THÉORIE DES APPLICATIONS

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définies par $f(x)=\sin(x)$ et $g(x)=x^2$ pour tout nombre réel x. Écrire $f\circ g$ et $g\circ f$. Ces deux applications sont-elles égales ? Sont-elles périodiques ?

On a

$$\boxed{f\circ g\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin(x^2)\end{array}\right.}\qquad\text{et}\qquad\boxed{g\circ f\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \big(\sin(x)\big)^2\end{array}\right.}$$

ce qui permet de constater que $(f\circ g)(\pi)\neq(g\circ f)(\pi)$ d'où

$$\boxed{f\circ g\neq g\circ f.}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$(g\circ f)(x+\pi)=\big(\sin(x+\pi)\big)^2=\big(-\sin(x)\big)^2=\big(\sin(x)\big)^2=(g\circ f)(x),$$

donc

$$\boxed{g\circ f\text{ est }\pi\text{-périodique.}}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $f\circ g$ est T-périodique (où $T\in\mathbb{R}_+^*$). Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $(f\circ g)(x+T)=(f\circ g)(x)$, c'est-à-dire $\sin\big((x+T)^2\big)=\sin(x^2)$. En choisissant $x=0$, il vient $\sin(T^2)=0$, ce qui donne $T^2=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. En choisissant $x=\sqrt{2}T$, il vient $\sin(3T^2+2\sqrt{2}T^2)=\sin(2T^2)$, c'est-à-dire $\sin(3k\pi+2\sqrt{2}T^2)=\sin(2k\pi)$ ou encore $-\sin(2\sqrt{2}T^2)=0$, ce qui donne $2\sqrt{2}T^2=\ell\pi$ avec $\ell\in\mathbb{Z}$. Mézalors, on a $2\sqrt{2}k\pi=\ell\pi$, c'est-à-dire $\sqrt{2}=\ell/(2k)\in\mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f\circ g\text{ n'est pas périodique.}}$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]
Soit $f:E\longrightarrow E$ une application. On note $F=\{x\in E : f(x)=x\}$ l'ensemble des points fixes de f. Démontrer que $f\circ f=f$ si, et seulement si, $f(E)\subset F$.

- $\Rightarrow$ Supposons que $f\circ f=f$. Soit $y\in f(E)$ de sorte qu'il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Alors $f(y)=f\big(f(x)\big)=(f\circ f)(x)=f(x)=y$, ce qui démontre que $y\in F$. Donc $f(E)\subset F$.
- $\Leftarrow$ Supposons que $f(E)\subset F$. Soit $x\in E$. Comme $f(x)\in f(E)$ et $f(E)\subset F$, on a $f(x)\in F$, c'est-à-dire $f\big(f(x)\big)=f(x)$ ou encore $(f\circ f)(x)=f(x)$. On a ainsi démontré que $\forall x\in E,\ (f\circ f)(x)=f(x)$, ce qui justifie que $f\circ f=f$.

En conclusion,

$$\boxed{f\circ f=f\text{ si, et seulement si, }f(E)\subset F.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\star$]

On considère $T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(T(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T^n = T \circ \cdots \circ T$ où T est répété n fois .

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Calculer $\big(T^2(f)\big)(x)$ et $\big(T^3(f)\big)(x)$.
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Proposer une formule générale pour $\big(T^n(f)\big)$ et la démontrer.

1. On a

$$\begin{aligned}\big(T^2(f)\big)(x) &= \big(T(f)\big)(x+1) - \big(T(f)\big)(x)\\ &= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)\\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\big(T^3(f)\big)(x) &= \big(T^2(f)\big)(x+1) - \big(T^2(f)\big)(x)\\ &= f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1) - f(x+2) + 2f(x+1) - f(x)\\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)\end{aligned}$$

2. On conjecture que

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(T^n(f)\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+n-k).$$

<u>Initialisation :</u> $\big(T^1(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^k f(x+1-k) = f(x+1) - f(x)$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&\big(T^{n+1}(f)\big)(x)\\ =\ & \big(T(f)\big)(x+1) - \big(T(f)\big)(x)\\ =\ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+1+n-k) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+n-k)}_{\text{on pose } \ell=k+1} \qquad \text{par H.R.}\\ =\ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+1+n-k) - \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} (-1)^{\ell-1} f(x+n+1-\ell)\\ =\ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+1+n-k) - \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} (-1)^{\ell-1} f(x+n+1-\ell) \qquad \text{car } \binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0\\ =\ & \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] (-1)^k f(x+1+n-k)\\ =\ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k f(x+1+n-k),\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(T^n(f)\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+n-k).}$$

♦ ***Exercice 4.*** [★] (Lemmes de factorisation)

1. Soient $f : E \longrightarrow F_1$ et $g : E \longrightarrow F_2$ deux applications ayant le même ensemble de départ. Démontrer qu'il existe une application $h : F_1 \to F_2$ telle que $g = h \circ f$ si, et seulement si, $\forall x, x' \in E,\ \big(f(x) = f(x')\big) \Longrightarrow \big(g(x) = g(x')\big)$.
2. Soient $f : E_1 \longrightarrow F$ et $g : E_2 \longrightarrow F$ deux applications ayant le même ensemble d'arrivée. Démontrer qu'il existe une application $h : E_1 \to E_2$ telle que $f = g \circ h$ si, et seulement si, $\forall x_1 \in E_1,\ \exists x_2 \in E_2,\ f(x_1) = g(x_2)$.

Les cas où l'un des ensembles est vide sont tous évidents. On suppose donc, tout au long de cette correction, que tous les ensembles sont non vides.

1. On raisonne par double implication.
   - $\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $h : F_1 \to F_2$ telle que $g = h \circ f$.
     Soient $\forall x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
     On applique h, ce qui donne $(h \circ f)(x) = (h \circ g)(x')$, c'est-à-dire $g(x) = g(x')$ puisque $g = h \circ f$.
     On a donc démontré que $\forall x, x' \in E,\ \big(f(x) = f(x')\big) \Longrightarrow \big(g(x) = g(x')\big)$.
   - $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\forall x, x' \in E,\ \big(f(x) = f(x')\big) \Longrightarrow \big(g(x) = g(x')\big)\quad (*)$.
     Nous devons construire une application $h : F_1 \to F_2$ telle que $g = h \circ f$.
     Pour cela, on définit h « par morceaux » comme suit.
     Lorsque $y \in F_1 \setminus f(E)$, on pose $h(y) = a$ où a désigne un élément quelconque de F_2 (en fait, on se moque de la valeur de f sur les éléments en dehors de $f(E)$).
     Soit $y \in f(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On pose alors $h(y) = g(x)$. En apparence, cette définition dépend de l'antécédent x de y que l'on utilise. En apparence seulement ! En effet, si x' désigne un autre antécédent de y par f, on a alors $f(x) = f(x')$ et notre hypothèse $(*)$ dit que $g(x) = g(x')$. La valeur de $h(y)$ ne dépend donc pas de l'antécédent de y par f utilisé.
     Reste à dire que l'on a bien $g = h \circ f$. En effet, si $x \in E$, on a $(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = g(x)$ par construction même de h.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{il existe } h : F_1 \to F_2 \text{ telle que } g = h \circ f \text{ si, et seulement si, } \forall x, x' \in E,\ \big(f(x) = f(x')\big) \Longrightarrow \big(g(x) = g(x')\big).}$$

2. On raisonne par double implication.
   - $\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $h : E_1 \to E_2$ telle que $f = g \circ h$.
     Soit $x_1 \in E_1$.
     Posons $x_2 = h(x_1)$.
     Alors $g(x_2) = g\big(h(x_1)\big) = (g \circ h)(x_1) = f(x_1)$.
     On donc démontré que $\forall x_1 \in E_1,\ \exists x_2 \in E_2,\ f(x_1) = g(x_2)$ et on est content :-)
   - $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\forall x_1 \in E_1,\ \exists x_2 \in E_2,\ f(x_1) = g(x_2)\quad (**)$.
     Nous devons construire une application $h : E_1 \to E_2$ telle que $f = g \circ h$.
     Pour tout $x_1 \in E_1$, l'hypothèse $(**)$ (et l'axiome du choix) nous permet d'introduire $x_2 \in E_2$ tel que $f(x_1) = g(x_2)$. On pose alors $h(x_1) = x_2$.
     On a ainsi défini une application $h : E_1 \to E_2$. Reste à constater que $f = g \circ h$. En effet, si $x_1 \in E_1$, alors $(g \circ h)(x_1) = g\big(h(x_1)\big) = g(x_2) = f(x_1)$ par construction de h.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{il existe } h : E_1 \to E_2 \text{ telle que } f = g \circ h \text{ si, et seulement si, } \forall x_1 \in E_1,\ \exists x_2 \in E_2,\ f(x_1) = g(x_2).}$$

♦ ***Exercice 5.*** [○]

1. Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-^*)$, $f(]0;1])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{-1\})$ pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f(x) = \ln x, \qquad f(x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1/x.$$

2. Déterminer $f([-1;1]^2)$, $f(\mathbb{R}_+ \times [1;+\infty[)$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(]-\infty;1])$ pour la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = x + y.$$

1. On a

	exp	ln	cos	$x \longmapsto 1/x$
$f(\mathbb{R}_+)$	$[1;+\infty[$	non défini	$[-1;1]$	non défini
$f(\mathbb{R}_-^*)$	$]0;1[$	non défini	$[-1;1]$	$\mathbb{R}_-^*$
$f(]0;1])$	$]1;\mathrm{e}]$	$\mathbb{R}_-$	$[\cos 1;1[$	$[1;+\infty[$
$f^{-1}(\mathbb{R}_+)$	$\mathbb{R}$	$[1;+\infty[$	$\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\Big]$	$\mathbb{R}_+^*$
$f^{-1}(\{-1\})$	$\varnothing$	$\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$	$\{\pi+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\{-1\}$

2. On a

	$f(x,y)=x^2+y^2$	$f(x,y)=x+y$
$f([-1;1]^2)$	$[0;2]$	$[-2;2]$
$f(\mathbb{R}_+\times[1;+\infty[)$	$[1;+\infty[$	$[1;+\infty[$
$f^{-1}(\{1\})$	cercle unité	droite d'équation $y=-x+1$
$f^{-1}(]-\infty;1])$	disque unité	demi-plan sous la droite d'équation $y=-x+1$

♦ ***Exercice 6.*** [∘]
On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+3}.$$

1. Pour quelles valeurs de $y\in\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=y$ admet-elle des solutions ? En déduire l'image de la fonction f (c'est-à-dire $f(\mathbb{R})$).
2. Par quelle autre méthode peut-on déterminer l'image de f ?

Le discriminant de x^2-3x+3 vaut $\Delta=-3<0$ dont $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-3x+3\geqslant 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

1. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x)=y \quad&\Longleftrightarrow\quad \sqrt{x^2-3x+3}=y\\ &\Longleftrightarrow\quad x^2-3x+3=y^2 \ \text{ et } \ y\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow\quad x^2-3x+(3-y^2)=0 \ \text{ et } \ y\geqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2-3x+(3-y^2)=0$ vaut

$$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(3-y^2)=-3+4y^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x)=y \text{ admet des solutions} \quad&\Longleftrightarrow\quad \Delta\geqslant 0 \ \text{ et } \ y\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow\quad -3+4y^2\geqslant 0 \ \text{ et } \ y\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow\quad y^2\geqslant 3/4 \ \text{ et } \ y\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow\quad |y|\geqslant \sqrt{3}/2 \ \text{ et } \ y\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow\quad y\geqslant \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation } f(x)=y \text{ admet des solutions si, et seulement si, } y\geqslant\sqrt{3}/2.}$$

On en déduit que

$$\boxed{f(\mathbb{R})=\Big[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\Big[.}$$

2. Pour déterminer l'image de f, on peut aussi faire une étude de fonction.

♦ ***Exercice 7.*** [$\star$]

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On considère A, A_1, A_2 des parties de E ainsi que B, B_1, B_2 des parties de F et enfin C une partie de G. Démontrer que

(i)	$(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)$	(j)	$(B_1 \subset B_2) \Longrightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)$
(ii)	$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$	(jj)	$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(iii)	$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$	(jjj)	$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(iv)	$f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$	(jw)	$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$
(v)	$f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$	(w)	$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$
(vi)	$(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$	(wj)	$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$

(i) Supposons que $A_1 \subset A_2$. Soit $y \in f(A_1)$. Il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Comme $A_1 \subset A_2$, on a $x \in A_2$ et, par suite, $y = f(x) \in f(A_2)$. Donc $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(j) Supposons que $B_1 \subset B_2$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$. Alors $f(x) \in B_1$. Comme $B_1 \subset B_2$, on a $f(x) \in B_2$ et, par suite, $x \in f^{-1}(B_2)$. Donc $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ii) On a

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in A_1 \cup A_2,\ y = f(x)\\
&\iff \exists x \in A_1,\ y = f(x) \text{ ou } \exists x \in A_2,\ y = f(x)\\
&\iff y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2)\\
&\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2),
\end{aligned}$$

donc $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(jj) On a

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2\\
&\iff f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2\\
&\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2)\\
&\iff y \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),
\end{aligned}$$

donc $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(iii) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A_1 \cap A_2$, on a $x \in A_1$ et $x \in A_2$. Par conséquent, on a $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$. Donc $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

On voit clairement que si f est une fonction constante et si A_1 et A_2 sont disjoints, il n'y a pas nécessairement égalité.

(jjj) On a

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2\\
&\iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2\\
&\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2)\\
&\iff y \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),
\end{aligned}$$

donc $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(iv) Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme $y \notin f(A)$, on peut affirmer que $x \notin A$. Donc $x \in E \setminus A$ et comme $y = f(x)$, on a bien $y \in f(E \setminus A)$. Donc $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

On voit clairement que si f est une fonction constante et si $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$, il n'y a pas égalité.

(jw) On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus B) &\iff f(x) \in F \setminus B \\ &\iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff y \in E \setminus f^{-1}(B), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

(v) Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, ce qui implique que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Donc $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On voit clairement que si f est une fonction constante et si $A \neq E$, il n'y a pas égalité.

(w) Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mézalors $f(x) \in B$ puisque $x \in f^{-1}(B)$. Il s'ensuit que $y = f(x) \in B$. Donc $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

On voit clairement que si f est une fonction constante égale à b et si B est une partie de F qui contient au moins un élément différent de B, il n'y a pas égalité.

(vi) On a

$$\begin{aligned} z \in (g \circ f)(A) &\iff \exists x \in A,\ z = (g \circ f)(x) \\ &\iff \exists x \in A,\ z = g\big(f(x)\big) \\ &\iff \exists x \in A,\ z = g(y) \text{ où } y = f(x) \\ &\iff \exists y \in f(A),\ z = g(y) \\ &\iff y \in g\big(f(A)\big), \end{aligned}$$

donc $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.

(wj) On a

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(C) &\iff (g \circ f)(x) \in C \\ &\iff g\big(f(x)\big) \in C \\ &\iff f(x) \in g^{-1}(C) \\ &\iff x \in f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big), \end{aligned}$$

donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$.

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Démontrer que $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.
2. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.
Soit $y \in f(A) \setminus f(B)$.
Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Comme $y \notin f(B)$, on a $x \notin B$ (c'est la contraposée de $(x \in B) \Rightarrow \big(f(x) \in f(B)\big)$).
Dès lors, on a $x \in A \setminus B$, donc $y \in f(A \setminus B)$.
Donc $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.
En conclusion

$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \qquad f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B).}$$

2. On procède par double implication.
   - $\Rightarrow$ Supposons que f est injective.
   Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.
     - $\supset$ On sait que l'inclusion $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$ est toujours vraie d'après 1.
     - $\subset$ Démontrons que $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$.
     Soit $y \in f(A \setminus B)$.
     Il existe $x \in A \setminus B$ tel que $y = f(x)$.
     Comme $x \in A$, on a $y \in f(A)$.

Reste à démontrer que $y \notin f(B)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $y \in f(B)$. Il existe alors $x' \in B$ tel que $y = f(x')$. Mézalors, on a $f(x) = f(x')$, ce qui impose $x = x'$ par injectivité de f. On en déduit que $x \in B$, ce qui est absurde ! Donc $y \notin f(B)$.

Donc $y \in f(A) \setminus f(B)$.

On a ainsi démontré que $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$.

On a donc $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)\quad (*)$.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Prenons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. On a alors $f(A) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(B)$, donc $f(A) \setminus f(B) = \varnothing$.

Il s'ensuit, d'après $(*)$, que $f(A \setminus B) = \varnothing$, ce qui impose $A \setminus B = \varnothing$, c'est-à-dire $A = B$ et donc $x_1 = x_2$.

Donc f est injective.

En définitive,

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } \forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]

Remplacer les assertions suivantes par des phrases du type : « L'application de … vers … qui à tout … fait correspondre … est (ou n'est pas) injective (ou surjective) ».

Par exemple, « Deux cercles peuvent avoir même centre » devient « L'application de l'ensemble des cercles vers le plan qui à tout cercle fait correspondre son centre n'est pas injective ».

1. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
2. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
3. Toute ville de France possède au moins une église.
4. Il y a des villes qui ont plusieurs églises.

1. « L'application de l'ensemble des élèves de cette classe vers $\mathbb{N}$ qui à tout élève fait correspondre son âge n'est pas injective ».
2. « L'application de l'ensemble des élèves de cette classe vers l'ensemble des dates d'anniversaire (sans l'année) qui à tout élève fait correspondre sa date d'anniversaire (sans l'année) est injective ».
3. « L'application de l'ensemble des églises de France vers l'ensemble des villes de France qui à toute église fait correspondre la ville où elle se situe est surjective ».
4. « L'application de l'ensemble des églises de France vers l'ensemble des villes de France qui à toute église fait correspondre la ville où elle se situe n'est pas injective ».

♦ ***Exercice 10.*** [○]

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Démontrer que l'application $f_\omega : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f_\omega(z) = \frac{z + \omega}{\overline{\omega} z + 1}$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

Pour tout $Z \in \mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned}
& f_\omega(z) = Z \\
\iff \quad & \frac{z+\omega}{\overline{\omega} z + 1} = Z \\
\iff \quad & z + \omega = \overline{\omega} z Z + Z \\
\iff \quad & (1 - \overline{\omega} Z) z = Z - \omega \\
\iff \quad & z = \frac{Z - \omega}{1 - \overline{\omega} Z} \qquad \begin{array}{l} \text{car } \overline{\omega} Z \neq 1 \text{ puisque} \\ |\overline{\omega} Z| = |\overline{\omega}||Z| = |\omega| \neq 1 \end{array} \\
\iff \quad & z = f_{-\omega}(Z)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f_\omega \text{ est une bijection et } {f_\omega}^{-1} = f_{-\omega}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\circ$]
Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (x-1)/2 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. a) Démontrer que f est injective et non surjective.
   b) Pour tout $y \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$. Retrouver ainsi le fait que f est injective et non surjective.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.
3. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

1. a) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $2x_1 = 2x_2$, ce qui implique que $x_1 = x_2$. Donc

$$\boxed{f \text{ est injective de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

La fonction f ne prend que des valeurs paires, donc tout nombre impair ne possède pas d'antécédent par f. Par conséquent,

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

b) Pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) = y \iff 2x = y \iff \begin{cases} x = y/2 \text{ si } y \text{ est pair} \\ \text{pas de solution si } y \text{ est impair} \end{cases}$$

donc l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution lorsque y est pair et aucune solution lorsque y est impair, ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ est injective de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ mais n'est pas surjective de } \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

2. Pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a

$$g(x) = y \iff \begin{cases} \dfrac{x}{2} = y & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} = y & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y & \text{si } x \text{ est pair} \\ x = 2y+1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

donc l'équation $g(x) = y$ possède exactement deux solutions pour tout $y \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ mais est surjective de } \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = x,$$

donc

$$\boxed{g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est impair,} \end{cases}$$

donc

$$\boxed{f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}.}$$

♦ **Exercice 12.** [$\star$]
Soit
$$F\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy).\end{array}\right.$$

1. Soit $(S,P)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x,y)=(S,P)$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. L'application F est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Comment peut-on restreindre F pour qu'elle devienne bijective ? *Au départ, on restreindra sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que $F(A)=F(\mathbb{R}^2)$.*

1. On a
$$\begin{array}{rcl}F(x,y)=(S,P) & \Longleftrightarrow & (x+y,xy)=(S,P)\\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}x+y=S\\ xy=P\end{array}\right.\\ & \Longleftrightarrow & x \text{ et } y \text{ sont solutions de } X^2-SX+P=0.\end{array}$$
On distingue alors trois cas :
   - Si $\Delta=S^2-4P>0$, l'équation $X^2-SX+P=0$ admet deux solutions réelles distinctes X_1 et X_2. On a alors
   $$(x,y)=(X_1,X_2)\qquad\text{ou}\qquad(x,y)=(X_2,X_1).$$
   - Si $\Delta=S^2-4P=0$, l'équation $X^2-SX+P=0$ admet une solution (double) X_0. On a alors
   $$(x,y)=(X_0,X_0).$$
   - Si $\Delta=S^2-4P=0$, l'équation $X^2-SX+P=0$ n'admet pas de solution donc l'équation $F(x,y)=(S,P)$ n'en admet pas non plus.

   On en déduit que F a un défaut d'injectivité (dans le premier cas) et un défaut de surjectivité (dans le troisième cas). Par conséquent,
$$\boxed{F \text{ est non injective, non surjective et encore moins bijective.}}$$

2. Pour que F devienne injective, on la restrient à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant y\}$ au départ. Cela élimine une des deux solutions du premier cas ci-dessus et rend donc bien l'application injective, sans modifier l'image de l'application.
Pour que F devienne surjective, on la restreint à $\{(S,P)\in\mathbb{R}^2 : S^2-4P\geqslant 0\}$ à l'arrivée de façon à éviter le troisième cas de la question précédente.
Par conséquent,
$$\boxed{\widehat{F}\left\{\begin{array}{ccc}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant y\} & \longrightarrow & \{(S,P)\in\mathbb{R}^2 : S^2-4P\geqslant 0\}\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy).\end{array}\right. \quad \text{est une bijection.}}$$

♦ **Exercice 13.** [$\circ$]
Soient E,F,G trois ensembles et $f:E\longrightarrow F$, $g:F\longrightarrow G$ deux applications.
1. Démontrer que si $g\circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Démontrer que si $g\circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

1. Supposons que $g\circ f$ est surjective et g est injective et démontrons que f est surjective.
Soit $y\in F$. Alors $g(y)\in G$ et, comme $g\circ f$ est surjective, il existe $x\in E$ tel que $y=(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$, ce qui démontre que $f(x)$ est un antécédent de y par f. Ainsi,
$$\boxed{f \text{ est surjective.}}$$
2. Supposons que $g\circ f$ est injective et f est surjective et démontrons que g est injective.
Soient $y_1,y_2\in F$ tels que $g(y_1)=g(y_2)$. Comme f est surjective, il existe $x_1,x_2\in E$ tels que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. Donc $g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)$, c'est-à-dire $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. Or $g\circ f$ est injective, donc $x_1=x_2$. Par suite, on a $y_1=f(x_1)=f(x_2)=y_2$. Cela démontre que
$$\boxed{g \text{ est injective.}}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\circ$]
Soient E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

Comme $g \circ f$ est bijective, une propriété du cours nous dit que g est surjective et f est injective.
Comme $h \circ g$ est bijective, la même propriété nous dit que h est surjective et g est injective.
On en déduit déjà que g est bijective.
Mézalors, on a $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est la composée de deux bijections donc est elle-même une bijection.
De même, $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est la composée de deux bijections donc est elle-même une bijection.
En conclusion,

$$\boxed{f,\ g \text{ et } h \text{ sont des bijections.}}$$

♦ ***Exercice 15.*** [$\star$]
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit d'une partie A de E qu'elle est un domaine d'injectivité pour f lorsque la restriction de f à A (au départ) est une injection. Ce domaine est dit maximal lorsqu'il n'existe pas de partie B de E, autre que A, telle que $A \subset B$ et la restriction de f à B est injective.
Soit A un domaine d'injectivité de f. Démontrer que ce domaine est maximal si, et seulement si, $f(A) = f(E)$.

On raisonne par double contrposition, c'est-à-dire que l'on démontre que $f(A) \neq f(E)$ si, et seulement si, A n'est pas maximal.

- $\Rightarrow$ Supposons que $f(A) \neq f(E)$. On peut introduire $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme $y \notin f(A)$, on peut affirmer que $x \notin A$. Il s'ensuit que f est injective sur $B = A \cup \{x\}$ car elle l'est sur A et $y = f(x)$ n'est pas l'image d'un élément de A. Par conséquent, A n'est pas un domaine maximal d'injectivité.
- $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que A n'est pas un domaine maximal d'injectivité. Il existe alors une partie B incluant strictement A sur lequel f est injective. Soit $x \in B \setminus A$. La fonction f etant injective sur B, $f(x)$ ne peut être l'image d'un élément de A. Par conséquent, on a $f(x) \in f(E) \setminus f(A)$, ce qui démontre que $f(A) \neq f(E)$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{un domaine d'injectivité } A \text{ est maximal pour } f \text{ si, et seulement si, } f(A) = f(E).}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\star$] (Antinomie de Cantor)
Soit E un ensemble.
1. Trouver une application injective de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective s de E dans $\mathscr{P}(E)$. *Indication : Penser à* $A = \{x \in E : x \notin s(x)\}$.

1. Prendre
$$\boxed{i \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array} \right.}$$
2. Supposons qu'il existe une surjection s de E dans $\mathscr{P}(E)$. Posons $A = \{x \in E : x \notin s(x)\}$. Comme s est surjective, il existe un élément $a \in E$ tel que $A = s(a)$. Mézalors, si $a \in A$, on a $a \notin s(a) = A$, ce qui est contradictoire et si $a \notin A$, on a $a \in s(a) = A$, ce qui est à nouveau contradictoire. Par suite,
$$\boxed{\text{il ne peut exister d'application surjective de } E \text{ dans } \mathscr{P}(E).}$$