DM n° 10 : Suites

Le problème 1 a pour but d'introduire en douceur certains résultats et certaines techniques qu'on retrouvera dans le problème 2.

Correction du problème 1 –

1. **Étude de la fonction f et existence de (u_n).**

   (a) D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}$. Ainsi, f peut être prolongée par continuité en 0, en posant $\boxed{f(0) = 1}$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un minimum en } \mathrm{e}^{-2}, \text{ égal à } 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}.}$

   (c) Puisque f admet un minimum supérieur strictement à 0 (car $\mathrm{e} > 2$), f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, ainsi, $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle stable. On rappelle (ce n'est pas *stricto sensu* au programme, donc cela ne fait pas de mal d'esquisser la preuve) que si I est un intervalle stable par une fonction f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$), et si $u_0 \in I$, alors pour tout n, u_n existe et $u_n \in I$. Cela se démontre sans difficulté par récurrence, l'existence de u_{n+1} provenant du fait que u_n est dans le domaine de définition de f.

   Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie, quel que soit le choix de } u_0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$.

   (d) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = -\frac{\ln x}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

   Ainsi, f'' est du signe opposé du ln, donc strictement positif sur $]0, 1[$ et strictement négatif sur $]1, +\infty[$. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est strictement convexe sur }]0,1[\text{ et strictement concave sur }]1,+\infty[}$.

   (e) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est d'équation

   $$y = f'(1)(x-1) + f(1) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{y = 1(x-1) + 1 = x}.$$

   Puisque f est strictement convexe sur $]0, 1[$, la courbe de f est strictement au-dessus de sa tangente en 1 sur $]0, 1[$, et de même, puisque f est strictement concave sur $]1, +\infty[$, la courbe de f est strictement au-dessous de sa tangente en 1 sur $]1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) > x$, et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) < x$. Comme de plus $f(1) = 1$, on obtient que $\boxed{1 \text{ est l'unique point fixe de } f}$

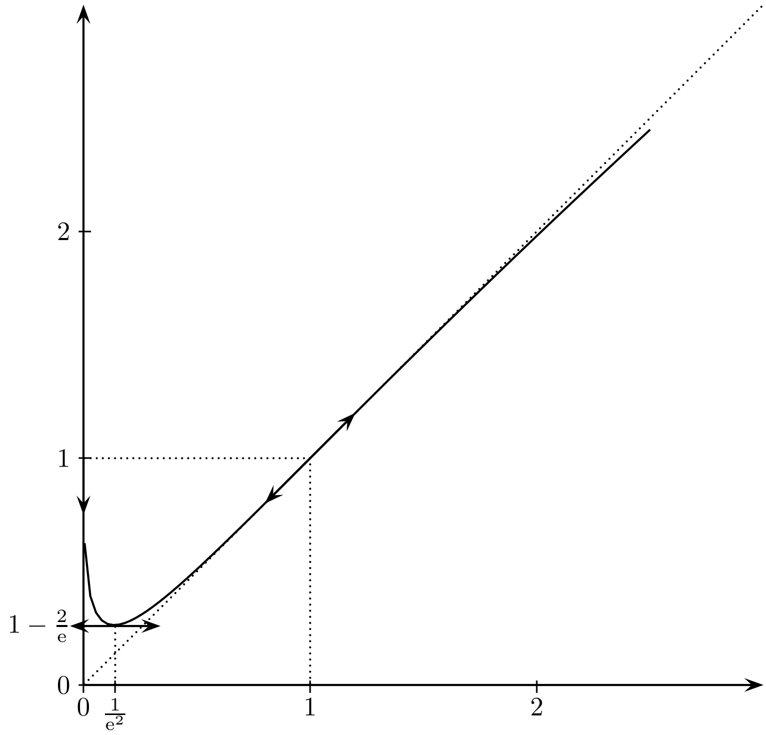

FIGURE 1 – Graphe de f

(f) Voit figure 1. N'oubliez pas d'indiquer les extrema et les tangentes remarquables, vous aidant à tracer le graphe. Remarquez ici notamment la demi-tangente verticale en 0, du fait de la limite $-\infty$ de f' en 0, ainsi que la tangente en 1, de laquelle la courbe passe de part et d'autre au point 1 (1 est un point d'inflexion de la courbe)

2. **Convergence de la suite (u_n).**

(a) D'après le tableau de variation de f, l'intervalle $]0,1]$ est stable par f. Ainsi, d'après un argument explicité plus haut, puisque $u_0 \in]0,1]$, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1]}$.

Or, pour tout $x \in]0,1]$, on a $f(x) > x$, d'après ce que nous avons prouvé dans la question 1(e). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$, soit $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

De plus, (u_n) prend ses valeurs dans $]0,1]$, donc est majorée par 1. En tant que suite croissante et majorée, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc convergente.}}$

La fonction f est continue sur le fermé $[0,+\infty[$ (après prolongement par continuité), donc (u_n) converge vers le point fixe 1 : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

(b) De même, d'après le tableau de variation de f, l'intervalle $[1,+\infty[$ est stable par f. Ainsi, si u_0 est dans $[1,+\infty[$, il en est de même de tous les termes u_n, $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, (u_n) est minorée par 1, et puisque pour tout x de $[1,+\infty[$, on a $f(x) \leqslant x$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant u_n$, donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente, et f étant continue sur le fermé $[1,+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe 1. Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

3. **Un résultat classique : la moyenne de Cesaro.**

(a) i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de (a_n) vers 0, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$. Soit alors $n \geqslant n_0$. On a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|m_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

En coupant la somme en deux au niveau de l'indice n_0, il vient alors :

$$|m_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n_0-1}|a_i| + \sum_{i=n_0}^{n-1}|a_i|\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n_0-1}|a_i| + \sum_{i=n_0}^{n-1}\varepsilon\right),$$

et donc enfin : $\boxed{|m_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n_0-1}|a_i| + (n-n_0)\varepsilon\right)}$.

ii. L'entier n_0 étant fixé, le réel $\sum_{i=0}^{n_0-1}|a_i|$ est fixé. Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n_0-1}|a_i| = 0}$$

iii. Par conséquent, par définition de la limite, il existe un réel n_1 (qu'on peut choisir supérieur à n_0, car si un entier n_1 convient, tous ceux qui lui sont supérieur conviennent aussi) tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $b_n < \varepsilon$. Il vient alors, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$|m_n| < \varepsilon + \frac{n-n_0}{n}\varepsilon.$$

Puisque $\frac{n-n_0}{n} \leqslant 1$, il vient : $\boxed{\forall n \geqslant n_1, \quad |m_n| < 2\varepsilon}$.

iv. Par définition des limites, il vient donc que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} m_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} a_n.}$ Donc (m_n) a bien même limite que (a_n).

(b) La suite $(a_n - \ell)$ tend vers 0, donc en appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i - \ell) = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i-\ell) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i - \sum_{i=0}^{n-1}\ell\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}a_i - \frac{1}{n}\cdot(n\ell) = m_n - \ell.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}(m_n-\ell) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} m_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n}.$$

4. **Un équivalent de** $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x+1) = \sqrt{1+x}\cdot\ln(1+x) + 1$.
Déterminons un développement limité (DL) à l'ordre 3 de cette expression au voisinage de 0. Puisque $\ln(1+x)$ a un DL commençant par x, de degré 1, il suffit d'aller à l'ordre 2 pour le DL de $\sqrt{1+x}$. Tous les DL qui suivent sont effectués au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi, on obtient

$$f(x+1) = \left(1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + 1 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + 1 + o(x^3),$$

et après simplifications :

$$\boxed{f(1+x) = 1 + x - \frac{x^3}{24} + o(x^3)}.$$

(b) En effectuant le changement de variable $y = x + 1$ dans cette expression, il vient, au voisinage de 1 :

$$f(y) - 1 = (y-1) - \frac{(y-1)^3}{24} + o((y-1)^3).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(f(y)-1)^2} - \frac{1}{(y-1)^2} &= \frac{1}{(y-1)^2}\left(\frac{(y-1)^2}{(f(y)-1)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(y-1)^2}\left(\left(\frac{f(y)-1}{y-1}\right)^{-2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(y-1)^2}\left(\left(1 - \frac{(y-1)^2}{24} + o((y-1)^2)\right)^{-2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(y-1)^2}\left(1 + 2\frac{(y-1)^2}{24} + o((y-1)^2) - 1\right) = \frac{1}{12} + o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien $\boxed{\lim_{y\to 1} \frac{1}{(f(y)-1)^2} - \frac{1}{(y-1)^2} = \frac{1}{12}.}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$w_n = \frac{1}{(u_{n+1}-1)^2} - \frac{1}{(u_n-1)^2} = \frac{1}{f(u_n)-1)^2} - \frac{1}{(u_n-1)^2}.$$

Puisque (u_n) converge vers 1, la question précédente amène :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{y\to 1} \frac{1}{(f(y)-1)^2} - \frac{1}{(y-1)^2} = \boxed{\frac{1}{12} = \lim_{n\to+\infty} w_n}.$$

(d) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k$. D'après la question 3 (théorème de la moyenne de Cesaro), $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{12}}$.

De plus, m_n est une somme télescopique, et on obtient, après simplification des termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_n = \frac{1}{nv_n^2} - \frac{1}{nv_0^2},$$

et comme $\frac{1}{nv_0^2}$ tend vers 0, il vient alors : $\lim \dfrac{1}{nv_n^2} = \dfrac{1}{12}$, puis $\boxed{v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{12}{n}}$.

Puisqu'on peut élever un équivalent à une puissance fixe (ici $\frac{1}{2}$), il vient : $|u_n - 1| = |v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$.

Enfin :

- si $u_0 \in]0, 1[$, alors $(u_n - 1)$ est toujours négative, donc $\boxed{u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}}$
- si $u_0 \in]1, +\infty[$, alors $(u_n - 1)$ est toujours positive, donc $\boxed{u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}}$

5. **Quelques séries**

On suppose ici $u_0 > 1$.

(a) Le terme général u_n ne tend pas vers 0, donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ est grossièrement divergente}}$.

(b) Le terme général de la série $\sum(u_n - 1)^\alpha$ est équivalent, à un facteur multiplicatif près, à $\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, donc au terme général d'une série de Riemann de paramètre $\frac{\alpha}{2}$. donc convergente si et seulement si $\alpha > 2$. Les séries étant à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\sum(u_n - 1)^\alpha \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$

(c) Tout d'abord, cette série n'est pas absolument convergente, d'après la question précédente.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n(u_n - 1)$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}(u_{2n+1} - 1) + (-1)^{2n+2}(u_{2n+2} - 1) = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit. Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2}(u_{2n+2} - 1) + (-1)^{2n+3}(u_{2n+3} - 1) = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit. Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}(u_{2n+1} - 1) = 1 - u_{2n+1} \to 0$.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc admettent une même limite S. Les deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs admettant une même limite S, la somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, donc la série $\boxed{\sum(-1)^n(u_n - 1) \text{ converge}}$.

Correction du problème 2 – Autour du lemme de la moyenne de Cesàro

Partie I – Variantes du lemme de Cesàro

1. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ.
   - Supposons dans un premier temps que $\ell = 0$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
     On a alors, pour tout $n \geqslant N$,
     $$\begin{aligned}\frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k u_k\right| &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1}|a_k u_k| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n}|a_k||u_k| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1}|a_k u_k| + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{k=N}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k}.\\ &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1}|a_k u_k| + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$
     par positivité des termes a_k. Par ailleurs, l'entier N étant alors fixé (à ε fixé), puisque $S_n \longrightarrow +\infty$,
     $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1}|a_k u_k| = 0,$$
     donc il existe N', qu'on peut prendre supérieur à N, tel que pour tout $n \geqslant N'$,
     $$\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1}|a_k u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
     On obtient donc, pour tout $n \geqslant N'$:
     $$\frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k u_k\right| \leqslant \varepsilon,$$
     soit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = 0$.
   - Le cas général en découle, en appliquant le point précédent à la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$. En effet, $v_n \longrightarrow 0$, et :
     $$\left(\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k\right) - \ell = \frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k \ell\right) = \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k v_n \longrightarrow 0.$$
     Donc $\boxed{\displaystyle\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k \longrightarrow \ell}$

(b) • On suppose maintenant que $u_n \longrightarrow +\infty$. Ainsi, étant donné $A > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant 2A$. On a alors, pour tout $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k &= \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k + \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} a_k u_k \\
&\geqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k + \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} 2a_k A \\
&= \frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A\sum_{k=0}^{N-1} a_k\right) + 2A.
\end{aligned}$$

Or, A étant fixé, et N choisi, puisque $S_n \longrightarrow +\infty$ on obtient $\dfrac{1}{S_n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A\sum_{k=0}^{N-1} a_k\right) \longrightarrow 0$, et donc, il existe N', qu'on peut choisir supérieur à N, tel que pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A\sum_{k=0}^{N-1} a_k\right) \geqslant -A.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N'$, on a :

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k \geqslant A.$$

On a donc montré que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = +\infty.}$

• Le cas $u_n \longrightarrow -\infty$ s'obtient en appliquant le résultat précédent à $(v_n) = (-u_n)$.

(c) Le raisonnement fait dans la première question est tout-à-fait valable dans $\mathbb{C}$ également.

(d) Lorsque (a_k) est constante égale à 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$, donc le résultat obtenu est le suivant : si (u_n) est une suite telle que $u_n \longrightarrow \ell$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$), alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \longrightarrow \ell$. C'est le lemme de Cesàro classique.

(e) On applique le résultat précédent à la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout n. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

D'après la première question (exprimée au rang $n-1$), si $u_n \longrightarrow \ell$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n - 1}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k = \ell.$$

Puisque $2^n - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^n$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k = \ell}$

Nous avions déjà rencontré cette variante de Cesàro dans un exercice.

2. (a) • **Cas** $\alpha \neq 0$

On peut déduire du théorème de Cesaro le résultat suivant (théorème de sommation des équivalents). Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $\sum a_n$ diverge, et si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont à termes strictement positifs, alors les sommes partielles des deux séries vérifient $A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$. En effet, il existe ε_n tendant vers 1 tel que $a_n = b_n\varepsilon_n$. La question 1(a) nous assure alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\varepsilon_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$, soit $A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$.

On applique cela à l'équivalence $T_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha n u_n$ (si $\alpha \neq 0$). Pour le faire, il faut justifier la divergence des séries, ce qui provient du fait que puisque T_n est une somme partielle de série strictement positive, (T_n) est strictement positive croissante, donc ne tend pas vers 0. Ainsi, $\sum T_n$ est grossièrement divergente :

sa somme partielle U_n ne vérifie pas $U_{n+1} - U_n \to 0$, donc (U_n) ne peut pas converger dans $\mathbb{R}$; mais comme (U_n) est croissante (somme de termes positifs), on a alors $U_n \to +\infty$.
Pour $\alpha \neq 0$, on peut alors utiliser la sommation d'équivalents :

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} k a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} (n - \ell + 1) u_\ell$$

Or,

$$\sum_{\ell=1}^{n} (n - \ell + 1) u_\ell = (n+1) T_n - \sum_{\ell=1}^{n} \ell u_\ell = S_n$$

On a donc $\alpha S_n \underset{+\infty}{\sim} (n+1)T_n - S_n$, et pour pourvoir passer des termes de part et d'autre, en revient aux o :

$$\alpha S_n = (n+1)T_n - S_n + o(S_n) \qquad \text{donc:} \qquad (\alpha+1) S_n = (n+1)T_n + o(S_n).$$

Comme $\alpha + 1 \neq 0$, on en déduit que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{nT_n}{\alpha+1} \qquad \text{puis:} \qquad \frac{1}{n^2 u_n} S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1) n u_n} T_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

On a donc bien obtenu que $\boxed{\dfrac{S_n}{n^2 u_n} \to \dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$

- **Cas** $\alpha = 0$
De même, en prenant cette fois $u_n = \varepsilon_n \to 0$ dans la question 1a, on montre que si $a_n = o(b_n)$ et $\sum b_n$ diverge (les séries étant à termes positifs), alors les sommes partielles vérifient $A_n = o(B_n)$.
Or, on a cette fois $T_n = o(n u_n)$. De plus, pour la même raison que plus haut, $\sum T_n$ diverge, donc aussi $\sum n u_n$. En effet, à partir d'un certain rang, on a $n u_n \geqslant T_n$, ce qui permet d'utiliser le TCSTP.
Ainsi, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k = o(S_n)$, donc par le même calcul que ci-dessus, $(n+1)T_n - S_n = o(S_n)$, puis $S_n \underset{+\infty}{\sim} n T_n$. On conclut comme précédemment que

$$\frac{S_n}{n^2 u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{T_n}{n u_n} \to 0 = \frac{0}{0+1}.$$

Ainsi, dans les deux cas, on obtient $\boxed{\dfrac{S_n}{n^2 u_n} \to \dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$

(b) - Montrons dans un premier temps qu'avec les hypothèses données, (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang. Soit, dans la définition de la limite, $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. On dispose alors d'un entier N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{n u_n} \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{3\alpha}{2}.$$

Soit $N_2 = \lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor$ (vous comprendrez plus loin pourquoi), et $N = \max(N_1, N_2)$.
  * Soit $n \geqslant N$. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} < 0$. Alors

$$\frac{\alpha}{2} n u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{3\alpha}{2} n u_n \qquad \text{et} \qquad -\frac{\alpha}{2}(n+1) u_{n+1} \leqslant -\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leqslant -\frac{3\alpha}{2}(n+1) u_{n+1},$$

  d'où, en sommant :

$$\frac{\alpha}{2}(n u_n - (n+1) u_{n+1}) \leqslant -u_{n+1} \leqslant \frac{3\alpha}{2}(n u_n - (n+1) u_{n+1})$$

  Ainsi :

$$\left((n+1)\frac{\alpha}{2} - 1\right) u_{n+1} \geqslant n \frac{a}{2} u_n > 0.$$

  D'après le choix de N_2 (vous comprenez maintenant pourquoi), $(n+1)\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ d'où une contradiction.
  * Les conditions sont aussi satisfaites pour la suite $(-u_n)$, donc en appliquant ce qui précède à la suite $(-u_n)$, on ne peut pas non plus avoir, pour $n \geqslant N$, simultanément les inégalités $u_n < 0$ et $u_{n+1} > 0$.

* On en déduit qu'à partir du rang N, u_n est de signe constant. Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$ (ce qui ne modifie pas les valeurs des sommes étudiées), on peut supposer que (u_n) est positif à partir d'un certain rang.

- On peut montrer que le théorème de sommation des équivalents reste vrai si les suites ne sont strictement positives qu'à partir d'un certain rang : avec les mêmes notations que plus haut, et en notant n_0 un rang à partir duquel tous les termes sont strictement positifs, toutjours en supposant que la somme partielle B_n tend vers $+\infty$, on a, pour $n > n_0$:

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k = \frac{B_n - B_{n_0}}{B_n}\cdot\frac{1}{B_n - B_{n_0}}\sum_{k=n_0+1}^{n}\varepsilon_k b_k + \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n_0}\varepsilon_k b_k.$$

On constatera que puisque (B_n) est strictement croissante à partir du rang n_0, quitte à considérer n_0+1 au lieu de n_0 si $B_{n_0} = 0$, on peut toujours s'arranger pour que B_{n_0} soit non nul (on peut même choisir n_0 de sorte que $B_{n_0} > 1$ si on préfère, du fait que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$), et la stricte croissance des sommes partielles nous assure que $B_n - B_{n_0}$ est toujours non nul aussi, pour $n > n_0$. Comme (B_n) tend vers $+\infty$, et n_0 est fixé,

$$\frac{B_n - B_{n_0}}{B_n} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n_0}\varepsilon_k b_k \to 0.$$

De plus, la question 1a nous assure, après décalage des indices, que

$$\frac{1}{B_n - B_{n_0}}\sum_{k=n_0+1}^{n}\varepsilon_k b_k \to 1,$$

puisque $\varepsilon \to 1$. On en déduit que

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k \to 1 \qquad \text{soit:} \qquad A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n.$$

La démonstration précédente s'adapte alors parfaitement, à condition de vérifier qu'avec nos nouvelles hypothèses, on a toujours $\sum T_k \to +\infty$. Cela provient du fait qu'aà partir d'un certain rang, T_n est strictement positive (équivalente à une suite ultimement strictement positive), et strictement croissante (somme partielle d'une série à termes ultimement strictement positifs), donc de limite non nulle. Donc la somme partielle (U_n) de $\sum T_k$ est ultimement strictement croissante, et diverge ($T_{n+1} = U_{n+1} - U_n$ ne tendant pas vers 0). Ainsi, $U_n \to +\infty$.
En adaptant alors le calcul précédent, on obtient bien

$$\boxed{\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} k u_k \longrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

(c) En appliquant alors le résultat de la question 2(b) à la suite (nu_n), il vient

$$\frac{1}{n^3 u_n}\sum_{k=1}^{n} n^2 u_n \longrightarrow \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\alpha}{1+2\alpha},$$

puis, en appliquant à nouveau 2(b) à la suite $(n^2 u_n)$:

$$\frac{1}{n^4 u_n}\sum_{k=1}^{n} n^3 u_n \longrightarrow \frac{\frac{\alpha}{1+2\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1+2\alpha}} = \frac{\alpha}{1+3\alpha}.$$

On conjecture alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{1}{n^{p+1} u_p}\sum_{k=1}^{n} k^p u_k \longrightarrow \frac{\alpha}{1+p\alpha}},$$

ce qu'on démontre sans peine par récurrence, l'hérédité se faisant à l'aide de la question 2(b).
La cas de la suite (u_n) constante de valeur 1 est un classique. Qu'obtient-on dans ce cas ? Vérifiez-le pour les petites valeurs de p, et démontrez le cas général par une méthode plus directe !

Partie II – Une application classique du lemme de Cesàro

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x) + \cos(x)).$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}(x) > 1$ et $\cos(x) \geqslant -1$, on obtient $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc aussi sur $\mathbb{R}_+$). De plus, g est continue sur cet intervalle, et $g(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{g \text{ induit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+}$.

(b) Soit $x \in [-1, 1]$. La fonction $h_1 = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^6$ sur cet intervalle, et $|h_1^{(6)}| \leqslant 1$ sur $[-1, 1]$. Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \sin(x) - h_1(0) - x h_1'(0) - \frac{x^2}{2!} h_1''(0) - \frac{x^3}{3!} h_1^{(3)}(0) - \frac{x^4}{4!} h_1^{(4)}(0) - \frac{x^5}{5!} h_1^{(5)}(0) \right| \leqslant \frac{x^6}{6!},$$

et donc

$$\left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right| \leqslant \frac{x^6}{6!},$$

En particulier, si v_n est une suite de limite nulle il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \in [-1, 1]$. On a alors, pour tout $n \geqslant N$:

$$\left| \sin(v_n) - v_n + \frac{v_n^3}{3!} - \frac{v_n^5}{5!} \right| \leqslant v_n^5 \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n = \frac{v_n}{6!} \longrightarrow 0$. Ainsi,

$$\sin(v_n) - v_n + \frac{v_n^3}{3!} - \frac{v_n^5}{5!} = o(v_n^5) \qquad \text{soit:} \qquad \sin(v_n) = v_n - \frac{v_n^3}{3!} + \frac{v_n^5}{5!} + o(v_n^5).$$

On démontre de même, avec la fonction $h_2 = \mathrm{sh}$, vérifiant $|h_2^{(6)}| \leqslant \mathrm{sh}(1)$ sur $[-1, 1]$, que pour toute suite (v_n) de limite nulle :

$$\mathrm{sh}(v_n) = v_n + \frac{v_n^3}{3!} + \frac{v_n^5}{5!} + o(v_n^5).$$

On vient tout simplement de retrouver les développements limités à l'ordre 5 de sin et sh, que bientôt vous devrez connaître (ce qui vous dispensera de cet argument). En additionnant les deux développements limités, il vient, pour (v_n) de limite nulle :

$$\boxed{g(v_n) = v_n + \frac{1}{5!} v_n^5 + o(v_n^5)}.$$

(c) Soit (v_n) une suite de limite nulle. Puisque $g(0) = 0$, on a aussi $f(0) = 0$, et f étant continue en 0, $f(v_n)$ est de limite nulle. Ainsi, d'après la question précédente,

$$v_n = g(f(v_n)) = f(v_n) + \frac{1}{5!} f(v_n)^5 + o(f(v_n)^5), \qquad \text{soit:} \qquad f(v_n) = v_n - \frac{1}{5!} f(v_n)^5 + o\left(f(v_n)^5\right).$$

Mais pour toute suite (u_n) de limite nulle, $u_n^5 = o(u_n)$, donc on obtient en particulier

$$f(v_n) = v_n + o(f(v_n)) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{f(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n}, \qquad \text{donc:} \qquad f(v_n)^5 \underset{+\infty}{\sim} v_n^5.$$

En particulier :

$$f(v_n) - v_n = -\frac{1}{5!} f(v_n)^5 + o(f(v_n^5)) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{5!} f(v_n) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{f(v_n) - v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{5!} v_n^5}.$$

On exprime ce résultat de façon plus souple sous la forme : et donc

$$\boxed{f(v_n) = v_n - \frac{1}{5!} v_n^5 + o(v_n^5)}$$

2. (a) L'intervalle $\mathbb{R}_+$ étant stable par f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, soit $h : x \mapsto f(x) - x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, car f l'est (en tant que réciproque d'une fonction dérivable, de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} - 1.$$

Or, pour tout $x \geqslant 0$:

$$g''(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x) - \sin(x)) \qquad \text{et} \qquad g^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x) - \cos(x)) \geqslant 0$$

car ch $\geqslant 1$. L'inégalité est même stricte sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, g'' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g''(0) = 0$, donc g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(0) = 1$. Donc pour tout $x > 0$, $g'(x) > 1$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(f(x)) > 1, \qquad \text{puis:} \qquad h'(x) < 0.$$

Ainsi, h est strictement décroissante, et $h(0) = 0$, donc h est négative sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leqslant 0$, donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$
Puisque h est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, 0 est le seul point fixe de f. Comme f est continue sur son domaine $[0, +\infty[$, et que la convergence ne peut pas se faire vers $+\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim u_n = 0.}$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{1}{f(u_n)^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{1 - \left(\frac{f(u_n)}{u_n}\right)^\alpha}{f(u_n)^\alpha}.$$

Or, puisque $f(u_n) \sim_{+\infty} u_n$, $\frac{f(u_n)}{u_n} - 1 \longrightarrow 0$, et nos équivalents classiques nous soufflent dans l'oreille que :

$$\frac{1}{f(u_n)^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha\left(\frac{f(u_n)}{u_n} - 1\right)}{f(u_n)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha(f(u_n) - u_n)}{u_n^{\alpha+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha u_n^5}{5! u_n^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{5!} u_n^{4-\alpha}.$$

Ainsi, (u_n) étant de limite nulle, cette expression admet une limite finie non nulle si et seulement si $\boxed{\alpha = 4}$.

(c) Pour $\alpha = 4$, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^4} - \frac{1}{u_n^4}\right) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

D'après le lemme de Cesàro, il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^4} - \frac{1}{u_k^4}\right) = \frac{1}{30} \qquad \text{soit:} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n u_n^4} - \frac{1}{n u_0^4}\right) = \frac{1}{30},$$

et donc

$$u_n^4 \underset{+\infty}{\sim} \frac{30}{n} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[4]{\frac{30}{n}}}.$$

Partie III – Une généralisation de la partie I

1. (a) Supposons que $u_n \longrightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut alors trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, pour tout $n \geqslant N$, du fait de la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k\right) - \ell\right| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u_k - \ell)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|u_k - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}|u_k - \ell| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}|u_k - \ell| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}|u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = O(n^k),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| = O(n^k),$$

le nombre de termes dans la somme étant fixe. Comme $n^k = o(2^n)$, on en déduit que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| \longrightarrow 0.$$

Ainsi, il existe N' qu'on peut choisir supérieur à N tel que pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

et par conséquent, pour tout $n \geqslant N'$:

$$\left| \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right) - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve bien que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right) = \ell}$.

(b) Ce résultat n'est pas un cas particulier de la partie I, à cause de la dépendance en n du coefficient binomial.

2. (a)
- Supposons T régulière.
  - En prenant (u_n) constante de valeur 1, $(v_n) = (A_n)$ et $v_n \longrightarrow 1$, donc $A_n \longrightarrow 1$.
  - Soit $k \in \mathbb{N}$. En définissant $u_k = 1$, et $u_n = 0$ si $n \neq k$, on a $u_n \longrightarrow 0$, donc $v_n \longrightarrow 0$. Or, $(v_n) = (a_{n,k})$, donc $a_{n,k} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.
- Supposons que $A_n \longrightarrow 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} \longrightarrow 0$. Soit (u_n) une suite de limite ℓ. Considérons $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k \right) - \ell \right| \\
&= \left| \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (u_k - \ell) \right) + (A_n - 1)\ell \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \sum_{k=N}^{n} a_{n,k} |u_k - \ell| + |(A_n - 1)\ell| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \sum_{k=N}^{n} a_{n,k} \frac{\varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \frac{A_n \varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell|.
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, d'après les hypothèses faites sur (A_n) et les $(a_{n,k})$, et du fait que le nombre de termes dans la première somme est fixe, le majorant trouvé tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \frac{A_n \varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N'$, $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et donc $v_n \longrightarrow \ell$. Cela montre que T est réulière.

Ainsi $\boxed{T \text{ est régulière si et seulement si } \lim_{n \to +\infty} A_n = 1 \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0}$.

(b)
- I-1 est obtenu en posant pour tout (n,k) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_{n,k} = \frac{a_k}{S_n}$, qui tend vers 0 à k fixé, puisque $S_n \longrightarrow 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $A_n = 1 \longrightarrow 1$. Le résultat I-1 est donc un cas particulier de III-2.
- II-1 est obtenu en posant pour tout (n,k) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_{n,k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On a bien $A_n = 1 \longrightarrow 1$. De plus,
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$
Ainsi,
$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{2^n k!} \longrightarrow 0,$$
d'après les croissances comparées. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$. Par conséquent, II-1 est un cas particulier de III-2.

Partie IV – Adaptation du lemme de Cesàro pour des valeurs d'adhérence.

1. Intuitivement, à l'infini, les termes de la suite (u_n) oscilleront entre les différentes valeurs d'adhérence, une proportion p_i des termes de la suite étant « infiniment » proches de la valeur d'adhérence a_i.
2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}\min_{1\leqslant i<j\leqslant p} |a_i - a_j|$, de sorte que les boules $B(a_i, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes. L'ensemble des entiers n tels que $n \notin \bigcup\limits_{i=1}^{p} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}(\varepsilon)$ est fini, sinon la suite (u_n) admettrait une valeur d'adhérence (finie ou infinie) dans $\overline{\mathbb{R}} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(a_i,\varepsilon)$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, en notant $n_0(\varepsilon)$ le nombre de ces entiers, et $n_1(\varepsilon)$ la valeur maximale, on a (du fait que les boules $B(A_i, \varepsilon)$ sont deux à deux disjointes) :
$$\forall n \geqslant n_1(\varepsilon) + 1, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} b_{n,i}(\varepsilon) = \frac{n - n_0}{n} \longrightarrow 1,$$
donc $\sum\limits_{i=1}^{p} p_i(\varepsilon) = 1$. En passant à la limite dans cette égalité lorsque ε tend vers 0, il vient :
$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} p_i = 1.}$$
3. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ (qu'on fixera ensuite plus précisément). On suppose comme précédemment que $\delta < \frac{1}{2}\min_{1\leqslant i<j\leqslant p} |a_i - a_j|$ de sorte que les $A_{n,i}(\delta)$ sont deux à deux disjoints
En notant, $C(\delta) = \mathbb{N} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{n,i}(\delta) \subset [\![0, n_1(\delta)]\!]$ (avec les notations précédentes), on a, pour tout $n \geqslant n_1(\delta) + 1$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} \sum_{k\in A_{n,i}(\delta)} u_i + \frac{1}{n}\sum_{k\in C(\delta)} u_k.$$
Or, pour tout $k \in A_{n,i}(\delta)$, on a, par définition :
$$a_i - \delta < u_k < a_i + \delta \qquad \text{donc:} \qquad b_{n,i}(\delta)(a_i - \delta) < \sum_{k\in A_{n,i}(\delta)} u_i < b_{n,i}(\delta)(a_i + \delta).$$
On en déduit donc que
$$\alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k < \alpha_n(\delta) + \mu_n + \eta_n(\delta),$$
où :
$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{p} \frac{b_{n,i}(\delta)}{n} a_i, \qquad \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k\in C(\delta)} u_k \qquad \text{et} \qquad \eta_n(\delta) = \delta \sum_{i=1}^{p} \frac{b_{n,i}(\delta)}{n}.$$

On a donc :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i, \qquad \mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_n = \delta \sum_{i=1}^{p} \frac{b_{n,i}(\delta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta) = \delta.$$

Ainsi,

$$\alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i - \delta \qquad \text{et} \qquad \alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i + \delta.$$

Il existe donc un rang $N(\delta)$ tel que pour tout $n \geqslant N(\delta)$, on ait :

$$\sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i - 2\delta < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k < \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i + 2\delta.$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i - 2\delta \underset{\delta\to0}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p} p_i a_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta)a_i + 2\delta \underset{\delta\to0}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p} p_i a_i.$$

Il existe donc δ_0 tel que

$$\sum_{i=1}^{p} p_i a_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta_0)a_i - 2\delta_0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} p_i(\delta_0)a_i + 2\delta_0 \leqslant \sum_{i=1}^{p} p_i a_i + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geqslant N(\delta_0)$:

$$\sum_{i=1}^{p} p_i a_i - \varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k < \sum_{i=1}^{p} p_i a_i + \varepsilon.$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{p} p_i a_i.}$

4. Le lemme de Cesàro est le cas où $p = 1$. Il y a donc une unique valeur d'adhérence a_1, et pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes u_n étant dans $B(a, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang, on a $p_1(\varepsilon) = 1$, puis $p_1 = 1$. On retrouve alors le lemme de Cesàro classique.

5. Il suffit de prendre une suite (u_n) ayant deux valeurs d'adhérence autour desquels les termes de (u_n) se répartissent avec une certaine régularité. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ convient :

$$\forall n \in 2\mathbb{N}+1, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = 0 \longrightarrow 0 \quad \forall n \in 2\mathbb{N}, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0.$$

6. Il s'agit cette fois de trouver une suite ayant par exemple deux valeurs d'adhérence, mais avec une irrégularité dans la répartition des termes autour des valeurs d'adhérence. On peut définir par exemple (u_n) par :

$$u_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![2^k, 2^{k+1}-1]\!], u_n = \begin{cases} 0 & \text{si k est pair} \\ 1 & \text{si k est impair} \end{cases}$$

La suite (v_n) admet exactement 2 valeurs d'adhérence : 0 et 1. Un calcul direct montre alors que si (v_n) désigne la moyenne de Cesàro,

$$v_{2^{2n}-1} \longrightarrow \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{2^{2n-1}-1} \longrightarrow \frac{1}{3},$$

ce qui empêche la convergence de (v_n).

7. On pose pour tout n, $v_n = r_n u_n$. La valeur de r_n est égale à un entier de $[\![0, 5]\!]$. En considérant les suites extraites $(v_{6n+k})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in [\![0, 5]\!]$, dont les domaines couvrent tout n, l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est l'union des ensembles des valeurs d'adhérence de ces suites extraites, qui convergent chacune vers le paramètre $k^2 \mod 6$, c'est-à-dire respectivement $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 1$. Ainsi, (u_n) admet exactement 4 valeurs d'adhérence : $a_0 = 0$, $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = 3$ et $a_3 = 4$.

Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, il existe N_i tel que pour tout $n \geqslant N_i$, $u_{6n+i} \in B(a_i, \varepsilon)$. Ces boules ne s'intersectant pas lorsque $a_i \neq a_j$, et n'ayant aucune information sur les N premiers termes, en posant $N = \max(N_i)$, pour tout $n \geqslant 6N$, on obtient, pour tout $i \in [\![0,1,2,3]\!]$:

$$\beta_i \left\lfloor \frac{n-N+1}{6} \right\rfloor \leqslant |A_{n,i}(\varepsilon)| \leqslant N + \beta_i \left\lceil \frac{n-N+1}{6} \right\rceil,$$

où β_i est le nombre d'occurrences de la valeur d'adhérence dans la liste $(a_0, \ldots, a_5)$ (à savoir $\beta_0 = \beta_3 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$). On obtient alors facilement d'après le théorème d'encadrement $p_0(\varepsilon) = p_3(\varepsilon) = \frac{1}{6}$, et $p_1(\varepsilon) = p_2(\varepsilon) = \frac{1}{3}$. On en déduit que $p_0 = p_3 = \frac{1}{6}$, et $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$. On est donc dans les conditions d'application du résultat précédent, et la moyenne de Cesaro (m_n) converge vers

$$\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6} \times 3, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{m_n \longrightarrow \frac{13}{6}}.$$