

Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Maths 1
- *NOM Prénom* : POZNANSKI Stéphane

Exercice

Dans une urne il y a N_b boules bleues, N_r boules rouges. On tire à chaque tour une boule dans l'urne, avec une probabilité p d'obtenir une boule rouge, et une probabilité $1 - p$ d'obtenir une boule bleue. Si les boules d'une couleur donnée ont été toutes tirées, on ne peut que tirer l'autre couleur. On note $T(k)$ la variable aléatoire donnant le nombre de boules restantes après k tirages.

Minimiser $\mathbb{E}(T(N_b + N_r)^2)$ en fonction de p .

Remarques sur l'oral

La dictée de l'énoncé prend au moins 3min. J'essaye de voir s'il y a une astuce avant de commencer à bourriner, mais je m'y décide à un moment. Afin de trouver la loi de T (puis on utilise une fonction de transfert), je note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de boules rouges et bleues restantes au temps k , il me dit que ça dépend de k donc je les indice par k . En distinguant les cas d'un épuisement total d'une couleur ou pas, je somme et j'obtiens une somme pas très jolie (ça me prend grossomodo 20-25min).

Là je suis un peu dubitatif, j'essaye de sortir quelques idées pour calculer la somme, par exemple des calculs de dérivées de séries entières, car on n'a pas tous les termes d'une somme binomiale ; je lui dis que j'avais peut-être fait fausse piste dès le début, qu'il y avait une petite astuce avec des indicatrices bien choisies, puis l'examinateur me dit que j'y suis pas loin (ouf...). Finalement "le temps se faisant court", il me donne l'expression de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T(N_b + N_r)^2) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} (k - N_b)^2$$

où k est le nombre de boules tirées si on a épuisé un stock d'une couleur (je ne suis plus tout à fait sûr), et $N = N_b + N_r$.

Avant de me donner une autre indication, il me demande comment je peux continuer. Calcul classique, je lui propose de développer le carré et d'utiliser les dérivées premières et secondes du polynôme $(1+x)^N$. Il acquiesce et me laisse continuer. Je ne me suis pas beaucoup retourné mais je savais pas s'il suivait attentivement mes calculs ou pas, il baillait parfois. J'arrive au bout du calcul, ça me prend deux tableaux (au tableau c'est pas aussi facile que sur une feuille, il venait parfois vérifier les calculs), quand il me dit que l'oral est terminé. "C'est déjà bien d'être arrivé à cette expression, on est ramené à un problème d'analyse réelle, je vous fais confiance". Il me demande si j'ai oral le dimanche (hélas oui), et me souhaite bonne continuation. Examinateur qui mettait vraiment à l'aise.