

Test de contrôle

- durée 3 heures / calculatrices recommandées -

— o —

Question 1

Soit $n \geq 2$ un entier. On note A la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < n \text{ ou } j < n \\ n - j, & \text{si } i = n \\ n - i, & \text{si } j = n \end{cases}.$$

Soit a un nombre réel. On pose :

$$\Delta_n(a) = \det(A + a I_n).$$

1. Exprimer $\Delta_n(a)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(a)$, lorsque $n \geq 3$.
2. Montrer que :

$$\Delta_n(a) = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Question 2

On pose la fonction :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n + \varphi(n) \end{cases}.$$

1. Calculer $\psi(\mathbb{N})$. [indication : on pourra calculer $\varphi(k^2 - k)$ et $\varphi(k^2 - k + 1)$]
2. Déterminer la nature des séries $\sum_k \frac{1}{\varphi(k)}$ et $\sum_k \frac{(-1)^k}{\varphi(k)}$.

Question 3

On pose la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_{\ln(1+x)}^x \frac{e^{\cos t}}{t + \sin t} dt \end{array} \right. .$$

1. Montrer que la fonction f admet une limite finie en 0^+ et la calculer.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que la courbe $y = f(x)$ n'admet pas d'asymptote au voisinage $+\infty$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{1}{f(n)}$.
5. Déterminer la nature de la série $\sum_n f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Question 4

On travaille dans l'espace \mathbb{R}^4 .

On pose :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \text{ et } G = \text{Vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
2. Calculer la matrice S représentant la symétrie par rapport à F parallèlement à G , par rapport à la base canonique.
3. Calculer $\det(S)$ de deux manières différentes, l'une numériquement à l'aide de la question précédente, l'autre sans calculs numériques sur les coefficients.
4. Déterminer l'expression de la matrice de projection P sur G parallèlement à F .
5. Déterminer la dimension de l'espace composé des matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec S .
6. Montrer que l'équation :

$$\text{Com}(M) = S,$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ admet exactement une seule solution.

7. Montrer que l'équation :

$$\text{Com}(M) = P,$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ n'admet aucune solution. [indication : on pourra utiliser le rang dans cette équation.]
