Chapitre 8 : développements limités

Table des matières

1 Notions préliminaires

1.1 Voisinages

Définition 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}$ est un ***voisinage de*** a si $\mathscr{V}$ contient un petit intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ autour de a avec $\varepsilon > 0$.
On dit qu'une partie $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}$ est un ***voisinage de*** $+\infty$ (resp de $-\infty$) si $\mathscr{V}$ contient un intervalle de la forme $[\xi, +\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty, \xi]$).

Exemple 1 Les intervalles ouverts sont les seuls intervalles voisinage de tous leurs points. L'intervalle $[0, 1]$ n'est pas un voisinage de 0 ni de 1.

1.2 Relations de comparaison

Définition 2 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (a est soit un nombre réel, soit égal à $+\infty$, soit égal à $-\infty$). Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage $\mathscr{V}$ de a. On suppose que : $\forall x \in \mathscr{V} \setminus \{a\}$, $g(x) \neq 0$.
On définit les trois relations de comparaison suivantes :

- on dit que la fonction f est ***dominée*** par la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) = \mathscr{O}(g(x))$, au voisinage de a, si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur $\mathscr{V} \setminus \{a\}$
- on dit que la fonction f est ***négligeable*** devant la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) = \circ(g(x))$, au voisinage de a, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- on dit que la fonction f est ***équivalente*** à la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) \sim g(x)$, au voisinage de a, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition 1 Avec les notations déjà introduites,

- $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a si et seulement si $f(x) - g(x) = \circ(g(x))$ au voisinage de a
- si $f(x) = \circ(g(x))$ et $g(x) = \circ(h(x))$ au voisinage de a, alors $f(x) = \circ(h(x))$ au voisinage de a
- $x^q = \circ(x^p)$ au voisinage de 0 si et seulement si $p < q$.

1.3 Polynômes tronqués

Définition 3 Soient $P(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}$.

On appelle ***polynôme tronqué à*** q et on note $P(X)\mid_q$ le polynôme : $P(X)\mid_q = \displaystyle\sum_{n=0}^{q} a_n \cdot X^n$.

2 Développements limités : étude théorique

2.1 Définitions

Définition 4 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $f : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage $\mathscr{V}$ de a et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***en*** a et on note : f a un $DL_n(a)$, s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(a+h) = P(h) + \circ(h^n) \qquad \text{au voisinage de } 0 \text{ en } h..$$

Proposition 2 Si f a un $DL_n(a)$, alors le polynôme $P(X)$ de degré inférieur ou égal à n est unique. On l'appelle la ***partie polynomiale*** du développement limité et on le note $T_nf(X)$.

Proposition 3 Si f a un $DL_n(a)$, alors pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, f a un $DL_k(a)$ et : $T_kf(X) = (T_nf(X))\,|_k$.

Proposition 4 • La fonction f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si la fonction f est continue en a. Dans ce cas, le $DL_0(a)$ est : $f(a+h) = f(a) + \circ(1)$.

• La fonction f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si la fonction f est dérivable en a. Dans ce cas, le $DL_1(a)$ est : $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \circ(h)$.

• Lorsque cela a un sens, si f et g sont définies au voisinage de 0, si λ est un réel :

$$T_n(f+g) = T_n(f) + T_n(g),\ T_n(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot T_n(f) \text{ et } T_n(f \times g) = \Big(T_n(f) \times T_n(g)\Big)\,|_n\,.$$

Remarque 1 • Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geqslant 2$, cela ne veut pas dire que f soit n-fois dérivable en a comme le témoigne l'exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x = 0 \\ x^3 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & , \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0 et pourtant elle admet un $DL_2(0)$, à savoir : $f(h) = \circ(h^2)$, de partie polynomiale nulle.

• Si $f(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0, a-t-on $o(x^p) = f(x)$ au voisinage de 0 ?

2.2 Formule de Taylor-Young

Théoréme 1 Soit $f : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n. Alors, la fonction f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + \circ(h^n)\,.$$

Exemple 2 • Déterminer le $DL_4(0)$ de arcsin.

• Déterminer le $DL_3(1)$ de $\ln\left(\dfrac{2+x}{3-x+x^2}\right)$.

2.3 Développements limités usuels

Méthode : Quels D.L$_n(0)$ retenir ?

Voici la liste des $DL(0)$ à connaître ou à savoir retrouver :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ\left(x^n\right)$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + \circ\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \circ\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \cdot \frac{x^n}{n} + \circ\left(x^n\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ\left(x^{2n+2}\right)$$

Remarque 2 Peuvent se déduire directement des formules précédentes :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \circ\left(u^n\right) \text{ et } \ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \cdots - \frac{u^n}{n} + \circ\left(u^n\right)$$

3 Applications des développements limités

3.1 Savoir manipuler des DL

Méthode : Comment calculer un DL ?

Pour calculer un DL$_n(x_0)$ de $f(x)$:
- ▶ se ramener à un DL(0) en posant $h = x - x_0$
- ▶ effectuer le DL$_n(0)$ de $f(x_0 + h)$ en fonction de h.

Pour calculer un DL$_n(0)$ dans une somme $f(x) + g(x)$ ou un produit $f(x) \cdot g(x)$:
- ▶ effectuer les DL$_n(0)$ de $f(x)$ et $g(x)$
- ▶ faire la somme ou le produit des parties polynomiales
- ▶ laisser tomber tous les termes en x^{n+1}, x^{n+2}, etc.

Pour calculer un DL$_n(0)$ dans un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:
- ▶ effectuer les DL$_n(0)$ de $f(x)$ et $g(x)$
- ▶ au dénominateur, factoriser par le terme prépondérant, pour obtenir une expression de la forme $1 + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$
- ▶ utiliser le DL$_n(0)$: $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + \circ(u^n)$ en remplaçant chaque u par $\varepsilon(x)$
- ▶ laisser tomber chaque terme en x^p, avec $p > n$: on obtient le DL$_n(0)$ de $\dfrac{1}{g(x)}$
- ▶ effectuer le DL$_n(0)$ du produit $f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$.

Exemple 3 • Déterminer le $DL_6(0)$ de argsh.
- Déterminer le $DL_4(1)$ de $\ln\left(\dfrac{2+x}{3-x+x^2}\right)$.

Exemple 4 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des développements limités à tout ordre en 0, où I est un voisinage de 0.

1. Montrer que si la fonction f est paire (resp. impaire), alors tous les termes de puissances impaires (resp. puissances paires) sont nuls dans les $DL(0)$ de la fonction f.
2. La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, \text{ si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Exemple 5 Déterminer les développements limités suivants :
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x+2x^2)$;
- $DL_4\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de $x \longmapsto \exp(\cos x)$;
- $DL_3(1)$ de $t \longmapsto \dfrac{1+t^2}{3-t+t^3}$;
- $DL_6(0)$ de $t \longmapsto (\cos t)^{\sin(t^2+t^3)\cdot\ln(2+t)}$.

Méthode : Comment trouver un DL par intégration ?

Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(a)$ de $f(x)$ par intégration :
- ▶ se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ en posant $h = x - a$
- ▶ poser $g(h) = f(a+h)$
- ▶ calculer le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de $g'(h)$
- ▶ intégrer terme à terme entre 0 et h : on a le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g(h)$.

Exemple 6 Déterminer les DL suivants :
- $DL_n(0)$ de arcsin et arccos ;
- $DL_{10}(0)$ de $x \longmapsto \tan x$;
- $DL_4(+\infty)$ de $x \longmapsto \cos(2\arctan x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;
- $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{ch}x + \dfrac{\cos x}{2+\sin x}\right)$

3.2 Calculs de limites

Méthode : Comment lever une forme indéterminée de la forme « $\dfrac{0}{0}$ » ?

On veut calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ une telle forme indéterminée. Pour la lever :
- ▶ poser $h = x - a$
- ▶ faire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de $f(a+h)$ et $g(a+h)$
- ▶ procéder à d'éventuelles simplifications pour aboutir à une forme déterminée
- ▶ si cela ne donne rien, passer à l'ordre supérieur.

Exemple 7 • Si $z \in \mathbb{C}$, calculer : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

• Calculer : $\lim_{x \longrightarrow \pi/3} \frac{(8\cos^2 x - 2\cos x - 1)^2}{e^{4x^2} - e^{4\pi^2/9}}$.

• Si $\alpha > 0$, calculer la limite éventuelle de $\frac{\text{sh}(\sin(t)) - \sin(\text{sh}(t))}{t^\alpha}$, lorsque t tend vers 0.

3.3 DL d'une fonction réciproque

Méthode : Comment traiter une fonction réciproque localement ?

Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage de a.
Pour savoir si f réalise localement une bijection en a :
▶ montrer que $f'(a) \neq 0$
▶ la fonction f réalise alors une bijection d'un voisinage de a vers un voisinage de $f(a)$ et localement en $f(a)$, la fonction f^{-1} est dérivable.
Pour calculer une $DL_n(f(a))$ de f^{-1} :
▶ calculer le $\text{DL}_n(0)$ de $f(a+H)$
▶ poser $f^{-1}(f(a)+h) = a + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + \circ(h^n)$
▶ utiliser éventuellement les symétries de f : si f paire (resp. impaire), f^{-1} également et les termes d'indices pairs (resp. impairs) sont nuls
▶ utiliser la formule : $f^{-1}(f(a+H)) = a + H$:
- poser dans le $DL_n(0)$ de $f^{-1}(f(a)+h)$, $h = f(a+H) - f(a)$
- identifier les termes dans les deux $\text{DL}_n(0)$
- obtenir directement α_1, puis α_2, etc.

Exemple 8 • Calculer le $DL_4(0)$ de arcsin, par dérivation et par fonction réciproque.

• Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2 + \text{sh}x$ réalise une bijection C^∞ en 0 et faire le $DL_3(0)$ de f^{-1}.

3.4 Déterminer la position d'une courbe par rapport à une autre

Méthode : Comment étudier une branche infinie ?

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Pour étudier sa branche infinie :
▶ simplifier $\frac{f(x)}{x}$
▶ commencer le $\text{DL}(+\infty)$ dans cette expression, en posant $h = \frac{1}{x}$
▶ le terme constant a_0 indique la direction asymptotique, le terme de $a_1 \cdot h$ indique l'asymptote et le terme suivant non nul indique la position courbe / asymptote.

Exemple 9 • Étudier les branches infinies de la fonction $x \longmapsto \sqrt[4]{2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 4}$.

• Étudier les branches infinies de la fonction $x \longmapsto (x+5) \cdot \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.

3.5 Obtenir des développements asymptotiques dans l'étude de suites

3.5.1 Étude d'une suite implicite

Exemple 10

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x = \frac{1}{x}$ admet une seule solution dans l'intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. On la note u_n.
2. Déterminer un développement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à trois termes significatifs.

3.5.2 Étude d'une suite récurrente

Exemple 11

On définit la suite v par :

$$v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \operatorname{argsh}(v_n).$$

1. Étudier la suite v.
2. Déterminer $\alpha > 0$ et $\ell \neq 0$ tels que la suite $\left(w_n = \frac{1}{v_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{v_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ.
3. Déterminer un équivalent de v_n, lorsque n tend vers $+\infty$.