MP*1

Matrices

1 Calcul matriciel

La notion de matrice est centrale en algèbre linéaire. Il faut souligner que, s'il est essentiel de relier matrices et applications linéaires, les matrices ont bien d'autres interprétations (matrice de présentation d'un système de vecteur dans une base, matrice d'une forme bilinéaire dans une base, matrice de Gram d'un système de vecteurs, matrice d'adjacence d'un graphe, matrice laplacienne d'un graphe, matrice de transition d'une chaîne de Markov...).

Il est donc pertinent de commencer par développer le calcul matriciel pour lui-même. Les opérations usuelles (combinaisons linéaires, produit), les règles qui les régissent (distributivité, associativité) et les structures correspondantes (structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, structure de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) ont été vues en première année. Rappelons simplement la *base canonique* de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: c'est la base $(E_{i,j}^{m,n})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ définie par

$$E_{i,j}^{m,n} = (1_{(k,\ell)=(i,j)})_{\substack{1\leq k\leq m\\ 1\leq \ell\leq n}}.$$

On a la formule

$$E_{i,j}^{m,n}\ E_{k,\ell}^{n,p} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}^{m,p}.$$

Si le contexte rend inutile de préciser m et n, on note simplement $E_{i,j}$.

Les opérations usuelles font de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative si $n\geq 2$.

Exercice 1. *a) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute à toutes les matrices diagonales si et seulement si elle est elle-même diagonale.*

b) Montrer que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est constitué des matrices scalaires $\lambda I_n,\ \lambda\in\mathbb{K}$.

Exercice 2. *On suppose $\mathbb{K}$ fini de cardinal q.*

a) Calculer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$.

b) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la loi uniforme. Déterminer la probabilité $p_n(q)$ de l'événement « M est inversible ». Montrer que la suite $(p_n(q))_{n\geq 1}$ a une limite $p(q)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $p(q)$ lorsque q tend vers $+\infty$.

Exercice 3. *Soit*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{C}^2 \right\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais pas un sous-espace vectoriel complexe. Montrer que H est également une sous-algèbre de

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et un anneau à division[1]*. Ses éléments sont les quaternions.*

Exercice 4. *Montrer que, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes est l'hyperplan des matrices de trace nulle. On pourra remarquer que, si $1 \leq i < j \leq n$, $E_{i,j}, E_{j,i}$ et $E_{i,i} - E_{j,j} - E_{i,j} + E_{j,i}$ sont nilpotentes.*

Exercice 5. *On suppose $n \geq 2$.*

a) Déterminer A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0,\ BA \neq 0$.

b) On prend pour $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad N(AB) = N(BA)\ ?$$

c) On prend $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables quelconques aient même image par N ?

Exercice 6. *On suppose que $\mathbb{K}$ possède au moins trois éléments. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme de deux matrices triangulaires inversibles.*

Exemple *Matrice d'adjacence de graphes*

Soit (V,E) un graphe fini (non orienté). On définit la *matrice d'adjacence* de (V,E) comme la matrice $M = (M_{v,v'})_{(v,v') \in V^2}$ telle que

$$\forall (v,v') \in V^2, \qquad M_{v,v'} = 1_{\{v,v'\} \in E}.$$

On vérifie que le nombre de chemins de longueur n tracés sur le graphe (V,E) reliant le sommet v au sommet v' est le coefficient d'indice (v,v') de M^n.

Exercice 7. *On considère le graphe complet à p sommets :*

$$V = \{1, \ldots, p\}\ ;\ E = \{\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq p\}.$$

Si i et j sont dans V, calculer le nombre de chemins de longueur n reliant le sommet i au sommet j.

Une technique importante de calcul matriciel est celle du *produit par blocs*. On se contente de donner quelques exemples.

Exemples

1. *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*

   Soit

   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}).$$

   Cherchons si M est inversible et, le cas échéant l'inverse de M. Si

   $$N = \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & T \end{pmatrix} \qquad \text{avec } X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \text{ et } T \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}),$$

1. C'est-à-dire que tout élément non nul de H est inversible. Ancienne terminologie : corps non commutatif.

on a

$$MN = \begin{pmatrix} AX & AZ+BT \\ CY & CT \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que M est inversible si et seulement si A et C le sont et que, dans ce cas :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. *Produit tensoriel de matrices carrées*

Soient $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit le *produit tensoriel de A par B* :

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \hline A_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline A_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}).$$

Le théorème du produit par blocs rend immédiate la vérification de la formule suivante :

$$\forall (A,A') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall (B,B') \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2, \quad (A\otimes B)(A'\otimes B') = AA'\otimes BB'.$$

On en déduit en particulier que, si A et B sont inversibles, il en est de même de $A \otimes B$, avec

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

3. *Multiplication rapide des matrices* [2]

Pour calculer le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il faut effectuer a priori n^3 multiplications et $n^3 - n^2$ additions. Les multiplications sont beaucoup plus coûteuses. En 1968, Strassen a découvert un procédé plus économique, fondé sur le calcul par blocs. Pour n pair, on écrit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

où les blocs sont carrés de taille $n/2$. L'astuce est alors de remarquer que

$$MN = \begin{pmatrix} S_1+S_4-S_5+S_7 & S_3+S_5 \\ S_2+S_4 & S_1-S_2+S_3+S_6 \end{pmatrix}, \quad \text{où}$$

$$S_1 = (A+D)(E+H),\ S_2 = (C+D)E,\ S_3 = A(F-H),\ S_4 = D(G-E),$$
$$S_5 = (A+B)H,\ S_6 = (C-A)(E+F),\ S_7 = (B-D)(G+H).$$

On a ainsi réduit le nombre de multiplications de matrices de $\mathcal{M}_{n/2}(\mathbb{K})$ de 8 à 7. On en déduit sans difficulté que, si $T(n)$ désigne le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour calculer le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'algorithme précédent :

$$T(n) = O(n^\alpha), \qquad \alpha = \frac{\ln(7)}{\ln(2)}.$$ [3]

2. Lecture tout à fait facultative.

3. On conjecture que l'on peut trouver des algorithmes en $O(n^\beta)$ pour tout $\beta > 2$. Comme il s'agit de calculer n^2 réels, cette conjecture est aussi optimiste que possible.

L'exercice suivant présente la « factorisation LU » des matrices carrées, utile en analyse numérique matricielle.

Exercice 8. *a) Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.*

- Il existe une matrice triangulaire supérieure $U = (U_{i,j})_{\leq i,j \leq n}$, une matrice triangulaire inférieure $L = (L_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que $M = LU$ et

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad L_{i,i} = 1, \quad U_{i,i} \neq 0.$$

- Pour tout m de $\{1, \ldots, n\}$, la matrice $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ est inversible.[4]

b) Si $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que l'ensemble des matrices vérifiant la condition de la question a) est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

Exercice 9. *a) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on ait $a_i + a_j \neq 0$. Inverser la matrice $H = \left(\dfrac{1}{a_i + a_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.*

On résoudra le système $Hx = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ en introduisant une fraction rationnelle adéquate.

b) Expliciter le cas de la matrice de Hilbert $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{\leq i,j \leq n}$.

Exercice 10. *Quel est le nombre minimal de coefficients non nuls d'une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{R}^{+*}$?*

Exercice 11. *Si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k dans $\mathbb{N}^*$, on note $C_k(A,B)$ l'ensemble des produits de k matrices appartenant toutes à $\{A, B\}$.*

a) Montrer :

$$|C_k(A,B)| \leq 2^k.$$

b) Si $AB = BA$, montrer :

$$|C_k(A,B)| \leq k + 1.$$

c) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'inégalité de a) est une égalité.

Exercice 12. *Démontrer que l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant la sous-algèbre $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est fini.*

Exercice 13. *Existe-t-il A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad {}^tM = AMB \ ?$$

---

4. La factorisation LU conduit à une technique de résolution des systèmes linéaires : si M s'écrit LU (ce qui, d'après la question suivante, est génériquement le cas), le système $Mx = y$ se ramène à la résolution successive des systèmes $Lz = y$, $Ux = z$.

2 Applications linéaires et matrices

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_m)$ des bases respectivement de E et F, on peut associer à l'élément u de $\mathcal{L}(E, F)$ sa matrice dans le couple de bases (e, f) : c'est la matrice

$$M = \mathrm{Mat}_{e,f}(u) = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

définie par

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} M_{i,j} f_i.$$

En d'autres termes, les coefficients de la j-ième colonne de M sont les coordonnées de $u(e_j)$ sur la base f. L'application

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \longmapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ce qui permet de retrouver la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemples

1. *Matrice de Vandermonde*
   Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, φ l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ qui à P associe $(P(a_0), \ldots, P(a_n))$. La matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ est la matrice de Vandermonde

   $$V(a_0, \ldots, a_n) = \left(a_i^j\right)_{0\leq i,j\leq n}.$$ [5]

2. *Matrice de Pascal*
   Soient n dans $\mathbb{N}$, ψ l'application qui à P dans $\mathbb{K}_n[X]$ associe $P(X+1)$. La matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est la matrice de Pascal

   $$\left(\binom{j}{i}\right)_{0\leq i,j\leq n},$$

   avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$.

3. *Multiplication à gauche et à droite par une matrice fixée*
   Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

   $$g_A \ : M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longmapsto AM \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

   est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On a, si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$:

   $$g_A(E_{i,j}^{n,m}) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} E_{k,j}^{n,m}.$$

5. D'où une explication conceptuelle du fait que l'interpolation de Lagrange et l'inversibilité d'une matrice de Vandermonde sont le même phénomène.

Ordonnant les matrices élémentaires dans l'ordre

$$E_{1,1}^{n,m}, E_{2,1}^{n,m}, \ldots, E_{n,1}^{n,m}, E_{1,2}^{n,m}, E_{2,2}^{n,m}, \ldots, E_{n,2}^{n,m}, \ldots, E_{1,p}^{n,m}, \ldots, E_{n,m}^{n,m},$$

on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dans laquelle la matrice de g_A est diagonale par blocs, les m blocs diagonaux de taille n étant égaux à A.

4. *Interprétation de la matrice transposée*
Soient E (resp. F) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n (resp. m), e (resp f) une base de E (resp. F), e^* (resp. f^*) sa duale. Soient u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, ${}^t u$ l'application linéaire transposée, c'est-à-dire l'application de F^* dans E^* définie par

$$\forall \varphi \in F^*, \qquad {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u.$$

Si A est la matrice de u dans (e, f), alors la matrice de ${}^t u$ dans (f^*, e^*) est ${}^t A$. En effet, avec des notations évidentes, on a pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

$${}^t u(f_i^*)(e_j) = f_i^* \circ u(e_j) = f_i^* \left(\sum_{k=1}^{m} A_{k,j} f_k \right) = A_{i,j}.$$

On en déduit que, pour tout i de $\{1, \ldots, m\}$:

$${}^t u(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} e_j^*.$$

Le résultat suit. Cette interprétation théorique de la matrice transposée permet d'en retrouver les propriétés.

Exercice 14. *Soit Δ l'application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ définie par*

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \qquad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Donner sa matrice dans la base $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ définie par

$$H_0 = 1 \; ; \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad H_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$

Exercice 15. *Soient B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d_B l'application*

$$d_B \; : M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longmapsto MB \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Déterminer une base dans laquelle la matrice de d_B soit « simple ».

Exercice 16. *Soient A dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi_{A,B}$ l'application*

$$\Phi_{A,B} \; : M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longmapsto AM{}^t B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Trouver une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dans laquelle la matrice de $\Phi_{A,B}$ soit $A \otimes B$.

Exercice 17. *Démontrer la formule*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad rg(A) = rg({}^tA)$$

en utilisant l'exemple 4.

Les matrices permettent ainsi de visualiser de manière simple certaines situations géométriques. Le langage des blocs est souvent utile. À titre d'exemple, revenons sur un exemple déjà traité. Soient E_1 un sous-espace de E de dimension n_1, F_1 un sous-espace de F de dimension m_1, on cherche la dimension de

$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{L}(E,F),\ u(E_1) \subset F_1\}.$$

Pour ce faire, on prend une base e de E adaptée à E_1, une base f de F adaptée à F_1 et on note que, pour u dans $\mathcal{L}(E,F)$, u est dans $\mathcal{W}$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}; A \in \mathcal{M}_{m_1,n_1}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{m_1,n-n_1}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{m-m_1,n-n_1}(\mathbb{K}).$$

L'ensemble des matrices de la forme ci-dessus est un sous-espace de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de dimension $mn - m_1(n-n_1)$. Il s'ensuit que $\mathcal{W}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$ de dimension $mn - m_1(n-n_1)$.

Soit x un élément de E d'image $y = u(x)$. Écrivons

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i.$$

Posons aussi $X = {}^t(x_1,\dots,x_n)$, $Y = {}^t(y_1,\dots,y_m)$: X et Y sont donc deux vecteurs colonnes, appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. Alors, l'égalité $y = u(x)$ s'écrit $Y = MX$.

À la composition des applications linéaires correspond le produit matriciel : si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, e, f, g des bases respectivement de E, F, G, u un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ et v un élément de $\mathcal{L}(F,G)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v)\ \mathrm{Mat}_{e,f}(u).$$

En particulier, l'application qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $\mathrm{Mat}_e(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18. *Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Déduire de l'exercice 1 le centre de $\mathcal{L}(E)$.*

Interprétation géométrique des blocs

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies respectives n et m, $e = (e_1,\dots,e_n)$ et $f = (f_1,\dots,f_m)$ des bases respectives de E et F, M la matrice de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans (e,f). On écrit

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.$$

L'interprétation géométrique du bloc A, supposé appartenir à $\mathcal{M}_{m',n'}(\mathbb{K})$, est la suivante. Notons p le projecteur de F sur $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{m'})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_{m'+1}, \ldots, f_m)$. Alors A est la matrice, dans le couple de bases $(e_1, \ldots, e_{n'})$, $(f_1, \ldots, f_{m'})$, de la restriction de $p \circ u$ à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n'})$. En fait, il y a ici un petit abus de langage, puisqu'il faudrait aussi corestreindre cette application à $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{m'})$.

Exercice 19. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que*

$$\{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

Exercice 20. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E de même rang tels que $u^2 \circ v = u$. Montrer : $v^2 \circ u = v$.*

Exercice 21. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de rang 1 de E. Montrer que $Id_E + u$ est inversible si et seulement si :*

$$Tr(u) \neq -1.$$

Exercice 22. *Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Existe-t-il v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ soit inversible et que $v \circ u = 0$?*

Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Dans l'autre sens, on peut attacher à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'application

$$\Phi_A \ : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longmapsto AX \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}),$$

dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ est précisément A. Cette construction permet de définir les objets suivants.

L'image de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est l'image de Φ_A. Notant

$$A = (C_1, \ldots, C_n) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ C_j \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K}),$$

l'image du vecteur $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_j C_j$. Il en résulte que l'image de A n'est autre que le sous-espace de $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A. Variante : les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et engendrent donc $\mathrm{Im}(A)$.

Le noyau de A, notée $\mathrm{Ker}(A)$, est le noyau de Φ_A. Notant $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A (qui appartiennent à $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$), les L_i s'identifient à des formes linéaires. Le noyau de A est l'intersection des noyaux de ces formes linéaires.

Le rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de l'application Φ_A, donc la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

Bien entendu, les notions introduites sont cohérentes entre elles. Si u a pour matrice M dans les bases e et f, les vecteurs du noyau de u sont ceux dont le vecteur des coordonnées dans e appartient au noyau de M etc...

Notons enfin que le calcul matriciel conduit à écrire les vecteurs « en colonnes » (les lignes correspondant aux formes linéaires). Nous identifierons donc souvent sans le préciser $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Exemples

1. *Inversion d'une matrice de Vandermonde*

   Soient $a_0, \ldots, a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. L'application φ de l'exemple 1 est inversible (interpolation de Lagrange). Il en résulte que la matrice de Vandermonde $V(a_0, \ldots, a_n)$ est inversible. Son inverse s'obtient en déterminant les images réciproque par φ de la base canonique $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Or,

   $$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad \varphi^{-1}(\varepsilon_j) = L_j \quad \text{où} \quad L_j = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}.$$

   Il s'ensuit que, si $0 \leq i, j \leq n$, le terme d'indice (i, j) de V^{-1}. est le coefficient de X^i dans la décomposition de L_j sur la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. *Matrices de rang* 1

   Si $C = {}^t(x_1, \ldots, x_m)$ est dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $L = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, la matrice

   $$M = CL = (x_i y_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

   appartient à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et est de rang 1. En effet, on voit en choisissant i dans $\{1, \ldots, m\}$ et j dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que $x_i \neq 0, y_j \neq 0$ que M n'est pas nulle.

   Inversement, toute matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de la forme précédente. En effet, si M est une telle matrice, l'image de M est de dimension 1. Soit C un vecteur directeur de cette image. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M. Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$ on a un scalaire y_j tel que $C_j = y_j C$. L'un au moins des y_j est non nul. Posant $L = (y_1, \ldots, y_n)$, on a bien $M = CL$.

Exercice 23. *Vérifier que la matrice de Pascal est inversible, calculer son inverse.*

Exercice 24. *Soient n dans $\mathbb{N}$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)$. Expliciter l'inverse de la matrice de Vandermonde $V = V(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^n)$. On pourra calculer ${}^t\overline{V}V$.*

Exercice 25. *a) Déterminer le rang de la matrice $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où*

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad A_{i,j} = i + j + 1.$$

b) Soit α un nombre réel. Déterminer le rang de la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad B_{i,j} = \cos\left((i+j)\alpha\right).$$

Exercice 26. *On suppose qu'existent A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ et que ${}^tA + A$, ${}^tB + B$ soient inversibles. Montrer que n est pair. Examiner la réciproque.*

Exercice 27. *Soit n un entier ≥ 2. Si E est une partie de $\{1, \ldots, n\}^2$, on note M_E la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme d'indice (i, j) vaut 1 si (i, j) est dans E, 0 sinon.*

a) Calculer le rang de M_E si $E = \{1, \ldots, n\}^2$ puis si E est l'ensemble des couples (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$ tels que $i \neq j$.

b) On suppose que E est un pavé, c'est-à-dire que E est de la forme $A \times B$ où A et B sont deux parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$. Quel est le rang de M_E ?

c) Quel est le nombre minimal de pavés formant une partition de l'ensemble des couples (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$ tels que $i \neq j$?

Exercice 28. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :*

$$\{\lambda \in \mathbb{K},\ A + \lambda B \text{ est nilpotente}\}$$

contient au moins $n + 1$ éléments. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 29. *Soit A la matrice : $(a_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$ où :*

$$\forall (k, \ell) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad a_{k,\ell} = \int_0^{\pi/2} t^{k-1} \sin((2\ell - 1)t)\, dt.$$

On suppose A non inversible.

a) Montrer qu'il existe des nombres réels $\mu_1, \ldots \mu_n$ non tous nuls tels que la fonction :

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \mu_k (\sin t)^{2k-1}$$

s'annule en n points distincts de $]0, \pi/2[$.

b) Aboutir à une contradiction ; A est donc inversible.

3 Changement de base, équivalence des matrices

Changement de base pour les vecteurs

Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, x un vecteur de E, que l'on écrit

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j, \qquad (x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{K}^{2n}.$$

Décomposons les e'_j sur la base e :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i.$$

La matrice $(p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée *matrice de passage de e à e'*, notée $P_e^{e'}$. Elle est inversible. Si on note les coordonnées comme vecteurs colonnes :

$$X = {}^t(x_1, \ldots, x_n), \qquad X' = {}^t(x'_1, \ldots, x'_n),$$

le lien entre les deux jeux de coordonnées est donné par :

$$X = P_e^{e'} X'.$$

Changement de base pour les applications linéaires

Soient maintenant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m, e et e' deux bases de E, f et f' deux bases de F, u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, M (resp. M') la matrice de u dans le couple de bases (e, f) (resp. (e', f')), $P = P_e^{e'}$, $Q = P_f^{f'}$. Il résulte aisément du point précédent que les matrices M et M' sont reliées par

$$M = QM'P^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad M' = Q^{-1}MP.$$

Équivalence des matrices

Les matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, Q dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$. Il revient au même de dire qu'il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ et une base f de $\mathbb{K}^m$ telles que l'application linéaire canoniquement associée à A admette pour matrice B dans le couple de bases (e, f).

Deux matrices équivalentes ont même rang. Réciproquement, on a le résultat suivant.

Théorème 1. *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, r un entier naturel inférieur ou égal à $\min(m, n)$. Alors toute matrice de rang r de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est équivalente à*

$$J_r^{m,n} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A. Il nous faut produire une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, une base $f = (f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbb{K}^m$ telles que

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \qquad u(e_i) = f_i$$
$$\forall i \in \{r+1, \ldots, n\}, \qquad u(e_i) = 0.$$

Soient S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans $\mathbb{K}^n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition

$$\mathbb{K}^n = S \oplus \mathrm{Ker}(u).$$

Posons, si $1 \leq i \leq r$, $f_i = u(e_i)$. Comme u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$ (forme géométrique du théorème du rang), $(f_1, \ldots, f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Il reste à compléter cette base en une base $f = (f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbb{K}^m$ pour achever la démonstration.

Remarques

1. *Nombre de classes*
Ainsi, deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence (!) sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ admettant exactement $\min(m,n)+1$ classes.
2. *Rang de l'application linéaire transposée*
Un corollaire simple du résultat précédent est la formule
$$\forall M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M).$$
3. *Action de groupe*
L'équivalence des matrices est en fait la relation d'équivalence associée à l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall (P,Q,M) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad (P,Q).M = PMQ^{-1}.$$
4. *Inertie du rang*
Soient $\mathbb{F}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Le théorème précédent entraîne que le rang de A est le même vu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.
5. *Une application : les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
Nous allons établir que l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *simple*, c'est-à-dire qu'elle n'admet pas d'idéaux bilatères non triviaux. Soit donc $\mathcal{I}$ un idéal bilatère non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A dans $\mathcal{I}\backslash\{0\}$. Toute matrice équivalente à A est dans $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ contient donc $J_r^{n,n}$ où r est le rang de n. Comme $J_r^{n,n}E_{1,1}^{n,n} = E_{1,1}^{n,n}$, on voit que $\mathcal{I}$ contient $E_{1,1}^{n,n}$. Toute matrice équivalente à $E_{1,1}^{n,n}$ est donc dans $\mathcal{I}$. C'est dire que $\mathcal{I}$ contient toutes les matrices de rang 1, donc toutes les $E_{i,j}^{n,n}$ avec $1 \leq i,j \leq n$, puis toutes les combinaisons linéaires de ces matrices, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [6]

Exercice 30. *Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont équivalentes à une matrice nilpotente.*

Exercice 31. *Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que*
$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad f(AB) = f(A)f(B).$$
Montrer
$$f^{-1}(\mathbb{K}^*) = GL_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 32. *Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'écrivent AB avec A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement inversible et nilpotente ?*

Exercice 33. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, r un élément de $\{0,\dots,n-1\}$, u un endomorphisme de E de rang $\leq r$. Montrer que u s'écrit $w \circ v$ où v et w sont deux endomorphismes de rang r de E.*

Exercice 34. *Soient A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B et B' dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que A et A' sont équivalentes, que B et B' sont équivalentes. Montrer que $A \otimes B$ et $A' \otimes B'$ sont équivalentes. En déduire le rang de $A \otimes B$ en fonction des rangs de A et B.*

6. Un théorème nettement plus sophistiqué de Wedderburn assure que, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toutes $\mathbb{K}$-algèbre simple de dimension finie est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour un certain n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 35. *Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q, m et n dans $\mathbb{N}^*$, r un entier naturel inférieur ou égal à $\min(m,n)$. Dénombrer les matrices de rang r de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.*

Exercice 36. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Existe-t-il B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $ABAB = 0$, $BABA \neq 0$?*

Exercice 37. *Caractériser les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'existe P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P - zM \in GL_n(\mathbb{C}).$$

L'exercice ci-après établit l'*inertie du polynôme minimal*.

Exercice 38. *Soient $\mathbb{F}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Montrer que le polynôme minimal de A est le même vu dans $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{F}$.*

Il est naturel de se demander ce qui se passe si on remplace l'équivalence en n'autorisant que des opérations d'un seul côté (« équivalence en ligne » ou « équivalence en colonne »)[7]. L'exercice ci-après répond à cette question ; on peut le traiter géométriquement, mais les opérations élémentaires donnent une preuve effective (pivot).

Exercice 39. *a) On note $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{K}^m$. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang r ; on écrit A en colonnes : $A = (C_1, \dots, C_n)$. On dit que A est échelonnée réduite en lignes s'il existe $j(1) < \dots < j(r)$ dans $\{1, \dots, m\}$ tels que*

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \qquad C_{j(k)} = e_k,$$

$$\forall k \in \{1, \dots, r\},\ \forall j \in \{1, \dots, j(k)-1\}, \qquad C_j \in \mathit{Vect}(e_i \ ;\ i \leq k-1).$$

Montrer qu'il existe une unique matrice échelonnée réduite en lignes de la forme UA avec U dans $GL_m(\mathbb{K})$.[8]

b) Donner un énoncé analogue pour les matrices AV avec V dans $GL_n(\mathbb{K})$.

4 Complément sur le rang des matrices

Rang et matrice extraite, inertie du rang

Si $M = (M_{i,j})_{\substack{\leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on appelle *matrice extraite de M* toute matrice de la forme $(M_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ où I et J sont des parties non vides respectivement de $\{1, \dots, m\}$ et $\{1, \dots, n\}$. On a alors les deux points suivants, au programme de première année.

- Le rang d'une matrice extraite de M est inférieur ou égal au rang de M.

- Si le rang de M est r, il existe une sous-matrice extraite de M qui appartient à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

On en déduit que le rang de M est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de M. Une conséquence de ce résultat est l'*inertie du rang*, déjà mentionnée dans le paragraphe précédent : si $\mathbb{F}$ est un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{F}$ et M un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors le rang de M comme élément

7. Ce qui s'interprète encore en termes d'action de groupe.

8. On notera par ailleurs (factorisation des applications linéaires) que les matrices de la forme indiquées sont celles qui ont même noyau que A.

de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le même que le rang de M comme élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. En effet, le rang est la taille maximale d'une sous-matrice carrée de M dont le déterminant est non nul ; or, le calcul d'un déterminant extrait ne dépend pas du corps de base.

Exercice 40. *Démontrer le résultat précédent sans recours aux déterminants.*

Exercice 41. *Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, p un nombre premier, $\overline{A}$ la réduction de A modulo p. Montrer que $rg(\overline{A}) \leq rg(A)$ et que, pour p assez grand, cette inégalité est une égalité.*

Exercice 42. *On se donne n dans $\mathbb{N}^*$ et $2n+1$ cailloux. Dès qu'on enlève un quelconque des cailloux, on peut partager les $2n$ cailloux restants en deux tas de n cailloux de même masse totale. Montrer que tous les cailloux ont même masse.*

Exercice 43. *Soient n un entier ≥ 3, $\omega = e^{2i\pi/n}$, A la matrice :*

$$\left(\omega^{k\ell}\right)_{1\leq k\leq n-2,\ 1\leq \ell\leq n}.$$

Montrer que le vecteur $X = {}^t(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est dans le noyau de A si et seulement si $(x_0,\ldots,x_n)$ est un polygone régulier (éventuellement dégénéré).

Application : la semi-continuité inférieure du rang

Prenons pour $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m et n dans $\mathbb{N}^*$ et r un entier naturel inférieur ou égal à $\min(n,m)$. Alors, si $(M_k)_{k\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ convergeant vers M et si toutes les M_k sont de rang inférieur ou égal à r, M aussi. Autrement dit, « le rang ne peut que baisser à la limite », ou, mieux, l'ensemble $\mathcal{R}^r_{m,n}(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour vérifier cette dernière formulation, il suffit de noter que $\mathcal{R}^r_{m,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont toutes les matrices carrées extraites de taille $> r$ sont non inversibles, c'est-à-dire des matrices $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ telles que, pour toute partie I (resp. J) de $\{1,\ldots,m\}$ (resp. $\{1,\ldots,n\}$) de cardinal r, on ait :

$$\det\left(M_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J} = 0.$$

La continuité des déterminants extraits (qui sont des fonctions polynomiales de M) et le fait qu'une intersection de fermés soit fermée achève la démonstration.

Cet énoncés se transportent immédiatement aux applications linéaires.

Exercice 44. *On garde les notations précédentes. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang exactement r.*

On notera que, bien que l'application rg ne soit pas continue, sa restriction à l'ensemble des projecteurs coïncide avec la trace (pourquoi ?), donc est continue (linéaire en dimension finie).

Critère d'inversibilité d'Hadamard

Le résultat suivant, qui n'est pas au programme, est classique et intéressant. Sa démonstration est instructive.

Théorème 2. *Soit $M = (M_{i,j})_{\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est à diagonale strictement dominante, ce qui signifie que*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad |M_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} |M_{i,j}|.$$

Alors M est inversible.

Preuve. On montre que le noyau de M est réduit à $\{0\}$, ce qui assure l'inversibilité puisque M est une matrice carrée. Soit à cet effet $X =^t (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathrm{Ker}(M)$. Soit i un élément de $\{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad |x_i| \geq |x_j|.$$

Pour montrer que $X = 0$, il suffit d'établir que x_i est nul. Or

$$M_{i,i}x_i = -\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} M_{i,j}x_j,$$

d'où l'on tire, par inégalité triangulaire puis par maximalité de $|x_i|$:

$$|M_{i,i}||x_i| \leq \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} |M_{i,j}||x_j| \leq \left(\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} |M_{i,j}|\right)|x_i|.$$

L'hypothèse de diagonale strictement dominante implique alors que $|x_i|$ est nul.

L'énoncé ci-après, équivalent au théorème d'Hadamard, localise les valeurs propres d'une matrice complexe dans la réunion de ses *disques de Gerschgörin*.

Exercice 45. *Soit $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $1 \leq i \leq n$, soit D_i le disque fermé de centre $M_{i,i}$ et de rayon $\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} |M_{i,j}|$. Montrer que toute valeur propre de M appartient à $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.*

Exercice 46. *On reprend l'exercice précédent et on suppose que $D_1, \dots, D_n$ sont deux à deux disjoints. Montrer que chaque D_i contient exactement une valeur propre de M.*

Exercice 47. *Soit $M = (M_{i,j})_{\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad M_{i,i} > \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} |M_{i,j}|.$$

Montrer que le déterminant de M appartient à $\mathbb{R}^{+*}$.

L'exercice ci-après explicite une variante de la condition d'Hadamard (« critère d'inversibilité de Brauer »).

Exercice 48. *Soit $M = (M_{i,j})_{\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que*

$$\forall (i,i') \in \{1,\ldots,n\}, i \neq i' \qquad |M_{i,i}|\,|M_{i',i'}| > \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} |M_{i,j}| \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i'}} |M_{i',j}|.$$

Montrer que M est inversible.

Le résultat de l'exercice ci-après [9] est un très joli exemple d'application de l'algèbre linéaire à un problème combinatoire. Il s'énonce comme suit : si $A_1,\ldots,A_n$ sont des parties deux à deux distinctes d'un ensemble E de cardinal m dont les intersections deux à deux ont toutes même cardinal r, alors $n \leq m$. L'inégalité est optimale (prendre $A_i = E \setminus \{i\}$ si $m \geq 3$).

Exercice 49. *a) Soient $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que :*

- $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \qquad i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = r,$
- $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ M_{i,i} \geq r,$
- $\{i \in \{1,\ldots,n\},\ M_{i,i} = r\}$ *contient au plus un élément.*

Montrer que M est inversible.

b) Soient m, n et r trois entiers de $\mathbb{N}^*$, $E = \{a_1,\ldots,a_m\}$ un ensemble fini de cardinal m, $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de n parties de E deux à deux distinctes. On suppose qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad |A_i \cap A_j| = r.$$

Montrer que $n \leq m$. Notant $B = (B_{i,j})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ la matrice définie par :

$$B_{i,j} = 1_{a_i \in A_j}$$

on appliquera a) à $M = {}^tBB$.

5 Opérations élémentaires

Description

Les opérations élémentaires constituent une élaboration de la méthode du pivot, intéressante sur le plan pratique comme sur le plan théorique. Les opérations sur les lignes (resp. colonnes) correspondent à des multiplications à gauche (resp. à droite) par des matrices inversibles. Elles se décrivent de la manière suivante, où on opère sur des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, qui correspond à la multiplication à gauche par la matrice de transvection $T^m_{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E^{m,m}_{i,j}$;

- $L_i \leftrightarrow L_j$, qui correspond à la multiplication à gauche par la matrice de transposition $P^m_{(ij)}$.

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, qui correspond à la multiplication à gauche par la matrice diagonale dont le terme diagonal d'indice i vaut λ, les autres termes diagonaux 1.

9. « Inégalité de Fischer », 1940.

Ces opérations n'altèrent pas le noyau de la matrice, donc ne modifient pas son rang.

Les opérations élémentaires sur les colonnes admettent des descriptions similaires. Elles n'altèrent pas l'image de la matrice, donc ne modifient pas son rang.

Génération du groupe spécial linéaire, du groupe linéaire

Les opérations élémentaires permettent de redémontrer de manière algorithmique le théorème 1. Elles sont un outil important de calcul des déterminants. Elles permettent également de démontrer le résultat théorique suivant (cf. cours sur les groupes).

Théorème 3. *Les matrices de transvection $T^n_{i,j}(\lambda)$ engendrent le groupe $SL_n(\mathbb{K})$. Les matrices de transvection et les matrices de dilatation $D^n_\mu = Diag(1, \ldots, 1, \mu)$ engendrent le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$.*

Cet énoncé est -légèrement- hors-programme, mais très utile.

Exercice 50. *Montrer que tout morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ est trivial sur $SL_n(\mathbb{K})$. Décrire alors les morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ en fonction des morphismes de $(\mathbb{K}^*, \times)$ dans lui-même.*

Exercice 51. *a) Déterminer les morphismes continus de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$.*

b) On suppose $\mathbb{K}$ fini. En utilisant la cyclicité de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer les morphismes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

L'exercice suivant décrit les applications multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Exercice 52. *Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad f(AB) = f(A)\, f(B).$$

a) Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $f(A) = 0$.

b) Montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad f(A) = g(det(A)).$$

Application : la connexité par arcs de $SL_n(\mathbb{K})$, les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{K})$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs. En effet, si M est dans ce groupe, M s'écrit

$$M = T_{i_r,j_r}(\lambda_r) ... T_{i_1,j_1}(\lambda_1)$$

où r est dans $\mathbb{N}^*$, les λ_k dans $\mathbb{K}$, les (i_k, j_k) dans $\{1, \ldots, n\}^2 \setminus \{(i,i),\ 1 \le i \le n\}$. Posons, pour t dans $[0, 1]$:

$$\gamma(t) = T_{i_r,j_r}(t\lambda_r) ... T_{i_1,j_1}(t\lambda_1).$$

L'application γ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. La continuité du produit matriciel montre que γ est continue. Ainsi, γ est un chemin tracé sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ reliant I_n à M. Le résultat est démontré.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs : le continuité du déterminant et le théorème des valeurs intermédiaires font en effet qu'aucun chemin tracé sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ne peut relier une matrice de déterminant > 0 à une matrice de déterminant < 0. En revanche, le sous-groupe $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de déterminant > 0 est connexe par arcs comme image du connexe par arcs $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{+*}$ par l'application continue (car polynomiale) :

$$(A, \lambda) \longmapsto AD_\lambda.$$

Il s'ensuit que les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et son complémentaire. Interprétation géométrique : deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace E de dimension finie non nulle peuvent être reliées par un chemin continu tracé sur l'ensemble des bases si et seulement si elles définissent la même orientation. [10]

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. On le voit en reprenant l'argumentation précédente et en utilisant la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$. On peut plus économiquement utiliser la trigonalisabilité d'une matrice carrée complexe et la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 53. *Montrer que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la classe de similitude de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Que peut-on dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?*

Exercice 54. *Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R}) \cup \{M\}$ est connexe par arcs.*

Exercice 55. *Déterminer les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = M$.*

En combinant les opérations élémentaires et l'algorithme d'Euclide, on peut étendre certains des énoncés de l'algèbre linéaire « classique » aux matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Voici un exemple.

Exercice 56. *Démontrer que les matrices de transvections de $SL_n(\mathbb{Z})$ engendrent ce groupe.*

Terminons par une généralisation de la décomposition LU, nommée *décomposition de Bruhat de $GL_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 57. *a) En utilisant les opérations élémentaires, prouver, si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, qu'il existe L triangulaire supérieure et U triangulaire inférieure telles que LMU soit une matrice de permutation. Montrer ensuite que cette matrice de permutation est entièrement déterminée par M.*

b) Quel est le lien avec la décomposition LU de l'exercice 8 ? Pourquoi l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ admettant une décomposition LU est-il appelé grosse cellule de la décomposition de Bruhat ?

Opérations élémentaires blocs

Le calcul par blocs permet de généraliser les opérations élémentaires. La notion fondamentale est celle de matrice de transvection-bloc que nous présentons dans le cadre le plus simple : si $1 \leq r \leq n-1$, $X \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K})$ soit

$$T_X = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X & I_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

10. Ce résultat est intuitivement attendu en dimension 2 ou 3.

Soient maintenant A dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K})$, C dans $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et D dans $\mathcal{M}_{m-r,n-r}(\mathbb{K})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

On a

$$T_X M = \begin{pmatrix} A & C \\ XA + B & XC + D \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, $T_X M$ se déduit de M par l'opération élémentaire-bloc

$$L_2 \leftarrow L_2 + X L_1.$$

Ce type de calcul, qui généralise les opérations élémentaires usuelles, doit systématiquement être réexpliqué en cas d'utilisation.

Application : paramétrisation locale des matrices de rang r

Reprenons les notations précédentes. Pour $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, le choix $X = -BA^{-1}$ donne

$$T_X M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -BA^{-1}C + D \end{pmatrix}.$$

Conséquence : si A est de rang r, la matrice M est de rang r si et seulement si $D = BA^{-1}C$. Ainsi, si $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suffisamment proche de $J_r^{m,n}$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & BA^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}).$$

En particulier, si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe un voisinage de la matrice $J_r^{(m,n)}$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont l'intersection avec l'ensemble des matrices de rang r est

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ B & BA^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Exercice 58. *Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie m et n, r dans $\{0, \dots, \min(m,n)\}$, $R_r^{m,n}$ l'ensemble des éléments de rang r de $\mathcal{L}(E,F)$, u_0 un élément de $R_r^{m,n}$. Déterminer l'espace tangent à $R_r^{m,n}$ en u_0.*

Le calcul précédent montre que l'on peut, dans une certaine mesure, travailler avec un bloc inversible comme avec un coefficient non nul. On obtient ainsi une généralisation de la méthode du pivot.

Exercice 59. *Soient n un entier ≥ 2, $p \in \{1, \dots, n-1\}$ et :*

$$\mathcal{W} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline {}^tB & A \end{array} \right),\ A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{W}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; préciser sa dimension.

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices de rang majoré par p.

b) On suppose que $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ *est dans* $\mathcal{V}$*. Montrer que* $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} = \{0\}$.

c) Dans le cas général, montrer que la dimension de $\mathcal{V}$ *est majorée par* np*. Cette majoration est-elle optimale*[11] *?*

Deux exercices sur la « congruence matricielle »

Les deux exercices ci-après proposent des preuves matricielles de résultats que l'on obtient plus conceptuellement à l'aide de la théorie (hors-programme) des formes bilinéaires.

Exercice 60. *On suppose* $\mathbb{K}$ *de caractéristique différente de 2. Montrer par opérations élémentaires que toute matrice symétrique* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *s'écrit* ${}^tPDP$ *avec* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *diagonale.*

Exercice 61. *On suppose* $\mathbb{K}$ *de caractéristique différente de 2. Montrer que toute matrice antisymétrique* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *s'écrit* ${}^tPBP$ *avec* P *dans* $GL_n(\mathbb{K})$ *et* B *diagonale par blocs à blocs diagonaux de l'une des deux formes* (0) *ou*

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{K}.$$

Que peut-on en déduire sur le rang d'une matrice antisymétrique ?

6 Matrices semblables

Généralités

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, e et e' deux bases de E, u un élément de $\mathcal{L}(E)$, M la matrice de u dans la base e (resp. e'), $P = P_e^{e'}$. Il résulte des formules de changement de bases que les matrices M et M' sont reliées par

$$M = PM'P^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad M' = P^{-1}MP.$$

Cette observation conduit à la notion suivante : deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

Il revient au même de dire qu'existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A admette pour matrice B dans la base e.

La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ses classes sont appelées *classes de similitude.*[12]

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes, mais la réciproque est fausse, par exemple parce que deux matrices semblables ont même trace

11. Ce résultat reste vrai en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps $\mathbb{K}$ quelconque (Flanders, 1962). La démonstration est plus compliquée.

12. En fait, l'application

$$(P, M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto PMP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La similitude est la relation d'équivalence associée à cette action.

(déjà, deux matrices scalaires distinctes de rapports non nuls sont inversibles, donc équivalentes, mais non semblables).

La propriété suivante, immédiate par le calcul, peut également se déduire de l'interprétation de la similitude comme changement de base et du fait que, si v et u sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et e une base de E, alors la matrice de $v \circ u$ dans E est le produit de la matrice v dans e par la matrice de u dans E :

$$\forall (A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad PAP^{-1}PBP^{-1} = P(AB)P^{-1}.$$

En particulier, on a le résultat suivant, qui permet d'utiliser la réduction pour calculer les puissances d'une matrice donnée :

$$\forall (k, A, P) \in \mathbb{N} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}.$$ [13]

On peut reformuler ce qui précède comme suit. Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, soit :

$$\varphi_P \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}.$$

Alors φ_P est est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 62. *Montrer que tout automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de cette forme.* [14]

Indication. On pourra s'intéresser, si φ est un tel automorphisme, aux $\varphi(E_{i,j})$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Le problème de la réduction

Le problème de la « réduction des endomorphismes » est le suivant. Étant donné un endomorphisme u du $\mathbb{K}$-espace de dimension finie E, déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u soit « aussi simple que possible », c'est-à-dire permette de comprendre au mieux l'action de u sur E. Sa contrepartie matricielle est de déterminer, si M est une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice semblable à M aussi simple que possible.

On fixe désormais un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme u de E.

Stabilité

Soient F un sous-espace de E de dimension m. Dire que F est stable par u, c'est dire que, si e est une base de E adaptée à F, $\mathrm{Mat}_e(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{K}).$$

13. Plus généralement, on a

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \qquad Q(PAP^{-1}) = PQ(A)P^{-1},$$

ce qui montre que deux matrices semblables ont même idéal annulateur.

14. Ce résultat est un cas particulier important d'un résultat relatif d'algèbre non commutative, le « théorème de Skolem-Noether ».

De même, supposons donnée une décomposition de E en somme directe de sous-espaces :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où, pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, E_i est de dimension n_i. Soit e une base de E adaptée à cette décomposition. Alors, les E_i, $1 \leq i \leq r$ sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_r), \quad \text{avec, si } 1 \leq i \leq r,\ A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K}).$$

Exercice 63. *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) l'endomorphisme u est de rang r, $E = Ker\ u \oplus\ Im\ u$,

ii) il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec } A \in GL_r(\mathbb{K}).$$

Exercice 64. *Sur le modèle de l'exercice précédent, donner une traduction matricielle de la décomposition « coeur-nilespace ».*

Exercice 65. *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que*

$$Ker(u) \oplus Im(u) = E$$

si et seulement si $\lambda(u + \lambda Id_E)^{-1}$ a une limite dans $\mathcal{L}(E)$ quand λ tend vers 0 en restant dans $\mathbb{K}^*$.

Homothéties

Soit λ dans $\mathbb{K}$. La matrice de l'homothétie de rapport λ dans une base quelconque de E est λI_n.

Traduction matricielle : la seule matrice semblable à λI_n est λI_n.

Exercice 66. *On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude contient un point isolé. Montrer que M est une matrice scalaire.*

Projecteurs

Soit maintenant p dans $\mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r. On sait que

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p).$$

Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de p est

$$J_r^{n,n} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Traduction matricielle : une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = M$ et $\mathrm{rg}(M) = r$ si et seulement si elle est semblable à $J_r^{(n,n)}$.[15] En particulier, l'ensemble des matrices idempotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réunion disjointe des $n+1$ classes de similitude des matrices $J_r^{(n,n)}$, $0 \leq r \leq n$.

15. Résultat à comparer à la classification des matrices équivalentes.

Exercice 67. *Montrer que, si $a \in \mathbb{K}$, les matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les matrices de projecteur de rang 1 engendrent vectoriellement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 68. *Dénombrer les matrices idempotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q.*

Symétries

On suppose ici le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique autre que 2 et que l'endomorphisme s de E est une symétrie. L'hypothèse sur la caractéristique entraîne :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}).$$

Soit r la dimension de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$. Dans une base de E adaptée à la décomposition précédente, la matrice de s est

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Traduction matricielle : une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = I_n$ et $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_n)) = r$ si et seulement si elle est semblable à la matrice ci-dessus. En particulier, l'ensemble des éléments de carré I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réunion disjointe des $n+1$ classes de similitude des matrices précédentes, pour $0 \leq r \leq n$.

Les matrices de symétrie sont les éléments d'ordre 1 ou 2 du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Le résultat précédent assure donc qu'il y a dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ exactement n classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.[16]

Exercice 69. *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_m(\mathbb{K})$ est isomorphe à $GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $m = n$.*[17]

Endomorphismes autres que les homothéties

Supposons que u n'est pas une homothétie. Il existe alors, d'après un résultat classique rappelé dans « Étude géométrique des applications linéaires », un vecteur x de E tel que $(x, u(x))$ soit libre. Complétons cette famille en une base e de E. Alors la matrice de E. Alors la matrice de u dans la base e a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 70. *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée.*

16. Deux éléments x et y du groupe G sont conjugués s'il existe g dans G tel que $y = gxg^{-1}$.
17. L'étude des éléments d'ordre 2 d'un groupe est souvent instructive !

Exercice 71. *Supposons $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls.* [18]

Exercice 72. *Déterminer les sous-espaces V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que*

$$\forall (P, M) \in GL_n(\mathbb{R}) \times V, \qquad PMP^{-1} \in V.$$

Endomorphismes nilpotents d'indice maximum

Supposons u nilpotent d'indice de nilpotence n. On dispose alors de x dans E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On a montré que la famille $(u^i(x))_{0 \leq i \leq n-1}$ est libre. Ainsi, $e = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, x)$, libre et de cardinal n, est une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Traduction matricielle : toute matrice nilpotente M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ est semblable à J_n.

Endomorphismes cycliques

Cet exemple peut être vu comme une généralisation du précédent. L'endomorphisme u est dit *cyclique* s'il existe x dans E tel que $e = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Dans une telle base, la matrice de P est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

où les coefficients a_k sont donnés par

$$u^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x).$$

Posons $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La matrice précédente est dite *matrice compagnon* du polynôme P et est souvent notée $C(P)$ [19].

18. Ce résultat (« théorème de Shoda ») est également vrai en caractéristique p, la preuve est un peu plus compliquée.

19. Nous verrons plus tard que P est, simultanément, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $C(P)$.

Traduction matricielle : l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est cyclique si et seulement s'il existe une matrice compagnon semblable à A.

D'autres exemples élémentaires, sous forme d'exercices

Exercice 73. *On suppose que E est un plan. Soit u un endomorphisme nilpotent non nul de E. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 74. *Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ vérifiant : $A_{i,j} = 0$ pour $i \geq j+2$.* [20]

Exercice 75. *Montrer que, si (i,j) et (i',j') sont deux couples d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$ et λ, λ' deux éléments de $\mathbb{K}^*$, les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ et $T_{i',j'}(\lambda')$ sont semblables.*

Exercice 76. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$Ker(A) = Im(A) \quad \text{et} \quad Ker(B) = Im(B).$$

Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 77. *Donner une classification à similitude près des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = 0$.*

Exercice 78. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, M dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ de rang $2n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que A est semblable à :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & I_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & I_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n \end{array}\right).$$

« *Inertie de la similitude* »

Soient $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la similitude de A et B sur $\mathbb{K}'$ implique évidemment leur similitude sur $\mathbb{K}$. De manière nettement moins immédiate, la réciproque est vraie.

Théorème 4. *Avec les notations précédentes, A et B sont semblables sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elles le sont sur $\mathbb{K}'$.*

Ce résultat hors-programme est facile à établir dans le cas particulier important $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut en donner une démonstration raisonnablement élémentaire si $\mathbb{K}'$ est infini. Le cas général nécessite des résultats non triviaux de réduction, un peu au-delà des programmes de CPGE.

Preuve du théorème 4 pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$. Soient donc A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$, P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Écrivons $P = U + iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $BP = PA$. Cette relation

20. Une telle matrice est dite « de Hessenberg ».

est « linéaire en P », ce qui permet d'obtenir, par identification des parties réelles et imaginaires, coefficient par coefficient :

$$UA = BU \; ; \; VA = BV.$$

Il s'ensuit que, pour tout nombre réel x,

$$(U + xV)A = B(U + xV).$$

Il reste à démontrer qu'existe x dans $\mathbb{R}$ tel que $U + xV$ soit inversible. On utilise un argument polynomial : l'application

$$x \in \mathbb{C} \longmapsto \det(U + xV)$$

est polynomiale, ne s'annule pas en i (inversibilité de $P = U + iV$). L'ensemble des nombres complexes x tels que $A + xB$ est non inversible est donc fini. Comme $\mathbb{R}$ est infini, le résultat suit.

Exercice 79. *Avec les notations précédentes, supposons $\mathbb{K}'$ infini, soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$ semblables sur $\mathbb{K}$. On veut établir que A et B sont semblables sur $\mathbb{K}$. On considère*

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}} = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \; ; \; PA = BP\}, \qquad \mathcal{S}_{\mathbb{K}'} = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}') \; ; \; PA = BP\}.$$

a) Il est clair que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathbb{K}'}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Montrer que ces sous-espaces ont même dimension et que, si $(P_1, \ldots, P_d)$ est une base $\mathcal{S}_{\mathbb{K}'}$ sur $\mathbb{K}'$, c'est aussi une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}$.

b) Conclure en remarquant que l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto det\left(\sum_{i=1}^{d} x_i P_i\right)$$

est polynomiale. [21]

c) Plus généralement, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. On suppose qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad PA_iP^{-1} = B_i$$

Montrer qu'il existe P' dans $GL_n(\mathbb{K}')$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad P'A_iP'^{-1} = B_i.$$

21. Rappel (HP) : si l'élément P de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ s'annule sur $E_1 \times \ldots, \times E_n$ où, pour tout i, E_i est une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors $P = 0$.