Exercice corrigé sur la méthode du pivot

- L'objectif de ce document est de présenter concrètement la méthode du pivot sur un exemple.

Exercice

Résoudre le système

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z &=& -4 \\ -x + 2y + 4z &=& 5 \\ x + 5y - z &=& 1 \end{array} \right.$$

- On commence par choisir un pivot (en l'encadrant), c'est-à-dire l'un des coefficients situés devant l'une des inconnues.

- On commence par choisir un pivot (en l'encadrant), c'est-à-dire l'un des coefficients situés devant l'une des inconnues.

  Ce pivot doit être non nul et, si possible, de valeur absolue la plus petite possible (les meilleurs pivots sont donc les ± 1).

- On commence par choisir un pivot (en l'encadrant), c'est-à-dire l'un des coefficients situés devant l'une des inconnues.

  Ce pivot doit être non nul et, si possible, de valeur absolue la plus petite possible (les meilleurs pivots sont donc les ± 1).

  Ici, on choisit le 1 placé devant le x de la troisième équation :

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z = -4 & & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & & L_2 \\ \boxed{x} + 5y - z = 1 & & L_3 \end{array} \right.$$

- On commence par choisir un pivot (en l'encadrant), c'est-à-dire l'un des coefficients situés devant l'une des inconnues.

  Ce pivot doit être non nul et, si possible, de valeur absolue la plus petite possible (les meilleurs pivots sont donc les ± 1).

  Ici, on choisit le 1 placé devant le x de la troisième équation :

$$S : \left\{ \begin{array}{rcll} 2x + 3y - 5z & = & -4 & \quad L_1 \\ -x + 2y + 4z & = & 5 & \quad L_2 \\ \boxed{x} + 5y - z & = & 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

- On va utiliser ce pivot pour faire « disparaître » les autres occurrences de x en effectuant des combinaisons linéaires des équations L_1, L_2 et L_3 du système.

- On commence par réécrire (sans la modifier) la ligne contenant le pivot.

- On commence par réécrire (sans la modifier) la ligne contenant le pivot.

  Dans les deux autres lignes, les x vont disparaître.

- On commence par réécrire (sans la modifier) la ligne contenant le pivot.

  Dans les deux autres lignes, les x vont disparaître.

  On obtient donc provisoirement

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrl} & ?y + & ?z = ? & \quad ? \\ & ?y + & ?z = ? & \quad ? \\ \boxed{x} & +\,5y - & z = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- On commence par réécrire (sans la modifier) la ligne contenant le pivot.

  Dans les deux autres lignes, les x vont disparaître.

  On obtient donc provisoirement

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} & ?y + ?z = ? & & ? \\ & ?y + ?z = ? & & ? \\ \boxed{x} & + 5y - \ z = 1 & & L_3 \end{array} \right.$$

  On va calculer les autres coefficients (désignés pour l'instant par des ?).

- Pour calculer les ? de la première ligne, on remplace L_1 par une combinaison linéaire de la ligne L_1 et de celle du pivot, c'est-à-dire L_3.

- Pour calculer les ? de la première ligne, on remplace L_1 par une combinaison linéaire de la ligne L_1 et de celle du pivot, c'est-à-dire L_3.

  Pour connaître la combinaison linéaire qu'il faut effectuer, on utilise la méthode des produits en croix dans le système S :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x + 3y - 5z = -4 & \quad L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & \quad L_2 \\ \boxed{1x} + 5y - z = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- Pour calculer les ? de la première ligne, on remplace L_1 par une combinaison linéaire de la ligne L_1 et de celle du pivot, c'est-à-dire L_3.

  Pour connaître la combinaison linéaire qu'il faut effectuer, on utilise la méthode des produits en croix dans le système S :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z = -4 & & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & & L_2 \\ \boxed{1x} + 5y - \quad z = 1 & & L_3 \end{array}\right.$$

  - on effectue le produit du pivot par la ligne à modifier

$$1 \times L_1$$

- Pour calculer les ? de la première ligne, on remplace L_1 par une combinaison linéaire de la ligne L_1 et de celle du pivot, c'est-à-dire L_3.

  Pour connaître la combinaison linéaire qu'il faut effectuer, on utilise la méthode des produits en croix dans le système S :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z = -4 & & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & & L_2 \\ \boxed{1x} + 5y - z = 1 & & L_3 \end{array}\right.$$

  - on effectue le produit du pivot par la ligne à modifier
  - puis on soustrait le produit des extrémités de la diagonale complémentaire :

$$1 \times L_1 - 2 \times L_3$$

- On effectue donc les transformations suivantes :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} & & ?y & + & ?z & = & ? & \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ & & ?y & + & ?z & = & ? & \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = & 1 & \qquad L_3 \end{array} \right.$$

- On effectue donc les transformations suivantes :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rl} ?y + ?z = ? & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ ?y + ?z = ? & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \boxed{x} + 5y - z = 1 & L_3 \end{array} \right.$$

- Pour calculer ?, on procède à nouveau par produits en croix :

$$S : \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 3y - 5z = -4 & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & L_2 \\ \boxed{1x} + 5y - z = 1 & L_3 \end{array} \right. \qquad ? = 1 \times 3 - 2 \times 5$$

- On effectue donc les transformations suivantes :

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrl} & ?y + ?z = ? & & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ & ?y + ?z = ? & & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \boxed{x} & + 5y - \ z = 1 & & L_3 \end{array}\right.$$

- Pour calculer ?, on procède à nouveau par produits en croix :

$$S : \left\{\begin{array}{rl} 2x + 3y - 5z = -4 & L_1 \\ -x + 2y + 4z = 5 & L_2 \\ \boxed{1x} + 5y - \ z = 1 & L_3 \end{array}\right. \qquad ? = 1 \times 3 - 2 \times 5$$

- En procédant ainsi pour chaque ?, on obtient

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrl} & -7y - 3z = -6 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ & 7y + 3z = 6 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \boxed{x} & + 5y - \ z = 1 & L_3 \end{array}\right.$$

- On choisit un nouveau pivot qui est dans une ligne et une colonne qui ne contient pas déjà un pivot :

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} & -7y & -3z & = -6 & \quad L_1 \\ & 7y & + \boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +5y & - z & = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- On choisit un nouveau pivot qui est dans une ligne et une colonne qui ne contient pas déjà un pivot :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} & -\,7y & -\;\;3z & = -6 & \quad L_1 \\ & 7y & +\,\boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +\,5y & -\;\;z & = 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

- On réécrit les équations contenant un pivot (toujours sans les modifier) et on fait disparaître l'inconnue z dans la ligne L_1 :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} & ?y & & = ? & \quad ? \\ & 7y & +\,\boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +\,5y & -\;\;z & = 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

- On choisit un nouveau pivot qui est dans une ligne et une colonne qui ne contient pas déjà un pivot :

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} & -\ 7y & - & 3z & = -6 & \quad L_1 \\ & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +\ 5y & - & z & = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- On réécrit les équations contenant un pivot (toujours sans les modifier) et on fait disparaître l'inconnue z dans la ligne L_1 :

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} & ?y & & & = ? & \quad ? \\ & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +\ 5y & - & z & = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- On détermine ensuite les ? à l'aide de la méthode des produits en croix, ce qui donne

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} & 0 & & & = 0 & \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + 3L_2 \\ & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +\ 5y & - & z & = 1 & \quad L_3 \end{array}\right.$$

- On choisit un nouveau pivot qui est dans une ligne et une colonne qui ne contient pas déjà un pivot :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} & -7y & - & 3z = -6 & \quad L_1 \\ & 7y & + & \boxed{3z} = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +5y & - & z = 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

- On réécrit les équations contenant un pivot (toujours sans les modifier) et on fait disparaître l'inconnue z dans la ligne L_1 :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} & ?y & & = ? & \quad ? \\ & 7y & + & \boxed{3z} = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +5y & - & z = 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

- On détermine ensuite les ? à l'aide de la méthode des produits en croix, ce qui donne

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} & 0 & & = 0 & \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + 3L_2 \\ & 7y & + & \boxed{3z} = 6 & \quad L_2 \\ \boxed{x} & +5y & - & z = 1 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

(Ici, on peut remplacer $3L_1 + 3L_2$ par $L_1 + L_2$).

- On constate qu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot. On a ainsi obtenu la réduite de Gauß de S :

$$S \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 0 & & & = & 0 \\ & & 7y & + & \boxed{3z} & = & 6 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = & 1 \end{array}\right.}_{\text{réduite de Gauß}}$$

- On constate qu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot. On a ainsi obtenu la réduite de Gauß de S :

$$S \iff \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrrrl} & 0 & & & = 0 \\ & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + 5y & - & z & = 1 \end{array} \right.}_{\text{réduite de Gauß}}$$

- Le nombre de pivots de la réduite s'appelle le rang de S. Ici, on a donc $\operatorname{rang} S = 2$.

- On constate qu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot. On a ainsi obtenu la réduite de Gauß de S :

$$S \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 0 & & & = & 0 \\ & & 7y & + & \boxed{3z} & = & 6 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = & 1 \end{array}\right.}_{\text{réduite de Gauß}}$$

- Le nombre de pivots de la réduite s'appelle le rang de S. Ici, on a donc $\operatorname{rang} S = 2$.
- Les équations qui contiennent un pivot sont dites principales et les autres auxiliaires.

- On constate qu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot. On a ainsi obtenu la réduite de Gauß de S :

$$S \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{rcrcrl} & & 0 & & & = 0 \\ & & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = 1 \end{array}\right.}_{\text{réduite de Gauß}}$$

- Le nombre de pivots de la réduite s'appelle le rang de S. Ici, on a donc $\operatorname{rang} S = 2$.
- Les équations qui contiennent un pivot sont dites principales et les autres auxiliaires.
- De façon similaire, les inconnues des colonnes qui contiennent un pivot sont dites principales et les autres auxiliaires.

- Pour résoudre le système, on commence par regarder les équations auxiliaires.

- Pour résoudre le système, on commence par regarder les équations auxiliaires.

  Si l'une d'entre elles fournit une contradiction (du type $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'admet pas de solution.

- Pour résoudre le système, on commence par regarder les équations auxiliaires.

  Si l'une d'entre elles fournit une contradiction (du type $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'admet pas de solution.

  Si elles sont toutes du type $0 = 0$, le système admet une solution ou une infinité de solutions. Pour savoir dans quelle situation on se trouve, on regarde les inconnues auxiliaires.

- Pour résoudre le système, on commence par regarder les équations auxiliaires.

  Si l'une d'entre elles fournit une contradiction (du type $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'admet pas de solution.

  Si elles sont toutes du type $0 = 0$, le système admet une solution ou une infinité de solutions. Pour savoir dans quelle situation on se trouve, on regarde les inconnues auxiliaires.
- Si le système n'admet aucune inconnue auxiliaire, le système admet une unique solution que l'on détermine très facilement à l'aide de la réduite de Gauß. On dit alors que le système est de Cramer.

- Pour résoudre le système, on commence par regarder les équations auxiliaires.

  Si l'une d'entre elles fournit une contradiction (du type $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'admet pas de solution.

  Si elles sont toutes du type $0 = 0$, le système admet une solution ou une infinité de solutions. Pour savoir dans quelle situation on se trouve, on regarde les inconnues auxiliaires.

- Si le système n'admet aucune inconnue auxiliaire, le système admet une unique solution que l'on détermine très facilement à l'aide de la réduite de Gauß. On dit alors que le système est de Cramer.

  S'il existe une ou plusieurs inconnues auxiliaires, on les utilise comme paramètres pour déterminer les solutions du système. Chacun de ces paramètres parcourant $\mathbb{R}$, on obtient alors une infinité de solutions.

MPSI - Lycée Henri IV - Sébastien Kerner

- Dans le cas de la réduite du système S, on a

$$S \iff \left\{\begin{array}{rrrl} & 0 & & = 0 \\ & 7y & + \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + 5y & - \quad z & = 1 \end{array}\right.$$

- Dans le cas de la réduite du système S, on a

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} & 0 & & = 0 \\ & 7y & + \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + 5y & - \quad z & = 1 \end{array} \right.$$

- On a donc une seule équation auxiliaire du type $0 = 0$. Le système admet une ou plusieurs solution(s).

- Dans le cas de la réduite du système S, on a

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} & & 0 & & & = 0 \\ & & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = 1 \end{array} \right.$$

- On a donc une seule équation auxiliaire du type $0 = 0$. Le système admet une ou plusieurs solution(s).
- L'inconnue y est auxiliaire. On la choisit donc comme paramètre, c'est-à-dire $y = \lambda$ où λ parcourt $\mathbb{R}$.

- Dans le cas de la réduite du système S, on a

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} & & 0 & & & = 0 \\ & & 7y & + & \boxed{3z} & = 6 \\ \boxed{x} & + & 5y & - & z & = 1 \end{array}\right.$$

- On a donc une seule équation auxiliaire du type $0 = 0$. Le système admet une ou plusieurs solution(s).
- L'inconnue y est auxiliaire. On la choisit donc comme paramètre, c'est-à-dire $y = \lambda$ où λ parcourt $\mathbb{R}$.
  En reportant dans la deuxième équation, on détermine z en fonction de λ puis en reportant dans la troisième équation, on trouve x (toujours en fonction de λ).

- Dans le cas de la réduite du système S, on a

$$S \iff \begin{cases} \qquad\qquad 0 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad 7y + \boxed{3z} = 6 \\ \boxed{x} + 5y - z = 1 \end{cases}$$

- On a donc une seule équation auxiliaire du type $0 = 0$. Le système admet une ou plusieurs solution(s).
- L'inconnue y est auxiliaire. On la choisit donc comme paramètre, c'est-à-dire $y = \lambda$ où λ parcourt $\mathbb{R}$.
  En reportant dans la deuxième équation, on détermine z en fonction de λ puis en reportant dans la troisième équation, on trouve x (toujours en fonction de λ).
  On obtient :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{22}{3}\lambda + 3 \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{7}{3}\lambda + 2 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$