DÉNOMBREMENT

Exercice 1. [∘]

Dans une classe de 26 élèves, 22 étudient l'anglais, 16 l'allemand et 10 l'espagnol. On sait en outre que 12 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 4 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 8 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Exercice 2. [∘]

Les dominos sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. Chaque ensemble contient entre 0 et 6 points. Une boîte de dominos contient tous les dominos différents qu'il est possible de constituer. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?

Exercice 3. [∘] (À connaître !)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de suites strictement croissantes constituées de p nombres de l'intervalle $[\![1;n]\!]$?

Exercice 4. [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une grenouille grimpe un escalier de n marches. À chaque bond, elle peut sauter ou bien de la marche k à la marche $k+1$ ou bien de la marche k à la marche $k+2$. On note u_n le nombre de façons différentes pour la grenouille de grimper l'escalier. On convient que $u_0 = 1$.

1. En discutant sur le dernier saut de la grenouille, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. Indépendamment de la première question, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k},$$
où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$.
Préciser ce que représente cette somme dans le triangle de Pascal et retrouver ainsi le résultat de la question 1.

Exercice 5. [∘]

Le jeu d'échec se joue sur un échiquier de 8 lignes et 8 colonnes. Une tour peut prendre toute pièce située dans sa ligne ou sa colonne. De combien de façons peut-on placer 8 tours de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres ?

Exercice 6. [⋆]

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions différentes (on considérera différentes deux configurations qui diffèrent par une rotation) :

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

Exercice 7. [$\star$] (Permutation sans point fixe)

Avant un spectacle, 4 personnes (Laurent, Olivier, Florent et Patrick) déposent leurs chapeaux à la loge. En fin du spectacle, un peu pressés, ils récupèrent chacun un chapeau au hasard.

On voudrait dénombrer l'ensemble M des situations dans lesquelles aucun des quatre ne récupère son chapeau. On note L (respectivement O, F et P) l'ensemble des situations dans lesquelles Laurent (respectivement Olivier, Florent et Patrick) récupère son chapeau.

Calculer $\text{card}(L \cup O \cup F \cup P)$ et en déduire $\text{card}(M)$.

Généraliser.

Exercice 8. [$\circ$]

Dans l'ancienne formule de l'Euromillions, le joueur remplissait son bulletin de jeu en cochant 5 cases dans une première grille avec 50 numéros puis 2 cases dans une seconde grille avec 10 numéros (les « étoiles »). Dans la nouvelle formule de l'Euromillions (en cours depuis le 10 mai 2011), le joueur doit toujours cocher 5 cases dans une première grille avec 50 numéros puis 2 cases dans une seconde grille avec 11 numéros (et non plus 10).

Déterminer, pour chacune des versions, le nombre de bulletins différents que l'on peut remplir.

Par quel facteur le nombre de bulletins différents a-t-il été multiplié dans la nouvelle formule par rapport à l'ancienne ?

Exercice 9. [$\circ$]

1. On dispose de lettres accentuées permettant de distinguer E, É et È. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot THÉORÈME ?
2. On supprime les accents. Combien reste-t-il d'anagrammes ? *On veut deux démonstrations.*

Exercice 10. [$\star$]

Pour le 14 juillet, un artificier s'occupe d'un feu d'artifice composé de 8 blocs comportant chacun quatre fusées. Le pupitre de commande de mise à feu possède 32 boutons, correspondant chacun à une fusée. L'artificier appuie simultanément et au hasard sur 5 boutons.

1. Dénombrer tous les cas possibles.
2. Dénombrer tous les cas où les 5 fusées partent de 5 blocs différents.
3. Dénombrer tous les cas où 3 fusées partent d'un même bloc et les deux autres d'un même bloc, différent du précédent.
4. Dénombrer tous les cas où 2 fusées partent d'un même bloc, 2 d'un autre bloc et 1 d'un autre encore.
5. Dénombrer tous les cas où 2 fusées partent d'un même bloc et 3 de trois blocs différents entre eux et différents du précédent.

Exercice 11. [$\star$]

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu de 52 cartes telles que :

1. elles contiennent exactement un roi ?
2. elles contiennent au plus un roi ?
3. elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
4. elles contiennent 5 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 4 cartes d'une troisième ?

Exercice 12. [$\star$]

Monsieur DELABOUZE, aviculteur industriel, vend des poulets élevés en batterie. Pour des raisons commerciales, il souhaite changer le nom de son entreprise. Le nouveau nom doit comporter exactement quatre lettres choisies parmi les lettres du nom DELABOUZE.

1. Combien peut-il former de noms différents ?
2. Combien peut-il former de noms dont les lettres sont dans le même ordre que dans le nom DELABOUZE.

Exercice 13. $[\bigstar]$

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

Une combinaison à répétition de p éléments de E est une façon de choisir (sans ordre) p éléments, <u>distincts ou non</u>, dans E. Une telle combinaison est représentée formellement par un n-uplet d'entiers $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $k_1 + \cdots + k_n = p$, chaque k_i indiquant le nombre d'occurrences de x_i dans la combinaison.

On note $\left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}\right]$ le nombre de combinaisons à répétition de p éléments de E, égal au nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $k_1 + \cdots + k_n = p$.

1. On propose plusieurs méthodes indépendantes pour démontrer que $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \dbinom{n+p-1}{p}$.
   a) On code une combinaison par un tableau de $n+p-1$ cases blanches ou noires, constitué de n blocs de cases blanches de longueurs respectives $k_1, ..., k_n$, séparés par $n-1$ cases noires. Par exemple, la combinaison $(1, 3, 1, 0, 1)$ est codée par □■□□□■□■■□.

      À l'aide de ce codage, aboutir au résultat attendu.
   b) Déterminer le nombre de n-uplets d'entiers <u>non nuls</u> $(\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ solutions de $\ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p$ puis conclure.
   c) $\alpha]$ Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1; n]\!]$ vers $[\![0; m]\!]$, où $m \in \mathbb{N}$

      $\beta]$ Démontrer qu'une application $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![0; p]\!]$ est croissante si, et seulement si, $f + \mathrm{Id} - 1$ est strictement croissante. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1; n]\!]$ vers $[\![0; p]\!]$.

      $\gamma]$ Déterminer le nombre de solutions $(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'inéquation $j_1 + \cdots + j_n \leqslant p$ puis conclure.
2. Vérifier que
$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{\text{« } p \text{ qui montent depuis } n \text{ »}}{\text{« } p \text{ qui montent depuis } 1 \text{ »}}.$$
3. Application : Les dominos à n points sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. Chaque ensemble contient entre 0 et n points. Une boîte de dominos contient tous les dominos différents qu'il est possible de constituer. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?

Exercice 14. $[\star]$

On choisit 19 nombres dans la suite arithmétique $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$. Démontrer que deux de ces nombres ont une somme égale à 104.

Exercice 15. $[\star]$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un nombre rationnel p/q avec $1 \leqslant q \leqslant N$ tel que $|\alpha - p/q| < 1/(Nq)$.

Indication : Considérer les nombres $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ où $k \in [\![0; N]\!]$ et utiliser le principe des tiroirs.

Exercice 16. $[\circ]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 17. $[\circ]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer les bijections $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![1; n]\!]$ qui respectent la parité, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $(k \text{ pair}) \Longrightarrow \big(f(k) \text{ pair}\big)$?
2. Dénombrer les applications $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![1; n]\!]$ qui respectent la parité.

Exercice 18. $[\star]$

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Dénombrer les lois de composition internes sur E.
2. Dénombrer celles qui admettent un élément neutre.
3. Dénombrer celles qui sont commutatives.
4. Dénombrer celles qui sont commutatives et qui admettent un élément neutre.

Exercice 19. [$\star$]

1. De combien de façons peut-on constituer des trinômes de colle dans une classe de 24 élèves
   a) lorsque les groupes sont numérotés ?
   b) lorsqu'ils ne le sont pas ?
2. Plus généralement, combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

Exercice 20. [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ème *nombre de Bell* le nombre B_n de partitions de l'ensemble $E_n = [\![1;n]\!]$ (avec $B_0 = 1$ puisque $\{\varnothing\}$ est la seule partition de $E_0 = \varnothing\}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Indication : Discuter suivant le cardinal du sous-ensemble de la partition qui contient $n+1$.

Exercice 21. [$\circ$]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et A, B deux ensembles disjoints ayant tous les deux n éléments. En dénombrant de deux manières le nombre de façons de choisir n éléments dans $A \cup B$, démontrer que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 22. [$\star$]

Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card} X \qquad \text{et} \qquad \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} (-1)^{\operatorname{card} X}$$

Exercice 23. [$\star$]

Soit E un ensemble infini.

1. Démontrer que E contient un sous-ensemble infini dénombrable.
2. Soit $x \in E$. Démontrer que $E \setminus \{x\}$ est équipotent à E.

Exercice 24. [$\star$]

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. a) On suppose que A est dénombrable. Démontrer que $f(A)$ est dénombrable.
   b) On suppose que f est injective et que $f(A)$ est dénombrable. Démontrer que A est dénombrable.
2. On suppose que A est <u>non</u> dénombrable et f injective. Démontrer il existe $x_0 \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 25. [$\star$]

Démontrer que l'ensemble $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable de deux manières : d'une part en utilisant le procédé diagonal et d'autre part en justifiant que $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.