DÉTERMINANTS

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Démontrer, sans aucun calcul, que

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 9 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 30 b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.

Indication : 299, 468 et 741 sont divisibles par 13.

1. Δ_1 est divisible par 5 car la première ligne l'est ; par 2 car la seconde colonne l'est et par 3 car la deuxième ligne l'est. Comme $5 \vee 3 \vee 2 = 30$, on a

$$\boxed{\Delta_1 \text{ est divisible par } 30.}$$

2. En faisant $100C_1 + 10C_2 + C_3 \to C_3$, on obtient

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 299 \\ 4 & 6 & 468 \\ 7 & 4 & 741 \end{vmatrix}$$

donc, comme 13 divise 299, 468 et 741, on a

$$\boxed{\Delta_2 \text{ est divisible par } 13.}$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]
Calculer les déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \cos b & \sin a \sin b \\ -\sin a & \cos a \cos b & \cos a \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 - C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{matrix} \\
&= (c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix} \\
&= (c-b)(c-a)(b-a),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta_1 = (a-b)\,(b-c)\,(c-a).}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \cos b & \sin a \sin b \\ -\sin a & \cos a \cos b & \cos a \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix} \\
&= = \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + 0 + \cos^2 a \sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b \\
&= (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 b + \sin^2 b) \\
&= 1 \times 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta_2 = 1.}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & a^2+b^2+2ab \\ ab & a^2 & b^2 & a^2+b^2+2ab \\ ab & b^2 & a^2 & a^2+b^2+2ab \\ b^2 & ab & ab & a^2+b^2+2ab \end{vmatrix} \qquad C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C_4 \\
&= (a+b)^2 \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & 1 \\ ab & a^2 & b^2 & 1 \\ ab & b^2 & a^2 & 1 \\ b^2 & ab & ab & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a+b)^2 \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 & 0 \\ (a-b)b & a(a-b) & (b-a)b & 0 \\ (a-b)b & (b-a)b & a(a-b) & 0 \\ b^2 & ab & ab & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 - L_4 \to L_1 \\ L_2 - L_4 \to L_2 \\ L_3 - L_4 \to L_3 \end{matrix} \\
&= (a+b)^2 \times (a^2-b^2) \times [a^2(a-b)^2 - b^2(a-b)^2] \times 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta_3 = (a-b)^4\,(a+b)^4.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [○] (Dérivation d'un déterminant)

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quatre fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Généraliser à un déterminant 3×3. Calculer, pour $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$

3. Généraliser à un déterminant $n \times n$.

1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a(x)d(x) - b(x)c(x)$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = a'(x)d(x) + a(x)d'(x) - b'(x)c(x) - b(x)c'(x),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.}$$

2. Soient $a_i, b_i, c_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $i \in [\![1;3]\!]$) des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} a_1(x) & b_1(x) & c_1(x) \\ a_2(x) & b_2(x) & c_2(x) \\ a_3(x) & b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} \\ &= a_1(x) \begin{vmatrix} b_2(x) & c_2(x) \\ b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + a_2(x) \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1(x) \\ b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + a_3(x) \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1(x) \\ b_2(x) & c_2(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

donc, d'après la question 1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1'(x) \begin{vmatrix} b_2(x) & c_2(x) \\ b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + a_1(x) \left(\begin{vmatrix} b_2'(x) & c_2(x) \\ b_3'(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2(x) & c_2'(x) \\ b_3(x) & c_3'(x) \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + a_2'(x) \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1(x) \\ b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + a_2(x) \left(\begin{vmatrix} b_1'(x) & c_1(x) \\ b_3'(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1'(x) \\ b_3(x) & c_3'(x) \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + a_3'(x) \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1(x) \\ b_2(x) & c_2(x) \end{vmatrix} + a_3(x) \left(\begin{vmatrix} b_1'(x) & c_1(x) \\ b_2'(x) & c_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1(x) & c_1'(x) \\ b_2(x) & c_2'(x) \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

On reconnait trois développements par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{vmatrix} a_1'(x) & b_1(x) & c_1(x) \\ a_2'(x) & b_2(x) & c_2(x) \\ a_3'(x) & b_3(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(x) & b_1'(x) & c_1(x) \\ a_2(x) & b_2'(x) & c_2(x) \\ a_3(x) & b_3'(x) & c_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(x) & b_1(x) & c_1'(x) \\ a_2(x) & b_2(x) & c_2'(x) \\ a_3(x) & b_3(x) & c_3'(x) \end{vmatrix}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette formule montre que $D'(x)$ est égale à

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 0 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\sin x & \sin x \\ 1 & -\sin(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & -\sin(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \cos(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \cos(x+\beta) \end{vmatrix}$$

donc

$$D'(x) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Ainsi $x \longmapsto D(x)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha - \sin\beta$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D(x) = \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha - \sin\beta.}$$

3. En dimension n, en notant $f(x) = \det\left\{\left(a_{i,j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right\}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{j,\sigma(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i,\sigma(i)}'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{j,\sigma(j)}(x)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,i-1}(x) & a_{1,i}'(x) & a_{1,i+1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ a_{2,1}(x) & \cdots & a_{2,i-1}(x) & a_{2,i}'(x) & a_{2,i+1}(x) & \cdots & a_{2,n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,i-1}(x) & a_{n,i}'(x) & a_{n,i+1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{vmatrix}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\{-1;1\})$. Démontrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

En ajoutant la première colonne de A à chacune des autres, on obtient une matrice dont les colonnes, de la deuxième à la n-ème, ont pour coefficients 0, 2 ou -2. On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes, de sorte que

$$\boxed{2^{n-1} \text{ divise } \det(A).}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note B la matrice telle que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la i-ème colonne est la somme des colonnes de A d'indice différent de i. Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. On a

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det_{\mathscr{B}}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq 1}}^{n} C_i, \sum_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n} C_i, \ldots, \sum_{\substack{i=1\\i\neq n}}^{n} C_i\right)\\
&= \det_{\mathscr{B}}\left((n-1)\sum_{i=1}^{n} C_i, \sum_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n} C_i, \ldots, \sum_{\substack{i=1\\i\neq n}}^{n} C_i\right) && \text{en sommant les colonnes dans la première}\\
&= (n-1)\det_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i, \sum_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n} C_i, \ldots, \sum_{\substack{i=1\\i\neq n}}^{n} C_i\right)\\
&= (n-1)\det_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i, -C_2, \ldots, -C_n\right) && \text{en soustrayant la première colonne aux autres}\\
&= (n-1)\det_{\mathscr{B}}\Big(C_1, -C_2, \ldots, -C_n\Big) && \text{en sommant les colonnes dans la première}\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det_{\mathscr{B}}\Big(C_1, C_2, \ldots, C_n\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\det(B) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A).}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\circ$]
Calculer le déterminant suivant (où les blancs désignent des 0) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)}.$$

On reconnait un déterminant tridiagonal. On développe par rapport à la première colonne puis l'un des deux déterminants obtenus par rapport à la première ligne (ou on reconnait un produit par blocs). Il s'ensuit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

De plus

$$\Delta_1 = 1 + x^2 \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = 1 + x^2 + x^4,$$

ce qui incite à poser

$$\Delta_0 = 1.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont 1 et x^2. On ditingue deux cas :

▷ <u>Premier cas : $x^2 \neq 1$</u>

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta_n = \lambda + \mu x^{2n}.$$

Les conditions $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 1 + x^2$, on obtient $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda + \mu x^2 = 1 + x^2$, d'où

$$\lambda = -\frac{1}{x^2-1} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta_n = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}.}$$

▷ <u>Second cas : $x^2 = 1$</u>

La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, ce qui démontre que $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique. Comme $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 2$, la raison vaut 1 et l'on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta_n = n + 1.}$$

▷ <u>Bilan :</u>

Dans tous les cas, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta_n = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [$\star$] (Déterminant de Hürwitz)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n nombres réels et a et b deux autres nombres réels tels que $a \neq b$. On pose

$$J_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & a \\ & & \ddots & \\ & b & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & & & \\ & \lambda_2 + X & & a+X \\ & & \ddots & \\ & b+X & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n + X \end{vmatrix}.$$

Démontrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et déterminer P. En déduire la valeur de J_n.

En retranchant la première ligne à toutes les autres, on obtient

$$P = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a + X & \cdots & \cdots & a + X \\ b - \lambda_1 & \lambda_2 - a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b - a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b - \lambda_1 & b - a & \cdots & b - a & \lambda_n - a \end{vmatrix}$$

et, en dévelopant par rapport à la première ligne, P s'écrit comme une somme de polynômes de degré inférieur ou égal à 1 donc

$$\boxed{P \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.}}$$

Les déterminants $P(-a)$ et $P(-b)$ sont triangulaires et valent

$$P(-a) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) \qquad \text{et} \qquad P(-b) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b),$$

donc

$$P = \frac{P(-a) - P(-b)}{a - b} X + \frac{aP(-b) - bP(-a)}{a - b},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P=\frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a)-\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)}{a-b}X+\frac{a\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a)}{a-b},}$$

Dès lors, comme $J_n=P(0)$, on a

$$\boxed{J_n=\frac{a\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a)}{a-b}.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [★] (Déterminant de Cauchy)

Soient $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ deux familles de scalaires telles que $\forall i,j\in[\![1;n]\!]\,,\ a_i+b_j\neq 0$. Calculer le déterminant D_n de la matrice de Cauchy $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(K)$ telle que $\forall i,j\in[\![1;n]\!]\,,\ a_{i,j}=(a_i+b_j)^{-1}$.

Si les a_i ne sont pas distincts deux à deux, le déterminant est nul.

Supposons-les distincts deux à deux. On peut écrire

$$R(X)=\frac{(b_1-X)\cdots(b_{n-1}-X)}{(X+a_1)\cdots(X+a_n)}=\frac{\lambda_1}{X+a_1}+\cdots+\frac{\lambda_n}{X+a_n},$$

avec

$$\forall k\in[\![1;n]\!]\,,\qquad \lambda_k=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_j+a_k)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_j-a_k)}\neq 0.$$

Si on note $(L_1,\ldots,L_n)$ les lignes de D_n, alors on peut écrire

$$D_n=\begin{vmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_{n-1}\\ L_n\end{vmatrix}=\frac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_{n-1}\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_iL_i\end{vmatrix}$$

donc

$$D_n=\frac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}&\cdots&\frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1}&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ R(b_1)&\cdots&R(b_n)\end{vmatrix}=\frac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}&\cdots&\frac{1}{a_1+b_{n-1}}&\frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1}&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}}&\frac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ 0&\cdots&0&R(b_n)\end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière ligne pour avoir

$$D_n=\frac{R(b_n)}{\lambda_n}D_{n-1}=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(b_n-b_i)(a_i-a_n)}{(b_n+b_i)(a_n+b_i)}D_{n-1},$$

et une récurrence simple, amorcée avec $D_1=1/(a_1+b_1)$, donne

$$\boxed{D_n=\frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_j+b_j)}.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\star$]

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$. On veut démontrer que A et B sont en fait semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^{-1}BQ$.

On note $R = \Re\mathrm{e}(P)$ la matrice des parties réelles des éléments de P et $J = \Im\mathrm{m}(P)$ la matrice des parties imaginaires des éléments de P.

1. Justifier que $RA = BR$ et $JA = BJ$. Est-il a priori possible de prendre $Q = R$ ou $Q = J$?
2. Démontrer que l'application $\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \det(R+\lambda J)$ est une fonction polynomiale non nulle. En déduire l'existence d'un nombre réel λ_0 tel que $R + \lambda_0 J \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Conclure.

1. On a $PA = BP$ c'est-à-dire $(R+iJ)A = B(R+iJ)$ ou encore $RA+iJA = BR+iBJ$. L'unicité de l'écriture algébrique des coefficients complexes des matrices nous permet d'en déduire que
$$\boxed{RA = BR \qquad \text{et} \qquad JA = BJ.}$$
Notre problème serait résolu si nous pouvions choisir $Q = R$ ou $Q = J$. Malheureusement, il est tout à fait possible que ni R ni J ne soient inversibles (alors même que P l'est !). Pour le voir, il suffit de donner le contre-exemple suivant : si P est la matrice 2×2 inversible définie par $P = \mathrm{Diag}(1, i)$, on a $R = \mathrm{Diag}(1, 0)$ et $J = \mathrm{Diag}(0, 1)$ qui sont toutes les deux non inversibles. Donc
$$\boxed{\text{il n'est pas a priori possible de prendre } Q = R \text{ ou } Q = J.}$$
2. L'application $f : \lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \det(R+\lambda J)$ est un polynôme comme somme de produits des coefficients de $R+\lambda J$ qui sont eux-mêmes des polynômes. Ce polynôme est non nul puisque $f(i) = \det(M) \neq 0$. Par conséquent,
$$\boxed{f \text{ est une une fonction polynomiale non nulle.}}$$
Comme f n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$ (sinon elle admettrait une infinité de racines et serait donc nulle), on obtient qu'
$$\boxed{\text{il existe un nombre réel } \lambda_0 \text{ tel que } R + \lambda_0 J \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}).}$$
Posons alors $Q = R + \lambda_0 J \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $RA = BR$ et $JA = BJ$, on a $(R + \lambda_0 J)A = B(R + \lambda_0 J)$, c'est-à-dire $QA = BQ$. Par conséquent, on a $A = Q^{-1}BQ$ ce qui justifie que A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$. En conclusion,
$$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont des matrices réelles semblables dans } \mathbb{C}, \text{ alors elles sont semblables dans } \mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$] (Déterminant circulant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice circulante
$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$
Pour $k = 0, \ldots, n-1$, on pose $\omega_k = \mathrm{e}^{(2ik\pi)/n}$ et l'on note
$$Z_n = \begin{pmatrix} {\omega_0}^0 & {\omega_1}^0 & {\omega_2}^0 & \cdots & {\omega_{n-1}}^0 \\ {\omega_0}^1 & {\omega_1}^1 & {\omega_2}^1 & \cdots & {\omega_{n-1}}^1 \\ {\omega_0}^2 & {\omega_1}^2 & {\omega_2}^2 & \cdots & {\omega_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\omega_0}^{n-1} & {\omega_1}^{n-1} & {\omega_2}^{n-1} & \cdots & {\omega_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que $\det Z_n \neq 0$.
2. Déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C_n Z_n = Z_n D$. En déduire $\det C_n$.
On exprimera les coefficients de D à l'aide du polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.

1. Le déterminant $\det Z_n$ est un déterminant de Vandermonde, donc

$$\det Z_n = \prod_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n-1} (\omega_k - \omega_\ell).$$

Comme les ω_i sont deux à deux distincts, on peut affirmer que

$$\boxed{\det Z_n \neq 0.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
C_n \cdot Z_n &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\omega_0}^0 & {\omega_1}^0 & {\omega_2}^0 & \cdots & {\omega_{n-1}}^0 \\ {\omega_0}^1 & {\omega_1}^1 & {\omega_2}^1 & \cdots & {\omega_{n-1}}^1 \\ {\omega_0}^2 & {\omega_1}^2 & {\omega_2}^2 & \cdots & {\omega_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\omega_0}^{n-1} & {\omega_1}^{n-1} & {\omega_2}^{n-1} & \cdots & {\omega_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(\omega_0){\omega_0}^0 & P(\omega_1){\omega_1}^0 & P(\omega_2){\omega_2}^0 & \cdots & P(\omega_{n-1}){\omega_{n-1}}^0 \\ P(\omega_0){\omega_0}^1 & P(\omega_1){\omega_1}^1 & P(\omega_2){\omega_2}^1 & \cdots & P(\omega_{n-1}){\omega_{n-1}}^1 \\ P(\omega_0){\omega_0}^2 & P(\omega_1){\omega_1}^2 & P(\omega_2){\omega_2}^2 & \cdots & P(\omega_{n-1}){\omega_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(\omega_0){\omega_0}^{n-1} & P(\omega_1){\omega_1}^{n-1} & P(\omega_2){\omega_2}^{n-1} & \cdots & P(\omega_{n-1}){\omega_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {\omega_0}^0 & {\omega_1}^0 & {\omega_2}^0 & \cdots & {\omega_{n-1}}^0 \\ {\omega_0}^1 & {\omega_1}^1 & {\omega_2}^1 & \cdots & {\omega_{n-1}}^1 \\ {\omega_0}^2 & {\omega_1}^2 & {\omega_2}^2 & \cdots & {\omega_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\omega_0}^{n-1} & {\omega_1}^{n-1} & {\omega_2}^{n-1} & \cdots & {\omega_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & P(\omega_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{C_n \cdot Z_n = Z_n \cdot \mathrm{Diag}\big(P(\omega_0), P(\omega_1), \ldots, P(\omega_{n-1})\big).}$$

En passant au déterminant dans la relation de la question précédente, on obtient

$$\det C_n \times \det Z_n = \det Z_n \times \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k).$$

Comme $\det Z_n \neq 0$, on en déduit que

$$\boxed{\det C_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k).}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\star$]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\det(M) = \det(A+iB)\det(A-iB)$ et en déduire que $\det M \geqslant 0$.
2. On suppose que A et B commutent. Démontrer que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
   Chercher A et B ne commutant pas telles que $\det(A^2+B^2) < 0$.

1. On manipule des blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & B \\ \mathbb{O} & A-iB \end{vmatrix},$$

donc

$$\boxed{\det(M) = \det(A+iB)\det(A-iB).}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A+iB)\det(A-iB) \\ &= \det(A+iB)\det(\overline{A+iB}) \\ &= \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} \\ &= |\det(A+iB)|^2, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\det(M) \geqslant 0.}$$

2. On a

$$\det(M) = \det\big((A+iB)(A-iB)\big) = \det(A^2+B^2)$$

où l'égalité $(A+iB)(A-iB) = A^2+B^2$ vient du fait que $AB = BA$. En combinant cette égalité avec le résultat de la question 1, on a

$$\boxed{\det(A^2+B^2) \geqslant 0.}$$

A finir.

♦ ***Exercice 12.*** [⋆]
Soient $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que ${}^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}({}^tA)$.
   Que dire si A est symétrique ?
2. a) On suppose que A et B sont inversibles. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB)$.
   b) [★] Démontrer le même résultat sans supposer que A et B sont inversibles. *Indication : On considèrera $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont inversibles.*
3. On suppose que A et B commutent. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent.
4. On suppose A inversible. Exprimer $\mathrm{Com}(A^{-1})$ en fonction de $\mathrm{Com}(A)$.
5. Démontrer que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ le sont aussi.

1. Le coefficient d'indice (i,j) de la comatrice de A est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ où $\Delta_{i,j}$ est le mineur d'indice (i,j) de la matrice A. Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée donc le mineur d'indice (i,j) est égal à celui d'indice (j,i). On en déduit que

$$\boxed{{}^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}({}^tA).}$$

Lorsque A est symétrique, on a

$${}^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}({}^tA) = \mathrm{Com}(A),$$

donc $\mathrm{Com}(A)$ est symétrique. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } A \text{ est symétrique alors } \mathrm{Com}(A) \text{ est symétrique.}}$$

2. a) Comme A et B sont inversibles, on a

$$\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \frac{1}{\det(A)}\,{}^tA^{-1}\,\frac{1}{\det(B)}\,{}^tB^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}\,{}^t(AB)^{-1} = \mathrm{Com}(AB),$$

où l'avant dernière égalité découle du fait que $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ et ${}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1} = {}^t(AB)^{-1}$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB).}$$

b) La fonction $\varphi : \lambda \longmapsto \det(A - \lambda I_n)\det(B - \lambda I_n)$ est une fonction polynomiale de degré $2n$. Elle ne s'annule donc qu'une nombre fini de fois sur $\mathbb{C}$. Cela justifie l'existence d'une suite $(\lambda_p)_{p\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, λ_p n'est pas une racine de φ. Alors $A - \lambda_p I_n$ et $B - \lambda_p I_n$ sont inversibles pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le résultat de la question a) nous dit que

$$\mathrm{Com}(A - \lambda_p I_n)\,\mathrm{Com}(B - \lambda_p I_n) = \mathrm{Com}\big((A - \lambda_p I_n)(B - \lambda_p I_n)\big) \qquad (*).$$

Maintenant, on sait que tous les coefficients d'une comatrice $\mathrm{Com}(M)$ sont des déterminants de coefficients de la matrice M, c'est-à-dire des expressions polynomiales en les coefficients de M. Cela justifie que les coefficients de $\mathrm{Com}(M - xI_n)$ dépendent continuement de x. Dès lors, on peut passer à la limite $(p \to +\infty)$ dans la relation $(*)$. Cela donne

$$\boxed{\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB).}$$

3. Si $AB = BA$, alors, d'après la question 2, on a

$$\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(BA) = \mathrm{Com}(B)\,\mathrm{Com}(A).$$

Donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ commutent, alors } \mathrm{Com}(A) \text{ et } \mathrm{Com}(B) \text{ commutent.}}$$

4. Toujours avec la question 2, on a

$$\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(A^{-1}) = \mathrm{Com}(AA^{-1}) = \mathrm{Com}(I_n) = I_n,$$

donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible, alors } \mathrm{Com}(A^{-1}) = \big(\mathrm{Com}(A)\big)^{-1}.}$$

5. Si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors, d'après les résultats des questions 2 et 4, on a

$$\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}(PBP^{-1}) = \mathrm{Com}(P)\,\mathrm{Com}(B)\,\mathrm{Com}(P)^{-1},$$

ce qui démontre que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ sont semblables. Donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, alors } \mathrm{Com}(A) \text{ et } \mathrm{Com}(B) \text{ le sont aussi.}}$$

♦ ***Exercice 13.*** [∘]

On souhaite résoudre le système non linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - xz = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

On considère (x, y, z) une solution de (S) et l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

Déterminer la transposée de la comatrice de M. En déduire que x, y et z satisfont un système linéaire de deux équations et résoudre (S).

On a

$${}^t\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - xz \\ y^2 - xz & z^2 - xy & x^2 - yz \end{pmatrix},$$

donc, en tenant compte du fait x, y et z satisfont (S), on obtient

$$\boxed{{}^t\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.}$$

On a donc

$$
{}^t\mathrm{Com}(M)\,M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3z-y & 5y+3x-z & 5z+3y-x \\ 5z+3y-x & 5x+3z-y & 5y+3x-z \\ 5y+3x-z & 5z+3y-x & 5x+3z-y \end{pmatrix}.
$$

Or ${}^t\mathrm{Co}(M)M = (\det M)I_3$, donc les coefficients en dehors de la diagonale de ${}^t\mathrm{Co}(M)M$ sont nuls, ce qui donne

$$
\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases}
$$

La méthode du pivot donne

$$
\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{y} + z = 0 \\ \boxed{-x} + 3y + 5z = 0 \end{cases}
$$

On choisit alors z comme paramètre, ce qui donne

$$
\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).
$$

En reportant les relations $x = 2\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$ dans le système (S), on obtient $\lambda^2 = 1$, ce qui donne $\lambda = \pm 1$. Pour ces deux valeurs de λ, on trouve $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ ou $(x, y, z) = (-2, 1, -1)$. On a ainsi démontré que si (x, y, z) est une solution de (S), alors (x, y, z) vaut ou bien $(2, -1, 1)$ ou bien $(-2, 1, -1)$. Pour conclure, il reste alors à vérifier que ce sont bien des solutions de (S), ce qui se fait sans difficulté. En définitive,

$$
\boxed{(S) \text{ admet exactement deux solutions qui sont } (2,-1,1) \text{ et } (-2,1,-1)}
$$

♦ ***Exercice 14.*** [⋆] (Inverse d'une matrice à coefficients entiers)

Soit A une matrice à coefficients entiers, c'est-à-dire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que

$$
\big(A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})\big) \iff (\det A = \pm 1).
$$

Si $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A \times \det A^{-1} = 1$, or chacun est dans $\mathbb{Z}$, donc $\det A = \pm 1$.

Inversement, si $\det A = \pm 1$, alors, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t(\mathrm{Com}\,A)$, or $\mathrm{Com}\,A$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, donc A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Donc

$$
\boxed{\big(A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})\big) \iff (\det A = \pm 1).}
$$

♦ ***Exercice 15.*** [★] (Rang de la comatrice)

Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Que vaut le rang de $\mathrm{Com}(A)$ lorsque A est de rang n. Préciser $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$ dans ce cas.
2. Préciser $\mathrm{Com}(A)$ et son rang lorsque le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$.
3. On suppose que A est de rang $n-1$. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1. *Indication : On utilisera les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et ${}^t\mathrm{Com}(A)$.*

1. Si A est de rang n, alors A est inversible. La formule $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\, I_n$ nous dit que $\mathrm{Com}(A)$ est également inversible. Donc $\mathrm{Com}(A)$ est de rang n. Ainsi,

$$
\boxed{\text{si } A \text{ est de rang } n, \text{ alors } \mathrm{Com}(A) \text{ est aussi de rang } n.}
$$

Comme $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\, I_n$, on a

$$
\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A))^{n-1}.
$$

On a $\text{Com}(A)\,{}^t\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(\text{Com}(A))\, I_n$, donc

$$\begin{aligned}\text{Com}(\text{Com}(A)) &= \det(\text{Com}(A))\,{}^t\text{Com}(A)^{-1}\\ &= (\det(A))^{n-1}\,{}^t\text{Com}(A)^{-1}.\end{aligned}$$

Or

$$\text{Com}(A) = \det(A)\,{}^tA^{-1},$$

donc

$$\text{Com}(\text{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}\,\det(A)\,A$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Com}(\text{Com}(A)) = (\det(A))^{n-2}\,A.}$$

2. Si $\text{rg}(A) \leqslant n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\text{Com}(A) = 0_n$. Donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ est de rang inférieur ou égal à } n-2, \text{ alors } \text{Com}(A) = 0_n \text{ et donc } \text{Com}(A) \text{ est de rang } 0.}$$

3. Supposons que A est de rang $n-1$.
De l'égalité $A\,{}^t\text{Com}\,A = 0$, on déduit que $\text{Im}\,{}^t\text{Com}\,A \subset \text{Ker}\,A$ qui est de dimension 1, donc le rang de $\text{Com}(A)$ est égal à 0 ou 1.
Comme A est de rang $n-1$, on peut trouver un déterminant d'ordre $n-1$ non nul. Par conséquent, au moins un cofacteur de A est non nul. Cela démontre que $\text{Com}(A)$ n'est pas de rang 0 et donc que $\text{Com}(A)$ est de rang 1.
En conclusion,

$$\boxed{\text{si } A \text{ est de rang } n-1, \text{ alors } \text{Com}(A) \text{ est de rang } 1.}$$

♦ ***Exercice 16.*** [★]
Soit $\mathrm{d} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non constante telle que $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B)$ pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\big(\mathrm{d}(A) = 0\big) \Longleftrightarrow \big(\det A = 0\big)$.

Commençons par deux remarques sur d :

- ► Comme ${\mathbb{O}_n}^2 = \mathbb{O}_n$, on a $\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = \mathrm{d}({\mathbb{O}_n}^2) = \mathrm{d}(\mathbb{O}_n)^2$, ce qui implique que $\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = 0$ ou $\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = 1$. Si l'on suppose que $\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = 1$, alors $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = \mathrm{d}(A\mathbb{O}_n) = \mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = 1$, donc d est la fonction constante égale à 1, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc

$$\mathrm{d}(\mathbb{O}_n) = 0.$$

- ► Comme ${I_n}^2 = I_n$, on a $\mathrm{d}(I_n) = \mathrm{d}({I_n}^2) = \mathrm{d}(I_n)^2$, ce qui implique que $\mathrm{d}(I_n) = 0$ ou $\mathrm{d}(I_n) = 1$. Si l'on suppose que $\mathrm{d}(I_n) = 0$, alors $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(AI_n) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(I_n) = 0$, donc d est la fonction constante égale à 0, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc

$$\mathrm{d}(I_n) = 1.$$

On peut alors démontrer l'équivalence par double implication :

$\Longrightarrow$ Si $\det A \neq 0$, alors A est inversible, donc $1 = \mathrm{d}(I_n) = \mathrm{d}(AA^{-1}) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(A^{-1})$, ce qui prouve que $\mathrm{d}(A) \neq 0$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si $\det A = 0$, alors A est de rang $r \in [\![0; n-1]\!]$. On sait alors que A est équivalente à la matrice

$$M_r = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{r,n-r} & I_r \\ \mathbb{O}_{n-r,n-r} & \mathbb{O}_{n-r,r} \end{pmatrix},$$

ce qui justifie l'existence de deux matrices inversibles P, Q telles que $A = PM_rQ$. Or ${M_r}^r = \mathbb{O}_n$, donc $\mathrm{d}({M_r}^r) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{d}(M_r)^r = 0$ ou encore $\mathrm{d}(M_r) = 0$. Par suite, on a

$$\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(PM_rQ) = \mathrm{d}(P)\mathrm{d}(M_r)\mathrm{d}(Q) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{d}(A) = 0 \text{ si, et seulement si, } \det A = 0.}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\star$]

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont impairs et que les autres coefficients sont pairs. Démontrer que A est inversible.

En travaillant modulo 2, on a $\det A \equiv \det I_n \equiv 1 \pmod 2$, donc $\det A$ est impair ce qui prouve en particulier que ce déterminant est non nul et donc que

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\star$]

Soient $A, B \in K[X]$ tels que $A = a_0 + \cdots + a_n X^n$ et $B = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$ où $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. À ces deux polynômes, on associe son *résultant* $R(A, B)$ défini par

$$\operatorname{Res}(A,B) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & & a_0 & \vdots & & b_2 \\ & & a_1 & b_m & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_n & & & b_m \end{vmatrix}_{(m+n)}$$

où les blancs désignent des 0.

1. Soit l'application $\varphi : K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X] \longrightarrow K[X]$ définie par $\varphi\big((P,Q)\big) = AP + BQ$ pour tout $(P,Q) \in K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X]$.

   Démontrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, φ est injective.
2. En déduire que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $\operatorname{Res}(A,B) \neq 0$.
3. Application : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in K$ pour que X^3+pX+q ait une racine multiple.

1. L'application φ est une application linéaire de l'espace vectoriel produit $K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X]$ vers l'espace $K[X]$.

   $\Rightarrow$ Supposons que $A \wedge B = 1$. Si $(P,Q) \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors $AP + BQ = 0$, c'est-à-dire $AP = -BQ$. Comme $A \wedge B = 1$, cela entraîne, en vertu du lemme de Gauss, que A divise Q et B divise P. Comme $\deg(Q) < \deg(A)$ et $\deg(P) < \deg(B)$, on en déduit que $(P,Q) = (0,0)$. Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{(0,0)\}$, ce qui signifie que φ est injective.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que φ est injective. Notons $D = A \wedge B$. Il existe alors A_0 et B_0 premiers entre eux tels que $A = A_0 D$ et $B = B_0 D$. Si $\deg(D) \geqslant 1$, alors $(-B_0, A_0) \in K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X]$ et l'on a $\varphi\big((-B_0, A_0)\big) = -AB_0 + BA_0 = -A_0 D B_0 + B_0 D A_0 = 0$, ce qui démontre que $(-B_0, A_0) = (0,0)$ par injectivité de φ. C'est absurde ! Donc $\deg D = 0$, ce qui démontre que A et B sont premiers entre eux.

   Enconclusion,

   $$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux si, et seulement si, } \varphi \text{ est injective.}}$$

2. La matrice M de φ dans la base $(1,0), (X,0), \ldots, (X^{m-1}, 0), (0,1), \ldots, (0, X^n)$ de $K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & & a_0 & \vdots & & b_2 \\ & & a_1 & b_m & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_n & & & b_m \end{pmatrix}_{(m+n)}$$

Donc

$$\begin{aligned}(A \wedge B = 1) &\iff (\varphi \text{ injective})\\ &\iff (\det M \neq 0)\\ &\iff (\mathrm{Res}(A,B) \neq 0),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux si, et seulement si, } \mathrm{Res}(A,B) \neq 0.}$$

3. Posons

$$A = X^3 + pX + q.$$

On a

$$\begin{aligned}(A \text{ a une racine multiple}) &\iff \big(\mathrm{Res}(A,A') = 0\big)\\ &\iff \begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0\\ p & q & 0 & p & 0\\ 0 & p & 3 & 0 & p\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = 0\\ &\iff 27q^2 + 4p^3 = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{X^3 + pX + q \text{ admet une racine multiple si, et seulement si, } 27q^2 + 4p^3 = 0.}$$

♦ ***Exercice 19.*** [$\star$]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$. On considère u un endomorphisme de E et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Démontrer que

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), x_2, ..., x_n\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, u(x_2), ..., x_n\big) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, x_2, ..., u(x_n)\big) = \mathrm{Tr}(f) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n).$$

L'application

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccl} E^n & \longrightarrow & K\\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), x_2, \ldots, x_n\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, u(x_2), \ldots, x_n\big) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, x_2, \ldots, u(x_n)\big)\end{array}\right.$$

est une forme n-linéaire alternée (à vérifier). Elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$. Si $(a_{i,k})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne les coordonnées de $u(e_k)$ où $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathscr{B}) &= \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), e_2, \ldots, e_n\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(e_1, u(e_2), \ldots, e_n\big) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}\big(e_1, e_2, \ldots, u(e_n)\big)\\ &= a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}\\ &= \mathrm{Tr}(u),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), x_2, ..., x_n\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, u(x_2), ..., x_n\big) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, x_2, ..., u(x_n)\big) = \mathrm{Tr}(f) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n).}$$

♦ ***Exercice 20.*** [$\circ$]

Déterminer le déterminant de

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ M & \longmapsto & {}^tM\end{array}\right.$$

C'est la symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{C})$ dans la direction de $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$, donc

$$\boxed{\det T = (-1)^{n(n-1)/2}.}$$