Oral mathématiques ENS Ulm - Christophe Vauthier

11 juillet 2019

Exercice 1

Soient $a, r \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$, tels qu'il existe $M, \epsilon > 0$ vérifiant $\forall x \geqslant M, x - r(x) \geqslant \epsilon$.
Soit $y \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable et vérifiant $\forall x \geqslant 0$, $y'(x) = a(x)y(x - r(x))$. Montrer que $y(x)exp(-\int_0^x a(t)dt)$ converge vers une valeur finie en $+\infty$.

Exercice 2

Soit G un groupe. Y a-t-il équivalence entre :
i) G est fini
ii) Tous les sous-groupes de G sont finis

Déroulement

Après avoir remarqué que en fait y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, j'étudie la fonction $z(x) = y(x)exp(-\int_0^x a(t)dt)$. En dérivant z, on voit que supposer y croissante permet de montrer la décroissance de z. Je suppose donc y croissante (ce que l'examinateur encourage) et montre sans trop de difficulté que dans ce cas-là z est décroissante et minorée. On revient au cas général. Après une tentative infructeuse de ma part de travailler sur les extrema de y, et une discussion sur les propriétés de la fonction y (en particulier sur $\mathbb{R}^-$), l'examinateur me propose d'examiner le cas $a(x) = x$ et $r(x) = 1$. Il me demande si l'équation différentielle admet une solution croissante, puis si, étant donné $y_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^-, \mathbb{R})$, il existe une solution de l'équation qui coïncide avec y_0 sur $\mathbb{R}^-$. Je montre que c'est le cas en construisant cette solution par récurrence sur les segments $]-\infty; n]$. Dans le cas général, la récurrence ne marche plus, mais je parviens quand même prouver que la solution sur $\mathbb{R}$ existe en considérant le sup des x tels qu'une solution sur $]-\infty; x]$ existe qui coïncide avec y_0. Je propose ensuite d'étudier la monotonie de la fonction construite en fonction de celle de y_0. L'examinateur approuve mais me dit que comme il reste peu de temps, on va passer à l'exercice suivant.

Je parviens à finir ce dernier exercice en prenant en particulier comme contre-exemple à $ii) \Rightarrow i)$ le groupe $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{U}_{p^n}$ avec p un nombre premier, et dont tout sous-groupe strict est fini.