Exercices de calculs

Exercice 1

Calculer les développements limités suivants :

1. le $DL_2(1)$ de $\exp\left(\dfrac{1+x+x^2}{1+2x+x^6}\right)$;
2. le $DL_5(0)$ de $\ln(\cos(2x+x^3))$;
3. le $DL_4(0)$ de $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1+x^3}$;
4. le $DL_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$;
5. le $DL_3(0)$ de $(\mathrm{ch}x+\cos x-1)^{\frac{1}{\mathrm{sh}(x^2)}}$.

Exercice 2

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1+\cos x}{2+e^x+\cos(x^2)}\right)$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0^+,
$$\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}.$$
3. Calculer le développement asymptotique à la précision $\circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ de la quantité $\arctan\left(\dfrac{1+x^2+x^3}{2-x+x^3}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction
$$f : x \longmapsto (x+1)\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+x+1}}.$$
2. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction
$$f : x \longmapsto \frac{x^2}{x+1}\arctan x.$$

3. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x+3} \cdot \exp\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x^2+\ln x+1}\right).$$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\operatorname{argsh}(n)+\operatorname{argsh}(n+2)-2\operatorname{argsh}(n+1)}{\operatorname{argch}(n)+\operatorname{argch}(n+2)-2\operatorname{argch}(n+1)}$;
2. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)^{\ln(e^n+n+1)}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 8} \frac{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}-9}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+19}-5}$.

Exercice 5

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto xe^{-2x}$ réalise une bijection de classe C^∞ au voisinage de 1 et calculer le $DL_3(e^{-2})$ de la bijection réciproque.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $\mathscr{E}_n$:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}x}+\operatorname{ch}x = n \text{ , d'inconnue } x \in]0,+\infty[.$$

   (a) Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} f'(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 0^+} f'(x) = -\infty.$$

   Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'équation $f(x) = n$ admette exactement deux solutions $a_n < b_n$.

   (b) Montrer que la suite (a_n) est convergente de limite nulle et que la suite (b_n) diverge vers $+\infty$.

   (c) En déduire que pour tout entier n assez grand, l'équation $\mathscr{E}_n$ admet exactement deux solutions $0 < a_n < b_n$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   (d) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs de la quantité a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

   (e) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs de la quantité b_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Montrer que les suites suivantes sont convergentes vers 0 et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + \sin(u_n)}$;
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n^2}$;
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$.