Problème n° 14 : Structures algébriques

Problème 1 – Théorème de Burnside

Le but de ce problème est l'étude des produits semi-directs de groupes, et l'étude de conditions pour qu'un groupe soit un produit semu-direct de deux sous-groupes donnés. Dans la dernière partie, on montre un théorème de Burnside, montrant que, sous certains conditions, un groupe G peut être décrit comme produit-semi-direct par un de ses p-sous-groupes de Sylow.

Tous les groupes considérés dans ce problème sont considérés en notation multiplicative.

On définit les notions suivantes :

- *Étant donné un groupe G et un sous-groupe H de G, on appelle normalisateur de H dans G l'ensemble :*

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\} = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \mid \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H\}.$$

- *On dit que H est un sous-groupe normal (ou distingué) de G si et seulement pour tout $g \in G$, $gH = Hg$, autrement dit si $N_G(H) = G$.*
- *Étant donné un groupe G et une partie X de G, on appelle centralisateur de X dans G l'ensemble :*

$$C_G(X) = \{g \in G \mid \forall x \in X, \quad gx = xg.\}$$

  Étant donné $x \in G$, on notera plus simplement $C_G(x)$ le centralisateur du singleton $\{x\}$.
- *Étant donné un groupe G et deux sous-groupes H et K de G, on désigne par HK le produit de H par K, défini par :*

$$HK = \{hk, \quad h \in H, k \in K\}.$$

- *Étant donné deux groupes G et H, de neutres respectifs e_G et e_H, et un morphisme de groupes $f : G \to H$, on appelle noyau de f l'ensemble*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}.$$

- *Soit G un groupe d'ordre $p^r m$, où $p^r \wedge m = 1$, et p est un nombre premier. On appelle p-sous-groupe de Sylow de G un sous-groupe de G de cardinal p^r.*
- *Étant donné H un sous-groupe de G, et $g \in G$, on appelle classe à gauche de g modulo H l'ensemble $gH = \{gh,\ h \in H\}$.*
- *Soit H et K deux sous-groupes de G. On dit que H et K sont conjugués dans G s'il existe $g \in G$ tel que*

$$K = gHg^{-1} = \{ghg^{-1},\ h \in H\}.$$

On rappelle, ou on admet les points suivants :

- *Étant donné un morphisme $f : F \to G$, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de F.*
- *Théorèmes de Sylow : Tout groupe G admet un p-sous-groupe de Sylow. De plus, les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués deux à deux dans G.*
- *L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la loi de composition des applications est un groupe.*
- *Étant donné un sous-groupe H de G, on peut trouver des éléments $x_1, \dots, x_m$ de G tels que les ensembles $x_1H, \dots, x_mH$ soient deux à deux distincts et forment une partition de G. On a alors $m = \frac{|G|}{|H|}$, où $|G|$ désigne l'ordre (le cardinal) de G. On dit dans ce cas que $(x_1, \dots, x_m)$ est un système de représentants des classes à gauche modulo H dans G.*

Partie I – Quelques résultats préliminaires

1. Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G et que $H \subset N_G(H)$
2. Soit G un groupe.
   (a) Montrer que pour tout $x \in G$, $C_G(x)$ est un sous-groupe de G.
   (b) En déduire que pour toute partie X de G, $C_G(X)$ est un sous-groupe de G.
   (c) Soit H un sous-groupe de G. Comparer (au sens des inclusions) $C_G(H)$ et $N_G(H)$.

Partie II – Produit semi-direct de deux sous-groupes de G

On se donne dans cette partie un groupe G, et deux sous-groupes H et K de G. On note e l'élément neutre de G.

1. Montrer que l'application $f : H \times K \to HK$ définie par $f(h,k) = hk$ est bijective si et seulement si $H \cap K = \{e\}$.
2. (a) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
   (b) Montrer que dans ce cas, HK est le plus petit sous-groupe de G contenant $H \cup K$.

On dit que G est produit semi-direct de K par H si $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$ et si K est un sous-groupe distingué de G.

3. On suppose dans cette question que G est produit semi-direct de K par H.
   (a) Montrer qu'il existe une unique application $\alpha : G \to H$ telle que pour tout $(x, y) \in H \times K$, $\alpha(xy) = x$, et que α est un morphisme de groupe.
   (b) Montrer que $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$.
4. Réciproquement, étant donné un sous-groupe H d'un groupe G et α un morphisme de G dans H tel que $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$, montrer que G est produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ par H.

Partie III – Théorème de Burnside

Dans cette partie, on suppose que G un est groupe fini d'ordre $p^r m$, où p est un nombre premier et $p \wedge m = 1$. On considère H un p-sous-groupe de Sylow de G, et on suppose que $N_G(H) = C_G(H)$. On se propose de prouver qu'il existe un sous-groupe K de G tel que G soit produit semi-direct de K par H (théorème de Burnside).

1. Vérifier que H est abélien.
2. Soit $(x, y) \in G \times H$, et $z = xyx^{-1}$. On suppose que $z \in H$.
   (a) Montrer que H et xHx^{-1} sont des p-sous-groupes de Sylow de $C_G(z)$.
   (b) À l'aide d'un résultat admis en début d'énoncé, en déduire l'existence de $x' \in C_G(z)$ tel que $H = x'(xHx^{-1})x'^{-1}$, et en déduire que $z = y$.
3. Soit $y \in G$, et $(x_1, \dots, x_m)$ un système de représentants des classes à gauche modulo H dans G.
   (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe un indice $\sigma(i) \in [\![1, m]\!]$ et un élément h_i de H uniques tels que $yx_i = x_{\sigma(i)} h_i$.
   (b) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.
   (c) On définit alors $T(y) = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} h_i$. Montrer que $T : y \mapsto T(y)$ définit un morphisme de G dans H.
   (d) Soit $y \in G$. Montrer qu'il existe une partie J de $[\![1, m]\!]$ et une famille d'entiers strictement positifs $(n_i)_{i \in J}$ tels que

$$\begin{cases} T(y) = \prod_{i \in J} (x_i^{-1} y^{n_i} x_i) \\ \forall i \in J, \quad x_i^{-1} y^{n_i} x_i \in H \\ \sum_{i \in J} n_i = m. \end{cases}$$

   Indication : on pourra définir une relation d'équivalence sur $[\![1, m]\!]$ par

$$i \sim j \iff \exists k \in \mathbb{N}, j = \sigma^k(i),$$

   où $\sigma^k = \sigma \circ \cdots \circ \sigma$ (avec k facteurs σ) ; $\sigma^0 = \mathrm{id}$. Faire ensuite le produit des $x_{\sigma(i)}^{-1} y x_i$ en les groupant par classes d'équivalences de l'indice i, en respectant au sein de chaque classe un certain ordre.

(e) Déduire de certaines questions qui précèdent que pour tout $y \in H$, $T(y) = y^m$.

(f) Montrer que G est produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(T)$ par H.

Le morphisme T est appelé morphisme de transfert de G dans H. On peut montrer qu'il est indépendant du choix du système de représentants $(x_1, \ldots, x_m)$.