Devoir Surveillé n° 1 (3h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Exercice 1 – Soit E un ensemble, et $\mathcal{B}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), \quad ((A \in \mathcal{B}) \wedge (B \in \mathcal{B})) \Longrightarrow ((A \triangle B \in \mathcal{B}) \wedge (A \cap B \in \mathcal{B}))$;

(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), \quad ((A \in \mathcal{B}) \wedge (B \in \mathcal{B})) \Longrightarrow ((A \triangle B \in \mathcal{B}) \wedge (A \cup B \in \mathcal{B}))$;

(iii) $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), \quad ((A \in \mathcal{B}) \wedge (B \in \mathcal{B})) \Longrightarrow ((A \cup B \in \mathcal{B}) \wedge (A \setminus B \in \mathcal{B}))$;

Problème 1 – (Définitions et démonstrations par induction structurelle)

Soit E un ensemble non vide. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $k_i \in \mathbb{N}^*$, et $f_i : E^{k_i} \longrightarrow E$. Soit $F_0 \subset E$.

On rappelle que le sous-ensemble F de E défini par induction structurelle à partir de F_0 et des fonctions $f_1, \dots, f_m$ est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion tel que $F_0 \subset F$ et stable par chacun des f_i :

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \quad \forall (x_1, \dots, x_{k_i}) \in F^{k_i}, \quad f_i(x_1, \dots, x_{k_i}) \in F.$$

Autrement dit, pour tout autre ensemble H vérifiant ces propriétés, $F \subset H$.

1. **Existence de F, et description par le haut**

   Soit $\mathcal{M} = \{G \subset E \mid F_0 \subset G$ et G stable par chacun des $f_i\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est non vide.

   (b) Soit $F = \bigcap_{G \in \mathcal{M}} G$. Montrer que F est stable par les f_i, et que $F_0 \subset F$.

   (c) Montrer que F est bien l'ensemble défini par induction structurelle à partir de F_0 et des f_i.

2. **Description par le bas de F**

   Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$F_{n+1} = F_n \cup \bigcup_{i=1}^{m} f_i(F_n^{k_i}).$$

   Ainsi, F_{n+1} est obtenu en rajoutant à F_n l'ensemble des éléments pouvant s'obtenir des éléments de F_n en appliquant l'une des fonctions f_i.

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est bien défini, et $F_n \subset F$.

   (b) Montrer que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

   Ainsi, F peut se construire « par le bas », en rajoutant petit à petit tous les éléments qu'on peut construire avec les règles de construction données.

3. **Principe d'induction structurelle**

   Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur un sous-ensemble G de E tel que $F \subset G$. On suppose que :

   - $\forall x \in F_0, \quad \mathcal{P}(x)$
   - $\forall i \in [\![1,m]\!], \ \forall (x_1, \dots, x_{k_i}) \in F^{k_i}, \quad \mathcal{P}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(x_{k_i}) \Longrightarrow \mathcal{P}(f_i(x_1, \dots, x_{k_i}))$.

   Ainsi, $\mathcal{P}$ est vraie sur les éléments initiaux, et stable par les contructions f_i.

   (a) En considérant $V = \{x \in F \mid \mathcal{P}(x)$ est vraie$\}$, montrer à l'aide de la propriété de minimalité de F que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in F$.

   (b) Retrouver ce résultat en utilisant la description par le bas de F.

4. **Exemple : les formules de la logique propositionnelle**
Soit $\mathcal{V}$ un ensemble fini (les variables propositionnelles P, Q, R...) et E l'ensemble de tous les mots (c'est-à-dire juxtaposition de lettres) que l'on peut former avec les variables propositionnelles et les symboles (,), $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. On définit les fonctions suivantes, à une ou deux variables dans E :

$$f_1(F) = \neg F \quad f_2(F,G) = (F \vee G) \quad f_3(F,G) = (F \wedge G) \quad f_4(F,G) = (F \Longrightarrow G) \quad f_5(F,G) = (F \Longleftrightarrow G).$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est l'ensemble défini par induction structurelle à partir de l'ensemble de base $\mathcal{V}$ et des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.

(a) Montrer qu'une formule de $\mathcal{F}$ a toujours autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.

(b) *On appelle* segment initial *d'un mot $m = m_1 m_2 \dots m_k$ un mot $m_1 m_2 \dots m_i$, $i \in [\![1, k]\!]$ (il s'agit donc du début du mot m, contenant au moins une lettre). Un segment initial de m est dit* propre *s'il est différent de m lui-même.*

i. Montrer par principe d'induction structurelle que si F est une formule commençant par une parenthèse ouvrante, et F' un segment initial propre de F, alors, si $o(F')$ et $f(F')$ désignent le nombre de parenthèses ouvrantes et fermantes respectivement de F', on a $o(F') > f(F')$.

ii. En déduire que si F est une formule, un segment initial propre de F ne peut pas être une formule.

(c) (Théorème de lecture unique d'une formule)
Montrer que pour toute formule F, un et un seul des trois cas suivants se présente :

(i) $F \in \mathcal{V}$

(ii) il existe une unique formule G telle que $F = \neg G$

(iii) il existe un unique connecteur logique γ et un unique couple (G, H) de formules telles que $F = (G \gamma H)$.

Problème 2 – Théorème de Howie

Soit X un ensemble fini. On dit qu'une application $\pi : X \to X$ est idempotente si et seulement si $\pi \circ \pi = \pi$.
Le but de ce petit problème est de montrer que toute application non bijective f de X dans lui-même peut s'écrire comme composée d'un nombre fini d'applications idempotentes de X.
Soit $Y \subset X$, et f, g deux applications de X dans X. On dit que f et g coïncident sur Y si pour tout $x \in Y$, $f(x) = g(x)$.
On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini X, noté $|X|$ est le nombre de ses éléments. On rappelle que s'il existe une injection $\varphi : X \to Y$ entre deux ensembles finis, alors $|X| \leqslant |Y|$, et que s'il existe une surjection $\varphi : X \to Y$, alors $|X| \geqslant |Y|$.
Dans tout le problème, on se donne un ensemble fini X.

1. (a) *Soit A et B deux ensembles disjoints, et A', B' deux autres ensembles disjoints. On suppose qu'il existe $\varphi : A \to A'$ et $\psi : B \to B'$ deux bijections. On considère Φ l'application de $A \sqcup B$ dans $A' \sqcup B'$ définie par :*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \textit{si } x \in A \\ \psi(x) & \textit{si } x \in B \end{cases}$$

Justifier que Φ est bien définie, et que c'est une bijection.

(b) En raisonnant par récurrence sur le cardinal de A, montrer que si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal, alors il existe une bijection Φ de A à B.

2. (a) Soit $\pi : X \to X$ une application. Montrer que π est idempotente si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{Im}(\pi)$, $\pi(x) = x$.

(b) Soit a et b deux éléments distincts de X. On définit $p_{a,b} : X \to X$ par $p_{a,b}(a) = b$ et pour tout $x \neq a$, $p_{a,b}(x) = x$. Montrer que $p_{a,b}$ est idempotente.

3. *On considère dans cette question deux éléments distincts x et y de X, et un élément $z \in X \setminus \{x, y\}$. On définit l'application $\tau_{x,y} : X \to X$ échangeant x et y :*

$$\tau_{x,y}(x) = y, \quad \tau_{x,y}(y) = x \qquad \textit{et} \qquad \forall t \in X \setminus \{x, y\}, \quad \tau_{x,y}(t) = t.$$

En s'inspirant de l'échange du contenu de deux variables informatiques, montrer que $\tau_{x,y}$ coïncide sur $X \setminus \{z\}$ avec une composée de trois applications idempotentes (on cherchera ces applications sous la forme de celles de la question 2(b)).

4. *On considère dans cette question D un sous-ensemble strict de X (c'est-à-dire $D \subsetneq X$). Soit D' un sous-ensemble non vide de D, et $\varphi : X \to X$. On dit que le couple (φ, D') vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*
   (i) $\varphi_{|D'}$ *soit injective*
   (ii) $\varphi(D') \subset D'$.
   (iii) $\forall x \in D \setminus D', \quad \varphi(x) = x$.

   On suppose que (φ, D') vérifie $\mathcal{P}$. Soit $d_0 \in D'$. On suppose que $\varphi(d_0) \neq d_0$, et on considère $\psi = \tau_{\varphi(d_0), d_0} \circ \varphi$, et $D'' = D' \setminus \{d_0\}$.

   Montrer que (ψ, D'') vérifie $\mathcal{P}$.
5. En déduire que si (φ, D) vérifie $\mathcal{P}$, alors il existe un entier n et des applications idempotentes $p_1, \ldots, p_n$ tels que φ et $p_n \circ \cdots \circ p_1$ coïncident sur D.

   Indication : on pourra raisonner par récurrence et se servir des deux questions précédentes.
6. *Soit $\varphi : X \to X$ une application et D un sous-ensemble strict de X. On suppose que $\varphi_{|D}$ est injective, mais on ne suppose plus que $\varphi(D) \subset D$.*
   (a) Justifier l'existence d'une bijection ψ entre $\varphi(D) \setminus D$ et $D \setminus \varphi(D)$.
   (b) En déduire l'existence d'une bijection $\theta : D \to \varphi(D)$ telle que θ coïncide sur $D \cap \varphi(D)$ avec l'application identité.
   (c) Justifier que θ est la restriction sur D d'une application idempotente de X dans X (on pourra se servir de la question 2(a) pour construire une telle application idempotente prolongeant θ)
   (d) En appliquant la question 5 à l'application $\theta^{-1} \circ \varphi$, montrer que φ coïncide sur D avec une composée d'applications idempotentes.
7. Soit f une application non bijective de X dans lui-même. Montrer que f est égal à une composée d'applications idempotentes (théorème de Howie).