

LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

A. Révision du cours

Exercice 1. [o]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Il existe des assertions mathématiques qui sont un peu vraies, un peu fausses.
2. Toutes les propriétés mathématiques sont des assertions.
3. La négation de (f est une fonction impaire) est (f est une fonction paire).
4. Lorsque la propriété (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) est vraie, la propriété (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) l'est aussi.
5. Lorsque la propriété (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) est vraie, la propriété (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) l'est aussi.
6. Lorsqu'on me propose ((fromage et crème brûlée) ou (fromage et île flottante)), je peux prendre les deux et obtenir par conséquent deux fois du fromage !!
7. Lorsque \mathcal{P} est fausse et ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$), alors \mathcal{Q} est également fausse.
8. L'équivalence ($\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$) signifie que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont toutes les deux vraies.
9. Lorsque ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et ($\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$) sont vraies, \mathcal{P} est équivalente à \mathcal{Q} .
10. La négation de ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) est ($\mathcal{P} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$).
11. Si A , B et D sont trois parties de E telles que $D \subset A \cup B$, alors $D \subset A$ ou $D \subset B$.
12. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cup B = \emptyset$, on a $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
13. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cap B = E$, on a $A = E$ et $B = E$.
14. Il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathcal{P}(E) = \emptyset$.
15. Lorsque $\{x, y\} = \{a, b\}$, on a $x = a$ et $y = b$.
16. Lorsque $(x, y) = (a, b)$, on a $x = a$ et $y = b$.
17. L'assertion $\exists x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, x < y$ est vraie.
18. L'assertion $\forall x \in \emptyset, \exists y \in \emptyset, x < y$ est vraie.
19. Dans une assertion, l'ordre des quantificateurs n'a aucune importance.

B. Logique et quantificateurs

Exercice 2. [o]

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Il suffit qu'un réel soit strictement supérieur à 2 pour qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Pour qu'un entier soit supérieur ou égal à 1, il faut et suffit qu'il soit strictement positif.
3. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

Exercice 3. [o]

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} trois assertions.

1. Démontrer que $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow ((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{P}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}))$.
2. Les assertions $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. [o]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - a) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
 - b) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée;
 - c) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée;
 - d) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante;
 - e) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang);
 - f) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Inversement, traduire en langage « clair » les assertions suivantes :
 - a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p = 0$;
 - b) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p < u_n$;
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p \neq u_n$.

Exercice 5. [o]

Donner (en justifiant) la valeur booléenne de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs.

Exercice 6. [o]

Les lettres \mathcal{P} et \mathcal{Q} désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x , compléter à l'aide des symboles \iff , \implies et \iff , les propriétés mathématiques suivantes :

$$\begin{aligned} (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\ (\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\ (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\ (\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)). \end{aligned}$$

Exercice 7. [o]

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $c > a + b$. Démontrer qu'il existe $a' > a$ et $b' > b$ tels que $a' + b' = c$.

Exercice 8. [o]

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$,
2. $(x^2 = 1) \implies x = 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.
4. $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x') \implies f(x) \neq f(x')$.
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, (A \cap B = \emptyset) \implies (A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$.

C. Ensembles

Exercice 9. [o]

Démontrer que $\{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R}_-^*, x = a + b\} = \mathbb{R}$.

Exercice 10. [o]

Soient E un ensemble et A, B, D trois parties de E . Démontrer que :

1. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$,
2. $A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$,
3. $A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D)$;
4. $(A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A)$.

Exercice 11. [o]

Soient E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E . Démontrer que :

1. $(A \cap B = A \cup B) \iff (A = B)$;
2. $(A \cup B = B \cap C) \iff (A \subset B \subset C)$;
3. $((A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C)) \implies (B \subset C)$;
4. $((A \cup B = A \cap C) \text{ et } (B \cup C = B \cap A) \text{ et } (C \cup A = C \cap B)) \implies (A = B = C)$;
5. $((A \subset C) \text{ et } (B \subset D) \text{ et } (C \cap D = \emptyset) \text{ et } (A \cup B = C \cup D)) \implies ((A = C) \text{ et } (B = D))$.

Exercice 12. [*] (La différence symétrique)

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E , on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A\Delta B$ définie par

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Justifier l'égalité affirmée par la définition ci-dessus. *Faire un dessin est une excellente idée mais ne constitue pas une démonstration.*
2. Soient A, B deux parties de E . Vérifier que $(A\Delta B = \emptyset) \iff (A = B)$.

Cela rend la différence symétrique utile pour la théorie de la reconnaissance des formes (par exemple en informatique) : les ensembles A et B se ressemblent d'autant plus que la différence symétrique $A\Delta B$ est « petite ».

3. a) Justifier que l'opération Δ est commutative.
b) Donner l'élément neutre de l'opération Δ .
c) Démontrer que l'opération Δ est associative.
d) Démontrer que \cap est distributive sur Δ mais que Δ n'est pas distributive sur \cap .
4. Soient A, B, C trois parties de E . Démontrer que $(A\Delta B = A\Delta C) \iff (B = C)$. *On dit que l'opération Δ est régulière (c'est-à-dire que l'on peut faire des simplifications).*
5. Soient A, B deux parties de E . Démontrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta \overline{B}$.

Exercice 13. [o]

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent les couples suivants :

$$(a, b), \quad (a, \{b\}), \quad (E, a) \quad \text{et} \quad (\emptyset, \{a\}) ?$$

Exercice 14. [o]

Soient E et F deux ensembles. Démontrer que $E = F$ si, et seulement si, $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Exercice 15. [*]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Démontrer qu'en général la première inclusion ci-dessus n'est pas une égalité.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si, et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

D. Modes de raisonnements

Exercice 16. [*]

Démontrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit un rationnel. *Utiliser $\sqrt{2}$.*

Exercice 17. [o]

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Démontrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.

Exercice 18. [o]

Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Exercice 19. [o]

Soient a et b deux nombres réels tels que $\forall \varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$. Démontrer que $a \leq b$.

Exercice 20. [o]

Démontrer que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Exercice 21. [★]

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x - f(y)) = 2 - x - y$.

LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

A. Révision du cours

Exercice 1. [o]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Il existe des assertions mathématiques qui sont un peu vraies, un peu fausses.
2. Toutes les propriétés mathématiques sont des assertions.
3. La négation de (f est une fonction impaire) est (f est une fonction paire).
4. Lorsque la propriété (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) est vraie, la propriété (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) l'est aussi.
5. Lorsque la propriété (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) est vraie, la propriété (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) l'est aussi.
6. Lorsqu'on me propose ((fromage et crème brûlée) ou (fromage et île flottante)), je peux prendre les deux et obtenir par conséquent deux fois du fromage !!
7. Lorsque \mathcal{P} est fausse et ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$), alors \mathcal{Q} est également fausse.
8. L'équivalence ($\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$) signifie que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont toutes les deux vraies.
9. Lorsque ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et ($\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$) sont vraies, \mathcal{P} est équivalente à \mathcal{Q} .
10. La négation de ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) est ($\mathcal{P} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$).
11. Si A , B et D sont trois parties de E telles que $D \subset A \cup B$, alors $D \subset A$ ou $D \subset B$.
12. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cup B = \emptyset$, on a $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
13. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cap B = E$, on a $A = E$ et $B = E$.
14. Il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathcal{P}(E) = \emptyset$.
15. Lorsque $\{x, y\} = \{a, b\}$, on a $x = a$ et $y = b$.
16. Lorsque $(x, y) = (a, b)$, on a $x = a$ et $y = b$.
17. L'assertion $\exists x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, x < y$ est vraie.
18. L'assertion $\forall x \in \emptyset, \exists y \in \emptyset, x < y$ est vraie.
19. Dans une assertion, l'ordre des quantificateurs n'a aucune importance.

B. Logique et quantificateurs

Exercice 2. [o]

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Il suffit qu'un réel soit strictement supérieur à 2 pour qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Pour qu'un entier soit supérieur ou égal à 1, il faut et suffit qu'il soit strictement positif.
3. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

Exercice 3. [o]

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} trois assertions.

1. Démontrer que $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow ((\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{P}) \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}))$.
2. Les assertions $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. [o]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - a) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
 - b) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée;
 - c) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée;
 - d) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante;
 - e) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang);
 - f) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Inversement, traduire en langage « clair » les assertions suivantes :
 - a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p = 0$;
 - b) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p < u_n$;
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p \neq u_n$.

Exercice 5. [o]

Donner (en justifiant) la valeur booléenne de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs.

Exercice 6. [o]

Les lettres \mathcal{P} et \mathcal{Q} désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x , compléter à l'aide des symboles \iff , \implies et \iff , les propriétés mathématiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\
 (\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\
 (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)), \\
 (\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) &\quad \dots \quad (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)).
 \end{aligned}$$

Exercice 7. [o]

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $c > a + b$. Démontrer qu'il existe $a' > a$ et $b' > b$ tels que $a' + b' = c$.

Exercice 8. [o]

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$,
2. $(x^2 = 1) \implies x = 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.
4. $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x') \implies f(x) \neq f(x')$.
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, (A \cap B = \emptyset) \implies (A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$.

C. Ensembles

Exercice 9. [o]

Démontrer que $\{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R}_-^*, x = a + b\} = \mathbb{R}$.

Exercice 10. [o]

Soient E un ensemble et A, B, D trois parties de E . Démontrer que :

1. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$,
2. $A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$,
3. $A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D)$;
4. $(A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A)$.

Exercice 11. [o]

Soient E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E . Démontrer que :

1. $(A \cap B = A \cup B) \iff (A = B)$;
2. $(A \cup B = B \cap C) \iff (A \subset B \subset C)$;
3. $((A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C)) \implies (B \subset C)$;
4. $((A \cup B = A \cap C) \text{ et } (B \cup C = B \cap A) \text{ et } (C \cup A = C \cap B)) \implies (A = B = C)$;
5. $((A \subset C) \text{ et } (B \subset D) \text{ et } (C \cap D = \emptyset) \text{ et } (A \cup B = C \cup D)) \implies ((A = C) \text{ et } (B = D))$.

Exercice 12. [*] (La différence symétrique)

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E , on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A\Delta B$ définie par

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Justifier l'égalité affirmée par la définition ci-dessus. *Faire un dessin est une excellente idée mais ne constitue pas une démonstration.*
2. Soient A, B deux parties de E . Vérifier que $(A\Delta B = \emptyset) \iff (A = B)$.

Cela rend la différence symétrique utile pour la théorie de la reconnaissance des formes (par exemple en informatique) : les ensembles A et B se ressemblent d'autant plus que la différence symétrique $A\Delta B$ est « petite ».

3. a) Justifier que l'opération Δ est commutative.
b) Donner l'élément neutre de l'opération Δ .
c) Démontrer que l'opération Δ est associative.
d) Démontrer que \cap est distributive sur Δ mais que Δ n'est pas distributive sur \cap .
4. Soient A, B, C trois parties de E . Démontrer que $(A\Delta B = A\Delta C) \iff (B = C)$. *On dit que l'opération Δ est régulière (c'est-à-dire que l'on peut faire des simplifications).*
5. Soient A, B deux parties de E . Démontrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta \overline{B}$.

Exercice 13. [o]

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent les couples suivants :

$$(a, b), \quad (a, \{b\}), \quad (E, a) \quad \text{et} \quad (\emptyset, \{a\}) ?$$

Exercice 14. [o]

Soient E et F deux ensembles. Démontrer que $E = F$ si, et seulement si, $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Exercice 15. [*]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Démontrer qu'en général la première inclusion ci-dessus n'est pas une égalité.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si, et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

D. Modes de raisonnements

Exercice 16. [*]

Démontrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit un rationnel. *Utiliser $\sqrt{2}$.*

Exercice 17. [o]

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Démontrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.

Exercice 18. [o]

Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Exercice 19. [o]

Soient a et b deux nombres réels tels que $\forall \varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$. Démontrer que $a \leq b$.

Exercice 20. [o]

Démontrer que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Exercice 21. [★]

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x - f(y)) = 2 - x - y$.