INTÉGRATION

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Déterminer une primitive de $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ sur $[-2;+\infty[$.

La fonction f étant continue sur $[-2;+\infty[$, elle admet sur cet intervalle une primitive que l'on note

$$F(x)=\int^x \sqrt{2+\sqrt{2+t}}\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque $x\in\,]-2;+\infty[$, effectuons le changement de variable $u=\sqrt{2+\sqrt{2+t}}$. Sur $]-2;+\infty[$, ce changement de variable est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\sqrt{2+t}}\,\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2+t}}}=\frac{1}{4(u^2-2)u}.$$

Par suite, on a

$$\sqrt{2+\sqrt{2+t}}\,\mathrm{d}t=4u^2(u^2-2)\,\mathrm{d}u,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F(x) &= 4\int^{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}(u^4-2u^2)\,\mathrm{d}u=4\Big[\frac{u^5}{5}-2\frac{u^3}{3}\Big]^{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} \\ &= 4\Big(\frac{1}{5}(2+\sqrt{2+x})-\frac{2}{3}\Big)(2+\sqrt{2+x})\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+k \qquad (k\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

On constate que cette formule reste valable pour $x=-2$ par continuité de F, donc

$$\boxed{\forall x\geqslant -2,\qquad F(x)=4\Big(\frac{1}{5}(2+\sqrt{2+x})-\frac{2}{3}\Big)(2+\sqrt{2+x})\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+k \qquad (k\in\mathbb{R}).}$$

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]
1. Soient $a>0$ et $f:[0;a]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x\in[0;a]\,,\ f(a-x)=f(x)$.
   a) Interpréter graphiquement la propriété $\forall x\in[0;a]\,,\ f(a-x)=f(x)$.
   b) Démontrer que
   $$\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Déterminer les valeurs de
$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

1. a) La propriété $\forall x\in[0;a]\,,\ f(a-x)=f(x)$ signifie que

   $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse } a/2.}$

   b) Il suffit de poser le changement de variable $u=a-x$.
2. A faire.

✠ ***Exercice 3.*** [$\star$]
Soient a et b tels que $0 < a < b$. Démontrer que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln\frac{b}{a}$$

Indication : On pourra intégrer par parties et encadrer...

A faire.

✠ ***Exercice 4.*** [$\star$] (Démonstration géométrique de l'inégalité de Hölder)
Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $1/p + 1/q = 1$.

1. Démontrer que $p \in]1, +\infty[$, $q \in]1, +\infty[$ et $(p-1)(q-1) = 1$.
   Dans la suite, on suppose, quitte à échanger p et q, que $p \in]1, 2[$.
2. On pose, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\gamma(x) = x^{p-1} \qquad \text{et} \qquad \delta(x) = x^{q-1}.$$

   a) Calculer $\gamma \circ \delta$ et $\delta \circ \gamma$. Tracer alors, sur un même graphe, les courbes des fonctions γ et δ. Pour $(u, v) \in {\mathbb{R}_+}^2$, hachurer les aires correspondant aux valeurs des fonctions

$$\Gamma(u) = \int_0^u \gamma(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Delta(v) = \int_0^v \delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) À l'aide d'un argument géométrique, en déduire que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+, \qquad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\cdot$$

3. Démontrer que pour tout couple (f, g) de fonctions continues et strictement positives sur un segment $[a, b]$, on a l'inégalité, dite de Hőlder,

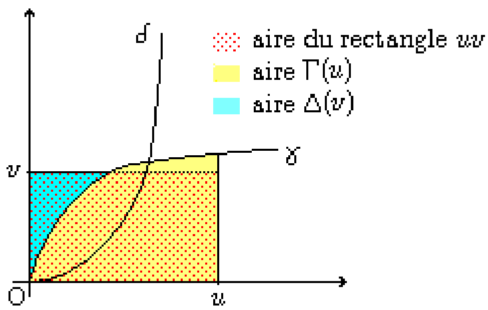
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b g(t)^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

4. Qu'obtient-on dans le cas $p = 2$?

1. AQT
2. a) On trouve

$$\boxed{\gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}.}$$

   Il s'ensuit que la courbe de γ est la symétrique de celle de δ par rapport à la droite $y = x$, ce qui donne



   b) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}_+$. En comparant sur le dessin l'aire du rectangle en pointillés rouges d'aire uv et la somme des aires jaunes et bleues correspondant aux valeurs des fonctions Γ et Δ, on obtient

$$uv \leqslant \Gamma(u) + \Delta(v).$$

   Or

$$\Gamma(u) = \frac{u^p}{p} \qquad \text{et} \qquad \Delta(v) = \frac{v^q}{q}\cdot$$

donc

$$\boxed{\forall u \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0, \qquad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.}$$

3. Prenons
$$u = \frac{f}{\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{g}{\left(\displaystyle\int_a^b g(t)^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}}$$
dans l'inégalité de la question précédente de sorte que
$$\frac{f}{\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}} \frac{g}{\left(\displaystyle\int_a^b g(t)^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{f}{\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{g}{\left(\displaystyle\int_a^b g(t)^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}}\right)^q,$$
puis intégrons cette inégalité sur $[a;b]$:
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\displaystyle\int_a^b g(t)^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t} + \frac{1}{q}\frac{\displaystyle\int_a^b g(t)^q\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)^q\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Il s'ensuit que
$$\boxed{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b g(t)^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.}$$

4. Dans le cas $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

✠ ***Exercice 5.*** [$\star$]

On pose
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$$

1. Justifier l'existence de f. Quelle est sa régularité ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide d'un encadrement de $f(x)$ pour $x > 0$, déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Préciser également la limite de $f(x)/x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on graphiquement ?

1. Soit $x > 0$. On a $\forall t \in [x;2x]$, $1 + t^2 > 1$ donc $\forall t \in [x;2x]$, $\ln(1+t^2) \neq 0$. La fonction $g : t \longmapsto 1/\ln(1+t^2)$ est alors continue (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $[x;2x]$ par théorèmes généraux, ce qui justifie l'existence de l'intégrale définissant f. Ainsi,
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$
Notons G une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que G soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall x > 0$, $f(x) = G(2x) - G(x)$, on en déduit, d'après les théorèmes généraux, que
$$\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Avec les notations de la questions précédentes, on a
$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$$
donc
$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.}$$
On a
$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad &\iff \quad \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \geqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)} \\ &\iff \quad 2\ln(1+x^2) \geqslant \ln(1+4x^2) \\ &\iff \quad (1+x^2)^2 \geqslant 1+4x^2 \\ &\iff \quad 1 + 2x^2 + x^4 \geqslant 1 + 4x^2 \\ &\iff \quad x^2(x^2-2) \geqslant 0 \\ &\iff \quad x \geqslant \sqrt{2}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]0;\sqrt{2}\right] \text{ et croissante sur } \left[\sqrt{2};+\infty\right[.}$$

3. La fonction $t \longmapsto 1/\ln(1+t^2)$ étant décroissante sur $[x;2x]$ pour tout $x>0$, on a

$$\forall t \in [x;2x]\,, \qquad \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

Il s'ensuit, grace à la croissance de l'intégrale, que

$$\forall x>0, \qquad \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)},$$

c'est-à-dire

$$\forall x>0, \qquad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}.$$

Lorsque x tend vers 0^+, on a

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty,$$

donc, d'après le théorème du gendarme,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les croissances comparées nous disent que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty,$$

donc, toujours d'après le théorème du gendarme,

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

Par ailleurs, on a

$$\forall x>0, \qquad \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)},$$

donc, comme $\lim_{x\to+\infty} 1/\ln(1+4x^2) = \lim_{x\to+\infty} 1/\ln(1+x^2) = 0$, le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique d'axe } (Ox).}$$

✠ ***Exercice 6.*** [$\star$]

Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x>0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que g tend également vers ℓ en $+\infty$.
2. a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. On note encore g le prolongement ainsi obtenu. Préciser $g(0)$.
   b) On suppose que f est dérivable en 0. Démontrer que g est également dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

1. Il s'agit du théorème de Cesaro dans sa version continue.
   On remarque tout d'abord que, pour tout $x > 0$, on a

$$g(x) - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^x \ell\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t)-\ell\big)\,\mathrm{d}t,$$

   ce qui implique, d'après l'inégalité triangulaire, que, pour tout $x > 0$,

$$|g(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de f vers ℓ en $+\infty$ implique l'existence de $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, on ait $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. On peut alors couper l'intégrale en deux morceaux de la façon suivante, ce qui donne, pour tout $x \geqslant A$,

$$\begin{aligned}
|g(x)-\ell| &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t + \frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\cdot
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{x}\underbrace{\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

   donc il existe $B > A$ tel que, pour tout $x > B$,

$$\frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

   Alors, pour tout $x \geqslant B$,

$$|g(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

   On a ainsi démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \geqslant B, \qquad |g(x)-\ell| \leqslant \varepsilon,$$

   c'est-à-dire que

$$\boxed{g \text{ tend vers } \ell \text{ en } +\infty.}$$

2. a) Deux démonstrations pour le prix d'une seule!

   Première méthode:

   La fonction f étant continue sur $[0;+\infty[$, elle admet une primitive F sur $[0;+\infty[$. Alors, pour tout $x > 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{x}\big[F(t)\big]_0^x = \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}\cdot$$

   Comme F est dérivable en 0 (comme toute primitive qui se respecte), on sait que

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0),$$

   donc

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0).$$

   Seconde méthode:

   La fonction f étant continue en 0, elle admet en ce point un développement limité à l'ordre 0 de la forme

$$f(t) = f(0) + o_{t\to 0}(1).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(0)+o_{t\to 0}(1)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(0)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x o_{t\to 0}(1)\,\mathrm{d}t \\ &= f(0) + \frac{1}{x} o_{x\to 0}(x) \\ &= f(0) + o_{x\to 0}(1), \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0).$$

Conclusion :

$$\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } g(0)=f(0).}$$

b) On adapte la seconde méthode de la question précédente.
La fonction f étant dérivable en 0, elle admet en ce point un développement limité à l'ordre 1 de la forme

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + o_{t\to 0}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(0)+f'(0)t+o_{t\to 0}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(0)\,\mathrm{d}t + \frac{f'(0)}{x}\int_0^x t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x o_{t\to 0}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{2}x + \frac{1}{x}o_{x\to 0}(x^2) \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{2}x + o_{x\to 0}(x), \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\boxed{g \text{ dérivable en } 0 \text{ avec } g'(0) = \frac{f'(0)}{2}\cdot}$$

✠ *Exercice 7.* [⋆]

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \exp\left(\frac{i}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. *On pourra introduire la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(x) = x^2 f(x)$ puis démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et conclure en faisant le lien entre f, g et la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(x) = xf(x)$.*
2. Démontrer que la fonction $|f|$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que les fonctions f^2, $\Re\mathrm{e}(f^2)$ et $\Im\mathrm{m}(f^2)$ admettent chacune des primitives sur $\mathbb{R}$ mais que ce n'est pas le cas ni de $\Re\mathrm{e}(f)^2$ ni de $\Im\mathrm{m}(f)^2$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. En 0, le taux d'accroissement de g tend vers 0 donc g est également dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a $g'(x) = 2h(x) - f(x)$ et on vérifie que cette identité persiste en 0. Or la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^*$, comme composée de fonctions continues, et continue en 0 car $\lim_{x\to 0, x\neq 0} h(x) = 0 = h(0)$, donc h admet des primitives en tant que fonction continue de la variable réelle. Dès lors, la fonction $f = 2h - g'$ admet des primitives comme combinaison linéaire de fonctions qui en admettent. Donc

$$\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

2. La fonction $|f|$ est égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$ et vaut 0 en 0. Si cette fonction avait une primitive F, alors la restriction de F à $\mathbb{R}_+^*$ serait de la forme $F(x) = x + k_1$, où $k_1 \in \mathbb{R}$, et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ serait de la forme $F(x) = x + k_2$, où $k_2 \in \mathbb{R}$. Mais F étant continue en 0, on aurait nécessairement $k_1 = k_2 = k$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x + k$ et par conséquent $F'(0) = 1$: absurde ! Donc

$$\boxed{|f| \text{ n'admet pas de primitive sur } \mathbb{R}.}$$

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) = f(x/2)$ donc f^2 admet des primitives car f en admet. Par conséquent, $\Re\mathrm{e}(f^2)$ et $\Im\mathrm{m}(f^2)$ admettent chacune des primitives sur $\mathbb{R}$ qui sont respectivement les parties réelles et imaginaires des primitives de f^2. Par contre, les fonctions $\Re\mathrm{e}(f)^2 = \{|f|^2 + \Re\mathrm{e}(f^2)\}/2 = \{|f| + \Re\mathrm{e}(f^2)\}/2$ et $\Im\mathrm{m}(f)^2 = \{|f| + \Re\mathrm{e}(f^2)\}/2$ n'admettent pas de primitives sinon $|f|$ en aurait. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}f^2,\ \Re\mathrm{e}(f^2) \text{ et } \Im\mathrm{m}(f^2) \text{ admettent chacune des primitives} \\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ mais ce n'est pas le cas ni de } \Re\mathrm{e}(f)^2 \text{ ni de } \Im\mathrm{m}(f)^2.\end{array}}$$

✠ ***Exercice 8.*** [★]

Soient $n \geqslant 0$ et $t \in [-1; 1]$. On pose

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{t + i\sqrt{1-t^2}\cos\theta\}^n \,\mathrm{d}\theta$$

et l'on note

$$f_t(\theta) = t + i\sqrt{1-t^2}\cos\theta.$$

1. Démontrer que

$$|L_n(t)| \leqslant 1.$$

2. On pose

$$c = \sqrt{\frac{1+t}{2}} \qquad \text{et} \qquad s = \sqrt{\frac{1-t}{2}}\cdot$$

a) Démontrer que, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$,

$$f_t(\theta) = (c + is\,\mathrm{e}^{i\theta})(c + is\,\mathrm{e}^{-i\theta}).$$

b) En déduire que, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$,

$$f_t(\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} c^{2n-k-\ell}(is)^{k+\ell}\,\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}.$$

c) En conclure que

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k c^{2n-2k} s^{2k}$$

puis que

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k (1+t)^{n-k}(1-t)^k.$$

3. Démontrer que

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\big[(1-t^2)^n\big].$$

1. On a $|f_t(\theta)| = \sqrt{t^2 + (1-t^2)\cos^2\theta} \leqslant 1$ donc $|L_n(t)| \leqslant 1$ d'après l'inégalité triangulaire.
2. a) Il suffit de développer le terme de droite.
   b) On a

$$\begin{aligned} f_t(\theta)^n &= (c + is\,\mathrm{e}^{i\theta})^n (c + is\,\mathrm{e}^{-i\theta})^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k c^{n-k}(is)^k\,\mathrm{e}^{ik\theta} \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell c^{n-\ell}(is)^\ell\,\mathrm{e}^{-i\ell\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} C_n^k C_n^\ell c^{2n-k-\ell}(is)^{k+\ell}\,\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}. \end{aligned}$$

   c) Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on en déduit que

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^k c^{2n-2k} s^{2k}$$

puis que

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^k (1+t)^{n-k} (1-t)^k,$$

en remplaçant c et s par leurs expressions en fonction de t.

3. Pour démontrer cette égalité, on développe la quantité $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[(1-t^2)^n\right]$ à l'aide de la formule de Leibniz pour retrouver le terme de droite de l'identité précédente.

✠ ***Exercice 9.*** [★] (Une inégalité de Hilbert)

1. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} P(t)^2 \, \mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})^2 \, \mathrm{e}^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

2. Soient $N \geqslant 1$ et $a_1, \ldots, a_N$ des nombres réels. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} \frac{a_n a_p}{n+p+1} \leqslant \pi \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2.$$

1. Lorsque P est le monôme X^n, on a

$$\int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^{2n} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{2n+1}$$

et

$$-i \int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})^2 \, \mathrm{e}^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta = -i \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{i(2n+1)\theta} \, \mathrm{d}\theta = -i \left[\frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)\theta}}{i(2n+1)}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{2n+1},$$

ce qui justifie l'identité demandée. Le cas général en découle par linéarité de l'intégrale. Donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P(t)^2 \, \mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})^2 \, \mathrm{e}^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.}$$

2. Considérons le polynôme $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. On a $P^2 = \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} a_n a_p X^{n+p}$. Une primitive de $t \longmapsto P(t)^2$ est donc

$$t \longmapsto \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} \frac{a_n a_p}{n+p+1} t^{n+p+1}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} \frac{a_n a_p}{n+p+1} = \int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})^2 \, \mathrm{e}^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta = \pi \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} \frac{a_n a_p}{n+p+1} \leqslant \pi \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2.}$$