

DM 7. Enoncé

Partie I : Nombre de surjections entre ensembles finis

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, avec $m \leq n$. Une partition de \mathbb{N}_n en m classes est un ensemble $\{A_1, \dots, A_m\}$ de parties non vides de \mathbb{N}_n , deux à deux disjointes, dont la réunion est égale à \mathbb{N}_n .

On appelle nombre de Stirling de deuxième espèce le nombre de partitions de \mathbb{N}_n en m classes. On note S_n^m ce nombre.

1°) Une partition ordonnée de \mathbb{N}_n en m classes est une m -liste (A_1, \dots, A_m) de parties non vides de \mathbb{N}_n , deux à deux disjointes, dont la réunion est égale à \mathbb{N}_n .

Construire une bijection de l'ensemble des surjections de \mathbb{N}_n sur \mathbb{N}_m dans l'ensemble des partitions ordonnées de \mathbb{N}_n en m classes.

En déduire que $m!S_n^m$ est le nombre de surjections de \mathbb{N}_n sur \mathbb{N}_m .

2°) Montrer que $m^n = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (k!S_n^k)$.

3°) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}_m$, on note E_k l'ensemble des applications f de \mathbb{N}_n dans \mathbb{N}_m telles que $k \notin f(\mathbb{N}_n)$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq \ell \leq m$. Soit k_1, \dots, k_ℓ des entiers deux à deux distincts de \mathbb{N}_m . Calculer le cardinal de $E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_\ell}$.

b) Montrer que $m!S_n^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$.

Partie II : Formule d'inversion de Möbius

On note A l'ensemble des fonctions de \mathbb{N}^* dans \mathbb{Z} . On munit A de la loi interne T définie par :

$$\forall f, g \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f \ T \ g)(n) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \text{ divise } n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

4°) Montrer que $\forall f, g \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (f \ T \ g)(n) = \sum_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d)g(d')$.

5°) Montrer que (A, T) est un monoïde commutatif.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On note $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en produit de nombres premiers, où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

Pour un tel entier n , lorsqu'il existe $i \in \mathbb{N}_k$ tel que $\alpha_i \geq 2$, on pose $\mu(n) = 0$ et sinon, on pose $\mu(n) = (-1)^k$.

On convient de plus que $\mu(1) = 1$. Ainsi, $\mu \in A$: c'est la fonction de Möbius.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z(n) = 1$.

6°) a) Montrer que z est l'inverse de μ pour la loi T .

b) Soit $f, g \in A$. Montrer que

$$[\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \text{ divise } n}} g(d)] \iff [\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \text{ divise } n}} \mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)].$$

7°) Application : On fixe m et n dans \mathbb{N}^* . Un alphabet est un ensemble de m symboles distincts $\{a_1, \dots, a_m\}$. Un mot de longueur n est une application de \mathbb{N}_n dans $\{a_1, \dots, a_m\}$.

a) Lorsque φ et φ' sont deux mots de longueur n , on convient que $\varphi R \varphi'$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi'(i) = \varphi(i+p)$ (où $i+p$ est à prendre modulo n).

Montrer que R est une relation d'équivalence sur l'ensemble des mots de longueur n .

Lorsque φ est un mot de longueur n , sa classe d'équivalence, notée $\bar{\varphi}$ est appelée un mot circulaire de longueur n . On dit que φ représente le mot circulaire $\bar{\varphi}$.

Soit φ un mot de longueur n et $p \in \mathbb{N}^*$. Si, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(i) = \varphi(i+p)$ (où $i+p$ est à prendre modulo n), on dit que p est une période du mot circulaire $\bar{\varphi}$.

b) Soit φ un mot de longueur n . Montrer que l'on peut définir la plus petite période p_0 du mot circulaire $\bar{\varphi}$ et que p_0 divise n . On dira que p_0 est la période primitive de $\bar{\varphi}$.

c) On note $M(p)$ le nombre de mots circulaires de longueur n et de période primitive p . Si p divise n , montrer que

$$M(p) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{1 \leq q \leq p \\ q \text{ divise } p}} \mu\left(\frac{p}{q}\right) m^q.$$

Partie III : Utilisation de fonctions génératrices

8°) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n^m \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} (e^x - 1)^m.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de \mathbb{N}_n .

9°) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

10°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Lorsque c'est défini, on pose

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On dit que f est une série entière. On admettra que s'il existe $r > 0$ tel que f est définie en r , alors f est définie et de classe C^∞ sur $] -r, r[$, avec

$$\forall x \in] -r, r[, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d^p}{dx^p}(x^n).$$

Montrer que dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

11°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est défini, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

Montrer que $S(r)$ est défini pour tout $r \in]0, 1[$.

12°) On convient que $I_0 = 0$. Montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad S'(x) = (1+x)(S(x) + 1).$$

13°) Montrer que $x \mapsto (S(x) + 1)e^{-x - \frac{x^2}{2}}$ est constante puis en déduire une expression de $S(x)$.

14°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k! 2^k (n-2k)!}.$$