Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch Samedi 12/01/2019

Devoir Surveillé n° 5 (4h)

Correction de l'exercice 1 – (Système dynamique perturbé)

Soit (v_n) une suite réelle, et (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, et la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 + v_n.$$

1. On étudie dans cette question le cas particulier où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \leqslant 0$, donc (u_n) est croissante. Elle converge donc vers un point fixe ou vers $+\infty$. De plus, le seul point fixe est 0. Ainsi :
   - Si $u_0 > 0$, $\boxed{u_n \to +\infty}$ (elle ne peut pas converger vers 0 car elle est croissante)
   - Si $u_0 < -1$, alors $u_1 > 0$ et de même, $\boxed{u_n \to +\infty}$
   - Une étude simple de fonction montre que l'intervalle $[-1, 0]$ est stable par f. Ainsi, si $u_0 \in [-1, 0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$, donc (u_n) est bornée et croissante, et converge donc dans $\mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{vers } 0}$.

   (b) On suppose que $u_n \to 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
   $$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha((1+u_n)^\alpha - 1) \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n^{\alpha+1},$$
   puisque $u_n \to 0$. On en déduit que si $\alpha = -1$, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to -1$. D'après le théoèrme de la moyenne de Cesàro, il en résulte que :
   $$\lim 1n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = -1 \qquad \text{soit:} \qquad \lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) = -1,$$
   d'où on sort : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}}$
   Remarquez la cohérence du signe (d'après l'étude précédente, $u_n \to 0$ implique que (u_n) est négative).

2. On suppose maintenant (v_n) quelconque de limite nulle, et on suppose de plus que (u_n) est bornée.
   (a) Comme (u_n) est bornée, si elle admet une limite ℓ, elle est finie. En passant à la limite dans la relation de récurrence, et du fait que $v_n \to 0$, on obtient alors $\ell = \ell = \ell^2$, donc $\boxed{\ell = 0}$.

   (b) Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. Montrons par récurrence que pour tout $m \geqslant n$, $u_m \geqslant \varepsilon$.
   - L'initialisation provient de la donnée de n.
   - Soit $m \geqslant n$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. On a alors
   $$u_{m+1} = u_m + u_m^2 + v_m \geqslant \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^2,$$
   puisque $|v_m| < \varepsilon^2$. Ainsi, $u_{m+1} \geqslant \varepsilon$.
   - D'après le principe de récurrence, pour tout $m \geqslant n$, $u_m \geqslant \varepsilon$.

   On en déduit que pour tout $m \geqslant n$,
   $$u_{m+1} - u_m = u_m^2 + v_n \geqslant \varepsilon^2 - \varepsilon^2 = 0,$$
   donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante à partir d'un certain rang}}$.

   (c) Supposons que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant -\varepsilon$, donc $u_n \geqslant \varepsilon^2$. On a ici encore, pour $n \geqslant n_0$
   $$u_{n+1} - u_n \geqslant \varepsilon^2 - \varepsilon^2 = 0,$$
   donc (u_n) est croissante. Comme de plus, on l'a supposée majorée par $-\varepsilon$ à partir du rang n_0, (u_n) converge, et sa limite vérifie $\lim u_n \leqslant -\varepsilon$. Cela contredit le fait que la limite seule limite possible de (u_n) est 0. Ainsi, $\boxed{\text{il existe } n_1 > n_0 \text{ tel que } u_n > -\varepsilon}$.

(d) On suppose de plus $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Soit $f : x \mapsto x + x^2 - \varepsilon^2$. La fonction f est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. De plus $f(-\quad) = -\varepsilon$. Ainsi, puisque $-\varepsilon > -\frac{1}{2}$, la croissance (stricte) de f amène que pour tout $x > -\varepsilon$, $f(x) > f(-\varepsilon) = -\varepsilon$.

On montre alors par récurrence que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n > -\varepsilon$, l'initialisation provenant de la définition de n_1. Soit $n \geqslant n_1$ tel que $u_n > -\varepsilon$. On a alors

$$u_{n+1} \geqslant u_n + u_n^2 - \varepsilon^2 = f(u_n) > -\varepsilon,$$

d'après ce qui précède.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{f(u_n) > -\varepsilon \text{ pour tout } n \geqslant n_1}$.

(e) Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

- Pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < \varepsilon$ (sinon d'après 2b, (u_n) serait croissante à partir d'un rang en lequel elle serait strictement positive, et elle convergerait donc vers une limite différente de 0).
- Il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n > -\varepsilon$ (question 2d)
- Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n| < \varepsilon$.

On en déduit que $\boxed{u_n \to 0}$. Ainsi, les suites bornées solutions de cette récurrence sont nécessairement convergentes.

Correction du problème 1 – Étude d'une famille de suites récurrentes d'ordre 2 (Centrale 1989, à peu de choses près)

Partie I – Généralités

1. (a) Soit (U_n) une suite constante de valeur c. Elle est solution de S si et seulement si c vérifie l'équation $c = \frac{1}{2}(c^2 + c^2)$, soit $c = c^2$, donc $\boxed{c = 0 \text{ ou } c = 1}$.

   (b) Si (U_n) de S admet une limite finie ℓ, en passant à la limite dans la relation de récurrence, ℓ vérifie la même équation que c dans la question 1a, donc $\boxed{\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1}$.

   La suite (U_n) étant clairement positive, si elle admet une limite infinie, c'est nécessairement $\boxed{\ell = +\infty}$.

   (c) Soit (U_n) dans S. On suppose que $U_{n-1} = U_n = U_{n+1} = c$. Alors

   $$U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2) \qquad \text{donc:} \qquad c = \frac{1}{2}(c^2 + c^2),$$

   et d'après 1a, $c = 0$ ou 1. Une récurrence immédiate montre que pour tout $m \geqslant n-1$, on a alors $U_m = c$. De plus on peut aussi remonter les indices en remarquant que la positivité imposée (y compris aux rangs initiaux) amène :

   $$forallm \in \mathbb{N},\ U_m = \sqrt{2U_{m+1} - U_{m+1}^2}.$$

   Une récurrence descendante à partir de n nous assure alors qu'on a également $U_m = c$ pour $m \leqslant n$. Ainsi, $\boxed{(U_m) \text{ est une suite constante.}}$

   (d) Si pour un certain rang n, $U_{n-1} = U_n = 1$, la relation de récurrence amène $U_{n+1} = 1$, et la question précédente permet de conclure que $\boxed{(U_n) \text{ est constante}}$.

   (e) Soit $n \geqslant 2$ tel que $U_n = 0$. Puisque $U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2)$, cela n'est possible que si $U_{n-1} = U_{n-2} = 0 = U_n$. Ainsi,n d'après 1c, $\boxed{(U_n) \text{ est la suite contante nulle.}}$

2. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à S et *non constante*.

   (a) Soit $n \geqslant 2$,

   $$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2) - U_n = \left(\frac{1}{2}U_{n+1}^2 - U_n\right) + \frac{1}{2}U_n^2 = \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-2}^2) = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-2})(U_n - U_{n-2}).$$

   Puisque $U_{n-2} + U_n \geqslant 0$, $\boxed{U_{n+1} - U_n \text{ et } U_n - U_{n-2} \text{ sont de même signe}}$ (au sens strict)

(b) Supposons qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que $U_{N+1} \geqslant U_{N-1}$ et $U_{N+1} \geqslant U_N$. Alors montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant N$, $U_{n+1} \geqslant U_{n-1}$ et $U_{n+1} \geqslant U_n$, l'initialisation provenant de la définition de N. Supposons que pour $n \geqslant N$, $U_{n+1} \geqslant U_{n-1}$ et $U_{n+1} \geqslant U_n$. Alors $U_{n+2} - U_{n+1}$ est du signe de $U_{n+1} - U_{n-1}$ (question 2a), donc $U_{n+2} \geqslant U_{n+1}$. Puisque $U_{n+1} \geqslant U_n$, on a alors aussi $U_{n+2} \geqslant U_n$. Ainsi, la propriété est héréditaire, et par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant N$

On en déduit que $\boxed{(U_n)_{n\geqslant N} \text{ est croissante}}$.

De plus, $(U_n)_{n\geqslant N}$ ne peut pas être constante (sinon, la suite entière est constante d'après 1c), donc il existe $N_1 \geqslant N$ tel que $U_{N_1+1} > U_{N_1}$. On remarque que dans la récurrence précédente, cette inégalité stricte amène $U_{N_1+2} > U_{N_2}$, puis le signe strict va se propager à toutes les hérédités suivantes. Ainsi $\boxed{(U_n)_{n\geqslant N_1} \text{ est strictement croissante}}$.

(c) • Soit $x = \sqrt{2}$ et $y = 0$. On a :

$$U_0 = \sqrt{2}, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = \frac{1}{2}, \quad U_4 = \frac{5}{8}, \quad U_5 = \frac{41}{128}.$$

On a donc $U_5 < U_4$ et $U_5 < U_3$ donc d'après 2b, (U_n) décroît à partir du rang 5, et est minorée, donc convergente. $\boxed{\text{Sa convergence ne peut se faire que vers } 0}$.

• Soit $x = 2$ et $y = 0$. On a :

$$U_0 = 2, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 2,$$

ainsi, $U_2 \geqslant U_0$ et $U_2 \geqslant U_1$. Donc d'après 2b, (U_n) est croissante à partir du rang 2, donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. $\boxed{\text{Sa convergence ne peut se faire que vers } +\infty}$

3. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante.

Si $U_{n+1} \leqslant U_n$, alors $U_{n+1} \geqslant U_{n-1}$ (sinon la suite serait croissante à partir d'un certain rang). Ainsi, $U_{n-1} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$. D'après 2a, on en déduit que $U_n \leqslant U_{n-2}$ et que $U_{n-3} \leqslant U_{n-1}$, puis $U_{n-2} \leqslant U_{n-4}$, toujours par 2a, soit :

$$U_{n-3} \leqslant U_{n-1} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant U_{n-2} \leqslant U_{n-4}.$$

Une récurrence descendante facile nous permet de redescendre jusqu'au rang 0, assurant que les suites (U_{2k}) et (U_{2k+1}) sont monotones de monotonie opposée jusqu'au rang $n+1$.

Le cas ou $U_{n+1} \geqslant U_n$ amène la même propriété (en inversant toutes les monotonies). Ceci étant vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\boxed{(U_{2n}) \text{ et } (U_{2n+1}) \text{ sont monotones de monotonie opposée}}$.

Notons a et b les limites respectives de U_{2n} et U_{2n+1} dans $\overline{\mathbb{R}}$. On a alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence (exprimée en un rang pair et en un rang impair) :

$$a = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = b,$$

donc $a = b$, donc (U_n) converge. Comme l'une des suites extraites est croissante, la convergence ne peut se faire vers 0 (cela nécessiterait l'annulation de certains termes entraînant la nullité de la suite d'après 1e, ce qui est impossible puisque pa hypothèse, la suite n'est pas constante). Puisque l'une des suites extraites est croissante, la convergence ne peut pas se faire vers $+\infty$. Ainsi, $\boxed{u_n \to 1}$.

4. • $(iii) \implies (i)$ est clair par définition d'une limite $+\infty$.

• Supposons (i). On a alors $U_{N+2} = \frac{1}{2}(U_N^2 + U_{N-1}^2) \geqslant 1$. L'inégalité est même stricte, car U_N et U_{N+1} ne peuvent être tous les deux égaux à 1, la suite étant supposée non constante (question 1c). Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant N$, $U_n > 1$.

Supposons, par l'absurde, que (U_n) n'est pas strictement croissante à partir d'un certain rang. Elle n'est pas non plus strictement décroissante à partir d'un certain rang (sinon elle convergerait vers 0, ce qui est empêché par $U_n > 1$ pour $n \geqslant N$). Ainsi, d'après la question 3, (U_n) converge vers 1, de façon alternée. En particulier, l'une de ses suites extraites 2 par 2 converge en croissante vers 1, ce qui, encore une fois, contredit le fait que $U_n > 1$ pour tout $n \geqslant N$.

Ainsi, (U_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang. D'où $(i) \implies (ii)$

- D'après les questions 2 et 3, si (U_n) ne converge pas vers $+\infty$, elle converge vers 0 en décroissant strictement, ou vers 1 en alternant. Elle n'est donc pas strictement croissante. D'où $(ii) \Longrightarrow (iii)$. croissante.

On a bien montré $\boxed{\text{l'équivalence entre les 3 propriétés.}}$

5. Le raisonnement est le même :
   - $(iii) \Longrightarrow (i)$ est immédiat
   - $(i) \Longrightarrow (ii)$ s'obtient en montrant d'abord que pour tout $n \geqslant N+2$, $u_n < 1$ (l'inégalité large est vraie à partir du rang N, et de même que plus haut, l'inégalité est nécessairement stricte ensuite, sinon la suite est constante). La suite (U_n) ne peut alors pas converger vers $+\infty$ ni vers 1 (car l'une de ses deux suites extraites serait alors décroissante), donc vers 0, et d'après 2 et 3, cela se fait en décroissant strictement à partir d'un certain rang.
   - $(ii) \Longrightarrow (iii)$ provient de l'examen des différents cas possibles fait en 2 et 3.
6. E_0 contient $(0,0)$ car la suite $U(0,0)$ constante égale à 0 converge vers 0, E_1 contient de même le couple $(1,1)$ correspondant à la suite constante égale à 1. Enfin, E_∞ contient $(2,0)$ d'après 2c. Ainsi ces ensembles sont $\boxed{\text{non vides}}$.

   D'après les questions 2 et 3, toute suite de S converge soit vers 0, soit vers 1, soit encore vers $+\infty$. Donc $\boxed{E_0 + E_1 + E_\infty = Q}$.

Partie II – E_1 a au moins deux éléments

Pour $(x,y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x,y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x,y)$.

1. Si $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$, une récurrence double immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(x,y) \leqslant U_n(x',y')$, d'où $\boxed{\lambda(x,y) \leqslant \lambda'(x,y)}$.
2. On considère deux couples (x,y) et (x',y') éléments de Q. On suppose de plus que $U(x,y)$ converge vers 1.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que :

   $$U_{N-1}(x,y) + \varepsilon \leqslant U_{N-1}(x',y') \qquad \text{et} \qquad U_N(x,y) + \varepsilon \leqslant U_N(x',y').$$

   On montre par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \geqslant N$, $U_n(x,y)+\varepsilon \leqslant U_n(x',y')$, l'initialisation provenant de l'hypothèse faite. On considère ensuite $n \geqslant N+1$ tel que

   $$U_{n-1}(x,y) + \varepsilon \leqslant U_{n-1}(x',y') \qquad \text{et} \qquad U_n(x,y) + \varepsilon \leqslant U_n(x',y').$$

   Toutes les quantité étant postives, on a alors :

   $$\begin{aligned} U_{n+1}(x',y') &= \frac{1}{2}(U_n^2(x',y') + U_{n-1}^2(x',y')) \\ &\geqslant \frac{1}{2}((U_n(x,y)+\varepsilon)^2 + (U_{n-1}(x,y)+\varepsilon)^2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(U_n(x,y)^2 + U_{n-1}(x,y)^2) + \varepsilon^2 + \frac{(}{U\,n}(x,y) + U_{n-1}(x,y))\varepsilon \\ &\geqslant U_{n+1}(x,y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

   car au moins un des deux termes $u_n(x,y)$ ou $U_{n-1}(x,y)$ est supérieur ou égal à 1 (sinon, d'après I-4, on aurait $\lambda(x,y) = 0$)

   Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant N$, $\boxed{U_n(x,y) + \varepsilon \leqslant U_n(x',y').}$

   (b) On commence par remarquer que dans la situation précédente, $\lambda(x,y) + \varepsilon \leqslant \lambda(x',y')$; puisque $\lambda(x,y) = 1$, et que $\lambda(x',y') \in \{0, 1, +\infty\}$, il vient $\lambda(x',y') = +\infty$.

   - Supposons $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ et $(x,y) \neq (x',y')$; l'une des deux inégalités est donc stricte. On obtient alors facilement $U_2(x,y) < U_2(x',y')$, puis $U_3(x,y) < U_3'(x',y')$. On pose ε le minimum de $U_2(x',y') - U_2(x,y)$ et de $U_3(x',y') - U_3(x,y)$. On est alors dans les conditions de la question précédente pour $N = 3$, et par la remarque faite en début de question, il vient $\boxed{\lambda(x',y') = +\infty}$.

- Supposons $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ et $(x,y) \neq (x',y')$. D'après la question II-1 et les valeurs possibles de la limite, $\lambda(x',y') \in \{0,1\}$. Si $\lambda(x',y') = 1$, on peut utiliser le point précédent en échangeant le rôle de (x,y) et de (x',y'), ce qui aboutit à la contradiction $\lambda(x,y) = +\infty$. Ainsi, $\boxed{\lambda(x',y') = 1}$.

3. (a) Soit $E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda(x,0) = 0$.
   - E est non vide, puisqu'il contient trivialement 0 (et aussi $\sqrt{2}$ d'après I-2c)
   - D'après I-2c $\lambda(2,0) = +\infty$, donc pour tout $x \geqslant 2$, $\lambda(x,0) = +\infty$ (d'après II-1). Ainsi, E est majorée par 2.
   - E étant un sous-ensemble majoré non vide de $\mathbb{R}$, il $\boxed{\text{admet une borne supérieure } a}$.

   (b) On considère toujours E définie dans la question précédente. Soit $0 \leqslant x < a$. Par définition de la borne supérieure, il existe $y \in [x,a]$ tel que $y \in E$, c'est-à-dire $\lambda(y,0) = 0$. D'après II-1, on a alors $\lambda(x,0) \leqslant \lambda(y,0)$, donc $\boxed{\lambda(x,0) = 0}$.

   (c) Puisque $\sqrt{2} \in E$, on a $\boxed{a \geqslant \sqrt{2}}$. On ne peut pas avoir $2 < a$, car sinon la question précédente amènerait $\lambda(2,0) = 0$, ce qui contredit I-2c. Ainsi, $\boxed{a \leqslant 2}$.

4. (a) On montre par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $U_n(x,0)$ est continue.
   - L'initialisation est triviale pour $n = 0$ (fonction identité) et $n = 1$ (fonction nulle)
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \mapsto U_n(x,0)$ et $x \mapsto U_{n+1}(x,0)$ soient continues. Alors $x \mapsto U_{n+2}(x,0)$ est une somme de carrés de fonctions continues, donc est encore continue.

   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{x \mapsto U_n(x,0) \text{ est continue.}}$

   (b) Supposons que $\lambda(a,0) = 0$. il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n(a,0) < \frac{1}{3}$. Par continuité de $x \mapsto U_{n_0}(x,0)$ et $x \mapsto U_{n_0+1}(x,0)$, il existe ε tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x-a| \leqslant \varepsilon$, $U_{n_0}(x,0) < \frac{2}{3}$ et $U_{n_0+1}(x,0) < \frac{2}{3}$. En particulier, $U_{n_0}(a+\varepsilon,0) < \frac{2}{3}$ et $U_{n_0+1}(a+\varepsilon,0) < \frac{2}{3}$. De plus, la suite $U(a+\varepsilon,0)$ ne peut pas être constante (elle n'est ni nulle à cause de son terme d'ordre 0, ni égale à 1 à cause de son terme d'ordre 1). On déduit alors de I-5 que $U(a+\varepsilon,0) \to 0$. Cela contredit la définition de a.

   Ainsi, $\boxed{\lambda(a,0) \neq 0}$.

   (c) Supposons que $\lambda(a,0) = +\infty$. On raisonne de façon totalement similaire : il existe un rang à partir duquel $U_n(a,0) > 2$ et par continuité, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $U_n(a-\varepsilon,0)$ ait 2 rangs consécutifs strictement supérieurs à 1. Cela implique $U_n(a-\varepsilon,0) \to +\infty$ d'après I-6, ce qui contredit II-3b.

   Ainsi, $\boxed{\lambda(a,0) \neq +\infty}$.

   (d) On déduit des deux questions précédentes que $\boxed{\lambda(a,0) = 1}$.

   Pour tout $x > a$, on a alors $\boxed{\lambda(x,0) = +\infty}$ d'après II-2b.

   (e) Pour tout $y > 0$, on peut comparer le couple (a,y) et $(a,0)$ comme en II-2b, ce qui amène $\boxed{U_n(a,y) \to +\infty}$.

Partie III – Étude de E_0, E_1 et $E_{+\infty}$

1. (a) Le raisonnement est à peu près similaire à celui donné dans la partie II pour définir a.
   - Le cas $x = a$ résulte de la question II-4e, montrant que 0 est l'unique réel positif y tel que $(a,y) \in E_1$.
   - On suppose $x \in [0,a[$. On considère

     $$F = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda(x,y) = 0.$$

     L'ensemble F est non vide. En effet, puisque $x < a$, la question II-2b amène $\lambda(x,0) \to 0$, donc $0 \in F$. De plus, $U_1(x,a) \geqslant U_1(a,0)$ et $U_2(x,a) \geqslant U_2(a,0)$, donc $\lambda(x,a) \geqslant \lambda(a,0) = 1$ d'après II-1. Cette même question montre qu'alors pour tout $y \geqslant a$, $\lambda(x,y) \geqslant 1$. Donc a majore F.

     L'ensemble F étant non vide et majoré, il admet une borne supérieure y.

     L'argument mis en place en question II-4 est encore valable (en étudiant les prorpiétés de continuité par rapport à y) : si $U_n(x,y) \to 0$, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que $U_n(x,y+\varepsilon) \to 0$, ce qui contredit la définition de y ; si $U_n(x,y) \to +\infty$, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que $U_n(x,y-\varepsilon \to +\infty)$, ce qui signifie d'après II-1 que $y - \varepsilon$ majore F, d'où encore une contradiction sur la définition de y.

Ainsi, $\boxed{\lambda(x,y)=1}$

Pour tout $y'<y$, on a donc $\lambda(x,y')\leqslant 1$. Si $\lambda(x,y')=1$, II-2b amène $\lambda(x,y)>1$ d'où une contradiction.

De même, pour tout $y'>y$, II-2b amène directement $\lambda(x,y')>\lambda(x,y)=1$.

Ainsi, $\boxed{y \text{ est l'unique réel positif tel que } \lambda(x,y)=1}$.

On note désormais $\varphi(x)$ l'ordonnée de ce point et Γ la courbe décrite par le point $(x,\varphi(x))$ quand x varie de 0 à a.

(b)
- Par définition de E_1 et de φ, $\boxed{E_1=\Gamma}$
- La fin de la question précédente amène, pour $x\in[0,a]$, $\lambda(x,y')\to 0$ si et seulement si $y'<y$. De plus, si $x>a$, $\lambda(x,0)=+\infty$ puis pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, $\lambda(x,y)=+\infty$.
  Ainsi, $\boxed{E_0 \text{ est la portion de } Q \text{ située sous le graphe } \Gamma}$
- Par conséquent $\boxed{E_\infty \text{ est le reste}}$ (portion de Q au-dessus du graphe sur D_φ, au dessus de l'axe des abscisses ailleurs).

2. (a) Soit $x\leqslant y$. Si $\varphi(x)<\varphi(y)$, on aurait $1=\lambda(x,\varphi(x))\geqslant\lambda(x,\varphi(y))$. Par unicité de $\varphi(x)$ tel que $\lambda(x,\varphi(x))=1$, on en déduit $\lambda(x,\varphi(y))=+\infty$, puis d'après la question II-1, $\lambda(y,\varphi(y))=+\infty$ d'où une contradiction.

Ainsi, $\boxed{\varphi(x)\geqslant\varphi(y), \text{ donc } \varphi \text{ est décroissante.}}$

Puisque $\lambda(a,0)=1$ par définition de a, on obtient $\boxed{\varphi(a)=0}$. Puisque $\lambda(1,1)=1$ (limite de la suite constante égale à 1), on a $\boxed{\varphi(1)=1}$.

(b) Puisque $\frac{x^2+y^2}{2}=U_2(x,y)$, on a $U_n(x,y)=U_{n-1}\left(y,\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ pour $n=1$ et $n=2$. Une récurerence d'ordre 2 immédiate amène alors l'égalitré pour toute valeur de $n\geqslant 1$ (il s'agit juste d'un décalage des valeurs intiales).

On en déduit que $\lambda(x,y)=\lambda\left(y,\frac{x^2+y^2}{2}\right)$. On particluier, pour $y=\varphi(x)$,

$$1=\lambda\left(\varphi(x),\frac{x^2+\varphi(x)^2}{2}\right).$$

Par unicité de $\varphi(\varphi(x))$,

$$\boxed{\varphi(\varphi(x))=\frac{x^2+\varphi(x)^2}{2}}$$

(c) On obtient en particulier, pour $x=a$,

$$\boxed{\varphi(0)=\varphi(\varphi(a))=\frac{a^2}{2}},$$

puis pour $x=0$:

$$\boxed{\varphi\left(\frac{a^2}{2}\right)=\varphi(\varphi(0))=\frac{a^4}{8}}$$

3. (a) Soit $y\in[0,\varphi(0)]$. On adapte sans difficulté l'argument de la partie II (ou de la question III-1a), qui amène $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } x \text{ tel que } \varphi(x,y)=1}$. Il est inutile de perdre plus de temps à développer cette question.

(b) Soit $0\leqslant x<y\leqslant a$. Si $\varphi(x)=\varphi(y)=z$, on a $\lambda(x,z)=\lambda(y,z)=1$, ce qui contrdit l'unicité obtenue dans la question précédente. Ainsi $\varphi(x)\neq\varphi(y)$, et la décroissante ayant déjà été prouvée, $\varphi(x)>\varphi(y)$.

Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante}}$.

(c) Puisque φ est décroissante sur $[0,a]$, elle admet en tout point des limites à gauche et à droite, vérifiant, en tout $x\in]0,a[$,

$$\lim_{y\to x^-}\varphi(y)\geqslant\varphi(x)\geqslant\lim_{y\to x^+}\varphi(y)$$

(et une seule de ces deux inégalités aux bords 0 et a). Si l'une de ces inégalités est stricte, disons $\lim_{y\to x^-}\varphi(y)>\varphi(x)$, alors pour tout $y\in]\varphi(x),\lim_{y\to x^-}[$, et tout $z\in[0,a]$, on a $\varphi(z)\geqslant\lim_{y\to x^-}\varphi(y)$ si $z<x$ et $\varphi(z)\leqslant\varphi(x)$ si $z\geqslant x$, donc dans tous les cas, $\varphi(z)\neq y$. Soit alors $z\in[0,\varphi(a)]$. Puisque $\varphi(z)\neq y$, par unicité de $\varphi(z)$, $\lambda(z,y)\neq 1$. De plus, pour tout $z>a$, $\varphi(z,0)=+\infty$, donc $\varphi(z,y)=+\infty$.

On en déduit qu'il n'existe pas $z \geqslant 0$ tel que $\lambda(z, y) = 1$, ce qui contredit la question 3a.

Par conséquent, toutes les inégalités sont des égalités, ce qui entraîne la $\boxed{\text{continuité de } \varphi}$.

4. (a) D'après la question 2b, on a $x^2 + \varphi^2(x) = 2\varphi(phi(x))$. En tant que composée de deux fonctions décroissantes, $\boxed{g : x \mapsto x^2 + \varphi^2(x) \text{ est croissante}}$.

Par conséquent, pour tout $x \in [0, a]$, et tout $(x, y) \in E_1$,

$$g(0) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant g(a) \qquad \text{soit:} \qquad \frac{a^4}{4} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

On en déduit que G (graphe de E_1) est située dans une couronne circulaire de centre 0 de rayons compris entre $\boxed{\frac{a^2}{2} \text{ et } a}$.

(b) Par conséquent, pour tout $x \in [0, a]$, par décroissance de φ

$$h(x) = \sqrt{\frac{a^4}{2} - x^2}\varphi(x) \leqslant \varphi(0) = \frac{a^2}{2}.$$

On en déduit que

$$\frac{\sqrt{\frac{a^4}{2} - x^2} - \frac{a^2}{2}}{x} \leqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leqslant 0$$

Or, le minorant admet une limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\frac{a^4}{2} - x^2} - \frac{a^2}{2}}{x} = h'(0) = 0,$$

donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = 0.$$

Ainsi, φ est dérivable en 0 de dérivée $\boxed{\varphi'(0) = 0}$.

(c) Soit $x \in [0, a]$, On a alors

$$U_2(x, \sqrt{ax - x^2}) = \frac{1}{2}ax \leqslant \frac{1}{2}a^2 = U_2(a, 0).$$

De plus, puisque $a \leqslant 2$

$$U_3(x, \sqrt{ax - x^2}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)x^2 + ax\right) \leqslant \frac{ax}{2} \leqslant \frac{a^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad U_3(a, 0) = \frac{a^4}{8}.$$

Or,

$$\frac{a^4}{8} \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{a^2}{4} \geqslant 1,$$

car $a \geqslant \sqrt{2}$. Ainsi,

$$U_3(x, \sqrt{ax - x^2}) \leqslant U_3(a, 0).$$

Par récurrence immédiate, on obtient alors pour tout $n \geqslant 2$, $U_n(x, \sqrt{ax - x^2}) \leqslant U_n(a, 0)$, d'où $\lambda(x, \sqrt{ax - x^2}) \leqslant \lambda(a, 0) = 1$. Par conséquent, $\boxed{\varphi(x) \geqslant \sqrt{ax - x^2}}$.

(d) Puisque la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{ax - a^2}$ admet en a une tangente verticale, et admet même valeur en a que φ, on a aussi une $\boxed{\text{tangente verticale pour } \varphi \text{ en } a}$ (le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, par un calcul similaire à celui de la question 4b).

(e) On admet que φ est dérivable en 1. On a alors, d'après 2b, la dérivabilité en $\varphi(1)$ également (produit et composée de fonctions dérivables), et

$$2 \cdot 1 + 2\varphi'(1)\varphi(1) = 2\varphi'(1)\varphi'(\varphi(1)),$$

d'où (puisque $\varphi(1) = 1$) :

$$1 + \varphi'(1) = \varphi'(1)^2.$$

Ainsi, $\varphi'(1)$ est une solution négative de l'équation $y^2 - y - 1 = 0$, soit

$$\boxed{\varphi'(1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}.$$

(f) Représentez la couronne circulaire ainsi que le graphe de $x \mapsto \sqrt{ax - x^2}$ (cela permet de mieux visualiser les deux tangentes particulières qu'on a déterminées).

Partie IV – Étude asymptotique des suites monotones de S

1. Soit $n \geqslant 2$.
   - Par définition, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{(n-1)}^2) \geqslant \boxed{\frac{1}{2}U_n^2}$.
   - L'inégalité précédente reste vraie au rang précédent (y compris pour $n = 2$. Ainsi,

$$U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_{n-1}^2 \leqslant \boxed{\frac{1}{2}U_n^2 + U_n}.$$

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$. On pose

$$V_n = \frac{U_n}{2} \qquad \text{et} \qquad z_n = 2^{-n}\ln(V_n).$$

(a) Pour tout $n \geqslant 2$

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{U_{n+1}}{2}\right) - \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{U_n}{2}\right)$$

On utilise la question précédente pour encadrer $z_{n+1} - z_n$.

- $z_{n+1} - z_n \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{U_n^2}{4}\right) - \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{U_n}{2}\right) \geqslant 0$
- $z_{n+1} - z_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{U_n^2}{4} + \frac{U_n}{2}\right) - \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{U_n}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{2}{u_n}\right) = o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Ainsi, la série de terme général $z_{n+1} - z_n$ est à termes positifs, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, elle est convergente.

On en déduit que la somme partielle

$$\sum_{k=0}^{N-1}(z_{n+1} - z_n) = z_N - z_0$$

admet une limite finie, donc $\boxed{(u_n) \text{ admet une limite finie } L}$

(b) On a alors, toujours par télescopage, pour $n \geqslant 2$

$$L - z_n = \sum_{k=n}^{+\infty} z_{k+1} - z_k \geqslant 0,$$

et

$$L - z_n = \sum_{k=n}^{+\infty} z_{k+1} - z_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\ln\left(1 + \frac{2}{U_k}\right).$$

Comme (U_k) est croissante à partir d'un certain rang, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$L - z_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\ln\left(1 + \frac{2}{U_n}\right) \leqslant \frac{2}{U_n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n V_n}.$$

Nous avons bien montré que pour tout n assez grand,

$$\boxed{L - \frac{1}{2^n V_n} \leqslant z_n \leqslant L}$$

(c) On peut à partir de l'encadrement précédent obtenir un encadrement de (U_n) qui permet de conclure. On peut, de façon plus commode, rédiger avec O. En effet, l'encadrement précédent nous assure que

$$z_n = L + O(\frac{1}{2^n Vn} \qquad \text{donc:} \qquad 2^n z_n = 2^n L + O\left(\frac{1}{V_n}\right) = 2^n L + o(1),$$

puisque $V_n \to +\infty$. Ainsi, en passant à l'exponentielle,

$$V_n = \mathrm{e}^{2^n L}\mathrm{e}^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n L} \underset{+\infty}{\sim} M^{2^n},$$

où $M = \mathrm{e}^L$. Ainsi,

$$\boxed{U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}M^{2^n}}.$$

(d) On peut alors reprendre l'expression $2^n z_n = 2^n L + O\left(\frac{1}{V_n}\right)$, assurant, par passage à l'exponentielle :

$$V_n = M^{2^n}\mathrm{e}^{O\left(\frac{1}{V_n}\right)} = M^{2^n}(1 + O\left(\frac{1}{V_n}\right).$$

par conséquent,

$$U_n - \frac{1}{2}M^{2^n} = O\left(\frac{M^{2^n}}{V_n}\right) = O(1),$$

puisque $V_n \underset{+\infty}{\sim} M^{2^n}$. On en déduit que $\boxed{U_n - \frac{1}{2}M^{2^n} \text{ est borné.}}$

3. Puisque (U_n) tend vers 0, elle est décroissante à partir d'un certain rang (partie I). Ainsi, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n-1}$. On en déduit que

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2) \leqslant \frac{1}{2}(2U_{n-1}^2) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{U_{n+1} \leqslant U_{n-1}^2}.$$

4. Par récurrence immédiate, on obtient, pour tout $n \geqslant n_0$, (on peut aussi choisir n_0 tel que $U_{n_0} < 1$, par convergence)

$$U_{n_0+2k} \leqslant U_{n_0}^{2^k} \qquad \text{et} \qquad U_{n_0+2k+1} \leqslant U_{n_0+1}^{2^k}.$$

Ainsi, soit $n \geqslant n_0$,
   - si n est de même parité que n_0, $n = n_0 + 2k$, on a :

$$U_n \leqslant (U_{n_0})2^k = (U_{n_0}^{2^{-\frac{n_0}{2}}})^{2^{\frac{n}{2}}},$$

   - si n et n_0 sont de parité opposée, on a de même :

$$U_n \leqslant (U_{n_0}^{2^{-\frac{n_0+1}{2}}})^{2^{\frac{n}{2}}},$$

Posons $B' < 1$ le maximum de $U_{n_0}^{2^{-\frac{n_0}{2}}}$ et de $U_{n_0}^{2^{-\frac{n_0+1}{2}}}$), et $B = \frac{1}{B'} > 1$. On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$U_n \leqslant \frac{1}{B^{2^{\frac{n}{2}}}}.$$

On pose enfin

$$A = \max\{1\} \cup \{U_n B^{2^{\frac{n}{2}}}, n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\} > 0.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{U_n \leqslant \frac{A}{B^{2^{\frac{n}{2}}}}}.$$