

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on notera $\lfloor y \rfloor$ la **partie entière** de y , c'est-à-dire l'unique entier relatif $\lfloor y \rfloor \in \mathbf{Z}$ tel que $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}$, on notera $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on notera $|z|$ le module de z . On notera $\ell^1(\mathbf{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes $(z_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ telles que $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |z_k| < +\infty$.

On dira qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est **périodique de période** $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x + T) = f(x)$. Dans ce problème, on supposera toujours que $T = 1$ et on dira simplement qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est **périodique** si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x + 1) = f(x)$. On notera \mathcal{C}_{per} l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ continues et périodiques muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|.$$

Si $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est une fonction continue et périodique que l'on suppose de plus de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , on notera $f^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, la dérivée m -ième de f qui appartient encore à l'espace \mathcal{C}_{per} . On rappelle qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de \mathcal{C}_{per} **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on notera $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par

$$e_k(x) = \exp(2\pi i k x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit $c_k(f) \in \mathbf{C}$, le k -ième **coefficient de Fourier** de f , par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y) dy.$$

Pour tous $n, N \in \mathbf{N}$, on définit les fonctions $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ et $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f).$$

Le sujet est composé de cinq parties. Les résultats de la partie **I** seront utilisés dans la partie **II**. Les résultats de la partie **II** seront utilisés dans les parties **III** et **V**. Les résultats de la partie **III** seront utilisés dans la partie **IV**.

I. Préliminaires

Le but de cette partie est d'établir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie **II**.

- (I.1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.
- (I.2) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est uniformément continue sur \mathbf{R} .
- (I.3) Soit $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $z \in \mathbf{C}$. Montrer que la suite de nombres complexes $(Z_N)_{N \in \mathbf{N}}$ définie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N z_n$$

converge aussi vers z .

II. Théorème de Fejér et applications

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème de Fejér qui affirme que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n e_k.$$

- (II.1) Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_0^1 K_N(y) \, dy = 1.$$

- (II.2) Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2.$$

- (II.3) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

- (II.3.a) Montrer que

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y) \, dy.$$

- (II.3.b) En déduire que

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x)) K_N(y) \, dy.$$

- (II.4) **Théorème de Fejér.** Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

- (II.4.a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| K_N(y) \, dy \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)| K_N(y) \, dy \leq \varepsilon.$$

(II.4.b) Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de δ et de f) telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_{\delta}^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

(II.4.c) En déduire que la suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N \geq 1}$ converge uniformément vers f .

(II.5) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

(II.5.a) Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Établir une relation entre les coefficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k(f^{(n)})$.

(II.5.b) En déduire que $(c_k(f))_{k \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$.

(II.5.c) Montrer que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f .

III. Équirépartition

Le but de cette partie est d'étudier l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels.

Pour tout sous-ensemble fini $X \subset \mathbf{N}$, on notera $\sharp X$ le cardinal de l'ensemble X . Pour tout entier $N \geq 1$, on notera simplement $\llbracket 1, N \rrbracket = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leq k \leq N\}$. Pour tout entier $N \geq 1$, toute suite de nombres réels $(x_n)_{n \geq 1}$ et tout sous-ensemble non vide $Y \subset [0, 1]$, on notera

$$\gamma(N, (x_n), Y) = \frac{1}{N} \sharp \{1 \leq n \leq N : x_n - \lfloor x_n \rfloor \in Y\}.$$

On dira qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n \geq 1}$ est **équirépartie** si pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \gamma(N, (x_n), [a, b]) = b - a.$$

(III.1) Montrer qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \gamma(N, (x_n), [a, b[) = b - a.$$

(III.2) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout entier $M \geq 1$, on notera

$$\Phi_M(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(k + \frac{j}{M}\right) \mathbf{1}_{[k + \frac{j}{M}, k + \frac{j+1}{M}[}.$$

(III.2.a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M \geq 1$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leq \varepsilon.$$

(III.2.b) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels équirépartie. En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(y) dy. \quad (*)$$

(III.3) On se propose de montrer la réciproque de la question III.2. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels qui vérifie (*) pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $0 \leq a < b \leq 1$.

(III.3.a) Étant donné $\varepsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+ \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ telles que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$$

et

$$\int_0^1 (f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y)) dy \leq \varepsilon.$$

(III.3.b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie.

(III.4) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_k(x_n) = 0.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie.

(III.5) Soient $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la suite $(\alpha n + x)_{n \geq 1}$ est équirépartie.

(III.6) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \int_0^1 f(y) dy - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n \right\|_\infty = 0.$$

IV. Théorème de Weyl

Le but de cette partie est de démontrer le **Théorème de Weyl** qui affirme que pour tout polynôme de degré $d \geq 1$ à coefficients réels $P(X) = \alpha_d X^d + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie.

(IV.1) **Inégalité de van der Corput.** Soit $(z_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Soient $1 \leq H \leq N$.

(IV.1.a) Montrer que

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right| \leq H + 1.$$

(IV.1.b) Montrer que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(\sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

(IV.1.c) En écrivant

$$\sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{h,h'=1}^H z_{n+h} \overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H |z_{n+h}|^2 + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq h' < h \leq H} z_{n+h} \overline{z_{n+h'}},$$

et en effectuant un changement de variables approprié, montrer que

$$\sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 \leq NH + 2H \sum_{h=1}^H \left| \sum_{n=1}^N z_{n+h} \overline{z_n} \right| + H^2(H+1).$$

(IV.1.d) En déduire que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_{n+h} \bar{z}_n \right| \right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N} \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

(IV.2) **Lemme de van der Corput.** Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout $h \geq 1$, la suite de nombres réels $(x_{n+h} - x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie.

(IV.3) Démontrer le **Théorème de Weyl** en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geq 1$.

V. Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

Le but de cette partie est d'étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels et les liens avec l'équirépartition.

On dira qu'un nombre réel α est de **Liouville** si pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{N} \setminus \{0, 1\})$ tel que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left(\frac{1}{q_n} \right)^n.$$

On dira qu'un nombre réel α est **algébrique** s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ non constant tel que $P(\alpha) = 0$.

(V.1) Montrer qu'un nombre réel de Liouville est irrationnel.

(V.2) **Théorème de Liouville.**

(V.2.a) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible à coefficients entiers de degré $d \geq 2$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe une constante $c_\alpha > 0$ (qui dépend de α) telle que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_\alpha}{q^d} \quad \text{pour tout } (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*.$$

(V.2.b) En déduire qu'un nombre réel algébrique sur \mathbf{Q} n'est pas de Liouville.

(V.2.c) Montrer que le nombre réel

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

n'est pas algébrique.

(V.3) **Équirépartition quantitative.** Dans cette question, on prouve une version quantitative de la convergence de la question III.6.

Soit α un nombre irrationnel qui n'est pas de Liouville. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Montrer qu'il existe une constante $C_{\alpha, f} > 0$ (qui dépend de α et de f) telle que

$$\left\| \int_0^1 f(y) dy - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n \right\|_{\infty} \leq \frac{C_{\alpha, f}}{N} \quad \text{pour tout } N \geq 1.$$

Indication : on pourra utiliser les résultats de la question II.4.