ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2+1)y' + y = \frac{-4x+2}{(x-1)^2}\,\mathrm{e}^{-\arctan x}.$$

Sur $]1,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à

$$y' + \frac{1}{x^2+1}y = \frac{-4x+2}{(x^2+1)(x-1)^2}\,\mathrm{e}^{-\arctan x}.$$

Solutions homogènes : Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan x} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Solution particulière : Suivant la méthode de la variation de la constante, on recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\arctan x}$ où λ est une fonction dérivable. En remplaçant dans (E), on obtient

$$\lambda'(x) = \frac{-4x+2}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

On décompose cette fraction rationnelle en éléments simples pour déterminer l'une de ses primitives. On remarque que x^2+1 n'a pas de racines réelles, donc il existe des constantes a, b, c et d telles que

$$\frac{-4x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} \qquad (*).$$

On multiplie les deux membres de $(*)$ par $(x-1)^2$ et on prend la valeur en $x=1$ ce qui donne $d=-1$. On multiplie les deux membres de $(*)$ par x et on prend la limite en $+\infty$ ce qui donne $a+c=0$. Ensuite en donnant à x les valeurs 0 et -1, on obtient les deux relations $2 = b-c+d$ et $3 = 2(-a+b-c)+d$. Il s'ensuit que

$$\frac{-4x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \int^x \frac{t+2}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int^x \frac{-1}{t-1}\mathrm{d}t + \int^x \frac{-1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int^x \frac{t}{t^2+1} + 2\int^x \frac{1}{t^2+1} + \int^x \frac{-1}{t-1}\mathrm{d}t + \int^x \frac{-1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan x - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y_p(x) = \Big(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x - \ln(x-1) + \frac{1}{x-1}\Big)\,\mathrm{e}^{-\arctan x}.$$

Solutions générales : Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{y(x) = \Big(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x - \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + \lambda\Big)\,\mathrm{e}^{-\arctan x} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

✠ ***Exercice 2.*** [○]
Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 3y = 2\,\mathrm{e}^t - 3\cos 2t.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. On en déduit que la solution de l'équation sans second membre est $y_H(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{3t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pour (E_1) : $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^t$, on recherche une solution particulière sous la forme $y_1(t) = \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t$. Après avoir remplacé dans l'équation et identifié les coefficients, on trouve $\alpha = -1/65$ et $\beta = -8/65$ ce qui donne $y_1(t) = (-1/65)\cos 2t + (-8/65)\sin 2t$.

Pour (E_2) : $y'' - 4y' + 3y = \cos 2t$, on recherche une solution particulière toutes les fonctions de la forme $y_2(t) = P(t)\,\mathrm{e}^t$ où $P(t)$ est un polynôme. Comme l'exposant qui apparait dans l'exponentielle du second membre (i.e. 1) est une racine du polynôme caractéristique, le cours nous dit de chercher y_2 sous la forme $y_1(t) = \alpha t\,\mathrm{e}^t$ et l'on trouve, après calculs, $y_2(t) = -(t/2)\,\mathrm{e}^t$.

Le principe de superposition nous dit qu'une solution particulière y_p de (E) est donnée par $y_p(t) = 2y_1(t) - 3y_0(t) = -t\,\mathrm{e}^t + (3/65)\cos 2t + (24/65)\sin 2t$.

La solution générale est donc

$$\boxed{y(t) = (\lambda - t)\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{3t} + (3/65)\cos 2t + (24/65)\sin 2t \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

✠ ***Exercice 3.*** [○] (Équations de Bernoulli d'ordre α)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Donner une méthode de résolution d'une équation différentielle de Bernoulli du type

$$(E) \qquad a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\alpha = 0.$$

On fait le changement d'inconnue $z = 1/y^{\alpha-1}$,ce qui nous ramène à une équation différentielle linéaire.

✠ ***Exercice 4.*** [⋆] (Tractrice)
Un enfant marche au bord d'un bassin rectiligne en tirant un bateau au bout d'une corde. À l'instant $t = 0$, l'enfant commence à marcher et la corde est perpendiculaire au bord du bassin. Ensuite, l'enfant se déplace à vitesse constante et la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde, qui reste toujours tendue. On veut étudier la trajectoire du bateau.

On choisit un repère orthonormal dont l'origine est la position initiale de l'enfant, dont l'axe des abscisses est le bord du bassin et dont l'axe des ordonnées pointe vers l'eau. On note $x(t)$, $y(t)$ les coordonnées du bateau B à l'instant t, v la vitesse de l'enfant et ℓ la longueur de la corde.

1. Démontrer que
$$\begin{cases} \big(x(t) - vt\big)y'(t) - y(t)x'(t) = 0 \\ \big(x(t) - vt\big)^2 + y(t)^2 = \ell^2 \end{cases}$$
et en déduire que la fonction x satisfait l'équation différentielle
$$(E) \qquad x'(t) = \frac{v}{\ell^2}\big(x(t) - vt\big)^2.$$
2. On pose
$$u(t) = \frac{1}{x(t) - vt + \ell}.$$
   a) Démontrer que la fonction u est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire x.
   b) Déterminer y.
3. Tracer la trajectoire du bateau avec la calculatrice dans le cas où $v = 1$ et $\ell = 1$.

1. À l'instant t, les coordonnées de l'enfant E sont $(vt, 0)$. Comme le vecteur $\overrightarrow{EB}\big(x(t) - vt, y(t)\big)$ dirige la corde, il est colinéaire au vecteur vitesse $\big(x'(t), y'(t)\big)$ du bateau (puisque la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde), donc
$$\big(x(t) - vt\big)y'(t) - y(t)x'(t) = 0 \qquad (1).$$

Par ailleurs, on a $\left\|\overrightarrow{EB}\right\| = \ell$, donc

$$\big(x(t) - vt\big)^2 + y(t)^2 = \ell^2 \qquad (2).$$

En dérivant la relation (2), on obtient

$$\big(x'(t) - v\big)\big(x(t) - vt\big) + y'(t)y(t) = 0 \qquad (3).$$

En multipliant cette relation par $x(t) - vt$, on obtient

$$\big(x'(t) - v\big)\big(x(t) - vt\big)^2 + \underbrace{\big(x(t) - vt\big)y'(t)}_{=y(t)x'(t) \text{ d'après (1)}} y(t) = 0,$$

donc

$$x'(t)\big(x(t) - vt\big)^2 - v\big(x(t) - vt\big)^2 + y(t)^2 x'(t) = 0$$

ce qui donne

$$x'(t) = \frac{v\big(x(t) - vt\big)^2}{\big(x(t) - vt\big)^2 + y(t)^2},$$

donc, d'après (2),

$$\boxed{x'(t) = \frac{v}{\ell^2}\big(x(t) - vt\big)^2.}$$

2. a) On a d'une part

$$x(t) - vt = \frac{1}{u(t)} - \ell.$$

Par ailleurs, en dérivant cette relation, on obtient

$$x'(t) - v = -\frac{u'(t)}{u(t)^2}.$$

En reportant ces deux relations dans (E), on obtient alors

$$\begin{aligned} & v - \frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{v}{\ell^2}\Big(\frac{1}{u(t)} - \ell\Big)^2 \\ \iff \quad & vu(t)^2 - u'(t) = \frac{v}{\ell^2}\big(1 - \ell u(t)\big)^2 \\ \iff \quad & vu(t)^2 - u'(t) = \frac{v}{\ell^2} - \frac{2v}{\ell}u(t) + vu(t)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u'(t) - \frac{2v}{\ell}u(t) + \frac{v}{\ell^2} = 0.}$$

b) Les solutions homogènes de l'équation ci-dessus sont

$$u_h(t) = \lambda \exp\Big\{\frac{2v}{\ell}t\Big\}.$$

On constate qu'on a une solution particulière évidente donnée par

$$u_p(t) = \frac{1}{2\ell}.$$

Il s'ensuit que

$$u(t) = \frac{1}{2\ell} + \lambda \exp\Big\{\frac{2v}{\ell}t\Big\}.$$

Comme $x(t) = 1/u(t) + vt - \ell$, on a

$$x(t) = \frac{2\ell}{1 + 2\lambda\ell \exp\{2vt/\ell\}} + vt - \ell.$$

Or $x(0) = 0$, donc

$$\frac{2\ell}{1 + 2\lambda\ell} - \ell = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2\ell}$$

ce qui donne

$$\boxed{x(t) = \frac{2\ell}{1 + \exp\{2vt/\ell\}} + vt - \ell.}$$

c) Enfin, comme $y(t)^2 = \ell^2 - \big(x(t) - vt\big)^2$, on a

$$y(t)^2 = \ell^2 - \left(\frac{2\ell}{1+\exp\{2vt/\ell\}} - \ell\right)^2 = \frac{4\ell^2\exp\{2vt/\ell\}}{(1+\exp\{2vt/\ell\})^2},$$

donc, comme $y(t) \geqslant 0$,

$$\boxed{y(t) = \frac{2\ell\exp\{vt/\ell\}}{1+\exp\{2vt/\ell\}}.}$$

d) On obtient