Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Test de contrôle
Corrigés

Question 1

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+x}\, dt$ est continue sur $]0,+\infty[$ et montrer que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ f(x) = 2.$$

• Si $x > 0$, la fonction $h_x : t \longmapsto \frac{\sin t}{t+x}$ est bien définie et continue sur $[0,\pi]$. On peut calculer son intégrale.

Pour la continuité de f, on considère un réel $a > 0$. On va montrer la continuité de f en a. Soit $b > 0$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^\pi \sin t \times \left(\frac{1}{t+b} - \frac{1}{t+a} \right)\ dt = (a-b) \times \int_0^\pi \frac{\sin t}{(t+b)(t+a)}\ dt.$$

On en déduit :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |b-a| \times \int_0^\pi \left| \frac{\sin t}{(t+b)(t+a)} \right|\ dt \leqslant |b-a| \times \int_0^\pi \left| \frac{1}{b\ a} \right|\ dt = |b-a|\ \frac{\pi}{b\ a}.$$

Par conséquent, comme $\lim_{b \longrightarrow a} |b-a|\ \frac{\pi}{b\ a} = 0$, alors :

$$\lim_{b \longrightarrow a} f(b) = f(a).$$

• Pour l'équivalent en $+\infty$, on se donne un réel $x > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{2}{x} &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t+x} - \frac{\sin t}{x} \right)\ dt, \text{ car } \int_0^\pi \sin t\ dt = 2 \\
&= \int_0^\pi \sin t \cdot \left(\frac{-t}{(t+x)x} \right)\ dt \\
&= \mathcal{O}\left(\int_0^\pi \frac{dt}{(t+x)\ x} \right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$x\ f(x) - 2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \circ(1),$$

de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

Question 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A n'est pas inversible si et seulement si la matrice A est équivalente à une matrice nilpotente.

• On montre le sens indirect.
Si A est équivalente à une matrice nilpotente N, alors $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(N)$ et la matrice N n'est pas inversible en tant que matrice nilpotente, donc $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(N) < n$ et la matrice A n'est pas inversible.

• On montre le sens direct.
Si A est une matrice non inversible, en posant $r = \mathrm{Rg}(A)$ le rang de A, puis $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et enfin la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont dans cet ordre :

$$0, \cdots, 0, e_1, \cdots, e_r$$

avec les $(n-r)$ premières colonnes nulles, alors $\mathrm{Rg}(B) = r$ car $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$ et on voit que la matrice B est triangulaire supérieure à diagonale nulle. C'est une matrice nilpotente et A est équivalente à la matrice nilpotente B.

Question 3

Soit $0 < a < 1$ un nombre réel. Soit u une suite de nombres réels non nuls telle que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Prenons un réel $b \in]a, 1[$. Comme :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a < b,$$

en prenant $\varepsilon = b - a > 0$, on trouve un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant b.$$

Par une récurrence facile, on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 < u_n \leqslant u_{n_0} \times b^{n-n_0}.$$

Par conséquent, $u_n = \mathcal{O}(b^n)$, au voisinage de $+\infty$ et la série géométrique $\sum_n b^n$ est convergente, donc la série $\sum_n u_n$ est convergente également.

Question 4

Déterminer la nature des deux séries suivantes :

- $\sum_n \sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3+n+\frac{1}{n}}\right)$
- $\sum_n \arccos\left(\frac{3}{4\, n^{3/4}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/4}}\right)$.

• On pose $u_n = \sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3+n+\frac{1}{n}}\right)$. On effectue un développement asymptotique comme suit :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi\ n\ \left(1+\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \sin\left(\pi n\ \left(1+\frac{1}{3n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{3n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n\frac{\pi}{3n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série $\sum_n (-1)^n \frac{\pi}{3n}$ est convergente par le CSSA applicable immédiatement – rappeler ici les hypothèses à savoir que la quantité $\varepsilon_n = (-1)^n\frac{\pi}{3n}$ est alternée, de module décroissant vers 0. La série $\sum_n \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente par comparaison avec les séries de Riemann, donc la série est convergente.

La série $\sum_n u_n$ est bien convergente.

• Pour alléger les notations, on pose $\alpha = \frac{1}{4}$, $v_n = \frac{3}{4\, n^{3/4}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et :

$$w_n = \arccos\left(v_n\right).$$

Il y a plusieurs choses à montrer.
Premièrement, on vérifie que la quantité w_n est bien définie, ou encore que :

$$v_n \in [-1, 1],$$

à partir d'un certain rang.

On procède par comparaison série / intégrale avec la fonction continue et décroissante :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha},$$

sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Comme d'habitude, on dispose de l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt,$$

l'encadrement de gauche étant valable pour tout entier $n \geqslant 1$, alors que l'inégalité de droite est valable pour tout entier $n \geqslant 2$.
On obtient après sommation entre 1 et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{N+1} f(t)\, dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant 1 + \int_1^{N} f(t)\, dt.$$

On en déduit :

$$\left(\left(1+\frac{1}{N}\right)^{3/4} - \frac{1}{N^{3/4}}\right) \leqslant v_N \leqslant 1 - \frac{1}{4N^{3/4}}.$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant v_N \leqslant 1,$$

ce qui assure la bonne définition de w_N, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
On va seulement utiliser dans la suite la partie utile de l'encadrement à savoir :

$$v_N \leqslant 1 - \frac{1}{4N^{3/4}},$$

car on va montrer que la série $\sum_n w_n$ diverge.
La fonction arccos est décroissante sur $[-1, 1]$, donc :

$$w_N = \arccos(v_N) \geqslant \arccos\left(1 - \frac{1}{4N^{3/4}}\right) = \xi_N.$$

On rappelle l'équivalent lorsque h tend vers 0^+ :

$$\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}.$$

On en déduit :

$$\xi_N \sim \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N^{3/8}},$$

lorsque N tend vers $+\infty$.
Tout est positif, la série $\sum_N \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N^{3/8}}$ diverge vers $+\infty$, donc la série $\sum_N \xi_N$ diverge également vers $+\infty$ – ne pas oublier ici le « $+\infty$ » – entraînant le fait que la série $\sum_N w_N$ diverge vers $+\infty$.
La série $\sum_n w_n$ est divergente vers $+\infty$.