Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths CR
— *NOM Prénom* : LESBATS Rémi

Énoncé des exercices

Exercice :

Soit $\alpha \in [0,1]$. On pose $\nu = \frac{(1,\alpha)}{||(1,\alpha)||}$.
Soit $\psi : x \mapsto ||x||^2$ définie sur $[-1,1]^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\varphi'(x) = \psi(\varphi(x)) \cdot \nu$$

On suppose qu'il existe une unique solution φ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]-t^-, t^+[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = x_0 \in [-1,1]^2$.

1. On suppose que φ vérifie la condition initiale $x_0 = (-1, -\alpha)$. Expliciter φ.
2. On suppose que φ vérifie la condition initiale $x_0 = (-1, \gamma)$ où $\gamma \in [-1,0] \backslash \{-\alpha\}$. Expliciter φ.

Remarques sur l'oral

Examinatrice très agréable et souriante qui me laisse chercher sans rien dire, et répond à mes questions si je demande de l'aide. Elle m'indique dès le début qu'on s'intéresse aux solutions sur les temps positifs donc on oublie t^- et on cherchera à exprimer t^+ à la fin du calcul. Elle me dit que la norme considérée est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ quand je lui pose la question. La première question se fait assez facilement sans indication en posant $\varphi(t) = (a(t), b(t))$. On obtient deux équations couplées que l'on découple facilement en remarquant que $b'(t) = \alpha a'(t)$ et en intégrant, la constante d'intégration est nulle, ce que l'on voit en $t = 0$. On se ramène alors à $a'(t) = \sqrt{1+\alpha^2} a^2(t)$, et on sait par hypothèse qu'il y a une unique solution qui vaut -1 en $t = 0$, ce qu'elle me rappelle quand je propose une solution en $t \mapsto \frac{C}{t}$. J'adapte alors en $t \mapsto \frac{C}{t+C}$, ce qui donne $C = (1+\alpha^2)^{-1/2}$, elle valide. Elle me demande le domaine de définition et comment on peut choisir t^+ (maximal), on remarque que $+\infty$ convient avec une limite nulle à l'infini.

Pour la deuxième question, elle me suggère immédiatement de changer de base, et d'en trouver une adaptée. Je cherche d'abord une base non orthogonale, donc elle précise orthogonale. J'essaye de développer les calculs dans une base $((\cos\theta, \sin\theta), (-\sin, \cos\theta))$ en exprimant a et b mais elle me dit après quelques minutes qu'on cherche plutôt une base adaptée à ν (dont j'avais presque oublié l'existence à ce stade). Finalement elle me demande quelle est la meilleure base pour ν, et je réponds enfin que $\nu = 1 \cdot \nu$ (!), sourire de soulagement. On se lance alors dans le même calcul, sauf que a et b sont les coordonnées dans la base $(\nu, \nu^\perp)$. On aboutit cette fois à $b'(t) = 0$, donc $b(t) = b_0$ et b_0 est non nul car $\gamma \neq -\alpha$ par hypothèse, donc $b(0)$ n'est pas colinéaire à ν. On a alors une équation en $a'(t) = b_0^2 + a^2(t)$. Il ne reste que 5min donc elle me demande si j'ai une idée pour résoudre ça, et elle me suggère de diviser par $b_0^2 + a^2(t)$ (qui est bien > 0), je réponds immédiatement que ça donne une primitive en $\frac{1}{b_0}\text{Arctan}\left(\frac{a(t)}{b_0}\right)$. On intègre des deux côtés entre 0 et x (dont on déterminera la valeur plus tard) et on obtient une formule particulièrement moche dont elle m'indique qu'elle ne se simplifie pas. Il reste à voir que x est majoré à cause du fait qu'il s'exprime comme différence de deux arctan (On ne fait pas le calcul mais elle fait juste cette remarque), et on choisit t^+ maximal d'après cette contrainte. Finalement un oral assez agréable malgré un exo assez peu agréable, j'aurais pu être plus rapide sur les calculs mais j'étais plutôt réactif quand elle me faisait corriger ou me donnait une indication (sauf cette base pour ν...)