CONTINUITÉ

Exercice 1. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction $x \longmapsto 1/x$ est discontinue en 0.
2. Une fonction qui admet en un point a une limite finie à droite et une limite finie à gauche qui sont égales est continue en a.
3. La partie entière est continue en 0.
4. La partie entière est continue sur $[0;1[$.
5. Si f est continue et $f(a) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage de a.
6. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
7. Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
8. Une fonction et son prolongement par continuité en un point sont deux applications différentes.
9. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ possède un graphe symétrique par rapport à la première bissectrice.

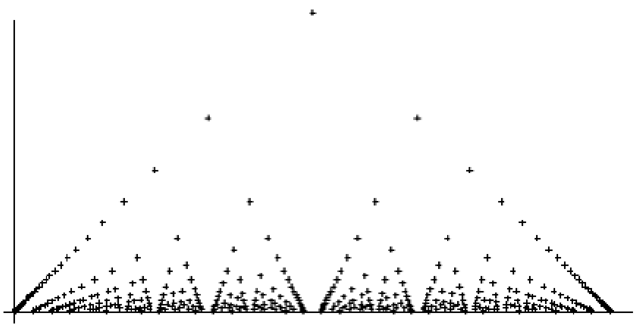
Exercice 2. [$\star$] (La dégoulinante)

Dans tout cet exercice, lorsque l'on écrit p/q, c'est pour faire référence à l'écriture d'un rationnel sous forme irréductible, c'est-à-dire que $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$.

On considère la fonction de Thomae $f :]0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } x = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

dont le graphe est donné ci-dessous (à titre indicatif)



1. Démontrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap]0;1[$.
2. a) Soit $q_0 \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le nombre de rationnels contenus dans $]0;1[$ s'écrivant p/q avec $q \leqslant q_0$ est fini.
   b) Démontrer que f est continue en tout point de $]0;1[\setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 3. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x) = \sup\{f(t) : t \in [0; x]\}.$$

1. Démontrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant \varphi(x)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\varphi \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \longmapsto f(x)/x$ soit décroissante. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5. [$\circ$]

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que f^2 est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f^3 est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est croissante. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. [$\star$]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur l'intervalle I. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 8. [$\star$]

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que si D est une partie dense dans $\mathbb{R}$ alors $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1; 1]$.

Exercice 9. [$\circ$]

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0; 1]$.

1. On suppose que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. Démontrer que $\exists a \in [0; 1],\ f(a) = a$.
2. On suppose que $[0; 1] \subset f([0; 1])$. Démontrer que $\exists a \in [0; 1],\ f(a) = a$.

Exercice 10. [$\star$] (Théorème des cordes de Paul Lévy)

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $\lambda \in \,]0; 1[$, on considère l'équation (E_λ) définie par

$$(E_\lambda) \qquad f(x + \lambda) = f(x).$$

1. Démontrer que l'équation $(E_{1/2})$ possède au moins une solution dans $[0; 1/2]$. Proposer une construction graphique qui permette de déterminer la position de ces solutions.

   Démontrer que l'équation $(E_{1/3})$ possède au moins une solution dans $[0; 2/3]$.

   Plus généralement, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_{1/n})$ possède au moins une solution dans $[0; 1 - 1/n]$.
2. Démontrer que si un automobiliste parcourt 80 km en 1 h (sans forcément rouler toujours à la même vitesse), il existe un intervalle de temps d'un quart-heure pendant lequel il parcourt 20 km (c'est-à-dire la distance qu'il aurait parcouru s'il avait roulé à vitesse constante).
3. Soit $\lambda \in \,]0; 1[$ tel que λ ne soit pas de la forme $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la fonction f, définie sur $[0; 1]$, par
$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{\lambda} - x \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}\cdot$$
   démontrer que l'équation (E_λ) n'a pas forcément de solution dans $[0; 1 - \lambda]$.

Exercice 11. [$\star$]

Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}\,.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f_n(n)$ et $f_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - n) = 0$.
3. Déterminer un équivalent simple de $u_n - n$.

Exercice 13. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 14. [$\circ$]

Soient $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in [a;b]\,,\ 0 < g(x) < f(x)$. Démontrer qu'il existe $m, M \in \,]0;1[$ tel que $\forall x \in [a;b]\,,\ mf(x) \leqslant g(x) \leqslant Mf(x)$.

Exercice 15. [$\star$] (Une demi-période suffit !)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $2T$-périodique. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f([a;a+T]) = f(\mathbb{R})$.

Exercice 16. [$\star$] (Classique !)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{d}(x;A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Démontrer que l'application $x \longmapsto \mathrm{d}(x;A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 17. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. [$\bigstar$]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que l'on peut encadrer f par deux fonctions affines.

Exercice 19. [$\star$]

Soit $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer que f se prolonge par continuité en 0. *Indication : Utiliser* $g(x) = \sup\{f(t) : t \in]0;x]\}$ et $h(x) = \inf\{f(t) : t \in]0;x]\}$.

Exercice 20. [$\star$]

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos(x)$.

Exercice 21. [$\star$]

Déterminer les applications continues $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telles que $f \circ f = f$.

Exercice 22. [$\star$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante. On considère l'ensemble G_f des périodes de f définie par $G_f = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$.

1. Démontrer que G_f est sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Qu'en déduire ?
2. a) On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   b) Donner un exemple d'une fonction φ tel que $G_\varphi = \mathbb{Q}$.
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et périodiques admettant à la fois 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.