

Problème n° 18 : Espaces vectoriels

Problème 1 – (Extrait de X-ENS 2013) – Opérateurs quantiques modulaires

Dans tout le problème, tous les espaces vectoriels ont pour corps de base \mathbb{C} . On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} . Si f est une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} , on appelle support de f , et on note $\text{Supp}(f)$, l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $f(k) \neq 0$. Dans tout le problème, V désigne l'ensemble des fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} dont le support est un ensemble fini.

Partie I – Opérateurs sur les fonctions à support fini

1. (a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.
(b) Étant donné $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, on définit $E(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ par $E(f)(k) = f(k+1)$.
Montrer que $E \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$, et que V est stable par E .
On note encore E l'endomorphisme induit par E sur V .
(c) Montrer que $E \in \text{GL}(V)$.
2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $v_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par $v_i(k) = \delta_{i,k}$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = k$, et nul sinon.
(a) Montrer que la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V .
(b) Calculer $E(v_i)$.

Partie II – Opérateurs quantiques

Soit ℓ un entier impair supérieur ou égal à 3. Soit q une racine primitive ℓ -ième de 1 dans \mathbb{C} , c'est-à-dire une racine de 1 engendrant multiplicativement le groupe des racines ℓ -ièmes de l'unité.

Soient λ et μ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On définit F et H dans $\mathcal{L}(V)$ par :

$$H(v_i) = \lambda(i)v_i \quad \text{et} \quad F(v_i) = \mu(i)v_{i+1}.$$

1. Montrer que $H \circ E = q^2 E \circ H$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.
Dans la suite du problème, on suppose cette condition satisfaite. On suppose de plus que $\lambda(0) \neq 0$.
2. Montrer que $H \in \text{GL}(V)$.
3. Montrer que $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}.$$

Dans la suite du problème, on suppose cette condition satisfaite.

4. Montrer que λ et μ sont ℓ -périodiques (on ne demande pas de justifier que ℓ est la période minimale)
5. Soit $C = (q - q^{-1})E \circ F + q^{-1}H + qH^{-1}$.
(a) Montrer que $C = (q - q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1}$.
(b) Montrer que C est une homothétie de V . On note k son rapport.

Partie III – Opérateurs quantiques modulaires

On pose $W_\ell = \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} \mathbb{C}v_k = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{\ell-1})$.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On définit P_a de V dans V par :

$$P_a(v_i) = a^p v_r,$$

où pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit r et p respectivement comme le reste et le quotient de la division euclidienne de i par ℓ . Autrement dit, $i = p\ell + r$, où $0 \leq r < \ell$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que P_a est un projecteur, d'image W_ℓ .

On dit qu'un élément φ de $\mathcal{L}(V)$ est compatible avec P_a si $P_a \circ \varphi \circ P_a = P_a \circ \varphi$.

2. (a) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ commute avec P_a , alors φ est compatible avec P_a .
 (b) Montrer que H et H^{-1} sont compatibles avec P_a .
 Soit \mathcal{U}_q l'ensemble des endomorphismes $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ compatibles avec P_a .

3. Montrer que \mathcal{U}_q est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

4. Montrer que $E \in \mathcal{U}_q$ et $F \in \mathcal{U}_q$.

5. (a) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\Psi_a : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{L}(W_\ell)$, tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{U}_q, \quad \Psi_a(\varphi) \circ P_a = P_a \circ \varphi.$$

- (b) Montrer que $\varphi \in \mathcal{U}_q$ est contenu dans le noyau de Ψ_a si et seulement si l'image de φ est dans le sous-espace de V engendré par les vecteurs $v_i - a^p v_r$, $i \in \mathbb{Z}$, où $i = p\ell + r$ est la division euclidienne de i par ℓ .

6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k (défini dans la partie II) pour que $\Psi_a(F)$ soit nilpotent.