DM n° 7 : Continuité, dérivabilité

Problème 1 – Une fonction continue partout dérivable nulle part

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement *vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*
Nous donnons un exemple montrant que si (f_n) converge simplement vers f, même si toutes les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues, la fonction limite f n'est pas forcément continue. Ainsi, la continuité n'est pas forcément préservée par passage à la limite.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f_{x_0,n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{x_0,n}(x) = \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f_{x_0} que l'on déterminera.
3. f_{x_0} est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_m$ des réels deux à deux distincts. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n = f_{x_1,n} + \cdots + f_{x_m,n}.$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction qui n'est continue en aucun des points x_i, $i \in [\![1, m]\!]$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

D'après la partie précédente, on ne peut pas conclure directement à la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues (et donc à la continuité d'une somme d'une série de fonctions continues). L'objet de cette partie est de donner un critère simple de continuité d'une limite de suite de fonctions ou d'une somme de série de fonctions.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0, \ \forall x \in I, \ \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, contrairement au cas de la convergence simple, N est indépendant de x. On peut donc contrôler de façon globale la convergence de la suite vers f : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un « voisinage tubulaire » de la courbe de f (c'est-à-dire un « tube » encadrant la courbe de f à ε près des deux côtés) dans lequel vont se tracer les courbes des f_n à partir d'un certain rang.

1. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie I n'est pas uniformément convergente.
2. Justifier qu'une suite uniformément convergente est simplement convergente.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Montrer que f est continue sur I.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément. On dit que $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\sum a_n \textit{ converge,} \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

4. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

On étudie ici une fonction, obtenue comme limite d'une série de fonction. On montre que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. L'exemple qui suit a été donné par Weierstrass en 1861 (pour des valeurs particulières de a et b). De nombreux autres exemples de fonctions partout continues et nulle part dérivables peuvent être trouvés dans la littérature mathématique (Gini, Bolzano, Van der Waerden...)
Soit $b \in]0,1[$, et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)) \qquad \text{et} \qquad R_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)).$$

2. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^*,\ |S_m(h)| \leqslant \pi\dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = \left\lfloor a^m x + \dfrac{1}{2}\right\rfloor$, et $\beta_m = a^m x - \alpha_m$. On pose $h_m = \dfrac{1-\beta_m}{a^m}$.

3. Justifier que $|h_m| \leqslant \dfrac{3}{2a^m}$.
4. Soit n un entier supérieur ou égal à m.
   (a) Montrer que $\cos(\pi a^n(x+h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}$. Calculer de même $\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ et $\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ en fonction de α_m.
   (b) En déduire que $\cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)$.
5. Montrer que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|}$, puis que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}$.
6. Montrer que : $\left|\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geqslant \dfrac{2(ab)^m}{3}\cdot\dfrac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}$.
7. Montrer que f n'est dérivable en aucun réel x.

Problème 2 – Discontinuités des fonctions réglées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite réglée si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point où cela est envisageable. Le but de ce problème est de montrer qu'une fonction réglée ne peut pas admettre trop de points de discontinuité (i.e. de points en lesquels elle n'est pas continue). Plus précisément, on montre que le nombre de points de discontinuité d'une fonction réglée sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. Dans une deuxième partie, on montre que réciproquement, tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.
On admettra dans ce problème le théorème de Bolzano-Weierstrass affirmant que de toute suite (u_n) à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a,b]$, on peut extraire une sous-suite (v_n) convergente dans $[a,b]$, (une sous-suite ou suite extraite étant une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Une preuve de ce résultat a déjà été vue dans un devoir antérieur, et sera rappelée en cours prochainement.
On rappelle également qu'un ensemble est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, et qu'il est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable. On rappelle enfin qu'une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$. Pour simplifier les écritures, on notera $f(a^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche et à droite respectivement de f au point a. On considère dans un premier temps un intervalle fermé borné I.
On note, pour tout $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{a \in I \mid |f(a) - f(a^-)| \geqslant \varepsilon\}$

1. Montrer que $f_{|I}$ n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $a \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_{1/n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose ici que D_ε est infini. Justifier l'existence d'une suite <u>convergente</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 distincts de D_ε. On note a sa limite.

3. Justifier que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une infinité de termes vérifiant $a_n > a$ soit elle possède une infinité de termes vérifiant $a_n < a$ (disjonction non exclusive).
4. Supposons qu'il existe une infinité de termes tels que $a_n > a$. Quitte à extraire une suite, on peut alors supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a$.
   (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$
   (b) Trouver une contradiction.
5. Adapter ce raisonnement au cas où il existe une infinité de termes a_n vérifiant $a_n < a$.
6. Conclure.

Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé

Soit A un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. On s'interroge dans cette partie sur l'existence d'une fonction réglée dont le domaine de discontinuité est exactement A.

1. Si A est fini, donner une fonction réglée dont l'ensemble des points de disonctinuité est exactement A.
2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{]a_n,+\infty[}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente. On note $f(x)$ sa somme. Cela définit donc une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est croissante.
   (c) Soit $x < y$. Montrer que
   $$f(y) - f(x) = \sum_{n|x<a_n\leqslant y} \frac{1}{2^n}.$$
   (d) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement A, et conclure.
   On s'attachera à donner un raisonnement aussi rigoureux que possible dans cette dernière question.