Feuille d'exercices n^o 18 : corrigés

Exercice 2

1. On procède par inclusions.
   • Soit $x \in (F+G)^{\perp}$. Soit $y \in F \cup G$. Comme le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$, alors le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de F et tout vecteur de G. En particulier, le vecteur x est orthogonal au vecteur y : $\boxed{(F+G)^{\perp} \subset (F \cup G)^{\perp}}$
   • Soit x dans $(F \cup G)^{\perp}$. Alors le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de $F \cup G$, en particulier le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de F et tout vecteur de G. Autrement dit, le vecteur x appartient à la fois à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$; $\boxed{(F \cup G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}}$
   • Soit x un vecteur dans $F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit z dans $F+G$. On écrit :
   $$z = z_F + z_G,$$
   de sorte que :
   $$(x \mid z) = (x \mid z_F) + (x \mid z_G) = 0.$$
   On a bien $\boxed{F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}}$
2. Les espaces F et $(F^{\perp})^{\perp}$ sont deux espaces supplémentaires pour $F^{\perp}$ dans l'espace euclidien E. On en déduit que ces deux espaces ont la même dimension. De plus, on a l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, donc égalité.
3. La réponse est non.
   On peut reprendre le contre-exemple du cours. On prend l'espace $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues, muni du produit scalaire :
   $$(f \mid g) = \int_0^1 f \times g.$$
   L'espace $F = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \right\}$ n'est pas égal à E. Si $f \in F^{\perp}$, on remarque que la fonction $g : t \longmapsto t \cdot f(t)$ est orthogonale à la fonction f. Par le théorème aux quatre hypothèses, la fonction f est nulle sur $]0,1]$ puis sur $[0,1]$ par continuité en 0. Ainsi, $E = (F^{\perp})^{\perp}$, et :
   $$F \neq (F^{\perp})^{\perp}.$$

Exercice 3

1. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On pose le vecteur $u = (1, 1, \cdots, 1)$. L'inégalité à montrer devient – en prenant le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$:
$$(x \mid u)^2 \leqslant \|u\|^2 \ \|x\|^2,$$
et cette inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz bien connue.
2. En prenant l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :
$$(f \mid g) = \int_0^1 f \times g$$
si $f : [0, 1] \longrightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, en posant $g = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ qui reste continue à valeurs strictement positives, on en déduit :
$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \sqrt{f} \times g \\ &= (\sqrt{f} \mid g) \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 \sqrt{f}^2} \times \sqrt{\int_0^1 g^2} \\ &= \sqrt{\int_0^1 f \times \int_0^1 1/f}. \end{aligned}$$
Il suffit alors de tout faire passer au carré.

Exercice 4

Tous les vecteurs e_k sont déjà unitaires.
Soient deux entiers $i \neq j$ entre 1 et n. On applique l'hypothèse à $x = e_j$ par exemple, ce qui donne :
$$\begin{aligned} 1 = \|e_j\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (e_j \mid e_k)^2 \\ &= \sum_{k \neq j} (e_j \mid e_k)^2 + (e_k \mid e_k)^2 \\ &= \sum_{k \neq j} (e_j \mid e_k)^2 + 1. \end{aligned}$$
On en déduit que la somme nulle à termes positifs $\displaystyle\sum_{k \neq j} (e_j \mid e_k)^2$ est composée de termes nuls.
En particulier, lorsque $k = i \neq j$, on obtient l'orthogonalité entre les vecteurs e_i et e_j : la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale.

Il ne faut oublier de montrer que la famille est génératrice puisque l'on n'a aucune information sur la dimension de l'espace E.

Supposons que l'espace E ne soit pas de dimension n. Nécessairement, la dimension $\dim(E)$ éventuellement infinie est strictement supérieure à n.
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, de sorte que l'espace F est strictement inclus dans E. On prend un vecteur y dans $E \setminus F$: la famille $\mathscr{F} = (e_1, \cdots, e_n, y)$ soit libre.
On orthonormalise la famille $\mathscr{F}$ en une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \chi)$ – avec en fait chaque ε_k qui vaut e_k, mais passons et donc :

$$\chi \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)^{\perp}.$$

On applique maintenant l'hypothèse au vecteur unitaire χ, ce qui donne :

$$1 = \|\chi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\chi \mid e_i)^2 = 0.$$

On obtient une contradiction et finalement, $\dim(E) = n$; la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une b.o.n. de l'espace E.

Exercice 5

1. On va montrer qu'une CNS est : « la famille $\mathscr{F}$ est une famille libre ».
   Supposons la famille $\mathscr{F}$ libre. On complète cette famille en une base :

   $$\mathscr{B} = (\mathscr{F}, \chi_{r+1}, \cdots, \chi_n) = (\chi_1, \cdots, \chi_r, \chi_{r+1}, \cdots, \chi_n)$$

   de l'espace E, avec $n = \dim(E)$.
   On définit ce qui va être un produit scalaire :

   $$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_i^*(x) \cdot \chi_*(y) \end{array} \right. .$$

   Il est clair que l'application Φ est une forme bilinéaire symétrique positive. Si $x \in E$ vérifie $\Phi(x, x) = 0$, alors la somme nulle $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_i^*(x)^2$ n'est composée que de termes nuls. Le vecteur x n'admet que des coordonnées nulles donc $x = 0_E$ et l'application Φ est bien un produit scalaire.
   De plus, si i et j sont deux entiers entre 1 et r, alors :

   $$\Phi(\chi_i, \chi_j) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k^*(\chi_i) \cdot \chi_k^*(\chi_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i} \cdot \delta_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

   La famille $\mathscr{F}$ est bien une famille orthonormale pour le produit scalaire Φ.
   Réciproquement, si la famille $\mathscr{F}$ est une famille orthonormale pour un certain produit scalaire, alors la famille $\mathscr{F}$ est immédiatement une famille libre.

   En fait, la base $\mathscr{B}$ est une b.o.n. pour le produit scalaire Φ.

2. Prenons ici $E = \mathbb{R}^2$. La famille $\mathscr{F}$ est bien une famille libre.
   On pose $\mathscr{F} = \Big(u = (1,1), v = (0,2)\Big)$.
   On sait que si l'on choisit le produit scalaire :

$$\Phi : (x,y) \longmapsto u^*(x) \cdot u^*(y) + v^*(x) + v^*(y),$$

   alors la famille $\mathscr{F}$ sera une b.o.n. dans E.
   Soit $x = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$x = \lambda \cdot u + \mu \cdot v,$$

   ce qui conduit au système linéaire de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right) \iff \begin{cases} \lambda = a \\ \mu = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}.$$

   Le produit scalaire Φ vaut donc :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\Big) & \longmapsto & a_1 \cdot a_2 + \dfrac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{4} \end{array} \right. .$$

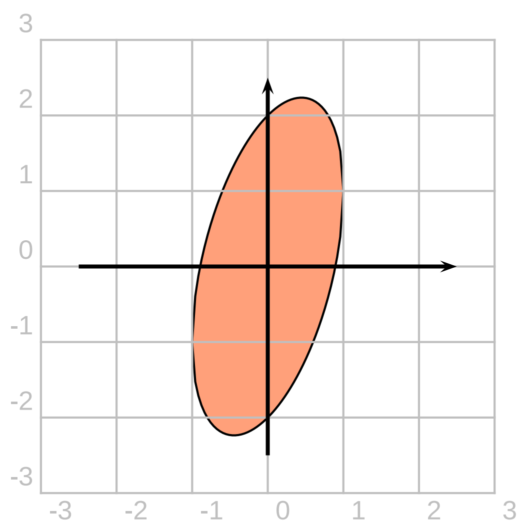
   La norme euclidienne associée est donc :

$$\forall x = (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = \sqrt{a^2 + \frac{(b-a)^2}{4}}.$$

   La boule euclidienne unité est l'ensemble des points (a,b) du plan $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$a^2 + \frac{(b-a)^2}{4} \leqslant 1.$$

   Il s'agit d'une ellipse dont voici le dessin :



Exercice 7

1. L'application Φ est bien définie car le produit scalaire est linéaire par rapport à la seconde variable.
   Ensuite, l'application Φ est linéaire car le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable.
   De plus, les espaces E et $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ sont de même dimension finie.
   Enfin l'application Φ est injective car si $\vec{a}$ est dans le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$, alors
   $$0 = \varphi_{\vec{a}}(\vec{a}) = \|\vec{a}\|^2,$$
   et donc le vecteur $\vec{a}$ est nul.
2. Si φ est dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, le seul vecteur $\vec{u}$ convenable est le vecteur :
   $$\vec{u} = \Phi^{-1}(\varphi).$$
3. (a) Pour cette première situation, il est facile de voir que $\vec{u} = I_n$.
   (b) Pour cette seconde situation, le vecteur $\vec{u}$ est le produit vectoriel :
   $$\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Exercice 8

On vérifie que l'application :
$$(P \mid Q) \longmapsto \int_0^{\pi} P(t) \cdot Q(t) \cdot \sin t \; dt,$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On utilise le théorème aux quatre hypothèses et le fait que seul le polynôme nul admet une infinité de racines.
D'après le théorème de Riesz – exercice 7 ou le cours – toute forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ est associée à un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\varphi = (P \mid \cdot).$$
Il suffit de l'appliquer à la forme linéaire :
$$\varphi : Q \longmapsto \int_0^2 \frac{Q(t)}{1 + \ln^2 t} \, dt.$$

Exercice 10

1. On considère la matrice de Gram :
   $$G = \Big((e_i \mid e_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}.$$

Par hypothèse, en notant $J \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice remplie de 1, alors :

$$G = \alpha \cdot J + (1-\alpha)\ I_{n+1}.$$

La famille $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ est nécessairement liée dans l'espace $\mathbb{R}^n$ de dimension n. On peut écrire par exemple :

$$e_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k \cdot e_k.$$

Dans la matrice G, on obtient la relation entre les colonnes :

$$C_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k \cdot C_k.$$

La matrice G est donc non inversible.
On peut calculer le déterminant de la matrice G, dont on sait la nullité, en fonction du nombre α.
On sait que la matrice J est diagonalisable, semblable à la matrice $(n+1)\ E_{1,1}$ en considérant une base $\Big((1, \cdots, 1), \varepsilon_1 - \varepsilon_k\ ;\ 2 \leqslant k \leqslant n+1\Big)$ où $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1})$ est la base canonique de l'espace $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
On écrit :

$$J = P(n+1)\ E_{1,1}\ P^{-1},$$

de sorte que :

$$G = P\ \mathrm{Diag}(1+n\alpha, 1-\alpha, \cdots, 1-\alpha)\ P^{-1}.$$

On conclut que :

$$0 = \det(G) = \det(\mathrm{Diag}(1+n\alpha, 1-\alpha, \cdots, 1-\alpha)) = (1+n\alpha)\ (1-\alpha)^n.$$

On distingue alors deux cas :

- soit $\alpha = 1$, auquel cas dès que $i \neq j$, l'égalité :

$$(e_i \mid e_j) = 1 = \|e_i\| \cdot \|e_j\|$$

  montre que l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les vecteurs e_i et e_j sont colinéaires et ici de même sens car les produits scalaires sont strictement positifs : les vecteurs e_i sont égaux et la somme $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ vaut $(n+1) \cdot e_1$;
- soit $\alpha = -\dfrac{1}{n}$, auquel cas :

$$\begin{aligned} \|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|^2 &= \sum_{k=1}^{n+1} \|e_k\|^2 + \sum_{i \neq j} (e_i \mid e_j) \\ &= (n+1) + (n+1)\ n\ \alpha \\ &= (n+1)\,(1+n\alpha) = 0 \end{aligned}$$

  Le vecteur $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ est alors nul dans ce cas.

2. Par symétrie des rôles des quatre atomes d'Hydrogène, la molécule CH_4 est tétraédrique. On se retrouve dans le cadre de la question 1. avec $n = 3$ et les quatre vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 correspondant aux vecteurs $\overrightarrow{CH}$, pour chaque atome d'Hydrogène.
La mise à l'échelle donne une unité du système international pour la longueur de chaque liaison $C - H$: les vecteurs e_i sont ainsi unitaires et comme ces vecteurs ne sont pas égaux, alors :
$$\alpha = -\frac{1}{3}.$$
En notant θ l'angle géométrique entre deux liaisons $C - H$, on en déduit :
$$\cos\theta = -\frac{1}{3}, \text{ donc } \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 109.47\ ^o.$$

Exercice 12

1. Soit X dans $\text{Ker}(A^T)$. Soit Y dans $\text{Im}(A)$. On écrit $Y = AZ$, où Z est dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en déduit :
$$(X \mid Y) = (X \mid AZ) = X^T AZ = (A^T X)^T Z = 0\ Z = 0_{\mathbb{R}}.$$
On en déduit l'inclusion :
$$\text{Ker}(A^T) \subset \text{Im}(A)^T.$$
Par le théorème du rang, on peut écrire :
$$\dim\left(\text{Ker}(A^T)\right) = n - \text{Rg}(A^T) = n - \text{Rg}(A) = \dim\left(\text{Im}(A)^T\right).$$
L'inclusion couplée avec l'égalité des dimensions finies donne l'égalité des espaces.
2. Soit X dans $\text{Ker}(A)$. Alors, $A^T AX = A^T 0 = 0$, donc :
$$\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A).$$
Soit X dans $\text{Ker}(A^T A)$. Alors, $A^T AX = 0$. On multiplie à gauche par X^T, donc :
$$X^T A^T AX = 0,$$
et donc :
$$(AX)^T AX = 0.$$
On en déduit $\|AX\| = 0$, puis $AX = 0$ et X appartient à $\text{Ker}(A)$.

Soit X dans $\text{Im}(AA^T)$. On écrit :
$$X = AA^T Y = A(A^T Y) \in \text{Im}(A).$$
Ensuite, par le théorème du rang, en utilisant la première partie de la question 2. :
$$\begin{aligned} \text{Rg}(AA^T) &= n - \dim(\text{Ker}(AA^T)) \\ &= n - \dim(\text{Ker}(A^T)) \\ &= \dim(\text{Im}(A^T)) \\ &= \text{Rg}(A^T) = \text{Rg}(A). \end{aligned}$$

On a donc égalité.

Exercice 13

1. En posant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\ X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k\ X^k$, alors :

$$\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} (k!)^2\ a_k\ b_k.$$

   Il apparaît donc que Φ est bien un produit scalaire.

2. L'ensemble F est un hyperplan, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle φ : $P(X) \longmapsto P(0)$: $\dim(F) = n$ car $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.
   On est tenté de poser p la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^{\perp}$. En fait, on ne va pas l'utiliser vraiment.
   Une base de F est :

$$\mathscr{B} = (X, X^2, \cdots, X^n).$$

   On voit que le polynôme 1 est orthogonal à chaque vecteur X^k, pour $k \geqslant 1$: le vecteur 1 est déjà orthogonal à F et donc :

$$d(1, F) = \|1\| = \sqrt{1} = 1.$$

Exercice 14

1. L'application proposée est bien une norme. Le détail n'est pas fait ici.
   On remarque que si $P(X) = (X - a)$ et $Q(X) = (X - a)^2$, alors les vecteurs $P(X)$ et $Q(X)$ ne sont pas colinéaires. Cependant,

$$\|P + Q\| = \int_a^b \left((t - a) + (t - a)^2\right)\, dt = \|P\| + \|Q\|.$$

   On a égalité dans l'inégalité triangulaire et pourtant les deux vecteurs P et Q ne sont pas colinéaires. La norme ne peut être une norme euclidienne.

2. La réponse est non. En effet, il s'agit déjà bien d'une norme.
   Ensuite, en reprenant les polynômes $P(X) = X - a$ et $Q(X) = (X - a)^2$, alors :

$$\|P + Q\| = (b - a) + (b - a)^2 = \|P\| + \|Q\|.$$

   On obtient la même contradiction que précédemment.

Exercice 15

On commence déjà par chercher une base de l'espace F.
Après résolution du système de deux équations à quatre inconnues, on trouve une base :

$$\mathscr{B} = \left(\vec{a} = (-1, 0, 1, 0), \vec{b} = (0, -1, 0, 1)\right).$$

Il se trouve que cette base est orthogonale ce qui va simplifier un peu les choses. On pourrait diviser par les normes pour obtenir une base orthonormale. On préfère suivre la méthode du cours, quoiqu'il arrive.
On note p la projection orthogonale sur l'espace F.
On pose le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$. On en déduit :

$$d(\vec{u}, F) = \|\vec{u} - p(\vec{u})\|.$$

Il reste à calculer $p(\vec{u})$. On pose :

$$p(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}.$$

On a les équations :

$$\begin{cases} (\vec{u} - p(\vec{u}) \mid \vec{a}) = 0 \\ (\vec{u} - p(\vec{u}) \mid \vec{b}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

On en déduit :

$$p(\vec{u}) = \vec{a} + \vec{b} = (-1, -1, 1, 1).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d(\vec{u}, F) &= \|\vec{u} - p(\vec{u})\| \\ &= \Big\|(2, 3, 2, 3)\Big\| \\ &= \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Exercice 16

1. La réflexion est une symétrie orthogonale.
   On note S la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan :

   $$H = \mathrm{Ker}(e_1^* + e_2^* + 2e_3^*).$$

   Il y a plusieurs manières de procéder. Le plus simple est de calculer la projection orthogonale q sur $H^\perp$. Il est clair que :

   $$H = \mathrm{Vect}((1, 1, 2))^\perp,$$

   donc :

   $$H^\perp = \mathrm{Vect}((1, 1, 2)).$$

   Soit $X = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On pose :

   $$q(X) = \lambda \cdot (1, 1, 2).$$

   On en déduit que le vecteur $X - q(X)$ appartient à H. Or,

   $$X - q(X) = \Big(x - \lambda, y - \lambda, z - 2\lambda\Big).$$

On applique alors la forme linéaire $e_1^*+e_2^*+2e_3^*$ à cette égalité vectorielle pour en déduire :

$$x+y+2z-6\lambda=0.$$

Par conséquent,

$$\lambda=\frac{x+y+2z}{6},$$

et donc :

$$q(X)=\frac{x+y+2z}{6}\cdot(1,1,2).$$

En notant p la projection orthogonale sur H, alors :

$$p=\mathrm{id}-q,$$

puis la réflexion s par rapport à H vaut :

$$s=2p-\mathrm{id}=\mathrm{id}-2q.$$

Conclusion,

$$s(X)=\frac{1}{3}\ (2x-y-2z,-x+2y-2z,-2x-2y-z)$$

et :

$$S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Quelques remarques pour terminer cette question.
Il est tout à fait normal de trouver une matrice S symétrique puisque $S^2=I_3$ et $S^TS=I_3$, donc $S=S^T$.
On aurait pu également procéder par changement de base. Voici le détail.
Une base de l'espace H est :

$$\left(\vec{u}=(-1,1,0),\vec{v}=(-2,0,1)\right).$$

Une base de $H^\perp$ est donc $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}=(1,1,2)$. On voit directement également que $H^\perp=\{(1,1,2)\}^\perp$.
On note S la matrice demandée. On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base adaptée $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On trouve :

$$P=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

On sait alors que la matrice $P^{-1}SP$ est la matrice de la réflexion par rapport à la base adaptée :

$$P^{-1}SP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Le calcul montre que :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis :

$$S = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On note p cette projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.
Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On pose :

$$p(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Le vecteur $\vec{x} - p(\vec{x})$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$, donc :

$$\lambda \, \|\vec{u}\|^2 = (\vec{x} \mid \vec{u}).$$

On distingue deux cas :
- si le vecteur $\vec{u}$ est nul, alors p est la projection orthogonale sur $\{0\}$ parallèlement à $\mathbb{R}^d$, donc p est l'endomorphisme nul ;
- si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, on peut continuer les calculs précédents, comme suit.
On obtient :

$$\lambda = \frac{(\vec{x} \mid \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}$$

et donc :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ \vec{x} & \longmapsto & \dfrac{(\vec{x} \mid \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{x}. \end{array} \right. .$$

Matriciellement, voilà comment se passent les choses. On se donne un vecteur colonne U non nul dans $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
Les produits matriciels $U\ U^T$ et $U^T\ U$ sont possibles et donnent respectivement des matrices carrées de formats $d \times d$ et 1×1. On identifie la matrice $U^T\ U$ avec son coefficient.
On remarque au passage que $U^T\ U$ est égal à $\|U\|^2$ pour la norme euclidienne habituelle.
Posons la matrice

$$P = \frac{U\ U^T}{U^T\ U} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).$$

Il est clair que la matrice P est symétrique.
Ensuite,

$$P^2 = \frac{1}{(U^T\ U)^2}\ U^T\ (U\ U^T)\ U = P,$$

car le terme entre parenthèses est un scalaire.
La matrice P est symétrique et est une matrice de projection : c'est la matrice d'une projection orthogonale. D'autre part, la matrice P a toutes ses colonnes colinéaires au vecteur U et

$$PU = \frac{U\ U^T}{U^T\ U}U = \frac{U\ U^T\ U}{U^T\ U} = U.$$

La matrice P est bien la matrice de projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(U)$.

Exercice 17

C'est du cours ! En tout cas, les deux résultats sont à retenir et à savoir redémontrer. Le détail n'est pas fait ici.

Exercice 18

1. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $p(x)$ et $x-p(x)$ sont orthogonaux, on peut en déduire que :
$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$
et on obtient ce qu'il faut en passant à la racine carrée croissante sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut écrire :
$$p(x+\lambda y) = p(x) + \lambda \cdot p(y) = x.$$
On en déduire :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|p(x+\lambda y)\|^2 = \|x\|^2 \text{ et } \|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\ (x \mid y) + \lambda^2\ \|y\|^2.$$
(b) En posant la fonction polynomiale :
$$f : \lambda \longmapsto \|x+\lambda y\|^2 - \|p(x+\lambda y)\|^2 = 2\lambda\ (x \mid y) + \lambda^2\ \|y\|^2$$
on peut distinguer deux cas.
• Si le vecteur y est nul, alors les vecteurs x et y sont orthogonaux.
• Si le vecteur y est non nul, alors la fonction polynomiale f est de degré 2, ne prend que des valeurs positives, donc son discriminant Δ est négatif. Or,
$$\Delta = 4\ (x \mid y)^2.$$
On en déduit que les vecteurs x et y sont encore orthogonaux.
Quoiqu'il arrive, on a l'inclusion :
$$\mathrm{Im}(p) \subset (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}.$$
Or, par le théorème du rang, les deux espaces $\mathrm{Im}(p)$ et $(\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ sont de même dimension égale à $n - \dim(\mathrm{Ker}(p))$. On a égalité et le projecteur p est bien un projecteur orthogonal.

Exercice 20

1. • Supposons la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ liée. On écrit par exemple :
$$x_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k \cdot x_k.$$
En utilisant la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable, on observe que l'on dispose de la combinaison linéaire :
$$C_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k \cdot C_k,$$

sur les colonnes de la matrice $G(x_1, \cdots, x_p)$. Cette matrice n'est donc pas inversible et son déterminant est nul.

• Réciproquement, si $\det(G(x_1, \cdots, x_p))$ est nul, alors la matrice $G(x_1, \cdots, x_p)$ est non inversible. Il existe une colonne C_j combinaison linéaire des autres :

$$C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k \; C_k.$$

Pour tout entier i entre 1 et p, on a alors :

$$(x_i \mid x_j) = \sum_{k \neq j} \alpha_k \; (x_i \mid x_k).$$

Posons alors le vecteur :

$$y = x_j - \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot x_k.$$

On en déduit que le vecteur y est orthogonal aux vecteurs $x_1, \cdots, x_p$:

$$y \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)^\perp.$$

Or, le vecteur y appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$. Le vecteur y est donc orthogonal à lui-même :

$$\|y\|^2 = (y \mid y) = 0,$$

donc le vecteur y est nul.

Ainsi, l'égalité $x_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot x_k$ montre que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée.

2. Soit x un vecteur de E. On pose $u = p(x)$ la projection orthogonale du vecteur x sur l'espace F.

   On pose :

$$u = p(x) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \cdot x_i.$$

   On note $C_0, \cdots, C_p$ les colonnes de la matrice $G(x, x_1, \cdots, x_p)$. On effectue sur cette matrice l'opération :

$$C_0 \longleftarrow C_0 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i \cdot C_i.$$

   La nouvelle matrice obtenue, qui est de déterminant $\det(G(x, x_1, \cdots, x_p))$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & \star & \cdots & \star \\ b_1 & & & \\ \vdots & & G(x_1, \cdots, x_p) & \\ b_p & & & \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned}
a &= (x \mid x) - \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, (x \mid x_i) \\
&= (x \mid x - p(x)) \\
&= (p(x) + x - p(x) \mid x - p(x)) \\
&= \|x - p(x)\|^2 \\
&= d(x, F)^2
\end{aligned}$$

et pour tout entier i entre 1 et p :

$$\begin{aligned}
b_i &= (x_i \mid x) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, (x_i \mid x_j) \\
&= (x_i \mid x - p(x)) \\
&= 0, \text{ car } x - p(x) \in F^{\perp}.
\end{aligned}$$

En développant le déterminant de la matrice A par rapport à sa première colonne, on obtient alors exactement ce qu'il faut.

Exercice 22

1. L'application proposée, que l'on note Φ, est toujours symétrique, bilinéaire et positive. On va montrer que l'application Φ est définie positive si et seulement si les réels $a_0, \cdots, a_n$ sont tous différents.

   • Si les réels $a_0, \cdots, a_n$ sont tous différents et si $\Phi(P, P) = 0$, alors pour tout entier k entre 0 et n, on a :
   $$P(a_k) = 0.$$
   Le polynôme $P(X)$ de degré inférieur ou égal à n admet au moins $(n+1)$ racines : c'est le polynôme nul.

   • Si les réels $a_0, \cdots, a_n$ ne sont pas tous différents, l'ensemble :
   $$\mathscr{A} = \left\{ a_0, \cdots, a_n \right\}$$
   compte au maximum n éléments. On remarque alors qu'en posant le polynôme :
   $$P(X) = \prod_{\omega \in \mathscr{A}} (X - \omega) \in \mathbb{R}_n[X],$$
   on obtient :
   $$\Phi(P, P) = 0_{\mathbb{R}},$$
   et l'application Φ n'est pas un produit scalaire.

2. L'espace F est clairement un hyperplan, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \end{array} \right. .$$

De plus, la somme $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)$ est le produit scalaire $(P \mid 1)$ du polynôme $P(X)$ avec le polynôme constant égal à 1.
On en déduit l'inclusion,

$$F \subset \{1\}^\perp = \mathrm{Vect}(1)^\perp,$$

et comme on a égalité des dimensions finies, alors on a égalité. Comme on travaille dans un espace euclidien, alors :

$$F^\perp = \left(\mathrm{Vect}(1)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X].$$

3. On note p la projection orthogonale sur l'espace F. On pose le polynôme :

$$Q = p(X^n).$$

On sait alors que le vecteur $X^n - Q$ appartient à $F^\perp = \mathbb{R}_0[X]$. On pose donc :

$$X^n - Q = c \in \mathbb{R}_0[X].$$

On applique la forme linéaire $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ev}_{a_k}$ à cette égalité, ce qui donne :

$$\varphi(X^n) - \varphi(Q) = \varphi(c).$$

Or,

$$\varphi(X^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k^n,$$
$$\varphi(Q) = 0$$

et :

$$\varphi(c) = (n+1)\ c.$$

On en déduit :

$$c = \frac{1}{n+1}\ \sum_{k=0}^{n} a_k^n.$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} d(X^n, F) &= \|X^n - p(X^n)\| \\ &= \|c\| \\ &= |c|\ \|1\| \\ &= \left| \frac{1}{n+1}\ \sum_{k=0}^{n} a_k^n \right| \sqrt{n+1} \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \sum_{k=0}^{n} a_k^n \right| . \end{aligned}$$

Exercice 23

Cet exercice reste à la mode dans des exercices d'oraux. Je pense qu'il faut considérer cet exercice comme classique.

1. On utilise le produit scalaire habituel sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que ce produit scalaire vérifie pour toutes matrices P et Q dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(P \mid Q) = \operatorname{Tr}(P^T Q) = \sum_{i,j=1}^{n} P_{i,j}\, Q_{i,j}.$$

On pose la matrice :

$$B = \Big(|a_{i,j}|\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

et la matrice J remplie de 1.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}| &= (B \mid J) \\ &\leqslant \|B\|\,\|J\|. \qquad \text{[inégalité de Cauchy-Schwarz]}\end{aligned}$$

Or,

$$\|J\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} 1} = n,$$

et :

$$\begin{aligned}\|B\| &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}^2} \\ &= \|A\| \\ &= \sqrt{\operatorname{Tr}(A^T A)} \\ &= \sqrt{\operatorname{Tr}(I_n)} \\ &= \sqrt{n}.\end{aligned}$$

On obtient ce qu'il faut.

2. On note U le vecteur colonne rempli de 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, en utilisant le produit scalaire habituel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\right| = \Big|(U \mid AU)\Big|$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \|U\| \, \|AU\| \\ &= \|U\|^2 = n \qquad \text{, car } A \text{ conserve la norme.} \end{aligned}$$

Exercice 27

1. La matrice A étant inversible, l'endomorphisme u_A associé est un isomorphisme, donc transforme la base $\mathscr{B}$ en une base.
2. La matrice P est exactement la matrice inversible A.
   Par le procédé d'orthonormalisation, la matrice Q est inversible et triangulaire supérieure.
3. On note R la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{D}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} R &= \mathscr{M}at_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \\ &= \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \times \mathscr{M}at_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(\mathrm{id}) \\ &= PQ \\ &= AQ. \end{aligned}$$

La matrice R étant la matrice de passage entre deux b.o.n., alors la matrice R est une matrice orthogonale.
On en déduit l'égalité :

$$R = AQ, \text{ puis } A = RQ^{-1}.$$

En notant la base $\mathscr{D} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, les coefficients diagonaux de la matrice Q valent :

$$q_i = A(e_i)^*(\varepsilon_i).$$

Or, la matrice Q^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{D}$ vers la base $\mathscr{C}$ et les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure Q^{-1} valent :

$$\frac{1}{q_i} = \varepsilon_i^*(A(e_i)) = (A(e_i) \mid \varepsilon_i) > 0,$$

par construction des vecteurs orthonormalisés ε_i.
Les matrices Q et Q^{-1} sont donc des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement posififs. On détaille le fait que si T est une matrice triangualaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, alors il en est de même pour la matrice T^{-1}.
En effet, pour tout entier k entre 1 et n,

$$T(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$$

avec égalité des dimensions finies, donc égalité et donc :

$$T^{-1}(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$$

les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure T^{-1} étant les inverses des coefficients diagonaux strictement positifs de la matrice T.

4. Soient $A = O_1T_1 = O_2T_2$ deux décompositions convenables.
   Alors, on remarque que :
   $$O_1^{-1}O_2 = T_1T_2^{-1}.$$
   On note U cette matrice. Il s'agit d'une matrice à la fois orthogonale, car $U = O_1^{-1}O_2$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs car $U = T_1T_2^{-1}$.
   Il reste à montrer que la matrice U est la matrice I_n.
   On va montrer par récurrence forte la propriété suivante :

   $\mathscr{P}(k)$: « les k premières colonnes de la matrice U sont les k premiers vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. »
   • Si $k = 1$, la première colonne C_1 est colinéaire de même sens que le vecteur e_1. De plus, les vecteurs C_1 et e_1 sont unitaires : $C_1 = e_1$ et la propriété $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
   • Supposons la propriété $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un certain entier k entre 1 et $n-1$.
   • La colonne C_{k+1} est unitaire, orthogonale aux colonnes $C_1, \cdots, C_k$ et appartient à $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$. La colonne C_{k+1} par hypothèse de récurrence forte est donc orthogonale aux vecteurs $e_1, \cdots, e_k$. La colonne C_{k+1} n'est composée que d'un seul coefficient non nul : son coefficient diagonal qui est d'ailleurs strictement positif. Les vecteurs C_{k+1} et e_{k+1} sont colinéaires de même sens et unitaires : $C_{k+1} = e_{k+1}$ et la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

   Résultat des courses, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie ce qui signifie que la matrice U est I_n, ou encore que :
   $$O_1 = O_2 \text{ et } T_1 = T_2.$$

5. On orthonormalise la famille (C_1, C_2) des colonnes de la matrice A.
   On trouve après calculs la b.o.n. :
   $$\left(\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
   La matrice O de passage de la base canonique vers cette b.o.n. est :
   $$O = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   La matrice O est la matrice de rotation vectorielle d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
   La matrice de passage de la base (C_1, C_2) vers la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la matrice :
   $$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   On sait alors que :
   $$O = AT, \text{ donc } A = OT^{-1}.$$

Le calcul montre que :

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La décomposition « $O'T'$ » pour la matrice A comprend les matrices :

$$O' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. En reprenant les notations déjà mises en place, on écrit :

$$|\det(A)| = |\det(O)| \times |\det(T)| = |\det(T)|,$$

avec T la matrice de passage de la base $\mathscr{D} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ vers la base $(A(e_1), \cdots, A(e_n))$. On note t_i le $i^{ème}$ coefficient diagonal de la matrice T. On en déduit :

$$t_i = (A(e_i) \mid \varepsilon_i).$$

Par conséquent :

$$t_i \leqslant \|A(e_i)\| \, \|\varepsilon_i\| = \|A(e_i)\|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\det(A)| &= \prod_{i=1}^{n} t_i \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \|A(e_i)\| \\ &= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2} \\ &= \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}. \end{aligned}$$

On obtient ce qu'il faut en intervertissant les rôles des indices i et j.

Remarque : il y a pas mal de choses dans cet exercice. Il est bien de savoir refaire les questions qui sont assez classiques globalement.

Exercice 28

Voici un exercice à savoir refaire.

1. L'application proposée est bien symétrique, bilinéaire, positive et elle est définie positive en utilisant comme d'habitude le théorème aux quatre hypothèses et le fait que seul le polynôme nul admet une infinité de racines.

2. On ne va pas s'amuser à faire les calculs pratiques. On pressent les polynômes de Tchebychev.
Voici les rappels sur ces polynômes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $T_n(X)$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Les polynômes $T_n(X)$ vérifient :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Chaque polynôme $T_n(X)$ est à coefficients entiers, de degré n, de terme dominant égal à 1 si $n = 0$ et égal à $2^{n-1}X^n$ si $n \geqslant 1$.
Les polynômes $T_n(X)$ sont tous scindés à racines simples, de racines :

$$\lambda_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),$$

pour k variant dans $[\![0, n-1]\!]$.
La famille $\mathscr{F} = (T_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
Si k est un entier, alors :

$$\|T_k(X)\|^2 = \int_0^\pi T_k(\cos(\theta))^2\ d\theta = \int_0^\pi \cos^2(k\theta)\ d\theta = \begin{cases} \pi, \text{ si } k = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } k \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ensuite, si i et j sont deux entiers différents entre 0 et N, alors :

$$(T_i \mid T_j) = \int_0^\pi \cos(i\theta)\ \cos(j\theta)\ d\theta = 0,$$

en utilisant les formules trigonométriques.
La famille $\mathscr{F}$ est orthogonale.
Considérons alors la famille orthonormale :

$$\mathscr{B} = \left(Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ Q_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ T_k(X)\ ;\ 1 \leqslant k \leqslant N\right).$$

On va vérifier que la famille $\mathscr{B}$ est bien la famille obtenue à partir de la base canonique par le procédé d'orthonormalisation.
En effet, pour tout entier k entre 0 et N :

$$\text{Vect}(Q_0, \cdots, Q_k) = \mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(1, X, \cdots, X^k).$$

Ensuite, la famille $\mathscr{G}$ est orthonormale.
Enfin, pour tout entier k entre 0 et N, on pose :

$$Q_k = \xi_k\ X^k + R_k(X),$$

avec $R_k(X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $\xi_k > 0$ est un réel strictement positif.

On en déduit :
$$(Q_k \mid X^k) = \left(Q_k \mid \frac{1}{\xi_k}\, Q_k - \frac{1}{\xi_k}\, R_k\right).$$
Or, le vecteur Q_k est orthogonal aux vecteurs $Q_0, \cdots, Q_{k-1}$ qui génèrent l'espace $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En particulier, le vecteur Q_k est orthogonal au polynôme $R_k(X)$.
Conclusion,
$$(Q_k \mid X^k) = \frac{1}{\xi_k} > 0.$$
Par unicité de ces conditions, la famille $\mathscr{B}$ est bien la base recherchée.

Exercice 29

1. Question archi-classique. On connaît cela par cœur. La base canonique est une b.o.n. pour ce produit scalaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,
$$\begin{array}{rcl} |\mathrm{Tr}(A)| & = & |(A \mid I_n)| \\ & \leqslant & \|A\|\ \|I_n\| \\ & = & \|A\|\ \sqrt{n}. \end{array}$$
3. L'ensemble $\mathscr{S}$ est un espace de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
L'espace $\mathscr{S}^\perp$ sera donc de dimension :
$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$
On remarque que l'espace $\mathscr{S}^\perp$ est de même dimension que l'espace $\mathscr{A}$ des matrices anti-symétriques.
Soient A dans $\mathscr{S}$ et B dans $\mathscr{A}$. Alors :
$$\begin{array}{rcl} (A \mid B) & = & \mathrm{Tr}(A^T\ B) \\ & = & \mathrm{Tr}(A\ B) \\ & = & -\mathrm{Tr}(A\ B^T) \\ & = & -\mathrm{Tr}(B^T\ A) \\ & = & -(B \mid A) \\ & = & -(A \mid B) \end{array}$$
Ainsi, les vecteurs A et B sont orthogonaux, ce qui montre que :
$$\mathscr{A} \subset \mathscr{S}^\perp.$$
Avec l'égalité des dimensions finies, on obtient :
$$\mathscr{S}^\perp = \mathscr{A}.$$

4. Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La borne inférieure à calculer est en fait un minimum : c'est le carré de la distance de la matrice A au sous-espace $\mathscr{S}$.
   On pose p la projection orthogonale sur $\mathscr{S}$. L'application p est donc la projection sur $\mathscr{S}$ parallèlement à $\mathscr{A}$.
   Or,
$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2},$$
   donc :
$$p(A) = \frac{A + A^T}{2}$$
   et la quantité à calculer vaut :
$$\|A - p(A)\|^2 = \left\|\frac{A - A^T}{2}\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(A_{i,j} - A_{j,i})^2}{4}.$$

5. Cette question a déjà été traitée en cours.

Exercice 31

Soit X un vecteur colonne dont on note x_i les composantes.
En notant $A_{i,j}$ les coefficients de la matrice A, alors le produit matriciel fournit :

$$X^T A X = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\ x_i\ x_j.$$

Soit maintenant un vecteur X dans $\mathrm{Ker}(A)$. Alors, $AX = 0$, donc :

$$X^T A X = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}\ x_i\ x_j = 0.$$

On interprète cette somme comme une somme d'intégrales. En effet, pour tous entiers i et j entre 1 et n, on remarque que :

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\ dt.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 x_i\ x_j\ t^{i+j-2}\ dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i\ t^{i-1}\right)\ \left(x_j\ t^{j-1}\right)\ dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\ t^{k-1}\right)^2\ dt. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'utiliser le théorème aux quatre hypothèses pour avoir que l'intégrande est nulle sur $[0,1]$, conduisant au fait que le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \; X^{k-1}$$

admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.
Tous les coefficients x_k sont nuls et le vecteur colonne X est nul.
Conclusion, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et par le théorème du rang, la matrice A est inversible.