Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 06/12/2018

DM n° 8 : Fonctions usuelles, calcul intégral

Exercice 1 – Soit f la fonction définie là où cela a un sens par $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\right)$.

1. (a) Résoudre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation $(\mathrm{e}^x)^2 - 2\alpha \mathrm{e}^x - 1 = 0$.
   (b) En déduire une expression de la fonction réciproque de sh à l'aide de la fonction ln.
2. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Étudier les variations et les limites aux bords du domaine.
   (c) Montrer que f admet un unique point d'inflexion, et que son abscisse x_0 vérifie $x_0 \in]3, 4[$. Préciser la convexité de f. On ne cherchera pas à expliciter x_0.
   (d) Déterminer les demi-tangentes à la courbe de f au bord de son domaine, ainsi que la tangente en 1.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - \frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}$ (on pourra utiliser une formule de Taylor)
   (f) Tracer l'allure du graphe de f
3. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{f\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.
   (a) Déterminer sans calcul les variations de g.
   (b) Déterminer les asymptotes de g.
4. Calculer $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 – **(Exercice technique)**

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I_1 = \int_0^1 \ln(1 + x^2)\,\mathrm{d}x$
   (b) $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$
   (c) $I_3 = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\mathrm{Arccos}(x)}\,\mathrm{d}x$
   (d) $I_4 = \int_0^1 \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)}$
   (e) $I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+5)}$.
2. Calculer les primitives des fonctions suivantes, sur des domaines à préciser.
   (a) $f_1 : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$
   (b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}\sqrt{-\ln(x) - \ln(x)^2}$
   (c) $f_3 : x \mapsto \frac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$
   (d) $f_4 : x \mapsto \frac{\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}$
   (e) $f_5 : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)\mathrm{ch}(x)}$.

Problème – Formule de Machin et calcul de π

Dans ce problème, on démontre la formule de John Machin (1706) :

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

et on montre comment cette formule peut être utilisée pour le calcul approché de π. On s'intéresse ensuite à l'existence d'autres formules de type « Machin » reliant 2 arctangentes ou plus.

Partie I – Formule de Machin

On pose $\theta = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}$

1. Calculer $\tan(2\theta)$, puis $\tan(4\theta)$, puis montrer que
$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}.$$
2. En déduire la formule de Machin.
3. On propose ci-dessous une autre présentation de cette démonstration, passant par l'utilisation des nombres complexes.
   (a) Montrer que pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$, on a :
   $$\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \mod \pi$$
   (b) Vérifier (sans calculatrice) que
   $$\frac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}} = 2 \times (1+\mathrm{i}),$$
   et conclure.

Partie II – Calcul approché de π

On montre dans cette partie comment la formule de Machin peut être utilisée pour calculer une valeur approchée de π. On note f la fonction Arctan.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$
2. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\left| f'(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \right| \leqslant x^{2n+2}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\left| \mathrm{Arctan}\,(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant x^{2n+3}$$
4. Étant donné $\varepsilon > 0$, exprimer en fonction de ε un entier n_0 et un entier m_0 tels que
$$\left| 16\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 16\sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left| 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) - 4\sum_{k=0}^{m_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Application numérique pour $\varepsilon = 10^{-15}$ et $\varepsilon = 10^{-100}$ (précision du calcul de π effectué par Machin, à la main bien entendu).
5. Écrire une fonction en Python calculant π à une marge d'erreur ε près fournie en paramètre. Si vous implémentez cet algorithme, donner la valeur obtenue pour $\varepsilon = 10^{-15}$.

Partie III – D'autres formules de type « Machin »

1. (a) Calculer $(2+\mathrm{i})\times(3+\mathrm{i})$, et en déduire une expression de $\frac{\pi}{4}$ comme somme de deux arctangentes simples.

   (b) Retrouver cette formule sans utiliser les nombres complexes, en adaptant la première méthode de la partie I.

2. Montrer de même, par 2 méthodes différentes, que :

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}.$$

3. Démontrer que

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{8}.$$

   Quelle est la condition pour qu'une formule de Machin donne une bonne convergence vers π ? Que dire de cette formule ?

Pour information, on donne une formule démontrée par Gauss :

$$\frac{\pi}{4} = 12\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{18} + 8\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{57} - 5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}.$$

Vous pouvez vous amuser à essayer de la démontrer...
En voici une autre (Hwang Chien-Lih, 2003) :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = 183\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} + 32\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{1023} - 68\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5032} + 12\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{113021}\\ - 100\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{6826318} - 12\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{33366019650} + 12\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{43599522992503626068}\end{aligned}$$