Exercice corrigé sur les nombres complexes

L'exercice suivant, très classique, permet de faire le point sur l'utilisation des nombres complexes.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. *Calculer*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx).$$

- Nous allons « passer » en nombres complexes.

- Nous allons « passer » en nombres complexes.

  Pour cela, on écrit que

$$C_n = \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n}) \qquad \text{où} \qquad \widehat{C_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ikx} \,.$$

- Nous allons « passer » en nombres complexes.

  Pour cela, on écrit que

$$C_n = \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n}) \qquad \text{où} \qquad \widehat{C_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

- On se ramène ainsi au calcul de la somme des termes d'une suite géométrique.

- Nous allons « passer » en nombres complexes.

  Pour cela, on écrit que

$$C_n = \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n}) \qquad \text{où} \qquad \widehat{C_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

- On se ramène ainsi au calcul de la somme des termes d'une suite géométrique.

  Comme x n'est pas un multiple de 2π, on sait que la raison e^{ix} est différente de 1, ce qui permet d'écrire que

$$\widehat{C_n} = \frac{\mathrm{e}^{inx} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1}.$$

- Pour déterminer la forme cartésienne de l'expression précédente, on simplifie numérateur et dénominateur à l'aide de la technique de l'angle moyen.

- Pour déterminer la forme cartésienne de l'expression précédente, on simplifie numérateur et dénominateur à l'aide de la technique de l'angle moyen.

  Rappelons que cette technique permet de factoriser l'expression $\mathrm{e}^{ia} \pm \mathrm{e}^{ib}$ en mettant en facteur $\mathrm{e}^{i(a+b)/2}$, c'est-à-dire l'exponentielle complexe dont l'argument est la moyenne des arguments de e^{ia} et e^{ib}.

- Pour déterminer la forme cartésienne de l'expression précédente, on simplifie numérateur et dénominateur à l'aide de la technique de l'angle moyen.

  Rappelons que cette technique permet de factoriser l'expression $e^{ia} \pm e^{ib}$ en mettant en facteur $e^{i(a+b)/2}$, c'est-à-dire l'exponentielle complexe dont l'argument est la moyenne des arguments de e^{ia} et e^{ib}.

  Cette technique peut, en particulier, être utilisée pour factoriser une expression du type $e^{ia} \pm 1$ (en se souvenant que $1 = e^{i0}$). C'est ce que nous allons faire ici.

- On a

- On a
$$\widehat{C_n} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$

- On a

$$\widehat{C_n} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$
$$= \frac{e^{inx/2}\left(e^{inx/2} - e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)}$$

- On a

$$\begin{aligned}\widehat{C_n} &= \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\\ &= \frac{e^{inx/2}\left(e^{inx/2}-e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)}\\ &= e^{i(n-1)x/2}\,\frac{2i\sin(nx/2)}{2i\sin(x/2)} \qquad \text{d'après les formules d'Euler}\end{aligned}$$

- On a

$$\widehat{C_n} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$
$$= \frac{e^{inx/2}\left(e^{inx/2} - e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)}$$
$$= e^{i(n-1)x/2}\,\frac{2i\sin(nx/2)}{2i\sin(x/2)} \quad \text{d'après les formules d'Euler}$$
$$= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)$$

- Il ne reste plus qu'à revenir dans les nombres réels en prenant la partie réelle :

- Il ne reste plus qu'à revenir dans les nombres réels en prenant la partie réelle :

$$C_n = \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n})$$

- Il ne reste plus qu'à revenir dans les nombres réels en prenant la partie réelle :

$$C_n = \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n})$$

$$= \Re\mathrm{e}\left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)\right]$$

- Il ne reste plus qu'à revenir dans les nombres réels en prenant la partie réelle :

$$
\begin{aligned}
C_n &= \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n}) \\
&= \Re\mathrm{e}\left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\cos\frac{(n-1)x}{2}
\end{aligned}
$$

- Il ne reste plus qu'à revenir dans les nombres réels en prenant la partie réelle :

$$\begin{aligned} C_n &= \Re\mathrm{e}(\widehat{C_n}) \\ &= \Re\mathrm{e}\left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\cos\frac{(n-1)x}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{C_n = \frac{\sin(nx/2)\cos\left((n-1)x/2\right)}{\sin(x/2)}.}$$

- Remarque :

- Remarque :

  En prenant la partie imaginaire de $\widehat{C_n}$, on obtient l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$, ce qui donne

$$\boxed{S_n = \frac{\sin(nx/2)\sin\left((n-1)x/2\right)}{\sin(x/2)}.}$$