

Problème n° 20 : Algèbre linéaire matricielle

Correction du problème 1 – Co-diagonalisation (Mines 2001)

Partie I –

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. Premières propriétés.

(a) Soit $x \neq 0$. Si $u(x) = \mu x = \mu' x$, puisque x est non nul (donc la famille (x) est libre), on obtient $\mu = \mu'$.

Ainsi il existe au plus un scalaire μ tel que $u(x) = \mu x$.

(b) Soit μ une valeur co-propre de u et x un vecteur co-propre associé. On a alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}\mu x = (e^{i\theta}\mu) \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}x.$$

Ainsi, $e^{i\theta}\mu$ est valeur co-propre de u un vecteur propre associé en est $e^{-i\frac{\theta}{2}}x \neq 0$.

(c) Soit $x \in E_\mu$ non nul, et $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. On a alors $u(ax) = \bar{a}u(x) = re^{-i\theta}\mu x = e^{-2i\theta}\mu(ax)$.

Ainsi, si $\mu \neq 0$, on peut choisir a tel que $e^{-2i\theta}\mu \neq \mu$ (il suffit de choisir a non réel). La question 1 amène alors $u(ax) \neq \mu x$, donc $ax \notin E_\mu$.

Par conséquent, si $\mu \neq 0$, E_μ n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Si $\mu = 0$, pour tout $x, y \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{C}$, on a

$$u(ax + y) = \bar{a}u(x) + u(y) = 0,$$

donc $ax + y = 0$.

Comme de plus, $E_\mu \subset E$ et $0 \in E_\mu$, on peut conclure que si $\mu = 0$, E_μ est un sous-espace vectoriel sur \mathbb{C} de E .

En revanche, quelle que soit la valeur de μ , si x, y sont dans E_μ et $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$u(ax + y) = \bar{a}u(x) + u(y) = au(x) + u(y) = a\mu x + \mu y = \mu(ax + y).$$

Donc $ax + y \in E_\mu$. Comme $E_\mu \subset E$ et $0 \in E$, on en déduit que E_μ est un sous-espace vectoriel sur \mathbb{R} de E .

(d) Soient $x, y \in E$ et $a \in \mathbb{C}$. On a :

$$u \circ v(ax + y) = u(\bar{a}v(x) + v(y)) = \bar{a}u(v(x)) + u(v(y)) = au \circ v(x) + u \circ v(y).$$

Ainsi, la composée de deux applications semi-linéaires est une application linéaire.

2. Matrice associée à une application semi-linéaire

(a) On décompose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a alors

$$y = u(x) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i u(e_i),$$

et en passant aux coordonnées dans la base \mathcal{B} :

$$Y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i C_i,$$

où C_i est le vecteur colonne des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base \mathcal{B} . On reconnaît là un produit matriciel :

$$\boxed{Y = A\bar{X}},$$

où A est la matrice dont les colonnes sont les C_i , c'est-à-dire les matrices colonnes des coordonnées dans la base \mathcal{B} des images par u des vecteurs de cette base.

On peut montrer réciproquement que A vérifiant cette relation est définie de façon unique (il suffit d'évaluer en e_i , ce qui nous dit que la colonne C_i de A est nécessairement égale aux coordonnées de $u(e_i)$ dans la base \mathcal{B}). La question de l'unicité n'était pas explicitement demandée, mais était nécessaire pour répondre complètement à la question suivante.

Une autre façon d'aborder cette question est de remarquer que si $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E sur \mathbb{C} , alors l'application qui à $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ associe $\bar{x} = \overline{x_1} b_1 + \dots + \overline{x_n} b_n$ est clairement une application semi-linéaire. Attention au fait que cette définition de \bar{x} dépend du choix de la base \mathcal{B} !

On pose alors, pour tout $x \in E$, $v(x) = u(\bar{x})$. L'application v est alors linéaire (composée de deux applications semi-linéaires). Si on note A sa matrice relativement à la base \mathcal{B} , on a alors

$$[u(x)]_{\mathcal{B}} = [v(\bar{x})]_{\mathcal{B}} = A\bar{X}.$$

L'unicité de A découle de l'unicité de la matrice d'un endomorphisme.

- (b) On ne peut pas vraiment utiliser la formule de changement de base sur v définie ci-dessus, car la définition de v dépend du choix de la base \mathcal{B} . Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases, A et B les matrices de u relativement à chacune de ces deux bases respectivement, et S la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} . Soit $x \in E$ et $y = u(x)$. En notant $[x]_{\mathcal{B}}$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} , on a alors :

$$S[x]_{\mathcal{C}} = [x]_{\mathcal{B}}.$$

On en déduit que

$$[y]_{\mathcal{B}} = A[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = AS[\bar{x}]_{\mathcal{C}}.$$

En appliquant la formule de changement de base pour le vecteur y , il vient alors :

$$[y]_{\mathcal{C}} = S^{-1}[y]_{\mathcal{B}} = (S^{-1}AS)[\bar{x}]_{\mathcal{C}}.$$

On utilise la question précédente, et plus précisément le fait que la relation $Y = AX$ caractérise la matrice de u dans la base considérée (unicité de cette écriture) pour en déduire que la matrice de u relativement à la base \mathcal{C} est $S^{-1}A\bar{S}$. Ainsi

$$\boxed{B = S^{-1}A\bar{S}^{-1}}.$$

On remarquera la forte similitude avec la formule de changement de base pour les endomorphismes, la seule différence étant la conjugaison supplémentaire effectuée sur la matrice S (à droite).

3. Exemples

- (a) Soit $\mu \in \mathbb{C}$, μ est une valeur co-propre de A si et seulement s'il existe $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul tel que $A\bar{X} = \mu X$, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\bar{b} &= \mu a \\ \bar{a} &= \mu b \end{cases}$$

On en déduit que $b = -|\mu|^2 b$ et $a = -|\mu|^2 a$. Comme l'un au moins des deux complexes a et b est non nul, on en déduit que $-|\mu|^2 = 1$, ce qui est impossible. Ainsi, A n'admet pas de valeur co-propre.

En jetant un coup d'œil à la suite du sujet (c'est toujours conseillé !), on se rend compte que c'est en plein accord avec la question 4(a), puisque la matrice $A\bar{A}$ est ici égale à $-I_2$, donc ne possède pas de valeur propre positive.

- (b) Soit A une matrice réelle admettant une valeur propre réelle λ . On a alors au moins un vecteur propre réel. En effet, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et son noyau en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc non réduit à 0, ce qui donne l'existence d'un vecteur propre à coordonnées réelles.

On peut aussi remarquer que si X est un vecteur propre, en conjuguant, puisque λ est réel, \bar{X} est aussi vecteur propre associé à λ , donc aussi leur somme $X + \bar{X}$ si cette somme est non nulle. Le seul cas où cette

condition n'est pas satisfaite est le cas où toutes les coordonnées de X sont imaginaires pures. Dans ce cas iX est encore un vecteur propre, à coordonnées réelles.

Soit donc X un vecteur propre à coordonnées réelles de A , associé à la valeur propre λ . On a donc :

$$A\bar{X} = AX = \lambda X,$$

donc $\boxed{X \text{ est aussi vecteur co-propre associé à la valeur co-propre } \lambda}$.

4. Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\bar{A}$.

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n .

- (a) Soit μ une valeur co-propre de A , et X un vecteur co-propre associé. On a alors

$$A\bar{A}X = A(\bar{A}X) = A(\bar{\mu}X) = \bar{\mu}A\bar{X} = \bar{\mu}\mu X = |\mu|^2 X.$$

Comme $X \neq 0$, on déduire de la relation trouvée que X est un vecteur propre de $A\bar{A}$ associé à la valeur propre $|\mu|^2$ de $A\bar{A}$.

- (b) Soit λ une valeur propre positive ou nulle de la matrice $A\bar{A}$ et X un vecteur co-propre associé.

(i) Supposons $A\bar{X}$ et X liés. Il existe alors $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $A\bar{X} = \mu X$. Ainsi, μ est valeur co-propre de A , un vecteur co-propre associé étant X . On déduit de la question précédente que X est vecteur propre de $A\bar{A}$ associé à la valeur propre $|\mu|^2$. Or, X est vecteur propre associé à la valeur λ , d'où $\lambda = |\mu|^2$. Par conséquent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \sqrt{\lambda} \cdot e^{i\theta}$. On déduit alors de la question 1(b) que $\sqrt{\lambda}$ est valeur co-propre de A .

(ii) Supposons les vecteurs $A\bar{X}$ et X indépendants. On a alors $Y = A\bar{X} + \sqrt{\lambda}X \neq 0$. De plus,

$$AY = A\bar{A}X + \sqrt{\lambda}AX = \lambda X + \sqrt{\lambda}AX = \sqrt{\lambda}Y.$$

Ainsi, Y étant non nul, $\boxed{\sqrt{\lambda} \text{ est valeur co-propre de } A}$.

- (c) Soit μ un réel positif ou nul.

- Si μ est valeur co-propre de A , $|\mu|^2 = \mu^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$ d'après 4(a).
- Réciproquement, si μ^2 est valeur propre de $A\bar{A}$, alors $\mu = \sqrt{\mu^2}$ est valeur co-propre de A d'après 4(b). Ainsi, μ étant réel positif, $\boxed{\mu \text{ est valeur co-propre de } A \text{ ssi } \mu^2 \text{ est valeur propre de } A}$.

5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure

Dans cette question, la matrice A est une matrice triangulaire supérieure

- (a) Soit λ une valeur propre de A . Notons d_1, \dots, d_n les coefficients diagonaux de A . La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, λ est l'un des d_i .

La matrice \bar{A} est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$. Le produit $A\bar{A}$ est encore une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont cette fois les $d_i \bar{d}_i$. En particulier, l'un des coefficients diagonaux est $|\lambda|^2$. La matrice $A\bar{A}$ étant triangulaire, il en résulte que $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$. La question 4(b) permet alors d'affirmer que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A , puis, d'après 1(b), tous les complexes de même module que λ sont valeurs co-propres de A , donc $\boxed{\text{tous les } \lambda e^{i\theta} \text{ sont valeurs co-propres de } A}$.

- (b) Réciproquement, supposons que μ est valeur co-propre de A . D'après 4(a), $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$. Cette matrice étant triangulaire, $|\mu|^2$ est l'un des coefficients diagonaux de $A\bar{A}$. Or, ces coefficients diagonaux s'écrivent $d_i \bar{d}_i$, avec les notations de la question précédente. Par conséquent, il existe un coefficient diagonal $\lambda = d_i$ de A (donc une valeur propre de A , cette matrice étant triangulaire) telle que $|\mu|^2 = |\lambda|^2$. On en déduit que $|\lambda| = |\mu|$, donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{i\theta} \mu$.

On a bien montré qu' $\boxed{\text{il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } e^{i\theta} \mu \text{ soit valeur propre de } A}$.

- (c) La matrice A étant triangulaire, on peut appliquer les résultats précédents. Sa seule valeur propre est i (la valeur unique de ses coefficients diagonaux). Ainsi, tout les complexes de même module que i sont valeurs co-propres d'après 5(a) (et ce sont les seules d'après 5(b)). En particulier, $\boxed{1 \text{ est valeur co-propre de } A}$.

On recherche un vecteur $X = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) co-propre associé à 1, c'est-à-dire vérifiant

$$A\bar{X} = X \quad \text{soit:} \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \quad \text{soit:} \quad \begin{pmatrix} (b+c) + i(a-d) \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à $c = d$ et $a = b + c$. Les vecteurs co-propres associés à 1 sont exactement les vecteurs

$$\begin{pmatrix} c + (1+i)b \\ c(1+i) \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

On peut prendre par exemple $\boxed{X = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ (vous pouvez vérifier directement que ce vecteur est bien co-propre associé à 1).

6. Une caractérisation des valeurs co-propres

- Supposons que μ est valeur co-propre de A , $|\mu|$ l'est également (question 1(b)). Soit X un vecteur co-propre associé à $|\mu|$. Notons $X = X_1 + iX_2$, où X_1 et X_2 sont des vecteurs à coordonnées réelles. On a alors

$$|\mu|(X_1 + iX_2) = A\bar{X} = A(X_1 - iX_2) = BX_1 + CX_2 + i(-BX_2 + CX_1).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$|\mu|X_1 = BX_1 + CX_2 \quad \text{et} \quad |\mu|X_2 = -BX_2 + CX_1.$$

D'après les règles du produit matriciel par blocs, ces deux égalités sont équivalentes à l'égalité matricielle

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C & -B \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ étant non nul (car $X \neq 0$), on en déduit que $|\mu|$ est valeur propre de D .

- Réciproquement, si $|\mu|$ est valeur propre de D , il existe un vecteur colonne réel Y , qu'on découpe en blocs $Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, les deux vecteurs colonnes X_1 et X_2 étant de même taille, tel que

$$DY = |\mu|Y,$$

c'est-à-dire

$$|\mu|X_1 = BX_1 + CX_2 \quad \text{et} \quad |\mu|X_2 = -BX_2 + CX_1.$$

En reprenant les calculs précédents dans l'autre sens, on en déduit facilement que $X_1 + iX_2$ est vecteur co-propre de $A = B + iC$, associé à la valeur co-propre $|\mu|$. Ainsi, $|\mu|$ est valeur co-propre de A , puis $|\mu|$ est valeur co-propre de A (toujours 1(b)).

Partie II –

- Une relation d'équivalence** Montrons que \approx est reflexive, symétrique et transitive. Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- $A = I_n A \bar{I_n}^{-1}$, donc $A \approx A$, d'où la reflexivité.
- Si $A \approx B$, il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$B = S A \bar{S}^{-1} \quad \text{donc:} \quad A = S^{-1} B \bar{S}^{-1}.$$

Puisque $S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on peut conclure que $B \approx A$, d'où la symétrie.

- Si $A \approx B$ et $B \approx C$, on a l'existence de S et T dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$B = SAS^{-1} \quad \text{et} \quad C = TBT^{-1}.$$

On a alors

$$C = (TS)A(\overline{TS})^{-1}.$$

Ainsi, $A \approx C$, d'où la transitivité.

Ainsi, \approx est une relation d'équivalence.

2. Indépendance des vecteurs co-propres

- Soit μ_1, \dots, μ_q des valeurs co-propres de modules 2 à 2 distincts, et X_1, \dots, X_q des vecteurs co-propres associés. Une façon rapide de s'en sortir (mais utilisant un résultat que pour l'instant vous n'avez vu qu'en DM, mais qui sera un résultat du cours l'année prochaine), est de se ramener à des vecteurs propres : les X_i sont alors des vecteurs propres de $A\overline{A}$, associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, \dots, |\mu_q|^2$, deux à deux distinctes par hypothèse. Les sous-espaces propres étant en somme directe (propriété du cours de Spé, résultant du lemme des noyaux vu en DM), on en déduit immédiatement que la famille (X_1, \dots, X_q) est libre.
- On peut aussi procéder directement par récurrence sur q . La propriété est triviale pour $q = 1$, les vecteurs co-propres étant non nuls par définition. Si on la suppose vraie pour une valeur de $q \in \mathbb{N}^*$, et qu'on considère une famille de $q + 1$ vecteurs co-propres X_1, \dots, X_{q+1} associés à des valeurs co-propres μ_1, \dots, μ_{q+1} de modules 2 à 2 distincts, étudions la relation :

$$a_1X_1 + \dots + a_{q+1}X_{q+1} = 0 \varepsilon(1).$$

Conjuguons cette relation et appliquons-lui A . On obtient :

$$\overline{a_1}\mu_1X_1 + \dots + \overline{a_{q+1}}\mu_{q+1}X_{q+1} = 0 \quad (2).$$

Si $a_{q+1} = 0$, on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence pour conclure que tous les a_i sont nuls, donc la famille est libre. Sinon, on peut faire une combinaison de ces deux lignes en retranchant à (2) la relation (1) multipliée par $\frac{\mu_{q+1}a_{q+1}}{\overline{a_{q+1}}}$. Cela nous donne une relation entre X_1, \dots, X_q , et les coefficients de cette relation sont donc tous nuls par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \overline{a_i}\mu_i - a_i \frac{\mu_{q+1}a_{q+1}}{\overline{a_{q+1}}} = 0.$$

Si $a_i \neq 0$, cette expression est une différence de deux complexes de modules distincts, donc ne peut pas être nulle. Ainsi, $a_i = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. La relation initiale se réduit à $a_{q+1}X_{q+1} = 0$, avec $X_{q+1} \neq 0$, donc $a_{q+1} = 0$. Ainsi, la famille (X_1, \dots, X_{q+1}) est libre.

Le principe de récurrence permet de conclure que toute famille de vecteurs co-propres associés à des valeurs propres 2 à 2 de modules distincts est libre.

- Supposons maintenant que $A\overline{A}$ possède n valeurs propres λ_p , $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, positives ou nulles deux à deux distinctes. D'après I-4(b), les $\sqrt{\lambda_p}$ sont des valeurs co-propres de A , de modules 2 à 2 distincts. Une famille X_1, \dots, X_n de vecteurs co-propres associés à ces valeurs co-propres est donc libre, et de cardinal n , dans un espace de dimension n . Ainsi, (X_1, \dots, X_n) est une base de E .

Considérons u l'application semi-linéaire de \mathbb{C}^n dans lui-même associée à A dans la base canonique. Autrement dit, en identifiant les vecteurs de \mathbb{C}^n à des vecteurs colonnes,

$$u(X) = A\overline{X}.$$

La matrice B de u dans la base (X_1, \dots, X_n) est la matrice donc la colonne i est égale au vecteur des coordonnées de $u(X_i)$ dans la base X_i . Or, $u(X_i) = \sqrt{\lambda_i}X_i$, donc

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

La matrice A et la matrice B représentent la même application semi-linéaire dans deux bases différentes. D'après la question 2(b), on en déduit que A et B sont co-semblables. La matrice B étant diagonale, on en déduit que A est co-diagonalisable.

3. Quelques propriétés

(a) On a $A\bar{A} = S\bar{S}^{-1}\bar{S}S^{-1} = SS^{-1} = I_n$.

- (b) • La matrice $S(\theta)$ est inversible si et seulement si $e^{2i\theta}A + I_n$ est inversible. Soit

$$P(X) = \det(AX + I_n).$$

Le caractère polynomial du déterminant permet d'affirmer que P est un polynôme. Il est non nul car $P(0) = \det(I_n) = 1$. Ainsi, il ne peut admettre qu'un nombre fini de racines. Par conséquent, les $e^{2i\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, ne peuvent pas être tous racines de P . Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\det(Ae^{2i\theta} + I_n) \neq 0$, ce qui équivaut à l'inversibilité de $S(\theta)$.

- On a alors

$$\bar{A}\bar{S}(\theta) = e^{-i\theta}A\bar{A} + e^{i\theta}A = e^{-i\theta}I_n + e^{i\theta}A \quad \text{soit: } \boxed{\bar{A}\bar{S}(\theta) = S(\theta)}.$$

- On a alors immédiatement, $S(\theta)$ étant inversible : $\boxed{S(\theta)\bar{S}(\theta)^{-1} = A}$.

4. Une condition nécessaire

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable, et S une matrice de passage adaptée. Notons $D = S^{-1}A\bar{S}$ la matrice diagonale associée. On a alors

$$A\bar{A} = S\bar{D}\bar{S}^{-1}\bar{S}DS^{-1} = S\bar{D}DS^{-1}.$$

Or,

- $D\bar{D}$ est une matrice diagonale, donc $\boxed{A\bar{A}}$ est diagonalisable.
- les valeurs propres de $A\bar{A}$ sont les coefficients diagonaux de $D\bar{D}$, c'est-à-dire les $d_i\bar{d}_i = |d_i|^2$, où les d_i sont les coefficients diagonaux de D . Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } A\bar{A} \text{ sont toutes positives ou nulles}}$.
- Le rang de $A\bar{A}$ est égal au rang de $D\bar{D}$, donc au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls (rang d'une matrice échelonnée), donc au nombre de $|d_i|^2$ (donc aussi de d_i) non nuls. Il s'agit donc aussi du nombre de coefficients diagonaux non nuls de D , donc du rang de D . Or, D et A sont co-semblables, donc en particulier équivalentes. Elles ont donc même rang. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg}(D\bar{D}) = \operatorname{rg}(A\bar{A})}.$$

5. Une condition suffisante

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) la matrice $A\bar{A}$ est diagonalisable
- (ii) les valeurs propres de la matrice $A\bar{A}$ sont positives ou nulles
- (iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A\bar{A}$.

(a) On a

$$B\bar{B} = S^{-1}A\bar{S}\bar{S}^{-1}\bar{A}S = S^{-1}A\bar{A}S \quad \text{soit: } \boxed{B\bar{B} = \Lambda}.$$

On obtient de même :

$$\bar{B}B = \bar{S}^{-1}\bar{A}A\bar{S} = \bar{\Lambda} \quad \text{soit: } \boxed{\bar{B}B = \Lambda},$$

puisque les valeurs propres de $A\bar{A}$ sont supposées réelles. En particulier, on a $\boxed{B\bar{B} = \bar{B}B}$

On en déduit aussi que

$$\boxed{B\Lambda = B(\bar{B}B) = (B\bar{B})B = \Lambda B}.$$

(b) Notons

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

la décomposition en blocs de B , les tailles des blocs étant les mêmes que dans la matrice Λ . En particulier, les blocs diagonaux $B_{i,i}$ sont carrés d'ordre n_i . La relation $B\Lambda = \Lambda B$ amène alors, d'après les règles du clacul matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & \cdots & \lambda_n B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 B_{n,1} & \cdots & \lambda_n B_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & \cdots & \lambda_1 B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n B_{n,1} & \cdots & \lambda_n B_{n,n} \end{pmatrix},$$

soit, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$, $\lambda_i B_{i,j} = \lambda_j B_{i,j}$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, pour tout $i \neq j$, il vient $B_{i,j} = 0$. Ainsi, la matrice B est diagonale par blocs, les blocs diagonaux $B_i = B_{i,i}$ étant carrés d'ordre n_i .

(c) Toujours d'après les règles du produit matriciel par blocs, l'identité $B\bar{B} = \Lambda$ amène alors :

$$\begin{pmatrix} B_1 \bar{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 \bar{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_k \bar{B}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda_k \neq 0$, alors, vu le classement des valeurs propres, les λ_i sont tous non nuls. On peut alors considérer les matrices $C_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i$. Ces matrices vérifient $C_i \bar{C}_i = I_{n_i}$. D'après la question 3(b), il existe une matrice inversible P_i telle que

$$C_i = P \bar{P}_i^{-1} \quad \text{donc:} \quad B_i = P (\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}) \bar{P}_i^{-1}.$$

Considérons alors la matrice diagonale par blocs

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_k \end{pmatrix},$$

inversible, d'inverse décrit par blocs de la façon suivante :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_k^{-1} \end{pmatrix}.$$

Les règles du produit matriciel par blocs amènent facilement

$$\boxed{B = P \Delta \bar{P}^{-1}},$$

où Δ est la matrice diagonale, décrite par blocs de la manière suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda_k = 0$, alors les λ_i , $i < k$, sont non nuls. Comme $\text{rg}(A\bar{A}) = \text{rg}(\Lambda) = \text{rg}(A)$, on en déduit que A est de rang $n - n_k$, donc B , qui lui est équivalente, est également de rang $n - n_k$. Or, la description diagonale par blocs de B amène le calcul de son rang :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(B_1) + \cdots + \text{rg}(B_k).$$

Par ailleurs, pour tout $i < k$, $B_i \overline{B_i} = \lambda_i I_{n_1}$, donc B_i est inversible, donc de rang n_i . On a alors

$$n - n_k = n_1 + \cdots + n_{k-1} + \operatorname{rg}(B_k),$$

relation dont il découle que $\operatorname{rg}(B_k) = 0$, donc $B_k = 0$. On effectue alors la même construction que précédemment, mais en définissant $P_k = I_{n_k}$. La relation voulue est obtenue du fait que $B_k = 0$.

Ainsi, avec les hypothèses (i), (ii) et (iii), A est co-semble à une matrice B elle-même co-semble à une matrice diagonale. Ainsi, la relation \approx étant transitive, A est co-diagonalisable.

6. Exemples

- (a) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . Le résultat admis (théorème spectral, cours de Spé) donne la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors l'existence d'une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, à coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels. Comme cette diagonalisation se fait dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $P = \overline{P}$. La relation de diagonalisabilité donne alors également une relation de codiagonalisabilité. Ainsi, A est codiagonalisable.

On peut remarquer que ce résultat se généralise facilement de la façon suivante : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ce qui équivaut à dire qu'elle est diagonalisable, à valeurs propres réelles), alors A est codiagonalisable.

On peut aussi vérifier ici que la condition nécessaire et suffisante des questions 4 et 5 est bien vérifiée. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$P^{-1}A\overline{A}P = P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = D^2.$$

Il s'agit d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux égaux aux λ_i^2 , donc positifs ou nuls, et nuls si et seulement si $\lambda_i = 0$. Ceci implique que D et D^2 ont même rang.

Ainsi, $A\overline{A}$ est diagonalisable, ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de D^2 , dont sont positifs ou nuls, et son rang est celui de D^2 , donc égal au rang de D , lui-même égal au rang de A .

- (b)
- * La matrice A ne possède qu'une valeur propre, et n'est pas une homothétie, donc A n'est pas diagonalisable.
 - * Un calcul rapide montre que $A\overline{A} = I_n$. A est donc co-diagonalisable (par utilisation de la question 5, ou ici, plus simplement, de la question 3(b), montrant que A est co-semble à l'identité).
 - * Les valeurs propres λ de B sont solutions de l'équation polynomiale $\det(B - \lambda I_2) = 0$ (équivaut à dire que $B - \lambda I_2$ est non inversible), c'est-à-dire $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Cette équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées. La matrice B est donc diagonalisable (prendre une base formée d'un vecteur propre associé à chaque valeur propre).
 - * On a $B\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont 2 et -2 (calculer comme précédemment le déterminant $\det(B\overline{B} - \lambda I_2)$). La condition nécessaire de codiagonalisation n'étant pas satisfaite (question 4), B n'est pas co-diagonalisable.
 - * La matrice C n'est pas diagonalisable, car possède une unique valeur propre 0, et n'est pas égale à $0I_2$.
 - * $C\overline{C} = C^2 = 0$, donc $\operatorname{rg}(C) \neq \operatorname{rg}(C\overline{C})$. La condition nécessaire de la question 4 n'étant pas satisfaite, C n'est pas co-diagonalisable.
 - * Par un calcul de déterminant, on trouve l'existence de deux valeurs propres non réelles conjuguées de D , donc D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (même principe que pour B , les deux matrices sont même semblables en fait)
 - * On a $D\overline{D} = 2I_2$. Cette matrice est diagonale, donc diagonalisable, d'unique valeur propre 2 qui est positive ou nulle, et de rang 2, donc de même rang que A . On peut appliquer la question 5 : D est co-diagonalisable.