 TD

THÉORIE DES APPLICATIONS

Exercice 1. Caractérisations fonctionnelles des jections

Soient E, F, G trois ensembles.

1. On suppose que $E \neq \varnothing$. Soit $f : F \longrightarrow G$ une application. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $\forall g, h \in F^E,\ (f \circ g = f \circ h) \Longrightarrow (g = h)$.
2. On suppose que G n'est ni vide ni un singleton. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Démontrer que f est surjective si, et seulement si, $\forall g, h \in G^F,\ (g \circ f = h \circ f) \Longrightarrow (g = h)$.

Exercice 2. Endomorphisme de clan

Soit Ω un ensemble.

Soit un *clan* sur Ω, c'est-à-dire un ensemble $\mathscr{C}$ de parties de Ω (i.e. $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$) tel que

(i) $\varnothing \in \mathscr{C}$;
(ii) $\forall A \in \mathscr{C},\ \overline{A} \in \mathscr{C}$;
(iii) $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cup B \in \mathscr{C}$.

On considère un *endomorphisme* de $\mathscr{C}$ c'est-à-dire une application $\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ telle que

(j) $\forall A \in \mathscr{C},\ \varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$;
(jj) $\forall A, B \in \mathscr{C},\ \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

1. Démontrer que $\Omega \in \mathscr{C}$ puis que $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cap B \in \mathscr{C}$.
2. Calculer $\varphi(\Omega)$ et $\varphi(\varnothing)$.
3. Démontrer que $\forall A, B \in \mathscr{C},\ \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.
4. On ordonne $\mathscr{C}$ par la relation d'ordre d'inclusion ($\subset$). Démontrer que φ est croissant.
5. Le *noyau* de φ est le sous-ensemble de $\mathscr{C}$, noté $\operatorname{Ker} \varphi$, défini par

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{A \in \mathscr{C} : \varphi(A) = \varnothing\}.$$

   Démontrer que φ est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} \varphi = \{\varnothing\}$.