Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 14 h 30

DIMENSION FINIE

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitre sur :

- les matrices ;
- les espaces vectoriels ;
- les applications linéaires.

Dans tout ce chapitre, les lettres n, m, p, q, r, ℓ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Dans tout ce chapitre, la lettre K désigne un corps commutatif quelconque.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Espaces vectoriels de dimension finie

A.1. Espaces de dimension finie et bases d'icelui

Définition 1

Soit E un K-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Notons que cette définition nous dit ce qu'est un espace vectoriel de dimension finie mais on ne sait pas encore ce qu'est (donc ce que vaut) la dimension d'un tel espace !

Ne croyez pas que toutes les familles génératrices d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies ! Ainsi, si $a \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(a, 2a, 3a, 4a, \dots)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(a)$ et elle possède une infinité de vecteurs (dès que K est infini).

Exemples :

- Le plan géométrique (respectivement l'espace géométrique) est de dimension finie puisqu'il est engendré par $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (respectivement par $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).
- K^n est de dimension finie puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille génératrice finie de K^n.
- $K_n[X]$ est de dimension finie puisque $(1, X, \dots, X^n)$ en est une famille génératrice finie.
- $K[X]$ est de dimension infinie. En effet, dans le cas contraire, $K[X]$ serait engendré par une famille finie $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et l'on aurait $\deg(P) \leqslant \max\{\deg(P_0), \dots, \deg(P_n)\}$ pour tout polynôme $P \in K[X]$.

L'énoncé suivant est le théorème de la base intermédiaire en dimension finie. Nous avons déjà vu ce résultat dans le cadre plus général d'un espace vectoriel quelconque mais la démonstration nécessitait le lemme de Zorn. On pourra constater ci-dessous que l'hypothèse « de dimension finie » permet de s'affranchir de la zornification (et donc de l'axiome du choix).

Théorème 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une partie génératrice finie de E et $\mathscr{L}$ une partie libre de E telles que $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

■ L'ensemble des cardinaux des parties libres de E qui contiennent $\mathscr{L}$ et qui sont contenues dans $\mathscr{G}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide (elle contient $\mathrm{card}\,\mathscr{L}$) et majorée (car $\mathscr{G}$ est finie). Elle possède à ce titre un plus grand élément n. Notons $\mathscr{B}$ une famille libre de cardinal n telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ et démontrons que c'est une base de E. On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Par définition, $\mathscr{B}$ est libre.

D'autre part, pour tout $g \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{B}$, la famille $\mathscr{B} \cup \{g\}$ est liée (par maximalité de n). Il existe par conséquent une relation de dépendance linéaire $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda g = 0_E$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$ sont non tous nuls. Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ car $\mathscr{B}$ est libre, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda \neq 0$, ce qui permet d'écrire que $g = -(\lambda_1/\lambda)e_1 - \dots - (\lambda_n/\lambda)e_n$. Cela démontre que tout vecteur de $\mathscr{G}$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{G}$ engendre E, on en déduit que $\mathscr{B}$ est génératrice de E. ■

On peut rendre effectif l'énoncé précédent en décrivant un algorithme de complétion de la famille libre $\mathscr{L}$ en une base $\mathscr{B}$ de E. Partant de $\mathscr{L}$ qui est libre, on regarde si l'on peut rajouter un par un les vecteurs de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$. Plus précisément, on initialise le processus en posant $\mathscr{B} = \mathscr{L}$. On entame ensuite une boucle parcourant tous les éléments de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$. À chaque étape de cette boucle, si l'élément x de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$ considéré est tel que $\mathscr{B} \cup \{x\}$ reste libre, on remplace $\mathscr{B}$ par $\mathscr{B} \cup \{x\}$. Dans le cas contraire, on laisse $\mathscr{B}$ intacte. À l'arrêt de la boucle, la famille $\mathscr{B}$ est libre (puisqu'on a pris soin tout au long de la boucle de conserver la liberté) mais elle est aussi génératrice puisque tout élément de $\mathscr{G}$ est combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ (y réfléchir).

Le théorème de la base intermédiaire a deux conséquences importantes, énoncées dans le théorème ci-dessous. La propriété (i) s'appelle le théorème de la base extraite et la propriété (ii) s'appelle le théorème de la base incomplète.

Théorème 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors

(i) de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base finie de E ;

(ii) toute famille libre (et finie) de E peut être complétée en une base finie de E.

■ On note $\mathscr{G}$ une partie génératrice finie de E.

(i) Soit $\mathscr{G}'$ une partie génératrice de E (éventuellement infinie). Comme $\mathscr{G}$ est finie et comme chaque vecteur de $\mathscr{G}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathscr{G}'$, il existe un sous-ensemble fini $\mathscr{G}''$ de $\mathscr{G}'$ tel que tout vecteur de $\mathscr{G}$ se décompose sur $\mathscr{G}''$. Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, on en déduit que $\mathscr{G}''$ l'est aussi. Le théorème 1 appliqué avec $\mathscr{L} = \varnothing$ et $\mathscr{G}''$ donne le résultat.

(ii) Soit $\mathscr{L}$ une partie libre et finie de E. Alors $\mathscr{L} \cup \mathscr{G}$ est une partie génératrice finie de E. Le théorème 1 appliqué avec $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L} \cup \mathscr{G}$ donne le résultat. ■

Dans le (ii), l'hypothèse de finitude est placée entre parenthèses parce qu'elle est en fait inutile. En effet, nous allons voir que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les familles libres sont finies.

On peut déduire du théorème de la base incomplète l'existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 3

Tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases finies.

■ Il suffit de compléter la famille vide, qui est libre, en une base à l'aide du théorème 2. ■

Dans la suite de cette section, nous allons largement préciser ce résultat en démontrant que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et de même cardinal !

Exemples :

- En tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

  En effet, dans le cas contraire, il existerait une base finie $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On aurait alors $\mathbb{R} = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}\}$ ce qui impliquerait que $\mathbb{R}$ est dénombrable. C'est absurde !

A.2. Dimension

Les propriétés de la dimension reposent sur le lemme de Steinitz.

Lemme 1

Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

■ Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E. Par l'absurde, supposons l'existence d'une famille libre $\mathscr{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ avec $p > m$. Pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, on pose $\mathscr{S}(k)$: « la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_m)$ est génératrice, quitte à renuméroter les g_i ».

Initialisation : Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tels que $\ell_1 = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$. Comme $\ell_1 \neq 0_E$ (puisque $\mathscr{L}$ est libre), les λ_i ne sont pas tous nuls. Quitte à renuméroter les g_i, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. On a alors $g_1 = {\lambda_1}^{-1}\ell_1 - {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 g_2 - \cdots - {\lambda_1}^{-1}\lambda_m g_m$. Toute combinaison linéaire de $(g_1, \dots, g_m)$ est donc aussi une combinaison linéaire de $(\ell_1, g_2, \dots, g_m)$. De ce fait, la famille $(\ell_1, g_2, \dots, g_m)$ est génératrice, ce qui démontre $\mathscr{S}(1)$.

Hérédité : Fixons $k \in [\![1; m-1]\!]$ tel que $\mathscr{S}(k)$ est vraie et démontrons $\mathscr{S}(k+1)$. Comme la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_m)$ est génératrice (d'après $\mathscr{S}(k)$), il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ tels que l'on ait $\ell_{k+1} = \alpha_1\ell_1 + \cdots + \alpha_k\ell_k + \alpha_{k+1}g_{k+1} + \cdots + \alpha_m g_m$. Or $(\ell_1, \dots, \ell_{k+1})$ est libre, donc $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m$ ne sont pas tous nuls. Quitte à renuméroter les g_i, on peut supposer que $\alpha_{k+1} \neq 0$ et écrire que $g_{k+1} = -{\alpha_{k+1}}^{-1}\alpha_1\ell_1 - \cdots - {\alpha_{k+1}}^{-1}\alpha_k\ell_k + {\alpha_{k+1}}^{-1}\ell_{k+1} - {\alpha_{k+1}}^{-1}\alpha_{k+2}g_{k+2} - \cdots - {\alpha_{k+1}}^{-1}\alpha_m g_m$. Toute combinaison linéaire de $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_m)$ est donc aussi une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m)$ qui est donc génératrice. Ainsi $\mathscr{S}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $(\ell_1, \dots, \ell_m)$ est génératrice.

Mézalors ℓ_{m+1} se décompose sur $(\ell_1, \dots, \ell_m)$, ce qui contredit la liberté de $(\ell_1, \dots, \ell_{m+1})$. ■

On peut alors définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 2

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre fini d'éléments, appelé dimension de E sur K et noté $\dim_K E$ (ou $\dim E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base).

■ Le lemme précédent implique que toutes les familles libres d'un espace de dimension finie sont elles-mêmes finies. Toutes les bases de E sont donc finies. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E. Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice, on a $n \leqslant p$. Comme $\mathscr{B}'$ est libre et $\mathscr{B}$ est génératrice, on a $n \geqslant p$. Donc $n = p$. ■

La notion de dimension est la formalisation du concept de « degré de liberté » dont on dispose dans un espace. Ainsi, dire que nous vivons dans un espace de dimension 3, revient à dire que l'on peut décomposer tous nos déplacements le long de trois directions indépendantes.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on recherche généralement une base de cet espace et on compte le nombre de ses éléments !

Exemples :

- L'espace $\{0\}$ est de dimension 0 (sa base est $\varnothing$). C'est le seul espace de dimension nulle.
- K est de dimension 1 sur K (tout nombre non nul forme une base).
  Ainsi, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. En revanche, $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ (une base est $(1, i)$).
- K^n est un K-espace vectoriel de dimension n car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est de cardinal n.
- $K_n[X]$ est de dimension $n+1$ sur K car sa base canonique est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ est de dimension nm puisque c'est le nombre de matrices élémentaires. En particulier, $\mathscr{M}_n(K)$ est de dimension n^2.

Nous savons déjà que les bases sont les familles libres maximales et les familles génératrices minimales. En dimension finie, la dimension d'un espace peut donc être interprétée comme la taille maximale d'une famille libre ou la taille minimale d'une famille génératrice.

Proposition 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 0$.

(i) Toute famille libre admet au maximum n éléments.

(ii) Toute famille libre ayant exactement n éléments est une base de E.

(iii) Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

(iv) Toute famille génératrice de E ayant exactement n éléments est une base de E.

■ AQT ■

Les résultats (ii) et (iv) sont d'utilisation courante pour démontrer qu'une famille $\mathscr{B}$ est une base d'un espace vectoriel dont on connait la dimension n. Ce sont des théorèmes Bonux (avec le cadeau dans le paquet !) parce qu'ils permettent de ne faire que la moitié du travail. Le plus souvent, on prouve que $\mathscr{B}$ est une famille libre à n éléments.

On termine ce paragraphe en donnant une caractérisation des espaces de dimension infinie.

Proposition 2

Un espace vectoriel est de dimension infinie si, et seulement si, il contient une famille libre infinie.

■ Soit E un K-espace vectoriel.

$\Leftarrow$ Par contraposition, on suppose que E est de dimension finie n. Il est alors clair que l'on ne peut pas trouver une famille libre infinie, puisqu'une famille libre a au plus n éléments.

$\Rightarrow$ Si $\dim E = +\infty$, on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répondant au problème. Puisque $E \neq \{0\}$, on peut trouver un élément x_0 non nul. Supposons construite une famille libre $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Comme $\dim E = +\infty$, cette famille n'est pas génératrice de E et il existe un élément x_{n+1} de E non combinaison linéaire de $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Par suite, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre. ■

<u>Exemples :</u>

- On retrouve le fait que $K[X]$ est de dimension infinie puisque $(X^i)_{i\geqslant 0}$ est libre.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie puisque la famille $(x \longmapsto \mathrm{e}^{kx})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie puisque la famille $\big((q^n)_{n\geqslant 0}\big)_{q>0}$ est libre.
- On retrouve le fait que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie puisque $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre (cela découle de l'unicité de la décomposition en nombres premiers).

A.3. Dimension d'un produit

Proposition 3

Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F, la famille $\big((e_1, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$.

■ Démontrons que la famille $\big((e_1, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est libre et génératrice de $E \times F$.

▷ On suppose que l'on a $\lambda_1(e_1, 0_F) + \dots + \lambda_n(e_n, 0_F) + \mu_1(0_E, f_1) + \dots + \mu_p(0_E, f_p) = (0_E, 0_F)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in K$. Alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$ et $\mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p = 0_F$, ce qui donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0$ en vertu des libertés de $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$. Cela prouve que la famille $\big((e_1, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est libre dans $E \times F$.

▷ Soit $(x, y) \in E \times F$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ engendrent respectivement les espaces E et F, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p$. Par conséquent, on a $(x, y) = \lambda_1(e_1, 0_F) + \dots + \lambda_n(e_n, 0_F) + \mu_1(0_E, f_1) + \dots + \mu_p(0_E, f_p)$, ce qui prouve que la famille $\big((e_1, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est génératrice de $E \times F$.

On en conclut que $\big((e_1, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$ et donc que $E \times F$ est de dimension finie avec $\dim(E \times F) = n + p = \dim E + \dim F$. ■

On constate donc que la dimension est une fonction logarithmique puisque la dimension d'un produit est la somme des dimensions.

Cette proposition implique immédiatement par récurrence le résultat suivant.

Corollaire 1

Soient $E_1, \dots, E_p$ des K-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et l'on a

$$\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k.$$

En particulier, si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, alors E^p est de dimension finie et

$$\dim(E^p) = p \dim E.$$

■ AQT ■

Exemples :

- Ce résultat nous permet de retrouver que K^n est de dimension n.

Il ne faut pas généraliser cette formule à un « produit infini ». En effet, même si E et F sont deux espaces de dimension finie, il est complétement faux d'affirmer que F^E est de dimension $(\dim F)^{\dim E}$. En effet, généralement, F^E n'est même pas un espace de dimension infinie, comme l'illustre l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\mathcal{A}$.4. *Sous-espace et dimension*

La notion de dimension s'étend naturellement aux sous-espaces vectoriels ou affines.

Définition 3

Soit E un K-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie).

Un sous-espace vectoriel F de E est un K-espace vectoriel. Si, en tant que tel, il est de dimension finie (c'est-à-dire s'il admet une famille génératrice finie), on dit que c'est un sous-espace de E de dimension finie et on note $\dim F$ sa dimension (en tant qu'espace vectoriel).

Un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de E est dit de dimension finie lorsque sa direction F est de dimension finie. La dimension de $\mathscr{F}$ est alors, par définition, celle de F, c'est-à-dire $\dim \mathscr{F} = \dim F$.

Exemples :

- Un sous-espace est de dimension 1 si, et seulement si, c'est une droite vectorielle.

  Un sous-espace est de dimension 2 si, et seulement si, c'est un plan vectoriel.
- Le sous-espace $\mathscr{T}_n^+(K)$ de $\mathscr{M}_n(K)$ constitué des matrices triangulaires supérieures admet pour base $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ donc $\dim \mathscr{T}_n^+(K) = n(n+1)/2$.

  Le sous-espace $\mathscr{S}_n(K)$ de $\mathscr{M}_n(K)$ constitué des matrices symétriques admet pour base $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ donc $\dim \mathscr{S}_n(K) = n(n+1)/2$.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire un sous-espace affine de E de dimension 2.

L'énoncé suivant, très intuitif, exprime la stricte croissance de l'application dim (définie de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, ordonné par $\subset$, vers l'ensemble $\mathbb{N}$).

Théorème 4

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

Si F est de dimension finie et $G \subset F$, alors G est de dimension finie et $\dim G \leqslant \dim F$.

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire $\dim G = \dim F$, on a $G = F$.

■ ▷ Posons $p = \dim F$. Les familles libres de G sont des familles libres de F. Elles possèdent donc au plus p éléments. L'ensemble des cardinaux des familles libres de G est ainsi une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient 0 car $\varnothing$ est une famille libre de G) qui est majorée par p. Notons q son plus grand élément q et considérons $(e_1, \ldots, e_q)$ une famille libre de G. Comme elle est de cardinal q, c'est une famille libre maximale dans G donc c'est une base de G. Dès lors, on a $\dim G = q \leqslant p = \dim F$.

▷ Supposons que $\dim G = \dim F$ et considérons une base $\mathscr{B}_G$ de G. C'est une famille libre de F de cardinal $\dim F$. Le théorème 1 nous dit que $\mathscr{B}_G$ est une base de F. Dès lors, on a $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_G) = F$. ■

Pour démontrer que deux sous-espaces sont égaux, il suffit donc de démontrer que l'un de ces sous-espaces contient l'autre et que leurs dimensions sont égales. C'est un nouvel exemple de théorème Bonux !

Exemples :

- Puisque K est un K-espace vectoriel de dimension 1, ses sous-espaces vectoriels sont de dimension 0 ou 1. Donc K n'a que deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et K.

Lorsqu'on fait de l'algèbre linéaire avec un ensemble de scalaires qui est un anneau A et non un corps, on obtient une structure dite de A-module. Dans cette situation, les résultats de dimension deviennent contre-intuitifs. En particulier, il est tout à fait possible qu'un sous-module ait une dimension supérieure à celle du module qui le contient !

A.5. Sommes en dimension finie

a) Dimension d'une somme

L'énoncé qui suit donne la dimension d'une somme de deux sous-espaces. On notera l'analogie avec la formule de Poincaré.

Proposition 4

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E de dimension finie. Alors $F+G$ est de dimension finie dont la dimension est donnée par la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

■ Notons tout d'abord que $F \cap G$ est de dimension finie puisque c'est un sous-espace de F (ou de G) qui est lui-même de dimension finie.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ de F et en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ de G. Prouvons que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $E+F$.

- ▷ Comme $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ engendre F et $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ engendre G, on sait (d'après un résultat du cours sur les espaces vectoriels) que la famille juxtaposée $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est génératrice de $F+G$. Au passage, cela démontre que $F+G$ est de dimension finie.
- ▷ Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r \in K$ trois familles de scalaires qui satisfont la relation $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q + \nu_1 g_1 + \cdots + \nu_r g_r = 0_E$ $(*)$. En isolant les f_i, on obtient $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q = -\lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_p e_p - \nu_1 g_1 - \cdots - \nu_r g_r$. Dans cette égalité, le vecteur de gauche est dans F et celui de droite est dans G. Comme ils sont égaux, ils appartiennent à $F \cap G$. Le vecteur $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q$ est donc décomposable sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F \cap G$, autrement dit il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ tels que $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$. Comme $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est libre (c'est une base), on a $\mu_1 = \cdots = \mu_q = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. La relation $(*)$ devient alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \nu_1 g_1 + \cdots + \nu_r g_r = 0_E$. Comme $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ est libre (c'est aussi une base), on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \nu_1 = \cdots = \nu_r = 0$. Cela démontre que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une famille libre.

On en conclut que la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $E+F$ et donc que $\dim(E+F) = p+q+r = (p+q)+(p+r)-p = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$. ■

On peut alors énoncer le résultat suivant concernant la dimension d'une somme directe de deux sous-espaces.

Proposition 5

Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E de dimension finie.

Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Réciproquement, si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, alors F et G sont en somme directe.

■ On a

$$\begin{aligned}
(F \text{ et } G \text{ sont en somme directe}) &\iff (F \cap G = \{0_E\}) \\
&\iff \big(\dim(F \cap G) = 0\big) \\
&\iff \big(\dim(F+G) = \dim F + \dim G\big),
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence découle de la formule de Grassmann. ■

On peut remarquer que la formule de Grassmann n'est pas indispensable pour démontrer cette proposition ; on peut aussi utiliser le lemme de juxtaposition des bases. C'est plus compliqué (en particulier pour l'implication $\Leftarrow$) mais, comme nous allons le voir, cela se généralise au cas de plusieurs sous-espaces, au contraire de la démonstration utilisant la formule de Grassmann.

L'analogie entre les formules de Grassmann et de Poincaré s'arrête au cas de deux sous-espaces. En effet, la généralisation de la formule de Grassmann inspirée par la formule du crible est fausse ! Dans le cas d'une somme de plusieurs sous-espaces, on peut tout de même énoncer le résultat suivant.

Proposition 6

Soient E un K-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E de dimension finie. Alors $F_1 + \dots + F_p$ est de dimension finie et

$$\dim(F_1 + \dots + F_p) \leqslant \dim F_1 + \dots + \dim F_p.$$

■ Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_k$ une base de F_k et posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$. On sait que $\mathscr{B}$ est génératrice de $F_1 + \dots + F_p$, donc $F_1 + \dots + F_p$ est de dimension finie et $\dim(F_1 + \dots + F_p) \leqslant \operatorname{card} \mathscr{B}$. Par ailleurs, on a $\operatorname{card} \mathscr{B} \leqslant \operatorname{card} \mathscr{B}_1 + \dots + \operatorname{card} \mathscr{B}_p = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$. Cela donne le résultat. ■

On peut généraliser la proposition 5 pour une somme directe de plusieurs sous-espaces. Il est d'ailleurs notable que l'on ait un tel résultat alors même que la formule de Grassmann n'admet, elle, pas de généralisation simple au cas de plus de deux sous-espaces. En fait, c'est le lemme de juxtaposition des bases qui permet d'établir ce résultat.

Proposition 7

Soient E un K-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E de dimension finie.

Si $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe, alors

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p.$$

Réciproquement, si $\dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$, alors $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.

■ Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_k$ une base de F_k.

- $\Rightarrow$ Supposons que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe. Le lemme de juxtaposition des bases nous dit que la famille juxtaposée $\mathscr{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathscr{B}_p$ est une base de la somme directe $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Dès lors, on a $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \operatorname{card}(\mathscr{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathscr{B}_p) = \operatorname{card} \mathscr{B}_1 + \dots + \operatorname{card} \mathscr{B}_p = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$.
- $\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$. On sait que la famille $\mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ est génératrice de $F_1 + \dots + F_p$ (cf cours sur les espaces vectoriels). Par ailleurs, on a $\operatorname{card}(\mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p) \leqslant \operatorname{card} \mathscr{B}_1 + \dots + \operatorname{card} \mathscr{B}_p = \dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim(F_1 + \dots + F_p)$. Ainsi $\mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ est une famille génératrice de $F_1 + \dots + F_p$ de cardinal inférieur ou égal à la dimension de $F_1 + \dots + F_p$. Cela n'est possible que si $\mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de $F_1 + \dots + F_p$. Le lemme de juxtaposition des bases nous dit alors que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe. ■ 2 h 30

b) *Supplémentaires en dimension finie*

Nous avons vu qu'en dimension quelconque, un sous-espace possède toujours un supplémentaire mais la démonstration utilise le lemme de Zorn. Dans l'énoncé ci-dessous, on établit le même résultat dans le cadre de la dimension finie sans utiliser de zornification.

Proposition 8

Tout sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire G dans E. De plus, on a $\dim G = \dim E - \dim F$.

■ Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F, c'est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Posons alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, le lemme de juxtaposition des bases nous dit que F et G sont supplémentaires dans E. ■

Le procédé utilisé dans la démonstration de cette proposition est à retenir pour déterminer un supplémentaire de F dans E. Il suffit de déterminer une base de F puis de la compléter pour obtenir une base de E. Les vecteurs qui ont été utilisés pour compléter engendrent alors un supplémentaire de F dans E.

Exemples :

- Si H est un hyperplan d'un K-espace vectoriel de dimension finie n, alors H admet une droite pour supplémentaire dans E, ce qui implique que $\dim H = n-1$. Nous y reviendrons.
- Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(X+1) = P(-X)\}$ qui est clairement un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$. Un polynôme $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ appartient au sous-espace F si, et seulement si, $a(X+1)^2 + b(X+1) + c = a(-X)^2 + b(-X) + c$, c'est-à-dire $a = a$, $2a + b = -b$ et $a + b + c = c$ ou encore $a = -b$. On a donc $F = \mathrm{Vect}(X^2 - X, 1)$. Comme $(X^2 - X, 1)$ est libre, c'est une base de F.
  Complétons $(X^2 - X, 1)$ en lui adjoignant X, ce qui donne $(X^2 - X, X, 1)$. C'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque c'est une famille échelonnée, donc libre, de 3 vecteurs en dimension 3.
  La droite vectorielle $\mathrm{Vect}(X)$ est alors un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

L'énoncé suivant caractérise un supplémentaire en dimension finie.

Proposition 9

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. On a équivalence entre :

(i) F et G sont supplémentaires dans E ;

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

(iii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

■ Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii) sont simples puisque si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim E = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Démontrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Alors $F \oplus G$ est un sous-espace de E tel que $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = \dim E$, ce qui donne $F \oplus G = E$.

Démontrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. On a vu que la seconde condition implique que F et G sont en somme directe. Il s'ensuit que F et G sont supplémentaires dans E. ■

Cette proposition est un nouvel exemple de théorème Bonux : pour vérifier la supplémentarité de deux sous-espaces, on peut se contenter de démontrer qu'ils sont en somme directe (cas le plus courant) ou que leur somme fait l'espace ambiant (cas moins courant) dès que l'on sait que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de l'espace ambiant.

a. 6. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4

Soient E un K-espace vectoriel (qui n'est pas supposé de dimension finie) et $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est de rang fini lorsque le sous-espace engendré par $(x_i)_{i \in I}$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et on note $\operatorname{rg}\big((x_i)_{i \in I}\big)$ la dimension du sous-espace engendré par $(x_i)_{i \in I}$. Autrement dit,

$$\operatorname{rg}\big((x_i)_{i \in I}\big) = \dim\big(\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I}\big).$$

Lorsque E est de dimension finie, toute famille $\mathscr{F}$ (finie ou infinie) est de rang finie. On peut même préciser que $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \dim E$.

Lorsque E est de dimension quelconque, une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ est de rang finie. Dans ce cas, le rang de $(x_1, \ldots, x_p)$ est noté $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$. On peut alors préciser que $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant p$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \operatorname{card} \mathscr{F}$.

Lorsque E est de dimension finie et $\mathscr{F}$ est finie, on a donc $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(\dim E, \operatorname{card} \mathscr{F})$.

La fonction rang est croissante : si $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}_1) \leqslant \operatorname{rg}(\mathscr{F}_2)$ (car $\operatorname{Vect} \mathscr{F}_1 \subset \operatorname{Vect} \mathscr{F}_2$).

Le rang de $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $\mathscr{F}$. En effet, la famille $\mathscr{F}$ étant génératrice de $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$, le théorème de la base extraite assure l'existence d'une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{F}$ qui soit une base de $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$ de sorte que $\operatorname{card} \mathscr{B} = \operatorname{rg}(\mathscr{F})$. Si $\mathscr{L}$ est une sous-famille libre de $\mathscr{F}$, alors $\operatorname{card} \mathscr{L} \leqslant \operatorname{card} \mathscr{B} = \operatorname{rg}(\mathscr{F})$.

Autrement dit, le rang d'une famille de vecteurs est le nombre minimum de vecteurs « utiles » pour « fabriquer » le sous-espace engendré par la famille.

Exemples :

- On a $\operatorname{rg}(0_E) = 0$.
  Si x est non nul, on a $\operatorname{rg}(x) = 1$.
  Si x et y ne sont pas colinéaires, on a $\operatorname{rg}(x, y) = 2$.
- Si $u : x \longmapsto \cos(2x)$, $v : x \longmapsto \cos^2(x)$ et $w : x \longmapsto \sin^2(x)$ alors $\operatorname{rg}(u, v, w) = 2$.

Les propriétés des Vect nous permettent de donner les opérations élémentaires que l'on peut effectuer pour calculer un rang.

Proposition 10

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors

(i) si σ est une permutation de $[\![1; p]\!]$, alors $\operatorname{rg}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$;

(ii) si $\lambda \in K^*$, alors $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, \lambda x_j, \ldots, x_n) = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$;

(iii) si $j \neq i$ et $\lambda \in K$, alors $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_n) = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

■ C'est une conséquence immédiate du fait que les opérations élémentaires décrites ci-dessus ne modifient pas le sous-espace vectoriel engendré. ■

Nous verrons que le calcul matriciel permet de calculer facilement le rang d'une famille de vecteurs à l'aide d'opérations élémentaires du type de celles décrites ci-dessus.

Exemples :

- $\operatorname{rg}(x, y) = \operatorname{rg}(x, x + y)$.

L'énoncé suivant fait le lien entre le rang et la liberté ou le caractère générateur de la famille.

Proposition 11

Soient E un K-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de rang fini et F un sous-espace de E de dimension finie qui contient la famille $\mathscr{F}$. Alors

(i) $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}\,\mathscr{F}$;

(ii) $\mathscr{F}$ est génératrice de F si, et seulement si, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim F$;

(iii) $\mathscr{F}$ est une base de F si, et seulement si, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}\,\mathscr{F} = \dim F$.

■ (i) $\Rightarrow$ Supposons que $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\text{rg}(\mathscr{F})$ est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $\mathscr{F}$, on a $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}\,\mathscr{F}$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}\,\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{F}$ engendre $\text{Vect}\,\mathscr{F}$ et que son cardinal est égal à la dimension de $\text{Vect}\,\mathscr{F}$, l'un des théorèmes Bonux permet d'affirmer que $\mathscr{F}$ est une base de $\text{Vect}\,\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{F}$ est libre.

(ii) $\Rightarrow$ Si $\mathscr{F}$ est génératrice de F, alors $\text{Vect}\,\mathscr{F} = F$, donc $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim F$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim F$. Alors $\text{Vect}\,\mathscr{F} \subset F$ et ces deux espaces ont même dimension, d'où $\text{Vect}\,\mathscr{F} = F$ d'après l'un des théorèmes Bonux. Cela signifie que $\mathscr{F}$ est génératrice de F.

(iii) On compile (i) et (ii). ■

On notera que le propriété (i) ne nécessite pas d'être en dimension finie.

Le rang est donc un outil priviligié pour déterminer si une famille est libre ou génératrice. Dans la pratique, on écrit qu'une famille de p vecteurs de rang p est libre ; qu'une famille de rang q dans un sous-espace de dimension q est génératrice de ce sous-espace ; qu'une famille de p vecteurs de rang p dans un sous-espace de dimension p est une base de ce sous-espace.

Exemples :

- Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$. Démontrons que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $K_n[X]$.
  Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\deg(P_k) = n$ donc $P_k \in K_n[X]$.
  Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\text{val}(P_k) = k$ donc $(P_0, \ldots, P_n)$ est échelonnée en valuation et l'on peut adapter la démonstration de la liberté d'une famille de polynôme échelonnée en degré pour démontrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.
  Ainsi, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de cardinal $n+1 = \dim K_n[X]$ donc c'est une base de $K_n[X]$.

B. Applications linéaires en dimension finie

B.1. Effets d'une « jection » linéaire sur la dimension

Dans le cours sur les applications linéaires, nous avons vu le théorème de l'image d'une base : si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E alors f est injective (respectivement surjective, respectivement bijective) si, et seulement si, $f(\mathscr{B})$ est libre (respectivement génératrice, respectivement une base). Le résultat suivant (qui s'appuie sur ce théorème) décrit l'action d'une « jection » (injection, surjection ou bijection) sur la dimension d'un espace.

Proposition 12

Soient E et F deux K-espaces vectoriels.

(i) Si F est de dimension finie et s'il existe une application linéaire injective de E dans F, alors E est de dimension finie et $\dim E \leqslant \dim F$.

(ii) Si E est de dimension finie et s'il existe une application linéaire surjective de E sur F, alors F est de dimension finie et $\dim E \geqslant \dim F$.

(iii) Si E ou F est de dimension finie et si E et F sont isomorphes, alors E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

■ (i) Supposons que F est de dimension finie et qu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ injective. La restriction g de f à $\operatorname{Im} f$ à l'arrivée est un isomorphisme entre E et $\operatorname{Im} f$. Dès lors, si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ (qui est de dimension finie car F l'est), le théorème de l'image d'une base dit que $\big(g^{-1}(f_1), \ldots, g^{-1}(f_n)\big)$ est une base de E. Donc E est de dimension finie et $\dim E = n \leqslant \dim F$.

(ii) Supposons que E est de dimension finie et qu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ surjective. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le théorème de l'image d'une base dit que $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est génératrice de F. Donc F est de dimension finie et $\dim F \leqslant n = \dim E$.

(iii) On compile (i) et (ii). ■

Ainsi, pour que f soit injective, il faut que $m \leqslant n$ et pour que f soit surjective, il faut que $m \geqslant n$. Pour les isomorphismes, la dimension permet de décrire les classes d'isomorphie.

Proposition 13

Deux K-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

■ $\Rightarrow$ C'est le (iii) de la proposition précédente.

$\Leftarrow$ Soient E et F deux espaces de même dimension finie n. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Considérons $f \in \mathscr{L}(E, F)$ définie par $\forall k \in [\![1; n]\!],\ f(e_k) = f_k$. Alors f est bien un isomorphisme car f envoie une base sur une base. ■

Ce résultat dit en particulier que tout K-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n. Autrement dit, dans un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$, il revient au même de travailler sur les vecteurs de E ou sur les n-uplets de coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathscr{B}$.

Exemples :

- Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui satisfont la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_1 u_n + a_2 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p-1}$, où $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ sont fixés.
  L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $\forall u \in E,\ \varphi(u) = (u_0, u_1, \cdots, u_{p-1})$ est linéaire.
  Pour une suite de E, on sait que l'on peut imposer les valeurs des p premiers termes, ce qui démontre que φ est surjective.
  Par ailleurs, si $u \in E$ est telle que $\varphi(u) = 0$ alors u est la suite nulle (ses p premiers termes sont nuls et la formule de récurrence permet de propager cette nullité), donc φ est injective.
  Ainsi, φ est un isomorphisme et l'on a $\dim E = \dim \mathbb{R}^p = p$.

B.2. Rang d'une application linéaire

a) Définition

Définition 5

Soient E, F deux K-espace vectoriels de dimension quelconque et f une application linéaire de E vers F. On dit que f est de rang fini lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de f la dimension de $\operatorname{Im} f$ notée $\operatorname{rg}(f)$. Autrement dit,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Par analogie (et pour ne pas éveiller la jalousie du noyau), on appelle quelquefois corang f la dimension du noyau de f.

La proposition suivante fait le lien entre les deux notions de rang rencontrées lors de ce cours : le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une application linéaire.

Proposition 14

Soient E, F deux K-espace vectoriels de dimensions quelconques, f une application linéaire de E vers F et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Le rang de f est aussi le rang de la famille $f(\mathscr{B}) = \big(f(e_i)\big)_{i \in I}$.

■ Nous avons vu que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i \in I}$. Le résultat est donc évident. En particulier, on notera que le rang de f ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E choisie. ■

On peut immédiatement donner des majorations élémentaires du rang.

Proposition 15

Soient E, F deux K-espace vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Alors

(i) si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$;

(ii) si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$.

Par conséquent, si E et F sont tous les deux de dimension finie, on a

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F).$$

■ (i) Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\big(f(\mathscr{B})\big) \leqslant \operatorname{card}\big(f(\mathscr{B})\big) \leqslant \operatorname{card} \mathscr{B} = \dim E$.

(ii) On a $\operatorname{Im} f \subset F$, ce qui donne immédiatement le résultat en passant aux dimensions. ■

L'inégalité $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$ nous dit que l'action d'une application linéaire sur un sous-espace ne peut que faire diminuer la dimension.

b) Théorème du rang

Voici le très (très) important théorème du rang.

Théorème 5

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F un K-espace vectoriel quelconque et f une application linéaire de E vers F. Alors

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

■ Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Le théorème du rang géométrique (vu dans le chapitre sur les applications linéaires en dimension quelconque) nous dit que la restriction de f de S vers $\operatorname{Im} f$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que $\dim S = \dim \operatorname{Im} f$ d'après la proposition 12. Or $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim S$ puisque $E = \operatorname{Ker} f \oplus S$, donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. ■

Autrement dit, on a $\operatorname{corang} f + \operatorname{rg}(f) = \dim(\text{espace de départ})$, ce qui signifie que les dimensions du noyau et de l'image sont complémentaires l'une de l'autre pour obtenir la dimension de l'espace de départ. En particulier, plus le noyau est gros, plus l'image est petite et vice-versa.

Exemples :

- Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Démontrons qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ si, et seulement si, $\dim E$ est paire.

  Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$, le théorème du rang dit que $\dim E = 2 \operatorname{rg}(u)$ donc $\dim E$ est paire.

  Réciproquement, si $\dim E$ est paire, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ de E. Il suffit alors de construire u par son action sur la base $\mathscr{B}$ en posant $u(e_1) = \cdots = u(e_p) = 0_E$ et $u(e_{p+1}) = e_1$, $u(e_{p+2}) = e_2$, $\dots$, $u(e_{2p}) = e_p$. On a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \operatorname{Im} u$.

Pour démontrer qu'une partie E' d'un espace vectoriel E est un sous-espace de E, on peut le faire à la main (en vérifiant que 0_E est dans F et que F est stable par combinaison linéaire). On peut aussi démontrer que E' est le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Cette seconde méthode peut paraître a priori plus compliquée (puisqu'il est nécessaire de trouver une application linéaire ad-hoc). Elle a toutefois un avantage en dimension finie : elle permet de minorer la dimension de E' grâce au théorème du rang. En effet, si $E' = \operatorname{Ker} f$, on a $\dim E' = \dim E - \operatorname{rg} f \geqslant \dim E - \dim F$. 6 h 00

c) *Rang et « jection »*

Dans le cadre de la dimension finie, on peut reformuler le théorème de l'image d'une base à l'aide du rang.

Proposition 16

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Pour toute application linéaire f de E vers F, on a

(i) f est injective si et seulement si, $\operatorname{rg}(f) = \dim E$;

(ii) f est surjective si et seulement si, $\operatorname{rg}(f) = \dim F$;

(iii) f est bijective si et seulement si, $\operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F$.

■ (i) On a (f injective) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$) $\Leftrightarrow$ ($\dim \operatorname{Ker} f = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{rg}(f) = \dim E$) où la dernière équivalence découle du théorème du rang.

(ii) On a (f surjective) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Im} f = F$) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{rg}(f) = \dim F$).

(iii) Il suffit de compiler (i) et (ii). ■

Nous verrons, plus loin dans ce cours, que les matrices permettent de calculer aisément le rang d'une application linéaire et donc de caractériser facilement les « jections ».

Le résultat suivant est un prototype de théorème Bonux : il donne la bijectivité en ne démontrant que l'injectivité (cas le plus courant) ou que la surjectivité (cas plus rare), accompagnée d'un argument de dimension. On notera l'analogie avec le résultat sur les applications entre ensembles finis.

Théorème 6

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Si E et F sont de <u>même</u> dimension <u>finie</u>, alors

$$(f \text{ est injective}) \iff (f \text{ est bijective}) \iff (f \text{ est surjective}).$$

En particulier, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inversible si, et seulement si, il est inversible à droite ou inversible à gauche.

■ Il suffit de faire $n = m$ dans la proposition précédente. ■

Ce théorème possède DEUX hypothèses indispensables : il faut, d'une part, que les espaces soient de dimension finie et, d'autre part, qu'ils aient la même dimension. Le résultat est faux en dimension infinie (même si E et F sont tous les deux de dimension infinie). Par exemple, l'endomorphisme « shift » de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, défini par $(u_n)_{n\geqslant 0} \longmapsto (u_{n-1})_{n\geqslant 1}$, est surjectif mais non injectif.

<u>**Exemples :**</u>

- Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. On considère l'application linéaire $\varphi : K_{n-1}[X] \longrightarrow K^n$ définie par $\varphi(P) = \big(P(a_1), \dots, P(a_n)\big)$ pour tout $P \in K[X]$.

  Démontrons que φ est un isomorphisme.

  Si $\varphi(P) = 0$ alors P est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui admet n racines distinctes, donc P est le polynôme nul et l'on a $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. Donc φ est bien injective. Comme $\dim K_{n-1}[X] = n = \dim K^n$, on en déduit que φ est un isomorphisme.

  Les antécédents $L_1, \dots, L_n$ par φ des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de la base canonique de K^n sont les polynômes élémentaires d'interpolation de Lagrange définis, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, par $L_i = \prod_{k\in[\![1;n]\!]\setminus\{i\}} (X - a_k)/(a_i - a_k)$. On retrouve que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $K_{n-1}[X]$.

Le théorème 6 va nous permettre de démontrer efficacement deux résultats sur les matrices que nous avions obtenus non sans effort. On commence par l'équivalence, pour les matrices, entre l'inversibilité et l'inversibilité latérale.

Proposition 17

Une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$ est inversible si, et seulement si, elle est inversible à droite ou inversible à gauche.

■ $\Rightarrow$ Il est clair qu'une matrice inversible est inversible à gauche et à droite.

$\Leftarrow$ Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice inversible à gauche (le cas inversible à droite se traite de même). Il existe alors $A' \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $A'A = I_n$. Considérons l'application $\varphi_A : \mathscr{M}_n(K) \longrightarrow \mathscr{M}_n(K)$ définie par $\varphi_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(K)$. Il est clair que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$. On a $(M \in \operatorname{Ker} \varphi_A) \Leftrightarrow (AM = 0_n) \Leftrightarrow (A'AM = 0_n) \Leftrightarrow (M = 0_n)$, donc $\operatorname{Ker} \varphi_A = \{0_n\}$ et φ_A est injectif. Comme $\mathscr{M}_n(K)$ est de dimension finie, on en déduit que φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$. En particulier, φ_A est surjectif, ce qui implique que I_n possède un antécédent $A'' \in \mathscr{M}_n(K)$ par φ_A de sorte que $AA'' = I_n$. Dès lors, A admet un inverse à gauche A' et un inverse à droite A'' et l'égalité $A' = A'(AA'') = (A'A)A'' = A''$ montre qu'ils sont égaux. Donc A est inversible. ■

On peut aussi utiliser le théorème 6 pour démontrer la stabilité de l'inversion dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) inversibles.

Proposition 18

Si A est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) inversible, alors A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

■ Soit A une matrice triangulaire supérieure inversible (le cas triangulaire inférieure se traite de même). Considérons $\varphi_A : \mathscr{T}_n^+(K) \longrightarrow \mathscr{T}_n^+(K)$ définie par $\varphi_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathscr{T}_n^+(K)$. Il est clair que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{T}_n^+(K)$. On a $(M \in \operatorname{Ker} \varphi_A) \Leftrightarrow (AM = 0_n) \Leftrightarrow (A^{-1}AM = 0_n) \Leftrightarrow (M = 0_n)$, donc $\operatorname{Ker} \varphi_A = \{0_n\}$ et φ_A est injectif. Comme $\mathscr{T}_n^+(K)$ est de dimension finie, on en déduit que φ_A est un automorphisme de $\mathscr{T}_n^+(K)$. En particulier, φ_A est surjectif, ce qui implique que I_n possède un antécédent $B \in \mathscr{T}_n^+(K)$ par φ_A de sorte que $AB = I_n$. Dès lors, on a $A^{-1} = B \in \mathscr{T}_n^+(K)$. ■

Ce résultat nous dit que $\mathscr{T}_n^+(K) \cap \mathscr{GL}_n(K)$ et $\mathscr{T}_n^-(K) \cap \mathscr{GL}_n(K)$ sont des sous-groupes de $\mathscr{GL}_n(K)$.

d) *Rang d'une composée*

On termine ce paragraphe en énonçant les propriétés du rang d'une composée.

Proposition 19

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie. On considère $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires composables. Alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big).$$

De plus, on a

$$(f \text{ isomorphisme entre } E \text{ et } F) \implies \big(\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)\big)$$

et

$$(g \text{ isomorphisme entre } F \text{ et } G) \implies \big(\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)\big).$$

■ ▷ On a $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$ donc $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Im}(g)$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g)$.

Lorsque f est un isomorphisme entre E et F, on a $g = g \circ f \circ f^{-1}$, donc $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$. On a donc $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g \circ f)$ et, par suite, $\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$.

▷ On a $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ donc $\dim \operatorname{Ker}(f) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(g \circ f)$, ce qui donne, d'après le théorème du rang, $\dim E - \operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E - \operatorname{rg}(g \circ f)$ et donc $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f)$.

Lorsque g est un isomorphisme entre F et G, on a $f = g^{-1} \circ g \circ f$, ce qui donne $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker}(f)$. On a donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E - \operatorname{rg}(f) = \dim E - \operatorname{rg}(g \circ f)$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g \circ f)$. ■

On retient généralement cet énoncé de la façon suivante : composer par une application linéaire (à droite ou à gauche) ne peut que faire baisser le rang ! Celui-ci est conservé si l'on compose par un isomorphisme.

En fait, l'hypothèse de bijectivité est plus forte que nécessaire pour conserver le rang. On peut démontrer que

$$(f \text{ surjective de } E \text{ sur } F) \implies \big(\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)\big)$$

et

$$(g \text{ injective de } F \text{ dans } G) \implies \big(\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)\big).$$

Notons enfin que la proposition précédente peut être énoncée avec des espaces qui ne sont pas de dimension finie. Il suffit alors de supposer que f et g sont de rang fini.

B.3. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

a) Dimension du dual

Rappelons qu'une forme linéaire sur le K-espace vectoriel E est une application linéaire de E dans K. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* et s'appelle le dual de E.

La dualité (c'est-à-dire l'étude du dual d'un espace vectoriel) n'est pas un objectif du programme de première année. On se contente ci-dessous de démontrer qu'en dimension finie, un espace et son dual ont la même dimension.

Proposition 20

Soient E un K-espaces vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on appelle k-ème forme coordonnée l'unique forme linéaire telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]\,,\ e_k^*(e_i) = \delta_{k,i}$ où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker. Cette forme linéaire associe à tout vecteur sa coordonnée d'indice k dans la base $\mathscr{B}$.

La famille $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathscr{B}$.

En particulier, on a $\dim E^* = \dim E$.

■ Supposons l'existence de $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = \widetilde{0}$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, l'évaluation en e_k donne $\lambda_1 e_1^*(e_k) + \cdots + \lambda_n e_n^*(e_k) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_k = 0$. Ainsi $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

Soit $\ell \in E^*$. On pose $m = \ell(e_1)e_n^* + \cdots + \ell(e_n)e_n^*$. On constate alors que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $m(e_k) = \ell(e_1)e_n^*(e_k) + \cdots + \ell(e_n)e_n^*(e_k) = \ell(e_k)$. Cela signifie que m et ℓ coïncident sur une base de E et donc que $\ell = m$. Par conséquent, on a $\ell = \ell(e_1)e_n^* + \cdots + \ell(e_n)e_n^* \in \mathrm{Vect}(e_1^*, \dots, e_n^*)$, ce qui démontre que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est génératrice de E^*. ■

Nous retrouverons plus loin le résultat $\dim E^* = \dim E$ à l'aide de la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$.

b) Dimension d'un hyperplan et d'une intersection d'hyperplans

Rappelons qu'un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ℓ et que, dans ce cas, la relation $\ell(x) = 0$ est une équation cartésienne de l'hyperplan H.

Dans le cadre de la dimension finie, si $(x_1, \dots, x_n)$ désigne les coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée, on a $\ell(x) = \ell(e_1)x_1 + \cdots + \ell(e_n)x_n$, donc H admet une équation cartésienne de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls (qui désignent respectivement $\ell(e_1), \dots, \ell(e_n)$). On retrouve ainsi la forme familière d'une équation cartésienne d'hyperplan (telle qu'on la connait dans K^n). Dans cette base, les autres équations cartésiennes de H sont proportionnelles à celle-ci puisque l'on sait que toutes les équations cartésiennes de H sont proportionnelles entre-elles.

Rappelons également que nous avons démontré qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, H possède un supplémentaire dans E qui est une droite vectorielle.

Proposition 21

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Une partie H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

■ $\Rightarrow$ Supposons que H est un hyperplan de E, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$. Le théorème du rang nous dit alors que $n = \dim \operatorname{Ker} \ell + \operatorname{rg}(\ell)$. Or ℓ n'est pas nulle donc est surjective (nous l'avons vu), ce qui donne $\operatorname{rg}(\ell) = 1$ puis $\dim H = n - 1$.

$\Leftarrow$ Supposons que H est une sous-espace de E de dimension $n-1$ et considérons $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. Le théorème de la base incomplète nous dit que l'on peut compléter cette famille en une base de E, c'est-à-dire qu'il existe $e_n \in E$ telle $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E. Alors $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $D = \operatorname{Vect}(e_n)$ sont supplémentaires, ce qui démontre que H est un hyperplan de E. ■

L'importance des hyperplans est justifiée par la proposition suivante. On y énonce qu'intersecter des hyperplans suffit pour obtenir tous les sous-espaces d'un espace vectoriel donné (en convenant qu'une intersection vide est égale à l'espace tout entier).

Proposition 22

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $p \in [\![0; n]\!]$. Alors

(i) l'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace de E de dimension supérieure ou égale à $n - p$;

(ii) tout sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

■ Les deux résultats sont évident lorsque $p = 0$. On considère donc que $p \in [\![1; n]\!]$.

(i) Soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E. On note $\ell_1, \dots, \ell_p$ des formes linéaires non nulles dont les noyaux respectifs sont $H_1, \dots, H_p$. On introduit l'application linéaire $f : E \longrightarrow K^p$ définie par $f(x) = \big(\ell_1(x), \dots, \ell_p(x)\big)$ pour tout $x \in E$. On constate aisément que $\operatorname{Ker} f = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. Le théorème du rang nous dit alors que $n = \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) + \operatorname{rg}(f)$. Or $\operatorname{Im} f \subset K^p$ donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant p$, ce qui donne $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geqslant n - p$.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$. Considérons $(e_1, \dots, e_{n-p})$ une base de F et complétons cette famille libre en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-p}, e_{n-p+1} \dots, e_n)$ de E. Introduisons la base duale $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de $\mathscr{B}$. Alors

$$F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-p}) = \{x \in E : e_{n-p+1}^*(x) = \cdots = e_n^*(x) = 0\} = \operatorname{Ker}(e_{n-p+1}^*) \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}(e_n^*)$$

où la seconde égalité traduit le fait qu'un vecteur est une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-p}$ si, et seulement si, ses coordonnées sur $e_{n-p+1} \dots, e_n$ sont nulles. On a donc bien obtenu que F est l'intersection de p hyperplans de E. ■

Les résultats de cette proposition signifient en substance qu'intersecter un sous-espace avec un hyperplan fait chuter la dimension d'une unité (sauf dans le cas où le sous-espace est déjà inclus dans l'hyperplan).

C. Matrices

C.1. Représentations matricielles

a) Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 6

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ la matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, obtenue en rangeant en colonne les coordonnées des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit,

$$\text{si } \begin{cases} x_1 = \alpha_{1,1}e_1 + \cdots + \alpha_{n,1}e_n, \\ x_2 = \alpha_{1,2}e_1 + \cdots + \alpha_{n,2}e_n, \\ \quad\vdots \\ x_p = \alpha_{1,p}e_1 + \cdots + \alpha_{n,p}e_n, \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,p} \end{pmatrix}.$$

En particulier, lorsque $p = 1$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Les coordonnées d'un vecteur (dans une base donnée $\mathscr{B}$) caractérisant complètement ce vecteur, l'application $x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est une bijection entre E et $\mathscr{M}_{n,1}(K)$.

Comme toujours, l'ordre des vecteurs dans la base influe sur l'ordre des coordonnées et donc sur l'ordre des coefficients dans la matrice.

Exemples :

- On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = I_n$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, on prend la base $\mathscr{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ et la famille $\mathscr{F} = \{(1,2),(0,-1),(4,7)\}$. Alors $(1,2) = -(1,0)+2(1,1)$, $(0,-1) = 1(1,0)-1(1,1)$ et $(4,7) = -3(1,0)+7(1,1)$, donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs de K^n, la matrice de cette famille dans la base canonique $\mathscr{B}_{\text{can}}$ de K^n est obtenue en rangeant en colonne les coordonnées des vecteurs. Si $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$, $v_4 = (-1,-1,-1)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
- La matrice A de la famille de vecteurs $\mathscr{F} = \big(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3\big)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_{\text{can}} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}} \mathscr{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Soit E le plan vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ de base $\mathscr{B} = (\cos, \sin)$. Considérons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-ix}$. Comme $f = \cos + i\sin$ et $g = \cos - i\sin$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f, g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

L'opération fondamentale que l'on peut effectuer à partir d'une famille de vecteurs est le calcul d'une combinaison linéaire. L'énoncé ci-dessous explique comment effectuer une telle combinaison à partir de la matrice de la famille. C'est un premier exemple de traduction matricielle ; nous en verrons d'autres pour les applications linéaires.

Proposition 23

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ la matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour tout vecteur x de coordonnées $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et toute famille de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$, on a

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

■ Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{n,j})$ les coordonnées de x_i dans la base $\mathscr{B}$. Il suffit de constater que la relation vectorielle $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$ se traduit par le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_{1,1}\lambda_1 & + & \alpha_{1,2}\lambda_2 & + \dots + & \alpha_{1,m}\lambda_m & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\lambda_1 & + & \alpha_{2,2}\lambda_2 & + \dots + & \alpha_{2,m}\lambda_m & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1}\lambda_1 & + & \alpha_{n,2}\lambda_2 & + \dots + & \alpha_{n,m}\lambda_m & = & \beta_n \end{array} \right.$$

dont l'écriture matricielle est précisément celle donnée dans l'énoncé. ■

Exemples :

- Dans le deuxième exemple ci-dessus, on considère le vecteur $x = 2(1,2) - 3(0,-1) + 5(4,7)$. Alors les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont données par

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 42 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que $x = -20(1,0) + 42(1,1)$.

8 h 00

b) Matrice d'une application linéaire

Définition 7

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, de la famille de vecteurs $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$. Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(\mathscr{B})\big)$.

Lorsque f est un endomorphisme de E, on utilise habituellement la même base $\mathscr{B}$ pour E au départ et à l'arrivée. On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

L'encadré suivant donne la recette de la détermination de la matrice d'une application linéaire.

Calculer, décomposer, rangencolonner !

Pour déterminer la matrice de l'énoncé précédent, on effectue les étapes suivantes :

- On calcule $f(e_1)$, $f(e_2)$, …, $f(e_m)$.
- On décompose chacun de ces vecteurs dans la base $\mathscr{C}$:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \cdots + a_{n,1}f_n \\ f(e_2) = a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \cdots + a_{n,2}f_n \\ \quad\vdots \\ f(e_m) = a_{1,m}f_1 + a_{2,m}f_2 + \cdots + a_{n,m}f_n \end{cases}$$

- On range les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$, …, $f(e_m)$ en colonnes, ce qui fournit la matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \boxed{a_{1,j}} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ f_i \\ \\ f_n \end{array}$$

coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{C}$

Tout problème lié à une application linéaire en dimension finie admet une traduction matricielle, qui a l'avantage d'être plus concrète et de bien se prêter aux calculs, y compris sur machine.

Exemples :

- Pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute base $\mathscr{C}$ de F, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\widetilde{0}) = 0$.
- Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.
  Plus généralement, la matrice de $k\,\mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire de l'homothétie de rapport k, est la matrice scalaire kI_n.
- Si f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_1[X]$ dont la matrice relative aux bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$f(1,0,0) = 1 + 3X, \qquad f(0,1,0) = 5 - X \qquad \text{et} \qquad f(0,0,1) = -X.$$

- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par
$$f(x,y,z) = (-y+z, x-2z).$$
Si l'on travaille au départ et à l'arrivée avec les bases canoniques, on a
$$f(1,0,0) = (0,1), \qquad f(0,1,0) = (-1,0), \qquad f(0,0,1) = (1,-2)$$
donc la matrice M de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
On constate ainsi que les coefficients de la matrice relative aux bases canoniques sont ceux de $x, y, z, \ldots$ dans la définition de l'application linéaire. Ce résultat n'est plus vrai si l'on ne travaille pas avec les bases canoniques, comme l'illustre l'exemple suivant.
- Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'exemple précédent $f(x,y,z) = (-y+z, x-2z)$ en munissant l'espace de départ de la base $\mathscr{B} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ et l'espace d'arrivée de la base $\mathscr{C} = \big((1,1),(0,1)\big)$. On a alors
$$\begin{cases} f(1,0,0) = (0,1) = 0(1,1) + 1(0,1) \\ f(1,1,0) = (-1,1) = -1(1,1) + 2(0,1) \\ f(1,1,1) = (0,-1) = 0(1,1) - 1(0,1), \end{cases}$$
donc la matrice N de f relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est
$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = XP' - 3P + P''$. Déterminons la matrice M de f relative à la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On a
$$f(1) = -3, \qquad f(X) = -2X, \qquad f(X^2) = 2 - X^2$$
donc
$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux supplémentaires de E de dimensions respectives p et q. On considère $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ une base de G. Le lemme de juxtaposition des bases nous dit que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$). Soit f un endomorphisme de E. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice par blocs de la forme
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$
où $A \in \mathscr{M}_p(K)$, $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $D \in \mathscr{M}_q(K)$.
Si $B = 0_{q,p}$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
donc, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on a $f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, ce qui signifie que F est stable par f et que $f\big|_F^F$ est un endomorphisme de F dont la matrice dans $\mathscr{B}_F$ est A.
- Gardons les notations de l'exemple précédent. Soit π la projection sur F dans la direction de G et σ la symétrie par rapport à F dans la direction de G. Les matrices de π et σ dans la base $\mathscr{B}$ sont les matrices par blocs suivantes :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0_q \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

L'énoncé suivant décrit la façon d'obtenir, à partir de la matrice, l'image d'un vecteur donné. C'est un second énoncé de traduction matricielle.

Proposition 24

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit f une application linéaire de E vers F.

Pour tout vecteur x de E, on note X la matrice colonne (de $\mathscr{M}_{m,1}(K)$) des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$ et Y la matrice colonne (de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$) des composantes de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$. Enfin, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

On a

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Y = MX.$$

■ Notons $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ et $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. On a

$$f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j a_{i,j}\Big) f_i,$$

d'où

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{i,j}.$$

Ces égalités traduisent bien que $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)X$, c'est-à-dire $Y = MX$. ■

L'action d'une application linéaire revient donc, pour les matrices unicolonnes représentant les vecteurs, à une multiplication à gauche par la matrice A.

<u>Exemples :</u>

- Reprenons l'exemple de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par

  $$f(x, y, z) = (-y + z, x - 2z).$$

  Pour calculer l'image de $(1, 2, 3)$, on peut écrire directement que $f(1, 2, 3) = (1, -5)$.
  On peut également utiliser le calcul matriciel. Pour cela, on munit au départ $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathscr{B} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ et à l'arrivée $\mathbb{R}^2$ de la base $\mathscr{C} = \big((1, 1), (0, 1)\big)$de sorte que f soit représentée par

  $$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

  On décompose le vecteur $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{B}$, ce qui donne

  $$(1, 2, 3) = -1.(1, 0, 0) - 1.(1, 1, 0) + 3.(1, 1, 1),$$

  puis on effectue le calcul matriciel

  $$N \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

  ce qui (re)donne

  $$f(1, 2, 3) = 1(1, 1) - 6(0, 1) = (1, -5).$$

C.2. Traduction matricielle des opérations sur les applications linéaires

a) Combinaison linéaire

Proposition 25

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n munis des bases respectives $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soient f, g deux applications linéaires de E vers F et λ, μ deux scalaires. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

■ C'est la traduction matricielle de l'égalité $\forall x \in E,\ (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. ■

On retiendra que la matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires est la combinaison linéaire des matrices de ces applications.

Ce résultat permet donc, une fois des bases fixées au départ et à l'arrivée, d'identifier l'ensemble des applications linéaires de E vers F avec l'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,m}(K)$.

Corollaire 2

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n munis des bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. L'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,m}(K) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, on a

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

et

$$\dim \mathscr{L}(E) = (\dim E)^2.$$

■ La proposition précédente implique que φ est linéaire. C'est clairement une application bijective (une fois les bases fixées, connaître la matrice revient à connaître l'application linéaire). ■

En prenant $F = K$, on retrouve que $\dim E^* = \dim E$.

b) Composition

Le résultat suivant justifie l'introduction du produit matriciel.

Proposition 26

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimensions respectives m, n et p munis des bases respectives $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$, $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_p)$. On considère $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires composables. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

■ Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)$. Soit $x \in E$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}\big((g \circ f)(x)\big) = B \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(x)\big) = BA \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x),$$

ce qui démontre que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. ■

On retiendra que la matrice d'une composée d'applications linéaires est le produit des matrices de ces applications.

Lorsque u est un endomorphisme de E, on a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k) = \big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemples :

- Un endomorphisme u de E est nilpotent si, et seulement si, sa matrice (dans n'importe quelle base) est elle-même nilpotente.

c) Inversion

Proposition 27

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension n munis des bases respectives $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors

$$\big(f \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible}\big).$$

De plus, dans ce cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big)^{-1}.$$

■ $\Rightarrow$ Supposons que f est un isomorphisme. La traduction matricielle de la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ donne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = I_n$, ce qui démontre à la fois que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{GL}_n(K)$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},C}(f)\big)^{-1}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Considérons $x \in \operatorname{Ker} f$ et notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. L'égalité $f(x) = 0_F$ se traduit matriciellement sous la forme $MX = 0_{n,1}$. En multipliant par M^{-1}, on obtient $X = 0_{n,1}$, c'est-à-dire $x = 0_E$. Cela démontre que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et donc que f est injective. Comme f est une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, on en déduit que f est un isomorphisme entre E et F. ■

On retiendra que la matrice de l'inverse d'un isomorphisme est l'inverse de la matrice de cet isomorphisme.

La proposition précédente est généralement utilisée dans le cas où $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. Elle dit alors que la matrice d'un automorphisme u de E est inversible et que la matrice de u^{-1} est l'inverse de la matrice de u. Ce résultat justifie la similarité des notations adoptées pour désigner l'ensemble $\mathscr{GL}(E)$ des automorphismes de E et l'ensemble $\mathscr{GL}_n(K)$ des matrices inversibles. Le corollaire qui suit précise le lien qui unit ces deux groupes linéaires.

Corollaire 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$. L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{GL}(E) & \longrightarrow & \mathscr{GL}_n(K) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de groupes. Les groupes $\big(\mathscr{GL}(E), \circ\big)$ et $\big(\mathscr{GL}_n(K), \times\big)$ sont ainsi isomorphes.

■ AQT ■

9 h 45

Lorsque u est un automorphisme de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

C.3. Géométrisation d'un problème matriciel

Jusqu'ici, les matrices nous ont permis d'étudier les applications linéaires. Inversement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ définit une application linéaire (et une seule) d'un espace vectoriel de dimension m dans un espace vectoriel de dimension n, munis chacun d'une base. Ainsi, tout problème sur les matrices peut être interprété en termes d'applications linéaires, ce qui donne accès à de puissants moyens de démonstration (image, noyau, rang, dimension, bases, etc.). On dit alors que l'on géométrise le problème.

a) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

En pratique, parmi toutes les application linéaires représentées par une matrice, on distingue celle définie de K^m dans K^n, munis des bases canoniques.

Définition 8

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de K^m dans K^n relative aux bases canoniques de ces deux espaces.

En identifiant K^m à $\mathscr{M}_{m,1}(K)$ et K^n à $\mathscr{M}_{n,1}(K)$, l'application linéaire canoniquement associée avec $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ est

$$a \left\{ \begin{array}{ccc} K^m & \longrightarrow & K^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

Exemples :

- L'application linéaire canoniquement associée à $U = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est

$$u \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (5x-y, 3x+2y). \end{array} \right.$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ telle que $\forall X \in \mathscr{M}_{m,1}(K),\ AX = 0_{n,1}$. Démontrons que $A = 0_{n,m}$.
  Soit $a \in \mathscr{L}(K^m, K^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. L'hypothèse se traduit par $\forall x \in K^m,\ a(x) = 0_{K^n}$, ce qui signifie que $a = \widetilde{0}$ et donc que $A = 0_{n,m}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une nouvelle démonstration du résultat qui justifie la méthode d'inversion des matrices carrées (celle que nous avons décrite dans le chapitre sur les matrices). Ce résultat est obtenu à l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice.

Proposition 28

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On a

$$\big(\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K),\quad \exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(K),\quad AX = Y\big) \iff \big(A \in \mathscr{GL}_n(K)\big).$$

■ Soit a l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A. L'assertion de gauche signifie alors que a est un automorphisme, ce qui est équivalent à l'assertion de droite d'après la proposition 27. ■

b) Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 9

Le noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, noté $\operatorname{Ker} A$, est défini comme le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathscr{M}_{m,1}(K) : AX = 0_{n,1}\}.$$

L'image d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, notée $\operatorname{Im} A$, est définie comme l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K) : \exists X \in \mathscr{M}_{m,1}(K),\ Y = AX\}.$$

Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, noté $\operatorname{rg} A$, est défini comme le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A = m - \dim \operatorname{Ker} A.$$

■ L'égalité $\dim \operatorname{Im} A = m - \dim \operatorname{Ker} A$ découle du théorème du rang. ■

Voyons comment « lire » le rang, le noyau et l'image directement sur une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$.

- On sait que $\operatorname{Im} A$ est engendré par les images des vecteurs $E_1, \dots, E_m$ de la base canonique de $\mathscr{M}_{m,1}(K)$, c'est-à-dire les colonnes de A. On retiendra que

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_m),$$

où $C_1, \dots, C_m$ désignent les colonnes de A. En extrayant une famille libre maximale de $(C_1, \dots, C_m)$, on obtient une base de $\operatorname{Im} A$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{les colonnes de } A \text{ fournissent une famille génératrice de } \operatorname{Im} A.}$$

- Il en résulte que $\operatorname{rg} A$ est le rang de la famille $(C_1, \dots, C_m)$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. Nous verrons, plus loin dans ce cours, que $\operatorname{rg} A$ est également le rang de la famille $(L_1, \dots, L_n)$ dans $\mathscr{M}_{m,1}(K)$ et que ce rang est égal au nombre de pivots obtenus en appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice A. On retiendra que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{le rang de } A \text{ est le nombre de pivots de la réduite de Gauss obtenue}\\ \text{en appliquant la méthode du pivot (sur les lignes ou sur les colonnes).}\end{array}}$$

- Pour $X \in \mathscr{M}_{m,1}(K)$, les termes de la colonne AX sont les nombres L_1X, L_2X, …, L_nX où $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes de A. On a donc

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \left\{\begin{array}{c} L_1X = 0_K \\ \vdots \\ L_nX = 0_K \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,m}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

où $x_1, \dots, x_m$ sont les éléments de X. Ces relations constituent un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Ker} A$. Il suffit évidemment de résoudre ce système pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} A$. On retiendra que

$$\boxed{\text{les lignes de } A \text{ fournissent des équations cartésiennes de } \operatorname{Ker} A.}$$

La colonne AX est égale à $x_1C_1 + \cdots + x_mC_m$. Il en résulte que si on cherche un élément particulier de $\operatorname{Ker} A$, on peut chercher une combinaison linéaire nulle des colonnes de A. Sur de petites matrices, c'est souvent facile à repérer.

Recherche pratique du rang, de l'image et du noyau

En pratique, la recherche du rang, de l'image et du noyau d'une matrice A s'effectue en appliquant la méthode du pivot à la matrice. On peut le faire en agissant sur les lignes ou les colonnes.

Personnellement, j'ai une préférence pour le calcul en ligne mais ce n'est qu'une affaire d'habitude.

Le nombre de pivots obtenus est le rang r de la matrice A.

Les colonnes <u>de A</u> qui ont un pivot dans la réduite sont r vecteurs de rang r dans $\operatorname{Im} A$ qui est de dimension r ; ils forment donc une base de $\operatorname{Im} A$.

À ce stade, le théorème du rang nous dit que la dimension de $\operatorname{Ker} A$ est $m-r$. Si cette dimension est petite, on peut essayer de trouver des combinaisons nulles de colonnes ; chacune donne un vecteur du noyau. Si l'on trouve ainsi $m-r$ vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Ker} A$, ils forment une base de $\operatorname{Ker} A$.

Si $m-r$ n'est pas petit ou si l'on ne devine pas de relation entre les colonnes, on résout le système $AX = 0_{n,1}$ en utilisant la réduite de A obtenue par la méthode du pivot.

Exemples :

- Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
  - ▷ On a
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 & 2 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix} = 2$$
    donc $\dim \operatorname{Im} A = 2$.
  - ▷ On sait que les colonnes C_1, C_2, C_3, C_4 de A engendrent $\operatorname{Im} A$. En ne conservant que C_1 et C_3 (les colonnes qui ont un pivot dans la réduite), on obtient une famille de 2 vecteurs de rang 2 dans $\operatorname{Im} A$ qui est de dimension 2, donc $\operatorname{Im} A$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ porté par $(1,-1,0)$ et $(1,1,1)$.
  - ▷ Le théorème du rang nous dit que $\dim \operatorname{Ker} A = 4-2 = 2$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} A$, on a alors deux possibilités :
    - ∗ On remarque que $C_1 + C_3 + C_4 = 0$ et $C_2 - C_3 + C_4 = 0$, on sait que les vecteurs $(1,0,1,1)$ et $(0,1,-1,1)$ appartiennent à $\operatorname{Ker} A$. Comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une famille de 2 vecteurs de rang 2 dans $\operatorname{Ker} A$ qui est de dimension 2, donc $\operatorname{Ker} A$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ porté par $(1,0,1,1)$ et $(0,1,-1,1)$.
    - ∗ Si l'on est moins inspiré, on écrit
$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} A & \iff AX = 0_{n,1} \\ & \iff \begin{cases} \boxed{-x} + y + z = 0 \\ 2y + \boxed{z} - t = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$
      d'où $\operatorname{Ker} A$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ porté par $(-1,1,-2,0)$ et $(1,0,1,1)$.

Le rang permet en particulier de caractériser les matrices carrées inversibles.

Proposition 29

On a
$$\big(A \in \mathscr{GL}_n(K)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\mathrm{rg}(A) = n\big).$$

■ Soit a l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A. L'assertion de gauche dit que a est un automorphisme. Celle de droite signifie que a est surjectif. Le théorème 6 dit que c'est pareil ! ■

La propriété sur le rang d'une composée d'applications linéaires (proposition 19) se traduit matriciellement.

Proposition 30

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(K)$. On a
$$\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big).$$
De plus, on a
$$\big(n = m \text{ et } A \in \mathscr{GL}_n(K)\big) \implies \big(\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)\big)$$
et
$$(m = p \text{ et } B \in \mathscr{GL}_m(K)) \implies \big(\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)\big).$$

■ Il suffit d'associer à A et B leurs applications linéaires canoniquement associées et d'utiliser la proposition 19 . ■

On retient généralement cet énoncé de la façon suivante : multiplier par une matrice (à droite ou à gauche) ne peut que faire baisser le rang ! Celui-ci est conservé si l'on multiplie par une matrice inversible.

c) *Applications linéaires associées à une matrice*

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ étant donnée, nous avons vu, au paragraphe a) de cette section, qu'il est possible de lui associer canoniquement une application linéaire définie de K^m dans K^n munis des bases canoniques. Dans ce paragraphe, on étend cette association en faisant le lien entre la matrice A et toute famille de vecteurs ou toute application linéaire réprésentée par A.

Proposition 31

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n munis des bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

- Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Alors

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E : \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}\, A\}, \qquad \mathrm{Im}\, f = \{y \in F : \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}\, A\}$$

  et

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$

- Soient $A \in \mathscr{M}_{m,p}(K)$ et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E liées par la relation $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Alors

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A).$$

■
- Les égalités $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E : \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}\, A\}$ et $\mathrm{Im}\, f = \{y \in F : \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}\, A\}$ découlent d'une simple traduction matricielle. Le résultat sur le rang s'en déduit.
- Considérons l'application linéaire $f : K^p \longrightarrow E$ telle que $\forall k \in [\![1;p]\!],\ f(\varepsilon_k) = x_k$ où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ désigne la base canonique de K^p, notée $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$. Cette application existe et est unique puisqu'on impose l'image d'une base. Dès lors, on a $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(f(\mathscr{B}_{\mathrm{can}})\right) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}},\mathscr{B}}(f)\right) = \mathrm{rg}(A)$ où la troisième égalité découle du résultat ci-dessus. ■

Ce résultat dit, en particulier, que toutes les matrices représentant la même famille de vecteurs ou la même application linéaire ont le même rang !

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou le rang, l'image et le noyau d'une application linéaire, on peut travailler avec n'importe quelle matrice (c'est-à-dire dans n'importe quelles bases). En particulier, le calcul du rang dans les matrices (qui se fait aisément par la méthode du pivot de Gauss) permet de savoir si une famille de vecteurs est libre/génératrice/base ou encore d'étudier l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire.

Exemples :

- Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. On note u l'endomorphisme de E tel que $u(P) = (1 - X^2)P' + 2XP$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $u(1) = 2X$, $u(X) = 1 + X^2$ et $u(X^2) = 2X$, donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  On constate que $\mathrm{rg}(A) = 2$, que $\mathrm{Im}\, A$ est le plan porté par $(0,1,0)$ et $(1,0,1)$ et que $\mathrm{Ker}\, A$ est la droite dirigée par $(1,0,-1)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(1 - X^2)$.

D. Changement de bases

D.1. Matrices de passage

Définition 10

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. On la note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

On a donc $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. C'est une matrice carrée d'ordre n.

On notera que, si $\mathscr{B}$ désigne l'« ancienne » base et $\mathscr{B}'$ la « nouvelle », la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle est la matrice des coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, notons $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique et $\mathscr{B}$ la base $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$. Alors
$$P_{\mathscr{B}_{\text{can}}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passer de l'espace E muni de la base $\mathscr{B}$ à l'espace E muni de la base $\mathscr{B}'$ ne change pas les vecteurs mais seulement leurs coordonnées. On peut donc interpréter une matrice de passage comme l'action de l'identité. On obtient le lemme suivant.

Lemme 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. On a
$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

■ AQT ■

Cette remarque permet d'établir les propriétés des matrices de passage.

Proposition 32

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni de trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$. On a

(i) $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}} = I_n$;

(ii) $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\, P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}$ (relation de Chasles) ;

(iii) $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

■ (i) AQT

(ii) $\mathrm{Id}_E : (E,\mathscr{B}'') \longrightarrow (E,\mathscr{B})$ est la composée de $\mathrm{Id}_E : (E,\mathscr{B}'') \longrightarrow (E,\mathscr{B}')$ et $\mathrm{Id}_E : (E,\mathscr{B}') \longrightarrow (E,\mathscr{B})$, d'où $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\,P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}$.

(iii) Cela découle de (ii) en prenant $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$. ■

La propriété (iii) de cette proposition nous dit que les matrices de passage d'une base à une autre sont toujours inversibles (ça, on le savait déjà).

Inversement, si l'on dispose d'une matrice inversible, la famille des colonnes de cette matrice est une base. Plus précisément, considérons une base $\mathscr{B}$ de E et une matrice A inversible d'ordre n. Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, notons x_j le vecteur dont les composantes sont celles de la j-ème colonne de A. Alors la famille $\mathscr{F} = (x_1,\dots,x_n)$ est une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = A$.

Les matrices inversibles sont donc exactement les matrices de passage d'une base à une autre.

Exemples :

- Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments distincts de K. On note $\mathscr{B}_{\text{can}} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $K_n[X]$ et $\mathscr{B}_{\text{Lag}} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ la base des polynômes élémentaires de Lagrange associés à $a_0, a_1, \dots, a_n$. Pour tout $P \in K[X]$, on a $P = P(a_0)L_0 + \cdots + P(a_n)L_n$. En particulier, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a $X^k = {a_0}^k L_0 + \cdots + {a_n}^k L_n$. La matrice de passage P de $\mathscr{B}_{\text{Lag}}$ à $\mathscr{B}_{\text{can}}$ est donc la matrice, dite de Vandermonde, suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & {a_0}^2 & \cdots & {a_0}^n \\ 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^n \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^n \end{pmatrix}.$$

  Cette matrice est inversible puisque c'est la matrice de passage de la base de Lagrange à la base canonique.

D.2. Formules de changements de bases

a) Familles de vecteurs et changements de bases

Proposition 33

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. On note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Soit $x \in E$. Si X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et si X' est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$, on a la formule de changement de base :

$$X = PX'.$$

Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Si l'on note M la matrice de la famille $\mathscr{F}$ relative à la base $\mathscr{B}$ et M' la matrice de $\mathscr{F}$ relative à la base $\mathscr{B}'$, la formule de changement de base se généralise sous la forme :

$$M = PM'.$$

■ On a $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = PX'$. La seconde formule est une version « multi-colonnes » de la première. ■

La formule de changement de base $X = PX'$ se réécrit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. C'est une relation de Chasles.

Paradoxalement, la matrice de passage de l'ancienne base $\mathscr{B}$ à la nouvelle base $\mathscr{B}'$ donne les anciennes coordonnées de x en fonction des « nouvelles » coordonnées de x. Ce qui peut apparaître a priori comme contre-intuitif chronologiquement est en fait bien pratique dans les calculs puisqu'on peut ainsi remplacer les anciennes coordonnées par de nouvelles ! Toutefois, pour calculer les nouvelles coordonnées d'un vecteur en fonction des anciennes, la formule de changement de base est à l'envers. Il faut alors inverser la matrice de passage pour déterminer X' en fonction de X.

Exemples :

- Plaçons-nous dans le plan euclidien orienté (dans le sens trigonométrique) muni de la base orthonormale directe $\mathscr{B}_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{B}_\theta = (\vec{u_\theta}, \vec{v_\theta})$ la base obtenue en faisant agir la rotation d'angle θ sur la base $\mathscr{B}_0$. On admet (pour le moment) que

$$\begin{cases} \vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{v_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

  Cela signifie que la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_\theta$ est

$$P_{\mathscr{B}_0\to\mathscr{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

  Au passage, on constate que $\det(P_{\mathscr{B}_0\to\mathscr{B}_\theta}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, ce qui démontre que $P_{\mathscr{B}_0\to\mathscr{B}_\theta}$ est inversible et donc que $\mathscr{B}_\theta$ est bien une base du plan.
  Dès lors, si l'on considère un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x_0, y_0) dans la base $\mathscr{B}_0$ alors ses coordonnées (x_θ, y_θ) dans la base $\mathscr{B}_\theta$ vérifient

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix}$$

  ce qui donne, après inversion de la matrice,

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

12 h 00

b) Applications linéaires et changements de bases

Proposition 34

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et F un K-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On note :

▷ $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$;

▷ $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$.

Soit f une application linéaire de E vers F dont :

▷ la matrice relative à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est notée A, c'est-à-dire $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$;

▷ la matrice relative à $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ est notée A', c'est-à-dire $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.

On a formule de changement de base pour les applications linéaires :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

■ On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"] \\
(E,\mathscr{B}') \arrow[u, "\mathrm{Id}_E"] \arrow[r, "f"] & (F,\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

ce qui signifie que

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E\,.$$

En termes matriciels, cela implique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \\
&= P_{\mathscr{C}'\to\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \\
&= (P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'})^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

Exemples :

- Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. On note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit ℓ une forme linéaire sur E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée L (c'est une matrice ligne, ça tombe bien) et la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est notée L'. Il va sans dire que la base utilisée pour K est (1). Alors $L' = LP$.

Comme on travaille souvent avec des endomorphismes (avec la même base au départ et à l'arrivée), c'est la proposition suivante qui est la plus utilisée.

Proposition 35

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. On note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Soit u un endomorphisme de E dont :

▷ la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée A, c'est-à-dire $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$;

▷ la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est notée A', c'est-à-dire $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

On a formule de changement de base pour les endomorphismes :

$$A' = P^{-1}AP.$$

■ C'est un corollaire immédiat de la proposition 34. ■

Exemples :

- Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $u(x,y,z) = (-3x-2y-4z, 4x+3y+5z, 2z)$.

  Recherchons la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{p}} = \big((1,-2,0),(1,-1,0),(-2,3,1)\big)$.

  Avant tout, il convient de vérifier que $\mathscr{B}_{\mathrm{p}}$ est bien une base. Pour cela, on note P la matrice de $\mathscr{B}_{\mathrm{p}}$ dans la base canonique et on calcule le rang de P :

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3,$$

  ce qui démontre que $\mathscr{B}_{\mathrm{p}}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est une famille de 3 vecteurs de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3).

  On envisage alors deux méthodes :

  * Méthode classique

    On calcule, on décompose et on rangencolonne. On a

$$\begin{cases} f(1,-2,0) = (1,-2,0) = 1(1,-2,0) + 0(1,-1,0) + 0(-2,3,1) \\ f(1,-1,0) = (-1,1,0) = 0(1,-2,0) - 1(1,-1,0) + 0(-2,3,1) \\ f(-2,3,1) = (-4,6,2) = 0(1,-2,0) + 0(1,-1,0) + 2(-2,3,1) \end{cases}$$

    donc

$$D = \mathrm{Diag}(1,-1,2).$$

  * Par changement de base

    Dans la base canonique $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$, la matrice M de u est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

    On sait déjà que P est inversible. Un calcul donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    La proposition précédente nous dit que

$$D = P^{-1}MP,$$

    ce qui donne, après calculs,

$$D = \mathrm{Diag}(1,-1,2).$$

  On a ainsi procéder à une diagonalisation de la matrice M. Dès lors, en utilisant la relation $M = PDP^{-1}$ et le fait que D est diagonale, on peut, par exemple, calculer les puissances de M.

D.3. Matrices équivalentes

La formule de changement de base pour les applications linéaires conduit à la définition suivante.

Définition 11

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe deux matrices $P \in \mathscr{GL}_m(K)$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(K)$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

La proposition 34 permet d'interpréter géométriquement la relation d'équivalence.

Proposition 36

Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

■ $\Leftarrow$ Si deux matrices représentent la même application linéaire, la proposition 34 nous dit que ces deux matrices sont équivalentes.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ sont équivalentes. Il existe alors $P \in \mathscr{GL}_m(K)$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(K)$ telles que $B = Q^{-1}AP$. Il suffit alors d'associer à A et B leurs applications linéaires canoniquement associées et d'interpréter P et Q comme des matrices de passage pour en déduire que A et B représentent la même application linéaire. ■

Il est facile de constater que l'équivalence matricielle est une relation… d'équivalence !

Proposition 37

La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,m}(K)$.

■ AQT ■

La symétrie de la relation « être équivalente à » permet de parler de matrices équivalentes entre elles.

Dans l'énoncé qui suit, on montre que la relation « être équivalente à » est en fait la relation « avoir le même rang que ». Autrement dit, l'équivalence matricielle caractérise les matrices de même rang.

Proposition 38

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ une matrice de rang r. Alors A est équivalente à la matrice $J_{n,m,r}$ définie par

$$J_{n,m,r} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 1 \end{matrix} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ r & m-r \end{array} & \end{array} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ sont équivalentes si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

■ ▷ On considère l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(K^m, K^n)$ canoniquement associée à la matrice A.

Analyse : Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de K^m et une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de K^n telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_{n,m,r}$. Alors $f(e_1) = f_1, \dots, f(e_r) = f_r$ puis $f(e_{r+1}) = \cdots = f(e_n) = 0_{K^n}$. On constate ainsi qu'il est nécessaire que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, f$, que les vecteurs $(e_1, \dots, e_r)$ complètent la famille $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ en une base de K^m, que $f_1, \dots, f_r$ soient les images respectives de $e_1, \dots, e_r$ avec $(f_1, \dots, f_r)$ libre et que $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ complète $(f_1, \dots, f_r)$ en une base de K^n.

Synthèse : La matrice J_r est de rang r. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}\, f$ est donc de dimension $m - r$ et admet donc une base $(e_{r+1}, \dots, e_m)$. Le théorème de la base incomplète nous permet de la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de K^m. Posons $f_1 = f(e_1), \dots, f_r = f(e_r)$. Comme $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un supplémentaire du noyau dans K^m, le théorème du rang géométrique nous dit que f induit un isomorphisme entre $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et $\mathrm{Im}\, f$. Par conséquent, la famille $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$. En particulier, cette famille est libre. On peut donc la compléter, par le théorème de la base incomplète, en une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de F. Dès lors, on a $f(e_1) = f_1, \dots, f(e_r) = f_r, f(e_{r+1}) = 0_{K^n}, \dots, f(e_p) = 0_{K^n}$ donc la matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est $J_{n,m,r}$. Cela démontre que A et $J_{n,m,r}$ sont équivalentes.

▷ $\Rightarrow$ Si A et B sont équivalentes, elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes, ce qui démontre que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

$\Leftarrow$ Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, les matrices A et B sont toutes les deux équivalentes à $J_{n,m,r}$, donc elles sont aussi équivalentes entre elles. ■

Il n'y a donc que $\min(n, m) + 1$ classes d'équivalence pour la relation d'équivalence matricielle (puisque le rang prend ses valeurs entre 0 et $\min(n, m)$). C'est donc une relation d'équivalence assez grossière qui ne distingue qu'assez peu les matrices.

La proposition 38 est la clé de nombreux exercices faisant intervenir le rang. On remplace ainsi l'intervention d'une matrice de rang r par celle de $J_{n,m,r}$ qui est plus simple.

Exemples :

- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ une matrice de rang r. Démontrons que A est la somme de r matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ de rang 1.

  D'après la proposition 38, A est équivalente à $J_{n,m,r} = E_{1,1} + \cdots + E_{r,r}$ et chacune des matrices $E_{i,i}$ est de rang 1. Donc, si $A = Q^{-1} J_{n,m,r} P$ avec $Q \in \mathscr{GL}_n(K)$ et $P \in \mathscr{GL}_p(K)$, alors $A = Q^{-1} E_{1,1} P + \cdots + Q^{-1} E_{r,r} P$ et chacune des matrices $Q^{-1} E_{i,i} P$ est de rang 1 puisque équivalente à $E_{i,i}$.
- Retrouvons le fait que la multiplication par une matrice inversible ne modifie par le rang.

  Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. Si $P \in \mathscr{GL}_m(K)$, alors $A = I_n(AP)P^{-1}$ donc A est équivalente à AP et $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$. De même, si $Q \in \mathscr{GL}_n(K)$, on a $A = Q^{-1}(QA)I_n$ donc A est équivalente à QA et $\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$.

La proposition 38 a une autre conséquence, beaucoup plus importante : la conservation du rang par transposition.

Proposition 39

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, le rang de ${}^tA$ est égal au rang de A.

■ Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. La proposition 38 dit qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_m(K)$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(K)$ telles que $A = Q^{-1} J_{n,m,r} P$. Alors ${}^tA = {}^tP\, {}^tJ_{n,m,r}\, {}^tQ^{-1} = {}^tP J_{m,n,r}\, {}^tQ^{-1}$, donc $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(J_{m,n,r}) = r = \mathrm{rg}(A)$. ■

En pratique, ce résultat signifie que dans la recherche du rang, on peut indifféremment travailler sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice, puisque les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$ et vice versa. Autrement dit, le rang d'une matrice est indifféremment égal au rang de ses vecteurs lignes, au rang de ses vecteurs colonnes ou encore au rang de toute application linéaire qu'elle-même ou sa transposée peut représenter.

La double interprétation du rang d'une matrice (à la fois comme le rang des colonnes et des lignes) a plusieurs conséquences. Nous en présentons une ci-dessous concernant les matrices extraites.

Définition 12

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. On appelle matrice extraite de A toute matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & \cdots & a_{i_p,j_q} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_q \leqslant m \end{cases}$$

Une matrice extraite est donc une matrice obtenue en ne conservant que certaines lignes et colonnes d'une matrice donnée. En pratique, pour décrire une matrice extraite, on indique généralement les rangées que l'on abandonne plutôt que les rangées que l'on garde.

Exemples :

- Prenons une matrice A et rayons certaines de ses rangées :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & \cancel{13} & \cancel{14} & 15 \\ \cancel{21} & \cancel{22} & \cancel{23} & \cancel{24} & \cancel{25} \\ 31 & 32 & \cancel{33} & \cancel{34} & 35 \\ 41 & 42 & \cancel{43} & \cancel{44} & 45 \end{pmatrix}$$

  Cela fournit la matrice extraite suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 15 \\ 31 & 32 & 35 \\ 41 & 42 & 45 \end{pmatrix}.$$

On peut énoncer le résultat suivant liant le rang d'une matrice et de ses matrices extraites.

Proposition 40

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. Alors

(i) si A' est une matrice extraite de A, alors $\operatorname{rg}(A') \leqslant \operatorname{rg}(A)$;

(ii) il existe une matrice carrée inversible d'ordre $\operatorname{rg}(A)$ extraite de A.

■ (i) La matrice extraite A' est obtenue à partir de A en supprimant d'abord certaines colonnes puis certaines lignes. Comme le rang d'une matrice est celui de ses colonnes, le rang diminue (au sens large) en supprimant des colonnes. Comme le rang d'une matrice est aussi le rang de ses lignes, le rang chute à nouveau (au sens large) en retirant des lignes. Au final, le rang de A' est bien inférieur ou égal à celui de A.

(ii) Notons r le rang de A. Comme r est le rang des colonnes de A, on peut extraire r colonnes de A linéairement indépendantes. La matrice B, extraite de A en conservant ces colonnes (sans toucher aux lignes), est de rang r. Comme c'est aussi le rang des lignes de B, on peut extraire r lignes de B qui sont linéairement indépendantes. La matrice A', extraite de B en ne conservant que ces lignes, est alors une matrice carrée extraite de A d'ordre r et de rang r. Elle est donc inversible. ■

On retiendra que le rang d'une matrice est la taille maximale des matrices carrées inversibles que l'on peut extraire de la matrice.

De plus, on notera que dès l'on extrait une matrice de rang r d'une matrice A, on peut affirmer que $\operatorname{rg}(A) \geqslant r$.

D.4. Matrices semblables

La formule de changement de base pour les endomorphismes incite à considérer la définition suivante.

Définition 13

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(K)$ vérifiant $B = P^{-1}AP$. On définit ainsi la relation de similitude sur les matrices carrées $n \times n$.

Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse (déjà parce que deux matrices semblables doivent nécessairement être carrées alors que ce n'est pas indispensable pour des matrices équivalentes).

Exemples :

- La matrice nulle 0_n n'est semblable qu'à elle-même.
  La matrice identité I_n n'est semblable qu'à elle-même.
  Plus généralement, toute matrice scalaire n'est semblable qu'à elle-même.

La proposition 35 permet d'interpréter géométriquement la relation de similitude.

Proposition 41

Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes (prises simultanément comme base de départ et d'arrivée).

■ $\Leftarrow$ Si deux matrices représentent le même endomorphisme, la proposition 35 nous dit que ces deux matrices sont semblables.

$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ sont semblables. Il existe $P \in \mathscr{GL}_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$. Il suffit alors d'associer à A et B leurs endomorphismes canoniquement associés sur K^n et d'interpréter P comme une matrice de passage pour en déduire que A et B représentent le même endomorphisme. ■

La relation liant un endomorphisme aux matrices qui le représentent évoque une structure patriarcale. Lorsque l'espace vectoriel E est dénué de toute base, seul existe l'endomorphisme (le père). À chaque fois que l'on se donne une base de E, l'endomorphisme « enfante » une matrice (une fille) qui le représente dans la base considérée. Les différentes sœurs sont alors reliées par la relation de similitude.

L'endomorphisme apparaît ainsi comme un objet plus « universel » que ne le sont les matrices. De fait, il est souvent judicieux de traduire un problème matriciel en terme d'endomorphisme afin de dépasser les particularités propres à la matrice.

Réciproquement, le choix d'une « bonne » matrice représentant un endomorphisme peut grandement simplifier l'étude des propriétés d'icelui.

La relation de similitude définit elle aussi des classes d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(K)$.

Proposition 42

La relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(K)$ est une relation d'équivalence.

■ AQT ■

La symétrie de la similitude permet de parler de matrices semblables entre elles.

Les classes de similitude (c'est-à-dire les classes d'équivalence de la relation « être semblable à ») sont nettement plus compliquées à décrire que les classes de la relation d'équivalence matricielle. On peut toutefois, dès maintenant, introduire deux invariants de similitude, c'est-à-dire deux quantités qui sont préservées par similitude. On commence par un invariant déjà connu : le rang.

Proposition 43

Deux matrices semblables ont le même rang.

■ Elles sont équivalentes ! ■

On peut aussi transférer la notion de trace, des matrices vers les endomorphismes.

Proposition 44

Deux matrices semblables ont la même trace.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On appelle trace de u la trace de n'importe quelle matrice représentant u. On la note $\mathrm{Tr}(u)$.

La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda \, \mathrm{Tr}(u) + \mu \, \mathrm{Tr}(v)$ pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et tous $\lambda, \mu \in K$.

La trace vérifie la propriété $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$ pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

■ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices semblables. Il existe $P \in \mathscr{GL}_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ car $\forall M, N \in \mathscr{M}_n(K),\ \ \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

Dès lors, la trace d'un endomorphisme est correctement définie puisque toutes les matrices qui représentent cet endomorphisme sont semblables et ont donc la même trace.

Les propriétés de la trace sur $\mathscr{L}(E)$ sont alors héritées des propriétés de la trace sur $\mathscr{M}_n(K)$. ■

Le rang et la trace constituent ainsi les deux invariants de similitudes les plus simples. Ils permettent déjà d'affirmer que deux matrices qui n'ont ou bien pas le même rang, ou bien pas la même trace ne peuvent pas être semblables. En revanche, ces invariants ne sont pas assez fins pour permettre d'affirmer que deux matrices sont semblables (autrement dit, deux matrices peuvent avoir le même rang et la même trace et ne pas être semblables).

Vous rencontrerez plus tard d'autres invariants de similitude : le déterminant et les valeurs propres.

Exemples :

- Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, alors

$$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p).$$

En effet, on sait que $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$ et que $\mathrm{Im}\, p$ est l'ensemble des vecteurs invariants de E. Par suite, si l'on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E adaptée à la décomposition directe $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ (ce qui signifie que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, p$), la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est $J_{n,n,r}$. Dès lors, on a $\mathrm{Tr}(p) = r = \dim(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{rg}(p)$. 14 h 30