

# DÉRIVATION

## Exercice 1. Théorème de division

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ , on pose

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

L'objet de ce problème est de démontrer que  $\tau$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ . C'est le *théorème de division* des fonctions  $\mathcal{C}^n$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ , on pose

$$\widehat{\tau}(x) = \widehat{f}(x)u(x)$$

où

$$\widehat{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{1}{x-a}.$$

- Justifier que  $\widehat{\tau}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ . Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ , l'existence de  $c_{0,x}, \dots, c_{k,x} \in ]x, a[$  tels que

$$\widehat{\tau}^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} k!}{j!(n-j+1)!} f^{(n+1)}(c_{j,x})$$

- Démontrer que  $\widehat{\tau}$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $\widehat{\tau}^{(k)}(a)$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .
- En déduire que  $\tau$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\tau^{(k)}(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .
- Application : Démontrer que le sinus cardinal (c'est-à-dire la fonction  $x \mapsto (\sin x)/x$  prolongée par continuité en 0) est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Récréation mathématique

Remplir les tableaux suivants

Tableau A :
Dans le tableau B, il y a
... fois le chiffre 0
... fois le chiffre 1
... fois le chiffre 2
... fois le chiffre 3
... fois le chiffre 4
... fois le chiffre 5
... fois le chiffre 6
... fois le chiffre 7
... fois le chiffre 8
... fois le chiffre 9

Tableau B :
Dans le tableau A, il y a
... fois le chiffre 0
... fois le chiffre 1
... fois le chiffre 2
... fois le chiffre 3
... fois le chiffre 4
... fois le chiffre 5
... fois le chiffre 6
... fois le chiffre 7
... fois le chiffre 8
... fois le chiffre 9