DEVOIR MAISON n° 10

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

Séries de Dirichlet

Définitions et notations

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante de limite $+\infty$. Une série de fonctions de la forme $f = \sum a_n exp(-\lambda_n z)$, où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $z \in \mathbb{C}$ s'appelle une **série de Dirichlet**. Le cas classique correspond à $\lambda_n = \ln n$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$.

Préliminaires

Soient a_n et b_n deux suites complexes, n et m deux entiers naturels tel que $n < m$; pour $k \geq n$, on note $A_k = \sum\limits_{n+1\leq l\leq k} a_l$ avec la convention $A_n = 0$.

1. Vérifier que $\sum\limits_{n<k\leq m} a_k b_k = \sum\limits_{n<k\leq m} (b_k - b_{k+1})A_k + b_{m+1}A_m$.
2. On suppose que la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ est bornée, que la série $\sum |b_k - b_{k+1}|$ converge et que b_n tend vers 0.

Partie I. Séries de Dirichlet de variable réel

Étant donné une série de Dirichlet $f = \sum a_n exp(-\lambda_n z)$, on note $p = p(f)$ la borne inférieure des nombres réels x tels que $\sum a_n exp(-\lambda_n x)$ converge, et $p^+ = p^+(f)$ la borne inférieure des réels x tels que $\sum a_n exp(-\lambda_n x)$ converge absolument. On dit que p est l'**abscisse de convergence** de la série considérée, et p^+ son abcisse de convergence absolue.

1. Déterminer p et p^+ lorsque pour tout n, $\lambda_n = \ln n$ dans les cas suivants :
   (a) $\forall n \geq 1$, $a_n = 1$;
   (b) $\forall n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$;
   (c) $\forall n \geq 2$, $a_n = \ln 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer, dans le cas général, que $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converge pour $x > p$.
3. Montrer que, dans le cas où pour tout n, $\lambda_n = \ln n$: $p \leq p^+ \leq p + 1$ et donner des exemples pour chacune des trois situations.
4. On suppose que, pour tout entier $n \leq 1$, $\lambda_n = n$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $a_n e^{na}$ soit bornée. Montrer que, pour tout nombre réel$x > a$, la série $\sum a_n e^{-nx}$ converge.
   (b) Montrer que $p = p^+$.

5. Déterminer p et p^+ lorsque $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\lambda_n = \ln(\ln n)$, pour $n \geq 2$.

   On suppose $p < +\infty$. Soit f la somme de la série de Dirichlet étudiée.
6. Soit $a > p^+$. Quelle est la nature de a convergence de $\sum a_n exp(-\lambda_n x)$ sur $[a, +\infty]$? Même question si $a > p$.
7. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
8. Montrer que, si f est nulle, la suite a_n est nulle.

   On se place jusqu'à la fin de cette partie dans le cas où $n \leq 1$ et $\lambda_n = \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z\mathbb{C},\ exp(-\lambda_n z) = \frac{1}{n^z}.$$
   Toutes les séries de Dirichlet ci-dessous sont supposées d'abcisse de convergence $< +\infty$.
9. Montrer la dérivabilité de la somme f de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ sur sa demi-droite ouverte $\Delta^+ =]p^+, +\infty[$ de convergence absolue. On pourra se donner des réels b et c tels que $p^+ < c < b$, travailler sur $[b, +\infty[$ et exploiter pour $x \geq b$ l'égalité $x = c + (b - c) + h$ avec $h \geq 0$. Examiner la dérivabilité de f sur $]p, +\infty[$.
10. Soient x un réel $> p^+$, des réels a et $T > 0$, mettre sous forme de série
   $$F(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x + it) a^{x+it} dt$$
   et en déduire que $F(T)$ tend vers a_n lorsque $a = n$ et vers 0 sinon lorsque T tend vers $+\infty$.

Partie II. Séries de Dirichlet complexes

On note, ici et dans la suite, $Arg(z)$ la détermination principale de l'argument de z sur $\mathbb{C} \oslash \mathbb{R}_-$, on a donc $-\pi < Arg(z) < \pi$. Soit $f = \sum a_n exp(-\lambda_n z)$ une série de Dirichlet.

1. Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. Montrer que, si $x \neq 0$,
   $$|exp(-\lambda_n z) - exp(-\lambda_{n+1} z)| \leq |exp(-\lambda_n x) - exp(-\lambda_{n+1} x)| \frac{|z|}{|x|}.$$
   On pourra évaluer $\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt} dt$.
2. Soit z_0 tel que la série $\sum a_n exp(-\lambda_n z_0)$ converge et soit $k \in]0, \pi/2[$. Montrer que la série $\sum a_n exp(-)$ converge uniformément dans le secteur
   $$|Arg(z - z_0)| \leq k.$$
   On pourra se ramener au cas où $z_0 = 0$ en posant $z = z_0 + h$.
3. En déduire que, dans le demi-plan donné par $P(f) = \Re(z) > p$ la série $\sum a_n exp(-\lambda_n z)$ converge et que sa somme y est continue. Que se passe-t-il si x réel vérifie $x < p$?

4. Le résultat démontré ici est destiné à la question suivante. Soient $x_1, ..., x_n$ des réels ; q un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe $p \in \{1, ..., q^n\}$ tel que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $d(px_i, \mathbb{Z}) < \frac{1}{q}$. On pourra appliquer le principe des tiroirs aux $q^n + 1$ vecteurs $(kx_i - E(kx_i))_{1 \leq i \leq n}$, $0 \leq k \leq q^n$.

   Soit $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs et d'abscisse de convergence 0, et soit f sa somme. On suppose que $\sum a_n$ diverge, et l'on se donne un réel $T > 0$.

5. Prouver que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. Cas particulier non utilisé dans la suite : Donner un équivalent en 0^+ de $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

   Soient $M > 0$, $x > 0$ tel que $f(x) > M$, et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} < M/10$.

6. En utilisant convenablement la question II.(4), montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \geq T$ et $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\cos y \ln p \geq 1/2$.
7. Montrer que, pour tout $T > 0$, $f(z)$ n'est pas bornée dans l'ensemble

$$\big\{\Re(z) > 0,\ \Im(z) \geq T\big\}.$$

Partie III. Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

Tous les entiers sont ici ≤ 1.

1. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'application $s : (d, d') \mapsto dd'$ est une bijection de l'ensemble de couples (d, d') formés d'un diviseur d de m et d'un diviseur d' de n, sur l'ensemble des diviseurs de mn.

   On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est multiplicative lorsque, pour tout couple $(m, n) \in {\mathbb{N}^*}^2$ d'entiers premiers entre eux, on a $f(mn) = f(m)f(n)$; et qu'elle est totalement multiplicative lorsque ceci a lieu sans restriction sur m et n. Les valeurs d'une fonction multiplicative f sont donc déterminées par la connaissance des $f(p^\alpha)$, $p \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$; et celles d'une fonction totalement multiplicative f par les $f(p)$.
   On rappelle que l'indicatrice d'Eulet φ, qui à un entier n associe le nombre d'entiers k compis entre 1 et n tels que k et n sont premiers entre eux, est multiplicative et que, si p est premier et $r \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$. Dans ce qui suit, on note Λ l'ensemble des fonctions multiplicatives de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont multiplicatives :
   (a) La fonction τ qui à $n \in \mathbb{N}^*$ associe le nombres de ses diviseurs ;
   (b) La fonction μ (dite de Moebius) qui est nulle sur tous les entiers possédant un diviseur carré parfait non trivial, et vaut $(-1)^r$ sur les nombres de la forme $p_1 ... p_r$ pù les p_i sont premiers et distonncts.
3. Soient f et g deux éléments de Λ. Montrer que l'application $f \star g : n \mapsto \sum\limits_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ est multiplicative.
4. En déduire que :
   (a) La fonction σ qui à un entier n associe la somme des ses diviseurs est multiplicative ;
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$;

(c) Si f est une fonction multiplicative et $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, on a $f = g \star \mu$.

5. Soient $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^z}$ deux séries de Dirichlet de sommes respectives f et g. Montrer que, pour tout z tel que $\Re(z) > \sup\{p^+(f), p^+(g)\}$, on a $f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^z}$ où $c_n = \sum_{d\geq 1,\ d|n} a_d b_{n/d}$.

6. En déduire, à l'aide de la fonction de Moebius μ, linverse $1/\zeta(z)$ de $\zeta(z)$ pour z réel > 1 ainsi que, pour $z > 2$, l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^z}$.

7. Soient x et y deux réels > 1. Montrer successvement :

   (a) $\sum_{1\leq m\leq y} m = \frac{1}{2}y^2 + O(y)$ en $+\infty$;

   (b) $\sum_{1\leq d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(1/x)$;

   (c) $\sum_{1\leq n\leq x} \varphi(d) = \sum_{1\leq n\leq x} \mu(d)(\sum_{1\leq m\leq x/d} m)$;

   (d) $\sum_{1\leq n\leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} + O(x \ln x)$.

   Déterminer alors la probabilité pour que deux entiers soient premiers entre eux.