LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

✠ ***Exercice 1.*** [$\star$]

Une axiomatique est dite contradictoire si à partir de ses axiomes et des règles de la logique on parvient à démontrer qu'il existe une assertion $\mathscr{P}$ qui est à la fois vraie et fausse. Démontrer que dans une axiomatique contradictoire toute assertion est alors vraie et fausse.

Dans une telle axiomatique, on perd donc toute notion de vérité. On ne sait pas si notre théorie des mathématiques est ou non contradictoire ! Pire encore : le second théorème d'incomplétude de Gödel dit en gros qu'on ne peut pas le savoir...

Notons $\mathscr{P}$ une assertions à la fois vraie et fausse. Soit $\mathscr{Q}$ une assertion quelconque. On a $\mathscr{P}$ vraie et ($\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$) puisque $\overline{\mathscr{P}}$ est fausse (et que le faux implique tout), donc $\mathscr{Q}$ est vraie. En raisonnant de même, on montre que $\overline{\mathscr{Q}}$ est vraie, c'est-à-dire que $\mathscr{Q}$ est fausse. On a donc bien démontré que

$$\boxed{\text{toute assertion d'une axiomatique contradictoire est à la fois vraie et fausse.}}$$

✠ ***Exercice 2.*** [$\bigstar$]

La barre de Scheffer | est le connecteur logique « est incompatible avec » défini, pour toutes assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, par $(\mathscr{P} \mid \mathscr{Q}) \Longleftrightarrow (\overline{\mathscr{P}} \text{ ou } \overline{\mathscr{Q}})$.

Exprimer la négation, le $\boxed{\text{et}}$, le $\boxed{\text{ou}}$ et l'implication en utilisant uniquement la barre de Scheffer.

On trouve que

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathscr{P}} & \Longleftrightarrow & \mathscr{P} \mid \mathscr{P} \\
\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q} & \Longleftrightarrow & (\mathscr{P} \mid \mathscr{Q}) \mid (\mathscr{P} \mid \mathscr{Q}) \\
\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q} & \Longleftrightarrow & (\mathscr{P} \mid \mathscr{P}) \mid (\mathscr{Q} \mid \mathscr{Q}) \\
\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q} & \Longleftrightarrow & \mathscr{P} \mid (\mathscr{Q} \mid \mathscr{Q})
\end{array}$$

✠ ***Exercice 3.*** [$\bigstar$]

Pour toute assertion $\mathscr{P}$, on pose $v(\mathscr{P}) = 1$ si $\mathscr{P}$ est vraie et $v(\mathscr{P}) = 0$ sinon. Pour toutes assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, exprimer, en fonction de $v(\mathscr{P})$ et $v(\mathscr{Q})$, les quantités :

$$v(\overline{\mathscr{P}}), \qquad v(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}), \qquad v(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}), \qquad v(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \qquad \text{et} \qquad v(\mathscr{P} \text{ ou bien } \mathscr{Q})$$

On a

$$v(\overline{\mathscr{P}}) = 1 - v(\mathscr{P})$$

$$v(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}) = v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})$$

$$\begin{aligned}
v(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) &= v(\overline{\overline{\mathscr{P}} \text{ et } \overline{\mathscr{Q}}}) \\
&= 1 - v(\overline{\mathscr{P}} \text{ et } \overline{\mathscr{Q}}) \\
&= 1 - v(\overline{\mathscr{P}})v(\overline{\mathscr{Q}}) \\
&= 1 - \big(1 - v(\mathscr{P})\big)\big(1 - v(\mathscr{Q})\big) \\
&= v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) &= v(\overline{\mathscr{P}} \text{ ou } \mathscr{Q}) \\
&= v(\overline{\mathscr{P}}) + v(\mathscr{Q}) - v(\overline{\mathscr{P}})v(\mathscr{Q}) \\
&= 1 - v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q} - \big(1 - v(\mathscr{P})\big)v(\mathscr{Q}) \\
&= 1 - v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v(\mathscr{P} \text{ ou bien } \mathscr{Q}) &= v\big((\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \text{ et } (\overline{\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}})\big) \\
&= v(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q})v(\overline{\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}}) \\
&= v(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q})\big(1 - v(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q})\big) \\
&= \big(v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})\big)\big(1 - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})\big) \\
&= v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})^2v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})^2 + v(\mathscr{P})^2v(\mathscr{Q})^2 \\
&= v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q}) + v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q}) \\
&\qquad \text{car } v(\cdot)^2 = v(\cdot) \\
&= v(\mathscr{P}) + v(\mathscr{Q}) - 2v(\mathscr{P})v(\mathscr{Q})
\end{aligned}$$

Enfin,

$$v(\mathscr{P} \text{ ou bien } \mathscr{Q}) = \big(v(\mathscr{P}) - v(\mathscr{Q})\big)^2 = |v(\mathscr{P}) - v(\mathscr{Q})|$$

✠ ***Exercice 4.*** [○]

Nier les affirmations suivantes :

1. Chaque été, il pleut au moins un jour.
2. Cet été, il a plu tous les jours.
3. Tous les professeurs du lycée Henri IV qui ont les yeux bleus et de l'embonpoint gagneront à l'Euromillion et prendront leur retraite avant 50 ans.
4. Dans la vie de tout homme, il y a un jour où tout ce que l'on essaye échoue et un jour où tout ce que l'on essaye réussit.
5. Dans tout devoir surveillé, il y a toujours une question qu'aucun élève ne sait faire.
6. L'an dernier, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths.
7. Il y a des élèves qui n'aiment ni la physique, ni les mathématiques !

1. L'affirmation signifie que : quel que soit l'été considéré, il existe un jour de cet été durant lequel il pleut. On a donc la succession d'un quantificateur universel $\forall$ et d'un quantificateur existenciel $\exists$. La négation est donc : il existe un été tel que chaque jour de cet été, il n'a pas plu. Autrement dit, la négation est : « Il a existé un été durant lequel il n'y a eu aucune journée de pluie. »
2. Cet été, il n'y a pas eu un seul jour de pluie.
3. Il existe un professeur du lycée Henri IV qui a les yeux bleux et de l'embonpoint qui ne gagnera pas à l'Euromillion ou ne prendra pas sa retraite avant 50 ans.
4. Il a existé (ou il existera) un homme qui, chaque jour de son existence, réussira une chose ou qui, chaque jour, ratera une chose.
5. Il existe un devoir surveillé dont toute question est faisable par au moins un élève.
6. L'an dernier, aucun élève n'a eu au moins 12 à toutes ses colles de maths.
7. Tous les élèves aiment la physique ou les mathématiques.

✠ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Sébastien, voulant dérober le cœur de la jolie et innocente Isabelle, lui dit : « Je te propose le jeu suivant : je vais affirmer quelque chose concernant ton futur. Si ce que je dis est vrai, tu devras me donner ta photo et si ce que je dis est faux, tu devras ne pas me la donner ». Isabelle accepte. Sébastien lui dit alors : « Tu ne me donneras pas ta photo et tu ne m'épouseras pas ! ».

Que s'est-il en conséquence passé le 19 juin 2004 ?

Après un temps de réflexion, Isabelle se rend compte qu'elle est obligée d'épouser Sébastien. En effet, si l'affirmation de Seb était vraie, Isabelle devrait ne pas lui donner sa photo ce qui est justement en totale opposition avec les règles du jeu. L'affirmation de Seb est donc fausse, ce qui signifie (en vertu du principe de négation d'un $\boxed{\text{et}}$) qu'Isabelle lui donnera sa photo ou qu'elle l'épousera. Mais les règles du jeu lui interdise la première possibilité. Elle est donc condamnée à l'épouser.

✠ ***Exercice 6.*** [$\star$]

Vous devez choisir entre deux boites dont l'une contient un lingot et l'autre une invitation pour la Star Academy. Les deux trésors sont gardés par deux hommes dont l'un ment systématiquement et l'autre dit toujours la vérité. Vous n'avez le droit de poser qu'une seule question à l'un des deux. Quelle question posez-vous pour savoir ce que contiennent les boites ?

Vous désignez une boite quelconque et vous posez à n'importe lequel des deux hommes la question : « Que me répondrait l'autre homme si je lui demandait si cette boite contient le lingot ? ». Si la réponse est « oui », la boite désignée contient la place l'entrée pour la star ac' et si la réponse est « non », la boite contient le lingot. Il ne vous reste plus qu'à choisir . . .

✠ ***Exercice 7.*** [$\bigstar$]

Cet exercice donne un aperçu de la démonstration d'un des théorèmes d'incomplétude de Gödel : « Dans toute théorie mathématique, il existe une assertion vraie indémontrable ». Pour conserver la simplicité de l'argument, nous éludons certaines difficultés (en particulier, nous ne traitons que le cas particulier où les assertions de la théorie sont numérotables . . .).

Supposons que l'on a numéroté toutes les assertions : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Supposons par ailleurs que l'on a numéroté certaines parties de $\mathbb{N}^*$, appelées *parties répertoriées* et notées $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_n, \ldots$ On dit que n est *remarquable* lorsque $n \in \mathscr{P}_n$. Si m est le numéro de l'assertion « n est remarquable », on dit que m est le *conjugué* de n. On suppose de plus que les parties répertoriées ont été choisies de sorte que :

(i) Les numéros des assertions démontrables forment une partie répertoriée.

(ii) Les numéros des assertions réfutables forment une partie répertoriée.

(iii) Le complémentaire dans $\mathbb{N}^*$ d'une partie répertoriée est une partie répertoriée.

(iv) Pour toute partie répertoriée X, il existe une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X.

Considérons alors la partie X constituée des numéros des assertions non démontrables. C'est une partie répertoriée d'après (i) et (iii). On peut donc lui associer, d'après (iv), une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X. On note n le numéro de Y (de sorte que $Y = \mathscr{P}_n$) et l'on désigne par m le conjugué de n (de sorte que A_m : « n est remarquable »).

1. Démontrer que n est remarquable. *On pourra raisonner par l'absurde et démontrer, sous l'hypothèse que n n'est pas remarquable, que A_m est à la fois fausse et démontrable !*
2. En déduire que A_m est une assertion vraie non démontrable.

1. Supposons que n n'est pas remarquable. Cela se traduit littéralement par : A_m est fausse. Il s'ensuit que $n \notin Y$ (car $Y = \mathscr{P}_n$) et donc que $m \notin X$, ce qui signifie que A_m est démontrable (puisque, par définition, le complémentaire de X contient les numéros de toutes les assertions démontrables). L'assertion A_m est donc à la fois fausse et démontrable, ce qui est absurde ! Donc

$$\boxed{n \text{ est remarquable.}}$$

2. Nous venons de prouver que n est remarquable, ce qui signifie que l'assertion A_m : « n est remarquable » est vraie. Il s'ensuit que $n \in Y$ (car $Y = \mathscr{P}_n$) et donc que $m \in X$, ce qui signifie que A_m n'est pas démontrable (toujours parce que le complémentaire de X contient les numéros de toutes les assertions démontrables). Donc

$$\boxed{A_m \text{ est une assertion vraie non démontrable.}}$$

✠ Exercice 8. [$\circ$]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

1. Soit C une partie de E. Démontrer que $(A \subset B) \Longrightarrow \big((A \cup C) \subset (B \cup C)\big)$.
2. a) On suppose que $\exists C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C)$. A-t-on $A \subset B$?

   b) On suppose que $\forall C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C)$. Démontrer que $A \subset B$.

1. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cup C$, alors $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, on a bien $x \in B \cup C$. Si $x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subset B$ et donc $x \in B \cup C$. On a donc bien démontré que

$$\boxed{(A \subset B) \Longrightarrow \big((A \cup C) \subset (B \cup C)\big).}$$

2. a) Prenons $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{0, 1\}$ de sorte que $(A \cup C) \subset (B \cup C)$, puisque $A \cup C = C$ et $B \cup C = C$, et $A \not\subset B$. Donc

$$\boxed{\text{l'hypothèse } \exists C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ ne suffit pas à affirmer que } A \subset B.}$$

   b) Supposons que $\forall C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C)$. En prenant $C = \varnothing$, on obtient immédiatement $A \subset B$. En conséquence,

$$\boxed{\text{l'hypothèse } \forall C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ suffit à affirmer que } A \subset B.}$$

✠ Exercice 9. [$\star$]

Soient E un ensemble et $(A_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m}$ des parties de E. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i,j} \qquad \text{et} \qquad V = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}.$$

1. Déterminer une inclusion liant U et V. Démontrer qu'en général cette inclusion est stricte.
2. On suppose que $\forall i_1, i_2 \in [\![1; n]\!],\ \forall j_1, j_2 \in [\![1; m]\!],\ (i_1 \neq i_2) \Longrightarrow (A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \varnothing)$. Démontrer que $U = V$.

1. Soit $x \in U$. Il exixte $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $x \in \bigcap_{j=1}^{m} A_{i_0,j}$. Pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, on a donc $x \in A_{i_0,j}$. Or, pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, on a $A_{i_0,j} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}$, donc, pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, on a $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}$. Cela signifie que $x \in \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}$, c'est-à-dire $x \in V$. En conclusion, on a

$$\boxed{U \subset V.}$$

Pour démontrer que l'inclusion $U \subset V$ est stricte en général, on donne un contre-exemple pour l'inclusion réciproque. Pour cela, on se place dans $E = \mathbb{R}$ et on pose

$$A_{1,1} = \{0\}, \qquad A_{1,2} = \{1\}, \qquad A_{2,1} = \{1\}, \qquad A_{2,2} = \{0\}.$$

Alors

$$U = (A_{1,1} \cap A_{1,2}) \cup (A_{2,1} \cap A_{2,2}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

et

$$V = (A_{1,1} \cup A_{2,1}) \cap (A_{1,2} \cup A_{2,2}) = \{0; 1\} \cap \{0; 1\} = \{0; 1\}$$

et l'on constate bien que, dans ce cas, on a $U \neq V$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{en général, l'inclusion } U \subset V \text{ est stricte.}}$$

2. Soit $x \in V$. Pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, on a $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}$. Donc, pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, il existe $i_j \in [\![1; n]\!]$ tel que $x \in A_{i_j,j}$. Si j_1, j_2 désignent deux éléments de $[\![1; m]\!]$, on a donc $x \in A_{i_{j_1},j_1} \cap A_{i_{j_2},j_2}$, ce qui implique, d'après la contraposée de l'hypothèse, que $i_{j_1} = i_{j_2}$. Autrement dit, il existe $i_0 \in [\![1; n]\!]$ (la valeur commune de tous les i_j) tel que, pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, $x \in A_{i_0,j}$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{j=1}^{m} A_{i_0,j}$. Donc $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i,j}$, c'est-à-dire $x \in U$. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } \forall i_1, i_2 \in [\![1; n]\!],\ \forall j_1, j_2 \in [\![1; m]\!],\ (i_1 \neq i_2) \Longrightarrow (A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \varnothing), \text{ alors } U = V.}$$

✠ ***Exercice 10.*** [$\star$]
Soient E, F, G, H quatre ensembles.

1. Démontrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.
2. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

1. On procède par double inclusion.
   - $\subset$ Soit $c \in (E \times G) \cup (F \times G)$. Notons que c désigne un couple !
     On a $c \in E \times G$ ou $c \in F \times G$. Par conséquent, on peut distinguer deux cas (qui ne s'exclut pas nécessairement l'un l'autre).
     - ▷ Supposons que $c \in E \times G$. Il existe alors $e \in E$ et $g \in G$ tels que $c = (e, g)$. Comme $e \in E$, on a $e \in E \cup F$. Donc $(e, g) \in (E \cup F) \times G$, c'est-à-dire $c \in (E \cup F) \times G$.
     - ▷ Supposons que $c \in F \times G$. Il existe alors $f \in F$ et $g' \in G$ tels que $c = (f, g')$. Comme $f \in F$, on a $f \in E \cup F$. Donc $(f, g') \in (E \cup F) \times G$, c'est-à-dire $c \in (E \cup F) \times G$.

     Dans tous les cas, on a $c \in (E \cup F) \times G$.
     Donc $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$.
   - $\supset$ Soit $c \in (E \cup F) \times G$. Là encore, c désigne un couple.
     Il existe $x \in E \cup F$ et $g \in G$ tels que $c = (x, g)$.
     Comme $x \in E \cup F$, on a $x \in E$ ou $x \in F$.
     Si $x \in E$, alors $(x, g) \in E \times G$. Si $x \in F$, alors $(x, g) \in F \times G$.
     Donc $(x, g) \in (E \times G) \cup (F \times G)$.

   En conclusion,
   $$\boxed{(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G.}$$
2. A faire

✠ ***Exercice 11.*** [$\star$]
Si $E = \{a\}$, déterminer $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E)\big)$.

On a $\mathscr{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}\big\}$ donc $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E)\big) = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\big\}$.

✠ ***Exercice 12.*** [$\star$]
Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Résoudre, pour l'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$, les équations suivantes :

1. $X \cup A = B$;
2. $X \setminus A = B$;
3. $X \cap A = B$;
4. $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing$.

1. Si $A \not\subset B$, alors, pour toute partie X, on a $X \cup A \not\subset B$ donc l'équation n'a pas de solution.
   Si $A \subset B$, on voit qu'il est nécessaire et suffisant que $X = B \setminus C$ où C est une partie quelconque de A.
2. Si $A \cap B \neq \varnothing$, alors, pour toute partie X de E, on a $X \setminus A$ ne contient pas $A \cap B$ ce qui interdit d'avoir $X \setminus A = B$. Donc l'équation n'a pas de solution.
   Si $A \cap B = \varnothing$, alors $X = A \cup B$.
3. Il est nécesaire que $B \subset A$ sinon il n'y a pas de solution.
   Si $B \subset A$, alors $X = B \cup C$ où C est une partie de $\overline{A}$.
4. Si $A \cap B \neq \varnothing$, alors pas de solution.
   Si $A \cap B = \varnothing$, alors X est n'importe quelle partie de $\overline{A}$ qui contient B.

✠ ***Exercice 13.*** [$\circ$]
Deux ensembles disjoints sont-ils nécessairement distincts ?

Oui sauf s'ils sont tous les deux l'ensemble vide !

✠ ***Exercice 14.*** [★]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

L'exercice serait facile à résoudre en deux pesées si l'on savait si la bille différente était plus lourde ou plus légère que les autres. Ignorant ce fait, l'exercice devient d'autant plus croustillant. . .

Notons 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.

On commence par comparer 2 lots constituées de 1,2,3 et de 4,5,6. Si ceux-ci ont même masse alors l'intrus figure parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intrus.

Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intrus se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralité), supposons que le premier lot est plus lourd que le second. Comparons maintenant les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5. Si celles-ci ont même masse commune, l'intrus se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6.

Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralité), supposons que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5.

Si l'intrus est plus lourd que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées.

Si l'intrus est plus léger que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5.

Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cet intrus.

✠ ***Exercice 15.*** [∘]
Sachant que $\sqrt{6}$ est un irrationnel, démontrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ en est également un.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. On peut alors écrire $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$ où $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. En élévant au carré, on obtient

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{a^2}{b^2},$$

c'est-à-dire

$$2+2\sqrt{6}+3=\frac{a^2}{b^2},$$

ce qui donne

$$\sqrt{6}=\frac{a^2-5b^2}{2b^2}\cdot$$

On constate alors que $\sqrt{6}$ s'écrit comme une fraction d'entiers, autrement dit que $\sqrt{6}$ est rationnel. C'est absurde ! Par conséquent,

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}\text{ est un nombre irrationnel.}}$$

✠ ***Exercice 16.*** [★]
Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+xf(1-x)=1+x$.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+xf(1-x)=1+x$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on remplace x par $1-x$ dans l'hypothèse, ce qui donne $\forall x\in\mathbb{R},\ f(1-x)+(1-x)f(x)=2-x$ et donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f(1-x)=2-x-(1-x)f(x)$. En reportant dans la relation de départ, cela donne $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+x\big(2-x-(1-x)f(x)\big)=1+x$, c'est-à-dire $\forall x\in\mathbb{R},\ (1-x+x^2)f(x)=1-x+x^2$. Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ 1-x+x^2\neq 0$ (le discriminant est strictement négatif), on obtient $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1$.
- Synthèse : La fonction constante égale à 1 est bien une solution de notre problème.
- Bilan :

$$\boxed{\text{La seule fonction solution de notre problème est la fonction constante égale à 1.}}$$