Maths X 1 Emma Guihard

1 Exercice 1

1. Soit p un nombre premier.
   Montrer que $1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} = 0 \ [p]$
2. Trouver une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $\sum_{k=1}^{n-1} k^n = 0 \ [n]$

2 Exercice 2

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$.

Maths X 2

Soient A, B deux matrices symétriques réelles.

1. Montrer que $tr(exp(A)exp(B)) \geq 0$

   Indication donnée avant même que je commence l'exercice : montrer que $tr(exp(A)exp(B)) = tr(exp(A/2)exp(B)exp(A/2))$

2. Montrer que $tr(exp(A + B)) \leq tr(exp(A)exp(B))$

   Rq : Ici encore, l'examinateur (qui savait l'exercice long car très calculatoire) m'a demandé de montrer certains résultats avant de répondre à la question. Il m'a fait traiter le cas de la dimension 2 et démontrer le résultat suivant :
   Si M est une matrice symétrique réelle de dimension 2, alors M est la somme d'un homothétie et d'une matrice de trace nulle.