DM n° 3 : Ensembles, applications, sommes

Correction de l'exercice 1 – Formules d'inversion de Pascal

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$
\begin{aligned}
(-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k &= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=j}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} a_j && \text{(interversion des signes } \textstyle\sum) \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{m!}{j!} \sum_{k=j}^{m} \frac{(-1)^k}{(m-k)!(k-j)!} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{m!}{j!(m-j)!} \sum_{k=j}^{m} \frac{(-1)^k (m-j)!}{(m-k)!(k-j)!} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{j} \sum_{k=j}^{m} (-1)^k \binom{m-j}{k-j} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{j} \sum_{k=0}^{m-j} (-1)^{k+j} \binom{m-j}{k} && \text{(changement d'indice)} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{m} (-1)^j (1-1)^{m-j} && \text{(formule du binôme)} \\
&= (-1)^m a_m \binom{m}{m} (-1)^m && \text{(car } 0^0 = 1 \text{ et } 0^n = 0 \text{ si } n > 0)
\end{aligned}
$$

et donc : $\boxed{a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k}$

2. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, et pour tout m,

$$a_m = m!\delta_k(m).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m!\delta_k(m) \\
&= \binom{n}{k} k!
\end{aligned}
$$

Remarquez que cette dernière égalité est aussi valide si $k > n$: dans ce cas, $\delta_k(m)$ est nul pour toutes les valeurs de m considérées, tout comme le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
m!\delta_k(m) = a_m &= (-1)^m \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} b_p \\
&= (-1)^m \sum_{p=0}^{m} (-1)^p n(n-1)\dots(n-k+1) \binom{m}{p}
\end{aligned}
$$

En multipliant par $(-1)^m$, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{m}(-1)^p n(n-1)\dots(n-k+1)\binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)}$$

3. On effectue une récurence forte bornée. Soit pour tout $k \in [\![0,m]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)$

   Pour $k=0$, cela correspond à l'égalité de la question précédente (pour la même valeur de k) Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $k \in [\![1,m]\!]$. On suppose que $\mathcal{P}(0),\dots,\mathcal{P}(k-1)$ sont vrais. Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^i\binom{m}{p} = 0$ pour tout $i < k$. On en déduit, par combinaison linéaire de telles expressions, que pour tout polynôme Q

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p Q(p)\binom{m}{p} = 0$$

   Soit $Q = X^k - X(X-1)\dots(X-k+1)$. Ce polynôme est de degré au plus $k-1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p} &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^p p(p-1)\dots(p-k+1)\binom{m}{p} + \sum_{p=0}^{m}(-1)^p Q(p)\binom{m}{p}\\ &= (-1)^m m!\delta_k(m) + 0\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(k)$ est vrai

   On en déduit que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0,m]\!]$:

$$\forall k \in [\![0,m]\!],\quad \boxed{\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)}$$

4. Supposons que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k,$$

   alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}b_m(n-j) &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\sum_{k=0}^{m}a_k(n-j)^k\\ &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^j\binom{m}{j}a_k\binom{k}{\ell}n^\ell(-1)^{k-\ell}j^{k-\ell}\\ &= \sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}n^\ell(-1)^{k-\ell}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j j^{k-\ell}\binom{m}{j}\end{aligned}$$

   Or, la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j j^{k-\ell}\binom{m}{j}$ est nulle, sauf si $k-\ell = m$. Comme $k \leqslant m$ et $\ell \geqslant 0$, l'égalité $k-\ell=m$ n'est possible que si $k=m$ et $\ell=0$. Ainsi

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{n}{j}b_m(n-j) = a_m\binom{m}{0}n^0(-1)^m(-1)^m m! = a_m m!$$

   On obtient donc :

$$\boxed{a_m = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}b_m(n-j)}$$

Correction de l'exercice 2 – On admet que pour tout x de $\mathbb{R}$ (et même de $\mathbb{C}$), l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(x,y) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{n-\ell}}{(n-\ell)!}$$

1. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $C = [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]^2$, $D = [\![0,n]\!]^2$ et T$= \{(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2 \ \mid \ k+\ell \leqslant n\}$ On a de façon assez immédiate $C \subset T \subset D$. Ainsi, les termes des sommes étant tous positifs,

$$\sum_{(k,\ell)\in C} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \leqslant \sum_{(k,\ell)\in D} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!}$$

Or :

$$\sum_{(k,\ell)\in C} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{y^k}{\ell!}\right),$$

et de même :

$$\sum_{(k,\ell)\in D} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{y^k}{\ell!}\right),$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{(k,\ell)\in T, k+\ell=i} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_k(x,y).\end{aligned}$$

On a donc bien obtenu :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{y^k}{k!}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} c_k(x,y) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right)}.$$

2. D'après le résultat admis et la définition de e, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{y^k}{k!}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right) = e(x)e(y).$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la somme du milieu admet également une limite, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x,y) = e(x)e(y).$$

D'un autre côté, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k(x,y) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{n-\ell}}{(n-\ell)!} = \frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{n-\ell}.$$

D'après la formule du binôme, il vient donc :

$$c_k(x,y) = \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e(x+y).$$

On a donc bien obtenu : $\boxed{e(x)e(y) = e(x+y)}$.

On reconnaît là la propriété remarquable de l'exponentielle. Cette propriété caractérise d'ailleurs, à scalaire multiplicatif près, la fonction exponentielle parmi les fonctions continues. Un théorème de Spé sur les séries de ce type (appelées séries entières) assure justement la continuité de cette somme. Ainsi, il s'agit de l'exponentielle, éventuellement à un facteur près. CV'est en fait très précisément l'exponentielle, ce qu'on peut justifier facilement par un argument intégral, basé sur une succession d'intégrations par parties, et qu'on retrouvera dans le cours par les formules de Taylor (qui ne font que cacher dernière un théorème cette succession d'intégrations par parties).

Dans de nombreux ouvrages, cette somme est d'ailleurs prise comme la définition de l'exponentielle.

3. Pour l'instant, la formule recherchée n'a été établie que pour des réels positifs. La positivité a été nécessaire pour comparer les 3 sommes. L'argument ne fonctionne plus aussi bien polur des réels quelconques, et encore moins pour des complexes. Mais onb va pouvoir se ramener au cas positif en faisant la différence de la somme sur D et de la somme sur T, et en utilisant l'inégalité triangulaire. En effet, en posant cette fois x et y complexes quelconques :

$$\left| \sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} - \sum_{(k,\ell)\in D} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \right| = \left| \sum_{(k,\ell)\in S} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \right|,$$

où $S = \complement_D T$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire, il vient :

$$0 \leqslant \left| \sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} - \sum_{(k,\ell)\in D} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \right| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in S} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^\ell}{\ell!}.$$

Or, on peut faire le chemin inverse avec les valeurs absolues à l'intérieur :

$$0 \leqslant \sum_{(k,\ell)\in S} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^\ell}{\ell!} = \sum_{(k,\ell)\in T} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^\ell}{\ell!} - \sum_{(k,\ell)\in D} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^\ell}{\ell!} \to e(|x|+|y|) - e(|x|)e(|y|) = 0,$$

d'après la question précédente. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(k,\ell)\in S} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^\ell}{\ell!} = 0,$$

et encore d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{(k,\ell)\in T} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} - \sum_{(k,\ell)\in D} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \right) = 0.$$

On conclut avec des manipulations similaires à celles de la question précédente (pour exprimer $c_k(x,y)$ avec la formule du binôme), et on obtient de même qu'avant :

$$\boxed{e(x+y) = e(x)e(y)}.$$

Correction du problème 1 – Théorème de Cantor-Bernstein

Question préliminaire

On construit $f : E \to F$ par :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in E_2. \end{cases}$$

Cette application est bien définie, puisque x ne peut être à la fois dans E_1 et E_2, et puisque tout x de E est dans l'un des deux.
On définit de même la fonction $g : F \to E$, en échangeant le rôle de E et F et en remplaçant f_1 par f_1^{-1} et f_2 par f_2^{-1}. De même, g est bien définie. Soit alors $x \in E$. Si $x \in E_1$, alors $f(x) = f_1(x) \in F_1$, donc $g(f(x)) = f_1^{-1}(f_1(x)) = x$. On montre de la même façon que $g \circ f(x) = x$ lorsque $x \in E_2$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Les fonctions f et g étant réciproques l'une de l'autre, elles sont bijectives. On a bien construit une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ dans } F}$.

Partie I – Une première démonstration

1. (a) De toute évidence, $E \in \mathcal{S}$, donc $\boxed{\mathcal{S} \neq \varnothing}$.

   (b) Par croissance de φ, pour tout A de $\mathcal{S}$, $M \subset A$, donc $\varphi(M) \subset \varphi(A)$. Ainsi,
$$\varphi(M) =\subset \bigcap_{A\in\mathcal{S}} \varphi(A).$$
   Or, pour tout A de $\mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, on a $\varphi(A) \subset A$. Ainsi,
$$\boxed{\varphi(M) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = M}.$$

   (c) Puisque φ est croissante, on a alors $\varphi(\varphi(M)) \subset \varphi(M)$. Comme par définition de φ, $\varphi(M) \in \mathcal{P}(E)$, on en déduit, par définition de $\mathcal{S}$, que $\boxed{\varphi(M) \in \mathcal{S}}$.

   Par principe de double inclusion, on a bien $\boxed{\varphi(M) = M}$.

2. On définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ par :
$$\varphi(A) = \complement_E \left(g\left(\complement_F f(A)\right)\right).$$
   Pour montrer que φ admet un point fixe, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que φ est croissante. Soit A et B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$. On a alors $f(A) \subset f(B)$, donc $\complement_F f(B) \subset \complement_F f(A)$, et en prenant l'image par g :
$$g\left(\complement_F f(B)\right) \subset g\left(\complement_F f(A)\right).$$
   En passant une nouvelle fois au complémentaire, on obtient :
$$\complement_E \left(g\left(\complement_F f(B)\right)\right) \subset \complement_E \left(g\left(\complement_F f(A)\right)\right), \qquad \text{soit:} \qquad \varphi(A) \subset \varphi(B).$$
   Ainsi, φ est une application croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, donc $\boxed{\text{admet un point fixe } M}$.

3. La fonction f étant injective, toute restriction de f est encore injective. Ainsi, $f_{|M}$ est injective. De plus, l'image de l'application $f_{|M}$ est par définition $f(M)$, donc $f_{|M}$ se corestreint sur $f(M)$ en une application f_1, dont l'image est également $f(M)$. L'application $f_1 : M \longrightarrow f(M)$ est donc surjective, et l'injectivité est préservée par corestriction. Ainsi, f_1 est une $\boxed{\text{bijection de } M \text{ sur } f(M)}$.

4. Soit $N = \complement_F f(M)$.

   (a) Par définition de φ, et par la propriété de point fixe de M, $\complement_E g(N) = \varphi(M) = M$, donc $\boxed{g(N) = \complement_E M}$.

   (b) Le même argument que pour f_1 montre que g se corestreint en une bijection de N sur $g(N)$, donc en une $\boxed{\text{bijection de } N \text{ sur } \complement_E M}$.

5. On dispose d'une bijection $f_1 = M \longrightarrow f(M)$ et d'une bijection $g_1^{-1} : \complement_E M \longrightarrow \complement_F f(M) = N$. Ainsi, d'après la question préliminaire, il existe une $\boxed{\text{bijection } h : E \to F}$ (construite explicitement dans cette question)

Partie II – Une deuxième démonstration

1. (a) Puisque $C_0 \subset C$, on a $\complement_E C \subset \complement_E C_0$, soit $\boxed{D \subset B}$.

   (b) Par définition de D, $\boxed{\{D, C\} \text{ est un partage de } E}$. Par conséquent, puisque $B \subset E$, $\{D \cap B, C \cap B\}$ est un partage de E. or, $D \cap B = D$ d'après la question précédente, et, par distributivité,
$$C \cap B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (C_n \cap B).$$

Par définition de C_0, $C_0 \cap B = \varnothing$, et par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, par construction, $C_n \subset u(E) \subset B$. Ainsi, $C_n \cap B = C_n$. Par conséquent,

$$C \cap B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = C'.$$

On en déduit que $\boxed{\{D, C'\} \text{ est un partage de } B}$.

(c) D'après le cours, et d'après la définition de la suite (C_n),

$$u(C) = u\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n,$$

soit : $\boxed{u(C) = C'}$.

(d) Puisque u est injective, u se restreint à C en une application d'image C' ; si on corestreint encore cette application à C', on gagne la surjectivité sans perdre l'injectivité. Ainsi, il existe une bijection $u_1 : C \to C'$. Par ailleurs, il existe une bijection $u_2 : D \to D$ (par exemple l'identité). La question préliminaire, dont les hypothèses sont assurées par la question 1(b), donne alors l'$\boxed{\text{existence d'une bijection de } E \text{ dans } B.}$

Remarquez la similitude de cet argument avec l'argument de l'hôtel de Hilbert : on pousse les éléments par paquets de C_k pour laisser de la place aux éléments de C_0.

2. La fonction $u = g \circ f$ est injective de E dans E, comme composée de deux injections. De plus, elle est à valeurs dans $g(F)$. Elle définit donc par corestriction une application injective $\tilde{u} : E \to g(F)$. D'après le lemme précédent, on en déduit l'existence d'une bijection de E sur $g(F)$. Par ailleurs, g étant injective, sa corestriction à son image est une bijection $\tilde{v}$ de F sur $g(F)$. Alors la composée $\tilde{v}^{-1} \circ \tilde{u}$ est une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ vers } F}$, en tant que composée de deux bijections.

Partie III – Une troisième démonstration

1. La suite commençant en un élément x de E ne peut vérifier qu'une des trois propriétés de l'énoncé, et en vérifie nécessairement l'une des trois. Ainsi, tout x de E appartient à un et un seul des ensembles E_E, E_F et E_∞. C'est bien dire que ces ensembles sont deux à deux distincts, et que leur union est E. C'est la définition d'un $\boxed{\text{partage de } E}$.

2. Soit $x \in E_E$, et $(u_n(x))_{n \in [\![0,N]\!]}$ la suite finie associée à x (qui s'arrête en E). Ainsi, x_N est dans E. Soit $y = f(x)$. Alors x est l'unique antécédent de y (l'unicité provenant de l'injectivité de f). Ainsi, $u_0(y) = y$ et $u_1(y) = x$. À partir de là, les antécédents successifs, uniques par injectivité, sont les mêmes que ceux de x : l'unique antécédent de $u_1(y) = u_0(x)$ est $u_1(x)$, ainsi $u_2(y) = u_1(x)$ et en continuant ainsi (on pourrait écrire une récurrence bornée assez triviale),

$$\forall n \in [\![1, N+1]\!], \quad u_n(y) = u_{n-1}(x).$$

En particulier, ces termes sont bien définis, et $u_{N+1}(y) = u_N(x)$, qui n'a pas d'antécédent (par g puisque c'est un élément de E). Ainsi, tout comme la suite issue de x, la suite issue de y s'arrête au point $u_{N+1}(y) = u_N(x)$, qui est élément de E. Ainsi, $y \in F_E$.

On en déduit que $\boxed{f(E_E) \subset F_E}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in F_E$, et $(u_n(y))_{n \in [\![0,M]\!]}$ la suite (finie et s'arrêtant en E) issue de y. Alors $M \geqslant 1$ (sinon, cela signifierait que la suite s'arrête tout de suite, donc au point y qui est élément de F, ce qui impliquerait $y \in F_F$ ce qui est contradictoire). On peut donc considérer $x = u_1(y) \in E$, qui par définition est un antécédent de y. Ainsi, $f(x) = y$. Un raisonnement similaire au précédent montre qu'alors,

$$\forall n \in [\![0, M-1]\!], \quad u_n(x) = u_{n+1}(y).$$

En particulier, la suite issue de x s'arrête en $u_M(y) \in E$. Ainsi, $x \in E_E$ et $f(x) = y$. On en déduit que $y \in f(E_E)$, donc $\boxed{F_E \subset f(E_E)}$

L'égalité $f(E_E) = F_E$ alors obtenue par double-inclusion justifie que f définit par restriction et corestriction une application surjective $\boxed{f_E : E_E \to F_E}$. L'application f étant injective, sa restriction aussi, donc $\boxed{f_E \text{ est bijective}}$.

La situation est symétrique en f et g, donc g définit aussi par restriction corestriction une $\boxed{\text{bijection } g_F = F_F \to E_F}$.

3. Montrons enfin que f se restreint et corestreint également en une bijection $f_\infty : E_\infty \to F_\infty$. Nous procédons comme dans la question précédente
   - f_∞ est bien définie car $f(E_\infty) \subset F_\infty$. En effet, si $y \in f(E_\infty)$, il existe un antécédent $x \in E_\infty$ de y, et comme précédemment, la suite issue de y peut se décrire en fonction de celle issue de x ; celle-ci étant infinie, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(y) = u_{n-1}(x),$$
   donc la suite issue de y est infinie. Cela prouve que $y \in F_\infty$, donc que $f(E_\infty) \subset F_\infty$.
   - f_∞ est est surjective. En effet, soit $y \in F_\infty$. Sa suite étant infinie, on peut considérer son premier élément $x = u_1(y)$, qui est dans E. Comme précédemment, la suite issue de x se décrit en fonction de la suite issue de y, et en particulier, elle est infinie. Ainsi, $x \in E_\infty$. Ainsi, f_∞ est définie en x (et coïncide avec f par définition), donc $f_\infty(x) = y$. Cela prouve la surjectivité de f_∞.
   - L'injectivité découle de celle de f.

   Ainsi, $\boxed{f_\infty \text{ est une bijection de } E_\infty \text{ dans } F_\infty}$.
   On aurait pu montrer de la même manière que g induit une bijection de F_∞ vers E_∞.
   On dispose donc de trois bijections $f_E : E_E \to F_E$, $g_E^{-1} : E_F \to F_F$ et $f_\infty : E_\infty \to F_\infty$.
   D'après la question préliminaire qu'on généralise facilement à 3 termes (et pour un partage plutôt qu'une partition) et d'après la question III-1, ces trois bijections permettent de construire une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ vers } F}$, ce qui prouve une nouvelle fois le théorème de Cantor-Bernstein.

Partie IV – Quelques applications classiques

1. On définit $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par $\Phi(A) = \mathbb{1}_A$, la fonction indicatrice de A dans $\mathbb{N}$. La fonction Φ admet une récirpoque $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, définie par $\Psi(\chi) = \chi^{-1}(1)$. La vérification du fait que ces applications sont réciproques l'une de l'autre est immédiate; Ainsi, Ψ est une bijection, ce qui montre que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ ont même cardinal}}$.
2. On construit une application $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Étant donné $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on construit $\chi = \Phi(f)$ de la manière suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = f(0) + \cdots + f(k) + k - 1, \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Ainsi, les images successives des entiers par χ définissent une suite de 0 et de 1 tels que la position du premier 1 est égale à $f(0)$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de 0 s'intercalant entre le n-ième 1 et $(n+1)$-ième 1 est égal à $f(n+1)$.
   La fonction Φ ainsi définie est une injection (mais pas une bijection) : en effet, si $\Phi(f) = \Phi(g) = \chi$, alors on retrouve f et g en regardant la position du premier 1 dans la suite des images de χ, et le nombre de 0 séparant deux 1 consécutifs. On obtient alors la même description pour f et g, prouvant que Φ est injective. Elle n'est pas surjective, car les applications χ dans l'image de Φ prennent nécessairement une infinité de fois la valeur 1.
   Mais on peut conclure tout de même : Φ est une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et l'inclusion définit une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Le théorème de Bernstein nous assure alors que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal.
3. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal. L'inclusion du deuxième vers le premier définit un injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$. Dans l'autre sens, on peut faire un détour par $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et construire une injection par composition :
   $$[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$
   où la première flèche est issue de l'inclusion, et la deuxième est la bijection obtenue dans la question précédente. La composée des deux est donc injective, en tant que composée d'injections.
   Le théorème de Berstein permet alors d'affirmer que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ ont même cardinal}}$.
4. - À tout réel x de $[0,1[$, on associe la suite des décimales de son unique développement propre en base 10. Ainsi, on définit $f \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ en posant $f(i)$ comme étant la $i+1$-ième décimale de son développement. On pose $\Phi(x) = f$. La fonction Φ est injective, car l'égalité $\Phi(x) = \Phi(y)$ signifie que x et y ont même développement décimal, ce qui n'est possible que si $x = y$.
   - Réciproquement, étant donné $f \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$, on peut définie $\Psi(f)$ comme l'unique réel x dont le développement décimal est donné par les valeurs successives de f. Le problème rencontré ici, c'est que Ψ peut prendre la valeur 1, pour la fonction f constante de valeur 9, De plus, elle n'est pas injective, car les nombres décimaux ont deux développements (l'un terminant par des 0, l'autre par des 9). Le problème rencontré provient donc du fait que f peut prendre un grand nombre de fois la valeur 9. On va donc lui interdire cette valeur.

- On pourrait construire alors Ψ à partir des fonctions à valeurs dans $[\![0,8]\!]$, afin d'éviter les développements terminant par des 9. Ce n'est pas dur de montrer, comme précédemment que l'ensemble de ces fonctions est de même cardinal que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$. Mais tant qu'à faire, autant revenir directement à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On construit donc $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1[$ en associant à $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'unique réel $x = \Psi(f)$ dont le développement décimal est constitué de la suite des valeurs prises par f. Cette fois, puisque les décimales de x sont toutes égales à 0 ou 1, il s'agit d'un développement propre. Cela nous assure en particulier que $x \in [0,1[$, et que Ψ est injective, par unicité du développement propre.
- Ayant des injections dans chaque sens (en composant la seconde par l'injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ issue de l'inclusion), le théorème de Bernstein nous permet de conclure que $\boxed{[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ et } [0,1[\text{ ont même cardinal}}$.

5. L'inclusion définit une injection $i : [0,1[\to \mathbb{R}$. On peut facilement trouver une injection dans l'autre sens, avec les fonctions usuelles. En effet, $f : x \mapsto \tan((2\pi x - \frac{3\pi}{2}))$ est strictement croissante sur $]\frac{1}{2},1[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bords de l'intervalle, et continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc surjective de $]\frac{1}{2},1[$ dans $\mathbb{R}$ et injective par stricte croissance. Elle est donc bijective. Sa réciproque est donc une application bijective $g : \mathbb{R} \to]\frac{1}{2},1[$. En la composant par l'injection $i :]\frac{1}{2},1[\to [0,1[$ issue de l'inclusion, on obtient une injection de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$.

   Le théorème de Bernstein assure alors que $\boxed{\mathbb{R} \text{ et } [0,1[\text{ ont même cardinal}}$.

   Remarque : g peut se décrire directement avec de l'arctangente, si on connait cette fonction.
6. On compose les différentes bijections (ou leurs réciproques) obtenues en 3, 4 et 5, pour définir une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \mathbb{R} \text{ ont même cardinal}}$.
7. On adapte l'exemple du cours qui peut se faire directement dans $\mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $z \in \mathbb{R}$ comme étant l'unique réel dont le développement décimal est défini par

$$z_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ est pair} \\ y_{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases},$$

   où x_i, y_i et z_i représentent respectivement le chiffre de poids 10^i des nombres x, y et z dans la représentation décimale propre. Ainsi, le chiffre des unités est de rang 0, celui des dizaines de rang 1, et les chiffres après la virgule sont numérotés négativement. Au besoin, on rajoute des 0 devant le chiffre de plus haut poids de x et de y, pour avoir une bonne définition de z.

   Comme on part des développements propres de x et y le développement de z sera également un développement propre. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie. Si $\Phi((x,y)) = \Phi((x',y')) = z$, l'unique développement propre de z permet donc de retrouver le développement de x et celui de y (en ne gardant qu'un chiffre sur 2). Faisant de même avec x' et y', on en déduit que x et x' ont même développement, donc $x = x'$ et de même $y = y'$. Cela prouve l'injectivité de $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   Une injection dans l'autre sens est facile à trouver : il suffit par exemple de considérer $\Psi : x \mapsto (x,x)$.

   Le théorème de Berstein permet de conclure que $\boxed{\mathbb{R} \text{ et } \mathbb{R}^2 \text{ ont même cardinal}}$.
8. Une première démonstration consiste en une utilisation directe du théorème de Berstein. On construit sans problème une injection $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, par $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

   Réciproquement, on utilise l'injection $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ construite précédemment. Soit alors $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit

$$\Psi(f) = \{\varphi(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}.$$

   Cette application est injective. En effet, supposons $\Psi(f) = \Psi(g)$. soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $\varphi(x,f(x)) \in \Psi(f) = \Psi(g)$. Ainsi, par définition de $\Psi(g)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x,f(x)) = \varphi(y,g(y))$. Puisque φ est bijective, $(x,f(x)) = (y,g(y))$, de quoi on déduit $x = y$ et $f(x) = g(y)$, et enfin $g(x) = f(x)$. Ceci étant vrai pour tout x, $f = g$. Ainsi, Ψ est une injection de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Le théorème de Cantor-Berstein prouve alors que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ ont même cardinal}}$.
9. La deuxième preuve consiste à se servir de ce qui précède. En fait, si on regarde de près, il s'agit grossièrement de la même preuve, mais rédigée un peu différemment.

   L'injection $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la même que plus haut.

   Une fonction f est déterminée par son graphe $G_f \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Cela nous donne une injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

   On utilise alors le lemme suivant : si $f : A \to B$ est une bijection, alors $\tilde{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ aussi. Cela résulte d'un exercice vu en cours (séparant injectivité et bijectivité), mais se redémontre très facilement directement en utilisant la bijectivité. Je laisse en exercice. Ainsi, la question 7 permet de définir une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. En composant avec l'injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, on en déduit une injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

   On termine encore une fois par le théorème de Cantor-Berstein.