FRACTIONS RATIONNELLES

On présente ici la démonstration du théorème de décomposition en éléments simples.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif et m, n deux entiers naturels non nuls.

Lemme 1

Soient $A \in K[X]$ et $S_1, \dots, S_n \in K[X]^*$ tels que $S_1, \dots, S_n$ sont premiers entre eux deux à deux. Il existe alors $A_1, \dots, A_n \in K[X]$ tels que

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n} = \frac{A_1}{S_1} + \cdots + \frac{A_n}{S_n}.$$

■ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n) :\ \forall A \in K[X],\ \exists A_1, \dots, A_n \in K[X],\ A/(S_1 \cdots S_n) = A_1/S_1 + \cdots + A_n/S_n$.

Initialisation : $\mathscr{P}(1)$ est clairement vraie avec $A_1 = A$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathscr{P}(n+1)$. Soient $S_1, \dots, S_n, S_{n+1} \in K[X]^*$ premiers entre eux deux à deux. Alors $(S_1 \cdots S_n) \wedge S_{n+1} = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in K[X]$ tels que $S_1 \cdots S_n U + S_{n+1} V = 1$. Il s'ensuit que

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n S_{n+1}} = \frac{A(S_1 \cdots S_n U + S_{n+1} V)}{S_1 \cdots S_n S_{n+1}} = \frac{AU}{S_{n+1}} + \frac{AV}{S_1 \cdots S_n}.$$

Or, d'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $A_1, \dots, A_n \in K[X]$ tels que $(AV)/(S_1 \cdots S_n) = A_1/S_1 + \cdots + A_n/S_n$, donc

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n S_{n+1}} = \frac{AU}{S_{n+1}} + \frac{A_1}{S_1} + \cdots + \frac{A_n}{S_n},$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie en posant $A_{n+1} = AU$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Le lemme suivant permet de se ramener à une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

Lemme 2

Soit $F = A/S$ une fraction rationnelle sur K. Il existe un unique couple $(E, B) \in K[X]^2$ tel que

$$F = E + \frac{B}{S} \qquad \text{et} \qquad \deg(B) < \deg(S).$$

De plus, si A/S est irréductible alors B/S l'est également.

Le polynôme E est appelé la partie entière de F et la fraction rationnelle B/S, qui est de degré strictement négatif, est appelée la partie fractionnaire de F.

■ ▷ Existence La division euclidienne de A par S donne l'existence de $(E, B) \in K[X]^2$ tel que $A = SE + B$ avec $\deg(B) < \deg(S)$. En divisant dans $K(X)$ cette égalité par S, on obtient $F = E + B/S$. De plus, d'après l'algorithme d'Euclide, si $A \wedge S = 1$, on a $B \wedge S = 1$.

▷ Unicité Considérons deux couples $(E, B), (D, C) \in K[X]^2$ tels que l'on ait $F = E + B/S = D + C/S$ avec $\deg(B) < \deg(S)$ et $\deg(C) < \deg(S)$. On a alors $E - D = (C - B)/S$ ce qui implique que $\deg(E - D) = \deg(C - B) - \deg(S) \leqslant \max\{\deg(B); \deg(C)\} - \deg(S) < 0$, d'où $E - D = 0$, c'est-à-dire $E = D$. Il s'ensuit que $B = C$. ■

On peut alors combiner les lemmes 1 et 2 pour obtenir le résultat suivant.

Lemme 3

Soient $A \in K[X]$ et $S_1, \ldots, S_n \in K[X]^*$ tels que $S_1, \ldots, S_n$ sont premiers entre eux deux à deux. Il existe une unique famille $(E, B_1, \ldots, B_n) \in K[X]^{n+1}$ tel que

$$\frac{A}{S_1 S_2 \cdots S_n} = E + \frac{B_1}{S_1} + \cdots + \frac{B_n}{S_n} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad \deg(B_i) < \deg(S_i).$$

De plus, E est la partie entière de $A/(S_1 \cdots S_n)$.

■ Le cas $n = 1$ n'est rien d'autre que le lemme 2. On suppose donc ici que $n \geqslant 2$.

▷ Existence D'après le lemme 1, il existe $A_1, \ldots, A_n \in K[X]$ tels que

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n} = \frac{A_1}{S_1} + \cdots + \frac{A_n}{S_n}.$$

Puis, d'après le lemme 2, il existe $E_1, \ldots, E_n, B_1, \ldots, B_n \in K[X]$ tels que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \frac{A_i}{S_i} = E_i + \frac{B_i}{S_i} \quad \text{et} \quad \deg(B_i) < \deg(S_i).$$

On obtient alors

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n} = E_1 + \frac{B_1}{S_1} + \cdots + E_n + \frac{B_n}{S_n},$$

ce qui donne le résultat attendu en posant $E = E_1 + \cdots E_n$.

De plus, on a

$$\deg\left(\frac{B_1}{S_1} + \cdots + \frac{B_n}{S_n}\right) \leqslant \max\left\{\deg\left(\frac{B_1}{S_1}, \ldots, \frac{B_n}{S_n}\right)\right\} < 0,$$

ce qui démontre, d'après le lemme 2 que E est la partie entière de $A/(S_1 \cdots S_n)$.

▷ Unicité Considérons deux familles $(E, B_1, \ldots, B_n), (D, C_1, \ldots, C_n) \in K[X]^{n+1}$ telles que

$$\frac{A}{S_1 S_2 \cdots S_n} = E + \frac{B_1}{S_1} + \cdots + \frac{B_n}{S_n} = D + \frac{C_1}{S_1} + \cdots + \frac{C_n}{S_n}$$

avec

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \deg(B_i) < \deg(S_i) \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad \deg(C_i) < \deg(S_i).$$

Comme on vient de voir que E et D sont nécessairement la partie entière de $A/(S_1 \cdots S_n)$, on a tout de suite

$$E = D,$$

ce qui donne

$$\frac{B_1}{S_1} + \cdots + \frac{B_n}{S_n} = \frac{C_1}{S_1} + \cdots + \frac{C_n}{S_n} \qquad (*)$$

Posons $T = S_1 \cdots S_{n-1}$ et réduisons au même dénominateur $B_1/S_1, \ldots, B_{n-1}/S_{n-1}$ d'une part et $C_1/S_1, \ldots, C_{n-1}/S_{n-1}$ d'autre part. On obtient ainsi l'existence de $B, C \in K[X]$ tels que

$$\frac{B}{T} + \frac{B_n}{S_n} = \frac{C}{T} + \frac{C_n}{S_n}.$$

Cela implique que $S_n(B - C) = T(C_n - B_n)$, d'où

$$S_n \mid T(C_n - B_n).$$

Or $T \wedge S_n = 1$ donc, d'après le lemme de Gauss, on a

$$S_n \mid C_n - B_n.$$

Par ailleurs, on a

$$\deg(C_n - B_n) \leqslant \max\{\deg(B_n); \deg(C_n)\} < \deg(S_n).$$

Ces deux informations ne sont compatibles que si $C_n - B_n = 0$, c'est-à-dire

$$B_n = C_n.$$

L'égalité $(*)$ devient alors

$$\frac{B_1}{S_1} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{C_1}{S_1} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{S_{n-1}}.$$

Cela permet de réitérer le raisonnement ci-dessus pour démontrer successivement que $B_{n-1} = C_{n-1}$, puis $B_{n-2} = C_{n-2}$, …, puis $B_1 = C_1$. ■

Le lemme suivant, dit lemme des divisions successives, permet de décomposer la partie polaire relative à un polynôme.

Lemme 4

Soient $B \in K[X]$ et $S \in K[X]$ tel que $\deg(S) \geqslant 1$. Il existe une unique famille $(E, T_1, \ldots, T_m) \in K[X]^{m+1}$ telle que

$$\frac{B}{S^m} = E + \frac{T_1}{S} + \cdots + \frac{T_m}{S^m} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;m]\!], \quad \deg(T_i) < \deg(S).$$

De plus, E est la partie entière de B/S^m.

■ ▷ <u>Existence</u> Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{Q}(m)$: $\exists E, T_1, \ldots, T_m \in K[X],\ B/S^m = E + T_1/S + \cdots + T_m/S^m$.

<u>Initialisation :</u> $\mathcal{Q}(1)$ est vraie d'après le lemme 2.

<u>Hérédité :</u> Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(m)$ est vraie et démontrons $\mathcal{Q}(m+1)$. D'après $\mathcal{Q}(m)$, il existe $B_1, T_2, \ldots, T_{m+1} \in K[X]$ tels que

$$\frac{B}{S^m} = B_1 + \frac{T_2}{S} + \cdots + \frac{T_{m+1}}{S^m}$$

avec $\forall i \in [\![2;m+1]\!],\ \deg(T_i) < \deg(S)$. En disant cette égalité par S, on obtient

$$\frac{B}{S^{m+1}} = \frac{B_1}{S} + \frac{T_2}{S^2} + \cdots + \frac{T_{m+1}}{S^{m+1}}.$$

Or, d'après le lemme 2, il existe $E, T_1 \in K[X]$ tels que

$$\frac{B_1}{S} = E + \frac{T_1}{S} \qquad \text{et} \qquad \deg(T_1) < \deg(S).$$

En combinant ces égalités, on obtient

$$\frac{B}{S^{m+1}} = E + \frac{T_1}{S} + \frac{T_2}{S^2} + \cdots + \frac{T_{m+1}}{S^{m+1}},$$

avec $\forall i \in [\![1;m+1]\!],\ \deg(T_i) < \deg(S)$. Cela démontre que $\mathcal{Q}(m+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

De plus, on a

$$\deg\left(\frac{T_1}{S} + \cdots + \frac{T_m}{S^m}\right) \leqslant \max\left\{\deg\left(\frac{T_1}{S}, \ldots, \frac{T_m}{S^m}\right)\right\} < 0,$$

ce qui démontre, d'après le lemme 2 que E est la partie entière de B/S^m.

▷ <u>Unicité</u> Considérons deux familles $(E, T_1, \ldots, T_m), (D, U_1, \ldots, U_m) \in K[X]^{m+1}$ telles que

$$\frac{B}{S^m} = E + \frac{T_1}{S} + \cdots + \frac{T_m}{S^m} = D + \frac{U_1}{S} + \cdots + \frac{U_m}{S^m}$$

et

$$\forall i \in [\![1;m]\!], \quad \deg(T_i) < \deg(S) \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;m]\!], \quad \deg(U_i) < \deg(S).$$

Comme on vient de voir que E et D sont nécessairement la partie entière de B/S^m, on a tout de suite

$$E = D,$$

ce qui donne

$$\frac{T_1}{S} + \cdots + \frac{T_m}{S^m} = \frac{U_1}{S} + \cdots + \frac{U_m}{S^m} \qquad (*)$$

En multipliant par S^{m-1}, on obtient

$$(T_1 S^{m-2} + \cdots + T_{m-1}) + \frac{T_m}{S} = (U_1 S^{m-2} + \cdots + U_{m-1}) + \frac{U_m}{S}.$$

Dès lors, le lemme 2 nous dit en particulier que

$$T_m = U_m.$$

L'égalité $(*)$ devient alors

$$\frac{T_1}{S} + \cdots + \frac{T_{m-1}}{S^{m-1}} = \frac{U_1}{S} + \cdots + \frac{U_{m-1}}{S^{m-1}}.$$

Cela permet de réitérer le raisonnement ci-dessus pour démontrer successivement que $T_{m-1} = U_{m-1}$, puis $T_{m-2} = U_{m-2}$, ..., puis $T_1 = U_1$. ■

On arrive enfin à l'énoncé du théorème de décomposition en éléments simples.

Théorème 1

Soit F une fraction rationnelle sur K telle que

$$F = \frac{A}{{S_1}^{m_1}{S_2}^{m_2}\cdots{S_n}^{m_n}},$$

où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des polynômes irréductibles de $K[X]$ premiers entre eux deux à deux, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in K[X]$.

Il existe une unique famille $(E, T_{1,1}, \ldots, T_{1,m_1}, T_{2,1}, \ldots, T_{2,m_2}, \ldots\ldots, T_{n,1}, \ldots, T_{n,m_n})$ de polynômes sur K telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}\right)$$

avec

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \forall j \in [\![1;m_i]\!], \qquad \deg(T_{i,j}) < \deg(S_i).$$

La formule ci-dessus s'appelle la décomposition en éléments simples de F sur K.

Le polynôme E est la partie entière de F.

Pour $i \in [\![1;n]\!]$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}$ s'appelle la partie polaire de F relative au polynôme S_i.

■ Le lemme 3 donne l'existence d'une unique famille $(E, B_1, \ldots, B_n) \in K[X]^{n+1}$ tel que

$$F = E + \frac{B_1}{{S_1}^{m_1}} + \cdots + \frac{B_n}{{S_n}^{m_n}} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad \deg(B_i) < \deg({S_i}^{m_i}),$$

où E est la partie entière de F.

Or, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le lemme 4 dit qu'il existe une unique famille $(T_{i,1}, \ldots, T_{i,m_i}) \in K[X]^{m_i}$ telle que

$$\frac{B_i}{{S_i}^{m_i}} = \frac{T_{i,1}}{S_i} + \cdots + \frac{T_{i,m_i}}{{S_i}^{m_i}} \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1;m_i]\!], \quad \deg(T_{i,j}) < \deg(S_i)$$

où l'absence de partie entière découle du fait que $\deg(B_i/{S_i}^{m_i}) < 0$.

On en déduit que F s'écrit, de manière unique (y réfléchir), sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}\right)$$

avec

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \forall j \in [\![1;m_i]\!], \qquad \deg(T_{i,j}) < \deg(S_i),$$

où E est la partie entière de F. ■