Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 25/01/2019

DM nº 12 : Séries

Correction du problème 1 –

Partie I – Un critère de comparaison de séries à termes positifs

1. Effectuons une récurrence sur $n \in [\![N,+\infty[\![$.
   Soit, pour tout n dans $[\![N,+\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $b_N a_n \leqslant a_N b_n$.
   Pour commencer, $b_N a_N = a_N b_N$ donc $b_N a_N \leqslant a_N b_N$, d'où $\mathcal{P}(N)$.
   Soit $n \in [\![N,+\infty[\![$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. D'après l'inégalité vérifiée par les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a (les suites étant à termes strictement positifs) :
   $$a_{n+1} \leqslant a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   Ainsi :
   $$b_N a_{n+1} \leqslant b_N a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant a_N b_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
   d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $b_N a_{n+1} \leqslant a_N b_{n+1}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(N)$ est vraie, et pour tout n dans $[\![N,+\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $[\![N,+\infty[\![$.
2. (a) Ainsi, si $\sum b_n$ converge, alors, a_N étant une constante, $\sum a_N b_n$ converge. Tous les termes étant strictement positifs d'après l'énoncé, on déduit de l'inégalité précédente, d'après le théorème de convergence des séries à termes positifs (TCSTP), que $\sum b_N a_n$ converge. Comme b_N est une constante non nulle, $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$.

   (b) De même, si $\sum a_n$ diverge, b_N étant non nulle, $\sum b_N a_n$ diverge, puis $\sum a_N b_n$ aussi, d'après le TCSTP, donc $\boxed{\sum b_n \text{ diverge}}$.

   (c) Montrons la contraposée. Supposons que $\sum b_n$ ne diverge pas grossièrement. Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc aussi $(a_N b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, l'encadrement $0 \leqslant b_N a_n \leqslant a_N b_n$ amène, grâce au théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_N a_n = 0$, et comme $b_N \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et par conséquent, $\sum a_n$ ne diverge par grossièrement. Par contraposée, $\boxed{\text{si } \sum a_n \text{ diverge grossièrement, alors } \sum b_n \text{ aussi}}$.
3. **Règle de d'Alembert.**

   (a) Soit ℓ' tel que $\ell < \ell' < 1$. En utilisant la définition de limite avec $\varepsilon = \ell' - \ell$, on trouve l'existence de N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell'$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (\ell')^n$. Alors
   $$\forall n \geqslant N, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   D'après la question précédente, puisque $\sum b_n$ converge (série géométrique de raison $\ell' \in]-1,1[$), on en déduit que $\sum |u_n|$ converge donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument}}$ (les séries sont à termes positifs, et même strictement positifs au moins à partir d'un certain rang, ce qui est sous-entendu pour $\sum |u_n|$ par l'existence de la limite du quotient, qui nécéssite que ce quotient soit bien défini, au moins à partir d'un certain rang).

   (b) si $\ell > 1$, alors il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. Alors $\sum a_n$ diverge grossièrement, et pour tout $n \geqslant N$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Donc, d'après la question I-2, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement. Ainsi, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.
   $\boxed{\text{Donc } \sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.
4. **Exemples**

(a) *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

i. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4}$.

ii. • Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{4}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{|x|}{4} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert démontrée dans la question I-3, on en déduit que : $\boxed{\text{Si } |x[< \frac{1}{4}, \sum u_n x^n \text{ converge absolument}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \frac{1}{4}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{|x|}{4} > 1.$$

D'après la règle de d'Alembert démontrée dans la question I-3, on en déduit que : $\boxed{\text{Si } |x| > \frac{1}{4}, \sum u_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$.

(b) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \cdot \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4n+2}{n+2}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$. Par conséquent :

- si $|x| < \frac{1}{4}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_n x^n|} < 1$, donc $\boxed{\sum v_n x^n \text{ converge absolument}}$;
- si $|x| > \frac{1}{4}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_n x^n|} > 1$, donc $\boxed{\sum v_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$;

(c) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 3^3 = 27$. Par conséquent :

- si $|x| < \frac{1}{27}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|w_{n+1}x^{n+1}|}{|w_n x^n|} < 1$, donc $\boxed{\sum w_n x^n \text{ converge absolument}}$;
- si $|x| > \frac{1}{27}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|w_{n+1}x^{n+1}|}{|w_n x^n|} > 1$, donc $\boxed{\sum w_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$;

Partie II – Règle de Duhamel.

1. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1}$.

(b) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha}$.

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a un équivalent classique :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n},$$

et par conséquent,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - 1 = -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

2. **Règle de Duhamel.**

(a) Supposons que $\beta > 1$.

i. Considérons un α tel que $1 < \alpha < \beta$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{donc:} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha-\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\alpha - \beta \neq 0$, on en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-\beta}{n}$. Ainsi, pour n assez grand ces deux expressions sont de même signe (en effet, leur quotient étant de limite 1, il existe un rang N à partir duquel ce quotient est strictement positif, d'où l'égalité des signes) Or, $\alpha - \beta < 0$. Par conséquent, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{x_{n+1}}{x_n}}.$$

ii. Les séries étant par hypothèse à termes strictement positifs, on peut appliquer le résultat de la question I-2 : la série $\sum x_n$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$, donc convergente, par conséquent, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

(b) De même, si $\beta < 1$, on peut choisir α tel que $\beta < \alpha < 1$. On obtiendra de la même façon :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-\beta}{n}.$$

Ainsi, ces deux expressions sont de même signe à partir d'un certain rang, mais cette fois, $\alpha - \beta > 0$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Or, $\sum x_n$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha < 1$, donc, les séries étant à termes strictement positif, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ d'après la question I-2.

Partie III – Exemples

1. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot x = \frac{4n+2}{4(n+1)} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

(b) La série $\sum u_n x^n$ étant à termes strictement positifs, d'après la règle de Duhamel, puisque $\frac{1}{2} < 1$, $\boxed{\sum u_n x^n \text{ est divergente}}$

(c) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1,$$

donc, puisque $u_n x^n > 0$, on en déduit que $\boxed{(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right)$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = 1$, donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

puisque, d'après la question III-3a,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, les deux séries étant à termes tous négatifs, d'après le théorème de comparaison par équivalents, $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right)$ et $\sum -\frac{1}{2n}$ sont de même nature. Or, la seconde diverge (en tant que série de Riemann de paramètre 1), donc la première aussi. Par conséquent, la série $\sum \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n)$ diverge. Cette divergence se fait forcément vers $-\infty$, puisque la série est à termes négatifs. Or,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n) = \ln(u_N x^N) - \ln(u_0 x^0),$$

(il s'agit d'une somme télescopique), donc, d'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n) = -\infty, \qquad \text{donc:} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 0}.$$

(d) On utilise la technique des séries alternées. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(-x)^k$. Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2}(-x)^{2n+2} + u_{2n+1}(-x)^{2n+1} = u_{2n+2}x^{2n+2} - u_{2n+1}x^{2n+1} \leqslant 0$, puisque $(u_n x^n)$ décroit. Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3}(-x)^{2n+3} + u_{2n+2}(-x)^{2n+2} = u_{2n+2}x^{2n+2} - u_{2n+3}x^{2n+3} \geqslant 0$, puisque $(u_n x^n)$ décroit. Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1}x^{2n+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite commune. $\boxed{\text{D'où la convergence de } \sum u_n(-x)^n.}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$.

(a) On procède de même que pour $\sum u_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = \frac{4n+2}{2(n+2)} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{n}},$$

donc

$$\frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n}}.$$

(b) Par conséquent, la série $\sum v_n x^n$ étant à termes strictement positifs, en utilisant la règle de Duhamel avec $\beta = \frac{3}{2} > 1$, on obtient la $\boxed{\text{convergence de } \sum v_n x^n}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(-x)^n| = v_n x^n$, puisque $x > 0$, donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\sum v_n(-x)^n \text{ converge absolument}}$.

Partie IV – Une petite amélioration à la règle de Duhamel

1. On a $\frac{1}{n+a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et les séries sont toutes deux à termes positifs (en se restreignant à $n > -a$, conformément à l'énoncé). Ainsi, $\sum \frac{1}{n+a}$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$, donc $\boxed{\sum \frac{1}{n+a} \text{ est divergente}}$.

2. D'après les DL classiques, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{a+1}{n} = 0$,

$$\frac{1}{1+\frac{a+1}{n}} = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + O\left(\frac{(a+1)^3}{n^3}\right) = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

en supposant que $a \neq -1$ (hypothèse manquante dans l'énoncé).

Or, pour tout entier $n > -a$,

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+a}{n+1+a} &= \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{a+1}{n}} \\ &= \left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a+1}{n}+\frac{(a+1)^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1-\frac{a+1}{n}+\frac{(a+1)^2}{n^2}+\frac{a}{n}-\frac{a(a+1)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

les termes que je n'ai pas écrits dans ce développement étant des termes en $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. En simplifiant un peu, on obtient :

$$\boxed{\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1-\frac{1}{n}+\frac{1+a}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)}.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   (a) Par définition des O, il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$-\frac{M}{n^2} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}-1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{M}{n^2}$$

   Il existe de même M' tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$-\frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}-1+\frac{1}{n}-\frac{1+a}{n^2} \leqslant \frac{M'}{n^3}.$$

   D'où, en soustrayant ces encadrements (en les croisant bien entendu !)

   $$-\frac{M}{n^2}-\frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{y_{n+1}}{y_n}+\frac{1+a}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2}+\frac{M'}{n^3},$$

   et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

   $$-\frac{M+1+a}{n^2}-\frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{y_{n+1}}{y_n} \leqslant \frac{M-1-a}{n^2}+\frac{M'}{n^3},$$

   Choisissons a de sorte que $M+1+a<0$, par exemple $a=-(M+2)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \frac{1}{n^2}-\frac{M'}{n^3} = \frac{n-M'}{n^3}.$$

   Or, cette expression est positive pour n assez grand (plus précisément pour $n>M'$). Donc, il existe $a\in\mathbb{R}$, et $N\in\mathbb{N}$ tel que

   $$\boxed{\forall n \geqslant N,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}}$$

   (b) Les séries étant à termes strictement positifs (pour $n>-a$), d'après la question I-2, puisque $\sum y_n$ diverge, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

4. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}x^{n+1}}{w_n x^n} &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{27(n+1)^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

les autres termes dans ce développement étant en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\frac{w_{n+1}x^{n+1}}{w_n x^n} = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum w_n x^n$ est à termes strictement positifs, on peut appliquer la question IV-3. On en déduit que $\boxed{\sum w_n x^n \text{ diverge}}$.

Correction du problème 2 – Une série dont les séries des sommes partielles itérées sont toutes de somme nulle

Partie I – Construction d'une suite telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(T^\ell u)_n$ converge pour $\ell \in [\![0, N]\!]$

On répond à l'existence d'une suite vérifiant

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty}(T^\ell u)_n \text{ converge.} \tag{1}$$

1. Supposons que u vérifie (1). Soit $\ell \in \mathbb{N}$. La série $\sum (T^{\ell+1})_n$ converge, donc $(T^{\ell+1}u)_n \longrightarrow 0$. Or, $T^{\ell+1}u$ est la suite des sommes partielles de $T^\ell u$. Ainsi, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(T^\ell u)_n = \lim_{n\to+\infty}(T^{\ell+1}u)_n = 0}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $u_0 = v_0$, et pour tout $n > 0$:
$$u_n = v_n - v_{n-1}.$$
On a alors $Tu = v$, d'où $\boxed{\text{la surjectivité de } T}$.
3. Soit v telle que $\sum v_n$ converge. La surjectivité de T amène celle de T^{N+1}. Il existe donc u telle que $T^{N+1}u = v$. La convergence de $\sum T^{N+1}v$ implique la convergence de $T^{N+1}v$ vers 0, d'où la convergence de $\sum T^n v$, et la relation
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(T^N v)_n = \lim_{n\to+\infty}(T^{N+1}v)_n = 0.$$
De même on en déduit alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(T^{N-1}v)_n$, et en itérant ce procédé :
$$\forall n \in [\![0, N]\!], \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^\ell u)_n = 0.$$
4. On peut par exemple considérer
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}.$$
On a alors facilement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Tv)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{p+1} & \text{si } n \text{ est pair, } n = 2p. \end{cases}$$
Ainsi, $(Tv)_n \longrightarrow 0$, donc $\sum v_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 0$.
On construit alors u telle que $Tu = v$:
$$u_0 = v_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n - v_{n-1} = \begin{cases} \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n} = \frac{4(n+1)}{n(n+2)} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{n+1} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$
On a alors, puisque $\sum v_n$ converge :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 0}.$$

Partie II – Moments d'une fonction

5. Par linéarité de l'intégrale, l'hypothèse faite amène :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or, d'après le théorème de Stone-Weierstrass (en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$), on peut trouver une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f, c'est-à-dire telle que $\max\limits_{x\in[0,1]}(|f(x) - P_n(x)|) \longrightarrow 0$ (ce maximum existant par théorème de compacité).

On a alors, en notant M le maximum de f sur $[0,1]$ (ce maximum existant aussi par théorème de compacité), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 P_n(t)f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 M|P_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant M \max_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\ \mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t$.

Ces intégrales étant toutes nulles, on en déduit

$$\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t = 0,$$

et par stricte positivité de l'intégrale, f étant continue, $f^2 = 0$ sur $[0,1]$, puis $\boxed{f = 0 \text{ sur } [0,1]}$

6. On suppose $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[0,+\infty[$, les fonctions étant continues, ce qui assure l'existence des intégrales sur les intervalles compacts.

   La fonction f étant positive, $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante. Pour montrer l'existence d'une limite finie en $+\infty$, il suffit donc de montrer qu'elle est bornée. Or, pour tout $y \in [0,+\infty[$, la croissance de l'intégrale amène :

$$0 \leqslant \int_0^y f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^y g(t)\ \mathrm{d}t.$$

   Comme la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^y g(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante et convergente en $+\infty$, elle est bornée, et donc également $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f(t)\ \mathrm{d}t$.

   On en déduit $\boxed{\text{la convergence de } \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t}$

7. (a) Pour commencer, comme pour les séries, f étant une fonction continue sur $[0,+\infty[$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ entraîne celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$. On utilise en effet le fait que les fonctions f^+ et f^- (parties positives et négatives de f) sont positives et majorées par $|f|$, pour obtenir dans un premier temps la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^+(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^-(t)\ \mathrm{d}t$, en utilisant la question précédnete, puis la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$, puisque $f = f^+ - f^-$.

   Or, d'après les croissances comparées, $|x^n s(x)| = o(x^2)$. Il existe donc $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$,

$$|x^n s(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$ est clairement convergente (par un calcul direct, on l'a déjà utilisé pour étudier les séries de Riemann). Donc aussi $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} |x^n s(x)|\ \mathrm{d}x$, puis $\int_0^{+\infty} |x^n s(x)|\ \mathrm{d}x$ (en ajoutant la constante $\displaystyle\int_0^{x_0} |x^n s(x)|\ \mathrm{d}x$). On en déduit la convergence de $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n s(x)\ \mathrm{d}x.}$

   (b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t$ est convergente et vérifie :

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R} \cdot (\mathrm{i}-1)^{-(n+1)}.$$

   - Pour $n = 0$, on a pour $y \in [0,+\infty[$:

$$\int_0^y \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}-1}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\right]_0^y = \frac{1}{\mathrm{i}-1}(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)y} - 1) \longrightarrow -(\mathrm{i}-1)^{-1} \in \mathbb{R} \cdot (\mathrm{i}-1)^{-1}.$$

     Cela fournit la convergence, puis la propriété $\mathcal{P}(0)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^y t^{n+1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t = (\mathrm{i}-1)^{-1}\Big[t^{n+1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\Big]_0^y - (n+1)(\mathrm{i}-1)^{-1}\int_0^y t^n\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t.$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t$ donnée par l'hypothèse de récurrence amène celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t$, et

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t = (n+1)(\mathrm{i}-1)^{-1}\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R}\cdot(\mathrm{i}-1)^{-(n+2)},$$

la dernière affirmation provenant de l'hypothèse de récurrence.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t \text{ converge et est dans } \mathbb{R}\cdot(\mathrm{i}-1)^{-(n+1)}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_0^{+\infty} x^n s(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-\sqrt[4]{x}}\sin(\sqrt[4]{x})\ \mathrm{d}x.$$

Soit $y > 0$. On effectue sur l'intervalle $[0, y]$ le changement de variable $t = \sqrt[4]{x}$, soit $x = t^4$, de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors :

$$\int_0^y x^n s(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{y^4} 4t^{4n+3}\mathrm{e}^{-t}\sin(t).$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, l'intégrale de gauche convergeant en $+\infty$, il en est de même de l'intégrale de droite, et

$$\int_0^{+\infty} x^n s(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 4t^{4n+3}\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t\right).$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R}\cdot(\mathrm{i}-1)^{-(4n+4)} = \mathbb{R}$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^y x^n s(x)\ \mathrm{d}x = 0}$.

Partie III – Construction d'une suite satisfaisant (1)

8. (a) La fonction c étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle est bornée. Soit $M = \sup_{[0,1]} |f|$. On a alors :

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 |t^n c(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{u_n \longrightarrow 0}$.

(b) On suppose que $c(t) = o(1-t)$ au voisinage de 1, et que

$$\int_0^1 c(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{t-1}c(t)\ \mathrm{d}t.$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$(Tu)_n = \int_0^1 t^n\frac{t}{t-1}c(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour commencer, remarquez que toutes ces intégrales sont bien définies : l'hypothèse faite sur c permet de prolonger les intégrandes par continuité en 1 (en les posant égales à 0).

- La propriété $\mathcal{P}(0)$ provient de l'hypothèse faite sur c.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite. On a alors

$$(Tu)_{n+1} = (Tu)_n + u_{n+1} = \int_0^1 t^n\frac{t}{t-1}c(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^n t^{n+1}c(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{t-1}c(t)\ \mathrm{d}t,$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(Tu)_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\frac{t}{t-1}c(t)\ \mathrm{d}t.}$

(c) On montre par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(\ell)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (T^\ell u)_n = \int_0^1 t^n \left(\frac{t}{t-1}\right)^\ell c(t)\ \mathrm{d}t.$$

- La propriété $\mathcal{P}(0)$ est triviale.
- Soit $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(\ell)$ soit vérifiée. La propriété $\mathcal{P}(\ell+1)$ découle de la propriété $\mathcal{P}(\ell)$ en utilisant la question 8(b), avec la fonction continue sur $[0,1[$:

$$c_\ell : x \mapsto \left(\frac{t}{t-1}\right)^\ell c(t),$$

qu'on peut prolonger par continuité en 1, en posant $c_\ell(1) = 0$ (d'après l'hypothèse faite sur c).
- Le principe de récurrence permet de conclure.

En appliquant alors la question 8(a) avec la fonction c_ℓ continue sur $[0,1]$, il vient :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} (T^\ell u)_n = 0.}$$

9. On effectue le changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$ donné par $x = \frac{t}{t-1}$, soit aussi $t = \frac{x}{x-1}$, dans l'intégrale de la question 7(c) : pour $y > 0$,

$$\int_0^y x^n s(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{y}{y-1}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt[4]{\frac{t}{t-1}}} \sin\left(\sqrt[4]{\frac{t}{t-1}}\right)\ \mathrm{d}t.$$

En posant c la fonction non nulle définie, pour tout $t \in [0,1[$, par

$$c(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt[4]{\frac{t}{t-1}}} \sin\left(\sqrt[4]{\frac{t}{t-1}}\right),$$

prolongée par $c(1) = 0$, et en faisant tendre y vers $+\infty$, il vient, d'après 7(c) :

$$\boxed{0 = \int_0^1 \left(\frac{t}{t-1}\right)^\ell c(t)\ \mathrm{d}t}.$$

De plus, le théorème de croissances comparées (appliqué à la variable $u = \frac{1}{t-1}$) permet d'affirmer que pour tout $\ell > 0$, $\boxed{c(t) = o((t-1)^\ell)}$ au voisinage de 1.

10. La fonction c étant non nulle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle non plus (d'après la question 1), et les hypothèses satisfaites par c permettent d'utiliser 8(c) : pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (T^\ell u)_n = 0}$, ce qui est bien ce qu'on voulait démontrer.