

Test de contrôle

- durée 2 heures / calculatrices interdites -



Question 1

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+x} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$ et montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 2.$$

Question 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A n'est pas inversible si et seulement si la matrice A est équivalente à une matrice nilpotente.

Question 3

Soit $0 < a < 1$ un nombre réel. Soit u une suite de nombres réels non nuls telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Question 4

Déterminer la nature des deux séries suivantes :

- $\sum_n \sin \left(\pi \sqrt[3]{n^3 + n + \frac{1}{n}} \right)$
- $\sum_n \arccos \left(\frac{3}{4} \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/4}} \right).$