FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tous les exercices, K désigne un corps commutatif.

Exercice 1. [$\circ$]

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F^2 = X$.

Exercice 2. [$\circ$]

Soit F une fraction rationnelle sur K, où K est un corps de caractéristique nulle.

1. Démontrer que si α est une racine de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors α est une racine de F' de multiplicité $m-1$.
2. Démontrer que si β est un pôle de F de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$, alors β est un pôle de F' de multiplicité $p+1$.

Exercice 3. [$\star$]

Soit K un corps de caractéristique nulle.

1. Soit F une fraction rationnelle sur K. Démontrer que $\deg(F') = \deg(F) - 1$ si $\deg(F) \neq 0$ et $\deg(F') < \deg(F) - 1$ si $\deg(F) = 0$. Dans le cas où $\deg(F) = 0$, quelles valeurs peut prendre $\deg(F')$?
2. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F' = 1/X$.

Exercice 4. [$\bigstar$]

Dans le cours, nous avons dit que deux fractions rationnelles F et $G = A/S$ sont composables lorsque $S \circ F \neq 0$. Démontrer que cette condition est en fait équivalente à l'assertion « F n'est pas une fraction rationnelle constante égale à une racine de S ».

Exercice 5. [$\bigstar$]

On pose $K_0(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) \leqslant 0\}$.

1. Démontrer que $\big(K_0(X), +, \times\big)$ est un anneau.
2. Déterminer les idéaux de $K_0(X)$.

Exercice 6. [$\circ$]

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. En changeant d'indéterminée, déterminer la décomposition en éléments simples de

$$F_{m,n} = \frac{X^m}{(X-1)^n}.$$

Exercice 7. [$\star$]

Soit $F = A/S$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ de degré strictement négatif telle que S est scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$ sur $\mathbb{R}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Donner la décomposition en éléments simples de F en fonction des $A(x_k)$ et $S'(x_k)$ pour $k \in [\![1; n]\!]$.
2. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k S'(x_k)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S'(x_k)}$$

où, dans la première somme, on suppose les x_k tous non nuls.

Exercice 8. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle
$$R_n = \frac{X^n + 1}{X^n - 1}\cdot$$

2. Décomposer sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles
$$F_n = \frac{1}{X^{2n} - 1} \qquad \text{et} \qquad G_n = \frac{X^{2n}}{X^{2n+1} - 1}\cdot$$

Exercice 9. [$\star$]

Décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle
$$F_n = \frac{n!}{(X+1)\cdots(X+n)}\cdot$$

Exercice 10. [$\star$]

En utilisant P'/P avec P bien choisi, calculer
$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}\cdot$$

Exercice 11. [$\bigstar$] (Théorème de Gauss–Lucas)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettent n racines distinctes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, d'images respectives $(A_1, \ldots, A_n)$ dans le plan complexe. On appelle $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ les racines du polynôme dérivé P' et $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ leurs images dans le plan complexe.

1. Démontrer que les familles de complexes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ ont la même moyenne. *On dit alors les familles de points $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ ont le même isobarycentre.*
2. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples et en déduire que
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_i - \alpha_j} = 0.$$
Démontrer que β_i est une moyenne pondérée à coefficients positifs ou nuls des nombres complexes de la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *On dit alors que le point B_i est un barycentre, à coefficients positifs, de la famille de points $(A_1, \ldots, A_n)$.*

   Interpréter géométriquement cette propriété.

FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tous les exercices, K désigne un corps commutatif.

Exercice 1. [$\circ$]

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F^2 = X$.

Exercice 2. [$\circ$]

Soit F une fraction rationnelle sur K, où K est un corps de caractéristique nulle.

1. Démontrer que si α est une racine de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors α est une racine de F' de multiplicité $m-1$.
2. Démontrer que si β est un pôle de F de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$, alors β est un pôle de F' de multiplicité $p+1$.

Exercice 3. [$\star$]

Soit K un corps de caractéristique nulle.

1. Soit F une fraction rationnelle sur K. Démontrer que $\deg(F') = \deg(F) - 1$ si $\deg(F) \neq 0$ et $\deg(F') < \deg(F) - 1$ si $\deg(F) = 0$. Dans le cas où $\deg(F) = 0$, quelles valeurs peut prendre $\deg(F')$?
2. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F' = 1/X$.

Exercice 4. [$\bigstar$]

Dans le cours, nous avons dit que deux fractions rationnelles F et $G = A/S$ sont composables lorsque $S \circ F \neq 0$. Démontrer que cette condition est en fait équivalente à l'assertion « F n'est pas une fraction rationnelle constante égale à une racine de S ».

Exercice 5. [$\bigstar$]

On pose $K_0(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) \leqslant 0\}$.

1. Démontrer que $\big(K_0(X), +, \times\big)$ est un anneau.
2. Déterminer les idéaux de $K_0(X)$.

Exercice 6. [$\circ$]

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. En changeant d'indéterminée, déterminer la décomposition en éléments simples de

$$F_{m,n} = \frac{X^m}{(X-1)^n}.$$

Exercice 7. [$\star$]

Soit $F = A/S$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ de degré strictement négatif telle que S est scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$ sur $\mathbb{R}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Donner la décomposition en éléments simples de F en fonction des $A(x_k)$ et $S'(x_k)$ pour $k \in [\![1; n]\!]$.
2. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k S'(x_k)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S'(x_k)}$$
où, dans la première somme, on suppose les x_k tous non nuls.

Exercice 8. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle
$$R_n = \frac{X^n + 1}{X^n - 1}.$$
2. Décomposer sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles
$$F_n = \frac{1}{X^{2n} - 1} \qquad \text{et} \qquad G_n = \frac{X^{2n}}{X^{2n+1} - 1}.$$

Exercice 9. [⋆]

Décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle
$$F_n = \frac{n!}{(X+1)\cdots(X+n)}.$$

Exercice 10. [⋆]

En utilisant P'/P avec P bien choisi, calculer
$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}.$$

Exercice 11. [★] (Théorème de Gauss–Lucas)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettent n racines distinctes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, d'images respectives $(A_1, \dots, A_n)$ dans le plan complexe. On appelle $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ les racines du polynôme dérivé P' et $(B_1, \dots, B_{n-1})$ leurs images dans le plan complexe.

1. Démontrer que les familles de complexes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ ont la même moyenne. *On dit alors les familles de points $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_{n-1})$ ont le même isobarycentre.*
2. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples et en déduire que
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_i - \alpha_j} = 0.$$
Démontrer que β_i est une moyenne pondérée à coefficients positifs ou nuls des nombres complexes de la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. *On dit alors que le point B_i est un barycentre, à coefficients positifs, de la famille de points $(A_1, \dots, A_n)$.*

   Interpréter géométriquement cette propriété.