APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. [$\circ$]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.
2. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre alors $(e_i)_{i\in I}$ est libre.
3. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de F.
4. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
5. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ alors $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.
6. Si $u^2 = \operatorname{Id}_E$, alors $u = \pm \operatorname{Id}_E$.
7. Si $u^2 = \operatorname{Id}_E$, alors il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \pm x$.

Exercice 2. [$\circ$]

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,1,1)$.

1. Qu'est-ce qui justifie l'existence et l'unicité de f ?
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f(x,y)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3. [$\star$]

On note E l'espace vectoriel des suites complexes périodiques et E_0 le sous ensemble de E constitué des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1} = 0$ où T est une période de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Enfin, on considère Δ l'application définie par

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que E_0 est bien défini et que c'est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) \oplus E_0$.
3. Démontrer que Δ réalise un endomorphisme de E et préciser son noyau et son image.

Exercice 4. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Démontrer que $g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} g$.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im}\, g$.

Exercice 5. [$\circ$]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Démontrer que $\big(\operatorname{Ker}(g\circ f) \subset \operatorname{Ker} f\big) \iff (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\})$.
2. Démontrer que $\big(\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)\big) \iff (\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F)$.

Exercice 6. [∘]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On dit que $E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$ est une *suite exacte* si et seulement si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

1. Que peut-on dire alors de $g \circ f$?
2. Que signifie le fait que $\{0\} \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$ soit une suite exacte ?
3. Que signifie le fait que $E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} \{0\}$ soit une suite exacte ?

Exercice 7. [⋆] ♡

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. Démontrer que u est une homothétie.

Exercice 8. [⋆]

Soit E un K-espace vectoriel. On note $\mathscr{C}(E)$ le commutant de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E. Démontrer que $\mathscr{C}(E)$ est l'ensemble des homothéries vectorielles de E. *Indication : Pour un vecteur $x \in E$ donné, on pourra considérer une projection sur* $\operatorname{Vect}(x)$ *et utiliser le résultat de l'exercice 7.*

Exercice 9. [⋆]

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $f \circ g = \operatorname{Id}_F$. Démontrer que $g \circ f$ est une projection de E et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 10. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q des projections telles que $pq = 0$. On pose $r = p + q - qp$.

1. Démontrer que r est une projection.
2. Démontrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
3. Démontrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Exercice 11. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Démontrer que $p \circ u = u \circ p$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Exercice 12. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux scalaires α et β distincts tels que

$$(u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}.$$

1. Démontrer que $\operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
2. Démontrer que $(u - \beta \operatorname{Id}_E)(u - \alpha \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}$ et en déduire que $\operatorname{Im}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E) = E$.
4. On note p la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ et q la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
   a) Que dire de pq, de qp et de $p + q$?
   b) Démontrer que $u = \alpha p + \beta q$.
   c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
   d) On suppose $\alpha\beta \neq 0$. Démontrer que u est bijective et calculer u^m pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13. [∘]

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Démontrer que $\varphi : P \longmapsto P - AP''$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 14. [∘]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant une symétrie.

Exercice 15. [○]

$\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 16. [○]

Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, déterminer un supplémentaire du sous-espace

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Exercice 17. [⋆]

Soient E un K-espaces vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $k \in I$, on note e_k^* la k-ème *forme coordonnée* définie par

$$e_k^* \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i & \longmapsto & \lambda_k \end{array} \right.$$

où $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i\in I}$ (avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$).

1. Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est libre.
2. a) On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille finie (on dit alors que E est de dimension finie). Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est une base de E^*, appelée *base duale* de $(e_i)_{i\in I}$.

   b) Lorsque $(e_i)_{i\in I}$ est une famille infinie, démontrer que $(e_i^*)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. [$\circ$]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.
2. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre alors $(e_i)_{i\in I}$ est libre.
3. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de F.
4. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
5. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ alors $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.
6. Si $u^2 = \operatorname{Id}_E$, alors $u = \pm \operatorname{Id}_E$.
7. Si $u^2 = \operatorname{Id}_E$, alors il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \pm x$.

Exercice 2. [$\circ$]

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,1,1)$.

1. Qu'est-ce qui justifie l'existence et l'unicité de f ?
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f(x,y)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3. [$\star$]

On note E l'espace vectoriel des suites complexes périodiques et E_0 le sous ensemble de E constitué des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1} = 0$ où T est une période de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Enfin, on considère Δ l'application définie par

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que E_0 est bien défini et que c'est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) \oplus E_0$.
3. Démontrer que Δ réalise un endomorphisme de E et préciser son noyau et son image.

Exercice 4. [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Démontrer que $g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} g$.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 5. [$\circ$]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Démontrer que $\big(\operatorname{Ker}(g\circ f) \subset \operatorname{Ker} f\big) \iff (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\})$.
2. Démontrer que $\big(\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g\circ f)\big) \iff (\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F)$.

Exercice 6. [○]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On dit que $E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$ est une *suite exacte* si et seulement si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

1. Que peut-on dire alors de $g \circ f$?
2. Que signifie le fait que $\{0\} \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$ soit une suite exacte ?
3. Que signifie le fait que $E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} \{0\}$ soit une suite exacte ?

Exercice 7. [⋆] ♡

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. Démontrer que u est une homothétie.

Exercice 8. [⋆]

Soit E un K-espace vectoriel. On note $\mathscr{C}(E)$ le commutant de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E. Démontrer que $\mathscr{C}(E)$ est l'ensemble des homothéries vectorielles de E. *Indication : Pour un vecteur $x \in E$ donné, on pourra considérer une projection sur* $\operatorname{Vect}(x)$ *et utiliser le résultat de l'exercice 7.*

Exercice 9. [⋆]

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $f \circ g = \operatorname{Id}_F$. Démontrer que $g \circ f$ est une projection de E et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 10. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q des projections telles que $pq = 0$. On pose $r = p + q - qp$.

1. Démontrer que r est une projection.
2. Démontrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
3. Démontrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Exercice 11. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Démontrer que $p \circ u = u \circ p$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Exercice 12. [⋆]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux scalaires α et β distincts tels que

$$(u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}.$$

1. Démontrer que $\operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
2. Démontrer que $(u - \beta \operatorname{Id}_E)(u - \alpha \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}$ et en déduire que $\operatorname{Im}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E) = E$.
4. On note p la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ et q la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
   a) Que dire de pq, de qp et de $p + q$?
   b) Démontrer que $u = \alpha p + \beta q$.
   c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
   d) On suppose $\alpha\beta \neq 0$. Démontrer que u est bijective et calculer u^m pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13. [○]

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Démontrer que $\varphi : P \longmapsto P - AP''$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 14. [○]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant une symétrie.

Exercice 15. [$\circ$]

$\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 16. [$\circ$]

Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, déterminer un supplémentaire du sous-espace

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Exercice 17. [$\star$]

Soient E un K-espaces vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $k \in I$, on note e_k^* la k-ème *forme coordonnée* définie par

$$e_k^* \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i & \longmapsto & \lambda_k \end{array} \right.$$

où $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i\in I}$ (avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$).

1. Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est libre.
2. a) On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille finie (on dit alors que E est de dimension finie). Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est une base de E^*, appelée *base duale* de $(e_i)_{i\in I}$.
   b) Lorsque $(e_i)_{i\in I}$ est une famille infinie, démontrer que $(e_i^*)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.