Devoir Surveillé n° 2 (4h)

Correction du problème – sup-irréductibles, familles sup-génératrices, et théorème de représentation de Birkhoff

Questions préliminaires

Soit E un ensemble ordonné et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E admettant tous une borne supérieure.

1. • Soit M un majorant de $\bigcup_{i\in I} A_i$. Alors, en particulier, pour tout $i \in I$, M majore A_i, puisque A_i est inclus dans cette union. On en déduit, par définition de la borne supérieure, que pour tout $i \in I$, $M \geqslant \sup(A_i)$. Ainsi, M est un majorant de $\{\sup(A_i), i \in I\}$.
   • Réciproquement, soit M un majorant de $\{\sup(A_i), i \in I\}$. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, et $i \in I$ tel que $x \in A_i$. On a alors :
   $$x \leqslant \sup(A_i) \leqslant M.$$
   Ainsi, M est bien un majorant de $\bigcup_{i\in I} A_i$.

   Les ensembles $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \text{ et } \{\sup(A_i), i \in I\} \text{ ont donc mêmes majorants}}$.

2. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de ces deux ensembles. Par définition, $\bigcup_{i\in I} A_i$ admet une borne supérieure si et seulement si $\mathcal{M}$ admet un minimum, si et seulement si $\{\sup(A_i), i \in I\}$ admet une borne supérieure. De plus, on a alors :
   $$\boxed{\sup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \min \mathcal{M} = \sup\{\sup(A_i), i \in I\}}.$$

3. C'est un cas particulier de ce qui précède, avec $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{x\}$ et $A_2 = \{x, y\}$. On obtient alors
   $$\sup(x, y, z) = \sup(A_1 \cup A_2) = \sup(\sup(A_1), \sup(A_2)).$$
   Comme $\sup(A_1) = x$ et $\sup(A_2) = \sup(x, y)$, on obtient bien :
   $$\boxed{\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z))}.$$
   En posant de la même façon $A = \{x, y\}$ et $B = \{z\}$, on obtient la deuxième égalité :
   $$\boxed{\sup(x, y, z) = \sup(\sup(x, y), z)}.$$

Partie I – Éléments sup-irréductibles

1. Soit a et b deux éléments distincts de E^-x. On a alors $a < x$ et $b < x$. Si a et b sont comparables, disons par exemple $a \leqslant b$, alors $a < b$ (car $a \neq b$) donc $a < b < x$. Cela contredit le fait que x couvre a. Donc a et b sont incomparables. Ainsi, $\boxed{E^-x \text{ est une cochaîne de } E}$.
2. Soit $x \in E$ un élément sup-irréductible tel que $E^-x \neq \varnothing$, et que E^-x admette une borne supérieure s.
   (a) Par définition de E^-x, x est un majorant de E^-x, donc $x \geqslant \sup(E^-x) = s$. De plus, E^-x ne contient pas x, donc, puisque x est sup-irréductible, $x \neq \sup(E^-x)$. Ainsi $\boxed{x > s}$.

(b) Supposons $|E^{-}x| \geqslant 2$. Soit y et z deux éléments distincts de $E^{-}x$. On a donc $y \leqslant s$ et $z \leqslant s$. Puisque $y \neq z$, l'une au moins de ces deux inégalités est stricte, disons la première. Alors $y < s < x$, ce qui contredit le fait que y est couvert par x.

Ainsi, $\boxed{|E^{-}x| = 1}$.

3. Soit y l'unique élément de $E^{-}x$ et z tel que $z < x$. Soit $F \subset E$ défini par $F = \{t \in E \mid z \leqslant t < x\}$. L'ensemble F est non vide (il contient z) et fini. Il admet donc un élément maximal u. On a donc $z \leqslant u < x$, et la maximalité de u nous assure que x couvre u. Ainsi, $u = y$. Donc $\boxed{z \leqslant y}$.

4. (a) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de $E^{-}x$. On a bien $x \in \mathcal{M}$. Si x n'est pas minimal dans $\mathcal{M}$, il existe $y \in \mathcal{M}$ tel que $y < x$. Soit z_1 et z_2 deux éléments distincts de $E^{-}x$ (existe par l'hypothèse faite sur le cardinal). On a alors $z_1 \leqslant y < x$, et $z_2 \leqslant y < x$. Comme x couvre z_1 et z_2, on en déduit que nécessairement $y = z_1$ et $y = z_2$, puis $z_1 = z_2$, d'où une contradiction. Ainsi, $\boxed{x \text{ est minimal dans } \mathcal{M}}$.

(b) Si x était comparable à tout autre élément de $\mathcal{M}$ on aurait, pour tout $y \in \mathcal{M}$, $y \geqslant x$ (car x est minimal, l'inégalité ne peut pas être dans l'autre sens). Ainsi, x serait le minimum de $\mathcal{M}$, ce qui contredirait la non existence de la borne supérieure de $E^{-}x$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un majorant } y \text{ de } E^{-}x \text{ non comparable à } x.}$

5.
- Si x est un élément minimal, alors il ne couvre aucun élément, donc $E^{-}x = \varnothing$. C'est même une équivalence. L'examen du cardinal de $E^{-}x$ nous assure donc que les trois conditions sont exclusives.
- Supposons que $x \in E$ est sup-irréductible, et qu'on n'est pas dans le cas (i) ni dans le cas (ii). Ainsi $|E^{-}x| \geqslant 2$ ou x est le minimum de E. Ce dernier cas n'est pas possible, car sinon, $x = \sup \varnothing$ et x n'est donc pas sup-irréductible. On a donc $|E^{-}x| \geqslant 2$. La contraposée question 1 montre que dans ce cas $E^{-}x$ n'admet pas de borne supérieure, d'où (iii).
- Réciproquement, montrons que si x vérifie l'un des 3 cas, il est sup-irréductible :
  - (i) Si x est minimal non minimum, et X une partie de E telle que $x = \sup X$. Alors $X \neq \varnothing$ (car x n'est pas le minimum). Soit $y \in X$. On a alors $y \leqslant \sup(X) = x$. Mais comme x est minimal, cette inégalité ne peut pas être stricte, donc $x = y$, puis $x \in X$. Ainsi x ne peut pas être borne supérieure d'une partie ne le contenant pas, donc $\boxed{x \text{ est sup-irréductible}}$.
  - (ii) Si $|E - x| = 1$, soit y l'unique élément couvert par x. Soit X une partie telle que $\sup(X) = x$. Supposons que $x \notin X$. Alors, pour tout $z \in X$, $z < x$, et puisque y est l'unique élément couvert par x, $z \leqslant y$ (question précédente). On en déduit que y majore X. Or $y < x$. Cela contredit la minimalité de la borne supérieure x de X. Ainsi, $x \in X$. On en déduit que x est sup-irréductible.
  - (iii) Enfin, supposons que $|E^{-}x| \geqslant 2$ et que $E^{-}x$ n'a pas de borne supérieure. Supposons qu'il existe un sous-ensemble X de E tel que $\sup X = x$ et $x \notin X$. Pour tout $z \in X$, on a donc $z < x$. Un argument similaire à la question 3 (on est passé par là en 3 en fait) montre que tout z de X est majoré par un élément de $E^{-}x$. Ainsi, les majorants de $\mathcal{M}$ sont aussi des majorants de X. D'après la question 4(b), il existe dans $\mathcal{M}$ un élément y non comparable à x, donc x ne peut pas être le plus petit des majorants. Cela contredit l'égalité $x = \sup X$. Une fois de plus, on arrive à la conclusion que $\boxed{x \text{ est sup-irréductible}}$.

6. (a) Soit $x \in E$. On suppose que x n'est pas sup-irréductible. Il existe alors X ne contenant pas x tel que $sup(X_1) = x$. Soit $y \in X$, et $k = h(y)$. Il existe alors une chaîne $x_1 < \cdots < x_k = y$. Comme $y \leqslant x$ et $y < x$, on peut prolonger cette chaîne en une chaîne de longueur $k + 1$ terminant en x. Ainsi, $h(x) \geqslant k + 1$, donc $\boxed{h(x) > h(y)}$.

(b) On montre par récurrence sur $h(x)$ que tout élément $x \in E$ est borne supérieure d'un sous-ensemble de $S(E)$.
- Soit x tel que $h(x) = 1$. Alors x est un élément minimal. Si c'est le minimum, il s'écrit $x = \sup(\varnothing)$, où $\varnothing$ est bien un sous-ensemble de $S(E)$. Sinon, $x \in S(E)$ d'après la question 5, et on peut écrire $x = \sup\{x\}$.
- Soit $k \geqslant 2$ tel que tout élément de hauteur strictement inférieure à k s'écrive comme borne supérieure d'éléments de $S(E)$. Soit x de hauteur k.
  - ∗ Si x est sup-irréductible, alors on peut écrire $x = \sup\{x\}$.

* Sinon, il existe $X \subset E$ tel que $x = \sup(X)$ et tel que pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x) = k$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à tous les éléments de X. Pour tout $y \in X$, on peut donc trouver un sous-ensemble X_y de $S(E)$ tel que $y = \sup X_y$. D'après la question préliminaire 2, il vient alors :

$$x = \sup X = \sup_{y \in X} \sup(X_y) = \sup \bigcup_{y \in X} X_y.$$

Or, $\bigcup_{y \in X} X_y$ est un sous-ensemble de $S(E)$, ce qui prouve que x est borne supérieure d'un sous-ensemble de $S(E)$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, tout élément x de E est borne supérieure d'un ensemble d'éléments sup-irréductibles.

On en déduit que $\boxed{S(E) \text{ est une partie sup-génératrice de } E}$.

7. Notons $a = \sup(S_x(E))$.
   - Par définition, x majore $S_x(E)$, donc $x \geqslant a$.
   - D'après la question précédente, il existe un sous-ensemble X de $S(E)$ tel que $\sup(X) = x$. Par ailleurs, x majore X, donc X est en fait un sous-ensemble de $S_x(E)$. On en déduit que $\sup(X) \leqslant \sup(S_x(E))$, soit $x \leqslant a$.
   - Les deux inégalités amènent l'égalité $\boxed{\sup(S_x(E)) = x}$.
8. Soit G une partie sup-génératrice de E. Soit $s \in S(E)$. Comme G est génératrice, il existe $X \subset G$ tel que $s = \sup(X)$. Comme s est sup-irréductible, $s \in X$, donc $s \in G$. On en déduit que $\boxed{S(E) \subset G}$.
9. On a démontré dans la question précédente que si G est sup-génératrice, alors $S(E) \subset G$. Réciproquement, si $S(E) \subset G$, comme $S(E)$ est sup-génératrice, tout x de E peut s'écrire omme borne supérieure de sous-ensembles de $S(E)$, donc aussi de G. Ainsi G est sup-génératrice.

   Ainsi $\boxed{G \text{ est une partie sup-génératrice de } E \text{ si et seulement si } S(E) \subset G}$.

Partie II – Applications croissantes et codages

1. Soit f une application strictement croissante. Soit x et y tels que $x \leqslant y$. Alors :
   - soit $x = y$ et dans ce cas $f(x) = f(y)$, donc $f(x) \leqslant f(y)$;
   - soit $x < y$, et dans ce cas $f(x) < f(y)$, donc $f(x) \leqslant f(y)$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est croissante}}$.
2. Soit f une application croissante et injective. Soit $x < y$. On a alors $f(x) \leqslant f(y)$ par croissance. De plus, f étant injective, et $x \neq y$, il vient $f(x) \neq f(y)$, et donc $f(x) < f(y)$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante.}}$
3. Comme on l'a vu dans le cours, une application croissante n'est $\boxed{\text{pas nécessairement injective}}$. C'est le cas par exemple de la fonction Card de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
4. Soit f un codage. Soit x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(x)$. La définition d'un codage s'écrivant sous forme d'une équivalence, on en déduit $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, donc $x = y$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est injective}}$.
5. En oubliant la réciproque de l'équivalence définissant un codage, on voit que tout codage est croissant. Or on vient de montrer qu'un codage est injectif. D'après la question 2, il en découle qu'$\boxed{\text{un codage est strictement croissant}}$.
6.
   - Soit f et g deux codages de $E \to F$ et $F \to G$ respectivement. Alors pour tout x et y de E,

     $$x \leqslant y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y) \Longleftrightarrow g(f(x)) \leqslant g(f(y)),$$

     du fait que f et g sont des codages. Il en résulte que $\boxed{g \circ f \text{ est un codage}}$.
   - Soit f et g deux isomorphismes $E \to F$ et $F \to G$ respectivement. Alors f et g sont des codages, donc $g \circ f$ est un codage. De plus f et g sont bijectives, sont $g \circ f$ est bijective aussi. Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est un isomorphisme}}$.
7.
   - Soit x et y dans E tels que $x \leqslant y$. Soit $s \in S_x(E)$. On a donc $s \in S(E)$ et $s \leqslant x$, donc aussi $s \leqslant y$. Ainsi, $s \in S_y(E)$. Par conséquent, $S_x(E) \subset S_y(E)$.

- Soit x et y dans E tels que $S_x(E) \subset S_y(E)$. Alors

$$\sup(S_x(E)) \leqslant \sup(S_y(E)) \qquad \text{soit:} \qquad x = y,$$

d'après la question I-4.

- On en déduit que $\boxed{x \mapsto S_x(E) \text{ est un codage de } E \text{ dans } \mathcal{P}(E)}$.

8. On raisonne de la même façon :
   - Soit x et y dans E tels que $x \leqslant y$. Soit $g \in G_x$. On a donc $g \in G$ et $g \leqslant x$, donc aussi $g \leqslant y$. Ainsi, $s \in G_y$. Par conséquent, $G_x \subset G_y$.
   - Soit x et y dans E tels que $G_x \subset G_y$. Il existe $X \subset G$ tel que $\sup X = x$. Comme x majore X, on a alors $X \subset G_x$. Ainsi, l'ensemble des majorants de G_x est inclus dans celui de X, et ces deux ensembles contiennent x qui est le plus petit des majorants de X. C'est donc aussi le plus petit des majorants de G_x. Par conséquent, $\sup(G_x) = x$. On termine alors comme avant : l'inclusion $G_x \subset G_y$ implique $\sup(G_x) \leqslant \sup(G_y)$, c'est-à-dire $x = y$.
   - On en déduit que $\boxed{x \mapsto G_x \text{ est un codage de } E \text{ dans } \mathcal{P}(E)}$.

Partie III – Treillis distributif

1. Soit T un treillis. Alors $\varnothing$ admet une borne supérieure $\sup(\varnothing)$. Or l'ensemble des majorants de $\varnothing$ est T entier. Ainsi, $\boxed{T \text{ admet un minimum}}$.
   De la même manière, l'ensemble des majorants de $\varnothing$ est T entier, donc l'existence de la borne inférieure de $\varnothing$ amène l'$\boxed{\text{existence du maximum de } T}$.
2. - Si T est un treillis, alors par définition, toutes les paires $\{x, y\}$ admettent une borne supérieure et une borne inférieure.
   - On suppose que toute paire $\{x, y\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que tout sous-ensemble X de T de cardinal n admet une borne supérieure et une borne inférieure.
     * L'initialisation pour $n = 1$ se fait avec les paires $\{x, x\}$; le cas $n = 2$ est directement l'hypothèse faite avec $x \neq y$.
     * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vérifiée pour tout sous-ensemble de cardinal n. Soit X un sous-ensemble de T de cardinal $n+1$, et soit $x \in X$. Soit $X' = X \backslash \{x\}$. L'ensemble X' est alors de cardinal n, et admet donc une borne supérieure et une borne inférieure, d'après l'hypothèse de récurrence. La paire $\{\sup(X'), \sup\{x\}\} = \{\sup(X'), x\}$ admet alors une borne supérieure et une borne inférieure (définition d'un treillis). Les questions préliminaires amènent alors l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure de $X' \cup \{x\} = X$.
     * Par principe de récurrence, on en déduit que tout sous-ensemble de T de cardinal fini supérieur ou égal à 1 admet une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque T est fini, cela représente tous les sous-ensembles de T, sauf $\varnothing$. Or, sauf dans le cas où T lui-même est vide (cas exclus par définition d'un treillis), la récurrence précédente amène l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure de T, c'est-à-dire du maximum et du minimum. Ceci équivaut à l'existence d'une borne inférieure et d'une borne supérieure de $\varnothing$.
3. Soit T un treillis, $X \subset T$ et $s \in S(T)$. On note $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. On suppose que $s \leqslant \sup(X)$. On a alors

$$s = s \wedge \sup(X) = s \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (s \wedge x_n) \vee \cdots \vee (x \wedge x_n) = \sup\{s \wedge x \mid x \in X\}.$$

   Comme s est sup-irréductible, cette égalité implique que $s \in \{s \wedge x \mid x \in X\}$, donc il existe $x \in X$ tel que $s = s \wedge x$, d'où $\boxed{s \leqslant x}$.
4. Soit $(x, y) \in T^2$.
   - Soit $s \in S_{x \vee y}(T)$. On a alors $s \leqslant x \vee y$. D'après la question précédente, puisque s est sup-irréductible, $s \leqslant x$ ou $s \leqslant y$, donc $s \in S_x(T)$ ou $s \in S_y(T)$. Ainsi, $S_{x \vee y}(T) \subset S_x(T) \cup S_y(T)$.
   - Réciproquement, soit $s \in S_x(T) \cup S_y(T)$. Alors, quitte à échanger x et y, on peut supposer que $s \in S_x(T)$. On a donc $s \in S$, et $s \leqslant x \leqslant x \vee y$. Donc $s \in S_{x \vee y}(T)$. Par conséquent, $S_x \cup S_y \subset S_{x \vee y}$.

- Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{S_{x\vee y} = S_x \cup S_y}$.

5. Un exemple de treillis distributif de cardinal 2^n est $\boxed{\mathcal{P}(E)}$, pour un ensemble E de cardinal n. Les bornes supérieures et inférieures sont données par l'union et l'intersection. Cela assure leur existence, ainsi que la propriété de distributivité.

Partie IV – Le treillis des sections commençantes

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné (pas nécessairement un treillis). Une partie $C \subset E$ est dite commençante si pour tout $y \in C$ et tout $t \in E$ tel que $t \leqslant y$, on a $t \in C$. Soit pour tout $x \in E$, $E_x = \{y \in E \mid y \leqslant x\}$ l'ensemble des minorants de x.

1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties commençantes.
   - Soit $y \in \bigcup_{i\in I} C_i$ et $t \leqslant y$. Il existe $i \in I$ tel que $y \in C_i$. Comme C_i est une partie commençante et $t \leqslant y$, on en déduit que $t \in C_i$, puis $t \in \bigcup_{i\in I} C_i$. Ainsi, $\boxed{\bigcup_{i\in I} C_i \text{ est une partie commençante}}$.
   - Soit $y \in \bigcap_{i\in I} C_i$ et $t \leqslant y$. Cette fois, pour tout $i \in I$, $y \in C_i$, puis $t \in C_i$ comme plus haut. Comme c'est vrai pour tout $i \in I$, $t \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Ainsi, $\boxed{\bigcap_{i\in I} C_i \text{ est une partie commençante}}$.
2. Soit $x \in E$, et $y \in E_x$, et $t \leqslant x$. On a alors $t \leqslant y \leqslant x$, donc $t \leqslant x$. Il en résulte que $t \in E_x$, et que $\boxed{E_x \text{ est une partie commençante}}$.
3. Soit C une partie commençante.
   - Soit $x_0 \in C$. Comme $x_0 \in E_{x_0}$, on a bien $x_0 \in \bigcup_{x\in C} E_x$. Ainsi $C \subset \bigcup_{x\in C} E_x$.
   - Soit $z \in \bigcup_{x\in C} E_x$. Il existe $x \in C$ tel que $z \in E_x$, donc $z \leqslant x$. Par définition d'une section commençante, on en déduit que $z \in C$. Ainsi $\bigcup_{x\in C} E_x \subset C$.
   - Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{C = \bigcup_{x\in C} E_x}$.
4. Soit $\mathcal{C}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des sections commençantes de E, qu'on munit de l'inclusion.
   - Soit C_1 et C_2 deux sections commençantes. Soit M_1 l'ensemble des majorants de $\{C_1, C_2\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ et M_2 l'ensemble des majorants dans $\mathcal{C}(E)$. On a $M_2 \subset M_1$ puisque $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{P}(E)$. De plus, M_1 admet un plus petit élément $C_1 \cup C_2$ (borne supérieure dans $\mathcal{P}(E)$), et $C_1 \cup C_2$ est aussi dans M_2 d'après la question 1. Ainsi, c'est aussi le plus petit élément de M_2. Il en résulte que $\{C_1, C_2\}$ admet bien une borne supérieure dans $\mathcal{C}(E)$, égale à $C_1 \cup C_2$.
   - Le même raisonnement montre que $\{C_1, C_2\}$ admet une borne inférieur $C_1 \cap C_2$ dans $\mathcal{C}(E)$.
   - D'après la question III-2, $\mathcal{C}(E)$ est donc un treillis.
   - De plus, la distributivité de l'intersection sur l'union assure que $\boxed{\mathcal{C}(E) \text{ est un treillis distributif}}$.
5. - D'après la question 3, la famille des $(E_x)_{x\in E}$ est sup-génératrice de $\mathcal{C}(E)$. Elle constient donc $S(\mathcal{C}(E))$. Ainsi, toute partie C sup-irréductible de $\mathcal{C}(E)$ est de la forme E_x pour un certain $x \in E$
   - Réciproquement, montrons que pour tout $x \in E$, E_x est sup-irréductible. Soit $(C_i)\_i \in I$ une famille telle que
   $$E_x = \sup_{i\in I}(C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i.$$
   Comme $x \in E_x$, il existe $i \in I$ tel que $x \in C_i$. Soit maintenant $y \in E_x$; on a donc $y \leqslant x$, et par définition d'une section commençante, $y \in C_i$. Il en résulte que $E_x \subset C_i$, l'inclusion réciproque étant assurée par la description de E_i sous forme d'une union. Ainsi, $E_x = C_i$. On en déduit que toute partie (ou famille) de $\mathcal{C}(E)$ dont la borne supérieure est égale à E_x contient E_x. Autrement dit, E_x est sup-irréductible dans $\mathcal{C}(E)$.

   Ainsi $\boxed{C \in \mathcal{C}(E) \text{ est un sup-irréductible de } \mathcal{C}(E) \text{ si et seulement s'il existe } x \in E \text{ tel que } C = E_x}$.
6. On définit $\varphi : x \mapsto E_x$ de E dans $S(\mathcal{C}(E))$. On montre que φ est un isomorphisme :
   - le fait que f soit un codage se fait de la même façon que pour $x \mapsto S_x$ en partie I (en remarquant que $\sup(E_x) = x$; c'est même ici un maximum).

- L'injectivité découle de la question II-4
- La surjectivité découle de la question précédente.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } S(\mathcal{C}(E))}$.

Partie V – Comparaison des sup- et des inf-irréductibles du treillis des sections commençantes

1. Soit $x \in E$, $y \in i(x)$ et $z \leqslant y$. Si $z \in E^x$, on a $z \geqslant x$, et par transitivité, on obtient $y \geqslant x$, ce qui contredit $y \notin E_x$. Ainsi, $z \notin E^x$, c'est-à-dire $z \in i(x)$.
   On en déduit que $\boxed{i(x) \text{ est une section commençante}}$.
2. Soit $i(x) = \bigcap_{i \in I} C_i$, où les C_i sont des sections commençantes. Comme $x \notin i(x)$, il existe $i \in I$ tel que $x \notin C_i$. Soit un tel i, et montrons qu'on a alors $C_i = i(x)$.
   - Soit $y \in E^x$. Alors $x \leqslant y$. Ainsi, si $y \in C_i$, on aurait $x \in C_i$ (car section commençante). Ceci étant faux, on en déduit que $y \notin C_i$.
   - Soit $y \notin E^x$. Alors $y \in i(x) \subset C_i$ (C_i étant un des termes de l'intersection initiale).
   - Ainsi, $C_i = i(x)$.

   Par définition, il en résulte que $\boxed{i(x) \text{ est un inf-irréductible de } \mathcal{C}(E).}$
3. Soit C une partie commençante de X.
   (a)
   - Soit $x \notin C$. L'argument de la question précédente montre que $C \subset i(x)$. Ainsi, $C \subset \bigcap\limits_{x \notin C} i(x)$.
   - Soit $y \notin C$, alors $y \notin i(y)$. Comme $i(y)$ est l'un des termes de l'intersection, il en résulte que $y \notin \bigcap\limits_{x \notin C} i(x)$.
     Ainsi, par contraposée, $\bigcap\limits_{x \notin C} i(x) \subset C$
   - La double inclusion amène l'égalité $\boxed{C = \bigcap\limits_{x \notin C} i(x)}$.

   (b) En particulier, un inf-irréductible C peut s'écrire comme intersection de $i(x)$. La propriété d'inf-irréductibilité assure qu'il est alors égal à l'un de ces termes, donc à un $i(x)$.
   Ainsi, $\boxed{\text{les inf-irréductibles de } \mathcal{C}(E) \text{ sont exactement les } i(x),\ x \in E}$.
4. On commence par montrer que i est un isomorphisme de E sur $I(\mathcal{C}(E))$:
   - Si $x \leqslant y$, alors $E^y \subset E^x$, puis $E\mathrm{E}^x \subset E\mathrm{E}^y$, soit $i(x) \subset i(y)$.
   - Réciproquement, si $i(x) \subset i(y)$, alors $E^y \subset E^x$. En particulier, $y \in E^y \subset E^x$, donc $y \in E^x$, d'où $x \leqslant y$
   - Ainsi, i est un codage. La bijectivité provient des questions II-4 et V-3(b).

   On dispose aussi d'un isomorphisme $f : E \to S(\mathcal{C}(E))$. De façon immédiate, la réciproque d'un ismorphisme est encore un isomorphisme, donc d'après la question II-6, la composée $i \circ f^{-1}$ est un isomophisme de $S(\mathcal{C}(E))$ sur $I(\mathcal{C}(E))$.
   Ainsi, $\boxed{S(\mathcal{C}(E)) \text{ et } I(\mathcal{C}(E)) \text{ sont des ensembles ordonnés isomorphes.}}$

Partie VI – Théorème de représentation de Birkhoff

1. Soit $y \in S_x(T)$. Soit $z \in S$ tel que $z \leqslant y$ (la restriction à $z \in S(T)$ provient du fait qu'on voit $S_x(T)$ comme un élément de $\mathcal{P}(S(T))$). On a alors $z \leqslant x$ et $z \in S(T)$, donc $z \in S_x(T)$.
   Ainsi, $\boxed{S_x(T) \text{ est une section commençante de } S(T)}$, donc c est bien définie.
2.
   - Soit $x \leqslant y$ dans T. Pour tout $z \in S_x(T)$, $z \in S(T)$, et $z \leqslant x \leqslant y$, donc $z \in S_y(T)$. Ainsi, $S_x(T) \subset S_y(T)$.
   - soit x et y dans T tels que $S_x(T) \subset S_y(T)$. On a alors $\sup(S_x(T)) \leqslant \sup(S_y(T))$, donc $x \leqslant y$ (d'après I-7)
   - L'injectivité provient toujours de II-4.
   - Il reste donc à prouver la surjectivité. Pour cela, considérons $C \in \mathcal{C}(S(T))$. Puisque T est un treillis, on peut définit $x = \sup(C)$ dans T. Montrons que $C = S_x(T)$. En effet :
     * Puisque x majore C, pour tout $s \in C$, $s \in S$ et $s \leqslant x$, donc $s \in S_x(T)$. Donc $C \subset S_x(T)$.
     * Soit $s \in S_x(T)$. On a donc $s \leqslant x = \sup(C)$. Comme s est un sup-irréductible, on déduit de la question III-3 qu'il existe $z \in C$ tel que $s \leqslant z$. Comme C est une section commençante, il vient $s \in C$. Donc $S_x(T) \subset C$.

* Les deux inclusions amènent l'égalité $C = S_x(T) = c(x)$. D'où la surjectivité de c.

Ainsi, c est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

D'où le $\boxed{\text{théorème de représentation de Birkhoff}}$.

3. On commence par montrer le lemme suivant : Si $f : E \to F$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, alors f induit un isomorphisme $S(E) \to S(F)$.
   - Pour cela, on montre d'abord que si s est un sup-irréductible de E, alors $f(s)$ est un sup-irréductible de F. Soit donc s un sup-irréductible de E. Soit $Y \subset F$ tel que $\sup(Y) = f(x)$. Montrons qu'alors $\sup(f^{-1}(Y)) = x$. En effet, pour $y \in Y$, $m \geqslant y \iff m \geqslant f^{-1}(y)$, car f^{-1} est un isomorphisme. Ainsi, si M est l'ensemble des majorants de Y, $f^{-1}(M)$ est l'ensemble des majorants de $f^{-1}(Y)$. Or M admet pour minimum $f(x)$. Alors, pour tout $z \in f^{-1}(M)$, il existe $z' \in M$ tel que $z = f^{-1}(z')$. Comme $z' \geqslant f(x)$, on déduit de la croissance de f^{-1} que $z \geqslant x$. Ainsi, x est le minimum de $f^{-1}(M)$. Cela prouve bien que $x = \sup(f^{-1}(Y))$. Or, par hypothèse, x est sup-irréductible, donc $x \in f^{-1}(Y)$, soit $f(x) \in Y$. Cela prouve bien que $\boxed{f(x) \text{ est sup-irréductible}}$.
   - Réciproquement, il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant f par f^{-1}.
   - Ainsi, f se restreint et corestreint en une application encore notée f, de $S(E)$ sur $S(F)$. La propriété de codage exprimée universellement, passe à la restriction. La bijectivité provient de la réciproque ci-dessus. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

   On montre de la même manière que f induit un isomophisme de $I(E)$ sur $I(F)$.

   Le théorème de Birkhoff nous donne un isomorphisme entre T et $\mathcal{C}(S(T))$. On déduit alors du lemme un isomophisme entre $S(T)$ et $S(\mathcal{C}(S(T)))$ et entre $I(\mathcal{C}(S(T)))$ et $I(T)$. Par ailleurs, la partie V nous assure de l'existence d'un isomorphisme entre $S(\mathcal{C}(S(T)))$ et $I(\mathcal{C}(S(T)))$. En composant ces isomorphismes, on obtient un $\boxed{\text{isomophisme (question II-6) entre } S(T) \text{ et } I(T)}$.