RELATIONS

♦ ***Exercice 1.*** [◦]
On considère la relation // sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad \big((a,b) \,/\!/\, (c,d)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad (ad - bc = 0).$$

Démontrer que // est une relation d'équivalence.

Il est clair que // est bien une relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. De plus, on a :

- Réflexivité :
  Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a bien $(a,b) \,/\!/\, (a,b)$ puisque $ab - ba = 0$.
- Transitivité :
  Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $(a,b) \,/\!/\, (c,d)$ et $(c,d) \,/\!/\, (e,f)$, c'est-à-dire $ad - bc = 0$ et $cf - de = 0$. Cela implique, grâce à Binet, que

$$af = ad\frac{f}{d} = bc\frac{f}{d} = \frac{b}{d}cf = \frac{b}{d}de = be,$$

  d'où $af - be = 0$, ce qui singifie que $(a,b) \,/\!/\, (e,f)$.
- Symétrie :
  Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $(a,b) \,/\!/\, (c,d)$, c'est-à-dire $ad - bc = 0$. Alors $cb - da = 0$, d'où $(c,d) \,/\!/\, (a,b)$.

En conclusion,

$$\boxed{/\!/ \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

♦ ***Exercice 2.*** [◦]
Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ définie par

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad (X \mathscr{R} Y) \quad \Longleftrightarrow \quad (X \cap A = Y \cap A).$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Déterminer la classe d'équivalence de X.

1. Il est clair que $\mathscr{R}$ est bien une relation sur $\mathscr{P}(E)$. De plus, on a :
   Réflexivité :
   Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a bien $X \mathscr{R} X$ puisque $X \cap A = X \cap A$.
   Transitivité :
   Soient $X, Y, Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \mathscr{R} Y$ et $Y \mathscr{R} Z$, c'est-à-dire $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap A = Z \cap A$. Cela implique que $X \cap A = Z \cap A$, d'où $X \mathscr{R} Z$.
   Symétrie :
   Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \mathscr{R} Y$, c'est-à-dire $X \cap A = Y \cap A$. Alors $Y \cap A = X \cap A$ d'où $Y \mathscr{R} X$.
   En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

2. On a

$$\begin{aligned}(X \mathscr{R}\, Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad (X \cap A = Y \cap A)\\ &\Longleftrightarrow \quad Y = (X \cap A) \cup B \quad \text{où} \quad B \in \mathscr{P}(\overline{A}),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\widehat{X} = \{(X \cap A) \cup B : B \in \mathscr{P}(\overline{A})\}.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [○]
On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x \mathscr{R}\, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2 - y^2 = x - y).$$

1. Vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient.

1. Il est clair que $\mathscr{R}$ est bien une relation sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :
   Réflexivité :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \mathscr{R}\, x$ puisque $x^2 - x^2 = x - x$.
   Transitivité :
   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R}\, y$ et $y \mathscr{R}\, z$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$. Cela implique que $x^2 - z^2 = x^2 - y^2 + (y^2 - z^2) = x - y + y - z = x - z$, d'où $x \mathscr{R}\, z$.
   Symétrie :
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R}\, y$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x - y$. Alors $y^2 - x^2 = y - x$ d'où $y \mathscr{R}\, x$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\mathscr{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} y \in \widehat{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 - y + x - x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = x \quad \text{ou} \quad y = 1 - x \end{aligned}$$
   donc
   $$\widehat{x} = \{x, 1 - x\}.$$
   En conclusion, on a
   $$\boxed{E/\mathscr{R} = \big\{\{x, 1 - x\} : x \geqslant 1/2\big\}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [○]
Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation sur E qui est transitive et symétrique.

Démontrons que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, autrement dit que $\mathscr{R}$ est automatiquement réflexive. Soit $a \in E$. Considérons $b \in E$ tel que $a \mathscr{R}\, b$. Par symétrie de $\mathscr{R}$, on a $b \mathscr{R}\, a$. On a donc $(a \mathscr{R}\, b$ et $b \mathscr{R}\, a)$, ce qui implique, par transitivité de $\mathscr{R}$, que $a \mathscr{R}\, a$. Ainsi $\mathscr{R}$ est bien réflexive, ce qui démontre que c'est une relation d'équivalence.

Trouver l'erreur dans ce raisonnement ! Donner un contre-exemple.

On a seulement démontré que $a \mathscr{R}\, a$ pour tout élément $a \in E$ pour lequel il existe un élément $b \in E$ tel que $a \mathscr{R}\, b$.

La relation $\mathscr{R}$ sur $\{0, 1, 2\}$ définie par $(n \mathscr{R}\, m) \iff (|m - n| \leqslant 1$ et $mn \neq 0)$ dont le tableau est

$\mathscr{R}$	0	1	2
0			
1		×	×
2		×	×

est transitive, symétrique mais pas réflexive.

La relation vide est également transitive, symétrique mais pas réflexive.

♦ ***Exercice 5.*** [∘] (Définition faible d'une relation d'équivalence)

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est symétrico-transitive lorsque, pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z) \Longrightarrow (z \mathscr{R} x)$.

Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrico-transitive.

- L'implication directe $\boxed{\Longrightarrow}$ est évidente.
- Démontrons $\boxed{\Longleftarrow}$. On suppose que $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrico-transitive. Pour démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, il reste à prouver qu'elle est symétrique et transitive.
  - ▷ En faisant $z = y$ dans la symétrico-transitivité, on a $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} y) \Longrightarrow (y \mathscr{R} x)$, c'est-à-dire $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y) \Longrightarrow (y \mathscr{R} x)$ puisque $y \mathscr{R} y$ est toujours vrai (par réflexivité). Donc $\mathscr{R}$ est symétrique.
  - ▷ En mettant bout à bout la symétrico-transitivité et la symétrie de la relation $\mathscr{R}$, on obtient $\forall x, y, z \in E,\ (x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z) \Longrightarrow (z \mathscr{R} x) \Longrightarrow (x \mathscr{R} z)$, ce qui démontre que $\mathscr{R}$ est transitive.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{R} \text{ est une relation d'équivalence si, et seulement si, } \mathscr{R} \text{ est réflexive et symétrico-transitive.}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [∘]

Déterminer toutes les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments (on donnera les tableaux ou les diagrammes de Hasse).

On pose $E = \{a; b; c\}$ et on note $\preccurlyeq$ la relation d'ordre sur E qui est recherchée. On dit qu'un élément est isolé (pour $\mathscr{R}$) s'il n'est comparable qu'à lui-même. On distingue trois cas :

- <u>Premier cas : Les trois éléments sont isolés</u>

  On reconnaît l'égalité :

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		
b		×	
c			×

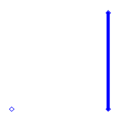
- <u>Deuxième cas : Un élément est isolé et les deux autres sont comparables</u>

  On trouve 6 ordres, tous partiels :

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×	×	
b		×	
c			×

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		
b		×	×
c			×

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		×
b		×	
c			×



$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		
b	×	×	
c			×

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		
b		×	
c		×	×

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	×		
b		×	
c	×		×

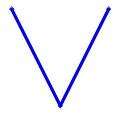
- <u>Troisième cas : Les trois éléments sont comparables deux à deux</u>

  On trouve 6 ordres partiels :

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$	
c			$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		
b	$\times$	$\times$	$\times$
c			$\times$

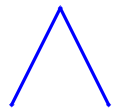
$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		
b		$\times$	
c	$\times$	$\times$	$\times$



$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		
b	$\times$	$\times$	
c	$\times$		$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	
b		$\times$	
c		$\times$	$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		$\times$
b		$\times$	$\times$
c			$\times$



  et 6 ordres totaux :

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$	$\times$
c			$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$	
c		$\times$	$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		$\times$
b	$\times$	$\times$	$\times$
c			$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		
b	$\times$	$\times$	$\times$
c	$\times$		$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	
b		$\times$	
c	$\times$	$\times$	$\times$

$\preccurlyeq$	a	b	c
a	$\times$		
b	$\times$	$\times$	
c	$\times$	$\times$	$\times$

♦ ***Exercice 7.*** [∘]

On considère la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad (n \preccurlyeq m) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists p \in \mathbb{N}, \quad m = n^p\big).$$

Vérifier que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Il est clair que $\preccurlyeq$ est bien une relation sur $\mathbb{N}$. De plus, on a :

- <u>Réflexivité :</u>

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $n \preccurlyeq n$ car $n = n^1$.

- <u>Transitivité :</u>

  Soient $n, m, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $n \preccurlyeq m$ et $m \preccurlyeq \ell$, c'est-à-dire qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $m = n^p$ et $\ell = m^q$. Alors $\ell = n^{pq}$, donc $n \preccurlyeq \ell$.

- Antisymétrie :
  Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \preccurlyeq m$ et $m \preccurlyeq n$. Il existe alors $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $m = n^p$ et $n = m^q$. Il s'ensuit que $m = m^{pq}$.
  Si $m = 0$, la relation $m = n^p$ donne $n^p = 0$, ce qui force $n = 0$. Donc $m = n$.
  Si $m \neq 0$, la relation $m = m^{pq}$ se simplifie en $m^{pq-1} = 1$, ce qui donne en passant au logarithme $(pq-1)\ln(m) = 0$. Si $m = 1$, la relation $n = m^q$ nous dit que $n = 1$ d'où $m = n$. Si $m \neq 1$, on a $pq = 1$, c'est-à-dire $p = q = 1$ puisque $p, q \in \mathbb{N}$, ce qui donne à nouveau $n = m$.
  Dans tous les cas, on a bien $m = n$.

En conclusion,

$$\boxed{\preccurlyeq \text{ est une relation d'ordre.}}$$

Pour $\preccurlyeq$, les nombres 2 et 3 ne sont pas comparables, donc

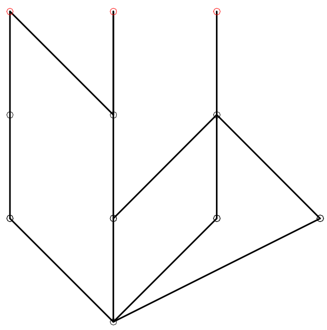
$$\boxed{\preccurlyeq \text{ n'est pas un ordre total.}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$] (Élément maximal)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide. On dit qu'un élément $m \in E$ est un *élément maximal* de E lorsque $\forall x \in E,\ (m \preccurlyeq x) \Longrightarrow (x = m)$.

1. Interpréter la notion d'élément maximal sur un diagramme de Hasse. Que dire dans le cas où l'ordre est total ?
2. a) Un élément maximal de E est-il nécessairement le plus grand élément de E ?
   b) Justifier que si E admet un plus grand élément alors c'est le seul élément maximal de E.
   c) Si E admet un unique élément maximal, est-il nécessairement le plus grand élément de E ?
   d) On suppose que E est fini et admet un unique élément maximal m. Démontrer que m est le plus grand élément de E.
3. On suppose que E est fini. Démontrer que toute partie non vide de E admet au moins un élément maximal.

1. Voici un diagramme de Hasse avec, en rouge, les éléments maximaux :



On constate que

$$\boxed{\text{sur un diagramme de Hasse, un élément maximal est au sommet d'une branche.}}$$

On constate également qu'

$$\boxed{\text{il peut y avoir plusieurs éléments maximaux.}}$$

De plus,

$$\boxed{\text{dans le cas où l'ordre est total, il y a au plus un élément maximal.}}$$

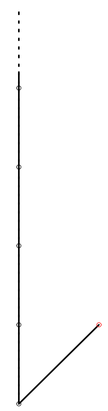
2. a) Le fait même qu'il puisse y avoir plusieurs éléments maximaux nous dit qu'

$$\boxed{\text{un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand élément.}}$$

b) Soit M le plus grand élément de E.
Il est clair que M est un élément maximal.
Soit m un élément maximal de E. Comme M est le plus grand élément de E, on a $m \preccurlyeq M$ et comme m est maximal, on a $M = m$.
Cela démontre que

$$\boxed{\text{si } E \text{ admet un plus grand élément alors c'est le seul élément maximal de } E.}$$

c) Non ! Le diagramme de Hasse suivant le prouve :



d) Démontrons que m est le plus grand élément de E, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ x \preccurlyeq m$.
Soit $x \in E$.
Si $x = m$, c'est fini. Sinon, $x \neq m$ et donc x n'est pas maximal (puisque m est le seul élément maximal). Il existe alors $x_1 \in E$ tel que $x \prec x_1$.
Si $x_1 = m$, alors $x \prec x_1 = m$ et c'est fini. Sinon, $x_1 \neq m$ et donc x_1 n'est pas maximal. Il existe alors $x_2 \in E$ tel que $x_1 \prec x_2$.
...
Comme E est finie, le processus s'arrête nécessairement, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n = m$. Alors $x \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = m$ et c'est gagné.
Donc

$$\boxed{\text{si } E \text{ est finie et admet un unique élément maximal, alors c'est le plus grand élément de } E.}$$

3. Soit A une partie non vide de E. Par l'absurde, on suppose que A ne possède pas d'élément maximal. Soit a_0 un élément de A. Comme a_0 n'est pas maximal dans A (puisqu'aucun élément ne l'est), il existe a_1 dans A tel que $a_1 \succ a_0$. Comme a_1 n'est pas maximal dans A, il existe a_2 dans A tel que $a_2 \succ a_1$. En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite strictement croissante $a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots$ d'éléments de A. Cela implique que A est infinie et donc que E l'est aussi. C'est absurde ! Donc

$$\boxed{\text{toute partie non vide de } E \text{ admet au moins un élément maximal.}}$$

<u>Une vieille démo</u>
Posons $n = \operatorname{card} E$. Pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, on note

$$\mathscr{P}(p) : \text{« les parties de } E \text{ de cardinal } p \text{ ont toutes au moins un élément maximal »}$$

<u>Initialisation :</u> Les singletons ont bien un élément maximal, à savoir leur unique élément. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $p \in [\![1; n]\!]$ tel que $\mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(p)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(p+1)$. Pour cela, on considère une partie A de E de cardinal $p+1$ et l'on pioche un élément x dans A. Si x est un élément maximal de A, c'est terminé. Sinon, on pose $B = \{y \in A : x \prec y\}$. Comme x n'est pas un élément maximal de A, la partie B n'est pas vide. En outre, B ne contient pas x donc $\operatorname{card} B \leqslant p$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors dans B un élément maximal, noté ℓ. Démontrons qu'il est également maximal dans A, c'est-à-dire $\forall a \in A,\ (\ell \preccurlyeq a) \Longrightarrow (a = \ell)$. Soit $a \in A$ tel que $\ell \preccurlyeq a$. Comme $\ell \in B$, on a $x \prec \ell$. Par transitivité, il s'ensuit que $x \prec a$. Mézalors $a \in B$ donc l'inégalité $\ell \preccurlyeq a$ vue dans B nous dit que $a = \ell$ (par maximalité de ℓ dans B). Donc ℓ est maximal dans A, ce qui démontre $\mathscr{P}(p+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{toute partie non vide de } E \text{ admet au moins un élément maximal.}}$$

♦ ***Exercice 9.*** [⋆]

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est *bien ordonné* lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1. a) Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné. La réciproque est-elle vraie ?
   b) Démontrer qu'un ensemble fini et totalement ordonné est bien ordonné.
2. Démontrer que si $(E, \preccurlyeq)$ et $(E, \succcurlyeq)$ sont bien ordonnés, alors E est un ensemble fini.
3. On dit qu'un élément x de E admet un successeur s dans E lorsque

$$x \prec s \qquad \text{et} \qquad \forall a \in E,\ (x \prec a) \implies (s \preccurlyeq a)$$

   où $\prec$ désigne l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$.
   a) Démontrer que si un élément x de E admet un successeur, alors celui-ci est unique. On le note $\mathrm{succ}(x)$.
   b) Dans le cas où E est bien ordonné, démontrer que, pour tout élément x de E, on a l'alternative suivante : ou bien x est un élément maximal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément plus grand que x dans E) ou bien x admet un successeur.

1. a) Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $(x, y) \in E^2$. La partie $\{x, y\}$ admet un plus petit élément. Si $\min\{x, y\} = x$ alors $x \preccurlyeq y$ et si $\min\{x, y\} = y$ alors $y \preccurlyeq x$. Donc

$$\boxed{\text{un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.}}$$

   L'ensemble $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné mais n'est pas bien ordonné, donc

$$\boxed{\text{un ensemble totalement ordonné n'est pas nécessairement bien ordonné.}}$$

   b) Soient E un ensemble fini et totalement ordonné et A une partie non vide de E. Comme E est fini, A l'est aussi, ce qui permet d'écrire $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Comme E est totalement ordonné, on peut ranger par ordre croissant les éléments de A, ce qui donne $a_{j_1} \prec a_{j_2} \prec \cdots \prec a_{j_n}$ où $(j_1, \ldots, j_n)$ est une permutation de $[\![1; n]\!]$. L'élément a_{j_1} est alors le plus petit élément de A. Donc E est bien ordonné. En conclusion,

$$\boxed{\text{un ensemble fini totalement ordonné est bien ordonné.}}$$

2. Supposons que $(E, \preccurlyeq)$ et $(E, \succcurlyeq)$ sont bien ordonnés et démontrons que E est fini Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que E est infini. Comme $(E, \preccurlyeq)$ est bien ordonné, il admet un plus petit élément x_0. Pour la même raison, $E \setminus \{x_0\}$ admet un plus petit élément x_1. Ensuite, $E \setminus \{x_0, x_1\}$ admet aussi un plus petit élément. Ainsi de suite : on construit une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ qui est strictement croissante (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \prec x_{n+1}$). La suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ n'admet donc pas de plus grand élément alors que c'est une partie de $(E, \succcurlyeq)$ qui est bien ordonné. C'est absurde ! Donc

$$\boxed{E \text{ est fini.}}$$

3. a) Soient a et b deux successeurs de x. Comme a est un successeur de x, on a $x \prec a$. Mézalors, comme b est un successeur de x, on a $b \preccurlyeq a$. En inversant les rôles de a et b, on obtient de même que $a \preccurlyeq b$. Donc $a = b$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si un élément } x \text{ de } E \text{ admet un successeur, alors celui-ci est unique.}}$$

b) Posons $A = \{y \in E : x \prec y\}$. Si $A = \varnothing$, cela signifie que x est un élément maximal de E. Si $A \neq \varnothing$, alors A possède un plus petit élément x_0. On a $x \prec x_0$ donc $x \preccurlyeq x_0$. Par ailleurs, pour tout $a \in E$ tel que $x \prec a$, on a $a \in A$ donc $x_0 \preccurlyeq a$ puisque x_0 est le plus petit élément de A. Donc x_0 est le successeur de x. En conclusion,

$$\boxed{\text{tout élément de } E \text{ admet un successeur ou est un élément maximal.}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$]
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie non vide et minorée de E possède une borne inférieure. Démontrer que toute partie non vide et majorée de E possède une borne supérieure.

Soit A une partie non vide et majorée de E. On note A^+ l'ensemble des majorants de A. L'ensemble A^+ est une partie de E qui est non vide (car A est majorée) et minorée (par tous les éléments de A) donc $\inf(A^+)$ existe. Comme tout élément de A est un minorant de A^+ et comme $\inf(A^+)$ est le plus grand de tous les minorants de A^+, on a

$$\forall a \in A, \qquad a \preccurlyeq \inf(A^+),$$

ce qui démontre que $\inf(A^+)$ est un majorant de A, c'est-à-dire $\inf(A^+) \in A^+$. Donc

$$\inf(A^+) = \min(A^+),$$

ce qui démontre que $\inf(A^+)$ est la borne supérieure de A. Donc

$$\boxed{\text{toute partie non vide et majorée de } E \text{ possède une borne supérieure.}}$$