TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1. [∘]

Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des nombres réels $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2. [∘]

On pose

$$c = \cos\frac{2\pi}{5}, \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}, \qquad a = \omega + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad b = \omega^2 + \omega^3.$$

Calculer $a + b$ et ab et en déduire les valeurs de a et b puis celle de c.

Exercice 3. [∘]

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$\cos^2(3x) - \sin^2 x, \qquad \tan(2x) - \tan x \qquad \text{et} \qquad 1 + \cos(2x) + 2\cos x.$$

Exercice 4. [⋆]

Soient α, β, γ trois nombres réels. Factoriser au maximum l'expression

$$E = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$$

et en déduire que cette quantité est nulle lorsque α, β et γ sont les mesures des trois angles d'un triangle.

Exercice 5. [⋆]

Dans cet exercice, on notera que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t = \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{it})$ et $\sin t = \Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{it})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $S = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Factoriser $T_n = \sin a + \sin(2a) + \cdots + \sin(na)$.

Exercice 6. [∘]

Résoudre, en $x \in \mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes et placer (si possible) les solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $\cos(3x - \pi/4) = \sin(\pi/4)$,
2. $\sin(2x - \pi/4) = \cos(x + \pi/6)$,
3. $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$,
4. $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$,
5. $2\tan^2 x = 1/\cos^2 x$.

Exercice 7. [∘]

Résoudre les équations $-\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1$ et $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = -\sqrt{2}$.

Exercice 8. [⋆]

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 9. [○]

Résoudre, dans $[-\pi;\pi]$, l'inéquation $2\sin x - 1 < \sqrt{1-4\cos^2 x}$.

Exercice 10. [○]

Linéariser $\cos^4 x$ et en déduire la valeur de $S = \cos^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8}\cdot$

Exercice 11. [○]

1. Résoudre l'équation $\sin(4x) = \sin x$ pour $x \in]0;\pi[$.
2. À l'aide d'une antilinéarisation, démontrer que

$$\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \iff 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0.$$

3. Déterminer les solutions de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$ (on pourra s'aider d'une solution « évidente » donnée par la question 1) et en déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$.