LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice 1. [$\circ$]

1. Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = 5x^3 + 2x - 4 \qquad d(x) = \ln(\cos x)$$
$$b(x) = \cos(\sin x) \qquad e(x) = \ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$$
$$c(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad f(x) = \ln(\sin x)$$

2. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a(x) = 5x^3 + 2x - 4 \qquad e(x) = \ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$$
$$c(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - x + 1}$$

3. Déterminer un équivalent simple en 1 des fonctions suivantes :

$$h(x) = \ln x + \sin^2(x-1) + \sqrt{x^2 - 1} \qquad i(x) = \sqrt{1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^x} - 1$$

Exercice 2. [$\circ$] (Limites en 0)

Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = x^x \qquad f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} \qquad k(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2}$$
$$b(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad g(x) = (\sin x)\left(\sin\frac{1}{x^2}\right) \qquad \ell(x) = (1 + \tan x)^{1/\sin x}$$
$$c(x) = \frac{\tan 5x}{\sin x} \qquad h(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \qquad m(x) = \frac{\sin(x \ln x)}{x}$$
$$d(x) = \frac{x \ln x}{x^x - 1} \qquad i(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$
$$e(x) = \frac{\ln\cos(x)}{1 - \cos(2x)} \qquad j(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos x - 1} - 1}{x^2}$$

Exercice 3. [$\circ$] (Limites en $+\infty$)

Déterminer, si elles existent, les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad e(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x} + 2x + 7}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad i(x) = (\cos x)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$b(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2} \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \qquad j(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$
$$c(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad g(x) = \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x} \qquad k(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+2}}{\mathrm{e}^x}$$
$$d(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}} - x \qquad h(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2)} \qquad \ell(x) = \frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x + 1)}$$

Exercice 4. [$\circ$] (Limites en un point fini non nul)
Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^x-1}{\left(\ln(1+\sqrt{x^2-1})\right)^2} \qquad \lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(1-\frac{1}{\tan x}\right)^{\tan x}$$

$$\lim_{x\to1} \left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{x-1}} \qquad \lim_{x\to1} \frac{x^3+2x-3}{\sqrt{x}-1}$$

Exercice 5. [$\circ$] (Limites à droite et à gauche en 0)
Déterminer, si elles existent, les limites en 0^+ et 0^- des fonctions

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right| \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\cdot$$

Exercice 6. [$\circ$] (Pas de limite)
Étudier le comportement local ou asymptotique de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x+3}$ et $a=+\infty$,

b) $g(x) = (\sin x)\ln(1+x)$ et $a=+\infty$

c) $h(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{\mathrm{e}^{1/x}+1}$ et $a=0$

Exercice 7. [$\circ$]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $\big(f(n)\big)_{n\geqslant0}$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 8. [$\circ$]
Étudier le comportement local en 0 puis le comportement asymptotique en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor, \qquad g(x) = x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \text{et} \qquad h(x) = x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\cdot$$

Exercice 9. [$\circ$]
Soient $a, b > 0$. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto (a^x+b^x)^{1/x}$.

Exercice 10. [$\star$]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante telle que $\lim_{x\to0} f_n(x) = f_n(0)$. On suppose que la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\geqslant0}$ tend vers $+\infty$ et que, pour tout $x>0$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant0}$ tend, en croissant, vers une limite finie notée $g(x)$. On définit ainsi une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que g tend vers $+\infty$ en 0.

Exercice 11. [$\circ$]
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f tend vers ℓ en a et que g tend vers m en a. Démontrer que la fonction $\max(f,g)$ tend vers $\max(\ell,m)$ en a.

Exercice 12. [$\circ$]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application périodique.

1. On suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Démontrer que f est constante.
2. On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f+g$ est monotone et $\lim_{+\infty} g = 0$. Démontrer que f est constante.