DM n° 4 : Sommes, relations

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm04-nom.pdf` (par exemple `dm04-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace. Pour les fratries, merci d'ajouter votre prénom.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus du problème ci-dessous obligatoire, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 3 de la sélection (lemme de Zorn), après le cours de mardi.

Correction de l'exercice 1 – Formules d'inversion de Pascal

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
(-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k &= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=j}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} a_j && \text{(interversion des signes } \textstyle\sum\text{)} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{m!}{j!} \sum_{k=j}^{m} \frac{(-1)^k}{(m-k)!(k-j)!} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{m!}{j!(m-j)!} \sum_{k=j}^{m} \frac{(-1)^k (m-j)!}{(m-k)!(k-j)!} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{j} \sum_{k=j}^{m} (-1)^k \binom{m-j}{k-j} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{j} \sum_{k=0}^{m-j} (-1)^{k+j} \binom{m-j}{k} && \text{(changement d'indice)} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} a_j \binom{m}{m} (-1)^j (1-1)^{m-j} && \text{(formule du binôme)} \\
&= (-1)^m a_m \binom{m}{m} (-1)^m && \text{(car } 0^0 = 1 \text{ et } 0^n = 0 \text{ si } n > 0\text{)}
\end{aligned}$$

   et donc : $\boxed{a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k}$

2. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, et pour tout m,

$$a_m = m!\delta_k(m).$$

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m!\delta_k(m) \\
&= \binom{n}{k} k!
\end{aligned}$$

   Remarquez que cette dernière égalité est aussi valide si $k > n$: dans ce cas, $\delta_k(m)$ est nul pour toutes les valeurs de m considérées, tout comme le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, on en déduit que :

$$\begin{aligned} m!\delta_k(m) = a_m &= (-1)^m \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} b_p \\ &= (-1)^m \sum_{p=0}^{m} (-1)^p n(n-1)\dots(n-k+1) \binom{m}{p} \end{aligned}$$

En multipliant par $(-1)^m$, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{m} (-1)^p n(n-1)\dots(n-k+1) \binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)}$$

3. On effectue une récurence forte bornée. Soit pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)$

   Pour $k = 0$, cela correspond à l'égalité de la question précédente (pour la même valeur de k) Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $k \in [\![1, m]\!]$. On suppose que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(k-1)$ sont vrais. Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^i \binom{m}{p} = 0$ pour tout $i < k$. On en déduit, par combinaison linéaire de telles expressions, que pour tout polynôme Q

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p Q(p) \binom{m}{p} = 0$$

   Soit $Q = X^k - X(X-1)\dots(X-k+1)$. Ce polynôme est de degré au plus $k-1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p p(p-1)\dots(p-k+1) \binom{m}{p} + \sum_{p=0}^{m} (-1)^p Q(p) \binom{m}{p} \\ &= (-1)^m m!\delta_k(m) + 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(k)$ est vrai

   On en déduit que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, m]\!]$:

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad \boxed{\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m m!\delta_k(m)}$$

4. Supposons que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k,$$

   alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} b_m(n-j) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \sum_{k=0}^{m} a_k (n-j)^k \\ &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^j \binom{m}{j} a_k \binom{k}{\ell} n^\ell (-1)^{k-\ell} j^{k-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} n^\ell (-1)^{k-\ell} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j j^{k-\ell} \binom{m}{j} \end{aligned}$$

   Or, la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} (-1)^j j^{k-\ell} \binom{m}{j}$ est nulle, sauf si $k - \ell = m$. Comme $k \leqslant m$ et $\ell \geqslant 0$, l'égalité $k - \ell = m$ n'est possible que si $k = m$ et $\ell = 0$. Ainsi

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n}{j} b_m(n-j) = a_m \binom{m}{0} n^0 (-1)^m (-1)^m m! = a_m m!$$

On obtient donc :

$$\boxed{a_m = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}b_m(n-j)}$$

Correction de l'exercice 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intervertit les deux signes somme (sur un triangle) :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\cdot\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{j(j+1)}{2}+j\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}.$$

2. On procède de même, en se ramenant au calcul précédent :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{i}{jk} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+3)}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}+3n\right) = \boxed{\frac{n(n+7)}{8}}$$

3. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n}\frac{i_1}{i_2\dots i_n} = \frac{n(n+2^k-1)}{2^k}$.

   - L'initialisation pour $k=0$ est triviale (on obtient simplement $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$). On peut constater que les deux questions précédentes donnent les cas $n=2$ et $n=3$.
   - Soit $k \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}(k)$. Alors :

   $$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_{k+1}\leqslant n}\frac{i_1}{i_2\cdots i_{k+1}} = \sum_{i_{k+1}=1}^{n}\frac{1}{i_{k+1}}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant i_{n+1}}\frac{i_1}{i_2\cdots i_k}.$$

   En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient donc :

   $$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_{k+1}\leqslant n}\frac{i_1}{i_2\cdots i_{k+1}} = \sum_{i_{k+1}=1}^{n}\frac{i_{k+1}+2^k-1}{2^k} = \frac{1}{2^k}\left(\frac{n(n+1)}{2}+(2^k-1)n\right) = \frac{n(n+2^{k+1}-1)}{2^{k+1}}.$$

   Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est encore satisfaite.
   - On déduit du principe de récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\boxed{\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n}\frac{i_1}{i_2\cdots i_n} = \frac{n(n+2^k-1)}{2^k}}$$

Correction de l'exercice 3 – Soit $\alpha \in]1,2[$, et $\beta = \alpha - 1$.

1. On a, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $t \in [n-1,n]$, du fait que $\beta - 1 < 0$:

$$t^{\beta-1} \geqslant n^{\beta-1}.$$

   Ainsi, en intégrant sur $[n-1,n]$:

$$\boxed{\frac{1}{\beta}(n^\beta-(n-1)^\beta) = \int_{n-1}^{n} t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \geqslant n^{\beta-1}}.$$

2. Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(n-1)^\beta}-\frac{1}{n^\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{n^{\beta-1}-(n-1)^{\beta-1}}{n^\beta(n-1)^\beta}$$
$$\geqslant \frac{n^{\beta-1}}{n^\beta(n-1)^\beta}$$
$$= \frac{1}{n(n-1)^\beta}$$
$$\geqslant \frac{1}{n^{\beta+1}},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(n-1)^\beta}-\frac{1}{n^\beta}\right)\geqslant\frac{1}{n^\alpha}}.$$

3. Par télescopage, on en déduit que pour tout $N\geqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant 1+\frac{1}{\beta}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)^\beta}-\frac{1}{n^\beta}\right)=1+\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{1}{N^\beta}\right).$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant 1+\frac{1}{\beta}}.$$

La somme partielle de cette série est donc majorée. Elle est aussi croissante (car la série est à termes positifs). Donc elle converge. Ainsi, $\boxed{\sum\frac{1}{n^\alpha}\text{ converge}}$, et en passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{\alpha}{\alpha-1}.}$$

Correction du problème – Saturation

1. (a) Soit $A\in\mathcal{P}(E)$. Puisque $\sim$ est une relation d'équivalence, elle est reflexive, donc pour tout $x\in A$, $x\sim x$, donc, en prenant $y=x$, il existe bien $y\in A$ tel que $x\sim y$. Ainsi, $x\in A^s$.
On peut conclure que pour tout $A\in\mathcal{P}(E)$, $\boxed{A\subset A^s}$.
   (b) • Si $A=\varnothing$, il ne peut exister de y dans A tel que $x\sim y$, pour aucun $x\in E$. Ainsi, $\boxed{\varnothing^s=\varnothing}$.
   • Puisque $E\subset E^s$ d'après 1, et que par définition, $E^s\subset E$, on obtient $\boxed{E^s=E}$.
   (c) • D'après la question 1, $A^s\subset(A^s)^s$.
   • Soit $x\in(A^s)^s$. Il existe alors $y\in A^s$, qu'on se donne, tel que $x\sim y$. Comme $y\in A^s$, il existe $z\in A$ tel que $y\sim z$. Par transitivité, on en déduit que $x\sim z$, donc que $x\in A^s$. Ainsi, $(A^s)^s\subset A^s$.
   • Des deux inclusions, on déduit l'égalité $\boxed{(A^s)^s=A^s.}$
2. Soit $A\in\mathcal{P}(E)$.
   (a) Soit $y\in E$. Dire que $y\in A^s$ équivaut à dire qu'il existe $x\in A$ tel que $y\sim x$, c'est-à-dire $y\in\overline{x}$. Ceci équivaut bien à dire que $y\in\bigcup_{x\in A}\overline{x}$.
   Ces équivalences montrent que $\boxed{A^s=\bigcup_{x\in A}\overline{x}}$.
   (b) A^s est une partie saturée (question 1c) contenant A (question 1a). Donc A^s est un des termes de l'intersection du membre de droite. On en déduit que

$$\bigcap_{B\in\mathcal{S}(E),A\subset B}B\subset A^s.$$

   Réciproquement, soit B une partie saturée contenant A. On utilise le fait évident que $A\subset B$ implique $A^s\subset B^s$. Ainsi, B étant saturé, $A^s\subset B$. Par conséquent, A^s est inclus dans tout ensemble saturé contenant A, donc :

$$A^s\subset\bigcap_{B\in\mathcal{S}(E),A\subset B}B.$$

   Les deux inclusions amènent l'égalité : $\boxed{A^s=\bigcap_{B\in\mathcal{S}(E),A\subset B}B}$.
   Cette égalité affirme que A^s est la plus petite partie saturée contenant A.
3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

(a) On a
$$A^s \cup B^s = \bigcup_{x\in A} \overline{x} \cup \bigcup_{x\in B} \overline{x} = \bigcup_{x\in A\cup B} \overline{x} = (A\cup B)^s.$$
Ainsi, $\boxed{A^s \cup B^s = (A\cup B)^s}$.

(b) Soit $x \in (A\cap B)^s$. Il existe donc $y \in A\cap B$ tel que $x \sim y$. Puisque $y \in A$, $x \in A^s$. Puisque $y \in B$, $x \in A^s$. Ainsi $x \in A^s \cap B^s$. On a donc toujours l'inclusion $\boxed{(A\cap B)^s \subset A^s \cap B^s}$

En revanche, l'inclusion réciproque est fausse en générale. Le problème provient du fait qu'une même classe peut à la fois avoir un représentant dans A, un représentant dans B, mais aucun dans $A\cap B$. Alors cette classe est incluse dans $A^s \cap B^s$, mais pas dans $(A\cap B)^s$. Un tout simple est le cas de l'ensemble $E = \{1,2\}$, et la relation complète, dont le graphe est $E\times E$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, et l'unique classe est E. Prenant $A = \{1\}$ et $B = \{1\}$, on a alors $A^s = B^s = E$, donc $A^s\cap B^s = E$. En revanche, $A\cap B = \varnothing$, donc $(A\cap B)^s = \varnothing$.

4. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E,
$$(A^s)^c = \bigcup_{x\in E|\overline{x}\cap A=\varnothing} \overline{x}.$$
En effet, une classe est présente dans l'union définissant A^s si et seulement si un de ses représentants est dans A, donc si $\overline{x}\cap A \neq \varnothing$. Or,
$$\{x\in E \mid \overline{x}\cap A = \varnothing\} \subset A^c,$$
puisque $x \in \overline{x}$. Ainsi,
$$(A^s)^c \subset \bigcup_{x\in A^c} \overline{x} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{(A^s)^c \subset (A^c)^s}.$$
On a alors l'égalité dès lors que la première inclusion ci-dessus est une égalité, donc dès lors que la classe de tout élément de A^c est disjointe de A, donc que les classes d'éléments de A sont toutes incluses dans A (elles ne doivent pas déborder). En réécrivant A^s comme union des classes, il vient alors la CNS suivante : $A = A^s$, c'est-à-dire $\boxed{A \text{ saturé}}$.

On peut aussi s'y prendre ainsi : puisque $A\subset A^s$, on a $(A^s)^c \subset A^c \subset (A^c)^s$. On ne peut avoir l'égalité que si les deux inclusions sont des égalités, ce qui impose en particulier $A = A^s$. Réciproquement si $A = A^s$, pour tout $x\in A$, il n'existe aucun $y \in A$ tel que $x\sim y$ (sinon on aurait $y\in A^s$). Ainsi, aucun x de A n'est dans $(A^c)^s$, donc $(A^c)^s \subset A^c$, puis, $(A^c)^s = A^c$. La chaîne d'inclusions ci-dessus est alors constituée de 2 égalités, d'où $(A^s)^c = (A^c)^s$.

Ainsi, $\boxed{(A^s)^c = (A^c)^s \text{ si et seulement si } A \text{ est saturé}}$.

5. Soit $x\in E$. On a $x\in A^s$ si et seulement si il existe $y\in A$ tel que $(x,y)\in G$, si et seulement si l'ensemble $p_2^{-1}(A)\cap G$ contient un élément dont la première coordonnée est x, si et seulement si $x \in p_1(p_2^{-1}(A)\cap G)$.

On a bien obtenu : $\boxed{A^s = p_2(p_1^{-1}(A)\cap G).}$

6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x\in A,\quad \exists y\in B,\quad x\sim y).$$

(a)
- Soit $A\in\mathcal{P}(E)$. On a $A\mathcal{R}A$, car si $A\neq\varnothing$, il suffit de prendre $y = x$ (par reflexivité de $\sim$), et si $A = \varnothing$, la propriété est vraie par défaut, l'hypothèse de l'implication n'étant jamais vérifiée. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est reflexive}}$.
- Soit $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^2$, tels que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Si A est vide, on a de même qu'avant $A\mathcal{R}C$ par défaut. Sinon, soit x quelconque dans A. Il existe y dans B tel que $x\sim y$. Mais comme $B\sim C$, il existe $z\in C$ tel que $y\sim z$. Par transitivité, pour un tel z, on a alors $x\sim z$. Comme on peut trouver un tel z pour tout x de A, on a bien $A\sim C$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive}}$
- En général, $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas une relation d'équivalence}}$ car elle n'est pas symétrique. Plus précisément, si $E\neq\varnothing$, $\varnothing\mathcal{R}E$, mais en revanche, on ne peut pas avoir $E\mathcal{R}\varnothing$. Le cas $E=\varnothing$ est le seul cas où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b)
- Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$, alors pour tout $x\in A$, il existe $y\in B$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$. Ainsi
$$A^s = \bigcup_{x\in A}\overline{x} \subset \bigcup_{y\in B}\overline{y} = B^s.$$
L'inclusion réciproque se montre de même. Ainsi, $A^s = B^s$.

- Réciproquement, si $A^s = B^s$, puisque $A \subset A^s$, tout x de A est aussi dans B^s. Donc il existe $y \in B$ tel que $x \sim y$. Cela prouve que $A\mathcal{R}B$. L'autre relation se prouve de même.
- Ainsi, $\boxed{A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A \text{ si et seulement si } A^s = B^s}$.
- L'égalité $A^s = B^s$ n'équivaut pas à $A = B$, par exemple si une des classes d'équivalence est constituée de 2 éléments x et y, et $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, on a $A^s = B^s$, mais $A \neq B$. Ainsi, en général $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ n'équivaut pas à $A = B$. La relation n'est donc $\boxed{\text{pas une relation d'ordre en général}}$.

(c) La reflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{S}$ sont immédiates. $\boxed{\mathcal{S} \text{ est une relation d'équivalence.}}$

(d) Soient (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, et $A\mathcal{R}B$. D'après la question 6b et la dfinition de $\mathcal{S}$, on a $A\mathcal{R}A'$, $A'\mathcal{R}A$, $B\mathcal{R}B'$, $B'\mathcal{R}B$ et $A\mathcal{R}B$. Selectionnons 3 de ces relations : $A'\mathcal{R}A$, $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}B'$. Par transitivité de $\mathcal{R}$, on obtient alors $A'\mathcal{R}B'$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} \text{ respecte } \mathcal{R}}$.

(e) On définit $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$ par $C\overline{\mathcal{R}}D$ si et seulement s'il existe des représentants A et B des classes C et D tels que $A\mathcal{R}B$. Par conséquent, par définition même,

$$\boxed{A\mathcal{R}B \Longrightarrow \overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B}}.$$

Si A' et B' sont deux autres représentants de C et D, d'après la question précédente, on aura aussi $A'\mathcal{R}B'$. Ainsi, on obtient bien

$$\boxed{\overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B} \Longrightarrow A\mathcal{R}B}.$$

(f)
- Soit C une classe dans $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentée par un élément $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors $A\mathcal{R}A$, par reflexivité de $\mathcal{R}$. Par conséquent, $C\overline{\mathcal{R}}C$, d'où la reflexivité de $\overline{\mathcal{R}}$.
- Soient C, D deux éléments de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentés par A et B. Supposons $C\overline{\mathcal{R}}D$ et $D\overline{\mathcal{R}}C$. On a alors $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ donc $A^s = B^s$, c'est-à-dire $A\mathcal{S}B$, ou encore $C = D$. Ainsi, $\overline{\mathcal{R}}$ est symétrique.
- La transitivité de $\overline{\mathcal{R}}$ découle de celle de $\mathcal{R}$, de la même manière que la reflexivité.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre sur } \mathcal{P}(E)/\mathcal{S}.}$