Livret Centrale & Mines-Ponts

Exercices tirés ou inspirés de Louis-Le-Grand & Henri IV

150 exercices classiques corrigés de sup

WikiPrépa

Mathématiques - MPSI & PCSI

Préparation aux concours Mines-Ponts, Centrale-Supélec et X-ENS

Version 1.0 – Janvier 2026

Mises à jour disponibles sur wikiprepa.fr

Table des matières

1

Nombres complexes

Suites arithmético-géométriques

Énoncé

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par son premier terme $x_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = ax_n + b$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
Déterminer l'expression de x_n en fonction de n, x_0, a et b.

Indications :
- Distinguer le cas où la suite est simplement arithmétique.
- Dans le cas général, chercher une constante ℓ (point fixe de la relation de récurrence) telle que la suite auxiliaire $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

Correction.

Idées clés :
- Analyse du point fixe de l'application $f : z \mapsto az + b$.
- Utilisation d'une suite auxiliaire géométrique pour ramener le problème à un schéma connu.

Premier cas : $a = 1$.

Si $a = 1$, la relation de récurrence se réduit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + b$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison b.

Par sommation télescopique ou par les propriétés usuelles des suites arithmétiques, on obtient :

$$\boxed{x_n = x_0 + nb}$$

Deuxième cas : $a \neq 1$.

Analyse. Nous cherchons une valeur $\ell \in \mathbb{C}$ telle que si $x_n = \ell$, alors $x_{n+1} = \ell$. Une telle valeur doit vérifier l'équation :

$$\ell = a\ell + b$$

Puisque $a \neq 1$, cette équation de premier degré admet une unique solution dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\ell = \frac{b}{1-a}}$$

Synthèse. Posons, pour tout entier naturel n, la suite auxiliaire $y_n = x_n - \ell$.

Exprimons y_{n+1} en fonction de y_n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \ell \\ &= (ax_n + b) - (a\ell + b) \\ &= a(x_n - \ell) \\ &= ay_n \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison a.

On en déduit son terme général :

$$y_n = a^n y_0 = a^n(x_0 - \ell)$$

En revenant à la suite (x_n), il vient $x_n = y_n + \ell$, soit :

$$\boxed{x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

> **Piège :**
> Le cas $a = 1$ est souvent omis par les étudiants. Or, la formule générale fait apparaître un dénominateur $(1 - a)$ qui impose la distinction de ce cas dès l'introduction du point fixe.

> **À retenir :**
> Pour toute suite vérifiant $x_{n+1} = ax_n + b$ avec $a \neq 1$, on se ramène à une suite géométrique en posant $y_n = x_n - \ell$, où ℓ est la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Sommes binomiales et exponentielle complexe

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On se propose de simplifier les expressions suivantes :

1. $C(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$
2. $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

Indications :
- Introduire la somme complexe $C(x) + iS(x)$ pour exploiter la linéarité de la somme.
- Utiliser la formule du binôme de Newton.
- Utiliser la technique de la « factorisation par l'angle moitié » pour simplifier le terme $(1 + e^{ix})^n$.

Correction.

Idées clés :
- Passage en complexe pour transformer les fonctions trigonométriques en exponentielles.
- Utilisation de la structure de la formule du binôme de Newton.
- Factorisation par l'angle moitié : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Résolution.

Considérons la quantité complexe $Z = C(x) + iS(x)$. Par linéarité de la somme, nous avons :

$$Z = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(kx) + i\sin(kx))$$

D'après la formule de Moivre, il vient :

$$Z = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k$$

On reconnaît ici le développement de la formule du binôme de Newton appliqué à $(1 + e^{ix})^n$. On en déduit :

$$\boxed{Z = (1 + e^{ix})^n}$$

Pour extraire les parties réelle et imaginaire, nous utilisons la technique de la factorisation par l'angle moitié. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right)$$

D'après les formules d'Euler, $e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Ainsi :

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$$

En élevant à la puissance n, on obtient :

$$Z = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, puisque $C(x) = \mathrm{Re}(Z)$ et $S(x) = \mathrm{Im}(Z)$, nous parvenons aux expressions simplifiées :

1. Pour la somme cosinus :

$$\boxed{C(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

2. Pour la somme sinus :

$$\boxed{S(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

Piège :
Ne pas oublier de traiter la puissance n sur tous les facteurs lors du passage de $(2\cos(x/2)e^{ix/2})$ à sa puissance n. Le facteur 2^n est souvent oublié.

À retenir :
La méthode de l'angle moitié est indispensable pour transformer une somme de deux complexes de module 1 en un produit exploitable :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Moyenne sur les racines de l'unité

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)$$

2. Montrer que $|P(0)| \leq \max\{|P(\omega)|\,;\, \omega \in \mathbb{U}_n\}$ et caractériser le cas d'égalité.

Indications :

- Pour la question 1, utiliser la linéarité de la somme et étudier la valeur de la somme des puissances des racines n-ièmes de l'unité $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$.
- Pour la question 2, appliquer l'inégalité triangulaire à la relation établie précédemment.
- Pour le cas d'égalité, se souvenir qu'une moyenne de valeurs inférieures ou égales à un maximum n'atteint ce maximum que si toutes les valeurs sont égales.

Correction.

Idées clés :

- Somme des puissances des racines de l'unité.
- Inégalité triangulaire complexe.
- Rigidité des polynômes par leurs racines.

1. Démonstration de la formule de la moyenne.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

On remarque d'abord que $P(0) = a_0$.

Évaluons la somme demandée en utilisant la forme polaire des racines n-ièmes $\omega_j = e^{i\frac{2j\pi}{n}}$ pour $j \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(e^{i\frac{2j\pi}{n}}\right)^k$$

Par linéarité de la sommation (interversion de sommes finies), on obtient :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^j \right)$$

Posons $S_k = \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^j$. Deux cas se présentent pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

— Si $k = 0$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$. La somme est constituée de n termes égaux à 1 :

$$S_0 = n$$

— Si $1 \leq k \leq n-1$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$. Il s'agit d'une progression géométrique :

$$S_k = \frac{1 - (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2k\pi}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$$

En revenant à l'expression de la somme de $P(\omega)$, seul le terme $k=0$ subsiste :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega) = a_0 \cdot n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot 0 = na_0$$

On en déduit, puisque $a_0 = P(0)$:

$$\boxed{P(0) = \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)}$$

2. Inégalité et cas d'égalité.

Inégalité :

D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire :

$$|P(0)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)|$$

Or, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $|P(\omega)| \leq \max_{\zeta\in\mathbb{U}_n} |P(\zeta)|$. En sommant ces n inégalités et en divisant par n, on obtient immédiatement :

$$\boxed{|P(0)| \leq \max_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)|}$$

Cas d'égalité :

Supposons que $|P(0)| = \max_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)|$. Notons M cette valeur maximale.

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$M = |P(0)| \leq \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)| \leq \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} M = M$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités. On en tire deux conséquences :

1. $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)| = nM$, ce qui impose que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $|P(\omega)| = M = |P(0)|$.
2. $|\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)| = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)|$.

Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour n complexes non nuls impose qu'ils aient tous le même argument. Comme ils ont aussi le même module $|P(0)|$, ils sont tous égaux.

Ainsi, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $P(\omega) = P(0)$.

Considérons le polynôme $Q = P - P(0)$.
- $\deg(Q) \leq n-1$ (car $\deg(P) \leq n-1$).
- Q s'annule en chaque $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Q possède donc au moins n racines distinctes tout en étant de degré au plus $n-1$. On en conclut que $Q = 0$, soit P est constant.

Réciproquement, si P est constant, l'égalité est triviale.

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu si et seulement si } P \text{ est un polynôme constant.}}$$

> **Piège :**
> Le cas d'égalité $|P(0)| = \max |P(\omega)|$ n'est pas automatique. La restriction $\deg P < n$ est fondamentale. Si

$\deg P = n$, le polynôme $P(X) = X^n + 1$ vérifie $|P(0)| = 1$ alors que $\max |P(\omega)| = 2$.

À retenir :
La somme des puissances k-ièmes des racines n-ièmes de l'unité vaut n si n divise k, et 0 sinon. C'est un outil classique pour extraire des coefficients de polynômes.

Polynômes cyclotomiques et cosinus

Énoncé

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $n-1$ tel que $Q(\omega) = 0$.
2. Soit $x = 2\cos(2\pi/5)$. En utilisant la question précédente et en remarquant que $x = \omega + 1/\omega$ avec $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, déterminer une équation du second degré à coefficients rationnels satisfaite par x, puis calculer la valeur exacte de x.

Indications :

- Pour la question 1, utiliser la factorisation classique du polynôme $X^n - 1$ faisant intervenir les racines n-ièmes de l'unité.
- Pour la question 2, on pourra diviser l'équation $Q(\omega) = 0$ par ω^2 (en justifiant que $\omega \neq 0$) pour faire apparaître des termes de la forme $\omega^k + \omega^{-k}$, puis les exprimer en fonction de x.
- Ne pas oublier de justifier le signe de x pour choisir la racine pertinente de l'équation du second degré.

Correction.

Idées clés :

- Somme géométrique des racines de l'unité.
- Utilisation de la symétrie des polynômes réciproques.
- Lien entre $\cos(\theta)$ et $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$.

Résolution.

1. Si $n = 1$, $\omega = 1$, le polynôme nul $Q = 0$ convient mais n'est pas de degré 0. Cependant, pour $n > 1$, on sait que ω est une racine du polynôme $X^n - 1$.

   Or, nous avons la factorisation classique dans $\mathbb{Q}[X]$:

   $$X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

   Comme $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ et $n \geq 2$, on a $\omega \neq 1$. Par conséquent, ω est racine du second facteur.

   Posons alors :

   $$\boxed{Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1}$$

   Ce polynôme Q est bien à coefficients rationnels (et même entiers), de degré $n-1$, et vérifie $Q(\omega) = 0$ puisque ω est une racine n-ième de l'unité différente de 1.

2. Appliquons le résultat précédent avec $n = 5$. On a $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ et $Q(\omega) = 0$, soit :

   $$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

   Comme $\omega \neq 0$, nous pouvons diviser l'égalité par ω^2 :

   $$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

En regroupant les termes symétriques, on obtient :

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

On remarque que $\omega^{-1} = \bar{\omega}$, donc $x = \omega + \omega^{-1} = 2\text{Re}(\omega) = 2\cos(2\pi/5)$.

De plus, en élevant x au carré :

$$x^2 = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2}$$

D'où la relation $\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = x^2 - 2$. En substituant dans l'équation, il vient :

$$(x^2 - 2) + x + 1 = 0$$

L'équation satisfaite par x est donc :

$$\boxed{x^2 + x - 1 = 0}$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(1)(-1) = 5$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Il reste à déterminer laquelle de ces deux valeurs correspond à $x = 2\cos(2\pi/5)$. Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on sait que $\cos(2\pi/5) > 0$, donc $x > 0$.

Or $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ (car $\sqrt{5} > 1$). On en déduit :

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier de diviser par ω^2 (qui est non nul) pour réduire le degré de l'équation. Une erreur fréquente est de tenter de résoudre l'équation de degré 4 directement sans exploiter sa structure symétrique (on parle de polynôme réciproque).

À retenir :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les puissances de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ se lient aux fonctions circulaires par :

$$(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2 \implies 2\cos(2\theta) = (2\cos\theta)^2 - 2$$

De manière générale, $2\cos(k\theta)$ s'exprime comme un polynôme en $2\cos(\theta)$ (polynômes de Tchebychev).

Caractérisation complexe du triangle équilatéral

Énoncé

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Montrer que les complexes a, b et c sont, dans cet ordre, les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0$$

Indications :

- Traduire le caractère équilatéral direct par une rotation de centre A transformant B en C.
- Exprimer l'angle de cette rotation en fonction de j. On pourra remarquer que $e^{i\pi/3} = -j^2$.
- Utiliser la relation fondamentale $1 + j + j^2 = 0$.

Correction.

Idées clés :

- Interprétation géométrique des complexes (rotations).
- Propriétés de la racine cubique de l'unité j.
- Manipulation d'égalités algébriques dans $\mathbb{C}$.

Analyse géométrique.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives a, b, c.

Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si le point C est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Cette condition géométrique se traduit par l'égalité complexe suivante :

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$$

Lien avec la racine j.

Rappelons que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On observe que :

$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or, on sait que $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc :

$$\boxed{e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2}$$

Calcul algébrique.

Reprenons l'équation de la rotation :

$$\begin{aligned} c - a = -j^2(b - a) &\iff c - a = -bj^2 + aj^2 \\ &\iff c - a - aj^2 + bj^2 = 0 \\ &\iff -a(1 + j^2) + bj^2 + c = 0 \end{aligned}$$

D'après la propriété des racines n-ièmes de l'unité, nous savons que $1 + j + j^2 = 0$, d'où $1 + j^2 = -j$.

L'équation devient alors :

$$-a(-j) + bj^2 + c = 0$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{aj + bj^2 + c = 0}$$

Conclusion.

Pour obtenir la forme demandée, il suffit de multiplier l'égalité précédente par j^2 (qui est non nul) :

$$j^2(aj + bj^2 + c) = 0 \iff aj^3 + bj^4 + cj^2 = 0$$

En utilisant les relations $j^3 = 1$ et $j^4 = j$, nous aboutissons finalement à :

$$\boxed{a + bj + cj^2 = 0}$$

> **Piège :**
> Attention à l'ordre des sommets. Si le triangle est équilatéral indirect, la relation devient $a + bj^2 + cj = 0$ (ou $a + \bar{j}b + \bar{j}^2c = 0$).

> **À retenir :**
> La condition $a + bj + cj^2 = 0$ est une caractérisation extrêmement classique des triangles équilatéraux directs. Elle est équivalente à la forme symétrique plus générale : $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$.

2

Asymptotique

Équivalence d'exponentielles de puissances

Énoncé

Pour quels réels α a-t-on l'équivalence de suites suivante :

$$e^{(n+1)^\alpha} \sim e^{n^\alpha}$$

Indications :

- Revenir à la définition de l'équivalence de deux suites à termes strictement positifs.
- Utiliser la propriété liant l'équivalence du type $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ à la limite de la différence $u_n - v_n$.
- Effectuer un développement asymptotique de la quantité $(n+1)^\alpha - n^\alpha$ en factorisant par le terme dominant.

Correction.

Idées clés :

- Définition de l'équivalence : $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Lien exponentielle-logarithme : $e^{a_n} \sim e^{b_n} \iff a_n - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Développement limité de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.

Analyse du problème.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = e^{(n+1)^\alpha}$ et $v_n = e^{n^\alpha}$. Puisque ces suites sont à valeurs strictement positives, l'équivalence $u_n \sim v_n$ est définie par :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

En utilisant les propriétés de l'exponentielle, nous avons :

$$\frac{u_n}{v_n} = \exp\left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right)$$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0, et puisque $\exp(0) = 1$, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right) = 0}$$

Étude asymptotique de la différence.

Considérons la quantité $\Delta_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$.

Si $\alpha = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = (n+1)^0 - n^0 = 1 - 1 = 0$. La limite est nulle, donc l'équivalence est vérifiée.

Si $\alpha \neq 0$, nous pouvons factoriser par le terme prépondérant n^α :

$$\Delta_n = n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right]$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En injectant ce développement dans l'expression de Δ_n, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= n^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] \\ &= n^\alpha \left[\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équivalent suivant :

$$\boxed{\Delta_n \sim \alpha n^{\alpha-1}}$$

Conclusion selon les valeurs de α.

D'après l'équivalent précédent, nous distinguons trois cas :

1. Si $\alpha - 1 < 0$, c'est-à-dire $\alpha < 1$, alors $n^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dans ce cas, $\Delta_n \to 0$, ce qui implique $u_n \sim v_n$.
2. Si $\alpha = 1$, alors $\Delta_n = (n+1) - n = 1$. La limite est $1 \neq 0$, donc $u_n \sim e \cdot v_n$. Les suites ne sont pas équivalentes.
3. Si $\alpha > 1$, alors $n^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Puisque $\alpha > 0$, $\Delta_n \to +\infty$, donc $\frac{u_n}{v_n} \to +\infty$.

L'équivalence a donc lieu si et seulement si :

$$\boxed{\alpha < 1}$$

Piège :
Une erreur classique consiste à croire que $u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ est une équivalence. C'est faux. Si l'implication vers les logarithmes est vraie (sous conditions), la réciproque est fausse : $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ n'implique absolument pas $u_n \sim v_n$. Ici, on a bien $(n+1)^\alpha \sim n^\alpha$ pour tout α, mais l'équivalence des exponentielles exige que la **différence** des exposants tende vers 0.

À retenir :
Pour deux suites (a_n) et (b_n) tendant vers $+\infty$:

$$e^{a_n} \sim e^{b_n} \iff a_n - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

C'est une condition beaucoup plus forte que $a_n \sim b_n$.

Développement limité de $\ln(\cos(x))$

Énoncé

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

Indications :
- Utiliser les développements limités usuels de la fonction cosinus et de la fonction $\ln(1+u)$.
- Écrire $\cos(x) = 1 + u$ et identifier u comme une quantité tendant vers 0.
- Déterminer l'ordre nécessaire pour chaque développement intermédiaire afin d'obtenir un résultat final à l'ordre 4.

Correction.

Idées clés :
- Composition de développements limités.
- Utilisation de la négligeabilité : $o(x^n)$.

Analyse des ordres de développement.

La fonction cos est paire et son développement limité en 0 commence par $1 - \frac{x^2}{2}$.

Pour obtenir un développement de $f(x) = \ln(\cos(x))$ à l'ordre 4, nous devons effectuer une composition de la forme $\ln(1+u)$ où $u = \cos(x) - 1$.

Comme $u \sim -\frac{x^2}{2}$, le terme u^2 sera d'ordre x^4. Il est donc nécessaire de développer la fonction $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 en u, et la fonction $\cos(x)$ à l'ordre 4 en x.

Étape 1 : Développement de la fonction cosinus.

Au voisinage de 0, nous avons :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Posons $u = \cos(x) - 1$. On a alors :

$$\boxed{u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

Remarquons que $u \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui justifie la composition.

Étape 2 : Développement de la fonction logarithme.

Le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

En substituant t par u, nous obtenons :

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Étape 3 : Calcul des puissances de u et sommation.

Calculons les termes nécessaires à l'ordre 4 :

— Pour u :

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

— Pour u^2 :

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 \\ &= \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

Injectons ces expressions dans le développement de $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Or, on calcule le coefficient du terme en x^4 :

$$\frac{1}{24} - \frac{3}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$$

Conclusion.

Le développement limité à l'ordre 4 de f en 0 est :

$$\boxed{\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}$$

Piège :
Ne pas oublier que u commence par un terme en x^2. Ainsi, pour obtenir l'ordre 4 global, il suffit de pousser $\ln(1+u)$ à l'ordre 2, car u^3 serait déjà un $o(x^4)$. Un développement à l'ordre 4 de $\ln(1+u)$ est possible mais inutilement long.

À retenir :
La composition $g \circ f$ nécessite que $f(x) \to g(0)$ quand $x \to x_0$. Ici, $\cos(x) \to 1$ et ln est développé au voisinage de 1.

DL de la fonction de Bernoulli

Énoncé

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Indications :

- Commencer par effectuer un développement limité du dénominateur à l'ordre 3.
- Simplifier l'expression par x pour se ramener à une forme $\frac{1}{1+u}$.
- Utiliser le développement limité usuel de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0.

Correction.

Idées clés :

- Développement limité d'un quotient par la méthode de la composition.
- Conservation de la précision : pour obtenir un ordre n après division par x, il faut développer le dénominateur à l'ordre $n+1$.

Résolution.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. On rappelle que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0, ce qui assure que $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$. La fonction admet donc un prolongement par continuité en 0.

Effectuons le développement limité du dénominateur à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

En injectant ce résultat dans l'expression de f, nous obtenons :

$$f(x) = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

En simplifiant par x au numérateur et au dénominateur (ce qui est licite pour $x \neq 0$), il vient :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

Posons $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$.

Nous pouvons donc utiliser le développement limité usuel suivant :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Calculons les puissances de $u(x)$ nécessaires à l'ordre 2 :

$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$
$$u(x)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

Substituons ces expressions dans le développement de la fonction inverse :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Après réduction au même dénominateur pour le terme en x^2 ($\frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$), nous concluons :

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à développer le dénominateur seulement à l'ordre 2. Après simplification par x, on n'obtiendrait qu'un ordre 1 pour f, ce qui est insuffisant au regard de l'énoncé.

À retenir :
Les coefficients de ce développement limité sont liés aux nombres de Bernoulli B_n. On a la relation :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k + o(x^n)$$

Ici, on retrouve $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ et $B_2 = 1/6$ (car $\frac{B_2}{2!} = \frac{1}{12}$).

Développement limité d'une fonction composée

Énoncé

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \exp(e^x)$$

Indications :

- Remarquer que $e^x \to 1$ lorsque $x \to 0$. On ne peut donc pas utiliser directement le développement limité de l'exponentielle en 0 sur la forme brute.
- Utiliser la propriété de l'exponentielle : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ pour faire apparaître un terme tendant vers 0 à l'intérieur de l'exponentielle extérieure.
- Effectuer ensuite une composition de développements limités classiques.

Correction.

Idées clés :

- Composition de développements limités : $(g \circ u)(x)$ avec $u(x) \to 0$.
- Propriété fonctionnelle de l'exponentielle pour se ramener en 0.

Analyse du problème.

Soit x au voisinage de 0. On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Si l'on pose $u(x) = e^x$, on constate que $u(x) \to 1$ quand $x \to 0$.

Or, le développement limité usuel de la fonction $t \mapsto e^t$ n'est valable que lorsque l'argument t tend vers 0.

Pour contourner cette difficulté, on décompose l'argument :

$$e^{e^x} = \exp\left(1 + (e^x - 1)\right) = e^1 \cdot \exp(e^x - 1)$$

Développement de la partie interne.

Posons $v(x) = e^x - 1$. Comme $v(0) = 0$, nous pouvons utiliser le développement limité de l'exponentielle usuelle au voisinage de 0 :

$$\boxed{v(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Composition des développements limités.

Cherchons maintenant le développement limité de $\exp(v)$ à l'ordre 2 quand $v \to 0$:

$$\exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2)$$

Substituons l'expression de $v(x)$ dans ce développement en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

1. Pour le terme v :

$$v = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2. Pour le terme v^2 :

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

En sommant ces contributions, nous obtenons le développement de $\exp(e^x - 1)$:

$$\begin{aligned} \exp(e^x - 1) &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2\right) + o(x^2) \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

D'où le résultat intermédiaire :

$$\boxed{\exp(e^x - 1) = 1 + x + x^2 + o(x^2)}$$

Conclusion.

Il ne reste plus qu'à multiplier par le facteur e constant :

$$f(x) = e\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)$$

On en déduit le développement limité final :

$$\boxed{\exp(e^x) = e + ex + ex^2 + o(x^2)}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à écrire $e^{e^x} = 1 + e^x + \frac{(e^x)^2}{2} + o((e^x)^2)$. Ceci est faux car l'argument e^x ne tend pas vers 0 mais vers 1. Le développement de Taylor-Young de e^u au voisinage de $u_0 = 1$ fait intervenir des puissances de $(u - 1)$.

À retenir :
Pour calculer le DL de $g(u(x))$ quand $x \to x_0$:
- Si $u(x) \to 0$, on utilise le DL de g en 0.
- Si $u(x) \to \ell \neq 0$, on pose $h = u(x) - \ell$ (qui tend vers 0) et on développe $g(\ell + h)$ par rapport à h.

Équivalent d'une somme de fonctions trigonométriques

Énoncé

Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers 0, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x}$$

Indications :
- Utiliser les développements limités usuels au voisinage de 0.
- Pour obtenir un équivalent du résultat final, il est nécessaire de pousser les développements limités des termes en $1/x$ jusqu'à l'ordre $o(x)$.
- Rappel : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ au voisinage de 0.

Correction.

Idées clés :
- Développement limité (DL) des fonctions réciproques de fonctions s'annulant en 0.
- Recherche du premier terme non nul pour obtenir un équivalent.

Résolution.

La fonction f est définie et impaire sur un voisinage épointé de 0. Nous cherchons un développement limité à un ordre suffisant pour compenser la singularité en $1/x$.

1. Développement limité de $\frac{1}{\sin x}$.

On connaît le développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On factorise par le terme prépondérant x :

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

D'où, par passage à l'inverse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

On obtient ainsi le premier résultat intermédiaire :

$$\boxed{\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x)}$$

2. Développement limité de $\frac{1}{\tan x}$.

De même, on connaît le développement limité de la fonction tangente au voisinage de 0 :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

En procédant de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan x} &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x)}$$

3. Synthèse et conclusion.

En sommant les deux développements obtenus, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x)\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x)\right) \\ &= \frac{2}{x} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) x + o(x) \\ &= \frac{2}{x} - \frac{x}{6} + o(x) \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{6} + o(x)\right) - \frac{2}{x} \\ &= -\frac{1}{6}x + o(x) \end{aligned}$$

Le premier terme non nul du développement limité de f en 0 étant $-\frac{1}{6}x$, on conclut :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{6}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à s'arrêter trop tôt dans les ordres des développements limités. Comme les termes en $1/x$ s'annulent ($1/x + 1/x - 2/x = 0$), un DL à l'ordre $o(1/x)$ (c'est-à-dire un DL de sin et tan à l'ordre 2) donnerait $f(x) = o(1)$, ce qui est insuffisant pour obtenir un équivalent.

À retenir :
Pour obtenir un équivalent d'une somme, si les termes prépondérants s'annulent, il faut pousser le développement à l'ordre suivant jusqu'à obtenir le premier terme non nul.

Limite d'un quotient de puissances

Énoncé

Déterminer la limite en 0^+ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^x}}$$

Indications :

- Utiliser la définition de la puissance généralisée : $u^v = \exp(v \ln u)$ pour $u > 0$.
- Simplifier l'expression sous la forme d'une unique exponentielle.
- Appliquer les théorèmes de croissances comparées en 0^+.

Correction.

Idées clés :

- Forme exponentielle : $a^b = e^{b \ln a}$.
- Croissances comparées : $\forall \alpha > 0, \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.
- Continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Analyse de l'expression.

Soit $x > 0$. Rappelons que par définition, pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $a^b = \exp(b \ln a)$.

Le numérateur s'écrit :

$$x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x} \ln x)$$

Le dénominateur s'écrit, en utilisant les propriétés de la fonction racine carrée et de l'exponentielle :

$$\sqrt{x^x} = (x^x)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} x \ln x\right)$$

Simplification du quotient.

On en déduit l'expression de $f(x)$ sous forme d'une exponentielle unique :

$$f(x) = \frac{\exp(\sqrt{x} \ln x)}{\exp\left(\frac{1}{2} x \ln x\right)} = \exp\left(\sqrt{x} \ln x - \frac{1}{2} x \ln x\right)$$

Pour plus de clarté dans l'étude de la limite, on peut factoriser l'argument de l'exponentielle :

$$\boxed{f(x) = \exp\left(\sqrt{x} \ln x \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\right)}$$

Étude de la limite.

D'après le cours sur les croissances comparées, on sait que pour tout réel $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

En appliquant ce résultat avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$, nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Par somme de limites, l'argument de l'exponentielle tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\ln x - \frac{1}{2}x\ln x\right) = 0}$$

Conclusion.

Par continuité de la fonction exponentielle en 0, on en déduit que $f(x)$ tend vers $e^0 = 1$.

L'étude se conclut ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^x}} = 1}$$

Piège :
Ne pas confondre $\sqrt{x^x}$ et $(\sqrt{x})^x$. Bien que dans cet exercice les deux tendent vers 1, la rigueur dans la manipulation des puissances est essentielle.

À retenir :
Pour lever une indétermination sur des formes $u(x)^{v(x)}$, le premier réflexe doit être le passage à la forme exponentielle $e^{v(x)\ln u(x)}$.

Limite d'une puissance fonctionnelle

Énoncé

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$$

Indications :
- Transformer l'expression en utilisant la forme exponentielle : $u^v = \exp(v \ln u)$.
- Utiliser les développements limités au voisinage de 0 des fonctions cos et $\ln(1+u)$.
- Déterminer un équivalent ou la limite de l'exposant lorsque x tend vers 0.

Correction.

Idées clés :
- Passage à la forme exponentielle pour les puissances généralisées.
- Utilisation des développements limités (DL) pour lever une indétermination.
- Composition de limites.

Résolution.

Soit f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = (\cos x)^{\cot^2 x}$.

Pour tout x dans un voisinage épointé de 0 tel que $\cos x > 0$, la fonction f est bien définie et on peut écrire :

$$f(x) = \exp\left(\cot^2 x \ln(\cos x)\right)$$

Étudions le comportement de l'exposant $g(x) = \cot^2 x \ln(\cos x)$ lorsque x tend vers 0.

1. Analyse du logarithme.

D'après le développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 à l'ordre 2, nous avons :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

En utilisant le développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 1, à savoir $\ln(1+u) = u + o(u)$, et en posant $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

On en déduit l'équivalent suivant au voisinage de 0 :

$$\boxed{\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}}$$

2. Analyse du terme en cotangente.

Rappelons que $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Au voisinage de 0, nous avons $\cos x \to 1$ et $\sin x \sim x$.

Par conséquent :

$$\cot x \sim \frac{1}{x}$$

En élevant au carré, il vient :

$$\boxed{\cot^2 x \sim \frac{1}{x^2}}$$

3. Synthèse et conclusion.

Par produit d'équivalents, nous obtenons le comportement de l'exposant $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \cot^2 x \ln(\cos x) \\ &\sim \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la limite de l'exposant est :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{2}$$

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Piège :
Attention à ne pas appliquer de développements limités n'importe comment dans une exponentielle. Il faut impérativement traiter l'exposant séparément et vérifier qu'il admet une limite finie (ou une direction de divergence claire) avant de conclure.

À retenir :
Pour toute limite de la forme $u(x)^{v(x)}$, le premier réflexe doit être de passer à la forme $\exp(v(x)\ln(u(x)))$. Les équivalents sont alors d'une efficacité redoutable pour simplifier l'exposant.

Limite d'une forme indéterminée exponentielle

Énoncé

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$$

Indications :

- Commencer par mettre l'expression sous forme exponentielle.
- Utiliser la relation fonctionnelle $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ valable pour tout $x > 0$.
- Effectuer un développement limité de l'argument à l'intérieur de l'exponentielle.

Correction.

Idées clés :

- Passage à la forme $e^{u(x)}$.
- Relation de complémentarité de l'arctangente.
- Développements limités usuels au voisinage de 0.

Analyse du problème.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\arctan x > 0$ pour $x > 0$.

On cherche la limite en $+\infty$ d'une forme indéterminée du type 1^∞.

Pour tout $x > 0$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)\right)$$

Étude asymptotique de l'argument.

Rappelons que pour tout $x > 0$, on a la relation :

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lorsque $x \to +\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0$. On utilise le développement limité de l'arctangente au voisinage de 0 :

$$\arctan(h) = h + o(h)$$

En posant $h = \frac{1}{x}$, on obtient le développement de $\arctan x$ au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Multiplions par $\frac{2}{\pi}$ pour obtenir l'argument du logarithme :

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\arctan x = 1 - \frac{2}{\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Développement du logarithme.

On pose $u(x) = -\frac{2}{\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on utilise le développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) &= \ln\left(1 - \frac{2}{\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= -\frac{2}{\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

On multiplie maintenant par x pour trouver le comportement de l'exposant :

$$\boxed{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = -\frac{2}{\pi} + o(1)}$$

Conclusion.

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)\right) = \exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{-2/\pi}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à croire que comme $\frac{2}{\pi}\arctan x \to 1$, la limite de la puissance est forcément 1. C'est une forme indéterminée 1^∞ qui nécessite impérativement un développement limité de l'exposant.

> **À retenir :**
> Pour étudier $u(x)^{v(x)}$, on passe toujours par la forme $\exp(v(x)\ln(u(x)))$. La précision du développement limité de $u(x)$ doit être suffisante pour que, multipliée par $v(x)$, elle donne un terme constant ou divergent.

Équivalent d'une expression asymptotique

Énoncé

Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{1/x} - \frac{x(x+1)}{1+x^2}$$

Indications :

- Effectuer un changement de variable $u = 1/x$ pour se ramener au voisinage de 0.
- Utiliser les développements limités usuels à un ordre suffisant pour que les premiers termes non nuls ne s'annulent pas lors de la soustraction.
- Pour le terme rationnel, factoriser par le terme prédominant au dénominateur puis utiliser le développement limité de $(1+u)^\alpha$.

Correction.

Idées clés :

- Changement de variable $u = 1/x$ au voisinage de 0^+.
- Développement limité de e^u et de $(1+u)^{-1}$.
- Recherche du premier terme non nul de la différence.

Résolution.

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque $x \to +\infty$, nous avons $u \to 0^+$.

L'expression devient alors :

$$f(x) = e^u - \frac{\frac{1}{u}(\frac{1}{u}+1)}{1+\frac{1}{u^2}} = e^u - \frac{1+u}{1+u^2}$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

D'une part, pour l'exponentielle :

$$\boxed{e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}$$

D'autre part, pour la fraction rationnelle :

$$\begin{aligned}\frac{1+u}{1+u^2} &= (1+u)(1+u^2)^{-1} \\ &= (1+u)(1-u^2+o(u^2)) \\ &= 1 - u^2 + u - u^3 + o(u^2)\end{aligned}$$

En ne conservant que les termes jusqu'à l'ordre 2, on obtient :

$$\boxed{\frac{1+u}{1+u^2} = 1 + u - u^2 + o(u^2)}$$

Soustrayons à présent les deux développements obtenus :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) - \left(1 + u - u^2 + o(u^2)\right) \\ &= (1-1) + (u-u) + \left(\frac{1}{2} - (-1)\right) u^2 + o(u^2) \\ &= \frac{3}{2}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) \sim \frac{3}{2}u^2$ au voisinage de $u = 0$.

En revenant à la variable x, nous concluons :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{3}{2x^2}}$$

> **Piège :**
> Pousser le développement à l'ordre 1 seulement conduirait à $f(x) = o(1/x)$, ce qui est insuffisant pour obtenir un équivalent (on obtiendrait 0). Il est crucial de poursuivre le développement jusqu'à l'apparition de la première constante non nulle dans la différence.

> **À retenir :**
> Pour trouver un équivalent d'une somme ou d'une différence, on cherche le développement limité de chaque terme à un ordre identique, tel que la différence des parties régulières ne soit pas nulle.

Limite d'une forme 1^∞

Énoncé

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$$

Indications :

- Utiliser la forme exponentielle $u(x)^{v(x)} = \exp\left(v(x)\ln u(x)\right)$ pour lever l'indétermination.
- Effectuer le changement de variable $h = x - \frac{\pi}{4}$ pour se ramener au voisinage de 0.
- Utiliser les développements limités usuels des fonctions trigonométriques et du logarithme.

Correction.

Idées clés :

- Passage à la forme exponentielle.
- Changement de variable pour l'étude locale.
- Développement limité (DL) à l'ordre 1.

Analyse du problème.

La fonction $f : x \mapsto (\tan x)^{\tan 2x}$ est définie sur un voisinage épointé de $\pi/4$.

Lorsque x tend vers $\pi/4$, $\tan x$ tend vers 1 et $\tan 2x$ tend vers $\pm\infty$. Nous sommes donc en présence d'une forme indéterminée du type 1^∞.

Pour tout x tel que $\tan x > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \exp\left(\tan(2x)\ln(\tan x)\right)$$

Posons le changement de variable $h = x - \frac{\pi}{4}$, de sorte que $x = \frac{\pi}{4} + h$. Lorsque $x \to \frac{\pi}{4}$, on a $h \to 0$.

Développement du logarithme.

Exprimons d'abord $\tan x$ en fonction de h en utilisant la formule d'addition de la tangente :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan h}{1 - \tan(\pi/4)\tan h} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$$

Au voisinage de $h = 0$, nous savons que $\tan h = h + o(h)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= \frac{1 + h + o(h)}{1 - h + o(h)}\\ &= (1 + h + o(h))(1 + h + o(h))\\ &= 1 + 2h + o(h)\end{aligned}$$

Par composition avec le développement limité de $\ln(1 + u)$ au voisinage de 0 :

$$\boxed{\ln(\tan x) = \ln(1 + 2h + o(h)) = 2h + o(h)}$$

Développement de la puissance.

Étudions maintenant le terme $\tan(2x)$ au voisinage de $\pi/4$:

$$\tan(2x) = \tan\left(2\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)$$

D'après les formules de trigonométrie circulaire :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) = -\frac{1}{\tan(2h)}$$

En utilisant le développement $\tan(2h) = 2h + o(h)$, il vient :

$$\boxed{\tan(2x) = -\frac{1}{2h+o(h)} = -\frac{1}{2h(1+o(1))} = -\frac{1}{2h} + o\left(\frac{1}{h}\right)}$$

Synthèse et conclusion.

Formons maintenant le produit dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}\tan(2x)\ln(\tan x) &= \left(-\frac{1}{2h} + o\left(\frac{1}{h}\right)\right)(2h+o(h)) \\ &= -\frac{2h}{2h} + o(1) \\ &= -1 + o(1)\end{aligned}$$

On en déduit par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x\to\pi/4} f(x) = \exp(-1)$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}}$$

> **Piège :**
> Une erreur classique consiste à négliger le signe de l'argument de la tangente lors du passage à l'inverse : $\tan(\pi/2+\theta) = -1/\tan\theta$.

> **À retenir :**
> Pour toute limite de la forme $u(x)^{v(x)}$, le premier réflexe doit être le passage à la forme exponentielle. La recherche d'un équivalent du logarithme simplifie souvent drastiquement les calculs.

Équivalent d'un logarithme composé

Énoncé

Soient a et b deux réels, avec $a > 0$.
Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de la quantité suivante :

$$f(x) = \ln(\ln(ax + b)) - \ln(\ln x)$$

Indications :

- Utiliser les propriétés du logarithme pour transformer la différence en le logarithme d'un quotient.
- Factoriser par le terme prépondérant x à l'intérieur des logarithmes itérés.
- Utiliser les développements asymptotiques usuels de $\ln(1 + u)$ au voisinage de 0.
- Distinguer le cas $a = 1$ du cas $a \neq 1$.

Correction.

Idées clés :

- Propriété : $\ln u - \ln v = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$.
- Développement asymptotique : $\ln(1 + u) = u + o(u)$ quand $u \to 0$.
- Hiérarchie des croissances comparées au voisinage de $+\infty$.

Analyse préliminaire.

On commence par écrire la fonction f sous une forme plus maniable en utilisant les propriétés de la fonction logarithme :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln(ax + b)}{\ln x}\right)$$

Pour x au voisinage de $+\infty$, on cherche un développement du rapport à l'intérieur du logarithme.

Développons le numérateur :

$$\begin{aligned}\ln(ax + b) &= \ln\left(ax\left(1 + \frac{b}{ax}\right)\right)\\ &= \ln a + \ln x + \ln\left(1 + \frac{b}{ax}\right)\end{aligned}$$

Comme $\frac{b}{ax} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on utilise le développement $\ln(1 + u) = u + o(u)$:

$$\ln(ax + b) = \ln x + \ln a + \frac{b}{ax} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit l'expression du quotient :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(ax + b)}{\ln x} &= \frac{\ln x + \ln a + \frac{b}{ax} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\\ &= 1 + \frac{\ln a}{\ln x} + \frac{b}{ax\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon(x) = \frac{\ln a}{\ln x} + \frac{b}{ax\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$. Comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, nous pouvons utiliser le développement de $\ln(1 + \varepsilon(x))$.

Premier cas : $a \neq 1$.

Si $a \neq 1$, alors $\ln a \neq 0$. Le terme dominant dans $\varepsilon(x)$ est $\frac{\ln a}{\ln x}$.

On a alors :

$$\frac{\ln(ax+b)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln a}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

En appliquant le développement du logarithme extérieur :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{\ln a}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) = \frac{\ln a}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

On obtient donc l'équivalent suivant :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln a}{\ln x}}$$

Deuxième cas : $a = 1$.

Si $a = 1$, alors $\ln a = 0$. L'expression de $\varepsilon(x)$ se simplifie et le terme dominant devient :

$$\varepsilon(x) = \frac{b}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

Si $b \neq 0$, on obtient par le même raisonnement :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{b}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)$$

D'où l'équivalent :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{b}{x\ln x}}$$

Conclusion.

L'équivalent dépend de la valeur de a :

- Si $a \neq 1$, $f(x) \sim \frac{\ln a}{\ln x}$.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, $f(x) \sim \frac{b}{x\ln x}$.
- Si $a = 1$ et $b = 0$, $f(x) = 0$ pour tout $x > 1$.

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à s'arrêter au premier terme $\ln a/\ln x$ sans vérifier s'il est non nul. Si $a = 1$, ce terme s'annule et il faut pousser le développement un cran plus loin pour trouver le premier terme non nul.

> **À retenir :**
> Pour obtenir un équivalent de $\ln(u(x))$ lorsque $u(x) \to 1$, on cherche un développement de la forme $u(x) = 1 + v(x) + o(v(x))$ avec $v(x) \to 0$. Alors $\ln(u(x)) \sim v(x)$.

Différence de puissances hyperboliques

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\cosh x)^\alpha - (\sinh x)^\alpha$$

Indications :
- Exprimer les fonctions hyperboliques à l'aide de l'exponentielle.
- Factoriser par le terme prépondérant $\frac{e^x}{2}$ pour faire apparaître des termes de la forme $(1+u)^\alpha$.
- Utiliser un développement limité au voisinage de 0 pour traiter la différence.

Correction.

Idées clés :
- Factorisation par le terme dominant.
- Utilisation du développement limité $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$ au voisinage de 0.
- On ne peut pas sommer les équivalents si les termes prépondérants s'annulent.

Résolution.

Commençons par exprimer $\cosh x$ et $\sinh x$ au voisinage de $+\infty$ en factorisant par leur terme prépondérant :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}(1 + e^{-2x})$$

De même pour le sinus hyperbolique :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}(1 - e^{-2x})$$

En élevant à la puissance α, nous obtenons l'expression suivante pour $f(x)$:

$$f(x) = \left(\frac{e^x}{2}\right)^\alpha \left[(1 + e^{-2x})^\alpha - (1 - e^{-2x})^\alpha\right]$$

Posons $u = e^{-2x}$. Comme $x \to +\infty$, on a $u \to 0$.

Nous pouvons donc utiliser le développement limité de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$ au voisinage de 0 à l'ordre 1 :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$$

Appliquons ceci aux deux termes entre crochets :

$$\begin{aligned}(1 + e^{-2x})^\alpha &= 1 + \alpha e^{-2x} + o(e^{-2x}) \\ (1 - e^{-2x})^\alpha &= 1 - \alpha e^{-2x} + o(e^{-2x})\end{aligned}$$

Par soustraction, les termes constants s'annulent, ce qui nous permet d'obtenir le premier terme non nul :

$$(1 + e^{-2x})^\alpha - (1 - e^{-2x})^\alpha = 2\alpha e^{-2x} + o(e^{-2x})$$

On en déduit l'équivalent de la parenthèse :

$$\boxed{(1 + e^{-2x})^\alpha - (1 - e^{-2x})^\alpha \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\alpha e^{-2x}}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par le facteur prépondérant mis de côté au début :

$$f(x) \sim \frac{e^{\alpha x}}{2^\alpha} \cdot 2\alpha e^{-2x}$$
$$f(x) \sim \frac{2\alpha}{2^\alpha} e^{\alpha x - 2x}$$

En simplifiant les puissances de 2, nous obtenons le résultat final :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha 2^{1-\alpha} e^{(\alpha-2)x}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à dire que $\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$ et $\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$, puis à conclure que leur différence est équivalente à 0. Rappelons que l'on ne peut jamais sommer ou soustraire des équivalents. Il est impératif de pousser le développement jusqu'à l'ordre où les termes ne s'annulent plus.

À retenir :
Pour trouver l'équivalent d'une différence $A - B$ dont les termes dominants s'annulent :

1. Factoriser par le terme commun le plus "gros".
2. Effectuer un développement limité de la structure restante.
3. S'arrêter au premier terme non nul de la différence.

Limite d'une moyenne de puissances n-ièmes

Énoncé

Soient u et v deux réels strictement positifs. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que :

$$a_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \quad \text{et} \quad b_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$$

Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n$$

Indications :

- Exprimer a_n et b_n sous forme exponentielle afin d'en obtenir un développement asymptotique à la précision $o(1/n)$.
- Utiliser la continuité de la fonction logarithme et le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de 0.
- Composer les développements pour obtenir celui de l'argument de la puissance n-ième.

Correction.

Idées clés :

- Passage à la forme exponentielle : $x^n = \exp(n \ln x)$.
- Développement limité à l'ordre 1 : $e^h = 1 + h + o(h)$ quand $h \to 0$.
- Relation entre convergence et équivalents pour les fonctions usuelles.

Analyse asymptotique de a_n et b_n.

Par hypothèse, nous avons $a_n^n \to u$ avec $u > 0$. Comme la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit :

$$\ln(a_n^n) = n\ln(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln u$$

On peut donc écrire :

$$\ln a_n = \frac{\ln u + o(1)}{n} = \frac{\ln u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puisque $\frac{\ln u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, nous utilisons le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 ($e^h = 1 + h + o(h)$) :

$$a_n = \exp\left(\frac{\ln u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\ln u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par un raisonnement parfaitement analogue pour la suite (b_n), nous obtenons :

$$\boxed{a_n = 1 + \frac{\ln u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = 1 + \frac{\ln v}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Étude de la moyenne arithmétique.

Calculons maintenant la demi-somme des termes a_n et b_n :

$$\begin{aligned}\frac{a_n+b_n}{2} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln u}{n}+1+\frac{\ln v}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{2+\frac{\ln u+\ln v}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\\ &= 1+\frac{\ln(uv)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Posons $X_n = \frac{\ln(uv)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $X_n \to 0$, nous pouvons utiliser le développement limité de $\ln(1+h)$ au voisinage de 0 :

$$\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = \ln(1+X_n) = X_n + o(X_n)$$

D'où :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = \frac{\ln(uv)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Conclusion sur la limite.

Exprimons le terme général w_n sous forme exponentielle :

$$w_n = \exp\left(n\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\right)$$

En substituant le développement obtenu précédemment :

$$n\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = n\left(\frac{\ln(uv)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(uv)}{2}+o(1)$$

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que w_n converge vers $\exp\left(\frac{\ln(uv)}{2}\right)$.

On conclut :

$$\boxed{w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{uv}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à croire que si $x_n \to 1$, alors $x_n^n \to 1$. C'est une forme indéterminée de type "1^∞". Il est impératif de passer par la forme exponentielle et d'étudier précisément l'exposant.

> **À retenir :**
> Pour étudier une limite de la forme $f(n)^{g(n)}$, la méthode systématique consiste à étudier le comportement de $g(n)\ln(f(n))$. Si $f(n) \to 1$, un développement limité de $\ln(f(n))$ à un ordre suffisant est nécessaire.

Étude asymptotique d'une réciproque

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 + x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa réciproque f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
3. Donner un développement asymptotique de $f^{-1}(x)$ à deux termes lorsque $x \to +\infty$.

Indications :
- Pour la première question, utiliser le théorème de la bijection et le théorème de régularité de la fonction réciproque.
- Pour l'étude asymptotique, poser $y = f^{-1}(x)$, observer que $y \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, et exploiter la relation $x = y^5 + y$.
- Pour le développement à deux termes, réinjecter l'équivalent obtenu dans l'équation de définition.

Correction.

Idées clés :
- Théorème de la bijection (f continue, strictement monotone).
- Théorème de la fonction réciproque de classe C^k.
- Inversion locale de développements asymptotiques par substitution.

1. Étude de la bijection et de sa régularité.

La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule sa dérivée :

$$f'(x) = 5x^4 + 1$$

On observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 1 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, par croissance comparée ou par étude des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

D'après le théorème de la bijection, f réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Comme f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, le théorème de régularité des fonctions réciproques assure que :

$$\boxed{f^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Recherche d'un équivalent à l'infini.

Soit $x > 0$. Posons $y = f^{-1}(x)$. Par définition de la réciproque, on a $x = f(y)$, soit :

$$x = y^5 + y$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, on a $y \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Cherchons le terme dominant dans l'expression $x = y^5 + y$. Comme $y \to +\infty$, on a $y = o(y^5)$, d'où :

$$x = y^5(1 + y^{-4}) \sim y^5$$

Par passage à la puissance $1/5$ (la fonction $t \mapsto t^{1/5}$ préserve les équivalents au voisinage de $+\infty$), il vient $y \sim x^{1/5}$.

On conclut :

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{1/5}}$$

3. Développement asymptotique à deux termes.

Cherchons une précision supplémentaire en écrivant $y = x^{1/5} + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = o(x^{1/5})$.

Reprenons l'égalité $x = y^5(1 + y^{-4})$. En isolant y, on obtient :

$$y = x^{1/5}(1 + y^{-4})^{-1/5}$$

Comme $y \to +\infty$, on sait que $y^{-4} \to 0$. On peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $u \mapsto (1 + u)^{-1/5}$ au voisinage de 0 :

$$(1 + y^{-4})^{-1/5} = 1 - \frac{1}{5}y^{-4} + o(y^{-4})$$

En injectant cela dans l'expression de y :

$$y = x^{1/5}\left(1 - \frac{1}{5}y^{-4} + o(y^{-4})\right) = x^{1/5} - \frac{1}{5}x^{1/5}y^{-4} + o(x^{1/5}y^{-4})$$

Or, nous avons établi précédemment que $y \sim x^{1/5}$, donc $y^{-4} \sim x^{-4/5}$. On peut alors substituer cet équivalent dans le terme correctif :

$$\frac{1}{5}x^{1/5}y^{-4} \sim \frac{1}{5}x^{1/5}(x^{1/5})^{-4} = \frac{1}{5}x^{1/5}x^{-4/5} = \frac{1}{5}x^{-3/5}$$

On obtient finalement le développement asymptotique à deux termes :

$$\boxed{f^{-1}(x) = x^{1/5} - \frac{1}{5}x^{-3/5} + o(x^{-3/5})}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier de vérifier que la dérivée ne s'annule pas avant d'affirmer que f^{-1} est de classe C^∞. Ici, $5x^4 + 1$ est toujours strictement positif.

À retenir :
Pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction réciproque $y = f^{-1}(x)$:

1. Utiliser la relation $f(y) = x$.
2. Déterminer d'abord la limite de y, puis un premier équivalent.
3. Réinjecter cet équivalent pour obtenir les termes suivants par développements limités successifs.

Étude asymptotique d'une suite de racines

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x^n + x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite l que l'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent de $x_n - l$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications :

- Pour la question 1, effectuer une étude de la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$.
- Pour la convergence, comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$ pour obtenir la monotonie.
- Pour l'équivalent, poser $x_n = 1 - \epsilon_n$ et utiliser le logarithme sur la relation $x_n^n = 1 - x_n$.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de la bijection (continuité et stricte monotonie).
- Étude du signe de $f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1})$ pour la monotonie.
- Manipulation de relations implicites et de limites de logarithmes.

1. Existence et unicité de x_n.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[f_n(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.

De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, donc par croissance de f_n :

$$\boxed{x_n \in]0, 1[}$$

2. Convergence de la suite (x_n).

Calculons la différence $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$ pour comparer les termes successifs :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1$$

Or, par définition de x_n, on a $x_n^n + x_n - 1 = 0$, soit $x_n - 1 = -x_n^n$. Ainsi :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1)$$

Comme $x_n \in]0, 1[$, on en déduit que $f_{n+1}(x_n) < 0$. Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Par stricte croissance de f_{n+1}, on obtient :

$$x_n < x_{n+1}$$

La suite (x_n) est donc strictement croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers une limite $l \in]0, 1]$.

Supposons par l'absurde que $l < 1$. Alors, comme $0 \leq x_n \leq l$, on a $0 \leq x_n^n \leq l^n$. Par passage à la limite, $x_n^n \to 0$.

L'égalité $x_n^n + x_n = 1$ donnerait à la limite $0 + l = 1$, soit $l = 1$, ce qui contredit $l < 1$.

On en déduit :

$$\boxed{l = 1}$$

3. Équivalent de $x_n - 1$.

Posons $\epsilon_n = 1 - x_n$. On a $\epsilon_n \to 0$. L'équation de départ s'écrit :

$$(1 - \epsilon_n)^n = \epsilon_n$$

En appliquant la fonction logarithme (car $\epsilon_n > 0$ et $1 - \epsilon_n > 0$) :

$$n \ln(1 - \epsilon_n) = \ln(\epsilon_n)$$

Comme $\epsilon_n \to 0$, on utilise le développement limité $\ln(1 - \epsilon_n) = -\epsilon_n + o(\epsilon_n)$. On obtient :

$$-n\epsilon_n(1 + o(1)) = \ln(\epsilon_n)$$

En divisant par $\ln(\epsilon_n)$ (qui est non nul pour n assez grand), on a :

$$\frac{-n\epsilon_n}{\ln(\epsilon_n)} \to 1$$

Cherchons une solution sous la forme $\epsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$. Vérifions cette intuition. Si $\epsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$, alors :

$$\ln \epsilon_n = \ln(\ln n) - \ln n \sim -\ln n$$

D'autre part :

$$-n\epsilon_n \sim -n\frac{\ln n}{n} = -\ln n$$

La relation $\ln \epsilon_n \sim -n\epsilon_n$ est donc cohérente. Pour le rédiger rigoureusement, reprenons :

$$n\epsilon_n = -\ln \epsilon_n + o(n\epsilon_n) \implies n\epsilon_n \sim -\ln \epsilon_n$$

En prenant le logarithme de cette équivalence (autorisé car les termes tendent vers $+\infty$) :

$$\ln n + \ln \epsilon_n \sim \ln(-\ln \epsilon_n)$$

Or $\ln(-\ln \epsilon_n) = o(\ln \epsilon_n)$ car $\ln \epsilon_n \to -\infty$. On en déduit $\ln \epsilon_n \sim -\ln n$.

En réinjectant dans $n\epsilon_n \sim -\ln \epsilon_n$, on obtient $n\epsilon_n \sim \ln n$, d'où :

$$\boxed{x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas composer les équivalents par la fonction logarithme sans précaution. Il faut revenir à la définition de la limite ou vérifier que le terme négligé reste négligeable.

À retenir :
Pour obtenir un équivalent d'une suite définie par une équation $f_n(x) = 0$, on étudie d'abord la limite l, puis on pose $x_n = l + \epsilon_n$ et on injecte dans l'équation.

Étude des racines de $\tan x = x$

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $\tan x = x$.

1. Montrer que cette équation possède une unique racine x_n dans l'intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Donner un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique de x_n à trois termes lorsque $n \to +\infty$.

Indications :
- Pour la question 1, on pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ sur chaque intervalle I_n.
- Pour l'équivalent, utiliser l'encadrement de x_n donné par l'intervalle I_n.
- Pour le développement asymptotique, poser $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n$ et exploiter la relation $\tan(x_n) = x_n$ pour obtenir une équation sur ε_n.

Correction.

Idées clés :
- Théorème de la bijection (ou des valeurs intermédiaires).
- Changement de variable pour se ramener au voisinage de 0.
- Utilisation de la fonction arctan pour exprimer l'écart à la borne.

1. Existence et unicité de la racine x_n.
Considérons la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$f(x) = \tan x - x$$

La fonction f est dérivable sur chaque intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et :

$$\forall x \in I_n, \quad f'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x$$

La dérivée f' est strictement positive sur $I_n \setminus \{n\pi\}$. La fonction f est donc strictement croissante sur I_n.

Étudions les limites aux bornes de I_n :

— $\lim_{x \to (-\pi/2+n\pi)^+} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \to (-\pi/2+n\pi)^+} \tan x = -\infty$.
— $\lim_{x \to (\pi/2+n\pi)^-} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \to (\pi/2+n\pi)^-} \tan x = +\infty$.

La fonction f réalise donc une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans I_n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists! x_n \in I_n, \quad \tan x_n = x_n}$$

2. Équivalent de x_n pour $n \to +\infty$.
Par définition, x_n appartient à I_n, d'où l'encadrement :

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

En divisant par $n\pi$ (pour $n \geq 1$) :

$$1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui donne l'équivalent :

$$\boxed{x_n \sim n\pi}$$

3. Développement asymptotique à trois termes.
D'après l'encadrement précédent, on peut écrire $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

L'équation $\tan x_n = x_n$ devient $\tan(n\pi + \alpha_n) = x_n$, soit $\tan \alpha_n = x_n$.

Comme $x_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, on a $\tan \alpha_n \to +\infty$, donc $\alpha_n \to \frac{\pi}{2}^-$.

Posons $\varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \alpha_n$. Alors $\varepsilon_n \to 0^+$ et :

$$\tan \alpha_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right) = \frac{1}{\tan \varepsilon_n}$$

L'équation devient $\frac{1}{\tan \varepsilon_n} = x_n$, soit $\tan \varepsilon_n = \frac{1}{x_n}$.

Puisque $\varepsilon_n \to 0$ et $\frac{1}{x_n} \to 0$, on peut utiliser la fonction arctan au voisinage de 0 :

$$\varepsilon_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Or, on sait que $\arctan u = u + o(u^2)$ au voisinage de 0. Comme $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$, on a :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Injectons maintenant les informations sur x_n :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En remplaçant x_n par son premier terme dans le dénominateur :

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}$$

En effectuant un développement limité de $(1+u)^{-1}$:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit le développement de x_n :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le développement à trois termes est :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier que x_n tend vers $+\infty$. L'erreur classique est de chercher un équivalent de $\tan x_n$

en 0, alors que c'est l'écart à la borne $\frac{\pi}{2} + n\pi$ qui tend vers 0.

À retenir :
Pour obtenir un développement asymptotique de racines d'équations transcendantes :

1. Localiser la racine x_n dans un intervalle de longueur finie.
2. Identifier la limite de la partie "fractionnaire" de la racine.
3. Effectuer un changement de variable pour se ramener à une quantité tendant vers 0 et utiliser les DL usuels.

3

Suites réelles et complexes

Convergence de la suite géométrique complexe

Énoncé

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Indications :
- Étudier le comportement du module de la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en distinguant les cas $|z| < 1$, $|z| > 1$ et $|z| = 1$.
- Pour le cas $|z| = 1$, utiliser la relation de récurrence $z^{n+1} = z \cdot z^n$ pour obtenir une condition nécessaire sur la limite éventuelle.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation du module pour traduire la convergence ou la divergence.
- Relation entre la limite d'une suite et celle de sa suite extraite (ou décalée).
- Propriété : une suite convergente est bornée.

Analyse par cas selon le module de z.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous allons discuter la nature de la suite selon la valeur de $|z|$.

Premier cas : $|z| < 1$.

On sait que si $|z| < 1$, alors la suite des modules $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'après le cours sur les suites complexes, une suite converge vers 0 si et seulement si la suite de ses modules converge vers 0. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z^n = 0}$$

La suite converge donc dans ce cas.

Deuxième cas : $|z| > 1$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} |z|^n = +\infty$.

Or, on sait que $|z^n| = |z|^n$. La suite des modules diverge vers $+\infty$, ce qui implique que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Une suite convergente étant nécessairement bornée, on conclut :

$$\boxed{\text{Si } |z| > 1, \text{ la suite } (z^n) \text{ diverge.}}$$

Troisième cas : $|z| = 1$.

Si $z = 1$, la suite (z^n) est constante et égale à 1, donc elle converge vers 1.

Supposons maintenant $|z| = 1$ avec $z \neq 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite (z^n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$.

Comme $|z^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite dans l'égalité des modules, on doit avoir :

$$|\ell| = 1$$

Par ailleurs, la relation $z^{n+1} = z \cdot z^n$ entraîne, par passage à la limite :

$$\ell = z \cdot \ell$$

Ce qui équivaut à :

$$\ell(1 - z) = 0$$

Comme $z \neq 1$ par hypothèse, on en déduit nécessairement $\ell = 0$.

Ceci contredit le fait que $|\ell| = 1$. Par conséquent, la suite diverge pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

Conclusion.

La suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$. L'ensemble recherché est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{1\}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à affirmer que la suite converge dès que $|z| \leq 1$. Il faut être vigilant sur le cercle unité : seul le point 1 permet la convergence. Pour $z = -1$, la suite $(-1)^n$ diverge (elle diverge "par oscillation").

À retenir :
La suite (z^n) possède trois comportements types :

— Convergence vers 0 si $|z| < 1$.

— Convergence vers 1 si $z = 1$.

— Divergence sinon (soit par explosion du module si $|z| > 1$, soit par oscillation si $|z| = 1$ et $z \neq 1$).

Théorème de Cesàro et applications

Énoncé

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite des moyennes de Cesàro par :

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

1. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel l, alors $(y_n)_{n\geq 0}$ converge également vers l. Que se passe-t-il si $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$?
2. Donner un exemple montrant que la réciproque du résultat précédent est fausse.
3. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone et si $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers l, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
4. Soit d un entier tel que $d \geq 2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+d} = x_n$. Montrer que $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers un nombre réel que l'on précisera.

Indications :
- Pour le 1), on pourra d'abord traiter le cas $l = 0$ en décomposant la somme en deux parties (avant et après un rang N bien choisi).
- Pour le 3), utiliser le théorème de la limite monotone et le résultat du 1).
- Pour le 4), remarquer que la somme sur une période est constante et effectuer une division euclidienne de n par d.

Correction.

Idées clés :
- Découpage en ε (technique de la "fenêtre" de sommation).
- Utilisation du théorème de la limite monotone pour les suites.
- Comportement asymptotique des moyennes pour les suites périodiques.

1. Preuve du théorème de Cesàro.

Supposons dans un premier temps que $x_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|x_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $n > N$, on peut écrire :

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n} x_k$$

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|y_n| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n} |x_k| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right| + \frac{(n-N+1)\frac{\varepsilon}{2}}{n+1}$$

D'une part, comme N est fixé, $\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il existe donc $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\frac{n-N+1}{n+1} \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N'$:

$$|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a donc $\boxed{y_n \to 0}$.

Si $x_n \to l$, on applique ce résultat à la suite $(x_n - l)$ dont la moyenne est $y_n - l$, donc $\boxed{y_n \to l}$.

Cas où $x_n \to +\infty$:

Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq N$, $x_k \geq 2A$. Pour $n > N$:

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n} x_k \geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1} x_k + \frac{(n-N+1)2A}{n+1}$$

Le premier terme tend vers 0 et le second vers $2A$. Pour n assez grand, $y_n \geq A$.

On conclut que si $x_n \to +\infty$, alors $\boxed{y_n \to +\infty}$.

2. Contre-exemple pour la réciproque.

Considérons la suite $x_n = (-1)^n$. Elle est divergente. Calculons sa moyenne :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans tous les cas, $|\sum_{k=0}^{n} x_k| \leq 1$, donc :

$$|y_n| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $y_n \to 0$ mais (x_n) ne converge pas.

3. Cas d'une suite monotone.

Supposons par exemple (x_n) croissante. D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

D'après la question 1, la suite des moyennes (y_n) tend vers cette même limite L.

Or, par hypothèse, $y_n \to l$. Par unicité de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\boxed{L = l}$$

La suite (x_n) converge donc vers l. Le raisonnement est identique pour une suite décroissante.

4. Suite périodique.

Soit x une suite d-périodique. Posons $S = \sum_{k=0}^{d-1} x_k$ la somme sur une période.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de n par d : $n = q_n d + r_n$ avec $0 \leq r_n < d$.

La somme se décompose en q_n périodes complètes et un reste :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{j=0}^{q_n-1}\left(\sum_{k=jd}^{(j+1)d-1} x_k\right) + \sum_{k=q_n d}^{n} x_k$$

Par périodicité, chaque somme entre parenthèses vaut S. On a donc :

$$y_n = \frac{q_n S}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=q_n d}^{n} x_k$$

Comme $q_n = \frac{n-r_n}{d}$, on a $\frac{q_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{d}$.

Le terme de reste est une somme d'au plus d termes, elle est donc bornée indépendamment de n. Ainsi, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=q_n d}^{n} x_k \to 0$.

Finalement, la suite (y_n) converge vers la moyenne sur une période :

$$\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} x_k}$$

> **Piège :**
> Dans la question 1, attention à ne pas oublier que le rang N dépend de ε. On ne peut pas passer à la limite sur n à l'intérieur de la somme si les bornes dépendent de n sans précaution.

> **À retenir :**
> Le théorème de Cesàro est un résultat de "lissage" : la moyenne converge si la suite converge, mais la moyenne peut converger sans que la suite ne converge (cas des suites oscillantes).

Théorème du point fixe attractif

Énoncé

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f admet un point fixe $a \in I$ tel que $|f'(a)| < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I définie par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Soit k un réel tel que $|f'(a)| < k < 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne sur l'intervalle $J = I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$.
2. On suppose que $u_0 \in J$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser la définition de la continuité de la fonction f' au point a.
- Pour la question 2, commencer par établir la stabilité de l'intervalle J par f en utilisant le caractère contractant de la fonction.
- Utiliser ensuite l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration géométrique de l'écart $|u_n - a|$.

Correction.

Idées clés :
- Continuité de la dérivée pour le contrôle local.
- Inégalité des accroissements finis (IAF).
- Stabilité d'un intervalle par une application.
- Convergence d'une suite géométrique de raison dans $[0, 1[$.

1. Recherche d'un voisinage où f est contractante.

Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc sa dérivée f' est continue sur I.

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(a)| < k < 1$. Par définition de la continuité de f' au point a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha], \quad |f'(x) - f'(a)| \leq \varepsilon$$

En choisissant $\varepsilon = k - |f'(a)| > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in J = I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$:

$$|f'(x)| \leq |f'(x) - f'(a)| + |f'(a)| \leq (k - |f'(a)|) + |f'(a)| = k$$

On a donc :

$$\forall x \in J, \quad |f'(x)| \leq k$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur l'intervalle J, on en déduit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|}$$

2. Stabilité de J et convergence de la suite.

Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}_n : \{u_n \in J\}$.

Initialisation : Par hypothèse, $u_0 \in J$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in J$.

Puisque a est un point fixe de f, on a $f(a) = a$. En utilisant le caractère k-lipschitzien de f sur J :

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq k|u_n - a|$$

Comme $u_n \in J$, on a $|u_n - a| \leq \alpha$. On obtient alors :

$$|u_{n+1} - a| \leq k\alpha$$

Or $0 \leq k < 1$, donc $k\alpha < \alpha$. Il vient $|u_{n+1} - a| \leq \alpha$, ce qui prouve que $u_{n+1} \in J$.

On a donc prouvé la stabilité de J par f :

$$\boxed{f(J) \subset J}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$. De plus, la relation $|u_{n+1} - a| \leq k|u_n - a|$ est valable pour tout n.

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$$

Comme $0 \leq k < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$. Par le théorème de majoration :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à oublier de démontrer que la suite (u_n) reste dans l'intervalle J. Sans cette stabilité, on ne peut pas appliquer l'inégalité de Lipschitz de manière répétée.

> **À retenir :**
> Le caractère "attractif" d'un point fixe est une propriété locale. Si u_0 est trop éloigné de a, la suite peut diverger ou avoir un comportement chaotique, même si $|f'(a)| < 1$.

Extraction de limites infinies

Énoncé

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée.
Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = +\infty$$

Indications :
- Traduire soigneusement la propriété « (x_n) n'est pas majorée ».
- Construire l'extractrice φ par récurrence.
- Pour assurer la stricte croissance de φ, montrer que pour tout rang N, l'ensemble $\{x_k \mid k > N\}$ est encore non majoré.

Correction.

Idées clés :
- Définition de la non-majoraison.
- Construction d'une extractrice par récurrence.
- Utilisation du théorème de comparaison pour les limites.

Analyse préliminaire.

Rappelons qu'une suite (x_n) est non majorée si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x_n > M$$

Un point technique essentiel pour construire une extractrice est de pouvoir choisir un indice arbitrairement grand.

Si (x_n) n'est pas majorée, alors pour tout entier naturel N, la suite « tronquée » $(x_k)_{k>N}$ n'est pas majorée non plus.

En effet, si elle l'était par un réel M, la suite complète serait majorée par $\max(x_0, \dots, x_N, M)$, ce qui est exclu par hypothèse.

Construction de l'extractrice par récurrence.

Nous allons construire la suite d'indices $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, l'ensemble $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est non majoré. Il existe donc un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k > 0$.

On pose :

$$\boxed{\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k > 0\}}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x_{\varphi(k)} > k$.

D'après la remarque préliminaire, l'ensemble $\{x_k \mid k > \varphi(n)\}$ n'est pas majoré.

On peut donc trouver un indice $k > \varphi(n)$ tel que $x_k > n + 1$.

On pose alors :

$$\boxed{\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid x_k > n+1\}}$$

Par construction, on a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, ce qui assure la stricte croissance de l'application φ.

Conclusion sur la limite.

Par construction, la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{x_{\varphi(n)} > n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, le théorème de comparaison pour les suites divergentes permet d'affirmer :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = +\infty}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique est d'oublier la condition de stricte croissance $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Sans elle, φ n'est pas une extractrice et on ne construit qu'une suite de valeurs de (x_n), pas une sous-suite au sens strict.

> **À retenir :**
> Ce résultat est une partie du théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé : de toute suite réelle, on peut extraire une suite convergeant dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Valeurs d'adhérence et convergence

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

1. Montrer que si la suite (u_n) est bornée, elle converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat est faux si l'on retire l'hypothèse que la suite est bornée.

Indications :
- Pour le sens direct, utiliser le fait que toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.
- Pour le sens réciproque, raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass pour construire une seconde valeur d'adhérence si la suite ne converge pas.
- Pour le contre-exemple, chercher une suite qui n'est pas bornée mais dont seule une partie des termes converge vers une valeur fixe.

Correction.

Idées clés :
- Définition d'une valeur d'adhérence : limite d'une sous-suite extraite.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
- Négation de la limite : $\exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, |u_n-\ell|\geq\varepsilon$.

1. Cas d'une suite bornée.

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

Sens direct ($\Longrightarrow$) : Supposons que (u_n) converge vers $\ell\in\mathbb{C}$.

D'après le cours, toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ d'une suite convergente converge vers la même limite ℓ.

Par conséquent, la seule valeur d'adhérence possible pour la suite est ℓ.

$$\boxed{\mathcal{A}=\{\ell\}}$$

Sens réciproque ($\Longleftarrow$) : Supposons que (u_n) est bornée et possède une unique valeur d'adhérence ℓ.

Raisonnons par l'absurde en supposant que (u_n) ne converge pas vers ℓ.

La négation de la définition de la limite donne :

$$\exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, \quad |u_n-\ell|\geq\varepsilon$$

On peut donc construire par récurrence une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(k)}-\ell|\geq\varepsilon$$

La suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée car (u_n) l'est.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(u_{\varphi(k)})$ une sous-suite $(u_{\varphi(\psi(k))})$ qui converge vers un complexe ℓ'.

Comme ℓ' est la limite d'une suite extraite de (u_n), c'est une valeur d'adhérence de (u_n).

Or, par construction :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(\psi(k))} - \ell| \geq \varepsilon$$

Par passage à la limite dans l'inégalité large, on obtient :

$$|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$$

On en déduit $\ell' \neq \ell$.

Ceci contredit l'hypothèse d'unicité de la valeur d'adhérence.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers ℓ.

$$\boxed{(u_n) \text{ bornée et } \mathrm{Card}(\mathcal{A}) = 1 \implies (u_n) \text{ converge}}$$

2. Contre-exemple sans l'hypothèse bornée.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cherchons les valeurs d'adhérence de (u_n) :

- La sous-suite $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0, donc $0 \in \mathcal{A}$.
- Soit $(u_{\phi(n)})$ une sous-suite convergente vers $a \in \mathbb{C}$. À partir d'un certain rang, les termes de cette sous-suite doivent être bornés. Comme la sous-suite des termes impairs (u_{2k+1}) tend vers $+\infty$, l'extraction $\phi(n)$ ne peut contenir qu'un nombre fini d'indices impairs. Ainsi, à partir d'un certain rang, $u_{\phi(n)} = 0$, d'où $a = 0$.

L'unique valeur d'adhérence de cette suite est 0.

Cependant, la suite (u_n) n'est pas convergente car elle n'est pas bornée (elle diverge "partiellement" vers $+\infty$).

> **Piège :**
> L'erreur classique est de penser que l'unicité de la valeur d'adhérence suffit à assurer la convergence. C'est le caractère borné qui permet d'utiliser Bolzano-Weierstrass pour garantir que l'on ne "s'échappe" pas vers l'infini.

> **À retenir :**
> Une suite réelle ou complexe converge si et seulement si elle est **bornée** et possède une **unique valeur d'adhérence**.

Valeurs d'adhérence et suites à petits pas

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Indications :
- Rappeler qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe.
- Soient a et b deux valeurs d'adhérence avec $a<b$. Soit $c\in]a,b[$. L'objectif est de montrer que c est aussi une valeur d'adhérence.
- Utiliser la définition d'une valeur d'adhérence : pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $n\geq N$ tel que $|u_n-c|<\varepsilon$.
- Exploiter le fait que les pas $u_{n+1}-u_n$ deviennent arbitrairement petits pour "ne pas pouvoir sauter au-dessus" de c.

Correction.

Idées clés :
- Caractérisation des intervalles par la convexité.
- Utilisation de la définition séquentielle des valeurs d'adhérence.
- Raisonnement par "saut" borné (discrétisation de la propriété des valeurs intermédiaires).

Analyse du problème.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). Comme la suite est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\mathcal{V}$ est un ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$.

Pour montrer que $\mathcal{V}$ est un intervalle, il suffit de montrer qu'il est convexe, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall a,b\in\mathcal{V},\ a<b\implies[a,b]\subset\mathcal{V}}$$

Soient donc $a,b\in\mathcal{V}$ tels que $a<b$, et soit $c\in]a,b[$. Montrons que $c\in\mathcal{V}$.

Construction de l'indice de proximité.

Soit $\varepsilon>0$. On peut supposer ε assez petit pour que $a<c-\varepsilon$ et $c+\varepsilon<b$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$, il existe un rang $N_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\boxed{\forall n\geq N_0,\ |u_{n+1}-u_n|<\varepsilon}$$

Soit $N\geq N_0$. Puisque a est valeur d'adhérence, il existe un indice $p\geq N$ tel que $u_p\in]-\infty,c-\varepsilon[$.

De même, puisque b est valeur d'adhérence, il existe un indice $q>p$ tel que $u_q\in]c+\varepsilon,+\infty[$.

Considérons l'ensemble des indices où la suite dépasse le seuil $c-\varepsilon$ pour la première fois après p :

$$S=\{k\in\mathbb{N}\mid p\leq k\leq q\text{ et }u_k>c-\varepsilon\}$$

Cet ensemble est non vide (il contient q) et fini. Il possède donc un plus petit élément, notons-le k_0.

Localisation de la valeur d'adhérence.

Par définition de k_0, on a $k_0 > p$ car $u_p \leq c - \varepsilon$. On en déduit :

$$u_{k_0-1} \leq c - \varepsilon \quad \text{et} \quad u_{k_0} > c - \varepsilon$$

Utilisons l'hypothèse sur l'accroissement entre u_{k_0-1} et u_{k_0} :

$$u_{k_0} = u_{k_0-1} + (u_{k_0} - u_{k_0-1}) \leq (c - \varepsilon) + \varepsilon = c$$

Nous avons donc l'encadrement suivant :

$$c - \varepsilon < u_{k_0} \leq c$$

On en déduit immédiatement que $|u_{k_0} - c| < \varepsilon$.

Conclusion.

Comme nous pouvons trouver un tel k_0 pour tout N et pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que c est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

L'ensemble $\mathcal{V}$ est donc convexe, et comme c'est une partie de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{V} \text{ est un intervalle}}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de préciser que la suite doit être bornée pour garantir que $\mathcal{V}$ n'est pas vide et que l'on ne travaille pas avec des valeurs d'adhérence infinies sans précaution.

> **À retenir :**
> La propriété $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ est une forme de continuité discrète. Elle impose à l'ensemble des valeurs d'adhérence d'être "sans trou", tout comme l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

4

Séries

Étude de convergence de séries numériques variées

Énoncé

Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $u_n = f(n)$
3. $u_n = \exp\left(-(\ln n)^\alpha\right)$ avec $\alpha > 0$
4. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
5. $u_n = \ln\left(\tanh\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)\right)$
6. $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$
7. $u_n = p_n^{-p_n}$ où p_n est le nombre de chiffres de n en base 10
8. $u_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^\alpha\right)$ avec $\alpha > 0$
9. $u_n = \cos\left(\frac{a}{n}\right) + \sin\left(\frac{b}{n}\right) + \sinh\left(\frac{c}{n}\right) - e^a\left(1 + \frac{b+c}{n}\right)^n$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

Indications :

- Pour les formes mettant en jeu des fonctions usuelles, utiliser systématiquement les développements limités (DL) au voisinage de 0 ou de $+\infty$.
- Pour la question (c), comparer u_n à une série de Riemann ou utiliser les séries de Bertrand en discutant selon les valeurs de α.
- Pour la question (g), regrouper les termes de la série par blocs de même nombre de chiffres.
- Pour la question (i), effectuer un développement asymptotique de u_n jusqu'à l'ordre $1/n$ pour obtenir les conditions nécessaires de convergence.

Correction.

Idées clés :

- Condition nécessaire de convergence : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Utilisation des équivalents pour les séries à termes positifs.
- Comparaison aux séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\beta}$.

Résolution.

1. **Étude de $u_n = f(1/n)$.** Si f est continue en 0, une condition nécessaire de convergence est $f(0) = 0$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$, alors :

$$u_n = \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(0)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série converge si et seulement si le terme en $1/n$ est nul.

$$\boxed{\text{La série converge si } f(0) = f'(0) = 0 \text{ et diverge si } f'(0) \neq 0}$$

2. **Étude de $u_n = f(n)$.** La série diverge grossièrement sauf si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{Condition nécessaire : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

3. **Étude de $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$.** Le comportement dépend de la comparaison de $(\ln n)^\alpha$ avec $\ln n$.

   Cas 1 : $\alpha > 1$. Alors $\frac{(\ln n)^\alpha}{\ln n} = (\ln n)^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Pour n assez grand, $(\ln n)^\alpha \geq 2\ln n$, d'où $u_n \leq e^{-2\ln n} = \frac{1}{n^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

   Cas 2 : $\alpha = 1$. $u_n = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, la série diverge (série harmonique).

   Cas 3 : $0 < \alpha < 1$. Alors $(\ln n)^\alpha \leq \ln n$ pour n assez grand, donc $u_n \geq \frac{1}{n}$, la série diverge.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

4. **Étude de $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.** On écrit $u_n = \exp\left(\ln^2 n - n\ln(\ln n)\right)$. L'exposant $E_n = \ln^2 n - n\ln(\ln n)$ vérifie par croissance comparée :

$$E_n = -n\ln(\ln n)\left(1 - \frac{\ln^2 n}{n\ln(\ln n)}\right) \sim -n\ln(\ln n)$$

   Ainsi $E_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. De plus, E_n est négligeable devant $-2\ln n$. On en déduit $n^2 u_n \to 0$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

5. **Étude de $u_n = \ln(\tanh(\sqrt{n}/\ln n))$.** Posons $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \to +\infty$. On sait que $\tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = (1-e^{-2x})(1+e^{-2x})^{-1} = 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})$. Ainsi $u_n = \ln(1 - 2e^{-2x_n} + o(e^{-2x_n})) \sim -2e^{-2x_n}$. Comme x_n croît plus vite que $\ln n$, u_n est négligeable devant $1/n^2$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

6. **Étude de $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$.** Factorisons par $n^{1/n}$:

$$u_n = n^{1/n}\left[\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right]$$

   Or $n^{1/n} = \exp(\frac{\ln n}{n}) \to 1$. Et $\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. D'où $\exp(\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1 \sim \frac{1}{n^2}$. Finalement :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n^2} \implies \sum u_n \text{ converge}}$$

7. **Étude de $u_n = p_n^{-p_n}$.** Le nombre de chiffres p_n est constant par blocs. Pour $k \geq 1$, $p_n = k$ si et seulement si $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Il y a $N_k = 10^k - 10^{k-1} = 9\cdot 10^{k-1}$ tels entiers. Puisque $u_n > 0$, on peut sommer par blocs :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p_n=k} k^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{9\cdot 10^{k-1}}{k^k}$$

   Soit $v_k = \frac{9\cdot 10^{k-1}}{k^k}$. Par la règle de d'Alembert : $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{10k^k}{(k+1)^{k+1}} \to 0$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

8. **Étude de $u_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^\alpha\right)$.** Utilisons $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/x)$ pour $x > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\arctan(n^\alpha) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(n^{-\alpha}) = 1 - \frac{2}{\pi n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

On sait que $\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}$ quand $h \to 0^+$. Ici $h_n \sim \frac{2}{\pi n^\alpha}$.

$$u_n \sim \sqrt{\frac{4}{\pi n^\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi} n^{\alpha/2}}$$

D'après le critère de Riemann, la série converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2}$$

9. **Étude de $u_n = \cos(a/n) + \sin(b/n) + \sinh(c/n) - e^a(1+\frac{b+c}{n})^n$.** Effectuons un DL à l'ordre 1 : $u_n = (1+O(1/n^2)) + (\frac{b}{n} + O(1/n^2)) + (\frac{c}{n} + O(1/n^2)) - e^a \exp(n \ln(1+\frac{b+c}{n}))$. L'exponentielle se développe ainsi :

$$e^a \exp\left(n\left(\frac{b+c}{n} - \frac{(b+c)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e^{a+b+c}\left(1 - \frac{(b+c)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

D'où :

$$u_n = (1-e^{a+b+c}) + \frac{b+c+\frac{1}{2}e^{a+b+c}(b+c)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Pour la convergence, les termes en n^0 et $1/n$ doivent s'annuler : 1) $e^{a+b+c} = 1 \iff a+b+c = 0$. 2) $b+c+\frac{1}{2}(b+c)^2 = 0 \iff (b+c)(1+\frac{b+c}{2}) = 0$.

$$\boxed{\text{CV} \iff (a+b+c=0) \text{ et } (b+c=0 \text{ ou } b+c=-2)}$$

Piège :
Dans la question (h), attention à ne pas oublier la racine carrée dans l'équivalent de arccos au voisinage de 1.

À retenir :
Pour une série de terme général u_n, si $u_n = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^\beta} + \ldots$, la série converge si et seulement si $A = 0$ et $\beta > 1$.

Séries convergentes et règle de Riemann

Énoncé

Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs ou nuls telle que la série de terme général u_n converge mais que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$ ne soit bornée pour aucune valeur de α dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Indications :
- L'idée est de construire une suite "lacunaire", c'est-à-dire une suite dont la plupart des termes sont nuls.
- On peut choisir une suite u_n qui n'est non nulle que pour des indices n appartenant à une partie $A \subset \mathbb{N}$ très "clairsemée".
- Pour assurer la non-bornitude, il faut que sur ces indices particuliers, u_n ne décroisse pas "trop vite" par rapport à n.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation d'une suite à support lacunaire.
- Comparaison à une série de Riemann convergente via un changement d'indice.
- Utilisation des croissances comparées pour la non-bornitude.

Construction de la suite.

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

1. Convergence de la série $\sum u_n$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ la somme partielle d'ordre N.

Les termes non nuls de cette somme correspondent aux indices $n = 2^k$ tels que $2^k \leq N$, ce qui équivaut à $k \leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$.

On a donc :

$$S_N = \sum_{1 \leq 2^k \leq N} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \rfloor} \frac{1}{k^2}$$

La suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est croissante. De plus, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, donc ses sommes partielles sont majorées.

Il en résulte que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est majorée, donc elle converge.

On en conclut :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2. Étude de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$ pour $\alpha > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Considérons la sous-suite $(v_k)_{k\geq 1}$ de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$ définie par les indices $n_k = 2^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_k &= (n_k)^\alpha u_{n_k} \\ &= (2^k)^\alpha \cdot \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{(2^\alpha)^k}{k^2} \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on a $2^\alpha > 1$.

Par croissances comparées, nous savons que l'exponentielle l'emporte sur les puissances :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2^\alpha)^k}{k^2} = +\infty$$

Puisqu'une sous-suite de $(n^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$, la suite globale ne peut pas être bornée.

Ainsi :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \sup_{n \geq 1}(n^\alpha u_n) = +\infty}$$

> **Piège :**
> On pourrait croire que si $\sum u_n$ converge, alors u_n est forcément un $O(1/n^\alpha)$ pour un certain $\alpha > 1$ (analogue à la règle de Riemann). Cet exercice prouve que c'est faux si la suite n'est pas décroissante.

> **À retenir :**
> La convergence d'une série n'impose pas une vitesse de décroissance régulière sur tous les termes. Une suite peut avoir des "pics" très hauts s'ils sont suffisamment espacés pour que leur somme reste finie.

Séries à termes décroissants et convergence

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que la série $\sum u_n$ converge.
Montrer que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Indications :

- Commencer par justifier que la suite (u_n) est nécessairement positive à partir d'un certain rang, puis qu'elle tend vers 0.
- Utiliser la définition de la convergence de la série par la suite des sommes partielles (S_n).
- Étudier des tranches de la forme $S_{2n} - S_n$ et exploiter la décroissance de la suite pour obtenir un encadrement.
- Traiter séparément les indices pairs et impairs pour conclure sur la limite de (nu_n).

Correction.

Idées clés :

- Lien entre convergence d'une série et limite des restes (ou tranches de sommes).
- Exploitation de la monotonie pour minorer une somme par son dernier terme.
- Utilisation du théorème des gendarmes.

1. Signe et limite de la suite (u_n).

Puisque la série $\sum u_n$ converge, son terme général tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

De plus, la suite (u_n) est décroissante. Si elle possédait un terme strictement négatif $u_{n_0} < 0$, alors pour tout $n \geq n_0$, on aurait $u_n \leq u_{n_0}$ par décroissance.

En passant à la limite, on obtiendrait $0 \leq u_{n_0} < 0$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 0}$$

2. Étude des termes d'indices pairs.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n. Par hypothèse, (S_n) converge vers une limite réelle S.

Considérons la différence $S_{2n} - S_n$. Comme la suite (u_n) est décroissante, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $u_k \geq u_{2n}$. On en déduit :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = nu_{2n}$$

Comme $u_n \geq 0$, nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$$

En multipliant par 2, on obtient :

$$\boxed{0 \leq 2nu_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n)}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, donc par différence $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$.

Par le théorème des gendarmes, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty}(2nu_{2n}) = 0$$

3. Étude des termes d'indices impairs.

Pour les indices de la forme $2n+1$, on utilise à nouveau la décroissance de (u_n) et sa positivité :

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n}$$

En réécrivant le terme de droite :

$$(2n+1)u_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \times (2nu_{2n})$$

Comme $\frac{2n+1}{2n} \to 1$ et $2nu_{2n} \to 0$, on en déduit par produit de limites :

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n+1} = 0$$

Conclusion.

Les deux sous-suites des termes pairs et impairs de la suite $(nu_n)_{n\geq 1}$ convergent vers 0. D'après le cours, la suite elle-même converge vers 0. On a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0}$$

Ce qui est équivalent à la notation de Landau : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

> **Piège :**
> Attention : la réciproque est fausse. Si $u_n = o(1/n)$ et u_n est décroissante, la série $\sum u_n$ ne converge pas nécessairement. L'exemple classique est $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ pour $n \geq 2$. On a bien $u_n = o(1/n)$ mais la série diverge (série de Bertrand).

> **À retenir :**
> Pour une série à termes positifs, la convergence de la série impose $u_n \to 0$. L'ajout de l'hypothèse de décroissance permet d'obtenir une vitesse de convergence minimale du terme général vers 0.

5

Continuité

Équation fonctionnelle de Cauchy

Énoncé

Déterminer l'ensemble des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Indications :
- Commencer par déterminer les valeurs de f sur les entiers naturels, puis sur les entiers relatifs par récurrence.
- Étendre le résultat aux nombres rationnels en utilisant la structure de $\mathbb{Q}$.
- Utiliser l'hypothèse de continuité et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour conclure.

Correction.

Idées clés :
- Passage successif des domaines $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- Utilisation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.

Analyse.

Soit f une fonction continue vérifiant la relation de Cauchy.

En prenant $x = y = 0$, nous obtenons $f(0) = f(0) + f(0)$, d'où :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, donc $f(0) = f(x) + f(-x)$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est impaire.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. L'initialisation est vérifiée pour $n = 0$ car $f(0) = 0 \cdot f(x)$.

Si la propriété est vraie au rang n, alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Par imparité, cette relation s'étend immédiatement aux entiers relatifs. Pour tout $z \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(zx) = zf(x)}$$

Soit désormais $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Appliquons la relation précédente :

$$f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

Or, on sait aussi que $f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1)$. En posant $a = f(1)$, on obtient $qf(r) = pa$, d'où :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = ar}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en x, donc :

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n)$$

En remplaçant par l'expression trouvée sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \to +\infty} (a r_n) \\ &= a \lim_{n \to +\infty} r_n \\ &= ax \end{aligned}$$

Les solutions sont donc nécessairement de la forme $x \mapsto ax$.

Synthèse.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto ax$. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction linéaire. De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Les fonctions linéaires vérifient donc bien l'équation.

Conclusion.

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{R}\}}$$

> **Piège :**
> Il est crucial de mentionner que sans l'hypothèse de continuité (ou une hypothèse plus faible comme la monotonie ou la continuité en un point), il existe d'autres solutions (dites "pathologiques") construites à l'aide de bases de Hamel, mais elles ne sont pas au programme de MPSI.

> **À retenir :**
> La méthode de "prolongement par densité" est un classique absolu : on établit une propriété sur $\mathbb{Q}$ (souvent par l'arithmétique), puis on passe à $\mathbb{R}$ par continuité.

Images d'intervalles bornés par une fonction continue

Énoncé

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

1. L'image de I par une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I est-elle nécessairement bornée ?
2. L'image de I par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ est-elle bornée ?

Indications :

- Pour la première question, se rappeler que le théorème des bornes atteintes s'applique spécifiquement aux segments (intervalles fermés et bornés). Chercher un contre-exemple sur un intervalle non fermé.
- Pour la seconde question, utiliser le fait que tout intervalle borné est inclus dans un segment $[a, b]$ et exploiter la continuité de f sur ce segment.

Correction.

Idées clés :

- Théorème des bornes atteintes (image d'un segment).
- Propriété de conservation de la nature de l'intervalle par continuité.
- Distinction entre intervalle borné et segment.

Résolution de la question 1.

La réponse est **non**. L'image d'un intervalle borné par une fonction continue n'est pas nécessairement bornée si l'intervalle n'est pas fermé.

Considérons l'intervalle $I =]0, 1]$, qui est manifestement borné.

Soit la fonction f définie sur I par :

$$\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction f est continue sur I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

L'image de I par f est :

$$\boxed{f(I) = [1, +\infty[}$$

L'ensemble $f(I)$ n'est pas borné.

Résolution de la question 2.

La réponse est **oui**. Si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, son image sur n'importe quel intervalle borné est bornée.

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$I \subset [a, b]$$

Par hypothèse, f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc en particulier continue sur le segment $[a, b]$.

D'après le théorème des bornes atteintes (ou théorème de Weierstrass), l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Il existe donc deux réels m et M tels que :

$$\boxed{f([a, b]) = [m, M]}$$

Par croissance de l'image directe pour l'inclusion, on a :

$$I \subset [a,b] \implies f(I) \subset f([a,b])$$

D'où :

$$\boxed{f(I) \subset [m,M]}$$

L'ensemble $f(I)$ est donc inclus dans un intervalle borné, ce qui prouve que $f(I)$ est borné.

Piège :
L'erreur classique consiste à appliquer le théorème des bornes atteintes à I sans vérifier que I est un segment. Un intervalle borné peut être ouvert, semi-ouvert, ou réduit à un point.

À retenir :

- f continue sur un **segment** $\implies$ f est bornée et atteint ses bornes.
- f continue sur un **intervalle quelconque** $\implies$ $f(I)$ est un intervalle (Théorème des Valeurs Intermédiaires).
- Si f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est localement bornée, donc bornée sur tout ensemble borné.

Théorèmes de points fixes

Énoncé

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possède-t-elle nécessairement un point fixe ?
3. Soient $k \in]-1,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que la fonction $x \mapsto f(x) - kx$ soit bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un point fixe.

Indications :

- Pour les questions 1 et 3, on pourra introduire la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - x$ et étudier ses zéros.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires après avoir évalué les signes de g aux bornes ou ses limites à l'infini.
- Pour la question 2, chercher un contre-exemple simple parmi les fonctions affines.

Correction.

Idées clés :

- Traduction du point fixe : $f(x) = x \iff g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - x$.
- Application du théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
- Étude asymptotique pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Résolution.

1. Considérons l'application g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

   Puisque f est continue sur $[0,1]$ et que $x \mapsto x$ l'est également, g est continue sur $[0,1]$ par différence.

   Par hypothèse, l'image de f est incluse dans $[0,1]$, ce qui implique :
   - $f(0) \in [0,1]$, d'où $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$.
   - $f(1) \in [0,1]$, d'où $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

   La fonction g est continue sur $[0,1]$ et $g(0) \cdot g(1) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$.

   On en conclut :
   $$\boxed{\exists c \in [0,1], \quad f(c) = c}$$

2. La réponse est **non**. Une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de point fixe.

   Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x + 1$. Cette fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

   Cependant, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $x + 1 = x$, soit $1 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi :
   $$\boxed{x \mapsto x + 1 \text{ n'admet aucun point fixe sur } \mathbb{R}}$$

3. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Par hypothèse, il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$|f(x) - kx| \leq M$$

On peut alors réécrire $g(x)$ sous la forme :

$$g(x) = f(x) - kx + kx - x = (f(x) - kx) + (k-1)x$$

Puisque $k \in]-1, 1[$, on a $k - 1 < 0$. Étudions le comportement de g aux bornes de $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x) = x\left(\frac{f(x) - kx}{x} + k - 1\right)$$

Comme la fonction $x \mapsto f(x) - kx$ est bornée par M, on a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-kx}{x} = 0$.

Par conséquent :

— $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x(k-1) = -\infty$ (car $k - 1 < 0$).
— $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x(k-1) = +\infty$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. D'après les limites calculées précédemment :

— Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) > 0$ (par définition de la limite en $-\infty$).
— Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(b) < 0$ (par définition de la limite en $+\infty$).

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a, b]$ (ou $[b, a]$), il existe un réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

On en déduit :

$$\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = x_0}$$

Piège :
Dans la question 1, ne pas oublier de vérifier que $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ découle directement de l'ensemble d'arrivée de f, qui est $[0, 1]$.

À retenir :
Pour démontrer l'existence d'une solution à une équation de la forme $f(x) = x$, le réflexe systématique est l'étude de la fonction $g(x) = f(x) - x$. Si g change de signe sur un intervalle, le TVI garantit l'existence d'un point fixe.

Minimum global et limites infinies

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Indications :

- L'idée fondamentale est de montrer que la fonction "remonte" vers $+\infty$ à l'extérieur d'un certain intervalle, ce qui permet de se ramener à l'étude de f sur un segment.
- Fixez une valeur arbitraire de l'image, par exemple $f(0)$, et utilisez la définition de la limite en $\pm\infty$ pour trouver un segment $[-A, A]$ en dehors duquel toutes les valeurs de f sont supérieures à $f(0)$.
- Appliquez le théorème des bornes atteintes sur ce segment.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation de la définition de la limite (choix du ε ou du seuil M).
- Théorème des bornes atteintes (image d'un segment par une fonction continue).
- Comparaison des valeurs locales et globales.

Étape 1 : Construction d'un segment de travail.

Considérons la valeur $f(0)$. Par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après la définition de la limite, pour tout réel M, il existe un seuil au-delà duquel $f(x) > M$. En choisissant $M = f(0)$, on sait qu'il existe $A_1 > 0$ tel que :

$$\forall x > A_1, \quad f(x) \geq f(0)$$

De même, comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A_2 > 0$ tel que :

$$\forall x < -A_2, \quad f(x) \geq f(0)$$

Posons alors $A = \max(A_1, A_2)$. Par construction, nous avons le résultat suivant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A], \quad f(x) \geq f(0)}$$

Étape 2 : Application du théorème des bornes atteintes.

La fonction f est continue sur le segment $K = [-A, A]$.

D'après le théorème des bornes atteintes (ou théorème de Weierstrass), f est bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Il existe donc un point $x_0 \in [-A, A]$ tel que :

$$\boxed{f(x_0) = \min_{x\in[-A,A]} f(x)}$$

En particulier, puisque $0 \in [-A, A]$, on a nécessairement :

$$f(x_0) \leq f(0)$$

Étape 3 : Synthèse et conclusion.

Montrons que x_0 est bien un minimum global de f sur $\mathbb{R}$ en distinguant deux cas :

1. **Si** $x \in [-A, A]$ **:** Par définition de x_0 comme minimum sur le segment, on a immédiatement $f(x) \geq f(x_0)$.
2. **Si** $x \notin [-A, A]$ **:** D'après l'étape 1, on sait que $f(x) \geq f(0)$. Or, d'après l'étape 2, on a $f(0) \geq f(x_0)$. Par transitivité de la relation d'ordre :

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Dans tous les cas, l'inégalité est vérifiée. On en conclut :

$$\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0)}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à appliquer le théorème des bornes atteintes sur $\mathbb{R}$ directement. Or, $\mathbb{R}$ n'est pas un segment (il n'est pas borné). L'étape de réduction à un intervalle compact est donc cruciale et obligatoire.

À retenir :
Lorsqu'une propriété est vraie "au voisinage de l'infini" (limite) et qu'une fonction est régulière (continue), on peut souvent ramener l'étude globale à l'étude sur un segment (propriété de compacité). Cette méthode est un grand classique des concours.

Équation fonctionnelle $f \circ f = -\mathrm{Id}$

Énoncé

Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = -x$$

Indications :
- Commencer par étudier l'injectivité de la fonction f à l'aide de la relation fonctionnelle.
- Utiliser une propriété fondamentale des fonctions continues et injectives sur un intervalle.
- Étudier le sens de variation de la composée $f \circ f$ selon la monotonie de f.

Correction.

Idées clés :
- Injectivité et continuité impliquent la monotonie stricte.
- La composée de deux fonctions de même monotonie est croissante.

Résolution.

Supposons qu'une telle fonction f existe.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. En composant par f, nous obtenons $f(f(x)) = f(f(y))$. D'après l'énoncé, cela implique $-x = -y$, soit $x = y$.

On en déduit :

$$\boxed{f \text{ est injective sur } \mathbb{R}}$$

La fonction f est, par hypothèse, continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or, une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Ainsi, la fonction f est soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$, soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Étude de la monotonie de $f \circ f$.

Examinons le sens de variation de la composée $g = f \circ f$ dans les deux cas possibles :

- Si f est strictement croissante, alors pour tous réels x et y tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$, puis $f(f(x)) < f(f(y))$. Dans ce cas, $f \circ f$ est strictement croissante.
- Si f est strictement décroissante, alors pour tous réels x et y tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$. En appliquant de nouveau f (qui est décroissante), l'ordre est renversé : $f(f(x)) < f(f(y))$. Ici encore, $f \circ f$ est strictement croissante.

Dans tous les cas, nous parvenons à la conclusion suivante :

$$\boxed{f \circ f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

Conclusion.

Par hypothèse, nous avons $f(f(x)) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $h : x \mapsto -x$. Cette fonction est une fonction affine de coefficient directeur -1, elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nous obtenons une contradiction : $f \circ f$ doit être à la fois strictement croissante et égale à la fonction h qui est strictement décroissante.

Il n'existe donc aucune fonction f répondant au problème.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est vide.}}$$

Piège :
Tenter de construire explicitement une telle fonction (par exemple par morceaux) sans avoir préalablement vérifié les propriétés globales de monotonie imposées par la continuité.

À retenir :
Sur un intervalle, le concept de "continuité + injectivité" est indissociable de la "monotonie stricte". C'est un levier puissant pour résoudre des équations fonctionnelles faisant intervenir des composées.

Zéros d'une fonction surjective

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective.
Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = 0\}$ est infini.

Indications :
- Procéder par l'absurde en supposant que l'ensemble des zéros de f est fini.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que f garde un signe constant au-delà du plus grand de ses zéros.
- Exploiter la surjectivité de f pour aboutir à une contradiction concernant l'image de f.

Correction.

Idées clés :
- Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
- Image d'un segment par une fonction continue (théorème des bornes atteintes).
- Propriété du signe constant d'une fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle.

Résolution.

Notons $Z = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f. Supposons, par l'absurde, que Z est un ensemble fini.

Premier cas : Z est vide.

Si f ne s'annule jamais sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, on a soit $f(\mathbb{R}^+) \subset]0, +\infty[$, soit $f(\mathbb{R}^+) \subset]-\infty, 0[$.

Dans les deux cas, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, ce qui contredit l'énoncé.

Deuxième cas : Z est non vide et fini.

Puisque Z est une partie finie et non vide de $\mathbb{R}$, elle admet un plus grand élément que nous noterons x_0 :

$$\boxed{x_0 = \max\{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = 0\}}$$

Considérons l'intervalle $I =]x_0, +\infty[$. Par définition de x_0, la fonction f ne s'annule pas sur I.

Comme f est continue sur l'intervalle I, elle y garde un signe constant.

Supposons par exemple que pour tout $x > x_0$, $f(x) > 0$.

D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[0, x_0]$. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur ce segment. Il existe donc un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0, x_0], \quad f(x) \geq m$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) \geq \min(m, 0)$$

En effet, si $x \in [0, x_0]$, $f(x) \geq m \geq \min(m, 0)$, et si $x > x_0$, $f(x) > 0 \geq \min(m, 0)$.

L'image de f est donc minorée :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^+) \subset [\min(m, 0), +\infty[}$$

Ceci contredit la surjectivité de f sur $\mathbb{R}$ (car l'image n'atteint aucune valeur strictement inférieure à $\min(m, 0)$).

Le raisonnement est analogue si l'on suppose que f est strictement négative sur $]x_0, +\infty[$. Dans ce cas, f serait majorée, ce qui contredirait également la surjectivité.

Conclusion.

L'hypothèse selon laquelle Z est fini mène systématiquement à une contradiction.

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } f \text{ est donc infini.}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier le cas où l'ensemble des zéros est vide. Bien que le raisonnement général avec le maximum puisse être adapté en posant $x_0 = 0$, il est souvent plus clair de traiter l'absence de racines séparément.

> **À retenir :**
> Une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle garde un signe constant. C'est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires.

Fonction bornée non uniformément continue

Énoncé

Démontrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui est à la fois continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, mais qui n'est pas uniformément continue sur cet intervalle.

Indications :
- On pourra considérer la fonction définie par $f(x) = \sin(x^2)$.
- Pour prouver que f n'est pas uniformément continue, utiliser la caractérisation séquentielle : trouver deux suites (x_n) et (y_n) telles que $|x_n - y_n| \to 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$.

Correction.

Idées clés :
- Choix d'une fonction oscillant de plus en plus vite à l'infini.
- Caractérisation séquentielle de la non-uniforme continuité.
- Utilisation de la quantité conjuguée pour estimer l'écart entre racines carrées.

1. Définition et propriétés élémentaires.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\boxed{f(x) = \sin(x^2)}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ par composition de la fonction carré et de la fonction sinus, toutes deux continues sur leurs domaines respectifs.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $|\sin(x^2)| \leq 1$, donc f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2. Preuve de la non-uniforme continuité.

Rappelons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Par négation, f n'est pas uniformément continue s'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3. Construction des suites.

Cherchons des points où la fonction f prend alternativement les valeurs 1 et 0. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt{2n\pi}$$

Évaluons l'écart entre les images par f :

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(y_n)| &= \left|\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2n\pi)\right| \\
&= |1 - 0| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Cette différence ne tend clairement pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Évaluons maintenant l'écart entre les antécédents en utilisant la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}|x_n - y_n| &= \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi} \\ &= \frac{(2n\pi + \frac{\pi}{2}) - 2n\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi}} \\ &= \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi}}\end{aligned}$$

Par croissance comparée ou simple calcul de limite, on observe que le dénominateur tend vers $+\infty$, d'où :

$$\boxed{|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

Conclusion.

Nous avons exhibé deux suites dont l'écart tend vers 0 mais dont les images restent à une distance constante égale à 1.

L'application $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est donc continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, mais non uniformément continue.

$$\boxed{f \notin \mathcal{UC}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

> **Piège :**
> Confondre la continuité simple (ou même la continuité uniforme sur tout segment) avec la continuité uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Ici, f est bien uniformément continue sur tout segment $[0, A]$ d'après le théorème de Heine, mais le "pas" nécessaire pour contrôler l'oscillation devient de plus en plus petit à mesure que x tend vers $+\infty$.

> **À retenir :**
> Pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue, la méthode la plus efficace est l'utilisation de la caractérisation séquentielle. Le choix de x_n et y_n se base souvent sur l'observation des zones où la dérivée (si elle existe) n'est pas bornée.

Croissance linéaire des fonctions uniformément continues

Énoncé

Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe deux réels $A > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Ax + B$$

Indications :

- Utiliser la définition de l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ en fixant une valeur arbitraire pour ε (par exemple $\varepsilon = 1$).
- Pour un $x > 0$ donné, décomposer l'intervalle $[0, x]$ en segments de longueur au plus δ, où δ est le module d'uniforme continuité associé à ε.
- Utiliser l'inégalité triangulaire sur une somme télescopique pour majorer $|f(x) - f(0)|$.

Correction.

Idées clés :

- Définition de l'uniforme continuité ($\varepsilon - \delta$).
- Contrôle de l'accroissement de la fonction sur des intervalles de largeur fixe.
- Utilisation de la partie entière pour compter le nombre de "pas".

Résolution.

Par hypothèse, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Appliquons la définition de l'uniforme continuité pour la valeur $\varepsilon = 1$.

Il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad |u - v| \leq \delta \implies |f(u) - f(v)| \leq 1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Considérons le nombre de "pas" de longueur δ nécessaires pour atteindre x à partir de 0.

Posons $n = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$ la partie entière de $\frac{x}{\delta}$. Par définition de la partie entière, nous avons :

$$n \leq \frac{x}{\delta} < n + 1$$

On peut alors écrire la différence $f(x) - f(0)$ sous la forme d'une somme télescopique :

$$f(x) - f(0) = f(x) - f(n\delta) + \sum_{k=1}^{n} (f(k\delta) - f((k-1)\delta))$$

Appliquons l'inégalité triangulaire à cette égalité :

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(n\delta)| + \sum_{k=1}^{n} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)|$$

Or, par construction de n, nous avons les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|k\delta - (k-1)\delta| = \delta \leq \delta$, donc $|f(k\delta) - f((k-1)\delta)| \leq 1$.
2. $|x - n\delta| < \delta$, donc $|f(x) - f(n\delta)| \leq 1$.

En injectant ces majorations dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|f(x) - f(0)| \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 = n + 1$$

Comme $n \leq \frac{x}{\delta}$, il vient :

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{\delta}x + 1$$

D'après l'inégalité triangulaire $|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)|$, on en déduit :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta}x + 1 + |f(0)|$$

Posons alors $A = \frac{1}{\delta}$ et $B = 1 + |f(0)|$. Ces deux réels sont strictement positifs car $\delta > 0$.

Nous avons ainsi montré l'existence de $A, B > 0$ tels que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Ax + B}$$

Piège :
Attention à ne pas confondre continuité et uniforme continuité. Une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas nécessairement à croissance au plus linéaire (penser à $x \mapsto x^2$). C'est bien l'uniforme constance du "pas" δ qui permet de conclure.

À retenir :
Une fonction uniformément continue sur un intervalle non borné "ne peut pas exploser plus vite qu'une droite". Ce résultat est classique pour démontrer qu'une fonction à croissance super-linéaire n'est pas uniformément continue.

6

Dérivabilité

Dérivabilité du maximum de deux fonctions

Énoncé

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la fonction M sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) = \max(f(x), g(x))$$

La fonction M est-elle dérivable en x_0 ?

Indications :

- Commencer par traiter les cas où l'une des deux fonctions est strictement supérieure à l'autre en x_0 en utilisant la continuité.
- Pour le cas $f(x_0) = g(x_0)$, utiliser la relation classique :

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

- Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue $x \mapsto |u(x)|$ au point où u s'annule.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation de la continuité pour la stabilité locale du signe.
- Lien entre dérivabilité et limites à gauche et à droite du taux d'accroissement.
- Caractérisation de la dérivabilité de $|u|$ en un point d'annulation.

Analyse préliminaire.

La fonction M n'est pas nécessairement dérivable en x_0. L'étude repose sur la comparaison des valeurs de f et g en ce point.

Premier cas : $f(x_0) \neq g(x_0)$.

Supposons par exemple que $f(x_0) > g(x_0)$.

Par hypothèse, f et g sont dérivables en x_0, donc elles y sont continues. Par continuité, la fonction $f - g$ est continue en x_0 et $(f - g)(x_0) > 0$.

D'après le théorème de conservation du signe, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) - g(x) > 0$$

Sur cet intervalle I, on a alors $M(x) = f(x)$.

Puisque f est dérivable en x_0, M est dérivable en x_0 et :

$$\boxed{M'(x_0) = f'(x_0)}$$

Le raisonnement est symétrique si $g(x_0) > f(x_0)$, auquel cas $M'(x_0) = g'(x_0)$.

Deuxième cas : $f(x_0) = g(x_0)$.

Utilisons l'expression de la fonction maximum à l'aide de la valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

Puisque la somme de fonctions dérivables est dérivable, M est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction $h : x \mapsto |f(x) - g(x)|$ est dérivable en x_0.

Posons $u = f - g$. On a $u(x_0) = 0$ et u est dérivable en x_0. Étudions le taux d'accroissement de $h = |u|$ en x_0 :

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{|u(x)| - |u(x_0)|}{x - x_0} = \frac{|u(x)|}{x - x_0}$$

Or, au voisinage de x_0, on peut écrire grâce à la dérivabilité de u :

$$u(x) = u'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Examinons les limites à droite et à gauche :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{|u(x)|}{x - x_0} = |u'(x_0)|$$
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{|u(x)|}{x - x_0} = -|u'(x_0)|$$

La fonction h est dérivable en x_0 si et seulement si ces deux limites sont égales, ce qui impose :

$$|u'(x_0)| = -|u'(x_0)| \iff u'(x_0) = 0$$

Conclusion.

La fonction M est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\boxed{f(x_0) \neq g(x_0) \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = g'(x_0)}$$

> **Piège :**
> Affirmer que le maximum de deux fonctions dérivables est toujours dérivable. L'exemple classique $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ en $x_0 = 0$ montre que $M(x) = \max(x, 0)$ n'est pas dérivable en 0.

> **À retenir :**
> La fonction valeur absolue $|u|$ est dérivable en un point x_0 où $u(x_0) = 0$ si et seulement si $u'(x_0) = 0$.

Limite d'une somme et dérivabilité en zéro

Énoncé

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^3}\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Indications :

- Utiliser la définition de la dérivabilité de f en 0 pour effectuer un développement limité à l'ordre 1.
- Écrire $f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
- Utiliser la formule classique de la somme des carrés des n premiers entiers naturels : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Pour le terme d'erreur, utiliser une majoration uniforme.

Correction.

Idées clés :

- Développement limité à l'ordre 1 en 0.
- Linéarité de la somme.
- Comparaison somme-intégrale ou formule de sommation usuelle.

Résolution.

Par hypothèse, f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$. Il existe donc une fonction ε définie sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on pose $x_{k,n} = \frac{k^2}{n^3}$. On remarque que $0 < x_{k,n} \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$.

En substituant dans l'expression de u_n, on obtient :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(f'(0)\frac{k^2}{n^3} + \frac{k^2}{n^3}\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right)$$

Par linéarité de la somme, nous pouvons séparer u_n en deux parties :

$$u_n = \frac{f'(0)}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^3}\right)$$

Étude du terme principal.

On rappelle la formule usuelle de la somme des carrés :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Le premier terme devient :

$$v_n = f'(0)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = f'(0)\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{f'(0)}{3}}$$

Étude du terme d'erreur.

Posons $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^3}\right)$. Soit $\eta > 0$.

Comme $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \delta]$, $|\varepsilon(x)| \leq \eta$.

Pour n assez grand tel que $\frac{1}{n} \leq \delta$, on a pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $0 < \frac{k^2}{n^3} \leq \frac{1}{n} \leq \delta$. Alors :

$$|R_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}\left|\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right| \leq \eta\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$$

Or, nous avons vu que $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \to \frac{1}{3}$. Pour n suffisamment grand, cette somme est majorée par 1 (par exemple). On en déduit :

$$|R_n| \leq \eta$$

Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0}$$

Conclusion.

Par somme de limites, la suite (u_n) converge et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{3}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à dire que comme chaque terme $f(\frac{k^2}{n^3})$ est proche de $f'(0)\frac{k^2}{n^3}$, la somme est proche de la somme des approximations. Il est impératif de justifier que la somme des restes tend bien vers 0, car le nombre de termes de la somme tend vers l'infini.

À retenir :
Lorsqu'on étudie une somme du type $\sum f(a_{k,n})$ où $a_{k,n}$ tend vers 0 uniformément en k, le premier réflexe est d'utiliser un développement limité de f en 0. La rigueur impose ensuite de majorer le reste par $\max|\varepsilon| \times$ (somme des modules).

Nombre de zéros et dérivées successives

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que la fonction dérivée n-ième, $f^{(n)}$, s'annule en exactement p points distincts de $\mathbb{R}$.
Déterminer un majorant du nombre de points en lesquels la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Indications :

- Utiliser le théorème de Rolle pour lier le nombre de zéros d'une fonction dérivable à celui de sa dérivée.
- Procéder par récurrence ou par itérations successives sur l'ordre de dérivation.
- Si une fonction g possède k zéros distincts, que peut-on dire du nombre de zéros de g' ?

Correction.

Idées clés :

- Théorème de Rolle.
- Relation d'ordre entre le nombre de zéros de g et de g'.

Analyse du lien entre les zéros de g et de g'.

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que g s'annule en k points distincts, notés $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.

D'après le théorème de Rolle, pour chaque entier $i \in \{1, \dots, k-1\}$, il existe un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(c_i) = 0$.

Comme les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, les points $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ sont distincts.

Ainsi, si l'on note $Z(g)$ le nombre de zéros de la fonction g sur $\mathbb{R}$, on a la relation :

$$Z(g') \geq Z(g) - 1$$

On en déduit immédiatement la majoration suivante :

$$\boxed{Z(g) \leq Z(g') + 1}$$

Application aux dérivées successives.

Appliquons cette propriété de proche en proche aux dérivées successives de la fonction f. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable et sa dérivée est $f^{(k+1)}$.

D'après la relation établie précédemment :

$$Z(f^{(k)}) \leq Z(f^{(k+1)}) + 1$$

Sommons ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\begin{aligned} Z(f) &\leq Z(f') + 1 \\ &\leq (Z(f'') + 1) + 1 = Z(f'') + 2 \\ &\leq \dots \\ &\leq Z(f^{(n)}) + n \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation générale :

$$\boxed{Z(f) \leq Z(f^{(n)}) + n}$$

Conclusion.

Par hypothèse, la fonction $f^{(n)}$ possède exactement p zéros distincts, soit $Z(f^{(n)}) = p$.

En injectant cette donnée dans l'inégalité précédente, nous concluons que le nombre de zéros de f est majoré par $p + n$:

$$\boxed{Z(f) \leq p + n}$$

> **Piège :**
> Le théorème de Rolle garantit l'existence d'AU MOINS $k - 1$ zéros pour la dérivée. Attention à ne pas inverser le sens de l'inégalité : une fonction peut avoir très peu de zéros alors que sa dérivée en a beaucoup (pensez aux fonctions oscillantes comme $x \mapsto \cos(x)$ dont la dérivée s'annule souvent mais qui ne s'annule pas sur certains intervalles).

> **À retenir :**
> Si une fonction g s'annule k fois, alors sa dérivée g' s'annule au moins $k - 1$ fois entre ces zéros. Par contraposée (ou décalage d'indice), si g' s'annule m fois, g s'annule au plus $m + 1$ fois.

Caractérisation des fonctions lipschitziennes

Énoncé

1. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment S de $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur S.

Indications :
- Pour le sens direct de la question 1, utiliser la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement.
- Pour le sens réciproque, appliquer l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- Pour la question 2, exploiter le théorème des bornes atteintes pour une fonction continue sur un segment.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre contrôle local (dérivée) et contrôle global (lipschitzianité).
- Inégalité des accroissements finis (IAF).
- Propriété des fonctions continues sur un segment (théorème de Weierstrass).

Résolution de la question 1.

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sens direct ($\Rightarrow$) : Supposons que f soit k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $k \geq 0$.

Par définition, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, on a :

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Puisque f est dérivable en x_0, nous pouvons considérer la limite du taux d'accroissement :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente (par conservation des inégalités larges), on obtient :

$$|f'(x_0)| \leq k$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en déduit que f' est bornée :

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leq k}$$

Sens réciproque ($\Leftarrow$) : Supposons que f' soit bornée sur $\mathbb{R}$. Posons $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$.

D'après le théorème des accroissements finis (ou plus directement l'inégalité des accroissements finis), pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{t \in [x,y]} |f'(t)| \right) |x - y|$$

Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq M$, il vient immédiatement :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}$$

Ainsi, f est M-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Résolution de la question 2.

Soit $S = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ ($a < b$) et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur S.

Par définition, la fonction dérivée f' est continue sur le segment S.

D'après le théorème des bornes atteintes (théorème de Weierstrass), toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Il existe donc une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\boxed{\forall x \in S, \quad |f'(x)| \leq M}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur le segment S, on obtient pour tout $(x, y) \in S^2$:

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}$$

L'application f est donc lipschitzienne sur S.

> **Piège :**
> Attention : une fonction peut être dérivable et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ (sa dérivée n'est pas nécessairement continue, mais elle doit être bornée).

> **À retenir :**
> Le caractère lipschitzien d'une fonction dérivable est équivalent au caractère borné de sa dérivée. C'est un outil fondamental pour démontrer qu'une fonction est uniformément continue.

Lien entre limite de la dérivée et croissance

Énoncé

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda$$

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

Indications :

- Distinguer le cas où λ est réel et le cas où $\lambda = \pm\infty$.
- Utiliser le théorème des accroissements finis (TAF) sur un intervalle $[A, x]$ pour exploiter la limite de la dérivée.
- Écrire $f(x) = f(x) - f(A) + f(A)$ pour faire apparaître le taux de variation.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation du Théorème des Accroissements Finis (TAF).
- Décomposition de l'expression $\frac{f(x)}{x}$ pour isoler le comportement à l'infini.
- Raisonnement par encadrement (ε pour le cas fini, M pour le cas infini).

Premier cas : $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur la limite de f', il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad \lambda - \varepsilon \leq f'(t) \leq \lambda + \varepsilon$$

Pour tout $x > A$, la fonction f est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]A, x[$ tel que :

$$f(x) - f(A) = (x - A)f'(c_x)$$

Puisque $x > A$, nous pouvons diviser par x et isoler $\frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(A) + (x - A)f'(c_x)}{x} \\ &= \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right) f'(c_x) \end{aligned}$$

Comme $c_x > A$, on a l'encadrement $\lambda - \varepsilon \leq f'(c_x) \leq \lambda + \varepsilon$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right)(\lambda - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right)(\lambda + \varepsilon)}$$

Passons à la limite quand $x \to +\infty$. Les termes $\frac{f(A)}{x}$ et $\frac{A}{x}$ tendent vers 0. Il existe donc un réel $B \geq A$ tel que pour tout $x \geq B$:

$$\lambda - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \lambda + 2\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda}$$

Deuxième cas : $\lambda = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $f'(t) \geq 2M$. De la même manière, pour $x > A$, il existe $c_x > A$ tel que :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right) f'(c_x)$$

Comme $f'(c_x) \geq 2M$ et que $\left(1 - \frac{A}{x}\right) \to 1$, il existe $B > A$ tel que pour $x > B$, $\left(1 - \frac{A}{x}\right) \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{f(A)}{x} \geq -M/2$. On obtient alors :

$$\frac{f(x)}{x} \geq -\frac{M}{2} + \frac{1}{2}(2M) = \frac{M}{2}$$

Par définition de la limite infinie, on a bien :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Le cas $\lambda = -\infty$ se traite de façon parfaitement symétrique en considérant $-f$.

> **Piège :**
> Attention à ne pas utiliser la règle de l'Hôpital sans justification, car elle n'est pas explicitement au programme de MPSI et nécessite souvent des hypothèses de régularité supplémentaires (C^1). Le TAF est l'outil fondamental ici.

> **À retenir :**
> La convergence de la dérivée entraîne la convergence de la fonction vers une direction asymptotique. La réciproque est fausse (penser à $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$).

Majoration linéaire d'une fonction bornée

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Cx$$

Indications :
- Introduire la fonction auxiliaire $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.
- Étudier la limite de g en 0 en utilisant la définition de la dérivée de f en 0.
- Utiliser le caractère borné de f pour majorer g au voisinage de $+\infty$.
- Conclure en découpant l'étude sur deux intervalles, par exemple $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

Correction.

Idées clés :
- Étude du taux d'accroissement en 0
- Prolongement par continuité
- Comportement asymptotique d'un quotient dont le numérateur est borné

Résolution.

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, elle est en particulier dérivable en 0. Par hypothèse, $f(0) = 0$, donc le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

On en déduit que la fonction g admet une limite finie en 0 :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = f'(0)}$$

La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ (comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Comme elle possède une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0.

Toute fonction continue sur un segment $[0, 1]$ est bornée. Ainsi, g est bornée sur l'intervalle $]0, 1]$. Posons :

$$M_1 = \sup_{x \in]0,1]} |g(x)|$$

Par ailleurs, par hypothèse, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Il existe donc $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq M$.

Pour tout $x \geq 1$, nous avons alors :

$$|g(x)| = \frac{|f(x)|}{x} \leq |f(x)| \leq M$$

On en déduit une majoration globale de $|g(x)|$ sur $]1, +\infty[$:

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad |g(x)| \leq M}$$

Posons alors $C = \max(M_1, M, 1)$. La constante C est strictement positive et vérifie :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad |g(x)| \leq C$$

En multipliant par $x > 0$, on obtient $|f(x)| \leq Cx$.

Enfin, pour $x = 0$, on a $|f(0)| = 0$ et $C \cdot 0 = 0$, donc la relation $|f(x)| \leq Cx$ est encore vérifiée.

On a bien montré l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Cx}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à croire que f' est bornée au voisinage de 0. L'énoncé dit seulement que f est dérivable, pas qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Il faut donc bien repasser par la définition du taux d'accroissement (limite de g en 0) et non par une majoration de la dérivée.

À retenir :
Lorsqu'on cherche à majorer une fonction par x (ou plus généralement par une puissance de x), l'étude du rapport $\frac{f(x)}{x}$ est souvent la clé. Si ce rapport est prolongeable par continuité en 0 et borné à l'infini, alors f est dominée linéairement.

Limite de la dérivée et convergence

Énoncé

Donner un exemple de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$ mais telle que f' ne tende pas vers 0 en $+\infty$.

Indications :
- Rechercher une fonction oscillante dont l'amplitude tend vers 0 afin d'assurer l'existence d'une limite finie.
- Pour que la dérivée ne tende pas vers 0, il faut que les oscillations soient de plus en plus "rapides".
- Tester une fonction de la forme $f(x) = \frac{\sin(g(x))}{h(x)}$ avec g croissant plus vite que h.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation d'une fonction oscillante amortie.
- Comparaison des ordres de grandeur entre l'amplitude et la pulsation.
- Utilisation de suites divergentes pour prouver l'absence de limite.

Analyse et construction de l'exemple.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x+1}$$

Vérifions que cette fonction répond aux exigences de l'énoncé.

1. Régularité et limite de la fonction.

La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x+1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$. Par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit en particulier :

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a l'encadrement :

$$-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\sin(x^2)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

2. Étude de la dérivée.

Calculons la dérivée de f sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\cos(x^2)(x+1) - \sin(x^2)\cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x}{(x+1)^2}\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Simplifions l'expression pour mettre en évidence les termes prépondérants :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x+1}\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{(x+1)^2}}$$

3. Comportement de la dérivée en $+\infty$.

Notons $g(x) = \frac{2x}{x+1}\cos(x^2)$ et $h(x) = \frac{\sin(x^2)}{(x+1)^2}$.

Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ par croissance comparée (ou simple encadrement).

Supposons, par l'absurde, que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Alors, par somme de limites, on aurait :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (f'(x) + h(x)) = 0$$

Or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2$, cela impliquerait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x^2) = 0$.

C'est manifestement faux. Pour le prouver rigoureusement, considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sqrt{2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Ces deux suites tendent vers $+\infty$. On calcule les images par g :

— $g(u_n) = \frac{2\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2n\pi}+1}\cos(2n\pi) = \frac{2\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2n\pi}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

— $g(v_n) = \frac{2v_n}{v_n+1}\cos(2n\pi + \pi/2) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

L'existence de deux suites tendant vers $+\infty$ avec des limites d'images distinctes prouve que g n'a pas de limite en $+\infty$.

Par conséquent, f' n'a pas de limite en $+\infty$. En particulier :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0}$$

> **Piège :**
> Une erreur classique consiste à croire que si $f \to L$, alors $f' \to 0$. C'est faux en général. Ce résultat n'est vrai que si l'on suppose **a priori** que f' admet une limite en $+\infty$ (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis ou du théorème de la limite de la dérivée).

> **À retenir :**
> Pour construire un contre-exemple où $f \to 0$ mais $f' \not\to 0$, il faut choisir une fonction dont les oscillations deviennent de plus en plus "pentues" (la pulsation augmente) tout en étant écrasées par une enveloppe qui tend vers 0. L'exemple type est $x \mapsto \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}$ avec $\alpha > \beta > 0$.

Inégalités usuelles et inégalité de Young

Énoncé

Démontrer les inégalités fondamentales suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln x \leq x - 1$.
3. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.
4. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Indications :
- Pour les questions 1, 2 et 3, une étude de fonction ou un argument de convexité suffit.
- Pour l'inégalité de Jordan (question 3), utiliser la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$.
- Pour l'inégalité de Young, utiliser la concavité de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Correction.

Idées clés :
- Étude du signe d'une fonction via sa dérivée.
- Utilisation de la convexité : une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.
- Utilisation de la concavité : une fonction concave est au-dessus de ses cordes.

Résolution.

1. Soit $f : x \mapsto e^x - (x + 1)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1$$

   On observe que $f'(x) < 0$ sur $] - \infty, 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

   La fonction f admet donc un minimum global en $x = 0$, qui vaut $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. D'après l'inégalité précédente appliquée à $u = \ln x$ (ce qui est possible car $\ln x \in \mathbb{R}$), on a :

$$e^{\ln x} \geq 1 + \ln x$$

   Ceci se réécrit immédiatement : $x \geq 1 + \ln x$, soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln x \leq x - 1}$$

3. **Majoration par x :** Soit $g : x \mapsto x - \sin x$. On a $g'(x) = 1 - \cos x$.

   Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \leq 1$, g est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

   Minoration (Inégalité de Jordan) : La fonction sin est deux fois dérivable sur $[0, \pi/2]$ et $\sin''(x) = -\sin x \leq 0$.

La fonction sin est donc concave sur $[0, \pi/2]$. Son graphe est alors situé au-dessus de ses cordes.

Considérons la corde reliant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$. L'équation de cette droite est :

$$y = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{\pi/2 - 0}(x - 0) + \sin(0) = \frac{1}{\pi/2}x = \frac{2x}{\pi}$$

Par concavité, on en conclut :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x}$$

4. Puisque $a, b > 0$, on peut utiliser la fonction logarithme. On cherche à comparer $\ln(ab)$ et $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$.

   On a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)$.

   La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in]0, 1[$, on peut appliquer la définition de la concavité :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

   Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$$\exp(\ln(ab)) \leq \exp\left(\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)\right)$$

   On conclut finalement :

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

> **Piège :**
> Dans l'inégalité de Jordan, bien préciser l'intervalle $[0, \pi/2]$ car la fonction sinus n'est plus concave au-delà de π.

> **À retenir :**
> L'inégalité $e^x \geq 1+x$ traduit la convexité de l'exponentielle : la courbe est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

7

Fonctions de classe C^k

Fonction plate et support compact

Énoncé

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées successives en 0 sont nulles.
2. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telle que :

$$g(x) > 0 \iff x \in]0, 1[$$

Indications :

- Pour la question 1, procéder par récurrence sur n pour montrer que la dérivée n-ième sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$ où P_n est un polynôme.
- Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k.
- Pour la question 2, considérer une fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis effectuer un produit judicieux.

Correction.

Idées clés :

- Forme des dérivées successives : $P(1/x)e^{-1/x^2}$.
- Croissances comparées en l'infini.
- Théorème de prolongement de la classe C^k.

1. Prolongement C^∞ de la fonction f.

Posons $f(0) = 0$. Comme $\lim_{x\to 0} -1/x^2 = -\infty$, par composition des limites, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ ».

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après l'étude de la continuité ci-dessus.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{R}^*$, f est de classe C^∞. On montre par une récurrence immédiate (ou par calcul direct) qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

En effet, pour $n = 0$, $P_0 = 1$. Si la forme est vraie au rang n, alors en dérivant :

$$f^{(n+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right] e^{-1/x^2}$$

On pose alors $P_{n+1}(u) = -u^2P_n'(u) + 2u^3P_n(u)$, qui est bien un polynôme. On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}}$$

Étudions la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \to 0$. Posons $u = 1/x$. Lorsque $x \to 0$, $u \to \pm\infty$.

$$P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = P_n(u)e^{-u^2}$$

Par croissances comparées, la puissance l'emporte sur l'exponentielle de u^2 en l'infini, donc :

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

D'après le théorème de prolongement de la classe C^1, puisque f est C^n sur $\mathbb{R}$, C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$, et que $f^{(n+1)}$ admet une limite nulle en 0, alors f est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Conclusion : Par récurrence, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0}$$

2. Construction de la fonction g.

Considérons la fonction ψ définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (le raccordement en 0 à gauche est trivial puisque toutes les dérivées sont nulles à droite en 0).

Posons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \psi(x)\psi(1-x)$$

Régularité : g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ (la fonction $x \mapsto \psi(1-x)$ l'est par composition avec une fonction affine).

Signe et positivité : Comme l'exponentielle est strictement positive, on a :
- $\psi(x) > 0 \iff x > 0$.
- $\psi(1-x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1$.

Ainsi, par produit de termes positifs ou nuls :

$$g(x) > 0 \iff (\psi(x) > 0 \text{ et } \psi(1-x) > 0) \iff (x > 0 \text{ et } x < 1)$$

On a donc bien :

$$\boxed{g(x) > 0 \iff x \in]0,1[}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas utiliser le théorème de prolongement de la dérivée sans vérifier la continuité de la dérivée à l'origine. Il faut bien vérifier que la limite de $f^{(n)}$ existe pour passer au rang $n+1$.

> **À retenir :**
> La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est l'exemple fondamental d'une fonction C^∞ qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 (car toutes ses dérivées en 0 sont nulles alors que la fonction n'est pas identiquement nulle). On dit qu'elle est "plate" en 0.

Prolongement C^∞ et non-monotonie

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = e^{-1/x^2} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f admet un minimum global en 0.
3. Justifier que f n'est monotone sur aucun intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

Indications :

- Pour la classe C^∞, utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k. On pourra remarquer que les dérivées successives de $x \mapsto e^{-1/x^2}$ et de $x \mapsto \sin^2(1/x)$ font apparaître des fractions rationnelles en $1/x$.
- L'existence du minimum global découle immédiatement du signe de la fonction.
- Pour la monotonie, exploiter l'existence d'une suite de zéros de la fonction convergeant vers 0.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de prolongement de la classe C^k (ou limite de la dérivée).
- Croissances comparées : $\lim_{u\to+\infty} P(u)e^{-u^2} = 0$ pour tout polynôme P.
- Étude des zéros d'une fonction oscillante au voisinage de l'origine.

1. Classe de la fonction f.

La fonction f est clairement de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ par produit et composition de fonctions usuelles de classe C^∞.

Pour démontrer que f est C^∞ en 0, nous allons montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ admet une limite nulle en 0^+.

Considérons la fonction $h : x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par $h(0) = 0$. Un résultat classique du cours affirme que $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que toutes ses dérivées en 0 sont nulles. Plus précisément, pour $x > 0$, $h^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x^2}$ où P_k est un polynôme.

Par ailleurs, une étude rapide montre que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la dérivée m-ième de $x \mapsto \sin^2(1/x)$ est de la forme $Q_m(1/x)\text{trig}(1/x)$, où Q_m est un polynôme et trig est une combinaison linéaire de fonctions sinus et cosinus (donc bornée).

D'après la formule de Leibniz, pour $x > 0$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) \left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-k)}$$

Chaque terme de cette somme est de la forme $R_k(1/x)e^{-1/x^2} \times \text{borné}(1/x)$, où R_k est un polynôme. Par croissances comparées, en posant $u = 1/x$:

$$\lim_{x\to0^+} R_k(1/x)e^{-1/x^2} = \lim_{u\to+\infty} R_k(u)e^{-u^2} = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to0^+} f^{(n)}(x) = 0}$$

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0}$$

2. Minimum global en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $e^{-1/x^2} > 0$ et $\sin^2(1/x) \geq 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$. Comme $f(0) = 0$, on conclut :

$$\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^+} f(x) = f(0) = 0}$$

3. Non-monotonie sur $[0, a]$.

Soit $a > 0$. La fonction f s'annule en tous les points $x_k = \frac{1}{k\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $x_k \in [0, a]$. Considérons deux zéros consécutifs $x_{k+1} = \frac{1}{(k+1)\pi}$ et $x_k = \frac{1}{k\pi}$.

Sur l'intervalle $]x_{k+1}, x_k[$, la fonction $\sin^2(1/x)$ ne s'annule pas, donc $f(x) > 0$. Par le théorème des bornes atteintes sur le segment $[x_{k+1}, x_k]$, f admet un maximum local strictement positif en un point $c_k \in]x_{k+1}, x_k[$.

— Sur $[x_{k+1}, c_k]$, f passe de 0 à $f(c_k) > 0$, donc f n'est pas décroissante.
— Sur $[c_k, x_k]$, f passe de $f(c_k) > 0$ à 0, donc f n'est pas croissante.

Comme tout intervalle $[0, a]$ contient de tels points pour k assez grand, on en déduit :

$$\boxed{f \text{ n'est monotone sur aucun intervalle } [0, a] \text{ avec } a > 0}$$

> **Piège :**
> Ne pas confondre la fonction f avec la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$. Cette dernière est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, mais le facteur oscillant $\sin^2(1/x)$ "casse" cette monotonie une infinité de fois au voisinage de 0.

> **À retenir :**
> Une fonction peut être de classe C^∞ avec toutes ses dérivées nulles en un point (on dit qu'elle est "plate") sans pour autant être nulle au voisinage de ce point. C'est le cas typique des fonctions de type e^{-1/x^2} qui ne sont pas analytiques en 0.

Isolabilité des zéros d'ordre fini

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[a-h, a+h] \setminus \{a\}$.
2. On suppose désormais que pour tout zéro x_0 de f, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S.

Indications :

- Pour la première question, utiliser la formule de Taylor-Young au voisinage de a. On pourra considérer le plus petit entier p tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$.
- Pour la seconde question, raisonner par l'absurde en supposant que l'ensemble des zéros est infini et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Correction.

Idées clés :

- Formule de Taylor-Young (comportement local).
- Propriété des zéros isolés.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (compacité).

1. Caractère isolé d'un zéro d'ordre fini.

Considérons l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$. Par hypothèse, cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il possède donc un plus petit élément que nous noterons p.

Par définition de p, nous avons $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$.

Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction f au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^p)$$

En tenant compte des nullités des premières dérivées, il vient :

$$f(x) = \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (x-a)^p \varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. On peut alors factoriser par le terme de plus bas degré :

$$\boxed{f(x) = \frac{(x-a)^p}{p!} \left(f^{(p)}(a) + p!\varepsilon(x) \right)}$$

Par définition de la limite, pour $\epsilon = \frac{|f^{(p)}(a)|}{2} > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in [a-h, a+h]$:

$$|p!\varepsilon(x)| \leq \frac{|f^{(p)}(a)|}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in [a-h, a+h]$, la quantité $f^{(p)}(a) + p!\varepsilon(x)$ est du signe de $f^{(p)}(a)$ et, en particulier, ne s'annule pas.

Comme le terme $(x-a)^p$ ne s'annule sur $[a-h, a+h]$ qu'en $x = a$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}, \quad f(x) \neq 0}$$

2. Finitude du nombre de zéros sur un segment.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'ensemble des zéros de f sur le segment S, noté $Z_S = \{x \in S \mid f(x) = 0\}$, soit infini.

Puisque Z_S est une partie infinie du segment S (qui est un ensemble borné), d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Z_S deux à deux distincts qui converge vers une limite $z^* \in S$.

D'une part, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est en particulier continue sur S. Puisque pour tout n, $f(z_n) = 0$, par passage à la limite, on a :

$$\boxed{f(z^*) = 0}$$

Ainsi, z^* est un zéro de f. Par hypothèse de l'énoncé, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z^*) \neq 0$.

D'après la question **1.**, il existe donc un voisinage de z^*, soit $V = [z^* - h, z^* + h]$, tel que z^* soit le seul zéro de f dans V.

Or, par définition de la convergence de la suite (z_n) vers z^*, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad z_n \in [z^* - h, z^* + h]$$

Comme les termes de la suite sont supposés deux à deux distincts, il existe au moins un indice $n \geq N$ tel que $z_n \neq z^*$.

On a alors $z_n \in V \setminus \{z^*\}$ et $f(z_n) = 0$, ce qui contredit le fait que z^* est un zéro isolé.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } f \text{ sur } S \text{ est fini.}}$$

> **Piège :**
> L'hypothèse que z^* est lui-même un zéro de f est cruciale. Elle découle de la continuité de f. Sans cette continuité, on ne pourrait pas affirmer que la limite d'une suite de racines est elle-même une racine.

> **À retenir :**
> Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont tous les zéros sont d'ordre fini possède des zéros isolés. Sur un compact, une telle fonction ne peut donc s'annuler qu'un nombre fini de fois. C'est une propriété fondamentale qui préfigure la théorie des fonctions analytiques.

Extrema locaux et dérivées

Énoncé

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f admet un maximum local en 0. Montrer que : $f'(0) = 0$.
2. On suppose que : $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$. Montrer que f admet un maximum local en 0.

Indications :
- Pour la question 1, revenir à la définition d'un maximum local et étudier le signe du taux d'accroissement à gauche et à droite de 0.
- Pour la question 2, utiliser un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- Se souvenir que le signe d'une fonction au voisinage d'un point est dicté par le signe de son terme prépondérant non nul.

Correction.

Idées clés :
- Condition nécessaire du premier ordre (point critique).
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
- Étude locale du signe par limite.

1. Condition nécessaire du premier ordre

Par hypothèse, f admet un maximum local en 0. Il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-\delta, \delta[, \quad f(x) \leq f(0)$$

Considérons le taux d'accroissement de f en 0, défini pour $x \neq 0$ par :

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

— Si $x \in]0, \delta[$, alors $f(x) - f(0) \leq 0$ et $x > 0$, donc $\tau(x) \leq 0$. Par passage à la limite quand $x \to 0^+$, on obtient $f'(0) \leq 0$.

— Si $x \in]-\delta, 0[$, alors $f(x) - f(0) \leq 0$ et $x < 0$, donc $\tau(x) \geq 0$. Par passage à la limite quand $x \to 0^-$, on obtient $f'(0) \geq 0$.

On en conclut immédiatement :

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

2. Condition suffisante du second ordre

On suppose $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, nous pouvons écrire le développement de Taylor-Young de f au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$$

En utilisant l'hypothèse $f'(0) = 0$, cette expression se simplifie :

$$\boxed{f(x) - f(0) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)}$$

Pour $x \neq 0$, nous pouvons factoriser par x^2 :

$$f(x) - f(0) = x^2 \left(\frac{f''(0)}{2} + \varepsilon(x) \right)$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Par définition de la limite, pour $\epsilon = \left|\frac{f''(0)}{4}\right| > 0$, il existe un voisinage $]-\eta, \eta[$ de 0 tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on a $|\varepsilon(x)| < \left|\frac{f''(0)}{4}\right|$.

Comme $f''(0) < 0$, cela implique que pour tout $x \in]-\eta, \eta[\backslash\{0\}$:

$$\frac{f''(0)}{2} + \varepsilon(x) < \frac{f''(0)}{2} - \frac{f''(0)}{4} = \frac{f''(0)}{4} < 0$$

Comme $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, le produit est strictement négatif. On a donc, pour tout $x \in]-\eta, \eta[$:

$$\boxed{f(x) \leq f(0)}$$

Cela prouve que f admet un maximum local (et même strict) en 0.

Piège :
Attention : la condition $f''(0) \leq 0$ est nécessaire pour un maximum local, mais elle n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction $x \mapsto -x^4$ possède un maximum en 0 avec $f''(0) = 0$, mais la fonction $x \mapsto x^3$ a aussi $f''(0) = 0$ sans posséder d'extremum en 0.

À retenir :

- Un extremum local sur un intervalle ouvert impose l'annulation de la dérivée (point critique).
- Pour un point critique, le signe de la dérivée seconde permet de conclure : négative pour un maximum, positive pour un minimum.

Reste de Taylor de l'exponentielle

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$u_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. Quel est le signe de $u_n(x)$ en fonction de n et x ?
2. Montrer que :

$$|u_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Indications :
- Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour exprimer $u_n(x)$.
- Pour le signe, distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ en effectuant un changement de variable ou en analysant l'intégrande.
- Pour l'inégalité, majorer l'exponentielle sous l'intégrale par sa borne supérieure sur l'intervalle d'intégration.

Correction.

Idées clés :
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Majoration d'intégrale

1. Étude du signe de $u_n(x)$.

La fonction $f : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Comme $f^{(k)}(t) = e^t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit l'expression de $u_n(x)$:

$$\boxed{u_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt}$$

Premier cas : $x \geq 0$.

Pour tout $t \in [0, x]$, on a $x - t \geq 0$, donc l'intégrande est une fonction positive sur le segment d'intégration. Par positivité de l'intégrale :

$$u_n(x) \geq 0$$

Deuxième cas : $x < 0$.

Posons le changement de variable $t = xu$ avec $du = \frac{dt}{x}$. Lorsque t varie de 0 à x, u varie de 0 à 1.

$$u_n(x) = \int_0^1 \frac{(x - xu)^n}{n!} e^{xu} x\, du = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{xu}\, du$$

L'intégrale $\int_0^1 (1-u)^n e^{xu}\,du$ est strictement positive car l'intégrande est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$.

Le signe de $u_n(x)$ est donc celui de x^{n+1}.

Conclusion sur le signe :

$$\boxed{\operatorname{sgn}(u_n(x)) = \operatorname{sgn}(x^{n+1})}$$

Cela signifie que $u_n(x)$ est toujours positif si n est impair, et du signe de x si n est pair.

2. Preuve de l'inégalité.

Premier cas : $x \geq 0$.

D'après l'expression intégrale, pour tout $t \in [0,x]$, on a $e^t \leq e^x$. Ainsi :

$$|u_n(x)| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt \leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

En calculant l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme $x = |x|$ et $e^x = e^{|x|}$, on a bien :

$$\boxed{|u_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Deuxième cas : $x < 0$.

On a $u_n(x) = \int_x^0 -\frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$. En passant au module :

$$|u_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t\,dt$$

Pour $t \in [x,0]$, on a $e^t \leq e^0 = 1$ et $e^{|x|} \geq 1$, donc $e^t \leq e^{|x|}$. De plus, $|x-t| = t-x$. L'inégalité devient :

$$|u_n(x)| \leq 1 \cdot \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme $x < 0$, on a $|x| = -x$, d'où :

$$\boxed{|u_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

> **À retenir :**
> La formule de Taylor avec reste intégral est l'outil privilégié pour étudier le signe d'un reste, tandis que l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou la majoration du reste intégral) permet d'obtenir des estimations fines.

> **Piège :**
> Attention au signe lors des manipulations d'intégrales quand la borne inférieure est supérieure à la borne supérieure ($x < 0$). Il est souvent plus prudent de se ramener à un intervalle $[0,1]$ par changement de variable.

Croissance et dérivée p-ième bornée

Énoncé

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f une application de classe $\mathcal{C}^p$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la dérivée p-ième $f^{(p)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^p)$$

Indications :
- Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p en l'origine.
- Séparer l'expression de $f(x)$ en une partie polynomiale et un terme de reste.
- Majorer le reste intégral en utilisant le caractère borné de $f^{(p)}$.

Correction.

Idées clés :
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Inégalité de la moyenne ou majoration directe d'une intégrale.
- Comparaison des croissances polynomiales à l'infini.

Résolution.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[0, +\infty[$, nous pouvons appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\, dt$$

Notons $P(x)$ la partie polynomiale de cette expression :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

P est un polynôme de degré au plus $p-1$. On en déduit immédiatement sa croissance au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{P(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{p-1})}$$

Étudions à présent le terme de reste intégral, que l'on note $R_p(x)$:

$$R_p(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\, dt$$

Par hypothèse, $f^{(p)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Il existe donc un réel $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f^{(p)}(t)| \leq M$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur l'intégrale (avec $x \geq 0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |R_p(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} |f^{(p)}(t)|\, dt \\ &\leq M \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}\, dt \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale restante par une simple primitive en t :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}\, dt = \left[-\frac{(x-t)^p}{p!} \right]_0^x = \frac{x^p}{p!}$$

On en déduit la majoration suivante pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\boxed{|R_p(x)| \leq \frac{M}{p!} x^p}$$

Ainsi, $R_p(x) = O(x^p)$ au voisinage de $+\infty$.

Par sommation des relations de comparaison, puisque $f(x) = P(x) + R_p(x)$ et que $P(x) = O(x^{p-1}) = O(x^p)$, nous concluons :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x^p)}$$

> **Piège :**
> Bien vérifier que x est positif lors de la majoration de l'intégrale pour conserver le sens de l'inégalité sur $(x-t)^{p-1}$. Ici, l'énoncé précise f définie sur $\mathbb{R}^+$, donc l'étude en $+\infty$ ne pose pas de difficulté de signe.

> **À retenir :**
> La formule de Taylor avec reste intégral est l'outil privilégié pour relier les variations d'une fonction (via ses dérivées) à sa croissance polynomiale. De manière générale, si $f^{(p)}$ est bornée, alors f croît au plus comme x^p.

Inégalités de Landau

Énoncé

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}^+$, et l'on note :

$$M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f''(t)|$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $f(x)$, $f(x+h)$ et des valeurs de f'' sur $[x, x+h]$ afin d'établir l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que :

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Indications :
- Appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange (ou la formule de Taylor-reste intégral) à l'ordre 1 entre x et $x+h$ pour isoler le terme en $f'(x)$.
- Pour la seconde question, l'inégalité obtenue étant valable pour tout $h > 0$, on peut minimiser le second membre par rapport à la variable h.

Correction.

Idées clés :
- Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
- Inégalité triangulaire et passage à la borne supérieure.
- Optimisation d'une fonction de variable réelle.

1. Établissement de l'inégalité locale.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $h > 0$. La fonction f est de classe C^2 sur $[x, x+h]$.

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre x et $x+h$, il existe $c \in]x, x+h[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$$

Nous pouvons alors isoler le terme $hf'(x)$:

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2} f''(c)$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$|hf'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2} |f''(c)|$$

Par définition de M_0 et M_2, on a $|f(x)| \leq M_0$, $|f(x+h)| \leq M_0$ et $|f''(c)| \leq M_2$. On obtient alors :

$$h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{h^2}{2} M_2$$

Comme $h > 0$, nous divisons par h pour obtenir l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}}$$

2. Bornitude de f' et optimisation.

L'inégalité établie précédemment est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Notons $\phi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\phi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

Cas trivial : Si $M_2 = 0$, alors $f'' = 0$, donc f' est constante. Si f est bornée et f' constante, alors nécessairement $f' = 0$ (sinon f tendrait vers l'infini). L'inégalité $0 \leq 0$ est vérifiée.

Cas général : Supposons $M_2 > 0$ (le cas $M_0 = 0$ implique également $f = 0$ et $f' = 0$).

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est :

$$\phi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{M_2 h^2 - 4M_0}{2h^2}$$

La dérivée s'annule pour $h_0^2 = \frac{4M_0}{M_2}$, soit :

$$\boxed{h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}$$

La fonction ϕ admet en h_0 un minimum global sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculons ce minimum :

$$\begin{aligned}\phi(h_0) &= \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{M_2}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \\ &= \sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\phi(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}}$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité $|f'(x)| \leq \phi(h)$ est vraie pour tout $h > 0$, elle est en particulier vraie pour $h = h_0$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Ceci prouve que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et fournit la majoration demandée :

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{M_0 M_2}}$$

> **Piège :**
> Une erreur classique consiste à vouloir appliquer Taylor-Lagrange entre 0 et x. Or, l'énoncé impose de travailler avec x et $x + h$ pour obtenir une inégalité valable en tout point x.

> **À retenir :**
> Cette méthode (formule de Taylor suivie d'une optimisation de l'écart h) est un grand classique pour relier

les normes infinies d'une fonction et de ses dérivées successives. On l'appelle souvent *inégalité de Kolmogorov* dans le cas général.

8

Intégration et équations différentielles

Dérivée d'une intégrale à bornes variables

Énoncé

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur J.
Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I, à valeurs dans J.
On considère l'application Φ définie sur I par :

$$\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

Montrer que Φ est de classe C^1 sur I et exprimer sa dérivée Φ'.

Indications :
- Utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour introduire une primitive de f.
- Exprimer Φ comme une composée de fonctions.
- Appliquer avec soin le théorème de dérivation d'une fonction composée (théorème de la "chaîne").

Correction.

Idées clés :
- Théorème fondamental de l'analyse : existence de primitives pour une fonction continue.
- Opérations sur les fonctions de classe C^k (composition et différence).
- Formule de dérivation : $(F \circ u)' = u' \cdot (F' \circ u)$.

Analyse de la régularité.

La fonction f est continue sur l'intervalle J. D'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet des primitives sur J.

Soit F une primitive de f sur J. Par définition, F est de classe C^1 sur J et on a :

$$\forall t \in J, \quad F'(t) = f(t)$$

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$\Phi(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt - \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$$

où a est un point quelconque de J.

On en déduit l'expression suivante de Φ en fonction de F :

$$\Phi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

Dérivation.

La fonction Φ est la différence de deux fonctions composées :

1. $x \mapsto F(v(x))$ est la composée de v (de classe C^1 sur I à valeurs dans J) et de F (de classe C^1 sur J). Elle est donc de classe C^1 sur I.

2. $x \mapsto F(u(x))$ est, par un raisonnement identique, de classe C^1 sur I.

Par différence, la fonction Φ est bien de classe C^1 sur I.

Calculons maintenant sa dérivée. Pour tout $x \in I$:

$$\Phi'(x) = (F \circ v)'(x) - (F \circ u)'(x)$$

En appliquant la règle de dérivation d'une composée :

$$\Phi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x))$$

Comme $F' = f$, nous obtenons le résultat final :

$$\boxed{\Phi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à oublier les termes $v'(x)$ et $u'(x)$ en pensant que la dérivée de l'intégrale est simplement $f(v(x)) - f(u(x))$. Cela n'est vrai que si $v(x) = x$ et $u(x) = a$.

À retenir :
Si $\Phi(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt$, alors $\boxed{\Phi'(x) = v'(x)f(v(x))}$.
Ce résultat est un outil fondamental pour l'étude des fonctions définies par une intégrale, notamment pour déterminer des variations ou des développements limités.

Comportement asymptotique d'une somme de puissances

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^\alpha)$$

Indications :

- Utiliser la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ sur l'intervalle $[0, n]$.
- Encadrer l'intégrale $\int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x$ par les valeurs de la fonction aux bornes de l'intervalle.
- Sommer ces inégalités pour k allant de 1 à n et utiliser la relation de Chasles.

Correction.

Idées clés :

- Comparaison série-intégrale pour les fonctions monotones.
- Relation de Chasles pour l'intégrale.
- Définition de la notation grand O.

Analyse de la fonction.

Soit $f : x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $\alpha > 0$, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [k-1, k]$, nous avons par croissance de f :

$$(k-1)^\alpha \leq x^\alpha \leq k^\alpha$$

Encadrement par intégration.

En intégrant cette inégalité sur le segment $[k-1, k]$, il vient :

$$\int_{k-1}^{k} (k-1)^\alpha \,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} k^\alpha \,\mathrm{d}x$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{(k-1)^\alpha \leq \int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x \leq k^\alpha}$$

Sommation et relation de Chasles.

Sommons ces inégalités pour k allant de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

Par la relation de Chasles, le terme central devient :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{n} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$. L'encadrement précédent s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^\alpha \leq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n$$

Comme $0^\alpha = 0$, on reconnaît à gauche $S_{n-1} = S_n - n^\alpha$. On obtient donc la double inégalité :

$$S_n - n^\alpha \leq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n$$

Conclusion sur le développement asymptotique.

L'inégalité de droite nous donne :

$$S_n \geq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

L'inégalité de gauche nous donne :

$$S_n \leq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + n^\alpha$$

On en déduit l'encadrement suivant pour la différence :

$$\boxed{0 \leq S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq n^\alpha}$$

Ainsi, il existe une constante $C = 1$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\left| S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right| \leq C \cdot n^\alpha$$

Par définition de la notation grand O, nous avons montré :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^\alpha)}$$

> **Piège :**
> Attention à l'indice de sommation dans $\sum (k-1)^\alpha$. Il est crucial de remarquer que cette somme s'arrête à $(n-1)^\alpha$ pour pouvoir la relier proprement à S_n.

> **À retenir :**
> La méthode de comparaison somme-intégrale est l'outil fondamental pour obtenir des équivalents ou des développements asymptotiques de sommes de la forme $\sum f(k)$ lorsque f est monotone.

Primitives d'une fonction périodique

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique de période $T > 0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les primitives de f soient périodiques.

Indications :

- Soit F une primitive de f. Étudier la différence $F(x+T) - F(x)$ en utilisant la périodicité de f.
- Montrer que l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de longueur égale à sa période est constante.
- Si une fonction est périodique sur $\mathbb{R}$, elle est nécessairement bornée. En déduire le comportement de F si la condition n'est pas vérifiée.

Correction.

Idées clés :

- Relation entre périodicité et intégrale sur une période.
- Étude de la croissance d'une primitive d'une fonction de signe constant en moyenne.
- Lien entre bornitude et périodicité.

Analyse préliminaire.

Soit f une fonction continue et T-périodique. Notons F la primitive de f s'annulant en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Toute autre primitive de f est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Comme l'ajout d'une constante ne modifie pas la périodicité, les primitives de f sont périodiques si et seulement si F l'est.

Considérons l'écart entre $F(x+T)$ et $F(x)$:

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemme : Intégrale sur une période.

Montrons que pour toute fonction f continue et T-périodique, l'intégrale sur un intervalle de longueur T est indépendante de la borne inférieure.

Soit $g : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f étant continue, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f(x+T) - f(x)$$

Par T-périodicité de f, on a $g'(x) = 0$. Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Recherche de la condition nécessaire et suffisante.

Notons $I = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après ce qui précède, nous avons la relation fondamentale :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+T) = F(x) + I}$$

Sens direct ($\Longrightarrow$) : Supposons que F soit périodique. Alors F est bornée sur $\mathbb{R}$.

Or, par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, la relation précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F(nT) = F(0) + nI = nI$$

Si $I \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} |F(nT)| = +\infty$, ce qui contredit le fait que F soit bornée.

Par conséquent, on a nécessairement $I = 0$.

Sens réciproque ($\Longleftarrow$) : Supposons que $I = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors la relation $F(x+T) = F(x) + I$ devient $F(x+T) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction F est donc T-périodique, et il en va de même pour toutes les primitives de f.

Conclusion.

Les primitives de f sont périodiques si et seulement si l'intégrale de f sur une période est nulle.

$$\boxed{\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de justifier que si une primitive est périodique, elles le sont toutes (la constante d'intégration ne rompt pas la périodicité).

> **À retenir :**
> Une fonction continue T-périodique f possède des primitives périodiques si et seulement si sa valeur moyenne est nulle :
> $$\mu(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
> Dans ce cas, les primitives sont également T-périodiques.

Moments nuls et points d'annulation

Énoncé

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \int_a^b f(t)t^k \, dt = 0$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur l'intervalle $]a, b[$.

Indications :

- Utiliser la linéarité de l'intégrale pour montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\int_a^b f(t)P(t) \, dt = 0$.
- Raisonner par l'absurde en supposant que f change de signe au plus n fois sur $]a, b[$.
- Construire un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui change de signe exactement aux mêmes points que f afin d'étudier le signe de la fonction $t \mapsto f(t)P(t)$.
- Utiliser le théorème stipulant qu'une fonction continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur un segment est identiquement nulle.

Correction.

Idées clés :

- Orthogonalité de f à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
- Lien entre changement de signe et racines.
- Positivité de l'intégrale.

Résolution.

Étape 1 : Propriété sur les polynômes.

Par linéarité de l'intégrale, la condition de l'énoncé implique que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\int_a^b f(t) \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_a^b f(t)t^k \, dt$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_a^b f(t)P(t) \, dt = 0}$$

Étape 2 : Raisonnement par l'absurde.

Supposons, par l'absurde, que f possède m points de changement de signe dans $]a, b[$, avec $m \leq n$.

Si f est la fonction nulle, elle s'annule une infinité de fois, et le résultat est trivial. On suppose donc f non identiquement nulle.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_m$ les points de $]a, b[$ où f change de signe. Comme f est continue et que son intégrale contre la fonction constante 1 (polynôme de degré 0) est nulle, f doit changer de signe au moins une fois, donc $m \geq 1$.

Considérons le polynôme P défini par :

$$P(X) = \prod_{i=1}^m (X - x_i)$$

Ce polynôme P est de degré m. Or, par hypothèse de l'absurde, $m \leq n$, donc :

$$\boxed{P \in \mathbb{R}_n[X]}$$

Étape 3 : Étude de la fonction produit.

Considérons la fonction $g : t \mapsto f(t)P(t)$. La fonction g est continue sur $[a,b]$.

Par construction, f et P changent de signe exactement aux mêmes points $x_1, \ldots, x_m$ dans $]a,b[$.

Ainsi, le produit $f(t)P(t)$ garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Plus précisément, comme les deux fonctions changent de signe simultanément, leur produit g ne change pas de signe sur $]a,b[$.

Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t)P(t) \geq 0$$

Étape 4 : Conclusion par l'intégrale.

D'après l'étape 1, nous savons que :

$$\int_a^b f(t)P(t)\,dt = 0$$

La fonction $g = fP$ est continue sur $[a,b]$, positive, et son intégrale sur $[a,b]$ est nulle. D'après le cours, on en déduit que g est la fonction nulle :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t)P(t) = 0$$

Or, le polynôme P n'a qu'un nombre fini de racines $(x_1, \ldots, x_m)$. Par conséquent, f doit être nulle sur $[a,b] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Par continuité de f, on en déduit que f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Cela contredit le fait que f change de signe en m points (ou simplement que f est non nulle).

On en conclut que $m \geq n+1$. Comme tout point de changement de signe est un point d'annulation :

$$\boxed{f \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois sur }]a,b[}$$

> **Piège :**
> Confondre "points d'annulation" et "points de changement de signe". Une fonction peut s'annuler sans changer de signe (ex : $x \mapsto x^2$). C'est pour cela qu'on construit P spécifiquement sur les points de *changement de signe* pour forcer la positivité de fP.

> **À retenir :**
> Pour montrer qu'une fonction s'annule souvent, on utilise fréquemment l'orthogonalité aux polynômes et le fait qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

Primitives de fonctions exponentielles-sinusoïdes

Énoncé

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$$

Indications :
- On pourra considérer la fonction à valeurs complexes $x \mapsto e^{(a+ib)x}$.
- Utiliser la propriété selon laquelle la primitive de la partie réelle est la partie réelle de la primitive.
- Distinguer le cas où a et b sont simultanément nuls.

Correction.

Idées clés :
- Passage par les complexes (méthode de la fonction auxiliaire).
- Multiplication par la quantité conjuguée du dénominateur.
- Linéarité de l'intégration et de l'opérateur $\mathrm{Re}(\cdot)$.

Résolution.

Soit $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$. Nous cherchons l'ensemble des fonctions F telles que $F'(x) = f(x)$.

Premier cas : $(a, b) = (0, 0)$**.**

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^0 \cos(0) = 1$. Les primitives de f sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{F(x) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Deuxième cas : $(a, b) \neq (0, 0)$**.**

Considérons la fonction auxiliaire h à valeurs complexes définie par :

$$h(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx))$$

On remarque que $f = \mathrm{Re}(h)$. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, le nombre complexe $a + ib$ est non nul. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{e^{(a+ib)x}}{a + ib}$$

Pour extraire la partie réelle de H, multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur $a - ib$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) \end{aligned}$$

Développons l'expression entre parenthèses :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left[a \cos(bx) + ia \sin(bx) - ib \cos(bx) - i^2 b \sin(bx) \right] \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left[(a \cos(bx) + b \sin(bx)) + i(a \sin(bx) - b \cos(bx)) \right] \end{aligned}$$

Les primitives de f sont données par $\mathrm{Re}(H(x)) + C$. On en déduit :

$$\boxed{F(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à oublier la constante d'intégration C ou à se tromper dans le signe lors du développement du produit $(a - ib)(\cos(bx) + i\sin(bx))$, notamment avec le terme $i^2 = -1$.

À retenir :
Pour calculer les primitives de $e^{ax}\cos(bx)$ ou $e^{ax}\sin(bx)$, le passage par l'exponentielle complexe $e^{(a+ib)x}$ est systématiquement plus rapide et moins risqué qu'une double intégration par parties.

Primitives de la fonction arctangente

Énoncé

Déterminer les primitives de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$.

Indications :
- Procéder par intégration par parties en considérant le produit $1 \times \arctan(x)$.
- Identifier une forme $\frac{u'}{u}$ pour le calcul de l'intégrale résiduelle.

Correction.

Idées clés :
- Intégration par parties (IPP).
- Reconnaissance de dérivées de fonctions composées (logarithme).

Résolution.

La fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. À ce titre, elle admet des primitives sur cet intervalle.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous cherchons à calculer l'intégrale indéfinie :

$$I(x) = \int \arctan(x)\, dx$$

Pour ce faire, nous effectuons une intégration par parties en posant :
- $u(x) = \arctan(x)$, de sorte que $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $v'(x) = 1$, en choisissant pour primitive $v(x) = x$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

En appliquant cette formule, on obtient :

$$\begin{aligned} I(x) &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'intégrande une forme $\frac{w'(x)}{w(x)}$ où $w(x) = 1 + x^2$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$, une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

On a donc :

$$\boxed{\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1}$$

Conclusion.

En rassemblant les termes et en introduisant la constante d'intégration $C \in \mathbb{R}$, nous pouvons conclure sur l'expression générale des primitives.

L'ensemble des primitives de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$ est donné par :

$$\boxed{x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Piège :
Une erreur classique consiste à oublier le facteur $\frac{1}{2}$ lors de la primitivation de $\frac{x}{1+x^2}$ ou à oublier la constante C alors que l'énoncé demande "les" primitives.

À retenir :
La technique d'intégration par parties avec $v'(x) = 1$ est l'outil standard pour intégrer les fonctions réciproques (comme ln, arctan ou arcsin) dont on ne connaît pas de primitive immédiate mais dont la dérivée est une fraction rationnelle.

Primitive d'une fraction rationnelle

Énoncé

Calculer, pour tout $x > -1$, l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$$

Indications :
- Commencer par décomposer la fraction rationnelle $f(t) = \frac{1}{1+t^3}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
- Se souvenir de la factorisation usuelle $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$.
- Pour la partie quadratique, faire apparaître la forme canonique du dénominateur pour se ramener à une primitive en arctan.

Correction.

Idées clés :
- Décomposition en éléments simples
- Intégration des pôles simples (logarithmes)
- Mise sous forme canonique et intégration en arctan

1. Décomposition en éléments simples.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est continue sur $]-1, +\infty[$, ce qui assure l'existence de l'intégrale pour tout $x > -1$.

On remarque que -1 est une racine évidente du dénominateur, ce qui donne la factorisation :

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$$

Le discriminant du trinôme $t^2 - t + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, il est donc irréductible sur $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

En multipliant par $(t+1)$ et en évaluant en $t = -1$, on trouve $a = \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{1}{3}$.

En évaluant en $t = 0$, on obtient $1 = a + c$, d'où $c = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Enfin, en multipliant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $0 = a + b$, d'où $b = -\frac{1}{3}$.

On en déduit la décomposition :

$$\boxed{\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)}$$

2. Intégration de la fraction.

Pour intégrer le second terme, on fait apparaître la dérivée du dénominateur $2t - 1$ au numérateur :

$$\frac{t-2}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3/2}{t^2-t+1}$$

L'intégrale devient alors :

$$I(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1}$$

Les deux premières intégrales se calculent immédiatement :

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \ln(1+x)$$
$$\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt = \Big[\ln(t^2-t+1)\Big]_0^x = \ln(x^2-x+1)$$

Pour la dernière intégrale, on utilise la forme canonique :

$$t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} &= \frac{4}{3}\int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\end{aligned}$$

Sachant que $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$, on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

3. Conclusion.

En regroupant tous les termes :

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

On obtient finalement le résultat :

$$\boxed{I(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier la constante d'intégration provenant de la borne inférieure (l'évaluation en $t=0$). En particulier, $\arctan(-1/\sqrt{3})$ n'est pas nul.

> **À retenir :**
> Pour intégrer $\frac{1}{at^2+bt+c}$ avec $\Delta < 0$, on utilise toujours la mise sous forme canonique pour se ramener à une forme $\frac{1}{u^2+1}$ dont une primitive est $\arctan(u)$.

Intégrale d'une fraction rationnelle trigonométrique

Énoncé

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$$

Indications :

- Vérifier que la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$.
- Utiliser le changement de variable universel $u = \tan(t/2)$ sur un intervalle bien choisi.
- Pour x quelconque, utiliser la relation de Chasles et la périodicité de la fonction pour généraliser le résultat, ou exprimer la primitive à l'aide de la fonction partie entière.

Correction.

Idées clés :

- Changement de variable en $u = \tan(t/2)$.
- Expression de $\cos t$ en fonction de u.
- Étude de la continuité de la primitive sur $\mathbb{R}$.

1. Analyse et domaine de définition

Soit $f : t \mapsto \frac{1}{2+\cos t}$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t \geq -1$, donc $2 + \cos t \geq 1 > 0$.

L'intégrale $I(x)$ définit donc l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$

Supposons dans un premier temps que $x \in]-\pi, \pi[$. On effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$.

La fonction $t \mapsto \tan(t/2)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, x]$ (ou $[x, 0[$) vers son image. On a alors :

$$dt = \frac{2\,du}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

En remplaçant dans l'expression de $I(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} \\ &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1+u^2}{2(1+u^2)+1-u^2} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} \\ &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2\,du}{3+u^2} \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on reconnaît une forme en arctan. On écrit :

$$\frac{2}{3+u^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Par intégration, il vient :

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan(x/2)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\boxed{I(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right)}$$

3. Extension à $x = \pi$ et généralisation

Par continuité de I en π, on a $I(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} I(x)$. Or $\lim_{x\to\pi^-} \tan(x/2) = +\infty$, donc :

$$I(\pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Par un raisonnement similaire, on trouve $I(-\pi) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on peut utiliser la périodicité de f. La fonction f est 2π-périodique. Calculons l'intégrale sur une période :

$$\boxed{I(2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = I(\pi) - I(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-\pi, \pi[$, en posant $x = y + 2k\pi$ avec $y \in]-\pi, \pi[$:

$$I(x) = I(y + 2k\pi) = I(y) + k \cdot I(2\pi)$$

En utilisant la partie entière, on peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\boxed{I(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor}$$

Piège :
Le piège classique consiste à croire que la formule $I(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right)$ est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle n'est définie que sur $]-\pi, \pi[$ (modulo 2π) et ne définit pas une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à cause des sauts de la fonction tan et de la fonction $\arctan \circ \tan$.

À retenir :
Lors du calcul d'une primitive sur un intervalle J, si le changement de variable $u = \varphi(t)$ n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur J (ici à cause des pôles de tan), il faut segmenter l'intervalle et recoller les constantes par continuité.

Intégrales de Wallis

Énoncé

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{n+2} en fonction de W_n.
2. Calculer W_n en fonction de n (on discutera selon la parité de n).
3. Étudier la monotonie de la suite $(W_n)_{n\geq 0}$. En déduire, en utilisant la question 1, que $W_{n+1} \sim W_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le produit $(n+1)W_nW_{n+1}$.
5. Donner un équivalent de W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications :

- Pour la question 1, utiliser une intégration par parties en isolant un facteur $\cos(t)$.
- Pour la question 2, on pourra utiliser le symbole produit $\prod$ ou raisonner par récurrence sur les termes pairs et impairs.
- Pour la question 3, comparer les fonctions sous l'intégrale. Pour l'équivalent, utiliser l'encadrement $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
- Pour la question 4, montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ est constante.

Correction.

Idées clés :

- Intégration par parties (IPP) pour la relation de récurrence.
- Utilisation de la décroissance pour obtenir un équivalent par encadrement.
- Conservation d'une quantité pour calculer un produit.

1. Relation de récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cdot\cos^{n+1}(t)\,dt$.

Effectuons une intégration par parties en posant :

— $u(t) = \cos^{n+1}(t)$, d'où $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$

— $v'(t) = \cos(t)$, d'où $v(t) = \sin(t)$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$. On obtient :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\,dt \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\,dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

D'où $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. On en déduit :

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

2. Calcul explicite.

Calculons les premiers termes : $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,dt = 1$.

Cas $n = 2p$ (pair) : En itérant la relation de récurrence :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} W_0$$

En multipliant par les termes pairs manquants au numérateur et au dénominateur :

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

Cas $n = 2p+1$ (impair) : De même :

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} W_1$$

Soit, après simplification des produits :

$$\boxed{W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

3. Monotonie et équivalent de W_{n+1}/W_n.

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \cos(t) \leq 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que la suite (W_n) est décroissante. Comme l'intégrande est continu, positif et non identiquement nul, $W_n > 0$.

Par décroissance, on a $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$:

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

Or, d'après la question 1, $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$, d'où :

$$\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$$

4. Calcul du produit $(n+1)W_nW_{n+1}$.

Soit $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Étudions le rapport u_n/u_{n-1} ou calculons u_n directement.

D'après la question 1, $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$. Ainsi :

$$u_n = (n+1)W_{n+1}W_n = nW_{n-1}W_n = u_{n-1}$$

La suite (u_n) est donc constante. Sa valeur est donnée par :

$$u_0 = (0+1)W_0W_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

On conclut :

$$\boxed{(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$$

5. Équivalent final.

On sait que $W_{n+1} \sim W_n$. Ainsi :

$$(n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$$

D'après le résultat précédent :

$$nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \implies W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

Puisque $W_n > 0$, on obtient par passage à la racine carrée :

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier le facteur $\frac{\pi}{2}$ dans le cas pair, il provient du terme initial W_0. De même, pour l'équivalent, bien vérifier que $n+1 \sim n$.

> **À retenir :**
> La méthode consistant à trouver une quantité conservée (ici le produit $(n+1)W_nW_{n+1}$) est un classique pour obtenir des équivalents précis de suites définies par des intégrales ou des relations de récurrence.

Limites de suites d'intégrales

Énoncé

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(I_n)_{n\geq 0}$ et $(J_n)_{n\geq 0}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$
2. $J_n = n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$

Indications :

- Pour I_n, remarquer que pour $t \in [0,1[$, $t^n \to 0$. Utiliser la continuité de f en 0 et découper l'intervalle d'intégration pour isoler le problème en 1.
- Pour J_n, effectuer un changement de variable $u = t^n$ ou bien comparer J_n à l'intégrale $\int_0^1 (n+1)t^n f(t)dt$ en utilisant la continuité de f en 1.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de Heine (continuité uniforme) ou simple continuité et découpage d'intervalle (ϵ-δ).
- Changement de variable pour simplifier la dépendance en n.
- Utilisation du fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

1. Étude de la suite (I_n).

Soit $\epsilon > 0$. La fonction f est continue en 0, donc il existe $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [0,\delta], \quad |f(x) - f(0)| \leq \epsilon$$

D'autre part, f est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée. Notons $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On décompose l'intégrale en utilisant la relation de Chasles pour tout $a \in]0,1[$:

$$I_n - f(0) = \int_0^a (f(t^n) - f(0))dt + \int_a^1 (f(t^n) - f(0))dt$$

Pour le premier bloc, on choisit a tel que t^n reste petit. Pour $t \in [0,a]$, on a $0 \leq t^n \leq a^n$. Comme $a < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a^n \leq \delta$.

Alors, pour $n \geq N$ et $t \in [0,a]$, on a $|f(t^n) - f(0)| \leq \epsilon$. On en déduit :

$$\left|\int_0^a (f(t^n) - f(0))dt\right| \leq \int_0^a \epsilon\, dt \leq a\epsilon \leq \epsilon$$

Pour le second bloc, on utilise la borne M :

$$\left|\int_a^1 (f(t^n) - f(0))dt\right| \leq \int_a^1 (|f(t^n)| + |f(0)|)dt \leq 2M(1-a)$$

En choisissant a suffisamment proche de 1 (par exemple $1 - a \leq \epsilon$), puis n suffisamment grand, on montre que $|I_n - f(0)|$ peut être rendu arbitrairement petit.

On conclut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)}$$

2. Étude de la suite (J_n).

Effectuons le changement de variable $u = t^n$, ce qui donne $t = u^{1/n}$ et $dt = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$. L'intégrale devient :

$$J_n = n\int_0^1 u \cdot f(u^{1/n}) \cdot \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du = \int_0^1 f(u^{1/n})u^{1/n}du$$

Posons $g_n(u) = f(u^{1/n})u^{1/n}$. Pour tout $u \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$, donc par continuité de f en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = f(1)\cdot 1 = f(1)$$

Appliquons le même raisonnement de découpage que pour la question précédente à la suite $K_n = \int_0^1 g_n(u)du$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en 1 et de la fonction identité, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in [\alpha, 1]$, $|f(x)x - f(1)| \leq \epsilon$.

Pour $u \in [\alpha^n, 1]$, on a $u^{1/n} \in [\alpha, 1]$, donc $|g_n(u) - f(1)| \leq \epsilon$.

$$K_n - f(1) = \int_0^{\alpha^n} (g_n(u) - f(1))du + \int_{\alpha^n}^1 (g_n(u) - f(1))du$$

En majorant le premier terme par $2M\alpha^n$ (qui tend vers 0) et le second par $\epsilon(1-\alpha^n) \leq \epsilon$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = f(1)}$$

> **Piège :**
> Pour J_n, une erreur classique est de tenter une intégration par parties sans que f ne soit supposée de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est seulement continue, l'IPP n'est pas directement licite avec f'.

> **À retenir :**
> La méthode de "découpage d'intégrale" (en ϵ et δ) est l'outil fondamental en MPSI pour pallier l'absence du théorème de convergence dominée. Elle consiste à séparer l'intervalle en une zone où la convergence est uniforme et une zone de largeur arbitrairement petite.

Convergence de la norme L^p vers le maximum

Énoncé

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On note M le maximum de f sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = M$$

Indications :

- Commencer par établir une majoration simple de l'intégrale en utilisant le fait que $f(t)\leq M$ pour tout $t\in[a,b]$.
- Pour la minoration, utiliser la continuité de f : pour tout $\varepsilon>0$, il existe un intervalle de longueur non nulle sur lequel f est "proche" de M.
- Conclure en utilisant le théorème des gendarmes ou des inégalités sur les limites supérieures et inférieures.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation de la borne supérieure atteinte (théorème des bornes atteintes).
- Définition locale de la continuité pour minorer l'intégrale.
- Croissance de l'intégrale et passage à la limite avec des puissances $1/p$.

1. Majoration de la limite.

Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, le théorème des bornes atteintes assure que f est bornée et atteint son maximum. On pose $M=\max_{t\in[a,b]} f(t)$.

Par définition du maximum, pour tout $t\in[a,b]$, $0<f(t)\leq M$. Par croissance de la fonction puissance $x\mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ (pour $p>0$) et par croissance de l'intégrale, nous avons :

$$\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b M^p\,\mathrm{d}t = (b-a)M^p$$

En élevant à la puissance $1/p$, on obtient :

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq M(b-a)^{1/p}}$$

Puisque $b-a>0$, on sait que $(b-a)^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. On en déduit :

$$\limsup_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq M$$

2. Minoration de la limite.

Soit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<M$. Par définition de M, il existe $t_0\in[a,b]$ tel que $f(t_0)=M$.

La fonction f étant continue en t_0, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ contenant t_0, de longueur $\delta=\beta-\alpha>0$, tel que pour tout $t\in[\alpha,\beta]$:

$$f(t)\geq M-\varepsilon$$

En utilisant à nouveau la croissance de l'intégrale, on peut minorer l'intégrale sur $[a, b]$ par l'intégrale sur $[\alpha, \beta]$:

$$\int_a^b f(t)^p \, \mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta f(t)^p \, \mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^p \, \mathrm{d}t = \delta(M-\varepsilon)^p$$

En élevant à la puissance $1/p$, il vient :

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geq (M-\varepsilon)\delta^{1/p}}$$

À ε fixé, lorsque p tend vers $+\infty$, $\delta^{1/p}$ tend vers 1. On a donc :

$$\liminf_{p\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geq M - \varepsilon$$

3. Conclusion.

L'inégalité précédente étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit en faisant tendre ε vers 0 :

$$\liminf_{p\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geq M$$

En combinant les deux points précédents, par le théorème des gendarmes, nous concluons :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p} = M}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à vouloir sortir la limite de l'intégrale. Rappelons que $\lim \int \neq \int \lim$ sans hypothèses fortes (convergence uniforme ou convergence dominée), et ici l'exposant p empêche toute interversion directe simple.

> **À retenir :**
> Cette méthode de "minoration sur un petit intervalle" est une technique fondamentale en analyse pour traiter les limites d'intégrales où la contribution principale provient du voisinage d'un point (ici, le point où le maximum est atteint).

Le lemme de Riemann-Lebesgue

Énoncé

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Démontrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t}\, dt = 0$$

Indications :
- Traiter d'abord le cas où f est une fonction constante sur un intervalle.
- En déduire le résultat pour les fonctions en escalier par linéarité de l'intégrale.
- Utiliser le fait que toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée uniformément par une fonction en escalier.
- Conclure en découpant l'intégrale et en utilisant l'inégalité triangulaire.

Correction.

Idées clés :
- Densité (ou approximation uniforme) des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux.
- Majoration fondamentale de l'intégrale (inégalité triangulaire).
- Calcul explicite pour les fonctions constantes.

Étape 1 : Cas d'une fonction constante.

Soit f une fonction constante sur $[a, b]$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in [a, b], f(t) = c$.

Si $\lambda > 0$, on peut calculer explicitement l'intégrale par recherche de primitive :

$$\begin{aligned} \int_a^b c e^{i\lambda t}\, dt &= c \left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b \\ &= c \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \end{aligned}$$

En passant au module et en utilisant l'inégalité triangulaire $|e^{ix} - e^{iy}| \leq 2$:

$$\left| \int_a^b c e^{i\lambda t}\, dt \right| \leq \frac{2|c|}{\lambda}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b c e^{i\lambda t}\, dt = 0}$$

Étape 2 : Cas d'une fonction en escalier.

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$. Par définition, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

La valeur de f aux points de la subdivision n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. On note c_k la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k e^{i\lambda t}\, dt$$

D'après l'étape 1, chaque terme de cette somme finie tend vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$.

Par somme finie de limites nulles :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0}$$

Étape 3 : Cas général (fonction continue par morceaux).

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le cours, il existe une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ telle que :

$$\|f-\varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Pour tout $\lambda > 0$, on décompose l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \int_a^b (f(t)-\varphi(t))e^{i\lambda t}\,dt + \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\cdot|e^{i\lambda t}|\,dt + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|$$

Comme $|e^{i\lambda t}| = 1$, on majore le premier terme :

$$\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\,dt \leq (b-a)\|f-\varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque φ est en escalier, il existe d'après l'étape 2 un réel λ_0 tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a bien démontré que :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0}$$

> **Piège :**
> Vouloir intégrer par parties directement. Cela n'est possible que si f est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour une fonction seulement continue par morceaux, l'approximation par les fonctions en escalier est la méthode la plus rigoureuse au programme de MPSI.

> **À retenir :**
> La stratégie "escalier $\to$ limite" est un classique pour démontrer des propriétés sur les intégrales. Elle repose sur le fait que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans celui des fonctions continues par morceaux pour la norme de la convergence uniforme.

Équation $y' + y = g$ et bornitude

Énoncé

1. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + y = g$$

On donnera une expression intégrale des solutions.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $f' + f$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Indications :

- Pour la question 1, utiliser la méthode du facteur intégrant en multipliant l'équation par e^x, ou bien la méthode de variation de la constante.
- Pour la question 2, utiliser l'expression intégrale de f obtenue à la question précédente en posant $g = f' + f$.
- Appliquer l'inégalité triangulaire pour les intégrales et majorer la fonction g par son supremum.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation du facteur intégrant $e^{A(x)}$ pour les équations d'ordre 1.
- Lien entre une fonction et sa dérivée via une structure d'équation différentielle.
- Majoration uniforme d'une intégrale à paramètre.

Résolution.

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E) : y' + y = g$. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation avec second membre, on utilise la méthode du facteur intégrant. En multipliant l'équation par e^x, on obtient :

$$e^x y'(x) + e^x y(x) = e^x g(x)$$

On reconnaît au membre de gauche la dérivée du produit $y(x)e^x$. L'équation est donc équivalente à :

$$(y(x)e^x)' = g(x)e^x$$

Par intégration entre 0 et x (où $x \in \mathbb{R}^+$), il vient :

$$y(x)e^x - y(0) = \int_0^x g(t)e^t \, dt$$

En isolant $y(x)$, nous obtenons la forme générale des solutions :

$$\boxed{y(x) = y(0)e^{-x} + \int_0^x g(t)e^{t-x} \, dt}$$

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + f$ soit bornée. Posons $g = f' + f$. Par hypothèse, il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |g(t)| \leq M$$

D'après la question précédente, f est solution de l'équation $y' + y = g$. Elle s'écrit donc :

$$f(x) = f(0)e^{-x} + \int_0^x g(t)e^{t-x}\,dt$$

Appliquons l'inégalité triangulaire à cette expression pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$|f(x)| \leq |f(0)|e^{-x} + \left|\int_0^x g(t)e^{t-x}\,dt\right|$$

Comme $x \geq 0$, on sait que $e^{-x} \leq 1$. De plus, en utilisant la majoration de $|g|$ par M :

$$\left|\int_0^x g(t)e^{t-x}\,dt\right| \leq \int_0^x |g(t)|e^{t-x}\,dt \leq M\int_0^x e^{t-x}\,dt$$

Calculons l'intégrale restante pour x fixé :

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{t-x}\,dt &= e^{-x}\int_0^x e^t\,dt \\ &= e^{-x}\left(e^x - 1\right) \\ &= 1 - e^{-x}\end{aligned}$$

Comme $1 - e^{-x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, on en déduit :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + M(1 - e^{-x}) \leq |f(0)| + M$$

Cette majoration étant indépendante de x, nous avons prouvé que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x)| \leq |f(0)| + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f'(t) + f(t)|}$$

Piège :
Une erreur classique consiste à oublier la constante d'intégration (ou la valeur initiale $y(0)$) lors de la résolution de l'équation. Bien que e^{-x} soit bornée sur $\mathbb{R}^+$, son omission rendrait le raisonnement incomplet.

À retenir :
Pour une équation $y' + ay = g$ avec $a > 0$ constante, si le second membre g est borné, alors toutes les solutions sont bornées au voisinage de $+\infty$. C'est une propriété de stabilité de l'équation.

Équation différentielle linéaire du second ordre

Énoncé

Trouver les fonctions f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - 10f'(x) + 29f(x) = 0$$

Indications :
- Identifier le type de l'équation différentielle (linéaire, second ordre, coefficients constants, homogène).
- Étudier l'équation caractéristique associée.
- Utiliser la forme générale des solutions réelles lorsque le discriminant est strictement négatif.

Correction.

Idées clés :
- Résolution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
- Structure de l'ensemble des solutions (espace vectoriel de dimension 2).
- Cas du discriminant complexe : passage de l'exponentielle complexe aux fonctions trigonométriques.

Résolution.

L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre (homogène).

On considère l'équation caractéristique associée de variable $r \in \mathbb{C}$:

$$r^2 - 10r + 29 = 0$$

Calculons le discriminant de ce trinôme :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-10)^2 - 4 \times 1 \times 29 \\ &= 100 - 116 \\ &= -16\end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement négatif, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{10 - i\sqrt{16}}{2} = 5 - 2i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{10 + i\sqrt{16}}{2} = 5 + 2i$$

On en déduit que les racines sont de la forme $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = 5$ et $\beta = 2$.

D'après le cours sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, les solutions réelles de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right)$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est constitué des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{5x} \left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Piège :
Une erreur classique consiste à oublier le facteur exponentiel $e^{\alpha x}$ ou à se tromper dans le signe de la partie

réelle lors de la résolution de l'équation caractéristique. Veillez également à préciser que les constantes (λ, μ) parcourent $\mathbb{R}^2$ pour décrire l'ensemble de toutes les solutions.

À retenir :
Si l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (avec $\beta \neq 0$), les solutions réelles sont les fonctions :

$$x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

L'ensemble de ces solutions forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Équation différentielle à argument décalé

Énoncé

Soit λ un nombre réel. Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x)$$

Indications :

- Commencer par montrer que f est nécessairement deux fois dérivable en exploitant la relation de l'énoncé.
- Dériver la relation pour obtenir une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
- Résoudre cette équation, puis injecter la forme générale obtenue dans l'équation initiale pour restreindre les constantes d'intégration.

Correction.

Idées clés :

- Analyse-synthèse.
- Régularité induite par l'équation fonctionnelle.
- Résolution d'une équation différentielle du second ordre $y'' + \omega^2 y = 0$.

Analyse.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $f'(x) = f(\lambda - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \lambda - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $x \mapsto f(\lambda - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, autrement dit f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation initiale, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(\lambda - x)$$

En appliquant la relation de l'énoncé au point $(\lambda - x)$, on a $f'(\lambda - x) = f(\lambda - (\lambda - x)) = f(x)$. On en déduit que f est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = 0}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$, dont les racines sont i et $-i$. Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Déterminons maintenant les conditions sur A et B pour que f soit effectivement solution. On a d'une part :

$$f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$$

Et d'autre part, en utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned} f(\lambda - x) &= A\cos(\lambda - x) + B\sin(\lambda - x) \\ &= A(\cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x) + B(\sin\lambda\cos x - \cos\lambda\sin x) \\ &= (A\cos\lambda + B\sin\lambda)\cos x + (A\sin\lambda - B\cos\lambda)\sin x \end{aligned}$$

Par identification (les fonctions cos et sin étant linéairement indépendantes), la relation $f'(x) = f(\lambda - x)$ impose le système :

$$\begin{cases} B = A\cos\lambda + B\sin\lambda \\ -A = A\sin\lambda - B\cos\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} A\cos\lambda + B(\sin\lambda - 1) = 0 \\ A(\sin\lambda + 1) - B\cos\lambda = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $D = -\cos^2\lambda - (\sin^2\lambda - 1) = -\cos^2\lambda - \sin^2\lambda + 1 = 0$. Les deux équations sont donc proportionnelles. La première donne la relation :

$$B(1 - \sin\lambda) = A\cos\lambda$$

Pour exprimer les solutions de manière plus élégante, remarquons que :

— $1 - \sin\lambda = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$

— $\cos\lambda = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$

Si $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}) \neq 0$, la condition devient $B\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}) = A\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2})$.

On peut alors poser $A = C\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$ et $B = C\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.

La fonction f s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= C\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)\sin x\right) \\ &= C\sin\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}$$

Synthèse.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto C\sin\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$. La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = C\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$.

D'autre part :

$$f(\lambda - x) = C\sin\left(\lambda - x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) = C\sin\left(-x + \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)$$

Or, d'après la formule $\cos(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)$$

La relation est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion.

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C\sin\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right), \quad C \in \mathbb{R}}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de vérifier si la fonction trouvée est bien dérivable et si elle satisfait l'équation initiale (synthèse), car le passage à la dérivée seconde peut introduire des solutions parasites (même si ce n'est pas le cas ici).

À retenir :
Lorsqu'une équation fonctionnelle lie f' et $f \circ \sigma$ (où σ est une involution comme $x \mapsto \lambda - x$), la dérivation permet souvent de se ramener à une équation différentielle d'ordre 2 classique.

9

Polynômes et fractions rationnelles

Factorisation de $X^{2n}+1$ sur $\mathbb{R}$

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles du polynôme $P = X^{2n}+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Indications :
- Commencer par déterminer les racines du polynôme dans $\mathbb{C}$.
- Utiliser la forme exponentielle pour exprimer les racines comme des racines $2n$-ièmes de -1.
- Regrouper les racines complexes conjuguées pour obtenir des facteurs réels de degré 2.
- Vérifier que les facteurs de degré 2 obtenus sont bien irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en calculant leur discriminant.

Correction.

Idées clés :
- Passage par $\mathbb{C}[X]$ pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$.
- Regroupement des racines conjuguées : $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$.
- Un polynôme de degré 2 est irréductible sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est strictement négatif.

1. Recherche des racines complexes.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} z^{2n}+1=0 &\iff z^{2n}=-1 \\ &\iff z^{2n}=e^{i\pi} \end{aligned}$$

Les racines sont donc les racines $2n$-ièmes de -1. Elles sont de la forme :

$$\boxed{z_k = \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right) = \exp\left(i\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k \in \{0,1,\dots,2n-1\}}$$

Le polynôme P est de degré $2n$ et nous avons trouvé $2n$ racines distinctes. Comme le coefficient dominant de P est 1, la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(X - \exp\left(i\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$$

2. Regroupement des conjugués.

On remarque que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$:

$$\overline{z_k} = \exp\left(-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Or, on peut transformer cet argument par modulo 2π :

$$-\frac{(2k+1)\pi}{2n}+2\pi = \frac{4n\pi-(2k+1)\pi}{2n} = \frac{(2(2n-k-1)+1)\pi}{2n}$$

En posant $k' = 2n-1-k$, on constate que $\overline{z_k} = z_{k'}$.

Lorsque k parcourt $\{0,\dots,n-1\}$, alors k' parcourt $\{n,\dots,2n-1\}$.

Ainsi, les racines complexes de P sont deux à deux conjuguées (aucune n'est réelle car leur argument n'est jamais un multiple de π).

On regroupe les facteurs correspondant à z_k et $\overline{z_k}$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$(X - z_k)(X - \overline{z_k}) = X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + z_k\overline{z_k} = X^2 - 2\text{Re}(z_k)X + |z_k|^2$$

Comme $|z_k| = 1$ et $\text{Re}(z_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, chaque facteur réel est :

$$Q_k = X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) X + 1$$

3. Conclusion sur la factorisation.

Le polynôme P se décompose donc ainsi dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) X + 1\right)}$$

Chaque facteur Q_k est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta_k = (2\cos\theta_k)^2 - 4 = 4(\cos^2\theta_k - 1) = -4\sin^2\theta_k$$

Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'argument $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ vérifie $0 < \theta_k < \pi$, donc $\sin\theta_k > 0$.

Le discriminant Δ_k est donc strictement négatif, ce qui assure que les facteurs Q_k sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

> **Piège :**
> Une erreur fréquente consiste à oublier de diviser par deux le nombre de termes lors du passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. Il y a $2n$ racines complexes, qui donnent n facteurs réels de degré 2.

> **À retenir :**
> Pour factoriser un polynôme réel sans racines réelles, on détermine ses racines complexes, on les groupe par paires de racines conjuguées $(z, \bar{z})$, et on utilise l'identité $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2$.

Somme des carrés des racines

Énoncé

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, avec $a_n \neq 0$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P comptées avec multiplicité.

1. Calculer la somme $S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ en fonction des coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$.
2. On suppose dans cette question que $a_0 \neq 0$. Calculer la somme $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$ en fonction des coefficients de P.

Indications :

- Pour la première question, utiliser les relations entre coefficients et racines (formules de Viète) pour exprimer les fonctions symétriques élémentaires σ_1 et σ_2.
- Exploiter l'identité remarquable $(\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$.
- Pour la seconde question, on pourra considérer le polynôme dont les racines sont les inverses des racines de P (polynôme réciproque).

Correction.

Idées clés :

- Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).
- Utilisation des fonctions symétriques élémentaires σ_k.
- Changement de variable $Y = 1/X$ pour l'étude des inverses des racines.

Résolution.

1. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme P est scindé. On peut l'écrire sous sa forme factorisée :
$$P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

   D'après les relations entre coefficients et racines, on définit les fonctions symétriques élémentaires σ_1 et σ_2 :
$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

   Et pour la deuxième fonction symétrique :
$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

   Nous utilisons l'identité polynomiale classique sur les sommes de carrés :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

   Ce qui se réécrit :
$$\sigma_1^2 = S + 2\sigma_2$$

   En isolant S, on obtient :
$$S = \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

Finalement, après réduction au même dénominateur :

$$\boxed{S = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{a_n^2}}$$

2. Supposons $a_0 \neq 0$. Alors $P(0) = a_0 \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de P. Les complexes $y_k = \frac{1}{x_k}$ sont bien définis.

   Considérons le polynôme Q défini par :

   $$Q(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$$

   En développant, on obtient :

   $$Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + a_n$$

   Les racines de Q sont exactement les $y_k = \frac{1}{x_k}$. En effet :

   $$Q(y_k) = \left(\frac{1}{x_k}\right)^n P(x_k) = 0$$

   La somme $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$ est donc la somme des carrés des racines du polynôme Q.

   On applique la formule établie à la question précédente en remplaçant les coefficients de P par ceux de Q. Ici, pour le polynôme Q, le coefficient dominant est $b_n = a_0$, le coefficient d'indice $n-1$ est $b_{n-1} = a_1$ et celui d'indice $n-2$ est $b_{n-2} = a_2$.

   Par analogie directe avec le résultat de la question 1 :

   $$\boxed{T = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2}}$$

Piège :
Attention à ne pas oublier le facteur a_n ou a_0 au dénominateur. Dans les relations de Viète, les σ_k font toujours intervenir le coefficient dominant du polynôme considéré.

À retenir :
Pour tout polynôme scindé $P = \sum a_k X^k$, la somme des racines est $-a_{n-1}/a_n$ et la somme des produits deux à deux est a_{n-2}/a_n. Pour manipuler les inverses des racines, l'étude du polynôme "retourné" $X^n P(1/X)$ est souvent la méthode la plus efficace.

Divisibilité de polynômes et racines multiples

Énoncé

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme $(X^2+X+1)^2$ divise le polynôme $X^{2n}+X^n+1$.

Indications :
- Rappeler les racines complexes du polynôme $X^2 + X + 1$.
- Utiliser la caractérisation de la divisibilité par un polynôme possédant des racines multiples : $Q^2|P$ si et seulement si les racines de Q sont des racines de P d'ordre au moins 2.
- Étudier les valeurs possibles de j^n selon le reste de la division euclidienne de n par 3.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre divisibilité et multiplicité des racines.
- Utilisation de l'évaluation en $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- Dérivation formelle des polynômes.

Analyse des racines du diviseur.

Soit $Q = (X^2 + X + 1)^2$. Les racines de $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \bar{j} = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

Puisque $X^2 + X + 1$ est à racines simples ($j \neq j^2$), le polynôme $Q = (X^2 + X + 1)^2$ admet j et j^2 pour racines doubles.

Soit $P_n = X^{2n} + X^n + 1$. Par propriété du cours, Q divise P_n dans $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$) si et seulement si j est racine de P_n de multiplicité au moins 2. Comme P_n est à coefficients réels, si j est racine double, alors $\bar{j}$ le sera également.

La condition de divisibilité est donc équivalente au système :

$$\begin{cases} P_n(j) = 0 \\ P_n'(j) = 0 \end{cases}$$

Étude de la première condition : $P_n(j) = 0$.

On calcule la valeur de $P_n(j)$:

$$P_n(j) = j^{2n} + j^n + 1 = (j^n)^2 + j^n + 1$$

Discutons selon la valeur de $n \pmod 3$:

— Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $j^n = 1$, d'où $P_n(j) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0$.
— Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $j^n = j$, d'où $P_n(j) = j^2 + j + 1 = 0$.
— Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $j^n = j^2$, d'où $P_n(j) = j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$.

Ainsi, $P_n(j) = 0$ si et seulement si n n'est pas un multiple de 3. On en déduit une première condition nécessaire :

$$\boxed{n \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 3}$$

Étude de la seconde condition : $P_n'(j) = 0$.

Supposons que n satisfait la condition précédente. On calcule le polynôme dérivé :

$$P_n' = 2nX^{2n-1} + nX^{n-1}$$

En évaluant en j, on obtient :

$$P_n'(j) = 2nj^{2n-1} + nj^{n-1} = nj^{n-1}(2j^n + 1)$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \neq 0$, la condition $P_n'(j) = 0$ équivaut à :

$$2j^n + 1 = 0 \iff j^n = -\frac{1}{2}$$

Or, les valeurs possibles de j^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont $\{1, j, j^2\}$. Examinons ces valeurs :
- $1 \neq -1/2$.
- $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -1/2$.
- $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -1/2$.

On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j^n \neq -1/2$.

Conclusion.

La condition $P_n'(j) = 0$ n'est jamais vérifiée. Par conséquent, il n'existe aucun entier n tel que j soit racine double de P_n.

L'ensemble des solutions est vide :

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

> **Piège :**
> Une erreur classique consiste à s'arrêter à la condition $P_n(j) = 0$ sans vérifier la multiplicité requise par le carré dans le diviseur $(X^2 + X + 1)^2$.

> **À retenir :**
> Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A = \prod(X - \alpha_i)^{k_i}$ est la décomposition de A en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, alors $A|B$ si et seulement si pour tout i, α_i est racine de B de multiplicité au moins k_i.

Localisation des racines d'un polynôme

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On considère le polynôme :

$$P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P vérifie :

$$|z| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$$

Indications :

- Procéder par disjonction de cas selon que le module de la racine z est inférieur ou supérieur à 1.
- Dans le cas $|z| > 1$, utiliser l'égalité $P(z) = 0$ et l'inégalité triangulaire pour majorer $|z|^n$.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation de la relation fondamentale $P(z) = 0$.
- Inégalité triangulaire.
- Comparaison des puissances d'un complexe de module supérieur à 1.

Résolution.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme P. On a donc l'égalité :

$$z^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

Nous allons montrer l'inégalité demandée en distinguant deux configurations possibles pour $|z|$.

Premier cas : $|z| \leq 1$.

Si le module de z est inférieur ou égal à 1, alors il est a fortiori majoré par le maximum de 1 et de n'importe quelle autre valeur positive. On a immédiatement :

$$|z| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$$

Deuxième cas : $|z| > 1$.

Puisque $z^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$|z|^n = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i$$

Comme $|z| > 1$, on sait que pour tout entier $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $|z|^i \leq |z|^{n-1}$.

On peut donc majorer chaque terme de la somme par $|a_i||z|^{n-1}$, ce qui mène à :

$$|z|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^{n-1}$$

En factorisant le terme $|z|^{n-1}$, on obtient :

$$|z|^n \leq |z|^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right)$$

Puisque $|z| > 1$, on a en particulier $z \neq 0$, et on peut diviser l'inégalité par $|z|^{n-1} > 0$ sans en changer le sens :

$$\boxed{|z| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}$$

Conclusion.

Dans les deux cas étudiés, la racine z vérifie l'inégalité :

$$\boxed{|z| \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à vouloir sommer les $|a_i|$ sans avoir préalablement justifié que $|z|^i \leq |z|^{n-1}$, ce qui n'est vrai que si $|z| \geq 1$. D'où l'importance cruciale de la disjonction de cas initiale.

> **À retenir :**
> Cette méthode de majoration est une version simplifiée de la **borne de Cauchy**. Elle montre que les racines d'un polynôme ne peuvent pas "s'échapper" trop loin dans le plan complexe par rapport à la taille des coefficients.

Polynômes de Tchébychev de première espèce

Énoncé

On considère les polynômes de Tchébychev de première espèce.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx)$$
2. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence :
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer les racines de T_n sur $\mathbb{R}$. Préciser leur nombre et leur multiplicité.
5. Montrer que T_n est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :
$$(1 - X^2)y'' - Xy' + n^2y = 0$$

Indications :

- Pour l'existence, utiliser la formule de Moivre et le binôme de Newton en isolant la partie réelle. Pour l'unicité, penser au nombre de racines d'un polynôme qui s'annule sur un intervalle.
- Utiliser les formules de Simpson pour transformer $\cos((n+2)x) + \cos(nx)$.
- Procéder par récurrence à l'aide de la relation obtenue à la question 2.
- Résoudre $\cos(n\theta) = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$ et utiliser l'injectivité de la fonction cosinus sur cet intervalle.
- Dériver deux fois par rapport à θ la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Correction.

Idées clés :

- Densité des racines et identité polynomiale.
- Utilisation de la trigonométrie circulaire pour caractériser des propriétés algébriques.
- Relation de récurrence d'ordre 2 pour les degrés et coefficients.

1. Existence et unicité.

Existence : D'après la formule de Moivre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right)$$

En appliquant la formule du binôme de Newton :
$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos x)^{n-k}(i\sin x)^k\right)$$

Les termes de la somme sont réels si et seulement si k est pair. Posons $k = 2p$:
$$\cos(nx) = \sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}(\cos x)^{n-2p}(-1)^p(\sin^2 x)^p$$

En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on obtient :
$$\cos(nx) = \sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}(\cos x)^{n-2p}(\cos^2 x - 1)^p$$

On définit alors le polynôme :

$$\boxed{T_n(X) = \sum_{0\leq 2p\leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p}$$

Ce polynôme vérifie bien $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Unicité : Si deux polynômes T_n et Q_n conviennent, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = Q_n(\cos x)$.

En posant $u = \cos x$, cela signifie que pour tout $u \in [-1, 1]$, $T_n(u) - Q_n(u) = 0$.

Le polynôme $T_n - Q_n$ possède une infinité de racines (tout l'intervalle $[-1, 1]$), il est donc identiquement nul.

$$\boxed{T_n \text{ est unique.}}$$

2. Relation de récurrence.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise la formule de Simpson :

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$$

Par définition de T_n, T_{n+1} et T_{n+2}, cette relation s'écrit :

$$T_{n+2}(\cos x) + T_n(\cos x) = 2\cos(x)T_{n+1}(\cos x)$$

En posant $X = \cos x$, on constate que les deux polynômes $T_{n+2} + T_n$ et $2XT_{n+1}$ coïncident sur l'intervalle $[-1, 1]$. Par le même argument d'unicité que précédemment :

$$\boxed{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n}$$

3. Degré et coefficient dominant.

Calculons les premiers termes : $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. $T_2 = 2X(X) - 1 = 2X^2 - 1$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\deg(T_n) = n$ et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.

Initialisation : Pour $n = 1$, $T_1 = X$, le degré est 1 et le coefficient est $2^0 = 1$. Vrai. Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$, le degré est 2 et le coefficient est $2^1 = 2$. Vrai.

Hérédité : Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$.

$$T_{n+2} = 2X \underbrace{T_{n+1}}_{\deg\, n+1} - \underbrace{T_n}_{\deg\, n}$$

Le terme de plus haut degré de $2XT_{n+1}$ est $2X \cdot (2^n X^{n+1}) = 2^{n+1}X^{n+2}$. Comme $\deg(T_n) = n < n+2$, il n'y a pas de simplification du terme de plus haut degré.

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \deg(T_n) = n \quad \text{et} \quad \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}}$$

4. Racines de T_n.

Cherchons les racines de T_n dans l'intervalle $]-1, 1[$. Soit $x \in]-1, 1[$, il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos\theta$.

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Pour que $\theta_k \in]0, \pi[$, il faut $0 < 2k+1 < 2n$, soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On obtient n valeurs distinctes pour θ_k, et comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les n valeurs $x_k = \cos(\theta_k)$ sont distinctes.

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}}$$

Comme $\deg(T_n) = n$ et que nous avons trouvé n racines distinctes, ce sont toutes les racines de T_n et elles sont toutes simples.

5. Équation différentielle.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On part de $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. En dérivant par rapport à θ :

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

En dérivant une seconde fois :

$$-\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta)$$

On remplace $\cos(n\theta)$ par $T_n(\cos\theta)$ et $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$:

$$-\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (1 - \cos^2\theta)T_n''(\cos\theta) = -n^2 T_n(\cos\theta)$$

En posant $X = \cos\theta$, on obtient pour tout $X \in [-1, 1]$:

$$\boxed{(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2 T_n(X) = 0}$$

> **Piège :**
> L'unicité de T_n repose sur le fait que $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ est un ensemble infini. Un polynôme nul sur un intervalle est le polynôme nul. Ne pas oublier de mentionner cet argument.

> **À retenir :**
> La famille (T_n) forme une base de $\mathbb{R}[X]$. Le fait que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ permet de ramener des problèmes polynomiaux complexes à de la trigonométrie élémentaire.

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Énoncé

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments deux à deux distincts d'un corps $\mathbb{K}$ et $b_0, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(a_i) = b_i$$

Donner une expression explicite de P.

2. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(k) = r^k$$

Calculer $P(n+1)$.

Indications :
- Pour l'unicité dans la question 1, on pourra considérer la différence de deux solutions éventuelles et compter ses racines.
- Pour l'existence, introduire les polynômes élémentaires de Lagrange $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.
- Pour la question 2, appliquer la formule de la question 1 en remplaçant n par $n-1$, puis utiliser la formule du binôme de Newton pour simplifier la somme obtenue.

Correction.

Idées clés :
- Liberté et dimension (ou racines d'un polynôme).
- Base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Formule du binôme de Newton.

1. Existence et unicité du polynôme d'interpolation.

Unicité. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ répondant au problème. Posons $H = P - Q$.

Par hypothèse, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a :

$$H(a_i) = P(a_i) - Q(a_i) = b_i - b_i = 0$$

Le polynôme H admet donc au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $H \in \mathbb{K}_n[X]$, donc $\deg(H) \leq n$. Un polynôme non nul de degré au plus n ne peut avoir plus de n racines.

On en déduit :

$$\boxed{H = 0 \implies P = Q}$$

Existence. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, définissons le polynôme L_i par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Ces polynômes appartiennent à $\mathbb{K}_n[X]$ et vérifient par construction la propriété de Kronecker :

$$L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Considérons alors le polynôme P défini par :

$$\boxed{P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)}$$

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, par linéarité de l'évaluation :

$$P(a_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(a_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i \delta_{i,k} = b_k$$

Le polynôme P convient, ce qui prouve l'existence.

2. Calcul de $P(n+1)$.

On applique les résultats précédents avec $a_k = k$ et $b_k = r^k$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ici, l'espace est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a donc n points d'interpolation.

L'expression de P est :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} r^k L_k(X) \quad \text{où} \quad L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X-j}{k-j}$$

Calculons $L_k(n+1)$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} L_k(n+1) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{n+1-j}{k-j} \\ &= \frac{(n+1-1)(n+1-2)\ldots(n+1-(k-1)) \cdot (n+1-(k+1))\ldots(n+1-n)}{(k-1)(k-2)\ldots(1) \cdot (-1)(-2)\ldots(k-n)} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2) \cdot (n-k)\ldots(1)}{(k-1)! \cdot (-1)^{n-k}(n-k)!} \end{aligned}$$

En remarquant que le numérateur est $\frac{n!}{n-k+1}$, on obtient :

$$L_k(n+1) = \frac{n!}{(n-k+1)(k-1)!(-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

On reconnaît un coefficient binomial :

$$\boxed{L_k(n+1) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k-1}}$$

D'où l'expression de $P(n+1)$:

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n} r^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k-1}$$

Effectuons le changement d'indice $j = k-1$:

$$P(n+1) = \sum_{j=0}^{n-1} r^{j+1} (-1)^{n-1-j} \binom{n}{j} = r \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-1-j}$$

Or, d'après la formule du binôme :

$$(r-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-j} = -\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-1-j} + r^n$$

On en déduit que :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-1-j} = r^n - (r-1)^n$$

Finalement :

$$\boxed{P(n+1) = r^{n+1} - r(r-1)^n}$$

À retenir :
La famille des polynômes de Lagrange $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ associés à des points distincts forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est la base duale de la famille des formes linéaires d'évaluation $P \mapsto P(a_i)$.

Piège :
Attention aux indices dans la question 2 : le polynôme est de degré $n-1$, il y a donc n points d'appui. Une confusion entre n et $n+1$ est fréquente lors du passage à la formule du binôme.

Polynômes de Hilbert et valeurs entières

Énoncé

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, calculer $H_n(j)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indications :

- Pour la première question, distinguer les cas $j \geq n$, $0 \leq j < n$ et $j < 0$. On pourra exprimer le résultat à l'aide de coefficients binomiaux.
- Pour la seconde question, le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct, on pourra procéder par récurrence sur le degré de P en utilisant le fait que $(H_0, \dots, H_d)$ forme une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
- Évaluer successivement le polynôme en $0, 1, \dots, d$ pour identifier les coefficients de la décomposition.

Correction.

Idées clés :

- Base de polynômes de degrés échelonnés.
- Propriétés combinatoires des coefficients binomiaux.
- Raisonnement par récurrence sur le degré.

1. Calcul des valeurs $H_n(j)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, nous distinguons trois cas :

— **Cas $0 \leq j < n$:** L'un des facteurs $(j-k)$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ est nul (lorsque $k = j$). Par conséquent :

$$\boxed{H_n(j) = 0}$$

— **Cas $j \geq n$:** On reconnaît la définition du coefficient binomial :

$$H_n(j) = \frac{j(j-1)\dots(j-n+1)}{n!} = \frac{j!}{n!(j-n)!}$$

D'où :

$$\boxed{H_n(j) = \binom{j}{n}}$$

— **Cas $j < 0$:** Posons $j = -m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$H_n(-m) = \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}$$

En réordonnant, on obtient $H_n(-m) = (-1)^n\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$, soit :

$$\boxed{H_n(j) = (-1)^n\binom{|j|+n-1}{n}}$$

Dans tous les cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on remarque que $H_n(j) \in \mathbb{Z}$.

2. Caractérisation des polynômes à valeurs entières.

1. **Sens réciproque ($\Leftarrow$) :** Supposons qu'il existe $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k$.

   Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $P(j) = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k(j)$. D'après la question précédente, $H_k(j) \in \mathbb{Z}$ pour tout k.

   Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau, toute combinaison linéaire à coefficients entiers d'entiers est un entier. Ainsi, $P(j) \in \mathbb{Z}$, donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2. **Sens direct ($\Rightarrow$) :** Supposons que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Posons $d = \deg P$. La famille $(H_0, H_1, \ldots, H_d)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés $(0, 1, \ldots, d)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

   Il existe donc d'uniques coefficients réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que :

   $$P = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k$$

   Montrons par récurrence sur $n \in \{0, \ldots, d\}$ que $a_n \in \mathbb{Z}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on évalue en 0.

   $$P(0) = a_0 H_0(0) + \sum_{k=1}^{d} a_k H_k(0)$$

   Or $H_0(0) = 1$ et pour $k \geq 1$, $H_k(0) = 0$. Donc $a_0 = P(0)$. Comme $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, on a $a_0 \in \mathbb{Z}$.

   Hérédité : Soit $n < d$. Supposons que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Évaluons P en $n+1$:

   $$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k H_k(n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(n+1) + a_{n+1} H_{n+1}(n+1)$$

   Puisque $H_{n+1}(n+1) = \binom{n+1}{n+1} = 1$, on en déduit :

   $$a_{n+1} = P(n+1) - \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n+1}{k}$$

   Par hypothèse de récurrence, $a_0, \ldots, a_n$ sont des entiers. De plus, les coefficients binomiaux et $P(n+1)$ sont des entiers. Par stabilité de $\mathbb{Z}$ pour l'addition et la soustraction, on conclut :

   $$\boxed{a_{n+1} \in \mathbb{Z}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique est de vouloir utiliser l'interpolation de Lagrange. Bien que les coefficients de Lagrange soient dans $\mathbb{Q}$ si les valeurs sont entières, ils ne sont pas nécessairement dans $\mathbb{Z}$. La base des polynômes de Hilbert est l'outil spécifique pour capturer l'aspect entier.

> **À retenir :**
> Une base de polynômes de degrés échelonnés (P_k) permet d'exprimer n'importe quel polynôme. Si $P_k(n) = \delta_{k,n}$ (comme pour Lagrange) ou si la matrice de passage vers les évaluations est triangulaire avec des 1 sur la diagonale (comme ici), les coefficients héritent de la nature des valeurs.

Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$

Énoncé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$. Que dire des éventuelles racines multiples de P' ?
3. On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{C}$, le polynôme $P - a$ n'a pas de racine complexe de multiplicité supérieure ou égale à 3.
4. On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Indications :

- Pour la question (a), appliquer le théorème de Rolle entre les racines consécutives de P et comparer le nombre de racines obtenues avec le degré de P'.
- Pour la question (b), utiliser la relation entre la multiplicité d'une racine de P et celle de P', puis compléter avec le théorème de Rolle.
- Pour la question (c), si z est une racine de multiplicité ≥ 3 de $P - a$, alors $P'(z) = P''(z) = 0$. Utiliser le résultat de la question (a) pour montrer que P' et P'' ne peuvent avoir de racine commune.
- Pour la question (d), traduire la nullité de deux coefficients consécutifs par des conditions sur les dérivées de P en 0.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de Rolle
- Lien entre multiplicité et dérivées
- Propriété d'entrelacement des racines

Résolution.

1. Supposons P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Notons $n = \deg(P)$.

   Il existe n racines réelles distinctes de P que l'on ordonne : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

   La fonction polynomiale associée à P est continue sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$. De plus, $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$.

   D'après le théorème de Rolle, il existe pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ un réel $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$.

   Comme les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, les y_i sont distincts. Nous avons donc trouvé $n - 1$ racines réelles distinctes pour P'.

   Or $\deg(P') = n - 1$. Un polynôme de degré $n - 1$ ayant $n - 1$ racines réelles distinctes est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

   On en conclut :
   $$\boxed{P' \text{ est simplement scindé sur } \mathbb{R}}$$

2. Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ ses racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_k$ telles que $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

   D'après le cours, chaque x_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ (si $m_i > 1$). Cela nous donne déjà :

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=n-k \text{ racines pour } P' \text{ (comptées avec multiplicité).}$$

Par ailleurs, le théorème de Rolle appliqué entre chaque x_i et x_{i+1} fournit $k-1$ nouvelles racines distinctes $y_1,\dots,y_{k-1}$ telles que $x_i<y_i<x_{i+1}$. Ces racines sont distinctes des x_i.

Le nombre total de racines réelles de P' (comptées avec multiplicité) est donc au moins :

$$(n-k)+(k-1)=n-1$$

Comme $\deg(P')=n-1$, toutes les racines de P' sont réelles. Donc :

$$\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}}$$

Concernant les racines multiples : Les racines multiples de P' sont soit des racines de multiplicité ≥ 2 de P (qui deviennent de multiplicité $m-1$ pour P'), soit des racines issues du théorème de Rolle si celles-ci s'avèrent être multiples par "hasard" ou coïncidence avec d'autres racines. Toutefois, si P est simplement scindé, toutes les racines de P' sont simples.

3. Soit $a\in\mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que $P-a$ possède une racine $z\in\mathbb{C}$ de multiplicité $m\geq 3$.

   Alors z est racine de $(P-a)$, $(P-a)'$ et $(P-a)''$. On a donc :

$$P'(z)=0 \quad \text{et} \quad P''(z)=0$$

   Or, d'après la question (a), si P est simplement scindé, alors P' est aussi simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Notons $y_1,\dots,y_{n-1}$ les racines réelles distinctes de P'.

   On a alors la décomposition : $P'(X)=na_n\prod_{i=1}^{n-1}(X-y_i)$.

   La dérivée P'' est donnée par :

$$P''(X)=na_n\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{i\neq j}(X-y_i)$$

   Si z est racine de P', alors $z=y_k$ pour un certain $k\in\{1,\dots,n-1\}$. En évaluant P'' en y_k, on obtient :

$$P''(y_k)=na_n\prod_{i\neq k}(y_k-y_i)$$

   Comme les y_i sont tous distincts, chaque facteur (y_k-y_i) est non nul pour $i\neq k$. Ainsi, $P''(y_k)\neq 0$.

   Ceci contredit $P''(z)=0$. Par conséquent :

$$\boxed{P-a \text{ n'a aucune racine de multiplicité } \geq 3}$$

4. Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. Supposons que deux coefficients consécutifs soient nuls, par exemple $a_k=a_{k+1}=0$.

   D'après la formule de Taylor pour les polynômes en 0 :

$$a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{et} \quad a_{k+1}=\frac{P^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$$

   On aurait donc $P^{(k)}(0)=0$ et $P^{(k+1)}(0)=0$.

En itérant le résultat de la question (a), si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, alors $P^{(k)}$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Or, si $P^{(k)}(0) = 0$ et $(P^{(k)})'(0) = P^{(k+1)}(0) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité au moins 2 pour le polynôme $P^{(k)}$.

Ceci est en contradiction avec le fait que $P^{(k)}$ ne possède que des racines simples.

On conclut donc :

$$\boxed{P \text{ ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls}}$$

À retenir :
Le théorème de Rolle est l'outil fondamental pour l'étude des racines des dérivées. Pour un polynôme réel, être scindé est une propriété extrêmement forte qui se transmet par dérivation.

Piège :
Dans la question (b), ne pas oublier que les racines de P' proviennent de deux sources : les racines multiples de P et les points d'annulation donnés par Rolle entre les racines de P.

Sommes de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$

Énoncé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P est une somme de deux carrés s'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

1. Montrer que tout trinôme du second degré unitaire irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P et Q sont des sommes de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$, il en est de même pour leur produit PQ.
3. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est une somme de deux carrés si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser la forme canonique du trinôme et le fait que son discriminant est strictement négatif.
- Pour la question 2, utiliser l'identité de Lagrange : $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$ en travaillant dans $\mathbb{C}[X]$.
- Pour la question 3, utiliser la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et le résultat de la question 2 par récurrence.

Correction.

Idées clés :
- Forme canonique.
- Identité de Lagrange : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.
- Caractérisation des polynômes réels positifs.

Résolution.

1. Soit $P = X^2 + bX + c$ un trinôme unitaire irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

   Puisque P est irréductible de degré 2, son discriminant est strictement négatif : $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

   En utilisant la forme canonique, on écrit :

   $$P = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

   Or, $c - \frac{b^2}{4} = \frac{4c - b^2}{4} = \frac{-\Delta}{4}$. Comme $-\Delta > 0$, on peut poser $\omega = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}} \in \mathbb{R}$.

   On obtient alors :

   $$\boxed{P = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \omega^2}$$

   Le polynôme P est donc bien la somme des carrés de $A = X + \frac{b}{2}$ et $B = \omega$ (polynôme constant).

2. Supposons que $P = A^2 + B^2$ et $Q = C^2 + D^2$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$.

   Considérons les polynômes à coefficients complexes $Z_1 = A + iB$ et $Z_2 = C + iD$.

   On remarque que $P = |Z_1|^2 = Z_1 \overline{Z_1}$ et $Q = |Z_2|^2 = Z_2 \overline{Z_2}$. Alors :

   $$PQ = (Z_1 \overline{Z_1})(Z_2 \overline{Z_2}) = (Z_1 Z_2)\overline{(Z_1 Z_2)} = |Z_1 Z_2|^2$$

Calculons le produit Z_1Z_2 :

$$Z_1Z_2 = (A+iB)(C+iD) = (AC-BD) + i(AD+BC)$$

En prenant le module au carré (ou en utilisant la norme de $\mathbb{C}$), il vient :

$$\boxed{PQ = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2}$$

Les polynômes $AC-BD$ et $AD+BC$ étant dans $\mathbb{R}[X]$, PQ est bien une somme de deux carrés.

3. **Condition nécessaire :** Si $P = A^2 + B^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geq 0$ comme somme de carrés de nombres réels.

   Condition suffisante : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

   D'après le théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, P s'écrit :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X-x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s}(X^2+b_jX+c_j)^{n_j}$$

   Analysons les facteurs :
   - Puisque $\lim_{x\to+\infty} P(x) \geq 0$, le coefficient dominant λ est strictement positif. On peut écrire $\lambda = (\sqrt{\lambda})^2 + 0^2$.
   - Si une racine réelle x_i était de multiplicité k_i impaire, P changerait de signe au voisinage de x_i, ce qui est exclu. Donc chaque k_i est pair, soit $k_i = 2m_i$. Ainsi $(X-x_i)^{k_i} = ((X-x_i)^{m_i})^2 + 0^2$.
   - Les trinômes $X^2 + b_jX + c_j$ sont irréductibles. Quitte à extraire leur coefficient dominant (déjà traité par λ), on les suppose unitaires. D'après la question 1, ce sont des sommes de deux carrés.

   Conclusion : P est un produit de polynômes qui sont tous des sommes de deux carrés. Par une récurrence immédiate utilisant la question 2, on en déduit :

$$\boxed{P \text{ est une somme de deux carrés dans } \mathbb{R}[X]}$$

Piège :
Dans la question 3, il est crucial de justifier que les racines réelles sont de multiplicité **paire**. Un polynôme comme $P(X) = X$ est positif sur $\mathbb{R}^+$ mais pas sur $\mathbb{R}$, et il n'est pas somme de deux carrés car il change de signe en 0.

À retenir :
L'identité de Lagrange $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ est l'outil fondamental pour les problèmes de sommes de deux carrés. Elle exprime simplement la multiplicativité de la norme des nombres complexes : $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$.

Nombre de racines de $X^n + aX + b$

Énoncé

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que le polynôme $P = X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Indications :

- Utiliser le théorème de Rolle pour lier le nombre de racines de P à celui de sa dérivée P'.
- Raisonner par l'absurde ou par contraposée en dénombrant les racines réelles de $P'(X) = nX^{n-1} + a$.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de Rolle.
- Lien entre le nombre de racines de f et de f'.
- Étude du nombre de solutions d'une équation de la forme $x^k = c$.

Analyse du nombre de racines de la dérivée.

Considérons la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^n + ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = nx^{n-1} + a$$

Cherchons le nombre de racines réelles distinctes de P'. Cela revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^{n-1} = -\frac{a}{n}$$

Distinguons deux cas selon la parité de l'entier $n - 1$:

1. **Cas 1 : $n - 1$ est impair (c'est-à-dire n est pair).**

   La fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation admet donc une unique solution réelle, quelle que soit la valeur de a.

   Dans ce cas, P' possède exactement une racine réelle.

2. **Cas 2 : $n - 1$ est pair (c'est-à-dire n est impair).**

   L'équation $x^{n-1} = C$ admet :
   - Deux solutions réelles si $C > 0$ (soit $-\frac{a}{n} > 0$).
   - Une solution réelle si $C = 0$ (soit $a = 0$).
   - Aucune solution réelle si $C < 0$ (soit $-\frac{a}{n} < 0$).

   Dans ce cas, P' possède au plus deux racines réelles distinctes.

Dans tous les cas, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{Le nombre de racines réelles de } P' \text{ est au plus } 2.}$$

Application du théorème de Rolle.

Supposons que P possède k racines réelles distinctes, notées $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.

D'après le théorème de Rolle, puisque P est continu sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ avec $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$, il existe pour chaque $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que :

$$P'(c_i) = 0$$

Comme les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, les réels $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ sont des racines réelles distinctes de P'.

Ainsi, si P possède k racines réelles distinctes, alors P' en possède au moins $k-1$.

Conclusion.

D'après l'étude précédente, nous savons que P' possède au plus 2 racines réelles distinctes. On en déduit :

$$k - 1 \leq 2 \implies k \leq 3$$

On conclut :

$$\boxed{P = X^n + aX + b \text{ admet au plus trois racines réelles distinctes.}}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier que le théorème de Rolle ne s'applique qu'entre des racines **distinctes**. Si le polynôme admet des racines multiples, l'énoncé reste vrai car une racine de multiplicité m est racine de la dérivée à l'ordre $m-1$, mais la question porte spécifiquement sur le nombre de racines distinctes.

> **À retenir :**
> Si une fonction dérivable f s'annule en k points distincts, alors sa dérivée f' s'annule en au moins $k-1$ points distincts. Par contraposée, si f' s'annule en m points, alors f s'annule au plus en $m+1$ points.

Décomposition en éléments simples classique

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F_1(X) = \frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}$
2. $F_2(X) = \frac{1}{X^n-1}$

Indications :

- Pour F_1, identifier les pôles et utiliser la méthode de multiplication par $(X-k)$ puis évaluation en k.
- Pour F_2, les pôles sont les racines n-ièmes de l'unité. Utiliser la formule du résidu pour un pôle simple a d'une fraction $\frac{P}{Q}$: $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Correction.

Idées clés :

- Étude des pôles (tous sont simples ici).
- Formule du résidu pour les pôles simples.
- Utilisation des coefficients binomiaux pour simplifier les expressions.

1. Décomposition de $F_1(X) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(X-k)}$

La fraction F_1 est de degré négatif $(-n-1)$, sa partie entière est donc nulle. Ses pôles sont les entiers $0, 1, \ldots, n$. Ils sont tous simples.

La décomposition en éléments simples de F_1 est de la forme :

$$F_1(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X-k}$$

Pour un entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ fixé, on détermine λ_k par la formule habituelle :

$$\lambda_k = [(X-k)F_1(X)]_{X=k} = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{1}{k-j}$$

Développons ce produit en le séparant en deux parties :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (k-j) &= \left(\prod_{j=0}^{k-1}(k-j)\right) \times \left(\prod_{j=k+1}^{n}(k-j)\right) \\
&= (k \times (k-1) \times \cdots \times 1) \times ((-1) \times (-2) \times \cdots \times (-(n-k))) \\
&= k! \times (-1)^{n-k}(n-k)!
\end{aligned}$$

On en déduit l'expression de λ_k :

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}$$

D'où la décomposition finale :

$$\boxed{\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(X-k)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{X-k}}$$

2. Décomposition de $F_2(X) = \frac{1}{X^n - 1}$

Le degré de F_2 est $-n < 0$, donc la partie entière est nulle. Les pôles de F_2 sont les racines n-ièmes de l'unité $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Ce sont n pôles simples.

La décomposition s'écrit sous la forme :

$$F_2(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu_k}{X - \omega_k}$$

Puisque les pôles sont les racines du dénominateur $Q(X) = X^n - 1$, nous utilisons la formule du cours pour une fraction $\frac{P}{Q}$ où le pôle a est simple : $\mu = \frac{P(a)}{Q'(a)}$. Ici $P(X) = 1$ et $Q'(X) = nX^{n-1}$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\mu_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}}$$

Comme $\omega_k^n = 1$, on a $\omega_k^{n-1} = \frac{1}{\omega_k} = \bar{\omega_k}$. Ainsi :

$$\mu_k = \frac{\omega_k}{n}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k} \quad \text{avec } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Piège :
Dans le calcul de λ_k pour F_1, ne pas oublier le signe $(-1)^{n-k}$ provenant des facteurs $(k - j)$ lorsque $j > k$.

À retenir :
Pour une fraction de la forme $\frac{1}{Q(X)}$ avec Q possédant n racines simples (a_k), la décomposition est :

$$\frac{1}{Q(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Q'(a_k)(X - a_k)}$$

C'est souvent la méthode la plus rapide pour les fractions liées aux racines de l'unité ou aux polynômes classiques.

Dérivée logarithmique d'un polynôme

Énoncé

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \geq 1$.
Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Indications :

- Utiliser le fait que tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss).
- Appliquer la formule de dérivation d'un produit à la forme factorisée de P.

Correction.

Idées clés :

- Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.
- Formule de dérivation d'un produit de n fonctions.
- Identification de la structure d'une décomposition en éléments simples.

Résolution.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est scindé sur $\mathbb{C}$. On peut donc écrire sa décomposition en facteurs irréductibles :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{i=1}^{m} (X - z_i)^{\alpha_i}}$$

où :

— $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P,

— $z_1, \dots, z_m$ sont les racines distinctes de P,

— $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont leurs multiplicités respectives, vérifiant $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$.

On utilise la formule de dérivation d'un produit de m fonctions $f_1, \dots, f_m$:

$$(f_1 f_2 \dots f_m)' = \sum_{i=1}^{m} f_i' \prod_{j \neq i} f_j$$

En posant $f_i = (X - z_i)^{\alpha_i}$, on a $f_i' = \alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1}$.

La dérivée de P s'écrit alors :

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\alpha_j}$$

Formons maintenant le quotient $\frac{P'}{P}$:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\alpha_j}}{\lambda \prod_{j=1}^{m} (X - z_j)^{\alpha_j}}$$

Par linéarité de la somme au numérateur, on peut séparer les termes :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{m} (X - z_j)^{\alpha_j}}$$

En simplifiant chaque terme par le produit $\prod_{j\neq i}(X - z_j)^{\alpha_j}$, il reste :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1}}{(X - z_i)^{\alpha_i}}$$

On obtient finalement l'expression simplifiée :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{X - z_i}}$$

Conclusion.

Cette expression constitue exactement la décomposition en éléments simples de la fraction P'/P dans $\mathbb{C}(X)$.

En effet, les pôles z_i sont simples, et les numérateurs sont des constantes complexes (ici des entiers naturels). La partie entière est nulle car $\deg(P') < \deg(P)$.

Piège :
Attention à ne pas oublier les multiplicités α_i au numérateur. Une erreur classique consiste à croire que les numérateurs valent toujours 1. Ils valent 1 si et seulement si toutes les racines de P sont simples.

À retenir :
La formule de la dérivée logarithmique transforme un produit en une somme. C'est un outil extrêmement puissant pour :

- Localiser les racines de P' par rapport à celles de P (Théorème de Lucas).
- Simplifier des calculs de dérivées de polynômes de haut degré.
- Traiter des problèmes d'analyse impliquant des polynômes scindés.

Théorème de Gauss-Lucas

Énoncé

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
Montrer que toute racine de P' est un barycentre à coefficients positifs de l'ensemble des racines de P.

Indications :

- Utiliser la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ pour exprimer la dérivée logarithmique P'/P.
- Distinguer le cas où la racine de P' est aussi racine de P.
- Pour le cas général, utiliser les propriétés du conjugué d'un nombre complexe pour faire apparaître des réels positifs.

Correction.

Idées clés :

- Décomposition en éléments simples de la dérivée logarithmique P'/P.
- Interprétation géométrique des combinaisons linéaires complexes.

Résolution.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est scindé sur $\mathbb{C}$. On note $z_1, \ldots, z_k$ les racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$, et $n_1, \ldots, n_k$ leurs multiplicités respectives.

On peut ainsi écrire :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{k} (X - z_j)^{n_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant.

Soit $w \in \mathbb{C}$ une racine de P'. Nous voulons montrer que w est un barycentre des points $(z_1, \ldots, z_k)$ avec des coefficients positifs.

Premier cas : w est une racine de P.

S'il existe $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $w = z_{j_0}$, alors w est trivialement un barycentre de la famille $(z_1, \ldots, z_k)$.

On peut par exemple choisir le poids 1 pour z_{j_0} et 0 pour les autres racines z_j $(j \neq j_0)$.

Deuxième cas : w n'est pas une racine de P.

On considère la dérivée logarithmique de P. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, on a :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{z - z_j}$$

Puisque w est une racine de P' et n'est pas une racine de P, on a $P'(w) = 0$ et $P(w) \neq 0$. L'égalité précédente évaluée en w donne :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{w - z_j} = 0}$$

Pour faire apparaître des expressions facilitant l'identification d'un barycentre, on multiplie chaque terme par le conjugué du dénominateur :

$$\sum_{j=1}^{k} n_j \frac{\overline{w - z_j}}{|w - z_j|^2} = 0$$

En passant au conjugué dans cette somme, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{|w - z_j|^2}(w - z_j) = 0$$

Posons, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\omega_j = \frac{n_j}{|w - z_j|^2}$$

Comme $n_j \in \mathbb{N}^*$ et $|w - z_j|^2 > 0$ (car w n'est pas une racine de P), les coefficients ω_j sont des réels strictement positifs.

L'équation devient alors :

$$\sum_{j=1}^{k} \omega_j (w - z_j) = 0$$

En développant, on trouve :

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j\right) w = \sum_{j=1}^{k} \omega_j z_j$$

Comme la somme des poids $\sum \omega_j$ est strictement positive, on en déduit l'expression de w comme barycentre des z_j à coefficients positifs :

$$\boxed{w = \frac{\sum_{j=1}^{k} \omega_j z_j}{\sum_{j=1}^{k} \omega_j}}$$

Conclusion.

Dans tous les cas, toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs des racines de P.

> **Piège :**
> Ne pas oublier de justifier que w n'est pas une racine de P avant d'écrire $\frac{P'(w)}{P(w)}$. Si w est une racine de P, le terme $w - z_j$ peut s'annuler, rendant la fraction indéfinie.

> **À retenir :**
> Une conséquence géométrique immédiate de ce théorème est que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P dans le plan complexe.

Polynômes scindés et dérivée logarithmique

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n simplement scindé sur $\mathbb{R}$. On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ses racines réelles.

1. Étudier les variations de la fraction rationnelle $F = \frac{P'}{P}$ sur son domaine de définition.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P' - \alpha P$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Indications :
- Pour la première question, utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction P'/P, souvent appelée dérivée logarithmique.
- Pour la seconde question, traduire l'équation $P'(x) - \alpha P(x) = 0$ en une équation faisant intervenir $F(x)$ pour x n'étant pas racine de P.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de continuité de F et ne pas oublier d'analyser le degré du polynôme $P' - \alpha P$ selon la valeur de α.

Correction.

Idées clés :
- Décomposition en éléments simples de P'/P.
- Étude de fonctions et TVI.
- Lien entre racines d'un polynôme et zéros d'une fraction rationnelle.

1. Étude des variations de $F = P'/P$.

Puisque P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ de racines $x_1 < \cdots < x_n$, on peut écrire :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k), \quad \text{avec } \lambda \neq 0$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F = \frac{P'}{P}$ est un résultat classique :

$$\boxed{F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}}$$

Cette fraction est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Elle est dérivable sur chaque intervalle de D et :

$$\forall x \in D, \quad F'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{(x - x_k)^2}$$

On observe que pour tout $x \in D$, $F'(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine.}}$$

2. Étude du polynôme $Q = P' - \alpha P$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Cherchons les racines de Q. Remarquons d'abord que si x_i est une racine de P, alors $Q(x_i) = P'(x_i) - \alpha P(x_i) = P'(x_i)$. Comme les racines de P sont simples, $P'(x_i) \neq 0$, donc aucune racine de P n'est racine de Q.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = 0$ équivaut à :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \alpha = 0 \iff F(x) = \alpha$$

Cas 1 : $\alpha = 0$.

Le polynôme $Q = P'$ est de degré $n-1$. Sur chaque intervalle $I_k =]x_k, x_{k+1}[$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction F est continue et strictement décroissante. De plus :

$$\lim_{x \to x_k^+} F(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_{k+1}^-} F(x) = -\infty$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, il existe une unique racine $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ telle que $F(y_k) = 0$. Ceci nous donne $n-1$ racines distinctes pour P'. Comme $\deg(P') = n-1$, on a trouvé toutes les racines.

$$\boxed{P' \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}.}$$

Cas 2 : $\alpha \neq 0$.

Ici, $\deg(Q) = \deg(P' - \alpha P) = n$ car le terme de plus haut degré de Q provient de $-\alpha P$. Reprenons l'étude sur les $n-1$ intervalles $I_k =]x_k, x_{k+1}[$. Sur chaque I_k, F réalise une bijection de I_k sur $\mathbb{R}$. L'équation $F(x) = \alpha$ admet donc exactement une solution y_k dans chaque I_k. Cela fournit $n-1$ racines réelles distinctes. Il en manque une.

Analysons les intervalles non bornés :
- Sur $J_n =]x_n, +\infty[$, F est strictement décroissante, $\lim_{x \to x_n^+} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
- Sur $J_0 =]-\infty, x_1[$, F est strictement décroissante, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to x_1^-} F(x) = -\infty$.

Si $\alpha > 0$, l'équation $F(x) = \alpha$ admet une unique solution dans J_n par le TVI car $\alpha \in]0, +\infty[$. Si $\alpha < 0$, l'équation $F(x) = \alpha$ admet une unique solution dans J_0 par le TVI car $\alpha \in]-\infty, 0[$.

Dans tous les cas ($\alpha \neq 0$), nous avons trouvé n racines réelles distinctes.

Conclusion.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P' - \alpha P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}.}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de vérifier si les racines de P peuvent être racines de $P' - \alpha P$. Si c'était le cas, on ne pourrait pas diviser par $P(x)$ pour utiliser la fonction F.

> **À retenir :**
> La méthode de la "dérivée logarithmique" est l'outil privilégié pour lier les racines d'un polynôme P et de sa dérivée P' (ou de variantes comme $P' - \alpha P$).

10

Algèbre linéaire

Liberté de familles de fonctions classiques

Énoncé

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles ou complexes sur un intervalle I.

1. Montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ définie sur $[1,+\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est libre.
2. Montrer que la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sin(x^n)$ est libre.
3. Montrer que la famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ est libre.

Indications :
- Pour la question 1, on pourra utiliser le comportement asymptotique des puissances de x en $+\infty$ après avoir ordonné les exposants.
- Pour la question 2, un développement limité au voisinage de 0 permet d'isoler le terme de plus bas degré.
- Pour la question 3, on pourra procéder par récurrence sur le cardinal d'une sous-famille finie en utilisant la dérivation pour réduire le nombre de termes.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation de la structure de base : une famille est libre si toute combinaison linéaire finie nulle est à coefficients nuls.
- Exploitation des échelles de comparaison ($x \to +\infty$ ou $x \to 0$).
- Technique de "descente" par dérivation pour les fonctions exponentielles.

Résolution.

1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de réels distincts. Quitte à réordonner, on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. Considérons des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout $x \in [1,+\infty[$:
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$$
Pour $x > 0$, on peut diviser par le terme de plus haut degré x^{α_n} :
$$\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_n} = 0$$
Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $\alpha_k - \alpha_n < 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_k-\alpha_n} = 0$. En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient :
$$\boxed{\lambda_n = 0}$$
Par une récurrence immédiate (ou en répétant l'argument), on montre que tous les coefficients sont nuls. La famille est donc libre.

2. Soit $(n_1, \dots, n_p)$ des entiers naturels non nuls distincts, ordonnés tels que $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$. Supposons que pour tout $x \in [0,1]$:
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \sin(x^{n_k}) = 0$$
Au voisinage de 0, on utilise le développement limité de la fonction sinus : $\sin(u) = u + o(u)$. L'égalité devient :
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (x^{n_k} + o(x^{n_k})) = 0$$

Factorisons par le terme de plus bas degré x^{n_1} :

$$x^{n_1}\left(\lambda_1+\sum_{k=2}^{p}\lambda_k x^{n_k-n_1}+o(1)\right)=0$$

Pour $x\in]0,1]$, on divise par x^{n_1}, puis on fait tendre x vers 0. Comme $n_k-n_1>0$ pour $k\geq 2$, les termes $x^{n_k-n_1}$ tendent vers 0. On en déduit :

$$\boxed{\lambda_1=0}$$

On itère le procédé pour montrer que $\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0$. La famille est libre.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur n que toute famille de n fonctions $(f_{\lambda_k})_{1\leq k\leq n}$ avec des λ_k complexes distincts est libre.

Initialisation : Pour $n=1$, si $\lambda_1 e^{\lambda_1 x}=0$, alors $\lambda_1=0$ car l'exponentielle ne s'annule jamais.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})$ des complexes distincts et $(c_1,\ldots,c_{n+1})$ des scalaires tels que :

$$\forall x\in[0,1],\quad \sum_{k=1}^{n+1}c_k e^{\lambda_k x}=0$$

Multiplions l'expression par $e^{-\lambda_{n+1}x}$:

$$c_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}c_k e^{(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}=0$$

Les fonctions en présence sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}c_k(\lambda_k-\lambda_{n+1})e^{(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}=0$$

C'est une combinaison linéaire de n fonctions exponentielles. Par hypothèse de récurrence :

$$\forall k\in\{1,\ldots,n\},\quad \boxed{c_k(\lambda_k-\lambda_{n+1})=0}$$

Comme les λ_k sont distincts deux à deux, $\lambda_k-\lambda_{n+1}\neq 0$ pour $k\leq n$, donc $c_1=\cdots=c_n=0$. L'équation initiale se réduit alors à $c_{n+1}e^{\lambda_{n+1}x}=0$, d'où $c_{n+1}=0$.

Conclusion : La famille est libre.

Piège :
Dans la question 1, il ne faut pas oublier de préciser que l'on ordonne les exposants. Sans cette précaution, le passage à la limite n'isole pas un coefficient unique.

À retenir :
Pour montrer qu'une famille infinie est libre, on montre que toute sous-famille **finie** est libre. Les deux leviers principaux sont l'analyse asymptotique (négligeabilité) et la stabilité par dérivation.

Dimension d'une intersection

Énoncé

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :

$$\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$$

Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Indications :
- Utiliser la formule de Grassmann reliant les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.
- Exploiter le fait que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E pour majorer sa dimension.

Correction.

Idées clés :
- Formule de Grassmann.
- Propriété de la dimension des sous-espaces vectoriels.
- Lien entre dimension strictement positive et non-nullité d'un espace.

Résolution.

D'après la formule de Grassmann, les dimensions des sous-espaces considérés sont liées par la relation suivante :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Par ailleurs, comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, leur somme $F+G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Par propriété de la dimension en dimension finie, on en déduit :

$$\dim(F+G) \leq \dim(E)$$

En combinant ces deux résultats, nous obtenons l'inégalité :

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leq \dim(E)$$

Ce qui se réécrit, en isolant le terme lié à l'intersection :

$$\boxed{\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E)}$$

Or, par hypothèse, nous savons que :

$$\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$$

Ce qui est équivalent à dire que la quantité $\dim(F) + \dim(G) - \dim(E)$ est strictement positive.

Il vient alors immédiatement :

$$\boxed{\dim(F \cap G) > 0}$$

Comme la dimension du sous-espace $F \cap G$ est un entier naturel strictement positif, cet espace ne peut pas être réduit au vecteur nul.

On conclut donc :

$$\boxed{F \cap G \neq \{0\}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à affirmer que $F + G = E$. Bien que l'on sache que $\dim(F + G) \leq \dim(E)$, l'égalité n'est pas garantie par l'énoncé. L'inégalité suffit cependant pour conclure.

À retenir :
La formule de Grassmann est l'outil fondamental pour l'étude des dimensions d'intersections. Elle permet notamment d'établir que si la somme des dimensions de deux sous-espaces dépasse celle de l'espace ambiant, alors leur intersection est au moins de dimension :

$$d \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E)$$

Dimension d'une intersection d'hyperplans

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On considère m hyperplans de E, notés $H_1, \dots, H_m$, avec $m < n$.
Montrer la minoration suivante :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geq n - m$$

Indications :

- Procéder par récurrence sur le nombre m d'hyperplans.
- Utiliser la formule de Grassmann pour relier la dimension de l'intersection de deux sous-espaces à celle de leur somme.
- On pourra également utiliser la propriété suivante : si F est un sous-espace vectoriel de E et H un hyperplan de E, alors $\dim(F \cap H)$ vaut soit $\dim F$, soit $\dim F - 1$.

Correction.

Idées clés :

- Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Propriété de l'intersection avec un hyperplan : $\dim(F \cap H) \geq \dim F - 1$.
- Raisonnement par récurrence sur l'entier m.

Résolution.

Nous allons démontrer la propriété par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $m \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $\mathcal{P}(m)$ la propriété : « Pour toute famille de m hyperplans $H_1, \dots, H_m$, on a $\dim(\cap_{i=1}^{m} H_i) \geq n - m$ ».

Initialisation : $m = 1$.

Par définition d'un hyperplan en dimension finie n, on a :

$$\boxed{\dim(H_1) = n - 1}$$

L'inégalité est donc vérifiée (il s'agit même d'une égalité). Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $m < n - 1$. Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie.

Considérons $m + 1$ hyperplans $H_1, \dots, H_{m+1}$ de E. Posons :

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(m)$, nous avons :

$$\dim(F) \geq n - m$$

Nous cherchons à minorer la dimension de l'espace $F \cap H_{m+1}$. Appliquons la formule de Grassmann aux sous-espaces vectoriels F et H_{m+1} :

$$\dim(F \cap H_{m+1}) = \dim F + \dim H_{m+1} - \dim(F + H_{m+1})$$

Or, nous savons que :

1. $\dim H_{m+1} = n - 1$.
2. $F + H_{m+1}$ est un sous-espace vectoriel de E, donc sa dimension est majorée par celle de E :

$$\dim(F + H_{m+1}) \leq n$$

En réinjectant ces éléments dans la formule de Grassmann, on obtient l'inégalité :

$$\dim(F \cap H_{m+1}) \geq \dim F + (n-1) - n$$

Soit, après simplification :

$$\dim(F \cap H_{m+1}) \geq \dim F - 1$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $\dim F \geq n - m$, il vient :

$$\dim(F \cap H_{m+1}) \geq (n-m) - 1$$

On en déduit :

$$\boxed{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m+1} H_i\right) \geq n - (m+1)}$$

La propriété $\mathcal{P}(m+1)$ est donc démontrée.

Conclusion.

Par principe de récurrence, pour tout $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$\boxed{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geq n - m}$$

Piège :
L'erreur classique est de penser que la dimension est *exactement* $n - m$. C'est faux en général : si les hyperplans "se chevauchent" (s'ils ne sont pas en position générale), la dimension peut être strictement supérieure. Par exemple, si $H_1 = H_2$, alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$, ce qui est bien supérieur à $n - 2$.

À retenir :
L'intersection d'un sous-espace F avec un hyperplan H diminue la dimension d'au plus une unité :

$$\dim(F \cap H) \in \{\dim F - 1, \dim F\}$$

Plus généralement, chaque contrainte linéaire (équation d'hyperplan) réduit la dimension de l'espace de solutions d'au plus 1.

Bases de polynômes et degrés

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes ayant tous le même degré.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que V possède une base dont tous les éléments ont des degrés distincts.
   (b) Montrer que V possède une base dont tous les éléments ont le même degré.

Indications :

- Pour la question 1, on pourra modifier la base canonique en ajoutant à chaque vecteur un terme de degré n.
- Pour la question 2.a), on pourra procéder par récurrence sur la dimension de V en considérant le noyau d'une forme linéaire bien choisie (liée au coefficient dominant).
- Pour la question 2.b), on utilisera le résultat de la question 2.a) et on appliquera une transformation similaire à celle de la question 1.

Correction.

Idées clés :

- Famille de degrés échelonnés (toujours libre).
- Construction d'une base par récurrence sur la dimension.
- Stabilité de la liberté par l'opération $P_i \leftarrow P_i + P_m$.

Résolution de la question 1.

Considérons la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P_k = X^n + X^k \quad \text{et} \quad P_n = X^n$$

Chaque polynôme P_k est de degré n puisque pour $k < n$, le terme X^n est le terme de plus haut degré.

Montrons que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice.

On remarque que :

$$X^n = P_n \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$$

Puis, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$X^k = P_k - P_n \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ contient tous les éléments de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. Elle est donc génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{B} = (X^n + 1, X^n + X, \dots, X^n + X^{n-1}, X^n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

Résolution de la question 2.a).

Soit $m = \dim V$. Procédons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Si $m = 1$, alors $V = \mathrm{Vect}(Q_1)$ avec $Q_1 \neq 0$. La famille (Q_1) est une base de V dont le seul élément a un degré fixé. La propriété est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour tout sous-espace de dimension $m-1$. Soit V de dimension m.

Soit $n_{max} = \max\{\deg(P) \mid P \in V \setminus \{0\}\}$. Cet entier existe car V est de dimension finie. Il existe donc $Q_m \in V$ tel que $\deg(Q_m) = n_{max}$.

Considérons l'application linéaire « coefficient de $X^{n_{max}}$ » définie sur V :

$$\phi : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \text{coeff}_{n_{max}}(P) \end{cases}$$

Puisque $\deg(Q_m) = n_{max}$, on a $\phi(Q_m) \neq 0$. L'application ϕ est donc une forme linéaire non nulle sur V. Son noyau $H = \ker(\phi)$ est donc un hyperplan de V. On a :

$$\dim(H) = \dim(V) - 1 = m - 1$$

Par hypothèse de récurrence, H possède une base $(Q_1, \ldots, Q_{m-1})$ dont les degrés sont distincts. De plus, par définition de H, pour tout $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $\deg(Q_i) < n_{max}$ (car leur coefficient de degré n_{max} est nul et n_{max} est le degré maximal dans V).

La famille $(Q_1, \ldots, Q_m)$ est constituée d'une base de l'hyperplan H complétée par un vecteur $Q_m \notin H$. C'est donc une base de V.

Les degrés $\deg(Q_1), \ldots, \deg(Q_{m-1})$ sont distincts par hypothèse, et ils sont tous strictement inférieurs à $\deg(Q_m) = n_{max}$. Les m degrés sont donc distincts.

Conclusion : Par principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\exists (Q_1, \ldots, Q_m) \text{ base de } V \text{ telle que } \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_m)}$$

Résolution de la question 2.b).

Soit $(Q_1, \ldots, Q_m)$ la base de V obtenue à la question précédente, avec $\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_m) = d$.

Définissons la famille $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_m)$ par :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-1\}, \quad P_i = Q_i + Q_m \quad \text{et} \quad P_m = Q_m$$

Degrés : Comme $\deg(Q_i) < \deg(Q_m)$ pour tout $i < m$, on a par propriété du degré d'une somme :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \deg(P_i) = \deg(Q_m) = d$$

Liberté : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i = 0$. En remplaçant par les définitions :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i (Q_i + Q_m) + \lambda_m Q_m = 0$$

En réorganisant :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i Q_i + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) Q_m = 0$$

Comme $(Q_1, \ldots, Q_m)$ est une base, cette famille est libre. On en déduit :

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$
- $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \implies \lambda_m = 0$

Tous les coefficients sont nuls, donc la famille $\mathcal{P}$ est libre. Comme elle contient $m = \dim V$ vecteurs, c'est une base de V.

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{P} = (Q_1 + Q_m, \dots, Q_{m-1} + Q_m, Q_m) \text{ est une base de } V \text{ à degrés égaux}}$$

Piège :
Attention à ne pas affirmer que les degrés d'une base de V sont nécessairement $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Par exemple, $V = \mathrm{Vect}(X, X^3)$ est de dimension 2 mais ne contient aucun polynôme de degré 0 ou 2.

À retenir :
Une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts (échelonnée en degré) est toujours libre. C'est un outil fondamental pour construire des bases en algèbre polynomiale.

Dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Indications :
- Se ramener à la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ et décomposer chaque coefficient complexe en parties réelle et imaginaire.
- Construire explicitement une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Idées clés :
- Restriction du corps des scalaires.
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^{n^2}$.
- Structure de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $(1, i)$.

Analyse de la structure.

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n^2. La base canonique est notée $(E_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$, où $E_{j,k}$ est la matrice dont l'unique coefficient non nul vaut 1 à la position (j, k).

Lorsqu'on considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on restreint la multiplication par un scalaire aux seuls nombres réels.

Étude du cas élémentaire.

Considérons d'abord le cas $n = 1$, c'est-à-dire l'espace $\mathbb{C}$ lui-même. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La famille $(1, i)$ est donc une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2}$$

Construction d'une base sur $\mathbb{R}$.

Pour le cas général, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients complexes des matrices de la base canonique :

$$M = \sum_{1\leq j,k\leq n} z_{j,k} E_{j,k}$$

En décomposant chaque $z_{j,k} \in \mathbb{C}$ en parties réelle et imaginaire, $z_{j,k} = x_{j,k} + iy_{j,k}$ avec $x_{j,k}, y_{j,k} \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$M = \sum_{1\leq j,k\leq n} (x_{j,k} + iy_{j,k})E_{j,k} = \sum_{1\leq j,k\leq n} x_{j,k}E_{j,k} + \sum_{1\leq j,k\leq n} y_{j,k}(iE_{j,k})$$

Considérons la famille $\mathcal{B}$ composée des matrices suivantes :

$$\mathcal{B} = \{E_{j,k} \mid 1 \leq j, k \leq n\} \cup \{iE_{j,k} \mid 1 \leq j, k \leq n\}$$

D'après le calcul précédent, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.

Vérification de la liberté.

Soient $(\lambda_{j,k})_{j,k}$ et $(\mu_{j,k})_{j,k}$ des réels tels que :

$$\sum_{1\leq j,k\leq n} \lambda_{j,k}E_{j,k} + \sum_{1\leq j,k\leq n} \mu_{j,k}(iE_{j,k}) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

Cette égalité se réécrit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\sum_{1\leq j,k\leq n} (\lambda_{j,k} + i\mu_{j,k})E_{j,k} = 0$$

Comme la famille $(E_{j,k})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est libre sur $\mathbb{C}$. On a donc, pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\lambda_{j,k} + i\mu_{j,k} = 0$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda_{j,k} = 0$ et $\mu_{j,k} = 0$ pour tous j,k. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre sur $\mathbb{R}$.

Conclusion.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$. Elle contient n^2 matrices du type $E_{j,k}$ et n^2 matrices du type $iE_{j,k}$.

On conclut alors sur la dimension :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = 2n^2}$$

> **À retenir :**
> Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d, alors E est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et sa dimension en tant que tel est $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2d$.

> **Piège :**
> Confondre la dimension sur $\mathbb{C}$ (qui vaut n^2) et la dimension sur $\mathbb{R}$ (qui vaut $2n^2$). Toujours bien identifier le corps des scalaires sur lequel la structure d'espace vectoriel est définie.

Dimension des suites récurrentes linéaires

Énoncé

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.
On considère l'ensemble E des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}$$

Déterminer la structure et la dimension de l'espace vectoriel E.

Indications :
- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Considérer l'application $\Phi : E \to \mathbb{C}^p$ qui à une suite u associe ses p premiers termes $(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$.
- Prouver que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation d'un isomorphisme vers un espace de dimension finie connue.
- Principe de détermination d'une suite par ses conditions initiales.

1. Structure d'espace vectoriel

L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites complexes.

La suite nulle appartient trivialement à E.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda u + \mu v)_{n+p} &= \lambda u_{n+p} + \mu v_{n+p} \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} + \mu \sum_{i=0}^{p-1} a_i v_{n+i} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\lambda u_{n+i} + \mu v_{n+i}) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\lambda u + \mu v)_{n+i}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda u + \mu v \in E$. E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2. Recherche de la dimension par isomorphisme

Considérons l'application suivante :

$$\Phi : \begin{cases} E \to \mathbb{C}^p \\ u \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) \end{cases}$$

L'application Φ est clairement linéaire par définition des opérations sur les suites. Montrons que Φ est un isomorphisme.

Injectivité de Φ :

Soit $u \in \ker(\Phi)$. On a $u_0 = u_1 = \cdots = u_{p-1} = 0$.

Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. L'initialisation est vérifiée pour $n \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Supposons que pour un certain $n \geq 0$, on ait $u_k = 0$ pour tout $k \in \{n, \ldots, n+p-1\}$. D'après la relation de récurrence :

$$u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \cdot 0 = 0$$

Par principe de récurrence, $u_n = 0$ pour tout n, donc u est la suite nulle.

$$\boxed{\ker(\Phi) = \{0_E\}}$$

Surjectivité de Φ :

Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. On définit une suite u par :

— Les p premiers termes : $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}, u_k = x_k$.

— Pour $n \geq 0$, le terme u_{n+p} est calculé de proche en proche par la formule $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}$.

Par construction, cette suite appartient à E et vérifie $\Phi(u) = (x_0, \ldots, x_{p-1})$. Φ est donc surjective.

Conclusion

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit :

$$\dim(E) = \dim(\mathbb{C}^p)$$

D'où le résultat final :

$$\boxed{\dim(E) = p}$$

> **Piège :**
> Il est crucial de bien justifier la surjectivité. Dire qu'une suite "existe" grâce à la relation de récurrence est l'argument clé, car une suite récurrente d'ordre p est entièrement et uniquement déterminée par ses p premiers termes (les conditions initiales).

> **À retenir :**
> L'espace des solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre p est un espace vectoriel de dimension p. Ce résultat est l'analogue discret du théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre p.

Dimension des polynômes à racines prescrites

Énoncé

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$. On considère p réels distincts notés $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes s'annulant en $a_1, \ldots, a_p$.

Indications :

- Utiliser la caractérisation d'un polynôme admettant plusieurs racines distinctes en termes de divisibilité.
- Exprimer tout polynôme de ce sous-espace comme le produit d'un polynôme fixé (de degré p) et d'un polynôme quelconque à déterminer.
- Établir un isomorphisme entre l'espace recherché et un espace de polynômes de référence dont la dimension est connue.

Correction.

Idées clés :

- Un polynôme s'annule en p points distincts si et seulement s'il est divisible par le produit des facteurs correspondants.
- Isomorphisme d'espaces vectoriels par multiplication par un polynôme fixé.

Analyse du sous-ensemble.

Notons E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ P(a_i) = 0\}$$

E est le noyau de l'application linéaire d'évaluation $\phi : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_p))$, donc E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Caractérisation par la divisibilité.

Puisque les réels $a_1, \ldots, a_p$ sont deux à deux distincts, un polynôme P s'annule en ces points si et seulement si il est divisible par le polynôme L défini par :

$$L = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)$$

Ainsi, $P \in E$ si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = Q \cdot L$$

Condition sur le degré.

Le degré du produit de deux polynômes non nuls est la somme de leurs degrés. On a $\deg(L) = p$.

Pour un polynôme P non nul, la relation $P = Q \cdot L$ implique :

$$\deg(P) = \deg(Q) + \deg(L) = \deg(Q) + p$$

Par conséquent, la condition $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (soit $\deg(P) \leq n$) équivaut à :

$$\deg(Q) + p \leq n \iff \deg(Q) \leq n - p$$

On en déduit que :

$$E = \{Q \cdot L \mid Q \in \mathbb{R}_{n-p}[X]\}$$

Calcul de la dimension.

Considérons l'application suivante :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-p}[X] \to E \\ Q \mapsto Q \cdot L \end{cases}$$

Cette application est :

1. **Linéaire** par distributivité de la multiplication par L sur l'addition et la multiplication par un scalaire.
2. **Surjective** par la caractérisation établie précédemment.
3. **Injective** car si $Q \cdot L = 0$, alors $Q = 0$ (puisque $\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre et $L \neq 0$).

Φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en conclut :

$$\dim(E) = \dim(\mathbb{R}_{n-p}[X])$$

D'après le cours sur la dimension des espaces de polynômes, on sait que $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k + 1$. Ici, avec $k = n - p$:

$$\boxed{\dim(E) = n - p + 1}$$

> **Piège :**
> Bien vérifier que les points a_i sont distincts. Si certains étaient confondus, le polynôme P ne serait pas nécessairement divisible par le produit des $(X - a_i)$, mais par un produit faisant intervenir des puissances (multiplicité des racines). Ici, l'énoncé précise $a_1 < \cdots < a_p$, ce qui garantit qu'ils sont distincts.

> **À retenir :**
> La méthode de l'isomorphisme par multiplication est classique pour déterminer la dimension d'un sous-espace de polynômes défini par des racines imposées. On peut aussi utiliser le théorème du rang sur l'application d'évaluation, en justifiant sa surjectivité par l'existence des polynômes d'interpolation de Lagrange.

Espace vectoriel des matrices hermitiennes

Énoncé

On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^* = M$, où $M^* = {}^t\overline{M}$ désigne la matrice adjointe (ou transconjuguée) de M.

1. Montrer que $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.

Indications :
- Pour la première question, vérifiez la stabilité par combinaison linéaire à coefficients réels. Prenez garde au fait que $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Pour la dimension, décomposez une matrice hermitienne sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et identifiez les contraintes réelles sur chaque coefficient.
- On pourra séparer l'étude des coefficients diagonaux et des coefficients strictement extra-diagonaux.

Correction.

Idées clés :
- Propriété de la transconjuguée : $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$.
- Une matrice est déterminée par ses coefficients diagonaux (réels) et ses coefficients triangulaires supérieurs (complexes).

1. Structure de $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n^2$.

Soient $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Étudions le caractère hermitien de la matrice $C = \lambda A + \mu B$:

$$(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$$

Comme λ et μ sont des réels, on a $\overline{\lambda} = \lambda$ et $\overline{\mu} = \mu$. De plus, A et B étant hermitiennes, $A^* = A$ et $B^* = B$. Il vient :

$$(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A + \mu B$$

Ainsi, $\lambda A + \mu B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Comme la matrice nulle 0_n vérifie clairement $0_n^* = 0_n$, l'ensemble $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur le corps $\mathbb{R}$.

Piège :
$\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ n'est **pas** un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour $n \geq 1$. En effet, si $I_n \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors iI_n ne l'est pas car $(iI_n)^* = -iI_n \neq iI_n$.

2. Calcul de la dimension

Soit $M = (m_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La condition $M^* = M$ équivaut à :

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{k,j} = \overline{m_{j,k}}$$

Analyse des coefficients :

Sur la diagonale ($j = k$) : On doit avoir $m_{j,j} = \overline{m_{j,j}}$, ce qui signifie que $m_{j,j} \in \mathbb{R}$. Il y a n coefficients diagonaux, chacun apportant 1 degré de liberté réel.

Hors diagonale ($j < k$) : Le coefficient $m_{j,k}$ peut être un nombre complexe quelconque, noté $x_{j,k} + iy_{j,k}$ avec $(x_{j,k}, y_{j,k}) \in \mathbb{R}^2$. Le coefficient symétrique $m_{k,j}$ est alors imposé par la relation $m_{k,j} = \overline{m_{j,k}} = x_{j,k} - iy_{j,k}$. Il y a autant de tels couples que de manières de choisir (j, k) avec $1 \leq j < k \leq n$, soit :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Chaque couple $(m_{j,k}, m_{k,j})$ apporte 2 degrés de liberté réels ($x_{j,k}$ et $y_{j,k}$).

Synthèse : La dimension de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donc :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2$$

En développant, on obtient :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n + n^2 - n$$

D'où le résultat final :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n^2}$$

> **À retenir :**
> La dimension de l'espace des matrices hermitiennes (sur $\mathbb{R}$) est la même que celle de l'espace des matrices symétriques réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** on compte les paramètres réels. C'est un résultat classique des concours.

Dimension de l'espace des splines cubiques

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ donnée par :

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$$

On considère l'ensemble S des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ est une fonction polynomiale de degré au plus 3.
Déterminer la dimension de l'espace vectoriel S.

Indications :
- Remarquer d'abord que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0, 1])$.
- Analyser les contraintes de raccordement en chaque point a_k pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
- Pour $f \in S$, notons P_k le polynôme coïncidant avec f sur $[a_k, a_{k+1}]$. Étudier la forme du polynôme différence $Q_k = P_k - P_{k-1}$ en utilisant les conditions de régularité $\mathcal{C}^2$.
- Construire une base de S ou utiliser un argument de prolongement par paramètres libres.

Correction.

Idées clés :
- Structure locale polynomiale.
- Lien entre racines d'un polynôme et multiplicité (via la régularité $\mathcal{C}^2$).
- Décomposition en base de Taylor ou fonctions puissances tronquées.

Analyse de la structure locale.

Soit $f \in S$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}], \quad f(x) = P_k(x)$$

La condition $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ impose qu'en chaque point de raccordement intérieur a_k (pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$), les dérivées jusqu'à l'ordre 2 à gauche et à droite coïncident. Cela se traduit par :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2\}, \quad P_k^{(j)}(a_k) = P_{k-1}^{(j)}(a_k)$$

Étude des sauts de dérivées.

Posons $Q_k = P_k - P_{k-1}$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

D'après les relations précédentes, a_k est racine des polynômes Q_k, Q_k' et Q_k''.

Ainsi, a_k est une racine de multiplicité au moins 3 du polynôme Q_k.

Comme Q_k est une différence de deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, on a $\deg(Q_k) \leq 3$.

Par conséquent, il existe une constante réelle $c_k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_k(x) = c_k(x - a_k)^3$$

Construction de la fonction.

On peut alors exprimer f de proche en proche. Pour tout $x \in [0, 1]$:

— Si $x \in [a_0, a_1]$, $f(x) = P_0(x)$.

— Si $x \in [a_1, a_2]$, $f(x) = P_1(x) = P_0(x) + c_1(x - a_1)^3$.
— Par récurrence immédiate, pour $x \in [a_k, a_{k+1}]$, on a :

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} c_i(x - a_i)^3$$

Introduisons la fonction "puissance tronquée" $(\cdot)_+^3$ définie par $x_+^3 = x^3$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.

L'expression précédente se globalise sur $[0, 1]$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x - a_i)_+^3$$

Détermination de la dimension.

Considérons l'application linéaire Φ définie de S vers $\mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}^{n-1}$ par :

$$\Phi(f) = (P_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

1. **Injectivité :** Si $\Phi(f) = (0, 0, \ldots, 0)$, alors $P_0 = 0$ et tous les sauts c_i sont nuls, donc $f = 0$.

2. **Surjectivité :** Pour tout polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $(n-1)$-uplet de réels $(c_1, \ldots, c_{n-1})$, la fonction f définie par l'expression ci-dessus est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ (chaque terme $(x - a_i)_+^3$ est $\mathcal{C}^2$ car le raccordement en a_i se fait avec des dérivées nulles jusqu'à l'ordre 2) et est polynomiale de degré ≤ 3 sur chaque segment.

L'application Φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit :

$$\dim(S) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) + \dim(\mathbb{R}^{n-1})$$

D'où :

$$\dim(S) = 4 + n - 1$$

On conclut :

$$\boxed{\dim(S) = n + 3}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à sommer les dimensions des espaces de polynômes sur chaque intervalle ($4n$) sans retirer correctement le nombre de contraintes indépendantes, ou à oublier que la régularité $\mathcal{C}^2$ impose trois équations par point intérieur.

> **À retenir :**
> Une fonction polynomiale par morceaux appartient à $\mathcal{C}^k$ si et seulement si, à chaque interface a_i, le saut de la fonction et de ses k premières dérivées est nul. Le premier saut possible se situe au niveau de la dérivée $(k+1)$-ième.

Inégalités sur le rang d'endomorphismes

Énoncé

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$
2. $\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$

Indications :

- Pour la première inégalité, utiliser l'inclusion des images : $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$. Pour l'autre partie, considérer la restriction de u à l'espace $\mathrm{Im}(v)$.
- Pour la seconde inégalité, montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et utiliser la propriété de la dimension d'une somme de sous-espaces.

Correction.

Idées clés :

- Lien entre le rang et l'image : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.
- Monotonie de la dimension : $F \subset G \implies \dim F \leq \dim G$.
- L'image d'un sous-espace F par une application linéaire u vérifie $\dim(u(F)) \leq \dim F$.

1. Étude du rang de la composée $u \circ v$.

Première partie : comparaison avec rg(u).

Par définition, l'image de la composée est :

$$\mathrm{Im}(u \circ v) = (u \circ v)(E) = u(v(E))$$

Comme $v(E) \subset E$, par application de u, nous obtenons l'inclusion :

$$\mathrm{Im}(u \circ v) \subset u(E) = \mathrm{Im}(u)$$

En passant aux dimensions, la croissance de la dimension pour l'inclusion nous donne :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)}$$

Deuxième partie : comparaison avec rg(v).

Considérons l'application linéaire u restreinte au sous-espace $\mathrm{Im}(v)$, notée $u_{|\mathrm{Im}(v)}$.

L'image de cette restriction est exactement $\mathrm{Im}(u \circ v)$.

D'après le théorème du rang appliqué à $u_{|\mathrm{Im}(v)} : \mathrm{Im}(v) \to E$, on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{Im}(v)})) + \dim(\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(v)}))$$

Comme la dimension du noyau est positive ou nulle, il en découle :

$$\dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(v))$$

Ce qui se réécrit :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(v)}$$

En combinant les deux résultats, nous concluons :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))}$$

2. Étude du rang de la somme $u + v$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u + v)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que :

$$y = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$$

Puisque $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$, on en déduit que y est la somme d'un élément de $\mathrm{Im}(u)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(v)$.

Par conséquent :

$$\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$

D'après la propriété de la dimension d'une somme de sous-espaces (formule de Grassmann ou majoration classique) :

$$\dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(v))$$

L'inclusion des sous-espaces entraîne alors :

$$\mathrm{rg}(u + v) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas affirmer l'égalité $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u) \cdot \mathrm{rg}(v)$ par analogie avec d'autres structures, ce qui est grossièrement faux.

> **À retenir :**
> Le rang d'une composée est toujours limité par le maillon "le plus faible" de la chaîne. La sous-additivité du rang $\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ est l'analogue de l'inégalité triangulaire pour les applications linéaires.

Endomorphisme de noyau et d'image fixés

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur E_1 et E_2 pour qu'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\ker(f) = E_1 \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = E_2$$

Indications :
- Pour la condition nécessaire, utiliser le théorème du rang.
- Pour la condition suffisante, construire une application linéaire en définissant l'image d'une base de E complétée à partir d'une base de E_1.

Correction.

Idées clés :
- Théorème du rang.
- Théorème de la base complétée.
- Définition d'une application linéaire par l'image d'une base.

Analyse (Condition nécessaire).

Supposons qu'il existe un tel endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

D'après le théorème du rang appliqué à f, on a l'égalité :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

En remplaçant par les données de l'énoncé, nous obtenons la condition nécessaire :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)}$$

Synthèse (Condition suffisante).

Supposons que $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$. Posons $n = \dim(E)$, $p = \dim(E_1)$ et $r = \dim(E_2)$. Par hypothèse, on a $n = p + r$.

Construisons explicitement un tel endomorphisme f.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_1. D'après le théorème de la base complétée, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que la famille :

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

soit une base de E.

Soit par ailleurs $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_r)$ une base de E_2.

On définit l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad f(e_i) = 0_E$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, r\}, \quad f(e_{p+j}) = f_j$$

Vérifions que cet endomorphisme convient.

L'image de f est engendrée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{Vect}(0_E, \dots, 0_E, f_1, \dots, f_r) \\ &= \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r)\end{aligned}$$

Comme $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de E_2, nous en déduisons :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = E_2}$$

Pour le noyau, on remarque par construction que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_i) = 0_E$, donc $e_i \in \ker(f)$. Par stabilité par combinaison linéaire, on a :

$$E_1 \subseteq \ker(f)$$

D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\begin{aligned}\dim(\ker(f)) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ &= n - r \\ &= p\end{aligned}$$

Ainsi, E_1 est un sous-espace vectoriel de $\ker(f)$ et ils ont la même dimension finie. Par conséquent :

$$\boxed{\ker(f) = E_1}$$

Conclusion.

L'existence d'un tel endomorphisme est possible si et seulement si :

$$\boxed{\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier que l'existence de f ne dépend que de la dimension des espaces, et non de leur position relative (ils ne sont pas nécessairement en somme directe).

> **À retenir :**
> Pour définir une application linéaire, il suffit de donner les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. C'est l'outil fondamental pour les problèmes d'existence en algèbre linéaire.

Rang d'une composée d'applications linéaires

Énoncé

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que :

$$rg(g \circ f) = rg(f) - \dim(\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f))$$

Indications :

- Considérer la restriction de l'application g au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(f)$.
- Appliquer le théorème du rang à cette restriction.
- Identifier précisément le noyau et l'image de cette restriction.

Correction.

Idées clés :

- Utilisation d'une restriction d'application linéaire.
- Théorème du rang : $\dim(V) = \dim(\ker \phi) + rg(\phi)$.
- Stabilité de l'image par composition.

Résolution.

Considérons l'application linéaire $\tilde{g}$ définie comme la restriction de g au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(f)$.

On définit ainsi :

$$\tilde{g} : \begin{cases} \operatorname{Im}(f) & \to G \\ y & \mapsto g(y) \end{cases}$$

Puisque E, F, G sont de dimension finie, le sous-espace $\operatorname{Im}(f)$ est lui aussi de dimension finie. Nous pouvons donc appliquer le théorème du rang à l'application $\tilde{g}$.

Le théorème du rang nous donne la relation suivante :

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\ker(\tilde{g})) + rg(\tilde{g})$$

Déterminons maintenant les éléments de cette égalité.

1. Par définition du rang d'une application linéaire, nous avons :

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = rg(f)}$$

2. Le noyau de $\tilde{g}$ est l'ensemble des éléments de son ensemble de départ qui sont annulés par g :

$$\ker(\tilde{g}) = \{y \in \operatorname{Im}(f) \mid g(y) = 0_G\} = \{y \in F \mid y \in \operatorname{Im}(f) \text{ et } y \in \ker(g)\}$$

On en déduit l'égalité suivante sur les dimensions :

$$\boxed{\dim(\ker(\tilde{g})) = \dim(\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f))}$$

3. L'image de $\tilde{g}$ est définie par :

$$\operatorname{Im}(\tilde{g}) = \{g(y) \mid y \in \operatorname{Im}(f)\}$$

Or, tout élément $y \in \operatorname{Im}(f)$ s'écrit sous la forme $y = f(x)$ avec $x \in E$. Ainsi :

$$\operatorname{Im}(\tilde{g}) = \{g(f(x)) \mid x \in E\} = \operatorname{Im}(g \circ f)$$

Ce qui nous donne pour le rang :

$$\boxed{rg(\tilde{g}) = rg(g \circ f)}$$

En réinjectant ces trois résultats dans la formule du théorème du rang appliquée à $\tilde{g}$, on obtient :

$$rg(f) = \dim(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)) + rg(g \circ f)$$

En isolant le terme $rg(g \circ f)$, nous parvenons à la formule souhaitée :

$$\boxed{rg(g \circ f) = rg(f) - \dim(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

Piège :
Attention à ne pas appliquer le théorème du rang directement à g. Le théorème du rang sur g donnerait $\dim(F) = \dim(\ker g) + rg(g)$, ce qui ne fait pas intervenir f de la manière attendue. L'astuce réside bien dans la restriction au sous-espace $\mathrm{Im}(f)$.

À retenir :
La dimension de l'image d'un sous-espace S par une application linéaire g est donnée par :

$$\dim(g(S)) = \dim(S) - \dim(\ker(g) \cap S)$$

Cette formule est une généralisation directe du théorème du rang (cas où $S = E$).

Caractérisation des homothéties

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

Indications :

- Commencer par traduire l'hypothèse : pour chaque $x \neq 0$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. L'objectif est de montrer que λ_x ne dépend pas de x.
- Soient x et y deux vecteurs non nuls. Si la famille (x, y) est libre, utiliser la linéarité de f sur $f(x+y)$ pour comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.
- Si la famille (x, y) est liée, traiter ce cas en utilisant un vecteur auxiliaire ou par un argument de proportionnalité.

Correction.

Idées clés :

- Traduction ponctuelle de la colinéarité.
- Exploitation de la linéarité sur une famille libre.
- Séparation des cas : vecteurs colinéaires ou non.

Résolution.

Par hypothèse, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Pour tout vecteur non nul $x \in E$, il existe donc un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\boxed{f(x) = \lambda_x x}$$

Nous devons montrer que l'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur $E \setminus \{0\}$. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

Premier cas : la famille (x, y) est libre.

Considérons le vecteur $x + y$. Comme $x + y \neq 0$, il existe $\lambda_{x+y} \in \mathbb{K}$ tel que $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$.

Par linéarité de f, nous avons également :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Ce que l'on peut réécrire :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E$$

Or, la famille (x, y) est libre. Par définition, les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls :

$$\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}}$$

Deuxième cas : la famille (x, y) est liée.

Puisque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que $y = \alpha x$.

Si l'espace E est de dimension 1, alors tous les vecteurs sont colinéaires à un vecteur de base e_1, et le résultat est immédiat car $\lambda_x = \lambda_{e_1}$ pour tout x.

Supposons $\dim E \geq 2$. Il existe alors un vecteur $z \in E$ tel que la famille (x, z) soit libre.

D'après le premier cas appliqué aux couples (x, z) et (y, z) (qui sont des familles libres car y est colinéaire à x et $z \notin \text{Vect}(x)$) :

$$\lambda_x = \lambda_z \quad \text{et} \quad \lambda_y = \lambda_z$$

Par transitivité de l'égalité, on obtient là encore :

$$\boxed{\lambda_x = \lambda_y}$$

Conclusion.

Le scalaire λ_x est indépendant du choix du vecteur $x \in E \setminus \{0\}$.

Il existe donc un scalaire unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$. Cette relation étant trivialement vérifiée pour $x = 0_E$, nous avons :

$$\boxed{f = \lambda \text{Id}_E}$$

L'endomorphisme f est bien une homothétie.

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à écrire $f(x) = \lambda x$ sans préciser que λ dépend de x a priori. Il est crucial de noter λ_x pour souligner cette dépendance avant de démontrer la constance.

> **À retenir :**
> Pour montrer qu'un endomorphisme est une homothétie, on vérifie souvent que tout vecteur est un vecteur propre, puis on utilise la liberté d'une famille de deux vecteurs pour montrer que les valeurs propres associées sont identiques.

Famille d'itérés et nilpotence

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère un vecteur $x \in E$ et un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$f^{p-1}(x) \neq 0_E \quad \text{et} \quad f^p(x) = 0_E$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On note k l'indice de nilpotence de f. Déduire de la question précédente que $k \leq n$.

Indications :

- Pour la question 1, partir d'une combinaison linéaire nulle et composer successivement par les puissances de l'endomorphisme f, ou considérer le plus petit indice d'un coefficient non nul.
- Pour la question 2, utiliser la définition de l'indice de nilpotence k : c'est le plus petit entier tel que $f^k = 0$, ce qui implique l'existence d'un vecteur x tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$.

Correction.

Idées clés :

- Composition par un endomorphisme pour isoler des termes.
- Lien entre cardinal d'une famille libre et dimension de l'espace.
- Définition de l'indice de nilpotence.

1. Liberté de la famille des itérés

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$$

Supposons, par l'absurde, que cette famille de scalaires ne soit pas toute nulle.

Soit $j_0 = \min\{i \in \{0, \ldots, p-1\} \mid \lambda_i \neq 0\}$ le plus petit indice correspondant à un scalaire non nul. L'égalité se simplifie en :

$$\sum_{i=j_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$$

Appliquons l'endomorphisme f^{p-1-j_0} à cette égalité. Par linéarité de f, nous obtenons :

$$\sum_{i=j_0}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1-j_0}(x) = 0_E$$

Analysons les termes de cette somme :

— Pour $i = j_0$, le terme est $\lambda_{j_0} f^{p-1}(x)$.

— Pour $i > j_0$, on a $i + p - 1 - j_0 \geq p$. Comme $f^p(x) = 0_E$, il vient que $f^m(x) = 0_E$ pour tout $m \geq p$.

L'égalité se réduit donc à :

$$\lambda_{j_0} f^{p-1}(x) = 0_E$$

Par hypothèse, $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. On en déduit nécessairement :

$$\lambda_{j_0} = 0$$

Ceci contredit la définition de j_0. Par conséquent, tous les coefficients sont nuls.

On conclut :

$$\boxed{\text{La famille } (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre.}}$$

2. Majoration de l'indice de nilpotence

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k.

Par définition de l'indice de nilpotence, on a $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$.

Puisque $f^{k-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que :

$$f^{k-1}(x) \neq 0_E$$

Comme $f^k = 0$, on a également $f^k(x) = 0_E$. Les conditions de la question 1 sont donc vérifiées pour cet entier k et ce vecteur x.

D'après le résultat précédent, la famille $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ est libre dans E.

Le cardinal de cette famille libre est k.

Or, dans un espace vectoriel de dimension finie n, le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (théorème de la base incomplète).

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{k \leq n}$$

> **Piège :**
> Bien noter que l'existence de x tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$ découle directement de la minimalité de k dans la définition de l'indice de nilpotence (f^{k-1} n'est pas l'application nulle).

> **À retenir :**
> Si $f^k = 0$ et $f^{k-1}(x) \neq 0$, la famille des itérés de x par f constitue une famille libre. C'est un outil classique pour relier les propriétés algébriques d'un endomorphisme à la géométrie de l'espace (dimension).

Noyaux et images itérés

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq m$, on a $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^m)$.
2. Soit p le plus petit entier naturel tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$$

Indications :

- Pour la question 1, procéder par récurrence sur $k \geq m$ en montrant que l'égalité au rang k entraîne celle au rang $k+1$. Utiliser le fait que $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \iff u(x) \in \mathrm{Ker}(u^k)$.
- Pour la question 2, utiliser le théorème du rang pour l'égalité des dimensions. Pour la somme directe, montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul en exploitant le résultat de la question 1.

Correction.

Idées clés :

- Étude de la suite croissante des noyaux $(\mathrm{Ker}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$.
- Utilisation de la dimension finie pour la stationnarité.
- Lien entre stationnarité du noyau et décomposition de l'espace.

1. Étude de la stationnarité de la suite des noyaux.

Remarquons d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$, alors $u^k(x) = 0$, donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$.

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$. Montrons par récurrence sur $k \geq m$ que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^m)$.

L'initialisation est donnée par l'hypothèse pour $k = m$ et $k = m+1$.

Supposons la propriété vraie pour un certain $k \geq m$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^m)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ (ce qui impliquera l'égalité avec $\mathrm{Ker}(u^m)$).

Par l'inclusion déjà citée, on a $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. On a $u^{k+1}(x) = 0$, d'où $u^k(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^k)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^m)$. Comme $k \geq m$, on a également $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k-1})$ (par une itération de l'argument ou en supposant l'égalité de tous les noyaux jusqu'au rang k). Plus simplement, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(u^{m+1}) = \mathrm{Ker}(u^{m+2})$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{m+2})$. Alors $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{m+1})$. Or $\mathrm{Ker}(u^{m+1}) = \mathrm{Ker}(u^m)$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^m)$, d'où $u^{m+1}(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

Par récurrence, la suite des noyaux est stationnaire à partir du rang m.

$$\boxed{\forall k \geq m, \quad \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^m)}$$

2. Décomposition de E en somme directe.

Soit p le plus petit entier tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$. Un tel entier existe car la suite des dimensions des noyaux est une suite croissante d'entiers naturels majorée par $\dim(E)$.

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme u^p, nous avons :

$$\dim(\operatorname{Ker}(u^p)) + \dim(\operatorname{Im}(u^p)) = \dim(E)$$

Pour montrer que $E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$, il suffit donc de montrer que l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite au vecteur nul.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^p) \cap \operatorname{Im}(u^p)$.

— Comme $x \in \operatorname{Ker}(u^p)$, on a $u^p(x) = 0$.

— Comme $x \in \operatorname{Im}(u^p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^p(y)$.

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$u^p(u^p(y)) = 0 \implies u^{2p}(y) = 0 \implies y \in \operatorname{Ker}(u^{2p})$$

Or, d'après la question 1, puisque $2p \geq p$ et que la suite des noyaux stationne au rang p, on a $\operatorname{Ker}(u^{2p}) = \operatorname{Ker}(u^p)$.

On en déduit :

$$\boxed{y \in \operatorname{Ker}(u^p)}$$

Par conséquent, $x = u^p(y) = 0$. L'intersection est donc bien réduite au vecteur nul :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u^p) \cap \operatorname{Im}(u^p) = \{0\}}$$

Par argument de dimension, on conclut :

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas confondre $\operatorname{Ker}(u^p)$ et $\operatorname{Ker}(u)^p$ (cette dernière notation n'ayant d'ailleurs pas de sens usuel ici). Veillez à bien manipuler les puissances de l'endomorphisme au sens de la composition.

> **À retenir :**
> La suite des noyaux itérés d'un endomorphisme en dimension finie est croissante et finit par stationner. L'indice p où elle commence à stationner s'appelle l'indice de l'endomorphisme. À cet indice, l'espace se décompose en somme directe du noyau et de l'image.

11

Matrices

Propriétés des matrices élémentaires

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler le calcul du produit de deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad f(AB) = f(BA)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser le symbole de Kronecker $\delta_{j,k}$ qui vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.
- Pour la question 2, si M commute avec toute matrice, elle commute en particulier avec chaque $E_{i,j}$. Étudier les relations sur les coefficients $m_{p,q}$ induites par $ME_{i,j} = E_{i,j}M$.
- Pour la question 3, tester la relation de définition sur des couples de matrices élémentaires bien choisis pour déterminer les valeurs de $f(E_{i,j})$.

Correction.

Idées clés :
- Relations de structure : $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
- Action de $E_{i,j}$: $ME_{i,j}$ isole la colonne i de M dans la colonne j du résultat.
- Linéarité : une forme linéaire est déterminée par ses valeurs sur une base.

1. Produit de matrices élémentaires.

Par définition de la multiplication matricielle, le coefficient de la ligne p et de la colonne q de $E_{i,j}E_{k,l}$ est donné par :

$$(E_{i,j}E_{k,l})_{p,q} = \sum_{s=1}^{n} (E_{i,j})_{p,s}(E_{k,l})_{s,q}$$

Le terme $(E_{i,j})_{p,s}$ est non nul (égal à 1) si et seulement si $p = i$ et $s = j$. Le terme $(E_{k,l})_{s,q}$ est non nul (égal à 1) si et seulement si $s = k$ et $q = l$.

Ainsi, la somme est non nulle si et seulement si $p = i$, $j = k$ et $q = l$. Dans ce cas, elle vaut 1. On en déduit la relation fondamentale :

$$\boxed{E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}}$$

2. Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M = (m_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$ME_{i,j} = E_{i,j}M$$

Calculons les membres de cette égalité à l'aide de la formule précédente :

— $ME_{i,j} = \left(\sum_{p,q} m_{p,q}E_{p,q}\right) E_{i,j} = \sum_p m_{p,i}E_{p,j}$.

— $E_{i,j}M = E_{i,j} \left(\sum_{p,q} m_{p,q}E_{p,q}\right) = \sum_q m_{j,q}E_{i,q}$.

L'égalité $\sum_{p=1}^{n} m_{p,i}E_{p,j} = \sum_{q=1}^{n} m_{j,q}E_{i,q}$ par liberté de la famille $(E_{p,q})$ implique :

— Pour $p \neq i$, le coefficient devant $E_{p,j}$ à gauche doit être nul car $E_{p,j}$ n'apparaît pas à droite (où seule la ligne i est présente). Ainsi $m_{p,i} = 0$ pour tout $p \neq i$. La matrice M est donc diagonale.

— Pour $p = i$ et $q = j$, on identifie les coefficients devant $E_{i,j}$: $m_{i,i} = m_{j,j}$.

Tous les coefficients diagonaux sont égaux et les coefficients extra-diagonaux sont nuls.

$$\boxed{\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}}$$

3. Caractérisation de la trace.

Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. On suppose que pour tout A, B, $f(AB) = f(BA)$.

Étape 1 : Valeurs sur les matrices $E_{i,j}$ pour $i \neq j$.

Soit (i, j) tel que $i \neq j$. On remarque que $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$ et $E_{i,j}E_{i,i} = 0$. Par hypothèse sur f :

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0$$

Étape 2 : Valeurs sur les matrices $E_{i,i}$.

Soit (i, j) deux indices quelconques. On sait que $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ et $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}$. Par hypothèse sur f :

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$$

Tous les $f(E_{i,i})$ ont donc la même valeur, notons-la λ.

Étape 3 : Conclusion.

Par linéarité de f, pour toute matrice $A = (a_{i,j})$:

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}E_{i,j}\right) \\ &= \sum_{i\neq j} a_{i,j}f(E_{i,j}) + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}f(E_{i,i}) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\lambda \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A) \end{aligned}$$

On a bien montré l'existence d'un scalaire λ tel que :

$$\boxed{f = \lambda \mathrm{Tr}}$$

> **Piège :**
> Dans la question 2, bien justifier l'identification des coefficients en utilisant la liberté de la base canonique. Ne pas oublier de dire que si $M = \lambda I_n$, elle commute effectivement avec toutes les matrices (réciproque).

> **À retenir :**
> La base canonique $(E_{i,j})$ est l'outil privilégié pour toute question portant sur la structure algébrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ est le cœur du calcul matriciel théorique.

Interpolation de Lagrange et Vandermonde

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que l'application linéaire
$$\Phi : P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{K}^n$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Relier ce résultat à l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange.
3. En déduire que la matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$, notée $V(a_1, \dots, a_n) = (a_i^{j-1})_{1 \le i,j \le n}$, est inversible.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser l'argument de la dimension et caractériser le noyau de Φ.
- Se rappeler qu'un polynôme non nul de degré d possède au plus d racines.
- Pour la question 3, identifier la matrice de Vandermonde comme la matrice de l'application Φ dans des bases bien choisies.

Correction.

Idées clés :
- Injection entre espaces de même dimension finie.
- Propriété du nombre de racines d'un polynôme.
- Représentation matricielle d'une application linéaire.

1. Preuve de l'isomorphisme.

Considérons l'application $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n$.

La linéarité de Φ découle directement de la linéarité de l'évaluation : pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + Q)(a_i) = \lambda P(a_i) + Q(a_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Comparons les dimensions des espaces de départ et d'arrivée :
$$\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n \quad \text{et} \quad \dim(\mathbb{K}^n) = n$$

Puisque les dimensions sont finies et égales, il suffit de montrer que Φ est injective pour prouver que c'est un isomorphisme. Déterminons le noyau de Φ :
$$P \in \ker \Phi \iff \Phi(P) = (0, \dots, 0) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\},\ P(a_i) = 0$$

Un polynôme $P \in \ker \Phi$ possède donc au moins n racines distinctes (les a_i). Or, par définition, P appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc $\deg P \le n-1$.

Un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant n racines distinctes est nécessairement le polynôme nul. On en déduit :
$$\boxed{\ker \Phi = \{0\}}$$

L'application Φ est injective entre deux espaces de même dimension finie, c'est donc un isomorphisme.
$$\boxed{\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n}$$

2. Lien avec l'interpolation de Lagrange.

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet de valeurs quelconques.

L'isomorphisme Φ assure que pour tout vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\Phi(P) = y$.

Cela se traduit par l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ P(a_i) = y_i$$

Ce polynôme est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points (a_i, y_i). On peut l'expliciter via la base des polynômes élémentaires de Lagrange $(L_1, \dots, L_n)$ où $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

3. Inversibilité de la matrice de Vandermonde.

La matrice de Vandermonde $V = V(a_1, \dots, a_n)$ est définie par :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour tout polynôme $P = \sum_{j=0}^{n-1} x_j X^j \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, l'image de P par Φ s'écrit :

$$P(a_i) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j a_i^j = x_0 + x_1 a_i + \dots + x_{n-1} a_i^{n-1}$$

On reconnaît ici le produit matriciel de la i-ème ligne de V par le vecteur colonne des coefficients de P.

Ainsi, V est la matrice de l'application linéaire Φ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

D'après le cours, la matrice d'un isomorphisme dans n'importe quel choix de bases est une matrice inversible.

On en conclut immédiatement :

$$\boxed{V(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier l'hypothèse "a_i deux à deux distincts". Si deux scalaires sont égaux, deux lignes de la matrice sont identiques, ce qui rend la matrice non inversible et l'application Φ non injective.

> **À retenir :**
> La méthode classique pour montrer qu'une matrice est inversible sans calculer son déterminant consiste à montrer que l'application linéaire associée est un isomorphisme (ou simplement injective si l'espace est de dimension finie).

Dimension d'un espace d'endomorphismes sous contrainte

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimensions respectives p et q.
On considère le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$A_{F,G} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset G\}$$

Déterminer la dimension de $A_{F,G}$.

Indications :
- Commencer par montrer que $A_{F,G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- Utiliser la représentation matricielle en choisissant judicieusement une base au départ et une base à l'arrivée.
- On pourra compléter une base de F pour le départ et une base de G pour l'arrivée.

Correction.

Idées clés :
- Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
- Utilisation de bases adaptées aux sous-espaces.
- Traduction d'une condition géométrique en termes de coefficients matriciels.

Structure de $A_{F,G}$.

L'ensemble $A_{F,G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. En effet :
- L'application nulle vérifie $0(F) = \{0\} \subset G$.
- Pour tous $u, v \in A_{F,G}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda u + v)(F) \subset \lambda u(F) + v(F) \subset \lambda G + G \subset G$$

Représentation matricielle.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F.

Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(f_1, \ldots, f_q)$ de G.

Considérons l'application suivante, qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{cases}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \Phi(u)$. Par définition, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$$

La condition $u(F) \subset G$ est équivalente à :

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\}, \quad u(e_j) \in G$$

Comme $G = \text{Vect}(f_1, \dots, f_q)$, cette condition se traduit sur les coefficients de la matrice par :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall i \in \{q+1, \dots, n\}, \quad m_{i,j} = 0$$

Calcul de la dimension.

L'espace $\Phi(A_{F,G})$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices dont le bloc inférieur gauche (de taille $(n-q) \times p$) est nul.

La forme générale d'une matrice $M \in \Phi(A_{F,G})$ est :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où :

- $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$
- $B \in \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})$
- 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-q,p}(\mathbb{K})$
- $D \in \mathcal{M}_{n-q,n-p}(\mathbb{K})$

La dimension de $\Phi(A_{F,G})$ est donc le nombre de coefficients libres. On somme les dimensions des blocs libres :

$$\begin{aligned} \dim A_{F,G} &= qp + q(n-p) + (n-q)(n-p) \\ &= qp + qn - qp + n^2 - np - qn + qp \\ &= n^2 - np + pq \end{aligned}$$

On peut également raisonner en retranchant le nombre de contraintes (les zéros imposés) à la dimension totale de $\mathcal{L}(E)$:

$$\dim A_{F,G} = n^2 - p(n-q)$$

En développant, on obtient le résultat final :

$$\boxed{\dim A_{F,G} = n^2 - n \dim F + \dim F \dim G}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas utiliser la même base au départ et à l'arrivée si $F \neq G$. L'utilisation de deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ simplifie considérablement la forme de la matrice et le comptage des pivots.

> **À retenir :**
> Pour calculer la dimension d'un sous-espace d'endomorphismes défini par des conditions sur des sous-espaces, le réflexe doit être le choix de bases adaptées. La dimension est alors égale au nombre de coefficients "libres" dans la matrice.

Étude de l'application $u \mapsto b \circ u \circ a$

Énoncé

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère deux endomorphismes a et b de E de rangs respectifs r et s. On définit l'application Φ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \Phi(u) = b \circ u \circ a$$

1. Vérifier que Φ est une application linéaire. Déterminer la dimension du noyau de Φ.
2. Quel est le rang de l'application Φ ?
3. Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $\ker a \subset \ker v$ et $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} b$.

Indications :
- Pour la dimension du noyau, traduire la condition $b \circ u \circ a = 0$ par une condition sur l'image de u restreinte à l'image de a. Utiliser une base de E adaptée à $\operatorname{Im} a$ pour compter les degrés de liberté.
- Le rang s'obtient directement par le théorème du rang.
- Pour caractériser l'image, procéder par double inclusion en utilisant un argument de dimension pour l'inclusion réciproque.

Correction.

Idées clés :
- Utilisation du théorème du rang dans $\mathcal{L}(E)$.
- Caractérisation d'une application linéaire par ses valeurs sur une base.
- Dimension de l'espace des applications linéaires avec contraintes de noyau et d'image.

1. Linéarité et dimension du noyau.

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de la composition :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda u + v) &= b \circ (\lambda u + v) \circ a \\
&= b \circ (\lambda u \circ a + v \circ a) \\
&= \lambda(b \circ u \circ a) + b \circ v \circ a \\
&= \lambda \Phi(u) + \Phi(v)
\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Déterminons $\ker \Phi$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$u \in \ker \Phi \iff b \circ u \circ a = 0 \iff \forall x \in E,\ b(u(a(x))) = 0$$

Cette condition équivaut à dire que pour tout $y \in \operatorname{Im} a$, $u(y) \in \ker b$. Autrement dit :

$$\boxed{u \in \ker \Phi \iff u(\operatorname{Im} a) \subset \ker b}$$

Calculons la dimension de cet espace. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} a$. On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E. Un endomorphisme u est entièrement déterminé par les images des vecteurs de $\mathcal{B}$.

— Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on doit avoir $u(e_i) \in \ker b$. Or $\dim(\ker b) = n - rg(b) = n - s$. Il y a donc $n - s$ choix pour chaque $u(e_i)$.

— Pour $i \in \{r+1, \dots, n\}$, il n'y a aucune contrainte sur $u(e_i)$. Il y a donc $n = \dim E$ choix pour chaque $u(e_i)$.

En termes de dimension (libertés de choix dans une matrice représentative) :

$$\begin{aligned}\dim \ker \Phi &= r \times (n-s) + (n-r) \times n \\ &= rn - rs + n^2 - rn\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\dim \ker \Phi = n^2 - rs}$$

2. Rang de Φ.

D'après le théorème du rang appliqué à Φ dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ de dimension n^2 :

$$rg(\Phi) = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \ker \Phi$$

D'après la question précédente :

$$rg(\Phi) = n^2 - (n^2 - rs)$$

On en déduit :

$$\boxed{rg(\Phi) = rs}$$

3. Caractérisation de l'image.

Soit $\mathcal{H} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \ker a \subset \ker v \text{ et } \mathrm{Im}\ v \subset \mathrm{Im}\ b\}$.

Montrons d'abord que Im $\Phi \subset \mathcal{H}$. Soit $v \in \mathrm{Im}\ \Phi$. Il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = b \circ u \circ a$.

— Si $x \in \ker a$, alors $v(x) = b(u(a(x))) = b(u(0)) = 0$, donc $x \in \ker v$. Ainsi $\ker a \subset \ker v$.

— Pour tout $x \in E$, $v(x) = b(u(a(x)))$. Puisque $b \in \mathcal{L}(E)$, $v(x) \in \mathrm{Im}\ b$. Ainsi $\mathrm{Im}\ v \subset \mathrm{Im}\ b$.

On a bien $v \in \mathcal{H}$.

Calculons maintenant la dimension de $\mathcal{H}$. Soit S un supplémentaire de $\ker a$ dans E. On sait que $\dim S = rg(a) = r$. Tout $v \in \mathcal{H}$ est nul sur $\ker a$, il est donc entièrement déterminé par sa restriction à S. L'application $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}\ b), v \mapsto v_{|S}$ est un isomorphisme de sous-espaces vectoriels. En effet, pour tout $f \in \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}\ b)$, on définit v par $v_{|S} = f$ et $v_{|\ker a} = 0$, et ce v appartient bien à $\mathcal{H}$.

Ainsi :

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}\ b) = \dim S \times \dim \mathrm{Im}\ b$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\dim \mathcal{H} = r \times s}$$

Conclusion. On a $\mathrm{Im}\ \Phi \subset \mathcal{H}$ et $\dim \mathrm{Im}\ \Phi = rg(\Phi) = rs = \dim \mathcal{H}$. Par égalité des dimensions pour des sous-espaces inclus, on conclut :

$$\boxed{\mathrm{Im}\ \Phi = \mathcal{H}}$$

> **À retenir :**
> Pour déterminer la dimension d'un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser une base adaptée aux contraintes ou utiliser des isomorphismes avec des espaces de type $\mathcal{L}(F, G)$.

Matrices équivalentes et matrices semblables

Énoncé

Soit $n \geq 2$ et K un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Indiquer deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ équivalentes mais non semblables.
2. Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_n(K)$ équivalentes à une matrice nilpotente ?

Indications :
- Rappeler que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
- Pour la question (a), chercher deux matrices de même rang ayant des traces différentes, car la trace est un invariant de similitude.
- Pour la question (b), commencer par déterminer les valeurs possibles du rang d'une matrice nilpotente.
- Utiliser les matrices de la base canonique $E_{i,j}$ pour construire des exemples explicites.

Correction.

Idées clés :
- Invariance du rang par équivalence.
- Invariance de la trace et du déterminant par similitude.
- Caractérisation du rang des matrices nilpotentes.

Résolution de la question 1.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. En revanche, si elles sont semblables, elles doivent posséder la même trace.

Considérons les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ suivantes :

$$A = E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices ne possèdent qu'une seule colonne non nulle, et cette colonne est elle-même non nulle. On en déduit :

$$\text{rg}(A) = 1 \quad \text{et} \quad \text{rg}(B) = 1$$

Leurs rangs étant égaux, les matrices A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Calculons maintenant leurs traces respectives :

$$\text{tr}(A) = 1 \quad \text{et} \quad \text{tr}(B) = 0$$

Puisque $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$, ces matrices ne peuvent pas être semblables.

On conclut :

$$\boxed{E_{1,1} \text{ et } E_{1,2} \text{ sont équivalentes mais non semblables.}}$$

Résolution de la question 2.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(K)$. L'énoncé demande de caractériser les matrices M telles qu'il existe $N \in \mathcal{N}$ avec M équivalente à N.

D'après le cours, M est équivalente à N si et seulement si $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$. Cherchons donc l'ensemble des rangs possibles pour une matrice nilpotente.

Soit $N \in \mathcal{N}$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. Si N était inversible, alors N^k serait également inversible, ce qui est impossible puisque $N^k = 0$ et $n \geq 1$. Ainsi, N n'est pas inversible, ce qui impose :

$$\text{rg}(N) \leq n - 1$$

Réciproquement, montrons que pour tout $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, il existe une matrice nilpotente de rang r. Considérons la matrice N_r définie par :

$$N_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i+1}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure stricte, elle est donc nilpotente. Ses r premières colonnes (de la deuxième à la $(r+1)$-ème) constituent une famille libre car ce sont des vecteurs distincts de la base canonique. Son rang est donc exactement r.

Ainsi, l'ensemble des rangs des matrices nilpotentes est exactement $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Une matrice M est donc équivalente à une matrice nilpotente si et seulement si son rang appartient à cet ensemble, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{rg}(M) \leq n - 1}$$

Ce qui est équivalent à dire que M n'est pas inversible.

On conclut :

$$\boxed{M \notin GL_n(K)}$$

> **Piège :**
> Pour la question (b), ne pas oublier de justifier la réciproque : il ne suffit pas de dire qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible, il faut prouver qu'on peut atteindre tous les rangs inférieurs ou égaux à $n - 1$.

> **À retenir :**
>
> — Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
>
> — La trace, le déterminant et le rang sont des invariants de similitude.
>
> — Une matrice nilpotente n'est jamais inversible (son rang est au plus $n - 1$).

Matrices à diagonale strictement dominante

Énoncé

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que la matrice M est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{i,j}|$$

Montrer que la matrice M est inversible.

Indications :
- On pourra montrer que le noyau de M est réduit au vecteur nul.
- Pour $X \in \ker(M)$ non nul, considérer une composante de X de module maximal.
- Exploiter la i-ème ligne du système linéaire $MX = 0$.

Correction.

Idées clés :
- Lien entre inversibilité et injectivité pour les matrices carrées.
- Utilisation de la norme infini sur $\mathbb{C}^n$ (choix d'un indice de module maximal).
- Inégalité triangulaire.

Résolution.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur du noyau de M, tel que $MX = 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que X est non nul.

Puisque $X \neq 0$, l'ensemble $\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ possède un élément maximal non nul.

On peut donc choisir un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$\boxed{|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| > 0}$$

Le système $MX = 0$ se traduit par n équations scalaires. En considérant la i_0-ème ligne, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j = 0$$

En isolant le terme diagonal, il vient :

$$m_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} m_{i_0,j} x_j$$

Appliquons l'inégalité triangulaire à cette égalité :

$$|m_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |m_{i_0,j}| \cdot |x_j|$$

Par définition de i_0, on sait que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|x_j| \leq |x_{i_0}|$. On en déduit :

$$|m_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leq \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |m_{i_0,j}| \right) |x_{i_0}|$$

Comme $|x_{i_0}| > 0$, nous pouvons simplifier par $|x_{i_0}|$ dans l'inégalité précédente.

On obtient alors :

$$\boxed{|m_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |m_{i_0,j}|}$$

Cette inégalité contredit l'hypothèse de diagonale strictement dominante faite sur la matrice M.

Par conséquent, notre supposition initiale est fausse : le vecteur X est nécessairement nul.

On a donc établi :

$$\boxed{\ker(M) = \{0\}}$$

Conclusion.

L'application linéaire associée à M dans la base canonique est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Puisque son noyau est réduit à l'élément nul, cet endomorphisme est injectif, donc bijectif.

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à oublier de justifier que $|x_{i_0}| > 0$ avant de diviser par cette quantité. Il est crucial d'amorcer le raisonnement par l'absurde ou de traiter séparément le cas $X = 0$.

> **À retenir :**
> Une matrice à diagonale strictement dominante est toujours inversible. Ce résultat est le fondement de la méthode de localisation des valeurs propres (disques de Gershgorin).

Génération de $SL_n(K)$ par les transvections

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps commutatif. On note $SL_n(K)$ le groupe spécial linéaire, défini par :

$$SL_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det(M) = 1\}$$

Une matrice de transvection est une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$. Montrer que toute matrice de $SL_n(K)$ est égale à un produit de matrices de transvection.

Indications :
- Se ramener à l'identité en multipliant M à gauche et à droite par des matrices de transvection.
- Utiliser l'interprétation des opérations élémentaires sur les lignes ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$) et les colonnes ($C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$) comme des multiplications par des matrices de transvection.
- Procéder par récurrence sur la taille n de la matrice en isolant un premier vecteur de base canonique.
- Remarquer que l'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Correction.

Idées clés :
- Algorithme du pivot de Gauss restreint aux transvections.
- Isomorphisme entre opérations élémentaires et multiplication matricielle.
- Raisonnement par récurrence sur la dimension n.

Résolution.

Soit $M \in SL_n(K)$. Nous allons montrer par récurrence sur n qu'il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_p$ et $U_1, \dots, U_q$ telles que :

$$T_p \dots T_1 M U_1 \dots U_q = I_n$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $SL_1(K) = \{(1)\}$. La matrice identité est par convention un produit vide de transvections. La propriété est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour le rang $n-1$. Soit $M = (m_{i,j}) \in SL_n(K)$.

Étape 1 : Obtenir un coefficient non nul en position $(1,1)$.

Puisque $\det(M) = 1$, la première colonne de M n'est pas nulle. S'il existe $i > 1$ tel que $m_{i,1} \neq 0$, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 1 \cdot L_i$. Sinon, $m_{1,1}$ est nécessairement non nul car la colonne est non nulle. Dans tous les cas, par multiplication à gauche par une transvection, on peut supposer $m_{1,1} \neq 0$.

Étape 2 : Obtenir 1 *en position* $(1,1)$.

Si $m_{1,1} \neq 1$, on cherche à modifier ce coefficient par des transvections. On effectue d'abord $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ (multiplication à droite par $T_{1,2}(1)$) pour s'assurer que $m_{1,2} \neq 0$. Ensuite, on effectue l'opération sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-m_{1,1}}{m_{1,2}} L_2$. Le nouveau coefficient en $(1,1)$ devient :

$$\boxed{m'_{1,1} = m_{1,1} + \frac{1 - m_{1,1}}{m_{1,2}} \cdot m_{1,2} = 1}$$

Étape 3 : Annuler le reste de la première ligne et de la première colonne.

Par des opérations de type $L_i \leftarrow L_i - m_{i,1}L_1$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$ et $C_j \leftarrow C_j - m_{1,j}C_1$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$, on obtient une matrice de la forme :

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}$$

Ces opérations correspondent à multiplier M à gauche et à droite par des matrices de transvection.

Étape 4 : Conclusion de la récurrence.

Puisque les matrices de transvection ont un déterminant égal à 1, on a :

$$\det(M') = \det(M) = 1$$

D'après le développement du déterminant selon la première ligne, on en déduit :

$$\boxed{\det(A) = 1}$$

Ainsi $A \in SL_{n-1}(K)$. Par hypothèse de récurrence, A est un produit de transvections de $SL_{n-1}(K)$. En étendant ces transvections à $SL_n(K)$ (en ajoutant une ligne et une colonne de l'identité), on en déduit que M' est un produit de transvections.

Comme M s'obtient à partir de M' par multiplication par des inverses de transvections, et que l'inverse d'une transvection est une transvection, on conclut :

$$\boxed{M \in \langle T_{i,j}(\lambda) \rangle}$$

Piège :
Attention à ne pas utiliser de matrices de dilatation $D_i(\lambda)$ ou de permutation $P_{i,j}$ sans précaution. Une permutation de lignes $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant ; elle n'est pas une transvection. Cependant, l'opération $(L_i, L_j) \to (L_j, -L_i)$ peut être réalisée par trois transvections.

À retenir :
L'algorithme du pivot de Gauss est l'outil fondamental pour l'étude des groupes linéaires. Dans $SL_n(K)$, on peut toujours éviter les dilatations (sauf la dernière qui vaut 1 par conservation du déterminant) au profit de combinaisons de transvections.

Similitude et matrices non scalaires

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(K) \setminus KI_n$.
Montrer qu'il existe une matrice semblable à M dont la première colonne est le vecteur $\overline{C} = {}^t(0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Indications :

- Traduire le problème en termes d'endomorphisme de K^n.
- Utiliser la caractérisation classique des homothéties : un endomorphisme est une homothétie si et seulement si toute famille $(x, u(x))$ est liée.
- Utiliser le théorème de la base complétée pour construire une base dont le premier vecteur possède l'image souhaitée.

Correction.

Idées clés :

- Passage à l'interprétation vectorielle (endomorphisme).
- Lemme de caractérisation des homothéties.
- Théorème de la base complétée.

Étape 1 : Interprétation géométrique du problème.

Soit u l'endomorphisme de $E = K^n$ canoniquement associé à la matrice M.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E. Dire qu'il existe une matrice semblable à M ayant $\overline{C}$ pour première colonne revient à dire qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots \\ 1 & \ldots \\ 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, cela équivaut à l'existence d'une base $(v_1, \ldots, v_n)$ vérifiant :

$$\boxed{u(v_1) = v_2}$$

Étape 2 : Existence d'un vecteur non propre.

Puisque $M \notin KI_n$, l'endomorphisme u n'est pas une homothétie. Or, nous disposons du lemme classique suivant :

Un endomorphisme est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

Par contraposition, puisque u n'est pas une homothétie, il existe au moins un vecteur $v_1 \in E$ tel que la famille $(v_1, u(v_1))$ soit libre.

Remarquons que cela impose nécessairement $n \geq 2$, car dans le cas $n = 1$, toute matrice est scalaire.

On dispose donc d'un vecteur v_1 tel que :

$$\boxed{(v_1, u(v_1)) \text{ est une famille libre}}$$

Étape 3 : Construction de la base et conclusion.

Posons $v_2 = u(v_1)$. D'après ce qui précède, la famille (v_1, v_2) est libre.

D'après le théorème de la base complétée, il existe des vecteurs $v_3, \ldots, v_n$ tels que la famille :

$$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

forme une base de E.

Calculons la première colonne de la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}'$. Par construction :

$$u(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

La première colonne de $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est donc bien le vecteur :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par le cours, les matrices M et M' représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, elles sont donc semblables.

On conclut :

$$\boxed{\exists P \in GL_n(K), \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \\ 0 & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & * \end{pmatrix}}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique serait de choisir n'importe quel vecteur v_1. Si v_1 est un vecteur propre de M, alors $u(v_1) = \lambda v_1$ et la famille $(v_1, u(v_1))$ est liée, ce qui empêche de former la première colonne souhaitée (elle aurait un λ en première position et des 0 ailleurs).

> **À retenir :**
> La caractérisation des homothéties est un outil fondamental : un endomorphisme qui n'est pas une homothétie "envoie" au moins un vecteur sur une direction différente de la sienne.

Caractérisation matricielle des projecteurs

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \ldots, n\}$. On note J_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par blocs par :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à J_r si et seulement si $M^2 = M$ et $\text{rg}(M) = r$.

Indications :

- Pour le sens direct, utiliser les propriétés de l'invariance du rang et de la trace (ou du produit matriciel) par similitude.
- Pour le sens réciproque, traduire les hypothèses sur M en termes d'endomorphisme. On rappelle qu'un endomorphisme f vérifiant $f^2 = f$ est un projecteur.
- Utiliser une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Correction.

Idées clés :

- Lien entre similitude et changement de base.
- Caractérisation géométrique des projecteurs : $f^2 = f \iff f$ est un projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.
- Invariance du rang par similitude.

Sens direct : $\Longrightarrow$

Supposons que M soit semblable à J_r. Il existe donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M = PJ_rP^{-1}$$

D'une part, calculons M^2 :

$$\begin{aligned} M^2 &= (PJ_rP^{-1})(PJ_rP^{-1}) \\ &= PJ_r(P^{-1}P)J_rP^{-1} \\ &= PJ_r^2P^{-1} \end{aligned}$$

Or, un calcul par blocs immédiat donne $J_r^2 = \begin{pmatrix} I_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$. On en déduit :

$$\boxed{M^2 = PJ_rP^{-1} = M}$$

D'autre part, le rang est un invariant de similitude. Ainsi :

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(J_r)$$

La matrice J_r étant sous forme échelonnée, son rang est égal au nombre de ses colonnes non nulles (ou à la dimension de l'espace engendré par les vecteurs de la base canonique), soit :

$$\boxed{\text{rg}(M) = r}$$

Sens réciproque : $\Longleftarrow$

Supposons que $M^2 = M$ et $\text{rg}(M) = r$.

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Les hypothèses se traduisent par :

$$f^2 = f \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(f)) = r$$

L'égalité $f^2 = f$ assure que f est un projecteur. On dispose alors de la décomposition en somme directe :

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$$

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rg}(f) = n - r$$

Construisons une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à cette décomposition. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(f)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(f)$.

Puisque f est un projecteur, on sait que la restriction de f à son image est l'identité. Ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad f(e_i) = e_i$$

Par définition du noyau :

$$\forall i \in \{r+1, \dots, n\}, \quad f(e_i) = 0$$

La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$$

Comme M et J_r représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes (la base canonique et la base $\mathcal{B}$), elles sont semblables.

On a donc bien :

$$\boxed{M \sim J_r}$$

Piège :
Ne pas oublier de justifier pourquoi $f(x) = x$ pour $x \in \text{Im}(f)$. C'est une propriété fondamentale des projecteurs : si $x \in \text{Im}(f)$, il existe y tel que $x = f(y)$, d'où $f(x) = f^2(y) = f(y) = x$.

À retenir :
Une matrice M est une matrice de projection si et seulement si $M^2 = M$. Dans ce cas, elle est toujours semblable à une matrice diagonale composée uniquement de 1 (en nombre égal au rang) et de 0.

Supplémentarité du noyau et de l'image

Énoncé

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang r. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = \ker(u) \oplus \operatorname{im}(u)$.
2. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathrm{GL}_r(K)$$

Indications :
- Pour (1) $\implies$ (2), construire une base adaptée à la somme directe en commençant par une base de $\operatorname{im}(u)$.
- Pour justifier que A est inversible, étudier la restriction de u à son image.
- Pour (2) $\implies$ (1), utiliser la structure de la matrice pour identifier les sous-espaces $\ker(u)$ et $\operatorname{im}(u)$ en fonction des vecteurs de la base.

Correction.

Idées clés :
- Théorème du rang pour la dimension des noyaux.
- Utilisation de bases adaptées aux sommes directes.
- Caractérisation d'un automorphisme en dimension finie par l'injectivité.

Sens (1) $\implies$ (2) **:**

Supposons que $E = \operatorname{im}(u) \oplus \ker(u)$.

Par définition du rang, on a $\dim(\operatorname{im}(u)) = r$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) = n - \operatorname{rg}(u) = n - r$$

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{im}(u)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$.

Puisque $E = \operatorname{im}(u) \oplus \ker(u)$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, obtenue par concaténation, est une base de E.

Déterminons la matrice de u dans cette base :

— Pour tout $j \in \{r+1, \dots, n\}$, on a $e_j \in \ker(u)$, donc $u(e_j) = 0$. Les $n - r$ dernières colonnes de la matrice sont donc nulles.

— Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a $e_j \in \operatorname{im}(u)$. Comme l'image est stable par u (car $u(x) \in \operatorname{im}(u)$ pour tout $x \in E$), on a $u(e_j) \in \operatorname{im}(u)$.

Ainsi, pour $j \in \{1, \dots, r\}$, $u(e_j)$ se décompose uniquement sur la base $\mathcal{B}_1$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc de la forme :

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_r(K)$ est la matrice de la restriction $u_{|\operatorname{im}(u)} : \operatorname{im}(u) \to \operatorname{im}(u)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Montrons que A est inversible. Soit $x \in \operatorname{im}(u)$ tel que $u(x) = 0$. Alors $x \in \operatorname{im}(u) \cap \ker(u)$.

Comme la somme est directe, $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, donc $x = 0$.

La restriction $u_{|\mathrm{im}(u)}$ est donc un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie r, c'est un automorphisme. On en conclut :

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_r(K)}$$

Sens $(2) \implies (1)$ **:**

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathrm{GL}_r(K)$.

D'après la structure de la matrice, nous pouvons identifier les images des vecteurs de la base :

— Pour tout $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, $u(e_j) = 0$, donc $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) \subset \ker(u)$.

— Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} e_i$, donc $\mathrm{im}(u) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$.

Or, par le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = n - r$ et $\dim(\mathrm{im}(u)) = r$. Par égalité des dimensions, on obtient :

$$\boxed{\ker(u) = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)}$$

Les sous-espaces $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$ sont engendrés par des familles de vecteurs qui forment, par concaténation, la base $\mathcal{B}$.

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{E = \mathrm{im}(u) \oplus \ker(u)}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier de justifier l'inversibilité de la matrice A. Le simple fait que la matrice soit de cette forme par blocs montre seulement que $\mathrm{im}(u) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$, mais c'est l'inversibilité de A qui garantit que le rang est exactement r.

> **À retenir :**
> Un endomorphisme u d'un espace de dimension finie vérifie $E = \ker(u) \oplus \mathrm{im}(u)$ si et seulement si sa restriction à son image est un automorphisme. On dit alors que u est de "rang stationnaire" dès le premier cran.

Matrices nilpotentes d'indice maximal

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note N la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $N = (\delta_{i,j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$, c'est-à-dire :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à N si et seulement si M est nilpotente d'indice n.

Indications :
- Pour le sens direct, utiliser le fait que deux matrices semblables ont le même indice de nilpotence.
- Pour le sens réciproque, soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. Utiliser l'existence d'un vecteur x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ pour construire une base adaptée.
- Montrer que la famille $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une base de K^n.

Correction.

Idées clés :
- Invariance de l'indice de nilpotence par similitude.
- Construction d'une base de Krylov (base cyclique).
- Liberté d'une famille de vecteurs itérés par un endomorphisme nilpotent.

Sens direct ($\Longrightarrow$) :

Supposons que M est semblable à N. Il existe donc $P \in GL_n(K)$ telle que $M = PNP^{-1}$.

On observe que N est une matrice de décalage. On vérifie par le calcul (ou par l'interprétation en termes d'endomorphisme de la base canonique) que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, N^k \neq 0 \quad \text{et} \quad N^n = 0$$

L'indice de nilpotence de N est donc exactement n. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k = PN^kP^{-1}$.

Il en résulte immédiatement :

$$\boxed{M^n = 0 \quad \text{et} \quad M^{n-1} \neq 0}$$

Ainsi, M est nilpotente d'indice n.

Sens réciproque ($\Longleftarrow$) :

Supposons que M est nilpotente d'indice n. Soit u l'endomorphisme de $E = K^n$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Par hypothèse, $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur $x \in E$ tel que :

$$u^{n-1}(x) \neq 0$$

Considérons la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad e_k = u^{n-k}(x)$$

C'est-à-dire : $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$.

Montrons que cette famille est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \iff \lambda_1 u^{n-1}(x) + \lambda_2 u^{n-2}(x) + \dots + \lambda_n x = 0$$

Appliquons l'endomorphisme u^{n-1} à cette égalité. Comme $u^k(x) = 0$ pour tout $k \geq n$, il ne reste que :

$$\lambda_n u^{n-1}(x) = 0$$

Puisque $u^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit $\lambda_n = 0$.

En appliquant successivement $u^{n-2}, u^{n-3}, \dots, u^0$, on montre par récurrence descendante que :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0}$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre et contient n vecteurs dans un espace de dimension n. C'est donc une base de E.

Déterminons la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$. Pour $k = 1$, on a $u(e_1) = u(u^{n-1}(x)) = u^n(x) = 0$. Pour $k \in \{2, \dots, n\}$, on a :

$$u(e_k) = u(u^{n-k}(x)) = u^{n-(k-1)}(x) = e_{k-1}$$

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = N}$$

Comme M et N représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, elles sont semblables.

> **Piège :**
> Veiller à l'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ pour obtenir précisément la matrice N avec des 1 sur la sur-diagonale. Si l'on choisit l'ordre $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, les 1 se retrouvent sur la sous-diagonale.

> **À retenir :**
> Pour un endomorphisme nilpotent u d'indice $n = \dim E$, il existe toujours une base de la forme $(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$. On appelle cela une base cyclique.

Trigonalisation d'une matrice nilpotente

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps. On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ supposée nilpotente. Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls).

Indications :
- Procéder par récurrence sur la dimension n de l'espace.
- Utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à M.
- Exploiter le fait que si u est nilpotent et non nul, son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.
- Penser à une base commençant par un vecteur du noyau pour obtenir une structure de blocs.

Correction.

Idées clés :
- Récurrence sur la dimension n.
- Utilisation du noyau d'un endomorphisme nilpotent.
- Changement de base par blocs.

Résolution.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « Toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(K)$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. »

Initialisation.

Pour $n = 1$, une matrice $M \in \mathcal{M}_1(K)$ est un scalaire (λ). Elle est nilpotente si et seulement si $\lambda = 0$. Une telle matrice est bien triangulaire supérieure stricte. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(K)$ une matrice nilpotente. On note u l'endomorphisme de $V = K^{n+1}$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Puisque M est nilpotente, u l'est également. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Ceci implique que u n'est pas injectif (sinon u^k serait injectif et donc non nul). Ainsi :

$$\ker(u) \neq \{0\}$$

Soit e_1 un vecteur non nul de $\ker(u)$. D'après le théorème de la base complétée, on peut construire une base $\mathcal{B} = (e_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1})$ de V. Puisque $u(e_1) = 0$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Calculons les puissances de M_1 par blocs. On remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$M_1^p = \begin{pmatrix} 0 & LA^{p-1} \\ 0 & A^p \end{pmatrix}$$

Puisque M est nilpotente, M_1 l'est aussi. Il existe donc k tel que $M_1^k = 0$, ce qui impose :

$$\boxed{A^k = 0}$$

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est donc nilpotente. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_n(K)$ et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure stricte telles que :

$$\boxed{A = QTQ^{-1}}$$

Considérons alors la matrice de passage par blocs $P \in \mathcal{GL}_{n+1}(K)$ définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Effectuons le produit matriciel :

$$\begin{aligned} P^{-1}M_1P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & Q^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ 0 & Q^{-1}AQ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après la relation de similitude sur A, on a $Q^{-1}AQ = T$. Ainsi :

$$\boxed{P^{-1}M_1P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ 0 & T \end{pmatrix}}$$

Puisque T est triangulaire supérieure stricte, la matrice par blocs obtenue est également triangulaire supérieure stricte dans $\mathcal{M}_{n+1}(K)$. Par transitivité de la relation de similitude, M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Conclusion.

La propriété est démontrée par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier de justifier que la matrice bloc A hérite de la nilpotence de M. C'est un point clé de la démonstration par récurrence.

> **À retenir :**
> Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si sa seule valeur propre est 0 (si le polynôme caractéristique est scindé). En MPSI, on retient surtout que tout endomorphisme nilpotent possède un noyau non trivial, ce qui permet des raisonnements par récurrence sur la dimension.

Réduction de la matrice de un

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que J est semblable à la matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$D = \operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$$

Indications :
- Interpréter la matrice J comme l'expression d'un endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Utiliser le théorème du rang pour déterminer la dimension du noyau de J.
- Rechercher un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle en calculant l'image du vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.
- Construire une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe du noyau et de la droite vectorielle engendrée par ce vecteur.

Correction.

Idées clés :
- Interprétation en termes d'endomorphisme et changement de base.
- Théorème du rang pour la dimension du noyau.
- Stabilité et vecteurs colonnes.

Analyse du rang et du noyau.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice J. Les colonnes de J sont toutes identiques et égales au vecteur $C = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

L'image de f est engendrée par les colonnes de J, donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(C)$. Comme $C \neq 0$, on en déduit :

$$\boxed{\operatorname{rg}(J) = 1}$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim \ker(f) = n - \operatorname{rg}(f)$. On en déduit :

$$\boxed{\dim \ker(f) = n - 1}$$

Recherche d'un vecteur propre pour la valeur n.

Calculons l'image du vecteur C par l'endomorphisme f. Par définition du produit matriciel, le vecteur JC a pour i-ème composante :

$$(JC)_i = \sum_{j=1}^{n} J_{i,j} C_j = \sum_{j=1}^{n} 1 \times 1 = n$$

On obtient donc :

$$\boxed{f(C) = nC}$$

Construction d'une base de diagonalisation.

Considérons une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ du noyau $\ker(f)$.

Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, C)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comme cette famille comporte n vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^n = n$, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varepsilon_i + \lambda_n C = 0$$

En appliquant f à cette égalité, par linéarité et sachant que $f(\varepsilon_i) = 0$, il vient :

$$\lambda_n f(C) = 0 \implies \lambda_n (nC) = 0$$

Comme $n \neq 0$ et $C \neq 0$, on a nécessairement $\lambda_n = 0$. L'équation initiale devient alors $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varepsilon_i = 0$.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ étant une base de $\ker(f)$, elle est libre, d'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Conclusion.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Par la formule du changement de base, J est semblable à cette matrice.

$$\boxed{J \sim \mathrm{diag}(0, 0, \dots, 0, n)}$$

Piège :
Ne pas oublier de préciser que $n \neq 0$ pour affirmer que $nC \neq 0$. Si $n = 1$, la matrice est déjà diagonale et égale à (1).

À retenir :
Une matrice de rang 1 dont la trace est non nulle est toujours semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \mathrm{Tr}(A))$. Ici $\mathrm{Tr}(J) = n$.

Déterminant et perturbation de rang 1

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Montrer que si A et H sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg}(H) = 1$, alors l'application :

$$t \in \mathbb{K} \mapsto \det(A + tH)$$

est affine.

2. En déduire le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients d'indice (i, j) avec $i < j$ valent a, ceux avec $i > j$ valent b (avec $a \neq b$), et dont la diagonale $(d_1, \ldots, d_n)$ est quelconque.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser la n-linéarité du déterminant par rapport aux colonnes. Remarquer que puisque H est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles à un même vecteur non nul.
- Pour la question 2, introduire la matrice H dont tous les coefficients valent 1. Étudier la fonction $f(x) = \det(A - xH)$ et utiliser son caractère affine en l'évaluant en des points judicieusement choisis pour rendre la matrice triangulaire.

Correction.

Idées clés :
- Multilinéarité du déterminant.
- Propriété des familles liées (un déterminant avec deux colonnes colinéaires est nul).
- Interpolation d'une fonction affine par deux points distincts.

1. Nature de l'application $t \mapsto \det(A + tH)$.

Puisque $\operatorname{rg}(H) = 1$, les colonnes de H, notées $H_1, \ldots, H_n$, appartiennent toutes à un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc un vecteur non nul $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $H_j = \lambda_j V$.

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Par n-linéarité du déterminant :

$$\det(A + tH) = \det(C_1 + t\lambda_1 V, C_2 + t\lambda_2 V, \ldots, C_n + t\lambda_n V)$$

En développant par linéarité par rapport à chaque colonne, on obtient une somme de 2^n déterminants. Un terme général de ce développement est de la forme :

$$\det(W_1, \ldots, W_n) \quad \text{où} \quad W_j \in \{C_j, t\lambda_j V\}$$

Si au moins deux indices j et k sont tels que $W_j = t\lambda_j V$ et $W_k = t\lambda_k V$, alors le déterminant possède deux colonnes colinéaires à V. Un tel déterminant est nul.

Il ne reste donc que les termes où V apparaît au plus une fois. Ces termes correspondent aux puissances t^0 et t^1. L'expression est donc de la forme $\alpha t + \beta$.

L'application est donc affine.

$$\boxed{t \mapsto \det(A + tH) \in \mathbb{K}_1[t]}$$

2. Calcul du déterminant de la matrice A.

Considérons la matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. On a $\mathrm{rg}(H) = 1$. D'après la question précédente, l'application $f : x \mapsto \det(A - xH)$ est affine. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tels que $f(x) = \alpha x + \beta$.

Cherchons à évaluer f en a et b. La matrice $A - xH$ a pour coefficients :

$$(A - xH)_{i,j} = \begin{cases} d_i - x & \text{si } i = j \\ a - x & \text{si } i < j \\ b - x & \text{si } i > j \end{cases}$$

Évaluation en $x = a$: Les coefficients au-dessus de la diagonale sont $a - a = 0$. La matrice $A - aH$ est donc triangulaire inférieure. Son déterminant est le produit des éléments diagonaux :

$$\boxed{f(a) = \prod_{k=1}^{n} (d_k - a)}$$

Évaluation en $x = b$: Les coefficients en-dessous de la diagonale sont $b - b = 0$. La matrice $A - bH$ est donc triangulaire supérieure. Son déterminant est :

$$\boxed{f(b) = \prod_{k=1}^{n} (d_k - b)}$$

Synthèse : Puisque $a \neq b$, nous pouvons déterminer $f(0)$ par interpolation linéaire. Le point $(0, f(0))$ appartient à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. La formule d'interpolation donne :

$$f(0) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

En remplaçant par les expressions trouvées :

$$\boxed{\det(A) = \frac{b \prod_{k=1}^{n}(d_k - a) - a \prod_{k=1}^{n}(d_k - b)}{b - a}}$$

> **Piège :**
> Le caractère affine de $t \mapsto \det(A + tH)$ est spécifique au rang 1. Si $\mathrm{rg}(H) = k$, alors l'application est un polynôme de degré au plus k. Ne pas généraliser sans précaution.

> **À retenir :**
> Pour calculer le déterminant d'une matrice "presque" simple (comme une matrice triangulaire modifiée par une matrice de rang 1), l'introduction d'une variable pour exploiter le caractère polynomial ou affine est une méthode extrêmement puissante.

Le déterminant de Vandermonde

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on considère le déterminant suivant, dit de Vandermonde :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Calculer la valeur de $V_n(x_1, \dots, x_n)$.

Indications :

- Procéder par récurrence sur l'entier n.
- Pour l'hérédité, effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes, de la droite vers la gauche, pour faire apparaître des zéros sur la première ligne.
- On pourra utiliser l'opération $C_j \leftarrow C_j - x_1 C_{j-1}$ pour j allant de n jusqu'à 2.

Correction.

Idées clés :

- Opérations élémentaires sur les colonnes.
- Développement par rapport à une ligne.
- Structure de récurrence.

Analyse préliminaire.

Si deux des scalaires x_i sont égaux, le déterminant possède deux lignes identiques et est donc nul. La formule finale devra refléter cette propriété.

Récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ ».

Initialisation : Pour $n = 2$, on a :

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un certain $n \geq 3$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Effectuons les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes, dans cet ordre précis :

$$C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}, \quad C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \dots, \quad C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$$

Ces opérations ne modifient pas la valeur du déterminant. On obtient :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, il vient :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne, on peut factoriser chaque ligne $i-1$ (pour $i \in \{2,\dots,n\}$) par le terme $(x_i - x_1)$. On en déduit :

$$\boxed{V_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\right) V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n-1)$, on a :

$$V_{n-1}(x_2,\dots,x_n) = \prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

En réinjectant ce résultat, on obtient :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right)\left(\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)\right)$$

Ce qui correspond exactement à la formule :

$$\boxed{V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)}$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion.

Par principe de récurrence, la formule est établie pour tout $n \geq 2$.

> **Piège :**
> L'ordre des opérations sur les colonnes est crucial. Si l'on effectue $C_2 \leftarrow C_2 - x_1C_1$ avant $C_3 \leftarrow C_3 - x_1C_2$, la colonne C_2 utilisée pour modifier C_3 aura déjà été modifiée, ce qui fausserait le calcul. Il faut impérativement traiter les colonnes de la droite vers la gauche.

> **À retenir :**
> Le déterminant de Vandermonde est non nul si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts. C'est un outil fondamental pour l'étude de l'interpolation de Lagrange.

12

Espaces euclidiens

Bornes d'une somme de produits scalaires

Énoncé

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ sa sphère unité. Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. On considère l'application $f : S^p \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (v_1, \ldots, v_p) \in S^p, \quad f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle v_i, v_j \rangle$$

En considérant $\| \sum_{i=1}^p v_i \|^2$, déterminer le maximum et le minimum de f sur S^p.

Indications :
- Développer l'expression de la norme au carré d'une somme de vecteurs : $\| \sum_{i=1}^p v_i \|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2 + 2 \sum_{i<j} \langle v_i, v_j \rangle$.
- Utiliser le fait que pour tout i, $v_i \in S$ donc $\|v_i\|^2 = 1$.
- Pour le maximum, utiliser l'inégalité triangulaire.
- Pour le minimum, exploiter la positivité de la norme.

Correction.

Idées clés :
- Relation entre carré de la norme et somme des produits scalaires.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- Positivité d'une forme quadratique (la norme au carré).

Analyse de l'expression.

Soit $(v_1, \ldots, v_p) \in S^p$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p v_i, \sum_{j=1}^p v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq p} \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle v_i, v_j \rangle
\end{aligned}$$

Comme chaque v_i appartient à la sphère unité S, on a $\|v_i\|^2 = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. On en déduit :

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = p + 2f(v_1, \ldots, v_p)$$

Ce qui permet d'exprimer f sous la forme :

$$f(v_1, \ldots, v_p) = \frac{1}{2} \left(\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 - p \right)$$

Recherche du maximum.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|v_i\| = p$$

En élevant au carré (tout est positif), on obtient :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 \leq p^2$$

Ainsi :

$$f(v_1, \ldots, v_p) \leq \frac{1}{2}(p^2 - p) = \frac{p(p-1)}{2}$$

Cette valeur est atteinte si et seulement si l'inégalité triangulaire est une égalité, c'est-à-dire si tous les vecteurs v_i sont colinéaires et de même sens. Comme ils sont tous dans S, cela revient à $v_1 = v_2 = \cdots = v_p$.

On conclut :

$$\boxed{\max_{S^p} f = \frac{p(p-1)}{2}}$$

Recherche du minimum.

La norme au carré étant toujours positive ou nulle, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 \geq 0$$

Par conséquent :

$$f(v_1, \ldots, v_p) \geq -\frac{p}{2}$$

La valeur $-p/2$ est atteinte si et seulement s'il existe une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$ de la sphère unité telle que :

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = 0_E$$

Cette condition est réalisable dans plusieurs cas fréquents en exercice :

1. Si p est pair, il suffit de prendre $p/2$ vecteurs égaux à $u \in S$ et $p/2$ vecteurs égaux à $-u$.
2. Si $\dim E \geq p - 1$, il est toujours possible de construire un système de p vecteurs formant un simplexe régulier centré en l'origine (par exemple, pour $p = 3$ et $\dim E \geq 2$, trois vecteurs à $120°$ dans un plan).

Dans le cas général d'un espace euclidien de dimension suffisante, on a :

$$\boxed{\min_{S^p} f = -\frac{p}{2}}$$

Piège :
Affirmer que le minimum est toujours $-p/2$ sans discuter la possibilité que la somme soit nulle. Si $\dim E = 1$ et p est impair, la somme de p éléments de $\{-1, 1\}$ ne peut être nulle, et le minimum sera alors différent (il vaudra $\frac{1-p}{2}$). Cependant, dans le cadre classique des concours, on attend généralement la borne globale $-p/2$.

À retenir :

La formule de développement du carré d'une somme :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle$$

est un outil fondamental pour lier les normes et les angles (via les produits scalaires) au sein d'une famille de vecteurs.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et optimisation linéaire

Énoncé

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Déterminer le maximum de la fonction f lorsque le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

Indications :
- Interpréter l'expression de f et la contrainte à l'aide du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $f(x_1, \ldots, x_n)$.
- Identifier le cas d'égalité pour vérifier que la borne supérieure est bien atteinte.

Correction.

Idées clés :
- Structure d'espace euclidien de $\mathbb{R}^n$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle a, x\rangle| \leq \|a\|\|x\|$.
- Cas d'égalité : colinéarité des vecteurs.

Formulation vectorielle.

Munissons $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure d'espace euclidien canonique. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$. L'expression de la fonction et la contrainte se réécrivent :

$$f(x) = \langle a, x\rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = 1$$

Majoration de la fonction.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|\langle a, x\rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\|$$

Comme on suppose $\|x\| = 1$, il vient :

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|a\|$$

En remplaçant $\|a\|$ par son expression en fonction des coordonnées, on obtient la majoration suivante pour tout x de la sphère unité :

$$\boxed{f(x) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

Recherche du maximum.

Cas 1 : $a = 0$.

Si tous les a_i sont nuls, alors f est la fonction nulle. Son maximum sur la sphère unité est 0, ce qui est bien cohérent avec la formule précédente.

Cas 2 : $a \neq 0$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si la famille (a, x) est liée. Comme $a \neq 0$ et $\|x\| = 1$, cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$.

La condition $\|x\| = 1$ impose alors :

$$|\lambda| \cdot \|a\| = 1 \iff \lambda = \pm \frac{1}{\|a\|}$$

Pour que $f(x)$ atteigne la valeur $\|a\|$, il faut que le produit scalaire $\langle a, x\rangle$ soit positif, donc que x et a soient de même sens. On choisit alors $\lambda = \frac{1}{\|a\|}$.

Le vecteur $x^* = \frac{1}{\|a\|} a$ appartient bien à la sphère unité et vérifie :

$$f(x^*) = \left\langle a, \frac{1}{\|a\|} a \right\rangle = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

Conclusion.

La valeur maximale de la fonction f sous la contrainte donnée est :

$$\boxed{\max_{\|x\|=1} f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de vérifier que la borne supérieure est effectivement atteinte (existence du maximum) en exhibant un vecteur x satisfaisant la contrainte.

> **À retenir :**
> Sur un espace euclidien, le maximum d'une forme linéaire $x \mapsto \langle a, x\rangle$ sur la sphère unité est égal à la norme du vecteur a. Il est atteint uniquement pour le vecteur unitaire de même sens que a.

Orthogonal d'un sous-espace et supplémentaire

Énoncé

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

On considère le sous-espace vectoriel F constitué des fonctions dont la restriction à $[0,1]$ est nulle :

$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0\}$$

1. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F dans E.
2. Vérifier que $F \oplus F^\perp \neq E$.

Indications :

- Pour la question 1, une inclusion est immédiate. Pour l'autre, on pourra considérer une fonction $f \in F$ bien choisie, par exemple de la forme $t \mapsto t \cdot g(t)$ sur $[-1,0]$, pour exploiter la nullité de l'intégrale d'une fonction de signe constant.
- Pour la question 2, on pourra remarquer que toute fonction appartenant à la somme $F + F^\perp$ possède une propriété particulière en $t = 0$.

Correction.

Idées clés :

- Lien entre intégrale nulle et fonction nulle pour les fonctions continues.
- Construction de fonctions "tests" dans un sous-espace.
- Propriété de stabilité par passage à la limite (continuité) au point de jonction $t = 0$.

1. Détermination de $F^\perp$.

Soit $g \in E$. Notons $G = \{g \in E \mid \forall t \in [-1,0],\ g(t) = 0\}$. Montrons que $F^\perp = G$.

Inclusion $G \subset F^\perp$: Soit $g \in G$. Pour tout $f \in F$, on a :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{0} f(t)g(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

Or, par définition de F et G :

— $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$, donc la seconde intégrale est nulle.

— $\forall t \in [-1,0], g(t) = 0$, donc la première intégrale est nulle.

On en déduit $\langle f, g\rangle = 0$, d'où $g \in F^\perp$.

Inclusion $F^\perp \subset G$: Soit $g \in F^\perp$. Par définition, $\forall f \in F, \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = 0$. Comme f est nulle sur $[0,1]$, cela revient à :

$$\forall f \in F, \quad \int_{-1}^{0} f(t)g(t)\,dt = 0$$

Considérons la fonction f_0 définie par :

$$f_0(t) = \begin{cases} tg(t) & \text{si } t \in [-1,0] \\ 0 & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

La fonction f_0 est continue sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. De plus, $\lim_{t\to 0^-} f_0(t) = 0\cdot g(0) = 0$ et $f_0(0) = 0$, donc f_0 est continue en 0. Ainsi $f_0 \in E$. Comme f_0 est nulle sur $[0,1]$, on a $f_0 \in F$. En utilisant f_0 dans la définition de l'orthogonal, on obtient :

$$\int_{-1}^{0} tg(t)^2\,dt = 0$$

La fonction $t \mapsto tg(t)^2$ est continue et négative sur $[-1,0]$. Puisque son intégrale sur cet intervalle est nulle, la fonction est identiquement nulle sur $[-1,0]$:

$$\forall t \in [-1,0], \quad tg(t)^2 = 0$$

Pour tout $t \in [-1,0[$, on a donc $g(t)^2 = 0$, soit $g(t) = 0$. Par continuité de g en 0, on a aussi $g(0) = 0$.

On conclut :

$$\boxed{F^\perp = \{g \in E \mid \forall t \in [-1,0],\ g(t) = 0\}}$$

2. Étude de la somme $F \oplus F^\perp$.

Montrons d'abord que la somme est directe. Soit $h \in F \cap F^\perp$. D'après les définitions de F et $F^\perp$, h est nulle sur $[0,1]$ et sur $[-1,0]$. Donc h est nulle sur $[-1,1]$. On a bien $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Analysons maintenant les éléments de la somme $F + F^\perp$. Soit $h \in F + F^\perp$. Il existe $f \in F$ et $g \in F^\perp$ tels que $h = f + g$.

Par définition des sous-espaces :

— $f \in F \implies f(0) = 0$ (car f est nulle sur $[0,1]$).
— $g \in F^\perp \implies g(0) = 0$ (car g est nulle sur $[-1,0]$).

Dès lors :

$$h(0) = f(0) + g(0) = 0$$

Toute fonction de $F \oplus F^\perp$ s'annule nécessairement en 0. Or, la fonction constante $u : t \mapsto 1$ appartient à E mais ne s'annule pas en 0.

Par conséquent, $u \notin F \oplus F^\perp$, ce qui prouve :

$$\boxed{F \oplus F^\perp \neq E}$$

> **Piège :**
> En dimension finie, on a toujours $E = F \oplus F^\perp$. Ce résultat est faux en dimension infinie si l'espace n'est pas complet (espace de Hilbert) ou si le sous-espace n'est pas de dimension finie. Ici, F est un sous-espace de dimension infinie et n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

> **À retenir :**
> Pour montrer qu'une fonction continue g est nulle sur un intervalle $[a,b]$, on cherche souvent à montrer que $\int_a^b g(t)^2\,dt = 0$ ou que $\int_a^b g(t)h(t)\,dt = 0$ pour une famille de fonctions h suffisamment riche.

Projection orthogonale et distance dans $\mathbb{R}[X]$

Énoncé

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

Calculer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ ainsi que la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Indications :

- On pourra chercher la projection orthogonale $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$ sous la forme $aX + b$ en utilisant les conditions d'orthogonalité : $X^2 - P \perp 1$ et $X^2 - P \perp X$.
- Utiliser les propriétés de parité pour simplifier le calcul des intégrales sur $[-1, 1]$.
- La distance $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$ est donnée par la norme de la différence entre X^2 et sa projection.

Correction.

Idées clés :

- Caractérisation de la projection orthogonale par l'orthogonalité du reste.
- Utilisation d'une base (éventuellement orthogonale) de l'espace de projection.
- Lien entre distance et norme du projeté orthogonal.

1. Calcul de la projection orthogonale

Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$. On cherche $P \in F$ tel que $(X^2 - P) \in F^{\perp}$.

Puisque $(1, X)$ est une base de F, cette condition est équivalente au système :

$$\begin{cases} \langle X^2 - P, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - P, X \rangle = 0 \end{cases}$$

Posons $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le système devient :

$$\begin{cases} \langle P, 1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle \\ \langle P, X \rangle = \langle X^2, X \rangle \end{cases}$$

Calculons les différents produits scalaires en exploitant la parité des fonctions intégrées :

- $\langle X^2, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$.
- $\langle X^2, X \rangle = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$ (par imparité).
- $\langle aX + b, 1 \rangle = a \int_{-1}^{1} t\,dt + b \int_{-1}^{1} 1\,dt = 0 + 2b = 2b$.
- $\langle aX + b, X \rangle = a \int_{-1}^{1} t^2\,dt + b \int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{2a}{3} + 0 = \frac{2a}{3}$.

Le système se réduit donc à :

$$\begin{cases} 2b = \frac{2}{3} \\ \frac{2a}{3} = 0 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement $a = 0$ et $b = \frac{1}{3}$.

La projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc :

$$\boxed{p_F(X^2) = \frac{1}{3}}$$

2. Calcul de la distance

La distance d de X^2 à F est définie par $d = \|X^2 - p_F(X^2)\|$. On a :

$$d^2 = \left\| X^2 - \frac{1}{3} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt$$

Développons l'expression sous l'intégrale :

$$\left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 = t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}$$

Par intégration, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d^2 &= \int_{-1}^{1} t^4 \, dt - \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} t^2 \, dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{9} \, dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5} \right]_{-1}^{1} - \frac{2}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

En mettant au même dénominateur :

$$d^2 = \frac{18 - 10}{45} = \frac{8}{45}$$

Ainsi, la distance est $d = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$. En multipliant en haut et en bas par $\sqrt{5}$:

$$\boxed{d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{2\sqrt{10}}{15}}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier que la distance est la **racine carrée** de l'intégrale calculée. Il est fréquent en concours de s'arrêter à d^2.

> **À retenir :**
> Pour projeter sur un sous-espace de dimension finie F, si l'on dispose d'une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$, la formule est directe :
> $$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$$
> Ici, la base $(1, X)$ est déjà orthogonale pour ce produit scalaire, ce qui a simplifié les calculs.

Polynômes orthogonaux et récurrence

Énoncé

Soit w une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On définit pour tout couple (P,Q) de $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n, et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, on a :

$$\int_0^1 P_n(t)P_m(t)w(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède n zéros simples dans $]0,1[$.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. En déduire qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$$

Indications :

- Pour la question 1, utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, \dots, X^n, \dots)$ en adaptant la condition de normalisation par le caractère unitaire.
- Pour la question 2, considérer les racines où P_n change de signe dans $]0,1[$. Si leur nombre k est strictement inférieur à n, construire un polynôme Q de degré k orthogonal à P_n tout en imposant que P_nQ soit de signe constant.
- Pour la question 3, utiliser la propriété : $P \perp \mathbb{R}_{n-1}[X] \iff \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, Q\rangle = 0$. Remarquer que $\langle XP_n, R\rangle = \langle P_n, XR\rangle$.

Correction.

Idées clés :

- Procédé de Gram-Schmidt.
- Propriété d'orthogonalité : $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.
- Argument de changement de signe pour les racines.

Résolution.

1. **Existence et unicité.**

   L'application $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En effet, la forme est bilinéaire, symétrique, et la positivité de w ainsi que la continuité assurent que $\langle P, P\rangle \geq 0$. De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors P^2w est une fonction continue positive d'intégrale nulle, donc $P^2w = 0$. Comme $w > 0$, on a $P = 0$.

   Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une unique famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale telle que pour tout n, $\mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_n) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^n)$ et chaque Q_n a son coefficient dominant égal à 1.

   Pour chaque n, P_n est défini par :

$$\boxed{P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k}$$

Cette construction par récurrence assure l'existence et l'unicité de la suite.

2. **Étude des racines.**

Soit $n \geq 1$. P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc en particulier $\langle P_n, 1\rangle = \int_0^1 P_n(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$. Comme $w > 0$, P_n doit changer de signe au moins une fois sur $]0,1[$.

Soient $x_1, \ldots, x_k$ les points de $]0,1[$ où P_n change de signe. Ces points correspondent aux racines de multiplicité impaire de P_n situées dans l'intervalle ouvert.

Supposons par l'absurde que $k < n$. Considérons le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)$ (si $k = 0$, on prend $Q = 1$).

Par construction, $P_n(x)Q(x)$ garde un signe constant sur $]0,1[$ car chaque changement de signe de P_n est "compensé" par celui de Q. Comme P_nQw est continue, non nulle et de signe constant, on a :

$$\int_0^1 P_n(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t \neq 0$$

Or, Q est de degré $k \leq n-1$, donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par orthogonalité, cette intégrale doit être nulle. C'est une contradiction.

On en déduit $k \geq n$. Comme $\deg P_n = n$, le nombre de racines ne peut excéder n. Ainsi $k = n$, et toutes les racines sont simples et situées dans $]0,1[$.

$$\boxed{P_n \text{ possède } n \text{ racines simples dans }]0,1[}$$

3. **Relation de récurrence.**

Étape 1 : Orthogonalité. Soit $n \geq 2$. Le polynôme $R = P_{n+1} - XP_n$ est de degré au plus n car les termes en X^{n+1} s'annulent (P_{n+1} et P_n sont unitaires).

Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On a :

$$\langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = \langle P_{n+1}, Q\rangle - \langle XP_n, Q\rangle$$

D'une part, $\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0$ car $\deg Q \leq n-2 < n+1$. D'autre part :

$$\langle XP_n, Q\rangle = \int_0^1 tP_n(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t = \langle P_n, XQ\rangle$$

Comme $\deg(XQ) \leq n-1$, on a $\langle P_n, XQ\rangle = 0$. On en conclut :

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0}$$

Étape 2 : Décomposition. Puisque $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire :

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$$

En utilisant l'orthogonalité démontrée ci-dessus, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-2\}$:

$$0 = \langle P_{n+1} - XP_n, P_j\rangle = \lambda_j \langle P_j, P_j\rangle$$

Puisque $\langle P_j, P_j\rangle \neq 0$, on a $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n-2\}$. Il ne reste que les termes pour $k = n$ et $k = n-1$:

$$P_{n+1} - XP_n = \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

En posant $a_n = -\lambda_n$ et $b_n = -\lambda_{n-1}$, on obtient bien :

$$\boxed{P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}}$$

Piège :
Dans la question 2, bien préciser que $P_n Q$ est de signe constant et **non nul** pour conclure que l'intégrale est non nulle. L'hypothèse $w > 0$ est ici cruciale.

À retenir :
Tout système de polynômes orthogonaux vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. C'est une propriété fondamentale (familles de Jacobi, Legendre, Hermite, etc.).

Matrice d'un projecteur orthogonal

Énoncé

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit v le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal sur la droite $D = \mathrm{Vect}(v)$.

Indications :
- Rappeler l'expression analytique du projecteur orthogonal p_D sur une droite dirigée par un vecteur non nul v : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p_D(x) = \frac{\langle x,v \rangle}{\|v\|^2} v$.
- Calculer les images des vecteurs de la base canonique par ce projecteur.
- En déduire les colonnes de la matrice recherchée.

Correction.

Idées clés :
- Expression du projeté orthogonal sur une droite.
- Calcul de la norme et du produit scalaire usuel.
- Lien entre application linéaire et matrice.

Analyse du problème.

Soit p le projecteur orthogonal sur la droite $D = \mathrm{Vect}(v)$. Par définition du projeté orthogonal sur une droite vectorielle dirigée par un vecteur non nul v, nous avons pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$:

$$p(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

Calcul des éléments intermédiaires.

Calculons tout d'abord la norme au carré du vecteur $v = (1, 1, 1)$:

$$\|v\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

Soit désormais un vecteur quelconque $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le produit scalaire usuel de u et v est :

$$\langle u, v \rangle = x \times 1 + y \times 1 + z \times 1 = x + y + z$$

Détermination de l'expression analytique.

En remplaçant ces résultats dans la formule du projecteur, on obtient :

$$p(u) = \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne les coordonnées (x', y', z') du projeté :

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + y + z) \\ y' = \frac{1}{3}(x + y + z) \\ z' = \frac{1}{3}(x + y + z) \end{cases}}$$

Construction de la matrice.

La matrice M du projecteur p dans la base canonique est la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs e_1, e_2 et e_3 par p.

Pour $e_1 = (1, 0, 0)$, on a $p(e_1) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$.

Pour $e_2 = (0, 1, 0)$, on a $p(e_2) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$.

Pour $e_3 = (0, 0, 1)$, on a $p(e_3) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$.

On en déduit la matrice :

$$\boxed{M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à oublier de diviser par $\|v\|^2$. La formule $p(u) = \langle u, v\rangle v$ n'est valable que si v est un vecteur **unitaire**. Ici, $\|v\| = \sqrt{3}$.

À retenir :
Si $D = \text{Vect}(v)$, la matrice du projecteur orthogonal p_D dans la base canonique est donnée par :

$$M = \frac{1}{\|v\|^2} V V^T$$

où V est le vecteur colonne des coordonnées de v. Ici, VV^T donne une matrice dont tous les coefficients valent 1.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Énoncé

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Indications :
- Pour le sens direct, utiliser la décomposition de x sur $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et le théorème de Pythagore.
- Pour le sens réciproque, soit $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$. Appliquer l'hypothèse au vecteur $x = y + \lambda z$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, puis étudier le trinôme en λ ainsi obtenu.

Correction.

Idées clés :
- Définition d'un projecteur orthogonal : $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$.
- Utilisation du caractère 1-lipschitzien de la projection orthogonale.
- Étude d'une fonction de variable réelle (trinôme) pour obtenir une orthogonalité.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E. On rappelle que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Sens direct : Supposons que p est un projecteur orthogonal.

Soit $x \in E$. On peut décomposer x de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$.

Par définition d'un projecteur, on a $p(x) = y$. Puisque p est un projecteur orthogonal, les vecteurs y et z sont orthogonaux.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

Comme $\|z\|^2 \geq 0$, on en déduit $\|x\|^2 \geq \|y\|^2$, soit $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|}$$

Sens réciproque : Supposons que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Pour montrer que p est un projecteur orthogonal, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$.

Soient $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $x_\lambda = y + \lambda z$.

Calculons l'image de x_λ par p :

$$p(x_\lambda) = p(y) + \lambda p(z) = y + 0 = y$$

L'hypothèse $\|p(x_\lambda)\| \leq \|x_\lambda\|$ se réécrit alors $\|y\| \leq \|y + \lambda z\|$. En passant au carré :

$$\|y\|^2 \leq \|y + \lambda z\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda\langle y, z\rangle + \lambda^2\|z\|^2$$

On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$2\lambda\langle y, z\rangle + \lambda^2\|z\|^2 \geq 0$$

Considérons la fonction $f : \lambda \mapsto \|z\|^2\lambda^2 + 2\langle y, z\rangle\lambda$. C'est un trinôme du second degré (ou du premier degré si $z = 0$) qui reste positif ou nul sur $\mathbb{R}$.

Si $\langle y, z\rangle \neq 0$, la fonction f change de signe au voisinage de 0 (car le terme linéaire domine), ce qui est exclu.

Plus rigoureusement, si l'on suppose $\lambda > 0$, la division par λ donne :

$$2\langle y, z\rangle + \lambda\|z\|^2 \geq 0$$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs positives, on obtient $\langle y, z\rangle \geq 0$.

En effectuant le même raisonnement avec $\lambda < 0$ (en changeant le sens de l'inégalité lors de la division), on obtient $\langle y, z\rangle \leq 0$.

On conclut donc que :

$$\boxed{\langle y, z\rangle = 0}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont orthogonaux.

> **Piège :**
> Ne pas oublier d'utiliser la propriété $p(y) = y$ pour $y \in \mathrm{Im}(p)$, qui est la définition même d'un projecteur, indispensable pour simplifier $\|p(y + \lambda z)\|$.

> **À retenir :**
> Un projecteur est orthogonal si et seulement si il est une application 1-lipschitzienne. Plus généralement, dans un espace de Hilbert, cela revient à dire que la norme de l'opérateur est égale à 1 (si $p \neq 0$).

Distance d'un monôme à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Énoncé

Soient $n \geq 1$ et, pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 dt$$

1. Montrer qu'il existe un unique P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad I(Q) \geq I(P)$$

2. Soit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ ce polynôme. On pose :

$$F(X) = \frac{1}{X+n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X+j+1}$$

   Calculer $F(i)$ pour $0 \leq i \leq n-1$. En déduire l'expression de F puis celle des coefficients a_j.

3. Montrer que $I(P) = F(n)$ et calculer cette quantité.

Indications :

- Pour la question 1, interpréter $I(P)$ comme le carré d'une norme issue d'un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.
- La condition de minimalité pour une distance à un sous-espace de dimension finie est caractérisée par l'orthogonalité.
- Pour la question 2, une fraction rationnelle est déterminée par ses pôles, ses racines et son comportement à l'infini (ou un résidu particulier).
- Pour la question 3, utiliser le fait que P est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Correction.

Idées clés :

- Théorème de la projection orthogonale.
- Caractérisation de la projection par l'orthogonalité.
- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

1. Existence et unicité de P.

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

L'application $I(P)$ représente le carré de la norme de la différence entre X^n et P :

$$I(P) = \|X^n - P\|^2$$

$\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

D'après le théorème de la projection orthogonale dans un espace préhilbertien, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui minimise cette distance. Ce polynôme est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Calcul de F et des coefficients a_j.

Le polynôme P est caractérisé par la condition d'orthogonalité :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \langle X^n - P, Q\rangle = 0$$

En particulier, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, en prenant $Q = X^i$, on a :

$$\int_0^1 (t^n - P(t))t^i dt = 0$$

En développant l'intégrale et en utilisant la linéarité :

$$\int_0^1 t^{n+i} dt - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^1 t^{j+i} dt = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{n+i+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+i+1} = 0$$

On reconnaît exactement l'expression de F évaluée en i. On en déduit :

$$\boxed{\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad F(i) = 0}$$

F est une fraction rationnelle dont les pôles sont simples et situés en $\{-1, -2, \dots, -(n+1)\}$.

En réduisant au même dénominateur $D(X) = \prod_{k=0}^{n}(X+k+1)$, on constate que le numérateur $N(X)$ est un polynôme de degré au plus n. Or, nous venons de montrer que F possède n racines distinctes $0, 1, \dots, n-1$. Ainsi :

$$F(X) = \frac{C\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$$

Pour déterminer la constante C, on calcule le résidu de F au pôle $-(n+1)$. D'après la définition de F :

$$\text{Res}(F, -(n+1)) = \lim_{x \to -(n+1)} (x+n+1)F(x) = 1$$

D'après la forme factorisée :

$$\text{Res}(F, -(n+1)) = \frac{C\prod_{k=0}^{n-1}(-n-1-k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(-n-1+k+1)} = \frac{C(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}}{(-1)^n n!} = C\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

On en déduit $C = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. L'expression de F est donc :

$$\boxed{F(X) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}}$$

Les coefficients a_j s'obtiennent en remarquant que $-a_j$ est le résidu de F au pôle $-(j+1)$:

$$a_j = -\text{Res}(F, -(j+1)) = -\frac{C\prod_{k=0}^{n-1}(-j-1-k)}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(-j-1+k+1)}$$

$$a_j = (-1)^{n-j-1} \frac{(n+j)!}{(j!)^2(n-j-1)!} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

3. Calcul de $I(P)$.

Par les propriétés de la projection orthogonale :

$$\begin{aligned} I(P) &= \langle X^n - P, X^n - P\rangle \\ &= \langle X^n - P, X^n\rangle - \langle X^n - P, P\rangle \\ &= \langle X^n - P, X^n\rangle \quad \text{car } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

On a donc :

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))t^n dt = \frac{1}{2n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{n+j+1}$$

On reconnaît $F(n)$. Calculons cette valeur :

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{n}(n+k+1)} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(2n)(2n+1)} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{I(P) = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}}$$

Piège :
Une erreur classique consiste à oublier que $F(n)$ fait intervenir un dénominateur allant jusqu'à $n+n+1 = 2n+1$. Il faut être vigilant sur les bornes des produits.

À retenir :
La distance d'un vecteur x à un sous-espace V est donnée par :

$$d(x, V)^2 = \langle x - p_V(x), x\rangle$$

où $p_V(x)$ est le projeté orthogonal de x sur V.

Cardinal d'une famille obtusangle

Énoncé

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2, \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j\rangle < 0$$

Montrer que $p \leq n+1$.

Indications :
- Remarquer d'abord que les vecteurs de la famille sont nécessairement non nuls.
- Montrer que toute sous-famille de cardinal $p-1$ est libre.
- Pour cela, considérer une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$ et séparer les coefficients selon leur signe en posant $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{j \in J}(-\lambda_j)x_j$.
- Utiliser le produit scalaire avec le p-ième vecteur x_p pour conclure.

Correction.

Idées clés :
- Étude de la liberté d'une sous-famille.
- Technique de séparation des coefficients positifs et négatifs.
- Utilisation de la structure euclidienne pour forcer la nullité des coefficients.

Analyse préliminaire.

On remarque que pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, $x_i \neq 0$. En effet, s'il existait i_0 tel que $x_{i_0} = 0$, alors pour tout $j \neq i_0$, on aurait $\langle x_{i_0}, x_j\rangle = 0$, ce qui contredit l'hypothèse d'obtusangle strict ($\langle x_i, x_j\rangle < 0$).

Si $p = 1$, l'inégalité $1 \leq n+1$ est immédiate car $n \geq 1$. Supposons désormais $p \geq 2$.

Démonstration de la liberté de la sous-famille $(x_1, \ldots, x_{p-1})$.

Considérons une famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0_E$$

Définissons les ensembles d'indices suivants :

$$I = \{i \in \{1,\ldots,p-1\} \mid \lambda_i \geq 0\} \quad \text{et} \quad J = \{i \in \{1,\ldots,p-1\} \mid \lambda_i < 0\}$$

On peut alors écrire :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) x_j$$

Posons $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$. Par définition de J, pour tout $j \in J$, on a $-\lambda_j > 0$. Calculons la norme au carré de y en utilisant les deux expressions :

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i x_i, \sum_{j\in J} (-\lambda_j) x_j \right\rangle = \sum_{i \in I}\sum_{j\in J} \lambda_i(-\lambda_j)\langle x_i, x_j\rangle$$

Or, par hypothèse, pour tout $(i,j) \in I \times J$, on a $i \neq j$ (car I et J sont disjoints), donc $\langle x_i, x_j\rangle < 0$.

Comme $\lambda_i \geq 0$ et $-\lambda_j > 0$, chaque terme de la double somme est négatif ou nul. On en déduit $\|y\|^2 \leq 0$, d'où $y = 0_E$.

Exploitons maintenant le vecteur x_p. Puisque $y = 0_E$, nous avons :

$$\langle y, x_p \rangle = 0 \iff \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_p \rangle = 0$$

Pour tout $i \in I$, on sait que $\langle x_i, x_p \rangle < 0$ et $\lambda_i \geq 0$. Pour que cette somme soit nulle, il est nécessaire que chaque terme soit nul, ce qui impose :

$$\forall i \in I, \quad \lambda_i = 0$$

Par un raisonnement symétrique sur la somme définissant y via les indices de J, on montre de même que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

Conclusion sur le cardinal.

Tous les coefficients λ_i sont nuls, donc :

$$\boxed{\text{La famille } (x_1, \dots, x_{p-1}) \text{ est libre.}}$$

Par propriété de la dimension dans un espace de dimension n, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace :

$$p - 1 \leq n$$

On en conclut finalement :

$$\boxed{p \leq n + 1}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à essayer de montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. C'est faux en général : dans $\mathbb{R}$ ($n = 1$), les vecteurs $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ vérifient la condition $\langle x_1, x_2 \rangle = -1 < 0$, mais ils forment une famille liée de cardinal $n + 1 = 2$.

> **À retenir :**
> Pour montrer une inégalité de type $p \leq n + 1$ dans un espace de dimension n, une stratégie efficace est de prouver qu'une sous-famille de cardinal $p - 1$ est libre.

Matrices orthogonales à coefficients entiers

Énoncé

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des entiers, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{Z}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

Indications :
- Rappeler la caractérisation d'une matrice orthogonale par ses vecteurs colonnes.
- Traduire la condition de normalité d'une colonne dans le cas où ses coefficients sont des entiers.
- Utiliser l'orthogonalité des colonnes pour conclure sur la structure de la matrice.

Correction.

Idées clés :
- Colonnes d'une matrice orthogonale : base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- Étude de l'équation $\sum x_i^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}^n$.
- Structure des matrices de permutation signée.

Analyse.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$.

On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de M. Par définition d'une matrice orthogonale, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

En particulier, pour tout indice $j \in \{1, \dots, n\}$, la norme du vecteur C_j est égale à 1, ce qui donne :

$$\boxed{\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1}$$

Or, par hypothèse, les coefficients $m_{i,j}$ sont des entiers relatifs. Leurs carrés $m_{i,j}^2$ sont donc des entiers naturels, c'est-à-dire $m_{i,j}^2 \in \{0, 1, 4, 9, \dots\}$.

La seule façon d'obtenir une somme d'entiers naturels égale à 1 est que l'un des termes soit égal à 1 et que tous les autres soient nuls.

Ainsi, pour chaque colonne j, il existe un unique indice de ligne, que l'on note $\sigma(j) \in \{1, \dots, n\}$, tel que :

$$\boxed{m_{\sigma(j),j}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \neq \sigma(j),\ m_{i,j} = 0}$$

On en déduit que $m_{\sigma(j),j} \in \{1, -1\}$. Chaque colonne contient donc exactement un coefficient non nul, égal à 1 ou -1.

Utilisons maintenant l'orthogonalité des colonnes. Pour tout $j \neq k$, on a $\langle C_j, C_k \rangle = 0$.

Le produit scalaire est donné par :

$$\langle C_j, C_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} m_{i,k} = m_{\sigma(j),j} \cdot m_{\sigma(j),k}$$

Pour que ce produit soit nul, il est nécessaire que $m_{\sigma(j),k} = 0$. D'après ce qui précède, cela impose $\sigma(k) \neq \sigma(j)$.

L'application $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ est donc une injection d'un ensemble fini dans lui-même, c'est donc une permutation.

Synthèse.

Réciproquement, soit M une matrice telle que chaque colonne contient exactement un coefficient égal à ± 1 et les autres nuls, ces coefficients occupant des lignes distinctes (permutation).

Une telle matrice M possède des coefficients entiers. Ses colonnes C_j sont de norme 1 et sont deux à deux orthogonales (car leurs supports sont disjoints). Donc $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$.

Conclusion.

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de "permutation signée". Ce sont les matrices ayant exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient valant 1 ou -1.

On peut les décrire comme les matrices de la forme $M = PD$, où P est une matrice de permutation et $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})) = 2^n \times n!}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier que les coefficients peuvent valoir -1. Une erreur fréquente consiste à ne trouver que les matrices de permutation (où les coefficients valent 0 ou 1).

> **À retenir :**
> Dans $\mathbb{Z}$, l'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ possède exactement $2n$ solutions : les vecteurs de la base canonique et leurs opposés.

Maximum de la trace sur le groupe orthogonal

Énoncé

Déterminer le maximum de la fonction Tr sur le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et préciser en quels points ce maximum est atteint.

Indications :
- Munir l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (produit scalaire de Frobenius).
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour comparer $\mathrm{Tr}(M)$ et le produit des normes de I_n et M.
- Étudier le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction.

Idées clés :
- Produit scalaire de Frobenius : $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
- Norme euclidienne associée : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

Analyse du problème.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, défini pour tout couple de matrices (A, B) par :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par définition, M est une matrice orthogonale, ce qui signifie que ${}^tMM = I_n$.

Calculons la norme de M pour ce produit scalaire :

$$\|M\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tMM) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$$

De même, pour la matrice identité I_n, on a :

$$\|I_n\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tI_nI_n) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$$

Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On remarque que la trace de M peut s'exprimer comme un produit scalaire. En effet, comme ${}^tI_n = I_n$, nous avons :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(I_nM) = \mathrm{Tr}({}^tI_nM) = \langle I_n, M\rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux matrices I_n et M, nous obtenons :

$$|\langle I_n, M\rangle| \leq \|I_n\| \cdot \|M\|$$

En remplaçant par les valeurs calculées précédemment, il vient :

$$|\mathrm{Tr}(M)| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$$

On en déduit que pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la trace est majorée par n :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M) \leq n}$$

Étude du cas d'égalité.

Le maximum n est atteint si et seulement si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité et que le produit scalaire est positif.

On sait que $|\langle I_n, M\rangle| = \|I_n\| \cdot \|M\|$ si et seulement si la famille (I_n, M) est liée.

Comme $I_n \neq 0$, cela signifie qu'il existe un réel λ tel que :

$$M = \lambda I_n$$

En utilisant la condition d'appartenance au groupe orthogonal $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on doit avoir :

$$\|M\| = \|I_n\| \implies |\lambda| \cdot \|I_n\| = \|I_n\| \implies |\lambda| = 1$$

Ainsi, les deux seules matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ colinéaires à I_n sont I_n et $-I_n$.

1. Si $M = I_n$, alors $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.
2. Si $M = -I_n$, alors $\mathrm{Tr}(-I_n) = -n$.

Conclusion.

Le maximum de la trace sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est n.

$$\boxed{\max_{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(M) = n}$$

Ce maximum est atteint en un unique point :

$$\boxed{M = I_n}$$

> **Piège :**
> Ne pas oublier de vérifier que la matrice réalisant le maximum appartient bien à l'ensemble d'étude $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ici, $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est immédiat.

> **À retenir :**
> La trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est intimement liée au produit scalaire canonique. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$, on a toujours $\|M\|^2 = \sum_{i,j} m_{i,j}^2$. Pour une matrice orthogonale, la somme des carrés de tous les coefficients vaut toujours n.

Restriction cristallographique plane

Énoncé

Soit P un plan euclidien orienté et r la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe une base (u, v) de P telle que le réseau $\Gamma = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ soit stable par r, c'est-à-dire que $r(\Gamma) \subset \Gamma$.
Montrer que :

$$\cos(\theta) \in \left\{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$$

Indications :
- Exprimer la condition $r(\Gamma) \subset \Gamma$ en termes de coefficients matriciels de r dans la base (u, v).
- Utiliser l'invariance de la trace d'un endomorphisme par changement de base.
- Comparer la trace obtenue dans une base orthonormée directe et celle obtenue dans la base (u, v).

Correction.

Idées clés :
- Caractérisation matricielle d'un endomorphisme préservant un réseau.
- Invariance de la trace par changement de base.
- Propriétés de la trace d'une rotation plane.

Analyse de la matrice de r dans la base du réseau.

Par hypothèse, le réseau $\Gamma = \{nu + mv \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est stable par r.

En particulier, les images des vecteurs de base u et v appartiennent à Γ. Il existe donc des entiers relatifs $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} r(u) = au + bv \\ r(v) = cu + dv \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de la rotation r dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$ est donnée par :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

On en déduit immédiatement que la trace de cet endomorphisme est un entier :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(r) = a + d \in \mathbb{Z}}$$

Expression de la trace dans une base orthonormée.

Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée directe du plan P. On sait que la matrice de la rotation r d'angle θ dans cette base est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La trace de r ne dépend pas de la base choisie (propriété de similitude). On a donc :

$$\mathrm{Tr}(r) = \mathrm{Tr}(R_\theta) = \cos\theta + \cos\theta$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(r) = 2\cos\theta}$$

Synthèse et conclusion.

En égalant les deux expressions de la trace obtenues précédemment, nous arrivons à la condition :

$$2\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

Or, la fonction cosinus est à valeurs dans $[-1,1]$, ce qui impose :

$$-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$$

L'ensemble des valeurs entières possibles pour $2\cos\theta$ est donc $\{-2,-1,0,1,2\}$.

En divisant par 2, on obtient les valeurs possibles pour $\cos\theta$:

$$\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Ce qui correspond bien à l'ensemble recherché :

$$\boxed{\cos\theta \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}}$$

> **Piège :**
> Ne pas supposer que la base (u,v) est orthonormée. Un réseau peut être engendré par une base quelconque. C'est précisément pour cela que l'utilisation de la trace (invariante par changement de base) est l'outil le plus efficace ici.

> **À retenir :**
> La trace d'un endomorphisme qui stabilise un réseau $\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ est nécessairement un entier. Ce résultat est fondamental en cristallographie pour justifier que seules des symétries d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6 sont possibles pour un cristal.

13

Probabilités

Indépendance et opérations ensemblistes

Énoncé

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements indépendants tels que $A \subset B$. Que peut-on dire des probabilités de ces événements ?
2. Que peut-on dire de deux événements A et B à la fois indépendants et incompatibles ?
3. Soient $A_1, \ldots, A_k$ des événements mutuellement indépendants de probabilités respectives $p_1, \ldots, p_k$. Calculer la probabilité de l'événement $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Indications :

- Pour la question 1, traduire l'inclusion $A \subset B$ en une égalité faisant intervenir l'intersection $A \cap B$.
- Pour la question 2, comparer les définitions de l'indépendance ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$) et de l'incompatibilité ($A \cap B = \emptyset$).
- Pour la question 3, utiliser le passage au complémentaire et les lois de De Morgan, puis invoquer la stabilité de l'indépendance par passage aux complémentaires.

Correction.

Idées clés :

- Définition de l'indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Lien entre inclusion et intersection : $A \subset B \iff A \cap B = A$.
- Passage au complémentaire pour l'union d'événements indépendants.

Résolution.

1. Par hypothèse, les événements A et B sont indépendants, ce qui se traduit par :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Comme $A \subset B$, nous avons l'égalité ensembliste $A \cap B = A$. En passant aux probabilités, il vient :

$$P(A \cap B) = P(A)$$

En injectant ce résultat dans la relation d'indépendance, nous obtenons :

$$P(A) = P(A)P(B)$$

Ce qui est équivalent à :

$$P(A)(1 - P(B)) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{P(A) = 0 \quad \text{ou} \quad P(B) = 1}$$

2. Par définition, deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas :

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

S'ils sont également indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

En égalant les deux expressions, nous obtenons $P(A)P(B) = 0$. Par intégrité du produit dans $\mathbb{R}$, on conclut que l'un au moins des deux événements est de probabilité nulle :

$$\boxed{P(A) = 0 \quad \text{ou} \quad P(B) = 0}$$

3. Notons $S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Il est souvent plus simple de calculer la probabilité de l'événement complémentaire $\overline{S}$. D'après les lois de De Morgan :

$$\overline{S} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$$

Puisque les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont mutuellement indépendants, leurs complémentaires $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_k}$ le sont aussi d'après le cours.

La probabilité d'une intersection d'événements mutuellement indépendants est égale au produit des probabilités :

$$P(\overline{S}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i})$$

Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i$. On en déduit :

$$\boxed{P(\overline{S}) = \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)}$$

Finalement, la probabilité de l'union est donnée par $P(S) = 1 - P(\overline{S})$:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)}$$

Piège :
Dans la question 3, ne pas confondre l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle. Pour que la probabilité de l'intersection soit le produit des probabilités, l'indépendance mutuelle est requise.

À retenir :

— L'indépendance est une notion probabiliste, tandis que l'incompatibilité est une notion ensembliste.

— Pour calculer la probabilité d'une union d'événements indépendants, le passage par le complémentaire est presque toujours la méthode la plus efficace.

Optimisation de victoires consécutives

Énoncé

Un joueur de tennis A affronte deux autres joueurs, B et C. On suppose que C est meilleur que B.
Le joueur A est déclaré vainqueur s'il gagne au moins deux matchs consécutifs lors d'une série de trois rencontres.
Quel ordre de rencontre, entre BCB (affronter B, puis C, puis B) et CBC (affronter C, puis B, puis C), maximise la probabilité de victoire de A ?

Indications :

- Modéliser le problème en introduisant les probabilités p et q de battre respectivement B et C.
- Remarquer qu'il est impossible de gagner le tournoi sans gagner le deuxième match.
- Exprimer l'événement « gagner le tournoi » en fonction des victoires aux différents matchs et utiliser l'indépendance des rencontres.

Correction.

Idées clés :

- Traduction probabiliste de l'énoncé.
- Utilisation de l'indépendance des matchs.
- Comparaison de deux probabilités par étude du signe de leur différence.

Modélisation.

Notons p la probabilité que A gagne contre B, et q la probabilité que A gagne contre C.

Puisque C est meilleur que B, on a l'inégalité :

$$0 < q < p < 1$$

Notons G l'événement « le joueur A gagne le tournoi » et W_i l'événement « le joueur A gagne le i-ème match ».

D'après les règles, A gagne s'il remporte les matchs 1 et 2, ou les matchs 2 et 3. On a donc :

$$G = (W_1 \cap W_2) \cup (W_2 \cap W_3) = W_2 \cap (W_1 \cup W_3)$$

En supposant l'indépendance des résultats des matchs, on obtient :

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(W_2) \times \mathbb{P}(W_1 \cup W_3)$$

D'après la formule d'inclusion-exclusion (ou par passage au complémentaire pour l'union), on a :

$$\mathbb{P}(W_1 \cup W_3) = \mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_3) - \mathbb{P}(W_1)\mathbb{P}(W_3)$$

Calcul pour chaque stratégie.

Cas 1 : Ordre BCB.

Ici, $\mathbb{P}(W_1) = p$, $\mathbb{P}(W_2) = q$ et $\mathbb{P}(W_3) = p$.

En remplaçant dans la formule précédente, on obtient la probabilité P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 &= q\left(p + p - p^2\right) \\ &= q(2p - p^2) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_1 = 2pq - qp^2}$$

Cas 2 : Ordre CBC.

Ici, $\mathbb{P}(W_1) = q$, $\mathbb{P}(W_2) = p$ et $\mathbb{P}(W_3) = q$.

On obtient la probabilité P_2 :

$$\begin{aligned} P_2 &= p\left(q + q - q^2\right) \\ &= p(2q - q^2) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_2 = 2pq - pq^2}$$

Analyse comparative.

Calculons la différence entre les deux probabilités pour déterminer la stratégie optimale :

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= (2pq - pq^2) - (2pq - qp^2) \\ &= qp^2 - pq^2 \\ &= pq(p - q) \end{aligned}$$

Or, nous avons posé par hypothèse $p > q$. Comme p et q sont strictement positifs, on en déduit :

$$P_2 - P_1 > 0$$

Conclusion.

Le joueur A a une probabilité de gain strictement supérieure en choisissant l'ordre CBC.

Bien que C soit un adversaire plus redoutable, il est préférable de l'affronter deux fois pour s'assurer que le match « pivot » (le deuxième), indispensable à la victoire, soit joué contre l'adversaire le plus faible.

$$\boxed{\text{L'ordre optimal est } CBC}$$

> **Piège :**
> L'intuition pourrait laisser croire qu'il faut affronter le joueur le plus fort le moins souvent possible. Or, la structure de la condition de victoire (« deux matchs *consécutifs* ») rend le match central prépondérant.

> **À retenir :**
> Pour calculer la probabilité d'une union d'événements indépendants $A \cup B$, il est souvent plus rapide de passer par le complémentaire :
> $$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})$$
> Dans cet exercice : $1 - (1 - p_1)(1 - p_3)$.

Probabilité et recherche dans des tiroirs

Énoncé

Un meuble de n tiroirs a la probabilité p de contenir un vêtement. On suppose que, si le vêtement est présent dans le meuble, il se trouve de manière équiprobable dans n'importe quel tiroir.
On ouvre les $n-1$ premiers tiroirs sans trouver le vêtement. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier tiroir ?

Indications :

- Introduire l'événement V : « le vêtement est dans le meuble » et E_i : « le vêtement est dans le i-ème tiroir ».
- Traduire l'énoncé en termes de probabilités conditionnelles.
- Identifier l'événement « les $n-1$ premiers tiroirs sont vides » et utiliser la formule des probabilités totales ou la définition de la probabilité conditionnelle.

Correction.

Idées clés :

- Modélisation par un système complet d'événements.
- Formule de Bayes ou définition de la probabilité conditionnelle.
- Utilisation de l'équiprobabilité conditionnelle.

Modélisation.

Notons V l'événement « le vêtement est dans le meuble ». Par énoncé, nous avons :

$$P(V) = p$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons E_i l'événement « le vêtement est dans le i-ème tiroir ».

L'hypothèse d'équiprobabilité de la position du vêtement sachant qu'il est dans le meuble se traduit par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(E_i|V) = \frac{1}{n}$$

On en déduit la probabilité que le vêtement soit dans un tiroir donné :

$$P(E_i) = P(E_i \cap V) = P(V)P(E_i|V) = \frac{p}{n}$$

Analyse de l'information obtenue.

Soit A l'événement : « les $n-1$ premiers tiroirs sont vides ». Cet événement signifie que le vêtement n'est ni dans le tiroir 1, ni dans le tiroir 2, ..., ni dans le tiroir $n-1$.

Cela peut arriver dans deux cas disjoints :

1. Le vêtement est dans le n-ième tiroir (E_n).
2. Le vêtement n'est pas du tout dans le meuble ($\overline{V}$).

On a donc l'égalité d'événements : $A = E_n \cup \overline{V}$. Comme cette union est disjointe, la probabilité de A est :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_n) + P(\overline{V}) \\ &= \frac{p}{n} + (1-p) \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\boxed{P(A) = \frac{p + n(1-p)}{n} = \frac{n - p(n-1)}{n}}$$

Calcul de la probabilité recherchée.

Nous cherchons la probabilité que le vêtement soit dans le dernier tiroir sachant que les $n-1$ premiers sont vides, soit $P(E_n|A)$. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(E_n|A) = \frac{P(E_n \cap A)}{P(A)}$$

Puisque $E_n \subset A$ (si le vêtement est dans le dernier tiroir, les $n-1$ premiers sont nécessairement vides), on a $E_n \cap A = E_n$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P(E_n|A) &= \frac{P(E_n)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{p}{n}}{\frac{n-p(n-1)}{n}} \end{aligned}$$

Conclusion.

Après simplification par n, nous obtenons le résultat final :

$$\boxed{P(E_n|A) = \frac{p}{n - p(n-1)}}$$

> **Piège :**
> Une erreur classique consiste à penser que la probabilité est p/n. Or, le fait d'ouvrir des tiroirs vides apporte une information qui modifie la probabilité (révision des croyances au sens bayésien). Plus on ouvre de tiroirs vides, plus la probabilité que le vêtement soit dans le dernier tiroir augmente.

> **À retenir :**
> Lorsque l'on cherche $P(X|Y)$, il est souvent efficace de décomposer Y comme une union d'événements élémentaires disjoints dont on connaît les probabilités, afin de calculer $P(Y)$ au dénominateur.

Probabilités et compositions des fratries

Énoncé

Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m < n$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille, et que les sexes des enfants successifs sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants, dont les m premiers sont des garçons, n'ait que des garçons ?
2. Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants, dont au moins m sont des garçons, n'ait que des garçons ?

Indications :
- Modéliser l'expérience par un espace probabilisé fini où chaque issue est une suite de n genres (G ou F).
- Utiliser la définition de la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
- Pour la question (b), exprimer l'événement « au moins m garçons » comme une réunion d'événements disjoints et utiliser la loi binomiale.

Correction.

Idées clés :
- Modélisation par des épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Application de la formule des probabilités conditionnelles.
- Utilisation des coefficients binomiaux pour le dénombrement.

Modélisation.

Considérons l'espace fondamental $\Omega = \{G, F\}^n$, muni de la probabilité uniforme P.

Chaque issue est un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_i \in \{G, F\}$.

On a donc $\mathrm{card}(\Omega) = 2^n$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.

Soit B l'événement « le couple n'a que des garçons ». Cet événement est le singleton :

$$B = \{(G, G, \dots, G)\}$$

Sa probabilité est :

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2^n}}$$

Résolution de la question 1.

Soit A_m l'événement « les m premiers enfants sont des garçons ».

Un élément de A_m est de la forme $(G, \dots, G, x_{m+1}, \dots, x_n)$ où les $n - m$ dernières composantes sont libres.

Le nombre de tels éléments est 2^{n-m}. On en déduit :

$$P(A_m) = \frac{2^{n-m}}{2^n} = \frac{1}{2^m}$$

On cherche la probabilité conditionnelle $P_{A_m}(B)$. Comme $B \subset A_m$, on a $B \cap A_m = B$.

$$
\begin{aligned}
P_{A_m}(B) &= \frac{P(B \cap A_m)}{P(A_m)} \\
&= \frac{P(B)}{P(A_m)} \\
&= \frac{1/2^n}{1/2^m}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat :

$$\boxed{P_{A_m}(B) = \frac{1}{2^{n-m}}}$$

Remarque : Ce résultat est intuitif car, par indépendance, le sexe des $n-m$ derniers enfants ne dépend pas des m premiers.

Résolution de la question 2.

Soit C_m l'événement « le couple a au moins m garçons ».

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de garçons parmi les n enfants.

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On a alors :

$$P(C_m) = P(X \geq m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Soit encore :

$$P(C_m) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}$$

On cherche la probabilité $P_{C_m}(B)$. Comme $n > m$, si le couple n'a que des garçons, il en a a fortiori au moins m.

Ainsi $B \subset C_m$, d'où $B \cap C_m = B$.

$$
\begin{aligned}
P_{C_m}(B) &= \frac{P(B)}{P(C_m)} \\
&= \frac{1/2^n}{\frac{1}{2^n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}}
\end{aligned}
$$

On obtient finalement :

$$\boxed{P_{C_m}(B) = \frac{1}{\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}}}$$

> **Piège :**
> Dans la question (b), il ne faut pas confondre l'événement « avoir au moins m garçons » avec « les m premiers sont des garçons ». L'ordre n'est plus imposé, ce qui augmente le nombre de cas possibles au dénominateur et diminue donc la probabilité finale.

> **À retenir :**
> La probabilité conditionnelle $P_A(B)$ se calcule par le rapport des probabilités $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Lorsque l'univers est muni de l'équiprobabilité, cela revient au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles : $\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$.

Loi de succession de Laplace

Énoncé

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $m+1$ urnes $U_0, \dots, U_m$ telles que, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, l'urne U_k contient k boules bleues et $m-k$ boules rouges. On choisit une urne au hasard, de manière équiprobable, puis on effectue n tirages avec remise dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, que le $(n+1)$-ième tirage donne également une boule bleue ?
2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque m tend vers $+\infty$.

Indications :
- Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'obtenir n boules bleues.
- Exprimer la probabilité conditionnelle demandée à l'aide de la définition $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
- Pour la limite, reconnaître des sommes de Riemann associées à la fonction $x \mapsto x^p$ sur $[0,1]$.

Correction.

Idées clés :
- Système complet d'événements lié au choix de l'urne.
- Formule des probabilités totales.
- Convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale.

1. Calcul de la probabilité conditionnelle

Définissons les événements suivants :

— H_k : « L'urne choisie est l'urne U_k », pour $k \in \{0, \dots, m\}$.

— B_i : « Le i-ième tirage donne une boule bleue », pour $i \in \mathbb{N}^*$.

— $E_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$: « Les n premiers tirages sont bleus ».

La famille $(H_k)_{0\le k\le m}$ forme un système complet d'événements. Par hypothèse, on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, m\}, \quad \mathbb{P}(H_k) = \frac{1}{m+1}$$

Puisque les tirages s'effectuent avec remise dans l'urne U_k, les événements (B_i) sont indépendants sachant H_k. La probabilité de tirer une boule bleue dans U_k est k/m. On a donc :

$$\mathbb{P}(E_n|H_k) = \left(\frac{k}{m}\right)^n$$

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir n boules bleues est :

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(E_n|H_k)\mathbb{P}(H_k) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n$$

De la même manière, on calcule la probabilité d'obtenir $n+1$ boules bleues :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}$$

On cherche la probabilité conditionnelle $P_{m,n} = \mathbb{P}(B_{n+1}|E_n)$. Par définition :

$$P_{m,n} = \frac{\mathbb{P}(E_{n+1}\cap E_n)}{\mathbb{P}(E_n)} = \frac{\mathbb{P}(E_{n+1})}{\mathbb{P}(E_n)}$$

En simplifiant par le facteur $\frac{1}{m+1}$, on obtient :

$$\boxed{P_{m,n} = \frac{\sum_{k=0}^{m} k^{n+1}}{m\sum_{k=0}^{m} k^{n}}}$$

2. Étude de la limite lorsque $m \to +\infty$

Pour n fixé, étudions le comportement de la fraction précédente. On peut réécrire l'expression en faisant apparaître des sommes de Riemann :

$$P_{m,n} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}}{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n}}$$

La fonction $f_p : x \mapsto x^p$ est continue sur $[0,1]$. La théorie des sommes de Riemann assure que :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{p} = \int_0^1 x^p\,dx$$

Or, on sait que pour tout $p \geq 0$:

$$\int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

Le terme pour $k = 0$ dans la somme est nul (pour $n \geq 1$), donc la somme de 0 à m est identique à la somme de 1 à m.

Par passage à la limite dans le quotient, on trouve :

$$\lim_{m\to+\infty} P_{m,n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}$$

On conclut finalement :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} P_{m,n} = \frac{n+1}{n+2}}$$

> **Piège :**
> Attention à ne pas oublier que l'urne est choisie *avant* les tirages. Les tirages sont indépendants **sachant** l'urne, mais ils ne sont pas indépendants dans l'absolu (le résultat des premiers tirages nous renseigne sur l'urne choisie).

> **À retenir :**
> La loi de succession de Laplace est un exemple classique où l'on utilise des probabilités pour modéliser l'acquisition d'information. Plus n est grand, plus la probabilité que l'événement se reproduise est proche de 1.

Probabilités dans l'urne de Polya

Énoncé

On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges ($b, r \in \mathbb{N}^*$). On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en ajoutant δ boules de la même couleur ($\delta \in \mathbb{N}^*$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « le n-ième tirage amène une boule blanche ».

Déterminer la probabilité $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indications :

- Calculer $P(A_1)$ puis $P(A_2)$ en utilisant la formule des probabilités totales pour conjecturer le résultat.
- Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- Pour l'hérédité, conditionner par rapport au résultat du premier tirage et considérer que le processus repart à l'instant $n = 1$ avec une composition d'urne modifiée.

Correction.

Idées clés :

- Formule des probabilités totales (FPT).
- Raisonnement par récurrence sur l'état initial de l'urne.
- Invariance de la loi des tirages.

Analyse des premiers rangs.

Pour $n = 1$, la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est immédiate :

$$\boxed{P(A_1) = \frac{b}{b+r}}$$

Pour $n = 2$, on utilise le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$ lié au premier tirage. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

Si A_1 est réalisé, l'urne contient $b+\delta$ boules blanches et r boules rouges au moment du deuxième tirage. Si $\overline{A_1}$ est réalisé, elle contient b blanches et $r+\delta$ rouges. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= \frac{b+\delta}{b+r+\delta} \cdot \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+\delta} \cdot \frac{r}{b+r} \\
&= \frac{b(b+\delta) + br}{(b+r)(b+r+\delta)} \\
&= \frac{b(b+\delta+r)}{(b+r)(b+r+\delta)}
\end{aligned}$$

Après simplification par $(b+r+\delta)$, on obtient :

$$\boxed{P(A_2) = \frac{b}{b+r}}$$

Raisonnement par récurrence.

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \frac{b}{b+r}$. Pour démontrer cela rigoureusement, introduisons la notation $u_n(b, r)$ pour désigner la probabilité que le n-ième tirage soit blanc sachant que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « Pour tout $(b,r) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n(b,r) = \frac{b}{b+r}$ ».

Initialisation : Pour $n = 1$, nous avons déjà montré que $u_1(b,r) = \frac{b}{b+r}$ pour tout (b,r). Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons une urne (b,r) et calculons $u_{n+1}(b,r)$.

En conditionnant par rapport au résultat du premier tirage :

$$u_{n+1}(b,r) = P(A_{n+1}|A_1)P(A_1) + P(A_{n+1}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

Après le premier tirage, le processus est identique à un processus de Polya démarrant avec une urne modifiée, et nous cherchons la probabilité d'obtenir une blanche au n-ième tirage suivant. Par définition de u_n :

$$P(A_{n+1}|A_1) = u_n(b+\delta, r) \quad \text{et} \quad P(A_{n+1}|\overline{A_1}) = u_n(b, r+\delta)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ sur ces nouvelles compositions :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(b,r) &= \frac{b+\delta}{(b+\delta)+r} \cdot \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+(r+\delta)} \cdot \frac{r}{b+r} \\ &= \frac{b}{b+r}\left(\frac{b+\delta}{b+r+\delta} + \frac{r}{b+r+\delta}\right) \\ &= \frac{b}{b+r}\left(\frac{b+r+\delta}{b+r+\delta}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$u_{n+1}(b,r) = \frac{b}{b+r}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(A_n) = \frac{b}{b+r}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à vouloir décrire explicitement la composition de l'urne après n tirages. C'est possible (via des coefficients binomiaux ou des produits), mais cela rend le calcul de la loi marginale de A_n inutilement complexe. La récurrence sur la structure du problème est bien plus efficace.

À retenir :
Dans une urne de Polya, bien que les tirages ne soient pas indépendants (la composition change), les probabilités marginales de tirer une couleur donnée sont constantes au cours du temps. On dit que la suite des variables aléatoires associées est échangeable.

Espérance et queues de probabilité

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
Montrer que l'espérance de X vérifie la relation suivante :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$$

Indications :
- Utiliser la définition de l'espérance pour une variable aléatoire discrète finie.
- Exprimer l'événement $\{X \geq k\}$ comme une réunion d'événements élémentaires disjoints.
- Procéder à une interversion de l'ordre de sommation dans une somme double.

Correction.

Idées clés :
- Définition de l'espérance : $E(X) = \sum iP(X = i)$.
- Interversion de sommation (Fubini discret sur un domaine fini).

Résolution.

Par définition, puisque X est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, son espérance est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i)$$

Comme le terme d'indice $i = 0$ est nul, nous pouvons écrire :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)}$$

Considérons maintenant la somme des probabilités des "queues" de la distribution, notée S :

$$S = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$$

Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'événement $\{X \geq k\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X = i\}$ pour i allant de k à n. On a donc :

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} P(X = i)$$

En substituant cette expression dans la somme S, on obtient une somme double :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} P(X = i) \right)$$

Cette somme porte sur l'ensemble d'indices $D = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq k \leq i \leq n\}$.

Nous pouvons intervertir l'ordre de sommation. Dans le domaine D, l'indice i varie entre 1 et n, et pour un i fixé, l'indice k varie entre 1 et i.

L'interversion donne alors :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} P(X = i) \right)$$

Puisque le terme $P(X = i)$ ne dépend pas de l'indice de sommation interne k, nous pouvons le factoriser :

$$S = \sum_{i=1}^{n} P(X = i) \left(\sum_{k=1}^{i} 1 \right)$$

Or, il est immédiat que $\sum_{k=1}^{i} 1 = i$. Par conséquent :

$$S = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)$$

On reconnaît exactement l'expression de l'espérance $E(X)$ établie précédemment.

Conclusion.

On a bien démontré :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)}$$

> **Piège :**
> L'erreur classique consiste à faire démarrer la somme à $k = 0$. Or, $\sum_{k=0}^{n} P(X \geq k) = P(X \geq 0) + \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k) = 1 + E(X)$. Il faut donc être vigilant sur les bornes de l'indice k.

> **À retenir :**
> Cette formule, dite des "queues de distribution", est particulièrement efficace pour calculer l'espérance de variables aléatoires suivant une loi géométrique (tronquée ou non) ou pour des problèmes de temps d'attente.

Somme de deux variables binomiales indépendantes

Énoncé

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$ et $n' \in \mathbb{N}$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et X' définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que :

$$X \sim \mathcal{B}(n,p) \quad \text{et} \quad X' \sim \mathcal{B}(n',p)$$

Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$X + X' \sim \mathcal{B}(n+n',p)$$

Indications :

- Pour la première méthode, utiliser la définition d'une loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
- Pour la deuxième méthode, effectuer un calcul direct de la loi de $S = X + X'$ en utilisant la formule de convolution pour des variables indépendantes et la formule de Vandermonde.

Correction.

Idées clés :

- Stabilité de la loi binomiale par rapport au paramètre n.
- Utilisation de l'indépendance (lemme de regroupement par paquets).
- Formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$.

Méthode 1 : Interprétation par les épreuves de Bernoulli.

On sait qu'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être vue comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Puisque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, il existe des variables aléatoires $(Y_1,\dots,Y_n)$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon la loi $\mathcal{B}(p)$ telles que :

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

De même, puisque $X' \sim \mathcal{B}(n',p)$, il existe des variables $(Z_1,\dots,Z_{n'})$ i.i.d. selon la loi $\mathcal{B}(p)$ telles que :

$$X' = \sum_{j=1}^{n'} Z_j$$

Comme X et X' sont indépendantes, par le lemme de regroupement par paquets, la famille complète $(Y_1,\dots,Y_n,Z_1,\dots,Z_{n'})$ est une famille de $n+n'$ variables aléatoires indépendantes.

Toutes ces variables suivent la loi $\mathcal{B}(p)$. On en déduit que leur somme suit par définition la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.

Or, on a :

$$X + X' = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{j=1}^{n'} Z_j$$

On conclut donc immédiatement :

$$\boxed{X + X' \sim \mathcal{B}(n+n',p)}$$

Méthode 2 : Calcul direct (formule de convolution).

Soit $S = X + X'$. L'univers image de S est $S(\Omega) = [\![0, n+n']\!]$.

Soit $k \in [\![0, n+n']\!]$. Puisque X et X' sont indépendantes, on utilise la formule de convolution :

$$P(S=k) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j \cap X'=k-j) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(X'=k-j)$$

En utilisant les lois de X et X', et en convenant que $\binom{n}{j} = 0$ si $j > n$, on a :

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}\right) \left(\binom{n'}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{n'-(k-j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j} p^{j+k-j} (1-p)^{n-j+n'-k+j} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j}\right) p^k (1-p)^{n+n'-k} \end{aligned}$$

D'après la formule de Vandermonde, on a la relation combinatoire suivante :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j} = \binom{n+n'}{k}}$$

En injectant ce résultat dans l'expression précédente, on obtient :

$$\boxed{P(S=k) = \binom{n+n'}{k} p^k (1-p)^{n+n'-k}}$$

On reconnaît bien la loi binomiale $\mathcal{B}(n+n', p)$.

> **Piège :**
> Attention, ce résultat de stabilité n'est vrai que si les deux variables ont le **même paramètre** p. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $X' \sim \mathcal{B}(n',q)$ avec $p \neq q$, la somme ne suit pas une loi binomiale.

> **À retenir :**
> La somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre p est une variable binomiale dont le premier paramètre est la somme des paramètres respectifs.

Mode et comparaison de lois binomiales

Énoncé

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$, comparer $P(X=k+1)$ et $P(X=k)$. En déduire la ou les valeurs de k maximisant $P(X=k)$.
2. Soient $k,n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X \sim \mathcal{B}(kn, 1/k)$ et $Y \sim \mathcal{B}(k(n+1), 1/k)$. Comparer $P(X \geq n)$ et $P(Y \geq n+1)$.

Indications :
- Pour la question 1, étudier le rapport $r_k = \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$ et déterminer pour quelles valeurs de k on a $r_k \geq 1$.
- Pour la question 2, on peut voir Y comme la somme $X+Z$ où $Z \sim \mathcal{B}(k, 1/k)$ est indépendante de X. Utiliser ensuite la formule des probabilités totales.
- Comparer les termes de la somme obtenue avec $P(X \geq n)$ en utilisant les variations de la loi binomiale établies en question 1.

Correction.

Idées clés :
- Étude du rapport de probabilités successives pour le mode.
- Utilisation de la structure de somme de variables de Bernoulli indépendantes.
- Manipulation de sommes et comparaison de probabilités autour de l'espérance.

1. Étude du mode de la loi binomiale.

Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Calculons le rapport des probabilités successives :

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{k!(n-k)!}{n!}\frac{p}{1-p} \\ &= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

Cherchons pour quelles valeurs de k ce rapport est supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned}\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p} \geq 1 &\iff (n-k)p \geq (k+1)(1-p) \\ &\iff np - kp \geq k + 1 - kp - p \\ &\iff np + p - 1 \geq k \\ &\iff k \leq (n+1)p - 1\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(P(X=k))_{0 \leq k \leq n}$ est croissante puis décroissante.

Conclusion sur le maximum :

— Si $(n+1)p$ n'est pas un entier, le maximum est unique et atteint pour :

$$\boxed{k_0 = \lfloor (n+1)p \rfloor}$$

— Si $(n+1)p$ est un entier, le maximum est atteint pour deux valeurs consécutives :

$$\boxed{k_0 = (n+1)p - 1 \quad \text{et} \quad k_0' = (n+1)p}$$

2. Comparaison de $P(X \geq n)$ et $P(Y \geq n+1)$.

Soient $(Z_i)_{1\leq i\leq n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(k, 1/k)$.

On peut identifier X et Y par les sommes suivantes :

$$X \sim \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad \text{et} \quad Y \sim \sum_{i=1}^{n+1} Z_i$$

Soit $Z = Z_{n+1}$, de sorte que $Y = X + Z$ avec X et Z indépendantes. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y \geq n+1) &= \sum_{j=0}^{k} P(Z=j)P(X+j \geq n+1) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(Z=j)P(X \geq n+1-j) \end{aligned}$$

Comparons cette expression à $P(X \geq n) = \sum_{j=0}^{k} P(Z=j)P(X \geq n)$. La différence Δ s'écrit :

$$\Delta = P(Y \geq n+1) - P(X \geq n) = \sum_{j=0}^{k} P(Z=j)\left(P(X \geq n+1-j) - P(X \geq n)\right)$$

Analysons les termes pour chaque j :

— Pour $j=1$: $P(X \geq n) - P(X \geq n) = 0$.
— Pour $j=0$: $P(X \geq n+1) - P(X \geq n) = -P(X=n)$.
— Pour $j \geq 2$: $P(X \geq n+1-j) - P(X \geq n) = \sum_{m=n+1-j}^{n-1} P(X=m)$.

On obtient ainsi :

$$\Delta = -P(Z=0)P(X=n) + \sum_{j=2}^{k} P(Z=j)\left(\sum_{m=n+1-j}^{n-1} P(X=m)\right)$$

D'après la question 1, puisque $p = 1/k$ et que l'espérance de X est $E[X] = kn \cdot \frac{1}{k} = n$, le maximum de la loi de X est atteint en n (et $n-1$). Ainsi, pour tout $m \leq n-1$, on a $P(X=m) \leq P(X=n)$.

$$\begin{aligned} \Delta &\leq -P(Z=0)P(X=n) + \sum_{j=2}^{k} P(Z=j)(j-1)P(X=n) \\ &\leq P(X=n)\left[-P(Z=0) + \sum_{j=2}^{k}(j-1)P(Z=j)\right] \end{aligned}$$

Calculons le terme entre crochets en utilisant $E[Z] = \sum_{j=0}^{k} jP(Z=j) = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{k}(j-1)P(Z=j) &= \sum_{j=2}^{k} jP(Z=j) - \sum_{j=2}^{k} P(Z=j) \\ &= (E[Z] - 1\cdot P(Z=1)) - (1 - P(Z=0) - P(Z=1)) \\ &= (1 - P(Z=1)) - 1 + P(Z=0) + P(Z=1) \\ &= P(Z=0) \end{aligned}$$

On a utilisé ici l'inégalité large pour les termes $P(X=m)$, mais pour $m = n+1-j$ avec j grand, l'inégalité est stricte. On en conclut :

$$\boxed{P(Y \geq n+1) < P(X \geq n)}$$

Piège :
Dans la question 1, bien distinguer le cas où $(n+1)p$ est entier (deux maximums) du cas général.

À retenir :
Le maximum d'une loi binomiale (mode) se situe toujours "autour" de son espérance np. Plus précisément, il est atteint en $\lfloor (n+1)p \rfloor$.

Lois marginales et loi de la somme

Énoncé

Soient $E = \{0, 1, 2\}$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans E. On suppose que la loi du couple (X, Y) charge chaque point de E^2, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in E^2$, $P(X = i, Y = j) > 0$.
Construire deux variables aléatoires X' et Y' à valeurs dans E telles que :

1. $X \sim X'$ et $Y \sim Y'$,
2. $X + Y \sim X' + Y'$,
3. La loi de (X', Y') est différente de celle de (X, Y).

Indications :
- Noter $p_{i,j} = P(X = i, Y = j)$ et chercher la loi du couple (X', Y') sous la forme $q_{i,j} = p_{i,j} + \delta_{i,j}$.
- Traduire les conditions d'égalité des lois marginales et de la loi de la somme en un système d'équations linéaires sur les coefficients $\delta_{i,j}$.
- Chercher une matrice de perturbation $\Delta = (\delta_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2}$ dont les sommes sur les lignes, les colonnes et les "diagonales montantes" (correspondant à $i + j = k$) sont nulles.

Correction.

Idées clés :
- Traduction d'une loi par une matrice de probabilités jointes.
- Utilisation d'une perturbation pour modifier la loi jointe tout en préservant les marginales (sommes en ligne et colonne).
- Contrainte supplémentaire sur la somme $X + Y$ (sommes par diagonales).

Analyse du problème.

Notons $p_{i,j} = P(X = i, Y = j)$ pour tout $(i, j) \in E^2$. Par hypothèse, $p_{i,j} > 0$. On cherche à définir une nouvelle loi de couple $(q_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2}$ telle que $q_{i,j} = p_{i,j} + \delta_{i,j}$. Pour que $(q_{i,j})$ définisse une loi de probabilité différente de $(p_{i,j})$, il faut que :

— $\sum_{i,j} \delta_{i,j} = 0$ (conservation de la masse totale) ;
— Il existe au moins un couple (i, j) tel que $\delta_{i,j} \neq 0$;
— Pour tout (i, j), $q_{i,j} \geq 0$.

Les conditions de l'énoncé imposent des contraintes supplémentaires sur $\Delta = (\delta_{i,j})$:

1. $X \sim X'$ signifie que pour tout $i \in E$, $\sum_{j=0}^{2} q_{i,j} = \sum_{j=0}^{2} p_{i,j}$, soit $\sum_{j=0}^{2} \delta_{i,j} = 0$ (sommes des lignes nulles).

2. $Y \sim Y'$ signifie que pour tout $j \in E$, $\sum_{i=0}^{2} q_{i,j} = \sum_{i=0}^{2} p_{i,j}$, soit $\sum_{i=0}^{2} \delta_{i,j} = 0$ (sommes des colonnes nulles).

3. $X+Y \sim X'+Y'$ signifie que pour tout $k \in \{0, \ldots, 4\}$, $\sum_{i+j=k} q_{i,j} = \sum_{i+j=k} p_{i,j}$, soit $\sum_{i+j=k} \delta_{i,j} = 0$.

Construction de la perturbation.

Exploitons les contraintes sur la somme $X + Y$:

— Pour $k = 0$: $\delta_{0,0} = 0$.
— Pour $k = 4$: $\delta_{2,2} = 0$.
— Pour $k = 1$: $\delta_{0,1} + \delta_{1,0} = 0$, donc $\delta_{1,0} = -\delta_{0,1}$.
— Pour $k = 3$: $\delta_{1,2} + \delta_{2,1} = 0$, donc $\delta_{2,1} = -\delta_{1,2}$.

Utilisons maintenant les sommes en ligne (lignes 0 et 2) :

— Ligne 0 : $\delta_{0,0} + \delta_{0,1} + \delta_{0,2} = 0 \implies 0 + \delta_{0,1} + \delta_{0,2} = 0 \implies \delta_{0,2} = -\delta_{0,1}$.

— Ligne 2 : $\delta_{2,0} + \delta_{2,1} + \delta_{2,2} = 0 \implies \delta_{2,0} + \delta_{2,1} + 0 = 0 \implies \delta_{2,0} = -\delta_{2,1} = \delta_{1,2}$.

Utilisons la somme de la colonne 0 :

$$\delta_{0,0} + \delta_{1,0} + \delta_{2,0} = 0 \implies 0 - \delta_{0,1} + \delta_{1,2} = 0 \implies \delta_{1,2} = \delta_{0,1}$$

Posons $\delta_{0,1} = \epsilon$. On en déduit :

$$\delta_{1,0} = -\epsilon, \quad \delta_{0,2} = -\epsilon, \quad \delta_{1,2} = \epsilon, \quad \delta_{2,0} = \epsilon, \quad \delta_{2,1} = -\epsilon$$

Enfin, pour la ligne 1 : $\delta_{1,0} + \delta_{1,1} + \delta_{1,2} = -\epsilon + \delta_{1,1} + \epsilon = 0 \implies \delta_{1,1} = 0$.

Vérifions la condition pour $k = 2$ (somme $X + Y$) :

$$\delta_{0,2} + \delta_{1,1} + \delta_{2,0} = -\epsilon + 0 + \epsilon = 0$$

Toutes les conditions sont satisfaites. La matrice Δ est :

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon & 0 \end{pmatrix}}$$

Choix du paramètre ϵ.

Pour que $(q_{i,j})$ définisse une loi de probabilité, il faut $q_{i,j} \in [0, 1]$. Comme $p_{i,j} > 0$ pour tout (i, j), il suffit de choisir $\epsilon \neq 0$ assez petit.

On peut par exemple poser :

$$\boxed{\epsilon = \min_{(i,j)\in E^2} p_{i,j} \times \frac{1}{2}}$$

Conclusion.

On définit la loi du couple (X', Y') par $P((X', Y') = (i, j)) = p_{i,j} + \delta_{i,j}$. Cette loi est bien distincte de celle de (X, Y) car $\epsilon \neq 0$. Par construction de Δ, les marginales et la loi de la somme sont préservées.

> **Piège :**
> Vérifiez bien que les variables sont à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Si le support était plus petit (par exemple $\{0, 1\}$), une telle construction pourrait être impossible car le système de contraintes serait trop rigide.

> **À retenir :**
> La donnée des lois de X, de Y et de $X + Y$ ne suffit pas en général à caractériser la loi du couple (X, Y). Il existe des degrés de liberté (ici représentés par ϵ) permettant de déformer la loi jointe tout en préservant ces trois caractéristiques.

Moments d'un déterminant aléatoire

Énoncé

Soit $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires centrées réduites mutuellement indépendantes. On note D la variable aléatoire égale au déterminant de la matrice $M = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de D.
2. Soit $A > 0$. Montrer que :
$$P(|D| \geq A\sqrt{n!}) \leq \frac{1}{A^2}$$

Indications :

- Utiliser la formule de Leibniz pour exprimer le déterminant comme une somme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
- Pour le calcul de la variance, utiliser la définition $V(D) = E(D^2) - E(D)^2$ et exploiter l'indépendance mutuelle des variables.
- Pour la seconde question, appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable D.

Correction.

Idées clés :

- Formule de Leibniz : $D = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)}$.
- Linéarité de l'espérance et indépendance mutuelle.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

1. Calcul de l'espérance et de la variance de D.

D'après la formule de Leibniz, le déterminant D s'écrit :

$$D = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)}$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(D) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) E\left(\prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)}\right)$$

Puisque les variables $(X_{i,j})$ sont mutuellement indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances. Comme les variables sont centrées ($E(X_{i,j}) = 0$), on obtient pour toute permutation σ :

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)}\right) = \prod_{i=1}^n E(X_{i,\sigma(i)}) = 0$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{E(D) = 0}$$

Calculons maintenant la variance $V(D) = E(D^2) - E(D)^2 = E(D^2)$. Par développement du carré d'une somme :

$$D^2 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)} X_{i,\tau(i)}$$

En utilisant à nouveau la linéarité :

$$E(D^2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\tau(i)}\right)$$

Cas 1 : $\sigma \neq \tau$. S'il existe $\sigma \neq \tau$, alors il existe au moins un indice i_0 tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$. La variable $X_{i_0,\sigma(i_0)}$ apparaît dans le produit associé à σ. Elle ne peut pas apparaître dans le produit associé à τ car pour tout j, $(j, \tau(j)) \neq (i_0, \sigma(i_0))$ (si $j = i_0$, $\tau(i_0) \neq \sigma(i_0)$, et si $j \neq i_0$, la première coordonnée diffère).

Par indépendance mutuelle, on peut extraire cette variable de l'espérance :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\tau(i)}\right) = E(X_{i_0,\sigma(i_0)}) \times E(\text{Reste}) = 0$$

Cas 2 : $\sigma = \tau$. Le terme général devient $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}^2\right)$. Par indépendance :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}^2\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_{i,\sigma(i)}^2)$$

Comme les variables sont réduites ($V(X) = 1$) et centrées, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$. Le produit vaut donc 1. Il y a $n!$ permutations dans $\mathfrak{S}_n$, d'où :

$$\boxed{V(D) = n!}$$

2. Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

La variable D possède une espérance nulle et une variance égale à $n!$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(|D - E(D)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(D)}{\epsilon^2}$$

En remplaçant par les valeurs trouvées, on a :

$$P(|D| \geq \epsilon) \leq \frac{n!}{\epsilon^2}$$

On choisit $\epsilon = A\sqrt{n!}$. L'inégalité devient alors :

$$P(|D| \geq A\sqrt{n!}) \leq \frac{n!}{(A\sqrt{n!})^2}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{P(|D| \geq A\sqrt{n!}) \leq \frac{1}{A^2}}$$

> **Piège :**
> Dans le calcul de $E(D^2)$, il est crucial de justifier proprement pourquoi les termes croisés $\sigma \neq \tau$ s'annulent. L'argument repose sur le fait qu'une variable $X_{i,j}$ apparaissant une seule fois dans un produit de variables indépendantes "tue" l'espérance dès qu'elle est centrée.

À retenir :
Pour une somme de variables aléatoires $S = \sum Y_k$ qui ne sont pas forcément indépendantes, l'espérance du carré fait apparaître les covariances. Ici, l'indépendance mutuelle des $X_{i,j}$ assure que les produits associés à des permutations distinctes sont non corrélés.

Minoration de la covariance commune

Énoncé

Soient $n \geq 2$ un entier naturel et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que toutes ces variables possèdent la même variance $\sigma^2 > 0$ et que, pour tout couple (i, j) d'indices distincts, $\text{Cov}(X_i, X_j) = C$.
Montrer que :

$$C \geq -\frac{\sigma^2}{n-1}$$

Montrer également qu'il y a égalité si et seulement si la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ est déterministe.

Indications :
- Développer la variance de la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ en utilisant la bilinéarité de la covariance.
- Utiliser la propriété fondamentale de positivité d'une variance.
- Identifier le cas où une variance est nulle pour traiter le cas d'égalité.

Correction.

Idées clés :
- Formule de la variance d'une somme de variables aléatoires.
- Positivité de la variance : $\forall X,\ V(X) \geq 0$.
- Caractérisation des variables de variance nulle (presque sûrement constantes).

Résolution.

Considérons la variable aléatoire S_n définie par la somme des variables X_i :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires (généralisation de la relation de Huygens), nous avons :

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

En utilisant les hypothèses de l'énoncé, à savoir $V(X_i) = \sigma^2$ pour tout i et $\text{Cov}(X_i, X_j) = C$ pour $i \neq j$, on obtient :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} C \\ &= n\sigma^2 + n(n-1)C \end{aligned}$$

En effet, il existe n termes dans la première somme et $n^2 - n = n(n-1)$ couples d'indices (i, j) tels que $i \neq j$.

Nous avons donc établi la relation :

$$\boxed{V(S_n) = n\left[\sigma^2 + (n-1)C\right]}$$

Comme la variance d'une variable aléatoire réelle est toujours un réel positif ou nul, il vient :

$$n\left[\sigma^2 + (n-1)C\right] \geq 0$$

Puisque $n \geq 2$, on peut diviser par n, ce qui donne $\sigma^2 + (n-1)C \geq 0$, d'où :

$$(n-1)C \geq -\sigma^2$$

On en déduit finalement l'inégalité demandée :

$$\boxed{C \geq -\frac{\sigma^2}{n-1}}$$

Cas d'égalité.

L'égalité $C = -\frac{\sigma^2}{n-1}$ est vérifiée si et seulement si $V(S_n) = 0$.

D'après le cours sur les variables aléatoires discrètes, la variance d'une variable aléatoire est nulle si et seulement si cette variable est presque sûrement égale à son espérance.

Autrement dit, $V(S_n) = 0$ si et seulement si S_n est une variable aléatoire déterministe (constante).

Ainsi :

$$\boxed{C = -\frac{\sigma^2}{n-1} \iff \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \text{ presque sûrement}}$$

Piège :
L'erreur classique consiste à oublier que le nombre de termes dans la double somme $\sum_{i \neq j}$ est $n(n-1)$ et non $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. La formule avec $\frac{n(n-1)}{2}$ n'est valable que si l'on somme sur $i < j$ avec un facteur 2 devant.

À retenir :
La formule générale pour la variance d'une somme est :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Cette formule souligne que si les variables sont corrélées négativement en moyenne, la variance de leur somme est réduite par rapport au cas indépendant.

Majoration de la variance d'une variable bornée

Énoncé

Soient a, b, m trois réels tels que $a \leq m \leq b$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance $E(X) = m$. Démontrer que :
$$V(X) \leq (m-a)(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$
2. Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$, d'espérance m, telle que l'on ait l'égalité $V(X) = (m-a)(b-m)$.

Indications :
- Pour la première inégalité, exploiter la positivité de l'espérance appliquée à la variable aléatoire $(X - a)(b-X)$. On pourra développer cette expression et utiliser la linéarité de l'espérance ainsi que la formule de Koenig-Huygens.
- Pour la seconde inégalité, étudier les variations d'un trinôme du second degré en m ou utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.
- Pour la question b), chercher une variable aléatoire X ne prenant que les valeurs a et b.

Correction.

Idées clés :
- Positivité et linéarité de l'espérance.
- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- Étude d'un extremum quadratique.

Résolution.

1. **Première inégalité : $V(X) \leq (m-a)(b-m)$.**

   Par hypothèse, X prend ses valeurs dans $[a, b]$, donc $a \leq X \leq b$ presque sûrement. On en déduit que $(X-a) \geq 0$ et $(b-X) \geq 0$, d'où :
$$(X-a)(b-X) \geq 0$$
   Par positivité de l'espérance, on a $E[(X-a)(b-X)] \geq 0$. Développons l'expression à l'intérieur de l'espérance :
$$\begin{aligned}(X-a)(b-X) &= bX - X^2 - ab + aX \\ &= (a+b)X - X^2 - ab\end{aligned}$$
   Par linéarité de l'espérance, il vient :
$$E[(X-a)(b-X)] = (a+b)E(X) - E(X^2) - ab \geq 0$$
   D'après la formule de Koenig-Huygens, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = V(X) + m^2$. En substituant dans l'inégalité précédente, on obtient :
$$(a+b)m - (V(X) + m^2) - ab \geq 0$$
   Ce qui se réécrit :
$$V(X) \leq (a+b)m - m^2 - ab$$

Enfin, factorisons le membre de droite :

$$(m-a)(b-m) = mb - m^2 - ab + am = (a+b)m - m^2 - ab$$

On conclut donc :

$$\boxed{V(X) \leq (m-a)(b-m)}$$

Seconde inégalité : $(m-a)(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$**.**

Considérons la fonction $f : m \mapsto (m-a)(b-m)$ sur $[a,b]$. C'est un trinôme du second degré dont les racines sont a et b.

Le sommet de la parabole est atteint en $m = \frac{a+b}{2}$. En ce point, la valeur maximale est :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{(m-a)(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}}$$

2. On cherche une variable X prenant ses valeurs dans $\{a, b\}$. Soit $p = P(X = a)$. Comme $X \in [a, b]$, on a nécessairement $P(X = b) = 1 - p$.

   L'espérance de X est donnée par :

   $$E(X) = pa + (1-p)b = b - p(b-a)$$

   On veut $E(X) = m$, ce qui impose :

   $$p = \frac{b-m}{b-a}$$

   Comme $a \leq m \leq b$, on a bien $0 \leq p \leq 1$, ce qui définit une loi de probabilité valide. Calculons alors la variance de cette variable :

   $$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - m^2 \\ &= pa^2 + (1-p)b^2 - m^2 \\ &= \frac{b-m}{b-a}a^2 + \frac{m-a}{b-a}b^2 - m^2 \end{aligned}$$

   En factorisant par $(b-a)$ au numérateur :

   $$\begin{aligned} V(X) &= \frac{a^2b - a^2m + b^2m - b^2a}{b-a} - m^2 \\ &= \frac{ab(a-b) + m(b^2-a^2)}{b-a} - m^2 \\ &= -ab + m(a+b) - m^2 \end{aligned}$$

   On retrouve bien l'expression identifiée à la question 1 :

   $$\boxed{V(X) = (m-a)(b-m)}$$

Piège :
Attention à la manipulation du trinôme : ne pas oublier que $V(X)$ dépend de la distribution de X, alors que la majoration par $\frac{(b-a)^2}{4}$ est uniforme pour toutes les variables à valeurs dans $[a, b]$.

À retenir :
L'inégalité $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$ est un cas particulier classique de l'inégalité arithmético-géométrique, très utile pour majorer un produit de termes dont la somme est constante.

Propriétés statistiques du groupe symétrique

Énoncé

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y la variable aléatoire donnant la longueur du cycle contenant 1 dans la décomposition canonique d'une permutation. Quelle est la loi de Y ?
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de cycles dans la décomposition canonique d'une permutation. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer :

$$E(t^Z) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t+k)$$

En déduire l'espérance et la variance de Z.

Indications :
- Pour la question 1, utiliser les variables indicatrices $X_i = \mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}}$. On remarquera que $X = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Pour la question 2, dénombrer les permutations où 1 appartient à un cycle de longueur k fixée. On pourra construire un tel cycle en choisissant ses autres éléments.
- Pour la question 3, établir une relation de récurrence entre $E(t^{Z_n})$ et $E(t^{Z_{n-1}})$ en considérant l'insertion de l'élément n dans une permutation de $\{1,\ldots,n-1\}$.

Correction.

Idées clés :
- Linéarité de l'espérance et indicateurs d'événements.
- Dénombrement par construction de cycles.
- Utilisation de la fonction génératrice pour les moments d'une loi.

1. Nombre de points fixes X.

Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit X_i la variable de Bernoulli valant 1 si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon. On a $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Par linéarité :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \frac{1}{n}$$

D'où :

$$\boxed{E(X) = 1}$$

Pour la variance, calculons $E(X^2)$. On a $X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_iX_j$. Puisque $X_i^2 = X_i$, $E(\sum X_i^2) = E(X) = 1$. Pour $i \neq j$, $X_iX_j = 1$ si et seulement si $\sigma(i) = i$ et $\sigma(j) = j$.

$$E(X_iX_j) = \mathbb{P}(\sigma(i) = i \cap \sigma(j) = j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Il y a $n(n-1)$ couples (i,j) avec $i \neq j$. On en déduit :

$$E(X^2) = 1 + n(n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)} = 2$$

La variance est alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1^2$.

$$\boxed{V(X) = 1}$$

2. Loi de la longueur du cycle contenant 1.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Comptons le nombre de permutations où 1 appartient à un cycle de longueur k. Pour construire une telle permutation :

1. On choisit les $k-1$ autres éléments du cycle parmi $\{2, \dots, n\}$: $\binom{n-1}{k-1}$ choix.
2. On ordonne ces $k-1$ éléments pour former un cycle avec l'élément 1 : $(k-1)!$ choix.
3. On complète par une permutation quelconque des $n-k$ éléments restants : $(n-k)!$ choix.

Le nombre de telles permutations est :

$$\binom{n-1}{k-1} \times (k-1)! \times (n-k)! = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}(k-1)!(n-k)! = (n-1)!$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

$$\boxed{Y \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})}$$

3. Nombre de cycles Z.

Notons $P_n(t) = E(t^{Z_n})$. Considérons le passage de $\mathcal{S}_{n-1}$ à $\mathcal{S}_n$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
- Si n est un point fixe de σ (1 cas), alors $Z(\sigma) = Z(\sigma') + 1$ où $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}$.
- Si n n'est pas un point fixe, il a été inséré dans un cycle existant de $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}$ après l'un des $n-1$ éléments. Il y a $n-1$ positions possibles et le nombre de cycles ne change pas.

On obtient la relation de récurrence :

$$n!P_n(t) = (n-1)! \cdot t \cdot P_{n-1}(t) + (n-1) \cdot (n-1)! \cdot P_{n-1}(t)$$

En simplifiant par $(n-1)!$:

$$nP_n(t) = (t + n - 1)P_{n-1}(t)$$

Comme $P_1(t) = t$, on obtient par récurrence immédiate :

$$\boxed{P_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k)}$$

Pour l'espérance, on utilise $E(Z) = P_n'(1)$. Posons $f(t) = \ln P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(t+k) - \ln(n!)$. En dérivant : $\frac{P_n'(t)}{P_n(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}$. Comme $P_n(1) = 1$, on a :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n}$$

Pour la variance, on utilise $V(Z) = P_n''(1) + P_n'(1) - (P_n'(1))^2$. En dérivant à nouveau $f(t)$:

$$\frac{P_n''(t)P_n(t) - (P_n'(t))^2}{P_n(t)^2} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2}$$

En $t = 1$, on obtient $P_n''(1) - (P_n'(1))^2 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. D'où :

$$\boxed{V(Z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)}$$

Piège :
Dans la question 3, bien distinguer le cas où n est un point fixe du cas où il est inséré dans un cycle préexistant. L'insertion de n derrière n'importe quel élément $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ ne crée pas de nouveau cycle.

À retenir :
La méthode des variables indicatrices est l'outil le plus efficace pour calculer l'espérance d'une somme de variables dépendantes (comme dans le cas des points fixes).