Mathématiques ULCR

Ulysse Mounoud

Exercice 1

Soient $a < b$ deux réels. Soit f définie sur $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ continue à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est-elle nécessairement bornée ?

Quelle condition plus forte imposer sur f pour pouvoir conclure ?

Avec cette condition, montrer que f admet un unique prolongement en une fonction continue sur $[a, b]$.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas f continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$.

Indication : Déterminer $Im(f)$. Etudier la périodicité.

Déroulé

Le premier exercice est assez facile mais je crois qu'on a passé plus de la moitié de l'oral dessus (les 45 minutes passent rapidement). J'ai pris comme contre-exemple $\frac{1}{x-c}$ avec c irrationnel dans l'intervalle. L'examinatrice voulait aussi que je donne l'exemple d'une fonction usuelle, qui convenait pour beaucoup d'intervalles (j'ai finalement compris qu'elle parlait de tan). La condition est la continuité uniforme. Pour la dernière question j'ai voulu utiliser une suite de Cauchy mais elle m'a dit que cela sortait du cadre du programme. L'argument était en effet superflu.

Pour le deuxième exercice, je ne savais pas quelle direction prendre. Elle m'a d'abord donné des indications un peu vagues (qu'est ce qu'on connait de la fonction exponentielle ?). Elle m'a ensuite encouragé à étudier l'image, puis la périodicité. On trouve que f est $2i\pi$ périodique. Puis je me suis intéressé à 0 et $f(0)$, mais c'était la fin de l'oral. Elle m'a demandé si j'avais une dernière idée mais je n'ai pas réussi à conclure. Elle m'a alors rapidement expliqué l'idée mais je n'ai pas tout saisi, il me semble qu'elle a évoqué les

$2in\pi$ et le fait que 0 n'est pas dans l'image. Sinon après coup il me semble que $f(y) = f(x) + 2i\pi$ implique $\exp(y) = \exp(x)$ et donc $y - x$ est un multiple de $2i\pi$ et $f(y) = f(x)$ d'où une contradiction.