettre correctement au point. Pour la dernière question, j'ai simplement dit (et justifié) qu'il existait un élément d'ordre 8 dans $\mathbb{F}$ (même si je pensais initialement qu'être d'ordre 4 suffisait).

Pour le second exercice, je réfléchis un certain temps avant de voir qu'il suffit d'appliquer Cauchy-Schwarz. Pour le dernier, je n'ai pas le temps de finir d'écrire, mais je soumets avant de partir mon idée à l'examinateur en voulant partitionner selon la taille de l'orbite de taille supérieure à $\frac{n}{2}$, qu'il accepte. Je sors très satisfait, même si je reconnais que j'aurais pu être plus réactif par moments.