

FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Exercice 1. [o]

Calculer

$$A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 \quad \text{et} \quad B = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$$

On a

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\tan(\arctan 2 + \arctan 5) + \tan \arctan 8}{1 - \tan(\arctan 2 + \arctan 5) \times \tan \arctan 8} \\ &= \frac{\tan \arctan 2 + \tan \arctan 5}{1 - \tan \arctan 2 \times \tan \arctan 5} + \tan \arctan 8 \\ &= \frac{\tan \arctan 2 + \tan \arctan 5}{1 - \tan \arctan 2 \times \tan \arctan 5} \times \tan \arctan 8 \\ &= \frac{\frac{2+5}{1-2 \times 5} + 8}{1 - \frac{2+5}{1-2 \times 5} \times 8} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$A \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}.$$

Or $\arctan 2$, $\arctan 5$ et $\arctan 8$ appartiennent à $[\pi/4; \pi/2[$, donc $A \in [3\pi/4; 3\pi/2[$, ce qui implique que

$$A = \frac{5\pi}{4}.$$

On a

$$A + B = \arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan 5 + \arctan \frac{1}{5} + \arctan 8 + \arctan \frac{1}{8} = \frac{3\pi}{2},$$

car $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$. Donc

$$B = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2. [o]

Démontrer la relation suivante sur un ensemble que l'on précisera

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Posons

$$f(x) = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x.$$

La fonction f est définie lorsque $(1-x)/(1+x) \geq 0$, $x \neq -1$ et $x \in [-1; 1]$, c'est-à-dire lorsque $x \in]-1; 1[$.

D'après les théorèmes généraux de continuité, f est continue sur $[-1; 1]$.

Par ailleurs, les théorèmes généraux de dérivabilité permettent d'affirmer que f est dérivable lorsque $(1-x)/(1+x) > 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in]-1; 1[$ et l'on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1; 1[, \quad f'(x) &= 2 \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc f est constante sur $]-1; 1[$. Comme f est continue sur $]-1; 1]$, on en déduit que f constante sur $]-1; 1]$. Or $f(0) = 2 \arctan 1 + \arcsin 0 = 2 \times \pi/4 + 0 = \pi/2$, donc

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1], \quad 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 3. [o]

Compléter :

$$\begin{aligned}\forall x \in \dots, \quad \sin(\arcsin x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \cos(\arcsin x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \tan(\arcsin x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \sin(\arccos x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \cos(\arccos x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \tan(\arccos x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \sin(\arctan x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \cos(\arctan x) &= \dots \\ \forall x \in \dots, \quad \tan(\arctan x) &= \dots\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1; 1], \quad \sin(\arcsin x) &= x \\ \forall x \in [-1; 1], \quad \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in]-1; 1[, \quad \tan(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \forall x \in [-1; 1], \quad \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1; 1], \quad \cos(\arccos x) &= x \\ \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}, \quad \tan(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) &= x\end{aligned}$$

Exercice 4. [o]

À l'aide de la dérivation, déterminer une expression simplifiée de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Les deux quotients $2x/(1+x^2)$ et $(1-x^2)/(1+x^2)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour que $f(x)$ soit défini, il faut et suffit que

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

Le premier encadrement est équivalent à $-1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2$, c'est-à-dire à la fois à $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ et à $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Ces deux dernières inégalités étant toujours vérifiées puisque $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ et $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, on en déduit que le premier encadrement est toujours satisfait. Le second encadrement est équivalent à la double inégalité $-1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2$, qui est clairement vérifiée. On en déduit que f est définie sur \mathbb{R} .

On peut même ajouter que f est continue sur \mathbb{R} comme somme de composées de fonctions continues.

Pour la dérivabilité, les choses sont plus compliquées. En effet, \arcsin et \arccos ne sont pas dérivables en ± 1 , donc les théorèmes généraux permettent d'affirmer que f est dérivable au point x si

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1 \quad \text{et} \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1, \\ \iff & (2x = 1+x^2 \quad \text{ou} \quad 2x = -1-x^2) \quad \text{et} \quad (1-x^2 = 1+x^2 \quad \text{ou} \quad 1-x^2 = -1-x^2) \\ \iff & ((x-1)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+1)^2 = 0) \quad \text{et} \quad (2x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 = -1) \\ \iff & x \in \{-1; 0; 1\}, \end{aligned}$$

donc f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$. *Attention !* Cela ne prouve pas que f n'est pas dérivable en -1 , 0 et 1 .

Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} + \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{|1+x^2|}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} + \frac{4x}{(1+x^2)^2} \frac{|1+x^2|}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} + \frac{2x}{|x|(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $x > 1$, on a

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = 0,$$

ce qui signifie que f est constante sur $]1; +\infty[$. Or $f(\sqrt{3}) = \arcsin(\sqrt{3}/2) + \arccos(-1/2) = \pi/3 + 2\pi/3 = \pi$. Donc f est constante égale à π sur $]1; +\infty[$.

Pour $x \in]0; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2},$$

donc $\forall x \in [0; 1[$, $f(x) = 4 \arctan x + C_1$. Comme f est continue en 0 , on a $0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = C_1$, donc $C_1 = 0$.

Pour $x < -1$, on a

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{4}{1+x^2},$$

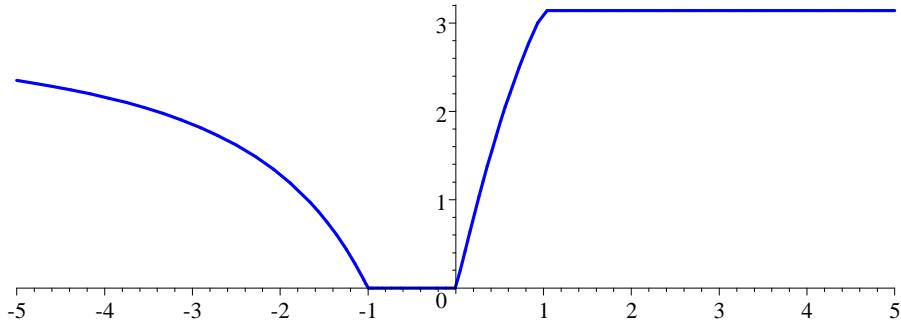
ce qui signifie encore que $\forall x < -1$, $f(x) = -4 \arctan x + C_2$. Comme $f(-\sqrt{3}) = \pi/3$, on trouve que $C_2 = -\pi$.

Enfin, pour $x \in]-1; 0[$, on a

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0,$$

donc f est constante sur $]-1; 0[$, égale à $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$, puisque f est continue en 0 .

Graphiquement, on obtient



Exercice 5. [o]

Résoudre l'équation

$$(E) \quad \arcsin(x+1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}.$$

Ensemble de définition :

L'équation (E) est définie si, et seulement si, $x+1 \in [-1; 1]$ et $x \in [-1; 1]$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_{(E)} = [-1; 0].$$

Résolution :

On a

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6} + \arcsin(x) \\
&\iff \sin(\arcsin(x+1)) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \arcsin(x)\right) \\
&\quad \text{car } \begin{cases} \arcsin(x+1) \in [-\pi/2; \pi/2] \\ \pi/6 + \arcsin(x) \in [-\pi/3; \pi/6] \text{ car } x \in [-1; 0] \\ \sin \text{ est injective sur } [-\pi/2; \pi/2] \end{cases} \\
&\iff x+1 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\arcsin(x)) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\arcsin(x)) \\
&\iff x+1 = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x \\
&\quad \text{car } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2} \\
&\quad \text{puisque } \forall \theta \in [-\pi/2; \pi/2], \cos \theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta} \\
&\iff (2-\sqrt{3})x + 2 = \sqrt{1-x^2} \\
&\iff ((2-\sqrt{3})x + 2)^2 = 1-x^2 \\
&\quad \text{car } (2-\sqrt{3})x + 2 \geq 0 \\
&\iff (8-4\sqrt{3})x^2 + 4(2-\sqrt{3})x + 3 = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut

$$\Delta = (4(2-\sqrt{3}))^2 - 4 \times (8-4\sqrt{3}) \times 3 = 16 - 16\sqrt{3} < 0,$$

donc

cette équation n'a pas de solution réelle.

Exercice 6. [★]

Soient $x, y, z \in [0; 1]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que $\arccos(x) + \arccos(y) + \arccos(z) = \pi$.

\Leftarrow L'égalité $\arccos x + \arccos y + \arccos z = \pi$ équivaut à $\arccos x + \arccos y = \arccos(-z)$.

Supposons que cette dernière égalité soit réalisée. On en déduit $-z = \cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$. Il en découle $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$ autrement dit $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

\Rightarrow Réciproquement, si $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ alors $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$. Cela équivaut à $z+xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=0$ ou $z+xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=0$.

Posons $a = \cos x$, $b = \cos y$ et $c = \cos z$ (avec a, b, c dans $[0, \pi/2]$).

Les deux éventualités s'écrivent $\cos c + \cos(a+b) = 0$ ou $\cos c + \cos(a-b) = 0$. Cela équivaut à $\cos(a+b) = \cos(-c)$ ou $\cos(a-b) = \cos(-c)$, ce qui est équivalent à l'une des quatre possibilités :

$$a+b \equiv \pi - c \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad a+b \equiv c - \pi \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad a-b \equiv \pi - c \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad a-b \equiv c - \pi \pmod{2\pi}$$

Comme $a, b, c \in [0; \pi/2]$, on constate que ces quatre possibilités sont équivalentes à l'unique condition

$$a+b+c \equiv \pi.$$

Finalement, on aboutit nécessairement à l'égalité $\arccos x + \arccos y + \arccos z = \pi$.

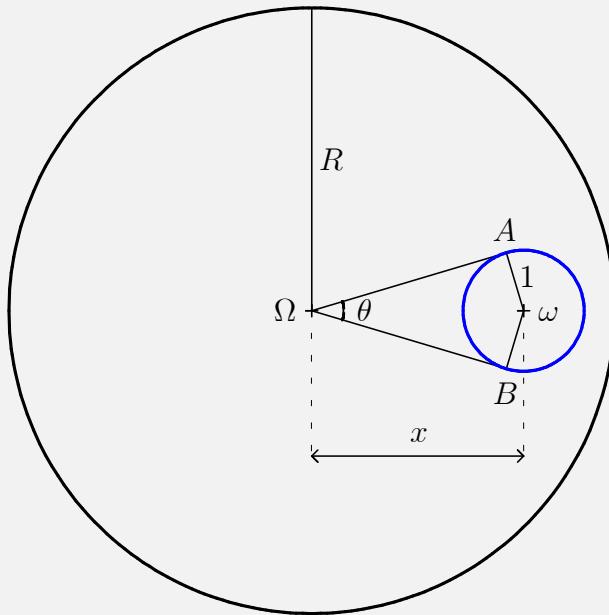
En conclusion,

$$(\arccos(x) + \arccos(y) + \arccos(z) = \pi) \iff (x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1).$$

Exercice 7. [o]

Une fève circulaire de rayon $r = 1$ est placée dans une galette circulaire de rayon R . Le rayon de la galette est supposé très grand devant celui de la fève : mathématiquement, on considérera que $R = +\infty$.

Le centre ω de la fève est à une distance x du centre Ω de la galette (avec $x \geq 1$).



Les deux tangentes à la fève, passant par Ω , touchent la fève en A et B .

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{A\Omega B}$. L'angle θ est appelé le *diamètre apparent* de la fève vu depuis Ω .

La probabilité $p(x)$ qu'un coup de couteau rectiligne, passant par Ω , rencontre la fève est définie par

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi}.$$

- Justifier que

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Étudier la fonction $x \mapsto p(x)$ lorsque x varie entre 1 et $+\infty$.
- Donner un équivalent de $p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- On admet que $\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2\varepsilon}$. Démontrer que

$$1 - p(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{x-1}.$$

Une fève circulaire de rayon $r = 1$ est placée dans une galette circulaire dont le rayon est supposé infini. Le centre ω de la fève est à une distance x du centre Ω de la galette (avec $x \geq 1$). Les deux tangentes à la fève, passant par Ω , touchent la fève en A et B . On note θ une mesure de l'angle $\widehat{A\Omega B}$. La probabilité $p(x)$ qu'un coup de couteau rectiligne, passant par Ω , rencontre la fève est définie par $p(x) = \theta/\pi$.

- Justifier que $p(x) = (\pi/2) \arcsin(1/x)$.

Dans le triangle $\Omega A\omega$ qui est rectangle en A , l'angle en Ω est égal à $\theta/2$ (pour des raisons évidentes de symétrie). La formule donnant le sinus d'un angle comme le quotient du côté opposé sur l'hypothénuse nous dit alors que

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{A\omega}{\Omega\omega} = \frac{1}{x},$$

ce qui donne

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dès lors, comme

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\theta}{2},$$

on a

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Étudier la fonction $x \mapsto p(x)$ lorsque x varie entre 1 et $+\infty$.

La fonction p est continue sur $[1; +\infty[$ par théorèmes généraux.

La fonction p est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$ par théorèmes généraux. En 1, on a un point d'incertitude.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a

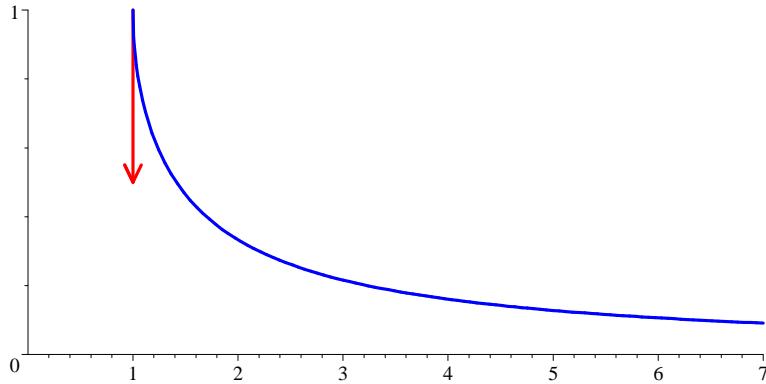
$$p'(x) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} < 0,$$

donc :

- p est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = -\infty$, ce qui prouve que p admet en 1 une demi-tangente verticale.

On a clairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0$.

On obtient donc



3. Donner un équivalent de $p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Comme $\arcsin(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon$, on a

$$\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

ce qui donne

$$p(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x}.$$

4. On admet que $(\pi/2) - \arcsin(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2\varepsilon}$. Démontrer que $1 - p(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 2\sqrt{2(x-1)}/\pi$.

Posons $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$. On a

$$\begin{aligned} 1 - p(1+h) &= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{1+h}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{1+h}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{h}{1+h}\right) \right] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2h}{1+h}} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\sqrt{2h}}{\pi}, \end{aligned}$$

donc

$$1 - p(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{x-1}.$$