VECTEURS ALÉATOIRES

Exercice 1. [○]

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite numérotée k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite. On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme). Déterminer $E(Y)$ puis un équivalent de $E(Y)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. [○]

On lance un dé honnète et on note X le nombre obtenu. On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. [$\star$]

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes les trois la loi uniforme sur $[\![1; 2n]\!]$. Calculer $P(X = Y)$, $P(X \geqslant 2Y)$ et $P(X + Y \leqslant Z)$.

Exercice 4. [$\star$]

Tic et Tac conservent leurs noisettes au creux d'un arbre (leur garde-manger). On y trouve autant de noisettes véreuses que de non-véreuses. Les premières sont indiscernables des autres.

1. Tic choisit n noisettes puis c'est au tour de Tac de faire de même. On note I (respectivement A) le nombre de noisettes véreuses choisies par Tic (respectivement par Tac).
   a) Soit N le nombre total de noisettes du garde-manger. Préciser la loi de I et, pour tout $k \in I(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de A sachant $(I = k)$.
   On suppose dorénavant que N est très grand devant n. Donner, dans ce cas, les lois de I et A et préciser alors une propriété du couple (I, A).
   b) Trouver la probabilité que Tic et Tac aient le même nombre de noisettes véreuses.
2. Pour éviter les noisettes véreuses, Tic et Tac s'adressent à Donald qui sait, lui, reconnaître les bonnes noisettes des mauvaises. Tic demande à Donald de lui choisir n noisettes pour son goûter et Tac, plus gourmand, lui en demande le double. Donald, un peu facétieux, glisse une (et une seule) noisette véreuse dans chacun des deux goûters. Tic et Tac les mangent ensuite une par une, à la même vitesse. On note $\widehat{I}$ et $\widehat{A}$ les variables aléatoires égales aux rang d'apparition de la noisette véreuse respectivement pour Tic et Tac.
   a) Déterminer les lois de $\widehat{I}$ et $\widehat{A}$.
   b) Déterminer la probabilité que Tic découvre sa noisette véreuse avant Tac. Vers quelle limite tend cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5. [○]

Guillaume Tell tire n fois sur une pomme posée sur la tête de son fils, avec la probabilité $p \in]0; 1[$ d'atteindre la pomme à chaque tir. À l'issue de ces n tirs, son fils (s'il est toujours vivant) comptabilise le nombre de fois où la pomme a été atteinte mais, comme il est distrait, le petit Tell (si petit qu'on le disait mini) donne le bon résultat une fois sur deux et le bon résultat plus 1 le reste du temps. On note X ce résultat.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer la loi de X et retrouver ainsi son espérance.

Exercice 6. [$\star$]

On note X le nombre d'enfants d'une famille, F le nombre de filles et G le nombre de garçons de sorte que $X = F + G$. On suppose qu'il y a autant de filles que de garçons à la naissance et que les naissances sont indépendantes (du point de vue du sexe des enfants).

1. On suppose que X est constante. À l'aide de $V(F+G)$, calculer $\mathrm{Cov}(F, G)$. Interpréter.
2. On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0; 1[$. Déterminer les lois de F et G. Calculer $\mathrm{Cov}(F, G)$ et donner son signe. *Donnée :* $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.

Exercice 7. [$\star$] (Les lapins de Chantal)

Un groupe de ℓ lapins surgit devant un groupe de c chasseurs. Chaque lapin, armé d'un fusil à carottes, tire sur un chasseur au hasard et le touche avec la probabilité $p \in]0; 1[$. Calculer l'espérance du nombre C de chasseurs carottés.

Exercice 8. [$\star$] (Toute hypergéométrique a la même loi qu'une somme de Bernoullis)

On considère une urne contenant N boules avec une proportion p de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires. On effectue dans cette urne une succession de n tirages sans remise (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le k-ème tirage donne une boule blanche et 0 sinon. Enfin, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, de sorte que S_n suit la loi $\mathscr{H}(N; n, p)$.

On veut démontrer que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, X_k suit la loi $\mathscr{B}(p)$ et retrouver l'espérance et la variance de la loi $\mathscr{H}(N; n, p)$. On suppose donc que ces valeurs ne sont pas connues.

1. On démontre, de deux manières, que les X_k sont identiquement distribuées sur la loi $\mathscr{B}(p)$.
   a) Démontrer que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]\,,\ P(X_{k+1} = 1) = \big(Np - E(S_k)\big)/(N-k)$ et conclure.
   b) À l'aide d'un dénombrement, démontrer que $\forall k \in [\![1; n]\!]\,,\ P(X_k = 1) = p$ et conclure.
2. Démontrer que $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ (i \neq j) \Rightarrow \big(P(X_i = 1, X_j = 1) = p(Np-1)/(N-1)\big)$.
3. Retrouver l'espérance et la variance de la loi $\mathscr{H}(N; n, p)$.

Exercice 9. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. On pose $U = X - Y$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer les lois de U et V. Sont-ce des variables indépendantes ?

Exercice 10. [$\star$]

On lance deux dés et on note S la somme des points obtenus. On voudrait savoir s'il est possible de truquer les dés pour que S suive une loi uniforme.

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![m; n]\!]$ où $m < n$. Démontrer que l'application $\varphi_X : t \longmapsto E(t^X)/t^m$ est une fonction polynomiale dont on majorera le degré.
2. On suppose que S suit une loi uniforme. Déterminer φ_S et préciser les racines de ce polynôme (dans $\mathbb{C}$). Justifier que l'on ne peut pas trouver deux variables A et B telles que $A(\Omega) = B(\Omega) = [\![1; 6]\!]$ et $\varphi_S = \varphi_A \varphi_B$. Conclure.

Exercice 11. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. On répartit n jetons numérotés de 1 à n dans n boîtes numérotées elles aussi numérotées de 1 à n de telle sorte que chaque boîte contienne un seul jeton.

1. a) On fixe $k \in [\![1; n]\!]$ et l'on considère $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Déterminer la probabilité p_k de l'événement « pour tout $\ell \in [\![1; k]\!]$, le jeton i_ℓ est dans la boîte i_ℓ » ?
   b) Déterminer la probabilité π_n de l'événement « aucun jeton n'est dans la boîte portant son numéro ». Quelle est la limite de π_n lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton i est dans la boîte i et 0 sinon. On pose $X = X_1 + \cdots + X_n$ le nombre de jetons qui sont dans une boîte portant leur numéro.
   a) Pour $i \in [\![1; n]\!]$, déterminer la loi de X_i. En déduire l'espérance de X.
   b) Pour $i, j \in [\![1; n]\!]$ distincts, calculer $P(X_i = X_j = 1)$. En déduire la variance de X.

VECTEURS ALÉATOIRES

Exercice 1. [∘]

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite numérotée k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite. On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme). Déterminer $E(Y)$ puis un équivalent de $E(Y)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. [∘]

On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu. On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. [⋆]

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes les trois la loi uniforme sur $[\![1; 2n]\!]$. Calculer $P(X = Y)$, $P(X \geqslant 2Y)$ et $P(X + Y \leqslant Z)$.

Exercice 4. [⋆]

Tic et Tac conservent leurs noisettes au creux d'un arbre (leur garde-manger). On y trouve autant de noisettes véreuses que de non-véreuses. Les premières sont indiscernables des autres.

1. Tic choisit n noisettes puis c'est au tour de Tac de faire de même. On note I (respectivement A) le nombre de noisettes véreuses choisies par Tic (respectivement par Tac).
   a) Soit N le nombre total de noisettes du garde-manger. Préciser la loi de I et, pour tout $k \in I(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de A sachant $(I = k)$.
   On suppose dorénavant que N est très grand devant n. Donner, dans ce cas, les lois de I et A et préciser alors une propriété du couple (I, A).
   b) Trouver la probabilité que Tic et Tac aient le même nombre de noisettes véreuses.
2. Pour éviter les noisettes véreuses, Tic et Tac s'adressent à Donald qui sait, lui, reconnaître les bonnes noisettes des mauvaises. Tic demande à Donald de lui choisir n noisettes pour son goûter et Tac, plus gourmand, lui en demande le double. Donald, un peu facétieux, glisse une (et une seule) noisette véreuse dans chacun des deux goûters. Tic et Tac les mangent ensuite une par une, à la même vitesse. On note $\widehat{I}$ et $\widehat{A}$ les variables aléatoires égales aux rang d'apparition de la noisette véreuse respectivement pour Tic et Tac.
   a) Déterminer les lois de $\widehat{I}$ et $\widehat{A}$.
   b) Déterminer la probabilité que Tic découvre sa noisette véreuse avant Tac. Vers quelle limite tend cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5. [∘]

Guillaume Tell tire n fois sur une pomme posée sur la tête de son fils, avec la probabilité $p \in]0; 1[$ d'atteindre la pomme à chaque tir. À l'issue de ces n tirs, son fils (s'il est toujours vivant) comptabilise le nombre de fois où la pomme a été atteinte mais, comme il est distrait, le petit Tell (si petit qu'on le disait mini) donne le bon résultat une fois sur deux et le bon résultat plus 1 le reste du temps. On note X ce résultat.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer la loi de X et retrouver ainsi son espérance.

Exercice 6. [$\star$]

On note X le nombre d'enfants d'une famille, F le nombre de filles et G le nombre de garçons de sorte que $X = F + G$. On suppose qu'il y a autant de filles que de garçons à la naissance et que les naissances sont indépendantes (du point de vue du sexe des enfants).

1. On suppose que X est constante. À l'aide de $V(F+G)$, calculer $\operatorname{Cov}(F,G)$. Interpréter.
2. On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0;1[$. Déterminer les lois de F et G. Calculer $\operatorname{Cov}(F,G)$ et donner son signe. *Donnée :* $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.

Exercice 7. [$\star$] (Les lapins de Chantal)

Un groupe de ℓ lapins surgit devant un groupe de c chasseurs. Chaque lapin, armé d'un fusil à carottes, tire sur un chasseur au hasard et le touche avec la probabilité $p \in]0;1[$. Calculer l'espérance du nombre C de chasseurs carottés.

Exercice 8. [$\star$] (Toute hypergéométrique a la même loi qu'une somme de Bernoullis)

On considère une urne contenant N boules avec une proportion p de boules blanches et une proportion $q = 1-p$ de boules noires. On effectue dans cette urne une succession de n tirages sans remise (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le k-ème tirage donne une boule blanche et 0 sinon. Enfin, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, de sorte que S_n suit la loi $\mathscr{H}(N;n,p)$.

On veut démontrer que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, X_k suit la loi $\mathscr{B}(p)$ et retrouver l'espérance et la variance de la loi $\mathscr{H}(N;n,p)$. On suppose donc que ces valeurs ne sont pas connues.

1. On démontre, de deux manières, que les X_k sont identiquement distribuées sur la loi $\mathscr{B}(p)$.
   a) Démontrer que $\forall k \in [\![1;n-1]\!]\,,\ P(X_{k+1}=1) = \big(Np - E(S_k)\big)/(N-k)$ et conclure.
   b) À l'aide d'un dénombrement, démontrer que $\forall k \in [\![1;n]\!]\,,\ P(X_k=1) = p$ et conclure.
2. Démontrer que $\forall i,j \in [\![1;n]\!]\,,\ (i \neq j) \Rightarrow \big(P(X_i=1, X_j=1) = p(Np-1)/(N-1)\big)$.
3. Retrouver l'espérance et la variance de la loi $\mathscr{H}(N;n,p)$.

Exercice 9. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On pose $U = X - Y$ et $V = \min(X,Y)$. Déterminer les lois de U et V. Sont-ce des variables indépendantes ?

Exercice 10. [$\star$]

On lance deux dés et on note S la somme des points obtenus. On voudrait savoir s'il est possible de truquer les dés pour que S suive une loi uniforme.

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![m;n]\!]$ où $m < n$. Démontrer que l'application $\varphi_X : t \longmapsto E(t^X)/t^m$ est une fonction polynomiale dont on majorera le degré.
2. On suppose que S suit une loi uniforme. Déterminer φ_S et préciser les racines de ce polynôme (dans $\mathbb{C}$). Justifier que l'on ne peut pas trouver deux variables A et B telles que $A(\Omega) = B(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et $\varphi_S = \varphi_A \varphi_B$. Conclure.

Exercice 11. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. On répartit n jetons numérotés de 1 à n dans n boîtes numérotées elles aussi numérotées de 1 à n de telle sorte que chaque boîte contienne un seul jeton.

1. a) On fixe $k \in [\![1;n]\!]$ et l'on considère $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Déterminer la probabilité p_k de l'événement « pour tout $\ell \in [\![1;k]\!]$, le jeton i_ℓ est dans la boîte i_ℓ » ?
   b) Déterminer la probabilité π_n de l'événement « aucun jeton n'est dans la boîte portant son numéro ». Quelle est la limite de π_n lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton i est dans la boîte i et 0 sinon. On pose $X = X_1 + \cdots + X_n$ le nombre de jetons qui sont dans une boîte portant leur numéro.
   a) Pour $i \in [\![1;n]\!]$, déterminer la loi de X_i. En déduire l'espérance de X.
   b) Pour $i, j \in [\![1;n]\!]$ distincts, calculer $P(X_i = X_j = 1)$. En déduire la variance de X.