Problème n° 11 : Fonctions régulières sur un intervalle

Problème 1 – Calcul approché d'une intégrale

On propose dans ce problème d'analyser l'erreur commise lors de la mise en oeuvre de différentes techniques de calcul approché d'une intégrale.

Partie I – Approximation polynomiale au bord gauche

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[\alpha,\beta]$.

1. Justifier, pour tout $\ell \in [\![0,n+1]\!]$, l'existence du réel $M_\ell = \sup_{[\alpha,\beta]} |f^{(\ell)}|$. On conserve cette notation jusqu'à la fin du problème.
2. Justifier que le polynôme
$$P = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{f^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}(X-\alpha)^\ell$$
est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, $P^{(\ell)}(\alpha) = f^{(\ell)}(\alpha)$.
3. Montrer que
$$\left| \int_\alpha^\beta (f(x) - P(x))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+2)!}(\beta-\alpha)^{n+2}.$$
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b]$, et $N \in \mathbb{N}^*$. On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en N intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ ($k \in [\![0,N-1]\!]$), où $x_k = a + kh$, avec $h = \frac{b-a}{N}$.
Justifier que lorsque N tend vers $+\infty$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(x_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right).$$
5. Commentez le cas $n = 0$.

Partie II – Approximation polynomiale au point milieu

Avec les notations de la partie précédente, on note, pour $k \in [\![0,N-1]\!]$, m_k le milieu de $[x_k, x_{k+1}]$ et, pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, $Q_{n,k}$ l'unique polynôme tel que pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, $Q_{n,k}^{(\ell)}(m_k) = f^{(\ell)}(m_k)$.

1. En adaptant la preuve de la partie I, montrer que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{2^\ell(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)$$
2. En comparant $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n,k}$ et $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n+1,k}$, montrer que si n est pair, et f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, alors
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{2^\ell(\ell+1)!N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right)$$

3. Commenter et comparer les cas $n=0$ et $n=1$.

Ces méthodes ne sont pas très pratiques pour de grandes valeurs de n car elles nécessitent la connaissance des dérivées successives de f. Pour cela, on leur préfère souvent des méthodes d'interpolation, ne nécessitant pas la connaissance des dérivées de f.

Partie III – Méthodes de Newton-Cotes

Soit $n \geqslant 1$. La méthode de Newton-Cotes d'ordre n consiste à approcher sur chaque intervalle $[\alpha, \beta]$ de la subdivision l'intégrale à calculer par un polynôme interpolant f en $n+1$ valeurs uniformément réparties sur le segment $[\alpha, \beta]$. On suppose dans ce qui suit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$ d'intégration, donc aussi sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de la subdivision. On note, pour $k \in [\![0, n+1]\!]$, $y_k = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$.

1. Exprimer (sous forme d'une somme) l'unique polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(y_k) = f(y_k)$.
2. Justifier qu'il existe des coefficients $b_{n,\ell}$, $\ell \in [\![0, n]\!]$, indépendants de f, α et β, tels que
$$\int_\alpha^\beta P(t)\ \mathrm{d}t = (\beta - \alpha) \sum_{\ell=0}^{n} b_{n,\ell} f(y_\ell).$$
On exprimera $b_{n,k}$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^n t(t-1)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n)\ \mathrm{d}t$.
3. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = 1$.
4. Contrôle de l'erreur d'interpolation.
   (a) Soit x un élément de $[\alpha, \beta]$ distinct des y_i, et g la fonction définie sur $[a, b]$ par
$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P(x)),\ \text{où } q(t) = \prod_{k=0}^{n}(t - y_k).$$
   Justifier que les y_i sont des zéros de g. Trouver un $n+2$-ième zéro de g distinct des y_i.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$
   (c) En déduire que $|f(x) - P(x)| \leqslant M_{n+1} \dfrac{\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x - y_k)\right|}{(n+1)!}$.
5. Soit, pour $N \in \mathbb{N}^*$,
$$I_N = h \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{n} b_{n,\ell} f\left(a + \left(k + \frac{\ell}{n}\right) h\right),\ \text{où } h = \frac{b-a}{N}.$$
Justifier qu'il existe un réel C_n indépendant de N, de f, et de a et b, telle que
$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - I_N\right| \leqslant \frac{C_n M_{n+1} (b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}.$$
On exprimera C_n à l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^n |t(t-1) \cdot (t-n)|\ \mathrm{d}t$.
6. Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose de plus que n est pair et que f est de classe C^{n+2}. On garde les notations du début de la partie.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - y_0) \cdots (x - y_n)\ \mathrm{d}x = 0$.
   (b) En considérant $P - \lambda(x - y_0) \cdots (x - y_n)$, montrer qu'il existe un polynôme Q de degré au plus $n+1$, tel que $\displaystyle\int_\alpha^\beta Q(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta P(t)\ \mathrm{d}t$, et $Q'(y_m) = f'(y_m)$, où $m = \frac{n}{2}$.

(c) En adaptant le raisonnement de la question 5 avec $q(t) = (t - y_m) \prod_{k=0}^{n} (t - y_k)$, montrer que

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = I_N + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right).$$

(d) Expliciter le cas $n = 2$.

Partie IV – Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est une adaptation de la méthode par interpolation de Newton-Cotes. Il s'agit d'interpoler la fonction sur chaque intervalle de la subdivision en des points répartis de façon non régulière cette fois, mais choisis de sorte à minimiser l'erreur. Il est fréquent de choisir comme points d'interpolation des racines d'une famille de polynômes. On considère dans un premier temps une fonction f de classe $\mathcal{C}^{2n}$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (à constante multiplicative près, ce sont les polynômes de Legendre).

1. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$.

   (b) Justifier que les racines de L_n sont toutes simples et appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$. On les note $-1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < 1$.

2. Soit Q_n le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ interpolant f aux points $r_1, \ldots, r_n$. Justifier l'existence de réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, indépendants de f, tels que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell f(r_\ell).$$

On note désormais $\mathcal{I}_n(f) = \int_{-1}^{1} Q_n(x)\ \mathrm{d}x$ et on étudie l'erreur faite en approchant $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$ par $\mathcal{I}_n(f)$.

3. (a) Montrer que si P est un polynôme vérifiant $\deg(P) < n$, alors $\mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}(P)$.

   (b) Montrer que si P est un polynôme vérifiant $\deg(P) < 2n$, alors $\mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}(P)$ (on pourra comparer avec $\mathcal{I}(R)$, où R est le reste de la division euclidienne de P par L_n).

   Ainsi, la méthode est « exacte » non seulement sur les polynômes de degré au plus $n - 1$ (comme toute méthode d'interpolation en n point), mais aussi sur les polynômes de degré au plus $2n - 1$, ce qui laisse supposer une erreur bien meilleure qu'une méthode d'interpolation standard.

4. Polynôme d'interpolation de Hermite de f

   (a) À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on associe l'élément de $\mathbb{R}^{2n}$ suivant :

$$\varphi(H) = (H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \ldots, H(r_n), H'(r_n)).$$

   Établir que φ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

   (b) En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad B_n(r_j) = f(r_j) \qquad \text{et} \qquad B_n'(r_j) = f'(r_j).$$

5. Montrer que $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(f)$.

6. Dans cette question, on fixe x un nombre réel donné de $[-1, 1]$, distinct des nombres $r_1, \ldots, r_n$. On définit l'application g sur $[-1, 1]$ par la relation

$$g(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \cdot (P_n^{(n)}(t))^2,$$

   où le réel α est l'unique réel tel que $g(x) = 0$.

   (a) Justifier l'existence et l'unicité de α.

   (b) Montrer que g' s'annulle en au moins $2n$ points distincts de $]-1, 1[$

(c) En déduire l'existence de $c \in]-1, 1[$ tel que

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \cdot f^{(2n)}(c)(P_n^{(n)}(x))^2.$$

7. En conclure que :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

où M_{2n} désigne un majorant de $f^{(2n)}$ sur $[-1, 1]$.

8. On suppose maintenant que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur un intervalle quelconque $[\alpha, \beta]$, et on désigne toujours par M_{2n} un majorant de $f^{(2n)}$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Donner un majorant de

$$\left| \int_\alpha^\beta f(u) \, \mathrm{d}u - \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + r_j \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \right|$$

en fonction de M_{2n}, n, α et β.

9. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[a, b]$, et $N \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\left| \int_a^b f(u) \, \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(m_k - \frac{b-a}{2N\sqrt{3}} \right) + f\left(m_k + \frac{b-a}{2N\sqrt{3}} \right) \right) \right| \leqslant \frac{M_4 (b-a)^5}{4320 N^4},$$

où, pour tout k dans $[\![0, N-1]\!]$, m_k est le milieu de l'intervalle $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$, et M_4 est un majorant de $f^{(4)}$.