Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 08/01/2019

DM n° 10 : Suites

Problème 1 – Autour du lemme de la moyenne de Cesàro

Partie I – Variantes du lemme de Cesàro

1. (a) Soit (a_n) une suite d'éléments strictement positifs, telle que $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow +\infty$. Montrer que pour toute suite (u_n) de réels convergeant vers un réel ℓ, on a $\dfrac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k \longrightarrow \ell$.
   (b) Justifier que le résultat est encore valable si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
   (c) Justifier que le résultat est encore valable pour des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (d) Qu'obtient-on lorsque (a_k) est la suite constante égale à 1 ?
   (e) Montrer que si $u_n \longrightarrow \ell$ (dans $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$), alors $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k$ converge vers ℓ.
2. (les questions suivantes ne dépendent pas de cette question)
   *(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la question 1(a), montrer que si $\dfrac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{n^2u_n}\sum_{k=1}^{n} ku_k \longrightarrow \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.
   **(b) Montrer que cela reste vraie pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, α étant supposé strictement positif.
   (c) Sous les mêmes hypothèses, que peut-on dire de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n^{p+1}u_n}\sum_{k=1}^{n} k^p u_k$?

Partie II – Une application classique du lemme de Cesàro

Dans cette partie, nous mettons en place, sur un exemple, une méthode permettant d'obtenir un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque (u_n) est une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et convergeant vers un point fixe ℓ de f, en lequel $f'(\ell) = 1$.
On considère dans cette question la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(x) + \sin(x))$.

1. (a) Montrer que g induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On note f sa réciproque
   (b) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que pour toute suite (v_n) de limite nulle,
   $$g(v_n) = v_n + \frac{1}{5!}v_n^5 + o(v_n^5).$$
   (c) En déduire que pour toute suite (v_n) de limite nulle,
   $$f(v_n) \sim v_n \qquad \text{et} \qquad f(v_n) - v_n \sim -\frac{1}{5!}v_n^5.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\lim u_n = 0$.
   (b) Déterminer l'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{1}{f(u_n)^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ admette une limite finie non nulle.
   (c) En déduire un équivalent de la suite (u_n).

Partie III – Une généralisation de la partie I

1. (a) Montrer que si $u_n \longrightarrow \ell$ (on se limitera au cas d'une suite réelle telle que $\ell \in \mathbb{R}$), alors $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k \longrightarrow \ell$.

   (b) Ce résultat est-il un cas particulier de I-1 ?

2. *Dans cette question, on donne un résultat de type Cesàro, englobant aussi bien la situation de la question I-1 que l'exemple de la question II-1. On définit une suite doublement indexée $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ à valeur réelles strictement positives, telle que pour tout $k \geqslant n$, $a_{n,k} = 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.$$

   On définit alors $T : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pour tout (u_n) par :

$$T(u_n) = (v_n) \qquad \text{où} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}u_k.$$

   On dit que T est régulière si et seulement si pour toute suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ, $T(u_n)$ converge aussi vers ℓ.

   (a) Montrer que T est régulière si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$.

   (b) Montrer que les questions I-1 et III-1 sont des cas particuliers de ce résultat.

Partie IV – Adaptation du lemme de Cesàro pour des valeurs d'adhérence.

On considère une suite (u_n) admettant p valeurs d'adhérences, supposées toutes réelles, et notées $a_1, \ldots, a_p$. Pour tout $\varepsilon > 0$ tout $i \in [\![1,p]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_{n,i}(\varepsilon) = \left\{k \in [\![0,n]\!] \mid |u_k - a_i| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

On note alors $b_{n,i}(\varepsilon)$ le cardinal de $A_{n,i}(\varepsilon)$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et tout $\varepsilon > 0$ (au moins suffisamment petit), $\dfrac{b_{n,i}(\varepsilon)}{n}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$; on note $p_i(\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_{n,i}(\varepsilon)}{n}$;

(ii) Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $p_i(\varepsilon)$ admet une limite lorsque ε tend vers 0. On note p_i cette limite.

1. Expliquer la signification intuitive des hypothèses (i) et (ii).
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$
3. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers $\displaystyle\sum_{i\in[\![1,p]\!]} p_i a_i$
4. Expliquer en quoi le lemme de Cesàro est un cas particulier de ce résultat.
5. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que sa moyenne de Cesàro converge.
6. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont toutes les valeurs d'adhérences sont finies, et en nombre fini, et telle que la moyenne de Cesàro de (u_n) diverge.
7. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n le reste modulo 6 de n^2 et (u_n) une suite convergeant vers 1. Montrer que la moyenne de Cesàro de $(u_n r_n)$ converge, et déterminer sa limite.