# Logarithmes et topologie plane

## Sommaire

# 1 Notations et introduction

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leq 1\}.$$

Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}^{n-1}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la structure euclidienne canonique ; bien sûr, $\mathbb{S}^1$ s'identifie à $\mathbb{U}$.

Si $X$ et $Y$ sont deux espaces topologiques, $C(X, Y)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $X$ dans $Y$.

Dans l'étude topologique des espaces $\mathbb{R}^n$, le plan occupe une place particulière. Les théorèmes classiques (non-rétraction, Brouwer, Antipodensatz, invariance du domaine, Jordan), dont les analogues en dimension 1 sont triviaux et les preuves en dimension quelconque délicates, admettent en effet en dimension 2 des démonstrations relativement simples. Ces démonstrations sont fondées sur l'identification du plan au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et l'utilisation de l'exponentielle, plus précisément sur l'étude du problème du logarithme continu. Le premier but de ce texte est d'établir les résultats fondamentaux de la topologie plane en suivant cette méthode. Bien sûr, cette approche élémentaire, qui remonte à Borsuk et Eilenberg (circa 1935) peut être interprétée avantageusement en termes de notions plus avancées. La simplicité des démonstrations justifie cependant un exposé autonome. Les notions présentées ici ont également des applications en géométrie différentielle, dont on présente un échantillon.

La section **2** est préliminaire à l'ensemble du texte. On y formule le problème du « logarithme continu » pour un élément de $C(X, \mathbb{C}^*)$, où $X$ est un espace topologique, équivalent au problème du « relèvement angulaire » d'un élément de $C(X, \mathbb{U})$. On définit ensuite la notion d'*indice* d'un point par rapport à un lacet plan. Le cas d'un lacet de classe $C^1$ fait l'objet d'un traitement particulier. On obtient au passage une preuve très parlante du théorème de d'Alembert-Gauss.

La notion centrale de la section **3** de ce texte est celle de *degré*. Il s'agit sans doute de la construction la plus simple de la topologie algébrique. Le degré d'un élément $f$ de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ est le nombre de tours orientés que fait $f(z)$ autour de 0 lorsque $z$ parcourt $\mathbb{U}$ dans le sens positif ; c'est donc un entier relatif, dont on montre qu'il paramètre les composantes connexes par arcs de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$. Il est remarquable que l'on puisse déduire des propriétés simples et intuitives du degré des résultats significatifs de topologie plane, ainsi qu'un principe général d'obtention de solutions d'équations non linéaires. [1] On propose plusieurs illustrations. Parmi elles figurent divers énoncés équivalents : le théorème de point fixe de Brouwer, le lemme de non rétraction de Borsuk, le théorème du champ sortant et le théorème de Poincaré-Miranda ; tous ces énoncés subsistent en dimension $n$ et on explicite les raisonnements permettant de les déduire les uns des autres.

La section a pour but d'établir **4** que, si $K$ et $K'$ sont deux compacts homéomorphes de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus K$ et $\mathbb{C} \setminus K'$ ont « même nombre de composantes connexes ». Ce résultat n'est en rien évident, car un homéomorphisme de $K$ sur $K'$ ne s'étend pas en un homéomorphisme du plan. [2] La démonstration, plus difficile que celles des sections **2** et **3**, introduit un des principes de bases de la topologie algébrique : associer fonctoriellement à un espace topologique des objets algébriques. Ici, on attache à un compact $K$ de $\mathbb{C}$ un groupe qui mesure le nombre de « trous » de $K$. L'application de ce résultat à $K = \mathbb{U}$ fournit le « théorème de Jordan » : le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'une courbe fermée simple a exactement deux composantes connexes. Cet énoncé, qui peut sembler intuitif, est délicat. Une courbe de Jordan peut en effet être un objet plus complexe qu'il ne semble au premier abord : Osgood a construit des courbes de Jordan de mesure de Lebesgue plane strictement positive. [3]

La section **5** est de nature assez différente des deux précédentes. Les objets d'étude sont ici les courbes fermées planes de classe $C^1$ et régulières, i.e. les *immersions* de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$. On démontre trois résultats fondamentaux. Pour commencer, la version $C^1$ du théorème de Jordan, dont la preuve est nettement plus simple et intuitive que celle de la section **4**. On définit ensuite le *nombre d'enroulement* d'une immersion $f$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le degré de $f'$. On montre que ce nombre décrit les composantes connexes de l'espace des immersions de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ (« théorème de Whitney-Graustein »), puis que le nombre d'enroulement d'une courbe fermée régulière simple (i.e. d'un plongement de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$) vaut $\pm 1$ (« Umlaufsatz de Hopf »).

Les prérequis nécessaires à la lecture de ce texte sont réduits aux notions les plus élémentaires de topologie et d'analyse. Le théorème de Tietze-Urysohn, utile dans la section **4**, est redémontré.

1. Grossièrement dit, le degré permet de formuler et d'établir des énoncés du type « théorème des valeurs intermédiaires » dans le plan, puis en dimension finie quelconque.
2. Le lecteur savant reconnaîtra ici un avatar de la « dualité d'Alexander ».
3. Par ailleurs, il est bien connu depuis Peano qu'il existe des surjections continues de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$.

# 2 Logarithmes et relèvements angulaires

## 2.1 Fonctions angles et logarithmes sur un plan fendu

Si $\alpha$ est un réel, il existe une unique application continue $\Theta_\alpha$ définie sur le *plan fendu* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}$, à valeurs réelles, envoyant $e^{i\alpha}$ sur $\alpha$ et telle que, pour tout $z$ de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}$, $\Theta_\alpha(z)$ soit un argument de $z$. Par exemple, pour $\alpha = 0$, l'application $\Theta_0$ est définie par :

$$(1) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \qquad \Theta_0(z) = 2\text{Arctan}\,\left(\frac{\text{Im }(z)}{\text{Re }(z) + |z|}\right).$$

Rappelons la preuve de cette formule (dont le seul intérêt est d'établir la régularité, intuitivement évidente, de $\Theta_0$). Supposons :

$$z = re^{i\theta} = x + iy$$

avec $r > 0$, $\theta$ dans $]-\pi, \pi[$, $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$r\cos(\theta) = x, \quad r\sin(\theta) = y, \quad \tan(\theta/2) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

et le résultat puisque $\theta/2$ appartient à l'image $]-\pi/2, \pi/2[$ de Arctan. Notons au passage que, si $\text{Re }(z) > 0$, on dispose de la formule plus simple :

$$\Theta_0(z) = \text{Arctan}\,\left(\frac{\text{Im }(z)}{\text{Re }(z)}\right).$$

**Exercice 1** *Donner une formule analogue à (1) pour la fonction $\Theta_\alpha$.*

La fonction $\Theta_\alpha$ est à valeurs dans $]\alpha-\pi, \alpha+\pi[$ et ne se prolonge continûment en aucun point de $\mathbb{R}^- e^{i\alpha}$ : en faisant un tour dans le sens direct, l'angle augmente de $2\pi$. On ne peut donc définir aucune fonction argument continue sur $\mathbb{C}^*$. En fait, les $\Theta_\alpha$ sont des fonctions arguments continues définies sur des parties maximales au sens de l'inclusion.

**Exercice 2** *Si $X$ est une partie de $\mathbb{C}^*$, on appelle logarithme continu défini sur $X$ toute fonction $\ell$ de $C(X, \mathbb{C})$ telle que*

$$\forall z \in X, \qquad \exp(\ell(z)) = z.$$

*Formaliser précisément l'idée qu'il n'existe pas de logarithme continu sur une partie $X$ « faisant un tour complet autour de $0$ ».*

Les considérations précédentes permettent de préciser la question des « logarithmes complexes ». Soit $z = re^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}^*$, avec $r = |z| > 0$ et $\theta$ dans $\mathbb{R}$. Cherchons les « logarithmes » de $z$. Si $Z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels, on a :

$$e^Z = z \iff e^x = r \text{ et : } y \equiv \theta \ [2\pi.]$$

Tout nombre complexe non nul $z$ a donc une infinité d'antécédents par exp et deux antécédents distincts diffèrent d'un élément de $2i\pi\mathbb{Z}$. Cependant, puisque la partie imaginaire d'un tel antécédent est un argument de $z$, il n'existe pas de fonction continue $\ell$ définie sur $\mathbb{C}^*$ et telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad \exp(\ell(z)) = z.$$

En revanche, sur le demi-plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}$ on peut définir la fonction $L_\alpha$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}, \qquad L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\Theta_\alpha(z)$$

Cette fonction $L_\alpha$ est continue et vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}, \qquad \exp(L_\alpha(z)) = z.$$

La fonction $L_0$ est la *détermination principale du logarithme*[4] ; son domaine de définition contient le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1.

**Exercice 3** *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad L_0(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}.$$

**Exercice 4** *Comparer deux fonctions $L_\alpha$ sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

## 2.2 Logarithmes continus et relèvements

Dans ce paragraphe, $X$ est un espace topologique. Si $X$ est compact, l'espace $C(X, \mathbb{C})$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $X$.

Si $u$ est dans $C(X, \mathbb{C})$, $\exp(u)$ est dans $C(X, \mathbb{C}^*)$. Mais il existe des éléments de $C(X, \mathbb{C}^*)$ qui ne sont l'exponentielle d'aucune fonction continue de $X$ dans $\mathbb{C}$ : par exemple, l'identité de $X = \mathbb{U}$.

Il est clair que $C(X, \mathbb{C}^*)$ est un groupe pour la multiplication des fonctions. Un élément de $C(X, \mathbb{C}^*)$ a *un logarithme continu* s'il s'écrit $\exp(u)$ avec $u \in C(X, \mathbb{C})$. L'ensemble $E_X$ des éléments de $C(X, \mathbb{C}^*)$ admettant un logarithme continu est un sous-groupe de $C(X, \mathbb{C}^*)$.

Décrivons les logarithmes continus de $f$ à partir de l'un d'entre eux.

4. Bien sûr, les fonctions $L_\alpha$ sont en fait holomorphes.

**Lemme 1** *Supposons $X$ connexe. Soient $f$ dans $E_X$, $u$ un logarithme continu de $f$. Les logarithmes continus de $f$ sont les $u + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

*Preuve.* Soit $v$ dans $C(X, \mathbb{C})$. Alors $v$ est un logarithme continu de $f$ si et seulement si $e^v = e^u$, i.e. si $v - u$ est à valeur dans l'espace discret $2i\pi\mathbb{Z}$. La conclusion résulte de la continuité de $v - u$ et de la connexité de $X$.

**Remarques**

1. *Un point essentiel*
   Si $f \in \mathbb{C}(X, \mathbb{C}^*)$ est à valeurs dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- e^{i\alpha}$, $L_\alpha \circ f$ est un logarithme continu de $f$.

   Mais il existe des $f$ dans $E_X$ dont l'image n'est contenue dans aucun plan fendu. Tel est le cas, si $n \in \mathbb{Z}^*$, de la fonction

   $$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int}.$$

   L'étude de cette question est un des principaux thèmes de ce texte.
2. *Applications de $X$ dans $\mathbb{U}$ versus applications de $X$ dans $\mathbb{C}^*$*
   Si $f \in C(X, \mathbb{U})$, on appelle *relèvement de $f$* toute fonction de $X$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $\dfrac{u}{i}$ où $u$ est un logarithme continu de $u$, ou, de façon équivalente, toute fonction $\theta$ de $X$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = \exp(i\theta)$.

   Les notions de relèvement et de logarithme continu sont équivalentes. Soit en effet $f$ dans $C(X, \mathbb{C}^*)$. Si $f$ a un logarithme continu $u$, la partie imaginaire de $u$ est un relèvement de $\dfrac{f}{|f|}$. Inversement, si $\theta$ est un relèvement de $\dfrac{f}{|f|}$, alors $u = \ln(|f|) + i\theta$ est un logarithme continu de $f$.

La propriété ci-après, très utile, quantifie le fait que, si $f \in E_X$, il en est de même des éléments de $C(X, \mathbb{C}^*)$ suffisamment proches de $f$.

**Lemme 2** *Soient $f$ et $g$ dans $C(X, \mathbb{C}^*)$. On suppose que*

$$\forall x \in X, \qquad |g(x) - f(x)| < |f(x)|$$

*et que $f$ admet un logarithme continu $u$. Alors $u + L_0\left(1 + \dfrac{g}{f}\right)$ est un logarithme continu de $g$.*

*Preuve.* Immédiat à partir des définitions et du fait que $\dfrac{g}{f}$ est à valeurs dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1.

Soit $Y$ un espace métrique, $f$ et $g$ dans $C(X, Y)$. Nous dirons que $f$ et $g$ sont *homotopes dans* $C(X, Y)$ s'il existe une application continue $H$ de $[0, 1] \times X$ dans $Y$ telle que

$$f = H(0, .) \qquad g = H(1, .).$$

L'homotopie est clairement une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$. [5]

**Théorème 1** *Supposons $X$ compact. Soient $f$ et $g$ deux éléments homotopes de $C(X, \mathbb{C}^*)$ tels que $f$ appartienne à $E_X$. Alors $g$ appartient à $E_X$.*

*Preuve.* Soit $H$ dans $C([0, 1] \times X, \mathbb{C}^*)$ telle que

$$f = H(0, .) \qquad g = H(1, .).$$

Soit $m$ le minimum de $|H|$ sur le compact $[0, 1]^2 \times X$. Le théorème de Heine donne $\delta > 0$ tel que

$$\forall (t, t', x) \in [0, 1] \times [0, 1] \times X, \qquad |t - t'| < \delta \Longrightarrow |H(t, x) - H(t', x)| < m.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \delta$. Pour $k$ dans $\{0, \ldots, n - 1\}$, on a

$$\forall x \in X, \qquad \left| H\left(\frac{k+1}{n}, x\right) - H\left(\frac{k}{n}, x\right) \right| < \left| H\left(\frac{k}{n}, x\right) \right|.$$

Le lemme 2 permet alors d'établir par récurrence finie que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $H\left(\dfrac{k}{n}, .\right)$ a un logarithme continu.

Voici une première application du théorème 1.

**Théorème 2** *Si $X$ est une partie compacte étoilée d'un espace normé, alors $C(X, \mathbb{C}^*) = E_X$.*

*Preuve.* On peut supposer que $X$ est étoilé en 0. Soit $f$ dans $C(X, \mathbb{C}^*)$. L'application $H$ définie par

$$\forall (s, x) \in [0, 1] \times X, \qquad H(s, x) = f(sx)$$

5. Les classes sont les composantes connexes par arcs de $C(X, Y)$ pour la topologie compact-ouvert.

est continue et vérifie $H(0,.) = f(0)$, $H(1,.) = f$. Le résultat suit alors du théorème 1.

**Remarque** *À propos des hypothèses du théorème 2*

L'hypothèse de compacité facilite la démonstration mais n'a pas vraiment d'importance. L'hypothèse relative au caractère étoilé de $X$ peut être améliorée. Un argument élémentaire de monodromie montre en effet que, si $X$ est simplement connexe, tout élément de $C(X, \mathbb{C}^*)$ a un logarithme continu. Le seul exemple à source non compacte utilisé ici est le suivant, souvent nommé *théorème de relèvement continu*.

**Proposition 1** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ dans $C(I, \mathbb{C}^*)$. Alors $f$ admet un logarithme continu. Deux logarithmes continus de $f$ diffèrent d'une fonction constante appartenant à $2\pi\mathbb{Z}$.*

*De façon équivalente, toute $f$ de $C(I, \mathbb{U})$ admet un relèvement. Deux relèvements de $f$ diffèrent d'une fonction constante appartenant à $2\pi\mathbb{Z}$.*

*Preuve.* Fixons $t_0$ dans $I$, $u_0$ dans $\mathbb{C}$ tel que$f(t_0) = e^{u_0}$. Pour tout segment $S$ de $I$ contenant $t_0$, le lemme 1 et le théorème 2 assurent que la restriction de $f$ à $S$ admet un unique logarithme continu $u_S$ envoyant $t_0$ sur $u_0$. Par suite, si $S$ et $S'$ sont deux segments contenant $t_0$, $u_S$ et $u_{S'}$ coïncident sur $S \cap S'$. On en déduit aisément le résultat.

**Exercice 5** *On suppose que $X$ est compact.*

*a) Montrer que $E_X$ est ouvert dans $C(X, \mathbb{C}^*)$ pour la topologie compact-ouvert.*

*b) Montrer que, si $G$ est un groupe topologique, tout sous-groupe ouvert de $G$ est fermé. Qu'en déduit-on si $G$ est connexe ?*

*c) Déduire le théorème 2 des arguments précédents.*

**Exercice 6** *Soit $\mathbb{A}$ une algèbre de Banach complexe. Montrer que le sous-groupe de $\mathbb{A}^*$ engendré par $\exp(\mathbb{A})$ est la composante neutre de $\mathbb{A}^*$. Qu'en déduit-on si $\mathbb{A}$ est commutative ?*

**Exercice 7** *Pour $\omega$ dans $\mathbb{U}$, soit $r_\omega$ la restriction à $\mathbb{U}$ de la multiplication par $\omega$. Quels sont les couples $(\omega, \omega')$ de $\mathbb{U}^2$ tels que $r_\omega$ et $r_{\omega'}$ soient conjugués dans le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{U}$ sur lui-même ? On pourra utiliser le théorème 2 pour le segment $[-\pi, \pi]$.*

## 2.3 Indice d'un point par rapport à un lacet

Appelons *lacet* du plan complexe toute application continue $\gamma$ définie sur un segment $S = [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. L'image de $\gamma$ est, intuitivement, une courbe fermée du plan. [6] Nous allons définir rigoureusement le *nombre de tours orientés* que fait un lacet autour d'un point n'appartenant pas à son image. [7]

Soient donc $\gamma$ un lacet défini sur $S = [a, b]$, $z$ un point de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,(\gamma)$. Nous formulons d'abord la définition en terme de relèvement. Définissons l'application $r = |\gamma - z|$. L'application $\dfrac{\gamma - z}{r}$ est continue, à valeurs dans $\mathbb{U}$. L'ensemble $\mathcal{R}$ de ses relèvements est non vide (proposition 1). De plus, deux éléments de $\mathcal{R}$ diffèrent d'une constante appartenant à $2\pi\mathbb{Z}$. Si $\theta$ appartient à $\mathcal{R}$, la relation $\gamma(a) = \gamma(b)$ entraîne que le réel :

$$\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

est dans $\mathbb{Z}$. De plus, cet entier est indépendant de l'élément $\theta$ de $\mathcal{R}$ choisi. C'est, par définition, l'*indice de $z$ par rapport à $\gamma$*. On le note $\mathrm{Ind}\,_{\gamma}(z)$.

Bien évidemment, pour tout logarithme continu $f$ de $\gamma - z$, on a

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(f(b) - f(a)\right).$$

**Proposition 2** *Soient $S$ un segment de $\mathbb{R}$, $\gamma$ un lacet du plan complexe de source $S$. La fonction $\mathrm{Ind}_{\gamma}$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma(S)$. Elle est nulle sur la composante non bornée de cet ouvert.*

*Preuve.* Le première assertion revient à établir que $\mathrm{Ind}_{\gamma}$ est localement constante. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(S)$, $m$ le minimum de $|\gamma - z|$. Soit $z'$ tel que $|z' - z| < m$. Le lemme 2 montre que, si $f$ est un logarithme continu de $\gamma - z$, alors

$$f + L_0\left(1 + \frac{z - z'}{\gamma - z}\right)$$

est un logarithme continu de $\gamma - z'$. On en déduit que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(z') = \mathrm{Ind}_{\gamma}(z).$$

6. À vrai dire, cette intuition n'est correcte que lorsque $\gamma$ est de classe $C^1$ et $\gamma'$ ne s'annule pas (arc régulier).

7. L'uniforme continuité assure qu'un lacet n'effectue qu'un nombre fini de tours autour d'un point qui n'est pas dans son image.

Passons à la seconde assertion. Soient $M$ le maximum de $|\gamma|$. Soient $z$ dans $\mathbb{C}$ tel que $|z| > M$, $w$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\exp(w) = z$. L'égalité

$$\gamma - z = -z\left(1 - \frac{\gamma}{z}\right) = \exp\left(i\pi + w + L_0\left(1 - \frac{\gamma}{z}\right)\right)$$

entraîne que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Le résultat suivant exprime une forme de continuité de l'indice, qui peut s'interpréter comme suit. Un promeneur tourne autour d'un arbre avec un chien en laisse, la longueur de la laisse étant à tout instant strictement inférieure à la distance du promeneur à l'arbre ; alors le promeneur et le chien font le même nombre de tours autour de l'arbre.

**Proposition 3** *Soient $z \in \mathbb{C}$, $\gamma_1$ et $\gamma_2$ deux lacets de source $S$ tracés sur $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ et tels que :*

$$\forall t \in S, \qquad |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - z|.$$

*Alors $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$.*

*Preuve.* Si $f$ est un logarithme continu de $\gamma_1 - z$, alors $f + L_0\left(1 + \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 - z}\right)$ est un logarithme continu de $\gamma_2 - z$.

**Exercice 8** *Munissons $C(S, \mathbb{C})$ de la topologie de la convergence uniforme, notons $\Omega = \{(\gamma, z) \in C(S, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}\ ;\ z \notin \gamma(S)\}$. Montrer que $\Omega$ est un ouvert de $C(S, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ et que*

$$(\gamma, z) \in \Omega \longmapsto Ind_\gamma(z)$$

*est localement constante sur cet ouvert.*

## 2.4 L'indice dans le cas $C^1$

Ce paragraphe et le suivant constituent une digression.

La définition de l'indice est fondée sur la proposition 1. Dans le cas d'une application de classe $C^1$ sur $X$, on dispose d'une preuve de poche. C'est le *théorème de relèvement $C^1$*.[8]

**Lemme 3** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une application de classe $C^1$ de $I$ dans $\mathbb{C}^*$. Alors $f$ admet un logarithme de classe $C^1$ sur $I$.*[9]

8. Utile notamment pour définir la courbure d'un arc plan, ou pour justifier le passage en coordonnées polaires dans l'étude de systèmes différentiels plans.

9. Et donc tous les logarithmes continus de $f$ sont de classe $C^1$ sur $I$.

*Preuve.* Soient $t_0$ dans $I$, $u_0$ un nombre complexe tel que $e^{u_0} = f(t_0)$. Soit $u$ un éventuel logarithme de classe $C^1$ de $f$ prenant la valeur $u_0$ en $t_0$. Alors $u' = \frac{f'}{f}$ et

$$\forall t \in I, \qquad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{f'}{f}.$$

Réciproquement, si l'application $u$ est définie par cette formule, on a :

$$\left(fe^{-u}\right)' = f'e^{-u} - u'fe^{-u} = 0$$

et $fe^{-u}$ est constante, donc égale à sa valeur 1 en $t_0$.

Soient maintenant $\gamma$ un lacet de classe $C^1$ de source $S = [a, b]$, $z$ un élément de $\mathbb{C} \setminus \gamma(S)$. La fonction $r = |\gamma - z|$ est de classe $C^1$ sur $S$. Le lemme 3 donne une application $u$ de classe $C^1$ de $S$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\gamma - z = e^u.$$

Par dérivation logarithmique, on a $\dfrac{\gamma'}{\gamma - z} = u'$. Par suite :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b u' = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'}{\gamma - z}.$$

On obtient ainsi une expression intégrale de l'indice, suffisante pour un certain nombre d'applications. [10]

**Proposition 4** *Soient $S = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $\gamma$ un lacet du plan complexe de source $S$ de classe $C^1$, $z$ un élément de $\mathbb{C} \setminus \gamma(S)$. Alors*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'}{\gamma - z}.$$

**Exercice 9** *Utiliser la proposition 4 pour établir la proposition 1 pour un lacet de classe $C^1$.*

## 2.5 Le théorème de d'Alembert-Gauss via l'indice.

La notion d'indice permet d'établir le théorème de d'Alembert-Gauss.

**Théorème 3** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors $P$ s'annule sur $\mathbb{C}$.*

10. Et souvent prise pour définition dans les cours élémentaires d'analyse complexe.

*Preuve.* Soit $n$ le degré de $P$. Si $r$ est dans $\mathbb{R}^+$, soit $\eta_r$ le lacet défini par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \eta_r(t) = P(re^{it}).$$

On suppose par l'absurde que $P$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction :

$$N : r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{Ind}_{\eta_r}(0)$$

est alors définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante, nulle en 0 donc identiquement nulle. Mais :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \qquad N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}\ P'(re^{it})}{P(re^{it})}\,\mathrm{d}t.$$

La relation

$$\frac{z\ P'(z)}{P(z)} \underset{z \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} n$$

entraîne donc que $N$ tend vers $n$ en $+\infty$ ; c'est la contradiction désirée.

On peut préciser la signification de la fonction $N$ de la démonstration précédente. C'est le but des deux exercices ci-après.

**Exercice 10** *a) Soient $z_0$ dans $\mathbb{C}$ et $r$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, si $P$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur le cercle de centre $z_0$ et de rayon $r$, le nombre de zéros de $P$ dans le disque ouvert de centre $z_0$ et de rayon $r$ est égal à :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}\ P'(re^{it})}{P(re^{it})}\,dt.$$

*On pourra décomposer $P'/P$ en éléments simples.*

*b) Déduire de a) un résultat de « continuité des racines ».*

On comprend mieux l'exercice précédent en le généralisant. Pour ce faire, on utilise la notion d'*intégrale curviligne*. Si $\gamma$ est un lacet continu et de classe $C^1$ par morceaux tracé sur $\mathbb{C}$ de source $S = [a, b]$ $(a < b)$ et $f$ une application continue définie sur $\gamma(S)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\int_\gamma f = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\ \gamma'(t)\ \mathrm{d}t.$$

**Exercice 11** *Soient $P$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, $\gamma$ un lacet de source $[a, b]$, continu et de classe $C^1$ par morceaux tracé sur $\mathbb{C}$ dont l'image ne contient aucune racine de $P$. On note $z_1, \ldots, z_m$ les racines de $P$ dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicités. Montrer :*

$$\int_\gamma \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{m} Ind_{\ \gamma}(z_k).$$

Il est tentant d'étendre ce résultat à des fonctions plus générales que les polynômes ; la théorie des fonctions holomorphes permet cette généralisation.

Terminons ce paragraphe par un exercice amusant. On appelle *problème de Routh-Hurwitz* la détermination du nombre de racines d'un polynôme complexe de parties réelles strictement négatives comptées avec multiplicités.[11] L'ingénieur américain Nyquist a découvert vers 1930 une méthode géométrique pour résoudre le problème de Routh-Hurwitz.

**Exercice 12** *Soit $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ ne s'annulant pas sur $i\mathbb{R}$. On note $\theta$ un relèvement de l'application*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{P(it)}{|P(it)|}.$$

*Pour $t > 0$, soit $\gamma_t$ un lacet dont l'image parcourt successivement, une fois et dans le sens direct, le segment $[-it, it]$ puis le demi-cercle de diamètre $[it, -it]$ contenu dans le demi-plan des complexe de partie réelle $< 0$.*

*En intégrant $\frac{P'}{P}$ sur $\gamma_t$, montrer que le nombre de racines de $P$ de parties réelles strictement négatives comptées avec multiplicités est la limite, lorsque $t$ tend vers $+\infty$, de :*

$$\frac{n}{2} + \frac{\theta(t) - \theta(-t)}{2\pi}.$$

*Si $P$ est dans $\mathbb{R}[X]$ et si $\theta$ vérifie $\theta(0) = 0$, vérifier que cette quantité est aussi la limite en $+\infty$ de*

$$\frac{n}{2} + \frac{\theta(t)}{\pi}.$$

*Justifier alors le critère de Nyquist : si $P$ est dans $\mathbb{R}[X]$, $P$ est stable si et seulement si l'image de :*

$$t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto P(it)$$

*traverse $n$ quadrants dans le sens direct.*

11. Ce problème est motivé par des applications à la stabilité de certains systèmes physiques. On dit d'ailleurs qu'un polynôme complexe non constant $P$ est *stable* si toutes ses racines sont de parties réelles $< 0$.

# 3 Degré et topologie plane

## 3.1 Degré d'une application continue de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$

Soit $f$ une application continue de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$. Le *degré* $\deg(f)$ de $f$ est le nombre de tours orientés que fait $f$ autour de 0, c'est-à-dire l'indice de 0 par rapport au lacet $\tilde{f}$ défini par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \tilde{f}(t) = f(e^{it}).$$

Autrement dit, si $g$ est un logarithme continu de $\tilde{f}$, on a

$$\deg(f) = \frac{1}{2i\pi}\left(g(\pi) - g(-\pi)\right).$$

Les propriétés ci-après du degré découlent des paragraphes précédents.

**Proposition 5** *1. Si $f$ est une application continue définie sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans un demi-plan fendu, i.e. si $\frac{f}{|f|}$ n'est pas une surjection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$, alors $deg(f) = 0$.* [12]

*2. Si $f_1$ et $f_2$ sont dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$, alors :*

$$deg(f_1 \times f_2) = deg(f_1) + deg(f_2).$$

*3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, l'application $e_n$ définie sur $\mathbb{U}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad e_n(z) = z^n$$

*est de degré $n$.*

*4. Si $f$ et $g$ sont dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ et vérifient $|g - f| < |f|$, alors*

$$deg(f) = deg(g).$$

*5. Deux éléments homotopes de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ ont même degré.*

**Remarque**

1. *$C^*$ ou $\mathbb{U}$ ?*
   Par commodité, nous avons défini le degré d'une application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$. Il est clair que l'on peut sans dommage se borner aux applications de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$.

12. Résultat intuitivement évident, $f$ ne tourne pas autour de 0.

2. *Lien avec l'indice*

   Soient $\gamma$ un lacet de source $[a,b]$, $z$ dans $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. On définit une fonction $f$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(e^{it}) = \gamma\left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a\right).$$

   Alors $f$ est continue et

   $$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \deg(f-z).$$

3. *Généralisations*

   L'indice et le degré considérés dans ce texte apparaissent chez les mathématiciens du dix-neuvième siècle. Au début du vingtième siècle, Brouwer a su généraliser cette construction et définir, pour tout entier $n \geq 1$, le degré d'une application de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^n$. Plus généralement, si $X$ et $Y$ sont deux variétés compactes connexes orientées de même dimension, on définit le degré d'un élément $f$ de $C(X,Y)$. Ce degré est encore un entier. Il est invariant par homotopie et nul pour une application non surjective.

   En fait, la théorie du degré possède de nombreux avatars ; les analystes préfèrent définir le degré d'une application continue de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe également des versions du degré en dimension infinie (Leray-Schauder).

La suite de ce paragraphe est une liste d'exercices.

**Exercice 13** *Indiquer $f \in C(\mathbb{U},\mathbb{U})$ d'image $\mathbb{U}$ et de degré nul.*

**Exercice 14** *Calculer les degrés de la restriction de $g$ à $\mathbb{U}$, où $g$ est un endomorphisme inversible du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$.*

**Exercice 15** *Soit $F$ une fraction rationnelle complexe n'admettant ni degré ni pôle dans $\mathbb{U}$. Calculer le degré de la restriction de $F$ à $\mathbb{U}$.*

**Exercice 16** *Soient $f$ et $g$ dans $C(\mathbb{U},\mathbb{U})$ de degrés distincts. Montrer qu'il existe $z$ dans $\mathbb{U}$ tel que $f(z) = g(z)$. En déduire le degré d'une application continue sans point fixe de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$.*

**Exercice 17** *Soit $f \in C(\mathbb{U},\mathbb{U})$ telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f(-z) \neq f(z).$$

*Montrer que le degré de $f$ est impair.*

**Exercice 18** *Soient $f$ et $g$ deux applications continues de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$. Calculer le degré de $g \circ f$. Montrer que le degré d'un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ vaut $\pm 1$.*

**Exercice 19** *Soit $h$ un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$. Soit $\theta$ un relèvement de :*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto h(e^{it}).$$

*Montrer que $\theta$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'existe $\varepsilon$ dans $\{\pm 1\}$ tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \theta(t + 2\pi) = \theta(t) + \varepsilon 2\pi.$$

*Montrer que $\varepsilon = 1$ si et seulement si $\theta$ est croissant. Dans ce cas, on dit que $h$ est croissant, ou que $h$ préserve l'orientation.*

Voici maintenant une formule due à Brézis, donnant le degré d'une application de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ en fonction des coefficients de Fourier.

**Exercice 20** *Soient $g$ une application de classe $C^1$ et $2\pi$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, $f$ l'application continue définie sur $\mathbb{U}$ par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(e^{it}).$$

*Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int}\, dt$. Montrer que :*

$$deg(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n(g)|^2.$$ [13]

Terminons ce paragraphe par une interprétation assez différente du degré d'une application $f$ de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ : c'est le nombre d'antécédents, comptés en tenant compte de l'orientation, d'une valeur régulière de $f$.

**Exercice 21** *Soient $f$ une application de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$, $\theta$ un relèvement de classe $C^1$ de cette fonction, $\theta_0$ une valeur régulière de $\theta$, c'est-à-dire un réel qui n'est l'image par $\theta$ d'aucun point critique de $\theta$, $t_0$ un réel tel que $e^{it_0} \neq \theta_0$. Déterminer le degré de $f$ à partir des signes des nombres réels $\theta'(t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + 2\pi[$ et $\theta(t) = \theta_0$.*

13. Ainsi, le degré d'une application de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ ne dépend que du module de ses coefficients de Fourier. De manière assez étonnante, Bourgain et Kozma ont montré en 2006 que la situation change radicalement dans le cadre continu : il existe $f$ et $g$ dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ telles que $\deg(f) \neq \deg(g)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $|c_n(f)| = |c_n(g)|$.

## 3.2 Applications de degré nul

Les applications de degré nul admettent plusieurs caractérisations intéressantes.

**Théorème 4** *Soit $f \in \mathbb{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$. S'équivalent :*

*(i) l'application $f$ appartient à $E_{\mathbb{U}}$ ;*

*(ii) l'application $f$ se prolonge en un élément de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$ ;*[14]

*(iii) l'application $f$ est homotope à une constante dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ ;*

*(iv) le degré de $f$ est nul.*

*Preuve.* Supposons *(i)*. Soit $g$ un logarithme continu de $f$. Posons

$$\forall (r, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad F(rz) = \exp(rg(z)).$$

Alors $F$ est un élément de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$ prolongeant $f$. On a *(ii)* .

Supposons *(ii)* . L'application $f$ se prolonge en $F \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$. En posant

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad H(s, z) = F(sz),$$

on obtient une homotopie de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ reliant $f$ à une l'application constante $f(0)$. La proposition 5 entraîne que $\deg(f) = 0$. On a *(iii)* .

L'implication $(iii) \Longrightarrow (iv)$ provient du point 5 de la proposition 4.

Supposons enfin *(iv)*. Soit $g$ une application continue de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f(e^{it}) = \exp(g(t)).$$

On a $g(\pi) = g(-\pi)$. Ceci assure que, si on définit $F$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ par

$$\forall (r, t) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi], \qquad F(re^{it}) = \exp(rg(t)),$$

l'application $F$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et prolonge $f$.

L'exercice suivant, dont le résultat est dû à Borsuk, explicite ce qui reste du théorème 4 lorsqu'on remplace $\mathbb{U}$ par un compact $K$ de $\mathbb{C}$.

**Exercice 22** *Soient $K$ un compact de $\mathbb{C}$, $f$ dans $C(K, \mathbb{C}^*)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés :*

*(i) la fonction $f$ est homotope à 1 dans $C(K, \mathbb{C}^*)$ ;*

*(ii) la fonction $f$ se prolonge en un élément de $C(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$ ;*

*(iii) la fonction $f$ a un logarithme continu.*

14. Il est très facile de voir que tout élément de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ se prolonge en un élément de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$. La difficulté vient du fait que les applications sont à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Le théorème 4 semble remonter à Borsuk.

## 3.3 Degré et équations, théorème du champ sortant

Du théorème 4, nous utiliserons principalement l'implication $ii) \Longrightarrow iv)$, à travers le très utile corollaire suivant. Ce résultat est une sorte de « théorème des valeurs intermédiaires » : une hypothèse sur le comportement de $f$ sur la frontière $\mathbb{U}$ de $\overline{\mathbb{D}}$ entraîne que $f$ s'annule sur $\mathbb{D}$. Il s'avère très puissant pour montrer que certaines équations admettent des solutions.

**Théorème 5** *Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$, telle que $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$ et que la restriction de $f$ à $\mathbb{U}$ est de degré non nul. Alors $f$ s'annule sur $\mathbb{D}$.*

*Mieux, $f(\mathbb{D})$ contient la composante connexe de $0$ dans $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{U})$. En particulier, $0$ est intérieur à $f(\mathbb{D})$.*

*Preuve.* Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 4. Soit maintenant $z'$ un élément de la composante connexe $C$ de $0$ dans $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{U})$. Comme $C$ est ouverte dans $\mathbb{C}$ (comme composante connexe d'un ouvert de $\mathbb{C}$), on dispose d'un chemin $\gamma$ tracé sur $C$ reliant $z'$ à $0$. Posons

$$\forall (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad H(t, z) = f(z) - \gamma(t).$$

Alors est une homotopie de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ reliant les restrictions à $\mathbb{U}$ de $f$ et $f - z'$. Il suit de la première assertion que $f - z'$ s'annule sur $\mathbb{D}$. Le dernier point provient du fait que $C$ est ouverte dans $\mathbb{C}$. [15]

La théorie du degré de Brouwer permet d'étendre le théorème 5 à la dimension $n$. Elle donne ainsi une méthode puissante pour étudier l'existence de solutions d'équations non linéaires.

*Retour sur le théorème de d'Alembert-Gauss*

En guise de première application du théorème 5, reformulons la démonstration de **2.5** sans utiliser l'expression intégrale de l'indice. Soient $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, $a_n$ le coefficient dominant de $P$. Alors

$$\frac{P(z)}{z^n} \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} a_n.$$

On dispose donc de $R > 0$ tel que, pour $r \geq R$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad |P(rz) - a_n r^n z^n| < |a_n r^n z^n|.$$

15. On peut aussi noter que $f(\mathbb{D})$ contient la boule ouverte de centre $0$ et de rayon $m$, où $m$ est le minimum de $|f|$ sur $\mathbb{U}$.

Il suit du point 4 de la proposition 5 que l'application

$$z \in \mathbb{U} \longmapsto P(Rz)$$

est de degré $n$ : $P$ a une racine de module strictement inférieur à $R$.

L'exercice ci-après généralise le raisonnement précédent.

**Exercice 23** *Soient $f$ et $g$ dans $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $R \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $f(z) \neq 0$ pour $|z| \geq R$, que le degré de $z \in \mathbb{U} \longmapsto f(Rz)$ n'est pas nul, et que, pour $|z|$ assez grand, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Montrer que $g$ s'annule sur $\mathbb{C}$.*

*Le théorème du champ sortant*

Une autre application du théorème 5 est le *théorème du champ sortant.*

**Théorème 6** *Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$. Identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et supposons*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \langle z, f(z) \rangle \geq 0. \text{ [16]}$$

*Alors $f$ s'annule sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

*Preuve. Étape 1. Cas d'un champ strictement sortant, i.e.*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \langle z, f(z) \rangle > 0.$$

Considérons l'application $H$ définie par

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad H(s, z) = (1 - s)z + sf(z).$$

On a bien sûr

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad \langle z, H(s, z) \rangle > 0.$$

L'application $H$ ne s'annule pas. C'est donc une homotopie de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ ; $H(0, .)$ est l'identité de $\mathbb{U}$ tandis que $H(1, .)$ est la restriction de $f$ à $\mathbb{U}$. On en déduit que la restriction de $f$ à $\mathbb{U}$ est de degré 1 et s'annule donc dans $\mathbb{D}$.

16. Cette inégalité signifie qu'en tout point de $\mathbb{U}$, le champ de vecteurs $f$ pointe vers l'extérieur, d'où le nom du théorème. Noter par ailleurs qu'en termes de nombres complexes :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \langle z, z' \rangle = \mathrm{Im}(z\overline{z'}).$$

*Étape 2. Cas général.*

Passons au cas général. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons l'application $f_n$ par

$$\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \qquad f_n(z) = f(z) + \frac{z}{n}.$$

On a, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \langle z, f_n(z) \rangle \geq \frac{1}{n} > 0.$$

L'application $f_n$ admet donc un zéro $x_n$ dans $\mathbb{D}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne une valeur d'adhérence $x$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ ; cette valeur d'adhérence est un zéro de $f$.

En appliquant le théorème 6 à $-f$, on obtient le *théorème du champ rentrant*, que le lecteur explicitera.

## 3.4 Composantes connexes par arcs de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$

Nous allons montrer que les composantes connexes par arcs de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ pour la topologie de la convergence uniforme sont les fibres de l'application deg. [17] Nous n'utiliserons pas ce résultat avant la section **5.3**.

**Théorème 7** *Soient $f$ et $g$ deux éléments de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$. Alors $f$ et $g$ sont homotopes dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ si et seulement si $deg(f) = deg(g)$.*

*Preuve.* Le sens direct est le point 5 de la proposition 5. Prouvons la réciproque. Soient $f$ et $g$ dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ de même degré. Alors $h = \dfrac{g}{f}$ est de degré nul. Elle se prolonge donc en un élément de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$ (théorème 4). Posons

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad H(s, z) = h(sz)\, f(z).$$

Alors $H$ est une homotopie de $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$ reliant $h(0)f$ à $g$. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, $h(0)f$ et $f$ sont également homotopes dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$, ce qui achève la démonstration.

Vers 1930, Hopf a généralisé le théorème 7 : si $X$ est une variété compacte connexe orientée de dimension $n$, deux éléments de $C(X, \mathbb{S}^n)$ sont homotopes si et seulement s'ils ont même degré.

17. En termes de groupe fondamental : le degré induit un isomorphisme de groupes de $\Pi^1(\mathbb{U})$ sur $\mathbb{Z}$.

## 3.5 Degré et parité, lemme de non-rétraction

La définition du degré donne aussitôt le résultat suivant, qui admet beaucoup de conséquences sympathiques.

**Lemme 4** *Soit $f$ une application continue paire (resp. impaire) de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$. Alors le degré de $f$ est pair (resp. impair).*

*Preuve.* Soit $g$ un logarithme continu de :

$$\tilde{f}\ : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(e^{it}).$$

Si $f$ est paire, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(t+\pi) = \tilde{f}(t)$$

d'où il résulte, par continuité, qu'existe un entier $k$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t+\pi) - g(t) = 2ki\pi.$$

Il s'ensuit que $f$ est de degré $2k$. Si $f$ est impaire,

$$z \in \mathbb{U} \longmapsto zf(z)$$

est paire, d'où le résultat au vu du point 2 de la proposition 5.

**Exercice 24** *Soient $m$ dans $\mathbb{N}^*$, $\omega$ une racine primitive $m$-ième de 1, $\ell$ un entier, $f$ une application continue de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f(\omega z) = \omega^{\ell}\, f(z).$$

*Montrer que le degré de $f$ est congru à $\ell$ modulo $m$.*

L'exercice ci-après caractérise les éléments d'ordre fini du groupe des homéomorphismes croissants de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$. Le résultat est dû à Brouwer (1919).

**Exercice 25** *Soient $m$ dans $\mathbb{N}^*$, $h$ un homéomorphisme croissant de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ (exercice 19,* **3.1***), $\theta$ un relèvement de :*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto h(e^{it}).$$

*On suppose que la $m$-ième itérée de $h$ est l'identité de $\mathbb{U}$. On pose :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \theta^{(i)}(t)$$

*où $\theta^{(i)}$ désigne l'itérée i-ème de $\theta$. Montrer que $\Phi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour $t$ réel :*

$$\Phi(t+2\pi) - \Phi(t), \qquad \Phi \circ \theta(t) - \Phi(t).$$

*En déduire que $h$ est conjugué à une rotation dans le groupe des homéomorphismes croissants de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.*

Le lemme 4 et le théorème 5 impliquent immédiatement le résultat suivant.

**Théorème 8** *Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$. On suppose que la restriction de $f$ à $\mathbb{U}$ est impaire. Alors $f$ s'annule sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

*Preuve.* Si $f$ s'annule sur $\mathbb{U}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on sait que $f$ s'annule sur $D$.

Si $X$ est un espace topologique et $Y$ une partie de $X$, on appelle *rétraction de $X$ sur $Y$* toute élément de $C(X,Y)$ dont la restriction à $Y$ est l'identité de $Y$. S'il existe une telle application, on dit que *$Y$ est un rétract de $X$*.

Les propriétés de parité du degré ont été dégagées vers 1930 par Borsuk, dans le cadre général de la dimension $n$. Un cas particulier du théorème 8 est le cas plan du *lemme de non rétraction de Borsuk*, intuitivement assez clair : on ne peut pas envoyer un disque fermé sur sa frontière par une application égale à l'identité sur la frontière sans « déchirer » quelque part.

**Théorème 9** *Il n'existe pas de rétraction de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\mathbb{U}$.*

On notera que le lemme de non rétraction est également une conséquence directe du théorème du champ sortant.

**Exercice 26** *Déterminer les parties de $\mathbb{U}$ qui sont des rétracts de $\overline{\mathbb{D}}$.*

## 3.6 Le théorème de point fixe de Brouwer

On déduit très classiquement du lemme de non rétraction la version plane du *théorème de point fixe de Brouwer.* [18]

**Théorème 10** *Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \overline{\mathbb{D}})$. Alors admet un point fixe.*

18. Dans le même cercle d'idée, on notera que l'exercice 16 de **3.1** montre qu'une application de degré 1 de $\mathbb{C}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ admet un point fixe.

*Preuve.* Supposons par l'absurde que tel n'est pas le cas. Pour $z$ dans $\overline{\mathbb{D}}$, soit $D_z$ la demi-droite d'origine $f(z)$ passant par $z$. Cette demi-droite coupe $\mathbb{U}$ en un unique point $r(z)$ dépendant continûment de $z$. Pour l'établir, il suffit de vérifier que l'équation de degré 2 en le réel $t$ :

$$|f(z) + t(z - f(z))|^2 = 1$$

admet une unique racine dans $\mathbb{R}^+$ et que cette racine dépend continûment de $t$, ce qui est aisé : les coefficients de $t^2$ et 1 sont de signes opposés et la formule donnant les solutions d'une équation de degré 2 donne le résultat. Il est clair que $r$ induit l'identité sur $\mathbb{U}$. L'application $r$ de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{U}$ ainsi définie est une rétraction de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\mathbb{U}$, contradiction.

**Exercice 27** *Établir l'amélioration suivante du théorème de Brouwer : si $f \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ envoie $\mathbb{U}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$, alors $f$ admet un point fixe.*

**Remarque** *Liens entre le théorème de Brouwer, le lemme de non-rétraction et le théorème du champ sortant*

Les trois énoncés figurant dans le titre de cette remarque peuvent se déduire simplement les uns des autres. On a déjà vu que :

- le lemme de non-rétraction entraîne le théorème de Brouwer ;

- le théorème du champ sortant implique le lemme de non rétraction.

Acceptons à présent le théorème de Brouwer. Si $r$ est une rétraction de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\mathbb{U}$, $-r$ est dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \overline{\mathbb{D}})$ et sans point fixe, contradiction.

Acceptons à nouveau le théorème de Brouwer. Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse du théorème du champ sortant avec inégalité stricte. Alors, on vérifie que, pour $t > 0$ assez petit, $\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{D}}} - tf$ applique $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ ; cette application admet donc un point fixe, qui est un zéro de $f$. On passe au cas général comme dans la démonstration du théorème 6.

Notons pour conclure que le théorème de Brouwer, le lemme de non rétraction et le théorème du champ sortant ne mettent en jeu que des applications de degré 1.

**Exercice 28** *Détailler la dernière démonstration.*

Le théorème de Brouwer s'étend aux compacts convexes du plan.

**Théorème 11** *Soient $K$ une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{C}$, $f$ une application continue de $K$ dans $K$. Alors $f$ admet un point fixe.*

*Preuve.* Voyons $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien, notons $B$ une boule fermée contenant $K$ et $\pi$ la projection de $\mathbb{C}$ sur le convexe fermé $K$. Grâce au théorème de Brouwer, la restriction de $\pi \circ f$ à $B$ admet un point fixe, lequel est dans l'image $K$ de $\pi$ et est donc un point fixe de $f$.

Si $X$ est un espace métrique (la distance est sous-entendue), on dit que $X$ *possède la propriété du point fixe* si et seulement si toute application continue de $X$ dans $X$ admet au moins un point fixe.

**Exercice 29** *a) Montrer que si $X$ et $Y$ sont homéomorphes, $X$ possède la propriété du point fixe si et seulement si $Y$ la possède.*

*b) Quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ possédant la propriété du point fixe ?*

*c) Quels sont les compacts de $\mathbb{R}$ possédant la propriété du point fixe ?*

*d) Un espace affine réel possède-t-il la propriété du point fixe ?*

*e) Le cercle unité $\mathbb{U}$ possède-t-il la propriété du point fixe ?*

*f) Montrer que* $([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ *possède la propriété du point fixe.*

Le théorème du champ sortant, le lemme de non rétraction et le théorème de Brouwer subsistent en remplaçant $\mathbb{C}$ par un espace euclidien. En fait, la démonstration du théorème de Brouwer à partir du lemme de non-rétraction s'applique sans changement en remplaçant le module complexe par la norme euclidienne. Il en est de même des arguments signalés dans la remarque de ce paragraphe. La difficulté est donc d'établir l'un quelconque de ces énoncés. Le degré de Brouwer donne une méthode permettant de généraliser les arguments présentés dans ce texte. Il y en a d'autres ! [19]

En admettant le théorème de Brouwer pour une boule euclidienne, la démonstration du théorème 11 montre que tout compact convexe non vide d'un espace normé de dimension finie possède la propriété du point fixe.

Signalons enfin une généralisation du théorème de Brouwer due à Schauder : si $C$ est un convexe compact d'un espace normé et $f$ une application continue de $C$ dans $C$, alors $f$ admet un point fixe. La preuve n'est pas difficile à partir du cas de la dimension finie.

**Exercice 30** *Soit $\ell^2$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable, $B$ la boule unité fermée de $\ell^2$, $S$ la sphère unité de $\ell^2$.*

19. En particulier, on doit à Milnor un argument élémentaire, reposant sur un changement de variable dans une intégrale multiple. On peut aussi utiliser un lemme combinatoire de Sperner ou une théorie topologique plus avancée.

*a) À $x = (x_n)_{n\geq 0} \in B$ on associe $f(x) = y = (y_n)_{n\geq 0}$ où $y_0 = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_{n-1}$. Montrer que $f$ est un élément de $C(B, S)$ sans point fixe.*

*b) Indiquer une rétraction de $B$ sur $S$.*

## 3.7 Le théorème de Poincaré-Miranda

Le théorème suivant, dont la parenté avec le théorème des valeurs intermédiaires est manifeste, a été énoncé par Poincaré en dimension $n$ dès 1883 et retrouvé par Miranda en 1940. [20] Comme le théorème du champ sortant et le lemme de non-rétraction, le théorème de Poincaré-Miranda est équivalent au théorème de point fixe de Brouwer. [21] Voici sa version plane.

**Théorème 12** *Soient $a_1, a_2, b_1, b_2$ des nombres réels tels que $a_1 < b_1, a_2 < b_2$, $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f_1$ et $f_2$ dans $C(Q, \mathbb{R})$. On suppose que*

$$\forall y \in [a_2, b_2], \qquad f_1(a_1, y) \leq 0, \quad f_1(b_1, y) \geq 0,$$

$$\forall x \in [a_1, b_1], \qquad f_2(x, a_2) \leq 0, \quad f_2(x, b_2) \geq 0.$$

*Alors $f_1$ et $f_2$ ont un zéro commun dans $Q$.*

*Preuve.* En reprenant un raisonnement par approximation du type de celui utilisé dans la deuxième étape de la démonstration du théorème du champ sortant, on voit qu'il suffit d'établir le résultat lorsque les inégalités de l'hypothèse sont strictes. Plaçons-nous dans ce cas. Pour $t > 0$, soit $g_t$ l'application définie par

$$\forall (x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \qquad g_t(x, y) = (x - tf_1(x, y), y - tf_2(x, y).$$

Admettons provisoirement le fait suivant : pour $t > 0$ assez petit, l'application continue $g_t$ envoie $Q$ dans lui-même. Pour $t$ ainsi choisi, $g_t$ admet un point fixe dans $Q$, qui est un zéro commun à $f_1$ et $f_2$.

Il reste à justifier le point admis. On dispose de $a_1', b_1', a_2', b_2'$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$a_1 < a_1' < b_1' < b_1 \qquad a_2 < a_2' < b_2' < b_2$$

20. Il est étonnant que cet énoncé très significatif n'ait pas été davantage remarqué dès l'origine.

21. Le théorème de Poincaré-Miranda est en fait le théorème du champ sortant pour un rectangle et peut être démontré à partir de cette idée : si $f = (f_1, f_2)$ s'annule sur la frontière de $Q$, le résultat est acquis, sinon on calcule le degré de Brouwer de $f$ sur $Q$.

et tels que $f_1$ soit majorée par 0 sur $[a_1, a'_1] \times [a_2, b_2]$ et minorée par 0 sur $[b'_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, que $f_2$ soit majorée par 0 sur $[a_1, b_1] \times [a_2, a'_2]$ et minorée par 0 sur $[a_1, b_1] \times [b'_2, b_2]$. Soit $M$ le maximum des normes uniforme de $f_1$ et $f_2$ sur $Q$. Pour tout $y$ dans $[a_2, b_2]$, on a

$$a'_1 \leq x \leq b'_1 \Longrightarrow x - tf_1(x,y) \in [a'_1 - tM, b'_1 + tM];$$

$$a_1 \leq x \leq a'_1 \Longrightarrow x - tf_1(x,y) \in [a_1, a'_1 + tM];$$

$$b'_1 \leq x \leq b_1 \Longrightarrow x - tf_1(x,y) \in [b'_1 - tM, b_1].$$

Si on choisit $t$ de sorte que $a'_1 - tM \geq a_1, b'_1 + tM \leq b_1$, alors

$$\forall (x,y) \in Q, \qquad x - tf_1(x,y) \in [a_1, b_1].$$

Un raisonnement analogue sur la deuxième coordonnée permet de conclure.

**Exercice 31** *Déduire du théorème de Poincaré-Miranda l'énoncé suivant. Soient $Q$ un carré plein du plan, $f$ et $g$ deux applications continues de $[0,1]$ dans $Q$, telles que $f(0)$ et $f(1)$ soient deux sommets opposés de $Q$, que $g(0)$ et $g(1)$ soient deux sommets opposés de $Q$ autres que les précédents. Montrer qu'il existe $(s,t)$ dans $[0,1]^2$ tels que $f(s) = g(t)$.*

## 3.8 L'Antipodensatz et l'invariance de la dimension

L'énoncé suivant est l'*Antipodensatz* de Borsuk. Steinhaus en a donné une interprétation pittoresque : à tout instant il existe deux points antipodiques de la terre en lesquels la température et la pression sont les mêmes.

**Théorème 13** *Soit $g$ une application continue de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Il existe $z$ dans $\mathbb{S}^2$ tel que :*

$$g(-z) = g(z).$$

*Preuve.* On définit une application $p$ de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{S}^2$ en posant :

$$\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \qquad p(z) = \left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \sqrt{1 - \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2}\right).$$

puis une application $f$ de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \qquad f(z) = g(p(z)) - g(-p(z)).$$

La restriction de $p$ à $\mathbb{U}$ est impaire. Il en est donc de même de celle de $f$. Identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on en déduit, en appliquant la proposition 6, que $f$ s'annule sur $\overline{\mathbb{D}}$.

**Exercice 32** *Énoncer et vérifier le lemme de non-rétraction, le théorème du point fixe de Brouwer et l'Antipodensatz en dimension* 1.

**Exercice 33** *Montrer qu'une application continue impaire de* $\mathbb{S}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *s'annule au moins une fois.*

L'énoncé ci-après, version bidimensionnelle d'un théorème de Lusternik et Schnirelmann, est un corollaire de l'Antipodensatz.

**Théorème 14** *Soient* $F_1, F_2, F_3$ *trois fermés de* $\mathbb{S}^2$ *de réunion égale à* $\mathbb{S}^2$*. Alors l'un des* $F_i$ *contient deux points antipodiques.*

*Preuve.* Posons, pour $z$ dans $\mathbb{S}^2$ :

$$f(z) = (d(z, F_1), d(z, F_2)) .$$

L'Antipodensatz donne $z$ dans $\mathbb{S}^2$ tel que $f(-z) = f(z)$. Pour $i$ dans $\{1, 2\}$, on a donc l'équivalence :

$$z \in F_i \Longleftrightarrow -z \in F_i.$$

Si $z$ est dans $F_1$ ou $F_2$, on a fini ; sinon, c'est que $z$ et $-z$ sont dans $F_3$.

**Exercice 34** *Montrer que le théorème 14 est faux pour quatre fermés.*

L'exercice ci-après propose la preuve d'un autre théorème de Borsuk, qui est une Il s'agit de la version bidimensionnelle de la forme suivante du théorème des valeurs intermédiaires : si $f$ est une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(-1)f(1) < 0$, alors $f$ s'annule sur $]-1, 1[$.

**Exercice 35** *Soit* $f$ *une application continue de* $\overline{\mathbb{D}}$ *dans* $\mathbb{C}$*. On suppose que* $f$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{U}$ *et que :*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{f(z)}{|f(z)|} \neq \frac{f(-z)}{|f(-z)|}.$$

*Montrer que la restriction de* $f$ *à* $\mathbb{U}$ *est homotope à sa partie impaire. En déduire que* $f$ *s'annule dans* $\mathbb{D}$*.*

On prouve que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 2$ par l'argument suivant : l'espace obtenu en ôtant à $\mathbb{R}^n$ un de ses points est connexe si $n \geq 2$, non connexe si $n = 1$. Le *théorème d'invariance topologique de la dimension*, dû à Brouwer, assure que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont homéomorphes que lorsque $m = n$. Nous traitons ici le cas où l'une des deux dimensions est 2.

**Théorème 15** *1. Si $f \in C(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, $f$ n'est pas injective. En particulier, $\mathbb{S}^2$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}^2$.*

*2. Soient $n \geq 3$ un entier, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Alors $f$ n'est pas injective. En particulier, $\Omega$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}^2$.*

*Preuve.* Le point 1 est une conséquence immédiate du théorème 13. Le point 2 s'en déduit en remarquant que $\Omega$ contient une sphère bidimensionnelle.

Les théorèmes 13, 14 et 15 s'étendent aux dimensions supérieures. Une fois acquis l'Antipodensatz, l'argument proposé dans la démonstration du théorème 15 s'étend immédiatement : $\mathbb{S}^{n-1}$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}^p$ ne sont pas homéomorphes si $p \geq n$.[22] En revanche, la démonstration de l'Antipodensatz est nettement plus délicate que pour $n = 2$ ; elle peut être fondée sur le degré de Brouwer mentionné en **3.1**.

## 3.9 L'invariance du domaine

Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *ouverte* si elle transforme tout ouvert en ouvert. Par exemple, les homéomorphismes sont des applications ouvertes. Pour $m$ dans $\mathbb{Z}$, l'application :

$$z \longmapsto z^m$$

de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est ouverte.[23] Brouwer a établi que, si $\Omega$ est un ouvert de l'espace de dimension finie $E$, toute injection continue de $\Omega$ dans $E$ est ouverte ; ce résultat, dit *théorème de l'invariance du domaine*, est sensiblement plus délicat que le théorème du point fixe ou l'invariance de la dimension. Les méthodes utilisées ici permettent d'en démontrer la version bidimensionnelle. La démonstration s'étend à la dimension $n$ en utilisant le degré de Brouwer.

**Théorème 16** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ dans $C(\Omega, \mathbb{C})$ injective. Alors $f$ est ouverte et induit un homéomorphisme de $\Omega$ sur $f(\Omega)$.*[24]

22. Cette approche n'est pas la plus directe pour établir l'invariance de la dimension.

23. Plus généralement, si $\Omega$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, toute application holomorphe non constante sur $\Omega$ est ouverte.

24. Reformulation. Soient $E$ un espace topologique, $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}$ une propriété que peuvent ou non posséder les éléments de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{P}$ est un *invariant positionnel* pour $\mathcal{F}$ si, pour tout $A$ de $\mathcal{F}$ possédant $\mathcal{P}$, tout élément de $\mathcal{F}$ homéomorphe à $A$ possède $\mathcal{P}$. La subtilité vient du fait que les homéomorphismes considérés ne sont pas des restrictions d'homéomorphismes de $E$ sur $E$. Pour $E = \mathbb{C}$, le théorème 16 assure que la propriété « être ouvert dans $\mathbb{C}$ » est un invariant positionnel pour $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

*Preuve.* Le second point se déduit du premier et de la caractérisation topologique de la continuité.

Pour établir le premier point, on peut se borner à prouver que, si $f$ est une application continue et injective de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$, alors $f(0)$ est intérieur à $f(\mathbb{D})$. On peut bien sûr de plus supposer que $f(0)$ est nul. Le résultat provient alors du lemme 5 ci-après, du lemme 4 et du théorème 5.

**Lemme 5** *Soit $f$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ injective telle que $f(0) = 0$. Alors la restriction de $f$ à $\mathbb{U}$ est homotope à une application impaire.*

*Preuve.* Posons

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times \mathbb{U}, \qquad H(s, z) = f\left(\frac{z}{1+s}\right) - f\left(\frac{-sz}{1+s}\right).$$

L'application $H$ est continue, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ grâce à l'injectivité de $f$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, $H(0, .) = f$, tandis que $H(1, .)$ est impaire.

**Exercice 36** *Vérifier le théorème de l'invariance du domaine en dimension 1.*

**Exercice 37** *Soit $f$ une injection continue et propre de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

**Exercice 38** *Déduire du théorème 16 que, si $n \geq 3$ est un entier, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application continue de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^2$, alors $f$ n'est pas injective. On retrouve ainsi le second point du théorème 15.*

**Exercice 39** *Soient $C$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, $f$ dans $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ telle que*

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad |f(z') - f(z)| \geq C|z' - z|.$$

*Montrer que $f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.*

**Exercice 40** *Montrer que, si $H$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, il existe une isométrie linéaire de $H$ dans $H$ telle que $f(H)$ soit d'intérieur vide dans $H$.*

**Exercice 41** *Soit $f$ un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ sur lui-même. Montrer que $f$ induit un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur lui-même.* [25]

25. Ainsi, $\mathbb{U}$ est « reconnu topologiquement » dans $\overline{\mathbb{D}}$, indépendamment de tout plongement dans $\mathbb{C}$. Cette remarque conduit à la notion de « bord ».

# 4 Complémentaire d'un compact du plan

## 4.1 Groupe d'Eilenberg d'un compact de $\mathbb{C}$

Si $K$ est un compact de $\mathbb{C}$, on note $G_K$ le groupe multiplicatif $C(K, \mathbb{C}^*)$, c'est-à-dire le groupe des inversibles de l'algèbre $C(K, \mathbb{C})$. L'ensemble $E_K$ des éléments de $G_K$ admettant un logarithme continu est un sous-groupe de $G_K$. Nous allons nous intéresser à la structure de $G_K/E_K$. Deux cas nous sont déjà connus.

- Si $K$ est étoilé, $G_K/E_K$ est trivial (théorème 2).

- L'application degré induit un isomorphisme de $G_{\mathbb{U}}/E_{\mathbb{U}}$ sur $\mathbb{Z}$ (proposition 5 et théorème 4).

Le but de ce paragraphe est d'étendre ces résultats. La généralisation utilise les deux notions suivantes.

- Si $K$ est un compact de $\mathbb{C}$, soit $\mathcal{C}_K$ l'ensemble des composantes connexes bornées [26] de $\mathbb{C} \setminus K$. Comme $\mathbb{C}$ est séparable, $\mathcal{C}_K$ est dénombrable. Rappelons par ailleurs que les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ sont connexes par arcs.

- Si $I$ est un ensemble, la loi $+$ fait de l'ensemble $\mathbb{Z}^{(I)}$ des fonctions presque nulles de $I$ dans $\mathbb{Z}$ un groupe abélien. Ce groupe possède par définition une $\mathbb{Z}$-base indexée par $I$ et cette propriété le caractérise à isomorphisme près.

Le résultat central de cette section donne une interprétation algébrique du nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$.

**Théorème 17** *Si $K$ est un compact de $\mathbb{C}$, alors le groupe $G_K/E_K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}_K)}$.* [27]

Si $K$ et $K'$ sont des compacts de $\mathbb{C}$ et $\varphi$ une application continue de $K$ dans $K'$, $\varphi$ induit un morphisme d'algèbres $\varphi^*$ de $C(K', \mathbb{C})$ dans $C(K, \mathbb{C})$ :

$$\forall u \in C(K', \mathbb{C}), \qquad \varphi^*(u) = u \circ \varphi.$$

Si maintenant $\varphi$ est une application continue de $K$ dans $K'$, $\psi$ une application continue de $K'$ dans $K''$, alors :

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

26. Rappelons que, puisque le complémentaire d'une boule fermées est connexe par arcs, $K$ a exactement une composante connexe non bornée.

27. Le lecteur connaissant les formes différentielles notera que $G_K/E_K$ donne ici le même renseignement que le groupe de de Rham $H^1(\mathbb{C} \setminus K)$.

Il s'ensuit que si $\varphi$ est un homéomorphisme de $K$ sur $K'$, $\varphi^*$ est un isomorphisme d'algèbres de $C(K', \mathbb{C})$ sur $C(K, \mathbb{C})$ ; $\varphi^*$ induit donc un isomorphisme entre les groupes $C(K', \mathbb{C})^* = G_{K'}$ et $C(K, \mathbb{C})^* = G_K$.

D'autre part, toujours si $\varphi$ est un homéomorphisme de $K$ sur $K'$, l'image de $E'_K$ par $\varphi^*$ n'est autre que $E_K$. De toute cette fonctorialité on déduit en fin de compte l'énoncé suivant.

**Lemme 6** *Si $K$ et $K'$ sont deux compacts de $\mathbb{C}$ homéomorphes, les groupes $G_K$ et $G_{K'}$ sont isomorphes.*

Or, l'algèbre fournit le résultat suivant. [28]

**Lemme 7** *Si $I$ et $I'$ sont deux ensembles, les groupes $\mathbb{Z}^{(I)}$ et $\mathbb{Z}^{(I')}$ sont isomorphes si et seulement si $I$ et $I'$ sont équipotents.*

*Preuve 1.* Toute $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^{(I)}$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}^{(I)}$, d'où le résultat via la théorie de la dimension.

*Preuve 2.* Le quotient de $\mathbb{Z}^{(I)}$ par le sous-groupe $2\,\mathbb{Z}^{(I)}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I)}$. Tout isomorphisme de $\mathbb{Z}^{(I)}$ sur $\mathbb{Z}^{(I')}$ donne par passage au quotient un isomorphisme de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de $(\mathbb{F}_2)^{(I)}$ sur $(\mathbb{F}_2)^{(I')}$, ce qui amène le résultat modulo la théorie de la dimension.

**Exercice 42** *En reprenant la seconde preuve, montrer que, si $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif et $I$ et $I'$ deux ensembles, les $\mathbb{A}$-modules $\mathbb{A}^{(I)}$ et $\mathbb{A}^{(I')}$ sont isomorphes si et seulement si $I$ et $I'$ sont équipotents. Que donne l'argument de la première preuve ?*

On déduit des lemmes 6 et 7 et du théorème 17 le résultat ci-après.

**Théorème 18** *Si $K$ et $K'$ sont deux compacts de $\mathbb{C}$ homéomorphes, alors l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ et l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K'$ sont équipotents.* [29]

Ce théorème s'étend à la dimension $n$, au prix d'une démonstration plus compliquée. Ici encore, le degré de Brouwer fournit une approche possible.

**Exercice 43** *Quels sont les compacts $K$ de $\mathbb{C}$ tels que toute fonction continue de $K$ dans $\mathbb{C}^*$ admette un logarithme continu ?*

**Exercice 44** *Décrire un compact $K$ de $\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{C}_K$ soit infini.*

28. Puisque $\mathcal{C}_K$ est dénombrable, que nous n'utilisons ce fait que dans le cas où les ensembles $I$ et $I'$ sont dénombrables.

29. En d'autres termes, pour $\omega$ cardinal fini ou dénombrable, la propriété « avoir un complémentaire dans $\mathbb{C}$ admettant exactement $\omega$ composantes connexes » est un invariant positionnel pour la famille des compacts de $\mathbb{C}$. Ce n'est pas le cas pour les parties non compactes, comme on le voit en considérant $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

## 4.2 La structure du groupe d'Eilenberg

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème 17. On se fixe un compact $K$ de $\mathbb{C}$. Pour $p$ dans $\mathbb{C} \setminus K$, soit $\varphi_p$ l'élément de $G_K$ défini par

$$\forall z \in K, \qquad \varphi_p(z) = z - p.$$

Pour alléger les notations, nous notons $C_i,\ i \in I$, les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$, où $I$ est dénombrable. Nous choisissons, pour tout $i \in I$, un point $p_i$ dans $C_i$.

Le théorème 17 est conséquence de l'énoncé plus précis ci-après.

**Théorème 19** *Soit $f$ dans $G_K$. Il existe une unique famille $(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^{(I)}$ telle que les éléments $f$ et $\prod_{i\in I} {\varphi_{p_i}}^{n_i}$ de $G_K$ aient même classe modulo $E(K)$.*

La démonstration comporte deux parties. Dans chacune de ces parties, on utilise le *théorème de prolongement de Tietze-Urysohn* ci-après, dont la preuve sera rappelée en **4.4**.

**Théorème 20** *Soient $(E, d)$ un espace métrique, $F$ un fermé non vide de $E$, $f$ dans $C(F, \mathbb{C})$. Alors $f$ se prolonge en un élément de $C(E, \mathbb{C})$.*

*Preuve du théorème 19 : unicité de la décomposition.* L'argument essentiel est le lemme ci-après.

**Lemme 8** *Soient $K$ un compact de $\mathbb{C}$, $C$ une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, $p$ dans $C$, $n$ dans $\mathbb{Z}^*$. La fonction ${\varphi_p}^n$ n'admet pas de prolongement en un élément de $C(K \cup C, \mathbb{C}^*)$.*

*Preuve.* Soit $f$ un prolongement continu de ${\varphi_p}^n$ à $K \cup C$. Soit $r$ un nombre réel tel que $r > \sup\{|z-p|\ ;\ z \in C\}$. On définit une fonction $g$ sur le disque fermé $D$ de centre $p$ et de rayon $r$ en posant

$$\forall z \in D \setminus C, \quad g(z) = (z-p)^n \quad \text{et} \quad \forall z \in C, \quad g(z) = f(z).$$

Le choix de $r$ fait que

$$\overline{C} \cap (D \setminus C) = \overline{C} \setminus C \subset K,$$

ce qui assure la continuité de $g$. D'autre part, $g$ coïncide avec $z \longmapsto (z-p)^n$ sur le cercle de centre $p$ et de rayon $r$. La proposition 5 force $g$ à s'annuler dans l'intérieur de $D$, donc nécessairement sur $C$.

Retour à la démonstration de l'unicité. Supposons que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ appartiennent à des composantes connexes distinctes de $\mathbb{C} \setminus K$, notées respectivement $C_1, \ldots, C_m$. Soient $n_1, \ldots, n_m$ des entiers relatifs, $g$ dans $C(K, \mathbb{C})$ tels que

$$\forall z \in K, \qquad \prod_{i=1}^{m} (z - p_i)^{n_i}\, e^{g(z)} = 1.$$

Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Montrons que $n_i$ est nul. Grâce au théorème de Tietze-Urysohn, la fonction $g$ se prolonge en un élément de $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Il s'ensuit que

$$z \in K \longmapsto \prod_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne i}} (z - p_j)^{-n_j}\, e^{-g(z)}$$

se prolonge en un élément de $C(K \cup C_i, \mathbb{C}^*)$, donc que ${\varphi_{p_i}}^{n_i}$ se prolonge en un élément de $C(K \cup C_i, \mathbb{C}^*)$. Le lemme 8 entraîne que $n_i = 0$.

*Preuve du théorème 19 : existence de la décomposition.* Les deux lemmes suivants permettent de se limiter à établir une forme plus rustique de la décomposition.

**Lemme 9** *Si $p$ et $q$ sont deux points d'une même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $\dfrac{\varphi_q}{\varphi_p} \in E_K$.*

*Preuve.* Soit $\gamma$ une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C} \setminus K$ telle que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$). L'application $H$ définie par

$$\forall (s, z) \in [0, 1] \times K, \qquad H(s, z) = \frac{\varphi_{\gamma(s)}(z)}{\gamma_p(z)}$$

est continue, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Le résultat suit par homotopie (théorème 1).

**Lemme 10** *Soit $C$ la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Pour $p$ dans $C$, $\varphi_p$ appartient à $E_K$.*

*Preuve.* Si $|p| > \sup\{|z| \; ; \; z \in K\}$, la fonction $-\dfrac{\varphi_p}{p}$ est à valeurs dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$, donc admet un logarithme continu. Le résultat suit par homotopie (théorème 1).

Pour établir la partie « existence » du théorème 19, il suffit donc de montrer que tout élément de $G_K$ s'écrit sous la forme

$$(1) \qquad z \longmapsto \prod_{\ell=1}^{m} (z - q_\ell)^{n_\ell}\, e^{v(z)},$$

où $m$ est un entier naturel, les $q_\ell$ sont des points de $\mathbb{C} \setminus K$, les $n_\ell$ des entiers relatifs, $v$ un élément de $C(K, \mathbb{C})$. L'idée de la preuve est de se ramener au cas où $K$ est une partie de $[0,1]^2$ réunion finie de carrés de côtés parallèles aux axes et de frontières de tels carrés. [30] On part d'un énoncé relatif aux cercles, que l'on transforme pour en donner une version adaptée aux carrés.

**Lemme 11** *Soit $f$ dans $C(\mathbb{U}, \mathbb{C}^*)$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $g$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$ tels que*

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f(z) = z^n \, g(z).$$

*Preuve.* Soit $n = \deg(f)$. Alors $z \longmapsto z^{-n} \, f(z)$ est de degré nul (proposition 5) ; elle se prolonge donc en un élément de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^*)$ (théorème 4). [31]

**Lemme 12** *Soient $C$ la frontière d'un carré $Q$ de $\mathbb{C}$ de centre $a$ et de côtés parallèles aux axes, $f \in C(Q, \mathbb{C}^*)$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in C(Q, \mathbb{C}^*)$ tels que*

$$\forall z \in C, \qquad f(z) = (z-a)^n \, g(z).$$

*Preuve.* On peut supposer que $a = 0$. Pour $z = x + iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, notons $N(z) = \max\{|x|, |y|\}$. Définissons une application $\varphi$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad \varphi(z) = \frac{|z|}{N(z)} z.$$

L'application $\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ transportant $\mathbb{U}$ sur $C$ et $\overline{\mathbb{D}}$ sur $Q$. Sa réciproque est l'application qui fixe 0 et vérifie

$$\forall z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \qquad \varphi^{-1}(z) = \frac{N(z)}{|z|} z.$$

Le lemme 11 et le théorème 4 donnent $n \in \mathbb{Z}$ et $g$ dans $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ tels que

$$\forall w \in \mathbb{U}, \qquad f \circ \varphi^{-1}(w) = w^n \, g(w).$$

Ainsi

$$\forall z \in C, \qquad f(z) = z^n \, h(z),$$

où la fonction $h$ est définie sur $Q$ par $h(0) = 0$ et

$$\forall z \in Q \setminus \{0\}, \qquad h(z) = \frac{N(z)^n}{|z|^n} \, g(\varphi^{-1}(z)).$$

---

30. A. Browder a proposé une démonstration plus rapide de la représentation (1), fondée sur un argument d'approximation et d'une formule intégrale, dans l'esprit du « théorème d'approximation de Runge ».

31. Remarquons que l'entier $n$ du lemme 11 est nécessairement $\deg(f)$.

Il est clair que $h$ appartient à $C(Q, \mathbb{C}^*)$.

Soit $f \in G_K$. Montrons que l'on peut écrire $f$ sous la forme (1). Quitte à transformer le plan par une similitude directe, on suppose que $K$ est contenu dans l'intérieur du carré $Q = [0,1]^2$. Le théorème de Tietze-Urysohn donne $g$ dans $C(Q, \mathbb{C})$ prolongeant $f$. Si $g$ ne s'annule pas, elle appartient à $E_Q$ (car $Q$ étoilé) et $f$ appartient à $E_K$. On suppose désormais que l'ensemble des zéros $Z$ de $g$ n'est pas vide et on note $d$ la distance entre les deux compacts disjoints $K$ et $Z$ : on a bien sûr $d > 0$. On prend $n$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n > \dfrac{\sqrt{2}}{d}$ et on quadrille $Q$ en les

$$Q_{j,k} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \; 0 \leq j, k \leq n-1.$$

Ce choix de $n$ assure qu'aucun des carrés $Q_{j,k}$ ne coupe simultanément $Z$ et $K$. Pour $0 \leq j, k \leq n-1$, on note $p_{j,k}$ le centre de $Q_{j,k}$. On note $B$ l'ensemble des $(j,k)$ de $\{0, \ldots, n-1\}^2$ tels que $Q_{j,k}$ coupe $K$, $M$ le complémentaire de $B$ dans $\{0, \ldots, n-1\}^2$ et

$$K' = \bigcup_{(j,k) \in B} Q_{j,k}.$$

Le compact $K'$ contient $K$ et la restriction $h$ de $g$ à $K'$ ne s'annule pas. Soit

$$K'' = K \bigcup \left( \bigcup_{(j,k) \in M} \mathrm{Fr}(Q_{j,k}) \right).$$

La connexité de $\mathbb{C}^*$ permet de prolonger cette restriction en un élément $i$ de $C(K'', \mathbb{C}^*)$. Pour chaque $(j,k)$ de $M$, le lemme 11 nous donne $n_{j,k} \in \mathbb{Z}$ tel que

$$z \in \mathrm{Fr}(Q_{j,k}) \longmapsto i(z)\ (z - p_{j,k})^{-n_{j,k}}$$

se prolonge en un élément de $C(Q_{j,k}, \mathbb{C}^*)$. On en déduit que

$$z \in Q \longmapsto i(z) \prod_{(j,k) \in M} (z - p_{j,k})^{-n_{j,k}}$$

se prolonge en un élément de $C(\mathbb{Q}, \mathbb{C}^*)$. Mais le théorème 2 assure que $C(Q, \mathbb{C}^*) = E_Q$. Comme $i_{|K} = f$, on obtient l'écriture désirée.

**Remarque** *Le critère d'Eilenberg*

La partie « unicité » de la décomposition fournit la réciproque du lemme 11 et donc le résultat suivant, connu sous le nom de *critère d'Eilenberg*.

**Proposition 6** *Soient $K$ un compact de $\mathbb{C}$, $p$ et $q$ dans $\mathbb{C} \setminus K$. Alors $\dfrac{\varphi_p}{\varphi_q}$ est dans $E_K$ si et seulement si $p$ et $q$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$.*

**Exercice 45** *a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Décrire le sous-groupe ${G_K}^m$ de $G_K$ constitué des puissances $m$-ièmes de $G_K$, ainsi que le quotient $G_K/{G_K}^m$.*

*b) Justifier l'égalité $\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} {G_K}^m = E_K$.*

**Exercice 46** *Déduire du critère d'Eilenberg le théorème de Janiszewski : si $K$ et $K'$ sont deux compacts du plan tels que $K \cap K'$ soit connexe, si $p$ et $q$ sont deux points de $\mathbb{C} \setminus (K \cup K')$ appartenant à la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ et à la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K'$, alors $p$ et $q$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus (K \cup K')$.*

## 4.3 Le théorème de Jordan

Commençons par un peu de terminologie. On appelle *arc simple* ou *arc de Jordan* toute partie de $\mathbb{C}$ homéomorphe à $[0,1]$, *courbe fermée simple* ou *courbe de Jordan* toute partie de $\mathbb{C}$ homéomorphe à $\mathbb{U}$. Le théorème 18 entraîne aussitôt le résultat suivant.. [32]

**Théorème 21** *Si $\Gamma$ est un arc de Jordan, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ est connexe.*

*Si $\Gamma$ est une courbe de Jordan, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes.*

C'est la seconde partie du théorème 21 que l'on nomme en général « théorème de Jordan ». On à Schonfliess des précisions sur cet énoncé, que nous allons établir. Il est commode à cet effet de décrire un peu différemment les courbes de Jordan.

**Lemme 13** *Soit $f$ une application continue de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(-\pi) = f(\pi)$. Alors l'application $g$ définie sur $\mathbb{U}$ par*

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad g(e^{it}) = f(t)$$

*appartient à $C(\mathbb{U}, \mathbb{C})$. Si $f$ est injective sur $[-\pi, \pi]$, $g$ est injective sur $\mathbb{U}$ et définit un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur son image.*

32. Dont il existe bien sûr des démonstrations plus économiques.

*Preuve.* Le premier point est immédiat, le second vient du fait qu'une injection continue de source compacte est un homéomorphisme sur son image.

Le lemme 13 entraîne que les courbes fermées simples sont les compacts de $\mathbb{C}$ de la forme $\gamma([-\pi,\pi])$ où $\gamma \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ vérifie $\gamma(-\pi)=\gamma(\pi)$ et est injective sur $[-\pi,\pi[$. Cette description nous permet de formuler le *théorème de Jordan-Schonfliess*.

**Théorème 22** *Soit $\Gamma$ une courbe fermée simple de $\mathbb{C}$. Écrivons $\Gamma=\gamma([\pi,\pi])$ où $\gamma \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ vérifie $\gamma(-\pi)=\gamma(\pi)$ et est injective sur $[-\pi,\pi[$.*

1. *L'ouvert $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a deux composantes connexes.*
2. *Si $p$ est dans la composante bornée de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, alors $Ind_\gamma(p)\in\{\pm 1\}$.*
3. *Dans $\mathbb{C}$, chacune des deux composantes de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ admet $\Gamma$ pour frontière.*

*Preuve.* Le point 1 est déjà établi. Montrons le point 2. L'hypothèse fournit $f$ dans $C(\Gamma,\mathbb{U})$ telle que

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\qquad f(\gamma(t))=e^{it}.$$

Soit $C$ la composante bornée de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Quitte à effectuer une translation du plan, on suppose que $C$ contient 0. Grâce à la proposition 2, il suffit d'établir que $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ vaut $\pm 1$. Le théorème 19 fournit $n\in\mathbb{Z}$ et $g\in C(\Gamma,\mathbb{C})$ tels que

$$\forall z\in\Gamma,\qquad f(z)=z^n\ e^{g(z)}.$$

Ainsi

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\qquad e^{it}=\gamma(t)^n\ \exp\left(g(\gamma(t))\right).$$

Si $u$ est un logarithme continu de $\gamma$, on a

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0)=\frac{1}{2\pi}\left(u(\pi)-u(-\pi)\right).$$

Mais $nu$ est un logarithme continu de $t\in\mathbb{R}\longmapsto it-g(\gamma(t))$, ce qui implique que

$$\frac{n}{2\pi}\ \left(u(\pi)-u(-\pi)\right)=1\quad\text{i.e.}\quad n\,\mathrm{Ind}_\gamma(0)=1.$$

Le résultat suit.

Il reste à démontrer le point 3. Soit $C$ une des deux composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Comme les deux composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ sont ouvertes dans $\mathbb{C}$, il est clair que $\mathrm{Fr}(C)\subset\Gamma$. On a

$$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Fr}(C)=(\mathbb{C}\setminus\overline{C})\cup C.$$

Les deux ensembles $C$ et $\mathbb{C} \setminus \overline{C}$ sont deux ouverts non vides et disjoints de $\mathbb{C}$, donc de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Fr}(C)$. Il s'ensuit que ce dernier ensemble n'est pas connexe. La conclusion résulte alors du lemme suivant.

**Lemme 14** *Soient $\Gamma$ une courbe fermée simple de $\mathbb{C}$, $F$ un fermé propre de $\Gamma$. Alors $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe.*

*Preuve.* Le résultat est clair si $\Gamma = \mathbb{U}$. Le théorème 18 permet de conclure.

**Exercice 47** *Il découle du point 3 du théorème 22 qu'une courbe de Jordan est d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$. Prouver directement ce résultat.*

**Remarques**

1. *Le cas $C^1$*

   Nous verrons dans la section suivante que la démonstration du théorème de Jordan est beaucoup plus facile si $\Gamma$ est une courbe régulière, i.e. l'image d'une immersion de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$.

2. *Le théorème de Schonfliess*

   L'histoire ne s'arrête pas là. Soient $\Gamma$ une courbe de Jordan, $C$ la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Schonfliess a démontré que tout homéomorphisme de $\Gamma$ sur $\mathbb{U}$ se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{C}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Ce résultat délicat ne s'étend pas à la dimension 3. [33] Cet énoncé est lié au théorème de l'application conforme de Riemann.

## 4.4 Appendice : le théorème de Tietze-Urysohn

Nous allons établir le théorème 20. La preuve repose sur le lemme suivant

**Lemme 15** *Soient $(E, d)$ un espace métrique, $F$ un fermé de $E$. $f$ une fonction continue de $F$ dans $[0, 1]$. Il existe une fonction $g$ continue de $E$ dans $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ telle que*

$$\forall x \in F, \quad f(x) \leq \frac{1}{3} \Longrightarrow g(x) = 0, \quad f(x) \geq \frac{2}{3} \Longrightarrow g(x) = \frac{1}{3}.$$

*La restriction de $f - g$ à $F$ est donc à valeurs dans $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.*

33. Les contre-exemples classiques sont les « sphères » d'Alexander et d'Artin-Fox.

*Preuve.* Posons

$$F_1 = \{x \in F \ ; \ f(x) \leq \frac{1}{3}\}, \quad F_2 = \{x \in F \ ; \ f(x) \geq \frac{2}{3}\}.$$

Il suffit de définir $g$ par

$$\forall x \in E, \qquad g(x) = \frac{d(x, F_1)}{3\,(d(x, F_1) + d(x, F_2))}.$$

*Preuve du théorème 20.* Il suffit d'établir le résultat pour $f$ réelle, le cas général se traitant alors en prolongeant continûment la partie réelle et la partie imaginaire de $f$. Quitte à remplacer $f$ par $\varphi \circ f$ où $\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, on peut même supposer $f$ à valeurs dans $]0,1[$, donc dans $[0,1]$.

Supposons donc $f$ à valeurs dans $[0,1]$. Par des applications successives du lemme 15, on construit une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de $E$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on ait

$$\forall x \in E,\ 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad \forall x \in F,\ 0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

La série de fonctions $\sum g_k$ converge normalement sur $E$. Sa somme est une fonction continue sur $E$, à valeurs dans $[0,1]$, qui coïncide avec $f$ sur $F$.

**Remarques** *Extensions du théorème de Tietze-Urysohn*

Le théorème 20 vaut plus généralement si la source $E$ est un espace topologique normal, i.e. un espace dans lequel deux fermés disjoints peuvent être séparés par deux ouverts disjoints. Il suffit pour le voir de démontrer le lemme 15 dans cette situation, ce qui nécessite un argument un peu différent.

**Exercice 48** *Soit $X$ une partie de l'espace métrique $(E,d)$. Montrer que l'application*

$$f \in C(E,\mathbb{R}) \longmapsto f_{|X} \in C(X,\mathbb{R})$$

*est surjective si et seulement si $X$ est fermé dans $E$.*

**Exercice 49** *Déduire du théorème de Tietze-Urysohn la caractérisation suivante des espaces métriques compacts : un espace métrique $(E,d)$ est compact si et seulement si toute fonction continue de $E$ dans $\mathbb{R}$ est bornée.*

**Exercice 50** *Soient* $(E, d)$ *un espace métrique,* $F$ *une partie fermée de* $E$*,* $f \in C(F, \mathbb{C}^*)$*. Il n'y a aucune raison de pouvoir prolonger* $f$ *en un élément de* $C(E, \mathbb{C}^*)$ *: cf. le théorème 4 de* **3.2** *pour le cas* $E = \overline{\mathbb{D}}, F = \mathbb{U}$*. Montrer cependant qu'il existe un ouvert* $O$ *de* $E$ *contenant* $F$ *tel que* $f$ *se prolonge en un élément de* $C(O, \mathbb{C}^*)$*.*

**Exercice 51** *Soit* $E$ *un espace topologique tel que, pour tout couple* $(F_1, F_2)$ *de fermés disjoints de* $E$*, il existe* $f$ *dans* $C(E, \mathbb{R})$ *valant* $0$ *sur* $F_1$ *et* $1$ *sur* $F_2$*. Montrer que* $F$ *est normal.*[34]

**Exercice 52** *On se propose de donner une autre démonstration du théorème 20. On se donne* $(E, d)$ *un espace métrique,* $F$ *un fermé de* $E$*,* $f \in C(F, [1, 2])$ *et on pose*

$$\forall x \in E \setminus F, \qquad g(x) = \frac{1}{d(x, F)} \inf \{f(y)\, d(x, y) \;;\; y \in F\}.$$

*Montrer que la fonction égale à* $f$ *sur* $F$ *et à* $g$ *sur* $E \setminus F$ *est continue. Conclure.*

34. Le théorème de Tietze-Urysohn caractérise donc les espaces normaux.

# 5 Courbes planes fermées régulières

## 5.1 Généralités

Cette section est consacrée à des questions de géométrie différentielle et est donc de nature différente des précédentes. Le degré y joue cependant un rôle central.

Les objets étudiés ici sont les *courbes planes fermées régulières tracées sur* $\mathbb{C}$. La notion fonctionnelle correspondante est celle d'*immersion* de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$, i.e. d'application de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ à différentielle partout non nulle. Nous adopterons en fait un point de vue plus pédestre, en remplaçant les applications de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ par des applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

L'espace $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour cette norme. Si $f$ appartient à $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, $f$ admet un logarithme continu et deux logarithmes continus de $f$ diffèrent d'une constante appartenant à $2i\pi\mathbb{Z}$. On définit naturellement le degré de $f$ par la formule

$$\deg(f) = \frac{1}{2i\pi}\left(u(t+2\pi) - u(t)\right),$$

où $u$ est un logarithme continu de $f$ et $t$ un nombre réel. L'application degré ainsi définie est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

L'espace $C_p^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de classe $C^1$ et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est muni de la norme $C^1$ :

$$\forall f \in C_p^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \qquad \|f\| = \|f\|_{\infty,\mathbb{R}} + \|f'\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Soit $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ouvert de $C_p^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué des éléments de $C_p^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont la dérivée ne s'annule pas. [35] Nous appellerons *courbe fermée de classe* $C^1$ toute partie de $\mathbb{C}$ de la forme $f(\mathbb{R})$ où $f$ est dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Une courbe fermée de classe $C^1$ peut admettre des points multiples et n'est pas en général une sous-variété réelle de $\mathbb{C}$. [36]

35. Les éléments de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont donc les relèvements des immersions de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$.

36. On pourrait préciser la situation en considérant comme équivalents deux éléments $f$ et $g$ de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tels qu'existe un $C^1$-difféomorphisme croissant $\varphi$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$$

et $g = f \circ \varphi$ et appeler *courbe fermée orientée de classe* $C^1$ toute classe d'équivalence pour cette relation.

**Exercice 53** *Soit $f$ une application de classe $C^1$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $t \in I$ tel que $f'(t) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage de $t$ dans $I$ sur lequel $f$ est injective.*

Pour $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $t$ dans $\mathbb{R}$, la tangente à l'image de $f$ au point de paramètre $t$ est dirigée par le vecteur d'affixe $f'(t)$. En fait, les tangentes seront à la fois un outil dans les démonstrations (pour la version $C^1$ du théorème de Jordan) et un objet d'étude (pour les théorèmes de Whitney-Graustein et Hopf).

Il est techniquement commode de parcourir une courbe avec une vitesse de norme constamment égale à 1. C'est possible, grâce à la *paramétrisation par longueur d'arc* (ou *abscisse curviligne*, décrite dans le lemme suivant, dont la preuve est laissée au lecteur.

**Lemme 16** *Soient $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\varphi$ une primitive de $f'$. Alors $\varphi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Si $L = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|$, l'application $g = f \circ \varphi^{-1}$ est $L$-périodique et vérifie $|g'| = 1$.* [37]

## 5.2 La version $C^1$ du théorème de Jordan

Appelons *courbe fermée simple de classe* $C^1$ toute partie de $\mathbb{C}$ qui est l'image d'un plongement de classe $C^1$ du cercle $\mathbb{U}$ (vu comme sous-variété réelle de $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{C}$. Les courbes fermées simples de classe $C^1$ sont donc des sous-variétés compactes connexes de classe $C^1$ de dimension 1 de $\mathbb{C}$. [38]

Conformément à **5.1**, nous identifierons les plongements de classe $C^1$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ aux applications $2\pi$-périodiques de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont la dérivée ne s'annule pas et dont la restriction à un intervalle semi-ouvert de longueur $2\pi$ est injective. Les courbes fermées simples de classe $C^1$ sont donc les images des éléments $f$ de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont la restriction à un intervalle semi-ouvert de longueur $2\pi$ est injective. Le théorème ci-après mérite donc bien d'être appelé « version $C^1$ du théorème de Jordan ». Sa preuve, considérablement plus simple que celle du cas général, est très visuelle.

**Théorème 23** *Soient $f$ un élément de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est injective, $\Gamma = f(\mathbb{R})$. Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes.*

*De plus, en notant $\tilde{f}$ la restriction de $f$ à $[-\pi, \pi]$, la valeur de la fonction $Ind_{\tilde{f}}$ sur la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ est $\pm 1$.*

37. On notera que $L$ est la longueur de la courbe associée à $f$.

38. On sait d'ailleurs que toute variété compacte connexe de classe $C^1$ du plan est difféomorphe au cercle.

*Preuve.* *Étape 1. Réductions.*

Définissons $\varphi$ et $g$ comme dans le lemme 16. La fonction $g$ est alors $L$-périodique et injective sur tout intervalle semi-ouvert de longueur $L$, $|g'| = 1$, et $\Gamma$ est également l'image de $g$. Le fait que $|g'|$ soit égale à 1 a quelques avantages techniques et c'est sur $g$ que nous raisonnerons désormais. [39] Quitte à composer $g$ avec un déplacement, on peut en outre supposer que

$$g(0) = 0, \qquad g'(0) = 1.$$

*Étape 2. L'ensemble* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ *a au plus deux composantes connexes.*

Pour $\varepsilon$ réel, on note $g_\varepsilon$ la fonction continue $L$-périodique définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_\varepsilon(t) = g(t) + i\varepsilon g'(t),$$

$\Gamma_\varepsilon$ l'image de $g_\varepsilon$. On admet provisoirement le lemme suivant.

**Lemme 17** *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, si* $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\Gamma$ *ne coupe pas* $\Gamma_\varepsilon$.

On fixe alors $z$ dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et $\varepsilon$ dans $]0, \varepsilon_0[$. On va montrer qu'il existe un chemin continu reliant $z$ à $\Gamma_\varepsilon$ ou à $\Gamma_{-\varepsilon}$, ce qui établira le résultat. On note que par continuité, compacité et périodicité, la fonction :

$$d_z \ : t \mapsto |z - g(t)|^2$$

atteint sa borne inférieure en un point $t_0$. L'ensemble $[z, g(t_0)[$ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. L'égalité :

$$d_z{}'(t_0) = 0$$

montre d'autre part que la droite affine réelle passant par $z$ et $g(t_0)$ est la normale à l'arc $g$ au point de paramètre $t_0$. Il s'ensuit qu'existe un réel non nul $\delta$ tel que :

$$z = g_\delta(t_0).$$

On distingue alors deux cas. Si $|\delta| \geq \varepsilon$, le segment $[g(t_0), z] = [g(t_0), g_\delta(t_0)]$ contient un point à distance $\varepsilon$ de $g(t_0)$. Ce point est soit $g_\varepsilon(t_0)$ soit $g_{-\varepsilon}(t_0)$ ce qui achève la preuve dans ce cas. Supposons maintenant que $0 < \delta < \varepsilon$. Le segment $[z, g_\varepsilon(t_0)] = [g_\delta(t_0), g_\varepsilon(t_0)]$ est alors contenu dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ ce qui complète la démonstration. Un argument analogue s'applique si $-\varepsilon < \delta < 0$.

39. On reconnaît ici une « paramétrisation de la courbe par longueur d'arc », ou par « abscisse curviligne ».

*Preuve du lemme 17.* La fonction $g'$, continue et périodique, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On dispose donc de $\alpha$ dans $]0,\pi[$ tel que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad |u-v| < \alpha \Rightarrow |g'(v) - g'(u)| < 1.$$

Ainsi, pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|u-v| < \alpha$, on a

$$|g(v) - g(u) - (v-u)g'(u)| = \int_u^v (g'(t) - g'(u))\,\mathrm{d}t < |u-v|.$$

Par périodicité, cette inégalité subsiste si la distance $d(u-v, 2\pi\mathbb{Z})$ est strictement inférieure à $\alpha$. Supposons que $\Gamma$ coupe $\Gamma_\varepsilon$. Il existe alors $s$ et $t$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$i\varepsilon g'(s) = g(t) - g(s).$$

Ceci implique $d(t-s, 2\pi\mathbb{Z}) \geq \alpha$, sans quoi l'on aurait l'inégalité :

$$|(t-s)g'(s) + i\varepsilon g'(s)| < |t-s|,$$

absurde car équivalente à :

$$(t-s)^2 + \varepsilon^2 < (t-s)^2.$$

Mais l'ensemble :

$$\{|g(v) - g(u)| \; ; (u,v) \in \mathbb{R}^2, \; d(v-u, 2\pi\mathbb{Z}) \geq \alpha\},$$

égal à :

$$\big\{|g(v) - g(u)| \; ; (u,v) \in [-\pi,\pi]^2, \; d(v-u, 2\pi\mathbb{Z}) \geq \alpha\big\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^+$ ne contenant pas 0 puisque $g$ est injective sur $[0, 2\pi[$. Il reste à noter $\varepsilon_0$ la borne inférieure de cet ensemble pour conclure.

*Étape 3. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes.*
*Si $z$ appartient à la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, $\mathrm{Ind}_{\tilde{f}}(z)$ vaut 1 ou $-1$.*

Nous donnerons une démonstration analytique. Prenons $\varepsilon_0$ comme dans la première étape, notons $\tilde{g}$ la restriction de $g$ à $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ et considérons, pour $\varepsilon$ dans $]0, \varepsilon_0[$ :

$$\Psi(\varepsilon) = \mathrm{Ind}_{\tilde{g}}(-i\varepsilon) - \mathrm{Ind}_{\tilde{g}}(i\varepsilon) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\varepsilon g'(t)}{g^2(t) + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}t.$$

La proposition 2 assure que $\mathrm{Ind}_{\tilde{g}}$ est nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Pour conclure, il suffit donc d'établir la relation :

$$\Psi(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

On commence par noter que lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, ce sont les valeurs de $t$ proches de 0 prépondérantes dans l'intégrale. Précisons. Si $0 < \alpha < \dfrac{L}{2}$, une continuité d'intégrale à paramètre immédiate montre que :

$$\int_{\alpha \leq |t| \leq L/2} \frac{g'}{g^2 + \varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{\alpha \leq |t| \leq L/2} \frac{g'}{g^2}$$

donc que :

$$\varepsilon \int_{\alpha \leq |t| \leq L/2} \frac{g'}{g^2 + \varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On note alors que puisque :

$$g(t) \underset{t \to 0}{\sim} t,$$

on dispose de $\alpha$ dans $]0, \dfrac{L}{2}[$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \qquad \mathrm{Re}(g^2(t)) \geq \frac{t^2}{2}.$$

Or :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varepsilon g'}{g^2 + \varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u$$

où la fonction $h_\varepsilon$ est nulle sur l'ensemble des réels de valeur absolue $> \alpha/\varepsilon$ et telle que :

$$\forall t \in [-\alpha/\varepsilon, \alpha/\varepsilon], \qquad h_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^2\, g'(\varepsilon t)}{g^2(\varepsilon t) + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1 + t^2}, \qquad |h_\varepsilon(t)| \leq \frac{2}{2 + t^2}.$$

Le théorème de convergence dominée amène la conclusion attendue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \pi.$$

L'exercice ci-après met en évidence les « voisinages tubulaires » de $\Gamma$, implicite dans la preuve précédente.

**Exercice 54** *On reprend les notations de la démonstration ci-dessus et on suppose que* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. *Définir un* $C^1$*-difféomorphisme de* $]-\varepsilon, \varepsilon[\times\Gamma$ *sur l'ensemble des points de* $\mathbb{C}$ *à distance strictement inférieure de* $\Gamma$.

**Exercice 55** *On reprend les notations précédentes et on considère* $a \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$.

*a) Montrer que* $z$ *est un point critique de*

$$\varphi_a \ : z \in \Gamma \longmapsto \frac{z-a}{|z-a|} \in \mathbb{U}$$

*si et seulement si la droite passant par* $a$ *et* $z$ *est la tangente à* $\Gamma$ *au point* $z$.

*b) Soit* $D$ *une demi-droite d'origine* $a$ *non tangente à* $\Gamma$.[40] *Déterminer la parité du nombre de points d'intersection de* $D$ *et* $\Gamma$. *En déduire une méthode permettant de déterminer à quelle composante de* $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ *appartient* $a$.

## 5.3 Le théorème de Whitney-Graustein

Le *nombre d'enroulement* d'un élément $f$ de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est

$$\text{enroul}(f) = \deg(f').$$

Ainsi, enroul$(f)$ est le nombre de tours que fait la tangente à l'image de $f$ sur un intervalle de période.

**Remarque** *Enroulement et courbure*

Soient $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de classe $C^2$, $\theta$ un relèvement de $\dfrac{f'}{|f'|}$. Alors $\theta$ est de classe $C^1$ et $\theta'$ est la fonction courbure $K_f$ de $f$, pour l'orientation « dans le sens des $t$ croissants ». Il en résulte que $2\pi$ enroul(f) n'est autre que la courbure totale de la restriction de $f$ à $[-\pi, \pi]$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_f$.

**Exercice 56** *a) Pour* $n$ *dans* $\mathbb{Z}$, *donner un élément de* $I$ *dont le nombre d'enroulement soit* $n$.

*b) Que dire du nombre d'enroulement d'un élément de* $I$ *dont l'image est le symbole* 8 *parcouru une fois dans le sens positif sur* $[-\pi, \pi]$ *?*

*c) Donner deux éléments de* $I$ *ayant même nombre d'enroulement mais dont les images ne soient pas homéomorphes.*

Le théorème de Whitney-Graustein (1937) affirme que deux immersions de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ sont homotopes si et seulement si elles ont même nombre d'enroulement. Avec nos notations, et en rappelant que $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est muni de la norme $C^1$ qui en fait un ouvert de $C^1_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le résultat s'énonce comme suit.

40. Le théorème de Sard assure l'existence d'une telle demi-droite.

**Théorème 24** *Soient $f$ et $g$ deux éléments de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $f$ et $g$ sont dans la même composante connexe par arcs de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si :*

$$\textit{enroul}(f) = \textit{enroul}(g).$$

En langage plus géométrique, deux courbes fermées régulières sont homotopes si et seulement si les applications tangentes font le même nombre de tours orientés. Pour la démonstration, il est commode de se ramener à des courbes paramétrées normalement via le lemme suivant.

**Lemme 18** *Soit $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe $g$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ appartenant à la même composante de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ que $f$ et tel que $|g'| = 1$.* [41]

*Preuve.* Reprenons les notations du lemme 16 de **5.1** : soient $\varphi$ une primitive de $|f'|$ et $L = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|$, $g = f \circ \varphi^{-1}$. Alors $g$ est $L$-périodique, $|g'| = 1$.

On considère donc l'application $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = \frac{2\pi}{L} g\left(\frac{Lt}{2\pi}\right).$$

L'application $h$ appartient à $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et a sa dérivée partout de module 1. Il reste à relier $f$ et $h$ continûment dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, deux éléments colinéaires de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont dans la même composante de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et il suffit en fait de relier continûment $f$ et $\frac{L}{2\pi} h$. Pour cela, on opère une homotopie dans le changement de paramètre, c'est-à-dire que l'on considère, pour $s$ dans $[0, 1]$ et $t$ dans $\mathbb{R}$ :

$$H(s, t) = f\left((1 - s)t + s\varphi^{-1}\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right).$$

Alors $s \longmapsto H(s, .)$ est un chemin tracé sur $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tel que

$$H(0, .) = f \quad \text{et} \quad H(1, .) = \frac{L}{2\pi} h.$$

Nous utiliserons également le résultat classique ci-après (« cas d'égalité de l'inégalité triangulaire intégrale »).

41. Notons que, puisque $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un ouvert d'un espace normé, les composantes connexes coïncident avec les composantes connexes par arcs.

**Lemme 19** *Soient $S$ un segment de $\mathbb{R}$, $u$ dans $C(S,\mathbb{C})$ telle que*

$$\left|\int_S u\right| = \int_S |u|.$$

*Alors $u$ est à valeur dans une demi-droite issue de $0$.*

*En particulier, si $u \in C(S,\mathbb{U})$ et si $\int_S u \in \mathbb{U}$, alors $u$ est constante.*

*Preuve.* Notons

$$\int_S u = r\, e^{i\theta}, \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Alors, si $v = re^{-i\theta}$,,

$$\int_S v = r = \int_S |v|.$$

La fonction $|v| - \mathrm{Re}(v)$ est continue positive et d'intégrale nulle, donc identiquement nulle : ainsi, $v$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

*Preuve du théorème 24.* Comme deg est continu sur $C_p(\mathbb{R},\mathbb{C}^*)$ muni de la norme de la convergence uniforme, enroul est continu sur $I_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ muni de la norme $C^1$.

Prouvons le sens réciproque. Soient $f$ et $g$ dans $I_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que $f'$ et $g'$ aient pour degré $n$ telles que :

$$|f'| = |g'| = 1.$$

Compte-tenu du lemme 18, il suffit d'établir que $f$ et $g$ sont dans la même composante de $I_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Grâce au théorème 7 de **3.4**, il existe une application continue $H$ de $[0,1]^2 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ telle que, pour tout $s \in [0,1]$, $H(s,.)$ soit $2\pi$-périodique et que :

$$H(0,.) = f', \qquad H(1,.) = g'.$$

Posons, pour $s$ dans $[0,1]$ et $t$ dans $\mathbb{R}$ :

$$K(s,t) = \int_0^t H(s,u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(s,u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout $s$ de $[0,1]$, $K(s,.)$ est $2\pi$-périodique, de classe $C^1$ et de dérivée $H(s,.)$. Il est facile d'en déduire que l'application :

$$s \mapsto K(s,.)$$

de $[0,1]$ dans $C^1$ est continue. D'autre part, $K(0,.)-f$ et $K(1,.)-g$ sont constantes. Sous réserve que $K(s,.)$ appartienne à $I_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on dispose donc d'un chemin tracé sur $I_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ reliant $f$ et $g$. Or :

$$\frac{\partial K}{\partial t}(s,t)=0 \Longleftrightarrow H(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(s,u)\,\mathrm{d}u.$$

Mais puisque $H$ est à valeurs dans $\mathbb{U}$ et continue, le lemme 19 entraîne que cette égalité n'est possible que si $H(s,.)$ est constante sur $[-\pi,\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que $n=0$. Le résultat est donc établi pour $n\neq 0$. Pour $n=0$, il suffit pour conclure d'établir que l'on peut choisir $H$ à valeurs dans l'ensemble des fonctions non constantes. Observons déjà que $f'$ et $g'$ ne sont pas constantes, sinon $f$ et $g$ seraient affines non constantes donc non périodiques. Il suffit donc pour achever la preuve d'établir le lemme ci-après.

**Lemme 20** *L'ensemble des applications continues $2\pi$-périodiques de degré nul et non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ est une partie connexe par arcs de l'espace $C_p(\mathbb{R},\mathbb{U})$ des applications continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ muni de la norme de la convergence uniforme.*

*Preuve du lemme 20.* Soient $u$ et $v$ dans $C_p(\mathbb{R},\mathbb{U})$ non constantes. On écrit, grâce au théorème de relèvement :

$$u=e^{i\alpha},\qquad v=e^{i\beta}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux applications continues non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux $2\pi$-périodiques puisque $u$ et $v$ sont de degré nul. Si le segment $[\alpha,\beta]$ ne contient aucune fonction constante, l'application :

$$\Psi\ : s\mapsto e^{i(s\alpha+(1-s)\beta)}$$

est à valeurs dans l'ensemble des éléments non constants de $C_p(\mathbb{R},\mathbb{U})$ et trivialement continue pour la convergence uniforme. Sinon, $\beta$ est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de $\alpha$ et de la fonction constante égale à 1. Il reste à choisir une fonction continue $2\pi$-périodique $\gamma$ qui n'est pas combinaison linéaire de $\alpha,\beta$ et 1 et de concaténer le segment d'extrémités $\alpha$ et $\gamma$ à celui d'extrémités $\gamma$ et $\beta$ pour obtenir, en appliquant l'exponentielle imaginaire, le chemin désiré.

**Exercice 57** *a) Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $S$ un segment de $\mathbb{R}$, $u$ dans $C(S,E)$ tel que, si $\|\ \|$ est la norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$,*

$$\left\|\int_S u\right\|=\int_S \|u\|.$$

*Montrer que $u$ est à valeurs dans une demi-droite issue de 0.*

*b) Généraliser a) au cas où $(E,\|\ \|)$ est un espace normé de dimension finie strictement convexe.*

**Exercice 58** *Soit $J$ l'ensemble des immersions de $\mathbb{U}$ dans la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ (ou de façon moins exotique de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^2$). Quelles sont les composantes de $J$ ?*

En 1958, Smale a généralisé le théorème de Whitney-Graustein et déterminé les composantes connexes par arcs de l'espace des immersions de $\mathbb{S}^{\urcorner}$ dans $\mathbb{R}^n$. Une des conséquences de son résultat (pour $k = 2, n = 3$) est la possibilité de « retourner la sphère ».

## 5.4 L'Umlaufsatz de Hopf

L'article dans lequel Whitney établit le théorème 24 se présente comme une suite d'un travail de Hopf (1935), dans lequel Hopf démontre le résultat suivant, connu sous le nom d'Umlaufsatz (en anglais « turning tangent theorem »).

**Théorème 25** *Soit $f$ un élément de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est injective. Alors enroul$(f) \in \{\pm 1\}$.*

*Autrement dit, la courbure totale de la restriction de $f$ à $[-\pi, \pi]$ vaut $\pm 2\pi$.*

*Preuve.* Le lemme 18 permet de supposer que $|f'| = 1$, ce que l'on fait désormais. En un point $t_0$ en lequel $\mathrm{Im}(f)$ est minimale, $f'(t_0)$ est réel, donc égal à $\pm 1$. En considérant l'une des deux fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t_0 \pm t) - f(t_0),$$

on voit que l'on peut se borner à démontrer que si

$$|f'| = 1, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad \mathrm{Im}(f) \geq 0,$$

alors enroul$(f) = 1$. C'est ce que l'on fait ci-dessous. L'idée de la démonstration est de calculer la variation d'argument de $f'$ en utilisant $f$.

Définissons une application $G$ de $T = \{(s,t) \in [0, 2\pi]^2,\ s \leq t\}$ dans $\mathbb{U}$ en posant :

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(s)}{|f(t) - f(s)|} & \text{si} \quad 0 \leq s < t \leq 2\pi \text{ et } (s,t) \neq (0, 2\pi) \\ \\ f'(s) & \text{si} \quad s = t \\ -f'(0) & \text{si} \quad s = 0 \text{ et } t = 2\pi \end{cases}$$

Acceptons provisoirement le fait suivant.

**Lemme 21** *L'application $G$ est continue sur $T$.*

Le théorème 2 (**2.2**) fournit $\theta \in C(T, \mathbb{R})$ telle que $\theta(0,0) = 0$ et

$$\forall (s,t) \in T, \qquad G(s,t) = \exp(i\theta(s,t)).$$

Nous sommes ainsi ramenés à démontrer la relation

$$\theta(2\pi, 2\pi) - \theta(0,0) = 2\pi.$$

On écrit

$$\theta(2\pi, 2\pi) - \theta(0,0) = (\theta(2\pi, 2\pi) - \theta(0, 2\pi)) - (\theta(0, 2\pi) - \theta(0,0))\,.$$

Comme $G(0, .)$ est à valeurs dans le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire positive ou nulle, la continuité de $\theta$ entraîne que $\theta(0, .)$ est à valeurs dans $[0, \pi]$. Par suite

$$\theta(0, 2\pi) - \theta(0,0) = \pi.$$

De même, $G(., 2\pi)$ est à valeurs dans le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire positive ou nulle. Comme $\theta(0, 2\pi) = \pi$ et $\theta(2\pi, 2\pi) \equiv 0\ [2\pi]$, on obtient $\theta(2\pi, 2\pi) = 2\pi$ et la conclusion.

*Preuve du lemme 21.* Il suffit d'établir la continuité de $G$ sur la diagonale et en $(0, 2\pi)$. L'outil essentiel est l'écriture intégrale

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(t) - f(s) = (t - s) \int_0^1 f'(s + (t-s)u)\, \mathrm{d}u,$$

qui, combiné à un argument de continuité d'intégrale à paramètre laissé au lecteur, assure que, pour $t_0$ dans $[0, 2\pi]$,

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \underset{(s,t)\to(t_0,t_0)}{\longrightarrow} f'(t_0).$$

La continuité de $G$ en un point de la diagonale s'en déduit. La continuité en $(0, 2\pi)$ s'établit de manière analogue en remarquant que, si $0 \leq s < t \leq 2\pi$ et $(s,t) \neq (0, 2\pi)$, on a $t - 2\pi < s$ et

$$G(s,t) = -\frac{f(s) - f(t - 2\pi)}{|f(s) - f(t-2\pi)|}.$$

Les théorèmes 24 et 25 ont la conséquence suivante.

**Proposition 7** *Soit $f$ un élément de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est injective. Alors il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $f$ et $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\varepsilon t}$ soient dans la même composante connexe par arcs de $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Autrement dit, une courbe fermée simple plane régulière, i.e. un plongement de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$, peut être continûment déformée en un cercle parcouru une fois (soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif), chaque courbe intermédiaire étant régulière.

**Exercice 59** *Soient $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ injective sur $[-\pi, \pi[$, $\theta$ un relèvement de $\dfrac{f'}{|f'|}$, $\Gamma = f(\mathbb{R})$. Montrer que $\theta' \geq 0$ si et seulement si pour tout $z$ de $\Gamma$, $\Gamma$ est située d'un côté de la tangente à $\Gamma$ en $z$.*

**Exercice 60** *Soient $f$ dans $I_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\theta$ un relèvement de $\dfrac{f'}{|f'|}$. On suppose que $\theta' \geq 0$ et que $f$ n'est pas injective sur $[-\pi, \pi[$. Montrer que*

$$\mathit{enroul}(f) \geq 2.$$