Quatrième Devoir Confiné - DS 9 (4h)

Exercice 1 –

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Un joueur dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Il joue selon les modalités suivantes :

- *Il procède à une première série de N lancers indépendants de la pièce. À chaque lancer amenant Pile, il gagne un euro. On note X_1 la somme gagnée par le joueur lors de cette première série de lancers.*
- *Soit k la valeur prise par X_1 ; le joueur procède à une nouvelle série de k lancers indépendants (si $k = 0$, il ne procède à aucun lancer), et gagne à nouveau un euro à chaque lancer amenant Pile. On note X_2 la somme gagnée par le joueur lors de cette deuxième série de lancers.*
- *On continue de la sorte en effectuant des séries de lancers, selon la description suivante : étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, lors de la n-ième série de lancers, on effectue autant de lancers indépendants que le nombre X_{n-1} de Piles obtenus lors de la série précédente, et on note X_n le nombre de Piles obtenus lors de cette n-ième série, correspondant au gain du joueur lors de la n-ième série. En particulier, si X_{n-1} prend la valeur 0, le joueur n'effectue aucun tirage et X_n prend la valeur 0 également.*

1. Soit X une variable aléatoire finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (SCE), également fini, constitué d'événements non quasi-impossibles. On définit $\mathbb{E}(X|A_i)$ l'espérance de X conditionnellement à A_i comme étant l'espérance de X dans l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{A_i})$. Montrer que :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X \mid A_i)$$
(formule de l'espérance totale)
2. (a) Soit Y une variable suivant une loi binomiale de paramètres (n, p). Rappeler l'expression de $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$, et déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathbb{E}(Y(Y-1))$.
   (b) Soit $k \in [\![0, N]\!]$. Déterminer $\mathbb{E}(X_n \mid X_{n-1} = k)$ et $\mathbb{E}(X_n(X_n - 1) \mid X_{n-1} = k)$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p^n N$ et $\mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) = p^{2n}N(N-1)$.
3. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$ (gain total du joueur).
4. (a) Montrer que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m > n$, $\mathbb{E}(X_n X_m) = p^{m-n}\mathbb{E}(X_n^2)$
   Indication : on pourra commencer par déterminer $\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k)$, en reconditionnant, pour k fixé, par rapport au SCE défini par X_{m-1} et en s'inspirant de la question 2.
   (b) En déduire $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)$, et étudier l'existence de sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
5. (a) Soit $n \geqslant 2$, et $i \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}((1-p^i)^{X_n}) = \mathbb{E}((1-p^{i+1})^{X_{n-1}})$.
   En déduire que $\mathbb{E}((1-p)^{X_n}) = (1-p^{n+1})^N$.

(b) En exprimant $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de $\mathbb{E}((1-p)^{X_n})$, en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de p, n et N.

(c) Montrer que l'expérience s'arrête presque sûrement.

Problème 1 – Séries numériques aléatoires

On étudie dans ce problème la convergence de certaines séries aléatoires. Toutes les variables aléatoires évoquées dans le sujet sont supposées à valeurs réelles et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On rappelle qu'une propriété est presque sûre *(ou satisfaite presque sûrement) lorsqu'il existe un événement de probabilité 1 sur lequel la propriété est vérifiée.*

Partie I – Un lemme de finitude

Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives possédant une espérance. On suppose que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n)$ converge et on note E sa somme. On souhaite montrer que la série $\sum Y_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire qu'il existe un événement A presque certain tel que pour tout ω de A, $\sum Y_n(\omega)$ converge. Pour N et M dans $\mathbb{N}^*$, on note $A_{N,M}$ l'événement :

$$A_{N,M} = \Big(\sum_{k=1}^{N} Y_k \geqslant M\Big).$$

Soit enfin A l'événement « la série $\sum Y_n$ diverge ».

1. Montrer que : $A = \bigcap_{M\geqslant 1} \bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}$.
2. Montrer que : $\forall N, M \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \dfrac{E}{M}$
3. (a) Montrer que la suite d'événements $\left(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\right)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ et conclure quant à l'objectif annoncé.

Partie II – Loi forte des grands nombres dans le cas $\mathcal{L}^4$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On les suppose mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi, et possédant un moment d'ordre 4. On souhaite montrer que, presque sûrement, on a, en posant $m = \mathbb{E}(X_1)$:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow m \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

1. Expliquer comment se ramener au cas où $m = 0$ dans l'objectif annoncé de cette partie, ce que l'on suppose désormais.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Justifier que : $\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = \displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{4!}{i_1!\cdots i_n!}\mathbb{E}(X_1^{i_1})\cdots\mathbb{E}(X_n^{i_n})$.

   (b) En déduire que : $\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2$.
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose :
   $$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
   Montrer que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n^4)$ converge.
4. Conclure quant à l'objectif annoncé à l'aide du résultat de la première partie.

Partie III – Inégalité de Kolmogorov

Soit $n \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, possédant un moment d'ordre 2 et centrées. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On souhaite montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}.$$

On fixe $\alpha > 0$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note A_k l'événement :

$$A_k = (|S_1| < \alpha) \cap \cdots \cap (|S_{k-1}| < \alpha) \cap (|S_k| \geqslant \alpha).$$

1. On note A l'événement $\big(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\big)$.
   (a) Exprimer A en fonction de $A_1, \ldots, A_n$.
   (b) Justifier que $\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k})$.
   (b) En déduire que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big((S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k))\mathbb{1}_{A_k}\big)$
   puis que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$.
   On pourra utiliser l'indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$.
3. Conclure quant à l'objectif annoncé de cette partie

Partie IV – Un résultat de convergence

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables réelles, mutuellement indépendantes, possédant un moment d'ordre 2 et centrées. On suppose de plus que la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge. On souhaite montrer sous ces hypothèses que la série $\sum X_n$ converge presque sûrement.
On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et C l'événement « $\big((S_n)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy$\big)$ ».
On rappelle qu'une suite (S_n) est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, p \geqslant N$, $|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon$, et qu'une suite réelle converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.

1. Pour $i, N \in \mathbb{N}^*$, on note $C_{i,N}$ l'événement : $C_{i,N} = \left(\forall n, p \geqslant N,\ |S_n - S_p| \leqslant \dfrac{1}{2^i}\right)$.
   Justifier que : $C = \displaystyle\bigcap_{i \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}$.
2. Expliquer pourquoi, pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $i \geqslant 1$, l'événement C_i suivant est de probabilité 1 :
$$C_i = \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}.$$
3. On fixe désormais $i \geqslant 1$. Pour tout $N \geqslant 1$ et $M \geqslant N$, on note :
$$B_N = \left(\sup_{n \geqslant N} |S_n - S_N| > \frac{1}{2^{i+1}}\right) \quad \text{et} \quad B_{N,M} = \left(\max_{N \leqslant n \leqslant M} |S_n - S_N| \geqslant \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$
   Justifier que : $B_N \subset \displaystyle\bigcup_{M \geqslant N} B_{N,M}$.
4. Montrer à l'aide des résultats de la partie précédente que :
$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(B_N) = 0.$$
5. En déduire que :
$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1.$$
6. Conclure.

Partie V – Application aux séries harmoniques de signe aléatoire

Soit $p \in [0,1]$ et $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = p \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1 - p.$$

On étudie dans cette partie la nature de la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$.

1. On suppose à cette question que $p \neq \frac{1}{2}$ et on note $T_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ pour n dans $\mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k(k+1)} + \frac{T_n}{n}.$$

   (b) À l'aide des résultats de la deuxième partie, montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

2. On suppose à cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.