Problème n° 10 : Séries

Problème 1 – (Règle de Duhamel pour la convergence des séries)

Le but de ce problème est de proposer une règle pour l'étude de la convergence des séries affinant la règle de d'Alembert dans le cas d'indétermination.

Partie I – Un critère de comparaison de séries à termes positifs

Soit $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries à termes strictement positifs telles que :* $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $b_N a_n \leqslant a_N b_n$
2. En déduire que :
   (a) si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ aussi ;
   (b) si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ aussi ;
   (c) si $\sum a_n$ diverge grossièrement, alors $\sum b_n$ aussi.
3. **Règle de d'Alembert.** *Soit* $\sum u_n$ *une série quelconque telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$.
   Montrer que :
   (a) si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
   (b) si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
4. **Exemples**
   (a) *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$
      i. Déterminer la limite ℓ de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
      ii. Déterminer la nature de $\sum u_n x^n$ pour tout x tel que $|x| \neq \frac{1}{\ell}$.
   (b) Mêmes questions avec la série $\sum v_n x^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$
   (c) Mêmes questions avec la série $\sum w_n x^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Partie II – Règle de Duhamel.

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Quelle est la limite de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) À l'aide d'un équivalent, justifier que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. **Règle de Duhamel.**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que :*
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   (a) Supposons que $\beta > 1$.

i. Justifier l'existence de $\alpha > 1$ tel que, pour n assez grand, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

ii. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

(b) Démontrer de même que si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Partie III – Exemples

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$.

(a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Quelle est la nature de $\sum u_n x^n$?

(c) Justifier que $(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.
Indication : pour la limite, on pourra commencer par montrer, en se servant de la question III-1a, que la série $\sum(\ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n))$ est divergente

(d) En déduire la nature de la série $\sum u_n(-x)^n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$, pour la valeur de ℓ trouvée pour cette suite.

(a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = 1 - \dfrac{3}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Quelle est la nature de $\sum v_n x^n$? de $\sum v_n(-x)^n$?

Partie IV – Une petite amélioration à la règle de Duhamel

On affine ici le cas où $\beta = 1$ dans la règle de Duhamel. Soit a un réel, et, pour tout $n > -a$, $y_n = \dfrac{1}{n+a}$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum y_n$?

2. Soit $a \neq -1$. Montrer que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1+a}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ (voir définition de grand-O dans le cours)

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(a) Montrer qu'on peut choisir a assez grand pour que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$

(b) En déduire la nature de $\sum u_n$.

4. **Exemple.** Déterminer la nature de $\sum w_n x^n$ définie dans la partie II, lorsque $x = \frac{1}{\ell}$.