Lycée du Parc
Classe MPSI 833

# Test de contrôle
# Corrigés

## Question 1

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $A$ la matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ A_{i,j} = \begin{cases} 0, \text{ si } i < n \text{ ou } j < n \\ n-j, \text{ si } i = n \\ n-i, \text{ si } j = n \end{cases}.$$

Soit $a$ un nombre réel. On pose :

$$\Delta_n(a) = \det(A + a\ I_n).$$

1. Exprimer $\Delta_n(a)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(a)$, lorsque $n \geqslant 3$.
2. Montrer que :
$$\Delta_n(a) = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

1. On développe le déterminant $\Delta_n(a)$ par rapport à la première colonne, pour faire apparaître $\Delta_{n-1}(a)$.
   On obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
&= a \times \Delta_{n-1}(a) + (-1)^n \times (n-1) \times \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & a & 1 \end{vmatrix} \\
&= a \times \Delta_{n-1}(a) + (-1)^n \times (n-1) \times (-1)^{n-2} \times (n-1) \times a^{n-2} \\
&= a \times \Delta_{n-1}(a) - (n-1)^2 a^{n-2}.
\end{aligned}$$

l'avant dernière expression étant obtenue en développant par rapport à la première ligne.

2. Cette formule se montre maintenant par récurrence sur l'entier $n$.
   ▷ Si $n = 2$, alors :
$$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$
   ▷ Supposons la formule vraie au rang $n - 1$.
   On applique la question 1., ce qui donne :
$$\begin{aligned} \Delta_n(a) &= a\left(a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2\right) - a^{n-2}(n-1)^2 \\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2, \end{aligned}$$
   d'où la formule au rang suivant.

## Question 2

On pose la fonction :
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n + \varphi(n) \end{array} \right. .$$

1. Calculer $\psi(\mathbb{N})$. [indication : on pourra calculer $\varphi(k^2 - k)$ et $\varphi(k^2 - k + 1)$]
2. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\varphi(k)}$ et $\displaystyle\sum_k \frac{(-1)^k}{\varphi(k)}$.

1. La fonction $\varphi$ est croissante en tant que composée de fonctions croissantes. La fonction $\psi$ est donc strictement croissante car si $n \in \mathbb{N}$,
$$\psi(n+1) = n + 1 + \varphi(n+1) \geqslant n + 1 + \varphi(n) = 1 + \psi(n) > \psi(n).$$
   Après plusieurs essais pour calculer les images successives des premiers entiers, on commence à remarquer des choses, normalement... Les carrés parfaits strictement positifs semblent ne pas être des valeurs prises par la fonction $\psi$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$\varphi(k^2 - k) = \left\lfloor \sqrt{k^2 - k + \sqrt{k^2 - k}} \right\rfloor.$$
   Or, l'expression $A_k$ sous la grande racine carrée vérifie l'encadrement :
$$(k-1)^2 < A_k < k^2,$$
   donc $\varphi(k^2 - k) = (k - 1)$, puis $\psi(k^2 - k) = k^2 - 1$.
   De même,
$$\varphi(k^2 - k + 1) = \left\lfloor \sqrt{k^2 - k + 1 + \sqrt{k^2 - k + 1}} \right\rfloor.$$

L'expression $B_k$ sous la grande racine carrée vérifie l'encadrement :

$$k^2 < B_k < (k+1)^2,$$

donc $\varphi(k^2-k+1) = k$, puis $\psi(k^2-k+1) = k^2+1$.
Par conséquent, en posant l'ensemble :

$$I = [\![k^2-k+1, (k+1)^2-(k+1)]\!],$$

alors l'ensemble $I_k$ comporte exactement :

$$(k+1)^2-(k+1)-\left(k^2-k+1\right)+1 = 2k$$

éléments.
Comme la fonction $\psi$ est strictement croissante, alors :

$$\psi(I_k) \subset [\![\psi(k^2-k+1), \psi((k+1)^2-(k+1))]\!] = [\![k^2+1, (k+1)^2-1]\!] = J_k.$$

L'ensemble $J_k$ comporte exactement :

$$(k+1)^2-1-\left(k^2+1\right)+1 = 2k$$

éléments. L'inclusion $\psi(I_k) \subset J_k$ couplée avec l'égalité des cardinaux finis fournit :

$$\psi(I_k) = J_k.$$

Les ensembles $I_k$, lorsque $k$ varie dans $\mathbb{N}^*$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbb{N}^*) &= \psi\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} I_k\right) \\
&= \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} \psi\left(I_k\right) \quad \text{, car } \psi \text{ injective} \\
&= \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} J_k \\
&= \mathbb{N}^* \setminus \left\{k^2\ ;\ k\in\mathbb{N}^*\right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble $\psi(\mathbb{N})$ est l'ensemble de tous les entiers naturels, sauf les carrés parfaits strictement positifs.

2. La deuxième série est convergente car on peut directement appliquer le CSSA.
La première série à est termes positifs. De plus,

$$\frac{1}{\varphi(k)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k}}} \sim \frac{1}{k^{1/2}},$$

de série divergente vers $+\infty$. Comme tout est positif, la série $\sum_k \frac{1}{\varphi(k)}$ est donc entraînée vers $+\infty$ : elle diverge vers $+\infty$.

## Question 3

On pose la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{e^{\cos t}}{t+\sin t}\, dt \end{array} \right. .$$

1. Montrer que la fonction $f$ admet une limite finie en $0^+$ et la calculer.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que la courbe $y = f(x)$ n'admet pas d'asymptote au voisinage $+\infty$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n} \frac{1}{f(n)}$.
5. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Lorsque $x > 0$, au voisinage de $0^+$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{e(1+\circ(t))}{2t(1+\circ(t))}\, dt \\ &= \int_{\ln(1+x)}^{x} \left(\frac{e}{2t} + \circ(1)\right)\, dt \\ &= \frac{e}{2}\Big[\ln t\Big]_{\ln(1+x)}^{x} + \circ(x - \ln(1+x)) \\ &= \frac{e}{2}\ln\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right) + \circ(x^2) \\ &= \frac{e}{2}\ln\left(\frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)}\right) + \circ(x^2) \\ &= \frac{e}{2}\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \circ(x)\right) + \circ(x^2) \\ &= \frac{e}{4}\, x + \circ(x) \end{aligned}$$

   On obtient que $f(x)$ tend vers 0, lorsque $x$ tend vers $0^+$. On a poussé les calculs un peu trop loin pour cette première question, mais cela servira pour la question 5.

2. On sait que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) < x$. On minore l'intégrande dans l'intégrale de $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant \int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{e^{-1}}{t+1}\, dt \\ &= e^{-1}\Big[\ln(1+t)\Big]_{\ln(1+x)}^{x} \\ &= e^{-1}\Big(\ln(1+x) - \ln(1+\ln(1+x))\Big). \end{aligned}$$

Par les croissances comparées, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \Big(\ln(1+x) - \ln(1+\ln(1+x))\Big) = +\infty$, entraînant ce qu'il faut pour la fonction $f$ au voisinage de $+\infty$.

3. Lorsque $x$ est au voisinage de $+\infty$, alors :

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x} \int_2^x \frac{e}{t-1}\, dt = \frac{e\ \ln(x-1)}{x},$$

de limite nulle.

La courbe $y = f(x)$ admet une direction asymptotique de pente nulle au voisinage de $+\infty$. Comme la quantité $f(x) - 0 \times x = f(x)$ n'a pas de limite finie, la courbe $y = f(x)$ n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

4. La série est à termes positifs. On va majorer l'intégrande. Si $n$ est au voisinage de $+\infty$, alors :

$$\begin{aligned} f(n) &\leqslant \int_{\ln(1+n)}^n \frac{e}{t-1}\, dt \\ &\leqslant \int_2^n \frac{e}{t-1}\, dt \\ &\leqslant e\ \ln(n-1). \end{aligned}$$

On en déduit pour $n$ assez grand :

$$\frac{1}{f(n)} \geqslant \frac{1}{e}\ \frac{1}{\ln(n-1)} \geqslant \frac{1}{n},$$

de série divergente vers $+\infty$, entraînant la divergence vers $+\infty$ de la série proposée.

5. En utilisant le calcul de la première question, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{4n},$$

de série divergente et tout est positif. La série proposée est encore divergente.

## Question 4

On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^4$.
On pose :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| \left[ \begin{array}{l} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1,1), (1,0,0,0)\Big).$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer la matrice $S$ représentant la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$, par rapport à la base canonique.
3. Calculer $\det(S)$ de deux manières différentes, l'une numériquement à l'aide de la question précédente, l'autre sans calculs numériques sur les coefficients.

4. Déterminer l'expression de la matrice de projection $P$ sur $G$ parallèlement à $F$.
5. Déterminer la dimension de l'espace composé des matrices $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec $S$.
6. Montrer que l'équation :
$$\mathrm{Com}(M) = S,$$
d'inconnue $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ admet exactement une seule solution.
7. Montrer que l'équation :
$$\mathrm{Com}(M) = P,$$
d'inconnue $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ n'admet aucune solution. [indication : on pourra utiliser le rang dans cette équation.]

1. Le plus simple est de déterminer une base de $F$. En résolvant le système de deux équations à quatre inconnues, on obtient :
$$F = \mathrm{Vect}\left((-1,1,1,0), \left(-\frac{1}{2},1,0,1\right)\right).$$
On ne prend dans la suite que des vecteurs à coefficients entiers.
On pose les vecteurs :
$$\varepsilon_1 = (-1,1,1,0),\ \varepsilon_2 = (-1,2,0,2),\ \varepsilon_3 = (1,1,1,1) \text{ et } \varepsilon_4 = (1,0,0,0).$$
On sait que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $F$ et $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $G$.
Il suffit de montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est libre ou que $F \cap G = \{0\}$ pour terminer la question.
On montre par exemple la liberté de la famille grâce à un déterminant.
$$\varepsilon_1 = (-1,1,1,0),\ \varepsilon_2 = (-1,2,0,2),\ \varepsilon_3 = (1,1,1,1) \text{ et } \varepsilon_4 = (1,0,0,0).$$
Le calcul montre que :
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
La famille est libre donc est une base de $\mathbb{R}^4$ et immédiatement,
$$F \oplus G = \mathbb{R}^4.$$
2. Le plus simple est d'effectuer un changement de base.
En notant $\tilde{P}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, alors :
$$\tilde{P}^{-1} S \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

Or, $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul de l'inverse $\tilde{P}^{-1}$ peut se faire en résolvant le système $\tilde{P}X = Y$, ce qui donne :

$$\tilde{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par le produit matriciel que :

$$S = \tilde{P}D\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On peut calculer $\det(S)$ en commençant par développer par rapport à la première colonne. On trouve :

$$\det(S) = 1.$$

Il y a plus simple.
Les matrices $S$ et $D$ sont semblables, donc ont même déterminant :

$$\det(S) = \det(D) = 1.$$

4. Si $Q$ est la matrice de projection sur $F$ parallèlement à $G$, on sait que :

$$S = 2Q - I_4.$$

De plus,

$$P = I_4 - Q.$$

Conclusion,

$$P = \frac{I_4 - S}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Comme d'habitude, en rappelant que $S = \tilde{P}D\tilde{P}^{-1}$ et que l'application $\varphi : M \longmapsto \tilde{P}^{-1}M\tilde{P}$ est un isomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} MS = SM \quad &\Longleftrightarrow \quad M\tilde{P}D\tilde{P}^{-1} = \tilde{P}D\tilde{P}^{-1}M \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(M)D = D\varphi(M). \end{aligned}$$

En notant $\mathscr{C}(A)$ le commutant de $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, alors :

$$\varphi(\mathscr{C}(S)) = \mathscr{C}(D).$$

Les commutants $\mathscr{C}(S)$ et $\mathscr{C}(D)$ ont la même dimension. On calcule le commutant de la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$, en adoptant une disposition par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix},$$

avec quatre blocs de formats $2 \times 2$.
On observe que :

$$MD = \begin{pmatrix} M_1 & -M_2 \\ M_3 & -M_4 \end{pmatrix} \text{ et } DM = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_3 & -M_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice $M$ appartient à $\mathscr{C}(D)$ si et seulement si

$$M_2 = M_3 = 0.$$

On voit alors que :

$$\dim(\mathscr{C}(S)) = \dim(\mathscr{C}(D)) = 8.$$

6. Soit $M$ une solution éventuelle à cette équation. Alors,

$$M\ (\mathrm{Com}(M))^T = \det(M)\ I_4.$$

On en déduit que $M\ S^T = \det(M)\ I_4$. En prenant le déterminant, on obtient :

$$\det(M) = \det(M)^4,$$

car $\det(S^T) = 1$. Nécessairement, $\det(M) = 0$ ou $\det(M) = 1$.
Si $\det(M) = 0$, alors $M\ S^T = 0$, donc $M = 0$, car $S^T$ est inversible. Cependant, $\mathrm{Com}(M) = 0 \neq S$.
Si $\det(M) = 1$, alors $M = (S^T)^{-1} = (S^{-1})^T = S^T$, car $S^2 = I_4$ en tant que symétrie.
Réciproquement, si $M = S^T$, alors :

$$M^T \cdot \mathrm{Com}(M) = \det(M)\ I_4 = I_4,$$

donc $S \cdot \mathrm{Com}(M) = I_4$ et en multipliant à gauche par $S$, alors $\mathrm{Com}(M) = S$.
En définitive, cette équation n'admet qu'une seule solution, la matrice $M = S^T$.

7. Soit $M$ une solution éventuelle à cette équation. On en déduit :

$$\mathrm{Rg}(\mathrm{Com}(M)) = \mathrm{Rg}(P) = \dim(G) = 2.$$

D'autre part,

$$M \cdot (\mathrm{Com}(M))^T = (\mathrm{Com}(M))^T \cdot M = \det(M)\ I_4.$$

La matrice $\mathrm{Com}(M)$ n'est pas inversible, ce qui implique en prenant le déterminant que le déterminant de la matrice $\det(M)\ I_4$ est nul, imposant à $\det(M)$ d'être nul.
On en déduit :

$$M \cdot P^T = P^T \cdot M = 0.$$

L'égalité $P^T \cdot M = 0$ implique l'inclusion :

$$\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(P^T).$$

Or, $\mathrm{Rg}(P^T) = \mathrm{Rg}(P) = 2$ et par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(P^T)) = 2$, puis $\mathrm{Rg}(M) \leqslant 2$.

On en déduit que n'importe quelle sous-matrice de $M$ de format $3 \times 3$ sera assurément non inversible : tous les cofacteurs de la matrice $M$ sont donc nuls et la comatrice $\mathrm{Com}(M)$ est la matrice nulle, contredisant le fait que $\mathrm{Com}(M) = P$.

Cette équation n'a donc aucune solution.