

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

OPTION MP

CONCOURS D'ADMISSION 1998

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes  $\mathbb{C}$ . On rappelle que, si  $K$  est un sous-corps d'un corps  $K'$ , ce dernier est, en particulier, un  $K$ -espace vectoriel, ce qui donne un sens à la  $K$ -dimension de  $K'$ , notée  $\dim_K(K')$ .

Si  $K$  est un corps, on note  $K[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $K$ . On dit qu'un polynôme de degré  $> 0$  est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés  $> 0$ . Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question 1 est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question 2 n'est pas utilisée dans la suite.

## Première partie

On désigne par  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , par  $\alpha$  un nombre complexe non nul, par  $K[\alpha]$  le sous- $K$ -espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  engendré par les nombres  $\alpha^n, n = 0, 1, 2, \dots$ , enfin par  $I_K(\alpha)$  l'ensemble des polynômes de  $K[X]$  annulés par  $\alpha$ .

1.a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\dim_K(K[\alpha]) < +\infty$
- (ii)  $I_K(\alpha) \neq \{0\}$ .

Si elles sont remplies, on dit que  $\alpha$  est *K-algébrique*, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire  $P \in K[X]$  tel que tout élément de  $I_K(\alpha)$  soit un multiple de  $P$ , et que  $P$  est irréductible.

Ce polynôme  $P$  sera noté  $P_K(\alpha)$  et appelé *polynôme K-minimal* de  $\alpha$ .

c) Comparer le degré de  $P_K(\alpha)$  et  $\dim_K(K[\alpha])$ .

d) Montrer que  $K[\alpha]$  est un corps.

2. *Applications numériques.* On prend  $K = \mathbb{Q}$ .

a) Déterminer le polynôme  $\mathbb{Q}$ -minimal de  $\alpha = \sqrt{2}$ .

b) Déterminer le polynôme  $\mathbb{Q}$ -minimal de  $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ .

### Deuxième partie

On définit  $K$  et  $\alpha$  comme dans la première partie. On suppose que  $\alpha$  est  $K$ -algébrique et on pose  $n = \dim_K(K[\alpha])$ .

3. Montrer que, si  $P$  est un élément irréductible de  $K[X]$ , ses zéros dans  $\mathbb{C}$  sont tous simples.

4.a) On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les zéros de  $P_K(\alpha)$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe un unique morphisme de  $K$ -algèbres  $\sigma_i$  de  $K[\alpha]$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$ .

b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de  $K$ -algèbres de  $K[\alpha]$  dans  $\mathbb{C}$  ?

5. Montrer que si  $\beta$  est un élément de  $K[\alpha]$  et si les  $\sigma_i(\beta)$  sont deux à deux distincts, alors on a  $K[\alpha] = K[\beta]$ .

6. Étant donné un élément  $\beta$  de  $K[\alpha]$ , démontrer l'existence de deux éléments  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de  $K[\alpha]$  vérifiant  $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$  et  $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ .

[On pourra introduire, pour  $i \neq j$ , l'ensemble  $E_{i,j}$  des éléments  $\lambda$  de  $K$  vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)]$$

*QC : \* Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon  
\* Théorème de Cayley - Hamilton*

On fixe un nombre complexe  $\mathbb{Q}$ -algébrique non nul  $\theta$ , et on pose  $K = \mathbb{Q}[\theta]$ ,  $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$ . On note  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , les morphismes de  $\mathbb{Q}$ -algèbres de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ .

Dans ce qui suit,  $\alpha$  désigne un élément de  $K$ ; on appelle  $M_\alpha$  l'endomorphisme du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $K$  défini par  $M_\alpha(\beta) = \alpha\beta$  pour tout  $\beta \in K$ , et  $\Delta_\alpha$  son polynôme caractéristique défini par  $\lambda \mapsto \det(\lambda I - M_\alpha)$ .

7. On pose  $m = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$ ,  $d = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]}(K)$ . Vérifier que, si  $(e_1, \dots, e_d)$  est une  $\mathbb{Q}[\alpha]$ -base de  $K$ , les éléments  $\alpha^p e_r$ , où  $p = 0, \dots, m-1$  et  $r = 1, \dots, d$ , forment une  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ .

8.a) Démontrer l'égalité  $\Delta_\alpha = (P_{\mathbb{Q}}(\alpha))^d$ .

[On pourra examiner d'abord le cas où  $\mathbb{Q}[\alpha] = K$ ]

b) Démontrer l'égalité  $\text{Tr}(M_\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$ .

9. Pour tout  $n$ -uple  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de  $K^n$ , on pose

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \left( \text{Tr}(M_{\alpha_i, \alpha_j}) \right)_{i,j=1, \dots, n}.$$

Exprimer  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  en fonction de  $\det \left( \sigma_i(\alpha_j) \right)_{i,j=1, \dots, n}$ .

10. Soit  $A = (A_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , et soit  $\beta_i = \sum_{p=1}^n A_{i,p} \alpha_p$ .

Vérifier que

$$D(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\det A)^2 D(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

11. Montrer que

$$D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)).$$

12. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , pour qu'un  $n$ -uple  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  soit une  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ .

13.a) Vérifier que le polynôme  $X^3 - X - 1$  admet un unique zéro réel, que l'on note  $\theta$ .

b) Déterminer le polynôme  $\mathbb{Q}$ -minimal de  $\theta$ .

c) Calculer  $D(1, \theta, \theta^2)$ .

\* \*  
\*