Maths Lyon

Jason Akoun

1er juillet 2019

Exercice

Soit $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$ telle que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = A(t)^t A(t) - {}^t A(t) A(t) \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

1) Ecrire $A = S + H$ avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ symétrique et $H(t)$ antisymétrique, puis montrer que H constante égale à H_0.

2) Montrer que $S' = 2(H_0 S - S H_0)$

3) On pose $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ S & \longmapsto H_0 S - S H_0 \end{cases}$, montrer que φ est un endomorphisme antisymétrique. En déduire que $\mathrm{Sp}(\varphi^2) \subset \mathbb{R}_-$

4) Montrer que $\frac{1}{t}\int_0^t A(s)\mathrm{d}t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} p(S_0) + H_0$ où p est le projecteur orthogonal sur Ker φ pour le produit scalaire usuel.