

# HX3 2006/2007 - Calcul des primitives

---

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx, \quad B = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx, \quad C = \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx, \quad D = \int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

---

2. Calculer pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx, \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos px \cos^p x dx$$

---

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

---

4. Calculer les primitives suivantes en indiquant le domaine de validité

$$\int \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int \frac{x^3}{x^2+2x+2} dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2+1}$$

---

5. Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+ix} \quad \text{et} \quad \int_0^{1/\sqrt{2}} \arctan \sqrt{1-x^2} dx.$$

---

6. Trouver une CNS sur  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  pour que les primitives de  $x \mapsto \frac{ax+b}{x^3(x-1)^2}$  soient des fonctions rationnelles.

7. Calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int (x^2-1)e^{3x} dx, \quad \int (x^2-x+1) \sin x dx, \quad \int (x^3-1) \operatorname{ch} x dx, \quad \int \arcsin x dx,$$

$$\int x^2 e^x \sin x dx, \quad \int \cos x \operatorname{ch} x dx, \quad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx, \quad \int \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} dx$$

$$\int x \tan^2 x dx, \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad \int x \arctan^2 x dx, \quad \int e^{\arccos x} dx$$

$$\int \sqrt{1+x} \ln x dx, \quad \int \cos x \ln(1+\cos x) dx$$

---

8. Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Etablir une relation de récurrence sur  $I_n$ .

9. A l'aide de changements de variables, calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}, \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$\int e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) dx, \quad \int (x+1) \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx$$


---

**10.** Calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x-1}}{(x+1)^{3/2}} dx, \quad \int x \sqrt[4]{1+x} dx, \quad \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2-1}{4-x^2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^{3/2}+1}, \quad \int \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx$$


---

**11.** Calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int \sin^4 x dx, \quad \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx, \quad \int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos^3 x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{\cos 3x} dx$$

$$\int (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, \quad \int \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{1+\cos^4 x + \sin^4 x} dx, \quad \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}, \quad \int (1+\tan^2 x)^2 dx, \quad \int \tan^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$


---

**12.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\sin x}, \quad \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$$


---

**13.** Calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x} dx, \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{3+\operatorname{ch}^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x}, \quad \int \operatorname{Argsh} x dx,$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1} dx, \quad \int \frac{dx}{1+\operatorname{ch} x}, \quad \int \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} dx$$


---

**14.** Calculer les primitives suivantes en indiquant les intervalles de définitions possibles :

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}, \quad \int (x^2+6x+5)^{\frac{3}{2}} dx, \quad \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+10}}{x+1} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$


---

**15.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_a^b x \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad \int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x-x^2}} dx, \quad \int_{-2}^3 \sqrt{|x^2-1|} dx$$


---

**16.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Calculer :

$$\int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos px \sin qx dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx$$