ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Exercice 1. [$\circ$] (Recollement d'endomorphismes orthogonaux)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires, $u \in \mathscr{O}(F)$ et $v \in \mathscr{O}(F^\perp)$. On pose $w = up_F + vp_{F^\perp}$. Démontrer que $w \in \mathscr{O}(E)$.

Exercice 2. [$\star$]

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un vecteur invariant lorsqu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $MX = X$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
   a) Démontrer que $A+I_n$ et $A-I_n$ sont inversibles. *On calculera* ${}^tXAX$ *de deux manières où* $X \in \mathrm{Ker}(A+I_n)$.
   b) Démontrer que $(A+I_n)(A-I_n)^{-1}$ est une matrice orthogonale qui n'admet pas de vecteur invariant.
2. Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale qui n'admet pas de vecteur invariant. Démontrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A telle que $U = (A+I_n)(A-I_n)^{-1}$.

Exercice 3. [$\star$] (Décomposition QR)

Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence de $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

Exercice 4. [$\bigstar$]

Soit $n \geqslant 3$. Résoudre l'équation $\mathrm{Com}(M) = M$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : Calculer* $\|M\|^2$.