THÉORIE DES APPLICATIONS CORRECTION

Exercice 1

Soient E, F, G trois ensembles.

1. *On suppose que $E \neq \varnothing$. Soit $f : F \longrightarrow G$ une application. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $\forall g, h \in F^E,\ (f \circ g = f \circ h) \Longrightarrow (g = h)$.*

   On procède par double-implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est injective.
   Soient $g, h \in F^E$ telles que $f \circ g = f \circ h$. Pour tout $x \in E$, on a $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, c'est-à-dire $f\big(g(x)\big) = f\big(h(x)\big)$. Comme f est injective, cela implique que $g(x) = h(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc $g = h$.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\forall g, h \in F^E,\ (f \circ g = f \circ h) \Longrightarrow (g = h)$.
   Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Notons $g : E \longrightarrow F$ l'application constante égale à y_1 et $h : E \longrightarrow F$ l'application constante égale à y_2. L'égalité $f(y_1) = f(y_2)$ implique que $f \circ g = f \circ h$. Dès lors, on sait que $g = h$. Cela prouve que $y_1 = y_2$. Donc f est injective.

   En conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } \forall g, h \in F^E,\ (f \circ g = f \circ h) \Longrightarrow (g = h).}$$

2. *On suppose que G n'est ni vide ni un singleton. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Démontrer que f est surjective si, et seulement si, $\forall g, h \in G^F,\ (g \circ f = h \circ f) \Longrightarrow (g = h)$.*

   On procède à nouveau par double-implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est surjective.
   Soient $g, h \in G^F$ telles que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = h(y)$. Cela démontre que $g = h$.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\forall g, h \in G^F,\ (g \circ f = h \circ f) \Longrightarrow (g = h)$.
   Soit $y \in F$. Comme G n'est ni vide ni un singleton, on peut considérer deux éléments distincts z_1 et z_2 de G. Notons alors $g : F \longrightarrow G$ l'application constante égale à z_1 et $h : F \longrightarrow G$ telle que $h(y) = z_2$ et $\forall t \in F \setminus \{y\},\ h(t) = z_1$. Comme $z_1 \neq z_2$, on a $g \neq h$. La contraposée de l'hypothèse nous dit alors que $g \circ f \neq h \circ f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) \neq (h \circ f)(x)$, c'est-à-dire $g\big(f(x)\big) \neq h\big(f(x)\big)$. Comme g et h coïncident en tout point de F sauf en y, cela signifie que $f(x) = y$. Ainsi y possède un antécédent par f, ce qui démontre que f est surjective.

   En conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est surjective si, et seulement si, } \forall g, h \in G^F,\ (g \circ f = h \circ f) \Longrightarrow (g = h).}$$

Exercice 2

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathscr{C}$ un clan sur Ω, c'est-à-dire un ensemble $\mathscr{C}$ de parties de Ω tel que $\varnothing \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire et $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie. On considère un endomorphisme de $\mathscr{C}$ c'est-à-dire une application $\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ telle que $\forall A \in \mathscr{C},\ \varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$ et $\forall A, B \in \mathscr{C},\ \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

1. *Démontrer que $\Omega \in \mathscr{C}$ puis que $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cap B \in \mathscr{C}$.*

   On a $\varnothing \in \mathscr{C}$ et $\Omega = \overline{\varnothing}$ donc, comme $\mathscr{C}$ est stable par passage au contraire, on a

   $$\boxed{\Omega \in \mathscr{C}.}$$

   Soient $A, B \in \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable par passage au contraire, on a $\overline{A}, \overline{B} \in \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable pas réunion finie, on a $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire $\overline{A \cap B} \in \mathscr{C}$. En utilisant à nouveau la stabilité de $\mathscr{C}$ par passage au contraire, on en déduit que $A \cap B \in \mathscr{C}$. Donc

   $$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{C}, \qquad A \cap B \in \mathscr{C}.}$$

2. *Calculer $\varphi(\Omega)$ et $\varphi(\varnothing)$.*

   On a

   $$\varphi(\Omega) = \varphi(\Omega \cup \varnothing) = \varphi(\Omega) \cup \varphi(\varnothing) = \varphi(\overline{\varnothing}) \cup \varphi(\varnothing) = \overline{\varphi(\varnothing)} \cup \varphi(\varnothing) = \Omega$$

   et

   $$\varphi(\varnothing) = \overline{\varphi(\Omega)} = \overline{\Omega} = \varnothing.$$

   Donc

   $$\boxed{\varphi(\Omega) = \Omega \qquad \text{et} \qquad \varphi(\varnothing) = \varnothing.}$$

3. *Démontrer que $\forall A, B \in \mathscr{C},\ \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.*

   Pour tous $A, B \in \mathscr{C}$, on a

   $$\varphi(A \cap B) = \overline{\varphi(\overline{A \cap B})} = \overline{\varphi(\overline{A} \cup \overline{B})} = \overline{\varphi(\overline{A}) \cup \varphi(\overline{B})} = \overline{\varphi(\overline{A})} \cap \overline{\varphi(\overline{B})} = \varphi(A) \cap \varphi(B),$$

   donc

   $$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{C}, \qquad \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B).}$$

4. *On ordonne $\mathscr{C}$ par la relation d'ordre d'inclusion ($\subset$). Démontrer que φ est croissant.*

   Soient $A, B \in \mathscr{C}$ tels que $A \subset B$. On a

   $$\varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(A \cup B) = \varphi(B),$$

   donc

   $$\varphi(A) \subset \varphi(B).$$

   Cela démontre que

   $$\boxed{\varphi \text{ est croissant.}}$$

5. *Le noyau de φ est le sous-ensemble* $\operatorname{Ker}\varphi$ *de $\mathscr{C}$ défini par* $\operatorname{Ker}\varphi = \{A \in \mathscr{C} : \varphi(A) = \varnothing\}$. *Démontrer que φ est injectif si, et seulement si,* $\operatorname{Ker}\varphi = \{\varnothing\}$.

   On raisonne par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que φ est injectif. Alors $\varnothing$ admet au plus un antécédent par φ. Comme $\varphi(\varnothing) = \varnothing$, on sait que $\varnothing$ est le seul antécédent de $\varnothing$ par φ, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}\varphi = \{\varnothing\}$.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\varnothing\}$. Soient $A, B \in \mathscr{C}$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors $\varphi(A) \cap \overline{\varphi(B)} = \varnothing$ et $\overline{\varphi(A)} \cap \varphi(B) = \varnothing$, ce qui donne $\varphi(A \cap \overline{B}) = \varnothing$ et $\varphi(\overline{A} \cap B) = \varnothing$, c'est-à-dire $A \cap \overline{B} \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $\overline{A} \cap B \in \operatorname{Ker}\varphi$. Or $\operatorname{Ker}\varphi = \{\varnothing\}$, donc $A \cap \overline{B} = \varnothing$ et $\overline{A} \cap B = \varnothing$, ce qui signifie que $A = B$. Ainsi, φ est injectif.

   En conclusion,

   $$\boxed{\varphi \text{ est injectif si, et seulement si, } \operatorname{Ker}\varphi = \{\varnothing\}.}$$