Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1. Suites sous-additives et pentes de A'Campo

A. Lemme de Fekete

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *sous-additive*, c'est-à-dire

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

1. Soient $m, q, r \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_{mq+r} \leqslant q u_m + u_r$.
2. a) On suppose que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée et l'on note α sa borne inférieure. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{u_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

   et en déduire que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers α.

   b) On suppose maintenant que la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée. Démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.

B. Pentes de A'Campo

On dit qu'une application $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une *pente* de A'Campo lorsque l'ensemble $\{\lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ est une partie finie de $\mathbb{Z}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que l'application $\lambda_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_x(n) = \lceil nx \rceil$ est une pente.
2. Soit λ une pente.
   a) Justifier l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m) \leqslant \beta$.
   b) Démontrer que $(\lambda(n) + \beta)_{n\geqslant 0}$ et $(-\lambda(n) - \alpha)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites sous-additives.
   c) Démontrer que la suite $(\lambda(n)/n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note $\ell(\lambda)$ sa limite.
   d) Que peut-on dire du signe de $\ell(\lambda)$? Préciser le comportement asymptotique de la suite $(\lambda(n))_{n\geqslant 0}$ lorsque $\ell(\lambda) > 0$.
   e) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On reprend l'exemple de la pente λ_x définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_x(n) = \lceil nx \rceil$. Déterminer $\ell(\lambda_x)$.
3. Soient λ et μ deux pentes.
   Justifier que $\lambda + \mu$ est une pente et démontrer que $\ell(\lambda + \mu) = \ell(\lambda) + \ell(\mu)$.
4. Soient λ et μ deux pentes.
   Justifier que $\lambda \circ \mu$ est une pente et démontrer que $\ell(\lambda \circ \mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu)$.
5. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des pentes. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   On munit $\mathscr{P}$ de la relation $\sim$ définie par

$$\forall \lambda, \mu \in \mathscr{P}, \qquad (\lambda \sim \mu) \iff \big(\ell(\lambda) = \ell(\mu)\big).$$

   a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}$.
   b) Démontrer que l'ensemble quotient $\mathscr{P}/\sim$ est en bijection avec $\mathbb{R}_+$.

La version électronique de ce document
(disponible sur le site) contient des indications.

Récréation mathématique

Un roi s'adresse à deux de ses chevaliers : « Celui de vous deux dont le cheval arrivera le dernier à la Tour, gagnera une pièce en or ». À ces mots, les deux chevaliers se précipitent aux écuries, enfourchent chacun un cheval, et se dirigent au grand galop vers la Tour.

Comment expliquer leur comportement ?

Indications

A. 1. On récurre !

2. a) Pour obtenir l'existence de n_ε, on utilise le fait que $\alpha + \varepsilon/2$ n'est pas un minorant de la suite $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$.
Pour démontrer que $(u_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers α, on considère un entier n assez grand, on fait la division euclidienne de n par n_ε puis on utilise le résultat de la question 1 et le fait que la suite $\big((|u_{n_e}| + \max\{u_0, \ldots, u_{n_\varepsilon - 1}\})/n\big)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

b) On adapte le raisonnement de la question précédente (on ne travaille pas avec un $\varepsilon > 0$ mais avec un $A \in \mathbb{R}$ quelconque).

B. 1. On montre que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ -2 < \lambda_x(n+m) - \lambda_x(n) - \lambda_x(m) < 1$.

2. a) Pour un ensemble d'entiers, il revient au même d'être fini ou d'être borné.

b) Simple vérification.

c) D'après la question précédente et le lemme de Fekete, $\big((\lambda(n)+\beta)/n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(-(\lambda(n)+\alpha)/n\big)_{n\geqslant 1}$ tendent vers une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On montre que cette limite ne peut pas être $-\infty$.

d) On a $\ell(\lambda) \geqslant 0$ par passage à la limite.
Le cas $\ell(\lambda) > 0$ implique la divergence de $(\lambda(n))_{n\geqslant 0}$ vers $+\infty$ (on utilise Binet).

e) On a $\ell(\lambda_x) = x$.

3. Si l'on pose $\mathrm{d}_\lambda(m,n) = \lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m)$, on vérifie que $\mathrm{d}_{\lambda+\mu} = \mathrm{d}_\lambda + \mathrm{d}_\mu$, ce qui permet de voir que $\lambda + \mu$ est une pente. L'égalité $\ell(\lambda+\mu) = \ell(\lambda) + \ell(\mu)$ est simple à établir.

4. On vérifie que

$$\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) = \mathrm{d}_\lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n)+\mu(m)\big) + \lambda\big(\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n), \mu(m)\big)$$

ou

$$\mathrm{d}_{\lambda\circ\mu}(n,m) = -\mathrm{d}_\lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m), \mu(n)+\mu(m)+\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) - \lambda\big(-\mathrm{d}_\mu(n,m)\big) + \mathrm{d}_\lambda\big(\mu(n), \mu(m)\big)$$

ce qui permet de voir que $\lambda \circ \mu$ est une pente.

Pour avoir $\ell(\lambda\circ\mu) = \ell(\lambda)\ell(\mu)$, on exploite Binet :

$$\frac{\lambda\big(\mu(n)\big)}{n} = \frac{\lambda\big(\mu(n)\big)}{\mu(n)}\,\frac{\mu(n)}{n}$$

et on réfléchit. Il faut mettre à part le cas où $\ell(\mu) = 0$.

5. a) Simple vérification.

b) On vérifie que l'application de $\mathscr{P}/\!\sim$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à $\overline{\lambda}$ associe $\ell(\lambda)$ est bien définie et bijective.