Devoir Surveillé n° 3 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – Transformée de Fourier discrète

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$. On étudie dans ce problème l'application $\mathcal{F}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ qui à un n-uplet $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ de complexes associe le n-uplet $\mathcal{F}_n u = (v_0, \dots, v_{n-1})$ défini par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad v_k = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_j}\,\omega^{jk}.$$

Partie I – Préliminaires

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les sommes $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega^{jk}$.
2. Montrer que $\mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_n = n\mathrm{Id}$. En déduire que $\mathcal{F}_n$ est bijective et préciser sa réciproque.
3. Déterminer $\mathcal{F}_n^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0)$, ainsi que $\mathcal{F}_n^{-1}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant à l'indice $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Partie II – Équation de convolution

Pour tous $u, v \in \mathbb{C}^n$ tels que $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ et $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$, on définit :

- *le produit terme à terme de u et v : $u \times v = (u_0 v_0, u_1 v_1, \dots, u_{n-1} v_{n-1})$;*
- *le produit de convolution de u et v : $u \otimes v = (w_0, \dots, w_{n-1})$, où :*

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ w_k = \sum_{(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2 \ \text{tel que}\ i+j \equiv k\ [n]} u_i v_j,$$

somme que l'on notera plus simplement $\displaystyle\sum_{i+j \equiv k\ [n]} u_i v_j$.

1. Montrer que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{C}^n)^2$, $\mathcal{F}_n(u \otimes v) = \mathcal{F}_n(u) \times \mathcal{F}_n(v)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante :
   (i) pour que l'équation $u \otimes x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$ admette au moins une solution ;
   (ii) pour que l'équation $u \otimes x = y$ admette au plus une solution ;
   (iii) pour que l'équation $u \otimes x = y$ admette exactement une solution.
3. Résoudre l'équation $(1, 1, \dots, 1) \otimes x = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Était-ce prévisible ?
4. Trouver trois solutions distinctes de l'équation $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) \otimes x = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$.

Partie III – Algorithme de Cooley-Tukey, transformée de Fourier rapide

1. On suppose $n = 4$. On considère $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^4$ et $(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathcal{F}_4 u$. On remarquera que dans cette question, l'hypothèse $n = 4$ implique que $\omega = \mathrm{i}$.
   (a) Déterminer en fonction des u_i des complexes a_0, a_1, b_0 et b_1 tels que

$$\begin{cases} v_0 = a_0 + b_0 \\ v_2 = a_0 - b_0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_1 = a_1 + \omega b_1 \\ v_3 = a_1 - \omega b_1 \end{cases}$$

(b) Déterminer (α_0, α_1) tels que $(a_0, a_1) = \mathcal{F}_2(\alpha_0, \alpha_1)$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, on posera $u^{(P)}$ (respectivement $u^{(I)}$) l'élément de $\mathbb{C}^m$ formé des coefficients d'indice pair (respectivement impair) de u. Notons $\mathcal{F}_n u = (v_0, \dots, v_{n-1})$. On définit :
$$(a_0, \dots, a_{m-1}) = \mathcal{F}_m(u^{(P)}) \qquad \text{et} \qquad (b_0, \dots, b_{m-1}) = \mathcal{F}_m(u^{(I)}).$$
Montrer que :
$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad v_k = a_k + \omega^k b_k \qquad \text{et} \qquad v_{m+k} = a_k - \omega^k b_k$$

3. On suppose $n = 2^p$, pour un certain entier p. On calcule $\mathcal{F}_n u$ en itérant le procédé décrit dans la question précédente, permettant de se ramener d'une puissance de deux à la précédente. On note c_n le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $\mathcal{F}_n$ par cette méthode, et d_n le nombre d'opérations nécessaires par la méthode naïve (c'est-à-dire en utilisant la définition). On considérera que les complexes ω^i, $i \in [\![0, n-1]\!]$ sont connus (calculés au préalable et stockés dans un tableau), et que le calcul du produit ij et de sa réduction modulo n constitue une unique opération.
   (a) Montrer qu'il existe K tel que $d_n \underset{+\infty}{\sim} Kn^2$ (on rappelle que deux suites sont équivalentes si leur quotient converge vers 1).
   (b) Montrer qu'il existe K' tel que pour tout $n \geqslant 1$ s'écrivant sous la forme $n = 2^p$, on ait $c_n \leqslant K' n \log_2(n)$.
   (c) Comparer les deux méthodes.

Problème 2 – Dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble triadique de Cantor, sous-ensemble très lacunaire de $[0, 1]$, dont on montre notamment qu'il est petit (de mesure de Lebesgue nul) tout en étant grand (non dénombrable). On s'intéresse notamment à sa dimensionn de Hausdorff. La dimension de Hausdorff permet de mesurer et comparer la taille de ces objets très irréguliers. Cette dimension peut être non entière. Pour des ensembles réguliers, elle correspond à la notion intuitive de dimension topologique (par exemple un cercle est de dimension 1, un disque de dimension 2, etc.)
Dans toute le problème, m est un entier naturel non nul, et E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa distance euclidienne usuelle définie par :
$$d(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k)^2},$$
où $X = (x_1, \dots, x_m)$ et $Y = (y_1, \dots, y_m)$. La topologie que nous considérons (i.e. la donnée des ouverts) est celle définie par cette distance.
Un recouvrement de E est une famille $(U_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$ tels que $E \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. On dit que $(U_j)_{j \in J}$ est un recouvrement extrait de $(U_i)_{i \in I}$ si $J \subset I$ et si $(U_j)_{j \in J}$ est encore un recouvrement de E. On dit que le recouvement $(U_j)_{j \in J}$ est fini si J est un ensemble fini, donc si le recouvrement est constitué d'un nombre fini d'ensembles.
On admettra le résultat suivant :
Théorème de Borel-Lebesgue : *Soit E un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^m$. Alors de tout recouvement de E par des ouverts (i.e. les U_i sont tous des ouverts), on peut extraire un recouvrement fini.*

Question préliminaire

Montrer que si $A \subset B$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ alors $\inf(A) \geqslant \inf(B)$ (inégalité dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Partie I – Mesure de Hausdorff

Dans cette partie, E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$.

1. Soit U un sous-ensemble borné non vide de $\mathbb{R}^m$. Justifier l'existence de $\sup\{\|x - y\|, x, y \in U\}$. On notera $|U|$ cette borne supérieure, appelée diamètre de U.

Soit $\delta > 0$. On dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un δ-recouvrement de E si c'est un recouvrement de E par des ensembles non vides, et si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leqslant \delta$. On note $R_\delta(E)$ l'ensemble des δ-recouvrements de E. On remarquera qu'un δ-recouvrement est par définition constitué d'un nombre dénombrable de sous-ensembles U_i. Pour un δ-recouvrement $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et pour tout $s \geqslant 0$, on définit
$$\ell_s(U) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |U_n|^s = \sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|^s = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} |U_n|^s.$$

2. Montrer que $\ell_s(U)$ est bien définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

On définit $\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\{\ell_s(U),\ U \in R_\delta(E)\}$.

3. Montrer que $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ est bien définie et décroissante en la variable δ (à s fixé). On pourra à cet effet comparer $R_\delta(E)$ et $R_{\delta'}(E)$, lorsque $\delta \leqslant \delta'$.

Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, on peut considérer la limite, définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ *:*

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Il s'agit de la mesure de Hausdorff.

4. Que vaut $\mathcal{H}^s(\varnothing)$?
5. Montrer que si $E \subset F$, $\mathcal{H}^s(E) \leqslant \mathcal{H}^s(F)$.
6. Montrer que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_i\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n)$$

7. Pour $\lambda > 0$, on note $\lambda E = \{\lambda x, x \in E\}$.
   (a) Montrer que pour tout $\delta \geqslant 0$, $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda E) \leqslant \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ (homogénéité).

Partie II – Mesure de Hausdorff de $\mathbb{R}^m$

Soit $C_1 = [0,1]^m$*, hypercube (que par abus on appelera simplement cube) de côté* 1*. Soit* $s \in \mathbb{R}_+$*.*

*1. Montrer que si $s > m$, alors $\mathcal{H}^s(C_1) = 0$

2. Soit $s > m$. Montrer que $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0$, puis que pour tout $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

On pourrait montrer que $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^m) = +\infty$*, mais nous n'en aurons pas besoin ici.*

Partie III – Dimension de Hausdorff

1. Montrer que l'application $\mathcal{H}(E) : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ qui à s associe $\mathcal{H}^s(E)$ est décroissante (on pourra commencer par le montrer pour $\mathcal{H}_\delta$, lorsque $\delta < 1$).
2. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $\mathcal{H}^s(E) \neq +\infty$, alors pour tout $t > s$, $\mathcal{H}(E) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $s_0 \in [0,m]$ tel que pour tout $t \in [0, s_0[$, $\mathcal{H}^t(E) = +\infty$, et pour tout $t \in]s_0, +\infty[$, $\mathcal{H}^t(E) = 0$.

Ce réel s_0 *est noté* $\dim_H(E)$ *et est appelé dimension de Hausdorff de* E*.*

4. Montrer que si $E \subset F$, alors $\dim_H(E) \leqslant \dim_H(F)$.
5. Montrer que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$, alors

$$\dim_H(E) = \sup\{\dim_H(E_n),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Partie IV – Ensemble triadique de Cantor

On considère ici $m = 1$*.*

- *Soit* $E_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$*.*
- *On construit* E_1 *en privant* E_0 *de son tiers médian* $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$*. Ainsi,* $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$*.*
- *On construit* E_2 *en privant chacun des deux intervalles définissant* E_1 *de leur tiers médian* $]frac19, \frac{2}{9}[$ *et* $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$*. Ainsi*

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

- *On continue ainsi :* E_n *étant exprimé comme union disjointe de* 2^n *intervalles fermés, on construit* E_{n+1} *en privant chacun de ces intervalles de leur tiers médian, et on peut alors bien écrire* E_{n+1} *comme union de* 2^{n+1} *intervalles fermés et continuer la construction.*
- *On définit l'ensemble triadique de Cantor par :*

$$C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n.$$

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de C

1. Décrire E_3 comme union d'intervalles fermés disjoints.
2. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $x \in C$ si et seulement si x admet un développement en base 3 constitué uniquement des chiffres 0 et 2 (donc n'utilisant pas le chiffre 1).
3. Montrer que C n'est pas dénombrable.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie ou dénombrable $(I_j)_{j\in J}$ d'intervalles tels que $C \subset \bigcup_{j\in J} I_j$ et $\sum_{j\in J} \ell(I_j) < \varepsilon$, où si a et b, $a \leqslant b$, sont les bornes de I_j, $\ell(I_j) = b - a$ (longueur de l'intervalle)
   Ce résultat exprime que C est de mesure de Lebesgue nulle, donc qu'il est infiniment petit au sens usuel de la mesure dans $\mathbb{R}$.

Partie V – Dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor

1. Soit $C_g = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ et $C_d = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Montrer que $C_g = \frac{1}{3}C$.
2. En déduire que, si on suppose $\mathcal{H}^{\dim_H(C)}(C) \notin \{0, +\infty\}$, on obtient $\dim_H(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Malheureusement, l'hypothèse $\mathcal{H}^{\dim_H(C)} \notin \{0, +\infty\}$ n'est pas facile à obtenir. Nous sommes obligés, pour prouver le résultat en toute rigueur, de revenir aux définitions par recouvrement. Mais cette méthode heuristique nous aura au moins permis de savoir quelle est la valeur recherchée. Soit $s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H^s_{3^{-k}}(C) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^s$.
4. En déduire que $\mathcal{H}^s(C) \leqslant 1$
5. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de C. Montrer qu'on peut trouver un recouvement fini $(V_i)_{i\in I}$ de C, formé d'intervalles fermés, et tel que
$$2\sum_{n\in\mathbb{N}} |U_n|^s \geqslant \sum_{i\in I} |V_i|^s.$$
*6. Montrer que $\displaystyle\sum_{i\in I} |V_i|^s \geqslant \frac{1}{2}$.
   Indication : En encadrant $|U_i|$ entre $3^{-(k+1)}$ et 3^{-k}, on pourra compter, pour j assez grand, le nombre d'intervalles constituant E_j d'intersection non vide avec U_i.
7. En déduire que $\dim_H(C) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

Questions subsidiaires :

*1. Montrer que $\dim_H(\mathbb{R}^m) = m$.
*2. Montrer le théorème de Borel-Lebesgue
   Indication : On pourra commencer par montrer que si E est fermé-borné, alors de toute suite de E on peut extraire une suite convergente dans E (théorème de Bolzano-Weierstrass), en commençant par le cas $m = 1$, puis montrer qu'il existe $r > 0$, tel que pour tout $x \in E$, $B(x, r)$ soit inclus entièrement dans l'un des ouverts U_i du recouvrement.