

DÉRIVATION

Exercice 1. Théorème de division

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on pose

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

L'objet de ce problème est de démontrer que τ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} . C'est le *théorème de division* des fonctions \mathcal{C}^n .

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on pose

$$\hat{\tau}(x) = \hat{f}(x)u(x)$$

où

$$\hat{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{1}{x-a}.$$

- Justifier que $\hat{\tau}$ est de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, l'existence de $c_{0,x}, \dots, c_{k,x} \in]x, a[$ tels que

$$\hat{\tau}^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} k!}{j!(n-j+1)!} f^{(n+1)}(c_{j,x})$$

- Démontrer que $\hat{\tau}$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} et préciser $\hat{\tau}^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- En déduire que τ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} et que $\tau^{(k)}(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Application : Démontrer que le sinus cardinal (c'est-à-dire la fonction $x \longmapsto (\sin x)/x$ prolongée par continuité en 0) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Récréation mathématique

Remplir les tableaux suivants

Tableau A :
Dans le tableau B, il y a
... fois le chiffre 0
... fois le chiffre 1
... fois le chiffre 2
... fois le chiffre 3
... fois le chiffre 4
... fois le chiffre 5
... fois le chiffre 6
... fois le chiffre 7
... fois le chiffre 8
... fois le chiffre 9

Tableau B :
Dans le tableau A, il y a
... fois le chiffre 0
... fois le chiffre 1
... fois le chiffre 2
... fois le chiffre 3
... fois le chiffre 4
... fois le chiffre 5
... fois le chiffre 6
... fois le chiffre 7
... fois le chiffre 8
... fois le chiffre 9