

Corrigé du T.D. O4

Spé MP¹

Corr. 1 Réseau sous incidence normale

1. On écrit la formule fondamentale des réseaux, sachant que l'on est en incidence normale. Pour la raie verte, dans l'ordre 1, on a

$$\sin i_{\text{vert}} = \frac{\lambda_{\text{vert}}}{a}$$

Pour la raie rouge, dans l'ordre 2, on a

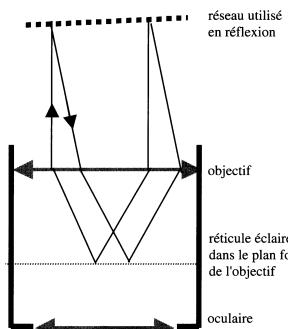
$$\sin i_{\text{rouge}} = 2 \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{a}$$

Alors, $\lambda_{\text{rouge}} = \frac{1}{2} \frac{\sin i_{\text{rouge}}}{\sin i_{\text{vert}}} \lambda_{\text{vert}} = 762,9 \text{ nm}$

De même, on tire $\lambda_{\text{bleu}} = 479,8 \text{ nm}$

2. La précision sur les mesures des angles autoriserait une bonne précision sur λ s'il n'y avait pas une autre cause d'incertitude. La principale cause d'incertitude réside dans l'hypothèse de l'incidence normale. On ne sait pas bien repérer la normale d'un réseau. On pourrait penser à utiliser la réflexion dans l'ordre 0 pour repérer cette direction avec une lunette autocollimatrice.

On voit sur la figure suivante que lorsque le réticule lumineux se superpose avec son image par réflexion dans l'ordre 0, le plan du réseau est normal à l'axe de la lunette. Cependant, il n'est pas certain que la réflexion dans l'ordre 0 soit suffisamment intense pour permettre un tel repérage !



Pour faire des mesures précises de longueur d'onde, on peut utiliser plusieurs méthodes... La plus connue consiste à utiliser le minimum de déviation, tel que

$$\sin \frac{D_{p,\min}}{2} = p \frac{\lambda}{2a}$$

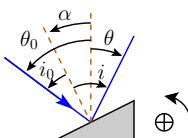
$$\sin \frac{D_{p,\min,\text{rouge}}}{2} = p \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{2a}$$

et qui donne $\lambda_{\text{rouge}} = \lambda_{\text{vert}} \frac{2}{\sin \frac{D_{p,\min,\text{vert}}}{2}}$

sans nécessiter de connaître l'angle d'incidence.

Corr. 2 Réseau en échelettes (ou blazé)

1.



Pour un réseau par réflexion on a

$$\sin \theta_p + \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a}$$

La direction de l'optique géométrique est telle que $i = -i_0$; on a $i_0 = \theta_0 - \alpha$ et $i_p = \theta_p - \alpha$, et donc en combinant les deux :

$$\theta_p + \theta_0 = 2\alpha$$

Il ne reste plus qu'à résoudre les deux équations encadrées, ce qui donne $\sin(2\alpha - \theta_0) + \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a}$, soit encore

$$\cos(\theta_0 - \alpha) = \frac{p\lambda}{2a \sin \alpha}$$

Cette équation donne θ_0 en fonction de α .

L'intérêt d'un réseau échelette est d'augmenter l'intensité dans l'ordre p . En effet, la plus grande intensité se trouve dans la direction de l'optique géométrique, ce qui pour un réseau classique correspond à l'ordre 0, qui est tout à fait inutile (car ne présente aucune dispersion). Cette intensité peut être transférée dans l'ordre p pour un réseau échelette en faisant correspondre la direction de l'optique géométrique et celle de l'ordre p . What a cool idea !

2. Le terme de diffraction F_D est maximal pour $u = 0$, soit

$$\theta = \theta_m = -\theta_0 + 2\alpha$$

Le terme d'interférences F_I a des maxima principaux pour les directions θ_p telles que

$$\sin \theta_p = -\sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a}$$

On retrouve la formule fondamentale des réseaux en réflexion (attention au signe!).

L'ordre p est donc fortement privilégié si $\theta_p = \theta_m$, ou encore si θ_p correspond à la direction des rayons réfléchis selon les lois de l'optique géométrique. (À nouveau, là est le principe des réseaux blazés qui ont plus de lumière dans un ordre p car cet ordre est dans la direction géométrique). Dans ce cas, on trouve la condition $\sin(-\theta_0 + 2\alpha) = -\sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a}$, comme à la première question. Tout va donc pour le mieux dans le meilleur des mondes.

3. Cf cours. Très rapidement, le déphasage des ondes émises par deux miroirs adjacents vaut $\psi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_0)$.

Alors $\underline{s}(\theta) = \underline{s}_0 \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\psi}$

La somme géométrique est la même que pour le calcul du réseau vu en cours et on trouve

$$\underline{s}(\theta) = \underline{s}_0 \frac{1 - e^{iN\psi}}{1 - e^{i\psi}} = \underline{s}_0 e^{i(N-1)\psi/2} \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}$$

En conclusion, on obtient l'intensité sous la forme

$$I(\theta) = I_0 F_I(\theta) \quad \text{avec} \quad F_I(\theta) = \frac{\sin^2(N\psi/2)}{\sin^2(\psi/2)}$$

Corr. 3 Interféromètre de PÉROT et FABRY ; filtre interférentiel

L'interféromètre de Pérot et Fabry est un grand classique des interférences à N ondes (différent du réseau).

1. Le calcul est identique à celui de l'interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles. On trouve de même

$$\delta(M) = 2ne \cos i$$

où n est l'indice de l'air. Or $\lambda = \lambda_0/n$, donc

$$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}$$

et

$$p(M) = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

Les retards de phase successifs par rapport au rayon passant par T_1 sont en progression arithmétique et l'ordre d'interférence est maximal en F' et décroît lorsque p augmente.

2. L'amplitude réelle du rayon $I_0 J_1$ est $t e_0$ et celles des rayons transmis successifs sont $t^2 e_0$, $t^2 \cdot 2 e_0$, $t^2 \cdot 4 e_0$, ..., $t^2 r^{2(q-1)} e_0$, ... (on multiplie par r^2 l'amplitude réelle du rayon transmis par rapport à celle du rayon précédent).

L'amplitude complexe du q^{e} rayon transmis est donc

$$t^2 r^{2(q-1)} e_0 e^{-j(q-1)\Delta\varphi}$$

On constate une progression géométrique convergente de cette amplitude et on peut calculer (en principe sans difficulté) l'amplitude complexe totale

$$E(M) = t^2 e_0 \sum_{q=1}^{\infty} r^{2(q-1)} e^{-j(q-1)\Delta\varphi}$$

soit

$$E(M) = \frac{t^2 e_0}{1 - r^2 e^{-j\Delta\varphi}}$$

Ainsi, $I(M) = |E(M)|^2 = \frac{t^4 e_0^2}{(1 - r^2 e^{-j\Delta\varphi})(1 - r^2 e^{j\Delta\varphi})}$

soit $I(M) = \frac{(1 - r^2)^2 I_0}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \Delta\varphi}$

d'où $I(M) = \frac{(1 - r^2)^2 I_0}{(1 - r^2)^2 + 2r^2(1 - \cos \Delta\varphi)}$

Finalement, on en déduit la fonction d'Airy

$$I(M) = \frac{I_0}{1 + m \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

On a posé $I_0 = e_0^2$ et $m = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2}$

3. Si $R = 0,5$, $m = 8$ et si $R = 0,95$, $m = 575$. Les courbes représentatives présentent une succession de maxima et minima d'intensité :

$$I_{\max} = I_0 \quad \text{pour} \quad \Delta\varphi = 0 [2\pi]$$

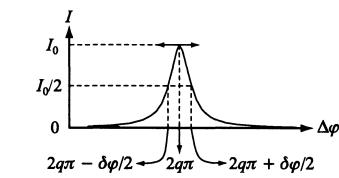
et $I_{\min} = \frac{I_0}{1+m} \quad \text{pour} \quad \Delta\varphi = \pi [2\pi]$



Quand R est voisin de 1, $m \gg 1$ et la fonction d'Airy est quasi-nulle partout, sauf en $\Delta\varphi = 0 [2\pi]$. Attention, la courbe n'est pas la même que celle du réseau : pour ce dernier, il existe des maxima secondaires et de vrais points d'annulation d'intensité !

Pour $R = 0,99$, $m = 4,10^4$ et les pics d'interférences sont très fins.

4. On représente l'intensité uniquement pour un pic (tous les pics étant identiques ; q est un entier relatif) :



donne $\sin \frac{\delta\varphi}{4} = \frac{1}{\sqrt{m}}$

Or, $m \gg 1$ donc $\delta\varphi \ll 1$ et on peut conclure :

$$\delta\varphi \simeq \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

On en déduit la finesse des pics

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

Plus la finesse est importante, plus les pics sont fins (étonnant...). L'application numérique pour $R = 0,99$ donne

$$\mathcal{F} = 314$$

5. Les rayons issus de la source ponctuelle S, incidents sur (L_1) sous l'angle i , vont converger en des points de (π) situés sur un cercle de centre F' , de rayon angulaire i mesuré depuis le centre optique O de (L), de rayon linéaire $\rho = f' \tan i \simeq f'i$ (dans les conditions de Gauss où $i \ll 1$). Puisque $\Delta\varphi$ ne dépend que de i , le cercle est d'intensité uniforme : les franges sont des anneaux d'égalas inclinasons, très fins par rapport à l'écart des anneaux successifs (bien plus fins que dans le cas à seulement deux ondes de l'interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles !).

Si la source est large, les figures d'interférences produites par ses divers points sources incohérents entre eux se somment. Comme elles se superposent parfaitement à l'infini, on garde les anneaux d'égalas inclinasons, mais ils sont plus brillants.

6. On procède comme pour l'interféromètre de Michelson avec l'excédent fractionnaire $\epsilon = p(F') - E[p(F')] \in [0;1[$. Pour le k^{e} anneau brillant, puisque p diminue en s'éloignant du centre F' où $p(F') = 2e/\lambda$, on a

$$p = E[p(F')] - (k-1) = \frac{2e}{\lambda} - \epsilon - k + 1$$

d'où $\frac{2e \cos i}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} - \epsilon - k + 1$

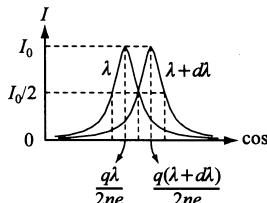
Sachant que dans les conditions de Gauss, $i \ll 1$, on tire

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda(\epsilon + k - 1)}{e}} \quad \text{et} \quad \rho_k = f' i_k$$

Si $\epsilon = 0$, le centre du système d'anneaux est brillant et les rayons des anneaux varient en racine d'entiers successifs.

Plus e est faible, plus le rayon de l'anneau d'ordre fixé est grand.

7. La source émet deux systèmes d'anneaux qui se superposent (un pour la longueur d'onde λ , l'autre pour $\lambda + d\lambda$, incohérentes). On ne peut les distinguer que si les rayons des anneaux sont assez différents d'un système à l'autre.



On doit alors intuiter un critère de résolution des anneaux mais on ne peut pas utiliser celui de Rayleigh car il n'y a pas de minimum nul d'intensité à côté d'un maximum principal. On introduit alors le critère suivant : les anneaux pour λ sont séparés de ceux pour $\lambda + d\lambda$ (à q fixé) si l'écart entre les maxima est supérieur ou égal à la largeur à mi-hauteur des pics (en représentation avec $\cos i$ en abscisse).

La largeur à mi-hauteur des pics est

$$\Delta_{\text{pics}} = \frac{\lambda \delta\varphi}{4\pi e} \approx \frac{\lambda}{\pi e \sqrt{m}}$$

L'écart entre les pics est

$$\cos i(\lambda + d\lambda) - \cos i(\lambda) = \frac{q(\lambda + d\lambda)}{2e} - \frac{q\lambda}{2e} = \frac{qd\lambda}{2e}$$

en utilisant l'expression de $\Delta\varphi$. On déduit du critère précédent que les anneaux sont séparés (ou résolus) si

$$\frac{qd\lambda}{2e} \geq \frac{\lambda}{\pi e \sqrt{m}}$$

soit

$$d\lambda \geq d\lambda_m = \frac{2\lambda}{q\pi\sqrt{m}}$$

On en déduit le **pouvoir de résolution** de l'interféromètre de Fabry et Pétot :

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda_m} = \frac{q\pi\sqrt{m}}{2} = q\mathcal{F}$$

Le pouvoir de résolution est maximal au centre de la figure (en F') où l'ordre q est maximal et vaut

$$\mathcal{R}_{\max} = 5.10^6$$

Un pouvoir de résolution aussi élevé est extrêmement rare : l'interféromètre de Fabry-Pérot permet de faire des mesures très précises sur les spectres.

Calculons pour un réseau classique le pouvoir de résolution afin de réaliser une comparaison. On utilise les notations usuelles et on se place dans le cadre de la représentation de l'intensité en fonction de $\sin \theta$ pour évaluer la séparation des pics associés λ avec ceux associés à $\lambda + d\lambda$. Pour ce faire, on va utiliser le critère de Rayleigh.

L'écart entre des pics de même ordre est (en $\sin \theta$), en utilisant la formule fondamentale des réseaux :

$$\sin \theta_p(\lambda + d\lambda) - \sin \theta_p(\lambda) = \left[\sin \theta_0 + p \frac{\lambda + d\lambda}{a} \right] - \left[\sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a} \right]$$

$$\text{soit } (\Delta \sin \theta)_1 = p \frac{d\lambda}{a}$$

Entre le centre du pic principal et le premier minimum nul, il y a un décalage de phase $\Delta\varphi = 2\pi/N$. Or, $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$ donc le décalage précédent correspond à

$$(\Delta \sin \theta)_2 = \frac{\lambda}{Na}$$

Le critère de Rayleigh dit alors que les raies de même ordre p sont séparées si

$$(\sin \theta)_1 \geq (\sin \theta)_2$$

soit

$$d\lambda \geq d\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{Np}$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}_{\text{réseau}} = Np$$

Le pouvoir de résolution du réseau augmente si le nombre de traits **éclairés** N est plus élevé et si l'on travaille avec un ordre p grand... Néanmoins, on ne peut pas choisir p aussi grand que l'on veut et N reste relativement limité. Le pouvoir de résolution de l'interféromètre de Fabry et Pétot a un meilleur pouvoir de résolution, la finesse \mathcal{F} pouvant être très importante (si on y met le prix...).

8. Les interférences sont constructives en incidence normale si $2ne = q\lambda$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Dans le visible, la seule longueur d'onde vérifiant cette égalité, et n'étant donc pas filtrée sous incidence normale, est numériquement

$$\lambda_{q=2} = 520 \text{ nm} \quad (\text{vert bleuté})$$

Attention, un filtre interférentiel filtre la longueur d'onde indiquée sur sa monture que s'il est utilisé en incidence normale !

La bande passante (ou largeur spectrale que le filtre laisse passer) est

$$d\lambda = \frac{(1-R)\lambda_{q=2}}{2\pi\sqrt{R}} = \frac{\lambda_{q=2}}{2\mathcal{F}}$$

soit

$$d\lambda \simeq 9 \text{ nm}$$

On constate qu'**un filtre interférentiel possède un excellente qualité de filtrage** (largement bien meilleure qu'un simple filtre coloré) ! Lorsqu'on souhaite réaliser une source monochromatique et que l'on ne dispose pas d'un laser, on peut procéder en plaçant un filtre interférentiel après une source lumineuse. Celle-ci doit être assez puissante dans la bande passante du filtre pour que la source « monochromatique » constituée soit suffisamment intense...

Corr. 4 Diffraction à l'infini par une fente

1. La source S (le point M) est dans le plan focal objet (image) de la lentille \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_2). Ainsi, tout se passe comme si la source était S' , image de S par \mathcal{L}_1 , qu'on sait être située à l'infini. De même, on visualise l'infini à distance finie, sur l'écran, grâce à la lentille \mathcal{L}_2 .

2. L'amplitude en M due au fil infinitésimal centré en P vaut $d_s(M, t) = K a_0 (L dX) e^{-i[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)p - \varphi_S]}$. Il reste à somme (donc intégrer) toutes ces amplitudes pour obtenir l'amplitude totale au point M. En faisant intervenir l'origine O, on peut écrire

$$\underline{s}(M, t) = K' \underline{s}_0(M, t) \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} [(SM)p - (SM)_O]} dX,$$

avec $K' = K L a$ et $\underline{s}_0(M, t) = a_0 e^{-i[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_O - \varphi_S]}$. Un calcul similaire à celui du cours (faire un dessin 2D pour bien voir les choses et pour orienter les angles) permet de montrer que la différence de marche $\delta(M) = (SM)_P - (SM)_O$ vaut $\delta(M) = -X(\sin \theta - \sin \theta_0)$, d'où

$$\underline{s}(M, t) = K' \underline{s}_0(M, t) \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0) X} dX$$

3. Étant donné que

$$\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\gamma X} dX = \frac{1}{-i\gamma a} (e^{-i\gamma a/2} - e^{i\gamma a/2}) = \text{sinc}(\gamma a/2),$$

l'intensité $I(M) \propto |\underline{s}(M, t)|^2$ vaut

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right].$$

En faisant un dessin, on trouve facilement grâce à la trigonométrie que $\sin \theta \simeq \tan \theta = x/f'_2$ et $\sin \theta_0 \simeq \tan \theta_0 = -x'/f'_1$.

$$\text{D'où } I(x) = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda_0} (x/f'_2 + x'/f'_1) \right].$$

4. Je vous laisse tracer le sinus cardinal au carré. L'intensité s'annule lorsque l'argument du sinus cardinal vaut π , i.e. lorsque

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda_0}{a},$$

et on retrouve le résultat bien connu.

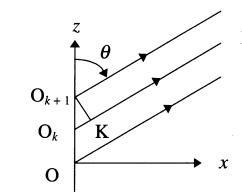
Corr. 5 Chaîne d'antennes demi-onde

Cet exercice présente des raisonnements de type optique ondulatoire importants et il pourra être revu une nouvelle fois après le cours sur les interférences. Néanmoins, on peut faire dès à présent l'exo...

1. Dans la direction (O, \vec{e}_r) , les champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} sont la somme des N champs correspondants dus à chacune des N antennes (principe de superposition car linéarité des équations de base). Les relations entre \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} sont les mêmes que pour une antenne demi-onde :

$$c \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{e}_r \quad \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r$$

Il suffit de déterminer le potentiel vecteur dû aux N antennes consécutives pour tout déterminer.



Attention, il faut tenir compte du **déphasage** introduit dans la direction θ entre les ondes émises par les antennes. Pour deux antennes consécutives en O_k et O_{k+1} , le déphasage correspond au trajet $\delta = O_k K$ (voir figure) que l'onde issue de O_k doit parcourir en plus (les « rayons » sont parallèles car M est très loin). Puisque

$$\delta = O_k K = \frac{\lambda}{2} \cos \theta$$

$$\text{et } \vec{A}_k = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r \omega} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r-(k-1)\delta}{c} \right) \right] \vec{e}_z$$

on déduit en notation complexe

$$\vec{A}_k = \underbrace{\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r \omega} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} e^{i\omega(t-r/c)}}_{\vec{A}_1} e^{i\frac{\omega\lambda}{2c} (k-1) \cos \theta}$$

\vec{A}_1

Pour l'ensemble des antennes, avec $\lambda \omega = 2\pi c$, on somme :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 \sum_{k=1}^N e^{i(k-1)\pi \cos \theta} = \vec{A}_1 \frac{e^{iN\pi \cos \theta} - 1}{e^{i\pi \cos \theta} - 1}$$

$$\text{soit } \vec{A} = \vec{A}_1 \frac{\sin(N\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} \cos \theta)} e^{i(N-1)\frac{\pi}{2} \cos \theta}$$

En notation réelle, on obtient donc le potentiel vecteur, puis \vec{E} :

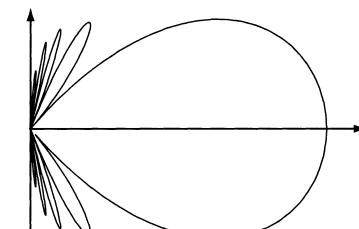
$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \frac{\sin(N\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} \cos \theta)} \cos [\omega(t-r/c) + (N-1)\frac{\pi}{2} \cos \theta] \vec{e}_\theta$$

$$\text{Pour } N = 1, \text{ on retrouve le résultat de l'antenne demi-onde...}$$

2. L'amplitude E_0 du champ électrique vérifie la proportionnalité suivante

$$E_0 \propto \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \frac{\sin(N\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} \cos \theta)} \right|$$

La norme de \vec{E} est portée le long du rayon vecteur dans la direction θ pour obtenir le diagramme polaire demandé (attention à la place de θ ! L'antenne est verticale et θ est l'angle des coordonnées sphériques s'appuyant sur l'antenne...):



3. Les deux diagrammes ($N = 10$ et antenne demi-onde seule) sont superposés et on constate que plus le nombre d'antennes associées est grand, plus l'antenne est directive !

