Devoir Surveillé n° 1 (2h30)

Correction du problème 1 – Applications linéaires injectives ou surjectives

1. Soit $n = 3$, et $X_1 = (1,1,0)$, $X_2 = (1,0,1)$, $X_3 = (0,1,1)$.
   (a) En identifiant les coordonnées, l'équation $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_2 = (0,0,0)$ équivaut au système
   $$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \mu + \nu & = 0 \end{cases}$$
   En extrayant $\nu = -\mu$ de la dernière équiation et en injectant dans les deux premières, il vient :
   $$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda - \mu & = 0 \end{cases}$$
   En faisant la somme des deux équations, il vient alors $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$, et enfin $\nu = 0$. Réciproquement, cette solution convient.
   Ainsi, l'unique solution du système vérifie $\boxed{\lambda = \mu = \nu = 0}$
   (b) On a bien montré qu'étant donnés λ, μ, ν réels, l'égalité $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3$ implique $\lambda = \mu = \nu = 0$. Cela signifie très précisément que $\boxed{\text{la famille } (X_1, X_2, X_3) \text{ est libre}}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On note simplement 0 les 0 de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ (en étant conscient que cette notation 0 peut désigner des vecteurs de taille différente suivant le contexte). On a alors :
   $$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$
   Ainsi, en simplifiant un terme $f(0)$, il vient $\boxed{f(0) = 0}$.
   Une autre façon de faire consiste à partir d'un vecteur X quelconque et d'écrire :
   $$f(0) = f(0X) = 0f(X) = 0.$$
3. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ suivante : pour tous $X_1, \dots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $\mathbb{R}$,
   $$f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(X_k).$$
   Pour $p = 1$, l'égalité à prouver se résume à $f(\lambda_1 X_1) = \lambda_1 f(X_1)$, qui provient de la linéarité de f.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vrai. Soit alors $X_1, \dots X_{p+1}$ des vecteurs et $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ des réels. Par linéarité de f, on peut écrire :
   $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i X_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i\right) + f(\lambda_{p+1} X_{p+1}) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i\right) + \lambda_{p+1} f(X_{p+1}).$$
   L'hypothèse de récurrence amène alors :
   $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(X_i) + \lambda_{p+1} f(X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(X_i),$$
   d'où $\mathcal{P}(p+1)$.
   Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tous $X_1, \dots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $\mathbb{R}$,
   $$\boxed{f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(X_k)}.$$

4. • Supposons f injective. Alors 0 admet au plus un antécédent. Or, d'après la question 2, 0 est un antécédent de 0. C'est donc le seul, et
$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{0\}}.$$
   • Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Soit alors X et Y des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(X) = f(Y)$. La linéarité de f amène alors $f(X - Y) = 0$. Ainsi, $X - Y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc $X - Y = 0$, puis $X = Y$. Cela prouve $\boxed{\text{l'injectivité de } f}$.
5. Soit f une application linéaire injective, et $(X_1, \dots, X_\ell)$ une famille libre. Montrons que $(f(X_1, \dots, f(X_\ell))$ est une famille libre. Pour cela, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(X_i) = 0$. D'après la question 3, il vient
$$f\left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i\right) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i \in \mathrm{Ker}(f).$$
Or, f étant injective, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i = 0$. La famille $(X_1, \dots, X_n)$ étant libre, cette égalité amène $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\ell = 0$.
Cela prouve bien $\boxed{\text{la liberté de } (f(X_1, \dots, f(X_\ell))}$
6. Soir f une application linéaire et surjective, et $(X_1, \dots, X_\ell)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Soit alors Y un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Puisque f est surjective, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(X) = Y$. Puisque $(X_1, \dots, X_\ell)$ est génératrice, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ des réels tels que
$$X = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i.$$
En appliquant f, et par linéarité, on obtient alors
$$Y = f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(X_i).$$
Cela prouve bien que $\boxed{(f(X_1), \dots, f(X_\ell)) \text{ est génératrice}}$.
7. On utilise ces résultats pour montrer dans cette question qu'il n'existe pas d'application linéaire bijective (c'est ce qu'on appelle un isomorphisme) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit X_1, X_2 et X_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On suppose que X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires. On note $X_1 = (a, b)$, $X_2 = (c, d)$ et $X_3 = (e, f)$. La non colinéarité s'exprime par $ad - bc \neq 0$. On recherche λ et μ tels que $\lambda X_1 + \mu X_2 = X_3$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} a\lambda + c\mu &= e \\ b\lambda + d\mu &= f. \end{cases}$$
   La condition $ad-bc \neq 0$ nous assure que ce système admet une solution. Plus précisément, on peut résoudre ce système en combinant les lignes de la façon suivante $dL_1 - cL_2$ et $-bL_1 + aL_2$. On obtient alors
$$(ad - bc)\lambda = ed - fc \qquad \text{et} \qquad (ad - bc)\mu = af - be.$$
   Comme $ad - bc \neq 0$, cela définit bien λ et μ, dont on vérifie sans difficulté que ce sont bien des solutions. Ainsi, $\boxed{X_3 \text{ est combinaison linéaire de } X_1 \text{ et } X_2}$.
   (b) Soit X_1, X_2 et X_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si X_1 et X_2 sont colinéaires, il existe λ tel que $X_1 = \lambda X_2$, ou l'inverse. Ceci fournit une relation $1 \cdot X_1 - \lambda X_2 + 0X_3 = 0$ qui empêche que la famille soit libre. Si X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, la question précédente fournit également une relation non triviale (tous les coefficients ne sont pas nuls) entre X_1, X_2 et X_3, assurant que la famille ne peut pas être libre.
   Ainsi, $\boxed{\text{trois vecteurs de } \mathbb{R}^2 \text{ ne peuvent pas former une famille libre.}}$
   (c) Supposons par l'absurde qu'il existe une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Alors, en particulier, elle est injective. Or, il existe dans $\mathbb{R}^3$ des familles libres à 3 vecteurs (par exemple la base canonique, comme ce n'est pas dur de le montrer, ou bien la famille étudiée dans la question 1). L'image par f de cette famille

libre est alors encore libre (d'après la question 5). C'est donc une famille libre formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ce qui contredit la question précédente.

Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas d'isomorphisme entre } \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbb{R}^2}$.

Correction du problème 2 – Ensemble des applications d'un ensemble infini dans un autre, d'apèrs Maxime Ramzi

Questions préliminaires

1. • Supposons E subpotent à F. Il existe donc une injection $i : E \to F$. On construit alors une application $g : F \to E$ de la façon suivante : pour tout y dans F :
   ∗ si $y \in \mathrm{Im}(i)$, y admet un unique antécédent x par i (l'unicité provnant de l'injectivité), et on pose alors $g(x) = y$. Ainsi, $g(x)$ est l'unique antécédent de y ;
   ∗ si $y \notin \mathrm{Im}(i)$, on pose $g(y) = x_0$ où x_0 est un élément arbitraire choisi au préalable.

   Alors $\boxed{g \text{ est surjective}}$. En effet, pour tout $x \in E$, x est l'unique antécédent de $i(x)$, donc par définition de g, $g(i(x)) = x$. Ainsi, x admet un antécédent $i(x)$ par g (on a même prouvé que $g \circ i = \mathrm{id}_E$).

   • Supposons qu'il existe une surjection $g : F \to E$. On construit une application $i : E \to F$ en posant pour tout $x \in E$, $i(x)$ un antécédent de x par g (qui existe par surjectivité de g) Ainsi, par définition, $g(i(x)) = x$. En particulier, si $x \neq y$, alors $g(i(x)) \neq g(i(y))$, donc $i(x) \neq i(y)$. Ainsi, i est injective. On en déduit que $\boxed{E \text{ est subpotent à } F}$.

2. Ainsi, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) E est équipotent à F
   (ii) E est subpotent à F et F est subpotent à E
   (iii) il existe une injection $f : E \to F$ et une surjection $g : F \to E$.

   La dernière équivalence provient de la définition de la subpotence d'une part, et de la question précédente d'autre part.

Partie I – Quelques résultats préliminaires

1. Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application.
   (a) Supposons que f est surjective. Soit $B' \in \mathcal{P}(B)$.
   • Soit $y \in f(f^{-1}(B'))$. Il existe donc $x \in f^{-1}(B')$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in f^{-1}(B')$, on a aussi $f(x) \in B'$. Ainsi, $y \in B'$. on en déduit l'inclusion $\boxed{f(f^{-1}(B')) \subset B'}$.
   • Soit $y \in B'$. Comme f est surjective, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $f(x) \in B'$, donc $x \in f^{-1}(B')$, puis $y = f(x) \in f(f^{-1}(B'))$. On en déduit que $\boxed{B' \subset f(f^{-1}(B'))}$.

   Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{f(f^{-1}(B')) = B'}$

   (b) Supposons f injective, et soit $A' \subset A$.
   • Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$, Il existe donc $y \in A$ tel que $f(y) = f(x)$. Comme f est injective, $y = x$, et donc $x \in A$. Ainsi $\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A}$.
   • Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, ce qui équivaut à $x \in f^{-1}(f(A))$. Par conséquent, $\boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}$

   Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A}$

   (c) Supposons A et B équipotents. Alors il existe une bijection $f : A \to B$. D'après les deux questions précédentes, la fonction image directe $\tilde{f}$ et la fonction image réciproque $\widehat{f^{-1}}$ sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi ce sont des bijections. En particulier, $\tilde{f}$ est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$, donc $\boxed{\mathcal{P}(A) \text{ et } \mathcal{P}(B) \text{ sont équipotents}}$.

2. Soit A, B et C trois ensembles, tel que B soit subpotent à C. Soit $\varphi : B \to C$ une injection. Soit $\Phi : B^A \to C^A$ définie par $\Phi(f) = \varphi \circ f$. Montrons que Φ est injective.

   Pour cela, on considère f et g dans B^A telles que $\Phi(f) = \Phi(g)$ donc $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Soit $x \in A$. On a donc

   $$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x)) \qquad \text{donc:} \qquad f(x) = g(x),$$

   par injectivité de φ. Ainsi, $f = g$. On en déduit que Φ est injective, donc que $\boxed{B^A \text{ est subpotent à } C^A}$.

3. Il reste à montrer que si la fonction φ de la question précédente est surjective, Φ également. Supposons donc φ surjective. Soit alors $g \in C^A$. Il s'agit de montrer l'existence de $f \in B^A$ tel que $g = \varphi \circ f$. Il suffit pour cela de définir, pour tout $x \in A$, $f(x)$ comme étant un antécédent de $g(x)$ par φ (il existe par surjectivité de φ). Ainsi, $\varphi(g(x)) = f(x)$. Cette construction étant faite pour tout x, on obtient bien $\Phi(f) = g$, d'où la $\boxed{\text{surjectivité de } \Phi}$. Remarquez l'utilisation de l'axiome du choix dans cette preuve.

   Ainsi, si B et C sont équipotents, et si $\varphi : B \to C$ est une bijection, cette question et la précédente montrent que Φ est une bijection de B^A dans C^A, donc $\boxed{B^A \text{ et } C^A \text{ sont équipotents}}$.

4. On raisonne à peu près de même, en considérant $\varphi : A \to B$ une bijection. On définit $\Psi : C^B \to C^A$ par $\Psi(f) = f \circ \psi$.
   - Soit f et g tels que $\Psi(f) = \Psi(g)$. Alors $f \circ \varphi = g \circ \varphi$. Soit $x \in B$. Comme φ est surjective, il existe $y \in A$ tel que $\varphi(y) = x$, donc
   $$f(x) = f(\varphi(y)) = g(\varphi(y)) = g(x).$$
   Ainsi, $f = g$. On en déduit que Ψ est injective.
   - Soit $g \in C^A$. On cherche f tel que $f \circ \varphi = g$. Si $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il admet un unique antécédent x. On définit $f(y) = g(x)$. La fonction f ainsi définie vérifie donc $f(\varphi(x)) = x$ pour tout x. On peut la compléter en une application en la définissant de façon arbitraire hors de $\mathrm{Im}(\varphi)$. On a alors défini une application telle que $\Psi(f) = g$. D'où la surjectivité d Ψ.

   Ainsi, il existe une bijection entre C^A et C^B, donc $\boxed{C^A \text{ et } C^B \text{ sont équipotents}}$.

5. Il s'agit de bien comprendre la nature des objets. On définit
   $$\Phi : C^{A\times B} \to (C^B)^A$$
   de la manière suivante : pour tout $f : A \times B \to C$ on définit $\Phi(f) : A \to C^B$ par
   $$\Phi(f) : a \mapsto (b \mapsto f(a, b)).$$
   Ainsi, $\Phi(f)(a)(b) = f(a, b)$.
   Réciproquement, on définit $\Phi : (C^B)^A \to C^{A\times B}$ ainsi : si $g : (C^B)^A$, $\Psi(g)$ envoie (a, b) sur $g(a)(b)$. Ainsi, $\Psi(g)(a, b) = g(a)(b)$.
   Les deux expressions trouvées pour Φ et Ψ montrent sans peine que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre donc bijective. Ainsi $\boxed{C^{A\times B} \text{ et } (C^B)^A \text{ sont équipotents}}$.

Partie II – Cardinal de F^E lorsque F est subpotent à E

On considère ici deux ensembles E et F tel que E soit infini, et F soit non vide subpotent à E.

1. (a)
   - E est subpotent à $E \times F$: en effet, puisque F est infini, on peut choisir $y_0 \in F$. On définit alors $f : E \to E \times F$ par $f(x) = (x, y_0)$. L'application f est clairement injective. Donc $\boxed{E \text{ est subpotent à } E \times F}$.
   - Soit $i : F \to E$ une injection. On définit $g : E \times F \to E \times E$ par $g(x, y) = (x, i(y))$.
   On vérifie l'injectivité : Soit (x, y) et (x', y') dans $E\times F$. Si $g(x, y) = g(x', y')$, alors $x = x'$ et $i(y) = i(y')$, puis, i étant injective, $y = y'$, donc $(x, y) = (x', y')$. Cela prouve bien l'injectivité de i.
   Ainsi, $\boxed{E \times F \text{ est subpotent à } E \times E}$.

   (b) Comme $E\times E$ et E sont équipotents, il existe une bijection (donc une injection) $j : E\times E \to E$. La composée $j\circ g : E\times F \to E$ est alors injective (composée de deux injections). L'injection $f : E \to E\times F$ et l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein nous assure alors que $\boxed{E \text{ et } E \times F \text{ sont équipotents}}$.

   (c) Une application $f : E \times F$ est entièrement déterminée par son graphe G_f : deux applications différentes ne peuvent pas avoir le même graphe (en fait, c'est la définition d'une application qui est en cause ici : elle est définie par la donnée de son graphe). Or, le graphe est un sous-ensemble de $E \times F$. Ainsi, l'application $f \mapsto G_f$ est injective de F^E dans $E \times F$. On en déduit que $\boxed{F^E \text{ est subpotent à } \mathcal{P}(E \times F)}$.

2. (a) Soit $x_0 \in F$ et $E' \in \mathcal{P}(E)$. Puisque F est infini, il existe x_1 dans F, distinct de x_0. On définit alors f par :
   $$\forall x \in E,\ f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{si } x \in E' \\ x_1 & \text{si } x \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Cette application vérifie bien $\boxed{f^{-1}(\{x_0\}) = E'}$.

(b) L'élément x_0 de F étant fixé, on considère $\varphi : F^E \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(f) = f^{-1}(\{x_0\})$. La question précédente nous assure la $\boxed{\text{surjectivité de } \varphi}$.

3. • La question précédente et la question préliminaire 1 montrent que $\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ est subpotent à } F^E}$.
   • Puisque $E \times F$ et E sont équipotents (question 1(b)), la question I-1(c) permet d'affirmer que $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents. La question II-1(c) permet alors de conclure que $\boxed{F^E \text{ est subpotent à } \mathcal{P}(E)}$ (on compose une injection par une bijection, cela reste injectif).

   Ces deux résultats se combinent grâce au théorème de Cantor-Bernstein : $\boxed{F^E \text{ et } \mathcal{P}(E) \text{ sont équipotents}}$.

Partie III – Cardinal de F^E lorsque F est subpotent à $\mathcal{P}(E)$

On suppose dans cette partie que F est subpotent à $\mathcal{P}(E)$.

1. Puisque E et $E \times E$ sont équipotents, E^E et $E^{E\times E}$ sont équipotents d'après I-4. Comme $E^{E\times E}$ et $(E^E)^E$ sont équipotents d'après I-5, il en résulte que $\boxed{E^E \text{ et } (E^E)^E \text{ sont équipotents}}$.
2. Comme E est subpotent à lui-même, le résultat de la partie II justifie que E^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents. Ainsi, d'après I-3 et la question précédente, $\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ et } \mathcal{P}(E)^E \text{ sont équipotents}}$
3. D'après I-2, puisque F est subpotent à $\mathcal{P}(E)$, F^E est subpotent à $\mathcal{P}(E)^E$, donc aussi à $\mathcal{P}(E)$ d'après la question précédente.

   Par ailleurs, la construction de la question II-2 reste valide dans ce contexte et montre que $\mathcal{P}(E)$ est subpotent à F^E.

   Le théorème de Cantor-Bernstein amène alors $\boxed{\text{l'équipotence de } F^E \text{ et de } \mathcal{P}(E)}$.