Renseignements généraux

— *Concours* : École Polytechnique
— *Matière* : Mathématiques
— *NOM Prénom* : D'ANELLO Yohann

Énoncé de l'exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On suppose que $\mathrm{Vect}\,\{x \mapsto f(x+k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est de dimension finie. Que dire de f ?

Remarques sur l'oral

On appellera dans la suite $E = \mathrm{Vect}\,\{x \mapsto f(x+k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n = \dim E$. Je commence immédiatement par traiter le cas $n = 1$ et disant que f est 2-périodique : si $g : x \mapsto f(x+1)$, (f, g) est liée et f et g sont non nulles (sinon pas méga intéressant), donc on peut écrire $g = \lambda f$ pour un certain réel λ, puis par récurrence on a $f(x+k) = \lambda^k f(x)$ pour tout réel x et tout entier k, soit en faisant tendre k vers $\pm\infty$ $|\lambda| = 1$, et donc $f(x+2) = \lambda^2 f(x) = f(x)$.

Pour revenir au cas général, je ne sais pas trop par où partir. Après quelques recherches infructueuses, l'examinateur me suggère d'introduire la famille d'endomorphismes $\tau_k : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ g & \mapsto & (x \mapsto g(x+k)) \end{array} \right.$. Je montre qu'il s'agit bien d'endomorphismes bijectifs avec $\tau_k \circ \tau_l = \tau_{k+l}$, soit $\tau_k = \tau^k$ où $\tau = \tau_1$. Je montre que les valeurs propres (on voit dans la suite E comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) sont de module 1 toujours en utilisant le caractère borné de E. Il me vient à l'esprit de montrer que τ est diagonalisable, mais ça me semblait trop compliqué et je ne savais pas où cela pouvait mener. Pour autant, l'examinateur me demande peu après de montrer que τ est diagonalisable. J'ignorais comment procéder, puisque je ne savais rien ni sur le polynôme caractéristique, ni le polynôme annulateur, ni les valeurs propres de τ si ce n'est qu'elles sont dans $\mathbb{U}$ et encore moins sur les vecteurs propres. Lorsqu'il me demande comment on peut montrer que τ est diagonalisable, je dis dans un premier temps qu'on veut un polynôme annulateur scindé à racines simples, puis qu'on veut avoir $E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\tau)} \mathrm{Ker}(\tau - \lambda \mathrm{id})$. J'ignorais toujours comment faire. Il me demande quelle égalité est toujours vérifiée, je réponds $E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\tau)} \mathrm{Ker}(\tau - \lambda \mathrm{id})^{m_\lambda}$ où m_λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal de τ. Chose originale : il me suggère de montrer que $m_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \sigma(\tau)$. Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en supposant par l'absurde qu'il ne l'est pas, c'est peu commun, je ne me souviens pas d'avoir déjà procédé de la sorte en tout cas. On se place alors dans un certain E_λ et on suppose $\tau - \lambda id$ nilpotent. On veut montrer qu'il ne peut pas l'être d'indice plus grand que 1.

Il m'introduit ensuite les endomorphismes $m_\xi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ g & \mapsto & (x \mapsto e^{i\xi x} g(x)) \end{array} \right.$ où ξ décrit $\mathbb{R}$ et me demande de calculer $m_\xi^{-1} \circ \tau \circ m_\xi$. On trouve $e^{i\xi}\tau$. Ensuite, on a $m_\xi^{-1} \circ (\tau - \lambda \mathrm{id}) \circ m_\xi = e^{i\xi}\tau - \lambda \mathrm{id} = \lambda(\tau - \mathrm{id})$ si $\lambda = e^{i\xi}$, et donc $(\tau - \lambda \mathrm{id})$

est nilpotent ssi $\tau - \mathrm{id}$ l'est, de même indice.

On a m tel que $(\tau - \mathrm{id})^m = 0$ et $(\tau - \mathrm{id})^{m-1} \neq 0$ (après restriction sur de bons espaces). On a alors $h \in E$ tel que $(\tau - \mathrm{id})^{m-1}(h) \neq 0$. On note dans la suite $h_k = (\tau - \mathrm{id})^k(h)$. Alors $h_{m-1} \in \mathrm{Ker}(\tau - \mathrm{id})$, ie. $\tau(h_{m-1}) = h_{m-1}$ et h_{m-1} est 1-périodique. Il me demande ensuite de montrer que h_{m-2} est 1-périodique, en utilisant la relation $\tau(h_{m-2}) - h_{m-2} = h_{m-1}$. Je mets un peu de temps, puis, après qu'il m'ait conseillé de calculé $h_{m-2}(x+p) - h_{m-2}(x)$, j'écris que $h_{m-2}(x+p) - h_{m-2}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} h_{m-1}(x+i) = ph_{m-1}(x)$ par 1-périodicité et conclut que $h_{m-1} = 0$ car h_{m-2} est bornée. Or par hypothèse h_{m-1} était non nulle, donc h_{m-2} n'existe pas et $m = 1$, et donc τ est bien diagonalisable.

Je donne alors le spectre de τ $\{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\}$ (c'est lui qui m'a conseillé d'écrire les valeurs propres sous forme exponentielle) et dit qu'on a une base de vecteurs propres $(g_1, \ldots, g_n)$ où $\tau(g_j) = e^{i\theta_j} g_j$. Indication supplémentaire : considérer $h_j : x \mapsto e^{-i\theta_j x} g_j(x)$. On trouve $h_j(x+1) = h_j(x)$ et h_j est 1-périodique. On peut alors réécrire $g_j(x) = e^{i\theta_i x} h_j(x)$.

Il me demande de quelle façon s'écrivent les fonctions de E, j'écris alors qu'elles s'écrivent sous la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j e^{i\theta_j x} h_j(x)$. Je souhaite alors revenir à l'exercice de départ, et chercher une condition sur f. On sait que f est réelle. L'examinateur me conseille de prendre la partie réelle de mon expression. La conclusion attendue est alors que f s'écrit comme somme pondérée de cosinus et de sinus fois des fonctions 1-périodiques, résultat absolument non trivial à première vue de l'énoncé.

Je sors un peu frustré de cet oral, car j'ai eu droit à beaucoup d'indications sans lesquelles je n'aurais pas pu avancer. Je n'aurais jamais pensé seul à utiliser de l'algèbre pour ce problème, et aurais été incapable de montrer que τ était diagonalisable. Même si l'exercice a été mené à son terme, le bilan reste assez mitigé. Je me console en voyant bien que l'exercice était très difficile.