Renseignements généraux

— *Concours* : Polytechnique
— *Matière* : Mathématiques 2
— *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit $A = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X^2 = I_n\}$ A quelle condition sur X et Y dans A dispose-t-on d'un chemin γ de $[0,1]$ dans A tel que $\gamma(0) = X$ et $\gamma(1) = Y$? Quels sont les points isolés de A ?

Exercice 2 :

Soit f un fonction C^1 telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge en $+\infty$. On suppose que $\int_x^{x+1} f'^2$ est bornée pour tout réel x positif. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 3 :

Soit f de classe C^∞ au voisinage de 0. On suppose que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(r-1)}(0) = 0$ et que $f^{(r)}$ est non nulle au voisinage de 0. Montrer que f admet une réciproque g sur un intervalle de la forme $[0,a]$ et que g s'écrit $g(y) = \Gamma(y^{\frac{1}{r}})$ avec Γ une fonction C^∞ sur l'intervalle $[0,a]$.

Exercice 4 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme caractéristique est à coefficients réels. A-t-on toujours une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ semblable à A ?

Remarques sur l'oral

Examinateur très bienveillant, une vraie crème, qui ne demandait pas trop de justifications, qui m'a gentillement épargné sur certains calculs ("je vous fais confiance") et qui a même compatis avec moi pour sur le dernier exercice.

Le premier exercice était plutôt agréable. En considérant la trace, on obtient les différentes composantes connexes par arc de A. Il y a besoin de la connexité par arc de $GL_n(R)^+$, l'examinateur se satisfait d'un argument oral.

Pour l'exercice 2, ç a nous arrangerait que f soit uniformément continue. Avec la condition sur la dérivée, on obtient que f est presque $\frac{1}{2}$-hölderienne (presque car l'inégalité ne tient que pour $|x - y| \leq 1$).

Pour l'exercice 3, on n'a que montré que Γ est C^1, l'examinateur me disant "le cas général est une récurrence ennuyeuse, je vous fais confiance, vous savez la faire". Pour le cas C^1, c'est un équivalent en 0 utilisant Taylor-Lagrange et Stirling.

Pour l'exercice 4, je traite le cas $n = 2$ et déduis le cas où A est cyclique. Je veux étendre au cas où A n'a pas forcément des valeurs propres distinctes mais B n'est pas forcément fonction continue de A. L'examinateur me dit alors qu'en fait on n'a pas toujours B. Le premier contre-exemple possible est dans $M_4(\mathbb{C})$. Un contre-exemple possible est

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Apparemment pour montrer qu'il n'y pas de matrice réelle semblable, il faut passer par les vecgteurs propres. "Bon malheuresement on doit s'arrêter là, le temps est écoulé mais je suis d'accord que c'est un exercice un peu exagéré. Je vous fais confiance pour les calculs avec les vecteurs propres."

Manifestement, ils aiment recycler les exercices...