

CONVEXITÉ

Exercice 1. [$\star$]

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que

$$1 + \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{1/n}.$$

2. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n} + \Big(\prod_{k=1}^{n} b_k\Big)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{1/n}.$$

Exercice 2. [$\circ$]

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\cdot$$

Exercice 3. [$\circ$]

Sur l'autoroute des vacances, une famille a parcouru 80 km à la vitesse de 80 km/h, un peu ralentie par le trafic important. Croyant se rattraper, le conducteur accélère et parcourt les 80 km qui suivent à 160 km/h. Il affirme alors avoir rouler à une moyenne de $(80 + 160)/2 = 120$ km/h. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4. [$\circ$]

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \geqslant n.$$

Exercice 5. [$\bigstar$]

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection croissante entre les intervalles I et J de $\mathbb{R}$. On dit que $y \in I$ est la f-moyenne des n points pondérés $(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n)$ où les coefficients α_i sont strictement positifs lorsque

$$f(y) = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\cdot$$

Si $f : I \longrightarrow J$ et $g : I \longrightarrow K$ sont deux bijections croissantes sur I, on dit que la f-moyenne est inférieure à la g-moyenne lorsque, pour toute famille de points pondérés $(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n)$ où les coefficients α_i sont strictement positifs, on a

$$f^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\Big) \leqslant g^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 g(x_1) + \cdots + \alpha_n g(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\Big).$$

1. Démontrer que la f-moyenne est inférieure à la g-moyenne si et seulement si $f \circ g^{-1}$ est concave.
2. Écrire les inégalités que l'on obtient en utilisant les fonctions $f : x \longmapsto x^2$, $\mathrm{Id} : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto \ln x$ et $h : x \longmapsto -1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6. [★]

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Soient a et b deux autres nombres réels strictement positifs. Démontrer que
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\cdot$$
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer l'*inégalité de Hölder* :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^q\Big)^{1/q}.$$
3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Démontrer l'*inégalité de Minkowski* :
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^p\Big)^{1/p}.$$

Exercice 7. [⋆]

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dite log-convexe sur I si, et seulement si, $\ln f$ est convexe sur I.

Démontrer que si f est log-convexe sur I alors f est convexe.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8. [★]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est strictement convexe sur I (même définition que la convexité mais avec une inégalité stricte). Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au plus deux solutions.
2. On suppose seulement que f est convexe sur I. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$.

Exercice 9. [★]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}\cdot$$

Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.