

Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Maths 2
- *NOM Prénom* : Anjolas Philippe

Énoncé des exercices

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \{M \in \mathcal{M}_n \mathbb{R}, \forall (i, j), M_{i,j} \in \{\pm 1\}, {}^t M M = n I_n\}$.

1. Déterminer H_1, H_2 .
2. Montrer que si $n > 2$ et $H_n \neq \emptyset$, alors $4|n$.
3. Montrer que $H_4 \neq \emptyset$, puis que $H_{2^n} \neq \emptyset$ pour tout n . (Sylvester)
4. On admet que $H_{12} \neq \emptyset$. Conjecture ? (Hadamard)
5. Soit n tel que $p = 4n - 1$ est premier. Montrer qu'il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
6. Soit l un carré non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $-l$ n'est pas un carré.
7. Soit r non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $|\{(i, j) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2, r = i^2 - j^2\}| = \frac{p-3}{4}$. (Attention : ce résultat est faux.)

Remarques sur l'oral

L'examineur était sympathique.

À ma conjecture sur la 4, il m'explique que cette conjecture est encore un problème ouvert actuellement, ou que la première valeur ouverte est 996. (La conjecture est simplement la réciproque de la 2.)

L'oral se passe bien jusqu'à la 7, pour laquelle l'énoncé est faux (on trouve $p - 1$).

Il essaie de me faire calculer le cardinal d'une autre façon, j'obtiens le même résultat, il relit ses notes puis essaie de changer l'énoncé, sans succès. (« En plus c'est moi qui ai écrit ce papier donc ça devrait être juste... ») On passe les 15-20 dernières minutes de l'oral là-dessus, puis il finit par m'annoncer que c'est la fin et s'excuse de ce cafouillage...

En regardant chez moi, je pense que l'énoncé correct est le suivant : Montrer que $|\{(i, j) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2, i \text{ et } j \text{ carrés}, r = i - j\}| = \frac{p-3}{4}$.

À la fin, il m'explique que la suite de l'exercice consistait à utiliser ce résultat pour construire une matrice de H_{4n} (lorsque $4n - 1$ était premier) qui serait une matrice circulante, afin de montrer la conjecture pour ces cas particuliers là.