ESPACES EUCLIDIENS

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Démontrer que
$$\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

Pour toutes fonctions $f,g\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$, on a
$$\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \langle g,f\rangle$$
donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.

Pour toutes fonctions $f_1,f_2,g\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ et tous scalaires $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1+\mu f_2,g\rangle &= (\lambda f_1+\mu f_2)(0)g(0) + \int_0^1 (\lambda f_1+\mu f_2)'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= (\lambda f_1(0)g(0)+\mu f_2(0)g(0) + \lambda\int_0^1 {f_1}'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^1 {f_2}'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\langle f_1,g\rangle + \mu\langle f_2,g\rangle,\end{aligned}$$
donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et donc bilinéaire par symétrie.

Pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$, on a
$$\langle f,f\rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$
donc $\langle .,.\rangle$ est positive.

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\langle f,f\rangle=0$, c'est-à-dire
$$f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$
ou encore
$$f(0)^2=0 \qquad\text{et}\qquad \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0.$$
Comme f'^2 est positive, continue et d'intégrale nulle, on a $f'^2=\widetilde{0}$, c'est-à-dire $f'=\widetilde{0}$ ou encore f est une fonction constante. Comme $f(0)=0$, on en déduit que $f=\widetilde{0}$. Donc $\langle .,.\rangle$ satisfait l'axiome de séparation.

En conclusion,
$$\boxed{\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $x_1,\dots,x_p$ des vecteurs de E. Démontrer que
$$\Big\|\sum_{k=1}^p x_k\Big\|^2 \leqslant p\sum_{k=1}^p \|x_k\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^{p} x_k\Big\|^2 &\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{p}\|x_k\|\Big)^2 && \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} 1^2 \times \sum_{k=1}^{p}\|x_k\|^2 && \text{d'après Cauchy–Schwarz,}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Big\|\sum_{k=1}^{p} x_k\Big\|^2 \leqslant p\sum_{k=1}^{p}\|x_k\|^2\,.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [∘]
Dans $\mathscr{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, orthonormaliser $\big(\widetilde{1},\mathrm{Id},|\cdot|\big)$.

La première étape, qui n'est pas la plus difficile, consiste à poser

$$e_1=\widetilde{1}.$$

Dans un deuxième temps, on pose $e_2=\mathrm{Id}-\lambda e_1=\mathrm{Id}-\lambda\widetilde{1}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ est à déterminer de sorte que $e_2\perp e_1$. On a

$$(e_2\perp e_1)\iff(\langle\mathrm{Id}-\lambda\widetilde{1},\widetilde{1}\rangle=0)\iff(\langle\mathrm{Id},\widetilde{1}\rangle-\lambda\,\|\widetilde{1}\|^2=0)\iff\Big(\lambda=\frac{\langle\mathrm{Id},\widetilde{1}\rangle}{\|\widetilde{1}\|^2}\Big).$$

Or

$$\langle\mathrm{Id},\widetilde{1}\rangle=\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x=0\qquad\qquad \|\widetilde{1}\|^2=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$$

donc on choisit

$$\lambda=0.$$

On a donc

$$e_2=\mathrm{Id}\,.$$

Avouons que, pour l'instant, nous n'avons pas fait grand chose !

On pose enfin $e_3=|\cdot|-\mu e_1-\nu e_2$ et l'on recherche $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ telles que $e_3\perp e_1$ et $e_3\perp e_2$. On a

$$(e_3\perp e_1)\iff(\langle|\cdot|-\mu e_1-\nu e_2,e_1\rangle=0)\iff(\langle|\cdot|,e_1\rangle-\mu\,\|e_1\|^2=0)\iff\Big(\mu=\frac{\langle|\cdot|,e_1\rangle}{\|e_1\|^2}\Big)$$

et

$$(e_3\perp e_2)\iff(\langle|\cdot|-\mu e_1-\nu e_2,e_2\rangle=0)\iff(\langle|\cdot|,e_2\rangle-\nu\,\|e_2\|^2=0)\iff\Big(\nu=\frac{\langle|\cdot|,e_2\rangle}{\|e_2\|^2}\Big).$$

Or

$$\langle|\cdot|,e_1\rangle=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=1\qquad \|e_1\|^2=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2\qquad \langle|\cdot|,e_2\rangle=\int_{-1}^{1}|x|x\,\mathrm{d}x=0\qquad \|e_2\|^2=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

donc on peut prendre

$$e_3=|\cdot|-\frac{1}{2}\widetilde{1}.$$

Il ne reste plus qu'à normaliser. Comme

$$\|e_1\|^2=2,\qquad \|e_2\|^2=\frac{2}{3}\qquad\text{et}\qquad \|e_3\|^2=\int_{-1}^{1}\Big(|x|-\frac{1}{2}\Big)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

cela donne

$$\frac{e_1}{\|e_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{1},\qquad \frac{e_2}{\|e_2\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Id}\qquad \frac{e_3}{\|e_3\|}=\sqrt{6}\Big(|\cdot|-\frac{1}{2}\widetilde{1}\Big).$$

En conclusion,

$$\boxed{\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{1},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Id},\sqrt{6}\Big(|\cdot|-\frac{1}{2}\widetilde{1}\Big)\Big)\text{ est une orthonormalisée de }\big(\widetilde{1},\mathrm{Id},|\cdot|\big).}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]
Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces de E.
1. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Démontrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que dire lorsque E est un espace euclidien ?

1. On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$, d'après le cours. Par suite, on a $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Alors $\forall f \in F,\ \langle x, f\rangle = 0$ et $\forall g \in G,\ \langle x, g\rangle = 0$.Pour tout $y \in F+G$, on a $y = f+g$ où $f \in F$ et $g \in G$, de sorte que $\langle x, y\rangle = \langle x, f\rangle + \langle x, g\rangle = 0+0 = 0$. Donc $x \in (F+G)^\perp$ et, par suite, $F^\perp \cap G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Donc
$$\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$$
Remarque 1 : On démontrerait de même que
$$\Big(\sum_{i\in I} F_i\Big)^\perp = \bigcap_{i\in I} {F_i}^\perp.$$
Remarque 2 : Lorsque A et B sont deux parties de E, on a
$$(A \cup B)^\perp = \big(\mathrm{Vect}(A\cup B)\big)^\perp = \big(\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)\big)^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp + \mathrm{Vect}(B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$
et l'on peut là aussi généraliser, ce qui donne
$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^\perp = \bigcap_{i\in I} {A_i}^\perp.$$

2. On propose deux solutions.
   - ▷ On a $F\cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, donc $F^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. Comme $F^\perp + G^\perp$ est le plus petit sous-espace qui contient à la fois $F^\perp$ et $G^\perp$, on en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

$\square$

   - ▷ On peut aussi le faire à la main. Soit $x \in F^\perp + G^\perp$ de sorte que $x = f' + g'$ avec $\forall f \in F,\ \langle f, f'\rangle = 0$ et $\forall g \in G,\ \langle g, g'\rangle = 0$. Si $y \in F \cap G$, alors $y = f+g$ où $f \in F$ et $g \in G$ de sorte que $\langle x, y\rangle = \langle x, f+g\rangle = \langle x, f\rangle + \langle x, g\rangle = 0+0 = 0$. Alors $x \in (F\cap G)^\perp$. Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

   En conclusion,
$$\boxed{F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp.}$$
   Supposons que E est un espace euclidien. On propose deux solutions.
   - ▷ On a
$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \qquad \text{Grassmann}\\
&= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim\big((F+G)^\perp\big)\\
&= n - \dim F + n - \dim G - n + \dim(F+G)\\
&= n - \dim(F\cap G) \qquad \text{Grassmann}\\
&= \dim\big((F\cap G)^\perp\big).
\end{aligned}$$
     Cette égalité couplée avec l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ nous dit que $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$.
   - ▷ L'égalité entre un sous-espace et son biorthogonal en dimension finie permet d'écrire que
$$\begin{aligned}
F^\perp + G^\perp &= (F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp}\\
&= \big(F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}\big)^\perp \qquad \text{d'après 1}\\
&= (F\cap G)^\perp.
\end{aligned}$$

   En conclusion,
$$\boxed{\text{si } E \text{ est un espace euclidien, on a } F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On munit $E = \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Soit $c \in [a;b]$. On pose $F_c = \{f \in E : f(c) = 0\}$. Démontrer que ${F_c}^\perp = \{\widetilde{0}\}$.
2. On pose $H = \mathscr{C}^1([a;b], \mathbb{R})$. Démontrer que $H^\perp = \{\widetilde{0}\}$. *Indication : Prendre $g \in H$ et calculer la norme de l'une de ses primitives.*
3. Que retenir de cet exercice ?

1. Soit $g \in {F_c}^\perp$. Pour toute fonction $f \in F_c$, on a $\langle f, g\rangle = 0$. Autrement dit, pour toute fonction $f \in E$ telle que $f(c) = 0$, on a
$$\int_a^b fg = 0.$$
On propose deux solutions. La première est toute simple mais j'aime bien la seconde.
   - ▷ On choisit $f : t \longmapsto (t-c)^2 g(t)$ qui appartient bien à F_c. Alors
$$\int_a^b (t-c)^2 g(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$
Comme la fonction $t \longmapsto (t-c)^2 g(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a;b]$, on a $\forall t \in [a;b],\ (t-c)^2 g(t)^2 = 0$ c'est-à-dire $\forall t \in [a;b] \setminus \{c\},\ g(t) = 0$. Par continuité, on en déduit que $g = \widetilde{0}$.
   - ▷ Si $g(c) = 0$, on prend $f = g$. Alors g^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a;b]$, ce qui donne $g = \widetilde{0}$.
Supposons que $g(c) \neq 0$, par exemple $g(c) > 0$ (quitte à changer g en $-g$). Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [c-\eta; c+\eta] \cap [a;b],\ g(t) > 0$. On prend alors la fonction $f \in F_c$ définie par
$$\forall t \in [a;b], \qquad f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in [a;b] \setminus [c-\eta; c+\eta] \\ \dfrac{g(c-\eta)}{\eta}(c-x) & \text{si } t \in [c-\eta; c] \cap [a;b] \\ \dfrac{g(c+\eta)}{\eta}(x-c) & \text{si } t \in [c; c+\eta] \cap [a;b] \end{cases}$$
de sorte que fg est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a;b]$. On en déduit que $fg = \widetilde{0}$ et donc $\forall t \in [a;b] \setminus \{c\},\ g(t) = 0$. Par continuité, on en déduit que $g = \widetilde{0}$.

   En conclusion,
$$\boxed{{F_c}^\perp = \{\widetilde{0}\}.}$$

2. Soit $g \in H^\perp$. Notons G la primitive de g qui s'annule en a et $\mathscr{G}$ la primitive de G qui s'annule en b. On a
$$\begin{aligned} \|G\|^2 &= \int_a^b G^2 \\ &= \left[G\mathscr{G}\right]_a^b - \int_a^b g\mathscr{G} \qquad \text{par I.P.P} \\ &= G(b)\underbrace{\mathscr{G}(b)}_{=0} - \underbrace{G(a)}_{=0}\mathscr{G}(a) - \underbrace{\langle g, \mathscr{G}\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in H^\perp \text{ et } \mathscr{G} \in H}} \\ &= 0, \end{aligned}$$
ce qui démontre que $G = \widetilde{0}$ et donc $g = \widetilde{0}$. Par conséquent,
$$\boxed{H^\perp = \{\widetilde{0}\}.}$$

3. On constate d'une part que lorsqu'on n'est pas en dimension finie, il est possible que F et $F^\perp$ ne soient pas supplémentaires et d'autre part que $F^{\perp\perp}$ ne soit pas égal à F.

♦ ***Exercice 6.*** [⋆]

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On admet qu'il existe une famille de vecteurs unitaires $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ de E telle que les produits scalaires $\langle x_i \mid x_j \rangle$ $(i \neq j)$ soient tous égaux à un nombre réel strictement négatif δ.

1. Démontrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E.
2. Démontrer que les coordonnées de x_{n+1} dans la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont toutes égales à -1 et en déduire la valeur de δ.

1. Démontrons que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E. Cela suffit pour démontrer que c'est une base puisque son cardinal est égal à la dimension de E. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$
En effectuant le produit scalaire des deux membres par x_i pour $i = 1, \ldots, n, n+1$, on obtient
$$(1-\delta)\lambda_i + \delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0.$$
En reportant ce résultat dans les n premières relations obtenues, il vient $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ car $\delta \neq 1$. Donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E et, par conséquent,
$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E.}$$

2. On a $x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. En effectuant à nouveau le produit scalaire des deux membres par x_i pour $i = 1, \ldots, n, n+1$, on obtient
$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad (1-\delta)\lambda_i + \delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \delta \qquad \text{et} \qquad \delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$
En combinant ces deux relations, on obtient
$$(1-\delta)\lambda_i + 1 = \delta,$$
c'est-à-dire, puisque $\delta \neq 1$,
$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \lambda_i = -1.}$$
En reportant dans la relation $\delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, on en déduit que
$$\boxed{\delta = -\frac{1}{n}\cdot}$$

♦ ***Exercice 7.*** [⋆] (Les projections orthogonales sont les projections « contractantes »)

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

⇒ Supposons que p est une projection orthogonale. Alors $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2$ d'après Pythagore, d'où $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

⇐ Si p n'est pas un projecteur orthogonal, un petit dessin montre clairement qu'un vecteur de $(\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ se projète en un vecteur plus long que l'original.

Soit $x \in (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$. Il existe $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v \in \operatorname{Im} p$ tel que $x = u + v$. On a $p(x) = p(u) + p(v) = v$ donc $\|v\| \leqslant \|x\|$. Par ailleurs, on a $\|v\| = \|x - u\| = \sqrt{\|x\| + \|u\|}$ d'après le théorème de Pythagore (puisque x et u sont orthogonaux). Il s'ensuit que $u = 0$ et donc que $x = v \in \operatorname{Im} p$. On a donc $(\operatorname{Ker} p)^{\perp} \subset \operatorname{Im} p$.

Comme $\dim(\operatorname{Ker} p)^{\perp} = n - \dim \operatorname{Ker} p = \dim \operatorname{Im} p$, on a $(\operatorname{Ker} p)^{\perp} = \operatorname{Im} p$. Cela prouve que p est une projection orthogonale.

En conclusion,
$$\boxed{p \text{ est une projection orthogonale si, et seulement si, } \|p(x)\| \leqslant \|x\|.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\circ$]
Calculer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2+at+b)^2\,\mathrm{d}t.$$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire
$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
On remarque alors que
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2+at+b)^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\big(X^2,\mathbb{R}_1[X]\big)^2$$
On propose deux solutions.

- Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base $(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.
  On conserve tel quel le premier vecteur.
  On recherche le second sous la forme $X-\lambda 1$ pour qu'il vérifie $0=\langle 1, X-\lambda\rangle = 1/2-\lambda$ et l'on trouve donc $X-1/2$.
  Après normalisation, la base orthonormale est donc
  $$(P_0,P_1)=\big(1\,;\,2\sqrt{3}X-\sqrt{3}\big).$$
  Le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est alors
  $$\begin{aligned} p(X^2) &= \big\langle X^2,P_0\big\rangle\,P_0+\big\langle X^2,P_1\big\rangle\,P_1\\ &= \frac{1}{3}\cdot 1+\Big(2\sqrt{3}\frac{1}{3}-\sqrt{3}\frac{1}{2}\Big)(2\sqrt{3}X-\sqrt{3})\\ &= X-\frac{1}{6}\cdot\end{aligned}$$
  Il s'ensuit que
  $$\mathrm{d}\big(X^2,\mathbb{R}_1[X]\big)^2 = \big\|X^2-p(X^2)\big\|^2 = \big\|X^2-X+1/6\big\|^2 = \int_0^1 \Big(t^2-t+\frac{1}{6}\Big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{180}\cdot$$
- En utilisant le déterminant de Gram, on a
  $$\mathrm{d}\big(X^2,\mathbb{R}_1[X]\big)^2 = \frac{\mathrm{gram}(1,X,X^2)}{\mathrm{gram}(1,X)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{vmatrix}} = \frac{12}{2160} = \frac{1}{180}\cdot$$

En conclusion, on a
$$\boxed{\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2+at+b)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{180}\cdot}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire habituel $(A,B)\longmapsto \langle A\,,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver le projeté orthogonal de $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et préciser $\mathrm{d}\big(M;\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big)$.

1. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB)$ et

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(-{}^tA{}^tB) = -\mathrm{Tr}\left({}^t(BA)\right) = -\mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}(AB),$$

donc $\mathrm{Tr}({}^tAB) = 0$, ce qui justifie que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Comme toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme

$$A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})},$$

on a

$$\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Le projeté orthogonal $p(M)$ de M sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est donné par $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ c'est-à-dire

$$\boxed{p(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot}$$

Alors

$$M - p(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(M; \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big)^2 &= \|M - p(M)\|^2 \\
&= \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{6}{4},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{d}\big(M; \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big) = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$] (Déterminant de Gram)

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, H un hyperplan de E et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de cet hyperplan. On note p la projection orthogonale sur H et, pour $x \in E$, on note $\mathrm{d}(x; H)$ la distance de x à H.

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{d}(x; H)^2 = \langle x, x - p(x) \rangle$.
2. Soit $(y_1, \ldots, y_p)$ une famille de p vecteurs de E. On définit le *déterminant de Gram* de cette famille par la formule

$$\mathrm{gram}(y_1, \ldots, y_p) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_p \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_2, y_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_p, y_1 \rangle & \langle y_p, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_p, y_p \rangle \end{vmatrix}.$$

   a) Démontrer que $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.

   b) Pour $x \in E$, démontrer que $\mathrm{d}(x; H)^2 = \dfrac{\mathrm{gram}(x, e_1, \ldots, e_n)}{\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n)}\cdot$

1. Soit $x \in E$. En cours, on a vu que $p(x)$ réalise le minimum de l'ensemble $\{\|x-y\| : y \in H\}$ (c'est une conséquence du théorème de Pythagore), d'où $\mathrm{d}(x;H)^2 = \|x-p(x)\|^2$. Or $\|x-p(x)\|^2 = \langle x, x-p(x)\rangle - \langle p(x), x-p(x)\rangle = \langle x, x-p(x)\rangle$ puisque $p(x)$ est orthogonal à $x-p(x)$, donc

$$\boxed{\mathrm{d}(x;H)^2 = \langle x, x-p(x)\rangle.}$$

2. a) Deux solutions. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n)$ et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes.

   - ▷ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0_{n,1}$. Cela signifie que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\langle e_i, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\rangle = 0$. Dès lors, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ est un vecteur de F qui est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F. Par conséquent, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ est nul (puisqu'il est orthogonal à lui-même). Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Cela démontre que les colonnes du déterminant $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n)$ forment une famille libre, et donc que $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.
   - ▷ D'après le procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt, on peut trouver des nombres réels $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant j < i \leqslant n}$ tels que la famille des $e'_i = e_i - \sum_{j<i} \lambda_{i,j} e_j$ soit orthogonale. En effectuant successivement les opérations $C_i \leftarrow C_i - \sum_{j<i} \lambda_{i,j} C_j$ pour j décroissant de n à 2 puis en effectuant les mêmes opérations sur les lignes, on se ramène au déterminant de Gram d'une base orthogonale dont il est clair qu'il n'est pas nul. Ainsi $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.

   En conclusion, on a

$$\boxed{\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0.}$$

   b) Le projeté $p(x)$ de x sur H se décompose sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sous la forme $p(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Il s'ensuit qu'en retranchant à la première colonne C_1 du déterminant $\mathrm{gram}(x, e_1, \ldots, e_n)$ la combinaison linéaire $\lambda_1 C_2 + \cdots + \lambda_n C_{n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{gram}(x, e_1, \ldots, e_n) &= \begin{vmatrix} \langle x, x-p(x)\rangle & \langle x, e_1\rangle & \cdots & \langle x, e_n\rangle \\ \langle e_1, x-p(x)\rangle & \langle e_1, e_1\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, x-p(x)\rangle & \langle e_n, e_1\rangle & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle x, x-p(x)\rangle & \langle x, e_1\rangle & \cdots & \langle x, e_n\rangle \\ 0 & \langle e_1, e_1\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle e_n, e_1\rangle & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle x, x-p(x)\rangle \times \mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \mathrm{d}(x;H)^2 \times \mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n),
\end{aligned}$$

   et donc, puisque $\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$,

$$\boxed{\mathrm{d}(x;H)^2 = \frac{\mathrm{gram}(x, e_1, \ldots, e_n)}{\mathrm{gram}(e_1, \ldots, e_n)}\cdot}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\star$]
Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. À l'aide du théorème de Riesz, démontrer l'existence et l'unicité d'un endomorphisme f^* de E, appelé *adjoint* de f, tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle .$$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*)$.
3. Déterminer Id^*, f^{**} et $(g \circ f)^*$ pour tout endomorphisme g de E.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par f^*.
5. Démontrer que

$$\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp \qquad \mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$$
$$\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \qquad \mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}\, f.$$

6. Soit p une projection de E. Démontrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $p = p^*$.

1. L'application $x \longmapsto \langle f(x), y\rangle$ est une forme linéaire de E. Le théorème de Riesz nous dit qu'il existe un unique vecteur, noté $f^*(y)$, tel que $\forall x, y \in E,\ \ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$. Donc l'adjoint existe et est unique.
Soient $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle x, f^*(\lambda y_1 + \mu y_2)\rangle &= \langle f(x), \lambda y_1 + \mu y_2\rangle\\ &= \lambda \langle f(x), y_1\rangle + \mu \langle f(x), y_2\rangle\\ &= \lambda \langle x, f^*(y_1)\rangle + \mu \langle x, f^*(y_2)\rangle\\ &= \langle x, \lambda f^*(y_1) + \mu f^*(y_2)\rangle ,\end{aligned}$$

ce qui démontre que $f^*(\lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda f^*(y_1) - \mu f^*(y_2) \in E^\perp = \{0_E\}$, d'où

$$f^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda f^*(y_1) + \mu f^*(y_2).$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'endomorphisme adjoint existe et est unique.}}$$

2. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = \big(\langle e_i, f^*(e_j)\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \big(\langle f(e_i), e_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f),$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) \text{ sont transposées l'une de l'autre.}}$$

3. On a clairement

$$\boxed{\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad f^{**} = f.}$$

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle (g \circ f)(x), y\rangle = \langle f(x), g^*(y)\rangle = \langle x, (f^* \circ g^*)(y)\rangle ,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.}$$

4. $\Rightarrow$ Supposons que F est stable par f. Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = 0$ car $f(x) \in F$ et $y \in F^\perp$. Donc $f^*(y) \in F^\perp$. Ainsi $F^\perp$ est stable par f^*.
$\Leftarrow$ Supposons que $F^\perp$ est stable par f^*. Le sens $\Rightarrow$ nous dit que $F^{\perp\perp}$ est stable par f^{**}, c'est-à-dire que F est stable par f.

En conclusion,

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si, et seulement si, } F^\perp \text{ est stable par } f^*.}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f^* &= \{y \in E : f^*(y) = 0_E\} \\
&= \{y \in E : \forall x \in E,\ \langle x, f^*(y)\rangle = 0\} \\
&= \{y \in E : \forall x \in E,\ \langle f(x), y\rangle = 0\} \\
&= (\operatorname{Im} f)^\perp,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp.}$$

On a clairement $\operatorname{Ker}(f^* \circ f) \supset \operatorname{Ker} f$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^* \circ f)$ de sorte que $(f^* \circ f)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) \in \operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$. On a donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^\perp = \{0_E\}$, c'est-à-dire $f(x) = 0_E$ ou encore $x \in \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker}(f^* \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.
Donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker} f.}$$

En appliquant l'égalité $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ à f^*, on obtient $\operatorname{Ker} f^{**} = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$. Alors $(\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Im} f^*)^{\perp\perp}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp.}$$

On a clairement $\operatorname{Im}(f \circ f^*) \subset \operatorname{Im} f$. De plus, on a

$$\dim \operatorname{Im}(f \circ f^*) = n - \dim \operatorname{Ker}(f \circ f^*) = n - \dim \operatorname{Ker} f^* = n - \dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim \operatorname{Im} f,$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Im} f.}$$

6. $\Rightarrow$ Supposons que p est une projection orthogonale. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle p(x), y\rangle = \underbrace{\langle p(x), y - p(y)\rangle}_{=0} + \langle p(x), p(y)\rangle = \underbrace{\langle p(x) - x, p(y)\rangle}_{=0} + \langle x, p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle\,,$$

donc $p = p^*$.

$\Leftarrow$ Supposons que $p = p^*$. Alors $(\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Im} p$ d'après la question précédente, ce qui permet d'affirmer que p est une projection orthogonale.

En conclusion,

$$\boxed{\text{les projections autoadjointes (i.e. } p^* = p\text{) sont les projections orthogonales.}}$$