Oral ENS - Mathématiques Lyon

Garrigou Romain

3 juillet 2019

Exercice

Pour $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$ on note : $s_n(f) = \int_0^1 f(x)x^n dx$.

1. Soit $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$. Mq :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, s_n(f) = s_n(g)) \implies f = g$$

2. Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n(f) = e^{-\frac{n^2}{10}}$. Que peut-on dire sur f ?
3. Question annexe : Pourquoi une matrice de Hilbert $(\frac{1}{i+j+1})_{0 \leq i,j \leq n}$ est-elle inversible ?

Corrections

1. C'est le théorème des moments.
2. La relation de Cauchy-Schwarz : $s_1^2 \leq s_0 s_2$ aboutit à une contradiction. Une telle fonction f n'existe pas.
3. Matrice de Gram de la famille libre $(1, X, ..., X^n)$ dans $(\mathbb{R}_n[X], < ., . >_2)$

Remarques

Je passe 5 mins sur la question 1 et quelques 40 mins sur la question 2 avant de voir la relation sur s_0, s_1, s_2. La matrice de Hilbert étant apparrue dans mes tentatives désespérées de détermination des coefficients des polynômes approchant f à l'aide de ses moments, il me demande lors de la dernière minute pourquoi celle-ci est inversible.