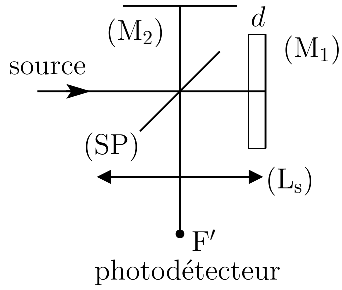
T.D. O_3 : Interférences par division d'amplitude

Exercice 1 Mesure de distances



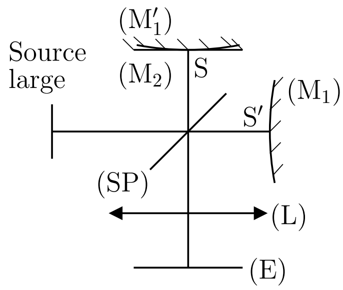
L'interféromètre de Michelson est utilisé couramment pour la mesure de faibles distances, le montage étant réalisé afin que la distance à mesurer d coïncide avec la différence de longueur des bras de l'interféromètre. On colle l'objet d'épaisseur d sur un des miroirs de l'interféromètre préalablement réglé pour avoir des bras optiques égaux. Les deux miroirs sont fixes, perpendiculaires. Le miroir M_1 est constitué par la surface réfléchissante de l'objet dont on souhaite mesurer la distance à M_2' symétrique du miroir M_2 par la séparatrice supposée d'épaisseur négligeable. On a réalisé une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur d. La source monochromatique est une diode laser à semi-conducteur de longueur d'onde $\lambda_0 = 775$ nm. Elle est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente dite lentille d'entrée.

On utilise un photodétecteur, placé au foyer image F' de la lentille convergente dite de sortie, pour enregistrer l'éclairement $E(F')$ en ce point. Soit $2E_0$ l'éclairement incident sur la séparatrice qui le divise en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis de même intensité E_0.

1. Calculer le déphasage $\Phi(F')$ des deux ondes interférant en F' puis l'éclairement $E(F')$ en fonction de E_0, λ_0 et d.
   Le détecteur permet la mesure relative de l'éclairement en fournissant le rapport $E_r = E(F')/E_0$. Exprimer la distance d en fonction de E_r et de λ_0. d est-elle déterminée sans ambiguïté ?
2. Dans la gamme de distances allant du centimètre au mètre approximativement, la mesure de d peut être réalisée par changement de longueur d'onde. La longueur d'onde émise par la diode laser subit une faible variation $\Delta\lambda$ et émet de ce fait une radiation de longueur d'onde $\lambda_0 + \Delta\lambda$, avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

   Déterminer la variation $\Delta\Phi$ du déphasage Φ qui en résulte. Montrer que $|\Delta\Phi|$ peut se mettre sous la forme $|\Delta\Phi| = \dfrac{2\pi\delta}{\Lambda}$ où δ est la différence de chemin optique en F'. Donner l'expression de Λ et indiquer sa dimension.
3. Montrer que la variation $\Delta\lambda$ de λ_0 provoque le défilement au point F' d'un certain nombre N de franges. Calculer N en fonction de la distance d et de Λ. Application numérique : la fréquence de l'émission diminue de 100 GHz, calculer le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda$ puis Λ. L'éclairement étant maximal pour λ_0, quand la fréquence de l'émission diminue, on compte 322 franges brillantes qui défilent, après quoi l'éclairement en F' reste nul. Calculer la distance d.

Exercice 2 Michelson avec un miroir sphérique

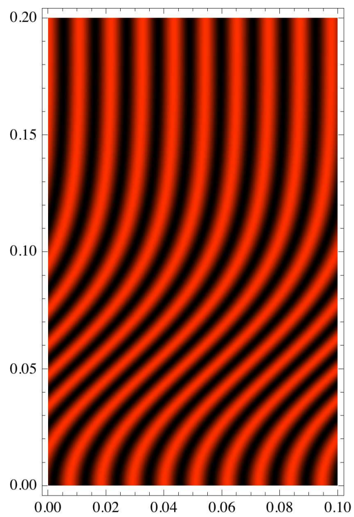


On considère l'interféromètre de Michelson représenté sur la figure. La source est large, monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 630$ nm dans l'air. Le miroir (M_1) est sphérique convexe de rayon de courbure R grand. L'image (M_1') de (M_1) par rapport à la séparatrice est tangente, en S, au miroir plan (M_2).

1. Indiquer le lieu de localisation des franges ainsi que leur forme.

   On observe dans le plan conjugué de (M_2) par rapport à la lentille (L) de courte focale, plan (E) situé loin de (L), ce que ne représente pas la figure pour des raisons d'encombrement. Le grandissement transversal $\gamma = 5$ est élevé (les conditions de l'approximation de Gauss sont supposées réalisées).
2. Déterminer la dimension r_q ($q \in \mathbb{N}^*$) des franges brillantes successives observées sur l'écran ($q = 1$ pour la frange la plus près du centre).
3. En déduire le rayon de courbure R, sachant qu'une mesure donne (en cm et à 0,1 mm de précision)
   $r_1 \simeq 1{,}26$; $r_2 \simeq 1{,}77$; $r_3 \simeq 2{,}17$, $r_4 \simeq 2{,}51$; $r_5 \simeq 2{,}81$; $r_6 \simeq 3{,}07$.

Exercice 3 Mesure de variations d'indices



Un interféromètre de MICHELSON est réglé en coin d'air d'angle $\alpha = 1'$ et éclairé par un faisceau laser He-Ne (on rappelle que $\lambda_0 = 632{,}8$ nm), en éclairage quasi-parallèle.

1. Où les franges sont-elles localisées ? Comment visualiser les franges sur un écran à l'aide d'une lentille ? Que vaut l'interfrange sur l'écran si le grandissement est $\gamma = -10$?
2. On suppose que l'arête du coin d'air est verticale. Sur un des bras de l'interféromètre, on introduit une cuve contenant des cristaux de chlorure de sodium, qu'on a ensuite remplie très doucement avec de l'eau. La dissolution progressive des cristaux induit une variation selon la verticale de la concentration en ions Na^+ et Cl^-, et donc aussi de l'indice, qu'on suppose être de la forme $n(z) = n_0 + n_1 e^{-z^2/d^2}$. La distance d varie au cours de l'expérience, mais on la supposera constante ici. On note a l'épaisseur de liquide contenue dans la cuve. Sur l'autre bras de l'interféromètre, on introduit une cuve identique à la première, mais uniquement remplie de solvant. Cette cuve sert à garder un contraste. Justifier cette dernière affirmation.
3. Donner l'équation des franges brillantes sur l'écran. Les franges sur l'écran sont représentées ci-contre (les valeurs sont en mètres) et ont été mises "à l'endroit" (les points les plus bas correspondent à $z = 0$). Cette figure est-elle compatible avec le résultat de la question 1 ? Déduire de la figure les valeurs de $n_1 a$ et de d.

Exercice 4 Spectrométrie d'un doublet

Un interféromètre de MICHELSON est réglé en lame d'air et éclairé par une lampe à vapeur de sodium ou à vapeur de mercure, munie d'un filtre ne laissant passer que le doublet jaune de ces lampes. Pour la lampe à vapeur de sodium $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm, alors que pour la lampe à vapeur de mercure $\lambda_1 = 577{,}0$ nm et $\lambda_2 = 579{,}1$ nm. On suppose que les intensités des deux raies sont égales.

1. Calculer et représenter l'allure de l'intensité $\mathrm{I}(e)$ mesurée au foyer d'une lentille convergente placée en sortie de l'interféromètre, où e est la distance du miroir mobile à sa position au contact optique.
2. En ayant accès uniquement aux tracés entre deux annulations des amplitudes des oscillations rapides de $\mathrm{I}(e)$, sans aucune annotation d'aucune sorte (en particulier pas d'échelle), comment reconnaître le tracé pour la lampe à vapeur de mercure de celui de la lampe à vapeur de sodium ?
3. Les premières annulations des amplitudes, pour une des lampes, ont lieu aux épaisseurs $e = 145$ μm, 434 μm, et 723 μm. De quelle lampe s'agit-il ?

Exercice 5 Anneaux d'égale inclinaison

Un interféromètre de MICHELSON est réglé en lame d'air. Il est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 546$ nm.

1. Où doit-on placer l'écran pour observer des anneaux bien contrastés ?
2. On utilise une lentille convergente de distance focale $f' = 50$ cm. On mesure sur l'écran les rayons du premier anneau brillant $\rho_1 = 4{,}8 \pm 0{,}1$ cm et du cinquième anneau brillant $\rho_5 = 13{,}3 \pm 0{,}1$ cm. En déduire l'épaisseur de la lame d'air.

Exercice 6 Spectrométrie par transformée de FOURIER

On éclaire un interféromètre de MICHELSON monté en lame d'air d'épaisseur e avec une raie quasi-monochromatique caractérisée par son profil spectral $\mathrm{d}\mathscr{E}_0/\mathrm{d}\sigma = f(\sigma) = \mathrm{C}\exp[-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2]$ où $\sigma = 1/\lambda$ et où σ_0, C et $a \ll \sigma_0$ sont des constantes positives. Pour simplifier, on étendra la fonction f aux valeurs négatives de σ, domaine où elle prend des valeurs négligeables.

1. Quelle est la signification de σ_0 ? Calculer la largeur $\Delta\sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a.
2. On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur e qu'on fait varier en déplaçant l'un des miroirs avec un moteur. Établir l'expression de l'éclairement $\mathscr{E}(e)$ en fonction de constantes et de la transformée de FOURIER du profil spectral définie par $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)\,\exp(2j\pi\sigma x)\,\mathrm{d}\sigma$.
3. Établir l'expression de $\mathscr{E}(e)$ en calculant la transformée de FOURIER. Tracer l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$? Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre ? Retrouver l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de la source en fonction de $\Delta\sigma$.

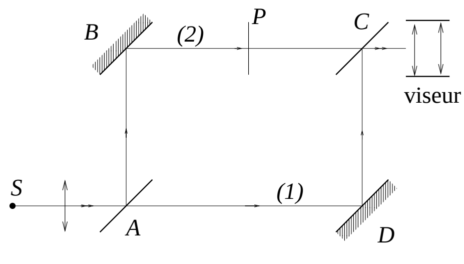
Exercice 7 Couche antireflet

On dépose sur une surface plane de verre d'indice $n_0 = 1{,}5$, une couche mince d'un matériau transparent d'indice n. Le système est éclairé sous incidence normale par une lumière d'intensité I_0, et on étudie l'intensité I_r de la lumière réfléchie.

Pour une onde qui se propage dans un milieu d'indice n_1 et qui se réfléchit sur un milieu d'indice n_2, le coefficient de réflexion en amplitude est : $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$.

1. Justifier numériquement que la lumière réfléchie résulte de l'interférence de deux ondes, issues chacune d'une seule réflexion.
2. L'onde incidente est monochromatique, de longueur d'onde λ_0. À quelles conditions doivent satisfaire e et n pour que I_r soit nulle ? Exprimer $\mathrm{I}_r(\sigma)$.
3. La lumière incidente est blanche. On veut annuler totalement les radiations de longueur d'onde $\lambda_0 = 550$ nm et atténuer au maximum les autres radiations visibles. Calculer e et décrire l'aspect de la lumière réfléchie.

Exercice 8 Interféromètre de Mach



1. I_0 étant l'intensité de la source, quelles sont les intensités des deux ondes qui interfèrent ?
2. La source monochromatique (λ) est au foyer de la lentille d'entrée ; l'appareil est réglé comme indiqué ci-contre. Un viseur, situé en sortie de l'appareil permet d'observer l'image du plan P. Qu'observe-t-on ?
3. On place sur le plan P une petite lame carrée d'indice n, à faces parallèles d'épaisseur e. Que voit-on sur l'écran ?
   Calculer le contraste défini *ici* par : $\Gamma = \dfrac{\mathrm{I}_{\max} - \mathrm{I}_{\min}}{\mathrm{I}_{\max}}$.
4. Pour déceler de très faibles variations de phase, il est préférable d'opérer sur fond noir. Pourquoi ?
   La séparatrice C peut subir une translation suivant CD. Quelle valeur faut-il donner à cette translation pour que l'écran soit noir en l'absence de lame ?
5. La lame étant enlevée, on tourne le miroir D d'un petit angle α. Décrire le système de franges obtenus.
   Déterminer α si l'interfrange est $i = 0{,}25$ mm pour $\lambda = 500$ nm.
   Que se passe-t-il si on introduit à nouveau la lame ?
6. Expliquer pourquoi la frange centrale ($p = 0$) ne peut se repérer qu'en lumière blanche (on néglige l'effet dispersif de la lame). Le viseur est muni d'un oculaire micrométrique. En lumière blanche, le décrochement de la frange centrale due à la lame correspond à 89 divisions. En lumière monochromatique (500 nm), l'interfrange est mesurée par 5 divisions. En déduire l'épaisseur de la lame, d'indice $n = 1{,}5$.

Exercice 9 Mesure d'épaisseur d'une lame à l'aide d'un interféromètre de MICHELSON

Le but est de mesurer l'épaisseur e d'une lame de verre d'indice $n_0 = 1,520$ pour une lumière de longueur d'onde $\lambda_0 = 0,550\ \mu$m et dont l'indice varie selon une loi de type

$$n(\lambda) = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = 10,6.10^{-3}\ \mu\mathrm{m}^2 \quad \text{(loi de CAUCHY)}$$

Pour cela, on dispose d'un interféromètre de MICHELSON et des quatre sources suivantes (le détecteur est l'œil) :

- source 1 : une lampe à incandescence (source blanche) ;
- source 2 : une lampe à incandescence placée devant un filtre coloré de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 550$ nm et de largeur spectrale $\Delta\lambda = 100$ nm (domaine de sensibilité maximale de l'œil) ;
- source 3 : une lampe à incandescence placée devant un filtre interférentiel de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 550$ nm et de largeur spectrale $\Delta\lambda = 10$ nm ;
- source 4 : source monochromatique constituée d'une source spectrale placée devant un filtre interférentiel isolant idéalement l'une des raies du spectre à $\lambda_0 = 550$ nm.

1. **Préliminaire**
   Justifier simplement l'affirmation suivante : *« Dans le cas d'une source polychromatique de longueur d'onde moyenne λ_0 et de largeur spectrale $\Delta\lambda$, on ne peut observer d'interférences que si la différence de chemin optique entre les deux trajets lumineux est inférieure à $\lambda_0^2/\Delta\lambda$. »*
   Préciser l'ordre de grandeur de cette différence de chemin optique maximum limite $\delta_{\max}$ pour les quatre sources.
2. **Mesure utilisant les franges du coin d'air du MICHELSON**
   a. Rappeler le montage permettant d'observer les franges du coin d'air avec une source étendue. Préciser le rôle des lentilles et de la compensatrice.
   b. On réalise l'expérience avec la source 2.
      1. Quel est l'ordre de grandeur du nombre maximal de franges que l'on peut observer ?
      2. Sachant que le diamètre d'un miroir est de 2 cm, calculer l'angle entre les deux miroirs pour lequel on observe 10 franges d'interférences.
      3. On interpose la lame de verre du côté du miroir fixe M_2. Qu'observe-t-on qualitativement si l'épaisseur de la lame est de 10 μm ? 100 μm ? et 1 mm ?
   c. On règle la distance du miroir mobile de telle façon qu'en l'absence de lame, l'ordre d'interférences au centre de la figure soit nul.
      1. Dans quel sens, et de quelle distance d_1 faut-il déplacer le miroir mobile M_1, pour retrouver un ordre d'interférences nul au centre de la figure d'interférences ?
      2. En fait, on ne peut pas repérer la frange d'ordre nul mais la frange achromatique, c'est-à-dire celle pour laquelle l'ordre d'interférences ne dépend pas au premier ordre de la longueur d'onde *i.e* $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\lambda)_{\lambda_0} = 0$. Pourquoi ?
         Déterminer la relation entre l'épaisseur e, la longueur d'onde λ_0, n_0, B et la distance d_2 dont il faut déplacer le miroir mobile (préciser le sens) pour que la frange achromatique soit au centre de la figure d'interférences.
         Application numérique : la mesure a donné $d_2 = 0,050$ mm. Calculer e, $d_2 - d_1$, δ_0 (au centre) et $p_0 = \frac{\delta_0}{\lambda_0}$.
      3. Quelles sources peut-on utiliser pour effectuer les mesures précédentes ?
3. **Mesure utilisant les franges d'égale inclinaison**
   a. Rappeler le montage permettant d'observer les franges d'égale inclinaison avec une source étendue. Préciser le rôle des lentilles. Définir la teinte plate.
   b. On réalise l'expérience avec la source monochromatique (source 4). Le MICHELSON est réglé de telle façon qu'on observe la teinte plate en l'absence de lame. Quand on insère la lame de verre du côté du miroir fixe M_2, on déplace le miroir mobile M_1 d'une distance d.
      Montrer que pour le rayon lumineux arrivant sous une incidence i sur les miroirs, la différence de marche est $\delta = 2(d+e)\cos i - 2ne\cos r$ où i et r sont reliés par $\sin i = n \sin r$.
   c. Dans le cas des petits angles, déterminer l'intensité lumineuse observée dans la direction i.
      Dans quel sens, et de quelle distance d_3 faut-il déplacer le miroir mobile, pour pouvoir observer à nouveau une teinte uniforme ?
   d. Application numérique : Pour $d_3 = -30\ \mu$m (résultat de la mesure), calculer e, la différence de chemin optique δ_0, l'ordre d'interférences p_0 au centre de la figure pour λ_0. Quelles remarques peut-on faire ?
   e. Quelles sources faut-il prendre pour réaliser correctement l'expérience précédente ?

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1
On trouve $\mathrm{E}(\mathrm{F}') = \mathrm{E}_0\left[1+\cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda_0}\right)\right]$, $\Lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$, $d = 0,4838$ m

Exercice 2
C'est comme pour le coin d'air !

Exercice 3
Rien à signaler.

Exercice 4
Oh les beaux battements !

Exercice 5

Même s'il s'agit d'anneaux, aucune raison de tourner en rond... sinon : tout est dans le cours !

Exercice 6

$\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}$; $\mathscr{E}(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \widehat{f}(2e) + \widehat{f}^*(2e)$. *Enfin, pour calculer la transformée de* FOURIER *d'une gaussienne, faire apparaître un carré parfait dans l'exponentielle à intégrer (à une constante à sortir de l'intégrale près) et puis on connaît l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty+j\mathrm{C^{te}}}^{+\infty+j\mathrm{C^{te}}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$...

Exercice 7

À la dernière question, on trouve $e = 0,11\ \mu m$.

Exercice 8

$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_0/4$. $\Gamma = [1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)e)]/2$. $\alpha = 10^{-3}$ *rad.* $e = 18\ \mu m$.

Exercice 9

Pas d'indication mais c'est un très bon exercice pour vérifier ses connaissances...