Feuille d'exercices n° 19 : corrigés

Exercice 1

• On a directement : $\dfrac{n^2}{2^n} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de série ACV, donc CV.

• On écrit : $\dfrac{n^4+3n+1}{2n^5+n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ de série divergente et tout est positif. La série de départ diverge.

• Il y a plusieurs cas :

▷ si $|x| < 1$, alors :

$$a_n \cdot x^n = \mathcal{O}(|x|^n)\ \text{, de série ACV donc CV.}$$

▷ si $|x| \geqslant 1$, comme π n'est pas un nombre décimal, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire nulle à partir d'un certain rang et donc la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant a_n \cdot |x|^n,$$

imposant à la suite $(a_n\ |x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ne pas converger vers 0 : la série associée DVG.

Exercice 2

• La série est CV car $\dfrac{1}{k^2+k} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On écrit :

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

donc la série est télescopique et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1.$$

• Comme $n^4 = \circ(n!)$, alors $\dfrac{n^2+2n+3}{n!} = \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de série CV (on peut aussi utiliser les $\mathcal{O}$...). Pour le calcul de la somme, on utilise la base de Hilbert :

$$\Big(H_k(X) = X(X-1)\cdots,(X-k+1)\Big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

On pose :

$$X^2+2X+3 = a + bX + cX(X-1)$$

et en résolvant un petit système linéaire, on trouve :

$$a = 3,\ b = 3 \text{ et } c = 1.$$

Toutes les séries qui suivent sont convergentes. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!} &= a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} + b\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!} + c\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!} \\
&= a(e-1) + b\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} + c\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!} \\
&= a(e-1) + b\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + c\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} \\
&= a(e-1) + b\ e + c\ e \\
&= 7e-3.
\end{aligned}$$

• Si $N \in \mathbb{N}$, en posant $f_N : x \longmapsto \sum_{k=0}^{N} x^{k+1} = x\ \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ sur l'intervalle $]0,1[$, alors :

$$f'_N : x \longmapsto \sum_{k=0}^{N}(k+1)\ x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} + x\ \frac{-(N+1)x^N(1-x)+1-x^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

Par les croissances comparées, en prenant $a = \frac{1}{4}$, alors :

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} a^N = \lim_{N\longrightarrow+\infty}(N+1)\ a^N = 0.$$

La quantité $f'_N(a)$ converge donc lorsque N tend vers $+\infty$ vers :

$$\frac{1}{1-a} + a\ \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{16}{9}.$$

Ainsi, on a tout immédiatement : la convergence et la somme de la série convergente et donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{4^k} = \frac{16}{9}.$$

Exercice 5

On pose u_n le terme général de la série proposée.
Soit r un entier supérieur ou égal à 1.
Parmi tous les entiers n qui vérifient $p_n = r$, le plus petit entier n possible est :

$$n = 10^{r-1}$$

et le plus grand entier n est :

$$n = 10^r - 1.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$:

$$10^{p_n-1} \leqslant n < 10^{p_n}.$$

Par conséquent,
$$10^{1-\frac{1}{p_n}} \leqslant n^{\frac{1}{p_n}} < 10,$$
et :
$$0 < u_n = 10 - n^{\frac{1}{10}}.$$
On constate que la série proposée est à termes positifs, donc est strictement croissante.
Posons la suite v définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left\{ \begin{array}{l} 10 - n^{\frac{1}{p_n}}, \text{ si } n \text{ est une puissance de } 10 \\ 0, \text{ sinon} \end{array} \right. .$$
Il est clair que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant u_n.$$
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $n = 10^k$, alors :
$$\begin{aligned} v_n = v_{10^k} &= 10 - (10^k)^{\frac{1}{k+1}} \\ &= 10 \times \left(1 - 10^{-\frac{1}{k+1}}\right) \\ &= 10 \times \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{k+1}\ln 10\right)\right) \\ &\sim 10 \times \frac{\ln 10}{k}, \end{aligned}$$
lorsque k tend vers $+\infty$.
En conclusion, en posant $S_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$, alors la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et :
$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_{10^N} = \sum_{k=0}^{N} v_{10^k}.$$
Le terme v_{10}^k est équivalent à $10 \times \frac{\ln 10}{k}$, lorsque k tend vers $+\infty$, tout est positif et la série $\sum_k 10 \times \frac{\ln 10}{k}$ est divergente vers $+\infty$. La série $\sum_k v_{10^k}$ est donc divergente vers $+\infty$ et la suite $(S_{10^N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante divergente vers $+\infty$. La suite croissante $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc divergente vers $+\infty$.
Comme $v_n \leqslant u_n$ et que la série $\sum_n v_n$ est divergente vers $+\infty$, cela entraîne le fait que la série $\sum_n u_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3

Il y a deux choses à savoir sur cet exercice : d'une part, connaître et savoir redémontrer le résultat est très bien. D'autre part, il faut garder à l'esprit que les séries de Bertrand qui généralisent les séries de Riemann sont hors programme.

Il ne faut jamais les utiliser sans justification. Dans la très grande majorité des cas, on peut se passer des séries de Bertrand et les séries de Riemann suffisent largement.

On distingue plusieurs cas selon la valeur de α.

- si $\alpha > 0$, on prend $\lambda \in]1, \alpha[$ de sorte que par les croissances comparées :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^{-\beta} n}{n^{\alpha-\lambda}} = 0.$$
On en déduit :
$$\frac{1}{n^\alpha \, \ln^\beta n} = \circ\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$$
de série ACV donc CV.
- si $\alpha < 1$, on utilise le fait que :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^{\beta} n}{n^{1-\alpha}} = 0.$$
Par conséquent, à partir d'un certain rang,
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha \, \ln^\beta n}.$$
La série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ entraînant le fait que la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \, \ln^\beta n}$ diverge vers $+\infty$.
Ne pas oublier dans la phrase précédente « diverge vers $+\infty$ » sinon en aucun cas, l'autre série divergera.
- le cas $\alpha = 1$ est plus subtil et on ne peut pas comparer à une série de Riemann. On doit faire appel aux encadrements série / intégrale. On distingue deux sous-cas selon la valeur de β :
$\longrightarrow$ si $\beta = 1$, la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t \, \ln t}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ et on remarque que :
$$\int_2^n f(t) \, dt = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$
de limite $+\infty$. Le cours nous dit que la série à termes positifs $\sum_n \frac{1}{n \ln n}$ diverge vers $+\infty$.
$\longrightarrow$ si $\beta \neq 1$, la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t \, \ln^\beta t}$ est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$. De plus, une primitive de f est :
$$F : t \longmapsto \frac{\ln^{-\beta+1} t}{-\beta + 1}.$$
On distingue alors deux sous-cas.

Si $\beta > 1$,

$$\int_3^n f(t)\ dt = \frac{1}{\beta - 1} \times \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1} 3} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} n}\right),$$

qui est une quantité convergente lorsque n tend vers $+\infty$. La série de Bertrand converge.

Si $\beta < 1$,

$$\int_3^n f(t)\ dt = \frac{1}{1 - \beta} \times \left(\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 3\right),$$

qui est une quantité divergente vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$. La série de Bertrand diverge.

En conclusion, voici un résultat (hors programme) que l'on peut mettre en annexe de cours :

La série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha\ \ln^\beta n}$ est convergente si et seulement si : $\left\{\begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{ ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{array}\right.$.

Exercice 6

• On établit un équivalent du terme général $u_n = \dfrac{N_n}{D_n}$.

Or,

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{e}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= -\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

En définitive, le numérateur vaut :

$$N_n = \frac{e - 2}{2n} + \left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le dénominateur vaut :

$$\begin{aligned} D_n &= \ln(n^2(1+\circ(1))) + \circ(\ln n) \\ &= 2\ln n\Big(1+\circ(1)\Big) \\ &= 2\ln n + \circ(\ln n). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$N_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e-2}{2n} \text{ et } D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n.$$

Ainsi,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e-2}{2} \times \frac{1}{n\ln n}.$$

Tout est positif et la série $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$ est divergente (utiliser une comparaison série / intégrale pour démontrer le résultat correctement et non pas utiliser un résultat tout fait sur les séries de Bertrand).
La série $\sum_n u_n$ est divergente.

• On sait que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \circ(1).$$

On en déduit si $a > 0$ en posant $\lambda = \ln a$:

$$u_n = \exp\left(H_n \ \ln a\right) = \exp(\lambda \ H_n) = \exp\Big(\lambda \ \ln n + C + \circ(1)\Big),$$

où $C = \lambda \ \gamma$.
En notant $\Gamma = \exp(C) > 0$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \Gamma \times \exp(\lambda \ \ln n) = \Gamma \times \frac{1}{n^{-\lambda}}.$$

Tout est positif. La série $\sum_n \frac{1}{n^{-\lambda}}$ est convergente si et seulement si $-\lambda > 1 \iff \lambda < -1 \iff \ln a < -1 \iff a < e^{-1}$.

Conclusion,

- si $a < e^{-1}$, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente ;
- si $a \geqslant e^{-1}$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge vers $+\infty$.

• La suite $(j^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 3-périodique, d'où l'idée de regrouper les termes, trois par trois.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_k &= u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k}} + \frac{j}{\sqrt{3k+1}} + \frac{j^2}{\sqrt{3k+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k}} \left(1 + j \left(1 + \frac{1}{3k}\right)^{-\frac{1}{2}} + j^2 \left(1 + \frac{2}{3k}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k}} \left(\left(1 + j + j^2 - \frac{1}{6k} \times (j + 2j^2)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \frac{\xi}{k^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right), \end{aligned}$$

en utilisant $1 + j + j^2 = 0$ et en posant $\xi = -\dfrac{j + 2j^2}{6\sqrt{3}}$.

La série $\sum_k v_k$ est donc convergente.

Il faut maintenant voir qu'il y a des petites choses à rédiger pour accéder à l'information sur la série $\sum_n u_n$, qui n'est pas tout à fait la même que la série $\sum_k v_k$. On va passer par les sommes partielles.

Soit $N \geqslant 3$ un entier. On pose $k_N = \left\lfloor \dfrac{N}{3} \right\rfloor$, de sorte que :

$$N \in \{3k_N, 3k_N + 1, 3k_N + 2\}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} S_N &= u_1 + u_2 + \sum_{m=3}^{N} u_m \\ &= u_1 + u_2 + \sum_{m=3}^{3k_N - 1} u_m + \mathcal{O}\Big(|u_{3k_N}| + |u_{3k_N+1}| + |u_{3k_N+2}|\Big) \\ &= u_1 + u_2 + \sum_{\ell=1}^{k_N - 1} v_\ell + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k_N}}\right) \\ &= u_1 + u_2 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} v_k + \circ(1). \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente de limite :

$$u_1 + u_2 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} v_k.$$

La série $\sum_n u_n$ est convergente.

• On écrit successivement :

$$\begin{aligned}
u_n &= \cos\left(\pi n \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \cos\left(\pi n \left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8\ n^2}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&= \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8\ n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1}\ \sin\left(\frac{3\pi}{8\ n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\ 3\pi}{8\ n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

La série $\sum_n u_n$ est donc convergente en utilisant tout d'abord le CSSA pour $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}\ 3\pi}{8\ n}$ et d'autre part le critère de comparaison des séries de Riemann pour $\sum_n \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

• On pose $v_n = |u_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.
On remarque que :

$$\ln v_n = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k,$$

et :

$$\ln v_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \ln k = \frac{1}{n+1}(n \ln v_n - \ln(n+1)).$$

Le nombre $\ln v_n$ apparaît comme la moyenne arithmétique des nombres $-\ln 1, -\ln 2, \cdots, -\ln n$, tous supérieurs à $-\ln(n+1)$. Ainsi,

$$\ln v_n \geqslant -\ln(n+1),$$

et donc :

$$\ln v_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}(n \ln v_n + \ln v_n) = \ln v_n.$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$1 < v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Enfin, comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln n = +\infty$, en utilisant la moyenne de Cesarò [résultat à savoir redémontrer avec les quantiticateurs ...] :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k = +\infty.$$

On peut aussi utiliser une comparaison série / intégrale qui marche avec la fonction croissante $t \longmapsto \ln t$.

Conclusion, la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est alternée, de terme général décroissant en module et de limite nulle, car $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln v_n = -\infty$. La série converge par le CSSA.

On aurait pu également utiliser la formule de Stirling ce qui donne les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
u_n &= (-1)^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\circ(1))\right)^{-\frac{1}{n}} \\
&= (-1)^n \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\circ(1))\right)\right) \\
&= (-1)^n \exp\left(-\frac{1}{n}\left(n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \circ(1)\right)\right) \\
&= (-1)^n \exp\left(-\ln n + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\, e + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\, e + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

On retrouve la convergence par le CSSA et la comparaison avec la série de Riemann.

• On fait comme d'habitude un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
u_n &= \cos\left(n^2\,\pi\,\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \cos\left(n^2\,\pi\,\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(-n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\,\sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

de série converge en utilisant comme d'habitude le CSSA et les séries de Riemann.

• La suite des sommes partielles $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ car la série de Riemann associée est croissante et divergente avec l'exposant $\alpha = \dfrac{1}{2} \leqslant 1$.
Ensuite, on effectue une fois de plus un développement asymptotique.
On obtient :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\omega_n} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\omega_n}\right)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{\omega_n} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\omega_n} + \circ\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\omega_n} + \left[\frac{1}{\omega_n^2} + \circ\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\omega_n}$ vérifie immédiatement le CSSA car la quantité ω_n est positive, croissante et de limite $+\infty$.
Comme $\left[\frac{1}{\omega_n^2} + \circ\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)\right] \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \frac{1}{\omega_n^2}$ et tout est positif à partir d'un certain rang, la série :

$$
\sum_n \left[\frac{1}{\omega_n^2} + \circ\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)\right]
$$

est de même nature que la série $\sum_n \frac{1}{\omega_n^2}$.

On va maintenant établir un équivalent de ω_n, lorsque n tend vers $+\infty$, en utilisant une comparaison série / intégrale.
On considère la fonction continue et décroissante $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Pour tout entier k, on obtient l'encadrement :

$$
\int_k^{k+1} f(t)\ dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt,
$$

l'inégalité de gauche étant valable pour tout entier $k \geqslant 1$ alors que l'inégalité de droite est valable est valable pour tout entier $k \geqslant 2$.
On obtient par sommation jusqu'à $N \in \mathbb{N}^*$:

$$
\int_1^{N+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} = \omega_N \leqslant f(1) + \int_1^N f(t)\ dt.
$$

Ainsi, comme $t \longmapsto 2\sqrt{t}$ est une primitive de la fonction f :

$$
2\sqrt{N+1} - 2 \leqslant \omega_N \leqslant 1 + 2\sqrt{N} - 2.
$$

Par le théorème des gendarmes, on conclut que :

$$
\lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{\omega_N}{2\sqrt{N}} = 1,
$$

et donc :

$$
\omega_k \sim 2\sqrt{k} \text{ ou encore } \frac{1}{\omega_k^2} \sim \frac{1}{4k},
$$

lorsque k tend vers $+\infty$.
Conclusion, la série $\sum_n \frac{1}{\omega_n^2}$ diverge vers $+\infty$, en utilisant les équivalents positifs de termes généraux de séries de même nature.

En définitive, la série initiale diverge vers $+\infty$, le terme alternée de série convergente n'influant pas le caractère divergent de cette série.

• On commence à en avoir l'habitude ...

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(-\pi n\ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\sin\left(\pi n\ \left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{\pi}{2n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Soit on traite les deux termes séparément $-\dfrac{\pi}{2n}$ de série divergente vers $-\infty$ et $\mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de série convergente, donc le tout est de série divergente vers $-\infty$, soit on dit que :

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2n},$$

et tout est négatif à partir d'un certain rang, donc la série $\sum\limits_n u_n$ est divergente car $\sum\limits_n -\dfrac{\pi}{2n}$ diverge.

• On établit un équivalent de la quantité u_n, en commençant par utiliser – équivalent de $\arccos(1-h)$ à savoir redémontrer lorsque h tend vers 0^+ – le fait que :

$$\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h},$$

lorsque h tend vers 0^+.
Ainsi,

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n^{1/4}}.$$

Tout est positif (à partir d'un certain rang ou pas d'ailleurs) et la série $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{1/4}}$ diverge, donc la série $\sum\limits_n u_n$ également.

• Soit $a>0$. On fonctionne une nouvelle fois par développement asymptotique. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} u_n &= n^a\ \left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^a-1\right) \\ &= n^a\ \left(a\ \frac{(-1)^n}{n}+\frac{a(a-1)}{2}\ \frac{1}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= a\ \frac{(-1)^n}{n^{1-a}}+\frac{a(a-1)}{2}\left[\frac{1}{n^{2-a}}+\circ\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right)\right]. \end{aligned}$$

On distingue maintenant plusieurs cas :

- si $a \geqslant 1$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a\,\frac{(-1)^n}{n^{1-a}},$$

quantité qui ne tend pas vers 0 [pas de limite finie si $a=1$ et pas de limite infinie si $a>1$]. La série $\sum_n u_n$ DVG.

- si $a\in]0,1[$, la série $\sum_n a\,\frac{(-1)^n}{n^{1-a}}$ vérifie immédiatement le CSSA. Par conséquent, la série $\sum_n u_n$ est de même nature que la série $\sum_n v_n$, avec :

$$v_n = \frac{a(a-1)}{2}\left[\frac{1}{n^{2-a}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right)\right].$$

La constante $\frac{a(a-1)}{2}$ n'influe pas sur la nature de la série. On pose w_n le terme entre crochets. Or,

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-a}},$$

et tout est positif à partir d'un certain rang. Les séries $\sum_n u_n$, $\sum_n w_n$ et $\sum_n \frac{1}{n^{2-a}}$ sont de même nature, en l'occurrence ici CV car $2-a>1$.

La série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $a<1$.

- Encore un développement asymptotique !

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln\left(n^a\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)\right)}\\
&= \frac{(-1)^n}{a\ln n + \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2n^{2a}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)}\\
&= \frac{(-1)^n}{a\ln n}\times\left(1+\frac{(-1)^n}{a\ n^a\ \ln n} - \frac{1}{2an^{2a}\ \ln n} + \circ\left(\frac{1}{n^{2a}\ln n}\right)\right)^{-1}\\
&= \frac{(-1)^n}{a\ln n} - \left[\frac{1}{a^2\ n^a\ \ln^2 n} + \circ\left(\frac{1}{n^a\ \ln^2 n}\right)\right]
\end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{a\ln n}$ est convergente par le CSSA appplicable immédiatement.
En posant :

$$v_n = \left[\frac{1}{a^2\ n^a\ \ln^2 n} + \circ\left(\frac{1}{n^a\ \ln^2 n}\right)\right],$$

alors :

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2\ n^a\ \ln^2 n},$$

tout est positif à partir d'un certain rang donc les séries $\sum_n v_n$ et $\sum_n \frac{1}{n^a\ \ln^2 n}$ sont de même nature.

On utilise ici les séries de Bertrand – faut-il encore le rappeler ? ces séries sont hors programme, donc il faut tout redémontrer ; le cas critique où il faut vraiment procéder par comparaison série / intégrale est le cas $a = 1$ pour lequel on ne peut pas comparer utilement la série avec une série de Riemann.

La série $\sum_n \frac{1}{n^a\ \ln^2 n}$ est convergente si et seulement si $a \geqslant 1$.

La série initiale $\sum_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a \geqslant 1$ et lorsque $a < 1$, alors la série diverge ici vers $-\infty$.

• On termine par un développement asymptotique, une fois de plus...

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln^a n} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln^a n}\right)^{-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln^a n} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln^a n} + \circ\left(\frac{(-1)^n}{\ln^a n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln^a n} - \left[\frac{1}{\ln^{2a} n} + \circ\left(\frac{1}{\ln^{2a} n}\right)\right]
\end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln^a n}$ converge par le CSSA, alors que la série $\sum_n \left[\frac{1}{\ln^{2a} n} + \circ\left(\frac{1}{\ln^{2a} n}\right)\right]$ diverge vers $+\infty$, car :

$$v_n = \left[\frac{1}{\ln^{2a} n} + \circ\left(\frac{1}{\ln^{2a} n}\right)\right] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln^{2a} n}$$

et que à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{\ln^a n} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Comme la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$, cela entraîne que la série $\sum_n \frac{1}{\ln^a n}$ diverge vers $+\infty$ et comme tout est positif à partir d'un certain rang, la série $\sum_n v_n$ diverge également vers $+\infty$.

Résultat des courses, la série $\sum_n u_n$ diverge vers $-\infty$.

Remarque : dans le texte précédent, ne surtout pas omettre les mots colorés en rouge-rubis qui ont toute leur importance.

Exercice 7

1. On procède comme avec la constante d'Euler.
   On va montrer que la série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge, ou plus simplement que la série $\sum_n (u_n - u_{n-1})$ converge.
   On remarque que :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{n}{n^2+1} - \ln n + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   de série ACV donc CV.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc, vers une limite ℓ plus ou moins inconnue (plutôt largement plus que moins d'ailleurs...)
2. On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - \ell = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}).$$

   En poussant le développement asymptotique un peu plus loin, on obtient :

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

   On redémontre un équivalent des restes :

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha},$$

   lorsque $\alpha > 1$. On procède par encadrement série / intégrale.
   Fixons un réel $\alpha > 1$. On pose la fonction f continue et décroissante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha} \end{array} \right. .$$

   On obtient pour tout entier n :

$$\int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f,$$

   l'inégalité de gauche étant valable pour tout entier $n \geqslant 1$ et l'inégalité de droite étant valable pour tout entier $n \geqslant 2$.

On peut sommer l'encadrement ce qui donne pour tous entiers $2 \leqslant n \leqslant N$:

$$\int_n^{N+1} f = \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} f \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \int_{k-1}^{k} f = \int_{n-1}^{N} f.$$

Or, une primitive de f est $F : t \longmapsto \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$, ce qui donne :

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k) \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n-1}^{N}.$$

On peut maintenant faire tendre N vers $+\infty$ en laissant l'entier $n \geqslant 2$ fixe, ce qui donne :

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

On voit alors facilement par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{\alpha-1} \times \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

et donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On applique ce qui précède à $\alpha = 2$ et à $\alpha = 3$ pour gérer le $\mathscr{O}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n - \ell &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \mathscr{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \circ\left(\frac{1}{n+1}\right) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_n (u_n - \ell)$ est de même nature que la série à termes positifs $\sum_n \dfrac{1}{2n}$, c'est-à-dire divergente vers $+\infty$.

3. On peut reprendre ce qui a été fait mais il est plus efficace de voir que l'on peut directement appliquer le CSSA.
   En effet, à partir d'un certain rang, $u_n - u_{n-1} \leqslant 0$, donc la suite u est décroissante à partir d'un certain rang, la quantité $u_n - \ell$ tendant vers 0^+ en décroissant. Le CSSA s'applique et la série converge.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, z_n est un produit de complexes non nuls :

$$\begin{aligned} \ln |z_n| &= \frac{1}{2} \ln |z_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(\left| 1 + \frac{i}{k} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right). \end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ est convergente car le terme général est en $\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La suite $(\ln |z_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |z_n| = \exp(\ell) = \rho > 0.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un argument du complexe $1 + \dfrac{i}{k}$ est $\arctan\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

On en déduit qu'en notant $\theta_n = \arg(z_n)\ [2\pi]$, alors :

$$\theta_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k}\right).$$

Comme $\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n}$ et que tout est positif, alors la série $\displaystyle\sum_n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente et donc la quantité θ_n tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.
Ce qu'il faut voir maintenant, c'est que ceci ne répond pas complètement à la question, car les arguments sont donnés modulo 2π et que l'on peut très bien avoir une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui tend vers $+\infty$ alors que la suite complexe $\left(e^{i\omega_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, comme c'est le cas lorsque $\omega_n = 2n\pi$ par exemple.
Par ailleurs, comme la suite des modules de z_n converge vers une quantité non nulle, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si la suite $\left(e^{i\theta_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, car on aura alors la convergence de la suite des modules et des arguments (modulo 2π) donc la convergence de la suite complexe.

Il est très légèrement plus coûteux de montrer que la suite $(e^{i\theta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans $\mathbb{U}$ que de montrer que cette suite diverge. On choisit de montrer la densité...

Donnons-nous un élément $e^{i\xi} \in \mathbb{U}$ et soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que le complexe $e^{i\theta_n}$ appartient à l'arc de cercle reliant les points d'affixe $e^{i\xi}$ et $e^{i(\xi+\varepsilon)}$, ce qui permettra par la suite de construire une sous-suite $\left(e^{i\theta_{\varphi(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge ves $e^{i\xi}$.

Une fois ξ et $\varepsilon > 0$ fixés, puis n_0 arbitraire dans $\mathbb{N}^*$, on choisit $n_1 > n_0$ tel que :

$$\arctan\left(\frac{1}{n_1}\right) < \varepsilon.$$

On choisit maintenant un entier k_0 suffisamment grand pour que :

$$\theta_{n_1} < \xi + 2k_0\pi.$$

On pose l'ensemble :

$$\mathscr{D} = \Big\{ n \geqslant n_1 \mid \theta_n < \xi + 2k_0\pi \Big\}.$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est non vide, car contient n_1, est inclus dans $\mathbb{N}$ et comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \theta_n = +\infty$, alors il existe un rang $n_2 > n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2,\ \theta_n \geqslant \xi + 2k_0\pi, \text{ donc } n \notin \mathscr{D}.$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est donc majoré par n_2 et on peut envisager le plus grand élément s de l'ensemble $\mathscr{D}$.
Ainsi,

$$\theta_{s+1} \geqslant \xi + 2k_0\pi,$$

et :

$$\begin{aligned} \theta_{s+1} &= \theta_s + (\theta_{s+1} - \theta_s) \\ &= \theta_s + \arctan \frac{1}{s+1} \\ &< \xi + 2k_0\pi + \varepsilon. \end{aligned}$$

Le complexe $e^{i\theta_{s+1}}$ appartient bien à l'arc de cercle entre les points de $\mathbb{U}$ d'arguments entre ξ et $\xi + \varepsilon$.
La suite $(e^{i \arg(z_n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans $\mathbb{U}$ et la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut converger – car la suite des modules $|z_n|$ converge vers une quantité strictement positive.

Exercice 15

On suppose que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente. On note ρ la valeur de sa somme.
Il est clair que la série $\sum\limits_{n} u_{\sigma(n)}$ est encore à termes positifs, donc est croissante. De plus, si $N \in \mathbb{N}$, alors, l'ensemble $\sigma([\![0, N]\!])$ est fini, inclus dans un ensemble du type : $[\![0, s_N]\!]$, avec s_N un entier naturel assez grand. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} T_N = \sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} &= \sum_{k \in \sigma([\![0,N]\!])} u_k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{s_N} u_k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \rho. \end{aligned}$$

La série croissante $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ est donc majorée par ρ et la somme de cette série croissante est inférieure ou égale à ρ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Cette inégalité a lieu pour toute permutation σ.

Pour l'autre sens, on peut utiliser ce qui précède. On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$ et on suppose que la série à termes positifs $\sum_n u_{\sigma(n)} = \sum_n v_n$ est convergente. L'application $\sigma^{-1} = \omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est encore une bijection sur $\mathbb{N}$. En réappliquant le sens direct, on obtient que la série $\sum_n v_{\omega(n)}$ reste convergente et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\omega(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

ce qui se réécrit puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{\omega(n)} = u_{\sigma\circ\omega(n)} = u_n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)},$$

et on obtient le sens indirect et de plus l'égalité des deux sommes des séries convergentes.

Exercice 14

La technique de cet exercice est connue sous le nom de « *transformation d'Abel* ». Il y a un lien entre la formule de la question 1. et la formule d'intégration par parties pour les intégrales... Ce lien est juste conceptuel, il ne sert en rien dans la résolution des questions. Cette technique hors programme de première ou seconde année sera vue l'an prochain dans votre cours, normalement.

1. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k\,(y_k - y_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1}(x_k - x_{k+1})\,y_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\,y_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\,y_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\,y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\,y_k \\
&= x_n\,y_n - x_0\,y_0.
\end{aligned}$$

2. On interprète comme d'habitude la somme des cosinus comme la partie réelle d'une somme d'exponentielles complexes pour obtenir des sommes géométriques.
   Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k \;=\; \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right)$$

$$= \Re e\left(e^i \times \frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right)$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|S_n| \leqslant \left|e^i \times \frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right| \leqslant \frac{1+|e^{in}|}{|1-e^i|} = \frac{2}{|1-e^i|}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée par $C = \dfrac{2}{|1-e^i|}$.

3. On remarque que lorsque $\alpha \in]0,1[$, on ne peut pas dire grand chose sur cette série qui est en fait absolument divergente (point non évident a priori)...
On utilise la démarche de la question 1. On décide de refaire le calcul.
On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On en déduit, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = \cos n$:

$$\begin{aligned} T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos n}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n-1}}{n^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n^\alpha} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{(n+1)^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{(n+1)^\alpha} \\ &= \frac{S_N}{N^\alpha} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right). \end{aligned}$$

On pose $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$, quantité positive et de série convergente car on a affaire à une série télescopique associée à la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0. De plus,

$$\frac{S_N}{N^\alpha} = \frac{\mathcal{O}(1)}{N^\alpha} = \circ(1).$$

Enfin,

$$S_n \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = S_n \times v_n = \mathcal{O}(v_n),$$

de série ACV. En conclusion, la quantité $\dfrac{S_N}{N^\alpha}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ et la quantité $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} S_n \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} S_n \cdot v_n$ est la somme partielle d'une série convergente, donc est une somme partielle convergente.
Résultat des courses, la somme partielle T_N converge vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$: la série $\displaystyle\sum_n \frac{\cos n}{n^\alpha}$ converge dès que $\alpha > 0$.

4. (a) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\cos^2 n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{\cos(2n)}{2n}$$

on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\cos^2 n - \frac{1}{2}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\cos(2n)}{2n} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{2N} \left| \frac{\cos(k)}{k} \right| = B_N,$$

car on a rajouté tous les termes positifs associés aux indices k impairs.
La suite $(B_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite ℓ, par hypothèse, donc la suite croissante $(A_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par ℓ : la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente et la série demandée est bien ACV.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $|\cos n| \leqslant 1$, alors $\cos^2 n \leqslant |\cos n|$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \frac{|\cos n|}{n}.$$

Toujours par hypothèse, la série $\sum_n \frac{\cos^2 n}{n}$ est donc convergente.

Cependant, la série $\sum_n -\frac{1}{2n}$ diverge vers $-\infty$, donc la somme des deux séries précédentes donne une série divergente vers $-\infty$. Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 4.(a).

(c) On vient de montrer que la série $\sum_n \frac{\cos n}{n}$ est absolument divergente. Il s'agit donc une série semi-convergente ! !

(d) On montrerait que la suite $\left(S'_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée et avec la même manipulation que dans la question 3., on trouve que la série $\sum_n \frac{\sin n}{n}$ est convergente.

Pour la série $\sum_n \left| \frac{\sin n}{n} \right|$, on ne peut plus faire la même démarche qu'en question 4, même avec toute la meilleure volonté du monde...
On fait autrement. Ce qui va suivre s'applique également pour la série $\sum_n \left| \frac{\cos n}{n} \right|$.

L'idée est qu'il est impossible que pour deux entiers consécutifs n et $n+1$, les valeurs de $\sin n$ et $\sin(n+1)$ soient toutes les deux petites. Sur un schéma, cela se voit bien car si par exemple $\sin n$ est proche de 0, alors n est proche d'une quantité de la forme $k\pi$, où k est un entier et dans ce cas, l'entier $(n+1)$ ne sera pas très proche de n'importe quelle quantité de la forme $\ell\pi$, avec $\ell \in \mathbb{Z}$. Je pense qu'on a l'idée sans devoir la formaliser.
Il existe donc une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |\sin n| + |\sin(n+1)| \geqslant c.$$

Par conséquent, en regroupant les termes deux par deux, on obtient une minoration de la forme :

$$\begin{aligned} U_{2N}=\sum_{k=1}^{2N}\frac{|\sin(k)|}{k} &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{|\sin(2k-1)|}{2k-1}+\frac{|\sin(2k)|}{2k}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{|\sin(2k-1)|+|\sin(2k)|}{2k}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{c}{2k}, \end{aligned}$$

qui est une quantité tendant vers $+\infty$, lorsque N tend vers $+\infty$. On apprend ainsi que la série croissante $\sum_n \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ n'est pas majorée, donc diverge vers $+\infty$. La série $\sum_n \frac{\sin n}{n}$ est bien absolument divergente.

(e) On distingue deux cas :
- si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $e^{i\theta}=1$ et la série considérée est la série harmonique divergente ;
- sinon, dans le cas contraire, alors $e^{i\theta}\neq 1$ et on peut appliquer les mêmes calculs qu'en question 3. puisque pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\times\frac{1-e^{iN\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^{i\theta}|},$$

et donc par la transformation d'Abel, la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}$ sera convergente.

Exercice 24

1. Si l'ensemble $E(u)$ est non vide, l'ensemble $E(u)$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}^*$, donc admet un plus petit élément p_0. Par choix de p_0, on a alors :

$$E(u)\subset [p_0,+\infty[\cap\mathbb{N}.$$

Soit $p\in[p_0,+\infty[\cap\mathbb{N}$. Comme la série $\sum_n u_n^{p_0}$ converge, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n^{p_0}=0,$$

donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n=0.$$

Il existe un rang n_1 à partir duquel :

$$\forall n\geqslant n_1,\ 0\leqslant u_n\leqslant 1.$$

On sait alors que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ 0 \leqslant u_n^p \leqslant u_n^{p_0}.$$

Ainsi, $u_n^p = \mathscr{O}(u_n^{p_0})$ de série ACV : la série $\displaystyle\sum_n u_n^p$ est convergente et donc $p \in E(u)$. On a l'autre inclusion.

2. • Si on considère la suite u égale à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\ln(n+2)},$$

alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, à partir d'un certain rang, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant u_n^p.$$

La série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$, entraînant le fait que la série $\displaystyle\sum_n u_n^p$ diverge vers $+\infty$. L'ensemble $E(u)$ est donc vide dans ce cas.

• Fixons maintenant un entier $p_0 \geqslant 1$. Considérons alors la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(n+1)^{1/(p_0-1/2)}}.$$

Si $p \geqslant 1$ est un entier, alors :

$$v_n^p \underset{n \to +\infty}{\simeq} \frac{1}{n^{p/(p_0-1/2)}}.$$

L'entier $p \geqslant 1$ appartient à l'ensemble $E(v)$ si et seulement si :

$$\frac{p}{p_0 - 1/2} > 1 \iff p > p_0 - \frac{1}{2} \iff p \geqslant p_0.$$

L'ensemble $E(v)$ est donc exactement l'ensemble $[p_0, +\infty[\cap \mathbb{N}$.

3. • Soit p un entier supérieur ou égal à 1.
Si p est pair, alors à partir d'un certain rang,

$$u_n^p = \frac{1}{\ln^p(n+1)} \geqslant \frac{1}{n},$$

donc la série $\displaystyle\sum_n u_n^p$ diverge vers $+\infty$ dans ce cas.

Si p est impair, alors la série $\displaystyle\sum_n u_n^p = \sum_n \frac{(-1)^n}{\ln^p(n+1)}$ vérifie immédiatement le CSSA et donc la série converge.

En définitive,

$$E(u) = 2\mathbb{N} + 1.$$

• Soit $p \geqslant 1$ un entier. Alors,

$$\begin{aligned}
u_n^p &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}} - \frac{1}{2n^{2/3}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)^p \\
&= \frac{(-1)^{p(n+1)}}{n^{p/3}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n^{1/3}} + \circ\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)\right)^p \\
&= \frac{(-1)^{p(n+1)}}{n^{p/3}} + \frac{(-1)^{(p+1)n+p} \times p}{2n^{(p+1)/3}} + \circ\left(\frac{1}{n^{(p+1)/3}}\right).
\end{aligned}$$

Lorsque $p = 1$, alors :

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}} - \left[\frac{1}{2n^{2/3}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right].$$

La série $\sum_n u_n$ diverge alors vers $-\infty$ en utilisant le CSSA pour le premier terme, et en utilisant le résultat sur les équivalents des séries à termes positifs à partir d'un certain rang, ici divergentes.

Lorsque $p = 2$, alors :

$$u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2/3}},$$

et comme tout est positif, la série $\sum_n u_n^2$ diverge.

Lorsque $p = 3$, alors :

$$u_n^3 = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

En utilisant le CSSA et les séries de Riemann. La série converge ici.

Lorsque $p \geqslant 4$, alors :

$$u_n^p = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),$$

de série ACV donc CV.

Résultat des courses :

$$E(u) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

Exercice 25

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = \ln\Big(n^\lambda\, u_n\Big).$$

On va montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en étudiant la série télescopique associée. Ainsi, comme la série de terme général v_n converge, alors v_n est une quantité tendant vers 0 et donc $\mathcal{O}(v_n^2) = \mathcal{O}(v_n)$ est de série convergente. On procède à un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + \lambda \cdot \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right) + \frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= v_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \mathcal{O}(v_n^2). \end{aligned}$$

La série $\sum_n (w_{n+1} - w_n)$ est donc ACV, puis CV et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur finie α.

Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\lambda \cdot u_n = e^\alpha.$$

2. On utilise la question 1. pour :

$$u_n = \frac{n^n}{n!\ e^n}.$$

En effet, chaque u_n est strictement positif et au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times e^{-1} \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On pose $v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qui apparaît dans la dernière ligne précédente, on pose $\lambda = \frac{1}{2}$, de sorte qu'il existe une constante strictement positive $c > 0$ telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n} \cdot u_n = c.$$

Ainsi, $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \frac{c}{\sqrt{n}}$, de série DV et tout est positif, donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

3. On obtient ce résultat *« directement »* par la formule de Stirling en disant que :

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \frac{c}{\sqrt{n}}, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Exercice 26

Comme f est continue, le passage à la limite dans l'égalité :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

conduit à $\ell = f(\ell)$.
On revient au sujet...

1. On obtient par la formule de Taylor-Young appliquée pour f à l'ordre 2 en ℓ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta_{n+1}} - \frac{1}{\theta_n} &= \frac{1}{f(u_n) - f(\ell)} - \frac{1}{\theta_n} \\
&= \frac{1}{m \cdot \theta_n + \frac{f''(\ell)}{2}\theta_n^2 + \circ(\theta_n^2)} - \frac{1}{\theta_n} \\
&= \frac{1}{\theta_n} \times \left(\left(1 + \frac{f''(\ell)}{2}\theta_n + \circ(\theta_n) \right)^{-1} - 1 \right) \\
&= -\frac{f''(\ell)}{2} + \circ(1).
\end{aligned}$$

   La limite vaut $-\dfrac{f''(\ell)}{2}$.

2. On utilise maintenant les moyennes de Cesarò. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\theta_{k+1}} - \frac{1}{\theta_k} \right)$$

   se simplifie en $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\theta_n} - \dfrac{1}{\theta_0}\right)$ et ceci doit tendre vers $-\dfrac{f''(\ell)}{2}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n\,\theta_n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{f''(\ell)}{2},$$

   et donc :

$$\theta_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{f''(\ell)\, n}.$$

3. On encadre m de la façon suivante :

$$0 < \mu_1 < m < \mu_2 < 1.$$

   Comme la fonction f' est continue en ℓ, il existe $\alpha > 0$ tel que sur l'intervalle $I = [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$, on a :

$$\forall x \in I,\ \mu_1 \leqslant f'(x) \leqslant \mu_2.$$

   Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$, à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \in I.$$

Si $n \geqslant n_0$ est un entier, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f dérivable sur le segment d'extrémités ℓ et u_n, ce qui donne l'existence d'un réel c_n strictement entre ℓ et u_n tel que :

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = f'(c_n) \in [\mu_1, \mu_2].$$

Les quotients $\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n}$ sont donc positifs à partir d'un certain rang.
On en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right| \leqslant \mu_2,$$

et par récurrence facile,

$$\forall n \geqslant n_0,\ |\theta_n| \leqslant \mu_2^{n-n_0} \cdot |\theta_{n_0}|.$$

On en déduit que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\theta_n = \mathcal{O}(\mu_2^n),$$

de série ACV, donc CV.

4. On établit un développement asymptotique du terme général :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{m}\ \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right) &= \ln\left(\frac{1}{m}\ \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{m}\ \frac{m\ \theta_n + \mathcal{O}(\theta_n^2)}{\theta_n}\right) \\
&= \ln\left(1 + \mathcal{O}(\theta_n)\right) \\
&= \mathcal{O}(\theta_n)
\end{aligned}$$

de série ACV donc CV, car dans la question précédente, on montre bien que la série est ACV en plus d'être CV.

5. Posons :

$$\xi_n = \frac{\theta_n}{m^n},$$

de sorte que :

$$\frac{1}{m}\ \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}.$$

La série $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}\right)$ est convergente. Comme la quantité $\dfrac{\xi_{n+1}}{\xi_n}$ est strictement positive à partir d'un certain rang, toutes les quantités ξ_n gardent le même signe et on peut écrire pour n assez grand :

$$\ln\left(\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}\right) = \ln\left|\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}\right| = \ln|\xi_{n+1}| - \ln|\xi_n|.$$

La série télescopique $\sum_n \Big(\ln|\xi_{n+1}| - \ln|\xi_n|\Big)$ est convergente amenant la convergence de la suite $(\ln(|\xi_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite finie λ.
Par continuité de l'exponentielle, on obtient finalement :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\xi_n| = c = \exp(\lambda) > 0,$$

donc :

$$|\theta_n| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} c\ m^n.$$

À partir d'un certain rang, soit les quantités θ_n sont positives, auquel cas :

$$\theta_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} c\ m^n,$$

soit les quantités θ_n sont négatives, auquel cas :

$$\theta_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} -c\ m^n.$$

Dans tous les cas, on dispose d'un réel non nul $\pm c$ qui convient.

Exercice 34

1. On corrige succintement les questions relatives aux intégrales de Wallis.
   (a) La décroissance provient de l'intégration de l'inégalité :
   $$0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t),$$
   entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
   Le fait que $W_n > 0$ provient du théorème aux quatre hypothèses.
   (b) Si $n \geqslant 2$, en faisant une IPP sur W_n, on obtient :
   $$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\ \sin^{n-2} t\ dt \\ &= W_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times \Big(\cos t\ \sin^{n-2} t\Big)\ dt \\ &= W_{n-2} - \left[\cos t\ \frac{\sin^{n-1} t}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt \\ &= W_{n-2} - \frac{1}{n-1}\ W_n, \end{aligned}$$
   amenant à la formule désirée.
   On pose maintenant :
   $$\forall n \geqslant 1,\ \xi_n = nW_nW_{n-1}.$$

D'une part,

$$\xi_1 = W_1 \times W_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \xi_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = nW_{n-1}W_n = \xi_n.$$

La suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

(c) Comme $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ et $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, W_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} W_n$, alors :

$$W_{n+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} W_n,$$

en utilisant le théorème des gendarmes pour avoir :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

Ensuite,

$$\frac{\pi}{2} = nW_nW_{n-1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} n\, W_n^2,$$

donc comme $W_n \geqslant 0$:

$$W_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On peut alors utiliser :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{2n}\cdot W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ ou encore } \lim_{n\longrightarrow+\infty} (2n)\cdot W_{2n}^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \bigstar$$

On peut calculer W_{2n} en fonction de W_0 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\, W_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\, \frac{2n-3}{2n-2}\, W_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\, \frac{2n-3}{2n-2}\, \cdots\, \frac{1}{2}\, W_0 \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2}\, \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit en réécrivant l'égalité $\bigstar$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 2n\cdot \frac{((2n)!)^2}{2^{4n}\,(n!)^4}\, \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient exactement la limite demandée.

2. (a) Une fois de plus, on s'intéresse à la série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$, à l'aide d'un développement asymptotique. On obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!(n+1)^{-n-\frac{3}{2}}e^{n+1}}{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(n+1)(n+1)^{-n-\frac{3}{2}} \times e}{n^{-n-\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{-n-\frac{1}{2}} \times e}{n^{-n-\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \times e\right)\\
&= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\\
&= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

de série ACV, donc CV.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc.
En notant α la valeur de cette limite, par continuité de l'exponentielle, on obtient :

$$n!\ n^{-n-\frac{1}{2}}\ e^n \underset{n\to+\infty}{\simeq} e^\alpha = \lambda > 0.$$

On en déduit un équivalent de $n!$ de la forme voulue.

(b) Il suffit de montrer que $\lambda = \sqrt{2\pi}$.
On utilise la question 1.(c), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{p\ ((2p)!)^2}{2^{4p}\ (p!)^4} &\sim \frac{p\ \left(\lambda\ (2p)^{2p}\ e^{-2p}\ \sqrt{2p}\right)^2}{2^{4p}\ \left(\lambda\ p^p\ e^{-p}\ \sqrt{p}\right)^4}\\
&\sim \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{, après de nombreuses simplifications}
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite :

$$\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\pi}, \text{ donc } \lambda^2 = 2\pi,$$

et le réel λ est strictement positif, d'où le résultat attendu et la formule de Stirling.