

# Feuille d'exercices n° 17 : corrigés

## Exercice 1

On donne directement les réponses. Les primitives ci-après sont données à une constante.

- Une primitive  $t \mapsto t \ln t$  sur  $]0, +\infty[$  est  $t \mapsto \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4}$ .
- Une primitive de  $\arcsin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est  $t \mapsto t \arcsin(t) + \sqrt{1-t^2}$ .  
Une primitive de  $\arccos$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est  $t \mapsto t \arccos(t) - \sqrt{1-t^2}$ .
- Une primitive de  $t \mapsto t \arctan t$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  est  $t \mapsto \frac{t^2}{2} \arctan(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \arctan t$ .
- Une primitive de  $t \mapsto t^2 \sin t$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  est  $t \mapsto -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t$ .
- Une primitive de  $t \mapsto \cos^3 t$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  est en linéarisant (passer en exponentielle complexe)  $t \mapsto \frac{1}{12} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin t$ .

## Exercice 2

- Après plusieurs IPP, on trouve :

$$I = \int_0^\pi t^4 \sin t dt = \pi^4 - 12\pi^2 + 48.$$

On peut utiliser les règles de Bioche on détecter une primitive directe. La règle de Bioche invite à poser  $u = \cos x$ , ce qui donne :

$$J = - \int_1^{-1} \frac{du}{2+u} = \left[ \ln |2+u| \right]_{-1}^1 = \ln 3.$$

- On effectue la DES. On trouve :

$$K = \int_2^3 \left( \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \right) dx,$$

avec  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{2}{3}$  et  $c = \frac{2}{3}$ .

Ensuite, pour trouver une primitive de  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2-x+1}$ , on bricole avec la dérivée du dénominateur qui est  $2x-1$ . Ainsi,

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Pour trouver une primitive de  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1}$ , on passe sous forme canonique et on va avoir du arctan à l'aide d'un changement de variable :

$$g(x) = \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Une primitive de  $g$  sur  $[2, 3]$  par exemple est :

$$G : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Conclusion, l'intégrale vaut :

$$K = \frac{1}{3} \ln \frac{28}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \left( \frac{5}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{3} \right).$$

Les règles de Bioche invitent à poser  $x = \tan u$ , ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$L = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \left[ x - \frac{1}{x} \right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

### Exercice 3

- Après une DES, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3} dx = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

- On voit du arcsin. On trouve que la deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2}{3} \right).$$

- On développe et on reconnaît une primitive connue (on peut aussi utiliser la règle de Bioche en posant  $u = \tan x$ . L'intégrale vaut alors :

$$\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{u^2+1} du = \int_0^1 \left( 1 + \frac{2u}{u^2+1} \right) = 1 + \ln 2.$$

- On simplifie l'intégrande. On remarque que l'intégrande n'est pas continue sur l'intervalle considéré, car en fait non défini en  $\sqrt{3}$ . On continue quand même (programme de deuxième année pour la formalisation). On obtient :

$$M = \int_{\sqrt{3}}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx.$$

Pour le premier terme, on reconnaît une primitive en argch et pour le deuxième, on reconnaît une primitive en argsh. Ainsi, en posant  $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$  :

$$M = \int_1^{2/\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) du = \left[ \text{argch}(u) + \text{argsh}(u) \right]_1^{2/\sqrt{3}}.$$

On utilise  $\operatorname{argch}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$  et  $\operatorname{argsh}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$ , d'où après simplifications :

$$M = \ln(2 + \sqrt{7}) - \ln(1 + \sqrt{2}).$$

- L'intégrande est paire, intégrée entre  $-1$  et  $1$ . On obtient :

$$2 \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x + \sqrt{2}} - \frac{1}{x^2 + 2} \right) dx.$$

On trouve maintenant l'intégrale valant :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

- Faire la DES ne sert pas à grand chose : elle est déjà faite. On calque l'exemple du cours.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} - \int_0^1 t(t^2 + 1)^{-1} \times t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left( \left[ \frac{1}{2} \frac{(t^2 + 1)^{-1}}{-1} \times t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{2(t^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- On fait le changement de variable  $u = \sqrt{2t + 1}$ , ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} e^{u \ln 3} u du.$$

Par une IPP, on trouve :

$$\frac{3\sqrt{5}}{\ln 3} \sqrt{5} - \frac{3\sqrt{3}}{\ln 3} \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{\ln^2 3} + \frac{3\sqrt{3}}{\ln^2 3}.$$

- Pour la dernière intégrale, il faut déjà étudier l'intégrande pour savoir qui est le minimum. On pose  $f : x \mapsto x^2 + 1$  et  $g : x \mapsto x^2 + 3x - 2$ , de sorte que :

$$f - g : x \mapsto 3(1 - x).$$

Sur  $[0, 1]$ , le minimum vaut  $g(x)$  et sur  $[1, 2]$ , le minimum vaut  $f(x)$ . L'intégrale vaut :

$$\int_0^1 g + \int_1^2 f = \frac{19}{6}.$$

## Exercice 5

On déroule les calculs comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) \, dx &= \int_0^{\pi/4} \ln \left( \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \right) \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x + \sin x) \, dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln \left( \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \, dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 \times \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

car par le changement de variable  $u = \frac{\pi}{4} - x$ , on obtient :

$$\int_0^{\pi/4} \ln \left( \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos u) \, du.$$

## Exercice 8

La fonction

$$\Phi : \theta \mapsto \int_a^\theta f \times \int_\theta^b g$$

est un produit de deux fonctions de classe  $C^1$ . De plus,

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0.$$

Le théorème de Rolle s'applique ce qui donne l'existence d'un  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$\Phi'(c) = 0.$$

Or,

$$\Phi' : \theta \mapsto f(\theta) \times \int_\theta^b g + \int_a^\theta f \times (-g(\theta)),$$

ce qui donne ce qu'il faut.

## Exercice 9

1. Soit  $F$  une primitive de la fonction  $f$ . La fonction  $G : x \mapsto \int_x^{x+T} f$  est donc égale à :

$$G : x \mapsto F(x+T) - F(x).$$

La fonction  $G$  est donc dérivable et de dérivée :

$$G' : x \mapsto f(x+T) - f(x) = 0,$$

sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . La fonction  $G$  est constante.

2. On pressent que la limite est la valeur moyenne  $m = \frac{1}{T} \int_0^T f$ .

On pose la fonction  $g = f - m$ , de sorte que la fonction  $g$  est continue,  $T$  périodique et de plus :

$$\int_0^T g = \int_0^T f - m T = 0.$$

On en déduit que la fonction  $\Phi : x \mapsto \int_0^x g$  est  $T$ -périodique car par la question précédente, la valeur de la constante :

$$\int_x^{x+T} g$$

vaut  $\int_0^T g = 0$ . Ainsi,

$$\Phi(x + T) - \Phi(x) = \int_x^{x+T} g = 0.$$

Cette fonction  $\Phi$  est donc bornée sur le segment  $[0, T]$ , donc bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Phi(x) = 0.$$

Or,

$$\Phi(x) = \int_0^x f - m x.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{x} \Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f - m.$$

La limite à calculer vaut bien la valeur moyenne  $m$  de la fonction  $f$  sur une période.

## Exercice 10

Montrons pour l'instant que si  $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction en escalier, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int} dt = 0.$$

Soit  $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier, de subdivision adaptée

$$\sigma = (x_0 = a < \dots < x_s = b).$$

On note  $c_k$  la constante prise par la fonction  $\rho$  sur l'intervalle ouvert  $]x_k, x_{k+1}[$ .

On en déduit par Chasles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int} dt &= \sum_{k=0}^{s-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k e^{int} dt \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} c_k \left[ \frac{e^{int}}{in} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{s-1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme la fonction  $f$  est continue par morceaux, il existe deux fonctions en escaliers  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $[0, 1]$  telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

On obtient ces deux fonctions en utilisant l'uniforme continuité des fonctions  $g_k$  définies sur les segments  $[x_k, x_{k+1}]$ .

Il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int} dt \right| \leq \varepsilon.$$

Soit finalement un entier  $n \geq n_0$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t) \cdot e^{int} dt \right| &\leq \left| \int_0^1 (f(t) - \varphi(t)) \cdot e^{int} dt \right| + \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int} dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)| dt + \varepsilon \\
&\leq \int_0^1 \varepsilon dt + \varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On obtient bien la convergence vers 0, en remplaçant chaque  $\varepsilon$  par  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

## Exercice 12

L'exercice n'est pas si facile...

On pose le complexe :

$$Z = \int_0^1 f(t) dt.$$

Si  $Z = 0$ , alors  $\int_0^1 |f(t)| dt = 0$  par hypothèse. Le théorème aux quatre hypothèses s'applique et la fonction  $f$  est nulle. La fonction nulle  $g$  et  $\theta$  n'importe quel réel conviennent.

Si  $Z \neq 0$ , on pose  $Z = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho = |Z| > 0$ , de sorte qu'en posant la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que :

$$g : t \mapsto f(t) \cdot e^{-i\theta},$$

alors la fonction  $g$  vérifie :

$$\int_0^1 g(t) dt = \rho = \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 |g(t)| dt.$$

On va montrer que la fonction  $g$  prend des valeurs réelles positives.

On pose pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x(t) = \Re e(g(t))$  et  $y(t) = \Im m(g(t))$ .

On obtient ainsi :

$$\int_0^1 x(t) dt + i \int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} dt.$$

En prenant la partie réelle, on peut écrire :

$$\int_0^1 \left( \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} - x(t) \right) dt = 0.$$

On peut appliquer le théorème aux quatre hypothèses ( $0 < 1$ , intégrande continue, positive et d'intégrale nulle). L'intégrande est nulle ce qui montre que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x(t) \geq 0$  et  $y(t) = 0$ . Ainsi,  $g(t)$  est toujours dans  $[0, +\infty[$  et on obtient ce qu'il faut car :

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = g(t) \cdot e^{i\theta}.$$

## Exercice 13

- La première quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{3n} \frac{3}{1 + 9 \left(\frac{k}{3n}\right)^2}$$

de limite :

$$3 \int_0^1 \frac{dt}{1 + 9t^2} = \int_0^3 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan 3.$$

- La deuxième quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{4}{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{k}{4n}\right)^2}},$$

de limite :

$$\int_0^1 \frac{4 dt}{\sqrt{1 + 16t^2}} = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \operatorname{argsh}(4) = \ln(4 + \sqrt{17}).$$

- Pour le troisième point, la quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} 8 \frac{k}{2n} e^{1+6\left(\frac{k}{2n}\right)}$$

de limite :

$$\int_0^1 8t e^{1+6t} dt = 8e \int_0^1 t e^{6t} dt = \frac{10}{9} e^7 + \frac{2e}{9}.$$

- Le dernier point ne ressemble pas du tout à une somme de Riemann, a priori. On prend le ln ce qui donne :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}.$$

On aurait envie d'utiliser une somme de Riemann. Problème de taille : la fonction  $\ln$  n'est pas continue sur le segment  $[0, 1]$ , car en fait pas définie sur ce segment. Il faut donc contourner la difficulté.

On revient à la démonstration de l'approximation de l'intégrale par des rectangles...

Si  $n \geq 1$  est un entier, alors :

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t \, dt = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln t \right) \, dt \geq 0.$$

Ensuite,

$$0 \leq A_n \leq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \, dt = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) = \frac{\ln n}{n},$$

de limite nulle.

Or, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t \, dt = \int_{1/n}^1 \ln t \, dt = [t \ln t - t]_{1/n}^1 = -1 + o(1),$$

en utilisant  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$ .

Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}.$$

On aurait pu utiliser aussi la formule de Stirling, en manipulant plutôt une égalité plutôt que l'équivalent en lui-même...

## Exercice 24

### Exercice très classique sur les intégrales de Wallis : à retenir !!

1. Si  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) (\cos t - 1) \, dt,$$

et il apparaît que l'intégrande est négative :  $W_{n+1} \leq W_n$ .

On peut même appliquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir :  $W_{n+1} < W_n$ .

La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0 car l'intégrande pour  $W_n$  est toujours positive : la suite converge vers  $\ell \geq 0$ .

On montre par les  $\varepsilon$  par exemple que la limite de  $W_n$  est nulle.

On fixe  $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

On partage l'intégrale en deux par Chasles :

$$0 \leq W_n = \int_0^\varepsilon \cos^n t \, dt + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n t \, dt \leq \varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n \varepsilon \, dt \leq \varepsilon + (\cos^n \varepsilon) \frac{\pi}{2}.$$

Cette dernière quantité tend vers  $\varepsilon$  – car  $|\cos \varepsilon| < 1$  – lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  : on en déduit l'existence d'un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq W_n \leq 2\varepsilon.$$

On obtient classiquement ce qu'il faut : la limite est nulle.

2. On va faire une IPP. Allons-y, mais il ne faut pas intégrer ou dériver n'importe quelle quantité !!

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times (1 - \sin^2 t) \, dt \\
&= W_n - \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t \times \cos^n t) \, dt \\
&= W_n - \left[ \sin t \frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \times \frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \, dt \\
&= W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}.
\end{aligned}$$

On obtient rapidement l'égalité voulue.

3. On en déduit que l'on peut exprimer  $W_{2n}$  en fonction de  $W_0 = \frac{\pi}{2}$  et que l'on peut exprimer  $W_{2n+1}$  en fonction de  $W_1 = 1$ .

Voici les détails :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{\left( \prod_{k=1}^{2n} k \text{ pair} \right)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} W_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left( \prod_{k=1}^{2n} \text{k pair } k \right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

4. Il suffit de remarquer par décroissance que :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n,$$

donc :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes fait le reste.

D'autre part, au vu des formules obtenues pour  $W_{2n}$  et  $W_{2n+1}$ , on peut écrire :

$$W_{2n+1} \times W_{2n} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2},$$

pratiquement directement.

5. On en déduit comme  $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n+1}$  qu'en posant :

$$\xi_n = W_n \times \sqrt{n},$$

alors :

$$\xi_{2n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} (2n),$$

de limite  $\frac{\pi}{2}$  et de même :

$$\xi_{2n+1}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} (2n),$$

encore de limite  $\frac{\pi}{2}$ .

Conclusion, la suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  et :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

**Remarque :** on peut aussi remarquer que la suite  $\left( (2n+1)W_n W_{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, égale à  $\frac{\pi}{2}$ .

## Exercice 14

On prend le logarithme de l'expression  $u_n$  proposée. On obtient en posant  $v_n = \ln(u_n)$  :

$$\begin{aligned} v_n &= -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

de limite :

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = \int_1^2 \ln u du = \left[u \ln u - u\right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{e}.$$

## Exercice 15

Les sommes de Riemann nous indiquent que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = I.$$

On doit donc lever une forme indéterminée du typ «  $\infty \times 0$  ».

On va utiliser le caractère  $C^2$  de la fonction  $f$ .

On fixe un entier  $n \geq 1$ . Alors, en utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right) \left(t - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(c_{k,n})}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2,$$

pour avoir l'existence d'un  $c_{k,n}$  dans les lignes suivantes, puis en utilisant le fait que la fonction continue  $f''$  est continue donc bornée sur le segment  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f''(c_{k,n})}{2} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 dt \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f'\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

où la fonction  $g$  est  $g : t \mapsto f'(t)$ .

On en déduit que :

$$A_n = n \cdot I - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

quantité de limite :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t) dt = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

## Exercice 25

1. On révise le cours sur les séries !!

On trouve :

$$\int_n^{n+1} f \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f.$$

2. Si  $\alpha \leq 0$ , la suite est plus grande que  $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  divergente vers  $+\infty$ .

On se place dans le cas  $\alpha > 0$ . La suite est croissante quoiqu'il arrive.

Si  $\alpha > 1$ , alors en prenant  $f : t \mapsto t^{-\alpha}$  continue et décroissante :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{n-1}^n f = 1 + \int_1^n t^{-\alpha} dt = 1 + \frac{1 - n^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

et la suite croissante est majorée donc convergente.

Si  $\alpha \leq 1$ , alors en notant  $S_n$  la somme partielle étudiée :

$$S_n \geq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

entraînant que tout diverge vers  $+\infty$ .

3. La première suite diverge vers  $+\infty$  car la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$  continue décroissante sur  $[2, +\infty[$  est telle que :

$$\int_2^n f = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

de limite  $+\infty$ .

La seconde suite converge car la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$  continue décroissante sur  $[2, +\infty[$  est telle que :

$$\int_2^n f = \left[ -\frac{1}{\ln t} \right]_2^n \leq \frac{1}{\ln 2}$$

et donc la suite croissante est majorée par :

$$\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Elle converge.

## Exercice 16

1. Si la fonction  $f$  garde un signe constant sur  $]0, \pi[$  par continuité, la fonction  $f$  garde un signe constant sur  $[0, \pi]$ , par exemple positif. Ainsi, la fonction  $f \times \sin$  est continue, positive d'intégrale nulle sur  $[0, \pi]$ , avec  $0 < \pi$ , ce qui entraîne par le théorème aux quatre hypothèses que la fonction  $f \times \sin$  est nulle sur  $[0, \pi]$ . Cela impose à la fonction  $f$  d'être nulle sur  $]0, \pi[$ .

Si la fonction  $f$  change une fois de signe sur  $]0, \pi[$ , par exemple au point  $a$ , quitte à considérer  $-f$  plutôt que  $f$ , qui vérifie les mêmes hypothèses, on peut supposer par exemple que  $f$  est négative sur  $]0, a[$  et positive sur  $]a, \pi[$ .

Or, la fonction  $h : t \mapsto \sin(t - a) = \cos a \sin t - \sin a \cos t$  appartient à  $\text{Vect}(\cos, \sin)$ . Par linéarité de l'intégrale et compte tenu des hypothèses, alors :

$$\int_0^\pi f \times h = 0.$$

Or, la fonction  $f \times h$  garde un signe constant sur  $[0, \pi]$  car les fonctions  $f$  et  $h$  changent de signe au même moment. Le théorème aux quatre hypothèses montre que la fonction  $f \times h$  est nulle sur  $[0, \pi]$ , donc la fonction  $f$  est nulle sur  $[0, \pi] \setminus \{a\}$ .

Quoiqu'il arrive ( $f$  garde un signe constant,  $f$  change une fois de signe ou  $f$  change au moins deux fois de signe), la fonction  $f$  s'annule au moins deux fois sur  $]0, \pi[$ .

2. On essaie une fonction  $f$  sous la forme  $f : t \mapsto \cos(nt)$  par exemple.

Avec les formules trigonométriques, on obtient :

$$\int_0^\pi \cos(nt) \sin t dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)t - \sin(n-1)t}{2} dt = \left[ \frac{-\cos(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)t}{2(n-1)} \right]_0^\pi,$$

et :

$$\int_0^\pi \cos(nt) \cos t dt = \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t}{2} dt = \left[ \frac{\sin(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)t}{2(n-1)} \right]_0^\pi.$$

En prenant  $n = 3$ , on obtient que les deux intégrales précédentes sont nulles et la fonction  $t \mapsto \cos(3t)$  convient.

## Exercice 18

1. On obtient graphiquement (tracer un quart de cercle ou par le changement de variable  $t = \cos(u)$  par exemple) :

$$a_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On obtient directement :

$$a_1 = \int_0^1 t \cdot (1 - t^2)^{1/2} dt = \left[ -\frac{1}{3}(1 - t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n(t-1)\sqrt{1-t^2} dt,$$

qui est l'intégrale d'une fonction négative sur  $[0, 1]$  :  $a_{n+1} - a_n \leq 0$ . On peut même évoquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir  $a_{n+1} < a_n$ .

Il est clair que chaque  $a_n$  est positif.

Enfin, si  $n \geq 0$  est un entier,

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

et le théorème des gendarmes montre que  $a_n$  tend vers 0, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. On effectue une IPP :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 t^{n+1} \left( t\sqrt{1-t^2} \right) dt \\ &= \left[ -t^{n+1} \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)t^n \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \frac{n+1}{3} \int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2}). \end{aligned}$$

On obtient alors rapidement ce qu'il faut.

4. **Question un peu difficile, tout du moins astucieuse.**

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot (n+1)(n+2)(n+3).$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot (n+2)(n+3)(n+4) \\ &= a_{n+1} \cdot (n+2)(n+3) \cdot (n+4)a_{n+2} = b_n. \end{aligned}$$

La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $b_0 = \frac{\pi}{2}$ .

De plus, par décroissance,

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

donc :  $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ , ce qui montre que :

$$a_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n.$$

Conclusion,

$$\frac{\pi}{2} = b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n^2 \times n^3,$$

et :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

## Exercice 17

1. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!

2. On pose la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ , qui est une fonction strictement croissante, bijective de  $[0, 1]$  vers  $[0, I]$ , bijection de classe  $C^1$ .

On voit alors que la seule subdivision qui marche est la subdivision  $\sigma_n$  telle que, par la relation de Chasles :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^{a_{n,k}} f = \frac{k}{n} I.$$

On doit alors nécessairement prendre :

$$a_{k,l} = F^{-1} \left( \frac{k}{n} I \right),$$

et par stricte croissance de  $F$ , donc de  $F^{-1}$ , on a bien que les  $a_{k,n}$  ainsi définis conviennent. On a bien ainsi l'existence et l'unicité par la bijectivité de l'application  $F$ .

3. On interprète cette somme comme une somme de Riemann. Voyons cela. En notant  $A_n$  la quantité proposée, on écrit :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ F^{-1} \left( \frac{k}{n} I \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \left( \frac{k}{n} I \right), \text{ avec } g = f \circ F^{-1} : [0, I] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{aligned}$$

Cette somme de Riemann converge vers :

$$J = \frac{1}{I} \int_0^I g = \frac{1}{I} \int_0^I f(F^{-1}(t)) dt.$$

En effectuant le changement de variable  $u = F^{-1}(t)$ , alors  $t = F(u)$ , puis  $dt = F'(u) du = f(u) du$  et donc la limite à calculer vaut :

$$\frac{\int_0^1 f^2(u) du}{\int_0^1 f(u) du}.$$

## Exercice 22

Le point commun aux trois questions est que l'on va calculer la limite d'une intégrale, lorsque les bornes tendent vers la même chose notée  $a$  et lorsque la fonction intégrée diverge en  $a$ . On utilisera alors un développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $a$ , puis on intégrera ce développement.

- Il ne faut pas espérer calculer l'intégrale, seulement la limite.

Au voisinage de 0 :

$$\frac{\cos(t^2)}{\sin t} = \frac{1}{t} + o(1),$$

donc :

$$\int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t} dt = \int_x^{3x} \frac{dt}{t} + o(x) = \ln 3 + o(x),$$

de limite  $\ln 3$ .

- Si  $0 < \varepsilon < M$  sont fixés, avec  $0 < \varepsilon < 2\varepsilon < M < 2M$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-2x}}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{2\varepsilon}^{2M} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{changement } u = 2x] \\ &= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_M^{2M} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad [\text{utiliser Chasles}] \end{aligned} \quad \star$$

Or,

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \left( \frac{1}{x} + o(1) \right) dx = \ln 2 + o(x),$$

de limite  $\ln 2$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$

D'autre part,

$$0 \leq \int_M^{2M} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \int_M^{2M} \frac{e^{-M}}{M} dx = e^{-M},$$

de limite nulle lorsque  $M$  tend vers  $+\infty$ .

Conclusion, la limite à calculer vaut  $\ln 2$ .

Cette intégrale porte un nom : une intégrale télescopique, en le voyant par la simplification au point marqué  $\star$ .

- La fonction  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$  est définie sur  $]0, +\infty[ \setminus \{0\}$  car si  $x \geq 0$ , on a un problème de définition de  $\ln t$ , pour  $t$  entre  $x$  et  $x^2$ . Si  $x > 0$  et  $x \neq 1$ , alors le segment d'extrémités  $x$  et  $x^2$  est inclus dans  $]0, 1[$  ou dans  $]1, +\infty[$  et la fonction intégrée est bien continue entre  $x$  et  $x^2$ .

On note  $F$  une primitive de  $\frac{1}{\ln t}$ , primitive que l'on ne tente même pas de calculer, cette primitive étant définie tantôt sur  $]0, 1[$  tantôt sur  $]1, +\infty[$ .

Alors, sur  $]0, 1[$ ,

$$f(x) = F(x^2) - F(x)$$

et de même sur  $]1, +\infty[$ . La fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  et :

$$f' : x \longmapsto 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Il est clair que pour tout  $x > 0$  et  $x \neq 1$ ,

$$f'(x) > 0.$$

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  (remarquer que l'on ne travaille séparément que sur des intervalles...).

On calcule les limites de  $f$  en  $0^+$ , en 1 et en  $+\infty$ .

- En 0,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \circ(1) dt = \circ(1),$$

de limite nulle.

- En  $+\infty$ ,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[ 2\sqrt{t} \right]_x^{x^2} = 2x - 2\sqrt{x},$$

de limite  $+\infty$ .

- En  $1^-$  ou en  $1^+$ , les limites de  $f$  existent et ne sont pas forcément les mêmes a priori. On va établir un développement asymptotique de  $\frac{1}{\ln t}$  en 1. Lorsque  $x$  est au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{du}{\ln(1+u)} \quad [\text{changement } u = t-1] \\ &= \int_{x-1}^{x^2-1} \left( \frac{1}{u} + \mathcal{O}(1) \right) du \\ &= \ln \frac{x^2-1}{x-1} + \circ(1) \\ &= \ln(x+1) + \circ(1) \\ &= \ln(2) + \circ(1) \end{aligned}$$

de limite  $\ln 2$ .

On remarque que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité au point 1, en posant  $f(1) = \ln 2$ . On remarque aussi que le théorème du prolongement de la dérivée montre, puisque :

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 1,$$

lorsque  $x$  tend vers 1 que la fonction prolongée est encore  $C^1$  au voisinage de 1 et  $f'(1) = 1$ .

Pour être tout à fait complet, on peut étudier la branche infinie en  $+\infty$ .

On calcule  $\frac{f(x)}{x}$  : pour  $x$  assez grand,  $\ln t \leq t^{1/3}$ , donc

$$\frac{f(x)}{x} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^{1/3}} = \frac{1}{x} \left[ \frac{3}{2} t^{2/3} \right]_x^{x^2} = \frac{3}{2} x^{1/3} - \frac{3}{2} x^{-1/3},$$

quantité tendant vers  $+\infty$ .

La courbe  $y = f(x)$  admet une direction asymptotique de pente  $+\infty$  au voisinage de  $+\infty$ . Précisons qu'en  $0^+$ , comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ , alors la courbe admettra une demi-tangente horizontale si l'on prolonge la fonction  $f$  en 0.

## Exercice 20

1. On fixe deux entiers  $k$  et  $n$  naturels.

On remarque que 0 est une racine de multiplicité  $n$  dans  $P_n(X)$ .

Par la dérivation de Leibniz, on obtient :

$$P_n(X)^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{k}{\ell} (X^n)^{(\ell)} ((a - bX)^n)^{(n-\ell)}.$$

Lorsque l'on évalue le tout en 0, alors si  $k < n$ , chaque  $(X^n)^{(\ell)}(0)$  sera nul car  $\ell < n$ . Si  $k \geq n$ , le seul terme non nul après évaluation se produira lorsque  $\ell = n$  et ce terme est  $(X^n)^{(n)}(0) = n!$ . Le polynôme  $(a - bX)^n$  est à coefficients entiers, ainsi que toutes les dérivées de ce polynôme, d'évaluation entière en 0 et le  $n!$  qui vient d'apparaître détruit  $\frac{1}{n!}$ . Le tout est un entier.

Les choses sont un peu similaires pour  $P_n^{(k)}(\pi)$  car en évaluant la somme du binôme en  $\pi = \frac{a}{b}$ , la seule évaluation non nulle pour  $((a - bX)^n)^{(n-\ell)}(\pi)$  est lorsque  $\ell = 0$  et cette évaluation vaut alors :

$$(-b)^n n!.$$

Le terme  $n!$  se simplifie avec l'autre factorielle au dénominateur et tous les autres termes après simplifications donnent des entiers, que ce soit pour les coefficients binomiaux ou pour  $X^n$  évalué en  $\frac{a}{b}$ , car alors le dénominateur  $b^n$  se simplifie avec le terme  $(-b)^n$  initialement présent. Bref, on n'a que des sommes d'entiers, après simplification.

2. On peut utiliser plusieurs IPP en dérivant systématiquement le polynôme. Le polynôme  $P_n(X)$  est de degré  $2n$ . Au bout de  $k$  IPP, on obtient un crochet de la forme  $[P_n^{(k)} \times f]_0^\pi$  et une nouvelle intégrale, au signe près de la forme  $\int_0^\pi P_n^{(k)}(t) g(t) dt$ , où les fonctions  $f$  et  $g = f'$  sont dans  $\{\pm \sin, \pm \cos\}$ . Comme  $f(0)$  et  $f(\pi)$  sont toujours des entiers et qu'en prenant  $k = 2n + 1$ , la dernière intégrale obtenue est nulle, par la question Q1, chaque crochet donne un entier. L'intégrale  $I_n$  donne donc un entier.
3. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!

4. La fonction  $t \mapsto t(a - bt)$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc y est bornée par une constante  $\xi > 0$ . On en déduit :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^\pi \frac{\xi^n}{n!} \sin(t) dt \leq \frac{\pi \xi^n}{n!}.$$

5. Par les croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\xi^n}{n!} = 0$  (il peut être intéressant de revoir la démonstration faite en cours il y a longtemps...). Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Cependant, chaque  $I_n$  est un entier strictement positif, donc :

$$1 \leq I_n.$$

Il est donc impossible que  $I_n$  tende vers 0. On a une contradiction. On a montré que  $\pi$  était irrationnel.

## Exercice 23

**Exercice à mettre en annexe. Un des rares exercices où on va calculer une intégrale grâce aux sommes de Riemann, et non l'inverse.**

1. On obtient la factorisation :

$$X^2 - 2 \cos t X + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it}).$$

2. (a) Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , la quantité  $z = \theta - e^{it}$  n'est pas nulle, car  $\theta$  est un nombre réel de module différent de 1. Par conséquent,

$$1 - 2\theta \cos t + \theta^2 = \left| \theta - e^{it} \right|^2 = |z|^2 > 0.$$

Par composition de fonctions continues de référence, la fonction  $f$  est alors clairement continue.

- (b) On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|^2 \\ &= 2 \ln \left| \prod_{k=0}^{n-1} \left( \theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \right| \\ &= 2 \ln \left| \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\theta - \omega) \right| \\ &= 2 \ln |\theta^n - 1|. \end{aligned}$$

(c) On peut calculer cette intégrale via la limite de la somme de Riemann :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{n} \ln |\theta^n - 1|.$$

On distingue deux cas :

- si  $|\theta| < 1$ , alors  $\ln |\theta^n - 1|$  tend vers 0 et l'intégrale de Poisson est nulle ;
- si  $|\theta| > 1$ , alors  $|\theta^{-1}| < 1$  et :

$$\frac{4\pi}{n} \ln |\theta^n - 1| = \frac{4\pi}{n} (\ln |\theta|^n + \ln |1 - \theta^{-n}|) = 4\pi \ln |\theta| + o(1).$$

L'intégrale vaut  $4\pi \ln |\theta|$  dans ce cas.

## Exercice 26

1. On trouve  $a_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $a_1 = 1$ . Le fait que chaque  $a_n$  soit strictement positif provient directement du théorème aux quatre hypothèses (hypothèses à rappeler quoiqu'il arrive à l'écrit comme à l'oral).

2. On obtient via une IPP :

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n,$$

comme dans l'exercice 24.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le théorème aux quatre hypothèses fournit directement  $0 < b_n$ .

On connaît l'encadrement hyper-classique :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t.$$

On en déduit :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t.$$

On en déduit par intégration :

$$b_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4} (a_{2n} - a_{2n+2}).$$

4. Il suffit de montrer que  $a_{2n} - a_{2n+2} = o(a_{2n})$ , pour avoir ce qu'il faut.

Or,  $a_{2n} - a_{2n+2} = a_{2n} \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = o(a_{2n})$ , d'où le résultat – en utilisant le théorème des gendarmes pour l'encadrement de  $\frac{b_n}{a_{2n}}$ .

5. • On effectue une IPP dans l'intégrale de droite, en intégrant  $\sin t \cos^{2n+1} t$ . On obtient directement ce qu'il faut.

- Par la formule que l'on vient de montrer, on obtient par une nouvelle IPP :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+2}}{n+1} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t dt \\
&= \left[ t^2 \sin t \cos^{2n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left( \cos t \cos^{2n+1} t - \sin^2 t (2n+1) \cos^{2n} t \right) dt \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left( \cos^{2n+2} t - (2n+1) \cos^{2n} t + (2n+1) \cos^{2n+2} t dt \right) dt \\
&= (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}.
\end{aligned}$$

- On écrit par le point précédent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)^2} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+1)b_n}{(2n+2)a_{2n+2}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \\
&= \frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}.
\end{aligned}$$

6. On a finalement pu interpréter la série de Riemann comme une somme télescopique !!

La série télescopique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right)$  est convergente si et seulement si la suite  $\left( \frac{b_n}{a_{2n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente ce qui est le cas puisque la suite est de limite nulle.

Pour le calcul de la somme, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right) \\
&= 2 \left( \frac{b_0}{a_0} - \frac{b_N}{a_{2N}} \right) \\
&= 2 \frac{b_0}{a_0} + o(1).
\end{aligned}$$

Or :

$$b_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24} \text{ et } a_0 = \frac{\pi}{2},$$

donc :

$$2 \frac{b_0}{a_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il s'agit de la somme de la série convergente  $\zeta(2)$ .

## Exercice 27

On peut y voir de la dualité, ou des polynômes de Lagrange, sachant que les deux visions des choses sont « duales » l'une de l'autre!!! Je choisis la dualité.

Les nombres  $\text{sh}(k)$ , lorsque  $k$  décrit l'ensemble  $\llbracket 0, n \rrbracket$  sont tous différents. En posant pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la forme linéaire non nulle :

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto P(\text{sh}(k)) \end{cases}$$

alors la famille  $\mathcal{F} = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  forme une famille libre, en évaluant dans une combinaison linéaire nulle en les polynômes de Lagrange  $L_0(X), \dots, L_n(X)$  associés aux nombres différents  $\text{sh}(0), \dots, \text{sh}(n)$ .

La famille  $\mathcal{F}$  forme donc une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ , espace de dimension  $(n + 1)$ .

On note maintenant la forme linéaire :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto \int_1^3 P(\sin t) e^{-t^3} dt \end{cases} .$$

Les scalaires  $\lambda_k$  qui apparaissent sont exactement les coordonnées de la forme linéaire  $\psi$  dans la base  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ . Si on osait, on pourrait passer dans le bi-dual et donc conclure l'exercice en disant que les seuls scalaires  $\lambda_k$  qui marchent valent :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = (\varphi_k)^*(\psi).$$