

Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths ULM
- *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

Enoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid telles que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On pose $\varepsilon > 0$

- 1) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon \mid S_{2n} = 0\right)$
- 2) Améliorer la vitesse de convergence trouvée précédemment en utilisant l'espérance conditionnelle.

Exercice 2 :

Trouver tous les réels c tels qu'il existe une fonction deux fois dérivables telle que

$$\begin{aligned} f'(x) &> f(x) + c \\ f''(x) &> f'(x) + c \end{aligned}$$

pour tout réel x .

Remarques sur l'oral

Examinateur très gentil qui propose des chocolats, de l'eau "plus ou moins fraîche", la clim et qui s'excuse pour le retard. L'oral a pris la forme d'un véritable dialogue très agréable qui en faisait presque oublier que j'étais en train de passer un oral...

Il commence par me tendre un papier sur lequel est écrite la question 1) de l'exercice 1. Une majoration grossière mais simplificatrice et un coup d'asymptotique avec Stirling et on trouve que la proba est en $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. La deuxième question était guidée : il m'explique que l'on va poser la variable " S_n sachant $S_{2n} = 0$ " et il me demande de calculer son espérance. Je suis un peu déconcerté par la variable que je manipule... Certaines indépendances disparaissent mais on peut quand même tout calculer. Il me demande plusieurs fois de réexpliquer des raisonnements pour être sûr que je sais ce que je fais, surtout lorsque vient le moment où il faut parler de $S_{2n} - X_i - X_j$ et de S_{2n-2} et dire que c'est pas pareil mais que c'est pas grave... Une fois qu'on a tout pour faire les calculs, il me dit qu'il reste une étape qui est de tout mettre ensemble et appliquer Tchebychev en vérifiant qu'on peut, qu'on va pas faire ça et qu'on va plutôt passer à de l'analyse.

Je commence par transformer les inégalités en équations différentielles. Il me stoppe et me demande si pour c négatif ça marche. Je réponds que oui si $c < 0$ en considérant l'exponentielle. "Et pour $c = 0$?". Je mets un peu plus de temps à voir que $x \mapsto \exp(2x)$ marche. Puis il me demande pourquoi les exponentielles ne marchent pas si $c > 0$, il faut regarder en $-\infty$. Il m'autorise à reprendre mon

raisonnement initial et à rajouter l'hypothèse que f est C^2 et non D^2 . On résoud les équa diff et en $-\infty$ on a un problème. Il me demande comment passer au cas où f est D^2 , quel théorème on peut utiliser. Je parle du TAF, il me demande comment on le prouve, je tente un "le TAF c'est Rolle penché", il accepte et l'oral est fini.