Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 15

– à rendre pour le mardi 17 mars –

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, pour tout scalaire λ, on pose :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_3).$$

1. Montrer que la matrice A est une matrice de symétrie.
2. Déterminer les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'espace $E_\lambda(A)$ ne soit pas réduit à $\{0\}$.
3. Déterminer une base de $F = E_1(A)$ et une base $G = E_{-1}(A)$.
4. Expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. Calculer la matrice P^{-1} et vérifier la formule précédente par le calcul matriciel.
6. On veut résoudre l'équation $M^k = A$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On fixe un entier $k \geqslant 2$. Soit M une solution à l'équation.
   (a) Montrer que les matrices A et M commutent.
   (b) Montrer que les espaces F et G sont stables par l'application linéaire M.
   (c) Montrer que l'équation n'admet aucune solution lorsque k est pair.
   (d) On suppose l'entier k impair.
      i. Expliciter une solution à l'équation $M^k = A$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en utilisant éventuellement la matrice P.
      ii. Montrer que l'équation $M^k = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet une infinité de solutions.

Exercice 2

1. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. On explicitera des matrices inversibles P et Q telles que $P^{-1}AP = B$ et $Q^{-1}CQ = B$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,7}(\mathbb{R})$. Expliciter deux matrices inversibles P et Q de formats à déterminer telles que la matrice $Q^{-1}AP$ soit une matrice de type J_r.