Renseignements généraux

— *Concours* : Polytechnique
— *Matière* : Mathématiques 1
— *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{R}^+*$ et $x_1 < \ldots < x_n$ des réels. Soit enfin $\lambda > 0$. On pose

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{x - x_k}$$

Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, g(x) défini, g(x) > \lambda\}$ est une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs vaut $\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Exercice 2 :

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}[X]$. On suppose P scindé. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 3 :

Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\sum_{g \in G} Tr(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 4 :

Existe-t-il une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^r$ converge pour tout entier r impaire différent de 5 et telle que $\sum u_n^5$ diverge ?

Remarques sur l'oral

Examinateur souriant, parlant très peu, quelques "hmm" de temps en temps en signe d'approbation. Une chance scandaleuse puisque je connaissais déjà de près ou de loin les trois premiers exercices.

Pour l'exercice 1, je regarde les variations de g en dérivant. Pour calculer la somme des unions, on écrit $g(x) - \lambda$ comme une fraction rationnelle, il faut calculer $\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)$ avec y_k les racines du numérateur, que l'on obtient avec Viète. Je m'embrouille en parlant du degré du numérateur, je parle du numérateur de g au lieu du numérateur de $g - \lambda$ (discussion inutile pour la résolution qui plus est).

Pour l'exercice 2, il faut commencer par $k = 1$. On regarde la fraction $\frac{P'}{P}$ qu'on dérive et qu'on évalue en 0. Puis pour le cas général on applique le cas $k = 0$ à la dérivée $k-$ ème de P. Je vais trop vite, j'oublie de justifier que cette dérivée est bien scindée, l'examinateur me le fait remarquer et me fait remarquer que l'inégalité obtenue n'est pas tout à fait celle désirée. Je corrige et en fait on obtient un truc mieux : $a_{k-1}a_{k+1} \leq \frac{k}{k+1}a_k^2$.

Pour l'exercice 3, il faut utiliser deux choses : à g fixé, la fonction qui à $x \in G$ associe gx est bijective et que la trace c'est le rang pour un projecteur. L'examinateur me laisse tranquille et ne me demande pas de justifications.

Pour l'exercice 4, long silence, l'examinateur ne dit rien, moi non plus, je donne quelques remarques faciles mais rien de vraiment concluant. L'examinateur finit par me dire qu'une telle suite existe, qu'il faut regarder la série harmonique et la bidouiller, mais l'oral est terminé.