Problème n° 16 : Polynômes

Problème 1 – Polynômes de Tchebychev et théorème de Pólya

Le but de ce problème est de démontrer un théorème dû à George Pólya sur les polynômes à coefficients complexes :

> *Soit P un polynôme unitaire à coefficients complexes, non constant. Alors la projection orthogonale sur l'axe réel de l'ensemble des complexes z tels que $|P(z)| \leqslant 2$ est de longueur totale inférieure à 4.*

On énonce de manière un peu plus précise :

> **Théorème 1** ***(Polya)*** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré au moins 1. Soit :*
>
> $$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leqslant 2\} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{R} = \{\mathrm{Re}(z), z \in \mathcal{C}\}.$$
>
> *Alors $\mathcal{R}$ est inclus dans une union finie d'intervalles fermés bornés deux à deux disjoints $I_1, \dots, I_t$ tels que*
>
> $$\ell(I_1) + \cdots + \ell(I_t) \leqslant 4,$$
>
> *la longueur d'un intervalle $I = [a, b]$ étant définie par $\ell(I) = b - a$.*

Dans la partie III, on démontrera que ce théorème découle d'un théorème plus simple portant sur des polynômes à coefficients réels :

> **Théorème 2** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$, dont toutes les racines sont réelles. Alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid |P(x)| \leqslant 2\}$ est une union disjointe d'intervalles fermés bornés $I_1, \dots, I_t$ tels que*
>
> $$\ell(I_1) + \cdots + \ell(I_t) \leqslant 4.$$

On démontrera ce dernier théorème dans la partie IV. La démonstration utilise un résultat dû à Tchebychev, qui fait l'objet de la partie II :

> **Théorème 3** ***(Tchebychev)*** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$. Alors :*
>
> $$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La partie I est quant à elle consacrée à des résultats préliminaires sur les polynômes, utiles pour la partie IV.

Les théorèmes ci-dessus ne peuvent bien sûr être utilisés dans la copie que pour les questions ultérieures à leur démonstration. On pourra admettre en cours de copie les résultats des questions non démontrées à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie I et de la partie II. La partie IV utilise des résultats des trois parties précédentes.

Partie I – Préliminaires

Dans toute cette partie $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $n \geqslant 1$, ***dont toutes les racines (dans $\mathbb{C}$) sont réelles****. On note $r_1 < \cdots < r_k$ les racines de P deux à deux distinctes, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leur multiplicité.*

1. En localisant les racines de P' par rapport à celles de P, montrer :

   Lemme 4 *Si r est racine au moins double de P', alors r est racine de P.*

2. Montrer :

   Lemme 5 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x)$.*

Partie II – Polynômes et théorème de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(appelés polynômes de Tchebychev de première espèce) par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} T_0 = 1; \qquad T_1 = X; \\ \forall n \geqslant 1,\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}. \end{cases}$$

1. **Étude élémentaire des polynômes** T_n
   (a) Expliciter T_i pour tout $i \in [\![0, 4]\!]$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme, et déterminer son degré et son coefficient dominant, ainsi que la valeur de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
2. **Étude des racines de** T_n **et** T_n'**.** *On pose* $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) À l'aide de la question précédente, déterminer les racines de T_n et leur multiplicité.
   (b) Déterminer de même les racines de T_n'.
   On note $s_1 < \cdots < s_{n-1}$ *ces racines.*
   (c) Déterminer $T_n(s_1), \ldots, T_n(s_{n-1})$.
3. **Démonstration du théorème de Tchebychev**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, et soit* Q *un polynôme unitaire de degré* n.
   (a) Justifier l'existence $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |Q(x)|$.
   On définit $Q_n = T_n - 2^{n-1}Q$.
   (b) Montrer que $\deg Q_n \leqslant n - 1$.
   (c) *On suppose que* $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |Q(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
      i. Montrer que $Q_n \neq 0$.
      ii. Trouver une contradiction en déterminant le signe de Q_n aux points $+1$, -1, $s_1, \ldots, s_{n-1}$.
   (d) Démontrer le théorème 3

Partie III – Exemples et réduction du problème au cas de polynômes réels

1. **Un premier exemple**
   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme unitaire de degré* 1*. On écrit* $P = X - a$, $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Décrire géométriquement l'ensemble $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leqslant 2\}$, puis déterminer $\mathcal{R} = \{\mathrm{Re}(z),\ z \in \mathcal{C}\}$ sous la forme d'un intervalle dont on donnera les bornes en fonction de a.
   (b) En déduire que le théorème 1 est vrai pour les polynômes de degré 1.
2. **Un deuxième exemple**
   Soit $P = X^2 - 2$*, et* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{R}$ *les ensembles associés définis dans l'introduction.*
   (a) Montrer que pour tout couple (x, y) de réels, $x + \mathrm{i}\,y$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si
   $$(x^2 + y^2)^2 \leqslant 4(x^2 - y^2).$$
   (b) Justifier que $\mathcal{R} = [-2, 2]$ et conclure.
3. **Réduction du problème**
   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme unitaire de degré* $n \geqslant 1$*,* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{R}$ *les ensembles associés. On note* $r_1, \ldots, r_k$ *ses racines deux à deux distinctes de multiplicité* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$*. On note, pour tout* $i \in [\![1, k]\!]$*,* $t_i = \mathrm{Re}(r_i)$*. On définit alors* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *par :*
   $$Q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - t_i)^{\alpha_i},$$
   et $\mathcal{S}$ *l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R} \mid |Q(x)| \leqslant 2\}$.

(a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(\mathrm{Re}(z))| \leqslant |P(z)|$.

(b) En déduire que $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$.

(c) Justifier que si le théorème 2 est vrai, alors le théorème 1 est également vrai.

Partie IV – Démonstration du théorème de Pólya

D'après la partie précédente, il suffit donc de montrer le théorème 2. Dans toute cette partie, on se donne un polynôme unitaire P de degré $n \geqslant 1$ et dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont réelles.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est non vide.

2. **Cas où $\mathcal{S}$ est un intervalle**

   On suppose ici que $\mathcal{S}$ est un intervalle I.

   (a) Justifier que I est un intervalle borné.

   (b) Soit a et b les bornes inférieure et supérieure de I. Justifier que $a \neq b$, puis que $|P(a)| = |P(b)| = 2$. En déduire que I est fermé.

   (c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\max\limits_{a \leqslant y \leqslant b} |P(y)|$.

   (d) En considérant le polynôme
   $$Q(X) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{b-a}{2}(X+1)+a\right),$$
   et à l'aide d'un résultat démontré précédemment, montrer que :
   $$\max_{a \leqslant y \leqslant b} |P(y)| \geqslant 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

   (e) Conclure

3. **Une description de $\mathcal{S}$**

   Soit E l'ensemble des solutions de l'équation $|P(x)| = 2$, donc $E = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 2 \text{ ou } P(x) = -2\}$.

   (a) Montrer que E est un ensemble fini et non vide.
   On note N le cardinal de E, et $\beta_1 < \ldots < \beta_N$ les éléments de E que l'on a ordonné.

   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, soit $[\beta_i, \beta_{i+1}] \subset \mathcal{S}$, soit $]\beta_i, \beta_{i+1}[\cap \mathcal{S} = \varnothing$.

   (c) Justifier que $]-\infty, \beta_1[\cap \mathcal{S} = \varnothing$ et $]\beta_N, +\infty[\cap \mathcal{S} = \varnothing$.

   (d) En déduire que $\mathcal{S}$ est une réunion d'un nombre fini t d'intervalles fermés deux à deux disjoints.
   On note $I_1, \ldots, I_t$ ces intervalles, rangés dans l'ordre croissant. On note pour tout entier $j \in [\![1, t]\!]$, $I_j = [a_j, b_j]$. Ainsi, on a : $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < \cdots < a_t \leqslant b_t$.

4. **De l'existence d'une racine de P dans chaque I_j**

   (a) Justifier que pour tout $j \in [\![1, t]\!]$, $|P(a_j)| = |P(b_j)| = 2$.

   (b) Soit $j \in [\![1, t]\!]$ tel que $a_j \neq b_j$ et $P(a_j) = P(b_j) = 2$.

      i. Justifier l'existence d'un minimum de P sur I_j, atteint en un point $b \in]a_j, b_j[$.

      ii. Justifier que $P'(b) = 0$ et $P''(b) \geqslant 0$.

      iii. À l'aide de résultats établis précédemment, montrer que P admet une racine dans $]a_j, b_j[$.

   (c) Que dire du cas où $a_j \neq b_j$ et $P(a_j) = P(b_j) = -2$?

   (d) Justifier que pour tout $j \in [\![1, t]\!]$, $a_j \neq b_j$.

   (e) Montrer que tout intervalle $]a_j, b_j[$, $j \in [\![1, t]\!]$, contient au moins une racine de P.

5. **Où l'on augmente le nombre de racines dans le dernier intervalle**

   Soit m le nombre de racines de P situées dans l'intervalle I_t (le plus à droite).

   (a) Que vaut t si $m = n$? En déduire que le théorème 2 est vrai dans ce cas.

   On suppose à partir de maintenant que $t \geqslant 2$.

   (b) Montrer que $m < n$.

   (c) *Soit $c_1, \ldots, c_m$ les racines de P situées dans I_t (éventuellement répétées autant de fois que leur multiplicité), et $c_{m+1}, \ldots, c_n$ les autres racines. Soit :*

   $$Q = (X - c_1) \ldots (X - c_m).$$

   Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme R de degré au moins 1 tel que $P = QR$. Donner une factorisation de R en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   (d) *On définit le polynôme P_1 par $P_1(X) = Q(X + d)R(X)$, où $d = a_t - b_{t-1}$ est la distance séparant les deux derniers intervalles I_{t-1} et I_t.*

   i. Soit $x \in I_1 \cup \cdots \cup I_{t-1}$. Montrer que :
      - pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $|x + d - c_i| < |x - c_i|$,
      - $|Q(x + d)| < |Q(x)|$,
      - $|P_1(x)| \leqslant 2$.

   ii. Soit $x \in I_t$. Prouver que :
      - $|R(x - d)| \leqslant |R(x)|$
      - $|P_1(x - d)| \leqslant 2$.

   (e) *On note $\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |P_1(x)| \leqslant 2\}$, et on écrit $\mathcal{S}_1 = J_1 \cup \cdots \cup J_{t'}$ comme une union d'intervalles fermés deux à deux disjoints, l'ordre des indices respectant l'ordre des intervalles. On note I'_t l'intervalle $[a_t - d, b_t - d]$.*

   i. Montrer que $I_1 \cup \cdots \cup I_{t-1} \cup I'_t \subset \mathcal{S}_1$.

   ii. Décrire les racines de P_1 en fonction de celles de P, et montrer qu'elles sont dans $I_1 \cup \cdots \cup I_{t-1} \cup I'_t$.

   iii. Montrer que $I_{t-1} \cup I'_t$ est un intervalle. En déduire que $I_{t-1} \cup I'_t \subset J_{t'}$.

   iv. Montrer que le nombre de racines de P_1 situées dans $J_{t'}$ est strictement supérieur à m.

6. Terminer la preuve du théorème 2 puis du théorème 1.