

# CONTINUITÉ

## Exercice 1. Une bijection continue non bicontinue

On dit qu'une fonction  $g : \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{Q}_+^*$  si pour tout  $x_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \quad (|x - x_0| < \eta) \implies (|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon).$$

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel strictement positif. On considère l'application

$$f \begin{cases} \mathbb{Q}_+^* & \longrightarrow ]0; \alpha[ \\ x & \longmapsto x - \alpha \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \end{cases}$$

1. a) Soit  $x \in \mathbb{Q}_+^*$ . Démontrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \quad (|y - x| < \delta) \implies \left( \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \right).$$

- b) En déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{Q}_+^*$ .

2. a) Démontrer que  $f$  réalise une bijection entre  $\mathbb{Q}_+^*$  et  $f(\mathbb{Q}_+^*)$ .

- b) Soient  $y \in f(\mathbb{Q}_+^*)$  et  $x \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $y = f(x)$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$I_n = \left] n\alpha + y - \frac{1}{n} ; n\alpha + y + \frac{1}{n} \right[.$$

- $\alpha$ ] Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un nombre rationnel  $x_n$  dans l'intervalle  $I_n$ . On définit ainsi une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ . Quelle est la limite de cette suite ?

- $\beta$ ] Démontrer qu'il existe un rang  $N \geq 1$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad f(x_n) \in \left] y - \frac{1}{n} ; y + \frac{1}{n} \right[ ,$$

et en déduire la limite de la suite  $(f(x_n))_{n \geq N}$ .

- $\gamma$ ] Démontrer que  $f^{-1}$  est discontinue en  $y$ .

## Récréation mathématique

Vous êtes coincé dans un bouchon automobile. Et, comme toujours, vous avez l'impression que les autres files avancent plus vite que la votre.

Peu importe, me direz-vous. En automobiliste moyen, vous quittez votre file pour rejoindre celle qui semble se déplacer beaucoup plus vite, juste à côté...

Mais là, frappé par une guigne céleste, vous constatez que la file que vous venez de quitter se déplace soudainement plus vite que celle que vous occupez dorénavant.

La faute à « pas de chance » ? Peut-être pas...

En fait, les statistiques démontrent que toutes les files d'un bouchon se déplacent grosso modo à la même vitesse. Alors comment expliquer cette impression que les autres files se déplacent plus vite que la votre ? La logique peut vous aider à comprendre quel phénomène dupe votre esprit...