

ESPACES VECTORIELS

Les énoncés et parties suivis du symbole [X] ne seront pas traités en cours.

A. La structure d'espace vectoriel	3
A. 1. Définition	3
A. 2. Règles de calcul	4
A. 3. Exemples fondamentaux	5
a) Espaces vectoriels géométriques	5
b) Espaces vectoriels de nombres	6
c) Espaces vectoriels produits, structure vectorielle de K^n	7
d) Espaces vectoriels fonctionnels, structure vectorielle de K^X et $K^{\mathbb{N}}$	8
e) Espaces vectoriels de polynômes et de fractions rationnelles	9
f) Espaces vectoriels de matrices	10
A. 4. Algèbres	11
B. Sous-espaces vectoriels	12
B. 1. Combinaisons linéaires	12
B. 2. Sous-espaces vectoriels	14
B. 3. Intersection de sous-espaces vectoriels	17
B. 4. Sous-espaces vectoriels engendrés	18
B. 5. Sous-algèbres	21
C. Familles de vecteurs	22
C. 1. Familles génératrices	22
C. 2. Familles libres ou liées	24
C. 3. Bases	27
D. Sommes de sous-espaces vectoriels	30
D. 1. Sommes simples, sommes directes et sous-espaces supplémentaires	30
a) Somme simple	30
b) Sommes directes	32
c) Couples de sous-espaces supplémentaires	34
D. 2. Familles et sommes	36
a) Famille génératrice d'une somme	36
b) Bases d'une somme directe	37
E. Sous-espaces affines	38
E. 1. Structure affine d'un espace vectoriel	38
E. 2. Sous-espaces affines	39
E. 3. Translations	40
E. 4. Parallélisme	41
E. 5. Intersection de sous-espaces affines	42
E. 6. Parties convexes	43



Prérequis

Revoir les chapitre sur :

- les matrices ;
- et un peu tout le reste !

Dans tout ce chapitre, les lettres n, m, p, q, r, ℓ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Dans tout ce chapitre, la lettre K désigne un corps commutatif quelconque.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. La structure d'espace vectoriel

A.1. Définition

Définition 1

On appelle **espace vectoriel** sur K (en abrégé K -espace vectoriel ou encore K -ev) un ensemble E muni de deux lois :

- une loi interne d'addition, notée $+$, qui confère à $(E, +)$ une structure de groupe abélien, c'est-à-dire (rappel) :

- (i) $\forall x, y \in E, \quad x + y \in E;$
- (ii) $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x;$
- (iii) $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z);$
- (iv) il existe un élément noté 0_E , appelé **vecteur nul**, tel que $\forall x \in E, \quad x + 0_E = x;$
- (v) tout $x \in E$ possède un **opposé** dans E , noté $-x$, tel que $x + (-x) = 0_E.$

- une loi de multiplication externe, notée multiplicativement (c'est-à-dire avec le symbole \cdot ou encore sans symbole particulier), où les nombres de K agissent sur ceux de E par « dilatation », de sorte que :

- (j) $\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in E, \quad \lambda x \in E;$
- (jj) $\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$
- (jjj) $\forall \lambda \in K, \quad \forall x, y \in E, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
- (jw) $\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall x \in E, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
- (w) $\forall x \in E, \quad 1_K x = x.$

On appelle **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** ceux de K . Enfin, K est le **corps de base** de l'espace vectoriel E .

Les propriétés (i) et (j) signifient que les lois $+$ et \cdot sont internes. Les axiomes (iii) et (jw) sont des propriétés d'associativité. L'axiome (ii) énonce la commutativité de l'addition. L'association de (jj) et (jjj) exprime la distributivité de \cdot sur $+$. La propriété (v) donne l'existence d'un symétrique pour tout vecteur. Enfin, (iv) signifie que 0_E est un élément neutre pour $+$ et (w) dit que 1_K est un élément neutre pour \cdot .

L'addition d'un opposé se note à l'aide d'une notation soustractive, c'est-à-dire que $x + (-y)$ est noté $x - y$.

On aura noté que, dans le cadre général des espaces vectoriels, les vecteurs ne sont pas surmontés d'une flèche. Il convient donc de toujours faire attention à ne pas confondre les vecteurs (généralement désignés par des lettres latines minuscules : x, y, z, u, v, w, \dots) et les scalaires (notés usuellement par des lettres grecques).

Si L est un sur-corps de K , alors tout L -espace vectoriel est aussi un K -espace vectoriel. En particulier, tout \mathbb{C} -espace vectoriel est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. Cependant, du point de vue de la structure vectorielle, l'espace E muni du corps de base \mathbb{C} et l'espace E muni de corps de base \mathbb{R} doivent être considérés comme différents.

Le mot « vecteur » n'a pas été choisi par hasard. L'intérêt de la notion d'espace vectoriel est précisément de pouvoir s'appuyer sur des intuitions géométriques pour étudier des notions abstraites.

A.2. Règles de calcul

La proposition ci-dessous rassemble les règles opératoires sur l'addition et la multiplication externe dans un espace vectoriel.

Proposition 1

Soient E un K -espace vectoriel, $x, y, z \in E$ trois vecteurs et $\lambda, \mu \in K$ deux scalaires.

- (i) L'addition possède un unique élément neutre. Autrement dit, il n'y a qu'un seul vecteur nul dans E .
- (ii) Tout vecteur de E possède un unique opposé. Par conséquent, $-(-x) = x$.
- (iii) L'addition d'un vecteur est une opération réversible, c'est-à-dire que l'on peut faire des simplifications additives :

$$(x + z = y + z) \implies (x = y).$$

- (iv) On a la propriété d'« intégrité » suivante :

$$(\lambda x = 0_E) \iff (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E).$$

- (v) On a

$$(-1_K)x = -x$$

ce qui fournit les règles de « distributivité » vis-à-vis de la soustraction :

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x \quad \text{et} \quad \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y.$$

- (vi) Multiplicativement, on peut effectuer les simplifications suivantes :

$$(\lambda x = \lambda y \text{ et } \lambda \neq 0_K) \implies (x = y) \quad \text{et} \quad (\lambda x = \mu x \text{ et } x \neq 0_E) \implies (\lambda = \mu).$$

■ (i), (ii) et (iii) sont des propriétés du groupe additif $(E, +)$.

- (iv) Supposons que $\lambda = 0_K$ ou $x = 0_E$.

Si $\lambda = 0_K$, on a $0_K x = (0_K + 0_K)x = 0_K x + 0_K x$, d'où $0_K x = 0_E$ après simplification par $0_K x$.

Si $x = 0_E$, on a $\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$, d'où $\lambda 0_E = 0_E$ après simplification par $\lambda 0_E$.

Supposons réciproquement que $\lambda x = 0_E$.

Si $\lambda = 0_K$, c'est terminé. Sinon, en multipliant l'égalité $\lambda x = 0_E$ par λ^{-1} , on obtient $\lambda^{-1} \lambda x = \lambda^{-1} 0_E$, c'est-à-dire $1_K x = 0_E$ ou encore $x = 0_E$.

- (v) On a $x + (-1_K)x = 1_K x + (-1_K)x = (1_K + (-1_K))x = 0_K x = 0_E$, ce qui prouve que $(-1_K)x$ est l'opposé de x , c'est-à-dire $(-1_K)x = -x$.

Dès lors, on a $(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + (-1_K \mu)x = \lambda x + (-1_K)(\mu x) = \lambda x + (-(\mu x)) = \lambda x - \mu x$ et $\lambda(x - y) = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + \lambda(-1_K)y = \lambda x + (-1_K)(\lambda y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y$.

- (vi) Supposons que $\lambda x = \lambda y$ et $\lambda \neq 0_K$. En multipliant par λ^{-1} , il vient immédiatement $x = y$.

Supposons que $\lambda x = \mu x$ et $x \neq 0_E$. En additionnant l'opposé de μx aux deux membres et en utilisant les résultats de (v), on obtient $(\lambda - \mu)x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$, la propriété (v) nous dit que $\lambda - \mu = 0_K$, c'est-à-dire $\lambda = \mu$. ■

On retiendra simplement que toutes les règles calculatoires sur les vecteurs que nous connaissons en géométrie restent valables dans un espace vectoriel quelconque.

A.3. Exemples fondamentaux

Tout au long de l'année, nous avons rencontré, sans le dire, des espaces vectoriels. L'objectif de ce paragraphe est d'en faire la liste, en se limitant aux cas des espaces les plus fondamentaux.

Ces espaces vectoriels de référence sont à connaître parfaitement. Leur structure vectorielle est naturelle et l'on ne vous demandera jamais de redémontrer que ce sont bien des espaces vectoriels (ce serait d'ailleurs fastidieux).

a) Espaces vectoriels géométriques

Exemple fondamental

En géométrie usuelle, les vecteurs du plan forment un espace vectoriel sur \mathbb{R} . De même, les vecteurs de l'espace forment un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

■ Il n'y a rien à démontrer puisque, précisément, la définition d'un espace vectoriel est calquée sur les propriétés des vecteurs géométriques. ■

En fait, les vecteurs de la géométrie servent de modèle à la structure d'espace vectoriel. On se servira donc souvent de vecteurs géométriques pour représenter un espace vectoriel quelconque.

b) *Espaces vectoriels de nombres*

Exemple fondamental

K est un K -espace vectoriel.

Plus généralement, si L est un sur-corps de K alors L est un K -espace vectoriel.

■ Il suffit d'interpréter la multiplication (dans L) entre un élément λ de K et un élément x de L comme la multiplication externe du vecteur x par le scalaire λ . ■

Dans la situation du K -espace vectoriel K , les vecteurs et les scalaires appartiennent au même ensemble. Pourtant, pour la structure vectorielle, il ne faut pas les confondre. Les vecteurs sont, en sorte, des 1-uplets (géométriquement, vous pouvez penser à des vecteurs sur une droite, repérés par leur unique coordonnée) et les scalaires sont les coefficients qui permettent de dilater les vecteurs.

Exemples :

- \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel.

\mathbb{R} est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. Mais attention, il ne faut pas confondre cette structure avec la précédente. Nous verrons que \mathbb{R} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel peut se visualiser comme une droite alors que \mathbb{R} vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel est nettement plus compliqué puisqu'il n'est pas de dimension finie.

- \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

\mathbb{C} est aussi un \mathbb{C} -espace vectoriel. Là aussi, nous verrons qu'il ne faut pas confondre cette structure avec la précédente : \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel est un plan alors que \mathbb{C} vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel est une droite.

- \mathbb{R} n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel. En effet, le produit d'un vecteur réel par un scalaire complexe n'est pas nécessairement un vecteur réel.
- Si p est un nombre premier, \mathbb{F}_p est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel. Il existe donc des espaces vectoriels finis !
- Si K est un corps de caractéristique p (avec p premier), on a vu que son plus petit sous-corps pouvait être identifié à \mathbb{F}_p . Dès lors, K peut-être muni d'une structure de \mathbb{F}_p -espace vectoriel.

En particulier, si K est un corps fini de caractéristique p et de cardinal q , alors K est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel. Nous verrons (un peu plus loin dans ce cours) que cela impose à q d'être une puissance de p .

c) *Espaces vectoriels produits, structure vectorielle de K^n*

À partir d'espaces vectoriels connus, il est possible de construire un [espace vectoriel produit](#).

Proposition 2

Soient E_1, E_2, \dots, E_n des K -espaces vectoriels. Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est muni d'une structure de K -espace vectoriel grâce aux deux lois produits définies « terme à terme » par

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{cases}$$

Le vecteur nul de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est $(0_{E_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_n})$.

En particulier, si E est un K -espace vectoriel, alors E^n est un K -espace vectoriel.

■ AQT

Ce résultat fournit un troisième exemple fondamental d'espace vectoriel.

Exemple fondamental

K^n est un K -espace vectoriel.

Exemples :

- \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathbb{C}^n est un \mathbb{C} -espace vectoriel.
 - Si L est un sur-corps de K alors L^n est un K -espace vectoriel.
- Ainsi, \mathbb{C}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel (mais \mathbb{R}^n n'est évidemment pas un \mathbb{C} -espace vectoriel).

d) Espaces vectoriels fonctionnels, structure vectorielle de K^X et $K^{\mathbb{N}}$

À partir d'un espace vectoriel connu, on peut construire des espaces vectoriels fonctionnels.

Proposition 3

Soient E un K -espace vectoriel et X un ensemble quelconque. L'ensemble E^X des applications de X vers E est muni d'une structure de K -espace vectoriel grâce aux lois fonctionnelles définies par

$$f + g \left\{ \begin{array}{ll} X & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} E \\ f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda f \left\{ \begin{array}{ll} X & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} E \\ \lambda f(x) \end{array}$$

Le vecteur nul de E^X est la fonction nulle, notée $\tilde{0}$, définie par

$$\tilde{0} \left\{ \begin{array}{ll} X & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} E \\ 0_E \end{array}$$

■ AQT

Ce résultat fournit des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels.

Exemple fondamental

Soit X un ensemble quelconque. L'ensemble K^X des applications de X vers K est un K -espace vectoriel. Son vecteur nul est l'application nulle $\tilde{0}$ de X vers K .

En particulier, l'ensemble $K^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans K est un K -espace vectoriel. Son vecteur nul est la suite nulle.

Exemples :

- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- On retrouve le fait que $K^n = K^{[1;n]}$ est un K -espace vectoriel.
- L'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Son vecteur nul est la variable aléatoire certaine égale à 0.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes peut être muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel comme de \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble \mathbb{R}_+^X des fonctions de X vers \mathbb{R}_+ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel (car l'opposée d'une fonction positive non nulle n'est pas positive).

e) Espaces vectoriels de polynômes et de fractions rationnelles

Dans les chapitres consacrés aux polynômes et aux fractions rationnelles, nous avons muni $K[X]$ et $K(X)$ d'une addition et d'une multiplication externe par les éléments de K .

Exemple fondamental

L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K est un K -espace vectoriel. Son vecteur nul est le polynôme nul.

L'ensemble $K(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K est un K -espace vectoriel. Son vecteur nul est la fraction rationnelle nulle.

■ Tout a été démontré dans les chapitres sur les polynômes et les fractions rationnelles. ■

Exemples :

- L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} peut être muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel comme de \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{C} peut être muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel comme de \mathbb{R} -espace vectoriel.

ℓ) *Espaces vectoriels de matrices*

Les matrices sont un autre exemple de contexte où nous avons rencontré une addition et une multiplication externe.

Exemple fondamental

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ des matrices $n \times m$ à coefficients dans K est un K -espace vectoriel. Son vecteur nul est la matrice nulle $0_{n,m}$.

■ Tout a été démontré dans le chapitre sur les matrices. ■

Exemples :

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ peut être muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel comme de \mathbb{R} -espace vectoriel.

1 h 15

a.4. Algèbres

Définition 2

On appelle K -algèbre tout ensemble A muni d'une addition interne $+$, d'une multiplication externe $\cdot : K \times A \longrightarrow A$ et d'une multiplication interne \times telles que :

- (i) $(A, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel ;
- (ii) $(A, +, \times)$ est un anneau ;
- (iii) $\forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in K, \quad \lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$.

Cette K -algèbre est dite **commutative** lorsque \times est commutative.

Exemples :

- Algèbres de nombres
 - * K est une K -algèbre commutative.
 - * Plus généralement, si L est un sur-corps de K , alors L est une K -algèbre (commutative si L l'est).
- Ainsi, \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des \mathbb{R} -algèbres commutatives et le corps des quaternions \mathbb{H} est une \mathbb{R} -algèbre non commutative.

- Algèbres fonctionnelles
 - * Soit X un ensemble quelconque non vide et A une K -algèbre. L'ensemble A^X des applications de X dans A est une K -algèbre en prenant pour troisième loi la multiplication des fonctions définies par $(f, g) \longmapsto fg$ où

$$fg \begin{cases} X & \longrightarrow & A, \\ x & \longmapsto & f(x)g(x). \end{cases}$$

Elle est commutative dès que A l'est. Son unité est l'application constante égale à 1.

- * En particulier, si $A = K$, on obtient sur K^X une structure de K -algèbre commutative.
- Algèbres des polynômes et des fractions rationnelles
 - * $(K[X], +, \times, \cdot)$ est une K -algèbre commutative.
 - * $(K(X), +, \times, \cdot)$ est une K -algèbre commutative.
- Algèbres des matrices
 - * $\mathcal{M}_n(K)$ est une K -algèbre.

B. Sous-espaces vectoriels

B.1. Combinaisons linéaires

La coexistence, dans un espace vectoriel, de l'addition et de la multiplication externe, permet de pondérer les termes d'une somme de vecteurs par des coefficients (scalaires).

On envisage d'abord le cas d'un nombre fini de vecteurs.

Définition 3

Soient E un K -espace vectoriel et (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E . On dit que $x \in E$ est une **combinaison linéaire** de x_1, x_2, \dots, x_p lorsqu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p.$$

On dit alors que cette écriture est une **décomposition linéaire** de x sur (x_1, x_2, \dots, x_p) .

À la question « que peut-on faire avec plusieurs vecteurs ? », vous devez répondre : « effectuer des combinaisons linéaires ! ». C'est en effet l'opération fondamentale dans un espace vectoriel.

Notons qu'un vecteur peut admettre plusieurs décompositions sur une même famille. Ainsi, dans \mathbb{R}^2 , $(4, 1)$ se décompose de plusieurs manières sur la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ puisque, par exemple, $(4, 1) = 4(1, 0) + (0, 1) + 0(1, 1)$ mais aussi $(4, 1) = 2(1, 0) - (0, 1) + 2(1, 1)$. Lorsque deux combinaisons linéaires sont égales, il n'est donc pas possible a priori d'identifier les coefficients.

Exemples :

- L'addition de deux vecteurs ou la multiplication d'un vecteur par un scalaire sont des cas particulier de combinaisons linéaires.
- Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , tout nombre complexe est combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et i .
- Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto \cos(\omega t)$ et $t \mapsto \sin(\omega t)$.
- Le terme général des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, s'écrit $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cela signifie que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une combinaison linéaire des suites géométriques $(2^n)_{n \geq 0}$ et $(3^n)_{n \geq 0}$.

La notion de combinaison linéaire permet de définir la colinéarité et la coplanéarité (qui sont analogues aux notions géométriques habituelles, comme nous le verrons).

Définition 4

Soit E un K -espace vectoriel.

Deux vecteurs x et y de E sont dits **colinéaires** lorsque l'un des deux est nul ou lorsqu'il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda y$.

Trois vecteurs x, y et z de E sont dits **coplanaires** lorsque deux des trois sont colinéaires ou lorsqu'il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $x = \lambda y + \mu z$.

Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est une combinaison linéaire de l'autre et trois vecteurs sont coplanaires lorsque l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Exemples :

- Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont toutes coplanaires.

Dans certaines situations, on effectue des combinaisons linéaires de vecteurs appartenant à une famille infinie. Pour cela, on introduit ci-dessous la notion de famille presque nulle.

Définition 5

Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K est dite **presque nulle** (ou **à support fini**) lorsque seul un nombre fini de ses éléments est non nul.

Le sous-ensemble de K^I constitué des familles $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulles est noté $K^{(I)}$. On a donc $K^{(I)} = \{(\lambda_i)_{i \in I} \in K^I : \text{card}\{i \in I : \lambda_i \neq 0\} < +\infty\}$.

Évidemment, lorsque I est fini, la mention « presque nulle » est inutile.

On peut alors étendre la notion de combinaison linéaire au cas d'une famille quelconque (c'est-à-dire éventuellement infinie) de vecteurs.

Définition 6

Soient E un K -espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E (où I est un ensemble quelconque d'indices). On dit qu'un vecteur x de E est une **combinaison linéaire** de $(x_i)_{i \in I}$ lorsqu'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i) \in K^{(I)}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

On dit alors que cette écriture est une **décomposition linéaire** de x sur $(x_i)_{i \in I}$.

On peut dorénavant parler de combinaison linéaire d'un nombre infini de vecteurs. Cependant, il faut bien noter qu'une telle combinaison reste une somme finie. Bref, pour calculer une combinaison linéaire, on peut piocher dans un ensemble infini... mais seulement un nombre fini de vecteurs !

Exemples :

- Dans $K[X]$, tout polynôme est une combinaison linéaire de la famille des monômes $(X^i)_{i \geq 0}$.

B.2. Sous-espaces vectoriels

L'objectif de ce cours est d'étudier les objets « géométriques » que l'on peut fabriquer en combinant linéairement des vecteurs.

Définition 7

Soit E un K -espace vectoriel. On dit d'un ensemble F qu'il est un **sous-espace vectoriel** de E (en abrégé sev) lorsque

- (i) $F \subset E$;
- (ii) $0_E \in F$;
- (iii) $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Autrement dit, une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, elle est non vide et stable par combinaison linéaire.

En particulier, on notera (même si c'est une évidence) qu'un sous-espace vectoriel de E doit, avant tout, être contenu dans E !

De plus, un sous-espace vectoriel de E contient toujours 0_E . Ainsi, lorsqu'on représente géométriquement un sous-espace, celui-ci passe toujours par l'origine.

Avant de travailler sur des sous-espaces vectoriels (par intersection, addition, etc.), il convient de vérifier qu'ils sont bien sous-espaces d'un même « gros » espace. Celui-ci est parfois appelé « espace ambiant » pour signifier qu'il est le milieu (au sens biologique) dans lequel on travaille.

Exemples :

- Dans tout espace vectoriel E , les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , appelés **sous-espaces triviaux** de E .

Définition 8

Soient E un K -espace vectoriel et $a \in E$ un vecteur non nul.

Si a est un vecteur non nul de E , l'ensemble $D = \{\lambda a : \lambda \in K\}$, noté aussi Ka , est un sous-espace vectoriel de E , appelé **droite vectorielle de E dirigée par a** .

Si a et b désignent deux vecteurs non colinéaires de E , l'ensemble $P = \{\lambda a + \mu b : \lambda, \mu \in K\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **plan vectoriel de E porté par a et b** .

■ AQT ■

Avec ces définitions, on constate que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, ils appartiennent à une même droite vectorielle et que trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, ils appartiennent à un même plan vectoriel.

Exemples :

- Dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel, l'ensemble des réels (respectivement des imaginaires purs) est la droite vectorielle dirigée par 1 (respectivement par i).
- L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + b(t)y = 0$ est la droite vectorielle $\{t \mapsto \lambda e^{-B(t)} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dirigée par le vecteur $t \mapsto e^{-B(t)}$ où B désigne une primitive de la fonction b .
- Lorsque $b^2 - 4ac > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre $ay'' + by' + cy = 0$ est le plan vectoriel $\{t \mapsto \lambda e^{-r_1 t} + \mu e^{-r_2 t} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ porté par les vecteurs $t \mapsto e^{-r_1 t}$ et $t \mapsto e^{-r_2 t}$ où r_1 et r_2 désignent les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

L'énoncé suivant justifie l'appellation « sous-espace vectoriel ».

Proposition 4

Soit E un K -espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est un espace vectoriel sur K .

■ La définition de sous-espace vectoriel assure que les axiomes (i), (iv) et (j) sont satisfaits. Les autres axiomes sont hérités de la structure vectorielle de E . ■

Comment démontrer que l'on a un espace vectoriel ?

Dans la pratique, pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on se contente souvent de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

On peut ainsi allonger notre liste d'exemples d'espaces vectoriels.

Exemple fondamental

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$. Les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ solutions du système homogène

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

forment un sous-espace vectoriel de K^n dont le système est une [représentation cartésienne](#).

■ Le système est équivalent à l'égalité matricielle $AX = 0_{p,1}$. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ à K^n , l'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) : AX = 0_{p,1}\}$. On a $0_{n,1} \in \mathcal{S}$ car $A0_{n,1} = 0_{p,1}$ et, si $X, Y \in \mathcal{S}$ et $\lambda, \mu \in K$, alors $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda 0_{p,1} + \mu 0_{p,1} = 0_{p,1}$, donc $\lambda X + \mu Y \in \mathcal{S}$. ■

Exemples :

- Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ non tous nuls. Le sous-ensemble de K^n des n -uplets (x_1, \dots, x_n) qui vérifie l'équation cartésienne $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de K^n . On dit que c'est un [hyperplan](#) de K^n .

Pour se ramener à l'exemple fondamental ci-dessus, on prend $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$.

On peut aussi faire la démonstration à la main. Le vecteur nul appartient clairement à H car $a_1 0 + a_2 0 + \dots + a_n 0 = 0$. Par ailleurs, si $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ sont dans H , on a $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ et $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0$, donc, pour $\lambda, \mu \in K$, on a $a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + a_n(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + \mu(a_1y_1 + \dots + a_ny_n) = 0$, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in H$. En conclusion, H est un bien un sous-espace de K^n .

Ci-dessous, on donne des exemples de sous-espaces de suites.

Exemples :

- Les suites réelles convergentes forment un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet, la suite nulle est convergente et une combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente.
- Les suites complexes bornées forment un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En effet, la suite nulle est bornée et une combinaison linéaire de suites bornées est bornée (par inégalité triangulaire).
- L'ensemble $K^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles (c'est-à-dire $K[X]$) est un sous-espace de $K^{\mathbb{N}}$.

On peut aussi travailler avec des sous-espaces de fonctions régulières.

Exemple fondamental

Ici, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(X, \mathbb{K})$ des fonctions de classe \mathcal{C}^k définies sur un ensemble X et à valeurs dans \mathbb{K} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^X .

■ Cela découle du fait qu'une combinaison linéaire de fonctions de classe \mathcal{C}^k est de classe \mathcal{C}^k . ■

On obtient ainsi une famille de sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^X emboîtés les uns dans les autres : $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{K}) \subset \dots \subset \mathcal{C}^k(X, \mathbb{K}) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(X, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^X$.

Les exemples ci-dessous donnent d'autres exemples de sous-espaces fonctionnels.

Exemples :

- Soit X une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0. L'ensemble $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$) des fonctions paires sur X (respectivement impaires sur X) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^X .

En effet, d'une part la fonction nulle est paire et impaire et, d'autre part, toute combinaison linéaire de fonctions paires (respectivement impaires) est paire (respectivement impaire).

- Démontrons que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

La fonction nulle $\tilde{0}$ vérifie $\tilde{0}(0) = 0$ donc $\tilde{0} \in F$. De plus, si $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$, donc $\lambda f + \mu g \in F$. Ainsi, F est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On poursuit avec des sous-espaces fondamentaux de l'espace des polynômes.

Exemple fondamental

L'ensemble $K_n[X] = \{P \in K[X] : \deg P \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

■ Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc il appartient à $K_n[X]$. Si P, Q désignent deux éléments de $K_n[X]$, alors, pour tous scalaires $\lambda, \mu \in K$, on a $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max\{\deg \lambda P; \deg \mu Q\} \leq \max\{\deg P; \deg Q\} \leq n$, d'où $\lambda P + \mu Q \in K_n[X]$. ■

Attention, l'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel (il ne contient pas le polynôme nul et il n'est pas stable par addition).

On termine avec des exemples de sous-espaces de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exemple fondamental

L'ensemble $\mathcal{D}_n(K)$ (respectivement $\mathcal{T}_n^+(K)$, respectivement $\mathcal{T}_n^-(K)$) des matrices diagonales (respectivement triangulaires supérieures, respectivement triangulaires inférieures) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(K)$ des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$.

■ La matrice nulle est à la fois diagonale et triangulaire. Par ailleurs, si A et B sont diagonales (respectivement triangulaires) alors, pour tous $\lambda, \mu \in K$, la matrice $\lambda A + \mu B$ est diagonale (respectivement triangulaire).

La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique. Par ailleurs, si A et B sont symétriques (respectivement antisymétriques) alors, pour tous $\lambda, \mu \in K$, on a ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B = \lambda A + \mu B$ (respectivement ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B = -\lambda A - \mu B = -(\lambda A + \mu B)$) ce qui démontre que $\lambda A + \mu B$ est symétrique (respectivement antisymétrique). ■

B.3. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel. L'intersection d'une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

■ Tous les sous-espaces vectoriels contiennent 0_E , donc leur intersection aussi. Si x et y appartiennent à l'intersection des sous-espaces vectoriels, ils appartiennent à chacun des sous-espaces vectoriels donc $\lambda x + \mu y$ aussi pour tous $\lambda, \mu \in K$. Alors $\lambda x + \mu y$ appartient à l'intersection. Par suite, l'intersection est un sous-espace vectoriel. ■

Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel comme le prouve l'exemple de deux droites vectorielles distinctes.

Exemples :

- Le sous-espace F de K^p de représentation cartésienne

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est l'intersection des hyperplans H_1, \dots, H_n , où chaque hyperplan H_i est d'équation cartésienne $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = 0$. Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de K^p , mais on le savait déjà...

Une intersection de sous-espace vectoriel se résume souvent au minimum possible, c'est-à-dire au vecteur nul (qui est inévitable puisque présent dans tout sous-espace). L'encadré suivant nous explique comment démontrer que l'on est dans ce cas.

Comment démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$?

Pour démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$, on se contente de prouver que $F \cap G \subset \{0_E\}$ car l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est évidente. Pour cela, on introduit un élément $x \in F \cap G$ (en écrivant « Soit $x \in F \cap G$ ») et on démontre que $x = 0_E$ (en utilisant le fait que x appartient simultanément à F et à G).

Exemples :

- Plaçons nous dans \mathbb{R}^3 et montrons que la droite vectorielle $D = \{(2\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (c'est-à-dire la droite dirigée par le vecteur $(2, -1, 1)$) intersecte le plan vectoriel P d'équation $x + 2y + 3z = 0$ seulement en $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$. Pour cela, on considère un vecteur $u = (x, y, z)$ appartenant à D et P , c'est-à-dire tel que $x = 2\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$ et $x + 2y + 3z = 0$. En reportant les expressions de x , y et z dans l'équation, on obtient $2\lambda - 2\lambda + 3\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$. Donc $u = (0, 0, 0)$. Cela prouve que $D \cap P = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Soit X une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0. On note $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sur X . Démontrons que $\mathcal{P}(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(X, \mathbb{R}) = \{\tilde{0}\}$. Soit $f \in \mathcal{P}(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(X, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$ car f est paire et $f(-x) = -f(x)$ car f est impaire. Cela entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$. Ainsi, $f = \tilde{0}$, ce qui démontre que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{\tilde{0}\}$.

2 h 45

B.4. Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 9

Soit A une partie d'un K -espace vectoriel E . L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A . On le note $\text{Vect}(A)$ et on l'appelle le **sous-espace engendré** par A .

Lorsque $A = (x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E , on parle de sous-espace engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$ et on note ce sous-espace $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$. En particulier, si (x_1, \dots, x_p) est une famille finie, on utilise la notation $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

■ L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est un sous-espace vectoriel d'après la proposition 5. Par ailleurs, c'est évidemment le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E contenant A puisqu'un sous-espace contenant A fait partie de l'intersection. ■

Notons que $A \subset \text{Vect}(A)$ et que, pour tout sous-espace F de E tel que $A \subset F$, on a $\text{Vect}(A) \subset F$.

D'un point de vue du vocabulaire, lorsque $F = \text{Vect}(A)$, on dit aussi bien que « A engendre F » ou que « A est une **partie génératrice** de F ».

Exemples :

- $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Vect}(F) = F$.
En particulier, on a $\text{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$, $\text{Vect}(E) = E$ et $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

En pratique, on utilise la caractérisation suivante du sous-espace engendré.

Proposition 6

Soit A une partie d'un K -espace vectoriel E . Le sous-espace $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A .

■ Posons $F = \{\sum_{a \in A} \lambda_a a : (\lambda_a)_{a \in A} \in K^{(A)}\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A . On a $F \subset \text{Vect}(A)$ car le sous-espace $\text{Vect}(A)$ contient les combinaisons linéaires des éléments de A . Pour avoir $\text{Vect}(A) \subset F$, il suffit de vérifier que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E . On a $0_E \in F$ en prenant pour $(\lambda_a)_{a \in A}$ la famille dont tous les scalaires sont nuls. Soient $x, y \in F$ et $\alpha, \beta \in K$. Il existe alors $(\lambda_a)_{a \in A}, (\mu_a)_{a \in A} \in K^{(A)}$ telles que $x = \sum_{a \in A} \lambda_a a$ et $y = \sum_{a \in A} \mu_a a$. Alors $\alpha x + \beta y = \sum_{a \in A} (\alpha \lambda_a + \beta \mu_a) a$ et $(\alpha \lambda_a + \beta \mu_a)_{a \in A} \in K^{(A)}$, donc $\alpha x + \beta y \in F$. ■

Si F est une partie de E , la détermination d'une partie A génératrice de F (i.e. $F = \text{Vect}(A)$) permet d'affirmer que F est un sous-espace de E sans revenir à la définition des sous-espaces.

En particulier, si l'on détermine une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que F est l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille, alors nécessairement F est un sous-espace de E .

Exemples :

- On a $\text{Vect}(a) = \{\lambda a : \lambda \in K\} = Ka$. Si a est non nul, on reconnaît la droite vectorielle dirigée par a .
- On a $\text{Vect}(a, b) = \{\lambda a + \mu b : \lambda, \mu \in K\}$. Si a et b ne sont pas colinéaires, on reconnaît le plan vectoriel porté par a et b .
- Dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel, le sous-espace engendré par (1) est \mathbb{R} , le sous-espace engendré par (i) est l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$ et le sous-espace engendré par $(1, i)$ est l'espace \mathbb{C} tout entier. Ainsi, \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel est un plan vectoriel.
Dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel, le vecteur 1 suffit à engendrer \mathbb{C} tout entier (puisque tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = z.1$), c'est-à-dire $\mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(1)$. Autrement dit, \mathbb{C} vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel est une droite vectorielle !



- On a $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}((X^k)_{k \in \mathbb{N}})$ et $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- Si \mathcal{S} désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, alors
 - si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et si r_1, r_2 désignent les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, on a

$$\mathcal{S} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t});$$

- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ et si r_0 désignent la racine double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, on a

$$\mathcal{S} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto t e^{r_0 t});$$

- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ et si $r = \alpha + i\omega, \bar{r} = \alpha - i\omega$ désignent les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, on a

$$\mathcal{S} = \text{Vect}(t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t), t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t)).$$

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$.
- Si le corps de base K est de caractéristique p (par exemple $K = \mathbb{F}_p$), une droite vectoriel $\text{Vect}(a)$ est constitué p points « alignés circulairement » (car $\forall k \in K, (k+p)a = ka$).

Attardons-nous maintenant un peu sur les sous-espace engendrés dans K^n .

Sev engendré de $K^n =$ représentation paramétrique

Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de K^n de sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on a $u_i = (\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{n,i})$. Tout vecteur $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ appartenant $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ s'écrit comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p) , ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_{1,1} + \dots + \lambda_p \alpha_{1,p} \\ \vdots \\ \alpha_n = \lambda_1 \alpha_{n,1} + \dots + \lambda_p \alpha_{n,p} \end{cases} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K).$$

Définir un sous-espace engendré dans K^n revient donc à se donner une **représentation paramétrique** de ce sous-espace.

Exemples :

- Dans \mathbb{R}^2 , l'hyperplan H d'équation $x + 3y = 0$ est représenté paramétriquement par

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc $H = \text{Vect}((-3, 1))$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(-3, 1)$.

- Dans \mathbb{R}^3 , l'ensemble $F = \{(x + 2y, x + y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ est défini paramétriquement par

$$\begin{cases} X = x + 2y \\ Y = x + y \\ Z = x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

donc $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (2, 1, 0))$ est le plan vectoriel de \mathbb{R}^3 porté par $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 0)$.

La proposition suivante dresse la liste des propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés.

Proposition 7

Soient E un K -espace vectoriel, $x, y \in E$ et A, B deux parties de E .

- (i) si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$;
- (ii) si $x = \lambda y + a$ avec $\lambda \in K^*$ et $a \in A$, on a $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\})$;
- (iii) si x se décompose sur les vecteurs de A , alors $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$.

- (i) Supposons que $A \subset B$. Deux démonstrations pour le prix d'une !
- * Toute combinaison linéaire d'éléments de A est a fortiori une combinaison linéaire d'éléments de B donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
 - * On a $A \subset B \subset \text{Vect}(B)$ et $\text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel. Comme $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace qui contient A , on a nécessairement $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
- (ii) Comme $x = \lambda y + a$ avec $a \in A$, on a $x \in \text{Vect}(A \cup \{y\})$ et donc $A \cup \{x\} \subset \text{Vect}(A \cup \{y\})$. Mézalors, d'après (i), on a $\text{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \text{Vect}(A \cup \{y\})$.
Comme $y = \lambda^{-1}x - \lambda^{-1}a$ et $-\lambda^{-1}a \in \text{Vect}(A)$, on a $y \in \text{Vect}(A \cup \{x\})$ et donc $A \cup \{y\} \subset \text{Vect}(A \cup \{x\})$.
Le point (i) s'applique à nouveau et donne $\text{Vect}(A \cup \{y\}) \subset \text{Vect}(A \cup \{x\})$.
On a donc bien $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\})$.
- (iii) Comme $A \subset A \cup \{x\}$, on a $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A \cup \{x\})$ d'après (i).
Comme x se décompose sur les vecteurs de A , on a $x \in \text{Vect}(A)$ et donc $A \cup \{x\} \subset \text{Vect}(A)$. Cela implique que $\text{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \text{Vect}(A)$.
Donc $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$. ■

Exemples :

- Le point (ii) nous dit en particulier que l'espace vectoriel engendré par une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs n'est pas modifié si l'on dilate l'un des vecteurs par un scalaire non nul ou si l'on ajoute à l'un des vecteurs un multiple d'un des autres vecteurs. Autrement dit, on peut agir sur une famille de vecteurs sans modifier le sous-espace qu'ils engendrent à l'aide de l'une de des deux opérations élémentaires suivantes :
 - * si $\lambda \neq 0$, on a $\text{Vect}(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$;
 - * pour $j \neq i$, on a $\text{Vect}(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$.
- On a $\text{Vect}(A \cup \{0_E\}) = \text{Vect}(A)$ d'après (iii).
- Si x et y sont colinéaires, $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x)$ d'après (iii).

B.5. Sous-algèbres

Définition 10

Soit A une K -algèbre. On appelle **sous-algèbre** de A toute partie B de A telle que B est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de A .

En pratique, pour vérifier qu'une partie B d'une K -algèbre A est une sous-algèbre, on montre que c'est un sous-espace vectoriel, que $1_A \in B$ et que la loi \times est interne sur B .

Si B est une sous-algèbre de $(A, +, \cdot, \times)$, alors $(B, +, \cdot, \times)$ est une algèbre.

Souvent, on montre que A est une algèbre en montrant que A est une sous-algèbre d'une algèbre connue.

Exemples :

- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ est une \mathbb{Q} -algèbre comme sous-algèbre de la \mathbb{Q} -algèbre \mathbb{R} .

C. Familles de vecteurs

C.1. Familles génératrices

Définition 11

Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace de E . Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F est dite **génératrice** de F lorsque tout vecteur de F se décompose linéairement, au moins d'une manière, sur $(x_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in F, \quad \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}, \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Autrement dit, $(x_i)_{i \in I}$ est une famille **génératrice** de F lorsque $(x_i)_{i \in I}$ engendre F , c'est-à-dire $F = \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$.

Cette définition fournit l'existence (sans condition d'unicité) d'une décomposition linéaire.

Le caractère générateur d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ ne dépend pas de l'ordre des éléments x_i .

Le caractère générateur est une propriété extrinsèque, c'est-à-dire qu'elle est intimement liée au sous-espace dans lequel on travaille. Cela n'a donc a priori aucun sens de dire qu'une famille est génératrice sans préciser de quel sous-espace elle l'est. Toutefois, lorsqu'on dit qu'une famille est génératrice (sans préciser de quel sous-espace), on sous-entend en général qu'elle est génératrice de l'espace ambiant E tout entier.

Exemples :

- Dans un plan vectoriel, une famille est génératrice dès qu'elle contient deux vecteurs non colinéaires.
- Dans l'espace géométrique, toute famille contenant trois vecteurs non coplanaires est génératrice.
- La famille $(1, i)$ est génératrice de l'espace \mathbb{C} , vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel, car tout nombre complexe z se décompose sous la forme $z = \Re(z).1 + \Im(z).i$.
La famille (1) est génératrice de l'espace \mathbb{C} , vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel, car tout nombre complexe z se décompose sous la forme $z = z.1$.
- Dans K^n , les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ forment une famille génératrice de K^n puisque, pour tout $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, on a $u = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n$.
- La famille $(X^i)_{i \geq 0}$ est génératrice de $K[X]$.
- Dans $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, les polynômes 1 , X^2 et $1 + X^2$ sont générateurs du plan $\{aX^2 + c : a, c \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ils ne sont pas générateurs de $\mathbb{R}_2[X]$ tout entier.
- Soit $a \in \mathbb{C}$. La famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{C}[X]$, car tout polynôme P peut s'écrire, d'après la formule de Taylor, sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

- Dans $\mathcal{M}_{n,m}(K)$, la famille des matrices élémentaires, définies par $E_{i,j} = (\delta_{i,j})$ où $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, forment une famille génératrice puisque, pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, on a $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} E_{i,j}$.

La proposition suivante énonce la stabilité du caractère générateur lorsqu'on fait grossir la famille de vecteurs. Elle explique également comment faire maigrir une famille génératrice sans lui faire perdre son caractère générateur.

Proposition 8

Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace de E .

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F , alors toute sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ contenue dans F (c'est-à-dire une famille $(x_i)_{i \in J} \in F^J$ où $J \supset I$) est aussi génératrice de F .

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F et si x_{i_0} est une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ alors $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est encore une famille génératrice de F .

■ Cela découle de la proposition 7

■

Attention, retirer imprudemment un vecteur dans une famille génératrice (sans vérifier qu'il se décompose sur les autres) peut faire perdre le caractère générateur.

C.2. Familles libres ou liées

Définition 12

Soit E un K -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **libre** (ou que les vecteurs sont **linéairement indépendants**) pour exprimer que tout vecteur se décompose sur $(x_i)_{i \in I}$ d'au plus une manière, c'est-à-dire lorsque l'on a le **principe d'identification** suivant :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I}, (\mu_i)_{i \in I} \in K^{(I)}, \quad \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i \right) \implies (\forall i \in I, \lambda_i = \mu_i).$$

Dans le cas contraire, la famille est dite **liée** (ou les vecteurs sont dits **linéairement dépendants**).

Cette définition fournit l'**unicité** (sous réserve d'existence) d'une décomposition linéaire.

La liberté (ou la liaison) d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ ne dépend pas de l'ordre des éléments x_i .

La liberté est une propriété intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du sous-espace dans lequel sont les vecteurs de la famille. Autrement dit, si $(x_i)_{i \in I}$ est libre dans un sous-espace, elle est également libre dans tout autre sous-espace qui contient la famille $(x_i)_{i \in I}$.

On peut étendre le vocabulaire de la liberté à une partie quelconque A d'un espace vectoriel : on dit évidemment que la partie A est libre lorsque la famille $(a)_{a \in A}$ l'est.



Comme toujours avec les combinaisons linéaires, on travaille avec des familles presque nulles de coefficients. Dès lors, lorsqu'on évoque la liberté d'une famille infinie, cela revient à énoncer la liberté de toutes les sous-familles finies. Ainsi, pour démontrer qu'une famille $(x_n)_{n \geq 0}$ est libre, il suffit de démontrer que toutes les familles $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$, pour n parcourant \mathbb{N} , le sont.

En pratique, on utilise toujours la caractérisation suivante pour démontrer qu'une famille est libre.

Proposition 9

Soit E un K -espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est libre si, et seulement si, on a le **principe de non-compensation** suivant :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}, \quad \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \right) \implies (\forall i \in I, \lambda_i = 0_K).$$

A contrario, une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs est liée si, et seulement si, il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires **non tous nuls** tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. On parle de **relation de dépendance linéaire**.

■ Supposons que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre. Si $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ est telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$, alors $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} 0_K x_i$, ce qui prouve que $\forall i \in I, \lambda_i = 0_K$ d'après le principe d'identification. Le principe de non-compensation est donc vérifié.

Réciproquement, supposons vrai le principe de non-compensation. Soient $(\lambda_i)_{i \in I}, (\mu_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$. On a alors $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0_E$, ce qui implique, d'après le principe de non-compensation, que $\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0_K$ c'est-à-dire $\forall i \in I, \lambda_i = \mu_i$. Donc $(x_i)_{i \in I}$ est libre. ■

Pour démontrer qu'une famille est libre, il ne faut pas chercher à démontrer que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. Il faut au contraire supposer cette égalité et en déduire que tous les λ_i sont nuls.

La réciproque est vraie mais évidemment sans intérêt.

La proposition précédente signifie qu'une famille est libre si, et seulement si la décomposition du vecteur nul sur cette famille est unique (c'est alors automatiquement le cas pour tous les autres vecteurs).

Exemples :

- La liberté est une propriété quantifiée par \forall . De fait, la famille vide est libre.
- Une famille constituée d'un seul vecteur non nul est libre. Méditez là-dessus : être seul, c'est être libre ou être un gros nul !
- Une famille qui contient le vecteur nul est nécessairement liée car, pour toutes famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E , on a $\sum_{i \in I} 0_K x_i + 1_K 0_E = 0_E$, ce qui prouve l'existence d'une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et 0_E .
- Dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel, la famille $(1, i)$ est libre d'après le principe d'identification des parties réelle et imaginaire.
A contrario, dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel, la famille $(1, i)$ est liée puisqu'on a la relation de dépendance linéaire $1.1 + i.i = 0$.
- Dans K^n , les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ forment une famille libre. En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sont tels que $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0_{K^n}$, alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ ce qui donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, démontrons que $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, \dots , $f_p : x \mapsto e^{px}$ sont libres.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait l'égalité fonctionnelle $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p = \tilde{0}$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \dots + \lambda_p e^{px} = 0$.
Méthode 1 : Par l'absurde, supposons que l'ensemble $\{j \in \llbracket 1; p \rrbracket : \lambda_j \neq 0\}$ est non vide. Notons j_0 son maximum. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \dots + \lambda_{j_0-1} e^{(j_0-1)x} = -\lambda_{j_0} e^{j_0 x}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^{(1-j_0)x} + \lambda_2 e^{(2-j_0)x} + \dots + \lambda_{j_0-1} e^{-x} = -\lambda_{j_0}$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient alors $\lambda_{j_0} = 0$. C'est absurde !
Méthode 2 : En dérivant j fois (où $j \in \mathbb{N}$) la relation $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p = \tilde{0}$, on obtient $\lambda_1 1^j f_1 + \lambda_2 2^j f_2 + \dots + \lambda_p p^j f_p = \tilde{0}$. En combinant linéairement ces égalités, il vient $\lambda_1 P(1) f_1 + \lambda_2 P(2) f_2 + \dots + \lambda_p P(p) f_p = \tilde{0}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout entier k de $\llbracket 1; p \rrbracket$, on choisit alors pour P le polynôme élémentaire de Lagrange tel que $P(k) = 1$ et $\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{k\}, P(j) = 0$. Cela donne $\lambda_k f_k = \tilde{0}$ et donc $\lambda_k = 0$.
- Dans $\mathcal{M}_{n,m}(K)$, la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})$ est libre en vertu du principe d'identification des coefficients d'une matrice.

5 h 00

Dans $K[X]$, on peut donner une condition suffisante simple de liberté. Ce résultat, très utile en pratique, est détaché des exemples précédents et énoncé dans le lemme suivant.

Lemme 1

Dans l'espace vectoriel $K[X]$, une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est dite **échelonnée**. Une telle famille est toujours libre.

■ Considérons P_1, \dots, P_q des polynômes non nuls de degrés distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des scalaires tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_q P_q = 0$. Quitte à réordonner P_1, \dots, P_q , on suppose que $\deg P_1 < \dots < \deg P_q$. Par l'absurde, on suppose que l'ensemble $\{j \in \llbracket 1; q \rrbracket : \lambda_j \neq 0\}$ est non vide et on note j_0 son plus grand élément. Alors $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{j_0} P_{j_0} = 0$, ce qui permet d'écrire $P_{j_0} = (-\lambda_1 P_1 - \dots - \lambda_{j_0-1} P_{j_0-1}) / \lambda_{j_0}$. Or $\deg((-\lambda_1 P_1 - \dots - \lambda_{j_0-1} P_{j_0-1}) / \lambda_{j_0}) \leq \deg P_{j_0-1} < \deg P_{j_0}$, ce qui est absurde ! ■

La réciproque est fautive : les polynômes X et $X + 1$ sont libres alors qu'ils sont pourtant du même degré.

Exemples :

- Dans $K[X]$, la famille des monômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre. Le lemme ci-dessus s'applique mais, à vrai dire, pour cette famille, on peut tout simplement se contenter d'invoquer le principe d'identification des coefficients des polynômes.
- Soit $a \in K$. Dans $K[X]$, la famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est échelonnée donc elle est libre.

La proposition suivante généralise le lien qui existe entre la colinéarité et la dépendance linéaire.

Proposition 10

Soit E un K -espace vectoriel. Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ de E est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs x_i est une combinaison linéaire des autres.

■ Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ et $(\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in K^{(I \setminus \{i_0\})}$ tels que $x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i x_i$. En posant $\lambda_{i_0} = -1$, on a alors la relation de dépendance linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$ avec $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ non tous nuls, ce qui prouve que $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est liée. Il existe alors une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ de scalaires non tous nuls telle que l'on ait $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. Si $i_0 \in I$ désigne un indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on a alors $x_{i_0} = -\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i x_i$ où $\forall i \in I, \mu_i = -\lambda_i / \lambda_{i_0}$, ce qui démontre que x_{i_0} se décompose sur les autres vecteurs de la famille. ■

On voit donc que, pour deux vecteurs, le caractère lié équivaut à la colinéarité et que, pour trois vecteurs, le caractère lié équivaut à la coplanarité.

Exemples :

- Toute famille qui contient deux vecteurs colinéaires est liée. En particulier, une famille qui contient deux vecteurs égaux est liée. Une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- Une famille d'au moins trois vecteurs peut être liée sans contenir deux vecteurs colinéaires, comme l'illustre la famille $(1, X, 1 + X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Les fonctions \cos et \sin n'étant pas colinéaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (elles ne s'annulent pas en même temps), le couple (\sin, \cos) est libre.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, donc les fonctions $x \mapsto \cos 2x, x \mapsto \cos^2 x$ et $x \mapsto \sin^2 x$ sont liées dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

La proposition suivante énonce la stabilité de la liberté lorsqu'on fait maigrir la famille de vecteurs. Elle explique aussi comment faire grossir une famille libre sans perdre la liberté.

Proposition 11

Soit E un K -espace vectoriel.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre dans E , alors toute sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ est encore libre.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre dans E et si y n'est pas une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ alors $\{y\} \cup \{x_i : i \in I\}$ est encore libre.

■ Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est libre dans E .

Considérons $J \subset I$. Soit $(\lambda_j)_{j \in J} \in K^{(J)}$ telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0_E$. Pour tout $i \in I \setminus J$, on pose $\lambda_i = 0$ de sorte que $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ et $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. La liberté de $(x_i)_{i \in I}$ nous dit alors que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. En particulier $\forall j \in J, \lambda_j = 0$ et $(x_j)_{j \in J}$ est bien libre.

On suppose que y n'est pas une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ et $\mu \in K$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0_E$. Si $\mu \neq 0$, alors $y = -\sum_{i \in I} (\lambda_i / \mu) x_i$ ce qui contredit le fait que y n'est pas une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$. Donc $\mu = 0$. Dès lors, on a $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$ et la liberté de $(x_i)_{i \in I}$ nous dit que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Donc $\{y\} \cup \{x_i : i \in I\}$ est libre. ■

Attention ! Ajouter imprudemment un vecteur dans une famille libre (sans vérifier qu'il est linéairement indépendant des vecteurs de la famille) peut faire perdre la liberté.

Par contraposition, cet énoncé nous dit que si une famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée alors toute sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ est également liée. De plus, quand on retire dans une famille liée un vecteur qui est linéairement indépendant des autres, la sous-famille obtenue reste liée.

C.3. Bases

Définition 13

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace de E et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs appartenant à F . On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est une **base** de F lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice de F .

Autrement dit, $(e_i)_{i \in I}$ est une base de F si, et seulement si, pour tout vecteur x de F , il existe une unique famille de scalaires $(\alpha_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i.$$

La famille de scalaires $(\alpha_i)_{i \in I}$ est appelée la famille des **coordonnées** (ou **composantes**) de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

Cette définition fournit l'existence et l'unicité d'une décomposition linéaire.

La caractéristique base d'une famille $(e_i)_{i \in I}$ ne dépend pas de l'ordre des éléments e_i . Par contre, cet ordre influe sur l'ordre des coordonnées d'un vecteur. Par conséquent, on se gardera bien d'effectuer la moindre permutation des vecteurs d'une base.

Lorsqu'on parle d'une base (sans préciser de quel sous-espace), on sous-entend que c'est une base de l'espace ambiant E tout entier.

Exemples :

- La famille \emptyset est une base de $\{0_E\}$.
- Une droite vectorielle $\text{Vect}(a) = \{\lambda a : \lambda \in K\}$ (où $a \neq 0_E$) admet (a) comme base. On dit que a est un **vecteur directeur** de $\text{Vect}(a)$.
- Dans un plan vectoriel, deux vecteurs non colinéaires forment une base (de ce plan).
- Dans l'espace géométrique, trois vecteurs non coplanaires forment une base.
- La famille $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} , vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel. Les composantes d'un nombre complexe dans cette base sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- Dans K^n , les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ forment la **base canonique** de K^n . Dans cette base, les coordonnées d'un vecteur sont ses éléments, autrement dit, la famille des coordonnées d'un n -uplet est le n -uplet lui-même.
- Dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$, les matrices élémentaires forment la **base canonique** de $\mathcal{M}_{p,q}(K)$. Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont les coefficients de la matrice, autrement dit, la famille des coordonnées d'une matrice est la matrice elle-même.
- La famille de monômes $(X^k)_{k \geq 0}$ est la **base canonique** de $K[X]$. Les composantes d'un polynôme de $K[X]$ dans cette base canonique sont les coefficients du polynôme, autrement dit, la famille des coordonnées d'un polynôme est le polynôme lui-même (rappelons qu'un polynôme est une suite presque nulle de coefficients).

Plus précisément, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $K_n[X]$.

- Soit $a \in \mathbb{C}$. La famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$, puisqu'on a vu qu'elle est libre et génératrice de $\mathbb{C}[X]$. On peut même préciser que les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ sont $(P(a), P'(a), P''(a)/2, \dots, P^{(n)}(a)/n!, \dots)$ d'après la formule de Taylor.
- Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ distincts. On note L_1, \dots, L_n les polynômes élémentaires de Lagrange définis, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, par $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $L_k(\alpha_i) = \delta_{k,i}$ où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker. Nous avons vu que tout polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ se décompose de manière unique sur (L_1, \dots, L_n) sous la forme $P = P(\alpha_1)L_1 + \dots + P(\alpha_n)L_n$. Cela signifie par conséquent que (L_1, \dots, L_n) est une base de $K_{n-1}[X]$.

La proposition ci-dessous précise les liens entre familles libres, familles génératrices et bases.

Proposition 12

Soient E un K -espace vectoriel et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de E . On a équivalence entre :

- (i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E ;
- (ii) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale (toute surfamille stricte est liée) ;
- (iii) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale de E (toute sous-famille stricte est non génératrice de E).

- (i) \Rightarrow (ii) Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , on ne peut lui adjoindre aucun vecteur x sans obtenir une famille liée puisque x est combinaison linéaire de $(e_i)_{i \in I}$. Donc $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale.
- (ii) \Rightarrow (i) Supposons que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale. Si on lui adjoint un vecteur x , la famille devient liée (par maximalité). C'est donc que x est combinaison linéaire de $(e_i)_{i \in I}$ et donc que $(e_i)_{i \in I}$ est également génératrice de E . Donc $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E .
- (i) \Rightarrow (iii) Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , on ne peut lui retirer aucun vecteur e_{i_0} sans obtenir une famille non génératrice puisque e_{i_0} n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale.
- (iii) \Rightarrow (i) Supposons que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale de E . Si elle était liée, l'un des vecteurs serait combinaison linéaire des autres vecteurs et la famille obtenue en retirant ce vecteur serait encore génératrice, ce qui n'est pas (par minimalité). La famille $(e_i)_{i \in I}$ est donc libre, donc c'est une base. ■

En dehors du cadre de la dimension finie (que nous verrons plus tard) et de quelques cas particuliers (comme $K[X]$), l'existence de bases dans un espace vectoriel quelconque ne va pas de soi. Cela découle d'un résultat de théorie des ensembles (équivalent à l'axiome du choix) : le [lemme de Zorn](#). On l'énonce (sans démonstration) ci-dessous.

Lemme 2

Soit (U, \preceq) un ensemble non vide ordonné (l'ordre n'est pas supposé total). On suppose que U est [inductif](#), c'est-à-dire que toute partie de U totalement ordonnée admet un majorant. Alors l'ensemble U admet un élément maximal m (si $x \in U$ est tel que $m \preceq x$ alors $x = m$).

■ Admis.

La démonstration du lemme de Zorn repose sur l'axiome du choix. En fait, le lemme de Zorn est même équivalent à l'axiome du choix. Malheureusement, si la démonstration du fait que le lemme de Zorn implique l'axiome du choix est assez simple, la réciproque (c'est-à-dire l'implication qui nous intéresse ici) est nettement plus délicate (la démonstration classique utilise la théorie des ordinaux). Bref, il n'est pas lieu ici de présenter une telle preuve.

Signalons que l'axiome du choix est l'énoncé qui dit que si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille non vide d'ensembles deux à deux disjoints, il existe un ensemble C tel que, pour tout $i \in I$, $E_i \cap C$ est un singleton. Cela revient à dire que l'on peut constituer un ensemble en choisissant dans chaque ensemble E_i un et un seul élément. Intuitivement, cet axiome semble aller de soi et de fait, Gödel a démontré en 1938 que cet axiome n'est pas en contradiction avec les axiomes de Zermelo–Fraenkel (c'est-à-dire les axiomes classiques de la théorie des ensembles, souvent noté ZF). Cela dit, Cohen a démontré en 1963 que l'assertion contraire de l'axiome du choix est également compatible avec l'axiomatique ZF ! Ainsi, l'axiome du choix est en fait un énoncé indépendant des axiomes ZF. Par conséquent, accepter l'axiome du choix ou pas est une affaire... de choix !

Si on choisit d'adjoindre l'axiome du choix aux axiomes ZF, on obtient l'axiomatique ZFC, généralement utilisée par les mathématiciens aujourd'hui. Mais ce choix s'accompagne de paradoxe un peu troublant. En particulier, on peut citer le paradoxe de Banach–Hausdorff–Tarski qui, interprété dans le langage courant, implique que l'on peut découper une boule en un nombre fini de parties et déplacer ces parties pour recomposer une boule aussi grosse que voulue (ce qui rend possible la multiplication des pains !).

On peut aussi refuser l'axiome du choix... Dans ce cas, on évite les paradoxes de type Banach–Hausdorff–Tarski mais on n'a pas de lemme de Zorn non plus ! ■

Avec le lemme de Zorn, nous pouvons démontrer le [théorème de la base intermédiaire](#).

Théorème 1

Soient E un K -espace vectoriel, \mathcal{L} une partie libre de E et \mathcal{G} une partie génératrice de E telles que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

■ Notons U l'ensemble des parties libres de E qui contiennent \mathcal{L} et qui sont contenues dans \mathcal{G} .

Commençons par démontrer que U , ordonné par l'inclusion, est inductif. Soit V une partie de U totalement ordonnée pour \subset . Posons \mathcal{L}_0 la réunion de tous les éléments de V , c'est-à-dire $\mathcal{L}_0 = \bigcup_{L \in V} L$, et démontrons que \mathcal{L}_0 est un élément de U . Il est clair que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{G}$. Nous devons aussi démontrer que \mathcal{L}_0 est libre, c'est-à-dire que toutes les parties finies de \mathcal{L}_0 sont libres. Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une partie de \mathcal{L}_0 . Pour chaque $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, il existe $L_i \in V$ tel que $x_i \in L_i$. Comme V est totalement ordonnée, on peut supposer, quitte à réindexer les L_i , que $L_1 \subset \dots \subset L_n$. Dès lors, on a $\{x_1, \dots, x_p\} \subset L_n$ et comme L_n est une partie libre de E , il en va de même de la partie $\{x_1, \dots, x_p\}$. Cela démontre que \mathcal{L}_0 est libre. On a donc $\mathcal{L}_0 \in U$. On a ainsi obtenu un majorant de V dans U . Cela prouve bien que (U, \subset) est inductif.

Le lemme de Zorn nous dit alors que U possède un élément maximal. Notons \mathcal{B} cet élément maximal. Par définition, \mathcal{B} est libre et $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Reste à démontrer que \mathcal{B} est génératrice de E .

Pour tout $x \notin \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$, la famille $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée (par maximalité de \mathcal{B} dans U). Il existe par conséquent une famille, presque nulle mais non nulle, de coefficients $(\lambda_b)_{b \in \mathcal{B}} \in K^{(\mathcal{B})}$ et $\lambda \in K$ telle que $\lambda x + \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$ alors $\forall b \in \mathcal{B}$, $\lambda_b = 0$ car \mathcal{B} est libre, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda \neq 0$ et $x = -\sum_{b \in \mathcal{B}} (\lambda_b / \lambda) b$ est une combinaison linéaire de \mathcal{B} . Cela démontre que tout vecteur de \mathcal{G} est une combinaison linéaire de \mathcal{B} . Comme \mathcal{G} engendre E , on en déduit que \mathcal{B} est génératrice de E . ■

Le théorème de la base intermédiaire a deux conséquences principales : le [théorème de la base extraite](#) (le (i) de l'énoncé ci-dessous) et le [théorème de la base incomplète](#) (le (ii)).

Théorème 2

Soit E un K -espace vectoriel. Alors

- (i) de toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E ;
- (ii) toute famille libre dans E peut être complétée en une base de E .

■ (i) On applique le théorème 1 en prenant \emptyset pour \mathcal{L} et la famille génératrice considérée pour \mathcal{G} .

(ii) On applique le théorème 1 en prenant la famille libre considérée pour \mathcal{L} et E pour \mathcal{G} . ■

On peut alors en déduire l'existence de bases dans un espace vectoriel quelconque.

Théorème 3

Tout espace vectoriel admet des bases.

■ Soit E un K -espace vectoriel. On applique le théorème de la base incomplète à $\mathcal{L} = \emptyset$. ■

Ce théorème n'est pas effectif (comme tous les résultats obtenus par zornification) : il affirme l'existence de bases mais ne permet pas d'en construire.

Exemples :

- L'espace vectoriel des suites $K^{\mathbb{N}}$ possède des bases. Ces bases sont non dénombrables et il n'y a pas de choix évident de bases dans ce cas.
- Le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} possède des bases (appelées bases de Hamel). Là encore, ce sont des bases non dénombrables et il n'y a pas de choix évident de bases dans ce cas.
- Un corps K fini de cardinal q et de caractéristique p (avec p premier) est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel. Une base de cet espace est nécessairement finie. Notons (e_1, \dots, e_n) une telle base. Alors l'application de $(\mathbb{F}_p)^n$ dans K qui à $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{F}_p)^n$ associe $k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$ est une bijection. Donc $\text{card } K = \text{card}(\mathbb{F}_p)^n = p^n$. On obtient ainsi un résultat admis jusqu'ici : le cardinal d'un corps fini est une puissance du nombre premier qui est sa caractéristique.

D. Sommes de sous-espaces vectoriels

D.1. Sommes simples, sommes directes et sous-espaces supplémentaires

a) Somme simple

Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. A contrario, une réunion de sous-espaces n'est en général pas un sous-espace. D'où l'idée de s'intéresser non pas à cette union mais au sous-espace engendré par cette union.

Définition 14

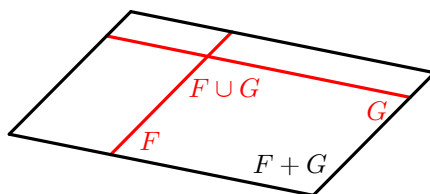
Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . On appelle **somme** de la famille $(F_i)_{i \in I}$, et on note $\sum_{i \in I} F_i$, le sous-espace engendré par $\bigcup_{i \in I} F_i$, c'est-à-dire

$$\sum_{i \in I} F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right).$$

Lorsque $I = \llbracket 1; n \rrbracket$, la somme est notée $F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Par définition, $\sum_{i \in I} F_i$ est le plus petit sous-espace de E qui contient $\bigcup_{i \in I} F_i$. C'est donc aussi le plus petit sous-espace qui contient à la fois F_1, \dots, F_{n-1} et F_n .

En algèbre linéaire, la somme $\sum_{i \in I} F_i$ se substitue (avec des différences notoires) à la réunion $\bigcup_{i \in I} F_i$, qui a le défaut (en général) de ne pas être un sous-espace vectoriel.



Il ne faut pas se laisser abuser par la notation $+$ et croire que l'on a ainsi défini une opération sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels, ayant toutes les « bonnes » propriétés. On pourra éviter certains mauvais réflexes (de simplification notamment) en considérant les exemples ci-dessous.

Exemples :

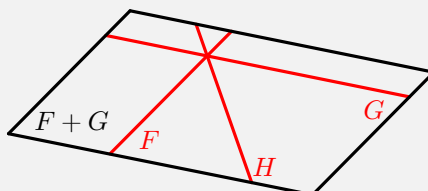
- La somme de deux droites vectorielles distinctes est le plan vectoriel qui les contient.
- Si F, G sont deux sous-espaces de E , on a

$$(G \subset F) \implies (F + G = F).$$

En particulier,

$$F + \{0_E\} = F, \quad F + F = F \quad \text{et} \quad F + E = E.$$

- Dans la situation ci-dessous



on a

$$(F + G) \cap H = H \quad \text{et} \quad (F \cap H) + (G \cap H) = \{0_E\} + \{0_E\} = \{0_E\}.$$

À ce stade, il n'est pas évident de comprendre pourquoi on appelle « somme » l'espace vectoriel engendré par une union de sous-espaces. La proposition suivante est là pour éclairer nos lanternes.

Soit E un K -espace vectoriel. On pose $E^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de vecteurs de E , c'est-à-dire l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ telles que $\text{card}\{i \in I : x_i \neq 0_E\} < +\infty$.

Proposition 13

Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . La somme $\sum_{i \in I} F_i$ est constituée de toutes les sommes $\sum_{i \in I} f_i$ où $(f_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle de vecteurs de E telle que $\forall i \in I, f_i \in F_i$. Autrement dit

$$\sum_{i \in I} F_i = \left\{ \sum_{i \in I} f_i : (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in (I)} F_i \right\}.$$

où $\prod_{i \in (I)} F_i = E^{(I)} \cap \prod_{i \in I} F_i$.

■ On a

$$\sum_{i \in I} F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i f_i : (\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}, (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i \right\} = \left\{ \sum_{i \in I} f_i : (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in (I)} F_i \right\}.$$

■

Dire que $G = \sum_{i \in I} F_i$ signifie donc que tout vecteur de G se décompose, au moins d'une manière, en une somme finie de vecteurs pris dans les F_i . C'est donc une propriété d'existence.

On peut utiliser le symbole $+$ pour énoncer un caractère générateur : la famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice du sous-espace F si, et seulement si, F est la somme des droites vectorielles de la famille $(Kx_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire $F = \sum_{i \in I} Kx_i$.

Exemples :

- Si F et G sont deux sous-espaces de E , alors $F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$. Plus généralement, si F_1, \dots, F_n sont des sous-espaces de E , on a

$$F_1 + \dots + F_n = \{f_1 + \dots + f_n : f_1 \in F_1, \dots, f_n \in F_n\}.$$

- On a $K(X) = K[X] + K_{-1}(X)$ où $K_{-1}(X) = \{F \in K(X) : \deg(F) < 0\}$. En effet, toute fraction rationnelle est la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire.

7 h 15

ℓ) Sommes directes

Définition 15

Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . On dit que les F_i sont en **somme directe** lorsque tout vecteur $x \in \sum_{i \in I} F_i$ se décompose d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} f_i$ où $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i$, autrement dit lorsque l'on a le **principe d'identification** suivant :

$$\forall (f_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i, \quad \left(\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} g_i \right) \implies (\forall i \in I, f_i = g_i).$$

Lorsque les F_i sont en somme directe, la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est notée $\bigoplus_{i \in I} F_i$.

Lorsque $I = \llbracket 1; n \rrbracket$ et lorsque F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe, la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

La propriété « les F_i sont en somme directe » signifie, avant même d'avoir déterminé la somme $\sum_{i \in I} F_i$, que toute décomposition d'un vecteur sur $\sum_{i \in I} F_i$ est unique. La notation \oplus ne désigne donc pas une nouvelle opération mais précise une propriété d'unicité de la somme.

On peut utiliser le symbole \oplus pour énoncer une liberté : la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre dans E si, et seulement si, les droites vectorielles de la famille $(Kx_i)_{i \in I}$ sont en somme directe, c'est-à-dire $\sum_{i \in I} Kx_i = \bigoplus_{i \in I} Kx_i$.

Pour démontrer le caractère direct d'une somme, on travaille avec des familles presque nulles de vecteurs. Dès lors, lorsque l'on veut démontrer qu'une somme d'un nombre infini de sous-espaces est directe, on démontre le caractère direct de toutes les sommes finies de ces sous-espaces.

En pratique, on dispose de deux caractérisations pour démontrer que des sommes sont directes. La première de ces deux caractérisations fonctionnent toujours, la seconde n'est utilisable que pour des sommes de deux sous-espaces.

Proposition 14

Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . Les F_i sont en somme directe si, et seulement si, on a le **principe de non-compensation** suivant :

$$\forall (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i, \quad \left(\sum_{i \in I} f_i = 0_E \right) \implies (\forall i \in I, f_i = 0_E).$$

■ Supposons que les F_i sont en somme directe. Soit $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i$ telle que $\sum_{i \in I} f_i = 0_E$. On a alors $\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} 0_E$, ce qui donne $\forall i \in I, f_i = 0_E$ d'après le principe d'identification.

Supposons que le principe de non-compensation est satisfait. Soient $(f_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i$ tels que $\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} g_i$. On a alors $\sum_{i \in I} (f_i - g_i) = 0_E$, ce qui donne $\forall i \in I, f_i - g_i = 0_E$ c'est-à-dire $\forall i \in I, f_i = g_i$ d'après le principe de non-compensation. ■

Exemples :

- Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces d'un K -espace vectoriel E . On a

$$F_1 \times F_2 \times F_3 = F_1 \times \{0_E\} \times \{0_E\} + \{0_E\} \times F_2 \times \{0_E\} + \{0_E\} \times \{0_E\} \times F_3.$$

Démontrons que cette somme est directe. Soient $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$ et $x_3 \in F_3$ tels que $(x_1, 0_E, 0_E) + (0_E, x_2, 0_E) + (0_E, 0_E, x_3) = (0_E, 0_E, 0_E)$. On a alors $(x_1, x_2, x_3) = (0_E, 0_E, 0_E)$, c'est-à-dire $x_1 = x_2 = x_3 = 0_E$. Cela démontre que

$$F_1 \times F_2 \times F_3 = F_1 \times \{0_E\} \times \{0_E\} \oplus \{0_E\} \times F_2 \times \{0_E\} \oplus \{0_E\} \times \{0_E\} \times F_3.$$

Dans le cas de la somme de deux sous-espaces, on a le critère suivant (qui est préférable au critère précédent, sauf qu'il ne marche que pour deux sous-espaces!).

Proposition 15

Soient E un K -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E . Alors

$$(F \text{ et } G \text{ sont en somme directe}) \iff (F \cap G = \{0_E\}).$$

■ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soient $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$ tels que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$, d'où $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0_E$, c'est-à-dire $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$. Donc F et G sont en somme directe.

Supposons que F et G sont en somme directe. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0_E = 0_E + x$, ce qui donne $x = 0_E$ par unicité de la décomposition de x sur $F + G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. ■

Rappelons que, dans un espace vectoriel, tous les sous-espaces partagent au moins le vecteur 0_E (il n'est donc pas question de parler de sous-espaces disjoints). Autrement dit, deux sous-espaces sont en somme directe lorsqu'ils s'intersectent au minimum possible (à savoir $\{0_E\}$).

Il est facile de comprendre pourquoi on perd l'unicité lorsque la condition $F \cap G = \{0_E\}$ est en défaut. En effet, si z se décompose sur $F + G$ en $z = x + y$ et si a est un vecteur non nul de $F \cap G$, alors $z = (x + a) + (y - a)$ est une autre décomposition de z sur $F + G$.

Ce critère ne se généralise pas (de manière simple) à plus de deux sous-espaces. Par exemple, il est tout à fait possible que $F \cap G \cap H = \{0_E\}$ sans que la somme $F + G + H$ soit directe. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer trois droites vectorielles coplanaires deux à deux distinctes.

Exemples :

- $\{0_E\}$ est en somme directe avec tout autre sous-espace alors que E n'est en somme directe qu'avec $\{0_E\}$.
- Deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe.
- Une droite vectorielle et un plan vectoriel qui ne contient pas la droite sont en somme directe.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, le sous-espace des polynômes pairs (ceux qui n'ont que des monômes de degrés pairs) et le sous-espace des polynômes impairs (ceux qui n'ont que des monômes de degrés impairs) sont en somme directe.
- Dans $K(X)$, les sous-espaces $K[X]$ et $K_{-1}(X)$ sont en somme directe.

c) Couples de sous-espaces supplémentaires

Lorsqu'on effectue une somme de deux sous-espaces et que celle-ci est directe, on obtient une situation remarquable où la décomposition des vecteurs de la somme sur les deux sous-espaces existe et est unique.

Définition 16

Soient E un K -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E se décompose de façon unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , c'est-à-dire lorsque

$$F \oplus G = E,$$

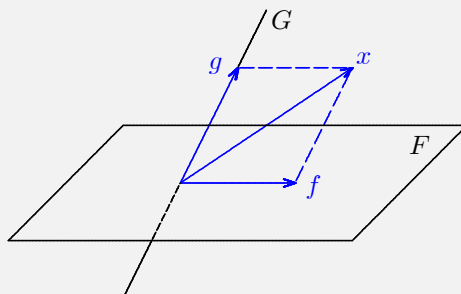
ce qui signifie que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E .

Nous verrons que la notion de supplémentaire remplace philosophiquement celle de partition (qui n'aurait pas de sens dans les espaces vectoriels). Pourtant, il est primordial de ne pas confondre un « supplémentaire » ($F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$) qui est un sous-espace vectoriel et le « complémentaire » ($F \cap G = \emptyset$ et $F \cup G = E$) qui ne contient même pas le vecteur nul. En particulier, lorsque l'on sait que $F \oplus G = E$, l'information $x \notin F$ n'implique pas que $x \in G$!!

Exemples :

- E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires dans E .
- Dans le plan, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.
Il ne faut donc pas parler DU supplémentaire puisqu'il n'y a pas unicité en général.
- Dans l'espace géométrique, un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans ce plan sont supplémentaires :



- Soit $B \in K[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la division euclidienne nous dit que, pour tout polynôme $A \in K[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < n$. Cela signifie que, dans $K[X]$, les deux sous-espaces vectoriels $BK[X]$ et $K_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $K[X]$.
- Les sous-espaces $K[X]$ et $\{F \in K(X) : \deg(F) < 0\}$ sont supplémentaires dans $K(X)$.
- Soit X une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0. On note $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sur X . Démontrons que $\mathcal{P}(X, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$.
Raisonnons par analyse et synthèse. Soit $f \in \mathbb{R}^X$.

Analyse : On cherche à écrire f sous la forme $f = h + g$ avec $h \in \mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{I}(X, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = h(x) + g(x)$ et $f(-x) = h(-x) + g(-x) = h(x) - g(x)$, ce qui donne

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Cela démontre que, sous réserve d'existence, la décomposition d'une fonction quelconque sur $\mathcal{P}(X, \mathbb{R}) + \mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ est unique. Donc $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ sont en somme directe.

Synthèse : Considérons précisément les fonction h et g définies par les formules ci-dessus. On constate tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) + g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x),$$

donc $h + g = f$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = h(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -g(x),$$

ce qui signifie que h est paire et g est impaire. Donc $\mathcal{P}(X, \mathbb{R}) + \mathcal{I}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$.

Conclusion : On a démontré que $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^X .

- Démontrons que le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Raisonnons par analyse et synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse : On cherche à écrire M sous la forme $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$, ce qui donne

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Cela nous démontre que, sous réserve d'existence, la décomposition d'une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est unique. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.

Synthèse : Considérons précisément les matrices

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

On constate tout d'abord que

$$S + A = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} = M.$$

Par ailleurs,

$${}^tS = \frac{{}^tM + M}{2} = S \quad \text{et} \quad {}^tA = \frac{{}^tM - M}{2} = -A,$$

ce qui signifie que S est symétrique et A est antisymétrique. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : On a démontré que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans un espace vectoriel quelconque, l'existence d'un supplémentaire est, comme pour les bases, assurée par le lemme de Zorn.

Théorème 4

Soient E un K -espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E .

■ Soit F un sous-espace vectoriel de E . Notons \mathcal{F} une base de F . Dans E , la famille \mathcal{F} est libre. Le théorème de la base incomplète (théorème 2) nous dit qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Dès lors, on constate aisément que $\text{Vect}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{F})$ est un supplémentaire de F dans E (c'est un cas particulier du lemme de juxtaposition des bases que nous énoncerons dans le prochain paragraphe). ■

D.2. Familles et sommes

a) Famille génératrice d'une somme

L'énoncé suivant explique comment déterminer une famille génératrice d'une somme simple.

Proposition 16

Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . Pour tout $i \in I$, on note $(x_{i,j})_{j \in J_i}$ une famille génératrice de F_i . Alors la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est engendrée par la famille juxtaposée $(x_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$. Autrement dit,

$$\sum_{i \in I} \text{Vect}((x_{i,j})_{j \in J_i}) = \text{Vect}((x_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}).$$

■ On a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \text{Vect}((x_{i,j})_{j \in J_i}) &= \left\{ \sum_{i \in I} y_i : (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (\text{Vect}((x_{i,j})_{j \in J_i})) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} x_{i,j} : (\lambda_{i,j})_{i \in I, j \in J_i} \in K^{(\prod_{i \in I} \{i\} \times J_i)} \right\} \\ &= \text{Vect}((x_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}), \end{aligned}$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

On retiendra donc que le caractère générateur passe à la somme, au sens où la réunion de familles génératrices de chaque F_i est une famille génératrice de $\sum_{i \in I} F_i$.

Exemples :

- Dans le cas particulier de deux sous-espaces engendrés par des familles finies, on a

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) + \text{Vect}(y_1, \dots, y_q) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q).$$

Il est clair qu'il n'en va pas de même pour la liberté puisque la réunion de deux familles libres n'est pas nécessairement libre. Nous allons voir, au prochain paragraphe, que c'est toutefois vrai si la somme est directe.

ℓ) Bases d'une somme directe

Voici le [lemme de juxtaposition des bases](#).

Théorème 5

Soient E un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E . Pour tout $i \in I$, on note $(e_{i,j})_{j \in J_i}$ une base de F_i . Alors la famille juxtaposée $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ est une base de $\sum_{i \in I} F_i$ si, et seulement si, les F_i sont en somme directe.

- \Rightarrow Supposons que la famille $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ est une base de la somme $\sum_{i \in I} F_i$.
 Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_p \in I$ et $x_{i_1} \in F_{i_1}, \dots, x_{i_p} \in F_{i_p}$ tels que $x_{i_1} + \dots + x_{i_p} = 0_E$.
 Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la famille $(e_{i_k, j})_{j \in J_{i_k}}$ étant génératrice de F_{i_k} , il existe $(\lambda_{i_k, j})_{j \in J_{i_k}} \in K^{(J_{i_k})}$ tel que $x_{i_k} = \sum_{j \in J_{i_k}} \lambda_{i_k, j} e_{i_k, j}$.
 Mézalors, on a $\sum_{1 \leq k \leq p} \sum_{j \in J_{i_k}} \lambda_{i_k, j} e_{i_k, j} = 0_E$, ce qui implique que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall j \in J_{i_k}, \lambda_{i_k, j} = 0$ d'après la liberté de la famille $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$.
 Par conséquent, on a $x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0_E$, ce qui démontre que les F_i sont en somme directe.
- \Leftarrow Supposons que les F_i sont en somme directe.
 On vient de voir, dans la proposition 16, que la réunion de familles génératrices de chaque F_i est une famille génératrice de $\sum_{i \in I} F_i$. Donc $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ est génératrice de $\sum_{i \in I} F_i$.
 Considérons $(\lambda_{i,j})_{i \in I, j \in J_i} \in K^{(\prod_{i \in I} \{i\} \times J_i)}$ telle que $\sum_{i \in I, j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E$. Cette égalité peut se réécrire sous la forme $\sum_{i \in I} (\sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = 0_E$. Comme la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe, on en déduit que, pour tout $i \in I$, on a $\sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E$. Dès lors, pour chaque $i \in I$, la liberté de la famille $(e_{i,j})_{j \in J_i}$ nous dit que $\forall j \in J_i, \lambda_{i,j} = 0$. On a ainsi démontré que $\forall i \in I, \forall j \in J_i, \lambda_{i,j} = 0$, ce qui prouve que la famille $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ est libre.
 Donc $(e_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ est une base de la somme $\sum_{i \in I} F_i$. ■

Utilisation du lemme de juxtaposition des bases

Le lemme de juxtaposition des bases s'utilise dans deux circonstances :

- Si $\bigoplus_{i \in I} F_i$ est une somme directe donnée, on en détermine une base en concaténant une base de chaque F_i . Une telle base est dite [adaptée](#) à la somme directe $\bigoplus_{i \in I} F_i$.
 En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E (c'est-à-dire $F \oplus G = E$), la concaténation d'une base de F et d'une base de G fournit une base de E tout entier.
- Pour démontrer que les sous-espaces d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ sont en somme directe, dans le cas où l'on connaît une base de chaque sous-espace, on démontre que la concaténation de ces bases est une famille libre.
 Ainsi, si \mathcal{F} est une base de F , \mathcal{G} est une base de G et $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de E , alors F et G sont supplémentaires dans E .

Exemples :

- Il existe une base de $\mathcal{M}_n(K)$ constituée de matrices symétriques ou antisymétriques.
- Comme $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}_{-1}(X)$ où $\mathbb{C}_{-1}(X) = \{F \in \mathbb{C}(X) : \deg(F) < 0\}$, la juxtaposition de la famille des monômes $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et de la famille des éléments simples de premières espèces $(1/(X-a)^m)_{a \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^*}$ est une base de $\mathbb{C}(X)$.

E. Sous-espaces affines

Il s'agit dans cette section de présenter la structure affine des espaces vectoriels, c'est-à-dire de mettre en œuvre, sur un K -espace vectoriel, des outils permettant d'exprimer que des points sont alignés ou coplanaires, que des droites ou des plans sont parallèles.

E.1. Structure affine d'un espace vectoriel

Par analogie avec les géométries plane et spatiale, on adopte, en géométrie affine, une double représentation de l'espace vectoriel : ponctuelle et vectorielle.

Définition 17

Soit E un K -espace vectoriel. Lorsque l'on fait de la géométrie affine sur E , on regarde E sous deux aspects :

- ▶ le point de vue vectoriel, où les vecteurs de E sont généralement représentés par des lettres minuscules surmontées d'une flèche : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{i}, \vec{j}, \dots$ en particulier, le vecteur nul de E est noté $\vec{0}$;
- ▶ le point de vue affine, où
 - ▷ les éléments de E sont appelés **points** et sont représentés par des lettres majuscules romaines : A, B, C, M, N, P, \dots ;
 - ▷ si A et B sont deux points de E , on désigne par \overrightarrow{AB} le vecteur $B - A$.

On dit alors que l'on a muni E d'une structure d'**espace affine**. Dans cette structure, le point O désigne le vecteur $\vec{0}$.

Il découle de ces notations que le point M est aussi le vecteur \overrightarrow{OM} .

Avec ces notations, on a les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 17

On a

- (i) $(A = B) \iff (\overrightarrow{AB} = 0)$;
- (ii) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
- (iii) $(B = A + \vec{u}) \iff (\vec{u} = \overrightarrow{AB})$;
- (iv) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (**relation de Chasles**).

É.2. Sous-espaces affines

Définition 18

Soit E un K -espace vectoriel. On dit qu'une partie \mathcal{F} de E est un **sous-espace affine** de E lorsqu'il existe un point Ω de \mathcal{F} et un sous-espace vectoriel F de E tels que

$$\mathcal{F} = \Omega + F = \{\Omega + \vec{u} : \vec{u} \in F\}.$$

Le point Ω peut être choisi arbitrairement dans \mathcal{F} . Autrement dit, pour tout point A de \mathcal{F} , on a

$$\mathcal{F} = A + F \quad \text{et} \quad F = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}.$$

Au contraire, le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine est unique. On l'appelle la **direction** de \mathcal{F} . Elle est parfois notée $\vec{\mathcal{F}}$.

On dit que \mathcal{F} est le sous-espace affine de E passant par Ω et dirigé par F .

■ Soit $A \in \mathcal{F}$.

▷ On sait qu'il existe $\vec{u} \in F$ tel que $A = \Omega + \vec{u}$ et donc $\mathcal{F} = \Omega + F = A - \vec{u} + F = A + F$.

▷ Démontrons que $F = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$. On raisonne par double inclusion.

▷ Soit $\vec{v} \in \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$. Il existe alors $M \in \mathcal{F}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$. Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A} \in F$, donc $\vec{v} \in F$. D'où $\{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\} \subset F$.

▷ Réciproquement, considérons $\vec{u} \in F$. Posons $M = A + \vec{u}$ de sorte que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. Alors $M \in A + F = \mathcal{F}$ et donc $\vec{u} \in \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$. D'où $F \subset \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$.

Si Ω est un point fixé de \mathcal{F} , on a $F = \{\overrightarrow{\Omega M} : M \in \mathcal{F}\}$, ce qui démontre l'unicité de F . ■

Tout sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace affine de E et il est sa propre direction puisque $F = O + F$. Réciproquement, si un sous-espace affine \mathcal{F} contient O , alors l'égalité $\mathcal{F} = O + F = F$ prouve que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel. Un sous-espace affine est donc un sous-espace vectoriel si, et seulement si, il contient O .

Exemples :

- Un singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine de E , de direction $\{\vec{0}\}$.
- Une partie \mathcal{D} d'un K -espace vectoriel E est une **droite affine** s'il existe un point A et un vecteur non nul \vec{u} tels que $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u}) = \{A + \lambda \vec{u} : \lambda \in K\}$. On dit alors que \vec{u} est un **vecteur directeur** de \mathcal{D} ou encore que \mathcal{D} est dirigée par \vec{u} .
- Une partie \mathcal{P} d'un K -espace vectoriel E est un plan affine s'il existe un point A et deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} tels que $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in K\}$.
- En analyse, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' + a(t)y = b(t)$ est un sous-espace affine de l'espace des fonctions dérivables, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$.
- De même, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est un sous-espace affine de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé.

L'exemple des droites et plans affines montre qu'un sous-espace affine est totalement caractérisé par la donnée d'un de ses points et d'une base de sa direction. On retrouve ainsi la notion de repère telle qu'on la connaît en géométrie plane ou spatiale.

Définition 19

Soient E un K -espace vectoriel et \mathcal{F} un sous-espace affine de E de direction F . On appelle **repère cartésien** de \mathcal{F} la donnée d'un point Ω de \mathcal{F} , appelé **origine**, et d'une base \mathcal{B} de F . Les coordonnées d'un point M de \mathcal{F} dans le repère (Ω, \mathcal{B}) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base \mathcal{B} .

É.3. Translations

Définition 20

Soient E un K -espace vectoriel et $\vec{a} \in E$ est un vecteur fixé. On appelle **translation**, de vecteur \vec{a} , l'application $t_{\vec{a}}$ de E dans E définie par

$$t_{\vec{a}} \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \vec{a} \end{array} \right.$$

L'ensemble des translations de E est noté $\mathcal{T}(E)$.

On peut reformuler la définition d'un sous-espace affine à l'aide des translations : un sous-espace affine est l'image d'un sous-espace vectoriel par une translation.

Le résultat suivant décrit la structure de groupe de $\mathcal{T}(E)$.

Proposition 18

Soit E un K -espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des translations de E est un sous-groupe abélien du groupe $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ des bijections de E . Plus précisément, on a

- (i) la translation de vecteur \vec{a} est Id_E si, et seulement si, $\vec{a} = \vec{0}$;
- (ii) la composée (dans n'importe quel ordre) de deux translations de vecteurs respectifs \vec{a} et \vec{b} est la translation de vecteur $\vec{a} + \vec{b}$;
- (iii) la translation de vecteur \vec{a} est bijective et admet pour réciproque la translation de vecteur $-\vec{a}$.

■ AQT

■

E.4. Parallélisme

Définition 21

Soient E un K -espace vectoriel et \mathcal{F}, \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

On dit que \mathcal{F} est **faiblement parallèle** à \mathcal{G} lorsque $F \subset G$. On écrit alors que $\mathcal{F} // \mathcal{G}$.

On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont **parallèles** lorsque $F = G$. On écrit alors que $\mathcal{F} || \mathcal{G}$.

Le parallélisme est une relation d'équivalence. Par contre, le parallélisme faible n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas symétrique).

Autre piège avec le faible parallélisme : deux sous-espaces affines peuvent être faiblement parallèles à un troisième sans être parallèles entre eux. Ainsi, deux droites peuvent être parallèles à un même plan sans être parallèles entre elles.

Nous verrons que le parallélisme et le faible parallélisme coïncident lorsqu'on les restreint aux droites affines ou aux plans affines ou, plus généralement, à une famille de sous-espaces affines de même dimension.

Lorsque deux sous-espaces affines sont parallèles, l'un est l'image de l'autre par une translation.

Exemples :

- Un singleton est faiblement parallèle à tout sous-espace affine.
- Tout sous-espace affine de E est faiblement parallèle à E .
- Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont un vecteur directeur en commun.
- Une droite \mathcal{D} est faiblement parallèle à un plan \mathcal{P} lorsque pour tous points A et B de \mathcal{D} , il existe des points A' et B' de \mathcal{P} tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

É. 5. Intersection de sous-espaces affines

Proposition 19

Une intersection (finie ou infinie) de sous-espaces affines est ou bien vide ou bien un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions.

■ Soient E un K -espace vectoriel et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E . Pour tout $i \in I$, notons F_i la direction respective de \mathcal{F}_i . Supposons que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ et considérons un point A de cette intersection. L'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est un sous-espace vectoriel de E . Pour tout point M de E , on a

$$\begin{aligned} (M \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i) &\iff (\forall i \in I, M \in \mathcal{F}_i) \\ &\iff (\forall i \in I, \overrightarrow{AM} \in F_i) \\ &\iff (\overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i \in I} F_i) \end{aligned}$$

donc

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = A + \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Ainsi $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est le sous-espace affine contenant A de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$. ■

Exemples :

- En géométrie plane, l'intersection de deux droites affines est soit vide, soit un point soit une droite (si les deux droites sont confondues).
- En géométrie spatiale, l'intersection de deux plans affines est soit vide, soit une droite, soit un plan (si les deux plans sont confondues). L'intersection d'une droite et d'un plan est soit un point soit une droite (si la droite est incluse dans le plan).
- Deux sous-espaces affines parallèles sont ou bien égaux ou bien d'intersection vide.

É.6. Parties convexes

Définition 22

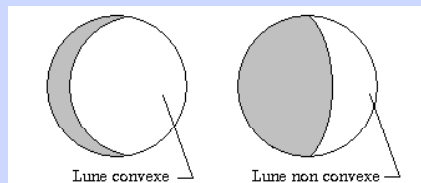
Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A, B deux points de E . On appelle **segment** d'extrémités A et B l'ensemble $[AB] = \{M \in E : \exists t \in [0; 1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$.

La définition suivante généralise la notion de convexité, déjà rencontrée dans \mathbb{R} .

Définition 23

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Une partie \mathcal{C} de E est dite **convexe** lorsque

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, [AB] \subset \mathcal{C}.$$



Exemples :

- \emptyset est une partie convexe.
- Un sous-espace affine \mathcal{F} est convexe.
Soit \mathcal{F} un convexe de direction F . Soient $A, B \in \mathcal{F}$ et $M \in [AB]$ de sorte que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ où $t \in [0; 1]$. Comme A et B sont dans \mathcal{F} , on a $B = A + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in F$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Alors $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \in F$, c'est-à-dire $M = A + t\overrightarrow{u}$, ce qui démontre que $M \in \mathcal{F}$.
- Les parties convexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles.
- Une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est convexe si, et seulement si, son **épigraphe** $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ est une partie convexe du plan.

Il est clair que la réunion de deux convexes n'est pas nécessairement convexe comme l'illustre l'exemple de deux droites distinctes. Par contre, la convexité est stable par intersection.

Proposition 20

Une intersection quelconque (finie ou infinie) de parties convexes est une partie convexe.

■ Soit $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ une intersection de parties convexes. Si celle-ci est vide, c'est terminé. Sinon, on considère A et B deux points dans $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Ils sont dans chacune des parties \mathcal{C}_i et, par convexité d'icelles, le segment $[AB]$ est lui aussi dans chacune des parties \mathcal{C}_i , donc dans $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Cette partie est donc convexe. ■

Cette stabilité de la convexité par rapport à l'intersection permet d'introduire le plus petit convexe contenant une partie donnée : l'enveloppe convexe.

Définition 24

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathcal{A} une partie de E . L'intersection de toutes les parties convexes contenant \mathcal{A} , c'est-à-dire la plus petite partie convexe contenant \mathcal{A} s'appelle l'**enveloppe convexe** de \mathcal{A} .

Exemples :

- L'enveloppe convexe de deux points est le segment joignant ces deux points. L'enveloppe convexe de trois points non alignés est le triangle plein, de sommets ces trois points.
- L'enveloppe convexe d'un cercle est le disque bordé par ce cercle.