Lycée Henri IV
MPSI 2016/2017

Devoir surveillé
12/10/2016

DEVOIR SURVEILLÉ 2

(durée : 3 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\text{encadrée}}$ *ou <u>soulignée</u>. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Non stricte comparabilité

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide. Sur E, on définit la relation « ne pas être strictement comparable », notée $\ast$, de la façon suivante :

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \ast y) \Longleftrightarrow (x \prec y \text{ et } y \prec x \text{ sont fausses}).$$

Pour tout $x \in E$, on note x^- la partie de E constituée des minorants stricts de x, c'est-à-dire

$$x^- = \{t \in E : t \prec x\}.$$

1. Dans le cas où l'ordre $\preccurlyeq$ est total, reconnaître la relation $\ast$.
2. a) Démontrer que $\ast$ est réflexive et symétrique.
   b) On suppose que $E = \mathbb{N}$ et $\preccurlyeq$ est la relation de divisibilité $|$. La relation $\ast$ est-elle une relation d'équivalence sur E ?
3. Démontrer que $\forall x, y \in E,\ (x^- = y^-) \Rightarrow (x \ast y)$.
4. On suppose que $\forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-)$. Démontrer que $\ast$ est une relation d'équivalence.
5. Réciproquement, on suppose que $\ast$ est une relation d'équivalence. Démontrer que l'on a $\forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-)$.

EXERCICE 2

Indicatrice d'une image réciproque

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'une partie A d'un ensemble E.
2. Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit B une partie de F. Démontrer que
$$\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f.$$

EXERCICE 3

Théorème d'extension de Szpilrajn dans le cas d'un ensemble fini

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que E admet un élément maximal, c'est-à-dire qu'il existe un élément m de E tel que $\forall x \in E,\ (m \preccurlyeq x) \Longrightarrow (x = m)$.
2. Démontrer qu'il existe une bijection strictement croissante φ entre $(E, \preccurlyeq)$ et $(\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant)$. *Indication : Raisonner par récurrence sur n.*
3. Démontrer qu'il existe sur E une relation d'ordre total $\trianglelefteq$ qui prolonge l'ordre $\preccurlyeq$, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E,\ (x \preccurlyeq y) \Rightarrow (x \trianglelefteq y)$.

EXERCICE 4

Un lemme de confinement

L'objet de cet exercice est de démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$: « pour tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ de module inférieur ou égal à 1, il existe $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1; 1\}$ tels que $\forall p \in \llbracket 2; n \rrbracket,\ |z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$ ».

1. <u>Préliminaires géométriques</u>
   a) $\alpha]$ Soient u, v deux nombres complexes non nuls. Démontrer la formule d'Al Kachi :
   $$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u|.|v|.\cos(\arg u - \arg v).$$
   $\beta]$ Démontrer que $\forall x, y \in [0; 1],\ x^2 + y^2 - xy \leqslant 1$.
   $\gamma]$ Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ six nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 dont les images forment un hexagone (non croisé) inscrit dans le disque unité. Démontrer que l'un (au moins) des cotés de cet hexagone a une longueur inférieure ou égale à 1. *Indication : Utiliser des angles.*
   b) Soient u, v deux nombres complexes. Démontrer l'identité du parallèlogramme :
   $$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$
2. <u>Initialisation</u>
   Démontrer $\mathscr{P}(2)$.
3. <u>Un pas vers l'hérédité</u>
   On souhaite utiliser $\mathscr{P}(2)$ pour démontrer $\mathscr{P}(3)$. On considère z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.
   a) Dans cette question, on suppose que $|z_1 + z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1 - z_2| \leqslant 1$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ dans $\{-1; 1\}$ tels que l'on ait $|z_1 + \varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.
   b) Dans cette question, on suppose que $|z_1 + z_2| > 1$ et $|z_1 - z_2| > 1$.
   $\alpha]$ Démontrer que $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{3}$.
   $\beta]$ Justifier que $|z_1 + z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1 - z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2 + z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2 - z_3| \leqslant 1$.
   $\gamma]$ Démontrer qu'il existe $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ dans $\{-1; 1\}$ tels que l'on ait $|z_1 + \varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.
   c) Conclure.
4. <u>Hérédité</u>
   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$ implique l'assertion $\mathscr{P}(n + 1)$.
5. <u>Conclusion</u>
   Conclure !

CORRECTION DU DS 2

(durée : 3 h 00)

EXERCICE 1

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide. Sur E, on définit la relation « ne pas être strictement comparable », notée $\divideontimes$, de la façon suivante : $\forall x, y \in E,\ (x \divideontimes y) \iff (x \prec y$ et $y \prec x$ sont fausses$)$. Pour tout $x \in E$, on note x^- la partie de E formée des minorants stricts de x, c'est-à-dire $x^- = \{t \in E : t \prec x\}$.

1. *Dans le cas où l'ordre $\preccurlyeq$ est total, reconnaître la relation $\divideontimes$.*

   Supposons que l'ordre $\preccurlyeq$ est total. Pour tous $x, y \in E$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Par conséquent, dans ce cas, la condition ($x \prec y$ et $y \prec x$ sont fausses) est équivalente à $(x = y)$. Par conséquent,

   $$\boxed{\text{lorsque l'ordre } \preccurlyeq \text{ est total, } \divideontimes \text{ est la relation d'égalité.}}$$

2. a) *Démontrer que $\divideontimes$ est réflexive et symétrique.*

   Soit $x \in E$. Il est clair que $x \prec x$ est fausse, donc l'assertion ($x \prec x$ et $x \prec x$ sont fausses) est vraie, ce qui signifie que $x \divideontimes x$. Par conséquent,

   $$\boxed{\text{la relation } \divideontimes \text{ est réflexive.}}$$

   Soient $x, y \in E$ tels que $x \divideontimes y$. L'assertion ($x \prec y$ et $y \prec x$ sont fausses) est vraie et donc l'assertion ($y \prec x$ et $x \prec y$ sont fausses) est également vraie. Cela démontre que $y \divideontimes x$. Par conséquent,

   $$\boxed{\text{la relation } \divideontimes \text{ est symétrique.}}$$

   b) *On suppose que $E = \mathbb{N}$ et $\preccurlyeq$ est la relation de divisibilité $|$. La relation $\divideontimes$ est-elle une relation d'équivalence sur E ?*

   Pour la relation de divisibilité $|$, on a $2 \divideontimes 3$ (puisque 2 n'est pas un diviseur strict de 3 et 3 n'est pas un diviseur strict de 2) et $3 \divideontimes 4$ (puisque 3 n'est pas un diviseur strict de 4 et 4 n'est pas un diviseur strict de 3). Pourtant il est faux d'écrire que $2 \divideontimes 4$ (puisque 2 est un diviseur strict de 4). Cela démontre que la relation $\divideontimes$ n'est pas transitive dans ce cas. En conclusion,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque } E = \mathbb{N} \text{ et } \preccurlyeq \text{ est la relation de divisibilité } |, \text{ la} \\ \text{relation } \divideontimes \text{ n'est pas une relation d'équivalence sur } E.\end{array}}$$

3. *Démontrer que $\forall x, y \in E,\ (x^- = y^-) \Rightarrow (x \divideontimes y)$.*

   Soient $x, y \in E$ tels que $x^- = y^-$. Démontrons que $x \divideontimes y$.
   Par l'absurde : supposons que l'assertion $(x \divideontimes y)$ est fausse, autrement dit que $y \prec x$ ou $x \prec y$.
   Si l'on a $y \prec x$, cela signifie que $y \in x^-$. Comme $x^- = y^-$, cela implique que $y \in y^-$, c'est-à-dire $y \prec y$. C'est absurde !
   De même, si l'on suppose que $x \prec y$, on aboutit à une absurdité.
   On a donc $x \divideontimes y$.
   En conclusion,

   $$\boxed{\forall x, y \in E, \qquad (x^- = y^-) \Rightarrow (x \divideontimes y).}$$

4. *On suppose que* $\forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-)$. *Démontrer que* $\ast$ *est une relation d'équivalence.*

En associant l'hypothèse de cette question avec le résultat de la question précédente, on obtient l'équivalence $\forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Leftrightarrow (x^- = y^-)$ $[\star]$.

Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \ast y$ et $y \ast z$.
La propriété $[\star]$ nous dit que $x^- = y^-$ et $y^- = z^-$. On a donc $x^- = z^-$.
Une nouvelle utilisation de $[\star]$ nous dit que $x \ast z$.
Cela démontre que la relation $\ast$ est transitive.

Comme on sait déjà que $\ast$ est réflexive et symétrique, on en conclut que

$$\boxed{\text{si } \forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-), \text{ alors } \ast \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

5. *On suppose que* $\ast$ *est une relation d'équivalence. Démontrer que* $\forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-)$.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \ast y$.

On sait que l'assertion ($y \prec x$ et $x \prec y$ sont fausses) est vraie, ce qui signifie que ou bien $x = y$, on bien x et y ne sont pas comparables par $\preccurlyeq$.

Lorsque $x = y$, il est clair que $x^- = y^-$.

Supposons maintenant que x et y ne sont pas comparables par $\preccurlyeq$ et démontrons que $x^- = y^-$.
Soit $t \in x^-$ de sorte que $t \prec x$. On veut démontrer que $t \in y^-$, c'est-à-dire $t \prec y$.
Par l'absurde, supposons que l'assertion $(t \prec y)$ est fausse.
Comme x et y ne sont pas comparables, l'assertion $(y \prec t)$ est fausse (sinon on aurait $y \prec t \prec x$).
Par conséquent, comme l'assertion ($t \prec y$ et $y \prec t$ sont fausses) est vraie, cela signifie que $y \ast t$.
Comme $\ast$ est transitive (puisque c'est une relation d'équivalence), la conjonction de $x \ast y$ et $y \ast t$ implique alors que $x \ast t$.
On sait donc que ($x \prec t$ et $t \prec x$ sont fausses). C'est absurde puisque l'on sait que $t \prec x$.
On a donc $t \prec y$, c'est-à-dire $t \in y^-$. On a ainsi démontré que $x^- \subset y^-$.
En échangeant les rôles de x et y, on obtient $x^- \supset y^-$.
Donc $x^- = y^-$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } \ast \text{ est une relation d'équivalence, on a } \forall x, y \in E,\ (x \ast y) \Rightarrow (x^- = y^-).}$$

EXERCICE 2

1. *Rappeler la définition de la fonction indicatrice* $\mathbb{1}_A$ *d'une partie* A *d'un ensemble* E.

On a

$$\boxed{\mathbb{1}_A \left\{ \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{array} \right. \end{array} \right.}$$

2. *Soient* $f : E \longrightarrow F$ *une application et* B *une partie de* F. *Démontrer que* $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f$.

Soit $x \in E$. On distingue deux cas.

▷ Premier cas : $x \in f^{-1}(B)$
Dans ce cas, on a $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 1$.
Par ailleurs, on a $f(x) \in B$, donc $\mathbb{1}_B\big(f(x)\big) = 1$, c'est-à-dire $(\mathbb{1}_B \circ f)(x) = 1$.
Dans ce cas, on a bien $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = (\mathbb{1}_B \circ f)(x)$.

▷ Second cas : $x \notin f^{-1}(B)$
Dans ce cas, on a $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 0$.
Par ailleurs, on a $f(x) \notin B$, donc $\mathbb{1}_B\big(f(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $(\mathbb{1}_B \circ f)(x) = 0$.
Dans ce cas, on a bien $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = (\mathbb{1}_B \circ f)(x)$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f.}$$

EXERCICE 3

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Démontrer que E admet un élément maximal.*

   Par l'absurde, on suppose que E ne possède pas d'élément maximal. Soit x_0 un élément de E. Comme x_0 n'est pas maximal dans E (puisqu'aucun élément ne l'est), il existe x_1 dans A tel que $x_1 \succ x_0$. Comme x_1 n'est pas maximal dans E, il existe x_2 dans E tel que $x_2 \succ x_1$. En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite strictement croissante $x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots$ d'éléments de E. Cela implique que E est infini. C'est absurde ! Donc

   $$\boxed{E \text{ admet au moins un élément maximal.}}$$

2. *Démontrer qu'il existe une bijection strictement croissante φ entre $(E, \preccurlyeq)$ et $(\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant)$.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné fini de cardinal n, il existe une bijection strictement croissante φ entre $(E, \preccurlyeq)$ et $(\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant)$. »

   <u>Initialisation</u>
   Si $(\{a\}, \preccurlyeq)$ est un singleton ordonné (dans ce cas $\preccurlyeq$ est nécessairement l'égalité mais on s'en moque un peu...), l'application $\varphi : \{a\} \longrightarrow \{1\}$ telle que $\varphi(a) = 1$ (c'est la seule qui existe mais là encore on s'en moque un peu...) est clairement une bijection strictement croissante. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   <u>Hérédité</u>
   Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné fini de cardinal $n+1$.
   D'après la question 1, il existe dans E un élément maximal m.
   L'ensemble $E \setminus \{m\}$ est alors un ensemble ordonné (par la restriction de $\preccurlyeq$) de cardinal n. Il existe donc une bijection strictement croissante ψ entre $(E \setminus \{m\}, \preccurlyeq)$ et $(\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant)$. Considérons l'application φ définie par

   $$\varphi \left\{ \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \llbracket 1; n+1 \rrbracket \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \psi(x) & \text{si } x \in E \setminus \{m\} \\ n+1 & \text{si } x = m \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   L'application φ est une bijection par construction. En effet, pour tout $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une unique solution (c'est $\psi^{-1}(k)$ si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et c'est m si $k = n+1$).
   Reste à démontrer que φ est strictement croissante. Soient $x, y \in E$ tels que $x \prec y$. Cela impose que $x \neq m$ (par définition d'un élément maximal). On distingue deux cas selon que y vaut m ou pas. Si $y = m$, alors $\varphi(y) = n+1$ et $\varphi(x) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ car $x \in E \setminus \{m\}$, donc $\varphi(x) < \varphi(y)$. Si $y \neq m$, alors $\varphi(x) = \psi(x)$ et $\varphi(y) = \psi(y)$ puisque $x, y \in E \setminus \{m\}$, ce qui implique que $\varphi(x) < \varphi(y)$ puisque ψ est strictement croissante. On a ainsi démontré que φ est strictement croissante.
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion</u>
   D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit,

   $$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ si } (E, \preccurlyeq) \text{ est un ensemble ordonné fini de cardinal } n, \\ \text{il existe une bijection strictement croissante } \varphi \text{ entre } (E, \preccurlyeq) \text{ et } (\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant). \end{array}}$$

3. *Démontrer qu'il existe sur E une relation d'ordre total $\trianglelefteq$ qui prolonge l'ordre $\preccurlyeq$, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E$, $(x \preccurlyeq y) \Rightarrow (x \trianglelefteq y)$.*

   Considérons la bijection croissante φ entre $(E, \preccurlyeq)$ et $(\llbracket 1; n \rrbracket, \leqslant)$ dont on a démontré l'existence à la question précédente et définissons la relation $\trianglelefteq$ à l'aide de φ de la façon suivante :

   $$\forall x, y \in E, \qquad (x \trianglelefteq y) \iff \big(\varphi(x) \leqslant \varphi(y)\big).$$

   La relation $\trianglelefteq$ est réflexive et transitive car $\leqslant$ l'est sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. De plus, si $x, y \in E$ sont tels que $x \trianglelefteq y$ et $y \trianglelefteq x$, alors on a $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ et $\varphi(y) \leqslant \varphi(x)$, c'est-à-dire $\varphi(x) = \varphi(y)$, ce qui donne $x = y$ par injectivité de φ. Donc $\trianglelefteq$ est antisymétrique. Par conséquent, $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur E.

   Si $x, y \in E$, alors $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont comparables dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ (car $\leqslant$ est total sur $\llbracket 1; n \rrbracket$) donc x et y sont comparables par $\trianglelefteq$. Cela démontre que $\trianglelefteq$ est un ordre total.

Enfin, si $x \preccurlyeq y$, alors $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ par (stricte) croissance de φ, ce qui signifie que $x \trianglelefteq y$. Donc $\trianglelefteq$ prolonge l'ordre $\preccurlyeq$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{si } (E, \preccurlyeq) \text{ est un ensemble ordonné fini, il existe une relation d'ordre total sur } E \text{ qui prolonge } \preccurlyeq.}$$

Remarque culturelle :

Nous venons de démontrer, dans le cas d'un ensemble fini, le théorème d'extension de Szpilrajn (1930) : toute relation d'ordre admet une extension qui est une relation d'ordre total (on parle d'extension linéaire).
Ce résultat est vrai dans le cas d'un ensemble quelconque mais la démonstration repose alors sur le lemme de Zorn (qui est une version « effective » de l'axiome du choix).

EXERCICE 4

L'objet de cet exercice est de démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$: « pour tous nombres complexes $z_1, \dots, z_n$ de module inférieur ou égal à 1, il existe $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1; 1\}$ tels que $\forall p \in [\![2; n]\!]\,,\ |z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$ ».

1. a) $\alpha]$ *Soient $u, v \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u|.|v|.\cos(\arg u - \arg v)$. C'est la formule d'Al Kachi*

On a

$$\begin{aligned}
|u-v|^2 &= (u-v)\overline{(u-v)}\\
&= (u-v)(\overline{u}-\overline{v})\\
&= u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v}\\
&= |u|^2 - 2\Re\mathrm{e}(u\overline{v}) + |v|^2\\
&= |u|^2 - 2\Re\mathrm{e}(|u|\,\mathrm{e}^{i\arg u}.|v|\,\mathrm{e}^{-i\arg v}) + |v|^2\\
&= |u|^2 - 2|u|.|v|.\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{i(\arg u - \arg v)}) + |v|^2\\
&= |u|^2 - 2|u|.|v|.\cos(\arg u - \arg v) + |v|^2,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u|.|v|.\cos(\arg u - \arg v).}$$

$\beta]$ *Démontrer que $\forall x, y \in [0;1]\,,\ x^2 + y^2 - xy \leqslant 1$.*

Fixons tout d'abord y dans $[0;1]$. Le graphe de l'application $\varphi_y : x \longmapsto x^2 - yx + y^2$ est une parabole convexe (c'est-à-dire « en cuvette »). Sur $[0;1]$, cette fonction atteint donc son maximum en $x=0$ ou $x=1$. On a $\varphi_y(0) = y^2$ et $\varphi_y(1) = 1 - y + y^2$. Comme $1 - y + y^2 \geqslant y^2$ puisque $y \in [0;1]$, on en déduit que φ_y atteint son maximum en 1 et que ce maximum vaut $y^2 - y + y^2$. On a ainsi démontré que

$$\forall x, y \in [0;1]\,, \qquad x^2 - yx + y^2 \leqslant 1 - y + y^2.$$

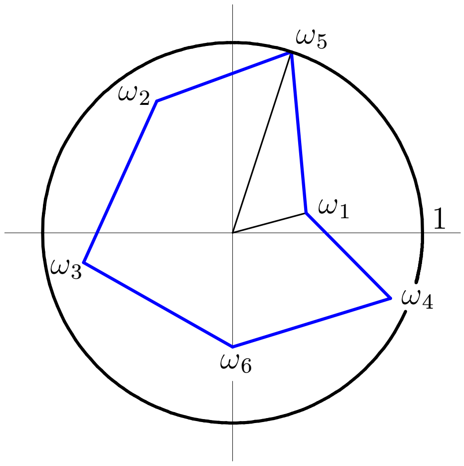
Or, pour tout $y \in [0;1]$, on a $y^2 \leqslant y$ donc $1 - y + y^2 \leqslant 1$, ce qui donne

$$\boxed{\forall x, y \in [0;1]\,, \qquad x^2 - yx + y^2 \leqslant 1.}$$

$\gamma]$ *Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ six nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 dont les images forment un hexagone (non croisé) inscrit dans le disque unité. Démontrer que l'un (au moins) des cotés de cet hexagone a une longueur inférieure ou égale à 1.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que les cotés de l'hexagone sont tous de longueur strictement supérieure à 1.
On peut déjà affirmer qu'aucun des ω_i n'est nul. En effet, si l'un des ω_i était nul, son image, placée au centre du disque unité, serait à une distance des autres ω_i inférieure ou égale à 1.

De même, deux ω_i ne peut peuvent avoir le même argument. En effet, dans le cas contraire, les images de deux ω_i seraient placées sur le même rayon du disque unité et seraient donc à une distance inférieure ou égale à 1.
On a donc un dessin de ce type :



Nécessairement, l'un des angles au centre de cet hexagone est inférieur ou égal à $\pi/3$ (sinon la somme de ces angles dépasserait 2π). Il existe donc $i, j \in [\![1; 6]\!]$ tels que $[\omega_i, \omega_j]$ est un coté de l'hexagone et $0 \leqslant \arg(\omega_i) - \arg(\omega_j) \leqslant \pi/3$. Alors, la formule d'Al Kachi dit que

$$\begin{array}{rcl} |\omega_i - \omega_j|^2 & = & |\omega_i|^2 + |\omega_j|^2 - 2|\omega_i|.|\omega_j|.\cos(\arg\omega_i - \arg\omega_j) \\ & \leqslant & |\omega_i|^2 + |\omega_j|^2 - 2|\omega_i|.|\omega_j|.\cos(\pi/3) \\ & = & |\omega_i|^2 + |\omega_j|^2 - |\omega_i|.|\omega_j| \\ & \leqslant & 1 \qquad \text{d'après } \beta] \text{ puisque } |\omega_i|, |\omega_j| \in [0; 1]\,. \end{array}$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{tout hexagone formé de 6 points du disque unité possède} \\ \text{l'un de ses cotés dont la longueur est inférieure ou égale à 1.}\end{array}}$$

b) *Soient u, v deux nombres complexes. Démontrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. C'est l'identité du parallèlogramme.*

On a

$$\begin{array}{rcl} |u-v|^2 + |u+v|^2 & = & (u-v)\overline{(u-v)} + (u+v)\overline{(u+v)} \\ & = & (u-v)(\overline{u} - \overline{v}) + (u+v)(\overline{u} + \overline{v}) \\ & = & u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} + u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v} \\ & = & 2|u|^2 + 2|v|^2, \end{array}$$

donc

$$\boxed{|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).}$$

2. *Démontrer $\mathscr{P}(2)$.*

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Pour obtenir $\mathscr{P}(2)$, il faut démontrer que $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{3}$ ou $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{3}$. Par l'absurde, supposons que $|z_1 + z_2| > \sqrt{3}$ et $|z_1 - z_2| > \sqrt{3}$. En multipliant ces deux inégalités, on obtient $|{z_1}^2 - {z_2}^2| > 3$. Comme $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$, on a $|{z_1}^2| \leqslant 1$ et $|{z_2}^2| \leqslant 1$, ce qui signifie que les images de ${z_1}^2$ et ${z_2}^2$ sont dans le disque unité. La distance maximum entre deux points d'un même disque étant obtenue lorsque les deux points sont diamétralement opposés, on peut affirmer que $|{z_1}^2 - {z_2}^2| \leqslant 2$. Les deux inégalités $|{z_1}^2 - {z_2}^2| > 3$ et $|{z_1}^2 - {z_2}^2| \leqslant 2$ sont évidemment contradictoire ! En conclusion, on a $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{3}$ ou $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{3}$. Cela démontre que

$$\boxed{\mathscr{P}(2) \text{ est vraie.}}$$

Remarque : En fait, on constate que la propriété $\mathscr{P}(2)$ est vraie avec $\sqrt{2}$ à la place de $\sqrt{3}$ (c'est mieux !). On peut d'ailleurs le voir en redémontrant $\mathscr{P}(2)$ à l'aide de l'identité du parallèlogramme : on a $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leqslant 4$ donc $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{2}$.

3. *On souhaite utiliser $\mathscr{P}(2)$ pour démontrer $\mathscr{P}(3)$. On considère z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.*

   a) *Dans cette question, on suppose que $|z_1+z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_2| \leqslant 1$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1;1\}$ tels que $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.*

   L'hypothèse « $|z_1+z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_2| \leqslant 1$ » signifie qu'il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon z_2| \leqslant 1$. En posant $\varepsilon_2 = \varepsilon$, on a donc $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant 1 \leqslant \sqrt{3}$.

   Pour terminer, il reste à justifier l'existence de $\varepsilon_3 \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$. Pour cela, on constate que $z_1+\varepsilon_2 z_2$ et z_3 sont deux nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer $\mathscr{P}(2)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_3 \in \{-1;1\}$ tel que $|(z_1+\varepsilon_2 z_2)+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$. Youpi !

   En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1;1\} \text{ tels que } |z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3} \text{ et } |z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}.}$$

   b) *Dans cette question, on suppose que $|z_1+z_2| > 1$ et $|z_1-z_2| > 1$.*

   α] *Démontrer que $|z_1+z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1-z_2| \leqslant \sqrt{3}$.*

   L'identité du parallèlogramme dit que $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. Comme $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$ et $|z_1-z_2| > 1$, on en déduit que $|z_1+z_2|^2 < 2(1^2+1^2)-1$, c'est-à-dire $|z_1+z_2|^2 < 3$ et donc $|z_1+z_2| < \sqrt{3}$. De même, en utilisant l'hypothèse $|z_1+z_2| > 1$, on obtient $|z_1-z_2| < \sqrt{3}$. A fortiori, on a

$$\boxed{|z_1+z_2| \leqslant \sqrt{3} \text{ et } |z_1-z_2| \leqslant \sqrt{3}.}$$

   β] *Justifier que $|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$.*

   Les six nombres complexes $z_1, z_2, z_3, -z_1, -z_2, -z_3$ sont de module inférieur ou égal à 1. La question 1. a) γ] nous dit que l'un des cotés de l'hexagone formé par les points d'affixes $z_1, z_2, z_3, -z_1, -z_2, -z_3$ est de longueur inférieure ou égal à 1. Comme les longueurs possibles des cotés de cet hexagone sont $|z_1+z_2|$, $|z_1-z_2|$, $|z_1+z_3|$, $|z_1-z_3|$, $|z_2+z_3|$ et $|z_2-z_3|$, on a $|z_1+z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$. Comme on a supposé que $|z_1+z_2| > 1$ et $|z_1-z_2| > 1$, il vient

$$\boxed{|z_1+z_3| \leqslant 1 \text{ ou } |z_1-z_3| \leqslant 1 \text{ ou } |z_2+z_3| \leqslant 1 \text{ ou } |z_2-z_3| \leqslant 1.}$$

   γ] *Démontrer qu'il existe $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1;1\}$ tels que $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.*

   À la question α], on a vu que $|z_1+z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1-z_2| \leqslant \sqrt{3}$. Autrement dit, pour n'importe quel choix de $\varepsilon_2 \in \{-1;1\}$, on a $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$.

   Reste à démontrer qu'il existe $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1;1\}$ tels que $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$. Distinguons deux cas (qui ne s'excluent pas l'un l'autre mais qui recouvrent toutes les possibilités) : ou bien ($|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$) ou bien ($|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$).

   <u>Premier cas :</u> Supposons que $|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$
   Autrement dit, il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon z_3| \leqslant 1$. Les nombres complexes $z_1+\varepsilon z_3$ et z_2 sont alors de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer $\mathscr{P}(2)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_2 \in \{-1;1\}$ tel que $|(z_1+\varepsilon z_3)+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$. En posant $\varepsilon_3 = \varepsilon$, on a donc $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.

   <u>Second cas :</u> Supposons que $|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$
   Cette fois, on sait qu'il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_2+\varepsilon z_3| \leqslant 1$. Les nombres complexes z_1 et $z_2+\varepsilon z_3$ sont alors de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer $\mathscr{P}(2)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_2 \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon_2(z_2+\varepsilon z_3)| \leqslant \sqrt{3}$. En posant $\varepsilon_3 = \varepsilon\varepsilon_2$, on a donc $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}$.

   En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1;1\} \text{ tels que } |z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3} \text{ et } |z_1+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_3 z_3| \leqslant \sqrt{3}.}$$

   c) *Conclure.*

   La conjonction des résultats obtenus aux questions a) et b) nous dit que

$$\boxed{\mathscr{P}(3) \text{ est vraie.}}$$

4. *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$ implique l'assertion $\mathscr{P}(n+1)$.*

Évidemment, nous allons adapter la démarche utilisée pour prouver $\mathscr{P}(2) \Rightarrow \mathscr{P}(3)$ afin de démontrer que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \geqslant 2$.

Fixons $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Considérons $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Comme à la question précédente, l'idée est de regrouper deux des z_i pour se ramener à l'hypothèse de récurrence.

Commençons par remarquer que le résultat obtenu à la question 3. b) β] nous dit que, parmi les six nombres $|z_1+z_2|, |z_1-z_2|, |z_1+z_3|, |z_1-z_3|, |z_2 \pm z_3|, |z_2 \pm z_3|$, il y en a nécessairement au moins un qui est inférieur ou égal à 1. On distingue alors deux cas complémentaires : ou bien ($|z_1+z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_2| \leqslant 1$) ou bien ($|z_1+z_2| > 1$ et $|z_1-z_2| > 1$).

Premier cas : Supposons que $|z_1+z_2| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_2| \leqslant 1$

Il existe donc $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon z_2| \leqslant 1$. Alors $z_1+\varepsilon z_2, z_3, \ldots, z_{n+1}$ sont n nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer $\mathscr{P}(n)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n+1} \in \{-1;1\}$ tel que $\forall p \in [\![3;n+1]\!]$, $|(z_1+\varepsilon z_2)+\varepsilon_3 z_3+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$. En posant $\varepsilon_2 = \varepsilon$, on a donc $\forall p \in [\![2;n+1]\!]$, $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$.

Second cas : Supposons que $|z_1+z_2| > 1$ et $|z_1-z_2| > 1$

On sait alors que ($|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$) ou ($|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$). Étudions ces deux sous-cas.

Premier sous-cas : Supposons que $|z_1+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_1-z_3| \leqslant 1$

Il existe donc $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1+\varepsilon z_3| \leqslant 1$. Alors $z_1+\varepsilon z_3, z_2, z_4, \ldots, z_{n+1}$ sont n nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_{n+1} \in \{-1;1\}$ tel que $\forall p \in [\![2;n+1]\!]$, $|(z_1+\varepsilon z_3)+\varepsilon_2 z_2+\varepsilon_4 z_4+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$. En posant $\varepsilon_3 = \varepsilon$, on a donc $\forall p \in [\![3;n+1]\!]$, $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$.

Second sous-cas : Supposons que $|z_2+z_3| \leqslant 1$ ou $|z_2-z_3| \leqslant 1$

Il existe donc $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_2+\varepsilon z_3| \leqslant 1$. Alors $z_1, z_2+\varepsilon z_3, z_4, \ldots, z_{n+1}$ sont n nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Cela permet de leur appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ pour justifier l'existence de $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_{n+1} \in \{-1;1\}$ tel que $\forall p \in [\![2;n+1]\!]$, $|z_1+\varepsilon_2(z_2+\varepsilon z_3)+\varepsilon_4 z_4+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$. En posant $\varepsilon_3 = \varepsilon\varepsilon_2$, on a donc $\forall p \in [\![3;n+1]\!]$, $|z_1+\varepsilon_2 z_2+\cdots+\varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$.

Dans ces deux sous-cas, il reste donc à démontrer que $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$. Pour cela, il suffit de reproduire le raisonnement de la question 3. b) α] : l'hypothèse ($|z_1+z_2| \leqslant 1$ et $|z_1-z_2| \leqslant 1$) associée à l'identité du parallèlogramme nous dit que $|z_1+z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1-z_2| \leqslant \sqrt{3}$. On a donc bien $|z_1+\varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ sans se soucier de savoir si ε_2 vaut 1 ou -1.

Ainsi, on voit que $\mathscr{P}(n+1)$est vraie.

On a démontré que

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, \text{ on a } \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1).}$$

5. *Conclure !*

Le principe de récurrence nous dit que

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$$