SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1. [◦]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k^2 + n + 3), \qquad T = \sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3.$$

Exercice 2. [⋆]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant l'astuce de Binet : $1 = (k+p+1) - k - p$, calculer la somme

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!}.$$

Exercice 3. [◦]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'identitié $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 4. [◦]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2.$$

Exercice 5. [◦]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $b \neq 0$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} a^k\, 2^{3k}\, b^{-k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1}.$$

Exercice 6. [◦]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S = \sum_{i=0}^{23}\binom{23}{i}(-1)^i 2^{23-i}, \qquad T_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i}.$$

Exercice 7. [⋆]
Soit $n \geqslant 1$. On pose

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. En déduire P_n et I_n.

Exercice 8. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}.$$

À l'aide du changement d'indice $\ell = 2n+1-k$, déterminer une nouvelle expression de S_n puis en déduire la valeur de S_n.

Exercice 9. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p \binom{n}{k}$$

1. Calculer $S_0(n)$.
2. Calculer $S_1(n)$ de deux manières : avec la formule du pion puis avec une fonction génératrice.
3. Même question avec $S_2(n)$. *Indication :* $k^2 = k(k-1) + k$ *(c'est du Binet !)*

Exercice 10. [∘]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$. Démontrer que $a^n - b^n \geqslant nb^{n-1}$.
2. En déduire que si $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est une solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, alors $x \geqslant n$ et $y \geqslant n$. *En réalité, cette équation n'a pas de solution dans* $(\mathbb{N}^*)^3$ *dès que* $n \geqslant 3$ mais c'est un tantinet plus difficile à démontrer ;-)

Exercice 11. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} [(k+1)^5 - k^5].$$

déterminer l'expression de la quatrième somme d'Euler : $E_4(n) = 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

Proposer une démarche permettant de déterminer $E_5(n) = 0^5 + 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$.

Exercice 12. [⋆]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

1. En utilisant les nombres complexes, calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx).$$

2. Nous démontrerons dans l'exercice 21 que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(z-1)^2}.$$

   À l'aide de ce résultat, calculer

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} k\cos(2kx) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} k\sin(2kx).$$

Exercice 13. [∘]

Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, donner une expression factorisée de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + 2kb).$$

Exercice 14. [$\star$]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer
$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
2. Calculer
$$\mathfrak{C}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \sin(kx).$$

Exercice 15. [$\circ$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, calculer
$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}\cdot$$

Exercice 16. [$\star$]

En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, on a $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}\cdot$$

Exercice 17. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$$

Indication : On utilisera la dérivée d'une fonction génératrice, que l'on primitivera à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 18. [$\bigstar$]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{q-1} \left\lfloor x + \frac{k}{q} \right\rfloor = \lfloor qx \rfloor .$$

Exercice 19. [$\star$]

Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k}{\ell+1}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant m}} p(q^2+1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \leqslant i \leqslant j+p}} (i-j)^2.$$

Exercice 20. [$\circ$]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant \ell \leqslant m}} \binom{n}{k} \ell^k.$$

Exercice 21. [$\star$]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. En utilisant l'identité $k = \sum_{\ell=1}^{k} 1$, démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(z-1)^2}\cdot$$

Retrouver ce résultat en calculant $(z-1)\sum_{k=1}^{n} kz^k$.

Exercice 22. [∘]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max\{i;j\}$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min\{i;j\}$.

Exercice 23. [⋆]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

1. Démontrer l'identité de Lagrange :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right).$$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Exercice 24. [⋆]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} (a_\ell - a_k)(b_\ell - b_k) = n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

2. En déduire que, si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, on a l'inégalité de Tchebychev :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Autrement dit, si deux séries de n nombres sont rangées par ordre croissant, le produit de leurs moyennes est inférieur ou égal à la moyenne de leurs produits.

Exercice 25. [∘]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\cdot$

Exercice 26. [⋆]

Soit $n \geqslant 2$. En remarquant que $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$, simplifier l'expression de

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}\cdot$$

Exercice 27. [∘]

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$ à l'aide de factorielles. Que reconnait-on ?

Exercice 28. [⋆]

Soit $n \geqslant 1$. Calculer

$$P_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

Exercice 29. [∘]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0;1]$. Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$