Oral de Maths (X-ENS)

Exercice 1. Considérons la fonction zêta de Riemann définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

et sa version alternée :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Donner les domaines de définition de ζ et de f. Donner une relation entre ζ et f.
2. Montrer que les fonctions ζ et f sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
3. Trouver la limite et un équivalent de ζ et $+\infty$ et en 1^+.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n muni de la norme usuelle sur les matrices :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

Montrer qu'il existe une constante $C(n)$ dépendant uniquement de n telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|\mathrm{Com}(A)\| \leqslant C(n) \cdot \|A\|^{n-1}$$