Lycée Henri IV | **Cours**
MPSI | Durée : 3 h 15

DIAGONALISATION

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les espaces vectoriels ;
- la dimension finie.

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la lettre n représente un entier naturel non nul.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Diagonalisation des matrices

A.1. Matrices diagonalisables

En dimension finie, un endomorphisme est représenté par toute une famille de matrices semblables. Parmi celles-ci, il est légitime de rechercher une matrice la plus simple possible. En pratique, on recherche une matrice diagonale (diagonalisation) ou, à défaut, une matrice triangulaire supérieure (trigonalisation).

Dans cette partie, nous décrivons la diagonalisation. Vous étudierez la trigonalisation l'an prochain.

Définition 1

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit lorsqu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi qu'une matrice inversible $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On notera que la relation $A = PDP^{-1}$ est équivalente à $D = P^{-1}AP$. On peut donc à la fois exprimer A en fonction de D et D en fonction de A.

Pour une matrice à coefficients réels, on distingue la diagonalisation sur $\mathbb{R}$ (où D et P sont recherchées dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) et la diagonalisation sur $\mathbb{C}$ (où D et P peuvent appartenir à $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$). Sans précision, la diagonalisation d'une matrice à coefficients réels se fait dans $\mathbb{R}$.

Nous allons décrire la méthode de recherche des matrices D et P lorsqu'elles existent (ce n'est malheureusement pas toujours le cas). Une fois ces matrices trouvées, il est important de ne pas confondre la relation correcte $A = PDP^{-1}$ avec la très perfide $A = P^{-1}DP$ (qui obligerait à changer P en P^{-1}).

Exemples :

- Les matrices diagonales sont bien évidemment diagonalisables (encore heureux !). La matrice P est alors la matrice I_n.
- Une matrice semblable à une matrice diagonalisable est également diagonalisable. Les deux matrices sont alors semblables à la même matrice diagonale.
  En effet, si $M = QAQ^{-1}$ avec Q inversible et A diagonalisable c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, alors $M = Q(PDP^{-1})Q^{-1} = (QP)D(QP)^{-1}$.
- Si A est diagonalisable, alors ${}^tA$ l'est également. Les deux matrices sont alors semblables à la même matrice diagonale.
  En effet, si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, on obtient, en transposant, ${}^tA = {}^t(P^{-1}){}^tD\,{}^tP = ({}^tP^{-1})D({}^tP^{-1})^{-1}$.
- Si A est inversible et diagonalisable, alors A^{-1} l'est également. Dans ce cas, A^{-1} est semblable à l'inverse de la matrice diagonale à laquelle A est semblable.
  En effet, si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, alors D est inversible (puisque l'on sait qu'elle a le même rang que A (cf cours sur le changement de bases) ou parce que la relation $D = P^{-1}AP$ permet d'exprimer D comme le produit de trois matrices inversibles), donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
  Rappelons que l'inversibilité de D revient à dire qu'aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul. Dans ce cas, D^{-1} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de D.

a.2. Eléments propres d'une matrice

Notre problème consiste donc à rechercher une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$, ou, ce qui revient au même, telles que $AP = PD$. Or, si l'on note $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de P, on voit que les colonnes de la matrice AP sont $AX_1,\ AX_2,\ \ldots,\ AX_n$ et celles de la matrice PD sont $\lambda_1 X_1,\ \lambda_2 X_2,\ \ldots,\ \lambda_n X_n$. Par suite, la relation $AP = PD$ est équivalente aux n égalités : $AX_k = \lambda_k X_k$ où $k \in [\![1; n]\!]$.

On constate donc que pour résoudre notre problème, il est nécessaire de s'intéresser aux vecteurs colonnes $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur lesquels A agit comme une homothétie, c'est-à-dire $AX = \lambda X$.

a) Définition des éléments propres

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A (en abrégé vp) lorsqu'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur colonne est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (en abrégé $\overrightarrow{\text{vp}}$).

L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A)$ (en abrégé E_λ) le sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par

$$E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Lorsque λ est une valeur propre de A, alors E_λ n'est pas réduit au sous-espace trivial $\{0_{n,1}\}$ et l'on dit que E_λ est le sous-espace propre de A associé à λ (en abrégé sep).

■ L'ensemble E_λ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puisque c'est un noyau. ■

Une matrice agit donc sur un vecteur propre comme une homothétie de rapport la valeur propre.

On retiendra qu'un vecteur propre est toujours **non nul**, ce qui revient à dire que, lorsque λ est une valeur propre, le sous-espace propre E_λ contient tous les vecteurs propres associés à λ **et** le vecteur nul ou encore que λ est une valeur propre si, et seulement si, E_λ n'est pas réduit à $\{0_{n,1}\}$.

La structure de sous-espace vectoriel de E_λ implique en particulier que toute combinaison linéaire (non nulle) de vecteurs propres associés à λ est un vecteur propre associé à λ. En particulier, un multiple (non nul) d'un vecteur propre est un vecteur propre.

On a $E_0 = \mathrm{Ker}(A)$. Par conséquent, 0 est une valeur propre de A si, et seulement si, A n'est pas inversible. Cette remarque toute simple est bien utile !

Pour une valeur propre λ non nulle, on a $E_\lambda \subset \mathrm{Im}(A)$. En effet, si $X \in E_\lambda$, alors $AX = \lambda X$ d'où $X = A(\lambda^{-1}X)$, ce qui prouve que $X \in \mathrm{Im}(A)$.

Exemples :

- La matrice identité I_n admet 1 pour unique valeur propre. Tous les vecteurs non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont alors des vecteurs propres associés à 1, c'est-à-dire $E_1 = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Si $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc 3 et 0 sont des valeurs propres de J (la matrice d'Attila… envahie par les uns).
- Si N est nilpotente (d'indice p), alors 0 est sa seule valeur propre. En effet, d'une part, comme N n'est pas inversible, on sait que 0 est bien valeur propre. Par ailleurs, si λ désigne une valeur propre de N et X un vecteur propre associé de sorte que $NX = \lambda X$, on a $N^p X = \lambda^p X$ (par itération), ce qui donne $\lambda^p = 0$ et donc $\lambda = 0$.

b) Polynôme caractéristique

Définition 3

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, par la formule

$$\chi_A=\det(A-\lambda I_n)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}-\lambda\end{vmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ et de coefficient constant $\det(A)$.

La matrice $A-\lambda I_n$ est à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(\lambda)$, ce qui permet bien de calculer son déterminant. L'indéterminée est notée λ et non X afin de ne pas la confondre avec les vecteurs colonnes.

■ On a $\chi_A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n(a_{\sigma(i),i}-\lambda\delta_{\sigma(i),i})$. Chacun des produits $\prod_{i=1}^n(a_{\sigma(i),i}-\lambda\delta_{\sigma(i),i})$ est un polynôme en λ de degré inférieur ou égal à n, donc χ_A est un polynôme en λ de degré inférieur ou égal à n. Plus précisément, le seul produit $\prod_{i=1}^n(a_{\sigma(i),i}-\lambda\delta_{\sigma(i),i})$ qui soit de degré n est celui pour lequel $\sigma=\mathrm{Id}$ (les autres possèdent au moins un facteur sans λ) et l'on a $\prod_{i=1}^n(a_{i,i}-\lambda)=(-1)^n\lambda^n+\cdots$. Donc χ_A est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

On a $\chi_A(0)=\det(A-0I_n)=\det(A)$, donc le coefficient constant de χ_A est bien $\det(A)$. ■

Lorsque $\sigma\neq\mathrm{Id}$, le polynôme $\prod_{i=1}^n(a_{\sigma(i),i}-\lambda\delta_{\sigma(i),i})$ est de degré inférieur ou égal à $n-2$ (car le support d'une permutation, autre que Id, possède au moins deux éléments). Par conséquent, le monôme de χ_A de degré $n-1$ est donné par $\prod_{i=1}^n(a_{i,i}-\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n a_{i,i}\lambda^{n-1}+\cdots$, ce qui démontre que

$$\boxed{\text{le coefficient de } \lambda^{n-1} \text{ dans } \chi_A \text{ vaut } (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A).}$$

Exemples :

- Si A est une matrice 2×2, on a
$$\chi_A(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{Tr}(A)\,\lambda+\det(A).$$
- Si A est une matrice 3×3, on obtient
$$\chi_A(\lambda)=\lambda^3-\mathrm{Tr}(A)\,\lambda^2+\mathrm{Tr}(\mathrm{Com}\,A)\,\lambda+\det(A)$$
avec
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Com}\,A)=\frac{(\mathrm{Tr}\,A)^2-\mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$
Cette formule n'est pas à connaître par cœur !

La proposition suivante énonce qu'une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Proposition 1

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\chi_{{}^tA}=\chi_A.$$

■ On a $\chi_{{}^tA}=\det({}^tA-\lambda I_n)=\det({}^tA-\lambda\,{}^tI_n)=\det\left({}^t(A-\lambda I_n)\right)=\det(A-\lambda I_n)=\chi_A$. ■

Le théorème ci-dessous est fondamental : il explique que la recherche pratique des éléments propres d'une matrice passe par la détermination des racines du polynôme caractéristique.

Théorème 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\big(\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big) \iff (\lambda \text{ est une racine de } \chi_A).$$

Autrement dit, les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique. La multiplicité d'une valeur propre λ est alors la multiplicité de λ vue comme racine de χ_A.

De plus, si λ est une valeur propre de A, le sous-espace propre associé à λ est le sous-espace des solutions du système homogène associé à la matrice $A-\lambda I_n$, c'est-à-dire $(A-\lambda I_n)X = 0_{n,1}$.

■ Dire que λ est une valeur propre de A signifie par définition qu'il existe un vecteur colonne X tel que $AX = \lambda X$, c'est-à-dire $(A - \lambda I_n)X = 0$.

Cela veut donc bien dire que rechercher un tel X revient à résoudre le système homogène associé à la matrice $A - \lambda I_n$. La seconde assertion est donc ainsi démontrée.

Par ailleurs, cela implique que λ est une valeur propre de A si, et seulement si, le système homogène associé à $A - \lambda I_n$ possède une autre solution que la solution évidente constituée par le vecteur nul. On sait que c'est équivalent au fait que la matrice $A - \lambda I_n$ soit de rang strictement inférieur à n ou encore que le déterminant de $A - \lambda I_n$ est nul. Cela démontre la première assertion. ■

Notons que ce résultat signifie que λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible (c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$).

En particulier, on retrouve le fait que 0 est une valeur propre de A si, et seulement si, A n'est pas inversible. Plus précisément, on vérifie que si A est une matrice inversible, alors λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $1/\lambda$ est une valeur propre de A^{-1}.

Les valeurs propres étant les racines du polynômes caractéristiques, on peut les dénombrer.

Corollaire 1

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possède exactement n valeurs propres complexes (comptées avec leurs multiplicités).

■ C'est une conséquence directe du théorème de d'Alembert-Gauss. ■

Par contre, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut seulement affirmer que $\mathrm{card}\big(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\big) \leqslant n$. En particulier, il est possible que A n'ait aucune valeur propre réelle (nous donnerons plus loin des exemples).

L'encadré ci-dessous vous explique comment déterminer en pratique les éléments propres d'une matrice.

Recherche des éléments propres par la méthode du pivot

Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice A, on calcule χ_A à l'aide de la méthode du pivot. Les racines de χ_A sont alors les valeurs propres recherchées.

De plus, pour chaque valeur propre λ trouvée, la résolution du système homogène associé à $A-\lambda I_n$ (que l'on effectue grâce à la réduite de Gauß obtenue pour le calcul de χ_A) donne le sous-espace propre E_λ. On précise alors une base de ce sous-espace propre.

Pour une matrice à coefficients réels, la recherche des valeurs propres se fait par défaut dans $\mathbb{R}$. Toutefois, une telle matrice peut aussi être considérée à coefficients complexes, ce qui permet d'en chercher les éléments propres dans $\mathbb{C}$.

Commençons par un exemple fondamental : celui d'une matrice diagonale ou triangulaire. Dans ce cas, l'énoncé suivant nous dit que l'on peut lire le spectre sur la diagonale.

Exemple fondamental

Si A est une matrice diagonale ou triangulaire (supérieure ou inférieure), les valeurs propres de A sont les scalaires qui apparaissent sur la diagonale de A.

■ Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire, on a $\det(A - \lambda I_n) = (a_{1,1} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda)$, ce qui démontre que $\mathrm{Sp}(A) = \{a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}\}$. ■

La détermination des sous-espaces propres d'une matrice diagonale ou triangulaire est simple puisque le système $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ est déjà sous forme triangulaire (pas de pivot à faire !).

Ce résultat n'est vrai que pour une matrice diagonale ou triangulaire. Pour une matrice quelconque, les valeurs propres ne sont pas les coefficients diagonaux.

Exemples :

- Si $A = \lambda I_n$ est une matrice scalaire (où $\lambda \in \mathbb{K}$), on a $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$.

Présentons maintenant deux exemples de recherche d'éléments propres sur des matrices quelconques.

Exemples :

- Déterminons les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \left|\begin{matrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \left|\begin{matrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2+2\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1+2\lambda-\lambda^2 & 2-2\lambda & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \longrightarrow L_2 \\ L_3 + \lambda L_1 \longrightarrow L_3 \end{matrix} \\
&= \left|\begin{matrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2+2\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 3-2\lambda-\lambda^2 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \longrightarrow L_3 \end{matrix} \\
&= -\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{matrix}\right| \quad C_1 \leftrightarrows C_3 \\
&= -(1-\lambda)(3-2\lambda-\lambda^2) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+3)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 1 \text{ (de multiplicité } 2) \text{ et } -3 \text{ (de multiplicité } 1).}$$

Détermination de E_1 : D'après la réduite de Gauß déterminée ci-dessus, on a (en notant x, y, z les composantes du vecteur colonne X)

$$\begin{aligned}(A-I_3)X=0 &\iff \left\{ x - 2y + \boxed{z} = 0 \right. \\ &\iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda + 2\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right).}$$

Détermination de E_{-3} : D'après la réduite de Gauß déterminée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}(A+3I_3)X=0 &\iff \begin{cases} 5x - 2y + \boxed{z} = 0 \\ -8x + \boxed{4y} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E_{-3} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right).}$$

- Déterminons les valeurs propres de la matrice

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= \det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{4}\begin{vmatrix}1-2\lambda & -3\\ 3 & 1-2\lambda\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\big((1-2\lambda)^2+9\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(10-4\lambda+4\lambda^2\big)\end{aligned}$$

On constate alors que

$$\chi_B(\lambda)=0 \iff 4\lambda^2-4\lambda+10=0 \iff \left(\lambda=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{ou} \quad \lambda=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right).$$

On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B)=\varnothing \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B)=\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\,;\,\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right\}.}$$

c) *Propriétés des éléments propres*

Théorème 2

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ une famille de valeurs propres distinctes deux à deux. Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

■ Soient $X_1, \dots, X_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des éléments respectifs de $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ tels que $X_1+X_2+\cdots+X_p = 0_{n,1}$. Démontrons que $X_1 = X_2 = \cdots = X_p = 0_{n,1}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on multiplie la relation $X_1 + X_2 + \cdots + X_p = 0_{n,1}$ par A^k à gauche, ce qui donne ${\lambda_1}^k X_1 + {\lambda_2}^k X_2 + \cdots + {\lambda_p}^k X_p = 0_{n,1}$. En combinant linéairement ces égalités, on obtient que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(\lambda_1)X_1 + P(\lambda_2)X_2 + \cdots + P(\lambda_p)X_p = 0_{n,1}$.

Pour un $k \in [\![1;p]\!]$ donné, il choisit de prendre pour P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut 1 sur λ_k et 0 sur tous les autres λ_i. Cela donne $X_k = 0_{n,1}$.

Donc $X_1 = X_2 = \cdots = X_p = 0_{n,1}$, ce qui démontre que $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe. ■

On peut alors énoncer le lemme de juxtaposition des bases propres.

Corollaire 2

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ une famille de valeurs propres distinctes deux à deux. Si $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ désignent des bases respectives des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$, alors la famille obtenue en réunissant toutes ces bases est libre.

■ AQT ■

Le théorème précédent permet également de majorer la somme des dimensions des sous-espaces propres.

Corollaire 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda \leqslant n.$$

■ AQT ■

Vous préciserez l'an prochain ce résultat en démontrant que, pour toute valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre associé à λ est inférieure à la multiplicité de λ. Comme la somme des multiplicités est égale à n (puisque c'est le degré du polynôme caractéristique), cela vous redonnera le résultat énoncé ci-dessus.

A. 3. Diagonalisation

Nous avons vu en introduction du paragraphe A. 2. que la recherche des matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$ se ramenait à l'étude des éléments propres de A : les valeurs propres servant de coefficients diagonaux pour D et les vecteurs propres associés correspondant aux colonnes de P.

Nous sommes maintenant en mesure de donner des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité (*i.e.* des conditions assurant l'existence de D et P ainsi que l'inversibilité de P).

Théorème 3

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$(A \text{ diagonalisable}) \iff \begin{pmatrix} \text{il existe une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \text{de vecteurs propres de } A \end{pmatrix} \iff \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda = n \right).$$

■ ▷ Démontrons tout d'abord la première équivalence.

$\Rightarrow$ Supposons que A est diagonalisable. Il existe alors une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ c'est-à-dire $AP = PD$. Si l'on note $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de P, on constate alors (on l'a déjà fait) que $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (ils sont non nuls sinon P ne serait pas inversible). Or, comme P est inversible, on sait que la famille $X_1, \ldots, X_n$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il existe donc bien une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A. Si on note cette famille $X_1, \ldots, X_n$ et si l'on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées, alors, en notant P la matrice dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_n$, les relations $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $AX_k = \lambda_k X_k$ se traduisent matriciellement par l'égalité $AP = PD$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Comme P est inversible (c'est la matrice d'une base), il vient $A = PDP^{-1}$. Ainsi, A est bien diagonalisable.

▷ Établissons ensuite la seconde équivalence.

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A. Pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, si la famille $\mathscr{B}$ contient p_k vecteurs de E_{λ_k}, alors ces vecteurs forment une famille libre de E_{λ_k}. On en déduit que $\dim E_{\lambda_k} \geqslant p_k$. Par conséquent, on a $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} \geqslant \sum_{k=1}^{p} p_k = \mathrm{card}\, \mathscr{B} = n$. Comme l'inégalité contraire a été démontrée au corollaire 3, on en déduit que $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, notons $\mathscr{B}_k$ une base de E_{λ_k}. La proposition 2 nous dit qu'en réunissant $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k$, on obtient une famille $\mathscr{B}$ libre. Comme cette famille contient $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$ vecteurs, on en déduit que c'est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (théorème bonux !). On a bien ainsi trouvé une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A. ■

En corollaire de ce théorème, voici une condition suffisante de diagonalisabilité.

Corollaire 4

Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possèdant exactement n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Dans ce cas, les n sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

■ En effet, les n sous-espaces propres associés à ces valeurs propres étant tous de dimension au moins 1 (puisqu'un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$), la somme de leurs dimensions est supérieure ou égale à n. Elle vaut donc n (plus, ce serait de trop !) et la matrice est, par conséquent, diagonalisable. ■

La réciproque est fausse : la matrice nulle est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre.

Citons le résultat suivant que vous démontrerez l'an prochain.

Théorème 4

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

■ Admis. Vous le démontrerez en spé. On traitera plus loin le cas 2×2. ■

La démonstration du théorème 3 permet de donner une méthode pratique de diagonalisation.

Recette de la diagonalisation

Disons que l'on veuille diagonaliser, si possible, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On commence par rechercher les éléments propres de A et précisant pour chaque valeur propre une base du sous-espace propre associé.

La matrice est alors diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions trouvées est égale à n.

Dans le cas où la matrice est diagonalisable, on considère :

- la matrice P dont les colonnes $X_1, \ldots, X_n$ sont les vecteurs propres obtenus en juxtaposant (dans l'ordre que l'on souhaite) les bases des différents sous-espaces propres de A ;
- la matrice diagonale $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telle que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le scalaire λ_k soit une valeur propre associée au vecteur propre X_k ;

de sorte que
$$A = PDP^{-1}.$$

On notera que pour être complet, il convient de calculer la matrice P^{-1}.

Il faut bien noter que l'on peut choisir ou bien l'ordre dans lequel on dispose les vecteurs propres dans P ou bien l'ordre dans lequel on dispose les valeurs propres sur la diagonale de D. Une fois choisi un agencement pour l'une ou l'autre de ces matrices, celui de l'autre matrice doit le respecter : pour un numéro de colonne $k \in [\![1;n]\!]$ donné, la k-ème colonne de P est forcément un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k située en k-ème position sur la diagonale de D.

La trace étant invariante par changement de base, les matrices A et D ont la même trace, ce qui revient à dire que la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités est égale à la trace de A. C'est très pratique !

Exemples :

- Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ rencontrée plus tôt dans ce cours, on a
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}$$
où l'on a éludé le calcul de P^{-1}.
- Pour la matrice
$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$
on a vu que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \varnothing$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{(1+3i)/2; (1-3i)/2\}$. On en déduit que B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle l'est sur $\mathbb{C}$.
- La seule matrice diagonalisable ne possédant qu'une seule valeur propre λ est la matrice λI_n. En effet, une telle matrice est semblable à la matrice λI_n qui n'est semblable qu'à elle-même (puisque $P\lambda I_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$). Ce résultat, très simple mais très utile, est souvent résumé par : « une matrice monopropre diagonalisable est scalaire ».

- La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable ! En effet, sa seule valeur propre est 1 (rappelons que pour une matrice triangulaire supérieure, les valeurs propres sont en apparence sur la diagonale) donc, si elle était diagonalisable, elle serait égale à I_2 d'après l'exemple ci-dessus, ce qui n'est manifestement pas le cas.
- Démontrons qu'une matrice symétrique réelle 2×2 est diagonalisable. Pour cela, on considère
$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Si $c = 0$, la matrice est diagonale et donc *a fortiori* diagonalisable.
Si $c \neq 0$, on a
$$\chi_S(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ c & b-\lambda \end{vmatrix} = (ab - c^2) - (a+b)\lambda + \lambda^2$$
Or le discriminant du trinôme $\lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2)$ est égal à
$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 > 0,$$
donc ce trinôme admet deux racines réelles distinctes. Cela prouve que S admet deux valeurs propres distinctes et donc que S est diagonalisable (en tant que matrice 2×2 admettant 2 valeurs propres).
- Démontrons que la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable. Cela prouvera au passage qu'une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable.
On a
$$\chi_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ i & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$
donc
$$\mathrm{Sp}(T) = \{0\}.$$
Si T était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle. Comme la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même, cela signifierait que T est nulle, ce qui est clairement absurde ! Donc T n'est pas diagonalisable.
- Diagonalisons, en effectuant un minimum de calcul, la matrice
$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Signalons que $\mathbb{X}$ est nécessairement diagonalisable puisqu'elle est symétrique réelle.
On repère que
$$\mathbb{X}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc, une matrice 3×3 possédant au plus 3 valeurs propres, on en déduit que
$$\mathrm{Sp}(\mathbb{X}) = \{0; 1; 2\}.$$

De plus, on a

$$E_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Par suite, on a

$$\mathbb{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}$$

où, là encore, on a passé sous silence le calcul de P^{-1}.

- Déterminons une matrice diagonale à laquelle est semblable la matrice d'Attila $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Là encore, on sait par avance que la matrice est diagonalisable puisque A est symétrique réelle.
On constate que $\operatorname{rg} A = 1$ puisque toutes les colonnes sont égales. Par suite, 0 est une valeur propre de A et E_0 est de dimension $n-1$ (par le théorème du rang).
Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n (puisque A est diagonalisable), il ne nous manque plus qu'un seul sous-espace propre de dimension 1 (et donc aussi une seule valeur propre). Or, le critère de la trace nous dit que cette valeur propre est nécessairement n. Pour le justifier (sans recourir à la trace), on remarque que le vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1 vérifie $AX = nX$, ce qui prouve que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n.
En conclusion,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et semblable à } \operatorname{Diag}(0, \ldots, 0, n).}$$

On pourra noter que le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 est propre à chaque fois que la somme des coefficients sur chaque ligne est constante. Cette constante est alors la valeur propre associée. 2 h 30

A.4. Applications

a) Calcul d'une puissance n-éme de matrice

L'application la plus élémentaire de la diagonalisation est le calcul des puissances successives d'une matrice carrée.

Difficile dans le cas général, ce calcul se simplifie, lorsque la matrice est diagonalisable, à l'aide du résultat suivant.

Proposition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable semblable à $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de sorte qu'il existe une matrice inversible P telle que l'on ait $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad D^k = \mathrm{Diag}({\lambda_1}^k, \ldots, {\lambda_n}^k).$$

■ On utilise le principe de Reck Urrence. ■

Exemples :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminons A^k où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a vu que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire (après un gros calcul)

$$A^k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^k & -2+2\,(-3)^k & 1-(-3)^k \\ 2-2\,(-3)^k & 4\,(-3)^k & 2-2\,(-3)^k \\ -1+(-3)^k & 2-2\,(-3)^k & 3+(-3)^k \end{pmatrix}.$$

b) Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire qui décrit, au cours du temps, les transitions entre différents états d'un objet. L'étude des probabilités de présence dans un état à un instant donné conduit au calcul des puissances n-èmes d'une matrice. La diagonalisation est donc un outil privilégié pour l'étude de ces processus.

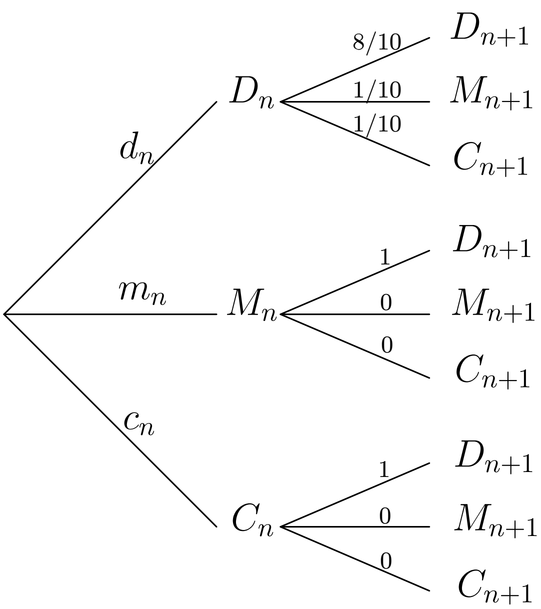
Exercice 1.

Doudou le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres :

- Quand il dort, il a 8 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il retourne dormir.
- Courir une minute est fatigant. Après son exercice, Doudou retourne dormir.

Si l'on note d_n, m_n et c_n les probabilités respectives de dormir, manger et courir à la minute n et si l'on suppose qu'à la minute 0 Doudou dormait, déterminer d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter !

◊ Soit $n \in \mathbb{N}$. Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le s.c.e. (D_n, M_n, C_n), on a

$$\begin{aligned}
d_{n+1} = P(D_{n+1}) &= P(D_n)P(D_{n+1} \,|\, D_n) + P(M_n)P(D_{n+1} \,|\, M_n) + P(C_n)P(D_{n+1} \,|\, C_n) \\
&= d_n \times \frac{8}{10} + m_n \times 1 + c_n \times 1, \\
m_{n+1} = P(M_{n+1}) &= P(D_n)P(M_{n+1} \,|\, D_n) + P(M_n)P(M_{n+1} \,|\, M_n) + P(C_n)P(M_{n+1} \,|\, C_n) \\
&= d_n \times \frac{1}{10} + m_n \times 0 + c_n \times 0, \\
c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(D_n)P(C_{n+1} \,|\, D_n) + P(M_n)P(C_{n+1} \,|\, M_n) + P(C_n)P(C_{n+1} \,|\, C_n) \\
&= d_n \times \frac{1}{10} + m_n \times 0 + c_n \times 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ m_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En itérant cette relation, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \begin{pmatrix} d_n\\ m_n\\ c_n\end{pmatrix}=\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

ce qui se démontre par une récurrence immédiate.

On constate alors que

$$\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\10\\10\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc 0 et 10 sont des valeurs propres. L'astuce de la trace (kifôpadirekonlutilise) nous dit que la dernière valeur propre est -2. En prospectant un peu, on voit alors que

$$\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc -2 est valeur propre. La matrice ayant trois valeurs propres distinctes, on en déduit alors qu'elle est diagonalisable et que les trois sous-espaces propres sont de dimension 1, ce qui donne

$$E_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right),\qquad E_{-2}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\qquad\text{et}\qquad E_{10}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

La diagonalisation de la matrice donne alors (après calcul de l'inverse de la matrice de passage)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&10\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&10\end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&-6&6\\-1&5&5\\1&1&1\end{pmatrix}.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix}0&-2&10\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&10\end{pmatrix}^n\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&-6&6\\-1&5&5\\1&1&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&-2&10\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-2)^n&0\\0&0&10^n\end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&-6&6\\-1&5&5\\1&1&1\end{pmatrix}\\ &= \text{on ne calcule que le coefficient tout en haut à gauche}\\ &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\,(-2)^n+10^{n+1}&\triangle&\bigstar\\ \square&\maltese&\heartsuit\\ \blacksquare&\clubsuit&\spadesuit\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Remarque : Les plus courageux pourront voir que

$$\begin{pmatrix} 8&10&10\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}^n=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\,(-2)^n+10^{n+1}&-10\,(-2)^n+10^{n+1}&-10\,(-2)^n+10^{n+1}\\ -(-2)^n+10^n&5\,(-2)^n+10^n&5\,(-2)^n+10^n\\ -(-2)^n+10^n&5\,(-2)^n+10^n&5\,(-2)^n+10^n\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12 \times 10^n} \begin{pmatrix} 2\,(-2)^n + 10^{n+1} & \triangle & \bigstar \\ \square & \maltese & \heartsuit \\ \blacksquare & \clubsuit & \spadesuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12 \times 10^n} \begin{pmatrix} 2\,(-2)^n + 10^{n+1} \\ \square \\ \blacksquare \end{pmatrix},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_n = \frac{2\,(-2)^n + 10^{n+1}}{12 \times 10^n} \cdot}$$

On en déduit alors que

$$d_n = \frac{2\,(-2)^n + 10^{n+1}}{12 \times 10^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{10^{n+1}}{12 \times 10^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{10}{12},$$

c'est-à-dire

$$d_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{10}{12} \approx 83\,\%$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\text{Doudou est un gros flemmard !}}$$

$\Diamond$

B. Diagonalisation des endomorphismes

L'objet de cette partie est de généraliser les notions d'éléments propres et de diagonalisation aux endomorphismes d'un espace de dimension finie.

Dans toute cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

B.1. Eléments propres d'un endomorphisme

a) Définition des éléments propres

Définition 4

Soit u un endomorphisme de E.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u (en abrégé vp) lorsqu'il existe un vecteur non nul $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ (en abrégé $\overrightarrow{\text{vp}}$).

L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle le spectre de u et est noté $\text{Sp}(u)$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u)$ (en abrégé E_λ) le sous-espace vectoriel de E défini par

$$E_\lambda = \{x \in E : u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \, \text{Id}_E).$$

Lorsque λ est une valeur propre de u, alors E_λ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et l'on dit que E_λ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ (en abrégé sep).

■ L'ensemble E_λ est bien un sous-espace vectoriel de E puisque c'est un noyau. ■

Un endomorphisme agit donc sur un vecteur propre comme une homothétie de rapport la valeur propre.

On retiendra qu'un vecteur propre est toujours **non nul**, ce qui revient à dire que, lorsque λ est une valeur propre, le sous-espace propre E_λ contient tous les vecteurs propres associés à λ **et** le vecteur nul ou encore que λ est une valeur propre si, et seulement si, E_λ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

La structure de sous-espace vectoriel de E_λ implique en particulier que toute combinaison linéaire (non nulle) de vecteurs propres associés à λ est un vecteur propre associé à λ. En particulier, un multiple (non nul) d'un vecteur propre est un vecteur propre.

On a $E_0 = \text{Ker}(u)$. Par conséquent, 0 est une valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injectif. Cette remarque toute simple est bien utile !

Pour une valeur propre λ non nulle, on a $E_\lambda \subset \text{Im}(u)$. En effet, si $x \in E_\lambda$, alors $u(x) = \lambda x$ d'où $x = u(\lambda^{-1} x)$, ce qui prouve que $x \in \text{Im}(u)$.

Exemples :

- Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $\varphi(P) = P - XP'$.

  On a $\varphi(X) = 0$ donc $0 \in \text{Sp}(\varphi)$ et X est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre 0, c'est-à-dire un élément du noyau.

  On a $\varphi(X^2) = -X^2$ donc $-1 \in \text{Sp}(\varphi)$ et X^2 est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre -1.

b) Polynôme caractéristique

Définition 5

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, par la formule

$$\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$$

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ et de coefficient constant $\det(u)$.

L'indéterminée est notée λ et non X afin de ne pas la confondre avec les vecteurs colonnes.

■ Pour voir que χ_u est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ et de coefficient constant $\det(u)$, on se ramène aux matrices. ■

On retrouve évidemment le théorème fondamental liant les valeurs propres et les racines du polynôme caractéristique.

Théorème 5

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a

$$\big(\lambda \in \operatorname{Sp}(u)\big) \iff (\lambda \text{ est une racine de } \chi_u).$$

Autrement dit, les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme caractéristique. La multiplicité d'une valeur propre λ est alors la multiplicité de λ vue comme racine de χ_u.

■ On a

$$\begin{aligned}
\big(\lambda \in \operatorname{Sp}(u)\big) &\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ n'est pas injectif} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ n'est pas bijectif} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ n'est pas surjectif} \\
&\iff \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) < n \\
&\iff \det(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0 \\
&\iff \chi_u(\lambda) = 0,
\end{aligned}$$

où la troisième et la quatrième équivalences découlent du fait que E est de dimension finie. ■

L'équivalence $\big(\lambda \in \operatorname{Sp}(u)\big) \iff \big(\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) < n\big)$ peut être précisée : le théorème du rang nous dit que

$$\boxed{\dim E_\lambda = n - \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E).}$$

Comme χ_u est un polynôme de degré n, le théorème de d'Alembert–Gauss dit que χ_u admet exactement n racines complexes, comptées avec multiplicité. Dans $\mathbb{R}$, on peut seulement dire que u possède au plus n valeurs propres réelles.

c) Lien entre matrices et endomorphismes

Connaissant la définition des éléments propres d'un endomorphisme et de ceux de sa matrice dans une base, on peut raisonnablement espérer qu'il existe un lien entre ces deux notions. C'est l'objectif de ce paragraphe que de décrire cette relation et d'en déduire ses conséquences.

Proposition 3

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

(i) $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$;

(ii) $x \in E$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, le vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

■ Supposons que $x \in E$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ de u. On a $u(x) = \lambda x$, ce qui se traduit matriciellement par $AX = \lambda X$. Comme $X \neq 0_{n,1}$ puisque $x \neq 0_E$, on en déduit que λ est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre de A associé à λ.

Réciproquement, supposons que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ de A. On considère x le vecteur de E de coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$. Alors, comme $X \neq 0_{n,1}$, on a $x \neq 0_E$ et comme $AX = \lambda X$, on a $u(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est donc une valeur propre de u et le vecteur x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. ■

Cette proposition est très souvent utilisée dans le cas où u est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Dans ce cas, on s'autorisera à confondre les éléments propres de A et ceux de u, ce qui revient à identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Recherche des éléments propres d'un endomorphisme

La proposition précédente donne un moyen pratique de recherche des éléments propres d'un endomorphisme : il suffit de rechercher ceux de toute matrice représentant l'endomorphisme. Vous avez donc le choix de la base !

Exemples :

- À tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P) = P + X^2 P\Big(\frac{1}{X}\Big) - XP'(0).$$

Il est clair que φ est linéaire. De plus, si l'on pose $P = aX^2 + bX + c$, on voit que $\varphi(P) = (a+c)X^2 + bX + (c+a)$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$, ce qui justifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour rechercher les éléments propres de cet endomorphisme, on se place alors dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et l'on constate que $\varphi(1) = X^2+1$, $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = X^2+1$, d'où

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\,\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît alors la matrice $\mathbb{X}$ dont on avait trouvé les élements propres. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0; 1; 2\}$$

et

$$E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - X^2), \qquad E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(X) \qquad \text{et} \qquad E_2(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 + X^2).$$

La proposition 3 permet de faire le lien entre les éléments propres de deux matrices semblables.

Corollaire 5

Deux matrices semblables A et B ont le même spectre. De plus, si λ est une valeur propre de l'une (et donc aussi de l'autre), on a $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$. Par contre, attention, les sous-espaces propres de deux matrices semblables ne sont pas nécessairement égaux !

■ AQT ■

Le spectre est donc un invariant de similitude (comme le rang, la trace et le déterminant). Cet invariant peut servir à démontrer que deux matrices ne sont pas semblables : si elles n'ont pas le même spectre ou si, pour l'une des valeurs propres en commun, les sous-espaces propres n'ont pas la même dimension, alors les deux matrices ne peuvent pas être semblables.
Mais attention, la réciproque est fausse ! Il existe des matrices qui ont le même spectre et les mêmes dimensions de sous-espaces propres mais qui ne sont pas semblables pour autant.

Toutefois, si l'on sait que deux matrices ont le même spectre, les mêmes dimensions de sous-espaces propres et qu'elles sont diagonalisables, alors on peut en déduire qu'elles sont semblables (car elles sont alors semblables à la même matrice diagonale).

La proposition 3 permet également d'établir, pour les endomorphismes, les propriétés des sous-espaces propres que nous avions vues sur les matrices.

Théorème 6

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ une famille de valeurs propres distinctes deux à deux de u.

Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Par conséquent, si $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ désignent des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$, alors la famille obtenue en juxtaposant toutes ces bases est libre.

Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est inférieure ou égale à n.

■ AQT ■

Enfin, la proposition 3 éclaire la relation $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$ énoncée au paragraphe précédent. Matriciellement, $n - \mathrm{rg}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$ est le nombre d'inconnues auxiliaires de la réduite de Gauß du système homogène $(A - \lambda I_n)X = 0$. C'est donc aussi le nombre de paramètres servant à décrire les solutions de ce système, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre E_λ.

$\mathcal{B}$.2. Diagonalisation

Définition 6

Un endomorphisme de E est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemples :

- Considérons F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection sur F dans la direction de G. Si l'on considère une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ (c'est-à-dire une base obtenue en juxtaposant un base de F et une base de G). Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = J_{n,n,r}$ où $r = \dim F$, ce qui démontre que p est diagonalisable.

La correspondance entre matrices et endomorphismes et les liens (tissés au paragraphe précédent) qui existent entre les éléments propres de l'un et de l'autre permettent alors de donner la caractérisation suivante des endomorphismes diagonalisables.

Théorème 7

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a

$$(u \text{ diagonalisable}) \iff \begin{pmatrix} \text{il existe une base de } E \\ \text{de vecteurs propres de } u \end{pmatrix} \iff \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda = n \right).$$

■ AQT ■

Par ailleurs, on peut interpréter en terme de changement de base la diagonalisation d'une matrice.

Proposition 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ une base de E et A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Alors, si u est diagonalisable et si $\mathscr{B}_p$ désigne une base de E formée de vecteurs propres de u, alors en désignant par $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_p}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}_p$, on peut affirmer que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

■ AQT ■

On retiendra donc que diagonaliser une matrice (lorsque c'est possible) revient à effectuer un changement de base pour se placer dans une base constituée de vecteurs propres.

La réciproque est également vraie. S'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale, alors les colonnes de P sont les vecteurs coordonnées d'une base de vecteurs propres de u. 3 h 15