Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths ULCR
— *NOM Prénom* : CORREIA Corentin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $X_1 = 0$ et pour tout $k \geq 1$:

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k + 1 & \text{si } A_k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour toute application $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - L\Big| \geq \varepsilon\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarques sur l'oral

L'examinateur m'explique au début qu'il va me dicter l'énoncé et me laisser 10 minutes. Il me prévient que s'il fait une grimace, ce n'est pas forcément parce que j'ai fait une erreur mais parce qu'il a aussi l'œil qui le gratte (examinateur vraiment sympathique, pas désagréable du tout). Pendant les 10 minutes, je pense à une valeur L qui convient, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(X_k))$, puis j'essaye de trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(E(f(X_k)))_{k\geq 1}$.

L'examinateur intervient au bout des 10 minutes et me dirige sur une autre piste. Son point de vue proposé : c'est une loi faible des grands nombres avec des hypothèses manquantes telles que l'indépendance, le moment d'ordre 2 et la même loi suivie par les variables. L'oral a donc consisté à transformer de sorte à obtenir les hypothèses.

Il a introduit K_n l'instant de la n-ième annulation dans $(A_k)_{k\geq 1}$ et Z_n la somme des $f(X_{k+1})$ entre K_n et $K_{n+1} - 1$. J'ai pu lui indiquer des propriétés utiles de $(K_{n+1} - K_n)_{n\geq 1}$ (iid suivant la loi géométrique de paramètre p). Il m'a demandé de lui expliquer pourquoi les variables sont indépendantes, j'ai commencé par écrire la probabilité d'une intersection (pour montrer que c'est le produit des probabilités), puis je lui ai dit que de toute façon les variables sont fonctions déterministes de paquets de (A_k), il m'a fait remarquer que les paquets ne sont pas déterministes (car le paquet associé à $K_{n+1} - K_n$ commence à l'indice $K_n + 1$) mais finalement il était quand même convaincu de ce que je disais et ne m'en a pas demandé plus.

Les hypothèses (en admettant que les Z_n admettent un moment d'ordre 2) étaient donc vérifiées pour appliquer la loi faible des grands nombres à $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'oral s'est arrêté là. Il faut aussi montrer que le terme correctif (car la somme des $f(X_k)$ jusqu'à n ne vaut pas tout à fait la somme des Z_k jusqu'à un certain n_0 dépendant de n) n'apporte rien.