OUTILS D'ANALYSE CORRECTION

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = (t - t^2)^n$ et $I_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$.

1. a) *Calculer I_0 et I_1.*

On a

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \pi\Big[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big]_0^1 = \pi\Big(-\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\Big) = 2.$$

Par ailleurs, en effectuant des intégrations par parties, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
I_n & = & \pi^3 \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(t-t^2)}_{u}\underbrace{\sin(\pi t)}_{v'}\,\mathrm{d}t \\
& = & \pi^3 \underbrace{\Big[t(1-t)\Big(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big)\Big]_0^1}_{=0} - \pi^3 \displaystyle\int_0^1 (1-2t)\Big(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big)\,\mathrm{d}t \\
& = & \pi^2 \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(1-2t)}_{u}\underbrace{\cos(\pi t)}_{v'}\,\mathrm{d}t \\
& = & \pi^2 \underbrace{\Big[(1-2t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Big]_0^1}_{=0} - \pi^2 \displaystyle\int_0^1 (-2)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\,\mathrm{d}t \\
& = & 2\pi \displaystyle\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \\
& = & 2\pi\Big[-\dfrac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big]_0^1 \\
& = & 2\pi\Big(-\dfrac{-1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\Big) \\
& = & 4.
\end{array}$$

Donc

$$\boxed{I_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad I_1 = 4.}$$

b) *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$ et en déduire que $I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}$.*

La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme tout bon polynôme qui se respecte. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
f_n''(t) & = & n(-2)(t-t^2)^{n-1} + n(1-2t)(n-1)(1-2t)(t-t^2)^{n-2} \\
& = & -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)(1-2t)^2(t-t^2)^{n-2} \\
& = & -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)\big(1-4(t-t^2)\big)(t-t^2)^{n-2} \\
& = & -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)\big((t-t^2)^{n-2} - 4(t-t^2)^{n-1}\big) \\
& = & -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t) - 4n(n-1)f_{n-1}(t),
\end{array}$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t).}$$

En effectuant des intégrations par parties (là encore, on dérive le polynôme et on primitive les fonctions trigonométriques), on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 \underbrace{f_n(t)}_{u}\underbrace{\sin(\pi t)}_{v'}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\underbrace{\Big[f_n(t)\Big(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big)\Big]_0^1}_{=0} - \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n'(t)\Big(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 \underbrace{f_n'(t)}_{u}\underbrace{\cos(\pi t)}_{v'}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\underbrace{\Big[f_n'(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Big]_0^1}_{=0} - \frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 f_n''(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 \big(-2n(2n-1)f_{n-1}(t)+n(n-1)f_{n-2}(t)\big)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après ci-dessus}\\
&= \frac{2(2n-1)\pi^{2n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 f_{n-1}(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi^{2n-1}}{(n-2)!}\int_0^1 f_{n-2}(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= 2(2n-1)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{I_n = 2(2n-1)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}.}$$

2. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que $\forall t\in[0;1]\,,\ 0\leqslant f_n(t)\sin(\pi t)\leqslant 1/4^n$ puis que $0\leqslant I_n\leqslant \pi^{2n+1}/(4^n n!)$.*

On a vu en cours que $\forall t\in[0;1]\,,\ 0\leqslant t(1-t)\leqslant 1/4$. Par ailleurs, pour tout $t\in[0;1]$, on a $0\leqslant \sin(\pi t)\leqslant 1$. En multipliant ces encadrements (ce qui est licite puisque tout est positif), on obtient

$$\boxed{\forall t\in[0;1]\,,\qquad 0\leqslant f_n(t)\sin(\pi t)\leqslant \frac{1}{4^n}\cdot}$$

On en déduit tout de suite que

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t\leqslant \int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$0\leqslant \int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{4^n}\cdot$$

En multipliant cet encadrement par la quantité positive $\pi^{2n+1}/n!$, on obtient

$$\boxed{0\leqslant I_n\leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}\cdot}$$

3. *Dans cette question, on utilise les résultats des questions 1 et 2 afin de démontrer que π est un nombre irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que π est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$ tel que $\pi=a/b$.*

   a) *Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ b^n I_n\in\mathbb{Z}$.*

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

   $$\mathscr{P}(n):\quad b^n I_n\in\mathbb{Z}.$$

   Initialisation : On a $b^0 I_0 = 2\in\mathbb{Z}$ et $b^1 I_1 = 4b\in\mathbb{Z}$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
   Hérédité : Fixons $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ tel que $\mathscr{P}(n-2)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n)$. D'après le résultat de la question 1. b), on a

   $$\begin{aligned}
   b^n I_n &= 2b(2n-1)b^{n-1}I_{n-1}-(\pi b)^2 b^{n-2}I_{n-2}\\
   &= \underbrace{2b(2n-1)}_{\in\mathbb{Z}}\ \underbrace{b^{n-1}I_{n-1}}_{\in\mathbb{Z}\text{ par }\mathscr{P}(n-1)} - \underbrace{a^2}_{\in\mathbb{Z}}\ \underbrace{b^{n-2}I_{n-2}}_{\in\mathbb{Z}\text{ par }\mathscr{P}(n-2)}\\
   &\in \mathbb{Z},
   \end{aligned}$$

   ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire

   $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad b^n I_n\in\mathbb{Z}.}$$

b) *Démontrer que la suite $(b^n I_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. On pourra utiliser le fait que, pour tout $c > 0$, la suite $(c^n/n!)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 (on dit que la factorielle l'emporte sur toutes les suites géométriques).*

En multipliant l'encadrement de la question 2 par la quantité positive b^n, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant b^n I_n \leqslant \pi \frac{(\pi^2 b/4)^n}{n!}\cdot$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \text{ (pardi !)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\pi^2 b/4)^n}{n!} = 0,$$

où la seconde limite découle du fait que la factorielle l'emporte sur toutes les suites géométriques, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b^n I_n = 0.}$$

c) *Justifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ stationne à la valeur 0 et aboutir à une contradiction.*

La suite $(b^n I_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'entiers qui tend vers 0 donc $(b^n I_n)_{n\geqslant 0}$ stationne à la valeur 0, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ b^n I_n = 0$. Il en découle immédiatement que $\forall n \geqslant N,\ I_n = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{(I_n)_{n\geqslant 0} \text{ stationne à la valeur } 0.}$$

Notons n_0 le premier rang à partir duquel la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ stationne. Comme $I_0 = 2 \neq 0$, on sait que $n_0 \geqslant 1$. Le résultat de la question 2. b) avec $n = n_0 + 1$ nous dit alors que

$$I_{n_0+1} = 2(2n_0+1)I_{n_0} - \pi^2 I_{n_0-1},$$

c'est-à-dire

$$0 = 0 - \pi^2 I_{n_0-1}$$

ou encore

$$I_{n_0-1} = 0.$$

Cela contredit la minimalité de n_0. Absurde ! En conclusion,

$$\boxed{\pi \text{ est un nombre irrationnel.}}$$

Exercice 2.

1. L'équation se réécrit sous la forme

$$(E) \qquad p' + \lambda p = \mu r$$

<u>Solutions homogènes :</u> D'après le cours, les solutions de (E_h) : $p' + \lambda p = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad p_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (A \in \mathbb{R}).$$

<u>Solution particulière :</u> On constate que (E) admet une solution particulière évidente :

$$p_0 = \frac{\mu r}{\lambda}$$

<u>Solutions générales :</u> Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{\mu r}{\lambda} \qquad (A \in \mathbb{R}).$$

<u>Condition initiale :</u> À $t = t_0$, on a

$$p(t_0) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0} + \frac{\mu r}{\lambda}$$

donc

$$A = \left(p(t_0) - \frac{\mu r}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\lambda t_0},$$

ce qui donne

$$\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \left(p(t_0) - \frac{\mu r}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{\mu r}{\lambda}\cdot$$

<u>Calcul de l'âge du tableau :</u> À $t = t_1$, on a

$$p(t_1) = \left(p(t_0) - \frac{\mu r}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 - t_0)} + \frac{\mu r}{\lambda},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{e}^{\lambda(t_1 - t_0)} = \frac{p(t_0) - \dfrac{\mu r}{\lambda}}{p(t_1) - \dfrac{\mu r}{\lambda}}$$

d'où

$$\boxed{t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda p(t_0) - \mu r}{\lambda p(t_1) - \mu r}\right).}$$

2. On a

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{22 \times 365 \times 24 \times 60} \approx 6 \times 10^{-8} \qquad \lambda p(t_1) \approx 8,5 \qquad \mu r \approx 0,8$$

et

$$\lambda p(t_1) \leqslant 25000$$

donc

$$t_1 - t_0 \leqslant \frac{1}{6 \times 10^{-8}} \ln\left(\frac{25000 - 0,8}{8,5 - 0,8}\right) \leqslant 1,35 \times 10^8 \,\mathrm{min},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{t_1 - t_0 \leqslant 257 \,\text{ans.}}$$

On constate donc que *Les disciples d'Emmaüs* a au grand maximum 257 ans alors que Vermeer est mort en 1675, c'est-à-dire environ 300 ans avant 1968. Par conséquent,

$$\boxed{\text{aucun doute, \textit{Les disciples d'Emmaüs} est bien un van Meegeren.}}$$