MP*1

Problème

Quelques propriétés de la marche de Bernoulli symétrique

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad ; \qquad M_n = \max\{S_k \; ; \; k \in \{0, \ldots, n\}\}.$$

On remarquera que $S_0 = 0$, ce qui implique que, presque sûrement, $M_n \geq 0$.

Pour m dans $\mathbb{Z}$, soit T_m la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par [1]

$$T_m = \begin{cases} \min\{n \geq 1, \; S_n = m\} & \text{si } \{n \geq 1, \; S_n = m\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0)\, t^k.$$

Pour m dans $\mathbb{Z}$, on pose

$$\forall t \in [-1, 1], \quad g_m(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_m = k)\, t^k.$$

I. Généralités et loi du premier retour en 0

1. a) Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(S_n = k)$ en discutant selon que k et n ont ou non même parité.

   b) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$,

   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad P(S_n = k) \leq \frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n}.$$

   c) Montrer que

   $$\frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

1. Si $m \neq 0$, T_m est l'instant de première visite en m ; mais T_0 est l'instant de premier retour en 0 (car $S_0 = 0$ et $T_0 \geq 1$.

2. a) Montrer que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

b) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Justifier la définition de g_m et montrer que g_m est continue sur $[-1,1]$.

3. On note $T_0 = T,\ g = g_0$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(T = k)\ P(S_{n-k} = 0).$$

b) En déduire que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad f(t) = 1 + f(t)g(t).$$

Pour $t \in]-1,1[$, exprimer $g(t)$ en fonction de t.

c) Montrer que $g(1) = 1$ et en déduire la valeur de $P(T < +\infty)$.

d) Déterminer la loi de T et $E(T)$.

II. La marche visite tout site

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a) Montrer que

$$P\left((M_n \geq m) \cap (S_n < m)\right) = P(S_n > m).$$

On traitera d'abord le cas $m = 0$. Si $m \geq 1$, on pourra écrire l'événement $(M_n \geq m) \cap (S_n < m)$ à l'aide d'événements de la forme

$$(T_m = k) \cap (S_n < m).$$

b) En déduire que

$$P(M_n \geq m) = 2P(S_n > m) + P(S_n = m).$$

c) Conclure que :

- si m et n ont même parité, $P(M_n = m) = P(S_n = m)$;

- si m et n n'ont pas même parité, $P(M_n = m) = P(S_n = m+1)$.

5. a) Montrer que

$$P(M_n \leq m) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que, si $m \in \mathbb{N}^*$, T_m est presque sûrement fini.

III. Fonction génératrice de T_m

6. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $(T_1 > 2k+1)$ en utilisant M_{2k+1}.

   b) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$P(T_1 = 2\ell+1) = \frac{1}{2^{2\ell+1}\,(\ell+1)}\binom{2\ell}{\ell}.$$

7. a) Montrer que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad g_1(t) = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}.$$ [2]

   b) Déterminer $E(T_1)$.

8. a) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ des éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer :

$$P(T_1 = t_1, T_2 - T_1 = t_2, \ldots, T_m - T_{m-1} = t_m) = \prod_{k=1}^{m} P(T_1 = t_k).$$

   b) Que déduit-on de a) sur les variables aléatoires

$$T_1,\ T_2 - T_1,\ T_3 - T_2, \ldots,\ T_m - T_{m-1}\ ?$$

   c) Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall t \in [0,1[, \qquad g_m(t) = g_1(t)^m.$$

IV. Comportement asymptotique en loi de T_m

Pour λ dans $\mathbb{R}^+$, soit e_λ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad e_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

9. On note C l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ admettant une limite finie en $+\infty$. On rappelle que les éléments de C sont des fonctions bornées, ce qui permet de normer C en posant

$$\forall f \in C, \qquad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

   Montrer que le sous-espace V de C engendré par $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est dense dans C pour la norme $\|\ \|_\infty$.

   On pourra se ramener par un changement de variable au théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.

2. La formule s'entendant au sens d'un prolongement continu en $t = 0$.

10. Dans cette question, φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \varphi(t) = \frac{\exp(-\frac{1}{2t})}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}}.$$ [3]

On admet la formule suivante, qui sera établie dans la partie **IV** :

$$(1) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}, \qquad \int_0^{+\infty} \varphi(t) \exp(-\lambda t) \mathrm{d}t = \exp(-\sqrt{2\lambda}).$$

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+}$ telle que

$$(2) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}, \qquad E(\exp(-\lambda Z_n)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-\sqrt{2\lambda}).$$

Pour f dans C, on pose

$$L(f) = \int_0^{+\infty} f\varphi.$$

a) Montrer :

$$\forall f \in C, \qquad E\left(f(Z_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L(f).$$

b) Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la limite de la suite $\left(P(Z_n > x)\right)_{n\geq 1}$.

11. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$Z_n = \frac{T_n}{n^2}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (2) de la question 10.

V. Un calcul de transformée de Laplace

Cette partie est indépendante des précédentes. Elle a pour but d'établir l'identité (1) énoncée dans la partie **IV**.

On rappelle la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \mathrm{du} = \sqrt{\pi}.$$

12. Soient x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{dt}.$$

b) Montrer que la fonction

$$t \longmapsto yt - \frac{x}{t}$$

3. La fonction φ est la densité de probabilité d'une loi nommée « loi stable unilatérale de Lévy de paramètre $\frac{1}{2}$ ».

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter le C^1-difféomorphisme réciproque.

c) En utilisant le changement de variable

$$u = yt - \frac{x}{t},$$

démontrer :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} \exp(-2xy).$$

13. a) Soient x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déduire de la question 15.c) la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-y^2s - \frac{x^2}{s}\right)}{\sqrt{s}} \mathrm{ds}.$$

b) On fixe y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'application F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-y^2s - \frac{x^2}{s}\right)}{\sqrt{s}} \mathrm{ds}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression intégrale de $F'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Démontrer l'identité (1).

VI. Loi de l'arcsinus

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit L_n la variable aléatoire donnant l'instant de la dernière visite en 0 avant l'instant n :

$$L_n = \max\{j \in \{0, \ldots, n\} \ ; \ S_j = 0\}.$$

On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_k = P(S_{2k} = 0).$$

14. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $u_k - u_{k+1}$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(T > 2n) = u_n.$$

15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que

$$P(L_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0)\ P(T > 2(n-k)).$$

16. Soit x un élément de $[0, 1[$.

a) Montrer que

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k \leq xn}} \frac{1}{\sqrt{k}\ \sqrt{n-k}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \ \mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}).$$

On admettra que, si u est une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ intégrable sur $]0,1[$ et n'admettant qu'un nombre fini de changements de monotonie, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} u\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 u.$$

b) Montrer que

$$P\left(\frac{L_{2n}}{2n} \leq x\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}).$$