Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 7 : Continuité, dérivabilité

Correction du problème 1 –

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

1. La fonction f_n est de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$ comme composée de fonctions qui le sont.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_{x_0,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   - si $x \neq x_0$, $(x - x_0)^2 > 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n(x - x_0)^2 = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x) = 0$;
   - si $x = x_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}(x_0) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x_0) = 1$

   Ainsi, $\boxed{(f_{x_0,n}) \text{ converge simplement vers la fonction } f_{x_0} \text{ nulle sur } \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \text{ et telle que } f_{x_0}(x_0) = 1.}$
3. f_{x_0} n'est évidemment $\boxed{\text{pas continue en } x_0}$, puisque $\lim\limits_{x\to x_0+} f_{x_0}(x) = 0 \neq 1 = f_{x_0}(x_0)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, chaque suite $(f_{x_i,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers 0 si $x \neq x_i$, et vers 1 si $x = x_i$. Les réels x_i, $i \in [\![1, m]\!]$, étant deux à deux distincts, par linéarité de la limite (on a un nombre fini de termes), on en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $x \notin \{x_1, \dots, x_m\}$, et converge vers 1 si $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$.

   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction } f}$ égale à 0 en tout point de $\mathbb{R}$, exceptés les points $x_1, \dots, x_m$, où elle vaut 1. Cette fonction n'est évidemment pas continue aux différents points x_i, les limites à droite et à gauche en ces points étant 0, alors que $f(x_i) = 1$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

1. La différence fondamentale entre convergence simple et convergence uniforme est que dans le cas de la convergence uniforme, le même entier N doit convenir pour tous les réels x (de I bien sûr) : on a uniformité de la vitesse de convergence (d'où la terminologie).

   Montrons que $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente, donc que :
   $$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists n > N, \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$
   L'étude de la partie I (et l'énoncé des résultats qui suivent) indique que le défaut de convergence uniforme se situera probablement en x_0 Pour x proche de x_0, $(f_{x_0,n}(x))$ va rester trop longtemps proche de 1 ; et ne pas tendre assez vite vers 0, l'amplitude de ce comportement étant 1, on va prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

   Soit alors N quelconque. On doit montrer qu'il existe x (qu'on choisit différent de x_0) tel qu'il existe $n \geqslant N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$. Or :
   $$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2} \geqslant \frac{1}{2} \iff (x - x_0)^2 \leqslant \frac{\ln 2}{n} \iff |x - x_0| \leqslant \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}.$$
   On peut donc choisir $n > N$ quelconque, et x tel que $x \neq x_0$ dans $\left]x_0 - \dfrac{\ln 2}{n}, x_0 + \dfrac{\ln 2}{n}\right[$.

   Cela donne bien l'existence de $x \in \mathbb{R}$, et de $n > N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Par conséquent, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente.
2. On a toujours :
   $$\exists N, \forall x, P(N, x) \Longrightarrow \forall x, \exists N, P(N, x),$$
   expression logique signifiant que s'il existe un N indépendant de x pour lequel une propriété est vérifiée pour tout x, alors il existe aussi un N convenable sans imposer l'indépendance en x. Qui peut le plus, peut le moins !

   Or, les deux définitions de convergence simple et de convergence uniforme ne diffèrent que d'une interversion de symboles $\exists$ et $\forall$, traduisant l'indépendance imposée de N par rapport à x pour la convergence uniforme.

   Ainsi, d'après la remarque ci-dessus, $\boxed{\text{la convergence uniforme implique la convergence simple.}}$

3. Soit $x \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence uniforme, il existe N tel que pour tout $y \in I$ (donc aussi x) pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Fixons une telle valeur de N, et choisissons $n \geqslant N$ quelconque. Alors,
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Par ailleurs, f_n étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, on a :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
Cela montre bien la continuité de f en x.
Ceci étant valide pour tout $x \in I$, $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

4. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que dans la définition.
Montrons pour commencer que $\sum f_n$ converge simplement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant a_n$. Ces termes étant positifs, comme $\sum a_n$ converge, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.
Montrons que la convergence est uniforme. La fonction limite est $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme partielle de cette série.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in I$,
$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$
Ce majorant a l'avantage de ne pas dépendre de x.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, il existe N (indépendant de x, donc) tel que pour tout $n \geqslant N$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in I$: $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.
Ce N étant indépendant de x, on a, par définition, convergence uniforme de $\sum f_n$.
Conclusion : $\boxed{\text{si } \sum f_n \text{ converge normalement, et si les } f_n \text{ sont continues, alors la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue.}}$

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$.
Or, $\sum b^n$ converge, puisque $b \in]0,1[$. Ainsi, la somme définissant f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente (d'après II-5), donc simplement convergente (d'après II-2). Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$
Par ailleurs, l'uniforme convergence et la continuité du cosinus assurent la $\boxed{\text{continuité de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$. Alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = -(ab)^n \pi \sin(a^n \pi x) \qquad \text{donc:} \qquad |f_n(x)| \leqslant (ab)^n \pi.$$
D'après l'inégalité des accroissements finis entre x et $x + h$, f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$|f_n(x + h) - f_n(x)| \leqslant |h|(ab)^n \pi.$$
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité sur $n \in [\![0, m-1]\!]$, on obtient :
$$\sum_{n=0}^{m-1} |f_n(x + h) - f_n(x)| \leqslant |h|\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \frac{|h|\pi((ab)^m) - 1}{ab - 1} \leqslant \frac{|h|\pi(ab)^m}{ab - 1},$$
car $ab - 1 > 0$ par hypothèse. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire :
$$|S_m(h)| = \left|\sum_{n=0}^{m-1} \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|f_n(x + h) - f_n(x)|}{|h|} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|S_m(h)| \leqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}.}$$

3. Par définition de la partie entière, $a^m x - \frac{1}{2} < \alpha_m \leqslant a^m x + \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{2} \leqslant a^m x - \alpha_m < \frac{1}{2} \qquad \text{donc:} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$, donc $|1-\beta_m| \leqslant \frac{3}{2}$. On en déduit que $\boxed{|h_m| = \dfrac{|1-\beta_m|}{a^m} \leqslant \dfrac{3}{2a^m}}$.

4. (a) Puisque a est impair $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2].
On en déduit que $\boxed{a^{n-m}(\alpha_m+1) \text{ est de même parité que } \alpha_m + 1.}$

(b) On a : $x + h_m = x + \dfrac{1-\beta_m}{a^m} = \dfrac{a_m x - \beta_m + 1}{a^m} = \dfrac{\alpha_m + 1}{a^m}$, par définition de β_m.
Or $\cos(\pi a^n (x + h_m)) = \cos(a^{n-m}(\alpha+1)\pi) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha+1)}$.
Comme a est impair, $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2], et donc

$$\boxed{\cos(\pi a^n (x + h_m)) = (-1)^{(\alpha+1)}}.$$

De la même manière, $a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m, d'où :

$$\boxed{\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m) = (-1)^{a^{n-m}\alpha_m} = (-1)^{\alpha_m}}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m) = 0}.$$

(c) On en déduit que

$$\begin{aligned}
\cos(a^n \pi x) &= \cos(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \beta_m)) \\
&= \cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)\cos(\pi a^{n-m}\beta_m) - \sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)\sin(\pi a^{n-m}\beta_m) \\
&= \boxed{(-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)}.
\end{aligned}$$

5. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
R_m(h_m) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h_m)) - \cos(a^n\pi x)) \\
&= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n((-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \\
&= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)).
\end{aligned}$$

Les termes de la série ci-dessus sont positifs, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1 + \cos y \geqslant 0$. Ainsi, la somme est supérieure à son premier terme, obtenu pour $n = m$. Par conséquent :

$$|R_m(h_m)| = \frac{1}{|h_m|}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \geqslant \frac{1}{|h_m|} b^m (1 + \cos(\pi\beta_m)).$$

Or, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\cos(\pi\beta_m) \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|} = \dfrac{(ab)^m}{1-\beta_m}}$.
Or, puisque $-\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \frac{ab-1}{\pi}$, d'après l'hypothèse sur ab. Ainsi :

$$\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}}.$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}\right| &= |S_m(h_m) + R_m(h_m)| \\
&\geqslant |R_m(h_m)| - |S_m(h_m)| \\
&\geqslant \frac{(ab)^m}{1-\beta_m} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1} = (ab)^m \frac{ab - 1 - \pi(1-\beta_m)}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\
&\geqslant (ab)^m \frac{ab - 1 - \frac{3\pi}{2}}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\
&\geqslant \boxed{\frac{2(ab)^m}{3} \cdot \frac{ab - \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}},
\end{aligned}$$

puisque $1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$ et est positif.

7. Par l'hypothèse sur ab, on a $\dfrac{ab - \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)}{ab - 1} > 0$; de plus, $ab > 1$, donc $\lim\limits_{m \to +\infty} (ab)^m = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{m \to +\infty} \left| \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \right| = +\infty.$$

Puisque $a > 1$ (sinon on n'aurait pas $ab > 1$, puisque $b < 1$), $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi, le résultat précédent contredit le critère séquentiel de la convergence du taux d'accroissement en x lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en x.

Le réel x ayant été choisi quelconque, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est dérivable en aucun point de } \mathbb{R}\text{, alors qu'elle est continue sur } \mathbb{R}}$.

Correction du problème 2 – Discontinuités des fonctions réglées

Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue

1. La fonction $f_{|I}$ admettant des limites à gauche et à droite en tout point, elle n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $f(a) \neq f(a^-)$, donc si et seulement si $|f(a) - f(a^-)| > 0$, ce qui equivaut à dire, du fait de la convergence vers 0 de $\frac{1}{n}$, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(a) - f(a^-)| > \dfrac{1}{n}$, donc que $f \in D_{\frac{1}{n}}$.

   Ainsi, f n'est pas continue à gauche en a si et seulement si $\boxed{a \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}.}$

2. Puisque D_ε est infini, on peut trouver une suite (a_n) d'éléments distincts, qu'on peut construire par exemple par récurrence (si $a_0, \dots, a_n$ sont construits convenablement, on n'est pas arrivé à épuisement des termes de D_ε et on pourra choisir a_{n+1} distinct des précédents).

   Puisque les a_n sont supposés dans un premier temps être dans un intervalle fermé borné I, quitte à en extraire une suite convergente à l'aide du théoèrme de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer que $\boxed{(a_n) \text{ converge}}$. Soit a sa limite.

3. La suite (a_n) possède au plus un terme égal à a (car ses éléments sont deux à deux distincts). Ainsi, tous ses autres termes (en nombre infini) vérifient $a_n < a$ ou $a_n > a$.

   Il y a donc nécessairement une $\boxed{\text{infinité de termes vérifiant la même inégalité}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n \in D_\varepsilon$, donc $|f(a_n) - f(a_n^-)| \geqslant \varepsilon$. Par définition de la limite à gauche, il existe $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, par inégalité triangulaire :

   $$\boxed{|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant |f(a_n) - f(a_n^-)| - |f(b_n) - f(a_n^-)| = \frac{\varepsilon}{2}}.$$

   (b) Lorsque n tend vers $+\infty$, $a_n \to a$, et par théorème d'encadrement, on a aussi $b_n \to a$. Ces deux convergences se font par valeurs supérieures, donc $f(a_n) \to f(a^+)$ et $f(b_n) \to f(a^+)$. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue dans la question précédente, il vient donc :

   $$0 = |f(a^+) - f(a^+)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

   d'où une $\boxed{\text{contradiction}}$. Ainsi, cette situation est impossible.

5. Supposons maintenant qu'il existe une infinité de termes a_n tels que $a_n < a$. Comme ci-dessus, quitte à extraire, on peut supposer que cette inégalité est satisfaite pour tous les termes de la suite. On construit comme ci-dessus une suite (b_n), vérifiant cette fois $a_n - (a - a_n) \leqslant b_n \leqslant a_n$ et telle que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (cette inégalité impose de laisser les b_n à gauche des a_n, ce qui complique un peu les choses ici).

   La suite du raisonnement est la même : dans un premier temps, l'inégalité triangulaire amène

   $$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   De plus, puisque $a_n \to a$, le théorème d'encadrement assure que $b_n \to a$, et comme ci-dessus, on obtient une contradiction en passant l'inégalité précédente à la limite (on obtient cette fois à gauche $|f(a^-) - f(a^-)|$). Ainsi, ce cas est aussi $\boxed{\text{contradictoire}}$.

6. Les deux seuls cas possibles amenant des contradictions, en en déduit que $\boxed{D_\varepsilon \text{ est fini}}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}$ est au plus dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles finis, donc l'ensemble des points de discontinuité à gauche est au plus dénombrable d'après la question 1.

On fait de même pour l'ensemble des points de discontinuité à droite. L'ensemble des points de discontinuité de f est alors l'union des deux, donc encore au plus dénombrable.

On se débarrasse ensuite de la contrainte sur I en remarquant que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée f sur $\mathbb{R}$, est l'union des ensembles de points de discontinuité sur $[-n, n]$. Ainsi, il s'agit encore d'une union dénombrables d'ensembles au plus dénombrables.

Donc $\boxed{f \text{ admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités}}$.

Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé

1. Si A est fini, il suffit de prendre $\mathbb{1}_A$, dont les limites à gauche et à droite en tous points sont nulles (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe ε tel que $B(x, \varepsilon)$ ne contienne aucun point de A, sauf éventuellement x lui-même, du fait que A est fini ; il suffit de prendre $\varepsilon = \min_{a \in A \setminus \{x\}}(|x - a|)$) De plus on a clairement la continuité en tout $x \notin A$, et une discontinuité en $x \in A$,

   Ainsi, il s'agit d'une $\boxed{\text{fonction réglée dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement } A}$.

2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{]a_n, +\infty[}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les termes $f_n(x)$ sont tous positifs ou nuls, et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
   Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on déduit du TCSTP que $\boxed{\sum f_n(x) \text{ converge}}$.

   (b) Les fonctions f_n sont toutes croissantes de façon évidente. Soit alors $x \leqslant y$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f_n(x) \leqslant f_n(y).$$
   Ainsi, en sommant entre 0 et $+\infty$, la convergence étant assurée par la question précédente, il vient
   $$f(x) \leqslant f(y),$$
   donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$.

   (c) Soit $x < y$.
   $$f(y) - f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)).$$
   Or, par définition, $f_n(y) - f_n(x) = 0$ si $a_n \leqslant x < y$ (les deux termes sont nuls), ou si $x < y < a_n$ (les deux termes sont égaux à 1), et vaut $\frac{1}{2^n}$ sinon, c'est-à-dire si $x < a_n \leqslant y$.
   Ainsi, on a bien
   $$\boxed{f(y) - f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)) = \sum_{n \mid x < a_n \leqslant y} \frac{1}{2^n}}.$$

   (d) • Soit $a \in A$, et n_0 tel que $a_{n_0} = a$. On a alors, pour tout $x < a$,
   $$f(a) - f(x) = \sum_{n \mid x < a_n \leqslant a} \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^{n_0}},$$
   Cela contredit l'existence d'une limite à gauche en a (en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0+1}}$). Ainsi, f est discontinue en A.

   • Soit $a \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que
   $$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$
   Comme $\{a_n, n < N\}$ est un ensemble fini ne contenant pas a, il existe η tel que $B(a, \eta)$ ne contienne aucun a_n, $n < N$. Soit alors $x \in]a - \eta, a[$. On a alors (en utilisant la croissance pour la minoration) :
   $$0 \leqslant f(a) - f(x) = \sum_{n \mid x < a_n \leqslant a} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

De même, pour $x \in]a, a+\eta[$,

$$0 \leqslant f(x) - f(a) = \sum_{n \mid a < a_n \leqslant x} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f en a.

- Ainsi, $\boxed{\text{les points de discontinuité de } f \text{ forment exactement l'ensemble } A}$.

  De plus, $\boxed{f \text{ est une fonction réglée, car monotone}}$.
  On a bien montré que tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.