

## Exercices de révision pour les oraux : Série 4.

### 1. Décomposition en série de Fourier

Un circuit redresseur double alternance débite dans une bobine de résistance  $R = 20\ \Omega$  et d'inductance  $L = 100\ \text{mH}$ , voir la figure 1. La tension redressée possède la fréquence  $f = 100\ \text{Hz}$ . La valeur de la tension maximale est  $U_0 = 6\ \text{V}$ . On cherche à mesurer le courant  $i(t)$  qui traverse la bobine au moyen d'un ampèremètre.

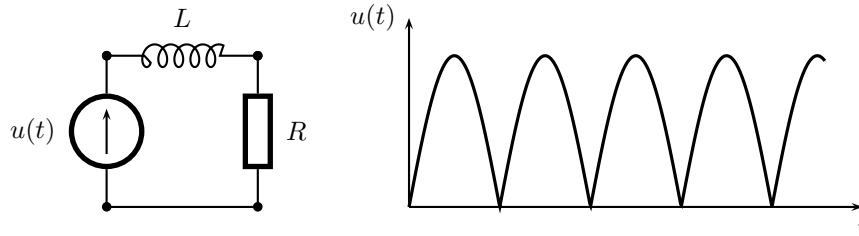


FIGURE 1 – Tension redressée double alternance

- Déterminer les premiers termes de la décomposition en série de FOURIER de la tension appliquée à la bobine.
- Exprimer le courant et le déphasage courant-tension pour ces harmoniques. Faire les applications numériques.
- On mesure l'intensité  $i$ . Quelle valeur lit-on avec un ampèremètre en  $DC$ ? Même question avec un ampèremètre en  $AC$ , de bande passante  $400\ \text{Hz}$ .
- On utilise maintenant un ampèremètre donnant la vraie valeur efficace (true RMS) de l'intensité. Cet ampèremètre fonctionne jusqu'à une soixantaine d'harmoniques. Quelle valeur donne-t-il?
- Exprimer la puissance moyenne consommée par la bobine.

Réponses : Le signal est de période  $f = 100\ \text{Hz}$ , il provient du redressement double alternance d'un signal de fréquence  $f_0 = 50\ \text{Hz}$ , sa forme est  $u(t) = U_0 |\sin 2\pi f_0 t|$  sur une période  $[0, T = 1/f]$ ,  $\sin 2\pi f_0 t > 0$ ,  $u(t) = \frac{2U_0}{\pi} [1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n f t}{4n^2 - 1}]$ ,  $i_{DC} = 0,19\ \text{A}$ , l'harmonique de rang 1 étant prédominante  $i_{AC} = 0,027\ \text{A}$ ,  $P = 0,72\ \text{W}$ .

### 2. Multiplexage temporel

Un système de transmission téléphonique permet la transmission simultanée de 30 communications sur la même ligne. Il utilise la Modulation d'Impulsions et Codage de sigle MIC.

- Pour ce faire, chaque signal est tout d'abord numérisé. Justifier le choix de la cadence de 8 000 échantillons par seconde, sachant que la bande fréquentielle est limitée à  $[300\ \text{Hz}, 3\ 400\ \text{Hz}]$ .

Afin d'assurer la transmission simultanée de 30 voix, le signal est organisé en trames de 32 intervalles de temps, chaque communication se voyant assigner un intervalle de temps par trame. Les deux intervalles de temps restants servent à la gestion du réseau.

- Quelle est la durée d'une trame? En déduire le débit d'échantillons par seconde, toutes communications confondues. Chaque signal vocal est numérisé sur 8 bits selon une loi non linéaire (on parle de compression).
- Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.
- La loi de compression distribue les niveaux de quantification de manière non équidistante, le quantum étant plus faible pour les faibles valeurs de signal. Quel en est l'intérêt, sachant que les signaux vocaux varient dans une large gamme d'amplitude?

Réponses : il faut au moins le double de la fréquence maximale donc au minimum  $6\ 800\ \text{Hz}$ , la fréquence d'échantillonnage respecte le critère de SHANNON; une trame doit se dérouler entre deux échantillons successifs d'un signal; il faut donc que par seconde on envoie  $8000 \times 32 = 256\ 000$  échantillons; il faut 8 bits par échantillon, on multiplie par 8 le résultat précédent, on obtient  $2,048\ \text{Mbit}$  par seconde; si le pas de quantification est  $q$ , l'erreur de quantification est  $\varepsilon = q/2$ , si on garde  $q$  constant, l'erreur relative est plus grande pour les signaux faibles, en jouant sur le pas de quantification, on peut réaliser une erreur relative constante.

### 3. Enrichissement isotopique

On étudie l'arrivée depuis  $-\infty$  d'un quanton de masse  $m$  et d'énergie  $E$  sur une marche de potentiel définie par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ région 1} \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ région 2} \end{cases}$$

On rappelle que le coefficient de réflexion en amplitude de la fonction d'onde dépend du signe de  $E - V_0$ . En effet, si l'on a  $E < V_0$  alors  $r = \frac{k_1 - i\mu}{k_1 + i\mu}$  avec  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $\mu = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ . Dans le cas où  $E > V_0$ , on a  $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$  avec  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ .

On considère un faisceau non relativiste de particules quantiques composé de deux isotopes de masse  $m_1$  et  $m_2$  possédant la même vitesse qui arrivent sur la marche de potentiel.

1. Discuter la possibilité d'enrichir un faisceau d'isotopes homocinétiques (qui possèdent la même vitesse) en fonction du signe de  $E - V_0$ .
2. Prévoir qualitativement si le faisceau réfléchi est plus riche en isotope de masse plus grande ou plus petite.
3. On se place dans le cas limite où  $E \gg V_0$ . Donner une expression approchée de la probabilité de réflexion  $R$  sur la marche de potentiel.
4. Former le rapport de  $R_1$  et de  $R_2$  de la probabilité de réflexion sur la marche de potentiel en fonction des masses  $m_1$  et  $m_2$  des deux isotopes. Conclure.

Réponses : si  $E < V_0$  on constate que  $R = |r|^2 = 1$  la probabilité de réflexion est la même pour chaque isotope, on ne peut pas les séparer, il faut  $E > V_0$  ; l'énergie du quanton correspond pour  $x < 0$  à son énergie cinétique, l'isotope le plus lourd possède l'énergie la plus élevée, on peut prévoir que celui qui a l'énergie la plus élevée sera le moins réfléchi car si l'énergie est très élevée par rapport à la marche de potentiel la particule ne sentira pour ainsi dire pas le changement, le faisceau réfléchi est enrichi en isotope le plus léger ; on peut écrire que  $R = |r|^2 = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \right)^2$  et donc  $R = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2$  avec  $\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \simeq 1 - \frac{V_0}{2E}$ , on en déduit que  $R \simeq \left( \frac{V_0}{4E} \right)^2$  et donc  $R = \frac{V_0^2}{16E^2}$  ; on a  $E = \frac{1}{2}mv^2$  et donc  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$ , on voit bien que si  $m_1 > m_2$  alors  $R_1 < R_2$  ce qui avait été prévu qualitativement au départ.

### 4. Deux quantons dans un puits...

On considère deux quantons de masse  $m_1 = m_0$  et  $m_2 = 2m_0$  dans un puits infini unidimensionnel de longueur  $L$ . Le potentiel du quanton  $U(x)$  est nul dans l'intervalle  $[0, L]$  et infini sinon. On suppose les deux quantons sans interaction.

1. Donner l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour un seul quanton de masse  $m_0$  dans le puits.
2. Trouver les états stationnaires ainsi que les énergies propres correspondantes pour un seul quanton de masse  $m_0$  dans le puits infini.
3. Donner l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour le système des deux quantons.
4. Montrer qu'une fonction d'onde  $\varphi_{nm}(x_1, x_2)$  sous la forme du produit du type  $\varphi_n(x_1)\varphi_m(x_2)$  est solution de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour deux quantons, et trouver ainsi les énergies propres  $E_{nm}$  du système des deux quantons.
5. Calculer les 6 premiers niveaux d'énergie et trouver le degré de dégénérescence  $g$  de chaque niveau d'énergie (c'est-à-dire le nombre d'états pour un niveau d'énergie donné).
6. Même question quand on considère deux quantons identiques ( $m_1 = m_2$ ).

Réponses : On a  $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{2m_0E_1}{\hbar^2}\varphi_1 = 0$  ; avec les conditions aux limites la solution est de la forme  $\varphi_1 = A_1 \sin k_1 x$  avec  $k_1 L = n\pi$ , en normalisant  $\int_0^L \varphi_1^2(x) dx = 1$ , on trouve  $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$  et pour l'énergie  $\frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2m_0E_1}}{\hbar}$  d'où  $E_1 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  ; on a  $E_{nm}\varphi(x_1, x_2) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\varphi(x_1, x_2)}{dx_1^2} - \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{d^2\varphi(x_1, x_2)}{dx_2^2}$  ; en séparant les variables on a  $E_{nm} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{\varphi(x_1)} \frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2} = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{1}{\varphi(x_2)} \frac{d^2\varphi(x_2)}{dx_2^2} = K$  d'où  $\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2} + \frac{2m_0(E_{nm} - K)}{\hbar^2}\varphi(x_1) = 0$  de solution  $\varphi(x_1) = A'_1 \sin k_1 x$  avec  $k_1 L = n\pi$  d'où  $\frac{\sqrt{2m_0(E_{nm} - K)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$ , on en déduit que  $K = E_{nm} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  et  $\frac{d^2\varphi(x_2)}{dx_2^2} + \frac{4m_0}{\hbar^2} K \varphi(x_2) = 0$  de solution  $\varphi(x_2) = A'_2 \sin \frac{\sqrt{4m_0K}}{\hbar} x$  avec  $\frac{\sqrt{4m_0K}}{\hbar} = \frac{m\pi}{L}$  d'où  $\frac{m^2\pi^2\hbar^2}{4m_0L^2} = E_{nm} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  et par conséquent  $E_{nm} =$

$E_0(n^2 + \frac{m^2}{2})$  avec  $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 L^2}$  ; on a  $E_{11} = \frac{3}{2}E_0$ ,  $E_{12} = 3E_0$ ,  $E_{21} = \frac{9}{2}E_0$ ,  $E_{13} = \frac{11}{2}E_0$ ,  $E_{22} = 6E_0$  et  $E_{23} = \frac{17}{2}E_0$  pas de dégénérescence  $g = 1$ , un seul état pour un niveau d'énergie donné ; si on a deux quantons identiques alors  $E_{nm} = E_0(n^2 + m^2)$ ,  $E_{11} = 2E_0$   $g = 1$ ,  $E_{12} = E_{21} = 5E_0$   $g = 2$ ,  $E_{22} = 8E_0$   $g = 1$ ,  $E_{23} = E_{32} = 13E_0$   $g = 2$ ,  $E_{33} = 18E_0$   $g = 1$ ,  $E_{24} = E_{42} = 20E_0$   $g = 2$ .

### 5. Réacteur nucléaire

On étudie un réacteur nucléaire modélisé par un cylindre verticale invariant dans le plan horizontal selon les coordonnées  $x$  et  $y$ . Seule la coordonnée  $z$  est pertinente pour décrire le système. Le bas du cylindre est constitué du combustible sur une hauteur  $h = 1$  m. On trouve au-dessus une réserve d'eau liquide de hauteur  $H = 10$  m et ensuite de l'air à la pression atmosphérique  $p^\circ = 1$  bar et à la température  $T_0 = 298$  K, voir le schéma de la figure 2.

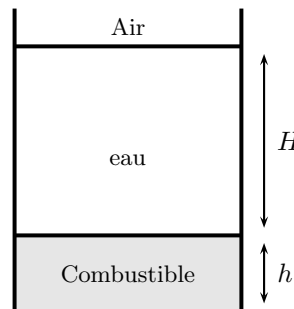


FIGURE 2 – Réacteur nucléaire

On précise que le combustible dégage une puissance volumique  $Q$ , que l'eau de masse molaire  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  possède une masse volumique supposée invariable  $\rho_0$  et une conductivité thermique  $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1. La température d'ébullition de l'eau donnée par la loi :

$$T^{eb} = a \ln \frac{p}{p^\circ} + b$$

avec  $a = 27$  K et  $p$  la pression de l'eau. Donner la valeur de  $b$ . Déterminer l'expression en fonction de  $z$  de la température d'ébullition de l'eau  $T^{eb}(z)$ . Tracer l'allure du graphique correspondant.

2. Montrer que si  $Q > Q_{max}$  alors l'eau se met à bouillir dans le réacteur nucléaire. Déterminer la valeur de  $Q_{max}$ .
3. On donne à présent  $Q = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ . Déterminer la température du combustible.
4. La chaleur latente massique (enthalpie massique) de vaporisation de l'eau est donnée par la formule :

$$L_{vap} = \frac{RT^2}{Mp^{sat}} \frac{dp^{sat}}{dT}$$

où  $p^{sat}$  est la pression de vapeur saturante. On donne  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Déterminer  $L_{vap}$  à la surface du combustible.

5. Déterminer la masse d'eau vaporisée par seconde et par mètre carré au-dessus du combustible lorsque  $Q = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Réponses :  $b = 373$  K, la statique des fluides conduit à  $p(z) = p^\circ - \rho_0 g z$  en prenant  $z = 0$  à la surface de l'eau, on a  $T^{eb} = a \ln(1 - \frac{\rho_0 g z}{p^\circ}) + b$ , avec  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $p^\circ = 10^5 \text{ Pa}$ , on a  $H = \frac{p^\circ}{\rho_0 g}$  d'où  $T^{eb} = a \ln(1 - \frac{z}{H}) + b$  pour  $z \in [-H, 0]$ , en régime stationnaire  $T(z) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{H} z$  où  $T_1$  est la température de l'interface entre le combustible et l'eau,  $j_{eau} = \lambda \frac{T_1 - T_0}{H}$ , la puissance produite dans le réacteur est  $P_r = QSh$  d'où une puissance surfacique  $j_r = Qh$ , l'état stationnaire impose  $Qh = \lambda \frac{T_1 - T_0}{H}$ ,  $Q = \lambda \frac{T_1 - T_0}{hH}$ ,  $T(z = -H) = a \ln 2 + b = 392$  K, on trouve  $Q_{max} = 5,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $T(z = -H) = 381$  K,  $\frac{dp^{sat}}{dT} = \frac{p^{sat}}{a}$ ,  $L_{vap} = \frac{R(T^{eb}(z=-H))^2}{aM} = 2,6 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\frac{d^2 m_{eau}}{dt ds} = \frac{(Q - Q_{max})h}{L_{vap}} = 1,7 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ .

### 6. Découpe laser

On utilise un laser émettant dans l'infrarouge à la longueur d'onde  $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$  pour réaliser la découpe d'une plaque fine d'aluminium. L'aluminium éclairé perpendiculairement à sa surface par le laser est fondu puis vaporisé. On utilise un laser de puissance  $P = 0,5 \text{ kW}$  que l'aluminium absorbe avec le taux d'absorption  $\varepsilon = 0,9$ , la section du laser est  $S = 0,6 \text{ mm}^2$ . La plaque d'aluminium à découper possède une épaisseur  $e = 100 \mu\text{m}$ . Les caractéristiques de l'aluminium sont les suivantes :  $\mu_{Al} = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\lambda = 237 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,

$c = 900 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $T_f = 660^\circ\text{C}$ ,  $L_f = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $T_v = 2520^\circ\text{C}$ ,  $L_v = 10\,900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Au départ, l'aluminium est à la température ambiante  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  et on considère que la capacité thermique  $c$  est la même pour le solide et pour le liquide.

1. Déterminer les caractéristiques de l'onde réfléchiée par la plaque d'aluminium. On déterminera l'amplitude des champs en particulier.
2. Établir l'équation de diffusion thermique dans l'aluminium. En déduire un temps  $\tau$  caractéristique de la diffusion thermique pour la plaque d'aluminium.
3. Établir la durée de la découpe et commenter en lien avec  $\tau$ . Quelle vitesse linéaire de découpe peut-on espérer ?

Réponses : On prend un modèle OPPS polarisé rectilignement qui se propage sur l'axe  $Oz$  orienté vers la plaque. le champ électrique est  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \exp i(\omega t + kz)$ , le champ magnétique  $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_y \exp i(\omega t + kz)$ , le vecteur de POYNTING est  $\vec{\Pi} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z \cos^2(\omega t + kz)$ , la puissance surfacique moyenne réfléchiée correspond à la moyenne du vecteur de POYNTING, on a  $\frac{(1-\varepsilon)P}{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ . On trouve  $E_0 = 2,5 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $B_0 = \frac{E_0}{c} = 8,4 \times 10^{-4} \text{ T}$ . On effectue un bilan énergétique sur une tranche comprise entre  $z$  et  $z + dz$  :  $j(z, t)S - j(z + dz, t)S = \mu c S dz \frac{\partial T}{\partial t}$  qui conduit avec la loi de FOURIER  $j(z, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  à la loi de diffusion thermique  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ . La diffusivité thermique de l'aluminium est  $a = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Par analyse dimensionnelle, on trouve  $a = \frac{c^2}{\tau}$  et donc  $\tau = \frac{c^2}{a} = 0,1 \text{ ms}$ . Cette valeur est très rapide, la température de l'aluminium va rapidement monter et ceci même pour des épaisseurs plus importantes, par exemple pour 1 mm, il faudrait 1 ms. On considère la température comme homogène dans le morceau d'aluminium pour la suite. Pour le chauffage de l'aluminium, on a  $\mu c S e \frac{dT}{dt} = \varepsilon P$ . La durée de montée de la température jusqu'à la température de fusion est  $\Delta t_1 = \frac{\mu c S e}{\varepsilon P} (T_f - T_0) = 0,21 \text{ ms}$ , c'est juste le double de la valeur estimée précédemment, c'est très rapide. Pour la fusion, on a  $\Delta t_2 = \frac{\mu S e L_f}{\varepsilon P} = 0,14 \text{ ms}$ . La durée pour atteindre la vaporisation est  $\Delta t_3 = \frac{\mu c S e L_v}{\varepsilon P} (T_v - T_f) = 0,60 \text{ ms}$ . Pour la vaporisation, on a  $\Delta t_4 = \frac{\mu S e L_v}{\varepsilon P} = 3,92 \text{ ms}$ . Pour la découpe, on a  $\Delta t = 4,87 \text{ ms}$ . Cette valeur est supérieure à  $\tau$ , la diffusion thermique a donc le temps de s'établir. Pour la vitesse de découpe, il faut estimer le diamètre de la section circulaire du laser avec  $S = \pi \frac{d^2}{4}$ , on trouve  $d = 0,9 \text{ mm}$ . La vitesse de découpe est donc  $v_d = \frac{d}{\Delta t} \simeq 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui est rapide (12 m par seconde) et surestime les valeurs industrielles classiques puisque c'est de l'ordre de 3 m par minute.

## 7. Les deux barres et les rails de Laplace

On considère une situation de rails de LAPLACE à deux rails. Deux barres peuvent se déplacer en glissant sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est disposé dans le plan horizontal. La résistance  $R$  des rails sera supposée constante et cela quelle que soit la longueur des rails mis en jeu dans le problème. La résistance de chaque barre mobile est aussi  $R$ . Un champ magnétique uniforme et indépendant du temps est appliqué, on le note  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ . À la date  $t = 0$ , on donne une vitesse initiale à la barre  $AB$  :  $\vec{v}_{AB,0} = v_0 \vec{e}_x$ . Voir le schéma de la figure 3. Les deux barres sont identiques, de masse  $m$  et de longueur  $a$ .

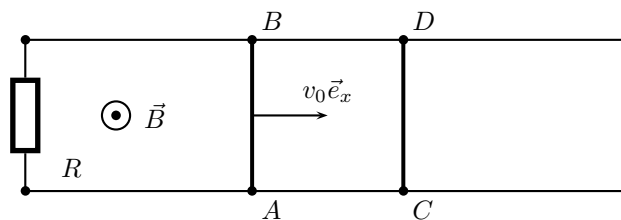


FIGURE 3 – Les deux barres sur les rails de LAPLACE

1. Faire une analyse qualitative de la situation.
2. Déterminer l'évolution des vitesses des deux barres.
3. Déterminer l'énergie dissipée dans les résistances.

Réponses : Le déplacement de la barre  $AB$  entraîne l'existence d'une force électromotrice et donc de courants induits qui ont des effets qui s'opposent à la cause qui leur ont donné naissance, la barre  $AB$  va ralentir et la barre  $CD$  va se mettre en mouvement, du fait de la dissipation d'énergie, l'ensemble va tendre vers un régime permanent où les deux vitesses seront nulles et où il n'y aura plus de phénomène d'induction, on note  $i_1$  le courant dans la barre  $AB$  et  $i_2$  celui dans la barre  $CD$ , on a  $i = i_1 + i_2$  et  $i + i_1 = -\frac{B_0 a}{R} v_1$  avec  $i + i_2 = -\frac{B_0 a}{R} v_2$  où  $v_1$  et  $v_2$  sont les vitesses des barres  $AB$  et  $CD$ , on a de plus  $\frac{dv_1}{dt} = \frac{a B_0}{m} i_1$  et  $\frac{di_2}{dt} = \frac{a B_0}{m} i_2$ ,

on pose  $\tau = \frac{mR}{a^2 B_0^2}$  et on obtient  $v_1 = \frac{v_0}{2} \left( \exp -\frac{t}{\tau} + \exp -\frac{t}{3\tau} \right)$  et  $v_2 = \frac{v_0}{2} \left( -\exp -\frac{t}{\tau} + \exp -\frac{t}{3\tau} \right)$ , on en déduit  $i_1 = \frac{mv_0}{aB_0 2\tau} \left( -\exp -\frac{t}{\tau} - \frac{1}{3} \exp -\frac{t}{3\tau} \right)$ ,  $i_2 = \frac{mv_0}{aB_0 2\tau} \left( \exp -\frac{t}{\tau} - \frac{1}{3} \exp -\frac{t}{3\tau} \right)$  et  $i = -\frac{mv_0}{aB_0} \frac{1}{3\tau} \exp -\frac{t}{3\tau}$ , on calcule  $E_J = \int_0^\infty (R(i^2 + i_1^2 + i_2^2) dt)$ , on trouve  $E_J = \frac{1}{2} m v_0^2$ , c'est l'énergie dont on disposait au départ.

### 8. Solénoïde épais

On considère un solénoïde constitué d'un milieu conducteur compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  d'axe  $Oz$ . L'intérieur du solénoïde est vide, on considérera que le solénoïde est infini. Dans le milieu conducteur circulent des courants indépendants du temps décrits par la densité volumique de courant  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\theta$ .

1. Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par ce solénoïde.
2. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. En déduire l'énergie magnétique du solénoïde pour une longueur  $h$  de ce dernier.

Réponses : On utilise le fait que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Il y a invariance de la distribution de courant par translation sur  $z$  et par rotation d'angle  $\theta$ . Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un  $\Pi^+$ , le champ magnétique est donc  $\vec{B} = B_z(r) \vec{e}_z$ . On effectue le théorème d'AMPÈRE sur un contour rectangulaire de hauteur  $h$  passant en  $r$  et pour l'autre côté en dehors du solénoïde  $r > R_2$ . Si  $r < R_1$ , le courant enlacé est  $i_e = j_0 h (R_2 - R_1)$ . Par contre, si  $R_1 < r < R_2$ , on a  $i_e = j_0 h (R_2 - r)$ . Le champ magnétique est :  $\vec{B}_{r \leq R_1} = \mu_0 j_0 (R_2 - R_1) \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_{R_1 \leq r \leq R_2} = \mu_0 j_0 (R_2 - r) \vec{e}_z$ . La densité volumique d'énergie électromagnétique est  $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ .  $W_{mag} = \frac{\mu_0 j_0^2}{2} \left[ (R_2 - R_1) \pi R_1^2 h + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - r) r dr \right]$ . Après calcul, on trouve  $W_{mag} = \frac{\mu_0 j_0^2}{12} \pi h (R_2^4 + 3R_1^4 - 4R_1^3 R_2)$ . Remarque : on ne peut pas faire le lien avec le solénoïde constitué de spires infiniment fines sauf à considérer que le produit  $j_0 (R_2 - R_1)$  reste borné lorsque  $R_2 \rightarrow R_1$ , cela signifie que  $j_0$  diverge.

### 9. Diffraction par un réseau

Soit un réseau par transmission éclairé en incidence normale, sur une largeur de 10 mm, par le doublet du sodium ( $\lambda_1 = 589,0$  nm et  $\lambda_2 = 589,6$  nm). On observe la séparation du doublet à partir du spectre d'ordre 5.

1. Calculer le pas du réseau.
2. Calculer la largeur du réseau permettant la séparation à partir du spectre d'ordre 3 des radiations de longueur d'onde  $\lambda_3 = 460,00$  nm et  $\lambda_4 = 460,13$  nm.

Réponses : 51  $\mu$ m, 6 cm.

### 10. Imperfections d'un miroir

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air avec un angle  $\alpha$ . On utilise une source lumineuse monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 584$  nm. On réalise une projection de la figure d'interférences sur un écran placé à une distance  $\ell = 1,25$  m. Le diamètre éclairé des miroirs est  $D = 20$  mm. On observe sur l'écran un des deux systèmes de franges représentés sur le schéma de la figure 4.

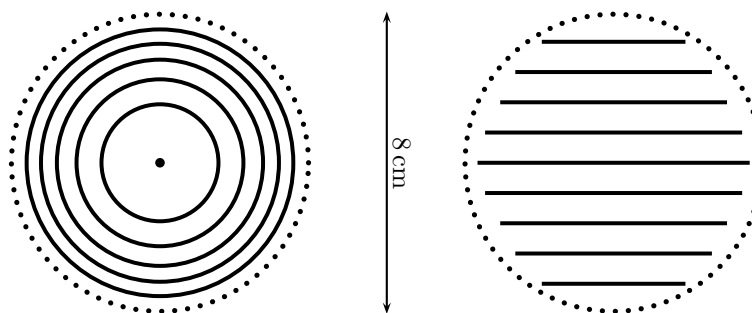


FIGURE 4 – Figures d'interférences d'un interféromètre de MICHELSON

1. Quelle est la figure qui correspond au réglage de l'interféromètre ?
2. Quel type de lentille faut-il utiliser pour réaliser la projection sur l'écran ? Donner la position qu'elle doit occuper ainsi que la valeur de distance focale.
3. À l'aide de la figure, déterminer l'angle  $\alpha$ .
4. On considère qu'un des deux miroirs possède une imperfection à sa surface. Cette imperfection est de diamètre  $d = 2$  mm et d'épaisseur inférieur à  $\lambda/4$ . Décrire avec précision les conséquences de cette imperfection sur la figure d'interférences.

5. On considère à nouveau que les miroirs de l'interféromètre sont parfaits. On injecte à proximité d'un des miroirs un peu gaz contenu dans un briquet (en veillant à ne pas envoyer sur la surface réfléchissante du miroir). Décrire ce qu'il se produit.

Réponses : L'interféromètre réglé en coin d'air produit des franges rectilignes d'égale épaisseur, on utilise une lentille convergente pour avoir une image réelle sur l'écran, la taille de l'image du miroir est  $h = 8 \text{ cm}$  alors que le diamètre était  $D = 2 \text{ cm}$ , le grandissement transversal est donc  $\gamma = -4$ , négatif puisqu'on a une lentille convergente,  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$  et  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f}$ , de plus  $\overline{AA'} = \ell$  d'où  $\overline{OA} = -0,25 \text{ m}$ ,  $\overline{OA'} = 1 \text{ m}$  et  $f = 0,20 \text{ m}$ ,  $\delta = 2\alpha x$  d'où  $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ , on en déduit que  $\alpha = \frac{\lambda}{2i}$ , sur la figure on voit  $i' = |\gamma|i = 8 \text{ mm}$  d'où  $\alpha = 1,5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ , l'imperfection produit une brusque variation de différence de marche inférieure à  $\lambda/2$  donc inférieure à une demi-interfrange, une frange apparaît comme une ligne brisée, avec un morceau de  $8 \text{ mm}$  de long décalé vers le haut ou vers le bas de moins que  $i'/2$ , avec le gaz, c'est le même problème mais l'évolution de la frange est plutôt continue et fluctue au cours du temps avec le déplacement du gaz car le gaz modifie l'indice de réfraction localement et change donc aussi la différence de marche.

### 11. L'aspirine : un acide

L'aspirine est considérée comme un monoacide AH de base conjuguée  $A^-$ . On suppose qu'il est faible. On prépare une solution aqueuse d'aspirine de concentration  $c_0 = 5,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et on mesure le  $pH$  à l'équilibre. On trouve  $pH = 2,9$ .

1. Montrer que l'aspirine est bien un acide faible.
2. Déterminer son  $pK_A$ .
3. Déterminer le taux d'avancement de la dissociation de l'aspirine à l'équilibre.
4. Montrer que la mesure de la conductivité électrique de la solution peut permettre de mesurer le taux de dissociation.

Réponses : La réaction est  $AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$ . Si l'acide était fort, il serait totalement dissocié et alors  $[H_3O^+] = 5,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , le  $pH$  serait donc de 2,3. Comme il est plus élevé cela montre qu'il y a moins d'ions  $H_3O^+$  et donc que l'acide est faible. Si on note  $x$  l'avancement de la réaction, on a  $x = [H_3O^+]$  et  $K_A = \frac{x^2}{c_0 - x}$ . On trouve  $K_A = 3,7 \times 10^{-4}$  et alors  $pK_A = 3,4$ . Le taux d'avancement est  $\alpha = \frac{x}{c_0} = 0,23 = 23\%$ . Par définition de la conductivité  $\gamma$  et des conductivités molaires limites des différents ions  $\lambda_i^\circ$ , on a  $\gamma = \sum_i \lambda_i^\circ c_i$ . Ici, on peut négliger la contribution des ions  $HO^-$  qui sont présents en très petite quantité compte tenu du  $pH$  relativement acide trouvé. On a donc  $\gamma = \alpha c_0 (\lambda_{A^-}^\circ + \lambda_{H_3O^+}^\circ)$ . La mesure de  $\gamma$  permet bien d'obtenir  $\alpha$ .

### 12. Élaboration du chrome

Le chrome se prépare essentiellement par réduction de  $Cr_2O_3$  par l'aluminium. Ici, nous envisageons deux autres méthodes. On fournit les données thermodynamiques suivantes :

	$Cr_{solide}$	$Cr_2O_3_{solide}$	$H_{2gaz}$	$H_2O_{gaz}$
$\Delta_f H^\circ$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	0	-1139,7	0	-241,8
$S^\circ$ en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	23,8	81,2	130,6	188,7

Les masses molaires atomiques utilisées sont :  $H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $Cr = 52 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Historiquement, le premier réducteur utilisé fut le dihydrogène. Comment, selon vous, produit-on industriellement le dihydrogène ? Écrire l'équation bilan de la réaction.
2. Écrire le bilan de la réduction de l'oxyde de chrome par le dihydrogène à  $400 \text{ K}$  ? Donner l'expression de l'enthalpie libre standard de la réaction en fonction de  $T$ . Calculer la constante de cet équilibre à  $400 \text{ K}$ . Comment évolue-t-elle avec la température ?
3. A  $T = 1200 \text{ K}$ , on charge un réacteur avec  $100 \text{ kg}$  de  $Cr_2O_3$ . Quelle est la masse de  $H_2$  à utiliser pour obtenir une réduction totale ?
4. En supposant que l'on puisse imposer la valeur du rapport  $R$  des pressions partielles en  $H_2$  et  $H_2O$  à l'équilibre, quelle valeur faut-il donner à  $R$  pour passer d'une atmosphère oxydante à une atmosphère réductrice de l'oxyde de chrome à  $T = 1200 \text{ K}$  ?

Un autre procédé utilisé pour obtenir le chrome est l'électrolyse d'une solution aqueuse de trioxyde de chrome. Les données industrielles sont les suivantes : on électrolyse une solution aqueuse de  $CrO_3$  à  $250 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  avec une tension d'électrolyse de l'ordre de  $5 \text{ V}$  et une densité de courant de  $30 \text{ A} \cdot \text{dm}^{-2}$ . Le rendement électrochimique est d'environ  $30\%$ .

5. Interpréter qualitativement ce faible rendement en précisant la nature des sous-produits formés. Calculer la masse de chrome déposée par heure et par mètre carré de surface d'électrode.

Réponses :  $\Delta_r G^\circ = 414,3 - 0,1407T$ ,  $K_{400\text{ K}} = 10^{-47}$ ,  $K$  augmente avec la température,  $K_{1200\text{ K}} = 2 \times 10^{-11}$ ,  $m_{\text{H}_2} = 14550\text{ kg}$ ,  $R > 3700$  atmosphère réductrice,  $R < 3700$  atmosphère oxydante, sans doute électrolyse de l'eau, 290 g de chrome.