Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Mathématiques
- *NOM Prénom* : MONDON Camille

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det A = 1\}$.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe.

On note de plus $P = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\ z > 0\}$, et si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $z \in P$:

$$A.z = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

2. Montrer que : $z \in P \Rightarrow A.z \in P$, puis que si $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), z \in P$:

$$A.(B.z) = (AB).z$$

On note enfin $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, G le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T, et $D = \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Re}\ z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$.

3. Montrer, si $z \in P$, qu'il existe $A \in G$ tel que $A.z \in D$.

Exercice 2 :

Calculer, si $(A_1 \dots A_n)$ est un polygone régulier inscrit dans le cercle unité, le produit des longueurs $A_1A_k, 2 \leq k \leq n$.

Remarques sur l'oral

Examinateur très sympathique, vient au tableau pour m'aider.
Indication pour 1.3 : considérer le maximum de Im $A.z$ où A décrit G.