Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths Lyon
- *NOM Prénom* : Anjolras Philippe

Énoncé des exercices

On définit dans $\mathbb{R}^n$ les opérations sur des parties quelconques E_1 et E_2, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$E_1 + E_2 = \{p_1 + p_2, p_1 \in E_1, p_2 \in E_2\}$
$\lambda E_1 = \{\lambda p_1, p_1 \in E_1\}$
1. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on considère E un polygône (côtés + intérieur). Montrer que E admet un centre de symétrie si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, S_1, ..., S_k des segments tels que $E = S_1 + ... + S_k$.
2. On se donne P et Q deux polygônes symétriques de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de $P + tQ$ est un polynôme en t. Quel est son degré ?
3. Donner l'énoncé équivalent du 1 en dimension supérieure. Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension $n > 2$.
4. On revient à $n = 2$ et on considère plus généralement E cpa. A-t-on toujours l'équivalence de 1 ?

Remarques sur l'oral

L'oral a commencé avec vingt minutes de retard, mais une feuille l'indiquait dehors. L'examinateur avait un petit accent et était très sympathique. L'exercice étant de la géométrie, j'ai souvent fait des dessins pour voir d'une part ce qu'il se passait puis expliquer dessus comment raisonner : pour beaucoup de preuves, une explication claire sur le dessin lui suffisait, sans avoir besoin de formaliser complètement à l'écrit. Pour ce sujet en particulier, il fallait faire des dessins, regarder ce que ça donnait, tester des choses (autrement c'était difficile de se rendre compte).
Pour le 1, j'ai commencé par essayer de montrer le sens direct, mais il m'a conseillé de faire d'abord la réciproque (qui est plus simple). Pour la 2, un dessin qui montrait bien ce qu'il se passait lui a suffi (on trouve un polynôme de degré au plus 2). Pour la 3, on se rend compte rapidement qu'il suffit de traiter le cas $n = 3$ (puisque $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$. L'énoncé équivalent revient à considérer les enveloppes convexes d'un nombre fini de points. Le dessin d'un volume symétrique judicieux puis une preuve par l'absurde qu'elle n'était pas somme de segments a donc suffi. Enfin, pour la 4, j'ai montré que si E était somme de segments, alors E était nécessairement un polygône. Il était agréablement surpris que je le montre de façon très générale, puis m'a juste demandé si je pouvais lui donner juste un contre-exemple, j'ai dessiné un sablier (symétrique, non convexe).
Finalement, l'oral a été un peu raccourci puisqu'il n'y avait plus de questions (environ 35-40 minutes je crois). Il m'a expliqué qu'en dimension n, les enveloppes convexes d'un nombre fini de points étaient appelés simplexes. Tout à la fin, il m'a aussi demandé de quelle prépa je venais (j'ai répondu honnêtement sans réfléchir).