

Oraux Polytechnique - Mathématiques 1

Martin Teuscher

8 juillet 2019

1 Énoncé

- 1) Soient a, b, c trois réels strictement positifs vérifiant $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$. Montrer qu'il existe un triangle (dans le plan) dont les côtés sont de longueur a , b et c .
- 2) Caractériser les triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des entiers strictement positifs.

Indication 1 : En notant $a \leq b \leq c$ les longueurs des trois côtés, commencer par se ramener au cas $a \wedge b \wedge c = 1$.

Indication 2 : Montrer que l'on peut se ramener au cas où a est impair.

Indication 3 : Étudier les facteurs premiers de $c - b$ et $c + b$.

- 3) Soit un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont rationnelles, et tel que l'un des petits côtés soit de longueur 2. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{Q}$, $t > 1$ tel que les longueurs des deux autres côtés soient $t - \frac{1}{t}$ et $t + \frac{1}{t}$.

- 4) *Remarque :* L'énoncé de cette question était posé de manière beaucoup plus floue que ci-dessous : j'ai dû demander des précisions à l'examineur par la suite pour comprendre ce qu'il attendait.

Soit $k \in \mathbb{Q}$ fixé. On considère les couples de triangles rectangles vérifiant les hypothèses de la question 3), et dont les paramètres rationnels respectifs t et t' décrits dans cette même question s'écrivent $t = kx$ et $t' = kx^2$, $x \in \mathbb{Q}$. Pour un couple donné (qui est donc déterminé par le paramètre x), on colle les deux triangles par leur côté de longueur 2 de façon à former un nouveau triangle. Montrer que l'on peut choisir x de sorte que l'aire du triangle total (formé par le collage des deux triangles) soit de surface $\frac{1}{k} \frac{y^2}{x^2}$ avec $y \in \mathbb{Q}$ que l'on construira.

Indication : Chercher y sous la forme $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, en déduire l'expression de y et du x qui convient.

On en déduit alors que pour tout rationnel strictement positif, il existe un triangle à côtés rationnels dont l'aire vaut ce rationnel : c'est ce résultat que l'examineur souhaitait montrer au début de la question 4.

2 Déroulé de l'oral

Lieu de passage : École Polytechnique, petite classe 9.

Remarque importante : le fonctionnement des convocations est absolument diabolique : chacun est convoqué à l'horaire de passage du candidat précédent, afin de ne pas laisser un trou au cas où celui-ci ne viendrait pas. Inutile donc d'arriver une heure avant les horaires indiquées sur votre convocation, ou bien vous en attendrez deux...

Un examinateur franchement agréable, tout bien comme il faut : il me laissait développer mes idées même si ce n'était pas les bonnes, donnait des indications simplificatrices pour me permettre de me relancer, demandait des explications plus précises lorsqu'il ne comprenait pas bien ce que faisais,... **D'une façon générale, les examinateurs-trices sont plus enclins à donner des indications lorsqu'on leur a déjà proposé et développé des idées**, quitte à ce qu'elles ne soit pas utiles dans la résolution finale de l'exercice.

Seul inconvénient, il dictait les énoncés de chaque question extrêmement vite, et j'ai dû presque à chaque fois lui redemander ce qu'il venait de dire. Cela peut être une perte de temps, surtout en fin d'oral, encore plus quand la question est difficilement compréhensible même une fois l'énoncé plus ou moins établi (cf question 4).