Renseignements généraux

1. Concours : ENS Info
2. Matière : maths ULCR
3. NOM Prénom : Killian Dengreville

Exercice 1 Étudier les points de continuité des applications de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ suivantes

1. $f \overset{H_1}{\longmapsto} \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \\ p\wedge q=1 \\ \frac{p}{q}\in]0,1[}} \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{q^3}$
2. $f \overset{H_2}{\longmapsto} g\,(\sup f)$ où $\mathbb{R} \overset{g}{\longmapsto} \mathbb{R}$ croissante
3. $f \overset{H_3}{\longmapsto} \inf\{t \in [0,1], f(t) = \sup f\}$

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^tA = I_n$. Montrer que $\det A > 0$

Remarque 1 Le premier exercice est plutôt sympathique tout en demandant quand même quelques initiatives. L'examinateur est sympathique et m'aide quand mes explications ne sont pas claires.

1. H_1 est linéaire, on s'empresse de majorer $|H_1(f)|$ par

$$\|f\|_\infty \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^3} \leq \frac{\pi^2}{6}\|f\|_\infty$$

   H_1 est ainsi lipschitzienne donc continue

2. H_2 est continue exactement en les fonctions f telles que g est continue en $\max f$. H_2 n'est pas lipschitzienne, on ne se jette pas encore sur le caractère lipschitzien comme je l'ai fait

(i) on vérifie la continuité par critère séquentiel, si g est continue en $\max f$ et $f_n \underset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ alors avec $f(t) = \max f$ et $f_n(t_n) = \max f_n$

$$f_n(t) \leq f_n(t_n) \leq f_n(t_n) + \|f_n - f\|_\infty \leq f_n(t) + \|f_n - f\|_\infty$$

g est croissante donc

$$g(f_n(t)) \leq H_2(f_n) \leq g(f_n(t) + \|f_n - f\|_\infty)$$

g est continue en $\max f$ d'où par encadrement $H_2(f_n) \to H_2(f)$

(ii) pour la non continuité de H_2 en f si g n'est pas continue en $m = \max f$, on suppose par exemple $g(m^-) \neq g(m)$. Alors

$$H_2(f - \varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} g(m^-) \neq H_2(f)$$

3. H_3 est continue exactement en les fonctions f qui atteignent leur maximum en un unique point.

(i) On utilise la définition de la continuité pour montrer la continuité de H_3 en f avec un unique maximum en t. Soit $\varepsilon > 0$

$$m = \max f([0, t-\varepsilon] \cup [t+\varepsilon, 1]) < \max f$$

Si $0 < \delta < \frac{\max f - m}{2}$ et $\|g - f\|_\infty \leq \delta$ alors $H_3(g) \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, c'est ce qu'on veut.

(ii) Pour la non continuité, si $f(t) = \max f$ et $t > H_3(f)$ alors avec h la fonction affine par morceaux valant $-\varepsilon$ en 0 et 1 et 0 en t on a

$$\|(f+h) - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

mais $H_3(f+h) = t$ et on fait $\varepsilon \to 0$

Remarque 2 Le second exercice est surtout là pour meubler les dernières dix minutes dans lesquelles il n'était pas possible de commencer un exo conséquent.

Solution proposée Si $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors

$$\langle AX, X \rangle = \left\langle \frac{A + {}^tA}{2} X, X \right\rangle = \frac{1}{2}\|X\|^2 > 0$$

Les valeurs propres réelles de A sont donc strictement positives (et $\ker A = \{0\}$). On trigonalise A dans $\mathbb{C}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ ses valeurs propres réelles et $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \bar{\alpha}_p$ ses valeurs propres complexes non réelles qui viennent par paires conjuguées car A est réelle. Ainsi

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_r |\alpha_1|^2 \ldots |\alpha_p|^2 > 0$$

Solution de l'examinateur $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A + {}^tA = I_n\}$ est un sous espace affine de matrices inversibles donc connexe par arcs qui contient $\frac{I_n}{2}$ de déterminant positif. Comme det est continue, elle ne peut pas changer de signe (les matrices de V sont inversibles) donc $\det A > 0$