

Problème n° 16 : Polynômes

Correction du problème 1 –

Le but de ce problème est de démontrer un théorème dû à George Pólya sur les polynômes à coefficients complexes :

Théorème 1 (Pólya) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré au moins 1. Soit :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leq 2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \{\operatorname{Re}(z), z \in \mathcal{C}\}.$$

Alors \mathcal{R} est inclus dans une union finie d'intervalles fermés bornés deux à deux disjoints I_1, \dots, I_t tels que

$$\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4,$$

la longueur d'un intervalle $I = [a, b]$ étant définie par $\ell(I) = b - a$.

Version réelle :

Théorème 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, dont toutes les racines sont réelles. Alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid |P(x)| \leq 2\}$ est une union disjointe d'intervalles fermés I_1, \dots, I_t tels que

$$\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4.$$

Partie I – Préliminaires

1. Soit P scindé dans \mathbb{R} de racines $r_1 < \dots < r_k$, de multitudes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Lemme 4 Si r est racine au moins double de P' , alors r est racine de P .

Démonstration.

D'après le théorème de Rolle, P' admet des racines s_1, \dots, s_{k-1} vérifiant :

$$r_1 < s_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < s_{k-1} < r_k.$$

Par ailleurs, P' admet aussi les racines r_i , avec multiplicité $\alpha_i - 1$. Cela fournit un total de $k - 1 + (\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_k - 1)$ racines, à savoir $n - 1$ racines (P étant scindé dans \mathbb{R}). Comme P' est de degré $n - 1$, il ne peut pas avoir davantage de racines. En particulier, les s_i ne peuvent pas être racines multiples.

Ainsi, une racine multiple de P' est nécessairement une des racine r_i , d'où le lemme ??.

2. **Lemme 5** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P'(x)^2 \geq P(x)P''(x)$.

Démonstration.

D'après le cours,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{x - r_i},$$

donc, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}, \quad \frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P^2(x)} = - \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{(x - r_i)^2} \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}$, $P'(x)^2 \geq P''(x)P(x)$.

Par continuité, cette inégalité reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie II – Polynômes et théorème de Tchebychev

$$\begin{cases} T_0 = 1; & T_1 = X; \\ \forall n \geq 1, & T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}. \end{cases}$$

1. Étude élémentaire des polynômes T_n

- (a) $T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X, T_4 = 2X(4X^3 - X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 4X^2 + 1.$
- (b) Soit, pour tout n dans \mathbb{N}^* , la propriété $\mathcal{P}(n)$: T_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} , et $T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n$.
Comme $T_1(1) = 1$ et $T_2(1) = 2 - 1 = 1$, et comme $T_1(-1) = -1$ et $T_2(-1) = 1$, les autres propriétés étant évidentes, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Alors $2XT_{n+1}$ est un produit de deux polynômes, donc un polynôme, puis T_{n+2} est la différence de deux polynômes $2XT_{n+1}$ et T_n , donc un polynôme aussi.
De plus, toujours d'après l'hypothèse de récurrence, puisque $T_{n+1} \neq 0$, $\deg 2XT_{n+1} = n+1+1 = n+2$, et $\deg T_n = n < n+2$. Ainsi, d'après les règles de degré d'une somme, les deux degrés étant différents :

$$\deg T_{n+2} = \max(\deg XT_{n+1}, \deg T_n) = n+2.$$

De plus, l'argument précédent montre que le coefficient dominant de T_{n+2} provient exclusivement du terme $2XT_{n+1}$. Ainsi, il est obtenu en multipliant le coefficient dominant de T_{n+1} par 2. Il vaut donc $2^n \cdot 2 = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

Calculons maintenant $T_{n+2}(1)$ à l'aide de la relation de récurrence :

$$T_{n+2}(1) = 2 \cdot 1T_{n+1}(1) - T_n(1) = 2 - 1 = 1.$$

Enfin :

$$T_{n+2}(-1) = 2 \cdot (-1)T_{n+1}(-1) - T_n(-1) = (-1)^n(2 - 1) = (-1)^n = (-1)^{n+2}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies, et pour tout n dans \mathbb{N}^* , $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans \mathbb{N}^* .

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n \text{ est un polynôme de degré } n, \text{ de coefficient dominant } 2^{n-1}, \text{ et } T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n.$$

Remarque : Ne vous amusez pas à faire 5 récurrences différentes pour les 5 propriétés à démontrer. Cela vous ferait perdre du temps, et sans doute de la qualité de rédaction. Mieux vaut rédiger proprement une récurrence que d'en bâcler 5.

- (c) Soit, pour tout n dans \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \cdot \theta)$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1 \cdot \theta)$. Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ soient satisfaits, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la relation de récurrence définissant T_{n+2} :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta), \end{aligned}$$

en utilisant la formule trigonométrique pour le produit $\cos(a) \cos(b)$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+2)$ est vrai.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans \mathbb{N} , $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ entraînent $\mathcal{Q}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans \mathbb{N} .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).}$$

2. Étude des racines de T_n et T'_n . On pose $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On commence par rechercher les racines r dans $[-1, 1]$, sous la forme $r = \cos(\theta)$, pour $\theta \in [0, \pi]$.

On a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = 0$ si et seulement si $n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{2n} [\frac{\pi}{n}]$.

Ainsi les valeurs $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n})$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont n racines distinctes de T_n dans $[-1, 1]$. Comme T_n est de degré n , il ne peut pas avoir davantage de racines. Ainsi, l'ensemble des racines de T_n est :

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \right\}$$

(b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. Dérivons cette égalité (dérivable sur \mathbb{R}) membre à membre par rapport à θ :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\sin(\theta) \cdot T'_n(\cos \theta) = -n \sin(n\theta).$$

Recherchons d'abord les racines de T'_n dans $] -1, 1[$, en écrivant $x = \cos \theta$, $\theta \in]0, \pi[$. Dans ce cas $\sin \theta \neq 0$, et par conséquent, $T'_n(\cos \theta) = 0$ si et seulement si $\sin(n\theta) = 0$, donc si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi \quad \text{soit:} \quad \theta = \frac{k\pi}{n}.$$

Ainsi, les racines de T'_n dans $] -1, 1[$ sont :

$$\left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \right\}.$$

On obtient ainsi $n-1$ racines deux à deux distinctes de T'_n qui est de degré $n-1$. On les a donc toutes.

Comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, il faut inverser l'ordre pour trouver la correspondance entre ces expressions et les s_i :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, s_k = \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right).$$

(c) On en déduit, grâce à la question II-1(c), que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$T_n(s_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)\right) = \cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k} : \boxed{T_n(s_k) = (-1)^{n-k}}.$$

3. Démonstration du théorème de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit Q un polynôme unitaire de degré n .

(a) La fonction $x \mapsto |Q(x)|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1, 1]$, elle y admet donc un maximum.

On définit $Q_n = T_n - 2^{n-1}Q$.

(b) On a $\deg(T_n) = n$, et $\deg(2^{n-1}Q) = n$, donc, d'après les règles de degré d'une somme, $\deg(Q_n) \leq n$. Montrons que cette inégalité est stricte. Le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} d'après 1(b), et celui de Q est 1 (Q est unitaire), donc celui de $2^{n-1}Q$ est 2^{n-1} . Par conséquent, les coefficients du terme X^n dans Q_n se compensent, et Q_n n'a pas de terme de degré n . Par conséquent, $\boxed{\deg(Q_n) \leq n-1}$.

(c) On suppose que $\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

i. Il s'agit de montrer que $Q \neq \frac{T_n}{2^{n-1}}$. D'après la question 1, $|T_n|$ atteint la valeur 1 pour certaines valeurs dans $[-1, 1]$ (les valeurs 1, -1 et s_k , $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$). Ainsi,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{donc:} \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right| \neq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)|,$$

Nous avons donc nécessairement $Q \neq \frac{T_n}{2^{n-1}}$, c'est-à-dire $\boxed{Q_n \neq 0}$.

ii. Déterminons le signe de Q_n en 1, -1 et aux s_k :

- $Q_n(1) = T_n(1) - 2^{n-1}Q_n(1) = 1 - 2^{n-1}Q_n(1)$.

Puisque $\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, $|Q(1)| < 2^{n-1}$, donc $-2^{n-1} < Q(1) < 2^{n-1}$, puis $Q_n(1) > 0$.

- $Q_n(-1) = T_n(-1) - 2^{n-1}Q_n(-1) = (-1)^n - 2^{n-1}Q_n(-1)$.

De même, $-2^{n-1} < Q(-1) < 2^{n-1}$, donc $Q_n(-1) > 0$ si n est pair et $Q_n(-1) < 0$ si n est impair.

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $Q_n(s_k) = (-1)^{n-k} - 2^{n-1}Q$, et le même raisonnement montre que $Q_n(s_k)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$, donc strictement positif si $n - k$ est pair, et strictement négatif si $n - k$ est impair.

Posons $s_0 = -1$ et $s_n = 1$, on obtient alors de manière synthétique :

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_n(s_k)$ est strictement positif si $n - k$ est pair et strictement négatif sinon.

Par conséquent, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_n(s_k)$ et $Q_n(s_{k+1})$ sont de signes (strictement) opposés. La continuité de Q_n associée au théorème des valeurs intermédiaires, montre que Q_n admet alors au moins n racines distinctes, donc strictement plus que son degré. La propriété de rigidité amène donc $Q_n = 0$, d'où une contradiction avec la question précédente.

- (d) L'hypothèse initiale de la démonstration par l'absurde est fausse. Par conséquent :

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Partie III – Exemples et réduction du problème au cas de polynômes réels

1. Un premier exemple : $P = X - a$, $a \in \mathbb{C}$.

- (a) $z \in \mathcal{C}$ si et seulement si $|z - a| \leqslant 2$. Ainsi, \mathcal{C} est le disque fermé de centre a et de rayon 2.

Géométriquement, il est évident qu'alors $\mathcal{R} = [\operatorname{Re}(a) - 2, \operatorname{Re}(a) + 2]$

- (b) Ainsi, \mathcal{R} est la réunion d'un seul intervalle, de longueur $\ell = \operatorname{Re}(a) + 2 - \operatorname{Re}(a) + 2 = 4$.

Le théorème ?? est donc vrai sur cet exemple.

2. Un deuxième exemple : $P = X^2 - 2$.

- (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} x + iy \in \mathcal{C} &\iff |(x + iy)^2 - 2| \leqslant 2 \\ &\iff |x^2 - y^2 - 2 + 2ixy| \leqslant 2 \\ &\iff (x^2 - y^2 - 2)^2 + 4x^2y^2 \leqslant 4 \\ &\iff (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + 4 - 4(x^2 - y^2) \leqslant 4 \\ &\iff (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $x + iy \in \mathcal{C} \iff (x^2 + y^2)^2 \leqslant 4(x^2 - y^2)$.

- (b) • Soit $x + iy \in \mathcal{C}$. Alors :

$$x^4 = (x^2)^2 \leqslant (x^2 + y^2)^2 \leqslant 4(x^2 - y^2) \leqslant 4x^2.$$

Ainsi :

- * si $x \neq 0$, $x^2 \leqslant 4$, puis $|x| \leqslant 2$, soit $x \in [-2, 2]$;
- * si $x = 0$, l'inclusion $x \in [-2, 2]$ est évidente !

Par conséquent, $\mathcal{R} \subset [-2, 2]$.

- On remarque sans peine (en prenant $y = 0$) que $[-2, 2] \subset \mathcal{C}$ donc $[-2, 2]$ est aussi inclus dans la projection de \mathcal{C} sur l'axe réel, soit $[-2, 2] \subset \mathcal{R}$.
- Des deux inclusions, on déduit l'égalité $\mathcal{R} = [-2, 2]$. Cet intervalle étant de longueur 4, le théorème de Pólya est vrai sur cet exemple.

3. Réduction du problème

- (a) Cela résulte de l'inégalité, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ (en effet, $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$), de laquelle il découle, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$|\operatorname{Re}(z) - t_i| \leqslant |z - r_i|.$$

On en déduit alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |Q(\operatorname{Re}(z))| = \prod_{i=1}^k |\operatorname{Re}(z) - t_i|^{\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^k |z - r_i|^{\alpha_i} = |P(z)|, \quad \text{soit: } |Q(\operatorname{Re}(z))| \leqslant |P(z)|$$

- (b) Par conséquent, soit $x \in \mathcal{R}$. Il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $x = \operatorname{Re}(z)$. Ainsi, $|P(z)| \leq 2$. On déduit alors de la question précédente que :

$$|Q(x)| = |Q(\operatorname{Re}(z))| \leq |P(z)| \leq 2,$$

donc que $x \in \mathcal{S}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \subset \mathcal{S}}$.

- (c) Si le théorème ?? est vrai, on a bien obtenu le fait que \mathcal{R} est inclus dans une union finie d'intervalles fermés (à savoir \mathcal{S} donc la longueur totale est inférieure à 4 (on est bien dans les conditions d'application du théorème : Q est unitaire, et scindé dans \mathbb{R}).

Donc $\boxed{\text{le théorème ?? implique le théorème ??}}$.

Remarquez que j'ai modifié l'énoncé de sorte à ne pas avoir à prouver que \mathcal{R} est lui-même une union finie d'intervalles fermés. Des arguments de continuité et de compacité permettent de montrer assez facilement que \mathcal{R} est une union d'intervalles fermés bornés. En revanche, montrer qu'ils sont en nombre fini est une autre histoire. Est-ce vrai d'ailleurs ?

Partie IV – Démonstration du théorème de Pólya

- P est un polynôme de degré au moins 1, donc admet au moins une racine dans \mathbb{C} . Comme par hypothèse, toutes les racines de P sont réelles, P admet une racine r dans \mathbb{R} . Alors $|P(r)| = 0 \leq 2$, donc $r \in \mathcal{S}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} \text{ est non vide.}}$

2. Cas où \mathcal{S} est un intervalle

- Comme P est de degré au moins 1, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |P(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Ainsi, il existe des réels B et B' tels que :

$$\forall x > B, \quad |P(x)| > 2 \quad \text{et} \quad \forall x < B', \quad |P(x)| > 2.$$

Ainsi, $\mathcal{S} \subset [B', B]$, donc $\boxed{I = \mathcal{S} \text{ est borné.}}$

- Soit a et b les bornes inférieure et supérieure de I . Commençons par montrer que $|P(a)| = 2$.

- Dans un premier temps, considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = a - \frac{1}{n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < a$, donc $u_n \notin \mathcal{S}$, donc $|P(u_n)| > 2$.

En passant à la limite dans cette inégalité, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers a et que $|P|$ est continue en a , on obtient : $\boxed{|P(a)| \geq 2}$.

- On en déduit dans un premier temps que $P(a) \neq 0$, donc que $\boxed{a \neq b}$. En effet, si $a = b$, alors \mathcal{S} , qui est non vide, serait égal au singleton $\{a\}$. Or, \mathcal{S} contient une racine de P au moins, d'après la démonstration faite en IV-1. Ainsi, $P(a)$ serait nul, d'où une contradiction.

- Ainsi, $a < b$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = a + \frac{b-a}{n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a < v_n < b$, donc $v_n \in I$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|P(v_n)| \leq 2$. En passant à la limite dans cette inégalité, puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers a et que $|P|$ est continue en a , on obtient : $\boxed{|P(a)| \leq 2}$.

Par conséquent, $\boxed{a < b, \text{ et } |P(a)| = |P(b)| = 2}$ (le raisonnement est similaire pour $|P(b)|$)

On en déduit que $a \in \mathcal{S} = I$, et $B \in \mathcal{S} = I$. Ainsi, I contient ses deux bornes. $\boxed{I \text{ est donc fermé.}}$

- Par définition de I , 2 est un majorant de $|P|$ sur I , atteint aux points a et b .

$\boxed{\text{Ainsi, } |P| \text{ admet sur } I \text{ un maximum, égal à 2.}}$

- Le polynôme Q est de degré n , en tant que composée d'un polynôme de degré n et d'un polynôme de degré 1, le degré d'une composition étant le produit des degrés (pour des polynômes sur un anneau intègre). De plus, le monôme dominant de Q est

$$\left(\frac{2}{b-a} \right)^n \times a_n \left(\frac{b-a}{2} \times X \right)^n = X^n,$$

puisque $a_n = 1$ (P est unitaire). Donc Q est un polynôme unitaire de degré n .

Le théorème de Tchebychev nous apprend alors que :

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| &\geq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{soit:} \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} P\left(\frac{b-a}{2}(x+1) + a\right) \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \\ &\text{soit:} \quad \boxed{\max_{a \leq y \leq b} P(y) \geq 2 \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n}. \end{aligned}$$

(e) D'après IV-2(c), on en déduit que :

$$2 \geq 2 \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \quad \text{soit:} \quad \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \leq 1.$$

Le logarithme étant croissant, on en déduit que $\ln \frac{b-a}{4} \leq \frac{\ln 1}{n} = 0$, puis $0 < \frac{b-a}{4} \leq 1$ et enfin $0 < b-a \leq 4$.

Par conséquent, $\boxed{\mathcal{S} = I, \text{ avec } \ell(I) = b-a \leq 4}$.

Le théorème de Pólya pour les polynômes à coefficients réels (deuxième énoncé) est donc bien vérifié dans le cas où \mathcal{S} est un intervalle.

3. Une description de \mathcal{S}

(a) Comme on l'a déjà vu, P admet au moins une racine réelle r . De plus, P étant un polynôme de degré au moins 1, donc non constant, P est non borné (car se comporte comme son monôme de plus haut degré). Donc il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $|P(s)| > 2$. L'application $|P|$ est continue sur l'intervalle fermé de bornes r et s , et $|P(r)| < 2, |P(s)| > 2$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t dans $]r, s[$ (ou $]s, r[$) tel que $|P(t)| = 2$, donc $t \in E$. $\boxed{E \text{ est donc non vide.}}$

De plus $P - 2$ est un polynôme non nul (car de degré $n \geq 1$), donc admet un nombre fini de racines ; de même, $P + 2$ admet un nombre fini de racines. L'ensemble E étant l'union de ces deux ensembles de racines, $\boxed{E \text{ également fini.}}$

(b) On raisonne par l'absurde : soit $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, et supposons que $[\beta_i, \beta_{i+1}] \not\subset \mathcal{S}$ et $]\beta_i, \beta_{i+1} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $x \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$ tel que $x \notin \mathcal{S}$, et il existe $y \in]\beta_i, \beta_{i+1} \cap \mathcal{S}$, soit $|P(x)| > 2$ et $|P(y)| \leq 2$. De plus, puisque y n'est pas égal à un des β_i , $|P(y)| \neq 2$, donc $|P(y)| < 2$.

Comme $|P|$ est continue sur $[x, y]$ (ou $[y, x]$), on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $c \in [x, y]$ (ou $[y, x]$) tel que $|P(c)| = 2$. Or, $]x, y[$ (ou $]y, x[$) est inclus dans $]\beta_i, \beta_{i+1}[$. Ainsi, il existe $c \in]\beta_i, \beta_{i+1}[$ tel que $|P(c)| = 2$. Or, comme c n'est pas égal à un β_i (donc n'est pas dans E), ceci est impossible.

L'hypothèse initiale de la démonstration par l'absurde est donc faux, et on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $\boxed{\text{soit } [\beta_i, \beta_{i+1}] \subset \mathcal{S}, \text{ soit }]\beta_i, \beta_{i+1} \cap \mathcal{S} = \emptyset}$.

(c) On raisonne de même. Supposons $]-\infty, \beta_1] \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, et soit $x \in]-\infty, \beta_1] \cap \mathcal{S}$. Alors $|P(x)| \leq 2$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} |P(x)| = +\infty$, et comme $|P|$ est continue sur $]-\infty, x]$, il existe $c \in]-\infty, x[\subset]-\infty, \beta_1[$ tel que $|P(c)| = 2$. Un tel c est donc dans E , ce qui contredit $c < \beta_1$.

L'hypothèse initiale de la démonstration par l'absurde est donc fausse. Ainsi $\boxed{]-\infty, \beta_1] \cap \mathcal{S} = \emptyset}$.

Même raisonnement pour montrer que $\boxed{]\beta_N, +\infty[\cap \mathcal{S} = \emptyset}$.

(d) Soit J le sous-ensemble de I constitué des indices $i \in I$ tels que $[\beta_i, \beta_{i+1}] \subset \mathcal{S}$. Alors, d'après ce qui précède,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in J} [\beta_i, \beta_{i+1}] \cup E.$$

J et E étant finis, \mathcal{S} est la réunion d'un nombre fini d'intervalles fermés bornés et éventuellement de points isolés β_i (dans le cas où $i \notin J$ et $i-1 \notin J$). Mais des points isolés sont des cas particuliers d'intervalles fermés bornés ($\{a\} = [a, a]$). Ainsi, J est une union d'un nombre fini d'intervalles fermés bornés.

Ces intervalles ne sont pas forcément disjoints, mais en regroupant les intervalles voisins, on obtient $\boxed{\text{un nombre fini d'intervalles fermés bornés}}$.

4. De l'existence d'une racine de P dans chaque I_j

(a) Les bornes des intervalles I_j , $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, sont, par construction, dans l'ensemble E , donc, par définition de E , pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, $|P(a_j)| = |P(b_j)| = 2$.

(b) Soit $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ tel que $a_j \neq b_j$ et $P(a_j) = P(b_j) = 2$

i. P est une fonction continue sur $[a_j, b_j]$ qui est un intervalle fermé et borné, elle y admet un minimum m . Puisque $P(a_j) = 2$, $m \leq 2$.

- Si $m < 2$, alors ce minimum est atteint en un point $b \in [a_j, b_j]$ différent de a_j et de b_j .
- Si $m = 2$, alors, le minimum est égal au maximum, donc P est constant sur $[a_j, b_j]$, donc en particulier, P admet son minimum en un point intérieur $b \in]a_j, b_j[$.

Ainsi, dans tous les cas, P admet un minimum sur I_j , atteint en un point $b \in]a_j, b_j[$.

ii. Sur l'ouvert $]a_j, b_j[$, P atteint un minimum en b , et est dérivable en b , donc $P'(b) = 0$.

Par ailleurs, au voisinage de b , d'après la formule de Taylor-Young,

$$P(x) = P(b) + P'(b)(x - b) + P''(b) \frac{(x - b)^2}{2} + o((x - b)^2),$$

et donc :

$$P(x) - P(b) \underset{x \rightarrow b}{\sim} P''(b) \frac{(x - b)^2}{2}.$$

Ainsi, si $P''(b) < 0$, par conservation du signe, $P(x) - P(b)$ serait négatif au voisinage de b , ce qui contredit l'existence d'un minimum en b . Ainsi, $P''(b) \geq 0$.

Remarquez qu'il s'agit là d'un argument de convexité locale.

iii. Ceci est le cœur de la démonstration, et fait toute la beauté de la preuve. Distinguons deux cas.

- Si $P''(b) = 0$, alors $P'(b) = P''(b) = 0$, donc b est racine au moins double de P' . De plus, on a supposé que toutes les racines de P (dans \mathbb{C}) sont réelles. On est donc dans les conditions d'application du lemme 6. Ainsi, b est racine de P . Dans ce cas, on a donc trouvé une racine b de P dans $]a_j, b_j[$.
- Si $P''(b) > 0$, utilisons le lemme 7. On est bien dans les conditions d'application de ce lemme, puisque toutes les racines de P sont réelles. Ainsi, en considérant l'inégalité obtenue avec $x = b$, on trouve :

$$0 = P'(b)^2 \geq P(b)P''(b).$$

Ainsi, comme $P''(b) > 0$, on a $P(b) \leq 0$.

Comme P est continue sur $[a_j, b]$, et $P(a_j) = 2 > 0$ et $P(b) \leq 0$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel $c \in [a_j, b]$, forcément distinct de a_j , tel que $P(c) = 0$. Ainsi, P admet une racine dans $]a_j, b[$, donc dans $]a_j, b_j[$.

Dans tous les cas, P admet une racine dans $]a_j, b_j[$.

Cela reste-t-il vrai si P n'est pas scindé dans \mathbb{R} ?

(c) On raisonne exactement de la même façon. Cette fois, P admet un maximum en un point $b \in]a_j, b_j[$. Ce point vérifie $P'(b) = 0$ et $P''(b) \leq 0$. En distinguant comme précédemment selon que $P''(b) = 0$ et $P''(b) < 0$, on obtient une racine de P dans $]a_j, b_j[$.

(d) Supposons que $a_j = b_j$.

- Si $P(a_j) = 2$, alors, puisque I_j est un singleton, et puisque P est continue, il existe un voisinage de a_j sur lequel P est supérieur à 2. Ainsi, P atteint en a_j un minimum local, et comme précédemment, on en déduit que $P'(a_j) = 0$ et $P''(a_j) \geq 0$. De plus :
 - * si $P''(a_j) > 0$, alors, d'après le lemme 7, $P(a_j) \leq 0$, ce qui entre en contradiction avec $P(a_j) = 2$;
 - * si $P''(a_j) = 0 = P'(a_j)$, alors, d'après le lemme 6, $P(a_j) = 0$, ce qui entre en contradiction avec $P(a_j) = 2$.
- De même si $P(a_j) = -2$. Dans ce cas, a_j est un maximum local, et on aboutit de même à une contradiction.

Dans tous les cas, l'hypothèse $a_j = b_j$ conduit à une contradiction. Par conséquent, $a_j \neq b_j$.

(e) Soit $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$. D'après la question précédente, $a_j \neq b_j$. Ainsi :

- Si $P(a_j) = P(b_j)$, alors on est dans un des deux cas des questions (b) et (c). Ainsi, $]a_j, b_j[$ contient une racine de P .

- Si $P(a_j) = 2$ et $P(b_j) = -2$, ou si $P(a_j) = -2$ et $P(b_j) = 2$, alors, P étant continue sur $[a_j, b_j]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit une racine c de P dans $]a_j, b_j[$.

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, P admet une racine dans $]a_j, b_j[$.

5. Où l'on augmente le nombre de racines dans le dernier intervalle

- (a) Si $m = n$, toutes les racines de P (au nombre de n comptées avec multiplicité, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss) sont dans I_t , donc il ne peut y avoir d'autres intervalles I_j constituant \mathcal{S} , car ces intervalles ne contiendraient pas de racine de P , ce qui est en contradiction avec le résultat de la question 4(e). Par conséquent, $t = 1$.

On est donc dans la situation de la question IV-2-e, et le théorème ?? est donc vrai.

- (b) C'est la contraposée de la question précédente, en remarquant que P admet n racines avec multiplicité (donc on a toujours $m \leq n$)

- (c) Les réels c_1, \dots, c_n représentant toutes les racines de P (répétées autant de fois que leur multiplicité), et P étant unitaire, on a

$$P = \prod_{i=1}^n (X - c_i) = \prod_{i=1}^m (X - c_i) \prod_{i=m+1}^n (X - c_i).$$

Ainsi, en posant $R = \prod_{i=m+1}^n (X - c_i)$, on a $P = QR$. D'où l'existence de R . L'unicité de R découle de l'unicité du quotient de la division euclidienne de P par Q .

- (d) i. Soit $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$.

- Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Alors $c_i \in I_t$ par définition. Or, $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$, donc $x \leq b_{t-1}$, d'où

$$x + d = x + a_t - b_{t-1} \leq a_t.$$

Comme $c_i \in I_t$, on a $c_i \geq a_t$. Par conséquent, $x + d - c_i < 0$. Ainsi, comme $d > 0$, on obtient :

$$0 > x + d - c_i > x - c_i, \quad \text{donc: } |x + d - c_i| < |x - c_i|.$$

- Ainsi :

$$|Q(x+d)| = \left| \prod_{i=1}^m (x + d - c_i) \right| = \prod_{i=1}^m |x + d - c_i| < \prod_{i=1}^m |x - c_i| = \left| \prod_{i=1}^m (x - c_i) \right| \quad \text{soit: } |Q(x+d)| < |Q(x)|.$$

- Par conséquent,

$$|P_1(x)| = |Q(x+d)| \cdot |R(x)| \leq |Q(x)| \cdot |R(x)| = |P(x)|,$$

et comme $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \subset \mathcal{S}$, $|P(x)| \leq 2$. Ainsi, $|P_1(x)| \leq 2$

- ii. Soit $x \in I_t$.

- On raisonne de même. Puisque $x \in I_t$, $x \geq a_t$, donc

$$x - d \geq a_t - d = a_t - a_t + b_{t-1} = b_{t-1}.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$, comme $P(c_i) = 0$, on a $c_i \in \mathcal{S}$, et comme $c_i \notin I_t$, on a $c_i \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$, d'où $c_i \leq b_{t-1}$. Par conséquent :

$$\forall i \in \llbracket m+1, n \rrbracket, \quad x - d - c_i \geq 0, \quad \text{donc: } x - c_i > x - d - c_i \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$, $|x - d - c_i| < |x - c_i|$.

On en déduit que : $|R(x-d)| = \prod_{i=m+1}^n |x - d - c_i| \leq \prod_{i=m+1}^n |x - c_i|$, soit : $|R(x-d)| \leq |R(x)|$

- Ainsi :

$$|P_1(x-d)| = |Q(x-d+d)| \cdot |R(x-d)| \leq |Q(x)| \cdot |R(x)| = |P(x)|.$$

Or, $x \in I_t \subset \mathcal{S}$, donc $|P(x)| \leq 2$. Par conséquent, $|P_1(x-d)| \leq 2$.

(e) i. D'après la question (d),

- pour tout $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$, $|P_1(x)| \leq 2$, donc $x \in \mathcal{S}_1$. Ainsi :

$$I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \subset \mathcal{S}_1.$$

- Pour tout $x \in I'_t$, $x + d \in I_t$, donc $|P_1(x)| = |P_1(x + d - d)| \leq 2$. Par conséquent,

$$I_t \subset \mathcal{S}_1.$$

On en déduit que $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t \subset \mathcal{S}_1$.

ii. La factorisation en facteurs irréductibles du polynôme P_1 est :

$$P_1 = \prod_{i=1}^m (X + d - c_i) \cdot \prod_{i=m+1}^n (X - c_i).$$

Les racines de P_1 sont donc $c_1 - d, \dots, c_m - d, c_{m+1}, \dots, c_n$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $c_i \in I_t$, donc $c_i - d \in I'_t \subset I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$, $c_i \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \subset I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t$.

Ainsi, toutes les racines de P_1 sont dans $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t$.

iii. On a : $I_{t-1} = [a_{t-1}, b_{t-1}]$, et $I'_t = [a_t - d, b_t - d] = [b_{t-1}, b_t - d]$. Ainsi :

$$I_{t-1} \cup I'_t = [a_{t-1}, b_{t-1}] \cup [b_{t-1}, b_t - d] = [a_{t-1}, b_t - d].$$

On en déduit que $I_{t-1} \cup I'_t$ est un intervalle.

Alors, $I_{t-1} \cup I'_t$ est inclus dans un même intervalle de la décomposition de \mathcal{S}_1 : il existe $j \in \llbracket 1, t' \rrbracket$ tel que $I_{t-1} \cup I'_t \subset J_j$.

Montrons que $j = t'$. Si ce n'était pas le cas, l'intervalle $J_{t'}$ serait situé strictement plus à droite que $I_{t-1} \cup I'_t$, donc que $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t$. Ainsi :

$$J'_t \cap I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t = \emptyset.$$

Comme $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_t$ contient toutes les racines de P_1 (d'après (e)-ii), il en résultera que I'_t ne contient aucune racine de P_1 , ce qui rentre en contradiction avec la question 4(e) appliquée au polynôme P_1 , à racines toutes réelles.

Par conséquent, $j = t'$, donc $I_{t-1} \cup I'_t \subset J_{t'}$.

iv. I'_t contient m racines de P_1 , et I_{t-1} contient au moins une racine de P d'après la question 4(e), qui est aussi racine de P_1 , puisqu'elle n'est pas dans I_t . Ainsi, $I_{t-1} \cup I'_t$ contient au moins $m + 1$ racines de P_1 (comptées avec multiplicité bien sûr). Comme $I_{t-1} \cup I'_t \subset J_{t'}$, on en déduit que $J_{t'}$ contient au moins $m + 1$ racines de P_1 .

6. On effectue une récurrence forte descendante et bornée sur m , le nombre de racines dans le dernier intervalle constituant \mathcal{S} . Ce nombre m est élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$, n étant le degré (fixé) de P .

Soit, pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(m)$ la proposition : Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n , dont toutes les racines sont réelles, et telles que le nombre de racines situées dans le dernier intervalle constituant \mathcal{S} est m , le théorème ?? est vérifié.

D'après la question IV-5(a), $\mathcal{P}(n)$ est vérifié.

Soit $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(m+1), \dots, \mathcal{P}(n)$ soient vérifiés. Soit alors P un polynôme de degré n à coefficients réels, à racines toutes réelles, et dont le nombre de racines situées dans le dernier intervalle constituant \mathcal{S} est égal à m . On construit le polynôme P_1 comme précédemment. Ce polynôme P_1 est également de degré n , à racines toutes réelles, et le nombre de racines dans le dernier intervalle de \mathcal{S}_1 est strictement plus grand que m . Ainsi, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à P_1 : le théorème ?? est vérifié pour P_1 , donc la longueur totale de \mathcal{S}_1 est inférieure ou égale à 4.

Or, on a montré que $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_{t'} \subset \mathcal{S}_1$, donc la longueur totale de $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_{t'}$ est inférieure à celle de \mathcal{S}_1 , c'est-à-dire à 4. De plus $I'_{t'}$ et I_t étant de même longueur, il est immédiat que $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I'_{t'}$ et

$I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup I_t$ ont même longueur totale. Ainsi, \mathcal{S} est de longueur totale inférieure ou égale à 4, et donc P vérifie le théorème ??.

On a donc montré $\mathcal{P}(n)$, et on a montré que pour tout $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(m+1), \dots, \mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(m)$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(m)$ est satisfait.

Cela prouve le théorème ??, et donc le théorème ??, d'après la partie III.