# OUTILS D'ANALYSE

## A. Dérivation

### Exercice 1. [$\circ$]

Sans vous soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées des fonctions :

$$f(x) = \ln\sqrt{|\tan x|}, \qquad g(x) = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}, \qquad h(x) = \frac{1}{2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$

### Exercice 2. [$\circ$] (Dérivée logarithmique)

1. Calculer la dérivée de la fonction
$$f(x) = \frac{x^2(\ln x + 1)(x^2+3)(\mathrm{e}^{-x} + 2x)\sqrt{x}\tan x}{(17\,\mathrm{e}^{2x} + 1)(x^6 + 5x^4 + 2x^2 + 203)}.$$
Si vous n'y arrivez pas, commencez par faire la question suivante.
2. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Sur le sous-ensemble de $\mathscr{D}$ où $f$ ne s'annule pas, on définit la dérivée logarithmique $f^*$ de $f$ par la formule $f^* = f'/f$.
Démontrer que $(fg)^* = f^* + g^*$ et $(f/g)^* = f^* - g^*$.
3. Reprendre la question 1.

### Exercice 3. [$\circ$]

Étudier la fonction
$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

### Exercice 4. [$\circ$]

Dans toutes les questions de cet exercice, on pourra utiliser la fonction $f : x \longmapsto (\ln x)/x$.

1. Qui est le plus grand de $\mathrm{e}^\pi$ et $\pi^\mathrm{e}$ ?
2. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$ lorsque $n$ parcourt $\mathbb{N}^*$.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$.
4. Résoudre l'équation $n^m = m^n$ où $m$ et $n$ sont deux entiers naturels non nuls distincts.

### Exercice 5. [$\circ$]

Étudier la fonction
$$f(t) = \cos(t) - \cos^4(t).$$

*Données : Si $\alpha$ désigne l'angle tel que $\cos(\alpha) = \sqrt[3]{2}/2$, alors $\alpha \approx 0,9$ et $f(\alpha) \approx 0,5$*

### Exercice 6. [$\star$]

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leqslant x$ avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big)$.

## B. Primitivation et intégration

### Exercice 7. [○]

1. Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}, \qquad h(x) = \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x},$$

$$i(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln\big(\ln(x)\big)}, \qquad j(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}, \qquad k(x) = \mathrm{th}(x),$$

$$\ell(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad m(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}, \qquad n(x) = \tan^2(x), \qquad p(x) = (1+\tan x)^2.$$

2. Calculer

$$I = \int_0^2 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}, \qquad K = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}, \qquad L = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\,\mathrm{d}x.$$

### Exercice 8. [○]

Calculer, en fonction du nombre réel $a$, l'intégrale suivante :

$$I_a = \int_0^1 |a-t|\,\mathrm{d}t.$$

### Exercice 9. [○]

Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad g(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad h(x) = \big(\ln(x)\big)^2.$$

### Exercice 10. [⋆]

Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = \cos\big(\ln(x)\big), \qquad g(x) = \mathrm{sh}(x)\sin(x)$$

de deux manières : en utilisant des primitivations par parties et en utilisant les complexes.

### Exercice 11. [○]

1. Calculer

$$A = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\sqrt{1+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

2. En utilisant le changement de variable indiqué, calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (u = \pi - t) \qquad J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}} \quad (u = \sqrt{t^2+t+1}-t)$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^{1975}(t)} \quad (u = \pi/2 - t).$$

### Exercice 12. [⋆]

En effectuant séparément deux changements de variables trigonométriques, calculer

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}.$$

## C. Equations différentielles á coefficients constants

**Exercice 13.** [○] (Circuit RL)

Un circuit électrique se compose en série d'une bobine d'inductance $L$ et d'une résistance $R$, alimentées par un générateur de force électromotrice $V$. On note $i(t)$ l'intensité du courant à l'instant $t$. On sait alors que $i$ vérifie l'équation différentielle $Li' + Ri = V$.

Résoudre cette équation sachant que $i(0) = 0$. Représenter le graphe de $i$.

**Exercice 14.** [○] (Datation au carbone 14)

On note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 dans un échantillon de matière organique à l'instant $t$ (évalué en années). La vitesse de désintégration de cet isotope radioactif du carbone étant proportionnelle à la quantité présente dans l'échantillon, on considère que $y$ satisfait l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = -ky$$

où $k$ est la constante de désintégration du carbone 14. On donne $k = 1,238 \times 10^{-4}$ an$^{-1}$.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de $t$, de $k$ et du nombre $N_0$ d'atomes de carbone 14 présents à l'instant $t = 0$.
2. On appelle *demi-vie* d'un élément radioactif le temps $T$ au bout duquel la moitié des atomes de carbones se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À la mort de ceux-ci, l'assimilation de cet élément cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont décourvert des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

**Exercice 15.** [○]

Résoudre les équations suivantes et préciser la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ :

$$y'' + 8y' + 15y = 30, \qquad y'' - 2y' + 5y = 5, \qquad y'' - 2y' + y = 1.$$

**Exercice 16.** [○] (Circuit LC)

Un circuit électrique se compose en série d'un condensateur de capacité $C$ et d'une bobine d'inductance $L$, alimentés par un générateur de force électromotrice $V$. On note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant $t$. On sait alors que $q$ vérifie l'équation différentielle $LCq'' + q = VC$.

Résoudre cette équation sachant que $q(0) = 0$ et $q'(0) = 0$. Représenter le graphe de $q$.

## D. Fonctions de deux variables

**Exercice 17.** [○]

Sans vous soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$f(x, y) = \sin(x/y) \qquad g(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

**Exercice 18.** [○] (Coefficients thermoélastiques d'un gaz)

On considère un gaz parfait, c'est-à-dire un gaz dont l'équation d'état est $PV = nRT$.

On appelle coefficients thermoélastiques les quantités $\alpha$ (coefficient de dilatation isobare), $\beta$ (coefficient de variation de pression isochore) et $\chi$ (coefficient de compressibilité isotherme) définies par

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \qquad \beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \qquad \text{et} \qquad \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

où les indices désignent les variables laissées fixes au cours de la dérivation partielle.

Calculer les coefficients thermoélastiques et démontrer que $P\beta\chi = \alpha$.