ESPACES EUCLIDIENS
CORRECTION

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On note $\|.\|$ la norme associée. Si a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on note S_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même définie par $S_a(x) = x - p(a,x)a$ où $p(a,x) := 2\langle a,x\rangle / \langle a,a\rangle \in \mathbb{R}$. Cela étant, on se donne une partie finie *Δ de $\mathbb{R}^n$ possédant les propriétés :*

(i) *Le vecteur nul n'appartient pas à Δ.*

(ii) *Δ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Si a et b appartiennent à Δ, $p(a,b)$ est un entier.*

(iv) *Si a et b sont dans Δ, le vecteur $S_a(b) = b - p(a,b)a$ est aussi un élément de Δ.*

(v) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si a et λa appartiennent à Δ, alors $\lambda = \pm 1$.*

1. a) *Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que S_a est une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.*

   On voit que S_a est linéaire et que l'on a $S_a \circ S_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. L'ensemble des points fixes est $a^\perp$.

   $$\boxed{S_a \text{ est donc la symétrie orthogonale par rapport à } a^\perp.}$$

   b) *Vérifier que a appartient à Δ si, et seulement si, $-a$ appartient à Δ.*

   Si a appartient à Δ, alors $S_a(a) = -a$ appartient à Δ d'après (iv). La réciproque s'obtient de même. Donc

   $$\boxed{(a \in \Delta) \iff (-a \in \Delta).}$$

2. *Soient a et b deux vecteurs de Δ et θ la mesure de l'angle qu'ils forment, c'est-à-dire l'unique nombre réel dans $[0;\pi]$ tel que $\cos\theta = \langle a,b\rangle / (\|a\|\,\|b\|)$.*

   a) *Justifier l'existence et l'unicité de θ.*

   L'existence et l'unicité de θ découle de l'injectivité de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$ et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz : $-1 \leqslant \langle a,b\rangle / \big(\|a\|\,\|b\|\big) \leqslant 1$.

   $$\boxed{\theta \text{ existe est unique.}}$$

   b) *Démontrer que θ est un élément de l'ensemble $\Theta = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi\right\}$.*

   On voit que
   $$|\cos\theta| = \frac{1}{2}\sqrt{p(a,b)p(b,a)}.$$
   Comme $p(a,b)$ et $p(b,a)$ sont des entiers et que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, il s'ensuit que
   $$\sqrt{p(a,b)p(b,a)} \in \{0;1;\sqrt{2};\sqrt{3};2\}$$
   et donc que
   $$|\cos\theta| \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}.$$
   Cela fournit bien, pour seules valeurs possibles de $\theta \in [0;\pi]$, les nombres de l'ensemble Θ. Pour résumer, on a

   $$\boxed{\theta \in \Theta \qquad \text{où} \qquad \Theta = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi\right\}.}$$

c) *Si θ est différent de $\pi/2$, quelles valeurs peut prendre le rapport $\|a\| \,/\, \|b\|$?*

Si $\theta \neq \pi/2$, on a $p(a,b) \neq 0$ et l'on constate cette fois que

$$\frac{\|a\|}{\|b\|} = \sqrt{p(b,a)/p(a,b)}.$$

On sait par ailleurs, d'après la question précédente, que $p(a,b)p(b,a) = 4\cos^2\theta$ et donc que $p(a,b)p(b,a)$ est un produit de deux nombres entiers naturels non nuls inférieur ou égal à 4. Les seules possibilités sont donc

$$\big(p(a,b), p(b,a)\big) \in \{(1,1);(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(1,4);(4,1);(2,2)\}.$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\frac{\|a\|}{\|b\|} \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2\right\}.}$$

d) *Démontrer que si a et b sont linéairement indépendants et si $\langle a,b\rangle > 0$, alors les vecteurs $a-b$ et $b-a$ appartiennent à Δ.*

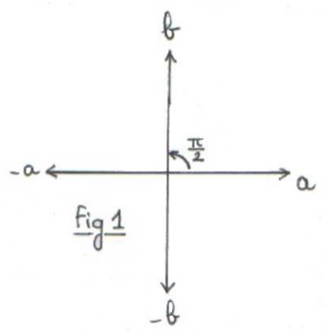
Puisque (a,b) est libre, on a $|\cos\theta| \neq 1$ et puisque $\cos\theta > 0$ (car $\langle a,b\rangle > 0$), il reste comme seule possibilité pour θ les valeurs $\pi/6$, $\pi/4$ et $\pi/3$.
Dans chacun de ces cas, la question précédente nous montre que l'un des deux nombres $p(a,b)$ et $p(b,a)$ est égal à 1. Par conséquent, ou bien $S_a(b) = b-a$ ou bien $S_b(a) = a-b$ et l'un de ces deux vecteurs appartient à Δ. Comme $\Delta = -\Delta$, l'autre aussi.

Si a et b sont linéairement indépendants et si $\langle a,b\rangle > 0$, alors les vecteurs $a-b$ et $b-a$ appartiennent à Δ.

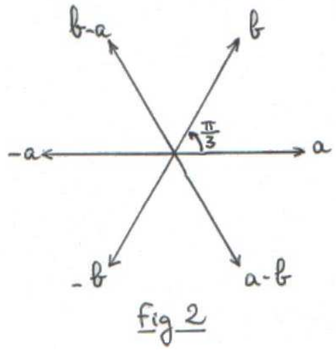
3. *Déterminer toutes les possibilités (à homothétie et isométrie près) pour Δ lorsque $n=2$.*

Δ étant une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{card}\Delta \geqslant 2$. Prenons a un vecteur de Δ de norme minimale. Il existe alors nécessairement un vecteur x de Δ tel que (a,x) est libre et telle que $\langle a,x\rangle > 0$ (si $\langle a,x\rangle < 0$ il suffit de remplacer x par $-x$). On choisit dès lors un tel vecteur x tel que la mesure de l'angle $(\widehat{a,x})$ soit la plus petite possible, c'est-à-dire $(\widehat{a,x}) \in \{\pi/6; \pi/4; \pi/3; \pi/2\}$.

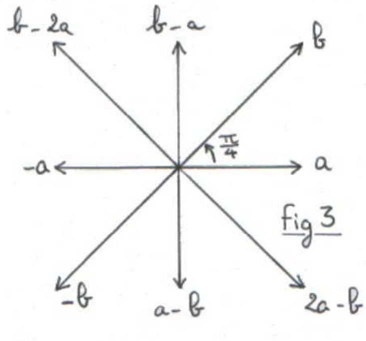
▷ 1er cas : Si $(\widehat{a,x}) = \frac{\pi}{2}$, il ne peut y avoir de vecteur $y \in \Delta$ tel que (a,y) est libre et $\langle a,y\rangle < 0$. Il n'existe donc qu'une seule configuration représentée sur la figure 1, où l'on a noté b le vecteur x.



▷ 2ème cas : Si $(\widehat{a,x}) = \frac{\pi}{3}$, on a $\|a\| = \|x\|$ et $a-x$ et $x-a$ sont dans Δ. Il n'y a à nouveau qu'une seule configuration représentée sur la figure 2, où b désigne le vecteur x.



▷ 3ème cas : Si $(\widehat{a,x}) = \frac{\pi}{4}$, on pose $x = b$, alors $\|b\| \,/\, \|a\| = \sqrt{2}$ (puisque a est de norme minimale). On a $b-a \in \Delta$ et $S_{b-a}(b) = b-2a \in \Delta$. Là encore, une seule configuration possible représentée sur la figure 3.



▷ 4ème cas : Si $(\widehat{a,x}) = \frac{\pi}{6}$, on note $x = a'$ et $b = a' - a$. On a $\|a'\| = \sqrt{3}\,\|a\|$ et $b = S_{a'}(a)$ donc $b \in \Delta$. Comme dans le deuxième cas, on voit alors que $b-a$, $a-b$, $-a$ et $-b$ sont dans Δ ainsi que a', $b' = 2b-a$, $b'-a' = b-2a$, $-a' = -a-b$, $a-2b$ et $2a-b$. Il n'y a encore qu'une seule configuration possible représentée sur la figure 4.