Chapitre 6 : suites de nombres réels ou complexes

Table des matières

1 Premières généralités

1.1 Algèbre $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ des suites scalaires

Définition 1 On pose $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni des deux LCI habituelles $+$ et $\times$. On appelle ***suite à valeurs dans*** $\mathbb{K}$ toute fonction $u : A \longrightarrow \mathbb{K}$ définie sur une partie A de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ désigne donc l'ensemble des suites à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ et définies sur $\mathbb{N}$ tout entier.
Si $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u_n$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on adopte les opérations suivantes :
- addition $+$: on pose pour toutes suites u et v, $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- multiplication $\times$: on pose pour toutes suites u et v, $u \times v = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- multiplication par un scalaire $\cdot$: on pose pour tout scalaire λ et toute suite u, $\lambda \cdot u = (\lambda \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 Suites minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes, monotones

Dans toute la suite, on se place dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sur lequel, on dispose de la relation d'ordre habituelle $\leqslant$. On admet que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure et que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Définition 2 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.
- On dit que u est ***minorée par*** m si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$ (autrement dit, m minore $\{u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$). On pose alors $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne inférieure.
- On dit que u est ***majorée par*** M si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ (autrement dit, M majore $\{u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$). On pose alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure.
- On dit que u est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée.
- On dit que u est ***croissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- On dit que u est ***décroissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- On dit que u est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
- On dit que u est ***strictement croissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
- On dit que u est ***strictement décroissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.
- On dit que u est ***strictement monotone*** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 1 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors, la suite u est bornée si et seulement si :

$$\exists M \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Dans ce cas, on dit que la suite u est bornée par M.

Exemple 1 • La suite constante égale à 2 est-elle monotone ? bornée ?
- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? bornée ?
- La somme de deux suites monotones est-elle encore monotone ?
- La somme de deux suites bornées est-elle encore bornée ?

2 Suites convergentes

2.1 Définitions

Définition 3 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite u ***converge vers*** ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (\Longleftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon).$$

Proposition 2 Soit u une suite convergente. Alors, il existe un unique nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers ℓ. Ce nombre ℓ s'appelle la ***limite*** de la suite u et on la note $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Définition 4 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite u ***diverge*** si elle ne converge pas.

Remarque 1 Il existe plusieurs configurations de divergence :

- soit la suite u diverge vers $+\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant M$. Dans ce cas, on dit que la suite u ***tend vers*** $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- soit la suite u diverge vers $-\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant M$. Dans ce cas, on dit que la suite u ***tend vers*** $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- soit la suite u n'admet aucune limite finie ou infinie. Elle peut être bornée ou non comme le montrent les exemples $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $((-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 3 Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

2.2 Opérations sur les limites

Proposition 4 Soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- la suite $(u + v)$ converge vers $\ell + \ell'$
- la suite $(u \times v)$ converge vers $\ell \times \ell'$
- la suite $\lambda \cdot u$ converge vers $\lambda \cdot \ell$.

On dispose des tableaux récapitulatifs suivants :

- pour la somme :

suite $v \setminus$ suite u	converge vers ℓ	tend vers $+\infty$	tend vers $-\infty$
converge vers ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
tend vers $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I. "$\infty - \infty$"
tend vers $-\infty$	$-\infty$	F.I. "$\infty - \infty$"	$-\infty$

- pour le produit :

suite $v \setminus$ suite u	cv vers $\ell > 0$	cv vers $\ell < 0$	cv vers 0	tend vers $+\infty$	tend vers $-\infty$
converge vers $\ell' > 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
converge vers $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
converge vers 0	0	0	0	F.I. "$\infty \times 0$"	F.I. "$\infty \times 0$"
tend vers $+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I. "$\infty \times 0$"	$+\infty$	$-\infty$
tend vers $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I. "$\infty \times 0$"	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 5 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle ouvert. Soit $\ell \in I$. Alors, pour toute suite u convergente de limite ℓ et prenant ses valeurs dans I, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est encore convergente de limite $f(\ell)$.

Proposition 6 Soit u une suite tendant vers $+\infty$. Alors, la suite u ne prend pas des valeurs nulles à partir d'un certain rang et la suite $\frac{1}{u}$ est convergente de limite nulle.

Soit u une suite tendant vers 0 et ne prenant pas de valeurs nulles. Alors, la suite $\left|\frac{1}{u}\right|$ tend vers $+\infty$.

Remarque 2 Il est faux de dire dans la propriété précédente que : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \pm\infty$.
En effet, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, alors la suite $\frac{1}{u}$ est divergente mais n'admet aucune limite infinie.

3 Théorèmes fondamentaux

3.1 Théorème des gendarmes

Théoréme 1 Soient u, v et w trois suites dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- les deux suites u et w sont convergentes de **même limite** ℓ.

Alors, la suite v est convergente de limite ℓ.

Corollaire 1 Soient u une suite bornée et v une suite convergeant vers 0. Alors, le produit $(u \times v)$ est une suite convergeant encore vers 0.

Corollaire 2 Soient u et v deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Alors, la suite u converge vers 0.

Remarque 3 Le théorème ne marche plus si les suites u et w convergent mais de limites différentes. Dans ce cas, on ne peut rien dire sur la suite v.

3.2 Inégalités et limites

Théoréme 2 Soient u et v deux suites de limites respectives ℓ et ℓ' et telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$ (marche même si l'une des limites vaut $\pm\infty$).

Exemple 2 Si $u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell'$, que peut-on dire entre ℓ et ℓ' ?

3.3 Théorème des suites monotones

Théoréme 3 Soit u une suite à valeurs réelles et monotone. On dispose des quatre cas suivants :
- si la suite u est croissante et majorée, alors la suite u converge de limite ℓ égale à $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- si la suite u est croissante et non majorée, alors la suite u tend vers $+\infty$.
- si la suite u est décroissante et minorée, alors la suite u converge de limite ℓ égale à $\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- si la suite u est décroissante et non minorée, alors la suite u tend vers $-\infty$.

Méthode : Comment étudier une suite de nombres réels ?

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour l'étudier :
- ▶ regarder la monotonie en calculant le signe de $u_{n+1} - u_n$
- ▶ appliquer éventuellement le théorème des suites monotones ; on ne peut jamais calculer la valeur de la limite finie par ce théorème
- ▶ « deviner » la limite ℓ et trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$.

3.4 Applications

3.4.1 Suites adjacentes

Définition 5 Soient a et b deux suites à valeurs réelles. On dit que les suites a et b sont ***adjacentes*** si :
- $\longrightarrow$ la suite a est croissante et la suite b est décroissante
- $\longrightarrow$ la suite $(b-a)$ est convergente de limite nulle.

Proposition 7 Soient a et b deux suites adjacentes. Alors, elles convergent vers la même limite ℓ.

Exemple 3 Montrer que les suites $\left(S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(T_n = S_n + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

3.4.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 8 Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, on a $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. De manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels convergeant vers x. On dit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est ***dense*** dans $\mathbb{R}$.

Exemple 4
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est-il aussi dense dans $\mathbb{R}$?
- Montrer que l'ensemble $\mathscr{A} = \left\{e^n - \ln p \ ; \ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4 Sous-suites

4.1 Définitions, premières propriétés

Définition 6 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle ***sous-suite*** de u, toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) < \varphi(n+1)$).

Remarque 4 Les sous-suites sont également notées $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_k < n_{k+1}$.

Exemple 5 Les suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{5^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont quatre sous-suites de la même suite u.

Proposition 9 Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Définition 7 Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est une ***valeur d'adhérence*** de la suite u s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de u convergeant vers ℓ.

Exemple 6 • La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence : -1 et 1.
• La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune valeur d'adhérence.
• la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une infinité de valeurs d'adhérence : ce sont tous les éléments de l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

Proposition 10 Soit u une suite réelle convergente de limite ℓ. Alors, toutes les sous-suites de u sont encore convergentes de limite ℓ. En particulier, la suite u n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Proposition 11 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes de même limite ℓ. Alors, la suite u est convergente de limite ℓ.

Exemple 7 • La suite $u = \left(n \times \dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence égale à 0 mais n'est pas convergente.
• Une suite réelle strictement positive et de limite nulle est-elle décroissante à partir d'un certain rang ? Admet-elle une sous-suite strictement décroissante ?

4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théoréme 4 Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 3 Toute suite bornée n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence ℓ est convergente de limite ℓ.

5 Relations de comparaison entre les suites

5.1 Définitions

Définition 8 Soient u et v deux suites dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite v ne prenant pas la valeur nulle à partir d'un certain rang ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $v_n \neq 0$).
On dit que la suite u est ***dominée*** par la suite v, et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est bornée.
On dit que la suite u est ***équivalente*** à la suite v, et on note $u_n \sim v_n$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est convergente de limite égale à 1.
On dit que la suite u est ***négligeable*** devant la suite v, et on note $u_n = \circ(v_n)$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est convergente de limite égale à 0.

Remarque 5 On peut également adopter des définitions équivalentes lorsque les suites s'annulent même à partir de n'importe quel rang. On obtient des égalités du type $u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$, avec :
- ▷ la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour signifier que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$
- ▷ la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 1 pour signifier que $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} v_n$
- ▷ la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0 pour signifier que $u_n = \circ(v_n)$.

Proposition 12 On note E l'ensemble des suites réelles ne prenant pas la valeur nulle à partir d'un certain rang. Soient u et v deux suites réelles, avec $v \in E$. Si $u_n \sim v_n$, alors $u \in E$ et la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Proposition 13 On dispose des propriétés suivantes :
- si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $u_n = \circ(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$
- si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ et $\dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{d_n}$
- si $u_n \sim v_n$ et si la suite u converge vers ℓ (respectivement tend vers $+\infty$), alors la suite v converge également vers ℓ (respectivement tend également vers $+\infty$)
- on a : $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = \circ(v_n)$
- si $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$, alors $u_n = \circ(w_n)$

5.2 Suites de référence

On dispose de cinq types de suites de référence :
- ***suites logarithmiques*** : ce sont les suites de la forme $((\ln n)^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}^*}$, où α est une constante positive.
- ***suites puissance*** : ce sont les suites de la forme $\left(n^{\beta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, où β est une constante positive.
- ***suites exponentielles*** : ce sont les suites de la forme $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où γ est une constante.
- ***suite factorielle*** : c'est la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ***dernier type*** : c'est la suite $(n^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 14 On dispose des relations de comparaison au sein de chaque type :
- $\forall 0 \leqslant \alpha < \alpha'$, $(\ln n)^{\alpha} = \circ\left((\ln n)^{\alpha'}\right)$
- $\forall 0 \leqslant \beta < \beta'$, $n^{\beta} = \circ\left(n^{\beta'}\right)$
- $\forall 0 \leqslant \gamma < \gamma'$, $\gamma^n = \circ\left({\gamma'}^n\right)$

Proposition 15 On dispose des relations de comparaison entre les différents types :

- $\forall \alpha \geqslant 0$, $\forall \beta > 0$, $(\ln n)^{\alpha} = \circ\left(n^{\beta}\right)$
- $\forall \beta \geqslant 0$, $\boxed{\forall \gamma > 1}$, $n^{\beta} = \circ\left(\gamma^{n}\right)$
- $\forall \gamma \geqslant 0$, $\gamma^{n} = \circ(n!)$
- $n! = \circ\left(n^{n}\right)$

Méthode : Comment lever une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$?

▶ trouver un équivalent u_n du numérateur et v_n du dénominateur ; pour ce faire :
- à l'intérieur de chaque somme ou différence, ne retenir que le terme prépondérant
- à l'intérieur d'un produit, ne toucher à rien
- à l'intérieur d'une expression du type $a_n^{b_n}$, passer à l'exponentielle
- à l'intérieur d'une expression du type a_n^{α} avec α une constante, remplacer a_n par un équivalent

▶ lever la forme indéterminée $\dfrac{u_n}{v_n}$ avec les croissances comparées.

Exemple 8 Lever les formes indéterminées suivantes :

- $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{\ln n}}{2^{n}}$
- $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n \cdot \sin(n^{n}) + e^{3n+2} - 3^{2n+3}}{3^{(\ln n)^5} + e^{\sqrt{n}}} - 9^{n}\right)$.

Exemple 9 • Déterminer les deux premiers termes dans le développement asymptotique de :

$$u_n = \sqrt{e^{2n} + e^{n}} - e^{n}$$

- Si $\alpha > 0$, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{\alpha n} \times \ln\Big(\mathrm{th}(x)\Big).$$

Proposition 16 On dispose de la ***formule de Stirling*** donnant un équivalent de la factorielle :

$$n! \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n}.$$

Exemple 10 Déterminer un équivalent de $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

6 Suites complexes

Définition 9 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite z converge vers le complexe ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

De manière équivalente, la suite complexe z converge vers le complexe ℓ si les deux suites réelles $\Re e(z)$ et $\Im m(z)$ convergent respectivement vers $\Re e(\ell)$ et $\Im m(\ell)$.

Méthode : Comment étudier une suite de nombres complexes ?

Si on doit étudier une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut au choix

- étudier les deux suites réelles $(\Re e(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im m(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$
- étudier les deux suites réelles $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 11 • Soit z un nombre complexe. Montrer que la suite $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

• Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$: toute suite bornée dans $\mathbb{C}$ admet une sous-suite convergente.

7 Suites de références

7.1 Suites arithmétiques

Définition 10 Ce sont les suites u de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \quad \text{, où } r \text{ est une constante.}$$

Le nombre r est appelé ***raison*** de la suite arithmétique u.

Proposition 17 Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \cdot r$. Plus généralement, on a : $\forall (n_0 \leqslant n) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \cdot r$.

Méthode : Comment calculer une somme arithmétique ?

- appliquer la formule :

$$\boxed{\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}}$$

Remarque 6 • Cette formule entraîne la formule bien connue : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

• D'autres formules de sommation sont à savoir :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Tout ceci se montre par récurrence.

Exemple 12 • Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n} i$.

• Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

7.2 Suites géométriques

Définition 11 Ce sont les suites u de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \cdot u_n \quad \text{, où } q \text{ est une constante.}$$

Le nombre q est appelé ***raison*** de la suite géométrique u.

Proposition 18 Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n \cdot u_0$. Plus généralement, on a : $\forall (n_0 \leqslant n) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = q^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$.

Méthode : Comment calculer une somme géométrique ?

- distinguer deux cas selon la valeur de la raison
- si la raison vaut 1, appliquer la formule :

$$\boxed{\text{premier terme} \times \text{nombre de termes}}$$

- si la raison est différente de 1, appliquer la formule :

$$\boxed{\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}}$$

Méthode : Comment calculer des sommes de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^\alpha \cdot x^k$?

- poser $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$
- appliquer la formule de la somme géométrique
- dériver la formule obtenue
- s'arranger pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^\alpha \cdot x^k$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$, ... et de constantes et de x.

Exemple 13 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ et $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k}$.

Proposition 19 Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme 1. On distingue cinq cas :

- si $q < -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, divergente et n'admet aucune limite.
- si $q = -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, divergente et n'admet aucune limite.
- si $q \in]-1, 1[$ (ou encore si $|q| < 1$), alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
- si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.
- si $q > 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

7.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 12 Ce sont les suites u de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a \cdot u_n + b \quad \text{, où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes.}$$

Méthode : Comment traiter une suite arithmético-géométrique ?

Pour étudier une suite $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$, dans le cas $a \neq 1$:

▶ résoudre $\lambda = a \cdot \lambda + b$

▶ poser $v_n = u_n - \lambda$: la suite v est géométrique de raison a

▶ trouver v_n en fonction de n

▶ donner u_n en fonction de n.

Exemple 14 • Déterminer u_{1000} sachant que la suite u est définie par :

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

• Dans le problème des tours de Hanoï à n disques, combien faut-il de coups au minimum pour résoudre le problème ?

7.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 13 Ce sont les suites u de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n \quad \text{, où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes.}$$

Méthode : Comment traiter une suite récurrente linéaire d'ordre deux ?

Soit u une telle suite avec $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$. Pour l'étudier :

▶ poser $P(X) = X^2 - aX - b$ le polynôme caractéristique

▶ déterminer les racines (complexes) de $P(X)$:

- si $\Delta \neq 0$, deux racines $q_1 \neq q_2$ et pour tout n, $u_n = \kappa_1 \cdot q_1^n + \kappa_2 \cdot q_2^n$ avec $\kappa_i \in \mathbb{C}$
- si $\Delta = 0$, une racine double q et pour tout n, $u_n = (\kappa_1 \cdot n + \kappa_2)q^n$ avec $\kappa_i \in \mathbb{C}$

▶ déterminer les constantes κ_i à l'aide des conditions initiales.

Exemple 15 Trouver les formules de u_n en fonction de n sachant que :

- $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
- $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$
- $u_0 = 1$, $u_2 = 8$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

7.5 Suites récurrentes

Définition 14 On appelle ***suite récurrente***, toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{, où } f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

Méthode : Comment étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?

- faire un dessin :
  - tracer les courbes $y = f(x)$ et $y = x$
  - tracer les points de coordonnées $(u_0, 0)$, $(u_0, f(u_0) = u_1)$, $(0, u_1)$, (u_1, u_1) puis $(u_1, 0)$
  - recommencer le procédé
- vérifier que u_0 appartient à un intervalle I stable par f : tous les u_n appartiendront à cet intervalle I
- étudier la monotonie de f sur I :
  - si f est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone
  - si f est décroissante, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires
- étudier la continuité de f : si f est continue et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$
- étudier la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ pour connaître la position des courbes $y = f(x)$ et $y = x$ et les variations de u_n
- utiliser éventuellement le théorème du point fixe :
  si f est κ-contractante ($|f(x) - f(y)| \leqslant \kappa \cdot |x - y|$ avec $\kappa < 1$) la fonction f n'a qu'un point fixe ℓ et $|u_n - \ell| \leqslant \kappa^n \cdot |u_0 - \ell|$, donc u converge vers ℓ.

Remarque 7 Si l'itératrice f est croissante ou décroissante, on ne peut rien dire sur la croissance ou décroissance de la suite u.

Exemple 16 • Étudier la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$.

- Montrer que la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{4}{3} \cdot u_n^3 + \dfrac{1}{6} \end{cases}$ est convergente de limite $\sin \dfrac{\pi}{18}$.
- Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.