Lycée Henri IV
MPSI 2016/2017

Devoir surveillé
15/5/2017

DEVOIR SURVEILLÉ 8

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\text{encadrée}}$ ou <u>soulignée</u>. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Déjà fait

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Démontrer que F et G admettent un supplémentaire commun si, et seulement si, $\dim F = \dim G$.

EXERCICE 2

Paradoxe de Penney

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note P_k l'événement « obtenir pile au k-ème lancer » et F_k l'événement « obtenir face au k-ème lancer ». Pour alléger, on pourra écrire P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que X prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « pile » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que Y prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de cet exercice est de calculer les espérances de X et Y et de constater, contre toute attente, que $E(X)$ et $E(Y)$ ne sont pas égales !! Plus précisément, nous allons voir que $E(X) < E(Y)$, ce qui signifie que le temps d'attente de la première configuration « pile-face » est, en moyenne, plus court que le temps d'attente de la première configuration « pile-pile ».

A. Étude de X

1. Que vaut $X(\Omega)$?
2. Calculer $P(X=2)$.
3. Soit $k \geqslant 3$.
   a) Démontrer que
   $$P(X=k \,|\, P_1) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$
   b) Justifier que
   $$P(X=k \,|\, F_1) = P(X=k-1).$$
   c) En déduire que
   $$P(X=k) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X=k-1).$$
4. À l'aide de la quantité $u_k = 2^k P(X=k)$, déterminer la valeur de $P(X=k)$ pour $k \in [\![2;n]\!]$.
5. a) Démontrer que, pour tout $m \geqslant 2$, on a
   $$\sum_{k=2}^{m} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{m+1}{2^m}.$$
   b) Déterminer $P(X=0)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.
6. a) Démontrer que, pour tout $m \geqslant 2$, on a
   $$\sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m}.$$
   b) Calculer $E(X)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

B. Étude de Y

1. Que vaut $Y(\Omega)$?
2. Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.
3. Soit $k \geqslant 3$.
   a) Justifier que
   $$P(Y=k \,|\, P_1F_2) = P(Y=k-2) \qquad \text{et} \qquad P(Y=k \,|\, F_1) = P(Y=k-1).$$
   b) Démontrer que
   $$P(Y=k) = \frac{1}{2}P(Y=k-1) + \frac{1}{4}P(Y=k-2).$$
4. Déterminer $P(Y=k)$ pour tout $k \in [\![2;n]\!]$. *Il y a des $\sqrt{5}$ et c'est normal !*
5. a) Démontrer que, pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on a
   $$\sum_{k=2}^{m} P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m).$$
   b) Déterminer $P(Y=0)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.
6. a) Démontrer que, pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on a
   $$\sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6 - (m+5)P(Y=m-1) - (3m+16)P(Y=m).$$
   b) Calculer $E(Y)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Sous-groupes matriciels multiplicatifs
(d'après X 1986)

Soit $\mathscr{G}$ un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). On dit que $\mathscr{G}$ est un groupe matriciel multiplicatif (réel) lorsque $\mathscr{G}$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

On souligne qu'en général $\mathscr{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. En particulier, d'une part, l'élément neutre de $\mathscr{G}$ n'est pas nécessairement I_n et, d'autre part, $\mathscr{G}$ peut contenir des matrices de rang strictement inférieur à n.

On note E l'élément neutre de $\mathscr{G}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a

$$AE = EA = A.$$

Toute matrice $A \in \mathscr{G}$ admet, pour la multiplication maticielle, une symétrique dans $\mathscr{G}$, notée A'. Autrement dit, on a

$$AA' = A'A = E.$$

A. Exemples

1. Donner un exemple non trivial de groupe matriciel multiplicatif inclus dans $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = J$ et $J \neq 0_n$. Démontrer que $\mathscr{G}_J = \{\lambda J : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un groupe matriciel multiplicatif. À quel groupe classique est-il isomorphe ?

B. Structure des groupes matriciels multiplicatifs

On considère un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, non réduit à $\{0_n\}$. On note r le rang de l'élément neutre E.

1. Démontrer que $r \geqslant 1$.
2. (Cours) Démontrer que, pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}.$$

   En déduire que tous les éléments de $\mathscr{G}$ sont de rang r.

3. a) Démontrer que E est la matrice d'un projecteur et en déduire qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$E = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   En particulier, que vaut E si $r = n$?

   b) Soit $A \in \mathscr{G}$. En utilisant l'égalité $AE = EA = A$, démontrer qu'il existe $M_A \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Justifier que

$$A' = P \begin{pmatrix} {M_A}^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   c) Démontrer qu'il existe un sous-groupe $\mathscr{G}_r$ de $\mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathscr{G} = \left\{ P \begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{G}_r \right\}.$$

   En déduire une description de tous les groupes matriciels multiplicatifs.

C. Caractérisation des éléments des groupes matriciels multiplicatifs

Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir l'équivalence des cinq propriétés suivantes :

   (i) A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$

   (ii) $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A)$

   (iii) $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Im}(A)$

   (iv) $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$

   (v) $\operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun groupe matriciel multiplicatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) Démontrer que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$ si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A telle que $A^2 B = A$ et $B^2 A = B$.

   ► Dans les deux questions qui suivent, on suppose que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$. On considère alors la matrice B introduite par la question précédente.

   b) Établir que $B = A'$ où A' désigne le symétrique de A dans $\mathscr{G}$.

   c) Expliquer pourquoi A' ne dépend pas du groupe multiplicatif $\mathscr{G}$ auquel A appartient.

CORRECTION DU DS 8

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Démontrer que F et G admettent un supplémentaire commun si, et seulement si, $\dim F = \dim G$.

On procède évidemment par double implication.

$\Rightarrow$ Si les sous-espaces F et G admettent un supplémentaire commun S, alors $F \oplus S = G \oplus S$, d'où $\dim F + \dim S = \dim G + \dim S$, ce qui donne $\dim F = \dim G$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\dim F = \dim G = r$. On propose deux démonstrations.

- $\triangleright$ Démonstration par récurrence descendante sur r

  Initialisation : Si $r = \dim E$, alors $F = G = E$ et $S = \{0_E\}$ convient.

  Hérédité : Supposons le résultat établi au rang $r+1 \leqslant \dim E$ et démontrons le au rang r. Soient F et G deux sous-espaces de dimension r. Si $F = G$, c'est du tout cuit et si $F \neq G$, alors $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace de E (c'est un exercice classique). En particulier, $F \cup G \neq E$ et l'on peut considérer un vecteur non nul x de E n'appartenant ni à F ni à G. On pose alors $F' = F \oplus \operatorname{Vect}(x)$ et $G' = G \oplus \operatorname{Vect}(x)$ de sorte que F' et G' soient tous les deux de dimension $r+1$ et que l'on puisse leur appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe un supplémentaire commun S' à F' et G'. Alors $E = (F \oplus \operatorname{Vect}\{x\}) \oplus S' = (G \oplus \operatorname{Vect}\{x\}) \oplus S'$. L'associativité de la somme directe dit alors que $E = F \oplus (\operatorname{Vect}\{x\} \oplus S') = G \oplus (\operatorname{Vect}\{x\} \oplus S')$. Donc $S = \operatorname{Vect}\{x\} \oplus S'$ est un supplémentaire commun de F et G dans E et l'hérédité de la démonstration par récurrence est établie.

  Conclusion : D'après le principe de récurrence, si $\dim F = \dim G$, alors F et G admettent un supplémentaire commun.

- $\triangleright$ Démonstration à l'aide de bases

  Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$.
  On complète la famille libre $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base de $(e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_r)$ de F d'une part et en une base $(e_1, \ldots, e_p, g_{p+1}, \ldots, g_r)$ de G d'autre part.
  En reproduisant une partie de la preuve de la formule de Grassmann, on démontre que $(e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_r, g_{p+1}, \ldots, g_r)$ est libre. On peut donc compléter cette famille en une base $(e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_r, g_{p+1}, \ldots, g_r, h_{2r-p+1}, \ldots, h_n)$ de E.
  Posons $S = \operatorname{Vect}(f_{p+1} + g_{p+1}, \ldots, f_r + g_r, h_{2r-p+1}, \ldots, h_n)$.
  On vérifie sans mal que $(e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_r, f_{p+1} + g_{p+1}, \ldots, f_r + g_r, h_{2r-p+1}, \ldots, h_n)$ est encore une base de E. On en déduit que S est un supplémentaire de F dans E.
  De même, on voit que S est un supplémentaire de G dans E.
  Par conséquent, F et G admettent bien un supplémentaire commun.

En conclusion,

en dimension finie, deux sous-espaces ont un supplémentaire commun si, et seulement si, ils sont de même dimension.

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note P_k l'événement « obtenir pile au k-ème lancer » et F_k l'événement « obtenir face au k-ème lancer ». Pour alléger, on écrira P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que X prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession. On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « pile » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que Y prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession. L'objet de cet exercice est de calculer les espérances de X et Y et de constater, contre toute attente, que $E(X)$ et $E(Y)$ ne sont pas égales !!

A. 1. *Que vaut $X(\Omega)$?*

On a clairement

$$\boxed{X(\Omega) = \{0\} \cup [\![2;n]\!].}$$

2. *Calculer $P(X = 2)$.*

On a

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(P_1F_2) \\ &= P(P_1)P(F_2) \qquad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X=2) = \frac{1}{4}.}$$

3. *Soit $k \geqslant 3$.*

a) *Démontrer que $P(X = k \,|\, P_1) = 1/2^{k-1}$.*

On a

$$\begin{aligned} P(X = k \,|\, P_1) &= P(P_2 \cdots P_{k-1}F_k \,|\, P_1) \\ &= P(P_2 \cdots P_{k-1}F_k) \qquad \text{car } P_2 \cdots P_{k-1}F_k \perp\!\!\!\perp P_1 \\ &= P(P_2) \cdots P(P_{k-1})P(F_k) \qquad \text{par indépendance} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{k-1 \text{ fois}}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X = k \,|\, P_1) = \frac{1}{2^{k-1}}.}$$

b) *Justifier que $P(X = k \,|\, F_1) = P(X = k-1)$.*

La réalisation de l'événement F_1 n'a aucune influence sur la possibilité d'avoir la séquence « pile-face ». Par conséquent, lorsque l'on sait que F_1 s'est réalisé, on peut considérer que le premier tirage n'a pas existé et donc que la suite de tirages commence au rang 2. Dans ces conditions, mesurer la probabilité de l'événement $(X = k)$ sachant que F_1 s'est réalisé revient, par décalage d'indice, à mesurer la probabilité (sans conditionnement) de l'événement $(X = k-1)$. Donc

$$\boxed{P(X = k \,|\, F_1) = P(X = k-1).}$$

c) *En déduire que $P(X = k) = 1/2^k + P(X = k-1)/2$.*

D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements (P_1, F_1), on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(P_1)P(X = k \,|\, P_1) + P(F_1)P(X = k \,|\, F_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \times P(X = k-1), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X = k) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X = k-1).}$$

4. *À l'aide de $u_k = 2^k P(X=k)$, déterminer la valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in [\![2;n]\!]$.*

Pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on a

$$u_k = 2^k P(X=k) = 2^k \Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X=k-1)\Big) = 1 + 2^{k-1}P(X=k-1) = 1 + u_{k-1},$$

donc $(u_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ est une suite arithmétique. Par suite, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on a

$$u_k = u_2 + k - 2 = 4\frac{1}{4} + k - 2 = k - 1,$$

d'où

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!]\,, \qquad P(X=k) = \frac{k-1}{2^k}\cdot}$$

5. a) *Démontrer que, pour tout $m \geqslant 2$, on a $\sum_{k=2}^{m}(k-1)/2^k = 1-(m+1)/2^m$.*

Pour tout $m \geqslant 2$, on pose

$$\mathscr{P}(m) : \sum_{k=2}^{m} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{m+1}{2^m}\cdot$$

<u>Initialisation :</u> Pour $m = 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4}$ et $1 - \dfrac{2+1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $m \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} \frac{k-1}{2^k} &= \sum_{k=2}^{m} \frac{k-1}{2^k} + \frac{m}{2^{m+1}} \\ &= 1 - \frac{m+1}{2^m} + \frac{m}{2^{m+1}} \qquad \text{par H.R.} \\ &= 1 - \frac{(m+1)+1}{2^{m+1}}, \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{m+1}{2^m}\cdot}$$

Remarque : On peut évidemment faire plus intelligent qu'une démonstration par récurrence. Par exemple : utiliser un changement d'indice suivi d'un téléscopage ou même une fonction génératrice.

b) *Déterminer $P(X=0)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.*

On a

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1 - \sum_{k=2}^{n} P(X=k) \\ &= 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2^k} \qquad \text{d'après A. 4.} \\ &= \frac{n+1}{2^n} \qquad \text{d'après A. 5. a),} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X=0) = \frac{n+1}{2^n}\cdot}$$

Les croissances comparées nous disent que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X=0) = 0,}$$

ce qui s'interprète en disant que

si on lance un très grand nombre de fois la pièce, on obtiendra quasi-certainement la séquence « pile-face ».

6. a) *Démontrer que, pour tout $m \geqslant 2$, on a $\sum_{k=2}^{m} k(k-1)/2^k = 4 - (m^2+3m+4)/2^m$.*

Pour tout $m \geqslant 2$, on pose

$$\mathscr{Q}(m) : \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m}\cdot$$

Initialisation : Pour $m = 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{2}$ et $4 - \dfrac{2^2+3.2+4}{2^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathscr{Q}(2)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $m \geqslant 2$ tel que $\mathscr{Q}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{Q}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{m+1} \frac{k(k-1)}{2^k} &= \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{(m+1)m}{2^{m+1}} \\
&= 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m} + \frac{(m+1)m}{2^{m+1}} \qquad \text{par H.R.} \\
&= 4 - \frac{m^2+5m+8}{2^1} \\
&= 1 - \frac{(m+1)^2+3(m+1)+4}{2^{m+1}},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{Q}(m+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m}\cdot}$$

b) *Calculer $E(X)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.*

On a

$$E(X) = \sum_{k \in \{0\} \cup [\![2;n]\!]} kP(X=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} \qquad \text{d'après A. 4.,}$$

ce qui donne, d'après le résultat de la question précédente,

$$\boxed{E(X) = 4 - \frac{n^2+3n+4}{2^n}\cdot}$$

Les croissances comparées nous disent alors que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E(X) = 4.}$$

B. 1. *Que vaut $Y(\Omega)$?*

On a toujours

$$\boxed{Y(\Omega) = \{0\} \cup [\![2;n]\!].}$$

2. *Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.*

Par indépendance, on a

$$P(Y=2) = P(P_1P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$

donc

$$\boxed{P(Y=2) = \frac{1}{4}}$$

Par indépendance, on a

$$P(Y=3) = P(F_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$

donc

$$\boxed{P(Y=3) = \frac{1}{8}\cdot}$$

3. *Soit* $k \geqslant 3$.

   a) *Justifier que* $P(Y=k \mid P_1F_2) = P(Y=k-2)$ *et* $P(Y=k \mid F_1) = P(Y=k-1)$.

   On raisonne comme à la question A. 3. b).

   La réalisation de P_1F_2 n'influence pas l'apparition de la séquence « pile-pile » ce qui permet de dire qu'il revient au même de mesurer la probabilité de l'événement $(Y=k)$ sachant que P_1F_2 s'est réalisé ou de mesurer, par décalage d'indice, la probabilité (sans conditionnement) de l'événement $(Y=k-2)$. Donc

$$\boxed{P(Y=k \mid P_1F_2) = P(Y=k-2).}$$

   La réalisation de F_1 n'influence pas l'apparition de la séquence « pile-pile » ce qui permet de dire qu'il revient au même de mesurer la probabilité de l'événement $(Y=k)$ sachant que F_1 s'est réalisé ou de mesurer, par décalage d'indice, la probabilité (sans conditionnement) de l'événement $(Y=k-1)$. Donc

$$\boxed{P(Y=k \mid F_1) = P(Y=k-1).}$$

   b) *Démontrer que* $P(Y=k) = P(Y=k-1)/2 + P(Y=k-2)/4$.

   D'après la formule des probabilités totales appliquée à travers le système complet d'événements (P_1F_1, P_1F_2, F_1), on a

$$P(Y=k) = P(P_1P_2)P(Y=k \mid P_1P_2) + P(P_1F_2)P(Y=k \mid P_1F_2) + P(F_1)P(Y=k \mid F_1).$$

   Comme l'événement P_1P_2 implique $(Y=2)$, on a $P(Y=k \mid P_1P_2) = 0$ puisque $k \geqslant 3$. En tenant compte des résultats de la question précédente, il vient donc

$$\boxed{P(Y=k) = \frac{1}{2}P(Y=k-1) + \frac{1}{4}P(Y=k-2).}$$

4. *Déterminer* $P(Y=k)$ *pour tout* $k \in [\![2;n]\!]$.

Pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on pose $v_k = P(Y=k)$ de sorte que, d'après la question précédente, on ait

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence double est $r^2 - r/2 - 1/4 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1/4 + 1 = 5/4$ donc les solutions de cette équation sont les deux nombres réels

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Par suite, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad v_k = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^k + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^k.$$

Comme $v_2 = 1/4$ et $v_3 = 1/8$, il est logique de poser

$$v_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 1,$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B &=& 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}A + \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}B &=& 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$A = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad P(Y=k) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^k + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^k.}$$

5. a) *Démontrer que, pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on a $\sum_{k=2}^{m} P(Y=k) = 1-P(Y=m-1)-3P(Y=m)$.*

Pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on pose

$$\mathscr{R}(m): \quad \sum_{k=2}^{m} P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m).$$

<u>Initialisation :</u> Pour $m=2$, on a

$$\sum_{k=2}^{2} P(Y=k) = P(Y=2) = \frac{1}{4}$$

et

$$1 - P(Y=1) - 3P(Y=2) = 1 - 0 - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

donc $\mathscr{R}(2)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $m \in [\![2;n]\!]$ tel que $\mathscr{R}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{R}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{m+1} P(Y=k)\\
=\ & \sum_{k=2}^{m} P(Y=k) + P(Y=m+1)\\
=\ & 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m) + P(Y=m+1) \qquad \text{par H.R.}\\
=\ & 1 - \big(4P(Y=m+1) - 2P(Y=m)\big) - 3P(Y=m) + P(Y=m+1) \qquad \text{par B. 3. b)}\\
=\ & 1 - P(Y=m) - 3P(Y=m+1),
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{R}(m+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m).}$$

b) *Déterminer $P(Y=0)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.*

Le résultat de la question précédente nous dit que

$$P(Y=0) = 1 - \sum_{k=2}^{n} P(Y=k) = P(Y=n-1) + 3P(Y=n),$$

donc, d'après le résultat de la question 4, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=0) \quad = \quad & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\\
& +3\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} + 3\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}.}$$

Comme $(1+\sqrt{5})/4$ et $(1-\sqrt{5})/4$ appartiennent à $]-1;1[$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(Y=0) = 0,}$$

ce qui s'interprète en disant que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si on lance un très grand nombre de fois la pièce, on}\\ \text{obtiendra quasi-certainement la séquence « pile-pile ».}\end{array}}$$

6. a) *Démontrer que* $\sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6-(m+5)P(Y=m-1)-(3m+16)P(Y=m)$ *pour tout* $m \in [\![2;n]\!]$.

Pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on pose

$$\mathscr{S}(m): \quad \sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6-(m+5)P(Y=m-1)-(3m+16)P(Y=m).$$

Initialisation : On a

$$\sum_{k=2}^{2} kP(Y=k) = 2P(Y=2) = \frac{1}{2}$$

et

$$6-7P(Y=1)-22P(Y=2) = 6-7\times 0-22\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

donc $\mathscr{S}(2)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $m \in [\![2;n]\!]$ tel que $\mathscr{S}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{S}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{m+1} kP(Y=k)\\
=\;& \sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) + (m+1)P(Y=m+1)\\
=\;& 6-(m+5)P(Y=m-1)-(3m+16)P(Y=m)\\
&\quad +(m+1)P(Y=m+1) \qquad \text{par H.R.}\\
=\;& 6-(m+5)\big(4P(Y=m+1)-2P(Y=m)\big)\\
&\quad -(3m+16)P(Y=m)+(m+1)P(Y=m+1) \qquad \text{par B. 3. b)}\\
=\;& 6-(m+6)P(Y=m)-(3m+19)P(Y=m+1)\\
=\;& 6-\big((m+1)+5\big)P(Y=m)-\big(3(m+1)+16\big)P(Y=m+1),
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{S}(m+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6-(m+5)P(Y=m-1)-(3m+16)P(Y=m).}$$

b) *Calculer* $E(Y)$ *et préciser la limite de cette quantité lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

On a

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k\in\{0\}\cup[\![2;n]\!]} kP(Y=k)\\
&= \sum_{k=2}^{n} kP(Y=k)\\
&= 6-(n+5)P(Y=n-1)-(3n+16)P(Y=n) \qquad \text{d'après B. 6. a)}\\
&= 6-(n+5)\Big[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}\Big]\\
&\quad -(3n+16)\Big[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n}\Big],
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\boxed{E(Y) = 6-\frac{5(n+5)+(2n+11)\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}-\frac{5(n+5)-(2n+11)\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}.}$$

Comme $(1+\sqrt{5})/4$ et $(1-\sqrt{5})/4$ appartiennent à $]-1;1[$, les croissances comparées nous disent que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(Y) = 6.}$$

EXERCICE 3

Soit $\mathscr{G}$ un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). On dit que $\mathscr{G}$ est un groupe matriciel multiplicatif (réel) lorsque $\mathscr{G}$ est un groupe pour la multiplication matricielle. On souligne qu'en général $\mathscr{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. En particulier, d'une part, l'élément neutre de $\mathscr{G}$ n'est pas nécessairement I_n et, d'autre part, $\mathscr{G}$ peut contenir des matrices de rang strictement inférieur à n. On note E l'élément neutre de $\mathscr{G}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $AE = EA = A$. Toute matrice $A \in \mathscr{G}$ admet, pour la multiplication des matrices, une symétrique dans $\mathscr{G}$, notée A'. Autrement dit, on a $AA' = A'A = E$.

A. 1. *Donner un exemple non trivial de groupe matriciel multiplicatif inclus dans $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Par exemple,

$$\boxed{\begin{array}{l}\{I_n, S\} \text{ où } S \text{ est une matrice de symétrie (i.e. } S^2 = I_n) \text{ est un} \\ \text{groupe matriciel multiplicatif non trivial inclus dans } \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}).\end{array}}$$

2. *Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = J$ et $J \neq 0_n$. Démontrer que $\mathscr{G}_J = \{\lambda J : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un groupe matriciel multiplicatif. À quel groupe classique est-il isomorphe ?*

Si λJ et μJ sont deux éléments de $\mathscr{G}_J$, alors $(\lambda J)(\mu J) = (\lambda\mu)J$ appartient à $\mathscr{G}_J$, donc la multiplication matricielle est interne sur $\mathscr{G}_J$.

La multiplication matricielle est associative (on le sait !).

Pour tout élément λJ de $\mathscr{G}_J$, on a $(\lambda J)J = J(\lambda J) = \lambda J$ donc J est l'élément neutre de $\mathscr{G}_J$.

Enfin, pour tout élément λJ de $\mathscr{G}_J$, on a $(\lambda J)(\lambda^{-1}J) = (\lambda^{-1}J)(\lambda J) = J$ donc λJ est symétrisable dans $\mathscr{G}_J$ et $(\lambda J)^{-1} = \lambda^{-1}J$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{G}_J \text{ est un groupe matriciel multiplicatif.}}$$

L'application de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathscr{G}_J$ qui à $\lambda \in \mathbb{R}^*$ associe λJ est clairement un isomorphisme, donc

$$\boxed{\mathscr{G}_J \text{ est isomorphe à } \mathbb{R}^*.}$$

B. *Soit $\mathscr{G}$ un groupe matriciel multiplicatif dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non réduit à $\{0_n\}$. On pose $r = \mathrm{rg}(E)$.*

1. *Démontrer que $r \geqslant 1$.*

Par l'absurde, supposons que $r = 0$. Alors $E = 0_n$. Pour tout $A \in \mathscr{G}$, la relation $A = AE$ donne alors $A = 0_n$. On a donc $\mathscr{G} = \{0_n\}$, ce qui est absurde ! Donc

$$\boxed{r \geqslant 1.}$$

2. *Démontrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$. En déduire que tous les éléments de $\mathscr{G}$ sont de rang r.*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Il est clair que $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$, ce qui implique que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

Il est clair que $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB)$, ce qui implique que $\dim \mathrm{Ker}(B) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(AB)$. Le théorème du rang donne alors $n - \mathrm{rg}(B) \leqslant n - \mathrm{rg}(AB)$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(B)$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}.}$$

Soit $A \in \mathscr{G}$. L'égalité $AE = A$ nous dit que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AE) \leqslant \mathrm{rg}(E).$$

Par ailleurs, l'égalité $AA' = E$ nous dit que

$$\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(AA') \leqslant \mathrm{rg}(A).$$

On a donc

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(E) = r.$$

Cela démontre que

$$\boxed{\text{tous les éléments de } \mathscr{G} \text{ sont de rang } r.}$$

3. a) *Démontrer que E est la matrice d'un projecteur et en déduire qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $E = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}$. En particulier, que vaut E si $r = n$?*

Comme E est neutre, on a en particulier $E^2 = E$. Cela démontre que

$$\boxed{E \text{ est la matrice d'un projecteur.}}$$

Notons e l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à E. Comme e est un projecteur, on sait alors que $\mathrm{Im}(e) \oplus \mathrm{Ker}(e) = \mathbb{R}^n$. En prenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire la juxtaposition d'une base de $\mathrm{Im}(e)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(e)$), on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Comme deux matrices d'un même endomorphisme relatives à des bases différentes sont semblables, on en déduit que

$$\boxed{\text{il existe } P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } E = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

Si $r = n$, alors E est semblable à I_n donc est égale à I_n. On peut aussi dire que si $r = n$, alors E est une matrice de projecteur inversible, ce qui laisse I_n comme seule possibilité. Bref,

$$\boxed{\text{si } r = n, \text{ on a } E = I_n.}$$

b) *Soit $A \in \mathscr{G}$. En utilisant l'égalité $AE = EA = A$, démontrer qu'il existe $M_A \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}$. Justifier que $A' = P\begin{pmatrix} {M_A}^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}$.*

Posons $B = P^{-1}AP$ et décomposons B par blocs sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

où $B_1 \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $B_4 \in \mathscr{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$.
L'égalité $AE = EA = A$ donne alors

$$P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}P^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ B_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient

$$B_2 = 0_{r,n-r}, \qquad B_3 = 0_{n-r,r} \qquad \text{et} \qquad B_4 = 0_{n-r},$$

c'est-à-dire

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Comme A est de rang r, la matrice B (qui est semblable à A) est aussi de rang r. Il s'ensuit que B_1 est de rang r. Comme c'est une matrice $r \times r$, on en déduit que $B_1 \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$.
En posant $M_A = B_1$, on en conclut que

$$\boxed{\text{il existe } M_A \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = P\begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

Remarque : La matrice M_A est clairement unique.

On constate alors que

$$P\begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} {M_A}^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} = E$$

et

$$P\begin{pmatrix} {M_A}^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} = E,$$

donc par unicité du symétrique de A dans $\mathscr{G}$, on en déduti que

$$\boxed{A' = P\begin{pmatrix} {M_A}^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

c) *Démontrer que* $\mathscr{G} = \left\{ P\begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{G}_r \right\}$ *où* $\mathscr{G}_r$ *est sous-groupe de* $\mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$. *En déduire une description de tous les groupes matriciels multiplicatifs.*

Avec les notations de la question précédente, considérons l'application

$$\varphi \begin{cases} \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{GL}_r(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M_A \end{cases}$$

La question précédente nous dit que cette application est bien définie.
Pour $A, B \in \mathscr{G}$, on a

$$\begin{aligned} AB &= P\begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} M_B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} M_A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} M_A M_B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $M_{AB} = M_A M_B$, c'est-à-dire $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Ainsi, φ est un morphisme de groupe.
Soit $A \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a $\varphi(A) = I_r$, c'est-à-dire $M_A = I_r$. Mézalors, on a

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} = E,$$

ce qui démontre que $\operatorname{Ker}\varphi = \{E\}$. Par conséquent, φ est injectif.
On en déduit que $\varphi(\mathscr{G})$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$ et que φ réalise un isomorphisme entre $\mathscr{G}$ et $\varphi(\mathscr{G})$.
En posant $\mathscr{G}_r = \varphi(\mathscr{G})$, on en conclut que

$$\boxed{\text{il existe un sous-groupe } \mathscr{G}_r \text{ de } \mathscr{GL}_r(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathscr{G} = \left\{ P\begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{G}_r \right\}.}$$

Réciproquement, si r est un entier de $[\![1; n]\!]$ et si $\mathscr{G}_r$ désigne un sous-groupe de $\mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$, l'ensemble

$$\mathscr{G} = \left\{ P\begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{G}_r \right\}$$

est clairement un groupe matriciel multiplicatif. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{les groupes matriciels multiplicatifs de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sont les ensembles} \\ \mathscr{G} = \left\{ P\begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{G}_r \right\} \text{ où } r \text{ décrit } [\![1; n]\!], \\ \mathscr{G}_r \text{ décrit les sous-groupes de } \mathscr{GL}_r(\mathbb{R}) \text{ et } P \text{ décrit } \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}). \end{array}}$$

C. *Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Établir l'équivalence entre les cinq propriétés suivantes : (i) A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$; (ii) $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A)$; (iii) $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Im}(A)$; (iv) $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$ et (v) $\operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun groupe matriciel multiplicatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

(i)⇒(ii) Supposons que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$. Alors A^2 appartient aussi à $\mathscr{G}$. Comme toutes les matrices de $\mathscr{G}$ ont le même rang (d'après la question B. 2.), on en déduit que $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A)$.

(ii)⇒(iii) Supposons que $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A)$, c'est-à-dire $\dim \operatorname{Im}(A^2) = \dim \operatorname{Im}(A)$. Comme il est toujours vrai que $\operatorname{Im}(A^2) \subset \operatorname{Im}(A)$ et comme ces deux sous-espaces ont la même dimension, on en déduit que $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Im}(A)$.

(iii)⇒(iv) Supposons que $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Im}(A)$. Le théorème du rang dit alors que $\dim \operatorname{Ker}(A^2) = \dim \operatorname{Ker}(A)$. Comme il est toujours vrai que $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^2)$ et comme ces deux sous-espaces ont la même dimension, on en déduit que $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$.

(iv)⇒(v) Supposons que $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$.

Soit $Y \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Im}(A)$. On a $AY = 0_{n,1}$ et il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$. On a alors $A^2X = 0_{n,1}$, ce qui signifie que $X \in \operatorname{Ker}(A^2)$. Comme $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$, cela donne $X \in \operatorname{Ker}(A)$, c'est-à-dire $AX = 0_{n,1}$ ou encore $Y = 0_{n,1}$. Donc $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Im}(A) = \{0_{n,1}\}$, ce qui signifie que $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$ sont en somme directe.

Comme $\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \operatorname{Im}(A) = n = \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'après le théorème du rang, on en déduit que $\operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(v)⇒(i) Supposons que $\operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Introduisons a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et notons r son rang. L'hypothèse nous dit que $\operatorname{Im}(a) \oplus \operatorname{Ker}(a) = \mathbb{R}^n$. En prenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire la juxtaposition d'une base de $\operatorname{Im}(a)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(a)$), on obtient

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $M \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$. Comme a est de rang r, M l'est aussi et comme c'est une matrice $r \times r$, on a $M \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R})$. Ainsi, A et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(a)$ sont deux matrices d'un même endomorphisme relatives à des bases différentes. Cela démontre que A et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(a)$ sont semblables, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

D'après le résultat de la question B. 3. c), cela signifie que A appartient au groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$ défini par

$$\mathscr{G} = \left\{ P \begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} : M \in \mathscr{GL}_r(\mathbb{R}) \right\}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) et (v) sont équivalentes.}}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A^2 = 0_2,$$

ce qui démontre que

$$\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^2).$$

Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'appartient à aucun groupe matriciel multiplicatif de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

2. a) *Démontrer que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$ si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A telle que $A^2B = A$ et $B^2A = B$.*

$\Rightarrow$ Supposons que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$. Posons $B = A'$. Alors B commute avec A et

$$A^2B = AAA' = AE = A \qquad \text{et} \qquad B^2A = A'A'A = A'E = A' = B.$$

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A telle que $A^2B = A$ et $B^2A = B$. Comme $A^2B = A$, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2B) \leqslant \mathrm{rg}(A^2)$ d'après le résultat de la question B. 2. Comme l'inégalité $\mathrm{rg}(A^2) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ est toujours vraie (parce que $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$ ou parce qu'on peut à nouveau utiliser le résultat de la question B. 2.), on en déduit que $\mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A)$. On a vu, à la question précédente, que cela revient à dire que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{une matrice } A \text{ appartient à un groupe matriciel multiplicatif } \mathscr{G} \text{ si, et seulement si, il existe une matrice } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ qui commute avec } A \text{ telle que } A^2B = A \text{ et } B^2A = B.}$$

► *Dans les trois questions qui suivent, on suppose que A appartient à un groupe matriciel multiplicatif $\mathscr{G}$. On considère alors la matrice B introduite par la question précédente.*

b) *Établir que $B = A'$ où A' désigne le symétrique de A dans $\mathscr{G}$.*

Comme A est dans $\mathscr{G}$, on dispose de la symétrique A' de A dans $\mathscr{G}$. On multiplie alors l'égalité $A^2B = A$ par A'^2 à gauche, ce qui donne

$$EB = A'.$$

Et là, il ne faut pas aller trop vite ! En effet, on ne peut pas affirmer que $EB = B$ car on ne sait pas que $B \in \mathscr{G}$! Il va falloir le démontrer . . .

Comme $BA^2 = B$, on a $AB^2 = B$ puisque A et B commutent. En multipliant par E à gauche, il vient $EAB^2 = EB$, c'est-à-dire $AB^2 = EB$ puisque $EA = A$. Comme $AB^2 = B$, on en déduit que

$$EB = B.$$

Cette fois, on peut conclure que

$$\boxed{B = A'.}$$

c) *Expliquer pourquoi A' ne dépend pas du groupe multiplicatif $\mathscr{G}$ auquel A appartient.*

On vient de voir que A' est caractérisée par les égalités $AA' = A'A$, $A^2A' = A$ *et* $A'^2A = A'$. Ces égalités ne dépendant pas de $\mathscr{G}$, on en déduit que

$$\boxed{A' \text{ ne dépend pas du groupe multiplicatif } \mathscr{G} \text{ auquel } A \text{ appartient.}}$$