Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 16

– à rendre pour le mardi 31 mars –

Exercice 1

On pose l'application :

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)+P(X-1)-2P(X) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'application f_n égale à la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$ est bien définie et déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_n)$.
3. En déduire l'image de f_n, puis que l'application f est surjective.
4. Montrer l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice représentant f_n selon $\mathscr{B}$ soit une matrice composée exclusivement de 0 ou de 1.
5. Expliciter une solution à l'équation $g^2 = f$ d'inconnue $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
6. L'équation $g^3 = f$ d'inconnue $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ admet-elle des solutions ?

Exercice 2

Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Rg}(A) = r$.
Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- $\mathrm{Rg}(A^2) = r$
- il existe une matrice inversible $B \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que la matrice A est semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.