Renseignements généraux

— *Concours* : X
— *Matière* : Maths 1
— *NOM Prénom* : Bergerès Martin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit G un groupe abélien fini de cardinal n.
Soit $\widehat{G} = \{\varphi : (G, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \times) \text{ morphisme de groupe}\}$

1. Démontrer que $\widehat{G}$ est un groupe abélien fini.
2. Montrer que $|\widehat{G}| \leq n$.
   Indications :
   · Si E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension p, $< x, y >= \sum_{i=1}^{p} x_i \overline{y_i}$ est un produit scalaire.
   · Majorer la dimension de $\widehat{G}$ vu comme espace vectoriel. Calculer $\sum_{g \in G} \varphi(g)$. Que vaut $\overline{\varphi}$?
   · Montrer que $(\varphi)_{\varphi \in \widehat{G}}$ est orthogonale. Conclusion ?
3. Si $x \in G$, on définit $\psi_x : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ telle que $\psi_x(\varphi) = \varphi(x)$. Montrer que $\psi_x \in \widehat{\widehat{G}}$. Montrer que $f : x \in G \mapsto \psi_x \in \widehat{\widehat{G}}$ est injective. (Cela revient à construire un certain morphisme φ de $\widehat{G}$. Le faire.)
4. Conclure enfin que $|\widehat{G}| = n$.

Remarques sur l'oral

C'est un exercice non trivial. Il faut bien prendre le temps de comprendre tous les éléments mathématiques, notamment à la question 2. L'examinateur, à cette question, me donne des indications inutiles et qui m'embrouillent, mais je finis par réussir à l'aide du produit scalaire qu'il m'indique. On peut majorer la dimension de l'espace vectoriel par n. Cela avait l'air clair pour l'examinateur, ça l'est moins pour moi, mais je me suis abstenu de le dire... La question 3 se corse lorsqu'il faut construire le morphisme en question. Il faut raisonner par sous-groupe engendré par un élément, puis deux,etc..., et on finit par définir le morphisme sur tout le groupe, car il est fini. La question 4 est alors claire.