POLYNÔMES

✠ *Exercice 1.* [$\star$]
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Posons $n = \deg(P)$.
Si $n = 0$, alors $P = 0$.
Si $n \geqslant 1$, on a $\deg P' = n-1$ et, puisque $P' \mid P$, on peut écrire $P(X) = (aX+b)P'(X)$. L'identification des coefficients dominants donne $a = 1/n$ ce qui donne

$$nP(X) = (X - \alpha)P'(X)$$

où $\alpha = -bn$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, posons $f(x) = P(x)/(x-\alpha)^n$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ et l'on vérifie aisément que sa dérivée est nulle. On en déduit donc l'existence de deux constantes λ_1 et λ_2 telles que $\forall x \in]-\infty, \alpha[\,,\ P(x) = \lambda_1(x-\alpha)^n$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[\,,\ P(x) = \lambda_2(x-\alpha)^n$. La fonction P étant un polynôme, on en déduit (par identification des coefficients) que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et donc que

$$P(X) = \lambda(X-\alpha)^n.$$

Réciproquement, un tel polynôme vérifie bien $P' \mid P$.
En conclusion,

$\boxed{\text{les polynômes } P \text{ tels que } P' \mid P \text{ sont tous les polynômes de la forme } \lambda(X-\alpha)^n \text{ où } \lambda, \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.}$

✠ *Exercice 2.* [$\star$]
Selon la valeur de $b \in \mathbb{R}$, décomposer $P_b = X^4 + 2bX^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On travaille par distinction de cas :

- ▷ Si $b = 1$, on a $X^4 + 2bX^2 + 1 = (X^2+1)^2$ car $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.
- ▷ Si $b = -1$, on a $X^4 + 2bX^2 + 1 = (X^2-1)^2 = (X+1)^2(X-1)^2$.
- ▷ Si $|b| > 1$, on écrit $X^4 + 2bX^2 + 1 = (X^2+b)^2 - (b^2-1) = \big(X^2 + b - \sqrt{b^2-1}\big)\big(X^2 + b + \sqrt{b^2-1}\big)$.
  Si $b > 1$, la factorisation s'arrête là.
  Si $b < -1$, on a $X^4+2bX^2+1 = \big(X + \sqrt{\sqrt{b^2-1} - b}\big)\big(X - \sqrt{\sqrt{b^2-1} - b}\big)\big(X + \sqrt{-b - \sqrt{b^2-1}}\big)\big(X - \sqrt{-b - \sqrt{b^2-1}}\big)$.
- ▷ Si $|b| < 1$, on écrit $X^4 + 2bX^2 + 1 = X^4 + 1 + 2bX^2 = (X^2+1)^2 - 2(1-b)X^2 = \big(X^2 + 1 + \sqrt{2(1-b)}X\big)\big(X^2 + 1 - \sqrt{2(1-b)}X\big)$ et la factorisation s'arrête là car les deux trinômes du second degré sont à discriminants négatifs.

En conclusion,

$$\boxed{P_b = \begin{cases} \big(X + \sqrt{\sqrt{b^2-1} - b}\big)\big(X - \sqrt{\sqrt{b^2-1} - b}\big)\big(X + \sqrt{-b - \sqrt{b^2-1}}\big)\big(X - \sqrt{-b - \sqrt{b^2-1}}\big) & \text{si } b < -1 \\ (X+1)^2(X-1)^2 & \text{si } b = -1 \\ \big(X^2 + 1 + \sqrt{2(1-b)}X\big)\big(X^2 + 1 - \sqrt{2(1-b)}X\big) & \text{si } b \in]-1;1[\\ (X^2+1)^2 & \text{si } b = 1 \\ \big(X^2 + b - \sqrt{b^2-1}\big)\big(X^2 + b + \sqrt{b^2-1}\big) & \text{si } b > 1. \end{cases}}$$

✠ *Exercice 3.* [$\circ$] (Polynômes de Tchebychev)
On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré n tel que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
   c) Pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le coefficient dominant de T_n. Démontrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et en déduire l'expression de a_n pour tout $n \geqslant 1$.
   d) Déterminer $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Retrouver ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos n\theta = S_n(\cos\theta)$. Démontrer que $S_n = T_n$.
   c) Déterminer des racines de T_n.
   d) Donner la factorisation de T_n pour tout $n \geqslant 1$.

1. a) On a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Donc

$$\boxed{T_2 = 2X^2 - 1, \qquad T_3 = 4X^3 - 3X \qquad \text{et} \qquad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1.}$$

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathscr{P}(n) : \qquad T_n \in \mathbb{Z}[X], \quad \deg T_n = n \quad \text{et} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

<u>Initialisation :</u> Les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ sont à coefficients entiers et de degrés respectifs 0 et 1. De plus, on a $T_0(-X) = 1 = (-1)^0 T_0(X)$ et $T_1(-X) = -X = (-1)^1 T_1(X)$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$.

- Le polynôme $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est à coefficients entiers puisque ses coefficients sont obtenus en additionnant et multipliant par des entiers les coefficients de T_n et T_{n+1} qui sont des entiers d'après $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$.
- Comme $\deg T_{n+1} = n+1$ d'après $\mathscr{P}(n+1)$, on a $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ d'après la règle sur le degré d'un produit. Dès lors, puisque $\deg T_n = n$ d'après $\mathscr{P}(n)$, les deux polynômes $2XT_{n+1}$ et T_n sont de degrés distincts et le cas d'égalité de la règle sur le degré d'une somme nous dit que $\deg 2XT_{n+1} - T_n = \max\{\deg 2XT_{n+1}\,;\deg T_n\} = n+2$. Donc $\deg T_{n+2} = n+2$.
- On a

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) && \text{par définition de } (T_n)\\
&= 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) && \text{d'après } \mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)\\
&= (-1)^{n+2}\big(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\big) && \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2}\\
&= (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) && \text{par définition de } (T_n).
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence double, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ est à coefficients entiers, de degré } n \text{ et satisfait } T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).}$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, T_{n+1} est de degré $n+1$ et T_n est de degré n donc le coefficient dominant de $2XT_{n+1} - T_n$ est celui de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire $2a_{n+1}$. Comme $2XT_{n+1} - T_n = T_{n+2}$, on en déduit que $2a_{n+1} = a_{n+2}$. Cela démontre que

$$\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est une suite géométrique de raison 2.}}$$

On en déduit que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = 2^{n-1}a_1$. Or $a_1 = 1$ puisque $T_1(X) = X$, donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = 2^{n-1}.}$$

d) Comme $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on a

$$T_0(0) = 1, \qquad T_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad T_{n+2}(0) = -T_n(0).$$

Cela démontre que la suite $\big(T_{2p+1}(0)\big)$ est constante égale à 0 et que la suite $\big(T_{2p}(0)\big)$ vérifie $\forall p \in \mathbb{N},\ T_{2p}(0) = (-1)^p$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

2. a) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{Q}(n) : T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
<u>Initialisation :</u> On a $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1 \times \theta)$, donc $\mathscr{Q}(0)$ et $\mathscr{Q}(1)$ sont vraies.
<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ et $\mathscr{Q}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{Q}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) &= 2(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) \qquad \text{par définition de } (T_n) \\
&= 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \qquad \text{par hyp. de réc.} \\
&= 2\cos\theta(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) - \cos n\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos n\theta - 2\cos\theta\sin n\theta\sin\theta \\
&= \cos 2\theta\cos n\theta - \sin 2\theta\sin n\theta \\
&= \cos(n+2)\theta,
\end{aligned}$$

où l'on a utlisé les formules de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, $2\cos^2 a - 1 = \cos 2a$ et $2\sin a\cos a = \sin 2a$. Donc $\mathscr{Q}(n=2)$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence double, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.}$$

La relation de la question précédente appliquée pour $\theta = \pi/2$ implique que $T_n(0) = \cos(n\pi/2)$, ce qui permet de retrouver que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

b) On pose

$$R_n = T_n - S_n.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$R_n(\cos\theta) = T_n(\cos\theta) - S_n(\cos\theta) = \cos n\theta - \cos n\theta = 0,$$

où l'on a utilisé le résultat de la question 2.a) et la définition de S_n. Lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, $\cos\theta$ parcourt le segment $[-1;1]$ donc tout nombre réel de l'intervalle $[-1;1]$ est une racine de R_n. Ainsi, R_n admet une infinité de racines. Or le seul polynôme qui admet une infinité de racine est le polynôme nul (car ceux qui ne sont pas nuls ont moins de racines que leur degré), donc $R_n = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{S_n = T_n.}$$

c) Résolvons l'équation $T_n(\cos\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
T_n(\cos\theta) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos n\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir toutes les valeurs de θ modulo 2π, on prend $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dès lors, on a

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \qquad T_n\Big(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big) = 0,$$

donc

$$\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \cdots,\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} \text{ sont des racines de } T_n.$$

On a ainsi n racines pour le polynôme T_n. Comme celui-ci est de degré n d'après 1.b), on peut affirmer, d'après le cours, que l'on a déterminé toutes les racines de T_n. Donc

$$\boxed{\text{les racines de } T_n \text{ sont } \cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \cdots\ ,\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.}$$

d) Pour $n \geqslant 1$, nous connaissons toutes les racines du polynôme T_n et nous savons que son coefficient dominant est 2^{n-1}, donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).}$$

✠ ***Exercice 4.*** [★] (Les polynômes positifs sont sommes de deux carrés)
Soit P un polynôme à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) \geqslant 0.$$

Démontrer l'existence de deux polynômes A et B à coefficients réels tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

Décomposons $P(X)$ sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$P = \lambda(X-a_1)^{n_1}\cdots(X-a_k)^{n_k}(X^2+b_1X+c_1)^{m_1}\cdots(X^2+b_\ell X+c_\ell)^{m_\ell}$$

où les discriminants des polynômes du second degré sont strictement négatifs.

L'hypothèse de positivité de P assure que $\lim_{+\infty} P = +\infty$; cela implique que $\lambda \geqslant 0$.

Justifions que les n_i $(i = 1, \ldots, k)$ sont pairs. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. En a_i, la fonction $f : x \mapsto P(x)/(x - a_i)^{n_i}$ est strictement positive et prolongeable par continuité. Cela implique qu'il existe un voisinage V_i de a_i dans lequel f est strictement positive. Dès lors, si n_i était impair, la fonction $x \longmapsto P(x) = f(x)(x-a_i)^{n_i}$ changerait de signe sur V_i (regarder les limites à gauche et à droite...) ce qui contredit l'hypothèse. Donc n_i est pair.

De la positivité de λ et de la parité des n_i $(i = 1, \ldots, k)$, on déduit qu'il existe un polynôme Q tel que $P = Q^2{T_1}^{m_1}\cdots{T_\ell}^{m_\ell}$ où $T_j = X^2 + b_jX + c_j$ $(j = 1, \ldots, \ell)$.

Soit $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Chacun des trinômes T_j ci-dessus peut se mettre sous forme canonique $T_j = (X + b_jX/2)^2 + (-\Delta)/4$ où $\Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$. Donc, en posant $A_j = X + b_jX/2$ et $B_j = \sqrt{(-\Delta)}/2$, on a $T_j = {A_j}^2 + {B_j}^2$. Ainsi T_j est une somme de deux carrés.

En vertu de l'identité de Lagrange

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2,$$

on peut alors affirmer qu'un produit de polynômes qui s'écrivent comme une somme de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés. Donc ${T_1}^{m_1}\cdots{T_\ell}^{m_\ell}$ est une somme de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que ${T_1}^{m_1}\cdots{T_\ell}^{m_\ell} = U^2 + V^2$.

Finalement, $P = A^2 + B^2$ avec $A = QU$ et $B = QV$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{les polynômes positifs sont somme de deux carrés.}}$$

✠ ***Exercice 5.*** [★]
Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers relatifs. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de terme général $u_n = \text{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big)$ est périodique.

- Comme P et Q sont premiers entre eux et à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ (puisque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), le théorème de Bachet–Bézout nous dit qu'il existe deux polynômes U et V à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$UP + VQ = 1.$$

En multipliant cette relation par le ppcm $m \in \mathbb{N}^*$ des dénominateurs des coefficients de U et V, on obtient

$$mU.P + mV.Q = m,$$

où mU et mV sont des polynômes à coefficients entiers. En évaluant en $n \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$mU(n).P(n) + mV(n).Q(n) = m,$$

avec $mU(n)$, $P(n)$, $mV(n)$ et $Q(n)$ qui sont des entiers relatifs. Cela permet d'affirmer que le pgcd de $P(n)$ et $Q(n)$ divise m. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n \mid m.$$

On peut donc déjà affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ prend un nombre fini de valeurs : les diviseurs de m.

- Nous allons en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-périodique.

  - Analyse : Supposons l'existence de $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ u_{n+q} = u_n$, c'est-à-dire

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big) = \operatorname{pgcd}\big(P(n+q), Q(n+q)\big).$$

    Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, on constate que $\forall k \in \mathbb{N},\ (n+q)^k \equiv n^k \pmod q$, ce qui implique que $P(n+q) \equiv P(n) \pmod q$ et $Q(n+q) \equiv Q(n) \pmod q$, c'est-à-dire qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que

    $$P(n+q) = P(n) + a_n q \qquad \text{et} \qquad Q(n+q) = Q(n) + b_n q.$$

    Il s'ensuit que

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big) = \operatorname{pgcd}\big(P(n) + a_n q, Q(n) + b_n q\big).$$

    Comme $\operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big)$ divise m pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on voit qu'il est judicieux de choisir

    $$q = \pm m.$$

  - Synthèse : Pour $q = m$, l'analyse nous dit que

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{pgcd}\big(P(n+m), Q(n+m)\big) = \operatorname{pgcd}\big(P(n) + a_n m, Q(n) + b_n m\big).$$

    Or, on a vu que $u_n = \operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big)$ divise m pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc on peut en déduire que $\operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big)$ divise $\operatorname{pgcd}\big(P(n+m), Q(n+m)\big)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n \mid u_{n+m}.$$

    Avec $q = -m$, le même argument nous dit que $\forall n \in \mathbb{Z},\ u_n \mid u_{n-m}$, ce que l'on peut réécrire sous la forme

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad u_{n+m} \mid u_n.$$

    Donc

    $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad u_{n+m} = u_n.$$

- Par conséquent,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est périodique.}}$$