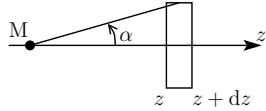


Corr. 1 Solénoïde fini

1.



On découpe le solénoïde en tranches d'épaisseur dz . Chaque tranche est équivalente à une spire, parcourue par un courant $(ndz)I$, puisque ndz est le nombre de spires contenues dans la tranche dz .

Remarque : on choisit l'origine des z en M.

La contribution de cette tranche est

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0(ndz)I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z.$$

Utilisons α comme variable d'intégration.

La relation, $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$, donne par différentiation

$$\cos \alpha d\alpha = -\frac{Rz dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \text{ Et comme } \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \text{ on}$$

$$\text{obtient } d\alpha = -\frac{R dz}{R^2 + z^2} = -\frac{dz}{R} \sin^2 \alpha. \text{ On a donc}$$

$$d\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} d(\cos \alpha) \vec{e}_z.$$

$$\text{Et par intégration : } \vec{B}(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B}(M), \text{ ie}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z$$

2. Le cas limite du solénoïde infini doit être retrouvé quand $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 = \pi$. On trouve bien, comme dans le cours

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Le théorème d'AMPÈRE appliqué à un contour rectangulaire intérieur au solénoïde, et dont un des côtés appartient à

l'axe (Oz) permet de montrer que $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ est uniforme dans tout le solénoïde. Le théorème d'AMPÈRE appliqué à un contour rectangulaire à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde (comme en cours) permet enfin de trouver que $\vec{B} = 0$ en dehors du solénoïde.

Corr. 2 Inductance linéique d'un câble coaxial

Corrigé succinct !

1. Si I circule dans l'âme, par conservation de la charge en régime stationnaire, I circule dans la gaine, en sens opposé.

2. On appelle (Oz) l'axe du câble coaxial et on travaille en coordonnées cylindriques. Les invariances et symétries sont les mêmes que celles du fil vu en cours, donc $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$.

On note $\vec{j}_a = j_a \vec{e}_z$ la densité de courant dans l'âme et celle dans la gaine est notée $\vec{j}_g = j_g \vec{e}_z$.

Supposons qu'un courant I circule dans l'âme, de sorte que $j_a = \frac{I}{\pi R_a^2}$. Alors $j_g = -\frac{I}{\pi(R_{g,e}^2 - R_{g,i}^2)}$. L'application du théorème d'AMPÈRE, comme pour le fil infini du cours, donne

$$B(r \leq R_a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2}{R_a^2}$$

$$B(R_a \leq r \leq R_{g,i}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B(R_{g,i} \leq r \leq R_{g,e}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_{g,e}^2 - r^2}{R_{g,e}^2 - R_{g,i}^2}$$

$$B(R_{g,e} \leq r) = 0$$

3. La densité d'énergie magnétique vaut $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Ainsi,

$$U_m = \int_0^\infty 2\pi r h \frac{B(r)^2}{2\mu_0} dr. \text{ En écrivant } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b(r), \text{ on}$$

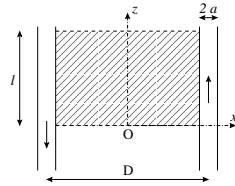
trouve que $U_m = \frac{I^2}{2} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{b(r)^2}{r} dr$. Dans la limite proposée dans l'énoncé, l'énergie magnétique s'écrit donc

$$U_m = \frac{I^2}{2} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{R_g}{R_a} \right) \right] = \frac{1}{2} \Lambda I^2$$

$$\text{d'où } \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{R_g}{R_a} \right) \right]$$

Si $R_a \ll R_g$, le logarithme l'emporte sur le terme constant et

$$\Lambda \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R_g}{R_a} \right)$$

Corr. 3 Inductance propre extérieure d'une ligne bifilaire

Dans la zone hachurée, le champ magnétique créé par les deux fils s'obtient par superposition, donc

$$\vec{B}(x, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x + D/2} - \frac{1}{x - D/2} \right) \vec{e}_y$$

Le flux orienté par \vec{e}_y de ce champ dans la zone hachurée est

$$\phi = \int_{\text{Hach.}} \vec{B} \cdot \vec{e}_y dx dz$$

$$\text{soit } \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^l dz \int_{-D/2+a}^{D/2-a} \left(\frac{1}{x + D/2} - \frac{1}{x - D/2} \right) dx$$

$$\text{Ainsi, } \phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \left(\frac{D-a}{a} \right)$$

On définit l'inductance propre **extérieure** de ligne par unité de longueur par

$$L_{/m} = \frac{\phi}{I l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D-a}{a} \right) \simeq \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

$$\text{Numériquement, } L_{/m} = 1,8 \mu\text{H.m}^{-1}$$

Corr. 4 Spire et dipôle

Le champ créé par une spire sur son axe vaut (suivant l'axe) :

$$B_{sp} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$$

En ce qui concerne le dipôle magnétique, de moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e}_z$$

le champ en coordonnées sphériques appuyées sur l'axe (Ox) est

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}$$

donc sur l'axe (Ox) ($\theta = 0$), au point M ($r = d$), le champ est suivant (Ox) et vaut (suivant l'axe) :

$$B_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{d^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \tan^3 \alpha$$

Le rapport des champs de la spire et du dipôle est

$$\frac{B_{sp}}{B_{dip}} = \cos^3 \alpha < 1$$

et l'assimilation des champs à mieux que 1 % près impose un angle maximal α_m tel que

$$\cos^3 \alpha_m = 0,99$$

d'où

$$\alpha_m = 4,7^\circ$$

Alors, le coefficient $R/d = \tan \alpha_m = 0,082$ (ou encore $d \simeq 12R$) intervenant dans l'approximation dipolaire est effectivement petit devant l'unité.

Corr. 5 Solénoïde épais

1. Pour le système proposé, les symétries et invariances sont les mêmes que pour le solénoïde idéal infini sans épaisseur donc

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques. On décompose ce solénoïde épais en un ensemble de solénoïdes « emboîtés » d'épaisseur infinitésimale dr_0 et de rayon r_0 variable. On réalise la chose en notant qu'une longueur dz de solénoïde d'épaisseur dr_0 est parcourue par un courant enlaccé

$$d^2 I = p dz m \frac{dr_0}{R_2 - R_1} i$$

et ce courant pour un solénoïde sans épaisseur sur une longueur dz avec dn' spires par unité de longueur est

$$d^2 I = dn' dz i$$

On en déduit que le passage du solénoïde d'épaisseur dr_0 au solénoïde sans épaisseur avec dn' spires par unité de longueur se fait *via* la relation

$$dn' = m p \frac{dr_0}{R_2 - R_1} = n \frac{dr_0}{R_2 - R_1}$$

On notera que c'est toujours en identifiant les intensités que l'on passe d'un type de répartition à un autre... On en déduit que le champ magnétique associé au solénoïde d'épaisseur dr_0 est

$$d\vec{B}(r < r_0) = \mu_0 dn' i \vec{e}_z \quad \text{et} \quad d\vec{B}(r > r_0) = \vec{0}$$

Il suffit alors de sommer les contributions de tous les solénoïdes. On trouve naturellement

$$\vec{B}(r > R_2) = \vec{0}$$

Pour $r < R_1$, les champs créés par tous les solénoïdes s'ajoutent et

$$\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \vec{e}_z$$

soit

$$\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

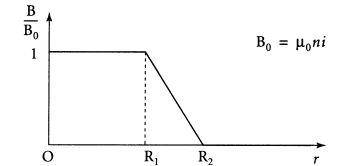
Enfin, pour $R_1 < r < R_2$, seuls les solénoïdes de rayon supérieur à r contribuent à \vec{B} . Ainsi,

$$\vec{B}(R_1 < r < R_2) = \mu_0 n i \int_r^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \vec{e}_z$$

soit

$$\vec{B}(R_1 < r < R_2) = \mu_0 n i \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \vec{e}_z$$

On en déduit le graphe suivant :



Naturellement, pour $r < R_1$, le système se réduit à un solénoïde sans épaisseur comportant $n = m p$ spires par unité de longueur parcourues par le courant i .

2. On a déjà vu que $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$. On applique alors le théorème d'Ampère en utilisant comme contour un rectangle dans un plan $\theta = C^te$ compris entre r' et r et de longueur h suivant z . On oriente ce contour en accord avec \vec{e}_θ (règle du tire-bouchon).

Lorsque le contour est intégralement à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde, aucun courant n'est enlaccé donc on trouve que \vec{B} est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde épais. Notons B_1 le champ à l'intérieur et B_2 celui à l'extérieur (projections sur \vec{e}_z).

Avec le contour entre $r' = 0$ et $r \in [R_1; R_2]$, le théorème d'Ampère donne

$$h B_1 - h B(r) = \mu_0 I_e = \mu_0 i (p h) \left(m \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)$$

$$\text{soit} \quad B(r) = B_1 - \mu_0 n i \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$$

Le champ doit être continu en $r = R_1$ et $r = R_2$ (pas de courant surfacique) donc on vérifie que $B(R_1) = B_1$ et on ajoute

$$B_2 = B_1 - \mu_0 n i$$

Il reste à utiliser l'argument que B_2 est nul car il résulte de l'association de solénoïdes fins emboîtés ne créant pas de champ en leur extérieur. Finalement, $B_2 = 0$ et $B_1 = \mu_0 n i$ et on retrouve les expressions du champ magnétique calculées à la question précédente...

Corr. 6 Le disque de ROWLAND

1. On découpe le disque en couronnes circulaires comprises entre r et $r + dr$, portant la charge $dq = \sigma 2\pi r dr$. Le disque tournant à la vitesse angulaire, sa période de rotation est $T = 2\pi/\omega$. Ainsi, la charge dq circule tous les T à travers la couronne élémentaire, qui peut donc être assimilée à une spire de courant élémentaire, parcourue par le courant

$$dI = \frac{dq}{T} = \sigma r \omega dr$$

Ce courant est un courant **de convection** de charges (mouvement macroscopique !). Or, on connaît le champ créé sur l'axe d'une spire de courant (si l'on connaît son cours...) et, par intégration, on trouve sur l'axe

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \sigma R}{2} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha} \vec{\omega}$$

Rowland a réalisé l'expérience avec un disque tournant pour montrer qu'un courant convectif créait aussi un champ magnétique, au même titre qu'un courant électrique !

2. Le moment magnétique associé au disque plan en rotation s'obtient en intégrant tous les moments magnétiques des spires élémentaires précédentes. Pour ces spires,

$$d\vec{\mathcal{M}} = \pi r^2 dI \vec{e}_z^* = \pi r^2 \sigma \omega r dr \vec{e}_z^*$$

L'intégration donne

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\pi \sigma R^4 \omega}{4} \vec{\omega}$$

Ensuite, pour $z \gg R$, on obtient

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{8z^3} \vec{\omega}$$

en prenant le résultat de la question 1 ou en prenant l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ sur l'axe. ...

3. Le disque, même tournant, présente une charge surfacique locale σ partout, uniforme. Le champ électrique demandé est celui créé par un disque chargé σ et l'intégrale de Coulomb du champ donne pour un point de l'axe avec $z > 0$:

$$\vec{E}_{z>0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \vec{e}_z^* = -\vec{E}_{z<0}$$

On vérifie les symétries et, de plus, on vérifie les relations de passage sur le disque (une fois qu'on sait ce que sont ces relations !).

On peut étendre cet exercice en demandant de calculer les champs au voisinage de l'axe. ... La méthode a été vue en exercice ; je vous laisse le regarder (traduire en version intégrale près de l'axe, vide de charges, les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique).

Corr. 7 Plaque supraconductrice de faible épaisseur

1. En développant $\text{rot rot } \vec{B}$ avec l'équation de Maxwell-Ampère, il vient

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

2. La valeur de \vec{B} en tout point est la somme du champ créé par les sources « extérieures » en présence de la plaque (soit \vec{B}_0) et du champ créé par les courants dans le matériau (soit \vec{B}_c). On supposera toujours que la présence du supraconducteur ne modifie pas la répartition des courants « extérieurs » (c'est-à-dire les courants autres que ceux du supraconducteur).

Ainsi, \vec{B}_0 représente à la fois le champ « extérieur » en l'absence et en présence de la plaque, *à ne pas confondre avec le champ magnétique total* $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_c$, expression valable à l'extérieur et à l'intérieur du milieu.

L'hypothèse de l'énoncé, à vérifier, consiste donc à supposer que

$$\vec{B}_c(d) = \vec{B}_c(-d) = \vec{0}$$

L'invariance par translation parallèlement à la plaque et l'invariance de \vec{B}_0 suivant (Ox) et (Oy) font que \vec{B} ne dépend que de z . À cause de $\text{div } \vec{B} = 0$, il vient $B_z = 0$ et donc, aux interfaces, le champ n'a pas de composante normale.

$$\text{On a à résoudre } \frac{d^2 \vec{B}(z)}{dz^2} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\text{d'où } \vec{B} = \vec{\alpha} \text{ sh } \frac{z}{\lambda} + \vec{\beta} \text{ ch } \frac{z}{\lambda}$$

On détermine les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ constantes d'intégration par application des relations de passage aux interfaces $z = \pm d$:

$$\vec{B}(d) = \vec{\alpha} \text{ sh } \frac{d}{\lambda} + \vec{\beta} \text{ ch } \frac{d}{\lambda} = \vec{B}_0$$

$$\text{et } \vec{B}(-d) = -\vec{\alpha} \text{ sh } \frac{d}{\lambda} + \vec{\beta} \text{ ch } \frac{d}{\lambda} = \vec{B}_0$$

$$\text{d'où } \vec{\alpha} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}_0}{\text{ch } \frac{d}{\lambda}}$$

Finalement, on obtient un champ magnétique

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_x^* = \frac{\text{ch } \frac{z}{\lambda}}{\text{ch } \frac{d}{\lambda}} \vec{B}_0$$

La fonction $B(z)$ est paire. Ceci est cohérent avec la symétrie (Π^-) du dispositif source (champ \vec{B}_0 interagissant avec la plaque) !

3. D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{0}$$

$$\text{d'où } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB(z)}{dz} \vec{e}_y^* = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\text{sh } \frac{z}{\lambda}}{\text{ch } \frac{d}{\lambda}} \vec{e}_y^*$$

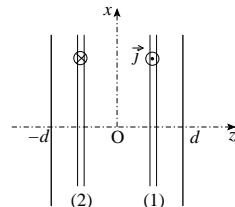
On constate que $j_y(z)$ est impaire, ce qui est toujours en accord avec la symétrie (Π^-) du dispositif source (champ \vec{B}_0 interagissant avec la plaque).

On détermine ensuite le champ \vec{B}_c créé par ces courants. Ils sont symétriques Π^+ par rapport à tout plan perpendiculaire à l'axe (Ox) donc

$$\vec{B}_c = B_c(z) \vec{e}_x^*$$

les invariances assurant toujours une dépendance uniquement avec z . De plus, on s'attend à ce que $B_c(-z) = B_c(z)$ car le plan (xOy) est de symétrie Π^- pour les courants. ...

Pour achever le calcul de \vec{B}_c , plusieurs méthodes s'offrent à nous : théorème d'Ampère avec contour rectangulaire, utilisation du champ connu pour une surface plane de courants uniformes (ce qui est fait ici. ...)



On choisit deux bandes minces d'épaisseur dz , symétriques par rapport au plan (xOy), placées en z pour (1) et $-z$ pour

(2). Leur « courant surfacique » est $\vec{j} dz$ et elles créent un champ magnétique classique pour $z > d$:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 j(z) dz}{2} \vec{e}_x^* \quad \text{et} \quad d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j(-z) dz}{2} \vec{e}_x^* = -d\vec{B}_1$$

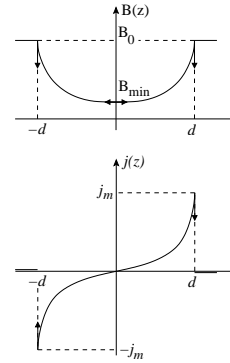
Par superposition, on constate finalement que, de chaque côté, à l'extérieur de la plaque,

$$\vec{B}_c(|z| > d) = \vec{0}$$

Le champ total à l'extérieur de la plaque se limite à \vec{B}_0 et l'hypothèse faite à la question précédente est vérifiée.

4. Voici les graphes attendus où on a posé

$$B_{\min} = \frac{B_0}{\text{ch } \frac{d}{\lambda}} \quad \text{et} \quad j_m = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \text{th } \frac{d}{\lambda}$$



5. L'épaisseur minimale demandée correspond à

$$\frac{B_0}{\text{ch } \frac{d_m}{\lambda}} = \frac{B_0}{100}$$

soit

$$d_m = \lambda \text{ Argch } 100 \simeq \lambda \ln 200$$

Ainsi,

$$2d_m = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

6. Pour $d \gg \lambda$ et $z \gg \lambda$, on note que

$$j(z) \simeq \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \exp\left(\frac{z-d}{\lambda}\right)$$

La densité de courant est réduite de 1 % lorsque

$$\exp\left(\frac{z-d}{\lambda}\right) = \frac{1}{100}$$

soit

$$d - z = 7,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Ces faibles valeurs montrent la forte atténuation du champ magnétique et de la densité de courant dans le supraconducteur. D'un point de vue macroscopique, on peut considérer que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur est nul

(effet Meissner d'expulsion des lignes de champ \vec{B}). De plus,

la discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B} aux interfaces est en accord avec l'existence de courants **surfaiques**

\vec{j}_s . Par exemple, en $z = d$,

$$\vec{B}_0 - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z^*$$

Corr. 8 La corde de DIRAC

Cet exercice est le début d'un vieux problème de l'X, fondamental sur le thème du monopôle magnétique. ...

1. Avec la figure représentée, on note que l'on a

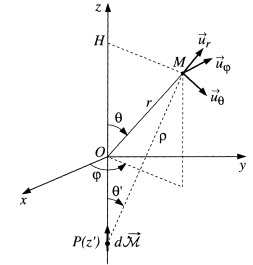
$$d\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{PM} = d\mathcal{M} \rho \sin \theta' \vec{u}_\phi$$

et

$$HM = r \sin \theta = \rho \sin \theta'$$

donc

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi r^2 \sin^2 \theta} \vec{u}_\phi \int_{-\infty}^0 \sin^3 \theta' dz'$$



Or, $PO = PH - OH$ conduit à

$$-z' = \rho \cos \theta' - r \cos \theta = r \sin \theta \cotan \theta' - r \cos \theta$$

En différenciant, à r et θ fixés, on trouve

$$dz' = r \sin \theta \frac{-d\theta'}{\sin^2 \theta'}$$

Lorsque P passe de $-\infty$ en O , θ' varie de 0 à θ , d'où

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi r \sin \theta} \vec{u}_\phi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta'$$

soit

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{u}_\phi$$

\vec{A} n'est pas défini en O (car en $1/r$). De plus, comme

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

il n'est pas non plus défini pour $\theta = \pi$. **Par conséquent, le potentiel vecteur n'est pas défini sur tout le demi-axe Oz négatif.** Ceci est logique et non gênant car il s'agit des points où se trouvent les dipôles et où l'approximation dipolaire devient caduque. ...

2. On calcule le champ magnétique par

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{u}_\phi \right)$$

On développe le rotationnel :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \left(\frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \text{rot } \vec{u}_\phi + \text{grad} \left(\frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \wedge \vec{u}_\phi \right)$$

L'énoncé donne $\text{rot } \vec{u}_\phi = \vec{u}_z^* / (r \sin \theta)$. On passe ce résultat en coordonnées sphériques et on fait le calcul du terme gradient aussi en coordonnées sphériques, d'où finalement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \frac{\vec{u}_r^*}{r^2}$$

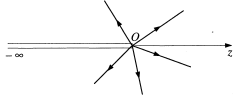
Ce champ magnétique est **radial en $1/r^2$!**, tout comme le champ électrique créé par une charge ponctuelle placée en O . Il n'est seulement pas défini sur le demi-axe Oz négatif (O compris). Par conséquent, en dehors de ces points singuliers,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

On peut le vérifier directement car

$$\operatorname{div} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{\operatorname{div} \vec{r}}_3 + \underbrace{\operatorname{grad} \frac{1}{r^3}}_{-\frac{3}{r^4} \vec{u}_r} \cdot \vec{r} = 0$$

Les lignes de champ sont des demi-droites issues de O, en dehors de celle correspondant au demi-axe Oz négatif où \vec{B} n'est pas défini (voir figure suivante).



Tout se passe comme si on avait un **monopôle magnétique** en O (à ceci près qu'on a une demi-droite de singularités qui fait qu'il ne s'agit pas d'un vrai monopôle).

Une analogie électrostatique permet de mieux comprendre cela. En associant des dipôles électrostatiques élémentaires (doublets de charges $-q$ et $+q$) sur tout le demi-axe Oz négatif, les charges intermédiaires opposées se « neutralisent » et il reste une charge $-q$ en $-\infty$ et une charge $+q$ en O. Pour une suite continue de dipôles magnétiques (mêmes expressions des champs), il reste globalement deux « monopôles ou charges » magnétiques, l'un en $-\infty$ (donc « inintéressant ») et l'autre en O et qui est l'objet de cette étude. Dans le cas magnétique, **il reste une ligne singulière appelée corde de Dirac** (demi-droite des Oz négatifs) qui fait que l'on n'a pas vraiment affaire à un vrai monopôle... Heureusement, sinon l'équation de Maxwell-Flux serait contredite !

3. Chaque spire du solénoïde est assimilable à un dipôle magnétique (on oriente I en accord avec Oz). Si n est élevé, alors ce solénoïde modélise une répartition continue de dipôles et **il représente la corde de Dirac**.

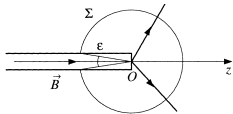
Sur une longueur dz' , il y a $|n dz'| = n dz'$ spires donc un courant équivalent $n dz' I$ correspondant à un moment

$$d\mathcal{M} = Sn I dz'$$

En comparant ce moment élémentaire à $d\mathcal{M} = \lambda dz'$, on en déduit la « charge du monopôle »

$$\lambda = n S I$$

4. On considère le flux magnétique à travers la portion de sphère Σ représentée, orienté vers l'extérieur.



$$\Phi_\varepsilon = \iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \Omega$$

où $\Omega = 4\pi - \varepsilon$ est l'angle solide sous lequel est vue Σ à partir de O, d'où

$$\Phi_\varepsilon = \mu_0 \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon}{4\pi} \right)$$

On note que la limite $\Phi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0 \lambda \neq 0$ n'est pas le flux à travers Σ fermée (sphère de centre O à la limite) car en coupant la partie négative de Oz, on traverse la corde de Dirac avec à l'intérieur un champ uniforme $\mu_0 n I$ (solénoïde comme infini

assez loin dedans) conduisant à un flux sortant de la sphère égal à $-\mu_0 n I S$ (cf orientation du courant I en accord avec

Oz). L'équation de Maxwell-Flux $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ impose le flux conservatif de \vec{B} , soit

$$\mu_0 \lambda - \mu_0 n I S = 0$$

On retrouve

$$\lambda = n I S$$

5. On obtient numériquement

$$\lambda = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ A.m}$$