Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

I. Analyse

Ici $[a;b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si, et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$.

2. Soit une fonction f définie et continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans $[a;b]$.
L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

3. Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, alors pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) > g(x)$.

4. Si la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est nulle, alors la fonction est nulle sur cet intervalle.

5. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions

$$x \longmapsto k\exp(2x) + 1$$

où k désigne un nombre réel quelconque.

6. La négation de l'assertion « toute suite réelle majorée converge » est « il existe des suites réelles minorées qui ne convergent pas ».

7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} - ... + \dfrac{1}{(-7)^n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement plus grand que 1.

8. Un cycliste parcourt 40 km la semaine 0. Il décide que, chaque semaine, il parcourra 5km de plus que la distance parcourue lors de la semaine précédente.
La fonction *seuil* présentée ci-dessous, écrite en langage Python, permet de déterminer le numéro de la semaine où la distance totale qu'il aura parcourue sera supérieure à un nombre n donné.

```
def seuil(n) :
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n :
        k=k+1
        S=S+u+5
    return k
```

II. Géométrie

9. Étant donnés trois points A, B et C du plan, la contraposée de l'assertion

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Longrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

est

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.$$

10. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\,.\, | \,.\,)$ et d'une norme associée notée $|| \,.\, ||$. Soient x et y dans P tels que $||x|| = ||y||$.
Les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

11. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\,.\, | \,.\,)$.
Pour tous vecteurs x, y et z de P, on a $(x|z) = (y|z) \Longrightarrow x = y$.

12. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points $A(-4, 1), B(3, 0)$ et $C(5, 4)$.
La médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x + y = 3$.

13. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 2| = |z + 1|$ est réduit au point d'affixe $\frac{1}{2}$.

14. Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.

15. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan P d'équation $x-2y+3z = -5$ et la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ sont perpendiculaires.

III. Matrices

16. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et 2 colonnes.

17. Si A et B sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes telles que $AB = 0$, alors A ou B n'est pas inversible.

IV. Pourcentages

18. En 2019, le prix du tabac a augmenté de 12%, en 2020 de 16%, en 2021 de 7%.
L'augmentation du prix du tabac de 2019 à 2021 a été de 35%.

19. Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50% des exercices qu'elle a traités et Boris 90% des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20% des exercices qu'elle a traités et Boris 40% des exercices qu'il a traités.
Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

V. Arithmétique

20. Soit n un entier naturel.
$n^3 - n$ est pair.

21. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n.
Si $x^2 \equiv 9\ [n]$ alors $x \equiv 3\ [n]$ ou $x \equiv -3\ [n]$.

VI. Dénombrement

22. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est égal à 100.

23. Étant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 3, on trace dans un plan n droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.
Le nombre de triangles ainsi obtenus est égal à $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

VII. Probabilités

24. On choisit un numéro entre 1 et 6. On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention du numéro choisi.
La probabilité de devoir effectuer au moins 3 lancers pour obtenir le numéro choisi est $\dfrac{5^2}{6^2}$.

25. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.