Exercices de calculs : corrections

Exercice 1

1. On pose $f(x)$ la quantité considérée dans l'exposant. Alors, au voisinage de 0 en la variable h :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{3+3h+h^2}{4+8h+15h^2+\circ(h^2)} \\ &= \frac{3}{4}-\frac{3}{4}h-\frac{17}{16}h^2+\circ(h^2) \end{aligned}$$

   L'expression proposée vaut alors :

$$\begin{aligned} \exp(f(1+h)) &= \exp\left(\frac{3}{4}\right)\exp\left(-\frac{3}{4}h-\frac{17}{16}h^2+\circ(h^2)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{4}h-\frac{25}{32}h^2\right)+\circ(h^2). \end{aligned}$$

2. On écrit successivement :

$$\begin{aligned} \ln(\cos(2x+x^3)) &= \ln\left(1-\frac{(2x+x^3)^2}{2}+\frac{(2x+x^3)^4}{24}+\circ(x^5)\right) \\ &= \ln\left(1-2x^2-\frac{4}{3}x^4+\circ(x^5)\right) \\ &= -2x^2-\frac{10}{3}x^4+\circ(x^5). \end{aligned}$$

3. On déroule les calculs :

$$\begin{aligned} \frac{xe^{-x}}{1+2x+x^3} &= x\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\left(1-2x+4x^2-9x^3\right)+\circ(x^4) \\ &= x-3x^2+\frac{13}{2}x^3-\frac{85}{6}x^4+\circ(x^4). \end{aligned}$$

4. On pose $x = \dfrac{\pi}{4} + h$ de sorte que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{1+\tan h}{1-\tan h}$$

et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = -\sqrt{2}\sin h.$$

On passe en exponentielle donc en notant $f(x)$ l'expression proposée, on en déduit :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) &= \exp\left(\frac{\ln(1+\tan h)-\ln(1-\tan h)}{-\sqrt{2}\sin h}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1+h+\frac{h^3}{3}+\circ(h^3)\right)-\ln\left(1-h-\frac{h^3}{3}+\circ(h^3)\right)}{-\sqrt{2}\left(h-\frac{h^3}{6}+\circ(h^3)\right)}\right)\\
&= \exp\left(\frac{2h+\frac{4}{3}h^3+\circ(h^3)}{-\sqrt{2}h}\left(1+\frac{h^2}{6}+\circ(h^2)\right)\right)\\
&= \exp(-\sqrt{2})\left(1-\frac{5\sqrt{2}}{6}h^2\right)+\circ(h^2).
\end{aligned}$$

5. On repasse en exponentielle en notant $g(x)$ l'expression proposée :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-1+\circ(x^5)\right)}{x^2+\circ(x^5)}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{12}+\circ(x^5)\right)}{x^2}(1+\circ(x^3))\right)\\
&= \exp\left(\frac{x^2}{12}+\circ(x^3)\right)\\
&= 1+\frac{x^2}{12}+\circ(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On s'occupe déjà de l'expression $f(x)$ présente entre parenthèses :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+\cos x}{2+e^x+\cos(x^2)} \\ &= \frac{2-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}{4+x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{x}{8}-\frac{5}{32}x^2+\circ(x^2) \end{aligned}$$

   Ensuite, on utilise la formule de Taylor-Young pour obtenir le $DL_2\left(\frac{1}{2}\right)$ de arccos. On obtient :

$$\arccos\left(\frac{1}{2}+u\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{2}{3\sqrt{3}}u^2+\circ(u^2).$$

   On effectue la substitution dans $f(x)$ et on obtient :

$$f(x)=\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4\sqrt{3}}+\frac{29}{96\sqrt{3}}x^2+\circ(x^2).$$

2. Lorsque h tend vers 0^+, la quantité $u(h)=\arccos(1-h)$ tend vers 0. On en déduit d'une part :

$$\cos(u(h))=1-h$$

   et d'autre part :

$$\cos(u(h))=1-\frac{u(h)^2}{2}+\circ(u(h)^2).$$

   Par conséquent,

$$\frac{u(h)^2}{2}(1+\circ(1))=h$$

   donc :

$$u(h)^2=2h(1+\circ(1)) \text{ et donc } u(h)=\sqrt{2h}(1+\circ(1))$$

   car $u(h)\geqslant 0$. On obtient ce qu'il faut.

3. On effectue le changement de variable $h=\dfrac{1}{x}$ et on factorise par le terme prépondérant au numérateur comme au dénominateur, ce terme prépondérant étant égal à x^3.

   En notant $f(x)$ l'expression proposée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(\frac{1+h+h^3}{1-h^2+2h^3}\right) \\ &= \arctan\big((1+h+\circ(h^2))(1+h^2+\circ(h^2))\big) \\ &= \arctan\big(1+h+h^2+\circ(h^2)\big). \end{aligned}$$

On peut utiliser la formule de Taylor-Young pour le $DL_2(1)$ de arctan. Ainsi,

$$\arctan(1+u) = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \circ(u^2).$$

Conclusion, l'expression proposée vaut :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 3

1. Pour $x > 0$ par exemple, on pose $h = \frac{1}{x}$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= (1+h)\sqrt{\frac{1+2h^2}{1+h+h^2}} \\
&= (1+h)\sqrt{1-h+2h^2+\circ(h^2)} \\
&= 1 + \frac{h}{2} + \frac{3}{8}h^2 + \circ(h^2).
\end{aligned}$$

Conclusion, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote et la courbe est au-dessus en $+\infty$.

2. On fait de même. Pour $x > 0$ avec la même notation pour h :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{1+h}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan h\right) \\
&= (1-h+h^2+\circ(h^2))\left(\frac{\pi}{2} - h + \circ(h^2)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)h + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)h^2 + \circ(h^2).
\end{aligned}$$

On en déduit au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x - \left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = \frac{\pi}{2}x - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ est asymptote et la courbe est au-dessus au voisinage de $+\infty$.

3. De la même façon, en utilisant au voisinage de $+\infty$ les croissances comparées :

$$x+1+e^{-x}=x(1+\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } \frac{\ln x}{x^2}=\circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \sqrt{1+h+3h^2}\exp\left(\frac{x(1+h+\circ(h))}{x^2(1+\circ(h))}\right) \\
&= \sqrt{1+h+3h^2}\exp\left(h+h^2+\circ(h^2)\right) \\
&= \left(1+\frac{h}{2}+\frac{11}{8}h^2\right)\left(1+h+\frac{3}{2}h^2\right)+\circ(h^2) \\
&= 1+\frac{3}{2}h+\frac{27}{8}h^2+\circ(h^2).
\end{aligned}$$

On en déduit au voisinage de $+\infty$:

$$f(x)=x+\frac{3}{2}+\frac{27}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y=x+\dfrac{3}{2}$ est asymptote et la courbe est au-dessus au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1. On utilise les formules suivantes :

$$\operatorname{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \text{ et } \operatorname{argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

On s'occupe séparément du numérateur et du dénominateur.
Pour le numérateur N_n, on écrit :

$$\begin{aligned}
N_n &= \ln\left(\frac{(n+\sqrt{n^2+1})(n+2+\sqrt{(n+2)^2+1})}{(n+1+\sqrt{(n+1)^2+1})^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\left(1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(2+\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)-2\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Pour le dénominateur D_n, on écrit :

$$
\begin{aligned}
D_n &= \ln\left(\frac{(n+\sqrt{n^2-1})(n+2+\sqrt{(n+2)^2-1})}{(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1})^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\left(2-\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(2+\frac{4}{n}-\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}\right)\\
&= \ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{4n^2}\right)-2\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\right)+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Conclusion, on a $N_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} D_n$, donc le quotient tend vers 1.

2. Pour tout entier $n>0$:

$$
\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)^{\ln(e^n+n+1)} &= \exp\left(n(1+\circ(1))\ln\left(\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right)\right)\\
&= \exp\left(n\left(\frac{2}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp(2)+\circ(1),\text{ de limite } e^2.
\end{aligned}
$$

3. On pose comme d'habitude la changement de variable $x=8+h$. L'expression proposée devient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{16+h}+\sqrt{25+h}-9}{\sqrt[3]{8+h}+\sqrt[3]{27+h}-5} &= \frac{4\left(1+\frac{h}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+5\left(1+\frac{h}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-9}{2\left(1+\frac{h}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(1+\frac{h}{27}\right)^{\frac{1}{3}}-5}\\
&= \frac{\frac{h}{8}+\frac{h}{10}+\circ(h)}{\frac{h}{12}+\frac{h}{27}+\circ(h)}\\
&= \frac{729}{390}+\circ(1)\text{ , de limite } \frac{729}{390}.
\end{aligned}
$$

Exercice 5

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = -2e^{-1} < 0$. Il existe un voisinage $\mathscr{V} =]1-\alpha, 1+\alpha[$ de 1 sur lequel la fonction continue f' ne prend que des valeurs strictement négatives. La fonction f induit donc une bijection strictement décroissante de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{W} =]f(1+\alpha), f(1-\alpha)[$ voisinage de $f(1)$.
De plus, la fonction f^{-1} est dérivable selon la formule :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$
La fonction f^{-1} est continue, et on montre facilement par récurrence sur l'entier k la propriété :
$$\mathscr{P}(k) : \text{« la fonction } f^{-1} \text{ est de classe } C^k \text{ sur le voisinage } \mathscr{W}. \text{ »}$$
Le $DL_2(e^{-2})$ de f^{-1} est de la forme :
$$f^{-1}(e^{-2}+h) = f^{-1}(e^{-2}) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \circ(h^3).$$
Or, $f^{-1}(e^{-2}) = 1$, donc :
$$f^{-1}(e^{-2}+h) = 1 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \circ(h^3).$$
On utilise le $DL_3(1)$ de la fonction f. On trouve facilement :
$$f(1+u) = e^{-2}(1 - u + \frac{2}{3}u^3) + \circ(u^3).$$
On utilise l'unicité du développement limité dans l'expression :
$$f^{-1}(f(1+u)) = 1+u,$$
ce qui donne par substitution :
$$1 + u = 1 - a_1 e^{-2} u + a_2 e^{-4} u^2 + \left(\frac{2}{3} a_1 e^{-2} - a_3 e^{-6}\right) u^3 + \circ(u^3).$$
On obtient par identification des termes en puissances de u :
$$a_1 = -e^2 \ ; \ a_2 = 0 \text{ et } a_3 = -\frac{2}{3}e^6.$$
Le développement demandé est :
$$f^{-1}(e^{-2}+h) = 1 - e^2 h - \frac{2}{3}e^6 h^3 + \circ(h^3).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $\mathscr{E}_n$:

$$\frac{1}{\text{sh}x} + \text{ch}x = n \text{ , d'inconnue } x \in]0, +\infty[.$$

(a) Sous les hypothèses, il existe deux nombres $0 < \alpha < \beta$ tels que :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \ \ f'(x) \leqslant -1.$$

et :

$$\forall x \in]\beta, +\infty[, \ \ f'(x) \geqslant 1.$$

La fonction f est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$, donc la fonction f y est bornée et atteint ses bornes. on trouve uns constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \ \ |f(x)| \leqslant C.$$

Soit maintenant un entier $n > C$.
L'équation $f(x) = n$ n'admet aucune solution sur $[\alpha, \beta]$.
Ensuite, la fonction f est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique pour avoir l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = n$ sur cet intervalle. Il y a une seule solution a_n sur $]0, \alpha]$.
De même, la fonction f est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$ et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique pour avoir l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = n$ sur cet intervalle. Il y a une seule solution sur $[\beta, +\infty[$.
Il y a donc globalement deux solutions dès que l'entier n est strictement supérieur à C.

(b) Soit $n \geqslant n_0$. Comme $f(a_n) = n < n + 1 < \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique à la fonction f sur l'intervalle $]0, a_n]$: la solution a_{n+1} est strictement inférieure à a_n : la suite (a_n) est décroissante. La suite est minorée donc converge et comme $f(a_n)$ tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$, il est impossible que la suite a converge vers une limite ℓ strictement positive, auquel cas $f(u_n)$ tendrait vers $f(\ell)$ par continuité de f.
De la même façon, la suite (b_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

(c) Les hypothèses s'appliquent à la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\text{sh}x} + \text{ch}x$: la fonction est C^1 sur $]0, +\infty[$, les limites de f en 0^+ et $+\infty$ valent $+\infty$ et les limites de $f'(x)$ en 0^+ et $+\infty$ valent respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

(d) On utilise $\dfrac{1}{\mathrm{sh} a_n} + \mathrm{ch}(a_n) = n$, donc :

$$a_n = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n - \mathrm{ch} a_n}\right).$$

On va utiliser le $DL(0)$ de argsh que l'on peut calculer grâce à la dérivée :

$$\mathrm{argsh}' : x \longmapsto (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

puis intégrer entre 0 et x, pour x au voisinage de 0. On obtient :

$$\mathrm{argsh} h = h - \frac{h^3}{6} + \frac{3}{40}h^5 + \circ(h^5).$$

• premier terme :

$$a_n = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n+\circ(n)}\right) = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

• deuxième terme :

$$a_n = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n-1+\circ(1)}\right) = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

• troisième terme :

$$\begin{aligned} a_n = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n-1+\circ\left(\frac{1}{n}\right)}\right) &= \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

(e) Pour le terme b_n, on utilise :

$$b_n = \mathrm{argch}\left(n - \frac{1}{\mathrm{sh} b_n}\right).$$

• deux premiers termes :

$$\begin{aligned} b_n = \mathrm{argch}(n+\circ(1)) &= \ln(n+\circ(1) + \sqrt{(n+\circ(1))^2 - 1}) \\ &= \ln n + \ln(2+\circ(1)) \\ &= \ln n + \ln 2 + \circ(1). \end{aligned}$$

• troisième terme : on peut utiliser $\mathrm{sh}(b_n) = \dfrac{1}{2}e^{b_n}(1+\circ(1))$, pour écrire :

$$\begin{aligned}
b_n &= \operatorname{argch}\left(n - \frac{1}{n+\circ(n)}\right) \\
&= \ln\left(n - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{\left(n - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 - 1}\right) \\
&= \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\
&= \ln n + \ln 2 - \frac{5}{4n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 6

Montrer que les suites suivantes sont convergentes vers 0 et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$:

1. On montre facilement que tous les termes sont entre 0 et 1 ; la suite u est décroissante de limite ℓ vérifiant $\ell = \dfrac{\ell}{1+\sin \ell}$, imposante $\ell = 0$.
   Ensuite, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ de telle sorte que $\alpha > 0$ et la suite v converge vers une limite non nulle.
   On effectue un développement limité.
   On trouve $v_n = \dfrac{1}{u_n^\alpha}(\alpha u_n + \circ(u_n))$. On prend $\alpha = 1$ et la suite v converge vers $\ell = 1$.
   On termine par les moyennes de Cesaro. On obtient en utilisant une somme télescopique :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
2. Là encore, tous les termes sont strictement positifs, la suite est décroissante de limite ℓ telle que $\ell = \ell e^{-\ell^2}$ imposant $\ell = 0$.
   On pose de même la suite v comme ci-dessus.
   Après un DL, on obtient :
   $$v_n = \frac{1}{u_n^\alpha}(\alpha u_n^2 + \circ(u_n^2)).$$

On prend $\alpha = 2$ et donc la suite v converge vers $\ell = 2$. Par les moyennes de Cesaro, on aboutit à :

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

3. Tous les termes sont strictement positifs, et la suite u est décroissante de limite nulle.

   Avec les mêmes notations, on obtient :

   $$v_n = \frac{1}{u_n^\alpha}\left(\frac{\alpha}{3}u_n^2 + \circ(u_n^2)\right).$$

   On prend $\alpha = 2$ et la suite v converge vers $\ell = \dfrac{2}{3}$.

   On obtient par les moyennes de Cesaro :

   $$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$