

## Exercices de révision pour les oraux : Série 4.

### 1. Amplificateur opérationnel réel

Dans le montage de la figure 1, l'amplificateur opérationnel est caractérisé par un gain en tension complexe du type passe bas du premier ordre :

$$V_s = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}(V_+ - V_-)$$

On considère que les courants entrants dans l'amplificateur linéaire intégré sont très faibles au point d'écrire  $i_- = i_+ = 0$ .

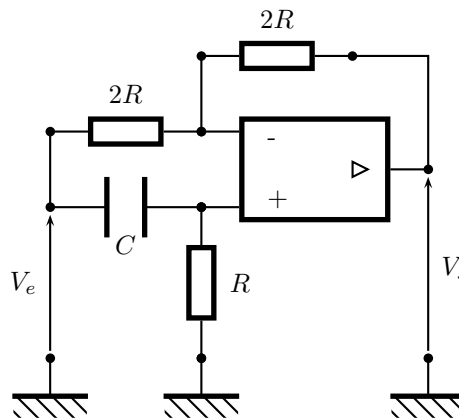


FIGURE 1 – Montage à AO réel

1. Connaissez-vous un ordre de grandeur pour  $\mu_0$  et  $\omega_0$  ?
2. Exprimer l'équation différentielle liant la tension de sortie  $V_s$  à la tension d'entrée  $V_e$ .
3. Le réseau est-il stable ? Cette conclusion serait-elle modifiée si on permutait les bornes de l'amplificateur opérationnel ?
4. Tracer les diagrammes de Bode, commenter.

Réponses :  $\mu_0 \simeq 10^6$ ,  $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\frac{RC}{\omega_0} \frac{d^2 V_s}{dt^2} + [\frac{1}{\omega_0} + RC(1 + \frac{\mu_0}{2})] \frac{dV_s}{dt} + (1 + \frac{\mu_0}{2})V_s = -\frac{\mu_0}{2}V_e + \frac{\mu_0}{2}RC \frac{dV_e}{dt}$ , oui  $V_s$  n'a pas tendance à diverger, oui  $V_s$  va avoir tendance à diverger et on va aller vers la saturation, filtre passe-bas.

### 2. Oscilloscope numérique

La structure d'un oscilloscope numérique comprend un étage d'entrée atténuateur qui possède une impédance d'entrée de  $1 \text{ M}\Omega$  - information inscrite sur l'appareil en général -, un échantillonneur fonctionnant à la fréquence  $F_e$  - et qui, par conséquent, prélève  $F_e$  échantillons par seconde -, un convertisseur analogique-numérique qui envoie les données dans la mémoire et un système de traitement pour fournir l'image sur l'écran de l'oscilloscope. Un utilisateur souhaite pouvoir analyser des signaux classiques - sinusoïdal, triangle, créneau, impulsion - présentant des fréquences comprises entre 0,1 Hz et 10 MHz.

1. Pourquoi ne peut-on pas se contenter d'un oscilloscope dont la bande passante est égale à la fréquence maximale souhaitée ?
2. Quelle est la valeur minimale du taux d'échantillonnage nécessaire ?
3. La notice de l'appareil précise que, pour une bonne gestion de la capacité de la mémoire d'une capacité de 256 ko, le taux d'échantillonnage  $F_e$  est ajusté en fonction du calibre sélectionné sur l'appareil. En supposant qu'un échantillon occupe 2 octets, quel taux d'échantillonnage  $F_e$  maximal permettrait d'observer 10 périodes d'un signal de fréquence 10 kHz ? On restreint la cadence à  $100 \text{ Mch} \cdot \text{s}^{-1}$ , combien un balayage occupe-t-il de capacité mémoire ? Combien cela représente-t-il de points par période ?
4. Le choix du convertisseur conditionne fortement le prix de l'appareil. Commenter les valeurs du tableau suivant.

Nombre de bits	8	12	16
Nombre de niveaux	256	4 096	65 536
Plus petite variation décelable	0,4%	244 ppm	15 ppm

- Peut-on avec les convertisseurs proposés atteindre une précision de 0,1 mV pour une tension de 240 V ?
- En fait, pour mesurer des tensions de quelques dizaines ou de centaines de volts, on utilise une sonde qui atténue le signal d'un facteur 10. Quelle est la précision que l'on peut obtenir en utilisant un convertisseur 12 bits ?

Réponses : un signal triangle ou créneau ou a fortiori impulsion présente des fréquences supérieures à 10 MHz, pour le triangle et le créneau ce sont des multiples de cette fréquence, les oscilloscopes de TP sont à 60 MHz ; il faut respecter le critère de SHANNON et donc  $F_e > 2f_{max}$  ; on dispose de  $256 \times 1024 = 262\,144$  octets ce qui fait 131 072 valeurs à stocker dans la mémoire ce qui représente pour une période environ 13 107 valeurs, la fréquence étant de 10 kHz, il faut donc  $F_e = 131 \text{ Méch} \cdot \text{s}^{-1}$ , 10 périodes cela représente 1 ms, cela fait  $10^5$  échantillons et cela occupe donc  $2 \times 10^5$  octets tout en ayant  $10^4$  échantillons par période ; le nombre de niveaux est bien  $2^n$  où  $n$  est le nombre de bits, la plus petite variation relative est de  $\frac{1}{2^n-1} \simeq 2^{-n}$ , on trouve bien les valeurs annoncées dans le tableau ; la variation relative est de 0,4 ppm c'est impossible à atteindre avec les convertisseurs proposés ; avec l'atténuation on doit mesurer au maximum 24 V avec une précision de 244 ppm cela représente donc une précision d'environ 6 mV.

### 3. Barrière de potentiel

On cherche à déterminer certains états stationnaires d'une particule quantique de masse  $m$  évoluant dans le potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ (région II),} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{a}{2} \text{ (région III).} \end{cases} \quad (1)$$

On se limite au cas où  $E > V_0$ . On pose  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $K = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ .

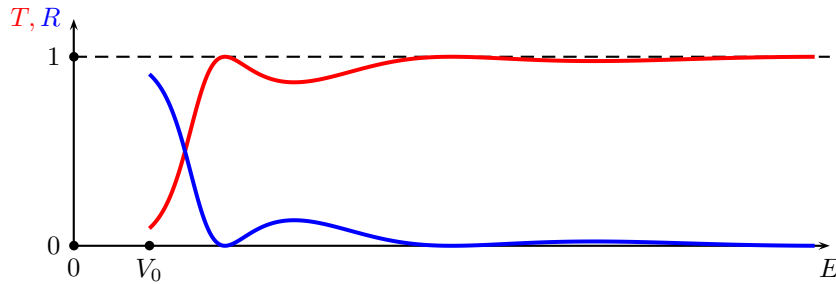
- Décrire qualitativement le mouvement de la particule dans le cas où il peut être décrit dans le cadre de la mécanique classique.
- Dans le cadre d'une description quantique, l'état de la particule est décrit par la fonction d'onde  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\varphi(x)$  dans chacune des trois régions.
- En l'absence de source de particules quantiques dans la région III, proposer une forme adéquate de  $\varphi(x)$  dans chacune des trois régions. Préciser les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées par  $\varphi(x)$ .

Ces conditions de raccordement permettent de déduire les expressions des probabilités de transmission au-delà de la barrière  $T$ , et de réflexion par la barrière  $R$ . On donne :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2 \left( \frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \right)}$$

- Déterminer l'expression de  $R$  à partir de l'expression de  $T$ .
- Représenter l'allure de  $T$  et de  $R$  en fonction de  $E$  pour  $E > V_0$ . Commenter.
- Des électrons d'énergie cinétique égale à 10 eV s'approchent d'une barrière de potentiel comme celle-ci de hauteur 4 eV. Déterminer les épaisseurs de la barrière pour laquelle la transmission du faisceau électronique est totale. Comparer, dans cette situation, l'épaisseur de la barrière à la longueur d'onde de DE BROGLIE des électrons dans la barrière.

Réponses : la particule classique ralenti en  $x = -a/2$  de façon brutale comme dans un choc et accélère de façon brutale en  $a/2$  ; dans les régions I et III on a  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0$  et dans la région II  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2\varphi(x) = 0$ , on a  $\varphi_I(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$ ,  $\varphi_{II}(x) = A_2 \exp(iKx) + B_2 \exp(-iKx)$  et  $\varphi_{III}(x) = A_3 \exp(ikx)$ , il y a continuité de  $\varphi$  d'où  $\varphi_I(-a/2) = \varphi_{II}(-a/2)$  et  $\varphi_{III}(a/2) = \varphi_{II}(a/2)$ , le potentiel étant borné en tout point, on a aussi continuité de la dérivée  $\left. \frac{d\varphi_I}{dx} \right|_{-a/2} = \left. \frac{d\varphi_{II}}{dx} \right|_{-a/2}$  et  $\left. \frac{d\varphi_{II}}{dx} \right|_{a/2} = \left. \frac{d\varphi_{III}}{dx} \right|_{a/2}$  ; par conservation de la loi de probabilité, on a  $R = 1 - T$  ; représentation graphique de  $T$  et de  $R$  sur le graphique de la figure 2 ; à chaque fois que  $Ka = n\pi$ , on a  $T = 1$ , cela se produit lorsque  $a = n \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2m(E-V_0)}}$ , la longueur d'onde de DE BROGLIE est  $\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p}$  avec  $p = \sqrt{2m(E-V_0)}$ , on voit que la condition précédente revient à  $a = n \frac{\lambda_{DB}}{2}$  qui est équivalente à une condition d'ondes stationnaires entre deux nœuds comme par exemple sur la corde de MELDE ;  $a_n = na_1$  avec  $a_1 = 250 \text{ pm}$ , on a  $a = 500 \text{ pm} = 2a_1$ , il y a bien transmission intégrale.

FIGURE 2 – Coefficient de transmission  $T$  et de réflexion  $R$ 

#### 4. Deux quantons dans un puits...

On considère deux quantons de masse  $m_1 = m_0$  et  $m_2 = 2m_0$  dans un puits infini unidimensionnel de longueur  $L$ . Le potentiel du quanton  $U(x)$  est nul dans l'intervalle  $[0, L]$  et infini sinon. On suppose les deux quantons sans interaction.

1. Donner l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour un seul quanton de masse  $m_0$  dans le puits.
2. Trouver les états stationnaires ainsi que les énergies propres correspondantes pour un seul quanton de masse  $m_0$  dans le puits infini.
3. Donner l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour le système des deux quantons.
4. Montrer qu'une fonction d'onde  $\varphi_{nm}(x_1, x_2)$  sous la forme du produit du type  $\varphi_n(x_1)\varphi_m(x_2)$  est solution de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour deux quantons, et trouver ainsi les énergies propres  $E_{nm}$  du système des deux quantons.
5. Calculer les 6 premiers niveaux d'énergie et trouver le degré de dégénérescence  $g$  de chaque niveau d'énergie (c'est-à-dire le nombre d'états pour un niveau d'énergie donné).
6. Même question quand on considère deux quantons identiques ( $m_1 = m_2$ ).

Réponses : On a  $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{2m_0E_1}{\hbar^2}\varphi_1 = 0$  ; avec les conditions aux limites la solution est de la forme  $\varphi_1 = A_1 \sin k_1 x$  avec  $k_1 L = n\pi$ , en normalisant  $\int_0^L \varphi_1^2(x) dx = 1$ , on trouve  $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$  et pour l'énergie  $\frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2m_0E_1}}{\hbar}$  d'où  $E_1 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  ; on a  $E_{nm}\varphi(x_1, x_2) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\varphi(x_1, x_2)}{dx_1^2} - \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{d^2\varphi(x_1, x_2)}{dx_2^2}$  ; en séparant les variables on a  $E_{nm} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{\varphi(x_1)} \frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2} = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{1}{\varphi(x_2)} \frac{d^2\varphi(x_2)}{dx_2^2} = K$  d'où  $\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2} + \frac{2m_0(E_{nm}-K)}{\hbar^2}\varphi(x_1) = 0$  de solution  $\varphi(x_1) = A'_1 \sin k_1 x$  avec  $k_1 L = n\pi$  d'où  $\frac{\sqrt{2m_0(E_{nm}-K)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$ , on en déduit que  $K = E_{nm} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  et  $\frac{d^2\varphi(x_2)}{dx_2^2} + \frac{4m_0}{\hbar^2} K \varphi(x_2) = 0$  de solution  $\varphi(x_2) = A'_2 \sin \frac{\sqrt{4m_0K}}{\hbar} x$  avec  $\frac{\sqrt{4m_0K}}{\hbar} = \frac{m\pi}{L}$  d'où  $\frac{m^2\pi^2\hbar^2}{4m_0L^2} = E_{nm} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  et par conséquent  $E_{nm} = E_0(n^2 + \frac{m^2}{2})$  avec  $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0L^2}$  ; on a  $E_{11} = \frac{3}{2}E_0$ ,  $E_{12} = 3E_0$ ,  $E_{21} = \frac{9}{2}E_0$ ,  $E_{13} = \frac{11}{2}E_0$ ,  $E_{22} = 6E_0$  et  $E_{23} = \frac{17}{2}E_0$  pas de dégénérescence  $g = 1$ , un seul état pour un niveau d'énergie donné ; si on a deux quantons identiques alors  $E_{nm} = E_0(n^2 + m^2)$ ,  $E_{11} = 2E_0$   $g = 1$ ,  $E_{12} = E_{21} = 5E_0$   $g = 2$ ,  $E_{22} = 8E_0$   $g = 1$ ,  $E_{23} = E_{32} = 13E_0$   $g = 2$ ,  $E_{33} = 18E_0$   $g = 1$ ,  $E_{24} = E_{42} = 20E_0$   $g = 2$ .

#### 5. Pendule électrostatique

Un pendule simple est constitué d'une barre sans masse  $AP$  de longueur  $\ell$  à l'extrémité de laquelle on a placé une petite boule de masse  $m$  et de charge positive  $q$ . Ce pendule oscille dans le plan  $Oyz$ . La liaison pivot d'axe  $Ax$  est parfaite en  $A$ . On ajoute deux charges  $-Q < 0$  sur l'axe  $y'Oy$  symétriquement à la même distance  $a$  du point  $O$ . Voir la figure 3. On donne  $OA = \ell$ .

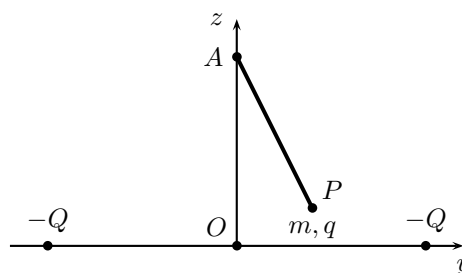


FIGURE 3 – Pendule électrostatique

1. Quelle est la période des petites oscillations du pendule en l'absence des deux charges  $-Q$  ?
2. Que devient-elle lorsqu'elles sont présentes ?

Réponses :  $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{\ell}{2}\theta^2$  à l'ordre le plus bas,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ,  $E_{pot,elec} = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a}(1 + \frac{\ell^2}{a^2}\theta^2)$ ,  $\omega'_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3 m}}$  pour  $Q < mg\frac{\pi\epsilon_0 a^3}{\ell q}$ .

## 6. Résistance thermique et cône

On considère deux conducteurs thermiques parfaits, l'un est un plan infini porté à la température  $T_0$ , l'autre possède la forme d'une pointe conique de demi-angle au sommet  $\alpha$ . Il est porté à la température  $T_1 > T_0$ . Le milieu séparant les deux conducteurs thermiques parfaits possède une conductivité thermique  $\lambda$ , une capacité thermique massique  $c$  et une masse volumique  $\mu$ . Voir le schéma de la figure 4. On ne fera le calcul que pour le rayon  $a$  de la zone conductrice en négligeant les effets de bord. On note que malgré les apparences sur le schéma, les deux conducteurs thermiques parfaits ne sont pas en contact au niveau du point  $O$ . Un isolant thermique parfait et localisé en  $O$  empêche les transferts. On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

On donne l'intégrale suivante :

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\ln \tan \frac{\alpha}{2}$$

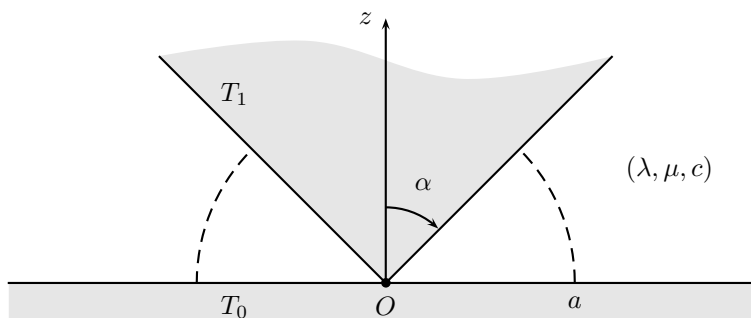


FIGURE 4 – Résistance thermique

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(r, \theta, \varphi, t)$ . Simplifier cette équation dans le cadre du problème proposé et se placer en régime stationnaire.
2. Justifier le fait que  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ . En déduire la forme des lignes de courants de transfert thermique par conduction.
3. Déterminer la résistance thermique pour la portion de conducteur comprise entre les deux conducteurs parfaits et de rayon  $a$ .

Réponses :  $\Delta T = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$ ,  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0$ , les surfaces isothermes provoquent l'indépendance de  $r$  et comme on néglige les effets de bord les isothermes sont nécessairement des cônes d'axe  $Oz$  et d'angles compris entre  $\alpha$  et  $\pi/2$ , les lignes de courants sont donc sur  $\vec{e}_\theta$  et  $\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = A$ ; par intégration  $T(\theta) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\ln \tan \theta/2}{\ln \tan \alpha/2}$ ,  $\vec{j} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{\ln \tan \alpha/2} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\theta$ ,  $d\vec{S} = r dr \sin \theta d\varphi \vec{e}_\theta$ ,  $P = -\frac{\lambda a 2\pi}{\ln \tan \alpha/2} (T_1 - T_0)$  et  $R_{th} = -\frac{\ln \tan \alpha/2}{\lambda 2\pi a}$ .

## 7. Cylindre de gaz en rotation

Au laboratoire, on enferme un gaz parfait dans un cylindre de rayon  $R$ , de hauteur  $H$  à la pression  $p_0$  et à la température  $T_0$ . Il contient  $N$  particules de masse  $m$ , le gaz est assimilé à un gaz parfait. Le cylindre est en contact avec un thermostat qui impose en permanence au gaz la température  $T_0$ . Le cylindre est placé sur un plateau horizontal. On rappelle que la constante de BOLTZMANN est  $k_B = R/\mathcal{N}_A \simeq 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1. Dans un premier temps, le cylindre est immobile. Déterminer la loi donnant l'évolution de la pression à l'intérieur du cylindre en fonction de l'altitude  $z$  d'un point par rapport à la base du cylindre. Faire apparaître une longueur caractéristique  $\ell_c$  dont évaluera l'ordre de grandeur dans des conditions usuelles. Conclusion.

- On met le plateau en rotation à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  maintenue constante. On précise que l'axe de rotation coïncide avec l'axe de symétrie du cylindre. Le régime transitoire n'est pas étudié. On s'intéresse à la situation permanente obtenue ensuite. Établir la loi de pression à l'intérieur du cylindre ainsi que la loi donnant la densité volumique de particules. Dans le calcul, on fera apparaître une longueur caractéristique que l'on notera  $a$ . On évaluera l'ordre de grandeur de cette longueur dans des conditions usuelles.
- Représenter l'évolution de la densité  $n$  de particules et la densité initiale (lorsque  $\omega = 0$ ) que l'on notera  $n_0$ .
- Déterminer la variation d'entropie du gaz entre l'état initial et l'état final. On calculera l'intégrale obtenue avec un logiciel de calcul formel et on représentera l'évolution de l'entropie en fonction de  $R/a$ .

Réponses : La densité volumique initiale est  $n_0 = \frac{N}{\pi R^2 H}$ , la loi des gaz parfaits donne  $p_0 = n_0 k_B T_0$ , la loi de la statique des fluides est  $\vec{\text{grad}} p = \mu \vec{g}$  avec  $\mu = \frac{mp}{k_B T_0}$ , on trouve  $n(z) = \frac{n_0 H}{\ell_c (1 - \exp(-\frac{z}{\ell_c}))} \exp(-\frac{z}{\ell_c})$  et donc  $p(z) = p_0 \frac{H}{\ell_c (1 - \exp(-\frac{z}{\ell_c}))} \exp(-\frac{z}{\ell_c})$  avec  $\ell_c = \frac{k_B T_0}{mg}$ , on trouve que  $\ell_c \simeq 30 \text{ km}$  et donc  $\ell_c \gg H$ , on peut considérer la densité de particules comme la pression comme uniforme dans le cylindre, on négligera la pesanteur par la suite;  $\vec{\text{grad}} p = -\mu \vec{a}_{\text{ent}} = \mu \omega^2 r \vec{e}_r$  d'où  $\frac{dp}{dr} = \frac{m \omega^2}{k_B T_0} r$  et avec  $\frac{dp}{p} = \frac{dn}{n}$ , on arrive à  $n(r) = n(r=0) \exp \frac{m \omega^2}{2 k_B T_0} r^2$ , on pose  $a = \sqrt{\frac{2 k_B T_0}{m \omega^2}} \simeq 1 \text{ km}$ , avec la conservation du nombre de particules, on trouve  $n(r) = \frac{n_0 R^2}{a^2 (\exp \frac{R^2}{a^2} - 1)} \exp \frac{r^2}{a^2}$  et  $p(r) = \frac{p_0 R^2}{a^2 (\exp \frac{R^2}{a^2} - 1)} \exp \frac{r^2}{a^2}$ ; la densité au centre est inférieure à  $n_0$  puis elle augmente rapidement elle repasse par la valeur  $n_0$  au voisinage de  $r = R/\sqrt{2}$  et croît jusqu'à  $r = R$ ; on utilise l'identité thermodynamique  $dH = C_p dT = T dS + V dP$  comme la température est fixée, on a  $T_0 dS = -V dP$ , ici on doit considérer une petite quantité  $dN$  de particules dont la pression passe de  $p_0$  à  $p(r)$ , on a  $d^2 S = -dN k_B \frac{dp}{p}$  d'où  $dS = -k_B n(r) 2\pi H r dr \ln \frac{p(r)}{p_0}$ , on pose  $b = \frac{R}{a}$  et  $u = \frac{r}{a}$ , on a  $\frac{p(r)}{p_0} = f(u) = \frac{b^2}{\exp b^2 - 1} \exp u^2$  et par conséquent  $\Delta S = -k_B n_0 2\pi H a^2 \int_0^b u f(u) \ln f(u) du$ , on trouve une fonction qui est très voisine de zéro pour  $b \ll 1$  ce qui est notre cas puisque  $R \ll a$ , elle ne fait que décroître que pour  $b \simeq 0, 1$ , on trouve  $\Delta S < 0$ , on a augmenté l'ordre dans le système, n'oublions pas que l'on impose toujours la température  $T_0$  et que les molécules sont moins dispersées dans le volume disponible qu'avant.

### 8. Franchissement d'une zone de charges

On considère une particule de charge  $q > 0$ , de masse  $m$  de déplaçant dans le vide et arrivant depuis  $x \rightarrow -\infty$  sur l'axe  $Ox$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ . Elle est amenée à rencontrer une zone de charge comprise entre les abscisses  $x = -a$  et  $x = +a$ . La zone de charge est modélisée par une charge volumique  $\rho(x)$  invariante en  $y$  et en  $z$  donnée par la formule suivante :

$$\rho(x) = \rho_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{pour} \quad -a \leq x \leq +a$$

avec  $\rho_0 > 0$ .

- Expliquer qualitativement pourquoi la particule ne pourra pas forcément franchir la zone de charge. On décrira le mouvement de la particule avant et, le cas échéant, après la zone de charge.
- Déterminer la vitesse minimale  $v_{0,min}$  qu'elle doit posséder pour pouvoir franchir la zone de charge.

Réponses : Le plan  $x = 0$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique est donc porté par  $\vec{e}_x$  et le potentiel est impair en  $x$ , il est donc indépendant de  $x$  dans le vide en dehors de la zone de charge, la distribution de charge étant globalement nulle, le champ électrique à l'extérieur de la distribution de charge est nul, il suffit d'aller en  $x \rightarrow \pm\infty$  pour le comprendre puisqu'on est très éloigné d'un dipôle, le mouvement est donc uniforme en dehors de la zone de charge, la zone de charge positive pour  $x \in [0; +a]$  tend à repousser la charge, elle doit donc posséder une énergie cinétique minimale pour franchir la barrière de potentiel, l'équation de POISSON est  $\Delta V(x) = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$ ,  $-E_x = \frac{dV}{dx} = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0 \pi} \cos \frac{\pi x}{a} + \alpha$ , le champ est continu et nul en  $x = \pm a$ , d'où  $\alpha = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0 \pi}$ ,  $V(x) = \frac{\rho_0 a}{\pi \epsilon_0} (x + \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a})$ , à la limite pour franchir la barrière de potentiel et se trouver avec une vitesse nulle en  $x = +a$ , il faut une vitesse minimale telle que  $\frac{1}{2} m v_{0,min}^2 - q \frac{\rho_0 a^2}{\pi \epsilon_0} = q \frac{\rho_0 a^2}{\pi \epsilon_0}$  d'où  $v_{0,min} = 2 \sqrt{\frac{q \rho_0 a^2}{m \pi \epsilon_0}}$ .

### 9. Entrée dans une zone de champ magnétique

Un cadre carré, de résistance électrique totale  $R$  et d'autoinductance négligeable, de côté  $\ell$  et de masse  $m$ , est astreint à se déplacer sur une glissière horizontale sans frottement. On repère par  $x(t)$  la position de son côté droit. Il arrive depuis  $x = -\infty$  avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ . Il pénètre dans la zone  $x > 0$  grisée sur le schéma de la figure 5 où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . La zone de champ magnétique est d'extension spatiale  $L = 4\ell$ . On prend pour origine des temps l'instant où le cadre commence à entrer dans le champ magnétique.

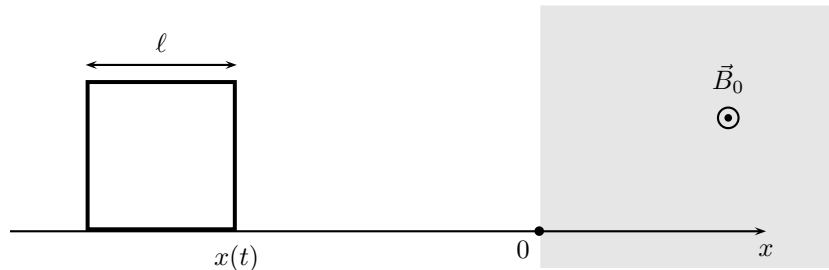


FIGURE 5 – Cadre conducteur pénétrant dans une zone de champ magnétique

1. Effectuer une analyse qualitative du mouvement du cadre.
2. Établir l'équation du mouvement du cadre pour tout  $x$ .
3. On souhaite que le cadre ait une vitesse  $\vec{v}_s = \alpha v_0 \vec{e}_x$ , avec  $\alpha < 1$ , une fois qu'il est sorti de la zone de champ magnétique. Déterminer l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}_0$  qui permet d'aboutir à une telle vitesse.

Réponses : Pour  $x \leq 0$ , le mouvement du cadre est uniforme car la réaction de la glissière support est sans frottement et le poids est compensé par la réaction normale exercée par la glissière. Une fois que  $0 \leq x \leq \ell$ , le flux à travers le cadre varie, il y a induction et la force de LAPLACE qui résulte du courant induit freine le cadre. Pour  $\ell \leq x \leq 4\ell$ , tout le cadre est plongé dans le champ magnétique, il n'y a plus de variation de flux, donc plus de courant induit, plus de force de LAPLACE, le mouvement du cadre continue à vitesse constante. Ensuite, lorsque  $4\ell \leq x \leq 5\ell$ , le flux dans le cadre diminue, il y a à nouveau induction et le courant induit va avoir tendance à freiner à nouveau le cadre. Lorsque  $x \geq 5\ell$ , le cadre est complètement sorti de la zone de champ magnétique, il n'y a plus d'induction. le cadre continue à vitesse constante.  $v = v_0$  pour  $x \leq 0$ , ensuite  $\mathcal{E} = -B_0 \ell v$  et  $i = -\frac{B_0 \ell v}{R}$ , l'équation du mouvement est  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$  avec  $\tau = \frac{mR}{B_0^2 \ell^2}$ . Les solutions sont  $v = v_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$  et  $x = v_0 \tau (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$ . La phase se termine à la date  $t_1$  lorsque  $\exp(-\frac{t_1}{\tau}) = 1 - \frac{\ell}{v_0 \tau}$ , la vitesse est  $v_1 = v_0 - \frac{\ell}{\tau}$ . Cette vitesse est conservée jusqu'à ce que  $x = 4\ell$ . Ensuite  $\phi = B_0 \ell (5\ell - x)$  et donc  $i = \frac{B_0 \ell v}{R}$ , l'équation du mouvement est encore une fois  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$  (attention la force de LAPLACE agit sur le côté gauche du cadre contrairement au moment de l'entrée dans la zone de champ magnétique). La vitesse est donc  $v = v_1 \exp(-\frac{t-t_1}{\tau})$  et l'abscisse  $x = v_1 \tau (1 - \exp(-\frac{t-t_1}{\tau})) + 4\ell$ . Ce freinage s'arrête à la date  $t_2$  et telle que  $x = 5\ell = v_1 \tau (1 - \exp(-\frac{t_2-t_1}{\tau})) + 4\ell$  et donc lorsque  $v_2 = v_1 - \frac{\ell}{\tau} = v_0 - \frac{2\ell}{\tau}$ . Ensuite, le cadre conserve la vitesse  $v_2$ , on a donc  $v_s = v_2 = v_0(1 - \frac{2\ell}{v_0 \tau})$ . On trouve  $B_0 = \sqrt{\frac{mv_0(1-\alpha)R}{2\ell^3}}$ .

### 10. Fibre optique

On considère une fibre optique cylindrique de rayon de cœur  $r$ , c'est-à-dire de partie centrale d'indice  $n_c = 1,500$ . La partie périphérique de la fibre est appelée gaine, elle est d'indice  $n_g$ . Cette fibre optique possède une longueur  $L$ . L'onde qui entre dans la fibre se propage dans l'air d'indice  $n_a = 1,000$  avant d'entrer dans la fibre. Voir le schéma de la figure 6.

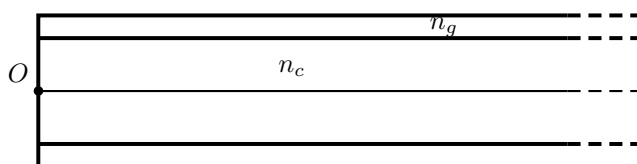


FIGURE 6 – Fibre optique

1. Quel est l'angle maximal d'incidence  $\theta_{max}$  d'un rayon lumineux arrivant en  $O$  pour que le signal se propage loin dans la fibre ?

- On définit l'ouverture numérique  $ON = n_a \sin \theta_{max}$  de la fibre optique. On donne  $ON = 0,181$ . Déterminer  $n_g$ .
- Quelles peuvent être les valeurs de la distance géométrique parcourue par un signal si la longueur de la fibre est  $L$  ?
- On propage dans la fibre des impulsions supposées de durée nulle. Quelle est la différence des temps de propagation du signal notée  $\Delta t$  ? Calculer  $\frac{\Delta t}{L} = \frac{t_{max} - t_{min}}{L}$  en  $\text{ns} \cdot \text{km}^{-1}$ . Calculer la fréquence maximale des impulsions pour  $L = 10 \text{ km}$ .

Réponses : Il faut assurer la réflexion totale entre cœur et gaine,  $n_c \sin i_1 = n_g \sin i_2$  et donc  $\sin i_1 \leq \frac{n_g}{n_c}$ , à l'entrée de la fibre on aura  $n_a \sin \theta = n_c \cos i_1$  et donc  $\sin \theta_{max} = n_c \cos i_{1,lim}$ , on trouve numériquement  $\theta_{max} = 10,5^\circ$ ,  $ON = n_c \cos i_{1,lim}$  d'où  $i_{1,lim} = 83^\circ$  et donc  $n_g = n_c \sin i_{1,lim}$ , on trouve  $n_g = 1,489$ , la distance géométrique la plus courte est  $L$  et la plus longue est celle qui concerne l'angle limite de la réflexion totale qui est faite de portion rectiligne sous l'angle  $i_{1,lim}$  d'où la plus grande longueur  $\frac{n_c}{n_g}L$ , l'écart est donc  $\Delta d = (\frac{n_c}{n_g} - 1)L$ , la durée varie sur l'intervalle  $\Delta t = \frac{n_c \Delta d}{c}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide, on a  $\frac{\Delta t}{L} = \frac{n_c(n_c - n_g)}{n_g} \frac{1}{c} = 37 \text{ ns} \cdot \text{km}^{-1}$ , pour  $L = 10 \text{ km}$  on aura  $\Delta t = 370 \text{ ns}$  et donc  $f_{max} = \frac{1}{\Delta t} = 2,7 \text{ MHz}$ .

### 11. Imperfections d'un miroir

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air avec un angle  $\alpha$ . On utilise une source lumineuse monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 584 \text{ nm}$ . On réalise une projection de la figure d'interférences sur un écran placé à une distance  $\ell = 1,25 \text{ m}$ . Le diamètre éclairé des miroirs est  $D = 20 \text{ mm}$ . On observe sur l'écran un des deux systèmes de franges représentés sur le schéma de la figure 7.

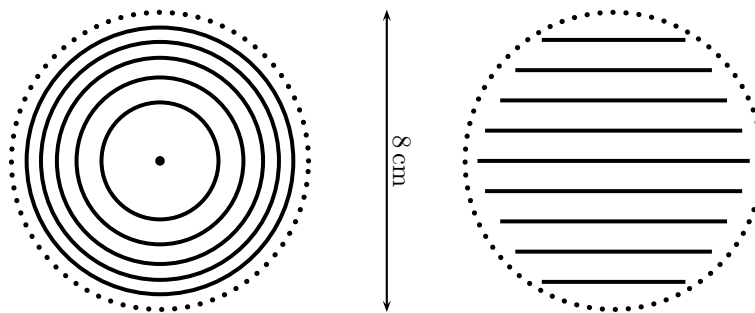


FIGURE 7 – Figures d'interférences d'un interféromètre de MICHELSON

- Quelle est la figure qui correspond au réglage de l'interféromètre ?
- Quel type de lentille faut-il utiliser pour réaliser la projection sur l'écran ? Donner la position qu'elle doit occuper ainsi que la valeur de distance focale.
- À l'aide de la figure, déterminer l'angle  $\alpha$ .
- On considère qu'un des deux miroirs possède une imperfection à sa surface. Cette imperfection est de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$  et d'épaisseur inférieure à  $\lambda/4$ . Décrire avec précision les conséquences de cette imperfection sur la figure d'interférences.
- On considère à nouveau que les miroirs de l'interféromètre sont parfaits. On injecte à proximité d'un des miroirs un peu gaz contenu dans un briquet (en veillant à ne pas en envoyer sur la surface réfléchissante du miroir). Décrire ce qu'il se produit.

Réponses : L'interféromètre réglé en coin d'air produit des franges rectilignes d'égale épaisseur, on utilise une lentille convergente pour avoir une image réelle sur l'écran, la taille de l'image du miroir est  $h = 8 \text{ cm}$  alors que le diamètre était  $D = 2 \text{ cm}$ , le grandissement transversal est donc  $\gamma = -4$ , négatif puisqu'on a une lentille convergente,  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$  et  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f}$ , de plus  $\overline{AA'} = \ell$  d'où  $\overline{OA} = -0,25 \text{ m}$ ,  $\overline{OA'} = 1 \text{ m}$  et  $f = 0,20 \text{ m}$ ,  $\delta = 2\alpha x$  d'où  $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ , on en déduit que  $\alpha = \frac{\lambda}{2i}$ , sur la figure on voit  $i' = |\gamma|i = 8 \text{ mm}$  d'où  $\alpha = 1,5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ , l'imperfection produit une brusque variation de différence de marche inférieure à  $\lambda/2$  donc inférieure à une demi-interfrange, une frange apparaît comme une ligne brisée, avec un morceau de  $8 \text{ mm}$  de long décalé vers le haut ou vers le bas de moins que  $i'/2$ , avec le gaz, c'est le même problème mais l'évolution de la frange est plutôt continue et fluctue au cours du temps avec le déplacement du gaz car le gaz modifie l'indice de réfraction localement et change donc aussi la différence de marche.

**12. Équilibres d'oxydoréduction**

On considère les couples :  $\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$  de  $E^\circ = -0,41 \text{ V}$  et  $\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$  de  $E^\circ = 0,91 \text{ V}$ . On effectue un mélange et lorsque celui-ci est fait mais avant toute réaction, on a  $[\text{Cr}^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{Hg}_2^{2+}] = 0,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

1. Écrire l'équation de la réaction chimique qui se produit.
2. Calculer sa constante d'équilibre.
3. Déterminer le potentiel  $E_{eq}$  d'équilibre atteint.
4. Reprendre les questions précédentes avec :  $[\text{I}_2] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  dans une solution de  $\text{pH} = 6$ . On donne :  $\text{I}_2/\text{I}^-$  de  $E^\circ = 0,54 \text{ V}$  et  $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$  de  $E^\circ = 1,19 \text{ V}$ .

Réponses :  $2\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{Cr}^{2+} \rightleftharpoons \text{H}_2^{2+} + 2\text{Cr}^{3+}$ ,  $K = 10^{\frac{0,91+0,41}{0,03}} = 10^{44}$ , avancement  $\xi = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $E_{eq} = 0,95 \text{ V}$ ,  $6\text{I}_2 + 6\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 10\text{I}^- + 2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+$ ,  $K = 10^{\frac{-1,19+0,54}{0,006}} = 10^{-109}$ , avancement  $\xi = 1,7 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $E_{eq} = 0,77 \text{ V}$ .