MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

On présente ici une justification théorique de la méthode du pivot de Gauss.

A. Opérations élémentaires

Nous allons étudier trois opérations élémentaires sur les rangées (lignes ou colonnes) d'une matrice :

(i) échange de deux lignes (respectivement colonnes) ;

(ii) multiplication d'une ligne (respectivement colonne) par un scalaire non nul ;

(iii) addition d'une ligne (respectivement colonne) à une autre ligne (respectivement colonne).

Nous allons voir que chacune de ces opérations revient à effectuer une multiplication par une matrice inversible.

Ainsi, à partir d'une matrice de départ donnée, toutes les matrices que nous allons écrire seront équivalentes à la matrice de départ. Les transformations élémentaires conserveront donc le rang !

Par ailleurs, selon que l'on opère sur les lignes ou sur les colonnes, nous verrons qu'il peut y avoir également conservation du noyau ou de l'image de la matrice.

B. Traduction matricielle des opérations élémentaires

Théorème 1

Pour effectuer l'une des trois transformations élémentaires (i), (ii) ou (iii) sur les lignes (respectivement colonnes) d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, on adopte la démarche suivante :

(i) On effectue sur la matrice identité I_n (respectivement I_m) l'opération élémentaire souhaitée. On obtient ainsi une matrice inversible T.

(ii) On multiplie A par T à gauche (respectivement à droite). On obtient ainsi la matrice $B = TA$ (respectivement $B = AT$).

La matrice B est celle qui est attendue, c'est-à-dire la matrice obtenue en effectuant sur A la transformation élémentaire considérée.

La matrice B a le même rang et le même noyau que A (respectivement le même rang et la même image que A).

■ La démonstration est dispatchée dans les différents encadrés qui suivent. ■

Voici une petite astuce mnémotechnique : pour se rappeler que les opérations sur les lignes correspondant à des multiplications à gauche, on retient que le mot « ligne » commence par un L, comme « left » en anglais. Du coup, les opérations sur les colonnes s'effectuent nécessairement à l'aide de multiplications à droite (même si « colonne » ne commence pas par le R de « right »).

Dans la suite, nous décrivons les opérations sur les lignes. Les opérations sur les colonnes se font de manière analogue.

Échange de deux lignes

Échanger les lignes i et j de $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ revient à la multiplication à gauche par la matrice de transposition $L_{i,j}$, obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n :

$$L_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \phantom{\mathbb{O}} & i & & j & \phantom{\mathbb{O}} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ddots & & & & \mathbb{O} \\ 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1\ \ddots\ 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \\ \mathbb{O} & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ddots & & & & \mathbb{O} \\ 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1\ \ddots\ 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \\ \mathbb{O} & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & a_{1,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & & & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & a_{1,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & & & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On peut annuler l'effet de cette opération en échangeant à nouveau les lignes i et j. Matriciellement, cela découle du fait que ${L_{i,j}}^2 = I_n$. La matrice $L_{i,j}$ est ainsi inversible (c'est une symétrie) : le rang est conservé. Par ailleurs, comme les lignes d'une matrice fournissent des équations cartésiennes du noyau, celui-ci n'est en rien modifié par un changement d'ordre de ces équations : le noyau de la matrice est donc également conservé.

Multiplication d'une ligne par un scalaire

Multiplier la ligne i de $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ par un scalaire λ revient à la multiplier à gauche par la matrice de dilatation $M_i(\lambda)$, obtenue en multipliant par λ la ligne i de I_n :

$$M_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & i & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1\ \ddots\ 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1\ \ddots\ 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \cdots & \lambda a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Si $\lambda \neq 0$, l'effet de cette opération est annulé en multipliant la ligne i par λ^{-1}. Matriciellement, cela vient du fait que $M_i(\lambda^{-1})M_i(\lambda) = I_n$. La matrice $M_i(\lambda)$ est ainsi inversible : le rang est conservé. De plus, multiplier une équation cartésienne par un scalaire non nul ne modifiant pas l'ensemble des vecteurs satisfaisant cette équation, le noyau est conservé.

Addition d'une ligne à une autre

Ajouter λ fois la ligne j à la ligne i de $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ revient à la multiplier à gauche par la matrice de transvection $S_{i,j}(\lambda)$, obtenue en sommant λ fois la ligne j à la ligne i de I_n :

$$S_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbb{O} & \\ & & 1 & 0 \cdots 0 & \lambda & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & \mathbb{O} & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbb{O} & \\ & & 1 & 0 \cdots 0 & \lambda & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & \mathbb{O} & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} + \lambda a_{j,1} & \cdots & a_{i,m} + \lambda a_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On peut annuler l'effet de cette opération en retranchant λ fois la ligne j à la ligne i. Matriciellement, cela vient du fait que $S_{i,j}(-\lambda)S_{i,j}(\lambda) = I_n$. La matrice $S_{i,j}(\lambda)$ est ainsi inversible : le rang est conservé. De plus, opérer sur une ligne d'un système d'équations cartésiennes en lui en ajoutant une autre donne un système équivalent : le noyau est conservé.

C. Théorie du pivot de Gauss

Pour une matrice A, la méthode du pivot consiste à effectuer les opérations élémentaires (ii) et (iii) sur A afin d'obtenir une matrice équivalente à A dans laquelle toutes les lignes non nulles possèdent exactement un pivot. En réordonnant les lignes et les colonnes de la réduite de Gauß à l'aide de plusieurs opérations élémentaires (i), on obtient une matrice équivalente à A de la forme

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} \boxed{p_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \boxed{p_2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{p_r} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les p_i sont non nuls. On dit alors que Δ_r est une réduite de Gauss de A.

On constate alors que $\operatorname{Im} \Delta_r$ est engendrée par les r premières colonnes et que celles-ci sont libres, donc $\operatorname{rg}(\Delta_r) = r$. Cela permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2

Le rang de $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ est le nombre de pivots de n'importe laquelle de ses réduites.