

Problème n° 6 : Étude d'une fonction réciproque

Problème 1 – Etude d'une fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(t) = t^3 + t$.

Dans la première partie, on étudie la fonction réciproque g de f . Dans la deuxième partie, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles.

Dans tout le problème, on pourra admettre et utiliser les trois théorèmes suivants :

- **Théorème de compacité** : Une fonction f continue sur intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée (et atteint ses bornes)
- **Inégalité des accroissements finis** : si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si $m \leq f' \leq M$ sur $]a, b[$, alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

- **Théorème de la bijection** : si f est une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle I , elle se corestreint en une bijection de I sur $\text{Im}(f)$.

PARTIE I – Étude de g

1. Variations de g .

- Étudier la fonction f . On déterminera notamment le(s) point(s) d'inflexion et la convexité de f .
- Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de f . On tracera la tangente au(x) point(s) d'inflexion
- Montrer que f admet une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g^3(x) + g(x) = x.$$

- Montrer que g est strictement croissante et impaire. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- Étudier les variations et les propriétés de convexité de g ainsi que les points d'inflexion de g . On donnera l'expression de g' .
- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ .
- Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que \mathcal{C} . Expliquez votre construction.

2. Étude de g' – Certaines propriétés de g' ne se déduisent pas de f' .

- La courbe de f' admet-elle des points d'inflexion ?
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et α une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Montrer que si $\alpha(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$, alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que α présente un extremum local en c .
- En que g' admet au moins deux points d'inflexion.

3. Étude locale et asymptotique de g

Lorsque f et g sont définis et ne s'annulent pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a), on dit que f et g sont équivalents en a , et on note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ainsi, f et g sont de même ordre de grandeur lorsque x est proche de a .

- Montrer que $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble \mathcal{F}_a des fonctions h pour lesquelles il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $h(x) \neq 0$.
- Montrer que $g(x) \underset{0}{\sim} x$.

- (c) En déduire que $g(x) - x \underset{0}{\sim} -x^3$.
- (d) Montrer que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}$.
- (e) On définit h sur \mathbb{R}^* par $g(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + h(x))$. Justifier que h est bien défini, et déterminer sa limite en $+\infty$.
- (f) Déterminer une relation satisfaite par h , et en déduire l'existence et la valeur de la limite de $x^{\frac{2}{3}}h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. **Étude d'une primitive de g** – Nécessite le théorème de changement de variables (voir chapitre 9)
- Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par la relation $G(x) = \int_0^x g(u) \, du$.
- (a) À l'aide du changement de variable $u = f(t)$, calculer G en fonction de g .
- (b) Déterminer les variations et la parité de G .
- (c) Déterminer un équivalent de G au voisinage de 0 et un équivalent de G au voisinage de $+\infty$.

PARTIE II – Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec la droite \mathcal{D}_x parallèle à l'axe des abscisses, et l'ordonnée x . On se propose d'approcher g par des fonctions rationnelles u_n , construites par l'algorithme de Newton. Pour cela, on pose $u_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{D}_x avec la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse x ; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de \mathcal{D}_x avec la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. Construction de l'algorithme d'approximation

Soit t un nombre réel positif. Expliciter en fonction de t et de x l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{D}_x avec la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse t . En déduire une relation de récurrence définissant la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Étude graphique d'un exemple

Dans cette question, $x = 1$. Sur une même figure, tracer soigneusement l'arc de \mathcal{C} correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et construire $u_1(1)$ et $u_2(1)$.

3. Étude de l'algorithme

Soit φ la fonction numérique qui à tout nombre réel positif t associe :

$$\varphi(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

- (a) Montrer que $g(x)$ est un point fixe de φ .
- (b) Déterminer, pour tout $t > 0$, le signe de $t - \varphi(t)$ en fonction de celui de $f(t) - x$.
- (c) Déterminer le signe de $\varphi'(t)$ en fonction de celui de $f(t) - x$. En déduire les variations de φ sur l'intervalle $[g(x), x]$.
- (d) Montrer que l'intervalle $I_x = [g(x), x]$ est stable par φ , c'est-à-dire $\varphi(I_x) \subset I_x$.
- (e) Montrer que pour tout $t \in [g(x), x]$,

$$0 \leq \varphi'(t) \leq \frac{2}{3}.$$

4. Étude de la convergence

- (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, la suite $(u_n(x))$ est décroissante, et qu'elle converge vers $g(x)$.
- (b) Prouver que pour tout nombre entier naturel n , $0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x))$.
- (c) Soit a un nombre réel positif. On pose $\beta_n = \sup_{x \in [0, a]} (u_n(x) - g(x))$. Montrer que $\beta_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a$.
- (d) Montrer que, pour tout nombre réel positif t : $\varphi(t) - g(x) = (t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}$.
- (e) Étudier la fonction $t \mapsto \frac{3t}{3t^2 + 1}$ sur \mathbb{R} . On déterminera notamment ses limites, ses extrema, ses points d'inflexion et sa concavité. Tracer l'allure de cette fonction.

- (f) En déduire que : $0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (x - g(x))^{2^n}$,
- puis que : $0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} u_n(x)^{3 \cdot 2^n}$.
- (g) Écrire une fonction en Python prenant en argument un réel $x \in [0, 1]$, une marge d'erreur **err** et calculant $g(x)$ à la marge d'erreur **err** près.