Statistiques et probabilités appliquées
BUT TC S3 - R3.07 - TQR3
IUT d'Évry Val d'Essonne

Dominique Fourer
dominique.fourer@univ-evry.fr

17 septembre 2023

Table des matières

Introduction

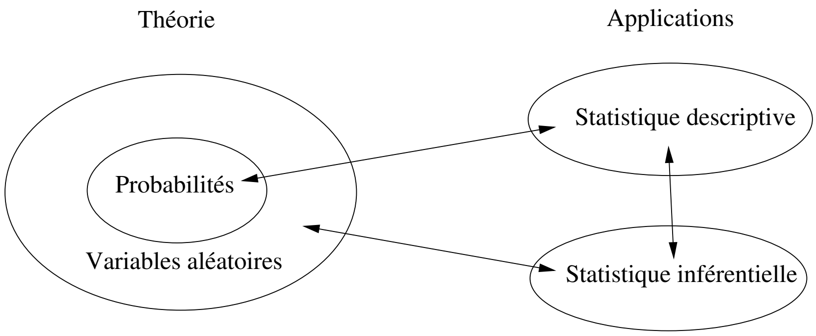


FIGURE 1 – Illustration des liens entre probabilités et statistiques.

Les probabilités permettent l'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. La théorie des probabilités est un domaine spécifique des mathématiques.

Les statistiques permettent l'étude des phénomènes par la collecte, l'analyse et le traitement de données. L'interprétation et la présentation des résultats (statistique descriptive) permet une meilleure compréhension et une aide à la décision (statistique inférentielle).

La statistique et la théorie des probabilités constituent en mathématiques les deux sciences du hasard.

L'origine du mot hasard vient de l'arabe « al-zahr » signifiant à l'origine « dés » et ayant pris la signification de « chance », car il désigna jusqu'au XII$^{\text{ieme}}$ siècle un jeu de dés.

Objectifs du module

— Savoir calculer des probabilités et des intervalles de confiance en rapport avec des situations d'entreprise,
— Test d'indépendance qui régit un phénomène.
— Utilisation de tables statistiques des lois usuelles.
— Savoir formuler et tester une hypothèse.

Évaluations

	%	Date
Devoir surveillé 1	50%	octobre
Devoir surveillé 2	50%	janvier

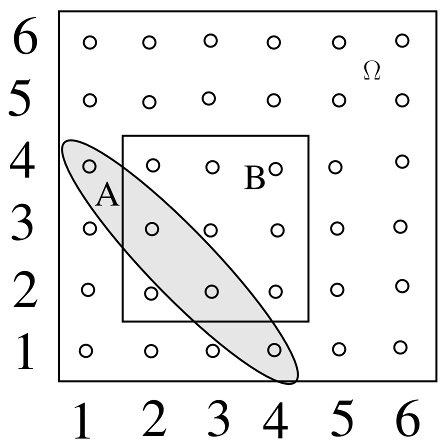
1 Rappels sur les probabilités

1.1 Définitions

- **Expérience aléatoire :** Épreuve dépendant du hasard avec plusieurs résultats (éventualités) possibles
- **Univers Ω :** l'ensemble de tous les résultats possibles (espace des épreuves)
- **Éventualité ω :** un des résultats possibles
- **Événement A :** un sous-ensemble de Ω (peut contenir une ou plusieurs éventualités)

Exemple 1.1.
- "Compter le nombre de clients de la journée" (exemple, un commerce)
- $\Omega = \{1, 2, \cdots, N_{\max}\}$
- $\omega_1 = 1$ (au moins), $\omega_2 = 10$,
- $A = \{\text{il y a au moins 7 clients}\} \subset \Omega$

Exemple 1.2. Lancer de dés :
- **Expérience aléatoire :** lancer de 2 dés
- **Univers :** $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (6,6)\}$
- **Éventualité :** $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (1,2)$, ...
- $A = \{\text{la somme est égale à 5}\}$
- $B = \{\text{chaque dé est entre 2 et 4}\}$



1.2 Modèle probabiliste

Une probabilité permet de mesurer la fréquence d'un événement aléatoire A en attribuant un nombre $P(A) \in [0; 1]$.

Définition 1.1. Définition classique (Laplace) :
Pour un ensemble Ω d'événements possibles :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre des cas équiprobables favorables}}{\text{Nombre des cas équiprobables possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \tag{1}$$

Cas particuliers :

- $P(A) = 0$, probabilité nulle pour un événement impossible (qui ne se produira jamais). Donc $A = \emptyset$.
- $P(A) = 1$, probabilité maximale pour un événement certain (qui se produira à chaque fois). Donc $A = \Omega$.

Exemple 1.3. Lancer de un dé.

- Ensemble des événements possibles : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Événement $A = \{$"Tomber sur un nombre pair"$\} = \{2, 4, 6\}$
- $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$

Définition 1.2. Définition intuitive (fréquence relative) :

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{Exp}_n(A)}{n} \tag{2}$$

avec $\text{Exp}_n(A)$ le nombre de fois que l'événement A s'est produit après n expériences aléatoires.

En pratique, on échantillonne (*i.e.* on renouvelle plusieurs fois l'expérience aléatoire) et on dénombre A pour un n très grand.

1.2.1 Règles de calcul ensembliste :

On considère 2 sous-ensembles de Ω, $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$.

Ensemble vide : $\emptyset$

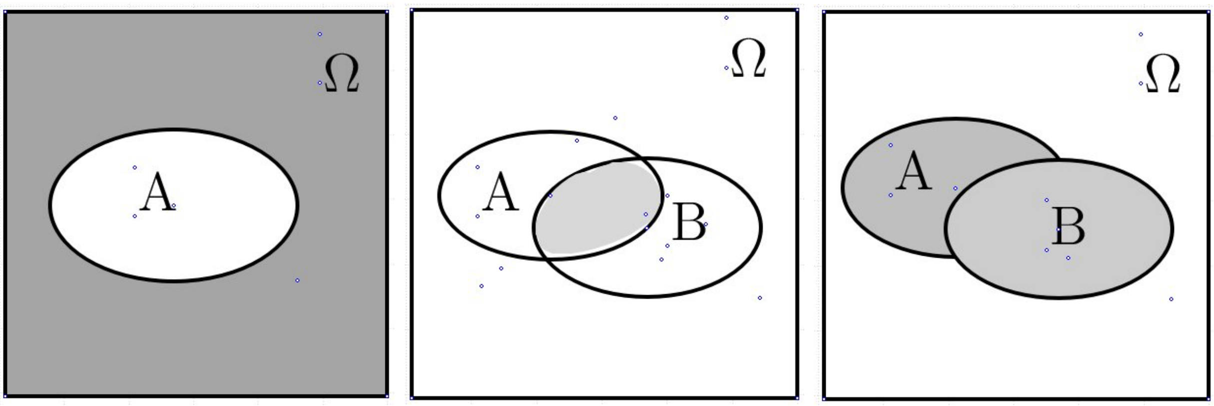
Complémentaire de A (dans Ω) : $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Intersection : $A \bigcap B$

Union : $A \bigcup B$

Disjoints : 2 ensembles sont disjoints si $A \bigcap B = \emptyset$

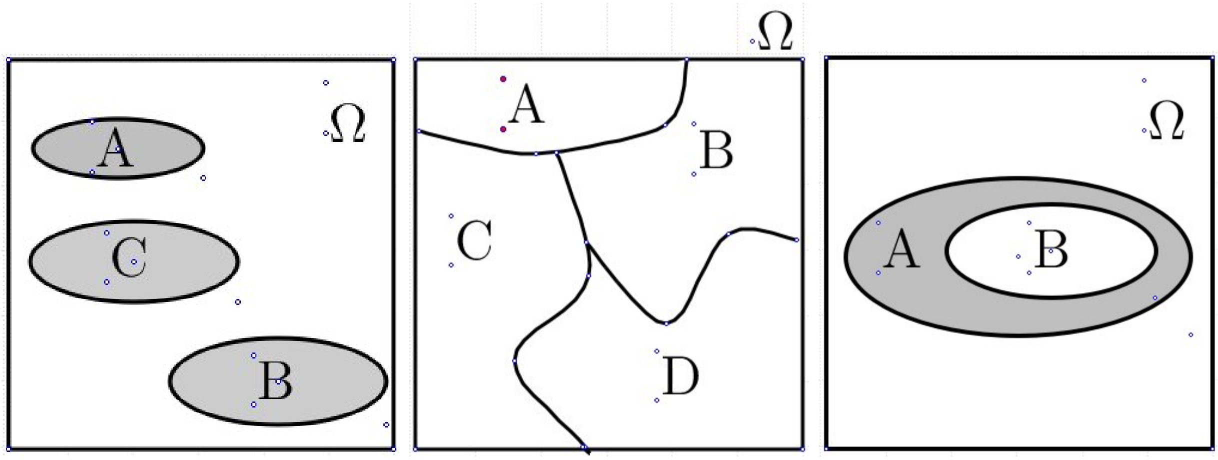
Partitions : $\bigcap_{i=1}^{I} A_i = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{I} A_i = \Omega$ (I le nombre de parties)



(a) $\bar{A}$ (b) $A \bigcap B$ (c) $A \bigcup B$

Table 1 – Relations entre les différentes terminologies

Probabilités	Ensemble	Notations
Événement certain	Espace entier	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\emptyset$
Événement contraire	Partie complémentaire	$\bar{A}$ (ou A^c, $\neg A$)
Et	Intersection	$\cap$
Ou	Union	$\cup$
Événements incompatibles	Parties disjointes	$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
Système exhaustif	Partitions	$\bigcup_i A_i = \Omega$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
Implication	Inclusion	$A \subseteq B$



(d) Disjoints (e) Partitions (f) $\bar{B}, B \subset A$

1.2.2 Propriétés des probabilités

- $P(A) \in [0;1]$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (preuve : $A \cap \bar{A} = \emptyset$, donc $P(A) + P(\bar{A}) = 1$)
- $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 0$ car $P(\Omega) = 1$
- Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

1.3 Dénombrement

Le dénombrement permet de calculer le nombre des événements possibles permettant de déduire une probabilité. Nous noterons ici n le nombre d'éléments distincts considérés et k le nombre d'éléments choisis. Un résumé des dénombrements possible est présenté dans le tableau 2.

1.3.1 Rappels mathématiques

- Factorielle : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, par convention $0! = 1$
- Combinaison : $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Arrangement : $A_n^k = k! C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Permutation : $P_n = A_n^n = n!$

1.3.2 Tirage ordonné avec remise

Cas : On tire k éléments parmi n en autorisant la répétition de certains éléments. L'ordre de tirage est pris en compte.

Dénombrement : $N = n^k$

Exemple : On tire k boules numérotées de 1 à n dans un sac. On note le résultat puis on remet chaque boule dans le sac après chaque tirage. Le nombre de configurations possibles est $N = n^k$ et chaque événement a une probabilité de $\frac{1}{N}$.

Si $n = 10$ et $k = 3$, on a $N = n^k = 10^3 = 1000$

1.3.3 Tirage ordonné sans remise

Cas : On tire k éléments parmi n sans autoriser de répétition de certains éléments. L'ordre de tirage est pris en compte.

Dénombrement : $N = A_n^k$

Exemple : On tire k boules numérotées de 1 à n dans un sac puis on note le résultat. Le nombre d'arrangements possibles est $N = A_n^k$ et chaque événement a une probabilité de $\frac{1}{N}$.

Si $n = 10$ et $k = 3$, on a $N = A_n^k = 10 \times 9 \times 8 = 720$

1.3.4 Tirage non ordonné sans remise

Cas : On tire k éléments parmi n sans autoriser de répétition de certains éléments et sans tenir compte de l'ordre.

Dénombrement : $N = C_n^k$

Exemple : On tire k boules numérotées de 1 à n dans un sac. Le nombre de Combinaisons possibles est $N = C_n^k$ et chaque événement a une probabilité de $\frac{1}{N}$.

Si $n = 10$ et $k = 3$, on a $N = C_n^k = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$

1.3.5 Tirage non ordonné avec remise

Cas : On tire k éléments parmi n en autorisant la répétition de certains éléments mais sans tenir compte de l'ordre.

Dénombrement : $N = C_{n+k-1}^{n-1}$

Exemple : On tire k boules numérotées de 1 à n dans un sac puis on remet chaque boule dans le sac après chaque tirage. Le nombre de combinaisons possibles est $N = C_{n+k-1}^{n-1}$ et chaque événement a une probabilité de $\frac{1}{N}$.

Si $n = 10$ et $k = 3$, on a $N = C_{12}^{9} = 220$

1.3.6 Toutes les combinaisons possibles de n éléments

Cas : Tous les tirages possibles de 0 à n éléments sans tenir compte de l'ordre

Dénombrement : $N = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$ (preuve : On applique la formule $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$ pour $a = b = 1$).

Exemple : Combien de nombres différents un ordinateur peut représenter sur $n = 3$ bits :
- 0 : 000
- 1 : 001
- 2 : 010
- 3 : 011
- 4 : 100
- 5 : 101
- 6 : 110
- 7 : 111

soit $2^3 = 8$ combinaisons possibles.

TABLE 2 – Résumé des dénombrements pour le tirage de k éléments parmi n (cas possibles).

ordre	remise	N
non	non	C_n^k
oui	non	A_n^k
oui	oui	n^k
non	oui	C_{n+k-1}^{n-1}

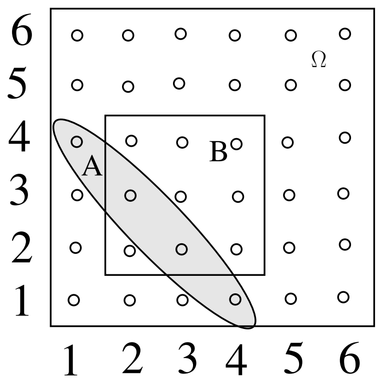
1.4 Probabilités conditionnelles

Définition 1.3. Permet de calculer la probabilité d'un événement A sachant qu'un événement B probable ($P(B) \neq 0$) s'est réalisé.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}} \tag{3}$$

$P(A|B)$ est donc la probabilité de l'événement A dans l'univers de B.

Exemple 1.4. lancer de 2 dés (toutes les réalisation ω_i sont équiprobables)



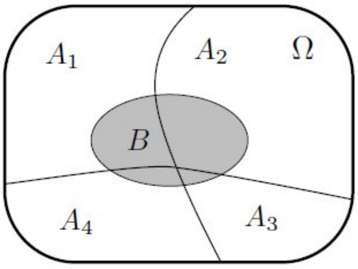
- $P(A) = \frac{1}{9}$
- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(A \bigcap B) = \frac{1}{18}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9}$

1.4.1 Propriétés

Une probabilité conditionnelle satisfait les axiomes suivants :
- $P(A|B) \geq 0$, pour chaque $A \subseteq \Omega$
- $P(A_1 \bigcap A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \bigcap A_2|B)$
- $P(\Omega|B) = 1$

et possède les propriétés suivantes :
- $P(B|B) = \frac{P(B \bigcap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A \bigcap B) = P(B)P(A|B)$

1.4.2 Théorème des probabilités totales



Cette formule permet de calculer la probabilité d'un événement en le décomposant suivant une partition de Ω.

- Soit $\{A_i,\ i = 1, 2, n\}$ une partition de Ω (A_i des événements disjoints).

- $B = \bigcup_{i=1}^{n}(B \bigcap A_i)$ ($B \bigcap A_i$ des événements disjoints).

- $P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B \bigcap A_i) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$.
- alors nous avons :

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{4}$$

Exemple 1.5. On dispose de 3 urnes U1, U2, U3, chacune contient 10 boules :

- U1 contient 1 blanche
- U2 contient 2 blanches
- U3 contient 6 blanche

On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A1, A2, A3\}$ forme un système complet d'événements, et : Alors nous avons (on suppose le tirage dans chaque urne équiprobable) :

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \tag{5}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\frac{6}{10} = \frac{3}{10} \tag{6}$$

1.4.3 Théorème de Bayes

Permet de calculer une probabilité *a posteriori* $P(A|B)$ à l'aide des *a priori* $P(A)$ et $P(B)$ et de la règle $P(B|A)$.

Permet de basculer entre :

— Cause (A) $\rightarrow$ Effet (B) : $P(B|A)$

— Effet (B) $\rightarrow$ Cause (A) : $P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}} \tag{7}$$

La démonstration utilise :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{8}$$

Plusieurs causes Soit $A_i, i = 1, 2, \cdots n$ une partition de Ω.

Alors on a :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \tag{9}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{10}$$

1.4.4 Indépendance entre événements

Définition 1.4.

Deux événements A et B sont indépendants si ils vérifient :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \tag{11}$$

En effet, si A et B sont indépendants, alors on a :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \tag{12}$$

Indépendance de 2 événements conditionnés par un autre événement Deux événements A et B conditionnés par C sont indépendants si :

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \tag{13}$$

Indépendance entre plusieurs événements Plusieurs événements A_i sont indépendants si ils vérifient :

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} A_i \tag{14}$$

1.5 Stratégies pratiques pour le calcul de probabilités

Le calcul de probabilité peut faire intervenir plusieurs stratégies :

- Définir l'univers Ω et/ou simplement son nombre d'éléments
- Si toutes les issues sont équiprobables, alors $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$
- Complémentaire d'un événement difficile à dénombrer : $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Probabilité totale (trouver une ou des partitions)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Approche bayésienne $P(A|B) \rightarrow P(B|A)$

Et surtout ne pas hésiter à représenter graphiquement (au brouillon) la situation d'un problème en le simplifiant avec des valeurs numériques plus faciles à calculer.

En DS, le maximum de points est obtenu pour le raisonnement, et le reste pour l'application numérique et la rédaction.

Faire des phrases courtes en FRANÇAIS répondant à la question posée.

2 Variables aléatoires

Les variables aléatoires permettent de modéliser et de manipuler des phénomènes conditionnés par le hasard (*i.e.* une expérience aléatoire).

Les variables aléatoires suivent des lois (fonction de densité de probabilité) qui permettent de modéliser (prédire) la répartition des valeurs possibles pour une expérience.

Ce sont des fonctions dont le résultat dépend du hasard, pouvant prendre un nombre fini (cas discret, dénombrable) ou infini (cas continu, non dénombrable) de valeurs possibles.

2.1 Définition

Définition 2.1.

Soit une variable aléatoire (v.a.) X.
Alors nous avons :

— X est une fonction de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

— On note $x \in \mathbb{R}$ une valeur possible prise par X

— La probabilité de chaque valeur x est notée $p_X(x)$ (*i.e.* probabilité de x soumis à la loi de probabilité de X) est définie par :

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement}\in\Omega}) = \boxed{P(X = x) = p_X(x)} \qquad (15)$$

Remarque. Toute les fonctions composées d'une ou plusieurs v.a. (e.g. $aX + bY$, $f(X)$, etc.) sont aussi des v.a.

2.1.1 Exemple 1 : lancer de 2 dés

La somme des points amenés par les 2 dés est une variable aléatoire.

$X = \omega_1 + \omega_2$
On s'intéresse à des probabilités du type :
$P(X = 10) = \frac{\text{Card}(\{(4,6),(5,5),(6,4)\})}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
Les valeurs prises par X sont des nombres entiers positifs. C'est une variable aléatoire discrète.

2.1.2 Exemple 2 : clients dans un magasin

On étudie le nombre de clients entrant dans un magasin. On considère la variable aléatoire X qui mesure le nombre de personnes différentes qui visite le magasin dans une journée. Les valeurs prises par X sont les entiers positifs. C'est une v.a. discrète.

2.1.3 Exemple 3 : autonomie d'une batterie de téléphone

On étudie la durée maximale d'utilisation d'un téléphone (mesurée en nombre d'heures). La variable aléatoire X prend des valeurs réelles positives. Il s'agit d'une variable aléatoire continue. On s'intéressera à des probabilité du type $P(15 < X < 24)$.

Pour la suite du chapitre, nous considérerons uniquement des v.a. discrètes.

2.2 Fonction de probabilité d'une v.a.

Définition 2.2. La loi de probabilité d'une v.a. X, dite aussi loi de X ou distribution de probabilité de X, est la fonction p_X définie par :

$$p_X : \Omega \to [0;1] \tag{16}$$
$$x \mapsto P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}) \tag{17}$$

qui associe à une valeur x prise par X l'ensemble des éventualités ω_i tel que $X(\omega_i) = x$.

2.2.1 Propriétés

L'ensemble des valeurs possibles pour une v.a. forme une partition naturelle de l'univers Ω. Dans ce cas nous avons :

— $\bigcap_x \{X = x\} = \emptyset$
— $\bigcup_x \{X = x\} = \Omega$

Ainsi nous avons les propriétés suivantes :
— Normalisation : $\sum_x p_X(x) = P(\bigcup_x \{X = x\}) = P(\Omega) = 1$
— Pour un événement A, $P(X \in A) = \sum_{x \in A} p_X(x)$

Remarque. Ici $X \in A$ est une notation simplifiée de $X^{-1}(A)$ (ensemble des x formant l'événement A)

Le calcul de $p_X(x)$ se fait comme suit :

1. On définit les valeurs possibles prises par X (indiquer les valeurs impossibles de Ω)
2. Repérer les éventualités ω_i qui composent l'événement $\{X = x\}$
3. Alors la fonction de probabilité de X est donnée par la somme des $P(\omega_i)$

2.2.2 Exemple 1 : pile ou face

On lance deux fois une pièce de monnaie et on note X le nombre de « Face » obtenus.
— $\Omega = \{\text{PilePile}, \text{PileFace}, \text{FacePile}, \text{FaceFace}\}$
—

$$X : \Omega \to \mathbb{N} \tag{18}$$
$$x \mapsto \text{“Nombre de Face''} \tag{19}$$

Ainsi, X fournit les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{X(PilePile)} &= 0 \\ \text{X(PileFace)} &= 1 \\ \text{X(FacePile)} &= 1 \\ \text{X(FaceFace)} &= 2 \end{aligned}$$

x	#	$P(X = x)$
0	1	0,25
1	2	0,5
2	1	0,25
Somme :	4	1

2.2.3 Lois de plusieurs v.a.

Définition 2.3. Soient X et Y deux v.a. $X : \Omega \to D$ et $Y : \Omega \to D'$ (D et D' deux sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$).
Alors la fonction :

$$p_{(X,Y)}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x, Y = y) \tag{20}$$

est une probabilité appelée loi conjointe du couple de v.a. X et Y.
Cette définition peut se généraliser à n variables aléatoires.

Remarque. Connaissant la loi conjointe $p_{(X,Y)}(x,y)$, on peut déterminer les lois de X et de Y (appelées lois marginales) comme suit :

$$p_X(x) = \sum_{y \in D'} p_{(X,Y)}(x,y) \tag{21}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in D} p_{(X,Y)}(x,y) \tag{22}$$

Cependant, la connaissance des lois marginales ne détermine pas la loi conjointe sauf si les v.a. X et Y sont indépendantes. Dans ce cas on a :

$$p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x)p_Y(y). \tag{23}$$

2.2.4 v.a. conditionnée

Définition 2.4. Une v.a. X peut être conditionnée par une autre v.a. Y. Dans ce cas nous avons :

$$p_{X|Y}(x) = P(\{X = x\}|\{Y = y\}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)} \tag{24}$$

La loi conjointe vérifie :

$$p_{(X,Y)} = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) \tag{25}$$

2.3 Indépendance

L'indépendance permet de dire qu'une information sur la valeur prise par un des caractères (ici une v.a. ou un événement aléatoire) n'en apporte pas sur les valeurs possibles prises par les autres caractères.
C'est une notion à ne pas confondre avec l'incompatibilité qui permet de définir des valeurs impossibles pour un caractère quand un autre prend certaines valeurs.

Définition 2.5. Deux v.a. X et Y définies sur le même espace de probabilités et à valeurs dans D et D' sont indépendantes si et seulement si elles vérifies les conditions équivalentes suivantes (n'importe laquelle permet de déduire les autres) :
- (i) $\forall A \subseteq D, \forall A' \subseteq D'$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in A')$ sont indépendants
- (ii) la loi conjointe du couple (X,Y) est le produit des lois marginales de X et Y (cf. Eq. (23))

— (iii) $\forall x \subseteq D, \forall y \subseteq D'$, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$
— (iv) $\forall x \subseteq D, \forall y \subseteq D'$, $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$

En pratique, l'indépendance entre deux v.a. se mesure par la corrélation que nous aborderons par la suite (deux v.a. indépendantes sont décorrélées). On mesure dans ce cas la dépendance linéaire entre deux v.a.

2.4 Fonction de répartition

Définition 2.6. La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X &: \mathbb{R} \to [0;1] \\ x &\mapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$

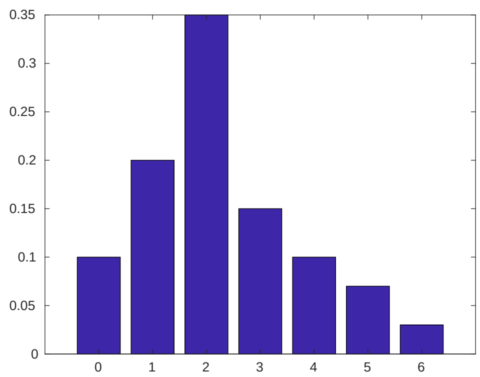
$$\text{telle que : } \boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}. \tag{26}$$

Propriétés

— Si $x_1 < x_2$ alors $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (F_X est monotone au sens large)
— $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
— $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
— $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$

Exemple 2.1. Soit X la v.a. mesurant le nombre x de machines en panne par jour dans une usine. On suppose que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,20	0,35	0,15	0,10	0,07	0,03



Quelle est la probabilité d'avoir au plus de 2 machines en panne le même jour ?
$P(X \leq 2) = 0,10 + 0,20 + 0,35 = 0,65$

2.5 Grandeurs statistiques des v.a.

Les statistiques peuvent fournir des informations importantes sur les lois suivies par des des v.a. Ainsi l'espérance et la variance représentent très grossièrement la moyenne et la dispersion autour de la moyenne des réalisations d'une v.a.

2.5.1 Espérance (mathématique)

Définition 2.7. L'espérance d'une v.a. (appelée moyenne ou moment d'ordre 1) est définie par :

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \sum_{x \in D} x p_X(x)} \tag{27}$$

C'est le centre de gravité de la distribution de X tel que $p_X(x)$ porte le nom de « masse de probabilité ».

Proposition 2.1. *Soient X et Y deux v.a. on a :*
- $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$
- $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

2.5.2 Variance

Définition 2.8. La variance est définie par :

$$\boxed{\mathrm{var}\,[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2} \tag{28}$$

C'est une valeur toujours positive $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$ qui mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle permet de calculer **l'écart type** donné par :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}\,[X]}} \tag{29}$$

La seconde formule $E[X^2] - E[X]^2$ se démontre comme suit (théorème de König-Huygens) :

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \tag{30}$$

$$= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \tag{31}$$

car $E[X]$ est une constante, donc $E[E[X]] = E[X]$.

Proposition 2.2. *Soit X une v.a. et a et b des constantes. Alors $var[aX + b] = a^2 var[X]$. Ce résultat se démontre en vérifiant que $var[X + b] = var[X]$*

2.5.3 Covariance et corrélation

Définition 2.9.

— Soient X et Y deux v.a., on définit la covariance de X et Y par :

$$\text{cov}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{32}$$

— Le coefficient de corrélation de X et Y est défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{33}$$

Proposition 2.3. *Soient X et Y deux v.a. indépendantes, alors elles vérifient :*

— $E[XY] = E[X]E[Y]$

— $var[X+Y] = var[X] + var[Y]$

— $cov[X,Y] = \rho(X,Y) = 0$

Remarque. **Attention**, les réciproques sont fausses et aucune de ces conditions ne permet de déduire l'indépendance de X et Y.

2.6 Lois de probabilité usuelles

Nous définissons ici les lois de probabilité discrètes les plus usuelles avec leur principaux résultats et leur motivation intuitive.

2.6.1 Loi uniforme

On appelle loi uniforme discrète la loi des événements équiprobables.
Pour une v.a. discrète X pouvant prendre un nombre fini n de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$, alors X suit une loi uniforme si :

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n} \tag{34}$$

On peut généraliser cette définition pour un ensemble A quelconque de valeurs prises par une v.a. X par :

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Card}(A)} & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{35}$$

Propriétés

— $E[X] = \frac{1}{n}\sum_i x_i$

— $\text{var}[X] = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n^2}(\sum_i x_i)^2$

2.6.2 Loi de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire ayant pour seules éventualités $\Omega = \{1, 0\}$. (*e.g.* “Succès/Echec” ou “Pile / Face”). La v.a. X de Bernouilli est définie par :

— $X = 1$ (avec une probabilité p) si l'épreuve donne “succès”

— $X = 0$ avec une probabilité $q = 1 - p$) si l'épreuve donne “échec’

La loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{36}$$

Une Loi de Bernoulli de paramètre p se note $\mathcal{B}(p)$.
Une v.a. X suivant cette loi se note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Propriétés

- $E[X] = p$
- $\text{var}\,[X] = pq = p(1-p) = p - p^2$

Exemple 2.2. L'expérience de lancer d'une pièce ayant pour éventualités "Pile / Face" suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - q = \frac{1}{2}$. On dit aussi qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

2.6.3 La loi binomiale

Si on répète successivement n épreuves de Bernoulli indépendantes, En définissant X, la v.a. qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus en n épreuves, alors on peut démontrer que la loi de X pour tout $x \in \{0, 1, 2, \cdots n\}$ est définie par :

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \tag{37}$$

Une Loi binomiale de paramètres n et p se note $\beta(n, p)$.

Propriétés

- $E[X] = np$
- $\text{var}\,[X] = np(1-p)$

Exemple 2.3. L'expérience consistant à renouveler 3 fois le lancer d'une pièce ayant pour éventualités "Pile / Face" suit une loi de Binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = P(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$. En dessinant un arbre binaire, on peut définir aisément une v.a. X suivant une telle loi et prenant les valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$. On peut aussi vérifier qu'il y a exactement C_3^x combinaisons pour lesquelles "Pile" se produit. Chaque lancer étant indépendant, on a donc
$P(X = x) = C_3^x p^x (1-p)^{3-x}$.

Exemple 2.4. On jette successivement cinq fois un dé et on considère la v.a. X correspondant au nombre de "6" obtenus. Nous avons alors $X \sim \beta(5, \frac{1}{6})$.
Quelle est donc la probabilité d'obtenir "6" deux fois lors de cette expérience ?
$P(X = 2) = C_5^2 \frac{1}{6^2}(1 - \frac{1}{6})^{5-2} = \frac{5\times 4}{2} \frac{1}{36} \frac{5^3}{6^3} = \frac{10}{36} \frac{125}{216} \approx 0,1608$

2.6.4 La loi Poisson

On considère une v.a. prenant des valeurs entières $D = 0, 1, 2, \cdots, n$ avec les probabilités :

$$P(X = x) = \frac{\mathbf{e}^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall \lambda > 0 \tag{38}$$

Alors X suit un loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

On peut démontrer que quand n est "grand" (tend vers l'infini) et que p est "petit" (tend vers 0), alors une loi binomiale $\beta(n, p)$ peut être approximée par une loi Poisson de paramètre $\lambda = np$.
C'est aussi la raison pour laquelle la loi Poisson porte le nom de "loi des événements rares".

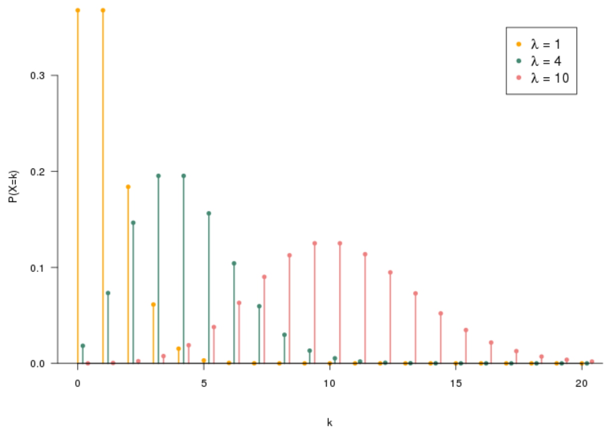


FIGURE 2 – Illustration de la loi de Poisson.

Propriétés

- $E[X] = \lambda$
- $\text{var}\,[X] = \lambda$

Exemple 2.5. Si on veut étudier un événement se produisant en moyenne 5 fois sur un laps de temps T donné, alors on pourra utiliser un modèle de Poisson de paramètre $\lambda = 5$ pour analyser ce phénomène sur une durée T.

2.7 v.a. continues et loi normale

Définition 2.10. Une v.a. X continue est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Elle associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire, un nombre réel x et une probabilité $p_X(x)$.

Proposition 2.4. *La fonction de répartition d'une v.a. continue est définie par :*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{39}$$

- *F_X est croissante*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Définition 2.11. Une v.a. (continue) X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa loi de probabilité est donnée par :

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{40}$$

La loi normale est une des lois les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs expériences aléatoires. Elle porte aussi le nom de loi gaussienne, loi de Gauss ou "courbe en cloche".

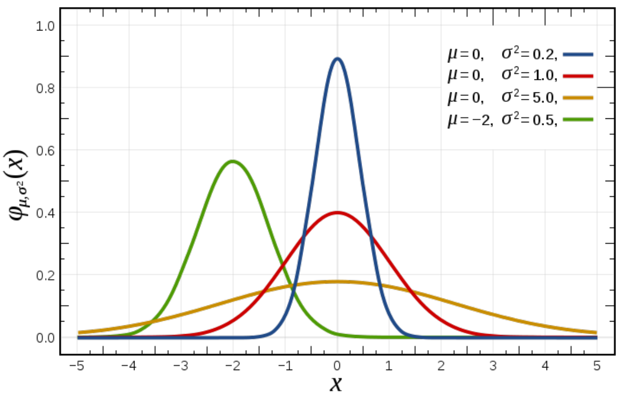


FIGURE 3 – Illustration de la loi normale (loi de Gauss).

Propriétés

- $E[X] = \mu$
- $\mathrm{var}\,[X] = \sigma^2$
- $\mathcal{N}(0, 1)$ correspond à la loi normale centrée réduite ($\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$)

Proposition 2.5.

- *L'aire sous la courbe vaut :* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$

  (La preuve pour $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ utilise $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathbf{e}^{\frac{b^2}{4a}+c}$)
- *Le graphique (cf. Fig. 3) est symétrique par rapport à la droite $y = \mu$. On a donc $p_X(x - \mu) = p_X(x + \mu)$*
- *Plus σ est grand, plus la courbe est large et aplatie.*

Théorème 2.6. ***Théorème central limite*** *: On considère plusieurs v.a. notées* X_1*,* X_2*, ...,* X_n *indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), suivant la même loi* p_X*.*
Si l'espérance et l'écart-type de p_X *existent et sont respectivement* μ *et* σ*. Si on considère la somme donnée par la v.a. :* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
Alors S_n *a une espérance* $n\mu$ *et un écart-type* $\sigma\sqrt{n}$*.*
De plus, quand n *est "grand" (i.e. tend vers l'infini), alors* S_n *suit une loi normale :*
$S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sigma^2 n)$*.*

3 Statistique descriptive et inférentielle

TABLE 3 – Liens entre probabilités et statistiques (terminologie).

Notions probabilistes	Notions statistiques
Probabilité d'un événement	Fréquence relative
Variable aléatoire	Variable statistique
Loi de probabilité	Distribution statistique
Espérance mathématique	Moyenne arithmétique
Réalisation d'une v.a.	individu (ou unité statistique)

3.1 Échantillonnage

L'échantillonnage est une extraction d'information permettant de travailler sur un nombre fini n de réalisations d'un caractère dans une population (*i.e.* une v.a.) à laquelle on a pas accès.

Définition 3.1. Un échantillon aléatoire de taille n issu d'une v.a X est un ensemble $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de v.a. indépendantes et de même loi que X.

Exemple 3.1. Recensement : On échantillonne exhaustivement l'ensemble de la population (statistique descriptive).
⇒ C'est un problème coûteux, long et parfois impossible (population infinie).

Exemple 3.2. Sondage : On étudie seulement un partie limitée de la population (un échantillon). On s'assure que l'échantillon soit représentatif, c'est à dire qu'il conserve la proportion de la population totale (e.g. méthode des quotas).
⇒ On extrapole à la population totale les propriétés mises de l'échantillon (statistique inférentielle).

3.2 Estimation

Soit θ un paramètre associé à la loi de X, (e.g. $\theta = E[X]$). À partir de l'observation d'un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_n)$, on souhaite estimer le paramètre θ.

Définition 3.2. Une fonction $\hat{\theta}_n$ associée à un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de taille n est un estimateur convergent ("proche") d'un paramètre θ si :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}\left[\hat{\theta}_n\right] = 0 \tag{41}$$

3.2.1 Biais

Définition 3.3. Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur convergent d'un paramètre θ.
Alors le biais est la quantité :

$$B_{\hat{\theta}_n} = E[\hat{\theta}_n] - \theta \tag{42}$$

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est sans biais (ou non biaisé) si $B_{\hat{\theta}_n} = 0$ ou si $E[\hat{\theta}_n] = \theta$.
Sinon, il est biaisé.

3.3 Estimateurs non biaisés de moyenne et de variance

On considère un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de taille n, de moyenne μ et d'écart type σ inconnus.
On donne alors (sans preuve) deux estimateurs convergents et non biaisés de l'espérance et de la variance :

Définition 3.4. Un estimateur de la moyenne empirique est donné par :

$$\boxed{\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}. \tag{43}$$

De plus, on peut montrer que :

$$\mathrm{var}\,[\hat{\mu}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{44}$$

et que donc $\hat{\mu}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Définition 3.5. Un estimateur non-biaisé de la variance empirique est donné par :

$$\boxed{\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2} \tag{45}$$

3.4 Intervalle de confiance

Objectif : savoir quelle confiance accorder à une estimation.

Définition 3.6. On considère un paramètre θ d'une v.a. X, un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_n)$ et un risque $\alpha \in]0; 1[$.
Si il existe un intervalle $[\theta_{min}(X); \theta_{max}(X)]$ tel que :

$$P(\theta_{min}(X) \leq \theta \leq \theta_{max}(X)) = 1 - \alpha \tag{46}$$

alors $[\theta_{min}(X); \theta_{max}(X)]$ est un intervalle de confiance de θ noté $IC_{1-\alpha}(\theta)$.

Dans la pratique, il est courant de prendre $\alpha = 5\%$, ce qui donne un IC à 95%.
Cela signifie, qu'il y a 95% de chance que $\hat{\theta}_n \in [\theta_{min}(X); \theta_{max}(X)]$.

3.4.1 Intervalle de confiance pour un échantillon gaussien

Soit un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Pour estimer μ, on utilise la moyenne empirique donnée par Eq. (43) qui vérifie :
$\hat{\mu}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{n})$.
En centrant puis en réduisant $\hat{\mu}_n$ on obtient :

$$\frac{\hat{\mu}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{47}$$

Pour $z_{1-\alpha}$ (cf. quantile à $1 - \alpha$ donné par la table de la loi normale) on a :

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \tag{48}$$

$$P(\hat{\mu}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \tag{49}$$

On obtient ainsi un $IC_{1-\alpha}(\mu)$ aléatoire :

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\hat{\mu}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{50}$$

Quand σ est inconnu, on remplace alors sa valeur par son estimation $\hat{\sigma}$ ce qui donne :

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\hat{\mu}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]} \tag{51}$$

Remarque. Plutôt que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, on peut alors appliquer la règle des 3 sigmas pour retrouver des intervalles de confiance à environ 68%, 95% et 99%. Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827 \tag{52}$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545 \tag{53}$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,9973 \tag{54}$$

$$\tag{55}$$

Remarque. Pour un estimateur arbitraire $\hat{\theta}_n$, il faut se référer à la table de sa loi de probabilité ou résoudre l'équation :

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} p_\theta(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \alpha. \tag{56}$$

3.5 Tests d'hypothèse

3.5.1 Principe

Un test d'hypothèse (ou test statistique) est une fonction qui fournit une règle de décision reposant sur les échantillons observés.
Elle permet de faire le choix entre une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1.

Définition 3.7. L'hypothèse nulle considère que le paramètre de la population étudié prend une valeur a priori. N'importe quelle hypothèse alternative ou contre-hypothèse est notée H_1.

Exemple 3.3. On souhaite savoir si un médicament est efficace.
- H_0 : le médicament n'a pas d'effet.
- H_1 : le médicament a un effet.

Un tel test visera à démontrer une différence statistique significative entre 2 échantillons pris parmi les individus traités avec un vrai traitement et ceux ayant reçu un placebo.

Risque Toute décision est associée à un risque.
Si on décide de rejeter H_0, la probabilité de se tromper (si H_0 est vraie) vaut α est s'appelle le risque de première espèce.
La probabilité d'accepter H_0 si celle-ci est fausse s'appelle le risque de seconde espèce.

3.5.2 Test de Student

Principe : Permet de tester si la moyenne d'un échantillon gaussien $(X_1; X_2; ...; X_n)$ est égal à μ_0.
Si on souhaite comparer X avec un autre échantillon gaussien $(Y_1; Y_2; ...; Y_n)$ de même taille et de même variance inconnue, alors on fixera $\mu_0 = \hat{\mu}_Y$.

Remarque. Si les variances de X et de Y sont différentes, on utilisera plutôt le t-test de Welch.

— $H_0 : \hat{\mu}_X = \mu_0$
— $H_1 : \hat{\mu}_X \neq \mu_0$

Définition 3.8. La statistique du test de Student est donnée par :

$$T = \sqrt{n}\frac{\hat{\mu}_X - \mu_0}{\hat{\sigma}_X}. \tag{57}$$

où $\hat{\sigma}_X$ est calculé en utilisant l'Eq. (45).
Sous l'hypothèse H_0, T suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté (ddl).

Remarque. En pratique, on vérifie H_0 en comparant $|T|$ aux valeurs de la table de Student.

3.5.3 Test Khi2 (ou $\mathcal{X}^2$)

Principe Permet de vérifier si un échantillon suit une loi de probabilité donnée (test d'adéquation) ou si deux échantillons suivent la même loi (test d'homogénéité).
On considère deux échantillons $(X_1; X_2; ...; X_n) \sim p_X$ et $(Y_1; Y_2; ...; Y_n) \sim p_Y$ où p_X et p_Y sont les lois des v.a. X et Y.

— H_0 : les 2 échantillons proviennent de 2 v.a. suivant la même loi (*i.e.* $p_X = p_Y$)
— $H_1 : p_X \neq p_Y$

Définition 3.9. On veut tester que les probabilités que X prenne les valeurs 1 à J. La statistique du test de Khi2 est donnée par :

$$T = \sum_{j=1}^{J} \frac{(N\hat{p}_X(j) - N\hat{p}_Y(j))^2}{N\hat{p}_Y(j)} \tag{58}$$

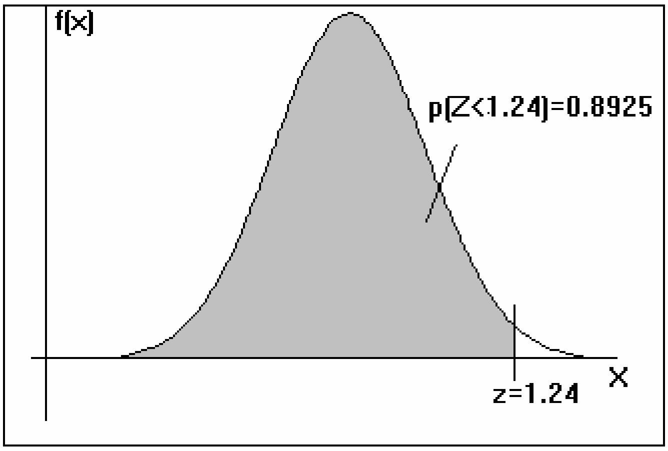
où N est le nombre de réalisations et $\hat{p}_X(j)$ est une estimation empirique de la probabilité que la v.a. X prenne la valeur j.
Sous l'hypothèse H_0, T suit une loi Khi2 à $J-1$ ddl.

Annexes

— Table de la loi normale
— Table de la loi Khi-2
— Table de la loi Student

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Lecture de la table: Pour z=1.24 (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.04), on a la proportion P(Z < 1,24) = 0.8925



P(Z > 1,96) = 0,025
P(Z > 2,58) = 0,005
P(Z > 3,29) = 0,0005

Rappels:
1/ P(Z > z) = 1 - P(Z < z) et 2/ P(Z < -z) = P(Z > z)
Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:
1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- 0,8925 = 0,1075
2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABLE TEST Z

α α/2	0,05 0,025	0,01 0,005	0,001 0,0005
Z	1,96	2,58	3,29

DISTRIBUTION DU KHI2

La table donne les valeurs critiques de χ^2 pour un nombre de degrés de liberté (ddl) et pour un seuil repère donnés (α).

Par exemple:

Pour ddl = 3 et α= 0,05 la table indique $\chi^2 = 7{,}81$

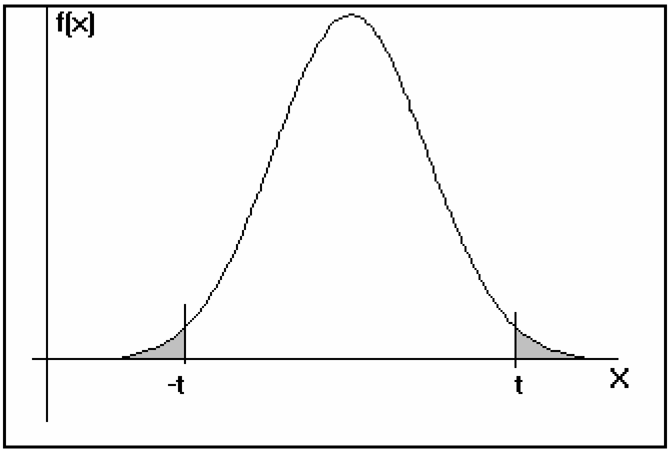
Ceci signifie que: P ($\chi^2_{[3]} > 7{,}81$) = 0,05

ddl \ α	0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,63	10,83
2	5,99	9,21	13,82
3	7,81	11,34	16,27
4	9,49	13,28	18,47
5	11,07	15,09	20,52
6	12,59	16,81	22,46
7	14,07	18,48	24,32
8	15,51	20,09	26,12
9	16,92	21,67	27,88
10	18,31	23,21	29,59
11	19,68	24,72	31,26
12	21,03	26,22	32,91
13	22,36	27,69	34,53
14	23,68	29,14	36,12
15	25,00	30,58	37,70
16	26,30	32,00	39,25
17	27,59	33,41	40,79
18	28,87	34,81	42,31
19	30,14	36,19	43,82
20	31,41	37,57	45,31
21	32,67	38,93	46,80
22	33,92	40,29	48,27
23	35,17	41,64	49,73
24	36,42	42,98	51,18
25	37,65	44,31	52,62
26	38,89	45,64	54,05
27	40,11	46,96	55,48
28	41,34	48,28	56,89
29	42,56	49,59	58,30
30	43,77	50,89	59,70

DISTRIBUTIONS DU t DE STUDENT

Table des valeurs critiques bilatérales usuelles

Pour une distribution de Student à ddl degrés de liberté et pour une proportion α (.05, .01 ou .001), la table indique t tel que P$(|T| > t) = \alpha$



Exemple: Pour ddl = 5, on a P$(|T| > 2.571)$ = .05 (on note $t_{[5].05}$ cette valeur.).

α α/2 ddl	0,05 0,025	0,01 0,005	0,001 0,0005
1	12.706	63.657	636.619
2	4.303	9.925	31.599
3	3.182	5.841	12.924
4	2.776	4.604	8.610
5	2.571	4.032	6.869
6	2.447	3.707	5.959
7	2.365	3.499	5.408
8	2.306	3.355	5.041
9	2.262	3.250	4.781
10	2.228	3.169	4.587
11	2.201	3.106	4.437
12	2.179	3.055	4.318
13	2.160	3.012	4.221
14	2.145	2.977	4.140
15	2.131	2.947	4.073
16	2.120	2.921	4.015
17	2.110	2.898	3.965
18	2.101	2.878	3.922
19	2.093	2.861	3.883
20	2.086	2.845	3.850
21	2.080	2.831	3.819
22	2.074	2.819	3.792
23	2.069	2.807	3.768
24	2.064	2.797	3.745
25	2.060	2.787	3.725
26	2.056	2.779	3.707
27	2.052	2.771	3.690
28	2.048	2.763	3.674
29	2.045	2.756	3.659
30	2.042	2.750	3.646
40	2.021	2.704	3.551
60	2.000	2.660	3.460
120	1.980	2.617	3.373
30000	1.960	2.576	3.291