

RELATIONS

Exercice 1. [$\circ$]

On considère la relation $/\!/$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad \big((a,b) /\!/ (c,d)\big) \iff (ad - bc = 0).$$

Démontrer que $/\!/$ est une relation d'équivalence.

Exercice 2. [$\circ$]

Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ définie par

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad (X \mathscr{R} Y) \iff (X \cap A = Y \cap A).$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Déterminer la classe d'équivalence de X.

Exercice 3. [$\circ$]

On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x \mathscr{R} y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

1. Vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4. [$\circ$]

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation sur E qui est transitive et symétrique.

Démontrons que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, autrement dit que $\mathscr{R}$ est automatiquement réflexive. Soit $a \in E$. Considérons $b \in E$ tel que $a \mathscr{R} b$. Par symétrie de $\mathscr{R}$, on a $b \mathscr{R} a$. On a donc ($a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} a$), ce qui implique, par transitivité de $\mathscr{R}$, que $a \mathscr{R} a$. Ainsi $\mathscr{R}$ est bien réflexive, ce qui démontre que c'est une relation d'équivalence.

Trouver l'erreur dans ce raisonnement ! Donner un contre-exemple.

Exercice 5. [$\circ$] (Définition faible d'une relation d'équivalence)

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est symétrico-transitive lorsque, pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \Longrightarrow (z \mathscr{R} x)$.

Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrico-transitive.

Exercice 6. [$\circ$]

Déterminer toutes les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments (on donnera les tableaux ou les diagrammes de Hasse).

Exercice 7. [$\circ$]

On considère la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad (n \preccurlyeq m) \iff \big(\exists p \in \mathbb{N}, \quad m = n^p\big).$$

Vérifier que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 8. [$\star$] (Élément maximal)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide. On dit qu'un élément $m \in E$ est un *élément maximal* de E lorsque $\forall x \in E,\ (m \preccurlyeq x) \Longrightarrow (x = m)$.

1. Interpréter la notion d'élément maximal sur un diagramme de Hasse. Que dire dans le cas où l'ordre est total ?
2. a) Un élément maximal de E est-il nécessairement le plus grand élément de E ?
   b) Justifier que si E admet un plus grand élément alors c'est le seul élément maximal de E.
   c) Si E admet un unique élément maximal, est-il nécessairement le plus grand élément de E ?
   d) On suppose que E est fini et admet un unique élément maximal m. Démontrer que m est le plus grand élément de E.
3. [$\bigstar$] On suppose que E est fini. Démontrer que toute partie non vide de E admet au moins un élément maximal. *On pourra procéder par récurrence forte.*

Exercice 9. [$\star$]

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est *bien ordonné* lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1. a) Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné. La réciproque est-elle vraie ?
   b) Démontrer qu'un ensemble fini et totalement ordonné est bien ordonné.
2. Démontrer que si $(E, \preccurlyeq)$ et $(E, \succcurlyeq)$ sont bien ordonnés, alors E est un ensemble fini.
3. On dit qu'un élément x de E admet un successeur s dans E lorsque

$$x \prec s \qquad \text{et} \qquad \forall a \in E,\ (x \prec a) \implies (s \preccurlyeq a)$$

   où $\prec$ désigne l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$.
   a) Démontrer que si un élément x de E admet un successeur, alors celui-ci est unique. On le note $\mathrm{succ}(x)$.
   b) Dans le cas où E est bien ordonné, démontrer que, pour tout élément x de E, on a l'alternative suivante : ou bien x est un élément maximal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément plus grand que x dans E) ou bien x admet un successeur.

Exercice 10. [$\star$]

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie non vide et minorée de E possède une borne inférieure. Démontrer que toute partie non vide et majorée de E possède une borne supérieure.