

LIMITE D'UNE SUITE CORRECTION

Exercice 1

A. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est sous-additive, c'est-à-dire $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.*

1. *Soient $m, q, r \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_{mq+r} \leqslant qu_m + u_r$.*

   Par sous-additivité, on a $u_{mq+r} \leqslant u_{mq} + u_r$. En utilisant à nouveau la sous-additivité, on obtient $u_{mq} = u_{m(q-1)+m} \leqslant u_{m(q-1)} + u_m$, ce qui permet d'affirmer, à l'aide d'une récurrence immédiate, que $u_{mq} \leqslant qu_m$. En définitive, on a

$$\boxed{u_{mq+r} \leqslant qu_m + u_r.}$$

2. a) *On suppose que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée et l'on note α sa borne inférieure. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_\varepsilon}/n_\varepsilon \leqslant \alpha + \varepsilon/2$ et en déduire que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers α.*

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha = \inf\{u_n/n : n \in \mathbb{N}^*\}$, le nombre $\alpha + \varepsilon/2$ n'est pas un minorant de la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\cdot}$$

   Pour $n \geqslant n_\varepsilon$, effectuons la division euclidienne de n par n_ε. Cela donne $n = n_\varepsilon q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; n_\varepsilon]\!]$. La question 1 nous dit alors que

$$u_n = u_{n_\varepsilon q+r} \leqslant qu_{n_\varepsilon} + u_r$$

   c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{n} \leqslant q\frac{u_{n_\varepsilon}}{n} + \frac{u_r}{n}\cdot$$

   Comme $q = (n-r)/n_\varepsilon$ et $u_r \leqslant \max\{u_0, \dots, u_{n_\varepsilon - 1}\}$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} - \frac{r}{n}\frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} + \frac{\max\{u_0, \dots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n}.$$

   Or $r/n_\varepsilon < 1$ donc

$$-\frac{r}{n}\frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{r}{n}\frac{|u_{n_\varepsilon}|}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{|u_{n_\varepsilon}|}{n},$$

   ce qui donne

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} + \frac{|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \dots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n}.$$

   Comme la suite $\big((|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \dots, u_{n_\varepsilon-1}\})/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, il existe $N \geqslant n_\varepsilon$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \dots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   En combinant les différents résultats glanés jusqu'ici et le fait que $u_n/n \geqslant \alpha$ (par définition de α), on obtient, pour tout $n \geqslant N$,

$$\alpha \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   En conclusion,

$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } \alpha.}$$

b) *On suppose maintenant que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée. Démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.*

Soit $A<0$. Comme $A-1$ n'est pas un minorant de $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$, il existe $n_A \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{u_{n_A}}{n_A} \leqslant A-1.$$

Pour $n \geqslant n_A$, effectuons la division euclidienne de n par n_A. Cela donne $n = n_A q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0;n_A]\!]$. La question 1 nous dit alors

$$u_n = u_{n_A q + r} \leqslant q u_{n_A} + u_r,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{n} \leqslant q \frac{u_{n_A}}{n} + \frac{u_r}{n}.$$

Comme $q = (n-r)/n_A$ et $u_r \leqslant \max\{u_0, \ldots, u_{n_A-1}\}$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_A}}{n_A} - \frac{r}{n}\frac{u_{n_A}}{n_A} + \frac{\max\{u_0, \ldots, u_{n_A-1}\}}{n},$$

ce qui donne, puisque $r/n_A < 1$,

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_A}}{n_A} + \frac{|u_{n_A}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_A-1}\}}{n}.$$

Comme $\big((|u_{n_A}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_A-1}\})/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, il existe $N \geqslant n_A$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{|u_{n_A}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_A-1}\}}{n} \leqslant 1.$$

En combinant les différents résultats glanés jusqu'ici, on obtient, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{u_n}{n} \leqslant A.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } -\infty.}$$

B. *On dit que $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une pente lorsque $\{\lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ est fini.*

1. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que l'application $\lambda_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_x(n) = \lceil nx \rceil$ est une pente.*

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $nx \leqslant \lceil nx \rceil < nx+1$ et $mx \leqslant \lceil mx \rceil < mx+1$. En additionnant ces encadrements, on obtient $(n+m)x \leqslant \lceil nx \rceil + \lceil mx \rceil < (n+m)x + 2$, ce qui donne

$$-(n+m)x - 2 \leqslant -\lceil nx \rceil - \lceil mx \rceil < -(n+m)x.$$

Par ailleurs, on a

$$(n+m)x \leqslant \lceil (n+m)x \rceil < (n+m)x + 1.$$

En ajoutant ces encadrements, il vient

$$-2 < \lceil (n+m)x \rceil - \lceil nx \rceil - \lceil mx \rceil < 1.$$

Donc

$$\{\lambda_x(n+m) - \lambda_x(n) - \lambda_x(m) : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \{-1; 0\},$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\lambda_x \text{ est une pente.}}$$

2. *Soit λ une pente.*

a) *Justifier l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) \leqslant \beta$.*

Pour une partie de $\mathbb{Z}$, il est synonyme d'être finie ou d'être bornée. Par conséquent, l'ensemble $\{\lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ qui est bornée (puisqu'elle est finie d'après l'hypothèse que λ est une pente). Cela signifie qu'

$$\boxed{\text{il existe } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall n, m \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) \leqslant \beta.}$$

b) *Démontrer que* $(\lambda(n)+\beta)_{n\geqslant 0}$ *et* $(-\lambda(n)-\alpha)_{n\geqslant 0}$ *sont deux suites sous-additives.*

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lambda(n+m)+\beta = \underbrace{\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)}_{\leqslant \beta} + \lambda(n)+\lambda(m)+\beta \leqslant \lambda(n)+\beta+\lambda(m)+\beta,$$

$$-\lambda(n+m)-\alpha = \underbrace{-\lambda(n+m)+\lambda(n)+\lambda(m)}_{\leqslant -\alpha} - \lambda(n)-\lambda(m)+\alpha \leqslant -(\lambda(n)-\alpha)+(-\lambda(m)-\alpha),$$

donc

$$\boxed{(\lambda(n)+\beta)_{n\geqslant 0} \text{ et } (-\lambda(n)-\alpha)_{n\geqslant 0} \text{ sont sous-additives.}}$$

c) *Démontrer que la suite* $(\lambda(n)/n)_{n\geqslant 1}$ *converge. On note* $\ell(\lambda)$ *sa limite.*

Le lemme de Fekete nous dit que les suites $\big((\lambda(n)+\beta)/n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big((-\lambda(n)-\alpha)/n\big)_{n\geqslant 1}$ admettent chacune une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Comme $(\beta/n)_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha/n)_{n\geqslant 1}$ tendent vers 0, on en déduit que les suites $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(-\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tendent chacune vers une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Cela revient à dire que $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers une limite qui appartient à la fois à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et à $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, c'est-à-dire à $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers une limite notée } \ell(\lambda)\in\mathbb{R}.}$$

d) *Que dire du signe de* $\ell(\lambda)$ *? Préciser la limite de la suite* $(\lambda(n))_{n\geqslant 0}$ *lorsque* $\ell(\lambda)>0$.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)\in\mathbb{N}$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)\geqslant 0$. Cela implique que $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)/n\geqslant 0$. Un passage à la limite nous dit que

$$\boxed{\ell(\lambda)\geqslant 0.}$$

Lorsque $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\ell(\lambda)>0$, on a $\lambda(n)\sim\ell(\lambda)n$, donc

$$\boxed{\text{si } \ell(\lambda)>0, \text{ la suite } \big(\lambda(n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } +\infty.}$$

e) *Soit* $x\in\mathbb{R}_+$. *Déterminer* $\ell(\lambda_x)$.

Pour tout $n\geqslant 1$, on a $nx\leqslant\lceil nx\rceil<nx+1$, donc

$$x\leqslant\frac{\lceil nx\rceil}{n}<x+\frac{1}{n}\cdot$$

Le théorème des gendarmes nous dit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lceil nx\rceil}{n}=x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\ell(\lambda_x)=x.}$$

3. *Soient* λ *et* μ *deux pentes. Justifier que* $\lambda+\mu$ *est une pente et démontrer que* $\ell(\lambda+\mu)=\ell(\lambda)+\ell(\mu)$.

Pour $n, m\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{d}_\lambda(n,m)=\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m).$$

On constate alors que, pour tous $n, m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\lambda+\mu}(n,m) &= (\lambda+\mu)(n+m)-(\lambda+\mu)(n)-(\lambda+\mu)(m)\\ &= \lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)+\mu(n+m)-\mu(n)-\mu(m)\\ &= \mathrm{d}_\lambda(n,m)+\mathrm{d}_\mu(n,m).\end{aligned}$$

Comme λ et μ sont des pentes, les fonction d_λ et d_μ sont bornées. Mézalors, $\mathrm{d}_{\lambda+\mu}$ l'est aussi (puisqu'une somme de fonctions bornées est encore bornée), ce qui démontre que

$$\boxed{\lambda+\mu \text{ est une pente.}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{(\lambda+\mu)(n)}{n}=\frac{\lambda(n)}{n}+\frac{\mu(n)}{n},$$

ce qui donne, par passage à la limite,

$$\boxed{\ell(\lambda+\mu)=\ell(\lambda)+\ell(\mu).}$$

4. *Soient λ et μ deux pentes. Justifier que $\lambda \circ \mu$ est une pente et démontrer que $\ell(\lambda \circ \mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu)$.*

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on reprend la notation de la question précédente :

$$\mathrm{d}_\lambda(n,m) = \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m).$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Lorsque $\mathrm{d}_\mu(n,m) \geqslant 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) &= \lambda\big(\mu(n+m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) - \lambda\big(\mu(n) + \mu(m)\big) \\
&\qquad + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) \\
&\qquad\qquad + \lambda\big(\mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \mathrm{d}_\lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n) + \mu(m)\big) + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n), \mu(m)\big).
\end{aligned}$$

et lorsque $\mathrm{d}_\mu(n,m) < 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) &= \lambda\big(\mu(n+m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n) + \mu(m)\big) \\
&\qquad - \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) \\
&\qquad\qquad + \lambda\big(\mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= -\mathrm{d}_\lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n) + \mu(m) + \mathrm{d}_\mu(n,m)\big) - \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n), \mu(m)\big).
\end{aligned}$$

Comme d_λ est bornée (puisque λ est une pente), le premier et le troisième termes sont bornés et ne peuvent donc prendre en conséquence qu'un nombre fini de valeurs. Par ailleurs, comme d_μ est bornée (puisque μ est une pente), $\pm\mathrm{d}_\mu(n,m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\lambda\big(\pm\mathrm{d}_\mu(n,m)\big)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$. En définitive, $\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\boxed{\lambda \circ \mu \text{ est une pente.}}$$

Pour calculer $\ell(\lambda \circ \mu)$, on distingue deux cas :

- Lorsque $\ell(\mu) > 0$, la question B. 2. d) nous dit que $\big(\mu(n)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \mu(n) \neq 0$, ce qui permet d'écrire, pour $n \geqslant N$,

$$\frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} = \frac{\lambda(\mu(n))}{\mu(n)} \frac{\mu(n)}{n}.$$

  On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} = \ell(\lambda\circ\mu) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(n)}{n} = \ell(\mu).$$

  Par ailleurs, comme $\big(\mu(n)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$, le théorème de composition des limites nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda(\mu(n))}{\mu(n)} = \ell(\lambda).$$

  Donc

$$\ell(\lambda\circ\mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu).$$

- Lorsque $\ell(\mu) = 0$, c'est un peu plus technique. Comme $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ converge (vers $\ell(\lambda)$), cette suite est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \lambda(n) \leqslant Kn.$$

  Dès lors, pour $n \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} \leqslant K\frac{\mu(n)}{n}.$$

  Comme $\ell(\mu) = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

ce qui donne, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ell(\lambda\circ\mu) = 0.$$

En conclusion, dans tous les cas, on a

$$\boxed{\ell(\lambda\circ\mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu).}$$

5. *On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des pentes. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
On munit $\mathscr{P}$ de la relation $\sim$ définie par $\forall \lambda, \mu \in \mathscr{P}$, $(\lambda \sim \mu) \iff \big(\ell(\lambda) = \ell(\mu)\big)$.

a) *Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}$.*

Pour toute pente λ, l'égalité $\ell(\lambda) = \ell(\lambda)$ est une évidence donc $\lambda \sim \lambda$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

Soient λ, μ deux pentes telles que $\lambda \sim \mu$. On a alors $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ et donc aussi $\ell(\mu) = \ell(\lambda)$, ce qui donne $\mu \sim \lambda$. Donc $\sim$ est symétrique.

Soient λ, μ, ν trois pentes telles que $\lambda \sim \mu$ et $\mu \sim \nu$. On a alors $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ et $\ell(\mu) = \ell(\nu)$, ce qui donne $\ell(\lambda) = \ell(\nu)$. Donc $\sim$ est transitive.

En conclusion,

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{P}.}$$

b) *Démontrer que l'ensemble quotient $\mathscr{P}/\!\sim$ est en bijection avec $\mathbb{R}_+$.*

Considérons l'application

$$\ell \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}/\!\sim & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \overline{\lambda} & \longmapsto & \ell(\lambda) \end{array} \right.$$

L'application ℓ est bien définie. En effet, si $\mu \sim \lambda$ on a $\ell(\mu) = \ell(\lambda)$, ce qui permet sans ambiguité d'associer à la classe d'équivalence $\overline{\lambda}$ le nombre réel positif ou nul $\ell(\lambda)$.

Par ailleurs, si λ et μ sont deux pentes telles que $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$, alors $\lambda \sim \mu$, c'est-à-dire $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$. Cela démontre que ℓ est une injection de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\ell(\lambda_x) = x$, ce qui démontre que ℓ est surjective.

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'ensemble quotient } \mathscr{P}/\!\sim \text{ est en bijection avec } \mathbb{R}_+.}$$

LIMITE D'UNE SUITE CORRECTION

Exercice 1

A. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est sous-additive, c'est-à-dire $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.*

1. *Soient $m, q, r \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_{mq+r} \leqslant qu_m + u_r$.*

   Par sous-additivité, on a $u_{mq+r} \leqslant u_{mq} + u_r$. En utilisant à nouveau la sous-additivité, on obtient $u_{mq} = u_{m(q-1)+m} \leqslant u_{m(q-1)} + u_m$, ce qui permet d'affirmer, à l'aide d'une récurrence immédiate, que $u_{mq} \leqslant qu_m$. En définitive, on a

$$\boxed{u_{mq+r} \leqslant qu_m + u_r.}$$

2. a) *On suppose que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée et l'on note α sa borne inférieure. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_\varepsilon}/n_\varepsilon \leqslant \alpha + \varepsilon/2$ et en déduire que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers α.*

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha = \inf\{u_n/n : n \in \mathbb{N}^*\}$, le nombre $\alpha + \varepsilon/2$ n'est pas un minorant de la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\cdot}$$

   Pour $n \geqslant n_\varepsilon$, effectuons la division euclidienne de n par n_ε. Cela donne $n = n_\varepsilon q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; n_\varepsilon]\!]$. La question 1 nous dit alors que

$$u_n = u_{n_\varepsilon q+r} \leqslant qu_{n_\varepsilon} + u_r$$

   c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{n} \leqslant q\frac{u_{n_\varepsilon}}{n} + \frac{u_r}{n}\cdot$$

   Comme $q = (n-r)/n_\varepsilon$ et $u_r \leqslant \max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon-1}\}$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} - \frac{r}{n}\frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} + \frac{\max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n}.$$

   Or $r/n_\varepsilon < 1$ donc

$$-\frac{r}{n}\frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{r}{n}\frac{|u_{n_\varepsilon}|}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{|u_{n_\varepsilon}|}{n},$$

   ce qui donne

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} + \frac{|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n}.$$

   Comme la suite $\big((|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon-1}\})/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, il existe $N \geqslant n_\varepsilon$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{|u_{n_\varepsilon}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon-1}\}}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   En combinant les différents résultats glanés jusqu'ici et le fait que $u_n/n \geqslant \alpha$ (par définition de α), on obtient, pour tout $n \geqslant N$,

$$\alpha \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   En conclusion,

$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } \alpha.}$$

b) *On suppose maintenant que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée. Démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.*

Soit $A<0$. Comme $A-1$ n'est pas un minorant de $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$, il existe $n_A\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{u_{n_A}}{n_A}\leqslant A-1.$$

Pour $n\geqslant n_A$, effectuons la division euclidienne de n par n_A. Cela donne $n=n_Aq+r$ où $q\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0;n_A]\!]$. La question 1 nous dit alors

$$u_n=u_{n_Aq+r}\leqslant qu_{n_A}+u_r,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{n}\leqslant q\frac{u_{n_A}}{n}+\frac{u_r}{n}\cdot$$

Comme $q=(n-r)/n_A$ et $u_r\leqslant\max\{u_0,\ldots,u_{n_A-1}\}$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{u_{n_A}}{n_A}-\frac{r}{n}\frac{u_{n_A}}{n_A}+\frac{\max\{u_0,\ldots,u_{n_A-1}\}}{n},$$

ce qui donne, puisque $r/n_A<1$,

$$\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{u_{n_A}}{n_A}+\frac{|u_{n_A}|+\max\{u_0,\ldots,u_{n_A-1}\}}{n}.$$

Comme $\big((|u_{n_A}|+\max\{u_0,\ldots,u_{n_A-1}\})/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, il existe $N\geqslant n_A$ tel que, pour tout $n\geqslant N$,

$$\frac{|u_{n_A}|+\max\{u_0,\ldots,u_{n_A-1}\}}{n}\leqslant 1\cdot$$

En combinant les différents résultats glanés jusqu'ici, on obtient, pour tout $n\geqslant N$,

$$\frac{u_n}{n}\leqslant A.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n/n)_{n\geqslant 1}\text{ tend vers }-\infty.}$$

B. *On dit que $\lambda:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ est une pente lorsque $\{\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m):n,m\in\mathbb{N}\}$ est fini.*

1. *Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Démontrer que l'application $\lambda_x:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_x(n)=\lceil nx\rceil$ est une pente.*

Pour tous $n,m\in\mathbb{N}$, on a $nx\leqslant\lceil nx\rceil<nx+1$ et $mx\leqslant\lceil mx\rceil<mx+1$. En additionnant ces encadrements, on obtient $(n+m)x\leqslant\lceil nx\rceil+\lceil mx\rceil<(n+m)x+2$, ce qui donne

$$-(n+m)x-2\leqslant-\lceil nx\rceil-\lceil mx\rceil<-(n+m)x.$$

Par ailleurs, on a

$$(n+m)x\leqslant\lceil(n+m)x\rceil<(n+m)x+1.$$

En ajoutant ces encadrements, il vient

$$-2<\lceil(n+m)x\rceil-\lceil nx\rceil-\lceil mx\rceil<1.$$

Donc

$$\{\lambda_x(n+m)-\lambda_x(n)-\lambda_x(m):n,m\in\mathbb{N}\}\subset\{-1;0\},$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\lambda_x\text{ est une pente.}}$$

2. *Soit λ une pente.*

a) *Justifier l'existence de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n,m\in\mathbb{N},\ \alpha\leqslant\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)\leqslant\beta$.*

Pour une partie de $\mathbb{Z}$, il est synonyme d'être finie ou d'être bornée. Par conséquent, l'ensemble $\{\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m):n,m\in\mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ qui est bornée (puisqu'elle est finie d'après l'hypothèse que λ est une pente). Cela signifie qu'

$$\boxed{\text{il existe }\alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ tels que }\forall n,m\in\mathbb{N},\ \alpha\leqslant\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)\leqslant\beta.}$$

b) *Démontrer que* $(\lambda(n)+\beta)_{n\geqslant 0}$ *et* $(-\lambda(n)-\alpha)_{n\geqslant 0}$ *sont deux suites sous-additives.*

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lambda(n+m)+\beta = \underbrace{\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)}_{\leqslant \beta} + \lambda(n)+\lambda(m)+\beta \leqslant \lambda(n)+\beta+\lambda(m)+\beta,$$

$$-\lambda(n+m)-\alpha = \underbrace{-\lambda(n+m)+\lambda(n)+\lambda(m)}_{\leqslant -\alpha} - \lambda(n)-\lambda(m)+\alpha \leqslant -(\lambda(n)-\alpha)+(-\lambda(m)-\alpha),$$

donc

$$\boxed{(\lambda(n)+\beta)_{n\geqslant 0} \text{ et } (-\lambda(n)-\alpha)_{n\geqslant 0} \text{ sont sous-additives.}}$$

c) *Démontrer que la suite* $(\lambda(n)/n)_{n\geqslant 1}$ *converge. On note* $\ell(\lambda)$ *sa limite.*

Le lemme de Fekete nous dit que les suites $\big((\lambda(n)+\beta)/n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big((-\lambda(n)-\alpha)/n\big)_{n\geqslant 1}$ admettent chacune une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Comme $(\beta/n)_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha/n)_{n\geqslant 1}$ tendent vers 0, on en déduit que les suites $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(-\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tendent chacune vers une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Cela revient à dire que $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers une limite qui appartient à la fois à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et à $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, c'est-à-dire à $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers une limite notée } \ell(\lambda)\in\mathbb{R}.}$$

d) *Que dire du signe de* $\ell(\lambda)$ *? Préciser la limite de la suite* $(\lambda(n))_{n\geqslant 0}$ *lorsque* $\ell(\lambda)>0$.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)\in\mathbb{N}$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)\geqslant 0$. Cela implique que $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda(n)/n\geqslant 0$. Un passage à la limite nous dit que

$$\boxed{\ell(\lambda)\geqslant 0.}$$

Lorsque $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\ell(\lambda)>0$, on a $\lambda(n) \sim \ell(\lambda)n$, donc

$$\boxed{\text{si } \ell(\lambda)>0, \text{ la suite } \big(\lambda(n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } +\infty.}$$

e) *Soit* $x\in\mathbb{R}_+$. *Déterminer* $\ell(\lambda_x)$.

Pour tout $n\geqslant 1$, on a $nx\leqslant\lceil nx\rceil<nx+1$, donc

$$x\leqslant\frac{\lceil nx\rceil}{n}<x+\frac{1}{n}\cdot$$

Le théorème des gendarmes nous dit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lceil nx\rceil}{n}=x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\ell(\lambda_x)=x.}$$

3. *Soient* λ *et* μ *deux pentes. Justifier que* $\lambda+\mu$ *est une pente et démontrer que* $\ell(\lambda+\mu)=\ell(\lambda)+\ell(\mu)$.

Pour $n, m\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{d}_\lambda(n,m)=\lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m).$$

On constate alors que, pour tous $n, m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\lambda+\mu}(n,m) &= (\lambda+\mu)(n+m)-(\lambda+\mu)(n)-(\lambda+\mu)(m)\\ &= \lambda(n+m)-\lambda(n)-\lambda(m)+\mu(n+m)-\mu(n)-\mu(m)\\ &= \mathrm{d}_\lambda(n,m)+\mathrm{d}_\mu(n,m).\end{aligned}$$

Comme λ et μ sont des pentes, les fonction d_λ et d_μ sont bornées. Mézalors, $\mathrm{d}_{\lambda+\mu}$ l'est aussi (puisqu'une somme de fonctions bornées est encore bornée), ce qui démontre que

$$\boxed{\lambda+\mu \text{ est une pente.}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{(\lambda+\mu)(n)}{n}=\frac{\lambda(n)}{n}+\frac{\mu(n)}{n},$$

ce qui donne, par passage à la limite,

$$\boxed{\ell(\lambda+\mu)=\ell(\lambda)+\ell(\mu).}$$

4. *Soient λ et μ deux pentes. Justifier que $\lambda \circ \mu$ est une pente et démontrer que $\ell(\lambda \circ \mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu)$.*

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on reprend la notation de la question précédente :

$$\mathrm{d}_\lambda(n,m) = \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m).$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Lorsque $\mathrm{d}_\mu(n,m) \geqslant 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) &= \lambda\big(\mu(n+m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) - \lambda\big(\mu(n) + \mu(m)\big) \\
&\qquad +\lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) \\
&\qquad\quad +\lambda\big(\mu(n)+\mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \mathrm{d}_\lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n)+\mu(m)\big) + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n),\mu(m)\big).
\end{aligned}$$

et lorsque $\mathrm{d}_\mu(n,m) < 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) &= \lambda\big(\mu(n+m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m) + \mu(n) + \mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)+\mu(m)\big) \\
&\qquad -\lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) \\
&\qquad\quad +\lambda\big(\mu(n)+\mu(m)\big) - \lambda\big(\mu(n)\big) - \lambda\big(\mu(m)\big) \\
&= -\mathrm{d}_\lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n)+\mu(m)+\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) - \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n),\mu(m)\big).
\end{aligned}$$

Comme d_λ est bornée (puisque λ est une pente), le premier et le troisième termes sont bornés et ne peuvent donc prendre en conséquence qu'un nombre fini de valeurs. Par ailleurs, comme d_μ est bornée (puisque μ est une pente), $\pm\mathrm{d}_\mu(n,m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\lambda\big(\pm\,\mathrm{d}_\mu(n,m)\big)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$. En définitive, $\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque n, m parcourent $\mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\boxed{\lambda \circ \mu \text{ est une pente.}}$$

Pour calculer $\ell(\lambda\circ\mu)$, on distingue deux cas :

- Lorsque $\ell(\mu) > 0$, la question B. 2. d) nous dit que $\big(\mu(n)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \mu(n) \neq 0$, ce qui permet d'écrire, pour $n \geqslant N$,

  $$\frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} = \frac{\lambda(\mu(n))}{\mu(n)}\frac{\mu(n)}{n}.$$

  On sait que

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} = \ell(\lambda\circ\mu) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\mu(n)}{n} = \ell(\mu).$$

  Par ailleurs, comme $\big(\mu(n)\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$, le théorème de composition des limites nous dit que

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda(\mu(n))}{\mu(n)} = \ell(\lambda).$$

  Donc

  $$\ell(\lambda\circ\mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu).$$

- Lorsque $\ell(\mu) = 0$, c'est un peu plus technique. Comme $\big(\lambda(n)/n\big)_{n\geqslant 1}$ converge (vers $\ell(\lambda)$), cette suite est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ tel que

  $$\forall n \geqslant 0, \qquad \lambda(n) \leqslant Kn.$$

  Dès lors, pour $n \geqslant 0$, on a

  $$0 \leqslant \frac{(\lambda\circ\mu)(n)}{n} \leqslant K\frac{\mu(n)}{n}.$$

  Comme $\ell(\mu) = 0$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

ce qui donne, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\lambda \circ \mu)(n)}{n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ell(\lambda \circ \mu) = 0.$$

En conclusion, dans tous les cas, on a

$$\boxed{\ell(\lambda \circ \mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu).}$$

5. *On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des pentes. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
On munit $\mathscr{P}$ de la relation $\sim$ définie par $\forall \lambda, \mu \in \mathscr{P},\ (\lambda \sim \mu) \iff \big(\ell(\lambda) = \ell(\mu)\big)$.
   a) *Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}$.*

   Pour toute pente λ, l'égalité $\ell(\lambda) = \ell(\lambda)$ est une évidence donc $\lambda \sim \lambda$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

   Soient λ, μ deux pentes telles que $\lambda \sim \mu$. On a alors $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ et donc aussi $\ell(\mu) = \ell(\lambda)$, ce qui donne $\mu \sim \lambda$. Donc $\sim$ est symétrique.

   Soient λ, μ, ν trois pentes telles que $\lambda \sim \mu$ et $\mu \sim \nu$. On a alors $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ et $\ell(\mu) = \ell(\nu)$, ce qui donne $\ell(\lambda) = \ell(\nu)$. Donc $\sim$ est transitive.

   En conclusion,

   $$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{P}.}$$

   b) *Démontrer que l'ensemble quotient $\mathscr{P}/\!\sim$ est en bijection avec $\mathbb{R}_+$.*

   Considérons l'application

   $$\ell \begin{cases} \mathscr{P}/\!\sim & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \overline{\lambda} & \longmapsto & \ell(\lambda) \end{cases}$$

   L'application ℓ est bien définie. En effet, si $\mu \sim \lambda$ on a $\ell(\mu) = \ell(\lambda)$, ce qui permet sans ambiguité d'associer à la classe d'équivalence $\overline{\lambda}$ le nombre réel positif ou nul $\ell(\lambda)$.

   Par ailleurs, si λ et μ sont deux pentes telles que $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$, alors $\lambda \sim \mu$, c'est-à-dire $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$. Cela démontre que ℓ est une injection de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}_+$.

   Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\ell(\lambda_x) = x$, ce qui démontre que ℓ est surjective.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{l'ensemble quotient } \mathscr{P}/\!\sim \text{ est en bijection avec } \mathbb{R}_+.}$$