FEUILLE D'EXERCICES N° 20

PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Espaces probabilisés

Exercice 1

Dans chacune des situations données, énoncer l'événement contraire :

• Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. $A =$« les deux élèves sont des filles »

• À une loterie, on achète trois billets. $B =$« l'un des deux billets achetés au moins est gagnant ». $C =$« deux billets au maximum sont gagnants. ».

— ○ —

Exercice 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une urne contient trois boules rouges, deux boules noires et n boules blanches. On effectue un tirage simultané de deux boules au hasard, avec tirages équiprobables.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_n$ d'obtenir un tirage unicolore.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_n$ d'obtenir un tirage bicolore.
3. Trouver la valeur de n pour laquelle la probabilité de tirer deux boules blanches exactement vaut $\frac{1}{6}$. Que vaut alors p_n ?

— ○ —

Exercice 3

On considère un jeu de 52 cartes. On retire 10 cartes de ce jeu. Parmi les cartes restantes, on prend 5 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'avoir l'as de trèfle parmi ces 5 cartes ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir seulement deux valeurs parmi les 5 cartes ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir cinq valeurs différentes ?

— ○ —

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On lance n pièces parfaitement équilibrées. On note :

• événement $\mathscr{A}$: "on obtient face au plus une fois"

• événement $\mathscr{B}$: "on obtient face au moins une fois et pile au moins une fois".

Montrer qu'il existe une seule valeur de n pour laquelle les événements $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont indépendants.

— ○ —

Exercice 5

Soient $n \geqslant 3$ un entier, puis n personnes jouant chacune à un seul lancer d'une pièce parfaitement équilibrée.

1. Modéliser l'expérience par la donnée d'un univers Ω et d'une probabilité $\mathbb{P}$.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent de toutes les autres ?

— ○ —

Exercice 6

On considère un dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère également 7 autres dés $D_1, \cdots, D_7$ tels que pour tout $i \in \{1, \cdots, 7\}$, le dé D_i possède $(i-1)$ faces blanches et $(7-i)$ faces noires.

On suppose que le dé A et les 7 dés $D_1, \cdots, D_7$ sont parfaitement équilibrés.

On lance d'abord le dé A :

• si le résultat i du lancer est 2,3,4,5 ou 6, on choisit le dé D_i correspondant au numéro i du lancer.

• si le résultat du lancer est 1, on lance de nouveau le dé A.

- si le résultat du deuxième lancer est 1,2 ou 3, on choisit le dé D_1
- si le résultat du deuxième lancer est 4,5 ou 6, on choisit le dé D_7.

On a ainsi choisi de cette manière un dé D_i. On lance alors le dé D_i successivement plusieurs fois de suite, les lancers étant indépendants les uns des autres.

1. Calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au premier lancer.
2. Sachant qu'il est sorti une face noire aux deux premiers lancers, calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au troisième lancer.
3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_n$ qu'il sorte une face noire au $n^{ème}$ lancer sachant que les lancers précédents, il est toujours sorti une face noire.
4. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}_n$ et interpréter le résultat.

— ○ —

Exercice 7

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, puis $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Exprimer sous forme d'intersections ou de réunions d'événements A_n les événements suivants :
   • $B =$ "les événements A_n se réalisent tous à partir d'un certain rang"
   • $C =$ "une infinité d'événements A_n se réalisent"

2. **premier lemme de Borel-Cantelli**

   On suppose que la série $\sum_{n=0}^{=\infty} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. Montrer que $\mathbb{P}(C) = 0$. On pourra utiliser le fait que la probabilité d'une réunion dénombrable est inférieure à la somme des probabilités.

3. **deuxième lemme de Borel-Cantelli**

   On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ est divergente et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$. On pourra passer à l'événement contraire et utiliser le fait que si F_n sont des événements décroissants pour l'inclusion, alors $\mathbb{P}(F_n)$ converge vers $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$.

4. Un singe immortel devant un ordinateur tape aléatoirement sur les touches. Montrer qu'à un moment donné, il écrira exactement l'énoncé de cet exercice, ainsi que sa correction.

—— ○ ——

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité p_n qu'une fonction $f : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ prise au hasard vérifie :
$$f \circ f = f.$$
2. Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} p_n$.

—— ○ ——

Exercice 9

Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$.

1. On range k objets dans n tiroirs, les rangements étant indépendants et aléatoires. Quelle est la probabilité que ces objets se retrouvent dans des tiroirs distincts.
2. À partir de combien de personnes dans un groupe, la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire est-elle plus grande que 50%, est-elle plus grande que 90% [on négligera les années bissextiles.]
3. Soit $t > 0$. On prend $k = [t\ \sqrt{n}]$ et on note p_n la probabilité que les k objets se retrouvent dans des tiroirs distincts.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$.
   (b) En déduire : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} p_n$.

—— ○ ——

Exercice 10

Un chat a trois passions dans la vie : dormir, manger et jouer, activités qu'il pratique toutes les 5 minutes :

▷ après 5 mins de repas, il continue à manger avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et sinon il se met à jouer

▷ après 5 mins de jeu, il mange avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et sinon il va dormir

▷ après 5 mins de sieste, soit il continue à dormir avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, soit il va manger.

Un matin, ce chat se lève et passe les 5 premières minutes à prendre son petit-déjeuner. On note m_n, d_n et j_n, les probabilités que le chat mange, dorme ou joue dans la tranche horaire $[5n, 5n+5]$.

1. Calculer m_n, d_n et j_n, à l'aide d'une matrice.
2. Calculer les limites de ces probabilités. Interpréter le résultat.

—— ○ ——

Exercice 11

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in \{0, \cdots, N\}$ sur un segment gradué de 0 à $N \geqslant 1$.
À chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$.
Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment.

1. Écrire un algorithme en pseudo-code qui simule cette marche aléatoire.
2. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.
   (a) Que vaut u_0 et u_N ?
   (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = p\ u_{a+1} + q\ u_{a-1}$.
   (c) En déduire l'expression exacte de u_a.
3. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes.
4. Calculer $u_a + v_a$. Que peut-on en déduire ?

—— ○ ——

Exercice 12

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On choisit de manière équiprobable un entier p dans $\{1, \cdots, n\}$.
Pour tout entier $m \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_m l'événement : « l'entier m divise p ». On note enfin $p_1, \cdots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer l'événement B : « $p \wedge n = 1$ » en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout $m \in \{1, \cdots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
5. On note $\varphi(n) = \mathrm{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$. Montrer la formule :
$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

—— ○ ——

Exercice 13

Une personne porte à tout moment une boîte d'allumettes dans la poche gauche et une autre dans celle de droite. Chaque boîte contient initialement n allumettes.
Cette personne utilise de manière équiprobable et indépendante une allumette dans une des deux boîtes et découvre à un moment donné qu'une des boîtes est vide.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il reste k allumettes dans l'autre boîte ?
2. En moyenne, lorsque $n = 6$, combien reste-t-il d'allumettes dans l'autre boîte ?

Exercice 14

Deux joueurs A et B jouent à « pile » ou « face », la probabilité d'avoir « pile » est égale à $p \in]0,1[$. Initialement, le capital de A est égal à n et le capital de B est égal à $s-n$, avec $0 \leqslant n \leqslant s$ deux entiers.
Le joueur A parie toujours sur « pile » et le joueur B parie toujours sur « face ». Le perdant donne un euro à l'autre.
Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs n'a plus d'argent.
Quelles sont la probabilité qu'a A de gagner ? qu'a B de gagner ?

Variables aléatoires

Exercice 15

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On dispose de n souris qui se déplacent aléatoirement dans un enclos comportant 3 cages. Les choix suivent une probabilité uniforme sur les 3 cages et chaque cage peut contenir n souris. Chaque souris vient se loger dans une cage.
On note X égal au nombre de cages restées vides. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 16

Soient deux entiers k et n tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On considère n cartes numérotées de 1 à n. Un joueur découvre les cartes les unes après les autres : on note X la valeur maximale obtenue durant les k premières cartes.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que si $0 \leqslant p \leqslant q$ sont deux entiers, alors $\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 17

Deux joueurs A et B jouent avec deux dés équilibrés à six faces selon le protocole suivant :

- ▷ A lance les dés
- ▷ si la somme est au moins 8, alors A gagne
- ▷ sinon, B lance les dés à son tour et si la somme est plus grande que 5 alors B a gagné
- ▷ on recommence si personne n'a gagné.

1. Calculer la probabilité que le jeu ne finisse jamais.
2. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ? que le joueur B gagne ?
3. On note X le nombre de parties jouées. Déterminer la loi de X, puis son espérance et son écart-type.

Exercice 18

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche et on répète l'expérience aléatoire suivante :

- on tire une boule
- on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur.

Ce modèle d'urne est connu sous le nom d'**urne de Polya**.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \sim \mathscr{U}_{[\![1,k+1]\!]}$.

Exercice 19

On s'intéresse à un jeu dans lequel, sur un total de n numéros, g sont choisis à l'avance comme gagnants par le meneur de jeu et connus de lui seul. On suppose que : $1 \leqslant g \leqslant \dfrac{n}{3}$.
Dans la première phase de jeu, le joueur tire au hasard g numéros, après quoi le meneur dévoile g numéros perdants, parmi les $n-g$ numéros que le joueur n'a pas tirés.
Dans la deuxième phase de jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies :

- stratégie 1 : il garde les g numéros qu'il a tirés
- stratégie 2 : il échange les g numéros qu'il a tirés contre g nouveaux numéros tirés au hasard parmi les $n-2g$ numéros n'ayant pas été tirés ni dévoilés.

1. On note G_i le nombre de numéros gagnants obtenus à l'issue de la première phase. Déterminer la loi de G_1, puis son espérance.
2. On étudie spécifiquement dans cette question la stratégie 2. On note G_2 le nombre de numéros gagnants obtenus à la fin du processus.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de G_2 sachant $\{G_1 = k\}$.
   (b) En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_k(G_2)$ de G_2 calculée avec la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid G_1 = k)$.
   (c) Montrer l'égalité :
   $$\mathbb{E}(G_2) = \sum_{k=0}^{g} \mathbb{E}_k(G_2) \cdot \mathbb{P}(G_1 = k).$$
   (d) Montrer que :
   $$\mathbb{E}(G_2) = \frac{g^2(n-g)}{n(n-2g)}.$$
3. Comparer les deux stratégies.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire sans remise les boules de l'urne et on s'arrête lorsque toutes les boules impaires ont été enlevées.

1. Calculer la probabilité que les boules $1, 3, \cdots, 2n-1$ soient sorties dans cet ordre et consécutivement.
2. Calculer la probabilité que les boules $1, 3, \cdots, 2n-1$ soient sorties dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.
3. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour cette expérience. Donner $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 21

Une urne contient n boules dont p boules sont blanches. On pioche simultanément s boules de l'urne et on compte le nombre X de boules blanches piochées.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

2. Interpréter les résultats lorsque les entiers n et p sont grands avec $\rho = \dfrac{p}{n} \in]0,1[$.
3. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note l'événement A_k : « la $k^{ème}$ boule blanche a été tirée ».
   (a) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathbf{1}_{A_k}$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ puis $V(X)$.

Vecteurs aléatoires finis

Exercice 22

On désigne par n un entier naturel non nul et par p un nombre strictement compris entre 0 et 1.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant pile avec une probabilité égale à p et face avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.
On appelle k-chaîne de pile, une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné pile, cette suite devant être suivie d'un face ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de pile obtenues au cours des n lancers.
Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient pile au $k^{ème}$ lancer ».
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$, alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ l'espérance de Y_k notée $E(Y_k)$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un entier dans $[\![1, \cdots, n-2]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1, \cdots, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de pile commence au $i^{ème}$ lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in [\![2, \cdots, n-k]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 23

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. On suppose que la variable X^4 admet une espérance. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n - \mathbb{E}(X)$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}.$$
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}$, est convergente. On montrera après développement que $\mathbb{E}(S_n^4) = \mathcal{O}(n^2)$.
3. En utilisant le premier lemme de Borel-Cantelli, en notant pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\Omega_\varepsilon = \left\{\omega \in \Omega \mid \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\}$$
alors $\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$.
4. En déduire que $\Omega' = \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \Omega_{1/p}$ est de probabilité 1.
5. En déduire que l'événement : « la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ existe et vaut $\mathbb{E}(X)$ » est de probabilité égale à 1.
6. Soit A un événement. On réalise plusieurs fois et de manière indépendante la même expérience et on note N_n le nombre de fois sur les n premières fois où l'événement A s'est réalisé. Quelle est la limite probable du quotient $\dfrac{N_n}{n}$, lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 24

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire, ainsi que d'une pièce non truquée. On considère l'expérience $\mathscr{E}$ suivante :
- on jette une fois la pièce
- si on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne
- si on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne.

1. On repète deux fois l'expérience $\mathscr{E}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Donner les valeurs de X.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$ puis donner $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On repète l'expérience $\mathscr{E}$ et on s'arrête dès que l'urne est vide ou dès que l'on a effectué trois fois l'expérience $\mathscr{E}$. Soient Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de $\mathscr{E}$ effectuées et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 2)$. En déduire la loi de Y.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(Y = 2, Z = 1) = \dfrac{1}{8}$.
   (c) Déterminer la loi du couple (Y, Z).
   (d) Calculer la covariance de ce couple.

Exercice 25

On rappelle dans toute la suite la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient $N-2$ boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et **sans remise** les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni une boule noire pour la première fois et X_2 le numéro du tirage qui a fourni une boule noire pour la deuxième fois.

1. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

2. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et N. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

3. (a) Montrer que la variable $(N+1-X_2)$ a la même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de $X_2 - X_1$ et la comparer à la loi de X_1.
   (a) Calculer les espérances $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   (b) montrer l'égalité des variances $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   (c) établir la relation $2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$
4. Calculer $V(X_1)$; en déduire $V(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
5. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque et deux variables X et Y définies sur cet espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $\{1, \cdots, N\}$.
   On désigne par D l'événement « la v.a. X ne prend pas la même valeur que Y ».
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.
   (b) Soient Z_1 et Z_2 les variables : $Z_1 = \min\{X, Y\}$ et $Z_2 = \max\{X, Y\}$.
   Calculer pour tout couple (i, j) de l'ensemble $\{1, \cdots, N\}$ la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(Z_1 = i, Z_2 = j \mid D)$.

——— ○ ———

Exercice 26

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la même loi $\mathscr{U}_{[1,n]}$ uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que :
   (a) $\forall k \in \{2, \cdots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (b) $\forall k \in \{n+2, \cdots, 2n\}$,
   $\mathbb{P}(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ est de même loi que Z.
   (b) La variable T est-elle indépendante de X et de Y ?
   (c) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X+Y+Z=n+1)$.

——— ○ ———

Exercice 27

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. On pioche au hasard une partie $A \in \mathscr{P}([\![1, n]\!])$. On note $X = \mathrm{Card}(A)$. Déterminer la loi de X, puis son espérance.
2. On pioche avec remise deux parties A et B dans $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$.
   (a) Quelle est la probabilité que A soit incluse dans B ?
   (b) On note $Y = \mathrm{Card}(A \cap B)$. Déterminer la loi de Y.
3. En quoi les résultats précédents sont-ils modifiés lorsque la pioche est sans remise ?

——— ○ ———

Exercice 28

Soient $p \in]0,1[$, puis $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de n variables définies sur le même espace probabilisé Ω, indépendantes et de même loi : $p\ \delta_1 + (1-p)\ \delta_{-1}$.

On pose pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\Pi_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} X_i$ et :

$$u_k = \mathbb{P}(\Pi_k = 1) \text{ et } v_k = \mathbb{P}(\Pi_k = -1).$$

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k \text{ et } v_{k+1} = (1-p)u_k + pv_k.$$

2. Expliciter u_k et v_k en fonction de k. Interpréter le résultat lorsque k tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une CNS pour que les variables Π_1 et Π_2 soient indépendantes.
4. On suppose la CNS précédente vérifiée. Montrer que les variables $\Pi_1, \cdots, \Pi_n$ sont alors mutuellement indépendantes.

——— ○ ———

Exercice 29

On considère deux entiers n et p strictement positifs.
On dispose de n tiroirs $T_1, \cdots, T_n$ et de p boules $B_1, \cdots, B_p$.
On dispose les p boules dans les tiroirs, les rangements étant équiprobables et indépendants.
On note X_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans le tiroir T_k et Y le nombre de tiroirs vides.

1. Soit k un entier entre 1 et n. Déterminer la loi de X_k.
2. Les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
4. Déterminer la loi de Y.

——— ○ ———

Exercice 30

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a.r. finies définies sur un même univers Ω.
On pose $A = \Big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer une CNS sur les variables $X_1, \cdots, X_n$ pour que la matrice A soit inversible.

——— ○ ———

Thèmes variés

Exercice 31

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $\Big(X_{i,j} : \Omega \longrightarrow \{-1,1\}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires centrées mutuellement indépendantes **[loi de Rademacher]**. Pour tout $\omega \in \Omega$, on forme la matrice aléatoire :

$$M(\omega) = \Big(X_{i,j}(\omega)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$, puis calculer son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Rg}(M) = 1)$.
3. Déterminer l'espérance et la variance de la variable $\det(M)$.

Exercice 32

1. Soient $0 \leqslant p \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ trois entiers. Un sac contient n boules dont p boules blanches. On pioche k boules sans remise. On note X le nombre de boules blanches priochées. Déterminer la loi de X puis son espérance.
2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement. Soit X le nombre d'expériences réalisées dans des conditions indépendantes nécessaires pour que l'événement A se réalise la première fois. Déterminer la loi de X puis son espérance.

Exercice 33

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire telle que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X \geqslant n+m \mid X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant m).$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$. On pose $p = \mathbb{P}(X = 0)$ et on suppose $p > 0$.

1. Montrer que $0 < p < 1$.
2. On pose $f : n \longmapsto \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
   (a) Montrer que : $f(n+m) = f(n) \cdot f(m)$.
   (b) En déduire que : $f : n \longmapsto f(1)^n$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X = n)$, puis $E(X)$.

Exercice 34

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice stochastique**, toute matrice $A \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R})$ telle que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- tous les termes de A sont positifs
- la somme des coefficients de A situés sur une même ligne est toujours égale à 1.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices stochastiques est un convexe stable par multiplication.
2. Soit $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_s\}$ un ensemble comportant s éléments. On considère une marche aléatoire indépendante sur l'espace des états $\mathscr{E}$:
   - à l'instant $t = 0$, le marcheur est en e_1
   - si à l'instant $t = n$, le marcheur est en e_i, il passera en e_j avec la probabilité p_{ij}.

   (a) Montrer que la matrice $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant s}$ est stochastique.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $P^n = (p_{i,j}(n))_{1\leqslant i,j\leqslant s}$, alors la probabilité que le marcheur parte de e_i pour arriver en e_j au bout de n étapes est égale à $p_{i,j}(n)$.
3. On considère un marcheur se déplaçant sur $\mathscr{U}_s$ l'ensemble des racines $s^{\text{ème}}$ de l'unité :
   - à l'instant $t = 0$, le marcheur est en 1
   - si à l'instant $t = n$, le marcheur est en $\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{s}\right)$,

   alors le marcheur ira à l'instant à $t = n+1$ soit en $\exp\left(\dfrac{2i(k-1)\pi}{s}\right)$, soit en $\exp\left(\dfrac{2i(k+1)\pi}{s}\right)$ avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ pour les deux mouvements.

   On suppose dans la suite que l'entier s est impair.
   (a) Déterminer la matrice stochastique P associée à cette marche aléatoire.
   (b) On admet que la matrice P est diagonalisable.
      i. Soit λ un nombre réel. Soit X un vecteur colonne non nul tel que $PX = \lambda \cdot X$. En considérant l'indice i tel que $|X_i|$ est maximal, montrer que si $|\lambda| \geqslant 1$, alors $\lambda = 1$ et toutes les composantes de X sont égales.
      ii. Montrer que la suite de matrices $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une matrice P_∞.
      iii. Montrer que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices carrées convergente de limite matricielle B_∞, alors la matrice B_∞ est la matrice d'une projection.
      iv. Montrer que si Q est une matrice carrée telle que $Q^2 = Q = Q^T$, alors la matrice Q est la matrice d'une projection orthogonale.
      v. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection orthogonale de rang 1 que l'on explicitera.
   (c) Soit ω une racine $s^{\text{ème}}$ de l'unité. Déterminer lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité qu'a le marcheur d'arriver en ω en n étapes.

Exercice 35

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soient $x_1, \cdots, x_n$, n éléments de A.
   Montrer que :
$$1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) =$$
$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{\left[\begin{array}{c} I \subset \{1,\cdots,n\} \\ \mathrm{Card}(I) = s \end{array}\right]} \prod_{j\in I} x_j\right).$$
2. En déduire que si P est une probabilité sur un univers Ω et si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements, alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{\left[\begin{array}{c} I\subset\{1,\cdots,n\} \\ \mathrm{Card}(I)=s\end{array}\right]}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I}A_j\right)\right).$$

3. (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. On choisit au hasard une permutation σ sur l'ensemble $\{1,\cdots,n\}$. Déterminer la probabilité p_n que la permutation choisie n'ait aucun point fixe.
   (b) Un facteur distribue le courrier au hasard sur une journée. Quelle est la probabilité que personne n'ait le bon courrier ?

——— ○ ———

Exercice 36

1. Soient $s_0 \in \mathbb{Z}$, puis $p \in \mathbb{N}^*$ et $s_p \in \mathbb{Z}$. On appelle chemin γ reliant le point $(0, s_0)$ à (p, s_p), toute application $\gamma : \{0,\cdots,p\} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ telle que $\gamma(0) = (0, s_0)$, $\gamma(p) = (p, s_p)$ et pour tout i entre 0 et $p-1$, on a $\gamma(i) = (i, s_i)$ et $\gamma(i+1) = (i+1, s_{i+1})$, avec $[s_{i+1} - s_i| = 1$.
   (a) Déterminer le nombre total de chemins possibles reliant $(0, s_0)$ à (p, s_p).
   (b) On suppose que s_0 et s_p sont positifs ou nuls. Montrer qu'il existe exactement autant de chemins reliant $(0, s_0)$ à (p, s_p) et touchant l'axe des abscisses strictement entre les abscisses 0 et p que de chemins reliant $(0, s_0)$ à $(p, -s_p)$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère un sac contenant contenant n boules blanches et n boules noires. On pioche les $2n$ boules les unes après les autres. Quelle est la probabilité de l'événement suivant : *« au cours des tirages successifs, le nombre de boules blanches sorties est toujours supérieur ou égal au nombre de boules noires sorties. »*
3. Au cours d'un scrutin opposant deux candidats A et B, le candidat A a obtenu 600 voix et le candidat B en a obtenu 400. Quelle est la probabilité qu'au cours du dépouillement, les voix pour le candidat A aient toujours été majoritaires [au sens large].
4. Dans un cinéma, la place coute 5 euros. Dans une queue comptant 100 personnes, il y a 55 personnes possédant un billet de 5 euros et 45 personnes disposant d'un seul billet de 10 euros. Combien au minimum faut-il prévoir de billets de 5 euros en réserve au guichet pour que la probabilité de pouvoir réceptionner chaque personne sans intervertir l'ordre de passage soit au moins de 95% ?

——— ○ ———

Exercice 37

Est-il possible de truquer deux dés à six faces de telle sorte que les différentes sommes de leur face supérieure apparaissent avec équiprobabilité ?
[indication : si X est une variable, on pourra considérer $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.]

——— ○ ———

Un peu plus difficile

Exercice 38

Soient $X : \Omega \longrightarrow [0, +\infty[$ une variable aléatoire discrète. On suppose qu'il existe X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X et telles que :

$$X_1 + X_2 \sim 2X.$$

Montrer que X est presque sûrement constante.

——— ○ ———

Exercice 39

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$ et $X \sim aX + b$. Montrer que la variable X est presque sûrement constante.

——— ○ ———

Exercice 40

1. Soit $X : \Omega \longrightarrow \{1,\cdots,n\}$ une variable aléatoire. Montrer que la loi de X est déterminée par les $\mathbb{E}(X^k)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
2. Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire telle qu'il existe $a \in]0,1[$ vérifiant :

$$\mathbb{P}(Y = k) = o(a^k), \text{ lorsque } k \text{ tend vers } +\infty.$$

   (a) Montrer que Y admet des moments finis de tous ordres.
   (b) Montrer que les $\mathbb{E}(Y^n)$, pour $n \in \mathbb{N}$ déterminent la loi de Y.

——— ○ ———

Exercice 41

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère une suite $\Big(X_k : \Omega \longrightarrow [\![1, n]\!]\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme $\mathscr{U}_{[\![1,n]\!]}$.

1. Montrer que presque sûrement, l'ensemble $\Big\{X_k \;;\; k \in \mathbb{N}^*\Big\}$ est égal à $[\![1, n]\!]$.
2. Construire des variables aléatoires $N_1, \cdots, N_n$ de Ω vers $\mathbb{N}^*$ telles que :
   - presque sûrement, $N_1 = 1$
   - presque sûrement, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, l'ensemble $\Big\{X_1, \cdots, X_{N_k}\Big\}$ est de cardinal k et l'ensemble $\Big\{X_1, \cdots, X_{N_k - 1}\Big\}$ est de cardinal $k-1$.

On pose $Y_1 = 1$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $Y_k = N_k - N_{k-1}$.

3. Déterminer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_k.
4. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(N_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de $V(N_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

——— ○ ———

Exercice 42

Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ deux variables aléatoires. On suppose que Y admet une espérance finie.
Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ (modulo la loi de X presque sûrement) vérifiant les conditions suivantes :

- la variable $g(X)$ est d'espérance finie
- pour toute fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, $\mathbb{E}(Y\ f(X)) = \mathbb{E}(g(X)\ f(X))$.

——— ○ ———

Exercice 43

Soient $n \geqslant 2$ un entier et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète suivante la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

- ▷ il existe Y et Z deux variables aléatoires non certaines définies de Ω vers $\mathbb{N}$, indépendantes telles que $X \sim Y + Z$
- ▷ l'entier n n'est pas premier

——— ○ ———

Exercice 44

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'entier $p = 3k + 2$ soit un nombre premier. On fixe une partie $A \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et un élément $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On note B l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $[\![k + 1, 2k + 1]\!]$. On pose $B_0 = A \cap (xB)$. Montrer que B_0 est sans somme, c'est-à-dire :
$$\forall (a, b) \in B_0^2,\ a + b \notin B_0.$$
3. Soit A une partie de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3. Montrer qu'il existe une partie $B \subset A$ sans somme et telle que :
$$\#(B) > \frac{\#(A)}{3}.$$
On pourra considérer une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
4. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

——— ○ ———