XMP*4

Lycée Louis le Grand, Paris

Mathématiques

Mémento Mathématiques X-ENS

1 Théorie des ensembles et algèbre générale

1. Infinité de nombres premiers. Infinité de nombre premiers congrus à -1 modulo 4.
2. Si M fini, a régulier est inversible. Si A k-algèbre de dimension finie, a régulier est inversible.
3. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
4. Savoir calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(x+ky)$
5. Expression analytique de l'argument principal avec arctan.
6. Congruence à gauche modulo H. Utilisation pour montrer le théorème de Lagrange.
7. Groupes G tels que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$.
8. Formule de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$: $\sigma \circ (a_1, \dots, a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p))$.
9. Les transpositions $(1,k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$. Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$
10. Opérations de groupes : si on a $(g,x) \in G \times E \longmapsto g.x \in E$ avec G groupes vérifiant $1.x = x$ et $g.(g'.x) = (gg').x$, on introduit l'orbite de x et le stabilisateur de x. Les orbites forment une partition de E, et par le principe des bergers, le cardinal d'une orbite est le quotient de $|G|$ par le cardinal du stabilisateur de x.
11. Caractéristique d'un corps : elle est nulle (ex $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$...) ou c'est un nombre premier.
12. Si p premier, p divise $\displaystyle\binom{p}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
13. Formule de Legendre donnant la valuation p-adique de $n!$.
14. Indicatrice d'Euler : elle est arithmétiquement multiplicative, savoir calculer $\varphi(p^\alpha)$, $\varphi(n)$, savoir redémontrer $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$ en partionnant $\mathbb{U}_n$ selon l'ordre de ses éléments. Inverser la formule avec la fonction de Möbius.
15. Théorème de Wilson (on regroupe les couples d'inverses) : si p premier $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
16. Problème arithmétique avec des carrés : considérer la congruence modulo 4.
17. Si p premier impair, savoir dénombrer les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, x carré non nul équivaut à $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$, -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement $p \equiv 1 \pmod 4$, infinité de nombres premiers congru à 1 modulo 4.

18. Polynômes de Tchebycheff, leur définition, la relation de récurrence, leur degré, leur coefficient dominant, savoir retrouver leur expression. Savoir que pour $\sin nx$ ce n'est pas si simple (polynôme de Tchebycheff de deuxième espèce).
19. Polynômes cyclotomiques. Formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, conséquence avec les degrés, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
20. Anneaux des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, son application $z \Longrightarrow N(z) = |z|^2 \in \mathbb{N}$, ses inversibles, sa division euclidienne, son caractère principal.
21. Structure d'idéal de I_α où $\alpha \in \mathbb{C}$ et I_α est l'ensemble des $P \in \mathbb{Q}[X]$ qui annule α. Polynome minimal de α. Extension à des corps différents de $\mathbb{Q}$.
22. Structure de corps et de $\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{Q}[\alpha]$ quand α est algébrique. Justifier que c'est un corps, savoir calculer un inverse avec l'identité de Bezout, relier la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$ et le degré du polynôme minimal de α.
23. Savoir que si $m \wedge n = 1$, D_{mn} est en bijection avec $D_m \times D_n$ (D_k est l'ensemble des diviseurs naturels de k). Fonctions arithmétiquement multiplicatives. Convolution $f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. Neutre $(\delta_{1,n})$. Fonction de Möbius μ qui est l'inverse de (1). Inversion de $\sum_{d|n} f(d)$. Application aux nombres de diviseurs, à la somme, à l'indicatrice d'Euler...
24. Diagonale de Cantor par exemple pour montrer que $[0,1[$ est indénombrable.
25. CNS sur le développement en base B pour qu'un réel soit rationnel.
26. Théorème de structures des sous-groupes de $\mathbb{R}$.
27. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ non constant, alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.
28. Théorème de Gauss-Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celle de $P \in \mathbb{C}[X]$.
29. Polynômes interpolateurs de Lagrange : leur expression, polynome réalisant une interpolation.
30. Factorisation de $X^n - 1$, $X^{n-1} + \cdots + X + 1$, $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.
31. Savoir que dans $\mathbb{Q}[X]$ il y a des polynômes irréductibles de tout degré $d \geqslant 1$.
32. Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible, ses racines complexes sont simples.
33. Le nombre de racines distinctes de $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul est donné par $\deg P - \deg P \wedge P'$.
34. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ (utile pour intégrer). Savoir décomposer à la volée $\frac{P'}{P}$ si P scindé et $\frac{1}{P}$ si P scindé à racines simples.
35. Si un polynôme de plusieurs variables à coefficients dans K infini (resp. $\mathbb{K}$) s'annule sur tout K^n (resp. sur une boule), alors il est formellement nul.

2 Algèbre linéaire

1. Si u linéaire et pour tout x, x, $u(x)$ liée, u est une homothétie.
2. si u, v linéaire, $\mathrm{rg}(v \circ u)$ est plus petit que que $\mathrm{rg}\, u$ et $\mathrm{rg}\, v$.
3. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\dim\ker v \circ u \leqslant \dim\ker u + \dim\ker v$.

4. En dimension, la suite des noyaux itérés (resp. des images itérées) est strictement monotone puis constante à partir d'un rang p et alors $E = \ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$: décomposition de Fitting
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\operatorname{rg} A^2 = \operatorname{rg} A$, alors $K^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.
6. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors v laisse stable $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$.
7. Si $x \in E$ de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, $F_x = \underset{k \in \mathbb{N}}{\operatorname{Vect}}\, u^k(x)$ est le plus petit sous-espace stable par u contenant x. De plus si $r = \dim F_x$, $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)$ en est une base.
8. Lemme d'Hadamard : les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante sont inversibles (idée qui consiste à choisir une composante de module maximal).
9. M est de rang 1 si, et seulement si M s'écrit $M = X\,{}^tY$ avec X, Y non nuls dans K^n. Dans ces condtions $\operatorname{Tr} M = {}^tXY$ et $M^2 = \operatorname{Tr} M.M$.
10. Une matrice de rang r est somme de r matrices de rang 1.
11. Théorème de Maschke : utilisation d'une moyenne sur les conjugués d'un projecteur ou si cela s'y prête d'un produit scalaire qui fait des éléments de G des isométries vectorielles.
12. Déterminant de Vandermonde.
13. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \iff \det M = \pm 1$. Extension à $M \in \mathcal{M}_n(A)$ où A anneau commutatif.
14. Relier aire ou volume avec un déterminant exprimé dans une base orthonormée.
15. Base duale et base antéduale en dimension finie.
16. Si une forme linéaire l s'annule sur l'intersection des $\ker l_i$ (l_i forme linéaire), l est une combinaison linéaire des l_i.
17. Le dual de $\mathcal{M}_n(K)$ est constitué des applications $M \longmapsto \operatorname{Tr}(AM)$ où $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (uniquement déterminé).
18. Une forme linéaire l de $\mathcal{M}_n(K)$ qui vérifie $l(XY) = l(YX)$ est proportionnelle à la trace.
19. Deux matrices carrées réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
20. Si $\ker(PQ)(u) = E$ avec $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \wedge Q = 1$ dans $K[X]$, savoir exprimer comme des polynômes en u les projections associées à $E = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$. Extension à un produit de polynômes premiers entre eux deux à deux.
21. Expressions des suites à récurrence linéaire d'ordre p.
22. Réduction des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(K)$ d'indice de nilpotence égal à n.
23. Matrices compagnons et endomorphismes. Si u est cyclique, alors $\mu u = \chi u$, $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$.
24. Notion de sous-espaces caractéristiques. Sur $\mathbb{C}$, leur somme directe rejoint l'espace. En réduisant une base compatible avec cette décomposition, on constate que la dimension du sous-espace caractéristique est égale à l'ordre de la valeur propre comme racine du polynôme caractéristique.
25. La multiplicité de λ dans μ_A est l'entier p à partir duquel la suite $(\ker(A - \lambda I_n)^k)$ devient stationnaire.
26. Une famille d'endomorphismes commutant deux à deux et diagonalisables sont codiagonalisables.
27. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent ont un vecteur propre en commun. Elles sont même cotrigonalisables.
28. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, pour $k \geqslant 1$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$.

29. Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme possède une droite stable (resp. un hyperplan stable). Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme possède une droite stable ou un plan stable.
30. Décomposition de Dunford $A = D + N$. D et N sont des polynômes en A. Intérêt pour le calcul de $\exp(A)$.

3 Algèbre bilinéaire et géométrie.

1. Un groupe fini d'isométries affines possède un point fixe (considérer l'isobarycentre des images d'un point donné).
2. Les sous-groupes finis du groupe des isométries d'un plan euclidien sont l'ensemble des isométries qui laissent stable un polygone régulier. Les isométries directes sont composés des rotations d'angle multiple de $\dfrac{2\pi}{n}$.
3. Signature d'une forme bilinéaire réelle. Théorème d'inertie de Sylvester.
4. Familles obtusangles.
5. La matrice de Hilbert ($a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$) est définie positive (utilisation d'une intégrale).
6. Produit scalaire hermitien. Produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cas de $L^2_c(I)$. Cauchy-Schwarz.
7. Les projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien sont les projecteurs p tels que pour tout x, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
8. La matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ est symétrique positive, de même rang que la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Son déterminant est inférieur au produit des carrés des normes des x_i. On en déduit la première inégalité d'Hadamard : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de colonnes $C_1, \dots, C_n)$, $|\det M| \leqslant \|C_1\| \cdots \|C_N\|$.
9. La distance de x à un sous-espace engendré par $x_1, \dots, x_n$ s'exprime comme le quotient de déterminants de matrices de Gram.
10. Existence de famille de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire du type $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_a^b PQ\mu$. Ces polynômes sont scindés à racines simples, toutes dans $]a, b[$, ill suivent une relation de récurrence du type $a_n P_{n+1} + (X + b_n)P_n + c_n P_{n-1} = 0$.
11. Décomposition de Cholesky $A = {}^tBB$ pour $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec B triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Application à la deuxième inégalité d'Hadamard : $\det A \leqslant a_{11} \cdots a_{nn}$.
12. Savoir ce que sont les isométries vectorielles directes d'un plan euclidien : les rotations, de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Cela correspond à $\mathrm{SO}(2)$. Les indirectes sont les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un axe) de matrice $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.
13. Isométries vectorielles d'un espace de dimension 3, autrement dit les rotations de l'espace sont des rotations d'un certain axe orienté et d'un certain angle. Dans une bonne base, cela correspond à une matrice du type $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tout élément de $\mathrm{SO}(3)$ est donc orthogonalement semblable à une matrice de ce type.

14. Réduction des matrices orthogonales. Utilisaton pour la connexité par arcs de $\mathrm{SO}(n)$, ou pour montrer que les réflexions engendrent $\mathrm{O}(n)$.
15. Pour $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Maitriser le lien entre "A définit une forme bilinéaire positive" et $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}_+$ ce qui correspond à deux définitions équivalentes de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Idem pour $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
16. Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif, ou d'une matrice symétrique positive.
17. Adjoint d'un endomorphisme. $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$.
18. Théorème de congruence simultanée : si $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ on peut écrire $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ avec P inversible et D diagonale.
19. Matrices unitaires. Matrices hermitiennes. Théorème spectral dans le cas hermitien.
20. Décomposition QR d'une matrice inversible. Application à la première inégalité d'Hadamard. On peut en déduire Cholesky et la deuxième inégalité d'Hadamard.
21. Décomposition polaire. Intérêt pour exprimer $\|AX\|$ pour $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| = \|SX\|$ avec S symétrique positive.
22. Théorème de Minimax et du Maximin. Expression des valeurs propres. Entrelacement des valeurs propres de la sous-matrice principale de taille $n-1$ entre celle de la matrice de taille n.
23. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives à l'aide des mineurs principaux d'une matrice symétrique.

4 Topologie

1. Bien se souvenir que si $f : A \subset E \longrightarrow F$ est continue, l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de A (et pas de E a priori) i.e. la trace d'un ouvert de E sur A. Idem avec les fermés.
2. Application distance à une partie (dans un espace métrique) : que signifie $\mathrm{d}(x, A) = 0$? Caractère 1-lipschitzien.
3. Propriété de précompacité d'un espace compact K : si $\varepsilon > 0$, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de K de rayon ε.
4. Une intersection décroissante de compacts non vides est non vide.
5. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ avec X connexe par arcs et $f(X)$ au plus dénombrable, f est constante.
6. Si X est connexe par arcs, toute partie de X à la fois fermée et ouverte est égale à X ou vide.
7. Théorème de structure des ouverts de $\mathbb{R}$: tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
8. Théorème de Riesz : la boule unité d'un evn est compacte si, et seulement si, l'evn est de dimension finie.
9. Procédé diagonal d'extraction sur une infinité dénombrable de suites.
10. Espace ℓ^p pour $p \in [1, \infty]$, norme $\| \, \|_p$, inclusion naturelle $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$, non équivalence des normes.
11. Norme subordonnée ou triple norme. Propriété $\|\!|v \circ u|\!\| \leqslant \|\!|v|\!\|.\|\!|u|\!\|$. Calcul pour $\|\!|\,|\!\|_1$, $\|\!|\,|\!\|_\infty$. Pour la norme euclidienne, $\|\!|A|\!\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

12. Notion de base hilbertienne. Cas des polynômes orthogonaux sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Cas des séries de Fourier dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Inégalité de Bessel-Parseval dans le cas d'un système orthonormé. Identité de Parseval dans le cas d'une base hilbertienne. Application aux séries de Fourier. Extension aux fonctions continues par morceaux.
13. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A^k converge vers 0 si et seulement si $\rho(A) < 1$.
14. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}$.
15. Utilisation pour des passages à la limite du changement de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(e_1, \lambda e_2, \dots, \lambda^{n-1} e_n)$.
16. Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Dans un evn, ils sont fermés ou denses. Si $H = \ker l$ avec l forme linéaire continue $\mathrm{d}(x,H) = \dfrac{|l(x)|}{|||l|||}$.
17. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices diagonalisables sont denses.
18. Projection d'un point x sur un convexe compact non vide C d'un espace préhilbertien : le projeté h est unique, il est qualifié d'orthogonal si $x \notin C$ car $\langle a-h, x-h\rangle \leqslant 0$ pour tout $a \in C$. Un hyperplan affine sépare alors C et x.

5 Suites et séries numériques

1. Si $0 < u_n \sim v_n$ et si u_n tend vers 0 ou $+\infty$, on a $\ln u_n \sim \ln v_n$
2. Théorème de Cesaro avec coefficients de pondération
3. Lemme de l'escalier : si $u_{n+1} - u_n$ tend vers l, u_n/n tend vers l. Probleme de la réciproque. Version multiplicative avec $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\sqrt[n]{v_n}$
4. Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.
5. Limite Sup et limite Inf d'une suite réelle en introduisant $S_n = \sup X_n$ et $I_n = \inf X_n$ où $X_n = \{u_k\}_{k\geqslant n}$.
6. Suites de Cauchy. Savoir montrer qu'une suite réelle converge si, et seulement si elle est de Cauchy.
7. Si $\sum u_n$ converge, u_n décroissante de limite nulle, alors $u_n = o(1/n)$. Réciproque fausse.
8. Convergence des séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.
9. Maitriser la comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction monotone, applications aux sommes partielles et restes des séries de Riemann ou de Bertrand.
10. Développement asymptotique de la série harmonique $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + O(1/n^2)$.
11. Formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
12. Se souvenir que si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ peuvent être de natures différentes (considérer $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$).
13. Maîtriser la transformation d'Abel. Se rappeler que l'on manipule une somme partielle (ou une tranche).
14. Comparaison série-intégrale pour $\sum f(n)$ dans le cas où on contrôle f'.

15. Série et séries des paquets, traitement des termes résiduels. Cas d'une série à termes positifs.
16. Théorème de Riemann : si $\sum u_n$ est semi-convergente, on peut permuter les termes de la suite u_n de telle manière que la somme de la série associée soit égal à n'importe quel nombre réel choisi arbitrairement.
17. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et si (u_n) converge vers $l \in I$, $f(l) = l$. Si f croissante, (u_n) garde la même position relative par rapport aux points fixes.
18. Notion de points attractifs et répulsifs pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour controler $|u_n - l|$.
19. Méthode de la loupe pour l'étude d'une système $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x - ax^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$ en 0.
20. Méthode de Newton pour les solutions de $f(x) = 0$ quand $f'' > 0$. Savoir qu'avec une inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on arrive à une inégalité quadratique $|u_{n+1} - l| \leqslant K|u_n - l|^2$. Poser $v_n = K|u_n - l|$ pour majorer.

6 Fonctions de la variable réelle, intégration

1. $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ continue admet un point fixe.
2. Une fonction injective continue sur un intervalle est strictement croissante.
3. Propriété d'uniforme continuité des fonctions continues périodiques, des fonctions continues de limite nulle en l'infni.
4. Exemple de fonctions dérivables non $\mathcal{C}^1$ (avec $x \longmapsto x^2 \sin 1/x$).
5. Savoir que si f est seulement dérivable et $f'(0) > 0$, f n'est pas forcément strictement croissante au voisinage de 0.
6. Si f tend vers 0 en $+\infty$, sa dérivée ne tend pas forcément vers 0 ($x \longmapsto \dfrac{\sin x^2}{x}$).
7. Fonction $x \longmapsto \exp(-1/x^2)$ qui se prolonge sur $\mathbb{R}$ par continuité : elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées sont nulles en 0 : elle n'est pas DSE en 0.
8. Construction des fonctions plateaux.
9. Si $x \in [0, \pi/2]$, $2/\pi x \leqslant \sin x \leqslant x$.
10. Une fonction convexe sur I est continue sur tout l'intérieur de I, elle admet des dérivées à gauche et à droite finie en tout point intérieur. Elle est même dérivable sur I sauf en au plus un nombre dénombrable de points.
11. Convexité des fonctions continues vérifiant $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
12. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire continue.
13. Méthode des rectangles : comparer $\displaystyle\int_a^b f$ à $f(a)$ et controler avec f'.
14. Méthode des trapèzes : comparer $\displaystyle\int_a^b f$ à $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ et controler avec f''.
15. Savoir dériver $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$.
16. Intégration des fractions rationnelles en sin et cos : règle de Bioche, changement en $t = \tan(x/2)$.

17. Intégrale abélienne avec $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
18. Lemme de Riemman-Lebesgue
19. Intégrale de Wallis. Equivalent en l'infini. Utilisation pour le calcul de la constante dans la formule de Stirling.
20. Théorème de relèvement pour une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$: elle s'écrit $f = e^{i\theta}$ avec θ fonction $\mathcal{C}^k$.
21. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n!$, $\displaystyle\int_{[a,x]} |t-a|^n \mathrm{d}t = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$, formules dites d'orthogonalités sur e^{ipx}, $\cos px$...
22. Exemple d'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\mathrm{d}t$
23. Intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Savoir montrer qu'elle converge (fausse impropreté en 0 et IPP en $+\infty$), savoir démontrer qu'elle n'est absolument convergente (avec $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$), savoir que sa valeur est $\dfrac{\pi}{2}$, savoir que l'on peut la calculer par l'intermédiaires d'intégrales à paramètres.
24. Intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$.
25. Si $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, on n'a pas forcément f de limite nulle en $+\infty$. Donner un contre-exemple avec une fonction présentant des pics, non bornées au voisinage de l'infini.
26. Si $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors f admet une limite nulle en ∞.

7 Suites et séries de fonctions, séries entières

1. Si $f_n : X \longrightarrow \mathbb{L}$, la convergence simple équivaut à la convergence uniforme uniquement dans le cas X fini.
2. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g respectivement et si f et g bornées, alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.
3. $z \longmapsto (1+z/n)^n$ converge (uniformément sur tout $\overline{D(0,R)}$) vers $z \longmapsto e^z$.
4. Exemple des séries trigonométriques $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{C}} c_n e^{inx}$. Cas où les c_n sont sommables.

   Possibilités de récupérer c_n par un calcul de coefficient de Fourier $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.
5. Cas des séries trigométriques $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx}$ avec a_n décroissante de limite nulle : convergence uniforme sur tout $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ pour $0<\alpha<\pi$.
6. Etude de la fonction $\zeta : s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,\infty[$, calcul des dérivées, équivalent en 1, développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre N.
7. Théorème de Weierstrass trigonométrique

8. Théorème de Dini (suite $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, $f_n \leqslant f_{n+1}$ et f_n converge simplement vers f continue).
9. Une suite de fonctions M-lipschitzienne sur $[a,b]$ (ou un compact K) qui converge simplement converge uniformément.
10. Formule d'Hadamard : le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est l'inverse de $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.
11. Fonctions holomorphes. Caractère holomorphe des séries entières.
12. Expression intégrale des coefficients d'une série entière : $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$. Inégalité de Cauchy.
13. Développement en série entière des fractions rationnelles dont 0 n'est pas pôle. Savoir que le rayon est le plus petit module des pôles. Les coefficients suivent à partir d'un certain rang une relation de récurrence linéaire. Réciproquement une suite à récurrence linéaire à partir d'un certain va définir une fraction rationnelle.
14. Théorème de Tauber (cas positif) : si $a_n \geqslant 0$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon 1, $\sum a_n$ converge si, et seulement si f admet une limite finie en 1.
15. Convergence uniforme sur $[0,1]$ des séries du type $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n$ avec $a_n \geqslant 0$ décroissante de limite nulle.
16. Théorème d'Abel-Dirichlet : convergence uniforme sur $[0,R]$ si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge.
17. Savoir trouver des solutions DSE d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux.
18. Traduction sur la somme de séries entières de relations de comparaison sur les coefficients : par exemple, si $a_n = o(b_n)$ avec $b_n \geqslant 0$, $\sum b_n$ divergente, alors pour x tendant vers 1^-, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$.

8 Intégrales à paramètre

1. Traitement d'une intégrale à borne variables du type $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x$ soit par changement de variables (pour se ramener à bornes fixes), soit par l'introduction d'une fonction indicatrice : $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[0,n[}\tilde{f}_n(x)\mathrm{d}x$.
2. Fonction Γ d'Euler sous ses deux formes : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$. $\Gamma(n+1) = n!$. Caractère $\mathcal{C}^\infty$. $\ln\Gamma$ est convexe.
3. Transformée de Laplace d'une fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $t \longmapsto e^{-at}f(t)$ intégrable : $x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$. Elle est continue sur $[a,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,+\infty[$.
4. Transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable : $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Théorème de Fubini sur les intégrales doubles d'une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$.
6. Intégrabilité des fonctions $f : (x, y) \in I \times J \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$. Théorème de Fubini. Opérateur de convolution sur les fonctions continues à support conpact de $\mathbb{R}$, $f \star g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$.

9 Equations différentielles, calcul différentiel

1. Pour une équation différentielle du second ordre, si on dispose d'une solution qui ne s'annule pas, z, on posera $y = \varphi z$ pour obtenir une équation différentielle d'ordre 1 en φ'.
2. Maitriser la méthode de variations des constantes à l'ordre 2.
3. Savoir faire un changement de variables dans une équation différentielle.
4. Lemme de Gromwall (et sa preuve).
5. Caractère isolé des zéros d'une solution non nulle d'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. Entrelacement des zéros de deux solutions indépendantes.
6. Théorème d'oscillations de Sturm. Espacement des zéros des solutions non nulles de $y'' + q(x)y = 0$ quand $0 < \mu^2 \leqslant q(x) \leqslant \lambda^2$.
7. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X' = AX$, si $X(0)$ est un vecteur propre, la solution va rester sur $\mathbb{K}X(0)$. Si $X(0)$ est dans un sous-espace caractéristique, $X(t)$ reste dans ce sous-espace caractéristique.
8. Connaître les coniques, notamment les non dégénérées : ellipse, parabole et hyperbole. Savoir écrire pour chacune un paramétrage. Savoir les dessiner.
9. Toutes les solutions de $X' = AX$ convergent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.
10. Connaître les morphismes continues de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ (resp. dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
11. Savoir dériver $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Écrire la dérivée à l'aide du gradient.
12. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)\mathrm{d}t$. Application à l'inégalité des accroissements finis.
13. Dérivée seconde de $t \longmapsto f(a + tH) = f(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_n)$. Savoir introduire la hessienne de f en a. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (à partir de Taylor reste intégral).
14. Pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, rôle de la hessienne dans l'étude de la nature des points critiques quant à savoir si ce sont des extrema locaux.
15. Théorème de l'inversion globale.
16. Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas non linéaire). Notion de solution maximale. Unicité pour un problème de Cauchy donné.
17. Savoir passer du cartésien au polaire dans les équations aux dérivées partielles.
18. Expression du gradient en polaires.

10 Probabilités

1. Une réunion dénombrable de parties négligeables de $\mathbb{R}$ est encore négligeable.

2. Loi binomiale négative ou loi de Pascal : loi d'attente du r-ième succès dans une succession de tirages indépendants de Bernoulli de paramètre p. Elle correspond à la loi de la somme de r variables indépendantes de lois géométriques de paramètre p.
3. Théorème de Kolmogorov : si on se donne une suite de lois P_n discrètes sur E_n, il existe possible de fabriquer sur l'espace univers $\displaystyle\prod_{k\in\mathbb{N}} E_n$, une tribu et une proba telle que les variables $X_n : (x_k) \in \displaystyle\prod_{k\in\mathbb{N}} E_k \longmapsto x_n \in \mathrm{E}_n$ soient de lois μ_n et indépendantes.
4. Lemme de Borel-Cantelli (quand $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge) ; second lemme de Borel-Cantelli que les A_n sont indépendantes et $\sum \mathrm{P}(A_n)$ diverge.
5. Notion de convergence en proba. Lien avec la loi faible des grands nombres.
6. Convergence en loi pour des variables dont le support est $\mathbb{N}$. Théorème de Poisson.
7. Convergence presque sûre. Loi forte des grands nombres (par exemple pour des X_n indépendantes de même loi avec $\mathrm{E}(X_1^4) < +\infty$).
8. Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(X > k) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{P}(X > t)\mathrm{d}t$.
9. Somme aléatoire de variables aléatoires. Si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, X_i, N indépendnates, $S = S_1 + \cdots + S_N$, $G_S = G_N \circ G_{X_1}$. Formule de Wald.
10. Notion sur la loi normale. Théorème central limite.
11. Matrices stochastiques. Etude du spectre. Applications aux chaines de Markov.

11 Autres thèmes classiques

1. Théorème de Cantor-Bernstein.
2. Dénombrement des surjections (nombres de Stirling de deuxième espèce).
3. Dénombrement des dérangements.
4. Dénombrement des partitions, nombres de Bell.
5. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
6. Automorphismes du corps $\mathbb{R}$.
7. Nilradical d'un anneau.
8. Théorème de Tchebycheff sur les nombres premiers : il existe $A, B > 0$ tels que
$$A\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) = \mathrm{Card}\{p \in [\![1, n]\!], p \text{ premier } \} \leqslant B \leqslant \frac{n}{\ln n}.$$
9. Centre de $\mathcal{L}(E)$, de $\mathrm{GL}(E)$.
10. Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels de même dimension.
11. Si K corps infini, E K-ev, E n'est pas réunion finie de sous-espaces stricts de E.
12. Lemmes de factorisation des applications linéaires.
13. Pseudo-inverses d'un endomorphisme.
14. Idéaux à gauche, à droite de $\mathcal{M}_n(K)$.
15. Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$.
16. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle. C'est aussi un crochet de Lie $[M, N] = MN - NM$.

17. Dégré d'une extension de corps. Multiplicativité des degrés. Applications : l'ensemble des éléments algébriques de $\mathbb{Q}$ forment un sous-corps de $\mathbb{C}$.
18. Inégalités d'Hölder, de Minkowsky. Norme $\| \ \|_p$ sur ℓ^p ou $L^p(I)$.
19. Réciproque de l'identité du parallélogramme.
20. e et π sont irrationnel.
21. Valeurs d'adhérence des suites $(\cos 2\pi nx)$ et $(\sin 2\pi nx)$ quand x est irrationnel (en utilisant le théorème de Dirichlet ou les sous-groupes de $\mathbb{R}$ et $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ avec $a/b \notin \mathbb{Q}$).
22. Fractions continues.
23. Dénombrabilité des points de discontinuités d'une fonction monotone.
24. Groupe des périodes d'une fonction continue périodiques. Plus petite période.
25. Oscillation d'une fonction.
26. Théorème du point fixe de Picard.
27. Norme de jauge. Carractérisation des boules unités en dimension finie.
28. Théorème de Carathéodory et application à l'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie.
29. Impossibilité d'un logarithme ou d'une racine carée continus sur $\mathbb{C}^*$.
30. Morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.
31. Théorème de Darboux.
32. Inégalité de Bernstein.
33. Fonctions à variations bornées.
34. Limite de $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$ en $+\infty$ pour $f \geqslant 0$ continue.
35. Inégalité de Jensen.
36. Formule de la moyenne pour $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
37. Pour f de classe $\mathcal{C}^2$, majoration de $|f'|$ quand f et f'' sont bornées.
38. Pour f $\mathcal{C}^2$, si f, f'' de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, f' l'est aussi.
39. Règle de Raab-Duhamel
40. Lemme de Cauchy sur les groupes.
41. Théorème de Sylow sur les groupes.
42. Nombres de Fermat.
43. Version faible du théorème de Dirichlet : si p premier, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.
44. Dans un groupe fini abélien, il existe un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G. Application au caractère cyclique de K^* pour K corps fini.
45. Automorphismes de $K[X]$.
46. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout x réel.
47. Critère de Routh.
48. Sommes de Newton. Formules de Newton
49. Localisation des racines d'un polynôme complexe en fonction des coefficients.
50. Polynômes de Hilbert. Polynômes P tels que $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

51. Critère d'Eisentein.
52. Théorème de Liouville.
53. Déterminant de Smith $\det(\mathrm{pgcd}(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
54. Déterminant d'Hurwitz (des a sous la diagonale, des b au dessus).
55. Détermiant de Cauchy $\det\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{i,j}$.
56. Décomposition LU.
57. Déterminant par bloc $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ quand C et D commutent.
58. Résultant de deux polynômes. Notion de discriminant. Applications à la détermination de l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
59. Connexité par arcs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
60. Cardinal de $\mathrm{GL}_n(K)$ quand K est un corps fini.
61. Equivalence des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
62. Théorème de structure des groupes abéliens finis.
63. Localisation des valeurs propres d'une matrice. Disques de Gershgörin.
64. Si $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et A^p est diagonalisable, A est diagonalisable.
65. Réduction des matrices circulantes.
66. Diagonalisabilité de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}$.
67. Commutant d'une matrice diagonalisable. Dimension du commutant.
68. Equations de Sylvester $AM-MB=0$. Construction explicite de vecteurs propres de $M\longmapsto AM-MB$.
69. Discriminant d'un polynôme. Applications à la déterminantion de l'intérieur des matrices diagonalisables.
70. Polynôme minimal ponctuel. Application : si $\mu_u=\chi_u$, u est cyclique.
71. Equation $y''+q(x)y=0$ avec $q\leqslant 0$ avec conditions aux limites $y(a)=y(b)=0$. Existence et unicité de la solution.
72. Polynômes de Legendre, polynômes de Laguerre, polynômes d'Hermite.
73. Méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales.
74. Inégalité d'Hilbert.
75. Séries de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$avec (λ_n) strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$ divergente vers $+\infty$.
76. Développement de la cotangente $\operatorname{cotan}\pi x=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$.
77. Développement eulérien du sinus : $\sin x = x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.
78. Polynômes de Bernstein et application au théorème de Weierstrass.
79. Théorème dit du ≪faux Dini≫.
80. Noyau de Dirichlet en lien avec les séries de Fourier pour une fonction dérivable 2π-périodique (ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Résultat de convergence simple.

81. Noyau de Fejér. Résultat de convergence uniforme pour l'approximation d'une fonction continue 2π-périodique. Importance de la positivité du noyau. Théorème de Weierstrass trigonométrique.
82. Noyau de Poisson. Utilisation pour l'approximation uniforme (importance de la positivité du noyau).
83. Suites équiréparties. Critère de Weyl.
84. Théorème d'Ascoli.
85. Méthode de Laplace pour des équivalents d'intégrales du type $\displaystyle\int_a^b e^{n\varphi(t)}\mathrm{d}t$ quand φ strictement décroissante.
86. Calul de l'intégrale de Gauss, de Dirichlet par l'intermédiaire d'intégrale à paramètre.
87. Transformée de Fourier de la gaussienne : c'est un point fixe.
88. Transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}$ de Schwarz des fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées. Formule d'inversion.
89. Théorème de Bernstein : si f est $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées positives, f est somme de sa série de Taylor.
90. Caractère analytique des séries entières : une fonction série entière est développable en série entière en tout point du disque ouvert de convergence.
91. Principe des zéros isolés : les zéros d'une série entière sont isolés.
92. Inégalités de Kolmogorov en probabilité.
93. Inégalité de Chernoff.
94. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.
95. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
96. Processus de Galton-Watson.
97. Réduction des matrices tridiagonales.
98. Théorème de Perron-Frobenius.
99. Théorème de perturbation de Weyl.
100. Réduction des matrices antisymétriques réelles.
101. Equations différentielles de Lax : $A' = A(t)B(t) - B(t)A(t)$.
102. Image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle de matrices.
103. $\exp(A+B)$ et $\exp(AB-BA)$ vues comme limite de matrices fabriquées à partir de $\exp(A/p)$ et $\exp(B/p)$ pour p tendant vers l'infini.
104. Théorème de Poincaré en calcul différentiel.
105. Principe du maximum pour les fonctions analytiques ou les fonctions harmoniques.
106. Fonctions holomorphes et conditions de Cauchy.