Problème

Presque codiagonalisabilité et théorème de Gerstenhaber

Dans tout ce texte, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Tous les espaces vectoriels complexes de dimension finie qui interviennent dans le problème sont munis de leur topologie usuelle.

Pour m dans $\mathbb{N}^*$, on note J_m la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dont tous les termes sont nuls, sauf les termes d'indices $(i, i+1)$ avec $1 \leq i \leq n-1$, tous égaux à 1. Ainsi, par exemple

$$J_1 = (0), \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant donné un endomorphisme u de E et un vecteur x de E, on définit

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \; ; \; u \circ v = v \circ u\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{C}[u](x) = \{P(u)(x) \; ; \; P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

Si V un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|V}$ l'induit de u sur V.

I. Réduction de Jordan

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

   a) Montrer que $\mathbb{C}[u](x)$ est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x.

   b) On note
   $$d_x = \min\{m \in \mathbb{N}^* \; ; \; u^m(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x))\}.$$
   Montrer que $(u^{d_x-1}(x), u^{d_x-2}(x), \ldots, u(x), x)$ est une base de $\mathbb{C}[u](x)$.

   c) On suppose que u est nilpotent. Montrer que
   $$d_x = \min\{m \in \mathbb{N}^* \; ; \; u^m(x) = 0\}.$$

2. On se propose d'établir le théorème suivant : pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul V de dimension finie, pour tout endomorphisme nilpotent u de V, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ de $V \setminus \{0\}$ tels que la famille $(u^j(x_i))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq d_{x_i}-1}}$ soit une base de V.

   On suppose $n \geq 2$, le théorème acquis pour V de dimension au plus $n-1$. On suppose V de dimension n, on fixe u dans $\mathcal{L}(V)$ nilpotent et non nul. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on définit d_x comme dans la question 1.

a) Justifier l'existence d'un entier $r \geq 1$ et de vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_r$ de $\mathrm{Im}(u)$ tels que la famille $(u^j(x_i))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq d_{x_i}-1}}$ soit une base de $\mathrm{Im}(u)$.

b) Pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, on écrit $x_i = u(y_i)$ avec $y_i \in V$. Montrer qu'il existe un entier naturel s et des vecteurs $z_1, \ldots, z_s$ de V tels que la famille $(u^{d_{x_1}}(y_1), \ldots, u^{d_{x_r}}(y_r), z_1, \ldots, z_s)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

c) Exprimer la dimension de V en fonction de r, s et $d_{x_1}, \ldots, d_{x_r}$.

d) Montrer que la famille obtenue en concaténant les familles $(z_1, \ldots, z_s)$ et $(u^j(y_i))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq d_{x_i}}}$ est une base de V. Conclure.

3. a) Montrer que, si u est un endomorphisme nilpotent de E, il existe une base e de E, un élément r de $\mathbb{N}^*$, des éléments $d_1, \ldots, d_r$ de $\mathbb{N}^*$ tels que la matrice de u dans e soit la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{Diag}\,(J_{d_1}, \ldots, J_{d_r})\,.$$

b) Montrer que, si u est un endomorphisme quelconque de E, il existe un entier $m \geq 1$, des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (non nécessairement distincts), des éléments $n_1, \ldots, n_m$ de $\mathbb{N}^*$ et une base e de E telle que la matrice de u dans e soit la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{Diag}\,(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \ldots, \lambda_m I_{n_m} + J_{n_m})\,.$$

c) On adopte les notations de la question b). Pour λ dans $\mathbb{C}$, quelle est la dimension du sous-espace propre de u associé à λ ?

II. Endomorphismes cycliques

Soient n la dimension de E, u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe un élément x de E tel que $E = \mathbb{C}[u](x)$, ou encore (question 1) tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

4. On suppose que u est nilpotent. Établir l'équivalence :

$$u \text{ est cyclique} \iff u^{n-1} \neq 0 \iff \dim\left(\mathrm{Ker}(u)\right) = 1.$$

5. On suppose que u est cyclique.

a) Déterminer la dimension de $\mathbb{C}[u]$.

b) Soit $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Vérifier que l'application δ_x qui à l'élément v de $C(u)$ associe $v(x)$ est une injection linéaire de $C(u)$ dans E. En déduire que $C(u) = \mathbb{C}[u]$.

6. On suppose que u est cyclique. Soient $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E, V un sous-espace de E stable par u. On note

$$I_V = \{P \in \mathbb{C}[X] \ ; \ P(u)(x) \in V\}.$$

Vérifier que I_V est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ contenant Π_u. En déduire que $u_{|V}$ est cyclique.

7. Soient V et W deux sous-espaces de E stables par u tels que

$$E = V \oplus W.$$

On suppose que $u_{|V}$ (resp. $u_{|W}$) est cyclique, on note x (resp. y) un élément de V (resp. W) tel que $V = \mathbb{C}[u](x)$ (resp. $W = \mathbb{C}[u](y)$). On suppose également que $\pi_{u|V}$ et $\pi_{u|W}$ sont premiers entre eux.

Montrer que $E = \mathbb{C}[u](x+y)$. Ainsi, u est cyclique.

8. Montrer que u est cyclique si et seulement si

$$\forall \lambda \in \sigma(u), \qquad \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 1.$$

9. Montrer que, quel que soit u, $C(u)$ contient un endomorphisme cyclique.

III. Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$; presque codiagonalisabilité

10. Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{A}^m$, on note $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$ la sous-algèbre de $\mathbb{A}$ engendrée par $a_1, \ldots, a_m$, c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de $\mathbb{A}$ (au sens de l'inclusion) contenant $a_1, \ldots, a_m$.

On prend $\mathbb{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique.

a) Déterminer $\mathbb{C}[E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n}]$.

b) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer $\mathbb{C}[D]$.

c) On prend D comme en b), S la matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée au n-cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Déterminer $\mathbb{C}[D, S]$.

11. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, r un entier naturel majoré par $\min(p, q)$. Montrer que l'ensemble

$$R_r = \{M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \ ; \ \mathrm{rg}(M) \leq r\}$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

12. Si $d \in \mathbb{N}^*$, un d-uplet $(u_1, \dots, u_d)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ est dit presque codiagonalisable s'il existe des suites $(u_{1,k})_{k \geq 1}, \dots, (u_{d,k})_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ telles que :

- pour tout $k \geq 1$, la famille $(u_{1,k}, \dots, u_{d,k})_{k \geq 1}$ est codiagonalisable ;

- pour tout i de $\{1, \dots, d\}$, $u_{i,k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} u_i$.

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_d)$ un d-uplet presque codiagonalisable d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que les u_i, $1 \leq i \leq d$, commutent deux à deux et que

$$\dim \mathbb{C}[u_1, \dots, u_d] \leq n.$$

13. a) On considère les quatre matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$A_1 = E_{1,3},\ A_2 = E_{1,4},\ A_3 = E_{2,3},\ A_4 = E_{2,4}.$$

Vérifier que A_1, A_2, A_3, A_4 commutent deux à deux et calculer la dimension de $\mathbb{C}[A_1, A_2, A_3, A_4]$.

b) On suppose $n > 4$ et on pose $m = n-4$. On prend A_1, A_2, A_3, A_4 comme en a). On note B_1 la matrice de permutation de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ associée au m-cycle $(12\dots m)$. On prend B_2, B_3, B_4 égales à l'élément nul de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Enfin, pour $1 \leq i \leq 4$, soit E_i l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$E_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathbb{C}[E_1, E_2, E_3, E_4]$ est de dimension $n+1$.

c) On suppose que la dimension de E est $n \geq 4$. Montrer qu'il existe quatre endomorphismes u_1, u_2, u_3, u_4 de E commutant deux à deux mais tels que (u_1, u_2, u_3, u_4) ne soit pas presque codiagonalisable.

IV. Le théorème de Gerstenhaber

Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

14. On suppose que u est cyclique. En utilisant éventuellement le résultat de la question 5.b), montrer que (u, v) est presque codiagonalisable.

15. On revient au cas général. On dispose, grâce la question 9, d'un endomorphisme cyclique u' commutant à v. Montrer que l'ensemble des λ de $\mathbb{C}$ tels que $\lambda u + (1-\lambda)u'$ ne soit pas cyclique est fini.

16. Conclure que (u, v) est presque codiagonalisable[1]. Qu'en déduit-on sur la dimension de $\mathbb{C}[u, v]$?

17. Soit $n \geq 3$ un entier. Expliciter deux éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$, que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[A, B]$ soit de dimension n et ne soit pas monogène.

[1]Ce résultat est dû à Gerstenhaber (1961). Les questions 13.c) et 16 laissent ouverte la question de savoir si un triplet commutatif d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ est presque codiagonalisable. C'est faux si la dimension de E est ≥ 29, mais vrai pour $n \leq 8$. La réponse complète est inconnue à ce jour.