LA DROITE RÉELLE CORRECTION

Exercice 1

On dit qu'une partie K de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Borel–Lebesgue lorsque de tout recouvrement d'ouverts de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini. L'objet de cet exercice est de démontrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Borel–Lebesgue si, et seulement si, cette partie est un compact.

1. a) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. On suppose qu'il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a;b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. On note E l'ensemble des $x \in [a;b]$ tels qu'il existe une partie finie J_x de I telle que $[a;x] \subset \bigcup_{j\in J_x} U_j$.*

$\alpha]$ *Démontrer que E est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Nous allons évidemment démontrer que E est convexe.
Si $E = \varnothing$, il n'y a rien à démontrer (de toute façon, nous verrons que E n'est pas vide !).
Soient $x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$ et $t \in [x;y]$.
Comme $y \in E$, il existe une partie finie J_y de I telle que $[a;y] \subset \bigcup_{j\in J_y} U_j$. Comme $t \in [a;y]$, on a $[a;t] \subset [a;y]$ et donc $[a;t] \subset \bigcup_{j\in J_y} U_j$. Cela démontre que $t \in E$.
Ainsi E est un convexe de $\mathbb{R}$, ce qui démontre que

$$\boxed{E \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$$

$\beta]$ *Démontrer que $a \in E$.*

Comme la famille $(U_i)_{i\in I}$ recouvre $[a;b]$, il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$.
Mézalors, on a $[a;a] \subset U_{i_0}$, ce qui permet de constater que a satisfait la condition pour être dans E (avec $J_a = \{i_0\}$). Donc

$$\boxed{a \in E.}$$

$\gamma]$ *Démontrer que $\sup E \in E$.*

Remarquons tout d'abord que E est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et majorée (par b). Par conséquent, la propriété de la borne supérieure nous permet d'affirmer que $\sup E$ existe, et même que $\sup E \in [a;b]$.

Démontrons que $\sup E \in E$.
Comme $\sup E \in [a;b]$, il existe $i_s \in I$ tel que $\sup E \in U_{i_s}$.
Comme U_{i_s} est un ouvert, il existe $x \in [a;\sup E[$ tel que $[x;\sup E]$ soit inclus dans U_{i_s}.
Comme $x \in [a;\sup E[$, on sait que x appartient à E, ce qui justifie l'existence d'une partie finie J_x de I telle que $[a;x] \subset \bigcup_{j\in J_x} U_j$.
On a alors $[a;\sup E] = [a;x] \cup [x;\sup E] \subset \bigcup_{j\in J_x} U_j \cup U_{i_s} = \bigcup_{j\in J_x\cup\{i_s\}} U_j$. Comme $J_x \cup \{i_s\}$ est fini, cela signifie que

$$\boxed{\sup E \in E.}$$

$\delta]$ *Démontrer que $\sup E = b$.*

Par l'absurde, supposons que $\sup E < b$.
Comme $\sup E \in E$, il existe une partie finie J_s de I telle que $[a;\sup E] \subset \bigcup_{j\in J_s} U_j$.
En particulier, il existe $i_s \in J_s$ tel que $\sup E \in I_s$.
Comme I_s est ouvert, il existe un élément x de $]\sup E;b[$ tel que $[\sup E;x]$ soit inclus dans I_s.
Mézalors, $\bigcup_{j\in J_s} U_j$ recouvre à la fois $[a;\sup E]$ et $[\sup E;x]$, donc $\bigcup_{j\in J_s} U_j$ recouvre $[a;x]$.
Cela démontre que $x \in E$. Comme $x > \sup E$, c'est absurde !
Donc

$$\boxed{\sup E = b.}$$

ε] *En conclure qu'il existe une partie finie J de I telle que $[a;b] \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.*

Les questions précédentes nous disent que $b \in E$, ce qui justifie qu'

$$\boxed{\text{il existe une partie finie } J_b \text{ de } I \text{ telle que } [a;b] \subset \bigcup_{j \in J_b} U_j.}$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{les segments de } \mathbb{R} \text{ vérifient la propriété de Borel–Lebesgue.}}$$

b) *Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Démontrer que K vérifie la propriété de Borel–Lebesgue.*

Supposons qu'il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et démontrons que l'on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

La partie K étant bornée (elle est compacte), il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ tels que $K \subset [a;b]$. Posons $U = \mathbb{R} \setminus K$, qui est un ouvert puisque c'est le complémentaire de K, qui est fermé (puisqu'il est compact).
Alors

$$[a;b] = K \cup ([a;b] \setminus K) \subset K \cup (\mathbb{R} \setminus K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \cup U.$$

On dispose donc d'un recouvrement d'ouverts de $[a;b]$. D'après a), les segments vérifient la propriété de Borel–Lebesgue. On peut donc extraire un sous-recouvrement fini de $[a;b]$, autrement dit il existe une partie finie J de I tel que $[a;b]$ soit inclus dans $\bigcup_{j \in J} U_j \cup U$.

Comme K et U sont disjoints (pardi !), on en déduit que K est inclus dans $\bigcup_{j \in J} U_j$. On dispose ainsi d'un sous-recouvrement fini de K.

Cela démontre que K vérifie la propriété de Borel–Lebesgue et donc que

$$\boxed{\text{tout compact vérifie la propriété de Borel–Lebesgue.}}$$

2. *Soit K une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie la propriété de Borel–Lebesgue.*

a) *Soit $a \in \mathrm{Adh}(K)$. En considérant $(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n])_{n \geqslant 1}$, démontrer que $a \in K$ et en déduire que K est fermée.*

Par l'absurde, supposons que a n'appartient pas à K.

La famille $(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n])_{n \geqslant 1}$ est constituée d'ouverts (ce sont des complémentaires d'intervalles fermés) et l'on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \big(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n]\big) = \mathbb{R} \setminus \Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [a - 1/n; a + 1/n]\Big) = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

Comme $a \notin K$, on en déduit que

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \big(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n]\big).$$

On dispose donc d'un recouvrement d'ouverts de K. Par la propriété de Borel–Lebesgue, il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$K \subset \bigcup_{n \in [\![1;N]\!]} \big(\mathbb{R} \setminus [a - 1/n; a + 1/n]\big),$$

c'est-à-dire

$$K \subset \mathbb{R} \setminus \Big(\bigcap_{n \in [\![1;N]\!]} [a - 1/n; a + 1/n]\Big)$$

ou encore

$$K \subset \mathbb{R} \setminus [a - 1/N; a + 1/N].$$

Cela implique que a n'appartient pas à l'adhérence de K, ce qui est absurde !

En conclusion, on a $\mathrm{Adh}(K) = K$, ce qui signifie que

$$\boxed{K \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.}$$

b) *Démontrer que K est bornée et conclure.*

La famille $(]-n;n[)_{n\geqslant 1}$ est constituée d'ouverts et l'on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n;n[=\mathbb{R}$. Par conséquent, K est inclus dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n;n[$. Par la propriété de Borel–Lebesgue, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que K est inclus dans $\bigcup_{n\in[\![1;N]\!]}]-n;n[$, c'est-à-dire dans $]-N;N[$. Par conséquent,

$$\boxed{K \text{ est bornée dans } \mathbb{R}.}$$

Cela signifie donc que

$$\boxed{K \text{ est un compact de } \mathbb{R}.}$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{toute partie qui vérifie la propriété de Borel–Lebesgue est un compact.}}$$

Remarque culturelle :

Nous avons donc obtenu une caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}$: ce sont celles qui vérifient la propriété de Borel–Lebesgue.

En fait, en topologie générale, la propriété de Borel–Lebesgue sert à définir les compacts (sans avoir à recourir à la notion de « partie bornée » qui nécessite une métrique).

Exercice 2

On pose $C_0=[0;1]$. On découpe C_0 en dix morceaux égaux et on ne garde que le premier et le dernier. On obtient $C_1=[0;0,1]\cup[0,9;1]$. On découpe chacun des deux morceaux de C_1 en dix sous-morceaux égaux et on ne garde, dans chacun des deux morceaux, que le permier et le dernier sous-morceaux. On obtient ainsi $C_2=[0;0,01]\cup[0,09;0,1]\cup[0,9;0,91]\cup[0,99;1]$. Ainsi de suite... On appelle ensemble décadique de Cantor l'ensemble $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$.

1. *Démontrer que C est un compact de $\mathbb{R}$.*

   Par construction, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble C_n est une réunion finie de segments, donc un compact. Dès lors, C est une intersection de compacts. À ce titre,

   $$\boxed{C \text{ est un compact de } \mathbb{R}.}$$

2. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note ℓ_n la somme des longueurs des segments constituant C_n. Déterminer ℓ_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et préciser la limite de la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$. Interpréter.*

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, lorsque l'on passe de C_n à C_{n+1}, on retire $8/10$. Par conséquent, la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $1-8/10=1/5$. Comme $\ell_0=1$, on en déduit que

   $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \ell_n=\frac{1}{5^n}\cdot}$$

   On en déduit que

   $$\boxed{\lim \ell_n=0.}$$

   Ce résultat signifie que la somme des longueurs des composantes de l'ensemble de Cantor est nulle. On exprime ce résultat en disant que

   $$\boxed{\text{l'ensemble de Cantor est de mesure nulle.}}$$

3. *On admet que C est le sous-ensemble de $[0;1]$ constitué des nombres dont l'un des deux développements décimaux (le propre ou l'impropre) ne contient que des 0 ou des 9 (c'est technique à démontrer). En déduire que C n'est pas dénombrable.*

   Il suffit de reproduire le procédé diagonal de Cantor !

   Par l'absurde : on suppose que C est dénombrable. On peut donc énumérer les éléments de C : $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$, cette suite les épuisant tous.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on écrit le développement décimal de x_n qui ne contient que des 0 et des 9, ce qui donne $x_n=0,\overline{a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots}$ où les $a_{n,k}$ appartiennent à $\{0;9\}$.

On introduit alors le nombre y dont le développement décimal $y = 0,\overline{c_1 c_2 c_3 \cdots}$ est construit ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 9 - a_{n,n}$ (autrement dit c_n vaut 0 si $a_{n,n}$ vaut 9 et vice-versa).

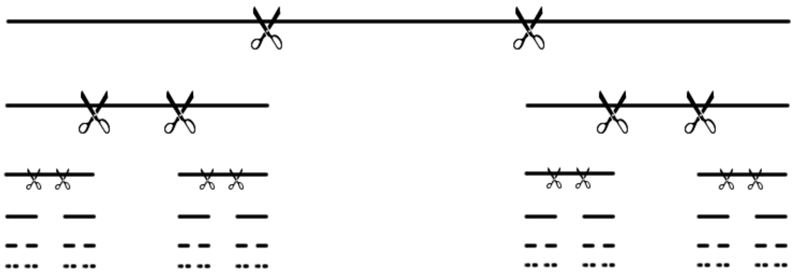
Le nombre y est un élément de C puisque son développement décimal ne contient que des 0 et des 9. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y diffère de x_n puisque leurs n-ème chiffres après la virgule sont différents. On dispose donc d'un élément de C qui n'est pas dans la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$. C'est absurde !

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'ensemble de Cantor est non dénombrable.}}$$

Remarque culturelle :

L'ensemble de Cantor est généralement construit en divisant, à chaque étape, les segments en trois morceaux (et non dix). On obtient alors l'ensemble triadique de Cantor, qui est plus généralement désigné comme « le Cantor ». Voici les premières étapes de sa construction :



Cet ensemble donne un exemple de compact de mesure nulle (et donc d'intérieur vide) et pourtant non dénombrable.

On peut également démontrer qu'aucun des points du Cantor n'est isolé (dans tout ouvert contenant l'un des points du Cantor, il en existe en fait une infinité).

Enfin, le Cantor est une fractale. Il possède la propriété d'autosimilarité suivante : l'image du Cantor par l'homothétie de centre 0 et de rapport 1/3 est elle-même une partie du Cantor. Cela permet d'ailleurs de démontrer que la dimension du Cantor vaut le nombre irrationnel $\ln(2)/\ln(3)$.

Et pour terminer, voici un très joli autologlyphe :