Corrigé du T.D. EM_8 *Spé MP*[1]

Corr. 1 Propagation dans une ligne bifilaire sans pertes

1. On peut toujours choisir dx suffisamment petit pour satisfaire à la condition d'ARQS d$x \ll \lambda$. En revanche, à l'échelle de la ligne complète, les phénomènes de propagation sont essentiels et ils font justement l'objet de cet exercice !

2. La loi des nœuds impose

$$i(x,t) - i(x+\mathrm{d}x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t)$$

À l'ordre 1 en dx, on en déduit

$$-\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

soit

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \Gamma\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)} \qquad (1)$$

La loi des mailles, quant-à elle, donne

$$v(x,t) - v(x+\mathrm{d}x,t) = \Lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

puis, à l'ordre 1 en dx, on tire la seconde équation de couplage

$$\boxed{-\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = \Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)} \qquad (2)$$

On dérive (1) par rapport à t et (2) par rapport à x, puis on élimine les termes de dérivées croisées avec i, d'où l'équation de propagation de v (de d'Alembert) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$$

De même, en dérivant (1) par rapport à x et (2) par rapport à t, puis en éliminant les termes de dérivées croisées avec v, on tire **la même équation de propagation pour** i.

3. Puisqu'on a une équation de propagation de d'Alembert, on sait qu'elle admet une solution générale de la forme ondes progressives :

$$v(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

En ne considérant que l'onde progressive dans le sens des x croissants, $v(x,t) = f(x-ct)$, l'équation (2) s'écrit

$$\Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -f'(x-ct)$$

qui s'intègre, à x constant (sans oublier la « constante » d'intégration), en

$$i(x,t) = \frac{1}{\Lambda c}\,f(x-ct) + \phi(x)$$

On dérive ensuite cette expression par rapport à t et on compare avec (1) :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c}\,f'(x-ct) + \phi'(x) = -\Gamma\,\frac{\partial v}{\partial t} = \Gamma\,c\,f'(x-ct)$$

donc $\phi'(x) = 0$, ce qui signifie que $\phi(x)$ est en fait une constante, que l'on prend nulle car elle ne décrit pas un phénomène propagatif ! En définitive,

$$i(x,t) = \frac{1}{\Lambda c}\,f(x-ct) = \frac{1}{\Lambda c}\,v(x,t)$$

d'où l'impédance de ligne pour des ondes planes progressives dans le sens des x croissants :

$$\boxed{Z_{\text{opp+}} = \frac{v(x,t)}{i(x,t)} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}$$

Il s'agit d'une constante caractéristique du milieu !

Pour une solution progressive dans le sens des x décroissants, il suffit de changer c en $-c$, d'où

$$\boxed{Z_{\text{opp-}} = \frac{v(x,t)}{i(x,t)} = -\Lambda c = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}$$

Remarque: Cette question peut être résolue plus rapidement en mettant à profit la notion d'analyse de Fourier. Considérons une OPPM se propageant dans le sens des x croissants, et qui s'écrit donc, en notation complexe

$$\underline{v} = \underline{V}\,e^{-i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i} = \underline{I}\,e^{-i(\omega t - kx)}$$

Cette OPPM est solution de l'équation de D'ALEMBERT si $\omega = ck$. L'équation (1), par exemple, donne $k\underline{i} = \omega\Gamma\underline{v}$, et par conséquent

$$\underline{v} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\,\underline{i} \quad \text{puis} \quad v = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\,i \quad \textbf{quelque soit } \omega$$

Ceci est donc vrai pour toute onde progressive vers les x croissants (par superposition d'OPPM). Et on peut faire de même pour les ondes se déplaçant vers les x décroissants.

4. Si une onde plane progressive dans le sens des x croissants se propage, la condition limite en bout de ligne ($x = 0$) impose

$$v(0,t) = R\,i(0,t)$$

alors que la structure même de l'onde impose

$$v(0,t) = Z_{\text{opp+}}\,i(0,t)$$

Par comparaison, on trouve **la condition d'adaptation d'impédance** :

$$\boxed{R = Z_{\text{opp+}}}$$

Dans ce cas, on ne constatera aucune onde réfléchie en bout de ligne et tout se passe comme si la ligne était infinie.

5. Dans le cas envisagé, le court-circuit impose, en $x = 0$, la condition $v(0,t) = 0$ qui est incompatible avec la propagation d'une onde plane progressive dans le sens des x croissants seule (*cf* question précédente). On se doute que cette onde (opp+) incidente crée une **onde réfléchie** (opp-) et $v(x,t)$ correspond à la superposition de ces opp (linéarité). Il est donc judicieux de chercher $v(x,t)$ sous la forme d'une **onde stationnaire** :

$$v(x,t) = B\cos(kx - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$$

On détermine les constantes B, φ et ψ avec les conditions aux limites et la présence d'une opp+ incidente d'amplitude A.

$$v(0,t) = 0 = B\cos\psi\cos(\omega t - \varphi) \quad \text{donne} \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

(On a choisi ce ψ là, ce qui n'est pas restrictif car B n'a pas encore été déterminé…).

Donc $\quad v(x,t) = B\sin kx\cos(\omega t - \varphi)$

soit $\quad v(x,t) = \underbrace{\frac{-B}{2}\sin(\omega t - kx - \varphi)}_{\text{opp+ incidente}} + \underbrace{\frac{B}{2}\sin(\omega t + kx - \varphi)}_{\text{opp- réfléchie}}$

En identifiant l'onde incidente à $v_i(x,t)$, on obtient $B = 2A$ et $\varphi = \pi/2$, d'où

$$\boxed{v(x,t) = 2A\sin kx\sin\omega t}$$

Le courant $i(x,t)$ s'obtient, par exemple, en appliquant les résultats de la troisième question **pour chaque opp séparément**. Puisque

$$v(x,t) = \underbrace{A\cos(\omega t - kx)}_{\text{opp+}}\underbrace{-A\cos(\omega t + kx)}_{\text{opp-}}$$

alors $\quad i(x,t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\,A\cos(\omega t - kx) + \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\,A\cos(\omega t + kx)$

soit

$$\boxed{i(x,t) = 2\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\,A\cos kx\cos\omega t}$$

Ce résultat aurait pu être aussi obtenu par utilisation directe des équations de couplage, bien entendu.

On note que l'on retrouve beaucoup de résultats généraux aux ondes dans cet exercice. Notamment, la somme d'une opp+ et d'une opp- réfléchie de même amplitude conduit à une onde stationnaire. De plus, les nœuds de vibration de i correspondent aux ventres de vibration de v pour l'onde stationnaire (et vice-versa).

Corr. 2 Aspect énergétique de la propagation dans une corde vibrante

1. Voir le cours… On note F_y la projection verticale de la tension en un point de la corde, du morceau de droite sur celui de gauche. On trouve l'équation de couplage

$$\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{avec} \quad F_y = T_0\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

2. L'énergie cinétique par unité de longueur est simplement

$$\boxed{e_K = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

3. Au cours de la transformation, on allonge le fil, initialement au repos entre x et $x+\mathrm{d}x$, de dx à ds avec

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \simeq \mathrm{d}x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$

Le travail à fournir est alors

$$\delta W = T_0\,(\mathrm{d}s - \mathrm{d}x) = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Ce travail fourni est converti en énergie potentielle pour la corde. Par conséquent, par unité de longueur,

$$\boxed{e_P = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

4. On calcule

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e_K}{\partial t} + \frac{\partial e_P}{\partial t} = \mu\,\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0\,\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}$$

Avec les relations de la première question, on tire

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\,F_y\right)$$

soit

$$\boxed{P(x,t) = -\frac{\partial y}{\partial t}\,F_y}$$

On trouve ainsi un **bilan local d'énergie** usuel :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\left(P\,\vec{e_x}\right) = 0$$

$P = -vF_y$ (avec $v = \partial y/\partial t$ vitesse transverse de la corde) représente la puissance transférée de la partie gauche (abscisse $< x$) à celle de droite (abscisse $> x$) de la corde.

5. L'énergie totale E_n dans le mode n est

$$E_n = \int_0^L (e_K + e_P)\,\mathrm{d}x$$

soit $\quad E_n = \frac{1}{2}\,\mu\int_0^L \left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$

donc

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2}{4L}\,T_0\,{A_n}^2}$$

(Pour rappel, $\int_0^L \sin k_n x\,\sin k_m x\,\mathrm{d}x = L\,\delta_{nm}/2$).

L'énergie E_n est constante, indépendante du temps (système idéalisé).

6. Par théorème de superposition, l'équation d'onde étant linéaire, on a

$$y = \sum_1^\infty y_n$$

Par conséquent, les énergies linéiques sont

$$e_K = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mu\left(\sum_1^\infty \omega_n A_n \sin k_n x\cos(\omega_n t + \phi_n)\right)^2$$

$$e_P = \frac{1}{2}\,T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{T_0}{2}\left(\sum_1^\infty k_n A_n \cos k_n x\sin(\omega_n t + \phi_n)\right)^2$$

Après calcul (les termes croisés de développement donnant des intégrales nulles), on trouve

$$\boxed{E = \sum_1^\infty E_n}$$

Ce résultat n'a rien d'évident *a priori* car on ne peut pas superposer des énergies (quadratique) ! Cela veut finalement dire que les modes sont indépendants… Ils n'interfèrent pas entre eux.

Corr. 3 Approche lagrangienne des ondes sonores

Une onde sonore correspond à la propagation d'une surpression $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ dans un fluide : les tranches de fluide se compriment et se dilatent longitudinalement au passage de l'onde sonore.

Soit une tranche de fluide au repos entre x et $x+\mathrm{d}x$. Lors du mouvement, ce système fermé de fluide se retrouve entre $x + \xi(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x,t)$.

1. La masse de la tranche considérée est constante (système fermé) et vaut au repos $\mathrm{d}m = \mu_0\,S\,\mathrm{d}x$. Lors du mouvement,

$$\mathrm{d}m = \mu(x,t)\,\mathrm{d}\tau(x,t)$$

où $\mathrm{d}\tau(x,t)$ est le volume de cette tranche. Or,

$$\mathrm{d}\tau(x,t) = S\left[x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x,t) - x - \xi(x,t)\right]$$

soit $\quad \mathrm{d}\tau(x,t) \simeq S\,\mathrm{d}x\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$

dans l'approximation acoustique. On en tire la masse volumique

$$\mu(x,t) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mu_0}{1 + \dfrac{\partial\xi}{\partial t}} \simeq \mu_0\left[1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right]$$

La **variation de masse volumique** est par conséquent

$$\boxed{\mu_1(x,t) = \mu(x,t) - \mu_0 = -\mu_0\,\frac{\partial\xi}{\partial x}}$$

Or, $\quad \chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = +\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$

donc

$$\boxed{\chi_S\,\frac{\partial p}{\partial t} \simeq \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial\mu_1}{\partial t}}$$

toujours dans l'approximation acoustique. En composant les deux expressions encadrées, et avec $v = \partial\xi/\partial t$, on obtient la première équation de couplage :

$$\boxed{\chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (1)$$

2. Dans l'approche lagrangienne de l'énoncé, on applique la relation fondamentale de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{e_x}$ à la tranche de fluide dans le référentiel galiléen d'étude. On ne garde que les termes d'ordre 1 en dx en se servant de l'approximation acoustique :

$$\mathrm{d}m\,\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{\mathrm{S}\,[p(x+\xi(x,t),t) - p(x+\mathrm{d}x+\xi(x+\mathrm{d}x,t),t)]}_{\text{forces de pression !!}}$$

soit, après développement limité dans l'approximation acoustique,

$$\mathrm{d}m\,\frac{\partial v}{\partial t} \simeq \mathrm{S}\,[p(x+\xi(x,t),t) - p(x+\xi(x,t)+\mathrm{d}x,t)]$$

et, à nouveau par développement limité et à l'ordre le plus bas,

$$\mathrm{d}m\,\frac{\partial v}{\partial t} \simeq -\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial p}{\partial x}$$

On en déduit la seconde équation de couplage :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}} \qquad (2)$$

3. On découple comme d'habitude les équations de couplage (1) et (2) et on trouve les équations de propagation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

avec
$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}}$$

4. On suppose que l'air est un gaz parfait et que l'évolution locale d'une tranche d'air est isentropique. En supposant γ constante, on a la loi de Laplace $\mathrm{PV}^\gamma = \mathrm{C^{te}}$ donc

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} + \gamma\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = 0$$

soit
$$\chi_S = -\frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}\right)_S = \frac{1}{\gamma \mathrm{P}}$$

Alors,
$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{P}}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{RT}}{\mathrm{M}}}}$$

en utilisant l'équation d'état du gaz parfait. Pour l'air, on sait que $\gamma = 1{,}4$ (molécules essentiellement diatomiques), $\mathrm{M} = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$. À $\mathrm{T} = 25\ °\mathrm{C}$,

$$\boxed{c = 346\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

Dans l'hypothèse antérieure de Newton, l'évolution des tranches d'air est supposée isotherme donc on remplace $\mathrm{PV}^\gamma = \mathrm{C^{te}}$ par $\mathrm{PV} = \mathrm{C^{te}}$, ce qui revient à prendre $\gamma = 1$. Ainsi,

$$\boxed{c_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{M}}} = 290\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

En pratique, on mesure une célérité correspondant au cas de Laplace : l'évolution locale est bien isentropique et non isotherme ! Il a fallu très longtemps avant de trouver la solution au problème de l'hypothèse de Newton.

Remarque: On peut montrer que l'hypothèse d'isentropicité est valable si les particules de fluide parcourent une distance ℓ entre deux chocs successifs (appelée libre-parcours moyen) très petite devant la longueur d'onde du son : $\ell \ll \lambda$. Pour un gaz, $\ell \simeq 10\ \mu\mathrm{m}$ et $\lambda \simeq c/\nu \simeq 1$ cm et c'est bien vérifié.

Corr. 4 Approximation des milieux continus

1. La longueur du ressort entre la n^e et la $(n+1)^e$ masse est $a + u_{n+1} - u_n$. L'application de la relation fondamentale de la dynamique à la n^e masse donne, en projection horizontale, dans le référentiel galiléen d'étude,

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{K}\,(a + u_{n+1} - u_n - \ell_0) - \mathrm{K}\,(a + u_n - u_{n-1} - \ell_0)$$

On vérifie que les signes précédents des forces de rappel sont cohérents en imaginant la situation où les ressorts sont de plus en plus allongés. Ainsi, on tire l'équation discrète de propagation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0{}^2\,(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}}$$

Le signe du facteur de u_n est logique, puisque si les $n-1^e$ et $n+1^e$ masses sont fixes, la n^e masse doit osciller harmoniquement !

2. Le titre de l'exercice aide un peu : il s'agit de faire **l'approximation des milieux continus**. Cela suppose que la longueur d'onde caractéristique λ de l'onde qui se propage dans la chaîne est telle que

$$\boxed{\lambda \gg a}$$

Dans ce cas, on peut définir une fonction $u(x,t)$ décrivant le déplacement à l'instant t d'un point de la chaîne, par rapport à sa position x au repos, qui vérifie les propriétés suivantes :

— La fonction $u(x,t)$ correspond à u_n en $x = x_n = n\,a$ (pour tout n), c'est-à-dire
$$u(n\,a,t) = u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{Z}$$

— Entre ces points bien définis, on effectue une prolongement de sorte que $u(x,t)$ soit $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, compte tenu de l'approximation des milieux continus, on a à l'ordre 2 en a :

$$u_{n\pm1}(t) = u(x_n \pm a, t) \simeq \underbrace{u(x_n,t)}_{u_n} \pm a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Injecté dans l'équation discrète de propagation, on trouve la forme continue attendue (équation de d'Alembert) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{où} \quad c = a\,\omega_0}$$

3. Un tel modèle est très utile pour décrire simplement la propagation des ondes sonores longitudinales dans les solides cristallins. Lorsque un plan atomique est excité (par un système piézoélectrique par exemple), alors il entraîne de proche en proche la vibration des plans suivants.
Dans un solide cristallin, on peut modéliser l'interaction entre deux plans atomiques consécutifs par une énergie potentielle harmonique au voisinage de leur position d'équilibre (développement limité d'ordre 2 de l'énergie potentielle véritable en supposant le terme d'ordre 2 non nul). On ne tient pas compte des interactions entre plans plus lointains.
Cela revient à remplacer un plan par sa masse totale m et à traduire l'interaction avec les plans voisins par des ressorts de raideur K.
Dans les solides, la longueur d'onde des ondes sonores audibles (fréquence entre 20 Hz et 20 kHz) est au minimum de l'ordre de

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \simeq \frac{2000}{20000} \simeq 0{,}1\ \mathrm{m} \gg a \simeq 0{,}1\ \mathrm{nm}$$

L'approximation des milieux continus est alors largement vérifiée (on peut même aller bien au-delà des ultrasons de fréquence comprise entre 20 kHz et 200 kHz !).

Remarque: On suppose ici que les plans atomiques ont tous la même masse. Ce n'est pas forcément le cas ; alors, il faut considérer une chaîne linéaire avec des masses pas toutes identiques (alternance de masses m et m' par exemple, à étudier avec deux suites u_n et v_n décrivant leurs déplacements… Bel exercice en perspective…).

Corr. 5 Propagation en présence de forces extérieures volumiques

1. Considérons un brin de corde compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ (faites un beau dessin). Sa masse vaut $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}s \simeq \mu\,\mathrm{d}x$. Il est soumis aux forces $\overrightarrow{\mathrm{T}_g}(x,t)$, $\overrightarrow{\mathrm{T}_d}(x+\mathrm{d}x,t)$ et à la force de Laplace $\overrightarrow{\mathrm{dF}_\mathrm{L}} = \mathrm{I}\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$ qui vaut (compte tenu de l'inclinaison $\alpha(x,t)$ faible sur l'horizontale)

$$\overrightarrow{\mathrm{dF}_\mathrm{L}} \simeq \mathrm{I_0\,B_0}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)\,\left[\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y}\right]$$

soit
$$\overrightarrow{\mathrm{dF}_\mathrm{L}} = \mathrm{I_0\,B_0}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_z}$$

L'abscisse x du brin de corde restant constante (mouvement **transverse**), son accélération vaut $\partial^2 z/\partial t^2\,\overrightarrow{e_z}$ et la relation fondamentale de la dynamique sur le brin donne, compte tenu du principe d'action et de réaction ($\overrightarrow{\mathrm{T}_g} = -\overrightarrow{\mathrm{T}_d}$) :

$$\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{\mathrm{T}_d}(x,t) + \overrightarrow{\mathrm{T}_d}(x+\mathrm{d}x,t) + \mathrm{I_0\,B_0}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_z} \qquad (\mathrm{E})$$

On note $\mathrm{T}(x,t) = ||\overrightarrow{\mathrm{T}_d}(x,t)||$ et on projette (E) sur $\overrightarrow{e_x}$, d'où

$$0 = \mathrm{T}(x+\mathrm{d}x,t)\,\cos\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - \mathrm{T}(x,t)\,\cos\alpha(x,t)$$

Or, $|\alpha| \ll 1$, donc on en déduit que

$$\mathrm{T}(x+\mathrm{d}x,t) = \mathrm{T}(x,t) = \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}$$

où F est une constante qui ne dépend pas non plus du temps puisque la tension est imposée et fixée par l'opérateur à l'extrémité de la corde.
Il reste à projeter (E) sur $\overrightarrow{e_z}$, d'où

$$\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathrm{F}\,[\sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - \sin\alpha(x,t)] + \mathrm{I_0\,B_0}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x$$

Puisque $|\alpha| \ll 1$,

$$\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathrm{F}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{I_0\,B_0}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x$$

En notant que $\alpha \simeq \tan\alpha = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, on trouve une **équation de d'Alembert avec second membre** :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{A}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\cos(\omega t)}$$

où
$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{I_0\,B_0}}{\mu}}$$

2. On injecte la solution proposée, et on trouve la condition de validité

$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}}{\left(\dfrac{\pi c}{\mathrm{L}}\right)^2 - \omega^2}}$$

Lorsque $\omega \to \omega_1 = \dfrac{\pi c}{\mathrm{L}}$, $\mathrm{C} \to \infty$! Il y a **résonance** (prévisible car ω_1 est la pulsation du mode propre fondamental !).
En réalité, la résonance n'est pas infinie en raison des frottements avec l'air. De plus, l'hypothèse de calcul $|\alpha| \ll 1$ n'est alors plus valable…

3. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est défini sur $[0,\mathrm{L}]$ et nul en $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$. Il peut être mathématiquement étendu à tout l'espace sous la forme d'une fonction de période 2L et impaire.
Son développement en série de Fourier s'écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n\,\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}\right)\,\overrightarrow{e_y}$$

La vibration $z(x,t)$ de la corde est donc solution d'une équation de d'Alembert dont le second membre est une somme des contributions de Laplace dues aux harmoniques $\overrightarrow{\mathrm{B}_n}$ de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$. La vibration $z(x,t)$ est alors la superposition des solutions particulières correspondant à chaque terme issu de $\overrightarrow{\mathrm{B}_n}$, puisque l'équation de propagation est **linéaire** ! Ces solutions s'obtiennent en remplaçant L par L/n dans les calculs de la deuxième question. Chacune de ces solutions particulières donne lieu à un phénomène de **résonance** lorsque ω tend vers $\omega_n = n\pi c/\mathrm{L}$.
Bref, dans cette situation, il y a résonance à chaque fois que la pulsation d'excitation tend vers l'une des pulsations propres de la corde, ce qui est général !