FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tous les exercices, K désigne un corps commutatif.

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F^2 = X$.

Si une telle fonction existait, on aurait $\deg(F^2) = \deg(X)$, c'est-à-dire $2\deg(F) = 1$, ce qui n'est pas possible. Donc

$$\boxed{\text{il n'existe pas de fraction rationnelle } F \text{ sur } K \text{ telle que } F^2 = X.}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Soit F une fraction rationnelle sur K, où K est un corps de caractéristique nulle.

1. Démontrer que si α est une racine de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors α est une racine de F' de multiplicité $m-1$.
2. Démontrer que si β est un pôle de F de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$, alors β est un pôle de F' de multiplicité $p+1$.

Notons A/S un représentant irréductible de F.

1. Soit α une racine de multiplicité m de F. Il existe alors $B \in K[X]$ tel que $A = (X-\alpha)^m B$ avec $B(\alpha) \neq 0$ et $S(\alpha) \neq 0$. Alors
$$\begin{aligned} F' &= \Big(\frac{(X-\alpha)^m B}{S}\Big)' \\ &= \frac{\big(m(X-\alpha)^{m-1}B - (X-\alpha)^m B'\big)S - (X-\alpha)^m BS'}{S^2} \\ &= \frac{(X-\alpha)^{m-1}\big(mBS - (X-\alpha)B'S - (X-\alpha)BS'\big)}{S^2}. \end{aligned}$$
Or
$$\big(mBS - (X-\alpha)B'S - (X-\alpha)BS'\big)(\alpha) = mB(\alpha)S(\alpha) \neq 0$$
et
$$S^2(\alpha) \neq 0,$$
donc
$$\boxed{\alpha \text{ est une racine de } F' \text{ de multiplicité } m-1.}$$
2. Soit β un pôle de multiplicité p de F. Il existe alors $T \in K[X]$ tel que $S = (X-\beta)^p T$ avec $T(\beta) \neq 0$ et $A(\beta) \neq 0$. Alors
$$\begin{aligned} F' &= \Big(\frac{A}{(X-\beta)^p T}\Big)' \\ &= \frac{A'}{(X-\beta)^p T} - \frac{AT'}{(X-\beta)^p T^2} - \frac{Ap}{(X-\beta)^{p+1}T} \\ &= \frac{(X-\beta)A'T - (X-\beta)AT' - pAT}{(X-\beta)^{p+1}T^2}. \end{aligned}$$
Or
$$\big((X-\beta)A'T - (X-\beta)AT' - pAT\big)(\beta) = pA(\beta)T(\beta) \neq 0$$
et
$$T^2(\beta) \neq 0,$$
donc
$$\boxed{\beta \text{ est un pôle de } F' \text{ de multiplicité } p+1.}$$

♦ **Exercice 3.** [$\star$]

Soit K un corps de caractéristique nulle.

1. Soit F une fraction rationnelle sur K. Démontrer que $\deg(F') = \deg(F) - 1$ si $\deg(F) \neq 0$ et $\deg(F') < \deg(F) - 1$ si $\deg(F) = 0$. Dans le cas où $\deg(F) = 0$, quelles valeurs peut prendre $\deg(F')$?
2. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F sur K telle que $F' = 1/X$.

1. Notons A/S un représentant irréductible de F. On a

$$F' = \frac{A'S - AS'}{S^2}.$$

▷ On suppose que $\deg(F) \neq 0$, c'est-à-dire $\deg(A) \neq \deg(S)$.

Si $A = 0$, on a bien $\deg(F') = \deg(F) - 1$ puisque $-\infty - 1 = -\infty$.

Si S est constant (non nul évidemment), alors F est un polynôme non constant (puisque $\deg(A) \neq \deg(S)$) donc $\deg(F') = \deg(F) - 1$ d'après les règles sur le degré dans $K[X]$.

Si A est constant, alors $F' = -AS'/S^2$ et $\deg(F) = \deg(A) + \deg(S') - 2\deg(S)$. Or S n'est pas constant (puisque $\deg(S) \neq \deg(A)$) , donc $\deg(S') = \deg(S) - 1$. Cela donne $\deg(F) = \deg(A) - \deg(S) - 1 = \deg(F) - 1$.

Si A et S ne sont pas constants, on a $\deg(A') = \deg(A) - 1$ et $\deg(S') = \deg(S) - 1$. Alors $\deg(A'S) = \deg(A) + \deg(S) - 1$ et $\deg(AS') = \deg(A) + \deg(S) - 1$. Notons, d'une part, α le coefficient dominant de A et a son degré et, d'autre part, σ le coefficient dominant de S et s son degré. Comme $A'S$ et AS' ont le même degré, le monôme dominant de $A'S - AS'$ est $(a - s)\alpha\sigma X^{a+s-1}$, où $(a - s)\alpha\sigma \neq 0$ puis A et S n'ont pas le même degré (i.e. $a \neq s$). Donc $\deg(A'S - AS') = a + s - 1 = \deg(A) + \deg(S) - 1$. Dès lors, on a $\deg(F') = \deg(A) - \deg(S) - 1 = \deg(F) - 1$.

▷ On suppose que $\deg(F) = 0$, c'est-à-dire $\deg(A) = \deg(S)$.

Si A et S sont constant, alors $\deg(F') = \deg(0) = -\infty < 0 = \deg(F)$.

Si A et S ne sont pas constant, on reprend les notations et le raisonnement ci-dessus mais cette fois, le monôme $(a - s)\alpha\sigma X^{a+s-1}$ est nul puisque $a = s$. Dès lors, $\deg(A'S - AS') < a + s - 1 = \deg(A) + \deg(S) - 1$. Il s'ensuit que $\deg(F') < \deg(A) - \deg(S) - 1 = \deg(F) - 1$.

En conclusion,

$$\boxed{\deg(F') = \deg(F) - 1 \text{ si } \deg(F) \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg(F') < \deg(F) - 1 \text{ si } \deg(F) = 0.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{X^n + 1}{X^n} = 1 + \dfrac{1}{X^n}$ est de degré 0 et sa dévivée $F_n' = -\dfrac{n}{X^{n+1}}$ est de degré $-(n+1)$, ce qui démontre que

$$\boxed{\text{lorsque } F \text{ est de degré 0, on peut obtenir tous les degrés possibles dans } [\![-\infty; -2]\!] \text{ pour } F'.}$$

2. La question précédentenous dit qu'une dérivée de fraction rationnelle ne peut pas être de degré -1, donc

$$\boxed{\text{il n'existe pas de fraction rationnelle } F \text{ sur } K \text{ telle que } F' = 1/X.}$$

♦ **Exercice 4.** [$\bigstar$]

On pose $K_0(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) \leqslant 0\}$.

1. Démontrer que $\big(K_0(X), +, \times\big)$ est un anneau.
2. Déterminer les idéaux de $K_0(X)$.

1. On vérifie que $K_0(X)$ est un sous-anneau de $\big(K(X), +, \times\big)$.
On a $\deg(1) = 0 \leqslant 0$, donc $0 \in K_0(X)$.
Si $F_0, F_1 \in K_0(X)$, alors $\deg(F_0 - F_1) \leqslant \max\{\deg(F_0); \deg(F_1)\} \leqslant 0$ donc $F_0 - F_1 \in K_0(X)$.
Si $F_0, F_1 \in K_0(X)$, alors $\deg(F_0F_1) = \deg(F_0) + \deg(F_1) \leqslant 0$ donc $F_0F_1 \in K_0(X)$.
On en déduit que $K_0(X)$ est un sous-anneau de $\big(K(X), +, \times\big)$ et donc que

$$\boxed{\big(K_0(X), +, \times\big) \text{ est un anneau.}}$$

2. Pour tout $m \in \mathbb{Z}_-$, on pose $K_m(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) \leqslant m\}$.

- Soit $m \in \mathbb{Z}_-$. Démontrons tout d'abord que $K_m(X)$ est un idéal de $K_0(X)$.

  Il est clair que $0 \in K_m(X)$ puisque $\deg(0) = -\infty \leqslant m$. Par ailleurs, si $F_0, F_1 \in K_m(X)$, alors $\deg(F_0 - F_1) \leqslant \max\{\deg(F_0); \deg(F_1)\} \leqslant m$ donc $F_0 - F_1 \in K_m(X)$. Donc $K_m(X)$ est un sous-groupe de $\big(K_0(X), +\big)$.

  Si $F_0 \in K_m(X)$ et $F_1 \in K_0(X)$, alors $\deg(F_0F_1) = \deg(F_0)+\deg(F_1) \leqslant m$ donc $F_0F_1 \in K_m(X)$. Ainsi, $K_m(X)$ est hyper-stable dans $K(X)$.

  Donc $K_m(X)$ est un idéal de $K_0(X)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_-$.

- Démontrons réciproquement que tout idéal de $K_0(X)$ est ou bien l'idéal nul $\{0\}$ ou bien de la forme $K_m(X)$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}_-$.

  Soit I un idéal de $K_0(X)$ tel que $I \neq \{0\}$.

  Posons $D = \{\deg(F) : F \in I \setminus \{0\}\}$. L'ensemble D est une partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide (puisque $I \neq \{0\}$) et majorée (par 0). Elle admet donc un plus grand élément noté m. Démontrons que $I = K_m(X)$.

  $\boxed{\subset}$ Par définition de m, on a $\forall F \in I,\ \deg(F) \leqslant m$ donc $I \subset K_m(X)$.

  $\boxed{\supset}$ Soit $F \in K_m(X)$. On sait qu'il existe dans I une fraction rationnelle G de degré m. Alors $\deg(F/G) = \deg(F) - \deg(G) \leqslant 0$ donc $F/G \in K_0(X)$. Dès lors, par hyperstabilité de I, on peut affirmer que $G \times (F/G) \in I$, c'est-à-dire $F \in I$. D'où $K_m(X) \subset I$.

  Donc $I = K_m(X)$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{les idéaux de } K_0(X) \text{ sont les } K_m(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) \leqslant m\} \text{ pour } m \in \mathbb{Z}_- \cup \{-\infty\}.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [◦]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$F_n = \frac{n!}{(X+1)\cdots(X+n)}.$$

La décomposition formelle de F_n donne l'existence de $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X+k}.$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. En multipliant par $X+k$ et en évaluant en $-k$, on obtient

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{n!}{(-k+1)(-k+2)\cdots(-k+k-1)(-k+k+1)\cdots(-k+n)} \\ &= \frac{n!}{(-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!} \\ &= (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1} k}{X+k}.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. En changeant d'indéterminée, déterminer la décomposition en éléments simples de
$$F_{m,n} = \frac{X^m}{(X-1)^n}.$$

On a
$$F_{m,n}(X+1) = \frac{(X+1)^m}{X^n} = \frac{1}{X^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k = \sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}X^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{m}{k}}{X^{n-k}}$$
donc
$$\begin{aligned}
F_{m,n} &= \sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}(X-1)^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}}\\
&= \sum_{\ell=0}^{m-n}\binom{m}{\ell+n}(X-1)^{\ell} + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\binom{m}{n-\ell}}{(X-1)^{\ell}}\\
&= \sum_{\ell=0}^{m-n}\binom{m}{\ell+n}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}(-1)^{\ell-j}X^j + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\binom{m}{n-\ell}}{(X-1)^{\ell}}\\
&= \sum_{j=0}^{m-n}\left(\sum_{\ell=j}^{m-n}\binom{m}{\ell+n}\binom{\ell}{j}(-1)^{\ell-j}\right)X^j + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\binom{m}{n-\ell}}{(X-1)^{\ell}},
\end{aligned}$$
donc
$$\boxed{F_{m,n} = \sum_{j=0}^{m-n}\left(\sum_{i=0}^{m-n-j}\binom{m}{\ell+j+n}\binom{i+j}{j}(-1)^i\right)X^j + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\binom{m}{n-\ell}}{(X-1)^{\ell}}}$$

♦ ***Exercice 7.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle
$$R_n = \frac{X^n+1}{X^n-1}.$$
2. Décomposer sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles
$$F_n = \frac{1}{X^{2n}-1} \qquad \text{et} \qquad G_n = \frac{X^{2n}}{X^{2n+1}-1}.$$

1. On a
$$R_n = 1 + \frac{2}{X^n-1}.$$
On a $X^n - 1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X-\omega)$ donc il existe une famille $(a_\omega)_{\omega\in\mathbb{U}_n}$ telle que
$$R_n = 1 + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{a_\omega}{X-\omega}$$
Si l'on note $P_n = X^n - 1$, alors $P_n' = nX^{n-1}$, d'où, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$,
$$a_\omega = \frac{1}{P_n'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n\omega^n} = \frac{\omega}{n},$$
ce qui donne
$$\boxed{R_n = 1 + \frac{2}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega}{X-\omega}.}$$

2. D'après la question précédente, sur $\mathbb{C}$, on a

$$\boxed{F_n = \frac{1}{2n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n}} \frac{\omega}{X-\omega}.}$$

On en déduit que, sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2n}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2n}\frac{-1}{X+1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{ik\pi/n}}{X-\mathrm{e}^{ik\pi/n}} + \frac{\mathrm{e}^{-ik\pi/n}}{X-\mathrm{e}^{-ik\pi/n}}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2n}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2X\cos(k\pi/n)-2}{X^2-2X\cos(k\pi/n)+1}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2n}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{X\cos(k\pi/n)-1}{X^2-2X\cos(k\pi/n)+1}.}$$

On a $X^{2n+1}-1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{2n+1}} (X-\omega)$ donc il existe une famille $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_{2n+1}}$ telle que

$$G_n = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n+1}} \frac{a_\omega}{X-\omega}$$

Si l'on note $A = X^{2n}$ et $P_{2n+1} = X^{2n+1}-1$, alors $P'_{2n+1} = (2n+1)X^{2n}$, d'où, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_{2n+1}$,

$$a_\omega = \frac{A(\omega)}{P'_n(\omega)} = \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)\omega^{2n}} = \frac{1}{2n+1},$$

ce qui donne

$$\boxed{G_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n+1}} \frac{1}{X-\omega}.}$$

On en déduit que, sur $\mathbb{R}$, on a

$$G_n = \frac{1}{2n+1}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{X-\mathrm{e}^{i2k\pi/(2n+1)}} + \frac{1}{X-\mathrm{e}^{-i2k\pi/(2n+1)}}\right),$$

d'où

$$\boxed{G_n = \frac{1}{2n+1}\frac{1}{X-1} + \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{X-\cos\big((2k\pi)/(2n+1)\big)}{X^2-2X\cos\big((2k\pi)/(2n+1)\big)+1}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]
Soit S un polynôme scindé à racines simples $x_1, \dots, x_n$ sur $\mathbb{R}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit $F = A/S$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ de degré strictement négatif. Décomposer F en éléments simples en fonction des $A(x_k)$ et $S'(x_k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.
2. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k S'(x_k)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S'(x_k)}$$
où, dans la première somme, on suppose les x_k tous non nuls.

1. Comme $\deg(F) < 0$, le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-x_k}.$$

De plus, un résultat du cours sur les pôles simples nous donne

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad a_k = \frac{A(x_k)}{S'(x_k)}.$$

Donc

$$\boxed{F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{A(x_k)}{S'(x_k)}}{X-x_k}.}$$

2. a) Supposons les x_k tous non nuls. Prenons $A = 1$ dans le résultat de la question 1. Cela donne

$$\frac{1}{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S'(x_k)} \frac{1}{X - x_k}.$$

En évaluant en 0, il vient

$$\frac{1}{S(0)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k S'(x_k)},$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k S'(x_k)} = -\frac{1}{S(0)}.}$$

b) Soit $\alpha \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ (c'est-à-dire que $\alpha \in \mathbb{R}$ n'est pas une racine de S). Prenons $A = X - \alpha$ dans le résultat de la question 1. Cela donne

$$\frac{X - \alpha}{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \alpha}{S'(x_k)} \frac{1}{X - x_k}.$$

En évaluant en α, il vient

$$\frac{\alpha - \alpha}{S(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{S'(x_k)},$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S'(x_k)} = 0.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]
En utilisant P'/P avec P bien choisi, calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}.$$

On pose

$$P = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega).$$

Alors d'une part

$$\frac{P'}{P} = \frac{(n-1)X^{n-2} + (n-2)X^{n-3} + \cdots + 2X + 1}{X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1}$$

et d'autre part

$$\frac{P'}{P} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{X - \omega}.$$

En évaluant en 1 ces deux expression de P'/P, on obtient

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1}{1 + 1 + \cdots + 1 + 1} = \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n},$$

donc

$$\boxed{\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}.}$$

◆ ***Exercice 10.*** [★] (Théorème de Gauss–Lucas)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettent n racines distinctes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, d'images respectives $(A_1, \ldots, A_n)$ dans le plan complexe. On appelle $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ les racines du polynôme dérivé P' et $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ leurs images dans le plan complexe.

1. Démontrer que les familles de complexes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ ont la même moyenne. *On dit alors les familles de points $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ ont le même isobarycentre.*
2. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples et en déduire que
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_i - \alpha_j} = 0.$$
Démontrer que β_i est une moyenne pondérée à coefficients positifs ou nuls des nombres complexes de la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *On dit alors que le point B_i est un barycentre, à coefficients positifs, de la famille de points $(A_1, \ldots, A_n)$.*
Interpréter géométriquement cette propriété.

1. Posons $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$. Comme $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, on a
$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) = a_n X^n - a_n \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$
donc, par identification du coefficient en X^{n-1}, on obtient
$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot$$
Par ailleurs, on a $P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$. Comme $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont les racines de P, on a
$$P' = n a_n \prod_{k=1}^{n-1} (X - \beta_k) = n a_n X^{n-1} - n a_n \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \Big) X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} n a_n \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k,$$
ce qui donne, par identification du coefficient de X^{n-2},
$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = -\frac{n-1}{n} \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot$$
En rapprochant les relations (1) et (2), on obtient
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k,$$
ce qui signifie que
$$\boxed{\text{les familles de points } (A_1, \ldots, A_n) \text{ et } (B_1, \ldots, B_{n-1}) \text{ ont le même isobarycentre.}}$$

2. On a $P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ donc
$$P' = a_n \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - \alpha_k),$$
ce qui nous permet de retrouver le résultat du cours :
$$\frac{P'}{P} = \frac{a_n \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - \alpha_k)}{a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_j}\cdot$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\text{la décomposition en éléments simples de } \frac{P'}{P} \text{ est } \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{X-\alpha_j}.}$$

En substituant β_i à X dans la formule précédente et en tenant compte du fait que $P'(\beta_i) = 0$ (et $P(\beta_i) \neq 0$ puisque les racines de P sont simples), on obtient

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_i - \alpha_j} = 0.}$$

En multipliant numérateur et dénominateur de chaque fraction par le conjugué du dénominateur puis en conjugant la somme, on obtient, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_i - \alpha_j}{|\beta_i - \alpha_j|^2} = 0,$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\beta_i - \alpha_j|^2}\Big)\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{|\beta_i - \alpha_j|^2}.$$

On constate donc que B_i est le barycentre des points pondérés

$$\Big(A_i ; \frac{1}{|\beta_i - \alpha_j|^2}\Big)_{1 \leqslant j \leqslant n}.$$

En conclusion,

$$\boxed{B_i \text{ est un barycentre de la famille de points } (A_1, \dots, A_n) \text{ avec des coefficients positifs.}}$$

Géométriquement, cette propriété se traduit sous la forme

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les images des racines de } P' \text{ sont contenues le polygone} \\ \text{dont les sommets sont les images des racines de } P.\end{array}}$$