INTÉGRALES IMPROPRES

♦ ***Exercice 1.*** [∘]
Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \sqrt{\ln x}}.$$

- Convergence en $+\infty$:
  - ► Si $\alpha < 1$, on prend β tel que $\alpha < \beta < 1$ de sorte que $x^\beta f(x) \longrightarrow +\infty$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} x^\beta$ diverge, l'intégrale $I(\alpha)$ diverge.
  - ► Si $\alpha > 1$, pareil mais cette fois-ci ça converge.
  - ► Pour $\alpha = -1$, on effectue le changement de variable $y = \ln x$, ce qui prouve la divergence.
- Convergence en 1 :
  On a $1/(x^\alpha \sqrt{\ln x}) \underset{x \to 1}{\sim} 1/\sqrt{x-1}$ et $\displaystyle\int_1^2 1/\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Bilan :

$$\boxed{\text{L'intégrale est donc convergente pour } \alpha < -1.}$$

♦ ***Exercice 2.*** [∘]
Nature et, si possible, calcul de l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \alpha}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \longmapsto 1/(\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \alpha)$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc $I(\alpha)$ n'est impropre qu'en $+\infty$. Or, au voisinage de l'infini, on a $g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2\,\mathrm{e}^{-t}$, ce qui permet d'affirmer, d'après le théorème de comparaison par $\sim$ des intégrales de fonctions positives, que

$$\boxed{I(\alpha) \text{ est convergente pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour le calcul, on effectue le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, de sorte que

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u/u}{(u + 1/u)/2 + \operatorname{ch} \alpha} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (2 \operatorname{ch} \alpha) u + 1}.$$

On distingue alors deux cas :

► Si $\alpha \neq 0$, on peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u + \mathrm{e}^\alpha)(u + \mathrm{e}^{-\alpha})} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{u + \mathrm{e}^{-\alpha}} - \frac{1}{u + \mathrm{e}^{\alpha}} \Big) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \Big[\ln \Big| \frac{u + \mathrm{e}^{-\alpha}}{u + \mathrm{e}^{\alpha}} \Big| \Big]_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \Big(0 - \ln \frac{1 + \mathrm{e}^{-\alpha}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha}} \Big) \\
&= \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}.
\end{aligned}$$

► Si $\alpha \neq 0$, on a

$$I(\alpha) = 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = 2\Big[-\frac{1}{1+u}\Big]_1^{+\infty} = 1.$$

En définitive,

$$\boxed{I(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\star$]

Nature et, si possible, calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \longmapsto (\ln t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $]0;1[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1. Comme φ est à valeurs négatives, il est licite d'utiliser des équivalents pour étudier la convergence des intégrales

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t.$$

On a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$. Or $t \longmapsto \ln t$ est intégrable sur $]0;1/2]$, donc I_1 converge.

Par ailleurs, on a $\varphi(t) \underset{t\to 1}{\sim} -\sqrt{1-t} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$, ce qui prouve que la fonction φ se prolonge par continuité en 1 en posant $\varphi(1) = 0$. L'intégrale I_2 et donc convergente.

En conclusion,

$$\boxed{I \text{ est une intégrale convergente.}}$$

Une intégration par parties donne

$$I = 2\big[(1-\sqrt{1-t})\ln t\big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}-1}{t}\mathrm{d}t$$

où l'on a choisi la primitive de $t \longmapsto 1/\sqrt{1-t}$ qui s'annule en 0 pour assurer la convergence du crochet. Par suite, on a

$$I = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}-1}{t}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ fournit alors

$$I = -4\int_0^1 \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u = -4\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+u}\Big)\,\mathrm{d}u = -4\Big[u - \ln|1+u|\Big]_0^1,$$

donc

$$\boxed{I = -4 + 4\ln 2.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier la convergence des intégrales impropres I et J.
2. Calculer $I + J$.
3. Démontrer que $I = J$.
4. Calculer I et J.

1. La fonction $f : x \longmapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0;\pi/2]$ donc I n'est impropre qu'en 0. Cette fonction étant négative sur $[0;\pi/2]$, on peut utiliser le critère de comparaison par $\sim$. Or $\ln(\sin x) \sim_0 \ln x$ car $\ln(\sin x)/\ln x = 1 + \ln(\sin x/x)/\ln x \longrightarrow 1$ et $\ln x$ est une fonction intégrable sur $[0;\pi/2]$, donc

$$\boxed{I \text{ est convergente.}}$$

De même, on démontre que

$$\boxed{J \text{ est convergente.}}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
I+J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad \text{en posant } u = 2x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad \text{en posant } v = u - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\cos v)\,\mathrm{d}v - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J - \frac{\pi}{2}\ln 2,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I + J = -\pi \ln 2.}$$

3. En effectuant le changement de variable $u = \pi/2 - x$, il vient

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \ln\big(\sin(\pi/2 - u)\big)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = J,$$

donc

$$\boxed{I = J.}$$

4. En associant les résultats des deux questions précédentes, on a

$$\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2}\ln 2.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$] (Intégrale de Gauss)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$m_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x, \qquad M_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale M_n.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$m_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant M_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$m_n = \sqrt{n}W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad M_n = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

4. On admet que $W_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$. Déterminer la valeur de I.

1. La fonction $f_n : x \longmapsto (1+x^2/n)^{-n}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale M_n est seulement impropre en $+\infty$. De plus, on a $f_n(x) \sim n^n/x^{2n}$ en $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}\big(x^2 f_n(x)\big) = 0$, car $n \in \mathbb{N}^*$. Le critère de Riemann assure alors l'existence de M_n. Donc

$$\boxed{\text{l'intégrale impropre } M_n \text{ est convergente.}}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. On a

$$m_n = \int_0^{\sqrt{n}} \Big(1-\frac{x^2}{n}\Big)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} \exp\Big\{n\ln\Big(1-\frac{x^2}{n}\Big)\Big\}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \exp\Big\{-n\frac{x^2}{n}\Big\}\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

où l'on a utilisé l'inégalité donnée car $-x^2/n \geqslant -1$. Par ailleurs, on a

$$M_n = \int_0^{+\infty} \Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-n} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-n\ln\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)\Big\}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-n\frac{x^2}{n}\Big\}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

où, là encore, on a utilisé l'inégalité donnée car $x^2/n \geqslant -1$ et le fait que $[0;\sqrt{n}] \subset [0;+\infty]$. Donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad m_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant M_n.}$$

3.
   - Effectuons donc le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$. Si $x = 0$, on a $t = 0$ et si $x = \sqrt{n}$, on a $t = \pi/2$. De plus, on a $\mathrm{d}x = \sqrt{n}(\cos t)\mathrm{d}t$, donc le nouvel intégrant est

     $$\Big(1-\frac{x^2}{n}\Big)^n \mathrm{d}x = \Big(1-\frac{n\sin^2 t}{n}\Big)^n \sqrt{n}(\cos t)\mathrm{d}t = \sqrt{n}(\cos t)^{2n+1}\mathrm{d}t.$$

     Il s'ensuit, d'après le théorème de changement de variable, que

     $$m_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(\cos t)^{2n+1}\mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n+1},$$

     donc

     $$\boxed{m_n = \sqrt{n}W_{2n+1}.}$$

   - Effectuons donc le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale M_n. Si $x = 0$, on a $t = 0$ et si $x \longrightarrow +\infty$, on a $t \longrightarrow \pi/2$. De plus, on a $\mathrm{d}x = \sqrt{n}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$, donc le nouvel intégrant est

     $$\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-n} \mathrm{d}x = \Big(1+\frac{n\tan^2 t}{n}\Big)^{-n} \sqrt{n}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n}(\cos t)^{2n-2}\mathrm{d}t.$$

     Il s'ensuit, d'après le théorème de changement de variable, que

     $$M_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-2}\mathrm{d}t,$$

     c'est-à-dire

     $$\boxed{M_n = \sqrt{n}W_{2n-2}.}$$

4. En combinant les résultats des questions 3 et 4, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Or

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n-2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [★] (Intégrale de Dirichlet)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \qquad T_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer l'expression de T_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n/n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Notons que toutes les intégrales considérées sont convergentes puisque toutes les fonctions intégrées se prolongent par continuité en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'on essaye d'exprimer S_{n+1} en fonction de S_n, on se perd dans les calculs. Il faut alors penser à utiliser la caractéristique suivante des suites arithmétiques : « une suite est arithmétique si, et seulement si, chacun de ses termes est la moyenne arithmétique de celui qui le précède et de celui qui le suit » (c'est de là que vient la dénomination « suite arithmétique » !). On écrit donc que

$$\begin{aligned}
S_n + S_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 (n+2)t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1-1)t + \sin^2(n+1+1)t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\big(\sin(n+1)t\cos t - \cos(n+1)t\sin t\big)^2 + \big(\sin(n+1)t\cos t + \cos(n+1)t\sin t\big)^2}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)t\cos^2 t + \cos^2(n+1)t\sin^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)t\big(1-\sin^2 t\big)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi/2} \cos^2(n+1)t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{\pi/2} \sin^2(n+1)t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi/2} \cos^2(n+1)t\,\mathrm{d}t \\
&= 2S_n + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)t\,\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= 2S_n,
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{(S_n)_{n\geqslant 0} \text{ est arithmétique.}}$$

Comme $S_0 = 0$ et $S_1 = \pi/2$, on en déduit que la raison de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ vaut $\pi/2$. Il s'ensuit que $\forall n \geqslant 0,\ S_n = S_0 + n\pi/2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = n\frac{\pi}{2}\cdot}$$

2. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 nt)(\cos^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 nt)(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \sin^2 nt\,\mathrm{d}t = S_n - \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2nt}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= S_n - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2nt}{4n}\right]_0^{\pi/2} = S_n - \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\cdot}$$

3. On sait que $\forall t \in \left]0;\pi/2\right[$, $\sin t \leqslant t \leqslant \tan t$, donc

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t} \leqslant \frac{\sin^2 nt}{t^2} \leqslant \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t},$$

ce qui donne, en intégrant entre 0 et $\pi/2$,

$$\forall n \geqslant 0, \qquad T_n \leqslant I_n \leqslant S_n.$$

En tenant compte des résultats des questions précédentes, il vient

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \leqslant \frac{I_n}{n} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

d'où, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u,$$

où l'on a effectué la changement de variable $u = nt$. En passant à la limite $n \longrightarrow +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

4. Pour tous $0 < \varepsilon < A$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\cos t - 1}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\cos t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par intégration par parties}\\
&= \frac{\cos A - 1}{A} - \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^A \frac{\cos^2 t/2}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\cos A - 1}{A} + \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon/2}^{A/2} \frac{\cos^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{en posant } u = \frac{t}{2}\cdot
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\cos A - 1}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

donc, en passant à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $A \longrightarrow +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en conclut, à l'aide du résultat de la question 3, que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot}$$