

Chapitre 1 : ensembles, fonctions et relations

Table des matières

1	Éléments de logique	2
1.1	Première notions	2
1.2	Assertions, variables, quantificateurs	2
1.3	Connecteurs logiques	2
1.4	Propriétés sur les connecteurs logiques	2
2	Ensembles	3
2.1	Définition	3
2.2	Opérations sur les ensembles	4
2.3	Propriétés sur les ensembles	4
3	Applications ou fonctions	5
3.1	Définitions	5
3.2	Composition de fonctions	5
3.3	Applications injectives, surjectives et bijectives	6
3.4	Propriétés	7
4	Cardinalité finie	7
4.1	Premières propriétés	7
4.2	Ensembles finis et fonctions	8
4.3	Premiers exemples	8
5	Relations binaires	9
5.1	Relations d'ordre	9
5.1.1	Définitions	9
5.1.2	Notions relatives aux relations d'ordre	9
5.2	Relations d'équivalence	10
5.2.1	Définitions	10
5.2.2	Partitions	10
5.2.3	Utilité d'une relation d'équivalence	11

1 Éléments de logique

1.1 Première notions

1.2 Assertions, variables, quantificateurs

Définition 1 On appelle *assertion* ou *proposition*, toute phrase possédant deux valeurs logiques : soit VRAI, soit FAUX. Une assertion \mathcal{A} comporte des *variables*. On dit qu'une variable x est *muette* si elle n'intervient globalement pas dans la valeur logique de l'assertion \mathcal{A} . Dans le cas contraire, la variable x est non muette et l'assertion \mathcal{A} dépend de x . On la note dans ce cas $\mathcal{A}(x)$ pour mettre en évidence la dépendance de l'assertion \mathcal{A} vis-à-vis de la variable x .

Exemple 1 Dans l'assertion $\mathcal{A} : \left\langle \sum_{k=1}^n k^2 \geq 2^n \right\rangle$, quelles sont les variables ? Sont-elles muettes ?

Définition 2 Une assertion possède également des *quantificateurs* : il en existe principalement deux :

- le quantificateur \forall : « quel que soit » ou bien « pour tout »
- le quantificateur \exists : « il existe ».

Une assertion comporte des virgules. Après le quantificateur \forall , la virgule signifie « on a » et après le quantificateur \exists , la virgule signifie « tel que ».

Exemple 2 Déchiffrer les assertions suivantes :

- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{n^2}{2^n} \right| \leq \varepsilon$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = \alpha \cdot x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad e^y \leq x$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad e^y \leq x$

Ces assertions sont-elles vraies ou fausses ?

1.3 Connecteurs logiques

Définition 3 Étant données deux assertions \mathcal{A} et \mathcal{B} , on peut former une troisième assertion à l'aide de *connecteurs logiques*.

- la *négation* : la négation de \mathcal{A} est l'assertion non \mathcal{A} : elle est VRAIE lorsque \mathcal{A} est FAUSSE et vice-versa.
- l'*intersection* : l'intersection des assertions \mathcal{A} et \mathcal{B} est l'assertion « \mathcal{A} et \mathcal{B} ». Celle-ci n'est VRAIE que si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont VRAIES simultanément.
- la *réunion* : la réunion des assertions \mathcal{A} et \mathcal{B} est l'assertion « \mathcal{A} ou \mathcal{B} ». Celle-ci est VRAIE si l'une au moins des deux assertions \mathcal{A} et \mathcal{B} est VRAIE.
- l'*implication* : l'implication « $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ » est l'assertion suivante : l'implication est VRAIE signifie que le fait que \mathcal{A} soit VRAIE entraîne que l'assertion \mathcal{B} est VRAIE également.
- l'*équivalence* : l'équivalence « $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ » est l'assertion suivante : l'équivalence est VRAIE signifie que le fait que les deux assertions \mathcal{A} et \mathcal{B} ont la même valeur logique.

1.4 Propriétés sur les connecteurs logiques

Proposition 1 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) = \text{non } \mathcal{A} \text{ ou } \text{non } \mathcal{B}$
- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } \text{non } \mathcal{B}$
- $\text{non}(\exists x, \mathcal{A}(x)) \iff \forall x, \text{non}(\mathcal{A}(x))$
- $\text{non}(\forall x, \mathcal{A}(x)) \iff \exists x, \text{non}(\mathcal{A}(x))$
- $[\mathcal{A} \implies \mathcal{B}] \iff [(\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B}] \iff [\text{non } \mathcal{B} \implies \text{non } \mathcal{A}]$
- $[\mathcal{A} \iff \mathcal{B}] \iff [\mathcal{A} \implies \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \implies \mathcal{A}]$

Méthode : Comment montrer une implication, une équivalence ?

Pour montrer l'implication $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$

- supposer que \mathcal{A} est vrai
- montrer alors que \mathcal{B} est vrai.

On peut aussi :

- supposer que \mathcal{B} est faux
- montrer alors que \mathcal{A} est faux. [raisonnement par contraposition]

Pour montrer l'équivalence $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$:

- détecter l'implication [directe \implies ou réciproque \impliedby] la plus facile et la montrer
- montrer alors l'autre implication.

Exemple 3 • Donner la négation des assertions de l'exemple 2.

- Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, si a^2 est impair, alors a est impair.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ est un entier.

2 Ensembles

2.1 Définition

Définition 4 On appelle **ensemble**, toute collection d'objets, ceux-ci étant appelés **éléments** de l'ensemble. On note $x \in E$ (lire x appartient à E), pour signifier que l'ensemble E contient l'élément x . Les ensembles sont notés entre accolades, soit en exprimant tous les éléments de cet ensemble dans un ordre quelconque, soit en exprimant les éléments à l'aide d'assertions.

Étant donnés deux ensembles A et B , on dit que A est **inclus** dans B et on note $A \subset B$ pour signifier que tous les éléments de A appartiennent aussi à B . On dit aussi que A est une **partie** ou un **sous-ensemble** de B .

Méthode : Comment montrer une inclusion, une égalité entre deux ensembles ?

Pour montrer $A \subset B$,

- écrire : « soit x dans A »
- montrer que x appartient à B .

Pour montrer l'égalité $A = B$ entre deux ensembles,

- identifier l'inclusion $A \subset B$ ou $B \subset A$ la plus facile, puis la montrer
- montrer alors l'autre inclusion.

Exemple 4 • Comparer : $E = \left\{ \frac{1 + \cos x}{2} ; x \in \mathbb{R} \right\}$ et $E' = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in]0, +\infty[, x = \exp(-t^2) \right\}$.

- Montrer que $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases} \right\} = \left\{ (1 + 4t, t, -5t) ; t \in \mathbb{R} \right\}$.

2.2 Opérations sur les ensembles

Définition 5 Étant donnés des ensembles, on peut en former d'autres :

- l'**intersection** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- la **réunion** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- la **différence** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$. Si $A \subset E$, on appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble $E \setminus A$
- la **différence symétrique** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- le **produit cartésien** $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$
- la **puissance** B^A ou $\mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow B$
- l'**ensemble des parties de E** $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

Remarque 1 • On peut généraliser les opérations précédentes. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E , on note :

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$
- $\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, x_i \in A_i\}$.
- Si $I = \{1, \dots, n\}$ et $A_i = E$, alors $\prod_{i \in I} A_i = E^n$ et $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$ sont appelés des **n -uplets** d'éléments dans E .

2.3 Propriétés sur les ensembles

Proposition 2 • Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément : c'est l'ensemble vide noté \emptyset .

- Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$ (ou encore $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$).
- (**lois de Morgan**) pour tous ensembles A, B et C , on a :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .$$

- pour toutes parties A et B de E , on a :

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \text{ et } C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \quad .$$

Exemple 5 Soient A, B et C trois ensembles.

- Montrer $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- Montrer l'équivalence valable pour tous ensembles A, B et C :

$$B = C \iff A \Delta B = A \Delta C.$$

Exemple 6 Simplifier les ensembles :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\ln n, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \ln(n+1) - \ln n \right[.$$

3 Applications ou fonctions

3.1 Définitions

Définition 6 On appelle **fonction** ou **application** $f : E \longrightarrow F$ la donnée :

- d'un ensemble E appelé **ensemble de départ**, ou **source** ou **domaine de définition**
- d'un ensemble F appelé **ensemble d'arrivée** ou **but**
- d'une correspondance $x \longmapsto f(x)$ entre les éléments x de E et des éléments $f(x)$ de F . L'élément $f(x)$ est appelé **image** de x par la fonction f .

Pour tout y dans F , tout élément x de E vérifiant $f(x) = y$ est appelé **antécédent** de y par la fonction f .

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soient A une partie de E . On appelle **ensemble image** de A par f , l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \in F \mid x \in A\}.$$

Soit B une partie de F . On appelle **image réciproque** de B par f , l'ensemble : $f^{[-1]}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Exemple 7 • Calculer l'image directe et l'image réciproque par la fonction $f : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ définie sur \mathbb{R} des ensembles $A = [-2, 3]$ et $B =]-\infty, 2]$.

• Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction, alors pour toutes parties A et B de E , on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'en général, on n'a pas égalité.

• Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction, a-t-on $f^{[-1]}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{[-1]}(A_i)$ ou $f^{[-1]}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{[-1]}(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(F)$?

3.2 Composition de fonctions

Définition 7 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow F'$ deux fonctions. Si pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F'$, on peut former la composée $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow F' \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemple 8 Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ lorsque cela est possible :

- $f : x \longmapsto \cos(x+2)$ et $g : x \longmapsto x^2 + 2x + 4$
- $f : x \longmapsto \ln(-x)$ et $g : x \longmapsto x^2 + x + 1$
- $f : x \longmapsto \ln(1 + 3e^x + e^{-x})$ et $g : x \longmapsto \ln x$.

Exemple 9 Soit E un ensemble. On appelle **fonction identité de E** , l'application suivante :

$$\begin{aligned} \text{id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

• Si $f \in E^E$, que valent les applications $f \circ \text{id}_E$ et $\text{id}_E \circ f$?

• Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x + 5}$. Résoudre l'équation $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ d'inconnue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ d'inconnue $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 3 • La composition n'est pas commutative : il n'y a aucun lien entre les composées $g \circ f$ et $f \circ g$.

• La composition est associative : si $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ sont trois fonctions, alors toutes les compositions suivantes sont possibles et on dispose de la formule :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ceci autorise à noter $h \circ g \circ f : E \rightarrow H$ la fonction précédente.

3.3 Applications injectives, surjectives et bijectives

Définition 8 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que la fonction f est **injective** si :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

On dit que la fonction f est **surjective** si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On dit que la fonction f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est injective ?

Pour montrer l'injectivité :

- écrire : « soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ »
- montrer que $x = x'$.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est surjective ?

Pour montrer la surjectivité :

- écrire : « soit y dans F »
- trouver un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Proposition 4 Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Soit $y \in F$. L'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$ admet une seule solution dépendant de y . On note $x = f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f . On définit ainsi l'application :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ x &\mapsto \alpha = f^{-1}(x) = \text{l'unique solution de l'équation } f(\alpha) = x, \text{ d'inconnue } \alpha \in E \end{aligned}$$

Cette application est appelée **fonction réciproque** de la fonction bijective f .

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est bijective ?

- On peut montrer que f est à la fois injective et surjective
 - On peut :
 - fixer y dans F
 - résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
 - trouver une seule solution : on aura alors la fonction réciproque f^{-1} .
- On peut faire l'étude de la fonction f en faisant le cas échéant le tableau de variation pour utiliser le théorème de la bijection.

Exemple 10 On pose $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$; $f_4 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$; $f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^2$ et $f_6 : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+, x \mapsto x^2$.
Que peut-on dire des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 ?

Définition 9 • Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction et $A \subset E$, on appelle *restriction* de f à A , et on note $f|_A$, la fonction :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

• Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ deux fonctions. On dit que g *prolonge* f (ou que g est un *prolongement* de f) si $E \subset E', F \subset F'$ et $\forall x \in E, g(x) = f(x)$.

3.4 Propriétés

Proposition 5 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

- si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi
- si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi
- si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi et de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

Proposition 6 Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors, $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

Exemple 11 Les applications suivantes sont-elles des bijections? Si oui, donner lorsque cela est possible la réciproque f^{-1} :

- $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$;
- $f : X \mapsto (2\mathbb{N}) \cap X$, de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathcal{P}(2\mathbb{N})$;
- $\Phi : f \mapsto g \circ f$, de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même, où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction;
- $f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x + my + z, x - y + 2z)$ de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 , où $m \in \mathbb{R}$.

• Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection, si A est une partie de F , montrer que $f^{-1}(A) = f^{[-1]}(A)$.

4 Cardinalité finie

4.1 Premières propriétés

Définition 10 Soit E un ensemble. On dit que l'ensemble E est *fini* s'il comporte un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on appelle *cardinal de* E , le nombre total de ses éléments, entier naturel noté $\text{Card}(E)$ ou $\#(E)$.

Proposition 7 Voici les principales propriétés générales concernant les ensembles finis :

- Si E est un ensemble fini, alors toute partie A de E est encore finie et $\#(A) \leq \#(E)$.

- Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ également et : $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.
- Si $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille finies d'ensembles finis, alors le produit cartésien $\prod_{k=1}^r A_k$ est encore fini et

$$\# \left(\prod_{k=1}^r A_k \right) = \prod_{k=1}^r \#(A_k).$$

- Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E est un ensemble fini et $\#(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Si $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{P}_k(E)$ des parties de E à k éléments est encore un ensemble fini et $\#(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{n}{k}$ [coefficient binomial]
- Si A et B sont deux ensembles finis et si $\begin{cases} A \subset B \\ \#(A) = \#(B) \end{cases}$, alors $A = B$.

4.2 Ensembles finis et fonctions

Proposition 8 Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction entre un ensemble fini E de cardinal n et un ensemble quelconque F .

- Si la fonction f est bijective, alors l'ensemble F est fini et $\#(F) = \#(E) = n$.
- **Principe des tiroirs**

Si la fonction f est injective, alors l'ensemble F compte au moins n éléments. Par contraposé, si $\#(F) < n$, alors la fonction f n'est pas injective.

• Si la fonction f est surjective, alors l'ensemble F est fini et compte au maximum n éléments. Par contraposé, si l'ensemble F compte strictement plus de n éléments, alors la fonction f n'est pas surjective.

- **Principe des bergers**

Si la fonction f est surjective et que pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ contient toujours le même nombre d'éléments q , alors :

$$\#(E) = q \times \#(F).$$

- Si les ensembles E et F sont finis de même cardinal, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}.$$

4.3 Premiers exemples

Exemple 12 • Pour tous entiers $p \leq q$, déterminer $\#(\llbracket p, q \rrbracket)$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.
 - Soient E et F deux ensembles finis non vides avec $\#(E) = p$ et $\#(F) = q$.
1. Déterminer le nombre total de fonctions $f : E \rightarrow F$.
 2. Parmi ces fonctions, combien sont-elles injectives ?
 3. Parmi ces fonctions, combien sont-elles bijectives ?

Exemple 13 Soient p et n dans \mathbb{N}^* tels que $p \leq n$. On note $\mathcal{I}(p, n)$, l'ensemble des fonctions injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Calculer $\#(\mathcal{I}(p, n))$.
2. Montrer que l'application $s : \begin{cases} \mathcal{I}(p, n) & \rightarrow & \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ f & \mapsto & f(\llbracket 1, p \rrbracket) \end{cases}$ est bien définie et surjective.
3. Si $A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)$, calculer $\#(s^{-1}(\{A\}))$.
4. Démontrer la formule : $\#(\mathcal{I}(p, n)) = \binom{n}{p}$.

Exemple 14 Soit $b \geq 2$ un entier. Soit $r \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'application $f : \begin{cases} [0, b-1]^r & \longrightarrow [0, b^r-1] \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{r-1}) & \longmapsto \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k \cdot b^k \end{cases}$ est bien définie.
2. Montrer que l'application f est injective.
3. En déduire que l'application f est bijective.
4. Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul $(s+1)$ -uplet $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_s)$ d'éléments dans $[0, b-1]$ tel que :

$$n = \sum_{k=0}^s \varepsilon_k \cdot b^k \text{ et } \varepsilon_s \neq 0.$$

Cette écriture est la **décomposition en base b de l'entier n** .

5 Relations binaires

Définition 11 Soit E un ensemble. On appelle **relation** \mathcal{R} sur E , toute partie de E^2 . Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note $(x, y) \in \mathcal{R} \iff x\mathcal{R}y$.

5.1 Relations d'ordre

5.1.1 Définitions

Définition 12 Soit \mathcal{R} une relation sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'ordre** si :

- la relation est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- la relation est **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z$
- la relation est **anti-symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \implies x = y$.

On dit que la relation d'ordre \mathcal{R} est **totale** si tous les éléments de E sont comparables entre eux :

$$\forall (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x].$$

Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre est **partielle**.

Exemple 15 • La relation \leq sur \mathbb{R} est une relation d'ordre totale.

• Si E est un ensemble, la relation d'inclusion \subset est une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}(E)$ si et seulement si E contient au moins deux éléments.

- Sur \mathbb{R}^2 , la relation $(x, y) \preceq (x', y') \iff \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$ est une relation d'ordre totale appelée ordre

lexicographique.

5.1.2 Notions relatives aux relations d'ordre

Définition 13 Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. Soit A une partie de E .

On dit que la partie A est **minorée** si : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \preceq x$. De tels éléments m sont appelés **minorants** de la partie A .

On dit que A admet un **plus petit élément** si : $\exists x_0 \in A, \forall x \in A, x_0 \preceq x$. Lorsqu'il existe, le plus petit élément est unique.

On dit que la partie A admet une **borne inférieure** s'il existe un plus grand minorant. Lorsqu'elle existe, elle est unique, elle est notée $\inf A$ et il s'agit du plus grand de tous les minorants (en quelque sorte, le minorant optimal...)

On dit que la partie A est **majorée** si : $\exists M \in E, \quad \forall x \in A, \quad x \preceq M$. De tels éléments M sont appelés **majorants** de la partie A .

On dit que A admet un **plus grand élément** si : $\exists x_1 \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \preceq x_1$. Lorsqu'il existe, le plus grand élément est unique.

On dit que la partie A admet une **borne supérieure** s'il existe un plus petit majorant. Lorsqu'elle existe, elle est unique, elle est notée $\sup A$ et il s'agit du plus petit de tous les majorants (en quelque sorte, le majorant optimal...)

Exemple 16 • Toute partie non vide et majorée de (\mathbb{R}, \leq) admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée de (\mathbb{R}, \leq) admet une borne inférieure.

• On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^*$ muni de la relation habituelle \leq . Alors, l'ordre est total, l'intervalle $]0, 1]$ est minoré par -1 mais l'intervalle $]0, 1]$ n'admet pas de borne inférieure.

5.2 Relations d'équivalence

5.2.1 Définitions

Définition 14 Soit E un ensemble. Soit \mathcal{R} une relation sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si :

- la relation est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- la relation est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, [x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z] \implies x \mathcal{R} z$
- la relation est **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x **modulo** \mathcal{R} , l'ensemble des éléments y de E en relation avec x :

$$C_x = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}.$$

On note E/\mathcal{R} l'ensemble **quotient**, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence modulo \mathcal{R} .

Exemple 17 • La relation $(p, q) \mathcal{R} (p', q') \iff pq' = p'q$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?

• La relation $p \mathcal{R} q \iff p = q[n]$ est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} (avec un entier $n \geq 1$ fixé). Quel est l'ensemble quotient ?

5.2.2 Partitions

Définition 15 Soit E un ensemble. Soit \mathcal{U} une partie de $\mathcal{P}(E)$ (c'est-à-dire un ensemble de parties de E). On dit que \mathcal{U} forme une **partition** de E si :

- tous les éléments de \mathcal{U} sont non vides ($\forall A \in \mathcal{U}, A \neq \emptyset$)
- tous les éléments de \mathcal{U} sont deux à deux disjoints ($\forall (A, A') \in \mathcal{U}^2, A \neq A' \implies A \cap A' = \emptyset$)
- la réunion des éléments de \mathcal{U} forme E tout entier ($\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = E$)

Exemple 18 Si E est un ensemble non vide, alors l'ensemble \mathcal{U} formé de tous les singletons de E forme une partition.

5.2.3 Utilité d'une relation d'équivalence

Proposition 9 Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} . Alors l'ensemble quotient E/\mathcal{R} forme une partition de E .

Exemple 19 Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction entre deux ensembles non vides.

Déterminer une Condition Nécessaire et Suffisante sur la fonction f pour que l'ensemble $\mathcal{U} = \left(f^{[-1]}(\{y\})\right)_{y \in F}$ forme une partition de l'ensemble E .

Toutes les partitions de l'ensemble E sont-elles nécessairement de la forme précédente avec la CNS remplie ?