

DM n° 5 : Réels

Correction du problème 1 – (Premier pas vers la transcendance de e)

1. Irrationalité de e.

(a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq q + 1$. Pour tout $i \in \llbracket 1, q + 1 \rrbracket$, $i \leq i + n - 1 - q$, donc

$$(q + 1)! \leq (n - q)(n + 1 - q) \cdots n = \frac{n!}{(n - 1 - q)!}$$

Ainsi,

$$\frac{(q + 1)!}{n!} \leq \frac{1}{(n - 1 - q)!}.$$

On en déduit que pour tout $N \geq q + 1$

$$\sum_{n=q+1}^N \frac{(q + 1)!}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^N \frac{1}{(n - 1 - q)!} = \sum_{n=0}^{N-q-1} \frac{1}{n!}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (les convergences étant admises dans l'énoncé), il vient :

$$(q + 1)! \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

soit :

$$\boxed{\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{e}{(q + 1)!}}.$$

(b) Supposons que $e = \frac{p}{q}$, où p et q sont entiers, avec $q + 1 > e$.

Puisque la somme exponentielle de paramètre 1 est à termes strictement positifs, ses sommes partielles sont strictement inférieures à sa somme totale, d'où la première inégalité :

$$\boxed{\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < e = \frac{p}{q}}$$

Par ailleurs :

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

et on déduit alors de la question 1 que :

$$\frac{p}{q} \leq \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{e}{(q + 1)!}.$$

L'hypothèse $q + 1 > e$ permet de conclure :

$$\boxed{\frac{p}{q} < \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{1}{q!}}.$$

- (c) Notons $A = q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$. Comme pour tout $n \leq q$, $n!$ divise $q!$, on peut affirmer que A est entier. Par ailleurs, en multipliant l'encadrement de la question précédente par $q!$, il vient :

$$A < p(q-1)! < A + 1.$$

Ainsi, $p(q-1)!$ est un entier, strictement encadré par deux entiers consécutifs. Ceci est une contradiction. On en déduit que $\boxed{e \text{ ne peut pas être rationnel}}$.

2. Indépendance sur \mathbb{Q} de 1, e et e^2

- (a) Par hypothèse, il existe des rationnels tels que $p + qe + re^2 = 0$. Pour de tels rationnels, on a alors

$$q = -re - pe^{-1}.$$

En multipliant par le ppcm des 3 dénominateurs de q , r et p , on obtient alors 3 entiers a , b et c non tous nuls tels que

$$\boxed{c = ae + be^{-1}}.$$

Par ailleurs, si a est nul, on a nécessairement b et c non nuls (la nullité de l'un entraînerait alors la nullité de l'autre). On en déduit que $e = \frac{b}{c}$, ce qui contredit l'irrationalité de e . Ainsi, $\boxed{a \neq 0}$. On montre de même que $\boxed{b \neq 0}$.

- (b) On a

$$c = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = a \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + d_n,$$

où

$$d_n = a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + b \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On a donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|d_n| \leq (|a| + |b|) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

On conclut alors à l'aide de la question 1(a) :

$$|d_n| \leq \frac{(|a| + |b|)e}{(n+1)!}.$$

- (c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq n!|d_n| \leq \frac{(|a| + |b|)e}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $(n!|d_n|)$ admet une limite, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n!|d_n| = 0 \quad \text{soit:} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n!d_n = 0}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(c \cdot n! - n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right) = 0.$$

Or, cette expression est entière. Une suite d'entiers ne peut converger que si elle est stationnaire égale à sa limite à partir d'un certain rang (car, à partir d'un certain rang, elle doit s'approcher de cette limite à moins de $\frac{1}{2}$, ce qui ne laisse pas de choix, puisqu'il n'y a qu'un entier au plus dans l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$).

On en déduit que pour n assez grand :

$$c \cdot n! - n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) = 0 \quad \text{donc:} \quad \boxed{c = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$

(d) Pour tout n assez grand (c'est-à-dire supérieur à un certain N), on a donc

$$c = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

et en faisant la différence des deux expressions :

$$0 = a \cdot \frac{1}{n!} + b \cdot \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \text{soit:} \quad \boxed{a \cdot \frac{1}{n!} = b \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n!}}.$$

(e) Ceci est vrai pour tout n assez grand, en particulier pour des valeurs pairs, et pour des valeurs impaires de n . On en déduit que a et b sont de même signe, et de signe opposé, ce qui n'est possible que si l'un est nul. Cela contredit une des affirmations précédentes.

Ainsi, e n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

Correction du problème 2 – Développement d'un réel comme limite de fractions égyptiennes

Partie I – Décomposition d'un rationnel comme fraction égyptienne

1. L'ensemble $E = \{a \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{a} \leq x\}$ est non vide ; En effet, $\frac{1}{a} \rightarrow 0$ et $x > 0$, donc $\frac{1}{a} \leq x$ pour a assez grand.

Ainsi, E est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , donc admet un plus petit élément a_0 .

De plus, $\frac{1}{a_0} \leq x < 1$, donc $a_0 > 1$, et comme a_0 est entier, on en déduit que $a_0 \geq 2$.

On peut aussi plus simplement remarquer que si $x = \frac{p}{q}$, alors $\frac{1}{q} \in E$.

2. Comme a_0 est dans E , $\frac{1}{a_0} \leq x = \frac{p}{q}$, donc $q \leq a_0 p$ (puisque $a_0 > 0$, donc $0 \leq a_0 p - q$).

Par ailleurs, par minimalité, $a_0 - 1 \notin E$ et $a_0 - 1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $\frac{1}{a_0 - 1} > \frac{p}{q}$, d'où on tire $a_0 p - q < p$.

Les deux inégalités montrent bien l'encadrement

$$\boxed{0 \leq p a_0 - q < p}.$$

3. On fait une récurrence forte. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(p)$ la propriété suivante : pour tout $q > p$, $\mathcal{P}\left(\frac{p}{q}\right)$ est vraie.

- Initialisation : soit $p = 1$. On a alors $x = \frac{1}{p}$, qui se décompose en fraction égyptienne constituée d'un unique terme.
- Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(p')$ soit vraie pour tout $p' < p$. Soit $q > p$. On considère a_0 comme dans la question 1. On a alors

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 p - q}{q a_0}.$$

Or, $0 \leq a_0 p - q < p$.

* Si $a_0 p - q = 0$, alors on dispose d'une décomposition en fraction égyptienne avec un unique terme.

* Sinon, on peut appliquer $\mathcal{P}(a_0 p - q)$, qui nous donne des entiers $a_1 < \dots < a_n$ tels que

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{a_0} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

Pour terminer de prouver le résultat, il suffit de montrer que $a_0 < a_1$. Cela provient du fait que

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} \leq x < \frac{1}{a_0 - 1}.$$

En ne considérant que les termes extrémaux, et en multipliant par $a_1 a_0 (a_0 - 1)$, il vient

$$a_1(a_0 - 1) + a_0(a_0 - 1) < a_1 a_0, \quad \text{soit:} \quad a_0(a_0 - 1) < a_1$$

puisque $a_0 - 1 \geq 1$, on obtient bien $a_0 < a_1$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Cela prouve bien que tout rationnel de $]0, 1[$ se décompose en fraction égyptienne.

4. • On a par exemple $\boxed{\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$.
- On a $\boxed{\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$.

Partie II – Développement d'un irrationnel par les fractions égyptiennes

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que a_n est bien définie. Par commodité, on note E_n l'ensemble dont on prend le minimum dans la définition de a_n .
- Puisque $x > 0$, et par limite de $\frac{1}{n}$ en $+\infty$, il existe $a \geq 1$ tel que $\frac{1}{a} < x$. Donc E_0 est non vide, et c'est un sous-ensemble de \mathbb{N} . Il admet donc un minimum.
- Là aussi, l'argument alternatif donné dans la partie I peut s'adapter, en utilisant la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} : on trouve un rationnel $\frac{p}{q}$ entre 0 et x , puis on considère $\frac{1}{q}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons a_0, \dots, a_{n-1} construits par la méthode précédente. Montrons qu'on peut alors bien construire aussi a_n . Par définition de a_{n-1} , on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} \leq x.$$

Cette inégalité est nécessairement stricte, sinon x s'écrirait comme somme finie de rationnels et serait donc lui-même rationnel. Soit alors

$$= x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} > 0.$$

Toujours par limite de $\frac{1}{n}$, il existe a tel que $\frac{1}{a} \leq \varepsilon$, donc E_n est non vide. Comme c'est un sous-ensemble de \mathbb{N} , il admet un minimum. Cela justifie que a_n est bien défini.

- Par principe de récurrence, la suite infinie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, donc la construction est infinie.
2. • L'inégalité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x$ provient de la définition de a_n , le caractère stricte venant du fait que x est irrationnel (comme dans la question précédente).
- Par minimalité de a_n dans E_n , on en déduit que $a_n - 1 \notin E_n$. Remarquez que $a_n - 1$ est dans \mathbb{N}^* . En effet, puisque $x < 1$, $a_n \geq 2$.
- Ainsi, puisque $a_n - 1 \notin E_n$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - 1} > x}.$$

3. L'inégalité $a_n \geq 2$ a été justifiée ci-dessus.

On a alors

$$\frac{1}{a_n - 1} - \frac{2}{a_n} = \frac{a_n - 2(a_n - 1)}{a_n(a_n - 1)} = \frac{2 - a_n}{a_n(a_n - 1)} \leq 0.$$

Donc $\frac{2}{a_n} \geq \frac{1}{a_n - 1}$

4. On a donc, d'après les deux questions précédentes,

$$x < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - 1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{2}{a_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n}.$$

Comme de plus,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < x,$$

on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n},$$

d'où

$$\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} \quad \text{soit:} \quad \boxed{a_{n+1} > a_n}.$$

Comme il d'agit d'une suite d'entiers, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n + 1$. Une récurrence immédiate amène $a_n \geq n$, donc $\boxed{\lim a_n = +\infty}$.

5. De l'encadrement

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n},$$

on déduit :

$$x - \frac{1}{a_n} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x.$$

Puisque $a_n \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement montre que la somme converge lorsque $n \rightarrow +\infty$, et que sa limite vaut x , c'est-à-dire :

$$\boxed{x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}}$$

Partie III – Développement infini d'un rationnel

1. Soit $a \geq 2$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k} = \frac{1/a}{1 - 1/a} = \frac{1}{a-1}.$$

Ainsi, tout $\frac{1}{a-1}$, pour $a \geq 2$, admet un développement infini en fractions égyptiennes. en effectuant un changement de variable, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{N}$ admet un développement infini en fractions égyptiennes. On obtient même un peu plus que demandé ($N = 1$ en plus, mais cela sort un peu de notre domaine d'étude qui est $]0, 1[$).

2. Considérons un développement fini de x , terminant par $\frac{1}{a_n}$ (il en existe un par la partie I). On remplace alors $\frac{1}{a_n}$ par $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(a_n+1)^k}$. Les entiers considérés dans cette somme sont bien dans l'ordre strictement croissant, et plus grands que les a_k , $k \leq n$, car plus grands que a_n qui était le plus grand d'entre eux. Donc il s'agit bien d'un $\boxed{\text{développement infini en fractions égyptiennes}}$.

3. La preuve de la partie II aurait pu s'adapter en considérant une $\boxed{\text{inégalité stricte}}$ à la place d'une inégalité large dans l'ensemble à partir duquel on définit a_n . Ainsi, l'égalité n'est obtenue à aucune étape, et la construction ne s'arrête pas, mais converge tout de même par la même démonstration que dans II (il faut juste mettre des inégalités larges à droite cette fois).

On pourrait montrer plus généralement que tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet un développement en fractions égyptiennes. Cela découle de la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, qui nous assure que n'importe quel réel pourra être franchie comme somme d'inverses d'entiers distincts. On trouve d'abord N maximal tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} < x$, puis la construction se déroule comme dans la partie II.

Correction du problème 3 –

1. **Convergence de la série définissant c**

$$\text{Soit, pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}.$$

(a) On peut faire la comparaison de deux manières, soit en rajoutant des termes $10^{-\ell}$ manquant entre les termes présents, soit en majorant chacun des termes $10^{-k!}$ par 10^{-k} . On obtient alors (en prenant la deuxième méthode) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n 10^{-k!} \leq \sum_{k=0}^n 10^{-k} = \frac{1 - 10^{-n+1}}{1 - 10^{-1}} \leq \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{10}{9}.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

(b) Elle est aussi croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = 10^{-(n+1)!} \geq 0.$$

Ainsi, étant croissante et majorée, (S_n) est convergente, donc $c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ est bien défini.

2. Irrationalité de c

(a) On utilise ici plutôt la première des majorations suggérées dans la première question. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $N > n$. On a alors :

$$\sum_{k=n+1}^N 10^{-k!} \leq \sum_{\ell=(n+1)!}^{(N+1)!} 10^{-\ell} = 10^{-(n+1)!} \frac{1 - 10^{-(N+1)!+(n+1)!-1}}{1 - 10^{-1}} \leq 10^{-(n+1)!} \cdot \frac{10}{9},$$

d'où finalement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.$$

(b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. On a

$$\frac{p}{q} 10^{n!} = c 10^{n!} = S_n 10^{n!} + 10^{n!} \sum_{k=n+1}^N 10^{-k!},$$

donc

$$q S_n 10^{n!} < p 10^{n!} \leq q S_n 10^{n!} + \frac{10^{n!} q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}} = q S_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-n!-1}} = q S_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}}.$$

Comme $\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on en déduit qu'il existe une valeur de n telle que

$$\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} < 1,$$

et donc

$$q S_n 10^{n!} < p 10^{n!} < q S_n 10^{n!} + 1.$$

Ainsi, l'entier $p 10^{n!}$ est strictement encadré entre deux entiers consécutifs ($S_n 10^{n!}$ étant entier comme somme des entiers $10^{n!-k!}$, avec $n! - k! \geq 0$). Ceci est impossible.

On en déduit que c est irrationnel.

3. Inégalité des accroissements finis

On peut soit utiliser l'inégalité triangulaire intégrale, soit (si vous ne la connaissez pas) revenir à un encadrement de f' : pour tout $x \in [a, b]$,

$$-M \leq f'(x) \leq M,$$

et par croissance de l'intégrale,

$$-\int_a^b M \, dx \leq \int_a^b f'(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx, \quad \text{soit:} \quad -(b-a)M \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)M.$$

On a bien obtenu

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a) \quad \text{soit:} \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|,$$

puisque $b-a > 0$. Si $b < a$, on obtient la même chose (il suffit d'inverser le rôle de a et b , et de remarquer que du fait des valeurs absolues, l'expression est symétrique en a et b), et pour $a = b$, le résultat est trivial.

4. Théorème de Liouville (approximation diophantienne)

Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geq 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, on ait : $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}$.

Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.

On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

- (a) Soit $E = \{\deg P \mid P \in \mathbb{Z}[X], P \neq 0, P(\alpha) = 0\}$. C'est un sous-ensemble non vide (car α est algébrique) de \mathbb{N} . D'après la propriété fondamentale de \mathbb{N} , E admet un minimum d . Comme $d \in E$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$, de degré minimal, tel que $d = \deg(P)$.
- (b) Le polynôme P ne peut pas être constant non nul, donc $d \neq 0$. Si $d = 1$, il existe a et b des entiers tels que $a\alpha + b = 0$, donc $\alpha = -\frac{b}{a}$, ce qui contredit le fait que α n'est pas rationnel. Ainsi, $d \geq 2$.
- (c) Si P admet une racine rationnelle q , on peut factoriser P :

$$P = (X - q)Q = (X - q)(a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0),$$

et en notant $P = b_dX^d + \dots + b_1X + b_0$, les b_i étant entiers, on obtient :

$$a_{d-1} = b_d \quad \forall k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket, \quad a_{k-1} - a_kq = b_k \quad - a_0q = b_0.$$

L'équation $a_{d-1} = b_d$ nous assure que a_{d-1} est rationnel, puis $a_{d-2} = b_{d-1} + qa_{d-1}$ est aussi rationnel, puis également $a_{d-3} = b_{d-2} + qa_{d-2}$ etc. Ainsi, le polynôme Q est à coefficients rationnels. Par ailleurs, puisque $P(\alpha) = 0$ et $(\alpha - q) \neq 0$, il vient $Q(\alpha) = 0$. Ainsi, α est racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré $d-1$. Quitte à multiplier par le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q , on obtient donc un polynôme à coefficients entiers de degré $d-1$ dont α est racine, ce qui contredit la minimalité du degré de P .

Ainsi, P ne peut pas admettre de racine rationnelle.

- (d) En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^d q^d b_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \sum_{k=0}^d b_k p^k q^{d-k}.$$

Tous les exposants étant positifs, les termes de cette somme sont tous entiers, donc $q^d P\left(\frac{p}{q}\right)$ est un entier. Par ailleurs, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*$, donc $\left|q^d P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1$.

- (e) La fonction P' est continue sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ (en tant que fonction polynomiale), donc elle est bornée sur cet intervalle d'après le résultat admis. Soit M un majorant de $|P'|$ sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. Soit alors $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors M est aussi un majorant de P' entre α et $\frac{p}{q}$, et P est dérivable de dérivée continue entre ces bornes. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Puisque $P(\alpha) = 0$, et d'après la question précédente, il vient

$$\frac{1}{q^d} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, on obtient :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^d}.$$

Remarquez la nécessité de choisir M avant α (pour qu'il ne dépende pas de α), et donc de devoir travailler dans un premier temps dans un intervalle fermé borné $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ de longueur fixe. On récupère le cas de \mathbb{R} tout entier dans la question suivante.

- (f) Posons $A = \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
- Si $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^d} \geq \frac{1}{Aq^d}$.
 - Sinon, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^d} \geq \frac{1}{Aq^d}$, puisque $A \leq 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer le théorème de Liouville.

5. Transcendance de c

On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel x tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}), \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^n}.$$

- (a) Supposons que x est algébrique (et non rationnel d'après l'hypothèse). Il existe alors d'après le théorème de Liouville un entier d et un réel $A > 0$, qu'on se donne, tels que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}$. On se donne également une suite (p_n, q_n) telle que dans la définition d'un nombre de Liouville. On a alors, pour tout $n \geq d$,

$$\frac{A}{(q_n)^d} \leq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^n} = \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{(q_n)^{n-d}} \leq \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{2^{n-d}},$$

et en ne gardant que les termes extrêmes, il vient :

$$\forall n \geq d, A \leq \frac{1}{2^{n-d}}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $A \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse $A > 0$.

Ainsi, un nombre de Liouville est transcendant.

- (b) Montrons que c est un nombre de Liouville. On a déjà montré dans la question 2 qu'il est irrationnel. Par ailleurs, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement obtenu au cours de cette question s'écrivait :

$$S_n \leq c \leq S_n + 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9}.$$

Comme $10^n S_n$ est entier, on peut écrire $S_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $p_n \in \mathbb{Z}$, et $q_n = 10^{n!} \geq 2$. On a alors

$$0 \leq c - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{n!(n+1)-1}} = \frac{1}{q_n^n} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{n!-1}} \leq \frac{1}{q_n^n}.$$

Ainsi, c est un nombre de Liouville, donc c est transcendant.