DM n° 19 : Matrices

Correction du problème 1 – Trigonalisation et quasi-trigonalisation

Question préliminaire

D'après le cours, toute matrice carrée est équivalente à une matrice $I_{n,n,r}$, définie par blocs :

$$I_{n,n,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{array}\right).$$

Cette matrice étant diagonale, donc triangulaire supérieure, on peut conclure :
toute matrice M est équivalente à une matrice triangulaire supérieure.
On peut aussi remarquer qu'obtenir algorithmiquement une matrice triangulaire équivalente à M peut se faire par la méthode du pivot de Gauss.

Partie I – Autour du polynôme minimal

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit n la dimension de E. Alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2. Par conséquent, pour des raisons de cardinalité, la famille $(u^0, u^1, \dots, u^{n^2})$ est liée, d'où l'existence d'une relation non triviale :

$$\lambda_0 u^0 + \cdots + \lambda_{n^2} u^{n^2} = 0.$$

   Ainsi, le polynôme (non nul) $Q = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ est un polynôme annulateur de u.

2. Soit $\mathcal{I}(u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u. Comme 0 est un polynôme annulateur de u, et que de façon triviale, une différence de polynômes annulateurs est un polynôme annulateur de u, $\mathcal{I}(u)$ est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$. Par ailleurs, si P est un polynôme annulateur de u, et Q un polynôme quelconque, alors

$$PQ(u) = QP(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0 = 0,$$

   car $Q(u)$ est une application linéaire. Ainsi, PQ est encore un polynôme annulateur.
   On en déduit que $\mathcal{I}(u)$ est un idéal (non nul) de $\mathbb{K}[X]$. Puisque $\mathbb{K}[X]$ est principal, $\mathcal{I}(u)$ est engendré par un certain polynôme R. Or, il existe un unique $P \neq 0$ dans $\mathcal{I}(u)$ (s'écrivant donc $P = RQ$), de même degré que R (condition nécessaire pour pouvoir diviser R, puisqu'il ne peut pas être de degré strictement plus petit), et unitaire (cela correspond au choix de $Q = \frac{1}{a}$, où a est le coefficient dominant de R). Ce polynôme, différant de R d'une constante, engendre aussi l'idéal $\mathcal{I}(u)$.
   Ainsi il existe un unique polynôme unitaire P divisant tout polynôme annulateur de u.
   Remarquez (on s'en servira par la suite) que P ne peut pas être constant non nul (car la fonction $\lambda\mathrm{Id}$ n'est pas nulle si $\lambda \neq 0$!)

3. (a) Soit λ une racine de P. On factorise $P = (X - \lambda)Q(X)$. On a alors

$$0 = P(u) = (u - \lambda\mathrm{Id}) \circ Q(u).$$

   Si $u - \lambda\mathrm{Id}$ est un automorphisme, alors $u - \lambda\mathrm{Id}$ est régulier dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, donc $Q(u) = 0$, et Q est un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à celui de P, donc non divisible par P. Cela contredit la définition de P.
   Ainsi, $u - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas un automorphisme.

(b) - Si λ est racine de P, alors $u - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme, donc, d'après la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, $u - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas injective, d'où $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$. Il en résulte qu'il existe $x \neq 0$ tel que $(u - \lambda \mathrm{id})(x) = 0$, et donc $\boxed{u(x) = \lambda x}$.
- Réciproquement, s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors une récurrence immédiate amène, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$, et donc, par combinaison linéaire de ces expressions, pour tout polynôme Q, $Q(u)(x) = Q(\lambda) \cdot x$. En particulier, pour le polynôme P, puisque $P(u) = 0$, on obtient :

$$0 = P(\lambda) \cdot x,$$

et x étant un vecteur non nul, on en déduit que $P(\lambda) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lambda \text{ est racine de } P \text{ si et seulement s'il existe } x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x.}$

4. (a) - Pour les mêmes raisons que plus haut, en factorisant $P = P_0 Q$, soit $P(u) = P_0(u) \circ Q(u)$, si $\mathrm{Ker}(P_0(u)) = \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}(P_0)$ est injective, donc c'est un automorphisme (caractérisation des automorphismes en dimension finie), donc est régulier, ce qui entraînerait que Q est un polynôme annulateur, ce qui contredit la définition de P.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(P_0(u)) \neq \{0\}$.
- Deux polynômes d'un même endomorphisme commutant, on a $u \circ P_0(u) = P_0(u) \circ u$. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(P_0(u))$. On a :

$$P_0(u)(u(x)) = P_0(u) \circ u(x) = u \circ P_0(u)(x) = u(0) = 0.$$

Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Ker}(P_0(u))$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(P_0(u))$ est stable par u.

(b) Quitte à normaliser P_0, on peut noter $P_0 = X^2 + aX + b$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(P_0(u))$, non nul (cela existe d'après la question précédente). Alors $u(x)$ et x ne sont pas colinéaire. Sinon, on aurait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$, et comme $x \in \mathrm{Ker}(P_0(u))$, on obtient

$$0 = P_0(u)(x) = u^2(x) + au(x) + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b)x,$$

et on conclut que λ est racine de P_0 (x étant non nul), ce qui est impossible, puisque P_0 est irréductible.

Ainsi, $(x, u(x))$ est libre. Notons $\boxed{P = \mathrm{Vect}(x, u(x))}$. Il s'agit bien d'un plan (sev de dimension 2).

Montrons que P est stable par u. Pour cela il suffit de vérifier que les images par u des éléments de la base $(x, u(x))$ sont dans P. Par définition $u(x) \in P$, et de plus,

$$0 = P_0(u)(x) = u^2(x) + au(x) + bx, \qquad \text{donc:} \qquad u^2(x) = -au(x) - bx \in \mathrm{Vect}(x, u(x)).$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est stable par } u.}$

Partie II – Trigonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Trouver une telle base revient à trouver un premier vecteur b_1 tel que $u(b_1) = \lambda b_1$, pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ (qui sera le terme en position $(1,1)$). On reconnaît les notions de valeur propre et de vecteur propre introduits dans la partie I. Cela nous incite à considérer une racine du polynôme minimal.

Soit P le polynôme minimal de u. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, et que P n'est pas constant, il admet une racine λ, valeur propre de u, et un vecteur propre $b_1 \neq 0$ associé. Comme $b_1 \neq 0$, la famille (b_1) est libre, on peut donc la compléter en une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E. Puisque $u(b_1) = \lambda b_1$, on a alors la forme suivante pour la matrice de u relativement à cette base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)}.$$

(b) On effectue une récurrence sur la taille de la matrice.
- L'initialisation, pour $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, est triviale !

- Soit $n \in \mathbb{N}$ telle que la triangularisabilité soit aquise pour les matrices d'ordre $n-1$, et soit M une matrice d'ordre M. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M, et $(b_1, \dots, b_n)$ la base construite dans la question précédente. On reprend les notations introduites dans cette question, en particulier les sous-matrices A et B. La matrice B est d'ordre $n-1$, et est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ par hypothèse de récurrence. Autrement dit, si v est l'endomorphisme de $F = \mathrm{Vect}(b_2, \dots, b_n)$ représenté dans la base $\mathcal{B}' = (b_2, \dots, b_n)$ par B, il existe une base $\mathcal{C}' = (c_2, \dots, c_n)$ de F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(v)$ soit triangulaire. Notons T cette matrice. Dans la base $\mathcal{D} = (b_1, c_2, \dots, c_n)$, on aura alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A' \\ \hline 0 & T \end{array}\right).$$

En effet, v étant égal à $p \circ u_{|F}$, où p est la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$, pour tout $i \in [2, n]$, $u(b_i)$ et $v(b_i)$ ne diffèrent que d'un terme en b_1, donc la matrice de $u_{|F}$ est égale à la matrice de v avec une ligne en plus en haut.

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u)$ est triangulaire. Notons T' cette matrice. D'après la formule de changement de base, on en déduit que M est semblable à T', ce qui prouve la propriété au rang n.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est trigonalisable.}}$

Voici une autre façon de construire l'argument, purement matricielle (pour l'hérédité de la récurrence) :

D'après la question précédente, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe Q et une matrice triangulaire T telle que $Q^{-1}BQ = T$. On définit

$$Q' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right).$$

Les règles de produit matriciel par blocs permettent facilement de conclure que $Q' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ et

$$Q'^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right).$$

Toujours les règles de produit matriciel par blocs amènent :

$$Q'^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) Q = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A' \\ \hline 0 & Q^{-1}BQ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A' \\ \hline 0 & T \end{array}\right).$$

Ainsi, $Q'^{-1}P^{-1}MPQ'$ (aussi égal à $(PQ')^{-1}M(PQ')$) est triangulaire, d'où le résultat escompté.

(c) La matrice $M - \lambda I_n$ est triangulaire, et ses coefficients diagonaux sont égaux aux $m_{i,i} - \lambda$, où les $m_{i,i}$ sont les coefficients diagonaux de M. Ainsi, par caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires, $M - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si l'un des coefficients $m_{i,i} - \lambda$ est nul, si et seulement si λ est égal à l'un des coefficients $m_{i,i}$. Or, d'après la définition donnée en I-3(b), et par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, puis par caractérisation de l'injectivité par les noyaux, la non inversibilité de $M - \lambda I_n$ équivaut au fait que λ soit valeur propre de M (c'est-à-dire de u).

Ainsi, en mettant bout-à-bout les deux équivalences montrées :

$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est un des coefficients diagonaux de } M.}$

2. On recherche maintenant une forme plus spécifique de matrice triangulaire représentant u.

   (a) (Lemme des noyaux)

   - Soit A et B deux polynômes premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe U et V deux polynômes tels que

$$AU + BV = 1, \qquad \text{donc:} \qquad U(u) \circ A(u) + V(u) \circ B(u) = \mathrm{Id}. \tag{1}$$

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(A(u)) \cap \operatorname{Ker}(B(u))$. On a donc $A(u)(x) = 0$ et $B(u)(x) = 0$, soit, en utilisant la relation (1), $x = U(u)(0) + V(u)(0) = 0$. Ainsi,
$$\operatorname{Ker}(A(u)) \cap \operatorname{Ker}(B(u)) = \{0\},$$
donc la somme $\operatorname{Ker}(A(u)) + \operatorname{Ker}(B(u))$ est directe.
- Soit $x \in \operatorname{Ker}(A(u)) + \operatorname{Ker}(B(u))$. Décomposons $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \operatorname{Ker}(A(u))$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(B(u))$. On a alors
$$A(u) \circ B(u)(x_2) = A(u)(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad A(u) \circ B(u)(x_1) = B(u) \circ A(u)(x_1) = B(u)(0) = 0.$$
Ainsi, x_1 et x_2, donc aussi x, sont dans $\operatorname{Ker}(A(u) \circ B(u))$.
- Soit $x \in \operatorname{Ker}(A(u) \circ B(u))$. On a alors, d'après la relation (1) :
$$x = A(u) \circ U(u)(x) + B(u) \circ V(u)(x).$$
Soit $x_1 = B(u) \circ V(u)(x)$ et $x_2 = A(u) \circ U(u)(x)$. On a alors
$$A(u)(x_1) = A(u) \circ B(u) \circ V(u)(x) = V(u) \circ A(u) \circ B(u)(x) = V(u)(0) = 0,$$
donc $x_1 \in \operatorname{Ker}(A(u))$, et de même $x_2 \in \operatorname{Ker}(B(u))$. On en déduit que $x \in \operatorname{Ker}(A(u)) + \operatorname{Ker}(B(u))$.

Des 3 points précédents, il découle que $\boxed{\operatorname{Ker}(A(u) \circ B(u)) = \operatorname{Ker}(A(u)) \oplus \operatorname{Ker}(B(u)).}$

(b) Soit P le polynôme minimal, que l'on factorise dans $\mathbb{C}[X]$:
$$P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_1},$$
les λ_i étant deux à deux distincts. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, une récurrence immédiate à partir de la question précédente amène :
$$E = \operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}),$$
la première égalité provenant du fait que P est un polynôme annulateur de E.

On définit donc, pour tout $i \in [1, k]$, $\boxed{E_i = \operatorname{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}).}$

- L'argument donné en I-4(a) pour la stabilité de $\operatorname{Ker}(P_0(u))$ par u se généralise immédiatement à tout noyau du type $\operatorname{Ker}(Q(u))$. Ainsi, $\boxed{\text{les } E_i \text{ sont stables par } u}$.
- Par définition de E_i, l'endomorphisme u_i de E_i induit par u vérifie $(u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i} = 0$. Ainsi, $(X - \lambda)^{\alpha_i}$ est un polynôme annulateur. Puisque le polynôme minimal P_i de u_i divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et est non constant, il admet une et une seule racine λ_i. D'après I-3(b), $\boxed{\lambda_i \text{ est l'unique valeur propre de } u_i}$.
- Les $\boxed{\lambda_i \text{ sont deux à deux distincts d'après leur définition.}}$

3. On choisit, pour tout $i \in [1, k]$, une base $\mathcal{B}_i$ de E_i relativement à laquelle la matrice T_i de u_i est triangulaire (ce qui est possible d'après II-1). Ses coefficients diagonaux sont constitués de valeurs propres de u_i d'après 1(c), donc sont tous égaux à λ_i (unique valeur propre de u_i). Par ailleurs, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant, dans cet ordre, les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$, est une base de E (car $E = E_1 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$). Relativement à cette base, on a alors la description par blocs :
$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_k \end{pmatrix}}$$
Par ailleurs, les λ_i étant deux à deux distincts, les T_i sont bien à diagonales constantes, deux à deux distinctes pour deux T_i différents.

Pour répondre à la trigonalisation sous cette forme d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit alors de considérer l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à M, et d'appliquer ensuite la formule de changement de base.

4. • Si M est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = D.$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les coefficients diagonaux deux à deux distincts de D (si D possède deux coefficients égaux, on ne le considère qu'une fois). Alors pour tout $i \in [1, n]$, il existe une matrice parmi $D - \lambda_1, \ldots, D - \lambda_k I_k$ tel que le coefficient diagonale en position (i, i) de cette matrice soit nul. Ainsi, en effectuant le produit de ces matrices (ce qui revient à effectuer le produit des coefficients diagonaux), on aura au moins un terme nul dans chaque produit définissant les coefficients diagonaux du produit, d'où :

$$(D - \lambda_1 I_n) \cdots (D - \lambda_k I_n) = 0.$$

Les matrices M et D représentant un même endomorphisme relativement à des bases différentes, M vérifie la même relation, donc le polynôme $(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur. Comme il est à racines simples, $\boxed{\text{le polynôme minimal qui le divise est aussi à racines simples.}}$ Il n'est en fait pas difficile de remarquer que le polynôme obtenu est le polynôme minimal, puisque les valeurs propres de M sont les coefficients diagonaux de D (question 1(c)) et que toute valeur propre de M est racine du polynôme minimal (question I-3(b)).

• Réciproquement, si le polyôme minimal P est à racines simples, et si u est l'endomorphisme canoniquement associé alors les sous-espaces E_i de la question 2(b) sont égaux à :

$$E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}),$$

donc $u_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$. Il s'agit d'une homothétie, représentée, quelle que soit la base choisie, par la matrice λI_{n_i}, où n_i est la dimension de E_i. La matrice triangulaire obtenue dans la question 3 est alors diagonale. Ainsi, $\boxed{u \text{ est diagonalisable,}}$ donc M aussi.

Ainsi, $\boxed{M \text{ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est à racines simples.}}$

Partie III – Matrices de Hessenberg

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définies en début de problème.

1. (a) • $\mathcal{H}_n$ est un sous-ensemble non vide ($0 \in \mathcal{H}_n$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, étant donnés $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{H}_n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$ tel que $i > j + 1$:

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = 0,$$

d'où on conclut que $\lambda A + B \in \mathcal{H}_n$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

• Considérons J_n la matrice de Jordan d'ordre n, constituée de 1 sur sa première sur-diagonale, et nulle ailleurs. Alors ${}^tJ_n \in \mathcal{H}_n$, mais $({}^tJ_n)^2 \notin \mathcal{H}_n$ (sauf si $n \leqslant 2$), puisqu'il s'agit de la matrice constituée de 1 sur sa deuxième sous-diagonale et de 0 partout ailleurs.
Ainsi, si $n \geqslant 2$, $\boxed{\mathcal{H}_n \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, car n'est pas stable par produit.
Si $n = 1$ ou $n = 2$, toute matrice est de Hessenberg, donc $\boxed{\mathcal{H}_1 \text{ et } \mathcal{H}_2 \text{ sont des sous-algèbres}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire et $M \in \mathcal{H}_n$, dont on notera les colonnes C_j et les lignes L_i.

• La colonne C'_j du produit MT est :

$$C'_j = \sum_{k=1}^{n} t_{k,j} C_j = \sum_{k=1}^{j} t_{k,j} C_i.$$

Or, les colonnes C_k, pour $k \leqslant j$, ont tous leurs coefficients nuls sur les lignes $i > j + 1$, donc il en est de même de C'_j.
On en déduit que $\boxed{MT \text{ est de Hessenberg}}$.

- Le même raisonnement tient pour TM, en raisonnant cette fois sur les lignes de M : la ligne L'_i du produit TM est
$$L'_i = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} L_k = \sum_{k=j}^{n} t_{i,k} L_k.$$
Or, les lignes L_k, pour $k \geqslant j$, sont nulles sur leurs colonnes $j < i-1$, donc il en est de même de L'_i.
Ainsi, $\boxed{TM \text{ est de Hessenberg.}}$

2. (a) Ici, on n'a plus nécessairement de droite stable (fournie par un vecteur propre), mais il existe toujours soit une droite stable, soit un plan stable, suivant qu'il existe un facteur irréductible de degré 1 ou de degré 2 dans le polynôme minimal (voir partie I). Suivant qu'on travaille avec un plan stable ou une droite stable, on se retrouvera avec un bloc diagonal d'ordre 1 ou d'ordre 2. La récurrence se construit de la même façon qu'en II-1, mais il faut cette fois faire une récurrence d'ordre 2. L'initialisation, pour $n = 1$ ou $n = 2$, est triviale dans les deux cas. Si la propriété est aquise aux rangs $n-2$ et $n-1$,
   - si le polynôme minimal admet une racine réelle, on se ramène au rang $n-1$ de la même façon qu'en II-1,
   - sinon, il admet un facteur irréductible P_0 de degré 2, donc un plan stable P, d'après I-4. En considérant une base (b_1, b_2) de P, complétée en une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E, on se retrouve avec :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} M_0 & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$
   où $M_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de l'endomorphisme v induit par u sur P, relativement à la base (b_1, b_2). On applique alors l'hypothèse de récurrence au rang $n-2$ à B, les détails étant *grosso modo* similaires à II-1.

   Ainsi, il existe une base relativement à laquelle $\boxed{\text{la matrice de } u \text{ est triangulaire par blocs}}$, les blocs diagonaux étant des blocs carrés 1×1 ou 2×2.

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé, et une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice H de u dans cette base soit de la forme de la question précédente. Les blocs diagonaux étant de taille au plus 2, ils ne « débordent » sur la partie inférieure de la matrice que d'au plus un terme (situé sur la première sous-diagonale). Ainsi, la matrice H est de Hessenberg. Comme H et M représente le même endomorphisme, elles sont semblables.

   Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice } M \in \mathcal{H}_n \text{ est semblable à une matrice de Hessenberg.}}$

3. (a) Puisqu'on veut effectuer des opérations sur les lignes pour trouver une matrice semblable, il faut faire en même temps des opérations sur les colonnes, revenant à multiplier à droite par les inverses des matrices de codage des opérations sur les lignes effectuées. Ainsi (inversez les matrices élémentaires !) :
   - toute opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ doit être accompagnée d'une opération $C_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} C_i$
   - toute opération $L_i \leftrightarrow L_j$ doit être accompagnée d'une opération $C_i \leftrightarrow C_j$
   - toute opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ doit être accompagnée d'une opération $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.

   On remarque que ce faisant, si toutes les opérations effectuées portent sur les lignes L_2 à L_n, les opérations sur les colonnes correspondantes n'affectent pas la colonne 1. Ainsi, si le but est uniquement de modifier la colonne 1, à notre guise sans se préoccuper du reste, si nous n'utilisons pas la ligne 1, nous pouvons nous contenter de décrire les opérations sur les lignes.

   Or, si seul le coefficient en position $(1, 1)$ est non nul, il n'y a rien à faire, et sinon, on peut ramener un coefficient non nul en position $(2, 1)$ par un échange $L_2 \leftrightarrow L_k$, où $k \neq 1$.

   À la manière du pivot de Gauss, on peut alors effectuer des opérations $L_k \leftarrow L_k + \alpha L_2$ pour $k \geqslant 3$, de sorte à annuler le coefficient en position $(k, 1)$.

   À l'issue de ces opérations, la première colonne est nulle, sauf éventuellement ses deux premiers coefficients. Les opérations effectuées n'utilisant pas la ligne 1, en faisant les opérations associées sur les colonnes, la première colonne vérifiera toujours ces conditions.

   Ainsi, $\boxed{M \text{ est semblable à une matrice } M' = (m'_{i,j}) \text{ telle que } m'_{i,1} = 0 \text{ pour } i > 2.}$

   (b) En itérant ce procédé (ou par récurrence) : on applique le même procédé sur $(m_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$. En utilisant la notation globale sur M, les opérations effectuées n'utilisent que les lignes L_3 à L_n (et donc les colonnes C_3

à C_n), donc n'affectent plus la première colonne (les seuls coefficients non nuls de C_1 n'étant pas utilisés dan ces opérations). Une fois l'idée comprise, le reste est de la mise en forme que je vous laisse faire.

Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice est semblable à une matrice de Hessenberg}}$.

(c) On obtient le programme suivant (les définitions des opérations sur les lignes et colonnes n'étaient pas demandées)

```
import numpy as np

# Attention, toutes les indexations des lignes et colonnes commencent à 0

def echange_lignes(A,i,j): # Attention, ces fonctions modifient
                           # la valeur de A. Pour éviter cela
                           # on peut utiliser copy comme plus loin
    for k in range(np.shape(A)[1]):
        A[i,k], A[j,k]= A[j,k], A[i,k]
    return A

def echange_colonnes(A,i,j):
    for k in range(np.shape(A)[0]):
        A[k,i], A[k,j]= A[k,j], A[k,i]
    return A

def combine_lignes(A,i,j,a): # Attention, ces fonctions modifient
                           # la valeur de A. Pour éviter cela
                           # on peut utiliser copy comme plus loin
     for k in range(np.shape(A)[1]):
         A[i,k] += a * A[j,k]
     return A

def combine_colonnes(A,i,j,a):
    for k in range(np.shape(A)[0]):
        A[k,i] += a * A[k,j]
    return A

def choix_pivot(A,j): #choix du pivot sur la i-ième colonne
     pivot = j+1  # on commence la recherche strictement sous la diagonale
                # (en position (j+1,j),
     for i in range(j+2,np.shape(A)[0]):
         if abs(A[pivot,j]) < abs(A[i,j]):
             pivot = i
     return pivot #choix du pivot le plus grand.

def hessenberg(A):
    B = np.copy(A) #afin de régler les problèmes de dépendance
                  #(sinon A est modifié)
    (n, p) =np.shape(A)
    if n != p:
        raise ValueError('Erreur de format')
    for j in range(n-2): #rien à faire sur les deux dernières colonnes!
        indice_pivot = choix_pivot(B,j)
        echange_lignes(B,j+1,indice_pivot)
                 #pas besoin d'affectation, la fonction modifie B
```

```
        echange_colonnes(B,j+1,indice_pivot)
        pivot = B[j+1,j]
        if abs(pivot) > 1e-15:
            for i in range(j+2,n):
                coeff = B[i,j]
                combine_lignes(B,i,j+1,- coeff / pivot)
                combine_colonnes(B,j+1,i, coeff / pivot)
    return(B)
```

Partie IV – Méthode de Householder

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

1. (a) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0.$$

De plus, $X \neq 0$, donc un terme au moins de cette somme de termes positifs est strictement positif, donc

$$\boxed{^t\mathrm{X}\ \mathrm{X} > 0}.$$

(b) On vérifie que $S_X^2 = I_n$:

$$S_X = \left(I_k - \frac{2}{\|X\|^2} X\ {}^tX\right)^2 = I_k - \frac{4}{\|X\|^2} X\ {}^tX + \frac{4}{\|X\|^4} X\ {}^tXX\ {}^tX.$$

Or, $X\ {}^tXX\ {}^tX = X(\ {}^tXX)\ {}^tX = \|X\|^2\ {}^tXX$, et on trouver bien $S_X^2 = I_n$, donc $\boxed{S_X \text{ est une matrice de symétrie.}}$
Les règles de produit par blocs amènent alors :

$$T_X^2 = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-k}^2 & 0_{n-k,k} \\ \hline 0_{k,n-k} & S_X^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ \hline 0_{k,n-k} & S_X \end{array}\right) = T_X,$$

donc $\boxed{T_X \text{ est aussi une matrice de symétrie.}}$

2. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$. On a alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, où pour tout $i \geqslant 2$, $x_i = y_i$, et $x_i = y_1 + \|Y\|$. La matrice S_X est alors donnée par :

$$S_X = (s_{i,j})_{i,j}, \quad s_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{2}{\|X\|^2} x_i x_j,$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si et seulement si $i = j$, et 0 sinon (symbole de Kronecker). Soit (z_i) les coordonnées de $S_X Y$. On a alors, pour $i \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} z_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} y_j &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} y_j - \frac{2}{\|X\|^2} y_i x_j y_j \\ &= y_i - \frac{2y_i}{\|X\|^2} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + y_1 \|Y\| \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|X\|^2 z_i &= y_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\|Y\|^2 + 2y_1\|Y\| \right) \\ &= y_i \left(\|Y\|^2 - y_1^2 + (y_1 + \|Y\|)^2 - 2\|Y\|^2 + 2y_1\|Y\| \right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les composantes de $S_X Y$, à part peut-être la première, sont nulles, donc $\boxed{S_X Y \text{ et } E_1 \text{ sont colinéaires}}$.

3. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On effectue une récurrence sur $r \in [1, n-1]$. Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer (l'énoncé de la propriété n'impose aucune condition sur $P_r M P_r^{-1}$, il suffit alors de prendre $P_r = I_n$.)
   Soit $r \in [1, n-2]$ tel qu'il existe P_r, produit de matrices de symétries, telle que
   $$K_r = P_r M P_r^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{H_r} & A_r \\ \hline 0_{n-r,r-1} & \multicolumn{1}{|c|}{Y} & B_r \end{array}\right)$$
   On considère alors, pour le vecteur Y de cette description par blocs, et le vecteur X associé selon les questions précédentes, la symétrie S_X, envoyant Y sur un vecteur colinéaire à E_1 dans $\mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$. On considère la symétrie T_X associée à la façon de la question 1(b). L'opération $K_r T_X$ n'affecte pas les colonnes 0 à r de la matrice K_r (en particulier la colonne r, contenant la sous-colonne Y :
   $$K_r T_X = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{H_r} & A'_r \\ \hline 0_{n-r,r-1} & \multicolumn{1}{|c|}{Y} & B'_r \end{array}\right).$$
   De même, les règles d'opération par blocs montre que l'opération $T_X K_r T_X$ n'affecte pas les r premières lignes de $K_r T_X$: il restera donc toujours la matrice H_r dans le coin supérieur gauche. Par ailleurs, soit E_r le r-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Vu ce qu'on a dit plus haut, $K_r T_X E_r$ est de la forme par blocs $K_r T_X E_r = \begin{pmatrix} F \\ Y \end{pmatrix}$, et donc
   $$T_X K_r T_X E_r = \begin{pmatrix} I_r F \\ S_X Y \end{pmatrix}.$$
   Comme $S_X Y$ est de la forme $\begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, il en résulte que sur la colonne r, les coefficients des lignes $r+2$ jusqu'à n sont nuls. On obtient donc la description voulue au rang $r+1$. Par ailleurs, $T_X = T_X^{-1}$, la matrice P_{r+1} est donc définie par $P_{r+1} = T_X P_r$.
   Le principe de récurrence permet de conclure.
   (b) Pour $r = n-1$, on retrouve la $\boxed{\text{similitude à une matrice de Hessenberg.}}$
4. D'après la question précédente, il existe P, obtenue comme produit de matrice de symétries ($P = S_1 \cdots S_k$) telle que $H = PMP^{-1}$ soit de Hessenberg. Or,
   $$P^{-1} = S_k^{-1} \cdots S_1^{-1} = S_k \cdots S_1,$$
   car $S_i^2 = I_n$. Ainsi,
   $$H = S_1 \cdots S_k M S_k \cdots S_1.$$
   On remarque aussi que les matrices de symétrie introduites dans cet arguemnt sont symétriques, et M l'étant aussi :
   $${}^tH = {}^tS_1 \cdots {}^tS_k\, {}^tM\, {}^tS_k \cdots {}^tS_1 = S_1 \cdots S_k M S_k \cdots S_1 = H.$$
   Ainsi, H est une matrice de Hessenberg symétrique, ce qui impose que H est tridiagonale.
   Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice symétrique } M \text{ est semblable à une matrice tridiagonale.}}$