Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 17

Problème

1. Si $x \in]0,+\infty[$, la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur le segment d'extrémités 1 et x, donc l'intégrale est bien définie. En fait, la fonction f est exactement la primitive de h s'annulant en 1.
2. Soit $x > 0$. En faisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, dans l'intégrale pour $f(x)$, on obtient exactement ce qu'il faut.
3. En tant que primitive, la fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$
La fonction f' est donc strictement positive sur $]1,+\infty[$ et la fonction f y est strictement croissante. Soit la fonction f est majorée, auquel cas elle admet une limite finie en $+\infty$, soit la fonction f n'est pas majorée, auquel cas, la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Il suffit de majorer la fonction f.
Comme $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow++\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$, par les croissances comparées, il existe $t_0 > 0$ tel que :
$$\forall t \geqslant t_0,\ \ln t \leqslant \sqrt{t}, \text{ donc } h(t) \leqslant \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}.$$
On en déduit pour tout $x > t_0$:
$$\begin{aligned} f(x) &= f(t_0) + \int_{t_0}^{x} h(t)\ dt \\ &\leqslant f(t_0) + \int_{t_0}^{x} t^{-3/2}\ dt \\ &\leqslant f(t_0) + \left[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]_{t_0}^{x} \\ &\leqslant f(t_0) + \frac{2}{\sqrt{t_0}}. \end{aligned}$$
La fonction f est bien majorée. Comme elle est croissante sur $]1,+\infty[$, elle converge en $+\infty$.
5. En posant $\ell = \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$, en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 2, on découvre que la fonction f admet une limite égale à ℓ en 0^+.
On note alors cette limite :
$$\ell = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}\ dt,$$
et la quantité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\ dt$ est définie comme l'opposé de cette limite.

6. (a) Par les croissances comparées, on sait que la fonction $g_{p,q}$ tend vers 0 en 0^+. Ainsi la fonction prolongée vérifie :
$$g_{p,q}(0) = 0.$$
La fonction $g_{p,q}$ était clairement continue sur $]0,1]$, donc la fonction prolongée est bien continue sur $[0,1]$, ce qui autorise la bonne définition de l'intégrale $J_{p,q}$.

   (b) Il suffit de faire une IPP en intégrant t^q et en dérivant l'autre terme.

   (c) Il suffit de montrer par récurrence sur l'entier p, la propriété :
$\mathscr{P}(p)$: « $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ J_{p,q} = (-1)^p \dfrac{p!}{(q+1)^{p+1}}$ »
ce qui se fait assez rapidement par la question précédente. L'initialisation ne pose pas de problème lorsque $p = 0$, car :
$$J_{0,q} = \frac{1}{q+1}$$
directement.

7. On remarque que l'on peut aussi donner un sens à :
$$K = \int_0^1 \ln t \ dt.$$
En effet, si $\varepsilon \in]0,1[$, alors par IPP, on obtient :
$$\int_\varepsilon^1 \ln t \ dt = \Big[t \ln t - t\Big]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon,$$
quantité tendant vers -1 lorsque ε tend vers 0^+.
Par conséquent, on peut maintenant écrire lorsque $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-)^k \ u_{2k} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \ln t \times t^{2k} \ dt \\ &= \int_0^1 \ln t \times \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \ dt \\ &= \int_0^1 \ln t \times \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \ dt,\end{aligned}$$
ce qui donne ce qu'il faut.

8. On exploite les questions précédentes...
D'une part,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = J_{1,2n} = -\frac{1}{(2n+1)^2},$$
formule encore juste lorsque $n = 0$.
D'autre part,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (-1)^n \ \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ dt\right| &= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^{2n+2} \ dt = \frac{1}{2n+3}.\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 (-1)^n \ \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ dt = 0,$$

et on peut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 7. ce qui donne que la série $\sum_k (-1)^k \cdot u_{2k}$ converge – ce que l'on sait déjà sans surprise car le terme général est en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ – et surtout que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \cdot u_{2k} = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt.$$

Conclusion,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2}.$$