

# Indications et réponses : mécanique du point

## Mécanique du point 1

(CCP)

- Le PFD sans frottement ni force d'inertie donne immédiatement

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

soit

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5,5 \text{ s}$$

- Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique donc n'est pas galiléen a priori. D'autant que le référentiel géocentrique est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic (on le néglige ici).

La force de Coriolis est

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

où  $\Omega$  est la période de rotation de la terre ( $2\pi/24$  heures). Comme  $v \approx gt$ ,

$$\frac{F_c}{mg} \approx 2\Omega t \ll 1$$

car la durée de la chute est faible devant un jour. La force de Coriolis est selon  $\vec{u}_x$  (règle des 3 doigts par exemple) et  $x(t)$  va être légèrement perturbée.

- On considère que la vitesse est  $\vec{v} \approx -gt\vec{u}_z$  de sorte que

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\vec{\Omega}_y \wedge \vec{v} = 2m\Omega \cos \lambda g t \vec{u}_x$$

L'équation différentielle est alors

$$m\ddot{x} = 2m\Omega \cos \lambda g t$$

qui en intégrant deux fois donne

$$x(t) = \Omega \cos \lambda g \frac{t^3}{3}$$

La durée de la chute est presque inchangée de sorte que la déviation est

$$d = \frac{\Omega \cos \lambda g}{3} \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} = 2,8 \text{ cm}$$

## Mécanique du point 2

(CCP)

- On écrit le PFD avec le poids selon  $\vec{e}_z$ . On trouve facilement,  $y = vt$ ,  $x = 0$  et  $z = -\frac{1}{2}gt^2$ . On a donc une durée  $t = y/v = 0,1 \text{ s}$  de sorte que  $z = -0,05 \text{ m}$ .
- On tient compte de la force de Coriolis  $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$  dirigée en très grande partie vers l'est (car  $\vec{v}$  essentiellement vers le nord) qui va dévier le boulet légèrement vers l'est.
- Le pfd projeté selon  $x$ , donne  $\ddot{x} = 2v\omega \cos \lambda$  où  $\lambda$  est la latitude. On a donc  $x = v\omega \cos \lambda t^2 \approx 5.10^{-6} \text{ m}$ .

**Mécanique du point 3**

(CCP)

Pour appliquer le TEC, on calcule d'abord l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe passant par O.

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

On calcule l'énergie potentielle de pesanteur en déterminant  $OG = b/\sqrt{3}$  par le théorème de Pythagore :

$$E_p = -mgy_G = -mgb \cos \theta \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Les forces non conservatives ne travaillent pas de sorte que :

$$\frac{dE_c + E_p}{dt} = 0$$

On trouve alors après dl,

$$J\ddot{\theta} + \frac{mgb}{\sqrt{3}}\theta = 0$$

Soit une période des petites oscillations de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\sqrt{3}}{mgb}}$$

Pour appliquer le TMC par rapport à O pour lequel seul le moment du poids est non nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = -mg \frac{b}{\sqrt{3}} \sin \theta$$

Le TMC s'applique alors facilement et on obtient la même équation.

**Mécanique du point 4**

(CCP)

1. Il faut faire un dessin de la trajectoire et on peut voir simplement que  $h_a = 2a - 2R - h$
2. Il faut appliquer la loi de Kepler du mouvement elliptique :

$$T = a^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$$

On rappelle qu'on peut la retrouver en étudiant le mouvement circulaire avec le PFD et en remplaçant R par a.

3. Une possibilité est d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique : au périgée P :  $\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM}{R+h} = -\frac{GmM}{2a}$

d'où

$$v_P = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{2a}\right)}$$

On fait la même chose à l'apogée connaissant  $h_a$ .

4. On suppose le satellite à l'apogée et on veut le faire passer sur une trajectoire circulaire de rayon  $R + h_A$ . Il faut donc augmenter son énergie de  $E = -\frac{GmM}{2a}$  à  $E = \frac{GmM}{2(R + h_A)}$ .

**Mécanique du point 5**

(CCP)

1. On calcule le moment cinétique total du système par rapport à O (projété sur  $\vec{u}_z$ ) :

$$L_O = L_O(A) + L_O(Boule) = mX^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}$$

On calcule le moment du poids par rapport à O (en projection sur  $\vec{u}_z$ )

$$\mathcal{M} = -Mg\ell \sin \theta + mgX \sin \theta$$

Le TMC donne alors

$$(mX^2 + J)\ddot{\theta} = -Mg\ell \sin \theta + mgX \sin \theta$$

Pour  $\theta$  faible,  $\sin \theta \approx \theta$  et l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell + mgX}{mX^2 + J}\theta = 0$$

d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mX^2 + J}{Mg\ell + mgX}}$$

C'est bien l'expression de T pour un pendule pesant pour  $m = 0$ .

2. a)  $E_c = \frac{1}{2}MX^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$   
 b)  $E_p = -Mg\ell \cos \theta + mgX \cos \theta$  On a bien  $E_p(\pi/2) = 0$   
 c) Comme  $E_m = E_c + E_p = C^e$ . En dérivant l'expression proposée, on retrouve l'équation différentielle précédente.

### Mécanique du point 6

(CCP)

On se place bien sûr dans le référentiel tournant. Le PFD à l'équilibre projeté selon  $\vec{u}_\theta$  donne

$$0 = -mg \sin \theta_0 + m\omega^2 \ell \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

La solution différente de 0 est donc

$$\theta_0 = \text{Arc cos} \left( \frac{g}{\omega^2 \ell} \right)$$

Cette valeur existe si  $\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

### Mécanique du point 7

(CCP)

1. Pour déterminer la nature d'une trajectoire lors d'une interaction gravitationnelle, il faut penser à calculer l'énergie (sauf si on connaît l'excentricité) qui lui est reliée. Cette grandeur est constante (tout comme le moment cinétique) et on peut la calculer n'importe où. On la calcule évidemment en P !

$$E(P) = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_S m}{r_p} = 2mv_0^2 - \frac{2GM_S m}{r_0}$$

La terre est en mouvement circulaire donc il faut penser à lui appliquer le PFD ! On trouve alors rapidement que

$$M_T \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM_T M_S}{r_0^2}$$

d'où

$$E(P) = 0$$

La trajectoire est donc parabolique (se rappeler l'étude graphique avec l'énergie potentielle effective).

2. On a donc puisque l'énergie se conserve

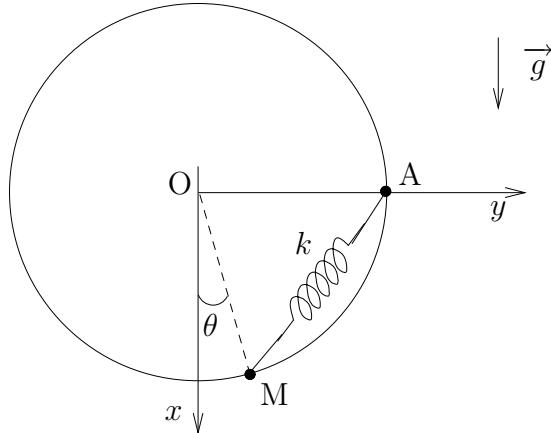
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_S m}{r} = 0$$

soit

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM_S}{r}}$$

**Mécanique du point 8**

(CCP)



1. Le plus simple est d'utiliser le TMC en O. Le moment de la force de rappel est

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \wedge k\overrightarrow{AO} = kR \cos \theta \vec{u}_z$$

On trouve alors  $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + kR \cos \theta$

2. l'angle d'équilibre est donc

$$\tan \theta_{eq} = \frac{kR}{mg} = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$$

3. La méthode est très classique. On a une équation différentielle du type  $\ddot{\theta} = f(\theta)$ . Pour se placer au voisinage de l'équilibre, on fait le changement de variable  $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$  :

$$\ddot{\varepsilon} = f(\theta_{eq} + \varepsilon) \approx \underbrace{f(\theta_{eq})}_{=0} + \varepsilon \frac{df}{d\theta}(\theta_{eq})$$

On obtient donc

$$\ddot{\varepsilon} = -(\omega^2 \cos \theta_{eq} + \Omega^2 \sin \theta_{eq}) \varepsilon$$

**Mécanique du point 9**

(CCP)

Il suffit d'appliquer le PFD aux points  $x_1$  de masse  $m$  et  $x_2$  de masse nulle :

$$m\ddot{x}_1 = -k(\ell_1 - \ell_0) - h\dot{x}_1 + k(\ell_2 - \ell_0)$$

$$0 = -k(\ell_2 - \ell_0) + f(t)$$

On obtient alors en passant aux grandeurs complexes

$$X_2 = \frac{f_0}{k} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{f_0 e^{j\omega t}}{k - m\omega^2 + jh\omega}$$

**Mécanique du point 10**

(CCP)

1. Le PFD donne à l'équilibre

$$-k(\ell_{eq} - \ell_0) + mg = 0$$

soit

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

2. Quand on a un ressort vertical, il faut penser à écrire le PFD (dessiner les forces !) et lui soustraire le PFD à l'équilibre. On appelle  $z$  la longueur et on pose  $Z = z - z_{eq} = \ell - \ell_{eq}$ . On obtient

$$m\ddot{Z} + h\dot{Z} + kZ = 0$$

soit

$$\ddot{Z} + 2\lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

$$\text{avec } 2\lambda = \frac{h}{m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La résolution donne avec les conditions initiales

$$Z(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega_0 t e^{-\lambda t}$$

3. Un analogue électrocinétique est le circuit RLC en régime libre obéissant à l'équation :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = E$$

$R$  modélise les frottements,  $L$  la masse et  $1/C$  la raideur du ressort.

4.  $2\pi/\omega_0$  est la période entre deux maxima.  $1/\lambda$  est le temps caractéristique d'amortissement de l'exponentielle.

### Mécanique du point 11

(CCP)

1. Il suffit de se placer dans le référentiel lié à l'hélicoptère non galiléen. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de fixation donne :

$$J\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta + ma_0\ell \cos \theta$$

La condition d'équilibre est

$$\tan \theta_{eq} = \frac{a_0}{g}$$

2. La méthode est très classique. On a une équation différentielle du type  $J\ddot{\theta} = f(\theta)$ . Pour se placer au voisinage de l'équilibre, on fait le changement de variable  $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$  :

$$J\ddot{\varepsilon} = f(\theta_{eq} + \varepsilon) \approx \underbrace{f(\theta_{eq})}_{=0} + \varepsilon \frac{df}{d\theta}(\theta_{eq})$$

On obtient donc

$$J\ddot{\varepsilon} = -m\ell(g \cos \theta_{eq} + a_0 \sin \theta_{eq})\varepsilon$$

La période des petites oscillations est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m\ell(g \cos \theta_{eq} + a_0 \sin \theta_{eq})}}$$

**Mécanique du point 12**

(CCP)

Appliquer le théorème du moment cinétique à la masse :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -C\theta + mg\ell \sin \theta$$

Pour  $\theta \approx 0$ , l'équation s'écrit

$$m\ell^2\ddot{\theta} + (C - mg\ell)\theta = 0$$

L'équilibre  $\theta = 0$  est stable si  $C > mg\ell \sin \theta(0)$  (sinon la solution diverge). La période des petites oscillations est alors

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{C - mg\ell}}$$

**Mécanique du point 13**

(Mines)

L'exercice est simple si on applique les lois de conservation pour un système isolé : conservation du moment cinétique et de l'énergie.

La conservation du moment cinétique donne :

$$J\omega_f = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 \quad \text{d'où} \quad \omega_f = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{m_1 + m_2}$$

La conservation de l'énergie s'écrit

$$\Delta(U + E_c) = 0 = (m_1 + m_2)cT_f - (m_1cT_1 + m_2cT_2) + \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega_f^2 - \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2)$$

On trouve alors simplement  $T_f$ .

**Mécanique du point 14**

(CCP)

Voir l'exo 4 pour l'étude du mouvement circulaire (PFD !) :  $V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$ . Alors  $E_M = -\frac{GM_T m}{2R}$

Il faut bien connaître le lien entre énergie mécanique et trajectoire. Pour cela, tracer le graphe  $E_{peff}(r)$  et conclure. Pour passer à une trajectoire non bornée, il faut que l'énergie mécanique passe de  $-\frac{GM_T m}{2R}$  à 0. Donc l'énergie cinétique qui valait  $E_c = \frac{GM_T m}{2R}$  doit valoir  $\frac{GM_T m}{R}$ . On obtient alors que la variation de vitesse correspondante est

$$\Delta V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} (\sqrt{2} - 1)$$

**Mécanique du point 15**

(CCP)

Exercice proche du précédent. Un satellite géostationnaire a une période de rotation égale au jour solaire (il semble donc immobile vu de terre). En appliquant le PFD pour le mouvement circulaire,

$$-m\omega^2 r = -\frac{GmM}{r^2} \quad \text{d'où} \quad r = R_T + h = \left(\frac{GM_T}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Comme  $g_0 = \frac{GM}{R_T^2}$  il vient

$$h = \left(\frac{g_0 R_T^2}{\omega^2}\right)^{1/3} - R_T$$

Application numérique :

$$h = 35\ 800 \text{ km}$$

Comme l'altitude change peu devant  $r$ , on peut utiliser le calcul différentiel avec l'énergie du mouvement circulaire (voir exercice 2 par exemple)  $E = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r}$  donc

$$dE = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r^2} dr \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{2} \frac{h}{r} = 6 \cdot 10^{-4}$$

### Mécanique du point 16

(CCP)

- En se plaçant dans le référentiel tournant et en projetant correctement les forces dans la base polaire adaptée, on obtient si  $a$  est le rayon

$$R\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta$$

- Il suffit de tracer les courbes des fonctions correspondant aux 2 membres de l'équations précédentes  $f(\theta) = 1 + \sin\theta$  et  $g(\theta) = \tan\theta$ . On voit que les seules solutions possibles entre  $[0; 2\pi]$  sont dans  $[0; \pi/2]$  et dans  $[\pi; 3\pi/2]$ .

Représenter les forces à l'équilibre est aisément dans  $[0; \pi/2]$  et impossible dans  $[\pi/2; \pi]$  et  $[\pi; 3\pi/2]$ .

C'est plus astucieux dans  $[\pi; 3\pi/2]$  : il faut diriger  $\vec{R}$  vers l'extérieur du cercle.

### Mécanique du point 17

(CCP)

- Exercice classique pour lequel il faut se placer dans le référentiel tournant. Représenter alors les forces sans oublier la réaction de la tige et la force de Coriolis même si leur projection selon  $\vec{u}_r$  est nulle. On trouve alors facilement

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

2.

$$r(t) = r_0 \cosh \omega t$$

3.

$$\ddot{r} + \frac{h}{m} \dot{r} - \omega^2 r = 0$$

Il faut alors résoudre l'équation caractéristique. On trouve les solutions réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-h/m + \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4\omega^2}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-h/m - \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4\omega^2}}{2}$$

On obtient alors

$$r(t) = \frac{\lambda_2 r_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 r_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t}$$

### Mécanique du point 18

(CCP)

C'est un très bon exercice qui permet de montrer la puissance des lois de conservations : du moment cinétique et de l'énergie. Rappelons que s'il est très utile d'exprimer le PFD pour un mouvement circulaire, il est rarement d'utilisation commode dans le cas de mouvements elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Ce sont alors **les lois de conservation** qu'il faut privilégier.

On se place dans le cas limite où le point le plus proche est en R. Notons  $V_R$  la vitesse de la météorite en ce point. Justifier que cette vitesse est orthoradiale. Utiliser la conservation du moment cinétique pour montrer que

$$RV_R = V_{0\ell} d$$

où  $V_{0\ell}$  est la vitesse  $V_0$  limite cherchée.

Utiliser alors la conservation de l'énergie pour montrer que

$$\frac{1}{2}V_{0\ell}^2 = -\frac{GM_T}{R} + \frac{1}{2}V_R^2$$

On trouve alors

$$V_{0\ell} = \sqrt{\frac{2g_0R}{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1}} = 725m/s$$

### Mécanique du point 19

(CCP)

Comme dans l'exercice 14, on se place dans le référentiel tournant et on projette selon l'axe de la tige.  
On obtient

$$m\ddot{r} = -k(r - \ell_0) + m\omega^2 r$$

soit

$$\ddot{r} + (\omega_0^2 - \omega^2)r = \omega_0^2\ell_0$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

On a nécessairement  $\omega_0 > \omega$  sinon le mouvement diverge et la tige casse. Le mouvement est sinusoïdal de pulsation  $\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

$$r(t) = \ell_0 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}t$$

### Mécanique du point 20

(CCP)

Ecrire les forces appliquées au cylindre (sans oublier la poussée d'Archimède). Quand on a un exercice avec un ressort vertical, il est très souvent commode (et extrêmement recommandé) d'écrire le PFD selon  $z$  pour une longueur  $\ell$  quelconque puis à l'équilibre pour  $\ell_{eq}$  et  $z_A = 0$ . Ensuite soustraire les deux équations pour éliminer le terme en  $\ell_0$ , longueur à vide et le terme en  $\vec{g}$ . Faire en même temps un dessin pour déterminer la relation entre  $\ell$ ,  $\ell_{eq}$ ,  $z_A$  et  $z$  position du cylindre par rapport à l'équilibre. On obtient alors

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = kF_m \cos \omega t$$

équation caractéristique d'un oscillateur amorti excité sinusoïdalement (analogie à un circuit RLC forcé sinusoïdalement).

Pour déterminer l'amplitude  $A(\omega)$ , utiliser la méthode des complexes (on ne vous le dira pas forcément donc pensez à le faire!). C'est alors facile et on obtient :

$$A(\omega) = \frac{kF_m}{\sqrt{(\lambda\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

Amplitude caractéristique d'un phénomène de résonance qu'on peut vous demander alors d'expliquer...

### Mécanique du point 21

(CCP) Dessiner à l'équilibre dans le référentiel tournant les 3 forces

appliquées : le poids, la réaction et la force d'entraînement. On projette selon la tige pour éliminer la réaction inconnue. On obtient simplement si  $\ell$  est la distance de l'anneau à O

$$\ell = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

### Mécanique du point 22

(Centrale)

1. Utiliser le théorème de Gauss. On trouve  $g = g_0 \frac{\Omega M}{R}$ .
2. Si  $x$  est la distance de M à l'axe, on trouve alors en projetant selon  $\vec{u}_x$ , une force axipète  $-mg_0 \frac{x}{R}$ . Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\sqrt{g_0/R}$ .
3. On rajoute une force d'inertie d'entraînement (axifuge cette fois). On a toujours un oscillateur harmonique mais la pulsation est maintenant  $\sqrt{g_0/R - \Omega^2}$  où  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la terre.

**Mécanique du point 23***(Centrale)*

1. Pour une orbite circulaire, penser à appliquer le PFD qui donne beaucoup d'informations facilement (ce n'est pas le cas pour une ellipse par exemple). On trouve alors

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_0}} \quad E_c = \frac{GM_0M_S}{2R_0} \quad E_M = -\frac{GM_0M_S}{2R_0}$$

$$L_O = M_0 R_0 V_0$$

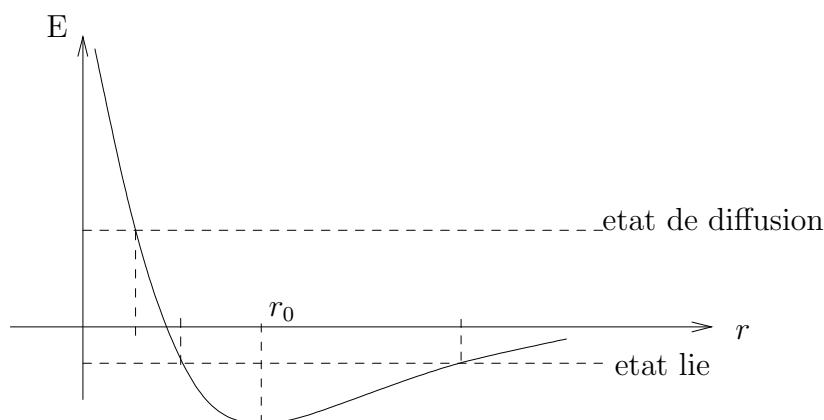
2. Pour déterminer la nature d'une trajectoire, il est très souvent fructueux de calculer l'énergie mécanique (qui est constante bien sûr). Vous devez montrer que l'énergie mécanique de la comète est nulle et que la trajectoire est donc parabolique.

Faire alors un dessin des trajectoires (comme toujours !) pour repérer A et B. Avec l'équation polaire de la conique on montre facilement que A et B forment un diamètre (en  $\theta = \pm\pi/2$ ).

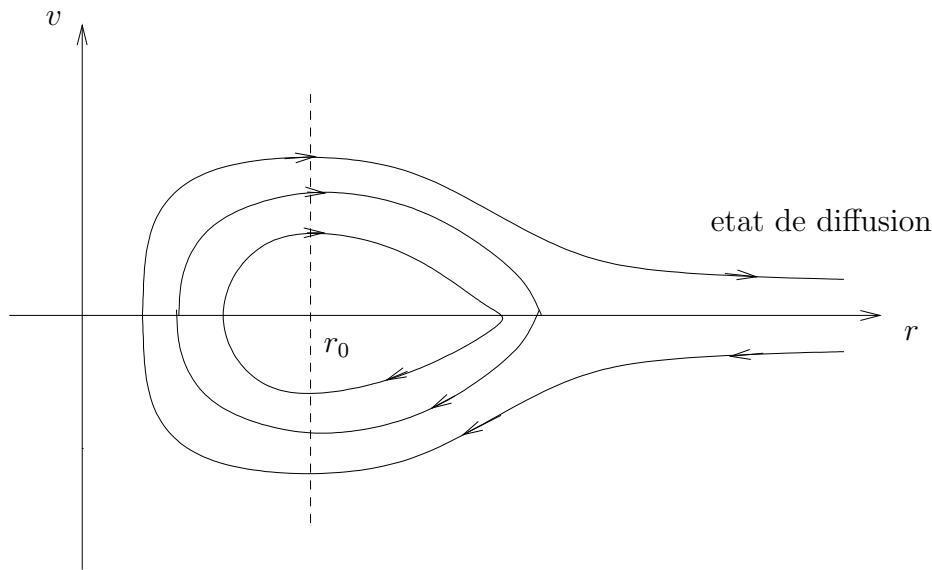
**Mécanique du point 24***(Centrale)*

1. Le deuxième terme représente l'attraction électrostatique à longue distance des atomes (de charge opposées  $\pm\delta e$ ). Le premier terme représente la répulsion à courte distance (les noyaux ne peuvent pas s'interpénétrer).

L'allure du graphe est



2. Si l'énergie E est positive ou nulle, on a un état de diffusion et la molécule n'est pas stable. Si  $E < 0$ , l'état est lié et  $r$  varie entre deux valeurs extrêmales (mouvement borné qui n'est pas une conique).
3. Les courbes représentées concernent les états liés pour différentes énergies. Plus l'énergie est grande, plus l'extension spatiale est importante. On voit clairement les valeurs extrêmales de  $r$  sur le portrait de phase. Pour compléter le portrait de phase, on peut représenter le sens du mouvement ainsi que les états de diffusion (se déplacer sur le graphe de l'énergie potentielle) pour comprendre le portrait de phase. :



lorsque la vitesse est négative  $r$  diminue (sens).

4.  $r_0$  est tel que

$$\frac{dE_p}{dr} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{9A}{r_0^{10}} = \frac{\delta^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$$

Or,

$$d = r_0 \quad \text{et} \quad p = \delta ed$$

d'où

$$A = \frac{p^2 d^6}{36\pi\varepsilon_0} = 2,2 \cdot 10^{-110} \text{ J.m}^9$$

et

$$\delta = \frac{p}{ed} = 0,4$$

### Mécanique du point 25

(Centrale)

1. Pour une orbite circulaire, comme on l'a déjà vu,

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_0}} \quad E_c = \frac{GM_0 M_S}{2R_0} \quad E_M = -\frac{GM_0 M_S}{2R_0}$$

2. On a une ellipse pour  $0 < e < 1$ .

3. L'énergie est maintenant

$$E = -\frac{GmM}{2a} = \frac{1}{2}mv_0^2(1+\varepsilon)^2 - \frac{GmM}{r_0}$$

un DL donne alors

$$a = r_0(1 + 2\varepsilon)$$

### Mécanique du point 26

(Centrale)

1. Le PFD permet d'obtenir simplement cette relation

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

$$2. \quad E_c = \frac{GmM}{2R} \quad E_p = -\frac{GmM}{R} \quad \text{et} \quad E_m = -\frac{GmM}{2R}$$

$E_c$  est évidemment positive,  $E_p$  négative puisque l'interaction gravitationnelle est attractive et  $E_m < 0$  car la trajectoire est bornée.

3. L'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique de demi-grand axe  $a$  est  $E_m = -\frac{GmM}{2a}$  (regarder le cas circulaire pour s'en rappeler à coup sûr). On trouve alors

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{1-k}{k+1} = \frac{\Delta E_2}{E_2}$$

Ces valeurs sont négatives car  $E_1$  et  $E_2$  sont négatives. L'énergie à apporter est positive bien sûr. De plus, en utilisant la question 1

$$\frac{T_2}{T_1} = k^{3/2}$$

Pour la dernière question, il faut calculer la période associée à la trajectoire elliptique. On l'obtient à l'aide de la loi de Kepler ( $a = (R_1 + R_2)/2$ ). On a finalement

$$\Delta t = \frac{T_1}{2} \left( \frac{1+k}{2} \right)^{3/2}$$

### Mécanique du point 27

(Mines)

Sur les parties circulaires l'énergie mécanique se conserve puisqu'il n'y a pas de frottement. Le point lâché avec une vitesse négligeable d'une hauteur  $a$  atteint le bas du quart de cercle avec une vitesse  $v_0$  telle que  $E = mga = \frac{1}{2}mv_0^2$  soit  $v_0 = \sqrt{2ga}$ . Ensuite sur la partie plane la vitesse diminue de part les frottements. Appliquons alors le PFD :

$$m \frac{dv}{dt} = -mhv^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -hv^2$$

soit

$$\frac{dv}{dx} = -hv \quad \text{et} \quad v(x) = v(x=0)e^{-hx}$$

La vitesse après passage sur une portion circulaire ne varie pas de sorte qu'après 38 allers-retours (soit une distance parcourue sur du plat de  $76d$ ) la vitesse est  $v = v_0 e^{-76dh}$ .

La hauteur atteinte est alors  $a/100$  donc  $\sqrt{2ga/100} = v_0 e^{-76dh}$  soit

$$\frac{1}{10} = e^{-76dh} \quad \text{d'où} \quad d = \frac{\ln 10}{76h}$$

### Mécanique du point 28

(Mines)

On appelle  $L$  la distance entre les deux supports. On applique le PFD et on obtient

$$m\ddot{z} = mg - k_1(z - \ell_0) + k_2(L - z - \ell_0)$$

La raideur équivalente est donc

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

### Mécanique du point 29

(Mines)

Dans ce genre d'exercice, il faut bien préciser le référentiel dans lequel on travaille : on se place dans le référentiel lié à la tringle non galiléen et en rotation uniforme par rapport au référentiel du labo supposé

galiléen. Dans ce référentiel, existent les forces d'entraînement et de Coriolis dont vous devez connaître l'expression. Faire alors un bilan de forces à l'équilibre (sans oublier la réaction, normale puisqu'il n'y a pas de frottement).

En projetant tangentielle à la tringle, vous devez obtenir la condition d'équilibre ( $\theta$  est l'angle que fait la tangente à la tringle avec l'horizontale) :

$$\tan \theta = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

On trouve alors facilement que l'équation cherchée est celle d'une parabole d'équation  $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$ .

rmq : cette équation est celle de la surface libre d'un liquide mis en rotation.

### Mécanique du point 30 (Mines)

On applique le PFD en référentiel non galiléen projeté selon  $\vec{u}_\theta$  :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + ma_0 \cos \theta$$

La position d'équilibre est alors telle que

$$\tan \theta_e = \frac{a_0}{g} = 0,3$$

On pose  $\varepsilon = \theta - \theta_e$  et on fait un DL en  $\varepsilon$ ; il vient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{\ell}(g \cos \theta_e + a_0 \sin \theta_e)\varepsilon = 0$$

d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}} = 1,7s$$

A l'arrêt la période est plus importante et vaut

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1,8s$$

### Mécanique du point 31 (Centrale)

1. On applique le PFD en référentiel non galiléen. En projection sur  $\vec{u}_\theta$ , il vient

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \left( -\frac{g}{R} + \omega^2 \cos \theta \right)$$

Les solutions sont

$$\theta = 0 \quad \theta = \pi \quad \theta = \text{Arccos} \frac{g}{\omega^2 R} \text{ si } \omega^2 R > g$$

2. on écrit  $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$

- Pour  $\theta_{eq} = 0$ , l'équation devient

$$\ddot{\varepsilon} + \left( \frac{g}{R} - \omega^2 \right) \varepsilon = 0$$

L'équilibre est instable si  $\omega^2 > \frac{g}{R}$  et stable sinon.

La période d'oscillations est triviale.

- Pour  $\theta_{eq} = \pi$  l'équation devient

$$\ddot{\varepsilon} - \left( \frac{g}{R} + \omega^2 \right) \varepsilon = 0$$

L'équilibre est instable.

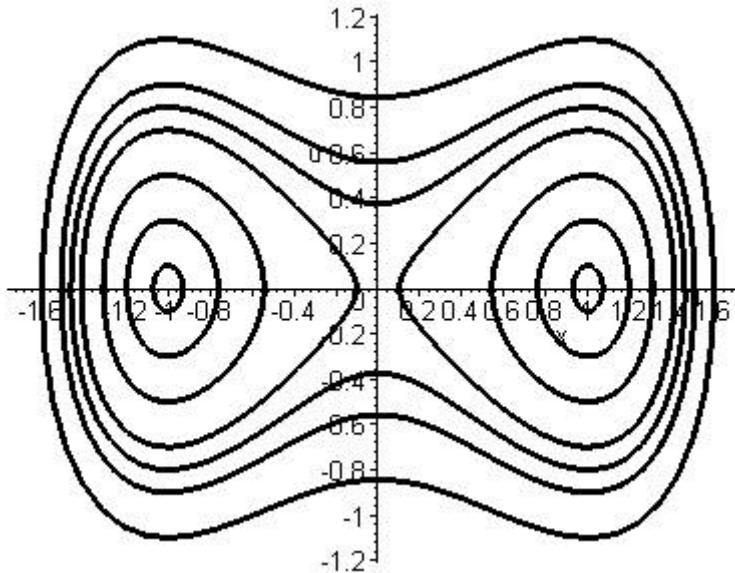
- Pour  $\theta = \text{Arccos} \frac{g}{\omega^2 R}$  avec  $\omega^2 R > g$ , l'équation devient

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \sin^2 \theta_e \varepsilon = 0$$

L'équilibre est stable.

3. L'allure du portrait de phase pour  $\theta = 0$  est classique.

Pour  $\theta_{eq} = \text{Arccos} \frac{g}{\omega^2 R}$ , on obtient



### Mécanique du point 32

(Centrale)

La vitesse avant modification de la masse est  $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ .

La nouvelle énergie est :

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{\alpha GMm}{r_0} = \frac{GMm}{2r_0} (1 - 2\alpha)$$

On a donc

- si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , la trajectoire est une ellipse. L'ellipse a pour demi-grand axe

$$a = -\frac{\alpha GMm}{2E} = -\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha}\right) r_0$$

si  $\alpha > 1$ ,  $a < r_0$  et l'ellipse est intérieur au cercle initial (logique, l'attraction est plus importante).

si  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ,  $a > r_0$  et l'ellipse est extérieur au cercle initial.

- si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $E=0$  et la trajectoire est une parabole
- si  $\alpha < 0,5$ ,  $E > 0$  et la trajectoire est une hyperbole

### Mécanique du point 33

(Centrale)

- Vue la deuxième question, on pense à utiliser une méthode énergétique dans le référentiel en rotation. L'énergie potentiel du système constitué des trois masses est

$$E_p = 2(-mg\ell \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \theta) - 2mg\ell \cos \theta$$

Il y a équilibre si  $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 = 4mg\ell \sin \theta - 2m\omega^2 \ell^2 \sin \theta \cos \theta = 0$

soit

$$\cos \theta = \frac{2g}{\omega^2 \ell} \quad \text{et} \quad \sin \theta = 0$$

Notons que la position  $\theta \neq 0$  n'est possible que si  $\omega > \sqrt{\frac{2g}{\ell}} = \omega_c$ .

2. La stabilité s'étudie à partir du signe de  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$  (ou du graphe de  $E_p(\theta)$ ). On trouve que l'équilibre est stable pour  $\theta = 0$  lorsque  $\omega < \omega_c$  et pour  $\theta = \arccos \frac{2g}{\omega^2 \ell}$  pour  $\omega > \omega_c$ .

### Mécanique du point 34

(Mines)

1. On adopte un modèle continu de répartition des forces (grand nombre de câbles) et on isole un élément de longueur  $dx$  (analogue à la corde vibrante vue dans le cours sur les ondes). En projetant le théorème de la résultante dynamique, on obtient les équations :

$$T_x = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \frac{dT_y}{dx} = \mu g$$

$\alpha$  est l'angle fait par la corde avec l'horizontale et  $\alpha_0$  est sa valeur en l'extrémité.

soit  $T \cos \alpha = T_0 \cos \alpha_0$  et  $\frac{d}{dx}(T \sin \alpha) = \mu g$

d'où  $T_0 \cos \alpha_0 \frac{d \tan \alpha}{dx} = \mu g$  d'où  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu g}{T_0 \cos \alpha_0}$

L'équilibre global donne  $T_0 \cos \alpha_0 = \mu g d$

Finalement, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{2d} (x^2 - d^2)$$

2. La tension du cable est

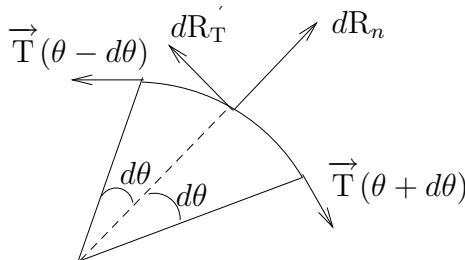
$$T = \frac{T_0 \cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \mu g d \sqrt{1 + \left(\frac{x}{d}\right)^2}$$

La tension est maximale aux extrémités et vaut  $\mu g d \sqrt{2}$ .

$$\mu g d \sqrt{2} < T_{\max}$$

### Mécanique du point 35

(Mines)



On écrit l'équilibre d'une portion de corde entre  $\theta - d\theta$  et  $\theta + d\theta$ .  $\cos d\theta \approx 1$  et  $\sin d\theta \approx d\theta$ .  
 selon  $\vec{u}_\theta$ ,  $T(\theta + d\theta) - T(\theta - d\theta) + dR_T = 0$   
 selon  $\vec{u}_r$ ,  $-d\theta T(\theta - d\theta) - d\theta T(\theta + d\theta) + dR_N = 0$

d'où

$$dR_N = 2T(\theta)d\theta \quad \text{et} \quad dR_T = -2 \frac{dT}{d\theta} d\theta$$

A la limite du glissement,  $dR_T = f dR_N$  soit

$$\frac{dT}{d\theta} = -fT \quad \text{et} \quad T(\pi) = T(0)e^{-f\pi}$$

Il faut donc une force  $F = mge^{-f\pi}$

**Mécanique du point 36** (Mines)

- On projette l'équation d'équilibre des forces :

$$F \cos \theta = T \quad \text{et} \quad F \sin \theta + N = Mg$$

Pour le glissement,  $T = \mu N$  et

$$F = \frac{\mu Mg}{\mu \sin \theta + \cos \theta}$$

- Dans ce cas

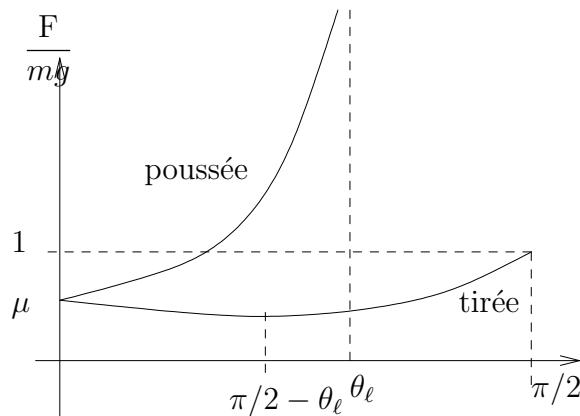
$$F \cos \theta = -T \quad \text{et} \quad -F \sin \theta + N = Mg \quad \text{avec} \quad T = -fN$$

d'où

$$F = \frac{\mu Mg}{-\mu \sin \theta + \cos \theta}$$

- La traction est toujours possible mais la poussée est limitée par  $\theta_\ell$  tel que

$$\tan \theta_\ell = \frac{1}{\mu}$$



**Mécanique du point 37** (ENS)

C'est le même exercice qu'en 32 avec ici  $F = Mge^{-\mu\pi/2}$ .

Pour hisser à vitesse constante (la force est minimale alors puisque l'accélération est nulle), on applique le même raisonnement mais avec une force de frottement qui change de sens. On trouve alors  $F = Mge^{\mu\pi/2}$  ce qui correspond à une force 3 fois supérieure au poids (impossible sauf si c'est un enfant et son papa très fort).

**Mécanique du point 38** (X)

Le traitement est bien sûr très proche que pour l'exercice 30. On calcule à une constante près l'énergie potentielle

$$E_p = 2(-mgl \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 \sin^2 \theta) - 2m_1gl \cos \theta + \frac{1}{2}k(2\ell(1 - \cos \theta))^2$$

$$E_p = -2\ell \cos \theta ((m + m_1)g + 2k\ell) - \ell^2 \sin^2 \theta (2m\omega^2 + 2k)$$

La résolution est alors strictement identique (il suffit d'adapter les constantes) : on trouve

Pour  $\omega < \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) \frac{g}{\ell}}$

$$\theta_e = 0$$

Pour  $\omega > \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) \frac{g}{\ell}}$

$$\theta_e = \text{Arccos} \frac{4k\ell + 2(m_1 + m)g}{4k\ell + 2m\omega^2\ell}$$

### Mécanique du point 39 (X)

Il faut d'abord déterminer le rayon de courbure de la parabole en fonction de  $x$ . Vous avez vu en maths que

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}{2a}$$

On applique ensuite le PFD projeté selon la normale :

$$m \frac{v^2}{\rho} = -N + mg \cos \theta$$

or  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$  et  $\tan \theta = 2ax$ .

Or le TEC donne  $v^2 = 2gy$ . On trouve alors

$$N = \frac{mg}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}$$

Il n'y a pas décollement.

### Mécanique du point 40 (X)

Appelons A, B, C et D les 4 sommets du carré. Bien sûr  $AO = BO = CO = DO = \ell_0$

L'énergie potentielle du point M est

$$E_p = \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(BM - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(CM - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(DM - \ell_0)^2$$

On appelle  $\theta$  l'angle entre  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OA}$  et  $OM = r$ . Un DL usuel (par exemple similaire à celui utilisé pour le dipôle électrostatique) donne  $|AM - AO| \approx r \cos \theta$ . De même si C est le côté opposé à A,  $|CM - CO| \approx r \cos \theta$ . On fait le même calcul pour les deux autres sommets (l'angle intervenant est déphasé de  $\pi/2$  et  $|BM - BO| = |DM - DO| \approx r \sin \theta$ )

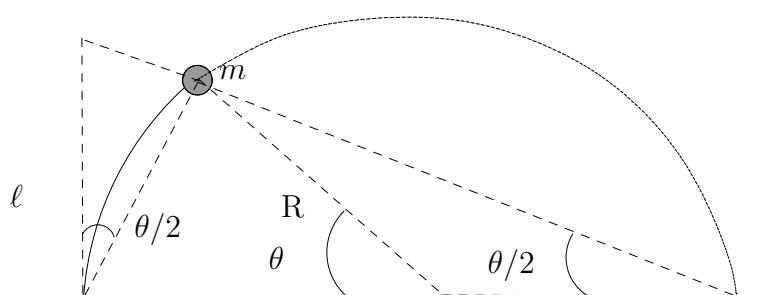
On trouve donc

$$E_p = kr^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = kr^2 = k(x^2 + y^2)$$

La force est  $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -2k\vec{r}$ . Donc le système est un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ . On a donc  $x = a \cos(\omega t)$  et  $y = b \cos(\omega t + \varphi)$ . La trajectoire est une ellipse.

### Mécanique du point 41 (X)

Il faut faire un beau dessin bien sûr :



L'énergie potentielle de pesanteur est  $E_{pg} = mg\ell(1 - \sin^2 \theta/2)$ .

La longueur de la tige est fixe et vaut  $\ell = R\theta$ . Donc l'énergie potentielle de type élastique est  $E_{pot} = \frac{K\theta^2}{\ell^2}$ . Soit une énergie potentielle totale :

$$E_p = mg\ell(1 - \sin^2 \theta/2) + \frac{K\theta^2}{\ell^2}$$

Il faut ensuite étudier cette fonction.

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \frac{K}{\ell^2}2\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0$$

Si  $K > \frac{mgl^3}{4}$  seul  $\theta = 0$  est position d'équilibre ; elle est alors stable et on trouve

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K/\ell^2 - mgl/4}{m\ell^2}}}$$

Si  $K < \frac{mgl^3}{4}$  la fonction admet un maximum en  $\theta = 0$  et un minimum en  $\theta \neq 0$ .