

Corr. 1 Charges entre deux plans

1. Le problème présente suffisamment de symétries pour pouvoir être traité rapidement en passant par le théorème de Gauss ! Tout plan contenant \vec{e}_z est de symétrie positive pour

les charges donc \vec{E} est suivant \vec{e}_z en tout point. De plus, il y a invariance parallèlement à xOy donc on sait déjà que

$$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z \text{ et } V = V(z).$$

De plus, on prévoit que $E(-z) = -E(z)$ car le plan $z = 0$ est de symétrie positive des charges : $E(z)$ est impaire et $V(z)$ est paire. On met à profit ceci en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de section S , d'axe parallèle à (Oz) et fermé en z et en $-z$. Il y a plusieurs cas à envisager suivant la valeur de z par rapport à $e/2$. On trouve aisément

$$\vec{E}(|z| \leq e/2) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(|z| \geq e/2) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \frac{|z|}{z} \vec{e}_z$$

Il y a continuité du champ électrique en $\pm e/2$ puisqu'il n'y a pas de charges surfaciques (accord avec la relation de passage pour le champ électrique normal)...

Le potentiel $V(z)$ s'obtient par intégration de $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, soit

$$V(z) = -\int_0^z E(z) dz + V(0)$$

Le calcul, élémentaire, donne, compte tenu de la continuité de V en $\pm e/2$,

$$V(|z| \leq e/2) = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + V(0)$$

$$\text{et } V(|z| \geq e/2) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} |z| + V(0) + \frac{\rho e^2}{8\epsilon_0}$$

On ne peut pas connaître $V(0)$ (distribution avec des charges à l'infini !) mais ce n'est pas gênant, le champ électrique restant quand même unique. Notez que l'on aurait pu obtenir directement \vec{E} et V par intégration des lois locales $\text{div} \vec{E}(\vec{M}) = \frac{\rho(\vec{M})}{\epsilon_0}$

et $\Delta V(\vec{M}) = -\frac{\rho(\vec{M})}{\epsilon_0}$ en coordonnées cartésiennes...

2. Une rondelle de surface dS du plan d'épaisseur e a un volume $dV = dS e$ et une charge $dQ = \rho dS e$. On en déduit la charge surfacique suivante, au lieu de la rondelle,

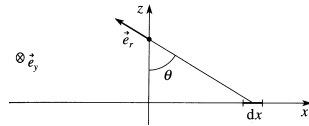
$$\sigma = \rho e$$

Cette charge surfacique est uniforme (ce qui était évident). L'expression du champ électrique devient alors

$$\vec{E}(|z| \leq e/2) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0 e} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(|z| \geq e/2) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|z|}{z} \vec{e}_z$$

3. Lorsque $e \rightarrow 0$ avec σ restant fixée (ρ diverge donc), on constate que le champ électrique extérieur au plan garde la même expression que précédemment. Dans ce cas, on retrouve le champ connu créé par un plan infini chargé uniformément en surface. On vérifie aussi que le champ (normal) est discontinu au passage de l'interface chargée et cette discontinuité vaut bien σ/ϵ_0 , en accord avec la relation de passage sur le champ électrique normal.

4. Le plan (xOy) chargé avec une densité surfacique uniforme σ est constitué d'une infinité de fils parallèles à l'axe (Oy) de largeur dx . Le schéma est une coupe plane de ce système et on étudie le cas $z > 0$ (l'autre cas est symétrique) :



Un tronçon de longueur h du « fil » élémentaire de largeur dx porte une charge $dQ = \sigma dx = \sigma h dx$. Sa charge linéique (infinitésimale) est par conséquent

$$d\lambda = \sigma dx$$

D'après l'expression du champ créé par un fil infini, il crée en M un champ

$$d\vec{E}(M) = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

On ne retient que la composante E_z du champ puisque le champ total est suivant \vec{e}_z d'après les propriétés de symétrie (cela évite une intégration pénible avec vecteur mobile !) :

$$dE_z(M) = \frac{\sigma \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r} dx$$

On choisit de retenir pour l'intégration la variable angulaire θ (calcul plus facile). Puisque

$$r = \frac{z}{\cos \theta} \quad x = z \tan \theta \quad dx = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta$$

on tire

$$dE_z(M) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\theta$$

L'intégration pour θ variant de $-\pi/2$ à $\pi/2$ redonne bien le champ créé par le plan pour $z > 0$. C'est gagné.

Corr. 2 Détermination d'une répartition de charges

1. Soit la sphère de Gauss de centre O et de rayon $r < R$. Le flux sortant de cette sphère est, puisque $\vec{E} = E_0 \vec{e}_r$,

$$\Phi = 4\pi r^2 E_0$$

D'après le théorème de Gauss, on a

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(u) 4\pi u^2 du$$

Ainsi,

$$4\pi r^2 E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(u) 4\pi u^2 du$$

Une mini-astuce de calcul consiste à dériver cette relation par rapport à r , d'où

$$8\pi r E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) 4\pi r^2$$

ce qui donne la répartition recherchée

$$\rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}$$

2. La charge totale de la sphère s'obtient en calculant $Q_{\text{int}}(r=R)$ compte tenu de $\rho(r)$ trouvé. On obtient aisément

$$Q = \epsilon_0 E_0 4\pi R^2$$

Une façon plus rapide consiste à appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon R (on est assuré de la continuité du champ puisqu'il n'y a pas de charges surfaciques). On obtient alors directement le résultat précédent.

Enfin, pour $r > R$, le théorème de Gauss donne accès directement au champ extérieur :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{E_0 R^2}{r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Ce champ pouvait être donné immédiatement car on sait qu'une distribution de charges bornée, de charge Q , et à symétrie sphérique crée en son extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle Q placée en son centre de symétrie...

Corr. 3 Tronc de cône

Pour décrire un point du cône, il est plus simple d'utiliser les coordonnées **sphériques** d'axe (Oz) ($\text{cf } \theta = \alpha$). On note aussi que le problème n'est pas soluble via le théorème de Gauss (on ne connaît pas l'orientation du champ sur toute une surface fermée de l'espace). Celui-ci ne donne qu'une équation insuffisante.

Néanmoins, on exploite la symétrie Π^+ des sources par rapport aux plans contenant l'axe (Oz) , ce qui montre que

$\vec{E}(O) = E_z \vec{e}_z$. Ceci permet de calculer uniquement E_z via la loi de Coulomb du champ projetée, **sans avoir à intégrer de vecteur** ! Soit

$$E_z = \iint_{\text{cône}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}{r^2}$$

Puisque $dS = r \sin \alpha dr d\varphi$, le calcul donne finalement

$$\vec{E}(O) = -\frac{\sigma \cos \alpha \sin \alpha}{2\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \vec{e}_z$$

Corr. 4 Tunnel en ligne droite

1. On commence par déterminer le champ gravitationnel dans le tunnel en utilisant l'analogie avec l'électrostatique. Le champ créé dans une sphère chargée Q uniformément en volume, et de rayon R , est

$$\vec{E}(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

Ce résultat, démontré en cours, s'obtient par exploitation des symétries, puis du théorème de Gauss. L'analogie électrostatique-gravitation conduit alors à

$$\vec{\mathcal{G}}(r < R) = -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r \quad \text{où} \quad g_0 = \frac{GM}{R^2} \text{ (au sol)}$$

Ensuite, on applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe (Ax) du tunnel :

$$m\ddot{x} = m\mathcal{G}(r) \sin \theta$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires du wagon dans le plan (ABO) (en prenant $\theta = 0$ et $x = 0$ pour le wagon à mi-parcours). Alors, avec $r \sin \theta = x$, on tire

$$\ddot{x} = -\frac{g_0}{R} x$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique** de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

et la durée du trajet AB est égale à une demi-période, soit

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

2. La durée du trajet est indépendante de la distance ! Cela vient du fait que l'on néglige les frottements... Dans les deux cas, on obtient une durée de voyage de **42 minutes**.

On vérifie que la mécanique relativiste n'était pas à considérer puisque, pour une distance maximale de $2R_T \simeq 13000$ m, l'ordre de grandeur de la vitesse du wagon est de $5000 \text{ m.s}^{-1} \ll c \dots$

Corr. 5 Dipôles répartis entre deux plans parallèles

1. Puisque $AM = r/\sin \alpha$, la formule du potentiel dipolaire

$$dV = \frac{dp \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 AM^2}$$

donne

$$dV = \frac{P d\tau \cos \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2. On suppose d'abord que $h > e/2$. Dans ce cas, $d\tau = r dr d\theta dz$ et $r = \tan \alpha (h - z)$, d'où $dr = (h - z) d\alpha / \cos^2 \alpha$, soit

$$dV = \frac{P \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta dz$$

$$\text{Alors, } V(h > e/2) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{P \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta dz$$

Ainsi,

$$V(h > e/2) = \frac{Pe}{2\epsilon_0}$$

et ce potentiel uniforme (non nul à l'infini car des dipôles se trouvent à l'infini !) est associé à un champ nul :

$$\vec{E}(h > e/2) = \vec{0}$$

Le plan d'antisymétrie des dipôles xOy assure l'antisymétrie du potentiel et du champ donc

$$V(h < -e/2) = -\frac{Pe}{2\epsilon_0}$$

et

$$\vec{E}(h < -e/2) = \vec{0}$$

(Le calcul direct, comme précédemment avec $-\cos \alpha$ au lieu de $\cos \alpha$ conduit aux mêmes résultats évidemment). Enfin, il reste à envisager le cas intermédiaire $|h| < e/2$. Dans ce cas, la tranche d'épaisseur $e/2 - h$ située « au-dessus » de M crée en ce point le potentiel

$$V_1(M) = -\frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{e}{2} - h \right)$$

et la tranche située « au-dessous » créée en ce point M le potentiel

$$V_2(M) = \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{e}{2} + h \right)$$

La superposition (linéarité !) permet de conclure :

$$V(|h| < e/2) = \frac{P}{\epsilon_0} h$$

et

$$\vec{E}(|h| < e/2) = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Je vous laisse tracer les représentations du potentiel et de la composante du champ électrique en fonction de h ...

3. On sait qu'un plan, de normale \vec{e}_z , uniformément chargé avec une densité surfacique uniforme σ crée un champ électrique

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le signe change suivant que l'on est au-dessus (+ pour $z > 0$) ou au-dessous (− pour $z < 0$) du plan chargé. Ce plan délimite deux zones de champ uniforme.

La situation des dipôles répartis entre deux plans parallèles étudiée précédemment est par conséquent équivalente au cas

de **deux plans parallèles, de côtes $+e/2$ et $-e/2$ et de charges surfaciques respectives $\sigma_1 = P$ et $\sigma_2 = -P$** . Ces deux plans créent le même champ que dans la question précédente, partout dans l'espace.

Corr. 6 Accrétion d'une étoile

1. On utilise un résultat classique issu de la symétrie sphérique et du théorème de Gauss : \vec{E} et V sont, à l'extérieur et à la surface de rayon r de la sphère chargée Q , égaux au champ créé par une charge ponctuelle Q située en son centre. Ainsi, à la surface,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \quad V = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

2. La force électrostatique est conservative donc le travail associé de l'opérateur est

$$W_{op} = q(V_{final} - V_{initial}) = \frac{q\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

3. On considère un opérateur qui constitue réversiblement la sphère de rayon R par apports successifs de charges formant celle-ci couche par couche (l'épaisseur d'une couche étant dr et son volume $4\pi r^2 dr$). Considérons une étape du processus de construction. Initialement, on a une sphère chargée de rayon r et on a la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ à l'infini. L'opérateur fournit un travail δW_{op} pour amener cette charge sur la sphère pour obtenir l'état final correspondant à la sphère de rayon $r + dr$. On a donc

$$\delta W_{op} = dq \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

Or, le premier principe pour cette transformation s'écrit

$$dU + d\mathcal{E}_c^M + d\mathcal{E}_p = \delta W_{op} + \delta Q$$

$$d'ou \quad d\mathcal{E}_p = \delta W_{op} = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr$$

Par conséquent, par la constitution de toute la sphère, on déduit son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr$$

soit

$$\mathcal{E}_p = \frac{4\rho^2 R^5 \pi}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Ce calcul (archi-classique) donne une énergie potentielle positive. Ce signe est lié au fait que les forces intérieures au système, répulsives, tendent à éloigner les constituants ! Le système est instable !

4. Par l'analogie électrostatique-gravitation, on trouve

$$\mathcal{E}_p = -\frac{3}{5} \frac{GM}{R}$$

Cette fois-ci, l'énergie potentielle est négative. En effet, les interactions gravitationnelles sont attractives et le système est donc stable.

5. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au Soleil entre sa formation et aujourd'hui (en prenant le système fermé) se traduit par

$$\Delta(U + \mathcal{E}_c^M + \mathcal{E}_p) = W + Q$$

Or, ce système ne reçoit aucun travail et les échanges thermiques sont dus au rayonnement ($Q \simeq \mathcal{P} \tau$ avec \mathcal{P} la puissance rayonnée et τ l'âge du Soleil). On néglige dans ce calcul grossier $\Delta(U + \mathcal{E}_c^M)$ (qui se manifeste par la température) et il reste

$$\mathcal{P} \simeq -\frac{\Delta\mathcal{E}_p}{\tau} = \frac{3GM^2}{5R\tau}$$

Numériquement,

$$\mathcal{P} \simeq 1,6.10^{24} \text{ W}$$

6. Même en tenant compte du caractère très grossier du modèle, le compte n'y est pas. En fait, l'énergie de gravitation est « l'allumette » qui permet l'amorçage des réactions de fusion nucléaire (celles-ci ne peuvent démarrer que si la pression et la température, donc l'énergie interne, sont assez élevées).

Corr. 7 Champ de pesanteur au centre d'un lac hémisphérique

1. On utilise dans tout cette question les coordonnées sphériques d'axe \vec{e}_z « rentrant » dans la demi-boule. Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie Π^+ pour les charges,

donc $\vec{E}(O) = E_z(O) \vec{e}_z$. On ne peut pas poursuivre avec le théorème de Gauss car on manque de symétries pour préciser la direction du champ en tout point d'une surface fermée intéressante dans l'espace. Deux méthodes de calculs autres s'offrent à nous :

— Soit on découpe en tranches horizontales d'épaisseur dz la demi-sphère et on somme les champs connus (cours ! !) de ces disques en O :

$$d\vec{E}(O) = -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta) \vec{e}_z$$

Je vous laisse achever cette méthode...

— Soit on fait un calcul direct de $E_z(O)$ par loi de Coulomb projetée sur (Oz) (pour ne pas intégrer de vecteur ! !) dans les coordonnées sphériques (gare aux bornes !) :

$$E_z(O) = \iiint_{\text{demi-boule}} dE_z(O)$$

$$E_z(O) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho \sin\theta \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} dr d\theta d\varphi$$

On trouve

$$\vec{E}(O) = -\frac{\rho R}{4\epsilon_0} \vec{e}_z$$

2. On effectue l'analogie entre électrostatique et gravitation :

$$\vec{E} \iff \vec{\mathcal{G}} \simeq \vec{g} \text{ (champ terrestre ici), } q \iff m, \rho_{\text{charges}} \iff \rho_{\text{masses}} \text{ et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iff -G \text{ (attention au signe !). Ainsi, une}$$

demi-boule de masse créée au centre de sa surface plane le champ

$$\vec{g}_{\text{demi-boule}} = -\pi GR \rho \vec{e}_z$$

où \vec{e}_z « sort », cette fois-ci, de la demi-boule (cf le vecteur de l'énoncé).

Ensuite, on utilise le théorème de superposition (linéarité des équations) en remarquant que :

$$\begin{array}{c} \text{O} \\ \text{P}_0 - \text{P}_1 \\ \text{P}_0 \end{array} + \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{(vide)} \end{array} = \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{P}_0 \\ \text{(sol seul)} \end{array}$$

Les champs en O sont dans l'ordre des cas précédents :

$$\vec{g}_1 \quad \vec{g} = -\pi GR (\rho_0 - \rho_1) \vec{e}_z \quad \vec{g}_0$$

Alors,

$$\Delta g = -\pi GR (\rho_0 - \rho_1) < 0$$

Le signe donné au résultat vient du fait que l'eau est moins dense que le sol. Numériquement,

$$\Delta g = 4,2.10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$$

Cet ordre de grandeur est correct (mesure expérimentale possible).

Corr. 8 Sphère avec répartition surfacique inhomogène

1. Pour montrer que la distribution est dipolaire, il faut s'assurer que sa charge totale est nulle :

$$Q = \oint_{\text{sphère}} \sigma(P) dS = \sigma_0 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\theta a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

Ce résultat était en fait évident puisqu'il y a antisymétrie de la distribution des charges par rapport au plan (xOy) des coordonnées sphériques. Ce même plan d'antisymétrie assure que le moment dipolaire est suivant \vec{e}_z donc on ne calcule que

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_z = \oint_{\text{sphère}} \vec{r} \sigma dS \cdot \vec{e}_z$$

Un cos θ sort de l'expression de σ , et un autre de la projection, soit

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_z = \sigma_0 a^3 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

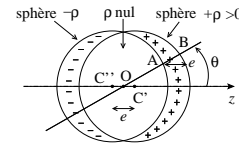
d'où

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 a^3 \vec{e}_z$$

Le moment dipolaire est non nul : la distribution proposée est bien dipolaire.

2. En superposant les deux sphères citées par l'énoncé, on obtient effectivement une sphère avec la bonne répartition de charges (voir figure) à condition que l'épaisseur locale $\eta(\theta) = AB$, comprise entre la sphère $+\rho$ (centre C') et la sphère $-\rho$ (centre C''), vérifie exactement

$$\sigma(\theta) = \lim_{e=C'C'' \rightarrow 0} [\rho \eta(\theta)]$$



Or, à l'ordre le plus bas, les sphères étant décalées de e ,

$$AB = \eta \simeq e \cos\theta$$

Finalement,

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

avec

$$\sigma_0 = \lim_{e \rightarrow 0} [\rho e]$$

3. On a déjà vu le champ créé par une sphère chargée en volume uniformément par ρ volumique et de centre C' . À l'extérieur de cette sphère, ce champ est identique à celui d'une charge ponctuelle en C' et le champ créé par la superposition de deux sphères de ce type est donc un champ de doublet électrostatique, avec le moment dipolaire

$$\vec{p}_e = \frac{4\pi a^3 \rho}{3} \vec{C''C'} = \frac{4\pi a^3 \rho e}{3} \vec{e}_z$$

soit

$$\vec{p} = \lim_{e \rightarrow 0} \vec{p}_e = \frac{4\pi a^3 \sigma_0}{3} \vec{e}_z$$

Bien entendu, il s'agit du moment dipolaire de la sphère équivalente chargée $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. On en déduit, **pour tout point extérieur à la sphère** (car la dimension e du doublet tend vers

zéro, ce qui permet d'appliquer l'approximation dipolaire à tout l'espace) :

$$V_{\text{ext}}(M) = \frac{\rho \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

et

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta]$$

Par contre, à l'intérieur des deux sphères, les expressions des deux champs électrostatiques pour chaque sphère

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{C'M} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{C''M}$$

conduisent par théorème de superposition au champ **uniforme** intérieur, dans la limite $e \rightarrow 0$,

$$\vec{E}_{\text{int}}(M) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$$

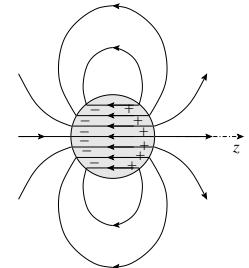
Le potentiel correspondant est

$$V_{\text{int}}(M) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos\theta + C^{\text{te}}$$

La constante se détermine par continuité du potentiel à l'interface $r = a$; on la trouve nulle, d'où

$$V_{\text{int}}(M) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos\theta$$

On représente sur la figure suivante l'allure des lignes de champ. On remarque que la composante normale du champ électrique est discontinue à l'interface $r = a$, ce qui est logique et en accord avec la relation de passage (discontinuité σ/ϵ_0).



Le tracé a été fait pour $\sigma_0 > 0$. Notez bien la différence dans le sens du champ entre l'intérieur et l'extérieur de la sphère. Cela vient de sa discontinuité en $r = a$. Enfin, le champ est orienté des charges positives vers les négatives !

Corr. 9 Deux cercles chargés

1. On commence par calculer le champ \vec{E} sur l'axe pour un **seul** fil circulaire de centre C_1 . D'après la symétrie Π^+ des sources par rapport à tout plan contenant l'axe (Oz), on déduit $\vec{E}_{1 \text{ fil, axe}} = E_{1,z} \vec{e}_z$. Puis, on sait qu'un élément de longueur dl_P en un point P du fil créé en un point M de l'axe la contribution sur (Oz) suivante :

$$dE_{1,z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl_P}{2\pi a} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{e}_z}{PM^3}$$

On intègre ces contributions, en posant $z = \vec{C_1M}_{\text{axe}}$, d'où le champ sur l'axe créé par un seul fil circulaire :

$$\vec{E}_{1 \text{ fil}}(M_{\text{axe}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Enfin, le théorème superposition est applicable, puisque les équations de Maxwell sont linéaires, d'où pour le cas à deux fils

$$\vec{E}_{axe}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - \frac{D}{2}}{((z - \frac{D}{2})^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{z + \frac{D}{2}}{((z + \frac{D}{2})^2 + a^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_z$$

2. On se place (évidemment !) en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Tout plan contenant l'axe (Oz) étant plan de symétrie de la distribution de charges, $E_\theta = 0$. De plus, l'invariance de révolution autour de l'axe (Oz) impose l'indépendance en θ des composantes restantes du champ. Autrement dit

$$\vec{E} = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z$$

Notons que sur l'axe de symétrie la composante E_r est nulle (car tout plan contenant cet axe est plan de symétrie), ainsi

$$E_r(r=0, z) = 0 \quad (0)$$

Au voisinage de l'axe la densité de charges est nulle, donc l'équation de Maxwell-Gauss donne $\text{div } \vec{E} = 0$. L'équation de Maxwell-Faraday, en statique, s'écrit quant à elle $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$. Seule la composante selon \vec{e}_θ de cette équation est non triviale. En utilisant un formulaire, on peut alors montrer que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

L'équation (2) évaluée en $r = 0$, donne alors (en utilisant (0) au passage)

$$\left. \frac{\partial E_z}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial E_r}{\partial z} \right|_{r=0} = \frac{d}{dz} E_r(0, z) = \frac{d}{dz} 0 = 0$$

On en déduit $E_z(r, z) = E_z(0, z) + O(r^2)$

Dit avec des mots, la composante selon z reste quasiment identique à ce qu'elle vaut sur l'axe.

L'équation (1) s'écrit aussi de la façon suivante

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Et comme E_r tend vers 0 quand r tend vers 0, on peut encore écrire cette équation en $r = 0$ sous la forme

$$2 \left. \frac{\partial E_r}{\partial r} \right|_{r=0} + \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{r=0} = 0$$

$$\text{soit encore} \quad \left. \frac{\partial E_r}{\partial r} \right|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

Au final $E_r(r, z) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$

(valable pour r petit, et on peut montrer que les corrections à cette formule sont $O(r^3)$).

Ainsi, on connaît de façon approchée les composantes du champ au voisinage de l'axe, puisqu'on connaît le champ sur l'axe (voir première question).

Corr. 10 Pression au centre de la Terre

Do it yourself !

Corr. 11 Cube conducteur

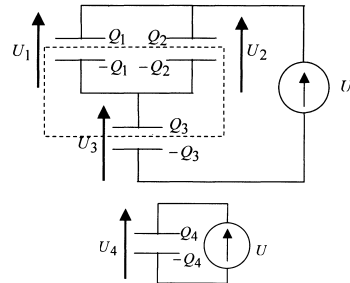
Voilà un exercice qui embête souvent les candidats et qui amuse beaucoup l'examineur... La réponse est en effet très simple si l'on pense au théorème de superposition (vive la linéarité des équations, notamment $\Delta V = 0$).

Par superposition de six états identiques obtenus par permutation de la face de potentiel nul, on obtient un conducteur creux et sans calcul on trouve

$$V(0) = \frac{5}{6} V_0$$

Corr. 12 Système de condensateurs

1. Cas avant le branchement de C_4 :



On a $U_4 = U$ et $Q_4 = CU$

Pour C_1 en parallèle avec C_2 ,

$$U_1 = U_2 \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_2$$

La loi des mailles donne

$$U_1 + U_3 = \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_3}{C} = U$$

et la neutralité de l'ensemble central des armatures au même potentiel se traduit par

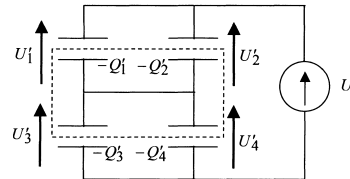
$$-Q_1 - Q_2 + Q_3 = 0$$

Alors $Q_1 + Q_3 = CU$ et $Q_3 = 2Q_1$

On peut conclure sur les charges et tensions **avant branchement** :

$Q_1 = CU/3$	$Q_2 = CU/3$	$Q_3 = 2CU/3$	$Q_4 = CU$
$U_1 = U/3$	$U_2 = U/3$	$U_3 = 2U/3$	$U_4 = U$

Cas après le branchement de C_4 :



Par argument de symétrie, on a directement

$$U_1' = U_2' \quad U_3' = U_4' \quad Q_1' = Q_2' \quad Q_3' = Q_4'$$

La loi des mailles donne

$$U_1' + U_3' = \frac{Q_1'}{C} + \frac{Q_3'}{C} = U$$

La charge totale $Q_4 = CU$ est apportée par la face supérieure de C_4 à l'ensemble central des armatures au même potentiel lors de sa connexion donc

$$-Q_1' - Q_2' + Q_3' + Q_4' = -2Q_1' + 2Q_3' = Q_4 = CU$$

On en déduit vite le tableau des charges et tensions **après branchement** :

$Q_1' = CU/4$	$Q_2' = CU/4$	$Q_3' = 3CU/4$	$Q_4' = 3CU/4$
$U_1' = U/4$	$U_2' = U/4$	$U_3' = 3U/4$	$U_4' = 3U/4$

2. Initialement, les condensateurs C_1 et C_2 possédaient la charge

$$Q_1 + Q_2 = \frac{2}{3} CU$$

et après la connexion,

$$Q_1' + Q_2' = \frac{1}{2} CU$$

Ils se sont donc déchargés dans le générateur et la charge qui a traversé le générateur est par conséquent

$$Q = \frac{CU}{6}$$

3. L'énergie emmagasinée dans un condensateur étant de la forme $CU^2/2$, on calcule aisément l'énergie totale stockée avant, puis après, dans les quatre condensateurs :

$$\mathcal{E}_{\text{avant}} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} CU_i^2 = \frac{5}{6} CU^2$$

$$\text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{après}} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} CU_i'^2 = \frac{5}{8} CU^2$$

Ainsi, les condensateurs perdent l'énergie

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{cond}} = \frac{5}{24} CU^2$$

Le générateur, quant à lui, a reçu la charge $Q = CU/6$ et donc reçu l'énergie

$$W_{\text{gén}} = QU = \frac{1}{6} CU^2$$

Par conséquent, le système complet (condensateurs et générateur) a **perdu** l'énergie

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{5}{24} CU^2 - \frac{1}{6} CU^2$$

soit

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{24} CU^2$$

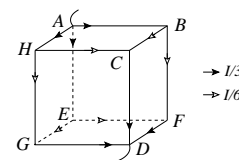
Mais où est donc passée cette énergie ? Le problème est complexe. En réalité, il y aurait dissipation d'énergie par effet Joule mais ce ne peut être satisfaisant pour répondre à la question (pas de résistance prise en compte). Sinon, on peut noter que les charges ont une accélération « infinie » à la connexion et cette accélération provoque une perte d'énergie par rayonnement électromagnétique (l'énergie perdue serait alors transportée par l'onde électromagnétique générée à l'extérieur du circuit).

Corr. 13 Réseau cubique

Il s'agit d'un exercice mettant en évidence l'intérêt des symétries, même en électricité !

Premier cas entre A et D :

Le courant I arrive en A et, par symétrie, les trois arêtes jouent le même rôle, donc il se divise en trois parties égales $I/3$.



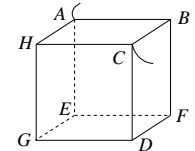
En B, les deux arêtes suivantes jouent le même rôle et partagent le courant en $I/6$ et $I/6$. En C, la loi des nœuds donne $I_{CD} = I/3$.

$$\text{Ainsi,} \quad V_A - V_D = r \frac{1}{3} + r \frac{1}{6} + r \frac{1}{3} = \frac{5}{6} r I$$

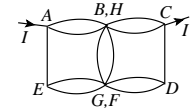
$$\text{d'où} \quad R_{AD} = \frac{5}{6} r$$

Second cas entre A et C :

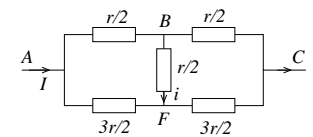
Changeons de méthode pour varier les plaisirs. On applique cette fois les symétries sur les potentiels.



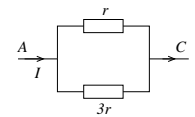
Comme (ACDE) est plan de symétrie du réseau, $V_B = V_H$ et $V_G = V_F$. Par conséquent, on peut relier B et H par un fil de résistance nulle, et aussi G et F. On obtient le schéma équivalent suivant, où chaque trait a une résistance r ,



Ce schéma revient donc au suivant :



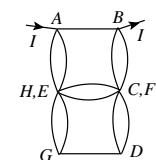
On reconnaît un pont de Wheatstone équilibré, donc $i = 0$! Le fil central est donc inutile et le schéma est équivalent au suivant :



$$\text{Par conséquent,} \quad R_{AC} = \frac{3}{4} r$$

Troisième cas entre A et B :

On procède comme dans le second cas, mais ici, (ABGD) est plan de symétrie, d'où $V_H = V_E$ et $V_C = V_F$: on relie ces points deux à deux. On en déduit le schéma équivalent :



Ce schéma se réduit très facilement par des associations série ou parallèle pour donner

$$R_{AB} = \frac{7}{12} r$$

Corr. 14 Capacité linéique d'un câble coaxial

Corrigé succinct !

1. Les symétries et invariances imposent $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Le théorème de GAUSS donne

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon h r}$$

2. On peut trouver la différence de potentiel $U = V_a - V_g$ (dans ce sens car c'est l'âme qui porte la charge $+q$) en calculant la circulation du champ électrique sur une courbe radiale entre l'âme et la gaine car $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Le résultat est :

$$U = \int_g^a dV = \int_{R_g}^{R_a} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon h} \ln\left(\frac{R_a}{R_g}\right)$$

Par définition de la capacité $q = CU$ avec $C = \Gamma h$, ainsi

$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_g/R_a)}$$

3. On sait qu'un condensateur soumis à une d.d.p. de U stocke une énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$. Donc l'énergie linéique vaut

$$e = \frac{1}{2}\Gamma U^2$$

Retrouvons ce résultat en calculant l'énergie du champ électrique, de densité $u_e = \frac{1}{2}\epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\epsilon E(r)^2$, qui ne dépend que de r . On trouve que l'énergie pour une hauteur h de câble vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\epsilon \int_{R_a}^{R_g} 2\pi r h E(r)^2 dr = \frac{1}{2}(2\pi\epsilon h) \left(\frac{q}{2\pi\epsilon h}\right)^2 \int_{R_a}^{R_g} \frac{1}{r} dr$$

Le calcul donne

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\Gamma h} = \frac{1}{2}(\Gamma h)U^2 \quad \text{soit} \quad e = \frac{1}{2}\Gamma U^2$$

Corr. 15 Résolution d'un problème de Laplace discret

1. L'équation de LAPLACE discrète donne directement

$$f_C = \frac{1}{4}(3f_a + f_b)$$

2. Par symétrie, $f_{A_1} = f_{A_2}$ et $f_{A_3} = f_{A_4}$. L'équation de LAPLACE discrète écrite en A_1 et en A_3 donne

$$f_{A_1} = \frac{1}{4}(2f_a + f_{A_1} + f_{A_3}) \quad ; \quad f_{A_3} = \frac{1}{4}(f_a + f_b + f_{A_1} + f_{A_3})$$

La résolution de ce système 2×2 fournit

$$f_{A_1} = \frac{7f_a + f_b}{8} \quad \text{et} \quad f_{A_3} = \frac{5f_a + 3f_b}{8}$$

On en déduit une valeur au centre C en moyennant les quatre

$$\text{valeurs trouvées en } A_i : \quad f_C = \frac{1}{2}(f_{A_1} + f_{A_3}) = \frac{1}{4}(3f_a + f_b)$$

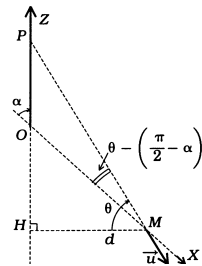
Ceci est la même valeur qu'à la première question. En fait c'est la valeur exacte, moyenne de ce que vaut f sur les bords du carré. On peut le montrer avec un argument d'unicité de la solution au problème de LAPLACE (cf exo "Cube conducteur").

Corr. 16 Champ créé par deux demi-droites

Le champ électrostatique en M est porté par l'axe Ox (dans le plan de figure, l'axe Ox est axe de symétrie positive des sources) :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = E_{\text{tot}} \vec{e}_x$$

On peut calculer la composante selon Ox du champ \vec{E} créé par l'une des demi-droites seule.



L'élément de longueur dz autour de P crée le champ élémentaire

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad r = PM$$

Introduisons l'angle θ de la figure et $D = HM$:

$$\cos\theta = \frac{D}{r} \quad \tan\theta = \frac{HP}{D} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dz}{D}$$

donc

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{D} \vec{u}$$

On projette sur l'axe Ox (puisque le champ final recherché est sur cet axe) :

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{D} \cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$$

donc

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 D} \sin(\alpha + \theta) d\theta$$

$$\text{et en tout} \quad E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\alpha + \theta) d\theta$$

L'intégration se fait en notant que $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (P est en O) et

$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (P est à l'infini). On trouve

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 D} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Or,

$$D = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a \sin\alpha$$

donc

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Pour l'ensemble des demi-droites, le champ électrostatique en M est donné par l'utilisation du théorème de superposition (linéarité des équations de Maxwell) :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{e}_x$$

Ce résultat est indépendant de l'angle α et on vérifie aisément sa validité en étudiant les cas limites $\alpha = \pi/2$ (fil infini) et $\alpha = 0$ (fil semi-infini) ; essayez ces cas, vous verrez...

Corr. 17 Fil fini

1. Une intégrale directe par la loi de Coulomb peut être calculée car la distribution est d'extension finie (sinon, elle pourrait diverger...). Puisqu'il y a invariance par rotation autour de l'axe du fil, le choix du système de coordonnées cylindriques est logique, et le potentiel ne doit dépendre que de z et ρ (indiquant le point M).

En notant P un point courant du fil, et dz_P un élément du fil en ce point, on a

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c} \int_{-c}^c \frac{dz_P}{\sqrt{(z_P - z)^2 + \rho^2}}$$

On change de variable en posant $z_P = z + \rho \operatorname{sh} \psi$, dans le but de faire disparaître la racine... Par conséquent,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\rho \operatorname{ch} \psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{ch}^2 \psi}}$$

Or, $\rho > 0$, donc on obtient

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \left(\operatorname{Argsh}\left(\frac{c-z}{\rho}\right) - \operatorname{Argsh}\left(\frac{-c-z}{\rho}\right) \right)$$

Pour terminer, on se souvient que $\operatorname{Argsh} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ et que cette fonction est impaire, d'où

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \left[\frac{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}}{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}} \right]$$

2. Il suffit de développer correctement l'expression précédente dans chaque cas...

2.a. Pour un point de (z' Oz), $\rho = 0$ donc, à grande distance,

$$V(M) \simeq \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln\left(1 + \frac{2c}{z}\right) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z}$$

On trouve naturellement le potentiel d'une charge ponctuelle...

2.b. Pour un point du plan (xOy), $z = 0$ et à grande distance, on aboutit encore une fois au potentiel d'une charge ponctuelle

$$V(M) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \rho}$$

2.c. Pour un point dans le plan (xOy), $z = 0$ et à courte distance,

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \left[\frac{c + \sqrt{c^2 + \rho^2}}{-c + \sqrt{c^2 + \rho^2}} \right] \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{c}{\rho}$$

Le résultat obtenu est celui du fil infini ! Pour le vérifier, on ne peut pas intégrer la loi de Coulomb (intégrale divergente car des charges sont à l'infini !) mais on a suffisamment de symétries pour utiliser le théorème de Gauss, obtenir \vec{E} dans l'espace, puis en déduire le potentiel. Faites-le...

3. On considère ici un ellipsoïde de révolution de grand axe $2a$ d'équation

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{a^2 - c^2} = 1$$

On a alors les égalités

$$\rho^2 + (z \pm c)^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2} z^2 \pm 2zc = \left(\frac{cz}{a} \pm a\right)^2$$

avec, de plus, du fait de l'équation de l'ellipsoïde,

$$z < z_{\max} = z(\rho = 0) = a < a \frac{a}{c}$$

si l'on considère des ellipsoïdes qui entourent complètement le segment chargé. On peut enfin écrire

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \left(\frac{z+c+\frac{cz}{a}+a}{z-c+a-\frac{cz}{a}} \right)$$

donc

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \left(\frac{(a+c)(z+a)}{(a-c)(z+a)} \right)$$

soit

$$V(M) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right)$$

On constate que le potentiel est uniforme sur l'ellipsoïde : celui-ci représente bien les équipotentielles. Notez que ces ellipsoïdes respectent les symétries des sources, ce qui est rassurant.