Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

DÉNOMBREMENT

Exercice 1. Dénombrement des surjections

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p (avec $n, p \in \mathbb{N}^*$). On se propose de déterminer le cardinal S_n^p de l'ensemble $\mathscr{S}$ des applications surjectives de E sur F.

1. Que vaut S_n^p lorsque $p > n$?

   Dans la suite de cet exercice, on suppose que $1 \leqslant p \leqslant n$.
2. Donner la valeur de S_n^1 et S_n^n.
3. On fixe un élément a de E. On note $\mathscr{S}_1$ l'ensemble des surjections de E sur F, dont la restriction à $E \setminus \{a\}$ est une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F. On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des surjections de E sur F, dont la restriction à $E \setminus \{a\}$ est une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur $F \setminus \{f(a)\}$.
   a) Démontrer que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$.
   b) En déduire que
   $$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p).$$
   c) En s'inspirant du triangle de Pascal, construire une table des S_n^p pour $1 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$.
4. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in [\![1; n]\!], \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n.$$
5. Quel est le nombre de façons de distribuer un jeu de 32 cartes à quatre joueurs ? Les joueurs ne reçoivent pas nécessairement le même nombre de cartes mais en reçoivent au moins une. On donnera un résultat exprimé à l'aide des S_n^p, sans chercher à faire le calcul.

Récréation mathématique

Pour ouvrir la porte de mon immeuble, j'utilise un code de cinq chiffres. Si les chiffres sont identifiables grâce aux traces de doigt, l'ordre dans lequel il faut les presser est évidemment indevinable.

Combien de codes un cambrioleur doit-il essayer au plus pour ouvrir ma porte ?