Pour le 22/11/2018

# DM n° 7 : Dérivation

**Correction du problème 1 –**
**Partie I – Prélimiaires**

1. Les graphes (y compris celui de $f_4$) : voir figure 1.

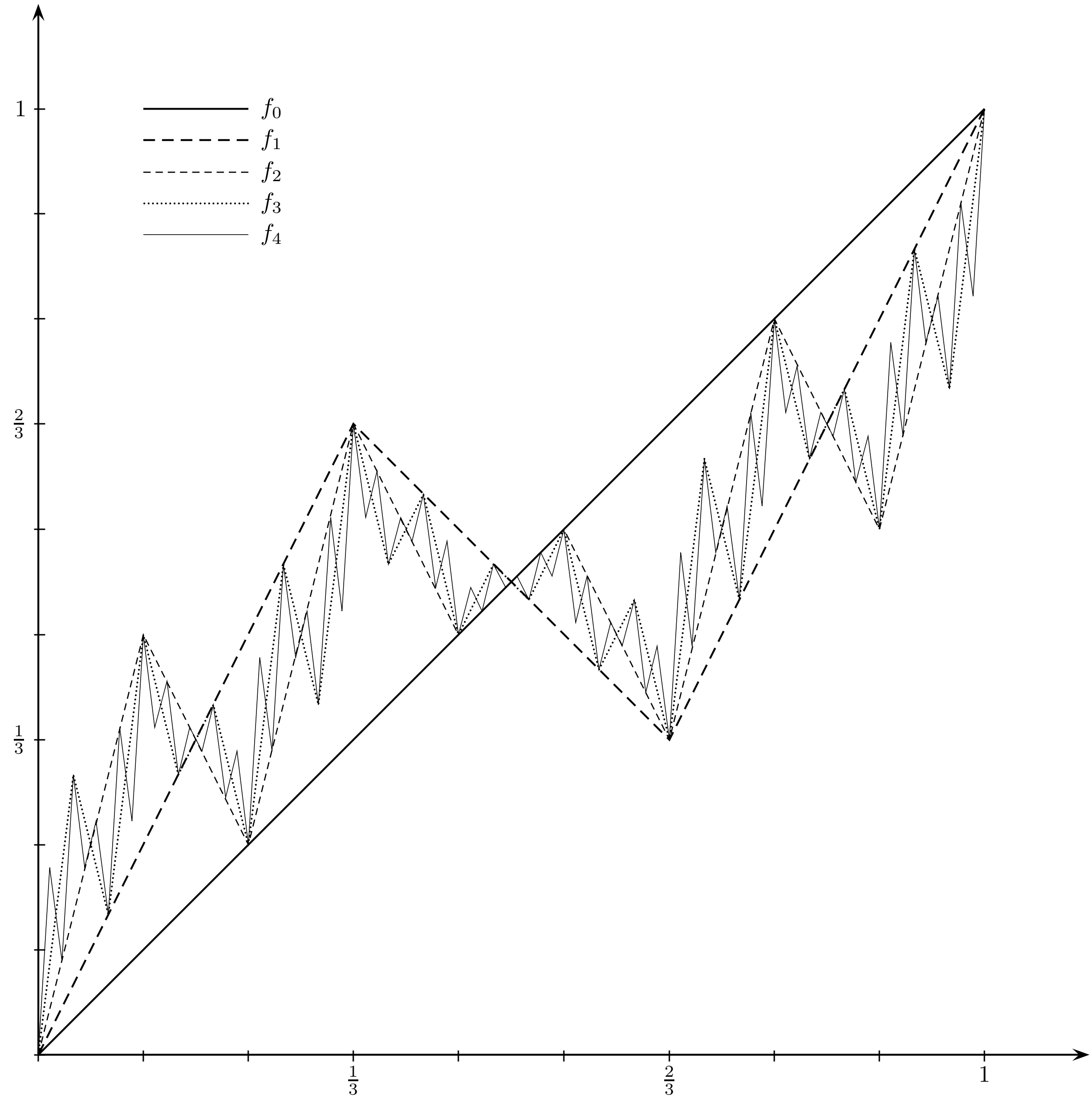


Figure 1 – Courbes représentatives de $f_0$, $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$.

2. (a) À chaque étape, on subdivise chaque intervalle en 3 : ainsi, on multiplie le nombre de segments par un facteur 3. Par conséquent, $\boxed{\alpha_n = 3^n}$.

   (b) • Pour $n = 0$ : $\boxed{p_{0,1} = 1}$.

- Pour $n=1$ : $\boxed{p_{1,1}=2,\ p_{1,2}=-1,\ p_{1,3}=2}$
- Pour $n=2$ :

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{2,i}$ | 4 | −2 | 4 | −2 | 1 | −2 | 4 | −2 | 4 |

- Pour $n=3$ :

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{2,i}$ | 8 | −4 | 8 | −4 | 2 | −4 | 8 | −4 | 8 | −4 | 2 | −4 | 2 | −1 | 2 |

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −4 | 2 | −4 | 8 | −4 | 8 | −4 | 2 | −4 | 8 | −4 | 8 |

(c) Pour tout $k \in [\![1,3^n]\!]$,

$$\boxed{\begin{cases} p_{n+1,3k-2} = 2p_{n,k} \\ p_{n+1,3k-1} = -p_{n,k} \\ p_{n+1,3k} = 2p_{n,k} \end{cases}}$$

Cela provient directement de la description de $f_n$. Cela peut se dire sans plus de justification. Si vous voulez des justifications, en voilà, pour $p_{n+1,3k-2}$ (les autres à l'avenant) :

$$p_{n+1,3k-2} = \frac{f_{n+1}(\frac{3k-2}{3^{n+1}}) - f_{n+1}(\frac{3k-3}{3^{n+1}})}{\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{f_n(\frac{3k-1}{3^{n+1}}) - f_n(\frac{k-1}{3^n})}{\frac{1}{3^{n+1}}} = 2\cdot\frac{f_n(\frac{3k-1}{3^{n+1}}) - f_n(\frac{k-1}{3^n})}{\frac{2}{3^{n+1}}} = 2p_{n,k},$$

car $f_n$ est linéaire sur $\left[\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}\right]$, donc sur $\left[\frac{k-1}{3^n}, \frac{3k-1}{3^{n+1}}\right]$, de pente $p_{n,k}$.

(d) Soit, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\boxed{\max_{j\in[\![1,3^n]\!]}(p_{n,j}) = 2^n \text{ et } \min_{j\in[\![1,3^n]\!]}(p_{n,j}) = -2^{n-1}}$.

On devine cette propriété grâce aux tableaux de valeurs précédents.

Les tableaux de valeur précédents montrent que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée.

- Soit $k \in [\![1,3^{n+1}]\!]$, et soit $j = E\left(\frac{k+2}{3}\right)$. Alors la relation de la question précédente amène :
  - $*$ si $p_{n,j} \geqslant 0$,
  $$-2^n = -\max(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) \leqslant -p_{n,j} \leqslant p_{n+1,k} \leqslant 2p_{n,j} \leqslant 2\max(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) = 2^{n+1},$$
  - $*$ si $p_{n,j} \leqslant 0$,
  $$-2^n = 2\min(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) \leqslant 2p_{n,j} \leqslant p_{n+1,k} \leqslant -p_{n,j} \leqslant -\min(p_{n,1},\dots,p_{n,3^n}) = 2^{n-1} \leqslant 2^{n+1},$$

  Ainsi, pour tout $k \in [\![1,3^{n+1}]\!]$, $-2^n \leqslant p_{n+1,k} \leqslant 2^{n+1}$
- De plus, soit $j$ réalisant le maximum de $p_{n,j}$, c'est-à-dire $p_{n,j} = 2^n$. Alors $p_{n+1,3j} = 2^{n+1}$
- Soit $j$ réalisant le minimum de $p_{n,j}$, c'est-à-dire $p_{n,j} = -2^{n-1}$. Alors $p_{n+1,3j} = -2^n$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié puisque $-2^n$ et $2^{n+1}$ encadrent les valeurs de $p_{n+1,k}$ et sont atteintes.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

Remarquez que ceci n'est bien sûr valable que pour $n \geqslant 1$ et pas $n = 0$.

(e) Soit, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $\boxed{p_{n,i} \text{ est positif si } i \text{ est impair et négatif si } i \text{ est pair}}$.

$\mathcal{Q}(0)$ est trivialement vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Soit $k \in [\![1,3^n]\!]$. D'après la question (c), on a alors :

- Si $k$ est pair, alors $3k-2$ et $3k$ sont pairs, et d'après la question c, $p_{n+1,3k-2}$ et $p_{n+1,3k}$ sont du signe de $p_{n,k}$ à savoir négatif (hypothèse de récurrence). D'autre part, $3k-1$ est impair, et $p_{n+1,3k-1}$ est du signe opposé de celui de $p_{n,k}$ à savoir positif.
- Si $k$ est impair, alors $3k-2$ et $3k$ sont impairs, et $p_{n+1,3k-2}$ et $p_{n+1,3k}$ sont du signe de $p_{n,k}$ à savoir positif (hypothèse de récurrence). D'autre part, $3k-1$ est pair, et $p_{n+1,3k-1}$ est du signe opposé de celui de $p_{n,k}$ à savoir négatif.

Cela prouve bien $\mathcal{Q}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$. On note $I_{n,k} = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$.

   (a) On montre d'abord que $f_{n+1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$ :

   On note $I_{n,k} = [a,b]$, et $c$ et $d$ les deux réels $c = a + \frac{b-a}{3}$ et $d = a + 2 \cdot \frac{b-a}{3}$. Ainsi, $a < c < d < b$, et $[a,c], [c,d], [d,b]$ est une subdivision de $[a,b]$ en trois intervalles de taille égale. On suppose pour se fixer les idées que $f_n$ est croissante sur $I_{n,k}$ (démonstration semblable dans le cas inverse). Ainsi, $f(a) < f(c) < f(d) < f(b)$. Alors, par définition de le suite de fonctions $(f_n)$,

$$f_{n+1}([a,c]) = [f_n(a), f_n(d)], \qquad f_{n+1}([c,d]) = [f_n(c), f_n(d)] \qquad f_{n+1}([d,b]) = [f_n(c), f_n(b)].$$

   Par conséquent,

$$f_{n+1}(I_{n,k}) = [f_n(a), f_n(d)] \cup [f_n(c), f_n(d)] \cup [f_n(c), f_n(b)] = [f_n(a), f_n(b)].$$

   Ainsi, $f_n$ étant croissante continue sur $I_{n,k}$, $\boxed{f_{n+1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})}$.

   On montre alors la propriété générale par récurrence :

   Soit pour tout $\ell \geqslant 0$ la propriété suivante :

   $\mathcal{P}(\ell)$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$, $f_{n+\ell}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$

   *Initialisation :* Pour $\ell = 0$, c'est trivial. Pour $\ell = 1$, on vient de le faire.

   *Hérédité :* Soit $\ell > 1$, et supposons que $\mathcal{P}(\ell - 1)$ est vérifiée. Montrons que $\mathcal{P}(\ell)$ l'est aussi. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, 3^n]\!]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$. Or

$$f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}),$$

   et d'après le premier cas étudié, pour tout $j \in [\![3^{\ell-1}k, 3^{\ell-1}(k+1) - 1]\!]$,

$$f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}) = f_{n+\ell}(I_{n+\ell-1,j}).$$

   Ainsi,

$$f_{n+\ell}(I_{n,k}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell}(I_{n+\ell-1,j}) = \bigcup_{j=3^{\ell-1}k}^{3^{\ell-1}(k+1)-1} f_{n+\ell-1}(I_{n+\ell-1,j}) = f_{n+\ell-1}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k}).$$

   cela achève de montrer $\mathcal{P}(\ell)$

   D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $\ell \geqslant 0$, $\boxed{f_{n+\ell}(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})}$.

   (b) Montrons par récurrence sur $\ell$ la propriété suivante :

   $\mathcal{Q}(\ell)$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$ tel que $p_{n,k+1} > 0$, $\forall x \in I_{n+1,3k}$, $f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x)$.

   *Initialisation :* Trivial pour $\ell = 0$. Assez immédiat pour $\ell = 1$, car la pente (positive) de $f_{n+1}$ sur $I_{n+1,3k}$ est le double de celle de $f_n$, et leur valeur est la même au bord gauche de cet intervalle.

   *Hérédité :* Soit $\ell > 1$, et supposons que $\mathcal{Q}(k)$ est vérifiée pour tout $k < \ell$.

   Soient $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$ tel que $p_{n,k+1} > 0$. On subdivise $I_{n+1,3k}$ en trois : $I_{n+1,3k} = I_{n+2,9k} \cup I_{n+2,9k+1} \cup I_{n+2,9k+2}$

   - Étude sur $I_{n+2,9k}$ :
     $p_{n+1,3k+1} = 2p_{n,k}$ et est donc positif. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence : pour tout $x \in I_{n+2,9k}$ $f_{n+\ell}(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. De plus, d'après $\mathcal{Q}(1)$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ sur $I_{n+2,9k} \subset I_{n+1,3k}$. Ainsi :

$$\forall x \in I_{n+2,9k}, \; f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x).$$

   - Étude sur $I_{n+2,9k+1}$ :
     La fonction $f_{n+2}$ est décroissante sur $I_{n+2,9k+1}$. Ainsi, pour tout $x \in I_{n+2,9k+1}$,

$$f_{n+2}(x) \qquad \geqslant \qquad f_{n+2}\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) \qquad = \qquad f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right).$$

Cette dernière égalité se vérifie sur les graphes, et se montre facilement par la définition des $f_n$.
Or, d'après la question précédente, $f_{n+\ell}(I_{n+2,9k+1}) = f_{n+2}(I_{n+2,9k+1})$, donc pour tout $x \in I_{n+2,9k+1}$,

$$f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) \geqslant f_n(x),$$

la dernière inégalité résultant de la croissance de $f_n$. Ainsi :

$$\forall x \in I_{n+2,9k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x).$$

- Étude sur $I_{n+2,9k+2}$ :
Enfin, la fonction $f_{n+2}$ est croissante sur $I_{n+2,9k+2}$, de pente $p_{n+2,9k+3} = 2p_{n+1,3k+1} = 4p_{n,k+1}$. Ainsi, pour tout $x$ß$I_{n+2,9k+2}$,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= f_{n+2}\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) + 4\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \\ &= f_n\left(\frac{9k+2}{3^{n+2}}\right) + 4\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \qquad \text{(d'après e point précédent)} \\ &= f_n(x) + 3\left(x - \frac{9k+2}{3^{n+2}}\right)p_{n,k+1} \geqslant f_n(x). \end{aligned}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence au rang $\ell-2$ sur l'intervalle $I_{n+2,9k+2}$ sur lequel $f_{n+2}$ est croissante :

$$\forall x \in I_{n+2,9k+2}, f_{n+\ell}(x) \geqslant f_{n+2}(x) \geqslant f_n(x).$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in I_{n,3k},\ f_{n+\ell}(x) \geqslant f_n(x)}$, ce qui est $\mathcal{P}(\ell)$.
Le principe de récurrence nous permet alors de dire que cette propriété est vraie pour tout $\ell \geqslant 0$.

(c) Aidons-nous d'un dessin.

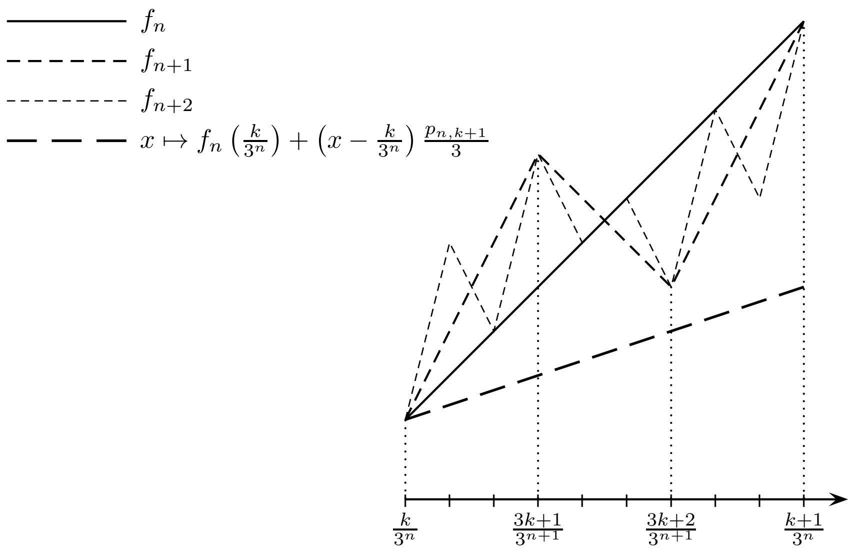


FIGURE 2 – Sur $I_{n,k}$.

D'après la question 3, pour tout $m > n$,

$$f_m\left(\left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right]\right) = f_{n+1}\left(\left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right]\right) = \left[f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right), f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)\right].$$

De même, pour tout $m > n$,

$$f_m\left(\left[\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) = f_{n+1}\left(\left[\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) = \left[f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right), f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right].$$

Ainsi, pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$, et tout $m > n$, $f_m(x) \geqslant f_n\left(\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}\right)$. Cela reste tricialement vrai pour $m = n$. Or, la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}$ est croissante sur $I_{n,k}$. On en déduit que pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$,

$$f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} \leqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(\frac{k+1}{3^n}-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\frac{1}{3^{n+1}}p_{n,k+1} = f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \dfrac{k}{3^n}\right]$, et tout $m \geqslant n$,

$$f_m(x) \geqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + \left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) + \left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}.$$

Il reste à montrer que cette inégalité reste vraie sur $I_{n+1,3k}$. Cela résulte de la question précédente. En effet, puisque $p_{n,k+1} \geqslant 0$, pour tout $m \geqslant n$ et tout $x \in I_{n+1,3k}$,

$$f_m(x) \geqslant f_n(x) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)p_{n,k+1} \geqslant f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3} = f_m\left(\frac{k}{3^n}\right)+\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in I_{n,k}$, et tout entier $m \geqslant n$,

$$\boxed{f_m(x) - f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) \geqslant \left(x-\frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}}.$$

Voilà, le plus technique est fait.

(d) Dans le cas où $p_{n,k+1}$ est négatif :

i. pour tout $x \in I_{n+1,3k}$ et tout $m \geqslant n$, $\boxed{f_m(x) \leqslant f_n(x)}$.

ii. pour tout $x \in I_{n,k}$, et tout $m \geqslant n$, $\boxed{f_m(x) - f_m\left(\dfrac{k}{3^n}\right) \leqslant \left(x-\dfrac{k}{3^n}\right)\dfrac{p_{n,k+1}}{3}.}$

**Partie II – Étude de la fonction limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

1. Existence de la fonction limite $f$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$.

- Si $x \in I_{n+1,3k}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + 2p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right) - \left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{k}{3^n}\right| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\left|\frac{3k+1}{3^{n+1}}-\frac{k}{3^n}\right| = |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

  l'avant-dernière inégalité provenant de la question I-2d.

- Si $x \in I_{n+1,3k+1}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right) - p_{n,k+1}\left(x-\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right)\right) - \left(f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3^{n+1}}p_{n,k+1} - p_{n,k+1}\left(x-\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right) - p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right| = |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{2k+1}{3^n}\right|.\end{aligned}$$

  Cette dernière expression atteint son maximum aux deux points $\frac{3k+1}{3^{n+1}}$ et $\frac{3k+2}{3^{n+1}}$. On obtient :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- Si $x \in I_{n+1,3k+2}$,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\left(f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - 2p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right) - \left(f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - p_{n,k+1}\left(x-\frac{k}{3^n}\right)\right)\right| \\ &= |p_{n,k+1}|\cdot\left|x-\frac{k+1}{3^n}\right| \leqslant |p_{n,k+1}|\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\boxed{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

(b) Soit $x \in [0,1]$. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car les termes de la somme sont positifs) et

$$\sum_{k=0}^{n} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Ainsi, sa somme partielle étant croissante et majorée, la série $\sum |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ est convergente. D'après le résultat admis, $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est convergente.

Par télescopage, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une limite finie } f(x)}$.

(c) Pour tout $m \geqslant n$, $f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$. Ainsi, en passant à la limite : $\boxed{f\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)}$.

2. Continuité de $f$

(a) La suite $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Par définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geqslant n_0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$. Tout entier $n \geqslant n_0$ répond donc à la question posée.

(b) Par définition de la partie entière, $\lfloor 3^n x_0 \rfloor \leqslant 3^n x_0 < \lfloor 3^n x_0 \rfloor + 1$, donc $\alpha \leqslant 3^n x_0 < \alpha + 1$, puis

$$\boxed{\frac{\alpha}{3^n} \leqslant x_0 < \frac{\alpha+1}{3^n}}.$$

(c) Cela résulte de ce que pour tout $m \geqslant n$, $f_m(I_{n,\alpha}) = f_n(I_{n,\alpha})$. Or, $f_n$ est de pente au maximum $2^n$ (en valeur abolue), sur l'intervalle $I_{n,\alpha}$ de longueur $\frac{1}{3^n}$. Ainsi, $f_n(I_{n,\alpha})$ (et donc $f_m(I_{n,\alpha})$) est un intervalle de longueur au plus $\frac{2^n}{3^n}$ : pour tout $x, y \in I_{n,\alpha}$,

$$\boxed{|f_m(x) - f_m(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

En particulier, cela est vrai pour $x_0$ et $y$.

(d) On passe à la limite dans l'inégalité de la question précédente lorsque $m$ tend vers $+\infty$ : pour tout $y \in I_{n,\alpha}$,

$$|f(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon.$$

De plus, si $x_0 = \frac{\alpha}{3^n}$ ($x_0$ est au bord de l'intervalle) et $\alpha \neq 0$, un raisonnement similaire amène :

$$|f(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$$

pour tout $y \in I_{n,\alpha-1}$. Par conséquent, soit $\delta$ tel que :

- si $x_0 \neq \frac{\alpha}{3^n}$, $\delta = \min\left(x_0 - \frac{\alpha}{3^n}, \frac{\alpha+1}{3^n}\right) > 0$,
- si $x_0 = \frac{\alpha}{3^n}$, $\delta = \frac{1}{3^n}$.

Alors, pour ce choix de $\delta$, pour tout $y$ tel que $|y - x_0| < \delta$ et $y \geqslant 0$, on a $|f(y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de $f$ en $x_0$, pour tout $x_0 \in [0,1[$, y compris en 0 (continuité à droite).

(e) La fonction $f$ admet une symétrie par rapport au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Plus particulièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) + f_n(1-x) = 1$. Cela se montre facilement par récurrence sur $n$ en se servant de la construction de $f_n$. En passant à la limite, on obtient $f(x) = 1 - f(1-x)$. Alors la continuité en 1 découle de celle en 0.

3. Étude de la monotonie de $f$.

Soit $I$ un intervalle non vide et non réduit à un point $I$ contient un intervalle $]a,b[$, avec $a < b$. Soit $n$ tel que $\frac{1}{3^{n-1}} < b - a$. Alors l'intervalle $]3^n a, 3^n b[$ est de longueur strictement supérieure à 3, et contient donc au moins 3 entiers consécutifs $k-1$, $k$ et $k+1$. Alors, comme $p_{n,k}$ et $p_{n,k+1}$ sont de signe opposé,

- soit $f_n(\frac{k}{3^n}) > f_n(\frac{k-1}{3^n})$ et $f_n(\frac{k}{3^n}) > f_n(\frac{k+1}{3^n})$; comme pour tout $m \geqslant n$, $f_m(\frac{k}{3^n}) = f_n(\frac{k}{3^n})$, $f_m(\frac{k-1}{3^n}) = f_n(\frac{k-1}{3^n})$, et $f_m(\frac{k-1}{3^n}) = f_n(\frac{k-1}{3^n})$, on en déduit, en passant à la limite, que

$$f(\frac{k}{3^n}) > f(\frac{k-1}{3^n}) \qquad \text{et} \qquad f(\frac{k}{3^n}) > f(\frac{k+1}{3^n});$$

- soit $f_n(\frac{k}{3^n}) < f_n(\frac{k-1}{3^n})$ et $f_n(\frac{k}{3^n}) < f_n(\frac{k+1}{3^n})$ et on en déduit de même que :

$$f(\frac{k}{3^n}) < f(\frac{k-1}{3^n}) \qquad \text{et} \qquad f(\frac{k}{3^n}) < f(\frac{k+1}{3^n});$$

Dans les deux cas, $\boxed{\text{cela contredit la monotonie de } f \text{ sur } I}$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$.

Soit $x \in [0,1[$, et pour tout $n$, $I_n(x) = I_{n,\alpha_n}$. On note $p_n(x) = p_{n,\alpha_n+1}$ la pente sur $I_n(x)$ de la fonction $f_n$, affine sur cet intervalle.

(a) Si $p_n(\alpha)$ et $p_{n+1}(\alpha)$ sont de même signe, cela signifie que $I_{n+1}(x)$ est le premier ou le dernier tiers de l'intervalle $I_n(x)$. La description de $f_{n+1}$ en fonction de $f_n$ amène alors $\boxed{p_{n+1}(x) = 2p_n(x)}$.

(b) Premier cas : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. Pour se fixer les idées, supposons ce signe positif (démonstration similaire pour un signe négatif, en s'appuyant sur la question I-3(d)).

Posons pour tout $n$, $x_n = \dfrac{\beta_n}{3^n}$.

Soit $n_0$ un tel entier. D'après la question I-3(c), puisque $x \in I_n(x)$, pour tout $m \geqslant n$,

$$f_m(x) - f_m(x_n) \geqslant (x - x_n)\frac{p_n(x)}{3},$$

soit, en passant à la limite lorsque $m$ tend vers $+\infty$ :

$$f(x) - f(x_n) \geqslant (x - x_n)\frac{p_n(x)}{3},$$

. Comme $x - x_n > 0$ (raison pour laquelle on a privilégié la partie entière supérieure), on a :

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \geqslant \frac{p_n(x)}{3} \longrightarrow +\infty.$$

Par le théorème de minoration, il vient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| = +\infty.}$

(c) Deuxième cas : supposons qu'il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n(x) = \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}.$$

En adaptant le raisonnement précédent (en utilisant également I-3(d) pour le cas de pentes négatives), et en remarquant que les pentes sont toutes entières, on obtient :

$$\begin{cases} t_n(x) \geqslant \frac{p_n(x)}{3} \geqslant \frac{1}{3} & \text{si } p_n(x) > 0 \\ t_n(x) \leqslant \frac{p_n(x)}{3} \leqslant -\frac{1}{3} & \text{si } p_n(x) < 0 \end{cases}$$

D'après l'hypothèse faite, chacun des deux cas de figure se produit une infinité de fois, donc, dans la suite $(t_n(x))$, il y aura une infinité de termes $\leqslant -\frac{1}{3}$ et une infinité de termes $\geqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas admettre de limite.

(d) Puisque $x_n \to x$, la non existence d'une limite finie du taux d'accroissement $t_n(x)$ entre $x$ et $x_n$ montre que $f$ n'est pas dérivable en $x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in ]0,1]$, $f$ n'est dérivable en aucun point de $]0,1]$. Par symétrie de la courbe par rapport au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on récupère la non dérivabilité (à droite) en 0. Cet argument de symétrie avait déjà été utilisé pour obtenir la continuité en 1 à partir de celle en 0.

Ainsi $\boxed{f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [0,1].}$

**Partie III – Résolution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, et plus précisément, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $f_n(I_{n,k_n})$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang $n$, alors, par construction, cela reste encore le milieu du deuxième des trois segments obtenus en construisant $f_{n+1}$ par subdivision de $I_{n,k_n}$ : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $f_n(I_{n+1,k_{n+1}})$ (puisque $k_{n+1} = 3k_n + 2$).

   De plus, d'après la question I-2e, la pente $q_n$ de $f_n$ sur le segment $I_{n,k_n-1}$ vérifie la relation de récurrence : $q_{n+1} = -q_n$, donc $q_n = (-1)^n q_0$. Comme $q_0 = 1$, on obtient $q_n = (-1)^n$. Ainsi, on obtient :

$$f\left(\frac{k_n}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n}{3^n}\right) = \frac{1}{2} + (-1)^n\left(\frac{k_n}{3^n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (-1)^n\frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

   Cette expression est satisfaisante. On peut aussi remarquer qu'elle vaut $\frac{k_n}{3^n}$ si $n$ est pair et $\frac{k_n+1}{3^n}$ si $k_n$ est impair.
   On calcule maintenant la pente $t_n$ de $f_n$ sur $I_{n,k_n-2}$ D'après I-2e, on a $t_n = 2q_{n-1}$, donc $t_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$. Par conséquent,

$$f\left(\frac{k_n-1}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n-1}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k_n}{3^n}\right) + 2(-1)^{n-1}\left(\frac{k_n-1}{3^n} - \frac{k_n}{3^n}\right) = \frac{1}{2} + 3(-1)^n\frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

2. Les deux expressions calculées montrent que $f\left(\frac{k_n-1}{3^n}\right) - \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{k_n}{3^n}\right) - \frac{1}{2}$ ne sont pas de même signe (et sont non nuls). Comme $f$ est continue, il existe $c_n \in \left]\frac{k_n-1}{3^n}, \frac{k_n}{3^n}\right[$ tel que $f(c_n) = \frac{1}{2}$, d'après le TVI.

   De plus, ces intervalles sont deux à deux disjoints, car

$$\frac{k_n}{3^n} = \frac{3^n-1}{2 \cdot 3^n} = \frac{3^{n+1}-3}{2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{k_{n+1}-1}{3^{n+1}}.$$

   Ainsi, les $c_n$ sont deux à deux distincts : on a bien trouvé une infinité de solutions de l'équation. Une solution particulière : $x = \frac{1}{2}$ (déjà prouvé).

**Correction du problème 2 – Discontinuités des fonctions réglées**

**Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue**

1. La fonction $f_{|I}$ admettant des limites à gauche et à droite en tout point, elle n'est pas continue à gauche en un point $a$ de $I$ si et seulement si $f(a) \neq f(a^-)$, donc si et seulement si $|f(a) - f(a^-)| > 0$, ce qui equivaut à dire, du fait de la convergence vers 0 de $\frac{1}{n}$, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(a) - f(a^-)| > \frac{1}{n}$, donc que $f \in D_{\frac{1}{n}}$.

   Ainsi, $f$ n'est pas continue à gauche en $a$ si et seulement si $\boxed{a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}.}$

2. Puisque $D_\varepsilon$ est infini, on peut trouver une suite $(a_n)$ d'éléments distincts, qu'on peut construire par exemple par récurrence (si $a_0, \dots, a_n$ sont construits convenablement, on n'est pas arrivé à épuisement des termes de $D_\varepsilon$ et on pourra choisir $a_{n+1}$ distinct des précédents).

   Puisque les $a_n$ sont supposés dans un premier temps être dans un intervalle fermé borné $I$, quitte à en extraire une suite convergente à l'aide du théoèrme de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer que $\boxed{(a_n) \text{ converge}}$. Soit $a$ sa limite.

3. La suite $(a_n)$ possède au plus un terme égal à $a$ (car ses éléments sont deux à deux distincts). Ainsi, tous ses autres termes (en nombre infini) vérifient $a_n < a$ ou $a_n > a$.

   Il y a donc nécessairement une $\boxed{\text{infinité de termes vérifiant la même inégalité}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n \in D_\varepsilon$, donc $|f(a_n) - f(a_n^-)| \geqslant \varepsilon$. Par définition de la limite à gauche, il existe $b_n \in ]a, a_n[$ tel que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, par inégalité triangulaire :

$$\boxed{|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant |f(a_n) - f(a_n^-)| - |f(b_n) - f(a_n^-)| = \frac{\varepsilon}{2}}.$$

(b) Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $a_n \to a$, et par théorème d'encadrement, on a aussi $b_n \to a$. Ces deux convergences se font par valeurs supérieures, donc $f(a_n) \to f(a^+)$ et $f(b_n) \to f(a^+)$. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue dans la question précédente, il vient donc :

$$0 = |f(a^+) - f(a^+)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où une $\boxed{\text{contradiction}}$. Ainsi, cette situation est impossible.

5. Supposons maintenant qu'il existe une infinité de termes $a_n$ tels que $a_n < a$. Comme ci-dessus, quitte à extraire, on peut supposer que cette inégalité est satisfaite pour tous les termes de la suite. On construit comme ci-dessus une suite $(b_n)$, vérifiant cette fois $a_n - (a - a_n) \leqslant b_n \leqslant a_n$ et telle que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (cette inégalité impose de laisser les $b_n$ à gauche des $a_n$, ce qui complique un peu les choses ici).

   La suite du raisonnement est la même : dans un premier temps, l'inégalité triangulaire amène

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   De plus, puisque $a_n \to a$, le théorème d'encadrement assure que $b_n \to a$, et comme ci-dessus, on obtient une contradiction en passant l'inégalité précédente à la limite (on obtient cette fois à gauche $|f(a^-) - f(a^-)|$). Ainsi, ce cas est aussi $\boxed{\text{contradictoire}}$.

6. Les deux seuls cas possibles amenant des contradictions, en en déduit que $\boxed{D_\varepsilon \text{ est fini}}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}$ est au plus dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles finis, donc l'ensemble des points de discontinuité à gauche est au plus dénombrable d'après la question 1.

   On fait de même pour l'ensemble des points de discontinuité à droite. L'ensemble des points de discontinuité de $f$ est alors l'union des deux, donc encore au plus dénombrable.

   On se débarrasse ensuite de la contrainte sur $I$ en remarquant que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée $f$ sur $\mathbb{R}$, est l'union des ensembles de points de discontinuité sur $[-n, n]$. Ainsi, il s'agit encore d'une union dénombrables d'ensembles au plus dénombrables.

   Donc $\boxed{f \text{ admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités}}$.

**Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé**

1. Si $A$ est fini, il suffit de prendre $\mathbb{1}_A$, dont les limites à gauche et à droite en tous points sont nulles (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon$ tel que $B(x, \varepsilon)$ ne contienne aucun point de $A$, sauf éventuellement $x$ lui-même, du fait que $A$ est fini ; il suffit de prendre $\varepsilon = \min_{a\in A\setminus\{x\}}(|x - a|)$) De plus on a clairement la continuité en tout $x \notin A$, et une discontinuité en $x \in A$,

   Ainsi, il s'agit d'une $\boxed{\text{fonction réglée dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement } A}$.

2. On suppose désormais $A$ dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{]a_n, +\infty[}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les termes $f_n(x)$ sont tous positifs ou nuls, et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on déduit du TCSTP que $\boxed{\sum f_n(x) \text{ converge}}$.

   (b) Les fonctions $f_n$ sont toutes croissantes de façon évidente. Soit alors $x \leqslant y$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) \leqslant f_n(y).$$

   Ainsi, en sommant entre 0 et $+\infty$, la convergence étant assurée par la question précédente, il vient

$$f(x) \leqslant f(y),$$

   donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$.

(c) Soit $x < y$.

$$f(y) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)).$$

Or, par définition, $f_n(y) - f_n(x) = 0$ si $a_n \leqslant x < y$ (les deux termes sont nuls), ou si $x < y < a_n$ (les deux termes sont égaux à 1), et vaut $\frac{1}{2^n}$ sinon, c'est-à-dire si $x < a_n \leqslant y$.

Ainsi, on a bien

$$\boxed{f(y) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)) = \sum_{n \mid x<a_n\leqslant y} \frac{1}{2^n}}.$$

(d)
- Soit $a \in A$, et $n_0$ tel que $a_{n_0} = a$. On a alors, pour tout $x < a$,

  $$f(a) - f(x) = \sum_{n \mid x<a_n\leqslant a} \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^{n_0}},$$

  Cela contredit l'existence d'une limite à gauche en $a$ (en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0+1}}$). Ainsi, $f$ est discontinue en $A$.
- Soit $a \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que

  $$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

  Comme $\{a_n, n < N\}$ est un ensemble fini ne contenant pas $a$, il existe $\eta$ tel que $B(a, \eta)$ ne contienne aucun $a_n$, $n < N$. Soit alors $x \in ]a - \eta, a[$. On a alors (en utilisant la croissance pour la minoration) :

  $$0 \leqslant f(a) - f(x) = \sum_{n \mid x<a_n\leqslant a} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

  De même, pour $x \in ]a, a + \eta[$,

  $$0 \leqslant f(x) - f(a) = \sum_{n \mid a<a_n\leqslant x} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, pour tout $x \in ]a - \eta, a + \eta[$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de $f$ en $a$.
- Ainsi, $\boxed{\text{les points de discontinuité de } f \text{ forment exactement l'ensemble } A}$.

  De plus, $\boxed{f \text{ est une fonction réglée, car monotone}}$.

  On a bien montré que tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.