THÉORIE DES APPLICATIONS

Exercice 1. [○]

Soient E, F deux ensembles. Soient $x \in E$, $y \in F$, $f \in F^E$, $g \in E^F$ et $T \in (F^E)^{F^E}$. Parmi les expressions suivantes, dire lesquelles ont un sens, et lesquelles sont égales. Dire également dans quel ensemble elles vivent.

$\mathscr{A} = \big[\big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{B} = g\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	$\mathscr{C} = \big(T(f)\big)(x)$	$\mathscr{D} = T\big(f(x)\big)$
$\mathscr{E} = \big[g \circ \big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{F} = \big[T\big(T(f)\big)\big](x)$	$\mathscr{G} = T\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	$\mathscr{H} = \big(T(f) \circ g\big)(y)$
$\mathscr{I} = \big((T \circ T)(f)\big)(x)$	$\mathscr{J} = f\big(g(y)\big)$	$\mathscr{K} = g \circ \big(T(f)\big)$	$\mathscr{L} = (g \circ T)(f)$

Exercice 2. [★]

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. a) Justifier que f est injective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
   b) Justifier que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. Justifier que f est surjective si, et seulement si, $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
3. Justifier que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f\big(E \setminus A\big) = F \setminus f(A)$.

Exercice 3. [⋆]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
2. Démontrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

Exercice 4. [★]

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note δ et ρ les applications

$$\delta \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \rho \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

Démontrer que

$$(f \text{ injective}) \iff (\delta \text{ injective}) \iff (\rho \text{ surjective})$$

et que

$$(f \text{ surjective}) \iff (\delta \text{ surjective}) \iff (\rho \text{ injective}).$$