DIMENSION FINIE CORRECTION

Exercice 2

1. *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les coefficients de la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soient tous nuls sauf le deuxième qui vaut 1.*

   Un exercice classique, traité en TD, nous dit que si $\big(x, u(x)\big)$ est liée pour tout $x \in E$, alors u est une homothétie. Comme ce n'est pas le cas, on peut affirmer qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, u(x)\big)$ soit libre. Le théorème de la base incomplète nous permet de compléter cette famille libre en une base $\mathscr{B} = \big(x, u(x), e_3, \ldots, e_n\big)$ de E. Dans cette base, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

   Donc

$$\boxed{\text{il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ telle que les coefficients de la première colonne de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ soient tous nuls sauf le deuxième qui vaut } 1.}$$

2. *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, toute matrice de $M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.*

   Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « toute matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. ».

   <u>Initialisation :</u> Une matrice 1×1 de trace nulle est la matrice nulle de $\mathscr{M}_1(K)$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Fixons $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice de trace nulle. Notons u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A. Si $u = \widetilde{0}$, $\mathscr{P}(n)$ est une évidence. Si $u \neq \widetilde{0}$, alors u n'est pas une homothétie (la seule homothétie de trace nulle est l'endomorphisme nul). La première question nous dit alors qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de K^n dans laquelle la matrice M de u est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & & & \\ 0 & & M' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

   Si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on note $M' = (m_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice extraite de M en retirant la première ligne et la première colonne. Comme M est de trace nulle (puisqu'elle représente u qui est lui-même de trace nulle) et comme $m_{1,1} = 0$, la matrice M' est de trace nulle. D'après l'hypothèse de récurence $\mathscr{P}(n-1)$, la matrice M' est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Autrement dit, il existe $P' \in \mathscr{GL}_{n-1}(K)$ et $N' \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$ telles que $M' = P'N'P'^{-1}$ où tous les coefficients diagonaux de N' sont nuls. On pose alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P'^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et

$$N := P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & M' & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

La matrice N est alors semblable à M et donc aussi à A et tous les coefficients diagonaux de la matrice N sont nuls. Cela démontre que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

> pour tout $n \geqslant 1$, toute matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 1

Soient $p, q \geqslant 3$. Une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est dite harmonique lorsque tout coefficient qui n'est pas sur le bord est la moyenne de ses quatre voisins, c'est-à-dire $a_{i,j} = (a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1})/4$ pour tout $(i,j) \in [\![2; p-1]\!] \times [\![2; q-1]\!]$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices harmoniques.

1. *Justifier que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ tel que $\dim \mathscr{H} \geqslant pq - (p-2)(q-2)$.*

   On peut bien sûr démontrer à la main que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ mais cela ne donne pas la minoration de la dimension. On préfère donc remarquer que $\mathscr{H}$ est le noyau de l'application linéaire φ définie par

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(p-2)(q-2)} \\ A & \longmapsto & \left(a_{i,j} - \dfrac{a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}}{4} \right)_{(i,j) \in [\![2;p-1]\!] \times [\![2;q-1]\!]} \end{array} \right.$$

   Dès lors, $\mathscr{H}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et, d'après le théorème du rang, on a $\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) - \operatorname{rg} \varphi \geqslant \dim \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) - \dim \mathbb{R}^{(p-2)(q-2)} = pq - (p-2)(q-2)$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \dim \mathscr{H} \geqslant pq - (p-2)(q-2).}$$

2. a) *Démontrer que les valeurs extrémales des coefficients d'une matrice harmonique sont nécessairement atteintes sur son bord.*

   Soit $A \in \mathscr{H}$. Notons $a_{i,j}$ un coefficient dont la valeur est extrémale parmi les coefficients de la matrice. Si $a_{i,j}$ est sur le bord, notre résultat est établi. Sinon, ce coefficient est la moyenne arithmétique de ses quatre voisins $a_{i-1,j}$, $a_{i,j-1}$, $a_{i+1,j}$ et $a_{i,j+1}$. Comme $a_{i,j}$ est supérieur ou égal (ou inférieur ou égal) à chacun de ces quatre termes, on a nécessairement $a_{i-1,j} = a_{i,j-1} = a_{i+1,j} = a_{i,j+1} = a_{i,j}$. En itérant ce raisonnement, on démontre alors que tous les coefficients de la matrice (sauf éventuellement les quatre coins $a_{1,1}$, $a_{p,1}$, $a_{1,q}$ et $a_{p,q}$) sont égaux. En particulier, les coefficients du bord (sauf les coins) sont égaux à $a_{i,j}$ donc de valeur extrémale. On a donc bien démontré que

   > les valeurs extrémales des coefficients d'une matrice harmonique sont nécessairement atteintes sur son bord.

b) *En déduire qu'il existe une matrice harmonique et une seule de bord donné et préciser la dimension de $\mathscr{H}$.*

Notons $\mathfrak{B}_A$ le bord d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la famille de $\mathbb{R}^{pq-(p-2)(q-2)}$ donnée par $\mathfrak{B}_A = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,q}, a_{2,q}, \ldots, a_{p,q}, a_{p,q-1}, \ldots, a_{p,1}, a_{p-1,1}, \ldots, a_{2,1})$. On considère alors l'application linéaire

$$\psi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{pq-(p-2)(q-2)} \\ A & \longmapsto & \mathfrak{B}_A \end{array} \right.$$

autrement dit l'application qui associe, à toute matrice harmonique, son bord.
Démontrons que ψ est injective. Pour cela, considérons A un élément du noyau de ψ, c'est-à-dire une matrice harmonique dont le bord est nul. Comme la plus petite et la plus grande des valeurs des coefficients de A sont sur ce bord (d'après la question précédente), on en déduit que ces valeurs extrémales sont nulles et donc que la matrice A est nulle. Cela signifie que $\operatorname{Ker} \psi = \{0\}$ et donc que ψ est bien injective.
Cette injectivité nous dit alors que $\dim \mathscr{H} \leqslant \dim \mathbb{R}^{pq-(p-2)(q-2)} = pq - (p-2)(q-2)$. Comme l'inégalité contraire a été démontrée à la première question, on en déduit que

$$\boxed{\dim \mathscr{H} = pq - (p-2)(q-2).}$$

On en déduit alors que ψ est un isomorphisme (en tant qu'application linéaire injective entre deux espaces de mêmes dimensions). En particulier, la surjectivité de ψ nous dit qu'

$$\boxed{\text{il existe une matrice harmonique et une seule de bord donné.}}$$

3. *Déterminer un supplémentaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.*

Notons $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont le bord est nul. C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Comme la seule matrice harmonique de bord nul est la matrice nulle (d'après la question 2), on a $\mathscr{H} \cap \mathscr{N} = \{0\}$.
Par ailleurs, $\mathscr{N}$ est de dimension $(p-2)(q-2)$. Cela se justifie en disant que la famille des matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $2 \leqslant i \leqslant p-1$ et $2 \leqslant q \leqslant q-1$ est, de façon claire, une base de $\mathscr{N}$ ou encore en constatant que l'application qui, à une matrice réelle $p \times q$ fait correspondre la matrice $(p-2) \times (q-2)$ obtenue en retirant le bord réalise un isomorphisme entre $\mathscr{N}$ et $\mathscr{M}_{p-2,q-2}(\mathbb{R})$. Par suite, on a $\dim \mathscr{H} + \dim \mathscr{N} = pq = \dim \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
En combinant ces informations, on en déduit que $\mathscr{H} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{l'ensemble } \mathscr{N} \text{ des matrices réelles } p \times q \text{ dont le bord} \\ \text{est nul est un supplémentaire de } \mathscr{H} \text{ dans } \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}).\end{array}}$$