

## Corrigé du T.D. O<sub>3</sub>

## Spé MP<sup>1</sup>

### Corr. 1 Mesure de distances

1. Pour l'interféromètre de Michelson, en F' l'angle d'incidence est nul, donc  $\delta = 2d$ . On a donc

$$\Phi(F') = 4\pi d/\lambda_0$$

La séparatrice est atteinte deux fois par chaque faisceau. Donc les deux faisceaux interférent en F' pour éclairage E<sub>0</sub>/2. La formule des interférences à deux ondes donne donc :

$$E(F') = E_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi d}{\lambda_0} \right) \right]$$

Avec la formule précédente, on trouve que  $\cos \left( \frac{4\pi d}{\lambda_0} \right) = E_r - 1$ , soit  $\frac{4\pi d}{\lambda_0} = \pm \arccos(E_r - 1) + 2\pi m$  avec  $m$  entier relatif. Et finalement

$$d = \pm \frac{\lambda_0}{4\pi} \arccos(E_r - 1) + m \frac{\lambda_0}{2}$$

$d$  n'est donc pas déterminée sans ambiguïté.

2. Comme  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ , on peut différentier logarithmiquement la formule  $\Phi(F') = 4\pi d/\lambda_0 : \frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{d\lambda_0}{\lambda_0}$ . D'où  $|\Delta\Phi| = \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right| = \left| \frac{4\pi d \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right|$ . In fine, puisque  $\delta = 2d$ , on a

$$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi\delta}{\Lambda} \text{ avec la longueur } \Lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

3. Quand la longueur d'onde varie de  $\Delta\lambda$ , le déphasage en F' varie ce qui change l'ordre d'interférences (de  $|\Delta p|$ ) au point F' et on voit défiler N franges sur le photodétecteur. Comme  $|\Delta\Phi| = 2\pi|\Delta p|$ , on a (avec E partie entière)

$$N = E \left( \frac{|\Delta\Phi|}{2\pi} \right) = E \left( \frac{2d}{\Lambda} \right)$$

Pour la source,  $\frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c}$ , d'où  $-\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{dv}{c}$ , et donc  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\Delta v}{c}$ , soit encore

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 \Delta v}{c} \text{ et } \Lambda = \frac{c}{\Delta v}$$

Avec  $\Delta v = 100$  GHz, on obtient

$$\Delta\lambda = 0,2 \text{ nm et } \Lambda = 3,10^{-3} \text{ m}$$

Comme on débute sur un éclairage maximal et qu'on s'arrête en un éclairage nul,  $N = 322$  et  $|\Delta p| = 322,5$ . De plus  $d = |\Delta p|\Lambda/2$  donne  $d = 0,483750$  m et  $d$  est alors déterminée sans ambiguïté. On peut évaluer (grossièrement !) l'incertitude sur cette mesure à une erreur sur  $|\Delta p|$  de 1/4, ce qui donne  $\Delta d = \Lambda/8 = 375 \mu\text{m}$ . On présentera le résultat ainsi :

$$d = 0,4838 \pm 0,0004 \text{ m}$$

### Corr. 2 Michelson avec un miroir sphérique

1. La source est large. Les franges d'égale épaisseur localisées au voisinage des miroirs (on peut dire sur (M<sub>2</sub>) vu l'énoncé pour la deuxième question) sont des anneaux de centre S. Ceci est en fait évident pour des raisons de symétrie.

2. En M sur (M<sub>2</sub>) à la distance  $r$  de S, l'épaisseur de la lame d'air est  $e = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ , soit approximativement  $e \simeq \frac{r^2}{2R}$ .

En supposant que la séparatrice n'introduise aucun déphasage entre les deux voies, le centre S est brillant. L'ordre d'interférence en M est  $p(M) = \frac{r^2}{\lambda R}$ , et est constant sur le cercle de centre S et de rayon  $r$ . Il croît avec  $r$  et est nul au centre S. Le rayon de l'anneau brillant numéro  $q$  depuis le centre est :  $r'_q = \sqrt{q\lambda R}$  avec  $q$  entier positif, limité par la dimension des miroirs.

Sur (E), les rayons des anneaux croissent comme la racine carré des entiers successifs :

$$r_q = \gamma \sqrt{q\lambda R}$$

3. Une régression numérique donne  $r_q = 2,967 \cdot 10^{-3} + 1,253\sqrt{q}$  avec  $r_q$  en cm. De  $\gamma\sqrt{\lambda R} = 1,253$  cm, on déduit

$$R \simeq 9,968 \text{ m}$$

On peut remarquer que  $R \gg r'_q = r_q/\gamma$ , ce qui confirme bien qu'on pouvait utiliser l'approximation menant à  $e \simeq \frac{r^2}{2R}$ .

### Corr. 3 Mesure de variations d'indices

1. Les franges sont localisées sur les miroirs. On les visualise en conjuguant les miroirs et l'écran grâce à une lentille, ce qui impose  $D > 4f'$  où  $D$  est la distance miroirs-écran et  $f'$  la distance focale de la lentille. Comme dans le cours, on montre que la différence de marche est  $\delta = 2ax$ , avec  $x$  la distance à l'arête du coin d'air formé par M<sub>1</sub> et M'<sub>2</sub> (image de M<sub>2</sub> par la séparatrice). Sur les miroirs, l'intensité est donc de la forme  $I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2ax}{\lambda_0} \right) \right]$ . Sur l'écran, l'intensité est donc  $I(X) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2aX}{\gamma\lambda_0} \right) \right]$ , où X est la distance entre le point d'observation est l'image de l'arête du coin d'air (le signe de  $\gamma$  n'est pas important, il peut être absorbé dans X). L'interfrange est donc

$$i = \frac{|\gamma\lambda_0|}{2\alpha} = 1,1 \text{ cm}$$

2. En l'absence de la deuxième cuve, les intensités provenant des deux bras de l'interféromètre pourraient être différentes, d'où un mauvais contraste. De plus, si la différence de marche supplémentaire introduite par la cuve (solvant, soluté et verre de la cuve) est plus grande que la longueur de cohérence de la source, il n'y aurait plus d'interférence (i.e. un contraste nul). La deuxième cuve permet de s'affranchir de ce problème (qui n'en est pas forcément un avec un laser, mais le serait avec une source moins cohérente).

3. On note  $z$  (Z) la coordonnée sur les miroirs (sur l'écran) parallèle à l'arête du coin d'air. La différence de marche s'écrit maintenant

$$\delta = 2ax + 2[n(z) - n_0]a$$

Les franges brillantes vérifient  $\delta = m\lambda_0$ , ce qui donne l'équation  $2ax + 2[n(z) - n_0]a = m\lambda_0$ . Sur l'écran, ceci se traduit en  $2aX/\gamma + 2[n(Z/\gamma) - n_0]a = m\lambda_0$ . En remplaçant  $n(z)$  par son expression, on trouve que les franges brillantes ont pour équation

$$X = \frac{m\gamma\lambda_0}{2\alpha} - \frac{\gamma n_1}{\alpha} e^{-z^2/(r^2 d^2)}$$

On peut vérifier en  $z = 20$  cm (par exemple, mais c'est vrai pour tout  $z$ ) que l'interfrange est bien légèrement supérieur au centimètre. Plus précisément, sur les 10 cm de largeur de l'écran, il y a 9 franges, donc  $i \simeq \frac{10}{9} \text{ cm} = 1,1 \text{ cm}$ , ce qui coïncide bien avec la valeur donnée en 1.

Une même frange brillante passe de la valeur  $X = \frac{m\gamma\lambda_0}{2\alpha}$  quand Z est grand devant  $\gamma d$  (et c'est le cas pour  $Z = 20$  cm, cf la figure où on voit bien que le régime asymptotique est atteint) à la valeur  $X_0 = \frac{m\gamma\lambda_0}{2\alpha} - \frac{\gamma n_1}{\alpha}$  lorsque  $Z = 0$ . On a alors  $X - X_0 = \frac{\gamma n_1}{\alpha}$  et donc

$$n_1 a = \frac{\alpha(X - X_0)}{\gamma}$$

Il suffit donc de suivre une frange, par exemple celle qui passe de  $X_0 = 0,75$  cm en  $Z = 0$  à  $X = 7,6$  cm en  $Z = 0$ . On trouve alors que

$$n_1 a = 2,0 \cdot 10^{-6}$$

Pour la même frange, la valeur  $\frac{X + X_0}{2}$  en abscisse est atteinte pour une ordonnée Z qu'on peut mesurer. On trouve  $Z = 5,8$  cm expérimentalement. Or cette valeur est telle que  $\frac{m\gamma\lambda_0}{2\alpha} - \frac{\gamma n_1}{2\alpha} = \frac{m\gamma\lambda_0}{2\alpha} - \frac{\gamma n_1}{\alpha} e^{-Z^2/(r^2 d^2)}$ , soit encore  $e^{-Z^2/(r^2 d^2)} = \frac{1}{2}$ , ce qui donne

$$d = \frac{Z}{\gamma\sqrt{\ln 2}} = 7,0 \text{ mm}$$

### Corr. 4 Spectrométrie d'un doublet

1. Chaque longueur d'onde  $\lambda_j$  donne l'intensité

$$I_j(e) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2e}{\lambda_j} \right) \right]$$

L'intensité totale est la somme de ces deux intensités, car les deux raies sont incohérentes. Ainsi, après un peu de trigonométrie et en approximant  $1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 \simeq 2/\bar{\lambda}$  et  $1/\lambda_1 - 1/\lambda_2 \simeq \Delta\lambda/\bar{\lambda}^2$  (avec  $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$  et  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ), on trouve

$$I(e) = 4I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi e \Delta\lambda / \bar{\lambda}^2 \right) \cos \left( 4\pi e / \bar{\lambda} \right) \right]$$

Je vous laisse représenter I(e) qui a une allure typique d'un phénomène de battements : le terme  $\cos(4\pi e / \bar{\lambda})$  oscille rapidement entre les enveloppes  $4I_0 \left[ 1 \pm \cos(2\pi e \Delta\lambda / \bar{\lambda}^2) \right]$ .

2. Les oscillations rapides se font avec une période en  $e$  qui vaut  $\delta e = \bar{\lambda}/2$ . Les annulations des amplitudes de ces oscillations rapides se produisent lorsque  $\cos(2\pi e \Delta\lambda / \bar{\lambda}^2) = 0$ ,

i.e. quand  $e \Delta\lambda / \bar{\lambda}^2 = \frac{2m+1}{4}$ , soit pour les valeurs  $e_m = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} \frac{2m+1}{4}$  de l'épaisseur  $e$  de la lame d'air. L'écart entre

deux valeurs successives est  $\Delta e = e_{m+1} - e_m = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}$ . Le nombre d'oscillations rapides sur  $\Delta e$  vaut  $N = \frac{\Delta e}{\delta e} = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}$ . On trouve  $N_{\text{Na}} \simeq 982$  et  $N_{\text{Hg}} \simeq 275$ . Il suffit donc de regarder quelle tracé a le moins d'oscillations, c'est celui de la lame à vapeur de mercure.

3. L'utilisation de la formule  $e_m = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} \frac{2m+1}{4}$  pour  $m = 0, 1$  et 2 donne les valeurs de l'énoncé pour la lampe à vapeur de sodium, alors qu'elle donne  $e_0 = 40 \mu\text{m}$ ,  $119 \mu\text{m}$  et  $199 \mu\text{m}$  pour la lampe à vapeur de mercure.

### Corr. 5 Anneaux d'égale inclinaison

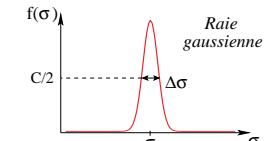
1. L'écran est à placer dans le plan focal image d'une lentille convergente (ou sans lentille, à grande distance de l'interféromètre).

2. On commence par redémontrer que  $\delta = 2ne\cos i$  (cf cours). Par la suite on supposera  $n = 1$ . L'ordre d'interférence s'écrit donc  $p = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i$ . Aux petits angles,  $\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2}$  et  $i \simeq \tan i = \frac{p}{f'}$  d'où  $p = \frac{2e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{p^2}{2f'^2} \right)$ . Le premier anneau a un ordre  $p_1 = \frac{2e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{p_1^2}{2f'^2} \right)$  tandis que le cinquième anneau a un ordre  $p_5 = \frac{2e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{p_5^2}{2f'^2} \right)$ . Or  $p_5 = p_1 - 4$  (l'ordre décroît du centre vers les bords de l'écran). Ainsi  $p_1 - p_5 = \frac{e}{\lambda_0 f'^2} (p_5^2 - p_1^2) = 4$ , dont on déduit

$$e = \frac{4\lambda_0 f'^2}{p_5^2 - p_1^2} = 35,5 \pm 0,8 \mu\text{m}$$

### Corr. 6 Spectrométrie par transformée de FOURIER

1. On étudie ici un profil spectral **gaussien centré sur  $\sigma_0$** , le **nombre d'onde d'intensité spectrale maximale** (correspond à la couleur dominante de longueur d'onde  $\lambda_0 = 1/\sigma_0$ ).



La largeur  $\Delta\sigma$  à mi-hauteur de la raie étudiée est telle que

$$f(\sigma_0 \pm \Delta\sigma/2) = \frac{C}{2}$$

soit

$$\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}$$

Finalement,  $a$  est de l'ordre de la largeur de la raie.

2. On découpe le profil spectral en bandes de largeur  $d\sigma$  infinitésimale, chacune correspondant à une source **incohérente** avec les autres donc un somme les intensités. En notant  $\delta$  la différence de marche,

$$d\mathcal{E}_\sigma = 2f(\sigma) d\sigma [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)]$$

D'après l'extension du domaine des  $\sigma$  aux valeurs négatives, on écrit directement

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} 2f(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] d\sigma$$

Or, la différence de marche est donnée par  $\delta = 2e \cos i$  où  $i$  est l'angle d'incidence des rayons sur la lame et, les mesures concernant le centre de la figure d'interférences,  $i = 0$  et  $\delta = 2e$ . Par conséquent,

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} 2f(\sigma) d\sigma}_{\text{constante } \mathcal{E}_m} + \int_{-\infty}^{\infty} 2f(\sigma) \cos(4\pi\sigma e) d\sigma$$

soit

$$\mathcal{E}(e) = \mathcal{E}_m + \hat{f}(2e) + \hat{f}^*(2e)$$

3. **Préliminaire** : montrons que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne (dont la largeur évolue en l'inverse de la largeur de la première).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/a^2} e^{2j\pi ux} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[u/a-j\pi ax]^2} du e^{-\pi^2 a^2 x^2}$$

et l'intégrale se calcule en passant en complexes en posant le changement de variable  $z = \frac{u}{a} - j\pi ax$  (variant sur le domaine  $\mathbb{R} + jC^{\text{te}}$ ). Alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/a^2} e^{2j\pi ux} du = \int_{\mathbb{R}+jC^{\text{te}}} e^{-z^2} dz a e^{-\pi^2 a^2 x^2}$$

$$\text{soit } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/a^2} e^{2j\pi ux} du = \sqrt{\pi} a e^{-\pi^2 a^2 x^2}$$

On vérifie que la transformée de Fourier d'une gaussienne est bien une gaussienne de largeur évoluant en l'inverse de  $\Delta\sigma$  (donc de  $a$ ).

Ensuite, on calcule  $\hat{f}(2e)$  en posant  $u = \sigma - \sigma_0$  :

$$\hat{f}(2e) = C e^{4j\pi\sigma_0 e} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/a^2} e^{2j\pi u(2e)} du$$

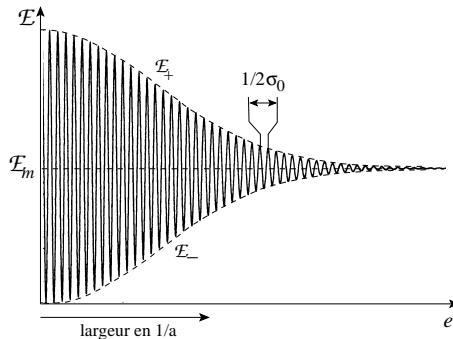
$$\text{soit } \hat{f}(2e) = C a \sqrt{\pi} e^{4j\pi\sigma_0 e} e^{-4\pi^2 a^2 e^2}$$

On en déduit l'éclairage en fonction de  $e$  :

$$E(e) = E_m + 2Ca\sqrt{\pi} \cos(4\pi\sigma_0 e) e^{-4\pi^2 a^2 e^2}$$

L'allure du graphe est la suivante. Elle est tracée sachant que le cosinus oscille avec une période  $\frac{1}{2\sigma_0} \ll \frac{1}{a}$  bien plus petite que la longueur de décroissance caractéristique de l'exponentielle en fonction de  $e$ . L'éclairage est enveloppé par les courbes d'équation

$$E_{\pm} = E_m \pm 2Ca\sqrt{\pi} e^{-4\pi^2 a^2 e^2}$$



Par conséquent, la visibilité des franges diminue quand  $e$  s'éloigne de 0 et on accède à  $\Delta\sigma$  en mesurant la largeur « à mi-hauteur » des enveloppes définie par

$$e^{-4\pi^2 a^2 (\Delta\sigma)^2} = \frac{1}{2}$$

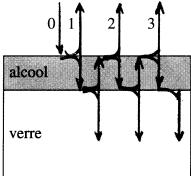
$$\text{donc } a = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi\Delta\sigma} \text{ soit } \Delta\sigma = \frac{\ln 2}{\pi\Delta\sigma}$$

Pour mesurer  $\Delta\sigma$ , il faut atteindre l'épaisseur  $\Delta\sigma \simeq \frac{1}{\Delta\sigma}$  donc  $\Delta\sigma$  ne peut être excessivement petit ! Cette longueur correspond grossièrement à la longueur de cohérence de la source.

Pour mesurer de grandes longueurs de cohérence (cas des lasers par exemple), il faut utiliser des interféromètres de Michelson possédant des bras très longs (donc très coûteux) ou bien il faut faire appel à d'autres dispositifs (cavité confocale de Fabry-Pérot et autres...).

### Corr. 7 Couche antireflet

1. A priori, il y a superposition d'une infinité d'ondes réfléchies (cf réflexions multiples). La représentation des réflexions multiples a été faite « en décalé » pour plus de clarté.



Or, les facteurs de réflexion en intensité sont

$$R_{\text{air}/\text{①}} = [r_{\text{air}/\text{①}}]^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$$

$$\text{et de même } R_{\text{①}/\text{②}} = \left(\frac{n-n_0}{n+n_0}\right)^2$$

On peut choisir une fine couche d'eau ( $n = 1,33$ ) ou d'alcool ( $n = 1,36$ , cas choisi ici) et on trouve

$$R_{\text{air}/\text{①}} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ et } R_{\text{①}/\text{②}} \simeq 3 \cdot 10^{-3}$$

Alors,  $I_1 = R_{\text{air}/\text{①}} I_0$  et  $I_2 = R_{\text{①}/\text{②}} I_0$

peuvent donner des interférences (de contraste médiocre) entre les ondes 1 et 2. Par contre, on peut ne pas tenir compte des réflexions multiples suivantes car, dès le rang 3, on obtient une intensité bien inférieure aux précédentes puisque

$$I_3 = R_{\text{air}/\text{①}} R_{\text{①}/\text{②}}^2 I_0 \ll I_2$$

2.  $I_r$  ne peut s'annuler que si  $I_1 = I_2$ , donc si

$$\left| \frac{1-n}{1+n} \right| = \left| \frac{n_0-n}{n_0+n} \right|$$

Alors,

$$n = \sqrt{n_0} = 1,22$$

$$\text{et } I_r = 2 \cdot 10^{-2} I_0 [1 + \cos(4\pi\sigma n e)]$$

Ensuite, on note que  $I_r$  s'annule seulement si

$$4ne = (2p+1)\lambda_0 \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

3.  $I_r$  reste au voisinage de son minimum si  $e$  est faible donc  $p = 0$  et

$$e = \frac{\lambda_{550 \text{ nm}}}{4\sqrt{n_0}} = 0,11 \mu\text{m}$$

On atténue surtout  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$  (vert-jaune) donc la couleur du reflet est violacée (cf couleur complémentaire !).

### Corr. 8 Interféromètre de Mach

1. Par chaque voie, le faisceau est divisé en deux parties par les séparatrices donc

$$I_1 = I_2 = I_0/4$$

2. Avec un tel réglage, les deux ondes avec des surfaces d'onde planes cohérentes sont en phase donc le plan observé est uniformément éclairé avec un maximum d'intensité.

Remarque: Avec le viseur, on superpose les ondes au niveau de P et de son symétrique par rapport à la séparatrice C !!

3. La partie de l'onde qui traverse la lame subit un déphasage supplémentaire par rapport au cas sans lame qui vaut

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e$$

Par conséquent, sur l'image de P, on observe deux zones :

- $I = I_0$  en dehors de l'image de la lame ;
- $I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \varphi)$  sur l'image de la lame.

Le contraste, tel que défini dans l'énoncé dans le cas de cet interféromètre, est

$$\Gamma = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$$

4. Si le fond est noir,  $I_{\min} = 0$  et le contraste est égal à 1. Il faut pour cela allonger le trajet CD de  $\lambda/2$  (ondes destructives).

5. On obtient deux ondes de surfaces d'onde planes de directions de propagation (autour de BC) faisant un angle  $2\alpha$  entre elles. On obtient donc des franges rectilignes parallèles à l'axe de rotation du miroir et d'interfrange

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Numériquement,

$$\alpha = 10^{-3} \text{ rad}$$

Si l'on introduit la lame, elle ajoute la différence de marche  $\delta = (n-1)e$  par rapport au cas sans lame donc, dans l'image de la lame, les franges ont le même interfrange mais sont décalées de  $\delta/\lambda$  interfranges, soit un décalage de  $\frac{\delta}{2\alpha}$ .

Le décalage est vers le haut si le viseur a un grandissement positif.

6. Pour chaque  $\lambda$ , l'interfrange  $i$  est différente : les franges ne se superposent correctement que pour l'ordre 0. Seule la frange centrale est vue (blanche) avec des irrigations autour, puis du blanc d'ordre supérieur.

Remarque: Noter que le raisonnement ne tient que parce que l'on néglige l'effet dispersif du verre (dépendance de  $n$  avec  $\lambda$ ). Sinon, on perd la frange centrale et on observe une frange dite « frange achromatique » qui ne lui correspond pas (voir autre(s) exo(s)) !

En lumière monochromatique, il est impossible de repérer l'ordre nul !.

Numériquement,  $\delta/(2\alpha)$  correspond à 89 divisions et  $\lambda/(2\alpha)$  à 5 divisions d'où

$$e = 18 \mu\text{m}$$

### Corr. 9 Mesure d'épaisseur d'une lame à l'aide d'un interféromètre de MICHELSON

1. Dans le cas d'une source polychromatique, les intensités des figures d'interférences correspondant aux diverses longueurs d'onde s'ajoutent (cf cohérence temporelle). En un point de l'espace caractérisé par une différence de marche  $\delta$ , il n'existe pas de figure d'interférences observable si les longueurs d'onde  $\lambda_0$  et  $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$  donnent naissance, par exemple, à une frange brillante pour l'une et sombre pour l'autre (interférences destructives), c'est-à-dire si la différence  $\Delta p$  d'ordre pour ces longueurs d'onde est égale à  $1/2$ . L'observation d'interférences est possible si  $|\Delta p| < 1/2$  (critère fréquent), soit si

$$\left| \delta \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} \right) \right| < \frac{1}{2}$$

ou encore

$$|\delta| < \delta_{\max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

et l'ordre maximal est

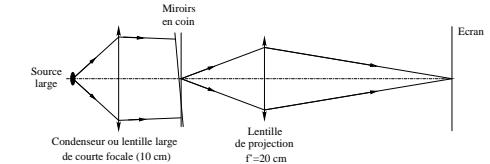
$$p_{\max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

Voici les valeurs pour les quatre sources considérées, sachant que pour la source 4,  $\Delta\lambda = 0$  est un cas idéal irréalisable (le filtre interférentiel laisse passer en fait une raie de largeur spectrale non nulle !) :

	sour. 1	sour. 2	sour. 3	sour. 4
$\delta_{\max}$	qqs $\mu\text{m}$	3 $\mu\text{m}$	30 $\mu\text{m}$	$\infty$
$p_{\max}$	qqs unités	6	55	$\infty$

2.a. Pour ne pas être limité par la cohérence spatiale, les angles d'incidence doivent être faibles : les miroirs sont donc éclairés par un faisceau de lumière quasi-parallèle (source au voisinage du foyer d'une lentille convergente). Les miroirs sont proches du contact optique et forment fictivement un coin d'air d'angle  $\alpha$  faible.

Les interférences sont localisées au voisinage du coin d'air. On les observe donc par une lentille convergente qui conjugue le coin avec l'écran. Attention, il faut placer l'écran à une distance  $D > 4f'$  du coin pour espérer obtenir une image réelle ! La compensatrice sert à compenser le chemin optique pris par l'un des deux rayons par rapport à l'autre dans la séparatrice (l'un passe 3 fois dedans tandis que l'autre une seule fois ; c'est gênant car alors la différence de marche dépend de l'indice  $n(\lambda)$  du verre dispersif...).



2.b.1. On a vu à la première question que  $p_{\max} = 6$  pour la source 2, ce qui correspond grossièrement au nombre de franges observées pour chaque partie  $p > 0$  et  $p < 0$ . Par conséquent, on observera environ 12 franges avec la source 2 (au maximum).

2.b.2. Les franges sont localisées au niveau des miroirs. L'interfrange  $i$  est donc voisin de 2 mm sur le coin d'air, donc

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{2i} \simeq 28''$$

2.b.3. Qualitativement, le chemin optique est augmenté de  $2(n-1)e$  (attention au facteur 2 notamment) par la présence de la lame, soit environ 1,04 e.

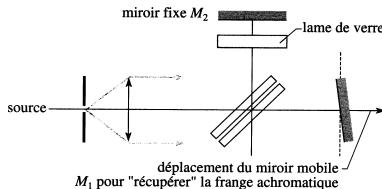
Lorsque  $|\delta| < \delta_{\max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ , on voit toujours des franges. Dans le cas contraire, ( $|\delta| > \delta_{\max}$ ), l'éclairage du miroir est uniforme (brouillage des franges). On en déduit les résultats suivants, sachant que  $\delta_{-10 \mu\text{m}} = 10,4 \mu\text{m}$ ,  $\delta_{-100 \mu\text{m}} = 104 \mu\text{m}$  et  $\delta_{-1000 \mu\text{m}} = 1040 \mu\text{m}$  :

- La source 4 donne toujours des franges visibles.
- Aucune frange n'est observable avec les autres sources pour  $e = 100 \mu\text{m}$  et  $e = 1000 \mu\text{m}$ .
- Aucune frange n'est observable pour les sources 1 et 2 pour  $e = 10 \mu\text{m}$  alors que des franges sont visibles avec les autres sources (car  $\delta < \delta_{\max}$ ).

2.c.1. La différence de marche est  $\delta = 2d - 2(n-1)e$  donc

$$d_1 = (n_0 - 1)e$$

Il faut éloigner le miroir mobile ( $M_1$ ) de la séparatrice pour compenser l'augmentation de différence de marche introduite dans l'autre bras à cause de la lame.



**2.c.2.** L'épaisseur de la lame est telle que la variation de l'ordre d'interférences est supérieure à 1. On ne connaît donc pas l'ordre au centre. En revanche, la frange la plus nette est repérable : celle-ci correspond à un ordre quasi-identique pour toutes les longueurs d'onde de la source, soit environ  $\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = 0$ . Cela correspond, par définition, à la **frange achromatique**.

$$\text{On a } p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} - \frac{2(n-1)e}{\lambda}$$

et la condition de stationnarité de l'ordre  $\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = 0$  donne

$$\frac{2d_2 - 2\left(n_0 - \frac{B}{\lambda_0^2} - 1\right)e}{\lambda_0^2} - \frac{6Be}{\lambda_0^4} = 0$$

soit

$$d_2 = \left(n_0 + \frac{2B}{\lambda_0^2} - 1\right)e$$

Il faut bien éloigner le miroir mobile ( $M_1$ ) de la séparatrice. Abordons maintenant l'**étape importante des applications numériques**. On a  $n_0 - 1 = 0,520$  et  $2B/\lambda_0^2 = 0,070$ , d'où

$$e = 85 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad d_2 - d_1 = 6 \mu\text{m}$$

$$\text{De plus, } \delta_0 = 2d_2 - 2(n_0 - 1)e = \frac{4B}{\lambda_0^2}e$$

$$\text{donc } \delta_0 = 12 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad p_0 = 21,6$$

La différence  $d_2 - d_1$  est considérable. Si on avait négligé la dispersion, avec  $d_1 = (n_0 - 1)e = 50 \mu\text{m}$ , on aurait obtenu  $e^* = 96 \mu\text{m}$ , c'est-à-dire un écart relatif important de 13% par rapport à la bonne valeur !

**2.c.3.** La source 4 est inutilisable car elle est monochromatique et ne permet donc pas de repérer l'ordre nul par la frange achromatique.

Il reste à analyser le cas des autres sources. Quand  $d = d_2$ ,  $p_0 \simeq 22$ , ce qui est une valeur élevée. Si cet ordre varie peu avec la longueur d'onde, une figure d'interférences est alors observable. On calcule la variation maximale de  $p$  au centre en considérant la largeur spectrale de la source :

$$\Delta p = p_{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} - p_{\lambda_0}$$

On applique le développement de Taylor, sachant que pour la frange achromatique, le terme d'ordre 1 est nul, donc

$$\Delta p \simeq \frac{\Delta\lambda^2}{8} \left( \frac{d^2 p}{d\lambda^2} \right)_{\lambda_0} = \frac{3Be}{2\lambda_0^3} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2$$

Pour que la mesure soit réalisable, il faut que

- $\Delta p < 1/2$  sinon l'éclairement est uniforme (décohérence temporelle) ;
- $\Delta p$  ne soit pas trop petit sinon il est difficile de repérer la frange la plus nette parmi les autres.

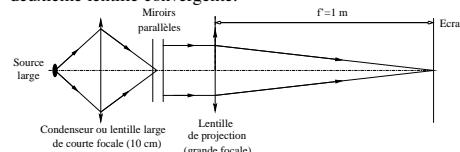
Avec la lame considérée, on a semi-numériquement (en unités SI)

$$\Delta p = 8,1 \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2$$

Pour la source 1, sachant que  $\Delta\lambda = 0,4 \mu\text{m}$  et  $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$ , on trouve  $\Delta p = 1,1$  et on en déduit qu'aucune mesure n'est possible (pas de frange visible).

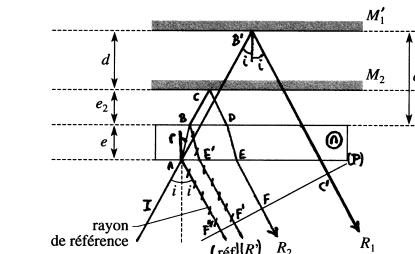
Pour la source 2, la **mesure est possible** car  $\Delta p = 0,3$ . Pour les sources 3 et 4, il n'y a pas de mesure possible car trop de franges sont simultanément nettes (on a respectivement  $\Delta p = 3,10^{-3}$  et  $\Delta p = 0$ ).

**3.a.** Une lentille convergente permet de faire l'image de la source au voisinage d'un miroir pour avoir un grand champ angulaire (et donc beaucoup d'anneaux visibles ensuite). Les miroirs doivent être parallèles. Les interférences étant localisées à l'infini, les franges d'égale inclinaison peuvent être observées sur un écran placé dans le plan focal image d'une deuxième lentille convergente.



La **teinte plate** correspond à la couleur obtenue pour le contact optique (épaisseur nulle). Il s'agit d'une teinte uniforme.

**3.b.** Attention, comme toujours en optique, **il faut faire un schéma clair et juste** ! Le plus simple ici est de représenter la situation avec les deux miroirs équivalents (les rayons barrés sont des rayons d'intensité négligeable).



Le faisceau a un angle d'incidence  $i$  au point A repéré par rapport à la normale à la lame. Ensuite, il y a deux trajets à envisager : celui du faisceau (AB'C') dans le bras du miroir ( $M_1$ ) de l'interféromètre de Michelson qui ne contient pas la lame et celui de l'autre bras (ABCDEF). La différence de marche à calculer est (en se basant sur le cas de retour inverse de la lumière et le plan équiphase ( $\mathcal{P}$ ) dans ce cas) :

$$\delta = (AB'C') - (ABCDEF)$$

Pour la calculer, on procède par faisceaux de référence successifs, ce qui permet d'utiliser la différence de marche géométrique au passage d'une lame d'épaisseur  $e'$  et d'indice  $n'$  :

$$\delta_{\text{lame, géom.}} = 2n' e' \cos r' \quad \text{noté} \quad \delta_{n', e', r'}$$

avec  $r'$  l'angle de réfraction interne. **On démontre ce résultat intermédiaire très important à la fin de cette question** (on ne prend pas en compte ici la différence de marche ondulatoire de  $\lambda_0/2$  introduite par une réflexion air-verre pour un faisceau).

$$\text{Ici, } \delta = [(AB'C') - (AF'')] - [(ABCDEF) - (ABE'F')] - [(ABE'F') - (AF'')]$$

$$\text{soit } \delta = \delta_{n'=1, e'=e_1, r'=i} - \delta_{n'=1, e'=e_2, r'=i} - \delta_{n'=n, e'=e, r'=r}$$

$$\text{d'où } \delta = 2(e + e_1) \cos i - 2e_2 \cos i - 2ne \cos r$$

donc

$$\delta = 2(e + d) \cos i - 2ne \cos r$$

Revenons à la **démonstration importante** de  $\delta_{n', e', r'}$  pour une lame :

Puisque ( $\mathcal{P}$ ) est, vis-à-vis du retour inverse de la lumière, un plan équiphase, on peut dire que

$$\delta_{\text{lame, géom.}} = (ABC) - (AH)$$

$$\delta_{\text{lame, géom.}} = n' ABC - AH$$

$$\text{Or } ABC = 2AB = 2 \frac{e'}{\cos r'}$$

$$\text{et } AH = AC \sin i = 2e' \tan r' \sin i$$

De plus, les lois de Descartes de la réfraction donnent

$$\sin i = n' \sin r'$$

$$\text{donc } \delta_{\text{lame, géom.}} = 2n' \frac{e'}{\cos r'} - 2e' n' \tan r' \sin r'$$

d'où le résultat très intéressant à connaître

$$\delta_{\text{lame, géom.}} = 2n' e' \cos r'$$

**3.c.** Pour de petits angles, on a

$$\delta = 2(e + d) \cos i - 2ne \cos r$$

$$\text{qui devient } \delta \simeq 2[d - (n-1)e] - i^2 [d + e(1 - 1/n)]$$

L'intensité lumineuse est donnée par la formule des interférences à deux ondes, soit

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right]$$

$$\text{soit } I = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \Phi_0 - \frac{2\pi i^2}{\lambda_0} (d + e(1 - 1/n)) \right) \right]$$

$$\text{avec } \Phi_0 = \frac{4\pi}{\lambda_0} (d - (n-1)e)$$

On observe à nouveau une teinte uniforme pour

$$d_3 = \left( \frac{1}{n_0} - 1 \right) e < 0$$

**Il faut rapprocher le miroir mobile ( $M_1$ ) de la séparatrice.**

**3.d.** Avec  $d_3 = -30 \mu\text{m}$ , on a

$$e = 88 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad \delta_0 = 2(d_3 - (n-1)e) = -151 \mu\text{m}$$

$$\text{d'où } p_0 = \delta_0 / \lambda_0 \simeq -275$$

Il s'agit pour  $\delta_0$  et  $p_0$  de valeurs énormes !

**3.e.** On remarque qu'avec les différentes sources, en un point, la différence maximale  $\Delta p_{\text{max}}$  entre les ordres d'interférences est

$$\Delta p_{\text{max}} = \Delta\lambda \left( \frac{dp}{d\lambda} \right)_{\lambda_0} = \frac{2d_3 - 2 \left( n_0 + \frac{2B}{\lambda_0^2} - 1 \right) e}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

$$\text{soit } \Delta p_{\text{max}} \simeq \frac{2e\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \times 0,93 \simeq -1,9 \frac{e}{\delta_{\text{max}}}$$

Les trois premières sources donnent respectivement  $\Delta p_{\text{max}}$  égal à 108, 54 et 5,4 donc l'expérience avec ces sources conduit toujours à un blanc d'ordre supérieur et il n'y a pas

de mesure possible utilisant la teinte plate car elle n'est pas observable !

Par contre, la source 4 est utilisable car  $\Delta p_{\text{max}} = 0$  (mais c'est une source idéale...).

*Bilan : pour la mesure en coin d'air, il vaut mieux utiliser la source 2 alors que pour la mesure en lame d'air à faces parallèles, la source 4 est obligatoire.*