DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{C}$

Cette fiche vous résume comment décomposer une fraction rationnelle complexe $F = \dfrac{A}{S}$ en une somme d'éléments simples complexes.

A. Eléments simples complexes

Définition 1

On appelle éléments simples de $\mathbb{C}(X)$:

(i) les polynômes ;

(ii) les éléments simples de première espèce :

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^m} \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}^*.$$

B. Décomposition en éléments simples complexes

B.1. Détermination de la partie entière et de la partie fractionnaire

On dit qu'une fraction rationnelle est sous forme fractionnaire si le degré de son numérateur est inférieur au degré de son dénominateur, c'est-à-dire, dans notre cas, si $\deg A < \deg S$.

Si l'on est dans cette situation, on peut directement passer à la deuxième étape.

Dans le cas contraire, on effectue la division euclidienne de A par S de sorte que $A = SE + R$ où E est le quotient et R le reste (on a donc $\deg(R) < \deg(S)$). On peut alors écrire

$$F = \frac{SE+R}{S} = E + \frac{R}{S}$$

où E est un polynôme sur $\mathbb{C}$ et R/S est une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ de degré strictement négatif. Le polynôme E est appelé la partie entière de la fraction rationnelle F et entre dans la décomposition en éléments simples de F. La fraction rationnelle R/S est appelée la partie fractionnaire de F.

On est ainsi ramené, dans tous les cas, à décomposer en éléments simples une fraction rationnelle sous forme fractionnaire et l'on peut passer à la deuxième étape.

B.2. Factorisation du dénominateur

On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme S. On obtient ainsi pour S un produit de facteurs de la forme $(aX+b)^m$.

On peut alors passer à la troisième étape.

B.3. Décomposition en éléments simples

On est alors prêt pour écrire F sous forme d'une somme Σ d'éléments simples. Au début, $\Sigma = E$ où E désigne la partie entière de F. Le tableau ci-dessous résume les éléments simples qu'il faut ajouter à Σ en fonction de la nature des facteurs qui interviennent dans la factorisation de S.

Lorsqu'on rencontre un facteur dans S de la forme suivante :	on doit ajouter à Σ les éléments simples suivants :
$(aX+b)$	$\dfrac{\lambda}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2} + \dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
$\ldots$	$\ldots$

Il reste alors à déterminer les coefficients qui apparaissent dans Σ. La méthode standard consiste à mettre tous les éléments simples de Σ sur le même dénominateur S puis à identifier les coefficients du numérateur avec les coefficients de A pour se ramener à un système d'équations.

On peut aussi exploiter des techniques « astucieuses » (cf cours et travaux dirigés).

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{R}$

Cette fiche vous résume comment décomposer une fraction rationnelle réelle $F = \dfrac{A}{S}$ en une somme d'éléments simples réels.

A. Eléments simples réels

Définition 1

On appelle éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:

(i) les polynômes ;

(ii) les éléments simples de première espèce :

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^m} \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^* ;$$

(iii) les éléments simples de seconde espèce :

$$\frac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^p} \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, \mu, b, c \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad b^2-4ac<0.$$

B. Décomposition en éléments simples

B.1. Détermination de la partie entière et de la partie fractionnaire

On dit qu'une fraction rationnelle est sous forme fractionnaire si le degré de son numérateur est inférieur au degré de son dénominateur, c'est-à-dire, dans notre cas, si $\deg A < \deg S$.

Si l'on est dans cette situation, on peut directement passer à la deuxième étape.

Dans le cas contraire, on effectue la division euclidienne de A par S de sorte que $A = SE+R$ où E est le quotient et R le reste (on a donc $\deg(R) < \deg(S)$). On peut alors écrire

$$F = \frac{SE+R}{S} = E + \frac{R}{S}$$

où E est un polynôme sur $\mathbb{R}$ et R/S est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ de degré strictement négatif. Le polynôme E est appelé la partie entière de la fraction rationnelle F et entre dans la décomposition en éléments simples de F. La fraction rationnelle R/S est appelée la partie fractionnaire de F.

On est ainsi ramené, dans tous les cas, à décomposer en éléments simples une fraction rationnelle sous forme fractionnaire et l'on peut passer à la deuxième étape.

B.2. Factorisation du dénominateur

On factorise dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme S. On obtient pour S un produit de facteurs de la forme $(aX+b)^m$ et de termes du type $(aX^2+bX+c)^p$ avec $b^2-4ac<0$.

On peut alors passer à la troisième étape.

B.3. Décomposition en éléments simples

On est alors prêt pour écrire F sous forme d'une somme Σ d'éléments simples. Au début, $\Sigma = E$ où E désigne la partie entière de F. Le tableau suivant résume les éléments simples qu'il faut ajouter à Σ en fonction de la nature des facteurs qui interviennent dans la factorisation de S.

Lorsqu'on rencontre un facteur dans S de la forme suivante :	on doit ajouter à Σ les éléments simples suivants :
$(aX+b)$	$\dfrac{\lambda}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b}+\dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b}+\dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}+\dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
$\dots$	
(aX^2+bX+c)	$\dfrac{\lambda X+\mu}{aX^2+bX+c}$
$(aX^2+bX+c)^2$	$\dfrac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c}+\dfrac{\lambda_2 X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2}$
$(aX^2+bX+c)^3$	$\dfrac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c}+\dfrac{\lambda_2 X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2}+\dfrac{\lambda_3 X+\mu_3}{(aX^2+bX+c)^3}$
$\dots$	

Il reste alors à déterminer les coefficients qui apparaissent dans Σ. La méthode standard consiste à mettre tous les éléments simples de Σ sur le même dénominateur S puis à identifier les coefficients du numérateur avec les coefficients de A pour se ramener à un système d'équations.

On peut aussi exploiter des techniques « astucieuses » (cf cours et travaux dirigés).