Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Test de contrôle

- durée 3 heures / calculatrices interdites -

Compléter les cases en validant par ou en invalidant par les affirmations suivantes.

Sur les polynômes et l'arithmétique ...

Deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ à coefficients rationnels sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine complexe commune.	
Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \in \mathbb{Q}$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$.	
Il existe une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t+2}{t^2+5t+10}$ de la forme $t \longmapsto \arctan(at+b)$, où a et b sont des réels.	
Deux fractions rationnelles $F(X)$ et $G(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$ sont égales si et seulement si l'ensemble $\Big\{z \in \mathbb{C} \mid F(z) = G(z)\Big\}$ est infini.	
Un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ n'admettant aucune racine réelle est de degré pair.	
On a $(X^8-1)^2 \wedge (X^{17}-1) = (X-1)$ dans $\mathbb{C}[X]$.	
En notant d_n le nombre de diviseurs premiers différents divisant n, alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ admet une infinité de valeurs d'adhérence.	
Si p est un nombre premier, alors la suite $(\nu_p(n!))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente mais ne tend pas vers $+\infty$.	
Le groupe $\mathbb{U}_{35}$ admet uniquement deux sous-groupes pour la multiplication.	
Si $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme irréductible, alors le polynôme $P(2X+7)$ est encore irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.	

Sur l'analyse ...

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lipschiztienne, alors la courbe $y = f(x)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.	
La fonction $x \longmapsto \cos\left(e^{\sin(5x+2)}\right)$ est uniformément continue car elle est continue et périodique.	
Si une suite réelle u admet une seule valeur d'adhérence ℓ, alors la suite u est convergente de limite ℓ.	
Si $P(X)$ et $Q(X)$ ont le même terme dominant, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{P^2(n)+1} - \sqrt{Q^2(n)+1} = 0$.	
Il existe une suite réelle dont les valeurs d'adhérence forment l'ensemble $]0,1[$.	
Si u est une suite réelle bornée telle que $(e^{i\ u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite u converge également.	
Si u est une suite à valeurs dans $]-\infty,0[$ et convergente de limite nulle, alors la suite u est monotone à partir d'un certain rang.	
La courbe $y = \sqrt{t^2+t+1} \cdot \exp\left(\dfrac{t+\sin t}{t^2+1}\right)$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.	
Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ soit fini et admette au moins deux éléments.	
La suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.	
Une suite réelle u est divergente vers $+\infty$ si et seulement si la suite u admet une sous-suite strictement croissante et de limite $+\infty$.	
La série $\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln n}$ est convergente.	

Un pot pourri ...

Si X est un vecteur colonne dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $X \cdot X^T$ est toujours semblable à une matrice diagonale.	
Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, on a l'équivalence « $P(X) = P(-X) \iff \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ P(X) = Q(X^2)$ ».	
La série $\displaystyle\sum_n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.	
On peut munir l'ensemble $\mathbb{N}$ d'une loi $\star$ tel que $(\mathbb{N}, \star)$ soit un groupe de neutre égal à 833 et isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.	
Si F est un sous-espace d'un K-espace vectoriel E, on a l'équivalence : « $\exists x \in E,\ F \oplus \mathrm{Vect}(x) = E \iff \forall y \in E \setminus F,\ F + \mathrm{Vect}(y) = E$ ».	
Si $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\displaystyle\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 Q(t) \cdot e^{-t\sin(t)}\ dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)\ Q(k)}{2^k}$.	
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(4x+7) = f(x-1)$, alors f peut ne pas être constante.	
L'ensemble des solutions de l'équation $t\ x' - 5\ x = 0$, d'inconnue $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable est un espace vectoriel de dimension 1.	
Pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sigma(n) = +\infty$.	
La suite $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$ tend vers 0 et il existe $q \in]0, 1[$ tel que : $u_n = \circ(q^n)$.	
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, alors la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.	
Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : « $\tau = \sup(A) \iff \exists (u, v) \in A^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R} \setminus A)^{\mathbb{N}},\ \displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \tau$.	