Troisième Devoir Confiné - DS 8 (4h)

Problème 1 – Autour du théorème de Cayley-Hamilton

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le polynôme caractéristique de A par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. On désigne par $\Delta_{i,j}(M)$ le mineur en position (i,j) d'une matrice carrée M, c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de M la i-ème ligne et la j-ième colonne. La notation $\mathrm{Com}(M)$ désigne la comatrice de M. Le but de ce petit problème est de montrer le théorème de Cayley-Hamilton, affirmant que χ_A est un polynôme annulateur de A. On en propose deux démonstrations, la première étant valide dans un corps algébriquement clos, la deuxième, dans un corps quelconque (et même un anneau).

1. **Invariance par similitude.**
   (a) Montrer que si A et B sont semblables, alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.
   (b) Montrer que si A et B sont semblables, et si $\chi_B(B) = 0$, alors $\chi_A(A) = 0$.

   Ainsi, il suffit de montrer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice semblable à A.
2. **Expression d'un coefficient du polynôme caractéristique.**
   (a) Justifier que pour tout (i,j) tel que $i \neq j$, $\Delta_{i,j}(XI_n - A)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.
   (b) On note par blocs, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & B \\ C & A' \end{pmatrix}$, où a_{11} est le coefficient en position $(1,1)$ de A, A' est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, B une matrice de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, et C une matrice de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ tel que :
   $$\chi_A(X) = (X - a_{11})\chi_{A'}(X) + R(X).$$
   (c) En déduire que χ_A est un polynôme unitaire de degré n et que le coefficient du terme de degré $n-1$ de $\chi_A(X)$ est égal à $-\mathrm{tr}(A)$.
3. **Étude du cas $n = 2$.**
   (a) On suppose que $n = 2$. À l'aide de la question précédente, exprimer χ_A en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et de $\det(A)$.
   (b) Montrer que ${}^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{tr}(A)I_n - A$.
   (c) En déduire que $\chi_A(A) = 0$.
4. **Cas général, première démonstration.**
   On suppose $n \geqslant 2$. On suppose dans toute cette question que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ admet une racine. D'après un résultat vu en DM, l'existence d'un

polynôme annulateur minimal non nul d'un endomophisme u nous assure alors, en considérant une de ses racines, de l'existence d'une valeur propre a et d'un vecteur propre associé $x \neq 0$, vérifiant donc $u(x) = ax$. Nous admettrons ce point dans la suite du problème.

(a) Montrer que A est semblable à une matrice par blocs $A'' = \begin{pmatrix} a & B \\ O & A' \end{pmatrix}$, où a est un scalaire et A' une matrice carrée d'ordre $n-1$. On pourra pour cela choisir une base judicieuse relativement à laquelle exprimer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(b) Montrer qu'il existe une matrice ligne B' telle que

$$\chi_{A'}(A'') = \begin{pmatrix} \chi_{A'}(a) & B' \\ 0 & \chi_{A'}(A') \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans ce cas.

(d) Question hors-barême : comment en déduire le théorème dans le cas général ($\mathbb{K}$ quelconque) ?

5. **Deuxième démonstration.**

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

(a) Justifier que tous les coefficients de $\mathrm{Com}(XI_n - A)$ sont de degré au plus $n-1$.

On peut donc écrire

$$^t\mathrm{Com}(XI_n - A) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k,$$

où les C_k sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note également $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

(b) En considérant le produit $(XI_n - A) \times {}^t\mathrm{Com}(XI_n - A)$, montrer qu'on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} -AC_0 = a_0 I_n \\ C_{n-1} = a_n I_n \\ C_{k-1} - AC_k = a_k I_n \quad \text{pour } k \in [\![1, n-1]\!]. \end{cases}$$

(c) En déduire que $\chi_A(A) = 0$.

Cette dernière démonstration est en fait valide en remplaçant $\mathbb{K}$ par un anneau quelconque.

Problème 2 – Algorithme de Lewis Carroll pour le calcul d'un déterminant (d'après Mines PSI 2010)

Le but de ce problème est d'établir une formule (appelée formule de condensation), permettant de construire un algorithme pour calculer un déterminant en réduisant sa taille petit à petit, de sorte à se ramener uniquement à des déterminants 2×2, et ceci de façon plus efficace que par un enchaînement de développements suivant des lignes ou colonnes. On voit ensuite comment les techniques développées permettent de généraliser la définition du déterminant pour définir des λ-déterminants (qui ne sont pas à proprement parler des déterminants, puisqu'il ne s'agit pas de formes alternées)

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, $\mathbb{K}$ un corps et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *On note $M_{i,j}$ le coefficient de M qui se trouve sur la i-ième ligne et la j-ième colonne.*
- *On note ${}^tM$ la transposée de M, définit par $({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}$, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.*
- *On note $\det(M)$ son déterminant.*
- *Pour $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de M.*
- *Plus généralement, pour des r-uplets $(i_1, \dots, i_r)$ et $(j_1, \dots, j_r)$ d'éléments 2 à 2 distincts de $[\![1, n]\!]$, on note $[M]_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_r}$ la matrice obtenue à partir de M en supprimant les lignes d'indices $i_1, \dots, i_r$ et les colonnes d'indices $j_1, \dots, j_r$. C'est donc une matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On conviendra que si $r = 0$, cette matrice vaut M.*

- *On note* $\mathrm{Com}(M)$ *la comatrice de* M*, définie par*

$$\mathrm{Com}(M)_{i,j} = (-1)^{i+j}\det([M]_i^j).$$

- *On désigne par* I_n *la matrice identité de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et par* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *la base canonique du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$*.*

Partie I – Formule de condensation de Desnanot-Jacobi

Dans cette partie, on montre la formule suivante (formule de Desnanot-Jacobi), pour tout $n \geqslant 3$*, permettant de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre* n *à des calculs de déterminants d'ordre* $n-1$ *et* $n-2$ *:*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n). \tag{1}$$

On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *suivante :*

$$M^* = \begin{pmatrix} \det([M]_1^1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}\det([M]_n^1) \\ -\det([M]_1^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\det([M]_n^2) \\ \det([M]_1^3) & 0 & 1 & \ddots & \vdots & (-1)^{n+3}\det([M]_n^3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ (-1)^n\det([M]_1^{n-1}) & 0 & 0 & \ddots & 1 & -\det([M]_n^{n-1}) \\ (-1)^{n+1}\det([M]_1^n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \det([M]_n^n) \end{pmatrix}$$

Autrement dit M^* *est obtenue de* ${}^t\mathrm{Com}(M)$ *en remplaçant, pour tout* $j \in [\![2, n-1]\!]$*, la colonne* j *par la colonne correspondante de la matrice* I_n*.*

1. Montrer que $\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)$.
2. Écrire le calcul explicite de la matrice produit $M \cdot M^*$, sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.
   Indication : on pourra utiliser le produit $M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)$.
3. En déduire la formule (1) dans le cas où M est inversible.

*4. Démontrer (1) dans le cas où M n'est pas inversible (ce résultat ne sert pas pour la suite).

Partie II – Algorithme de Dodgson (ou de Lewis Carroll)

Nous présentons et justifions dans cette partie un algorithme mis au point par le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll. Et oui ! Le papa d'Alice était aussi mathématicien ! Cet algorithme, basé sur la formule de condensation démontrée dans la partie précédente, permet de ramener le calcul de certains déterminants à des calculs de plusieurs déterminants de taille 2.

L'algorithme fonctionne comme suit :

- *Donnée initiale : une matrice* M *de taille* $n \times n$*.*
- *On construit itérativement des couples* $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{K})$*, pour* $k \in [\![0, n-2]\!]$*, dont on note les coefficients* $A_{i,j}^{(k)}$ *et* $B_{i,j}^{(k)}$ *:*
  - $A^{(0)} = M$ *et* $B^{(0)}$ *est la matrice de* $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *dont tous les coefficients sont des* 1
  - *Si pour* $k \leqslant n-3$*,* $A^{(k)}$ *et* $B^{(k)}$ *sont construits, on définit, si c'est possible,* $A^{(k+1)}$ *par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-1]\!]^2, \quad A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

  et $B^{(k+1)}$ *par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-2]\!], \quad B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \quad \textit{i.e.} \quad B^{(k+1)} = [A^{(k)}]_{1,n-k}^{1,n-k}$$

- *Si* $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ *a pu être défini, et si* $B_{1,1}^{(n-2)}$ *est non nul, l'algorithme s'arrête en retournant la valeur :*

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{\det(A^{(n-2)})}{B_{1,1}^{(n-2)}}.$$

- *Si au cours de l'algorithme, l'un des coefficients $B_{i,j}^{(k)}$ est nul, on décrète l'échec de l'algorithme de Lewis Carroll. Sinon, l'algorithme peut être mené à son terme, et on dit que M est LC-déterminable.*
- *Remarquez qu'à chaque étape, la matrice $B^{(k)}$ est un peu plus petite que $A^{(k)}$.*

1. (a) Montrer que la matrice ci-dessous est LC-déterminable, et calculer la valeur retournée par l'algorithme de Lewis Carroll :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer par une autre méthode le déterminant de la matrice M, et comparer avec la valeur obtenue dans la question précédente.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans cette question que la matrice M est LC-déterminable.
   (a) Soit $(r, s) \in [\![1, n-2]\!]$. Montrer à l'aide de la partie II que $A_{r,s}^{(2)}$ est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de M que l'on précisera
   (b) Généraliser, et en déduire que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$, ce qui prouve la validité de l'algorithme.

3. Quel est le nombre u_n de déterminants 2×2 calculés lors de l'utilisation de cet algorithme sur une matrice d'ordre n ?

4. Soit v_n le nombre de déterminants 2×2 calculés en utilisant l'algorithme consistant à développer suivant la première colonne pour se ramener à des déterminants $(n-1) \times (n-1)$, puis à recommencer sur chaque déterminant $(n-1) \times (n-1)$ et ainsi de suite jusqu'à se ramener à des déterminants 2×2. Déterminer v_n et comparer asymptotiquement u_n et v_n au voisinage de $+\infty$.

Partie III – Le λ-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convenable (dans un sens qu'on précisera), de la manière suivante :

- *Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, $\det_\lambda(a) = a$*
- *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.*
- *On impose de plus pour tout matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la formule suivante, généralisant (1) :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det_\lambda(M)\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) = \det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n). \tag{2}$$

Cette formule permet donc de calculer $\det_\lambda(M)$ par récurrence sur l'ordre de M, à condition que $\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})$ soit non nul, et que les déterminants d'ordre plus petit aient pu être calculés (ce qui donne d'autres conditions de non nullité). Si le λ-déterminant de M peut être défini de la sorte, on dira que M est λ-déterminable.

1. Montrer qu'en général, on n'a pas $\det_\lambda(AB) = \det_\lambda(A)\det_\lambda(B)$.

2. Soit M une matrice λ-déterminable. Soit $t \in \mathbb{K}^*$ et $j \in [\![1, n]\!]$, et soit M' la matrice obtenue à partir de M par multiplication de la j-ième colonne de M par t. Montrer que M' est λ-déterminable, et donner la valeur de $\det_\lambda(M')$ en fonction de $\det_\lambda(M)$ et de t.

3. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$, et

$$W(x_1, \dots, x_n) = (x_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

   la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$. On suppose de plus que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, $x_j + \lambda x_i \neq 0$. Montrer que $W(x_1, \dots, x_n)$ est λ-déterminable, et calculer $\det_\lambda(W(x_1, \dots, x_n))$ en fonction des $x_j + \lambda x_i$ (on pourra commencer par le cas $n = 3$). On notera

$$V_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det_\lambda(W(x_1, \dots, x_n)).$$