T.D. EM_{4-6} : Équations de MAXWELL, loi d'OHM et énergie électromagnétique

Exercice 1 Distributions électrostatiques

Vous pouvez utiliser un formulaire d'analyse vectorielle pour traiter cet exercice.

1. On appelle r la distance à un point fixe. Calculer les densités de charge statique volumique et surfacique nécessaires pour créer le potentiel
$$\mathrm{V}(r<a)=k\,r^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(r>a)=k\,\frac{a^3}{r}$$
2. Soit x la distance à un plan fixe et une distribution volumique de charges
$$\rho(x<0)=\rho_0\,e^{x/a} \quad \text{et} \quad \rho(x>0)=0$$
En plus de la distribution volumique de charges, il existe une distribution surfacique $\sigma=-\rho_0\,a$. Calculer le champ électrique en tout point de l'espace.

Exercice 2 Distribution de courants

On considère un cylindre d'axe Oz et de section circulaire de rayon a. Ce cylindre est parcouru par des courants caractérisés par une distribution $\overrightarrow{j}=j(r)\,\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques. Le champ magnétique créé correspondant est
$$\overrightarrow{\mathrm{B}}(r<a)=\mathrm{B}_0\left(\frac{r}{a}-\frac{r^2}{a^2}\right)\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{B}}(r>a)=\mathrm{B}_0\,\frac{a}{r}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

1. Montrer qu'il existe nécessairement une distribution surfacique de courant et la calculer.
2. Déterminer sans formulaire d'analyse vectorielle la distribution volumique de courant.

Exercice 3 Sphère radioactive

Une sphère radioactive, de rayon R, émet des particules chargées de façon isotrope dans tout l'espace. On note $\mathrm{Q}(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r ($r<\mathrm{R}$).

1. Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive.
2. Que penser de l'équation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{B}}=\mu_0\,\overrightarrow{j}$? On se basera sur les résultats précédents.

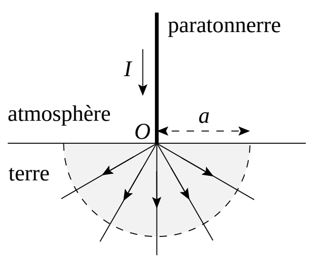
Exercice 4 Condensateur plan en régime variable

Un condensateur plan est fait de deux armatures en métal parfaitement conducteur (champs électrique et magnétique nuls dedans) ; elles sont en forme de disque circulaire mince de rayon a, coaxiales, d'axe Oz, distantes de h. Le centre du condensateur est en O ; les fils d'arrivée du courant sont sur l'axe Oz, parcourus par le courant d'intensité $i(t)=\mathrm{I}_0\cos\omega t$ pour $|z|\geqslant h/2$. On suppose que le champ électrique entre les armatures en un point de l'axe Oz est $\overrightarrow{\mathrm{E}_0}=\mathrm{E}_0\,\overrightarrow{e_z}=e_0\cos\omega t\,\overrightarrow{e_z}$ avec l'amplitude e_0 constante. On repère un point par ses coordonnées cylindriques r, θ et z, d'axe Oz.

1. Établir les propriétés de symétrie des champs électrique et magnétique dans l'espace entre les armatures ainsi que la forme des lignes de champ magnétique.
2. En supposant que les lignes de champ électrique sont des segments de droite parallèles à l'axe Oz et, qu'en première approximation, le champ électrique est uniforme, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}_1}$ dans l'espace entre les armatures.
3. Quelle équation de Maxwell n'est pas vérifiée dans l'espace entre les armatures ? Déterminer alors la correction $\overrightarrow{\mathrm{E}_1}$ à apporter au champ électrique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{E}_0}$.
4. Déterminer de même les termes correctifs suivants $\overrightarrow{\mathrm{E}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}_2}$.
5. Établir l'expression des corrections successives à apporter aux champs électrique et magnétique en effectuant une démonstration par récurrence.
6. En notation complexe, mettre l'expression de $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$ tenant compte de toutes les corrections successives sous forme d'une série de Bessel d'ordre 0 :
$$\mathrm{J}_0(x)=\sum_0^\infty \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2n}$$
et donner l'expression de x en fonction de ω, r et c.
7. Proposer une condition sur ω permettant, à la louche, de négliger les termes correctifs pour une étude sommaire du condensateur.

Exercice 5 Prise de terre

Une prise de terre est constituée d'une demi-boule de centre O et de rayon a (négligeable) enfoncée dans le sol. Elle est destinée à recevoir un courant d'intensité $\mathrm{I}=5.10^4$ A en provenance d'un paratonnerre. Le sol est assimilé au demi-espace $z<0$, conducteur de conductivité $\gamma=10^{-2}\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$, dans lequel on suppose que la densité de courants est de la forme $\overrightarrow{j}=j(r)\,\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques.



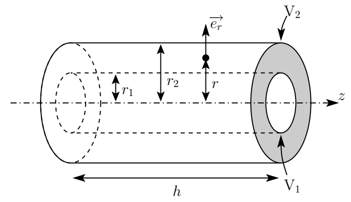
1. Montrer que $j(r)=\mathrm{I}/(2\pi r^2)$. On supposera les courants stationnaires pour simplifier.
2. Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}=\mathrm{E}(r)\,\overrightarrow{e_r}$ dans le sol et en déduire que son potentiel vaut $\mathrm{V}(r)=\mathrm{I}/(2\pi\gamma r)$.
3. À quelle distance minimale D_m de la prise de terre dans le plan $z=0$ un homme doit-il être pour être certain que son corps soit traversé par un courant inférieur à $\mathrm{I}_{\max}=25$ mA ?
On donne la résistance $\mathrm{R}\simeq 2{,}5$ kΩ du corps humain entre ses deux pieds, distants de $\delta\simeq 1$ m.

Exercice 6 Décharge d'un condensateur plan

Un condensateur plan est rempli d'un diélectrique de permittivité ε (dont l'effet est de remplacer ε_0 par ε) et de conductivité γ. On le charge à $t = 0$. Trouver le temps au bout duquel il est déchargé à 99%.

Exercice 7 Résistance en géométrie cylindrique

On considère un conducteur en géométrie cylindrique : le conducteur occupe l'espace $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, sur une hauteur h. Il a une conductivité γ. Les surfaces $r = r_1$ et $r = r_2$ sont portées aux potentiels V_1 et V_2. On note $U = V_1 - V_2$. Un courant circule donc radialement entre ces surfaces. On cherche à évaluer la résistance du conducteur de deux façons différentes.



1. Rappeler l'équation satisfaite par le potentiel V à l'intérieur du conducteur. Montrer que $V(r,\theta,z)$ peut vérifier toutes les conditions aux limites à condition de ne dépendre qu'une des trois variables r, θ ou z, que l'on déterminera. Trouver V (formulaire autorisé) à une constante additive près. En déduire le champ électrique $\overrightarrow{E}$, le courant I puis la résistance.
2. On découpe (par la pensée) le conducteur en volumes infinitésimaux $d\tau = r dr d\theta dz$. Dans la géométrie considérée, quelle est la résistance d'une telle portion infinitésimale de conducteur ? En déduire celle du conducteur complet.
3. En reprenant les résultats de la question 1, calculer la puissance dissipée par effet Joule par un argument d'électromagnétisme, et vérifier qu'on retrouve bien la formule habituelle d'électrocinétique.

Exercice 8 Effet de magnétorésistance *

On considère un matériau conducteur ohmique de conductivité γ disposé entre les armatures d'un condensateur cylindrique (axe (Oz), rayons des armatures a et $b > a$, effets de bord négligés). On lui impose un champ magnétique permanent d'intensité B colinéaire à l'axe (Oz).

1. Déterminer deux relations entre les deux composantes non nulles du champ électrique et de la densité volumique de courant, en fonction de γ et de la constante de HALL $A_H = 1/(nq)$.
2. Déterminer complètement le champ électrique et la densité de courant en fonction de la tension $U = V_{int} - V_{ext}$ entre les armatures. Tracer l'allure des lignes de champ électrique $\overrightarrow{E}$ et de courant $\overrightarrow{j}$.
3. Établir la relation entre les composantes radiales de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{j}$. En déduire la variation relative de la résistance de ce conducteur due à l'introduction du champ magnétique (effet de magnétorésistance).
4. Évaluer la variation relative de résistance pour un cylindre conducteur (cuivre) ou semi-conducteur (silicium) dans un champ magnétique $B = 1$ T. Il est laissé à votre initiative le « choix » des valeurs numériques utiles au calcul…

Exercice 9 Espace rendu conducteur

Deux sphères métalliques concentriques minces sont séparées par un gaz initialement isolant. La sphère intérieure porte initialement des charges électriques alors que la sphère extérieure n'en porte pas.

Le gaz est rendu instantanément conducteur (par pompage optique par exemple).

1. Décrire qualitativement puis quantitativement les phénomènes qui se produisent.
2. Faire un bilan énergétique.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Imposer que le potentiel soit continu et qu'il obéisse à l'équation de Poisson. Imposer la relation de passage du champ électrique.

Exercice 2

Pas d'indication.

Exercice 3

Dans la deuxième question, analyser la conservation de la charge…

Exercice 4

Bien revoir les propriétés de symétrie des champs…

Pour déterminer $\overrightarrow{B_1}$, utiliser le théorème d'Ampère généralisé sur une courbe de circulation bien choisie. Ensuite, pour déterminer $\overrightarrow{E_1}$, utiliser la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur une courbe de circulation bien choisie.

Exercice 5

$D_m = 110\ m$.

Exercice 6

Pas d'indication !

Exercice 7

2. Utiliser les lois d'associations en série et en parallèle.

Exercice 8

*Penser à la loi d'*OHM *généralisée puisqu'il y a un champ magnétique. Ensuite, dans le calcul, on peut prendre le champ électrique radial. On peut le deviner comme suit : on a* $\Delta V = 0$ *dans le conducteur et les conditions aux limites sont les mêmes sur le potentiel que* $\overrightarrow{B}$ *statique soit là ou non. Par conséquent, le potentiel* $V(M)$ *dans le conducteur est le même que s'il n'y avait pas le champ magnétique statique (théorème d'unicité), d'où* $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ *inchangé par rapport au cas sans* $\overrightarrow{B}$ *et il est radial.*

Pour le calcul de $\overrightarrow{E}$*, le théorème de Gauss est fort utile...*

Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques.

La variation relative de la résistance par effet de magnétorésistance est $\Delta R/R = \gamma^2\, {A_H}^2\, B^2$.

Pour les applications numériques, il faut connaître quelques ordres de grandeur. À $T = 300$ K *(conditions usuelles), pour le cuivre (conducteur),* $\gamma = 5,8.10^7$ S.m^{-1} *et* $n \simeq 10^{29}$ m^{-3} *et* $q = -e$ *(réseau* Cu^+ *et gaz d'électrons). Pour le silicium (semi-conducteur),* $\gamma = 3.10^4$ S.m^{-1} *et* $n \simeq 10^{16}$ m^{-3} *et* $|q| = e$ *(électrons et trous).*

Exercice 9

Les symétries donnent $\overrightarrow{B}$*. Ensuite, obtenir une équation différentielle sur le champ électrique qui fait intervenir le temps de relaxation* $\tau = \varepsilon_0/\gamma$ *du milieu rendu conducteur ohmique (conductivité* γ*). On pourra aussi exprimer* ρ *et* $\overrightarrow{j}$ *et analyser ces résultats en les comparant. Enfin, le bilan énergétique demandé consiste à calculer l'énergie pour l'état initial, l'énergie pour l'état final et à s'assurer que la variation d'énergie correspond bien à la dissipation par effet Joule...*