Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 16

Exercice 1

1. évident
2. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $f(P)$ aussi.
   Soit $d \in \mathbb{N}$ un entier. Alors dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$ commutatif :
   $$\begin{aligned} f(X^d) = (X+1)^d + (X-1)^d - 2X^d &= 2\left(\sum_{k=0;\ k \text{ pair}}^{d} \binom{d}{k} X^{d-k}\right) - 2X^d \\ &= 2\sum_{k=2;\ k \text{ pair}}^{d} \binom{d}{k} X^{d-k}. \end{aligned}$$
   On en déduit que si $d \leqslant 1$, alors $f(X^d) = 0$ et si $d \geqslant 2$, alors $f(X^d)$ est de degré égal à $d-2$.
   Par linéarité, si P est un polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$, alors f est dans $\mathrm{Ker}(f)$ et si P est de degré $d \geqslant 2$, alors $f(P)$ est de degré $d-2$.
   Conclusion, $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathbb{R}_1[X]$.
3. La famille de polynômes $\Big(f(X^k)\ ;\ 2 \leqslant k \leqslant n\Big)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Il s'agit d'une famille libre à $n-1 = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$, alors on a l'égalité $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   Finalement, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On trouve un entier n tel que $n-2 \geqslant \deg(Q)$. Ainsi, $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$Q = f_n(P).$$
   Ainsi, $Q = f(P)$ et Q est dans l'image $\mathrm{Im}(f)$: l'application f est bien surjective.
4. On distingue deux cas selon la parité de l'entier n.
   - premier cas, l'entier n est pair ; on pose $n = 2s$. On considère la famille à degrés échelonnés :
     $$\mathscr{F} = \Big(X^{2s}, f(X^{2s}), \cdots, f^s(X^{2s}), X^{2s-1}, f(X^{2s-1}), \cdots, f^{s-1}(X^{2s-1})\Big).$$
     Cette famile comporte des polynômes dont les degrés valent respectivement $2s, 2s-2, \cdots, 0, 2s-1, 2s-3, \cdots, 1$. Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et chaque colonne de la matrice représentant f_n selon cette base ne comporte que des coefficients nuls sauf un seul peut-être. Les coefficients situés juste en-dessous de la diagonale valant 1 (à l'exception de deux coefficients nuls sur cette sous-diagonale).
   - second cas, l'entier n est impair. On pose $n = 2s+1$. On vérifie de même que la famille :
     $$\mathscr{G} = \Big(X^{2s+1}, f(X^{2s+1}), \cdots, f^s(X^{2s+1}), X^{2s}, f(X^{2s}), \cdots, f^{s-1}(X^{2s})\Big)$$
     est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ selon laquelle la matrice représentant f n'est composée que de coefficients nuls, sauf pratiquement tous (sauf deux) ceux situés juste en dessous de la diagonale valant 1.

5. L'endomorphisme :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P\left(X+\dfrac{1}{2}\right) - P\left(X-\dfrac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

convient.
6. On va montrer que cette équation n'admet aucune solution.
Par l'absurde, soit g une solution à cette équation. Alors, on sait que les noyaux itérés $K_n = \mathrm{Ker}(g^n)$ vérifient les inclusions :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subset K_{n+1}.$$

De plus, si $K_n = K_{n+1}$, alors pour tout $r \geqslant n$, $K_n = K_r$.
On considère alors la séquence d'inclusions :

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_1[X].$$

Il est impossible que les espaces K_0, K_1, K_2 et K_3 soient tous différents car les dimensions de ces quatre espaces sont des entiers entre 0 et 2. Nécessairement, il existe $i < j$ entre 0 et 3 tels que $K_i = K_j$.
On sait alors que tous les noyaux itérés K_r pour $r \geqslant j$ sont égaux. En particulier, $K_6 = K_3$.
Cependant, $K_6 = K_3$ ou encore $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, ce qui n'est pas le cas, puisque par exemple X^2 appartient à $\mathrm{Ker}(f^2)$ alors que X^2 n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2

$\Longleftarrow$

On suppose qu'il existe une matrice inversible B de format $r\times r$ telle que les matrices A et $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soient semblables. Il existe donc une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = A'.$$

Ainsi, $P^{-1}A^2P = A'^2 = \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice B^2 reste inversible et les r premières colonnes de la matrice A'^2 forment une famille libre et donc une base de l'image de A'^2 : $\mathrm{Rg}(A'^2) = r$ et comme A^2 est semblable à A'^2, alors $\mathrm{Rg}(A^2) = r$.

$\Longrightarrow$

On suppose $\mathrm{Rg}(A^2) = r = \mathrm{Rg}(A)$. On a immédiatement $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$, donc par égalité des dimensions $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$. De même $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et par le théorème du rang, on a égalité des dimensions, donc $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.
Soit maintenant x dans $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)$. On a $A(x) = 0$ et il existe $\alpha \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $x = A(\alpha)$. Ainsi, $0 = A(x) = A^2(\alpha)$, donc $\alpha \in \mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$ et donc $A(\alpha) = 0$: $x = 0$. La somme $\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Im}(A)$ est directe et toujours par les dimensions, :

$$\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$$

On considère une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\mathscr{B} = (A(e_1), \cdots, A(e_r), \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s),$$

où les r premiers vecteurs constituent une base de $\mathrm{Im}(A)$ et les s derniers une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vers cette base $\mathscr{B}$, la matrice $P^{-1}AP = A'$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le bloc de zéros juste en-dessous du bloc B s'expliquant par le fait que l'image $\mathrm{Im}(A)$ est stable par l'endomorphisme A.
De plus, $r = \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A') = \mathrm{Rg}(B)$ est le nombre de colonnes de B. La matrice B est bien inversible et on a ce qu'il faut.