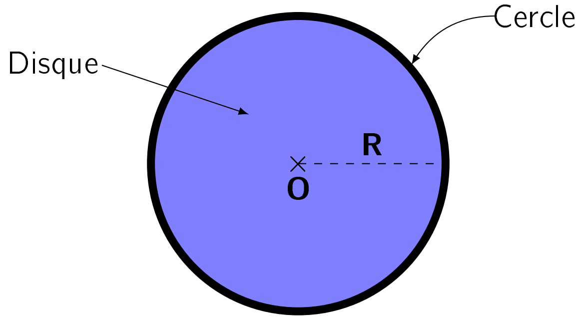
Chapitre M-6

Géométrie et nombres

L'idée est ici de regrouper des outils de géométrie déjà vus dans l'enseignement professionnel.

6.1 Cercle et disque



Soit un cercle C de centre O et de rayon R alors on peut calculer :

Aire du disque	Circonférence du cercle
$A = \pi \times R \times R$	$P = 2\pi \times R$

L'aire s'exprime en unité de longueur au carré (exemple cm^2) et la circonférence en unité de longueur (exemple m).

6.2 Triangles

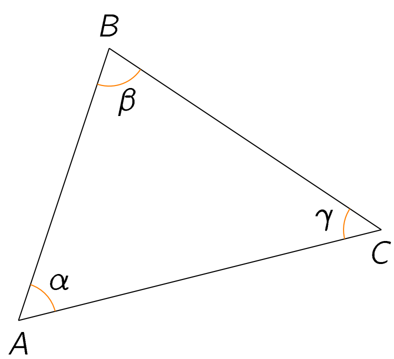
6.2.1 Généralités

Soit un triangle ABC quelconque.

La somme des angles d'un triangle mesure 180°.

Quelques triangles remarquables :

- **Rectangle** : un des angles vaut 90°.
- **Isocèle** : Deux des côtés ont la même longueur, deux angles égaux.
- **Équilatéral** : Trois côtés de même longueurs, trois angles de 60°.

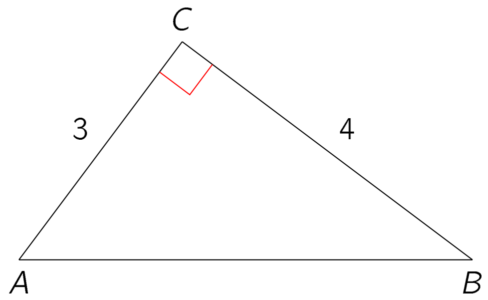


6.2.2 Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en C alors :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Dans cet exemple (les longueurs sont données en cm) :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$AB = \sqrt{25} = 5$
Le côté AB mesure 5 cm.

Remarque : La réciproque du théorème de Pythagore permet de vérifier si un triangle est rectangle.

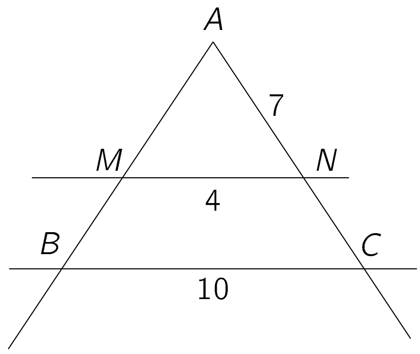
Vérifier si le triangle BCD de dimensions 4-8-5 est un triangle rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

6.2.3 Théorème de Thalès

Théorème de Thalès

Soient les droites (BC) et (MN) parallèles, les points A, M, B alignés et les points A, N, C alignés alors :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$



Dans cet exemple (les longueurs sont en cm) :
Cherchons la longueur AC :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$$

$$AB = \frac{BC \times AN}{MN}$$

$$AB = \frac{10 \times 7}{4} = 17.5$$

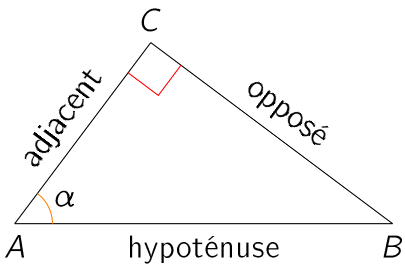
Le côté AB mesure 17,5 cm.

Remarque : La réciproque du théorème de Thalès permet de prouver que deux droites sont parallèles.

Dans la configuration de la figure 8.4 on donne $AN = 3,5$, $AC = 5.6$, $AB = 8$ et $AM = 5$. Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès

6.2.4 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Les formules trigonométriques donnent la possibilité de calculer un angle ou une longueur dans un triangle rectangle.



♣ Attention aux unités d'angle sur la calculatrice. ♣

Les relations donnent pour l'angle α :

Sinus

$$\sin\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CB}{AB}$$

Cosinus

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$

Tangente

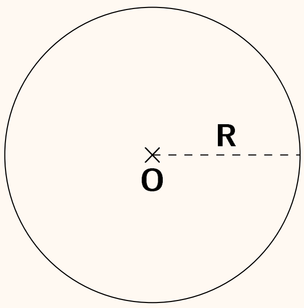
$$\tan\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AC}{CB}$$

On pourrait écrire les mêmes formules pour l'angle β (angle au sommet B). *A faire en exercice d'entraînement*

6.3 Surfaces

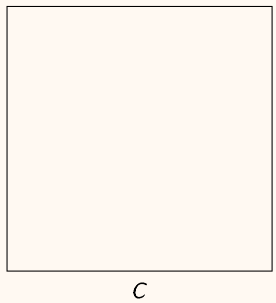
Quelques formules à connaître et à savoir utiliser :

Cercle et disque



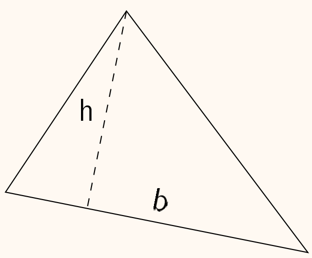
Surface : $A = \pi R^2$

Carré



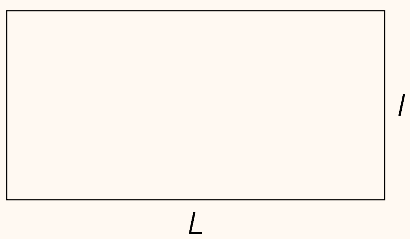
Surface : $S = c^2$

Triangle



Surface : $A = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

Rectangle



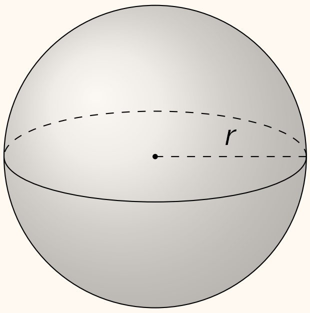
Surface : $S = l \times L$

Pour calculer des surfaces de pièces plus complexes, on découpe en éléments simples.

6.4 Volumes

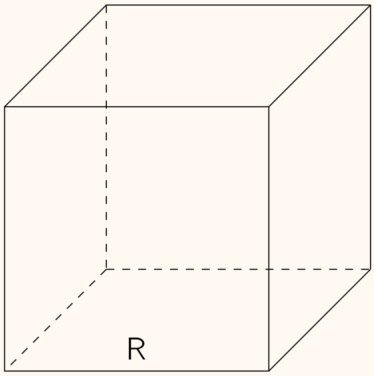
Quelques formules à connaître et à savoir utiliser :

Boule ou sphère



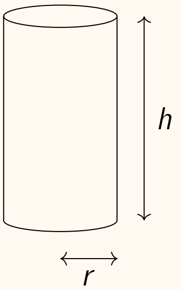
Volume : $V = \frac{4}{3} \times \pi R^3$

Cube



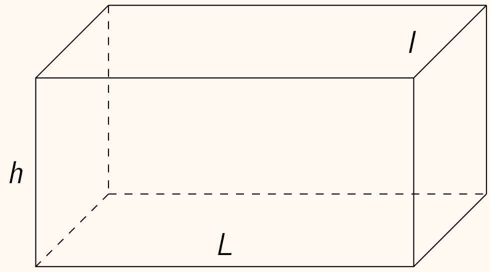
Volume : $V = R^3$

Cylindre



Volume : $V = \pi \times R^2 \times h$

Pavé



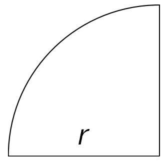
Volume : $V = l \times L \times h$

Pour calculer des volumes de pièces plus complexes, on découpe en éléments simples.

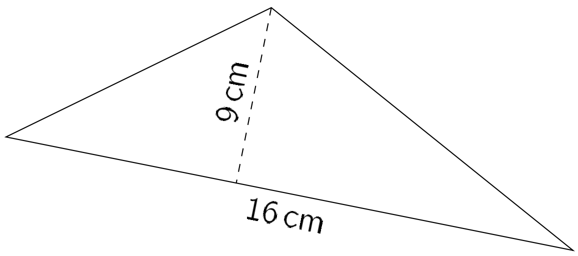
6.5 Exercices

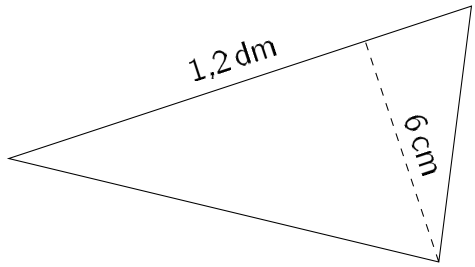
EXERCICE 6.1. Soit C un cercle de centre O et de rayon $R = 4\,\text{cm}$.
Calculer la surface S et la circonférence P de ce cercle. Arrondir au dixième.

EXERCICE 6.2. Le dessin suivant représente un quart de cercle. Déterminer une valeur arrondie au dixième de son aire A sachant que le rayon vaut $r = 2{,}5\,\text{cm}$.

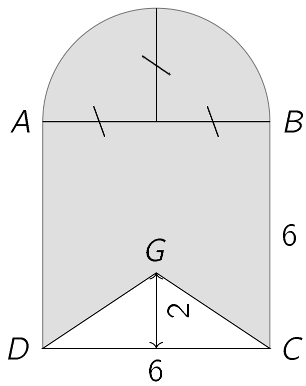


EXERCICE 6.3. Déterminer l'aire des deux triangles.

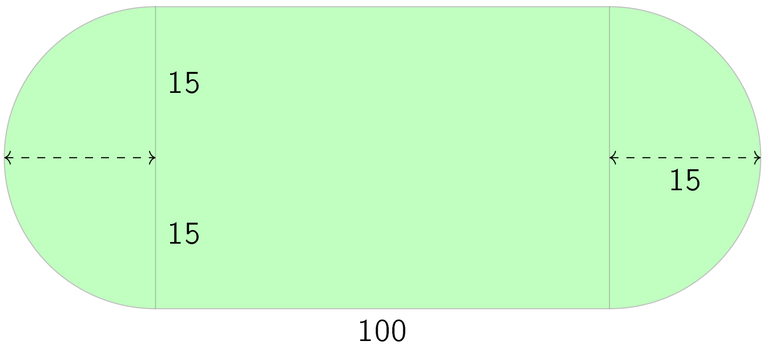




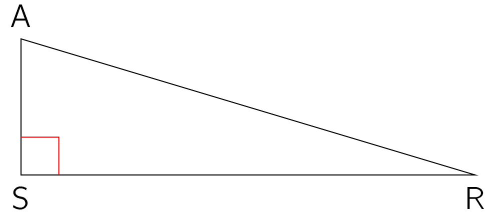
EXERCICE 6.4. Déterminer l'aire de la partie grisée sur la figure (les dimensions sont en cm) :



EXERCICE 6.5. On installe une pelouse sur un terrain sportif représenté par le schéma ci-dessous. Ce schéma ne respecte pas les proportions et les dimensions sont données en mètre.
Les rouleaux de pelouse disponibles à la vente sont des rectangles dont les dimensions sont $L = 20\,\text{m}m$ et $l = 1{,}5\,\text{m}$.
Déterminer le nombre de rouleaux à commander pour recouvrir au moins intégralement la pelouse. (On négligera le fait qu'il y aura des pertes aux arrondis)



EXERCICE 6.6. Un avion (noté A) se trouve à la verticale au dessus d'une ville (notée S). L'aéroport se situe à 49,7 km de cette ville en ligne droite au sol. L'avion descend directement en effectuant une ligne droite (AR) de longueur 50 km à l'aéroport (noté R) et forme le schéma (qui ne respecte pas les proportions) suivant :



Déterminer l'altitude, en mètres, de l'avion au moment de son survol de la ville S. On arrondira le résultat au dixième.

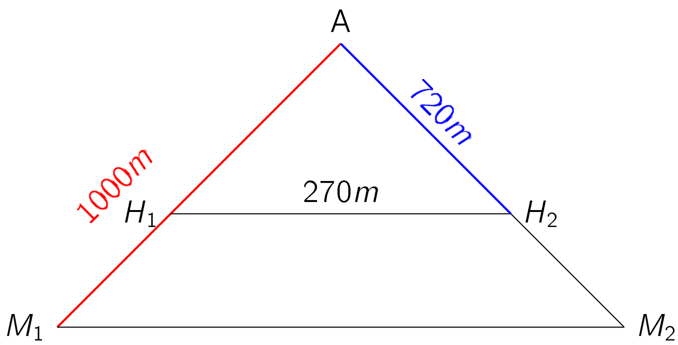
EXERCICE 6.7. Dans cet exercice on demande de vérifier si les deux triangles sont rectangles ou pas.

a. Le triangle ABC tel que $AB = 5{,}5$ cm, $AC = 4{,}8$ cm et $BC = 7{,}3$ cm.

b. Le triangle DEF tel que $DE = 2{,}8$ cm, $DF = 8{,}1$ cm et $EF = 7{,}6$ cm.

On détaillera le raisonnement.

EXERCICE 6.8. Pour filmer des étapes d'une course cycliste, les réalisateurs de télévision utilisent des caméras installées sur deux motos et d'autres dans deux hélicoptères. Un avion relai, A, plus haut dans le ciel, recueille les images et joue le rôle d'une antenne.
On considère que les deux hélicoptères H_1 et H_2 sont à la même altitude et que la route est horizontale de telle sorte que les droites formées entre les motos M_1 et M_2 (M_1M_2) et (H_1H_2) soient **parallèles**. $AH_1 = AH_2$ et $AM_1 = AM_2$.
Le schéma ci-dessous illustre la situation :

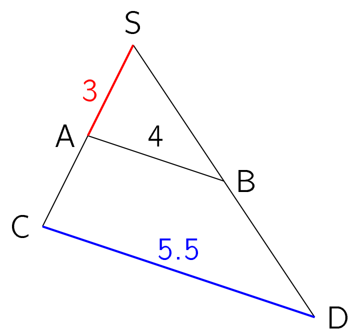


Calculer la distance entre les deux motos.

EXERCICE 6.9. On donne la figure jointe sur laquelle :

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- Les points S, B, D sont alignés
- Les points S, A, C sont alignés

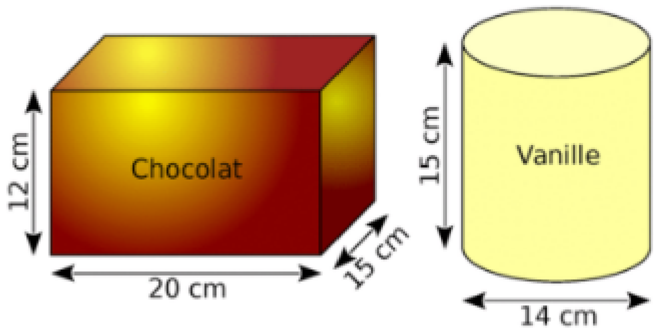
Calculer la longueur SC et arrondir au dixième.



EXERCICE 6.10. Il est possible d'envoyer par la poste un colis dont la boite, qui a la forme d'un pavé droit, ne doit dépasser $1.5m$ quand on additionne la longueur, la largeur et la hauteur. On utilise une boite de longueur $L = 60$ cm, de largeur $l = 40$ cm et de hauteur h pour envoyer un colis.

1. Donner la hauteur maximale de cette boite pour rester dans les normes.
2. Proposer d'autres dimensions pour une boite permettant d'envoyer par la poste, dans un colis de même forme, une canne à pêche mesurant 1,4 m de long et 5 cm de haut.

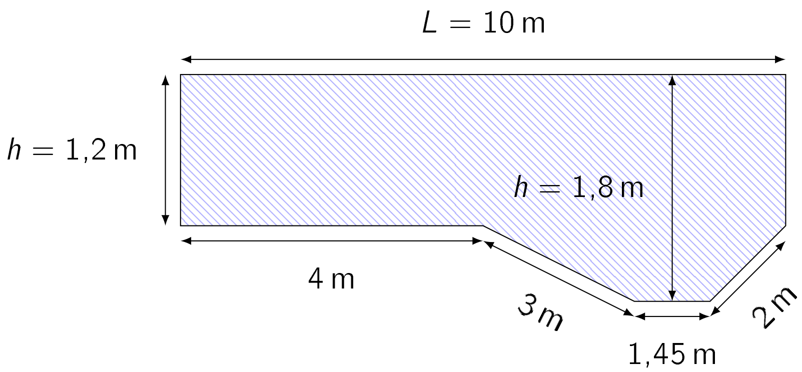
EXERCICE 6.11. Pour préparer un dessert glacé, un restaurant propose des coupes 3 boules de glace (que l'on supposera parfaitement pleines et sphériques, ce qui n'est pas le cas dans la réalité !) de diamètre $d = 4{,}2$ cm.
La forme et la dimension des pots sont donnés par l'image :



Les pots sont pleins et les coupes servies sont toutes sur le modèle : C - C - V (deux boules chocolat et une boule vanille). Le restaurateur veut avoir de quoi réaliser 100 desserts.

1. Calculer le volume, en cm^3, d'un pot de glace au chocolat.
2. Même question pour un pot de glace vanille.
3. Calculer le volume, en cm^3 d'une boule de glace.
4. Déterminer le nombre de pots nécessaires de chaque parfum pour réaliser les 100 desserts.

EXERCICE 6.12. Dans la maison d'un particulier sur la côte on trouve une piscine (vue de coupe) représentée par le schéma (les dimensions ne respectent pas les proportions) :



La largeur de la piscine est $l = 4{,}5$ m. D'après un document de 2017, le tarif de l'eau dans la ville de ce particulier est de 1.56€ pour $1m^3$.

1. Calculer, en détaillant la démarche, le volume de la piscine.
2. Calculer le prix payé pour un remplissage total de cette piscine.

Indication : on pourra décomposer la vue de la piscine en figures de surfaces aisément calculables puis trouver ensuite le volume.