

Problème n° 11 : Fonctions régulières sur un intervalle

Correction du problème 1 – Calcul approché d'une intégrale

Partie I – Approximation polynomiale au bord gauche

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle $[\alpha, \beta]$.

1. La fonction f étant de classe \mathcal{C}^{n+1} , pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$, donc est bornée d'après le théorème de compacité. On en déduit $M_\ell = \sup |f^{(\ell)}|$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme quelconque, qu'on peut écrire de manière unique sous la forme :

$$P(X) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell (X - \alpha)^\ell.$$

Un calcul simple de dérivée montre qu'on a alors, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P^{(\ell)}(\alpha) = \ell! a_\ell.$$

Ainsi, on a pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P^{(\ell)}(\alpha) = f^{(\ell)}(\alpha)$ si et seulement si pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_\ell = \frac{P^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}$, si et seulement si

$$P = \sum_{\ell=0}^n \frac{f^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!} (X - \alpha)^\ell$$

3. On a bien entendu reconnu le développement de Taylor de f en α . Ainsi, la fonction f étant de classe \mathcal{C}^{n+1} , on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour tout $x \in [\alpha, \beta]$:

$$|(f(x) - P(x))| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1},$$

et en intégrant :

$$\left| \int_\alpha^\beta (f(x) - P(x)) \, dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x) - P(x)| \, dx \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)^{n+1} \, dx = \frac{M_{n+1}}{(n+2)!} (\beta - \alpha)^{n+2}.$$

4. On utilise la majoration précédente sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ de la subdivision, $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - P_k(x)) \, dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+2)!} (x_{k+1} - x_k)^{n+2} = \frac{M_{n+1}}{(n+2)! N^{n+2}} (b - a)^{n+2},$$

où P_k est le polynôme de Taylor à l'ordre n en x_k . Or,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) \, dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{\ell=0}^n \frac{f^\ell(x_k)}{\ell!} (x - x_k)^\ell \, dx = \sum_{\ell=0}^n \frac{f^\ell(x_k)}{(\ell+1)!} (x_{k+1} - x_k)^{\ell+1}.$$

Puisque $x_{k+1} - x_k = \frac{b - a}{N}$, on obtient :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) \, dx = \sum_{\ell=0}^n \frac{f^\ell(x_k)}{(\ell+1)!} \frac{(b - a)^{\ell+1}}{N^{\ell+1}}.$$

Ainsi, en sommant ces expressions, en utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{\ell=0}^n \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(x_k) \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M_{n+1}}{(n+2)!N^{n+2}} (b-a)^{n+2} = \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{N^{n+1}}.$$

Ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \sum_{\ell=0}^n \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(x_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)}.$$

5. Lorsque $n = 0$, on retrouve la méthode des rectangles à gauche, et la vitesse de convergence en $O\left(\frac{1}{N}\right)$ justifiée dans le cours d'informatique commune.

Partie II – Approximation polynomiale au point milieu

1. Comme précédemment, $Q_{n,k}$ est le développement de Taylor de f au point m_k . Ainsi, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne cette fois :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - Q_{n,k}(x)) dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - m_k|^{n+1} dx.$$

En utilisant les symétries de la fonction à intégrer (c'est-à-dire un changement de variable $t = x_{k+1} - x$ sur la moitié de l'intervalle), on obtient :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - Q_{n,k}(x)) dx \right| \leq 2 \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{m_k}^{x_{k+1}} (x - m_k)^{n+1} dx = 2 \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+2)!} (x_{k+1} - m_k)^{n+2} = \frac{M_{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+1}}.$$

L'intégrale de $Q_{n,k} = \sum_{\ell=0}^n \frac{f^\ell(m_k)}{\ell!} (X - m_k)^\ell$ se calcule en remarquant que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - m_k)^\ell dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ impair} \\ 2 \frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)(2N)^{\ell+1}} & \text{si } \ell \text{ pair.} \end{cases}$$

On aboutit donc, comme précédemment, en sommant sur les valeurs de k , à :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^n \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!2^\ell N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)}$$

2. Si n est pair, le calcul précédent montre que la partie de degré $n+1$ (impair) de $Q_{n+1,k}$ ne contribue à rien dans le calcul de l'intégrale, donc

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n,k} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n+1,k}.$$

Ainsi, dans toutes les majorations précédentes, on peut remplacer $Q_{n,k}$ par $Q_{n+1,k}$, ce qui nous fait gagner un ordre. Ainsi :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^n \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{2^\ell(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right)}$$

3. Dans le cas $n = 0$, on retrouve la méthode du point milieu. Le cas $n = 1$ consiste à approcher la courbe par la tangente au point milieu. Mais quelle que soit la droite passant par le point milieu d'un intervalle, son intégrale sur cet intervalle est la même, donc on a exactement la même expression que la méthode du point milieu. On ne gagner rien de plus.

Au passage, on retrouve la vitesse de convergence de la méthode du point milieu, en $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$. On comprend bien d'où vient ce facteur puisque cela revient à faire l'approximation par la tangente.

Partie III – Méthodes de Newton-Cotes

1. Il s'agit d'un polynôme d'interpolation, qu'on calcule à l'aide des polynômes de Lagrange :

$$P(X) = \sum_{\ell=0}^n f(y_k) \frac{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (X - y_i)}{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (y_k - y_i)}.$$

2. On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(t) dt = (\beta - \alpha) \sum_{k=0}^n b_{n,k} f(y_k),$$

où

$$b_{n,k} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (x - y_i)}{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (y_k - y_i)} dx.$$

Comme $y_k - y_i = (k - i)(\beta - \alpha)$, on a donc :

$$b_{n,k} = \frac{1}{(\beta - \alpha)^{n+1}} \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (k - i) \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (x - y_i) dx.$$

On pose le changement de variable $t = n \cdot \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$, de classe \mathcal{C}^1 . Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (x - y_i) dx &= \frac{\beta - \alpha}{n} \int_0^n \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} \left(\alpha + t \frac{\beta - \alpha}{n} - \alpha - k \frac{\beta - \alpha}{n} \right) dt \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^{n+1}}{n^{n+1}} \int_0^n t(t-1)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n) dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$b_{n,k} = \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (k - i) \int_0^1 t(t-1)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n) dt,$$

3. Comme les $b_{n,k}$ sont indépendants de f , α et β , il suffit de prendre f la fonction constante égale à 1, qui est son propre polynôme d'interpolation sur l'intervalle $[0, 1]$. On obtient immédiatement

$$\sum_{k=0}^n b_{n,k} = \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

4. Contrôle de l'erreur d'interpolation.

(a) Comme $q(y_i) = 0$, et $f(y_i) = P(y_i)$ pour tout i , les y_i sont bien des zéros de g . De plus on voit facilement que x est aussi un zéro de g .

(b) Ainsi, l'application g possède $n + 2$ zéros distincts. Comme elle est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur l'intervalle $[a, b]$, on peut appliquer une première fois le théorème de Rolle entre chacune de ces racines rangées dans l'ordre croissant, ce qui nous donne $n + 1$ zéros de g' . On applique une deuxième fois le théorème de Rolle pour trouver n zéros de g'' et on itère ce procédé jusqu'à la dérivée d'ordre $n + 1$, en perdant à chaque fois un zéro. Il nous reste alors au moins un zéro de $g^{(n+1)}$. Ainsi, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$.

(c) On calcule $g^{(n+1)}$. Comme P est de degré n , on obtient :

$$\forall t \in [a, b], \quad g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (f(x) - P(x)) \frac{(n+1)!}{q(x)},$$

le facteur $(n+1)!$ provenant de l'expression de la dérivée $n+1$ -ième d'un polynôme unitaire de degré $n+1$. Ainsi, en évaluant en c :

$$0 = f^{(n+1)}(c) - (f(x) - P(x)) \frac{(n+1)!}{q(x)},$$

d'où :

$$|f(x) - P(x)| = f^{(n+1)}(c) \frac{|q(x)|}{(n+1)!} \leq M_{n+1} \frac{\left| \prod_{k=0}^n (x - y_k) \right|}{(n+1)!}.$$

5. On intègre l'expression précédente sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, en considérant $\alpha = x_k$ et $\beta = x_{k+1}$. Ainsi

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - P(x)| \, dx \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \prod_{k=0}^n (x - y_k) \right| \, dx.$$

Par ailleurs, d'après la question 2 :

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) \, dx &= (x_{k+1} - x_k) \sum_{\ell=0}^n b_{n,\ell} f(y_\ell) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n b_{n,k} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a) + \frac{\ell}{n} \frac{b-a}{n}\right) \\ &= h \sum_{\ell=0}^n b_{n,\ell} f\left(a + \left(k + \frac{\ell}{n}\right) h\right), \text{ où } h = \frac{b-a}{N}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, par un calcul similaire à la question 2,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \prod_{k=0}^n (x - y_k) \right| \, dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)^{n+2}}{n^{n+2}} \int_0^n |t(t-1) \cdots (t-n)| \, dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{N^{n+2} n^{n+2}} \int_0^n |t(t-1) \cdots (t-n)| \, dt.$$

Ainsi :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - P(x)| \, dx \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+1)! N^{n+2} n^{n+2}} \int_0^n |t(t-1) \cdots (t-n)| \, dt.$$

Par sommation sur k et inégalité triangulaire (sur la somme et l'intégrale), on en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \, dt - I_N \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+1)! N^{n+2} n^{n+2}} \int_0^n |t(t-1) \cdots (t-n)| \, dt \\ &\leq \frac{C_n M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}, \end{aligned}$$

où $C_n = \frac{M_{n+1}}{(n+1)! n^{n+2}} \int_0^n |t(t-1) \cdots (t-n)| \, dt$ est bien indépendant de N , f , a et b .

6. (a) On pose $m = \frac{n}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Le changement de variable $t = x - y_m$ amène

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - y_0) \cdots (x - y_n) \, dx &= \int_{-\gamma}^{\gamma} (t + x_m - x_0) \cdots t \cdots (t + y_m - y_n) \, dt \\ &= \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(t + \frac{m}{n} \right) \cdots (t+1)t(t+1) \cdots \left(t + \frac{n-m}{n} \right) \, dt. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{n-m}{n} = \frac{1}{2} = \frac{m}{n}$. Ainsi, l'intégrande est une fonction impaire, et l'intervalle d'intégration est symétrique en 0. Ainsi,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - y_0) \cdots (x - y_n) \, dx = 0.$$

(b) On déduit de la question précédente que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (P(x) - \lambda(x - y_0) \cdots (x - y_n)) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x) \, dx.$$

On pose alors $Q = P - \lambda(x - y_0) \cdots (x - y_n)$, qui est bien de degré au plus $n + 1$, et vérifie l'égalité des intégrales. On recherche λ tel que $Q'(y_m) = f'(y_m)$. Pour montrer qu'un tel choix de λ existe, on remarque que le polynôme $R = (X - y_1) \cdots (X - y_n)$ admet y_m comme racine simple, donc $R'(y_m) \neq 0$. Il suffit alors de définir λ par

$$\boxed{\lambda = \frac{P'(y_m) - f'(y_m)}{R'(y_m)}}$$

pour obtenir $Q'(y_m) = f'(y_m)$.

- (c) On pose $q(t) = (t - y_m) \prod_{k=0}^n (t - y_k)$, et on considère, pour x fixé, la fonction g définie par :

$$g(t) = f(t) - Q(t) + \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - Q(x)).$$

Alors, les y_i ainsi que x sont toujours des zéros de g , qui admet donc $n + 2$ zéros distincts. Le théorème de Rolle permet donc de trouver $n + 1$ zéros de g' , venant s'intercaler strictement entre les zéros de g . Mais par ailleurs, y_m étant une racine double de q , et zéro de $f' - Q'$, on remarque que $g'(y_m) = 0$, et ainsi, on dispose de $n + 2$ zéros distincts de g' . Puisque g est de classe C^{n+2} , on peut itérer le théorème de Rolle, jusqu'à l'obtention d'un zéro de $g^{(n+2)}$.

On calcule maintenant $g^{(n+2)}$, et on évalue en c . Comme q est unitaire de degré $n + 2$, on obtient :

$$0 = f^{(n+2)}(c) + \frac{(n+2)!}{q(x)}(f(x) - Q(x)),$$

donc

$$|f(x) - Q(x)| = \frac{|f^{(n+2)}(c)|}{(n+2)!} |q(x)|.$$

Comme plus haut, on montre qu'il existe un réel D_n ne dépendant que de n , tel que

$$\int_{\alpha}^{\beta} |q(x)| \, dx \leq D_n (\beta - \alpha)^{n+3}.$$

On intègre entre 2 points $\alpha = x_k$ et $\beta = x_{k+1}$ d'une subdivision régulière de $[a, b]$. Puisque $\int_{\alpha}^{\beta} Q(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x) \, dx$, on obtient la même expression que plus haut, c'est-à-dire :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx - h \sum_{\ell=0}^n b_{n,\ell} f\left(a + \left(k + \frac{\ell}{n}\right)h\right) \right| \leq D_n (x_{k+1} - x_k)^{n+3} = D_n \frac{(b - a)^{n+3}}{N^{n+3}}.$$

Ainsi, en sommant sur k , il vient :

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - I_N \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} D_n \frac{(b - a)^{n+3}}{N^{n+3}} = D_n \frac{(b - a)^{n+3}}{N^{n+2}}.$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{\int_a^b f(t) \, dt = I_N + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right)}.$$

- (d) Le cas $n = 2$ correspond à une interpolation aux deux extrémités et au milieu de chaque intervalle de la subdivision. On a fait les calculs des coefficients en cours d'informatique (il s'agit de la méthode de Simpson). Ce qu'on obtient est :

$$\boxed{\int_a^b f(t) \, dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{6} (f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})) + O\left(\frac{1}{N^4}\right)}$$

où m_k désigne le milieu de $[x_k, x_{k+1}]$. On a ainsi démontré la convergence en $\frac{1}{N^4}$ de la méthode d'intégration de Simpson, point qu'on avait admis dans le cours d'informatique.

Partie IV – Méthode de Gauss

1. (a) On montre par récurrence bornée sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $P_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans $] -1, 1 [$, propriété que nous noterons $\mathcal{P}(k)$. Pour $k = 0$, la propriété à montrer est assez creuse.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ telle que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Alors $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $] -1, 1 [$. Par ailleurs, 1 et -1 sont racines de multiplicité n de P_n , donc sont aussi racines de $P_n^{(k)}$. Ainsi, on dispose de $k+2$ racines distinctes de $P_n^{(k)}$ dans $[-1, 1]$. On applique le théorème de Rolle entre ces racines (ce qu'on peut faire puisqu'un polynôme est de classe C^∞). On trouve donc $n+1$ racines distinctes de $P_n^{(k+1)}$ situées strictement entre les racines de $P_n^{(k)}$, donc dans $] -1, 1 [$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_n^{(k)}$ admet au moins k distinctes racines dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

- (b) En particulier, L_n admet au moins n racines distinctes dans $] -1, 1 [$. Comme $\deg(L_n) = n$, elle ne peut pas en avoir plus (comptées avec multiplicité), donc ce sont là toutes les racines de L_n . On en déduit que L_n est à racines simples toutes dans $] -1, 1 [$.

2. Notons $L_{n,k}$ le k -ième polynôme d'interpolation de Lagrange de la famille r_1, \dots, r_n . Ainsi,

$$Q_n = \sum_{\ell=1}^n f(r_\ell) L_{n,k}.$$

On pose alors $\lambda_k = \int_{-1}^1 L_{n,k}(x) \, dx$, indépendant de f , et on obtient bien :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \, dx = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell P(r_\ell).$$

3. (a) Si P est un polynôme de degré strictement inférieur à n , il est son propre polynôme d'interpolation (par unicité), donc $P = P_n$, et donc $\mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}(P)$.

- (b) Soit P est un polynôme vérifiant $\deg(P) < 2n$, et R son reste par la division euclidienne par L_n . On a donc $P = QP_n^{(n)} + R$, où Q est un polynôme de degré inférieur strictement à n . Or, une intégration par parties (sur les fonctions C^∞) donne :

$$\int_{-1}^1 Q(x) P_n^{(n)}(x) \, dx = \left[Q(x) P_n^{(n-1)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q'(x) P_n^{(n-1)}(x) \, dx = - \int_{-1}^1 Q'(x) P_n^{(n-1)}(x) \, dx$$

car 1 et -1 sont racines d'ordre n de P_n , donc racines de $P_n^{(n-1)}$. On peut itérer cet argument en intégrant plusieurs fois par parties, et on obtient :

$$\int_{-1}^1 Q(x) P_n^{(n)}(x) \, dx = (-1)^n \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x) P_n(x) \, dx.$$

Puisque $\deg(Q) < n$, $Q^{(n)} = 0$, d'où finalement,

$$\int_{-1}^1 Q(x) P_n^{(n)}(x) \, dx = 0.$$

On obtient donc enfin : $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)$.

Mais par ailleurs, puisque $\deg(R) < n$, $\mathcal{I}(R) = \mathcal{I}_n(R)$. Pour terminer, on constate que puisque les r_i sont racines de L_n , P et R prennent les même valeurs sur les r_i , donc ont même polynôme interpolateur (c'est en fait le polynôme R lui-même), donc $\mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}_n(R)$.

En mettant bout-à-bout ces trois égalités, il vient : $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(P_n)$.

4. Polynôme d'interpolation de Hermite de f

- (a) Soit H_1 et H_2 deux éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(H_1 + \lambda H_2) &= (H(r_1) + \lambda H_2(r_1), H'_1(r_1) + \lambda H'_2(r_1), \dots, H_1(r_n) + \lambda H_2(r_n), H'_1(r_n) + \lambda H'_2(r_n)) \\ &= (H_1(r_1), H'_1(r_1), \dots, H_1(r_n), H'_1(r_n)) + \lambda (H_2(r_1), H'_2(r_1), \dots, H_2(r_n), H'_2(r_n)) \\ &= \varphi(H_1) + \lambda \varphi(H_2). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est une application linéaire. Déterminons son noyau : soit $H \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $H(r_k) = H'(r_k) = 0$. Ainsi, r_k est racine au moins double de H . Le polynôme H a donc au moins $2n$ racines comptées avec multiplicité. Comme $\deg(H) < 2n$, on en déduit que $H = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Par conséquent, φ est injective. De plus, il s'agit d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie $2n$, donc, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme}}$.

- (b) La bijectivité de φ nous assure l'existence et l'unicité des antécédents de tout $2n$ -uplet. Ainsi, le $2n$ -uplet $(f(r_1), f'(r_1), \dots, f(r_n), f'(r_n))$ admet un unique antécédent par φ . En d'autres termes, il existe un unique polynôme $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_n(r_j) = f(r_j) \quad \text{et} \quad B'_n(r_j) = f'(r_j)}.$$

5. Puisque B_n prend les mêmes valeurs que f aux r_i , f et B_n ont même polynôme d'interpolation, donc $\boxed{\mathcal{I}_n(B_n) = \mathcal{I}_n(f)}$.

6. (a) Comme x est distinct des r_i , $P_n^{(n)}(x) \neq 0$, et on trouve α tel que $g(x) = 0$ en résolvant une équation de degré 1. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } \alpha}$.

- (b) Comme dans les parties précédentes, puisque $f(r_i) = B_n(r_1)$, les r_i sont zéros de g , ainsi que x . On dispose donc de $n+1$ zéros distincts de g' , et donc, en utilisant le théorème de Rolle, de n zéros distincts de g' , séparant strictement les zéros de g (et donc notamment, dans $] -1, 1[$, et distincts des r_i). Or, les r_i sont racines doubles de $(P_n^{(n)})^2$ et $f'(r_i) = B'_n(r_i)$. Ainsi, les r_i sont aussi zéros de g' . On a donc de la sorte $\boxed{2n \text{ zéros distincts de } g'}$, dans $] -1, 1[$.

- (c) On utilise toujours le théorème de Rolle itéré pour obtenir $c \in] -1, 1[$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$, soit, puisque $\deg(B_n) < n$, et $\deg(P_n^{(n)})^2 = 2n$, de coefficient dominant $\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2$:

$$0 = f^{(2n)}(c) - \alpha P_n^{(2n)}(c) = f^{(2n)}(c) - \alpha(2n)! \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2.$$

On trouve donc $\alpha = f^{(2n)}(c) \cdot \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}$, d'où, en exprimant l'égalité $g(x) = 0$:

$$0 = f(x) - B_n(x) - f^{(2n)}(c) \cdot \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} (P_n^{(n)}(x))^2,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \cdot f^{(2n)}(c) (P_n^{(n)}(x))^2}.$$

7. Ainsi,

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leq \int_{-1}^1 |f(x) - B_n(x)| \, dx \leq M_{2n} \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(x))^2 \, dx.$$

Le même argument d'intégrations par partie itérées qu'en 3(b) amène :

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(x))^2 \, dx = (-1)^n \int_{-1}^1 P_n^{(2n)}(x) P_n(x) \, dx = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n \, dx.$$

Or, soit $I_{p,q} = \int_{-1}^1 (x-1)^p (x+1)^q \, dx$. Intégrons par partie, pour $p > 0$:

$$I_{p,q} = \frac{1}{q+1} \left[(x-1)^p (x+1)^{q+1} \right]_{-1}^1 - \frac{p}{q+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{p-1} (x+1)^{q+1} \, dx = -\frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$

En itérant, il vient :

$$I_{p,q} = (-1)^p \frac{p! q!}{(p+q)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{p+q} \, dx = (-1)^p \frac{p! q!}{(p+q+1)!} 2^{p+q+1}.$$

En particulier,

$$\int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n \, dx = I_{n,n} = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On en déduit que

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(x))^2 \, dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1},$$

d'où finalement

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leq M_{2n} \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1} = M_{2n} \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n)!(2n+1)} = \boxed{M_{2n} \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!}}.$$

8. On effectue le changement de variable $x = \frac{u - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$, soit $u = \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot x + \frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u) \, du = \frac{\beta-\alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot x + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \, du.$$

On applique la majoration précédente à la fonction $g : u \mapsto f\left(\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot x + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, dont la dérivée $2n$ -ième est

$$g^{(2n)}(u) = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2n} f^{(2n)}\left(\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot x + \frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

dont la borne supérieure M'_{2n} est par conséquent $M'_{2n} = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2n} M_{2n}$. Or,

$$\mathcal{I}_n(g) = \sum_{j=1}^n \lambda_j g(r_j) = \frac{\beta-\alpha}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + r_j \frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(u) \, du - \frac{\beta-\alpha}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + r_j \frac{\beta-\alpha}{2}\right) \right| &\leq \frac{\beta-\alpha}{2} |\mathcal{I}(g) - \mathcal{I}_n(g)| \\ &\leq \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot M'_{2n} \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!} \\ &= \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2n+1} M_{2n} \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!} \\ &= \boxed{M_{2n} \cdot \frac{(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!}}. \end{aligned}$$

9. On considère le cas $n = 2$. On détermine le polynôme L_2 :

$$L_2 = ((X^2 - 1)^2)'' = (X^4 - 2X^2 + 1)'' = 12X^2 - 4 = 4(3X^2 - 1),$$

dont les racines sont $r_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On a alors :

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + r_1 \frac{\beta-\alpha}{2} = m - \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} + r_2 \frac{\beta-\alpha}{2} = m + \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}},$$

où m est le milieu de $[\alpha, \beta]$.

On détermine aussi les deux coefficients λ_1 et λ_2 . On peut les déterminer par le calcul des intégrales des polynômes d'interpolation de Lagrange, ou alors se servir du fait qu'ils ne dépendent pas de f , et que la formule d'interpolation est exacte sur les polynômes de degré au plus 3. En particulier, pour une fonction f constante de valeur 1, on obtient $2 = \lambda_1 + \lambda_2$, et pour la fonction identité, on obtient $0 = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{3}}$. Il en résulte que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

En utilisant la majoration de la question précédente à tout intervalle d'une subdivision régulière $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ d'un intervalle $[a, b]$, on obtient, pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(u) \, du - \frac{b-a}{2N} \left(f\left(m_k - \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right) + f\left(m_k + \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{6^2 \cdot 5! \cdot N^5} = \frac{M_4(b-a)^5}{4320N^5}.$$

En sommant cette inégalité, et en utilisant l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles, il vient enfin :

$$\left| \int_a^b f(u) \, du - \frac{b-a}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(m_k - \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right) + f\left(m_k + \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{4320N^4}.$$