

# *Chapitre 17 : espaces préhilbertiens réels*

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Norme . . . . .	2
1.3	Norme euclidienne . . . . .	2
1.4	Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Familles orthogonales, familles orthonormales</b>	<b>3</b>
2.1	Définitions . . . . .	3
2.2	Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT . . . . .	4
2.3	Bases orthonormales et expression du produit scalaire . . . . .	5
2.4	Orthogonal d'une partie non vide . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Endomorphismes orthogonaux</b>	<b>6</b>
3.1	Définition . . . . .	6
3.2	Groupe orthogonal . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Matrices orthogonales</b>	<b>6</b>
4.1	Définition . . . . .	6
4.2	Liens entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Géométrie vectorielle dans un espace euclidien</b>	<b>6</b>
5.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	6
5.2	Géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	7

# 1 Produit scalaire

## 1.1 Définitions

**Définition 1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ . Soit  $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $\Phi$  est un **produit scalaire** sur  $E$  si :

- l'application  $\Phi$  est **symétrique** :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

- l'application  $\Phi$  est **bilinéaire** (les applications  $x \mapsto \Phi(x, y)$  et  $y \mapsto \Phi(x, y)$  sont linéaires)
- l'application  $\Phi$  est **définie positive** :

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x, x) \geq 0 \text{ et } \Phi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$$

Lorsque  $\Phi$  est un produit scalaire, on notera :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x | y) = (x | y).$$

Lorsque  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on dit que  $E$  est un **espace préhilbertien réel**.

Lorsque  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, on dit que l'ensemble  $(E, ( | ))$  est un **espace euclidien**.

**Exemple 1** • sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

- sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ ,  $(f | g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$
- sur  $\mathbb{R}[X]$ ,  $(P | Q) = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t) dt$
- sur  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $(P | Q) = \sum_{i=0}^n P(i) \cdot Q(i)$
- sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $(A | B) = \text{Tr}(A^T \cdot B)$ .

## 1.2 Norme

**Définition 2** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $N$  est une norme sur  $E$  si :

- $\forall u \in E$ ,  $N(u) \geq 0$  et  $N(u) = 0 \implies u = 0$
- $\forall (u, v) \in E^2$ ,  $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$  (inégalité triangulaire)
- $\forall u \in E$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $N(\lambda \cdot u) = |\lambda| \cdot N(u)$ .

## 1.3 Norme euclidienne

**Proposition 1** Soit  $(E, ( | ))$  un espace préhilbertien. Alors, l'application  $x \mapsto \sqrt{(x | x)}$  définit une norme sur  $E$ , appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $( | )$ . On notera :  $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$ .

**Proposition 2** On a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2.$$

## 1.4 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

**Proposition 3** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Corollaire 1** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a :  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens.

**Exemple 2** • Pour toutes fonctions continues  $f$  et  $g$  sur  $[a, b]$ , on a :

$$\left| \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

- La norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une norme d'algèbre :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|A \times B\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2.$$

**Exemple 3** Les trois normes définies par  $\|\cdot\|_1$  :  $\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{k=1}^n |x_k| \end{cases}$ ,  $\|\cdot\|_2$  :  $\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{cases}$  et  $\|\cdot\|_\infty$  :  $\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \end{cases}$  sont-elles des normes euclidiennes ?

## 2 Familles orthogonales, familles orthonormales

### 2.1 Définitions

**Définition 3** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace préhilbertien. Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits **orthogonaux** si  $(x | y) = 0$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille à  $p$  vecteurs de  $E$ . On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est **orthogonale** si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad i \neq j \implies (x_i | x_j) = 0.$$

On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est **orthonormale** si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (x_i | x_j) = \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de KRONECKER défini par :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } i \neq j \\ 1 & , \text{ si } i = j \end{cases}$

**Remarque 1** • La matrice  $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice  $I_n$ .

- Un vecteur  $x \in E$  est dit **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .
- Une famille orthonormale est une famille orthogonale à vecteurs unitaires.

**Proposition 4** Toute famille orthonormale est libre.

**Exemple 4** L'ensemble  $E$  des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues et  $2\pi$ -périodiques muni de :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

est un espace préhilbertien réel.

La famille  $(c_n : t \mapsto \cos(nt); n \in \mathbb{N}$  et  $s_n : t \mapsto \sin(nt); n \in \mathbb{N}^*)$  est une famille libre.

## 2.2 Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

**Théorème 1** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien. Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille libre. Alors, il existe une unique famille orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$  telle que :

- $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}, (e_i \mid u_i) > 0$ .

### Méthode : Comment orthonormaliser une famille libre ?

Pour orthonormaliser une famille libre  $(u_1, \dots, u_p)$  par le procédé de Gram-Schmidt dans un espace préhilbertien  $(E, (\cdot | \cdot))$  :

- poser  $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
- une fois  $e_1, \dots, e_k$  construits,
  - poser  $v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k (u_{k+1} \mid e_j) \cdot e_j$  [redressement de  $u_{k+1}$ ]
  - poser  $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$  [normalisation]

De ce théorème, on en déduit les résultats très importants suivants :

**Corollaire 2** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien.

- Alors, il existe des bases orthonormales.
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

**Exemple 5** • Orthonormaliser dans  $\mathbb{R}^3$  habituel la famille  $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ .

- Soient  $a < b$  deux réels et  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue et non nulle.

1. Montrer que  $(P \mid Q) \mapsto \int_a^b P \times Q \times \omega$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer l'existence d'une famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formant une b.o.n. de  $\mathbb{R}[X]$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_n) = n$ .
3. Montrer que chaque polynôme  $P_n$  est scindé à racines simples dans  $]a, b[$ .

## 2.3 Bases orthonormales et expression du produit scalaire

**Proposition 5 théorème de PYTHAGORE** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Pour tous vecteurs  $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$  de  $E$ , on a :

- $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

## 2.4 Orthogonal d'une partie non vide

**Définition 4** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On appelle **orthogonal de  $A$**  et on note  $A^\perp$ , l'ensemble de tous les vecteurs  $x$  de  $E$  qui sont orthogonaux à tous les vecteurs  $a$  de  $A$  :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \mid \forall a \in A, (a | x) = 0 \right\}$$

**Proposition 6** Avec les notations précédentes,

- l'ensemble  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- si  $F$  est un sous-espace de  $E$ ,  $F \oplus F^\perp = E$  et  $F = (F^\perp)^\perp$
- [recollement de b.o.n.] si  $\mathcal{B}_1$  est une base orthonormale de  $F$  et  $\mathcal{B}_2$  est une base orthonormale de  $F^\perp$ , alors  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  est une base orthonormale de  $E$
- [découpage de b.o.n.] si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$  et  $k$  est un entier entre 1 et  $n$ ,  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ , alors  $G = F^\perp$  et  $F = G^\perp$ .

**Exemple 6** • Si  $E$  est un espace préhilbertien réel et si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , on a toujours l'inclusion :

$$F \subset (F^\perp)^\perp.$$

- Lorsque  $E$  est un espace euclidien et si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , on a égalité :

$$F = (F^\perp)^\perp.$$

- Si l'on considère l'espace préhilbertien  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire :

$$(f | g) = \int_0^1 f \times g$$

et si  $F = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \right\}$ , alors  $F^\perp = \{0\}$  et donc on n'a pas égalité entre  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

**Exemple 7** Si  $E$  est un espace euclidien, toutes les formes linéaires  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  sont de la forme  $\varphi : x \mapsto (x | \vec{u})$ , pour un certain vecteur  $\vec{u}$ . [théorème de Riesz]

### 3 Endomorphismes orthogonaux

#### 3.1 Définition

**Définition 5** Soient  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est un endomorphisme **orthogonal** si l'une des trois assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = (x | y)$
- $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
- $f$  transforme une b.o.n. en une autre b.o.n.

#### 3.2 Groupe orthogonal

**Proposition 7** Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien. On note  $O(E)$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$  : c'est un sous-groupe de  $(GL(E), \circ)$  appelé **groupe orthogonal** sur  $E$ . On note  $SO(E)$  l'ensemble des éléments de  $O(E)$  de déterminant égal à 1 : c'est un sous-groupe de  $(O(E), \circ)$  appelé **groupe spécial orthogonal** sur  $E$ .

### 4 Matrices orthogonales

#### 4.1 Définition

**Définition 6** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que la matrice  $A$  est **orthogonale** si  $A^T \cdot A = I_n$ .

**Remarque 2** • Toute matrice orthogonale est inversible d'inverse :  $A^{-1} = A^T$ .

- La matrice  $A$  est orthogonale si et seulement si  $A \cdot A^T = I_n$ .
- Pour toute matrice orthogonale  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\det A = \pm 1$ . La réciproque est fausse.
- On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$  le groupe spécial orthogonal.

#### 4.2 Liens entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

**Proposition 8** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . On pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Alors :

$$f \in O(E) \iff A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $A$  est un endomorphisme orthogonal sur  $\mathbb{R}^n$  habituel, si et seulement si la famille des vecteurs colonnes de la matrice  $A$  forme une b.o.n. dans l'espace euclidien habituel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

### 5 Géométrie vectorielle dans un espace euclidien

#### 5.1 Définitions et propriétés générales

**Définition 7** Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $u$  est un **projecteur orthogonal** si  $u$  est le projecteur sur  $F = \text{Im}(u)$  parallèlement à  $F^\perp$ .

On dit que  $u$  est une **symétrie orthogonale** si  $u$  est la symétrie par rapport à  $F = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$  et parallèlement à  $F^\perp$ .

**Remarque 3** • Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal sauf pour l'identité.

- Une symétrie orthogonale  $u$  correspond à une symétrie telle que :  $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^\perp = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$ .

**Proposition 9** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie. Alors, la symétrie  $u$  est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme  $u$  est orthogonal.

**Définition 8** Soient  $F$  un sous-espace de  $E$  et  $x_0 \in E$ . On appelle **distance** de  $x_0$  à  $F$  et on note  $d(x_0, F)$  le nombre :  $d(x_0, F) = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|$ .

Méthode : Comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ?

Dans un espace euclidien  $E$ , pour calculer la distance d'un vecteur  $x_0$  à un sous-espace  $F$  de  $E$  :

► introduire la projection orthogonale  $p$  sur  $F$

► trouver une base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $F$

► calculer  $p(x_0)$  : pour cela :

- poser  $p(x_0) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot e_k$

- calculer les  $\lambda_k$  avec les  $r$  équations  $(x - p(x_0)) \mid e_k = 0$

► donner le résultat :  $d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$ .

**Exemple 8** • Calculer :  $\inf \left\{ \int_0^\pi (e^x - a \cdot \sin x - b \cdot \cos x)^2 dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- Calculer la distance entre le vecteur  $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  et  $F = \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (0, 0, 3, 2))$ .

**Exemple 9** Soit  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la matrice  $A$  est une matrice de projection orthogonale sur l'espace euclidien habituel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $A^2 = A$  et  $A^T = A$ .

## 5.2 Géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$

Méthode : Comment réduire une matrice dans  $O_2(\mathbb{R})$  ?

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Pour la caractériser géométriquement :

► vérifier que  $A^T \cdot A = I_2$  : la matrice est bien orthogonale

► calculer  $\det A$  : on trouve  $\pm 1$

► si  $\det A = 1$  :

- il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- $A$  est une rotation d'angle  $\theta$

► si  $\det A = -1$  :

- trouver  $\varepsilon_1$  non nul tel que  $A(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$

- $A$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ .

**Exemple 10** Compléter les  $\star$  pour que la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \star \\ \frac{1}{2} & \star \end{pmatrix}$  soit orthogonale. Caractériser ensuite la matrice obtenue.