DM n^o 4 : Relations

Correction du problème 1 – Généralisation des notions d'injectivité et de surjectivité à des relations quelconques

1. Soit A et B deux sous-ensembles de E.
   (a) Supposons que $A \subset B$. Montrons qu'alors $\mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)$. Pour cela, considérons un élément $y \in \mathcal{R}^+(A)$. Par définition, il existe $a \in A$ tel que $a\mathcal{R}y$. Comme $A \subset B$, a est aussi dans b, donc il existe $b \in B$ tel que $b\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \mathcal{R}^+(B)$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)}$.

   (b) Soit $y \in \mathcal{R}^+\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Ainsi, il existe $a \in \bigcup_{i\in A_i}$ tel que $a\mathcal{R}y$. Il existe donc $i \in I$ tel que $a \in A_i$, et $a\mathcal{R}y$. On en déduit qu'il existe i tel que $y \in \mathcal{R}^+(A)$, donc $y \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)$.

   Ainsi, on a montré : $\boxed{\mathcal{R}^+\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)}$.

   Réciproquement, soit $y \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)$. Il existe donc $i \in I$ tel que $y \in \mathcal{R}^+(A_i)$. Pour un tel i, il existe $x \in A_i$ tel que $x\mathcal{R}y$. Comme x est alors aussi élément de $\bigcup_{i\in I} A_i$, on en déduit que $y \in \mathcal{R}^+\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

   On a donc montré l'inclusion : $\boxed{\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i) \subset \mathcal{R}^+\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}$

   Les deux inclusions amènent l'égalité.

   (c) Soit $y \in \mathcal{R}^+\left(\bigcap_{i\in A} A_i\right)$. Ainsi, il existe $a \in \bigcap_{i\in A} A_i$ tel que $a\mathcal{R}y$. Alors pour tout $i \in I$, $a \in A_i$ et $a\mathcal{R}y$, donc $y \in \mathcal{R}^+(A_i)$. Comme c'est vrai pour tout $i \in I$, $y \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)$. Ainsi, on a montré : $\boxed{\mathcal{R}^+\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{iinI} \mathcal{R}^+(A_i)}$.

   (d) On peut considérer $E = \{x_1, x_2\}$, $F = \{y\}$, $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$ et la relation définie par $x_1\mathcal{R}y$ et $x_2\mathcal{R}y$. On a alors $\mathcal{R}^+(A_1) = \mathcal{R}^+(A_2) = \{y\}$, donc $\mathcal{R}^+(A_1) \cap \mathcal{R}^+(A_2) = \{y\}$, alors que $\mathcal{R}^+(A_1 \cap A_2) = \mathcal{R}^+(\varnothing) = \varnothing$. Cela fournit bien un contre-exemple.

   Remarquez que c'est le contre-exemple donné dans le cours pour la propriété similaire pour les images directes d'applications.

2. On peut tout refaire (exactement de la même façon) ou considérer $\mathcal{R}^{-1}$ de F vers E, définie par $y\mathcal{R}^{-1}x$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$. Alors, pour tout sous-ensemble L de F :

$$\mathcal{R}^-(L) = \{x \in E,\ \exists \ell \in L,\ x\mathcal{R}\ell\} = \{x \in E,\ \exists \ell \in L,\ \ell\mathcal{R}^{-1}x\} = (\mathcal{R}^{-1})^-(L).$$

   Les points (a), (b) et (c) résultent de manière immédiate de cette remarque et de la question 1. Le point (d) s'obtient en considérant également $\mathcal{R}^{-1}$ pour les exemples trouvés dans la question précédente.

3. (a) Soit $\mathcal{R}$ une relation de type 1 et 2. Alors tout élément de E est en relation avec un et un seul élément de F. On reconnaît $\boxed{\text{la définition d'une application de } E \text{ dans } F}$.

   (b) Soit $\mathcal{R}$ une relation définissant une application f (donc $\mathcal{R}$ est de type 1 et 2).

- Supposons que $\mathcal{R}$ soit de type 3. Ainsi, tout élément de F est en relation avec au plus un élément de E, autrement dit, tout élément de F admet au plus un antécédent par f. L'application $\boxed{f \text{ est donc injective}}$.
- De même, si $\mathcal{R}$ est de type 4, tout élément de F admet au moins un antécédent par f, donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

(c) Tout d'abord $\mathcal{T}$ définit une application. On montre cela en deux temps.

- $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de type 1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ de type 1.
  En effet, supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 1. Soit $x \in E$. Soit x n'est en relation par $\mathcal{T}$ avec aucun élément de G, soit il existe $z \in G$ tel que $x\mathcal{T}z$. Dans ce dernier cas, montrons que z est unique. Soit un tel élément z. Il existe donc $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$. Soit z' un autre élément de G tel que $x\mathcal{T}z'$. Il existe donc $y' \in F$ tel que $x\mathcal{R}y'$ et $y'\mathcal{R}z'$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 1, $y' = y$, puis, comme $\mathcal{S}$ est de type 1, $z' = z$. Ainsi, z est le seul élément de G en relation avec x.
- $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de type 2 $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ de type 2.
  En effet, soit $x \in E$. Il existe y tel que $x\mathcal{R}y$, puis z tel que $y\mathcal{R}z$ (car $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 2). Donc il existe z tel que $x\mathcal{T}z$, ce qui signifie que $\mathcal{T}$ est de type 2.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est à la fois de type 1 et de type 2 ; il s'agit donc d'une application.

Par ailleurs, soit $x \in E$, et z l'unique élément de G tel que $x\mathcal{T}z$. D'après ce qui précède, il existe un unique $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. La première correspondance amène : $y = f(x)$; la seconde amène : $z = g(y)$. Ainsi, on a bien $z = g \circ f(x)$, ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{T} \text{ est la relation associée à l'application } g \circ f}$.

(d) On a déjà montré dans la question précédente que la composée de deux relations de type 1 (resp. de type 2) est une relation de type 1 (resp. de type 2). Étudions donc le cas des types 3 et 4. On note comme précédemment $\mathcal{T}$ la composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

- Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 3. Soit $z \in F$. Montrons que s'il existe un élément $x \in E$ tel que $x\mathcal{T}z$, alors cet élément est unique. Soit donc x et x' deux tels éléments. Il s'agit de montrer que $x = x'$. Par définition de $\mathcal{T}$, il existe $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$, et il existe y' tel que $x'\mathcal{R}y'$ et $y'\mathcal{S}x$. Puisque $\mathcal{S}$ est de type 3, $y = y'$ (unicité d'un « antécédent » de z). Par conséquent, $\mathcal{R}$ étant de type 3, $x' = x$ (unicité d'un « antécédent » de y). D'où l'unicité de x, sous réserve d'existence. $\boxed{\text{La relation } \mathcal{T} \text{ est donc de type 3}}$.
- Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 4. Soit $z \in G$. Comme $\mathcal{S}$ est de type 4, il existe $y \in F$ tel que $y\mathcal{S}z$. Soit un tel y. Comme $\mathcal{R}$ est de type 4, il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Alors, par définition de $\mathcal{T}$, un tel x vérifie $x\mathcal{T}z$. Ainsi, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{T}z$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{T} \text{ est de type 4}}$.

4. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes :

   (i) $\mathcal{R}$ est du type 3

   (ii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ \mathcal{R}^+(A \cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$

   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$

   (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+(A))$.

- (i) $\Longrightarrow$ (ii)
  Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 3. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Il s'agit de montrer que $\mathcal{R}^+(A\cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$.
  * D'après 1(c), $\mathcal{R}^+(A \cap B) \subset \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$.
  * Soit $y \in \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$. Alors $y \in \mathcal{R}^+(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $a\mathcal{R}y$. De même $y \in \mathcal{R}^+(B)$, donc il existe $b \in B$ tel que $b\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 3, $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. Par conséquent, $y \in \mathcal{R}^+(A \cap B)$.

  Les deux inclusions ci-dessus montrent l'égalité.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii)
  Supposons que (ii) est vérifié. Soit A un sous-ensemble de E. Soit $x \in \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A))$. Ainsi, il existe $y \in \mathcal{R}^+(A)$ tel que $x\mathcal{R}y$. Soit une tel y. D'après (ii),

$$\mathcal{R}^+(\{x\} \cap A) = \mathcal{R}^+(\{x\}) \cap \mathcal{R}^+(A).$$

  Or y étant en relation avec x, on a $y \in \mathcal{R}^+(\{x\})$, et par définition de y, $y \in \mathcal{R}^+(A)$. Par conséquent,

$$\mathcal{R}^+(\{x\}) \cap \mathcal{R}^+(A) \neq \varnothing \qquad \text{puis:} \qquad \mathcal{R}^+(\{x\} \cap A) \neq \varnothing \qquad \text{puis:} \qquad \{x\} \cap A \neq \varnothing.$$

  Cette dernière propriété signifie que $x \in A$. Ainsi, $\mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$.

- (iii) $\Longrightarrow$ (iv)
  Supposons que (iii) est vérifié. Soit A un sous-ensemble de E, et supposons que $\mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \cap \mathcal{R}^+ A \neq \varnothing$. Soit y dans cette intersection. Alors il existe $x \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$, et il existe $x' \in \complement_E A$, tel que $x'\mathcal{R}y$. Comme $A \cap \complement_E A = \varnothing$, $x \neq x'$. Soit $B = \{x\}$. Comme $x\mathcal{R}y$, on a $y \in \mathcal{R}^+(\{x\})$, et donc, comme $x'\mathcal{R}y$, $x' \in \mathcal{R}^-\mathcal{R}^+(\{x\})$. Or, d'après (iii), $\mathcal{R}^-\mathcal{R}^+(\{x\}) \subset \{x\}$, donc $x = x'$, d'où une contradiction. Ainsi,

$$\mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \cap \mathcal{R}^+ A = \varnothing, \qquad \text{donc:} \qquad \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+ A).$$

- (iv) $\Longrightarrow$ (i)
  Supposons que (iv) est vérifié. Soit y un élément de F. Si y est en relation avec au moins un élément x de E, montrons que cet élément est unique. Soit x et x' deux éléments en relation avec y. Il s'agit de montrer que $x = x'$. En prenant $A = \{x\}$ dans (iv), $\mathcal{R}^+\left(\complement_E\{x\}\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+\{x\})$. Or, si $x' \neq x$, $x' \in \complement_E\{x\}$, et donc $y \in \mathcal{R}^+\left(\complement_E\{x\}\right)$, puisque $x'\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \complement_F(\mathcal{R}^+\{x\})$. Mais comme on a également $x\mathcal{R}y$, on a aussi $y \in \mathcal{R}^+\{x\}$, d'où une contradiction. Ainsi, $x = x'$. Cela montre que $\mathcal{R}$ est de type 3.

On remarque que $\mathcal{R}$ est de type 1 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 3. On en déduit donc que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 1

(ii) $\forall (L, M) \in (\mathcal{P}(F))^2,\ \mathcal{R}^-(L \cap M) = \mathcal{R}^-(L) \cap \mathcal{R}^-(M)$

(iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L)) \subset L$

(iv) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \mathcal{R}^-\left(\complement_F L\right) \subset \complement_E(\mathcal{R}^-(L))$.

5. Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 4

(ii) $\mathcal{R}^+(E) = F$

(iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$

(iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \complement_F(\mathcal{R}^+(A)) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E(A)\right)$.

- (i) $\Longrightarrow$ (ii)
  Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 4. Par définition, $\mathcal{R}^+(E) \subset F$. Montrons qu'on a égalité. Pour cela, considérons un élément y de F, et montrons qu'il est dans $\mathcal{R}^+(E)$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 4, par définition, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \mathcal{R}^+(E)$.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii)
  Supposons (ii). Soit L un sous-ensemble de F. Soit $y \in L \subset F$. Comme $\mathcal{R}^+(E) = F$, $y \in \mathcal{R}^+(E)$, donc il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Comme $y \in L$, on a $x \in \mathcal{R}^-(L)$. Alors, la relation $(x\mathcal{R}y) \wedge (x \in \mathcal{R}^-(L))$ amène $y \in \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$. Ainsi, $L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$.
- (iii) $\Longrightarrow$ (iv)
  Supposons (iii). D'après (iii) avec $L = \complement_F(\mathcal{R}^+ A)$, on a : $\complement_F(\mathcal{R}^+ A) \subset \mathcal{R}^+\left(\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right)\right)$.
  Par ailleurs, on a $\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right) \subset \complement_E A$. En effet, soit $x \in \mathcal{R}^-\left(\complement_F \mathcal{R}^+ A\right)$. Alors, il existe $y \in \complement_F(\mathcal{R}^+ A)$ tel que $x\mathcal{R}y$. Comme $y \notin \mathcal{R}^+(A)$, il est nécessaire que $x \notin A$. Ainsi, $x \in \complement_E A$.
  L'inclusion $\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right) \subset \complement_E A$ amène, d'après la question 1(a) :

$$\mathcal{R}^+\left(\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right)\right) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \qquad \text{puis:} \qquad \complement_F(\mathcal{R}^+ A) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right).$$

- (iv) $\Longrightarrow$ (i)
  Supposons (iv). Appliquons (iv) avec $A = \varnothing$. On obtient :

$$\complement_F(\mathcal{R}^+(\varnothing)) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E \varnothing\right) \qquad \text{soit:} \qquad F \subset \mathcal{R}^+(E).$$

  Ainsi, $\mathcal{R}^+(E) = F$. Soit $y \in F$, comme $y \in \mathcal{R}^+(E)$, il existe donc $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Cela montre que $\mathcal{R}$ est de type 4.

En remarquant que $\mathcal{R}$ est de type 2 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 4, on obtient une liste de propriétés équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 2

(ii) $\mathcal{R}^-(F) = E$

(iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A))$

(iv) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \complement_E(\mathcal{R}^-(L)) \subset \mathcal{R}^-\left(\complement_F(L)\right)$.

6. (a) On vérifie que $\leqslant$ est une relation reflexive, antisymétrique et transitive.
   - Soit $\mathcal{R} \in \widehat{E}$. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ entraîne $x\mathcal{R}y$, donc $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{R}$. Ainsi, $\leqslant$ est reflexive.
   - Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations telles que $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{R}$. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y$ et $x\mathcal{S}y \Longrightarrow x\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x\mathcal{S}y$. Soit G et G' les graphes associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. L'équivalence précédente implique que $(x,y) \in G$ équivaut à $(x,y) \in G'$, ainsi, $G = G'$, donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. Par conséquent, $\leqslant$ est antisymétrique.
   - Soit $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations telles que $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$, et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{T}$. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y$ et $x\mathcal{S}y \Longrightarrow x\mathcal{T}y$. Par transitivité de l'implication, on obtient, pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{T}y$. Ainsi, $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{T}$. Par conséquent, $\leqslant$ est transitive.

   La relation $\leqslant$ étant réflexive, antisymétrique et transitive, c'est une $\boxed{\text{relation d'ordre sur } \widehat{E}}$.

   (b)
   - Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 1. Tout d'abord, il s'agit de comprendre la notation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, que l'on n'a pas explicitement définie (et notamment le sens dans lequel se font les compositions). Afin que la notation de la composition coïncide avec la notation utilisée pour les applications, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ doit déisgner la composition de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{R}$. Ainsi, si $\mathcal{T}$ désigne la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, $x\mathcal{T}y$ si et seulement s'il existe z dans E tel que $x\mathcal{R}^{-1}z$ et $z\mathcal{R}y$, donc $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 1, z est en relation avec un seul élément à sa droite, donc $x = y$. Or, soit $\mathcal{U}$ la relation associée à l'application Id_E (ainsi $x\mathcal{U}y$ si et seulement si $x = y$). On en déduit que si $x\mathcal{T}y$, alors $x\mathcal{U}y$. Ainsi, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E$.
   - Supposons que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{U}$. Soit z un élément de E admettant au moins une image. Montrons qu'elle est unique. Soit x et y dans E tels que $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Alors $x\mathcal{R}^{-1}z$ et $z\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{T}y$, donc $x\mathcal{U}y$, puis $x = y$. Ainsi, z ne peut pas admettre deux images distinctes. On en déduit que $\mathcal{R}$ est de type 1.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est de type 1 si et seulement si } \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E.}$

   (c)
   - ∗ Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 2. Soit x et y tels que $x\mathcal{U}y$, donc $x = y$. Or, x est en relation avec au moins un élément z de F, car $\mathcal{R}$ est de type 2. Ainsi, $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}^{-1}x$, donc $z\mathcal{R}^{-1}y$. Ainsi, $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})y$. Donc $Id_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$.
     ∗ Réciproquement, si $Id_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, alors, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{U}x$, donc $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})x$, donc il existe $z \in F$ tel que $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}^{-1}x$. Ainsi, x est en relation avec au moins un élément z de F. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est de type 2.

     On en déduit que $\boxed{\mathcal{R} \text{ est de type 2 si et seulement si } \mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}}$
   - $\boxed{\mathcal{R} \text{ est de type 3}}$ si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 1 $\boxed{\text{si et seulement si } \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \leqslant Id_E.}$
   - $\boxed{\mathcal{R} \text{ est de type 4}}$ si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 2 $\boxed{\text{si et seulement si } \mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}}$.

   (d)
   - Si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}_E$, alors les quatre inégalités de la question précédente sont vérifiées, donc $\mathcal{R}$ est de types 1, 2, 3 et 4. Étant de types 1 et 2, il s'agit d'une application. Étant de types 3 et 4, cette application est à la fois injective et surjective. C'est donc une bijection.
   - Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une application bijective, donc est de types 1 et 2 (car c'est une application), 3 et 4 (car elle est injective et surjective). Ainsi, les quatre inégalités de la question précédente sont vérifiées. En particulier :
     ∗ $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ par antisymétrie ;
     ∗ $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \leqslant \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ par antisymétrie ;

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}_E \text{ si et seulement si } \mathcal{R} \text{ est une application bijective.}}$

Correction du problème 2 – Saturation

1. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Puisque $\sim$ est une relation d'équivalence, elle est reflexive, donc pour tout $x \in A$, $x \sim x$, donc, en prenant $y = x$, il existe bien $y \in A$ tel que $x \sim y$. Ainsi, $x \in A^s$.
   On peut conclure que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\boxed{A \subset A^s}$.

   (b)
   - Si $A = \varnothing$, il ne peut exister de y dans A tel que $x \sim y$, pour aucun $x \in E$. Ainsi, $\boxed{\varnothing^s = \varnothing}$.
   - Puisque $E \subset E^s$ d'après 1, et que par définition, $E^s \subset E$, on obtient $\boxed{E^s = E}$.

   (c)
   - D'après la question 1, $A^s \subset (A^s)^s$.

- Soit $x \in (A^s)^s$. Il existe alors $y \in A^s$, qu'on se donne, tel que $x \sim y$. Comme $y \in A^s$, il existe $z \in A$ tel que $y \sim z$. Par transitivité, on en déduit que $x \sim z$, donc que $x \in A^s$. Ainsi, $(A^s)^s \subset A^s$.
- Des deux inclusions, on déduit l'égalité $\boxed{(A^s)^s = A^s.}$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

   (a) Soit $y \in E$. Dire que $y \in A^s$ équivaut à dire qu'il existe $x \in A$ tel que $y \sim x$, c'est-à-dire $y \in \overline{x}$. Ceci équivaut bien à dire que $y \in \bigcup_{x \in A} \overline{x}$.

   Ces équivalences montrent que $\boxed{A^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x}}$.

   (b) A^s est une partie saturée (question 1c) contenant A (question 1a). Donc A^s est un des termes de l'intersection du membre de droite. On en déduit que

$$\bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B \subset A^s.$$

   Réciproquement, soit B une partie saturée contenant A. On utilise le fait évident que $A \subset B$ implique $A^s \subset B^s$. Ainsi, B étant saturé, $A^s \subset B$. Par conséquent, A^s est inclus dans tout ensemble saturé contenant A, donc :

$$A^s \subset \bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B.$$

   Les deux inclusions amènent l'égalité : $\boxed{A^s = \bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B}$.

   Cette égalité affirme que A^s est la plus petite partie saturée contenant A.

3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

   (a) On a

$$A^s \cup B^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x} \cup \bigcup_{x \in B} \overline{x} = \bigcup_{x \in A \cup B} \overline{x} = (A \cup B)^s.$$

   Ainsi, $\boxed{A^s \cup B^s = (A \cup B)^s}$.

   (b) Soit $x \in (A \cap B)^s$. Il existe donc $y \in A \cap B$ tel que $x \sim y$. Puisque $y \in A$, $x \in A^s$. Puisque $y \in B$, $x \in A^s$. Ainsi $x \in A^s \cap B^s$. On a donc toujours l'inclusion $\boxed{(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s}$

   En revanche, l'inclusion réciproque est fausse en générale. Le problème provient du fait qu'une même classe peut à la fois avoir un représentant dans A, un représentant dans B, mais aucun dans $A \cap B$. Alors cette classe est incluse dans $A^s \cap B^s$, mais pas dans $(A \cap B)^s$. Un tout simple est le cas de l'ensemble $E = \{1, 2\}$, et la relation complète, dont le graphe est $E \times E$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, et l'unique classe est E. Prenant $A = \{1\}$ et $B = \{1\}$, on a alors $A^s = B^s = E$, donc $A^s \cap B^s = E$. En revanche, $A \cap B = \varnothing$, donc $(A \cap B)^s = \varnothing$.

4. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E,

$$(A^s)^c = \bigcup_{x \in E | \overline{x} \cap A = \varnothing} \overline{x}.$$

En effet, une classe est présente dans l'union définissant A^s si et seulement si un de ses représentants est dans A, donc si $\overline{x} \cap A \neq \varnothing$. Or,

$$\{x \in E \mid \overline{x} \cap A = \varnothing\} \subset A^c,$$

puisque $x \in \overline{x}$. Ainsi,

$$(A^s)^c \subset \bigcup_{x \in A^c} \overline{x} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{(A^s)^c \subset (A^c)^s}.$$

On a alors l'égalité dès lors que la première inclusion ci-dessus est une égalité, donc dès lors que la classe de tout élément de A^c est disjointe de A, donc que les classes d'éléments de A sont toutes incluses dans A (elles ne doivent pas déborder). En réécrivant A^s comme union des classes, il vient alors la CNS suivante : $A = A^s$, c'est-à-dire $\boxed{\text{A saturé}}$.

On peut aussi s'y prendre ainsi : puisque $A \subset A^s$, on a $(A^s)^c \subset A^c \subset (A^c)^s$. On ne peut avoir l'égalité que si les deux inclusions sont des égalités, ce qui impose en particulier $A = A^s$. Réciproquement si $A = A^s$, pour tout $x \in A$, il n'existe aucun $y \in A$ tel que $x \sim y$ (sinon on aurait $y \in A^s$). Ainsi, aucun x de A n'est dans $(A^c)^s$, donc $(A^c)^s \subset A^c$, puis, $(A^c)^s = A^c$. La chaîne d'inclusions ci-dessus est alors constituée de 2 égalités, d'où $(A^s)^c = (A^c)^s$.

Ainsi, $\boxed{(A^s)^c = (A^c)^s \text{ si et seulement si } A \text{ est saturé}}$.

5. Soit $x \in E$. On a $x \in A^s$ si et seulement si il existe $y \in A$ tel que $(x, y) \in G$, si et seulement si l'ensemble $p_2^{-1}(A) \cap G$ contient un élément dont la première coordonnée est x, si et seulement si $x \in p_1(p_2^{-1}(A) \cap G)$.

   On a bien obtenu : $\boxed{A^s = p_2(p_1^{-1}(A) \cap G).}$

6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x \in A, \quad \exists y \in B, \quad x \sim y).$$

   (a) • Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A\mathcal{R}A$, car si $A \neq \varnothing$, il suffit de prendre $y = x$ (par reflexivité de $\sim$), et si $A = \varnothing$, la propriété est vraie par défaut, l'hypothèse de l'implication n'étant jamais vérifiée. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est reflexive}}$.
   • Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^2$, tels que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Si A est vide, on a de même qu'avant $A\mathcal{R}C$ par défaut. Sinon, soit x quelconque dans A. Il existe y dans B tel que $x \sim y$. Mais comme $B \sim C$, il existe $z \in C$ tel que $y \sim z$. Par transitivité, pour un tel z, on a alors $x \sim z$. Comme on peut trouver un tel z pour tout x de A, on a bien $A \sim C$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive}}$
   • En général, $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas une relation d'équivalence}}$ car elle n'est pas symétrique. Plus précisément, si $E \neq \varnothing$, $\varnothing\mathcal{R}E$, mais en revanche, on ne peut pas avoir $E\mathcal{R}\varnothing$. Le cas $E = \varnothing$ est le seul cas où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) • Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$, alors pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$. Ainsi

$$A^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x} \subset \bigcup_{y \in B} \overline{y} = B^s.$$

   L'inclusion réciproque se montre de même. Ainsi, $A^s = B^s$.
   • Réciproquement, si $A^s = B^s$, puisque $A \subset A^s$, tout x de A est aussi dans B^s. Donc il existe $y \in B$ tel que $x \sim y$. Cela prouve que $A\mathcal{R}B$. L'autre relation se prouve de même.
   • Ainsi, $\boxed{A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A \text{ si et seulement si } A^s = B^s}$.
   • L'égalité $A^s = B^s$ n'équivaut pas à $A = B$, par exemple si une des classes d'équivalence est constituée de 2 éléments x et y, et $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, on a $A^s = B^s$, mais $A \neq B$. Ainsi, en général $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ n'équivaut pas à $A = B$. La relation n'est donc $\boxed{\text{pas une relation d'ordre en général}}$.

   (c) La reflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{S}$ sont immédiates. $\boxed{\mathcal{S} \text{ est une relation d'équivalence.}}$

   (d) Soient (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, et $A\mathcal{R}B$. D'après la question 6b et la dfinition de $\mathcal{S}$, on a $A\mathcal{R}A'$, $A'\mathcal{R}A$, $B\mathcal{R}B'$, $B'\mathcal{R}B$ et $A\mathcal{R}B$. Selectionnons 3 de ces relations : $A'\mathcal{R}A$, $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}B'$. Par transitivité de $\mathcal{R}$, on obtient alors $A'\mathcal{R}B'$.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} \text{ respecte } \mathcal{R}}$.

   (e) On définit $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$ par $C\overline{\mathcal{R}}D$ si et seulement s'il existe des représentants A et B des classes C et D tels que $A\mathcal{R}B$. Par conséquent, par définition même,

$$\boxed{A\mathcal{R}B \Longrightarrow \overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B}}.$$

   Si A' et B' sont deux autres représentants de C et D, d'après la question précédente, on aura aussi $A'\mathcal{R}B'$. Ainsi, on obtient bien

$$\boxed{\overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B} \Longrightarrow A\mathcal{R}B}.$$

   (f) • Soit C une classe dans $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentée par un élément $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors $A\mathcal{R}A$, par reflexivité de $\mathcal{R}$. Par conséquent, $C\overline{\mathcal{R}}C$, d'où la reflexivité de $\overline{\mathcal{R}}$.
   • Soient C, D deux éléments de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentés par A et B. Supposons $C\overline{\mathcal{R}}D$ et $D\overline{\mathcal{R}}C$. On a alors $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ donc $A^s = B^s$, c'est-à-dire $A\mathcal{S}B$, ou encore $C = D$. Ainsi, $\overline{\mathcal{R}}$ est symétrique.
   • La transitivité de $\overline{\mathcal{R}}$ découle de celle de $\mathcal{R}$, de la même manière que la reflexivité.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre sur } \mathcal{P}(E)/\mathcal{S}.}$