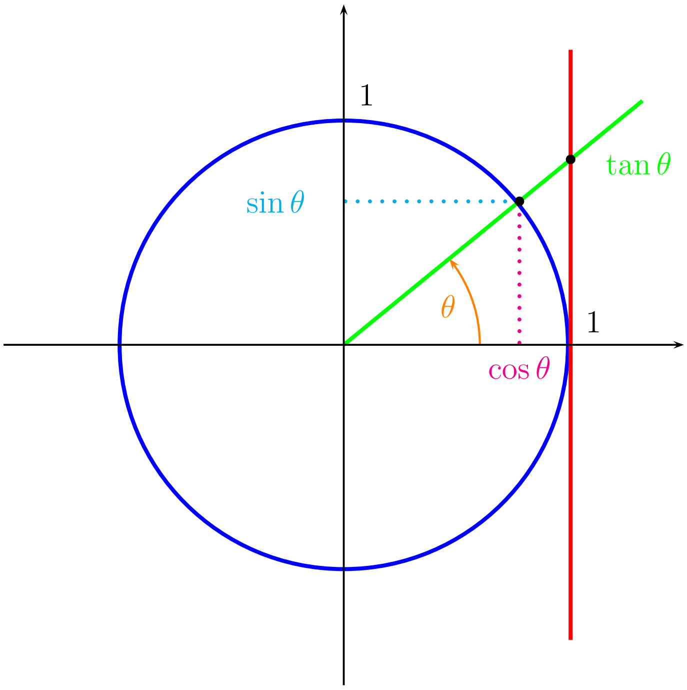
Formulaire de trigonométrie

Toutes les formules de trigonométrie peuvent se retrouver uniquement à l'aide des deux formules suivantes :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } \forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$



On dispose des formules :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ et } \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a, \quad \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \cdot \sin x \text{ et } \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cdot \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \sin x \text{ et } \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos p \cdot \cos q = \frac{\cos(p-q) + \cos(p+q)}{2}, \quad \sin p \cdot \sin q = \frac{\cos(p-q) - \cos(p+q)}{2}$$

$$\sin p \cdot \cos q = \frac{\sin(p+q) + \sin(p-q)}{2}.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

si $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi \cdot \mathbb{Z})$ et $t = \tan \frac{\theta}{2}$, alors : $\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$.

Les formules de trigonométrie hyperbolique se déduisent des formules précédentes grâce aux relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i\sin(ix) \text{ et } \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix).$$

La principale formule à retenir est :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

On a également les formules exactes pour les fonctions argsh et argch :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{argsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{ et } \forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{argch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$