Compte-rendu d'oral de Mathématiques ENS [L]

Alexandre SHADID

05 juillet 2019

Exercice 1 Soit p un nombre premier impair et $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
On pose la permutation $\sigma : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right.$.
Montrer que $\epsilon(\sigma) = 1 \Leftrightarrow a$ est un carré (où ϵ est la signature).

Exercice 2 Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ (sans hypothèses supplémentaires).
Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des subdivisions σ telles que $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
On pose $V_a^b(f, \sigma) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ et $V_a^b(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} V_a^b(f, \sigma)$.

1. Parmi les hypothèses suivantes, trouver celles qui impliquent que f est à variation bornée, soit $V_a^b(f) < +\infty$:
   (a) f continue
   (b) f C^1
   (c) f lipschitzienne
   (d) f monotone
2. Montrer que f est à variation bornée si et seulement si elle s'écrit comme la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (on ne fait aucune hypothèse de régularité sur f).

Commentaire sur l'oral

Par un coup du sort assez exceptionnel, la triplette d'attaque (SHADID, CHAN, MAGLOIRE) est alignée sur la feuille d'appel pour procurer à l'examinateur trois fois 45 minutes de pur plaisir mathématique. Par un autre coup du sort tout aussi exceptionnel, il se trouve que je connais mon examinateur (son nom, son prénom et même son adresse e-mail) mais il est hautement improbable que lui me connaisse. J'entre donc dans l'oral avec la lourde charge de chauffer la salle pour les deux guignols qui me suivront. Par ailleurs, deux inconnus assistent à mon oral, et font un petit barbecue dans le fond de la pièce.

Pendant mon attente, l'acoustique étant très bonne au travers des portes de l'ENS, j'entendais le candidat avant moi parler tantôt de loi de probabilité et tantôt de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. J'avais donc pris le parti de me préparer à avoir à affronter des probas, et j'entrais dans la salle confiant, en sachant que la variance est linéaire, sous-certaines conditions quand-même, et avec un carré [1]. J'ai donc probablement eu le même exercice que le candidat avant moi, et assurément le même que celui qui passait en même temps que moi. Pour démarrer l'exercice, j'écris la définition de la signature puis je bourrine les calculs (en fait une simple factorisation par a). On aboutit à $\epsilon(\sigma) \equiv a^{p(p-1)/2}$ $[p]$. Par petit théorème de Fermat, $\epsilon(\sigma) \equiv a^{(p-1)/2}$ $[p]$. On conclut alors avec le théorème de Prudhommeau-Becker : *à l'ENS, ce ne sont pas les hypothèses qui comptent, mais la conviction avec laquelle on affirme ce que l'on dit.*

Psychologiquement, je me prépare à avoir l'air convainquant : je prends la pose de trois-quart face, jambes légèrement écartées pour le dynamisme - je peux déjà compter sur ma chemise, que l'on m'a vendue au BHV comme une chemise de la gamme *jeune actif*, et qui est sensée mettre en valeur la motivation du récipiendaire -, mon regard se pose alors dans le vide, vaguement dans la direction de l'examinateur, comme si j'étais quelque part en orbite à la frontière entre le Monde Sensible et le Monde des Idées ; et avec force conviction et enthousiasme j'enchaîne : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps DONC les polynômes de degré n ont au plus n racines DONC il y a $(p-1)/2$ carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ DONC on a le résultat DONC l'hypothèse de Riemann est vraie. L'examinateur semble plutôt intérieurement heureux, il me dit même en souriant *t'as fini l'exo*, et je sens bien qu'il tente alors de m'intimider en me lançant *on va faire de l'analyse* ; mais je sais quand-même reconnaître quand un examinateur bluffe.

Pour le deuxième exercice, je montre tout de suite que C^1 et lipschitzienne conviennent, par le théorème des accroissements finis et par définition respectivement. Pour l'hypothèse f continue, $x \times sin(1/x)$ et une subdivision bien choisie fournissent un contre-exemple. Enfin le cas monotone se démontre par télescopage. Pour la deuxième question, le sens réciproque se montre bien en écrivant $f = f_c + f_d$ et en appliquant l'inégalité triangulaire. Pour le sens direct, je me rappelle que cet exercice a en fait déjà été corrigé pendant la préparation aux oraux. Je me souviens que l'astuce consiste à introduire la variation, mais une erreur évitable que je fait me porte à croire qu'elle ne conviendra pas. Cependant, je construis par un dessin deux fonctions convenables dans le cas où f possède un nombre fini de changements de monotonie, puisque l'examinateur me proposait de *gagner en intuition* en étudiant le cas C^1. Finalement, il me suggère de regarder la variation, et le temps étant écoulé, je lui explique oralement comment je ferais pour conclure.

Comme tous les examinateurs de l'ENS, il était très gentil, et il me laissait en particulier plus parler ou dessiner qu'écrire.

1. Donc pas vraiment méga linéaire non plus en fait.