Renseignements généraux

— *Concours* : École Polytechnique
— *Matière* : Mathématiques
— *NOM Prénom* : D'ANELLO Yohann

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $[0,\, 1]$. Si $[a,\, b] \subset [0,\, 1]$, on pose $\chi_{n,[a,b]} = |\{k \in [\![1,\, n]\!],\ u_k \in [a,\, b]\}|$. On dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie si pour tout $[a,\, b] \subset [0,\, 1]$, $\frac{\chi_{n,[a,b]}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b-a$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie
   (b) Pour toute fonction $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ continue :
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Pour l'implication $(c) \implies (b)$, on admettra le théorème suivant :

   Théorème 1: Weierstrass trigonométrique

   Si p est un entier, on note $e_p : x \mapsto e^{2i\pi p x}$. Soit $\mathcal{W} = \mathrm{Vect}(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques.
   Toute fonction continue de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions de $\mathcal{W}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\{n\theta\})_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$, où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x.

Exercice 2 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\sup\limits_{|z|\leq 1} |P(z)| = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

Remarques sur l'oral

Le premier exercice correspond fondamentalement à une partie du troisième DM de l'année, sur les suites équiréparties. Si les souvenirs sont lointains, cela m'a bien rendu service. Je mets toutefois un peu de temps à démarrer, et pensais judicieux d'écrire l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann. L'examinateur me demande ce qu'est concrètement une somme de Riemann, et comprends tout de suite qu'il suffit d'approcher f par une fonction en escalier. Il est alors plus judicieux de montrer que (b) est vraie pour toutes les fonctions continues par morceaux. Le résultat est immédiat pour une indicatrice d'intervalle, et par linéarité on l'a pour toute fonction en escalier. Je dis à l'oral que puisqu'on peut approcher uniformément une fonction par des fonctions en escalier, ça va fonctionner, mais l'examinateur m'a demandé d'écrire la preuve, en majorant $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right|$. Je mets un peu de temps à le faire (je n'aime pas ce genre de justification), mais m'en sors assez bien.

Pour $(b) \implies (c)$, c'est immédiat avec $f = e_p$ (la notation n'est pas dans l'énoncé). Alors que je voulais montrer $(c) \implies (a)$, il m'indique que ce n'est pas la bonne méthode. Je dis que je veux montrer $(c) \implies (b)$, et c'est là qu'il me donne l'énoncé de Weierstrass trigonométrique (dont il me donne par ailleurs les grandes lignes de la démonstration). On passe assez vite sur cette implication car c'est relativement la même chose que la première.

Pour $(b) \implies (a)$, après quelques secondes je veux utiliser (b) avec l'indicatrice de $[a,\, b]$, mais cette fonction a le malheur de ne pas être continue. Je me rappelle alors d'avoir fait de beaux dessins dans ce vieux DM, et souhaite approcher cette fonction par des fonctions affines par morceaux qui vont bien. Malheureusement, cette suite de fonctions ne converge pas uniformément (car limite non continue) et je ne peux pas effectuer une interversion de limites. Au bout d'un certain temps, je me souviens de devoir approcher par défaut et par excès, de sorte à obtenir deux inégalités du type $b - a - \frac{1}{m} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\chi_{n,a,b}}{n} \leq b - a + \frac{1}{m}$ pour tout entier $m \geq 1$, et conclure par passage à la limite.

Pour la seconde question, je dis d'abord instantanément que si θ est rationnel, alors (c) n'est pas vérifiée, en prenant p comme le dénominateur de θ. Je réfléchis plus longtemps pour le cas θ irrationnel avant de constater tout bêtement qu'on avait une somme géométrique.

Je dispose de peu de temps pour le second exercice. Je souhaite tout de suite adapter la preuve de d'Alembert-Gauss en disant que si $|P|$ admet un maximum sur le disque ouvert, alors il est nul. Si ce n'est pas le cas, on peut contredire la maximalité de ce point en se déplaçant dans une certaine direction. Pour une raison que j'ignore, l'examinateur m'a proposé des hypothèses soi-disant simplificatrices, telles que le maximum de $|P|$ est atteint en 0 (après avoir justifié que le sup était bien un max), et qu'il valait 1. Ce qui m'embêtait, c'était que la dérivée de P pouvait s'annuler en 0. Il m'a initialement fait supposé $P'(0) \neq 0$, puis j'ai pu donner l'argument de d'Alembert-Gauss de sorte à augmenter le module, à l'oral car on approchait de la fin. Il m'a rapidement demandé comment faire dans le cas où $P'(0)$ était nul, il suffisait donc de considérer l'ordre non nul le plus bas (si P n'est pas constant). L'oral s'est terminé là-dessus.