Lycée Henri IV
MPSI

Annexe
Durée : ? h

TECHNIQUES DU CALCUL INTÉGRAL

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

A. Calculs de primitives et d'intégrales **3**

A. 1. Transformation d'expression 3
A. 2. Polynôme contre exponentielle 4
A. 3. Polynôme contre exponentielle contre fonction trigonométrique 5
A. 4. Fraction rationnelle 6
A. 5. Polynôme trigonométrique 9
A. 6. Fraction rationnelle trigonométrique 10
A. 7. Fraction rationnelle en exponentielle 11

B. Utilisation des sommes de Riemann **12**

C. Fonction définie par une intégrale **13**

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Revoir les chapitre sur :

- les outils d'analyse ;
- la continuité (en particulier la continuité uniforme) ;
- la dérivation.

Dans tout ce chapitre, la notation $[a;b]$ désigne un segment tel que $a \leqslant b$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Dans tout ce chapitre, les lettres $n, m, p, q, r, i, j, k, \ell$ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Calculs de primitives et d'intégrales

A.1. Transformation d'expression

Se ramener si possible à une dérivée connue

Pour obtenir les primitives d'une fonction f, la méthode la plus élémentaire consiste à transformer judicieusement l'expression de $f(x)$ afin de reconnaître la dérivée d'une fonction usuelle.

C'est donc la technique qu'il faut tenter de mettre en place avant toute autre plus élaborée.

Comme l'illustre les exemples suivants, la technique consistant à se ramener à une dérivée connue est élémentaire mais pas toujours très simple !

Exemples :

- Déterminons les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t &= -\int^x \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}\mathrm{d}t \\
&= -\big[\ln|\mathrm{e}^{-t}+1|\big]^x \\
&= -\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)+\lambda,
\end{aligned}$$

  où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

- Déterminons les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

  Pour tout $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}} &= \int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t+\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{Binet} \\
&= \int^x \frac{1+\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t \\
&= \big[\ln\big(t+\sqrt{t^2-1}\big)\big]^x \\
&= \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)+\lambda,
\end{aligned}$$

  où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

A.2. Polynôme contre exponentielle

Primitives des polynômes-exponentielles

Pour déterminer les primitives d'une fonction de la forme $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ (où P est un polynôme), on effectue une suite de primitivations par parties pour faire chuter le degré du polynôme.

Exemples :

- Déterminons les primitives de la fonction $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \big[-t^2\,\mathrm{e}^{-t}\big]^x + 2\int^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -x^2\,\mathrm{e}^{-x} + 2\big[-t\,\mathrm{e}^{-t}\big]^x + 2\int^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\big[-\mathrm{e}^{-t}\big]^x \\
&= -x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \lambda,
\end{aligned}$$

  où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

A.3. Polynôme contre exponentielle contre fonction trigonométrique

Utilisation des nombres complexes

Afin de déterminer les primitives d'une fonction de la forme $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{mx}\cos px$ ou $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{mx}\sin px$, il peut être judicieux d'effectuer un passage dans les nombres complexes en remplaçant $\cos px$ ou $\sin px$ par e^{ipx}. Une fois les primitives déterminées dans $\mathbb{C}$, on revient à la fonction cos (respectivement sin) en passant à la partie réelle $\Re\mathrm{e}$ (respectivement $\Im\mathrm{m}$).

Exemples :

- Déterminer les primitives de la fonction $f : x \longmapsto (1+x^2)\,\mathrm{e}^{x}\cos x$.

  Considérons la fonction $f_{\mathbb{C}} : x \longmapsto (1+x^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)x}$ et déterminons une primitive $F_{\mathbb{C}}$ de cette fonction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
F_{\mathbb{C}}(x) &= \int^{x} (1+t^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1+i}\left[(1+t^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)t}\right]^{x} - \frac{2}{1+i}\int^{x} t\,\mathrm{e}^{(1+i)t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{(par PPP)} \\
&= \frac{1-i}{2}(1+x^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)x} - \frac{2}{(1+i)^2}\left[t\,\mathrm{e}^{(1+i)t}\right]^{x} + \frac{2}{(1+i)^2}\int^{x} \mathrm{e}^{(1+i)t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{(bis)} \\
&= \frac{1-i}{2}(1+x^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)x} + ix\,\mathrm{e}^{(1+i)x} - \frac{i}{1+i}\left[\mathrm{e}^{(1+i)t}\right]^{x} \\
&= \frac{1-i}{2}(1+x^2)\,\mathrm{e}^{(1+i)x} + ix\,\mathrm{e}^{(1+i)x} - \frac{1+i}{2}\,\mathrm{e}^{(1+i)x} \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{i}{2}x^2 + ix - i\right)\mathrm{e}^{(1+i)x}.
\end{aligned}
$$

  Alors une primitive $F = \Re\mathrm{e}(F_{\mathbb{C}})$ de f sur $\mathbb{R}$ est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \left\{\frac{1}{2}x^2\cos x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)\sin x\right\}\mathrm{e}^{x}.$$

A.4. Fraction rationnelle

Nous savons que toute fraction rationnelle se décompose en une somme d'éléments simples, c'est-à-dire en une somme de fractions rationnelles de la forme

- polynomiale,
- $\dfrac{\lambda}{(ax+b)^m}$ $\quad \lambda,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ \ m \in \mathbb{N}^*$,
- $\dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$ $\quad \lambda,\ \mu,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta = b^2-4ac<0$.

Pour intégrer une fraction rationnelle, il suffit donc de savoir déterminer les primitives des éléments simples.

Ce paragraphe vous résume les méthodes de calcul de ces primitives. La primitivation des polynômes ne posant aucun problème, on traite successivement les éléments simples de première et de seconde espèce, pour lesquels on donne à chaque fois une primitive (les autres primitives s'obtenant bien-sûr par ajout d'une constante réelle).

Éléments simples de première espèce

On veut primitiver

$$\frac{\lambda}{(ax+b)^m}.$$

Dans le cas $m=1$, on a

$$\int^x \frac{\lambda}{at+b}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{a}\ln|ax+b|.$$

Dans le cas $m \geqslant 2$, on a

$$\int^x \frac{\lambda}{(at+b)^m}\,\mathrm{d}t = -\frac{\lambda}{a(m-1)}\,\frac{1}{(ax+b)^{m-1}}.$$

Exemples :

- Déterminons les primitives de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-2}{(x-1)\,(x+1)^2}$.

  La décomposition en éléments simples donne

  $$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

  En évaluant $(x-1)f(x)$ en 1, on obtient $a=1$. En évaluant $(x+1)^2 f(x)$ en -1, on obtient $c=2$. Enfin, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans $(x+1)f(x)$, on obtient $a+b=2$, ce qui donne $b=1$. On a donc

  $$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a

  $$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + \lambda,$$

  où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Éléments simples de seconde espèce

On veut primitiver

$$\frac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad \text{avec} \qquad \Delta = b^2-4ac<0.$$

▶ *Première étape : Mise sous forme canonique*

On commence par écrire at^2+bt+c sous forme canonique $at^2+bt+c = A\big(1+y(t)^2\big)$ où A est un nombre réel qui s'exprime fonction de a, b, c, λ et μ. Cela donne

$$\int^x \frac{\lambda t+\mu}{(at^2+bt+c)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{A^n}\int^x \frac{\lambda t+\mu}{\big(1+y(t)^2\big)^n}\,\mathrm{d}t.$$

▶ *Deuxième étape : Changement de variable*

En effectuant le changement de variable $u=y(t)$, on obtient

$$\int^x \frac{\lambda t+\mu}{(at^2+bt+c)^n}\,\mathrm{d}t = \alpha\int^{y(x)} \frac{u}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u + \beta\int^{y(x)} \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u,$$

où α et β sont deux nombres réels qui s'expriment en fonction de a, b, c, λ et μ.

▶ *Troisième étape : Calcul de* $\displaystyle\int^{y(x)} \frac{u}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u$ *et* $\displaystyle\int^{y(x)} \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u$

▷ La première de ces deux primitives est aisément calculable :

$$\int^{y(x)} \frac{u}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\big(1+y(x)^2\big) & \text{si } n=1,\\[2mm] -\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{\big(1+y(x)^2\big)^{n-1}} & \text{si } n\geqslant 2.\end{cases}$$

▷ Pour la seconde primitive, on distingue à nouveau plusieurs cas :

∗ $n=1$

On a directement

$$\int^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan y(x)$$

∗ $n=2$

On écrit alors

$$\int^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = \int^{y(x)} \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \int^{y(x)} u\frac{u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u.$$

La première intégrale est égale à $\arctan y(x)$. Pour la seconde, on effectue une intégration par parties en dérivant u et en primitivant $u/(1+u^2)^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} &= \arctan y(x) + \Big[-u\frac{1}{2(1+u^2)}\Big]^{y(x)} - \frac{1}{2}\int^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \frac{1}{2}\arctan y(x) - \frac{y(x)}{2\big(1+y(x)^2\big)}.\end{aligned}$$

∗ $n\geqslant 3$

La même technique fonctionne à ceci près qu'il faut faire plus d'intégrations par parties afin de faire diminuer la puissance du dénominateur $(1+u^2)^n$.

Une fois tous ces calculs terminés, il reste à remplacer $y(x)$ par son expression pour obtenir la primitive de notre élément simple.

Exemples :

- Déterminons les primitives de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4x+8}$.

  On a
$$f(x) = \frac{x}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{x}{\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2+1},$$
  d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on obtient, en effectuant le changement de variable $u = (t{+}2)/2$,
$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int^{(x+2)/2}\frac{2u-2}{u^2+1}2\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int^{(x+2)/2}\frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u - \int^{(x+2)/2}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right| - \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)+\lambda,\end{aligned}$$
  où λ est une constante réelle arbitraire.

A.5. Polynôme trigonométrique

Définition 1

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction qui s'écrit comme la somme de termes de la forme $\lambda \cos^n x \sin^m x$ (appelés monômes trigonométriques).

Exemples :

- $2\sin^3 x - \sin x \cos^3 x + 2$,
- $2\sin x \cos^2 x - \cos^4 x + 2$,
- $\sin^2 x \cos x - 3\cos^5 x + 5$.

Primitives des polynômes trigonométriques

Pour trouver les primitives $F(x) = \displaystyle\int^x \cos^n t \sin^m t \,\mathrm{d}t$ d'un monôme trigonométrique, on peut :

▷ reconnaître une dérivée usuelle ;

▷ essayer un changement de variable du type $u = \sin t$ ou $u = \cos t$;

▷ linéariser le polynôme trigonométrique (si n et m ne sont pas trop grands).

En additionnant les primitives des monômes trigonométriques, on obtient les primitives des polynômes trigonométriques.

Exemples :

- Calculons $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t$.
  - ∗ On sait que
$$\cos^3 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3it} + 3\,\mathrm{e}^{it} + 3\,\mathrm{e}^{-it} + \mathrm{e}^{3it}) = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t),$$
donc
$$\int^x \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int^x (\cos 3t + 3\cos t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3t}{3} + 3\sin t\right]^x = \frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x).$$
Il s'ensuit que
$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}(\sin\frac{3\pi}{2} + 9\sin\frac{\pi}{2}) - 0 = \frac{2}{3}.$$
  - ∗ On peut également effectuer le changement de variable $u = \sin t$ de sorte que $\mathrm{d}u = \cos t \,\mathrm{d}t$. L'intégrant peut donc encore se réécrire $\cos^3 t \,\mathrm{d}t = \cos^2 t \,\mathrm{d}u = (1 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}u = (1 - u^2)\,\mathrm{d}u$. Cela donne
$$\int^x \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \int^{\sin x} (1 - u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x.$$
Alors
$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{\sin^3(\pi/2)}{3} - \sin(\pi/2) - \frac{\sin^3 0}{3} + \sin 0 = \frac{2}{3}.$$

A.6. Fraction rationnelle trigonométrique

Définition 2

On appelle fraction rationnelle trigonométrique toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux polynômes trigonométriques.

Exemples :

- $x \longmapsto \dfrac{\tan x}{\cos x + \sin x}$ et $x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x + \tan^2 x}{1 + \sin^2 x}$ sont des fractions rationnelles trigonométriques.

Primitives des fractions rationnelles trigonométriques

Disons que l'on recherche les primitives $F(x) = \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ d'une fraction rationnelle trigonométrique f.

Les règles de Bioche permettent de choisir le changement de variable le plus adapté :

Si l'intégrant $f(t)\mathrm{d}t$ est invariant par :	on effectue le changement de variable :
$t \longmapsto -t$	$u = \cos t$
$t \longmapsto \pi - t$	$u = \sin t$
$t \longmapsto \pi + t$	$u = \tan t$
sinon	$u = \tan(t/2)$

Rappelons que, si $u = \tan(t/2)$, on a

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \text{et} \qquad \tan t = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Exemples :

- Calculons $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t \sin^3 t}$.

  On constate que l'intégrant est invariant par le changement de variable $t \longmapsto -t$. On choisit donc, selon les règles de Bioche, de poser $u = \cos t$ de sorte que $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$ et

  $$\frac{\mathrm{d}t}{\cos t \sin^3 t} = -\frac{\mathrm{d}u}{\cos t \sin^4 t} = -\frac{\mathrm{d}u}{\cos t(1-\cos^2 t)^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{u(1-u^2)^2}.$$

  Il s'ensuit que

  $$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t \sin^3 t} = -\int^{\cos x} \frac{\mathrm{d}u}{u(1-u^2)^2}.$$

  Une décomposition en éléments simples donne

  $$\begin{aligned} F(x) &= -\int^{\cos x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2} - \frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{4(u+1)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\left[\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4(u-1)} - \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{4(u+1)}\right]^{\cos x} \\ &= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| + \frac{1}{4(\cos x - 1)} + \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| - \frac{1}{4(\cos x + 1)} + \lambda \end{aligned}$$

  où λ est une constante réelle arbitraire.

A.7. Fraction rationnelle en exponentielle

Définition 3

On appelle fraction rationnelle en exponentielle toute fonction de la forme $f(\mathrm{e}^x)$ où f est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Les fonctions ch, sh et th sont des fractions rationnelles en exponentielle.
- Les fractions rationnelles en ch, sh et th sont des fractions rationnelles en exponentielle.

Primitives des fractions rationnelles en exponentielle

Pour trouver les primitives ou une intégrale d'une fraction rationnelle en exponentielle $f(\mathrm{e}^x)$, on effectue le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int^x f(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cas particulier des fractions rationnelles en ch, sh et th, on peut aussi adapter les règles de Bioche. Pour cela, on remplace $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$ et $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$ avant d'utiliser les règles de Bioche classiques. Si le changement de variable $u = \cos x$ (respectivement $u = \sin x$, respectivement $u = \tan x$) convient, on fait $u = \operatorname{ch} x$ (respectivement $u = \operatorname{sh} x$, respectivement $u = \operatorname{th} x$).

Exemples :

- Déterminons les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

  Si l'on pose $u = \mathrm{e}^t$, il vient $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$. D'où
  $$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} = 2\int^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1/u)} = 2\int^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan(\mathrm{e}^x) + \lambda,$$
  où λ est une constante réelle arbitraire.

- Déterminons les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

  On pose $u = \operatorname{sh} t$ selon les règles de Bioche hyperboliques. Il s'ensuit que $\mathrm{d}u = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$ et
  $$\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t(1+\operatorname{sh} t)} = \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch}^2 t(1+\operatorname{sh} t)} = \frac{\mathrm{d}u}{(1+\operatorname{sh}^2 t)(1+\operatorname{sh} t)} = \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u)},$$
  d'où
  $$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)} &= \int^{\operatorname{sh} x} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \frac{1}{2}\int^{\operatorname{sh} x} \frac{\mathrm{d}u}{u+1} - \frac{1}{2}\int^{\operatorname{sh} x} \frac{u-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x) + \lambda\end{aligned}$$
  où λ est une constante réelle arbitraire.

B. Utilisation des sommes de Riemann

Limite d'une somme à l'aide des sommes de Riemann

La convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de f peut servir à déterminer la limite d'une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définie par une somme.

En pratique, on cherche à écrire T_n sous la forme

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big),$$

avec $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([0;1])$, ce qui permet alors d'affirmer que

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pourquoi n'utiliser que des sommes de Riemann entre 0 et 1 ? Tout simplement parce que la somme de Riemann de f entre a et b est aussi la somme de Riemann de $t \longmapsto f\big(a+t(b-a)\big)$ entre 0 et 1. On peut donc toujours se ramener au cas simple d'une somme de Riemann entre 0 et 1.

Exemples :

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculons la limite de la suite $T_n = \displaystyle\sum_{k=pn+1}^{(p+1)n} \frac{1}{k}\cdot$

  On peut écrire

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{pn+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p+k/n} = R_n(f) \qquad \text{où} \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{p+x} \end{array} \right.$$

  donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{p+x} = \big[\ln|p+x|\big]_0^1 = \ln\frac{p+1}{p}\cdot$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donnons un équivalent de la p-ème somme d'Euler $E_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ lorsque n tend vers $+\infty$.

  On constate que

$$E_p(n) = n^{p+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^p$$

  fait apparaître la somme de Riemann de $t \longmapsto t^p$ sur le segment $[0;1]$. Donc

$$\frac{E_p(n)}{n^{p+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{p+1},$$

  ce qui donne

$$E_p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}\cdot$$

C. Fonction définie par une intégrale

Dérivée d'une intégrale à bornes fonctionnelles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I ainsi que u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

On veut dériver la fonction φ définie, pour tout $x \in J$, par

$$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on introduit une primitive F de f et l'on écrit que, pour tout $x \in J$,

$$\varphi(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big),$$

On peut alors dériver, ce qui donne, pour tout $x \in J$,

$$\varphi'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big).$$

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Démontrons que l'intégrale de f est la même sur n'importe quel segment de longueur T.

  Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

  $$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x+T) - F(x)$. La fonction g est alors de classe $\mathscr{C}^1$ par théorème généraux et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 \times f(x+T) - 1 \times f(x) = 0$, ce qui démontre que g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Le résultat attendu est ainsi démontré.

- Étudions sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction

  $$F(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Posons

  $$\forall t > 0, \qquad g(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}.$$

  La fonction F est définie lorsque g est continue (par morceaux) sur $[1/x; x]$, c'est-à-dire lorsque $x > 0$. Donc $\mathscr{D}_F = \mathbb{R}_+^*$.

  Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

  $$\forall x > 0, \qquad F(x) = G(x) - G(1/x).$$

  Par suite, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux et l'on a

  $$\forall x > 0, \qquad F'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}g\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln(1/x)}{1+(1/x)^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{1+x^2} = 0.$$

  On en déduit que F est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $F(1) = 0$, donc

  $$\boxed{F \text{ est la fonction nulle.}}$$

? h 00