Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 3 h

FONCTIONS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Pour ce chapitre (comme pour les autres d'ailleurs), quelques souvenirs de vos années de lycée ne sont pas inutiles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Généralités sur les fonctions

A.1. Fonction réelle d'une variable réelle

Définition 1

Intuitivement, on appelle fonction réelle d'une variable réelle (ou fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) une relation f qui associe à un nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$, sous réserve d'existence d'icelui. Cette relation fonctionnelle est notée $x \longmapsto f(x)$ pour dire que l'on associe à x son image $f(x)$. À l'inverse, lorsque l'on a $y = f(x)$, on dit que x constitue un antécédent de y par f.

Il faut bien faire la différence entre la fonction $x \longmapsto f(x)$ et l'expression $f(x)$. La fonction est un processus d'association entre l'élément x et son image $f(x)$ alors que $f(x)$ est le résultat de l'évaluation de f en x (c'est-à-dire un nombre). Ainsi, il ne faut pas écrire « Considérons la fonction e^{x+1} » mais plutôt « Considérons la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1}$ ».

Ensemble de définition

En pratique, la relation $x \longmapsto f(x)$ est généralement donnée sans que soit précisé pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ existe. Il convient alors de déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble de tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ a un sens.

La détermination de l'ensemble de définition est l'étape fondatrice de l'étude de la fonction. Il convient de ne pas la bacler sans quoi toute l'étude qui suit est caduque.

En général, la fonction f est étudiée sur l'intégralité de son ensemble de définition mais, dans certains cas, il peut être intéressant de se restreindre à une partie $\mathscr{D}$ strictement incluse dans $\mathscr{D}_f$.

Une fonction réelle f définie sur $\mathscr{D}$ se note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

Par définition, l'image d'un élément de l'ensemble de définition est nécessairement unique. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on utilise l'article défini « ℓ apostrophe » pour parler de l'image.

Au contraire, tout est possibe pour l'ensemble des antécédents d'un élément : il peut ou bien être vide, ou bien être réduit à un point, ou bien contenir plusieurs éléments (voire une infinité). Il est donc correct d'évoquer « UN antécédent » mais pas de parler de « l'antécédent » (sauf si vous savez par ailleurs que celui-ci est unique).

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto 0$ qui prend constamment la valeur 0 est appelée fonction nulle. Elle est souvent notée $\widetilde{0}$.
- Plus généralement, toute fonction du type $x \longmapsto a$ (où $a \in \mathbb{R}$) est appelée une fonction constante.
- L'identité est la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$.
- Pour l'élévation au carré $x \longmapsto x^2$, le nombre 4 possède deux antécédents qui sont -2 et 2.
- Les fonctions du type $x \longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sont des fonctions polynomiales. Lorsque la somme est réduite à un terme, on parle de fonctions monomiales.
- La fonction $x \longmapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction harmonique. C'est un exemple de fonction rationnelle.

Nous reviendrons sur ces exemples et, plus généralement, sur l'ensemble des fonctions de référence dans la section B. de ce cours.

A.2. Représentation graphique

a) Courbe représentative

Définition 2

Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ où x parcourt l'ensemble de définition.

L'allure de la courbe fait partie intégrante des informations qui doivent être connues à propos d'une fonction de référence.

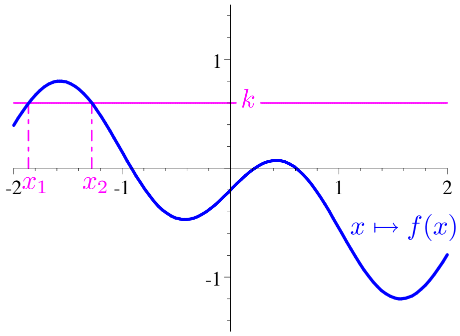
Exemples :

- La courbe de la fonction nulle $\widetilde{0}$ est l'axe des abscisses.
- Plus généralement, la courbe d'une fonction constante égale à a est la droite horizontale d'ordonnée a.
- La courbe de l'identité est la première bissectrice du plan.
- La courbe de $x \longmapsto 1/x$ est constituée de deux branches d'une hyperbole équilatère.

La courbe représentative d'une fonction permet en particulier de visualiser les antécédents d'un réel donné.

Points de niveau k

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $f(x) = k$, qui sont aussi les antécédents de k par f, sont les points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'ordonnée k. Ces valeurs de x sont aussi appelées les points de niveau k de la courbe $\mathscr{C}_f$.



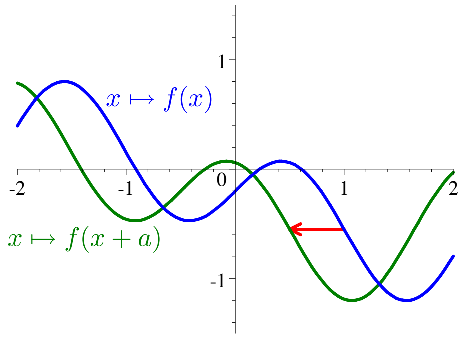
Nous verrons que ces points de niveau permettent de visualiser très simplement les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

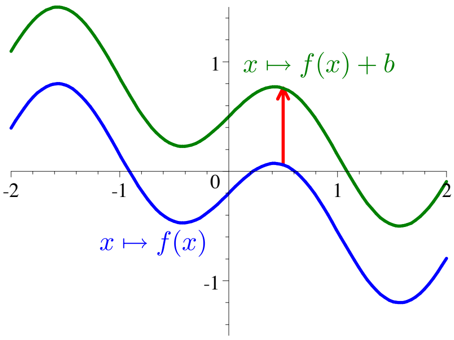
b) *Translation d'une courbe représentative*

Translation d'un graphe

On s'intéresse dans cet encadré au devenir de la courbe représentative d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ lorsqu'on additionne une constante à sa variable ou/et à son image.

- ▶ Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto f(x+a)$ est en « avance » par rapport à la fonction $x \longmapsto f(x)$, c'est-à-dire que $x \longmapsto f(x+a)$ atteint la valeur $f(x)$ dès qu'elle est en $x-a$. Par conséquent, on obtient la courbe représentative de $x \longmapsto f(x+a)$ en déplaçant celle de f de a unités vers la gauche.





- ▶ Soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto f(x)+b$ est « surélevée » par rapport à la fonction $x \longmapsto f(x)$. Par conséquent, on obtient la courbe représentative de $x \longmapsto f(x)+b$ en déplaçant celle de f de b unités vers le haut.
- ▶ Soient $a, b \in \mathbb{R}$. En combinant les deux propriétés précédentes, on voit que l'on obtient la courbe représentative de $x \longmapsto f(x+a)+b$ en translatant celle de f par un vecteur de coordonnées $(-a, b)$.

Évidemment, si $a < 0$ ou $b < 0$, un déplacement de a unités vers la gauche (respectivement de b unités vers le haut) est un déplacement de $|a|$ unités vers la droite (respectivement de $|b|$ unités vers le bas).

S'il semble naturel qu'en ajoutant b à $f(x)$, on fasse monter le graphe vers le haut (pardon pour le pléonasme), il est moins évident que l'ajout d'une constante à la variable x fasse reculer le graphe vers la gauche. C'est le même problème qui se pose lorsqu'on passe de l'heure d'été à l'heure d'hiver ou vice-versa : si l'on ajoute une heure à sa montre, on perd une heure de sommeil alors que si l'on retire une heure à sa montre, on gagne une heure de dodo...

Exemples :

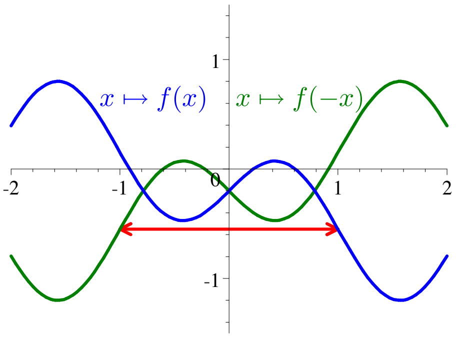
- On a $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ donc le graphe de cosinus est en avance de $\pi/2$ par rapport au graphe du sinus.

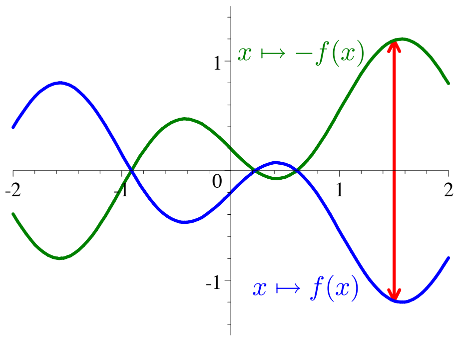
c) *Réflexion d'une courbe représentative*

Retournement d'un graphe

On s'intéresse dans cet encadré au devenir de la courbe représentative d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ lorsqu'on change le signe de sa variable ou/et de son image.

- ▶ La courbe représentative de $x \longmapsto f(-x)$ est obtenue à partir de celle de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe (Oy).



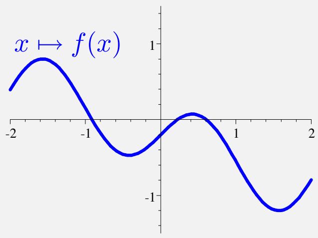


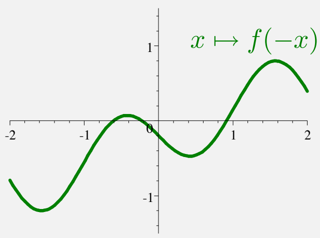
- ▶ La courbe représentative de $x \longmapsto -f(x)$ est obtenue à partir de celle de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe (Ox).

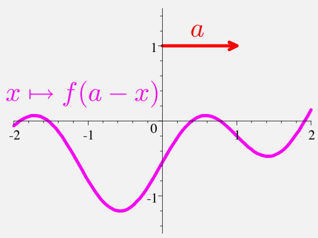
Il n'est évidemment pas interdit de composer ces retournements ou bien entre eux ou bien avec les translations du paragraphe précédent.

Exemples :

- La courbe représentative de $x \longmapsto -f(-x)$ est obtenue à partir de celle de f en effectuant une symétrie centrale par rapport à l'origine O. C'est en effet la transformation géométrique qui résulte de la composition des symétries par rapport à (Oy) et (Ox).
- Pour obtenir la courbe représentative de $x \longmapsto f(a-x)$, on commence par représenter le graphe de $g : x \longmapsto f(-x)$ par symétrisation du graphe de f par rapport à (Oy) puis on translate le graphe de g <u>vers la droite</u> en représentant $h : x \longmapsto g(-a+x)$:







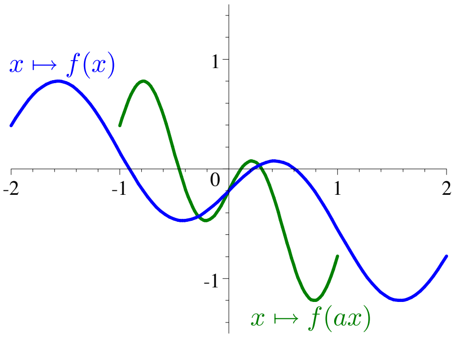
  Cela donne bien le graphe de $x \longmapsto f(a-x)$ car $h(x) = g(-a+x) = f\big(-(-a+x)\big) = f(a-x)$. La transformation géométrique qui en résulte est une symétrie par rapport à la droite verticale d'équation $x = a/2$. C'est en effet la transformation géométrique qui résulte de la composition de la symétrie par rapport à (Oy) et de la translation de a unités vers la droite (y réfléchir !).
- La courbe représentative de $x \longmapsto b - f(x)$ est obtenue à partir de celle de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite horizontale d'équation $y = b/2$. C'est en effet la transformation géométrique qui résulte de la composition de la symétrie par rapport à (Ox) et de la translation de b unités vers le haut.

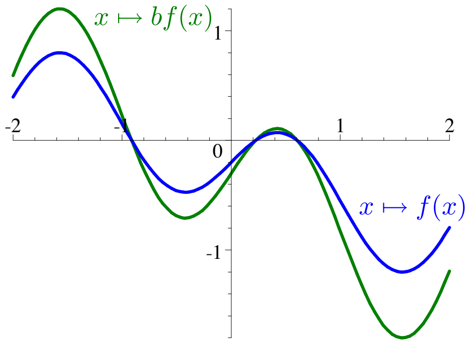
d) *Dilatation et contraction d'une courbe représentative*

Dilatation d'un graphe

On s'intéresse dans cet encadré au devenir de la courbe représentative d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ lorsqu'on multiplie par une constante positive sa variable ou/et son image.

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si $a > 1$, la fonction $x \longmapsto f(ax)$ est obtenue par contraction horizontale de la fonction $x \longmapsto f(x)$, c'est-à-dire que l'on obtient la courbe représentative de $x \longmapsto f(ax)$ en écrasant celle de f d'un facteur a vers l'axe des ordonnées (en suivant l'axe des abscisses). Si $0 < a < 1$, la contraction horizontale de facteur a est une dilatation horizontale de facteur $1/a$.





- Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Si $b > 1$, la fonction $x \longmapsto bf(x)$ est obtenue par dilatation verticale de la fonction $x \longmapsto f(x)$, c'est-à-dire que la courbe représentative de $x \longmapsto bf(x)$ est obtenue en étirant celle de f d'un facteur b en suivant la direction de l'axe des ordonnées. Si $0 < b < 1$, la dilatation verticale de facteur b est une contraction verticale de facteur $1/b$.

Il est naturel qu'en multipliant $f(x)$ par b, on obtienne une dilatation verticale du graphe lorsque $b > 1$ et une contraction verticale lorsque $0 < b < 1$.

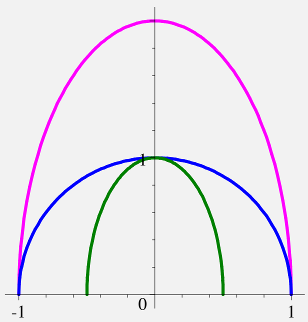
Par contre, il est nettement moins intuitif qu'en multipliant la variable x par a, on obtienne une contraction horizontale lorsque $a > 1$ et une dilatation horizontale lorsque $0 < a < 1$. Et pourtant, lorsqu'on dilate une variable, l'ensemble de définition se contracte et vice-versa.

Exemples :

- La courbe (bleue) de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ est le demi-cercle obtenu en ne gardant que la partie supérieure du cercle trigonométrique (y réfléchir).

  La courbe (verte) de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1 - (2x)^2}$ est un demi-cercle écrasé dans la direction de l'axe (Ox). C'est une demi-ellipse.

  La courbe (rose) de la fonction $x \longmapsto 2\sqrt{1 - x^2}$ est un demi-cercle dilaté dans la direction de l'axe (Oy). C'est aussi une demi-ellipse.



A.3. Périodicité, parité et imparité

Définition 3

Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique lorsque

$$\exists T \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad \big(x+T \in \mathscr{D} \text{ et } f(x+T) = f(x)\big)$$

On dit alors que la fonction f est T-périodique et que T est une période de f.

Lorsque f est T-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur une période : on choisit en général $\mathscr{D} \cap [-T/2; T/2]$.

Si f est T-périodique, alors tout multiple entier de T (c'est-à-dire $2T$, $3T$, $4T$, ...) est aussi une période de f. On ne doit donc pas parler de la période mais seulement d'une période.

Exemples :

- Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T \in \mathbb{R}^*$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont 2π-périodiques.
- Nous verrons que la fonction $x \longmapsto \tan x$ est π-périodique.

On peut aussi réduire le domaine d'étude d'une fonction en utilisant des propriétés de symétrie telles que la parité ou l'imparité.

Définition 4

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire tel que $\forall x \in \mathscr{D}, \ -x \in \mathscr{D}$.

La fonction f est dite paire lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = f(x).$$

La fonction f est dite impaire lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = -f(x).$$

Pour prouver la parité ou l'imparité d'une fonction, il convient de vérifier, en premier lieu, que $\mathscr{D}$ est bien symétrique par rapport à 0.

Une fonction impaire s'annule toujours en 0 lorsqu'elle est définie en ce point.

Pour démontrer qu'une fonction n'est pas paire, on donne un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle l'égalité $f(-x) = f(x)$ n'est pas vraie. De même pour démontrer une non-imparité.

Exemples :

- La fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire.
- La fonction $x \longmapsto \sin^2(x)$, définie sur $\mathbb{R}$, est à la fois π-périodique et paire. Sa périodicité nous permet de ne l'étudier que sur $[-\pi/2; \pi/2]$. Sa parité ramène son étude à $[0; \pi/2]$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}_+$, n'est pas paire puisque $\mathbb{R}_+$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
- Pour démontrer qu'une fonction f admet un centre de symétrie en (a, b), il suffit de considérer la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x+a) - b$ et de prouver que cette fonction est impaire.

A.4. Opérations sur les fonctions

Définition 5

Soient $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.
On appelle somme de f et g la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x).$$

On appelle produit de f et g la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par

$$f \times g : x \longmapsto f(x)g(x).$$

Si g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$ (c'est-à-dire $\forall x \in \mathscr{D},\ g(x) \neq 0$), on appelle quotient de f par g la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par

$$\frac{f}{g} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Il découle sans difficulté des propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ que :

- l'addition des fonctions est associative, commutative, d'élément neutre la fonction nulle ;
- la multiplication des fonctions est associative, commutative, distributive sur l'addition et son élément neutre est la fonction constante égale à 1.
- la fonction nulle $\widetilde{0}$ est un élément absorbant pour la multiplication : $\widetilde{0} \times f = \widetilde{0}$.

Attention ! La réciproque de la propriété précédente est fausse : un produit de fonctions peut être nul sans que l'une des fonctions soit nulle.
Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre pour f une fonction qui s'annule sur $\mathbb{R}_-$ et qui est non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour g une fonction qui s'annule sur $\mathbb{R}_+$ et qui est non nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Le produit fg est alors la fonction nulle sans qu'aucune des deux fonctions ne soit la fonction nulle.
On dit que l'ensemble des fonctions muni de sa multiplication n'est pas intègre.

Définition 6

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u : \mathscr{D}_u \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que u est à valeurs dans $\mathscr{D}_f$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathscr{D}_u,\ u(x) \in \mathscr{D}_f$. On appelle composée de u et f la fonction, notée $f \circ u$, définie par

$$f \circ u \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_u & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\big(u(x)\big) \end{array} \right.$$

La composition est donc l'opération fonctionnelle qui permet d'exprimer l'action successive de plusieurs fonctions. Mais, attention à l'ordre !! La composée de u et f (dans cet ordre) est notée $f \circ u$ pour tenir compte du fait que u agit avant f, c'est-à-dire $\forall x \in \mathscr{D}_u,\ (f \circ u)(x) = f\big(u(x)\big)$.

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est la composée de l'élévation au carré $x \longmapsto x^2$ et de l'exponentielle.

La loi $\circ$ n'est pas commutative : si $f : x \longmapsto x + 1$ et $g : x \longmapsto x^2$, alors $g \circ f : x \longmapsto (x+1)^2$ et $f \circ g : x \longmapsto x^2 + 1$ ne sont pas égales. Pire, il est possible que $g \circ f$ existe sans que $f \circ g$ n'existe. Par exemple, si $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -x^2$, alors $g \circ f : x \longmapsto -x$ mais $f \circ g$ n'existe pas puisque la racine carrée ne digère pas les nombres strictement négatifs !

La loi $\circ$ n'est tout de même pas si affreuse que cela ! En particulier, elle est associative : si f, g, h désignent trois fonctions composables (f est à valeurs dans $\mathscr{D}_g$ et g est à valeurs dans $\mathscr{D}_h$), alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

A.5. Fonctions réelles et relation d'ordre

a) Fonctions majorées, minorées et bornées

Définition 7

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- La fonction f est majorée sur $\mathscr{D}$ lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant M.$$
On dit alors que M est un majorant de la fonction ;
- La fonction f est minorée sur $\mathscr{D}$ lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant m.$$
On dit alors que m est un minorant de la fonction ;
- La fonction f est bornée sur $\mathscr{D}$ lorsque
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$
On dit alors que m et M sont des bornes pour la fonction.

Dire qu'une fonction réelle f est majorée (respectivement minorée) sur $\mathscr{D}$ équivaut à dire que l'ensemble $\{f(x) : x \in \mathscr{D}\}$ des valeurs prises par cette fonction est une partie majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$.

Il n'y a jamais unicité du majorant ou du minorant. Il faut donc bien parler d'UN majorant ou d'UN minorant mais jamais du minorant ou du majorant.

On notera avec attention que les quantités m et M ne dépendent pas de x, autrement dit

un majorant (ou un minorant) ne dépend jamais de la variable.

Une fonction majorée peut très bien n'atteindre aucun de ses majorants. Par exemple, la fonction $x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ n'est majorée par aucune de ses valeurs puisque le plus petit de ses majorants est 1 et qu'elle est strictement inférieure à cette valeur.

Exemples :

- Une fonction positive est minorée par 0.
- Les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$ entre -1 et 1.
- Nous verrons que la fonction $x \longmapsto \tan x$ n'est pas bornée. Une fonction périodique n'est donc pas nécessairement bornée (alors qu'une suite périodique l'est).
- Pour borner de manière élémentaire une fonction définie par un quotient, il faut majorer la valeur absolue du numérateur et minorer la valeur absolue du dénominateur par une constante strictement positive.

  Démontrons ainsi que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-|x|}}{5 - 4\cos(x)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|\,\mathrm{e}^{-|x|}\,| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |5 - 4\cos(x)| \geqslant 5 - 4|\cos(x)| \geqslant 5 - 4 = 1,$$
  donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{5 - 4\cos(x)}\right| \leqslant \frac{1}{1} = 1,$$
  ce qui démontre que f est bornée entre -1 et 1.

Pour démontrer qu'une fonction est bornée, il convient de faire très attention aux signes des expressions qui interviennent dans les inégalités que l'on manipule. Pour éviter tout écueil, on préfère souvent travailler en valeurs absolues (comme dans l'exemple précédent). La proposition suivante justifie la légitimité de cette démarche.

Proposition 1

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. La fonction f est bornée sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, la valeur absolue de f est majorée, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |f(x)| \leqslant K.$$

■ Si $|f|$ est majorée par K, alors $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K$, ce qui implique que $\forall x \in \mathscr{D},\ -K \leqslant f(x) \leqslant K$ et donc que f est bornée (puisqu'elle est minorée par $-K$ et majorée par K). Réciproquement, si f est bornée, alors f est minorée par m et majorée par M, c'est-à-dire $\forall x \in \mathscr{D},\ m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc, en posant $K = \max\{|m|\,;\,|M|\}$, on a $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K$, ce qui établit bien que $|f|$ est majorée. ■

L'équivalence donnée dans cette proposition est uniquement qualitative. Du point de vue quantitatif, il est généralement plus précis de connaître un minorant et un majorant d'une fonction que de connaître un majorant de sa valeur absolue. Ainsi, si l'on sait que $\forall x \in \mathscr{D},\ 2 \leqslant f(x) \leqslant 3$, alors $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant 3$ mais l'information est moins précise.

L'exemple ci-dessous donne une situation où il est plus simple de travailler avec des valeurs absolues qu'avec des encadrements et les enquiquineries de signe qui vont avec.

Exemples :

- Démontrons que le produit et la somme de deux fonctions bornées est encore une fonction bornée.

  Soient f et g deux fonctions bornées sur $\mathscr{D}$. Il existe alors deux constante $K_f, K_g > 0$ telles que $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K_f$ et $\forall x \in \mathscr{D},\ |g(x)| \leqslant K_g$.
  En multipliant ces deux inégalités (entre nombres positifs ou nuls), on obtient l'inégalité $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)g(x)| \leqslant K_f K_g$, ce qui démontre que la fonction fg est bornée sur $\mathscr{D}$.
  En ajoutant ces deux inégalités, on obtient $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| + |g(x)| \leqslant K_f + K_g$. Comme l'inégalité triangulaire nous dit que $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$, on en déduit que $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x) + g(x)| \leqslant K_f + K_g$, ce qui démontre que $f + g$ est bornée.

b) Fonctions monotones

Définition 8

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- La fonction f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $\mathscr{D}$ lorsque

$$\forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad (x < y) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant f(y)\big) \qquad (\text{respectivement } f(x) < f(y)).$$

- La fonction f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $\mathscr{D}$ lorsque

$$\forall x, y \in \mathscr{D}, \qquad (x < y) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant f(y)\big) \qquad (\text{respectivement } f(x) > f(y)).$$

- La fonction f est monotone (respectivement strictement monotone) sur $\mathscr{D}$ lorsqu'elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathscr{D}$.

Remarquons qu'une fonction f est croissante (respectivement strictement croissante, respectivement décroissante, respectivement strictement décroissante) si, et seulement si, $-f$ est décroissante (respectivement strictement décroissante, respectivement croissante, respectivement strictement croissante).

Du point de vue du vocabulaire, on dit que « f est monotone sur $\mathscr{D}$ ». On ne dit jamais que « $f(x)$ est monotone pour tout $x \in \mathscr{D}$ ». Cela signifierait qu'un nombre réel est monotone, ce qui n'a pas de sens.

Exemples :

- Une fonction constante est croissante mais n'est pas strictement croissante.
- La fonction harmonique $h : x \longmapsto 1/x$ n'est pas monotone. Elle est en fait strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ tout entier (puisque $-1 < 1$ et $h(-1) < h(1)$).
- La somme de deux fonctions de même monotonie est monotone (de même monotonie). Dès que l'une des deux est strictement monotone, la somme l'est aussi.
- Le produit de deux fonctions croissantes positives est croissante.

  Le produit de deux fonctions décroissantes positives est décroissante.

  Sans l'hypothèse de positivité, tout est possible !
- Le produit d'une fonction monotone par un nombre réel positif ou nul (respectivement négatif ou nul) est une fonction monotone de même monotonie (respectivement de monotonie contraire).
- La composée de deux fonctions de même monotonie est une fonction croissante.

  La composée de deux fonctions de monotonie contraire est une fonction décroissante.

Lorsque f est strictement croissante, la propriété $\forall x, y \in \mathscr{D},\ (x < y) \Longrightarrow \big(f(x) < f(y)\big)$ implique (par contraposition) que $\forall x, y \in \mathscr{D},\ \big(f(x) < f(y)\big) \Longrightarrow (x < y)$. Ainsi, la stricte croissance d'une fonction permet d'étudier la position relative de deux images connaissant celle de leurs antécédents **mais aussi** de comparer deux éléments connaissant la position relative de leurs images.

c) *Relation d'ordre sur les fonctions réelles*

Définition 9

Soient $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est inférieure à g (respectivement f est strictement inférieure à g), et l'on note $f \leqslant g$ (respectivement $f < g$), lorsque

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant g(x) \quad (\text{respectivement } f(x) < g(x)).$$

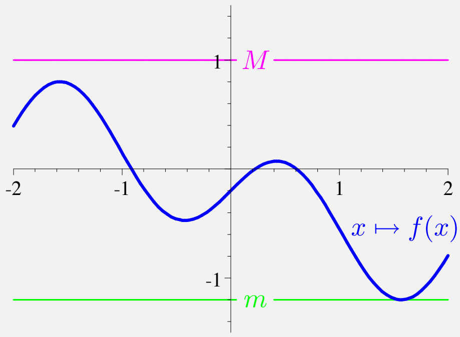
Graphiquement, on a $f \leqslant g$ lorsque le graphe de la fonction f est entièrement en dessous de celui de g.

Les propriétés classiques de la relation $\leqslant$ sur les nombres réels se transposent aux fonctions, à l'exception notable du fait que l'ordre $\leqslant$ n'est pas total sur les fonctions. Cela signifie qu'il existe des fonctions f et g telles que ni f ni g ne soit supérieure à l'autre (on dit alors que f et g ne sont pas compararables).

Par conséquent, le contraire de $f \leqslant g$ n'est pas $f > g$!!

Exemples :

- Dire qu'une fonction f est majorée par M revient à dire que la fonction f est inférieure à la fonction constante égale à M. Graphiquement, la courbe de f reste alors en dessous de la droite horizontale d'ordonnée M.



- Dire qu'une fonction f est minorée par m revient à dire que la fonction f est supérieure à la fonction constante égale à m. Graphiquement, la courbe de f reste alors au dessus de la droite horizontale d'ordonnée m.

A.6. Fonction complexe d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, on introduit les fonctions à valeurs complexes et on regarde quelles notions issues des fonctions réelles sont transposables au cas complexe. On notera bien que l'extension aux complexes se fait du côté de l'ensemble d'arrivée ; les fonctions restant définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Travailler avec des fonctions dont la variable est complexe est nettement plus épineux et relève de vos futures années de mathématiques (nous évoquerons tout de même, dès cette année, l'exponentielle définie sur $\mathbb{C}$).

Définition 10

Intuitivement, on appelle fonction complexe d'une variable réelle (ou fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) une relation f qui associe à un nombre réel x un unique nombre complexe, noté $f(x)$, sous réserve d'existence d'icelui. Cette relation fonctionnelle est notée $x \longmapsto f(x)$ pour dire que l'on associe à x son image $f(x)$. À l'inverse, lorsque l'on a $y = f(x)$, on dit que x constitue un antécédent de y par f.

La partie réelle et la partie imaginaire de f sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$, définies par $\Re\mathrm{e}(f)(x) = \Re\mathrm{e}\big(f(x)\big)$ et $\Im\mathrm{m}(f)(x) = \Im\mathrm{m}\big(f(x)\big)$.

Lorsqu'on souhaite parler d'une fonction dont les valeurs peuvent être indistinctement réelles ou complexes, on utilise le terme fonction numérique d'une variable réelle ou fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K}$ qui désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Comme dans le cas des fonctions réelles, la priorité, lorsqu'on vous donne une fonction complexe, est de rechercher son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$. En général, la fonction f est étudiée sur l'intégralité de son ensemble de définition mais, dans certains cas, il peut être intéressant de se restreindre à une partie $\mathscr{D}$ strictement incluse dans $\mathscr{D}_f$. On note alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

Les notions de périodicité et de parité s'étendent naturellement aux cas des fonctions complexes (mais sans les interprétations graphiques puisqu'on ne peut pas représenter par une courbe le graphe d'une fonction complexe).

Les opérations algébriques ($+$, $\times$ et $\div$) se généralisent aux fonctions complexes, ainsi que l'opération de composition (entre une fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

Par contre, toutes les notions concernant les fonctions réelles qui sont liées à la relation d'ordre $\leqslant$ ne peuvent pas se transposer aux fonctions complexes. On ne parlera donc pas de fonction majorée, minorée, croissante, décroissante, ni même de comparaison entre fonctions.
Toutefois, par analogie avec le résultat de la proposition 1, on peut étendre au cas des fonctions complexes la notion de « fonction bornée ».

Définition 11

Une fonction complexe $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite bornée sur $\mathscr{D}$ lorsque son module $|f|$ est majorée sur $\mathscr{D}$, c'est-à-dire $\exists K > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K$.

Attention, dans $\mathbb{C}$, une fonction bornée n'est pas une fonction dont les valeurs restent comprises entre deux quantités fixées (cela n'aurait d'ailleurs aucun sens), c'est une fonction dont les images, dans le plan complexe, restent à l'intérieur d'un disque de centre l'origine et de rayon fini.

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ |\,\mathrm{e}^{ix}\,| = 1$ (ici, l'inégalité espérée est une égalité... c'est mieux !).

La proposition suivante caractérise les fonctions complexes bornées à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Proposition 2

Une fonction complexe $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, ses parties réelle $\Re\mathrm{e}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et imaginaire $\Im\mathrm{m}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bornées sur $\mathscr{D}$.

■ $\Rightarrow$ Supposons que $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée sur $\mathscr{D}$ et notons $K > 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K$. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a

$$|\Re\mathrm{e}(f)(x)| \leqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}(f)(x)^2 + \Im\mathrm{m}(f)(x)^2} = |f(x)| \leqslant K$$

et

$$|\Im\mathrm{m}(f)(x)| \leqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}(f)(x)^2 + \Im\mathrm{m}(f)(x)^2} = |f(x)| \leqslant K$$

donc $\Re\mathrm{e}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im\mathrm{m}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bornées sur $\mathscr{D}$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\Re\mathrm{e}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im\mathrm{m}(f) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bornées sur $\mathscr{D}$ et notons $M_1, M_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathscr{D},\ |\Re\mathrm{e}(f)(x)| \leqslant M_1$ et $\forall x \in \mathscr{D},\ |\Im\mathrm{m}(f)(x)| \leqslant M_2$. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a

$$|f(x)| = \sqrt{\Re\mathrm{e}(f)(x)^2 + \Im\mathrm{m}(f)(x)^2} \leqslant \sqrt{{M_1}^2 + {M_2}^2},$$

donc $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée sur $\mathscr{D}$. ■

B. Fonctions usuelles

B.1. Fonctions polynomiales

Définition 12

On appelle fonction polynomiale toute application de la forme

$$P\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\end{array}\right.$$

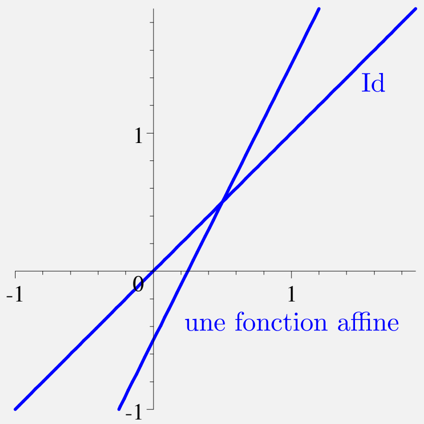
où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de la fonction polynomiale et n son degré (si $a_n \neq 0$).

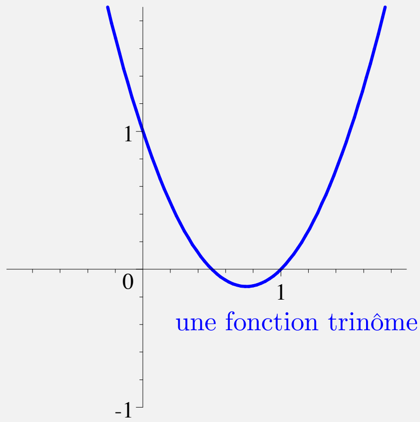
Une fonction polynomiale ne comportant qu'un terme est dite monomiale.

L'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit.

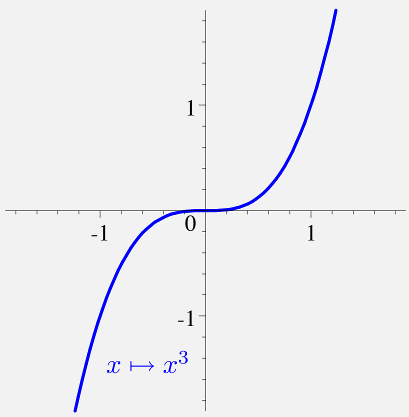
Exemples :

- La fonction nulle est une fonction polynomiale de degré égal à $-\infty$.
- Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les fonctions constantes non nulles.
- Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ (où $a \neq 0$). Elles sont représentées graphiquement par une droite (non verticale). Par exemple, l'identité $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$ est une fonction affine.





- Les fonctions polynomiales de degré 2 sont les fonctions trinômes $x \longmapsto ax^2+bx+c$ (où $a \neq 0$). Leurs graphes sont des paraboles.
- Le graphe de la fonction $x \longmapsto x^3$ est de la forme :



B.2. Fonctions rationnelles

Définition 13

On appelle fonction rationnelle toute fonction définie comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

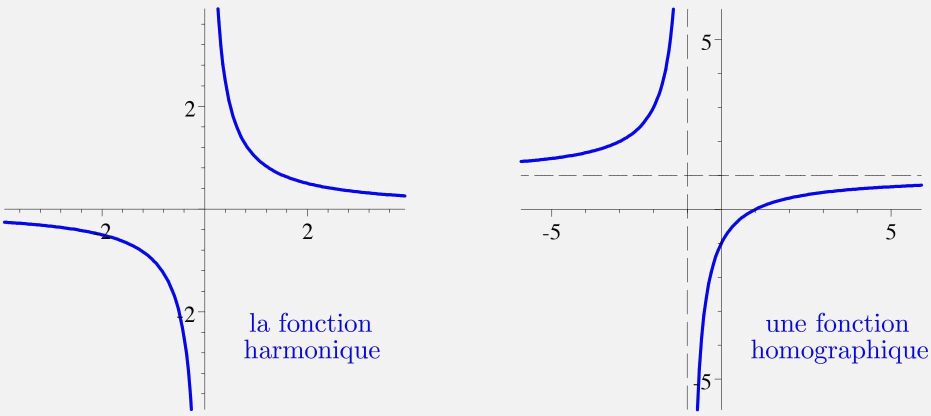
Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle, il suffit d'exclure les racines du dénominateur (que l'on appelle les pôles). Toutefois, si l'une de ces racines, disons a, annule également le numérateur, on peut simplifier la fraction rationnelle par $x-a$ et regarder si la fonction se prolonge ainsi en a (on parle de prolongement par continuité).

En chaque pôle où la fonction ne se prolonge pas, le graphe de la fonction rationnelle admet une asymptote verticale.

L'ensemble des fonctions rationnelles est stable par somme, par produit et par quotient.

Exemples :

- Les fonctions polynomiales sont des fonctions rationnelles.
- La fonction harmonique $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1/x$ est une fonction rationnelle. Son graphe est une hyperbole équilatère.



- Plus généralement, les quotients de fonctions affines sont des fonctions rationnelles, appelées fonctions homographiques :
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
Le graphe d'une telle fonction est constitué par les deux branches d'une hyperbole (admettant les mêmes asymptotes, horizontale et verticale).

B.3. Fonctions radicalaires

Définition 14

Soit n un entier naturel non nul.

Si n est pair, alors, pour tout nombre réel positif ou nul x, il existe un unique nombre réel positif ou nul y tel que $y^n = x$. Ce nombre y est noté $\sqrt[n]{x}$. On définit ainsi une application $\sqrt[n]{\cdot}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ que l'on appelle racine n-ème.

Si n est impair, alors, pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre réel y tel que $y^n = x$. Ce nombre y est encore noté $\sqrt[n]{x}$. On définit cette fois une application $\sqrt[n]{\cdot}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle encore racine n-ème.

■ Nous démontrerons bientôt l'existence de ces fonctions. ■

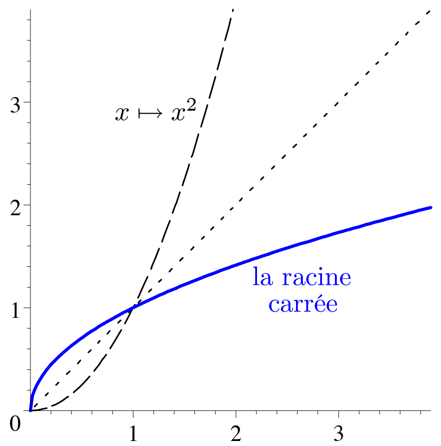
Par définition, l'application $\sqrt[n]{\cdot}$ est la réciproque de l'élévation à la puissance n (c'est-à-dire la fonction $x \longmapsto x^n$). Comme celle-ci est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lorsque n est impair et bijective seulement de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ lorsque n est pair, cela explique pourquoi les racines cubiques, cinquièmes, septièmes, ... sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier alors que les racines carrée, quatrième, sixième, ... sont définies seulement sur $\mathbb{R}_+$.

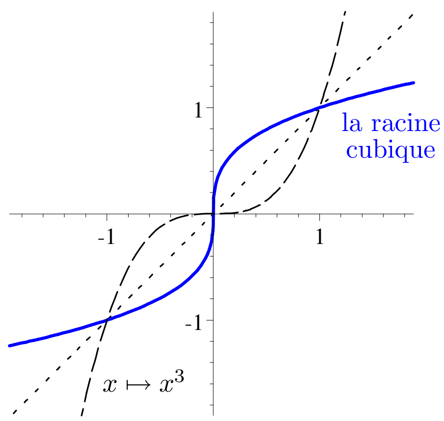
Nous verrons que, sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut confondre sans souci la racine n-ème avec la fonction puissance $x \longmapsto x^{1/n}$ (que nous définirons à l'aide de l'exponentielle). Cela nous permettra d'utiliser les propriétés des exposants (comme par exemple $\forall x > 0,\ \sqrt[n]{x^p} = \sqrt[n]{x}^p$). Mais attention, on se gardera bien de confondre la racine n-ème et la fonction puissance d'exposant $1/n$ sur $\mathbb{R}_-$ car cela peut mener à de grosses erreurs de signe (nous reviendrons sur cet avertissement dans le paragraphe sur les fonctions puissances).

En particulier, je ne cesserai de vous rappeler qu'il ne faut pas oublier les valeurs absolues dans les formules

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (avec } xy \geqslant 0),\quad \sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}.$$

Graphiquement, on notera que les racines n-èmes sont des applications strictement croissantes sur leurs ensembles de définition ; qu'elles s'annulent en 0 ; que, lorsque n est impair, ce sont des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$. Enfin, on notera que toutes ces fonctions admettent une tangente verticale en 0.





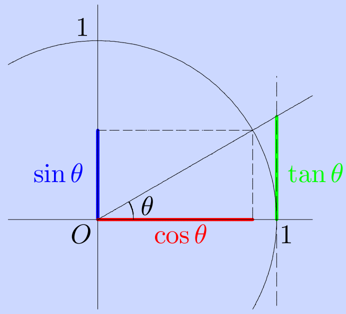
B.4. Fonctions circulaires

Définition 15

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

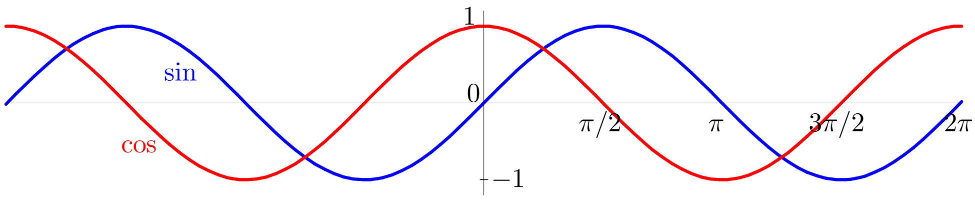
Pour tout nombre réel θ, le point M de $\mathscr{C}$ tel que l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure θ, a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux fonctions 2π-périodiques, sinus et cosinus.

Leur quotient $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ est la fonction tangente. Elle est définie et π-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

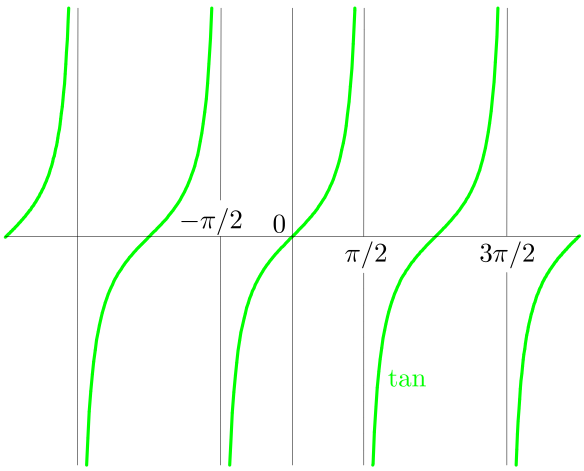


On peut également définir la fonction cotangente sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Graphiquement, les fonctions cosinus et sinus sont représentées par deux sinusoïdes qui sont déphasées de $\pi/2$. On notera que la fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$ et que la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$.



La fonction tangente est représentée, quant à elle, par une succession de « branches verticales » réparties π-périodiquement et admettant en chaque point $x_k = \pi/2 + k\pi$ une asymptote verticale. On notera que la fonction tangente est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



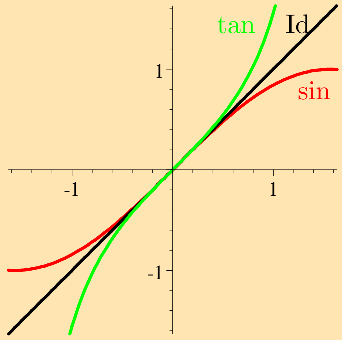
Le lemme suivant, consacré à la comparaison locale de sin, Id et tan au voisinage de 0, nous servira à étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions circulaires. Il peut être omis en première lecture.

Lemme 1

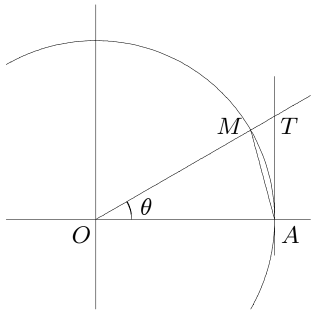
On a

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[, \qquad |\sin \theta| \leqslant |\theta| \leqslant |\tan \theta|$$

ce qui s'observe graphiquement par le fait qu'au voisinage de 0, la première bissectrice est prise en sandwich entre le sinus et la tangente :



■ Soit $\theta \in]0; \pi/2[$. Considérons la figure suivante :



L'aire du triangle OAM est donnée par

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times \sin \theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}.$$

Celle du secteur angulaire OAM vaut

$$\frac{\text{angle} \times \text{rayon}^2}{2} = \frac{\theta \times 1^2}{2} = \frac{\theta}{2}.$$

Enfin, l'aire du triangle rectangle OAT vaut

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times \tan \theta}{2} = \frac{\tan \theta}{2}.$$

Le triangle OAT contient le secteur angulaire OAM qui contient lui-même le triangle OAM. On en déduit que $(\sin \theta)/2 \leqslant \theta/2 \leqslant (\tan \theta)/2$ et donc que

$$\forall \theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \sin \theta \leqslant \theta \leqslant \tan \theta.$$

Comme les fonctions sin et tan sont impaires, on en déduit le résultat. ■

Nous verrons que ce résultat permet de :

- démontrer la continuité des fonctions circulaires sur leurs ensembles de définition ;
- d'établir certaines limites de références ;
- de démontrer la dérivabilité des fonctions circulaires sur leurs ensembles de définition et de calculer les dérivées de celles-ci.

B.5. Logarithmes et exponentielles

a) Logarithme et exponentielle nèperiens

La définition suivante introduit le nombre de Néper e.

Définition 16

Le nombre de Néper est le nombre réel noté e défini par

$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

où la somme ne s'arrête jamais . . . (on parle de « série »).

On a $\mathrm{e} \approx 2,71828183$

■ Pour justifier la validité de cette définition, il convient de démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$, ce qui démontre la croissance de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.
Par ailleurs, on a $\forall k \geqslant 2,\ k! \geqslant 2^{k-1}$, donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3,$$

ce qui démontre que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée.

Comme $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante et majorée par 3, on peut affirmer qu'elle converge. ■

On peut alors définir le logarithme et l'exponentielle.

Définition 17

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante, notée ln, telle que

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Cette fonction s'appelle le logarithme néperien.

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ strictement croissante, notée exp, telle que

$$\exp(1) = \mathrm{e} \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Cette fonction s'appelle l'exponentielle néperien. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

■ L'existence et l'unicité de ces fonctions sont admises. Cf cours de spé. ■

Lorsque $n \in \mathbb{N}$, e^n désigne à la fois le produit $\mathrm{e} \times \mathrm{e} \times \cdots \times \mathrm{e}$ (où e est répété n fois) et l'expression $\exp n$. En fait, ces quantités coïncident puisque $\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{1+1+\cdots+1} = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^1 \times \cdots \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \mathrm{e} \times \cdots \times \mathrm{e}$.

NEPER (ou NAPIER) John, écossais, 1550-1617

Baron de Merchiston, théologien protestant. Avec l'invention de ses « réglettes », permettant d'effectuer les quatre opérations élémentaires, il est à l'origine des premières machines à calculer dont il expose le fonctionnement dans un traité (Rabdologiae, 1617) en introduisant la notation décimale actuelle des nombres décimaux. Mais Neper est plus connu pour son invention des logarithmes (le terme est de lui, du grec logos = logique, raison et arithmos = nombre) qu'il explique dans ses deux traités de 1614 et 1619 (posthume) traitant de la « Description et de la Construction de la Règle Admirable des Logarithmes ». L'objectif était de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie en remplaçant les multiplications par des additions.

La transformation des multiplications en additions, obtenue grace au logarithme, n'a évidemment d'intérêt que si elle est réversible. Autrement dit, une fois les additions de logarithmes effectuées, il faut pouvoir revenir aux grandeurs initiales. L'énoncé suivant explique que ce chemin inverse est effectué à l'aide de l'exponentielle.

Proposition 3

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, on a $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$, ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\mathrm{e}^x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

■ Admis. Nous aurons surement l'occasion de le démontrer en exercice. ■

L'énoncé suivant rassemble les propriétés fondamentales du logarithme et de l'exponentielle.

Proposition 4

L'exponentielle et le logarithme satisfont les propriétés suivantes :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

(ii) $\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(\mathrm{e}) = 1$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;

(v) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$.

(j) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$;

(jj) $\mathrm{e}^0 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$;

(jjj) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x > 0$;

(jw) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$;

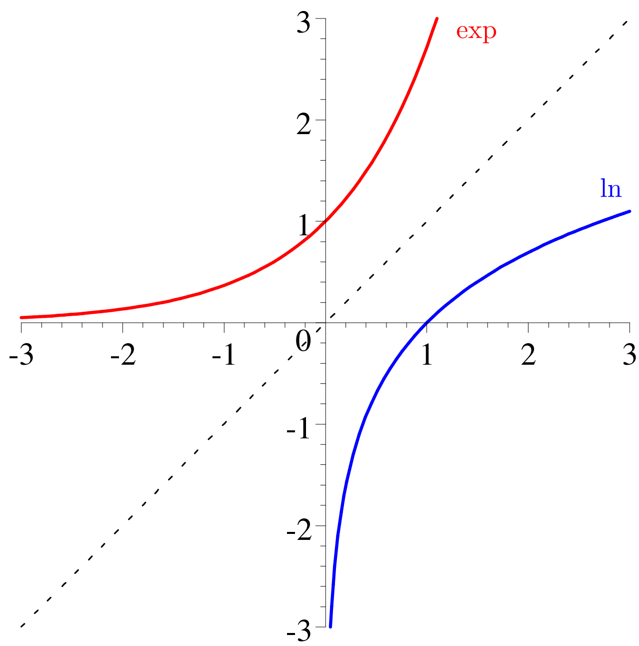
(w) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y$;

(wj) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

■ AQT ■

Sans hypothèse de signe, la propriété (i) devient $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \ \ln|xy| = \ln|x| + \ln|y|$. En particulier, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ln(x^2) = 2\ln|x|$.

Graphiquement, les courbes de l'exponentielle et du logarithme sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.



b) Logarithmes et exponentielles en base a

Définition 18

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on pose
$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}.$$

Lorsque n est un entier naturel, la notation a^n désigne à la fois le produit $a \times a \times \cdots \times a$ (où a est répété n fois) et l'expression $\mathrm{e}^{n\ln(a)}$. Il n'y a cependant pas de problème car ces deux quantités coïncident puisque l'on a $\mathrm{e}^{n\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\cdots+\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \cdots \times \mathrm{e}^{\ln(a)} = a \times \cdots \times a$.

Définition 19

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.
On appelle logarithme en base a la fonction, notée $\ln_a$, définie par
$$\ln_a \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{array} \right.$$

On appelle exponentielle en base a la fonction, notée $\exp_a$, définie par
$$\exp_a \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}. \end{array} \right.$$

L'exponentielle et le logarithme en base e sont l'exponentielle et le logarithme néperiens.

Le logarithme décimal (c'est-à-dire en base 10) est aussi noté log. Il est utilisé en chimie (pH) et en acoustique (dB).

Proposition 5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. Les fonctions $\exp_a$ et $\ln_a$ sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln_a(a^x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a^{\ln_a x} = x.$$

■ AQT ■

Les propriétés des logarithmes et des exponentielles en base a sont les mêmes que celles du logarithme et de l'exponentielle népériens, à ceci près qu'il faut remplacer tous les e par des a.

Proposition 6

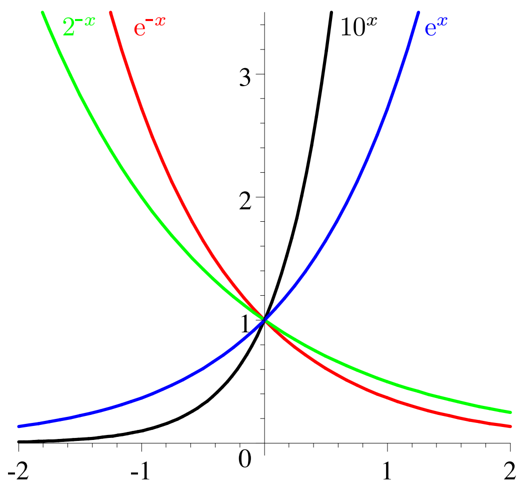
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ différents de 1. On a :

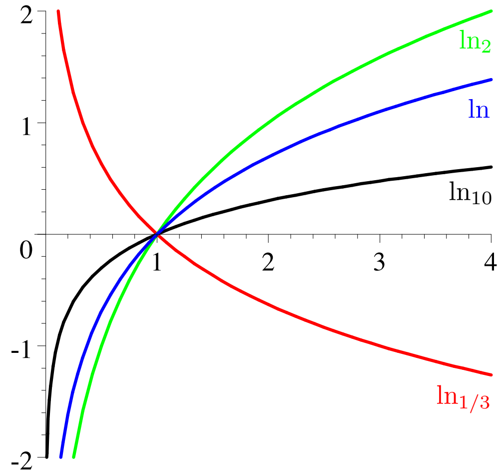
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln_a(xy) = \ln_a(x) + \ln_a(y)$;
(ii) $\ln_a(1) = 0$ et $\ln_a(a) = 1$;
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln_a(x)$;
(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln_a(x) - \ln_a(y)$;
(v) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln_a(b^x) = x\ln_a(b)$.

(j) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{x+y} = a^x a^y$;
(jj) $a^0 = 1$ et $a^1 = a$;
(jjj) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x > 0$;
(jw) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{-x} = 1/a^x$;
(w) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{x-y} = a^x/a^y$;
(wj) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{xy} = (a^x)^y$;
(wjj) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x b^x = (ab)^x$.

■ AQT ■

Les graphes suivants représentent des exponentielles et des logarithmes dans différentes bases.





On constate que lorsque $a > 1$, les courbes représentatives des logarithmes et exponentielles en base a sont semblables à celles du logarithme et de l'exponentielle néperiens.

Au contraire, lorsque $0 < a < 1$, les courbes des logarithmes et exponentielles en base a changent de monotonie : la croissance lente des logarithmes vers $+\infty$ devient une décroissante lente vers $-\infty$ et la croissance rapide des exponentielles vers $+\infty$ devient une décroissance non moins rapide vers 0.

c) *Fonctions hyperboliques*

Définition 20

On appelle cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique les fonctions ch, sh et th définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Ces formules définissent les fonctions de la trigonométrie hyperbolique à l'aide de l'exponentielle réelle. On note l'analogie avec les formules d'Euler qui donnent les fonctions trigonométriques circulaires à partir de l'exponentielle complexe. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x) = \operatorname{ch}(ix) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(ix).$$

Les fonctions hyperboliques vérifient tout un bataillon de formules de trigonométrie hyperbolique. Le programme se limite à celle énoncée dans la proposition suivante.

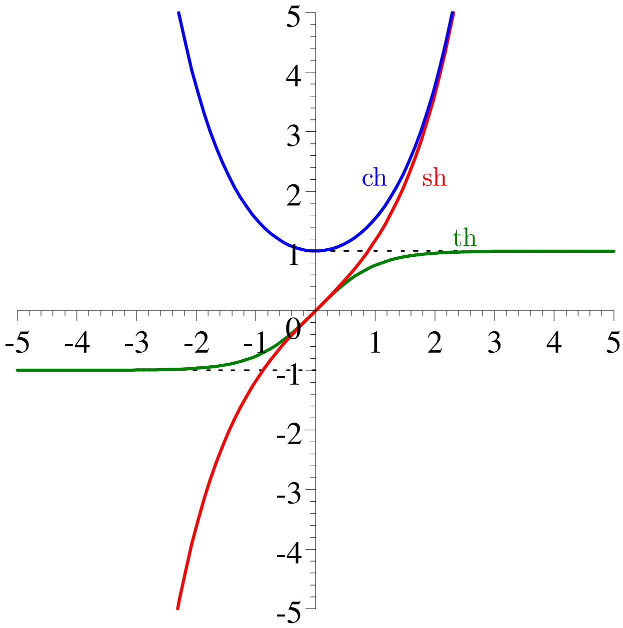
Proposition 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

■ Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$ ■

Graphiquement, on peut commencer par remarquer que la fonction ch est paire (avec $\operatorname{ch}(0) = 1$) alors que les fonctions sh et th sont impaires (ce qui implique que $\operatorname{sh}(0) = \operatorname{th}(0) = 0$). En outre, ch et sh tendent vers $+\infty$ très vite lorsque x tend vers $+\infty$ (à la vitesse de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}/2$ pour être précis) et th tend vers 1 en $+\infty$ ce qui lui assure une asymptote horizontale en $+\infty$. Les graphes de ces trois fonctions ont donc l'allure suivante :



La courbe du cosinus hyperbolique est une chainette. En effet, c'est la forme que prend une chaine lorsque la tient par ses deux extrémités. Coïncidence heureuse, la **ch**ainette est donc la courbe de la fonction ch.

B.6. Fonctions puissances

Définition 21

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on appelle fonction puissance d'exposant α l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

Lorsque α est un entier positif, la fonction puissance d'exposant α a déjà été introduite : c'est une fonction monomiale définie sur $\mathbb{R}$.

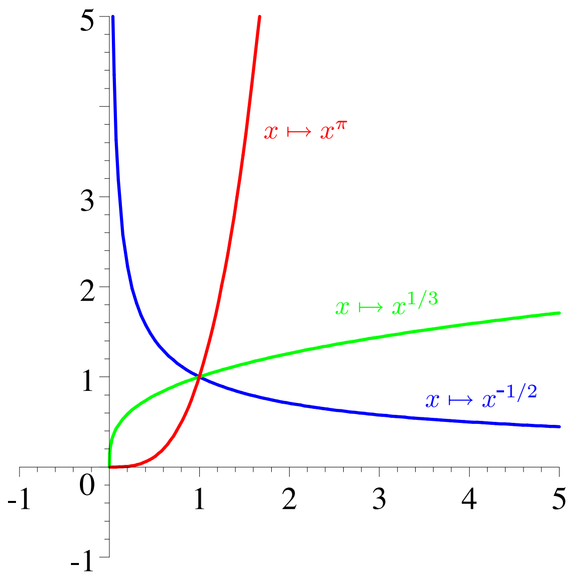
Lorsque α est un entier strictement négatif, la fonction puissance d'exposant α a été définie sur $\mathbb{R}^*$ comme l'inverse de la fonction puissance d'exposant $-\alpha$.

On constate donc que les fonctions puissances d'exposants entiers n'ont pas le même ensemble de définition que les fonctions puissances d'exposants non entiers.

Exemples :

- La fonction puissance d'exposant $1/2$ coïncide avec la racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction puissance d'exposant $1/3$ coïncide avec la racine cubique sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Mais attention, il ne faut pas confondre partout la racine cubique $\sqrt[3]{\cdot}$ (qui est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme la réciproque de l'élévation au cube) et l'élévation à la puissance $1/3$ (qui n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$). Ignorer cet avertissement peut conduire à des erreurs grossières du type :
  $$-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 64^{1/6} = 2.$$
- En convenant que $0^0 = 1$, l'ensemble de définition de $x \longmapsto x^x$ est $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R}_+$ (y réfléchir !).

Graphiquement, on retrouve, parmi les fonctions puissances, toutes les fonctions monomiales et toutes les fonctions racines n-èmes (à condition bien sûr de ne considérer que leur restriction sur $\mathbb{R}_+^*$). On notera que la fonction puissance d'exposant α est strictement croissante lorsque $\alpha > 0$ et strictement décroissante lorsque $\alpha < 0$.



B.7. La valeur absolue

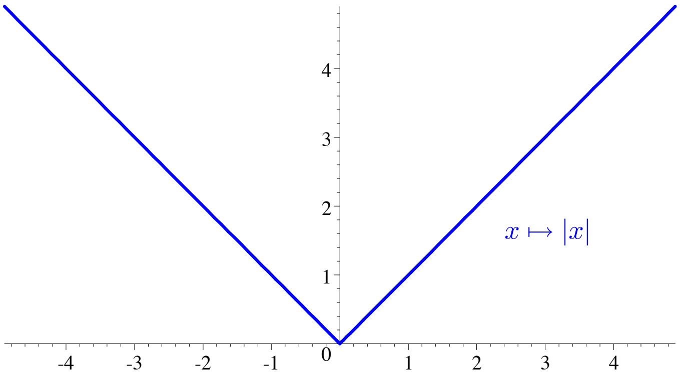
Définition 22

La valeur absolue est la fonction définie par

$$|\cdot| \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| = \max\{-x; x\}. \end{array} \right.$$

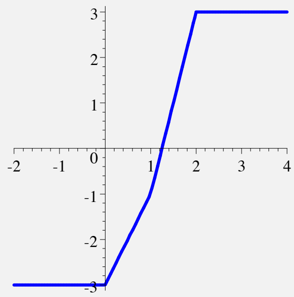
S'il faut donner un conseil lorsque l'on doit étudier une fonction qui contient des valeurs absolues, c'est celui de ne pas hésiter à considérer des cas !

Graphiquement, la valeur absolue admet un graphe en V :



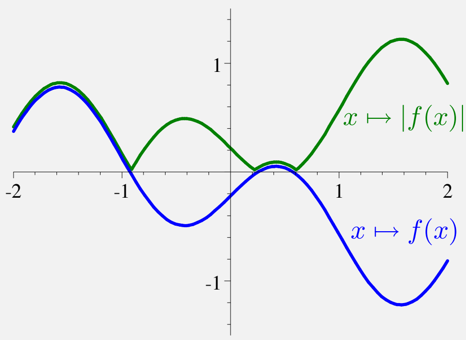
Exemples :

- Soit
$$f(x) = |x-1| + |x| - |2x-4|.$$
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et il est possible d'en donner une expression explicite par morceaux. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a



$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcll} (-x+1)+(-x)-(-2x+4) & = & -3 & \text{si } x \leqslant 0, \\ (-x+1)+x-(-2x+4) & = & 2x-3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)+x-(-2x+4) & = & 4x-5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ (x-1)+x-(2x-4) & = & 3 & \text{si } x \geqslant 2. \end{array} \right.$$

- Composer une fonction avec la valeur absolue provoque un redressement de la fonction :



B.8. La partie entière

Définition 23

La partie entière est la fonction définie par

$$\lfloor\cdot\rfloor \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor = \max\{n \leqslant x : n \in \mathbb{Z}\}, \end{array} \right.$$

Graphiquement, la partie entière admet un graphe typique de celui des fonctions en escalier :