LES NOMBRES

Exercice 1. [★] (Concours Général 2012 : Une suite majoritairement décroissante)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout entier $n \geqslant 2$, au moins la moitié des termes $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

Exercice 2. [★]

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles distincts deux à deux. Démontrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 3. [★]

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{(1+2\sqrt{2})q^2}.$$

Exercice 4. [⋆]

Soient a, b, c trois nombres réels positifs ou nuls tels que $(1+a)(1+b)(1+c) \leqslant 8$. Démontrer que $abc \leqslant 1$.

Exercice 5. [⋆]

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 6. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de tête le module des nombres complexes $z_k = 5^k(3+4i)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$. En déduire qu'il existe un cercle du plan complexe contenant plus de n points à coordonnées entières. *On admettra que, si θ désigne l'angle tel que $\cos\theta = 3/5$ et $\sin\theta = 4/5$, le nombre θ/π est irrationnel.*

Exercice 7. [★]

Soient a, b et c trois nombres réels tels que

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Démontrer que

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0.$$