DEVOIR MAISON n° 4

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

MATHÉMATIQUES 1 (CENTRALE, 1979)

Définitions et notations

À toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par les relations

$$b_n = a_{n-1} - a_n,\ c_n = \frac{a_1 + ... + a_n}{n},\ d_n = a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n.$$

On dit que (a_n) est à variation bornée si la série de terme générale b_n est absolument convergente. On dit que (a_n) est quasi-convexe si la série de terme général nd_n est absolument convergente. On dit que (a_n) est convexe si elle est à valeurs réelles et si le réel d_n est positif ou nul pour tout $n \geq 1$.

Partie I

Dans les deux premières parties, (a_n) est une suite réelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (b_n), pour que la suite (a_n) soit convexe.
2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction réelle f continue sur $\mathbb{R}_+$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout n. Démontrer que (a_n) est convexe.
3. Déterminer toutes les suites convexes (a_n) telles que les suites définies par les relations $a'_n = -a_n$ soient également convexes.
4. Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite (n^α) soit convexe.
5. Pour tout réel x, note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$. On adopte, dans cette question, $a_n = \lfloor n^\alpha \rfloor$ où α est un réel strictement positif.
   (a) La suite (a_n) est-elle convexe pour $\alpha = \frac{3}{2}$? (On pourra examiner le cas $n = 9$ en s'aidant de la calculatrice ; toutefois le raisonnement figurant sur la copie devra exclure toute valeur approchée et ne s'appuyer que sur des inégalités entre entiers.)
   (b) Démontrer que la suite (a_n) est convexe pour $\alpha \geq 2$.

Partie II

Dans cette partie, (a_n) est une suite convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

1. Démontrer que la suite (b_n) est convergente. Déterminer sa limite.
2. Démontrer que la suite (a_n) est convergente.
3. Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Démontrer les relations
$$0 \leq nb_n \leq 2(a_p - a_n).$$
En déduire les limites des suites (nb_n) et (nb_{n+1}).
4. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Partie III

Dans cette partie, (a_n) est une suite quasi-convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

1. Démontrer, pour tout entier $N \geq 1$, la relation
$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leq |a_0 - a_N| + 2\sum_{n=1}^{N} n|d_n|.$$
En déduire que (a_n) est à variation bornée.
2. Démontrer (en justifiant l'existence des sommes des séries concernées) les relations suivantes
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leq \left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| + 2\sum_{n=1}^{N} n|d_n|.$$
3. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation
$$\sum_{n=1}^{N} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Partie IV

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

1. Démontrer, pour n et N entiers supérieurs ou égaux à 1, les relations
$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1}) \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{N} |c_n - c_{n+1}| \leq \sum_{m=1}^{N} |a_m - a_{m+1}|.$$
2. On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variation bornée. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, le nombre $c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n$ en fonction de $c_{n-1} - c_n$ et $a_{n+1} - a_n$. En déduire la relation
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n| \leq 3\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

3. On suppose, dans cette question, que (a_n) est bornée et que (c_{n+1}) est quasi-convexe. Démontrer, en utilisant le résultat de la question III-1, que (a_n) est à variation bornée et convergente.
4. On pose, dans cette question, $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ si l'entier n n'est pas une puissance de 2 et $b_n = \frac{1}{n}$ si l'entier n est une puissance de 2. Démontrer que ceci définit une suite (a_n) vérifiant les propriétés supposées en IV-2 et IV-3. Peut-on écrire encore, dans ce cas, la relation
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ ?}$$
5. On suppose, dans cette question, que (a_n) est à varition bornée. Démontrer l'quivalence des propositions suivantes :
   — La série de terme général $(\frac{a_{n+1}}{n+1})$ est absolument convergente ;
   — La série de terme général $(\frac{c_n}{n+1})$ est absolument convergente.

Partie V

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

1. Démontrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, les relations
$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leq 1 + \ln p \quad \textit{et} \quad \Big| |a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}| \ln p \Big| \leq \frac{|a_{p+1}|}{p}.$$
2. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
   — La suite (a_n) converge vers 0 et la série de terme général $((a_{n+1} - a_{n+2}) \ln(n+1))$ est absolument convergente ;
   — Les séries de termes généraux $(\frac{a_{n+1}}{n+1})$ et $(a_{n+1} \ln(n+1) - a_{n+2} \ln(n+2))$ sont absolument convergentes.
3. Donner un exemple simple de suite (a_n) satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.