MP*1

Étude géométrique des applications linéaires

1 Généralités

Nous supposerons connus la notion d'application linéaire, les opérations sur les applications linéaires et les règles qui les régissent (associativité, distributivité), le fait que l'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel soient des sous-espaces vectoriels, le critère d'injectivité d'une application linéaire par la nullité de son noyau.

Comment définir une application linéaire ?

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On peut définir une application linéaire de E dans F par deux méthodes.

- Par l'image d'une base de E. Précisément, si on se donne une base $(e_i)_{i\in I}$ de E et une famille $(f_i)_{i\in I}$, il existe une unique u de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad u(e_i) = f_i.$$

- Par la donnée de restrictions à des sous-espaces en somme directe égale à E. Précisément, si $E_1, \ldots, E_m$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \oplus_{i=1}^{m} E_i$ et si, pour i dans $\{1, \ldots, m\}$, u_i est un élément de $\mathcal{L}(E_i, F)$, il existe une unique u dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad u_{|E_i} = u_i.$$

Conséquences

Ces énoncés donnent une description simple et précise des applications linéaires entre deux espaces. Ils n'ont pas de contreparties immédiates pour les autres structures. Voici quelques conséquences.

- Avec les notations du premier énoncé, l'application linéaire u est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est libre (resp. engendre F, resp. est une base de F). Un corollaire de ce point est que, si E et F sont tous deux de dimension finie égale à n, u est injective si et seulement si elle est surjective, donc si et seulement si elle est bijective. Ce résultat peut également se déduire du théorème du rang.

On déduit de ces résultats que, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes à E sont ceux de dimension finie égale à n. Les espaces vectoriels sont parmi les rares structures pour lesquelles on dispose d'un théorème de classification à isomorphisme près très simple.

- Une des conséquences du premier énoncé est la notion de *base duale* d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie. Pour j dans $\{1, \ldots, n\}$, il existe une unique forme linéaire e_j^* sur E envoyant e_i sur 0 si $i \neq j$ et e_j sur 1. On vérifie immédiatement que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, dite base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

- Plus généralement, le premier énoncé rend immédiat le fait que, si E est de dimension finie n et F de dimension finie m, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ a pour dimension mn, une base étant donnée par la famille des « applications linéaires élémentaires » associées à ce couple de bases. On renvoie au cours de première année. L'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ associé à ce choix de bases permet de visualiser très agréablement ce résultat.

- Enfin, le deuxième énoncé contient un théorème de prolongement : si E_1 est un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et u un élément de $\mathcal{L}(E_1, F)$, alors u se prolonge en un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Qui plus est, si S est un supplémentaire de E_1 dans E, l'ensemble des prolongements est en bijection naturelle avec $\mathcal{L}(S, F)$.

Exercice 1. *Soient G_1 le groupe additif $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, H le sous-groupe de G_1 engendré par $\overline{2}_4$, G_2 le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un et un seul morphisme de H dans G_2 envoyant $\overline{2}_4$ sur $\overline{1}_2$ et que ce morphisme ne se prolonge pas en un morphisme de G_1 dans G_2.*

Exercice 2. *Décrire, si $(G, .)$ est un groupe, les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, .)$, de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans G, de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(G, .)$.*

Exercice 3. *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie[1], $E_1, \ldots, E_r$ des sous-espaces de E, Φ l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\prod_{i=1}^r \mathcal{L}(E_i, F)$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \qquad \Phi(f) = (f_{|E_1}, \ldots, f_{|E_r}).$$

À quelle condition Φ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4. *Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad f(AB) = f(BA).$$

Exercice 5. *On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, soit δ_i l'élément du dual de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \qquad \delta_i(P) = P^{(i)}(a_i).$$

Montrer que $(\delta_0, \ldots, \delta_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$.

L'exercice suivant est une très jolie application de l'algèbre linéaire à un énoncé géométrique dû à Dehn.

1. Cette hypothèse ne sert qu'à assurer l'existence de supplémentaire en restant dans le cadre du programme (et sans recourir à l'axiome du choix).

Exercice 6. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres réels. Soient aussi $c_0, \ldots, c_n, c'_0, \ldots, c'_n$ des nombres réels strictement positifs. Pour i dans $\{0, \ldots, n\}$, soit*

$$Q_i = [a_i, a_i + c_i] \times [b_i, b_i + c'_i].$$

On note V le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}$ engendré par $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$. Si f est dans V^*, si c et c' sont dans V, a b dans $\mathbb{R}$ et $Q = [a, a+c] \times [b, b+c]$, soit

$$\mu_f(Q) = f(c) f(c').$$

a) On suppose que Q_0 est réunion des $Q_i, 1 \leq i \leq n$ et que, si $1 \leq i < j \leq n$, Q_i et Q_j n'ont pas de point intérieur commun. Calculer $\mu_f(Q_0)$ en fonction des $\mu_f(Q_i), 1 \leq i \leq n$.

b) En déduire que, si l'hypothèse de a) est satisfaite et si $Q_1, \ldots, Q_n$ sont des carrés, alors c'_0/c_0 est rationnel.

L'exemple suivant est fondamental.

Exemple *Dimension de certains espaces d'applications linéaires*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et m. Soient E_1 un sous-espace de E de dimension n_1, F_1 un sous-espace de F de dimension m_1. Quelle est la dimension de

$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{L}(E, F),\ u(E_1) \subset F_1\} \text{ ?}$$

Pour répondre à cette question, on se donne un supplémentaire S de E_1 dans E. On note que l'application

$$\Psi\ : f \in \mathcal{L}(E, F) \longmapsto (u_{|E_1}, u_{|S}) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(S, F)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Par définition même, l'espace $\mathcal{W}$ est l'image réciproque de $\mathcal{L}(E_1, F_1) \times \mathcal{L}(S, F)$ par cet isomorphisme. Ainsi

$$\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{L}(E_1, F_1) \times \mathcal{L}(S, F)) = n_1 m_1 + (n - n_1) m = nm - n_1(m - m_1).$$

Voici une application. Soient E, F, G, H trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, a dans $\mathcal{L}(E, F)$, b dans $\mathcal{L}(G, H)$. Quelle est la dimension de

$$\mathcal{W}_{a,b} = \{u \in \mathcal{L}(F, G),\ b \circ u \circ a = 0\} \text{ ?}$$

On « transforme l'algèbre en géométrie » [2] en notant que, pour u dans $\mathcal{L}(F, G)$:

$$u \in \mathcal{W}_{a,b} \iff u(\mathrm{Im}(a)) \subset \mathrm{Ker}(b).$$

On est ramené à la situation précédente et conduit à la formule

$$\dim(\mathcal{W}_{a,b}) = \dim(F)\ \dim(G) - \dim(\mathrm{Im}(a))\ (\dim(G) - \dim(\mathrm{Ker}(b)).$$

2. Transformer l'algèbre en géométrie, c'est donner une signification géométrique à des relations algébriques entre applications linéaires. Nous en verrons de nombreux exemples en réduction des endomorphismes.

2 Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E,F)$. On appelle *rang de* u et on note $\mathrm{rg}(u)$ la dimension de l'image de u. Notons quelques propriétés immédiates.

- Pour u et v dans $\mathcal{L}(E,F)$, on a

$$\mathrm{Im}(u+v) = \{u(x)+v(x),\ x \in E\} \subset \{u(x)\ ;\ x \in E\} + \{v(x')\ ;\ x' \in E\},$$

soit

$$\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v),$$

d'où

$$\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

- Si u est dans $\mathcal{L}(E,F)$ et si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, le rang de u est la dimension du sous-espace de F engendré par $(u(e_1),\ldots,u(e_n))$. Il est donc de dimension majorée par $n = \dim(E)$. Cette majoration est une égalité si et seulement si u est injective.

Soient désormais G un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E,F)$ et v dans $\mathcal{L}(F,G)$. [3]

- Si u est dans $\mathcal{L}(E,F)$, v dans $\mathcal{L}(F,G)$ on a

$$\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u)).$$

Il résulte du point précédent que

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(u) \quad (1),$$

avec égalité si et seulement si la restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$ est injective.

- Par ailleurs,

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)\ , \quad \text{donc} \quad \mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(v) \quad (2).$$

Si u est surjective, l'inclusion et l'inégalité sont des égalités.

Le théorème suivant, connu comme « théorème du rang » est facile mais fondamental. Il a été utilisé à plusieurs reprises dans la première partie de ces rappels d'algèbre linéaire.

Théorème 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, u dans $\mathcal{L}(E,F)$, S un supplémentaire de Ker(u) dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur Im(u).*

En particulier, si E est de dimension finie :

$$\mathit{dim}(\mathit{Ker}(u)) + \mathit{dim}(\mathit{Im}(u)) = \mathit{dim}(E).$$

3. Les propriétés suivantes , qui expriment que « le rang diminue par composition », doivent être redémontrées en cas d'utilisation. Le seul résultat « officiel » est que le rang ne change pas en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme. La formule donnant le rang d'une composée donnée (exemple 1 après le théorème du rang) est de toute façon plus précise que (1) et (2).

Preuve. Puisque S et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe, la restriction de u à S est injective. Montrons qu'elle a pour image $\mathrm{Im}(u)$. Soient y dans $\mathrm{Im}(u)$, x dans E un antécédent de y par u : x s'écrit $s+t$ avec s dans S et t dans $\mathrm{Ker}(u)$. Alors s est un antécédent de y par u et $s \in S$.

Ceci établit le premier point. Le second s'en déduit puisqu'un isomorphisme préserve la dimension.

Exemples

1. *Rang d'une composée*

   Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E,F)$, v dans $\mathcal{L}(F,G)$. Le rang de $v \circ u$ est la dimension de $v(\mathrm{Im}(u))$. En appliquant le théorème du rang à la restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$, on obtient la formule utile :

   $$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)).$$ [4]

2. *L'application $u \longmapsto b \circ u \circ a$*
   Soient E, F, G, H trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, a dans $\mathcal{L}(E,F)$, b dans $\mathcal{L}(G,H)$. Soit $\Phi_{a,b}$ l'application de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,H)$ définie par

   $$\forall u \in \mathcal{L}(F,G), \qquad \Phi_{a,b}(u) = b \circ u \circ a.$$

   Nous avons calculé la dimension du noyau de $\Phi_{a,b}$ dans le paragraphe précédent. Le théorème du rang conduit alors à la jolie formule :

   $$\mathrm{rg}(\Phi_{a,b}) = \mathrm{rg}(a)\,\mathrm{rg}(b).$$

   D'autre part, on a clairement

   $$\mathrm{Im}(\Phi_{a,b}) \subset \{v \in \mathcal{L}(E,H),\ \mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(v),\ \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(b)\}.$$

   Il n'est pas difficile de vérifier que la dimension de l'espace de droite est $\mathrm{rg}(a)\,\mathrm{rg}(b)$, ce qui établit l'égalité

   $$\mathrm{Im}(\Phi_{a,b}) = \{v \in \mathcal{L}(E,H),\ \mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(v),\ \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(b)\}.$$

3. *Deux supplémentaires d'un même sous-espace sont isomorphes*
   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace de E, G_1 et G_2 deux supplémentaires de F dans E. Montrons, sans faire d'hypothèse de dimension que G_1 et G_2 sont isomorphes. Pour ce faire, soit p_1 le projecteur de E sur G_1 parallèlement à F. Le noyau F de p et G_2 sont supplémentaires. La première partie du théorème 1 assure que p induit un isomorphisme de G_2 sur l'image G_1 de p. [5]

Exercice 7. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe u dans $\mathcal{L}(E)$ de noyau F et d'image G.*

4. Savoir que cette formule existe, et savoir la retrouver très rapidement.

5. Cas particulier : si F a un supplémentaire de dimension finie d, tous les supplémentaires sont de dimension d, auquel cas on dit que F est de codimension d dans E. Cette propriété se formule de manière beaucoup plus agréable avec la notion d'espace quotient de l'exercice 11.

Exercice 8. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E,F)$, F_1 un sous-espace de F. Déterminer la dimension de $f^{(-1)}(F_1)$.*

Le résultat de l'exercice suivant est l'*inégalité de Frobenius*.

Exercice 9. *Soient E, F, G, H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E,F)$, v dans $\mathcal{L}(F,G)$, w dans $\mathcal{L}(G,H)$. Comparer les sommes*

$$rg(v \circ u) + rg(w \circ v) \quad \text{et} \quad rg(v) + rg(w \circ v \circ u).$$

Exercice 10. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que*

$$rg(u+v) = rg(u) + rg(v)$$

si et seulement si

$$Im(u) \cap Im(v) = \{0\} \quad \text{et} \quad Ker(u) + Ker(v) = E.$$

Exercice 11. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, k un entier naturel inférieur ou égal à n. Déterminer*

$$\min\{rg(v \circ u)\ ;\ (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ rg(u \circ v) = k\}.$$

Exercice 12. *Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. À quelle condition existe-t-il v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $u+v$ soit inversible et $u \circ v = 0$?*

Exercice 13. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E, on définit la relation $\sim$ sur E par*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in F.$$

Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E et que l'on peut munir l'ensemble quotient d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de sorte que la surjection canonique de E sur ce quotient soit linéaire. On note alors E/F cet espace (« quotient de E par F »). Montrer que tout supplémentaire de F dans E est isomorphe à E/F.

Exercice 14. *Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Déterminer les supplémentaires de $Ker(u)$ stables par u.*

Exercice 15. *Soient S une série entière formelle à coefficient dans un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, $e \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{K}_e[X]$, non tous deux nuls, tels que la valuation de $AS - B$ soit supérieur ou égale à $2e$.*

3 Équations linéaires

La notion d'application linéaire permet de formaliser la notion d'*équation linéaire*. On appelle ainsi toute équation

$$(1) \qquad u(x) = b$$

où u est une application linéaire du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel F et b un élément de F. L'inconnue x est un élément de E. Le cas des « systèmes linéaires » correspond au cas où u est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$, représentée par sa matrice canonique, b un vecteur de $\mathbb{K}^m$.

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire (1) peut être vide, auquel cas on dit que l'équation est *incompatible*. S'il est non vide, c'est un sous-espace affine de E dirigé par le noyau de u.

Exemples

1. *Équations différentielles linéaires d'ordre* 1
   Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. L'application Φ de $C^1(I,\mathbb{K})$ dans $C^0(I,\mathbb{K})$ qui à y associe $y' - ay$ est linéaire. Si A est une primitive de a, le noyau de Φ est la droite dirigée par $\exp(A)$. La méthode de variation de la constante montre que Φ est surjective et que les antécédents de b par Φ sont les

$$x \longmapsto CA(x) + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{dt}, \qquad C \in \mathbb{K}.$$

2. *Équation aux différences*
   Supposons $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. L'application Δ de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Son noyau est l'espace $\mathbb{K}_0[X]$ des polynômes constants (car si P est dans le noyau, $P - P(0)$ s'annule sur le sous-anneau premier de $\mathbb{K}$ qui est infini, donc P est nul). Comme Δ applique $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, le théorème du rang appliqué à la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$ montre que $\Delta(\mathbb{K}_n[X]) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. L'application Δ est surjective. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'équation

$$(1) \qquad \Delta(P) = Q$$

admet toujours une solution et, si P_0 est une solution particulière, l'ensemble des solutions de (1) est la droite affine $\{P_0 + c,\ c \in \mathbb{K}\}$. En particulier, (1) admet une unique solution qui s'annule en 0.

Bien entendu, ce fait peut être établi sans le théorème du rang. On peut par exemple noter que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\Delta(X^n)$ est de degré $n-1$ d'où il résulte que $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On peut aussi prosaïquement observer que l'équation

$$\Delta(P) = Q$$

où Q est dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un système triangulaire à pivots non nuls.

Notons enfin une des origines de l'étude de Δ : la démonstration, pour p dans $\mathbb{N}$, de l'existence d'un polynôme P de degré $p+1$ tel que

$$\Delta(P) = X^p,$$

d'où par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = P(n+1) - P(0),$$

formule qui généralise les cas classiques $p = 1, 2, 3$.

3. *Interpolation de Lagrange*
On peut formuler le problème de l'interpolation de Lagrange comme la recherche, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad P(a_i) = b_i.$$

C'est une équation linéaire : si Φ est l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}^n)$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad \Phi(P) = (P(a_1), \ldots, P(a_n))),$$

on souhaite résoudre

$$(1) \qquad \Phi(P) = (b_1, \ldots, b_n).$$

L'existence et l'unicité d'une solution de (1) dans $\mathbb{K}_n[X]$ peuvent se démontrer comme suit. Si P est dans $\mathrm{Ker}(\Phi) \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors P est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et s'annule en n points distincts, donc est nul. Comme $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{K}^n$ sont tous deux de dimension n, Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Cet argument ne permet pas d'expliciter l'antécédent P de $(b_1, \ldots, b_n)$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ en fonction des b_i. Pour ce faire, on cherche les antécédents par Φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On tombe immédiatement sur les polynômes L_k, $1 \leq k \leq n$ (cf second exemple polynomial, fin de **1.2**) et la linéarité de Φ^{-1} amène la formule de Lagrange

Enfin, le noyau de Φ est, puisque les a_i sont deux à deux distincts, l'espace des multiples de $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ dans $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des antécédents de $(b_1, \ldots, b_n)$ par Φ est donc $P + Q\mathbb{K}[X]$ où P est l'unique solution de (1) dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

4. *Relation de Bézout à bons degrés*
Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, de degrés respectifs m et n. Nous allons démontrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de $\mathbb{K}_{n-1}[X] \times \mathbb{K}_{m-1}[X]$ tel que

$$AP + BQ = 1.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}_{n-1}[X] \times \mathbb{K}_{m-1}[X]$ dans $\mathbb{K}_{m+n-1}[X]$ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \times \mathbb{K}_{m-1}[X], \qquad f(P, Q) = AP + BQ.$$

Dire que (P, Q) est dans le noyau de f, c'est dire que $AQ + BP = 0$. Le lemme de Gauss permet d'en déduire que B divise P, d'où (degrés) $P = 0$. De même, $Q = 0$. Par égalité des dimensions de la source et du but, f est un isomorphisme. En particulier, 1 a un unique antécédent.

L'exercice ci-après introduit l'*interpolation d'Hermite*, qui est une généralisation « avec dérivées » de celle de Lagrange.

Exercice 16. *Le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. On se donne n éléments distincts de $\mathbb{K}$ notés $a_1, \ldots, a_n$ et n éléments de $\mathbb{N}^*$ notés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On pose $N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on considère N éléments $(b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq \alpha_i - 1}}$ de $\mathbb{K}$. Démontrer qu'il existe un unique P dans $\mathbb{K}_{N-1}[X]$ tel que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall j \in \{0, \ldots, \alpha_i - 1\}, \qquad P^{(j)}(a_i) = b_{i,j}.$$

Exercice 17. *Soient $u_1, \ldots u_n$ des fonctions linéairement indépendantes continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $c_1, \ldots, c_n$ des réels. Montrer qu'il existe une unique combinaison linéaire v de $u_1, \ldots, u_n$ telle que :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \int_0^1 u_i v = c_i.$$

Exercice 18. *Démontrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta(B_n) = nX^{n-1}, \quad \int_0^1 B_n = 0.$$

L'exercice ci-après propose une version discrétisée du problème de Dirichlet relatif aux fonctions harmoniques.

Exercice 19. *Soit n un entier ≥ 3. On pose*

$$\Omega = \{1, \ldots, n\}^2 \setminus \{(1,1),\ (1,n),\ (n,1),\ (n,n)\}\ ; \partial\Omega = \Omega \setminus \{2, \ldots, n-1\}^2.$$

On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions f de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \Omega \backslash \partial\Omega, \quad f(i,j) = \frac{1}{4}\left(f(i-1,j) + f(i+1,j) + f(i,j-1) + f(i,j+1)\right).$$

a) Si f est dans $H(\Omega)$, montrer le principe du maximum :

$$\max\{f(i,j),\ (i,j) \in \Omega\} = \max\{f(i,j),\ (i,j) \in \partial\Omega\}.$$

b) Montrer que l'application de $H(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^{\partial\Omega}$ qui à f associe sa restriction à $\partial\Omega$ est un isomorphisme de $H(\Omega)$ sur $\mathbb{R}^{\partial\Omega}$. En déduire la dimension de $H(\Omega)$.

L'exercice ci-après établit l'existence et l'unicité de la sphère circonscrite à $n+1$ points affinement libres d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 20. *Soient E un espace euclidien de dimension n, $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ points de E affinement libres, c'est-à-dire n'appartenant à aucun sous-espace affine strict de E. Montrer qu'il existe un unique point x de E équidistant des $a_i, 0 \leq i \leq n$. On ramènera ce problème à une équation linéaire.*

Exercice 21. *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et i, j dans $\{1, \ldots, n\}$, soient*

$$L_i(M) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}, \qquad C_j(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}.$$

Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des M telles que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad L_i(M) = C_j(M).$$

Exercice 22. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$X + {}^tX = Tr(X)\, A.$$

4 Formes linéaires et hyperplans

Jusqu'ici, nous avons décrit les sous-espaces vectoriels par des paramétrisations linéaires (i.e. la donnée de bases ou de familles génératrices). Ils peuvent également être décrits comme intersections d'hyperplans, c'est-à-dire en termes d'équations linéaires.

Formes linéaires et hyperplans

Rappelons que l'on appelle forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires est un sous-espace de $\mathbb{K}^E$ appelé *espace dual* de E et noté E^*.

On appelle *hyperplan de E* tout sous-espace de E de la forme

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi), \qquad \varphi \in E^* \setminus \{0\}.$$

Si tel est le cas, on dit que φ *est une équation de H*.

Les hyperplans sont en fait les sous-espaces stricts de E maximaux pour l'inclusion, comme le montre le lemme suivant, géométriquement clair.

Lemme 1. *Soient H un hyperplan de E, a un élément de $E \setminus H$. Alors*

$$H \oplus \mathbb{K}a = E.$$

Preuve. Soit x dans E. Il suffit de montrer qu'existe un unique λ dans $\mathbb{K}$ tel que $x - \lambda a$ appartienne à H. Or, cette condition revient à $\lambda = -\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$.

On en déduit facilement le lemme suivant, qui exprime que deux équations d'un même hyperplan sont proportionnelles.

Lemme 2. *Soient φ et ψ deux éléments de E^*. Alors*

$$Ker(\varphi) \subset Ker(\psi)$$

si et seulement s'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Preuve. On peut supposer $\psi \neq 0$. On prend a dans $E \setminus \mathrm{Ker}(\psi)$ et on vérifie

$$\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\varphi.$$

Le cas de la dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, φ dans E^*. La décomposition de φ sur la base duale e^* s'écrit

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j^* \quad \text{avec} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ a_j = \varphi(e_j)$$

Autrement dit, si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$. Les formes linéaires sont donc les combinaisons des formes linéaires coordonnées sur la base e. On a $\varphi \neq 0$ si et seulement si les a_j ne sont pas tous nuls. Ainsi, les hyperplans de E sont les ensembles décrits par une équation linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0, \qquad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}.$$

Exemples

1. *Formules de calcul d'intégrales*

   Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels. En utilisant les polynômes de Lagrange, on vérifie que les formes linéaires

   $$\delta_{a_i} \ : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto P(a_i)$$

   sont indépendantes. Il y en a n, elles forment donc une base $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. En particulier, si S est un segment de $\mathbb{R}$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_S P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i).$$

   Cette remarque est à la base de calculs approchés d'intégrales : on remplace le polynôme P par une fonction continue f et on espère que la somme du second membre donne une bonne approximation de l'intégrale du premier membre. [6]

2. *Systèmes unisolvants pour une famille libre de fonctions*

   Soient X un ensemble, $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^X$. On vérifie immédiatement que, s'il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ dans X^n tel que la matrice

   $$(f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

   soit inversible, alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. La réciproque est vraie mais un peu moins triviale. En voici une preuve simple. Il s'agit de démontrer que le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes

   $$V(x) = {}^t(f_1(x), \ldots, f_n(x)), \qquad x \in X$$

   est égal à $\mathbb{K}^n$, ce qui donnera bien $x_1, \ldots, x_n$ dans X tels que les vecteurs $V(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. Si tel n'était pas le cas, tous les $V(x)$, $x \in X$ seraient contenus dans un hyperplan H. Une équation de cet hyperplan fournit une relation de dépendance linéaire entre les f_i, $1 \leq i \leq n$.

6. Nous reviendrons sur cette question dans le cours sur les espaces euclidiens.

Exercice 23. *On reprend l'exemple 1, avec* $S = [-1, 1]$, $n = 2$, $a_1 = -1, a_3 = 1$. *Montrer qu'il existe un unique choix de* a_2 *tel qu'existent 3 réels* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *vérifiant*

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X], \qquad \int_{-1}^{1} P = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P(a_i).$$

Exercice 24. *Soient* X *un ensemble non vide,* V *un sous-espace de dimension finie de l'espace* $B(X, \mathbb{R})$ *des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* V, f *un élément de* V. *Montrer que si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplemnt vers* f *sur* X, *alors la convergence est uniforme.*

Exercice 25. *Soient* X *un ensemble non vide,* n *un élément de* $\mathbb{N}^*$, V *un sous-espace de dimension* n *de* $\mathbb{K}^X$. *Une famille* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de points de* X *est un système unisolvant pour* V *si l'application linéaire*

$$\Phi \ : f \in V \longmapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

est un isomorphisme de V *sur* $\mathbb{K}^n$. *L'espace* V *est dit régulier si tout* n*-uplet de points distincts de* X *est un système unisolvant pour* V.

a) Reformuler le résultat relatif à l'interpolation de Lagrange et celui de l'exemple 2 à l'aide des notions précédentes. Comment généraliser la formule d'interpolation de Lagrange à un espace E *dont on connaît un système unisolvant ?*

b) Soit $S = [a, b]$ $(a < b)$ *un segment de* $\mathbb{R}$. *Pour* k *dans* $\{0, \ldots, n-1\}$, *on pose*

$$\forall x \in S, \qquad c_k(x) = \cos(kx).$$

Pour quels couples (a, b) *le sous-espace* V *de* $S^{\mathbb{R}}$ *engendré par* $(c_k)_{0\leq k\leq n-1}$ *est-il régulier ?*

c) Si V *est régulier, quelle sont les fonctions de* V *qui s'annulent en* n *points distincts ?*

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *que* X *est une partie d'intérieur non vide d'un espace réel de dimension* > 1. *Montrer qu'aucun sous-espace de dimension finie de* $C(X, \mathbb{R})$ *n'est régulier.*

Représentation d'un sous-espace comme intersection d'hyperplans

L'énoncé suivant, au programme de première année, décrit les sous-espaces d'un espace de dimension finie en termes d'équations linéaires scalaires.

Théorème 2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n.

a) Soient $H_1, \ldots, H_m$ *des hyperplans de* E,

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i.$$

Alors F *est de dimension supérieure ou égale à* $n - m$.

b) Soit G *un sous-espace de dimension* $n - m$. *Alors il existe* m *hyperplans de* E *dont* G *est l'intersection.*

Preuve. Pour le premier point, on note, si $1 \leq i \leq m$, φ_i une forme linéaire de noyau H_i. Alors F est le noyau de

$$\Phi \ : x \in E \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in \mathbb{K}^m.$$

Le théorème du rang montre que le noyau de Φ est de dimension au plus $n - m$ (avec égalité si et seulement si Φ est surjective). D'où le résultat.

Pour le second point, on prend une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à G. Si $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale, on a clairement

$$G = \bigcap_{j=m+1}^{n} \text{Ker } (e_j^*).$$

Introduisons un peu de vocabulaire. Si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, on appelle *codimension de F dans E* l'entier naturel $\dim(E) - \dim(F)$. Le théorème précédent montre que cette codimension est exactement le nombre d'équations scalaires nécessaires pour décrire F. Le résultat de l'exercice ci-après donne une formulation plus définitive : un sous-espace de E décrit comme intersection de noyaux de formes linéaires $\varphi_i, i \in I$ a pour codimension le rang de la famille de formes linéaires $(\varphi_i)_{i \in I}$.

Exercice 26. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une famille d'éléments de E^*, $F = \bigcap_{j=1}^{m} Ker(\varphi_j)$. Montrer que la codimension de F dans E est égale au rang de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.*

On pourra utiliser le théorème 2 pour résoudre l'exercice suivant.

Exercice 27. *a) Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, $E_1, \dots, E_m$ des sous-espaces de E tels que $\sum_{i=1}^{m} dim\ (E_i) > (m-1)\ dim\ (E)$.*

Montrer que $\bigcap_{i=1}^{m} E_i \neq \{0\}$.

b) Montrer que l'énoncé de a) est optimal.

Représentation des formes linéaires

Le dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est également un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, donc isomorphe à E. Il n'existe pas, cependant, d'isomorphisme « naturel » de E sur E^*.

Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien (donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on dispose de la construction suivante. Si a est un élément de E, l'application

$$\varphi_a \ : x \in E \longmapsto \langle a, x \rangle$$

est un élément de E^*. De plus, l'application

$$\varphi \ : a \in E \longmapsto \varphi_a \in E$$

est également linéaire, injective car 0 est le seul élément de E orthogonal à E. C'est donc un isomorphisme par égalité des dimensions. Ce résultat est le *théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien*. L'exercice ci-après indique un résultat voisin parfois utile [7].

Exercice 28. *Pour A et M dans $\mathcal{M}_n(K)$, soit $\theta_A(M) = Tr\ (AM)$. Montrer que $A \mapsto \theta_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.*

On peut en fait formuler un résultat général. Soit ψ un morphisme de E dans E^*. Pour x dans E, $\psi(x)$ est dans E^*. Il en résulte que

$$B\ : (x,y) \in E \longmapsto \psi(x)(y)$$

est une forme bilinéaire. Réciproquement si B est une forme bilinéaire définie sur $E \times E$, l'application

$$x \in E \longmapsto B(x,.)$$

est un morphisme de E dans E^*. Ce morphisme est injectif, donc bijectif, si et seulement si

$$\{x \in E\ ;\ \forall y \in E,\ B(x,y) = 0\} = \{0\}.$$

On dit dans ce cas que la forme B est *non dégénérée*. On obtient ainsi une généralisation commune à l'exercice 26 et au théorème de représentation euclidien.

L'exercice ci-après examine le fonctionnement de l'orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique [8] non dégénérée.

Exercice 29. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. Si V est un sous-espace vectoriel de E de dimension d, soit*

$$V^{\perp,B} = \{x \in E\ ;\ \forall y \in V,\ B(x,y) = 0\}.$$

a) Montrer que $V^{\perp,B}$ est un sous-espace de V de dimension $n-d$.

b) On suppose que $V \cap V^{\perp,B} = \{0\}$. Vérifier

$$V \oplus V^{\perp,B} = E.$$

c) On suppose $V \subset V^{\perp,B}$. Montrer que $d \leq n/2$.

d) On suppose que n est pair, que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que $E = \mathbb{C}^n$ et que, pour $x = t(x_1, \ldots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$,

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Indiquer un sous-espace V de E de dimension $n/2$ tel que $V \subset V^{\perp,B}$.

7. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut se ramener au cas euclidien en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. L'hypothèse de symétrie assure que la relation d'orthogonalité vis-à-vis de B est symétrique.

Exercice 30. *Soient X un ensemble fini de cardinal n, $E = \mathbb{K}^X$ et B la forme bilinéaire symétrique définie par*

$$\forall (u,v) \in E, \qquad B(u,v) = \sum_{x \in X} u(x)\, v(x).$$

a) Montrer que B n'est pas dégénérée.

Dans la suite, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ et on se propose de tirer des conséquences combinatoires de l'exercice précédent.

b) Soient $X_1, \dots, X_m$ des parties de X toutes de cardinal impair et dont les intersection deux à deux sont de cardinaux pairs. Montrer que $(1_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de E et conclure que $m \leq n$. Montrer que cette inégalité est optimale.

c) Soient $X_1, \dots, X_m$ des parties de X toutes de cardinal pair et dont les intersection deux à deux sont de cardinaux pairs, V le sous-espace de E engendré par les $1_{X_i}, 1 \leq i \leq m$. Comparer, pour l'inclusion, V et $V^{\perp, B}$. En déduire que $m \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer que cette inégalité est optimale.

d) Traiter les deux variantes manquantes du problème abordé en a) et b).

5 Factorisation des applications linéaires

Les résultats de ce paragraphe sont hors-programme.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Considérons la relation

$$(1) \qquad v \circ u = w, \qquad u \in \mathcal{L}(E,F), \;\; v \in \mathcal{L}(F,G), \;\; w \in \mathcal{L}(E,G).$$

Cette relation impose les inclusions

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w), \qquad \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v).$$

Nous allons démontrer deux « réciproques ».

Théorème 3. *(i) Soient u dans $\mathcal{L}(E,F)$ et w dans $\mathcal{L}(E,G)$. Il existe v dans $\mathcal{L}(F,G)$ vérifiant (1) si et seulement si $Ker(u) \subset Ker(w)$.*

(ii) Soient v dans $\mathcal{L}(F,G)$ et w dans $\mathcal{L}(E,G)$. Il existe u dans $\mathcal{L}(E,F)$ vérifiant (1) si et seulement si $Im(w) \subset Im(v)$.

Ces deux résultats sont souvent nommés « lemmes de factorisation des applications linéaires ». On remarquera que le premier (resp. le second) est trivial si u est un isomorphisme de E sur F (resp. si v est un isomorphisme de F sur G) : il suffit de poser $v = w \circ u^{-1}$ (resp. $u = v^{-1} \circ w$).

Preuve de (i). Supposons $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w)$. Cherchons v vérifiant (1). Cette condition ne met en jeu que la restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe v_1 dans $\mathcal{L}(\mathrm{Im}(u), G)$ tel que

$$(2) \qquad \forall x \in E, \qquad v_1(u(x)) = w(x)$$

puis de prolonger v_1 en un élément de $\mathcal{L}(F,G)$. Le résultat de détermination des applications linéaires nous apprend que ce prolongement peut être réalisé en fixant un supplémentaire S de $\mathrm{Im}(u)$ dans F, un élément quelconque v_2 de $\mathcal{L}(S, G)$: il existe un unique v dans $\mathcal{L}(F, G)$ coïncidant avec v_1 sur $\mathrm{Im}(u)$ et avec v_2 sur S.

Pour montrer que l'on peut définir de manière cohérente une application v_1 de $\mathrm{Im}(u)$ dans G vérifiant (2), on note que, si x et x' sont dans E, on a :

$$u(x) = u(x') \Rightarrow x' - x \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow x' - x \in \mathrm{Ker}(w) \Rightarrow w(x) = w(x').$$

L'hypothèse d'inclusion des noyaux a servi lors de la deuxième implication. Il reste à vérifier que v_1 ainsi définie est bien linéaire, ce qui est facile : si y et y' sont des éléments de F, λ un élément de $\mathbb{K}$, on écrit $y = u(x)$ et $y' = u(x')$ avec (x, x') dans E^2, puis :

$$v_1(y + \lambda y') = v_1(u(x + \lambda x')) = w(x + \lambda x') = w(x) + \lambda w(x') = v_1(y) + \lambda v_1(y'),$$

où on a utilisé successivement la linéarité de u, la définition de v_1, la linéarité de w.

Preuve de (ii). Supposons $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$. Cherchons u vérifiant (1). Au niveau purement ensembliste, les choses sont claires : si x est dans E, $w(x)$ est dans $\mathrm{Im}(w)$ donc dans $\mathrm{Im}(v)$ et on dispose donc d'un antécédent de $w(x)$ par v. Cependant, il y a trop de choix et on ne peut s'attendre, sans précision supplémentaire, à ce que cet antécédent varie linéairement avec x. On force l'unicité et la linéarité de la manière suivante. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$ dans F. On sait que v induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(v)$, que l'on note $v_{|S}^{|\mathrm{Im}(v)}$. Il suffit de poser

$$u = \left(v_{|S}^{|\mathrm{Im}(v)}\right)^{-1} \circ w$$

pour obtenir un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ vérifiant (1).[9]

Remarques

1. *Description des solutions de* (1) *en cas d'existence*
   Plaçons nous dans la situation du point 1 et notons v_0 un élément de $\mathcal{L}(F, G)$ vérifiant (1). Il est facile de décrire tous les v vérifiant (1) à l'aide de v_0. En effet (1) équivaut à :

   $$v \circ u = v_0 \circ u \Leftrightarrow (v - v_0) \circ u = 0 \Leftrightarrow \exists v' \in \mathcal{L}(F, G),\ v'(\mathrm{Im}(u)) = 0 \text{ et } v = v_0 + v'.$$

   En d'autres termes, l'ensemble des v solutions de (1) est le sous-espace affine de $\mathcal{L}(F, G)$ passant par v_0 et dirigé par le sous-espace de $\mathcal{L}(F, G)$ constitué des applications s'annulant sur l'image de u. Un argument analogue s'applique dans l'autre cas.
2. *Une extension*
   Soient maintenant $E, F_1, \ldots, F_r, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient w dans $\mathcal{L}(E, G)$ et, pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, u_i dans $\mathcal{L}(E, F_i)$. Supposons

   $$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(w).$$

9. Les hypothèses de finitude de la dimension ne servent qu'à assurer l'existence de supplémentaires. Le théorème subsiste donc en dimension infinie - modulo l'axiome du choix.

Que peut-on en déduire ? Le point *(i)* du théorème précédent traite le cas où $r = 1$. On s'y ramène en introduisant l'élément u de $\mathcal{L}(E, F_1 \times \cdots \times F_r)$ défini par

$$\forall x \in E, \qquad u(x) = (u_1(x), \ldots, u_r(x)).$$

L'hypothèse se traduit maintenant en $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w)$. Il existe donc v dans $\mathcal{L}(F_1 \times \cdots \times F_r, G)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad w(x) = v(u_1(x), \ldots, u_r(x)) = \sum_{i=1}^{r} v(0, \ldots, 0, u_i(x), 0 \ldots, 0).$$

Ceci se réécrit

$$w = \sum_{i=1}^{r} v_i \circ u_i$$

où, pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, on définit v_i est l'élément de $\mathcal{L}(F_i, G)$ défini par

$$\forall x \in F_i, \qquad v_i(x) = v(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0), \quad x \text{ étant à la place } i.$$

La réciproque est claire : s'il existe, pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, v_i dans $\mathcal{L}(F_i, G)$ tel que

$$w = \sum_{i=1}^{r} v_i \circ u_i,$$

alors

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(w).$$

Exercice 31. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, a et b dans $\mathcal{L}(E)$,*

$$\mathcal{M} = \{a \circ u + v \circ b, \ (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2\}.$$

a) Déterminer la dimension de $\mathcal{M}$.

b) Déterminer le maximum de l'ensemble des rangs des éléments de $\mathcal{M}$.

Exercice 32. *Généraliser le point (ii) du théorème 3 sur le modèle de l'exemple 2 ci-dessus.*

Exercice 33. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

a) Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (a, u) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{I}, \qquad a \circ u \in \mathcal{I}.$$

Soit $V = \bigcap_{u \in \mathcal{I}} Ker(u)$. Montrer que $\mathcal{I}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui s'annulent sur V.

b) Donner une description analogue des idéaux à droite de $\mathcal{L}(E)$.

c) Déterminer les idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$. Nous verrons plus loin une preuve plus simple de ce dernier résultat.

L'exercice suivant est le « théorème des faisceaux d'hyperplans ». Il généralise le fait « classique » [10] selon lequel, si une droite D de $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans affines distincts d'équations respectives

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \quad \text{et} \quad b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0,$$

alors les plans affines contenant D sont ceux dont les équations sont de la forme

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z + a_4) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z + b_4) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Exercice 34. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$ des formes linéaires sur E, $a_1, \dots, a_n, a$ des éléments de $\mathbb{K}$.*

On suppose que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in E, \varphi_i(x) = a_i\}$$

est non vide et contenu dans $\{x \in E,\ \varphi(x) = a\}$. Montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\varphi - a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\varphi_i - a_i\right).$$

Exercice 35. *Ici E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.*

a) Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, si V est un sous-espace de dimension p de E, montrer que :

$$\mathcal{A}_V = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f(V) \subset V\}$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$; en calculer la dimension. Pour quelles valeurs de p cette dimension est-elle maximale ?

Dans b), $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - r$.

b) Montrer qu'il existe une famille libre $(g_1, \dots, g_r)$ de $\mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall i \in \{1, \dots r\},\ Tr(f \circ g_i) = 0\}.$$

c) Si $a \in \mathcal{A}$, montrer, si $1 \leq i \leq r$, que : $a \circ g_i \in$ Vect $(g_1, \dots, g_r)$.

On suppose $r \leq n-1$, on choisit $x \in E$ tel que $g_1(x) \neq 0$, on pose :

$$W = \text{ Vect } (g_1(x), \dots, g_r(x)).$$

d) Montrer que la dimension p de W vérifie : $1 \leq p \leq n-1$.

e) Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_W$.

f) En déduire que p vaut 1 ou $n-1$, que $r = n-1$ et que $A = A_W$.

g) Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{L}(E)$? Quelles sont les sous-algèbres de cette dimension ?

10. Longtemps au programme du Lycée.

6 Endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ (plutôt que $\mathcal{L}(E,E)$). La composition en fait une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative si E est de dimension > 1. Le neutre est l'identité de E, notée Id_E, ou simplement Id. Le groupe des inversibles de cette $\mathbb{K}$-algèbre est l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des bijections linéaires de E sur E.

Inversibilité

Si E est de dimension finie, il suffit que l'élément u de $\mathcal{L}(E)$ soit inversible d'un côté pour être inversible. Tel n'est pas le cas si E est de dimension infinie. Pour le voir, il suffit de prendre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$ (par exemple $E = \mathbb{K}[X]$) et de prendre pour u et v les endomorphismes de E définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u(e_n) = e_{n+1}, \qquad v(e_n) = e_{n-1},$$

où l'on convient que e_{-1} est nul. Alors $v \circ u$ est l'identité de E, mais $u \circ v(e_1) = 0$. En fait, u est injectif non surjectif, v surjectif non injectif.

Exercice 36. *Caractériser les endomorphismes de E inversibles à droite, les endomorphismes de E inversibles à gauche. On admettra l'existence de bases.*

Sous-espaces stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace V de E est dit *stable par* u si $u(V) \subset V$. Dans ce cas, $u_{|V}^{|V}$ est un endomorphisme de V, dit induit de u sur V ;on le note parfois avec un léger abus de langage $u_{|V}$.

Le noyau, l'image de u sont stables par u. Nous rencontrerons dans la suite beaucoup d'autres exemples.

Condition pour que le noyau et l'image soient en somme directe (HP)

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. En général, le noyau et l'image de u ne sont pas supplémentaires dans E. On vérifie facilement les équivalences :

$$\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2);$$

$$\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) = E \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2).$$

Si E est de dimension finie, on déduit du théorème du rang que ces conditions sont équivalentes et donc équivalentes à

$$\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E.$$

Exercice 37. *Pour quels $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E existe-t-il u dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $Ker(u) = Im(u)$?*

Exercice 38. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.*

- Il existe v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $vu = uv$, $vuv = v$, $uvu = u$.

- Les endomorphismes u et u^2 ont même rang.

Montrer en outre que v est unique.

Noyaux et images itérés (HP)

Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a immédiatement

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{Ker}(u^k) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1}), \qquad \operatorname{Im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(u^k).$$

Supposons maintenant E de dimension finie. La suite d'entiers $\big(\dim(\operatorname{Ker}(u^k))\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par n. On dispose donc de p dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname{Ker}(u^p) = \operatorname{Ker}(u^{p+1}).$$

On montre facilement par récurrence sur n que

$$\forall n \geq p, \qquad \operatorname{Ker}(u^n) = \operatorname{Ker}(u^p).$$

Le théorème du rang permet d'en déduire :

$$\forall n \geq p, \qquad \operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^p).$$

Les suites de noyaux itérés et des images itérées de u stationnent donc à partir du même rang p. On a

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Ker}(u^n) = \operatorname{Ker}(u^p) = K, \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^p) = N.$$

On déduit de l'exemple précédent que

$$K \oplus N = E.$$

Chacun des deux sous-espaces K et N est stable par u. La restriction de u au premier (resp. second) sous-espace est nilpotente (d'indice p) (resp. inversible). Le premier sous-espace est le *nilespace* de u, le second le *coeur* de u.

Exercice 39. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de E, A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E, stables par u tels que $u_{|A}$ soit nilpotent et que $u|B$ appartienne à $GL(B)$. Montrer que A et B sont respectivement le nilespace et le coeur de u.*

Exercice 40. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$. En utilisant l'exercice 8, comparer $rg(u^k) - rg(u^{k+1})$ et $rg(u^{k+1}) - rg(u^{k+2})$.*

Indice de nilpotence

Les endomorphismes nilpotents jouent un rôle central en réduction des endomorphismes. La remarque suivante est souvent utile. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $r \geq 1$: u^r est nul, mais u^{r-1} ne l'est pas. On dispose donc de x dans $E \setminus \operatorname{Ker}(u^{r-1})$. Alors $(u^i(x))_{0\leq i\leq r-1}$ est une famille libre de E. En effet, soit $(\lambda_0, \dots \lambda_{r-1})$ dans $\mathbb{K}^r$ tel que

$$\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(x) = 0.$$

En appliquant à cette égalité successivement $u^{r-1}, u^{r-2}, \dots, u$, on obtient, dans l'ordre :

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \dots,\ \lambda_{r-1} = 0.$$

Le résultat est démontré. On en déduit les point suivants.

- Si E est de dimension finie n, l'indice de nilpotence de u est majoré par n (résultat figurant au programme de seconde année).

- Si E est de dimension finie n et si u est un nilpotent d'indice n, alors, si $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{n-1})$, la famille $(u^i(x))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de E (HP).

Exercice 41. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u dans $\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n. Montrer que les sous-espaces stables de E stables par u sont les $Ker(u^k)$ pour $0 \leq k \leq n$.*

Exercice 42. *Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q, E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On pose*

$$g_{n,q} = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, établir : $u^{g_{n,q}+n} = u^n$.

Projecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires dans E. Le *projecteur de E sur F parallèlement à G* est l'unique endomorphisme p de E tel que

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad ; \quad \forall x \in G, \quad p(x) = 0.$$ [11]

Un dessin justifie immédiatement la terminologie « projecteur ». On montre les égalités

$$F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p), \quad G = \mathrm{Ker}(p), \quad p^2 = p.$$

Inversement, on établit que si f est un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f$, alors

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}),$$

puis que f est le projecteur de E sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. On a ainsi transformé l'algèbre (la relation $f^2 = f$, qui caractérise les éléments idempotents de l'anneau $\mathcal{L}(E)$) en géométrie (f projecteur).

Exercice 43. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_n$ des nombres réels, I un intervalle contenant $[a_1, a_n]$, E l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$, V le sous-espace des f de E qui s'annulent sur chaque a_i. Montrer que P et V sont deux sous-espaces supplémentaires de E. Identifier le projecteur de E sur P parallèlement à V.*

11. Existence et unicité justifiées par le théorème de détermination des applications linéaires du paragraphe **1**.

Exercice 44. *Soient E l'espace des fonctions de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un nombre réel, V l'espace des f de E telles que*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right).$$

Montrer que P et V sont deux sous-espaces supplémentaires de E. Identifier le projecteur de E sur P parallèlement à V.

Exercice 45. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

a) Soit p dans $\mathcal{L}(E)$ un projecteur. Déterminer les droites stables par p.

b) Soient p et q dans $\mathcal{L}(E)$ deux projecteurs. On suppose que E est de dimension finie impaire. Montrer qu'il existe une droite de E stable par p et q.

Exercice 46. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$. Pour p et q dans $\mathcal{P}(E)$, on écrit $p \leq q$ si et seulement si $p \circ q = q \circ p = p$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les noyaux et images de p et q pour que $p \leq q$. Si $p \leq q$, montrer que $q-p$ est un projecteur dont on explicitera l'image et le noyau.Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.*

Exercice 47. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, p dans $\mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang $n-1$. Montrer que p est composé de deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ de E.*

L'exercice ci-après donne une formule pour la dimension de l'espace des points fixes communs aux éléments d'un sous-groupe fini du groupe linéaire, fondamentale en théorie des représentations.

Exercice 48. *Le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle*[12] *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer :*

$$dim\left(\bigcap_{g\in G} Ker(g-Id)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(g).$$

On montrera que $p = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} g$ est un projecteur d'image $\bigcap_{g\in G} Ker(g-Id)$.

Symétries

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires dans E. La *symétrie de E par rapport à F parallèlement à G* est l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad ; \quad \forall x \in G, \quad s(x) = -x.$$

Un dessin justifie immédiatement la terminologie « symétrie ». On montre les égalités

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}), \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}), \quad s^2 = \mathrm{Id}.$$ [13]

12. Ce qui permet de diviser par $|G|$.
13. En particulier, une symétrie est un automorphisme de E.

Inversement, on établit que, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}$, alors

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}),$$

puis que f est le projecteur de E par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. [14]

Caractérisation des homothéties

Le résultat suivant est simple mais classique et important (et cependant HP).

Théorème 4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout x, $(x, u(x))$ soit liée. Alors u est une homothétie.*

Autrement dit, un endomorphisme de E qui stabilise toute droite de E est une homothétie.

Preuve. Pour x dans $E \setminus \{0\}$, on a un unique λ_x dans $\mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Il reste à voir que λ_x est indépendant de x. Or, si x et y sont deux vecteurs linéairement indépendants de E, on a

$$\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Puisque (x, y) est libre, on peut identifier :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Si maintenant x et y sont deux vecteurs non nuls et colinéaires, on écrit $y = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$. Il vient

$$\lambda_y y = u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x,$$

ce qui amène bien $\lambda_x = \lambda_y$.

Exercice 49. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, m un élément de $\{1, \ldots, n-1\}$, u un endomorphisme de E stabilisant tous les sous-espaces de dimension m de E. Montrer que u est une homothétie.*

Commutation et stabilité

Le résultat immédiat suivant, au programme, est un exemple central de transformation d'algèbre en géométrie. Pour λ dans $\mathbb{K}$ et u dans $\mathcal{L}(E)$, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à λ :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}.$$

Théorème 5. *Soient u et v deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors, pour tout λ de $\mathbb{K}$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.* [15]

14. La clé est la décomposition ci-après, suggérée par un dessin

$$\forall x \in E, \qquad x = \frac{x + f(x)}{2} + \frac{x - f(x)}{2}.$$

En caractéristique 2, on ne peut pas diviser par 2 : il n'y a pas de milieu ! En fait, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, $f^2 = \mathrm{Id}$ équivaut à $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$.

15. En fait, la commutation de u et v impose que, pour tout P de $\mathbb{K}[X]$, le noyau et l'image de l'endomorphisme $P(u)$ sont stables par v.

Preuve. Appliquons la relation $u \circ v = v \circ u$ à un vecteur x de $E_\lambda(u)$. Il vient

$$u(v(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x), \quad \text{i.e.} \quad v(x) \in E_\lambda(u).$$

Centre de $\mathcal{L}(E)$

Terminons par un nouveau résultat classique, utile et HP.

Théorème 6. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, le centre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties de E.*

Preuve. Pour λ dans $\mathbb{K}$, soit h_λ l'homothétie de rapport λ de E :

$$\forall x \in E, \qquad h_\lambda(x) = \lambda x.$$

Si u appartient à $\mathcal{L}(E)$, on a

$$\forall x \in E, \qquad (u \circ h_\lambda)(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = (h_\lambda \circ u)(x).$$

Les homothéties appartiennent donc au centre de $\mathcal{L}(E)$. Soit réciproquement v un élément de ce centre. Pour montrer que v est une homothétie, on fixe une droite D de E. Soient H un supplémentaire de D dans E, p le projecteur de E sur H parallèlement à D. Comme v commute à p, v stabilise $\mathrm{Ker}(p) = D$ grâce au théorème 5. Le théorème 4 permet de conclure.

Exercice 50. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent aux endomorphismes de déterminant* 1 *sont les homothéties.*

Exercice 51. *Soient u et v deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.*

a) On suppose qu'il existe α et β dans $\mathbb{K}$ tels que $\alpha u + \beta v$ soit inversible. Déterminer $Ker(u) \cap Ker(v)$.

b) On suppose que $Ker(u) \cap Ker(v) = \{0\}$ et que u et v commutent. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{K}$ tels que $\alpha u + \beta v$ soit inversible.

c) Montrer que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de commutation dans la question b).