Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 19

– à rendre pour le mardi 12 mai –

Exercice 1

Une suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite pseudo-périodique dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elle appartient à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et s'il existe $p \geqslant 1$ éléments dans $\mathbb{C}$ que l'on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot c_{n-j}.$$

Associons à une suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ quelconque appartenant à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et à un entier naturel n, le déterminant Δ_n défini par la relation suivante :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour que la suite C soit nulle (i.e. tous les termes c_i sont nuls), il faut et il suffit que le déterminant Δ_n soit nul pour toutes les valeurs de l'entier naturel n.
2. Démontrer que si la suite C est pseudo-périodique, les déterminants Δ_n associés sont nuls à partir d'un certain rang.
3. Soient trois entiers fixés p, m et n vérifiant les inégalités :

   $$1 \leqslant p \leqslant m+1 \text{ et } 2m+2 \leqslant n.$$

   Soit une suite C de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ possédant la propriété : *« il existe p éléments de $\mathbb{C}$, que l'on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que pour tout entier k compris entre $m+1$ et $n-1$ $(m+1 \leqslant k \leqslant n-1)$, la relation :*

   $$c_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot c_{k-j}$$

   ait lieu.
   Déterminer, au signe près, l'expression du déterminant Δ_{n-m-1} en fonction du déterminant Δ_m et de la quantité $a = c_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot c_{n-j}$.
4. En déduire que si le déterminant Δ_m n'est pas nul et si le déterminant Δ_{n-m-1} est nul, il vient :

   $$c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot c_{n-j}.$$

5. Démontrer que, pour que la suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit pseudo-périodique, il faut et il suffit qu'il existe un entier $q \geqslant 0$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à q, le déterminant Δ_n soit nul.

Exercice 2

On se donne un polynôme $P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k \, X^k$ unitaire, **à coefficients entiers**, de degré $d \geqslant 1$ et on suppose que ce polynôme $P(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. On note $z_1, \cdots, z_d$ les racines complexes différentes du polynôme $P(X)$.
Dans toute la suite, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; S_n = \sum_{k=1}^{d} z_k^n.$$

On pose également la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_d - A).$$

1. En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, montrer que :
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \; \chi(\lambda) = P(\lambda).$$
2. En déduire l'existence d'une famille $(X_1, \cdots, X_d)$ de vecteurs non nuls dans $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ telle que :
$$\forall k \in [\![1, d]\!], \; AX_k = z_k \cdot X_k.$$
3. Montrer que la famille $(X_1, \cdots, X_d)$ est une base de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$.
4. En déduire l'existence d'une matrice inversible $Q \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que :
$$Q^{-1} A Q = \mathrm{Diag}(z_1, \cdots, z_d).$$
5. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité S_n est un entier.