Corr. 1 Vitesse de propagation de l'énergie dans un plasma

1. **Comme en cours**, on écrit l'équation du mouvement des électrons et on néglige l'effet du champ magnétique de l'onde et celui des collisions, d'où

$$\boxed{m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\,\vec{E}}$$

Ensuite, les électrons provoquent un courant dominant (car ils sont moins massifs que les ions) tel que (en notation complexe en $e^{i(\omega t-\vec{k}\,.\,\vec{r})}$) :

$$\underline{\vec{j}} \simeq -ne\,\underline{\vec{v}} = -i\,\frac{ne^2}{m\omega}\,\underline{\vec{E}}$$

Ensuite, toujours comme en cours, les équations de Maxwell conduisent à la relation de dispersion de Klein-Gordon

$$\boxed{k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p{}^2 \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$$

Puis, toujours comme en cours, on arrive quasiment sans calcul à

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_p{}^2}{\omega^2}}}}$$

Enfin, la différentiation de la relation de Klein-Gordon donne $v_g\,v_\varphi = c^2$ (faites-le !), d'où

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}}}$$

On remarque que $v_\varphi > c$ (non gênant) et que $v_g < c$, ce qui est rassurant car on va montrer qu'il s'agit de la vitesse de propagation de l'énergie et celle-ci doit obéir au principe de relativité.

2. La densité volumique d'énergie du champ, **en notations réelles**, est

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

La densité volumique d'énergie cinétique des charges est (toujours en notations réelles !)

$$e_c = \frac{1}{2}nmv^2$$

On en déduit la densité volumique d'énergie totale moyennée dans le temps :

$$\boxed{\langle u\rangle = \langle\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}nmv^2\rangle}$$

On suppose l'onde polarisée rectilignement (ce qui simplifie l'approche mais ne change rien au résultat final de la dernière question...). Alors,

$$\langle u\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 E_0{}^2}{2} + \frac{k^2}{\omega^2}\frac{E_0{}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}nm\left(\frac{e}{m\omega}E_0\right)^2\right)$$

On simplifie en utilisant la relation de dispersion, d'où

$$\boxed{\langle u\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}}$$

3. La moyenne du vecteur de Poynting se calcule en complexes avec

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right]$$

et en utilisant la relation de structure (démontrée grâce à l'équation de Maxwell-Faraday) :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$$

On tire

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0{}^2}{2\mu_0 v_\varphi}\frac{\vec{k}}{k}}$$

4. L'énergie moyenne traversant une section S de plan d'onde pendant dt se trouvait dans un cylindre de longueur $v_e\,\mathrm{d}t$ et de section S (en raisonnant suivant la direction de propagation). Elle vaut donc

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = \langle u\rangle\, v_e\,\mathrm{d}t\,\mathrm{S}$$

Or, elle correspond au transfert de l'énergie $\langle\Pi\rangle\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}t$ pendant dt à travers S, donc

$$\boxed{\vec{v_e} = \frac{\langle\vec{\Pi}\rangle}{\langle u\rangle}}$$

Dans le cas présent de l'onde polarisée rectilignement (je répète non restrictif), le remplacement des expressions des deux questions précédentes donne

$$\boxed{\vec{v_e} = v_g\,\frac{\vec{k}}{k}}$$

En conclusion, on vérifie que dans ce milieu non absorbant, la vitesse de l'énergie correspond à la vitesse de groupe.

Corr. 2 Propagation d'une onde dans le plasma interstellaire

1. Attention, l'énoncé fait comme si le vecteur d'onde est réel. On espère donc dès à présent que la relation de dispersion sera compatible avec ce choix (voir question 4).

Les équations de Maxwell étant linéaires, si le champ électrique est de pulsation ω, alors le champ magnétique l'est aussi ! Si ça n'est pas évident pour vous, écrivez par exemple l'équation de Maxwell-Faraday en prenant des pulsations différentes pour les champs électrique et magnétique et déduisez-en alors que les champs propagatifs sont forcément nuls...

D'après les notations de l'énoncé, on a

$$\vec{\nabla} = -j\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

Par conséquent, l'équation de Maxwell-Faraday conduit immédiatement à

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}}$$

soit

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \vec{B_0}\,e^{j(\omega t-\vec{k}\,.\,\vec{r})} \quad \text{avec} \quad \vec{B_0} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E_0}}{\omega}}$$

On en déduit que **le champ magnétique est transverse et a pour vecteur d'onde** $\vec{k}$.

De plus, comme le suppose l'énoncé (mais c'est démontrable...), $\rho = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss conduit à

$$\vec{k}\,.\,\vec{E} = 0$$

Ainsi, le champ électrique est aussi transverse et $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ constitue un **trièdre droit direct**.

2. Il suffit de remplacer l'expression de la densité de courant proposée dans l'équation de Maxwell-Ampère où l'on introduit les champs précédents, ce qui donne

$$\boxed{\vec{j}_{v,0} = -j\,\varepsilon_0\,\omega\left(1-\frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)\vec{E_0}}$$

On remarquera que div $\vec{j_v} = 0$, ce qui est en accord avec la loi locale de conservation de la charge.

3. **Moyennant les approximations détaillées en cours** ($|\vec{v}\wedge\vec{B}| \ll |\vec{E}|\ldots$), l'équation du mouvement de l'électron prend la forme simplifiée

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\,\vec{E}$$

Notez que l'on néglige les frottements dans l'ARQS. Par conséquent, en régime harmonique,

$$\underline{\vec{j}}_v = \sum_{port.\ i} n_i q_i\,\underline{\vec{v_i}} = -ne\,\underline{\vec{v}} = -j\,\frac{ne^2}{m\omega}\,\underline{\vec{E}}$$

d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{ne^2}{m}}$$

4. En confrontant les résultats des deux questions précédentes, on obtient

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p{}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$$

Il s'agit d'une relation de dispersion de type Klein-Gordon et faisant intervenir la pulsation plasma ω_p. On note que le vecteur d'onde n'est réel, comme l'énoncé le suppose, que si $\omega > \omega_p$. Dans le cas contraire, le vecteur d'onde devient imaginaire pur et l'onde dans le plasma devient évanescente (onde stationnaire en décroissance exponentielle suivant Ox).

5. Les calculs simples donnent

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{K^2}{k^2}} > c}$$

Le fait que $v_\varphi > c$ n'est pas gênant vis à vis de la relativité puisque la vitesse de phase ne correspond pas à la vitesse de propagation de l'énergie associée à un paquet d'ondes (une oppm seule n'étant pas physique car d'extension infinie).

Puis,

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{K^2}{k^2}}} < c}$$

Dans le milieu non absorbant, la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie associée à un paquet d'ondes et elle obéit bien au principe de relativité $v_g < c$.

La vitesse de groupe peut être obtenue plus rapidement en remarquant que la différentiation de la relation de dispersion de Klein-Gordon donne

$$2k\,\mathrm{d}k = \frac{2\omega\,\mathrm{d}\omega}{c^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{k\,\mathrm{d}k} = c^2$$

donc

$$\boxed{v_g\,v_\varphi = c^2}$$

Cette relation est bien vérifiée par les résultats précédents et montre que $v_\varphi > c$ est obligatoire pour obtenir, dans le cas de Klein-Gordon, $v_g < c$...

6. Les trains d'ondes sont des paquets d'ondes se déplaçant à la vitesse de groupe et le décalage cherché vaut

$$\delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_{g_2}} - \frac{L}{v_{g_1}}$$

soit

$$\delta t = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_2{}^2K^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1+\frac{\lambda_1{}^2K^2}{4\pi^2}}\right)$$

Ensuite, les approximations de l'énoncé $K^2\lambda_i{}^2 \ll 1$ donnent

$$\boxed{\delta t = \frac{K^2L}{8\pi^2c}\left(\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2\right)}$$

Corr. 3 Ligne bifilaire résistive

1. On écrit comme en cours, la loi des mailles et la loi des nœuds, qui fournissent dans l'ordre

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + l\frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v}{\partial t} + gv = 0}$$

Une solution OPPH $\underline{v}(x,t) = \underline{V}\exp(\mathrm{j}(\omega t - kx)$ (et idem pour le courant $\underline{i}$) doit vérifier le système d'équations

$$-\mathrm{j}k\underline{v} + \mathrm{j}\omega l\underline{i} + r\underline{i} = 0 \quad \text{et} \quad -\mathrm{j}k\underline{i} + \mathrm{j}\omega\gamma\underline{v} + g\underline{v} = 0$$

dont il est facile de tirer la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \gamma l\omega^2 - \mathrm{j}\omega(r\gamma + lg) - rg}$$

k est donc un nombre complexe, de la forme $k = k_R + \mathrm{j}k_I$. La partie imaginaire de k traduit l'atténuation de l'onde lors de la propagation (il est logique que l'onde soit atténuée puisque la ligne est dissipative !). En effet $\exp(\mathrm{j}(\omega t - kx) = \exp(\mathrm{j}(\omega t - k_Rx)\exp(k_Ix)$. Rmq : il faut que $k_Rk_I < 0$ car si la propagation se fait vers les x croissants, $k_R > 0$ et on doit avoir $k_I < 0$ pour que l'onde soit atténuée et non amplifiée (et raisonnement similaire si $k_R < 0$).

2. Voyons si on peut écrire $k_R = \omega/c$ et $k_I = -1/d$ avec la vitesse de phase c indépendante de ω et la distance d d'atténuation de l'onde (cf terme en $\exp(-x/d)$) indépendante de ω elle aussi. En injectant $k = k_R + \mathrm{j}k_I$, on obtient en identifiant partie réelle et imaginaire :

$$k_R^2 - k_I^2 = \gamma l\omega^2 - rg \quad \text{et} \quad 2k_Rk_I = -\omega(r\gamma + lg)$$

ce qui avec l'expression recherchée pour k_R et pour k_I donne

$$\omega^2/c^2 - 1/d^2 = \gamma l\omega^2 - rg \quad \text{et} \quad -2\omega/(cd) = -\omega(r\gamma + lg)$$

La première équation donne

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{l g}} \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{\sqrt{rg}}}$$

puis la seconde fournit la condition recherchée (après un calcul simple) :

$$\boxed{r\gamma = lg}$$

L'intérêt d'un tel choix est évident : pouvoir faire se propager un paquet d'onde sans déformation autre qu'un amortissement global (ie facteur multiplicatif < 1), donc sans distortion). On peut toujours amplifier le signal en sortie de ligne pour compenser l'amortissement.

Corr. 4 Polarisation rotatoire

On peut décomposer l'oeppmpr incidente en deux oeppmpc, droite et gauche, arrivant en $z=0$:

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(z<0,t) = 2\mathrm{E}_0\cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(z<0,t) = \underbrace{\begin{pmatrix}\mathrm{E}_0\cos(\omega t-kz)\\ \mathrm{E}_0\sin(\omega t-kz)\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{circulaire gauche } \overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{G}}} + \underbrace{\begin{pmatrix}\mathrm{E}_0\cos(\omega t-kz)\\ -\mathrm{E}_0\sin(\omega t-kz)\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{circulaire droite } \overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{D}}}$$

L'énoncé précise que l'on ne se préoccupe pas de problèmes associés aux interfaces du milieu $(\mathscr{M})$ (c'est-à-dire que l'on suppose la continuité du champ). De plus, on connaît les caractéristiques de propagation de chaque oeppmpc, ce qui permet d'obtenir, après le milieu :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{G}}(z>\mathrm{L},t) = \begin{pmatrix}\mathrm{E}_0\cos[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - kn_\mathrm{G}\mathrm{L}]\\ \mathrm{E}_0\sin[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - kn_\mathrm{G}\mathrm{L}]\\ 0\end{pmatrix}$$

et $$\overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{D}}(z>\mathrm{L},t) = \begin{pmatrix}\mathrm{E}_0\cos[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - kn_\mathrm{D}\mathrm{L}]\\ -\mathrm{E}_0\sin[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - kn_\mathrm{D}\mathrm{L}]\\ 0\end{pmatrix}$$

Ensuite, on somme ces ondes et on utilise (avec joie) la trigonométrie, d'où le champ après le milieu

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}(z>\mathrm{L},t) = \begin{pmatrix}2\mathrm{E}_0\cos\left[k\,\frac{n_\mathrm{D}-n_\mathrm{G}}{2}\,\mathrm{L}\right]\cos\left[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - k\,\frac{n_\mathrm{G}+n_\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{L}\right]\\ 2\mathrm{E}_0\sin\left[k\,\frac{n_\mathrm{D}-n_\mathrm{G}}{2}\,\mathrm{L}\right]\cos\left[\omega t - k(z-\mathrm{L}) - k\,\frac{n_\mathrm{G}+n_\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{L}\right]\\ 0\end{pmatrix}}$$

On reconnaît en sortie une **oeppmpr, mais de direction de polarisation qui a tourné d'un angle β autour de $\overrightarrow{e_z}$ par rapport à l'oeppmpr incidente** :

$$\boxed{\beta = \frac{\pi\,\mathrm{L}}{\lambda_0}\,[n_\mathrm{D}(\lambda_0) - n_\mathrm{G}(\lambda_0)]}$$

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide qui vérifie $k = 2\pi/\lambda_0$.

Le modèle étudié représente un milieu chiral qui produit le phénomène de polarisation rotatoire (quantifié par la loi de Biot en chimie).