APPLICATIONS LINÉAIRES CORRECTION

Exercice 1

Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \operatorname{Ker}\left(u^k\right)$ et $I_k = \operatorname{Im}\left(u^k\right)$. Avec ces notations, on définit le nilespace N et le cœur I de u de la façons suivante : $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*

   a) *Démontrer que* $(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}) \iff (\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2)$.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ est toujours vraie puisque si $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(x) = 0_E$ et donc aussi $f^2(x) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Pour l'inclusion contraire, on prend $x \in \operatorname{Ker} f^2$ de sorte que $f^2(x) = 0_E$. Alors $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ et, comme $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, on a $f(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} f$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Alors $f(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $f\big(f(x)\big) = 0_E$, c'est-à-dire $f^2(x) = 0_E$ ou encore $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Mézalors $x \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $y = f(x) = 0_E$. Donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

   Donc
   $$\boxed{(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}) \iff (\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2).}$$

   b) *Démontrer que* $(E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) \iff (\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2)$.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est toujours vraie puisque si $y \in \operatorname{Im} f^2$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} f$. Pour l'inclusion contraire, on prend $y \in \operatorname{Im} f$ et on l'écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$. Comme $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, on peut écrire x sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} f$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$. Mézalors, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_1 = f(x_0)$ et l'on a $f(x_2) = 0_E$, de sorte que $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f\big(f(x_0)\big) + 0_E = f^2(x_0)$, ce qui justifie que $y \in \operatorname{Im} f^2$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \operatorname{Im} f$, on en déduit que $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. Alors $x = \underbrace{f(y)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{x - f(y)}_{\in \operatorname{Ker} f}$ donc $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

   Ainsi,
   $$\boxed{(E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) \iff (\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2).}$$

2. a) *Démontrer que, pour tout $k \in N$, on a $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.*

   Soit $k \in \mathbb{N}$.

   Soit $x \in N_k$. Alors $u^k(x) = 0_E$, d'où $u\big(u^k(x)\big) = 0_E$, c'est-à-dire $u^{k+1}(x) = 0_E$ ou encore $x \in N_{k+1}$. Ainsi, $N_k \subset N_{k+1}$.

   Soit $y \in I_{k+1}$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$, c'est-à-dire $y = u^k\big(u(x)\big)$, ce qui implique que $y \in I_k$. Donc $I_{k+1} \subset I_k$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{pour l'inclusion, la suite } (N_k)_{k\geqslant 0} \text{ croît et la suite } (I_k)_{k\geqslant 0} \text{ décroît.}}$$

b) *Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont stables par u.*

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in N_k$. Alors $u^k(x) = 0_E$, d'où $u^k\big(u(x)\big) = u\big(u^k(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ ce qui donne $u(x) \in N_k$. Ainsi $u(N_k) \subset N_{k+1}$.

Soit $y \in I_k$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^k(x)$. Alors $u(y) = u\big(u^k(x)\big) = u^k\big(u(x)\big)$ ce qui donne $u(y) \in I_k$. Donc $u(I_k) \subset I_k$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ N_k \text{ et } I_k \text{ sont stables par } u.}$$

c) *Prouver que N est un sous-espace de E, stable par u, tel que $(u$ est injectif$) \iff (N = \{0_E\})$.*

On a clairement $0_E \in N$ puisque $0_E \in N_0$ (par exemple).
Soient $x, y \in N$ et $\lambda, \mu \in K$. Comme N est l'union des $\operatorname{Ker} u^k$ pour k décrivant $\mathbb{N}$, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in N_{k_1}$ et $y \in N_{k_2}$. Posons $\ell = \max\{k_1; k_2\}$ de sorte que $N_{k_1} \subset N_\ell$ et $N_{k_2} \subset N_\ell$ d'après la croissance de la suite $(N_k)_{k\geqslant 0}$. Comme N_ℓ est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'image d'un endomorphisme), on en déduit que $\lambda x + \mu y \in N_\ell$ et donc que $\lambda x + \mu y \in N$.
Ainsi,

$$\boxed{N \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

On a

$$u(N) = u\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k\Big) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} u(N_k) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k = N,$$

où l'inclusion $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} u(N_k) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ est justifiée par le fait N_k est stable par u pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$\boxed{N \text{ est stable par } u.}$$

On a

$$\begin{aligned}
(u \text{ est injectif}) \quad &\iff \quad (\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \text{ est injectif}) \\
&\iff \quad \big(\forall k \in \mathbb{N},\ N_k = \{0_E\}\big) \\
&\iff \quad \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k = \{0_E\}\Big) \\
&\iff \quad (N = \{0_E\}),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(u \text{ est injectif}) \iff (N = \{0_E\}).}$$

d) *Démontrer que I est un sous-espace de E, stable par u, tel que $(u$ est surjectif$) \iff (I = E)$.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \operatorname{Im} u^k$ est un sous-espace vectoriel en tant qu'image d'un endomorphisme. Dès lors, I est une intersection de sous-espaces vectoriels donc

$$\boxed{I \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

On a

$$u(I) = u\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k\Big) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} u(I_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$$

où l'inclusion $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} u(I_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ est justifiée par le fait que I_k est stable par u pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$\boxed{I \text{ est stable par } u.}$$

On a

$$\begin{aligned}
(u \text{ est surjectif}) \quad &\iff \quad (\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \text{ est surjectif}) \\
&\iff \quad \big(\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = E\big) \\
&\iff \quad \Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = E\Big) \\
&\iff \quad (I = E),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(u \text{ est surjectif}) \iff (I = E).}$$

3. a) *On suppose qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.*

α] *Prouver que, pour tout $k \geqslant k_0$, on a $N_k = N_{k_0}$. On pose $s(u) = \min\{k \in N : N_k = N_{k+1}\}$.*

Soit $k \geqslant k_0$. Pour $k = k_0$, on a $N_k = N_{k_0}$ (pardi !) donc on peut supposer que $k > k_0$.
La croissance de la suite $(N_k)_{k \geqslant 0}$ établie à la question 1 nous dit que $N_{k_0} \subset N_k$.
Soit $x \in N_k$. On a $u^k(x) = 0_E$, i.e. $u^{k_0+1}\big(u^{k-k_0-1}(x)\big) = 0_E$, d'où $u^{k-k_0-1}(x) \in N_{k_0+1}$.
Or $N_{k_0+1} = N_{k_0}$, donc $u^{k_0}\big(u^{k-k_0-1}(x)\big) = 0_E$, c'est-à-dire $u^{k-1}(x) = 0_E$, d'où $x \in N_{k-1}$.
En réitérant ce raisonnement, on en déduit que $x \in N_{k-2}$, puis $x \in N_{k-3}$, ... et enfin $x \in N_{k_0}$. Donc $N_k \subset N_{k_0}$.
Donc $N_k = N_{k_0}$. Ainsi, on a démontré que

$$\boxed{\text{si } N_{k_0} = N_{k_0+1} \text{ alors, pour tout } k \geqslant k_0, \text{ on a } N_k = N_{k_0}.}$$

β] *Démontrer que $N = N_{s(u)}$ et que la restriction v de u à N est nilpotente.*

D'après la question α], on a $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{s(u)} = N_{s(u)+1} = N_{s(u)+2} = \cdots$ donc $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k = N_{s(u)}$, c'est-à-dire

$$\boxed{N = N_{s(u)}.}$$

Pour tout $x \in N$, on a $x \in N_{s(u)}$, c'est-à-dire $u^{s(u)}(x) = 0_E$, donc

$$\boxed{\text{la restriction } v \text{ de } u \text{ à } N \text{ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à } s(u).}$$

γ] *Démontrer que la restriction w de u à I est injective.*

On a $\operatorname{Ker} w = I \cap \operatorname{Ker} u = I \cap N_1$. Soit $x \in I \cap N_1$. Alors $x \in N_{s(u)}$ donc il existe $a \in E$ tel que $x = u^{s(u)}(a)$. Il s'ensuit que $0_E = u(x) = u^{s(u)+1}(a)$, ce qui démontre que $a \in N_{s(u)+1}$. Or $N_{s(u)+1} = N_{s(u)}$ donc $u^{s(u)}(a) = 0_E$, c'est-à-dire $x = 0_E$. Donc $I \cap N_1 = \{0_E\}$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} w = \{0_E\}$. En conclusion,

$$\boxed{\text{la restriction } w \text{ de } u \text{ à } I \text{ est injective.}}$$

δ] *Démontrer que $N_{s(u)} \cap I_{s(u)} = \{0_E\}$.*

On sait que $N_{2s(u)} = N_{s(u)}$ donc, d'après le résultat de la question 1. a),

$$\boxed{N_{s(u)} \cap I_{s(u)} = \{0_E\}.}$$

b) *On suppose qu'il existe $k_0 \in N$ tel que $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.*

α] *Démontrer que, pour tout $k \geqslant k_0$, on a $I_k = I_{n_0}$. On pose $r(u) = \min\{k \in \mathbb{N} : I_k = I_{k+1}\}$.*

Soit $k \geqslant k_0$. Pour $k = k_0$, on a $I_k = I_{k_0}$ donc on peut supposer que $k > k_0$.
La décroissance de la suite $(I_k)_{k \geqslant 0}$ établie à la question 1 nous dit que $I_k \subset I_{k_0}$.
Soit $y \in I_{k_0}$. Comme $I_{k_0} \subset I_{k_0+1}$, on a $y \in I_{k_0+1}$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = u^{k_0+1}(x)$, c'est-à-dire $y = u\big(u^{k_0}(x)\big)$. Or $u^{k_0}(x) \in I_{k_0}$, donc $u^{k_0}(x) \in I_{k_0+1}$. Il existe donc $a \in E$ tel que $u^{k_0}(x) = u^{k_0+1}(a)$. Mézalors, on a $y = u^{k_0+2}(a)$, ce qui démontre que $y \in I_{k_0+2}$. En réitérant ce raisonnement, on en déduit que $y \in I_{k_0+3}$, puis $y \in I_{k_0+4}$, ... et enfin $y \in I_k$. Donc $I_{k_0} \subset I_k$.
Donc $I_k = I_{k_0}$. Ainsi, on a démontré que

$$\boxed{\text{si } I_{k_0+1} = I_{k_0} \text{ alors, pour tout } k \geqslant k_0, \text{ on a } I_k = I_{k_0}.}$$

β] *Démontrer que $I = I_{r(u)}$ et $u(I) = I$.*

D'après la question α], on a $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_{r(u)} = I_{r(u)+1} = I_{r(u)+2} = \cdots$ donc $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = I_{r(u)}$, c'est-à-dire

$$\boxed{I = I_{r(u)}.}$$

Dès lors, on a $u(I) = u(I_{r(u)}) = I_{r(u)+1} = I_{r(u)} = I$, donc

$$\boxed{u(I) = I.}$$

γ] *Démontrer que $N_{r(u)} + I_{r(u)} = E$.*

On sait que $I_{2r(u)} = I_{r(u)}$ donc, d'après le résultat de la question 1. b),

$$\boxed{N_{r(u)} + I_{r(u)} = E.}$$

c) *Application. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'opérateur de dérivation sur E (c'est-à-dire $D(f) = f'$ pour tout $f \in E$). Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme T de E tel que $T^2 = D$. On démontre ainsi qu'il n'existe pas d'opérateur linéaire de demi-dérivation.*

Par l'absurde, supposons que T existe. Alors $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} T^2 = \operatorname{Ker} D$. Or $\operatorname{Ker} D$ est la droite vectorielle des fonctions constantes, donc $\operatorname{Ker} T$ est égal ou bien à $\{\widetilde{0}\}$ ou bien à cette droite vectorielle. Dans le premier cas, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^0$ donc $\forall k \geqslant 0,\ \operatorname{Ker} T^k = \operatorname{Ker} T^0$ d'après la question a) α]. Dans le second cas, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^2$ donc $\forall k \geqslant 1,\ \operatorname{Ker} T^k = \operatorname{Ker} T^1$ d'après la question b) α]. Dans les deux cas, c'est absurde puisque $\operatorname{Ker} T^4 = \operatorname{Ker} D^2$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus 1 donc est différent de $\operatorname{Ker} T^2$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'opérateur linéaire de demi-dérivation.}}$$

Remarque : Il existe bien un opérateur de demi-dérivation mais il n'est pas linéaire.

4. *Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme u est de caractère fini, c'est-à-dire que les entiers $s(u)$ et $r(u)$ existent.*

a) α] *On suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0+1} = N_{k_0+2}$ et $I_{k_0} = I_{k_0+1}$. Démontrer que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.*

La croissance de la suite $(N_k)_{k\geqslant 0}$ nous dit que $N_{k_0} \subset N_{k_0+1}$.
Soit $x \in N_{k_0+1}$. On a $u^{k_0+1}(x) = 0_E$. Comme $u^{k_0}(x) \in I_{k_0}$ et comme $I_{k_0} = I_{k_0+1}$, on a $u^{k_0}(x) \in I_{k_0+1}$, ce qui justifie l'existence de $a \in E$ tel que $u^{k_0}(x) = u^{k_0+1}(a)$. Alors $0_E = u^{k_0+1}(x) = u^{k_0+2}(a)$, ce qui démontre que $a \in N_{k_0+2}$. Or $N_{k_0+2} = N_{k_0+1}$, donc $a \in N_{k_0+1}$, c'est-à-dire $u^{k_0+1}(a) = 0_E$ ou encore $u^{k_0}(x) = 0_E$. Donc $x \in N_{k_0}$. Cela démontre que $N_{k_0+1} \subset N_{k_0}$.
En conclusion,

$$\boxed{N_{k_0} = N_{k_0+1}.}$$

β] *On suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ et $I_{k_0+1} = I_{k_0+2}$. Démontrer que $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.*

La décroissance de la suite $(I_k)_{k\geqslant 0}$ nous dit que $I_{k_0+1} \subset I_{k_0}$.
Soit $y \in I_{k_0}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k_0}(x)$. Alors $u(y) = u^{k_0+1}(x) \in I_{k_0+1}$. Or $I_{k_0+1} = I_{k_0+2}$, donc $u^{k_0+1}(x) \in I_{k_0+2}$, ce qui signifie qu'il existe $a \in E$ tel que $u^{k_0+1}(x) = u^{k_0+2}(a)$ ou encore $u^{k_0+1}\big(x - u(a)\big) = 0_E$. Alors $x - u(a) \in N_{k_0+1}$ et comme $N_{k_0+1} = N_{k_0}$, on a $x - u(a) \in N_{k_0}$, c'est-à-dire $u^{k_0}\big(x - u(a)\big) = 0_E$ ou encore $u^{k_0}(x) = u^{k_0+1}(a)$. Cela démontre que $y \in I_{k_0+1}$. Donc $I_{k_0} \subset I_{k_0+1}$.
En conclusion,

$$\boxed{I_{k_0} = I_{k_0+1}.}$$

γ] *Démontrer que $s(u) = r(u)$.*

Si $r(u) < s(u)$, alors $N_{s(u)} = N_{s(u)+1}$ et $I_{s(u)-1} = I_{s(u)}$. La question α] nous dit alors que $N_{s(u)-1} = N_{s(u)}$, ce qui contredit la définition de $s(u)$. Absurde !
Si $s(u) < r(u)$, alors $N_{r(u)-1} = N_{r(u)}$ et $I_{r(u)} = I_{r(u)+1}$. La question β] nous dit alors que $I_{r(u)-1} = I_{r(u)}$, ce qui contredit la définition de $r(u)$. Absurde !
Donc

$$\boxed{s(u) = r(u).}$$

b) *En collectant les résultats des questions précédentes, donner toutes les propriétés du nilespace et du cœur de l'endomorphisme de caractère fini u.*

D'après les questions 3. a) δ] et 3. b) γ], on sait que

$$\boxed{N \oplus I = E.}$$

D'après les questions 2. c) et 2. d), on sait que

$$\boxed{N \text{ et } I \text{ sont stables par } u.}$$

D'après la question 3. a) β], on sait que

$$\boxed{\text{la restriction } w \text{ de } u \text{ à } N \text{ est nilpotente.}}$$

D'après les questions 3. b) β] et 3. a) γ], on sait que

$$\boxed{\text{la restriction } v \text{ de } u \text{ à } I \text{ (au départ et à l'arrivée) est un automorphisme.}}$$