Les bases classiques : suites et séries

18 octobre 2020

1 Ordre, Encadrements

1.1

Soit x un nombre réel. Etudier la suite $\frac{[nx]}{n}$.

1.2

Soit A une partie de $\mathbf{R}$, non vide et majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers la borne supérieure de A.

1.3 Pédagogie nouvelle.

a) Soit u_n une suite réelle croissante telle que $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0. Montrer que u_n converge.
b) Soit u_n une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. Montrer que u_n est décroissante à partir d'un certain rang.

1.4

Soit u_n une suite réelle équivalente à $\frac{1}{n}$ en $+\infty$. La suite u_n est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?

1.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que $\lim u_n^2 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - u_n| < 1$. Montrer que la suite converge.

1.6

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ et $v_n = u_n + 1/n.n!$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est irrationnelle.

1.7

On pose pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2+\sqrt{3})^n - E((2+\sqrt{3})^n)$. Montrer que u_n tend vers 1. On pourra considérer le nombre $(2-\sqrt{3})^n$.

1.8

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs . On lui associe la suite (u_n) par

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}}$$

Montrer que si (a_n) est constante ou bornée , (u_n) converge. On suppose que la suite $\log(\log(a_n))/n$ admet une limite α . Montrer que si $\alpha < \log(2)$, (u_n) converge et que si $\alpha > \log(2)$, (u_n) diverge.

2 Approximation rationnelle

2.1

Soit $(p_n, q_n) \in (\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}}$ deux suites telles que :

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

Montrer que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2.2 Lié aux fractions continues

Soit E l'ensemble des suites réelles u vérifiant, pour tout n,

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n.$$

a) Montrer que E et un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Soient a et b les suites de E définies par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_i = 1$.
b) Etudier les suites a, b, $w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$.
c) Montrer que la suite $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ converge (on pourra étudier la série associée).
d) Montrer qu'il existe un unique réel r tel que $a_n + rb_n$ tende vers 0 et que r est irrationnel.

2.3

IMPORTANT a) Soient x un nombre réel irrationnel, et $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $1 \leq q \leq N$ et

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qN}.$$

On pourra prouver tout d'abord que les nombres $kx - [kx]$, $k = 0, \ldots, N$ sont deux à deux distincts, puis diviser $[0, 1]$ en N segments. .
En déduire l'existence d'une suite strictement croissante q_n d'entiers naturels et d'une suite $(p_n) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

3 Transformations de suites

L'objectif, dans un premier temps, est de très bien comprendre les méthodes du type de Cesaro et leurs interventions, parfois cachées.

3.1

Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels telle que $\forall n, \quad 2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$. Montrer que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et que la suite (x_n) converge.

3.2

Soit u_n une suite convergente de limite l. Etudier la suite

$$v_n = \frac{1}{2^n}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k)$$

Soyez très soigneux dans vos majorations et affirmations.

3.3

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes. Montrer que la suite $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ converge.

3.4

Soit x_n une suite réelle telle que $2x_{n+1} - x_n$ converge. Montrer que x_n converge.

4 Suites de puissances

4.1

Etudier la limite de la suite $(1 - \tanh(n))^{\tanh(\frac{1}{n})}$.

4.2

Soit u_n une suite réelle. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$. Etudier la suite u_n^n.
Application : Etudier la suite $u_n = \Big((\sin(\frac{n\pi}{6n+1}) + \cos(\frac{n\pi}{3n+2})\Big)^n$.

4.3

Soient a_n et b_n deux suites réelles > 0 équivalentes. As-t-on $a_n^n \sim b_n^n$? $a_n^{1/n} \sim b_n^{1/n}$?

4.4

Soit a un nombre réel > 0. Etudier la suite

$$u_n = (\frac{\operatorname{Arc\,tg}(n)}{\operatorname{Arc\,tg}(n+1)})^{n^\alpha}.$$

4.5 Suites récurrentes

4.6

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

4.7

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.
$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{u_n})$
$u_{n+1} = (u_n - 1)^2$

4.8

Soit p un entier ≥ 2.
a) Montrer que toutes les racines complexes du polynôme $X^p - \frac{1}{p}(X^{p-1} + \cdots + 1)$ sont simples et dans $D(0,1) \cup \{1\}$.
b) Montrer que toutes les suites u complexes vérifiant

$$\forall n,\ u_{n-p} = \frac{1}{p}(u_{n+p-1} + \cdots + u_n)$$

sont convergentes.

4.9

(Points fixes attractifs) Soit f de I dans $\mathbf{R}$ une fonction C^∞. On suppose qu'il existe $l \in I$ tel que $f(l) = l$ et que $|f'(l) < 1|$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $a \in [l - \delta; l + \delta] \cap I$, la suite $(f^{\circ n}(a))_n$ converge vers l

4.10

(Points fixes répulsifs) Soit $f \in C^1(I, I)$ et l un point fixe tel que $|f'(l)| > 1$. Soit $a \in I \setminus \{l\}$ tel que $f^{\circ n}(a)$ converge ver l. Montrer que la suite $(f^{\circ n}(a))_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire

5 Asymptotiques

5.1

Soient a_n et b_n deux suites réelles > 0, équivalentes.
a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.
b) Si a_n tend vers une limite $l \neq 1$, prouver que $\ln a_n \sim \ln b_n$. Contre-exemple si $l = 1$?
c) Monter que $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ ssi $a_n - b_n$ tend vers 0.

5.2 Récurrences doubles

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence par la donnée de $u_0 > 0$ $v_0 > 0$ et
a) $u_{n+1} = (u_n v_n)^{1/2}$ et $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$
b) $u_{n+1} = (u_n v_{n+1})^{1/2}$ et $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$.

5.3

Soit u_n une suite réelle telle que, pour tout entier n, $u_{+1} = u_n + e^{-u_n}$. déterminer la limite de u_n et en donner un équivalent simple.

5.4

Soit $u_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$, et l'on suppose que $u_n S_n$ tend vers 1. Trouver un équivalent de u_n.

5.5

Soit u_n la suite réelle définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n lorsque $n$tend vers $+\infty$.

6 suites de racines

6.0.1 Zéros réels des polynômes exponentiels

Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
a) Montrer que, pour n pair, P_n est strictement positif et que, pour n impair, P_n possède un unique zéro réel x_n.
b) Montrer que x_n tend vers $-\infty$.

6.0.2 Grand classique, indispensable

Soit x_n la racine de $\tan x = x$ appartenant à $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$. Donner un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à trois termes de x_n.

6.1

Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

7 Extractions, valeurs d'adhérence

7.1

Soit (x_n) une suite périodique de période $T > 0$. Montrer *soigneusement* que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\{x_0; \ldots; x_{T-1}\}$.

7.2

Soit $q \in \mathbf{N}^*$. On suppose que $(x_{qn}), \ldots, (x_{qn+q-1})$ convergent. Montrer que s'il existe $p \geq 2$ avec $p \wedge q = 1$, tel que (x_{pn}) converge, alors (x_n) converge.

7.3

(Procédé diagonal) On se donne $(\varphi_1;\dots;\varphi_p;\dots)$ une famille (infinie) d'extractions, ainsi qu'une suite $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$. Montrer qu'il existe une extraction ψ telle que :

$$\forall p, \quad (x_{\psi(n)}) \text{ est extraite de } (x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}) \text{ à partir d'un certain rang.}$$

7.4 L'extracteur fou

Soient $p \in \mathbf{N}*$ et $z_1,\dots,z_p$ des nombres complexes de module 1 ; montrer qu'il existe une sous-suite de $z_1^n+\cdots+z_p^n$ qui converge vers p.

8 Exemples explicites de séries

8.1

Nature de la série $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

8.2

Nature des l de terme général :

$$u_n = \exp(-\sqrt{n})$$

$\sum (\ln n)^{-\ln(\ln n)} \sum \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{Cn^\alpha} \sum \arccos(\exp(\frac{\alpha \log(n)}{n^\beta}))$
où $\alpha\beta, C > 0$,

$$u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

,

$$u_n = 1 - \tanh(n)$$

,

$$u_n = (\prod_{k=1}^{n} k^k)^{\frac{-4}{n^2}}$$

8.3

On considère la suite $(u_n) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Quelle est la nature de $\sum u_n^\alpha$?

8.4

(Grand classique) $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$. Trouver un équivalent en $+\infty$. Nature de $\sum u_n$.

8.5

(Grand classique) Soit a un réel ≥ 0. Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}$. Complément : lorsque $a=0$, on peut déterminer une relation de récurrence puis un équivalent de u_n.

8.6

Nature de la série de terme général $u_n = \ln(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln n \ln(n+2)})$. Déterminer sa somme.

8.7

(Grand classique) Soit σ une injection de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$. Nature des séries suivantes :
$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$; $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$; $\frac{\sigma(n)}{n^3}$.

8.8 Généralités, séries à termes positifs

8.9

Soient $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs et $\alpha > 0$.. Nature de $\sum u_n^\alpha / n$
.

8.10

Soit $u_o > 0$ et $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$. Nature de $\sum u_n^\alpha$.

9 Critères multiplicatifs

9.1 Multiplicateurs

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$. On note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer successivement :
(i) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{U_n}$ diverge.
(ii) Si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{u_n}{U_n^\alpha}$ converge.

9.2

Soit $\sum u_n$ une série telle, pour toute suite convergente v_n, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument.

9.3

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que :

$$\forall (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad \sum v_n^2 \text{ converge} \implies \sum u_n v_n \text{ converge}$$

Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

10 Equivalent de sommes partielles et de restes

10.1

Nature de la série

$$u_n = \frac{n^\alpha}{1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta}$$

11 Semi-convergence

On rencontre en général l'un des trois thèmes suivants :
— L'usage direct du critère de Leibniz ; il faut prendre garde à une monotonie qui n'est pas toujours triviale.
— L'usage indirect du critère de Leibniz après développement asymptotique. Il faut être sûr de ses restes et combinaisons linéaires de séries.
— L'utilisation de la transformation d' Abel, à refaire à chaque fois et éventuellement adapter à la situation rencontrée.

12 Séries alternées

12.1

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Etudier la suite $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$.

12.2

Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} F(n)$ et $\sum_{n\geq 1}(-1)^n F(n)$ où F est une fraction rationnelle.

12.3

(i) Soit $f \in C^2([0;1], \mathbf{R})$. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$.
(ii) Soit $f \in C^3([0;1], \mathbf{R})$. Déterminer la nature de la série de terme général $f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

12.4

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Où $\alpha > 0$.

12.5

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

12.6

Soit e la base de l'exponentielle usuelle. Nature de la série $\sum \sin(n!\pi e)$.

13 Critère multiplicatif

13.1 Raabe-Duhamel

Soit une série u_n à termes strictement positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$. Montrer que, si $\lambda > 1$, la série converge et si $\lambda < 1$, la série diverge.

13.2 Somme télescopique déguisée

Soient a et b deux suites réelles strictement positives. On suppose que $\sum b_n$ diverge, et que la suite $\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}$ tend vers un réel l. Montrer que, si $l > 0$, la série $\sum a_n$ converge et que si $l < 0$, la série $\sum a_n$ diverge.

13.3

Soit u_n une suite strictement positive, et un réel $a > 0$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + v_n$$

où $\sum |v_n|$ converge. il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$u_n \sim \frac{C}{b^a}.$$

13.4

Discuter en fonction des paramètres θ, ϕ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\phi}}$.

14 Critère de Cauchy, HP

14.1

Soit (u_n) une suite réelle positive. Montrer que si (u_n) décroît vers 0 et que si $\sum u_n$ converge, alors nu_n tend vers 0, c'est-à-dire :

$$u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

15 Transformation d'Abel, HP

15.1

Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$. Nature de $\sum \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$.

15.2

Si $\sum u_n$ converge, que dire de $\sum e^{\frac{1}{n}} u_n$?

16 Fonctions de variable réelle

16.1 Limites

16.2

Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbf{R}+ \to \mathbf{R}$ possédant un limite en $+\infty$ est bornée.

16.3

Construire une fonction croissante f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1, possédant une limite finie en $+\infty$ mais telle que f' n'ait pas de limite en $+\infty$.

16.4

Soit f une application dérivable à dérivée bornée de $\mathbf{R}+$ dans $\mathbf{R}$. On supose que la suite $f(n)$ tend vers $+\infty$. Montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

16.5 Continuité

16.6

Soit I UN intervalle borné de $\mathbf{R}$.
a) Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$. La fonction f est-elle bornée ?
b) Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La fonction f est-elle bornée sur I ?

16.7

Montrer soigneusement qu'une fonction continue par morceaux est bornée sur tout segment.

16.8

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui même. Montrer que f a un point fixe.

16.9

Soit $f :]0, 1[\to \mathbf{R}$, uniformément continue. Montrer que f est bornée.

16.10

Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que f est strictement monotone ssi elle transforme tout intervalle ouvert en un intervalle ouvert.

16.11

Soit f une application positive de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $a > 0$, l'ensemble des réels x tels que $f(x) \geq a$ soit fini. Décrire l'ensemble des points de continuité de f.

16.12 Développement limités

16.13

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln \frac{\tan x}{x}$.

16.14

Développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\frac{x \ln x}{x^2-1}$.

16.15

Comparer $(x+1)^x$ et $x^{(x+1)}$ en $+\infty$.

16.16

Soit $x \in [0,2]$. Montrer que $f(x) = \text{Arc}\cos(1-x) = 2\text{Arc}\sin(\sqrt{x/2})$. En déduire les trois premier termes du développement asymptotique de f en 0^+.