Mathématiques U

Aline Cahuzac

14 Juillet 2019

Dimanche 14 juillet oblige, arriver à 8h15 jusqu'au bout du bon couloir au quatrième étage n'est pas si évident. Heureusement l'examinateur me laisse un quart d'heure avant de commencer l'oral. En guise d'introduction, il explique que le ou les exercices seront surtout des prétextes à discussion mathématiques et donc qu'aboutir ou pas n'est pas le principal. Puis vient l'énoncé suivant, donné sur un petit papier :

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ et $\forall\ n \geqslant 2, Y_n = |Y_{n-1} \pm Y_{n-2}|$, où les $\pm$ sont choisis aléatoirement de façon indépendante et uniforme. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\forall\ n \geqslant 1, Y_n \neq 0)\ \in\ ]0,1[$$

On me laisse 5 minutes pour réfléchir en autonomie, au bout desquelles je n'ai rien de bien intéressant. Viennent alors quelques questions de cours sur la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($Y_n = F_n$ si on ne choisit que des $+$). Puis l'examinateur m'invite à me ramener à une récurrence d'ordre 1 en introduisant les vecteurs $v_n = (Y_n, Y_{n+1})$, vecteurs de $\mathbb{N}^2$. Mal réveillée, je mets longtemps à écrire $v_{n+1} = (Y_{n+1}, |Y_{n+1} \pm Y_n|)$ au lieu de $v_{n+1} = (|Y_n \pm Y_{n-1}|, |Y_{n+1} \pm Y_n|)$. L'examinateur me fait écrire la suite jusqu'à $n = 4$ où à tomber sur un vecteur déjà vu (la suite peut boucler).

On considère ensuite deux applications de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$: $A : (x,y) \mapsto (y, x+y)$ et $B : \mapsto (y, |y-x|)$

L'examinateur m'invite à étudier les suites (pour la composition) de A et B qui donnent l'identité : on obtient que $\forall\ (x,y) \in \mathbb{N}^2, BBA(x,y) = (x,y)$ et que $ABB(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow x \leqslant y$. Soit un mot de A et B dans lequel on a simplifié tous les BBA, ainsi que les ABB à droite (puisqu'on l'évalue en $(0,1)$ le mot simplifié donne le même résultat que le mot de départ). Il est de la forme $A^{k_1}BA^{k_2}B...BA^{k_p}B^l$.

Comme évaluer B^l en $(0,1)$ donne $(0,1)$ ou $(1,0)$, on peut supposer que $l = 0$. Puis on chercher une condition nécessaire et suffisante pour que l'évaluation en $(0,1)$ de ce mot donne précisément $(0,1)$: on trouve que seul le mot vide convient en regardant comment le mot fait se déplacer sur la suite de Fibonacci, du moins sur les couples (F_k, F_{k+1}).

On voit alors comment majorer la probabilité qu'une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repasse par 0 : si $Y_n = 0$, alors $(v_n = (0,1)$ donc il faut compter le nombre de mots de taille n qui ne comprennent que des facteurs BBA ou ABB par exemple. Il y en a très peu donc la suite n'a pas une probabilité 1 de repasser par 0. Puis il faudrait trouver une minoration aussi, mais je n'ai pas le temps d'engager le moindre calcul, l'examinateur me congédie avec un petit chocolat.