Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 2 h 30

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

A. Équations différentielles linéaires du premier ordre **3**

A. 1. Définition . . . 3
A. 2. Ensemble de définition . . . 4
A. 3. Points singuliers . . . 5
A. 4. Équation homogène . . . 6
A. 5. Solution particulière . . . 7
A. 6. Équation complète . . . 9
A. 7. Problème de Cauchy . . . 10
A. 8. Étude des solutions aux points singuliers . . . 11

B. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants **12**

B. 1. Définition . . . 12
B. 2. Équation homogène . . . 13
B. 3. Solution particulière . . . 15
B. 4. Équation complète . . . 18
B. 5. Problème de Cauchy . . . 19

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les fonctions ;
- la dérivation ;
- les outils d'analyse.

La lettre $\mathscr{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$. La lettre I représente un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans ce cours, on utilisera deux résultats sur les primitives. D'une part, sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. D'autre part, toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives. Dans ce cas, si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ désigne la fonction continue, on adopte la notation intégrale suivante :

$$\forall t \in I, \qquad F(t) = \int^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

pour désigner une primitive quelconque de f sur I.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Equations différentielles linéaires du premier ordre

A.1. Définition

Définition 1

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sur $\mathscr{D}$ toute relation du type

$$(E): \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

où les coefficients $a, b, c : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues et $y : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction inconnue dérivable. Toute fonction qui satisfait (E) sur $\mathscr{D}$ est appelée une solution. Le graphe d'une solution est appelée une courbe intégrale de (E).

Dans la pratique, on omet la variable de l'inconnue y pour alléger l'écriture de (E), ce qui donne

$$(E): \qquad a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Une telle équation différentielle est dite du premier ordre parce qu'elle ne fait intervenir que la fonction et sa dérivée première. Elle est dite linéaire parce que l'application $y \longmapsto a(t)y' + b(t)y$ « respecte » les combinaisons linéaires : autrement dit, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation sans second membre $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est également une solution de cette équation.

Exemples :

- Rechercher les primitives d'une fonction f sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ revient à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre donnée par $\forall t \in \mathscr{D},\ y' = f(t)$.
- L'équation $(E) : (\sin t)y' + (\ln t)y = t$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- En dynamique des populations, le modèle de Malthus décrit la croissance d'une population au cours du temps lorsqu'elle est placée dans des conditions idéales. Si $N(t)$ désigne le nombre d'individus de la population à l'instant t, le taux de croissance d'une telle population est alors proportionnel à la population, ce qui donne l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante : $N'(t) = rN(t)$, où $r > 0$ désigne le taux de croissance de la population. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On a déjà vu (dans le chapitre sur les outils d'analyse) que la solution est de la forme $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{rt}$ où N_0 désigne la population initiale (c'est-à-dire à $t = 0$). On observe donc une croissance exponentielle.
- L'équation différentielle régissant la vitesse v d'une masse chutant dans un fluide (très) visqueux est du type $v' + \lambda v^2 = g$ où λ est une grandeur physique (en m^{-1}) et g est l'accélération de la pesanteur. Ce n'est pas une équation différentielle linéaire !

Comme le montre les exemples précédents, il est fondamental de savoir distinguer une équation différentielle qui est linéaire d'une autre qui ne l'est pas !

Nous allons apprendre à résoudre toutes les équations différentielles linéaires du premier ordre. Nous verrons que cet objectif peut être atteint à condition de ne pas exiger une expression explicite des solutions (certaines fonctions n'admettant pas de primitives exprimables à l'aide des fonctions usuelles).

A.2. Ensemble de définition

Ensemble de définition d'une équation différentielle

Dans la pratique, l'équation différentielle (E) : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ est généralement donnée sans que soit précisé l'ensemble sur lequel cette équation possède un sens. Il convient donc de déterminer, en premier lieu, l'ensemble de définition $\mathscr{D}_E$ de l'équation (E), c'est-à-dire l'intersection des ensembles de définition des fonctions a, b et c :

$$\mathscr{D}_E = \mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b \cap \mathscr{D}_c.$$

Parfois, il convient aussi de tenir compte des éventuelles conditions physique, biologique, économique, ... imposées à la variable. Par exemple, lorsque t désigne un temps, on se limite généralement à des valeurs positives.

Exemples :

- L'ensemble de définition de

$$(E) : \qquad (\sin t)y' + (\ln t)y = \frac{1}{1-t}$$

est

$$\mathscr{D} =]0;1[\cup]1;+\infty[.$$

a.3. Points singuliers

Définition 2

On appelle points singuliers de l'équation différentielle $(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$ les solutions (dans $\mathscr{D}_E$) de l'équation $a(t) = 0$. On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des points singuliers de (E).

Exemples :

- L'ensemble des points singuliers de
$$(E) : \qquad (\sin t)y' + (\ln t)y = t$$
est
$$\mathscr{S} = \pi\mathbb{N}^*.$$

La détermination des points singuliers permet, comme l'explique l'encadré suivant, de se ramener à une équation que l'on sait résoudre (et que l'on qualifie par conséquent de « résoluble » même si ce mot n'est vraiment pas très joli).

Points singuliers et forme résoluble

Après la recherche de l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de $(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$, on détermine l'ensemble des points singuliers $\mathscr{S}$ de l'équation (E) et l'on se place sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ afin d'écrire la forme résoluble de (E), obtenue en divisant l'équation par a :
$$(E^*) : \qquad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}\cdot$$

À noter : seules les équations résolubles sont au programme de MPSI. Les problèmes de recollement des solutions de part et d'autre d'un point singulier ne peuvent faire l'objet que d'exercices guidés. Nous verrons brièvement comment procéder à la fin de cette section.

Lorsque les fonctions a, b et c sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, l'équation résoluble permet de démontrer que toute solution est elle-aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$. En effet, la relation $y' = -\big(b(t)y + c(t)\big)/a(t)$ permet de dire, puisque y est dérivable, que y' l'est aussi et donc que y est dérivable deux fois. En reprenant ce raisonnement, on obtient successivement que y est dérivable trois fois, puis quatre fois et ainsi de suite...

Exemples :

- Pour résoudre l'équation
$$(E) : \qquad (\sin t)y' + (\ln t)y = t$$
on se place sur
$$\mathscr{D} \setminus \mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]k\pi ; (k+1)\pi[$$
et on considère l'équation résoluble donnée par
$$(E^*) : \qquad y' + \frac{\ln t}{\sin t}y = \frac{t}{\sin t}\cdot$$

a.4. Equation homogène

Définition 3

On appelle équation différentielle homogène (ou équation sans second membre) associée à l'équation différentielle résoluble $(E^*) : y' + b(t)y = c(t)$ l'équation, notée (E^*_H), définie par

$$(E^*_H) : \qquad y' + b(t)y = 0.$$

La proposition suivante vous donne la forme des solutions d'une équation homogène.

Proposition 1

Sur un intervalle I contenu dans $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, les solutions de l'équation différentielle homogène $(E^*_H) : y' + b(t)y = 0$ sont toutes les fonctions y_H de la forme $\forall t \in I,\ y_H(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}$ où B est une primitive de b sur I et λ est une constante qui parcourt $\mathbb{K}$. Autrement dit, on a

$$\forall t \in I, \qquad y_H(t) = \lambda \exp\left\{-\int^t b(u)\,\mathrm{d}u\right\} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

■ L'existence de B découle de la continuité de b sur I.

La dérivée de la fonction $t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}$ est $t \longmapsto -\lambda B'(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)} = -\lambda b(t)\,\mathrm{e}^{-B(t)}$. Il est alors évident que $t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}$ est bien une solution de l'équation $y' + b(t)y = 0$.

Pour la réciproque, considérons y une solution quelconque de l'équation $y' + b(t)y = 0$. Pour tout $t \in I$, on pose $z(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{B(t)}$ et l'on multiplie l'équation par le facteur intégrant $\mathrm{e}^{B(t)}$, ce qui donne $\forall t \in I,\ y'(t)\,\mathrm{e}^{B(t)} + y(t)b(t)\,\mathrm{e}^{B(t)} = 0$, c'est-à-dire $\forall t \in I,\ z'(t) = 0$. Il s'ensuit que z est constante sur I. Si l'on note $\lambda \in \mathbb{K}$ cette constante, on a $\forall t \in I,\ y(t)\,\mathrm{e}^{B(t)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}$ c'est-à-dire $\forall t \in I,\ y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-B(t)}$. ■

On peut constater que la seule solution de (E^*_H) qui s'annule est la fonction nulle !! Les solutions homogènes étant continues, on sait alors qu'elles ne changent pas de signe.

On constate par ailleurs que deux solutions distinctes ne sont jamais égales en un point. Autrement dit, les courbes des solutions de (E_H) ne s'intersectent pas !!

À la physicienne . . .

Pour résoudre une équation du type $(E^*_H) : y' + b(t)y = 0$, le physicien écrit que $y'/y = -b(t)$ avant d'intégrer cette équation sous la forme $\ln y = -B(t) + \mu$ où $\mu \in \mathbb{K}$, ce qui fournit l'expression de y en passant à l'exponentielle.

Cette recette est indigeste pour un mathématicien. D'une part, parce qu'elle suppose que l'on peut diviser par y (sans savoir que y ne s'annule pas). D'autre part, parce que la primitivation de $y'/y = -b(t)$ donne l'égalité $\ln|y| = -B(t) + \mu$ qui conduit à des discussions oiseuses pour se débarasser des valeurs absolues. Cette technique constitue cependant un bon moyen mnémotechnique pour se rappeler l'expression des solutions.

Exemples :

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) : \qquad y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$$

sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \lambda \exp\left\{-\int^t \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\right\} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

a.5. Solution particulière

Nous présentons dans ce paragraphe les méthodes de recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle résoluble complète (c'est-à-dire avec son second membre).

Trouver une solution évidente

Ben quoi, on va tout de même pas se priver d'une solution qui s'offre à nous !

En général, on considère comme évidentes les solutions constantes qui se déterminent en annulant y' dans l'équation afin de voir si y est alors constante.

Exemples :

- Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' - ty = 2t$, on regarde d'abord si elle ne possède pas une solution constante. Si celle-ci existe, elle vérifie $y' = 0$ donc $-ty = 2t$, ce qui donne $y = -2$. On constate donc que $y_P = -2$ est une solution particulière évidente de (E).

La seconde technique de recherche d'une solution particulière est générale et permet toujours de déterminer (éventuellement à l'aide d'intégrales) une solution particulière.

Méthode de variation de la constante

Pour déterminer une solution particulière de $(E^*) : y' + b(t)y = c(t)$ sur I, on peut utiliser la méthode de variation de la constante. Pour cela, on effectue les étapes suivantes :

- ▶ On recherche la solution particulière y_P sous la même forme que la solution y_H de l'équation (E_H^*) à ceci près que l'on considère maintenant λ comme une fonction dérivable sur I. Autrement dit, on recherche y_P sous la forme
$$\forall t \in I, \qquad y_P(t) = \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)},$$
où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$ désigne une fonction dérivable et B est une primitive de b sur I.
- ▶ Après avoir calculé y_P', on reporte les expressions de y_P et y_P' dans (E^*), ce qui donne la valeur de λ'. On trouve
$$\forall t \in I, \qquad \lambda'(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} = c(t)$$
ce qui revient à ne dériver que λ dans y_P, avant d'identifier au second membre de (E^*).
- ▶ On détermine alors λ en primitivant (une seule primitive suffit puisqu'on ne cherche qu'une seule solution particulière) pour obtenir l'expression de y_P.

■ Soit y_P une solution de (E^*). On pose $\forall t \in I,\ \lambda(t) = y_P(t)\, \mathrm{e}^{B(t)}$ de sorte que λ est dérivable sur I et $\forall t \in I,\ y_P(t) = \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)}$. On a $\forall t \in I,\ y_P'(t) = \lambda'(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} - \lambda(t)b(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)}$. En reportant dans (E^*), on obtient $\forall t \in I,\ \lambda'(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} - \lambda(t)b(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} + b(t)\lambda(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} = c(t)$, c'est-à-dire $\forall t \in I,\ \lambda'(t)\, \mathrm{e}^{-B(t)} = c(t)$. On constate que les termes gris (ceux où λ n'est pas dérivée) se sont comportés comme dans l'équation homogène et ont donc disparus ! ■

Notons que la méthode de la variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite. Il faut pour cela être capable de déterminer une primitive à l'aide des fonctions usuelles (ce qui n'est pas toujours possible).

C'est une lapalissade de dire qu'une solution particulière est une solution. C'est pourtant une caractéristique qui la distingue nettement des solutions homogènes. Ainsi, en modélisation, la solution particulière possède un sens physique alors que ce n'est pas le cas des solutions homogènes !

Exemples :

- Déterminons une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E): \qquad y' - ty = 2t\,\mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Les solutions de l'équation homogène $(E_H) : y' - ty = 0$ sont de la forme

$$y_H(t) = \lambda \exp\left\{-\int^t -u\,\mathrm{d}u\right\} = \lambda\,\mathrm{e}^{t^2/2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Selon la méthode de variation de la constante, on recherche alors y_P sous la forme

$$y_P(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{t^2/2}$$

où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En reportant dans (E), on obtient alors

$$\begin{aligned} & \lambda'(t)\,\mathrm{e}^{t^2/2} = 2t\,\mathrm{e}^{t^2/2} \\ \Longleftrightarrow \qquad & \lambda'(t) = 2t \end{aligned}$$

ce qui permet de choisir

$$\lambda(t) = t^2,$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_P(t) = t^2\,\mathrm{e}^{t^2/2}.$$

La technique suivante est très utile pour simplifier et ordonner ses calculs lorsque le second membre de l'équation est la somme de plusieurs termes simples.

Principe de superposition

Lorsque le second membre de l'équation $(E^*) : y' + b(t)y = c(t)$ est une somme de plusieurs fonctions, on peut procéder en plusieurs étapes en « découpant » c en plusieurs morceaux individuellement plus simples : c'est le principe de superposition.

En effet, la linéarité de l'équation implique que si $y_{P,1}$ est une solution particulière de l'équation $y' + b(t)y = c_1(t)$ sur I et $y_{P,2}$ est une solution particulière de $y' + b(t)y = c_2(t)$ sur I, alors $y_{P,1} + y_{P,2}$ est une solution particulière sur I de l'équation $y' + b(t)y = c_1(t) + c_2(t)$.

Exemples :

- Pour déterminer une solution particulière de l'équation

$$(E): \qquad y' - ty = 2t + 2t\,\mathrm{e}^{t^2/2},$$

on prend une solution particulière de l'équation $(E_1) : y' - ty = 2t$ à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation $(E_2) : y' - ty = 2t\,\mathrm{e}^{t^2/2}$. En tenant compte des résultats des exemples précédents, on obtient la solution particulière

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_p(t) = -2 + t^2\,\mathrm{e}^{t^2/2}.$$

A.6. Equation complète

Proposition 2

Sur chaque intervalle I contenu dans $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, les solutions de l'équation différentielle résoluble (E^*) : $y' + b(t)y = c(t)$ sont toutes les fonctions y obtenues comme la somme d'une solution particulière y_P de l'équation (E^*) et d'une solution y_H de l'équation homogène associée (E^*_H), c'est-à-dire
$$y = y_P + y_H.$$

■ Soit y_P une solution particulière de (E^*) sur I.

Soit y_H une solution de l'équation homogène (E^*_H) sur I. Posons $y = y_P + y_H$. Alors, pour tout $t \in I$, on a $y'(t) + b(t)y(t) = y'_P(t) + b(t)y_P(t) + y'_H(t) + b(t)y_H(t) = c(t) + 0 = c(t)$, ce qui signifie que $y_P + y_H$ est une solution de (E^*).

Soit y une solution de l'équation résoluble (E^*) sur I. Posons $y_H = y - y_P$. Alors, pour tout $t \in I$, on a $y'_H(t) + b(t)y_H(t) = y'(t) + b(t)y(t) - \big(y'_P(t) + b(t)y_P(t)\big) = c(t) - c(t) = 0$, ce qui signifie que y_H est une solution de (E^*_H) et donc que y s'écrit comme la somme de la solution particulière y_P et de la solution y_H de l'équation homogène (E^*_H). ■

Cet énoncé signifie donc que les solutions générales sont obtenus en « décalant » les solutions homogènes de la solution particulière déterminée.

Exemples :

- D'après les exemples précédents, les solutions de l'équation
$$(E) : \qquad y' - ty = 2t + 2t\,\mathrm{e}^{t^2/2}$$
sont toutes les fonctions de la forme
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = -2 + t^2\,\mathrm{e}^{t^2/2} + \lambda\,\mathrm{e}^{t^2/2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Et s'il y a plusieurs intervalles ?

Les solutions de (E^*) sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ sont toutes les fonctions dont la restriction sur chaque intervalle I de $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ est une solution de (E^*) sur I. Par conséquent, l'expression des solutions est la même sur chacun des intervalles mais la constante de la partie homogène dépend de l'intervalle. Il y a donc autant de constantes qu'il n'y a d'intervalles dans $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$.

Exemples :

- Résolvons
$$(E^*) : \qquad y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}.$$
On a $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$ et $\mathscr{S} = \varnothing$, donc on résout (E^*) sur $\mathbb{R}^*$. Sur $I = \mathbb{R}^*_-$ ou $I = \mathbb{R}^*_+$, la résolution de l'équation (laissée au soin du lecteur) donne
$$\forall t \in I, \qquad y(t) = 1 + \frac{\lambda}{t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
D'où
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad y(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\lambda_1}{t} & \text{si } t < 0, \\ 1 + \dfrac{\lambda_2}{t} & \text{si } t > 0, \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

A.7. Problème de Cauchy

Définition 4

On appelle condition de Cauchy toute condition imposant une valeur (ou une limite) d'une solution (ou de l'une de ses dérivées) en un point de $\mathscr{D}$.

En physique, la condition de Cauchy pour une équation du premier ordre est souvent une condition initiale fixant la position du mobile à l'instant $t = 0$.

La proposition suivante est un cas particulier simple d'un théorème beaucoup plus général, appelé théorème de Cauchy–Lipschitz, qui permet d'affirmer, sous certaines hypothèses, l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle satisfaisant une condition de Cauchy.

Proposition 3

Soient I un intervalle contenu dans $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation différentielle $(E) : y' + b(t)y = c(t)$ admet une solution unique sur I.

■ On sait que les solutions de (E) sont de la forme $\forall t \in I,\ y(t) = y_p(t) + \lambda\, \mathrm{e}^{-B(t)}$ où y_p est une solution particulière, B une primitive de b sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $t = t_0$, on a donc $y_0 = y(t_0) = y_p(t_0) + \lambda\, \mathrm{e}^{-B(t_0)}$, d'où $\lambda = \big(y_0 - y_p(t_0)\big)\, \mathrm{e}^{B(t_0)}$. Ainsi, λ et donc aussi y sont déterminés par la condition de Cauchy. ■

Une condition de Cauchy par intervalle !

Une fois déterminées les solutions de $(E) : y' + b(t)y = c(t)$ sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, on peut rechercher les solutions vérifiant une ou plusieurs conditions de Cauchy. Cela permet (en général) de fixer la constante λ qui apparaît dans la partie homogène de la solution.

Il faut alors autant de conditions de Cauchy qu'il n'y a d'intervalles dans $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$.

Exemples :

- Résolvons, sur $]-\pi/2, \pi/2[$, le problème de Cauchy

$$(E^*) : \quad y' + 2(\tan t)y = 2 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 0.$$

Les solutions de $(E_H) : y' + 2(\tan t)y = 0$ sont de la forme

$$y_H(t) = \lambda \exp\Big\{ - \int^t 2 \tan u \,\mathrm{d}u \Big\} = \lambda\, \mathrm{e}^{2 \ln|\cos t|} = \lambda(\cos t)^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Pour déterminer une solution particulière de (E^*), on recourt à la méthode de variation de la constante. On recherche donc y_P sous la forme $y_P(t) = \lambda(t)(\cos t)^2 t$, où λ est une fonction dérivable. En reportant dans (E^*), on obtient $\lambda'(t)(\cos t)^2 = 2$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = 2/\cos^2 t$, ce qui permet de prendre $\lambda(t) = 2 \tan t$. Donc

$$y_P(t) = 2(\sin t)(\cos t) = \sin 2t.$$

Les solutions de (E) sont ainsi toutes les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda \cos^2 t + \sin 2t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La condition de Cauchy $y(0) = 0$ impose $\lambda = 0$. Donc

$$\forall t \in \,]-\pi/2, \pi/2[\,, \qquad y(t) = \sin 2t.$$

A.8. Etude des solutions aux points singuliers

Recollement des solutions aux points singuliers

La résolution de l'équation résoluble associée à (E) : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ fournit toutes les solutions de (E) sur chaque intervalle I inclus dans $\mathscr{D}\setminus\mathscr{S}$. Mais l'équation (E) est définie sur $\mathscr{D}$ et l'on doit donc pouvoir préciser le comportement des solutions au niveau des points singuliers. Si t_s désigne un tel point, il convient donc de voir si l'on peut « recoller » en t_s une ou plusieurs solutions de (E) définies à gauche de t_s à une ou plusieurs solutions de (E) définies à droite de t_s. Attention ! Le recollement obtenu doit être non seulement continu mais aussi dérivable.

Pour comprendre plus clairement cette étape, traitons un exemple.

Exemples :

- Résolvons
$$(E) : \qquad ty' + y = 1.$$
On a $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} = \{0\}$. Sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S} = \mathbb{R}^*$, l'équation (E) est donc équivalente à l'équation résoluble
$$(E^*) : \qquad y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}\cdot$$
On a vu que les solutions de (E^*) sont toutes les fonctions y de la forme
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad y(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\lambda_1}{t} & \text{si } t < 0, \\ 1 + \dfrac{\lambda_2}{t} & \text{si } t > 0, \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$
Si $\lambda_1 \neq 0$ ou si $\lambda_2 \neq 0$, on a $\lim_{t\to 0^-} y(t) = \pm\infty$ ou $\lim_{t\to 0^+} y(t) = \pm\infty$, ce qui interdit de prolonger la fonction sur $\mathbb{R}$. Le seul prolongement possible de ces solutions à $\mathbb{R}$ est donc réalisé pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui donne la fonction constante égale à 1. Comme cette fonction est dérivable, on en conclut que la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = 1.$$

B. Equations différentielles linéaires du deuxiéme ordre á coefficients constants

B.1. Définition

Définition 5

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre sur $\mathscr{D}$ toute relation du type

$$(E): \qquad \forall t \in \mathscr{D}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t),$$

où les coefficients $a, b, c, d : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues et $y : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction inconnue deux fois dérivable. Toute fonction qui satisfait (E) sur $\mathscr{D}$ est appelée une solution. Le graphe d'une solution est appelée une courbe intégrale de (E).

Comme pour les équations du premier ordre, on oublie généralement la variable de l'inconnue y pour alléger l'écriture de (E), ce qui donne

$$(E): \qquad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t).$$

Une telle équation différentielle est dite du deuxième ordre parce qu'elle ne fait intervenir que la fonction et ses dérivées première et deuxième. Elle est dite linéaire parce que l'application $y \longmapsto a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y$ « respecte » les combinaisons linéaires : autrement dit, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation sans second membre $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est également une solution de cette équation.

Dans cette section, nous ne parlerons que d'équations différentielles linéaires du second ordre dont les coefficients sont constants. On considère donc une équation du type

$$(E): \qquad ay'' + by' + cy = d(t),$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$) et $d : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue assez simple (souvent « fabriquée » à partir de fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques). Cette équation est définie sur l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de d et n'admet pas de points singuliers.

Exemples :

- L'équation différentielle décrivant l'élongation d'un ressort de raideur k portant une masse m (sans force de frottement) est $my'' + ky = 0$. On parle de régime libre car le système ne subit pas de force extérieure.

  Avec une force de frottement proportionnelle à la vitesse, l'équation différentielle précédente devient $my'' + cy' + ky = 0$. C'est toujours un régime libre (les forces de frottements ne sont pas considérées comme des forces extérieures).

  Lorsqu'enfin, le ressort subit une force extérieure dépendant du temps, on obtient l'équation différentielle $my'' + cy' + ky = f(t)$. On parle alors de régime forcé.
- L'équation différentielle régissant la position du centre de gravité d'un pendule oscillant est du type $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ où ω est une grandeur physique. Cette équation n'est pas linéaire. En physique, on considère généralement que les oscillations sont de faibles amplitudes (et de petite période), ce qui permet de linéariser l'équation sous la forme $\theta'' + \omega^2\theta = 0$.

Comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre, il est fondamental de savoir distinguer une équation différentielle qui est linéaire d'une autre qui ne l'est pas !

B.2. Equation homogène

Définition 6

On appelle équation différentielle homogène (ou équation sans second membre) associée à l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$ l'équation, notée (E_H), définie par

$$(E_H) : \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'équation caractéristique de (E_H) est l'équation du second degré suivante :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

La proposition suivante donne les solutions d'une équation homogène sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4

Dans le cas où a, b, c sont des nombres complexes, on a :

- ▷ Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $(E_H) : ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_H(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- ▷ Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double complexe r_0. Les solutions de (E_H) sont alors toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_H(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{r_0 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

■ Nous avons démontré cette proposition sur $\mathbb{R}$ dans le chapitre sur les outils d'analyse. La démonstration s'adapte *mutatis mutandis* à $\mathbb{C}$. ■

Lorsque les coefficients sont réels, il est naturel de rechercher les solutions homogènes réelles. La proposition suivante donne ces solutions.

Proposition 5

Dans le cas où a, b, c sont des nombres réels, on a :

- ▷ Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $(E_H) : ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_H(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- ▷ Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double réelle r_0. Les solutions de (E_H) sont alors toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_H(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{r_0 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- ▷ Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\omega$ et $\overline{r} = \alpha - i\omega$, avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E_H) sont alors toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_H(t) = e^{\alpha t}\big(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\big) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

■ Nous avons déjà démontré cette proposition dans le chapitre sur les outils d'analyse. ■

Exemples :

- Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E_m) : \qquad y'' + 2y' + (1-m)y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 2r + (1-m) = 0$$

et son discriminant vaut

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (1-m) = 4m.$$

On distingue donc trois cas :

  - Si $m > 0$, les solutions de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = -1 + \sqrt{m} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -1 - \sqrt{m},$$

  donc les solutions de (E_m) sont les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{(-1+\sqrt{m})t} + \mu\, \mathrm{e}^{(-1-\sqrt{m})t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

  - Si $m = 0$, l'équation caractéritique admet une solution double donnée par

$$r_0 = -1,$$

  donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = (\lambda + \mu t)\, \mathrm{e}^{-t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

  - Si $m < 0$, les solutions de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = -1 + i\sqrt{-m} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -1 - i\sqrt{-m},$$

  donc les solutions de (E_m) sont les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-t} \left(\lambda \cos(\sqrt{-m}t) + \mu \sin(\sqrt{-m}t)\right) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{B}$.3. Solution particulière

Nous présentons dans ce paragraphe des méthodes pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle complète (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$.

Trouver une solution évidente

Comme dans le cas du premier ordre, on commence toujours par regarder si l'équation admet une solution évidente. En particulier, lorsque d est une constante, la solution constante $\forall t \in \mathbb{R},\ y_P(t) = d/c$ est évidente.

Lorsque le second membre $d(t)$ est une fonction « fabriquée » à partir de fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques, on peut rechercher une solution particulière à l'aide des recettes de cuisine rassemblées dans l'encadré suivant.

Solutions particulières « classiques »

Dans les cas où d est « simple », on peut retenir qu'on peut rechercher une solution particulière dont la forme est similaire au second membre. Plus précisément :

- Si $d(t)$ est une fonction polynomiale, on recherche une solution particulière polynomiale de même degré.
- Si $d(t)$ est de la forme $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$, on recherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ où α, β sont des constantes à déterminer.
- Si $d(t)$ est de la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{Q(t)}$ où P et Q sont deux polynômes, on recherche une solution particulière de la forme $y_P(t) = \widehat{P}(t)\,\mathrm{e}^{Q(t)}$ où $\widehat{P}$ est un polynôme de même degré que P.

Dans chacun de ces cas, la recherche peut échouer. Cela signifie alors que la solution est un peu plus compliquée. En particulier, dans le cas où $d(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{kt}$ avec $k \in \mathbb{K}$ qui est une racine de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de la forme $y_P(t) = t\widehat{P}(t)\,\mathrm{e}^{kt}$ lorsque k est racine simple ou $y_P(t) = t^2\widehat{P}(t)\,\mathrm{e}^{kt}$ lorsque k est racine double.

Exemples :

- Déterminons une solution particulière de

$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

Pour cela, on passe dans les nombres complexes, c'est-à-dire que l'on recherche une solution particulière de

$$(E_{\mathbb{C}}) : \qquad z'' + 2z' + 2z = 2\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}.$$

Comme $-1 + i$ est une racine de l'équation caractéristique (cf exemple précédent avec $m = -1$), on recherche cette solution particulière sous la forme $\forall t \in \mathbb{R},\ z_P(t) = at\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}$ avec $a \in \mathbb{C}$. Dès lors, on peut écrire que $\forall t \in \mathbb{R},\ z_P'(t) = \big(a(-1+i)t + a\big)\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ z_P''(t) = 2\big(-iat + (-a+ia)\big)\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}$. On en déduit que le premier membre de $(E_{\mathbb{C}})$ est donné par $\forall t \in \mathbb{R},\ z_P''(t) + 2z_P'(t) + 2z_P(t) = \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,2ia$. En identifiant avec le second membre de $(E_{\mathbb{C}})$, on obtient $a = -i$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z_P(t) = -it\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}.$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E) est donnée par $\forall t \in \mathbb{R},\ y_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(z_P(t)\big)$, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_P(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

On présente ci-dessous la méthode générale de détermination d'une solution particulière. Les fondements de cette méthode (assez technique) vous seront exposés en détail en seconde année.

Méthode de variation des constantes [✠]

Pour avoir une solution particulière de l'équation résoluble (E) : $y'' + \beta y' + \gamma y = \theta(t)$ sur un intervalle I où θ est définie, on peut utiliser la méthode de variation des constantes. Pour cela, on vectorialise l'équation (E) sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}}_{=Y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}}_{=Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(t) \end{pmatrix},$$

ce qui nous ramène à un problème du premier ordre. On procède alors par analogie avec la méthode de variation de la constante en s'appuyant sur les les solutions homogènes :

$$\begin{pmatrix} y_H \\ y'_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

où $\forall t \in \mathbb{R},\ \big(y_1(t), y_2(t)\big) = (\mathrm{e}^{r_1 t}, \mathrm{e}^{r_2 t})$ lorsque $\Delta \neq 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ \big(y_1(t), y_2(t)\big) = (\mathrm{e}^{r_0 t}, t\,\mathrm{e}^{r_0 t})$ lorsque $\Delta = 0$. On effectue alors les étapes suivantes :

- On recherche une solution particulière y_P satisfaisant les relations

$$\begin{pmatrix} y_P \\ y'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

  où $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ désignent deux fonctions dérivables.
- En dérivant cette relation et tenant compte de (E), on obtient que

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(t) \end{pmatrix}.$$

- On détermine alors λ' et μ' (en inversant la matrice 2×2) puis on détermine λ et μ en primitivant. On obtient ainsi y_p.

Exemples :

- Déterminons une solution particulière de

$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t} \sin t.$$

Avec la technique de l'exemple précédent, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ y_P(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_P(t)\big) = -t\,\mathrm{e}^{-t} \cos t$. Voyons ce que donne la variation des constantes. Comme les solutions homogènes sont données par $\forall t \in \mathbb{R},\ y_H(t) = \mathrm{e}^{-t}(\lambda \cos t + \mu \sin t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on recherche y_P telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} y_P \\ y'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \cos t & \mathrm{e}^{-t} \sin t \\ \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) & \mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

où λ, μ sont deux fonctions dérivables. On obtient alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \cos t & \mathrm{e}^{-t} \sin t \\ \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) & \mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-t} \sin t \end{pmatrix}$$

d'où $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = -2\sin^2 t$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ \mu'(t) = 2\cos t \sin t$ puis $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda(t) = \cos t \sin t - t$ et $\mu'(t) = \sin^2 t$, ce qui donne la solution particulière (assez compliquée) suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_P(t) = (\cos t \sin t - t)\,\mathrm{e}^{-t} \cos t + \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-t} \sin t = (\cos t + \sin t)\,\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} \cos t.$$

Comme dans le cas du premier ordre, la technique de superposition permet de simplifier et d'ordonner ses calculs lorsque le second membre de l'équation est une somme de plusieurs termes.

Principe de superposition (le retour !)

Notons que lorsque la fonction d est une somme de plusieurs fonctions, on peut utiliser, comme dans le cas des équations du premier ordre, le principe de superposition.

Exemples :

- Déterminons une solution particulière de

$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) + 2.$$

Nous venons de voir qu'une solution particulière de $(E_1) : y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos t$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_{P,1}(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t$$

et qu'une solution particulière de $(E_2) : y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t}\sin t$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_{P,2}(t) = -t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

Enfin, l'équation $(E_3) : y'' + 2y' + 2y = 2$ admet une solution particulière évidente donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_{P,3}(t) = 1.$$

En conclusion, la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_P(t) = y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) + y_{P,3}(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t) + 1$$

est une solution particulière de (E).

B.4. Equation complète

Proposition 6

Sur chaque intervalle I contenu dans $\mathscr{D}$, les solutions de l'équation différentielle complète $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$ sont toutes les fonctions y obtenues comme la somme d'une solution particulière y_P de l'équation (E) et d'une solution y_H de l'équation homogène associée (E_H), c'est-à-dire

$$y = y_P + y_H.$$

■ Soit y_P une solution particulière de (E) sur I.

Soit y_H une solution de l'équation homogène (E_H) sur I. Posons $y = y_P + y_H$. Alors, pour tout $t \in I$, on a $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = ay''_P(t) + by'_P(t) + cy_P(t) + ay''_H(t) + by'_H(t) + cy_H(t) = d(t) + 0 = d(t)$, ce qui signifie que $y_P + y_H$ est une solution de (E).

Soit y une solution de l'équation complète (E) sur I. Posons $y_H = y - y_P$. Alors, pour tout $t \in I$, on a $ay''_H(t) + by'_H(t) + cy_H(t) = ay''(t) + by'(t) + cy(t) - \big(ay''_P(t) + by'_P(t) + cy_P(t)\big) = c(t) - c(t) = 0$, ce qui signifie que y_H est une solution de (E_H) et donc que y s'écrit comme la somme de la solution particulière y_P et de la solution y_H de l'équation homogène (E_H). ■

Comme dans le cas des équations du premier ordre, il convient, pour résoudre une équation du second ordre, de rechercher ses solutions homogènes et de « translater » celles-ci par une solution particulière.

Exemples :

- Soit
$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) + 2.$$
En combinant les résultats des exemples précédents, on obtient la solution générale de (E) :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-t}(\lambda \cos t + \mu \sin t) + t\,\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t) + 1 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

B.5. Problème de Cauchy

Définition 7

On appelle condition de Cauchy toute condition imposant une valeur (ou une limite) d'une solution (ou de l'une de ses dérivées) en un point de $\mathscr{D}$.

En physique, les conditions de Cauchy pour une équation du deuxième ordre sont souvent deux conditions initiales fixant la position et la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$.

Proposition 7

Soient I un intervalle contenu dans $\mathscr{D}$, $t_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Sous les conditions de Cauchy $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$, l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$ admet une solution unique sur I.

■ On vérifie que les conditions de Cauchy fixent les valeurs de λ et μ dans les solutions de (E). ■

Deux conditions de Cauchy par intervalle !

Une fois déterminées les solutions de (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$ sur l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de d, on peut rechercher les solutions vérifiant une ou plusieurs conditions de Cauchy. Cela permet (en général) de fixer les constantes λ et μ qui apparaissent dans la partie homogène de la solution.

Il faut alors autant de paire de conditions de Cauchy qu'il n'y a d'intervalles dans $\mathscr{D}$.

Exemples :

- Considérons le problème de Cauchy constitué de l'équation

$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 5y = 10\cos t$$

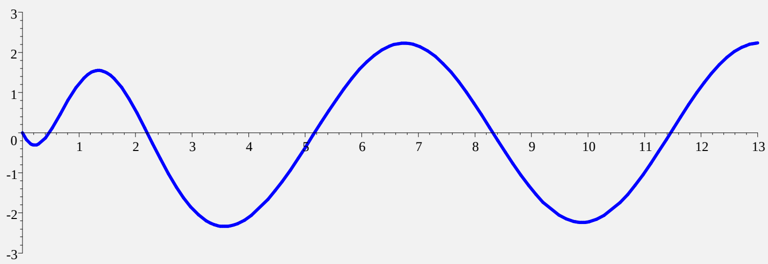
et des deux conditions initiales

$$y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 1.$$

On trouve que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(-2\cos(2t) - 3\sin(2t)\big) + 2\cos t + \sin t,$$

ce qui donne la courbe suivante :



Après un régime transitoire (entre 0 et 5), on observe un régime établi où seule la solution particulière est significative.

Cet exemple illustre l'absence de « sens physique » des solutions homogènes : les solutions de (E) oscillent lorsque t tend vers $+\infty$ alors que les solutions homogènes tendent vers 0.

2 h 30