d) Conclure.

e) Montrer que c_0 n'a pas de supplémentaire topologique dans ℓ^∞.

11 Compléments sur la connexité

124. (**) Soient (E, d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes de E. Montrer que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

est connexe.

125. Soit (x_n) une suite d'un espace métrique compact (E, d) telle que :

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \to 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est connexe.

126. *Espaces bien enchaînés*

Soit (E, d) un espace métrique. On définit une relation $\sim$ sur E par : $a \sim b$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une suite finie de points $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que :

$$a_0 = a, \quad a_n = b\ ; \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad d(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon.$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

On dit que (E, d) est bien enchaîné si et seulement si la seule classe de $\sim$ est E.

b) Montrer qu'un espace connexe est bien enchaîné.

c) Montrer que $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné, généraliser.

d) Montrer qu'un espace métrique compact et bien enchaîné est connexe.

127. *Partition dénombrable en fermés*

Montrer qu'un espace connexe par arcs n'est pas une réunion dénombrable et disjointe de fermés non vides.

128. (***) *Les complémentaires de deux parties finies de $\mathbb{C}$ de cardinaux distincts ne sont pas homéomorphes*

a) Soient n dans $\mathbb{N}$, E le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'un ensemble de cardinal n. Montrer que si K est un compact de E suffisamment grand (en un sens à préciser), alors $E \setminus K$ a au moins n composantes connexes par arcs.

b) Montrer que si A et B sont deux parties finies de $\mathbb{C}$ de cardinaux distincts, $\mathbb{C} \setminus A$ et $\mathbb{C} \setminus B$ ne sont pas homéomorphes.

129. *Théorème de relèvement*

Soit f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. On note $R(f)$ l'ensemble des fonctions g de I dans $\mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = e^{ig(t)}.$$

a) Si $f(I) \neq U$, montrer que $R(f)$ n'est pas vide.

b) Montrer que $R(f)$ n'est jamais vide. Les éléments de $R(f)$ sont les *relèvements* de f.[16]

c) Soit g dans $R(f)$. Montrer : $R(f) = \{g + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

130. *Degré d'une application continue de U dans U*

Soit f une application continue de , g un relèvement de
$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f\left(e^{it}\right).$$
(exercice précédent).

a) Montrer que :
$$\frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi}$$
est un entier relatif indépendant du choix de g dans $R(f)$. Cet entier est appelé *degré* de f et noté $\mathrm{d}(f)$.

b) Montrer, si f_1 et f_2 sont dans $C(U,U)$ avec $\|f_1 - f_2\|_\infty < 2$, que $\mathrm{d}(f_1) = \mathrm{d}(f_2)$.

c) Montrer que $\mathrm{d}(f) = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C(U, \mathbb{R})$ telle que $f = e^{ih}$.

d) Quelles sont les composantes connexes par arcs de $C(U,U)$ muni de $\| \|_\infty$?

e) Si f est un homéomorphisme de U sur U et g un élément de $R(f)$, montrer que g est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

131. *Conjugaison topologique des rotations sur un cercle*

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note r_α la restriction de la rotation d'angle α à U.

Si α et β sont dans $\mathbb{R}$, existe-t-il un homéomorphisme ϕ de U sur U tel que :
$$\phi \circ r_\alpha \circ \phi^{-1} = r_\beta \ ?$$
Le cas échéant, décrire tous les homéomorphismes convenables.

Indication. On pourra utiliser le théorème de relèvement.

132. *Vers le théorème de Runge*

Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et, pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$:
$$\varphi_a\ :\ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z-a} \end{array}.$$
Montrer, si a et b sont dans le même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, que ϕ_a est limite uniforme sur K de polynômes en φ_b.

133. *Vers le théorème de Runge, suite*

Soient K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe et, pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$:
$$\varphi_a\ :\ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z-a} \end{array}$$

16. Le caractère non vide de $R(f)$ est le *théorème de relèvement angulaire*. Il joue un rôle central en topologie plane.

134. *Enveloppe polynomialement convexe d'un compact du plan*
Soient K un compact non vide de $\mathbb{C}$, $\widehat{K}$ la réunion de K et des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$.

a) Montrer que $\widehat{K}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

b) Soit $a \in \widehat{K}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad |P(a)| \leq \|P\|_{\infty,K}.$$

c) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \widehat{K}$. Montrer en utilisant l'exercice précédent qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ convergeant uniformément vers φ_a sur $\widehat{K}$. Posons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \widehat{K}, \qquad Q_n(z) = 1 - (z-a)P_n(z).$$

En utilisant $(Q_n)_{n\geq 0}$, montrer que

$$\left\{|P(a)| \,;\; P \in \mathbb{C}[X], \; \|P\|_{\infty,\widehat{K}} = 1\right\}$$

n'est pas majoré.

135. *Densité des polynômes en z dans $C(K, \| \|_\infty)$ si K est un arc de U*
a) Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. Montrer, si $a \in \mathbb{C} \setminus K$, que :

$$\phi_a \;:\; \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z-a} \end{array}$$

est limite uniforme sur K de polynômes en z.

Indication. On pourra démontrer que l'ensemble des a qui conviennent est une partie de $\mathbb{C} \setminus K$ non vide, ouverte et fermée.

b) Soit K un compact du cercle unité U distinct de U. Montrer que toute fonction continue sur K est limite uniforme de combinaisons linéaires des fonctions :

$$e_n \;:\; \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

12 Un peu de topologie plane

Les exercices suivants présentent des démonstrations simples de résultats très classiques de topologie plane. Les résultats peuvent être étendus en dimension n, au prix d'arguments plus compliqués. [17]

Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, \; |z| \leq 1\}$ et $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, \; |z| = 1\}$.

17. L'outil de base utilisé ici, le théorème de relèvement pour les applications continues de D dans $\mathbb{C}^*$, n'admet pas de généralisation adéquate. L'identification de $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{C}$ joue un rôle essentiel.

d) Calculer $m_n(K)$ pour $K = [-1, 1]$. On pourra déterminer les x de $[-1, 1]$ tels que le polynôme de Tchebychev T_n vérifie $T_n(x) = \pm 1$ et écrire, pour P dans $\mathbb{C}_n[X]$, la formule d'interpolation de Lagrange pour P à partir des points précédents.

175. *Variante du précédent*
Le compact K et la norme N_K est comme dans l'exercice précédent. Soit

$$\delta_n(K) = \inf \{N_K(P),\ P \in E_n,\ P(0) = 0\}.$$

a) Montrer qu'il existe P dans E_n nul en 0 tel que

$$N_K(P) = \delta_n(K).$$

b) Déterminer $\delta_n(K)$ si $K = U$.

13 Connexité : exemples

176. *Complémentaire du graphe d'une fonction continue*
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Quelles sont les composantes connexes par arcs du complémentaire du graphe de φ dans $\mathbb{R}^2$? Que se passe-t-il si φ n'est pas continue ?

177. (**) *Complémentaire d'un sous-espace affine en dimension finie*
a) Soient E un espace normé réel de dimension finie n, V est un sous-espace vectoriel de E de dimension m. Déterminer les composantes connexes par arcs de $E \setminus V$.

b) Même question en remplaçant « réel » par « complexe ».

178. (**) *Parties codénombrables*
Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs.

179. a) Quelles sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme $P(\mathbb{R})$ où $P \in \mathbb{R}[X]$?

b) Quelles sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme $P(\mathbb{R}^2)$ où $P \in \mathbb{R}[X, Y]$?

180. (*) Montrer que la sphère d'un espace normé réel contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants est connexe par arcs.

181. Trouver les composantes connexes par arcs de :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z^2 \neq x^2 + y^2\}.$$

182. (*) Quelles sont les composantes connexes par arcs d'une partie d'intérieur vide de $\mathbb{R}$?

183. Soient E un espace normé réel de dimension > 1, X une partie bornée de E. Montrer que $E \setminus X$ a exactement une composante connexe par arcs non bornée. Que se passe-t-il en dimension 1 ?

184. Soit $(F_m)_{m\geq 1}$ une famille dénombrable de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ tous de codimension au moins 2. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \cup_{m\geq 1} F_m$ est connexe par arcs.

185. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires indépendantes sur E. Déterminer les composantes connexes par arcs de

$$\bigcap_{k=1}^{p} \varphi_k^{(-1)}(\mathbb{R}^*).$$

186. (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ non nul. Montrer que $P^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}^n$.

187. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, $M > 0$,

$$E = \{z \in \mathbb{C},\ |P(z)| > M\} \qquad \text{et} \qquad F = \{z \in \mathbb{C},\ |P(z)| < M\}.$$

a) Montrer que E un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$.

b) Montrer que F a au plus n composantes connexes par arcs.

188. (*) Soient A et B deux parties connexes par arcs de l'espace normé E et :

$$A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

Montrer que $A + B$ est connexe par arcs.

189. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(0) = 0\ ; \qquad \forall t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad f(t) = t^2 e^{i/t}.$$

Montrer que f est dérivable sur $[-1, 1]$ mais que $f'([-1, 1])$ n'est pas connexe par arcs.

190. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit C_n le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. L'ensemble :

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$$

est-il connexe par arcs ?

191. Soient C une partie connexe par arcs non vide de $\mathbb{C}$, n dans $\mathbb{N}^*$, $E_{n,C}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ dont les racines appartiennent toutes à C. Montrer que $E_{n,C}$ est connexe par arcs.

192. (***) Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|$ définie par :

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Soit Ω l'ensemble des f de E qui vérifient $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$ et :

$$\forall x \in [0, 1], \qquad (f(x), f'(x)) \neq (0, 0).$$

Justifier que Ω est un ouvert de E. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

193. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé réel et A une partie non vide de E. On norme $C([0, 1], E)$ par $\|\ \|_\infty$. A quelle condition $C([0, 1], A)$ est-elle une partie connexe par arcs de $(C([0, 1], E), \|\ \|_\infty)$?

194. Soit E l'ensemble des fonctions continues et périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la distance de la convergence uniforme.

a) Montrer que E est connexe par arcs.

b) Si F est l'ensemble des fonctions de E non constantes, F est-il connexe par arcs ?

195. (***) *Complémentaire d'un compact en dimension infinie*
Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé réel de dimension infinie et K un compact de E, montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.
Indication. Sinon, $E \setminus K$ aurait au moins une composante bornée. Soient a dans cette composante, r dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que la sphère S de centre a et de rayon r soit contenue dans $E \setminus K$. Pour x dans S, montrer que le segment $[a, x]$ coupe K. En déduire que S est image continue de K et conclure.

196. *Exemple d'espace connexe non connexe par arcs*
Soit :
$$G = \{(x, \sin(1/x))\,,\ 0 < x \leq \pi\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])\,.$$
Montrer que G n'est pas connexe par arcs mais est connexe.

197. *Exemple d'espace connexe non connexe par arcs et non localement connexe*
Soient dans le plan $\mathbb{R}^2$:
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [(0,0),\ (1, 1/n)] \quad \text{et} \quad B = A \cup](0, 1/2),\ (0, 1)]\,.$$
a) Montrer que A et B sont connexes.

b) Montrer que B n'est pas connexe par arcs.

c) Montrer qu'il existe des points de B dont aucun voisinage dans B n'est connexe (on dit que B n'est pas *localement connexe*).

198. Soient A et B deux fermés disjoints non vides d'un espace métrique. Montrer que $A \cup B$ n'est pas connexe par arcs.

199. Soient A et B deux parties fermées de l'espace métrique (E, d) telles que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes par arcs. Montrer que A et B sont connexes par arcs.

200. (***) *Ensemble de Julia, suite*
Soient P un polynôme de degré ≥ 2 de $\mathbb{C}[X]$, K_P l'ensemble des z de $\mathbb{C}$ tels que la suite des itérés de z par P soit bornée.
Montrer que $\mathbb{C} \setminus K_P$ est connexe par arcs.

14 Connexité : applications

201. *Non existence d'une racine carrée continue sur $\mathbb{C}^*$*
a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : U \to U$ telle que :
$$\forall z \in U, \qquad f^2(z) = z.$$
b) Montrer de même qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que :
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad e^{f(z)} = z.$$

202. *Ouverts connexes d'un espace normé*
Montrer que tout ouvert connexe d'un espace normé est connexe par « lignes brisées ».

203. (*) *Cardinal d'un espace métrique connexe par arcs*

Soit (E, d) un espace métrique connexe non réduit à un point. Montrer que E n'est pas dénombrable.

204. (*) *Cardinal de l'ensemble des composantes d'un ouvert*

Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé séparable, Ω un ouvert de E. Montrer que l'ensemble des composantes connexes par arcs de E est au plus dénombrable.

205. (**) Soient n un entier ≥ 2 et f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$|f(x)| \underset{\|x\| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Montrer que $f(x)$ ou $-f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

206. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(a)$ soit un singleton. Que peut-on dire ?

b) On suppose qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(a)$ soit compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^2$.

c) On suppose que pour tout a de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(a)$ est compact. Montrer que $f(x)$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque $||x||$ tend vers $+\infty$.

207. Soit $n \geq 2$ un entier, f une application continue et surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un fermé de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f n'est pas fermée.

208. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas réunion de cercles euclidiens de rayons strictement positifs deux à deux disjoints.

209. *Passage des douanes*

a) Soit C une partie connexe par arcs de l'espace métrique E. On suppose que C coupe A et $E \setminus A$ où A est une partie de E. Montrer que C coupe la frontière de A.

b) Montrer que a) subsiste en supposant seulement C connexe.

210. Soient $n \geq 2$ un entier, D une droite de $\mathbb{R}^n$. Déterminer les parties de $\mathbb{R}^n$ dont D est la frontière.

211. (**) *Sous-groupes d'un groupe connexe*

a) Soit G un groupe muni d'une distance rendant continue le produit et le passage à l'inverse. Montrer que tout sous-groupe d'intérieur non vide de G est ouvert dans G, puis que tout sous-groupe ouvert de G est fermé. Qu'en déduit-on si G est connexe ?

b) Application : trouver les sous-groupes d'intérieur non vide de $\mathbb{C}^*$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

212. *Lemme de Schreier*

Soient G un groupe métrique connexe par arcs, H un sous-groupe normal discret de G. Montrer que H est contenu dans le centre de G.

213. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

- $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad i \neq j \Rightarrow m_{i,j} < 0$,
- M n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}^-$.

On pose : $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^n$.

a) Montrer que $M^{-1}(\Omega) \cap \mathrm{Fr}\,\Omega = \emptyset$.

b) Montrer que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$.

c) Que dire si M est symétrique définie positive à termes diagonaux < 0 ?

214. (**) *Matrices dont la diagonale est strictement dominante et positive*

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad m_{i,i} > \sum_{j \in \{1,\dots,n\},\, j \neq i} |m_{i,j}|.$$

Montrer que $\det M > 0$.

215. (***) a) Trouver une application non continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant tout compact de $\mathbb{R}$ sur un compact de $\mathbb{R}$. $\to \lfloor\ \rfloor : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

b) Trouver une application non continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant tout intervalle de $\mathbb{R}$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in D^1$ mais $f \notin \mathcal{C}^1$. Théorème de Darboux montre le résultat (prendre f')

c) Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f transforme tout compact en compact, tout connexe par arcs en connexe par arcs. Montrer que f est continue.

216. Soit f une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{K}^n$, il existe P_x dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et un voisinage V_x de x dans $\mathbb{K}^n$ tels que

$$\forall y \in V_x, \quad f(y) = P_x(y).$$

Montrer que f est polynomiale.

217. (***) Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé réel de dimension finie, Ω un ouvert borné connexe de E, f une application continue de Ω dans lui-même d'image ouverte. Prouver l'existence de x_0 dans Ω tel que :

$$d(x_0, Fr(\Omega)) = d(f(x_0), Fr(\Omega)).$$