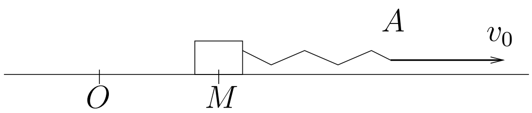
Oraux CCP-Mines-Centrale 2011

Attention, nombreuses coquilles... en cours de correction !

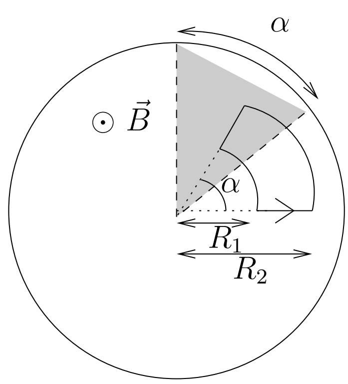
1. Effet Joule et diffusion. (*Mines*) Une résistance cylindrique de longueur l, calorifugée sur le côté, est parcourue par un courant I. Sa conductivité électrique est γ et thermique λ. La température T_0 est imposée de chaque côté. Calculer en régime stationnaire la température $T(x)$ dans la barre.
On coupe alors I et on isole les extrémités. Que vaut T_f ? Quelle est la durée τ pour obtenir T_f après l'extinction ? Calculer la variation d'entropie.

2. Bilan d'énergie dans un solénoïde. (*CCP*) Un solénoïde de très grande longueur h et de rayon a, comportant n spires par unité de longueur est parcouru par un courant $i(t)$. On donne à l'intérieur $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ et $\vec{E} = -\frac{\mu_0}{2} n r \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$. Calculer le vecteur de Poynting. Calculer l'énergie électromagnétique contenue dans le solénoïde. Vérifier qu'en ARQS on a bien $u_e \ll u_m$. Calculer la puissance entrante dans le cylindre. Retrouver finalement la conservation de l'énergie.

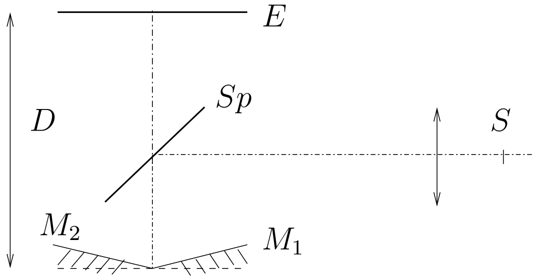
3. Masse attachée à un ressort. (*Mines*) Une masse m, attachée à un ressort (k, l_0), est initialement en O. Elle frotte sur le sol avec un coefficient de frottement μ. L'extrémité A du ressort est tirée par une personne à la vitesse constante v_0. Initialement, $OA = l_0$.
Montrer que pour $t \leq t_1$, la masse reste immobile. On pose ensuite $t = t_1 + t'$. Calculer $x(t')$. Montrer que le mouvement est périodique et donner sa période. Calculer sur une période l'énergie fournie par la personne, ainsi que celle dissipée par les frottements. Commenter.



4. Freinage avec un aimant. (*Centrale*) Un cycliste place sur une roue de masse m et rayon a un électromaimant pouvant créer un champ magnétique sur un secteur angulaire α (zone grisée). Il fixe à la roue un circuit électrique de résistance R, rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 et secteur angulaire α. Quel phénomène se produit-il ? Le vélo est posé à l'envers (selle sur le sol) pour tester le dispositif. La vitesse angulaire de la roue est initalement ω_0. De combien est-elle après un tour ? Combien faut-il de tours pour qu'elle s'arrête ? Que se passe-t-il dans le circuit, quelles sont les conséquences ?
On donne $m = 700$ g, $2a = 70$ cm, $R_1 = 25$ cm, $R_2 = 20$ cm, $\alpha = 0,2$, $v_0 = 30$ km.h^{-1}, résistivité du fil $\rho = 10^{-7}$ Ω.m, section du fil $s = 2,5$ mm^2 et $B = 2.10^{-5}$ T.



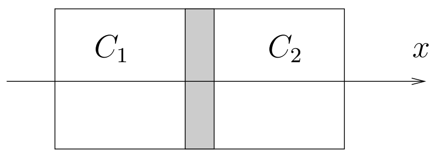
5. Interférences produites par un dièdre. (*Mines*) Une source ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde λ est placée au foyer d'une lentille convergente. S_p est une séparatrice, M_1 et M_2 deux miroirs inclinés d'un angle $\varepsilon \ll 1$, et E un écran. Qu'observe-t-on sur ce dernier ?



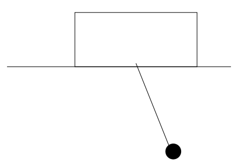
6. Balançoire. (*Mines*) Un enfant de masse m joue à la balançoire. Il se redresse lorsqu'il passe à l'angle nul (repéré par rapport à la verticale) avec une vitesse angulaire positive. Il se rassoit quand il atteint l'angle maximal $\theta_{\max}$. Cela a pour effet de modifier la distance entre l'axe de rotation de la balançoire et le barycentre de l'enfant (distances l_a et l_d), ainsi que son moment d'inertie (J_a ou J_d). Écrire les équations du mouvement lorsque l'enfant est assis ou debout, on note ω_a et ω_d les vitesses angulaires associées.
On se placera désormais dans l'approximation des petits angles. À l'instant initial, la balançoire fait l'angle $-\theta_0$ avec la verticale et l'enfant a une vitesse nulle. À quelle date passe-t-il à $\theta = 0$. Quelle est alors sa vitesse angulaire ? Quelles sont les conditions initiales pour la deuxième phase ? Déterminer le mouvement correspondant. À quelle date se rassoit-il ? Quelle est la valeur de l'angle atteint θ'_0 ? Prévoir l'évolution du mouvement.
Calculer le travail fourni par l'enfant au cours d'un aller-retour.

7. Rails de Laplace. (*Centrale*) Deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux de résistance négligeable, et dont l'écartement est l, sont placés dans le champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ (vertical). T_1 et T_2 sont deux barres de masse m, résistance R posées sur les rails perpendiculairement à ceux-ci. On donne une vitesse initiale v_0 à l'une des deux barres. Trouver la vitesse des deux barres, ainsi que l'évolution de leur distance. Commenter et faire un bilan énergétique. Proposer un circuit électrique analogue et commenter.

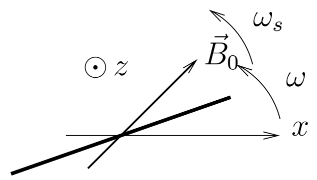
8. Oscillations. (*Mines*) Un cylindre de section S et hauteur h est séparé en deux compartiments par un piston métallique. Les deux compartiments C_1 et C_2 contiennent la même quantité de gaz et sont initialement dans le même état (P_0, T_0, V_0). L'évolution de ces deux gaz est isentropique. Le piston est mis en mouvement à $t = 0$ par une force électromagnétique $\vec{F} = F_m\cos(\omega t)\vec{u}_x$ engendrée par un électroaimant et subit une force de frottement $\vec{F'} = -k\vec{v}$. On note x la position du piston repérée par rapport au centre.
Montrer que $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x \simeq A\cos(\omega t)$ et exprimer les constantes correspondantes. Trouver $x(t)$ en régime forcé. Montrer qu'il y a résonance en amplitude selon une condition sur Q pour ω_{rx}. Montrer qu'il y a résonance en vitesse pour ω_{rv}. Commenter.
À $t = t_0$, on arrête la force excitatrice. Trouver le mouvement ultérieur. Comment mesurer k ? On note que k passe de 250 kg.s^{-1} quand F_m est active à 50 kg.s^{-1} en son absence. Proposer une explication.



9. Oscillations d'un système. (*Mines, Centrale*) Une caisse de masse m glisse sans frottement sur le sol. Un pendule constitué d'une tige rigide de masse négligeable, longueur $2l$ et d'une masse m peut se mouvoir en rotation sans frottement autour d'un axe rigidement lié à cette caisse. Quel est le mouvement du barycentre ? Donner la pulsation des petites oscillations.



10. Moteur asynchrone. (*Mines*) Un cadre conducteur, de surface S, composé de N tours de fil tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. Le champ magnétique $\vec{B}_0$ uniforme tourne quant à lui à la vitesse angulaire ω_s. Le cadre a une résistance R et une inductance L. Calculer le couple moyen exercé par le champ sur le cadre. Dans quelle gamme de fréquence le fonctionnement est-il possible ? Justifier le nom du moteur.



11. Mouvement d'une charge. (*Mines*) Soit dans l'espace le champ électrique défini par $\vec{E} = \vec{0}$ si $|x| > a$, $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ pour $-a < x < 0$ et $\vec{E} = -E_0\vec{u}_x$ pour $0 < x < a$ (a et E_0 sont des constantes positives). Imaginer un dispositif à l'origine d'un tel champ.
Une charge q, m arrive depuis $-\infty$ avec la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ ($v_0 > 0$). Il n'y a pas de frottement et la gravitation peut être négligée. La particule peut-elle traverser le dispositif ? À quelle condition ?

12. Oscillations. (*CCP*) Une bille de masse m et rayon b est attachée au plafond par un ressort (k, l_0). La boule est de plus plongée dans un récipient d'eau de masse volumique ρ_e. La boule subit un frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta b\vec{v}$, où η est la viscosité de l'eau.
Trouver la longueur du ressort à l'équilibre l_e. Établir l'équation différentielle en $z(t)$, repérée par rapport à la position d'équilibre, sous la forme $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$. Quelle est la condition pour observer des oscillations ? Que vaut alors la pseudopériode T ? En l'absence de frottements, que vaut la période propre T_0 ? Proposer une méthode permettant la mesure de η.

13. Mise en rotation de pièces chargées. (*Centrale*) Deux cylindres coaxiaux isolants, de hauteur h, sont en pivot parfait autour de leur axe $\vec{u}_z$ (moments d'inertie respectifs J_1 et J_2). Le premier (second) cylindre de rayon a (b) porte une charge surfacique $\sigma_1 = q/(2\pi ah)$ ($\sigma_2 = -q/(2\pi bh)$). Le tout est baigné dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \exp(-\dfrac{t}{\tau})\vec{u}_z$. Expliquer pourquoi les cylindres se mettent en rotation, dans quel sens ? Calculer le moment cinétique de l'ensemble des deux cylindres $L(t)$. Calculer Ω_1 et Ω_2, vitesses angulaires des deux cylindres, ainsi que le moment cinétique L de l'ensemble, au bout d'un temps très long. Calculer le moment cinétique final de l'ensemble des deux cylindres. Retrouver ce résultat en admettant qu'un champ électromagnétique possède un quantité de mouvement $\varepsilon_0\vec{E} \wedge \vec{B}$ par unité de volume.

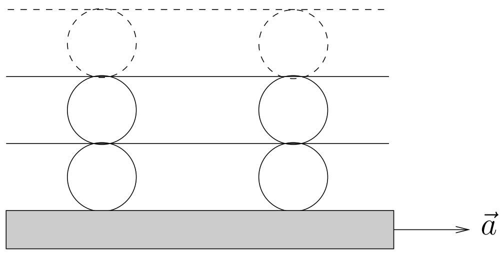
14. Résistance cylindrique. (*CCP*) Une gaine de grande longueur l est comprise entre deux cylindres de rayons r_1 et r_2. Elle est taillée dans un matériau de conductivité thermique λ. Les parois internes et externes sont maintenues à des températures constantes T_1 et T_2. De quelle(s) variable(s) dépend la température en régime stationnaire ? Quelle est la forme de la densité de flux thermique $\vec{\jmath}_Q$? Soit $\Phi(r)$ le flux thermique sortant du cylindre de rayon r. Montrer que Φ est indépendant de r. En déduire la résistance thermique de l'ensemble. [même exercice posé avec sphères]

15. Bilan d'énergie dans un fil. (*CCP*) Un fil est modélisé par un cylindre infini conducteur (conductivité γ) de rayon a. Un courant I de densité uniforme de courant $\vec{\jmath}$ le parcourt. Déterminer le champ $\vec{B}$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$. Trouver la puissance perdue par effet Joule d'une partie du cylindre de longueur h de deux manières différentes. Vérifier la conservation de l'énergie.

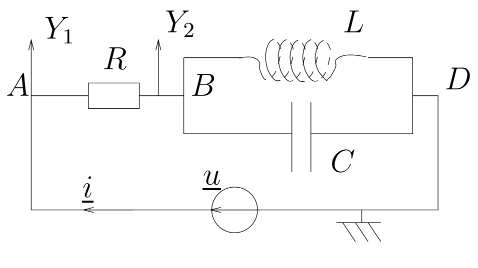
16. Mesure de mutuelle. (*Centrale*) Deux bobines circulaire (inductance L, N tours, rayon R) identiques sont disposées de manière à être coaxiales et séparées d'une distance d. La première est mise en série avec une résistance r et un générateur fournissant un signal triangulaire de fréquence f (voie 1 de l'oscillo). La tension aux bornes de la seconde est directement envoyée sur l'oscillo (voie 2). Sur cette voie, on observe un signal en créneaux.
Montrer que r, L et f vérifient une relation. Montrer que la visualisation des courbes permet de

mesurer la mutuelle inductance M.
Soit O le centre de la première bobine. Montrer que le champ qu'elle crée sur l'axe est de la forme $\vec{B}_{\text{axe}}(z) = kf(z)\vec{u}_z$, avec $f(0) = 1$. Montrer qu'au voisinage de l'axe, $B_z(r,z) = B_{\text{axe}}(z) - \dfrac{r^2}{4}\dfrac{\partial^2 B_{\text{axe}}(z)}{\partial z^2}$. En déduire l'expression de la mutuelle inductance en fonction notamment de $f(d)$ et $f''(d)$.

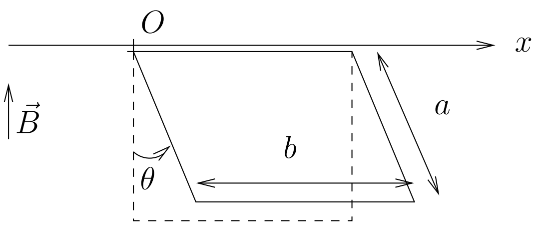
17. Empilement de cylindres. (*Mines*) Les cylindres de masse m, rayon R et moment d'inertie par rapport à Gy valant $\beta m R^2$ roulent sans glisser sur les planches de masse nulle. La planche du bas a l'accélération $\vec{a}$. Trouver l'accélération a_1 du cylindre du bas.
Indication : on note $\vec{F}_n$ la force exercée par le cylindre n sur le n+1. Écrire les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique pour le cyclindre n, ainsi que le roulement sans glissement afin d'obtenir la matrice A telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ R\dot{\omega}_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ R\dot{\omega}_n \end{pmatrix}$*, puis diagonaliser la matrice...*



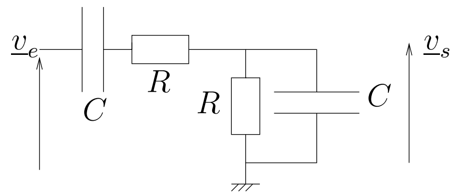
18. Étude d'un circuit. (*CCP*) Calculer $\underline{Z}_{BD}$ et $\underline{Z}_{AD}$. Quelle est la fréquence f_0 telle que u_{AD} et u_{BD} soient en phase ? Que vaut alors u_{AB} ?
On veut visualiser u_{AB} et u_{BD} sur l'oscilloscope. Que faut-il changer ? Précautions à prendre ? Trouver f_1, f_2 telles que $|\underline{u}_{AB}| = |\underline{u}_{BD}|$. Que valent à ces fréquences φ_1, φ_2, déphasage de $\underline{i}$ par rapport à $\underline{i}$.



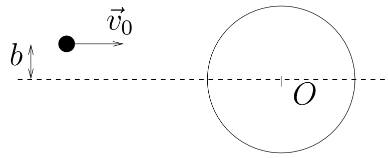
19. Cadre dans un champ magnétique uniforme. (*Mines*) Un cadre métallique, de côtés a et b, de résistance R, de masse m, de moment d'inertie J_{Ox} est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Le cadre rigide peut tourner en pivot parfait autour de Ox. Trouver l'équation différentielle en $\theta(t)$. La linéariser. Quelle est la condition sur B pour avoir des oscillations amorties ? Résoudre avec un cadre initialement immobile et $\theta(0) = \theta_0$. Calculer et tracer $i(t)$. Comment relier $\displaystyle\int_0^\infty Ri^2(t)dt$ et θ_0 ?



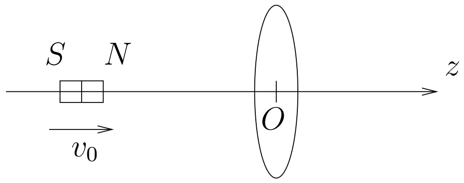
20. Filtre de Wien. (*CCP*) Sans calcul, trouver la nature du filtre. Calcule la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s/\underline{v}_e$ en fonction de $x = RC\omega$. Tracer le diagramme de Bode. En remarquant que les pulsations de coupure vérifient $x - 1/x = \pm 3$, calculer le déphasage en ces valeurs.



21. Diffusion de neutrons. (*Centrale*) Un neutron (masse m) est projeté sur un noyau atomique de centre O et rayon R avec un paramètre d'impact b et une vitesse v_0 au loin. On modélise l'interaction par l'énergie potentielle $Ep = 0$ si $r > R$ et $Ep = -U_0$ si $r < R$. Quelle est la nature de la trajectoire du neutron ? Quelle est la déviation D ? Donner l'image sur un écran d'un envoi homogène de neutrons sur le noyau (qualitatif, puis quantitatif).



22. Aimant approchant d'une spire. (*Mines*) Une spire circulaire d'axe Oz, de rayon a, de résistance R et comportant N tours est immobile. Un aimant, modélisé par un dipôle magnétique $\mathcal{M}$, est approché à la vitesse v_0 constante. Montrer que la tension aux bornes de la bobine est de la forme $u(t) = Kt/(1+(t/\tau)^2)^{5/2}$. À quelle condition l'approximation dipolaire est-elle correcte ?

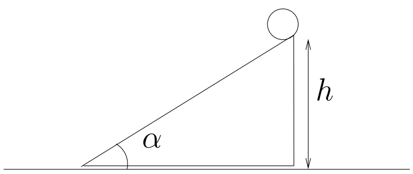


23. Lunettes. (*CCP*) On fabrique une lunette astronomique avec deux lentilles convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de centres O_1 et O_2. On se débrouille pour que le système soit afocal. Qu'est-ce que cela signifie ? Déterminer $e = O_1O_2$. Que vaut le grossissement $G = \alpha'/\alpha$, rapport des angles d'émergence et d'incidence. On dispose de lentilles de 20 δ et 1 δ. Laquelle doit-on utiliser en oculaire ?

24. Champ tournant. (*Mines*) Trois solénoïdes infinis, d'axes coplanaires, concourant en O et inclinés de $2\pi/3$ deux à deux, sont parcourus par les courants respectifs $i_1 = i_0\cos(\omega t)$, $i_2 = i_0\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$ et $i_3 = i_0\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$. Calculer le champ magnétique en O et montrer que sa norme est constante.

25. Réfrigérateur. (*CCP*) On considère un réfrigérateur à cycle réversible de durée t. On fournit les informations suivantes : moteur de puissance P, fournissant un travail W, source chaude à la température T_c, fournissant une chaleur Q_c. Source froide à la température T_f, fournissant une chaleur Q_f.
Donner les signes de W, Q_c, Q_f. Souvent, pour les réfrigérateurs, il est utile de parler d'efficacité frigorifique e_f. La définir. Exprimer e_f à l'aide de T_c et T_f. Calculer m_t, masse de glace créée à partir d'eau à 0°C en un seul cycle (donnée : $l_{\text{fus eau}}$).

26. Cylindre posé sur un coin. (*Centrale*) Un cylindre, de masse m, de rayon a et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = ma^2/2$, roule sans glisser sur le coin de hauteur $h \gg a$, d'angle α et de masse M. Il n'y a pas de frottement entre le sol et le coin. Déterminer l'accélération du coin en fonction de M, m, α et g. Combien de temps met la bille pour tomber du haut du coin avec une vitesse initiale nulle ?



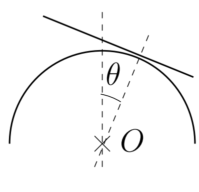
27. Diffusion dans une roche poreuse. (*Mines*) Une roche est dite de facteur de porosité q si une fraction q de son volume peut être occupé par un gaz. Ce gaz de masse molaire M est supposé obéir à la loi des gaz parfaits. De la diffusion a alors lieu entre zones de pressions différentes selon la loi de Darcy : le nombre de particules passant à travers la surface S d'abscisse x est $dN = S\dfrac{\partial p}{\partial x}(x)dt$.
Réaliser un bilan de particules sur un volume élémentaire et en déduire une équation aux dérivées partielles satisfaite par la pression p. D'un côté en $x = 0$ la roche est à l'air libre, de l'autre en $x = L$, la roche poreuse est au contact d'une roche non poreuse. On cherche une solution de la forme $p(x) = p_0 + \alpha\sin(kx+\varphi)\exp(-\dfrac{t}{\tau})$. Trouver la solution correspondant à la plus faible valeur de k. Commenter.

28. Foudre. (*Centrale*) La foudre tombe sur le sol considéré comme un coducteur ohmique et occupant le demi-espace $z \leq 0$. On modélise cette situation par un fil semi-infini parcouru par une intensité I pour la partie $z > 0$. Dans le sol, le courant se répartit volumiquement et radialement de manière isotrope. Étudier les symétries et invariances. Calculer $\vec{\jmath}$ pour $z \leq 0$. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ dans tout l'espace. Montrer que le métal subit une force volumique de Laplace. Comment est dirigée sa résultante ? Peut-on la calculer ? Le métal a une masse volumique μ, une masse molaire M. Exprimer la densité volumique ρ_m de charges mobiles en fonction de ces données. Montrer qu'on peut négliger l'effet Hall dans le sol si $\gamma B \ll \rho_m$, où γ est la conductivité du sol.

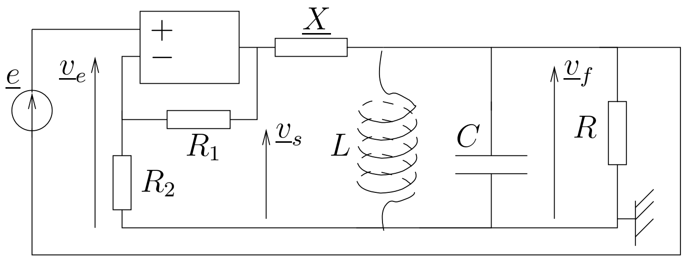
29. Tunnel. (*Centrale*) La Terre est assimilée à une sphère homogène, de rayon R et de masse volumique ρ constante. On creuse un tunnel rectiligne entre deux villes situées à une distance de 1000 km. Un train se déplace librement et sans frottement dans le tunnel. Quel est le temps mis pour faire le trajet en fonction de R et g, accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ? On néglige la rotation de la Terre.
Un moteur compense à chaque instant les pertes dues aux frottements, dont la force associée est : $\vec{f} = -\alpha||\vec{v}||\,\vec{v}$. Déterminer le travail fourni par le moteur entre les deux villes. Comparer au cas d'un transport à vitesse constante en surface.

30. Autour des trous d'Young. (*CCP*) Une source ponctuelle monochromatique S_1 à la distance b de l'axe optique éclaire deux trous d'Young situés à une distance D. Un écran est placé au foyer image d'une lentille convergente. Tracer deux rayons partant de la source. Déterminer l'intensité $I_1(M)$ d'un point M de l'écran. Quel type de franges observe-t-on ?
On ajoute une deuxième source placée symétriquement à S_1. Déterminer $I(M)$. Les deux sources s'écartent à la vitesse verticale V_0. Montrer que l'intensité est périodique. Y a-t-il brouillage ?

31. Barre sur un cylindre. (*CCP*) Une barre homogène, de masse m et de longueur $2l$, est posée initialement en équilibre sur un cylindre de rayon R. On apppuie légèrement à droite pui on relâche. On suppose que l'évolution se fait en roulement sans glissement. La position du point de contact I entre la barre et le cylindre est repérée par $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OI})$. Que vaut IG ? En déduire l'énergie cinétique de la tige, puis son énergie potentielle. Quelle est la période des petites oscillations en roulement sans glissement ? ($J_{Gz} = ml^2/3$)



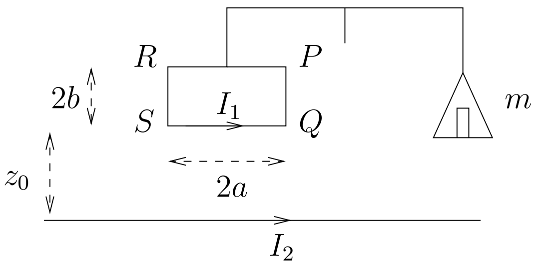
32. Oscillateur. (*CCP*) Donner les fonctions de transferts $\underline{H}_1 = \underline{v}_s/\underline{v}_e$ et $\underline{H}_2 = \underline{v}_s/\underline{v}_f$. On supprime ensuite le générateur. Pour quelle impédance $\underline{X}$ a-t-on des oscillations sinusoïdales ? D'où provient l'énergie ?



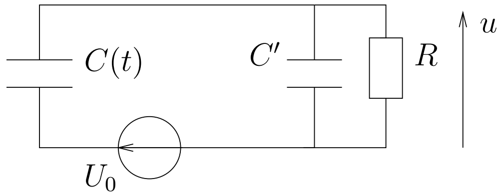
33. Turbopropulseur. (*Mines*) Dans un réacteur, du kérosène est consommé. Cette combustion est modélisée par la présence d'une source chaude. Un gaz parfait diatomique subit un cycle entre cette source chaude et une source froide, formé de deux isobares AB à P_2 et CD à P_1 ($P_2 > P_1$), et deux adiabatiques réversibles BC et DA. Pendant ces deux transformations adiabatiques, le gaz échange du travail avec des pièces mobiles (compresseur ou turbine qui entraîne une hélice). Dans quel sens est parcouru le cycle ? Calculer Q_f, Q_c et W en fonction de P_1, P_2, T_B et T_D (rapportés à une mole de fluide). Quel est le débit molaire de gaz D pour que la puissance fournie soit $\mathcal{P}_0$? Comment exprimer le couple moteur fourni ?

34. Balance magnétique. (*CCP*) Soit $PQRS$ un cadre de côtés $2a \times 2b$. Ce cadre est relié à une balance romaine par un fil partant du milieu de $[PQ]$. Sans masse dans la balance, on observe un équilibre. À la distance z_0 sous la balance, un fil infini est parcouru par un courant I_2. Lorsque que l'on met un courant I_1 dans le cadre, l'équilibre est rompu et on y appose une masse m pour le recouvrer.

Calculer $\vec{B}_2$, champ créé par I_2 dans le plan (xOz). Donner le sens de I_1 pour que cette expérience ait un intérêt. Calculer $\vec{F}$, force de Laplace résultante sur le cadre $PQRS$. En déduire la masse m nécessaire au rétablissement de l'équilibre.



35. Modélisation de microphone. (*Mines*) Un microphone est modélisé par une capacité variable : $C(t) = K/(e_0+\varepsilon(t))$. Trouver une équation différentielle reliant ε à u. Dans le cas de petites oscillations en $\underline{u}$ et $\underline{\varepsilon}$, trouver la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u}/\underline{\varepsilon}$. Dans quel domaine a-t-on une bonne reproduction des sons ?



36. Ailette de refroidissement. (*CCP, Mines*) Une barre cylindrique de très grande longueur L, de section de rayon a, est taillée dans un matériau de conductivité thermique K. Elle est au contact en $x = 0$ avec un échangeur (surface évacuant de la chaleur) de température T_0. Le reste de la barre est plongé dans un milieu ambiant de température T_e. Les échanges thermiques barre/air et échangeur/air sont caractérisés par le coefficient de Newton h. Calculer en régime permanent le champ de température dans la barre. À quelles conditions la barre peut-elle être considérée comme infinie ?

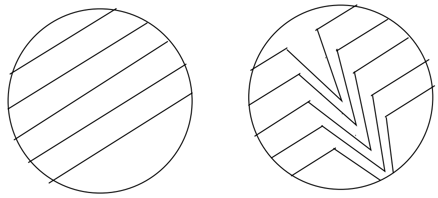
37. Jet de gaz. (*Centrale*) Comment obtenir la figure de gauche ? Quels sont les réglages expérimentaux à réaliser ?

La source possède un profil spectral gaussien et émet entre ν et $\nu + d\nu$ l'intensité $dI(\nu) = C\exp[-(\nu - \nu_0)^2/\sigma^2]\, d\nu$, où σ est une constante. Sachant que

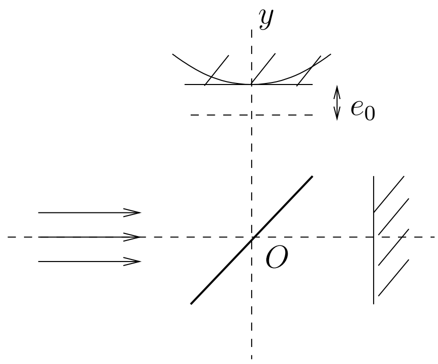
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/a^2)\exp(2j\pi ux)du = a\sqrt{\pi}\exp(-\pi^2a^2x^2),$$

établir l'expression de $I(x)$ sur l'écran. Comment évaluer ν_0 et σ à partir de l'expérience ?

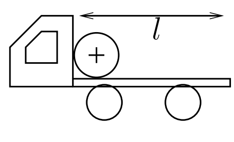
Un jet de gaz réalisé avec un briquet modifie la figure de la manière suivante. Expliquer. En déduire la densité et la nature du gaz sachant que $n-1 = Kd$, avec $K = 0,003$ et que le diamètre du jet est typiquement 2 mm. On donne $\lambda = 540$ nm.



38. Déformation d'un miroir. (*Centrale*) Un interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air d'épaisseur e_0, est éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique. Un écran est placé en sortie. Qu'observe-t-on ? Peut-on repérer le contact optique ? Utiliser une lumière blanche changera-t-il quelque chose ?
On déforme mécaniquement l'un des miroirs. Celui-ci devient sphérique convexe de rayon de courbure R (voir la figure). On s'intéresse à un rayon à la distance r de Oy (on supposera $r \ll R$). Que dire sur la trajectoire des rayons ? Calculer l'épaisseur du coin d'air équivalent. Quelle est la forme des franges ? Donner le rayon ρ_k du $k^{\text{ième}}$ anneau lumineux en partant du centre en fonction de ρ_1 et k notamment. Comment calculer le rayon de courbure R en fonction des rayons de 2 anneaux successifs ?
En chariotant le miroir sphérique vers la séparatrice, expliquer comment savoir si le miroir est convexe ou concave.

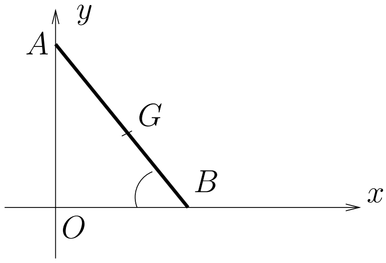


39. Démarrage d'un camion. (*Centrale*) Un camion démarre sur une route horizontale avec une accélération γ constante. Sur la plate-forme de longueur l est placé un cylindre homogène de masse m et de rayon R (coefficient de frottement cylindre/plate-forme f). Calculer le temps mis par le cylindre pour tomber du camion. Quand est-il maximal ou minimal à accélération γ fixée ? Calculer le travail des frottements sur le cylindre.

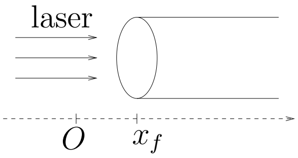


40. Tige glissant. (*CCP*) Une barre AB de masse m et longueur $2l$ est posée contre un mur, sans aucun frottement. Soit G le barycentre, on considère comme acquis que la longueur OG est

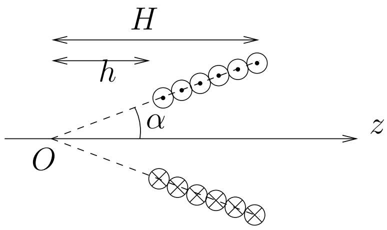
constante et vaut l. À l'instant initial, $\theta = \theta_0$ avec la tige immobile.
Montrer que la barre ne peut pas rester au repos. Trouver la vitesse de G, son accélération. Évaluer l'énergie cinétique. Donner l'expression de l'énergie potentielle. Montrer que l'énergie se conserve, en déduire l'expression de $\dot{\theta}^2$, puis de $\ddot{\theta}$. Calculer les réactions en A et B. La barre se soulève-t-elle en A ou B lors du mouvement ?
On donne $J_{Gz} = ml^2/3$.



41. Perçage par laser. (*Mines*) Sous l'effet du rayonnement d'un laser de puissance P_0, on fait fonde un barreau métallique (masse volumique ρ, conductivité thermique λ, chaleur latente massique de fusion L_f). Le barreau est éclairé uniformément sur toute sa section S. Le métal liquide, provenant de la fusion du barreau, sort immédiatement de la zone éclairée. On note $x_f(t)$ l'abscisse du front de fusion ($x_f(0) = 0$). Dans le barreau, on suppose que T ne dépend que de x et de t. En $x = x_f$, $T = T_f$, température de fusion du métal, et $T = T_0$ quand $x \to \infty$. On s'intéresse aux solutions de la forme $T(x,t) = f(x - v_f t)$, où $v_f = \dot{x}_f = \text{cte}$ est la vitesse de propagation du front de fusion. Montrer que cette solution est stationnaire dans un certain référentiel. Quelle est la forme de f ? Que devient la puissance absorbée par le barreau ? En déduire l'expression de v_f en fonction des données du problème.



42. Bobine tronconique. (*CCP*) Déterminer pour une spire le champ magnétique sur l'axe.
Un fil de diamètre $2a$ est enroulé de manière serrée autour d'un cône de demi-angle α. Derminer le courant dI correspondant à une hauteur dz. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en O.

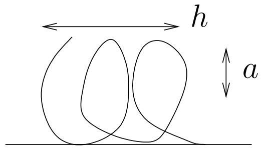


43. Conducteurs sphériques. (*CCP*) On considère deux conducteurs sphériques concentriques : le premier a pour rayon R_1 et est mis à la masse ; le second est compris entre R_2 et $R_2 + e$ et a le potentiel $V_0 > 0$. Rappeler les propriétés des conducteurs à l'équilibre électrostatique. Quand dit-on que deux conducteurs sont en influence totale ? En déduire la répartition des charges et leurs signes. Déterminer $\vec{E}$ et V en tout point de l'espace.

44. Oscillations d'une hélice. (*Centrale*) On pose sur une table un solide de forme hélicoïdale (masse m, pas h, rayon a). La hauteur est $h = 5a/2$. On suppose qu'il n'y a pas de glissement. Expliquer pourquoi en général le solide n'est pas à l'équilibre. Expliquer les calculs suivants en maple :

$x := \theta -> a * \cos\theta;$
$y := \theta -> a * \sin\theta;$
$z := \theta -> h * \theta/2/\pi;$
$\Theta := 5 * \pi;$
$X := int(x(\theta), \theta = 0..\Theta)/\Theta;$
$Y := int(y(\theta), \theta = 0..\Theta)/\Theta;$
$Z := int(z(\theta), \theta = 0..\Theta)/\Theta;$
$J := m * int((X - a * \cos(\theta)) * *2 + (Y - a * \sin(\theta)) * *2, \theta = 0..\Theta)/\Theta;$

Déterminer la période des petites oscillations.



45. Forces centrales. (*CCP*) Qu'appelle-t-on force centrale ? Montrer qu'un corps soumis à une telle force a un mouvement plan. Rappeler la deuxième loi de Kelpler, et la redémontrer. On rappelle les formules de Binet : $\vec{v} = C(-u'\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta)$ et $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$. À quoi correspondent u, u', u'' et C ? $\vec{r}_0$. Quelle doit être la force si le mouvement est $f = r_0 \exp\theta$? L'exprimer en fonction de m, r et C. Que vaut l'énergie potentielle ?