Devoir Surveillé n° 3 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – Théorème de Liouville

Dans ce problème, on s'intéresse à certaines propriétés des fonctions dites « analytiques » ou (« holomorphes ») sur une boule $B(0,R)$, $R \in \mathbb{R}_+^* \cup +\infty$. Nous montrons notamment le théorème de Liouville, affirmant qu'une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante, théorème qui fournit une preuve assez simple du théorème de d'Alembert-Gauss (à condition de connaître quelques propriétés des fonctions analytiques). La démonstration usuelle se fait par des calculs d'intégrales le long de cercles (via *le théorème de l'indice de Cauchy). La preuve exposée ci-dessous est une variation de cette méthode, utilisant la description d'une intégrale sur un cercle par des sommes de Riemann sur le cercle.*

Rappels, résultats admis, définitions et notations

- *On rappelle (et on pourra l'utiliser sans preuve) que si une série réelle $\sum u_n$ converge absolument (c'est-à-dire $\sum |u_n|$ converge), alors elle converge. On admettra que cela reste vrai pour des séries à termes complexes (la valeur absolue étant alors remplacée par le module).*
- *On rappelle également le théorème de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP) affirmant que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
- *On pourra utiliser sans preuve le fait que les séries géométriques complexes $\sum a^n$ convergent si et seulement si $|a| < 1$.*
- *On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,*
$$\omega_{n,k} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi k}{n}}, \qquad \zeta_{n,k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(2k+1)\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{n,k} = \omega_{n,k+1} - \omega_{n,k}.$$
On remarquera qu'à n fixé, ces suites sont n-périodiques de la variable k.
- *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{U}$. Pour toute fonction $f : D \to \mathbb{C}$, on définit pour tout $n \geqslant 2$,*
$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} f(\zeta_{n,k}),$$
et, si cette limite existe,
$$I(f) = \lim_{n \to +\infty} I_n(f).$$
On s'autorisera l'abus de notation consistant à remplacer dans cette expression la fonction f par son expression, qu'on écrira alors toujours de la variable z. Ainsi, $I(z^2)$ désigne $I(f)$ pour la fonction $f : z \mapsto z^2$.
$I(f)$ est en réalité l'intégrale de f le long du cercle unité $\mathbb{U}$, calculé ici par des sommes de Riemann.
- *On dit qu'une fonction f définie sur une boule ouverte $B(0,R)$ (pour $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) est analytique (ou holomorphe) sur $B(0,R)$ s'il existe une suite de complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que*
$$\forall z \in B(0,R),\ f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$
ce qui sous-entend au passage la convergence de cette série pour tout z de $B(0,R)$. Le cas $R = +\infty$ correspond au cas d'une fonction définie sur $\mathbb{C}$ entier, la série associée étant convergente pour toute valeur de $\mathbb{C}$.

Partie I – Quelques calculs préliminaires

1. Soit f et g deux applications à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur D contenant $\mathbb{U}$, et λ et μ deux complexes. Justifier que si ces quantités existent, $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$.
2. Soit f tel que $I(f)$ existe. Supposons qu'il existe M tel que $|f| \leqslant M$ sur $\mathbb{U}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n(f)| \leqslant 2\pi M$, puis $|I(f)| \leqslant 2\pi M$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $I_n(1) = 0$, et en déduire $I(1)$.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $I_n\left(\frac{1}{z}\right) = 2\,\mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times n$ et en déduire $I\left(\frac{1}{z}\right)$.
5. En adaptant le calcul de la question précédente, montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $I\left(z^p\right) = 0$.
6. En déduire que pour tout polynôme P, $P(0) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z}\right)$, et plus généralement, pour tout $N \geqslant 0$,

$$P^{(N)}(0) = \frac{N!}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z^{N+1}}\right),$$

où $P^{(N)}$ est le polynôme obtenu en dérivant « formellement » par rapport à la variable complexe, en admettant que les règles de dérivation des monômes sont les mêmes que pour une dérivation par rapport à une variable réelle.

Partie II – Intégrale circulaire d'une fonction holomorphe

Dans cette partie, $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ désigne une fonction analytique sur $B(0,R)$, où $R > 1$.

1. Justifier qu'il existe $r > 1$ tel que $(a_k r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On se donne désormais un tel r.
2. Soit $R_N(z) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k z^k$. Montrer l'existence d'un réel M tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $z \in \mathbb{U}$,

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{M r^{-N+1}}{1 - r^{-1}}.$$

3. En déduire une majoration de $|I_n(R_N)|$, puis montrer que $I(f) = 0$.

Partie III – Théorème de Liouville et théorème de d'Alembert-Gauss

On garde les notations de la partie précédente. Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. En écrivant $z \mapsto \frac{f(z)}{z^{N+1}}$ comme somme d'une fonction analytique et de fonctions $z \mapsto \frac{1}{z^k}$, $k > 0$, montrer que

$$a_N = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{f(z)}{z^{N+1}}\right).$$

En admettant qu'une série du type définissant f peut se dériver terme à terme par rapport à la variable complexe z, on vérifie facilement que $f^{(N)}(0) = N! a_N$. Ainsi, cette formule est l'analogue de la dernière formule démontrée dans la partie I.

2. On suppose maintenant que f est analytique sur $\mathbb{C}$, et bornée, et on note M telle que $|f| \leqslant M$ sur $\mathbb{C}$.
En considérant la fonction $g : z \mapsto f(rz)$, montrer que pour tout $r > 0$

$$\boxed{|a_N| \leqslant \frac{M}{r^N}}.$$

3. En déduire le théorème de Liouville : si f est analytique sur $\mathbb{C}$ et bornée, alors f est constante.
4. En admettant que l'inverse d'une fonction analytique ne s'annulant pas est encore une fonction analytique, et qu'une fonction continue sur une boule fermée bornée est bornée, en déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Partie IV – Un cas particulier d'une formule de Cauchy

Dans cette partie, nous généralisons les résultats de la partie 1, en montrant que plus généralement, on peut exprimer la valeur de $P(z)$ pour tout z de $B(0,1)$ sous une forme intégrale. Ceci est remarquable en le sens que ceci permet de retrouver l'expression de P sur tout $B(0,1)$ ne connaissant P que sur $\mathbb{U}$.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < 1$, et r tel que $|z_0| < r < 1$, et $p \in \mathbb{N}$.

1. Soit $N > p$ fixé. Montrer que
$$I\left(z^{p-1}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\ell}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p.$$
2. Après avoir justifié rapidement l'existence de la somme infinie pour tout z de module 1, montrer que
$$\left|I_n\left(z^{p-1}\sum_{\ell=N+1}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{\ell}\right)\right| \leqslant \frac{2\pi|z_0|^{N+1}}{1-|z_0|}$$
3. En déduire que $I\left(\dfrac{z^p}{z-z_0}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\pi z_0^p$
4. Montrer que pour tout polynôme P,
$$P(z_0) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\frac{P(z)}{z-z_0}\right).$$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n\left(\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k \frac{z^k}{z-z_0}\right)$ est majoré par une expression indépendante de n, et tendant vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.
6. Montrer que $f(z_0) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} I\left(\dfrac{f(z)}{z-z_0}\right)$.

Cette formule est un cas particulier d'une formule due à Cauchy (formule de l'indice).

Question subsidiaire : Montrer qu'une fonction analytique sur $B(0,R)$ est continue sur ce domaine, dérivable de la variable z (c'est à dire qu'en tout point z, le taux d'accroissement $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ admet une limite lorsque la variable complexe h tend vers 0), et même infiniment dérivable et exprimer les dérivées successives sous forme de sommes.

Problème 2 – Autour de la propriété d'équirépartition

Soit une suite de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $U_n(I)$ le nombre de termes parmi $u_1,\dots,u_n$ appartenant à I, c'est-à-dire le cardinal de $\{i \in [\![1,n]\!] \mid u_i \in I\}$
Si $I = [a,b[$ est un intervalle vérifiant $I \subset [0,1[$, on note $U_n(I \mod 1)$ le nombre de termes u_i, $i \in [\![1,n]\!]$, tels que la réduction modulo 1 de u_i (c'est-à-dire sa partie décimale) soit dans I. Ainsi, la suite ayant été choisie positive :
$$U(I \mod 1) = U\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(I+k)\right),$$
où $I+k$ désigne l'intervalle $[a+k, b+k[$.
On dit que (u_n) est équirépartie modulo 1 si pour tout $I = [a,b[\subset [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n(I \mod 1)}{n} = b-a$.
On rappelle que $\lceil x\rceil$ désigne la partie entière de x par excès, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à x.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équirépartie, alors l'ensemble formé des parties décimales des u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est dense dans $[0,1]$ (on dira que (u_n) est dense modulo 1)
2. On considère $u_n = \ln(n)$, pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que (u_n) est dense modulo 1.
   (c) Soit $I = [0, \frac{1}{2}[$. Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$, $U_n(I+k) = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}\rceil - \lceil \mathrm{e}^k\rceil$.
   (d) Justifier que $U_n(I+k) \geqslant (\sqrt{e}-1)\mathrm{e}^k - 1$.

(e) En déduire que si $n = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil$, $\dfrac{U_n(I \mod 1)}{n} \geqslant \dfrac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1}-1)-(k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}+1}$.

(f) En comparant la limite du minorant obtenu à la question précédente à $\frac{1}{2}$, en déduire que (u_n) n'est pas équirépartie modulo 1.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$, et $u_n = n^\alpha$, pour $n \geqslant 1$. Soit $I = [a, b[\subset [0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$,

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant \frac{\sum_{\ell=0}^{k} (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

(b) On rappelle qu'une fonction f est convexe sur un intervalle si pour tout $x < y$ de cet intervalle et $\lambda \in]0,1[$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. En admettant la convexité de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ (du fait que $\frac{1}{\alpha} > 1$), montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (b-a)\left((a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$,

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n(I \mod 1)}{n} = b - a$ et conclure.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le résultat de la question précédente pour les 3 intervalles $[0, a[$, $[a, b[$ et $[b, 1[$ pour trouver une contradiction.

Question subsidiaire : Si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante de limite $+\infty$, de pas $p_n = u_{n+1} - u_n$ décroissant de limite nulle et vérifiant, pour un certain réel $K > 0$ et un certain réel $\alpha \in]0,1[$, l'inégalité $p_n \geqslant \frac{K}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle équirépartie modulo 1 ?