GROUPE SYMÉTRIQUE

A. Compléments sur les groupes

Exercice 1. [$\star$]

Soient $(G,*)$ un groupe fini et x, y deux éléments de G.

1. Démontrer que x, x^{-1} et yxy^{-1} ont le même ordre.
2. Démontrer que xy et yx ont le même ordre.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que l'ordre de x^k vaut $\omega(x)/(\omega(x) \wedge k)$.

Exercice 2. [$\star$]

Soient $(G,*)$ un groupe fini et x, y deux éléments de G qui commutent. On suppose que x et y sont deux éléments d'ordres finis respectifs $\omega(x)$ et $\omega(y)$. On suppose que pgcd $\big(\omega(x), \omega(y)\big) = 1$. Démontrer que xy est d'ordre $\omega(x)\omega(y)$.

Exercice 3. [$\star$] (Petit théorème de Fermat généralisé)

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1; n]\!]$ premiers avec n. C'est l'*indicatrice d'Euler*.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge n = 1$, on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

Exercice 4. [$\star$]

Démontrer que $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un générateur de $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\big)$ si, et seulement si, $x \wedge n = 1$. En déduire le nombre de générateurs de $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\big)$.

Exercice 5. [$\star$]

Démontrer que tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

B. Groupe symétrique

Exercice 6. [$\circ$]

1. Calculer les puissances successives de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire son ordre.
2. Même question avec $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer $\sigma\sigma'$ et $\sigma'\sigma$.

Exercice 7. [$\circ$] (Centre de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \geqslant 3$. On considère une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ qui commute avec toutes les autres, autrement dit telle que $\forall s \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma s = s\sigma$.

1. On considère une transposition $\tau = (a, b)$ de $\mathfrak{S}_n$. Calculer $\tau\sigma(a)$ et $\tau\sigma(b)$ et en déduire l'égalité entre ensembles $\{a, b\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$.
2. Démontrer que $\sigma = \mathrm{Id}$. *On a ainsi démontré que le centre de $\mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire le sous-groupe des éléments qui commutent avec tous les autres) est trivial.*

Exercice 8. [◦]

Décomposer en produit de transpositions les permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire les signatures de ces deux permutations.

Exercice 9. [$\star$] (Les transpositions à pivot engendrent $\mathfrak{S}_n$)

Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, …, $(1,n)$.

Exercice 10. [◦]

Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire les signatures de ces deux permutations.

Exercice 11. [$\star$] (Ordre d'une permutation)

Démontrer que l'ordre d'une permutation est le ppcm de l'ordre des cycles de sa décomposition en cycles à supports disjoints.

Exercice 12. [◦]

On mélange un jeu de 32 cartes de la façon suivante : on sépare le jeu en deux moitiés puis on intercale une carte de chaque paquet en commençant par le second. Ainsi l'ordre 1 2 3 4 5 6 … devient 17 1 18 2 19 3 …

Déterminer le nombre de battues nécessaires pour que le jeu retrouve son état initial.

Exercice 13. [◦] (Nombres de p-cycles)

Déterminer le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 14. [◦]

On souhaite démontrer que $\mathfrak{S}_n$ peut être engendré par une transposition et une permutation circulaire.

1. a) Soient $a < b$ deux éléments de $[\![1;n]\!]$. Calculer

   $$(b-1,b)\cdots(a+2,a+3)(a+1,a+2)(a,a+1)(a+1,a+2)(a+2,a+3)\cdots(b-1,b).$$

   En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1,2)$, $(2,3)$, …, $(n-1,n)$.

   b) Pour $k \in [\![0;n-2]\!]$, calculer

   $$(1,2,\dots,n)^k(1,2)(1,2,\dots,n)^{-k}.$$

   En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les deux éléments $\tau = (1,2)$ et $c = (1,2,\dots,n)$.

2. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ en un produit de τ, c, c^{-1} et de leurs puissances.

Exercice 15. [$\star$] (Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$)

Soit $n \geqslant 3$. Démontrer que tout produit de deux transpositions s'écrit comme le produit de cycles de longueur 3. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Exercice 16. [◦]

Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que $\mathscr{GL}_n(K)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.