Problème n° 1 : Ensembles, relations

Correction du problème 1 – Équivalence entre l'axiome du choix et le lemme de Zorn

Partie I – Préliminaire sur les bonnes chaînes

1. • I est un sous-ensemble d'un ensemble totalement ordonné C, donc il est aussi totalement ordonné. Ainsi, I est une chaîne de E : $I \in \mathcal{C}$.
   • I étant un segment initial de C, $I \neq C$, donc il existe $M \in C \setminus I$. Par définitiond'un segment initial, M est un majorant de I. Puisque $M \notin I$, on peut conclure que $\boxed{I \in \mathcal{C}_0}$.
2. Soient C_1 et C_2 deux bonnes chaînes distinctes et $x \in C_1 \cap C_2$.
   (a) • Puisque $x \notin J_x$, et $x \in C_1$, on a une inclusion stricte $C_1 \cap J_x \subset C_1$.
   • Soit $y \in C_1$ tel que $y \notin C_1 \cap J_x$. Alors pour tout $z \in C_1 \cap J_x$, on a $z \leqslant y$. En effet, C_1 étant une chaîne, donc totalement ordonné, si ce n'était pas le cas, on aurait $y < z$, et comme $z < x$, par transitivité, $y < x$; cela contredit $y \notin C_1 \cap J_x$. Ainsi y est un majorant de $C_1 \cap J_x$
   • On peut donc conclure que $\boxed{C_1 \cap J_x \text{ est un segment initial de } C_1}$.
   (b) On suppose que $C_1 \cap J_x$ est un segment initial de C_2.
   • On a alors $\boxed{C_1 \cap J_x \in \mathcal{C}_0}$ d'après la question 1.
   • Comme $C_1 \cap J_x$ est segment initial de C_2 et que la chaîne C_2 est bonne, $m(C_1 \cap J_x) \in C_2$. De même, $C_1 \cap J_x$ est segment initial de C_1 (question 2a), qui est bonne, donc $m(C_1 \cap J_x) \in C_1$. Ainsi, $\boxed{m(C_1 \cap J_x) \in C_1 \cap C_2.}$
   • Par définition d'une bonne chaîne, $m(C_1 \cap J_x)$ est le minimum de $C_1 \setminus (C_1 \cap J_x)$. Comme $x \in C_1 \setminus (C_1 \cap J_x)$, on a en particulier $m(C_1 \cap J_x) \leqslant x$.
   Par ailleurs, si $m(C_1 \cap J_x) < x$, on aurait $m(C_1 \cap J_x) \in C_1 \cap J_x$, ce qui contredit la définition de $m(C_1 \cap J_x)$ (majorant *strict* de $C_1 \cap J_x$).
   Ainsi, $\boxed{m(C_1 \cap J_x) = x.}$
   (c) Supposons que $C_1 \cap J_x$ soit un segment initial de C_2.
   • Alors, puisque C_2 est une bonne chaine, $m(C_1 \cap J_x)$ est le minimum de $C_2 \setminus (C_1 \cap J_x)$. Étant donné un élément $y \in C_2 \cap J_x$, on a alors nécessairement $y \in C_1$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $y \in C_2$, $y \notin C_1 \cap J_x$ et :
   $$y < x = m(C_1 \cap J_x).$$
   Ceci contredit la minimalité de $m(C_1 \cap J_x)$ dans $C_2 \setminus (C_1 \cap J_x)$, provenant du fait que C_2 est une bonne chaîne.
   On en déduit que $C_2 \cap J_x \subset C_1$, puis $C_2 \cap J_x \subset C_1 \cap J_x$.
   • L'inclusion réciproque est évidente, puisque le fait que $C_1 \cap J_x$ soit segment initial de C_2 implique en particulier l'inclusion $C_1 \cap J_x \subset C_2$.
   • Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{C_1 \cap J_x = C_2 \cap J_x.}$
   (d) Les deux propriétés étant obtenues l'une de l'autre en échangeant le rôle de C_1 et C_2, on peut se contenter de montrer une implication. Supposons donc que $C_1 \cap J_x$ est un segment initial de C_2. Alors, d'après la question précédente, $C_1 \cap J_x = C_2 \cap J_x$. Or, $C_1 \cap J_x$ est un segment initial de C_1 (question 2a), donc $C_2 \cap J_x$ est un segment initial de C_1.
   Ainsi, on a bien montré l'$\boxed{\text{équivalence entre (i) et (ii)}}$.

3. (a) Soit $x \in C^*$ et $z \in C_1$ tel que $z < x$. La question 2a a été résolue sous la seule hypothèse que C_1 était une chaîne (onne s'était pas servi du fait que cette chaîne était bonne). Ainsi, on peut appliquer cette question à la chaîne $C_1 \cap J_x$: $C_1 \cap J_x \cap J_z$ est segment initial de $C_1 \cap J_x$. Or, l'inégalité $z < x$ amène de façon immédiate $J_z \subset J_x$, donc $C_1 \cap J_x \cap J_z = C_1 \cap J_z$.

   Ainsi, $C_1 \cap J_z$ est segment initial de $C_1 \cap J_x$, lui-même segment initial de C_2. On utilise pour terminer le lemme suivant, assez évident, mais que nous démontrons tout de même :

   Lemme : Si I est segment initial de J et J est segment initial de K, alors I est segment initial de K (autrement dit, la relation « être segment initial de » est transitive ; il s'agit même d'une relation d'ordre stricte).

   Démonstration : Soit I un segment initial de J, lui-même segment initial de K. Alors $I \subset J \subset K$, chacune de ces inclusions étant stricte. On en déduit que $I \subset K$, l'inclusion étant stricte. Par ailleurs, étant donné $y \in K \setminus I$, si $y \in J$, comme I est segment initial de J, y majore J. Sinon, $y \in K \setminus J$, et comme J est segment initial de K, y majore J, et donc aussi I, puisque $I \subset J$. On en déduit le lemme.

   On peut donc conlure que sous les hypothèses de la question $C_1 \cap J_x$ est un segment initial de C_2.

   (b) Par définition, on a une inclusion stricte $C^* \subset C_1$. Par ailleurs, étant donné $z \in C_1 \setminus C^*$, on montre par l'absurde que z majore C^*. Si ce n'est pas le cas, il existe $x \in C^*$ tel que $z < x$, et la question 3a montre qu'alors $C_1 \cap J_z$ est un segment initial de C_2. Par ailleurs, puisque $z < x$, $z \in J_x$, puis $z \in C_1 \cap J_x$. Ce dernier ensemble est un segment initial de C_2, car $x \in C^*$. On en déduit que $z \in C_2$. Ainsi, $z \in C_1 \cap C_2$,et $C_1 \cap J_z$ est un segment initial de C_2. Cela prouve que $z \in C^*$, d'où une contradiction.

   Par conséquent, tout $z \in C_1 \setminus C^*$ est un majorant de C^*. Cela prouve bien que $\boxed{C^* \text{ est un segment initial de } C_1}$.

4. Supposons que $C^* \neq C_2$. Commençons par montrer que C^* est un segment initial de C_2. Si ce n'est pas le cas, il existe $y \in C_2 \setminus C^*$ et $z \in C^*$ tel que $y < z$. Or par définition de C^*, $C_1 \cap J_z$ est un segment initial de C_2, et donc, d'après 2d, $C_2 \cap J_z$ est un segment initial de C_1. En particulier, $y \in C_2 \cap J_z$, donc $y \in C_1$. On a donc $y \in C_1 \cap C_2$, et d'après l'argument utilisé en 3(a), l'inégalité $y < z$ permet de montrer que $C_1 \cap J_y$ est aussi un segment initial de C_1. Ainsi, $y \in C^*$, d'où une contradiction.

   Puisque C^* est un segment initial de la bonne chaîne C_2, on a $m(C^*) \in C_2$. De même, C^* étant un segment initial de la bonne chaîne C_1, on a $m(C^*) \in C_1$. Donc $m(C^*) \in C_1 \cap C_2$. Par ailleurs, $C^* = C_1 \cap J_{m(C^*)}$ (l'inclusion directe est immédiate, et si elle n'est pas une égalité, on peut trouver un élément dans C_1, strictement plus petit que $m(C^*)$, qui majore C^*, ce qui contredit la définition de $m(C^*)$). Ainsi, $C_1 \cap J_{m(C^*)}$ est un segment initial de C_2, d'après la première partie de la preuve. Par définition, cela signifie que $m(C^*) \in C^*$, ce qui contredit la définition de $m(C^*)$ (qui doit être un majorant strict de C^*).

   Ainsi, l'hypothèse initiale est fausse. Nous avons donc $\boxed{C^* = C_2.}$

Ainsi, on a montré qu'étant données deux bonnes chaînes C_1 et C_2 distinctes, l'une est segment initial de l'autre. Remarquez que l'argument qu'on a donné cache quelque part le fait que deux bonnes chaînes non vides ne sont jamais disjointes. En effet, $m(\varnothing)$ appartient aux deux chaînes. Cet argument apparaît de façon détournée dans la question 4 (avec la possibilité que $C^* = \varnothing$, qui nous fait alors considérer $m(\varnothing)$).

Partie II – L'axiome du choix implique le lemme de Zorn

1. Soient x et y dans $\overline{C}$. Alors il existe deux bonnes chaînes C_1 et C_2 telles que $x \in C_1$ et $y \in C_2$. D'après la partie I, on a soit $C_1 \subset C_2$, soit $C_2 \subset C_1$. On a alors soit $(x, y) \in C_2^2$, soit $(x, y) \in C_1^2$. Comme C_1 et C_2 sont des ensembles totalement ordonnés, x et y sont comparables. Ainsi, $\boxed{\overline{C} \text{ est totalement ordonné}}$.
2. Soit $C \in \mathcal{B}$, $C \neq \overline{C}$. Si C n'est pas un segment initial de $\overline{C}$, il existe $x \in C$ et $y \in \overline{C} \setminus C$ tel que $y < x$. Soit D une bonne chaîne telle que $y \in D$, et soit $B = C \cup D$, égal soit à C soit à D (car de ces bonnes chaînes, l'une est incluse dans l'autre). Ainsi, B est une bonne chaîne soit égale à C, soit contenant C comme segment initial. Ainsi, $C' = C \cap J_x$ étant segment initial de C (I-2a), il est aussi segment initial de B (soit directement, soit par utilisation du lemme donné en I-3a).

   Comme C est une bonne chaîne, $m(C') \in C$, et $m(C')$ est le minimum de $C \setminus C'$. Ainsi, $m(C') = x$ (voir argument donné en I-2b). Mais B étant aussi une bonne chaîne, $m(C')$ est aussi le minimum de $B \setminus C'$. Ceci contredit le fait que

$$y \in B \setminus C' \qquad \text{et} \qquad y < x = m(C').$$

Ainsi, C est un segment initial de $\overline{C}$.

3. Réciproquement, soit I un segment initial de $\overline{C}$.
   (a) Comme I est inclus strictement dans $\overline{C}$, il existe $x \in C \setminus I$. Soit un tel x. Comme I est segment initial, x est un majorant (strict) de I. Comme $x \in \overline{C}$, il existe une bonne chaîne C_0 telle que $x \in C_0$. Alors, d'après ce qui précède, C_0 est un segment initial de $\overline{C}$. En particulier, C_0 contient tout $y de \overline{C}$ tel que $y < x$. Ceci implique $\boxed{I \subset C_0}$

   (b) Soit J un segment initial de I. Alors d'après le lemme de I-3a, J est segment initial propre de C_0, qui est une bonne chaîne. Ainsi, $m(J) \in C_0$, et $m(J)$ est le minimum de $C_0 \setminus J$. Alors $m(J)$ est nécessairement aussi le minimum de $I \setminus J$. En effet, sinon, puisque $I \subset C_0$, la minimalité de $m(J)$ montrerait que pour tout $x \in I \setminus J$ (ensemble non vide), on aurait $x > m(J)$. En particulier, cela impliquerait $m(J) \in C_0 \setminus I$, puis cela engendrerait une contradiction avec le fait que I est un segment initial de C_0.

   Ainsi, tout segment initial J de I vérifie $m(J) = \min(I \setminus J)$. On en déduit que $\boxed{I \text{ est une bonne chaîne.}}$

4. Soit I un segment initial de $\overline{C}$. Alors I est une bonne chaîne. Soit $x \in \overline{C} \setminus I$ (possible car $I \neq \overline{C}$). Alors il existe C une bonne chaîne contenant x. I ne peut pas contenir C (à cause de x), donc d'après la partie I, $I \subset C$, et même, I est un segment initial de C.

   Comme C est une bonne chaîne, on peut en conclure que $m(I) \in C \subset \overline{C}$.

   Par ailleurs, $m(I)$ est le minimum de $C \setminus I$, et C étant un segment initial de $\overline{C}$ (II-2), cela implique que $m(I)$ est aussi minimum de $\overline{C} \setminus I$.

   Ainsi, $\boxed{\overline{C} \text{ est une bonne chaîne.}}$

5. On suppose que $\overline{C} \in \mathcal{C}_0$, et on considère $C' = \overline{C} \cup \{m(\overline{C})\}$. Soit alors I un segment initial de C'. Comme $m(\overline{C})$ est le maximum de C', on a soit $I = C$ (et dans ce cas $m(I) = m(C) = \min(C' \setminus C)$), soit I est un segment initial de C, donc $m(I)$ est le minimum de $C \setminus I$, donc aussi de $C' \setminus I$, puisqu'on passe d'un ensemble à l'autre par ajout d'un élément strictement plus grand que les autres.

   Ainsi, $\boxed{C' \text{ est une bonne chaîne.}}$

   Or C est contenu strictement dans C', ce qui contredit la définition de C comme union de toutes les bonnes chaînes (en particulier, C contient toutes les bonnes chaînes.

   Ainsi, l'hypothèse initiale est fausse, et on en déduit que $\overline{C} \notin \mathcal{C}_0$, soit, puisqu'il s'agit d'une chaîne, $\boxed{\overline{C} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0.}$

6. Puisque E est inductif, $\overline{C}$ admet un majorant. Ce majorant ne peut pas être strict puisque $\overline{C} \notin \mathcal{C}_0$ Ainsi, ce majorant est un élément de $\overline{C}$. On vient de montrer que $\boxed{\overline{C} \text{ admet un maximum } M.}$

   Ce maximum est nécessairement un élément maximal de E. En effet, sinon, il existerait $M' > M$ dans E. Un tel M' serait un majorant strict de $\overline{C}$, ce qui est impossible.

   On a bien prouvé $\boxed{\text{l'existence d'un élément maximal dans } E, \text{ d'où le lemme de Zorn.}}$

7. L'axiome du choix a été utilisé pour construire la fonction m, puisqu'on choisit simultanément, pour toute chaîne de $\mathcal{C}_0$, un élément dans l'ensemble des majorants de cette chaîne.

Partie III – Le lemme de Zorn implique l'axiome du choix

1.
   - Soit $g \in \mathcal{C}$. Alors g est définie sur $J \subset I$, et J vérifie $J \subset J$ et $g_{|J} = g$. Ainsi, $g \preceq g$
   - Soient g et h dans $\mathcal{C}$ tels que $g \preceq h$ et $h \preceq g$, et J et K leurs domaines respectifs. On a alors $J \subset K$ et $K \subset J$, d'où $J = K$, et par conséquent $g = g_{|K} = h$. D'où l'antisymétrie de $\preceq$.
   - Soient g, h et k de domaines respectifs J, K et L tels que $g \preceq h \preceq k$. On a alors $J \subset K \subset L$, donc $J \subset L$, et $k_{|J} = (k_{|K})_{|J} = h_{|J} = g$. Donc $g \preceq k$, d'où la transitivité de $\preceq$
   - La relation $\preceq$ étant reflexive, antisymétrique et transitive, $\boxed{\preceq \text{ une relation d'ordre sur } \mathcal{C}.}$

2. Soit g un élément maximal de domaine J strictement inclus dans I. On peut choisir $i \in I \setminus J$ (choix d'un élément dans un ensemble non vide, ne dépend donc pas de l'axiome du choix). On peut alors choisir un

élément quelconque a_i de A_i (à nouveau, choix d'un élément dans un ensemble non vide, cela ne dépend pas de l'axiome du choix). On peut alors construire h sur $J \cup \{i\}$ par :

$$h(j) = g(j) \text{ si } j \in J \qquad \text{et} \qquad h(i) = a_i.$$

h est bien une fonction de choix partielle de domaine $J \cup \{i\}$, et de façon évidente, $g \preceq h$, et $g \neq h$. Ainsi, g n'est pas un élément maximal.

Par conséquent, $\boxed{\text{un élément maximal de } (\mathcal{C}, \preceq) \text{ est de domaine } I.}$ Une autre façon d'exprimer cela est de dire qu'une fonction de choix partielle maximale est une fonction de choix (totale).

3. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un sous-ensemble totalement ordonné. On note pour tout $g \in \mathcal{D}$, I_g le domaine de g. On définit alors une fonction f en commençant par définir son domaine :

$$I_f = \bigcup_{g \in \mathcal{D}} I_g.$$

On remarque ensuite que si $i \in I_f$ appartient à la fois à I_g et I_h, pour $g, h \in \mathcal{D}$, alors, $\mathcal{D}$ étant totalement ordonné, on a $g \preceq h$ ou $h \preceq g$, disons $g \preceq h$ pour se fixer les idées. Alors $I_g \subset I_h$, et g et h coïncident sur I_g. Par conséquent $g(i) = h(i)$. Ainsi, toutes les fonctions de $\mathcal{D}$ définies au point i prennent en ce point la même valeur. On définit alors $f(i)$ comme étant la valeur commune de ces $g(i)$.

Chaque I_g étant sous-ensemble de I, il en est de même de I_f. De plus, pour tout $i \in I_f$, il existe $g \in \mathcal{D}$ tel que $f(i) = g(i)$ et $g(i) \in A_i$ par définition. On a donc bien, pour tout $i \in I_f$ $f(i) \in A_i$, et par conséquent, f est bien une fonction de choix partielle, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{C}$.

Enfin, on a alors de façon évidente, pour tout $g \in \mathcal{D}$, $g \preceq f$. Ainsi, f est un majorant dans $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$.

On a donc montré que toute chaîne de $\mathcal{C}$ admet un majorant, ce qui signifie bien que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est inductif}}$.

4. Puisque $\mathcal{C}$ est inductif, il admet un élément maximal d'après le lemme de Zorn. D'après la question 2, cet élément maximal est une fonction de choix. On a bien prouvé $\boxed{\text{l'axiome du choix}}$.

En déduire l'axiome du choix.