VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Exercice 1. [$\circ$]

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}([\![3;6]\!])$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y.

Exercice 2. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a $2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n$.

Exercice 3. [$\star$]

Une urne contient n jetons numérotées de 1 à n. On tire une poignée aléatoire de jetons de cette urne. On note N la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés et S la somme des numéros obtenus. On suppose que N suit la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.

1. Préciser $S(\Omega)$.
2. Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si le jeton numéro k est dans la poignée et 0 sinon. Démontrer que X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
3. Calculer $E(S)$.

Exercice 4. [$\circ$]

Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0;1[$.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X.
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y.
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p, les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Exercice 5. [$\star$]

Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$. On considère $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2n;p)$ et l'on pose $Y = \lfloor X/2 \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

1. Déterminer la loi de Y.
2. a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k}$.
   b) Déterminer $E(Y)$.

Exercice 6. [$\circ$] (Marche aléatoire)

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (on parle de « pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. En vous aidant de D_n, déterminer la loi de X_n.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Exercice 7. [$\circ$] (La règle du trois)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0;1[$.

1. Démontrer que, sous l'hypothèse $p > 3/n$, on a $(1-p)^n < \mathrm{e}^{-3}$.
2. En analyse statistique des essais médicaux, la « règle du trois » énonce que : « si parmi n tentatives, aucune n'est réussie, alors on peut affirmer, avec seulement 5 % de risque de se tromper, que la probabilité de réussite p de chaque tentative est inférieure à $3/n$ ».

   Discuter la validité de cette règle.

   Donnée numérique : $\mathrm{e}^{-3} = 4,98 \times 10^{-2}$

Exercice 8. [$\star$]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. On choisit un sous-ensemble A au hasard (tous les choix étant équiprobables). Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \mathrm{card}(A)$.
2. On choisit au hasard un second sous-ensemble B de E, indépendemment de A. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \mathrm{card}(A \cap B)$.

Exercice 9. [$\star$]

Deux urnes contiennent chacune $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire simultanément n boules dans chaque urne et on note X le nombre de numéros en commun dans les deux tirages.

1. Pour tout $i \in [\![1;2n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule de numéro i a été tirée dans les deux urnes et qui vaut 0 sinon. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \in [\![1;2n]\!]$ et en déduire $E(X)$.
2. Démontrer que X suit une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres.

Exercice 10. [$\star$] (Loi géométrique tronquée)

Legolas décoche n flèches sur un troll. Chacune a une probabilité $p \in \,]0;1[$ d'atteindre la cible. On note X le numéro de la première flèche qui fait mouche (avec $X = 0$ si le troll survit). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 11. [$\star$] (Temps d'attente lors de tirage sans remise)

Une urne contient n boules blanches et m boules noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules.

On note X le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on vient de tirer la première boule blanche (c'est le temps d'attente de la première boule blanche).

On note Y le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on a tiré toutes les boules blanches (c'est le temps d'attente de la dernière boule blanche).

1. Écrire la loi de X. En déduire une formule combinatoire.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer $E(Y)$ puis $E(X)$.
4. Calculer la variance de X et Y.

Exercice 12. [$\star$]

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ avec $n \geqslant 1$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

2. On dispose de n paires de chaussettes mélangées dans un tiroir. On tire les chaussettes au hasard une à une sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour reconstituer la première paire de chaussettes.
   Déterminer $P(X > k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et calculer l'espérance de X.

   Donnée : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$

Exercice 13. [$\circ$]

Des candidats (au nombre de n) n'ont pas soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de chercher à lire de tels brouillons, décide de noter au hasard, et indépendamment les unes des autres, les n copies en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. À l'aide de la fonction de répartition, déterminer la loi de X_n.
   Pour $k \in [\![0;20]\!]$, préciser la limite de $P(X_n = k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter.
2. Exprimer $E(X_n)$ à l'aide d'une somme la plus simple possible et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 14. [$\star$]

On tire m entiers au hasard dans $[\![1;n]\!]$ avec $m \leqslant n$. On note X le plus petit entier tiré et Y le plus grand.

1. On suppose que les tirages se font avec remise. À l'aide de la fonction de répartition, déterminer les lois de X et Y et calculer leurs espérances.
2. Même question avec des tirages sans remise.

Exercice 15. [$\circ$]

On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $1/2$?

Exercice 16. [$\circ$]

Lors du dernier DS de maths, la moyenne des notes est 9 et l'écart-type vaut $3,5$. Démontrer qu'au moins la moitié de la classe a une note entre 4 et 14. Apprécier la pertinence de cette estimation.

Exercice 17. [$\circ$]

1. Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ un système complet d'événements de Ω. On note $E(X \mid A_k)$ l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_{A_k} . Démontrer la *formule de l'espérance totale* :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) E(X \mid A_k).$$

2. Application. On lance un dé. On obtient le numéro X. On relance alors X fois le dé. Trouver l'espérance du nombre total de 6 obtenus.

Exercice 18. [$\bigstar$] (Les moments déterminent-ils la loi d'une variable aléatoire ?)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies telles que $E(X^k) = E(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que X et Y ont la même loi.

Remarque : Ce résultat demeure vraie pour des variables aléatoires bornées prenant une infinité de valeurs mais peut tomber en défaut pour des variables aléatoires non bornées.

Exercice 19. [$\star$] (Une démonstration de la formule du crible)

Dans cet exercice, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de l'événement A. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

1. Démontrer que

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

2. En déduire la formule du crible.

Exercice 20. [$\star$]

On considère une suite de tirages <u>avec remise</u> dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geqslant 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ème tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   a) Justifier que $Y_n \leqslant N - 1$.
   b) Démontrer que, pour $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

3. Démontrer que la suite $\big(E(Y_n)\big)_{n \geqslant 1}$ est géométrique et en déduire l'expression de $E(Y_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Exercice 1. [$\circ$]
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}([\![3;6]\!])$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y.

Exercice 2. [$\star$]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a $2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n$.

Exercice 3. [$\star$]
Une urne contient n jetons numérotées de 1 à n. On tire une poignée aléatoire de jetons de cette urne. On note N la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés et S la somme des numéros obtenus. On suppose que N suit la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.

1. Préciser $S(\Omega)$.
2. Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si le jeton numéro k est dans la poignée et 0 sinon. Démontrer que X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
3. Calculer $E(S)$.

Exercice 4. [$\circ$]
Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0;1[$.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X.
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y.
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p, les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Exercice 5. [$\star$]
Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$. On considère $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2n;p)$ et l'on pose $Y = \lfloor X/2 \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

1. Déterminer la loi de Y.
2. a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k}$.
   b) Déterminer $E(Y)$.

Exercice 6. [$\circ$] (Marche aléatoire)

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (on parle de « pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. En vous aidant de D_n, déterminer la loi de X_n.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Exercice 7. [$\circ$] (La règle du trois)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

1. Démontrer que, sous l'hypothèse $p > 3/n$, on a $(1-p)^n < \mathrm{e}^{-3}$.
2. En analyse statistique des essais médicaux, la « règle du trois » énonce que : « si parmi n tentatives, aucune n'est réussie, alors on peut affirmer, avec seulement 5 % de risque de se tromper, que la probabilité de réussite p de chaque tentative est inférieure à $3/n$ ».

   Discuter la validité de cette règle.

   Donnée numérique : $\mathrm{e}^{-3} = 4,98 \times 10^{-2}$

Exercice 8. [$\star$]

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. On choisit un sous-ensemble A au hasard (tous les choix étant équiprobables). Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \mathrm{card}(A)$.
2. On choisit au hasard un second sous-ensemble B de E, indépendemment de A. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \mathrm{card}(A \cap B)$.

Exercice 9. [$\star$]

Deux urnes contiennent chacune $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire simultanément n boules dans chaque urne et on note X le nombre de numéros en commun dans les deux tirages.

1. Pour tout $i \in [\![1;2n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule de numéro i a été tirée dans les deux urnes et qui vaut 0 sinon. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \in [\![1;2n]\!]$ et en déduire $E(X)$.
2. Démontrer que X suit une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres.

Exercice 10. [$\star$] (Loi géométrique tronquée)

Legolas décoche n flèches sur un troll. Chacune a une probabilité $p \in]0;1[$ d'atteindre la cible. On note X le numéro de la première flèche qui fait mouche (avec $X = 0$ si le troll survit). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 11. [$\star$] (Temps d'attente lors de tirage sans remise)

Une urne contient n boules blanches et m boules noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules.

On note X le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on vient de tirer la première boule blanche (c'est le temps d'attente de la première boule blanche).

On note Y le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on a tiré toutes les boules blanches (c'est le temps d'attente de la dernière boule blanche).

1. Écrire la loi de X. En déduire une formule combinatoire.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer $E(Y)$ puis $E(X)$.
4. Calculer la variance de X et Y.

Exercice 12. [$\star$]

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ avec $n \geqslant 1$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

2. On dispose de n paires de chaussettes mélangées dans un tiroir. On tire les chaussettes au hasard une à une sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour reconstituer la première paire de chaussettes.
   Déterminer $P(X > k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et calculer l'espérance de X.
   Donnée : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$

Exercice 13. [$\circ$]

Des candidats (au nombre de n) n'ont pas soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de chercher à lire de tels brouillons, décide de noter au hasard, et indépendamment les unes des autres, les n copies en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. À l'aide de la fonction de répartition, déterminer la loi de X_n.
   Pour $k \in [\![0;20]\!]$, préciser la limite de $P(X_n = k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter.
2. Exprimer $E(X_n)$ à l'aide d'une somme la plus simple possible et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 14. [$\star$]

On tire m entiers au hasard dans $[\![1;n]\!]$ avec $m \leqslant n$. On note X le plus petit entier tiré et Y le plus grand.

1. On suppose que les tirages se font avec remise. À l'aide de la fonction de répartition, déterminer les lois de X et Y et calculer leurs espérances.
2. Même question avec des tirages sans remise.

Exercice 15. [$\circ$]

On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $1/2$?

Exercice 16. [$\circ$]

Lors du dernier DS de maths, la moyenne des notes est 9 et l'écart-type vaut $3,5$. Démontrer qu'au moins la moitié de la classe a une note entre 4 et 14. Apprécier la pertinence de cette estimation.

Exercice 17. [$\circ$]

1. Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ un système complet d'événements de Ω. On note $E(X \mid A_k)$ l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_{A_k} . Démontrer la *formule de l'espérance totale* :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) E(X \mid A_k).$$

2. Application. On lance un dé. On obtient le numéro X. On relance alors X fois le dé. Trouver l'espérance du nombre total de 6 obtenus.

Exercice 18. [$\bigstar$] (Les moments déterminent-ils la loi d'une variable aléatoire ?)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies telles que $E(X^k) = E(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que X et Y ont la même loi.

Remarque : Ce résultat demeure vraie pour des variables aléatoires bornées prenant une infinité de valeurs mais peut tomber en défaut pour des variables aléatoires non bornées.

Exercice 19. [$\star$] (Une démonstration de la formule du crible)

Dans cet exercice, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de l'événement A. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

1. Démontrer que
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$
2. En déduire la formule du crible.

Exercice 20. [$\star$]

On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geqslant 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ème tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   a) Justifier que $Y_n \leqslant N - 1$.
   b) Démontrer que, pour $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a
$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$
3. Démontrer que la suite $\big(E(Y_n)\big)_{n \geqslant 1}$ est géométrique et en déduire l'expression de $E(Y_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.