

## DM 26 : Processus démographiques

On désire étudier le comportement à l'infini d'un processus démographique.

A l'instant initial, la génération  $G_0$  est constituée de  $N$  individus ( $N$  entier non nul). Ces  $N$  individus donnent naissance à d'autres individus, leurs fils, qui constitueront la génération  $G_1$ . Cette génération donnera naissance elle aussi à une nouvelle génération  $G_2$ . On définit ainsi  $G_n$  la  $n$ -ième génération et on note  $Z_n$  la variable aléatoire égale au nombre d'individus de la génération  $G_n$ .

On remarquera que si  $Z_n = 0$ , alors  $Z_{n+1} = 0$ .

On s'intéresse à la probabilité d'extinction de l'espèce et à la variable égale au numéro de la première génération pour laquelle il n'y a plus d'individu.

On étudie 3 types de reproduction et on utilise différentes méthodes de calcul.

### Préliminaires

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

**1°)** On suppose uniquement pour cette question que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $P(X > k)$ .

b) Vérifier que  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ .

On se propose de montrer que cette relation est vraie pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs entières.

**2°)** a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n kP(X = k)$ .

Déduire de la question précédente que  $S_n = \left( \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \right) - nP(X > n)$ .

**3°)** On suppose que la série  $\sum P(X > k)$  est convergente.

a) Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. En déduire que  $X$  est d'espérance finie.

b) Montrer que  $nP(X > n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . En déduire que  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ .

**4°)** En utilisant la suite double  $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^2}$  définie par  $a_{k,n} = \begin{cases} P(X = n) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ ,

donner une seconde démonstration de la relation  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ .

## Partie I

Dans cette partie, on suppose que chaque individu de la génération  $G_0$  donne naissance à 1 individu avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  et ne donne naissance à aucun enfant avec la probabilité  $q = 1 - p$ , et ceci indépendamment les uns des autres.

De même, s'il y a des individus à la génération  $G_n$ , chacun donne, pour la génération  $G_{n+1}$ , un enfant avec la probabilité  $p$  et 0 enfant avec la probabilité  $q$ , et ceci indépendamment les uns des autres.

**5°)** a) Quelle est la loi de  $Z_1$  ?

b) Montrer que pour tout  $k \geq 1$ , l'ensemble des valeurs prises par  $Z_k$  est égal à  $\{0, \dots, N\}$ .

c) Pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ , Quelle est la loi conditionnelle de  $Z_{n+1}$  sachant que  $Z_n = k$  ?

d) En numérotant de 1 à  $N$  les individus de la génération  $G_0$ , et en appelant “lignée  $i$ ” les descendants de l’individu numéro  $i$ , montrer que  $Z_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, p^n)$ .

**6°)** On note  $E$  l’événement : “il y a disparition de l’espèce”.

a) Ecrire  $E$  à l'aide des événements  $(Z_n = 0)$ .

b) Montrer que  $P(E) = 1$ .

**7°)** On appelle  $T$  la variable aléatoire égale au numéro de la première génération pour laquelle il n'y a plus d'individu.

a) A l'aide de la variable aléatoire  $Z_n$ , montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $P(T > n) = 1 - (1 - p^n)^N$ .

b) Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on note  $T_i$  la variable aléatoire égale au numéro de la génération pour laquelle la lignée  $i$  s'éteint.

Quelle est la loi de  $T_i$  ?

c) Retrouver à l'aide des variables aléatoires  $T_i$  que  $P(T \leq n) = (1 - p^n)^N$ .

d) Donner la loi de  $T$ .

**8°)** a) Montrer que  $P(T > n) \sim Np^n$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) A l'aide du préliminaire, montrer que  $T$  admet une espérance finie.

c) Montrer que  $E(T) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - p^k}$ .

## Partie 2

On suppose dans cette partie que  $N$  est un entier non nul **et pair**.

Dans cette partie, chaque individu de la génération  $G_n$  donne deux enfants avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et 0 enfant avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , et ceci indépendamment les uns des autres.

Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $a_n = 2^{n-1}N$ .

**9°)** Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble des valeurs prises par  $Z_n$  est  $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$ .

**10°)** Montrer que, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, a_{n+1}\}$ ,

$$(1) : P(Z_{n+1} = 2i) = \sum_{k=0}^{a_n} \binom{2k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} P(Z_n = 2k),$$

en convenant que, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\binom{a}{b} = 0$  lorsque  $b \notin \{0, \dots, a\}$ .

**11°)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $H_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(Z_n = 2k)x^{2k}$ .

a) Que vaut  $H_n(1)$  ?

b) Montrer que  $H_0(x) = x^N$ .

c) A l'aide de la relation (1) de la question précédente, montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H_{n+1}(x) = H_n\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$ .

**12°)** a) Montrer que  $H'_n(1) = E(Z_n)$ .

b) Déterminer une relation liant  $E(Z_{n+1})$  et  $E(Z_n)$  et en déduire  $E(Z_n)$  en fonction de  $n$ .

**13°)** On pose  $v_n = H_n(0) = P(Z_n = 0)$ .

a) Par un raisonnement probabiliste, montrer que la suite  $(v_n)$  est croissante et convergente.

b) On définit la suite  $(w_n)$  par :  $w_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = \frac{1+w_n^2}{2}$ .

Montrer que, pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $H_n(w_k) = (w_{n+k})^N$ .

c) Déterminer la limite de  $H_n(0)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est la probabilité que l'espèce s'éteigne ?

## Partie 3

On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de  $Z_{n+1}$  sachant que  $Z_n = k$  est la loi uniforme sur  $\{0, \dots, k\}$ , c'est-à-dire que :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, P(Z_{n+1} = i | Z_n = k) = \frac{1}{k+1}.$$

En particulier la loi de  $Z_1$  est la loi uniforme sur  $\{0, \dots, N\}$ .

**14°)** a) Quelles sont les valeurs prises par les variables  $Z_n$  pour  $n \geq 1$  ?

b) Montrer que, pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ ,  $P(Z_{n+1} = i) = \sum_{k=i}^N \frac{1}{k+1} P(Z_n = k)$ .

**15°)** a) En utilisant cette dernière relation, montrer que  $E(Z_{n+1}) = \frac{E(Z_n)}{2}$ .

En déduire  $E(Z_n)$  en fonction de  $n$ .

b) De même, déterminer une relation entre  $E(Z_{n+1}^2)$  et  $E(Z_n^2)$ .

c) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n E(Z_n^2)$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{N}{3}$ .

Déterminer  $u_n$  puis la variance de  $Z_n$  en fonction de  $n$ .

**16°)** a) Montrer que  $E(Z_n) \geq P(Z_n \geq 1)$ . En déduire que  $P(Z_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

b) Quelle est la probabilité d'extinction de l'espèce ?

c) On note  $T$  la variable aléatoire égale au numéro de la première génération où s'éteint l'espèce. Montrer que  $T$  possède une espérance finie.