Problème n^o 12 : Intégration

Problème 1 – Théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Riemann

Le but du problème est de montrer dans le cadre de l'intégration de Riemann un théorème de convergence, classique, et assez facile à obtenir dans la théorie de l'intégration de Lebesgue, mais beaucoup plus délicat dans le cadre de la théorie de l'intégration de Riemann. La facilité des passages à la limite pour l'intégrale de Lebesgue est d'ailleurs une des forces de cette théorie.

Plus précisément, on se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles, intégrables sur un segment $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

On suppose que f est intégrable sur $[a,b]$, et qu'il existe une fonction g intégrable sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Le but du problème est de montrer qu'alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

On admettra (voir DM) que si une suite (g_n) de fonctions intégrables converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$, alors g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On rappelle qu'une suite (g_n) converge uniformément vers g si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in [a,b], \quad |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Partie I – Réduction du problème

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers la fonction nulle.
2. En considérant les fonctions f_n^+ et f_n^- qui à x associent $f_n(x)^+ = \max(0, f_n(x))$ et $f_n^-(x) = -\min(0, f_n(x))$, montrer qu'on peut se contenter de montrer le résultat pour une suite de fonctions positives convergeant simplement vers la fonction nulle.
3. Montrer qu'on peut remplacer l'hypothèse d'existence de g par l'hypothèse suivante : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant M$ (autrement dit, les $|f_n|$ admettent un majorant commun).
4. (a) La fonction f_n étant supposée positive et intégrable sur [a,b], montrer qu'il existe une fonction φ_n vérifiant $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f_n$, continue sur $[a,b]$, et telle que $\displaystyle\int_a^b (f_n(x) - \varphi_n(x))\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$.

   (b) En déduire qu'on peut réduire la preuve au cas où les fonctions (f_n) sont continues, de limite (simple) nulle, majorées par un réel M.

Ainsi, on est ramené à prouver le résultat suivant : pour toute suite (f_n) de fonctions positives, continues, convergeant simplement vers la fonction nulle, et majorées par un réel M, la suite d'intégrales $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie II – Théorème de Dini

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives et croissantes sur $[a,b]$, convergeant simplement vers la fonction nulle sur $[a,b]$. Montrer que la convergence est uniforme.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant simplement vers la fonction nulle (ainsi, pour tout x de $[a,b]$, la suite $(f_n(x))$ converge en décroissant vers 0). On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[a,b]$:
$$g_n(x) = \sup_{t\in[a,x]} f_n(t).$$
   (a) Montrer que pour tout $x\in[a,b]$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et converge vers un réel $g(x)\geqslant 0$.
   (b) Soit $x\in[a,b]$, et supposons que $g(x)>0$. Montrer qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,x]$ tels que $f_n(t_n)\longrightarrow g(x)$.
   (c) En déduire l'existence de $t\in[a,x]$ et de $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $f_n(t)\geqslant \frac{g(x)}{2}$.
   (d) En déduire que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle.
   (e) Montrer que (f_n) convergent uniformément vers la fonction nulle (théorème de Dini)

Partie III – Preuve du théorème de convergence dominée

On se donne (f_n) une suite de fonctions continues et positives, majorées par un réel M, convergeant simplement vers la fonction nulle, et on suppose par l'absurde que $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ne converge pas vers 0.

1. Quitte à considérer une suite extraite, montrer qu'on peut supposer que $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est minorée par un réel $\alpha>0$.
2. Justifier que pour tout n fixé, la suite $\int_a^b \sup(f_n(x),\dots,f_{n+p}(x))\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie $\lambda_n\geqslant\alpha$ lorsque p tend vers $+\infty$.

On peut donc trouver, pour tout $n\in\mathbb{N}$, un entier $p(n)$ tel que la fonction $g_n=\sup(f_n,\dots,f_{n+p(n)})$ vérifie :
$$\int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \lambda_n - \frac{\alpha}{2^{n+2}}.$$

3. Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $h_n=\inf(g_0,g_1,\dots,g_n)$. À l'aide de la partie 2, montrer que $\int_a^b h_n(t)\,\mathrm{d}t\longrightarrow 0$.
4. En remarquant que pour tout $i<n$, $g_n-g_i\leqslant \sup(f_i,f_{i+1},\dots,f_{n+i+p(i)+p(n)})-g_i$, montrer que
$$\int_a^b (g_n-g_i)^+ \leqslant \frac{\alpha}{2^{i+2}}.$$
5. Montrer que pour tous réels $a_0,\dots,a_n,x$, on a :
$$\inf(a_0,\dots,a_{n-1},x)\geqslant x-\sum_{i=0}^{n-1}(x-a_i)^+.$$
   En déduire que $\int_a^b h_n > \frac{\alpha}{2}$, et conclure.