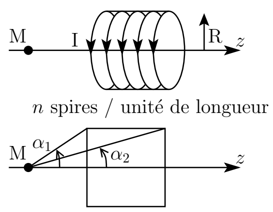
T.D. EM$_3$: Magnétostatique – Inductances

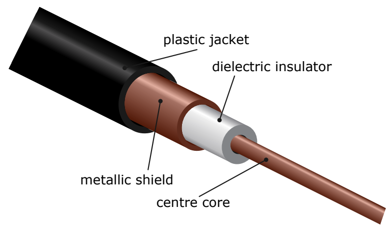
Exercice 1 Solénoïde fini



On considère un solénoïde fini fait de spires circulaires jointives de rayon R. On note n le nombre de spires par unité de longueur, I le courant circulant dans le solénoïde, et (Oz) son axe de symétrie.

1. Calculer le champ magnétique sur l'axe (Oz) en un point M, en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels les rayons de la première et de la dernière spire sont vues depuis M. On rappelle que le champ magnétique créé par une spire vue sous un angle α est $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\vec{e_z}$.
2. Que vaut ce champ lorsque le solénoïde est infini ? Montrer que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde infini, puis qu'il est nul à l'extérieur.

Exercice 2 Inductance linéique d'un câble coaxial



On considère un câble coaxial comme représenté ci-contre (figure tirée de Wikipedia), formé d'un conducteur intérieur appelé âme, et d'un conducteur extérieur appelé gaine. Entre ces conducteurs se trouve un isolant diélectrique dont on supposera qu'il se comporte comme le vide pour les propriétés magnétiques étudiées ici.

1. Un courant I circule dans l'âme en régime stationnaire ? Quel courant circule, toujours en régime stationnaire, dans la gaîne ? dans quel sens ?
2. On appelle R_a le rayon de l'âme, $R_{g,i}$ et $R_{g,e}$ les rayons intérieurs et extérieurs de la gaine. Calculer le champ magnétique dans tout l'espace. On supposera que l'âme et la gaine sont parcourus par des courants volumiques uniformes.
3. On suppose que $R_{g,e} - R_{g,i} \to 0$ et on note R_g la valeur commune de $R_{g,e}$ et $R_{g,i}$. Calculer l'énergie magnétique contenue dans une tranche de longeur h de câble coaxial, et en déduire l'inductance linéique Λ du câble coaxial. Comment cette expression se simplifie-t-elle si $R_a \ll R_g$?

Exercice 3 Inductance propre extérieure d'une ligne bifilaire

Une ligne bifilaire est constituée de deux fils rectilignes, cylindriques, parallèles, parcourus par des courants de même intensité I mais circulant en sens inverses. On désigne par a leur rayon et par D la distance qui les sépare.

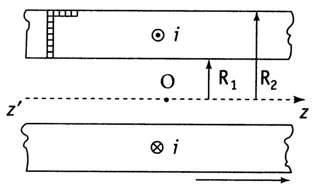
À l'aide du flux du champ magnétique à travers la surface rectangulaire délimitée par un tronçon de longueur l de la ligne bifilaire, définir et calculer l'inductance propre extérieure de la ligne par unité de longueur. Faire l'application numérique pour $D/a = 100$.

Exercice 4 Spire et dipôle

Soit une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe Ox. Cet axe est orienté (suivant la règle du tire-bouchon) par le courant d'intensité I qui la parcourt. Le rayon de la spire est vu sous un angle α à partir d'un point M de son axe, placé à la distance d du centre O.

Sous quel angle α_m maximal faut-il voir la spire pour que son champ magnétique sur l'axe puisse être assimilé à mieux que 1 % près à celui d'un dipôle magnétique placé en O et de moment à préciser ?

Exercice 5 Solénoïde épais



On enroule des spires jointives très fines sur un cylindre de rayon R_1, sur une épaisseur $e = R_2 - R_1$. Chaque spire est parcourue par un courant i.

Sur une « rangée », on a p spires par unité de longueur, et on a empilé les spires sur m couches.

1. Déterminer, en tout point de l'espace, l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ dans le cadre de l'hypothèse du solénoïde infiniment long. On posera $n = pm$ et $B_0 = \mu_0 n i$.
2. Retrouver le résultat précédent par application du théorème d'Ampère.

Exercice 6 Le disque de Rowland

Un disque non conducteur de rayon R et d'axe Oz, uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$, tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e_z}$ autour de son axe (disque de Rowland).

1. Déterminer le champ $\vec{B}$ en un point M de l'axe à partir duquel le disque est vu sous un demi-angle au sommet α en fonction de σ, R, α et $\vec{\omega}$.
2. Calculer le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé au disque chargé en rotation et vérifier que dans l'approximation dipolaire $(z \gg R)$, le champ précédemment calculé s'identifie bien à celui du dipôle sur l'axe.
3. Que vaut le champ électrique créé par les charges en un point de l'axe ?

Exercice 7 Plaque supraconductrice de faible épaisseur

Un matériau supraconducteur vérifie la relation de London $\vec{j} = -\vec{A}/(\mu_0\lambda^2)$ avec $\lambda = 1{,}7.10^{-8}$ m. $\vec{A}$ est le potentiel vecteur, tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Le matériau est une plaque conductrice d'épaisseur $2d$ et dont les faces sont de dimensions très grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord. L'origine d'un repère Oxyz est prise au milieu de la plaque, l'axe Oz

étant perpendiculaire à ses faces d'équations $z = \pm d$. En l'absence de plaque règne un champ statique et uniforme $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$ dirigé suivant Ox.

1. Quelle est l'équation satisfaite en régime statique en tout point intérieur au matériau par le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$?
2. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ à l'intérieur de la plaque sous l'hypothèse $\overrightarrow{\mathrm{B}}(d) = \overrightarrow{\mathrm{B}}(-d) = \overrightarrow{\mathrm{B}_0}$. Que sous-entend cette hypothèse ?
3. Donner l'expression de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ à l'intérieur de la plaque. Quel champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}_c}$ crée-t-elle à l'extérieur de la plaque ? Justifier l'hypothèse de la question précédente.
4. Tracer les graphes des composantes non nulles de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction de z.
5. Calculer numériquement l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $\mathrm{B}_0/100$.
6. Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à 1 % de sa valeur à la surface ?

Exercice 8 La corde de DIRAC

On considère une suite continue de dipôles magnétiques placés sur la partie négative d'un axe Oz. Le moment dipolaire du dipôle élémentaire centré au point source P défini par $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = z'\,\overrightarrow{u_z}$ ($z' < 0$) est $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}} = \lambda\,\mathrm{d}z'\,\overrightarrow{u_z}$ où λ est une constante positive dimensionnée.

Un point d'observation M est repéré par rapport à O dans un système de coordonnées sphériques de base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$. Pour situer le point P par rapport au point M, on peut se servir des notations suivantes : $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ et $\theta' = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{\mathrm{PM}})$.

1. On admet que $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{A}}$, où $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ est appelé potentiel vecteur. La contribution élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ au potentiel vecteur en M, par le dipôle élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}}$ situé en P est donné par l'expression
$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3}$$
Il s'agit, lorsque le point P décrit le demi-axe, d'obtenir, par intégration, le potentiel $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ associé à la suite continue de dipôles magnétiques. Sur les trois variables disponibles, ρ, z' et θ', on éliminera d'abord ρ en exprimant de deux manières différentes la distance HM où H est la projection orthogonale de M sur Oz, puis on exprimera $\mathrm{d}z'$ en fonction de $\mathrm{d}\theta'$ pour finalement procéder à l'intégration, habituelle dans ce genre de calcul, par rapport à la variable angulaire θ'. En quels points $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ est-il non défini ?
2. Se rappelant que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_z}/(r\sin\theta)$, en déduire l'expression sur la base sphérique du champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$. Commenter ce résultat. Que vaut sa divergence ? En quels points n'est-il pas défini ? Quelle est la nature des lignes de champ ?
3. En fait, la distribution précédente modélise un long solénoïde fin, d'extrémité O, de section S avec n spires par unité de longueur, toutes parcourues par le courant I. Justifier cette modélisation et en déduire l'expression de la constante λ.
4. Calculer le flux Φ_ε du champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ à travers une portion de sphère de centre O, d'angle solide à l'origine $\Omega = 4\pi - \varepsilon < 4\pi$ et ne rencontrant pas la partie négative de Oz. Comment la limite de Φ_ε lorsque ε tend vers 0 est-elle compatible avec la nullité de $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{B}}$? En déduire une nouvelle manière de déterminer l'expression de λ.
5. Donner la valeur de λ pour une corde de DIRAC de $n = 2000$ spires/m, de rayon $\mathrm{R} = 2,5$ mm et parcourue par un courant $\mathrm{I} = 1$ A.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

1. On trouve $\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 n \mathrm{I}}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\overrightarrow{e_z}$

Exercice 2

Pas d'indication

Exercice 3

$\mathrm{L}_{/m} \simeq \dfrac{\mu_0}{\pi}\ln\dfrac{\mathrm{D}}{a} = 1,8\ \mu H.m^{-1}$.

Exercice 4

$\alpha_m = 4,7°$.

Exercice 5

Pas d'indication.

Exercice 6

$\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0\sigma\mathrm{R}}{2}\,\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha}\,\overrightarrow{\omega}$ *et* $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \frac{\pi\sigma\mathrm{R}^4}{4}\,\overrightarrow{\omega}$.

Exercice 7

Les solutions font intervenir des fonctions hyperboliques (pas sinusoïdales !). Pas d'autre indication.

Exercice 8

1. $\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0\lambda}{4\pi}\,\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\,\overrightarrow{u_\varphi}$.
2. $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0\lambda}{4\pi}\,\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$.
3. $\lambda = n\mathrm{SI}$.
4. $\Phi_\varepsilon = \mu_0\lambda(1 - \frac{\varepsilon}{4\pi})$.
5. $\lambda = 3,9.10^{-2}\ A.m$.