Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 08/10/2020

DM n° 4 : Sommes, relations

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm04-nom.pdf` (par exemple `dm04-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace. Pour les fratries, merci d'ajouter votre prénom.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus du problème ci-dessous obligatoire, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 3 de la sélection (lemme de Zorn), après le cours de mardi.

Exercice 1 – Formules d'inversion de Pascal

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p(p-1)\dots(p-k+1)\binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m),$$

où δ_k est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_k(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En déduire que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$,

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m).$$

4. En déduire enfin la formule d'inversion polynomiale : si pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k,$$

alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$a_m = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} b_m(n-j).$$

Exercice 2 – (Exercice technique)

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.
2. Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n} \frac{i_1}{i_2\cdots i_k} = \frac{n(n+2^k-1)}{2^k}.$$

Exercice 3 – Convergence des séries de Riemann de paramètre $\alpha \in]1,2[$

Soit $\alpha \in]1,2[$, et $\beta = \alpha - 1$.

1. À l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_{n-1}^{n} t^{\beta-1}\,dt$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $n^{\beta-1} \leqslant \dfrac{1}{\beta}(n^\beta - (n-1)^\beta)$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$:
$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(n-1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right).$$
3. Montrer que pour tout $N \geqslant 2$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\beta},$$
et en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, ainsi qu'un majorant de sa somme.

Problème – Saturation

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On définit, pour tout sous-ensemble A de E :
$$A^s = \{y \in E \mid \exists x \in A,\ x \sim y\}.$$
On dit que A^s est la saturation de A pour la relation $\sim$. On dit que l'ensemble A est saturé si $A = A^s$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des parties saturées de E.

Par ailleurs, on note, pour toute partie A de E, A^c le complémentaire de A dans E. Enfin, pour tout $x \in A$, on note $\overline{x}$ sa classe d'équivalence, c'est-à-dire le sous-ensemble de E constitué des éléments y tels que $y \sim x$.

1. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A^s$.
   (b) Déterminer $\varnothing^s$ et E^s.
   (c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $(A^s)^s = A^s$ (on dit que l'application de saturation est « idempotente »)
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que $A^s = \displaystyle\bigcup_{x \in A} \overline{x}$.
   (b) Montrer que $A^s = \displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{S}(E) \text{ tq } A \subset B} B$
3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que $(A \cup B)^s = A^s \cup B^s$
   (b) Montrer que des deux inclusions $(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s$ et $A^s \cap B^s \subset (A \cap B)^s$, une seule est toujours vraie, et donner un contre-exemple pour l'autre.
4. Établir une inclusion entre $(A^s)^c$ et $(A^c)^s$. À quelle condition a-t-on l'égalité ?
5. Soient p_1 et p_2 définies de $E \times E$ dans E par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,
$$A^s = p_2(p_1^{-1}(A) \cap G),$$
où $G \subset E \times E$ est le graphe de la relation $\sim$.
6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x \in A,\quad \exists y \in B,\quad x \sim y).$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est reflexive et transitive. La relation $\mathcal{R}$ est-elle en général une relation d'équivalence ?
   (b) Montrer que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ si et seulement si $A^s = B^s$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?
   (c) On définit la relation $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A\mathcal{S}B$ si et seulement $A^s = B^s$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
   (d) Montrer que $\mathcal{S}$ respecte la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire : pour tout (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, si $A\mathcal{R}B$ alors $A'\mathcal{R}B'$.
   (e) En déduire l'existence d'une relation $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$,
$$A\mathcal{R}B \iff \overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B}.$$
   La barre désigne ici la classe d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{S}$.
   (f) Montrer que $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$