

# FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tous les exercices,  $K$  désigne un corps commutatif.

## ✚ Exercice 1. [★]

Lorsque  $\alpha$  est un pôle d'une fraction rationnelle  $F$ , on appelle *résidu* de  $F$  en  $\alpha$ , le coefficient de l'élément simple  $1/(X - \alpha)$  dans la décomposition de  $F$ .

Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ . Démontrer que  $F$  admet une primitive dans  $\mathbb{C}(X)$  si, et seulement si, tous les résidus de  $F$  sont nuls.

Ce résultat reste-t-il vrai pour une fraction rationnelle réelle ?

On procède par double implication.

⇐ Supposons que tous les résidus de  $F$  sont nuls.

Dans ce cas, la décomposition en éléments simples de  $F$  ne contient qu'un polynôme et des éléments simples de type  $\lambda/(aX + b)^m$  avec  $m \geq 2$ . Or, une primitive d'un polynôme est un polynôme et une primitive de  $\lambda/(aX + b)^m$  avec  $m \geq 2$  est de la forme  $\mu/(aX + b)^{m-1}$ . Donc  $F$  admet une primitive dans  $\mathbb{C}(X)$ .

⇒ Supposons que  $F$  admet une primitive  $G$  dans  $\mathbb{C}(X)$ . La décomposition en éléments simples de  $G$  est de la forme

$$G = P + \sum_{a \text{ pôle de } G} \frac{\lambda_a}{(X - a)^{m_a}}$$

où  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $m_a$  désigne la multiplicité du pôle  $a$ . Alors

$$F = G' = P' - \sum_{a \text{ pôle de } G} \frac{m_a \lambda_a}{(X - a)^{m_a + 1}}.$$

On constate alors tous les résidus de  $F$  sont nuls.

En conclusion,

$F$  admet une primitive dans  $\mathbb{C}(X)$  si, et seulement si, tous les résidus de  $F$  sont nuls.

Considérons

$$F = \frac{1}{1 + X^2} \in \mathbb{R}(X).$$

Cette fraction rationnelle n'a pas de primitive dans  $\mathbb{C}(X)$ , sinon la fonction rationnelle de cette primitive coïnciderait avec la fonction arctan, qui n'est pas une fonction rationnelle (y réfléchir !). Pourtant, tous les résidus de  $F$  sont nuls (et pour cause, elle n'a pas de résidu). Par conséquent,

le résultat précédent n'est plus valable dans  $\mathbb{R}(X)$ .

## ✚ Exercice 2. [★]

Dans le cours, nous avons dit que deux fractions rationnelles  $F$  et  $G = A/S$  sont composables lorsque  $S \circ F \neq 0$ . Démontrer que cette condition est en fait équivalente à l'assertion «  $F$  n'est pas une fraction rationnelle constante égale à une racine de  $S$  ».

On veut démontrer que

$$S \circ F \neq 0 \iff F \in K(X) \setminus \{\text{racines de } S\}.$$

$\Rightarrow$  La contraposée, qui dit que si  $F$  est constante égale à une racine de  $S$  alors  $S \circ F$  est nulle, est une évidence.

$\Leftarrow$  Supposons que  $F$  n'est pas constante égale à une racine de  $S$  et démontrons que  $S \circ F \neq 0$ .

Déjà, si  $F$  est constante mais pas égale à une racine de  $S$ , il est clair que  $S \circ F \neq 0$ .

On peut donc dorénavant considérer que  $F$  n'est pas constante. Considérons  $B/T$  un représentant irréductible de  $F$  et notons  $s_k$  les coefficients de  $S$  de sorte que  $S = \sum_{k=0}^d s_k X^k$  où  $d = \deg(S)$ . Alors

$$S \circ F = \sum_{k=0}^d s_k \frac{B^k}{T^k} = \frac{1}{T^d} \sum_{k=0}^d s_k B^k T^{d-k}.$$

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que  $S \circ F = 0$ . Cela entraîne que

$$\sum_{k=0}^d s_k B^k T^{d-k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$s_d B^d = - \sum_{k=0}^{d-1} s_k B^k T^{d-k}.$$

Comme  $T$  divise le membre de droite, il divise aussi  $s_d B^d$ , ce qui est impossible puisque  $s_d \neq 0$  et  $B \wedge T = 1$ . Donc  $S \circ F \neq 0$ .

En conclusion,

on peut écrire la composée  $G \circ F$  de deux fractions rationnelles dès que  $F$  n'est pas constante égale à un pôle de  $G$ .

### ✠ Exercice 3. [★]

Soit  $F$  une fraction rationnelle sur  $K$  de représentant irréductible  $A/S$ . Démontrer que  $F$  est paire si, et seulement si,  $A$  et  $S$  sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Si  $A$  et  $S$  sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, il est clair que  $F$  est paire.

Réciproquement, supposons que  $F$  est paire, c'est-à-dire  $F(-X) = F(X)$  ou encore  $A(-X)S(X) = A(X)S(-X)$ . Dès lors, on a  $S(X)|A(X)S(-X)$  et  $A \wedge S = 1$  donc  $S(X)|S(-X)$  d'après le lemme de Gauss. On démontre de même que  $S(-X)|S(X)$ . On en déduit que  $S(X)$  et  $S(-X)$  sont associés, donc qu'il existe  $\lambda \in K$  tel que  $S(X) = \lambda S(-X)$ . Or si le coefficient dominant de  $S$  est  $a \in K$ , alors le coefficient dominant de  $S(-X)$  est  $(-1)^n a$  où  $n = \deg(S)$ . Si  $n$  est pair, on en déduit que  $\lambda = 1$  et donc que  $S(X) = S(-X)$  puis  $A(X) = A(-X)$ . Si  $n$  est impair, on en déduit que  $\lambda = -1$  et donc que  $S(X) = -S(-X)$  puis  $A(X) = -A(-X)$ . Donc  $A$  et  $S$  sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

En conclusion,

$F$  est paire si, et seulement si,  $A$  et  $S$  sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

### ✠ Exercice 4. [★]

Soit  $F$  une fraction rationnelle sur  $\mathbb{C}$  non constante dont  $A/S$  est un représentant irréductible. On note  $\tilde{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction rationnelle associée.

1. Déterminer  $\tilde{F}(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\})$  dans le cas où il existe un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $A = \alpha S + \beta$ . On distinguera le cas  $\beta = 0$  des autres cas.
2. Déterminer  $\tilde{F}(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\})$  dans le cas où il n'existe pas de couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $A = \alpha S + \beta$ . Que dire dans ce cas ?
3. Application : Trouver tous les couples  $(F, G) \in \mathbb{C}(X)^2$  tels que  $G \circ F$  est un polynôme.

A faire.

✚ **Exercice 5.** [o]

Soient  $n \geq 1$  et

$$F = \frac{\alpha_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - a_n} \in \mathbb{C}(X)$$

où les  $a_i$  sont deux à deux distincts et les  $\alpha_i$  sont non nuls.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $F = P'/P$  et lorsque cette condition est remplie, préciser tous les polynômes  $P$  qui conviennent.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On peut écrire  $P = \lambda \prod_{j=1}^d (X - b_j)^{m_j}$  où les  $b_j$  sont des nombres complexes deux à deux distincts et les  $m_j$  sont des entiers naturels non nuls. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^d \frac{m_j}{X - b_j}.$$

Pour que  $P'/P = F$ , il est donc nécessaire et suffisant, d'après l'unicité de la décomposition en éléments simples, que  $d = n$ ,  $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$  (quitte à réordonner les  $b_j$ ) et  $\alpha_1 = m_1, \dots, \alpha_n = m_n$ . Par conséquent,

il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $F = P'/P$  si, et seulement si, les  $\alpha_j$  sont des entiers naturels

Alors

les polynômes qui conviennent alors sont de la forme  $P = \lambda \prod_{j=1}^n (X - a_j)^{\alpha_j}$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

✚ **Exercice 6.** [★]

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $P'^2 - P''P$  n'a pas de racines réelles.

On peut écrire  $P = \lambda \prod_{j=1}^d (X - b_j)^{m_j}$  où les  $b_j$  sont des nombres réels deux à deux distincts et les  $m_j$  sont des entiers naturels non nuls. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^d \frac{m_j}{X - b_j}.$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{P'^2 - P''P}{P^2} = - \sum_{j=1}^d \frac{m_j}{(X - b_j)^2}.$$

On constate alors que, pour tout nombre réel qui n'est pas une racine de  $P$ , on a

$$\frac{P'^2 - P''P}{P^2}(x) = - \sum_{j=1}^d \frac{m_j}{(x - b_j)^2} < 0,$$

donc les seules racines réelles possibles de  $P'^2 - P''P$  sont celles de  $P$ . Or si une racine de  $P$  était aussi une racine de  $P'^2 - P''P$ , elle serait une racine de  $P'^2$  et donc aussi de  $P'$ , c'est-à-dire que ce serait une racine double de  $P$ , ce qui est impossible. Donc

$P'^2 - P''P$  n'a pas de racines réelles.