Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 10/12/2020

DM n° 9 : Dérivation

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm08-nom.pdf` (par exemple `dm08-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus du problème ci-dessous obligatoire, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 6 de la sélection de problèmes sur ma page web (exemple de fonction continue partout, dérivable nulle part).

Problème 1 – Une fonction continue partout dérivable nulle part

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement *vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*
Nous donnons un exemple montrant que si (f_n) converge simplement vers f, même si toutes les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues, la fonction limite f n'est pas forcément continue. Ainsi, la continuité n'est pas forcément préservée par passage à la limite.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f_{x_0,n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{x_0,n}(x) = \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f_{x_0} que l'on déterminera.
3. f_{x_0} est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_m$ des réels deux à deux distincts. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n = f_{x_1,n} + \cdots + f_{x_m,n}.$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction qui n'est continue en aucun des points x_i, $i \in [\![1, m]\!]$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

D'après la partie précédente, on ne peut pas conclure directement à la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues (et donc à la continuité d'une somme d'une série de fonctions continues). L'objet de cette partie est de donner un critère simple de continuité d'une limite de suite de fonctions ou d'une somme de série de fonctions.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in I,\ \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, contrairement au cas de la convergence simple, N est indépendant de x. On peut donc contrôler de façon globale la convergence de la suite vers f : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un « voisinage tubulaire » de la courbe de f (c'est-à-dire un « tube » encadrant la courbe de f à ε près des deux côtés) dans lequel vont se tracer les courbes des f_n à partir d'un certain rang.

1. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie I n'est pas uniformément convergente.
2. Justifier qu'une suite uniformément convergente est simplement convergente.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Montrer que f est continue sur I.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément. On dit que $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\sum a_n \text{ converge,} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \ |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

4. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

On étudie ici une fonction, obtenue comme limite d'une série de fonction. On montre que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. L'exemple qui suit a été donné par Weierstrass en 1861 (pour des valeurs particulières de a et b). De nombreux autres exemples de fonctions partout continues et nulle part dérivables peuvent être trouvés dans la littérature mathématique (Gini, Bolzano, Van der Waerden...)
Soit $b \in]0,1[$, et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)) \qquad \text{et} \qquad R_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)).$$

2. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^*,\ |S_m(h)| \leqslant \pi\dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = \left\lfloor a^m x + \dfrac{1}{2}\right\rfloor$, et $\beta_m = a^m x - \alpha_m$. On pose $h_m = \dfrac{1-\beta_m}{a^m}$.

3. Justifier que $|h_m| \leqslant \dfrac{3}{2a^m}$.
4. Soit n un entier supérieur ou égal à m.
   (a) Montrer que $\cos(\pi a^n(x+h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}$. Calculer de même $\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ et $\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ en fonction de α_m.
   (b) En déduire que $\cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)$.
5. Montrer que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|}$.
6. Montrer que : $\left|\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geqslant \dfrac{2(ab)^m}{3}\cdot\dfrac{ab - \left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}$.
7. Montrer que f n'est dérivable en aucun réel x.