Maths ULCR

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

1) Montrer que $\overline{(\{\ln(n)\})_{n\geq 1}} = [0,1]$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $n \geq 1$, montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{n}\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_1^n (\{x\} - \frac{1}{2})f'(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2n}$$

Soit $(x_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(x_k)_k$ est équirépartie si $\forall a, b$ tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a

$$\frac{|\{k \in [\![1,n]\!],\ x_k \in [a,b]\}|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b - a \quad (*)$$

On admet le résultat suivant :

$$(x_k)_k \text{ équirépartie } \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi x_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3) Montrer que $(\ln(n))_n$ n'est pas équirépartie.

4) Existe-t-il a, b tels que $(*)$ vrai pour $(x_k)_{k\geq 1} = (\ln(k))_{k\geq 1}$?

<u>Indication</u> : Considérer d'abord le cas $b < 1$ et poser $(N_m)_{m\geq m_0}$ telle que $\forall m \geq m_0,\ e^{m+b} < N_m < e^{m+1}$