

Corr. 1 Traversée d'un anneau

La force électrostatique est conservative donc on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique de la particule entre le point de départ et un point quelconque de l'axe (Oz) :

$$qV(z) + \frac{1}{2}mv(z)^2 = qV(d) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\text{Or, } V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{anneau}} \frac{Q}{2\pi a} \frac{dl}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\text{soit } V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

On déduit de ce qui précède le carré de la vitesse :

$$v(z)^2 = v_0^2 - \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right)$$

L'abscisse extrême atteinte correspond à $v(z_{\min}) = 0$, soit

$$\frac{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}{qQ} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + z_{\min}^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

et on atteint, et dépasse alors, le point O si la vitesse v_0 vaut au moins (strictement) :

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right)}$$

Corr. 2 Pression magnétostatique

1. L'utilisation des symétries et du théorème d'Ampère donne simplement

$$\vec{B}(r \leq a) = \vec{0}$$

$$\vec{B}(a \leq r \leq a + e) = \mu_0 j \left[\frac{r^2 - a^2}{2r} \right] \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}(r \geq a + e) = \mu_0 j \left[\frac{(a + e)^2 - a^2}{2r} \right] \vec{e}_\theta$$

2. La force volumique subie par le cylindre est celle des actions de Laplace pour les points de la distribution de courant :

$$\frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\mu_0 j^2 \left[\frac{r^2 - a^2}{2r} \right] \vec{e}_r$$

3. On calcule d'abord la force de Laplace sur un élément d'épaisseur qui vaut e , puis on fait tendre e vers zéro.

$$d\vec{F}_L = \int_{r=a}^{a+e} -\mu_0 j^2 \left[\frac{r^2 - a^2}{2r} \right] \vec{e}_r r d\theta dz$$

$$\text{soit } d\vec{F}_L = -\frac{\mu_0 j^2}{2} \left[\frac{(a+e)^3 - a^3}{3} - a^2 e \right] \vec{e}_r d\theta dz$$

Ensuite, on utilise $e \ll a$ et on fait le passage à la limite de l'épaisseur nulle :

$$d\vec{F}_L \simeq -\frac{\mu_0 j^2}{2} e^2 \vec{e}_r a d\theta dz \xrightarrow{e \rightarrow 0} -\frac{\mu_0 j_s^2}{2} dS \vec{e}_r$$

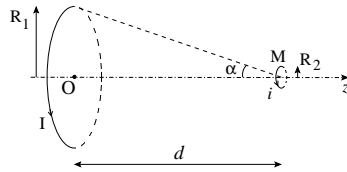
avec $dS = a d\theta dz$. On en déduit l'expression de la pression magnétique (vers l'intérieur où le champ magnétique est nul) :

$$p_{\text{magn}} = \frac{\mu_0 j_s^2}{2}$$

Corr. 3 Interaction entre deux spires

1. Soit un point M de la petite spire repéré par des coordonnées cylindriques ($\rho = R_2, \theta, z$). Il est dans le plan de symétrie Π^- des courants de la grande spire qui contient l'axe (Oz). Ainsi, avec l'invariance de révolution,

$$\vec{B}_1(\text{M}) = B_{1\rho}(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_{1z}(\rho, z) \vec{e}_z$$



On considère alors une surface fermée ayant la forme d'un petit cylindre, d'axe (Oz), de rayon ρ et de hauteur dz . Le flux de \vec{B}_1 à travers ce cylindre est nul (équation de Maxwell-flux) donc

$$\pi \rho^2 [B_{1z}(0, z + dz) - B_{1z}(0, z)] + 2\pi \rho dz B_{1\rho}(\rho, z) = 0$$

Ainsi, le lien entre le champ radial proche de l'axe et celui sur l'axe est

$$B_{1\rho}(\rho, z) \simeq -\frac{\rho}{2} \frac{dB_{1z}(0, z)}{dz}$$

et le champ au voisinage de l'axe s'écrit à l'ordre le plus bas sur chaque composante

$$\vec{B}_1 \simeq B_{1z}(0, z) \vec{e}_z - \frac{\rho}{2} \frac{dB_{1z}(0, z)}{dz} \vec{e}_\rho$$

Seule la partie non uniforme de cette expression donne un résultat non nul pour la résultante des forces réparties de Laplace exercées sur la petite spire :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{spire 2}} i d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$$

$$\text{soit } \vec{F}_L = \int_{\theta=0}^{2\pi} i R_2 d\theta \vec{e}_\theta \wedge \left[-\frac{\rho}{2} \frac{dB_{1z}(0, z)}{dz} \vec{e}_\rho \right]_{\rho=R_2, z=d}$$

d'où

$$\vec{F}_L = i \pi R_2^2 \left[\frac{dB_{1z}(0, z)}{dz} \right]_{z=d} \vec{e}_z$$

Il ne reste qu'à calculer la dérivée du champ magnétique sur l'axe créé par la grande spire :

$$B_{1z}(0, z) = \frac{\mu_0 I}{2R_1} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}}$$

Alors

$$\vec{F}_L = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R_1^2 (\pi R_2^2 i) d}{(R_1^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z$$

Il s'agit d'une force **attractive** si les deux spires sont orientées réellement dans le même sens (ie I et i de même signe).

2. En considérant la petite spire comme un dipôle magnétique de moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = i \pi R_2^2 \vec{e}_z$$

on peut exprimer la résultante par

$$\vec{F}_L = (\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B}_1 = i \pi R_2^2 \left[\frac{dB_{1z}(0, z)}{dz} \right]_{z=d} \vec{e}_z$$

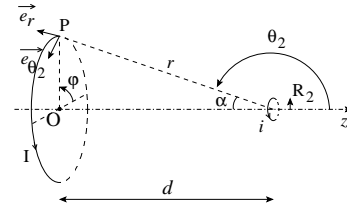
On retrouve alors le résultat de la première question, bien plus simplement n'est-ce pas ?

3. En un point P de la grande spire, le champ \vec{B}_2 créé par la petite spire est assimilable à celui d'un dipôle de moment $\vec{\mathcal{M}}_2$, soit

$$\vec{B}_2(\text{P}) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta_2 \vec{e}_r + \sin \theta_2 \vec{e}_{\theta_2})$$

avec

$$\theta_2 = \pi - \alpha \quad \text{et} \quad r^2 = R_1^2 + d^2$$



Avec la loi de l'action et de la réaction, la résultante exercée sur la petite spire par la grande est l'opposée de celle de la petite sur la grande. Ainsi,

$$\vec{F}_L = - \int_{\varphi=0}^{2\pi} i R_1 d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}_2$$

D'après la symétrie de révolution, la résultante est suivant (Oz), donc on ne calcule que F_{Lz} et on trouve

$$\vec{F}_L = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}_2 I R_1}{2} \frac{3 \cos \alpha \sin \alpha}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

En exprimant α en fonction de R_1 et d , on retrouve le résultat final.

Corr. 4 Énergie et moment d'interaction

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre une charge ponctuelle q en A et un dipôle rigide \vec{p} en B.

2. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre deux dipôles rigides en A et B de moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 .

3. Exprimer le moment résultant en B des forces exercées par \vec{p}_1 sur \vec{p}_2 . Est-il égal au moment en A des forces exercées par \vec{p}_2 sur \vec{p}_1 ?

Corr. 5 Positions d'équilibre

1. On commence par déterminer l'énergie potentielle d'interaction entre les dipôles. On peut dire que c'est l'énergie potentielle du dipôle \vec{p}_1 placé dans le champ électrostatique de \vec{p}_2 , ou bien celle du cas inversé, ou la moyenne des deux cas ; à chaque fois, on trouve la même expression, bien sûr !

Procédons par exemple avec le dipôle \vec{p}_2 placé en O₂ dans le champ $\vec{E}_1(\text{O}_2)$ de \vec{p}_1 . Alors,

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\text{O}_2)$$

$$\text{d'où } \mathcal{E}_p = -\vec{p}_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{O}_1 \vec{O}_2) \vec{O}_1 \vec{O}_2}{d^2} - \vec{p}_1 \right]$$

$$\text{soit } \mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{O}_1 \vec{O}_2)(\vec{p}_2 \cdot \vec{O}_1 \vec{O}_2)}{d^2} \right]$$

$$\text{donc } \mathcal{E}_p = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2]$$

On pose

$$A = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}$$

$$\text{et on tire } \mathcal{E}_p = A [\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2]$$

À l'équilibre, cette énergie potentielle est extrême. En annulant les dérivées partielles par rapport à θ_1 et θ_2 , on trouve les positions d'équilibre suivantes (on n'en donne que quatre, car changer \vec{p}_1 et \vec{p}_2 en leurs opposés revient seulement à faire un retournement spatial au problème) :

Numéro	1	2	3	4
θ_{1e}	0	π	$\pi/2$	$\pi/2$
θ_{2e}	0	0	$\pi/2$	$-\pi/2$
Schéma	$\rightarrow \rightarrow$	$\leftarrow \rightarrow$	$\uparrow \uparrow$	$\uparrow \downarrow$
Stabilité	stable	instable	instable	instable

L'étude de stabilité est à faire comme suit. Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut que l'énergie potentielle soit minimale. On pose $x = \theta_1 - \theta_{1e}$ et $y = \theta_2 - \theta_{2e}$, ainsi que

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial \theta_1^2} \right)_{x=0, y=0} \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial \theta_2^2} \right)_{x=0, y=0}$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)_{x=0, y=0}$$

Par développement limité au voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ (c'est-à-dire près des positions d'équilibre), on tire

$$\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{p,eq} \simeq ax^2 + by^2 + 2cxy = a \left(x + \frac{c}{a} y \right)^2 + \left(b - \frac{c^2}{a} \right) y^2$$

Cette grandeur est minimale en $(x, y) = (0, 0)$ si $a > 0$ est $c^2 < ab$ et il suffit de calculer $a = b$ et c :

$$a = b = \frac{A}{2} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

et

$$c = \frac{A}{2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

Par conséquent, pour la position 1, $a = b = +A > 0$ et $c = A^2/2$ donc $c^2 < ab$ et elle est stable. Par contre, je vous laisse vérifier que les trois autres positions sont instables...

Notez bien que l'on ne pouvait pas prévoir tous ces résultats qualitativement ! Pour l'état 3, on a un point selle ($c^2 > ab$) et l'état 4 est instable, même si ça pourrait surprendre certains...

2. Pour étudier le mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable, on explicite les moments $\Gamma_i \vec{e}_z$ exercés sur chaque dipôle par l'autre. On peut utiliser l'expression du moment ($\vec{p} \wedge \vec{E}$) vue en cours mais changeons un peu... Pour une rotation virtuelle élémentaire des dipôles faite par un opérateur de façon réversible,

$$\delta W_{op} = d\mathcal{E}_p = -\Gamma_1 d\theta_1 - \Gamma_2 d\theta_2$$

donc

$$\Gamma_1 = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta_1} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta_2}$$

Avec l'expression de l'énergie potentielle, et au voisinage de l'état 1, on tire

$$\Gamma_1 = -A(\theta_2 + 2\theta_1) \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = -A(\theta_1 + 2\theta_2)$$

On applique ensuite le TMC à chaque dipôle par rapport à son axe de rotation respectif et on en déduit le système de deux équations différentielles couplées suivantes :

$$J \ddot{\theta}_1 = -A(\theta_2 + 2\theta_1)$$

et

$$J \ddot{\theta}_2 = -A(\theta_1 + 2\theta_2)$$

On découple en posant $S = \theta_1 + \theta_2$ et $D = \theta_1 - \theta_2$. Par addition et soustraction, on tire

$$J\ddot{S} + 3AS = 0 \quad \text{et} \quad J\ddot{D} + AD = 0$$

Les modes propres sont finalement

$$S(t) = 2S_0 \cos(\omega' t + \varphi') \quad \text{avec} \quad \omega' = \sqrt{\frac{3A}{J}}$$

$$D(t) = 2D_0 \cos(\omega'' t + \varphi'') \quad \text{avec} \quad \omega'' = \sqrt{\frac{A}{J}}$$

et les solutions générales sont

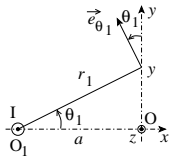
$$\theta_1 = \frac{S+D}{2} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{S-D}{2}$$

Le mode propre rapide de pulsation ω' est le mode d'oscillations en phase des dipôles alors que celui de pulsation lente ω'' est le mode d'oscillations en opposition de phase.

Si les conditions initiales étaient précisées, on pourrait déterminer S_0, D_0, φ' et φ'' ...

Corr. 6 Équilibres d'un dipôle magnétique

Les notations utilisées sont précisées sur le schéma suivant :



À l'équilibre d'un système conservatif, l'énergie potentielle est extrémale et elle est minimale si l'équilibre est stable. On calcule cette énergie potentielle en calculant d'abord les champs créés par les fils.

Le fil F_1 produit le champ

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \vec{e}_{\theta_1}$$

avec $\vec{e}_{\theta_1} = \cos \theta_1 \vec{e}_y - \sin \theta_1 \vec{e}_x = \frac{a}{r_1} \vec{e}_y - \frac{y}{r_1} \vec{e}_x$

et $r_1^2 = a^2 + y^2$

d'où $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{a^2 + y^2}$

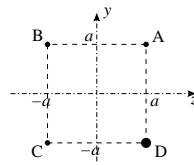
En procédant de même pour le fil F_2 , on obtient le champ magnétique qu'il produit :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a \vec{e}_x + z \vec{e}_z}{a^2 + z^2}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ a pour expression

$$\mathcal{E}_p(y, z) = \frac{\mu_0 I \mathcal{M}}{2\pi} \left(\frac{-z}{a^2 + z^2} + \frac{y}{a^2 + y^2} \right)$$

L'étude de cette fonction de deux variables montre qu'il y a **quatre** positions d'équilibre A, B, C et D, aux sommets du carré dessiné. Seule la position D correspond à un minimum d'énergie potentielle : **il s'agit de la seule position d'équilibre stable.**



Corr. 7 Écartement des armatures d'un condensateur plan

1. À charge constante, la contribution du générateur est nulle et le travail que doit fournir l'opérateur est supérieur ou égal à la variation d'énergie électrostatique du condensateur, laquelle vaut

$$\Delta \mathcal{E}_e = \frac{Q_0^2}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right)$$

soit

$$\Delta \mathcal{E}_e = \frac{C_0 U_0^2}{2} \left(\frac{e}{e_0} - 1 \right)$$

On trouve numériquement le travail minimal

$$W_{\min} = 1 \text{ J}$$

2. Lorsque la d.d.p. entre les armatures est maintenue constante par le générateur, le travail $\delta W_{\text{géné}}$ fourni par le générateur n'est pas nul et la variation d'énergie du condensateur est négative :

$$\Delta \mathcal{E}_e = U_0^2 \frac{\Delta C}{2} = \frac{C_0 U_0^2}{2} \left(\frac{C}{C_0} - 1 \right)$$

soit

$$\Delta \mathcal{E}_e = -\frac{C_0 U_0^2}{2} \left(1 - \frac{e_0}{e} \right)$$

Numériquement,

$$\Delta \mathcal{E}_e = -0,5 \text{ J}$$

Le bilan énergétique s'écrit

$$\Delta \mathcal{E}_e = W_{\text{op.rév.}} + W_{\text{géné}}$$

où $W_{\text{géné}} = \int U_0 dQ = U_0 \Delta Q = U_0^2 (C - C_0)$

Puis $W_{\text{op}} \geq W_{\text{op.rév.}} = W_{\text{op.min.}} = U_0^2 \frac{\Delta C}{2} = U_0^2 \Delta C$

soit $W_{\text{op}} \geq W_{\text{op.rév.}} = W_{\text{op.min.}} = -\frac{U_0^2}{2} (C - C_0)$

Finalement, $W_{\text{op.min.}} = \frac{C_0 U_0^2}{2} \left(1 - \frac{e_0}{e} \right)$

Numériquement,

$$W_{\text{op.min.}} = 0,5 \text{ J}$$

On voit bien que le travail n'est pas le même qu'à la première question car le générateur fournit un travail !

Remarque : C'est un bon exercice que de reprendre les questions précédentes, en calculant directement le travail fourni par l'opérateur $W_{\text{op}} = \int \vec{F}_{\text{op}} \cdot d\vec{l}$!

Corr. 8 Pression moyenne dans une colonne de plasma

1. La conservation de la charge en régime **stationnaire** donne $\text{div } \vec{j} = 0$. Or, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm), donc $\text{div } \vec{E} = 0$. Par conséquent, l'équation de Maxwell-Gauss permet de conclure à la neutralité locale en tout point :

$$\rho = 0$$

2. À l'équilibre, les forces volumiques de pression et magnétique sont opposées, soit

$$\vec{\text{grad}} p = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Or, $\vec{j} = j(r) \vec{e}_z$ et $\vec{B} = B(r) \vec{e}_{\theta}$ par analyse des symétries et utilisation des coordonnées cylindriques. Ainsi,

$$\frac{dp}{dr} = -j(r) B(r) \quad (1)$$

Il reste à éliminer $j(r)$, ce qui se fait par l'intermédiaire du théorème d'Ampère sur un cercle...

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^r 2\pi u j(u) du$$

qui se dérive en

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB)}{dr} = \mu_0 j(r) \quad (2)$$

La combinaison de (1) et (2) donne

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B(r)}{\mu_0 r} \frac{d(rB)}{dr}$$

soit

$$r^2 \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{d(r^2 B^2)}{dr}$$

3. Par définition de la pression moyenne,

$$P = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p(r) 2\pi r dr$$

On effectue une intégration par parties sachant que $p(a) = 0$, donc

$$P = -\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr = \frac{1}{2\mu_0 a^2} [r^2 B^2(r)]_0^a$$

soit

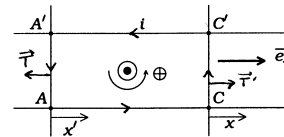
$$P = \frac{B^2(a)}{2\mu_0}$$

Ce résultat correspond à la densité volumique d'énergie en $r = a$...

Corr. 9 Barres sur des rails

Analyse qualitative : les deux masses m' et m provoquent

la mise en mouvement des barres dans \vec{B}_0 , d'où un courant induit de sorte que les actions de Laplace résultantes modèrent le mouvement des barres, source de l'induction (loi de Lenz).



Analyse pour la mise en équation : on oriente $i(t)$ algébrique (au pif) comme il se doit, ce qui oriente le reste ($d\vec{l}$, flux...); on note $x(t)$ et $x'(t)$ les positions des barres. On a donc 3 inconnues et il faut écrire 3 équations : une équation électrique et deux équations mécaniques avec le TMC sur chaque système barre-fil-masse-poulie.

Remarque : Les tensions des fils sur les barres sont ainsi habilement évitées, car intérieures aux systèmes considérés...

Obtention de l'équation électrique : on calcule la fém induite par

$$e = \oint_{(ACC'A')} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

On pourrait aussi utiliser la loi de Faraday (même si le circuit est de constitution variable car la variation de flux coupé correspond à la variation du flux, mais c'est hors-programme). Ici, avec le champ électromoteur,

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

soit $\vec{E}_m = -\dot{x} B_0 \vec{e}_y$ sur (CC')

et $\vec{E}_m = -\dot{x}' B_0 \vec{e}_y$ sur (AA')

En faisant attention au sens de $d\vec{l}$, on déduit $e = (\dot{x}' - \dot{x}) B_0 a$

bien entendu nulle si les vitesses des barres sont identiques (oui, oui, c'est logique !). Du schéma équivalent électrique (à faire, en négligeant l'inductance propre car un seul tour !), on tire

Ainsi $e = 2R i$

soit $2R i = (\dot{v}' - \dot{v}) B_0 a \quad (\mathcal{E})$

Ce résultat est cohérent avec la loi de Lenz : $i > 0$ si $v' > v$.

Obtention des équations mécaniques : on applique le TMC à chaque système barre-fil-masse-poulie par rapport à l'axe fixe de la poulie du système considéré. On rappelle qu'ici, les poulies (rayons ρ), fils, barres n'ont pas de masse et qu'on ne doit pas tenir compte des actions intérieures dans le TMC !

$$\frac{dL_{\text{axe}}}{dt} = \mathcal{M}_{\text{axe,ext}}$$

donne $\frac{d}{dt} (m' \dot{x}' \rho) = -\rho m' g - \rho B_0 a i$

soit $\frac{dv'}{dt} = -g - \frac{B_0 a}{m'} i \quad (\mathcal{M}')$

De même, pour l'autre barre dans l'autre système barre-fil-masse-poulie,

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{B_0 a}{m} i \quad (\mathcal{M})$$

Résolution : on a obtenu un système différentiel constitué des 3 équations précédentes et couplées par l'effet d'induction et les actions de Laplace.

Remarque : Comme on est en champ \vec{B}_0 permanent, on se doute qu'il y a couplage électromécanique parfait traduit par la relation $\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_{\text{fém}} = 0$ (vérifiez-le).

On élimine i avec l'équation électrique, ce qui permet d'obtenir

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(B_0 a)^2}{2R} (v - v')$$

et $m' \frac{dv'}{dt} = -m' g + \frac{(B_0 a)^2}{2R} (v - v')$

On peut trouver la solution de ce système par diagonalisation de la matrice associée. En fait, les vecteurs propres sont évidents donc on combine ces deux équations pour obtenir le nouveau système **découplé**

$$\frac{d}{dt} (m v + m' v') = (m - m') g$$

et $\frac{d}{dt} (v - v') = 2g - \frac{(B_0 a)^2}{2R} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) (v - v')$

On pose

$$\tau = \frac{2R}{(B_0 a)^2} \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right]^{-1}$$

Avec les conditions initiales, chaque équation donne

$$v - v' = 2g\tau (1 - e^{-t/\tau})$$

et

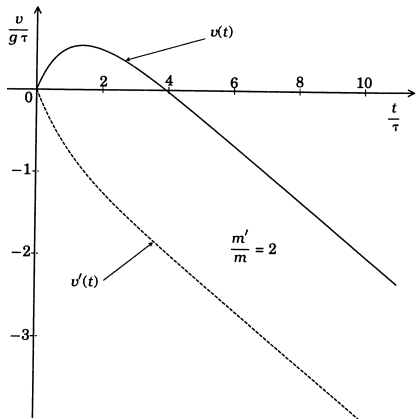
$$mv + m'v' = (m - m')gt$$

Il ne reste qu'à extraire les résultats :

$$v(t) = \frac{1}{m + m'} [(m - m')gt + 2m'gt(1 - e^{-t/\tau})]$$

$$v'(t) = \frac{1}{m + m'} [(m - m')gt - 2mgt(1 - e^{-t/\tau})]$$

L'induction freine mais ne stoppe pas le mouvement des barres! Voici l'allure des évolutions des vitesses pour $m'/m = 2$:

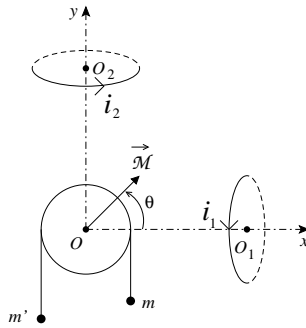


On vérifie la loi de Lenz car pour $m' > m$, la masse m' provoque un effet inductif plus fort en bougeant AA' qu'il faut freiner : $i < 0$.

Corr. 10 Machine d'ATWOOD avec dipôle magnétique

Analyse qualitative : si $m' \neq m$ et en choisissant $m' > m$ (non restrictif), le dipôle $\vec{\mathcal{M}}$ solidaire de la poulie amorce une rotation suivant les θ croissants, d'où une variation du flux magnétique à travers les spires, ce qui génère des courants induits i_1 et i_2 dans celles-ci. Alors, ces spires génèrent à leur tour des champs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 qui agissent sur $\vec{\mathcal{M}}$ en **modérant** son mouvement de rotation par un couple **résistant** $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \sum_i \vec{b}_i$ (loi de Lenz!).

On doit donc calculer le couple résistant $\vec{\Gamma}$; ensuite, on appliquera le TMC au système mécanique...



Calcul du couple résistant : cherchons-le d'abord en fonction des courants induits i_1 et i_2 orientés sur la figure précédente. Puisque

$$\vec{b}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2r} \sin^3 \alpha_1 \vec{e}_x$$

on tire, compte tenu de $\sin \alpha_1 \simeq r/h \ll 1$,

$$\vec{b}_1 \simeq \mu_0 i_1 \frac{r^2}{2h^3} \vec{e}_x$$

De même,

$$\vec{b}_2 \simeq \mu_0 i_2 \frac{r^2}{2h^3} \vec{e}_y$$

$$\text{Or, } \vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cos \theta \vec{e}_x + \mathcal{M} \sin \theta \vec{e}_y$$

donc

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \frac{\mu_0 r^2 \mathcal{M}}{2h^3} (i_2 \cos \theta - i_1 \sin \theta) \vec{e}_z$$

Ensuite, il faut déterminer i_1 et i_2 (courants induits). On note ϕ_1 le flux magnétique produit par $\vec{\mathcal{M}}$ à travers la spire (1). Alors, la loi de Faraday et le modèle électrocinétique équivalent assurent que

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = Ri_1$$

(l'autoinduction n'est pas prise en compte pour une spire simple, as usuel...). On doit calculer alors ϕ_1 .

Remarque : On pourrait calculer explicitement et sans approximation le flux ϕ_1 en utilisant comme surface la **calotte sphérique de centre $\vec{\mathcal{M}}$ s'appuyant sur la spire (archi-classique ; ne pas prendre la surface du disque de la spire, c'est bien plus bourrin!)**. On aurait le droit de le faire car le champ magnétique est à flux conservatif d'après l'équation de Maxwell-Flux $\text{div } \vec{B} = 0$.

Ici, c'est plus simple car la spire est assez petite pour dire que (en faisant gaffe aux orientations)

$$\phi_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq \iint_{\text{disque}} B_x(O_1) dS = \frac{\mu_0 \mathcal{M} S}{2\pi h^3} \cos \theta$$

Ainsi,

$$i_1(t) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} S}{2\pi h^3 R} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Le calcul de $i_2(t)$ est analogue mais, vu les angles,

$$B_y(O_2) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi h^3} \sin \theta$$

Alors,

$$i_2(t) = -\frac{\mu_0 \mathcal{M} S}{2\pi h^3 R} \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

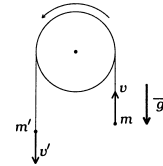
Remarque : Attention aux notations r et R ... On a $S = \pi r^2$ et non $S = \pi R^2$!

En remplaçant les courants induits, on en déduit le couple $\vec{\Gamma}$ qui est effectivement résistant :

$$\vec{\Gamma} = -\left(\frac{\mu_0 \mathcal{M} S}{2\pi h^3}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$$

Application du TMC : on l'applique au système complet constitué de la poulie, des masses m et m' , du fil et du dipôle $\vec{\mathcal{M}}$, par rapport à l'axe (Oz) et dans le référentiel galiléen d'étude. La liaison en (Oz) étant pivot parfait, on obtient

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = (m' - m)ga + \Gamma_z$$



Or,

$$L_{Oz} = J \frac{d\theta}{dt} + m' a v' + m a v$$

avec

$$v = v' = a \frac{d\theta}{dt}$$

Finalement, en posant les quantités

$$J_T = J + m a^2 + m' a^2 \quad \text{et} \quad \tau = R J_T \left(\frac{2\pi h^3}{\mu_0 \mathcal{M} S} \right)^2$$

on tire

$$\tau \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = \frac{(m' - m)ga}{J_T}$$

On intègre cette équation compte tenu de $\dot{\theta}(0) = 0$, d'où

$$\dot{\theta}(t) = (m' - m)ga \frac{\tau}{J_T} [1 - e^{-t/\tau}]$$

Pour $t \gg \tau$, $\theta \rightarrow C^{te}$ et son signe est celui de $m' - m$. Ouf ! L'induction ne fait que freiner le mouvement sans pouvoir le stopper (logique car l'induction n'existe que s'il y a le mouvement)...

Corr. 11 Deux spires coulissant sur un axe

Analyse qualitative : S_1 se rapproche de S_2 , ce qui entraîne un flux ϕ de \vec{B} variable à travers S_2 . Cela provoque l'existence d'un courant induit $i(t)$ dans S_2 s'opposant à la cause de la variation du flux, donc $i(t) < 0$. Sur ce courant agit \vec{B} sous forme d'actions de Laplace $\vec{F} = F \vec{e}_z$ et la loi de Lenz donne $F > 0$ (toujours pour contrer la cause de la variation du flux ϕ en tendant à éloigner S_2 de S_1). **La spire S_2 finit par s'arrêter car elle dissipe de l'énergie par effet Joule !**

Analyse quantitative : $z \gg r$ donc les spires sont traitables comme des dipôles magnétiques. $\vec{\mathcal{M}}_1 = Is \vec{e}_z$ et $\vec{\mathcal{M}}_2 = is \vec{e}_z$ où $s = \pi r^2$. On néglige l'autoinduction ($L = 0$), donc

$$\phi = sB(z) \quad \text{avec} \quad B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2Is}{z^3}$$

Par conséquent, le courant induit dans S_2 est

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

soit

$$i(t) = -\frac{s}{R} \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt}$$

Ensuite, l'action de Laplace de S_1 sur S_2 est

$$\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

donc

$$F = is \frac{dB}{dz} = -\frac{s^2}{R} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dt}$$

Puis, le TRD sur S_2 de masse m dans le référentiel galiléen d'étude, en projection sur l'horizontale, fournit

$$m(\ddot{x} + \ddot{z}) = F = -\frac{s^2}{R} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dt}$$

que l'on intègre entre t_0 (où tout est immobile) et t_1 (où les spires sont à nouveau immobiles) :

$$0 = -\frac{s^2}{R} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 dz$$

Or, $(dB/dz)^2$ est continue et strictement positive donc $z_1 = z_0$! **On en déduit que si S_1 a été déplacée de h , S_2 se retrouve à l'arrêt toujours à la même distance de S_1 , comme avant le « choc » : elle s'est aussi déplacée de h ...**

Corr. 12 Principe du moteur continu

1.a. La tige conductrice est mobile dans \vec{B} permanent et est par conséquent le siège d'un champ électromoteur de Lorentz

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = r \omega \vec{e}_\theta \wedge (-B_0 \vec{e}_z) = -r \omega B_0 \vec{e}_r$$

qui s'oppose au passage du courant (ce qui justifie la notion de force contre-électromotrice $-e_{AB} > 0$ pour un moteur). Ainsi,

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\int_a^b r \omega B_0 dr$$

donc

$$e_{AB} = -\frac{\omega B_0}{2} (b^2 - a^2)$$

1.b. Parcouru par le courant I et placé dans le champ \vec{B} , l'élément de tige $d\vec{l}$ subit la force de Laplace élémentaire

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I dr \vec{e}_r \wedge (-B_0 \vec{e}_z) = IB_0 dr \vec{e}_\theta$$

et le moment total par rapport à O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \int_A^B \vec{r} \wedge d\vec{F}_L = \int_a^b r \vec{e}_r \wedge IB_0 dr \vec{e}_\theta$$

En utilisant l'ARQS qui assure que l'intensité est uniforme sur le fil, on tire

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \frac{IB_0}{2} (b^2 - a^2) \vec{e}_z$$

Il s'agit bien d'un moment moteur puisque $\mathcal{M}_{Oz} > 0$.

1.c. On a à vérifier la relation de couplage électromagnétique parfait en champ magnétique permanent. Puisque

$$\mathcal{P}_{\text{fém}} = e_{AB} I = -\frac{1}{2} (b^2 - a^2) \omega B_0 I$$

et

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) IB_0 \omega$$

on a bien

$$\mathcal{P}_{\text{fém}} + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0$$

3. Pour toutes les tiges, le même courant I/p s'écoule depuis C_1 au potentiel V_A vers C_2 au potentiel V_B : **les conducteurs sont donc placés en parallèle.**

La différence de potentiel $V_A - V_B$ est la même pour toutes les tiges et la loi d'Ohm généralisée pour une tige donne

$$V_A - V_B = \underbrace{r}_0 I - e_{AB} = -e_{AB}$$

Mais la puissance totale de la f.é.m. est additive pour les p tiges :

$$\mathcal{P}'_{\text{fém}} = p \left(e_{AB} \frac{I}{p} \right) = \mathcal{P}'_{\text{fém}}$$

Il en est de même pour la puissance des actions de Laplace :

$$\mathcal{P}'_{\text{Laplace}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \overrightarrow{\omega} = \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \overrightarrow{\omega}$$

d'où

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}}'_O$$

En pratique, on prend plusieurs tiges pour **réaliser l'équilibrage de la machine tournante (statique et dynamique)**.

4. Si le moteur fournit à l'extérieur un couple Γ_e , c'est que l'extérieur exerce un couple de **freinage** $-\Gamma_e$ sur le moteur. Le TMC par rapport à (Oz) pour l'ensemble des tiges de moment d'inertie pJ donne

$$pJ \frac{d\omega}{dt} = \frac{b^2 - a^2}{2} B_0 I - \Gamma_e \quad (\mathcal{M})$$

Le circuit électrique équivalent donne facilement accès à

$$E = RI - e_{AB}$$

donc

$$RI + \frac{b^2 - a^2}{2} B_0 \omega = E \quad (\mathcal{E})$$

Les équations électrique (\mathcal{E}) et mécanique (\mathcal{M}) sont couplées pour $I(t)$ et $\omega(t)$, comme pour tout transducteur électromécanique.

5. On élimine I entre les équations (\mathcal{E}) et (\mathcal{M}), d'où

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_l}{\tau}$$

où

$$\tau = \frac{4pRJ}{(b^2 - a^2)^2 B_0^2}$$

et

$$\omega_l = \frac{4R}{(b^2 - a^2)^2 B_0^2} \left[\frac{b^2 - a^2}{2R} B_0 E - \Gamma_e \right]$$

La solution, pour la condition initiale $\omega(0) = 0$ est

$$\omega(t) = \omega_l [1 - e^{-t/\tau}]$$

τ représente le temps caractéristique de mise en rotation du rotor. Au bout de quelques τ , le rotor atteint quasiment sa vitesse angulaire de rotation limite ω_l (ajustable par E).

Après la phase transitoire, l'équation mécanique montre qu'en régime permanent,

$$\Gamma_e = \mathcal{M}_O$$

et le couple fourni par l'arbre à l'extérieur est intégralement égal au couple magnétique reçu.

6. Pour $\omega_l > 0$, Γ_e ne doit pas être trop important sinon le moteur ne se met pas à tourner, ou même tourne en sens inverse en recevant de la puissance de l'extérieur :

$$\Gamma_{em} = \frac{b^2 - a^2}{2R} B_0 E$$

Corr. 13 Production d'un champ magnétique tournant

Chaque paire de solénoïdes (S_1), (S_2) et (S_3) crée un champ \vec{B}_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) suivant leur axe (orienté en accord avec les courants par la règle du tire-bouchon). Ces champs font des angles de $2\pi/3$ entre eux, ont même module et sont en phase. **Finalement, leur somme vectorielle en O est nulle.**

En introduisant une constante k à déterminer ensuite, on écrit les champs magnétiques dans le plan de Cauchy (plan des complexes) sous les formes suivantes :

$$\text{Affixe de } \vec{B}_1 : \quad b_1 = kI\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$\text{Affixe de } \vec{B}_2 : \quad b_2 = kI\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) e^{j2\pi/3}$$

$$\text{Affixe de } \vec{B}_3 : \quad b_3 = kI\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3) e^{j4\pi/3}$$

L'affixe du champ magnétique total $\vec{B} = \sum_{i=1}^3 \vec{B}_i$ est

$$b = \sum_{i=1}^3 b_i = \frac{3}{\sqrt{2}} kI e^{j\omega t}$$

(obtenu en décomposant les cosinus en exponentielles via la formule d'Euler). Finalement,

$$\vec{B}(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} kI \left[\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y \right]$$

Il s'agit donc d'un champ magnétique tournant en sens direct à la pulsation des courants triphasés et de module $B_0 = 3kI/\sqrt{2}$.

Il reste à déterminer la constante k . On sait que le champ créé par un solénoïde fini sur son axe (orienté par les courants) est

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

$$\text{soit ici } B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 N I}{2\mathcal{L}} \left[\frac{\mathcal{L} + l}{\sqrt{(\mathcal{L} + l)^2 + r^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \right]$$

et une paire de solénoïdes donne des champs **cumulés** en O (même sens), d'où la valeur de k :

$$k = \frac{\mu_0 N}{\mathcal{L}} \left[\frac{\mathcal{L} + l}{\sqrt{(\mathcal{L} + l)^2 + r^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \right]$$

Un champ tournant (réalisé par un **stator**) est utilisé comme **inducteur** pour entraîner la pièce mobile (**rotor**) d'un moteur (voir moteurs électriques).

Corr. 14 Moteur synchrone

L'aimant de moment $\vec{\mathcal{M}}$ placé dans le champ \vec{B} subit le couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

et l'angle $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$ vaut $(\omega_0 - \omega)t + \alpha$. Par conséquent,

$$\vec{\Gamma}(t) = \mathcal{M} B_0 \sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha] \vec{e}_z$$

On en déduit la valeur moyenne (exprimée avec un nombre de Kronecker) :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \delta_{\omega, \omega_0} \mathcal{M} B_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

Si l'aimant est lancé puis lâché à une vitesse angulaire $\omega \neq \omega_0$, il finit par s'arrêter à cause des moments de frottement puisque le couple électromagnétique, en moyenne, n'a pas d'action sur lui.

Par conséquent, le dispositif ne fonctionne correctement que si

$$\omega = \omega_0$$

d'où le nom de machine synchrone. Le couple n'est moteur que si

$$\langle \Gamma \rangle = \mathcal{M} B_0 \sin \alpha > 0$$

soit si

$$\alpha \in]0; \pi[$$

Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ **suit** le mouvement de \vec{B} sinon le couple est résistant.

La puissance maximale est

$$\mathcal{P}_M = \langle \Gamma \rangle_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \omega_0 = \mathcal{M} B_0 \omega_0$$

Le rotor subit le couple moyen $\langle \Gamma \rangle$. Le régime ne peut être stationnaire que si simultanément il fournit à l'extérieur un couple utile Γ_u .

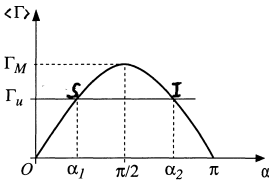
Le TMC sur le rotor par rapport à (Oz) donne

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_u$$

soit

$$\langle \Gamma \rangle = \Gamma_u$$

en régime permanent. On en déduit les points de fonctionnement I et S sur le tracé suivant où $\Gamma_M = \mathcal{M} B_0$:



Pour l'étude de stabilité, raisonner comme dans l'exercice du moteur asynchrone. Le point S est stable et le point I est instable...

En conclusion, lorsque Γ_u varie de 0 à Γ_M , le domaine de valeurs de α correspondant à un régime stable est

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Remarque culturelle : les TGV utilisent des moteurs électriques de type synchrone, asynchrone ou continu suivant leur génération. En ce qui concerne le moteur synchrone, il ne peut en principe tourner qu'à ω_0 , ce qui peut paraître gênant en pratique, le TGV ne roulant pas toujours à la même vitesse (il faut bien qu'il démarre par exemple). On s'affranchit de ce problème en réalisant un moteur synchrone auto-piloté (ω_0 est ajustable et on l'augmente progressivement au démarrage).

Corr. 15 Moteur alternatif asynchrone

Du fait que $\omega \neq \omega_0$, le champ \vec{B} tourne par rapport à la normale \vec{n} de la petite bobine et provoque un flux magnétique variable à travers celle-ci. Un courant est par conséquent induit en son sein, d'où l'existence d'un dipôle magnétique induit correspondant à la petite bobine. Son interaction avec le champ magnétique extérieur entraîne la bobine et ce mouvement est susceptible de fournir un travail moteur à l'arbre.

On **oriente** les spires de sorte que leur vecteur surface soit suivant \vec{n} et l'angle (\vec{B}, \vec{n}) vaut

$$\theta = (\vec{B}, \vec{n}) = (\omega - \omega_0)t + \alpha$$

Alors

$$\phi = \underbrace{NB_0 S}_{\phi_0} \cos \theta$$

soit

$$\phi(t) = \phi_0 \cos[(\omega - \omega_0)t + \alpha]$$

La loi d'Ohm généralisée s'écrit

$$0 = R i + L \frac{di}{dt} - e \quad \text{avec} \quad e = -\frac{d\phi}{dt}$$

d'où l'on tire

$$L \frac{di}{dt} + R i = \phi_0 (\omega - \omega_0) \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha]$$

On cherche le régime **permanent** donc on passe en complexes en notant que les oscillations sont forcées à $\omega - \omega_0$ (!) :

$$[jL(\omega - \omega_0) + R] \dot{i} = -\phi_0 j(\omega - \omega_0) e^{j[(\omega - \omega_0)t + \alpha]}$$

La résolution classique conduit à la solution forcée

$$i(t) = \frac{\phi_0 (\omega - \omega_0)}{\sqrt{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}} \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi]$$

$$\tan \psi = \frac{L(\omega - \omega_0)}{R} \quad \text{et} \quad \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}}$$

La petite bobine est assimilable à un dipôle de moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = Ni(t) S \vec{n}(t)$$

qui subit le couple magnétique

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M} B_0 \sin \theta \vec{e}_z$$

donc

$$\Gamma_z = -\phi_0 i(t) \sin \theta(t)$$

$$\Gamma_z(t) = \frac{-\phi_0^2 (\omega - \omega_0)}{\sqrt{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}} \times \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi] \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha]$$

On passe ensuite au calcul de la valeur moyenne en notant que

$$\langle \sin[\theta(t) - \psi] \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi$$

donc

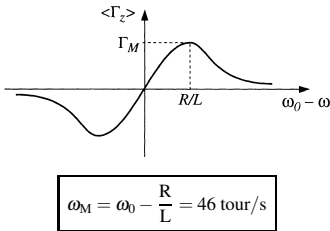
$$\langle \Gamma_z \rangle = \frac{\phi_0^2}{2} \frac{R (\omega_0 - \omega)}{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

Pour que ce système fonctionne en moteur, il faut que $\langle \Gamma_z \rangle > 0$, ce qui suppose

$$\omega < \omega_0$$

La bobine tourne dans ce cas moins vite que le champ, quelque soit α initial (moteur dit asynchrone). Dans le cas contraire, elle est freinée !

Le tracé attendu est le suivant :



$$\omega_M = \omega_0 - \frac{R}{L} = 46 \text{ tour/s}$$

$$\Gamma_M = \frac{\phi_0^2}{4L} = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$$

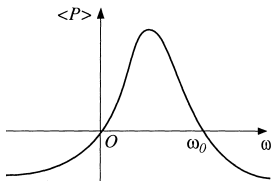
On applique le théorème de la puissance cinétique à la bobine et son arbre, de moment d'inertie J par rapport à (Oz) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \Gamma_z \omega - \mathcal{P}$$

En régime permanent, on tire

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Gamma_z \rangle \omega = \frac{\phi_0^2}{2} \frac{R(\omega_0 - \omega)\omega}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}$$

Le tracé correspondant en fonction de ω est le suivant :



Pour $\omega = 0$, la bobine ne tourne pas et ne peut pas fournir de puissance sur l'arbre.

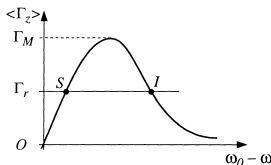
Pour $\omega = \omega_0$, la bobine et le champ tournent à la même vitesse angulaire, donc il n'y a pas de variation de flux magnétique dans la petite bobine : il n'y a plus d'induction et le couple est nul. Aucune puissance ne peut être transmise sur l'arbre.

Pour $0 < \omega < \omega_0$, $\langle \mathcal{P} \rangle > 0$ et le système est bien moteur. La source d'énergie se situe dans les générateurs de courant qui permettent de créer le champ tournant $\vec{B}(t)$.

Pour $\omega < 0$ et $\omega > \omega_0$, $\langle \mathcal{P} \rangle < 0$ et il y a freinage : il faut fournir de l'énergie pour faire tourner le système à l'envers ou en sursrégime. Ce n'est plus un moteur !

Initialement, le moteur est immobile ($\omega = 0$) mais le champ magnétique tournant à ω_0 fait qu'il existe un couple magnétique $\langle \Gamma_z \rangle_{\omega=0} > 0$. Si ce couple est supérieur au couple résistant Γ_r , alors le moteur démarre spontanément, après quoi $\langle \Gamma_z \rangle_\omega$ évolue jusqu'au régime permanent où $\langle \Gamma_z \rangle_\omega = \Gamma_r$ qui fixe ω dans ce régime. **Ceci suppose que $\Gamma_r < \Gamma_M$!**

On considère la partie positive du graphe de $\langle \Gamma_z \rangle$ où le régime permanent correspond aux points I et S.



En partant de S, si ω augmente, $\omega_0 - \omega$ diminue (ω_0 fixé) donc $\langle \Gamma_z \rangle < \Gamma_r$ et le TMC

$$J \frac{d\omega}{dt} = \langle \Gamma_z \rangle - \Gamma_r < 0$$

montre que ω **diminue**. Un même raisonnement à partir d'une perturbation avec ω croissante montre qu'ensuite ω tend à diminuer : **S est par conséquent un point de fonctionnement stable.**

En effectuant le même raisonnement à partir du point I, on montre que ce point est un point de fonctionnement instable. Avec $0 < \Gamma_r < \Gamma_M$, la stabilité correspond au domaine de pulsations

$$\underbrace{\omega_M}_{46 \text{ tour/s}} < \omega < \underbrace{\omega_0}_{50 \text{ tour/s}}$$

En moyenne, la puissance électromagnétique totale moyenne apportée au moteur est

$$\mathcal{P}_{em} = \langle \Gamma_z \rangle \omega + R \langle i^2 \rangle$$

Le calcul donne

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{R \phi_0^2}{2} \frac{\omega_0 (\omega_0 - \omega)}{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

Or, la puissance **mécanique** fournie par le moteur asynchrone en régime **permanent** est donnée par

$$\mathcal{P}_{méc} = \Gamma_r \omega \quad \text{avec} \quad \Gamma_r = \langle \Gamma_z \rangle$$

d'où le **rendement**

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{méc}}{\mathcal{P}_{em}} = \frac{\langle \Gamma_z \rangle \omega}{\langle \Gamma_z \rangle \omega + R \langle i^2 \rangle} = \frac{\omega}{\omega_0} < 1$$

Pour avoir un bon rendement, il faut travailler avec ω voisine de ω_0 et $\omega < \omega_0$ (d'où le nom de moteur **asynchrone** !). Ici, on trouve numériquement

$$\eta > 92 \%$$

ce qui est très bon ! Comparez avec le moteur thermique... même le couple est meilleur dans le cas du moteur électrique !