IUT d'Évry Val d'Essonne
Département TC (S3)

UE31 M3104C, 2018-2019
D. Fourer

TD2 : Probabilités conditionnelles

Rappels :

- probabilité que A et B se réalisent : $P(A \cap B)$
- A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- A et B sont incompatibles si $P(A \cap B) = \emptyset$
- probabilité de A sachant que B s'est réalisé : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- théorème de Bayes : $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$

Exercice 1 : On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 10 boules de couleurs.

- U_1 contient 3 boules blanches
- U_2 contient 5 boules blanches
- U_3 contient 2 boules blanches

Si on tire une boule au hasard dans une des 3 urnes (tirage équiprobable).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ? Une boule noire ? On note B l'événement "on tire une boule blanche" et A_i l'événement on tire dans l'urne U_i.
   $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme une partition de Ω. Le théorème de probabilité totale indique que :
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{1}{3}\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\frac{5}{10} + \frac{1}{3}\frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{3} \qquad (1) \end{aligned}$$
2. Même question si on a 10% de chance de tirer dans l'urne U_2 et 60% de chance de choisir l'urne U_3. On a $P(A_1) = \frac{3}{10}$, $P(A_2) = \frac{1}{10}$ et $P(A_3) = \frac{6}{10}$
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{3}{10}\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\frac{5}{10} + \frac{6}{10}\frac{2}{10} \\ &= \frac{9}{100} + \frac{5}{100} + \frac{12}{100} \qquad (2) \\ &= \frac{26}{100} = \frac{13}{50} \qquad (3) \end{aligned}$$
3. Même question si on répète l'expérience 3 fois avec remise (tirage équiprobable). (faire un arbre pour représenter les possibilités) On considère l'événement $N = B^c = \{$"on tire 3 boules noires"$\}$. $P(N) = (1 - P(B))^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. Donc après 3 tirages, $P(B) = 1 - P(N) = \frac{19}{27} \approx 0.70$.

Exercice 2 : Trois responsables Alexandre, Bruno et Cédric, peuvent signer des contrats pour leur entreprise. Ils étudient respectivement 40%, 30% et 20% des contrats de l'entreprise. Le taux de réussite (rapport entre le nombre de contrats signés et celui des contrats étudiés) de chaque responsable est respectivement de 50%, 70% et 80%.

1. Quel est le nombre de contrats signés par Alexandre si l'entreprise étudie 1000 contrats ? Alexandre signe 60% des 40% étudiés soit $0.5 \times 0.4 \times 1000 = 200$ contrats.
2. Quel est le pourcentage de signatures de contrats réussies par rapport au nombre de contrats total étudié par l'entreprise ? L'entreprise a signé $1000 \times (0.5 \times 0.4 + 0.7 \times 0.3 + 0.8 \times 0.2) = 1000 \times (0.20 + 0.21 + 0.16) = 570$ contrat. L'entreprise signe 57% de ses contrats.

3. Sachant qu'un contrat est signé, quelle est la probabilité que ce soit par Alexandre. On note A l'événement $\{$Alexandre étudie un contrat$\}$, et S l'événement un contrat est signé. Nous avons $P(A) = 0.4$, $P(S) = 0.57$ et $P(S|A) = 0.5$ Donc $P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)P(S|A)}{P(S)} = \frac{0.4 \times 0.5}{0.57} \approx 0.35$

Exercice 3 : Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population touche une personne sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage :

— si une personne est malade, le test est positif à 99%.

— si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0.01%.

Toutefois, avant d'autoriser la commercialisation de ce test, vous faites appel au statisticien du ministère : ce qui vous intéresse, ce n'est pas vraiment les résultats présentés par le laboratoire mais la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.

1. En utilisant le théorème de Bayes, calculez cette probabilité.
2. Qu'en conclure ? Pouvez-vous dire que le test proposé est fiable ?

On note M l'événement $\{$être malade$\}$ et T l'événement $\{$le test est positif$\}$. Nous avons $P(M) = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0.99$ et $P(T|M^c) = 0.0001 = 10^{-4}$ et donc $P(M^c) = 1 - \frac{1}{10000}$. En appliquant le théorème de Bayes nous avons :

$$P(M|T) = \frac{P(M)P(T|M)}{P(T)} = \frac{P(M)P(T|M)}{P(M)P(T|M) + P(M^c)P(T|M^c)} = \frac{10^{-4} \times 0.99}{10^{-4} \times 0.99 + (1 - 10^{-4}) \times 10^{-4}} \approx 0.49. \tag{4}$$

Il y a moins d'une chance sur deux que le patient soit malade si le test est positif. On ne peut donc pas vraiment dire que le test est fiable.

Exercice 4 : Un tireur a probabilité de $\frac{2}{3}$ d'atteindre sa cible. Combien de balles faut il lui donner pour qu'il y ait au moins 99 chances sur 100 que la cible soit atteinte ?

On note A l'événement $\{$Le tireur a atteint sa cible$\}$. Alors $P(A^c) = \frac{1}{3}$. Comme chaque tir est indépendant, alors la probabilité de ne jamais atteindre sa cible au bout de n tirs est de $\frac{1}{3^n}$. On doit résoudre l'équation :

$$1 - \frac{1}{3^n} > \frac{99}{100} \tag{5}$$

$$1 - 0.99 > \frac{1}{3^n} \tag{6}$$

$$3^n > \frac{1}{0.01} \tag{7}$$

$$n \cdot \log(3) > \log(100) \tag{8}$$

$$n > 4.19 \tag{9}$$

On en déduit qu'il faut lui donner au moins 5 balles.