ESPACES EUCLIDIENS

✠ ***Exercice 1.*** [$\star$] (Famille de vecteurs équidistants)
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs unitaires vérifiant $\forall i, j \in [\![1; p]\!]\,,\ (i \neq j) \Longrightarrow \|u_i - u_j\| = 1$. Démontrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre.

A faire.

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$] (Polynômes de Lagrange)
On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit de l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k). \end{array} \right.$$

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une famille $(L_0, \ldots, L_n)$ de $n+1$ polynômes de E telle que $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2\,,\ L_i(j) = \delta_{i,j}$.
3. Démontrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthonormale de E.
4. Soit $P \in E$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

A faire.

✠ ***Exercice 3.*** [∘] (Polynômes de Legendre)
On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit de l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P, Q\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E et qu'il vérifie, pour tout $P, Q, R \in E$, $\langle PQ, R\rangle = \langle P, QR\rangle$.
2. Démontrer qu'il existe une unique famille orthonormale $(P_0, \ldots, P_n)$ telle que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,
   (i) $\deg P_k = k$;
   (ii) le coefficient dominant de P_k est strictement positif ;
   (iii) $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^k)$.

▶ On pose

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} P_k.$$

3. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2 et L_3.
4. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. On suppose que L_k change ℓ fois de signe (où $\ell \in [\![0; k]\!]$) dans l'intervalle $]-1; 1[$ pour les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ (ce sont les racines de multiplicités impaires de L_k dans $]-1; 1[$) et l'on considère le polynôme $K = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_\ell)$. Si $\ell = 0$, on pose $K = 1$.
   a) Démontrer que $\langle K, L_k\rangle > 0$.
   b) Démontrer que $\deg K = k$.
   c) En déduire finalement que le polynôme L_k possède k racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]-1; 1[$.

A faire

✠ ***Exercice 4.*** [∘] (Polynômes de Tchebychev)
Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos t)Q(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme T_n, appelé n-ème polynôme de Tchebychev, tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Justifier que T_n est de degré n, qu'il vérifie la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer son coefficient dominant. Préciser T_0, T_1 et T_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que $(T_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
   b) Démontrer que $(T_p / \|T_p\|)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est l'orthonormalisée au sens de Gram–Schmidt de $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
4. Démontrer que

$$\inf \left\{ \int_0^{\pi} P(\cos t)^2\,\mathrm{d}t : P \in \mathbb{R}[X],\ P \text{ unitaire},\ \deg(P) = n \right\}$$

est atteint en $T_n / 2^{n-1}$ et calculer la valeur de cette borne inférieure.

A faire.

✠ ***Exercice 5.*** [$\star$]

1. Déterminer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{\pi} \left(\sin x - ax - bx^2\right)^2 \mathrm{d}x.$$
2. Déterminer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{1} (t\ln t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t.$$

1. Pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int fg$, une base orthonormée de l'ensemble V des fonctions polynomiales de la forme $ax+bx^2$ est
$$e_1 : x \longmapsto \sqrt{\frac{3}{\pi^3}}x \qquad e_2 : x \longmapsto \sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(x^2 - \frac{3\pi}{4}\right).$$
La projection de $g=\sin$ sur V est $h = \frac{e_1}{g}e_1 + \frac{e_2}{g}e_2$. On trouve alors
$$\inf = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \frac{7}{\pi} - \frac{160}{\pi^3} + \frac{1280}{\pi^5}} \approx 1,1.$$
2. C'est un problème de projection orthogonale d'une fonction sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 1. On munit donc $E = \mathscr{C}([0,1]\,,\mathbb{R})$ du produit scalaire euclidien
$$(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
et l'on note $F=\mathbb{R}_1[t]$. On note de plus $\phi : t \mapsto t\ln t$ prolongée par continuité par $\phi(0)=0$.
On cherche donc l'élément P de F qui minimise $\|\phi - P\|$, c'est-à-dire la projection orthogonale de ϕ sur F, qui est caractérisée par son appartenance à F et les deux égalités
$$(P-\phi, t\mapsto 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad (P-\phi, t\mapsto t) = 0.$$
On calcule facilement que $(\phi,1) = -1/4$ et $(\phi,t) = -1/9$. De plus, si $P(t) = at+b$, alors $(P,1) = b + a/2$ tandis que $(P,t) = b/2 + a/3$, d'où
$$b = -\frac{1}{3} \qquad a = \frac{1}{6}.$$
Le minimum cherché vaut donc $\|\phi - P\| = \sqrt{\|\phi\|^2 - \|P\|^2}$ par Pythagore, et comme
$$\|\phi\|^2 = \int_0^1 t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2 \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{27} \qquad \text{et} \qquad \|P\|^2 = \frac{7}{108},$$
on en déduit que
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t = \|\phi - P\| = \sqrt{\frac{1}{108}} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$