Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Samedi 21/11/2020

Devoir Surveillé n° 3 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Exercice –
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de réels.

- *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :*
$$\alpha_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}, \qquad \text{et} \qquad S_n(\theta) = |\alpha_n(\theta)|^2$$
- *On note, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\theta_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$.*
- *On note, pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_h = \dfrac{1}{n-h}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-h} x_k x_{k+h}$.*

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$S_n(\theta) = \frac{\rho_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\rho_h \cos(h\theta).$$

2. (a) Montrer que pour tout $m \in [\![1, n]\!]$,
$$\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_n(\theta_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,m\theta_\ell} = x_m.$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} S_n(\theta_\ell) = \rho_0$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} S_n(\theta_\ell)$.

3. (a) Par un choix convenable des x_i, déduire de la question 1 que pour tout $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$,
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos(k\theta) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
   (b) On suppose que $\theta \in]0, \pi[$, et que les x_i sont tels qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$, distinct de θ, tel que pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_h = \cos(h\theta_0)$. Déterminer une expression explicite de $S_n(\theta)$ en fonction de n, θ et θ_0.

Problème – Un théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

Notations et définitions

- *Pour un réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne sa partie entière, et $\{x\}$ désigne sa partie décimale. À aucun moment dans le problème il ne sera question de singleton, donc cette notation ne saurait être source d'ambiguïté.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*
$$Z_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in \mathbb{N}^*\}.$$
Ainsi, par exemple, $Z_0 = \mathbb{Z}$, et $Z_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$
- *On note $Y_0 = Z_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$Y_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in Z_n \mid a_n \geqslant 2\}.$$

- *On note*
$$Z_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \mid \ a_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in \mathbb{N}^*\}.$$
Ainsi, $(a_n) \in Z_\infty$ *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$, *on note :*
$$[a_0, a_1, \dots, a_n](x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \qquad \vdots \atop a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + x}}}}.$$
On définit alors :
$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_n](0).$$
Si de plus $(a_0, \dots, a_n) \in Y_n$ *(donc, en particulier, si* $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 2$*), on dira que* $[a_0, \dots, a_n]$ *est une fraction continue finie.*
- *On peut réexprimer plus rigoureusement la définition précédente de façon récursive de la manière suivante :*
$$\begin{cases} [a_0](x) = a_0 + x \\ \forall n \in \mathbb{N}, [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}](x) = [a_0, a_1, \dots, a_n]\left(\dfrac{1}{a_{n+1} + x}\right). \end{cases}.$$
- *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_\infty$ *on note, en cas d'existence de cette limite :*
$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = \lim_{n\to+\infty} [a_0, \dots, a_n].$$
L'expression $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ *est appelée fraction continue (infinie), et on dira, en cas d'existence de cette limite* x*, que la fraction continue* $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ *converge vers* x.
- *On dit que* x *admet un développement en fraction si* x *est égal à une fraction continue finie, ou s'il existe une fraction continue infinie convergeant vers* x.

Rappels, ou résultats admis

- *On pourra admettre la variante suivante du théorème des suites adjacentes : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite telle que :*
  (i) (u_{2n}) *est croissante,*
  (ii) (u_{2n+1}) *est décroissante,*
  (iii) $\lim_{n\to+\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$,
  alors (u_n) *admet une limite finie.*
- *On pourra utiliser sans démonstration le fait que si* $\Delta \in \mathbb{N}$ *n'est pas un carré parfait (i.e. n'est le carré d'aucun entier), alors* $\sqrt{\Delta}$ *est irrationnel.*

Objectif du problème

On montre dans ce problème que toute fraction continue converge, et que tout réel x *admet un unique développement en fraction continue. De plus on montre que ce développement est fini si et seulement si* x *est rationnel. On exprimera dans la partie I ce développement en fonction de quotients successifs intervenant dans l'algorithme d'Euclide pour le calcul d'un pgcd. La dernière partie a pour but de caractériser les fractions continues ultimement périodiques (c'est-à-dire les fractions continues infinies telles que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit périodique à partir d'un certain rang). On montre plus précisément qu'il s'agit des développements des réels algébriques de degré* 2*, c'est-à-dire des solutions non rationnelles d'équations du second degré à coefficients rationnels. Ce théorème est dû à Lagrange. La preuve développée ici est la preuve originelle de Lagrange, issue de son ouvrage « Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés ».*

Partie I – Développement en fraction continue d'un rationnel

1. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ et tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $[a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}$.
   (b) En déduire que toute fraction continue finie est un élément de $\mathbb{Q}$.

2. Dans cette question, on montre la réciproque. Soit $x \in \mathbb{Q}$, et $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = \frac{p}{q}$. On applique l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de p et q. Ainsi, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et deux familles $(r_k)_{k \in [\![-2,n]\!]}$, $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$, telles que :
   - $r_{-2} = p$, $r_{-1} = q$ (-1 et -2 sont en indice)
   - pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, a_k et r_k sont repectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de r_{k-2} par r_{k-1},
   - pour tout $k \in [\![-1, n-1]\!]$, $r_k \neq 0$, et $r_n = 0$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x = [a_0, \dots, a_k]\left(\dfrac{r_k}{r_{k-1}}\right)$.

   (b) En déduire que x admet un développement en fraction continue finie, et exprimer cette fraction continue en fonction de $a_0, \dots, a_n$.

Partie II – Réduction et convergence des fractions continues

On considère une suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ dans Z_∞.
On montre dans cette partie les deux propriétés suivantes :
- *lorsqu'on réduit $[a_0, \dots, a_n]$ au même dénominateur en partant du bas de la fraction, pour diminuer le nombre d'étages, on obtient à chaque étape une fraction réduite, sans avoir de simplification à faire ;*
- *La fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ converge.*

1. On note, pour toute séquence $(a_0, \dots, a_n)$ de Z_n,
$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)}$$
la représentation irréductible (avec $q(a_0, \dots, a_n) > 0$) de la fraction $[a_0, \dots, a_n]$.

   (a) Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$, exprimer $[a_0, \dots, a_n]$ en fonction de $[a_1, \dots, a_n]$.

   (b) Montrer que $p(a_0, \dots, a_n) = a_0 p(a_1, \dots a_n) + q(a_1, \dots, a_n)$ et $q(a_0, \dots, a_n) = p(a_1, \dots, a_n)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$,
$$\frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} = \frac{(-1)^n}{q(a_0, \dots, a_n) q(a_0, \dots, a_{n+1})}.$$
   On pourra faire une récurrence basée sur la question 1b.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$. On montre dans cette question la convergence de la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$.

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(a_0, a_1, \dots, a_n) = q(1, a_1, \dots, a_n)$.

   (b) À l'aide de la question 1(b), justifier que si $a_0 > 0$, les suites $(p(a_0, a_1, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q(a_0, a_1, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes

   (c) En déduire que la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ converge.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $q = \frac{a}{b}$ un rationnel sous forme irréductible. On dit que q est une meilleure approximation de x si pour tout $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tel que $|d| \leqslant |b|$,
$$|q - x| \leqslant \left|\frac{c}{d} - x\right|.$$
   Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$, et $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[a_0, \dots, a_n]$ est une meilleure approximation de x.

Partie III – Exitence et unicité du développement en fraction continue

1. **Variations.**
   Pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in Z_\infty$, on note F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto [a_0, \dots, a_n](x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est strictement croissante si n est paire, et strictement décroissante si n est impaire.

2. **Existence.**
   Nous avons déjà montré que tout rationnel admet un développement en fraction continue. Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Soit $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $b_0 = \{x\}$ (partie décimale de x), et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{b_n} \right\rfloor \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définis, et que $x = [a_0, \dots, a_n](b_n)$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[a_0, \dots, a_{2n}] \leqslant x \leqslant [a_0, \dots, a_{2n+1}].$$

(c) Montrer que $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

3. **Unicité.**

Soit (a_k) et (b_k) deux éléments appartenant chacun à l'un des Y_n ou à Z_∞. On suppose que $(a_k) \neq (b_k)$, et on veut montrer que $[(a_k)] \neq [(b_k)]$, où $[(a_k)]$ désigne la fraction continue finie ou infinie associée à la famille (a_k). Soit k_0 le rang de la première différence entre les deux suites (a_n) et (b_n). Ainsi, soit $a_{k_0} \neq b_{k_0}$, soit l'un des deux entiers a_{k_0} ou b_{k_0} n'est pas défini alors que l'autre l'est.

(a) On suppose que $a_{k_0} < b_{k_0}$. Comparer (au sens des inégalités dans $\mathbb{R}$) les quantités suivantes : $[(a_k)]$, $[b_0, \dots, b_{k_0}]$, et $[(b_k)]$.

(b) Conclure de même lorsque a_{k_0} n'est pas défini et b_{k_0} est défini.

Partie IV – Théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

On dit que la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ est périodique si la suite (a_n) est périodique. Elle est est dite ultimement périodique si (a_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On dit qu'un réel x est algébrique de degré 2 (ou quadratique) s'il n'est pas rationnel et s'il existe un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$.

1. Montrer que x est quadratique si et seulement s'il existe $\Delta \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré parfait (carré d'un entier) et deux rationnels $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$ tels que $x = a + b\sqrt{\Delta}$.
2. Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.
3. On suppose que x admet un développement en fraction continue ultimement périodique. Montrer que f est algébrique de degré 2.
4. Réciproquement, on suppose jusqu'à la fin du devoir que x est algébrique de degré 2, et on note

$$P_0(X) = E_1 X^2 + 2\varepsilon_0 X - E_0$$

un polynôme dont x est racine, E_1, E_0 et ε_1 étant des entiers. Le réel x étant irrationnel par définition, son développement en fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ est infini.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lfloor r_n \rfloor$, où r_n est une racine strictement supérieure à 1 d'un polynôme $P_n = E_{n+1} X^2 - 2\varepsilon_n X - E_n$ à coefficient entier, tel que les suites (E_n) et (ε_n) vérifient :

(i) E_0, E_1, et ε_0 sont définies par le polynôme P_0 dont x est racine ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} = a_n E_n - \varepsilon_n$.

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+2} = E_n + 2\varepsilon_n a_n - E_{n+1} a_n^2$

On pourra se servir de la description du développement en fraction continue de x, obtenu dans la partie III.

(b) Soit Δ_n le discriminant de P_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \Delta_0$.

On note dans la suite du devoir $\Delta = \Delta_n$, et $\Delta' = \frac{1}{4}\Delta$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} = \dfrac{\Delta' - \varepsilon_n^2}{E_n}$.

(d) Justifier qu'il existe un rang n_0 tel que P_{n_0} ait une et une seule racine dans $]1, +\infty[$.

(e) En déduire que pour tout $n > n_0$, P_n admet une et une seule racine positive, puis que pour tout $n > n_0$, $E_n E_{n+1} > 0$.

(f) Montrer que pour tout $n > n_0 + 1$, $|\varepsilon_n| < \sqrt{\Delta'}$ et $|E_n| < \Delta'$.

(g) En déduire que pour $n > n_0 + 1$, le nombre de couples (E_n, ε_n) différents est fini.

(h) Montrer que le développement en fraction continue de x est ultimement périodique.