MP*1

Valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville

On note C l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour x dans C, on pose :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)|,\ t \in [0,1]\}.$$

On se donne un élément q de C.

Pour λ dans $\mathbb{R}$, on note E_λ l'espace des applications x de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in [0,1], \qquad x''(t) + (\lambda - q(t))\, x(t) = 0.$$

On désigne par x_λ l'unique élément de E_λ vérifiant :

$$x_\lambda(0) = 0, \qquad x'_\lambda(0) = 1.$$

On note V_λ le sous-espace des éléments x de E_λ tels que :

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Enfin, on note Λ l'ensemble des réels λ tels que : $V_\lambda \neq \{0\}$.

Le but du problème est de décrire Λ ; le résultat obtenu est énoncé dans la question 9 ci-dessous.

1. Dans cette seule question, q est l'application nulle. Déterminer x_λ si λ est dans $\mathbb{R}$, puis déterminer Λ.

2. Soit λ dans $\mathbb{R}$. Montrer que V_λ est nul ou de dimension 1 et que V_λ est de dimension 1 si et seulement si :

$$x_\lambda(1) = 0.$$

3. On suppose que le réel λ vérifie :

$$\forall t \in [0,1], \qquad q(t) \geq \lambda.$$

a) Montrer que si x est dans E_λ, la fonction x^2 est convexe sur $[0,1]$.

b) Montrer que λ n'est pas dans Λ.

4. a) Soient x et y deux applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0.$$

Montrer :

$$\int_0^1 (x'' - qx)y = \int_0^1 (y'' - qy)x.$$

b) Soient λ et μ deux réels distincts, x dans V_λ et y dans V_μ. Calculer :

$$\int_0^1 xy.$$

On admet provisoirement (cf question 10) que :

$$\lambda \mapsto x_\lambda$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace normé $(C, \| \|_\infty)$.

5. Montrer que Λ est fermé dans $\mathbb{R}$.

6. On suppose que Λ a un point d'accumulation λ. Il existe donc une suite $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\Lambda \setminus \{\lambda\}$ convergeant vers λ.

Obtenir une contradiction, par exemple en considérant :

$$\int_0^1 x_{\lambda_n} x_\lambda.$$

7. Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Soit y une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, exprimer sous forme intégrale y en fonction de $f = y'' + \lambda y$.

b) Montrer :

$$\forall t \in [0,1], \qquad x_\lambda(t) = \frac{\sin\,(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin\,(\sqrt{\lambda}(t-s))\; q(s)\; x_\lambda(s)\,\mathrm{d}s.$$

8.a) En utilisant par exemple le lemme de Gronwall, trouver une constante $K > 0$ telle que :

$$\forall \lambda \in [1, +\infty[, \qquad \|x_\lambda\|_\infty \leq \frac{K}{\sqrt{\lambda}}.$$

b) En déduire :

$$x_\lambda(1) \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{\sin\,(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + O(1/\lambda).$$

9. Conclure qu'il existe une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que :

$$\Lambda = \{\lambda_n,\ n \geq 0\}.$$

10. Prouver le résultat de continuité énoncé avant la question 5.

Remarque. Quelques calculs supplémentaires permettent d'établir :

$$\lambda_n \sim n^2 \pi^2.$$

On démontre également sans difficulté que x_{λ_n} est très proche de

$$t \mapsto \frac{\sin\,(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Enfin et surtout, on peut prouver (mais c'est moins simple) que le sous-espace engendré par les x_{λ_n} est dense dans l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 et 1. En combinant ce résultats à la propriété d'orthogonalité vue dans la question 5, on peut développer une variante de l'analyse de Fourier qui est la théorie de Sturm-Liouville.