

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. [o]

Soient E, F deux K -espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F .

1. Soient A un sous-espace de E et B un sous-espace de F . Démontrer que

$$f^{-1}(f(A)) = A + \text{Ker } f \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im } f.$$

2. Soient A_1, A_2 deux sous-espaces de E . Démontrer que

$$(f(A_1) \subset f(A_2)) \iff (A_1 + \text{Ker } f \subset A_2 + \text{Ker } f).$$

Exercice 2. [★]

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Démontrer que f est injectif si et seulement si, pour tous sous-espaces vectoriels U et V en somme directe, $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe.

Exercice 3. [★]

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $fg - gf = \text{Id}_E$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$.
2. Démontrer que la famille $(g^k)_{k \geq 0}$ est libre.

Exercice 4. [★]

Soient p et q deux projecteurs d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E tels que $p + q$ soit un projecteur.

1. Démontrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si $pq = qp = \tilde{0}$.
2. Dans ce cas, démontrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Exercice 5. [★]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel.

1. Soit ℓ une forme \mathbb{C} -linéaire sur E . Démontrer que $\Re(\ell)$ est une forme \mathbb{R} -linéaire sur E .
2. Soit m une forme \mathbb{R} -linéaire sur E . Démontrer qu'il existe une unique forme \mathbb{C} -linéaire ℓ sur E telle que $m = \Re(\ell)$.

Exercice 6. [★]

Soit $n \geq 2$. On considère \mathcal{H} un hyperplan du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que \mathcal{H} est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathcal{H}, AB \in \mathcal{H}$. On souhaite démontrer que $I_n \in \mathcal{H}$. Pour cela, on entame un raisonnement par l'absurde en supposant que $I_n \notin \mathcal{H}$.

Pour $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.

1. Que peut-on dire des sous-espaces \mathcal{H} et $\text{Vect}(I_n)$? En déduire que si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $A^2 \in \mathcal{H}$ alors $A \in \mathcal{H}$.
2. Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$. Démontrer que $E_{i,j} \in \mathcal{H}$.
3. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Démontrer que $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.
4. Aboutir à une absurdité et conclure. On a ainsi démontré que \mathcal{H} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.