FEUILLE D'EXERCICES N° 13

FRACTIONS RATIONNELLES À UNE INDÉTERMINÉE

Calculs pratiques

Exercice 1

Effectuer les D.E.S. dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$:

- $\dfrac{1}{X^3+5X^2+2X-8}$
- $\dfrac{X^6-7X}{X^2+X+1}$
- $\dfrac{X^3+1}{(X^2+1)^2}$
- $\dfrac{X^9}{X^2-4}$
- $\dfrac{1}{X^2(X^2+1)}$
- $\dfrac{X^4}{(X+1)(X^2-1)}$

Exercice 2

Donner les D.E.S. dans $\mathbb{C}(X)$ de :

- $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
- $\dfrac{1}{X(X-1)^3}$
- $\dfrac{1}{X^2+X+1}$
- $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$
- $\dfrac{2X}{X^2+1}$
- $\dfrac{X}{(X^2-1)^3}$.

Exercice 3

Donner les D.E.S. dans $\mathbb{C}(X)$ de :

- $\dfrac{X-2}{(X^2-1)^2(X^2+X+1))}$
- $\dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.
- $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuer les D.E.S. dans $\mathbb{C}(X)$ de

- $F_1(X) = \dfrac{X^{2n}+1}{X^{4n}+1}$
- $F_2(X) = \dfrac{X^{2n}+X^n+3}{X^{2n}+X^n-2}$.

Aspects théoriques

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à racines simples $z_1, \cdots, z_n$.

1. Calculer le nombre : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k)}$.
2. Lorsque les z_k sont non nuls, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k \cdot P'(z_k)}$.

Exercice 6

Soit $P(X)$ un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer en fonction des racines et de ses multiplicités dans $P(X)$ la D.E.S. de $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{X^2+1}{X^3-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{3}{X}$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

1. Mettre la fraction rationnelle $F(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^k}{X-\omega}$ sous la forme irréductible.
2. Mettre la fraction rationnelle $G(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^k}{X^2-\omega}$ sous la forme irréductible.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_n(X)$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Effectuer la D.E.S dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{1}{P_n(X)}$.

Thémes variés

Exercice 9

Étudier les suites :

- $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- $\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2+k-6}\right)_{n\geqslant 3}$.

Exercice 10

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$.

On pose $Q(X)=\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{(-1)^{n-k}\cdot k!\cdot(n-k)!}$.
3. En déduire qu'il existe $k\in\{0,\cdots,n\}$ tel que : $|P(k)|\geqslant\frac{n!}{2^n}$.

Exercice 11

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non constante dans $\mathbb{C}(X)$.

1. Montrer que l'ensemble image de la fonction rationnelle $z\longmapsto F(z)$ est soit $\mathbb{C}$ tout entier, soit $\mathbb{C}$ privé d'un point.
2. On suppose que $F(X)$ n'est pas un polynôme. Soit $G(X)\in\mathbb{C}(X)\setminus\mathbb{C}$ tel que $F\circ G(X)$ soit (après simplifications) un polynôme. Montrer que $F(X)$ n'admet qu'un seul pôle z_0 et que $G(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$

Exercice 12

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\omega=\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1. Soit $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X)=P(X)$. Montrer qu'il existe $Q(X)\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X)=Q(X^n)$.
2. Soit $F(X)\in\mathbb{C}(X)$ tel que $F(\omega X)=F(X)$. Existe-t-il une fraction rationnelle $G(X)\in\mathbb{C}(X)$ telle que $F(X)=G(X^n)$?
3. Mettre la fraction $H(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X+\omega^k}{X-\omega^k}$ sous forme de fraction irréductible.

Exercice 13

Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n(X)\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ P_n\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^n+\frac{1}{x^n}$.
2. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^n}{1+X^{2n}}$, dans $\mathbb{C}(X)$.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X^n}{1+X^{2n}}$, dans $\mathbb{R}(X)$.
4. En déduire la formule de la D.E.S. dans $\mathbb{R}(X)$: $\frac{1}{P_n(X)}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cdot\sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{X-2\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$.

Un peu plus difficile

Exercice 14

Soit $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Montrer que l'équation $F(x)=e^x$ admet un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Soit $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ admettant au moins deux racines réelles et tel que $P''(X)$ divise $P(X)$. Montrer que le polynôme $P(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer $P_n(X)\in\mathbb{R}[X]$ tel que sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$:
$$\sin(2n+1)x=\sin^{2n+1}(x)\cdot P_n\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right).$$
2. Calculer la somme des racines de $P_n(X)$.
3. En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 17

Soit $F(X)\in\mathbb{C}(X)$.

Montrer que $F'(X)\neq\frac{1}{X}$.