FEUILLE D'EXERCICES N° 19

SÉRIES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES

Études pratiques de séries

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4+3n+1}{2n^5+n^2+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, lorsque $x \in \mathbb{R}$ et a_n est la $n^{ème}$ décimale de π.

— ○ —

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k}$.

— ○ —

Exercice 3

Soient α et β deux nombres réels positifs.

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$. [séries de Bertrand]

— ○ —

Exercice 4

Tracer l'ensemble :

$$\left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^n} \text{ est convergente} \right\}.$$

— ○ —

Exercice 5

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(10 - n^{1/p_n}\right)$ où p_n désigne le nombre de chiffres significatifs dans l'écriture en base 10 de l'entier n.
[indication : on groupera les termes par paquets.]

— ○ —

Exercice 6

Déterminer la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_n u_n$ avec :

- $u_n = \dfrac{e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - 1}{\sin(\sqrt{n}) + \ln(n^2+3n+7)}$
- $u_n = a^{H_n}$, avec $a > 0$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt{n}}$, avec $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$
- $u_n = \cos(\pi\,\sqrt{n^2+n+1})$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$
- $u_n = \cos\left(n^2\,\pi\,\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\omega_n}$, avec $\omega_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $u_n = \sin\left(\pi n\left(\ln\dfrac{n}{n-1}\right)\right)$
- $u_n = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- $u_n = (n+(-1)^n)^a - n^a$, avec $a > 0$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n^a+(-1)^n)}$, avec $a > 0$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^a n + (-1)^n}$, avec $a > 0$

— ○ —

Exercice 7

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ la limite.
2. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_n (u_n - \ell)$.
3. Étudier la nature de la série : $\displaystyle\sum_n (-1)^n |u_n - \ell|$.

— ○ —

Exercice 8

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$.

—— ○ ——

Exercice 9

Soit $\alpha > 0$. On définit la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n^\alpha}.$$

1. Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum_n u_n$.
2. Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum_n (-1)^n\ u_n$.

—— ○ ——

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul $x_n > 0$ tel que :
$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{n+1}{n}.$$
2. Étudier la nature de la série $\sum_n x_n$.

—— ○ ——

Exercice 11

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k}\right).$$

1. Montrer que la suite $(|z_n|)$ est convergente.
2. Montrer que la suite z diverge.

—— ○ ——

Exercice 12

Quelle est la nature des séries suivantes :

- $\sum_n \frac{e^{in \ln n}}{n}$
- $\sum_n \frac{e^{in \ln n}}{n\ \ln n}$

—— ○ ——

Exercice 13

Soit $\alpha > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arccos\left(\frac{1+n^\alpha}{2+n^\alpha}\right)$.

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n\ u_n$.

—— ○ ——

Exercice 14

Soit $\alpha > 0$.

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^\alpha}$.

1. Soient $(x_0, \cdots, x_n)$ et $(y_0, \cdots, y_n)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.
Simplifier l'expression $\sum_{k=1}^{n} x_k\ (y_k - y_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x_{k+1})\ y_k$.
2. On pose $S_0 = 0$, puis $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. En déduire la nature de la série $\sum_n \frac{\cos n}{n^\alpha}$.
4. On suppose dans cette question que la série $\sum_n \frac{\cos n}{n}$ est absolument convergente.
   (a) Montrer que la série $\sum_n \frac{\cos^2 n - \frac{1}{2}}{n}$ est encore absolument convergente.
   (b) En déduire une contradiction.
5. Déterminer la nature de la série $\sum_n \left|\frac{\cos n}{n^\alpha}\right|$.
6. Déterminer la nature des séries $\sum_n \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_n \left|\frac{\sin n}{n}\right|$.
7. Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{e^{i\theta n}}{n}$, pour θ dans $\mathbb{R}$.

—— ○ ——

Aspects théoriques

Exercice 15

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs puis $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

—— ○ ——

Exercice 16

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

—— ○ ——

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

1. Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} 2^p \cdot u_{2^p}$ sont de même nature.
2. En déduire que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente, alors il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \min\left\{u_n, \frac{1}{n}\right\}$.
3. Soient α et β deux nombres réels strictement positifs. Déterminer une CNS sur α et β pour que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ soit convergente.

—— ○ ——

Exercice 18

On note p_n le $n^{\grave{e}me}$ nombre premier.

1. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)$ sont de même nature.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k}$ est convergente et calculer sa somme.
3. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Exercice 19

Montrer que pour tout entier naturel k, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}}$ est convergente et que sa somme est un entier.

Exercice 20

Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes positifs ou nuls et vérifiant l'assertion suivante :
« pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes positifs telle que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot v_n$ est encore convergente. »

Exercice 21

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs entre 0 et 1 dont la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente. Pour toute suite u dans l'ensemble $\mathscr{E}$, on note $\Sigma(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que si u est un élément non nul dans $\mathscr{E}$, alors $\Sigma(u) > 0$.
2. Lorsque u décrit l'ensemble $\mathscr{E}$, quelles sont les valeurs décrites par $\Sigma(u)$?

   Si u est un élément de $\mathscr{E}$ et $\alpha > 0$, on note u^α la suite de terme général $(u_n)^\alpha$.
3. Déterminer les nombres $\alpha > 0$ tels que :
$$u \in \mathscr{E} \Longrightarrow u^\alpha \in \mathscr{E}.$$
4. Déterminer l'ensemble
$$\mathscr{A} = \left\{ \frac{\Sigma(u^2)}{\Sigma(u)} \text{ t.q. } u \in \mathscr{E} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \right\}.$$

Exercice 22

1. Soit u une suite réelle positive et on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ sont de même nature.
2. Soit u une suite de réels strictement positifs et convergeant vers 0.

   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, puis $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$.

   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ ont même nature.

Exercice 23

1. Soit u une suite réelle ne s'annulant pas et telle que la limite $\ell = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ell < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \binom{2n}{n} x^n$.
3. Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n (2 - u_n)$.

Exercice 24

Pour toute suite réelle u, on note $E(u)$ l'ensemble des entiers $p \geqslant 1$ tels que la série $\displaystyle\sum_n u_n^p$ est convergente.

1. On suppose u à termes positifs. Montrer que $E(u)$ est soit vide, soit de la forme $[p_0, +\infty[\cap\mathbb{N}$.
2. Donner un exemple de suite u telle que $E(u)$ soit vide et pour tout entier $p_0 \geqslant 1$, donner un exemple de suite u telle que $E(u) = [p_0, +\infty[\cap\mathbb{N}$.
3. Déterminer $E(u)$ dans les cas suivants :
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}}\right)$.

Exercice 25

Soient u et v deux suites réelles, puis $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- la suite u est à valeurs strictement positives
- la série $\displaystyle\sum_n v_n$ est ACV
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$

1. Montrer que la suite $(n^\lambda\ u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{n^n}{n!\ e^n}$.
3. De quelle autre façon aurait-on pu obtenir ce résultat ?

Exercice 26

Soit u une suite récurrente d'itératrice f de classe C^2 telle que la suite u converge vers ℓ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
Dans toute la suite, on pose $\theta_n = u_n - \ell$.

1. On suppose que $m = f'(\ell)$ vaut 1 et $f''(\ell) \neq 0$.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{\theta_{n+1}} - \frac{1}{\theta_n}\right)$.
   (b) Déterminer un équivalent de θ_n.
2. On suppose que $0 < m = f'(\ell) < 1$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \theta_n$ est convergente.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{1}{m}\,\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right)$ est convergente.
   (c) En déduire qu'il existe $c \neq 0$ tel que : $\theta_n \sim c\, m^n$.

Thèmes variés

Exercice 27

1. Soient $0 < a < b$ deux réels.
   Simplifier $\tan\Big(\arctan b - \arctan a\Big)$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ est convergente.
3. Calculer la somme de la série précédente.

—— ○ ——

Exercice 28

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n$. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En déduire l'existence d'une constante γ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \circ(1).$$

—— ○ ——

Exercice 29

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel.

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{S_n}$, où $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

—— ○ ——

Exercice 30

1. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
   (a) Montrer que si x et y sont strictement positifs, alors :
   $$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$
   (b) Montrer que pour tous nombres strictement positifs $u_1, \cdots, u_n$ et tous nombres réels strictement positifs $v_1, \cdots, v_n$, alors :
   $$\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} {v_k}^q\right)^{1/q}.$$
   [indication : on se ramènera au cas où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \sum_{k=1}^{n} {v_k}^q = 1$.]
   (c) En déduire que si $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres strictement positifs telle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n$ converge, alors pour tout $\alpha > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{\omega_n}^\alpha}{n}$ est encore convergente.

—— ○ ——

Exercice 31

1. Soit $u_0 \in [0, \pi]$, puis $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_n u_n$.
2. Étudier la suite v, avec $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.
3. Montrer que la suite v converge. On note ℓ la limite.
4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n (v_n - \ell)$.
5. On pose $w_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $w_{n+1} = \sin w_n$.
   (a) Déterminer un équivalent de w_n. [indication : on trouvera $\alpha > 0$ tel que la quantité $\left(\dfrac{1}{w_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{w_n^\alpha}\right)$ converge vers un réel strictement positif.]
   (b) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_n w_n^a$, avec $a > 0$.
6. On prend $a_0 > 0$, puis $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.
   (a) Étudier la suite a.
   (b) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_n a_n^\alpha$, avec $\alpha > 0$.

—— ○ ——

Exercice 32

Soient p et q deux entiers strictement positifs.

1. On considère la suite $H = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on forme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en prenant d'abord les p premiers termes de H, puis les opposés des q termes suivants de H, puis les p termes suivants de H, puis les opposés des q termes suivants de H, etc.

   Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et le cas échéant calculer la somme sous forme d'une intégrale.
2. Reprendre la question précédente avec la suite $H = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

—— ○ ——

Exercice 33

Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_n \tan\Big(\pi(7 + 4\sqrt{3})^n\Big)$ et $\displaystyle\sum_n \sin\Big(\pi(5 + \sqrt{17})^n\Big)$.

—— ○ ——

Exercice 34

[Intégrales de Wallis et formule de Stirling]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$.
   (a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$. En déduire que $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis que $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} \frac{p((2p)!)^2}{2^{4p}(p!)^4} = \frac{1}{\pi}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln\Big(n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n\Big)$.

(a) Montrer que la suite (u_n) converge. En déduire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $n! \sim \lambda n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

(b) Montrer la formule de Stirling.

— ○ —

Un peu plus difficile

Exercice 35

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :

- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

— ○ —

Exercice 36

Soit u une suite injective de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ppcm}(u_1, u_2, \cdots, u_n)}$.

— ○ —

Exercice 37

Soit u une suite de nombres réels. Montrer que l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \mid \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bijective et la série } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \text{ convergente} \right\}$$

est soit vide, soit un singleton, soit $\mathbb{R}$ tout entier.

— ○ —

Exercice 38

Déterminer la nature de la série $\sum_n \sin(\pi\ n!\ e)$.

— ○ —

Exercice 39

Déterminer la nature de la série $\sum_n \left(2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)$.

— ○ —