DM n° 6 : Complexes

Correction du problème 1 – (Racines primitives et polynômes cyclotomiques)

Partie I – Racines primitives de l'unité

1. On a, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\xi_n^k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \neq 1,$$
puisque $0 < \dfrac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n} < 2\pi$. Ainsi, $\boxed{\xi_n \text{ est racine primitive de } n}$. De façon immédiate, $\overline{\xi_n}$ est alors aussi racine primitive. Si $n > 2$, ξ_n et $\overline{\xi_n}$ sont distincts, et on obtient bien une deuxième racine primitive.

2. (a) Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Remarquons d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, ω^k est encore un élément de $\mathbb{U}_n$.
   - Si $\omega \in \mathbb{P}_n$, alors les ω^k, $k \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux distincts. En effet, sinon, il existerait i et j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\omega^i = \omega^j$. Comme $\omega^i \neq 0$, on peut simplifier, et on obtient $\omega^{j-i} = 1$, avec $1 \leqslant j - i \leqslant n-1$. cela contredit le fait que $\omega \in \mathbb{P}_n$.
   Ainsi, les ω^k, $k \in [\![1, n]\!]$, étant deux à deux distincts et dans $\mathbb{U}_n$, et en nombre égal au cardinal de $\mathbb{U}_n$, on a
   $$\{\omega^k, k \in [\![1, n]\!]\} = \mathbb{U}_n$$
   - Réciproquement, si cette égalité est vraie, alors les ω^k, $k \in [\![1, n]\!]$ doivent être deux à deux distincts (sinon il n'y en a pas assez). Comme $\omega^n = 1$, on en déduit que les autres sont différents de 1. Cela signifie bien que $\omega \in \mathbb{P}_n$.

   Ainsi, $\boxed{\omega \in \mathbb{P}_n \text{ si et seulement si } \{\omega^k, k \in [\![1, n]\!]\} = \mathbb{U}_n.}$

   (b)
   - Si $\omega \in \mathbb{P}_n$, d'après la question précédente, il existe $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega^\ell = \xi_n$, puisque $\xi_n \in \mathbb{U}_n$.
   - Réciproquement, s'il existe ℓ tel que $\omega^\ell = \xi_n$, on obtient
   $$\mathbb{U}_n = \{\xi_n^k, k \in [\![1, n]\!]\} = \{\omega^{k\ell}, k \in [\![1, n]\!]\}.$$
   Comme les ω^i sont tous dans $\mathbb{U}_n$, on en déduit que
   $$\mathbb{U}_n = \{\omega^k,\ k \in \mathbb{N}.\}.$$
   Ainsi, la suite des puissances de ω^k prend n valeur possibles. Or, s'il existe $\alpha \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\omega^\alpha = 1$, la suite des puissances de ω serait périodique de période $\alpha < n$, ce qui contredit le point précédent. Ainsi, $\omega \in \mathbb{P}_n$.

   On en déduit que $\boxed{\omega \in \mathbb{P}_n \text{ si et seulement s'il existe } \ell \text{ tel que } \omega^\ell = \xi_n.}$

   (c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega = \xi_n^k$. Cet entier k existe et est unique.
   - Si $\omega \in \mathbb{P}_n$, il existe ℓ tel que $\omega^\ell = \xi_n$, donc $\xi_n^{k\ell} = \xi_n$, donc $\xi_n^{k\ell-1} = \xi_n$. Soit r le reste de la division de $k\ell - 1$ par n. On a alors, puisque $\xi_n^n = 1$, $\xi_n^r = 1$. Ceci n'est possible que si $r = 0$ (car ξ_n est racine primitive). On en déduit que n divise $k\ell - 1$, donc qu'il existe un entier u tel que $k\ell - 1 = nu$, donc $k\ell - nu = 1$. D'après le théorème de Bézout, $k \wedge n = 1$.
   - Réciproquement, si $k \wedge n = 1$, il existe des entiers u et v tels que
   $$uk + vn = 1,$$
   donc $\xi = \xi^{uk+vn} = \xi^{uk} = \omega^u$, et donc d'après 2(b), $\omega \in \mathbb{P}_n$.

Ainsi, $\omega \in \mathbb{P}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\boxed{k \wedge n = 1 \text{ et } \omega = \xi_1^k}$.
Le cardinal de $\mathbb{P}_n$ est alors le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ premiers avec n, soit :

$$\boxed{|\mathbb{P}_n| = \varphi(n)}.$$

3. (a) Les entiers de $[\![1, 6]\!]$ premiers avec 6 sont 1 et 5. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_6 = \{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\} = \{-j, -j^2\}}.$$

(b) Lorque p est un nombre premier, tout entier de $[\![1, p-1]\!]$ est premier avec p, donc $\boxed{\mathbb{P}_p = \mathbb{U}_p \setminus \{1\}.}$

(c) Si n est une puissance de 2, disons $n = 2^p$, tout nombre impair est premier avec n, mais aucun nombre pair. Donc

$$\mathbb{P}_n = \{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}(2k+1)\pi}{2^p}}, k \in [\![0, 2^{p-1} - 1]\!]\}$$

4. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, et $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega = \xi_n^k$

(a) On utilise la caractérisation de la question 2(c). Pour commencer, on remarque que

$$\mathbb{P}_{\frac{n}{d}} = \{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi d}{n}},\ k \in [\![1, \frac{n}{d}]\!]\}.$$

On a donc $\xi_{\frac{n}{d}} = \xi_n^d$. On a alors $\omega \in \mathbb{P}_{\frac{n}{d}}$ si et seulement s'il existe $k' \in [\![1, \frac{n}{d}]\!]$ tel que $k' \wedge \frac{n}{d} = 1$ et $\omega = \xi_{\frac{n}{d}}^{k'}$. Or, $(\xi_{\frac{n}{d}})^{k'} = (\xi_n)^{k'd}$ et $k' \wedge \frac{n}{d} = 1$ équivaut à $k'd \wedge n = d$. De plus $k'd \in [\![1, n]\!]$, et ξ_n est une racine primitive, donc toute racine n-ième de 1 s'écrit de façon unique sous la forme ξ_n^k, avec $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que $k = k'd$.
On a bien obtenu que $\boxed{\omega \in \mathbb{P}_{\frac{n}{d}} \text{ si et seulement si } k \wedge n = d}$.

(b) On peut former une partition de $[\![1, n]\!]$ suivant la valeur du pgcd de chacun des éléments et de n, ce pgcd étant nécessairement un diviseur de n :

$$[\![1, n]\!] = \bigsqcup_{d|n} \{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = d\}.$$

Or, les racines n-ième de 1 étant décrites de façon unique par une expression ξ_1^k, $k \in [\![1, n]\!]$, cela fournit également une partition de $\mathbb{U}_n$:

$$\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \{\xi_1^k \mid k \in [\![1, n]\!] \text{ et } k \wedge n = d\}.$$

Or, d'après la caractérisation de la question 4(a),

$$\{\xi_1^k \mid k \in [\![1, n]\!] \text{ et } k \wedge n = d\} = \mathbb{P}_{\frac{n}{d}}.$$

Ainsi, on a bien obtenu : $\boxed{\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{P}_{\frac{n}{d}}}$.

(c) En passant au cardinal dans cette partition, on obtient alors :

$$|\mathbb{U}_n| = \sum_{d|n} |P_{\frac{n}{d}}|.$$

Le cardinal de $\mathbb{U}_n$ est n. On obtient alors, d'après 2(c) :

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Or, l'application $\psi : d \mapsto \frac{n}{d}$ est une involution de l'ensemble des diviseurs de n dans lui-même (c'est-à-dire $\psi \circ \psi = \mathrm{id}$), et en particulier, ψ est bijective. On peut donc procéder au changement de variable $d' = \frac{n}{d}$ dans la somme précédente, et on obtient :

$$\boxed{n = \sum_{d|n} \varphi(d)}.$$

5. Soit $n > 2$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $k \wedge n = 1$, on a aussi $(n-k) \wedge n = 1$. De plus, dans ce cas, $n - k \neq k$. En effet, sinon $n = 2k$, avec $k > 1$ (puisque $n > 2$), ce qui contredit $n \wedge k = 1$. Ainsi,

$$\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\} = \bigsqcup_{\substack{k \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!] \\ k \wedge n = 1}} \{k, n-k\},$$

l'union étant constituée d'ensembles 2 à 2 disjoints (évident) de cardinal 2 chacun. Ainsi, le cardinal total est pair, c'est-à-dire : $\boxed{\varphi(n) \text{ est pair}}$.

6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \wedge n = 1}} k$

(a) On trie comme précédemment les entiers suivant leur pgcd avec n. On note $E_d(n)$ l'ensemble des entiers de $[\![1, n]\!]$ dont le pgcd avec n est d.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{d \mid n} \sum_{k \in E_d(n)} k.$$

Or, $k \in E_d(n)$ si et seulement si $\frac{k}{d} \in E_1(\frac{n}{d})$, donc

$$\sum_{k \in E_d} k = \sum_{\ell \in E_1(\frac{n}{d})} \ell d = d S_{\frac{n}{d}}.$$

On peut donc conclure : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} k = \sum\limits_{d \mid n} d S_{\frac{n}{d}}.}$

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

- Si $n = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{2}\varphi(1) + \dfrac{1}{2}$
- si $n \neq 1$, $S_n = \dfrac{1}{2} n \varphi(n)$.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est immédiate puisque

$$S_1 = \sum_{k \in \{1\}} k = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et supposons la propriété $\mathcal{P}(k)$ satisfaite pour tout $k < n$. On a alors, d'après 6(a) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} d S_{\frac{n}{d}}.$$

La première somme se calcule, et pour la seconde, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} d \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{n}{2},$$

le dernier terme $\frac{n}{2}$ provenant de la spécificité de l'expression de S_1. En utilisant la question 4(c), (en fait le résultat obtenu avant changement de variable) :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}\left(n - \varphi(n)\right) - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \varphi(n).$$

Cela correspond bien à la propriété $\mathcal{P}(n)$.

D'après le principe de récurrence forte, on peut conclure que pour tout $n > 1$, $\boxed{S_n = \dfrac{1}{2} n \varphi(n)}$.

Partie II – Polynômes cyclotomiques

1. De façon immédiate, $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$.

2. (a) Les racines cubiques primitives sont j et j^2, donc

$$\boxed{\Phi_3 = (X-j)(X-j^2) = 1 + X + X^2}.$$

De même, on a justifié plus haut que les racines 6-ièmes primitives sont $-j$ et $-j^2$, donc

$$\Phi_6(X) = (X+j)(X+j^2) = X^2 + (j+j^2)X + j^3,$$

et compte tenu de l'égalité $1 + j + j^2 = 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\Phi_6(X) = X^2 - X + 1}.$$

(b) Lorsque p est premier, tous les éléments de $\mathbb{U}_p$, à part 1, sont des racines primitives (question I-3(b)). Donc

$$\Phi_p = \frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + \cdots + X^{n-1}.$$

(c) Lorsque n est une puissance de 2, $n \geqslant 2$, les racines primitives sont les ξ_n^k, où k est un entier impair de $[\![1, n]\!]$. Ainsi,

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ impair}}} (X - \xi_n^k) = \frac{\prod\limits_{k \in [\![1,n]\!]} (X - \xi_1^k)}{\prod\limits_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} (X - \xi_1^k)} = \frac{X^n - 1}{\prod\limits_{\ell=1}^{\frac{n}{2}} (X - \xi_n^{2\ell})}.$$

Comme $\xi_n^2 = \xi_{\frac{n}{2}}$, on en déduit que

$$\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{X^{\frac{n}{2}} - 1} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\Phi_n(X) = X^{\frac{n}{2}} + 1}.$$

Le cas de $n = 2^0$ est trivial : $\Phi_1(X) = (X - 1)$.

3. Soit q un entier impair différent de 1.

(a) Soit q un entier impair distinct de 1.

- Supposons $\omega \in \mathbb{P}_{2q}$. D'après I-2(b), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega^k = \xi_{2q}$, donc $(-\omega)^{2k} = \xi_{2q}^2 = \xi_q$. La caractérisation de I-2(b) amène alors $-\omega \in \mathbb{P}_q$.
- Réciproquement, supposons $-\omega \in \mathbb{P}_q$. Il existe donc $k \in [\![1, q]\!]$, premier avec q, tel que $-\omega = \xi_q^k = \xi_{2q}^{2k}$. Or, $\xi_{2q}^q = -1$ car comme ξ_{2q} est racine primitive, $\xi_{2q}^q \neq 1$, et de plus $(\xi_{2q}^q)^2 = 1$. On déduit $\xi_{2q}^q = -1$ du fait que 1 a pour seules racines carrées 1 et -1. Ainsi,

$$\omega = \xi_{2q}^{2k+q}.$$

Comme q est impair, $2k+q$ est premier avec 2. Comme k et 2 sont premiers avec q, $2k$ aussi, donc $2k+q$ aussi. Ainsi, $2k+q$ est premier avec 2 et avec q, donc aussi avec $2q$. On déduit de I-2(c) que $\omega \in \mathbb{P}_{2q}$.

Ainsi, si q est impair, $\boxed{\omega \in \mathbb{P}_{2q} \text{ si et seulement si } -\omega \in \mathbb{P}_q}$.

(b) On a donc, avec les mêmes hypothèses :

$$\Phi_{2q}(X) = \prod_{\omega \in \mathbb{P}_{2q}} (X - \omega) = \prod_{\omega \in \mathbb{P}_q} (X + \omega) = (-1)^{|\mathbb{P}_q|} \prod_{\omega \in \mathbb{P}_q} (-X - \omega) = (-1)^{\varphi(q)} \Phi_q(-X).$$

Or, q est impair, et supposé différent de 1, donc $q \geqslant 3$. On déduit de I-5, que $\varphi(q)$ est pair, d'où :

$$\boxed{\Phi_{2q}(X) = \Phi_q(-X)}.$$

Remarquez que c'est cohérent avec notre calcul de Φ_3 et Φ_6.

Partie III – Calcul de $\Phi_n(1)$

1. Il s'agit d'une généralisation du calcul effectué pour les puissances de 2. Puisque p est premier, les entiers de $[\![1, p^k]\!]$ qui ne sont pas premiers avec p^k sont exactement les entiers divisibles par p. Ainsi, on obtient Φ_{p^k} par le quotient suivant :

$$\Phi_{\mathcal{P}^k}(X) = \frac{X^{p^k}-1}{\displaystyle\prod_{\substack{\ell\in[\![1,p^k]\!]\\ p\div\ell}} (X-\xi_{p^k}^{\ell})} = \frac{X^{p^k}-1}{\displaystyle\prod_{m=1}^{p^{k-1}} (X-(\xi_{p^k})^{pm})} = \frac{X^{p^k}-1}{\displaystyle\prod_{m=1}^{p^{k-1}} (X-(\xi_{p^{k-1}})^{m})}.$$

Ainsi, on peut conclure :

$$\boxed{\Phi_{p^k} = \frac{X^{p^k}-1}{X^{p^{k-1}}-1}}.$$

2. Or,

$$X^{p^k}-1 = (X^{p^{k-1}})^p - 1 = (X^{p^{k-1}}-1)\sum_{i=0}^{p-1}(X^{p^{k-1}})^i,$$

donc

$$\Phi_{p^k}(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^{ip^{k-1}}.$$

En évaluant en 1, on obtient $\boxed{\Phi_{p^k}(1) = p}$.

3. (a) On utilise la question I-4(b), qui nous permet d'écrire :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X-\omega) = \prod_{d|n}\prod_{\omega\in\mathbb{P}_{\frac{n}{d}}}(X-\omega) = \prod_{d|n}\Phi_{\frac{n}{d}}(X).$$

Le changement de variable $d' = \frac{n}{d}$ qu'on a déjà utilisé amène alors

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(X)}.$$

(b) Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers. On suppose de plus que le coefficient dominant de Q est égal à 1. Supposons qu'il existe R tel que $P = QR$, et que P ne soit pas à coefficients entiers. Écrivons alors $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=O}^{n} a_i X^i$ et $R(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, et notons k le plus grand indice tel que b_k ne soit pas entier. Alors le coefficient de degré $k+n$ du polynôme $P = QR$ est

$$\sum_{i=k}^{\min(k+n,m)} b_i a_{k+n-i} = b_k + \sum_{i=k+1}^{\min(k+n,m)} b_i a_{k-1},$$

du fait que $a_n = 1$. Ainsi, tous les termes de la somme étant entiers (par maximalité de k) mais pas b_k, cela contredit le fait que P est à coefficients entiers.

(c) Le polynôme Φ_n est clairement unitaire (de coefficient dominant 1). On montre par récurrence qu'il est à coefficients entiers. En effet, c'est vrai pour $\Phi_1(X) = X - 1$. Soit $n \geqslant 2$, et supposons que pour tout $k < n$, Φ_k est à coefficients entiers. Alors, en notant

$$Q = \prod_{\substack{d|n\\ d\neq n}} \Phi_d,$$

le polynôme Q est unitaire à coefficients entiers, et d'après la question 3(a), $(X^n - 1) = Q(X)\Phi_n(X)$. On déduit alors de la question 3(b) que Φ_n est à coefficients entiers.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\Phi_n \text{ est à coefficients entiers.}}$

4. D'après 3(a) et le fait que $\Phi_1(X) = (X - 1)$, on obtient :

$$\prod_{\substack{d|n\\ d\neq 1}} \Phi_d(X) = \frac{X^n-1}{X-1} = \sum_{i=0}^{n-1} X^i.$$

Ainsi, en évaluant en 1, il vient :

$$\boxed{\prod_{\substack{d\mid n\\ d\neq 1}} \Phi_d(1) = n}.$$

5. Soit $n = p_1^{k_1}\cdots p_\ell^{k_\ell}$ la décomposition primaire de n. Parmi les diviseurs de n, on a tous les p_i^k, avec $1 \leqslant k \leqslant k_i$, pour lesquels on a $\Phi_{p_i^k}(1) = p$. Notons D_1 l'ensemble de ces diviseurs, et D_2 l'ensemble des autres (distincts de 1). On a alors :
$$\prod_{d\in D_1} \Phi_d(1) = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{k=1}^{k_i} \Phi_{p_i^k}(1) = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{k=1}^{k_i} p_i = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{k_i} = n.$$
Ainsi, on déduit de la question 4 que
$$\prod_{d\in D_2} \Phi_d(1) = 1,$$
donc puisque pour tout $d \in D_2$, $\Phi_d(1)$ est entier (d'après 3(c)), on obtient que pour tout $d \in D_2$, $|\Phi_d(1)| = 1$. En particulier, $|\Phi_n(1)| = 1$. Le signe strictement positif de tous les Φ_n, pour $n \geqslant 2$, s'obtient facilement par récurrence forte à partir de la question 4. Ainsi, $\boxed{\Phi_n(1) = 1}$

Partie IV – Un produit de sinus

1. Soit $n \geqslant 2$, différent d'une puissance d'un nombre premier. On a alors $\Phi_n(1) = 1$. Or avec les notations introduites précédemment :
$$\begin{aligned}\Phi_n(1) &= \prod_{k\in E_1(n)} (1-\xi_n^k) = \prod_{k\in E_1(n)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k\in E_1(n)} k} \prod_{k\in E_1(n)} (-2\,\mathrm{i})\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}\cdot\frac{1}{2}n\varphi(n)}(-\,\mathrm{i})^{\varphi(n)}2^{\varphi(n)} \prod_{k\in E_1(n)} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$
Or, $\varphi(n)$ est pair (on a supposé $n \geqslant 2$), donc $\frac{\varphi(n)}{2}$ est entier. Ainsi, puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$ ainsi que i^2, on obtient
$$\Phi_n(1) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}2^{\varphi(n)} \prod_{k\in E_1(n)} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
On obtient bien :
$$\boxed{\prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\wedge n=1}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{\varphi(n)}}}.$$

2. Pour obtenir du cosinus, on adapte ce calcul. Il faut le même signe devant 1 et ξ_n^k. Cela nous incite donc à utiliser $\Phi_n(-X)$, égal à $\Phi_{2n}(X)$, d'après la question II-3, n étant impair différent de 1. On peut alors remarquer que $2n$ est divisible par 2 et par un nombre premier impair, donc $2n$ n'est pas une puissance d'un nombre premier. Il en résulte que $\Phi_{2n}(1) = 1$. Ainsi
$$\begin{aligned}1 = \Phi_n(-1) &= \prod_{k\in E_1(n)} (-1-\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}})\\ &= (-1)^{\varphi(n)}\left(\prod_{k\in E_1(n)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)2^{\varphi(n)}\left(\prod_{k\in E_1(n)} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).\end{aligned}$$
Comme dans la question précédente, le produit des exponentielles complexes vaut $(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}$, donc
$$\boxed{\prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\wedge n=1}} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}}{2^{\varphi(n)}}}.$$