# Chapitre 14 : matrices

## Table des matières

# 1 Premières notions sur les matrices

## 1.1 Définitions

Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels strictement positifs et $K$ un corps.

**Définition 1** On appelle ***matrice à $p$ lignes et $q$ colonnes et à coefficients dans le corps*** $K$, tout élément de l'ensemble $K^{p\times q}$. Si $A$ est une telle matrice, on adopte les notations suivantes :

- $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p; 1\leqslant j\leqslant q}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$

Le coefficient $a_{i,j}$ est un élément du corps $K$ et il s'agit du coefficient de la matrice $A$ placé ligne $i$ et colonne $j$. On peut également le noter $A_{i,j}$

**Définition 2** On note $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients dans le corps $K$.
Lorsque $p = q$, cela signifie que l'on s'intéresse aux matrices ayant le même nombre de lignes que de colonnes. De telles matrices sont appelées ***matrices carrées***. On note de plus $\mathscr{M}_p(K)$ l'ensemble des matrices carrées à $p$ lignes et $p$ colonnes (c'est-à-dire de taille $p \times p$). (En fait, $\mathscr{M}_p(K) = \mathscr{M}_{p,p}(K)$).
Lorsque $p = 1$, on dit que la matrice est une ***matrice ligne*** et si $q = 1$, on dit que la matrice est une ***matrice colonne***.

**Définition 3** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathscr{M}_p(K)$ une matrice carrée d'ordre $p$.

- On dit que $A$ est une ***matrice triangulaire supérieure*** si tous les coefficients situés strictement en dessous de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}$.
- On dit que $A$ est une ***matrice triangulaire inférieure*** si tous les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$.
- On dit que $A$ est une ***matrice diagonale*** si tous les coefficients situés hors de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}$.

Méthode : Comment montrer que des matrices sont triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales ?

Pour montrer que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure ; resp. diagonale) :

▶ prendre $i > j$ (resp. $i < j$ ; resp. $i \neq j$) entre 1 et $n$

▶ montrer que $a_{i,j} = 0$.

**Exemple 1** Les matrices suivantes sont-elles triangulaires supérieures, inférieures, diagonales ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, • $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, • $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

## 1.2 Opérations sur les matrices

**Définition 4** Dans l'ensemble des matrices, on définit trois opérations :

- **addition** $+$ : si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ sont dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$, on pose : $A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$.
- **multiplication par un scalaire** $\cdot$ :
  si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ est dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $\lambda \in K$, on pose : $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$.
- **multiplication entre matrices** $\times$ : si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q} \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q;1\leqslant j\leqslant r} \in \mathscr{M}_{q,r}(K)$ (le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$), on pose : $A \times B = \left(\sum_{k=1}^{q} a_{i,k} \times b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant r}$.

Méthode : Comment additionner deux matrices ?

▶ vérifier que les deux matrices ont même taille

▶ additionner coefficient par coefficient, aux places identiques dans les deux matrices.

Méthode : Comment multiplier une matrice par un scalaire $\lambda$ ?

▶ multiplier chaque coefficient de la matrice par $\lambda$.

Méthode : Comment multiplier deux matrices entre elles ?

Soient $A$ et $B$ deux matrices. Pour effectuer le produit $A \times B$ :

▶ vérifier que le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$

▶ placer la matrice $A$ en bas à gauche et la matrice $B$ en haut à droite

▶ pour calculer le coefficient ligne $i$ colonne $j$ dans la matrice $A \times B$ :
- isoler la ligne $i$ dans $A$
- isoler la colonne $j$ dans $B$
- faire les produits des termes deux à deux, l'un dans la ligne de $A$, l'autre dans la colonne de $B$
- faire la somme des résultats obtenus
- placer ce résultat à l'intersection de la ligne de $A$ et de la colonne de $B$

▶ recommencer pour tous les coefficients.

**Exemple 2** • Effectuer toutes les additions et les produits possibles parmi les matrices suivantes. Calculer aussi la multiplication de chaque matrice par 0, par $-1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \bullet\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• L'ensemble des matrices diagonales ou des matrices triangulaires supérieures est stable pour les opérations d'addition et de multiplication matricielle.

### 1.2.1 Structure d'espace vectoriel

**Proposition 1** Soient $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$, puis $K$ un corps. L'ensemble $(\mathscr{M}_{p,q}(K), +, \cdot)$ forme un $K$-espace vectoriel de dimension $p \times q$. Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la matrice nulle notée 0 dont tous les coefficients sont nuls.
De plus, en notant pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, la matrice $E_{i,j}$ ne comportant que des zéros saut un $1_K$ situé ligne $i$ et colonne $j$, la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ forme une base de l'espace $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ appelée ***base canonique***.
Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q} \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$, alors : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \cdot E_{i,j}$, ce qui montre que les coefficients $a_{i,j}$ sont les coordonnées de la matrice $A$ selon la base canonique.

### 1.2.2 Structure d'algèbre

**Proposition 2** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $K$ un corps. Alors, l'ensemble $(\mathscr{M}_p(K), +, \cdot, \times)$ est une algèbre de dimension $p^2$, en générale non commutative et non intègre. L'élément unité de cet anneau est la matrice identité notée $I_p$ qui est la matrice diagonale, avec que des 1 sur la diagonale.

**Exemple 3** • Dans l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, calculer $A^n$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Dans l'anneau $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, calculer $A \times B$ et $B \times A$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

## 1.3 Liens entres applications linéaires et matrices

### 1.3.1 Matrice représentant une application linéaire

Méthode : Comment représenter une application linéaire par une matrice ?

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire entre deux espaces de dimension finie. On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de $E$, puis $\mathscr{B}'$ une base de $F$.
Pour construire la ***matrice représentant l'application linéaire $f$ selon les bases $\mathscr{B}$ (au départ) et $\mathscr{B}'$ à l'arrivée)*** notée $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ :

- ▶ prendre le premier vecteur $e_1$ de la base $\mathscr{B}$
- ▶ calculer l'image $f(e_1)$ de ce vecteur par $f$
- ▶ calculer les coordonnées de $f(e_1)$ selon la base $\mathscr{B}'$ en résolvant un système linéaire
- ▶ remplir la première colonne de la matrice $A$ avec ces $n$ coordonnées
- ▶ refaire la même chose avec $e_2$, puis $f(e_2)$, puis ses coordonnées selon $\mathscr{B}'$ pour remplir la deuxième colonne, jusqu'à la $p^{ème}$ colonne de $A$.

Méthode : Comment représenter un endomorphisme par une matrice ?

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. On pose $p = \dim E$, puis $\mathscr{B}$ une base de $E$.
Pour construire la ***matrice représentant l'endomorphisme $f$ selon la base $\mathscr{B}$*** notée $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_p(K)$ :

- ▶ prendre le premier vecteur $e_1$ de la base $\mathscr{B}$
- ▶ calculer l'image $f(e_1)$ de ce vecteur par $f$
- ▶ calculer les coordonnées de $f(e_1)$ selon la base $\mathscr{B}$ en résolvant un système linéaire
- ▶ remplir la première colonne de la matrice $A$ avec ces $p$ coordonnées
- ▶ refaire la même chose avec $e_2$, puis $f(e_2)$, puis ses coordonnées selon $\mathscr{B}$ pour remplir la deuxième colonne, jusqu'à la $p^{ème}$ colonne de $A$.

**Exemple 4** Donner les matrices représentant $f$ selon les bases indiquées :
- $f(x,y,z) = (2x+2y-z, 5y-x)$ avec $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$
- $f(x,y,z) = (x-y+z, y-2z, 3x+z)$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- $f(P) = XP'(X) - P(2)\cdot X$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ selon la base canonique
- la dérivation sur $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, f, g)$, selon la base $\Big(\mathbf{1} : x \longmapsto 1, f : x \longmapsto e^{2x}\cos(3x), g : x \longmapsto e^{2x}\sin(3x)\Big)$.
- $f : M \longmapsto AM$ et $g : M \longmapsto MA$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
- le décalage $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace des suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_{n+1} + v_n$.

### 1.3.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Méthode : Comment associer à une matrice une application linéaire ?

Soit $A$ une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$.
L'***application linéaire canoniquement associée à cette matrice*** est définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{q,1}(K) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,1}(K) \\ X & \longmapsto & A \times X \end{array} \right. .$$

**Exemple 5** Indiquer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
toutes les matrices étant à coefficients réels par exemple.

**Exemple 6** Pour chaque application linéaire précédente, calculer la matrice représentant cette application linéaire selon les bases canoniques du départ et de l'arrivée.

**Définition 5** Si $A$ est une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$, on renote $A$ l'application linéaire canoniquement associée àcette matrice. Il s'agit au choix d'un élement dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_{q,1}(K), \mathscr{M}_{p,1}(K))$ ou dans $\mathscr{L}(K^q, K^p)$.

**Proposition 3** Soit $A$ une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$. En notant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ les bases canoniques respectives de $K^q$ et $K^p$, alors : $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(A) = A$.

**Définition 6** Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ une matrice. On appelle ***rang*** de la matrice $A$ le rang de l'application linéaire associée $A \in \mathscr{L}(K^q, K^p)$. Ce rang est encore noté $\mathrm{Rg}(A)$.

**Méthode : Comment calculer le rang d'une matrice et trouver une base de l'image ?**

Si $A$ est dans $\mathscr{M}_{p,q}[K)$, pour calculer $\mathrm{Rg}(A)$, on peut :
- trouver une base de $\mathrm{Ker}A$ en résolvant $AX = 0$
- appliquer le théorème du rang.

Pour trouver une base de $\mathrm{Im}A$, on utilise le fait que le rang d'une matrice est exactement le rang de la famille constituée des colonnes de la matrice :
- considérer la première colonne et la garder si elle est non nulle
- considérer la deuxième colonne et la garder si elle n'est pas colinéaire à la première
- recommencer avec les autres colonnes en gardant la colonne si elle n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par les précédentes
- les colonnes qui ont été gardées forment une base de $\mathrm{Im}A$.

**Exemple 7** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$ dans les cas suivants : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

### 1.4 Formules de composition

**Proposition 4** Soient $E$, $F$ et $G$ trois $K$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. On pose :
- $r = \dim E$ et $\mathscr{B}$ une base de $E$
- $q = \dim F$ et $\mathscr{C}$ une base de $F$
- $p = \dim G$ et $\mathscr{D}$ une base de $G$.

Alors, on dispose de la formule suivante :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}^{\mathscr{D}}(g) \times \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(f).}$$

## 2 Algèbres $\mathscr{M}_p(K)$ et $\mathscr{L}(E)$

Dans ce paragraphe, on fixe un $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie égale à $p$. Soit $\mathscr{B}$ une base de l'espace vectoriel $E$.

### 2.1 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

**Proposition 5** Alors, l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_p(K) \\ f & \longmapsto & \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres.

**Définition 7** Soient $f$ un endomorphisme dans $\mathscr{L}(E)$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot X^k$ un polynôme dans $K[X]$. On appelle ***polynôme d'endomorphisme*** et on note $P(f)$ l'endomorphisme suivant :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot f^k = a_0 \cdot \mathrm{id}_E + a_1 \cdot f + a_2 \cdot f \circ f + \cdots + a_d \cdot f^d,$$

avec $f^k = f \circ f \cdots \cdots \circ f$ où le symbole $f$ apparaît $k$ fois.
On a des notations identiques avec les matrices carrées.

**Exemple 8** • Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $f^2 - f = 0$ (le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un ***polynôme annulateur*** de $f$).
• Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $f^2 - \mathrm{id}_E = 0$ (le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $f$).

### 2.2 Groupe des inversibles

On rappelle que si $(A, +, \times)$ est un anneau et $a \in A$, l'élément $a$ est dit inversible si il existe $b \in A$ tel que :

$$a \times b = b \times a = 1_A \quad : \text{l'élément } b \text{ est unique et est noté } b = a^{-1}.$$

On rappelle également que l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $A$ est noté $A^*$ et qu'il forme un groupe pour la LCI $\times$. De plus, comme dans tout groupe, si $a_1, \cdots, a_r$ sont $r$ éléments inversibles de l'anneau $A$, le produit $a_1 \times \cdots \times a_r$ est encore inversible, d'inverse :

$$(a_1 \times \cdots \times a_r)^{-1} = a_r^{-1} \times \cdots \times a_1^{-1}.$$

**Définition 8** On note $GL(E)$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Cet ensemble est appelé le ***groupe linéaire*** sur $E$. Un élément $f$ est inversible si il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_E$.

**Définition 9** On note $GL_p(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_p(K), +, \times)$. Cet ensemble est appelé le ***groupe linéaire d'ordre*** $p$ des matrices carrées inversibles de taille $p \times p$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(K)$ est inversible si il existe $B \in \mathscr{M}_p(K)$ telle que $A \times B = B \times A = I_p$.

Méthode : Comment montrer qu'une matrice est inversible ?

Soit $A$ dans $\mathscr{M}_p(K)$.
- S'il existe $B \in \mathscr{M}_p(K)$ tel que $AB = I_p$, alors $A$ est inversible et $A^{-1} = B$.
- S'il existe $C \in \mathscr{M}_p(K)$ tel que $CA = I_p$, alors $A$ est inversible et $A^{-1} = C$.
- L'application $A \in \mathscr{L}(K^p)$ est une bijection si et seulement si $A$ est inversible et l'inverse $A^{-1}$ est la bijection réciproque de $A$.

**Exemple 9** • Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 + 3A^2 - A + 5I_3 = 0$, montrer que $A$ est inversible.
• Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

## 3 Systèmes linéaires

### 3.1 Premières notions

**Définition 10** On appelle ***système linéaire*** de $n$ ***équations*** à $p$ ***inconnues*** $x_1, \cdots, x_p$, la donnée d'un système de la forme :

$$\mathscr{S}\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\cdot x_p & = & y_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\cdot x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\cdot x_1 & + & a_{n,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\cdot x_p & = & y_n \end{array}\right.,$$

où les nombres $a_{i,j}$ sont connus et les paramètres $y_1, \cdots, y_n$ également.
On dit que deux systèmes linéaires sont ***équivalents*** s'ils ont exactement les mêmes solutions.
Lorsque $n \leqslant p$, on dit que le système est ***trapézoïdal*** si le système est de la forme :

$$\mathscr{T}\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1\cdot x_1 & + & \star & + & \cdots & + & \star & = & y_1 \\ & & \alpha_2\cdot x_2 & + & \cdots & + & \star & = & y_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \alpha_n\cdot x_n & + & \cdots & = & y_n \end{array}\right..$$

Les nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont alors appelés ***coefficients diagonaux dans le système trapézoïdal***.

## 3.2 Méthode du pivot de Gauss

### 3.2.1 Opérations élémentaires

On se donne un système linéaire $\mathscr{S}$ de $n$ équations à $p$ inconnues :

$$\mathscr{S}\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\cdot x_p & = & y_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\cdot x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\cdot x_1 & + & a_{n,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\cdot x_p & = & y_n \end{array}\right.,$$

où les nombres $a_{i,j}$ sont connus et les paramètres $y_1, \cdots, y_n$ également. On note également pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $L_i$ la $i^{ème}$ équation du système

**Définition 11** Soient $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, $a$ dans $K^*$. On note :
- $L_i \longleftrightarrow L_j$, l'opération qui consiste à échanger les lignes $L_i$ et $L_j$ : c'est une ***transposition***
- $L_i \longleftarrow L_i + a \cdot L_j$, l'opération qui consiste à multiplier la $j^{ème}$ équation par $a$ puis à ajouter cette nouvelle équation à $L_i$ : : c'est une ***transvection***
- $L_i \longleftarrow a \cdot L_i$ l'opération qui consiste à multiplier la $i^{ème}$ équation par le nombre non nul $a$ : : c'est une ***dilatation***.

**Proposition 6** Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ une matrice.
• Si $i \neq j$ sont deux indices entre 1 et $p$, en posant $M_1 = I_p - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}$ [matrice de transposition], alors la matrice $M_1A$ revient à échanger dans $A$ les deux lignes $L_i$ et $L_j$.
• Si $i \neq j$ sont deux indices entre 1 et $p$, si $a \in K$, en posant $M_2 = I_p + a \cdot E_{i,j}$ [matrice de transvection], alors la matrice $M_2A$ revient à modifier dans $A$ la ligne $L_i$ par la ligne $L_i + a \cdot L_j$.
• Si $i$ est un indice entre 1 et $p$ et si $a \in K^*$, en posant $M_3 = I_p + (a-1) \cdot E_{i,i}$ [matrice de dilatation], alors la matrice $M_3A$ revient à modifier dans $A$ la ligne $L_i$ par la ligne $a \cdot L_i$.

#### 3.2.2 Résolution des systèmes (rappels)

Méthode : Comment résoudre un système linéaire ?

On applique la méthode du ***pivot de Gauss*** en utilisant les notations précédentes :
- ▶ si $a_{1,1} \neq 0$ garder la ligne $L_1$, sinon, l'échanger avec une ligne où figure l'inconnue $x_1$
- ▶ combiner les lignes suivantes avec $L_1$ pour éliminer l'inconnue $x_1$ à partir de la deuxième équation
- ▶ refaire la même chose avec le sous-système sans la ligne $L_1$ et sans l'inconnue $x_1$
- ▶ aboutir à un système triangulaire (ou trapézoïdal)
- ▶ exprimer la première inconnue de la dernière ligne en fonction des autres inconnues (qui deviennent des paramètres) s'il y en a ou bien calculer directement cette inconnue
- ▶ remonter dans les lignes pour obtenir les autres inconnues en fonction des paramètres ou directement leur valeur.

Méthode : Comment savoir si un système est de Cramer ou non ?

On considère un système avec autant d'équations que d'inconnues.
- ▶ appliquer la méthode du pivot de Gauss
- ▶ aboutir à un système triangulaire
- ▶ le système initial est de Cramer si et seulement si dans ce système triangulaire, tous les coefficients diagonaux sont non nuls
- ▶ si le système est de Cramer, calculer la dernière inconnue, puis remonter dans les équations.

**Exemple 10** Si $A \in GL_n(K)$, alors $A$ est un produit de matrices de type $M_1$, $M_2$ ou $M_3$ présentes dans la proposition 6.

**Exemple 11** Résoudre les systèmes suivants : $\left\{\begin{array}{r} x_2+2x_3-x_4=1 \\ 2x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{r} \alpha\cdot x_1+x_2=1 \\ x_1+x_3=-1 \\ x_2+3x_3-x_1=3 \end{array}\right.$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

### 3.3 Application aux matrices

Méthode : Comment savoir si une matrice est inversible et calculer son inverse ?

Soit $A$ une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$. Pour savoir si elle est inversible ou non :
- ▶ fixer $Y$ une matrice colonne dans $\mathscr{M}_{p,1}(K)$
- ▶ retranscrire l'équation matricielle $A \times X = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$ sous forme d'un système linéaire de $p$ équations à $p$ inconnues
- ▶ appliquer la méthode précédente pour savoir si ce système est de Cramer ou non :
  - • si le système n'est pas de Cramer, la matrice $A$ n'est pas inversible
  - • si le système est de Cramer, la matrice $A$ est inversible.

  Dans le cas d'un système de Cramer, pour calculer $A^{-1}$ :
  - ▶ résoudre complètement le système
  - ▶ exprimer $y_1, \cdots, y_p$ en fonction des inconnues $x_1, \cdots, x_p$ de façon bien ordonnée
  - ▶ former la matrice $B$ des coefficients apparaissant dans cette résolution
  - ▶ donner l'inverse de $A$ : $A^{-1} = B$.

**Exemple 12** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer l'inverse.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -5 & -2 & -7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 4 Autres opérations sur les matrices

On considère deux entiers $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$ puis un corps $K$.

## 4.1 Transposée

**Définition 12** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}\in \mathscr{M}_{p,q}(K)$. On appelle ***transposée*** de la matrice $A$ et on note $A^T$ la matrice $(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q;1\leqslant j\leqslant p}$ dans $\mathscr{M}_{q,p}(K)$ avec : $\forall (i,j)\in [\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!],\ b_{i,j}=a_{j,i}$.

**Exemple 13** Déterminer la transposée des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

**Proposition 7** On a les propriétés suivantes :

- $(A^T)^T=A$
- $(A\times B)^T=B^T\times A^T$ lorsque les opérations sont possibles
- si $A$ est inversible, $A^T$ aussi et $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

**Définition 13** Soit $A\in\mathscr{M}_p(K)$.
On dit que la matrice $A$ est ***symétrique*** si $A^T=A$. On dit que la matrice $A$ est ***antisymétrique*** si $A^T=-A$.

**Exemple 14** Les espaces $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

## 4.2 Trace

**Définition 14** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$. On appelle ***trace*** de la matrice $A$ et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre : $\mathrm{Tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$ : c'est la somme des coefficients diagonaux.

**Exemple 15** On a $\mathrm{Tr}(I_p)=p$.

**Proposition 8** On a les propriétés suivantes :

- la trace $\mathrm{Tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array} \right.$ est une forme linéaire non nulle
- pour toutes matrices rectangulaires $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$, on a : $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

# 5 Réduction des endomorphismes ou des matrices

Étant donnée une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ le but est de représenter $f$ par une matrice la plus simple possible...

## 5.1 Matrices de passage

Méthode : Comment construire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ ?

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$.
Pour constuire la ***matrice de passage*** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P$ :

- ▶ calculer les coordonnées du premier vecteur de $\mathscr{B}'$ selon la base $\mathscr{B}$
- ▶ remplir la première colonne de $P$ avec ces $p$ coordonnées
- ▶ recommencer avec les autres vecteurs.
- ▶ en fait : $P = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$.

**Exemple 16** Calculer les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ avec :

- $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = \Big((1,1,1),(1,-1,1),(-2,1-3)\Big)$
- $\mathscr{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = \Big((1,1,1),(1,-1,1),(-2,1-3)\Big)$.
- Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel $E$, en notant $P$ la matrice de passage de la $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, quelle est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}^*$ vers la base $\mathscr{B}'^*$ ?
- Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont trois bases d'un espace $E$, si $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$ et si $Q$ est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$, quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{D}$ ? Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$ ?

## 5.2 Changement de base pour les vecteurs

**Proposition 9** Soit $x \in E$ puis $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$. On pose : $X$ (resp. $X'$) la matrice colonne des coordonnées de $x$ selon $\mathscr{B}$ (resp. selon $\mathscr{B}'$). Si $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $X = P \times X'$.

## 5.3 Changement de base pour les applications linéaires

**Proposition 10** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. On pose :

- $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de $E$
- $\mathscr{B}'_1$ et $\mathscr{B}'_2$ deux bases de $F$
- $A = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $B = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}'_2}_{\mathscr{B}_2}(f)$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$
- $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ et $Q$ la matrice de passage de $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$ dans $GL_p(K)$.

Alors, :

$$\boxed{B = Q^{-1} \cdot A \cdot P.}$$

De plus, lorsque $f$ est un endomorphisme de $E$ de dimension $p$, en choisissant deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $E$, en posant $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, puis $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}'}(f)$, alors :

$$\boxed{B = P^{-1} \cdot A \cdot P.}$$

## 5.4 Équivalence et similitude

### 5.4.1 Matrices équivalentes

Soient $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$ puis $K$ un corps.

**Définition 15** Soient $A$ et $B$ deux matrices dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$.
On dit que les deux matrices sont ***équivalentes*** s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_q(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ telles que : $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

**Proposition 11** On dispose des propriétés suivantes :

- la relation $\mathscr{R}$ définie par : « $A \,\mathscr{R}\, B \iff$ les matrices $A$ et $B$ sont équivalentes » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_{p,q}(K)$
- deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ – avec $\dim(E) = q$ et $\dim(F) = p$ – dans des bases différentes au départ et à l'arrivée
- deux matrices $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ; plus précisément, en posant la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en quatre blocs de matrices, alors la matrice est de rang $r$ et il existe exactement $1 + \min(p,q)$ classes d'équivalence. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$, la matrice $A$ est équivalente à la matrice $J_{\mathrm{Rg}(A)}$.

**Méthode : Comment savoir si deux matrices sont équivalentes ?**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de même taille. Pour savoir si elles sont équivalentes :

▶ calculer $\mathrm{Rg}(A)$ et $\mathrm{Rg}(B)$

▶ si $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$, elles sont équivalentes et même équivalentes à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exemple 17** Pour les matrices suivantes, déterminer un entier $r$ et deux matrices inversibles $P$ et $Q$ tels que $Q^{-1}AP = J_r$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ; $A = E_{i,j} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

### 5.4.2 Matrices semblables

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $K$ un corps.

**Définition 16** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées dans $\mathscr{M}_p(K)$.
On dit que les matrices $A$ et $B$ sont ***semblables*** si il existe une matrice inversible $P \in GL_p(K)$ telle que : $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

**Proposition 12** On dispose des propriétés générales suivantes :

- la relation de similitude définie par : « $A \,\mathscr{R}\, B \iff$ les matrices $A$ et $B$ sont semblables » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_p(K)$ des matrices carrées

- deux matrices carrées $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ – avec $\dim(E) = p$ – dans des bases différentes

**Proposition 13** Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_p(K)$.

- Si $A$ et $B$ sont semblables, elles sont équivalentes. Elles ont donc même rang.
- Si $A$ et $B$ sont semblables, elles ont même trace.
- Les matrices d'homothéties sont exactement les matrices dont la classe d'équivalence pour la similitude est un singleton.
- Si $A$ et $B$ ont même trace et même rang, elles ne sont pas forcément semblables.

**Exemple 18** • Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$, alors la matrice $A$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^T$ sont semblables.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $A$ est une matrice de projection si et seulement si la matrice $A$ est semblable à une matrice de type $J_r$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $A$ est une matrice de symétrie si et seulement si la matrice $A$ est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, pour un certain entier $r \in [\![0, n]\!]$.