OUTILS D'ANALYSE

A. Dérivation

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Sans vous soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées des fonctions :

$$f(x) = \ln\sqrt{|\tan x|}, \qquad g(x) = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}, \qquad h(x) = \frac{1}{2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$

On trouve

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(2x)} \qquad g'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}} \qquad h'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^3}$$

♦ ***Exercice 2.*** [○] (Dérivée logarithmique)

1. Calculer la dérivée de la fonction
$$f(x) = \frac{x^2(\ln x + 1)(x^2+3)(\mathrm{e}^{-x} + 2x)\sqrt{x}\tan x}{(17\,\mathrm{e}^{2x} + 1)(x^6 + 5x^4 + 2x^2 + 203)}.$$
Si vous n'y arrivez pas, commencez par faire la question suivante.
2. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Sur le sous-ensemble de $\mathscr{D}$ où f ne s'annule pas, on définit la dérivée logarithmique f^* de f par la formule $f^* = f'/f$.
Démontrer que $(fg)^* = f^* + g^*$ et $(f/g)^* = f^* - g^*$.
3. Reprendre la question 1.

1. Beurk !
2. On a
$$(fg)^* = \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = f^* + g^*$$
et
$$\left(\frac{f}{g}\right)^* = \frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{g}{f}\,\frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = f^* - g^*.$$
Donc
$$\boxed{(fg)^* = f^* + g^* \qquad \text{et} \qquad (f/g)^* = f^* - g^*.}$$
3. On a
$$\begin{aligned} f^*(x) \quad = \quad & \frac{2x}{x^2} + \frac{1/x}{\ln x + 1} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{-\mathrm{e}^{-x} + 2}{\mathrm{e}^{-x} + 2x} + \frac{1/(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \\ & - \frac{34\,\mathrm{e}^{2x}}{17\,\mathrm{e}^{2x} + 1} - \frac{6x^5 + 20x^3 + 4x}{x^6 + 5x^4 + 2x^2 + 203}, \end{aligned}$$
et
$$f'(x) = f^*(x) f(x).$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\circ$]
Étudier la fonction
$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

On a
$$f(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left[1;+\infty\right[,$$
donc
$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty;-1\right[\cup \left[1;+\infty\right[.}$$

La fonction f est continue par théorèmes généraux de continuité.

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsque
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[.$$

En 1, on a une incertitude de dérivabilité.

Pour tout $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x\frac{\dfrac{1(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \\ &= \frac{(x+1)^2\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)+x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \\ &= \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}. \end{aligned}$$

On a
$$\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty,$$
donc la fonction f n'est pas dérivable en 1 et admet en ce point une demi-tangente verticale.

Donc
$$\boxed{\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[, \qquad f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}.}$$

Pour $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$, on a
$$f'(x) \geqslant 0 \iff x^2+x-1 \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty;-\varphi\right] \cup \left[1;\infty\right[,$$
où
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6$$

donc

x	$-\infty$		$-\varphi$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx -3,3$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

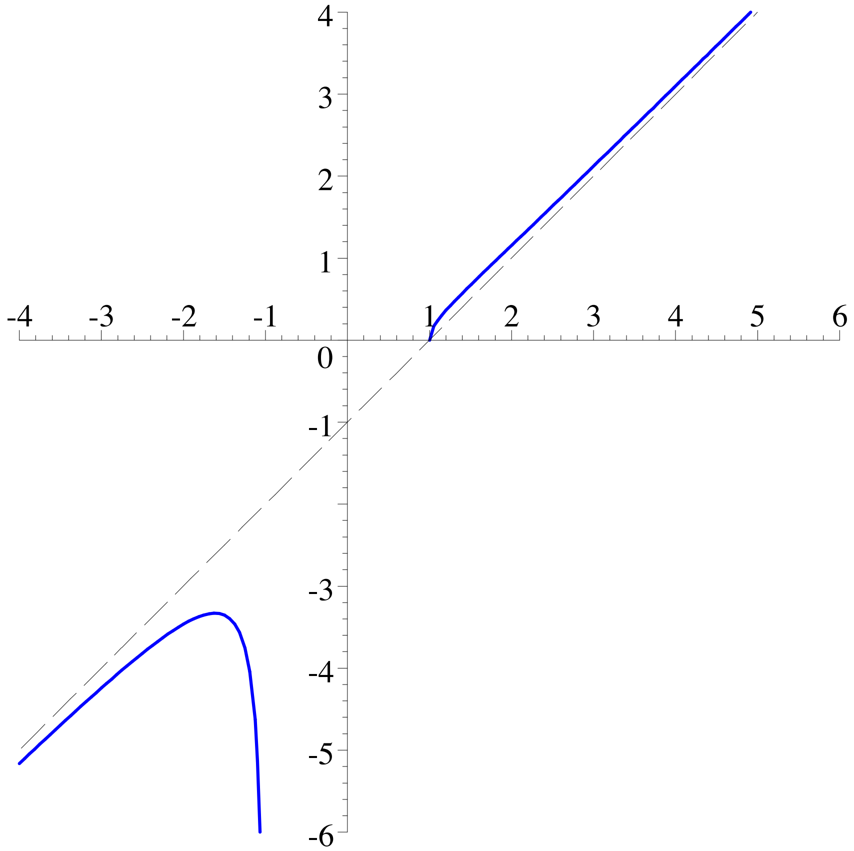
et

$$f(x) - x = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x = x\left[\left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)^{1/2} - 1\right] \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x\frac{1}{2}\frac{-2}{x+1} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -1,$$

donc

$$\boxed{f \text{ admet en } -\infty \text{ et } +\infty \text{ la droite } y = x-1 \text{ comme asymptote.}}$$

On obtient



♦ ***Exercice 4.*** [∘]

Dans toutes les questions de cet exercice, on pourra utiliser la fonction $f : x \longmapsto (\ln x)/x$.

1. Qui est le plus grand de e^{π} et π^{e} ?
2. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$.
4. Résoudre l'équation $n^m = m^n$ où m et n sont deux entiers naturels non nuls distincts.

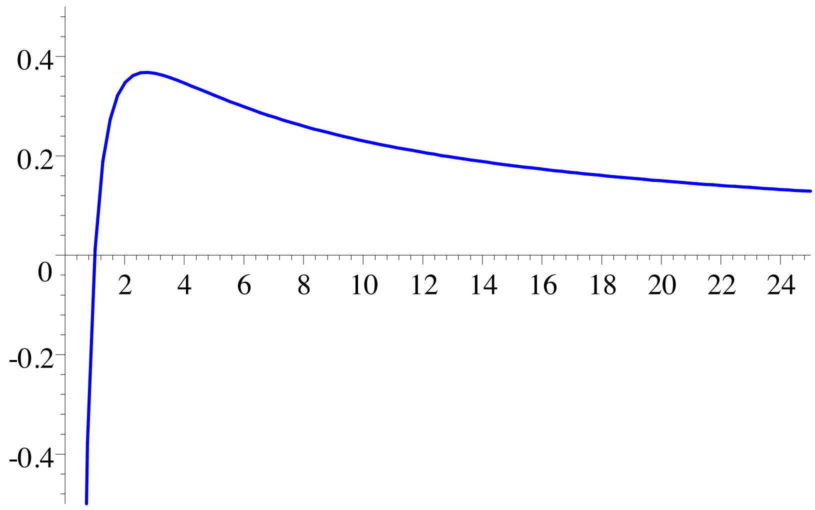
Étudions la fonction f. Elle est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux et l'on a

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Donc $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $0 < x < \mathrm{e}$, ce qui donne

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1/\mathrm{e}$	↘	0

Graphiquement, on obtient



1. A faire
2. A faire
3. A faire
4. On a

$$(n^m = m^n) \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{m \ln n} = \mathrm{e}^{n \ln m}) \Leftrightarrow (m \ln n = n \ln m) \Leftrightarrow \left(\frac{m}{\ln m} = \frac{n}{\ln n}\right) \Leftrightarrow \big(f(m) = f(n)\big),$$

donc résoudre l'équation $n^m = m^n$ revient à rechercher les valeurs de f qui admettent exactement deux antécédents.
On constate, à l'aide du tableau de variations de f que l'équation $f(x) = y$ admet exactement deux solutions si, et seulement si, $y \in]0; 1/\mathrm{e}[$ et que, dans ce cas, l'une de ces deux solutions appartient à l'intervalle $]1; \mathrm{e}[$ et l'autre à l'intervalle $]\mathrm{e}; +\infty[$.
Par conséquent, on sait que, si $n < m$, alors $n \in]1; \mathrm{e}[$, c'est-à-dire $n = 2$. On constate alors que $m = 4$. Donc

$$\boxed{(n, m) = (2, 4) \qquad \text{ou} \qquad (n, m) = (4, 2).}$$

♦ ***Exercice 5.*** [∘]
Étudier la fonction
$$f(t) = \cos(t) - \cos^4(t).$$

Données : Si α désigne l'angle tel que $\cos(\alpha) = \sqrt[3]{2}/2$, alors $\alpha \approx 0,9$ et $f(\alpha) \approx 0,5$

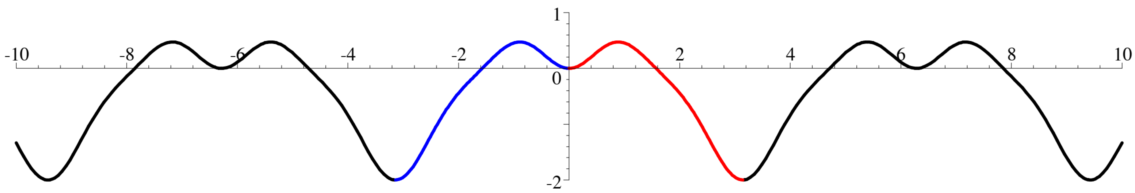
Il est clair que
$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}.$$

On constate que la fonction f est 2π-périodique ce qui permet de ramener l'étude de f sur $[-\pi; \pi]$. Par ailleurs,
$$f(-t) = \cos(t) - \cos^4(t) = f(t),$$
donc on peut se contenter d'étudier f sur $[0; \pi]$.

La fonction f est clairement dérivable sur $[0; \pi]$ et, pour tout $t \in [0; \pi]$, on a
$$f'(t) = -\sin(t) + 4\sin(t)\cos^3(t) = \big(4\cos^3(t) - 1\big)\sin(t).$$
Pour tout $t \in [0; \pi]$, on a donc
$$\begin{aligned} f'(t) \geqslant 0 \quad &\iff \quad \big(4\cos^3(t) - 1\big)\sin(t) \geqslant 0 \\ &\iff \quad 4\cos^3(t) - 1 \geqslant 0 \qquad \text{car } \sin(t) \geqslant 0 \\ &\iff \quad \cos^3(t) \geqslant 1/4 \\ &\iff \quad \cos(t) \geqslant \sqrt[3]{2}/2 \\ &\iff \quad t \in [0; \alpha] \qquad \text{où } \alpha = \arccos(\sqrt[3]{2}/2) \end{aligned}$$
Donc

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

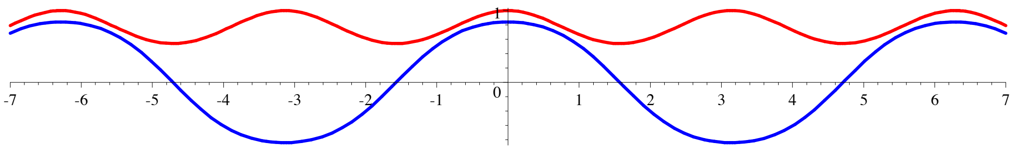
On obtient



♦ ***Exercice 6.*** [⋆]
1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leqslant x$ avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big)$.

1. Pour $x \in]1; +\infty[$, l'inégalité $\sin(x) < x$ est évidente puisque $\sin(x) \leqslant 1$ et $1 < x$.
   Sur $[0; 1]$, on étudie la fonction $x \longmapsto x - \sin(x)$ pour démontrer que l'inégalité est également vraie avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.
   En conclusion, on a
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x \qquad \text{avec égalité si, et seulement si, } x = 0.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \cos\big(\sin(x)\big) - \sin\big(\cos(x)\big).$$
La fonction f étant 2π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[-\pi;\pi]$. Comme elle est également paire, on ramène son étude sur $[0;\pi]$.
Sur $[\pi/2;\pi]$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 0$ et $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $\cos\big(\sin(x)\big) > 0$ et $\sin\big(\cos(x)\big) \leqslant 0$, ce qui justifie que $f(x) > 0$.
Sur $[0;\pi/2[$, on a $\cos(x) > 0$ donc $\sin\big(\cos(x)\big) < \cos(x)$ d'après la question précédente. Par ailleurs, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x < \pi/2$ (toujours d'après la question précédente) et cos est décroissante sur $[0;\pi/2[$, donc $\cos\big(\sin(x)\big) \geqslant \cos(x)$. En mettant bout à bout les inégalités obtenues, il vient $\sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big)$. Donc $f(x) > 0$.
En conclusion, on a
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big).}$$
Graphiquement, on a



B. Primitivation et intégration

♦ **Exercice 7.** [○]

1. Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :
$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}, \qquad h(x) = \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x},$$
$$i(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln\big(\ln(x)\big)}, \qquad j(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}, \qquad k(x) = \operatorname{th}(x),$$
$$\ell(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad m(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}, \qquad n(x) = \tan^2(x), \qquad p(x) = (1+\tan x)^2.$$
2. Calculer
$$I = \int_0^2 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}, \qquad K = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}, \qquad L = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La fonction f est de la forme $2u'\sqrt{u}$ où $u(x) = \sqrt{x}+1$, donc
$$\boxed{F(x) = \frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2} + c}$$
La fonction g est de la forme $u'/\sqrt{u}$ où $u(x) = 2+\sin x$, donc
$$\boxed{G(x) = 2\sqrt{2+\sin x} + c}$$
La fonction h est de la forme $u'u^2$ où $u(x) = \ln x$, donc
$$\boxed{H(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + c}$$

La fonction i est de la forme u'/u avec $u(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$, donc

$$\boxed{I(x) = \ln\big|\ln\big(\ln(x)\big)\big| + c}$$

On a

$$j(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}} = 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$$

donc la fonction j est de la forme $2u'/u$ avec $u(x) = \sqrt{x}+1$, ce qui donne (comme $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x}+1 > 0$)

$$\boxed{J(x) = 2\ln(\sqrt{x}+1) + c}$$

La fonction k est de la forme u'/u avec $u(x) = \mathrm{ch}(x)$, donc (comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > 0$)

$$\boxed{K(x) = \ln\big(\mathrm{ch}(x)\big) + c}$$

On a

$$\ell(x) = x\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

donc

$$\boxed{L(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.}$$

On a

$$m(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} = \sqrt{x}+\sqrt{x-1},$$

donc

$$\boxed{M(x) = \frac{2}{3}\Big(x\sqrt{x} + (x-1)\sqrt{x-1}\Big) + c.}$$

On a

$$n(x) = 1 + \tan^2(x) - 1,$$

donc

$$\boxed{N(x) = \tan(x) + x + c.}$$

On a

$$p(x) = 1 + \tan^2(x) + 2\tan(x),$$

donc

$$\boxed{P(x) = \tan(x) - 2\ln|\cos(x)| + c.}$$

2. On a

$$I = \int_0^2 \mathrm{e}^{x/2}\ \mathrm{d}x = \big[2\,\mathrm{e}^{x/2}\big]_0^2 = 2\,\mathrm{e} - 2.$$

On a

$$J = 2\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}\mathrm{d}x = 2\big[\tan(\sqrt{x})\big]_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} = 2\Big(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}\Big) = 2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

On a

$$K = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \Big[\ln|\sin x|\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln(\sqrt{3}/2) - \ln(1/2) = \ln\sqrt{3}.$$

On a

$$L = \int_0^1 \mathrm{e}^x \,.\, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x = \big[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\big]_0^1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}\,.$$

♦ ***Exercice 8.*** [∘]
Calculer, en fonction du nombre réel a, l'intégrale suivante :

$$I_a = \int_0^1 |a - t| \,\mathrm{d}t.$$

A faire.

♦ ***Exercice 9.*** [∘]
Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad g(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad h(x) = \big(\ln(x)\big)^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int^x (t^2-1)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[(t^2-1)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]^x - \int^x 2t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= (x^2-1)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int^x t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= (x^2-1)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left[t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]^x + \int^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= (x^2-1)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + c \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x^2 - 2x - 1) + c.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int^x t^3\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int^x t^2.t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t^2\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{-2}\right]^x - \int^x 2t\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + \int^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{-2} + c.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int^x \big(\ln(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t\big(\ln(t)\big)^2\right]^x - \int^x t.\frac{2}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x\big(\ln(x)\big)^2 - 2\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x\big(\ln(x)\big)^2 - 2x\ln(x) + 2x + c.
\end{aligned}$$

♦ ***Exercice 10.*** [⋆]
Sans vous soucier des ensembles de primitivation, déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = \cos\big(\ln(x)\big), \qquad g(x) = \mathrm{sh}(x)\sin(x)$$

de deux manières : en utilisant des primitivations par parties et en utilisant les complexes.

1. Pour tout $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int^x \cos\big(\ln(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

- Première méthode : En utilisant des primitivations par parties

  On considère les fonctions u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ définies, pour tout $t > 0$, par $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = \cos\big(\ln(t)\big)$ et $v'(t) = -(1/t)\sin\big(\ln(t)\big)$. La formule de primitivation par parties nous dit alors que, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} F(x) &= \big[t\cos\big(\ln(t)\big)\big]^x - \int^x t\Big(-\frac{1}{t}\sin\big(\ln(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= x\cos\big(\ln(x)\big) + \int^x \sin\big(\ln(t)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

  On recommence en considèrant les fonctions u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ définies, pour tout $t > 0$, par $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = \sin\big(\ln(t)\big)$ et $v'(t) = (1/t)\cos\big(\ln(t)\big)$. La formule de primitivation par parties nous dit alors que, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} F(x) &= x\cos\big(\ln(x)\big) + \big[t\sin\big(\ln(t)\big)\big]^x - \int^x t\Big(\frac{1}{t}\cos\big(\ln(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= x\cos\big(\ln(x)\big) + x\sin\big(\ln(x)\big) - F(x), \end{aligned}$$

  donc
$$\boxed{\forall x > 0, \qquad F(x) = \frac{x}{2}\cos\big(\ln(x)\big) + \frac{x}{2}\sin\big(\ln(x)\big) + \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

- Deuxième méthode : En utilisant les complexes

  Pour tout $x > 0$, on a
$$\begin{aligned} F(x) &= \Re\mathrm{e}\Big(\int^x \mathrm{e}^{i\ln(t)}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\int^x t^i\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\frac{x^{i+1}}{i+1}\Big) \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\frac{(1-i)x^{i+1}}{2}\Big) \\ &= \frac{x}{2}\Re\mathrm{e}\Big((1-i)\big(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)\big)\Big) \\ &= \frac{x}{2}\Big(\cos\big(\ln(x)\big) + \sin\big(\ln(x)\big)\Big), \end{aligned}$$

  donc
$$\boxed{\forall x > 0, \qquad F(x) = \frac{x}{2}\cos\big(\ln(x)\big) + \frac{x}{2}\sin\big(\ln(x)\big) + \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

2. A faire.

♦ ***Exercice 11.*** [○]

1. Calculer
$$A = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\sqrt{1+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

2. En utilisant le changement de variable indiqué, calculer
$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (u = \pi - t) \qquad\qquad J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}} \quad (u = \sqrt{t^2+t+1} - t)$$
$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^{1975}(t)} \quad (u = \pi/2 - t).$$

1. $A]$ Effectuons le changement de variable $u = \tan(x)$.
Si $x = 0$, on a $u = 0$ et si $x = \pi/3$, on a $u = \sqrt{3}$.
Le changement de variable $x \longmapsto \tan(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/3]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \tan^2(x) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\cdot$$

On a

$$\tan(x)\sqrt{1+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x = u\sqrt{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

On obtient

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\sqrt{1+u^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{4} - 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A = 1.}$$

$B]$ Effectuons le changement de variable $u = \cos(t)$.
Si $t = 0$, on a $u = 1$ et si $x = \pi$, on a $u = -1$.
Le changement de variable $t \longmapsto \cos(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin(t) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin(t)}\cdot$$

On a

$$\frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{\sin(t)}\Big) = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\cdot$$

On obtient

$$B = \int_1^{-1}\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\Big) = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\cdot$$

▷ Si l'on connaît la fonction arctan, on obtient alors

$$B = \big[\arctan(u)\big]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

▷ Si l'on ne connaît pas la fonction arctan (c'est le cas en ce début d'année), on effectue un nouveau changement de variable en posant $u = \tan(v)$.
Si $u = -1$, on a $v = -\pi/4$ et si $u = 1$, on a $u = \pi/4$.
Le changement de variable $v \longmapsto \tan(v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/4;\pi/4]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = 1 + \tan^2(v) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin(t)}\cdot$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{d}v.$$

On obtient

$$B = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

En conclusion,

$$\boxed{B = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

2. $I]$ Effectuons le changement de variable $u = \pi - t$.
Si $t = 0$, on a $u = \pi$ et si $t = \pi$, on a $u = 0$.
Le changement de variable $t \longmapsto \pi - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u.$$

On a

$$\frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}(-\mathrm{d}u) = -\frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

On obtient

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \frac{u\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \pi B - I \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{\pi}{2}B,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}\cdot}$$

$J]$ Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t^2+t+1} - t$.
Si $t = 0$, on a $u = 1$ et si $t = 1$, on a $u = \sqrt{3} - 1$.
Le changement de variable $t \longmapsto \sqrt{t^2+t+1} - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t+1}} - 1 = \frac{2(t-\sqrt{t^2+t+1})+1}{2\sqrt{t^2+t+1}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{t^2+t+1}}{1-2u}\,\mathrm{d}u.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,\frac{2\sqrt{t^2+t+1}}{1-2u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-2u}\cdot$$

On obtient

$$J = \int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-2u} = \big[-\ln|1-2u|\big]_1^{\sqrt{3}-1} = -\ln|3-2\sqrt{3}| + \ln 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{J = -\ln(2\sqrt{3}-3).}$$

$K]$ Effectuons le changement de variable $u = \pi/2 - t$.
Si $t = 0$, on a $u = \pi/2$ et si $t = \pi/2$, on a $u = 0$.
Le changement de variable $t \longmapsto \pi/2 - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$ et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^{1975}(t)} = \frac{-\mathrm{d}u}{1+\tan^{1975}(\pi/2-u)} = \frac{-\mathrm{d}u}{1+\dfrac{1}{\tan^{1975}(u)}} = -\frac{\tan^{1975}(u)}{\tan^{1975}(u)+1}\,\mathrm{d}u.$$

On obtient

$$\begin{aligned} K &= -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\tan^{1975}(u)}{\tan^{1975}(u)+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{1975}(u)}{\tan^{1975}(u)+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{1975}(u)+1-1}{\tan^{1975}(u)+1}\,\mathrm{d}u \qquad \text{Binet !} \\ &= \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan^{1975}(u)+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{2} + K, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{K = \frac{\pi}{4}\cdot}$$

♦ *Exercice 12.* [⋆]
En effectuant séparément deux changements de variables trigonométriques, calculer

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}}\cdot$$

- Posons $t = \sin(u)$.
  Nouvelles bornes : Si $t = 0$, on a $u = 0$ et si $t = 1$, on a $u = \pi/2$.
  Nouvelle différentielle : Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$ et l'on a
  $$\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u.$$
  Nouvel intégrant : On a
  $$\frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}} = \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{1-\sin^2(u)}}\,\mathrm{d}u = \frac{\cos(u)}{\sin(u) + |\cos(u)|}\,\mathrm{d}u = \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \cos(u)}\,\mathrm{d}u.$$
  Nouvelle expression de l'intégrale : On obtient
  $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \cos(u)}\,\mathrm{d}u$$
- Posons $t = \cos(u)$.
  Nouvelles bornes : Si $t = 0$, on a $u = \pi/2$ et si $t = 1$, on a $u = 0$.
  Nouvelle différentielle : Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$ et l'on a
  $$\mathrm{d}t = -\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$
  Nouvel intégrant : On a
  $$\frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}} = \frac{-\sin(u)}{\cos(u) + \sqrt{1-\cos^2(u)}}\,\mathrm{d}u = \frac{-\sin(u)}{\cos(u) + |\sin(u)|}\,\mathrm{d}u = -\frac{\sin(u)}{\cos(u) + \sin(u)}\,\mathrm{d}u.$$
  Nouvelle expression de l'intégrale : On obtient
  $$I = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sin(u)}{\cos(u) + \sin(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{\cos(u) + \sin(u)}\,\mathrm{d}u.$$
- On constate alors que
  $$\begin{aligned} I + I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \cos(u)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{\cos(u) + \sin(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u) + \sin(u)}{\sin(u) + \cos(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$
  ce qui donne
  $$\boxed{I = \frac{\pi}{4}\cdot}$$

C. Equations différentielles à coefficients constants

♦ *Exercice 13.* [∘] (Circuit RL)
Un circuit électrique se compose en série d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R, alimentées par un générateur de force électromotrice V. On note $i(t)$ l'intensité du courant à l'instant t. On sait alors que i vérifie l'équation différentielle $Li' + Ri = V$.

Résoudre cette équation sachant que $i(0) = 0$. Représenter le graphe de i.

A faire

♦ ***Exercice 14.*** [○] (Datation au carbone 14)

On note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 dans un échantillon de matière organique à l'instant t (évalué en années). La vitesse de désintégration de cet isotope radioactif du carbone étant proportionnelle à la quantité présente dans l'échantillon, on considère que y satisfait l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = -ky$$

où k est la constante de désintégration du carbone 14. On donne $k = 1,238 \times 10^{-4}$ an^{-1}.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de t, de k et du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 présents à l'instant $t = 0$.
2. On appelle *demi-vie* d'un élément radioactif le temps T au bout duquel la moitié des atomes de carbones se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À la mort de ceux-ci, l'assimilation de cet élément cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont découvert des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

A faire.

♦ ***Exercice 15.*** [○]

Résoudre les équations suivantes et préciser la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$:

$$y'' + 8y' + 15y = 30, \qquad y'' - 2y' + 5y = 5, \qquad y'' - 2y' + y = 1.$$

A faire

♦ ***Exercice 16.*** [○] (Circuit LC)

Un circuit électrique se compose en série d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, alimentés par un générateur de force électromotrice V. On note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t. On sait alors que q vérifie l'équation différentielle $LCq'' + q = VC$.

Résoudre cette équation sachant que $q(0) = 0$ et $q'(0) = 0$. Représenter le graphe de q.

A faire.

D. Fonctions de deux variables

♦ ***Exercice 17.*** [○]

Sans vous soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$f(x, y) = \sin(x/y) \qquad g(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

A faire.

♦ ***Exercice 18.*** [○] (Coefficients thermoélastiques d'un gaz)

On considère un gaz parfait, c'est-à-dire un gaz dont l'équation d'état est $PV = nRT$.

On appelle coefficients thermoélastiques les quantités α (coefficient de dilatation isobare), β (coefficient de variation de pression isochore) et χ (coefficient de compressibilité isotherme) définies par

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \qquad \beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \qquad \text{et} \qquad \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

où les indices désignent les variables laissées fixes au cours de la dérivation partielle.

Calculer les coefficients thermoélastiques et démontrer que $P\beta\chi = \alpha$.

On obtient, sans difficulté, que

$$\boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{T} \qquad \text{et} \qquad \chi = \frac{1}{P}.}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{P\beta\chi = \alpha.}$$