Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. Noyaux et images itérés – Nilespace et cœur

Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$N_k = \operatorname{Ker}\left(u^k\right) \qquad \text{et} \qquad I_k = \operatorname{Im}\left(u^k\right).$$

Avec ces notations, on définit le *nilespace* N et le *cœur* I de u de la façons suivante :

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \qquad \text{et} \qquad I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   a) Démontrer que $(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}) \iff (\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2)$.
   b) Démontrer que $(E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) \iff (\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2)$.
2. a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
   b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont stables par u.
   c) Démontrer que le nilespace N est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, tel que
   $$(u \text{ est injectif}) \iff (N = \{0_E\}).$$
   d) Démontrer que le cœur I est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, tel que
   $$(u \text{ est surjectif}) \iff (I = E).$$
3. a) On suppose qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.
   α] Démontrer que, pour tout $k \geqslant k_0$, on a $N_k = N_{k_0}$.
   ► Dans ce cas, on pose $s(u) = \min\{k \in \mathbb{N} : N_k = N_{k+1}\}$.
   β] Démontrer que $N = N_{s(u)}$ et que la restriction v de u à N (au départ) est nilpotente.
   γ] Démontrer que la restriction w de u à I (au départ) est injective.
   δ] Démontrer que $N_{s(u)} \cap I_{s(u)} = \{0_E\}$.
   b) On suppose qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.
   α] Démontrer que, pour tout $k \geqslant k_0$, on a $I_k = I_{k_0}$.
   ► Dans ce cas, on pose $r(u) = \min\{k \in \mathbb{N} : I_k = I_{k+1}\}$.
   β] Démontrer que $I = I_{r(u)}$ et $u(I) = I$.
   γ] Démontrer que $N_{r(u)} + I_{r(u)} = E$.
   c) Application. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'opérateur de dérivation sur E (c'est-à-dire $D(f) = f'$ pour tout $f \in E$). Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme T de E tel que $T^2 = D$. On démontre ainsi qu'il n'existe pas d'opérateur linéaire de demi-dérivation.
4. Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme u est de caractère fini, c'est-à-dire que les entiers $s(u)$ et $r(u)$ existent.
   a) α] On suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0+1} = N_{k_0+2}$ et $I_{k_0} = I_{k_0+1}$. Démontrer que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.
   β] On suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ et $I_{k_0+1} = I_{k_0+2}$. Démontrer que $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.
   γ] Démontrer que $s(u) = r(u)$.
   b) En collectant les résultats des questions précédentes, donner toutes les propriétés du nilespace et du cœur de l'endomorphisme de caractère fini u.