

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

✠ Exercice 1. [o]

Un dentiste arrache les dents de ses patients au hasard. On note n le nombre de ses patients et l'on suppose que tous ont exactement une dent malade (parmi les trente deux qu'ils possèdent) avant l'intervention des tenailles du praticien.

1. On note M_n le nombre de dents malades extraites à bon escient.
 - a) Déterminer la loi de la variable aléatoire M_n .
 - b) Combien le dentiste doit-il traiter de personnes (au minimum) pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6.
2. Le dernier client se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note S le nombre de dents saines que ce malheureux voit tomber des mâchoires de la redoutable paire de tenailles.
 - a) Déterminer la loi de S . Préciser son espérance et sa variance.
 - b) Donner la probabilité pour que client reparte entièrement édenté.

1. a) La variable M_n compte le nombre de succès (arracher une dent malade) dans une suite de n extractions indépendantes avec, à chaque fois, une probabilité de succès égale à $1/32$. Donc

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{32}\right).$$

- b) C'est

$$P(X = 0) = \left(\frac{31}{32}\right)^n.$$

- c) On cherche la plus petite valeur de n telle que

$$\begin{aligned} P(M_n \geq 1) &\geq 0,6 \\ \iff 1 - P(M_n = 0) &\geq 0,6 \\ \iff P(M_n = 0) &\leq 0,4 \\ \iff \binom{n}{0} \left(\frac{1}{32}\right)^0 \left(\frac{31}{32}\right)^n &\leq 0,4 \\ \iff n &\geq \frac{\ln 0,4}{\ln(31/32)} \approx 28,9 \end{aligned}$$

donc

le dentiste doit traiter au moins 29 patients pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6.

2. a) On a $S(\Omega) = \llbracket 0; 31 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1; 31 \rrbracket$, la probabilité d'arracher k dents saines puis une dent malade est égale à

$$P(S = k) = \frac{31}{32} \times \frac{30}{31} \times \dots \times \frac{32-k}{32-k+1} \times \frac{1}{32-k} = \frac{1}{32},$$

donc

$$S \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0; 31 \rrbracket).$$

Alors $S + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 32 \rrbracket)$, ce qui donne

$$E(S + 1) = \frac{1 + 32}{2} = \frac{33}{2} \quad \text{et} \quad V(S + 1) = \frac{32^2 - 1}{12} = \frac{341}{4},$$

d'où

$$E(S) = \frac{31}{2} \quad \text{et} \quad V(S) = \frac{341}{4}.$$

b) Dès lors,

$$\text{la probabilité que le patient reparte entièrement endenté est } P(S = 31) = \frac{1}{32}.$$

✂ **Exercice 2.** [★] (Temps d'attente lors de tirage sans remise)

Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X (respectivement Y) le nombre de boules sorties de l'urne au moment où l'on vient de tirer la première boule blanche (respectivement la seconde boule blanche). La variable X (respectivement Y) est le temps d'attente de la première (respectivement dernière) boule blanche.

1. Écrire la loi de X . En déduire une formule combinatoire.
2. Déterminer la loi de Y .
3. Déterminer $E(Y)$ puis $E(X)$.
4. Calculer la variance de X et Y .

Pour tout $j \in \llbracket 1; b+n \rrbracket$, on note B_j l'événement « tirer une boule blanche au j -ème tirage ».

1. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket.$$

Pour déterminer la loi, on propose deux méthodes :

- L'ensemble des tirages Ω est l'ensemble des combinaisons de b boules blanches parmi $b+n$ boules. On utilise la probabilité uniforme sur Ω puisque tous les tirages sont équiprobables.

On a

$$\text{card } \Omega = \binom{b+n}{b}.$$

Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Pour obtenir le cardinal du sous-ensemble A des tirages où la première boule blanche apparaît en k -ème position, il faut que :

- ▷ les $k-1$ premières positions soient occupées par des boules noires : 1 choix ;
- ▷ la k -ème position soit occupée par une boule blanche : 1 choix ;
- ▷ les $b-1$ autres boules blanches soient parmi les $n+b-k$ places restantes : $\binom{b+n-k}{b-1}$ choix ;
- ▷ les autres boules noires se placent sur les positions restantes : 1 choix.

Donc

$$\text{card } A = \binom{b+n-k}{b-1}.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{\binom{b+n-k}{b-1}}{\binom{b+n}{b}}.$$

- Pour tout $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\ &= P(\overline{B_1})P(\overline{B_2} | \overline{B_1}) \cdots P(\overline{B_{k-1}} | \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-2}})P(B_k | \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}}) \\ &= \frac{n}{b+n} \frac{n-1}{b+n-1} \cdots \frac{n-k+2}{b+n-k+2} \frac{b}{b+n-k+1} \\ &= b \frac{n!(b+n-k)!}{(n-k+1)!(b+n)!} \\ &= \frac{b!n!}{(b+n)!} \frac{(b+n-k)!}{(n-k+1)!(b-1)!}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{\binom{b+n-k}{b-1}}{\binom{b+n}{b}}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{b+n-k}{b-1}}{\binom{b+n}{b}} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{b+n-k}{b-1} = \binom{b+n}{b}.$$

En posant $p = b - 1$ et $q = b + n - 1$, on obtient

$$\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

2. On a

$$Y(\Omega) = \llbracket b; b+n \rrbracket.$$

L'ensemble des tirages Ω est l'ensemble des combinaisons de b boules blanches parmi $b+n$ boules. On utilise la probabilité uniforme sur Ω puisque tous les tirages sont équiprobables.

On a

$$\text{card } \Omega = \binom{b+n}{b}.$$

Soit $k \in \llbracket b; b+n \rrbracket$. Pour obtenir le cardinal du sous-ensemble B des tirages où la dernière boule blanche apparaît en k -ème position, il faut que :

- ▷ les $b+n-k$ dernières positions soient occupées par des boules noires : 1 choix ;
- ▷ la k -ème position soit occupée par une boule blanche : 1 choix ;
- ▷ les $b-1$ autres boules blanches soient parmi les $k-1$ places restantes : $\binom{k-1}{b-1}$ choix ;
- ▷ les autres boules noires se placent sur les positions restantes : 1 choix.

Donc

$$\text{card } B = \binom{k-1}{b-1}.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket b; b+n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{b+n}{b}}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=b}^{b+n} k \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{b+n}{b}} \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} b \frac{\binom{k}{b}}{\binom{b+n}{b}} && \text{formule du pion} \\ &= \frac{b}{\binom{b+n}{b}} \sum_{k=b}^{b+n} \binom{k}{b} \\ &= \frac{b}{\binom{b+n}{b}} \binom{b+n+1}{b+1} && \begin{array}{l} \text{formule combinatoire} \\ \text{de la première question} \end{array} \\ &= \frac{b(b+n+1)}{b+1} && \text{formule du pion,} \end{aligned}$$

donc

$$E(Y) = \frac{b(b+n+1)}{b+1}.$$

On constate que X et $b+n-Y$ ont la même loi (ce qui s'explique très bien en renversant l'échelle des temps...). Par suite, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= E(b+n-Y) \\ &= b+n-E(Y) \\ &= b+n-\frac{b(b+n+1)}{b+1} \\ &= \frac{b+n+1}{b+1}, \end{aligned}$$

donc

$$E(X) = \frac{b+n+1}{b+1}.$$

4. On a

$$\begin{aligned} E(Y(Y+1)) &= \sum_{k=b}^{b+n} k(k+1) \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{b+n}{b}} \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} b(b+1) \frac{\binom{k+1}{b+1}}{\binom{b+n}{b}} \\ &= \frac{b(b+1)}{\binom{b+n}{b}} \sum_{k=b}^{b+n} \binom{k+1}{b+1} \\ &= \frac{b(b+1)}{\binom{b+n}{b}} \binom{b+n+2}{b+2} \\ &= b(b+1) \frac{(b+n+2)(b+n+1)}{(b+2)(b+1)} \\ &= b \frac{(b+n+2)(b+n+1)}{b+2}. \end{aligned}$$

Comme

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y+1)) - E(Y) - E(Y)^2,$$

on a

$$V(Y) = b \frac{(b+n+2)(b+n+1)}{b+2} - \frac{b(b+n+1)}{b+1} - \left(\frac{b(b+n+1)}{b+1} \right)^2,$$

donc

$$V(Y) = \frac{bn(b+n+1)}{(b+2)(b+1)^2}.$$

Comme X et $b+n-Y$ ont la même loi, on a $V(X) = V(Y)$, c'est-à-dire

$$V(X) = \frac{bn(b+n+1)}{(b+2)(b+1)^2}.$$

✱ **Exercice 3.** [★] (Inégalité de Chernoff)

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé fini.

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Démontrer que, pour tout $d \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité de Chernoff :

$$P(X \geq d) \leq \inf_{t>0} \frac{E(e^{tX})}{e^{td}}.$$

2. On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0; 1[$. On admet qu'une étude de fonction (très simple) permet de démontrer que, pour tout $\delta > 1$, on a

$$\inf_{t>0} \exp\{np(e^t - 1 - t\delta)\} = \left(\frac{e^{\delta-1}}{\delta^\delta}\right)^{np}.$$

Démontrer que, pour tout $\delta > 1$, on a

$$P(X \geq \delta np) \leq \left(\frac{e^{\delta-1}}{\delta^\delta}\right)^{np}.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{0 \leq k \leq n/4} \binom{n}{k} \leq (1,9)^n$.

Rappelons que, si X désigne une variable aléatoire positive, on a, pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) \\ &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP(X=x) && \text{on oublie des} \\ &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} aP(X=x) && \text{termes positifs} \\ &= aP(X \geq a), \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité de Markov :

$$\boxed{\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.}$$

1. Pour tout $d \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} P(X \geq d) &= P(tX \geq td) && \text{car } t > 0 \\ &= P(e^{tX} \geq e^{td}) && \text{car } \exp \text{ croît} \\ &\leq \frac{E(e^{tX})}{e^{td}} && \text{par Markov.} \end{aligned}$$

En passant à la borne inférieure sur $t > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{R}, \quad P(X \geq d) \leq \inf_{t>0} \frac{E(e^{tX})}{e^{td}}.}$$

2. D'après l'inégalité de Chernoff, on a, pour tout $\delta > 1$,

$$P(X \geq \delta np) \leq \inf_{t>0} \frac{E(e^{tX})}{e^{t\delta np}}.$$

Or, pour tout $\delta > 1$ et tout $t > 0$, la formule de transfert nous dit que

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n = (1 + p(e^t - 1))^n.$$

Or $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq \exp u$, donc

$$E(e^{tX}) \leq \exp\{np(e^t - 1)\},$$

ce qui donne

$$P(X \geq \delta np) \leq \inf_{t>0} \exp\{np(e^t - 1 - t\delta)\}.$$

Avec l'indication de l'énoncé, cela donne

$$P(X \geq \delta np) \leq \left(\frac{e^{\delta-1}}{\delta^{\delta}}\right)^{np}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n/4} \binom{n}{k} &= \sum_{3n/4 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \\ &= 2^n \sum_{3n/4 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ &= 2^n \cdot P\left(X \geq \frac{3}{2} \frac{n}{2}\right) \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right) \\ &\leq 2^n \left(\frac{e^{3/2-1}}{(3/2)^{3/2}}\right)^{n/2} \quad \text{d'après 3.} \end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{e^{3/2-1}}{(3/2)^{3/2}}\right)^{1/2} \approx 1,89 \dots$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{0 \leq k \leq n/4} \binom{n}{k} \leq (1,9)^n.$$