Lycée Henri IV
MPSI

**Cours**
Durée : 6 h 30

# ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.



MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

# Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les espaces vectoriels ;
- les applications linéaires ;
- la dimension finie ;
- les déterminants ;
- les espaces euclidiens.

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Les trois lettres AQT signifient «Âne Qui Trotte» et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

# A. Isométries vectorielles

## A.1. Endomorphismes orthogonaux préhilbertiens

**Définition 1**

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est un endomorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle de $E$ dès que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) $u$ conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E,\ \ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ;

(ii) $u$ conserve la norme : $\forall x \in E,\ \ \|u(x)\| = \|x\|$.

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$.

■ On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que $u$ conserve le produit scalaire. Si $x \in E$, on a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$, d'où $\|u(x)\| = \|x\|$. Donc $u$ conserve la norme.

$\Leftarrow$ Supposons que $u$ conserve la norme. Soient $x, y \in E$. D'après une identité de polarisation, on a

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{\|u(x)+u(y)\|^2+\|u(x)-u(y)\|^2}{4} = \frac{\|u(x+y)\|^2+\|u(x-y)\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{4} = \langle x, y\rangle\,,$$

ce qui démontre que $u$ conserve le produit scalaire. ■

Pour vérifier qu'un endomorphisme $u$ est orthogonal, il suffit de vérifier l'UNE des deux propriétés (i) ou (ii). À l'inverse, lorsque l'on sait déjà que $u$ est un endomorphisme orthogonal, on peut utiliser les DEUX propriétés (i) et (ii).

S'il est logique d'appeler « isométrie » une application qui conserve la norme, il est, en revanche, plus discutable de qualifier d'« orthogonal » un endomorphisme qui conserve le produit scalaire. En effet, s'il est vrai qu'un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité (et même tous les angles non orientés), cela n'est pas caractéristique : il existe des endomorphismes qui conservent l'orthogonalité et qui ne sont pas orthogonaux (par exemple les homothéties).

**Exemples :**

- $\mathrm{Id}_E$ et $-\mathrm{Id}_E$ sont des endomorphismes orthogonaux.

L'exemple fondamental suivant dit que les symétries orthogonales sont orthogonales.

**Exemple fondamental**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Une symétrie est un automorphisme orthogonal de $E$ si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

■ Soient $F, G$ deux sous-espaces supplémentaires et $s$ la symétrie par rapport à $F$ dans la direction de $G$.

$\Rightarrow$ Supposons que $s$ est un endomorphisme orthogonal.

Soit $f \in F$. Pour tout $g \in G$, on a $\langle f, g\rangle = \langle s(f), s(g)\rangle = \langle f, -g\rangle = -\langle f, g\rangle$, ce qui démontre que $\langle f, g\rangle = 0$, c'est-à-dire $f \perp g$. On a donc $f \in G^\perp$. Cela justifie que $F \subset G^\perp$.

Soit $f' \in G^\perp$. Comme $E = F \oplus G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $f' = f + g$. En « scalairisant » par $g$, il vient $\langle f', g\rangle = \langle f, g\rangle + \|g\|^2$, c'est-à-dire $0 = 0 + \|g\|^2$ puisque $g \perp f'$ (car $f' \in G^\perp$) et $g \perp f$ (car $f \in F \subset G^\perp$). Il s'ensuit que $g = 0_E$ et donc que $f' = f$, d'où $f' \in F$. Ainsi, on a $G^\perp \subset F$.

On a ainsi démontré que $F = G^\perp$, ce qui signifie que $s$ est une symétrie orthogonale.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $s$ est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire $G = F^\perp$. Soit $x \in E$. Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, il existe $f \in F$ et $f' \in F^\perp$ tels que $x = f + f'$. En utilisant deux fois le théorème de Pythagore, on a $\|s(x)\|^2 = \|s(f+f')\|^2 = \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 + \|f'\|^2 = \|f + f'\|^2 = \|x\|^2$. Cela justifie que $s$ est une isométrie vectorielle, donc un automorphisme orthogonal. ■

L'isométrie est une propriété forte. L'énoncé qui suit montre qu'elle contraint à l'injectivité.

**Proposition 1**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Tout endomorphisme orthogonal de $E$ est injectif.

■ Soit $u$ un endomorphisme orthogonal de $E$. Si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$, donc $x = 0_E$. Cela démontre que $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, c'est-à-dire que $u$ est injectif. ■

**Exemples :**

- Les projections orthogonales (autres que $\mathrm{Id}_E$) ne sont pas injectives. Ce ne sont donc pas des endomorphismes orthogonaux. On aboutit à un conflit (facheux) de vocabulaire : une projection orthogonale n'est pas orthogonale (sauf $\mathrm{Id}_E$).
- On munit $\mathbb{R}[X]$ de son produit scalaire canonique. L'endomorphisme « shift » $\varphi$ de $\mathbb{R}[X]$, défini par son action sur la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^k) = X^{k+1}$, est orthogonal (les coordonnées sont justes décalées d'un rang...) et il n'est pas surjectif (il n'atteint pas les constantes). En dimension infinie, il existe donc des endomorphismes orthogonaux qui ne sont pas des automorphismes. Nous allons voir qu'il est donc judicieux de travailler dans un espace euclidien (où le théorème Bonux va nous assurer la bijectivité).

On le sait : l'injectivité permet de conserver la liberté d'une famille de vecteurs. Dans le cadre des endomorphismes orthogonaux, on peut améliorer ce résultat pour obtenir une caractérisation des isométries par leur action sur une base.

**Proposition 2**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors $u$ est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, $u(\mathscr{B})$ est une famille orthonormale.

■ On pose $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$.

$\Rightarrow$ Supposons que $u$ est orthogonal. Pour tous $i, j \in I$, on a $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, ce qui démontre que $u(\mathscr{B})$ est une famille orthonormale.

$\Leftarrow$ Supposons que $u(\mathscr{B})$ est une famille orthonormale. Soient $x, y \in E$. On décompose $x$ et $y$ sur la base $\mathscr{B}$ : il existe $(\alpha_i)_{i\in I}, (\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$ telles que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} \beta_i e_i$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \Big\langle u\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i e_i\Big)\,,\, u\Big(\sum_{i\in I} \beta_i e_i\Big)\Big\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I} \alpha_i u(e_i)\,,\, \sum_{i\in I} \beta_i u(e_i)\Big\rangle \\
&= \sum_{i,j\in I} \alpha_i \beta_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \sum_{i,j\in I} \alpha_i \beta_j \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i,j\in I} \alpha_i \beta_j \langle e_i, e_j\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I} \alpha_i e_i\,,\, \sum_{i\in I} \beta_i e_i\Big\rangle \\
&= \langle x, y\rangle\,,
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $u$ est orthogonal. ■

Lorsque l'on dispose d'un endomorphisme orthogonal, l'image de TOUTE base orthonormale est une famille orthonormale. Mais, inversement, pour démontrer qu'un endomorphisme est orthogonal, il suffit de démontrer que l'image d'UNE base orthonormale est une famille orthonormale.

**Exemples :**

- On munit $\mathbb{R}[X]$ de son produit scalaire canonique. L'endomorphisme « shift » $\varphi$ de $\mathbb{R}[X]$ envoie la base canonique sur la base canonique privée du polynôme constant 1. C'est bien une famille orthonormale. En revanche, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}[X]$. Là encore, nous allons voir que tout est plus simple en dimension finie.

## A.2. Automorphismes orthogonaux euclidiens

Dans la suite de ce cours, on bascule en dimension finie : tous les préhilbertiens sont des euclidiens. Alors, comme l'énonce la définition suivante, les isométries vectorielles gagnent encore en rigidité : elles ne sont plus seulement injectives mais carrément bijectives. Youpi !

**Définition 2**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Tout endomorphisme orthogonal de $E$ est bijectif. On parle alors d'automorphisme orthogonal de $E$. Leur ensemble est toujours noté $\mathscr{O}(E)$.

■ Soit $u \in \mathscr{O}(E)$. La proposition 1 nous dit que $u$ est injectif. Comme $E$ est de dimension finie finie, le théorème bonux affirme alors que $u$ est un automorphisme de $E$. ■

Autrement dit, lorsqu'on est en dimension finie, $\mathscr{O}(E)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{GL}(E)$. Nous allons voir ci-dessous que la structure de $\mathscr{O}(E)$ est en fait nettement plus riche.

**Exemples :**

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $r_\theta$ de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est orthogonal pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. En effet,

$$\begin{aligned} \|r_\theta(x,y)\|^2 &= {}^t\left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= \|(x,y)\|^2 . \end{aligned}$$

Le théorème suivant décrit la structure de groupe de l'ensemble $\mathscr{O}(E)$ lorsque $E$ est un espace de dimension finie.

**Théorème 1**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. L'ensemble $\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathscr{GL}(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de $E$. En particulier,

(i) la composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal ;

(ii) l'inverse (pour la loi $\circ$) d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal.

■ Nous savons déjà que $\mathscr{O}(E)$ est une partie de $\mathscr{GL}(E)$ et que $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{O}(\mathbb{E})$. Pour tous $u, v \in \mathscr{O}(E)$, on a $\|uv^{-1}(x)\|^2 = \|u(v^{-1}(x))\|^2 = \|v^{-1}(x)\|^2 = \|v(v^{-1}(x))\|^2 = \|x\|^2$, où les deuxième et troisième égalités découlent respectivement du fait que $u \in \mathscr{O}(E)$ et $v \in \mathscr{O}(E)$, donc $uv^{-1} \in \mathscr{O}(E)$. Par conséquent, $\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$. ■

La propriété (i) est vraie même lorsque $E$ n'est pas de dimension finie. Elle exprime qu'en dimension quelconque $\mathscr{O}(E)$ est un sous monoïde de $\big(\mathscr{L}(E), \circ\big)$.

La somme de deux automorphismes orthogonaux n'est pas un automorphisme orthogonal ! Par conséquent, le groupe orthogonal $\mathscr{O}(E)$ n'est définitivement pas un espace vectoriel ! Il n'a ni base, ni dimension. Que cela soit dit !

En corollaire de la proposition 2, on obtient en dimension finie une caractérisation des automorphismes orthogonaux par la conservation des bases orthonormales.

**Proposition 3**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors $u$ est un automorphisme orthogonal si, et seulement si, $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormale de $E$.

■ Notons $n$ la dimension de $E$.

$\Rightarrow$ Si $u$ est un automorphisme orthogonal, la proposition 2 nous dit que $u(\mathscr{B})$ est une famille orthonormale de $E$. En outre, comme $u$ est injectif, $u(\mathscr{B})$ possède $n$ vecteurs. Cela démontre que $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormale de $E$.

$\Leftarrow$ Si $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormale de $E$, c'est en particulier une famille orthonormale et la proposition 2 permet d'en déduire que $u$ est un endomorphisme orthogonal. On a vu qu'en dimension finie, cela revient à dire que $u$ est un automorphisme orthogonal. ■

Lorsque l'on dispose d'un endomorphisme orthogonal $u$, l'image de TOUTE base orthonormale est une base orthonormale. Mais, inversement, pour démontrer qu'un endomorphisme $u$ est un automorphisme orthogonal, il suffit de montrer que l'image d'UNE base orthonormale est une base orthonormale.

**Exemples :**

- On retrouve que l'endomorphisme $r_\theta$ de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  est un automorphisme orthogonal puisque la famille $\big((\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\big)$, qui est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (qui est orthonormale), est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$ muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Pour toute permutation $\sigma$ de $[\![1; n]\!]$, l'unique endomorphisme $u_\sigma$ de $E$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ u_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}$ est un automorphisme orthogonal puisque la famille $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ est une base orthonormale de $E$.

# B. Matrices orthogonales

## B.1. Groupe orthogonal

**Définition 3**

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale lorsque l'inverse de $A$ est sa transposée ${}^tA$, c'est-à-dire lorsque ${}^tAA = I_n$ ou $A{}^tA = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de taille $n \times n$ est noté $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

On notera que la définition d'une matrice orthogonale fournit l'inversibilité de la matrice. Autrement dit, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

Mieux ! D'un point de vue pratique, lorsqu'une matrice est orthogonale, calculer son inverse est une formalité : il suffit de transposer la matrice !

On sait qu'une matrice inversible à gauche (respectivement à droite) est également inversible à droite (respectivement à gauche). Par conséquent, pour vérifier qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, il suffit de vérifier l'UNE des deux égalités ${}^tAA = I_n$ ou $A{}^tA = I_n$. À l'inverse, lorsque l'on sait déjà que $A$ est une matrice orthogonale, on peut utiliser les DEUX propriétés ${}^tAA = I_n$ et $A{}^tA = I_n$.

**Exemples :**

- $I_n$ et $-I_n$ sont des matrices orthogonales.
- Les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

  où $\theta$ décrit $\mathbb{R}$, sont orthogonales (ce n'est pas difficile de le vérifier). Nous verrons plus loin dans ce cours que ce sont les seules matrices orthogonales dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

La proposition suivante décrit la structure de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

**Théorème 2**

L'ensemble $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\big(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times\big)$, appelé groupe orthogonal d'indice $n$. En particulier,

(i) le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale ;

(ii) l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

■ Nous savons déjà que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $A, B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t(AB^{-1})(AB^{-1}) = {}^tB^{-1}{}^tA\,AB^{-1} = B{}^tA\,A{}^tB = BI_n{}^tB = B{}^tB = I_n$, donc $AB^{-1} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. ■

## $\mathscr{B}$.2. Matrices orthogonales et automorphismes orthogonaux

Dans l'énoncé qui suit, on donne une interprétation géométrique des matrices orthogonales en prouvant qu'elles sont les matrices des automorphismes orthogonaux dans des bases orthonormales.

**Proposition 4**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors $u$ est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, $A$ est une matrice orthogonale.

■ On pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Par ailleurs, on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $A$ et on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ \langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

- $\Rightarrow$ Supposons d'abord que $u$ est un automorphisme orthogonal de $E$. Pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, on a $\langle C_i, C_j \rangle = \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire ${}^tC_iC_j = \delta_{i,j}$. Or les ${}^tC_iC_j$ sont les coefficients de la matrice ${}^tAA$, donc ${}^tAA = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = I_n$. Cela signifie que $A$ est une matrice orthogonale.
- $\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $A$ est une matrice orthogonale. Soit $x \in E$. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. On a alors $\|u(x)\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX{}^tAAX = {}^tXI_nX = {}^tXX = \|x\|^2$. Cela démontre que $u$ est une isométrie vectorielle et donc un automorphisme orthogonal de $E$. ■

Attention, ce résultat est faux si la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormale !

Pour démontrer qu'un endomorphisme est orthogonal, il suffit de vérifier que sa matrice dans UNE base orthonormale est une matrice orthogonale. Inversement, lorsque l'on sait qu'un endomorphisme est orthogonal, on peut utiliser que sa matrice dans TOUTE base orthonormale est une matrice orthogonale.

Lorsqu'on fixe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$, il découle de l'énoncé précédent que l'application de $\mathscr{O}(E)$ vers $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ qui à tout automorphisme orthogonal lui associe sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme de groupe. Cette correspondance justifie pleinement le nom commun de « groupe orthogonal » donné à $\mathscr{O}(E)$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

**Exemples :**

- Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$ et $s$ un endomorphisme de $E$. Alors $s$ est une symétrie orthogonale si, et seulement si, sa matrice $S$ dans la base $\mathscr{B}$ vérifie à la fois $S^{-1} = S$ (pour dire que c'est une symétrie) et $S^{-1} = {}^tS$ (pour exprimer que c'est une isométrie). Il est équivalent de dire que ${}^tS = S$ et ${}^tSS = I_n$. On en déduit ainsi que $s$ est une symétrie orthogonale si, et seulement si, sa matrice $S$ dans la base orthonormale $\mathscr{B}$ est symétrique et orthogonale. Il en va alors de même dans toute autre base orthonormale. 2 h 15

## B.3. Matrices orthogonales et bases orthonormales

Dans ce paragraphe, on met en lumière deux liens entre les matrices orthogonales et les bases orthonormales. Dans la première proposition ci-dessous, on montre que les matrices orthogonales sont les matrices des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On en déduit une méthode pratique pour déterminer si, oui ou non, une matrice est orthogonale.

**Proposition 5**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de leur produits scalaires canoniques. On a équivalence entre

(i) $A$ est une matrice orthogonale ;

(ii) les colonnes de $A$ forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

(iii) les lignes de $A$ forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

■ On démontre l'équivalence (i) $\iff$ (ii). L'autre se traite de même.
On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A$. On a déjà remarqué que les ${}^tC_iC_j = \langle C_i, C_j\rangle$ sont les coefficients de la matrice ${}^tAA$. Par conséquent, l'égalité ${}^tAA = I_n$ se traduit par $\forall i, j \in [\![1;n]\!]\,,\ \ \langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j}$, ce qui signifie que les colonnes de $A$ forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ■

C'est en utilisant cette caractérisation, plutôt que la définition elle-même, que l'on vérifie qu'une matrice est bien orthogonale. Il suffit pour cela de contrôler que les colonnes (ou les lignes) forment une famille orthonormale. Cela fait $n$ normes et $n(n-1)/2$ produits scalaires à calculer.

**Exemples :**

- La matrice
$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
est orthogonale puisque l'on peut aisément vérifier que les colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Dans la proposition qui suit, on interprète les matrices orthogonales comme les matrices de changement de base orthonormale.

**Proposition 6**

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$, $\mathscr{B}'$ une base de $E$ et $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de $E$ si, et seulement si, la matrice $P$ est orthogonale.

■ Soit $u$ l'unique endomorphisme de $E$ qui envoie $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathscr{B}' \text{ est une base orthonormale de } E) \quad &\iff \quad (u \text{ est un automorphisme orthogonal}) \\
&\iff \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est une matrice orthogonale}\big) \\
&\iff \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \text{ est une matrice orthogonale}\big) \\
&\iff \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \text{ est une matrice orthogonale}\big) \\
&\iff \quad \big(P \text{ est une matrice orthogonale}\big),
\end{aligned}$$

où la première équivalence découle de la proposition 2 et la deuxième équivalence est une conséquence de la proposition 4. ■

Lorsqu'on effectue un changement de base entre deux bases orthonormales $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = {}^tP_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, ce qui facilite grandement les calculs.

# C. Groupe spécial orthogonal

## C.1. Groupe orthogonal et déterminant

Les éléments du groupe orthogonal sont inversibles et possèdent, à ce titre, un déterminant non nul. En fait, nous allons voir que ce déterminant vaut nécessairement $\pm 1$ et qu'il permet donc de distinguer deux types d'isométries dans le groupe orthogonal.

**Proposition 7**

Tout automorphisme orthogonal d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est de déterminant $-1$ ou $1$. Si ce déterminant vaut 1, on dit que l'automorphisme orthogonal est une isométrie positive (ou directe). Dans le cas contraire (c'est-à-dire si le déterminant vaut $-1$), on dit qu'il s'agit d'une isométrie négative (ou indirecte).

Toute matrice orthogonale est de déterminant $-1$ ou $1$.

■ Comme la matrice d'un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale est orthogonale, il suffit de démontrer le résultat dans le cas des matrices.

Soit $A \in \mathscr{O}_n\mathbb{R})$. Comme ${}^tAA = I_n$, on a $\det({}^tAA) = 1$, c'est-à-dire $\det({}^tA)\det(A) = 1$ ou encore $(\det A)^2 = 1$. Par conséquent, on a bien $\det A \in \{-1; +1\}$. ■

Attention !! Il existe des matrices de déterminant égal à $\pm 1$ qui ne sont pas orthogonales. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Quand j'étais plus jeune, on ne parlait pas d'isométrie positive ou négative, ni même d'isométrie directe ou indirecte. On disait « droite » ou « gauche » pour distinguer le yin et le yang dans le groupe orthogonal. Mais bon, j'me fais vieux et ce vocabulaire bipartiste est désormais suranné...

**Exemples :**

- Rappelons qu'une réflexion est une symétrie orthogonale $s$ par rapport à un hyperplan $H$. Dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = H \overset{\perp}{\oplus} H^{\perp}$, la matrice de $s$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, \text{——}, 1, -1)$ dont le déterminant vaut $-1$. Une réflexion est donc une isométrie négative.

## C.2. Groupe spécial orthogonal

**Définition 4**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. L'ensemble des isométries positives de $E$ (c'est-à-dire les endomorphismes orthogonaux de déterminant 1) est un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de $E$ et noté $\mathscr{SO}(E)$.

L'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales positives (c'est-à-dire celles de déterminant 1) est un sous-groupe de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, appelé groupe spécial orthogonal d'indice $n$ et noté $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$.

■ La restriction de l'application det à $\mathscr{O}(E)$ au départ et $\{-1; 1\}$ à l'arrivée est un morphisme de groupe (cela découle de la multiplicativité du déterminant). On constate que $\mathscr{SO}(E)$ est le noyau de ce morphisme de groupe. Par conséquent, c'est un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$.

De même, la restriction de l'application det à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ au départ et $\{-1; 1\}$ à l'arrivée est un morphisme de groupe dont le noyau est $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$. Ce dernier est donc un sous-groupe de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. ■

Le groupe spécial orthogonal $\mathscr{SO}(E)$ (respectivement $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$) est aussi un sous-groupe du groupe spécial linéaire $\mathscr{SL}(E)$ (respectivement $\mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$), constitué des automorphismes (respectivement des matrices) de déterminant 1.

Les groupes spéciaux orthogonaux $\mathscr{SO}(E)$ et $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ sont aussi parfois notés $\mathscr{O}^+(E)$ et $\mathscr{O}_n^+(\mathbb{R})$. Cela permet de les distinguer de leurs complémentaires $\mathscr{O}(E) \setminus \mathscr{SO}(E)$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$, qui sont évidemment notés $\mathscr{O}^-(E)$ et $\mathscr{O}_n^-(\mathbb{R})$. Ces notations sont, à mon sens, peu judicieuses : elles laissent penser que $\mathscr{O}^-(E)$ et $\mathscr{O}_n^-(\mathbb{R})$ ont une structure de groupe. Il n'en est rien ! En effet, le produit de deux éléments de $\mathscr{O}^-$ est un élément de $\mathscr{O}^+$. Ce qu'il y a de spécial avec les éléments positifs du groupe orthogonal, c'est précisément qu'ils forment un sous-groupe ! Si cette structure spécifique justifie la notation particulière $\mathscr{SO}$, a contrario la notation $\mathscr{O}^-$ n'a pas de raison d'être.

**Exemples :**

- Si $n \geqslant 2$, le sous-groupe $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ n'est pas trivial : il n'est ni réduit à $\{I_n\}$, ni égal à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, avec les notations $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, les deux matrices diagonales par blocs $\mathrm{Diag}(R(\theta), I_{n-2})$ et $\mathrm{Diag}(S(\theta), I_{n-2})$ appartiennent respectivement à $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$.

Rappelons que deux bases d'un espace vectoriel ont « même orientation » si elles ont des déterminants de même signe. Cette relation induit deux classes d'équivalence sur les bases. « Orienter » l'espace, c'est alors choisir l'une de ces deux classes dont les éléments sont appelés bases directes, tandis que les éléments de l'autre classe sont appelés bases indirectes.

**Proposition 8**

Deux bases orthonormales d'un espace euclidien ont la même orientation si, et seulement si, la matrice de passage appartient au groupe spécial orthogonal.

■ AQT ■

Ce résultat permet de justifier l'existence de bases orthonormales directes et indirectes.

**Corollaire 1**

Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales directes (on dit b.o.n.d.) et des bases orthonormales indirectes.

■ Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$. Prenons $A$ dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}'$ la base orthonormale dont la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $A$. On sait que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont d'orientations contraires (puisque $\det(A) < 0$) et donc que l'une est directe et l'autre est indirecte. ■

# D. Produit mixte et produit vectoriel

## D.1. Produit mixte

**Définition 5**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n$. Pour toute famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de $E$, le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est indépendant de la base orthonormale directe $\mathscr{B}$ choisie. On appelle produit mixte de $(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette famille calculé dans une base orthonormale directe arbitraire. On le note $[x_1, \dots, x_n]$.

■ Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases orthonormales directes. On a $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)$. Or la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est dans le groupe spécial orthonormal d'après la proposition 8, ce qui donne $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}) = 1$. Par conséquent, on a $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui valide la définition du produit mixte. ■

Jusqu'ici, le déterminant d'une famille de vecteurs dépendait de la base choisie. Dans le cadre euclidien, on voit que si l'on ne travaille qu'avec des bases orthonormales directes (ce qui est habituel dans un espace euclidien), le déterminant d'une famille de vecteurs devient une grandeur intrinsèque à la famille. L'encadré ci-dessous explique que cette quantité peut s'interpréter géométriquement.

**Un volume orienté**

Supposons que $E = E_2$ est un espace euclidien orienté de dimension 2 et expliquons pourquoi on peut interpréter le produit mixte $[x_1, x_2]$ comme l'aire orientée du parallélogramme porté par $x_1$ et $x_2$.

Signalons tout d'abord que si $x_1$ et $x_2$ sont colinéaires, l'aire du parallélogramme et le produit mixte sont nuls tous les deux.

Considérons dorénavant que $(x_1, x_2)$ est une base de $E_2$. On peut alors orthonormaliser $(x_1, x_2)$ en une base orthonormale $(e_1, e_2)$, de même orientation que $(x_1, x_2)$. Dans cette base, on a

$$\det_{(e_1,e_2)}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \langle x_1, e_1\rangle & \langle x_2, e_1\rangle \\ 0 & \langle x_2, e_2\rangle \end{vmatrix} = \langle x_1, e_1\rangle \langle x_2, e_2\rangle\,,$$

donc $[x_1, x_2] = \pm \langle x_1, e_1\rangle \langle x_2, e_2\rangle$ avec $\pm = +$ si $(x_1, x_2)$ est directe et $\pm = -$ si $(x_1, x_2)$ est indirecte. Or, d'après le procédé de Gram–Schmidt, on sait que $\langle x_1, e_1\rangle$ est la norme du vecteur $x_1$ et que $\langle x_2, e_2\rangle$ est la norme de la composante du vecteur $x_2$ sur $e_2$. Autrement dit, $\langle x_1, e_1\rangle$ et $\langle x_2, e_2\rangle$ sont respectivement un coté et la hauteur associée du parallélogramme porté par $x_1, x_2$. Cela démontre bien que $[x_1, x_2]$ représente l'aire de ce parallélogramme, algébrisée par l'orientation de la base $(x_1, x_2)$.

Supposons que $E = E_3$ est un espace euclidien orienté de dimension 3 et interprétons le produit mixte $[x_1, x_2, x_3]$ comme le volume orienté du parallélépipède construit sur $x_1, x_2, x_3$.

Laissons de côté le cas où $(x_1, x_2, x_3)$ est liée : volume et produit mixte sont alors nuls.

Considérons donc que $(x_1, x_2, x_3)$ est une base de $E_3$. On orthonormalise $(x_1, x_2, x_3)$ en une base orthonormale $(e_1, e_2, e_3)$, de même orientation que $(x_1, x_2, x_3)$. Comme ci-dessus, on montre que $[x_1, x_2, x_3] = \pm \langle x_1, e_1\rangle \langle x_2, e_2\rangle \langle x_3, e_3\rangle$ avec $\pm = +$ si $(x_1, x_2, x_3)$ est directe et $\pm = -$ si $(x_1, x_2, x_3)$ est indirecte. On constate alors que $\langle x_1, e_1\rangle \langle x_2, e_2\rangle$ et $\langle x_3, e_3\rangle$ sont respectivement l'aire d'une face et la hauteur associée du parallélépipède construit sur $x_1, x_2, x_3$. Cela démontre bien que $[x_1, x_2, x_3]$ représente le volume de ce parallélépipède, algébrisé par l'orientation de la base $(x_1, x_2, x_3)$.

On peut ainsi poursuivre le raisonnement et dire que

| |
|---|
| le produit mixte $[x_1, \dots, x_n]$ s'interprète comme l'hypervolume orienté du parallélotope construit sur la famille $(x_1, \dots, x_n)$. |

L'interprétation volumique du produit mixte permet de donner une nouvelle vision du déterminant d'un endomorphisme.

**Proposition 9**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. L'action de $u$ multiplie l'hypervolume des parallélotopes par $\det(u)$. Autrement dit, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs de $E$, l'hypervolume du parallélotope construit sur $\big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\big)$ est égal au produit de $\det(u)$ par l'hypervolume du parallélotope construit sur $(x_1, \ldots, x_n)$, ou encore

$$[u(x_1), \ldots, u(x_n)] = \det(u) \times [x_1, \ldots, x_n].$$

■ C'est la version « produit mixte » de la formule bien connue sur l'action d'un endomorphisme sur le déterminant d'une famille de vecteurs. ■

Dans le cas d'une isométrie vectorielle, on constate donc que les volumes sont conservés (au signe près). Rien de plus intuitif : une isométrie conserve les longueurs et les angles donc il est logique qu'elle conserve aussi les volumes.

En revanche, les transformations isochores ne sont pas toutes isométriques ! Par exemple, l'affinité de $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \longmapsto (x/2, 2y)$ conserve bien les volumes (la division par deux des abscisses est compensée par le doublement des ordonnées) mais ne conserve pas les longueurs.

Par conséquent, il est tout à fait normal qu'une matrice orthogonale soit de déterminant $\pm 1$ et, <u>non</u> réciproquement, qu'une matrice de déterminant $\pm 1$ ne soit pas nécessairement orthogonale.

## D.2. Produit vectoriel

En dimension 3, le produit mixte permet d'introduire le produit vectoriel.

**Définition 6**

Soit $(E_3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3. Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E_3$, il existe un unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que, pour tout $\vec{w} \in E_3$, on ait $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\rangle$. Ce vecteur s'appelle le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre).

■ Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E_3$. L'application $\ell$ de $E_3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall \vec{w} \in E_3,\ \ell(\vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est une forme linéaire sur $E_3$. Le théorème de représentation de Riesz assure alors l'existence et l'unicité du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que $\forall \vec{w} \in E_3,\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\rangle$. ■

La formule $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E_3,\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\rangle$ justifie a posteriori le nom de produit mixte, comme mélange d'un produit vectoriel et d'un produit scalaire.

L'interprétation du produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ permet de voir que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme porté par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$.

La définition du produit vectoriel est âpre au premier abord (en particulier, elle ne correspond pas à la définition plus simple que vous avez vue en physique). Mais elle a ses avantages ! En particulier, elle permet de démontrer efficacement toutes les propriétés du produit vectoriel qui sont énoncées ci-dessous.

**Proposition 10**

Soient $(E_3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E_3$.

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ;

(ii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur nul ;

(iii) le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique ;

(iv) le produit vectoriel n'est pas associatif mais on dispose de la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ ;

(v) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ;

(vi) si $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormale, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormale directe ;

(vii) si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale directe et si $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right).$$

4 h 40

■ En exercice. ■

# $\mathcal{E}$. Géométrie vectorielle euclidienne plane

## $\mathcal{E}$.1. Matrices orthogonales $2 \times 2$

**Proposition 11**

Les matrices orthogonales $2 \times 2$ sont les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

où $\theta$ décrit $\mathbb{R}$. Plus précisément, on a

$$\mathscr{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_2(\mathbb{R}) = \{S(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

■ Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, alors ses colonnes sont normées, donc $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$, ce qui prouve l'existence de deux nombres réels $\theta$ et $\varphi$ tels que $(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $(c,d) = (\sin\varphi, \cos\varphi)$. L'orthogonalité des colonnes nous donne alors $\sin(\theta+\varphi) = 0$, c'est-à-dire $\varphi \equiv -\theta\ [\pi]$. Les matrices orthogonales d'ordre 2 sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, ces matrices sont bien des matrices orthogonales.

Les descriptions de $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ en découlent car $\det R(\theta) = 1$ et $\det S(\theta) = -1$. ■

On peut alors décrire plus précisément le groupe $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$.

**Proposition 12**

Pour tous $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

(i) $R(0) = I_2$ ;

(ii) $R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$ ;

(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ ;

(iv) $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien.

■ AQT ■

## $\mathcal{E}$.2. Rotations planes et angles orientés

### a) Rotations vectorielles du plan

L'écriture matricielle des éléments de $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ permet d'interpréter les isométries positives du plan comme des rotations.

**Définition 7**

Soit $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Si $r$ est un élément de $\mathscr{SO}(E_2)$, il existe un nombre réel $\theta$, unique modulo $2\pi$, tel que, dans toute base orthonormale directe de $E_2$, la matrice de $r$ soit égale à $R(\theta)$. On dit alors que $r$ est la rotation d'angle $\theta$ et on la note $r_\theta$.

■ Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe de $E_2$. La matrice de $r$ dans $E$ appartient à $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = R(\theta)$. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base orthonormale directe de $E_2$, la matrice $P$ de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est aussi dans $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$. Comme ce groupe est abélien, on en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(r) = P^{-1}R(\theta)P = R(\theta)$.

L'unicité de $\theta$ modulo $2\pi$ découle de l'équivalence $\big(R(\theta) = R(\theta')\big) \iff \big(\theta \equiv \theta' \ [2\pi]\big)$. ■

Dans le plan, les isométries positives sont donc les rotations. C'est également vrai dans l'espace. Cela reste vrai en dimension $n$ quelconque puisque les isométries directes d'un espace euclidien de dimension quelconque sont, par analogie, appelées des rotations.

Dans une base orthonormale indirecte, la matrice d'une rotation d'angle $\theta$ serait $R(-\theta)$.

**Exemples :**

- $-\mathrm{Id}_{E_2}$ est la rotation vectorielle d'angle $\pi$ (appelée aussi symétrie centrale vectorielle).
- Si $E_2$ est muni d'une base orthonormale directe $(e_1, e_2)$, l'unique endomorphisme $u$ tel que $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = -e_1$ est le quart de tour de $E_2$, c'est-à-dire la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$.

Les propriétés des matrices $R(\theta)$ permettent de mieux décrire le groupe $\mathscr{SO}(E_2)$.

**Proposition 13**

Soient $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2 et $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $r_0 = \mathrm{Id}_{E_2}$ ;

(ii) $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha r_\beta$ ;

(iii) ${r_\theta}^{-1} = r_{-\theta}$ ;

(iv) $\mathscr{SO}(E_2)$ est un groupe abélien.

■ Cela découle de la proposition 12. ■

Pour exprimer les propriétés (i), (ii) et (iii), il suffit de dire que l'application qui à $\theta$ fait correspondre la rotation $r_\theta$ d'angle $\theta$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\big(\mathscr{SO}(E_2), \circ\big)$.

Nous allons voir que la notion d'angle de rotation permet aussi de décrire la composée de deux réflexions. Nous aurons besoin pour cela de la définition de mesure d'angle orienté de vecteurs.

### b) Angles orientés de vecteurs

Géométriquement, un angle orienté de vecteurs dans $E_2$ est la donnée d'un couple de vecteurs non nuls $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Nous donnons ci-dessous une définition « propre » de la mesure de cet angle (qui correspond bien sûr avec la définition intuitive que l'on connait).

**Définition 8**

Soient $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2 et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle $\theta$ de l'unique rotation qui envoie $\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$ sur $\overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\|$. On note alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

■ Complétons $\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$ en une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ de $E_2$. Comme $\overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\|$ est unitaire, ses coordonnées $(a, b)$ dans $\mathscr{B}$ vérifient $a^2 + b^2 = 1$ et sont donc de la forme $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, la matrice d'une rotation qui envoie $\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$ sur $\overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\|$ s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}$. La rotation d'angle $\theta$ convient et c'est la seule. ■

**Exemples :**

- On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$. Plus généralement, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, l'on a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv 0\ [\pi]$.

Les angles orientés de vecteurs vérifient une relation de Chasles.

**Proposition 14**

Soient $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2 et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls de $E_2$. On a

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\ [2\pi].$$

■ Quitte à diviser les trois vecteurs par leur norme, on peut supposer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont unitaires. Si $r_1$ est la rotation vectorielle qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ et $r_2$ est la rotation vectorielle qui envoie $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{w}$, la rotation $r_2 r_1$ envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{w}$ et est d'angle la somme des angles de $r_1$ et $r_2$. Cela prouve le résultat. ■

**Exemples :**

- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\ [2\pi]$, $\quad (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) - \pi\ [2\pi]$, $\quad (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$.

On termine ce paragraphe avec l'action des rotations sur les angles orientés.

**Proposition 15**

Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Les rotations conservent les angles orientés de vecteurs. Autrement dit, si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls et $r$ est une rotation, alors $\big(r(\overrightarrow{u}), r(\overrightarrow{v})\big) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$.

■ Quitte à les normer, on suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont unitaires. On note alors $\rho$ la rotation d'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$. Soit $r \in \mathscr{SO}(E_2)$. Comme $\mathscr{SO}(E_2)$ est abélien, on a $\rho\big(r(\overrightarrow{u})\big) = r\big(\rho(\overrightarrow{u})\big) = r(\overrightarrow{v})$, ce qui justifie bien que $\big(r(\overrightarrow{u}), r(\overrightarrow{v})\big) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$. ■

## $\mathcal{E}$.3. Réflexions planes

**Proposition 16**

Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. Si $s$ est un élément de $\mathscr{O}(E_2) \setminus \mathscr{SO}(E_2)$ et si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $E_2$, il existe un nombre réel $\theta$, unique modulo $2\pi$, tel que la matrice de $s$ dans $\mathscr{B}$ soit égale à $S(\theta)$. L'isométrie $s$ est alors une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ qui est appelée l'axe de la réflexion.

■ On sait que $s$ est une isométrie négative. Sa matrice dans $\mathscr{B}$ est donc une matrice de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice $S(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est unique modulo $2\pi$ puisque $\big(S(\theta) = S(\theta')\big) \iff \big(\theta \equiv \theta' \ [2\pi]\big)$. Comme $S(\theta)$ est orthogonale et symétrique, on en déduit que $s$ est une symétrie orthogonale. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ ne peut être de dimension 0 ou 2 sinon $s$ vaudrait $-\operatorname{Id}_{E_2}$ ou $\operatorname{Id}_{E_2}$ (qui sont dans $\mathscr{SO}(E_2)$). Donc $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ est une droite et $s$ est une réflexion. ■

On peut démontrer (faites le !) que, si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale directe de $E_2$, alors $\theta/2$ est (à $\pi$ près) une mesure de l'angle entre l'axe des abscisses et l'axe de la symétrie.

Dans le plan, les isométries négatives sont donc les réflexions. Ce n'est plus vrai dans l'espace ! En dimension 3, les isométries négatives sont les réflexions mais aussi les isométries obtenues en composant une rotation et une réflexion.

On sait que la matrice d'une rotation vectorielle d'angle $\theta$ est la même dans toute base orthonormale directe. Au contraire, la matrice d'une réflexion dépend de la base choisie !!

On peut alors décrire la composée de deux réflexions.

**Proposition 17**

Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Si $s$ et $s'$ sont deux réflexions dont les axes sont respectivement dirigés par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$, alors $s's$ est la rotation d'angle $2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$.

■ Posons $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$. Considérons, quitte à les normaliser, que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont unitaires de sorte que $\overrightarrow{u}'$ soit l'image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation $r_\theta$ d'angle $\theta$.

On complète $\overrightarrow{u}$ en une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $E_2$.

On a $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ puisque $\overrightarrow{u}$ dirige l'axe de $s$ et $s(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ puisque $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$, donc la matrice de $s$ dans $\mathscr{B}$ est $A = \operatorname{Diag}(1, -1)$.

Comme $\overrightarrow{u}'$ est l'image de $\overrightarrow{u}$ par $r_\theta$, on peut noter $\mathscr{B}_\theta = (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ l'image de $\mathscr{B}$ par la rotation $r_\theta$. C'est également une base orthonormale directe de $E_2$ et la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $R(\theta)$. Dans $\mathscr{B}_\theta$, la matrice de $s'$ est également $A$. La formule de changement de base nous dit donc que la matrice de $s'$ dans la base $\mathscr{B}$ est $R(\theta)AR(-\theta)$.

La matrice de $s's$ dans la base $\mathscr{B}$ est alors $R(\theta)AR(-\theta)A$.

Reste à vérifier que $R(\theta)AR(-\theta)A = R(2\theta)$, ce qui donne le résultat. ■

On termine ce paragraphe avec l'action des réflexions sur les angles orientés.

**Proposition 18**

Soit $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Les réflexions changent le signe des angles orientés de vecteurs. Autrement dit, si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls et $s$ est une réflexion, alors $\big(s(\overrightarrow{u}), s(\overrightarrow{v})\big) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \ [2\pi]$.

■ Quitte à les normer, on suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont unitaires. On note alors $\rho$ la rotation d'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$. Soit $s \in \mathscr{O}(E) \setminus \mathscr{SO}(E_2)$. Comme l'isométrie $\rho^{-1}s$ est une réflexion (puisque $\det(\rho^{-1}s) = \det(\rho^{-1})\det(s) = -1$), elle est sa propre inverse, ce qui donne $\rho^{-1}s = (\rho^{-1}s)^{-1} = s\rho$. Dès lors, on a $\rho^{-1}\big(s(\overrightarrow{u})\big) = (\rho^{-1}s)(\overrightarrow{u}) = (s\rho)(\overrightarrow{u}) = s\big(\rho(\overrightarrow{u})\big) = s(\overrightarrow{v})$. Comme $\rho^{-1}$ est la rotation d'angle $-(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on en déduit que $\big(s(\overrightarrow{u}), s(\overrightarrow{v})\big) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \ [2\pi]$. ■ 6 h 30