Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths L
— *NOM Prénom* : LESBATS Rémi

Exercice :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver n points non alignés dans le plan à distances mutuelles entières.
2. Peut-on en trouver une infinité ?

Remarques sur l'oral

Relisez vos convocations pour arriver à l'heure... Je suis arrivé avec un quart d'heure de retard en pensant avoir un quart d'heure d'avance mais l'examinateur m'a gentiment accepté, il m'a simplement dit de me dépêcher parce que je serais noté sur ce que je ferais en 30min. Il me laisse sans rien dire pendant que je dessine au tableau. Quand je trouve une configuration qui me semble convenir au bout de 5min, je me retourne vers lui et il me dit immédiatement "oui c'est la bonne idée, continue", donc je n'ai pas à parler. L'idée est de prendre $n-1$ points alignés à distances entières sur une droite et de placer le dernier sur une perpendiculaire à la droite passant par le premier point, à distance d de cette droite. De cette manière il ne reste que $n-2$ diagonales à rendre entières. L'examinteur me demande comment on peut simplifier le problème, par quoi on peut remplacer "entière" donc je réponds que rationnelle suffit quitte à multiplier par le ppcm des dénominateurs. On peut donc se ramener à $d = 1$, et il faut montrer que l'équation $x^2 + 1 = y^2$ a une infinité de solutions rationnelles. On réécrit comme $x^2 - y^2 = 1$, et il me demande à quoi ça me fait penser si on remplace le $-$ par un $+$. Je ne vois pas quoi faire donc il me dit que c'est un cercle (ça j'aurais pu le dire) et me dit qu'on en fait une paramétrisation rationnelle (ça j'aurais pas pu le dire). Il m'explique que cela consiste à paramétrer par deux fractions rationnelles les coordonnées des points du cercle. On les obtient en écrivant sin et cos en fonction de t, la tangente de l'arc-moitié. Gros soulagement, je connais cette formule de trigo, on a $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$. On en déduit que quand t est rationnel, les deux coordonnées le sont, donc ça marche. En revenant à l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, je lui dis qu'on peut faire pareil en trigonométrie hyperbolique. Je dois trouver moi même les formules correspondantes mais j'y arrive assez vite en devinant un peu, on trouve les mêmes formules en changeant les $+$ en $-$. Ça conclut la première question, on a une infinité de solutions rationnelles donc on en choisit $n-2$ et on multiplie par le ppcm des dénominateurs pour avoir des longueurs entières. Pour la deuxième question, je lui dis que je pense que c'est impossible car on ne peut plus multiplier par ce ppcm, et il me suggère immédiatement de considérer par l'absurde deux points A et B de l'ensemble de de considérer $AC - BC$ pour tout point C de l'ensemble. Je lui dis que c'est un entier et il me demande quelles valeurs entières cela peut prendre. Une inégalité triangulaire montre que $|AC - BC| \leq AB$. A partir de là il reste 1min donc je lui dis que tous les points doivent être sur les hyperboles $x^2 - y^2 = k$ pour $|k| \leq AC$, en reprenant deux autres points on crée un deuxième faisceau d'hyperboles qui a un nombre fini d'intersections avec le premier, d'où une contradiction un peu rapide. Il me dit que l'oral est terminé mais que c'est la bonne idée et qu'on peut dire plus simplement avec le principe des tiroirs qu'il y a une infinité de points sur une hyperbole, puis refaire le même raisonnement avec deux points de cette hyperbole.