

FEUILLE D'EXERCICES N° 7

FONCTIONS NUMÉRIQUES, CONTINUITÉ

FONCTIONS CONTINUES

Exercice 1

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f a un point fixe.
2. Montrer qu'une fonction périodique et continue sur \mathbb{R} est bornée.

Exercice 2

Soient x_1, \dots, x_n des nombres réels. On pose la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{k=1}^n |x - x_k|$.

1. Montrer que la fonction φ admet un minimum global sur \mathbb{R} .
2. Étudier les abscisses réalisant le minimum de la fonction φ .

Exercice 3

Soient f_1, \dots, f_n des fonctions continues définies sur le même intervalle I . Montrer que les fonctions $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ et $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ sont encore continues sur I .

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}.$$

Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 5

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) = f(x^2)$ avec f continue en 0 et 1. Montrer que f est constante.

Exercice 6

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors la fonction f est continue.
2. Montrer que si $f(]0, +\infty[)$ est un intervalle, alors f est continue.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - y) \cdot f(x + y) = f^2(x) \cdot f^2(y).$$

1. (a) Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est nulle.
(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \implies f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.
(c) En déduire que si la fonction f s'annule, alors la fonction f est nulle.
2. On suppose que f n'est pas la fonction nulle.
(a) Montrer que $(-f)$ est encore solution.
(b) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
(c) Montrer que la fonction f est paire.
(d) Calculer $f(0)$, puis $f(p)$ pour $p \in \mathbb{Z}$, en fonction de p et $\beta = f(1)$.
3. Calculer $f(px)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ en fonction de $f(x)$ et p . En déduire une expression de $f(r)$, où $r \in \mathbb{Q}$ en fonction de r et β .
4. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle.

Exercice 8

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - y) \cdot f(x + y) = f^2(x)$$

en fonction de $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(1)$.

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos f(x) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer un réel $\varepsilon > 0$ tel que les ensembles de la famille $\left(I_k = \left[\frac{\pi}{3} - \varepsilon + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + \varepsilon + 2k\pi\right], J_k = \left[-\frac{\pi}{3} - \varepsilon + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + \varepsilon + 2k\pi\right]\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ soient deux à deux disjoints.
2. Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 10

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$ tel que :

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x).$$

CALCULS PRATIQUES**Exercice 11**

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Exercice 12

On pose $f : x \mapsto \ln(e^x + 2)$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que f réalise une bijection et déterminer f^{-1} .
- Tracer les courbes $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$.

Exercice 13

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{1/x} \ln |x| + \tan x, & \text{si } x < 0 \\ \sin x + 2x \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 14

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2x - x^6}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1}\right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{\sin(x^2)}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot e^{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x \cdot \tan(2x)$

Exercice 15

Trouver un équivalent de $f(x)$ en x_0 :

- $f(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = |x - \sqrt{x}| \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x^{1+x}+1}$ en $x_0 = 0$
- $f(x) = 1 - x^3$ en $x_0 = 1$

- $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x \cos x)}$ en $x_0 = 0$
- $f(x) = \ln(\cos x)$ en $x_0 = 2\pi$
- $f(x) = x(e^{1/x} - \cos(1/x))$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(\ln x) - (1/2)^x}{(1/x)^3 - (1/3)^x}$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2x+3}$ en $x_0 = +\infty$

Exercice 16

On pose $f : x \mapsto [x]^2 + (2[x] + 1)(x - [x])$.

- Montrer que f est paire, continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que la courbe $y = f(x)$ est polygonale, inscrite dans une parabole.

Exercice 17

Tracer le graphe de la fonction : $x \mapsto [2x] - 2[x]$.

THÈMES VARIÉS**Exercice 18**

- Que peut-on dire d'une fonction périodique sur \mathbb{R} admettant une limite finie en $+\infty$?
- Soient k et ℓ deux entiers. Calculer $I_{k,\ell} = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx$.
- Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels. On suppose que la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)$ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 19

- Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$ l'est encore.
- Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0, 1]$ par \mathbb{R} ?

Exercice 20

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Établir l'existence de deux nombres α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \alpha \cdot |x| + \beta$.

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant deux limites finies en $\pm\infty$.

- Montrer que f est bornée.
- Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 22

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer qu'il existe trois nombres $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et $\alpha \in [0, 1[$ tels que $x = q \cdot p + r + \alpha$.
- Montrer que : $\sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor = [x]$.

Exercice 23

Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ qui commutent.

En examinant l'ensemble des points fixes de la fonction f , montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 24

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x + 1) = f(x).$$

1. Montrer que l'application f est bien définie.

2. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{\circ n}(\mathbb{Q} \setminus \{-1, 1, 0\})$ est l'ensemble vide.

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 25

J'ai réalisé un trajet de 500 kms en 5 heures.

1. Existe-t-il un laps de temps d'une heure où j'ai effectué exactement 100 kms ?
2. Existe-t-il un laps de temps de 45 min où j'ai effectué exactement 75 kms ?

Exercice 26

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x).$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins 7 fois sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 27

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

- chaque valeur prise par f est prise un nombre fini de fois
- la fonction f admet un nombre fini de changement de monotonie.

1. Montrer qu'une valeur de f est prise un nombre impair de fois.
2. Cela est-il encore vrai si l'on supprime la dernière hypothèse sur f ?

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que : $f \circ f \circ \dots \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$ (avec n compositions).

Exercice 29

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout segment S de \mathbb{R} , l'ensemble $f(S)$ est encore un segment et les longueurs des segments S et $f(S)$ sont égales.

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1, 0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1, 0\}$ l'application

$$f : r \mapsto r - \frac{1}{r}.$$