Lycée Henri IV
MPSI

TD

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. Propriétés arithmétiques de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n \wedge F_{n-1} = 1$.
2. a) Démontrer que pour tout $m \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$, on a $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$.
   b) Soient $m \geqslant 1$, $0 \leqslant r < m$ et $k \geqslant 1$. Démontrer que $F_{km+r} \wedge F_m = F_{(k-1)m+r} \wedge F_m$.
   c) Soient m, n deux entiers naturels. Démontrer que
   $$F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}.$$
   En déduire, que F_n et F_m sont premiers entre-eux si, et seulement si, $n \wedge m$ est égal à 1 ou 2.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\binom{2n}{1} \wedge \binom{2n}{3} \wedge \cdots \wedge \binom{2n}{2n-1}$.