DM nº 7 : Dérivation

Problème 1 – Une fonction continue partout dérivable nulle part

L'objet de ce problème est de construire une fonction définie sur $[0,1]$ qui soit continue sur $[0,1]$ et dérivable en aucun point de $[0,1]$. On construit f comme la limite d'une suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$. On définit f_n par récurrence :

- *f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$;*
- *f_1 est la fonction affine par morceau dont le graphe est constitué des segments reliant les points : $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$;*
- *plus généralement, supposons f_n construite, et affine par morceau sur chaque intervalle $\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right]$. La fonction f_{n+1} est obtenu subdivisant ces intervalles en trois et en itérant la construction de f_1 : sur l'intervalle $\left]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right[$, f_{n+1} est la fonction affine par morceaux dont le graphe est constitué des segments de droite reliant les points $\left(\frac{3m}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m}{3^{n+1}}\right)\right)$, $\left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+2}{3^{n+1}}\right)\right)$, $\left(\frac{3m+2}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}\right)\right)$ et $\left(\frac{3m+3}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+3}{3^{n+1}}\right)\right)$.*

Partie I – Préliminaires

1. Tracer dans un même repère les graphes de f_0, f_1, f_2, et f_3 (un conseil : faites grand, sur une feuille à part)
2. *Le graphe de f_0 est constitué d'un segment de droite. On note $p_{0,1}$ sa pente. Le graphe de f_1 est constitué de trois segments de droite. On note $p_{1,1}$, $p_{1,2}$ et $p_{1,3}$ leurs pente. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est constitué de α_n segments de droite, et on note $p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n}$ leurs pentes.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut α_n ?
   (b) Déterminer $p_{n,i}$ pour $n = 0,1,2,3$, pour tout i pour lesquels cela a un sens.
   (c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(p_{n+1,i})_{1 \leqslant i \leqslant \alpha_{n+1}}$ en fonction de la famille $(p_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant \alpha_n}$.
   (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$ et $\max(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$
   (e) Quel est le signe de $p_{n,i}$?
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$. On note $I_{n,k} = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $m \geqslant n$, $f_m(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$.
   (b) On suppose que $p_{n,k+1} \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n+1,3k}$, et tout entier $m \geqslant n$, $f_m(x) \geqslant f_n(x)$. (S'aider d'un dessin !)
   (c) On suppose que $p_{n,k+1} \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n,k}$, et tout entier $m \geqslant n$,
   $$f_m(x) - f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) \geqslant \left(x - \frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}.$$
   (Là encore, s'aider d'un dessin).
   (d) Modifier les énoncés des deux questions précédentes dans le cas où $p_{n,k+1}$ est négatif.

Partie II – Étude de la fonction limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Existence de la fonction limite f.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
Indication : discuter suivant l'appartenance de x aux intervalles $I_{n+1,3k}$, $I_{n+1,3k+1}$ et $I_{n+1,3k+2}$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on admettra que si une série $\sum |a_n|$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge également).
On note $f(x)$ sa limite. Cela définit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(c) Que valent $f\left(\frac{k}{3}\right)$, pour $k \in [\![0,3]\!]$? $f\left(\frac{k}{9}\right)$, pour $k \in [\![0,9]\!]$? Plus généralement, exprimer $f\left(\frac{k}{3^n}\right)$ en fonction de f_n.

2. Continuité de f

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$. Désormais, dans la suite de cette partie, n désigne un tel entier.

(b) Soit $x_0 \in [0,1[$, et $\alpha = \lfloor 3^n x_0 \rfloor$. Justifier que $x_0 \in \left[\dfrac{\alpha}{3^n}, \dfrac{\alpha+1}{3^n}\right[= I_{n,\alpha}$.

(c) Montrer que pour tout $m \geqslant n$, et pour tout $y \in I_{n,\alpha}$, $|f_m(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (On pourra considérer $f_m(I_{n,\alpha})$, pour $m \geqslant n$).

(d) En déduire que f est continue en x_0.

(e) Que dire de la continuité de f en 1 ?

3. Étude de la monotonie de f.
Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $I \subset [0,1]$ sur lequel f est monotone. Autrement dit, f n'est nulle part monotone.

4. Étude de la dérivabilité de f.
Soit $x \in]0,1]$, et pour tout n, $\beta_n = \lceil 3^n x \rceil - 1$, c'est-à-dire l'unique entier tel que $\beta_n < 3^n x \leqslant x$. Soit $I_n(x) = I_{n,\beta_n}$. On note $p_n(x) = p_{n,\beta_n+1}$ la pente sur $I_n(x)$ de la fonction f_n, affine sur cet intervalle.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ sont de même signe, alors $p_{n+1}(x) = 2p_n(x)$.

(b) Premier cas : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\lim \left| \frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x} \right| = +\infty.$$

(c) Deuxième cas : supposons qu'il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. Montrer que

$$\frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x}$$

n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

Partie III – Résolution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $k_n = \frac{3^n-1}{2}$. Déterminer $f\left(\frac{k_n-1}{3^n}\right)$ et $f\left(\frac{k_n}{3^n}\right)$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une infinité de solutions. Pouvez-vous en donner une ?

Problème 2 – Discontinuités des fonctions réglées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite réglée si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point où cela est envisageable. Le but de ce problème est de montrer qu'une fonction réglée ne peut pas admettre trop de points de discontinuité (i.e. de points en lesquels elle n'est pas continue). Plus précisément, on montre que le nombre de points de discontinuité d'une fonction réglée sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. Dans une deuxième partie, on montre que réciproquement, tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.

On admettra dans ce problème le théorème de Bolzano-Weierstrass affirmant que de toute suite (u_n) à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite (v_n) convergente dans $[a, b]$, (une sous-suite ou suite extraite étant une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Une preuve de ce résultat a déjà été vue dans un devoir antérieur, et sera rappelée en cours prochainement.
On rappelle également qu'un ensemble est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, et qu'il est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable. On rappelle enfin qu'une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$. Pour simplifier les écritures, on notera $f(a^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche et à droite respectivement de f au point a. On considère dans un premier temps un intervalle fermé borné I.
On note, pour tout $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{a \in I \mid |f(a) - f(a^-)| \geqslant \varepsilon\}$

1. Montrer que $f_{|I}$ n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose ici que D_ε est infini. Justifier l'existence d'une suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 distincts de D_ε. On note a sa limite.
3. Justifier que soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une infinité de termes vérifiant $a_n > a$ soit elle possède une infinité de termes vérifiant $a_n < a$ (disjonction non exclusive).
4. Supposons qu'il existe une infinité de termes tels que $a_n > a$. Quitte à extraire une suite, on peut alors supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a$.
   (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$
   (b) Trouver une contradiction.
5. Adapter ce raisonnement au cas où il existe une infinité de termes a_n vérifiant $a_n < a$.
6. Conclure.

Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé

Soit A un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. On s'interroge dans cette partie sur l'existence d'une fonction réglée dont le domaine de discontinuité est exactement A.

1. Si A est fini, donner une fonction réglée dont l'ensemble des points de disonctinuité est exactement A.
2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{]a_n, +\infty[}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente. On note $f(x)$ sa somme. Cela définit donc une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est croissante.
   (c) Soit $x < y$. Montrer que
   $$f(y) - f(x) = \sum_{n \mid x < a_n \leqslant y} \frac{1}{2^n}.$$
   (d) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement A, et conclure.
   On s'attachera à donner un raisonnement aussi rigoureux que possible dans cette dernière question.