DÉRIVATION CORRECTION

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on pose $\tau(x) = \big(f(x) - f(a)\big)/(x-a)$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on pose $\widehat{\tau}(x) = \widehat{f}(x)u(x)$ où $u(x) = 1/(x-a)$ et $\widehat{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

1. *Justifier que $\widehat{\tau}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, l'existence de $c_{0,x}, \dots, c_{k,x} \in \left]x \,;\, a\right[$ tels que $\widehat{\tau}^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} k!}{j!(n-j+1)!} f^{(n+1)}(c_{j,x})$.*

   Les théorèmes généraux nous permettent d'affirmer que

   $$\boxed{\widehat{\tau} \text{ est de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{a\}.}$$

   De plus, la formule de Leibniz nous dit que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \qquad \widehat{\tau}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \widehat{f}^{(j)}(x) u^{(k-j)}(x).$$

   Fixons $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ et $j \in [\![0;k]\!]$ et regardons ce que l'on peut dire de $u^{(k-j)}(x)$ et $\widehat{f}^{(j)}(x)$.

   ▷ Une récurrence immédiate nous dit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-a)^{p+1}}$ donc

   $$u^{(k-j)}(x) = \frac{(-1)^{k-j}(k-j)!}{(x-a)^{k-j+1}}.$$

   ▷ Une récurrence immédiate nous donne

   $$\widehat{f}^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=0}^{n-j} \frac{f^{(k+j)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

   Or le théorème de Taylor–Lagrange appliqué à $f^{(j)}$ à l'ordre $n-j$ entre les points a et x donne l'existence de $c_{j,x} \in \left]x \,;\, a\right[$ tel que

   $$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{n-j} \frac{f^{(k+j)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_{j,x})}{(n-j+1)!}(x-a)^{n-j+1},$$

   donc

   $$\widehat{f}^{(j)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{j,x})}{(n-j+1)!}(x-a)^{n-j+1}.$$

   En rassemblant ces résultats (et en utilisant l'axiome du choix), on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, il existe $c_{0,x}, \dots, c_{k,x} \in \left]x \,;\, a\right[$ tels que

   $$\widehat{\tau}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{f^{(n+1)}(c_{j,x})}{(n-j+1)!}(x-a)^{n-j+1} \frac{(-1)^{k-j}(k-j)!}{(x-a)^{k-j+1}}.$$

   c'est-à-dire

   $$\boxed{\exists c_{0,x}, \dots, c_{k,x} \in \left]x \,;\, a\right[, \qquad \widehat{\tau}^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} k!}{j!(n-j+1)!} f^{(n+1)}(c_{j,x}).}$$

2. *Prouver que $\widehat{\tau}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $\widehat{\tau}^{(k)}(a)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.*

   Regardons ce qui se passe, dans la formule de la question précédente, lorsqu'on fait tendre x vers a.

   ▷ D'une part, on a
$$\lim_{x\to a}(x-a)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0;n-1]\!] \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

   ▷ D'autre part, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ et tout $j \in [\![1;k]\!]$, le théorème des gendarmes dit que $c_{j,x}$ tend vers a lorsque x tend vers a (puisque $c_{j,x} \in]x \,\tilde{;}\, a[$). Comme $f^{(n+1)}$ est continue, on en déduit que
$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad \lim_{x\to a} f^{(n+1)}(c_{j,x}) = f^{(n+1)}(a).$$

   Dès lors, en passant à la limite ($x \longrightarrow a$) dans la formule de la question 1, on obtient que
$$\lim_{x\to a}\widehat{\tau}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0;n-1]\!] \\ f^{(n+1)}(a)\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}n!}{j!(n-j+1)!} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

   Or
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}n!}{j!(n-j+1)!} &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{n-j} \\ &= -\frac{1}{n+1}\Big[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j} - 1\Big] \\ &= -\frac{1}{n+1}\big[(1-1)^{n+1} - 1\big] \\ &= \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

   donc
$$\lim_{x\to a}\widehat{\tau}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0;n-1]\!] \\ \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

   En appliquant le théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$, on en déduit que

$$\boxed{\widehat{\tau} \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \widehat{\tau}^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0;n-1]\!] \\ \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} & \text{si } k = n. \end{cases}}$$

3. *En déduire que τ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $\tau^{(k)}(a) = f^{(k+1)}(a)/(k+1)$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.*

   Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$,
$$\begin{aligned}\widehat{\tau}(x) &= \widehat{f}(x)u(x) \\ &= \Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big]\frac{1}{x-a} \\ &= \Big[f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big]\frac{1}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} \\ &= \tau(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1},\end{aligned}$$

   donc
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad \tau(x) = \widehat{\tau}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1}}_{=P(x)}.$$

Ainsi, sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, τ et $\widehat{\tau}$ diffèrent de la fonction polynomiale P. Comme $\widehat{\tau}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente) et comme P est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (inutile de la prolonger puisqu'elle existe déjà en a), on en déduit que τ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad \tau^{(k)}(a) = \widehat{\tau}^{(k)}(a) + P^{(k)}(a).$$

Or on sait que

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad \widehat{\tau}^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0; n-1]\!] \\ \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

et il est aisé de constater que

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P^{(k)}(a) = \begin{cases} \dfrac{f^{(k+1)}(a)}{k+1} & \text{si } k \in [\![0; n-1]\!] \\ 0 & \text{si } k = n \end{cases}$$

donc

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad \tau^{(k)}(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k+1}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\tau \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \tau^{(k)}(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k+1} \text{ pour tout } k \in [\![0; n]\!].}$$

4. *Application : Démontrer que le sinus cardinal (c'est-à-dire la fonction $x \longmapsto (\sin x)/x$ prolongée par continuité en 0) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

   La fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de division s'applique pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a = 0$ pour affimer que $\tau(x) = \sin(x)/x$ se prolonge par en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{le sinus cardinal est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$