INTÉGRATION

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose
$$F(x) = \int^x \cos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t.$$
Posons $u = \sqrt{t}$.
Nouvelle borne : Si $t = x$, on a $u = \sqrt{x}$.
Nouvelle différentielle : Le changement de variable $t \longmapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u.$$
Nouvel intégrant : On a
$$\cos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t = \cos(u)\,2u\,\mathrm{d}u$$
Nouvelle expression de l'intégrale : On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$F(x) = 2\int^{\sqrt{x}} u\cos(u)\,\mathrm{d}u.$$

Effectuons alors une intégration par parties dans cette intégrale en utilisant les fonctions U, V de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ définies par $U(u) = u$, $U'(u) = 1$, $V'(u) = \cos(u)$ et $V(u) = \sin(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$F(x) = 2\big[u\sin(u)\big]^{\sqrt{x}} - 2\int^{\sqrt{x}} \sin(u)\,\mathrm{d}u,$$
d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○]
1. Démontrer que
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\mathrm{d}x.$$
2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Effectuons le changement de variable $u = \pi/4 - x$ dans l'intégrale
$$\int_0^{\pi/4} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\mathrm{d}x.$$
Nouvelles bornes : Si $x = 0$, on a $u = \pi/4$ et si $x = \pi/4$, on a $u = 0$.
Nouvelle différentielle : Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi/4]$ et l'on a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$.
Nouvel intégrant : On a $\ln\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\mathrm{d}x = -\ln(\cos u)\,\mathrm{d}u$.
Nouvelle expression de l'intégrale : On obtient
$$\int_0^{\pi/4} \ln\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\mathrm{d}x = -\int_{\pi/4}^0 \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u,$$

ce qui implique que

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\Big]\,\mathrm{d}x.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \ln\Big(1+\frac{\sin x}{\cos x}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \big(\ln(\cos x+\sin x)-\ln(\cos x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\Big[\sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\Big)\Big]\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}+\ln\Big(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\Big)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int_0^{\pi/4}\ln\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\Big]\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{d'après 1,}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\ln 2.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [○]
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}, \qquad g(x) = \frac{6x-11}{(x-1)^2}, \qquad h(x) = \frac{x+5}{9x^2+6x+2}.$$

A faire.

♦ ***Exercice 4.*** [○]
Trouver les primitives sur $]0;\pi[$ de

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

Le changement de variable $t \longmapsto -t$ ne modifie pas l'intégrant $(\mathrm{d}(-t)/\sin^3(-t) = \mathrm{d}t/(\sin^3 t))$, donc les règles de Bioche indiquent donc de faire le changement de variable $u=\cos t$. On a $\mathrm{d}u = -(\sin t)\mathrm{d}t$ et

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sin^3 t} = \frac{-\mathrm{d}u}{\sin^4(t)} = \frac{-\mathrm{d}u}{(1-\cos^2 t)^2} = \frac{-\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2},$$

si bien que

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = -\int^{\cos x}\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = -\int^{\cos x}\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2(1+u)^2}.$$

On recherche les constantes a, b, c et d telles que

$$\frac{1}{(u-1)^2(1+u)^2} = \frac{a}{(1+u)^2}+\frac{b}{1+u}+\frac{c}{(u-1)^2}+\frac{d}{u-1}.$$

En multipliant par $(u+1)^2$ et en prenant $u=-1$, on obtient $a=1/4$. En multipliant par $(u-1)^2$ et en prenant $u=1$, on obtient $c=1/4$. En multipliant par u et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $b+d=0$. En prenant en $u=0$, on a $1=a+b+c-d$. De ces relations, on tire

$$\frac{1}{(u-1)^2(1+u)^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{-1}{u-1}\Big).$$

Il s'ensuit que

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\Big(\frac{-1}{1+\cos x}+\ln|1+\cos x|+\frac{-1}{\cos x-1}-\ln|\cos x-1|\Big)+c,$$

où c est une constante arbitraire. Donc

$$\boxed{\forall x \in \left]0;\pi\right[, \qquad \int^x f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + c\right\} \qquad (c \in \mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 5.*** [⋆]
Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th} x}}.$$

Quand une racine carrée traine dans un calcul de primitive, il est souvent efficace de faire un changement de variable du type « la nouvelle variable = la racine carrée ».

Effectuons par conséquent le changement de variable $u = \sqrt{\operatorname{th} t}$ dans

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\operatorname{th} t}}.$$

La nouvelle borne est $\sqrt{\operatorname{th} x}$.

Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car th est de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]0;1[$ et $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$) et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1-(\operatorname{th} t)^2}{2\sqrt{\operatorname{th} t}} = \frac{1-u^4}{2u},$$

donc

$$\mathrm{d}t = \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1-u^4}.$$

Le nouvel intégrant est donc donné par

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\operatorname{th} t}} = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^4}.$$

Il s'ensuit que

$$F(x) = \int^{\sqrt{\operatorname{th} x}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^4}.$$

Or

$$\frac{2}{1-u^4} = \frac{2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{1+u^2},$$

où la dernière égalité découle d'un développement en éléments simples. Donc

$$\begin{aligned} F(x) &= \int^{\sqrt{\operatorname{th} x}} \Big(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{1+u^2}\Big)\mathrm{d}u \\ &= \Big[-\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + \arctan u\Big]^{\sqrt{\operatorname{th} x}} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1-\sqrt{\operatorname{th} x}| + \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{\operatorname{th} x}| + \arctan\sqrt{\operatorname{th} x} + c \qquad (\text{où } c \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

d'où, comme $\forall x > 0$, $\sqrt{\operatorname{th} x} \in]0;1[$,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad F(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}} + \arctan\sqrt{\operatorname{th} x} + c \qquad (\text{où } c \in \mathbb{R})}$$

Remarque : On peut certainement transformer cette expression à l'aide de formules de trigonométrie hyperbolique bien senties...

♦ ***Exercice 6.*** [$\star$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ la fonction qui échange les deux premières décimales, c'est-à-dire $f(0,\overline{a_1a_2a_3\ldots}) = 0,\overline{a_2a_1a_3\ldots}$. Démontrer que f est continue par morceaux sur $[0;1]$ et calculer son intégrale sur ce segment.

Si $a \in [\![0;9]\!]$ et $b \in [\![0;8]\!]$, on a

$$\forall x \in \left[0,\overline{ab}\,;\,0,\overline{a(b+1)}\right[, \qquad f(x) = x + 0,\overline{ba} - 0,\overline{ab}.$$

Si $a \in [\![0;8]\!]$ et $b = 9$, on a

$$\forall x \in \left[0,\overline{a9}\,;\,0,\overline{(a+1)0}\right[, \qquad f(x) = x + 0,\overline{9a} - 0,\overline{a9}.$$

Si $a = 9$ et $b = 9$, on a

$$\forall x \in \left[0,\overline{99}\,;\,1\right[, \qquad f(x) = x.$$

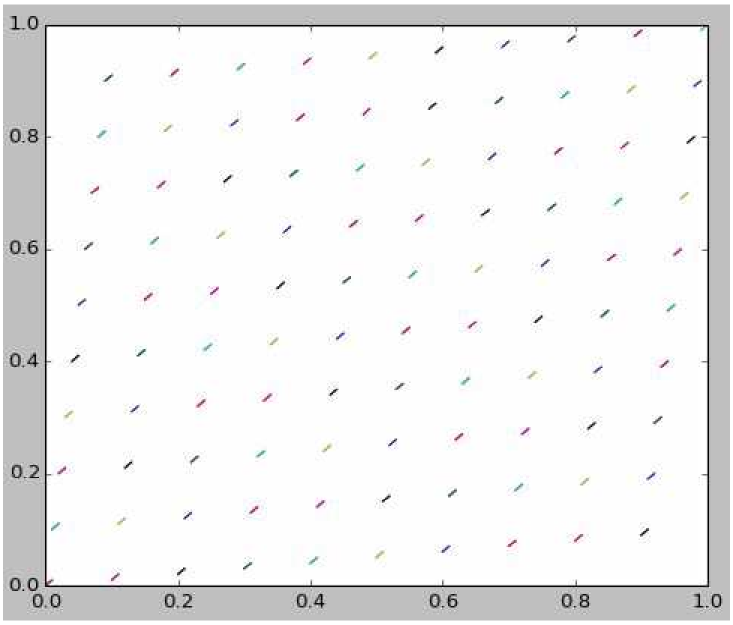
Enfin

$$f(1) = 1.$$

On constate donc que f est affine par morceaux, ce qui démontre que

$$\boxed{f \text{ est continue par morceaux.}}$$

Graphiquement, voici la fonction f



Pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\begin{aligned} 1 - f(1-x) &= 1 - f(1 - 0,\overline{a_1a_2a_3\ldots}) \\ &= 1 - f\big(0,\overline{(9-a_1)(9-a_2)(9-a_3)\ldots}\big) \\ &= 1 - 0,\overline{(9-a_2)(9-a_1)(9-a_3)\ldots} \\ &= 0,\overline{a_2a_1a_3\ldots} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

ce qui implique que l'aire située entre l'axe des abscisses et le graphe de f est égale à l'aire située entre le graphe de f et la droite horizontale d'ordonnée 1. La somme de ces deux aires étant l'aire du carré unité, on déduit que ces deux aires valent $1/2$. En particulier,

$$\boxed{\int_0^1 f = \frac{1}{2}.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [○]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

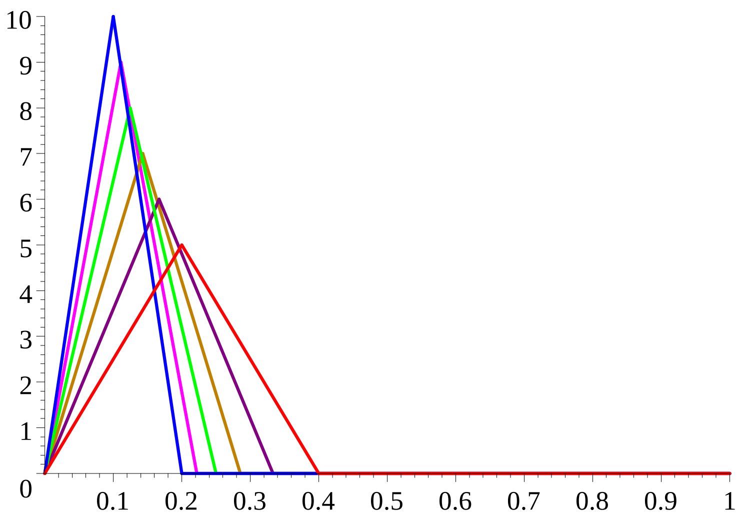
$$\forall x \in [0;1], \qquad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0;1/n] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in [1/n;2/n] \\ 0 & \text{si } x \in [2/n;1] \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;1]$ et que, pour tout $x \in [0;1]$, $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Vérifier cependant que $\big(\int_0^1 f_n\big)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0.

2. Que pensez-vous de ceci :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0 \,\mathrm{d}t = 0\,?$$

1. Juste pour faire joli, voici f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 et f_{10} :



La fonction f_n est clairement continue sur $[0;1/n]$, sur $[1/n;2/n]$ et sur $[2/n;1]$. Aux points de raccordement ($1/n$ et $2/n$), les formules coïncident. Donc

$$\boxed{f_n \text{ est continue sur } [0;1].}$$

On a $f(0) = 0$. Soit $x \in \,]0;1]$, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x \in [2/n;1]$, donc $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ stationne à la valeur 0 à partir du rang n_0. Donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0;1],\ \big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } 0.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 f_n = \text{ aire d'un triangle de base } \frac{2}{n} \text{ et de hauteur } n,$$

donc

$$\int_0^1 f_n = 1,$$

ce qui montre que

$$\boxed{\Big(\int_0^1 f_n\Big)_{n\geqslant 1} \text{ ne tend pas vers } 0.}$$

On en déduit la chose suivante :

$$\boxed{\text{on ne peut pas librement passer à la limite sous une intégrale.}}$$

2. Le calcul effectué n'est pas correct (ce qui ne veut pas dire qu'il ne donne pas la bonne réponse !). Pour démontrer proprement que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t=0$, je ne connais pas de méthode immédiate (sauf celle utilisant les théorèmes de spé). Il faut traiter l'exercice sur les intégrales de Wallis. C'est une excellente occasion de le réviser.

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]

Soit $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$u_n=\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Déterminer la limite de $(nu_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, le théorème des bornes nous dit que f est bornée sur ce segment. Notons $M=\sup_{[0;1]}f$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|u_n|\leqslant\int_0^1 x^n|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n M\,\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0}\text{ converge vers }0.}$$

2. La fonction f étant dorénavant de classe $\mathscr{C}^1$, il est licite d'effectuer une intégration par parties. Cela donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(1)}{n+1}-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)u_n=f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Le raisonnement tenu à la question 1 nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n=f(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}nu_n=f(1).}$$

♦ ***Exercice 9.*** [★]

Soit $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ une fonction continue. On note $M=\sup_{[0;1]}f$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n}=M.$$

Pour tout $n\geqslant 1$, on a

$$\left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n}\leqslant\left(\int_0^1 M^n\right)^{1/n}=M.$$

Soit $\varepsilon>0$. Le théorème des bornes nous dit que f atteint la valeur M, disons en x_0. La continuité de f en x_0 nous permet d'affirmer l'existence de $\alpha,\beta\in[a;b]$ tels que $\forall x\in[\alpha;\beta]\,,\ f(x)\geqslant M-\varepsilon$. Dès lors, pour tout $n\geqslant 1$, on a

$$\left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n}\geqslant\left(\int_\alpha^\beta f^n\right)^{1/n}\geqslant\left(\int_\alpha^\beta(M-\varepsilon)^n\right)^{1/n}=(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon).$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon) \leqslant \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} \leqslant M.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon) = M-\varepsilon,$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad (\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon) \geqslant M-2\varepsilon.$$

Dès lors, pour $n \geqslant N$, on a

$$M-2\varepsilon \leqslant \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} \leqslant M.$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} = M.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [○] (Inégalité de Minkowski)
Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[0;1]$. Démontrer que

$$\sqrt{\int_0^1 (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int_0^1 (f+g)^2} &= \sqrt{\int_0^1 f^2 + 2\int_0^1 fg + \int_0^1 g^2} \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2 + 2\sqrt{\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2} + \int_0^1 g^2} \qquad \text{par C.S.} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sqrt{\int_0^1 (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [○]
Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que $fg \geqslant 1$. Démontrer que

$$\int_0^1 f \times \int_0^1 g \;\geqslant\; 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f \times \int_0^1 g &= \int_0^1 \sqrt{f}^2 \times \int_0^1 \sqrt{g}^2 \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{fg}\right)^2 \qquad \text{par C.S.} \\
&\geqslant \left(\int_0^1 1\right)^2 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 f \times \int_0^1 g \geqslant 1.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [★]

Soient $c > 0$ et $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [0; +\infty[\,, \qquad \int_0^x f^2 \leqslant c\left(\int_0^x f\right)^2.$$

Démontrer que f est la fonction nulle.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas la fonction nulle. Introduisons alors $t_0 \in [0; +\infty[$ la borne supérieure de l'ensemble $Z_f = \{t \in [0; +\infty[: \forall s \leqslant t,\ f(s) = 0\}$. L'hypothèse se réécrit alors sous la forme

$$\forall x \in [t_0; +\infty[\,, \qquad \int_{t_0}^x f^2 \leqslant c\left(\int_{t_0}^x f\right)^2 \qquad (*).$$

Il s'ensuit que, pour tout $x \in [t_0; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_{t_0}^x f\right)^2 &\leqslant \int_{t_0}^x f^2 \times \int_{t_0}^x 1 && \text{par Cauchy–Schwarz}\\ &\leqslant c(x - t_0)\left(\int_{t_0}^x f\right)^2 && \text{par } (*).\end{aligned}$$

En particulier,

$$\forall x \in \left[t_0; t_0 + \frac{1}{c}\right], \qquad \int_{t_0}^x f = 0,$$

ce qui donne, après dérivation,

$$\forall x \in \left[t_0; t_0 + \frac{1}{c}\right], \qquad f(x) = 0.$$

Mézalors $t_0 + 1/c \in Z_f$ ce qui contredit la définition de t_0. En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle.}}$$

♦ ***Exercice 13.*** [○]

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont la moyenne vaut $1/2$. Démontrer que f admet un point fixe.

Par l'absurde, supposons que f n'admet pas de point fixe. Alors la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ ne s'annule pas, ce qui assure (d'après le TVI) qu'elle ne change pas de signe. Supposons par exemple que $\forall x \in [0; 1]\,,\ f(x) - x > 0$. Alors

$$\int_0^1 f(x) - x \,\mathrm{d}x > 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 f(x) > \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

C'est absurde !

Donc

$$\boxed{f \text{ admet un point fixe.}}$$

♦ ***Exercice 14.*** [⋆]

1. Soient $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que g est strictement positive sur $]a;b[$. Démontrer l'*identité de la moyenne*, c'est-à-dire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$
Quel résultat retrouve-t-on lorsque g est la fonction constante égale à 1 ?
2. Démontrer que la formule de Taylor–reste intégrale implique la formule de Taylor–Lagrange (pour une fonction réelle).

1. Considérons la moyenne m de f pondérée par la fonction g, c'est-à-dire
$$m = \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g}\cdot$$
La fonction $(f-m)g$ est continue sur $[a;b]$ et d'intégrale nulle car
$$\int_a^b (f-m)g = \int_a^b fg - m\int_a^b g = \int_a^b fg - \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g}\int_a^b g = 0.$$
Si on suppose que $(f-m)g$ ne s'annule pas sur $]a;b[$, le TVI nous dit que $(f-m)g$ ne change pas de signe sur $[a;b]$. Dès lors, un théorème du cours nous dit que $(f-m)g$ est la fonction nulle, ce qui est absurde ! Par conséquent, $(f-m)g$ s'annule sur $]a;b[$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\big(f(c)-m\big)g(c) = 0$. Comme $g(c) \neq 0$, on en déduit que $f(c) = m$, c'est-à-dire
$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g}\cdot$$
En conclusion,
$$\boxed{\text{il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.}$$
Pour $g = \widetilde{1}$, on retrouve le lemme de la moyenne énoncé en cours, c'est-à-dire
$$\boxed{\text{il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.}$$

2. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>réelle</u> de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a;b]$. La formule de Taylor – reste intégral nous dit que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Comme $f^{(n)}$ est continue et $t \longmapsto (b-t)^{n-1}/(n-1)!$ est continue et strictement positive sur $]a;b[$, l'égalité de la moyenne nous dit qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = f^{(n)}(c)\left[\frac{(b-t)^n}{n!}\right]_a^b = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}\cdot$$
Donc il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}\cdot$$
Par conséquent,
$$\boxed{\text{la formule de Taylor–reste intégrale implique celle de Taylor–Lagrange (pour une fonction réelle).}}$$

♦ ***Exercice 15.*** [⋆]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{n+2} + 2a_n = 5a_{n+1}$ et en déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = A/2^n$.
3. Déterminer une relation liant a_0 et a_1 et en déduire la valeur de A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\cos(nt)|}{|4\cos t - 5|}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \left\{\begin{array}{l} |\cos(nt)| \leqslant 1 \\ |4\cos t - 5| \geqslant 1 \end{array}\right. \\ &\leqslant 2, \end{aligned}$$
donc
$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée par 2.}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} 2a_{n+2} + 2a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\big[\cos\big((n+2)t\big) + \cos(nt)\big]}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t\cos\big((n+1)t\big)}{4\cos t - 5}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(4\cos t - 5 + 5)\cos\big((n+1)t\big)}{4\cos t - 5}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n+1)t\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{5\cos\big((n+1)t\big)}{4\cos t - 5}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\big((n+1)t\big)}{n+1}\right]_{-\pi}^{\pi} + 5I_{n+1} \\ &= 0 + 5I_{n+1}, \end{aligned}$$
où la deuxième égalité découle de la formule $\cos p + \cos q = 2\cos\big((p+q)/2\big)\cos\big((p-q)/2\big)$. Donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2a_{n+2} + 2a_n = 5I_{n+1}.}$$
L'équation caractéristique $2r^2 - 5r + 2 = 0$ de cette suite récurrente double admet un discriminant égal à $\Delta = 9$ et ses racines sont $r_1 = 1/2$ et $r_2 = 2$. D'après le cours, on sait alors qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = A.\frac{1}{2^n} + B.2^n.$$
Or (a_n) étant bornée, on a nécessairement $B = 0$. En conclusion,
$$\boxed{\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{A}{2^n}\cdot}$$

3. On remarque que
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t - 5/4 + 5/4}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t + \frac{5}{4}a_0 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}a_0,$$
donc
$$\boxed{4a_1 = 2 + 5a_0.}$$
En combinant cette relation avec le résultat de la question précédente, on a $4(A/2) = 2 + 5A$, c'est-à-dire $A = -2/3$. Donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -\frac{1}{3.2^{n-1}}\cdot}$$

♦ *Exercice 16.* [∘]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'encadrements, démontrer que les suites (I_n) et (J_n) tendent vers 0.
2. Établir une relation entre I_n et J_n pour tout $n \geqslant 0$. En déduire un équivalent de I_n.

1. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{\lim I_n = 0.}$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1], \qquad 0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{\lim J_n = 0.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\Big[x\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{J_n}{n}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad nI_n = \ln 2 - J_n.}$$

On a donc

$$\lim nI_n = \ln 2,$$

ce qui donne

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\circ$]
On pose
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de f.
2. Calculer $f(1)$.
3. a) En notant que $\forall x > 1,\ \forall t \in \left[x; x^2\right],\ \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que f tend vers $-\infty$ en 0.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Donner l'allure grossière de la courbe.
   Si x_0 désigne le nombre réel où f' s'annule, on donne $x_0 \approx 1,2$ et $f(x_0) \approx 0,03$

1. La fonction $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}/t$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc
$$\boxed{f \text{ est bien définie.}}$$

2. On a $f(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = 0$, donc
$$\boxed{f(1) = 0.}$$

3. a) Pour $x > 0$, on a
$$0 \leqslant f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{e}^{-x^2} \ln x.$$
   Or, par croissances comparées,
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^4} \ln x = 0,$$
   donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$
   b) Lorsque $x < 1$, on préfère écrire f sous la forme
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
   Or, comme $\forall t \in \left[x^2; x\right],\ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, on a
$$\forall x > 0, \qquad \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{-x^2} \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{e}^{-x^2} \ln\left(\frac{1}{x}\right),$$
   donc
$$\lim_{x\to0} \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$
   Par conséquent, on a
$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x) = -\infty.}$$

4. Si G désigne une primitive de $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}/t$ sur $]0; +\infty[$, on a
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = G(x^2) - G(x).$$
   Par suite,
$$\boxed{f \text{ est une fonction de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0; +\infty[.}$$
   En dérivant l'expression ci-dessus, on a
$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x},$$
   donc
$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}(2\,\mathrm{e}^{x^2-x^4} - 1).}$$

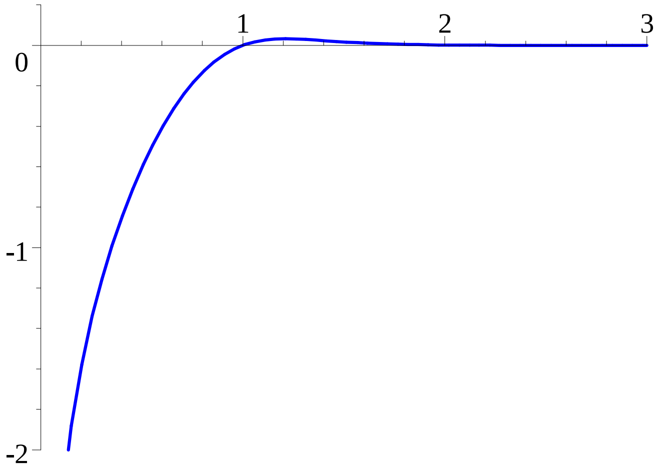
Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\big(f'(x) \geqslant 0\big) &\iff \big(2\,\mathrm{e}^{x^2 - x^4} \geqslant 1\big) \\
&\iff \big(x^4 - x^2 - \ln 2 \leqslant 0\big) \\
&\iff \big(0 < x \leqslant x_0\big) \quad \text{où} \quad x_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\ln 16}}{2}}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f \text{ est croissante sur }]0; x_0[\text{ et décroissante sur }]x_0; +\infty[\text{ où } x_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\ln 16}}{2}} \approx 1,2.}$$

5. Graphiquement, on obtient



♦ ***Exercice 18.*** [∘]
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction ne s'annulant pas sur I.

1. Soit $a \in I$. Démontrer que

$$\forall x \in I, \qquad \exp\left\{\int_a^x \frac{f'}{f}\right\} = \frac{f(x)}{f(a)}.$$

2. On suppose qu'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. Démontrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'}{f} \in \mathbb{Z}.$$

1. Les dérivées de $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{f'}{f}$ et $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)$ ont la même dérivée et coïncident en a, donc ce sont deux fonctions égales. Donc

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad \exp\left\{\int_a^x \frac{f'}{f}\right\} = \frac{f(x)}{f(a)}.}$$

2. Le résultat de la question précédente nous dit que

$$\exp\left\{\int_a^b \frac{f'}{f}\right\} = \frac{f(b)}{f(a)} = 1,$$

donc

$$\int_a^b \frac{f'}{f} \in 2i\pi\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'}{f} \in \mathbb{Z}.}$$

♦ ***Exercice 19.*** [★]

1. Démontrer que la relation $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Exprimer f en utilisant l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la régularité de f. Calculer f' et préciser le sens de variation de f.
3. Démontrer que $(-f)\circ(-f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
4. Étudier l'existence éventuelle d'une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(y) = \int_x^{y} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'application φ est dérivable (donc aussi continue) et strictement croissante puisque c'est une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{t^2}$. De plus, on a $\lim_{y\to-\infty}\varphi(y) = -\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\varphi(y) = +\infty$. Le théorème de la bijection implique donc que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique nombre réel $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(y_x) = 1$. On pose $f(x) = y_x$. Par suite,

$$\boxed{\text{la relation } \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 \text{ définit une fonction } f \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

2. L'application u est l'application φ de la question précédente dans le cas où $x = 0$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Or la relation qui définit f peut se réécrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u\big(f(x)\big) - u(x) = 1,$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = u^{-1}\big(u(x) + 1\big).}$$

L'application u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme primitive de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t^2}$. De plus, u' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après un théorème du cours, l'application u^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, d'après l'égalité de la question précédente, φ est la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u'\big(u^{-1}(u(x)+1)\big)},$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \exp\left\{x^2 - \big(u^{-1}(u(x)+1)\big)^2\right\}.}$$

Par suite,

$$\boxed{\varphi \text{ est une fonction strictement croissante.}}$$

3. En effectuant le changement de variable $u = -t$ dans la relation définissant f, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-f(x)}^{-x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}u = 1,$$

ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\big(-f(x)\big) = -x$$

ou encore que

$$\boxed{(-f)\circ(-f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est symétrique par rapport à la seconde bissectrice } (y = -x).}$$

4. Pour que la relation définissant f soit satisfaite, il est nécessaire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant x$. Par suite, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 = \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t \geqslant \big(f(x) - x\big)\,\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \mathrm{e}^{-x^2},$$

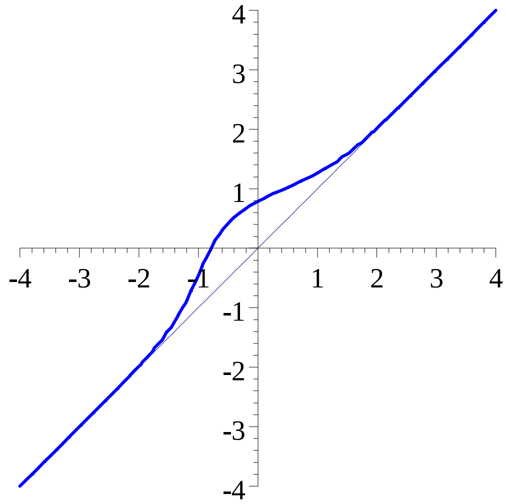
ce qui démontre, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ admet en } \pm\infty \text{ la droite } y = x \text{ comme asymptote.}}$$

5. On obtient



♦ ***Exercice 20.*** [$\circ$]

1. Calculer la limite des suites définies par

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}.$$

2. Déterminer un équivalent de

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2 + k^2}.$$

1. On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

donc

$$\boxed{\lim u_n = \frac{2}{3}.}$$

On a

$$\ln v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\ln x - x\big]_0^1 = -1,$$

donc

$$\boxed{\lim v_n = \mathrm{e}^{-1}.}$$

2. On a

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + (k/n)^2} = n \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + (k/n)^2},$$

donc

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0,$$

donc

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n}{4}.}$$

♦ ***Exercice 21.*** [⋆]
Calculer la limite, quand $n \longrightarrow +\infty$, de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k)}} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k-1)}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k-1)/n}.$$

Le minorant et le majorant sont des sommes de Riemann associées à la fonction $x \longmapsto 1/(1+x)$, donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann et le théorème des gendarmes, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2.}$$

♦ ***Exercice 22.*** [⋆]
On considère l'intégrale de Poisson $P(x)$ définie par

$$P(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $P(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

▶ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme de Riemann S_n de P définie par

$$S_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left\{x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right\}.$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{4\pi}{n}\ln|x^n - 1|$.
3. En déduire la valeur de $P(x)$. Représenter P.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, on a $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t > 0$ donc la fonction $t \longmapsto \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est définie et continue sur $[0; 2\pi]$, ce qui justifie que

$$\boxed{P(x) \text{ existe pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2\pi}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos(2k\pi/n) + 1\right) \\
&= \frac{2\pi}{n}\ln\left\{\prod_{k=0}^{n-1}\left((x - \mathrm{e}^{2ik\pi/n})(x - \mathrm{e}^{-2ik\pi/n})\right)\right\} \\
&= \frac{2\pi}{n}\ln\left\{\prod_{k=0}^{n-1}(x - \mathrm{e}^{2ik\pi/n})\prod_{k=0}^{n-1}(x - \mathrm{e}^{-2ik\pi/n})\right\} \\
&= \frac{2\pi}{n}\ln\left\{(x^n - 1)^2\right\} \\
&= \frac{4\pi}{n}\ln|x^n - 1|,
\end{aligned}$$

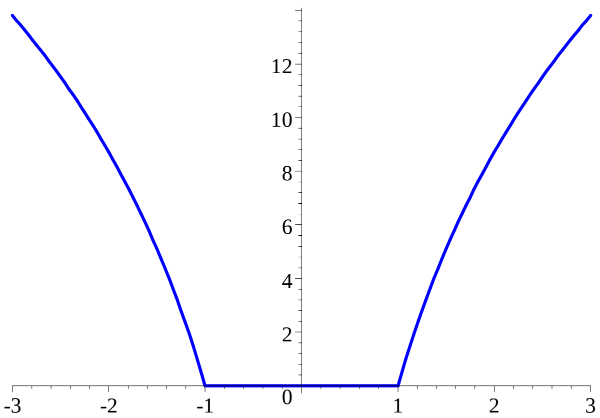
puisque $\prod_{k=0}^{n-1}(x-\mathrm{e}^{2ik\pi/n})$, mais aussi $\prod_{k=0}^{n-1}(x-\mathrm{e}^{-2ik\pi/n})$, est le polynôme unitaire de degré n dont les racines sont les racines n-èmes de l'unité , c'est-à-dire x^n-1. Donc

$$\boxed{S_n = \frac{4\pi}{n}\ln|x^n-1|.}$$

3. Si $|x|>1$, on a $\ln|x^n-1| \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln|x|$ donc $P(x)=4\pi\ln|x|$ et si $|x|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln|x^n-1|=0$ donc $P(x)=0$. Ainsi

$$\boxed{P(x)=\begin{cases} 4\pi\ln|x| & \text{si } |x|<1, \\ 0 & \text{si } x<-1 \text{ ou } x>1. \end{cases}}$$

Graphqiement, on obtient



♦ ***Exercice 23.*** [○]
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Démontrer que l'intégrale de f est la même sur n'importe quel segment de longueur T.

Il suffit de considérer la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad g(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et de constater que sa dérivée est nulle puisque $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=f(x+T)-f(x)=0$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{l'intégrale d'une fonction } T\text{-périodique est la même sur n'importe quel segment de longueur } T.}$$

♦ ***Exercice 24.*** [○]
Soient $a\geqslant 0$ et $f:[-a;a]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a;a]$.

1. Démontrer que, si f est paire sur $[-a;a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, si f est impaire sur $[-a;a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

AQT

♦ ***Exercice 25.*** [★] (Lemme de Riemann–Lebesgue)

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. En utilisant les fonctions en escalier, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Peut-on faire plus simple lorsque l'on sait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$?

- Si f est une fonction constante, égale à λ, on a

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\cos(na)-\cos(nb)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Si φ est une fonction en escalier, on considère une subdision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ adaptée de sorte que, sur chaque segment de la subdivision, on est ramené au cas d'une fonction constante. Donc

$$\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Si f est une fonction continue par morceaux, on va pouvoir l'approcher uniformément sur $[a;b]$ par des fonctions en escalier.

  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad |f(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

  D'après le ► précédent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Dès lors, pour $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \big(f(t)-\varphi(t)\big)\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)-\varphi(t)||\sin(nt)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

  Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

  En conclusion,

$$\boxed{\text{le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai pour une fonction continue par morceaux.}}$$

- Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, une intégration par parties suffit pour conclure. On pose $M_0 = \sup_{[a;b]}|f|$ et $M_1 = \sup_{[a;b]}|f'|$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|f(a)\cos(na)|+|f(b)\cos(nb)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leqslant \frac{2M_0}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b M_1\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2M_0}{n} + \frac{M_1(b-a)}{n},
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour une fonction } \mathscr{C}^1\text{, le lemme de Riemann-Lebesgue est facile à démontrer.}}$$

♦ ***Exercice 26.*** [$\star$]

1. Soit Q un polynôme à coefficients réels.
   a) Démontrer que
   $$\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.$$
   Indication : On pourra commencer par regarder ce qui se passe pour un monôme.
   b) En déduire que
   $$\left|\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$
   puis que
   $$\left|\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$
2. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients réels.
   a) Justifier que
   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^n {a_k}^2.$$
   b) Démontrer que
   $$\int_{-1}^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\sum_{k=0}^n {a_k}^2.$$

1. a) Lorsque $Q(X) = X^k$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^1 t^k\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^1\\ &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta &= \textstyle\int_0^\pi \mathscr{I}\mathrm{m}\big(\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \textstyle\int_0^\pi \sin\big((k+1)\theta\big)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \left[-\frac{\cos\big((k+1)\theta\big)}{k+1}\right]_0^\pi\\ &= -\frac{\cos\big((k+1)\pi\big)-1}{k+1}\\ &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1},\end{aligned}$$

donc la relation est vraie pour un monôme. La linéarité de l'intégrale et la $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire permet d'étendre la relation à tout polynôme à coefficients réels. Donc

$$\boxed{\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.}$$

b) Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{0}^{\pi} \mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\big)\,\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leqslant \int_{0}^{\pi} \big|\mathscr{I}\mathrm{m}\big(Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\big)\big|\,\mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \int_{0}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,|\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{car } \forall z\in\mathbb{C},\ |\mathscr{I}\mathrm{m}(z)|\leqslant|z| \\
&= \int_{0}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left|\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{0}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.}$$

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$|Q(\mathrm{e}^{-i\theta})| = \big|Q(\overline{\mathrm{e}^{i\theta}})\big| = \big|\overline{Q(\mathrm{e}^{i\theta})}\big| = |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|,$$

donc la fonction $\theta\longmapsto|Q(\mathrm{e}^{-i\theta})|$ est paire, ce qui permet d'affirmer que

$$\int_{0}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

On peut alors réécrire le résultat précédent sous la forme

$$\boxed{\left|\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.}$$

2. a) On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^{ik\theta}\,\Big|^2\,\mathrm{d}\theta.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^{ik\theta}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\,\mathrm{e}^{-i\ell\theta}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} a_k a_\ell\,\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} a_k a_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}\ \mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

avec, pour tous $k,\ell\in[\![0;n]\!]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}\ \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=\ell, \\ 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2.}$$

b) En utilisant l'inégalité de la question 1. b) avec $Q=P^2$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta.$$

En tenant alors compte du résultat de la question précédente, il vient

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\sum_{k=0}^{n} {a_k}^2.}$$

♦ ***Exercice 27.*** [∘]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'une primitive n-ème de f sur $\mathbb{R}$, notée $F^{[n]}$, et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de Darboux (toute fonction continue possède des primitives) assure l'existence de $F^{[n]}$ (par récurrence). On peut même assurer l'unicité de $F^{[n]}$ si l'on impose (par exemple) les conditions de Cauchy $F^{[1]}(0) = \cdots F^{[n]}(0) = 0$.

La fonction $F^{[n]}$ est bien sûr de classe $\mathscr{C}^n$. La formule de Taylor appliquée à la fonction $F^{[n]}$ à l'ordre $n-1$ en 0 nous dit alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F^{[n]}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-0)^k}{k!} \left(F^{[n]}\right)^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left(F^{[n]}\right)^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-0)^k}{k!} F^{[n-k]}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la primitive } n\text{-ème de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } F^{[1]}(0) = \cdots F^{[n]}(0) = 0 \text{ est } F^{[n]} : x \longmapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

♦ ***Exercice 28.*** [⋆]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\alpha_n = \int_0^1 (1-t)^n\, \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t.$$
En utilisant une relation liant α_n et α_{n+1}, déterminer un équivalent de α_n.
2. En déduire un équivalent de $u_n = \sin(\pi\,\mathrm{e}\,n!)$.

1. Par intégration par parties, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_n = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} + \frac{\alpha_{n+1}}{n+1}\cdot$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall t \in [0;1]\,,\ (1-t)^{n+1} \leqslant (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}$, donc, par croissance de l'intégrale,
$$\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}\ \mathrm{d}t,$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1},$$
ce qui prouve que
$$\alpha_{n+1} = O\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$$
La relation de récurrence nous dit alors que
$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
donc
$$\boxed{\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cdot}$$
2. La formule de Taylor reste intégral nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n!},$$

donc

$$u_n = \sin\Big(\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \alpha_n\Big).$$

Or

$$\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \pi \underbrace{n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!}}_{\text{entier pair}} + (n+1)\pi \equiv (n+1)\pi \pmod{2\pi},$$

donc

$$u_n = \sin\big((n+1)\pi + \pi\alpha_n\big) = (-1)^{n+1} \sin \pi\alpha_n.$$

Comme $\alpha_n \sim 1/n$, on a $\sin \alpha_n \sim \pi\alpha_n \sim \pi/n$, d'où

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.}$$