LES NOMBRES

✠ ***Exercice 1.*** [★] (Concours Général 2012 : Une suite majoritairement décroissante)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout entier $n \geqslant 2$, au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall k \in [\![2^n; 2^{n+1}-1]\!], \quad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{u_1}{2^n}$$

Initialisation :

L'assertion $\mathscr{P}(0) : \forall k \in [\![1;1]\!]$, $0 \leqslant u_k \leqslant u_1/2^0$ est clairement vraie.

Hérédité :

Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Pour $k = 2^{n+1}$, on sait que « au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \ldots, u_{2^{n+1}-1}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_{2^{n+1}}$ ». Or si l'on prend au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \ldots, u_{2^{n+1}-1}$, on prend nécessairement au moins un terme dont le rang est supérieur ou égal à 2^n.

Autrement dit, il existe nécessairement $\ell \in [\![2^n; 2^{n+1}-1]\!]$ tel que $u_\ell \geqslant 2u_{2^{n+1}}$. Or, d'après $\mathscr{P}(n)$, on a $u_\ell \leqslant u_1/2^n$, donc $u_{2^{n+1}} \leqslant u_1/2^{n+1}$.

Pour $k = 2^{n+1}+1$, on sait que « au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \ldots, u_{2^{n+1}}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_{2^{n+1}+1}$ ». Or si l'on prend au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \ldots, u_{2^{n+1}}$, on prend nécessairement au moins un terme dont le rang est supérieur ou égal à 2^n. Autrement dit, il existe nécessairement $\ell \in [\![2^n; 2^{n+1}]\!]$ tel que $u_\ell \geqslant 2u_{2^{n+1}}$. Or, d'après $\mathscr{P}(n)$ ou le cas ci-dessus, on a $u_\ell \leqslant u_1/2^n$, donc $u_{2^{n+1}+1} \leqslant u_1/2^{n+1}$.

Etc jusqu'au rang $k = 2^{n+2}-1$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![2^n; 2^{n+1}-1]\!], \quad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{u_1}{2^n}.}$$

Le théorème des gendarmes nous dit immédiatement que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } 0.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [★]

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles distincts deux à deux. Démontrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles distincts deux à deux, alors l'un au moins des ensembles ne contient aucun des autres ».

Initialisation : $\mathscr{P}(1)$ est clairement vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soient $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des ensembles distincts deux à deux. A fortiori, les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont distincts deux à deux. Par hypothèse de récurrence, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que A_{i_0} ne contient aucun des A_i pour $i \in [\![1;n]\!] \setminus \{i_0\}$. On distingue alors deux cas :

– Si A_{i_0} ne contient pas A_{n+1}, alors A_{i_0} convient.

– Si A_{i_0} contient A_{n+1}, alors A_{n+1} ne contient pas A_{i_0} (sinon on aurait $A_{i_0} = A_{n+1}$) et A_{n+1} ne contient aucun des A_i pour $i \in [\![1;n]\!]$ (sinon cet A_i serait lui-même dans A_{i_0}). Donc A_{n+1} convient.

Cela démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{l'un au moins des ensembles } A_1, \ldots, A_n \text{ ne contient aucun des autres.}}$$

✠ *Exercice 3.* [★]
Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{(1+2\sqrt{2})q^2}.$$

Si $|\sqrt{2} - p/q| \geqslant 1$, le résultat est évident.

Si $|\sqrt{2} - p/q| \leqslant 1$, on remarque que $|2q^2 - p^2|$ est un entier naturel non nul (sinon $\sqrt{2}$ vaudrait p/q et serait rationnel). Par conséquent, on a $|2q^2 - p^2| \geqslant 1$ (c'est l'astuce de Liouville : un entier naturel non nul est supérieur ou égal à 1). Comme $2q^2 - p^2 = (\sqrt{2}q - p)(\sqrt{2}q + 2)$, on en déduit que

$$|\sqrt{2}q - p| \times |\sqrt{2}q + p| \geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$|\sqrt{2}q - p| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}q + p}$$

ou encore

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{(\sqrt{2}q + p)q}$$

Or la condition $|\sqrt{2} - p/q| \leqslant 1$ nous dit que

$$\frac{p}{q} \leqslant 1 + \sqrt{2} \qquad \text{i.e.} \qquad p \leqslant (1+\sqrt{2})q,$$

donc

$$|\sqrt{2}q - p| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}q + (1+\sqrt{2})q},$$

ce qui démontre le résultat.

Ainsi,

$$\boxed{\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{(1+2\sqrt{2})q^2}.}$$

Remarque : Ce résultat signifie que pour qu'une fraction soit proche de $\sqrt{2}$, il est nécessaire qu'elle ait un « gros » dénominateur.

✠ *Exercice 4.* [⋆]
Soient a, b, c trois nombres réels positifs ou nuls tels que $(1+a)(1+b)(1+c) \leqslant 8$. Démontrer que $abc \leqslant 1$.

Soit $x \geqslant 0$. On a $(1-\sqrt{x})^2 \geqslant 0$, d'où $2\sqrt{x} \leqslant 1 + x$. Alors

$$8\sqrt{abc} = 2\sqrt{a}2\sqrt{b}2\sqrt{c} \leqslant (1+a)(1+b)(1+c) \leqslant 8,$$

ce qui donne $\sqrt{abc} \leqslant 1$ et donc

$$\boxed{abc \leqslant 1.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [⋆]
Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ de sorte que $n \leqslant x < n+1$. Nous allons distinguer deux cas selon que x appartient à $[n; n+1/2[$ ou à $[n+1/2; n+1[$.

- Premier cas : $x \in [n; n+1/2[$ Dans ce cas, on a $x+1/2 \in [n+1/2; n+1[$ et $2x \in [2n; 2n+1[$, ce qui prouve que $\lfloor x+1/2 \rfloor = n$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n$. Dès lors, on a bien $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2n - n = n = \lfloor x + 1/2 \rfloor$.
- Second cas : $x \in [n+1/2; n+1[$ Dans ce cas, on a $x+1/2 \in [n+1; n+3/2[$ et $2x \in [2n+1; 2n+2[$, ce qui prouve que $\lfloor x+1/2 \rfloor = n+1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n+1$. Dès lors, on a bien $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2n+1-n = n+1 = \lfloor x+1/2 \rfloor$.

Bilan : On a donc bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [⋆]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de tête le module des nombres complexes $z_k = 5^k(3+4i)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$. En déduire qu'il existe un cercle du plan complexe contenant plus de n points à coordonnées entières. *On admettra que, si θ désigne l'angle tel que $\cos\theta = 3/5$ et $\sin\theta = 4/5$, le nombre θ/π est irrationnel.*

Il est clair que

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad |z_k| = 5^n.}$$

Cela signifie que les z_k sont tous sur le cercle de centre 0 et de rayon 5^n.

Par ailleurs, en développant virtuellement $(3+4i)^{n-k}$, on constate que les parties réelle et imaginaire de z_k sont des entiers.

Enfin, s'il existe $k, \ell \in [\![0; n]\!]$ tels que $z_k = z_\ell$, on a $5^k(3+4i)^{n-k} = 5^\ell(3+4i)^{n-\ell}$, c'est-à-dire $5^{k-\ell} = (3+4i)^{k-\ell}$, ce qui donne $5^{k-\ell} = 5^{k-\ell}\,\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}$ où θ désigne l'angle tel que $\cos\theta = 3/5$ et $\sin\theta = 4/5$. On a donc $(k-\ell)\theta = p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$. Comme θ/π est irrationnel, ce n'est possible que si $k - \ell = 0$ (et $p = 0$), ce qui donne $k = \ell$. Ainsi, les z_k sont deux à deux distincts.

On en conclut que

$$\boxed{\text{il existe un cercle du plan complexe contenant plus de } n \text{ points à coordonnées entières.}}$$

✠ ***Exercice 7.*** [★]
Soient a, b et c trois nombres réels tels que

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Démontrer que

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0.$$

L'hypothèse est équivalente à $\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{ic} = 0$. En désignant par A, B et C les points d'affixes respectives e^{ia}, e^{ib} et e^{ic}, cette relation signifie que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ et donc que le point O est le centre de gravité du triangle ABC. Comme $OA = OB = OC = 1$, O est également le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Chaque médiane issue d'un sommet est alors la médiatrice du segment opposé et le triangle ABC est équilatéral de centre O. À une permutation près, on a donc $\mathrm{e}^{ib} = j\,\mathrm{e}^{ia}$ et $\mathrm{e}^{ic} = j^2\,\mathrm{e}^{ia}$ où $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Il en résulte que $\mathrm{e}^{2ia} + \mathrm{e}^{2ib} + \mathrm{e}^{2ic} = \mathrm{e}^{2ia}(1 + j^2 + j) = 0$ ce qui fournit le résultat espéré. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } \cos a + \cos b + \cos c = 0 \text{ et } \sin a + \sin b + \sin c = 0, \text{ alors} \\ \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \text{ et } \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0. \end{array}}$$