

## Problème n° 8 : Moyenne arithmético-géométrique

### Problème 1 – Autour de la moyenne arithmético-géométrique

Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs. On définit  $m_a(a, b) = \frac{a+b}{2}$  la moyenne arithmétique de  $a$  et  $b$ , et  $m_g(a, b) = \sqrt{ab}$  la moyenne géométrique de  $a$  et  $b$ .

#### Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique

Montrer que pour tout couple  $(a, b)$  de réels positifs,  $m_g(a, b) \leq m_a(a, b)$ .

### Partie I – Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ . On définit deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{cases}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = m_a(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n, b_n) \end{cases}$$

1. Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes. On note  $\alpha$  et  $\beta$  leur limite respective.
2. Montrer que  $\alpha = \beta$ .

On appelle moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$  la valeur de cette limite commune, et on la note  $M(a, b)$ .

3. Comparer  $M(a, b)$ ,  $m_a(a, b)$  et  $m_g(a, b)$ .

### Partie II – Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout  $x \in [0, 1[$ , et pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  :

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}} \quad \text{et} \quad J(\lambda, \mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2(t) + \mu^2 \sin^2(t)}}.$$

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $(1+x)I(x) = I\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ .

Indication : changement de variable  $u = \text{Arcsin}\left(\frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right)$

2. En se ramenant à l'intégrale  $I$ , montrer que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $J(1, x) = J\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$ .
3. Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tels que  $a \geq b$ , et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies en début de partie I. Montrer que  $(J(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.
4. Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < M(a, b)$ . Justifier l'existence de  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a, b) + \varepsilon} \leq J(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a, b) - \varepsilon}.$$

5. En déduire une expression de  $M(a, b)$  en fonction de  $J(a, b)$ .

### Partie III – Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On définit cette fois  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

1. En étudiant leur monotonie, montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une limite commune (on pourra distinguer les cas  $a \leq b$  et  $b \leq a$ )
2. Soit  $\alpha$  un réel de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$ .

3. On suppose que  $a \leq b$ , et  $\alpha = \arccos\left(\frac{a}{b}\right)$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

4. On suppose de  $a \geq b$ . Montrer l'existence d'un unique réel  $\alpha$  tel que  $a = \operatorname{ch}(\alpha)b$ , et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b \cdot \operatorname{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$