DÉRIVATION

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad f(x) = |\ln x|.$$

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}), \qquad f(x) = x|x|.$$

Pour les fonctions de cet exercice, les théorèmes généraux ne permettent pas de dériver sur l'intégralité de l'ensemble de définition. Il faut ensuite utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou le taux d'accroissement pour savoir si la fonction est ou n'est pas dérivable aux points d'incertitude.

1. La fonction f est définie, paire et continue sur $]-\infty; -1/2] \cup [1/2; +\infty[$. Les théorèmes généraux nous disent seulement que l'on peut la dériver sur $]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[$. En $\pm 1/2$, on a des points d'incertitude. On a

$$\boxed{\forall x \in]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}.}$$

On constate alors que

$$f'(x) \xrightarrow[x \to \pm 1/2]{} \pm\infty,$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } \pm 1/2 \text{ et admet en ces points des demi-tangentes verticales.}}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x-1/2} = \frac{2\sqrt{(x-1/2)(x+1/2)}}{x-1/2} = 2\sqrt{\frac{x+1/2}{x-1/2}} \xrightarrow[x \to 1/2]{} +\infty$$

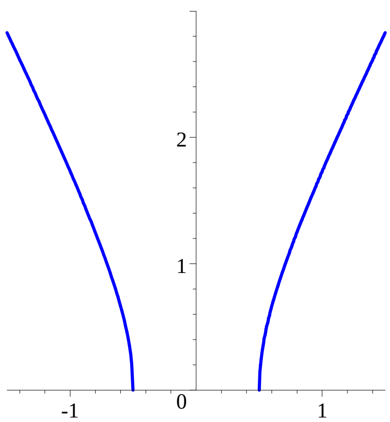
et, par parité,

$$\frac{f(x) - f(-1/2)}{x + 1/2} \xrightarrow[x \to -1/2]{} -\infty$$

pour conclure que

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } \pm 1/2 \text{ et admet en ces points des demi-tangentes verticales.}}$$

Voici son graphe :



2. La fonction f est définie et continue sur $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ mais les théorèmes généraux nous disent seulement que l'on peut la dériver sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. On a une incertitude en -1. On a

$$\boxed{\forall x\in\,]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\,,\qquad f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot}$$

On constate alors que

$$f'(x)\xrightarrow[x\to-1]{}+\infty,$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1 \text{ et admet en ce point une demi-tangente verticale.}}$$

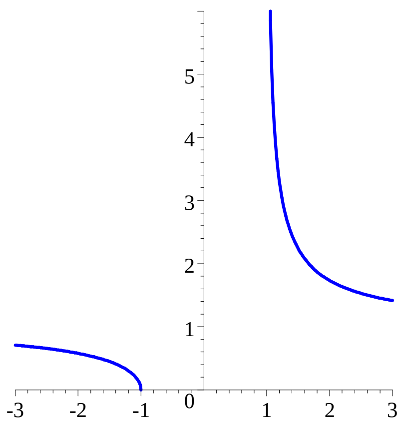
Remarque : On peut aussi utiliser le taux d'accroissement :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\sqrt{\dfrac{h}{h-2}}}{h}=\sqrt{\frac{1}{h(h-2)}}\xrightarrow[h\to0]{}+\infty$$

pour conclure que

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1 \text{ et admet en ce point une demi-tangente verticale.}}$$

Voici son graphe :



3. La fonction f est définie et continue sur $]0;+\infty[$. Les théorèmes généraux nous disent seulement que l'on peut la dériver sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$. On a une incertitude en 1. On a

$$\boxed{\forall x\in\,]0;1[\,,\quad f'(x)=-\frac{1}{x}\qquad\text{et}\qquad\forall x\in\,]1;+\infty[\,,\quad f'(x)=\frac{1}{x}\cdot}$$

On constate alors que

$$f'(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}-1\qquad\text{et}\qquad f'(x)\xrightarrow[x\to1^+]{}+1$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche de 1 avec } f'_g(1)=-1 \text{ et } f \text{ est dérivable à droite de 1 avec } f'_d(1)=1.}$$

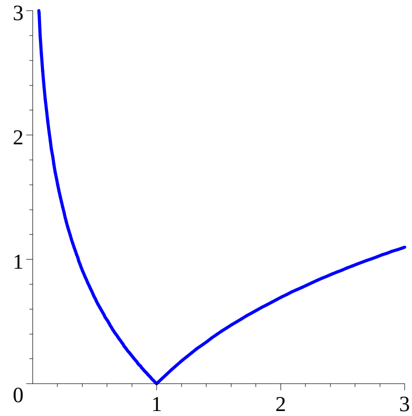
Remarque : On peut aussi utiliser le taux d'accroissement :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{|\ln(1+h)|}{h}\underset{h\to0}{\sim}\frac{|h|}{h}\xrightarrow[h\to0^\pm]{}\pm1,$$

pour conclure que

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche de 1 avec } f'_g(1)=-1 \text{ et } f \text{ est dérivable à droite de 1 avec } f'_d(1)=1.}$$

Voici son graphe :



4. La fonction f est définie et continue sur $[0;+\infty[$ mais les théorèmes généraux nous disent seulement que l'on peut la dériver sur $]0;+\infty[$. On a une incertitude en 0. On a

$$\boxed{\forall x \in\,]0;+\infty[\,, \qquad f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.}$$

On constate alors que

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\frac{1}{2},$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ sa dérivée y vaut } -1/2 \text{ et } f' \text{ est continue en } 0.}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le taux d'accroissement :

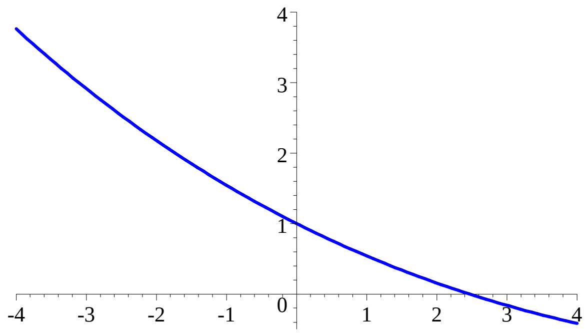
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x/2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

pour conclure que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et sa dérivée y vaut } -1/2.}$$

Mais, cette fois, on ne sait pas que f' est continue en 0.

Sur son graphe, on ne voit même pas le problème en 0 (c'est logique puisqu'il n'y en a pas !):



5. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais les théorèmes généraux nous disent seulement que l'on peut la dériver sur $\mathbb{R}^*$. On a une incertitude en 0. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = 2|x|.}$$

On constate alors que

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0,$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0 \text{ et } f' \text{ est continue en } 0.}$$

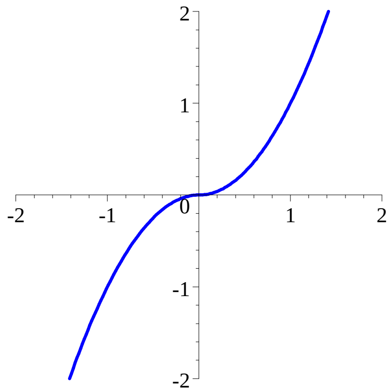
Remarque : On peut aussi utiliser le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

pour conclure (seulement) que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

Sur le graphe, on voit bien que f admet une tangente horizontale en 0 :



♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. La limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée centrale de f en x_0 et est notée $f'_c(x_0)$.

1. Démontrer que si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent, alors $f'_c(x_0)$ existe et vaut $\big(f'_g(x_0) + f'_d(x_0)\big)/2$. Que dire si f est dérivable en x_0 ?
2. Si f admet une dérivée centrale en un point, est-elle nécessairement : continue en ce point ? dérivable à gauche et/ou à droite en ce point ?

1. On a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{f'_g(x_0) + f'_d(x_0)}{2}$$

donc

$$\boxed{\text{si } f'_g(x_0) \text{ et } f'_d(x_0) \text{ existent, alors } f'_c(x_0) = \frac{f'_g(x_0) + f'_d(x_0)}{2}.}$$

Si $f'(x_0)$ existe, alors $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$, donc

$$\boxed{\text{si } f'(x_0) \text{ existe, alors } f'_c(x_0) = f'(x_0).}$$

2. La valeur de f en x_0 n'intervient pas dans la dérvée centrale donc

$$\boxed{f \text{ peut admettre une dérivée centrale en un point sans être continue en ce point.}}$$

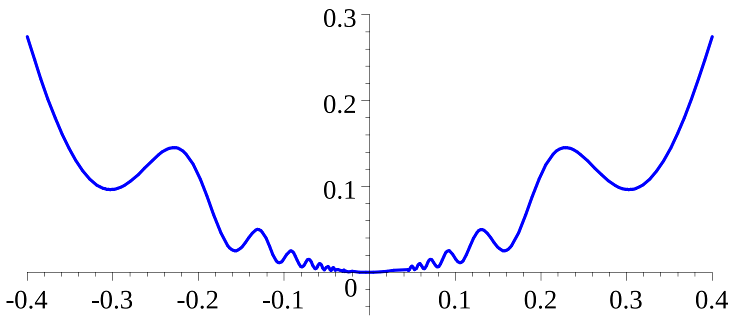
La dérivée centrale en 0 d'une fonction paire est nulle même si cette fonction paire est contineu et n'a pas de dérivée à droite et/ou à gauche en 0, donc

$$\boxed{f \text{ peut admettre une dérivée centrale en un point sans avoir de dérivée latérale en ce point.}}$$

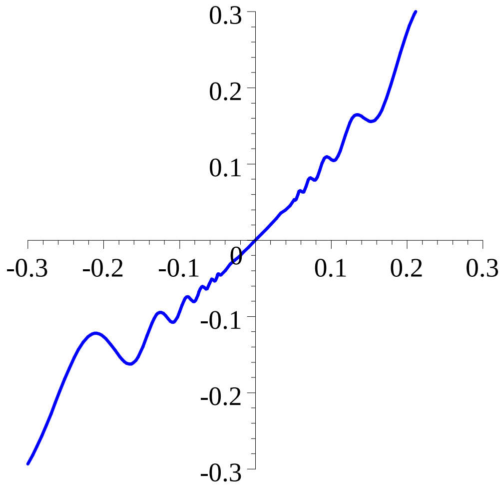
♦ ***Exercice 3.*** [○]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que f admet un minimum local en 0. La fonction f est-elle nécessairement décroissante dans un voisinage latéral gauche de 0 et croissante dans un voisinage latéral droit de 0 ?
2. On suppose que $f'(0) > 0$. La fonction f est-elle nécessairement strictement croissante au voisinage de 0 ?

1. C'est faux ! Il suffit de considérer la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x^2 \sin^2(1/x)$ prolongée par 0 en 0 dont le graphe est donné ci-dessous :



2. C'est faux ! Il suffit de considérer la fonction $x \longmapsto x + x^2 \sin^2(1/x)$ prolongée par 0 en 0 dont le graphe est donné ci-dessous :



♦ ***Exercice 4.*** [○]

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I centré en 0.
   a) Démontrer que si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).
   b) Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f. Démontrer que, si f est impaire alors F est paire. Est-il vrai que si f est paire alors F est impaire ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est T-périodique. Démontrer que f' est aussi T-périodique.

1. Supposons que f est paire (respectivement impaire), c'est-à-dire $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ $\big($respectivement $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)\big)$. En dérivant, on obtient $\forall x \in I,\ -f'(-x) = f'(x)$ $\big($respectivement $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)\big)$, ce qui signifie que f' est impaire sur I (respectivement paire sur I).
2. a) Considérons la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = F(-x) - F(x)$. On a $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = -f(-x) - f(x) = 0$, puisque f est impaire, donc φ est constante sur I. Or $0 \in I$ (car I est un itervalle centré en 0), donc $\varphi(0) = F(0) - F(0) = 0$, donc φ est nulle sur I, c'est-à-dire $\forall x \in I,\ F(-x) = F(x)$. Ainsi F est paire sur I.

b) Non, il suffit de considérer $f(x) = 3x^2$ et $F(x) = x^3 + 1$ pour s'en convaincre. Par contre, on peut affirmer que si une fonction f est paire, l'**une** de ses primitives (celle qui s'annule en 0) est impaire.

♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]
Soient I un intervalle et $a \in I$. On considère $f, m, M : I \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions telles que m et M sont dérivables en a. On suppose que $m \leqslant f \leqslant M$, $m(a) = M(a)$ et $m'(a) = M'(a)$. Démontrer que f est dérivable en a et $f'(a) = m'(a) = M'(a)$.

Les hypothèses impliquent que $m(a) = f(a) = M(a)$.
Pour $x \in I \cap]a; +\infty[$, on a

$$\frac{m(x) - m(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{M(x) - M(a)}{x - a}.$$

Or

$$\lim_{x \to a^+} \frac{m(x) - m(a)}{x - a} = m'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{M(x) - M(a)}{x - a} = M'(a),$$

donc comme $m'(a) = M'(a)$, le théorème des gendarmes s'applique, ce qui donne

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = M'(a) = m'(a).$$

On démontre de même que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = M'(a) = m'(a).$$

On en conclut que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = m'(a) = M'(a).}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\star$] (Théorème de Cesàro fonctionnel)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f' tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Démontrer que $x \longmapsto f(x)/x$ tend vers ℓ en $+\infty$.

On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. Le cas où $\ell = \pm\infty$ est laissé au bons soins du lecteur.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme f' tend vers ℓ en $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que $\forall x \geqslant B,\ |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.
Pour tout $x > B$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x} f(x) - \ell\right| &= \left|\frac{1}{x}\left(\int_0^x f' + f(0)\right) - \frac{1}{x}\int_0^x \ell\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f' - \ell) + \frac{f(0)}{x}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f' - \ell| + \frac{|f(0)|}{x} \\
&= \frac{1}{x}\int_0^B |f' - \ell| + \frac{1}{x}\int_B^x |f' - \ell| + \frac{|f(0)|}{x} \\
&\leqslant \frac{1}{x}\left(|f(0)| + \int_0^B |f' - \ell|\right) + \frac{1}{x}\int_B^x \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{x}\left(|f(0)| + \int_0^B |f' - \ell|\right) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\frac{1}{x}\left(|f(0)| + \int_0^B |f' - \ell|\right)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe $B' > B$ tel que

$$\forall x > B', \qquad \frac{1}{x}\left(|f(0)| + \int_0^B |f' - \ell|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dès lors, pour $x > B'$, on a

$$\left|\frac{1}{x} f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela démontre que

$$\boxed{x \longmapsto f(x)/x \text{ tend vers } \ell \text{ en } +\infty.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [∘]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leqslant f(0)\exp\Big(x\frac{f'(0)}{f(0)}\Big)\cdot$$

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax},$$

où

$$a = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

La fonction φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\varphi'(x) = \big(f'(x) - f(x)a\big)\,\mathrm{e}^{-ax}$$

et

$$\varphi''(x) = \big(f''(x) - 2f'(x)a + f(x)a^2\big)\,\mathrm{e}^{-ax}\,.$$

Or $a \longmapsto f''(x) - 2f'(x)a + f(x)a^2$ est un trinôme du second degré dont le discriminant $\Delta = 4f'(x)^2 - 4f(x)f''(x)$ est, par hypothèse, positive ou nulle. Donc, comme $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f''(x) - 2f'(x)a + f(x)a^2 \geqslant 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi''(x) \geqslant 0.$$

On en déduit que φ' est une fonction croissante. Or

$$\varphi'(0) = f'(0) - f(0)a = f'(0) - f(0)\frac{f'(0)}{f(0)} = 0,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi'(x) \leqslant 0.$$

On en déduit que φ est une fonction décroissante, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) \leqslant \varphi(0) = f(0)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \leqslant f(0),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leqslant f(0)\exp\Big(x\frac{f'(0)}{f(0)}\Big)\cdot}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\cdot$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \ell f'(0)$.
3. En choisissant $f(x) = \ln(1+x)$, déterminer ℓ.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

donc

$$(u_n) \text{ est croissante.}$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant n\frac{1}{n+1} \leqslant 1,$$

donc

$$(u_n) \text{ est bornée.}$$

On en conclut que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}$$

2. On a

$$f(x) = f'(0)x + \mathcal{O}(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x),$$

où

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)}_{=r_n} = f'(0)u_n + r_n.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ell f'(0).$$

Soit $\alpha > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0;\eta]\,,\ |\varepsilon(x)| \leqslant \alpha/\ell$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/N \leqslant \eta$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, toutes les fractions $1/(n+k)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ sont dans l'intervalle $[0;\eta]$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a

$$|r_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\frac{\alpha}{\ell} = u_n\frac{\varepsilon}{\ell} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre que

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \ell f'(0).}$$

3. Prenons $f(x) = \ln(1+x)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \ln\Big\{\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{n+k}\Big)\Big\} = \ln\Big\{\frac{2n+1}{n+1}\Big\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

ce qui donne, puisque $f'(0) = 1/(1+0) = 1$,

$$\boxed{\ell = \ln 2.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant scindé sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que P' est encore scindé sur $\mathbb{R}$.
   Si on suppose de plus que P est à racines simples, démontrer qu'il en est de même pour P'.
   Ces deux résultats restent-ils vrais sur $\mathbb{C}$?
2. Application : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Démontrer que P ne peut posséder deux coefficients consécutifs nuls.

1. Notons $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ les racines de P et $m_1,\dots,m_r$ leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme P est supposé scindé, on a $m_1+\cdots+m_r = \deg(P)$. Les éléments $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ sont racines de multiplicités respectives $m_1-1,\dots,m_r-1$. Par ailleurs, En appliquant le théorème de Rolle à P entre α_k et α_{k+1} pour tout $k \in [\![1;r-1]\!]$, on justifie l'existence de $\beta_k \in]\alpha_k;\alpha_{k+1}[$ racine de P'. Ces β_k sont distincts entre eux et distincts des $\alpha_1,\dots,\alpha_r$. On a ainsi obtenu au moins $m_1-1+\cdots+m_r-1+r-1 = m_1+\cdots+m_r-1 = \deg(P)-1$ racines de P'. Or $\deg(P') = \deg(P)-1$, donc P' est scindé. En conclusion,

$$\boxed{\text{le polynôme dérivé d'un polynôme réel (non constant) scindé sur } \mathbb{R} \text{ est encore scindé sur } \mathbb{R}.}$$

Lorsque P est scindé à racines simples, le raisonnement ci-dessus fournit $\deg(P)-1$ racines simples de P' (les $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$), donc P' est également à racines simples. Ainsi,

$$\boxed{\text{le polynôme dérivé d'un polynôme réel (non constant) scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ est encore scindé à racines simples sur } \mathbb{R}.}$$

Sur $\mathbb{C}$, d'après le théorème de d'Alembert–Gauß, tout polynôme est scindé, donc

$$\boxed{\text{le polynôme dérivé d'un polynôme complexe (non constant) scindé sur } \mathbb{C} \text{ est encore scindé sur } \mathbb{C}.}$$

Par contre, sur $\mathbb{C}$, on peut perdre le caractère « à racines simples » ! Par exemple le polynôme X^n-1 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les éléments de $\mathbb{U}_n$) mais son polynôme dérivé nX^{n-1} n'est pas à racines simples ! Donc

$$\boxed{\text{le polynôme dérivé d'un polynôme complexe (non constant) à racines simples sur } \mathbb{C} \text{ n'est pas toujours à racines simples sur } \mathbb{C}.}$$

Remarque : Tout cela parce que Rolle ne marche pas dans $\mathbb{C}$!

2. D'après la question précédente, P et toutes ses dérivées sont scindés à racines simples. Or si les coefficients a_k et a_{k+1} de P sont tous les deux nuls (avec $k \in [\![0;\deg(P)]\!]$), le polynôme $P^{(k)}$ n'a ni monôme constant ni monôme de degré 1 donc il est divisible par X^2, ce qui prouve que 0 est racine double : absurde ! Donc

$$\boxed{\text{un polynôme réel scindé à racines simples ne peut avoir deux coefficients consécutifs égaux.}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [○] (Polynômes de Legendre)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P=(X^2-1)^n$. Démontrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Comme 1 et -1 sont racines de multiplicité n de P, on a $P^{(k)}(-1)=P^{(k)}(1)=0$ pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$.

D'après Rolle, P' admet une racine α_1^1 dans $]-1;1[$.

D'après Rolle, P'' admet une racine α_1^2 dans $\left]-1;\alpha_1^1\right[$ et une racine α_2^2 dans $\left]\alpha_1^1;1\right[$.

D'après Rolle, P''' admet une racine α_1^3 dans $\left]-1;\alpha_1^2\right[$, une racine α_2^3 dans $\left]\alpha_1^2;\alpha_2^2\right[$ et une racine α_2^3 dans $\left]\alpha_2^2;1\right[$.

Etc.

On constate ainsi que $P^{(n)}$ admet n racine distinctes. Comme $\deg(P^{(n)})=2n-n=n$, on en déduit que

$$\boxed{P^{(n)} \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆] (Rolle généralisé)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$.

1. Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;+\infty[$ et dérivable sur $]a;+\infty[$ qui admet en $+\infty$ une limite égale à $f(a)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admet en $+\infty$ et $-\infty$ une même limite finie. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.
3. Soit $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a;b[$ telle que $\lim_{a^+} f = \lim_{b^-} f = +\infty$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

1. Supposons que f ne soit pas constante (cas évident). Il existe donc $x_1 \neq a$ tel que $f(x_1) \neq f(a)$. Supposons par exemple que $f(x_1) > f(a)$. Il existe $A > a$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \geqslant A) \implies \big(f(x) < f(x_1)\big)$. La fonction f est continue donc majorée sur $[a, A]$ par le nombre réel $m = \max_{[a,A]} f$ et ce maximum est atteint en au moins un point $c \in [a;A]$. Notons que $f(c) \geqslant f(x_1)$ puisque $x_1 \in [a, A]$. Ainsi f est majorée sur $[a;+\infty[$ par m et ce maximum est atteint en c. On a $c > a$ puisque $f(c) \geqslant f(x_1) > f(a)$. Par conséquent, en c, la dérivée de f s'annule.
2. A faire.
3. A faire.

♦ **Exercice 12.** [⋆] (Règle de l'Hôpital)

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$. Justifier que $g(a) \neq g(b)$ et démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. Soient I un intervalle et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. On considère $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I qui admettent chacune une limite finie en x_0. Ces limites sont notées $f(x_0)$ et $g(x_0)$, même lorsque $x_0 = \pm\infty$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose enfin que f'/g' admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en x_0. Justifier que $\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ g(x) \neq g(x_0)$ et démontrer la *règle de L'Hôpital* :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
3. Applications
   a) Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \big(x - \sin(x)\big)/x^3$.
   b) Démontrer que si f et g sont dérivables au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et nulles en x_0 alors $\big(f' = o_{x_0}(g')\big) \Longrightarrow \big(f = o_{x_0}(g)\big)$.

1. Supposons que $g(a) = g(b)$. Toutes les conditions sont alors réalisées pour appliquer le théorème de Rolle d'où l'existence de $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$: contradiction ! Donc
$$\boxed{g(a) \neq g(b).}$$
Soit $\varphi(x) = \{f(a) - f(b)\}g(x) - \{g(a) - g(b)\}f(x)$. La fonction φ est continue sur $[a;b]$ comme somme de telles fonctions. De même, φ est une fonction dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]a;b[$. De plus, $\varphi(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = \varphi(b)$. On a donc, selon le théorème de Rolle, l'existence d'un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire
$$\big(f(a) - f(b)\big)g'(c) - \big(g(a) - g(b)\big)f'(c) = 0$$
ou encore
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
En conclusion,
$$\boxed{\text{il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.}$$
2. <u>Premier cas : x_0 est fini</u>
La question précédente nous dit que, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a $g(x) \neq g(x_0)$ et qu'il existe c_x strictement compris entre x et x_0 telle que
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$
L'axiome du choix nous dit que l'on obtient ainsi une application $x \longmapsto c_x$ qui, d'après le théorème des gendarmes, tend vers x_0 lorsque x tend vers x_0. Dès lors, le théorème de composition des limites nous dit que
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
et donc que
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
<u>Second cas : $x_0 = \pm\infty$</u>
Il suffit d'adapter le résultat de la question 1 avec $b = \pm\infty$, ce qui nécessite d'utiliser la généralisation du théorème de Rolle vue dans l'exercice 11.
<u>Conclusion :</u>

On a ainsi démontré la règle de l'Hôpital[(†)]

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

3. a) D'après la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2}.$$

Or $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.}$$

b) La règle de l'Hôpital dit que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

donc si f'/g' tend vers 0 en x_0, alors il en va de même de f/g. Donc

$$\boxed{\big(f' = \mathcal{O}_{x_0}(g')\big) \Longrightarrow \big(f = \mathcal{O}_{x_0}(g)\big).}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

1. Soit $c > b$. Démontrer qu'il existe une nombre réel $d \in\ ]a;b[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse d coupe l'axe des x en $(c, 0)$.
2. On suppose de plus que f dérivable en a et $f'(a) = 0$. Démontrer qu'il existe $d \in\ ]a;b[$ tel que la tangente de f au point d'abscisse d coupe l'axe des x en $(a, 0)$.

1. On cherche $d \in\ ]a;b[$ tel que la tangente au point d'abscisse d, qui est d'équation $y = f'(d)(x - d) + f(d)$, passe par le point $(c, 0)$. Donc, il faut et suffit que d soit choisi dans $]a;b[$ tel que $f'(d)(c-d) + f(d) = 0$, ce qui est équivalent à
$$g'(d) = 0 \qquad \text{où} \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x-c}.$$
Il suffit donc d'appliquer le théorème de Rolle à g entre a et b.
2. On utilise cette fois la fonction
$$h(x) = \frac{f(x)}{x-a}.$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\star$]
Soit $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f(x)$ et $xf'(x)$ admettent des limites finies ℓ et ℓ' quand x tend vers 0. Démontrer que $\ell' = 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell' \neq 0$.

Supposons tout d'abord que $\ell' > 0$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel qu'au voisinage de 0, on ait $xf'(x) \geqslant \alpha$. Pour x et $2x$ dans ce voisinage, on peut écrire en vertu du TAF que $f(2x) - f(x) = xf'(c)$ avec c compris entre x et $2x$. Puisque $cf'(c) > \alpha$, on obtient $f(2x) - f(x) \geqslant x\alpha/c \geqslant \alpha/2$. Or, quand x tend vers 0^+, $f(2x) - f(x)$ tend vers $\ell - \ell = 0$. C'est absurde !

De même, supposer $\ell' < 0$ est absurde.

Donc

$$\boxed{\ell' = 0.}$$

(†) Guillaume François Antoine de l'Hôpital, marquis de Sainte-Mesme et comte d'Autremont (1661-1704), officier et mathématicien français, élève de Johann Bernoulli. La règle dite de l'Hôpital est en fait due à ce dernier.

♦ ***Exercice 15.*** [$\star$]

En utilisant $f_x : t \longmapsto (t+1)^x - t^x$, résoudre l'équation (E) : $1^x + 5^x + 6^x = 2^x + 3^x + 7^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} 1^x + 5^x + 6^x = 2^x + 3^x + 7^x &\iff 4^x - 3^x - 2^x + 1^x = 7^x - 6^x - 5^x + 4^x \\ &\iff f_x(3) - f_x(1) = f_x(6) - f_x(4) \\ &\iff \frac{f_x(3) - f_x(1)}{3-1} = \frac{f_x(6) - f_x(4)}{6-4} \end{aligned}$$

La fonction $f_x : t \longmapsto (t+1)^x - t^x = \mathrm{e}^{x\ln(t+1)} - \mathrm{e}^{x\ln t}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis d'une part entre 1 et 3 et d'autre part entre 4 et 6. Cela justifie l'existence de $a \in]1;3[$ et de $b \in]4;6[$ tels que

$$\frac{f_x(3) - f_x(1)}{3-1} = f_x'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{f_x(6) - f_x(4)}{6-4} = f_x'(b),$$

c'est-à-dire, puisque $\forall t > 0,\ f_x'(t) = x(t+1)^{x-1} - xt^{x-1}$,

$$\frac{f_x(3) - f_x(1)}{3-1} = x(a+1)^{x-1} - xa^{x-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{f_x(6) - f_x(4)}{6-4} = x(b+1)^{x-1} - xb^{x-1}.$$

Combinées avec le résultat précédent, ces égalités nous disent qu'il existe $a \in]1;3[$ et $b \in]4;6[$ tels que

$$(E) \iff x(a+1)^{x-1} - xa^{x-1} = x(b+1)^{x-1} - xb^{x-1}.$$

Remarquons que

$$x(a+1)^{x-1} - xa^x = \frac{x(a+1)^{x-1} - xa^x}{(a+1)-a} \qquad \text{et} \qquad x(b+1)^{x-1} - xb^x = \frac{x(b+1)^{x-1} - xb^x}{(b+1)-b}.$$

La fonction $g_x : t \longmapsto xt^{x-1} = x\,\mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis d'une part entre a et $a+1$ et d'autre part entre b et $b+1$. Cela justifie l'existence de $\alpha \in]a;a+1[$ et de $\beta \in]b;b+1[$ tels que

$$\frac{x(a+1)^{x-1} - xa^{x-1}}{(a+1)-a} = g_x'(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \frac{x(b+1)^{x-1} - xb^{x-1}}{(b+1)-b} = g_x'(\beta),$$

c'est-à-dire, puisque $\forall t > 0,\ g_x'(t) = x(x-1)t^{x-2}$,

$$\frac{x(a+1)^{x-1} - xa^{x-1}}{(a+1)-a} = x(x-1)\alpha^{x-2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x(b+1)^{x-1} - xb^{x-1}}{(b+1)-b} = x(x-1)\beta^{x-2}.$$

On notera que, puisque $a \in]1;3[$ et $b \in]4;6[$, on a $]a;a+1[\subset]1;4[$ et $]b;b+1[\subset]4;7[$, donc $\alpha \in]1;4[$ et $\beta \in]4;7[$. Cela nous dit que

$$\alpha \neq \beta.$$

En associant ces égalités avec les résultats précédents, il vient

$$\begin{aligned} (E) &\iff x(x-1)\alpha^{x-2} = x(x-1)\beta^{x-2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha^{x-2} = \beta^{x-2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{(x-2)\ln\alpha} = \mathrm{e}^{(x-2)\ln\beta} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad (x-2)\ln\alpha = (x-2)\ln\beta \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \qquad \text{car } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{0;1;2\}.}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\circ$]

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n). On note φ la limite de cette suite.
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $\varphi - u_n$ par le terme général d'une suite géométrique. En déduire $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de φ à 10^{-3} près.

A faire

♦ ***Exercice 17.*** [$\star$] (Théorème de Darboux)

Soit $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ (avec $a < b$). Nous allons démontrer, de deux manières, que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous $\alpha, \beta \in]a;b[$ tels que $\alpha < \beta$, la fonction f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. C'est le *théorème de Darboux*.

1. Soient $\alpha, \beta \in]a;b[$ tel que $\alpha < \beta$. Démontrer le théorème de Darboux en appliquant le TVI aux applications

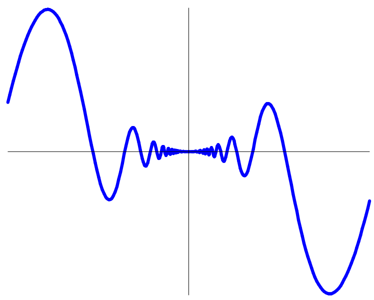
$$\tau_\alpha \left\{ \begin{array}{ccc}]\alpha;\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \tau_\beta \left\{ \begin{array}{ccc} [\alpha;\beta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \end{array} \right.$$

2. Soient $\alpha, \beta \in]a;b[$ tel que $\alpha < \beta$ et $k \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. Démontrer que l'application $\varphi : x \longmapsto f(x) - kx$ n'est pas injective et retrouver ainsi le théorème de Darboux.

Notons tout d'abord que f' n'est pas nécessairement continue. Redonnons l'exemple vu en cours. Prenons la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux. Elle est également dérivable et de dérivée nulle en 0 car $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$. De plus, on a

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{array} \right.$$

donc cette fonction n'est pas continue car $\lim_{n \to +\infty} f'\big(1/(2n\pi)\big) = -1 \neq f'(0)$. Sur le graphique,



on voit qu'il y a clairement une tangente horizontale en 0 (le graphe est compris entre les deux paraboles $y = \pm x^2$), mais les tangentes au graphe aux points d'intersection avec (Ox) ont des pentes qui tendent vers ± 1. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est-elle nécessairement continue.}}$$

1. La continuité de τ_α sur $]\alpha;\beta]$ est assurée par les théorèmes généraux. De plus, la définition du nombre dérivé de f en α permet de voir que $\lim_{x \to \alpha} \tau_\alpha(x) = f'(\alpha)$, ce qui permet de prolonger τ_α par continuité en posant $\tau_\alpha(a) = f'(a)$. On obtient ainsi une fonction τ_a continue sur $[\alpha;\beta]$ telle que $\tau_\alpha(\alpha) = f'(\alpha)$ et $\tau_\alpha(\beta) = \big(f(\beta) - f(\alpha)\big)/(\alpha - \beta)$. Le TVI permet donc d'affirmer que toute valeur comprise entre $f'(\alpha)$ et $\big(f(\beta) - f(\alpha)\big)/(\alpha - \beta)$ est prise au moins une fois par la fonction τ_α. Par ailleurs, le TAF assure que, pour tout $x \in]\alpha;\beta]$, il existe $c_x \in]\alpha;x[$ tel que $\tau_\alpha(x) = f'(c_x)$. Par conséquent, f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\alpha)$ et $\big(f(\beta) - f(\alpha)\big)/(\alpha - \beta)$.

   En utilisant la fonction τ_β, on montre de même que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\beta)$ et $\big(f(\beta) - f(\alpha)\big)/(\alpha - \beta)$.

   En combinant ces deux résultats, on en déduit que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$.

   En conclusion,

$$\boxed{f' \text{ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.}}$$

2. On observe que

$$\varphi'(\alpha)\varphi'(\beta) = \big(f'(\alpha) - k\big)\big(f'(\beta) - k\big) < 0,$$

donc φ n'est pas monotone. Comme φ est continue, un résultat du cours nous dit que φ n'est pas injective. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in]\alpha;\beta[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = k$. Ainsi k est une valeur atteinte par f', ce qui redémontre que

$$\boxed{f' \text{ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.}}$$

♦ ***Exercice 18.*** [○]
Démontrer, à l'aide de la formule de Taylor–Lagrange, que

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \left| x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1) \right| \leqslant \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

D'après la formule de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction $f : t \longmapsto t\ln t$ à l'ordre 2 entre 1 et $x \in [1;+\infty[$, il existe $c_x \in [1;x]$ tel que

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(c_x)}{6}(x-1)^3.$$

Or

$$\begin{aligned} f(t) &= t\ln t \qquad \text{et} \qquad f(1) = 0, \\ f'(t) &= \ln t + 1 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = 1, \\ f''(t) &= \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad f''(1) = 1, \\ f'''(t) &= -\frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad f'''(c_x) = -\frac{1}{{c_x}^2}, \end{aligned}$$

donc

$$x\ln x = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6{c_x}^2}(x-1)^3.$$

Or

$$(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 = (x-1)\Big(1 + \frac{1}{2}(x-1)\Big) = (x-1)\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}(x^2-1),$$

donc

$$x\ln x = \frac{1}{2}(x^2-1) - \frac{1}{6{c_x}^2}(x-1)^3.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \left| x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1) \right| &= \left| \frac{1}{6{c_x}^2}(x-1)^3 \right| \\ &= \frac{1}{6{c_x}^2}(x-1)^3 \\ &\leqslant \frac{1}{6}(x-1)^3 \qquad \text{car } c_x \geqslant 1. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\forall x \in [1;+\infty[, \qquad \left| x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1) \right| \leqslant \frac{1}{6}(x-1)^3.}$$

♦ ***Exercice 19.*** [⋆]
Déterminer des valeurs approchées de $\sin(31°)$, $\mathrm{e}^{0,1}$ et $\cos(0,1)$ sans utiliser de calculatrice, en précisant à chaque fois une majoration de l'erreur commise.

D'après la formule de Taylor appliquée à sin (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre 30° et 31° à l'ordre 1, il existe $c \in]30°;31°[$ tel que

$$\begin{aligned} \sin(31°) &= \sin(30°) + \cos(30°) \times 1° + \frac{-\sin(c)}{2}(1°)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + \frac{-\sin(c)}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2. \end{aligned}$$

Or

$$\left| \frac{-\sin(c)}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{180}\Big)^2 = \frac{1}{4050} \leqslant \frac{1}{1000},$$

donc

$$\boxed{\frac{180+\pi\sqrt{3}}{360} \text{ est une valeur approchée de } \sin(31°) \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

D'après la formule de Taylor appliquée à exp (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et 0,1 à l'ordre 1, il existe $c \in]0;0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} e^{0,1} &= e^0 + e^0 \times 0,1 + \frac{e^c}{2}(0,1)^2 \\ &= 1 + 0,1 + \frac{e^c}{200}. \end{aligned}$$

Or

$$\left|\frac{e^c}{200}\right| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{200} \leqslant \frac{2}{200} = \frac{1}{100},$$

donc

$$\boxed{1,1 \text{ est une valeur approchée de } e^{0,1} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

D'après la formule de Taylor appliquée à cos (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et 0,1 à l'ordre 2, il existe $c \in]0;0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} \cos(0,1) &= \cos(0) - \sin(0) \times 0,1 + \frac{-\cos(0)}{2}(0,1)^2 + \frac{\sin(c)}{6}(0,1)^3 \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{200} + \frac{\sin(c)}{6000}. \end{aligned}$$

Or

$$\left|\frac{\sin(c)}{6000}\right| \leqslant \frac{1}{6000} \leqslant \frac{1}{1000},$$

donc

$$\boxed{\frac{199}{200} \text{ est une valeur approchée de } \cos(0,1) \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

♦ ***Exercice 20.*** [⋆] (Une suite chaotique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant e - E_n \leqslant e/(n+1)!$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = e - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nu_{n-1} - 1$. Déterminer le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. On perturbe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en modifiant très légèrement son premier terme. Autrement dit, on considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $v_0 = u_0 + \varepsilon$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = nv_{n-1} - 1$. Déterminer, selon ε, le comportement asymptotique de $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons le théorème de Taylor–Lagrange à l'ordre n à la fonction $x \longmapsto e^x$ sur le segment $[0;1]$ (ce qui est licite puisqu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment). Cela fournit l'existence de $c \in]0;1[$ tel que

$$e^1 = e^0 + \frac{e^0}{1!}(1-0) + \frac{e^0}{2!}(1-0)^2 + \cdots + \frac{e^0}{n!}(1-0)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = E_n + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Cela implique que

$$e - E_n = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

On en déduit immédiatement que

$$e - E_n \geqslant 0.$$

Par ailleurs, comme $c \in]0;1[$ et comme la fonction exp est croissante, on a $e^c \leqslant e$, d'où

$$e - E_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}.$$

En combinant ces résultats, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant e - E_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}.}$$

2. Regardons les premiers termes de la suite (u_n). On a

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & \mathrm{e}-1, \\ u_1 & = & 1!(\mathrm{e}-1) - \dfrac{1!}{1!} \\ u_2 & = & 2!(\mathrm{e}-1) - 2! - \dfrac{2!}{2!} \\ u_3 & = & 3!(\mathrm{e}-1) - 3! - \dfrac{3!}{2!} - \dfrac{3!}{3!} \\ u_4 & = & 4!(\mathrm{e}-1) - 4! - \dfrac{4!}{2!} - \dfrac{4!}{3!} - \dfrac{4!}{4!} \\ & & \vdots \end{array}$$

ce qui permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n!(\mathrm{e}-E_n).$$

Initialisation : On a $0!(\mathrm{e}-E_0) = \mathrm{e}-1 = u_0$ donc la propriété est vérifiée au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = n!(\mathrm{e}-E_n)$ et démontrons que cette relation reste valable lorsqu'on passe au rang $n+1$. On a

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & (n+1)u_n - 1 & \text{par définition de } (u_n) \\ & = & (n+1)\big(n!(\mathrm{e}-E_n)\big) - 1 & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)!(\mathrm{e}-E_n) - 1 & \\ & = & (n+1)!\Big(\mathrm{e}-E_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!}\Big) - 1 & \text{par définition de } (E_n) \\ & = & (n+1)!(\mathrm{e}-E_{n+1}) + 1 - 1 & \\ & = & (n+1)!(\mathrm{e}-E_{n+1}), & \end{array}$$

ce qui établit la relation au rang $n+1$.
Conclusion : D'après le principede récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = n!(\mathrm{e}-E_n).}$$

D'après les résultats précédents, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

Il s'ensuit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

3. On procède là encore par récurrence. Pour $n = 0$, la relation est vérifiée puisque, par définition, on a $v_0 = u_0 + \varepsilon = u_0 + \varepsilon.0!$. Si $n \geqslant 0$ est un entier fixé pour lequel on a $v_n = u_n + \varepsilon n!$, on écrit que

$$\begin{array}{rcll} v_{n+1} & = & (n+1)v_n - 1 & \text{par définition de } (v_n) \\ & = & (n+1)\big(u_n + \varepsilon n!\big) - 1 & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)u_n - 1 + \varepsilon(n+1)! & \\ & = & u_{n+1} + \varepsilon(n+1)! & \text{par définition de } (u_n), \end{array}$$

ce qui démontre la relation au rang $n+1$. La principe de récurrence permet alors d'affirmer que la relation est vraie à tout rang, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n + \varepsilon n!}$$

On sait, depuis la question 2, que $\lim u_n = 0$. Lorsque $\varepsilon > 0$, on a $\lim \varepsilon n! = +\infty$ et lorsque $\varepsilon < 0$, on a $\lim \varepsilon n! = -\infty$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \varepsilon > 0, \\ -\infty & \text{si } \varepsilon < 0. \end{cases}}$$

On constate donc que lorsqu'on perturbe (même très légèrement) la suite (u_n), le comportement asymtotique change radicalement puisque l'on passe d'une convergence vers 0 à une divergence (très rapide) vers $\pm\infty$.

♦ ***Exercice 21.*** [⋆]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que, si $|h| \leqslant 1$ (avec $h \neq 0$), on a
$$\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{(x+1)t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
et en déduire que f est dérivable en x et que
$$f'(x) = \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
2. Déterminer l'expression de $f + f'$.

1. Soient $h \in \mathbb{R}^*$ et $t \in [0;1]$. D'après le théorème de Taylor–Lagrange appliqué à la fonction $\varphi(u) = t\,\mathrm{e}^{ut^2}$ (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre x et $x+h$ à l'ordre 1, il existe $c_h \in [x \,\widetilde{;}\, x+h]$ tel que
$$t\,\mathrm{e}^{(x+h)t^2} = t\,\mathrm{e}^{xt^2} + t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}\,h + \frac{t^5\,\mathrm{e}^{c_h t^2}}{2}h^2.$$
Dès lors, on a
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \int_0^1 \frac{t(\mathrm{e}^{(x+h)t^2} - \mathrm{e}^{xt^2})}{h(1+t^2)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{ht^3\,\mathrm{e}^{xt^2} + h^2t^5\,\mathrm{e}^{c_h t^2}/2}{h(1+t^2)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \frac{h}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{c_h t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
c'est-à-dire, lorsque $|h| \leqslant 1$,
$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\Big| &= \Big|\frac{h}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{c_h t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\Big|\\ &\leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{c_h t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{inégalité triangulaire}\\ &\leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{(x+1)t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{car } c_h \leqslant x+1.\end{aligned}$$
Donc, pour $|h| \leqslant 1$ (avec $h \neq 0$), on a
$$\boxed{\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{e}^{(x+1)t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.}$$
Ce résultat nous dit (grace au théorème des gendarmes) que
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Par conséquent,
$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x \text{ et } f'(x) = \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)+f'(x) &= \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^3\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{t(1+t^2)\,\mathrm{e}^{xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{e}^{xt^2}}{2x}\right]_{t=0}^1 & \text{si } x \neq 0 \\ \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_{t=0}^1 & \text{si } x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)+f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

♦ ***Exercice 22.*** [○]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos^3 x, \qquad g(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \qquad h(x) = x^{n-1}\ln x.$$

1. En préambule, démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$.
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(0)}(x) = \cos x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x + 0\pi/2) = \cos x$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Posons $u(x) = \cos(x + n\pi/2)$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = u(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^{(n+1)}(x) = (\cos^{(n)})'(x) = u'(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

en vertu de la formule $-\sin\theta = \cos(\theta + \pi/2)$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\cdot}$$

En vertu des formules d'Euler, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3ix} + 3\,\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-ix} + 3\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3ix} + \mathrm{e}^{-3ix}) + \frac{3}{8}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.}$$

On obtient alors que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

2. La décomposition en éléments simple de g donne, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\cdot$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \\ g''(x) &= \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}, \\ g'''(x) &= -\frac{6}{(x-1)^4} - \frac{6}{(x+1)^4}, \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

$$\boxed{g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.}$$

3. Posons $u(x) = x^{n-1}$ et $v(x) = \ln x$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a, d'après la formule de Leibniz,

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Or on vérifie facilement par récurrence que

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad \forall x > 0, \qquad u^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1}$$

et

$$\forall k \geqslant n, \quad \forall x > 0, \qquad u^{(k)}(x) = 0.$$

On montre tout aussi aisément que

$$\forall x > 0, \qquad v^{(0)}(x) = \ln x$$

et

$$\forall k \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \qquad v^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \qquad h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} + (-1)^{n-1} \Big] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \big[(-1+1)^n + (-1)^{n-1} \big] \\ &= \frac{(n-1)!}{x}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad h^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.}$$

♦ ***Exercice 23.*** [∘] (Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\Big\{ -\dfrac{1}{(x-a)(b-x)} \Big\} & \text{si } x \in \,]a;b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que

$$\forall x \in \,]a;b[\,, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\big((x-a)(b-x)\big)^{2n}} \exp\Big\{ -\frac{1}{(x-a)(b-x)} \Big\}.$$

2. En déduire que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

A faire.

♦ ***Exercice 24.*** [$\circ$]

Démontrer que tan est absolument croissante sur $[0; \pi/2[$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est une fonction positive sur $[0; \pi/2[$.

On pose

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall x \in [0; \pi/2[\,, \quad \tan^{(k)}(x) \geqslant 0.$$

Initialisation : Les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies puisque les fonctions tan et $\tan' = 1 + \tan^2$ sont positives sur $[0; \pi/2[$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons les propriétés $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_n$ vérifiées et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, on a

$$\tan^{(n+1)} = (\tan')^{(n)} = (1 + \tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \geqslant 0,$$

en utilisant la formule de Leibniz. Cela démontre que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence forte permet de conclure que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction tan est absolument croissante sur } [0; \pi/2[.}$$