

## Corrigé du DM n° 18

### Exercice 1

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $i$  et  $j$  sont deux indices entre 1 et  $n$ , alors le cofacteur  $(\text{Com}(\lambda \cdot A))_{i,j}$  est  $(-1)^{i+j}$  multiplié par le déterminant de la sous-matrice obtenue à partir de la matrice  $A$  en supprimant  $L_i$  et  $C_j$ , puis en multipliant tous les coefficients par  $\lambda$ . Par multilinéarité du déterminant (ici de format  $(n-1) \times (n-1)$ ), un facteur  $\lambda^{n-1}$  vient se mettre en facteur du tout. On obtient ce qu'il faut.
2. (a) Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors en utilisant la formule sommatoire du déterminant pour  $f(\lambda)$ , on obtient que le déterminant  $f(\lambda)$  est une somme de produits de coefficients de la matrice  $\lambda \cdot I_n - A$ . Chaque coefficient est polynomial en la variable  $\lambda$ , donc  $f(\lambda)$  est bien un polynôme en  $\lambda$ .

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

- Si  $\sigma = \text{id}$ , alors :

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k} = \prod_{k=1}^n (\lambda - A_{k,k}),$$

est un polynôme unitaire de degré  $n$  en la variable  $\lambda$ .

- si  $\sigma \neq \text{id}$ , alors le produit  $\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}$  fait apparaître un produit de facteurs de la forme  $\lambda - A_{k,k}$  si  $k$  est un point fixe de  $\sigma$  et de la forme  $-A_{\sigma(k),k}$  si  $k$  n'est pas un point fixe de  $\sigma$ . Comme  $\sigma$  admet strictement moins de  $n$  points fixes, alors le produit  $\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}$  est polynomial de degré strictement inférieur à  $n$  en la variable  $\lambda$ .

On a bien un seul terme en  $\lambda^n$  après développement.

- (b) L'ensemble  $Z(f)$  des zéros de la fonction polynomiale  $f$  est fini. On peut approcher 0 par une suite d'éléments dans  $\mathbb{C} \setminus Z(f)$  et toute suite de complexes  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C} \setminus (Z(f)))^{\mathbb{N}}$  convergeant vers 0 répond à la question.
  - (c) La suite  $(B_k = A - \lambda_k \cdot I_n)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de matrices inversibles convergeant vers la matrice  $A$ .
3. (a) Il suffit de prendre le déterminant dans l'égalité :

$$(\text{Com}(A)) \times A^T = \det(A) \cdot I_n,$$

puis de diviser par la quantité non nulle  $\det(A)$ .

- (b) Oui. On trouve une suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices inversibles de limite  $A$ .

Les coefficients des comatrices  $\text{Com}(B_k)$  sont des formules polynomiales en les coefficients de  $B_k$ , donc sont des formules continues en ces coefficients :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Com}(B_k) = \text{Com}(A).$$

De même, l'application  $\det$  est une formule polynomiale donc continue en les coefficients des matrices. On peut passer à la limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  dans l'égalité :

$$\det(\text{Com}(B_k)) = (\det(B_k))^{n-1},$$

et on obtient la même formule pour la matrice  $A$ .

4. (a) On pose  $B = \text{Com}(A)$  de sorte que :

$$B \cdot A^T = \det(A) \cdot I_n.$$

Or,  $\det(A) \cdot I_n$  est une matrice inversible, donc  $B$  est inversible et :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^T.$$

De même, on peut écrire :

$$\text{Com}(B) \cdot B^T = \det(B) \cdot I_n,$$

de sorte que :

$$\text{Com}(B) = \det(B) \cdot (B^{-1})^T = \det(A)^{n-2} \cdot A.$$

- (b) La formule précédente est une formule continue en la matrice  $A$  (plutôt en les coefficients de la matrice  $A$ ) et elle est valable dans  $GL_n(\mathbb{C})$ , donc dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par densité.

## Exercice 2

1. Chaque reste  $R_n$  est bien défini par convergence de la série  $\sum_n u_n$ .

Ensuite, si  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$R_{n+1} - R_n = -u_n \leq 0.$$

Enfin, en posant  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $\lambda$  la somme de la série convergente, alors :

$$R_n = \lambda - S_{n-1},$$

quantité de limite nulle, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. • On trouve  $\varphi(0)$  dans  $\mathbb{N}$  tel que :

$$\forall \ell \geq \varphi(0), R_\ell \leq 1.$$

- Supposons construits des entiers  $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$  répondant aux conditions.
- Comme  $R_\ell$  tend vers 0 lorsque  $\ell$  tend vers  $+\infty$ , il existe un rang  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  à partir duquel tous les  $R_\ell$  sont inférieurs à  $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ .

On dispose par ce procédé de construction par récurrence une extractrice convenable.

3. On construit une suite  $v$  convenable comme suit.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$v_k = \min \{ p \in \mathbb{N} \mid k \leq \varphi(p) \}.$$

La suite  $v$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  donc est positive.

Si  $k$  est dans  $\mathbb{N}$ , en notant  $\mathcal{D}_k = \{ p \in \mathbb{N} \mid k \leq \varphi(p) \}$ , alors  $\mathcal{D}_{k+1} \subset \mathcal{D}_k$ , donc  $v_k \leq v_{k+1}$  : la suite  $v$  est croissante. De plus,  $v_{\varphi(N)} = N$ , donc la suite  $v$  n'est pas majorée.

Enfin, si  $N$  est dans  $\mathbb{N}$ , en posant la somme partielle :

$$S_N = \sum_{k=0}^N v_k \times u_k,$$

alors la quantité  $S_N$  est croissante en  $N$ .

De plus, si  $N \in \mathbb{N}^*$ , en partitionnant l'ensemble  $\llbracket 0, \varphi(N) \rrbracket$  en les ensembles :

$$I_0 = \llbracket 0, \varphi(0) \rrbracket$$

et pour  $r$  entre 1 et  $N$ ,

$$I_r = [\varphi(r-1) + 1, \varphi(r)]$$

alors

$$\begin{aligned} S_{\varphi(N)} &= \sum_{r=0}^N \sum_{i \in I_r} v_i \times u_i \\ &= \sum_{r=0}^N \sum_{i \in I_r} r \times u_i \\ &= \sum_{r=1}^N r \sum_{i \in I_r} u_i \\ &\leq \sum_{r=1}^N r R_{\varphi(r-1)+1} \\ &\leq \sum_{r=1}^N r R_{\varphi(r-1)} \\ &\leq \sum_{r=1}^N \frac{r}{2^{r-1}} \\ &\leq \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^{r-1}} = C \end{aligned}$$

car la série croissante  $\sum_r \frac{r}{2^{r-1}}$  est convergente car par exemple  $\frac{r}{2^{r-1}} = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ .

On en déduit que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_N \leq S_{\varphi(N)} \leq C,$$

et la suite des sommes partielles  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, donc convergente.

La suite  $v$  construite satisfait toutes les conditions.

4. Voici un exemple :

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Par comparaison série / intégrale, la série  $\sum_n u_n$  converge puisque :

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \left[ -\frac{1}{\ln t} \right]_2^n$$

est une quantité convergente et la fonction continue  $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$  est décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

Ensuite, dès que  $\alpha > 0$ , alors comme  $\ln^2 n = o(n^\alpha)$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n \times n = +\infty,$$

et donc à partir d'un certain rang,

$$n^\alpha \cdot u_n \geq \frac{1}{n}.$$

La série  $\sum_n \frac{1}{n}$  diverge vers  $+\infty$ , entraînant la divergence vers  $+\infty$  de  $\sum_n n^\alpha \cdot u_n$ .