

## Planche de colle

### Question de cours

- définition d'une orbite d'une permutation ; pourquoi les orbites d'une permutation forment-elles une partition ?

### Exercice de colle

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres irrationnels strictement supérieurs à 1 tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On pose :

$$\mathcal{A} = \left\{ \lfloor np \rfloor ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } \mathcal{B} = \left\{ \lfloor nq \rfloor ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que les ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont disjoints.
2. En déduire que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , le cardinal de l'ensemble  $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \llbracket 1, N \rrbracket$  vaut  $N$ .
3. En déduire que la famille  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  forme une partition de  $\mathbb{N}^*$ .