Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 17

– à rendre pour le mardi 14 avril –

Problème

On pose la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt \end{array} \right. .$$

1. Justifier la bonne définition de la fonction f.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$
3. Montrer que la fonction f admet une limite finie ou infinie en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$. On note :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt,$$
cette limite.
5. Donner un sens à la quantité :
$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt.$$
6. Soient p et q deux entiers, avec $q > 0$ et $p \geqslant 0$.
   (a) Montrer que la fonction :
   $$g_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\ln t)^p \cdot t^q \end{array} \right.$$
   est prolongable par continuité au point 0. On renote pareillement $g_{p,q}$ cette fonction prolongée en 0. Que vaut $g_{p,q}(0)$?

   (b) On pose dans la suite :
   $$J_{p,q} = \int_0^1 g_{p,q}(t)\, dt = \int_0^1 (\ln t)^p \cdot t^q\, dt.$$
   Montrer que si p et q sont deux entiers strictement positifs, alors :
   $$J_{p,q} = -\frac{p}{q+1}\, J_{p-1,q}.$$

   (c) En déduire que pour tous entiers $p \geqslant 0$ et $q > 0$,
   $$J_{p,q} = (-1)^p\, \frac{p!}{(q+1)^{p+1}}.$$
7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = J_{1,n} \text{ et } u_0 = -1.$$
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot u_{2k} = \int_0^1 \ln t \times \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

8. Conclure que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$