SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1. [$\circ$]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big(ka + (n-k)b\big).$$

Exercice 2. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor.$$

Exercice 3. [$\bigstar$]

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et ω une racine n-ème de l'unité telle que $\omega \neq 1$. Calculer $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \right|$.

Exercice 4. [$\star$]

Soient un entier $n \geqslant 2$ et une famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de nombres complexes. Pour tout $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose

$$b_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, \mathrm{e}^{2ik\ell\pi/n}.$$

Démontrer que, pour tout $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell \, \mathrm{e}^{-2ip\ell\pi/n}.$$

Exercice 5. [$\star$]

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Démontrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Exercice 6. [$\circ$]

Soit $\theta \in \,]0, \pi[$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) = \frac{\sin\theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}.$$

2. En déduire, si elle existe, la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) \right)_{n \geqslant 1}.$$