Maths Ulm Victor Dubois

1 Commentaire global

Examinateur très sympathique (je sais, je me répète), par contre je ne sais pas pourquoi le maths Ulm se passe au dernier étage du bâtiment : à 8h15 j'avais déjà chaud, je n'imagine pas comment on peut tenir dans la salle pendant une journée à 40°C ... Il m'annonce immédiatement que l'exercice est un prétexte à la discussion, et qu'il ne me dira rien pendant 5 à 10 minutes. J'ai essayé de montrer que je savais des choses (plus ou moins en rapport avec l'exercice), ce qu'il a semblé apprécier. L'oral dure une heure environ.

Je remarque rapidement qu'à partir du moment où il s'est mis à m'aider, l'examinateur est devenu extrêmement attentif à tout ce que j'écrivais : je pense que c'est important de ne pas écrire d'absurdités.

2 Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0;1],\mathbb{R})$ non constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $f^{(n)}(x) \geq 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $[0;1]$.

2.1 Déroulé de l'exercice

Je commence par remarquer les choses évidentes (f positive croissante), et je me décide à un raisonnement par l'absurde : si f s'annule, alors $f(0) = 0$ et je suppose qu'il existe $a \in]0;1[$ tel que f soit nulle sur $[0;a]$, strictement positive sinon. Mon objectif est de montrer que f sera nulle sur un intervalle $[0;a+\epsilon]$. Finalement, je ne vais pas aboutir à cette contradiction, mais à une autre.

Sans songer à la régularité de f, j'ai l'intuition de devoir montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) > 0$. En fait, comme f est $\mathcal{C}^\infty$, toutes les dérivées à gauche sont nulles en a, donc toutes les dérivées sont nulles en a (j'ai dit ça à la fin de mon exo, sur une question de l'examinateur, je n'y avais pas du tout songé, ce qui est dommage, il avait l'air légèrement déçu).

J'écris donc une première égalité de Taylor reste intégral (encore elle, j'y ai droit à chaque fois !) en supposant que toutes les dérivées sont nulles en a (ce qui est, *a posteriori*, le cas) de $f(x+a)$ en a. Il me conseille de poser $g(x) = f(x+a)$. On a la relation :

$$\forall x \in]0; 1-a], \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt \leq \frac{x^{n+1}}{n!} ||g^{(n+1)}||_{\infty,[0;x]}$$

Je veut donc que le terme de droite converge vers 0 (j'évoque un critère de DSE, il dit qu'effectivement ça y ressemble), et je bloque, parce que je vois bien que je n'ai pour l'instant aucune information sur cette norme infinie ! Il doit donc me guider vers les deux astuces (en fait, à chaque indication, il me semblait y avoir tellement de possibilités de réponse que j'avais l'impression de ne pas avancer) :
$||g^{(n+1)}||_{\infty,[0;x]} = g^{(n+1)}(x)$ (croissance de g) et

$$\begin{aligned} g(2x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(x+t)dt \\ &= S_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

Or, comme S_n est une SATP (x est ici fixé), que $R_n(x) \geq 0$, $(S_n(x))$ est croissante, majorée par $g(2x)$ donc converge : le terme général tend donc bien vers 0, et en passant à la limite, $0 < g(x) = 0$: contradiction.

L'exercice me semble donc fini, mais je m'aperçois que l'examinateur a soit oublié, soit n'a pas vu mes hypothèses de départ (que j'avais effacées) : il m'a donc posé plein de questions autour de celles-ci, sur des exemples de fonctions pas DSE mais $\mathcal{C}^\infty$ etc.

3 Exercice 2

Soit G un groupe. A-t-on l'équivalence entre :
(i) G fini

(ii) G possède un nombre fini de sous-groupes ?

3.1 Déroulé de l'exercice

Il soit me rester tout au plus 15 minutes pour faire l'exercice. (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident, mais j'ai l'impression que l'équivalence est fausse. Je regarde pour quelques groupes infinis ($\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ par exemple), et je me rend compte qu'ils ont bien un nombre infini de sous-groupes. L'examinateur ne sourit pas devant cet échec et s'intéresse à mes exemples. Je me décide donc à montrer $\overline{(i)} \Rightarrow \overline{(ii)}$. Je montre que c'est vrai dans le cas où G possède un élément d'ordre infini, et l'oral s'arrête là.