*Hugues Moyart*

# 1 Maths CR

## 1.1 Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n$.

On considère une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de degré au plus $n$ qui converge vers $P$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ \exists z_k \in B(z, \varepsilon),\ P_k(z_k) = 0$$

• Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P = n,\ P \text{ est scindé sur } \mathbb{R}\}$ est fermé.

## 1.2 Exercice 2

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Existe-t-il une norme $N$ qui vérifie la propriété suivante $(H)$ :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ N(AP) = N(PA)$$

• Soit $N$ une semi-norme (homogénéité et inégalité triangulaire). Montrer que $N$ est continue.

• Soit $N$ une semi-norme qui vérifie $(H)$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, $N(A) = 0$. *(Indication donnée par l'examinateur : commencer par le cas où la diagonale de $A$ est nulle)*