Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Lundi 10/12/2018
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Devoir Surveillé n° 4 (4h)

Correction du problème 1 – Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Partie I – Exemples de Fonctions holomorphes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $z_0 \in \mathbb{C}$.
   (a) Pour tout $z \neq z_0$, on peut factoriser à l'aide de la formule de Bernoulli :
   $$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z-z_0)\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}}{z - z_0} = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}}.$$
   (b) Lorsque $z \to z_0$, cette dernière expression tend vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1} = nz_0^{n-1}$.
   Ainsi, ceci étant valable pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$\boxed{f'(z) = nz^{n-1}}.$$
2. On peut faire un raisonnement similaire, ou plus simplement utiliser les résultats admis : $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes (d'après la question précédente), le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, elle est $\boxed{\text{holomorphe sur } \mathbb{C}^*}$.
3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, qu'on écrit $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors :
   $$\begin{aligned}\mathrm{ch}(z) + \mathrm{sh}(z) &= (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))\cos(y) = \mathrm{i}(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))\sin(y)\\ &= \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \boxed{\mathrm{e}^z}\end{aligned}$$
   Les propriétés de parité de cos et ch et d'imparité de sin et sh de la variable réelle s'étendent facilement à la variable complexe, du fait de leur définition. Ainsi :
   $$\mathrm{ch}(z) - \mathrm{sh}(z) = \mathrm{ch}(-z) + \mathrm{sh}(-z) = \boxed{\mathrm{e}^{-z}}.$$
   (b) En formant la demi-somme et la demi-différence des relations précédentes, on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$\boxed{\mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}}.$$
   (c) Soit z_1 et z_2 deux complexes. Les formules d'Euler généralisées ci-dessus nous permettent d'écrire :
   $$\begin{aligned}\mathrm{sh}(z_1 + z_2) &= \frac{\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} - \mathrm{e}^{-z_1}\mathrm{e}^{-z_2}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{-z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z_2} + \mathrm{e}^{-z_2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{z_1} + \mathrm{e}^{-z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z_2} - \mathrm{e}^{-z_2}}{2}\\ &= \mathrm{sh}(z_1)\mathrm{ch}(z_2) + \mathrm{ch}(z_1)\mathrm{sh}(z_2).\end{aligned}$$
   (d) Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{sh}(z)}{z} &= \frac{\mathrm{sh}(x)\cos(y) + \mathrm{i}\,\mathrm{ch}(x)\sin(y)}{x + \mathrm{i}\,y}\\ &= \frac{(x\mathrm{sh}(x)\cos(y) + y\mathrm{ch}(x)\sin(y)) + \mathrm{i}(-y\mathrm{sh}(x)\cos(y) + x\mathrm{ch}(x)\sin(y))}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z}-1\right) &= \frac{x\mathrm{sh}(x)\cos(y)+y\mathrm{ch}(x)\sin(y)-x^2-y^2}{x^2+y^2}\\
&= \frac{x\mathrm{sh}(x)\cos(y)-x^2\cos(y)+x^2\cos(y)-x^2+y\mathrm{ch}(x)\sin(y)-y^2\mathrm{ch}(x)+y^2\mathrm{ch}(x)-y^2}{x^2+y^2}\\
&= \frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x)-x)}{x^2+y^2}+\frac{x^2(\cos(y)-1)}{x^2+y^2}+\frac{y\mathrm{ch}(x)(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}+\frac{y^2(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire amène le résultat voulu :

$$\boxed{\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z}-1\right)\right| \leqslant \left|\frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x)-x)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{x^2(\cos(y)-1)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y\mathrm{ch}(x)(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^2(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2+y^2}\right|}$$

(e) Lorsque $z \to 0$, on a aussi $x \to 0$ et $y \to 0$. Or, lorsque $x \neq 0$,

$$\left|\frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x)-x)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x)-x)}{x^2}\right| = \left|\cos(y)\cdot\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}-1\right)\right| \to 0,$$

puisque cos est borné et $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$. On obtient par le théorème d'encadrement

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{x\cos(y)(\mathrm{sh}(x)-x)}{x^2+y^2}\right| = 0,$$

en récupérant facilement le cas $x = 0$ de la nullité de l'expression dans ce cas. De la même manière, en traitant de la même manière d'abord le cas $x \neq 0$ (ou $y \neq 0$ suivant la situation), puis en récupérant ces valeurs comme ci-dessus, on obtient :

$$\left|\frac{x^2(\cos(y)-1)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^2\cos(y)-1}{x^2}\right| \leqslant |\cos(y)-1| \to 0,$$

limite valable sans la restriction $x \neq 0$ pour la même raison ; si $y \neq 0$:

$$\left|\frac{y\mathrm{ch}(x)(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{y\mathrm{ch}(x)(\sin(y)-y)}{y^2}\right| \leqslant \left|\mathrm{ch}(x)\left(\frac{\sin(y)}{y}-1\right)\right| \to 0,$$

puisque ch est bornée au voisinage de 0 et $\sin(y) \underset{0}{\sim} y$. Et enfin :

$$\left|\frac{y^2(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2+y^2}\right| \leqslant |\mathrm{ch}(y)-1| \to 0,$$

toutes les limites ci-dessus étant prises en 0. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement appliqué à l'inégalité de la question précédente, il vient :

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z}-1\right) = 0.}$$

(f) On remarque de même que $x^2+y^2 \geqslant |xy|$ (soit en comparant $|x|$ et $\sqrt{x^2+y^2}$, soit en développant un carré, ce qui nous assure qu'on peut même améliorer l'inégalité d'un facteur 2). Ainsi, si x et y sont non nuls,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x\mathrm{ch}(x)\sin(y)-xy}{x^2+y^2}\right| &\leqslant \left|\frac{x\sin(y)(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{x(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}\right|\\
&\leqslant \left|\frac{\sin(y)}{y}(\mathrm{ch}(x)-1)\right|+\left|\frac{\sin(y)}{y}-1\right| \to 0
\end{aligned}$$

L'expression étant nulle lorsque x ou y est nul, on obtient, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{z\to 0}\frac{x\mathrm{ch}(x)\sin(y)-xy}{x^2+y^2} = 0$$

Un calcul similaire montre que

$$\lim_{z\to 0}\frac{y\mathrm{sh}(x)\cos(y)-xy}{x^2+y^2} = 0,$$

donc, en effectuant la différence des deux :

$$\lim_{z \to 0} \frac{x\mathrm{ch}(x)\sin(y) - y\mathrm{sh}(x)\cos(y)}{x^2+y^2} = 0,$$

c'est-à-dire $\boxed{\lim_{z\to 0} \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{sh}(z)}{z} - 1\right) = 0.}$

On déduit de cette question et de la précédente que $\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sh}(z)}{z} = 1.}$

(g) On réexprime l'expression avec des exponentielles :

$$\frac{\mathrm{ch}(z)-1}{z^2} = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} - 2}{2z^2} = 2\frac{(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}})^2}{2^2 z^2} = 2\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right)}{z}.$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{ch}(z)-1}{z^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}.$$

(h) On calcule alors le taux d'accroissement en un $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ distinct de z_0 :

$$\frac{\mathrm{sh}(z+z_0) - \mathrm{sh}(z_0)}{z} = \frac{\mathrm{sh}(z)\mathrm{ch}(z_0) + \mathrm{ch}(z)\mathrm{sh}(z_0) - \mathrm{sh}(z_0)}{z}.$$

Or, $\frac{\mathrm{sh}(z)}{z} \to 1$ et $\frac{\mathrm{ch}(z)-1}{z} = z \cdot \frac{\mathrm{ch}(z)-1}{z^2} \to 0$, d'après les questions précédentes. Il en résulte que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sh}(z+z_0) - \mathrm{sh}(z_0)}{z} = \mathrm{ch}(z_0).$$

Ainsi, la fonction sh est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)}$.

On montrerait de même que ch est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que $\boxed{\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}}$.

(i) La fonction exp est alors holomorphe en tant que somme de deux fonctions holomorphes sh et ch, et on a :

$$\exp' = \mathrm{sh}' + \mathrm{ch}' = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\exp' = \exp}.$$

Partie II – Les fonctions analytiques sont holomorphes

Soit $\rho \in]0, r[$ et $w \in B(0, r)$.

1. Soit $z \in B(0,r)$, et $s \in]|z|, r[$. La série $\sum a_n s^n$ étant convergente, son terme général $a_n s^n$ tend vers 0, donc est borné. On en déduit que $|a_n s^n| = O(1)$, donc $|a_n| = O\left(\frac{1}{s^n}\right)$.
Ainsi, $|P(n)a_n z^n| = O\left(\left(\frac{|z|}{s}\right)^n P(n)\right)$.
De plus, d'après les croissances comparées, pour tout $\lambda > 1$, $P(n) = o(\lambda^n)$. Ainsi,
$$|P(n)a_n z^n| = o\left(\left(\frac{|z|\lambda}{s}\right)^n\right).$$
Comme $\frac{|z|}{s} < 1$, on peut choisir $\lambda > 1$ tel que $\frac{|z|\lambda}{s} < 1$, ce qui entraîne la convergence de $\sum \left(\frac{|z|\lambda}{s}\right)^n$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en découle que $\boxed{\sum P(n)a_n z^n \text{ est absolument convergente}}$, donc $\boxed{\text{convergente}}$.

2. (a) Pour tous z et w dans $B(0, \rho)$ tels que $z \neq w$, les termes constant se compensant, il reste

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) - (z-w)g(w) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - w^n - n(z-w)w^{n-1}) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(z^n - w^n - n(z-w)w^{n-1}), \end{aligned}$$

le terme correspondant à l'indice $n=1$ étant nul, comme on s'en assure facilement. Or, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
z^n - w^n - n(z-w)w^{n-1} &= (z-w)\sum_{k=0}^{n-1}(z^k w^{n-1-k} - w^{n-1}) \\
&= (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} w^{n-1-k}(z^k - w^k) \\
&= (z-w)\sum_{k=1}^{n-1} w^{n-1-k}(z^k - w^k) \\
&= (z-w)\sum_{k=1}^{n-1} w^{n-1-k}(z-w)\sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell w^{k-1-\ell} \\
&= (z-w)^2 \sum_{\ell=0}^{n-2}\sum_{k=\ell+1}^{n-1} z^\ell w^{n-2-\ell} \\
&= (z-w)^2 \sum_{\ell=0}^{n-2}(n-1-\ell) z^\ell w^{n-2-\ell} \\
&= (z-w)^2 \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1},
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant d'un changement d'indice $k = n-1-\ell$. Il vient alors

$$\boxed{\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = (z-w)\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1}.}$$

(b) Or, $|z| \leqslant \rho$ et $|w| \leqslant \rho$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| &\leqslant |z-w| \sum_{n=2}^{+infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} \\
&\leqslant |z-w| \sum_{n=2}^{+infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} n\rho^{n-2} \\
&\leqslant \boxed{|z-w| \sum_{n=2}^{+infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2}}.
\end{aligned}$$

La question 1 de cette partie assure la convergence de cette dernière série. Les majorations, *a priori* faites dans $\overline{\mathbb{R}}$, sont donc en fait dans $\mathbb{R}$.

La série ne dépend pas de z, et sa somme est finie. Ainsi, lorsque $z \to w$, ce majorant tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w).$$

Ainsi, f est dérivable de la variable complexe en tout w de $B(0,\rho)$, et sa dérivée est égale sur cette boule à g, qui est une somme de série entière. Ainsi, $\boxed{f \text{ est holomorphe}}$, et $\boxed{f' \text{ est analytique}}$.

Partie III – Intégration d'une fonction holomorphe le long d'un chemin

1. Soit γ_1 et γ_2 deux chemins équivalents, et φ telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.
   - Soit $z \in \gamma_1^*$, et $t \in [a_1, b_1]$ tel que $z = \gamma_1(t)$. On a alors $z = \gamma_2(\varphi^{-1}(t)) \in \gamma_2^*$. De même, si $z \in \gamma_2^*$, il existe $t \in [a_2, b_2]$ tel que $z = \gamma_2(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \in \gamma_1^*$. On en déduit que $\boxed{\gamma_1^* = \gamma_2^*}$.
   - Si $\varphi(a_2) \neq a_1$, alors $\varphi(a_2) > a_1$, et comme φ est croissante, $a_1 \notin \operatorname{Im}(\varphi)$, ce qui contredit la bijectivité de φ. Ainsi, $\varphi(a_2) = a_1$ puis $\boxed{\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)}$.

     De même, $\boxed{\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)}$.

2. • La relation $\sim$ est réflexive : il suffit de prendre $\varphi = \mathrm{id}$.
   • La relation $\sim$ est symétrique. En effet, soit $\gamma_1 \sim \gamma_2$ et φ bijective croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Pour tout $t \in [a_2, b_2]$, $\gamma_2'(t) = \varphi'(t)\gamma_1'(\varphi(t))$, donc $\varphi'(t) \neq 0$, puisque par hypothèse $\gamma_2'(t) \neq 0$. On déduit alors du théorème de dérivation des fonctions réciproques que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_1, b_1]$, bijective et croissante de $[a_1, b_1]$ sur $[a_2, b_2$ et vérifie $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi^{-1}$. Ainsi $\gamma_2 \sim \gamma_1$, ce qui prouve la symétrie.
   • Soit γ_1, γ_2 et γ_3 telles que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim \gamma_3$. Soit φ et ψ telles que dans la définition de $\sim$, vérifiant $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ et $\gamma_3 = \gamma_2 \circ \psi$. Alors $\gamma_3 = \gamma_1 \circ (\varphi \circ \psi)$. Or, $\varphi \circ \psi$ est la composée de deux bijections croissantes de classe $\mathcal{C}^1$, donc est elle-même bijective croissante de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que $\gamma_1 \sim \gamma_3$, d'où la trnasitivité.

   Ainsi, $\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence.}}$

3. Soit γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1 \sim \gamma_2$, et $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective croissante telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. On a alors :

$$\int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

   La fonction φ étant continue et vérifiant $\varphi(a_2) = a_1$ et $\varphi(b_2) = b_1$, la formule de changement de variable amène :

$$\boxed{\int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z}.$$

   de alors $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z$.

4. Soit γ_1 et γ_2 définis sur $[0, 1]$ par :

$$\gamma_1(t) = (1-t)u + tv \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(s) = (1-s)v + su.$$

   Ainsi, γ_1 est une paramétrisation de $[u, v]$ alors que γ_2 est une paramétrisation de $[v, u]$. On a alors, par le changement de variable $t = 1 - s$, $\mathrm{d}t = -\delta s$:

$$\int_{[v,u]} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 f((1-s)v+su)(u-v)\mathrm{d}s = -\int_1^0 f((1-t)u-tv)(u-v)\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 f((1-t)u-tv)(v-u)\ \mathrm{d}t,$$

   soit :

$$\boxed{\int_{[v,u]} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z}.$$

5. (a) Soit γ_1 et γ_2 deux chemins équivalents, et, avec les notations précédentes, $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ bijective croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. On a alors :

$$\int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

   Or, φ est croissante, donc φ' est positive. Ainsi, le changement de variable $s = \varphi(t)$ amène :

$$\boxed{\int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_1'(s)|\mathrm{d}s}.$$

   (b) Choisissons par exemple $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = (1-t)u + tv$. On a alors :

$$L([u, v]) = \int_0^1 |v - u|\ \mathrm{d}t \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{L([u, v]) = |v - u|}.$$

   (c) Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, pamamétrant le cercle unité. On a alors :

$$L(\mathbb{U}) = \int_0^{2\pi} |\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}|\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{L(\mathbb{U}) = 2\pi}.$$

   Ces deux exemples avaient pour but de vérifier la cohérence géométrique de cette notion de longueur.

6. Soit f une fonction continue sur Ω, et γ un chemin, défini sur $[a,b]$. On suppose que pour tout $z \in \gamma^*$, $|f(z)| \leqslant M$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| &= \left|\int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_\gamma |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_\gamma M\cdot|\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t = \boxed{ML(\gamma)}.\end{aligned}$$

7. (a) Soit f un fonction holomorphe sur Ω, admettant sur Ω une primitive holomorphe F. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin. Par théorème de composition, $F \circ \gamma$ est dérivable de la variable t sur $[a,b]$ et pour tout $t \in [a,b]$,

$$(F\circ\gamma)'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Ainsi, $F \circ \gamma$ est une primitive (au sens usuel, pour une variable réelle) de la fonction continue $\gamma' \cdot f \circ \gamma$. Le théorème fondamental du calcul intégral amène alors :

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[F\circ\gamma(t)\Big]_a^b = \boxed{F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}.$$

Lorsque γ est un chemin fermé, $\gamma(b) = \gamma(a)$, donc

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0}.$$

(b) D'après la question I-1, $z \mapsto z^n$ admet une primitive holomorphe $z \mapsto \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$. La question précédente amène donc, pour un chemin γ fermé :

$$\boxed{\int_\gamma z^n\ \mathrm{d}z = 0}.$$

Partie IV – Théorème de Cauchy sur un triangle

1. On vérifie que si $c \in [u,v]$,

$$\int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{[u,c]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{c,v} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

En effet, c peut alors s'écrire $c = (1-t_0)u + t_0 v$. Soit alors $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ la paramétrisation de $[u,v]$ définie par $\gamma(t) = (1-t)u + tv$. Les restrictions $\gamma_{[0,t_0]}$ et $\gamma_{[t_0,1]}$ sont alors des paramétrisations de $[u,c]$ et $[c,v]$, et la relation de Chasles permet de conclure.

Un petit dessin nous permet alors de bien comprendre la situation : l'intégrale sur le grand triangle va se décomposer en somme de 4 intégrales sur des triangles plus petits. On remarquera que toutes les intégrales en jeu sont bien définies, su fait de la convexité de Ω : les segments sont tous inclus dans Ω.

$$\begin{aligned}\int_{(u,v,w)} f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_{[u,v]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v,w]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w,z]} f(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{[u,w']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w',v]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v,u']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[u',w]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w,v']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v',u]} f(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{[u,w']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w',v']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v',u]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v,u']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[u',w']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w',v]} f(z)\ \mathrm{d}z + \\ &\quad + \int_{[w,v']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v',u']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[u',w]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[u',v']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v',w']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[w',u']} f(z)\ \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la question III-4, affirmant que

$$\int_{[w',v']} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{[v',w']} f(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

et quelques autres relations similaires. On peut alors regrouper ces intégrales en triangles, et on obtient :

$$\int_{(u,v,w)} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{(u,w',v')} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{(v,u',w')} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{(w,v',u')} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{(u',v',w')} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

L'inégalité triangulaire amène

$$\left|\int_{(u,v,w)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{(u,w',v')} f(z)\ \mathrm{d}z\right| + \left|\int_{(v,u',w')} f(z)\ \mathrm{d}z\right| + \left|\int_{(w,v',u')} f(z)\ \mathrm{d}z\right| + \left|\int_{(u',v',w')} f(z)\ \mathrm{d}z\right|.$$

L'une au moins des quantités de droite est donc supérieure au quart de l'expression de gauche. Changer le sens de parcourt des triangles a pour effet de changer le signe. Ainsi, on peut conclure que parmi les triangles (u,v',w'), (v,w',u'), (w,u',v') et (u',v',w'), il en existe un, qu'on notera $T_1 = (u_1,v_1,w_1)$, qui vérifie :

$$\boxed{\left|\int_{(u_0,v_0,w_0)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leqslant 4\left|\int_{(u_1,v_1,w_1)} f(z)\ \mathrm{d}z\right|}.$$

2. Quitte à renommer les points u_0, v_0 et w_0, on peut supposer que $\mathrm{Re}(u_0) \leqslant \mathrm{Re}(v_0) \leqslant \mathrm{Re}(w_0)$. Supposons par exemple que $T_1 = (u,v',w')$ (les autres cas se traitant par la même méthode). On a alors

$$\mathrm{Re}(u) \leqslant \mathrm{Re}(w') = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(u)+\mathrm{Re}(v)) \leqslant \mathrm{Re}(v') = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(u)+\mathrm{Re}(w)).$$

On en déduit que

$$I(T_1) = [\mathrm{Re}(u), \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(u)+\mathrm{Re}(w))] \subset I(T_0) = [\mathrm{Re}(u), \mathrm{Re}(w)].$$

De plus, on a alors :

$$\ell(I(T_1)) = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(u)+\mathrm{Re}(w)) - \mathrm{Re}(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Re}(u)) = \frac{1}{2}\ell(I(T_0)).$$

On montre de même dans les 3 autres cas que $\boxed{I(T_1) \subset I(T_0)}$ et $\boxed{\ell(I(T_1)) = \frac{1}{2}\ell(I(T_0)).}$. Un raisonnement similaire sur les parties imaginaires montre que de même $\boxed{J(T_1) \subset J(T_0)}$, et $\boxed{\ell(J(T_1)) = \frac{1}{2}\ell(J(T_0))}$

3. L'existence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découle alors d'une récurrence immédiate (en remarquant que les points (u_n,v_n,w_n) sont à chaque étape dans Ω, par convexité de Ω). Les intervalles $I(T_n)$ sont alors emboîtés (ils forment une chaîne décroissante) et de longueur tendant vers 0. Le théorème des suites adjacentes appliqué aux bornes de ces intervalles montrent qu'elles tendent vers un certain x (ou si vous préférez, les bornes inférieures forment une suite croissante majorée, les bornes supérieures une suite décroissante minorée, donc elles convergent, et comme leur différence est nulle, leurs limites sont égales). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(u_n)$, $\mathrm{Re}(v_n)$ et $\mathrm{Re}(w_n)$ sont dans $I(T_n)$, elles convergent toutes trois vers x, d'après le théorème d'encadrement.
De la même manière, il existe $y \in \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(u_n)$, $\mathrm{Im}(v_n)$ et $\mathrm{Im}(w_n)$ convergent vers y. Soit $z_0 = x + \mathrm{i}\,y$. Alors $\boxed{(u_n),\ (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers } z_0.}$ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle (plein) T_n est inclus dans T_0, donc les points u_n, v_n et w_n sont dans le triangle plein T_0. Par convexité de Ω, on a bien $\boxed{z_0 \in \Omega}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question III-7, si g admet une primitive holomorphe G,

$$\int_{(u_n,v_n,w_n)} g(z)\ \mathrm{d}z = G(v_n) - G(u_n) + G(w_n) - G(v_n) + G(u_n) - G(w_n) = 0.$$

Appliquant cela aux fonctions $z \mapsto 1$ et $z \mapsto z$, il vient

$$\int_{(u_n,v_n,w_n)} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\ \mathrm{d}z = 0,$$

donc

$$\boxed{\int_{(u_n,v_n,w_n)} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{(u_n,v_n,w_n)} \Big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\Big)\ \mathrm{d}z}.$$

5. Par définition de la dérivabilité en z_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe r (qu'on peut choisir suffisamment petit pour tout $B(z_0, r) \subset \Omega$, puisque Ω est ouvert) tel que pour tout $z \in B(z_0, r)$,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|.$$

D'après la question précédente, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n \in B(z_0, r), \qquad v_n \in B(z_0, r) \qquad \text{et} \qquad w_n \in B(z_0, r).$$

par convexité de la boule, tout le triangle (plein) défini par u_n, v_n et w_n est dans $B(z_0, r)$. Or, z_0 est dans le triangle (u_n, v_n, w_n), dont le périmètre est $2^{-n} L(T_0)$. Pour tout z dans le triangle $|z - z_0|$ est inférieur à la longueur d'au moins un côté du triangle, donc $|z - z_0| \leqslant 2^{-n} L(T_0)$. On en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$, et tout z dans le triangle (u_n, v_n, w_n),

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant 2^{-n} L(T_0) \varepsilon.$$

On utilise alors la question III-6 (sur chaque côté du triangle), amenant :

$$\left| \int_{(u_n, v_n, w_n)} \Big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \Big) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant 2^{-n} L(T_0) L(T_n) = 2^{-2n} L(T_0) \varepsilon.$$

D'après la question 4, on obtient :

$$\left| \int_{(u_0, v_0, w_0)} \Big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \Big) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant L(T_0) \varepsilon.$$

Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\int_{(u,v,w)} f(z) \, \mathrm{d}z = 0}$.

6. Le problème qu'on peut rencontrer est que $z_0 = p$, ce qui nous empêche de faire le raisonnement précédent. On peut pour y remédier « couper » autour de p. On étudie successivement plusieurs cas :
   - Si p est (strictement) à l'extérieur de T_0, on ne peut pas avoir $z_0 = p$ et le raisonnement précédent s'applique.
   - Si p est un des sommets du triangle, disons $p = u$, on remarque que f est bornée au voisinage de p, car continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ et M tels que sur $B(p, \eta)$, $|f| \leqslant M$. On considère alors $\delta = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{6M})$, et on construit un point $v' \in [u, v]$ à distance inférieure à δ de u et w' sur $[u, w]$ à distance inférieure à δ de u. On a alors $(u, v, w') \subset B(z_0, \delta)$, donc chaque segment $[u, v']$, $[v', w']$ et $[w', u]$ a une longueur inférieure à 2δ, le diamètre cette boule. On en déduit que $L((u, v', w')) \leqslant 6\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.
     De plus, pour tout z sur un côté du triangle (u, v', w'), $z \in B(p, \eta)$, donc $|f(z)| \leqslant M$. On déduit de la question III-6 que

     $$\left| \int_{(u, v', w')} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon.$$

     Comme par ailleurs, le premier cas étudié amène

     $$\int_{v, w', v'} f(z) \, \mathrm{d}z = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{v, w, w'} f(z) \, \mathrm{d}z = 0,$$

     en faisant la somme des 3 et en simplifiant comme en IV-1, il vient

     $$\left| \int_{(u, v, w)} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon.$$

     Ceci étant vrai pour ε arbitrairement petit, $\boxed{\displaystyle\int_{(u,v,w)} f(z) \, \mathrm{d}z = 0}$
   - Si p est sur un côté, disons sur $[u, v]$, on peut alors découper en deux triangles (u, p, w) et (p, v, w), dont p est un sommet, et appliquer le point précédent.
   - si p est (strictement) à l'intérieur du triangle, on coupe en trois triangles (u, p, v), (v, p, w) et (w, p, u), et encore une fois, on conclut avec le deuxième cas étudié.

Partie V – Théorème de Cauchy sur un lacet quelconque

1. On a, pour tout $z \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\left(\int_{[z_1,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{[z_1,z_0]} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\\
&= \frac{1}{z-z_0}\left(\int_{[z_1,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{[z_0,z_1]} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\\
&= \frac{1}{z-z_0}\left(\int_{(z_0,z_1,z)} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{[z,z_0]} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right).
\end{aligned}$$

D'après la partie IV, on en déduit que

$$\boxed{\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi}.$$

La convexité de Ω sert ici à s'assurer que tous les segments sur lesquels on intègre sont bien dans Ω.

2. On a alors, pour $z \in \Omega$:

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} \left(f(\xi)-f(z_0)\right)\,\mathrm{d}z.$$

Or, f étant continue en z_0, pour $\varepsilon > 0$, il existe η tel que pour tout $z \in B(z_0,\eta)$, $|f(z)-f(z_0)| \leqslant \varepsilon$. Or, si $z \in B(z_0,\eta)$, tout $\xi \in [z_0,z]$ est aussi dans $B(z_0,\eta)$, et donc $|f(\xi)-f(z_0)| \leqslant \varepsilon$. D'après les questions III-6 et III-5b, pour tout $z \in B(z_0,\eta)$, on obtient donc :

$$\left|\int_{[z_0,z]} \left(f(\xi)-f(z_0)\right)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant |z-z_0|\varepsilon,$$

et donc

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela traduit bien l'existence de la limite :

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = f(z_0).$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est dérivable en } z_0, \text{ et } F'(z_0) = f(z_0)}$.

Ainsi, F est une primitive holomorphe de f sur Ω, et on peut utiliser la question III-7b, γ étant un chemin fermé dans Ω :

$$\boxed{\int_\gamma f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0}.$$

3. D'après la question IV-6, le raisonnement reste valide si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$, et continue sur Ω. On applique donc ce résultat à la fonction g définie (à z fixé) par :

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z\\ f'(z) & \text{si } \xi = z.\end{cases}$$

La fonction g est bien holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue sur Ω. En lui appliquant la question précédente, pour un lacet fermé γ tel que $z \notin \gamma^*$, il vient :

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

c'est-à-dire (puisque $z \notin \gamma^*$) :

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = f(z)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}}.$$

Partie VI – Formule de l'indice de Cauchy

1. On dérive cette fonction, qu'on note ψ : pour tout $t \in [a,b]$,

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = \frac{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}(\gamma(t)-z) - \gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2}.$$

Or, en exprimant la dérivée logarithmique de φ, on obtient

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z},$$

d'où :

$$\forall t \in [a,b], \quad \psi'(t) = 0.$$

On en déduit que $\boxed{\psi \text{ est constante.}}$

2. En particulier, $\psi(b) = \psi(a) = 1$, donc $\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} \mathrm{d}s \in 2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.

On en déduit bien que $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}}$.

3. Soit $z \in \Omega \setminus C(c,r)$, et $\delta = |z-c|$. On pose $\eta = \frac{|r-\delta|}{2}$.. Alors, pour tout $z' \in B(z,\delta)$, $|z'-c| < r-\eta$ ou $|z'-c| > r+\eta$. Par conséquent, pour tout $\xi \in C(c,r)$, l'inéglité triangulaire amène $|\xi - z'| \geqslant \frac{1}{\eta}$. C'est aussi vrai pour $|\xi - z|$. On a alors, pour tout $z' \in B(z,\eta)$ et tout $\xi \in C(c,r)$:

$$\left|\frac{1}{(\xi-z)(\xi-z')}\right| \leqslant \frac{1}{\eta^2}.$$

Alors, d'après III-6, pour tout $z' \in B(z, eta)$,

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{i}\,\pi\,|\mathrm{Ind}_\gamma(z') - \mathrm{Ind}_\gamma(z)| &= \left|\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z'} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z'}\right| \\ &= \left|(z'-z)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-z')(\xi-z)}\right| \\ &\leqslant |z'-z|\frac{L(\gamma)}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque z' tend vers z, donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{z' \to z} \mathrm{Ind}_\gamma(z') = \mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

Cela équivaut bien à la $\boxed{\text{continuité de } \mathrm{Ind}_\gamma.}$

4. Soit $z \in B(c,r)$, et $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma_1(t) = c(1-t) + zt$, une paramétrisation de $[c,z]$. Ce segment ne rencontre pas $C(c,r)$, donc d'après la question précedente, $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \gamma_1$ est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, son image est donc un intervalle. Or, son image est incluse dans $\mathbb{Z}$, d'après VI-2. On en déduit que son image est un singleton, donc que $\mathrm{Ind}_\gamma(\gamma_1(1)) = \mathrm{Ind}_\gamma(\gamma_1(0))$, donc $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(c).}$

Il s'agit bien d'une constante sur $B(c,r)$. Il nous reste à calculer $\mathrm{Ind}_\gamma(c)$:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_\gamma \frac{\delta\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{i}\ \mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, pour tout $z \in B(c,r)$, $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1}$.

5. La question V-3 amène alors aussitôt, pour tout $z \in B(c,r)$:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.}$$

Partie VII – Les fonctions holomorphes sont analytiques

1. Cette question se déduit de VI-5 en remarquant tout d'abord que $\left|\frac{z-c}{\xi-c}\right| < 1$ pour $\xi \in \gamma^*$ (car $z \in B(c,r)$), donc la somme est bien définie (c'est une série géométrique convergente), et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}} = \frac{f(\xi)}{\xi-c}\frac{1}{1-\frac{z-c}{\xi-c}} = \frac{f(\xi)}{\xi-z},$$

ce qui, par utilisation de VI-5, amène :

$$\boxed{f(z) = \int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi}.$$

2. Une petite question délicate d'interversion, sachant qu'on ne dispose pas encore vraiment des outils adéquats. La fonction f est continue en c donc localement bornée au voisinage de c. Soit $\delta < \frac{r}{2}$ tel que f est bornée sur $B(c,\delta)$, disons $|f| \leqslant M$. Par ailleurs par définition de δ,

$$\left|\frac{z-c}{\xi-c}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que pour $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\xi \in \gamma^*$,

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M|z-c|^{n_0+1}}{|\xi-c|^{n_0+2}}\left|\frac{1}{1-\frac{z-c}{\xi-c}}\right| \leqslant \frac{M}{2^{n_0+1}}\frac{1}{|\xi-c|} = \frac{Mr}{2^{n_0+1}}.$$

Ainsi,

$$\left|\int_\gamma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \frac{Mr}{2^{n_0+1}}L(\gamma).$$

Or, par linéarité de l'intégrale (sur une combinaison linéaire *finie*),

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{n_0}\int_\gamma \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi + \int_\gamma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,$$

d'où

$$\left|\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi - \sum_{n=0}^{n_0}\int_\gamma \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right| = \left|\int_\gamma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \frac{Mr}{2^{n_0+1}}L(\gamma).$$

Ceci est valable pour tout n_0, et le majorant tend vers 0 lorsque $n_0 \to +\infty$. Ainsi, l'expression de gauche tend aussi vers 0 d'après le théorème d'encadrement. En d'autres termes,

$$\lim_{n_0\to+\infty}\sum_{n=0}^{n_0}\int_\gamma \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-c)^n}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi.$$

En posant $a_n = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$, on a donc, pour tout $z \in B(c,\frac{r}{2})$ et en vertu de la question 1 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n.$$

Cela prouve bien que $\boxed{f \text{ est analytique}}$.

3. Puisque f est analytique, sa dérivée f' est elle-même analytique d'après la partie II, donc holomorphe, d'après la partie II aussi. Ainsi, une récurrence immédiate amène que $\boxed{f \text{ est infiniment dérivable.}}$
En déduire enfin que f est infiniment dérivable.