Chapitre 13 : espaces vectoriels et applications linéaires

Table des matières

1 Premières notions

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 Soient K un corps, puis E un ensemble. On se donne une LCI notée $+$ sur E et une LCE (une loi de composition externe appelée aussi ***multiplication par les scalaires***) notée $\cdot$. Il s'agit d'une application : $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ de $K \times E$ dans E.
On dit que les opérations $+$ et $\cdot$ munissent E d'une structure de K- ***espace vectoriel*** si on a les conditions suivantes :
- l'ensemble $(E, +)$ est un groupe abélien. On note 0_E l'élément neutre pour le loi $+$
- $\forall \lambda \in K$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall (\lambda, \mu) \in K^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ et $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
- $\forall x \in E$, $1_K \cdot x = x$.

Les éléments λ du corps K sont appelés ***scalaires***. Les éléments x du K-espace vectoriel E sont appelés ***vecteurs***.

Exemple 1 • Si $K \subset L$ sont deux corps, L est un K-espace vectoriel.
• Si E un K-espace vectoriel et $\mathscr{A}$ est un ensemble non vide. En posant sur $E^{\mathscr{A}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}$ dans E les opérations $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$ et $\lambda \cdot f : x \longmapsto \lambda \cdot f(x)$, alors, l'ensemble $E^{\mathscr{A}}$ est un K-espace vectoriel de vecteur nul : l'application nulle $x \longmapsto 0_E$.
• Si K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$ en posant $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$ et $\lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\lambda \times x_1, \cdots, \lambda \times x_n)$ alors l'ensemble K^n est un K-espace vectoriel, de vecteur nul $0_E = (0_K, \cdots, 0_K)$.

Proposition 1 Soit E un K-espace vectoriel. On dispose des propriétés suivantes :
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \left[\quad \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E \quad \right]$
- $\forall x \in E, \quad (-1_K) \cdot x = -x$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 Soient $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si $(F, +, \cdot)$ muni des mêmes lois que sur E est encore un espace vectoriel.

Méthode : Comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
Soit F un ensemble. Pour montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur K :
- ▶ trouver un K-espace vectoriel E contenant F
- ▶ montrer que 0_E appartient à F
- ▶ montrer que si x et x' sont dans F et λ dans K, alors $\lambda \cdot x + x' \in F$.

Exemple 2 • L'ensemble $K[X]$ est un K-espace vectoriel.
• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $C^p(I, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^p définies sur l'intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{E}$ une EDL homogène. Alors, l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions définies sur I forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

1.3 Combinaisons linéaires, sommes et sommes directes, supplémentaires

Définition 3 Soit E un K-espace vectoriel. Soient $x_1, \cdots, x_n$, n vecteurs de E. On appelle ***combinaison linéaire*** des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$, toute expression de la forme : $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$, où les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont dans le corps K. Toute combinaison linéaire est encore un élément de l'espace vectoriel E.

Plus généralement, si $\mathscr{A}$ est une partie non vide de E (l'ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas forcément un espace vectoriel), on appelle ***combinaison linéaire d'éléments de*** $\mathscr{A}$, toute expression de la forme : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dans K et $x_1, \cdots, x_n$ dans la partie $\mathscr{A}$.
On dit qu'une famille $(\lambda_x)_{x\in\mathscr{A}}$ de scalaires est ***à support fini*** ou ***presque nulle*** si seulement un nombre fini de scalaires λ_x sont non nuls. Ainsi, toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{A}$ est un vecteur de la forme :

$$\sum_{x\in\mathscr{A}} \lambda_x \cdot x \quad \text{où la famille } (\lambda_x)_{x\in\mathscr{A}} \text{ est à support fini.}$$

Toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{A}$ forment de nouveau des vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble des familles de scalaires à support fini indexées par un ensemble I est noté $K^{(I)}$.

Exemple 3 Les polynômes sont exactement les combinaisons linéaires de la famille $(1, X, X^2, X^3, \cdots) = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2 Soit E un K-espace vectoriel. Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de E.
Alors, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{A}$ forme un sous-espace vectoriel de E. On le note $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ et on l'appelle ***espace vectoriel engendré par la partie*** $\mathscr{A}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{A}) = \left\{ \sum_{a\in\mathscr{A}} \lambda_a \cdot a \in E \ ; \ (\lambda_a)_{a\in\mathscr{A}} \in K^{(\mathscr{A})} \right\}.$$

Enfin, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E pour l'inclusion qui contient la partie $\mathscr{A}$.
Lorsque $\mathscr{A} = \{e_1, \cdots, e_p\}$, on a :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{A}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i \in E \mid \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ \lambda_i \in K \right\}.$$

Exemple 4 • Si $\mathscr{A}$ est un singleton, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ est une ***droite vectorielle***.
- Que vaut $\mathrm{Vect}(\emptyset)$, $\mathrm{Vect}(E)$?
- Donner une CNS sur la partie $\mathscr{A}$ de E pour que $\mathrm{Vect}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.
- Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ sont deux parties de l'espace E, alors :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}).$$

Définition 4 Soient E un K-espace vectoriel, puis F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On pose $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \left\{ x_F + x_G \in E \mid (x_F, x_G) \in F \times G \right\} \quad \text{la } \textbf{\textit{somme}} \text{ des espaces vectoriels } F \text{ et } G.$$

L'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Il s'agit en fait de :

$$F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G).$$

Exemple 5 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, en posant $F=\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $G=\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{k})$, que sont les ensembles $F\cap G$, $F+G$ et $F\cup G$?

Définition 5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. On dit que ces deux sous-espaces vectoriels sont ***en somme directe*** et on note $F+G=F\oplus G$ si l'intersection $F\cap G$ est réduite au singleton $\{0_E\}$.
On dit que les deux sous-espaces vectoriels F et G sont ***supplémentaires dans*** E si la somme $F+G$ est directe et si $F+G=E$.

Méthode : Comment montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires dans E ?

- prendre x dans $F\cap G$
- montrer que $x=0_E$: la somme est directe
- prendre x dans E
- trouver une décomposition de la forme $x=x_F+x_G$, avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$: la somme $F+G$ vaut E.

Méthode : Comment exploiter le fait que $F\oplus G=E$?

- pour tout x dans E, il existe une seule décomposition de x selon $x=x_F+x_G$, avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$.

Exemple 6 • Dans l'exemple 5, les espaces F et G sont-ils en somme directe ? sont-ils supplémentaires ?
• On pose $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, puis $\mathscr{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}$ le sous-ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, les ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E. Quelle est l'unique décomposition de la fonction $x\longmapsto e^x$?
• Résoudre $f'(x)+f(-x)=\exp x$, d'inconnue f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
• Résoudre $f''(x)+f(-x)=x+1$, d'inconnue f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Définition 6 Soit E un K-espace vectoriel. Soient $F_1,\cdots,F_p$ des sous-espaces de E. On rappelle que la somme $F_1+\cdots+F_p$ est exactement l'espace $\mathrm{Vect}(F_1,F_2,\cdots,F_p)$:

$$\sum_{k=1}^{p}F_k=\left\{\sum_{k=1}^{p}x_k\in E\ ;\ \forall k\in[\![1,p]\!],\ x_k\in F_k\right\}.$$

On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}F_i$ est ***directe*** et on note $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}F_i$ si pour tout $(x_1,\cdots,x_p)\in F_1\times F_2\times\cdots\times F_p$, on a l'implication :

$$x_1+x_2+\cdots+x_p=0_E\Longrightarrow\forall i\in\{1,\cdots,p\},\ x_i=0_E.$$

2 Familles libres, génératrices, bases, dimension

2.1 Définitions

Définition 7 Soit E un K-espace vectoriel. Soient $x_1, \cdots, x_p$, p vecteurs de E.

- On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est ***libre*** (ou ***linéairement indépendante***) si :

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in K^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i = 0_E \Longrightarrow \Big[\forall i \in \{1, \cdots, p\},\ \lambda_i = 0_K\Big]$$

Une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ non libre est dite ***liée*** et dans ce cas, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ non tous nuls tels que la combinaison linéaire : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i$ soit égale au vecteur nul.

- On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est ***génératrice dans*** E si tout élément y de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :

$$\forall y \in E, \quad \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in K^p, \quad y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i.$$

- On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ forme une ***base de l'espace vectoriel*** E si la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est à la fois libre et génératrice.

Plus généralement, si $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E,

- la famille $\mathscr{F}$ est libre (on dit aussi ***linéairement indépendante***), si pour toute combinaison linéaire nulle $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0_E$ des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$, alors chaque scalaire λ_i est nul ;
- la famille $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre
- la famille $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = E$$

- la famille $\mathscr{F}$ est une base de E si la famille est à la fois libre et génératrice dans E.

Exemple 7 Soit E un K-espace vectoriel. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. On pose la fonction :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} K^{(\mathscr{F})} & \longrightarrow & E \\ (\lambda_a)_{a \in \mathscr{F}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{a \in \mathscr{F}} \lambda_a \cdot a \end{array} \right. .$$

La famille $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si l'application Φ est injective.
La famille $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si l'application Φ est surjective.
La famille $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si l'application Φ est bijective.

Méthode : Comment montrer qu'une famille est libre ou génératrice ?

Pour montrer que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre :

- ▶ écrire : « Soit $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille ».
- ▶ montrer que chaque scalaire λ_i est nul.

Pour montrer que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice dans E :

- ▶ prendre x dans E
- ▶ trouver une décomposition de x en une combinaison linéaire $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$.

Méthode : Comment exploiter le fait qu'une famille soit liée, soit une base ?

Pour exploiter le fait qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée :

- l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Pour exploiter le fait qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base :

- n'importe quel vecteur x de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Définition 8 Soit E un K-espace vectoriel, puis $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. Soit $x \in E$. On appelle ***p-uplet des coordonnées du vecteur x selon la base*** $(e_1, \cdots, e_n)$, les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ qui apparaissent dans l'unique décomposition du vecteur x comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(e_1, \cdots, e_p)$.
On peut étendre la définition à une base quelconque $(e_i)_{i\in I}$ de E.

Exemple 8 Quelles sont les coordonnées du vecteur nul et du vecteur e_{i_0} selon la base $(e_1, \cdots, e_p)$?

Exemple 9 • Toute famille contenant le vecteur nul, ou contenant deux fois le même vecteur est liée.
• Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
• Toute sur-famille d'une famille génératrice dans E est encore génératrice dans E.
• Dans $K[X]$, toute famille de polynômes de degrés deux à deux différents forme une famille libre. De telles familles de polynômes sont appelées ***familles à degrés échelonnés***.
• La réciproque est-elle vraie ?

2.2 Deux théorèmes en dimension finie

Définition 9 Soit E un K-espace vectoriel. On dit que l'espace E est ***de dimension finie*** s'il existe une famille génératrice finie. En d'autres termes, il existe p vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ tels que tout vecteur y de E puisse s'écrire comme combinaison linéaire de ces p vecteurs.
On dit que l'espace E est ***de dimension infinie*** s'il n'est pas de dimension finie.

Exemple 10 • L'espace $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. L'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. L'espace des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1000 est de dimension finie.
• L'espace des polynômes $K[X]$ ou des fonctions $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. L'espace $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

On dispose du théorème suivant connu sous le nom du **théorème de la base incomplète/extraite**.

Théoréme 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice.
• **théorème de la base incomplète** : il existe une base $\mathscr{B}$ de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$. Autrement dit, toute famille libre peut être complétée en une base de E.
• **théorème de la base extraite** : il existe une base $\mathscr{B}'$ de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que $\mathscr{B}' \subset \mathscr{G}$. Autrement dit, de toute famille génératrice, on peut en extraire une base de E.

Théoréme 2 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice. Alors :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G}).$$

Remarque 1 Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les familles libres contiennent un nombre fini de vecteurs et n'importe quelle famille libre contient toujours moins de vecteurs que n'importe quelle famille génératrice.

Corollaire 1 Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases $\mathscr{B}$ de E comportent exactement le même nombre d'éléments. On appelle ***dimension*** de l'espace vectoriel E, le nombre de vecteurs commun à toutes les bases et on le note $\dim E$.

Méthode : Comment exploiter le théorème de la base incomplète ?

- ▶ dans un espace de dimension finie, il existe forcément des bases finies
- ▶ toute famille libre dans un espace E de dimension finie peut être complétée en une base de E
- ▶ si $(e_1, \cdots, e_r)$ est une famille libre dans E de dimension finie, on peut compléter cette famille en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E et les espaces $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$ et $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ sont supplémentaires dans E.

Méthode : Comment exploiter le théorème sur les cardinaux ?

Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille à p vecteurs dans un espace E de dimension finie

- ▶ si $p = \dim E$, pour montrer que la famille est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre (ou bien qu'elle est génératrice) seulement
- ▶ si $p > \dim E$, la famille est liée
- ▶ si $p < \dim E$, la famille n'est pas génératrice.

Exemple 11 Dans $\mathbb{C}^d$, que peut-on dire d'une famille de p vecteurs dans les cas suivants :

- ▷ $p < d$
- ▷ $p = d$
- ▷ $p > d$.

2.3 Calculs de dimensions

Définition 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, puis $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On appelle ***rang de la famille*** $\mathscr{F}$ et on note $\mathrm{Rg}(\mathscr{F})$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Exemple 12 • Sous les notations, déterminer une CNS sur $\mathrm{Rg}(\mathscr{F})$ pour que la famille $\mathscr{F}$ soit libre. Déterminer une CNS sur $\mathrm{Rg}(\mathscr{F})$ pour que la famille $\mathscr{F}$ soit génératrice dans E.

• Si $\mathscr{F} = (x_1, \cdots, x_r)$ est une famille de $r \geqslant 2$ vecteurs de E, comparer les rangs de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G} = \left(\sum_{k=1, k \neq i}^{r} x_k \right)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

Proposition 3 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

- si F est un sous-espace de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ et l'égalité des dimensions se transforme en égalité d'ensembles
- si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ [formule de Grassmann] De plus, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$ si et seulement si F et G sont en somme directe. Dans ce cas, si $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G, alors $(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ sera une base de $F \oplus G$
- si $F_1, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces de E, alors $\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ et l'égalité a lieu si et seulement si la somme des F_i est directe. Là encore, si l'on découpe une base $\mathscr{B}$ de E en p morceaux disjoints $\mathscr{B}_i$, alors les $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$ sont en somme directe et si l'on a des espaces G_i en somme directe, en recollant des bases $\mathscr{C}_i$ de G_i, on obtient une base de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} G_i$.
- si F et G sont de dimension finie sur K, on peut munir $F \times G$ des opérations $(x_F, x_G) + (y_F, y_G) = (x_F + y_F, x_G + y_G)$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ pour former un espace vectoriel sur K et dans ce cas, $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$

Méthode : Comment montrer une égalité entre deux espaces vectoriels F et G ?

- ▶ montrer les deux inclusions
- ▶ montrer une seule inclusion puis l'égalité des dimensions finies.

2.4 Deux exemples fondamentaux

2.4.1 Espaces K^n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble K^n des n-uplets d'éléments dans le corps K muni de l'addition et de la multiplication coordonnées par coordonnées forme un espace vectoriel de dimension n. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$, avec :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad e_i = (0, \cdots, 0, 1, \cdots, 0) \quad \text{le 1 étant en } i\text{-ème place}$$

forme une base de K^n appelée ***base canonique de*** K^n.

Exemple 13 • Montrer que la famille de vecteurs $(u_1 = (2, 1), u_2 = (1, 2))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

- Montrer que la famille de vecteurs $(u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (2, 1, 1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{k}$ selon cette base. Montrer que l'ensemble des vecteurs dont la somme des coordonnées selon cette base est nulle forme un espace vectoriel et en déterminer une base.
- La famille $(1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Soient a, b et c trois nombres réels. Déterminer une CNS sur a, b et c pour que $a + bj + cj^2$ soit nul.

2.4.2 Espaces $K_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $K[X]$ de dimension $(n+1)$. La famille $(1, X, \cdots, X^n)$ forme une base de $K_n[X]$ appelée ***base canonique de*** $K_n[X]$.

Exemple 14 Soit $(P_0, \cdots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls dans $K_n[X]$ de degrés deux à deux distincts (famille à degrés échelonnés). Alors la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ forme une base de $K_n[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(X(X-1)\cdots(X-k+1))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une base de $K_n[X]$.
Si $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \deg(Q_k) = k,$$

alors la famille $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Méthode : Comment trouver une base d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Si F est un sous-espace d'un espace de dimension finie E :
- prendre x dans E
- résoudre les équations d'appartenance à F ; pour cela :
  - obtenir un système linéaire d'équations
  - résoudre le système par la méthode du pivot de Gauss
  - résoudre en exprimant les inconnues en fonction d'un nombre minimum d'autres inconnues (appelés paramètres)
- faire apparaître une combinaison linéaire de x en fonction de vecteurs connus et de scalaires issus des paramètres
- la famille de ces vecteurs connus forme une base de F.

Méthode : Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ?
- trouver une base de cet espace
- compter le nombre de vecteurs dans cette base.

Exemple 15 • Montrer que l'ensemble d'équation $x + y - 5z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puis en déterminer une base et sa dimension.

• Montrer que $E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base puis sa dimension.

• Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ un élément non nul de $\mathbb{C}^n$. Montrer que l'ensemble $H = \left\{ x \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k\ x_k = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

• Soit $\mathscr{A}$ une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble :

$$\left\{ P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathscr{A}) = \{0\} \right\}$$

est un espace vectoriel et en déterminer une base.

3 Applications linéaires

3.1 Définitions

Définition 11 Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que l'application f est ***linéaire*** si :
- $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x + x') = f(x) + f(x')$
- $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in E$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Méthode : Comment montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire ?
- prendre x et x' dans E, λ dans K
- vérifier que $f(\lambda \cdot x + x') = \lambda \cdot f(x) + f(x')$.

Définition 12 On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Lorsque $E = F$, les applications linéaires $f : E \longrightarrow E$ sont appelés ***endomorphismes*** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.
Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ bijective est appelée ***isomorphisme linéaire*** ou ***isomorphisme***.
Un endomorphisme bijectif $f : E \longrightarrow E$ est appelé ***automorphisme linéaire*** ou ***automorphisme***.

Exemple 16 • L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \longmapsto f'$ est linéaire.

• Pour tout K-espace vectoriel E et pour tout $\lambda \in E$, $x \longmapsto \lambda \cdot x$ est un endomorphisme de E appelé ***homothétie de rapport*** λ.

• L'application $x \longmapsto e^x$ n'est pas un endomorphisme dans $\mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Définition 13 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux K-espaces vectoriels. On appelle ***noyau*** de f et on note $\mathrm{Ker} f$, l'ensemble :

$$\mathrm{Ker} f = \Big\{ x \in E \mid f(x) = 0_F \Big\}.$$

On appelle ***image*** de F et on note $\mathrm{Im} f$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im} f = f(E) = \Big\{ y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x) \Big\}.$$

Proposition 4 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors, le noyau $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et l'image $\mathrm{Im} f$ est sous-espace vectoriel de F. De plus, l'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ et l'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

Méthode : Comment montrer qu'une application linéaire f est injective ?

▶ prendre x dans $\mathrm{Ker} f$

▶ montrer que $x = 0_E$.

Exemple 17 Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes :

• $z \longmapsto \Re e(z) \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$, sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel

• $f \longmapsto 2f'' + 3f' + f \in \mathscr{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$

• $f(x, y, z) = (2x - 5y + z, 5y - 3x, 3z - 2y + 2x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

3.2 Caractérisations des applications linéaires sur une base

Théoréme 3 Soient E et F deux K-espaces vectoriels, l'espace E étant de dimension finie.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. Soit $(y_1, \cdots, y_p)$, p vecteurs quelconques de l'espace F. Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \quad f(e_i) = y_i.$$

Il s'agit de l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot y_i. \end{array} \right. .$$

Corollaire 2 Deux applications linéaires qui coïncident sur une même base sont égales.

Proposition 5 Soient E et F deux K-espaces vectoriels, l'espace E étant de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors :
- la fonction f est injective si et seulement si la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est libre ;
- la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est toujours une famille génératrice dans $\mathrm{Im}(f)$;
- la fonction f est surjective si et seulement si la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est génératrice dans F ;
- la fonction f est bijective si et seulement si la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est une base de F.

Méthode : Comment construire une application linéaire qui nous arrange ?

▶ prendre une base adaptée au problème $(e_1, \cdots, e_n)$

▶ construire une application linéaire f en prenant des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ ... $f(e_n)$ adéquats.

Proposition 6 Si E et F sont deux espaces vectoriels sur K, avec E de dimension finie, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, en posant $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, puis $\mathscr{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_p))$,
- l'application linéaire f est injective $\iff$ la famille $\mathscr{F}$ est libre
- l'application linéaire f est surjective $\iff$ la famille $\mathscr{F}$ est génératrice dans F
- l'application linéaire f est bijective $\iff$ la famille $\mathscr{F}$ est une base de F.

Définition 14 Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire, l'espace E étant de dimension finie. L'espace $\mathrm{Im}f$ est alors de dimension finie. On appelle ***rang*** de f, le nombre :

$$\mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}f) = \dim f(E).$$

3.3 Théorème du rang

Théoréme 4 Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec l'espace E de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, une application linéaire. Alors, on dispose de la formule suivante :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}f) + \mathrm{Rg}f.$$

Plus précisément, si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, alors l'application :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} S & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme linéaire.

Méthode : Comment exploiter le théorème du rang ?

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est une bijection

▶ vérifier que les espaces E et F sont de même dimension finie

▶ montrer que f est injective (ou bien surjective) seulement

▶ on peut aussi vérifier que f transforme une base de E en une base de F.

Pour calculer la dimension d'un espace vectoriel F :

▶ partir d'un bon espace vectoriel connu E

▶ trouver un isomorphisme $f : E \longrightarrow F$

▶ alors : $\dim E = \dim F$.

Exemple 18 • Montrer que l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel et en trouver une base.

• Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, avec E de dimension finie, alors f injective $\iff \mathrm{Rg}f = \dim E$

• Montrer que l'ensemble des suites u vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

• Soit $P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les racines de $P(X)$.
Montrer que l'ensemble des suites u vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+d} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \cdot u_{n+k}$$

est un espace vectoriel et en déterminer une base.

• Montrer que dans un espace de dimension finie E, si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \iff \exists f \in \mathscr{L}(E),\ F = \mathrm{Ker}f$ et $G = \mathrm{Im}f$.

• Montrer que pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ deux à deux distincts dans $\mathbb{C}$, l'application $\varphi : P(X) \longmapsto (P(x_1), \cdots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}^n$. En déduire l'existence des polynômes interpolateurs de Lagrange $P_i(X)$ tels que $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$, puis que $(P_1, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. En déduire également que pour tout $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n-1$, la famille $(Q(X + x_1), \cdots, Q(X + x_n))$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

• Soient a et b deux endomorphismes de E, espace de dimension finie. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b) \iff \exists p \in GL(E),\ a = p \circ b.$$

3.4 Espace $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 7 Si E et F sont deux espaces vectoriels sur K, l'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est encore un K-espace vectoriel. De plus, si E et F sont de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E, F)$ aussi et : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

3.5 Algèbre $\mathscr{L}(E)$

Proposition 8 Soit E un K-espace vectoriel.

• L'ensemble $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ forme un anneau d'élément nul $0_{\mathscr{L}(E)}$ égal à la fonction nulle et d'élément unité $1_{\mathscr{L}(E)}$ égal à la fonction id_E.

• L'ensemble $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ forme un K-espace vectoriel et si E est de dimension finie, $\dim(\mathscr{L}(E)) = (\dim E)^2$.

3.6 Homothéties, projecteurs, symétries

3.6.1 Homothéties

Ce sont les applications de la forme $h : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x. \end{array} \right.$.

3.6.2 Projecteurs

Définition 15 Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux espaces supplémentaires de E. On appelle ***projection*** (ou un ***projecteur***) sur l'espace F, parallèlement à l'espace G, l'application linéaire notée p_F définie de la façon suivante : si $x \in E$, on pose $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On définit alors l'application : $p_F : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$.

Méthode : Comment savoir si un endomorphisme f est un projecteur ?
- ▶ montrer que $f \circ f = f$
- ▶ l'application f est alors le projecteur sur $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$.

Méthode : Comment caractériser un projecteur f ?
- ▶ déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$
- ▶ le projecteur f est la projection sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$.

Exemple 19 • L'application $z \longmapsto \Re e(z)$ est un projecteur sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application qui à tout polynôme $P(X) \in K[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par X^n est un projecteur sur $K_{n-1}[X]$, parallèlement à $X^n \cdot K[X]$.

• Expliciter la projection $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, sur $H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1, \cdots, 1))$.

3.6.3 Symétries

Dans ce paragraphe, on considère un corps de caractéristique différente de 2, pour avoir : $2 \neq 0$ dans le corps K.

Définition 16 Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux espaces supplémentaires de E. On appelle ***symétrie*** par rapport à l'espace F, parallèlement à l'espace G, l'application linéaire notée s_F définie de la façon suivante : si $x \in E$, on pose $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On définit alors l'application : $s_F : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$.

Méthode : Comment savoir si un endomorphisme f est une symétrie ?
- ▶ montrer que $f \circ f = \mathrm{id}$
- ▶ l'application f est alors la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

Méthode : Comment caractériser une symétrie f ?
- ▶ déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$
- ▶ la symétrie f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

Exemple 20 • $f : z \longmapsto \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \, \overline{z}$ est une symétrie sur $\mathbb{C}$.

• si p est un projecteur, $2p - \mathrm{id}$ est une symétrie.

4 Dualité

4.1 Hyperplans et formes linéaires

Définition 17 Soit E un K-espace vectoriel. On appelle ***forme linéaire***, toute application linéaire $\varphi : E \longrightarrow K$ appartenant donc à $\mathscr{L}(E, K)$. On appelle ***hyperplan*** de E, tout noyau d'une forme linéaire non nulle. On appelle ***dual de*** E, l'ensemble noté E^* défini par $E^* = \mathscr{L}(E, K)$.

Proposition 9 • Si H est un hyperplan de l'espace E, alors pour tout vecteur $x \in E \setminus H$, alors :

$$H \oplus \mathrm{Vect}(x) = E.$$

• Si F est un sous-espace de E et s'il existe un vecteur non nul $y \in E$ tel que :

$$F \oplus \mathrm{Vect}(y) = E,$$

alors l'espace F est un hyperplan.

• En dimension finie, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exemple 21 • Pour tout $\lambda \in K$, l'ensemble $(X - \lambda) \cdot K[X]$ des multiples de $(X - \lambda)$ est un hyperplan de $K[X]$.

• Dans $\mathbb{R}^d$, les hyperplans sont exactement les ensembles associés aux équations cartésiennes $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k\, x_k = 0$, avec $(a_1, \cdots, a_d)$ non nul dans $\mathbb{R}^d$.

4.2 Formes linéaires coordonnées et base duale

Proposition 10 Soit E de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Si $i \in \{1, \cdots, n\}$, l'application $e_i^* : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$, où x_i est la coordonnée de x selon le vecteur e_i de la base $\mathscr{B}$ est une forme linéaire.
De plus, la famille $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ forme une base de E^* appelée ***base duale de*** $\mathscr{B}$.
Réciproquement, toute base de E^* est une base duale d'une certaine base de E.

Exemple 22 Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes tous différents.

1. Montrer qu'en posant $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P(X) & \longmapsto & P(z_i) \end{array} \right.$, on définit une base $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]^*$.
2. De quelle base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, cette base est-elle la base duale ?

5 Espaces affines, sous-espaces affines

5.1 Premières notions, notations

Définition 18 Soit E un K-espace vectoriel . Chaque élément $\vec{u}$ de E est un vecteur. On peut aussi considérer le point de vue plutôt géométrique et considérer que les éléments de E sont des points et que les vecteurs sont des différences de points : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \iff \vec{u} = B - A \iff B = A + \vec{u}$.
De ce point de vue, on dit que E est un ***espace affine***. On note O le point vecteur nul : il est parfois appelé ***origine***.

Proposition 11 *relation de Chasles*
Pour tous points A, B et C de E : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

5.2 Sous-espaces affines

Dans toute la suite, on se donne un espace affine E (c'est-à-dire un espace vectoriel sur un corps K).

Définition 19 Soit $\mathscr{A}$ une partie de E. On dit que $\mathscr{A}$ est un sous-espace affine de E s'il existe un point Ω de E et un sous-espace vectoriel F de E tels que :

$$\mathscr{A} = \Omega + F = \{\Omega + \vec{u} \in E \mid \vec{u} \in F\}.$$

Soient Ω un point de E et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace affine ***passant par*** Ω et ***dirigé par*** F, le sous-espace affine $\Omega + F$. Ce sous-espace vectoriel F est appelé ***direction de*** $\mathscr{A}$ et noté : $F = \overrightarrow{\mathscr{A}}$.

Méthode : Comment montrer qu'une partie de E est un espace affine ?

Soit $\mathscr{A}$ une partie de E. Pour vérifier qu'il s'agit d'un sous-espace affine de E :

- montrer qu'il existe un point Ω dans $\mathscr{A}$
- montrer que l'ensemble $F = \{\overrightarrow{\Omega M} \mid M \in \mathscr{A}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 23 • Tout singleton $\{\Omega\}$ est un sous-espace affine.

• L'ensemble des solutions de l'équation matricielle $A \cdot X = Y$, d'inconnue X est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathscr{M}_{q,1}(K)$.

• L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace affine. Déterminer la structure des solutions de l'équation :

$$y'' + y' + y = \cos x.$$

Définition 20 Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux sous-espaces affines de E. On dit que le sous-espace affine $\mathscr{A}$ est ***parallèle*** à $\mathscr{B}$ si $\overrightarrow{\mathscr{A}} \subset \overrightarrow{\mathscr{B}}$.

Proposition 12 Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. Soit $y \in F$. On a l'alternative suivante :

• ou bien l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ n'admet aucune solution

• ou bien cette équation admet au moins une solution x_0 et dans ce cas, les solutions forment exactement le sous-espace affine $x_0 + \mathrm{Ker} f$ passant par x_0 et dirigé par $\mathrm{Ker} f$.

Exemple 24 Interpréter sous forme d'équation affine, les problèmes suivants :

• l'ensemble des suites u arithmético-géométriques de la forme $u_{n+1} = 3u_n + 5$

• l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = e^x$

• la résolution du système $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + 3z = 1 \end{cases}$.