DEVOIR MAISON n° 1

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

ASYMPTOTICS FOR EVER

1 Étude d'une somme

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = n! \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!}$.

1. Trouver la limite l de d_n.
2. Donner un développement limité de $d_n - l$ suivant l'échelle $\frac{1}{n^p}$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.

2 Fonctions réciproques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même ; soit g son inverse.
2. Donner un DL à l'ordre 3 de g en 0.
3. On note désormais $x_n = g(n)$.
   Donner un équivalent de x_n, puis un développemnt asymptotique de x_n avec trois termes significatifs.

3 Étude d'extrema

On se propose d'estimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n grand, le module $\mu_n = \|P_n\|_\infty$ du polynôme

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (X - i)$$

sur le segment $[0, n]$.

1. Pour $i \in \{0, ..., n-2\}$, on pose $\mu_{i,n} = \sup\limits_{x \in [i,i+1]} |P_n(x)|$. Montrer que $\mu_{i,n}$ est atteint en un point unique et que, pour $1 \leq i \leq n-2$, on a $\mu_{i,n} \leq \frac{(n-1)!}{2}$. En déduire que, pour $n \geq 4$, μ_n est atteint en $a_n \in]0, 1[$.
2. En considérant $F = \frac{P_n'}{P_n}$, montrer que $\frac{1}{a_n} \sim \ln n$. Prouver enfin que $\mu_n \sim \frac{n!}{e \ln n}$.

4 Suite de racines

Soit $P_n(X) = \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + ... + X + 1$.

1. Montrer P_n admet au plus une racine réelle. Préciser selon la parité de n.
2. Soit a_k l'unique racine réelle de P_{2k+1}. Déterminer $lim_{k\to+\infty} a_k$.
3. Montrer l'encadrement
$$2\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!} \leq e^{a_n} \leq \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$
4. En utilisant la formule de Stirling, montrer que $a_n \sim -2\alpha n$ où α est l'unique racine de $\alpha + \ln \alpha = -1$.