MP*1

Problème

Régularité des séries trigonométriques lacunaires

Dans tout ce texte, q est un réel > 1, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_{n+1} \geq q\lambda_n > 0.$$

Le but du problème est d'étudier la régularité de fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi\lambda_n x}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable de nombres complexes. On montrera en particulier que, pour ces fonctions, une régularité locale (i.e. en un réel x_0) entraîne une régularité globale. Cette étude fait l'objet de la partie **II**. Dans la partie **I**, on construit, en utilisant la transformation de Fourier, une fonction ψ jouant un rôle essentiel dans la partie **II**. Seuls les résultats de la sous-partie **I.B** sont utilisés dans la partie **II**.

I. Construction d'une ondelette analysante

On note L l'espace des fonctions continues et intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

F l'espace des fonctions f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f^{(n)}$ appartienne à L, S l'espace des fonctions f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f^{(n)}$ appartienne à E.

A. Transformation de Fourier

1. Indiquer, sans justification, les inclusions entre les espaces L, E, F et S.

2. Soit f dans L. Montrer qu'en posant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\ ,$$

on définit une fonction $\hat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction $\hat{f}$ est appelée *transformée de Fourier* de f.

3. Soit f dans E. Démontrer que $\hat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour n dans $\mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $\hat{f}$ est la transformée de Fourier d'une fonction de E.

4. Soit f dans F. Montrer que, si p est dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\hat{f}(\xi) \underset{\xi\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{\xi^p}\right).$$

5. Montrer que, si f est dans S, il en est de même de $\hat{f}$.

B. Construction de l'ondelette

On admettra ici la *formule d'inversion de Fourier*[1] :

$$\forall f \in S, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}\xi = f(t).$$

Cette formule est démontrée dans la sous-partie **I.C**.

On admettra également qu'il existe une fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulle hors de $]1/q, q[$ et telle que $\varphi(1) = 1$.

6. Expliquer pourquoi il existe ψ dans S telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

7. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

C. Inversion de Fourier sur S

On se propose de démontrer la formule d'inversion de Fourier. On note $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur S :

$$\forall f \in S, \qquad \mathcal{F}(f) = \widehat{f},$$

$\overline{\mathcal{F}}$ la *transformation de Fourier inverse* définie par

$$\forall f \in S, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

La question 5 entraîne que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont deux endomorphismes de S. Notons d'autre part e la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e(x) = -2i\pi x,$$

1. Valable plus généralement si f et $\widehat{f}$ sont dans L.

D et M les applications définies sur S par

$$\forall f \in S, \qquad D(f) = f', \quad M(f) = ef.$$

Il est facile d'établir que D et M sont des endomorphismes de S, la vérification n'est pas demandée.

8. Montrer que l'endomorphisme $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}$ commute à M.

9. Soient u dans S et x_0 dans $\mathbb{R}$ tels que $u(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe v dans S telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(x) = (x - x_0)v(x).$$

10. a) Soit T un endomorphisme de S qui commute à M. Montrer qu'il existe une fonction m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall f \in S, \qquad T(f) = mf.$$

b) On admet que la gaussienne g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = e^{-\pi x^2}$$

est un élément de S tel que $\widehat{g} = g$. En déduire la formule d'inversion de Fourier pour f dans S.

II. Séries trigonométriques lacunaires

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite complexe, on dit que la série de terme général

$$u_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

converge si et seulement si les deux séries de terme généraux : u_n, $n \in \mathbb{N}$ et u_{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$ convergent. On note alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

A. Premiers résultats

11. a) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Pour x dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de :

$$G_a(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi\lambda_n x}$$

et montrer que la fonction G_a ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer, pour tout β de $\mathbb{R}^{+*}$, la convergence de la série de terme général :

$$\lambda_n^{-\beta}, \ n \geq 1.$$

12. Soient $j \geq 1$ un entier, ε un réel > 0. On suppose :

$$a_n \underset{n\to\pm\infty}{=} O\left(\lambda_n^{-(j+\varepsilon)}\right).$$

Montrer que G_a est de classe C^j sur $\mathbb{R}$.

13. Soit α dans $]0,1[$.

a) Trouver C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}^{+*}$ ne dépendant que de q et α tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{1-\alpha} \leq C_1 \lambda_N^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^{-\alpha} \leq C_2 \lambda_{N+1}^{-\alpha}.$$

On suppose, dans la suite de cette question, que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite complexe, C un réel > 0 et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad |a_n| \leq C|\lambda_n|^{-\alpha}.$$

b) Montrer que, pour (x,h) dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$|G_a(x+h) - G_a(x)| \leq 4C\left(\pi C_1 |h| \lambda_N^{1-\alpha} + C_2 \lambda_{N+1}^{-\alpha}\right).$$

c) Montrer finalement qu'il existe $C' > 0$ tel que :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, \qquad |G_a(x+h) - G_a(x)| \leq C'|h|^\alpha.$$

B. Expression intégrale des coefficients et applications

Soient a dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, x_0 dans $\mathbb{R}$, ψ la fonction définie dans la question 6.

14. Si $n \in \mathbb{Z}^*$ et si P est dans $\mathbb{C}[X]$, montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(G_a(x_0 + \frac{x}{\lambda_n}) - P(x) \right) \psi(x)\,\mathrm{d}x = a_n e^{2i\pi\lambda_n x_0}.$$

15. Soit α dans $]0,1[$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad |G_a(x_0+h) - G_a(x_0)| \leq C|h|^\alpha.$$

Montrer qu'il existe $C' > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad |a_n| \leq C'|\lambda_n|^{-\alpha}.$$ [2]

2. On voit, en combinant cette question et la question 13.c), que, si G_a est α-hölderienne en x_0, elle est α-hölderienne sur $\mathbb{R}$.

16. On fixe j dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que G_a admet un développement limité à l'ordre j en x_0 :

$$G_a(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=0}^{j} b_i h^i + h^j \varepsilon(h),$$

où $b_1, \cdots, b_j$ sont dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

a) Montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^j \varepsilon\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \psi(x)\, \mathrm{d}x \underset{n \to \pm\infty}{\to} 0.$$

b) En déduire :

$$a_n \underset{n \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{\lambda_n{}^j}\right).$$ [3]

17. Soit c dans $]0, 1[$. En posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad W_{q,c}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c^n \cos\,(2\pi q^n x),$$

on définit une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on ne demande pas de justifier ce fait.

Montrer que, si $qc \geq 1$, la fonction $W_{q,c}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ (théorème dû à Hardy, 1916) mais que, si $qc < 1$, la fonction $W_{q,c}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

C. Fonctions lisses de Zygmund

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *lisse* si elle est continue et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \underset{h \to 0}{=} o(h).$$

18. a) Montrer que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lisse.

b) Donner un exemple de fonction lisse non dérivable au point 0.

19. Soit f une fonction lisse.

a) On suppose que f admet un extremum local en x_0. Montrer que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = 0$.

b) Soient u et v dans $\mathbb{R}$ avec $u < v$. Montrer qu'il existe w dans $]u, v[$ tel que f soit dérivable en w de dérivée :

$$f'(w) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}.$$

c) Montrer que, pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de dérivabilité de f dans I est infini non dénombrable.

---

3. On voit ainsi que, s'il existe un réel x_0 en lequel G admet un développement limité à tout ordre, alors G_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D. Séries lacunaires et fonctions lisses.

20. Soit a dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ telle que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Montrer que G_a est lisse. Qu'en déduit-on à l'aide des questions 19.c) et 16.b) ?