Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n° 4 : Complexes

Problème 1 – Résolution des équations de degré 3 et 4

On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$.

Partie I – Équation de degré 3 (formules de Cardan)

Soit a, b et c des nombres complexes. On cherche à résoudre l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

1. Montrer qu'à l'aide d'un changement de variable du type $y = x - \alpha$, on peut se ramener à la résolution d'une équation $y^3 + py + q = 0$. Expliciter α, p et q en fonction de a, b et c.
2. On cherche les solutions de l'équation $y^3 + py + q = 0$ sous la forme $y_1 = u + v$, $y_2 = uj + vj^2$ et $y_3 = uj^2 + vj$. Montrer que pour que y_1, y_2 et y_3 soient solution de l'équation $y^3 + py + q = 0$, il faut et il suffit que u et v vérifient :
$$p = -3uv \qquad \text{et} \qquad q = -(u^3 + v^3).$$
3. Posons $U = u^3$ et $V = v^3$. Montrer que U et V les sont solutions de l'équation $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$.
Vu la symétrie en U et V, on peut prendre pour U n'importe laquelle des deux racines de ce polynôme. On fixe donc U et V.
4. Montrer que parmi les (au plus) 9 couples (u, v) obtenus par l'équation précédente, au plus 3 vérifient l'égalité $p = -3uv$, et que les (au plus) 3 couples obtenus donnent les mêmes racines y_1, y_2 et y_3, à permutation près.
5. Appliquer la méthode ci-dessus pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 + 3x^2 + 3(1 - 2j)x + 2(3j^2 - 1) = 0$. On exprimera les solutions à l'aide de j.
6. À l'aide du polynôme $(X - 1)(X^2 + X + 2)$, montrer que
$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}.$$
7. On suppose maintenant que p et q sont des réels. On note $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$.
   (a) Montrer que si $\Delta > 0$, l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet une unique solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées, qu'on exprimera à l'aide de j et de $\sqrt{\Delta}$.
   (b) Montrer que si $\Delta < 0$, l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet 3 racines réelles distinctes.

Remarquez que c'est dans le cas où le polynôme admet 3 racines distinctes qu'on ne peut pas résoudre l'équation avec des radicaux réels : la résolution passe par l'utilisation d'une racine de Δ qui est négatif; même si les racines sont réelles, il est nécessaire d'utiliser les nombres complexes pour les exprimer. La théorie de Galois permet de montrer qu'il est impossible d'exprimer en général les racines à l'aide de radicaux réels dans cette situation.

Partie II – Trisection de l'angle

La possibilité de la trisection de l'angle (couper l'angle en 3) par la règle et le compas a longtemps été une question ouverte. Le problème est lié à la résolution des équations du troisième degré. On dit qu'un réel x est constructible à la règle et au compas à partir d'une certaine donnée initiale, si on peut construire à la règle et au compas un segment dont la longueur est égale à x.

1. Montrer que la possibilité de trisecter de l'angle à la règle et au compas équivaut à la constructibilité de $\cos(\frac{\theta}{3})$ à partir de 1 et de $\cos(\theta)$.
2. Soit $a = \cos(\theta)$. Montrer que $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ est solution de l'équation $u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{a}{4} = 0$.

3. En admettant la remarque de la fin de la partie I, en déduire que $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de radicaux réels.

Ceci implique qu'en général, la trisection de l'angle à la règle et au compas est impossible. En effet, si c'était le cas, on pourrait construire $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ *à la règle et au compas ; les équations de cercle étant de degré* 2*, cela amèrait la possibilité d'exprimer* $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ *à l'aide de radicaux (carrés) réels.*

On voit ci-dessous comment on peut se servir des fonctions circulaires et leur réciproque pour résoudre les équations de degré 3 *du type* $x^3 + px + q = 0$ *dans le cas où* p *et* q *sont réels, et* $\Delta < 0$ *(ce qu'on suppose désormais)*

4. Montrer qu'avec les hypothèses données, on a $p < 0$.
5. Montrer qu'à l'aide d'un changement de variable $y = \lambda x$ (avec $\lambda > 0$), on peut se ramener une équation du type
$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{a}{4} = 0. \tag{1}$$
Expliciter λ et a.
6. Justifier que $|a| < 1$.
7. En déduire les racines de (1) à l'aide de la fonction cos, et de la fonction Arccos, réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$.

Partie III – Résolution des équations de degré 4 par la méthode de Ferrari

*On voit dans cette partie la méthode employée par Ferrari au XVI*e *siècle pour résoudre les équations du quatrième degré*
$$z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta = 0, \tag{2}$$
pour $(\alpha, \beta, ,\delta) \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer comment, par un changement de variable simple, se ramener à la résolution d'une équation
$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$
On exprimera a, b, et c en fonction de α, β, γ et δ.
2. Que dire du cas où $b = 0$? On suppose désormais que $b \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des réels m et n tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^2 - (mx + n)^2$$
si et seulement si y est solution réelle supérieure à a de l'équation
$$y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2 = 0.$$
Justifier qu'une telle solution existe toujours. Soit $y_0 \geqslant a$ une telle solution.
3. Exprimer m et n en fonction de a, b, c et y_0.
4. Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que (2) admette 4 solutions réelles, et donner ces solutions en fonction de y_0, m et n.