LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1. Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$S_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}.$$

A. Convergence de (S_n)

0. On souhaite démontrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a
$$\frac{2}{2x-1} < -\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}.$$
Pour cela, on vous demande de démontrer l'inégalité de gauche et d'expliquer sommairement (et sans aucun calcul) comment on procéderait pour démontrer l'inégalité de droite.

1. a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$
et en déduire le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

   b) Démontrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$T_n = S_n\,\mathrm{e}^{-1/(4n)}.$$
   a) Quelle est la limite de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$?

   b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$
et en déduire le sens de variation de $(T_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on dire de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$?

   c) Justifier que $\ell > 0$.

B. Limite de (S_n)

Jusqu'à la question 6, on admet l'existence d'une suite réelle décroissante $(W_n)_{n\geqslant 0}$ telle que
$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

1. Démontrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement positive.
2. a) Démontrer que $W_n \sim W_{n+1}$.

   b) Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de nW_nW_{n-1}.

   c) En déduire un équivalent de W_n quand $n \to +\infty$ et préciser la limite $(W_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Démontrer que, pour tout $p \geqslant 0$,
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
En déduire que
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p+1}(p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = \pi.$$

4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général ${S_n}^4/{S_{2n}}^2$.
5. Déterminer ℓ et en déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

6. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t.$$

   Démontrer que $(W_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie toutes les hypothèses faites au début de cet énoncé (décroissance, valeurs de W_0 et W_1, relation de récurrence).