Mathématiques X 2

Ulysse Mounoud

Exercice 1

Soit A une matrice aléatoire réelle carrée d'ordre n définie ainsi : pour chacune de ses colonnes on place au hasard un 1 et on remplit les autres coordonnées avec des 0. Déterminer la probabilité que A soit inversible.

Soit B une matrice aléatoire réelle carrée d'ordre n définie ainsi : pour chacune de ses colonnes on place au hasard deux 1 (à des emplacements distincts) et on remplit les autres coordonnées avec des 0. Majorer la probabilité que B soit inversible.

Indication : majorer l'espérance de $|det(B)|$ et développer le déterminant.

Exercice 2

Déterminer les polynômes complexes P vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |P(e^{i\theta})| = 1$$

Même question avec P une fraction rationnelle.

Déroulé

Pour le premier exercice on trouve d'abord $\frac{n!}{n^n}$, puis on majore par $\frac{2^n n!}{n^n}$. Pour le deuxième exercice il faut exprimer le module au carré avec le conjugué et obtenir une égalité formelle sur des polynômes. On trouve que P s'écrit αX^n. Pour la fraction rationnelle on fait de même après l'avoir écrite sous une forme irréductible, mais il faut ensuite penser à regarder les racines du numérateur et du dénominateur (indication de l'examinateur). On trouve finalement une expression du type $\lambda X^k \prod_{i=1}^n \frac{X-\alpha_i}{\overline{\alpha_i}X-1}$.

L'énoncé du premier exercice n'était pas très précis, mais on suppose bien sûr que les colonnes sont des vecteurs aléatoires mutuellement indépendants suivant une loi uniforme. Pour la première question une justification orale lui a suffi. Pour la deuxième question l'examinateur avait d'abord omis qu'on voulait seulement obtenir une majoration, mais il m'a ensuite rapidement donné l'indication.

Le deuxième exercice est classique. J'ai fait rapidement la première question mais j'ai eu plus de mal pour la deuxième (il est important de rester concentré jusqu'à la fin de l'oral..). L'indication sur les racines m'a finalement débloqué.