DIMENSION FINIE

Exercice 1. [$\circ$]

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4)\,, \quad v_2 = (3,3,3,9)\,, \quad v_3 = (0,2,4,2)\,, \quad v_4 = (3,3,-1,3)\,, \quad v_5 = (2,3,0,1)\,.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$.

1. Déterminer la dimension et une base des sous-espaces F, G, $F \cap G$ et $F + G$.
2. Trouver un supplémentaire de F et un supplémentaire de G.

Exercice 2. [$\circ$]

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une famille de nombres réels deux à deux distincts. On note E le sous-ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions polynomiales $L_1, \ldots, L_n$ associées aux polynômes élémentaires de Lagrange. Démontrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Quelle est la dimension de F ? *C'est la codimension de E.*

Exercice 3. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces de E. On suppose que $\dim F + \dim G > n$. Démontrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 4. [$\star$]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'une famille $\mathscr{E}$ de vecteurs de E est *positivement génératrice* si tout vecteur de E est une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls d'éléments de $\mathscr{E}$. Quel est le cardinal minimum d'une telle famille ?

Exercice 5. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Démontrer que F et G admettent un supplémentaire commun si, et seulement si, $\dim F = \dim G$.

Exercice 6. [$\circ$]

On considère l'endomorphisme $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$p(x,y,z) = \frac{1}{9}(8x + 2y - 2z\,,\ 2x + 5y + 4z\,,\ -2x + 4y + 5z).$$

Démontrer que p est une projection et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 7. [$\circ$]

Soit $n \geqslant 1$. On considère l'opérateur de dérivation discrète $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\Delta P = P(X+1) - P(X).$$

Démontrer que Δ est une application linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$ et $\mathrm{Im}\,\Delta$.

Exercice 8. [$\star$]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme $P(X) = Q(X+a) + Q(X)$ pour un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 9. [$\circ$] (Endomorphismes nilpotents)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit f un *endomorphisme nilpotent* de E, c'est-à-dire un endomorphisme pour lequel il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$. On note p_0 le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. C'est l'*indice de nilpotence* de f.
   a) Démontrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p_0-1}(x_0)\big)$ est libre.
   b) Démontrer que $f^n = \widetilde{0}$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = 0_E$.
   a) Démontrer que f est nilpotent.
   b) Démontrer que le résultat du a) tombe en défaut lorsque E n'est pas supposé de dimension finie.

Exercice 10. [$\circ$]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. En utilisant la restriction $\widehat{f}$ de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ au départ, démontrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 11. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E qui est derang r (où $r \in [\![0;n]\!]$). Démontrer que l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ est un sous-espace vectoriel de K^n de dimension $n - r$.

Exercice 12. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u, v des endomorphismes de E.

1. Démontrer que
$$\operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(v) - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(uv) = \operatorname{rg}(u) - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u).$$
2. En déduire l'encadrement de Sylvester :
$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(uv) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}.$$

Exercice 13. [$\star$]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient p et q deux projecteurs de E. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $pq = qp = 0$.
2. Soient $p_1, \dots, p_k$ une famille de projecteurs. On pose $P = p_1 + \cdots + p_k$.
   a) On suppose que $\forall i \neq j,\ p_i p_j = 0$. Démontrer que P est un projecteur.
   b) On suppose que P est un projecteur. Démontrer que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_k$. En déduire que $\forall i \neq j,\ p_i p_j = 0$.

Exercice 14. [$\star$]

Soient H un hyperplan d'un K-espace vectoriel de dimension et f un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in H,\ f(x) = x$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) - \lambda x \in H$.

Exercice 15. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. L'endomorphisme u est dit cyclique.

On pose $K[u] = \operatorname{Vect}\big((u^k)_{k \in \mathbb{N}}\big)$. C'est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, appelé *sous-espace des polynômes en u*.

1. Démontrer que $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est une base de $K[u]$.
2. Démontrer qu'un endomorphisme v de E commte avec u si, et seulement si, $v \in K[u]$.

Exercice 16. [$\star$] (Matrices à diagonale dominante : théorème d'Hadamard)

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On suppose que M est *à diagonale dominante*, c'est-à-dire
$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$
Démontrer que M est inversible. *Indication : On pourra raisonner par l'absurde et écrire une relation de dépendance entre les colonnes de la matrice.*
2. Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\max\{|a_{ij}| : i,j \in [\![1;n]\!]\} < 1/n$. Démontrer que $A + I_n$ est inversible.

Exercice 17. [$\star$]

Soit $n \geqslant 1$. On considère l'application
$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X], \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1). \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer M^{-1} si elle existe.
2. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites. Démontrer la formule d'inversion de Pascal :
$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k\right) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k\right)$$

Exercice 18. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = \widetilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \widetilde{0}$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & I_{n-1} & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. [$\star$]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que tout endomorphisme de E peut s'écrire comme la somme de deux automorphismes de E.

Exercice 20. [$\circ$]

Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. [$\circ$]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\operatorname{rg} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. On précisera une base $\mathscr{B}_1$ de l'image et $\mathscr{B}_2$ du noyau.
2. Démontrer que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 22. [$\star$]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1. Démontrer que $(AB - BA)^2 = 0$.

Exercice 23. [$\star$]

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(AB)^2$.
2. Déterminer le rang de AB et en déduire que BA est inversible.
3. En déduire que $BA = I_2$.

Exercice 24. [$\star$]

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\big(\operatorname{rg}(A) \leqslant 1\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ A = U{}^tV\big).$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice de rang 1.
   a) Démontrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $A^2 = \alpha A$.
   b) On suppose $\alpha \neq -1$. Démontrer que $(I_n + A)^{-1} = I_n - (1+\alpha)^{-1}A$.

Exercice 25. [$\circ$]

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A et D sont semblables. On donnera la matrice de passage P et l'on précisera la relation liant A, D, P et P^{-1}. On précisera P^{-1}.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, justifier que A est inversible et préciser son inverse. Que remarque-t-on ?

Exercice 26. [$\star$]

Soient $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $r \in [\![0;n]\!]$. Démontrer que A est semblable à J_r si, et seulement si, $A^2 = A$ et $\operatorname{rg}(A) = r$.

Exercice 27. [$\star$]

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On considère un endomorphisme f de E tel que $f \neq \widetilde{0}$ et $f^2 = \widetilde{0}$.
   a) Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire $\operatorname{rg} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f$.
   b) Prouver qu'il existe une base dans laquelle f est représentée par $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à J.

Exercice 28. [$\circ$]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la trace de l'endomorphisme $P \longmapsto P(aX+b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer la trace de l'endomorphisme $M \longrightarrow {}^tM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.