Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Samedi 21/11/2020
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Devoir Surveillé n° 3 (4h)

Correction de l'exercice –

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors, en séparant la somme double en la somme sur la diagonale, et la somme sur chacun des triangles stricts, puis en regroupant les termes symétriques en les indices :

$$\begin{aligned}S_n(\theta) &= \alpha_n(\theta)\overline{\alpha_n(\theta)}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k x_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\ell\theta}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k x_\ell \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\ell-k)\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\theta}\right)\\ &= \frac{\rho_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k+1}^{n} x_k x_\ell \cos((\ell-k)\theta).\end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice sur la somme interne, il vient :

$$\begin{aligned}S_n(\theta) &= \frac{\rho_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n-k} x_k x_{k+h}\cos(h\theta)\\ &= \frac{\rho_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{n-1}\left(\cos(h\theta)\sum_{k=1}^{n-h} x_k x_{k+h}\right),\end{aligned}$$

et donc finalement $\boxed{S_n(\theta) = \frac{\rho_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\rho_h\cos(\ell h).}$

2. (a) Soit $m \in [\![1,n]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_n(\theta_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,m\theta_\ell} &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta_\ell}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,m\theta_\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta_\ell}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,m\theta_\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\sum_{\ell=1}^{n}\omega_{k-m}^{\ell},\end{aligned}$$

où pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $\omega_s = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,s\pi}{n}}$ est une racine n-ième de l'unité. Or,

- si k, m sont deux éléments de $[\![1,n]\!]^2$ tels que $k \neq m$, on a $0 < |k-m| < n$, donc $\omega_{k-m} \neq 1$, et par conséquent :
$$\sum_{\ell=1}^{n}\omega_{k-m}^{\ell} = \omega_{k-m}\frac{1-\omega_{k-m}^{n}}{1-\omega_{k-m}} = 0,$$
puisque $\omega_{k-m}^{n} = 1$.
- si $k = m$, on obtient
$$\sum_{\ell=1}^{n}\omega_{k-m}^{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} 1 = n.$$

On en déduit que dans la somme sur k, seul le terme correspondant à l'indice $k = m$ est non nul, d'où :

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_n(\theta_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,m\omega_\ell} = \frac{1}{n}x_m \cdot n = x_m.}$$

(b) On obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} S_n(\theta_\ell) &= \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_n(\theta_\ell)\overline{\alpha_n(\theta_\ell)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\alpha_n(\theta_\ell) x_k \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,k\theta_\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_n(\theta_\ell)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,k\theta_\ell}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2,\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Il vient donc :

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{n} S_n(\theta_\ell) = \rho_0}.$$

(c) Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{h}\Big[\sin(h\theta)\Big]_0^{2\pi} = 0,$$

donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{n}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{n^2\pi}\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\int_0^{2\pi}\cos(h\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\rho_0}{n}.$$

Ainsi, on a bien, d'après la question 1,

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} S_n(\theta_\ell).}$$

3. (a) On pose $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. On a alors pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_h = 1$. On déduit alors de la question 3 que

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos(k\theta) = S_n(\theta) - \frac{1}{n}.$$

Or, puisque par hypothèse $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} \neq 1$,

$$\alpha_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{n}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

d'où

$$S_n(\theta) = |\alpha_n(\theta)|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{n^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos(k\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2}.}$$

(b) On déduit de la question 3 que

$$\begin{aligned}S_n(\theta) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\cos(h\theta_0)\cos(h\theta)\\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\left(\cos\left(h(\theta+\theta_0)\right) + \cos\left(h(\theta-\theta_0)\right)\right)\\ &= \frac{1}{n} + \frac{\sin^2\left(\frac{n(\theta+\theta_0)}{2}\right)}{2n^2\sin^2\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)} - \frac{1}{2n} + \frac{\sin^2\left(\frac{n(\theta-\theta_0)}{2}\right)}{2n^2\sin^2\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)} - \frac{1}{2n},\end{aligned}$$

en vertu de la question précédente, et du fait que d'après les hypothèses faites, $\theta + \theta_0 \in]0, 2\pi[$, et $\theta - \theta_0 \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, et que si $\theta - \theta_0 < 0$, on peut retrouver appliquer la formule de la question précédente avec $\theta_0 - \theta$. Ainsi

$$\boxed{S_n(\theta) = \frac{1}{2n^2}\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{n(\theta+\theta_0)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\frac{n(\theta-\theta_0)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}\right)^2\right)}.$$

Correction du problème – Un théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

Partie I – Développement en fraction continue d'un rationnel

1. (a) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in Z_n, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+, \quad [a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}.$$

- Initialisation. Soit $(a_0) \in Z_0$, On a alors, pour tout $n \in \mathbb{Q}_+$:

$$[a_0](x) = a_0 + x \in \mathbb{Q},$$

en tant que somme de deux rationnels ($a_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. On considère $(a_0, \dots, a_{n+1} \in Z_{n+1}$. Ainsi,

$$[a_0, \dots, a_{n+1}](x) = [a_0, \dots, a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right).$$

Or, $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ et $\dfrac{1}{a_{n+1} + x} \in \mathbb{Q}_*$ (remarquez que l'hypothèse $x \geqslant 0$ et $a_{n+1} \geqslant 1$ nous assure de la bonne définition), donc, par hypothèse de récurrence,

$$[a_0, \dots, a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right) \in \mathbb{Q} \qquad \text{soit:} \qquad [a_0, \dots, a_{n+1}](x) \in \mathbb{Q}.$$

- D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (a_0, \dots, a_n) \in Z_n, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+, \quad \boxed{[a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}_+}.$$

(b) Une fraction continue finie s'écrit sous la forme $[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_n](0)$, avec $(a_0, \dots, a_n) \in Y_n \subset Z_n$ et $0 \in \mathbb{Q}_+$. Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\text{toute fraction continue finie est un rationnel}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$, et p, q, n, (r_k) et (a_k) comme dans l'énoncé.

(a) On montre, par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x = [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)$.
- Lorsque $k = 0$, par définition de r_0 et a_0,

$$p = a_0 q + r_0, \qquad \text{donc:} \qquad x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{r_0}{r_{-1}} = [a_0]\left(\frac{r_0}{r_{-1}}\right).$$

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, et supposons que

$$x = [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right).$$

Alors,

$$r_{k-1} = r_k a_{k+1} + r_{k+1} \qquad \text{donc:} \qquad \frac{r_{k-1}}{r_k} = a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

par conséquent,

$$x = [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{1}{a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k}}\right) = [a_0, \dots, a_{k+1}]\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right),$$

d'après la formule de récurrence définissant les fractions continues.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\boxed{x = [a_0, \dots, a_k]\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)}.$$

(b) En particulier, pour $k = n$, on obtient :

$$x = [a_0, \dots, a_n]\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right) = [a_0, \dots, a_n](0) = [a_0, \dots, a_n].$$

Par ailleurs, comme $p \wedge q = 1$, $r_{n-1} = p \wedge q = 1$. Les restes formant une suite strictement décroissante à partir du rang -1, si $n \geqslant 1$, $r_{n-2} > 1$, et le quotient a_n de r_{n-2} par a_{n-1} vérifie $a_n \geqslant 2$. Ainsi, $[a_1, \dots, a_n] \in Y_n$. C'est aussi vrai si $n = 0$, puisqu'il n'y a pas de condition de minoration à donnner dans ce cas.

Ainsi, x est bien développable en fraction continue finie, et

$$\boxed{x = [a_1, \dots, a_n]}$$

Partie II – Réduction et convergence des fractions continues

1. (a) Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$, on a :

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}.$$

Cela se « voit » sur la forme développée de la fraction continue, mais peut aussi plus rigoureusement se démontrer par récurrence. On montre plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}.$$

- Si $n = 1$, $[a_0, a_1](x) = [a_0]\left(\frac{1}{a_1+x}\right) = a_0 + \frac{1}{a_1+x} = a_0 + \frac{1}{[a_1](x)}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(a_0, \dots a_n)$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}.$$

  Alors en particulier,

$$[a_0, \dots, a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1}+x}\right) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1}+x}\right)},$$

  c'est-à-dire

$$[a_0, \dots, a_{n+1}](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_{n+1}](x)},$$

- Ainsi, le principe de récurrence nous assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}}.$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned}[a_0, \dots, a_n] &= a_0 + \frac{q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)} \\ &= \frac{a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)}.\end{aligned}$$

Or, tout diviseur d commun de $a_0p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)$ et de $p(a_1, \dots, a_n)$ divise aussi $a_0p(a_1, \dots, a_n)$, et donc, par différence, il divise aussi $q(a_1, \dots, a_n)$. Il s'agit donc d'un diviseur commun de $p(a_1, \dots, a_n)$ et de $q(a_1, \dots, a_n)$, qui ne peut être que 1 ou -1.

On en déduit que $\dfrac{a_0p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)}$ est une représentation irréductible de $[a_0, \dots, a_n]$. De plus, on s'assure facilement que $[a_1, \dots, a_n]$ est positif (par récurrence sur n, en utilisant la question 1(a), qui nous ramène à la positivité de $[a_2, \dots, a_n]$ qu'on obtient par hypothèse de récurrence ; on obtient même $[a_1, \dots, a_n] \geqslant a_1$; attention ceci est faux si on commence à a_0). Par conséquent, il s'agit de l'unique représentation irréductible à dénominateur positif. Ainsi :

$$\boxed{p(a_0, \dots a_n) = a_0p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)} \quad \text{et} \quad \boxed{q(a_0, \dots, a_n) = p(a_1, \dots, a_n)}.$$

(c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_{n+1}$,

$$\frac{p(a_0,\dots,a_{n+1})}{q(a_0,\dots,a_{n+1})} - \frac{p(a_0,\dots,a_n)}{q(a_0,\dots,a_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{q(a_0,\dots,a_n)q(a_0,\dots,a_{n+1})}.$$

- Pour $n = 0$, $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$, donc $p(a_0) = a_0$ et $q(a_0) = 1$.
De plus, $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$. Or,

$$a_0 a_1 + 1 \wedge a_1 = 1 \wedge a_1 = a_1,$$

donc $p(a_0, a_1) = 1$ et $q(a_0, a_1) = a_1$. Par conséquent,

$$\frac{p(a_0,a_1)}{q(a_0,a_1)} - \frac{p(a_0)}{q(a_0)} = \frac{1}{a_0} = \frac{(-1)^0}{q(a_0)q(a_0,a_1)}.$$

- Supposons la propriété aquise pour les familles $(b_0, \dots, b_{n+1}) \in Z_{n+1}$, et soit $(a_0, \dots, a_{n+2}) \in Z_{n+2}$. Ainsi, d'après la question 1(b),

$$\begin{aligned}\frac{p(a_0,\dots,a_{n+2})}{q(a_0,\dots,a_{n+2})} - \frac{p(a_0,\dots,a_{n+1})}{q(a_0,\dots,a_{n+1})} &= \frac{a_0 p(a_1,\dots,a_{n+2}) + q(a_1,\dots,a_{n+2})}{p(a_1,\dots,a_{n+2})} - \frac{a_0 p(a_1,\dots,a_{n+1}) + q(a_1,\dots,a_{n+1})}{p(a_1,\dots,a_{n+1})} \\ &= \frac{q(a_1,\dots,a_{n+2})}{p(a_1,\dots,a_{n+2})} - \frac{q(a_1,\dots,a_{n+1})}{p(a_1,\dots,a_{n+1})}\end{aligned}$$

Or, pour tous réels non nuls x et y,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy},$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{p(a_0,\dots,a_{n+2})}{q(a_0,\dots,a_{n+2})} - \frac{p(a_0,\dots,a_{n+1})}{q(a_0,\dots,a_{n+1})} &= -\frac{q(a_1,\dots,a_{n+1})q(a_1,\dots,a_{n+2})}{p(a_1,\dots,a_{n+1})p(a_1,\dots,a_{n+2})}\left(\frac{p(a_1,\dots,a_{n+2})}{q(a_1,\dots,a_{n+2})} - \frac{p(a_1,\dots,a_{n+1})}{q(a_1,\dots,a_{n+1})}\right) \\ &= -\frac{q(a_1,\dots,a_{n+1})q(a_1,\dots,a_{n+2})}{p(a_1,\dots,a_{n+1})p(a_1,\dots,a_{n+2})}\frac{(-1)^{n+1}}{q(a_1,\dots,a_{n+1})q(a_1,\dots,a_{n+2})},\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On termine à l'aide de la relation trouvée en 1(b) :

$$\begin{aligned}\frac{p(a_0,\dots,a_{n+2})}{q(a_0,\dots,a_{n+2})} - \frac{p(a_0,\dots,a_{n+1})}{q(a_0,\dots,a_{n+1})} &= \frac{(-1)^{n+2}}{p(a_1,\dots,a_{n+1})(a_1,\dots,a_{n+2})} \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{q(a_0,\dots,a_{n+1})q(a_0,\dots,a_{n+2})}\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$,

$$\boxed{\frac{p(a_0,\dots,a_{n+1})}{q(a_0,\dots,a_{n+1})} - \frac{p(a_0,\dots,a_n)}{q(a_0,\dots,a_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{q(a_0,\dots,a_n)q(a_0,\dots,a_{n+1})}}.$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_\infty$.

(a) Puisque $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ et $[1, a_1, \dots, a_n]$ diffèrent de l'entier $a_0 - 1$, le dénominateur de leur représentants irréductibles est le même. Donc

$$\boxed{q(a_0,\dots,a_n) = q(1, a_1,\dots,a_n)}.$$

(b) Encore une fois, il s'agit d'une récurrence sur n, pour montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$ vérifiant de plus $a_0 > 0$,

$$p(a_0, a_1, \dots, a_n) < p(a_0, \dots, a_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad q(a_0, \dots, a_n) < q(a_0, \dots, a_{n+1}),$$

(sauf au rang $n = 0$ pour cette dernière inégalité, pouvant alors être large).

- Pour $n = 0$, on obtient :

$$p(a_0) = a_0 < a_0 a_1 + 1 = p(a_0, a_1)$$

(car $a_1 \geqslant 1$) et

$$q(a_0) = 1 \leqslant a_1 = q(a_0, a_1)$$

Pour l'initialisation, on n'a que l'inégalité large ce qui est en accord avec l'énoncé.

- Supposons la propriété vraie au rang n, on a alors d'après 1(b) :

$$p(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) = a_0 p(a_1, \dots, a_{n+1}) + q(a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$< a_0 p(a_1, \dots, a_{n+2}) + q(a_1, \dots, a_{n+2}),$$

les inégalités sur chacun des deux termes étant assurées par l'hypothèse de récurrence, la première étant stricte. Ainsi, encore d'après 1(b),

$$p(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) < p(a_0, \dots, a_{n+2}).$$

De même,

$$q(a_0, \dots, a_{n+1}) = p(a_1, \dots, a_{n+1}) < p(a_1, \dots, a_{n+2}) = q(a_0, \dots, a_{n+2}),$$

l'inégalité étant cette fois stricte et sera donc stricte à toutes les étapes de la récurrence).

- Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{(p(a_0, \dots, a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (p(a_0, \dots, a_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont strictement croissantes.}}$$

(c) Cette fois, on n'a plus l'hypothèse $a_0 > 0$, mais les deux questions précédentes nous assurent tout de même la stricte croissance de $(q(a_0, \dots, a_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle diverge nécessairement vers $+\infty$. On déduit alors de la question 1(c) que :

- $\dfrac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \dfrac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} \longrightarrow 0,$
  donc en particulier $[a_0, \dots a_{2n+1}] - [a_0, \dots, a_{2n}] \to 0$
- $([a_0, \dots, a_{2n}])$ est croissante. En effet :

$$[a_0, \dots, a_{2n+2}] - [a_0, \dots, a_{2n}] = -\frac{1}{q(a_0, \dots, a_{2n+1})q(a_0, \dots, a_{2n+2})} + \frac{1}{q(a_0, \dots, a_{2n})q(a_0, \dots, a_{2n+1})} > 0,$$

par croissante stricte de q.

- De la même façon, $([a_0, \dots, a_{2n+1}])$ est décroissante.

Le résultat admis dans le préambule nous assure alors que $([a_0, \dots, a_n])$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{la fraction continue } [a_0, \dots, a_n, \dots] \text{ converge.}}$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_\infty$, et $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$. La représentation irréductible de $[a_0, \dots, a_n]$ est

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)}.$$

Soit alors $\frac{c}{d}$ un rationnel tel que $|d| \leqslant q(a_0, \dots, a_n)$. On suppose que $\frac{c}{d} \neq [a_0, \dots, a_n]$. On a donc

$$\begin{aligned}\left|[a_0, \dots, a_n] - \frac{c}{d}\right| &= \left|\frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} - \frac{c}{d}\right| \\ &= \frac{|dp(a_0, \dots, a_n) - cq(a_0, \dots, a_n)|}{|d|q(a_0, \dots, a_n)} \\ &\geqslant \frac{1}{|d|q(a_0, \dots, a_n)}.\end{aligned}$$

En effet puisque $cd \neq [a_O, \dots, a_n] \neq 0$, $dp(a_0, \dots, a_n) - cq(a_0, \dots, a_n)$ ne peut pas être nul, et comme il s'agit d'un entier, sa valeur absolue est au moins égale à 1. Ainsi, puisque $|d| \leqslant q(a_0, \dots, a_n) < q(a_0, \dots, a_{n+1})$,

$$\begin{aligned}\left|[a_0, \dots, a_n] - \frac{c}{d}\right| &> \frac{1}{q(a_0, \dots, a_n)q(a_0, \dots, a_{n+1})} \\ &= |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]|\end{aligned}$$

De même, en mettant sur le même dénominateur, on trouve directement

$$\begin{aligned}\left|[a_0, \dots, a_{n+1}] - \frac{c}{d}\right| &\geqslant \frac{1}{q(a_0, \dots, a_{n+1})q(a_0, \dots, a_n)} \\ &= |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]| \\ &\geqslant |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]|.\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{q(a_0,\dots,a_{n+1})q(a_0,\dots,a_n)}$, et $x_n = [a_0,\dots,a_n]$ et de façon similaire pour $n+1$. Supposons pour se fixer les idées $x_n < x_{n+1}$ (l'autre cas étant similaire). Puisque $\varepsilon_n \geqslant |x_{n+1} - x_n|$,

$$]x_n, x_{n+1}[\subset B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n).$$

Ainsi,

$$B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n) =]x_n - \varepsilon_n, x_{n+1} + \varepsilon_n[.$$

par conséquent, puisque $x_n < x < x_{n+1}$,

$$x_n - \varepsilon_n < x - \varepsilon_n < x + \varepsilon_n < x_{n+1} + \varepsilon_n$$

donc $B(x, \varepsilon_n) \subset B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n)$. Puisque $\frac{c}{d} \notin B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n)$, on en déduit que $\frac{c}{d} \notin B(x, \varepsilon_n)$, et donc

$$\left|\frac{c}{d} - x\right| \geqslant \varepsilon_n \geqslant |x_n - x_{n+1}| > |x_n - x|,$$

la dernière inégalité provenant de l'encadrement $x_n < x < x_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{[a_0,\dots,a_n] \text{ est une meilleure approximation de } x}$.

Partie III – Exitence et unicité du développement en fraction continue

1. **Variations.**

   Pour tout n la fonction F_{n+1} est la fonction qui à x associe $F_n\left(\frac{1}{a_{n+1}+x}\right)$. Or, $x \mapsto \frac{1}{a_{n+1}+x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc F_{n+1} est obtenue en composant F_n par une fonction strictement décroissante. On en déduit que si F_n est strictement monotone, F_{n+1} aussi, de sens de variation opposé. Or $F_0 = x \mapsto a_0 + x$ est strictement croissante. Ainsi, les F_n sont toutes strictement monotones, de sens de variation alternant : toutes les fonctions F_{2n} sont de même sens de variation que F_0 et F_{2n+1} de sens de variation opposé.

   Ainsi $\boxed{\text{si } n \text{ est paire, } F_n \text{ est strictement croissante, et si } n \text{ est impaire, } F_n \text{ est strictement décroissante}}$.

2. **Existence.**

   Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $b_0 = \{x\}$ (partie décimale de x), et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{b_n} \right\rfloor \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$$

   (a) On montre par récurrence la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_n$ sont bien définis, et $a = [a_0,\dots,a_n](b_n)$.

   - Pour $n = 0$, l'énoncé définit a_0 et b_0, et de plus

     $$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = a_0 + b_0 = [a_0](b_0).$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée au rang n. Alors, pour commencer, $b_n \neq 0$, sinon $x = [a_0,\dots,a_n]$ serait rationnel d'après la question I-1(a). Donc a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis. De plus,

     $$\begin{aligned} x &= [a_0,\dots,a_n](b_n) \\ &= [a_0,\dots,a_n]\left(\frac{1}{1/b_n}\right) \\ &= [a_0,\dots,a_n]\left(\frac{1}{a_{n+1}+b_{n+1}}\right) \\ &= [a_0,\dots,a_{n+1}](b_{n+1}). \end{aligned}$$

   - Cela prouve bien, d'après le principe de récurrence, que les a_n et b_n sont bien définis, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

     $$\boxed{x = [a_0,\dots,a_n](b_n)}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc, par croissance de F_{2n} et positivité de b_{2n} :

   $$[a_0,\dots,a_{2n}] = [a_0,\dots,a_{2n}](0) \leqslant [a_0,\dots,a_{2n}](b_{2n}) = x.$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned}[a_0,\dots,a_{2n+1}] &= [a_0,\dots,a_{2n}]\left(\frac{1}{a_{2n+1}}\right)\\ &\geqslant [a_0,\dots,a_{2n}]\,(b_{2n}) && \text{(car } F_{2n} \text{ est croissante et } a_{2n+1}\leqslant \frac{1}{b_n}\text{).}\\ &= x.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{[a_0,\dots,a_{2n}]\leqslant x\leqslant [a_0,\dots,a_{2n+1}]}.$$

(c) Or, on sait d'après la partie II, que $([a_0,\dots,a_n])$ converge vers $[a_0,\dots,a_n,\dots]$, donc aussi $([a_0,\dots,a_{2n}])$ et $([a_0,\dots,a_{2n+1}])$. Ainsi, en passant à la limite dans l'encadrement précédent (ce n'est pas vraiment le théorème d'encadrement ici, puisqu'il n'y a pas d'existence de limite à établir pour le terme encadré), on obtient :

$$\boxed{x=[a_0,\dots,a,\dots]}.$$

3. **Unicité.**

Soit (a_k) et (b_k) deux éléments appartenant chacun à l'un des Y_n ou à Z_∞. Soit k_0 le rang de la première différence entre les deux suites (a_n) et (b_n).

(a) On suppose dans un premier temps k_0 impair. On a alors :

$$[a_{k_0},\dots,a_n,\dots]=a_{k_0}+\frac{1}{[a_{k_0+1},\dots]}>a_{k_0}.$$

De la même manière

$$[a_{k_0+1},\dots]>a_{k_0+1}\geqslant 1,$$

donc

$$[a_{k_0},\dots,a_n,\dots]=a_{k_0}+\frac{1}{[a_{k_0+1},\dots]}<a_{k_0}+1\leqslant b_{k_0}.$$

Ainsi,

$$a_{k_0}<[a_{k_0},\dots,a_n,\dots]<b_{k_0}.$$

On déduit de la croissance stricte de $F_{k_0-1}: x\mapsto [a_0,\dots,a_{k_0-1}](x)$, que

$$F_{k_0-1}\left(\frac{1}{a_{k_0}}\right)>F_{k_0-1}\left(\frac{1}{[a_{k_0},\dots,a_n,\dots]}\right)>F_{k_0}(\frac{1}{b_{k_0}}),$$

c'est-à-dire, puisque F_{k_0-1} correspond aussi à $x\mapsto [b_0,\dots,b_{k_0-1}](x)$ (par définition de k_0),

$$[a_0,\dots,a_{k_0}]>[(a_n)]>[b_0,\dots,b_{k_0}],$$

La première inégalité est aussi vraie pour (b_n), donc

$$[b_0,\dots,b_{k_0}]>[(b_n)].$$

Ainsi, on a une inégalité stricte $\boxed{[(a_n)]>[(b_n)]}$, nous assurant que ces deux quantités ne sont pas égales.

Si k_0 est pair, le raisonnement est le même en inversant tous les sens de variation, à condition toutefois que $k_0\neq 0$. Si $k_0=0$, on obtient directement, du fait que comme ci-dessus $[a_1,\dots,a_n,\dots]>1$,

$$a_0<[a_0,\dots,a_n,\dots]<a_0+1\leqslant b_0<[b_0,\dots,b_n,\dots],$$

ce qui permet aussi de conclure.

(b) Si a_{k_0} n'est pas défini alors que b_{k_0} l'est, et que les précédents sont égaux, alors certaines inégalités précédentes restent vraies, et on peut écrire dans le cas k_0 impair (s'adaptant facilement dans le cas k_0 pair) :

$$[(a_k)]=[a_0,\dots,a_{k_0-1}]=F_{k_0-1}(0)>F_{k_0-1}\left(\frac{1}{b_{k_0}}\right)=[b_0,\dots,b_{k_0}]>[(b_n)].$$

Ainsi, on aboutit à la même conclusion $[(a_n)]\neq[(b_n)]$

On peut bien sûr dans les deux questions précédentes intervertir le rôle de (a_n) et (b_n). Ainsi, lorsque $(a_n)=\neq(b_n)$ (ces suites étant finies ou infinies), les développements associés définissent des réels distincts. Cela nous assure bien $\boxed{\text{l'unicité du développement en fraction continue d'un réel } x.}$

Partie IV – Théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

1. • Supposons x quadratique, et soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme dont il est racine, a, b et c étant entiers. Son discrimant Δ est aussi entier, et
$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}.$$
De plus, Δ n'est pas un carré parfait, sinon $\sqrt{\Delta}$ serait entier, et x serait rationnel. Ainsi, il existe bien deux rationnels $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \pm\frac{1}{2a} \neq 0$, ainsi qu'un entier non carré parfait Δ tels que
$$\boxed{x = \alpha + \beta\sqrt{\Delta}}.$$
• Réciproquement, soit $x = a + b\sqrt{\Delta}$, où $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}^*$ et Δ non carré parfait.
   ∗ Tout d'abord, x n'est pas rationnel, sinon on pourrait écrire
$$\sqrt{\Delta} = \frac{x-a}{b} \in \mathbb{Q},$$
   ce qui contredirait le résultat admis dans le préambule du problème (et démontré en exercice).
   ∗ Par ailleurs,
$$(x-a)^2 = b^2\Delta,$$
   donc x est racine d'un polynôme du second degré à coefficients rationnels. Quitte à multiplier ce polynôme par les dénominateurs des coefficients rationnels, il est aussi racine d'un polynôme à coefficients entiers. Ainsi

   Ainsi $\boxed{x \text{ est bien quadratique}}$.

2. Ceci est un exemple. On applique la méthode de la partie III :
$$a_0 = \lfloor\sqrt{2}\rfloor - 1, \qquad b_0 = \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1;$$
À l'étape suivante, on a donc :
$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2$$
et
$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2 = \sqrt{2} - 1.$$
Comme on a trouvé la même partie décimale qu'à l'étape précédente, la suite des calculs se déroulera de la même façon, et par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 2$. Par conséquent,
$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}.$$
On observe bien que le développement obtenu est ultimement périodique (de période 1), conformément au résultat qu'on cherche à établir dans cette partie. Nous n'aurons pas à nous servir de ce développement, il était juste là en guise d'exemple.

3. • Pour commencer, remarquons que puisque le développement de x est périodique, il est infini, donc x est irrationnel.
• On utilise le lemme suivant : on montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ il existe des entiers a,b, c et d tels que $c > 0$, $d \geqslant 0$, $ad - bc \neq 0$, et
$$[a_0, \dots, a_m]\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{ay+b}{cy+d}.$$
   ∗ Soit $m = 0$. Alors
$$[a_0, \dots, a_m]\left(\frac{1}{y}\right) = a_0 + \frac{1}{y} = \frac{a_0 y + 1}{1 \cdot y + 0}.$$
   De plus, $a_0 \times 0 - 1 \times 1 \neq 0$.
   ∗ On suppose la propriété vérifiée à un rang m. On a alors
$$[a_0, \dots, a_{m+1}]\left(\frac{1}{y}\right) = [a_0, \dots, a_m]\left(\frac{1}{a_m + \frac{1}{y}}\right).$$

Par hypothèse de récurrence, utilisée avec $y' = a_m + \frac{1}{y} > 0$, il existe des entiers a, b, c, d vérifiant $c > 0$ et $d \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}[a_0, \dots, a_{m+1}]\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{a\left(a_m + \frac{1}{y}\right) + b}{c\left(a_m + \frac{1}{y}\right) + d} \\ &= \frac{(aa_m + b)y + a}{(ca_m + d)y + c}\end{aligned}$$

On pose $a' = aa_m + b$, $b' = a$, $c' = ca_m + d$, $d' = c$. Comme $c > 0$, $d \geqslant 0$ et $a_m > 0$, on en déduit que $c' > 0$ et $d' \geqslant 0$. Ainsi, on a bien montré la propriété au rang $m + 1$.

- On suppose dans un premier temps que le développement de x est T périodique depuis le rang initial. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+T} = a_n$. On peut donc écrire :

$$x = [a_0, \dots, a_n, \dots] = [a_0, \dots, a_{T-1}]\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il existe donc des entiers a, b, c et d, avec $c \neq 0$, tels que

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \text{soit:} \qquad cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Ainsi, x est bien racine d'un polynôme du seconnd degré à coefficients entiers.
On en déduit que $\boxed{x \text{ est quadratique}}$.

- On montre maintenant par récurrence sur n_0 que si (a_n) est périodique à partir du rang n_0, alors $[(a_n)]$ est quadratique. L'initialisation, pour $n_0 = 0$, vient d'être faite. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on suppose que cette propriuété est vérifiée pour toutes les suites de Z_∞ périodiques à partir du rang n_0. Soit (a_n) une suite de Z_∞ périodique à partir du rang $n_0 + 1$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = a_{n+1}$. Alors (a'_n) est périodique à partir du rang n_0, et donc, par hypothèse de récurrence, $y = [(a'_n)] = [a_1, \dots, a_n, \dots]$ est quadratique. Or,

$$x = [a_0, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n, \dots]} = a_0 + \frac{1}{y}.$$

Comme y est quadratique, il existe un polynôme de degré 2 à coefficients entiers A, B et C tels que

$$Ay^2 + By + C = 0,$$

avec $A \neq 0$. On a donc

$$\frac{A}{(x - a_0)^2} + \frac{B}{(x - a_0)} + C = 0.$$

En multipliant par $(x - a_0)^2$, il vient

$$A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 = 0.$$

Or, $C \neq 0$. En effet, si $C = 0$, y serait racine de $Ay^2 + By = y(Ay + B)$ et serait donc rationnel, donc non quadratique. On en déduit que $C \neq 0$ et que x est racine d'un polynôme de degré 2. Comme on a déjà justifié l'irrationnalité, x est quadratique.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\text{si le développement de } x \text{ est ultimement périodique, alors } x \text{ est quadratique}}.$$

4. Réciproquement, soit x algébrique de degré 2 et (P_0) comme défini dans l'énoncé.
   (a) On définit (a_n) et (b_n) comme dans la partie III, et les P_n comme définis dans l'énoncé. En vertu de la partie III, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1}.
   - On a $b_0 = x - a_0$, et x est racine de P_1, donc

$$\begin{aligned}0 &= E_1(a_0 + b_0)^2 - 2\varepsilon_0(a_0 + b_0) - E_0 \\ &= E_1 b_0^2 + (-2\varepsilon_0 + 2a_0E_1)b_0 - (E_0 - E_1a_0^2 + 2\varepsilon_0 a_0) \\ &= E_1 b_0^2 + 2\varepsilon_1 b_0 - E_2.\end{aligned}$$

En divisant par $-b_0^2$, il vient :

$$E_2 \cdot \frac{1}{b_0^2} - 2\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{b_0} - E_1 = 0.$$

Ainsi, $\frac{1}{b_0}$ est une racine de P_1.

- On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, $\frac{1}{b_{n-1}}$ est une racine de P_n. Alors, de la même façon, on exprime
$$\frac{1}{b_{n-1}} = a_n + b_n,$$
et donc
$$\begin{aligned} 0 &= E_{n+1}(a_n + b_n)^2 - 2\varepsilon_n(a_n + b_n) - E_n \\ &= E_{n+1}b_n^2 + (-2\varepsilon_n + 2a_nE_{n+1})b_n - (E_n - E_{n+1}a_n^2 + 2\varepsilon_n a_n) \\ &= E_{n+1}b_n^2 + 2\varepsilon_{n+1}b_n - E_{n+2}. \end{aligned}$$
et comme avant en divisant par $-b_n^2$, $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1}. Remarquons que P_{n+1} se relie facilement à de P_n : le calcul ci-dessus montre que pour tout $y \neq 0$
$$-\frac{1}{y^2}P_n(a_n+y) = -\frac{1}{y^2}(E_{n+1}y^2+2\varepsilon_{n+1}y-E_{n+2}) = P_{n+1}\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P_{n+1}(y) = -y^2P_n\left(a_n + \frac{1}{y}\right)}$$
- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout n, $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1}, et donc a_{n+1} étant d'après la partie III la partie entière de $\frac{1}{b_n}$, $\boxed{a_{n+1} \text{ est la partie entière d'une racine de } P_{n+1}}$. Cela reste vrai pour $a_0 = \lfloor x \rfloor$ aussi, puisque x est une racine de P_0.

(b) C'est une simple vérification. Par une récurrence immédiate, il suffit de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. Or,
$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= 4\varepsilon_{n+1}^2 + 4E_{n+1}E_{n+2} \\ &= 4(a_nE_{n+1} - \varepsilon_n)^2 + 4E_{n+1}(E_n + 2\varepsilon_n a_n - E_{n+1}a_n^2) \\ &= 4\varepsilon_n^2 + 4E_nE_{n+1} \\ &= \Delta_n. \end{aligned}$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Delta_n = \Delta_0}$.

(c) Le calcul du discrimant amène
$$\Delta' = \frac{1}{4}\Delta_n = \varepsilon_n^2 + E_nE_{n+1},$$
de quoi on tire :
$$\boxed{E_{n+1} = \frac{\Delta' + \varepsilon_n^2}{E_n}}$$

(d)
- D'après ce qui précède, $\Delta_n = \Delta > 0$, donc P_n admet toujours deux racines distinctes (initialement, on connait l'existence d'une racine de P_0 par définition, et elle ne peut pas être double, sinon x serait rationnel).
- Notons s_n et t_n ces deux racines, en supposant $s_n < t_n$. Remarquons que nécessairement, $t_n > 1$. En effet, on sait que $\frac{1}{b_{n-1}}$ est racine de P_n. Or, $0 < b_{n-1} < 1$ (partie décimale, non nulle sinon la fraction serait finie). Donc $\frac{1}{b_{n-1}} > 1$.
- Supposons dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor s_n \rfloor = \lfloor t_n \rfloor$. Soit y la deuxième racine de P_0 (i.e. celle différente de x), $[(c_n)]$ son développement en fraction continue, et (Q_n) sa suite polynomiale associée comme en 4(a).
  * On a en particulier $P_0 = Q_0$, et comme s_0 et t_0 ont même partie entière, $a_0 = c_0$.
  * Supposons que pour n donné, $P_n = Q_n$ et $a_n = c_n$. Alors la description de P_{n+1} ne dépendant que de P_n et de a_n, on a $P_{n+1} = Q_{n+1}$. Les deux racines de ce polynôme ont même partie entière. Ainsi, d'après 4(a), $a_{n+1} = c_{n+1}$.
  * Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n$, donc
  $$x = [(a_n)] = [(c_n)] = y,$$
  ce qui est une contradiction.
- On en déduit qu'il existe un rang n_1 tel que P_{n_1} admette deux racines $s_{n_1} < t_{n_1}$ telles que $\lfloor s_{n_1} \rfloor < \lfloor t_{n_1} \rfloor$. D'après la remarque en fin de question 4(a), on a, pour tout $y \neq 0$,
$$P_{n_1+1}(y) = -y^2P_{n_1}(a_n + \frac{1}{y}).$$

Ainsi, y est racine de P_{n_1+1} si et seulement si $a_{n_1} + \frac{1}{y}$ est racines de P_{n_1}, donc les deux racines sont

$$\frac{1}{s_{n_1} - a_{n_1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{t_{n_1} - a_{n_1}}.$$

* Si $a_{n_1} = \lfloor s_{n_1} \rfloor < t_{n_1} - 1$, donc $t_{n_1} - a_{n_1} > 1$, donc $\frac{1}{t_{n_1}-a_{n_1}} < 1$.
* Si $a_{n_1} = \lfloor t_{n_1} \rfloor > s_{n_1}$, alors $\frac{1}{s_{n_1}-a_{n_1}} < 0$;

Ainsi, dans chacun des deux cas, l'une des racines n'est pas dans $]1, +\infty[$. Comme on a déjà justifié qu'au moins une des deux racines est dans $]1, +\infty[$, on a bien trouvé un rang $n_0 = n_1 + 1$ tel que $\boxed{P_{n_0} \text{ ait une et une seule racine dans }]1, +\infty[.}$

(e) Alors $a_{n_0} = \lfloor t_{n_0} \rfloor$ (partie entière de la plus grande des deux racines, l'autre étant plus petite que 1). Par le même argument que ci-dessus (mais on est cette fois toujours dans le deuxième cas), la plus petite des racines de P_{n_0+1} sera négative. Ainsi, $P_{n_0} + 1$ admet une unique racine positive (et qui est en fait supérieure à 1). Cet argument peut être itéré. Autrement dit, par une récurrence basée sur le même principe, pour tout $n > n_0$, $\boxed{P_n \text{ admet une et une seule racine positive.}}$

Or, le produit des racines est $\frac{-E_n}{E_{n+1}}$, donc pour tout $n > n_0$, ce produit devant être négatif, E_n et E_{n+1} sont de même signe (strictement), donc $\boxed{E_nE_{n+1} > 0}$.

(f) Or, pour $n > n_0 + 1$,

$$0 \leqslant \varepsilon_n^2 = \Delta' - E_nE_{n+1} < \Delta', \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{|\varepsilon_n| < \sqrt{\Delta'}}.$$

De même,

$$E_nE_{n-1} < \Delta' - \varepsilon_{n-1}^2 < \Delta',$$

donc, E_{n-1} et E_n étant de même signe,

$$|E_n| < \frac{\Delta'}{|E_{n-1}|} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{|E_n| < \Delta'},$$

puisque E_{n-1} est un entier non nul.

(g) Ainsi, pour $n > n_0 + 1$, le nombre de valeurs possibles de ε_n est majoré par $2\sqrt{\Delta'}$ (car les ε_n doivent être entiers), et le nombre de valeurs possibles de E_n est majoré par $2\Delta'$ (et même par Δ', car les E_n sont tous de même signe). Ainsi, il y a un $\boxed{\text{nombre fini majoré par } 4(\Delta')^{\frac{3}{2}} \text{ de valeurs possibles du couple } (E_n, \varepsilon_n)}$.

(h) D'après le principe des tiroirs, il existe donc $n_2 > n_0 + 1$ et $T > 0$ tels que $(E_{n_2+T}, \varepsilon_{n_2+T}) = (E_{n_2}, \varepsilon_{n_2})$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant n_2$,

$$(E_{n+T}, \varepsilon_{n+T}) = (E_n, \varepsilon_n).$$

L'initialisation est la définition de n_2. Soit $n \geqslant n_2$, et supposons que

$$(E_{n+T}, \varepsilon_{n+T}) = (E_n, \varepsilon_n).$$

Puisque

$$E_{n+1} = \frac{\Delta - \varepsilon_n^2}{E_n},$$

le couple (E_n, ε_n) détermine entièrement E_{n+1} et donc

$$E_{n+1} = E_{n+1+T}$$

Mais alors, $P_n = P_{n+T}$, et comme ce polynôme admet une unique racine supérieure à 1, $a_n = a_{n+T}$. On déduit alors de la relation définissant ε_n que $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+T+1}$. Ainsi,

$$(E_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = (E_{n+1+T}, \varepsilon_{n+1+T}).$$

D'après le principe de récurrence, la suite $((E_n, \varepsilon_n))_{n \geqslant n_2}$ est périodique, donc la suite $(P_n)_{n \geqslant n_2}$ est périodique, donc la suite $(a_n)_{n \geqslant n_2}$ est périodique (P_n déterminant a_n du fait de l'unicité de la racine supérieure à 1).

Par conséquent $\boxed{x \text{ admet un développement en fraction continue ultimement périodique.}}$