DM 9. Enoncé

Exercice 1 : Un produit de tangentes

Soit n un entier naturel. On note $\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & (z+i)^{2n+1}-(z-i)^{2n+1} \end{array}$.

1°) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 2i \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p z^{2(n-p)}$.

Calculer les coefficients de degrés $2n$ et 0, notés respectivement a_{2n} et a_0.

2°) Montrer que les solutions de l'équation $P(z) = 0$, en l'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont les $z_k = \dfrac{\cos(\frac{k\pi}{2n+1})}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})}$ où k varie dans $\{1, \ldots, 2n\}$.

3°) Calculer $\sum_{k=1}^{2n} z_k$.

4°) Montrer que $\prod_{k=1}^{2n} z_k = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k^2$.

Nous verrons plus tard que, selon la théorie des polynômes, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a_{2n} \prod_{k=1}^{2n} (z - z_k)$: nous admettrons ce résultat.

5°) En déduire que $\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}$.

Exercice 2 : Géométrie dans le plan complexe.

On se place dans un plan P affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère un rectangle $ABCD$ de P tel que

$$AB = \sqrt{2}, \quad AD = 1 \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

On note I le milieu de (A, B). On note a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D.
On note S une similitude directe qui au point M d'affixe z, associe le point d'affixe $\alpha z + \beta$, où α et β sont des complexes avec $\alpha \neq 0$.

1°) Lorsque $z, z' \in \mathbb{C}$, montrer que $|z|^2 - |z'|^2 = \mathrm{Re}((z + z')(\overline{z} - \overline{z'}))$.

2°) On considère deux vecteurs de P, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ dont les affixes sont notées z et z'. Montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = 0$.

On appelle (E) l'ensemble des points M de P tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

3°) Montrer que C et I sont des éléments de (E).

4°) **a)** Montrer qu'un point M de P appartient à (E) si et seulement si

$$\mathrm{Re}((d + b - 2z)(\overline{d} - \overline{b})) = \mathrm{Re}((d + b - 2c)(\overline{d} - \overline{b})).$$

b) En déduire que $M \in (E) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{DB}$.
c) Qu'en déduit-on au sujet des droites (BD) et (CI) ?

5°) On suppose que la similitude S vérifie : $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
Exprimer α et β en fonction de b, c et d.

6°) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S. En déduire la valeur de α.

7°) On note Ω le centre de la similitude S.
Montrer que Ω est sur le cercle de diamètre (C, D).

8°) Montrer que Ω est un point de la droite (BD).

9°) Exprimer c et d en fonction de a et b.

10°) Exprimer β en fonction de a et b. En déduire que $S(B) = I$.

11°) En déduire une nouvelle justification de la propriété établie en question 4.c.

Problème : parties denses dans $\mathbb{R}$.

Première partie : préliminaires.

On "rappelle" qu'une suite (x_n) de réels converge vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

1°) Soit I un intervalle contenant une infinité de réels, c'est-à-dire que I est non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton.
Soit D une partie de I. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap D \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in I, \ \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, \ a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
3. $\forall x, y \in I, \ x < y \Longrightarrow [\exists z \in D, \ x < z < y]$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que D est dense dans I.

2°) Soit I un intervalle non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit D une partie de I que l'on suppose dense dans I. Montrer que, pour tout $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap D$ est de cardinal infini.

3°) Soit I et J deux intervalles non réduits à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit f une application continue et surjective de I dans J.
On admettra que, d'après la continuité de f, pour tout $a \in I$,
pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Montrer que si D est une partie de I qui est dense dans I,
alors $f(D)$ est dense dans J.

Seconde partie : densité des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

On suppose que G est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire que $0 \in G$ et que pour tout $x, y \in G$, $x - y \in G$.
On suppose de plus que G est différent de $\{0\}$.

4°) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure, que l'on notera a.

5°) Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

6°) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
a) On suppose que $a \notin G$.
Montrer qu'il existe $x, y \in G$ tels que $a < x < y < 2a$ et en déduire une contradiction.
b) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

7°) On dit qu'un point x de G est isolé si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que $I \cap G = \{x\}$.
On dit que G est discret si et seulement si tous ses points sont isolés.
Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur a pour que G soit discret.

8°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$. On pose $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm/(n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

9°) On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ si et seulement si A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $1 \in A$ et, pour tout $a, b \in A$, $ab \in A$.
Montrer que si A est un sous-anneau différent de $\mathbb{Z}$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

10°) On admet que π est irrationnel.
a) Montrer que $\{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
b) Soit $\ell \in [-1, 1]$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N, \ |\ell - \cos n| < \varepsilon.$$

c) Montrer que, pour tout $\ell \in [-1, 1]$, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\cos(\varphi(n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.