Cours de Mathématiques Supérieures
Lycée Henri IV

3^e édition

Serge Francinou

1994-2007

Partie A
Structures fondamentales

Chapitre 1

Eléments de théorie des ensembles

Les Mathématiques reposent surl'étude d'objets correspondant à une superposition de concepts. Le mathématicien formule des assertions sur ces objets. Il s'agit de rechercher les assertions vraies et intéressantes.

Toute théorie mathématique repose au départ sur des notions intuitives : c'est notamment le cas pour la notion d'*ensemble* et la relation d'appartenance ($\in$). Outre ces objets intuitifs, on renonce à toute vérité absolue i.e. on admet avant toute chose un certain nombre d'assertion *a priori* : ce sont les axiomes. La donnée de ces axiomes constituent une théorie (on en verra quelques uns dans le chapitre II.). A l'aide de ces axiomes, et plus généralement de toute assertions vraies, et d'un raisonnement logique (dont les règles seront vues dans le chapitre I.), on peut tenter de démontrer qu'une assertion est vraie (ou fausse). Ces résultats sont appelés le plus souvent :

- théorème ;
- proposition (résultat plus faible qu'un théorème) ;
- corollaire (conséquence assez immédiate d'une proposition ou d'un théorème) ;
- lemme (résultat intermédiaire dans la démonstration d'un théorème ou d'une proposition).

Il existe des assertions dont on ne peut démontrer si elles sont vraies ou fausses : elles sont dites indécidables. Si une proposition est à la fois vraie et fausse dans une théorie donnée, cette théorie est dite contradictoire. Ces théories présentent peu d'intérêt.

I. Eléments de logique

On supposera dans toute la suite que l'on travaille dans une théorie non contradictoire.

1) Définitions, généralités :

Règle 1 *A toute assertion A, on associe une assertion appelée non A : non A est vraie si A est fausse ; non A est fausse si A est vraie.*

Règle 2 *A deux assertions A et B, on associe une assertion (A ou B) qui est vraie si l'une des assertions A et B est vraie et fausse sinon.*

Exemple : (A ou non A) est toujours vraie : c'est une tautologie.

Règle 3 *A deux assertions A et B, on associe une assertion (A et B) qui est vraie si les deux assertions A et B sont vraies et fausse sinon.*

Règle 4 *Soient A et B deux assertions. On note ($A \Longrightarrow B$) pour (non A ou B) et on l'appelle A* implique B.

Remarque : A la place de A implique B (est vraie) on peut dire aussi

- si A, alors B ;
- A est une condition suffisante pour B ;
- pour B, il suffit A ;
- B est une condition nécessaire pour A ;
- pour A, il faut B.

$*$ Exemple : Soient a et b deux entiers. Alors

$$(\ a = b \Longrightarrow a^2 = b^2 \ ) \text{ est vraie.}$$

ATTENTION ! Ce n'est pas parce que $A \Longrightarrow B$ est vrai que B est vrai .

Règle 5 *Soient A et B deux assertions. On note $A \Longleftrightarrow B$ (appelée A* équivalente à B) l'assertion :

$$(A \Longrightarrow B) \ \text{ et } \ (B \Longrightarrow A)$$

Si $A \Longleftrightarrow B$ est vraie on dit que les propositions A et B sont équivalentes.

Remarque : Pour A et B équivalentes, on dit aussi :

- A si, et seulement si, B ;
- A est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour B ;
- pour A, il faut et il suffit B.

Remarque : • Si A et B sont équivalentes, alors A et B sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses (et réciproquement).

- non (A et B) équivaut à (non A ou non B).
  non (A ou B) équivaut à (non A et non B).
- non ($A \Longrightarrow B$) équivaut à (A et non B).

2) Quelques principes de démonstration :

Soient A et B deux assertions.

i Preuve de A ou B :

Pour prouver que A ou B est vrai, on pourra supposer que A fausse et prouver B.

$*$ Exemple : Admettons que tout entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrivent de manière unique $2k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r = 0$ ou 1. Soient a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que ab est pair. Alors a est pair ou b est pair.

Remarque : Ainsi pour prouver $A \Longrightarrow B$, on suppose A et on montre B.

ii Principe du syllogysme :

Règle 6 *Si A et $A \Longrightarrow B$ sont vraies, alors B est vraie.*

$*$ Exemple : Soient a et b des entiers. On a :

$$a^2 = b^2 \Longrightarrow a = \pm b$$

Si $a^2 = b^2$ est vraie, alors $a = \pm b$.

iii La contraposée :

Lorsqu'on veut prouver $A \Longrightarrow B$, on peut supposer non B et établir non A. Ainsi, on prouve la *contraposée* : non $B \Longrightarrow$ non A. On résume ainsi :

Règle 7 *Les assertions $A \Longrightarrow B$ et non $B \Longrightarrow$ non A sont équivalentes.*

iv Raisonnement par l'absurde :

Le principe du raisonnement par l'absurde est basée sur la règle suivante : on désire prouver Q. On rajoutte non Q au système d'axiomes (i.e. on suppose Q faux) et on démonstre que l'on aboutit à une théorie contradictoire.
$*$ Exemple : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. .

v Equivalences :

Pour prouver $A \Longleftrightarrow B$, on peut prouver $A \Longrightarrow B$ puis $B \Longrightarrow A$: c'est un raisonnement par *double implication.*

Si $A \Longleftrightarrow C$ et $C \Longleftrightarrow B$, alors $A \Longleftrightarrow B$. Donc pour prouver $A \Longleftrightarrow B$, on peut l'établir par plusieurs équivalences successives : c'est un raisonnement par *équivalence.*
Exemple : 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -i$. Montrer l'équivalence : $\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. f est constante si et seulement si f est dérivable et $f' = 0$.

Nous verrons plus loin un autre mode de preuve basée sur les propriétés de $\mathbb{N}$: la démonstration par récurrence.

3) Quantificateurs :

On notera $A(x)$ une assertion dépendant de l'objet x. Soit E un ensemble.

Règle 8 *L'assertion $(\forall x, A(x))$ est vraie si et seulement pour tout objet x, l'assertion $A(x)$ est vraie.*

L'assertion $(\forall x \in E, A(x))$ est vraie si et seulement si pour tout objet x appartenant à E, $A(x)$ est vraie.

$\forall$ *est appelé* quantificateur universel.

Règle 9 *L'assertion $(\exists x, A(x))$ est vrai si, et seulement si, il existe un objet x tel que l'assertion $A(x)$ est vraie.*

L'assertion $(\exists x \in E, A(x))$ est vraie si, et seulement si, il existe un objet x appartenant à E tel que $A(x)$ est vraie.

$\exists$ *est appelé* quantificateur existentiel.

$*$ Exemple : Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (|x| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon)$$

Règle 10 *non $(\forall x, A(x))$ est équivalente à $(\exists x, \text{non } A(x))$.*
non $(\exists x, A(x))$ est équivalente à $(\forall x, \text{non } A(x))$.
non $(\forall x \in E, A(x))$ est équivalente à $(\exists x \in E, \text{non } A(x))$.
non $(\exists x \in E, A(x))$ est équivalente à $(\forall x \in E, \text{non } A(x))$.

$*$ Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en 0 dès que

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists x \in \mathbb{R})\ (|x| < \eta \text{ et } |f(x) - f(0)| > \varepsilon)$$

Voilà qui achève les règles de logique qui régissent tous les raisonnements qui vont suivre.

II. Premiers axiomes de la théorie des ensembles

1) Inclusion :

Définition 1 *Soient E et F deux ensembles.*

On dit que F est inclus *dans E, si pour tout $x \in F$, $x \in E$. On dit aussi que F est une* partie *de E et on note $F \subset E$.*

Proposition 1 *Soient E, F, G trois ensembles.*

Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Définition 2 *Soient E et F deux ensembles.*

On dit que E et F sont égaux *si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.*

2) Quelques opérations de construction d'ensembles :

On considèrera comme notion intuitive le fait d'être en nombre fini. On supposera également connue la notion d'entiers naturels. Les axiomes présentés dans ce paragraphe font partie de la théorie de Zermelo-Fraenkel.

• Ensembles formés par des éléments donnés :

Axiome 1 *Soient a_1,a_2,...,a_n des objets en nombre fini. Il existe un unique ensemble E dont les éléments sont exactement les a_1, a_2 ,..., a_n. On note*

$$E = \{a_1, a_2, \dots , a_n\}$$

Exemple : Si a et b sont des objets mathématiques, $\{a\}$ est un *singleton* et si $a \neq b$, $\{a, b\}$ est une *paire.*

• Partie d'un ensemble définie par une relation :

Axiome 2 *Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion dépendant d'un objet x de E. Alors, il existe un unique ensemble F inclus dans E tel que*

$$(\forall x \in E)\ (x \in F \Longleftrightarrow A(x))$$

Cet ensemble est noté

$$F = \{x \in E,\ A(x)\}$$

$*$ Exemple : Soit $E = \mathbb{N}$ et $A(x) = (2 \text{ divise } x)$. Alors F est l'ensemble des nombres pairs.

Remarque : Soit F et G deux parties d'un ensemble E. Pour montrer que $F = G$, on peut montrer l'équivalence

$$x \in F \Longleftrightarrow x \in G.$$

Un autre exemple fondamental : le complémentaire.

Définition 3 *Soit E un ensemble et $F \subset E$. Alors*

$$\complement_E F = \{x \in E,\ x \notin F\}$$

est appelé complémentaire *de F dans E.*

Proposition 2 *Soient E un ensemble et F et G deux parties de E.*
1. *On a $\complement_E \complement_E F = F$.*
2. *Si $F \subset G$, $\complement_E G \subset \complement_E F$.*
3. *Si $\complement_E F = \complement_E G$, $F = G$.*

• **L'ensemble vide :**

Axiome 3 *Il existe un unique ensemble noté $\emptyset$ tel que*

$$(\forall x)\ (x \notin \emptyset)$$

$\emptyset$ *est appelé* ensemble vide.

En particulier, on affirme l'existence d'un ensemble.

• **Ensemble des parties d'un ensemble :**

Axiome 4 *Soit E un ensemble. Il existe un unique ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ tel que*

$$(\forall F)\ (F \in \mathcal{P}(E)) \Longleftrightarrow (F \subset E)$$

$\mathcal{P}(E)$ *est appelée* ensemble des parties de E, *on peut écrire*

$$\mathcal{P}(E) = \{F, F \subset E\}$$

C'est cet axiome et le précédent qui permettent de définir les entiers naturels : $0 = \emptyset$, $1 = \mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$, $2 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ...

• **Intersection et réunion de deux ensembles :**

Axiome 5 *Soient E et F deux ensembles.*
Il existe un unique ensemble noté $E \cup F$ tel que

$$(\forall x)\ (x \in E \cup F) \Longleftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F)$$

$E \cup F = \{x,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$ *est appelée* union *de E et F.*

Définition 4 *Soient E et F deux ensembles.*
On appelle intersection *de E et F l'ensemble*

$$E \cap F = \{x \in E,\ x \in F\} = \{x,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$$

<u>Remarque :</u> Soient E, F et G trois ensembles. On a

$$E \cup F = F \cup E,\ E \cap F = F \cap E,\ E \cup \emptyset = E,\ E \cap \emptyset = \emptyset$$

$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G,\ E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \text{ et } E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

Proposition 3 (Lois de Morgan) *Soient F et G deux parties d'un ensemble E. On a*
1. $\complement_E (F \cup G) = \complement_E F \cap \complement_E G$
2. $\complement_E (F \cap G) = \complement_E F \cup \complement_E G$

Définition 5 *Soient E et F deux ensembles.*
On appelle différence *de E et F l'ensemble*

$$E \backslash F = \{x \in E,\ x \notin F\}$$

3) Limites dans la construction des ensembles :

On peut se demander si les opérations que l'on s'est autorisé pour la construction d'ensembles ne sont pas limitatives. L'expérience prouve jusqu'à aujourd'hui que l'on a choisi le bon cadre. On pourrait par exemple se demander s'il ne serait pas plus judicieux de considérer des ensembles du type

$$\{x,\ \ A(x)\}$$

En fait, si on prend cet axiome, on obtient une théorie contradictoire : Soit $E = \{x, x \notin x\}$. Alors $E \notin E$ et $E \in E$!
Remarque : Une illustration : Imaginons un barbier qui décide de raser tous les hommes ne se rasent pas eux mêmes. Doit-il se raser lui-même ?

III. Applications

1) Généralités :

La théorie des ensembles permet de définir à partir des axiomes précédents la notion d'*application*, mais afin de ne pas surcharger ce cours, nous l'introduirons de manière intuitive par la définition suivante :

Définition 6 *Une* application *(ou* fonction*) f est la donnée de deux ensembles E et F et d'un "procédé" qui associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$ et appelé* image de x par f.

Dans ces conditions, f est appelée application de E dans F. *E est l'*ensemble de définition de f, *et F est l'*ensemble d'arrivée de f.

f est notée $f : E \longrightarrow F$, ou $f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$, ou encore

$$f:\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 7 *Soient $f : E \longrightarrow F$, $y \in F$ et $x \in E$.*

On dit que x est un antécédant de y si $y = f(x)$.

Remarque : Deux fonctions f et g sont donc égales si et seulement si elles ont même ensemble de définition E, même ensemble d'arrivée et si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.
Convention : Etant donné un ensemble F, il existe une unique application de $\emptyset$ dans F appelée *application vide*.

Définition 8 *Soient E et F deux ensembles. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Si $E = F$, on note $\mathcal{F}(E)$ au lieu de $\mathcal{F}(E, E)$.*

En particulier, nous admettons qu'un tel ensemble existe.

Définition 9 *Soit E un ensemble. On appelle* application identique de E, *l'application*

$$I_E:\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Définition 10 *Soient $A \subset E$ et F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : A \longrightarrow F$.*

On dit que g est la restriction de f à A *dès que*

$$(\forall x \in A)\ \ (g(x) = f(x))$$

On note alors $g = f_{|A}$.

On dit que f constitue un prolongement de g *si $f_{|A} = g$.*

2) Composition des applications :

Définition 11 *Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$.*
On appelle application composée de f et g *la fonction*

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 4 *Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$. Alors*
1. *$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$*
2. *$f \circ I_E = f$ et $I_F \circ f = f$.*

Remarque : En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

3) Injection, surjection et bijection :

Définition 12 *Soit $f : E \longrightarrow F$.*
1. *On dit que f est* injective *si*

$$(\forall (x, x') \in E^2)\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$$

2. *On dit que f est* surjective *si*

$$(\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ (y = f(x))$$

3. *On dit que f est* bijective *si f est à la fois injective et surjective.*

Remarque : f est injective si et seulement si

$$(\forall (x, x') \in E^2)\ (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$$

Exemple : • I_E est bijective.
• Soit $F \subset E$. Alors $j : x \in F \longmapsto x \in E$ est appelée l'*injection canonique* de F dans E
• Soit E un ensemble et $f : F \in \mathcal{P}(E) \longrightarrow \complement_E F \in \mathcal{P}(E)$ est une bijection.

∗ Exemple : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une application bijective.
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective mais non injective.
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est injective mais non surjective.

Proposition 5 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*
1. *Si f est g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f est g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f est g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*

4) Application réciproque :

Définition 13 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.*
Alors l'application qui a tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelée application réciproque de f. *Elle est notée f^{-1}.*

Proposition 6 *Soit $f : E \longrightarrow F$.*
1. *Si f est bijective, on a $f^{-1} \circ f = I_E$ et $f \circ f^{-1} = I_F$.*
2. *Si $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.*

Exemple : Soit E un ensemble et $f : F \in \mathcal{P}(E) \longrightarrow \complement_E F \in \mathcal{P}(E)$. Alors $f^{-1} = f$. On dit que f est une *involution*.

Proposition 7 *Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections.*
1. $I_E^{-1} = I_E$.
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. $(f^{-1})^{-1} = f$.

5) Image directe, image réciproque :

Définition 14 *Soient $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.*
*L'*image de A par f *est*

$$f(A) = \{y \in F, (\exists x \in A)(y = f(x))\} = \{f(x) \in F,\ x \in A\}$$

L'image de f est $f(E)$.
*L'*image réciproque de B par f *est*

$$f^{<-1>}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Remarque : Si f est bijective, $f^{<-1>}(B) = f^{-1}(B)$.
Notation : On note parfois $f^{-1}(B)$ pour $f^{<-1>}(B)$.

Proposition 8 *Soit $f : E \longrightarrow F$.*
1. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f injective
(ii) Pour tout $y \in F$, $f^{<-1>}(\{y\})$ est soit vide , soit réduit à un seul élément.
2. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f surjective
(ii) $f(E) = F$

6) Résoudre une équation :

On se donne deux applications f et g et on se demande s'il existe des objets x dans l'ensemble de départ de f et de g vérifiant $f(x) = g(x)$. Cela s'appelle résoudre l'équation

$$(E) \quad f(x) = g(x).$$

Tout d'abord, il convient de préciser le domaine de validité de (E).
On peut ensuite raisonner
• par équivalence.
ou
• par analyse synthèse (ou double implication) : on prend x solution. On regarde ce que cela donne pour x (c'est l'analyse). Ensuite, on vérifie que les x trouvé conviennent : c'est la synthèse.

Ensuite, on peut essayer d'isoler x dans un unique membre pour se ramener à une équation du type $F(x) = a$. L'équation revient alors à trouver l'image réciproque du singleton $\{a\}$
$*$ Exemple : Trouver les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$.

IV. Familles et produit cartésien

1) Généralités :

Définition 15 *Soit I un ensemble.*

On appelle famille indixée sur I *toute application* x *définie sur* I. *Si* $i \in I$, *on notera l'image de* i x_i *au lieu de* $x(i)$ *et* $(x_i)_{i\in I}$ *au lieu de* x. I *constitue alors l'ensemble des indices.* x_i *est l'élément d'indice* i.

Si $J \subset I$, $(x_i)_{i\in J}$ *(i.e. la restriction de* x *à* J*) est une* sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$.

Remarque : Considérons deux familles $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$. Alors $x = y$ si, et seulement si $\forall i \in I, x_i = y_i$.

Exemple : • Supposons que $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Les familles indicées par I sont appelées des $n-uplets$. On les note $(x_i)_{i\in I} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

• Si $I = \mathbb{N}$ ou plus généralement une partie de $\mathbb{N}$, les familles sont appelées des *suites*.

• Soit E un ensemble. Considérons $x : a \in E \longmapsto a \in E$. Alors la famille x est notée $x = (a)_{a\in E}$ et est la *famille canoniquement associé à* E.

2) Intersection et réunion d'une famille de parties :

Définition 16 *Soit* E *un ensemble,* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E *(i.e. les* E_i *sont des parties de* E*). La* réunion *des* E_i *est constituée des éléments de* $x \in E$ *tel qu'il existe* $i \in I$ *tel que* $x \in E_i$ *et l'*intersection *des* E_i *est constituée des éléments* x *tel que pour tout* $i \in I$, $x \in E_i$.

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x,\ (\exists i \in I)(x \in E_i)\}\ \text{et}\ \bigcap_{i\in I} E_i = \{x,\ (\forall i \in I)(x \in E_i)\}$$

Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note la réunion des E_i $\bigcup_{i=1}^n E_i$ et l'intersection $\bigcap_{i=1}^n E_i$.

Exemple : Soit $A \subset \mathcal{P}(E)$. Alors $(F)_{F\in A}$ est une famille d'ensembles. $\bigcup_{F\in A} F$ est l'ensemble des $x \in E$ tel qu'il existe $F \in A$ avec $x \in F$. $\bigcap_{F\in A} F$ est l'ensemble des $x \in E$ tel que pour tout $F \in A$ on a $x \in F$.

Proposition 9 *Soit* E *un ensemble,* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E, $A \subset E$. *On suppose* I *non vide.*

1. $A \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$
2. $A \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$
3. $A\backslash \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A\backslash A_i)$
4. $A\backslash \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A\backslash A_i)$

Exemple : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Corollaire 1 *Soit* E *un ensemble,* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E.

1. $\complement_E \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i$
2. $\complement_E \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$

Définition 17 *Soit* E *un ensemble,* $F \subset E$, $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E. *On dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un* recouvrement de F *si*

$$F \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

Exemple : $(\{0, 1, \ldots, n\})_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un recouvrement de $\mathbb{N}$

Définition 18 *Soit* E *un ensemble,* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ *est une* partition de E *si* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* E *et si pour tout* $i \in I$, $j \in I$, $i \neq j$, *on a* $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple : Soit $A \subset E$. Alors $(A, \complement_E A)$ est une partition de E.

Proposition 10 (Formules d'associativité) *Soient* $(J_k)_{k\in K}$ *un recouvrement de l'ensemble* I, $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E. *Alors*

1. *Alors* $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K} \bigcup_{i\in J_k} A_i$
2. *Alors* $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K} \bigcap_{i\in J_k} A_i$

3) Produit cartésien :

Définition 19 *Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles de réunion* E.

On appelle produit cartésien des E_i *l'ensemble des familles* $(x_i)_{i\in I}$ *indexées sur* I *à éléments dans* E *tel que*

$$(\forall i \in I)(x_i \in E_i)$$

Il se note $\prod_{i\in I} E_i$.

Notation : Si les E_i sont tous égaux à E, on note leur produit cartésien E^I. Dans ce cas là, $E^I = \mathcal{F}(I, E)$.

Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $\prod_{i\in I} E_i$ se note aussi $\prod_{i=1}^n E_i$, ou encore $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Si les E_i sont tous égaux à E, il se note E^n.

Remarque : *a priori* rien ne nous assure que si les E_i sont tous non vides alors $\prod_{i\in I} E_i \neq \emptyset$. Généralement, ce fait là est admis et il porte le nom d'*axiome du choix*.

Exemple : $\mathbb{R}^3$

Remarque : Représentation garphique d'un produit $E \times F$

Remarque : $(\{x\} \times F)_{x\in E}$ est une partition de $E \times F$. $(E \times \{y\})_{y\in F}$ est une partition de $E \times F$.

4) Graphe d'une fonction :

Définition 20 *Soit* $f : E \longrightarrow F$.

On appelle graphe de f *la partie de* $E \times F$ *définie par* $\{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$.

Exercice : Si f est bijective, comment obtient-on le graphe de f^{-1} à partir de celui de f ?

Définition 21 *Soit* $A \subset E \times F$.

On dit que A *est un* graphe fonctionnel *s'il existe une fonction* $f : E \longrightarrow F$ *tel que* A *soit le graphe de* f.

Proposition 11 *Soit* $A \subset E \times F$. A *est un graphe fonctionnel si, et seulement si, pour tout* $x \in E$, *il existe un unique* $y \in F$ *tel que* $(x, y) \in A$.

Remarque : En fait, dans les exposés de théorie des ensembles, on introduit la notion de fonction par l'intermédiaire du graphe fonctionnel.

V. Relation d'équivalence

1) Relation binaire :

Définition 22 *Soit* E *un ensemble. On appelle* relation binaire sur E *toute partie* $\mathcal{R}$ *de* $E \times E$. *On dit que* $x \in E$ *est* en relation avec $y \in E$ *si* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *et on note* $x\mathcal{R}y$.

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la relation binaire suivante :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xy \geqslant 0$$

C'est la relation *avoir le même signe*.

Remarque : Si $F \subset E$, $\mathcal{R}$ induit canoniquement une relation binaire $\mathcal{R}'$ sur F donnée par $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap (F \times F)$.

2) Relation d'équivalence, premiers exemples :

Définition 23 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit $\mathcal{R}$ est une* relation d'équivalence *si*
- $\mathcal{R}$ *est* réflexive *i.e. si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$;*
- $\mathcal{R}$ *est* symétrique *i.e. si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ entraîne $y\mathcal{R}x$;*
- $\mathcal{R}$ *est* transitive *i.e. si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ entraîne $x\mathcal{R}z$.*

Au lieu de $x\mathcal{R}y$, on note souvent $x \equiv y \mod \mathcal{R}$, ou encore $x \equiv y\ [\mathcal{R}]$, et même parfois $x \equiv y$ lorsqu'il n'y a pas ambiguité.

Exemple :
- Soit $n > 0$. La relation sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow n \text{ divise } x - y$$

est une relation d'équivalence et est appelée *congruence modulo n.*
- On définit dans $\mathbb{R}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi.$$

C'est la *congruence modulo* 2π. De manière générale, on définit sur $\mathbb{R}$ la congruence modulo α.
- La relation *avoir le même signe* vue précédemment n'est pas transitive ($-1 \equiv 0 \equiv 1$...).

3) Classes d'équivalences :

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Définition 24 *Soit $x \in E$. On appelle* classe d'équivalence de *x l'ensemble*

$$\{y \in E,\ x \equiv y\}$$

Elle est notée $\dot{x}$ ou $\bar{x}$. Tout $y \in \dot{x}$ est appelé représentant de la classe *$\dot{x}$.*

On note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence :

$$E/\mathcal{R} = \{\dot{x},\ x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)$$

*C'est l'*ensemble quotient de *E* par *$\mathcal{R}$.*

Définition 25 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ quotienté par la congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Notation : De même, on note $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par la congruence modulo α. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ correspond aux angles.

Exemple : • L'ensemble des vecteurs du plan est l'ensemble quotient des bipoints par la relation être équipollent.
- $P^1(\mathbb{C})$.

Remarque : • En algèbre, le passage au quotient est un outil puissant de création d'ensembles intéressant.
- On a $x \equiv y \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{y}$.
- On a $x \in \dot{x}$.

Théorème 1 *$E/\mathcal{R}$ forme une partition de E.*

Définition 26 *L'application $s : x \in E \longmapsto \dot{x} \in E/\mathcal{R}$ est une surjection appelée* surjection canonique.

Exercice : bijection canonique

VI. Relations d'ordre

1) Définitions et premiers exemples :

Définition 27 *Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est une* relation d'ordre *si*

1. $\mathcal{R}$ est réflexive ;

2. $\mathcal{R}$ est transitive ;

3. $\mathcal{R}$ est antisymétrique *i.e. pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ entraîne $x = y$.*

E est dit ordonné.

Notation : Nous noterons les relations d'ordre $\geqslant$ (plus grand que) ou $\leqslant$ (plus petit que).

Si $x \leqslant y$ et $x \neq y$, on notera $x < y$ et on dira x est strictement plus petit que y.

Si $x \geqslant y$ et $x \neq y$, on notera $x > y$ et on dira x est strictement plus grand que y.

Exemple : • Les ordres sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre.

• On considère sur $\mathcal{P}(E)$ la relation suivante $F\mathcal{R}G$ si et seulement si $F \subset G$. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

• Soient E_1 et E_2 deux ensembles ordonnés. On peut alors définir des ordres sur $E_1 \times E_2$: l'ordre produit et l'ordre lexicographique.

Définition 28 *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que l'ordre est* total *si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ et dans ces conditions, on dit que E est* totalement ordonné.

Si l'ordre n'est pas total, on dit qu'il est partiel *et que E est* partiellement ordonné.

Exemple : • $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est totalement ordonné.

• $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est en général partiellement ordonné.

• La divisibilité sur $\mathbb{N}$ est un ordre partiel.

• En général, si E_1 et E_2 sont deux ensembles totalement ordonnés, l'ordre lexicographique sur $E_1 \times E_2$ est total, alors que l'ordre produit total ne l'est pas.

Proposition 12 *Soient E un ensemble et F un ensemble ordonné. Alors, la relation définie sur $\mathcal{F}(E, F)$ par*

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in E)(f(x) \leqslant g(x))$$

où $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F)^2$ est une relation d'ordre. En général, cet ordre est partiel.

2) Applications monotones :

Définition 29 *Soient E et F deux ensembles ordonnés et $f : E \longmapsto F$.*

1. On dit que f est croissante *si*

$$(\forall (x, y) \in E^2)\ (x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$$

2. On dit que f est décroissante *si*

$$(\forall (x, y) \in E^2)\ (x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y))$$

3. On dit que f est strictement croissante *(resp.* strictement décroissante*) si f est croissante (resp. décroissante) et injective.*

4. On dit que f est monotone *si f est croissante ou décroissante.*

Exemple : • Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante dès que

$$n \geqslant m \Longrightarrow u_n \geqslant u_m$$

• La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(E), \subset) & \longrightarrow & (\mathcal{P}(E), \subset) \\ F & \longmapsto & \complement_E F \end{array}$$

est décroissante.

Proposition 13 *Soient E, F et G trois ensembles ordonnés, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$.*

1. I_E est strictement croissante.

2. Si f et g sont monotones de même sens, alors $g \circ f$ est croissante.

3. Si f et g sont monotones de sens contraire, alors $g \circ f$ est décroissante.

4. Si f est bijective monotone et si l'ordre de E est total, f^{-1} est monotone de même sens que f.

3) Eléments remarquables dans un ensemble ordonné :

a-Plus grand élément, plus petit élément :

Définition 30 *Soient E un ensemble ordonné, $a \in E$.*

On dit que a est le plus grand élément de E *si pour tout $x \in E$, $x \leqslant a$. On note $a = \max E$. On dit que a est* le plus petit élément de E *si pour tout $x \in E$, $x \geqslant a$. On note $a = \min E$*

Remarque : L'existence d'un plus grand élément n'est pas assuré : $E = \mathbb{N}$, $E = [0, 1[$.

De par l'antisymétrie de l'ordre, si E admet un plus grand élément, il est unique.

Exemple : Si $E = \{1, 2, \dots, n\}$, n est le plus grand élément de E. Le plus grand élément de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est E.

b-Majorant, minorant :

Définition 31 *Soient E un ensemble ordonné, $F \subset E$ et $a \in E$.*

a est un majorant *(resp.* minorant*) de F si pour tout $x \in F$, $x \leqslant a$ (resp. $x \geqslant a$).*

Remarque : En général, les majorants ne sont pas uniques. Leur existence n'est pas assurée.

c-borne supérieure, borne inférieure :

Définition 32 *Soient E un ensemble, $F \subset E$. On note A l'ensemble des majorants de F et B l'ensemble des minorants de F.*

Si A possède un plus petit élément α, α est appelé la borne supérieure de F *et est noté* $\sup F$.

Si B possède un plus grand élément β, β est appelé la borne inférieure de F *et est noté* $\inf F$.

Remarque : L'existence des bornes supérieures ou inférieures n'est pas assurée de manière générale. Si la borne existe, elle est unique.

Si F possède un plus grand élément a, alors $a = \sup F$.

Exemple : Si $E = \mathbb{R}$, et $F = [0, 1[$, $\sup F = 1$ (on remarque, en particulier que $\sup F \notin F$).

Exemple : Si $E = \mathbb{R}$, $F = \{x \in E, x^2 \leqslant 2\}$ admet une borne supérieure : c'est $\sqrt{2}$. Par contre, si $E = \mathbb{Q}$, F n'admet pas de borne supérieure.

Proposition 14 *Soient E totalement ordonné, $F \subset E$, $a \in E$. Alors a est la borne supérieure de F si et seulement si*

(i) Pour tout $x \in F$, $x \leqslant a$;

(ii) Pour tout $c < a$, il existe $x \in F$ tel que $c < x$.

d-Elément maximal, élément minimal :

Définition 33 *Soient E un ensemble ordonné, $a \in E$.*
a est un élément maximal *(resp.* minimal*) de E si*

$$(\forall x \in E)\ (x \geqslant a \Longrightarrow x = a)$$

(resp. $(\forall x \in E)\ (x \leqslant a \Longrightarrow x = a)$).

Exemple : Si E admet un plus grand élément a, a est maximal.

Supposons $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ muni de l'ordre de la divisibilité. Alors les éléments minimaux sont les nombres premiers.

e-Bornes dans le cas des familles :

On peut parler de plus grand élément, borne supérieure, de majorant... d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un ensemble ordonné E. Il s'agira en fait respectivement du plus grand élélment, de la borne supérieure, du majorant... de la partie $\{x_i \in E, i \in I\}$

Notation : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'un ensemble ordonné. On note $\sup_{i\in I} x_i$ pour $\sup\{x_i, i \in I\}$. Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note même $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ ou encore $\sup(x_1, x_2, ..., x_n)$. La même remarque est valable pour max, inf et min.

Si $F \subset E$, on note également $\sup_{x\in F} x$ pour $\sup F$.

4) Propriétés des bornes :

Les bornes sont évoquées dans ce paragraphe sous réserve d'existence.

Proposition 15 *Soient E un ensemble ordonné, $F \subset G$. Alors*

$$\sup F \leqslant \sup G \text{ et } \inf G \leqslant \inf F$$

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de E et $J \subset I$, on a

$$\sup_{i\in J} x_i \leqslant \sup_{i\in I} x_i \text{ et } \inf_{i\in I} x_i \leqslant \sup_{i\in J} x_i$$

Proposition 16 *Soient E un ensemble ordonné, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de E. On suppose que pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$. Alors*

$$\sup_{i\in I} x_i \leqslant \sup_{i\in I} y_i \text{ et } \inf_{i\in I} x_i \leqslant \inf_{i\in I} y_i$$

Proposition 17 (Formules d'associativité) *Soient E un ensemble ordonné, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E, $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement de I. Alors*

$$\sup_{i\in I} x_i = \sup_{k\in K} \sup_{i\in J_k} x_i$$

et

$$\inf_{i\in I} x_i = \inf_{k\in K} \inf_{i\in J_k} x_i$$

Exemple : • On a avec $I = \{1, 2, 3\}$

$$\sup(x_1, x_2, x_3) = \sup(\sup(x_1, x_2), x_3) = \sup(x_1, \sup(x_2, x_3))$$

• Comme $(\{i\} \times J)_{i \in I}$ et $(I \times \{j\})_{j \in J}$ sont des recouvrements de $I \times J$, on a

$$\sup_{(i,j) \in I \times J} x_{(i,j)} = \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} x_{(i,j)} = \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} x_{(i,j)}$$

• Soit $(A_k)_{k \in K}$ une famille de partie de E. Alors

$$\sup \bigcup_{k \in K} A_k = \sup_{a \in \bigcup_{k \in K} A_k} a = \sup_{k \in K} \sup_{a \in A_k} a = \sup_{k \in K} \sup A_k$$

5) Etude d'un exemple :

Soient E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On munit $\mathcal{P}(E)$ de l'ordre $\subset$.

Un majorant des A_i est une partie contenant tous les A_i i.e. contenant $\bigcup_{i \in I} A_i$. $\bigcup_{i \in I} A_i$ est lui-même un majorant des A_i : c'est donc le plus petit des majorants des A_i. Ainsi

Proposition 18

$$\sup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Un minorant des A_i est une partie contenue dans tous les A_i i.e. contenue dans $\bigcap_{i \in I} A_i$. $\bigcap_{i \in I} A_i$ est lui-même un minorant des A_i : c'est donc le plus grand des majorants des A_i. Ainsi

Proposition 19

$$\inf_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$$

6) Fonction majorée, fonction minorée :

Définition 34 *Soient E et F deux ensembles, F ordonné, $f : E \longrightarrow F$.*

On dit que $f(E)$ est majorée *(resp.* minorée*) si $f(E)$ est* majorée *(resp.* minorée*).*

On pose $\sup f = \sup_{x \in E} f(x)$, $\inf f = \inf_{x \in E} f(x)$, $\max f = \max_{x \in E} f(x)$ et $\min f = \min_{x \in E} f(x)$.

VII. Les nombres entiers naturels

1) Introduction :

Il n'est pas question pour nous de faire la construction de $\mathbb{N}$, mais seulement d'en donner une idée et surtout d'en déduire des propriétés fondamentales utilisées partout en Mathématiques.

Axiome 6 (Axiomes de Peano) *Il existe un unique triplet $(0, \mathbb{N}, S)$, où $\mathbb{N}$ est un ensemble, 0 un élément de $\mathbb{N}$ et $S : n \in \mathbb{N} \longmapsto S(n) \in \mathbb{N}$ une application telle que :*

1. S est injective ;

2. l'image de S est $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$;

3. si $A \subset \mathbb{N}$, $0 \in A$ et si

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A \Longrightarrow S(n) \in A)$$

alors, $A = \mathbb{N}$ (axiome de récurrence).

Si $n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ est son "suivant". $\mathbb{N}$ est appelé ensemble des entiers naturels.

$1 = S(0)$ est appelé *un*. En numérotation décimale, on note $2 = S(1)$, $3 = S(2)$, $4 = S(3)$, $5 = S(4)$, $6 = S(5)$, $7 = S(6)$, $8 = S(7)$ et $9 = S(8)$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

On définit des opérations sur $\mathbb{N}$ (ce que nous appelerons *loi de composition interne* dans le prochain chapitre) :
- l'*addition* $+$
- la *multiplication* $\times$

Ces opérations, i.e. des applications de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifient certaines propriétés dont la *commutativité* et l'*associativité*. De plus, la multiplication est *distribitive* par rapport à l'addition.

A partir de $\mathbb{N}$, on construit $\mathbb{Z}$ (construction que nous ne verrons pas en détail) : l'idée est de donner un opposé à n pour $+$ i.e. créer $-n$ tel que $(-n) + n = 0$

2) L'ordre naturel dans $\mathbb{N}$:

On définit l'ordre dans $\mathbb{N}$ par

$$x \leqslant y \iff (\exists d \in \mathbb{N}, y = x + d)$$

C'est ordre est total et compatible avec $+$ et $\times$: si $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$

$$x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$$

$$x \leqslant y \Longrightarrow xz \leqslant yz$$

Théorème 2 *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Corollaire 2 (Principe de descente infinie de Fermat-1638-) *Toute suite décroissante de $\mathbb{N}$ est stationnaire. Il n'existe pas de suite de $\mathbb{N}$ strictement décroissante.*

Toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

Théorème 3 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Corollaire 3 *Toute suite croissante majorée d'entiers naturels est stationnaire.*

Corollaire 4 *Toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*

Toute partie majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

3) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Remarque : • La propriété d'Archimède s'énonce ainsi : Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $b \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nb > a$.

• Le résultat reste vrai si $a \in \mathbb{Z}$, la démonstration reste la même.

Théorème 4 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$) *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que*

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$

q est le quotient *et r le* reste.

Remarque : Si $a \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$.

Corollaire 5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient n éléments qui sont $\overline{0}$, $\overline{1}$,..., $\overline{n-1}$.*

4) Démonstration par récurrence :

Théorème 5 (Principe de la démonstration par récurrence) *Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier $n \in A$.*

On note $A_n = \{k \in A,\ k < n\}$. Si

$$(\forall n \in A)\ ((\forall k \in A_n,\ P(k)\ ) \Longrightarrow P(n)\ )$$

est vraie, alors pour tout $n \in A$, $P(n)$ est vraie.

Remarque : Ainsi, si on veut démontrer par récurrence une propriété $P(n)$, $n \in A$, on prend n arbitraire dans A et en supposant les $P(k)$ vraies pour $k \in A$ et $k < n$, on tente de prouver $P(n)$.

Pour $n = a = \min A$, il n'y a aucun $k < a$ dans A ; démontrer $P(a)$ s'appelle *amorcer la récurrence.*

L'hypothèse $P(k)$ vraies pour $k \in A$ et $k < n$ s'appelle *hypothèse de récurrence (HR).*

Exemple : Un cas est très fréquent : si $A = \mathbb{N}$, $P(0)$ vraie et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (P(n-1) \Longrightarrow P(n))$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : • Soient E un ensemble ordonné et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{N}$. Montrer que cette suite est croissante si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$ $u_n \leqslant u_{n+1}$.

• Montrer que si $n \geqslant 1$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Corollaire 6 (Récurrence descendante) *Soient $A = \{0, 1, 2, \dots, p\}$, et une propriété $P(n)$ dépendant de $n \in A$. Si $P(p)$ est vraie et si*

$$(\forall k \in \{1, 2, \dots n\})\ (P(k) \Longrightarrow P(k-1))$$

$P(k)$ est vraie pour tout $k \in A$.

5) Suites définies par récurrence :

Théorème 6 *Soient E un ensemble, $A \subset \mathbb{N}$. On note $A_n = \{k \in A; k < n\}$. Soient pour $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n : \begin{array}{ccc} E^{A_n} & \longrightarrow & E \\ (x_k)_{k\in A_n} & \longmapsto & x_n \end{array}$$

Alors, il existe une unique suite $(x_n)_{n\in A}$ telle que pour tout $n \in A$

$$x_n = f_n((x_k)_{k\in A_n})$$

admis

Remarque : Il s'agit de construire une suite dont le terme x_n est donné en fonction des x_k avec $k < n$. Souvent les premiers termes sont donnés : cela revient à prendre les premières f_n constantes.

Un cas fréquent se présente : x_0 est donné et on pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : E \longrightarrow E$. Il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n = \varphi_n(x_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.

Exemple : $x_1 = 1$ et $x_n = nx_{n-1}$: $x_n = n!$.

Chapitre 2

Ensembles finis. Monoïdes

L'objet de ce chapitre est en partie de comparer la "grosseur" d'ensembles, les uns par rapport aux autres. Intuitivement, on peut considérer que E et F ont même taille si E et F sont en bijection.

Définition 35 *Deux ensembles E et F sont dits* équipotents *s'il existe une bijection de E sur F.*

De même, intuitivement, il parait naturel de dire que E est plus petit que F s'il existe une injection de E dans F.

Si E est plus petit que F et F plus petit que E, il serait bon que E et F soient équipotents. C'est le cas :

Théorème 7 (Théorème de Cantor-Bernstein) *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$, E et F sont équipotents.* admis

Nous ne contenterons de comparer les ensembles de même taille que les ensembles $\{1, 2, \dots, n\}$.

I. Ensembles finis

Définition 36 *Soit E un ensemble. On dit que E est* fini *si E est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : E \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} = [\![1, n]\!]$. Si E n'est pas fini, on dit que E est* infini.

Exemple : $\{1, 2, \dots, n\}$ est fini.

1) Cardinal d'un ensemble fini :

Théorème 8 *Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. Si E est bijection avec $[\![1, p]\!]$ et $[\![1, q]\!]$, alors $p = q$.*

Définition 37 *Avec les hypothèses du théorème précédent, cet entier p s'appelle le* cardinal de E. *On le note* $\operatorname{Card} E$. *Par convention,* $\operatorname{Card} \emptyset = 0$

Exemple : $\operatorname{Card}\{1, 2, \dots, n\} = n$

Remarque : Si E et F sont équipotents, E fini, alors F est fini et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Si E est fini de cardinal n, on peut écrire $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

2) Partie d'un ensemble fini :

Proposition 20 *Soient E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors, A est fini et* $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$. *De plus, si* $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$, $A = E$.

Théorème 9 *Soient E un ensemble, A et B deux parties finies de E. Alors $A \cup B$ est finie et*

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont disjoints $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Remarque : Extension à une réunion finie

3) Ensembles finis et applications :

Remarque : Si E et F sont en bijection (on dit que E et F sont *équipotents*), E et F sont tous les deux finis, ou tous les deux infinis. S'ils sont finis, ils ont même cardinal.

Proposition 21 *Soit $f : E \longrightarrow F$, E fini. Alors $f(E)$ est fini et* $\operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} E$. *De plus, si* $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$, *$f$ est injective.*

Application : Principe de Dirichlet

Théorème 10 *Soit $f : E \longrightarrow F$. On suppose E et F finis de même cardinal. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est injective.
(ii) f est surjective.
(iii) f est bijective.

Corollaire 7 *Soit E un ensemble fini, $f : E \longrightarrow E$. Alors*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Corollaire 8 $\mathbb{N}$ *est infini.*

Corollaire 9 *Soit E un ensemble.*
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) E infini ;
(ii) Il existe $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ injective.
(iii) Il existe dans E une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 distincts.

4) Produit d'ensembles finis :

Proposition 22 *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et* $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.

Remarque : Cardinal de E^n si E fini.

Proposition 23 *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et* $\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$.

5) Ensembles finis totalement ordonnés :

Proposition 24 *Un ensemble fini non vide totalement ordonné admet un plus petit et un plus grand élément.*

Proposition 25 *Soit E un ensemble fini totalement ordonné de cardinal n. Il existe une unique famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E telle que*

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

On écrit $E = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$.

II. Loi de composition interne

1) Définition :

Définition 38 *Soit E un ensemble.*

On appelle loi de composition interne (l.c.i.) *toute application*

$$\begin{array}{rccc} & E\times E & \longrightarrow & E \\ *: & (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

Si x et y sont dans E, $x*y$ est appelé composé de x et y.

Notation : On note rarement les composés de manière fonctionnelle. On utilise plutot les symboles de composition $*$, $\perp$, $\top$...

Si on utilise le symbole de composition $+$, on dit que la loi est notée additivement.

Si on utilise le symbole de composition $\times$ ou ., ou si on omet tout symbole, on dit que la loi est notée multiplicativement.

Remarque : A l'aide des paranthèses, on peut considérer une sucession de composition : $(x*(y*z))*u$.

Notation : Soient E un ensemble muni d'une l.c.i $*$, $A\subset E$, $B\subset E$. On note

$$A*B=\{x\in E,\ \exists a\in A,\exists b\in B, x=a*b\}$$

Si $a\in E$,

$$a*B=\{x\in E,\ \exists b\in B, x=a*b\} \text{ et } B*a=\{x\in E,\ \exists b\in B, x=b*a\}$$

Exemple : • $+$ et $\times$ sont des l.c.i pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

• Soit X un ensemble. Alors $\cup$ et $\cap$ sont des l.c.i de $\mathcal{P}(X)$.

• Soit X un ensemble. Alors $\circ$ est une l.c.i sur $\mathcal{F}(X)$.

$*$ Exemple : $+$ et $\times$ sont des l.c.i pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2) Loi naturelle sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

On peut définir sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une loi quotient $+$: $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$. Cette loi est bien définie.

dem

Multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cas de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

3) Associativité et commutativité :

Définition 39 *Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une l.c.i.*

On dit que $*$ est associative *si pour tout $(x,y,z)\in E^3$, on a $(x*y)*z=x*(y*z)$.*

Exemple : Les l.c.i donnés en exemple en 1) sont associatives.

Exemple : $+$ est commutative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque : La plupart des l.c.i que nous rencontrerons sont associatives.

Si $*$ est associative, on note $x*y*z$ pour $(x*y)*z=x*(y*z)$.

Définition 40 *Soient $(E,*)$ un ensemble muni d'une l.c.i et $(x,y)\in E^2$.*

On dit que x et y commutent *si $x*y=y*x$. Si pour tout couple (u,v) de E^2, $u*v=v*u$, on dit que $*$ est* commutative.

Exemple : • $+$ et $\times$ sont des l.c.i commutatives pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
• Soit X un ensemble. Alors $\cup$ et $\cap$ sont des l.c.i commutatives de $\mathcal{P}(X)$.
• $+$ est commutative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$*$ Exemple : $+$ et $\times$ sont des l.c.i associatives pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
Remarque : En général, $\circ$ n'est pas une loi commutative de $\mathcal{F}(X)$. ex
Notation : En général, nous noterons additivement les l.c.i commutatives. Les autres seront notées multiplicativement ou avec un autre symbole.

4) Elément neutre :

Définition 41 *Soient $(E, *)$ un ensemble muni d'une l.c.i, $e \in E$.*
On dit que e est élément neutre de E *si pour tout $x \in E$, $e * x = x * e = x$.*

Remarque : En général, l'existence d'élément neutre n'est pas assurée : par exemple pour $(2\mathbb{N}, \times)$.
Exemple : • 0 est élément neutre pour $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$.
• 1 est élément neutre pour $(\mathbb{N}, \times)$ et $(\mathbb{Z}, \times)$.
• X est élément neutre pour $(\mathcal{P}(X), \cap)$.
• $\emptyset$ est élément neutre pour $(\mathcal{P}(X), \cup)$.
• I_X est élément neutre pour $(\mathcal{F}(X), \circ)$.
• $\bar{0}$ est élément neutre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 26 *Si $(E, *)$ est un ensemble muni d'une l.c.i admettant un élément neutre e, alors e est l'unique élément neutre de E.*

Notation : Lorsqu'une loi est notée additivement (resp. multiplicativement), on notera 0 (resp. 1) son élément neutre.

III. Monoïdes

1) Généralités :

Définition 42 *Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une l.c.i.*
On dit que E est un monoïde *si $*$ est associative et admet un élément neutre.*

Exemple : $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathcal{P}(X), \cap)$, $(\mathcal{P}(X), \cup)$ sont des monoïdes commutatifs. $(\mathcal{F}(X), \circ)$ est en général un monoïde non commutatif. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un monoïde.
Exemple : 1. Soient M_1 et M_2 deux monoïdes. Montrer que

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

où $(x_1, y_1) \in M_1^2$ et $(x_2, y_2) \in M_2^2$ définit sur $M_1 \times M_2$ une structure de monoïde.
2. $M^I = \mathcal{F}(I, M)$ est un monoïde (définition des lois).

Sauf mention explicite du contraire, nous noterons les lois des monoïdes multiplicativement. Son élément neutre sera noté 1.

2) Composé d'une famille d'éléments :

Soit I un ensemble fini totalement ordonné non vide. Nous avons vu en **I.5)** que l'on pouvait écrire $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_n\}$. Soient M un monoïde multiplicatif et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de M. On définit la suite $(X_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ par :

$$X_0 = 1 \text{ et } X_k = x_{i_k} \times X_{k-1} \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!]$$

Définition 43 *On appelle* composé de la famille des x_i *l'élément* X_n. *On le note* $\prod_{i\in I} x_i$.

Convention : Si $I=\emptyset$, $\prod_{i\in I} x_i = 1$.
Notation : Si la loi est notée additivement, on notera le composé des x_i $\sum_{i\in I} x_i$.
Si $I = [\![1,n]\!]$, on note parfois $\prod_{i=1}^n x_i$ ou $\sum_{i=1}^n x_i$.

Théorème 11 *Si les x_i commutent deux à deux (i.e. si $(i,j)\in I^2$, $x_ix_j = x_jx_i$), $\prod_{i\in I} x_i$ ne dépend pas de l'ordre total de I.*

Remarque : • Ce théorème permet donc de définir le composé d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ (I fini) où les x_i commutent deux à deux : on choisit un ordre total arbitraire sur I et le composé des x_i sera le composé relatif à cet ordre.
• Dans l'expression $\prod_{i\in I} x_i$, i est un "indice muet", il peut être changé par n'importe quel autre symbole.

3) Propriétés des composés :

Soit M un monoïde multiplicatif.

Proposition 27 (Formule de changement de variable) *Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie (i.e. I est fini) d'éléments de M commutant deux à deux, $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection. Alors :*

$$\prod_{i\in I} x_i = \prod_{j\in J} x_{\varphi(j)}$$

Exemple : $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{j=0}^{n-1} x_{j+1}$; ici $\varphi : j \in [\![0,n-1]\!] \longmapsto j+1 \in [\![1,n]\!]$ et on écrit que l'on a fait le changement de variables $i = j+1$.

Proposition 28 *Soient $m \leqslant n$ deux entiers. Alors :*

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2}$$

Théorème 12 (Formule d'associativité) *Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie d'élément de M commutant deux à deux, $(J_k)_{k\in K}$ une partition de I. Alors*

$$\prod_{i\in I} x_i = \prod_{k\in K}\prod_{j\in J_k} x_j$$

Exemple : • Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille finie d'éléments de M commutant deux à deux. On a

$$\prod_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \prod_{i\in I}\prod_{j\in J} x_{i,j} = \prod_{j\in J}\prod_{i\in I} x_{i,j}$$

• Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles finies de M. On suppose que pour tout $i\in I$ et $j\in J$, $x_ix_j = x_jx_i$, $y_iy_j = y_jy_i$ et $x_iy_j = y_jx_i$. Alors

$$(\prod_{i\in I} x_i)(\prod_{i\in I} y_i) = \prod_{i\in I} x_iy_i$$

4) Puissances entières :

Soit M un monoïde multiplicatif.

Définition 44 *Soient $a \in M$, $n \in \mathbb{N}$. On definit*

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ facteurs}}$$

En particulier, $a^0 = 1$.

Proposition 29 *Soient $(a, b) \in M^2$, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a*

1. $a^n a^p = a^{n+p}$;
2. $(a^n)^p = a^{np}$;
3. $(ab)^n = a^n b^n$ *si a et b commutent.*

Remarque : $\prod_{i\in I} a^{n_i} = a^{\sum_{i\in I} n_i}$ et$(\prod_{i\in I} a_i)^n = \prod_{i\in I} a_i^n$

5) Familles à support fini :

Il s'agit d'étendre la notation $\prod_{i\in I} x_i$ pour I infini.

Définition 45 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de M. On appelle* support de cette famille *l'ensemble $S = \{i \in I,\ x_i \neq 1\}$. Si S est fini, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini.*

Définition 46 *Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M commutant deux à deux à support fini. On appelle* composé des x_i *l'élément $\prod_{i\in S} x_i$ qui est noté $\prod_{i\in I} x_i$.*

Remarque : Les théorèmes vus en **3)** (changement de variables et associativité) s'étendent aux familles à support fini.

6) Numération en base D, $D \geqslant 2$:

Nous allons décrire le système de numération décimal. On note $2 = 1+1$, $3 = 2+1$,..., $9 = 8+1$. Ce sont les chiffres arabes. On note $D = 9 + 1$ ("dix").

Fixons $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ et une unique suite $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ de $\{0, 1, \dots, 9\}$ tels que :

$$N = \sum_{k=0}^{r} a_k D^k \text{ avec } a_r \neq 0.$$

On peut écrire plus rapidement qu'il existe une unique suite à support fini $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{0, 1, \dots, 9\}$ telle que :

$$N = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k D^k$$

A chaque a_k correspond un unique symbole α_k parmi 0, 1, 2,...,9. On notera alors :

$$N = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$$

C'est la *numération décimale de N*. De manière plus générale, on a :

Théorème 13 *Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers à support fini telle que $a_n \in \{0, 1, \ldots d-1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$N = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n d^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n d^n$$

ce qui peut s'écrire aussi de manière unique $N = \sum_{k=0}^{r} a_k d^k$ avec $a_r \neq 0$.

*Si pour chaque élément de $\{0, 1, \ldots d-1\}$, on s'est donné un symbole, à chaque a_k correspond un unique symbole α_k parmi 0, 1, 2,...,$d-1$ et $N = \alpha_r\alpha_{r-1}\ldots\alpha_1\alpha_0$ est l'*écriture en base d de l'entier N.

Si $d = 2$, on parle de *numération binaire* qui sert aux ordinateurs. Si $d = 16$, c'est la numération hexadécimale (utile en informatique). Il est alors nécessaire d'ajouter 6 nouveaux symboles : $10 = A$, $11 = B$, $12 = C$, $13 = D$, $14 = E$ et $15 = F$.

Cas des entiers négatifs.

Exercice : conversion base 10 vers base D et réciproquement.

IV. Eléments réguliers, éléments inversibles

1) Eléments inversibles :

Soit M un monoïde.

Définition 47 *Soit $a \in M$.*

On dit que a est inversible à gauche *(resp.* à droite*) s'il existe $b \in M$ tel que $ba = 1$ (resp. $ab = 1$). Si a est inversible à gauche et à droite, on dit que a est* inversible.

Proposition 30 *Soient a un élément inversible de M, $(b, c) \in M^2$ tel que $ab = ca = 1$.*

*Alors $b = c$ et b s'appelle l'*inverse de a. *On le note a^{-1}.*

Exercice : Si ab est inversible, montrer que a et b sont inversibles.

Remarque : Si la loi est notée additivement, on parlera plus volontiers d'*opposé* que d'inverse, et il sera noté $-a$ au lieu de a^{-1}.

Exemple : • Dans $(\mathbb{Z}, +)$, l'opposé de n est $-n$.

• Dans $(\mathbb{N}, \times)$, seul 1 est inversible.

• Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Alors $\frac{a}{b}$ est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$.

• Opposé et inverse dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Propriétés des éléments inversibles :

Proposition 31 *Soient a et b dans M inversibles. Alors*

1. 1 est inversible ;

2. ab est inversible et $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

3. a^{-1} est inversible et $(a^{-1})^{-1} = a$.

Proposition 32 *Soient $A \subset M$ et x inversible dans M. Si x commute avec A, x^{-1} commute aussi avec A.*

Remarque : Si x et y commutent, il en va de même de x^{-1} et y^{-1}. Si les x_i commutent deux à deux $(\prod_{i\in I} x_i)^{-1} = \prod_{i\in I} x_i^{-1}$.

3) Puissances entières d'un élément inversible :

Définition 48 *Soient $a \in M$ inversible et $n \in \mathbb{N}$. On note alors $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$.*

Remarque : La proposition vue en **III.4)** est vraie pour a et b inversibles et $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

4) Eléments réguliers :

Définition 49 *Soit $a \in M$. On dit que a est* régulier à gauche *(resp.* à droite*) si*

$$(\forall (x,y) \in M^2)(ax = ay \Longrightarrow x = y)$$

et respectivement

$$(\forall (x,y) \in M^2)(xa = ya \Longrightarrow x = y)$$

Si a est régulier à gauche et à droite, on dit que a est régulier*.*

Exemple : L'élément neutre est toujours régulier. Dans $(\mathbb{N},+)$, tous les éléments sont réguliers. Dans $(\mathbb{N},\times)$, tous les éléments sont réguliers sauf 0.

Proposition 33 *Soit $a \in M$. Si a est inversible à gauche (resp. à droite), a est régulier à gauche (resp. à droite).*

Corollaire 10 *Si a est inversible, a est régulier.*

Exercice : Soit $a \in M$. On suppose M fini. Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :
(i) a régulier à droite ;
(ii) a régulier à gauche ;
(iii) a inversible à droite ;
(iv) a inversible à gauche.
En particulier, vérifier que si a est régulier, a est inversible.

V. Sous Monoïdes, morphismes

1) Notion de sous-monoïde, exemples :

Définition 50 *Soit $M' \subset M$. M' est un* sous-monoïde de M *si*
* $1 \in M'$;*
* pour tout $(x,y) \in M'^2$, $xy \in M'$ (on dit M' est stable par la l.c.i).*

Remarque : M' muni de la restriction de la l.c.i est un monoïde.
Exemple : • $\{1\}$ est un sous-monoïde de M.
• $\mathbb{N}$ est sous-monoïde de $(\mathbb{Z},+)$ et de $(\mathbb{Z},\times)$.
• $2\mathbb{N}$ est un sous-monoïde de $(\mathbb{N},+)$
• Soient X un ensemble et $A \subset X$. On a $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{P}(A)$ est un sous-monoïde de $(\mathcal{P}(X),\cup)$.
• Soient M un monoïde et $A \subset M$. On note

$$C(A) = \{x \in M,\ (\forall a \in A)(xa = ax)\}$$

le *commutant de A*. Alors $C(A)$ est un sous-monoïde de M.
• Soient M un monoïde et $M^\times$ l'ensemble des éléments de M inversibles. Alors $M^\times$ est un sous-monoïde de M.

Remarque : Si $x_i \in M'$, sous-monoïde de M, alors $\prod_{i \in I} x_i \in M'$.

2) Morphismes de monoïdes :

Définition 51 *Soient M et N deux monoïdes, $f : M \longrightarrow N$.*

f est un morphisme (de monoïdes) *si*

1. $f(1) = 1$;

2. pour tout $(x, y) \in M^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Remarque : Soient M' et N' des sous-monoïdes de M et N respectivement, $f : M \longrightarrow N$ un morphisme. Alors $f_{|M'} : M' \longrightarrow N$ est un morphisme. Si $f(M) \subset N'$, alors $x \in M \longmapsto f(x) \in N'$ est un morphisme.

Exemple : • $f : x \in \mathbb{N} \longmapsto 2x \in \mathbb{N}$ est un morphisme pour $+$.

• $f : x \in \mathbb{R}(+) \longmapsto e^x \in \mathbb{R}^*(\times)$ est un morphisme.

Remarque : • Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille à support fini, les x_i commutant deux à deux. Alors $f(\prod_{i \in I} x_i) = \prod_{i \in I} f(x_i)$

• Soient $f : M \longrightarrow N$ un morphisme, $a \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(a^n) = f(a)^n$. Si a est inversible, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ cette formule reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 34 *Soient $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow P$ deux morphismes.*

1. I_M est un morphisme de M dans M ;

2. $g \circ f$ est un morphisme de M dans P.

Proposition 35 *Soient M et N deux monoïdes et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme, M' (resp. N') un sous-monoïde de M (resp. N).*

1. $f(M')$ est un sous-monoïde de N noté $\operatorname{Im} f$

2. $f^{-1}(N')$ est un sous-monoïde de M.

3) Isomorphisme :

Proposition 36 *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme bijectif. Alors f^{-1} est un morphisme de N dans M.*

Définition 52 *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme bijectif.*

On dit que f est un isomorphisme de M dans N *et que M et N sont* isomorphes. *On note alors $M \simeq N$.*

Remarque : Si $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow P$ sont des isomorphismes, $g \circ f$ est un isomorphisme. Si h est un isomorphisme, h^{-1} aussi.

Ainsi si $M \simeq N$ et $N \simeq P$, $M \simeq P$ (transitivité). Si $M \simeq N$ alors $N \simeq M$ (symétrie).

Exercice : Soit X un ensemble. Montrer que les monoïdes $(\mathcal{P}(X), \cup)$ et $(\mathcal{P}(X), \cap)$ sont isomorphes.

Remarque : Expliquer ce qu'est un isomorphisme...

VI. Analyse combinatoire

1) Principe des bergers :

Rappelons le résultat suivant démontré en **I.**

Proposition 37 (Principe des bergers) *Soient E un ensemble fini, $f : E \longrightarrow F$.*

1. Si $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E, $\operatorname{Card} E = \sum_{i \in I} \operatorname{Card} E_i$ (formule de la somme).

2. On a $\operatorname{Card} E = \sum_{y \in F} \operatorname{Card} f^{<-1>}(\{y\})$ (formule du quotient).

Proposition 38 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et est de cardinal 2^n.*

2) Arrangements :

Proposition 39 *Soient E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. Le nombre d'applications injectives de E dans F est* 0 *si $p > n$, et $A_n^p = n.(n-1).\dots(n-p+2).(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$.*

Remarque : Ainsi, si $n \geqslant p$, A_n^p est le nombre de p-uplets d'un ensemble F, $\mathrm{Card}\, E = n$, composé d'éléments deux à deux distincts. Ces p-uplets sont appelés *arrangements*.

Définition 53 *Soit E un ensemble. On appelle* permutation de E *toute application de E dans lui-même.*

Corollaire 11 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E dans E est $n!$.*

3) Combinaisons :

Définition 54 *Etant donné un ensemble à n éléments, on appelle* combinaison de p objets de E *toute partie de E à p éléments.*

Si $p \leqslant n$, on note C_n^p le nombre de combinaisons de E à p éléments.

Proposition 40 *Soit E un ensemble à n éléments. Alors*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : C_n^p ne dépend pas de E.

Proposition 41 *Soit $p \leqslant n$.*

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$.
2. *Si* $0 < p < n$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.
3. *Si* $1 \leqslant p \leqslant n$, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.
4. $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$.

Remarque : Triangle de Pascal, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.
Exercice : Soient E un ensemble fini à n éléments, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que le nombre d'applications $u : E \longrightarrow [\![0, p]\!]$ telle $\sum_{x \in E} u(x) \leqslant p$ est $C_{n+p}^n = C_{n+p}^p$.
2. Montrer que le nombre d'applications $u : E \longrightarrow [\![0, p]\!]$ telle $\sum_{x \in E} u(x) = p$ est $C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$.

VII. Compléments : ensembles dénombrables

Définition 55 *Soit E un ensemble. On dit que E est* dénombrable *si E est fini ou s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E. Dans le cas contraire on dit que E est* indénombrable.

Exemple : $\mathbb{N}$ est dénombrable. Toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Remarque : Tout ensemble infini contient un ensemble dénombrable non fini.
Exemple : $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Lemme 1 *Si $A \subset \mathbb{N}$, A est dénombrable.*

Proposition 42 *E est dénombrable si et seulement si, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.*

Proposition 43 *Soient E et F deux ensembles dénombrables. Alors $E \times F$ est dénombrable.*

<u>Remarque :</u> Cette proposition s'étend à un produit cartésien de n ensembles.
<u>Remarque :</u> L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (k,l) & \longmapsto & l + \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} \end{array}$$

est bijective
<u>Exemple :</u> $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $\mathbb{R}$ est indénombrable. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable.

Corollaire 12 *Soit I dénombrable, et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables. Alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.*

Chapitre 3

Groupes

• Soit $E = \{a, b, c, d\}$ de cardinal 4. Construire l'ensemble G_1 des permutations $e = I_E$, $\sigma_1 = (ab)$, $\sigma_2 = (cd)$ et $\tau = (ab)(cd)$. Faire la table de multiplication. Constater que G_1 est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles.

• Soit $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Expliciter la loi usuelle sur G_2. Même travail que pour G_1.

• Dans le plan $\mathbb{R}^2$, considérer l'ensemble G_3 constitué de l'identité, de la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(1, 0)$, $\mathbb{R}(0, 1)$ et la symétrie par rapport à $(0, 0)$. Même travail que précédemment.

• G_1, G_2 et G_3 sont des "groupes" dont la table de multiplication est semblable. Ils représentent d'une certaine manière le même groupe dont les propriétés algébriques sont indépendantes de la nature des éléments de G_1, G_2, G_3. D'où le besoin d'une définition générale du concept de groupe. Ce point de vue, très moderne fut adopté en premier par Gauss. Historiquement, l'émergence de ce concept va de concert avec le développement de certains domaines :

1. La résolution des équations polynômiales passe par l'étude des groupes de permutations des racines de ces polynômes. Ils apparaissent dans les travaux de Lagrange et surtout ceux de Galois.
2. Nouvelles géométries (classées par Cayley qui utilise la première fois le terme de groupe).
3. La théorie des nombres (Euler et Gauss étudièrent les congruences et utilisent implicitement des propriétés des groupes).

I. Groupes. Morphismes de groupes

1) Définitions et premiers exemples :

Définition 56 *On appelle* groupe *tout monoïde dont chaque élément est inversible. Un groupe est dit* commutatif *(ou* abélien*) si la loi est commutative.*

*Un groupe G est dit d'*ordre fini *s'il est fini. Dans le cas contraire, on dit que G est d'*ordre infini.

Remarque : Si G est d'ordre fini, $\operatorname{Card} G$ est parfois appelé *ordre de G*.
Remarque : Dans un groupe, tout élément est régulier.

Proposition 44 *Soit M un monoïde fini dont tout élément est régulier. Alors M est un groupe.*

Exemple : • $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
• $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens.
• Si G_1 et G_2 sont des groupes, $G_1 \times G_2$ est un groupe. exemple de $\mathbb{Z}^2$.
• Si G est un groupe, $\mathcal{F}(X, G)$ est muni d'une structure de groupes.

Exemple : Groupe symétrique : soit E un ensemble. On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des permutations. Nous avons vu au chapitre 2 **IV. 5)** que $\circ$ confère à $\mathcal{S}_E$ une structure de groupe. De plus, si E est fini,dem

$\mathcal{S}_E$ est d'ordre fini égal à $(\operatorname{Card} E)!$.

On note $\mathcal{S}_n$ pour $\mathcal{S}_{[\![1,n]\!]}$. C'est un groupe fini de cardinal $n!$.

Définition 57 *$\mathcal{S}_E$ est appelé* groupe symétrique de E *et $\mathcal{S}_n$* groupe symétrique d'ordre n.

Exemple : La loi de composition externe $+$ définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lui confère une structure de groupe abélien : $\bar{0}$ est élément neutre, l'opposé de $\bar{x}$ est $\overline{-x} = \overline{n-x}$.

Proposition 45 *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien de cardinal n.*

Exemple : Structure de groupes sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

2) Sous-groupes :

Définition 58 *Soient G un groupe et $H \subset G$. H est un* sous-groupe de G *si*

1. $1 \in G$;

2. pour tout $(x,y) \in H^2$, $xy \in H$;

3. pour tout $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

Remarque : Si H est un sous-groupe, la restriction de la loi de G à H confère la structure de groupe à H.

Pour montrer qu'un ensemble est un groupe, on aura souvent avantage à le voir comme sous-groupe d'un groupe le contenant.

Exemple : • $\{1\}$ et G sont des sous-groupes de G.

• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

• $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(1) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

Remarque : Si les $x_i \in H$, il en va de même de $\prod_{i\in I} x_i$. Si $x \in H$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n \in H$.

Exercice : Soit G un groupe. Montrer que

$$C(G) = \{h \in G, \forall g \in G, gh = hg\}$$

est un sous-groupe de G. Ce sous-groupe est appelé *centre* de G.

$*$ Exemple : $\mathcal{I}(\mathcal{P})$, ensemble des isométries d'un plan euclidien est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$. C'est en particulier un groupe pour la loi $\circ$

3) Morphismes de groupes :

Définition 59 *Soit G et G' deux groupes, $f : G \longrightarrow G'$. f est un* morphisme de groupe *si pour tout $(x,y) \in G^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$.*

Remarque : • $f(1) = 1$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

• f est un morphisme de groupes dès que f est un morphisme de monoïdes. De plus, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ et plus généralement, $f(x^n) = f(x)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe, $f_{|H}$ est un morphisme de groupe de H dans G'. Enfin, si H' est un sous-groupe de G' contenant dans $\operatorname{Im} f$, $f' : G \longrightarrow H'$ est un morphisme de groupes.

Exemple : • Soient $n \in \mathbb{Z}$ et G un groupe abélien. Alors $f : x \in G \longmapsto x^n \in G$ est un morphisme de G dans lui-même.

• Soit G un groupe, $h \in H$. Alors

$$f : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & hgh^{-1} \end{array}$$

est un morphisme du groupe G : c'est un *morphisme de conjugaison*.

• Soit O un point du plan euclidien. L'application $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto R_{O,\theta}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}(\mathcal{P})$.

Proposition 46 *Soient G, H, K trois groupes, $f : G \longrightarrow H$, $g : H \longrightarrow K$ deux morphismes de groupes.*

1. *I_G est un morphisme du groupe G.*
2. *$g \circ f$ est un morphisme du groupe de G dans K.*
3. *Si f est bijectif, f^{-1} est un morphisme du groupe H dans G.*

Définition 60 *Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe. f est un* isomorphisme *si f est bijectif. G et H sont alors dit* isomorphes *et on note $G \simeq H$.*

Remarque : La relation "être isomorphes" est réflexive, symétrique, transitive.

Définition 61 *Soit G un groupe.*

Un automorphisme de G *est un isomorphisme de G sur G. On note* $\operatorname{Aut} G$ *l'ensemble des automorphismes de G.*

Exercice : Montrer que le groupe $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(n) = n\}$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

4) Image directe et image réciproque d'un morphisme :

Proposition 47 *Soient G et H deux groupes et $f : G \longrightarrow H$ un morphisme, G' (resp. H') un sous-groupe de G (resp. H).*

1. *$f(G')$ est un sous-groupe de H.*
2. *$f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.*

Définition 62 *Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. On appelle* noyau de f *la partie* $\ker f = \{x \in G,\ f(x) = 1\}$.

Remarque : $\operatorname{Im} f = f(G)$ est un sous-groupe de H et $\ker f$ est un sous-groupe de G

Proposition 48 *Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. Alors f est injective si, et seulement si* $\ker f = \{1\}$.

II. Sous-groupe engendré

1) Intersection de sous-groupes :

Proposition 49 *Soient G un groupe et $(H_k)_{k\in K}$ une famille de sous-groupes de G. Alors $\bigcap_{k\in K} H_k$ est un sous-groupes de G.*

2) Définition :

Définition 63 *Soit A une partie d'un groupe G et $\mathcal{H} = \{H \subset G, H$ sous-groupe de $G, H \supset A\} \neq \emptyset$. On appelle*

$$H_0 = \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$$

le sous-groupe engendré par A.

Remarque : Au sens de l'inclusion, H_0 est le plus petit sous-groupe contenant A. Si $A \subset H$, où H est un sous-groupe de G, $H_0 \subset H$.
Exemple : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $n\mathbb{Z}$ est le sous-groupe engendré de $\mathbb{Z}$ engendré par n. dem

Définition 64 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'un groupe G. On appelle* sous-groupe engendré par les x_i *le sous-groupe engendré par $\{x_i \in G, i \in I\}$.*

Remarque : Si la famille est réduite à un élément a, le sous-groupe engendré est $\{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
Exemple : Le sous-groupe engendré par 2π dans $\mathbb{R}$ est $2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 65 *Soit A une partie du groupe G. On dit que A* engendre *G si le sous-groupe engendré par A est G tout entier.*

3) Détermination du sous-groupe engendré :

Théorème 14 *Soit A une partie d'un groupe $(G, \times)$.*

Le sous-groupe engendré par A est l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme produit d'éléments de A ou d'inverses d'éléments de A.

Théorème 15 *Soient $(G, +)$ un groupe abélien, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de G. Le sous-groupe engendré par les x_i est formé des éléments du type $\sum_{i\in I} n_i x_i$ où $(n_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini de $\mathbb{Z}$.*

Exercice : Ecrire ce théorème dans le cas où la loi est notée de manière multiplicative.
Remarque : Au lieu de supposer G abélien, on peut seulement supposer que les x_i commutent deux à deux.

III. Le groupe additif $\mathbb{Z}$

1) Sous-groupes de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$. Pour $+$, $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien. Les $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{Z}$) sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$. On a

$$n\mathbb{Z} = n'\mathbb{Z} \Longleftrightarrow n = \pm n'$$

$n\mathbb{Z}$ est engendré par n. Y a t-il d'autres sous-groupes ? Le théorème suivant donne la réponse :

Théorème 16 *Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.*

2) Factorisation des morphismes de $\mathbb{Z}$ dans un groupe G :

Théorème 17 *Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ un morphisme de groupes.*

- *Si $\ker f = \{0\}$, f établit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur $\operatorname{Im} f$:*

$$\operatorname{Im} f \simeq \mathbb{Z}.$$

- *Si f n'est pas injective, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$ et l'application*

$$\bar{f} : \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longmapsto f(k) \in \operatorname{Im} f$$

est bien définie et est un isomorphisme de groupes :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} f.$$

$\bar{f}$ est l'isomorphisme canoniquement associé à f.

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : k \in \mathbb{Z} \longmapsto \overline{k\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. A quelle condition $\operatorname{Im} f$ est-elle finie ?

3) Groupes monogènes :

Définition 66 *On dit qu'un groupe G est* monogène *s'il existe $a \in G$ tel que a engendre G i.e.*

$$G = \{a^n \in G, n \in \mathbb{Z}\}$$

Si G est de plus fini, on dit que G est cyclique.

Remarque : Si G est monogène, G est abélien. Tout groupe quotient d'un groupe monogène est monogène. dem

Exemple : Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est monogène. Les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n > 0$) sont cycliques (et engendré par $\dot{1}$).

Théorème 18 *Soient G un groupe monogène engendré par a et*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ k & \longmapsto & a^k \end{array}$$

1. *Si G est infini, alors f est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur G :*

$$G \simeq \mathbb{Z}$$

2. *Si G est d'ordre fini n, l'isomorphisme canoniquement associé à f, $\dot{f}$ établit un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur G :*

$$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Remarque : Il n'existe que deux types de groupes monogènes : ceux isomorphes à $\mathbb{Z}$ et ceux isomorphes à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Représentation graphique.

IV. Congruence modulo un sous-groupe

1) Théorème de Lagrange :

Soient G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. On définit alors la relation binaire $\mathcal{R}_H$ sur G par

$$x\mathcal{R}_H y \Longleftrightarrow y \in xH (\Longleftrightarrow x^{-1}y \in H)$$

$\mathcal{R}_H$ est appelée *congruence à gauche modulo H*.

Proposition 50 *$\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.*

Lemme 2 *Si $x \in G$, xH est la classe de x modulo $\mathcal{R}_H$.*

Lemme 3 *Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_H$ sont en bijection.*

Théorème 19 (Théorème de Lagrange) *Soient G un groupe fini de cardinal n, H un sous-groupe de cardinal d. Alors d divise n.*

2) Ordre d'un élément dans un groupe :

Définition 67 *Soient G un groupe et $a \in G$. L'*ordre de *a est le cardinal du sous-groupe engendré par a.*

Notons H_a ce sous-groupe, $A = \{k > 0, a^h = 1\}$.

• Supposons H_a infini. Alors $H_a \simeq \mathbb{Z}$ et a est dit *d'ordre infini.* On est dans le cas 1 du théorème précédent. Ainsi $A = \emptyset$ et

$$a^k = 1 \Longleftrightarrow k = 0$$

$$a^k = a^l \Longleftrightarrow k = l$$

• Supposons H_a fini d'ordre n. a est d'ordre fini n. Alors $H_a \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: on est dans le cas 2 du théorème précédent. $A \neq \emptyset$ et n est le plus petit élément de A. Ainsi

$$a^k = 1 \Longleftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$$

$$a^k = a^l \Longleftrightarrow k \equiv l \mod n$$

Théorème 20 *Soit G un groupe de cardinal n.*

1. L'ordre de tout élément de G divise n.

2. Soit $a \in G$. Alors $a^n = 1$.

3) Relations compatibles avec une l.c.i :

Définition 68 *Soient $(M, *)$ un monoïde et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On dit que $\mathcal{R}$ est* compatible *avec la loi de M si pour tout x, y et a dans M, on a*

$$x \equiv y \mod \mathcal{R} \Longrightarrow \dashv * \S \equiv \dashv * \dagger \mod \mathcal{R} \text{ et } \S * \dashv \equiv \dagger * \dashv \mod \mathcal{R}$$

Exemple : Soit $n > 0$. Sur $(\mathbb{Z}, +)$, la relation "de différence divisible par n", ou congruence modulo n est une relation d'équivalence compatible avec $+$.

Définition 69 *Sur $M/\mathcal{R}$, si $*$ est compatible avec M, on peut définir une loi en posant pour $x, y \in M$*

$$\bar{x} * \bar{y} = \overline{x + y}.$$

Cette loi est appelé loi quotient de *$M/\mathcal{R}$.*

Remarque : Cette loi est associative. Elément neutre.

V. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$

• Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{S}_E$, l'ensemble des permutations de E est un groupe pour $\circ$. Si E est fini, $\mathcal{S}_E$ est d'ordre $(\operatorname{Card} E)!$.

Soit G un groupe, $\operatorname{Aut} G$, l'ensemble des *automorphismes* de G est un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$.

Si $E = [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{S}_E$, $\mathcal{S}_n$.

Si $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et σ une permutation de E tel que $\sigma(a_i) = b_i$, on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Probleme : : calculer σ^{10000}.

1) Orbite selon une permutation :

Soient E un ensemble fini, $\sigma \in \mathcal{S}_E$. Définissons la relation binaire sur $\mathcal{S}_E$:

$$x \sim y \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ (y = \sigma^k(x))$$

Proposition 51 *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

Si $x \in E$, nous noterons Ω_x la classe d'équivalence de x appelée aussi *orbite de x*. On a :

$$\Omega_x = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

On remarque que Ω_x est stable par σ et plus généralement par σ^k $(k \in \mathbb{Z})$.
Probleme : A quelle condition sur k et l entiers a t-on

$$\sigma^k(x) = \sigma^l(x)$$

En composant par σ^{-l}, le problème se remène à trouver les k tel que $\sigma^k(x) = x$. Pour répondre à cette question nous allons introduire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & E \\ k & \longmapsto & \sigma^k(x) \end{array}$$

Alors $f(\mathbb{Z}) = \Omega_x$. Notons $H = f^{-1}\{x\}$.

Définition-Proposition 1 *H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, distinct de $\{0\}$ et il existe un unique $n > 0$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. n est appelé* ordre de x sous σ. *C'est le plus petit entier strictement positif tel que $\sigma^n(x) = x$.*

Remarque : Si E est infini, le cas $H = \{0\}$ est possible.
Remarque : On en déduit que $\sigma^k(x) = x$ si et seulement si n divise k (i.e. $k \in n\mathbb{Z}$) et $\sigma^k(x) = \sigma^l(x)$ si et seulement si n divise $k - l$ (i.e. $k - l \in n\mathbb{Z}$).Alors si k_0 est l'ordre de x sous σ, on a

$$\Omega_x = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{k_0 - 1}\}$$

et le cardinal de l'orbite de x est k_0.
Remarque : Représentation graphique d'une orbite.

2) Cycles :

On reprend les notations du **2)**. Les différentes orbites de E sous σ forment une partition de E. Elles sont donc en nombre fini, de réunion E, et disjointes deux à deux.

On a $x \in \Omega_x$. $\Omega_x = \{x\}$ si et seulement si $\sigma(x) = x$.

Définition 70 *Soient a_1,...,a_k k éléments distincts de E, $k \geqslant 2$. La permutation qui associe*
- *à a_i $(1 \leqslant i < k)$ l'élément a_{i+1},*
- *à a_k l'élément a_1,*
- *à tout $y \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, l'élément y,*

est appelée cycle *et est notée $[a_1, a_2, \ldots a_k]$. L'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ est le* support *du cycle et k sa longueur.*

Remarque : Une permutation est un cycle si et seulement si elle possède une unique orbite non réduite à un singleton.

Soit σ un cycle. Notons Ω l'unique orbite non réduite à un point et prenons $x \in \Omega$. On a

$$\Omega = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{k-1}(x)\}$$

et k est l'ordre de x sous σ.

Définition 71 *On appelle* transposition de E *tout cycle de* E *de longueur* 2.

Une transposition τ est notée $[a, b]$: $\tau(a) = b$, $\tau(b) = a$ et $\tau(x) = x$ si $x \neq a$ et $x \neq b$.
Probleme : Un cycle σ est un élément du groupe $\mathcal{S}_E$. Quel est son ordre ?

Proposition 52 *Soit* $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ *un cycle. Son ordre dans* $\mathcal{S}_E$ *est* n.

Exemple : Une transposition est d'ordre 2.

3) Décomposition en cycles à supports disjoints :

Remarque : Soient σ et σ' deux cycles de E de supports respectifs A et B. Si $A \cap B = \emptyset$, σ et σ' commutent : $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$

Théorème 21 (Décomposition en cycles à supports disjoints) *Soient* E *un ensemble fini,* $\sigma \in \mathcal{S}_E$. *On note* Ω_1, Ω_2,..., Ω_k *les orbites de* E *sous* σ *non réduite à un élément. On définit pour tout* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, *la permatation* σ_i *par*

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \notin \Omega_i \\ \sigma(x) \text{ si } x \in \Omega_i \end{cases}$$

Alors les σ_i *sont des cycles à supports disjoints, commutant 2 à 2 et*

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \sigma_k$$

Ainsi, pour trouver cette décomposition, l'essentiel du travail est dans la détermination des orbites.
Exemple : Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation

Corollaire 13 *Toute permutation de* E *peut s'écrire comme composé d'un nombre fini de transpositions.*

Remarque : Il n'y a pas en général unicité.

4) Signature :

Théorème 22 *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_E$. *Dans les décompositions de* σ *en produit de transpositions* $t_1 \circ t_2 \circ$ admis t_n, *la parité de* n *ne dépend que de* σ.

Ce résultat sera étudié en TD.

Définition 72 *Avec les notations de la proposition précédente, on appelle* signature de σ *le nombre* $\varepsilon(\sigma)$ *égal à 1 si* n *est pair et -1 si* n *est impair.*

Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, σ *est une permuation* paire, *sinon c'est une permutation* impaire.

Exemple : L'identité est paire. Une transposition est impaire. La signature de $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ est 1 si n est impair, et -1 si n est pair.

Théorème 23 *Soit* E *un ensemble fini. La signature*

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_E & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}$$

est un morphisme du groupe $(\mathcal{S}_E, \circ)$ *dans le groupe* $(\{-1, 1\}, \times)$.

Si $\operatorname{Card} E \geqslant 2$, la signature est surjective. Le noyau de la signature $\ker \varepsilon$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_E$ composé des permutations paires.

Définition 73 *Ce sous-groupe est appelé* groupe alterné de E *et est noté* $\mathcal{A}_E$. *Si* $E = [\![1, n]\!]$, *il est noté* $\mathcal{A}_n$.

Remarque : $\operatorname{Card} \mathcal{A}_E = \frac{\operatorname{Card} E!}{2}$.

Chapitre 4

Anneaux

Dans notre étude des Mathématiques, nous rencontrerons beaucoup d'ensembles munis de deux opérations. Nous en connaissons déjà un exemple : $\mathbb{Z}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$. Nous verrons plus tard $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K. On remarque déjà en pensant à $\mathbb{Z}$ que $+$ et $\times$ ne sont pas indépendantes : il existe une relation liant ces opérations, c'est la distribuvité :

$$a(x+y) = (x+y)a = ax + ay$$

Ces ensembles avec "addition" et "multiplication" vérifient tous certaines propriétés comme les identités remarquables. Ils seront appelés "anneaux". C'est dans ce cadre général que nous allons continuer à voir les règles du calcul algébrique et acquérir des outils essentiels à l'étude de l'Arithmétique de $\mathbb{Z}$.

I. Notions élémentaires sur les anneaux

1) Définitions et premiers exemples :

Définition 74 *Soit A un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\times$. On dit que A est un* anneau *si*

1. $(A, +)$ est un groupe abélien ;
2. $(A, \times)$ est un monoïde ;
3. Pour tout $(a, x, y) \in A^3$ on a

$$a(x+y) = ax + ay \text{ et } (x+y)a = xa + ya \quad \textit{(distributivité)}$$

On dit que A est un anneau commutatif *si $\times$ est une loi commutative.*

Notation : On note 0 l'élément neutre pour $+$ et 1 l'élément neutre pour $\times$.

Exemple : • $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

• Soient X un ensemble et A un anneau. Alors $\mathcal{F}(X, A)$ peut être muni d'une structure d'anneau :

$$f + g : x \in X \longmapsto f(x) + g(x) \in A \text{ et } fg : x \in X \longmapsto f(x)g(x)$$

si A est commutatif, il en va de même de $\mathcal{F}(X, A)$. Préciser les éléments neutre pour les deux opérations.

• $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif.

Exercice : Soient A et B deux anneaux. Montrer qu'il existe sur une $A \times B$ une structure canonique d'anneau.

Proposition 53 *Soit A un anneau.*

Pour tout $x \in A$, $0x = x0 = 0$. On a $-b = (-1)b = b(-1)$.

Remarque : •

• Si $(x, y, a, b) \in A$, $(x + y)(a + b) = xa + ya + xb + yb$.

Notation : Soient $x \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$. On note $n.x$ en accord evec les notations du chapitre 3 l'élément

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}}$$

si $n \geqslant 0$ et $(-n).(-x)$ sinon.

Remarque : Soit $a \in A$. L'application $x \longmapsto ax$ est un endomorphisme du groupe $(A, +)$.

Ainsi $a(\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} ax_i$, $a(n.x) = n.ax$...

Le cas $1 = 0$ n'est pas exclu *a priori*, mais si tel est le cas, $A = \{0\}$. Nous supposerons $A \neq \{0\}$ dans la suite.

2) Sous-anneaux :

Comme nous avons défini les sous-groupes, nous allons définir les sous-anneaux :

Définition 75 *Soient A un anneau, $B \subset A$. B est un* sous-anneau de A *dès que*

1. B est un sous-groupe de $(A, +)$;

2. B est un sous-monoïde de $(A, \times)$.

Ainsi, pour prouver que B est un sous-anneau de A, il faudra vérifier que

1. $0 \in B$;
2. Si $(x, y) \in B^2$, $x + y \in B$;
3. Si $x \in B$, $-x \in B$;
4. $1 \in B$;
5. Si $(x, y) \in B^2$, $xy \in B$.

dem On peut remarquer que 1. est inutile.

Remarque : Un sous-anneau B est stable pour $\sum$ et $\prod$. De plus, B muni de la restriction des lois $+$ et $\times$ est un anneau.

En fait cette notion de sous-anneau s'avèrera pour nous peu utile.

3) Idéaux :

Définition 76 *Soient A un anneau commutatif, $I \subset A$.*

I est un idéal *si :*

1. I est un sous-groupe de $(A, +)$;

2. Pour tout $a \in A$ et $x \in X$, on a $ax \in I$.

Ainsi, pour prouver que I est idéal de A, il faudra vérifier que

1. $0 \in B$;
2. Si $(x, y) \in B^2$, $x + y \in B$;
3. Si $x \in B$, $-x \in B$;
4. Si $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$.

Les idéaux sont en Mathématiques et notamment en algèbre à la base d'un grand nombre de résultats. Nous en verrons l'illustration en Arithmétique (chapitre 5) et dans l'étude des polynômes.

Exemple : • A et $\{0\}$ sont des idéaux bilatères de A.

• Si $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$

<u>Remarque :</u> • Si I est un idéal à gauche, $x_k \in I$, $a_k \in A$, alors

$$\sum_k a_k x_k \in I$$

• On remarque que si I est un idéal

$$1 \in I \Longleftrightarrow I = A$$

Proposition 54 *Si I est un idéal de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $n \geqslant 0$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.*

4) Morphismes d'anneaux :

Ce sont les applications préservant la structure d'anneau :

Définition 77 *Soient A et B deux anneaux, $f : A \longrightarrow B$.*
On dit que f est un morphisme d'anneaux *si :*
1. f est un morphisme du groupe $(A, +)$ dans le groupe $(B, +)$;
2. f est un morphisme du monoïde $(A, \times)$ dans le monoïde $(A, \times)$.

Ainsi, pour vérifier que f est un morphisme, il faudra prouver
1. $f(0) = 0$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
3. $f(1) = 1$;
4. $f(xy) = f(x)f(y)$;

En fait, 1. est inutile... Si $A = B$, on dit que f est un *endomorphisme*.
<u>Remarque :</u> Si f est un morphisme, $f(\sum_i x_i) = \sum_i f(x_i)$, $f(\prod_i x_i) = \prod_i f(x_i)$, $f(n.x) = n.f(x)$, $f(x^n) = f(x)^n$...
<u>Remarque :</u> f injective équivaut à $\ker f = \{0\}$.

Proposition 55 *Soient A, B et C trois anneaux, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ des morphismes.*
1. I_A est un morphisme d'anneaux.
2. $g \circ f$ est un morphisme de A dans C.
3. Si f est une bijection, f^{-1} est un morphisme de B dans A.

Définition 78 *Un morphisme bijectif d'anneaux est appelé* isomorphisme*. Deux anneaux A et B sont dits* isomorphes *s'ils existent un isomorphisme $f : A \longrightarrow B$. On note alors $A \simeq B$.*

<u>Remarque :</u> I_A est un isomorphisme de A, le composée de deux isomorphismes est un isomorphisme, l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme. $\simeq$ est transitif...

5) Image directe et image réciproque par un morphisme :

Proposition 56 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau.*
1. Si A' est un sous-anneau de A, $f(A')$ est un sous-anneau de B.
2. Supposons A et B commutatifs. Si I est un idéal de B, $f^{-1}(I)$ est un idéal de A.

<u>Remarque :</u> Si I est un idéal de B, $f^{-1}(I)$ est un idéal de A.

Corollaire 14 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau.* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-anneau de B et* $\ker f$ *est un idéal bilatère de A.*

6) Théorème de factorisation :

Théorème 24 *Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ un morphisme d'anneaux.*

- *Si* $\ker f = \{0\}$, *f établit un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ sur* $\operatorname{Im} f$ *:*

$$\operatorname{Im} f \simeq \mathbb{Z}.$$

- *Si f n'est pas injective, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que* $\ker f = n\mathbb{Z}$ *et l'application*

$$\bar{f} : \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longmapsto f(k) \in \operatorname{Im} f$$

est bien définie et est un isomorphisme d'anneaux :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} f.$$

$\bar{f}$ est l'isomorphisme canoniquement associé à f.

II. Calcul dans un anneau :

Soit A un anneau. Nous allons donner une liste d'identités remarquables bien connues.

Proposition 57 *Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles finies. Alors*

$$(\sum_{i\in I} x_i)(\sum_{j\in J} y_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j$$

Remarque : Ce résultat s'étend aux familles à support fini.

Proposition 58 *Soient $(a,b) \in A^2$ et $n \geqslant 1$.*
On suppose $ab = ba$. Alors

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) = (b-a)(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k})$$

Exemple : $b^3 + a^3 = b^3 - (-a)^3 = (b+a)(b^2 - ab + a^2)$

Proposition 59 (Formule du binôme de Newton) *Soient $(a,b) \in A^2$ et $n \geqslant 1$.*
On suppose $ab = ba$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . a^k b^{n-k}$$

Remarque : Cette dernière identité peut s'écrire

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant n\\ p+q=n}}^{n} \frac{n!}{p!q!}.a^p b^q$$

et plus généralement, on peut montrer que si les a_i commutent deux à deux

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_l)^n = \sum_{\substack{1\leqslant p_1,p_2,\ldots\leqslant p_l\\ p_1+p_2+\ldots+p_l=n}} \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_l!} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_l^{p_l}$$

III. Idéal engendré :

Cet outil nous permettra sur $\mathbb{Z}$ d'étudier les propriétés d'objets comme le pgcd.
Dans ce paragraphe A désignera un anneau commutatif.

1) Intersection d'idéaux :

Proposition 60 *Soit $(I_k)_{k\in K}$ une fammile d'idéaux de A. Alors $\bigcap_{k\in K} I_k$ est un idéal de A.*

2) Idéal engendré par une partie :

Définition 79 *Soit M une partie de A, $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux I de A tels que $M \subset I \subset A$. Alors $\mathcal{I}$ est non vide et l'idéal*

$$J_M = \bigcap_{I\in\mathcal{I}} I$$

est appelé idéal engendré par M*.*

Remarque : On a $M \subset J_M$. De plus si I est un idéal contenant M, alors I contient J_M. Ainsi, J_M est le plus petit idéal contenant M (au sens de l'inclusion !).
Exemple : L'idéal engendré par 1 est A tout entier.

Définition 80 *Soit $(x_k)_{k\in K}$ une famille de A. L'*idéal engendré par les x_k *est l'idéal engendré par $\{x_k\}_{k\in K}$.*

3) Détermination de l'idéal engendré :

Théorème 25 *Soit $(x_k)_{k\in K}$ une famille de A. L'idéal engendré par les x_k est la partie de A formée des éléments du type*

$$\sum_{k\in K} a_k x_k$$

où $(a_k)_{k\in K}$ est une famille de A à support fini (pour $+$).

Notation : C'est pour cela que l'on le note parfois $\sum_{k\in K} Ax_k$.
Exemple : • Si $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ est l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par n. Les $n\mathbb{Z}$ sont les seuls idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$.

• De manière plus générale, pour tout $x \in A$, Ax est appelé *idéal principal de A.*
• L'idéal engendré par x_1, x_2,...,x_n est

$$Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_n$$

4) Congruence modulo un idéal :

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A.
On peut considérer alors la congruence $\mathcal{R}_I$ modulo le sous-groupe I de $(A, +)$:

$$x \equiv y \pmod{I} \Longleftrightarrow y - x \in I$$

. Nous savons que cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition $+$. Mais comme I est un idéal on a

Proposition 61 *La congruence $\mathcal{R}_I$ est compatible avec $\times$:*

$$a \equiv b \text{ et } x \equiv y \Longrightarrow ax \equiv by,$$

pour tout $a, b, x, y \in A$.

Définition 81 *$\mathcal{R}_I$ est appelée* congruence modulo l'idéal I.

Remarque : Si I est l'idéal engendré par a, $I = aA$ pour montrer que a divise x, il s'agit de montrer que $x \equiv 0 \pmod{I}$.
Remarque : La congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est la congruence modulo l'idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$: elle est donc compatible avec la multiplication.
Question : La congruence mudulo 2π dans $\mathbb{R}$ est-elle compatible avec la multiplication ?
Remarque : Montrer qu'en fait on peut munir le groupe quotient A/I d'une structure d'anneaux en définissant une multiplication quotient.

IV. Anneaux intègres et corps

1) Diviseurs de zéro, anneaux intègres :

Soient A un anneau, $a \in A$. On note $A^* = A \backslash \{0\}$. On a

$$a \text{ régulier à gauche } \iff (\forall x \in A^*)(ax \neq 0)$$

$$a \text{ régulier à droite } \iff (\forall x \in A^*)(xa \neq 0)$$

Ainsi, si a n'est pas régulier, il existe $b \in A^*$ tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

Définition 82 *a est un* diviseur de zéro.

0 n'est pas jamais régulier $(0.1 = 0)$. Dire que tous les éléments de A^* sont réguliers, c'est dire que A^* est stable par multiplication :

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$$

C'est le cas de beaucoup d'anneaux connus : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Définition 83 *Un anneau* sans diviseur de zéro *est un anneau dont tous les éléments de A^* sont réguliers. Un anneau* intègre *est un anneau commutatif sans diviseurs de zéros.*

$*$ Exemple : Si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas intègre : $\bar{2}\bar{2} = 0$
Question : A intègre implique t-il $A \times A$ intègre ?

2) Eléments inversibles :

Tout élément inversible est régulier, ce n'est pas un diviseur de zéro.

Proposition 62 *Soit A un anneau. On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversible de A.*
Alors, $A^\times$ muni de $\times$ est un groupe.

Exemple : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$...

3) Corps :

Définition 84 *Un anneau K est un* corps *si tous les éléments de K^* sont inversibles.*

Remarque : Si $x \in K^*$, K étant un corps, x n'est pas un diviseur de zéro. En particulier :

$$xy = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Proposition 63 *K^* est un groupe pour la multiplication.*

$*$ Exemple : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps. Si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

Définition 85 *Soient K et L deux corps. Un* morphisme de corps de K dans L *est un morphisme de l'anneau K dans l'anneau L.*

Remarque : Si f est un morphisme de corps, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. En particulier f est injective.

Proposition 64 *Soit A un anneau fini sans diviseurs de zéro. Alors A est un corps.*

Définition 86 *Soient K et L deux corps, $M \subset K \subset L$.*
M est un sous-corps de K *si M est un sous-anneau de l'anneau K tel que si $x \in M^*$, $x^{-1} \in M$.*
L est un surcorps de K *si les l.c.i de L prolonge celles de K.*

Remarque : Si L est un surcorps de K, K est un sous-corps de L.
Exemple : $\mathbb{R}$ est un surcorps de $\mathbb{Q}$ et un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Question : K corps implique t-il K^2 corps ?

4) Caractéristique d'un anneau :

Soient A un anneau et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ k & \longmapsto & k.1 \end{array}$$

Proposition 65 *f est un morphisme d'anneaux.*

Notons $A_0 = \operatorname{Im} f$. Deux cas sont à distinguer :

• si f est injective, $\ker f = \{0\}$ et par le théorème d'isomorphisme $A_0 \simeq \mathbb{Z}/(0) \simeq \mathbb{Z}$. On dit que A est de *caractéristique nulle.*

• si $\ker f = n\mathbb{Z}$, $n > 1$, $A_0 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on dit que A est de *caractéristique n.*

Le cas $\ker f = \mathbb{Z}$ est exclu car $1.1 = 1 \neq 0$... On voit également que A_0 est le sous-groupe additif engendré par 1. En particulier, c'est le plus petit sous-anneau de A.

Proposition 66 *Si B est un sous-anneau de A, B et A ont même caractéristique.*

Exemple : Caractéristique de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$...
Exercice : Soit n la carctéristique de A. Que signifie $k.1 = 0$?
Conclusion : Tout anneau contient soit $\mathbb{Z}$, soit un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5) Corps des fractions d'un anneau intègre :

$\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. Cependant, on s'autorise des opérations d'inversions en introduisant les *rationnels* par la notation $\frac{a}{b}$. La manipulation de ces objets ne va pas de soi : n'a t-on pas $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$? Ce qui suit va lever le mystère de la notation rationnelle.

Soit A un anneau. On pensera à $\mathbb{Z}$. Notons $E = A \times A^*$. Sur E, définissons la relation binaire suivante :

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad - bc = 0$$

Proposition 67 $\sim$ *est une relation d'équivalence.*

Notons $K = E/\sim$, et $\frac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b).

Théorème 26 *Sur K, on peut définir des l.c.i de la manière suivante :*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

et

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

K muni de ces deux opérations est un corps et

$$j : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux injectif.

Remarque : • Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ alors $a = c$.
• Comme $A \hookrightarrow K$, on peut considérer que $A \subset K$.

Notation : Si $a \in A$, on note a pour $\frac{a}{1}$. L'inverse de $a \in A^*$ dans K est $\frac{1}{a}$.

Définition 87 *On appelle* corps des rationnels *le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$. Il est noté $\mathbb{Q}$*

Nous verrons plus tard un autre exemple $K(X)$ le corps des fractions de l'ensemble des polynmes sur K : le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K.

V. Anneaux de matrices carrées de taille 2

1) Présentation de $\mathcal{M}_2(A)$:

Soit A un anneau commutatif, K un corps commutatif (on pensera à $A = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}$).

Définition 88 *On appelle* matrice carrée de taille 2 à coefficients dans A *tout élément $M = (m_{ij})_{(i,j)\in\{1,2\}^2}$ de $A^{\{1,2\}\times\{1,2\}}$. On note alors :*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_2(A)$ l'ensemble de ces matrices.

Notons pour simplifier $B = \mathcal{M}_2(A)$. Sur B, on définit les lois de composition interne suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose :

$$M + M' = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MM' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

De plus, on définit une loi de composition externe à coefficients dans A en posant pour tout $\lambda \in A$:

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 27 *1.* $B = (\mathcal{M}_2(A), +, \times)$ *est un anneau.*
2. B *est non commutatif, avec des diviseurs de zéro.*
3. Pour tout $(\lambda, \mu) \in A^2$*, et tout* $(M, N) \in B^2$*, on a :*

$$(\lambda + \mu).M = \lambda.M + \mu.M,\ \lambda.(M + N) = \lambda.M + \mu.N, 1_A.M = M$$

$$\lambda.(\mu.M) = (\lambda\mu).M = \mu(\lambda M) \quad et \quad \lambda.(MN) = (\lambda.M)N = M(\lambda N)$$

2) Groupe des inversibles de $\mathcal{M}_2(K)$:

Définition 89 *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(A)$*. On appelle déterminant de* M *le scalaire :*

$$\det M = ad - bc \in A$$

Proposition 68 *Soient* $(M, N) \in \mathcal{M}_2(A)^2$*. Alors :*

$$\det(MN) = \det M \det N$$

Définition 90 *On note* $\mathrm{GL}_2(A)$ *le groupe des éléments inversibles de* $\mathcal{M}_2(A)$*.*

Théorème 28 *Soit* $M \in \mathcal{M}_2(A)$*. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $M \in \mathrm{GL}_2(A)$ *i.e.* M *est inversible ;*
(ii) $\det M \in A^\times$*.*
Dans ces conditions, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*,*

$$M^{-1} = (ad - bc)^{-1}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.

Corollaire 15 *Soit* $M \in \mathcal{M}_2(K)$*.* $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ *si, et seulement si,* $\det M \neq 0$*.*

3) Applications aux systèmes linéaires :

Traduction matricielle d'un SL 2-2.
Résolution dans le cas où la matrice du système est inversible.

Chapitre 5

Arithmétique de $\mathbb{Z}$

La notion d'anneaux et la conscience des structures de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est apparu très tard (au siècle dernier). Mais la théorie des nombres ne les a pas attendus pour offrir ses premiers résultats qui, en fait, justifie *a posteriori* l'introduction de ces notions plus abstraites.

Au IIIème siècle après JC, Diophante fonde d'une certaine manière la théorie des nombres dans *Les Arithmétiques.* Il étudie en particulier les solutions des équations entières $ax + by = 1$ où x et y sont inconnues, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un entier soit somme de deux carrés...Il connaissait par exemple l'identité de Lagrange

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Il savait que si $4n + 1$ est premier, il est somme de deux carrés, que $4n + 3$ n'est jamais somme de deux carrés... Ces travaux furent repris au XVIIème siècle par Bachet de Méziriac qui démontra ce qu'on appelle le théorème de Bezout pour les entiers. Mais c'est surtout Pierre de Fermat qui se consacra à une étude appronfondie des nombres. Contrairement à Diophante qui raisonner sur les rationnels positifs, il travaille sur $\mathbb{Z}$. Son intérêt se porte sur la divisibilité et les nombres premiers. Ses résultats les plus célèbres, démontrés souvent par les mathématiciens du XVIIIème siècle sont

• le petit théorème de Fermat : Si p est premier, $a^p - a$ est divisible par p.

• l'équation de Pell-Fermat : si A n'est pas un carré parfait $x^2 + Ay^2 = 1$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}$.

• les nombres de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ qu'il croyait tous premiers (Euler prouva que F_5 ne l'est pas).

• le grand théorème de Fermat : "pour $n \geqslant 3$, $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale dans $\mathbb{Z}$".

Euler reprendra et généralisera le petit théorème de Fermat. Lagrange terminera la résolution de l'équation de Pell-Fermat. Mais c'est Gauss qui en 1801 unifie de nombreux résultats dans *Disquisitiones arithmeticae* et contribue ainsi à créer une nouvelle discipline avec ses méthodes propres. La fin du siècle dernier fut l'occasion d'une étude de la répartition des nombres premiers : Gauss conjectura que si π_n désigne le nombres de nombres premiers dans $[\![1, n]\!]$, $\pi_n \sim \frac{n}{\ln n}$ au voisinage de $+\infty$. Riemann et Tchebycheff essayèrent en vain de démontrer la conjecture, mais leurs travaux permirent à de la Vallée Poussin et Hadamard d'y parvenir en 1896 (par l'utilisation notamment de l'analyse complexe).

I. PGCD et PPCM

1) Une approche élémentaire :

Sur $\mathbb{N}$, la divisibilité est un ordre partiel :

$$a|b \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(b = ak)$$

On a $0 = \max \mathbb{N}$ et si $b \neq 0$

$$a|b \Longrightarrow a \leqslant b$$

Qu'est que la borne inférieure de $\{a, b\}$? A priori, cette borne n'existe pas forcément. d est la borne inférieure de $\{a, b\}$ si et seulement si d est un minorant i.e. d divise a et b et d est le plus grand de tous les minorants i.e.

$$c|a \text{ et } c|b \Longrightarrow c|d$$

Dans ces conditions, d est appelé *plus grand commun diviseur.* Si a et b sont non nuls, les diviseurs sont non nuls, et finalement, d est aussi le plus grand diviseur commun au sens de $\leqslant$ l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$.

Qu'est que la borne supérieure de $\{a, b\}$? A priori, cette borne n'existe pas forcément. m est la borne supérieure de $\{a, b\}$ si et seulement si m est un majorant i.e. m est multiple de a et b et m est le plus petit de tous les majorants i.e.

$$a|n \text{ et } b|n \Longrightarrow m|n$$

Dans ces conditions, m est appelé *plus petit commun multiple.* C'est aussi le plus petit commun multiple au sens de l'ordre naturel.

De manière générale, on définit le PGCD et le PPCM par

Définition 91 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{N}$.*

Sous réserve d'existence, on appelle PGCD des a_i *la borne inférieure des a_i (au sens de la divisibilité). Elle est notée* $\operatorname{pgcd}_{i\in I} a_i$.

Sous réserve d'existence, on appelle PPCM des a_i *la borne supérieure des a_i (au sens de la divisibilité). Elle est notée* $\operatorname{ppcm}_{i\in I} a_i$.

Définition 92 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{Z}$. On appelle* PGDC des a_i *le PGCD des $|a_i|$.*

On appelle PPCM des a_i *le PPCM des $|a_i|$.*

Remarque : En général, dans un anneau A, on peut définir la divisibilité comme dans $\mathbb{Z}$. Comme la divisibilité est "presque" un ordre, on peut introduire de manière analogue un PGCD et un PPCM défini à un inversible près... On en verra une illustration avec les polynômes de $K[X]$.

2) Existence du PGCD et PPCM :

Théorème 29 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers.*

Alors le PGCD des a_i existe et c'est le générateur positif d de l'idéal principal

$$d\mathbb{Z} = \sum_{i\in I} a_i\mathbb{Z}$$

De même le PPCM des a_i existe et c'est le générateur positif m de l'idéal principal

$$m\mathbb{Z} = \bigcap_{i\in I} a_i\mathbb{Z}$$

Remarque : Ce qui assure l'existence ici du PGCD et du PPCM c'est le caractère principal de l'anneau $\mathbb{Z}$.
Exemple : 4 est le PGCD de 8 et 12 puisque $4\mathbb{Z} = 8\mathbb{Z} + 12\mathbb{Z}$.

Proposition 69 (Identité de Bezout) *Soient a_1,...,a_n des entiers, $d = \mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. Alors, il existe k_1,...,k_n dans $\mathbb{Z}$ tels que*

$$d = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$$

Remarque : Que devient cette proposition pour une famille infinie $(a_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{Z}$?

3) Conséquences des propriétés des ordres :

Proposition 70 *1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{Z}$, $J \subset I$. Alors*

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}\, a_i \mid \mathrm{pgcd}_{i\in J}\, a_i$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in J} a_i \mid \operatorname*{ppcm}_{i\in I} a_i$$

2. Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de $\mathbb{Z}$ telles que pour tout i, a_i divise b_i. Alors

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}\, a_i \mid \mathrm{pgcd}_{i\in I}\, b_i$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I} a_i \mid \operatorname*{ppcm}_{i\in I} b_i$$

3. Si $(J_k)_{k\in K}$ est un recouvrement de l'ensemble I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}\, a_i = \mathrm{pgcd}_{k\in K}(\mathrm{pgcd}_{j\in J_k}\, a_j)$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I} a_i = \operatorname*{ppcm}_{k\in K}(\operatorname*{ppcm}_{j\in J_k} a_j)$$

4) Homogénéïté et relation liant PGCD et PPCM

Proposition 71 *Soient $I \neq \emptyset$, $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers, et $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda\, \mathrm{pgcd}_{i\in I}(a_i)$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \operatorname*{ppcm}_{i\in I}(a_i)$$

Réécrire cette proposition dans le cas $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Remarque : Si pour tout i, $0 \leqslant \delta$ divise a_i, alors

$$\mathrm{pgcd}(\frac{a_i}{\delta}) = \frac{\mathrm{pgcd}(a_i)}{\delta}$$

$$\mathrm{ppcm}(\frac{a_i}{\delta}) = \frac{\mathrm{ppcm}(a_i)}{\delta}$$

Théorème 30 *Soient m et n deux entiers positifs. Alors*

$$\mathrm{pgcd}(m, n)\ \mathrm{ppcm}(m, n) = mn$$

Remarque : Ainsi, le calcul du PPCM se réduit à celui du PGCD (utile pour le calcul pratique).

II. Nombres premiers entre eux

1) Le théorème de Bezout :

Définition 93 *Soit une famille d'entiers $(a_i)_{i\in I}$. Les a_i sont dits* premiers entre eux *si*

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}\, a_i = 1$$

Remarque : • Les a_i sont premiers entre eux si et seulement si 1 et -1 sont les uniques diviseurs communs aux a_i.

• Si $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$, $\mathrm{ppcm}(a,b)=|ab|$.

• Soit $d=\mathrm{pgcd}_{i\in I}(a_i)$. Alors les a_i/d sont premiers entre eux.

Théorème 31 (Théorème de Bezout) *Soient a_1,..., a_n des entiers.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) les a_i sont premiers entre eux ;
(ii) il existe n entiers k_1, k_2,..., k_n tels que

$$1 = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$$

Remarque : L'algorithme d'Euclide établit si deux entiers sont premiers entre eux (voir **IV.**).
Probleme : Quels sont les coefficients k_i intervenant dans l'identité de Bezout ? (voir **IV.**)

2) Théorème de Gauss :

Proposition 72 *Si n est premier avec a et avec b, alors n est premier avec le produit ab.*

Remarque : Si pour tout i, n est premier avec a_i, n est aussi premier avec le produit $a_1a_2\ldots a_n$.
Remarque : Soient a_1,..., a_n des entiers. Si pour $i\neq j$, $\mathrm{pgcd}(a_i,a_j)=1$ alors

$$\mathop{\mathrm{ppcm}}_{i\in I} a_i = |a_1a_2\ldots a_n|$$

Théorème 32 (Théorème de Gauss) *Si n divise ab et si n est premier avec a, alors n divise b.*

3) Forme réduite d'un rationnel :

Définition-Proposition 2 *Soit $q\in\mathbb{Q}^*$.*
1. Il existe $(n,p)\in\mathbb{Z}^{*2}$ tel que $q=\frac{n}{p}$ et $\mathrm{pgcd}(n,p)=1$. Ce couple (n,p) constitue une forme réduite *de q. On dit aussi que $q=\frac{n}{p}$ est écrit sous sa* forme réduite.
2. Si $q=\frac{n'}{p'}$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{Z}^*$ tel que

$$n'=\lambda n \text{ et } p'=\lambda p$$

Question : Que dire si $\frac{n}{p}=\frac{n'}{p'}$ sont deux formes réduites ?

4) Applications aux groupes :

Théorème 33 *Soient $n>0$ et $k\in\mathbb{Z}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\bar{k}$ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
(ii) $\bar{k}$ régulier dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
(iii) k est premier avec n.

Proposition 73 *Soient G un groupe cyclique d'ordre n engendré par a et $k\in\mathbb{Z}$.*
Alors a^k engendre aussi G si et seulement si k est premier avec n.

III. Nombres premiers

1) Généralités :

Définition 94 *Un* nombre premier *est un élément p de $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ qui n'admet comme diviseurs positifs que 1 et p.*

Exemple : 2, 3, 5, 7,...
Remarque : Dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, les nombres premiers sont les éléments minimaux pour l'ordre induit par la divisibilité.

Proposition 74 *Soit $p > 1$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) p est premier ;
(ii) p ne peut s'écrire comme un produit kl où $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ et $k < p$, $l < p$.

2) Le lemme d'Euclide :

Proposition 75 *Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Si $p|a$, $\text{pgcd}(p,a) = p$ et sinon, p est premier avec a.*

Proposition 76 (Lemme d'Euclide) *. Soit p un nombre premier divisant un produit ab. Alors p divise a ou p divise b.*

3) Décomposition en facteurs premiers :

Notation : $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des nombres premiers.

Théorème 34 (Théorème fondamental de l'Arithmétique) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une unique famille $(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}$ de $\mathbb{N}$, à support fini pour + telle que*

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$$

C'est la décomposition de n en facteurs premiers*.*

Notation : α_p est noté souvent $\nu_p(n)$ et appelé *valuation p-adique de n.*
Remarque : Si $n > 2$, n est divisible par un nombre premier.

Corollaire 16 *$\mathcal{P}$ est infini.*

Corollaire 17 *1. Dire que $\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$ divise $\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\beta_p}$ signifie que $\alpha_p \leqslant \beta_p$ pour tout nombre premier p.*
2. Soient $m = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$ et $n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\beta_p}$ deux entiers. Alors

$$\text{pgcd}(m,n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\inf(\alpha_p,\beta_p)} \text{ et } \text{ppcm}(m,n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\sup(\alpha_p,\beta_p)}$$

Exercice : Réécrire 2. pour une famille d'entiers quelconque.

4) Nombres premiers et anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

Proposition 77 *Si G est un groupe d'ordre fini p premier, alors G est cyclique et tout élément distincts de 1 l'engendre.*

Proposition 78 *Soit $p \geqslant 2$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps ;
(ii) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau intègre ;
(iii) p est un nombre premier.

Corollaire 18 (Petit théorème de Fermat) *Soient p un nombre premier et a un entier non divisible par p. Alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.*

Remarque : Modulo p (p premier), $a^p \equiv a$.

Corollaire 19 *La caractéristique d'un anneau intègre ou d'un corps est soit nulle soit égale à un nombre premier.*

5) Compléments :

Théorème 35 (Théorème des nombres premiers) *Notons π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n \geqslant 0$.*
Alors $\pi_n \sim \frac{n}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 36 (Postulat de Bertrand) *Soit $n > 0$. Il existe un nombre premier dans l'intervalle $]n, 2n]$.*

Ce résultat fut prouvé en 1848 par Tchebycheff.

IV. Méthodes algorithmiques en Arithmétique

1) Problème du calcul du PGCD : l'algorithme d'Euclide

La formule donnée au **III.3)** n'est pas vraiment exploitable dans la pratique. Il existe un algorithme bien plus efficace basée sur la division euclidienne. Il s'appuie sur la constation suivante :

Proposition 79 *Soient a et b deux entiers positif, $b \neq 0$. Notons r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors*

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$$

Supposons $a > b$. Notons $a_0 = a$ et $a_1 = b$ et définissons par récurrence pour $n \geqslant 2$ la suite a_n de la manière suivante : si $a_{n-1} = 0$ alors $a_n = 0$; sinon a_n est le reste de la division euclidienne de a_{n-2} par a_{n-1}.

Il est clair si $a_n \neq 0$, $a_n < a_{n-1}$. Si pour tout n, $a_n \neq 0$, la suite de $\mathbb{N}$ est strictement décroissante : impossible !

Soit donc N le plus petit entier tel que $a_N = 0$. Si $n \geqslant N$, $a_n = 0$ et si $n < N$, $a_n > 0$. De plus

$$\mathrm{pgcd}(a_0, a_1) = \mathrm{pgcd}(a_1, a_2) = \ldots = \mathrm{pgcd}(a_{N-2}, a_{N-1}) = \mathrm{pgcd}(a_{N-1}, 0)$$

Or, $\mathrm{pgcd}(a_{N-1}, 0) = a_{N-1}$. Ainsi $a_{N-1} = \mathrm{pgcd}(a_0, a_1) = \mathrm{pgcd}(a, b)$
Remarque : Description de l'algorithme.

2) Sur la décomposition en facteurs premiers :

Il n'existe pas de procédé pratique rapide et sûr d'obtenir pour un entier n sa décomposition en facteurs premiers. La méthode qui consiste à calculer les valuations p-adique par division successive est extrèmement lourde.

3) Sur l'identité de Bezout :

Soient $a_1 < a_0$ deux entiers positifs. D'après le théorème de Bezout, il existe k et l deux entiers tels que $d = \text{pgcd}(a_0, a_1) = ka_0 + la_1$. Comment calculer k et l ?

Une première remarque s'impose : k et l ne sont pas uniques. dem

On peut les obtenir à l'aide des relations qui constituent l'algorithme d'Euclide. Reprenons les notations du **1)** et supposons $N = 5$. L'algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 a_1 + a_2 \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3 \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4 \\ a_3 &= q_3 a_4 + 0 \end{aligned}$$

Alors ex

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 - q_2 a_3 \\ &= a_0 - q_0 a_1 - q_2(a_1 - q_1 a_2) \\ &= a_0 - (q_0 + q_2) a_1 + q_2 q_1 a_2 \\ &= a_0 - (q_0 + q_2) a_1 + q_2 q_1 (a_0 - q_0 a_1) \\ &= (1 + q_1 q_2) a_0 - (q_0 + q_2 + q_0 q_1 q_2) a_1 \end{aligned}$$

D'où $k = (1 + q_1 q_2)$ et $l = q_0 + q_2 + q_0 q_1 q_2$.
Application : Calcul des inverses dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Equations diophantiennes (traiter $1274x + 275y = 1$).

4) Exponentiation rapide :

Calcul de l'inverse grace au petit théorème de Fermat. Exponentiation rapide.

Chapitre 6

Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$

Au début du XIXème siècle, commence une réforme de l'Analyse initiée par les travaux de Bolzano et Cauchy qui concentrent un effort de rigueur. Weierstrass va pousser cette logique plus loin et réduire la part de l'intuition dans les raisonnements mathématiques.

Weierstrass batit son Analyse sur le "nombre". Or encore en cette moitié de XIXème siècle, une théorie des nombres réels fait toujours défaut. Depuis Euclide, qui dans son livre V des éléments d'Euclide sur les proportions avait tenté de donner un statut au grandeur incommensurable, aucun besion de ce coté là ne s'étaient fait sentir. En 1863, Weierstrass publie donc sa théorie des nombres réels. En fait, ce travail n'est pas isolé puisque des théories sur les nombres irrationnels sont exposées par Cantor, Heine et surtout Dedekind qui dès 1858, à l'aide des coupures donnent une bonne idée de ce que sont les réels.

I. Le corps ordonné $\mathbb{Q}$

1) L'ordre sur $\mathbb{Q}$:

Définition-Proposition 3 *Soit $q = \frac{a}{b}$. On dit que q est* positif ou nul *si $ab \geqslant 0$ i.e. si a et b sont des entiers de même signe. On définit sur $\mathbb{Q}$ l'ordre naturel en posant :*

$$q \leqslant q' \iff q' - q \textit{ positif ou nul}$$

Cet ordre est total et prolonge celui de $\mathbb{Z}$.

Notation : on note $q < q'$ si $q \leqslant q'$ et $q \neq q'$

2) Propriétés additives et multiplicatives :

Proposition 80 *Soit $(a, x, y) \in \mathbb{Q}^3$*

1. Si $x \leqslant y$, $x + a \leqslant y + a$.

2. Si x et y sont positifs ou nuls, $xy \geqslant 0$.

Définition 95 *Un corps commutatif K totalement ordonné vérifiant pour tout $(a, x, y) \in K^3$: 1. Si $x \leqslant y$, $x + a \leqslant y + a$.*

2. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $xy \geqslant 0$.

est appelé corps ordonné.

Notation : $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$...

3) Les insuffisances de $\mathbb{Q}$:

i Insuffisances algébriques :

$\mathbb{Q}$ n'est pas le bon domaine pour résoudre la plupart des équations algébriques : $x^2 = -1$, $x^2+x+1=0$... En géométrie, dans un triangle isocèle rectangle dont les cotés à angle droit sont de longueur 1, l'hypothénuse a une longueur vérifiant $l^2 = 1^2+1^2 = 2$! l ne peut être un rationnel.

Ces insuffisances algébriques et géométriques qui conduisent à introduire des corps "plus gros" ne sont pas celles qui vont retenir notre attention. Nous allons plutôt essayer de contourner celles relatives à l'ordre et celles relatives à la topologie.

ii Insuffisances relatives à l'ordre :

On pourrait s'attendre à ce qu'une partie majorée admette une borne supérieure. Or ce n'est pas le cas : l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}, x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \leqslant 2\}$ ne possède une borne supérieure.

iii Insuffisances topologiques :

Nous verrons plus tard ce que sont des suites convergentes. Sans entrer dans les détails, nous comprenons assez bien intuitivement ce que veut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$.

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que les termes u_n pour $n \geqslant N$ sont tous distants d'au plus ε. On serait en droit d'espérer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Malheureusement, ce n'est pas le cas. La suite

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

en fournit un contre-exemple.

Cette insuffisance topologique est en fait équivalente à l'insuffisance relative à l'ordre. Elle sera réglée lorsque nous aurons à notre disposition un surcorps ordonné de $\mathbb{Q}$ qui vérifie l'*axiome de la borne supérieure* i.e. "toute partie non vide majorée admet une borne supérieure".

II. L'axiome de la borne supérieure

1) Existence de $\mathbb{R}$:

Théorème 37 (existence de $\mathbb{R}$) *Il existe un corps ordonné $\mathbb{R}$, surcorps de $\mathbb{Q}$ dont l'ordre prolonge celui de $\mathbb{Q}$ et vérifiant la propriété suivante (appelée* axiome de la borne supérieure*) : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Définition 96 *Le corps $\mathbb{R}$ est appelé* corps des nombres réels*.*

Théorème 38 (Unicité de $\mathbb{R}$) *Soit K un corps ordonné, surcorps de $\mathbb{Q}$. On suppose que l'ordre de K prolonge celui de $\mathbb{Q}$ et qu'il vérifie l'axiome de la borne supérieure. Alors, il existe un isomorphisme de corps strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur K.*

Remarque : L'axiome de la borne supérieure est donc une propriété caractéristique de $\mathbb{R}$

Rappel : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. L'ordre de $\mathbb{R}$ est total et prolonge celui de $\mathbb{Q}$. Pour tout $(a,x,y) \in \mathbb{R}^3$: 1. Si $x \leqslant y$, $x+a \leqslant y+a$.

2. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $xy \geqslant 0$.

2) Propriétés additives :

Les éléments considérés dans la suite de ce paragraphe sont des réels.

Proposition 81 *Si* $a \leqslant x$ *et* $b \leqslant y$*, alors* $a + x \leqslant b + y$

Remarque : Si $a_i \leqslant b_i$, $\sum_i a_i \leqslant \sum_i b_i$. De plus, s'il existe un i_0 tel que $a_{i_0} < b_{i_0}$, alors $\sum_i a_i < \sum_i b_i$. Contraposée.

Si les $a_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, les a_i sont nuls.

3) Propriétés multiplicatives :

Remarque : $x \geqslant 0 \Longrightarrow -x \leqslant 0$ et $x \leqslant 0 \Longrightarrow -x \geqslant 0$.

Proposition 82 *1. On a l'équivalence suivante :*

$$xy \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont même signe}$$

$$xy \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de signe contraire}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$*,* x^2 *est positif ou nul.*

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$*. Alors*

$$x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$$

$$x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0$$

Remarque : $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe. De même $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Proposition 83 *1. Soient* $0 \leqslant a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant x \leqslant y$*. Alors* $ax \leqslant by$*.*

2. Si $0 < x \leqslant y$*,* $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

ATTENTION ! Pour manier des inégalités comme dans le 1., on veille à vérifier que les réels en présence sont tous bien positifs.

4) Valeur absolue :

Définition 97 *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On appelle* valeur absolue de x *le rationnel* $|x| = \max(x, -x)$*.*

Remarque : Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$.

Proposition 84 *On a*

1. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Remarque : $|\sum_i x_i| \leqslant \sum_i |x_i|$. Si $x \neq 0$, $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$ et $|x^n| = |x|^n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Définition 98 *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$ *; La* distance de x à y *est* $d(x, y) = |x - y| = |y - x|$*.*

Corollaire 20 *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Alors :*

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

5) Propriétés élémentaires des bornes :

Proposition 85 *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Remarque : Si F non vide minorée, $\sup(-F) = -\inf F$. Si F non vide majorée, $\inf(-F) = \sup F$.

Proposition 86 *Soient F une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $a = \sup F$;
(ii) a majore F et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in F$ tel que $a - \varepsilon < x$.

Proposition 87 *Soient F une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $a = \inf F$;
(ii) a minore F et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in F$ tel que $x < a + \varepsilon$.

Remarque : DESSIN !

Proposition 88 *Soit F une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.*
1. $\sup_{x\in F}(a + x) = a + \sup_{x\in F}(x)$.
2 Si $a > 0$, $\sup_{x\in F}(ax) = a \sup_{x\in F}(x)$. Si $a < 0$, $\inf_{x\in F}(ax) = a \sup_{x\in F}(x)$.

Exercice : Donner une version analogue avec F minorée.

6) Signe de $ax^2 + bx + c$:

Rappel de la mise sous forme canonique et étude du signe, tableau de variations.

III. Axiome d'Archimède, partie entière

1) L'axiome d'Archimède :

Théorème 39 (Axiome d'Archimède) *$\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.*

Corollaire 21 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

2) Partie entière :

Définition-Proposition 4 *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique couple $(n, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ tel que $x = n + b$ avec $0 \leqslant b < 1$. n est appelé* partie entière de *x et est noté* $\mathrm{E}(x)$.

Remarque : $x - \mathrm{E}(x)$ est la partie décimale de x.

Proposition 89 *1. Si $x \in \mathbb{R}$:*

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x \leqslant \mathrm{E}(x+1) \text{ et } x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$$

2. $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $x = \mathrm{E}(x) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{E}(x + p) = \mathrm{E}(x) + p$.

• Graphe.
Exercice : Calculer $\mathrm{E}(\frac{a}{b})$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

3) Congruence modulo a :

Rappel : Soit $a > 0$. La congruence modulo a dans $\mathbb{R}$ est définie par

$$x \equiv y \pmod{a} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + ka \iff y - x \in a\mathbb{Z}.$$

C'est la congruence modulo le sous-groupe $a\mathbb{Z}$. La congruence est compatible avec $+$. L'ensemble quotient est un groupe pour l'addition quotient noté $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$. Pour $a = 2\pi$, on retrouve les angles.

Proposition 90 *Soit $a > 0$ un nombre réel et $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $pa \leqslant x < (p+1)a$.*

Exercice : Soit $a > 0$ un nombre réel et $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $pa < x \leqslant (p+1)a$.

Corollaire 22 *Soit $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $\theta_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\theta \equiv \theta_0 \pmod{a}$;*
2. *$\alpha \leqslant \theta_0 < \alpha + a$.*

Remarque : On peut remplacer le point 2 par $\alpha < \theta_0 \leqslant \alpha + a$.
Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe un unique θ_0 vérfiant

1. $\theta \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$;
2. $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$ (resp. $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$).

4) Parties denses de $\mathbb{R}$

Définition 99 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
A est dense *dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que*

$$x - \varepsilon \leqslant a \leqslant x + \varepsilon$$

Théorème 40 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Son complémentaire $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 100 *On appelle* nombre irrationnel *tout nombre de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Corollaire 23 *Entre deux réels distincts, il existe un nombre rationnel et un nombre irrationnel.*

Définition 101 *Soit $A \subset B \subset \mathbb{R}$. On dira que A est* dense dans *B si pour tout $x \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que*

$$x - \varepsilon \leqslant a \leqslant x + \varepsilon$$

IV. Intervalles de $\mathbb{R}$

1) La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$:

Définition-Proposition 5 *Soient $+\infty$ et $-\infty$ deux éléments distints n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Posons $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre suivant : $x \leqslant y$ dès que $x = -\infty$, ou $y = +\infty$, ou $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x \leqslant y$. Cet ordre est total et prolonge celui de $\mathbb{R}$.*
$\overline{\mathbb{R}}$ est appelé droite numérique achevée.

ATTENTION ! $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas un corps !

Proposition 91 *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.*

Exemple : $\sup \emptyset = -\infty$, $\sup \mathbb{R} = +\infty$...
Remarque : • Soit $F \subset \mathbb{R}$, majorée non vide. Alors la borne supérieure est la même que l'on considère F comme partie de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$.

• $\sup F = +\infty$ signifie que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $x \in F$ tel que $x > A$.

2) Intervalles :

Définition 102 *Soit* $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. *Si* $a \leqslant b$, *on note*

$$[a, b] = [b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$]a, b] = [b, a[= \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ a < x \leqslant b\}$$

$$[a, b[=]b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leqslant x < b\}$$

$$]a, b[=]b, a[= \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ a < x < b\}$$

$[a, b]$ *est appelé* intervalle fermé d'extrémités a et b.
$]a, b[$ *est appelé* intervalle ouvert d'extrémités a et b.
$[a, b[$ *est appelé* intervalle semi-ouvert à gauche d'extrémités a et b.
$]a, b]$ *est appelé* intervalle semi-ouvert à droite d'extrémités a et b.

Remarque : Si I est non vide d'extrémités a et b ($a \leqslant b$), $\sup I = b$ et $\inf I = a$.
Exercice : Soit $a < b$, I un intervalle d'extrémités a et b. Montrer que $\sup\{|x-y|, (x, y) \in I^2\} = b-a$.

Théorème 41 *Soit* I *une partie de* $\mathbb{R}$.
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) I *est un intervalle ;*
(ii) pour tout α, β *dans* I, $[\alpha, \beta] \subset I$.

Proposition 92 *Soit* $(I_k)_{k\in K}$ *une famille d'intervalles de* $\mathbb{R}$.
1. $\bigcap_{k\in K} I_k$ *est un intervalle.*
2. *Si* $\bigcap_{k\in K} I_k$ *est non vide,* $\bigcup_{k\in K} I_k$ *est un intervalle.*

3) Racines n-ième :

Théorème 42 *Soient* $a \in \mathbb{R}_+$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Il existe un unique* $b \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $b^n = a$.

Définition 103 *L'élément* b *défini dans le théorème précédent s'appelle la* racine n-ième de a *et est noté* $\sqrt[n]{a}$. *Si* $n = 2$, *on parle plutot de* racine carrée, *et si* $n = 3$, *de* racine cubique.

Remarque : $\sqrt{x^2} = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$.
Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation en x $x^2 = a$ ($a \in \mathbb{R}$).

Proposition 93 *Soient* a *et* b *des réels positifs ou nuls,* $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
2. *Si* $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Remarque : $\sqrt[n]{\ }$ est un isomorphisme croissant du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, l'isomorphisme réciproque étant $x \longmapsto x^n$.

Proposition 94 *Soient* p *un nombre premier,* $n > 1$. *Alors* $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

4) Étude du trinôme du second degré :

Dans $\mathbb{R}$, les carrés sont positifs et réciproquement, un réel positif est un carré.
On en déduit l'inégalité

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|a|.|b|$$

Si $a > 0$ et $b > 0$, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.
Par exemple $x + 1/x \geqslant 2$, pour $x > 0$.

V. Complément : une construction de $\mathbb{R}$

1) Les sections commençantes de $\mathbb{Q}$:

Lemme 4 *$\mathbb{Q}$ est archimédien : si $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $bn > a$. En particulier, pour tout $q > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < q$.*

Définition 104 *On appelle* section commençante ouverte de $\mathbb{Q}$ *toute partie non vide I de $\mathbb{Q}$, $I \neq \mathbb{Q}$ telle que pour tout $x \in I$*

$$(\forall y \in \mathbb{Q}) \ \ (y \leqslant x \Longrightarrow y \in I)$$

et il existe $z \in I$ avec $z > x$.

Exemple : $I = \{y \in \mathbb{Q}, y < x\}$ est une section commençante ouverte dite *rationnelle*. Nous la noterons I_x. Toute les sections commençantes ouvertes ne sont pas rationnelles : $I = \mathbb{Q}_- \cup \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ dem

Notons E l'ensembles des sections commençantes ouvertes (E est une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$).

Lemme 5 *$i : x \in \mathbb{Q} \longmapsto I_x \in E$ est une injection.*

Ainsi, nous pouvons considérer $\mathbb{Q}$ comme une partie de E.

Définition 105 *On définit sur E la relation binaire*

$$I \leqslant J \Longleftrightarrow I \subset J$$

$\leqslant$ est une relation d'ordre (car c'est la restriction de l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$) .

Remarque : $I \geqslant I_0 = 0$ si et seulement si $\mathbb{Q}_-^* \subset I$.

Lemme 6 *$(E, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné, et $\leqslant$ prolonge l'ordre de $\mathbb{Q}$.*

2) Opérations de E :

Soient I et J deux éléments de E. On définit leur somme par

$$I + J = \{x + y \in \mathbb{Q}, \ \ (x, y) \in I \times J\}$$

Alors $I + J$ est une section commençante ouverte de $\mathbb{Q}$.

Lemme 7 *$(E, +)$ est un groupe abélien et $+$ prolonge l'addition de $\mathbb{Q}$ i.e. $I_x + I_y = I_{x+y}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.*

Supposons $I \geqslant 0$ et $J \geqslant 0$. On définit alors le produit de I et J par

$$IJ = \{xy \in \mathbb{Q},\ \ (x, y) \in I \times J \text{ et } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}_-^*$$

Si $I \geqslant 0$ et $J < 0$, on pose $IJ = I(-J)$; si $J \geqslant 0$ et $I < 0$, on pose $IJ = (-I)J$; enfin si $I < 0$ et $J < 0$, on pose $IJ = (-I)(-J)$.
Exercice : Exprimer I^{-1}.

Lemme 8 *$(E, +, \times)$ est un corps commutatif. De plus, $\times$ prolonge la multiplication de $\mathbb{Q}$. Ainsi, E est un surcorps de $\mathbb{Q}$.*

3) Définition du corps des nombres réels :

Le corps E muni de l'ordre $\leqslant$ défini en **1)** est un corps ordonné, i.e. il vérifie

Lemme 9 *Soit $(a, x, y) \in E^3$*
1. *Si $x \leqslant y$, $x + a \leqslant y + a$.*
2. *Si x et y sont positifs ou nuls, $xy \geqslant 0$.*

C'est ce corps ordonné qui va nous fournir le bon domaine pour faire de l'Analyse :

Définition 106 *Le corps ordonné $(E, +, \times, \leqslant)$ est appelé* corps des nombres réels *et est noté* $\mathbb{R}$.

Théorème 43 *$\mathbb{R}$ est un surcorps de $\mathbb{Q}$. L'ordre de $\mathbb{R}$ prolonge celui de $\mathbb{Q}$.*

Chapitre 7

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

I. Construction de $\mathbb{C}$

1) Insuffisance algébrique de $\mathbb{R}$:

Bien que $\mathbb{R}$ possède des propriétés fondamentales sur $\mathbb{Q}$, il reste que certaines équations algébriques n'admettent pas de solutions : $x^2 + 1 = 0$ en est un exemple. C'est dans la volonté de résoudre ces équations algébriques que naît le besoin d'introduire les nombres complexes. Au XVIIIème siècle, D'Alembert est à l'origine de tentatives pour prouver qu'une équation polynômiale de degrè n admet exactement n racines, réelles ou "impossibles". Mais, c'est Gauss qui à la fin de ce siècle utilise le terme de nombres complexes et en donne une bonne interprétation géométrique.

2) Définition et premiers résultats :

Théorème 44 *On munit* $\mathbb{R}^2$ *de deux opérations* $+$ *et* $\times$ *définies par*

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Alors $\mathbb{R}^2$ *muni de ces deux opérations est un corps commutatif.*

Définition 107 $\mathbb{R}^2$ *muni des opérations décrites dans le théorème précédent est appelé* corps des nombres complexes *et est noté* $\mathbb{C}$.

Remarque : $(1,0)$ (resp. $(0,0)$) est l'élement neutre pour la multiplication (resp. l'addition) et l'inverse de $(a,b) \neq 0$ est $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}})$.
Remarque : $\mathbb{C}^*$ muni de $\times$ est un groupe commutatif.

Proposition 95 *1. L'application* $j : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x,0) \in \mathbb{C}$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}$ *sur un sous-corps de* $\mathbb{C}$.
2. Si on note $i = (0,1)$, *alors pour tout* $(x,y) \in \mathbb{C}$, $(x,y) = x + iy$. *De plus* $i^2 = -1$.

Remarque : Ainsi, $\mathbb{R}$ sera considéré comme un sous-corps de $\mathbb{C}$. Dans la suite nous noterons tout nombre complexe sous la forme $x + iy$ au lieu de (x,y).

Définition 108 *Si* $z = (x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$, x *est appelé* partie réelle de z *et* y partie imaginaire de z.

Notation : Si $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ (resp. $\Im(z)$) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) de z

3) Conjugaison :

Définition 109 *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle* conjugué de z, *le complexe* $\bar{z} = x - iy$.

Définition 110 *On dit qu'un complexe est un* imaginaire pur *s'il est de la forme iy ($y \in \mathbb{R}$). On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.*

Proposition 96 *Soit $z \in \mathbb{C}$.*
1. *On a $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.*
2. *$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.*

Proposition 97 *$z \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ est un isomorphisme involutif de $\mathbb{C}$ sur lui-même. En particulier, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$, $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{\overline{z}} = z$.*

Remarque : La conjugaison et l'identité sont les seuls isomorphismes de $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{R}$ invariant.

4) Module d'un nombre complexe :

Définition 111 *Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle* module de z *le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.*

Remarque : $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$). Si $z \in \mathbb{C}$ est dans $\mathbb{R}$, le module de z n'est autre que la valeur absolue de z.
Remarque : Interprétation géométrique de $|z|$, de $|z' - z|$.

Proposition 98 *1. $|\bar{z}| = z$;*
2. *$|\Re(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im(z)| \leqslant |z|$.*

Proposition 99 *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a*
1. *$|z| = 0 \iff z = 0$;*
2. *$|zz'| = |z||z'|$;*
3. *$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.*

Remarque : Si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $||z'| - |z|| \leqslant |z' + z| \leqslant |z| + |z'|$.

Corollaire 24 *Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.*

Proposition 100 *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :*

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(\overline{z}z')$$

5) Le cercle trigonométrique :

Définition 112 *Le cercle trigonométrique U est l'ensemble des nombres complexes de module* 1.

Remarque : Représentation graphique.

Proposition 101 *U est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$.*

6) Impossibilité d'ordonner $\mathbb{C}$:

Probleme : Peut-on trouver un ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{C}$ qui prolonge l'ordre de $\mathbb{R}$ et qui fasse de $\mathbb{C}$ un corps ordonné ?

La réponse est non : en effet, puisque le carré $i^2 < 0$!

II. Racine carrée d'un nombre complexe :

1) Existence et calcul de la racine carrée :

Définition 113 *Soient K un corps et $a \in K$. On dit que $x \in K$ est une racine carrée de a dans K si $x^2 = a$.*

Proposition 102 *Soit K un corps. Tout nombre de K admet au plus deux racines carrées.*

Remarque : On peut écrire les mêmes énoncés en remplaçant K par A anneau intègre.

Rappelons la situation dans $\mathbb{R}$:
- si $a = 0$, a n'admet qu'une seule racine carrée 0
- si $a < 0$, a n'admet pas de racine carrée.
- si $a > 0$, a admet exactement deux racines carrées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Théorème 45 *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors a possède exactement deux racines carrées qui sont opposées. Plus précisément, si $a = X + iY$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$ est une racine carrée de a si, et seulement si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ xy \textit{ du signe de } Y \end{array} \right.$$

Remarque : Si $a = X + iY$, le complexe $x_0 + iy_0$ est une racine carrée si

$$x_0 = \sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} \text{ et } y_0 = \varepsilon \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}$$

où $\varepsilon = 1$ si $Y \geqslant 0$, et $\varepsilon = -1$ sinon.

2) Equations du second degrè. Discriminant :

Soit K un corps de caractéristique différente de 2.

Il s'agit de résoudre une équation du type (E) $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des constantes de K et x l'inconnue.

Faisons apparaître le début d'un carré :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x) + c = a(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c$$

Définition 114 *On appelle* discriminant de (E) *le nombre $\delta = b^2 - 4ac$.*

L'équation (E) équivaut donc à

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ou encore

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\delta}{4a^2}$$

De deux choses l'une :
- ou bien $\frac{\delta}{4a^2}$ est un carré (i.e. δ est un carré) et alors (E) admet deux solutions

$$x = -\frac{b \pm d}{2a}$$

où d désigne une racine carrée de δ.
- ou bien $\frac{\delta}{4a^2}$ n'est pas un carré (i.e. δ n'est pas un carré) et alors (E) n'admet pas de solution.

3) Cas réel et cas complexe :

Examinons le cas $K = \mathbb{R}$:

Théorème 46 *Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. Notons δ le discriminant de (E). Alors :*
- *si $\delta < 0$, (E) n'admet aucune solution réelle ;*
- *si $\delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle $-\frac{b}{2a}$;*
- *si $\delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes*

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad et \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Enfin, traitons le cas $K = \mathbb{C}$:

Théorème 47 *Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. Notons δ le discriminant de (E) et d une racine carrée de ce discriminant.*

Alors (E) admet deux solutions complexes distinctes ou confondues données par

$$\frac{-b + d}{2a} \quad et \quad \frac{-b - d}{2a}$$

III. L'application exponentielle complexe

1) Présentation :

Si nous voulions correctement introduire la trigonométrie, nous ne pourrions éviter l'usage de théorèmes d'Analyse. Comme il apparaît plus efficace d'introduire $\mathbb{C}$ et la trigonométrie avant de se lancer dans l'Analyse, nous nous contenterons bien souvent dans ce paragraphe d'énoncés sans démonstration.

Le point de départ est l'étude d'une certaine fonction appelée *exponentielle complexe* définie par

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Théorème 48 $\exp$ *est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. De plus, si $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$.*

admis

Théorème 49 (Définition du nombre π) *Il existe un unique réel positif π tel que* $\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$ *i.e. pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\exp z = 1 \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ (z = 2i\pi n)$$

admis

Remarque : A 10^{-3} près, π vaut $3,141$.

Remarque : Comme l'exponentielle est un morphisme et comme un nombre n'a au plus que deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, $e^{i\pi} = -1$. Que vaut $e^{i\frac{\pi}{2}}$? On a $(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = e^{i\pi} = -1$. Donc $e^{i\frac{\pi}{2}} = \pm i$. En fait

Théorème 50

$$e^{i\pi} = -1 \quad et \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

2) Fonctions Cosinus et Sinus :

Dans la suite, U désignera le cercle trigonométrique.

Proposition 103 *L'application $\rho : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\theta} \in U$ est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.*

Corollaire 25 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, il existe un unique $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $e^{i\theta} = z$.*

Définition 115 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) \text{ et } \sin(x) = \Im(e^{ix})$$

Proposition 104 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Remarque : $\cos x \in [-1, 1]$ et $\sin x \in [-1, 1]$.

Proposition 105 (Formule d'Euler) *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Proposition 106 (Formule de Moivre) *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Remarque :

$$\cos nx = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} (-1)^p C_n^{2p} \cos^{n-2p} x \sin^2 px$$

et

$$\sin nx = \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} (-1)^p C_n^{2p+1} \cos^{n-2p-1} x \sin^{2p+1} x$$

Probleme : Exprimer $\sin^n x$ (ou $\cos^n x$) en fonction des $\sin kx$ et $\cos kx$ s'appelle "linéariser".
Exemple : $\cos^3 x = 1/4 \cos 3x + 3/4 \cos x$

3) Formules trigonométriques :

Proposition 107 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

Proposition 108 *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

1. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *et* $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
2. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *et* $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

Corollaire 26 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Proposition 109 *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On a*

1. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.
2. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.
3. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$.

Corollaire 27 *Soit* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. *On a :*

1. $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ *;*
2. $\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ *;*
3. $\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$ *;*
4. $\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$.

4) Graphe des fonctions $\cos$ et $\sin$:

Proposition 110 $\sin$ *restreinte à* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est une bijection croissante de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1,1]$.
admis $\cos$ *restreinte à* $[0,\pi]$ *est une bijection décroissante de* $[0,\pi]$ *sur* $[0,1]$.

On a $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, et $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.

Proposition 111 *On a*

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admis

Ainsi, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 112 *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x+2\pi) = \cos x$ *et* $\sin(x+2\pi) = \sin x$ *(on dit que* $\cos$ *et* $\sin$ *sont* 2π*-périodique).*
2. $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *et* $\sin(x+\pi) = -\sin x$.
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin x$.
4. $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ *et* $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.
5. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.

Remarque : Graphe de sin et cos.

Proposition 113 *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. On a :*

$$\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\cos x = \cos y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi})$$

$$\sin x = \sin y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi})$$

5) Fonctions Arccosinus et Arcsinus :

Définition 116 *La fonction* Arccosinus *est la bijection réciproque de* $\cos_{|[0,\pi]}$ *: c'est une bijection décroissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[0, \pi]$*.*

Remarque : Graphe de arccos

Soit $x \in [-1, +1]$. Alors

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi]$$

Définition 117 *La fonction* Arcsinus *est la bijection réciproque de* $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *: c'est une bijection croissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*.*

Remarque : Graphe de arcsin

Soit $x \in [-1, +1]$. Alors

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Proposition 114 *Soit* $x \in [-1, 1]$*.*

1. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ *;*
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ *;*
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$*.*

IV. Argument d'un nombre complexe :

1) Généralités :

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z/|z|$ est de module 1.

Corollaire 28 *Si* $z \in U$*, il existe donc un unique* $\theta \in [0, 2\pi[$ *(resp.* $]-\pi, \pi]$*) tel que* $z = e^{i\theta}$*.*
Si $z \in \mathbb{C}^*$*, il existe donc un unique* $\theta \in [0, 2\pi[$ *(resp.* $]-\pi, \pi]$*) tel que* $z = |z|e^{i\theta}$*.*

Définition 118 *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle* argument de z *l'antécédant* $\arg(z)$ *de* $\frac{z}{|z|} \in U$ *par* ρ. *Par abus de language, on appellera également argument de z tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que* $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. *De plus, si* $\theta \in]-\pi, \pi]$, θ *sera appelé* argument principal de z.

Remarque : Si $z \neq 0$, $z = |z|e^{i\theta}$ où $\theta \equiv \arg(z)$: c'est l'*écriture trigonométrique de z*. Réciproquement si $z = re^{i\theta}$, r est le module de z et θ l'argument de z. z s'écrit de manière unique $re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
Remarque : Représentation graphique.
Remarque : Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0$;
$z \in \mathbb{R}_-$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \pi$;
$z \in i\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \pi/2$;
$z \in i\mathbb{R}_-$ si et seulement si $\arg(z) \equiv -\pi/2$.

Proposition 115 *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$. On a modulo 2π*
1. $\arg zz' \equiv \arg z + \arg z'$;
2. $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'$;
3. $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Remarque : Interprétation ; définition de l'angle *bac*.

2) Suites géométriques :

Suites géométriques.
Calcul de $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $q^p + q^{p+1} + \cdots + q^n$.

3) Racines n-ième d'un nombre complexe :

Remarque : somme des termes d'une suites géométriques.

Définition 119 *Soit K un corps, $n \geqslant 2$. On dit que $b \in K$ est une racine n-ième de $a \in K$ si $b^n = a$.*

Remarque : Si $n = 2$, on parle de racine carrée, si $n = 3$, on parle de racine cubique...

Théorème 51 *Soit $n \geqslant 2$. Considérons U_n l'ensemble des racines n-ième de l'unité :*

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$$

Alors, U_n est un sous-groupe de U, cyclique d'ordre n engendré par $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$:

$$U_n = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{2.2.i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2.(n-1).i\pi}{n}}\right\}$$

Remarque : Représentation graphique.
Exemple : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine troisième de l'unité (dessin).
Remarque : Si $z \in U_n$, $\bar{z} \in U_n$.

Proposition 116 *Soit $n \geqslant 2$. Pour que $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ engendre U_n, il faut et il suffit que* $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$. *Dans ces conditions, on dit que $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une* racine primitive de l'unité.

Corollaire 29 *Soient $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, si $n \geqslant 2$, $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n-ième de z et z possède exactement n racines n-ième qui sont les $\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $0 \leqslant k < n$.*

Théorème 52 *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de l'unité. Si $\omega \neq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

En particulier, la somme des racines n-ième est nulle.

Exemple : $1 + j + j^2 = 0$.

4) Transformation de $a \cos x + b \sin x$:

Transformation de $a \cos + b \sin x$ en $\rho \cos(x + \varphi)$ à l'aide de l'écriture trigonométrique de $a + ib$.

V. Fonctions Tangente et Cotangente

1) Généralités :

Définition 120 *Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, on pose*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, on pose

$$\text{cotan} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Remarque : Valeurs de tan et cotan pour 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ et $\pi/2$.
Remarque : Lorsque "tout est bien défini", on a $\text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\text{cotan}(-x) = -\text{cotan}\, x$, $\tan(\pi/2 + x) = -\text{cotan}\, x$, $\tan(\pi/2 - x) = \text{cotan}\, x$, $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Proposition 117 *1. $x \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est une bijection croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.*

2. $x \in]0, \pi[\longmapsto \text{cotan}\, x \in \mathbb{R}$ est une bijection décroissante de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.

Graphe de tan et cotan.

Proposition 118 *Soit x et y dans $\mathbb{R} \backslash (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$. Alors :*

$$\tan x = 0 \Longleftrightarrow x \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\tan y = \tan x \Longleftrightarrow x \equiv y \pmod{\pi}$$

2) Formules :

Proposition 119 *Soit x dans $\mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Alors :*

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Proposition 120 *Soit $(x,y)\in\mathbb{R}$.*

1. Si tout est bien défini,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

2. Posons $t=\tan\frac{x}{2}$. Alors

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \textit{et}\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque :

$$\tan nx=\frac{\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}C_n^{2p+1}(-1)^p\tan^{2p+1}x}{\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}C_n^{2p}(-1)^p\tan^{2p}x}$$

3) Fonctions Arctangente et Arccotangente :

Définition 121 arctan *est la bijection réciproque de $x\in]-\pi/2,\pi/2[\longmapsto\tan x\in\mathbb{R}$.* arctan *est croissante.*

arccotan *est la bijection réciproque de $x\in]0,\pi[\longmapsto\operatorname{cotan}x\in\mathbb{R}$.* arccotan *est décroissante.*

Graphe de arctan et arccotan.

Remarque : Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\arctan x=y\Longleftrightarrow x=\tan y \text{ et } y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Proposition 121 *Soit $x\in\mathbb{R}$. On a*

1. $\arctan x+\operatorname{arccotan}x=\frac{\pi}{2}$;
2. $\arctan(-x)=-\arctan x$;
3. $\operatorname{arccotan}(-x)=\pi-\operatorname{arccotan}x$.

VI. Droites et cercles dans un plan

1) Génaraliés :

• Identification de $\mathcal{P}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Dualité vecteur-point. Notation $A + \overrightarrow{u}$.

• Repère cartésien, repère orthonormé.

• Identification d'un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$. Identification des points et des vecteurs. Défintion des angles orientés. Relation de Chasles.

• Expression du produit scalaire, du produit mixte, de la distance. Interprétation diverses. On a

$$\bar{u}v = u.v + i[u, v], \quad u.v = \|u\|\|v\| \cos\theta \quad \text{et} \quad [u, v] = \|u\|\|v\| \sin\theta,$$

où θ est l'angle orienté entre u et v.

• Droites : définition $(A + \mathbb{R}\overrightarrow{u})$, expression paramètrique. Segment $[A, B]$. Angle orienté de deux droites.

Il est admis que les notions de distances, d'angles (orientés ou non) sont indépendantes du repère orthonormé direct choisi.

Proposition 122 *Soit A, B, M trois points distincts de $\mathcal{P}$.*

1. *On a $AM + MB \geqslant AB$ et il y a égalité si, et seulement si $M \in [AB]$.*
2. *On a $AB \geqslant |AM - MB|$ et il y a égalité si, et seulement si $M \in (AB)\backslash(AB)$.*

2) Barycentres :

Definition d'un barycentre. Associativité du barycentre.

Identité de caractérisation.

Proposition 123 *Soit $A \neq B$.*

1. *La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.*
2. *Le segmet $[AB]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B.*

Corollaire 30 *Les médianes d'un triangles sont concourantes.*

3) Droites :

Equation cartésienne d'une droite.

Equation normale d'une droite. $x\cos\theta + y\sin\theta = p$. Interprétation de θ, p.

Intersection de deux droites. Système 2-2. Résolution avec des déterminants.

Distance d'un point à une droite. Expression à l'aide d'une équation cartésienne en RON.

Médiatrice. Les médiatrices d'un triangles sont concourantes.

4) Cercles :

Définition d'un cercle, d'un disque ouvert ou fermé.

Par trois points non alignés, passe un unique cercle appelé cercle circonscrit au triangle (ABC).

Equation cartésienne d'un cercle.

Lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Proposition 124 *Soit $\mathcal{C} = C(O, R)$ et $\mathcal{D}$ une droite, $d = d(O, \mathcal{D})$.*

1. *Si $d > R$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.*
2. *Si $d < R$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersections distincts.*
3. *Si $d = R$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est un singleton $\{M\}$: $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont dits* tangents *en M.*

Proposition 125 *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques de centre O et O' et de rayon R et R' respectivement.*

Si $|R'-R| < OO' < R+R'$, l'intersection de ces deux cercles est deux points : on dit que les cercles sont sécants.

Si $|R'-R| = OO'$ ou $OO' = R+R'$, l'intersection est réduite à un point et on dit que les cercles sont tangents.

Enfin, si $OO' < |R-R'|$ ou $OO' > R+R'$, l'intersection est vide.

Proposition 126 *Soit A, B, C trois points distincts non alignés.*

La position de M est uniquement déterminée par (AM, BM, CM).

VII. Isométries d'un plan euclidien orienté

On appelle transformation d'un plan $\mathcal{P}$ toute permutation F du plan $\mathcal{P}$. Elle s'identifie donc lorsqu'on prend un repère à une permutation de $\mathbb{C}$.

Définition d'une isométrie (conservation des distances).

1) Translations, homothéties :

- Définition des translations et des homothéties.
- Expression en complexes.
- Effet sur les distances et les angles orientés.
- Homothétie fondamentale du triangle.

Exercice : Montrer que l'ensemble des homothéties de rapport non nuls et des translations forment un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

Théorème 53 (Théorème de Thalès) *Soit D' et D' deux droites sécantes en O. On considère A et B deux points distincts de D et A' et B' deux points distincts de D', tous différents de O.*

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles si, et seulement si $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overrightarrow{OA'}}$. Dans ces conditions,

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overrightarrow{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

2) Rotations :

- Définition, réprésentation complexe.
- Effet sur les distances et les angles orientés.

3) Réflexions :

- Définition.
- Expression vectorielle du projeté de M sur $D = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{e}$, du symétrique.
- Effet sur les distances, les angles.

4) Décomposition des isométries :

Lemme 10 *Une isométrie qui fixe trois points non alignés est l'identité.*

Théorème 54 *Toute isométrie de $\mathcal{P}$ s'écrit comme produit d'au plus trois réflexions.*

Corollaire 31 *L'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries de $\mathcal{P}$ est un groupe pour la loi $\circ$.*

5) Expression analytique des isométries :

Théorème 55 *Soit F une isométrie de $\mathcal{P}$. Il existe alors $a \in \mathbb{C}$ de module 1 et $b \in \mathbb{C}$ tels que on ait F de la forme*

$$z \longmapsto az + b \quad ou \quad z \longmapsto a\bar{z} + b.$$

Dans le cas 1 : F est appelé déplacements *: il y a conservation des angles orientés.*

Dans le cas 2 : F est appelé antidéplacement *: les angles orientés sont changés en leur opposé.*

Remarque :

Proposition 127 *Un déplacement de $\mathcal{P}$ est une translation ou une rotation.*

Remarque : L'ensemble $\mathcal{D}$ des déplacements munis de la loi $\circ$ est un groupe.

6) Propriétés des isométrie :

Théorème 56 (Conservation du barycentre) *Soit G le barycentre des points $(M_i, \lambda\lambda_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, F une isométrie. Alors $F(G)$ est le barycentre des points $(F(M_i), \lambda_i)$.*

Exemple : Si f laisse globalement invariant un polygone, l'isobarycentre de ce polygone est un point fixe.

Proposition 128 *Soit $M \neq N$ dans $\mathcal{P}$, f une isométrie.*
1. *L'image de la droite (MN) par f est la droite $(f(M)f(N))$*
2. *L'image de $[MN]$ par f est $[f(M)f(N)]$.*
3. *L'image de $C(M, R)$ est $C(f(M), R)$.*

Remarque : Angle entre $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ pour f translation, f rotation.
Application : Soit S l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n cotés. On considère G (resp. G') l'ensemble des déplacements (resp. isométries) F telles que $F(S) \subset S$.

1. Montrer que G est un groupe cyclique de cardinal n pour $\circ$ dont on précisera les éléments.
2. Montrer que G' contient une réflexion S. En considérant $F \longmapsto F \circ S$, montrer que $\operatorname{Card} G' = 2n$.
3. En supposant que le polygone est centré en 0, donner l'expression complexe des éléments de G'.

7) Cercles et angles :

Proposition 129 (Angle au centre) *Soit A, B, M trois points distincts d'un cercle de centre O. On a*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}.$$

Corollaire 32 (Conditions de cocyclicité) *Soit A, B, C, D quatre points distincts. Ils sont cocycliques ou alignés si, et seulement si*

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}.$$

VIII. Similitudes d'un plan euclidien orienté

Définition d'une similitude (multiplication des distances par un réel $k > 0$).

1) Expression analytique des similitudes :

Théorème 57 *Une similitude de $\mathcal{P}$ est de la forme*

$$z \longmapsto az + b \quad \text{ou} \quad z \longmapsto a\bar{z} + b,$$

avec a non nul, $b \in \mathbb{C}$.

Le rapport de la similitude est $|a|$.

Dans le premier cas, on dit que la similitude est directe. Dans le second, on dit qu'elle est indirecte.

Remarque : Les similitudes sont bijectives. L'ensemble des similitudes est un groupe pour $\circ$. L'ensemble des similitudes directes est un groupe pour $\circ$.

Théorème 58 (Conservation du barycentre) *Soit G le barycentre des points $(M_i, \lambda\lambda_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, F une similitue. Alors $F(G)$ est le barycentre des points $(F(M_i), \lambda_i)$.*

Proposition 130 *Soit $M \neq N$ dans $\mathcal{P}$, f une similitude de rapport k.*

1. L'image de la droite (MN) par f est la droite $(f(M)f(N))$

2. L'image de $[MN]$ par f est $[f(M)f(N)]$.

3. L'image de $C(M, R)$ est $C(f(M), R)$.

2) Réduction des similitudes directes :

Proposition 131 *Soit $f : z \longmapsto az + b$ avec a non nul une similitude directe.*

1. Si $a = 1$, f est une translation.

2. Si $a \neq 1$, f possède un unique point fixe O appelé centre de la similitude. Si α est l'argument de a, appelé angle de la similitude, f s'écrit $f = h \circ r = r \circ h$, avec r la rotation de centre O et d'angle α et h l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

Remarque : si $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$, il s'agit d'une homothétie. Si $|a| = 1$, il s'agit d'une rotation.

Proposition 132 *Etant donnés deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de longueurs non nulles, il existe une unique similitude directe f transformant A en A' et B en B'. De plus son rapport est $A'B'/AB$ et si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, f n'est pas une translation et son angle est l'angle orienté entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.*

Conclusion

Cela termine notre présentation du corps des nombres complexes. Nous aurons l'occasion de voir par la suite le rôle fondamental de $\mathbb{C}$ dans les Mathématiques. Ce sera notamment le cas en Algèbre à travers le théorème de D'Alembert et en Géométrie (le plan complexe permet de transformer des problèmes géométriques en problèmes algébriques). Il faut également savoir que $\mathbb{C}$ sert également en Analyse dans le cadre de l'étude des fonctions holomorphes.

Partie B
Nombres réels. Suites

Chapitre 1

Suites

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $x \in \mathbb{K}$, $|x|$ sera respectivement la valeur absolue de x ou le module de x.

I. Suites convergentes

1) Limite d'une suite :

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x - l| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leqslant x \leqslant l + \varepsilon$$

Définition 122 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, $l \in K$.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus simplement u_n) converge vers l *si*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (|u_n - l| \leqslant \varepsilon)$$

On dit aussi que u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$. *On note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ou encore

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Interprétation : étant donné une distance ε arbitrairement petite, positive, pour n assez grand, u_n est à une distance de l inférieure ou égale à ε.
Remarque : Inversion des quantificateurs
Remarque : En fait, on peut définir la convergence d'une suite indexée sur une partie infinie de $\mathbb{N}$, par exemple sur $\mathbb{N}^*$...
Exemple : Les suites constantes convergent.

Définition 123 *Soit E un ensemble et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que cette suite est* stationnaire *s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.*

Remarque : Une suite stationnaire converge.

Proposition 133 *La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers* 0.

Exemple : $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[p]{n} = 0$.
Remarque : • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Si u_n converge vers $l \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (i.e. en étant considérée comme suite de $\mathbb{C}$), elle converge également dans $\mathbb{R}$.

• Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, c'est dire que $(u_n - l)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, ou encore que $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) Propriétés des suites convergentes :

Théorème 59 (Unicité de la limite) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, l et l' deux éléments de $\mathbb{K}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et vers l', alors $l = l'$.*

Remarque : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans le cas de la convergence, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 134 *Une suite convergente est bornée.*

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Proposition 135 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $l \in \mathbb{K}$. Alors, $|u_n|$ converge vers $|l|$.*

Proposition 136 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$, $l \in \mathbb{K}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.*
On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant v_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Proposition 137 *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n \in \mathbb{R}$ et $y_n \in \mathbb{R}$.*
Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans ces conditions, $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n$.

3) Convergence et ordre :

Nous allons considérer ici des suites réelles.

Proposition 138 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes respectivement vers l et m. On suppose que $l < m$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n < v_n$.*

Remarque : • Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.
• Si $l > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > l/2$.

Corollaire 33 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes respectivement vers l et m, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $l \leqslant m$.*

Théorème 60 (Théorème des gendarmes) *Soient trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$. Alors v_n converge vers l.

Exemple : $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^n}$ converge vers 0

Proposition 139 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée. Alors, il existe une suite de A qui converge vers $\sup A$.*

4) Cas des suites monotones :

Donnons maintenant un théorème fondamental sur les suites réelles :

Théorème 61 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Dans ces conditions, u_n converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple : ...

Théorème 62 (Théorème des suites adjacentes) *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$, $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. On suppose enfin que $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.*

Corollaire 34 (Théorème des segments emboités) *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ telle que $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \geqslant 0)$ et telle que la longueur de I_n converge vers 0. Alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

est réduit à un élément.

II. Suites tendant vers l'infini

1) Généralités :

Définition 124 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus simplement u_n)* tend vers $+\infty$ *si*

$$(\forall A \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (u_n \geqslant A)$$

On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

ou encore

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus simplement u_n) tend vers $-\infty$ *si*

$$(\forall A \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (u_n \leqslant A)$$

On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

ou encore

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Exemple : $u_n = n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective. Alors $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.

Proposition 140 *Si u_n tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*

2) Comparaison :

Proposition 141 *Si u_n tend vers $+\infty$ et si $u_n \leqslant v_n$, v_n converge aussi vers $+\infty$.*

Exemple : $\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sin n = +\infty$

Proposition 142 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. Il existe alors une suite de A qui tend vers $+\infty$.*

3) Cas des suites monotones :

Proposition 143 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée. Alors u_n tend vers $+\infty$.*

Conclusion : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, u_n converge, ou bien u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III. Opérations sur les limites

1) Opérations symboliques sur $\overline{\mathbb{R}}$:

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $a \neq -\infty$, $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$;
- Si $a \neq +\infty$, $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$;
- Si $a > 0$, $a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = +\infty$;
- Si $a < 0$, $a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = -\infty$;
- Si $a > 0$, $a \times (-\infty) = (-\infty) \times a = -\infty$;
- Si $a < 0$, $a \times (-\infty) = (-\infty) \times a = +\infty$.

On ne définit pas $+\infty.0$ ou $(-\infty) + (+\infty)$: ce sont ce qu'on appelle des *formes indéterminées.*

2) Somme et produit :

Proposition 144 *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$.*

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = m$ (l et m étant dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Alors, si ceci a un sens

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + m$$

Lemme 11 *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Proposition 145 *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$.*

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = m$ (l et m étant dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Alors, si ceci a un sens

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = lm$$

3) Inverse et quotient :

Proposition 146 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^*$ convergente vers $l \neq 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

Si u_n est dans $\mathbb{K}^*$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

Enfin, si $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

Corollaire 35 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$, $v_n \neq 0$ pour tout n. On suppose que u_n et v_n convergent respectivement vers l et $m \neq 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{m}$$

Exemple : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$.

IV. Relation de comparaison entre les suites

1) Suites négligeables :

Donner l'idée que l'on veut traduire ici.

Définition 125 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que v_n* est négligeable devant u_n au voisinage de l'infini *s'il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ une suite réelle tels que*

$$\forall n \geqslant N \;\; v_n = \varepsilon_n u_n \;\text{ et }\; \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On écrit alors $v_n = o(u_n)$ (au voisinage de l'infini).

Proposition 147 *Si u_n ne s'annule pas pour $n \geqslant n_0$,*

$$v_n = o(u_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.$$

Exemple : 1. $n = o(n^2)$ et si $p < q$, $n^p = o(n^q)$.
2. $1/n^2 = o(1/n)$ et si $p < q$, $1/n^q = o(1/n^p)$.
3. (hp) comparer $\ln n$ et n, n^p et a^n.

Proposition 148 *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
1. $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$;
2. Si v_n est bornée (par exemple si v_n converge) $v_n o(u_n) = o(u_n)$.
3. Si $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $w_n = o(u_n)$.

2) Suites équivalentes :

Donner l'idée que l'on veut traduire ici.

Définition 126 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On dit que* v_n est équivalente à u_n au voisinage de l'infini *s'il existe* $N \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\geqslant N}$ *une suite réelle tels que*

$$\forall n \geqslant N \;\; v_n = \alpha_n u_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1.$$

On écrit alors $u_n \sim v_n$ *(au voisinage de l'infini).*

Proposition 149 *Si* u_n *ne s'annule pas pour* $n \geqslant n_0$,

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Proposition 150 $\sim$ *est une relation déquivalence sur l'ensemble des suites réelles* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3) Équivalents et limites :

Proposition 151 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\mathbb{K}$.

1. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ *et* $l \neq 0$, *alors* $u_n \sim_{n\to\infty} l$.

2. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réelle. Si* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$, *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

3. Si $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$, *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

4) Propriétés des équivalents :

Proposition 152 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\mathbb{R}$.

Les deux propositions suivantes sont sont équivalentes :

(i) $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$;

(ii) $u_n - v_n = o(v_n)$ *au voisinage de l'infini.*

Proposition 153 *Si* $u_n = o(v_n)$ *et si* $v_n \sim w_n$, *alors* $u_n = o(w_n)$.

Proposition 154 *Si* $u_n \sim v_n$, u_n *et* v_n *ont le même signe strict à partir d'un certain rang.*

Proposition 155 (Théorème des gendarmes) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites strictement positives. On suppose*

1. $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *pour* n *assez grand ;*

2. $u_n \sim w_n$.

Alors $u_n \sim v_n \sim w_n$.

Proposition 156 *1. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quatre suites de* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ *et* $u_n \sim_{n\to\infty} v'_n$. *Alors*

$$u_n v_n \sim_{n\to\infty} u'_n v'_n$$

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\mathbb{R}^*$. *On suppose que* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. *Alors*

$$\frac{1}{u_n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n}$$

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. *Alors*

$$|u_n| \sim_{n\to\infty} |v_n|$$

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. *On suppose que* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. *Alors*

$$u_n^{\alpha} \sim_{n\to\infty} v_n^{\alpha}$$

Remarque : Pour la somme, en général ça ne marche pas comme le prouve l'exemple : $u_n = \sin 1/n \sim 1/n$ et $v_n = -1/n \sim -1/n$ mais $u_n + v_n = \sin 1/n - 1/n$ n'est pas équivalent à 0.

5) Suites de référence (première partie) :

Rappel : $\lim_{n\to+\infty} n^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 157 *Soit a_0, a_1,..., a_p avec $a_p \neq 0$. Alors*

$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \sim a_p n^p.$$

Si q est le plus petit entier tel que $a_q \neq 0$:

$$\frac{a_q}{n^q} + \cdots \frac{a_p}{n^p} \sim \frac{a_q}{n^q}.$$

Application : Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et pour $n \geqslant n_0$, des réels a_0, a_1,..., $a_p \neq 0$, b_0, b_1,..., $b_q \neq 0$ et

$$u_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$$

supposé parfaitement défini. Alors si $q > p$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, si $q = p$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a_p}{b_p}$ et si $q < p$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a_p \text{ et } b_q \text{ sont de même signe} \\ -\infty \text{ si } a_p \text{ et } b_q \text{ sont de signe contraire} \end{cases}$$

Théorème 63 *Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, et pour $n \geqslant 0$, $u_n = \lambda^n n^k$.*

1. *Si $|\lambda| < 1$, u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, u_n tend vers $+\infty$.*

On dit que l'exponentielle l'emporte sur les puissances...

Remarque : $n^k = o(a^n)$ si $a > 1$.

Théorème 64 *Soit $a > 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Exemple : Suites arithmétiques, suites géométriques.

Remarque : Il reste à voir la comparaison avec le logarithme et la factorielle.

V. Suites de Cauchy

1) Introduction :

Définition 127 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* suite de Cauchy *si*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (\forall n' \geqslant n_0)\ (|u_n - u_{n'}| \leqslant \varepsilon)$$

Interprétation : pour n assez grand, les u_n sont à une distance inférieure ou égale à ε constante strictement positive choisie arbitrairement.

Proposition 158 *Une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Proposition 159 *Toute suite convergente de $\mathbb{K}$ est de Cauchy.*

Exercice : Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}$, $n \geqslant 0$. Montrer que S_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

On pourrait s'attendre à ce qu'une suite de Cauchy converge. En fait, pour que cela marche, il faut que l'espace métrique n'ait pas de trous.

2) $\mathbb{R}$ est complet :

Soit pour $n \geqslant 0$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{Q}$.

Imaginons un instant $\mathbb{R}$ non construit. Les notions de convergence et le critère de Cauchy ont encore un sens si on prend $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Dans ces conditions, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pourtant :

Proposition 160 *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.*

Cette carence de $\mathbb{Q}$ peut être une autre motivation de la construction de $\mathbb{R}$, car dans $\mathbb{R}$, les choses se passent mieux :

Théorème 65 *Toute suite réelle de Cauchy est convergente.*

On dit que $\mathbb{R}$ est *complet*. Ce théorème fournit un nouveau critère de convergence des suites numériques appelé *critère de Cauchy*. Son avantage est qu'il peut être utilisé lorsqu'on ne connait pas la limite de la suite. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un réel qui est noté e (voir chapitre sur $\mathbb{C}$).

3) Cas de $\mathbb{C}$:

Corollaire 36 *Toute suite de $\mathbb{C}$ de Cauchy est convergente dans $\mathbb{C}$.*

On dit là aussi que $\mathbb{C}$ est complet.

VI. Suites extraites

1) Cas général :

Définition 128 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un ensemble E. On appelle* suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute suite du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.*

Remarque : On parle également de *sous-suite*. Une suite extraite est une suite.
Exemple : $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$...
Remarque : Une suite extraite d'une suite extraite est encore une suite extraite. Plus précisément : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. La suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ relative à ψ (fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) est

$$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

Comme $\varphi\circ\psi$ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Suite extraite d'une suite convergente :

Lemme 12 *Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$ et $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$.*

Proposition 161 *Toute suite extraite d'une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $l \in \mathbb{K}$ converge vers l.*

Remarque : Extension aux limites infinies
Exemple : $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas.
Exercice : Si $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

3) Valeur d'adhérence d'une suite :

Définition 129 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$. a *est une* valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\forall N \in \mathbb{N})\ \ (\exists n \geqslant N)\ \ (|u_n - a| \leqslant \varepsilon)$$

Exemple : 1 et -1 sont les seules valeurs d'adhérence de $u_n = (-1)^n$.

Proposition 162 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) a *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *;*

(ii) a *est la limite d'une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous verrons plus tard le théorème suivant :

Théorème 66 *On peut extraire de toute suite bornée une sous-suite convergente.*

Chapitre 2

Topologie de $\mathbb{R}$. Limites

I. Ouverts, fermés, voisinages

1) Ouverts de $\mathbb{R}$:

Définition 130 *Soit $U \subset \mathbb{R}$. On dit que U est un* ouvert de $\mathbb{R}$ *si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$.*

Exemple : $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

Proposition 163 *Les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Les intervalles du type $]a,+\infty[$ et $]-\infty,a[$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des ouverts.*

Proposition 164 *1. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\bigcup_{i\in I} U_i$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. Soit $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ une famille finie *d'ouverts de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des ouverts est stable par réunion et par intersection finie. On appelle *topologie de* $\mathbb{R}$ l'ensemble de ces ouverts.

2) Fermés de $\mathbb{R}$:

Définition 131 *Soit $F \subset \mathbb{R}$. On dit que F est un* fermé de $\mathbb{R}$ *si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Exemple : $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont fermés. Ce n'est pas parce qu'une partie n'est pas ouverte qu'elle est fermée (et réciproquement) comme le prouve $[0,1[$.

Proposition 165 *Les intervalles fermés sont des fermés de $\mathbb{R}$. Les intervalles du type $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des fermés.*

Proposition 166 *1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\bigcap_{i\in I} F_i$$

est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Soit $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ une famille finie *de fermés de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

est un fermé de $\mathbb{R}$.

Corollaire 37 *Les parties finies de $\mathbb{R}$ sont fermées.*

3) Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$:

Définition 132 *Soit $x \in R$. On dit qu'une partie W de $\mathbb{R}$ est un* voisinage de x (dans $\mathbb{R}$) *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset W$.*

Remarque : U est un ouvert si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 167 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. Si W est un voisinage de x, et si $W' \supset W$, W' est un voisinage de x.

2. Si W_1, W_2,..., W_n sont des voisinages de x, il en va de même de $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n$.

Exercice : Montrer que si W est un voisinage de x, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, W est un voisinage de y.

Proposition 168 *Soient x et y deux réels distincts. Il existe alors W voisinage de x et W' voisinage de y tel que $W \cap W' = \emptyset$*

Remarque : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$(\forall W \text{ voisinage de } l)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (u_n \in W)$$

4) Voisinage de l'infini :

Définition 133 *On dit qu'une partie W de $\mathbb{R}$ est un* voisinage de $+\infty$ *s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset W$.*

On dit qu'une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ *s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A] \subset W$.*

Proposition 169 *1. Si W est un voisinage de $+\infty$, et si $W' \supset W$, W' est un voisinage de $+\infty$.*

2. Si W_1, W_2,..., W_n sont des voisinages de $+\infty$, il en va de même de $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n$.

5) Système fondamental de voisinages :

Définition 134 *Soit $x \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit qu'une partie $\mathcal{S}$ est un* système fondamental de voisinages de x *si la propriété suivante est vérifiée : tout élément de $\mathcal{S}$ est un voisinage de x et pour tout voisinage W de x, il existe $V \in \mathcal{S}$ tel que $V \subset W$.*

Exemple : • Si $x \in \mathbb{R}$, les ouverts contenant x forment un système fondamental de voisinages de x.

• Si $x \in \mathbb{R}$, les intervalles $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ forment un système fondamental de voisinages de x.

• Si $x \in \mathbb{R}$, les intervalles $]x-1/n, x+1/n[$ $(n \geqslant 1)$ forment un système fondamental de voisinages de x.

• Les intervalles $[n, +\infty[$ $(n \geqslant 1)$ forment un système fondamental de voisinages de $+\infty$.

II. Adhérence et intérieur d'une partie

1) Intérieur :

Définition 135 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est* un point intérieur de A *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Autrement dit, x est un point intérieur de A si A est un voisinage de x.*

Définition 136 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle* intérieur de A *l'ensemble $\overset{\circ}{A}$ des points intérieurs de A.*

Exemple : $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$, $\overset{\circ}{\overbrace{[a, b]}} =]a, b[$...

Proposition 170 *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.*

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$;
2. Si $A \subset B$, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;
3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Proposition 171 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans A.*

En particulier, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

Corollaire 38 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) A ouvert ;
(ii) $\overset{\circ}{A} = A$.

2) Adhérence :

Définition 137 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est* adhérent à A *si tout voisinage de x rencontre A.*

Exemple : Si A est majorée non vide dans $\mathbb{R}$, $\sup A$ est adhérent à A.
Remarque : Soit $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages de x. Pour que x soit adhérent à A, il faut, et il suffit que pour tout $W \in \mathcal{S}$, $W \cap A \neq \emptyset$ En particulier, x est adhérent à A si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, $|a - x| \leqslant \varepsilon$.

Définition 138 *On appelle* adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}$ *l'ensemble $\bar{A}$ des points de $\mathbb{R}$ adhérents à A.*

Exemple : Adhérence de $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]a, b[$...

Proposition 172 *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.*

1. $A \subset \bar{A}$;
2. Si $A \subset B$, $\bar{A} \subset \bar{B}$;
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

3) Passage au complémentaire :

Proposition 173 *Si A est une partie de $\mathbb{R}$,*

$$\overset{\circ}{\complement_{\mathbb{R}} A} = \complement_{\mathbb{R}} \bar{A} \quad et \quad \overline{\complement_{\mathbb{R}} A} = \complement_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{A}$$

Proposition 174 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors $\bar{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant dans A.*

En particulier, $\bar{A}$ est un fermé.

Corollaire 39 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) A fermé ;
(ii) $\bar{A} = A$.

4) Caractérisation séquentielle de l'adhérence, parties denses :

Proposition 175 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) x est adhérent à A ;
(ii) Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Remarque : Démarche pour montrer qu'une partie est fermée. Exemple pour $\mathbb{Z}$.

Proposition 176 *Dire que $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ revient à dire que $\bar{A} = \mathbb{R}$.*

Corollaire 40 *Si A est une partie dense de $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.*

5) Cas de l'infini :

Définition 139 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dire que $+\infty$ est* adhérent à *A si pour tout voisinage W de $+\infty$, $W \cap A \neq \emptyset$.*

Proposition 177 *Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. $+\infty$ est adhérent à A si et seulement si, A n'est pas majorée.*

ATTENTION ! Comme $+\infty \notin \mathbb{R}$, même si $+\infty$ est adhérent à A, $+\infty \notin \mathbb{R}$.

III. Théorème de Bolzano-Weierstrass :

1) Cas des suites réelles :

Rappel : Caractérisation des valeurs d'adhérences avec ε.

Théorème 67 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*
Autrement dit, toute suite réelle bornée possède une valeur d'adhérence.

Remarque : Histoire de Bolzano et Weierstrass.
Remarque : limsup et liminf

2) Cas des suites complexes :

Théorème 68 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*
Autrement dit, toute suite complexe bornée possède une valeur d'adhérence.

3) Parties compactes de $\mathbb{R}$:

Définition 140 *Soit $K \subset \mathbb{R}$.*
On dit que K est une partie compacte de $\mathbb{R}$ *si de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de K.*

Exemple : Les parties finies sont compactes.

Théorème 69 *Soit K une partie de $\mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) K est une partie compacte de $\mathbb{R}$;
(ii) K est fermée et bornée.

Exemple : $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Toute réunion finie de compacts est compacte. En particulier, si les a_i et b_i sont réels :

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_n, b_n] \text{ est compacte.}$$

IV. Limite d'une fonction numérique :

Dans ce paragraphe, A désignera une partie de $\mathbb{R}$, a et l deux éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ avec a adhérent à A.

1) Généralités :

Définition 141 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a si, pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap A) \subset V$. On note $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Exemple : Si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$, $\lim_{x\to a} f(x) = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Proposition 178 *Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, f est bornée* au voisinage de a *i.e. il existe un voisinage W de a tel que $f_{|V\cap A}$ est bornée.*

Définition 142 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $B \subset A$ tel que a soit adhérent à B.*

On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a en restant dans B si $\lim_{x\to a} f_{|B}(x) = l$. On note alors

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x) = l$$

2) Unicité, composition :

Théorème 70 (Unicité de la limite) *La limite d'une fonction, si elle existe est unique.*

Remarque : Si $a \in A$, et $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $l = f(a)$.

Théorème 71 *Soient $f : A \longrightarrow B$ $(B \subset \mathbb{R})$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, a adhérent à A et b adhérent à B.*

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$, alors

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = l$$

3) Utilisation des systèmes fondamentaux de voisinages :

Proposition 179 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_l$) un système fondamental de voisinages de a (resp. de l). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$;

(ii) Pour tout voisinage $V \in \mathcal{S}_l$, il existe $W \in \mathcal{S}_a$ tel que $f(W \cap A) \subset V$.

Corollaire 41 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$.*

1. Supposons $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$

2. Supposons $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si

$$(\forall A \geqslant 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$$

3. Supposons $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists B \geqslant 0)\ \ (x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$

4. Supposons $a = +\infty$. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *si et seulement si*

$$(\forall A \geqslant 0)\ \ (\exists B \geqslant 0)\ \ (x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$$

Remarque : • Pour étudier la converge d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut considérer la suite comme une fonction numérique u définie sur $\mathbb{N}$. Alors, $+\infty \in \bar{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si u admet comme limite l en $+\infty$.

• Négations...

Exemple : $\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$ $(n \geqslant 2)$.

4) Restriction du domaine de définition :

Proposition 180 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. Si $B \subset A$, $a \in \bar{B}$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$*, alors*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = B$$

2. Si V est un voisinage de a et si $\lim_{\substack{x\to a\\ V\cap A}} f(x) = l$*, alors* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque : Le point 2. signifie que les problèmes de limites sont des problèmes locaux et qu'on peut se restreindre pour l'étude des limites à certains voisinages de a.

Théorème 72 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, A_1, A_2,..., A_n des parties de A telles que $A = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$ et a adhérent à A_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) = l$*. Alors* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

5) Limite à gauche et limite à droite :

Définition 143 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $A_1 = A\cap]-\infty, a[$ (resp. $A_2 = A\cap]a, +\infty[$). On suppose que a est adhérent à A_1 (resp. à A_2). On dit alors que f admet* une limite à gauche en *a si $f_{|A_1}$ (resp. $f_{|A_2}$) admet une limite lorsque x tend vers a. On note cette limite $f(a^-)$ (resp. $f(a^+)$).*

Exemple : $1_{\mathbb{R}_+}$ en 0

Corollaire 42 *Reprenons les notations de la définition précedente. On suppose que a est adhérent à A_1 et à A_2 et que f admet une limite à gauche et une limite à droite.*

1. Si $a \notin A$ et $f(a^+) = f(a^-)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a^+) = f(a^-)$.

2. Si $a \in A$ et $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

6) Caractérisation séquentielle :

Théorème 73 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, a adhérent à A.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$;

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

V. Opérations sur les limites

Encore dans ce paragraphe, A désignera une partie de $\mathbb{R}$, a et l deux éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ avec a adhérent à A. On mettra en évidence deux types de preuve pour les énoncés qui suivent : les preuves générales et celles utilisant les suites.

1) Passage à la valeur absolue :

Proposition 181 *Soit* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$.

2) Opérations algébriques :

Rappel : Opérations symboliques de $\bar{\mathbb{R}}$.

Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ et $l' = \lim_{x\to a} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$.

Proposition 182 *Si cela a un sens :*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l + l' \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$$

Proposition 183 *Supposons que f ne s'annule pas. Alors*

1. *si* $l \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$;
2. *si* $l = 0$, $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in A$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$;
3. *si* $l = +\infty$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Corollaire 43 *Supposons que g ne s'annule pas et $l' \neq 0$. Alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

3) Prolongement des inégalités :

Proposition 184 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ *et* $l' = \lim_{x\to a} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$. *Si* $l < l'$, *il existe un voisinage W de a tel que pour tout* $x \in W \cap A$, $f(x) < g(x)$.

Remarque : Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$, il existe un voisinage W de a tel que f ne s'annule pas sur $W \cap A$.

Corollaire 44 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ *et* $l' = \lim_{x\to a} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$. *On suppose*

$$(\forall x \in A) \ \ (f(x) \leqslant g(x))$$

Alors $l \leqslant l'$.

Remarque : Il n'y a pas de théorème de prolongement des inégalités strictes. ex

Remarque : Le résultat reste vrai si $f(x) \leqslant g(x)$ est seulement vraie sur un voisinage de a.

Théorème 74 (Théorème des gendarmes) *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose que* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$ *et que pour tout* $x \in A$ *:*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Remarque : On peut se restreindre à un voisinage de a.

Proposition 185 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f \leqslant g$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

VI. Limite des fonctions monotones

Théorème 75 *Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, $a \in \overline{\mathbb{R}}$*

1. *Soit $a \in I$, a n'étant pas la borne inférieure de I. Alors $f(a^-)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut*

$$f(a^-) = \sup_{x<a} f(x) \text{ et on a } f(a^-) \leqslant f(a).$$

2. *Soit $a \in I$, a n'étant pas la borne supérieure de I. Alors $f(a^+)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut*

$$f(a^+) = \inf_{x>a} f(x) \text{ et on a } f(a) \leqslant f(a^+).$$

3. *Si a est la borne inférieure de f et si $a \notin I$, $\lim_a f$ existe et vaut $\inf_{x\in I} f(x)$.*
4. *Si a est la borne supérieure de f et si $a \notin I$, $\lim_a f$ existe et vaut $\sup_{x\in I} f(x)$.*

DESSIN

Remarque : Cas des fonctions décroissante. , $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à A.

Corollaire 45 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone.*

En tout point a intérieur de I, f admet des limites finies à gauche et à droite en a et $f(a) \in [f(a^-), f(a^+)]$.

Chapitre 3

Introduction aux séries

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $x \in \mathbb{K}$, $|x|$ sera respectivement la valeur absolue de x ou le module de x.

I. Convergence des séries

1) Généralités :

Définition 144 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On appelle* série de terme général u_k *(ou encore* série des u_k*) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Elle est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_k$.

On dit que la série de terme général u_k converge *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite S dans $\mathbb{K}$. S s'appelle alors la* somme de la série de terme général u_k *et on note*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k$$

Remarque : Une série peut être définie à partir d'un $n_0 > 0$ quelconque : $n_0 = 3$ et $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$...
Remarque : Si on modifie un nombre fini de termes de $\sum u_n$, la *nature* (i.e. le fait qu'elle converge ou qu'elle ne converge pas) reste inchangée. Par contre, évidemment, la somme de la série (si la série converge) change.
Remarque : Si $\sum u_n$, $\sum v_n$ convergent, il en va de même de $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

2) Condition nécessaire de convergence :

Proposition 186 *Soit $\sum u_n$ une série de $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ converge,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Remarque : La réciproque est fausse : $\sum 1/n$ ne converge pas. dem

3) La série géométrique :

Proposition 187 *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ces conditions,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

II. Série à termes positifs

1) Majoration des sommes partielles :

Nous allons traduire ici le théorème de convergence des suites monotones en termes de séries.

Proposition 188 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\sum u_n$ converge ;

(ii) il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$$

Notation : Si les u_k sont positifs ou nuls, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$ si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ dans le cas contraire.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n = +\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/2^n = 2$...

2) Le théorème de comparaison des séries à termes positifs :

Théorème 76 (théorème de comparaison des séries à termes positifs) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.*

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Corollaire 46 *1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

2. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $v_n = o(u_n)$ et $\sum u_n$ convergente. Alors $\sum v_n$ est convergente.

3) Séries de référence :

On connait déjà la série géométrique.

Théorème 77 (Série de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

si, et seulement si $\alpha > 1$.

Riemann (1826-1866) est l'auteur d'ouvrages fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. sa fonction $\zeta : s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ donne de précieux renseignements sur la répartition des nombres premiers.

III. Série absolument convergente

Définition 145 *Soit* $\sum u_n$ *une série de* $\mathbb{K}$. *On dit que* $\sum u_n$ *est absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Théorème 78 *Toute série absolument convergente de* $\mathbb{K}$ *est convergente.*

Corollaire 47 *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries. On suppose* $u_n \geqslant 0$ *pour tout* n *et* $v_n = o(u_n)$. *Si* $\sum u_n$ *converge, la série* $\sum v_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*

Remarque : La réciproque est fausse (considérer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$)
Exemple : • Si $|z| < 1$, $\sum z^n$ est absolument convergente.
• si $\alpha \geqslant 2$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

IV. Représentation d'un réel en base donnée

1) Rappels sur la représentation des entiers :

Dans $\mathbb{Z}$, nous disposons au départ de deux symboles 0 et 1 éléments neutres des opérations internes. Soit $B \geqslant 2$, entier que nous appellerons *base de numération.* Donnons nous $B-2$ autres symboles μ_2, μ_3,..., μ_B et on pose

$$\mu_k = k.1$$

Par exemple, si B est $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$, on se donne $2 = 1+1$, $3 = 1+1+1$,...,$9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1$.

Théorème 79 *Soit* $n \geqslant 1$. *Il existe une unique suite de* $\mathbb{N}$ *à support fini telle que*

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_k \leqslant B-1$.

Notation : Si $n = \sum_{k=0}^{N} a_k B^k \in \mathbb{N}$, on notera

$$n = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0$$

chaque a_k étant représenté par le symbole correspondant μ_l. C'est la *représentation en base* B *de l'entier* n. Si $B = 10$, on parle de *représentation décimale.*

Si $n < 0$, et $-n = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0$, $n = -a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0$ est la représentation en base B de l'entier n.

2) Représentation des réels :

Soit $B \geqslant 2$ la base de numération et les symboles associés.
Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $0 \leqslant a_n \leqslant B-1$ et

$$(\forall p \geqslant 1) \ \ (\exists q > p) \ \ (a_q \neq B-1)$$

Théorème 80 *L'application* $f : (a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{T} \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n} \in \mathbb{R}$ *est bien défini et réalise une bijection de* $\mathcal{T}$ *dans* $[0, 1[$.

Définition 146 *Avec les notations du théorème précédent, si* $x \in [0,1[$ *et* $(a_n)_{n\geqslant 1} = f^{-1}(x)$*,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$ *est le développement de* x *en base* B*.*

Notation : Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons $\mathrm{E}(x) = b_N b_{N-1} \ldots b_1 b_0$ la représentation en base B de $\mathrm{E}(x)$. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{T}$ telle que

$$x - \mathrm{E}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$$

Alors $b_N b_{N-1} \ldots b_1 b_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ (chaque a_k et chaque b_k étant représenté par le symbole correspondant μ_l) est la *représentation en base* B *du réel* x. Si $B = 10$, on parle de *représentation décimale*.

Si $x < 0$, la représentation en base B s'obtient en mettant $-$ devant la représentation en base B de $-x$.

Exemple : $2/3 = 0,66666666....$ si $B = 10$.

Proposition 189 *Soit* $x = \mathrm{E}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$ *avec* $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{T}$*. Alors* $E(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{B^n}$ *est une approximation de* x *à* B^N *près.*

3) Indénombrabilité de $\mathbb{R}$:

Rappel : $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable.

Théorème 81 $\mathbb{R}$ *est indénombrable.*

4) Caractérisation des rationnels :

Théorème 82 *Soit* $x \in [0,1[$*,* $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$ *le développement en base* B *de* x*. Alors* $x \in \mathbb{Q}$ *si et seulement si* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *est périodique à partir d'un certain rang i.e.*

$$(\exists N \geqslant 0)\ \ (\exists d \geqslant 1)\ \ (\forall n \geqslant N)\ \ (a_{n+d} = a_n)$$

Chapitre 4

Systèmes définies par récurrence

$\mathbb{K}$ désigne dans ce chapitre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 147 *Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$, $a \in E$.*

Alors la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ est appelée système dynamique discret.

I. Suites à récurrence linéaire

1) Suites géométriques :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $u_0 \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récuurence par :

$$u_{n+1} = \lambda u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Définition 148 *Une telle suite est appelé* suite géométrique de raison λ.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^n u_0$.

2) Etude des suites complexes $u_{n+1} = au_n + bu_n$:

Théorème 83 *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. On note λ et μ les racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ telles que*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

1. Si $\lambda \neq \mu$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = A\lambda^n + B\mu^n$$

2. Si $\lambda = \mu$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (An + B)\lambda^n$$

Remarque : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. Alors, il existe $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_n = A\lambda^n + B\mu^n \quad \text{(cas 1)}$$

$$u_n = A\lambda^n + Bn\mu^n \quad \text{(cas 2)}$$

On trouve A et B en fonction de α et β en résolvant

$$\alpha = A + B \quad \text{et} \quad \beta = A\lambda + B\mu \quad \text{(cas 1)}$$

$$\alpha = A \quad \text{et} \quad \beta = A\lambda + B\mu \quad \text{(cas 2)}$$

Exemple : cf exercice 1

3) Passage aux cas réel :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On note λ et μ les racines complexes de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telles que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

De part l'étude précédente, il existe $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ ou $u_n = (An + B)\lambda^n$. On trouve là encore A et B en considérant u_0 et u_1.

Si on recherche toutes les solutions, on prend les parties réelles (ou imaginaires) des suites complexes solutions.

Exemple : $u_{n+2} = -u_n$

II. Suites homographiques

1) La sphère de Riemann :

Définition 149 *Soit ∞ un symbole ne représentant pas un élément de $\mathbb{C}$.*

On appelle sphère de Riemann *l'ensemble* $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Remarque : Justification de la terminologie par la projection stéréographique.

Définition 150 *Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$.*

On dit que f est homographique *si l'une des deux conditions suivantes est réalisées*

(i) Il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq 0$ tel que si $z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \begin{cases} az + b \text{ si } z \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ si } z = \infty \end{cases}$$

(ii) Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ tel que si $z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} \text{ si } z \in \mathbb{C} \text{ et } z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty \text{ si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} \text{ si } z = \infty \end{cases}$$

Remarque : Si f est homographique, f est bijective.

2) Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$:

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

• Si $a = 1$, la suite est dite arithmétique et $u_n = u_0 + nb$.

• Si $a \neq 1$, on recherche le point fixe de $f : z \longmapsto az + b$. C'est $l = \frac{b}{1-a}$. On pose $u_n = v_n + l$ et on tombe sur une suite géométrique : $u_n = l + (u_0 - l)a^n$.

Exemple : ...

3) Suites du type $u_{n+1} = (az+b)/(cz+d)$:

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

On désire étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite f-récurrente.

Pour cela, on recherche les points fixes de f.

• S'il y a deux points fixes distincts λ et μ, on démontre qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(z) - \lambda}{f(z) - \mu} = k\frac{z - \lambda}{z - \mu}$$

• S'il y a un point fixe double λ. On montre qu'il existe $h \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{1}{f(z) - \lambda} = \frac{1}{z - \lambda} + h$$

Exemple : Etudier $x_{n+1} = 3 - 2/x_n$.

III. Suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Point fixes et convergence des suites f-récurrentes :

Définition 151 *Soit* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{K}$ *est dite* f-récurrente *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque : Si $f(A) \subset A$, la donnée de u_0 permet de définir parfaitement la suite f-récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 152 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$, $l \in A$.

Si $f(l) = l$, l *est appelée* point fixe de f.

Proposition 190 *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle,* $l \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* I f*-récurrente.*

Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l, l *est un point fixe de* f : $f(l) = l$.

2) Etude d'une suite définie par récurrence :

On se donne $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $u_0 \in I$. On suppose $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à savoir si

1. u_n reste dans le domaine de définition de f ;
2. u_n est-elle monotone ?
3. u_n admet-elle une limite ? sinon, y a t-il des valeurs d'adhérence.

La première chose à faire est un schéma rapide du comportement de u_n, ou d'untiliser sa machine pour conjecturer le résultat et tenter d'organiser l'argumentation.

Les limites éventuelles dans I sont les points de f.

Deux types d'arguments sont à exploiter :

1. Arguments de monotonie ;
2. Inégalités des accroissements finis.

3) Points attractifs, points répulsifs :

Proposition 191 *Soit $f : I \longrightarrow I$. On suppose f contractante i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$ et que f possède un point fixe $l \in I$.*

Alors toute suite f-récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le point fixe l. Plus précisément, si $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l| \quad \text{et} \quad |u_n - l| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Exemple : $I = \mathbb{R}_+$, $f : x \in I \longmapsto 1/2 \arctan x + 1$. Appoximation à 10^{-4} près pour $n = 14$, $u_7 = 1,4898$.

Théorème 84 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, l un point fixe de f.*

1. On suppose $|f'(l)| < 1$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que si $u_0 \in I \cap]l - \alpha, l + \alpha[$, toute suite f-récurrente va converger vers l avec une vitesse en $O(k^n)$ avec $k \in]|f'(l)|, 1[$. Le point l est dit attractif.

2. On suppose $|f'(l)| > 1$. Alors les seules suites f-récurrentes convergentes vers f sont les suites stationnaires à l. Le point l est dit répulsif.

Remarque : Lorsque $|f'(l)| = 1$, on ne peut rien dire.

4) Cas des suites f-récurrentes avec f monotone :

Soient $f : I \longrightarrow I$ monotone et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite f-récurrente.

• Supposons f croissante. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : si $u_0 \leqslant u_1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $u_1 \leqslant u_0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Lorsque u_0 est arbitraire, il est judicieux d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.

Autre idée force : si $l_1 < l_2$ sont deux points fixes de f et si $u_0 \in]l_1, l_2[$, les termes u_n vont rester dans $]l_1, l_2[$.

Proposition 192 *Lorsque f est croissante, les termes d'une suite f-récurrente garde la même position relative par rapport aux points fixes de f.*

Exemple : $f : x \in [0, 4] \longmapsto \sqrt{4 + x}$, $u_0 = 0$. Montrer alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

• Supposons f décroissante. On pose alors $g = f \circ f$. g est croissante et on étudie les suites g-récurrentes $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et on est ramené au cas précédent.

Comme précédemment, si u_0 est arbitraire, il est peut-être nécessaire d'étudier le signe de $g(x) - x = f(f(x)) - x$. Avant cela, on cherchera les points fixes l de f (car $g(x) - x$ se factorise par $x - l$!), et on veillera à voir si des arguments d'accroissements finis ne suffisent pas à conclure.

Exemple : 1. $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $u_0 = 1/2$.

2. $f : x \in [0, 1] \longmapsto 1 - x^2$, $u_0 = 1/2$. Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} u_{2n+1} = 1$$

IV. Méthodes algorithmique de recherche des zéros d'une fonction

1) Rappels :

Nous avons déjà eu l'occasion de voir deux exemples :
- algorithme de dichotomie ;
- méthodes des itérations successives.

2) Méthode de Lagrange :

Cette méthode est encore connue sous le nom de méthode de la sécante.
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$, $(a, b) \in I^2$, $a < b$. On suppose $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, $f' > 0$, $f'' > 0$. On pose pour $x \in I$

$$g(x) = x - f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} = \frac{xf(b)-bf(x)}{f(b)-f(x)}$$

Considérons la suite g-récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = a$. Alors cette suite est
- parfaitement définie ;
- croissante ;
- convergente vers l, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.

<u>Remarque :</u> interprétation géométrique.

3) Méthode de Newton :

Cette méthode est encore connue sous le nom de méthode de la tangente.
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$, $(a, b) \in I^2$, $a < b$. On suppose $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, $f' > 0$, $f'' > 0$. On pose pour $x \in I$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Considérons la suite g-récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = b$. Alors cette suite est
- parfaitement définie ;
- décroissante ;
- convergente vers l, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.

<u>Remarque :</u> interprétation géométrique.

Partie C
Fonctions de la variable réelle

Chapitre 1

Fonctions continues

Le concept de fonctions est assez tardif. C'est Euler qui le premier parle de "fonctions" dans son "Introduction à l'analyse infinitésimale". Il écrit qu'une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres et de quantités constantes. Le mot analytique n'est pas vraiment précisé, mais il décrit les opérations possibles entre variables et constantes. C'est avec Euler et le développement de la théorie des équations différentielles que la fonction deviendra la base de l'édifice mathématique. Hadamard parlera du déplacement du nombre à la fonction.

L'étude des fonctions se heurte à la mise au point de bases rigoureuses. L'obligation faite aux mathématiciens du XIXème siècle d'enseigner (avec en France en 1794 la création de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole Normale) est une des sources de l'effort de rigueur. En 1813, Gauss rédige un Mémoire sur la série hypergéométrique. Mais surtout en 1821, Cauchy publie son Cours d'Analyse qu'il donne à l'Ecole Polytechnique. Il s'interesse notamment aux problèmes de convergences des séries et donne à cette occasion de nombreux critères de convergence. Abel critique les preuves abusives en déclarant que "les séries divergentes sont des inventions du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration". Cauchy, mais surtout Bolzano donne la définition d'une fonction continue.

"La différence $f(x-w)-f(x)$ peut être rendue aussi petite que toute grandeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on veut."

Il montre ainsi que la continuité est une propriété locale.

Avec Baire et ses "Leçons sur les fonctions discontinues", l'aspect de l'approximation l'emporte : il se donne des fonctions discontinues et essaie de les approcher par des fonctions continues. Il utilise la très récente théorie des ensembles et la topologie générale qui étaient encore très contreversées, ce qui a contribué à les valider.

S'en est suivi une contreverse sur le concept de fonctions : peut-on considérer une fonction f telle que, pour un x donné, il n'y ait pas de moyen pratique de calculer $f(x)$? La réponse affirmative devait se retrouver confirmée par de nouveaux concepts de fonctions : fonctions réccursives, fonctions multiformes, fonctions définies presque partout...

Dans ce chapitre, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I. Continuité des fonctions à variable réelle

1) Définition de la continuité :

Définition 153 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.*

On dit que f est continue en a *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Si f est continue en tout point de A, on dit que f est continue (sur A).

On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 193 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue en a ;

(ii) $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x) = f(a)$;

(iii) Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap A) \subset V$;

(iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ vérifiant $|x - a| \leqslant \varepsilon$, on ait $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ (η est alors appelé module de continuité de f en a por ε*).*

Remarque : (iv) s'écrit

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \eta > 0) \ \ (\forall x \in A) \ \ (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)$$

Ainsi, si f est discontinue en a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in A$ vérifiant $|x - a| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$:

$$(\exists \varepsilon > 0) \ \ (\forall \eta > 0) \ \ (\exists x \in A) \ \ (|x - a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon)$$

Exemple : • Les fonctions constantes sont continues.

• $x \in \mathbb{R} \longmapsto x$ est continue.

• $x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$ est continue.

• Introduire 1_A où A est une partie de $\mathbb{R}$. $1_{\mathbb{R}_+}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et discontinue en 0.

• $1_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point.

Proposition 194 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Si f est continue en a, f est localement borné en a i.e. il existe un voisinage V de a tel que $f_{|A \cap V}$ soit bornée.*

Remarque : Si $B \subset A$ et f est continue en tout point de B, on dit que f est continue sur B.

2) Restriction du domaine de définition :

Proposition 195 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.*

1. Si $a \in B \subset A$ et f continue en a, $f_{|B}$ est continue en a.

2. Si V est un voisinage de a et si $f_{|V \cap A}$ est continue, alors f est continue en a.

Le point 2. traduit le caractère local de la continuité.

Proposition 196 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, A_1, A_2,..., A_n des parties de A telles que $A = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ et a adhérent à A_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On suppose de plus que $a \in A$.*

Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_i}} f(x) = f(a)$. Alors f est continue en a.

Définition 154 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.*

On dit que f est continue à gauche *(resp.* à droite*) si f est continue sur $]-\infty, a] \cap A$ (resp. sur $[a, +\infty[\cap A$).*

Exemple : $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{E}(x)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Elle est discontinue à gauche en tout point de $\mathbb{Z}$.

Corollaire 48 *Si f est continue à gauche et continue à droite en un point, f est continue en ce point.*

Proposition 197 (Prolongement par continuité) *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \bar{A}$, $a \notin A$, $l \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Alors f admet un prolongement g continue sur $A \cup \{a\}$ en posant $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(a) = l$.*

Exemple : La fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.

3) Opérations algébriques :

Proposition 198 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose f et g continues en a.*

Alors, $f + g$, λf, fg, $|f|$ sont continues en a. De plus, si f ne s'annule pas, $1/f$ est continue en a.

Corollaire 49 *$\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre commutative $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.*

De plus, si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, $|f|$ aussi. Enfin, si f ne s'annule pas et si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, $1/f$ aussi.

Application : Fonctions polynômiales et fonctions rationnelles.

Définition 155 *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est une* fonction polynômiales *s'il existe $n \in \mathbb{N}$, a_0, a_1,..., a_n des réels tels que si $x \in A$,*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Si $a_n \neq 0$, on dit que n est "le" degré de f.

Si A est par exemple un intervalle d'intérieur non vide, le degré est effectivement unique.
Remarque : Limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Théorème 85 *Les fonctions polynômiales sont continues.*

Définition 156 *Soient P et Q deux fonctions polynômiales définies sur A tels que Q ne s'annule pas sur A.*

Alors $f : x \longmapsto P(x)/Q(x)$ est une fonction rationnelle.

Corollaire 50 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction rationnelle. Alors f est continue.*

Remarque : Limite en $+\infty$ et $-\infty$.

4) Composition des fonctions continues :

Théorème 86 *Soient $f : A \longrightarrow B$ ($B \subset \mathbb{R}$), $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.*

Si f est continue en a, g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

En particulier, si f et g sont continues, $g \circ f$ aussi.

$*$ Exemple : $x \longmapsto \exp(\frac{x}{1+\ln^2(1+x^2)})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Caractérisation séquentielle de la continuité :

Théorème 87 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.*

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue en a.
(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergente vers a, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.
(iii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \backslash \{a\}$ convergente vers a, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

II. Propriétés fondamentales des fonctions continues

1) Extension du vocabulaire sur les fonctions :

Rappel : fonctions majorées, minorées, bornées.

Définition 157 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.*

1. *On dit que f admet un* maximum en a *si pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant f(a)$.*
2. *On dit que f admet un* maximum strict en a *si pour tout $x \in A\backslash\{a\}$, $f(x) < f(a)$.*
3. *On dit que f admet un* minimum en a *si pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant f(a)$.*
4. *On dit que f admet un* minimum strict en a *si pour tout $x \in A\backslash\{a\}$, $f(x) > f(a)$.*
5. *On dit que f admet un* extremum en a *si f admet un maximum ou un minimum en a.*
6. *On dit que f admet un* extremum strict en a *si f admet un maximum strict ou un minimum strict.*

Définition 158 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.*

On dit que f admet un maximum local en a *s'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V\cap A}$ admette un maximum en a.*

On définit de manière analogue un minimum local, un maximum local strict...

2) Image d'une partie compacte par une application continue :

Remarque : Si A est un compact de $\mathbb{R}$, $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Théorème 88 *On suppose A compacte. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Alors $f(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. En particulier f admet sur A un maximum et un minimum : on dit que f est borné et atteint ses bornes.

Remarque : Les hypothèses faites sur A (fermé et borné) sont nécessaires comme le prouve les deux contre-exemples : $x \in]0,1] \longmapsto 1/x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{R}$.

3) Continuité uniforme :

Définition 159 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

On dit que f est uniformément continue *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in A^2$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.*

η est appelé module d'uniforme continuité de f associé à ε.

Remarque : C'est cette notion qui correspond en fait à l'idée naïve de continuité : pour x et y proches, $f(x) et f(y)$ sont proches.

Proposition 199 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Si f est uniformément continue, f est continue.

Exemple : • $x \in]0,1] \longmapsto 1/x$ est continue mais pas uniformément continue.
• $x \in [0,+\infty[\longmapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue.

Définition 160 *Soit $k > 0$. Les fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x,y) \in A^2$*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

sont appelées fonctions k-lipschitziennes.

Définition 161 *S'il existe $k > 0$ tel que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne, alors f est dite* lipschitzienne.

Proposition 200 *Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.*

C'est l'inégalité des accroissements finis qui nous fournira des exemples de fonctions lipschitziennes.

Théorème 89 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*
Alors, si A est compacte, f est uniformément continue.

4) Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 90 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Interprétation : il n'y a pas de "trous" dans le graphe.

Corollaire 51 *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*
Alors $f(I) = [\min f, \max f]$.

Probleme : Est-ce qu'une fonction qui transforme un intervalle en un intervalle est une fonction continue ?
Exercice : Montrer qu'une fonction polynômiale de degrè impair admet un zéro réel.

III. Continuité des fonctions monotones

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle d'intérieur non vide.

1) Limite d'une fonction monotone :

Rappel : Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = \sup A \in \bar{\mathbb{R}}$.
1. Si f est croissante

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$$

2. Si f est décroissante

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \inf_{x \in A} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$$

Remarque : Si f est croissante, "f majorée" équivaut à "$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \in \mathbb{R}$".
Si f est décroissante, "f minorée" équivaut à "$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \in \mathbb{R}$".
Remarque : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone, par exemple croissante.
1. Supposons que $a \in \mathring{A}$. Alors $f(a^+)$ et $f(a^-)$ ont un sens, existent et $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$.

$$f \text{ continue } \iff f(a^-) = f(a^+)$$

2. Supposons que $a = \max I$. Seul $f(a^-)$ a un sens. f continue si et seulement si $f(a^-) = f(a)$.
3. Supposons que $a = \min I$. Seul $f(a^+)$ a un sens. f continue si et seulement si $f(a) = f(a^+)$.

Corollaire 52 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone.*
Alors f admet en tout point intérieur de I une limite à gauche et une limite à droite finies.

Exercice : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone.
Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

2) Algorithme de dichotomie :

Proposition 201 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone, I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.*

Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Application : Algorithme de dichotomie pour la résolution des équations $f(x) = 0$.

3) Critère de continuité pour les fonctions monotones :

Théorème 91 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue.
(ii) $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 92 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone et continue.*

Alors f établit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et sa réciproque est continue de J sur I.

Ce théorème est très utile pour établir la continuité de certaines fonctions.

IV. Exemples de fonctions continues

1) Continuité des racines n-ième :

Théorème 93 *Soit $n \geqslant 1$. La fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

est continue.

Remarque : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

2) Continuité de l'exponentielle :

Proposition 202 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est absolument convergente.

Rappel : La somme de cette série est appelée *exponentielle de z* et est notée $\exp z$ ou e^z.

Corollaire 53 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$$

Nous allons maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 94 *Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:*

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Théorème 95 *La fonction*

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$*, continue strictement croissante. En particulier,*

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Remarque : $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = 1/e^x$, $e^0 = 1$ et on pose $e = e^1$ $(e = 2,718...)$.

Graphe de exp

Remarque : Si $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x + 1$. $e^n = (e^1)^n$, $e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$.

3) Définition du logarithme népérien :

exp est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$: c'est le logarithme.

Définition 162 *On appelle* logarithme (népérien) *la fonction réciproque de* exp*. On la note*

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

Théorème 96 ln *est fonction strictement croissante, continue et*

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

De plus, ln *est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *sur* $(\mathbb{R}, +)$*. En particulier, si* a *et* b *sont strictement positif et* $n \in \mathbb{Z}$*,*

$$\ln ab = \ln a + \ln b, \;\; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad et \quad \ln a^n = n \ln a$$

$$\ln 1 = 0, \;\; \ln e = 1$$

Graphe de ln

4) Fonctions exponentielles :

Définition 163 *Soit* $a > 0$ *et* $z \in \mathbb{C}$*. On appelle* a exponentielle z *le complexe*

$$a^z = e^{z \ln a}$$

ATTENTION ! a^z non défini pour $a \in \mathbb{C}$ en général !

Proposition 203 *L'application* $z \in \mathbb{C} \longmapsto a^z \in \mathbb{C}^*$ *(*$a > 0$*) est un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$*. De plus, si* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $b > 0$ *on a*

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$;
2. $a^{z+z'} = a^z a^{z'}$;
3. $(a^x)^z = a^{xz}$;
4. $(ab)^z = a^z b^z$.

Remarque : Si $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\ln a^x = x \ln a$.

Revenons au cas réel :

On appelle *fonctions exponentielles* les fonctions du type $x \longmapsto a^x$.

Proposition 204 *Soit* $a > 0$*.*

Si $a > 1$ *(resp* $a < 1$*) ,*$x \longmapsto a^x$ *est un homéomorphisme croissant (resp. décroissant) de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*. En particulier*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = \infty$$

$$(resp. \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \ )$$

Graphe de a^x

Remarque : Si $n \in \mathbb{N}$, a^n désigne bien $a \times a \times \ldots \times a$ (n fois). Si $n \in \mathbb{Z}_-$, a^n désigne bien $(a \times a \times \ldots \times a)^{-1}$ ($-n$ fois). Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{1/n}$ désigne $\sqrt[n]{a}$.

5) Fonctions puissances :

On appelle *fonctions puissances* les fonctions du type $x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 205 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

1. $x \longmapsto x^\alpha$ *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$*.*
2. *Si* $\alpha > 0$*,* $x \longmapsto x^\alpha$ *est un homéomorphisme croissant de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur lui même.*
3. *Si* $\alpha < 0$*,* $x \longmapsto x^\alpha$ *est un homéomorphisme décroissant de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur lui même.*

Remarque : Limite en 0 et $+\infty$.

Graphe de $x \longmapsto x^\alpha$

Remarque : Prolongement par continuité.

6) Fonctions trigonométriques :

Proposition 206 *1.* cos *et* sin *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

2. tan *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash(\pi/2+\pi\mathbb{Z})$.

3. cotan *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

4. arccos *et* arcsin *sont continues sur* $[-1,1]$.

5. arctan *et* arccotan *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

Remarque : On a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

7) Théorème de croissance comparée :

Théorème 97 *Soient $a>1$, $\alpha>0$ et $\beta>0$.*

1. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

2. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

3. On a

$$\lim_{x\to0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

Chapitre 2

Dérivation des fonctions à variable réelle

Au cours du XVIIème siècle, les mathématiciens acquièrent une maîtrise de plus plus en plus grande dans la manipulation des notions qui sont à la base du calcul infinitésimal. L'étude du mouvement, nécessitant le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de tangente aux courbes contiennent en germes les notions de taux de variations et de dérivées. L'émergence de ces notions permet également de résoudre les problèmes de maximum et de minimum et d'aborder la rectification des courbes : avant 1650, personne ne croyaient que la longueur d'une courbe puisse être rigoureusement égale à la longueur d'une droite. Mais peu après, Roberval réussit à calculer la longueur d'une arche de cycloïde. D'autres rectification suivirent.

Newton (1642-1727) -homme de science anglais- et Liebniz (1646-1716) -juriste, philosophe, homme politique allemand- sont à l'origine de l'effort de systématisation des méthodes développées au début du XVIIème siècle et sont les véritables fondateurs du calcul différentiel et intégral.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle d'intérieur non vide et $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

1) Limite d'une fonction à valeurs complexes :

Définition 164 *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que $f(x)$* tend vers l lorque x tend vers a *si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$

i.e.

$$\lim_{x \to a} |f(x) - l| = 0$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Proposition 207 *Soient $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = g + ih : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $l = \alpha + i\beta$ $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A.*

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *;*

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ *et* $\lim_{x \to a} h(x) = \beta$.

Remarque : La limite, si elle existe, est unique

Proposition 208 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A et $l \in \mathbb{C}$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *;*
(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergente vers a, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

Remarque : On en déduit la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient...
Remarque : On peut se limiter à un voisinage... Théorème de recollement.

2) Continuité des fonctions à valeurs complexes :

Définition 165 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in A$.*
On dit que f est continue en a *si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *i.e.*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta > 0)\ (\forall x \in A)\ (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.
Si f est continue en tout point de A, on dit que f est continue (sur A).

Proposition 209 *Soient $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.*
$f = g + ih$ est continue en a si seulement si g et h sont continues en a.

Corollaire 54 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si f et g sont continues en a, alors $f + g$, fg, λf, $|f|$ sont continues en a. De plus, si f ne s'annule pas, $1/f$ est continue en a.*

Remarque : Somme, produit et quotient de fonctions continues.

3) Propriétés des fonctions continues à valeurs complexes :

Rappel : On dit que $A \subset \mathbb{C}$ est *borné* s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|z| \leqslant M$.

Proposition 210 *Si A est compact et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $f(A)$ est un borné de $\mathbb{C}$.*

Définition 166 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$.*
On dit que f est uniformément continue *si*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta > 0)\ (\forall(x, y) \in A^2)\ (|x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Théorème 98 (Théorème de Heine) *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*
Si A est compact, f est uniformément continue.

Exemple : Fonctions k-lipschitziennes

4) Fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$:

Rappel : $\mathcal{F}(A, K^n)$ est un K-espace vectoriel et même une K-algèbre.

Définition 167 *Soient* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$, *$a$ adhérent à A,* $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$.

On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a *si pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$*, on a* $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$*. Dans ces conditions*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x\to a} f_1(x) \\ \lim_{x\to a} f_2(x) \\ \vdots \\ \lim_{x\to a} f_n(x) \end{pmatrix}$$

Définition 168 *Soient* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$*,* $a \in A$*.*

On dit que f *est* continue en a *si pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$*,* f_i *est continue en* a*. Dans le cas contraire, on dit que* f *est* discontinue en a*.*

Si f *est continue en tout point de* A*,* f *est dite* continue.

Proposition 211 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$*,* $g : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$*,* $\lambda \in K$ *et* $a \in A$*.*

Si f *et* g *sont continues en* a*,* $f + g$*,* λf*,* fg *le sont aussi.*

Corollaire 55 *Soient* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$*,* $g : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *continues,* $\lambda \in K$*.*

Alors $f + g$*,* λf *et* fg *sont continues.*

II. Dérivée d'une fonction en un point :

1) Définition et interprétation :

Définition 169 *Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$*,* $x_0 \in I$*.*

On dit que f *est* dérivable en x_0 *si le rapport* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *tend vers une limite* $l \in \mathbb{K}^n$ *lorsque* x *tend vers* x_0*,* x *restant dans* $I \backslash \{x_0\}$*.*

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 *et est notée* $f'(x_0)$*.*

On dit que f *est* dérivable (sur I) *si* f *est dérivable en tout point de* I*. On note* $\mathcal{D}(I, E)$ *l'ensemble des applications dérivables de* I *dans* E*.*

Remarque : • Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la limite de la pente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ de la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. Dessin

• Traduction avec des ε.

Exemple : Les fonctions constantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 1$.

Proposition 212 *Si* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *est dérivable en* x_0*,* f *est continue en* x_0*.*

La réciproque est bien sûr fausse :

• $x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Alors f est continue mais pas dérivable en 0.

• Il existe même des fonctions continues nulle part dérivable : le premier exemple fut exhiber par Bolzano.

Remarque : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Soit $J \subset I$ est un intervalle d'extrémités distinctes tel que $x_0 \in J$. Alors si f est dérivable en x_0, alors $f_{|J}$ est dérivable en x_0 et $(f_{|J})'(x_0) = f'(x_0)$.

• Soit $J \subset I$ est un intervalle d'extrémités distinctes tel que $x_0 \in \overset{\circ}{J}$. Alors si $f_{|J}$ est dérivable en x_0, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = (f_{|J})'(x_0)$.

La dérivation est comme la continuité un phénomène local.

Notation : Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et si on note, pour tout $x \in I$, $y = f(x)$, on peut écrire pour tout $x \in I$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

Remarque : $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ est dérivable en x_0 si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f_i est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

2) Linéarité de la dérivation :

Proposition 213 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $x_0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. Si f et g sont dérivables en x_0, $f + g$ et λf sont dérivables en x_0 et

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{et} \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

2. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ et f dérivable en x_0, $u \circ f$ est dérivable en x_0 et $(u \circ f)'(x_0) = u(f'(x_0))$.

Remarque : $\mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n) \longmapsto f' \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$ est linéaire.

3) Dérivation d'un produit :

Proposition 214 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables en x_0.*

Alors fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Corollaire 56 *Soient $f_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dérivables en x_0.*

Alors $f_1 f_2 \dots f_n$ est dérivable en x_0 et

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_0) \dots f_{i-1}(x_0) f_i'(x_0) f_{i+1}(x_0) \dots f_n(x_0)$$

Exemple : • On a $(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)f^{n-1}(x_0)$.

• Les fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, si $f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-1} + \ldots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Proposition 215 *Soient $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dérivables en x_0. Alors λf est dérivable en x_0 et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda'(x_0) f(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0)$$

4) Dérivation d'un quotient :

Proposition 216 *Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ dérivable en x_0. Alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Corollaire 57 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ dérivables en x_0.*
Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Exemple : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction rationnelle. Alors f est dérivable sur I. De plus

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

5) Dérivée à gauche et dérivée à droite :

Définition 170 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $x_0 \in I$.*
1. On suppose que x_0 n'est pas l'extrémité inférieure de I.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 *si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

Cette limite est alors appelé dérivée à gauche de f en x_0 *et est noté $f'_g(x_0)$.*
2. On suppose que x_0 n'est pas l'extrémité supérieure de I.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 *si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

Cette limite est alors appelé dérivée à droite de f en x_0 *et est noté $f'_d(x_0)$.*

Exemple : $x \longmapsto |x|$.
Remarque : Interprétation géométrique, point anguleux.
Remarque : Si f est dérivable en x_0 à droite (resp. à gauche), f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.
Remarque : Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

III. Dérivation d'une composée, d'une réciproque

Dans ce paragraphe, I et J désigne deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1) Composée :

Théorème 99 *Soient $f : I \longrightarrow J$ dérivable en $x_0 \in I$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dérivable en $y_0 = f(x_0)$.*
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

Notation : Si on note pour $x \in I$, $y = f(x)$, $z = g(y) = g \circ f(x)$. Alors $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f(x)$ s'écrit aussi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

ou encore

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)_{y_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}$$

Remarque : Soient $f \in I \longrightarrow J$, $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$.

Corollaire 58 *Soit $f : I \longrightarrow K^n$. Si ceci a un sens :*

$$\frac{d}{dx}f(ax) = af'(ax)$$

2) Fonction réciproque :

Théorème 100 *Soient $f : I \longrightarrow J$ une bijection, $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$. On suppose f dérivable en x_0, $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} continue en y_0.*
Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

3) Difféomorphisme :

Définition 171 *Un* difféomorphisme de I sur J *est une bijection de I sur J telle que f est dérivable sur I et f^{-1} est dérivable sur J.*

Remarque : Si f est un difféomorphisme :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Notation : Si f est un difféomorphisme de I sur J, $y = f(x) \in J$ pour tout $x \in I$, alors on écrit parfois

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

Remarque : I_I est un difféomrphisme de I.
Si $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow K$ sont des difféomorphismes, $g \circ f$ est un difféomorphisme de I sur K.
Si f est un difféomorphisme de I sur J, alors f^{-1} est un difféomorphisme de J sur I.

Corollaire 59 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone, dérivable et telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.*
Alors $J = f(I)$ est un intervalle d'intérieur non vide et f est un difféomorphisme de I sur J.

IV. Dérivation des fonctions usuelles

1) Racines n-ième :

Proposition 217 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.*

$x \longmapsto x^n$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le difféomorphisme réciproque $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

2) Exponentielle et logarithme népérien :

Théorème 101 *Soit $a \in \mathbb{C}$.*

$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{ax} \in \mathbb{C}$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

Corollaire 60 *$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}_+^*$ est un difféomorphisme et le difféomorphisme récipoque est $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln x \in \mathbb{R}$. On a*

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad \textit{et} \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Application :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

3) Fonctions trigonométriques :

Proposition 218 *1.* cos *et* sin *sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad \textit{et} \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

2. tan *est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ et*

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. cotan *est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ et*

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotan} x = -(1 + \operatorname{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Application :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Proposition 219 *Les fonctions suivantes sont des difféomorphismes :*

1. $x \in]0,\pi[\longmapsto \cos x \in]-1,1[$;
2. $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longmapsto \sin x \in]-1,1[$;
3. $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longmapsto \tan x \in \mathbb{R}$;
4. $x \in]0,\pi[\longmapsto \operatorname{cotan} x \in \mathbb{R}$.

De plus, on a

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccotan} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

4) Fonctions exponentielles et fonctions puissances :

Proposition 220 $x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_+^*$ *est un difféomorphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On a*

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln a a^x$$

Proposition 221 *1. Soit* $\alpha \in \mathbb{C}^*$. *Alors* $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha \in \mathbb{C}$ *est dérivable et*

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *est un difféomorphisme.*

Remarque : • Prolongement de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0. Dérivées en 0.
• Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, f^α est dérivable et $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$.

V. Dérivées succéssives

1) Fonctions n-fois dérivables :

Définition 172 *Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f *est* n-fois dérivable (sur I) *ou* de classe $\mathcal{D}^n$ *s'il existe* f_0, f_1,..., f_n *des fonctions de* I *dans* K^p *telles que* $f_0 = f$ *et pour tout* $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$, f_i *est dérivable et* $f_i' = f_{i+1}$.

On note $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}^p)$ *l'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{D}^n$ *de* I *dans* K^p.

On dit que f *est* indéfiniment dérivable *ou* de classe $\mathcal{D}^\infty$ *si* f *est* n*-fois dérivable pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{D}^\infty(I,\mathbb{K}^p)$ *l'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{D}^\infty$ *de* I *dans* K^p.

Remarque : Si f est n-fois dérivable, les f_i sont uniques :

Définition 173 *Avec les notations de la définition précédente, on écrira* $f^{(i)}$ *pour* f_i *et* $f^{(i)}$ *est appelé* dérivée d'ordre i de f, $i \in \{0,1,\dots,n\}$.

Notation : On note f'' pour $f^{(2)}$ et $D^n f$ ou $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f$ pour $f^{(n)}$.
Remarque : Si f est n-fois dérivable sur I, et $J \subset I$, $f_{|J}$ est n-fois dérivable et

$$(f_{|J})^{(n)} = f_{|J}^{(n)}$$

Proposition 222 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$, n et m dans $\mathbb{N}^*$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est $n+m$-fois dérivable.

(ii) f est n-fois dérivable et $f^{(n)}$ est m-fois dérivable.

Dans ces conditions, $f^{(n+m)} = (f^{(n)})^{(m)}$.

Remarque : Si f est n-fois dérivable et $f^{(n)}$ dérivable en x_0, on notera $f^{(n+1)}(x_0)$ pour $(f^{(n)})'(x_0)$.

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$:

Définition 174 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

On dit que f est n-fois continuement dérivable (sur I) *ou* de classe $\mathcal{C}^n$ *si f est n-fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}^p)$ l'ensemble des fonctions de I dans K^p de classe $\mathcal{C}^n$.

On dit que f est indéfiniment continuement dérivable *ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{D}^n$.*

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^p)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque :

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^p) \supset \mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \dots \mathcal{D}^n \supset \mathcal{C}^n \supset \mathcal{D}^{n+1} \supset \dots \supset \mathcal{D}^\infty = \mathcal{C}^\infty$$

Remarque : f de classe $\mathcal{C}^{n+m}$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{D}^n$ et $f^{(n)}$ de classe $\mathcal{C}^m$.

3) Opérations algébriques et composition :

Proposition 223 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$). Alors $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) et

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λf est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) et

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

3. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$). Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$).

4. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$). Alors $\frac{g}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$).

5. Soient $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$). Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$).

6. Si f est un difféomorphisme de I sur J et f de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$), f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$).

Corollaire 61 *Si f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ et si ceci a un sens, $f+g$, λf, fg, $\frac{g}{f}$, $g \circ f$ et f^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$.*

Remarque : Si $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{F}(I, K)$.

4) La formule de Liebniz :

Il serait intéressant d'avoir des formules explicites de $(g \circ f)^{(n)}$, $(f^{-1})^{(n)}$. Malheureusement, elles sont d'une grande complexité : pour $g \circ f$, c'est la formule de Faa di Bruno ; pour f^{-1} c'est la formule de réversion de Lagrange.

Nous allons nous contenter de donner $(fg)^{(n)}$:

Théorème 102 (Formule de Liebniz) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

5) Exemples :

Théorème 103 *1. Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

2. Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction rationnelle. Alors F est $\mathcal{C}^\infty$.

3. $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Soit $a > 0$, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^\alpha) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^x = e^x \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ln x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Dérivation des polynômes

Chapitre 3

Variations des fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle d'intérieur non vide et $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Formule des accroissements finis

1) Théorème de Rolle :

Proposition 224 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$.*
On suppose que f est dérivable en x_0 et que f admet en x_0 un extremum local.
Alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 104 (Théorème de Rolle) *Soit $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*
On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : On ne peut généraliser ce théorème aux fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ avec p quelconque : en effet, prenons $f : x \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{ix} \in \mathbb{C}$. On a $f(0) = f(2\pi)$ mais pour tout $c \in]0, 2\pi[$, $f'(c) = ie^{ic} \neq 0$.

2) Formule des accroissements finis :

Théorème 105 (Formule des accroissements finis) *Soient $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Corollaire 62 (Inégalité des accroissements finis) *Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $(a, b) \in I^2$.*
On suppose $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < +\infty$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)||b - a|$$

3) Des inégalités remarquables :

Théorème 106 *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$, $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.*

II. Applications du théorème des accroissements finis

1) Caractérisation des fonctions lipschitziennes :

Proposition 225 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, $k \in \mathbb{R}$.*
1. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $(a,b) \in I^2$, $a \neq b$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant k$.
(ii) Pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant k$.
2. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $(a,b) \in I^2$, $a \neq b$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant k$.
(ii) Pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant k$.
3. On suppose $k \geqslant 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est k-lipschitzienne.
(ii) Pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$

Exemple : Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, $|f'| \leqslant M$. Alors f est uniformément continue.

2) Caractérisation de la monotonie :

Proposition 226 *Soit $I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.*
1. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f croissante.
(ii) Pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f décroissante.
(i) Pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
3. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$.
4. Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) et s'annule pas sur un sous-intervalle de I non réduit à un point, f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

3) Primitives :

Définition 175 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$.*
Une primitive de f *est un élément F de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K}^p)$ tel que $F' = f$.*

Proposition 227 *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$ est dérivable et $f' = 0$, alors f est constante.*

Corollaire 63 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^p$.*
Une primitive de f si elle existe, est unique à une constante additive près.

4) Théorème de la limite de la dérivée :

Théorème 107 (Théorème de la limite de la dérivée) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $I \backslash \{x_0\}$. Si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = l$ et f' est continue en x_0.*

Exemple : $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Remarque : Extension aux limites infinies. Tangentes verticales pour arcsin et arccos.

5) Règle de l'Hôpital :

Lemme 13 (Formule des accroissements finis généralisée) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a \neq b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues sur* $[a,b]$ *dérivables sur* $]a,b[$.

On suppose que pour tout $x \in]a,b[$, *on a* $g'(x) \neq 0$.

Alors $g(b) \neq g(a)$ *et il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Proposition 228 (Règle de l'Hôpital) *Soit* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

On suppose que f *et* g *sont continues sur* I, *dérivable sur* $I \backslash \{x_0\}$ *et que pour tout* $x \in I \backslash \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$, *alors*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \backslash \{x_0\}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$$

Application :

III. Formule de Taylor-Lagrange

C'est une généralisation de la formule des accroissements finis. Elle ne marche que pour les fonctions à valeurs réelles.

Théorème 108 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* $[a,b]$, *de classe* $\mathcal{D}^{n+1}$ *sur* $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

ce qui s'écrit encore

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque : Pour $n = 0$ on retrouve la formule des accroissements finis. Ecriture entre a et $a+h$.

Corollaire 64 (Formule de Mac-Laurin) *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{D}^{n+1}$, $0 \in \mathring{I}$.

Alors pour tout $x \in \mathring{I}$, $x \neq 0$, *il existe* $c \in]0,x[$ *tel que*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

IV. Fonctions convexes

1) Tangentes :

Définition 176 *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *L'ensemble des points* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $y = \alpha x + \beta$ *(resp.* $x = \alpha$*) est appelée* droite affine de $\mathbb{R}^2$.

Définition 177 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable en* $x_0 \in I$. *On appelle* tangente à la courbe de f en x_0 *la droite d'équation :*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2) Parties convexes de $\mathbb{R}^n$:

Définition 178 *Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^{n2}$. On note :*

$$[X,Y] = \{(1-\lambda)X + \lambda Y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0,1]\}$$

Définition 179 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.*
On dit que A est convexe *si pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $(X,Y) \in A^2$:*

$$(1-\lambda)X + \lambda Y \in A$$

ou encore si pour tout $(X,Y) \in A^2$ et tout λ et μ dans $\mathbb{R}_+$ avec $\lambda + \mu = 1$, on a :

$$\lambda X + \mu Y \in A$$

Remarque : Dessin
Exemple : • Un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est convexe.
• Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 229 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) A convexe ;
(ii) Pour tout λ_1, λ_2,..., λ_n dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ et tout x_1, x_2,..., x_n dans A

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n \in A$$

3) Fonctions convexes :

Définition 180 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f est convexe *si pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Remarque : Interprétation graphique : le graphe est au dessous des sécantes.
Exemple : $x \longmapsto x + a$, $x \longmapsto x^2$.

Proposition 230 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors si $x < y < z$ dans I :*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Proposition 231 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Pour tout $x_0 \in I$, on considère la fonction :*

$$\Phi_{x_0} : \begin{array}{ccc} I\backslash\{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

est croissante. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe.
(ii) Pour tout $x_0 \in I$, Φ_{x_0} est croissante.

Remarque : Cela traduit la croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité.

Proposition 232 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in I,\ y \geqslant f(x)\}$.*
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f convexe ;
(ii) Pour tout λ_1,..., λ_n dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ et tout x_1,... ; x_n dans I, on a

$$f(\lambda x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

(iii) A convexe.

4) Caractérisations des fonctions convexes dérivables :

Proposition 233 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.*
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f convexe ;
(ii) f' est croissante ;
(iii) Pour tout $(a,b) \in I^2$, $f(b) \geqslant f(a) + (b-a)f'(a)$.

Remarque : : Interprétation graphique ; le graphe est au dessus des tangentes.

Corollaire 65 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{D}^2$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f convexe ;
(ii) $f'' \geqslant 0$.

Application aux extrema pour une fonction $\mathcal{C}^2$.

5) Applications

Proposition 234 *1. Pour $x \geqslant -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.*
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.
3. Pour $x \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Proposition 235 *Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $[0,1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $\mathbb{R}_+$. Alors :*

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Corollaire 66 (Inégalité arithmético-géométrique) *Soient x_1, x_2,..., x_n des réels positifs, $n \geqslant 1$. Alors*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Remarque : Stricte convexité.

V. Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

1) Généralités :

Définition 181 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
On appelle cosinus hyperbolique de x *le réel*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle sinus hyperbolique de x *le réel*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Remarque : Soit $x \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$;
- $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$;

Proposition 236 *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Remarque : • ch est paire ;
- sh est impaire ;
- $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{sh} 0 = 0$;
- $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposition 237 *1.* ch *est un $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $]1, +\infty[$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$$

Tableau de variations.

2. sh *est un $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x$$

Tableau de variations.

Remarque : Graphe de ch et sh.

2) Formules de trigonométrie hyperbolique :

Proposition 238 *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a*

1.

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

2.

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)]$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)]$$

3.

$$\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{ch} \frac{u+v}{2} \operatorname{ch} \frac{u-v}{2}$$

$$\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{sh} \frac{u+v}{2} \operatorname{sh} \frac{u-v}{2}$$

$$\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{sh} \frac{u+v}{2} \operatorname{ch} \frac{u-v}{2}$$

Corollaire 67 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$$

Remarque : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{ch} nx = \sum_{0 \leqslant 2q \leqslant n} C_n^{2q} \operatorname{ch}^{n-2q} x \operatorname{sh}^{2q} x$$

$$\operatorname{sh} nx = \sum_{0 \leqslant 2q+1 \leqslant n} C_n^{2q+1} \operatorname{ch}^{n-2q-1} x \operatorname{sh}^{2q+1} x$$

3) Fonctions argument cosinus et argument sinus hyperboliques :

Définition 182 $\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}_+}$ *est un homéomorphisme croissant de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $[1, +\infty[$. *La fonction* Argch *est sa fonction réciproque : c'est un homéomorphisme croissante de* $[1, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

sh *est un homéomorphisme croissant de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* Argsh *en est la fonction réciproque ; c'est un héméomorphisme croissant de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque : Soit $x \geqslant 1$, $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y = \operatorname{Argch} x \iff x = \operatorname{ch} y \text{ et } y \geqslant 0$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y = \operatorname{Argsh} x \iff x = \operatorname{sh} y$$

Proposition 239 *1.* $\operatorname{Argch}_{|]1,+\infty[}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $]1,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Argch} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

2. Argsh *est* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Argsh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Proposition 240 *Pour tout* $x \geqslant 1$ *:*

$$\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

VI. Fonctions tangente et cotangente hyperboliques

1) Généralités :

Définition 183 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on appelle* tangente hyperbolique de x *le réel*

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, *on appelle* cotangente hyperbolique de x *le réel*

$$\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Remarque : th et coth sont impaires, $\operatorname{th}(0) = 0$.

Proposition 241 *1.* th *est* $\mathcal{C}^\infty$, *croissant de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1,1[$ *et si* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{th} x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Tableau de variations

2. coth *est* $\mathcal{C}^\infty$, *décroissant de* $\mathbb{R}^*$ *sur* $]1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$ *et si* $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Tableau de variations

Graphe de th et coth

2) Formules de trigonométrie hyperboliques :

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Si $t = \operatorname{th} x/2$, on a

$$\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

3) Fonctions Argument tangente et argument cotangente hyperboliques :

Définition 184 *1.* th *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, 1[$. Argth *en est la réciproque : c'est une bijection de* $]-1, 1[$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. coth *est une bijection de* $\mathbb{R}^*$ *sur* $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. Argcoth *en est la réciproque : c'est une bijection de* $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Graphe de Argth et Argcoth.

Remarque : Pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y = \operatorname{Argth} x \iff x = \operatorname{th} y$$

Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}^*$ on a

$$y = \operatorname{Argcoth} x \iff x = \operatorname{coth} y$$

Proposition 242 *1.* Argth *est* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $]-1, 1[$ *sur* $\mathbb{R}$ *et si* $x \in]-1, 1[$ *:*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Argth} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Tableau de variations

2. $\operatorname{Argcoth}_{|]1,+\infty[}$ *et* $\operatorname{Argcoth}_{|]-\infty,-1[}$ *sont* $\mathcal{C}^\infty$ *et si* $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ *:*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Argcoth} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Tableau de variations

Proposition 243 *1. Pour tout* $x \in]-1,1[$*, on a*

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

2. Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$*, on a*

$$\operatorname{Argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

Conclusion : Etude des fonctions

Chapitre 4

Développements limités

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

I. Position du problème

Placons nous par exemple au voisinage de $+\infty$. On se donne une suite de fonctions connues appelées "échelle de comparaison", par exemple :

$$1,\ x^\alpha\ \ (\alpha \neq 0),\ (\log x)^\beta\ \ (\beta \neq 0),\ \ e^{cx^\gamma}\ \ (c \neq 0,\ \gamma > 0)$$

ainsi que leurs produits :

$$x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)} \text{ où } P(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2} + \ldots + c_r x^{\gamma_r}$$

L'idée est de comparer le comportement d'une fonction quelconque f avec des combinaisons linéaires de fonctions de l'échelle de comparaison. Par exemple :

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{\varepsilon(x)}{x^2}$$

où $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Dans la plupart des cas que nous étudierons, nous nous placerons au voisinage de 0 et prendrons comme échelle de comparaison les fonctions polynômiales.

Les développements limités sont un puissant outil pour le calcul des limites et la linéarisation des problèmes.

II. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Dans tous ce paragraphe, A désignera une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à $A\backslash\{a\}$: a est un point d'accumulation de A.

1) Notations de Landau :

Définition 185 *Soit $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. On dit que f est dominée *par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_0 de a, φ : $V_0 \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée telles que pour tout $x \in V_0 \cap A$:*

$$f(x) = \varphi(x) g(x)$$

On note alors (abusivement) $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de a.

2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a *s'il existe un voisinage V_0 de a, $\varepsilon : V_0 \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in V_0 \cap A$:*

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad et \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

On écrit alors

$$f(x) \ll_{x \to a} g(x)$$

ou encore de manière abusive $f = o(g)$ au voisinage de a.

ATTENTION ! $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$ n'est pas une vraie égalité.

Remarque : • Au voisinage de a, $f = \mathcal{O}(g)$ si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$, un voisinage V de a tels que pour tout $x \in V \cap A$, $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$.

• Au voisinage de a, $f = o(g)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V voisinage de a tel que pour tout $x \in V \cap A$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.

Remarque : Si $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on retrouve précisément la relation $\ll$ introduite pour les suites.

Exemple : • Au voisinage de $+\infty$:

$$x^\alpha = o(e^x) \quad \text{et} \quad \ln x = o(x^\alpha) \;\; (\alpha > 0)$$

• Au voisinage de 0,

$$|\ln x|^\beta = o(\frac{1}{x^\alpha}) \;\; (\alpha > 0)$$

2) Propriétés des o et des $\mathcal{O}$:

Proposition 244 *Les fonctions considérées vont de A dans $\mathbb{R}$. Au voisinage de a :*

1. si $f = o(g)$, $f = \mathcal{O}(g)$;

2. si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = o(g)$ pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$;

3. si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, on a $f = o(h)$;

4. $f = o(1)$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$; $f = \mathcal{O}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a ;

5. Si $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$, $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$;

Exercice : Soient $f = o(g)$ (au voisinage de a), $\alpha > 0$. Montrer que

$$f^\alpha = o(g^\alpha)$$

3) Changements de variables, intégration :

Proposition 245 *Soient $B \subset \mathbb{R}$, $b \in \bar{R}$ adhérent à $B \backslash \{b\}$, $\varphi : B \longrightarrow A$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

On suppose $\lim_{t \to b} \varphi(t) = a$ et $f = o(g)$ au voisinage de a. Alors au voisinage de b

$$f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$$

Proposition 246 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f' = o(g')$ au voisinage de a. On suppose que g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$. Alors*

$$f(x) - f(a) = o(g(x) - g(a))$$

4) Fonctions équivalentes :

Définition 186 *Soit* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $f(x)$ *est* équivalente à $g(x)$ au voisinage de a *s'il existe* V_0 *voisinage de* a, $\alpha : V_0 \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(\forall x \in V_0 \cap A)\ (f(x) = \alpha(x)g(x)) \quad et \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = 1$$

On écrit alors $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ *ou* $f \sim_a g$.

Remarque : Si sur un voisinage V de a, $g(x) \neq 0$:

$$f(x) \sim_{x \to a} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V \cap A}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque : Si $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$, on retrouve exactement l'équivalence des suites.
Exemple : Au voisinage de 0 :

$$\sin x \sim x, \ \ \ln(1+x) \sim x, \ \ e^x - 1 \sim x$$

Proposition 247 $\sim$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Proposition 248 *Soient* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$.
(ii) $f - g = o(g)$.

5) Equivalents et limites :

Proposition 249 *Soient* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, *l finie et non nulle, on a*

$$f(x) \sim_{x \to a} l$$

2. Si $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ *et* $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \bar{R}$, *on a :*

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

Remarque : $f(x) \sim_{x \to a} 0$ si et seulement si f s'annule sur un voisinage de a.

Proposition 250 *Soient* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose* $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$.
Alors il existe un voisinage V *de* a *tel que sur* $V \cap A$, f *et* g *sont de même signe strict.*

6) Propriétés des équivalents :

Proposition 251 *Soient* $f, g, F, G : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose qu'au voisinage de* a *:*

$$F \sim G, \ \ f \sim g, \ \ f = o(F)$$

alors $g = o(G)$.

Proposition 252 *Soient* $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose qu'au voisinage de* a, $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$. *Alors :*

$$f_1 f_2 \sim g_1 g_2$$

Proposition 253 *Soient $f, g : A \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ avec $B = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}_+^*$ ou $B = \mathbb{R}^*$, $u : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $u(1) = 1$ et $u(xy) = u(x)u(y)$ et u continue. Au voisinage de a $f \sim g$,*

$$u(f(x)) \sim_{x \to a} u(g(x))$$

Exemple : Au voisinage de a

$$f \sim g \Longrightarrow |f| \sim |g|$$

$$f \sim g \Longrightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$$

$$f \sim g \Longrightarrow \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$$

Proposition 254 *Soient $B \subset \mathbb{R}$, $b \in \bar{R}$ adhérent à $B \backslash \{b\}$, $\varphi : B \longrightarrow A$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On suppose $\lim_{t \to b} \varphi(t) = a$ et $f \sim g$ au voisinage de a. Alors au voisinage de b

$$f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$$

Remarque : On ne peut pas en général sommer les équivalents : en $+\infty$:

$$x + 2 \sim x \quad \text{et} \quad -x \sim -x + 1$$

mais $2 = x + 2 - x$ n'est pas équivalent à $1 = x - x + 1$.

Proposition 255 *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i \sim \lambda_i g$ au voisinage de a. Alors au voisinage de a :*

$$\sum_{i=1}^n f_i = \begin{cases} \sim (\sum_{i=1}^n \lambda_i) g \text{ si } \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0 \\ o(g) \text{ si } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \end{cases}$$

ATTENTION ! Si $f \sim g$, on n'a pas forcément $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$: en $+\infty$, $x \sim x + 1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1}.

III. Développements limités

1) Généralités :

Définition 187 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, 0 adhérent à I, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n (DL_n) lorsque x tend vers 0 (dans *I) s'il existe a_0, a_1,..., a_n dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *est le* développement limité d'ordre n (DL_n) de f en 0.

Remarque : $f(x)$ admet un DL_n lorsque x tend vers 0 dans I s'il existe a_0, a_1,..., a_n dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de 0, $\varepsilon : V \cap I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) x^n$$

Proposition 256 *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $p \leqslant n$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, 0 adhérent à I.*
Si f admet un DL_n en 0 $\sum_{k=0}^n a_k x^k$, f admet un DL_p en 0 à savoir $\sum_{k=0}^p a_k x^k$.

2) Unicité :

• f admet un DL_0 en 0 si et seulement s'il existe a_0 tel que $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$ où $\lim_0 \varepsilon = 0$ i.e. si et seulement f admet une limite en 0.

De plus, si $0 \in I$, f admet un DL_0 si et seulement si f est continue en 0.

• f admet un DL_1 si et seulement s'il existe a_0 et a_1 tel que $f(x) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ soit encore

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1$$

De plus, si $0 \in I$, f admet un DL_1 si et seulement si f est dérivable en 0. Dans ces conditions $f'(0) = a_1$.

Théorème 109 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, 0 adhérent à I, $n \in \mathbb{N}$.*
Si f admet un DL_n $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ alors a_0, a_1,..., a_n sont uniques.

3) Changement de variables :

Proposition 257 *Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à A, 0 adhérent à I, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : A \longrightarrow I$. On suppose :*
1. $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.
2. $f(y)$ admet un DL_n en 0 : $\sum_{k=0}^n a_k y^k$.
Alors, lorsque x tend vers a,

$$f(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^n a_k [\varphi(x)]^k + o(\varphi(x)^n)$$

Exemple :

• Soit a adhérent à I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Posons pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = x - a$ et pour tout $y \in -a + I$, $g(y) = f(a + y)$. Si $g(y)$ admet un DL_n en 0 $\sum_{k=0}^n a_k y^k$ on peut écrire :

$$g(x - a) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

On dit alors que f admet un *développement limité d'ordre n lorsque x tend vers a.*

• On suppose que $+\infty$ est une borne de I. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Posons pour tout $x \in I \cap \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Pour tout $y \in \{z, 1/z \in I \cap \mathbb{R}_+^*\}$, posons $g(y) = f(\frac{1}{y})$.

Si $g(y)$ admet un DL_n en 0 $\sum_{k=0}^n a_k y^k$ on peut écrire

$$f(x) = g(\frac{1}{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o(\frac{1}{x^n})$$

On dit alors que f admet un *un développement limité d'ordre n lorsque x tends vers $+\infty$.*

Remarque : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un DL_n en 0 : $\sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Alors $f(-x)$ admet un DL_n en 0 à savoir $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k$.

En particulier, si f est paire, $a_k = 0$ pour k impair ; si f est impaire, $a_k = 0$ pour k pair.

4) Intégration des développements limités :

Proposition 258 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, $a \in \bar{I}$. On suppose que f' admet un DL_n en a :*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Alors f admet un DL_{n+1} en a à savoir :

$$l + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$$

5) Opérations sur les développements limités :

Proposition 259 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, 0 adhérent à I, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f et g admettent des DL_n respectifs $P(x)$ et $Q(x)$.*

1. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n à savoir $(\lambda P + \mu Q)(x)$.

2. fg admet un DL_n $R(x)$ où R est le reste de la division euclidienne de PQ par X^{n+1}.

Proposition 260 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$, 0 adhérent à I. On suppose que f et g admettent des DL_n respectifs $P(x)$ et $Q(x)$ avec $Q(0) \neq 0$.*

Alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet un DL_n $R(x)$ où R est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n (on a $P = QR + X^{n+1}S$).

6) Composition des développements limités :

Proposition 261 *Soient J un intervalle d'extrémités distinctes, 0 adhérent à I et à J, $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.*

On suppose que $f(x)$ admet un DL_n en 0 $P(x)$ avec $P(0) = 0$ et que $g(y)$ admet un DL_n en 0 $Q(y)$.

Alors $g \circ f(x)$ admet un DL_n en 0 $R(x)$, R étant le reste de $Q \circ P$ par X^{n+1}.

IV. Développements limités usuels

1) Formule de Taylor-Young :

Théorème 110 (Formule de Taylor-Young) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. On suppose f de classe $\mathcal{D}^{n-1}$ et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.*

Alors f admet un développement limité d'ordre n en a à savoir :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque : Pour $n = 0$ ou 1, la réciproque est vraie : si f admet un DL_1, f est dérivable en a.

Pour $n \geqslant 2$, la réciproque est fausse (considérer $x \longmapsto x^{5/2}\sin(1/x)$).

2) Développements limités de exp, cos, sin, ch et sh :

Proposition 262 *Soit $n \in \mathbb{N}$:*

1. e^x admet un DL_n en 0 :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. $\cos x$ admet un DL_{2n+1} en 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3. $\sin x$ admet un DL_{2n+2} en 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

4. $\operatorname{ch} x$ admet un DL_{2n+1} en 0 :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

5. $\operatorname{sh} x$ admet un DL_{2n+2} en 0 :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

3) Développement limité de $(1+x)^\alpha$:

Théorème 111 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $(1+x)^\alpha$ admet un DL_n en 0 :*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Application :

- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

- Par changement de variables

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

- Par changement de variables

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

- Par intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

- Par intégration

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

- Par intégration

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

- Par intégration

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

- On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

-

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- Par changement de variables :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}x^4 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

- Par changement de variables :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}x^4 + \ldots$$

$$+(-1)^n \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

- Par intégration :

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

- Par intégration :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

4) Développement limité de tan et th :

Proposition 263 *On a :*

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

5) Partie principale :

Proposition 264 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, 0 adhérent à I. On suppose que f admet un DL_n $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ en 0 et que les a_k sont non tous nuls. On note p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. Alors en 0 :*

$$f(x) \sim a_p x^p$$

Définition 188 *Avec les notations de la proposition précédente, $a_p x^p$ est appelé* partie principale de f.

Remarque : Ecrire $f(x) \sim a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1}$ n'est pas pertinent.
Exemple : En 0 :

- $e^x \sim 1$, $e^x - 1 \sim x$, $e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$ et

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!} \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- $\sin x \sim x$ et $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$.
- $\cos x \sim 1$ et

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

- $\operatorname{sh} x \sim x$ et $\operatorname{sh} x - x \sim \frac{x^3}{6}$.
- $\operatorname{ch} x \sim 1$ et

$$\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

- $(1+x)^\alpha \sim 1$ et

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

- $\ln(1+x) \sim x$.
- $\arctan x \sim x$.
- $\operatorname{Argth} x \sim x$.
- $\arcsin x \sim x$.
- $\operatorname{Argsh} x \sim x$.
- $\tan x \sim x$, $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$.
- $\operatorname{th} x \sim x$.

V. Problèmes liés à l'étude des fonctions

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
* Domaine de définition : Si f est donnée sous forme analytique, par exemple

$$f(x) = \text{Argch}\sqrt{3-x}$$

on appelle *domaine de définition* D_f la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle l'expression $f(x)$ a un sens : $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

* Régularité : On cherche les parties de D_f sur lesquelles f est $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{D}^k$.

* Sens de variations : On l'établit le plus souvent par l'intermédiaire du signe de f'.

* Limites, points remarquables : On cherchera notamment les limites de $f(x)$ au bornes du domaine D_f, la valeur des extrema, les points anguleux...
On résume les deux derniers points dans le célèbre "tableau de variations".'

* Comportement à l'infini : Soit $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet comme *direction asymptotique la droite* $y = ax$ (resp. $x = 0$) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (\text{ resp. } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Supposons que $y = ax$ soit une direction asymptotique. Si au voisinage de $+\infty$, $f(x) = ax+b+o(1)$, alors on dit que f admet la droite affine $y = ax+b$ comme *asymptote*. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = +\infty$, on dit que f admet une *branche parabolique dans la direction* $y = ax$.
Si f admet comme direction asymptotique la droite $x = 0$, on dit que f a une branche parabolique dans la direction $x = 0$.
Enfin, si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lim_b f = \pm\infty$, on dit que f admet la droite $x = b$ comme asymptote.

* Convexité : On l'étudie par l'intermédiaire de f''.

* Position de la courbe par rapport à la tangente : Si f est convexe, la courbe est au dessus des tangentes. On peut également passer par un développement limité au point considéré :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec $a_p \neq 0$...
Exemple : Etudier

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Chapitre 5

Suites de fonctions

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Convergence simple, convergence uniforme

1) Limite simple :

Définition 189 *Soient X un ensemble, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$.*

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f *si pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ i.e.*

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$$

f est alors unique et est appelé limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On écrit :*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

Exemple : • $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$ converge simplement vers $f : x \in [0,1] \longmapsto \delta_{1x}$.

• Les triangles qui se déplacent...

• $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+(x-n)^2}$ converge simplement vers 0.

Remarque : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n + g_n) = f + g \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f_n g_n = fg$$

Si les f_n et f ne s'annulent pas, $1/f_n$ converge simplement vers $1/f$.

Définition 190 *Soient X un ensemble, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.*

On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement *si pour tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge.*

2) Limite uniforme :

Définition 191 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Si f est bornée, on appelle norme infinie de f l'élément*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \in \mathbb{R}_+$$

Remarque : Si f n'est pas bornée, on peut encore parler de sa norme infinie en posant $\|f\|_\infty = +\infty$.
Remarque : $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ bornée. C'est un sous-espace de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. On a pour tout $(f, g) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0$;
2. $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$;
3. $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

On dit que $\| \ \|_\infty$ est une *norme.*

Définition 192 *Soient $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$.*
On dit que f_n converge uniformément vers *f si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(\forall n \geqslant n_0)(\forall x \in X)(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(\forall n \geqslant n_0)(\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon)$$

ou encore :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque : Interprétation géométrique.

Proposition 265 *Soient $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Si f_n converge uniformément vers f, f_n converge simplement vers f.*

Proposition 266 *Soient $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.*
Si pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, alors f_n converge uniformément vers f.

Exemple : $x \longrightarrow e^{\frac{x}{n} + x^2}$ converge uniformément vers e^{x^2} sur $[0, 1]$.
Remarque : Dans les exemple du 1), les convergences sont simples, mais pas uniformes. Il n'y a pas équivalence entre ces deux notions.

3) Convergence d'une série de fonctions :

Définition 193 *Soient $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.*
On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément *si la suite de fonctions $(\sum_{p=0}^{n} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.*

Remarque : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in X$

$$|\sum_{p=n}^{+\infty} f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 267 *Soient $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.*
On suppose que pour tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ convergente.
Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

4) Etude d'un exemple :

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 0$ la fonction :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\lambda x e^{-nx} \end{array}$$

Si $\lambda < 1$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Par contre si $\lambda \geqslant 1$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 de manière non uniforme. Mais sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, la convergence est uniforme.

II. Continuité et dérivabilité des limites uniformes

Considérons pour $n \geqslant 0$:

$$f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$$

Chaque f_n est continue, et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Mais la limite des f_n n'est pas continue.

Proposition 268 *Soit $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. On suppose que chaque f_n est continue en a et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Alors f est continue en a.

Corollaire 68 *La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.*

III. Exemples d'approximations uniformes :

1) Subdivisions :

Définition 194 *Soit $a < b$.*

On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ *toute partie finie S de $[a, b]$ du type*

$$S = \{a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b\}$$

On appelle pas de la subdivision S *le réel positif*

$$|S| = \sup_{0\leqslant i\leqslant n-1} (a_{i+1} - a_i)$$

Remarque : $\{a, b\}$ est une subdivision de $[a, b]$.

Définition 195 *Soient S et S' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que S' est* plus fine que S *si $S \subset S'$.*

Remarque : On obtient donc des subdivisions plus fine que S en rajoutant des points. Si S' est plus fine que S, $|S'| \leqslant |S|$.

2) Fonctions en escalier :

Définition 196 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.*

On dit que f est affine *s'il existe $\alpha \in K$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

Définition 197 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.*

1. On dit que f est affine par morceaux *s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ tels que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est affine.*

2. On dit que f est en escalier *s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ tels que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est constante.*

Remarque : dessin !

Définition 198 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et S une subdivision de $[a,b]$.*

On dit que $S = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ est compatible avec f *si pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.*

Remarque : Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeur, elle est particulier bornée.

Proposition 269 *L'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-algèbre de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.*

3) Approximations des fonctions continues :

Proposition 270 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.*

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et affine par morceaux tel que :

$$\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En particulier, f est limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier tel que :

$$\|f - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En particulier, f est limite uniforme de fonctions en escalier.

4) Fonctions continues par morceaux :

Définition 199 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.*

f est dite continue par morceaux *s'il existe une subdivision $S = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ telle que pour tout $\in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe $\varphi_i : [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue vérifiant $\varphi_{i|]x_{i-1},x_i[} = f_{|]x_{i-1},x_i[}$.*

Remarque : Dessin !

Proposition 271 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.*

f est continue par morceaux si f est continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points où elle présente des points de discontinuité de première espèce.

Corollaire 69 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-algèbre de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.*

Exemple : Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

Remarque : Les fonctions en escalier forment une $\mathbb{R}$-algèbre, ainsi que les fonctions continues par morceaux.

Théorème 112 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier tel que :*

$$\|f - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En particulier, f est limite uniforme de fonctions en escalier.

5) Fonctions réglées :

Définition 200 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.
f est dite réglée *si f est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Remarque : Les fonctions réglées sont bornées.
Exemple : • Les fonctions continues sont réglées.
• Les fonctions affines par morceaux sont réglées.
• Les fonctions en escalier sont réglées.
• De manière plus générale, les fonctions continues par morceaux sont réglées.

Proposition 272 *1.* $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre* $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.
2.Soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une suite de fonctions réglées convergente uniformément vers une fonction* f.
Alors f est réglée.

Exercice : Montrer que les fonctions monotones sont réglées.

Théorème 113 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *en escalier tel que*

$$\|f - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

(ii) f est limite uniforme de fonctions en escalier.
(iii) En tout point de I, distincts de b, f admet une limite à droite et en tout point de I, distincts de a, f admet une limite à gauche.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas réglée.

6) Théorème de Weierstrass :

Théorème 114 (Théorème de Weierstrass) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*
Pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que*

$$\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En particulier, f est limite uniforme de polynômes.

Remarque : Ce théorème est fondamental en Analyse, il permet de ramener des problèmes sur des fonctions continues à des problèmes sur les fonctions polynômes (utile en analyse fonctionnelle). Les polynômes de Bernstein (voir TD) fournissent une suite de polunômes explicite convergente vers la fonction continue désirée.
Remarque : Ce théorème ne se généralise pas à $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $I = \mathbb{R}$ par exemple (si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, f est un polynôme).

Chapitre 6

Intégrale des fonctions réglées

Bernhard Riemann, né à Hanovre en 1826, fut professeur à l'université de Göttingen depuis 1857 jusqu'à sa mort prématurée en 1866. Ses contributions à divers domaines des Mathématiques (géométrie des variétés, fonctions algébriques,...) demeurent fondamentales. On lui doit la formulation définitive de la définition de l'intégrale qui porte son nom ; elle figure dans les préliminaires d'un mémoire sur les séries trigonmétriques (1854).

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I et J des intervalles d'intérieur non vide.

I. Intégration des fonctions en escalier

1) Préliminaires :

Rappel : On dit que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ tels que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante.

Par définition des fonctions en escalier, il existe toujours des subdivisions compatibles avec une fonction f en escalier. De plus, si S est compatible, toute subdivision plus fine que S est compatible avec f.

Remarque : L'ensemble des fonctions en escalier forme une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{C})$.

Lemme 14 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier. Pour toute subdivision $S = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ compatible avec f, on note*

$$I(S) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

où f_i désigne la valeur constante de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Alors $I(S)$ ne dépend que de f et non du choix de la subdivision S compatible avec f.

2) Définition et premières propriétés :

Ce lemme permet de poser sans ambiguïte :

Définition 201 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier.*

*L'*intégrale de f sur $[a,b]$ *est l'élément de $\mathbb{K}$ noté*

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{[a,b]} f(x)dx \quad \textit{ou encore} \quad \int_a^b f$$

défini par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f_i$$

où $\{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ *est une subdivision de* $[a, b]$ *compatible avec* f*, et* f_i *la valeur constante de* f *sur* $]x_{i-1}, x_i[$.

Notation : Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la variable x est muette, elle peut être remplacé par n'importe qu'elle autre lettre non déjà employée.
Exemple : • Si $f = 1$ sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b - a$$

• Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.
Notation : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Si α et β sont dans $[a, b]$, $\alpha < \beta$, alors $f_{|[\alpha,\beta]}$ est en escalier et on note :

$$\int_\alpha^\beta f = \int_a^b f_{|[\alpha,\beta]}$$

Lemme 15 *Soit* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *en escalier.*

1. Soit $c \in]a, b[$*. Alors* f *est en escalier sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$ *et on a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$*. Alors* $\lambda f + \mu g$ *est en escalier et on a :*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

3. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est positive,* $\int_a^b f \geqslant 0$*. Si* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $f \leqslant g$ *:*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

4. La fonction $|f|$ *est en escalier et*

$$|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$$

En particulier, si $|f| \leqslant k$*,*

$$|\int_a^b f| \leqslant k(b - a)$$

Remarque : On ne change pas l'intégrale de f en changeant f en un nombre fini de points.

II. Intégrale des fonctions réglées :

On désire construire l'intégrale de $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. La première idée est d'encadrer f par des fonctions en escalier g et h :

$$h \leqslant f \leqslant g$$

avec la perspective que

$$\int_a^b h \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

dessin !

En fait, on va utiliser trouver un cadre adapté en prenant f réglée, car elle va être alors limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème 115 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée.*

Il existe alors $I \in \mathbb{K}$ telle que pour toute suite $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de fonctions en escalier convergente uniformément vers f :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = I$$

I étant indépendant de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

Définition 202 *Avec les notations du théorème précédent, I est appelé* intégrale de f *et noté :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f$$

Remarque : • Si f est en escalier, on retrouve l'intégrale définie en I.

• On a donc construit l'intégrale pour les fonctions continues, continues par morceaux, monotones...

Remarque : Interprétation géométrique.

III. Propriétés de l'intégrale

1) Intégration sur des intervalles adjacents :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée. Alors si $c \in]a,b[$, $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont réglées.

Proposition 273 (Relation de Chasles) *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée et $c \in]a,b[$. Alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2) Linéarité :

Proposition 274 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglées, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Remarque : $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions réglées de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ et

$$u : f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}) \longmapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ est linéaire.}$$

3) Positivité :

Proposition 275 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ réglées.*

1. *Si $f \geqslant 0$, $\int_a^b f \geqslant 0$.*
2. *Si $f \leqslant g$, $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Proposition 276 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $f \geqslant 0$ et s'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$ (i.e. $f \neq 0$), alors*

$$\int_a^b f > 0$$

Remarque : Si f est continue positive et si $\int_a^b f = 0$, $f = 0$.

4) Majoration :

Proposition 277 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée. Alors $|f|$ est réglées et :*

$$|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$$

En particulier, si $|f| \leqslant k$, on a :

$$|\int_a^b f| \leqslant k(b-a)$$

Exercice : Montrer que si $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont réglées, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont réglées.

5) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Remarque : On n'a pas : $\int_a^b fg = \int_a^b f \times \int_a^b g$.

Théorème 116 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ réglée. On a :*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Si f et g sont continues, il y a égalité si, et seulement si f et g sont proportionnelles.

6) Intégrale d'une limite uniforme :

Proposition 278 *Soient $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions réglées convergente uniformément vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ (réglée). Alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

IV. Intégrale fonction de sa borne supérieure

1) Interversion des bornes d'intégration :

Convention : $\int_a^a f = 0$ (f quelconque défini sur $\{a\}$).

Définition 203 *Soient $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée. On pose :*

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

Remarque :

$$\int_a^b \sum_i \lambda_i f_i = \sum_i \lambda_i \int_a^b f_i, \quad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

Théorème 117 (Formule de Chasles) *Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $I = [a,c] \cup [c,b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée. Alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Exemple : Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée, $(a_0, a_1, \dots a_n) \in I^{n+1}$. On a :

$$\int_{a_0}^{a_n} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$$

2) Primitive des fonctions continues :

Remarque : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée, $c \in [a,b]$. Pour tout $x \in I$, on peut poser :

$$F(x) = \int_c^x f$$

Alors F est continue et même $\|f\|_\infty$-lipschitzienne.

Théorème 118 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée, $c \in I$, f continue en x_0. Pour tout $x \in I$, on peut poser :*

$$F(x) = \int_c^x f$$

et alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corollaire 70 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on peut poser :*

$$F(x) = \int_a^x f$$

Alors F est une primitive de f i.e. pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. En particulier, F est $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 71 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $(a,b) \in I^2$, F une primitive quelconque de f. Alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

3) Tableau des primitives usuelles :

Remarque : • Soit $\varphi : J \longrightarrow I$, $\psi : J \longrightarrow I$ dérivable, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors

$$G : x \in J \longmapsto G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur J et :

$$G'(x) = \psi'(x)f(\psi(x)) - \varphi'(x)f(\varphi(x))$$

pour tout $x \in J$.

• Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. C'est faux si f est seulement dérivable.

Corollaire 72 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe calC^1. Alors :*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{t\in[x,y]} |f'(t)||x-y|$$

4) Invariance par translation :

Proposition 279 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T-périodique. On suppose f réglée sur tout segment de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:*

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

Remarque : Cas f continue.

5) Formule de la moyenne :

Théorème 119 (Formule de la moyenne) *Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f et g continues et que $g \geqslant 0$ (resp. $g \leqslant 0$).*

Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b (fg) = f(c)\int_a^b g$$

Exemple : Avec $g = 1$, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f = (b-a)f(c)$$

V. Changement de variables, intégration par parties :

1) Changement de variables :

Théorème 120 (Formule de changement de variables) *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

On dit que l'on a fait $y = \varphi(x)$.

Exemple : Calculer $\int_a^b \cos^3 x \sin x \mathrm{d}x$.

2) Intégration par parties :

Théorème 121 (Intégration par parties) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $(a,b) \in I^2$. Alors, si F est une primitive de f, on a :*

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'$$

Exemple : Calculer $\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x$.

3) Formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 122 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$$

Remarque : Si $k = \mathbb{R}$, on retrouve avec la formule de la moyenne le reste de Lagrange.

VI. Sommes de Riemann

Définition 204 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, $S = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, un point $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.*

On définit alors la somme de Riemann *:*

$$\Sigma(f, S, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

Théorème 123 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour toute subdivision $S = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ de pas au plus égal à h, et toute suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de $[a,b]$ vérifiant $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$\left| \int_a^b f - \Sigma(f, S, \xi_1, \ldots, \xi_n) \right| \leqslant \varepsilon$$

Remarque : Encore valable si f est seulement réglée.

Corollaire 73 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ réglée et $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0.*

Pour chaque subdivision, $S_p = \{a = x_{p,0} < x_{p,1} < \ldots < x_{p,n_p} = b\}$, on choisit un point $\xi_{p,i}$ dans $[x_{p,i-1}, x_{p,i}]$. On considère les sommes de Riemann :

$$\Sigma_p = \sum_{i=1}^{n_p} (x_{p,i} - x_{p,i-1}) f(\xi_{p,i})$$

Alors

$$\lim_{p\to+\infty} \Sigma_p = \int_a^b f(x)\,dx$$

En particulier, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

converge vers $\int_a^b f$.

Exemple : Considérons :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x} \end{array}$$

Alors $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge vers

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

VII. Valeur approchée d'une intégrale

1) Méthode des rectangles :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone. Par exemple supposons f croissante. Pour $n > 0$, on pose $h = (b-a)/n$. Si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$hf\left(a + (k-1)h\right) \leqslant \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f \leqslant hf(a+kh)$$

D'où :

$$h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \leqslant \int_a^b f \leqslant h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

Interprétation en termes d'aires de rectangles lorsque f est positive.

L'erreur commise est au plus égale à :

$$\frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a))$$

Cette méthode permet d'atteindre toute précision arbitraire, mais elle est peut efficace car en $1/n$.

Exemple : $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$ à $0,01$ près : il faut prendre $n = 172$ et donc calculer 172 valeur de la fonction à intégrer.

2) Méthodes des trapèzes :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Lemme 16 *Soit $\alpha < \beta$ dans $[a, b]$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ affine telle que $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ et $f(\beta) = \varphi(\beta)$. Alors pour tout $t \in [\alpha, \beta]$:*

$$|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} \|f''\|_\infty$$

.

Pour $n > 0$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $a_k = a + k(b-a)/2n$. Interprétation graphique de

$$I_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(a_k) + f(a_{k+1})]$$

Alors :

$$\left| I_n - \int_a^b f \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|$$

Exemple : Dans l'exemple du 1), $n = 12$ suffit.

Chapitre 7

Calcul des primitives

Dans ce chapitre, I désignera un intervalle d'intérieur non vide, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

1) L'intégrale "indéfinie" :

Définition 205 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On note $\int f(x)dx$ une primitive arbitraire de f.*

Notation : Si F est une primitive de f, on notera :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C, \quad x \in I$$

Dans toute la suite C désignera une constante arbitraire.

Remarque : Pour le calcul de $\int f(x)\mathrm{d}x$, on commencera par trouver les intervalles maximaux sur lesquels f est continue. On fait le calcul dans chaque intervalle.

Exemple : • $I = \mathbb{R}$

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, \quad \int \operatorname{ch} x\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C, \quad \int \operatorname{sh} x\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

• $I = \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

• $I = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ ($I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $I = \mathbb{R}_+$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$) :

$$\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

• $I =]-\pi/2 + k\pi, +\pi/2 + k\pi[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

- $I =]k\pi, (k+1)\pi[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan} x + C$$

- $I = \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

- $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = \coth x + C$$

- $I = \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

- $I =]-1, 1[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{Argth} x + C = \frac{1}{2} \ln |\frac{1+x}{1-x}| + C$$

$I =]-\infty, -1[$ ou $I =]1, +\infty[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{Argcoth} x + C = \frac{1}{2} \ln |\frac{1+x}{1-x}| + C$$

- $I =]-1, 1[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = C' - \arccos x$$

- $I =]1, +\infty[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Argch} x + C$$

$I =]-\infty, -1[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{Argch}(-x) + C$$

- $I = \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Argsh} x + C$$

2) Linéarité :

Proposition 280 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx + C$$

Remarque : $\int (\sum_i \lambda_i f_i(x))\mathrm{d}x = \sum_i \lambda_i \int f_i(x)\mathrm{d}x$.
Exemple : • Intégration des polynômes : si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, alors

$$\int P(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

• Linéarisation de $\cos^n \sin^p$: soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\cos^n x \sin^p x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^n (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e^{ikx}$$

D'où :

$$\int \cos^n x \sin^p x\mathrm{d}x = \lambda_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\lambda_k}{ik} e^{ikx} + C$$

On peut écrire aussi :

$$\cos^n x \sin^p x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu_k \cos kx + \nu_k \sin kx)$$

D'où :

$$\int \cos^n x \sin^p x\mathrm{d}x = \mu_0 x + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (\frac{\mu_k}{k} \sin kx - \frac{\nu_k}{k} \cos kx) + C$$

On peut procéder aussi directement avec les formules de trigonométrie :

$$\int \cos^4 x\mathrm{d}x = 3/8x + 1/4 \sin 2x + 1/32 \sin 4x + C$$

• Linéarisation de $\mathrm{ch}^n \mathrm{sh}^p$: soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\mathrm{ch}^n x \,\mathrm{sh}^p x = (\frac{e^{x} + e^{-x}}{2})^n (\frac{e^{x} - e^{-x}}{2})^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e^{kx}$$

D'où :

$$\int \mathrm{ch}^n x \,\mathrm{sh}^p x\mathrm{d}x = \lambda_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\lambda_k}{k} e^{kx} + C$$

On peut écrire aussi :

$$\mathrm{ch}^n x \,\mathrm{sh}^p x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k (\mathrm{ch}\, kx + \mathrm{sh}\, kx) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu_k \,\mathrm{ch}\, kx + \nu_k \,\mathrm{sh}\, kx)$$

D'où :

$$\int \mathrm{ch}^n x \,\mathrm{sh}^p x\mathrm{d}x = \mu_0 x + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (\frac{\mu_k}{k} \,\mathrm{sh}\, kx + \frac{\nu_k}{k} \,\mathrm{ch}\, kx) + C$$

On peut procéder aussi directement avec les formules de trigonométrie hyperbolique :

$$\int \mathrm{sh}^4 x\mathrm{d}x = 3/8x - 1/4 \,\mathrm{sh}\, 2x + 1/32 \,\mathrm{sh}\, 4x + C$$

3) Changement de variables :

Proposition 281 *Soient J un intervalle d'extrémités distinctes, $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^1$, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors*

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x)\varphi'(x)\,dx \text{ avec } y = \varphi(x)$$

Application : On peut alléger la primitivation de $\cos^n x \sin^p x$ lorsque n ou p est impair ; par exemple :

$$\int \cos^{2n+1} x \sin^p x \mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^n \sin^p x \cos x \mathrm{d}x \underset{y=\sin x}{=} \int (1-y^2)^n y^p \mathrm{d}y = ...$$

Même remarque pour $\mathrm{ch}^n\, x\, \mathrm{sh}^p\, x$.

Exemple : Si F est une primitive de f et $a \neq 0$:

$$\int f(x+a)\mathrm{d}x = F(x+a) + C \quad \text{et} \quad \int f(ax)\mathrm{d}x = \frac{F(ax)}{a} + C$$

4) Intégration par parties :

Proposition 282 *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, g $\mathcal{C}^1$, F une primitive de f. Alors :*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Exemple : • $I = \mathbb{R}_+^*$:

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

• Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, on peut calculer

$$\int P(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x$$

par intégrations successives pour abaisser le degré de P. De même pour $\int \mathrm{ch}\, x P(x)\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{sh}\, x P(x)\mathrm{d}x$, $\int \cos x P(x)\mathrm{d}x$ et $\int \sin x P(x)\mathrm{d}x$. Par exemple :

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \mathrm{d}x = \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x + \beta e^{\alpha x} \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

On peut aussi utiliser les formules d'Euler.

II. Intégration des fractions rationnelles

1) Généralités :

Proposition 283 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ *et* $b^2 - 4ac < 0$. *Ecrivons* $ax^2 + bx + c = k[1 + (\alpha x + \beta)^2]$.

Le changement de variables $\alpha x + \beta = \tan t$ $(t \in] - \pi/2, \pi/2[)$ *ramène le calcul de*

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

à celui de

$$\int \cos^{2n-2} t\, dt$$

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + x + 1)^2} = 4/(3\sqrt{3})(\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(2x+1)}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}) + C$$

Application : Intégration des fractions rationnelles.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, I un intervalle ne contenant pas de pôle de F. On désire trouver une primitive de F. Pour cela, on décompose F en éléments simples.

• Pour les éléments de première espèce, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \alpha)^n} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^n} \text{ avec } y = x - \alpha$$

ce qui est calculable.

• Considérons un éléments de deuxième espèce :

$$\frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{\frac{\lambda}{2a}(2ax + b) + (\mu - \frac{\lambda b}{2a})}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{A(2ax + b) + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donc

$$\int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n}\mathrm{d}x = B\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + bx + c)^n} + A\int \frac{\mathrm{d}y}{y^n}$$

avec $y = ax^2 + bx + c$ ce qui est calculable.

Exemple :

$$\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2}\mathrm{d}x = \int [1/2\frac{2x+1}{x^2 + x + 1} - \frac{1/2}{(x^2 + x + 1)^2}]\mathrm{d}x$$

$$= -1/2\ln(x^2 + x + 1) - \int \frac{1/2}{(x^2 + x + 1)^2}\mathrm{d}x$$

2) Fonctions rationelles en e^x, en x et $((ax+b)/(cx+d))^{1/n}$:

Proposition 284 *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.*

Le changement de variables $y = e^x$ ramène le calcul de $\int F(e^x)dx$ à celui de $\int G(y)dy$ où $G \in \mathbb{R}(X)$.

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C$$

Proposition 285 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $ad - bc \neq 0$, f une fonction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ i.e. un rapport de combinaisons linéaires de termes de la forme*

$$x^p(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})^q \quad (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

Le changement de variable $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ramène le calcul de $\int f(x)dx$ à celui de $\int F(y)dy$ où $F \in \mathbb{R}(X)$.

Exemple :

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln|\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{1-\sqrt{\frac{x+1}{x}}}| + 2x\sqrt{\frac{x+1}{x}}] + C$$

III. Fonctions rationnelles en cos, sin, ch et sh

1) Fonctions rationnelles en cos et sin :

Proposition 286 *Soit f une fonctions rationnelle en* cos *et* sin *i.e.*

$$f(x) = \frac{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{pq}\cos^p x \sin^q x}{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} b_{pq}\cos^p x \sin^q x}$$

En effectuant le changement de variables $y = \tan\frac{x}{2}$, on ramène le calcul de $\int f(x)dx$ à celui de $\int F(y)dy$ où $F \in \mathbb{R}(X)$.

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}| + C$$

Remarque : Règle de Bioche :

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \cos x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto -x$.

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \sin x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi - x$.

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\tan x)(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \tan x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi + x$.

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}| + C$$

$$\int \frac{\sin x}{2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = -2/5 \ln|\cos x + 2\sin x| + x/5 + C$$

2) Fonctions rationnelles en ch et sh :

Proposition 287 *Soit f une fonction rationnelle en ch et sh i.e.*

$$f(x) = \frac{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{pq} \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}^q x}{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} b_{pq} \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}^q x}$$

En effectuant le changement de variables $y = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, on ramène le calcul de $\int f(x)dx$ à celui de $\int F(y)dy$ où $F \in \mathbb{R}(X)$.

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x} = \ln|\operatorname{th}\frac{x}{2}| + C$$

Remarque : $f(x)$ est aussi de la forme $G(e^x)$ avec $G \in \mathbb{R}(X)$. On peut donc prendre aussi $y = e^x$ comme nouvelle variable (refaire le calcul précédent).

Remarque :

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\operatorname{ch} x)\operatorname{sh} x\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \operatorname{ch} x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $G(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto -x$.

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \operatorname{sh} x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $G(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi - x$.

• Si $f(x)\mathrm{d}x = G(\operatorname{th} x)(1+\operatorname{th}^2 x)\mathrm{d}x$ où $G \in \mathbb{R}(X)$, on prendra avantageusement $y = \operatorname{th} x$ comme nouvelle variable : on constatera que cela est possible si $G(\tan x)(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi + x$.

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x} = \ln|\operatorname{th}\frac{x}{2}| + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}\mathrm{d}x = -1/3\ln|1+2\operatorname{th} x| + 1/2\ln|1+\operatorname{th} x| - 1/6\ln|1-\operatorname{th} x| + C$$

3) Fonctions rationnelles abéliennes :

Proposition 288 *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $r = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, f *une fonction rationnelle en* x *et* r *:*

$$f(x) = \frac{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{pq}x^p r^q}{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} b_{pq}x^p r^q}$$

1. Si $a > 0$ *et* $\Delta > 0$*, le changement de variables*

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} = \pm \operatorname{ch} t \quad (t \geqslant 0)$$

ramène la calcul de $\int f(x)dx$ *à celui de* $\int g(t)dt$ *où* $g(t)$ *est une fonction rationnelle en* $\operatorname{ch} t$ *et* $\operatorname{sh} t$*.*

2. Si $a < 0$ *et* $\Delta > 0$ *le changement de variables*

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} = \cos t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

ramène la calcul de $\int f(x)dx$ *à celui de* $\int g(t)dt$ *où* $g(t)$ *est une fonction rationnelle en* $\cos t$ *et* $\sin t$*.*

3. Si $a > 0$ *et* $\Delta < 0$*, le changement de variables*

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \operatorname{sh} t \quad (t \in \mathbb{R})$$

ramène la calcul de $\int f(x)dx$ *à celui de* $\int g(t)dt$ *où* $g(t)$ *est une fonction rationnelle en* $\operatorname{ch} t$ *et* $\operatorname{sh} t$*.*

Exemple : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}.$

Chapitre 8

Intégrales sur un intervalle quelconque

Nous avons juqu'à présent parlé d'intégrale définie sur un intervalle compact. Il est naturel de vouloir étendre cette notion à des fonctions définies sur des intervalles non fermés ou non bornés.

I et J désigneront des intervalles d'intérieur non vide, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera a et b les extrémités de I dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. On écrira $I = (a, b)$. Il s'agit de donner un sens à $\int_a^b f$. Si $a \notin I$ ou $a = -\infty$, on dit qu'il y a impropreté à gauche ; si $b \notin I$ ou $b = +\infty$, on dit qu'il y a impropreté à droite.

I. Fonctions positives intégrables

1) Fonctions localement réglées :

Définition 206 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f *est* localement réglée *si pour tout* $(a, b) \in I^2$, $f_{|[a,b]}$ *est réglée.*

Remarque : $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est localement réglée si pour tout segment contenu dans I, la restriction de f à ce segment est réglée.

Exemple : • Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, elle est localement réglée. C'est le cas usuel que nous aurons à traiter.

• Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I, f est localement réglée.

2) Intégrabilité des fonctions positives :

Définition 207 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *localement réglée.*

On dit que f *est* intégrable (sur I) *s'il existe* $M \geqslant 0$ *tel que pour tout intervalle* $J \subset I$ *compact :*

$$\int_J f \leqslant M$$

On appelle alors intégrale de f sur I *le réel*

$$\int_a^b f = \int_I f = \sup_{J \subset I,\ J \text{ segment}} \int_J f$$

Remarque : • Si $I = [a, b]$ est un compact, on retrouve l'intégrale définie au chapitre 6.
• On prendra garde à ne pas confondre f Riemann-intégrable et f intégrable.
• Si f est continue positive intégrable sur I et si $\int_I f = 0$, on a $f = 0$.

Exemple : Si I est borné ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) et si f est bornée (localement réglée et positives), f est intégrable. Par exemple :

$$\int_0^1 \sin^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x \quad \text{existe.}$$

Proposition 289 (Relation de Chasles) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, $c \in I$. On note $I_1 = (a, c] = I \cap]-\infty, c]$ et $I_2 = [c, b) = I \cap [c, \infty[$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est intégrable sur I.
(ii) $f_{|I_1}$ est intégrable sur I_1 et $f_{|I_2}$ est intégrable sur I_2.
Dans ces conditions,

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f \quad \text{ce qui s'écrit encore} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque : Ainsi, lorsqu'on étudie l'intégrabilité d'une fonction, on peut se ramener au cas où il n'y a qu'une seule impropreté.

3) Intégrabilité et fonction $x \longmapsto \int_a^x f$:

Théorème 124 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement réglée ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est intégrable sur $[a, b[$.
(ii) La fonction :

$$x \in [a, b[\longmapsto \int_a^x f \quad \text{admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } b$$

(iii) Il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x \leqslant M$.
Dans ces conditions, on a :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f$$

Dans le cas où la fonction n'est pas intégrable :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f = +\infty$$

Remarque : • Si $f : (a, b) \longmapsto \mathbb{R}_+$ est localement réglée, $c \in (a, b)$, f est intégrable si les limites :

$$\lim_{x \to a} \int_x^c f \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} \int_c^x f \text{ existent.}$$

Dans ces conditions,

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a} \int_x^c f + \lim_{x \to b} \int_c^x f$$

• On suppose f continue. Soit F une primitive de f sur I. f est intégrable sur $I = (a, b)$ si et seulement si f admet une limite en a et en b. Dans ces conditions :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

• Si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $[a, b[$ convergente vers b et si :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{b_n} f = l \in \mathbb{R}$$

f est intégrable et $\int_a^b f = l$.
Exemple : $\int_0^1 (-\ln x) \mathrm{d}x$ existe mais pas $\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.
Remarque : Supposons f est intégrable, $b \in \mathbb{R}$ (resp. ∞). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (resp. $A \geqslant a$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$0 \leqslant \int_x^b f \leqslant \varepsilon$$

Proposition 290 *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrables, $\lambda \geqslant 0$.*
Alors $f + g$ et λf sont intégrables et :

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g \quad \textit{et} \quad \int_I \lambda f = \lambda \int_I f$$

4) Théorème de comparaison :

Proposition 291 *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement réglée, $f \leqslant g$.*
Si g est intégrable, f est aussi intégrable et

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Si f n'est pas intégrable, g n'est pas intégrable.

Corollaire 74 *Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement réglée. On suppose que $f(x) \sim g(x)$ lorsque x tend vers b.*
Alors f est intégrable si, et seulement si, g est intégrable.

Corollaire 75 *Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement réglée. On suppose que $f(x) = O(g(x))$ lorsque x tend vers b.*
Alors, si g est intégrable, f est aussi intégrable.

Remarque : Ces théorèmes permettent d'étudier l'intégrabilité en les comparant à des fonctions de référence.

Proposition 292 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
1. *Soit $c > 0$. $x \in]c, +\infty[\longmapsto \frac{dx}{x^\alpha}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $c \neq a$. $x \in]c, a[\longmapsto \frac{dx}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable si et seulement si $\alpha < 1$.*

Exemple : • $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.
• $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d}x$ est défini.
• $\int_1^{+\infty} \ln x / x \mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \mathrm{d}x$.

5) Comparaison séries-intégrales :

Théorème 125 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si, et seulement si* $\alpha > 1$.

Exemple : Donner lorsque n tend vers l'infini un équivalent de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

II. Fonctions intégrables à valeurs complexes

1) Généralités :

Définition 208 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *localement réglée. On dit que* f *est intégrable si* $|f|$ *est intégrable.*

Remarque : • Si $|f| \leqslant g$ et g intégrable, f est intégrable.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x . \sin x}{x^3} \mathrm{d}x$

• Ainsi, pour étudier l'intégrabilité d'une fonction, on se ramène immédiatement au cas où la fonction est positive en passant à la valeur absolue ou au module. Et, on a alors à notre disposition les théorèmes de comparaison.

Proposition 293 *L'ensemble des fonctions intégrables de* I *dans* K *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition 294 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *localement réglée,* $f = f_+ - f_-$ *avec* $f_+ = \sup(f, 0) \geqslant 0$ *et* $f_- = \sup(-f, 0) \geqslant 0$.

Alors f *est intégrable si, et seulement si,* f_+ *et* f_- *sont intégrables.*

Définition 209 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable,* $f = f_+ - f_-$ *avec* $f_+ = \sup(f, 0) \geqslant 0$ *et* $f_- = \sup(-f, 0) \geqslant 0$.

On appelle intégrale de f sur I *le scalaire :*

$$\int_I f = \int_a^b f = \int_I f_+ - \int_I f_-$$

Proposition 295 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *localement réglée,* $f = f_1 + i f_2$ *avec* $f_+ = \Re(f)$ *et* $f_- = \Im(f)$.

Alors f *est intégrable si, et seulement si,* f_1 *et* f_2 *sont intégrables.*

Définition 210 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *intégrable,* $f = f_1 + i f_2$ *avec* $f_+ = \Re(f)$ *et* $f_- = \Im(f)$.

On appelle intégrale de f sur I *le scalaire :*

$$\int_I f = \int_a^b f = \int_I f_1 + i \int_I f_2$$

2) Relation de Chasles :

Proposition 296 (Relation de Chasles) *Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *localement réglée,* $c \in I$. *On note* $I_1 = (a, c] = I \cap] - \infty, c]$ *et* $I_2 = [c, b) = I \cap [c, \infty[$. *Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est intégrable sur* I.

(ii) $f_{|I_1}$ *est intégrable sur* I_1 *et* $f_{|I_2}$ *est intégrable sur* I_2.

Dans ces conditions,

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f \quad \textit{ce qui s'écrit encore} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque : Ainsi, lorsqu'on étudie l'intégrabilité d'une fonction, on peut se ramener au cas où il n'y a qu'une seule impropreté.

3) Intégrabilité et fonction $x \longmapsto \int_a^x f$:

Théorème 126 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ localement réglée ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Si f est intégrable sur $[a, b[$, la fonction :*

$$x \in [a, b[\longmapsto \int_a^x f \quad \textit{admet une limite lorsque } x \textit{ tend vers } b$$

Dans ces conditions, on a :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f$$

Remarque : • ATTENTION ! Ici nous n'avons plus d'équivalence (voir plus loin pour un contre-exemple).

• ATTENTION ! Ce n'est pas parce que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^{b_n} f = l$ ($\lim_{n \to +\infty} b_n = b$) que la limite $\lim_{x \to b} \int_a^x f$ existe.

• Si $f : (a, b) \longmapsto \mathbb{K}$ est localement réglée, $c \in (a, b)$, si f est intégrable, les limites :

$$\lim_{x \to a} \int_x^c f \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} \int_c^x f \text{ existent.}$$

Dans ces conditions,

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a} \int_x^c f + \lim_{x \to b} \int_c^x f$$

• On suppose f continue. Soit F une primitive de f sur I. Si f est intégrable sur $I = (a, b)$, f admet une limite en a et en b. Dans ces conditions :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

Proposition 297 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Alors :*

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|$$

Proposition 298 *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrables, $\lambda \geqslant 0$.*

Alors $f + g$ et λf sont intégrables et :

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g \quad \textit{et} \quad \int_I \lambda f = \lambda \int_I f$$

Remarque : L'intégrale est un opérateur linéaire.

4) Théorème de changement de variables :

Théorème 127 (Changement de variables) *Soient $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $\varphi : [\alpha,\beta[\longrightarrow [a,b[$ monotone de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{x\to\beta}\varphi(x) = b$.*

Alors f est intégrable si, et seulement si $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable et dans ces conditions :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}}$

5) Intégration par parties :

L'idée est de se ramener à un intervalle compact, d'effectuer l'intégration par parties sur cette intégrale "propre", puis de faire tendre les bornes.
Exemple : $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1$

III. Intégrales de fonctions non intégrables

1) Définition :

Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ localement réglée ($a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$).

Il peut arriver que $x\longmapsto\int_a^x f$ admettent une limite en b sans que f soit intégrable. On ne peut plus définir $\int_a^b f$ comme en II. Cependant, on écrira encore :

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{x\to b}\int_a^x f$$

Définition 211 *Soient $f : I\longrightarrow\mathbb{K}$ localemnt réglée, $c\in I$. On suppose que :*

$$\lim_{y\to a}\int_y^c f \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b}\int_c^x f \ \text{existent.}$$

Alors, on pose alors :

$$\int_{\to a}^{\to b} f = \lim_{y\to a}\int_y^c f + \lim_{x\to b}\int_c^x f$$

On dit que $\int_{\to a}^{\to b} f$ est une intégrale impropre *(ou* semi-convergente*).*

Remarque : • Si f est intégrable, on retrouve l'intégrale déjà définie.

• On suppose f continue. Soit F une primitive de f sur I. Si f est intégrable sur $I = (a,b)$, f admet une limite en a et en b. Dans ces conditions :

$$\int_{\to a}^{\to b} f = \lim_{x\to b}F(x) - \lim_{x\to a}F(x)$$

2) Moyens d'étude :

Pour traiter ce genre d'intégrales, on peut utiliser deux outils fondamentaux :
• Changement de variables : étudier $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$.
• Intégration par parties : étudier $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Chapitre 9

Equations différentielles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Qu'appelle t-on équation différentielle ? C'est une équation fonctionnelle, i.e. l'inconnu est une fonction, qui fait intervenir les dérivées de cette fonction. Par exemple :

$$(\forall x \in I)\ (y''^2(x)y(x) = y(x) - x\ln y(x)) \quad \text{noté aussi } y''^2 y = y - x\ln y$$

où $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable. Un grand nombre d'entre elles, reliée à des phénomènes physiques, chimiques, économiques peuvent se mettre de la forme : $y' = f(x,y)$. Avec de bonnes hypothèses sur f, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité locale d'une solution si l'on impose $y(x_0) = y_0$.

I. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1) Résolution de l'équation différentielle :

Définition 212 *Une* équation différentielle linéaire d'ordre 1 *est une équation de la forme*

$$(E) \qquad f' + \varphi f = \Psi$$

ce qui peut s'écrire avec $y = f(x)$:

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} + \varphi(x)y = \Psi(x)$$

où $\varphi, \Psi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ étant des fonctions continues données et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction inconnue dérivable.

Cette équation est dite homogène *(ou* sans second membre*) si $\Psi = 0$. L'équation homogène (E_0) : $f' + \varphi(x)f = 0$ est appelée* équation homogène associée à (E).

Théorème 128 *Soit $(E) : y' + \varphi(x)y = 0$ $(x \in I)$ une équation différentielle homogène d'ordre 1, φ continue. Fixons $x_0 \in I$.*

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt} \qquad (x \in I)$$

où C est une constante arbitraire de $\mathbb{K}$.

Remarque : Les solutions de (E) constituent un sous-espace de dimension 1 du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$.

Exemple : Soit $(E) : y' - \frac{4}{x}y = 0$, $I = \mathbb{R}_+^*$. Alors $y(x) = Cx^4$ si $x > 0$.

2) Méthode de la variation de la constante :

Soient $(E) : y' + \varphi(x)y = \Psi$ et $(E_0) : y' + \varphi(x)y = 0$. Soit Y une solution non nulle de (E_0). D'après ce qui précède, Y ne s'annule pas sur I.

Toute fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable s'écrit λY avec $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable. Alors y est solution de (E) si et seulement si :

$$\lambda' Y = \Psi$$

c'est-à-dire :

$$\lambda(x) = \int \Psi(x)Y^{-1}(x)\mathrm{d}x + C$$

Remarque : Problème de Cauchy : Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in K$. Il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.
Exemple : Soit $(E)y' - \frac{4}{x}y = x^4$ $x > 0$. Les solutions de (E) sont

$$y(x) = (x + C)x^4 \quad (x > 0)$$

où $C \in \mathbb{R}$.

3) Utilisation de solutions particulières :

Proposition 299 *Soit (E) $y' + \varphi(x)y = \Psi(x)$.*

Si z est une solution particulière de l'équation (E), on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à z toutes les solutions de l'équation homogène associée (E_0).

Proposition 300 (Principe de superposition des solutions particulières) *Soit (E) $y' + \varphi(x)y = \Psi(x)$.*

Si $\Psi = \sum_{k=1}^n a_k \Psi_k$ avec les Ψ_k continues et les $a_k \in \mathbb{K}$, et si y_k est une solution particulière de $y' + \varphi(x)y = \Psi_k(x)$, alors $\sum_{k=1}^n a_k y_k$ est une solution particulière de l'équation $y' + \varphi(x)y = \Psi(x)$.

Exemple : • Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + y = \cos x - \sin x$.
• Equations non résolue : $x^2y' + y - 1 = 0$.

II. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

1) Généralités :

Définition 213 *Une* équation différentielle linéaire d'ordre 2 *est une équation de la forme :*

$$(E) \qquad f'' + \varphi f' + \Psi f = \theta$$

ou, si on pose $y = f(x)$:

$$(E) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + \Psi(x)y = \theta(x) \quad (x \in I)$$

où $\varphi, \Psi, \theta : I \longrightarrow \mathbb{K}$ données sont continues et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{D}^2$ est l'inconnue.

Cette équation est dite homogène *(ou* sans second membre*) si $\theta = 0$.*

L'équation (E_0) $f'' + \varphi(x)f' + \Psi(x)f = 0$ est appelée équation homogène associée à $f'' + \varphi(x)f' + \Psi(x)f = \theta(x)$.

Théorème 129 *Soit* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = \theta(x)$, $x_0 \in I$, $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.
Alors, il existe une unique fonction y *de cette équation telle que*

$$y(x_0) = y_0 \quad et \quad y'(x_0) = y_1$$

admis

Corollaire 76 *Soit* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = 0$.
Les solutions de (E) *constituent un sous-espace de dimension* 2 *du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

2) Méthode de variations des constantes :

Définition 214 *Soient* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = 0$, (y, z) *deux solutions de* (E).
On appelle wronskien de (y, z) *en* x *le déterminant :*

$$W(y,z)(x) = \det \begin{pmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{pmatrix}$$

Proposition 301 *Soient* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = 0$, (y, z) *solutions de* (E). *Si* (y, z) *est une base du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel des solutions de* (E) *(on parle alors de* solutions indépendantes*) alors, pour tout* $x \in \mathbb{K}$, $W(y,z)(x) \neq 0$. *Réciproquement, s'il existe* $x \in I$ *tel que* $W(y,z)(x) \neq 0$, y *et* z *sont indépendantes.*

Théorème 130 (Méthode de variations des constantes) *Soient* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = \theta(x)$, (y, z) *deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.*
Les solutions de (E) *sont les fonctions de la forme* $hy + kz$ *où* $h, z : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *sont dérivables et :*

$$\begin{pmatrix} y & z \\ y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

<u>Exemple :</u> Soit (E) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, $(I =]-\pi/2, +\pi/2[)$. Les solutions de (E) sont :

$$y(x) = (\ln \cos x + C)\cos x + (x + D)\sin x \quad (x \in I)$$

où C et D sont des constantes arbitraires de $\mathbb{K}$.

3) Utilisation de solutions particulières :

Proposition 302 *Soit* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = \theta(x)$.
Si z *est une solution particulière de l'équation complète* (E), *on obtient toutes les solutions de l'équation complète en ajoutant à* z *toutes les solutions de l'équation homogène associée.*

Proposition 303 (Principe de superposition des solutions particulières) *Soient* (E) $y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = \theta(x)$ *avec* $\theta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta_k$ *(*$\lambda_k \in \mathbb{K}$, $\theta_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continues,* y_k *une solution particulière de l'équation :*

$$y'' + \varphi(x)y' + \Psi(x)y = \theta_k(x)$$

Alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ *est une solution particulière de* (E).

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2

1) Solutions des équations homogènes :

Définition 215 *Une* équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant *est une équation différentielle du type :*

$$(E) \quad y' + ay = \Psi(x) \quad (x \in I)$$

où $a \in \mathbb{K}$, $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants *est une équation différentielle du type :*

$$(E) \quad y'' + ay' + by = \theta(x) \quad (x \in I)$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, $\theta : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Corollaire 77 *Soit $a \in \mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle d'ordre 1 homogène à coefficient constant $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme*

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad (x \in I)$$

Théorème 131 *Soient (E) $y'' + ay' + b = 0$, $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P admet deux racines distinctes ou confondues α et β ($P(r) = 0$ est appelée équation caractéristique de (E)).*

1. Si $\alpha \neq \beta$, les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (x \in I)$$

où A et B sont des constantes arbitraires de $\mathbb{K}$.

2. Si $\alpha = \beta$, les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x} \quad (x \in I)$$

où A et B sont des constantes arbitraires de $\mathbb{K}$.

Exemple : Si (E) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(x) = Ae^{x} + Be^{4x}$.
Si (E) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$.

Théorème 132 *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P = X^2 + aX + b$, $a^2 - 4b < 0$. On note $\alpha \pm i\beta$ les racines de P , $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.*

Les solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x \quad (x \in I)$$

où A et B sont des constantes arbitraires de $\mathbb{R}$.

Exemple : Soit $(E) y'' - 6y' + 10y = 0$, $y(x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x$.

2) Recherche de solutions particulières :

Proposition 304 *1. Soient $Q \in \mathbb{K}[X]$, (E) $y' + ay = Q(x)$, $a \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.*

Alors (E) possède une solution et une seule de la forme $y(x) = R(x)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$. De plus $\deg R = \deg Q$.

2. Soient $Q \in \mathbb{K}[X]$, (E) $y'' + ay' + by = Q(x)$, $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$.

Alors (E) possède une solution et une seule de la forme $y(x) = R(x)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$. De plus, $\deg R = \deg Q$.

Exemple : Soit (E) $y'' - 5y' + 4y = x^3$. Alors les solutions de (E) sont :

$$y(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + \frac{63}{32}x + \frac{255}{128} + Ae^x + Be^{4x}$$

Remarque : Dans une équation différentielle du type $y' + ay = e^{\lambda x}\Psi(x)$ ou $y'' + ay' + by = e^{\lambda x}\theta(x)$, on procèdera au changement de fonctions inconnues en posant $y(x) = z(x)e^{\lambda x}$. On se ramène ainsi à des équations différentielles du type $z' + \alpha z = \Psi(x)$ et $z'' + \alpha z' + \beta z = \theta(x)$ respectivement.

Par exemple, on sait donc résoudre $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x)e^{\lambda_i x}$; soit (E) $y'' - 5y' + 4y = x^2 \operatorname{ch} x$. Les solutions de (E) sont les

$$y(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x)e^x + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{10} + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1000})e^{-x} + Ae^x + Be^{4x}$$

où A et B sont des constantes arbitraires de $\mathbb{K}$.

Partie D
Algèbre linéaire

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Au XVIIIème siècle se développe la résolution des systèmes linéaires et la théorie des déterminants. Les raisonnements suggèrent rapidement le concept d'espace à n dimensions. Mais il fallait oser un langage géométrique, alors qu'une interprétation sensible dans le plan ou l'espace faisait défaut pour $n > 3$.

De manière indépendante, Cayley en Angleterre et Grassman en Allemagne franchissent le pas vers 1843-1845 et parlent d'espace à n dimensions. Le point de vue de Cayley est issu directement de la géométrie analytique : un vecteur d'un espace à n dimensions est un système de n réels ou n complexes. L'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire est naturellement introduite par la généralisation de la dimension 3. Pour parvenir vraiment à la notion d'espace vectoriel, il faut exhiber le concept de sous-espace et de dimension d'un sous-espace. C'est ce que fera Grassman (professeur de lycée autodidacte en marge des milieux de la recherche) qui voulut développer une analyse géométrique portant sur des calculs intrinsèques indépendants du choix des coordonnées. Grassman introduisit le produit extérieur de deux vecteurs, la définition de l'indépendance linéaire, de la dimension d'un espace et il démontre la relation fondamentale

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) - \dim V \cap W$$

Ces travaux eurent peu d'impact au début, mais ils furent repris par Henri Poincaré et Elie Cartan (notamment son "algèbre extérieure" en géométrie différentielle).

C'est en 1888 que Peano donnera la définition axiomatique d'un espace vectoriel réel. Jusqu'en 1930, le point de vue des matrices et des coordonnées prédomine par rapport au point de vue intrinsèque des espaces vectoriels.

I. Espaces vectoriels, sous-espaces :

1) Structure d'espace vectoriel :

Définition 216 *Soit K et E deux ensembles. Une* loi de composition externe sur E à opérateurs dans K *est une application de $K \times E$ dans E*

$$(\lambda, x) \in K \times E \longmapsto \lambda.x \in E$$

Définition 217 *Soit K un corps commutatif.*

Un espace vectoriel sur K *(ou encore K-*espace vectoriel*) est un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée additivement et d'une loi de composition externe notée multiplicativement telles que :*

1. $(E,+)$ est un groupe abélien.
2. Pour tout $x \in E$, $1.x = x$.
3. Pour tout $(\lambda,\mu) \in K^2$ et tout $x \in E$

$$\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x = \mu.(\lambda.x)$$

4. Pour tout $(\lambda,\mu) \in K^2$ et tout $x \in E$, on a

$$(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

5. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $(x,y) \in E^2$

$$\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$$

Dans toute la suite, K désignera un corps commutatif.
Exemple : • K est un K-ev.
• Si $n \in \mathbb{N}^*$, K^n est un K-ev.
• $\mathcal{F}(X,K)$ est un K-ev.
• $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
Exercice : Structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathbb{R}^{+^*} \times \mathbb{R}$.

2) Relation dans un espace vectoriel :

Remarque : Soient x dans E et $\lambda \in K$. On a $0.x = 0$ et $\lambda.0 = 0$. L'application $x \in E \longmapsto \lambda.x$ est un morphisme de $(E,+)$ dans lui-même. L'application $\lambda \longmapsto \lambda.x$ est un morphisme de $(K,+)$ dans E. On a

$$(\sum_{i\in I}\lambda_i).x = \sum_{i\in I}\lambda_i.x \text{ et } \lambda(\sum_{i\in I}x_i) = \sum_{i\in I}\lambda.x_i$$

et

$$(\sum_{i\in I}\lambda_i).(\sum_{j\in J}x_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i x_j$$

Proposition 305 *Soit E un K-espace vectoriel, $(\lambda,x) \in K \times E$.*
Si $\lambda.x = 0$, alors $x = 0$ ou $\lambda = 0$.

Remarque : Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = \lambda y$ alors $x = y$.
Si $x \neq 0$ et $\lambda.x = \mu.x$ alors $\lambda = \mu$.
Si $x \in E$, $(-1).x = -x$.

3) Sous-espace vectoriel :

Définition 218 *Soit E un K-espace vectoriel, $F \subset E$.*
F est un sous-espace (vectoriel) *si :*
1. F est un sous-groupe de $(E,+)$.
2. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in E$, $\lambda.x \in F$.

Remarque : Ainsi, pour vérifier que F est un sous-ev, il suffit de vérifier :

1. $0 \in F$.
2. Pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$.
3. Pour tout $x \in F$, $-x \in F$.
4. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in F$, $\lambda.x \in F$.

En fait, 3. est inutile (prendre $\lambda = -1$ dans 4.).

Remarque : Si F est un sous-ev, F muni de la restriction des lois à F est alors un K-espace vectoriel.

Exemple : • $\{0\}$ et E sont des sous-espaces de E.
• $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-ev du $\mathbb{R}$ espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
• L'ensemble des $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $f(1) = 0$ est un sous-ev.

Remarque : Pour montrer qu'un ensemble F est un K-ev il sera souvent préférable de montrer que F est un sous-ev d'un certain espace E.

II. Aplications linéaires

1) Généralités :

Définition 219 *Soient E et F deux K-ev, $u : E \longrightarrow F$.*

u est une application linéaire ou (morphisme d'espaces vectoriels) *si*

1. u est un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$.

2. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in E$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note $\mathcal{L}(E)$ pour $\mathcal{L}(E, E)$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u est appelé endomorphisme de E.

Remarque : Pour vérifier que u est linéaire, il suffit de vérifier que

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$.
2. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in E$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Remarque : $u(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i u(x_i)$ si u est linéaire.

Exemple : • $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x \in \mathbb{R}$ est linéaire.
• $u : (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \longmapsto x_1 + \ldots + x_n \in K$ est linéaire.
• Si $\lambda \in K$, $u : x \in E \longmapsto \lambda x \in E$ est linéaire. u s'appelle une *homothétie (de rapport λ).*

2) Composition des applications linéaires :

Proposition 306 *Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.*

1. I_E est linéaire de E dans E.

2. $v \circ u$ est linéaire de E dans G.

3. Si u est bijective, u^{-1} est linéaire de F sur E.

Définition 220 *Soient E et F deux K-ev.*

On appelle isomorphisme de E sur F *toute application linéaire bijective de E sur F. Un* automorphisme de E *est un isomorphisme de E sur lui-même.*

On note $\mathrm{Iso}(E, F)$ *l'ensemble des isomorphismes de E sur F.*

On note $\mathrm{GL}(E)$ *l'ensemble des automorphismes de E.*

E et F sont dits isomorphes *s'il existe un isomorphisme de E sur F. On note alors $E \simeq F$.*

Remarque : • $I_E \in \mathrm{GL}(E)$;
• Si $u \in \mathrm{Iso}(E, F)$ et $v \in \mathrm{Iso}(F, G)$, $v \circ u \in \mathrm{Iso}(E, G)$.
• Si $u \in \mathrm{Iso}(E, F)$, $u^{-1} \in \mathrm{Iso}(F, E)$.
• Conséquences pour $\simeq$.

Proposition 307 *Soit E un K-espace vectoriel.* $\mathrm{GL}(E)$ *est un sous-groupe de $\mathcal{S}_E$, appelé* groupe linéaire de E.

<u>Exemple :</u> Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E.

3) Image directe et image réciproque d'un sous-espace :

Proposition 308 *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Si E' est un sous-espace de E, $u(E')$ est un sous-espace de F.*
2. *Si F' est un sous-espace de F, $u^{-1}(F')$ est un sous-espace de E.*

Définition 221 *Soit $u : E \longrightarrow F$ linéaire.*

On appelle noyau de u *la partie* $\ker u = u^{-1}(\{0\})$.

<u>Remarque :</u> Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\ker u$ est un sous-espace de E et $\operatorname{Im} u$ un sous-espace de F.

Proposition 309 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est injective si, et seulement si* $\ker u = \{0\}$.

III. Sous-espace engendré

1) Définition du sous-espace vectoriel engendré :

Proposition 310 *Soit E un K-ev, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espace de E. Alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace.*

Définition 222 *Soient E un K-ev, $A \subset E$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces de E contenant A.*

On appelle sous-espace engendré par A *le sous-espace*

$$\operatorname{Vect} A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

<u>Remarque :</u> Ainsi, au sens de l'inclusion, le sous-espace engendré par A est le plus petit sous-espace contenant A.

Définition 223 *Soient E un K-ev et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E. Le* sous-espace engendré par les x_i *est le sous-espace engendré par les $\{x_i, i \in I\}$. On le note* $\operatorname{Vect}_{i \in I} x_i$.

2) Détermination du sous-espace engendré :

Proposition 311 *Soient E un K-ev, $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E. Le sous-espace engendré par les x_i est l'ensemble des éléments de E du type*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille à support fini de K.

<u>Remarque :</u> Le sous-espace engendré par x_1, x_2,..., x_n est l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{n} K x_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in E, \ \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n \right\}$$

3) Somme de sous-espaces :

Définition 224 *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E.*

On appelle somme des E_i *le sous-espace engendré par $\bigcup_{i\in I} E_i$. On la note $\sum_{i\in I} E_i$.*

Remarque : Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note encore $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$.

Proposition 312 *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace de E.*

La somme des E_i est constituée des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini de E telle que pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

Remarque : Cas I fini.

4) Opérations élémentaires :

Définition 225 *Soit E un K-espace vectoriel, $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de E.*

On dit que $(y_i)_{i\in I}$ se déduit de $(x_i)_{i\in I}$ par une opération élémentaire *si l'une de ces trois conditions est vérifiée :*

1. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}_I$ tel que pour tout $i \in I$, $y_i = x_{\sigma(i)}$.

2. Il existe $\lambda \in K^*$ et $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$

$$y_i = \begin{cases} x_i \text{ si } i \neq i_0 \\ \lambda x_{i_0} \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

3. Il existe $i_0 \in I$, $j_0 \neq i_0$ dans I et $\lambda \in K$ tels que pour tout $i \in I$:

$$y_i = \begin{cases} x_i \text{ si } i \neq i_0 \\ x_{i_0} + \lambda x_{j_0} \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

Proposition 313 *Soit E un K-espace vectoriel, $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de E.*

1. Si $(y_i)_{i\in I}$ se déduit de $(x_i)_{i\in I}$ par une opération élémentaire, alors $(x_i)_{i\in I}$ se déduit de $(y_i)_{i\in I}$ par une opération élémentaire.

2. Si $(y_i)_{i\in I}$ se déduit de $(x_i)_{i\in I}$ par une opération élémentaire, les sous-espaces engendrés respectivement par $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont identiques.

IV. Somme directe

1) Généralités :

Définition 226 *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace de E.*

On dit que la somme des E_i est directe *si pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de E à support fini vérifiant*

$$(\forall i \in I)(x_i \in E_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0$$

on a $x_i = 0$ pour tout $i \in I$.

On écrit alors $\bigoplus_{i\in I} E_i$ pour $\sum_{i\in I} E_i$.

Exemple : • "La somme $E_1 + \ldots + E_n$ est directe" signifie "pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ tel que $x_1 + \ldots + x_n = 0$, on a $x_1 = \ldots = x_n = 0$". On écrit alors $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

• Soient $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \{(x, y) \in E, y = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y) \in E, x = 0\}$. Alors $E_1 + E_2$ est directe.

Proposition 314 *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace de E.*

1. Si la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, pour tout $J \subset I$, la somme $\sum_{i\in J} E_i$ est directe.

2. Si pour toute partie finie $J \subset I$, la somme $\sum_{i\in J} E_i$ est directe, $\sum_{i\in I} E_i$ est directe.

2) Propriétés des sommes directes :

Proposition 315 *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace de E.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe.
(ii) Tous les éléments de $\sum_{i\in I} E_i$ s'écrivent de façon unique $\sum_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini telle que pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

<u>Remarque :</u> Si $E = \sum_{i\in I} E_i$, x s'écrit de manière unique $x = \sum_{i\in I} x_i$ avec pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

Proposition 316 (Associativité des sommes directes) *Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace de E, $(J_l)_{l\in L}$ une partition de I.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\sum_{i\in I} E_i$ est directe.
(ii) Pour tout $l \in L$, $F_l = \sum_{i\in J_l} E_i$ est directe et $\sum_{l\in L} F_l$ est directe.

<u>Remarque :</u> Dans ces conditions

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{l\in L} \bigoplus_{i\in J_l} E_i$$

3) Supplémentaire d'un espace vectoriel :

Proposition 317 *Soient E un K-ev, F et G deux sous-espaces de E.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $F + G$ est directe.
(ii) $F \cap G = \{0\}$.

ATTENTION ! Ce résultat ne s'étend pas aux sommes $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$.

Définition 227 *Soit E un K-ev, F un sous-espace.*
Un (sous-espace) supplémentaire de F dans E *est un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$.*

<u>Remarque :</u> Dans ces conditions, tout élément x de E s'écrit de façon unique $x' + x''$ avec $x' \in F$ et $x'' \in G$.
<u>Probleme :</u> Existe t-il de manière générale un supplémentaire ?

Proposition 318 *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*
On suppose que $\ker u$ admet un supplémentaire E' dans E. Alors $u' = u_{|E'}$ établit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} u$.

4) Projecteurs :

Définition 228 *Soit E un K-ev, F et G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$.*
La projection sur F parallèlement à G *est l'application de E dans E qui à $x = x'_{\in F} + x''_{\in G}$ associe x'.*
Un projecteur *est une projection.*

Théorème 133 *Soient E un K-ev, $p : E \longrightarrow E$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) p est un projecteur.
(ii) p est linéaire et $p \circ p = p$

V. Indépendance linéaire

1) Les familles libres :

Définition 229 *Soient E un K-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E.*

On dit que les e_i sont libres *(ou* linéairement indépendants*) si la condition suivante est vérifiée : "Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de K à support fini pour $+$ telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$, alors, on a pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$."*

Dans le cas contraire, les e_i sont dits liés *(ou* linéairement dépendants*). Dans ce cas là, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini telle qu'il existe $i_0 \in I$ avec $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$.*

Remarque : Si φ est une bijection de J sur I, si les $(e_i)_{i\in I}$ sont libres, $(e_{\varphi(j)})_{j\in J}$ sont libres.

Proposition 319 *Soient E un K-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E.*

1. Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre, pour tout $J \subset I$, $(e_i)_{i\in J}$ est libre.

2. Si pour toute partie finie $J \subset I$, $(e_i)_{i\in J}$ est libre, alors $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

2) Propriétés des familles libres :

Proposition 320 *Soient E un K-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E, $i_0 \in I$.*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ libre.

(ii) $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ libre et $e_{i_0} \notin \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} Ke_i$.

Exemple : La famille vide est libre.

$\{e\}$ est libre si seulement si $e \neq 0$.

$\{e_1, e_2\}$ libre si et seulement si $e_1 \neq 0$ et $e_2 \notin Ke_1$ (dans le cas contraire, on dit que e_1 et e_2 sont liés.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ libre si seulement si $e_1 \neq 0$, $e_2 \notin Ke_1$ et $e_3 \notin Ke_1 + Ke_2$.

Remarque : S'il existe $i_0 \in I$ tel que $e_{i_0} = 0$, alors $(e_i)_{i\in I}$ est liée.

Proposition 321 *Soient E un K-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs non nuls de E, $i_0 \in I$.*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ libre.

(ii) $\sum_{i\in I} Ke_i$ est directe.

Proposition 322 *Soient E un K-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

(ii) Tout élément de $\sum_{i\in I} Ke_i$ s'écrit de façon unique $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ famille de K à support fini pour $+$.

3) Bases d'un espace vectoriel :

Définition 230 *Soit E un K-espace vectoriel.*

Une base *de E est une famille libre de E qui engendre E.*

Remarque : $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout élément x de E s'écrit de façon unique

$$\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$$

λ_{i_0} est alors appelée *composante d'indice i_0 de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.*

Remarque : Si φ est une bijection de J sur I et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, $(e_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est une base de E.
Probleme : Dans un K-ev E existe t-il des bases ?
Remarque : Symbole de Kronecker.

Définition-Proposition 6 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = K^n$.*

Alors la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définie par $e_i = (\delta_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une base de K^n appelée base canonique de K^n.

Proposition 323 *Soit E un K-ev, $(E_l)_{l\in L}$ une famille de sous-espaces de E telles que*

$$E = \bigoplus_{l\in L} E_l$$

Soit pour tout $l \in L$, $(e_i)_{i\in J_l}$ une base de E_l. Alors $(e_i)_{i\in\bigcup_{l\in L} J_l}$ est une base de E.

4) Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base :

Théorème 134 *Soient E et F deux K-ev , $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F.*

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = \varepsilon_i$.
De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u injective.
(ii) $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ est libre.
Enfin, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u surjective.
(ii) $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ engendre E.

Remarque : Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille de E, $u : E \longrightarrow F$ linéaire, $u(\mathrm{Vect}_{i\in I}\, e_i) = \mathrm{Vect}_{i\in I}\, u(e_i)$.

Corollaire 78 *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.*

u est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

VI. Algèbre

1) Généralités :

Définition 231 *Une K-*algèbre *est un ensemble A muni de deux opérations internes notée $+$ et $\times$ et d'une multiplication externe à opérateurs dans K tel que*

1. *$(A, +, \times)$ est un anneau.*
2. *A est un K-espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe.*
3. *Pour tout $\lambda \in K$ et tout $(a, b) \in A^2$,*

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$$

A est une K-algèbre commutative si la multiplication interne est commutative.

Remarque : Si $a \in A$, $b \longmapsto ba$ et $b \longmapsto ab$ sont linéaires.
Exemple : Soit A un anneau, K un sous-anneau de A tel que K est un corps et pour tout $(a, \lambda) \in A \times K$, $\lambda a = a\lambda$. Alors K est commutatif et A est un K-ev et même une K-algèbre.

En particulier, si L est un surcorps commutatif du corps K, L est une K-algèbre commutative.
Exemple : $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.

2) Sous-algèbres et idéaux d'une algèbre :

Définition 232 *Soit A une K-algèbre.*

Une sous-algèbre de A *est une partie B de A telle que :*

1. B est un sous-anneau.

2. B est un sous-espace de A.

Remarque : Pour prouver que B est une sous-algèbre de A, il suffit de vérifier :

1. $0 \in B$;
2. $(x, y) \in B^2 \Longrightarrow x + y \in B$;
3. $1 \in B$;
4. $(x, y) \in B^2 \Longrightarrow xy \in B$;
5. $(\lambda, x) \in K \times B \Longrightarrow \lambda x \in B$.

Remarque : Si B est une sous-algèbre, B est muni d'une structure d'algèbre.

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Définition 233 *Un* idéal *d'une K-algèbre A est un idéal de l'anneau $(A, +, \times)$.*

Proposition 324 *Soit A une K-algèbre, I un idéal de A.*

Alors I est un sous-espace de A.

3) Morphismes d'algèbres :

Définition 234 *Soient A et B deux K-algèbres.*

Un morphisme de A dans B *est une application f de A dans B telle que f est un morphisme d'anneau et f est linéaire.*

Remarque : Il suffit donc de vérifier :

1. $f(1) = 1$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
3. $f(xy) = f(x)f(y)$;
4. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque : Composée de morphismes d'algèbres, identité, morphisme bijectif d'algèbre.

Définition 235 *Soient A et B deux K-algèbres.*

Un isomorphisme de A sur B *est un morphisme bijectif de A sur B.*

On dit que A et B sont isomorphes *s'il existe un isomorphisme de A sur B. On écrit alors $A \simeq B$.*

Remarque : Identité, composé d'isomorphismes, isomorphisme réciproque.

Remarque : $A \simeq A$, $A \simeq B \Longrightarrow B \simeq A$ et $(A \simeq B$ et $B \simeq C) \Longrightarrow A \simeq C$.

VII. Espaces et algèbres d'applications :

1) Le K-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$:

Proposition 325 *Soient X un ensemble, E un K-espace vectoriel.*

Définissons sur $\mathcal{F}(X, E)$ une addition interne et une multiplication externe à opérateur dans K en posant pour tout $\lambda \in K$ et tout $(f, g) \in \mathcal{F}(X, E)^2$:

$$f + g : x \in E \longmapsto f(x) + g(x) \in E$$

$$\lambda f : x \in E \longmapsto \lambda f(x) \in E$$

Alors $\mathcal{F}(X,E)$ est un K-espace vectoriel.

Exemple : • Si I un ensemble non vide, K^I est un K-espace vectoriel. En particulier K^n est un K-ev.

• $\mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n)$ est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K}^n)$: c'est l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}^n$.

• $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}^n)$, $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}^n)$.

2) Le K-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$:

Proposition 326 *Soient E et F deux K-ev.*
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace $\mathcal{F}(E,F)$.

Exemple : Supposons $E = E' \oplus E''$. Notons p' la projection sur E' parallèlement à E'' et p'' la projectionsur E'' parallèlemnt à E'.

Alors $p' + \lambda p'' \in \mathcal{L}(E)$ et est appelé *affinité de rapport λ par rapport à E' parallèlement à E''.*
Si $\lambda = -1$, c'est *une symétrie par rapport à E' parallèlement à E''.*

3) La K-algèbre $\mathcal{L}(E)$:

Proposition 327 *Soient E, F et G trois K-ev.*
1. *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $v \in \mathcal{L}(F,G) \longmapsto v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$ est linéaire.*
2. *Si $v \in \mathcal{L}(F,G)$, l'application $u \in \mathcal{L}(E,F) \longmapsto v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$ est linéaire.*

Proposition 328 *Le K-ev $\mathcal{L}(E)$ muni de $\circ$ est une K-algèbre.*

4) La K-algèbre $\mathcal{F}(X,K)$:

Proposition 329 *Soit X un ensemble. Définissons sur le K-ev $\mathcal{F}(X,K)$ une multiplication interne en posant pour tout $(f,g) \in \mathcal{F}(X,K)^2$*

$$fg : x \in X \longmapsto f(x)g(x) \in K$$

Alors $\mathcal{F}(X,K)$ une K-algèbre commutative.

Exemple : • $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est la K-algèbre des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

• $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$) est la K-algèbre des fonctions de classe $\mathcal{D}^n$ (resp. $\mathcal{C}^n$) de I dans $\mathbb{K}$.

VIII. Compléments : Espaces vectoriels quotients

1) Espaces quotients :

Soit E un K-ev, F un sous-espace. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par

$$x \equiv y \pmod{\mathcal{R}} \Longleftrightarrow y - x \in F$$

pour tout $(x,y) \in E^2$: c'est la congruence modulo le sous-groupe F.

Théorème 135 *E/F est un groupe qui peut être muni d'une loi de composition externe définie par*

$$\lambda\bar{x} = \overline{\lambda x} \quad (\lambda \in K \text{ et } x \in E)$$

qui confère à E/F le structure d'espace vectoriel.

Définition 236 *Avec le notations précédentes, E/F est appelé* espace vectoriel quotient de E par *F.*

2) Théorème d'isomorphisme :

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. La congruence associée à u est aussi la congruence modulo $\ker u$:

$$x \equiv y \pmod{\mathcal{R}_u} \Longleftrightarrow y - x \in \ker u$$

Théorème 136 *La bijection canonique $\bar{u}$ associée à u est linéaire et établit un isomorphisme de $E/\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$:*

$$\bar{u} : \begin{array}{ccc} E/\ker u & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ \bar{x} & \longmapsto & \bar{u}(\bar{x}) = u(x) \end{array}$$

En particulier

$$E/\ker u \simeq \operatorname{Im} u$$

3) Algèbres quotients :

Théorème 137 *Soit A une K-algèbre, I un idéal bilatère de A.*
Alors A/I considéré comme anneau quotient et espace vectoriel quotient est une K-algèbre.

Définition 237 *Soit A une K-algèbre, I un idéal bilatère de A.*
La K-algèbre A/I définie dans le théorème précédent est appelé algèbre quotient de A par I.

Remarque : Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres, l'application $\bar{u}$, bijection canonique associée à u est un isomorphisme de l'algèbre $A/\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$.

IX. Compléments : Axiome du choix, applications :

1) L'axiome du choix :

Axiome 7 *Soient I un ensemble non vide et pour chaque $i \in I$, un ensemble E_i non vide, les E_i étant deux à deux disjoints.*
Alors il existe un ensemble S tel que pour tout $i \in I$, $S \cap E_i$ soit un singleton.

Gödel a établi en 1940 que cet axiome n'est pas en contradiction avec les autres axiomes de la théorie usuelle des ensembles.

Théorème 138 *Si I est un ensemble non vide et si pour tout $i \in I$, E_i est un ensemble non vide, alors le produit $\prod_{i \in I} E_i$ est non vide.* admis

Théorème 139 (Théorème de Zorn) *Soit $(M, \leqslant)$ un ensemble ordonné non vide (l'ordre n'est pas supposé total).*
Une partie non vide C de M est appelée chaîne *si la restriction de l'ordre à C est un ordre total. On suppose que toute chaîne admet une borne supérieure.*
Alors M admet un élément maximal i.e. il existe $\alpha \in M$ tel que si $x \in M$ avec $\alpha \leqslant x$, $\alpha = x$. admis

2) Applications à l'algèbre linéaire :

Théorème 140 *Soit E un espace vectoriel sur K et F un sous-espace de E.*
Alors F admet un supplémentaire.

Théorème 141 *Soit E un espace vectoriel sur K.*
Il existe une base de E

Théorème 142 (Théorème de Krull) *Dans tout anneau $A \neq \{0\}$, il existe des idéaux maximaux.*

Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimension finie

I. Résultats fondamentaux

1) Espaces de dimension finie :

Définition 238 *Soit E un espace vectoriel sur K.*

On dit que E est de dimension finie *s'il existe une famille finie d'éléments de E qui engendre E.*

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Notation : On écrit alors parfois $\dim E < +\infty$.

On parle souvent de *système* pour famille.

Exemple : K^n est un espace de dimension finie.

2) Théorème de la base incomplète :

Rappel : Dans E, si $I = \emptyset$, $(e_i)_{i \in I}$ est libre.

Théorème 143 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(e_i)_{i\in I}$ un système générateur de E, $J \subset I$, J finie, tel que $(e_i)_{i\in J}$ soit libre.*

Il existe une partie A de I tel que $J \subset A \subset I$ et $(e_i)_{i\in A}$ est une base de E.

Corollaire 79 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*

Alors, il existe une base de E.

Remarque : Cette démonstration n'utilise pas l'axiome du choix.

Corollaire 80 (Théorème de la base extraite) *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, S un système générateur.*

On peut alors extraire de S une base de E.

Corollaire 81 (Théorème de la base incomplète) *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Tout système libre fini peut se compléter en une base de E.*

3) Dimension d'un espace vectoriel :

Théorème 144 (Théorème de la dimension) *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, S une partie finie génératrice et $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre.*

Alors I est fini et $\operatorname{Card} I \leqslant \operatorname{Card} S$.

Corollaire 82 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*
Deux bases quelconques de E sont finies et possède le même nombre d'éléments.

Définition 239 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*
La dimension de E*, notée* $\dim E$ *est le nombre d'éléments d'une base de E.*

Exemple : • $\dim K^n = n$ et $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est de dimension 2. $\dim\{0\} = 0$.
• $\mathbb{R}^3$ s'identifie à l'espace physique.

Définition 240 *Un espace vectoriel de dimension* 1 *est appelé* droite (vectorielle)*.*
Un espace vectoriel de dimension 2 *est appelé* plan (vectoriel)*.*

Proposition 330 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels.*
1. Si E est de dimension finie et si $E \simeq F$, F est aussi de dimension finie égale à $\dim E$*.*
2. Si E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$*, E et F sont isomorphes.*

Corollaire 83 *Soit $n \geqslant 1$.*
E est un K-espace vectoriel de dimension n si et seulement si $E \simeq K^n$.

Application : • Soient K un corps commutatif, $p \geqslant 1$.
On se donne a_1, a_2,..., a_p des éléments de K, $a_p \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K tellles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} u_{n+1} + a_p u_n$$

Proposition 331 *$\mathcal{S}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à p.*

• $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est de dimension infinie.
Remarque : Soit E K-espace vectoriel de dimension finie n.
Alors tout système libre de E est fini et contient au plus n éléments. Tout système générateur de E contient au moins n éléments.

Proposition 332 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{S}$ un système à n éléments de E.*
Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{S}$ est libre.
(ii) $\mathcal{S}$ engendre E.
(iii) $\mathcal{S}$ est une base de E.

4) Une autre caractérisation de la dimension finie :

Proposition 333 *Soit E un K-espace vectoriel.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) E est de dimension finie.
(ii) Toute famille libre de E est finie.

Exemple : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension finie.

II. Dimension d'un sous-espace

1) Généralités :

Théorème 145 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace de E.*
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant n$*. De plus si* $\dim F = n$*, $E = F$.*

Définition 241 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.*
Un hyperplan *de E est un sous-espace de E de dimension $n-1$.*

Exemple : Une droite vectorielle qui est un sous-espace d'un plan vectoriel est un hyperplan.

Définition 242 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E.*
On appelle rang des e_i *la dimension du sous-espace engendré par les e_i.*

Notation : Le rang des e_i est noté $\mathrm{rg}((e_i)_{i\in I}) = \dim \sum_{i\in I} Ke_i$.
Remarque : • Le rang des e_i, r, vérifie $r \leqslant \dim E$.
$r = \dim E$ si et seulement si les e_i engendrent E.
• Si I est fini, $r \leqslant \mathrm{Card}\, I$. $r = \mathrm{Card}\, I$ si et seulement si $(e_i)_{i\in I}$ libre.
• On ne change pas le rang d'un système en effectuant sur ce système une opération élémentaire (puisque que le sous-espace engendré ne change pas).

2) Dimension d'une somme :

Proposition 334 *Soit E un K-espace vectoriel, E_1, E_2,..., E_n une famille de sous-espaces tel que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.*
Si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, E_i est de dimension finie, alors E est de dimension finie et

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

Proposition 335 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E.*
Alors F possède (au moins) un supplémentaire dans E.

Remarque : Cette démonstration n'utilise pas l'axiome du choix, c'est son intérêt.

Théorème 146 *Soit E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de dimension finie de E.*
Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

3) Rang d'une application linéaire :

Définition 243 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Le rang de u est $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$.

Remarque : $\mathrm{rg}\, u \leqslant \dim F$.

Théorème 147 (Théorème du rang) *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Alors,

$$\dim E = \dim \ker u + \mathrm{rg}\, u$$

Remarque : $\mathrm{rg}\, u \leqslant \dim E$.
Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système de E. Alors $(u(e_i))_{i\in I}$ est un système de F vérifiant

$$\mathrm{rg}((u(e_i))_{i\in I}) \leqslant \mathrm{rg}((e_i)_{i\in I})$$

Lorsque u est injective, on a $\mathrm{rg}((u(e_i))_{i\in I}) = \mathrm{rg}((e_i)_{i\in I})$.

4) Bijectivité d'une application linéaire :

Théorème 148 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de même dimension, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) u injective.
(ii) u surjective.

Corollaire 84 *Soient A une K-algèbre de dimension finie, $a \in A$.*

Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :
(i) a inversible à gauche ;
(ii) a inversible à droite ;
(iii) a régulier à gauche ;
(iv) a régulier à droite.

III. Dimension de certains espaces vectoriels

Rappel : Si $\operatorname{Card} I = n$, K^I est de dimension n. K^n est donc de dimension n et le système $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ est une base de E appelée *base canonique de K^n*.

1) Produit d'espaces vectoriels :

Si E et F sont deux K-espaces vectoriels, $E \times F$ est muni naturellement d'une structure de K-espace vectoriel en posant

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \quad \text{et} \quad \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

où $\lambda \in K$ et $((x,y),(x',y')) \in (E \times F)^2$.

Proposition 336 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim E$, $m = \dim F$.*

Alors $E \times F$ est de dimension finie égale à $m + n$.

Remarque : Extension à $E_1 \times \ldots \times E_n$.

2) Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$:

Proposition 337 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E, $(\varepsilon_j)_{j \in J}$ une base de F.*

Pour tout $(i,j) \in I \times J$, on note u_{ij} l'élément de $\mathcal{L}(E,F)$ défini en posant pour tout $k \in I$:

$$u_{ij}(e_k) = \begin{cases} \varepsilon_j \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$$

Alors $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est une base du K-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ (c'est la base associée aux bases $(e_i)_{i \in I}$ de E et $(\varepsilon_j)_{j \in J}$ de F*).*

En particulier, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \dim F$$

Corollaire 85 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.*

Alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2.

Remarque : Dans $\mathcal{L}(E)$ les éléments réguliers à gauche, réguliers à droite, inversibles à gauche, inversibles à droite coïncident : ce sont les éléments de $\mathrm{GL}(E)$.

3) Espace dual :

Définition 244 *Soit E un K-espace vectoriel.*
Une forme linéaire sur E *est une application linéaire de E dans K i.e. un élément de $\mathcal{L}(E, K)$.*
*$\mathcal{L}(E, K)$ s'appelle l'*espace dual de E *et se note E^*.*

Exemple : $u : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x - 2y + z \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 86 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*
Alors E^* est un espace de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.

Définition 245 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E.*
La base $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E^* définie par

$$p_i(e_k) = \begin{cases} 1 \ si \ j = k \\ 0 \ si \ j \neq k \end{cases}$$

est la base duale de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

Remarque : Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in E$, et tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$p_i(x) = p_i(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k p_i(e_k) = \lambda_i p_i(e_i) = \lambda_i$$

p_i n'est autre que la *i-ème fonction composante associée à la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*
Remarque : Si $u \in E^*$, u s'écrit $\sum_{k=1}^{n} a_k p_k$ et

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k$$

Proposition 338 *Soit E un espace de dimension finie, $u \in E^*$. Si u est non nulle,* $\operatorname{Im} u = K$ *et* $\ker u$ *est un hyperplan.*

Théorème 149 *Soit E un K-espace espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.*
Alors, il existe une forme linéaire non nulle $u \in E^*$ telle que $\ker u = H$. *De plus, si $v \in E^*$ et* $\ker v = H$, *il existe $\lambda \in K^*$ tel que $v = \lambda u$.*

4) Espaces quotients :

Proposition 339 *Soient E un K-espace vectoriel, F un sous-espace de E.*
Alors E/F est de dimension finie et

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

Chapitre 3

Matrices

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, A désigne un anneau commutatif distinct de $\{0\}$ et K un corps commutatif.

I. Bases du calcul matriciel

1) Vocabulaire :

Définition 246 *Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.*

Une matrice *à m lignes et n colonnes à coefficients dans A est une famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}} \in A^{\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}}$.*

On note $\mathcal{M}_{m,n}(A)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans A :

$$\mathcal{M}_{m,n}(A) = A^{\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}}$$

Notation : • Si $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, on peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$

• On note $\mathcal{M}_n(K)$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

Définition 247 *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$.*

Un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(A)$ est appelée matrice colonne.

Un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(A)$ est appelée matrice ligne.

Remarque : Une matrice colonne est un élément de A^n.

Définition 248 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

Un élément de $\mathcal{M}_n(A)$ est appelé une matrice carrée.

Remarque : Si $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, la j-ème colonne de M est $\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ et la i-ème ligne est $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.

2) Somme et multiplication par un scalaire :

Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$, $N = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $\lambda \in A$, on définit

- $M + N = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.
- $\lambda M = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Proposition 340 *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$.*

1. $(\mathcal{M}_{m,n}(A), +)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

2. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{m,n}(A)^2$ et $(\lambda, \mu) \in A^2$. Alors $(\lambda+\mu)M = \lambda M + \mu M$, $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$ et $\lambda(\mu M) = (\lambda\mu)M = \mu(\lambda M)$.

Remarque : Ainsi, $\mathcal{M}_{m,n}$ est presque un espace vectoriel à ceci près que A n'est pas un corps : on parle alors de A-module.

3) Le K-espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(K)$:

Proposition 341 *$\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à mn.*

Remarque : Les $E_{kl} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $1 \leqslant k \leqslant m$ et $1 \leqslant l \leqslant n$ définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \text{ et } j = l\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

constituent une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Si $M = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$, $M = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\1\leqslant l\leqslant n}} b_{kl}E_{kl}$.

4) Produit de matrices :

Définition 249 *Soient m, n et p dans $\mathbb{N}^*$, $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$ et $N = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(A)$.*

On appelle produit des matrices M et N *la matrice $P = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(A)$ définie par*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Remarque : Faire un dessin
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : • Le produit n'est pas toujours défini !
• Le produit de matrices (carrées) n'est pas commutatif : si $A = \mathbb{C}$ et λ et μ sont dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda\mu & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & 1+\lambda\mu \end{pmatrix}$$

5) Propriétés du produit :

Définition 250 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle* matrice identité d'ordre n *la matrice*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Proposition 342 *Soit m, n, p et q dans $\mathbb{N}^*$.*

1. *Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_{m,n}(A)^2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{M}_{n,p}(A)^2$. On a*

$$(M_1 + M_2)N_1 = M_1N_1 + M_2N_1 \quad \text{et} \quad M_1(N_1 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2$$

2. *Soient $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, $N \in \mathcal{M}_{n,p}(A)$ et $P \in \mathcal{M}_{p,q}(A)$. Alors*

$$M(NP) = (MN)P$$

3. *Soient $\lambda \in A$, $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, $N \in \mathcal{M}_{n,p}(A)$. Alors*

$$\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$$

4. *Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}$. Alors*

$$I_mM = M = MI_n$$

6) La K-algèbre $\mathcal{M}_n(K)$:

On a défini sur $\mathcal{M}_n(K)$ une addition interne, une multiplication interne et une multiplication externe.

Théorème 150 *$\mathcal{M}_n(K)$ est un K-algèbre de dimension finie n^2.*

Définition 251 *Les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ forment un groupe multiplicatif noté* $\mathrm{GL}_n(K)$ *appelé* groupe linéaire d'ordre n sur K.

Notation : Comme d'habitude l'inverse d'une matrice M, s'il existe, sera noté M^{-1}.
Remarque : $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement s'il existe $M' \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que

$$MM' = I_n = M'M$$

Remarque : $\mathrm{GL}_1(K) \simeq K^*$.

Proposition 343 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(K)$.*
Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $M \in \mathrm{GL}_n(K)$;
(ii) M inversible à gauche ;
(iii) M inversible à droite ;
(iv) M régulière à gauche ;
(v) M régulière à droite.

Exercice : Soient L un surcorps de K, $M \in \mathcal{M}_n(K)$.
On suppose que $M \in \mathrm{GL}_n(L)$. Montrer qu'en fait M est inversible dans $\mathcal{M}_n(K)$ i.e. $M \in \mathrm{GL}_n(K)$.

7) Transposée d'une matrice :

Définition 252 *Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$.*
La matrice transposée de M *est*

$${}^tA = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(A)$$

où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

$${}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposition 344 *Soient M et N dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $\lambda \in K$. On a :*
1. ${}^t(M+N) ={}^t M +{}^t N$;
2. ${}^t(\lambda M) = \lambda{}^tM$;
3. ${}^t({}^tM) = M$.

Remarque : Cas où on remplace K par A.

Proposition 345 *Soient m, n et p dans $\mathbb{N}^*$.*
1. ${}^tI_n = I_n$.
2. Si $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, $N \in \mathcal{M}_{n,p}(A)$

$${}^t(MN) = ({}^tN)({}^tM)$$

3. Si $M \in \mathrm{GL}_n(K)$, ${}^tM$ est inversible et

$$({}^tM)^{-1} ={}^t (M^{-1})$$

II. Matrices et applications linéaires :

1) Matrice d'une application linéaire :

Définition 253 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies n et p respectivement, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ de F et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ *la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on écrit $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ pour $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ et on parle de la matrice de u dans $\mathcal{B}$*.*

Exemple : • $u = I_E$, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(I_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

• Si u est une homothétie de rapport λ, $\mathcal{B}$ une base de E

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda I_E) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

Remarque : Dans les deux précédents exemples, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$: ce fait est exceptionnel, en général $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ dépend de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Théorème 151 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies n et p respectivement, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors*

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(K) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme :

$$\mathcal{L}(E,F) \simeq \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

Proposition 346 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies n et p respectivement, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{rg}\, u = r$.*

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que la matrice de u dans ces bases soit

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} = 1$ si $i = j \leqslant r$ et 0 sinon.

2) Matrice d'une composée :

Théorème 152 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $\mathcal{D} = (g_1, g_2, \ldots, g_q)$ des bases de E, F et G respectivement.*

Alors $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

Corollaire 87 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{B}}(v) Mat_{\mathcal{B}}(u)$$

Remarque : Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $n = \dim E$. Alors

$$\begin{array}{cccc} & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ \varphi : & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de K-algèbres :

$$\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(K)$$

Si $\dim E = \dim F$, on a donc $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{L}(F)$. Par conséquent :

$$\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{L}(K^n)$$

3) Matrice d'un isomorphisme :

Proposition 347 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement. On suppose $\dim E = \dim F$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est un isomorphisme ;

(ii) $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible.

Dans ces conditions,

$$Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u))^{-1}$$

Remarque : Soient E un K-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E, $n = \dim E$. Alors

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(K) \\ \varphi' : & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(K)$$

4) Transformé d'un vecteur par une application linéaire :

Définition 254 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, $x \in E$.*

On suppose que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

La matrice colonne de de x dans $\mathcal{B}$ *est*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \simeq K^n$$

Proposition 348 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie égale à n et p respectivement, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Soient $x \in E$, $y = u(x) \in F$. On note X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$, Y la colonne de y dans $\mathcal{C}$ et $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. Alors

$$Y = MX$$

Exemple : $F = K$ et $u \in E^*$, $\mathcal{C} = (1)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Notons $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On a $u(e_i) = a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $u(x)$ dans la base (1) est

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i) \in \mathcal{M}_{1,1}(K)$$

Quelles sont les coordonnées de x dans la base duale $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$? Ecrivons $u = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i$. Alors $u(e_i) = b_i p_i(e_i) = b_i$.

Remarque : Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie égale à n, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Soit $y \in F$ de matrice colonne dans $\mathcal{C}$ Y. Alors l'antécédant x de y par u a pour matrice colonne dans $\mathcal{B}$

$$X = A^{-1}Y$$

5) Applications linéaires canoniquement associée à une matrice :

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ les bases canoniques de K^n et K^p respectivement.

Définition 255 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.*

On appelle application linéaire canoniquement associée à *A l'application :*

$$u_A : \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^p \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

On a alors $A = (B_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant C \\ 1 \leqslant j \leqslant (}} u_A)$.

Remarque : • Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. On suppose que $AX = 0$ pour tout $X \in K^n$. Alors $A = 0$. Si $AX = BX$ pour tout $X \in K^n$, $A = B$.

• $u_{A+B} = u_A + u_B$, $u_{\lambda A} = \lambda u_A$ et $u_B \circ u_A = u_{AB}$.

Exemple : Soient $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $P = (\delta_{\sigma^{-1}(i)j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. L'endomorphisme canoniquement associé à P est l'endomorphisme qui réalise une permutation des vecteurs de la base canonique :

$$u(e_j) = e_{\sigma(j)} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Proposition 349 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$;

(ii) Pour tout $X \in K^n$ tel que $AX = 0$, on a $X = 0$.

III. Matrices carrées remarquables :

1) Matrices diagonales :

Définition 256 *Soit* $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

M *est une* matrice diagonale *si* $a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$. *Alors*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $D_n(K)$ *l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(K)$.

Exemple : $\lambda I_n \in D_n(K)$.

Proposition 350 $D_n(K)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(K)$ *de dimension* n.

2) Matrices triangulaires :

Définition 257 *Soit* $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

M *est dite* triangulaire supérieure *(resp.* inférieure*) si pour tout* $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$ *tel que* $i > j$ *(resp.* $i < j$*) on ait* $a_{ij} = 0$. M *est donc de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On note $T_n(K)$ *(resp.* $T'_n(K)$*) l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_n(K)$ *triangulaires supérieures (resp. inférieures).*

Exemple : Les matrices diagonales sont triangulaires.

Remarque : M triangulaire supérieure équivaut à ${}^tM$ triangulaire inférieure.

Théorème 153 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $T_n(K)$ *(resp.* $T'n(K)$*) est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(K)$ *de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. *On a*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \mu_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

3. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$ *triangulaire supérieure,* $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

M *est inversible si et seulement si pour tout* $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\lambda_i \neq 0$. *On a alors*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

3) Matrices symétriques :

Définition 258 *Soit* $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

On dit que M *est* symétrique *si pour tout* $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$ $a_{ij} = a_{ji}$.

Remarque : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. M est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si ${}^tM = M$ (resp. ${}^tM = -M$).

IV. Changement de base

1) Matrices de passage :

Définition 259 *Soient* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *et* $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *deux bases de* E.

Pour tout $j \in \{1,2,\dots,n\}$, *on écrit* $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

La matrice $P = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *est appelé* matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Remarque : La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice de l'identité dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

Proposition 351 *Soient* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* n, $\mathcal{B}$ *une base de* E.

L'application qui à une base $\mathcal{C}$ *de* E *associe la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{C}$ *est une bijection de l'ensemble des bases de* E *sur* $\mathrm{GL}_n(K)$.

Proposition 352 *Soient* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *de base de* E, $x \in E$.

On note X *(resp.* X'*) la matrice colonne de* x *dans* $\mathcal{B}$ *(resp.* $\mathcal{C}$*) et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{C}$. *Alors*

$$X = PX'$$

Proposition 353 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *trois bases de* E, P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{C}$ *et* Q *la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{D}$.

1. I_n *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}$.
2. PQ *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{D}$.
3. P^{-1} *est la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{B}$.

Proposition 354 *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux bases de* F, P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *et* Q *la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{C}'$.

Soient enfin $u \in \mathcal{L}(E,F)$, M *la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *et* N *la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{C}'$. *Alors*

$$N = Q^{-1}MP$$

2) Matrices équivalentes :

Définition 260 *On dit que* $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ *et* $N \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ *sont* équivalentes *s'il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ *et* $Q \in \mathrm{GL}_p(K)$ *tel que*

$$N = Q^{-1}MP$$

Proposition 355 *1. Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie,* $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ *et* $N \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $\mathcal{B}$ *une base de* E, $\mathcal{C}$ *une base de* F, $u \in \mathcal{L}(E,F)$. *On suppose que* $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) M *et* N *sont équivalentes ;*

(ii) Il existe $\mathcal{B}'$ *base de* E *et* $\mathcal{C}'$ *base de* F *telles que* N *soit la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{C}'$.

2. L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(K)$.

3) Matrices semblables :

Remarque : Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

Alors $N = P^{-1}AP$.

Définition 261 *Soit* $(M, N) \in \mathcal{M}_n(K)^2$.

On dit que M *et* N *sont* semblables *s'il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ *tel que*

$$N = P^{-1}MP$$

Proposition 356 *1. Soient* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* $M \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* $N \in \mathcal{M}_n(K)$*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On suppose que* M *est la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}$*.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) M *et* N *sont semblables.*

(ii) Il existe une base $\mathcal{C}$ *telle que* N *soit la matrice de* u *dans* $\mathcal{C}$*.*

2. La similitude des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(K)$*.*

4) Trace :

Définition 262 *Soit* $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

On appelle trace de M *le scalaire*

$$\mathrm{Tr}\, M = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exercice : Montrer que si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

Soient E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ a même trace que la matrice de u dans $\mathcal{C}$. On peut donc définir :

Définition 263 *On appelle* trace de u *la trace de la matrice de* u *dans la base* $\mathcal{B}$*. On la note* $\mathrm{Tr}\, u$.

$\mathrm{Tr}\, u$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

V. Rang d'une matrice

1) Définitions et premières propriétés :

Définition 264 *Soit* $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

Le rang de M *noté* $\mathrm{rg}\, M$ *est le rang des colonnes de* M *dans le* K*-espace vectoriel* K^p.

Remarque : • $\mathrm{rg}\, M \leqslant n$ et on a $\mathrm{rg}\, M = n$ si et seulement si les colonnes de M sont libres dans K^p.

• $\mathrm{rg}\, M \leqslant p$ et on a $\mathrm{rg}\, M = p$ si et seulement si les colonnes de M engendrent K^p.

• Si $n = p$, on a $\mathrm{rg}\, M = n$ si et seulement si $M \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Proposition 357 *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finies,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *des bases de* E *et* F *respectivement,* $u \in \mathcal{L}(E, F)$*,* $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$*.*

Alors $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A$.

Remarque : On ne change pas le rang de A en effectuant une opération élémentaires sur les colonnes.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Quel est le rang de M ?

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Nous verrons une généralisation de ce procédé au chapitre 4.

Théorème 154 *Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)^2$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) M et N sont équivalentes.
(ii) $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} N$.

2) Rang de la transposée :

Remarque : Le rang d'une matrice est un invariant des classes d'équivalence pour l'équivalence des matrices. C'est même un invariant caractéristique.

Théorème 155 *Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$. Alors*

$$\operatorname{rg}^t M = \operatorname{rg} M$$

Remarque : Ainsi, $\operatorname{rg} M$ est aussi le rang des lignes dans K^n.

3) Sous-matrices :

Définition 265 *Soient $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $I \subset \{1, 2, \dots, p\}$, $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.*
$M_{IJ} = (m_{ij})_{i \in I, j \in J}$ est appelée matrice extraite de M *(ou* sous-matrices de M*).*

Remarque : On obtient M_{IJ} en rayant dans M toutes les lignes d'indices n'appartenant pas à I et les colonnes d'indices n'appartenant à J.

Théorème 156 *Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ de rang r.*
1. Le rang d'une sous-matrice de M est inférieur ou égal à r.
2. Il existe une sous-matrice de M qui appartient à $\mathrm{GL}_r(K)$.

4) Sous-matrices principales :

Remarque : • Le rang de M est l'ordre maximum d'une sous-matrice inversible de M.
• Soit L un surcorps de K, $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K) \subset \mathcal{M}_{p,n}(L)$.
Alors le rang de M est alors le même que l'on considère M comme élément de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ ou comme élément de $\mathcal{M}_{p,n}(L)$.
• Les colonnes de M sont indépendantes si et seulement si il existe une sous-matrice inversible d'ordre n de M.

Définition 266 *Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$*
Une sous-matrice principale de M *est une sous-matrice de M inversible d'ordre* $\operatorname{rg} M$.
Si on a choisit une telle matrice principale A_{IJ}, les lignes (resp. colonnes) d'indices dans I (resp. dans J) sont dites principales.

Remarque : • Les lignes principales forment une base du s-ev de K^n engendré par toutes les lignes.
• Les colonnes principales forment une base du s-ev de K^p engendré par toutes les colonnes.

VI. Introduction aux systèmes linéaires

1) Généralités :

L'étude des systèmes d'équations linéaires "$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$" s'est développée au cours du XVIIIème siècle. Dès 1678, Leibniz les avait abordés,et utilisé une notation à indices dans des systèmes de trois équations à deux inconnues. En 1748, Mac Laurin donne des formules explicites pour les systèmes de trois équations. Cramer en 1754 explicitera la méthode de résolution simultanée d'équations linéaires à plusieurs inconnues sous forme de quotient de deux expressions qui sont des polynômes des coefficients.

Cette théorie est à l'origine de la notion de déterminant (développée par Vandermonde et Laplace) et de matrices.

La résolution des systèmes linéaires est essentielle en Mathématiques. En effet, moulte problèmes scientifiques passent par une telle résolution, que ce soit en algèbre (recherche de vecteurs propres...), en géométrie (intersection de variétés affines...), en physique, en théorie des équations différentielles... La connaissance totale des solutions (en théorie) est un fait rare en mathématiques. Peu d'équations se résolvent de manière si explicite. Aussi, pour approcher ces solutions, le mathématicien "linéarise" i.e. passe d'un problème non linéaire à un problème linéaire.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $b \in F$. L'équation

$$(E) \quad u(x) = b$$

où $x \in E$ est l'inconnu est appelé *équation linéaire*. Si $b = 0$, on dit que l'équation est homogène. Si (E) admet des solutions, on dit que (E) est *compatible* et *incompatible* dans le cas contraire.

2) Expression matricielle :

Supposons E et F de dimension finie. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F. On note A la matrice de u dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, B la matrice colonne de b dans $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et X la matrice colonne de x dans $(e_1, \dots, e_n)$.

Alors rechercher les $x \in E$ solution de (E) revient à chercher les $X \in K^n$ tels que

$$(E') \quad AX = B$$

Si on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, (E') s'écrit :

$$(L_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

ou encore

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (L_1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (L_2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ (L_p) & a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{array} \right.$$

(S) est alors appelé *système linéaire à p équation et n inconnues.*

On appelle *rang du système linéaire* le rang de A.

3) Opérations élémentaires sur un système :

Définition 267 *Soient $S : (L_i) \quad u_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$ un système linéaire de E, (u_i est une forme linéaire de K^n pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$.*

On note $(L) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (L_i)$ l'équation linéaire

$$(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i)(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$$

(L) *est une* combinaison linéaire de S.

Remarque : Toute solution de (S) est une solution de (L). En particulier, si S' est un système linéaire dont toute équation est combinaison linéaire de S, alors toute solution de (S) est solution de S'.

Définition 268 *Soient $S : (L_i) \quad u_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$, $S' : (L'_i) \quad u'_i(x_1, \dots, x_n) = b'_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$ deux systèmes linéaires de E.*

On dit que S' se déduit de S par une opération élémentaire *si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

1. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}_p$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots p\}$, $(L'_i) = (L_{\sigma(i)})$.

2. Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots p\}$ et $\lambda \in K^*$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, \dots p\}$

$$(L'_i) = \begin{cases} (L_i) \text{ si } i \neq i_0 \\ \lambda(L_{i_0}) \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

3. Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots p\}$, $j_0 \in \{1, 2, \dots p\}$, $j_0 \neq i_0$ et $\mu \in K$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ on a :

$$(L'_i) = \begin{cases} (L_i) \text{ si } i \neq i_0 \\ (L_{i_0}) + \mu(L_{j_0}) \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

Proposition 358 *Soit S et S' deux systèmes linéaires de E.*

On suppose que S' se déduit de S par une opération élémentaire. Alors :

1. S se déduit de S' par une opération élémentaire.

2. S et S' ont exactement les mêmes solutions.

Remarque : Ainsi, on ne change pas les solutions d'un système en effectuant des opérations élémentaires.

4) Systèmes homogènes :

Proposition 359 *Soit $S : \ AX = 0$ ($A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$) un système linéaire homogène de E, de rang r.*

L'ensemble F des solutions de S est un sous-espace de K^n de dimension $n - r$

Remarque : Un système homogène avec plus d'inconnues que d'équations a des solutions non nulles.

5) Systèmes avec second membre :

Définition 269 *Soit $S : \ AX = B$ un système linéaire.*

Le système homogène $S_0 : \ AX = 0$ est appelé système homogène associé à (S).

Proposition 360 *Soient $S:\ AX=B$ un système linéaire de E.*
On note S_0 le système homogène associé à S et F l'ensemble des solutions de S_0.
Si S admet une solution $Z \in E$, l'ensemble des solutions de S n'est autre que $Z+F$.

Proposition 361 *Soit $S:\ AX=B$ un système linéaire, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.*
1. *Si $\operatorname{rg} A = p$, alors S possède au moins une solution.*
2. *Si $\operatorname{rg} A = n$, alors S possède au plus une solution.*

6) Système de Cramer :

Définition 270 *Un système $S:\ AX=B$ est dit* de Cramer *si A est une matrice inversible.*

Théorème 157 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $S:\ AX=B$.*
Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$;
(ii) Le système S est de Cramer ;
(iii) Pour tout $B' \in K^n$, $AX=B'$ admet une solution unique ;
(iv) Pour tout $B' \in K^n$, $AX=B'$ admet au plus une solution ;
(v) Pour tout $B' \in K^n$, $AX=B'$ admet au moins une solution ;
(vi) La seule solution de $AX=0$ est 0.

Remarque : On a donc un critère pratique d'inversibilité.
Exemple : Inversibilité des matrices de Vandermonde.

Corollaire 88 *Un système de Cramer admet une solution et une seule.*

VII. Pivot de Gauss

1) Rang d'une matrice :

On connait le rang d'une matrice colonne ou d'une matrice ligne. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\surd,\backslash}(a)$. Si on opère des opérations élémentaires sur les colonnes, on ne change pas le rang. Comme $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}^t M$, il en va de même si on opère des opérations élémentaires sur les lignes.

• Si tous les coefficients de la première ligne et de la première colonne sont nuls, $\operatorname{rg} M$ est égal au rang de $(a_{ij})_{\substack{2\leqslant i\leqslant p\\ 2\leqslant j\leqslant n}}$.

• Sinon, quitte à opérer des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, on peut supposer $a_{11} \neq 0$. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on fait apparaitre des 0 sur la première colonne (sauf a_{11}) . Ensuite, on peut supposer les a_{1j}, $j \geqslant 2$ tous nuls (opération sur les colonnes). On obtient une matrice $(a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Alors le rang de M est

$$1 + \operatorname{rg}(a'_{ij})_{\substack{2\leqslant i\leqslant p\\ 2\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple : ...

2) Systèmes linéaire :

Traiter des exemples.

VIII. Calcul de l'inverse d'une matrice

1) Interprétation géométrique :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. on considère l'endomorphisme canoniquement associé à A, ou on considère A comme une matrice de passage.

Traiter un exemple.

2) Méthode des polynômes :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que

$$A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Alors, A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$ et si tel est le cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}(A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \ldots + a_1 I_n)$$

Traiter un exemple

3) Résolution d'un système linéaire :

Traiter un exemple. Programmation informatique.

4) Autres méthodes :

- Méthode de Cramer.
- Réduction.

Chapitre 4

Déterminants

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, K désigne un corps commutatif, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul, E_1, E_2,..., E_n, F des K-espaces vectoriels.

I. Applications multilinéaires

1) Généralités :

Définition 271 *Soit $f : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$.*

f est dite n-linéaire *si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $(a_1, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times \hat{E_i} \times \ldots \times E_n$, l'application*

$$x \in E_i \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

est linéaire.

On note $\mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans F.

Remarque : • Si $n = 1$, $\mathcal{L}^1(E_1, F) = \mathcal{L}(E_1, F)$.

• Si $n = 2$, on parle alors d'*applications bilinéaires* : $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est bilinéaire si et seulement si pour tout $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in E_1 \times E_1 \times E_2 \times E_2$ et tout $\lambda \in K$:

$$f(x_1, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2), \quad f(x_1 + x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)$$

$$f(x_1, \lambda y_1) = \lambda f(x_1, y_1) = f(\lambda x_1, y_1)$$

Remarque : Soit $f \in \mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Si un des x_i est nul, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Exemple : • Soit E un K-ev, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in E$ est bilinéaire.

• Soient E et F deux K-ev $(u, x) \in \mathcal{L}(E, F) \times E \longmapsto u(x) \in F$ est bilinéaire.

• Soient E, F et G trois K-ev, $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longmapsto v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ est bilinéaire.

• Soit A une K-algèbre, $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n \longmapsto a_1 a_2 \ldots a_n \in A$ est n-linéaire.

Remarque : $\mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$.

Proposition 362 *Soient $f \in \mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(e_i)_{i \in I_k}$ une famille de E_k, $(\lambda_i)_{i \in I_k}$ une famille à support fini de K. On a :*

$$f(\sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i, \sum_{i \in I_2} \lambda_i e_i, \ldots, \sum_{i \in I_n} \lambda_i e_i) = \sum_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, \ldots, i_n \in I_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

Exercice : Montrer que si E_1, E_2,..., E_n sont n K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, K)$ est de dimension finie :

$$\dim E_1 \times \dim E_2 \times \ldots \times \dim E_n$$

2) Dérivation des applications multilinéaires :

Proposition 363 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, \mathbb{K})$, chaque E_i étant égal à $\mathbb{K}^{p_i}$ pour tout i. Soient $\varphi : t \in I \longmapsto \varphi_i(t) \in E_i$ dérivable pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Alors $\Psi : t \in I \longmapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est dérivable et si $t \in I$:

$$\Psi'(t) = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

3) Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques :

Définition 272 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$.*

1. On dit que f est symétrique *si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$:*

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2. On dit que f est antisymétrique *si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$:*

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Théorème 158 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$.*

1. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f symétrique ;
(ii) Pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$ et tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f antisymétrique ;
(ii) Pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$ et tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Remarque : L'ensemble des applications multilinéaires symétriques (resp. antisymétrique) de E^n dans F est un sous-espace de $\mathcal{L}^n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, F)$.

II. Applications multilinéaires alternées

1) Généralités :

Définition 273 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$.*

f est dite alternée *si pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ tels qu'il existe $i \neq j$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec $x_i = x_j$:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

On note $\mathcal{L}^n_a(E, F)$ l'ensemble des fonctions multilinéaires alternées.

Proposition 364 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$. Si f est alternée, f est antisymétrique. Réciproquement, si f est antisymétrique et K de caractéristique différente de 2, f est alternée.*

Remarque : Dans le cas où la caractéristique de K est 2, si f est alternée, f est encore antisymétrique, mais la réciproque est fausse.

Proposition 365 *$\mathcal{L}_a^n(E, F)$ est un sous-espace de $f \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$.*

Proposition 366 *Soient $f \in \mathcal{L}_a^n(E, F)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, $i_0 \in I$, $(\lambda_i)_{i \in \{1,2,\dots,\hat{i_0},\dots,n\}}$. Alors*

$$f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Autrement dit, on ne change pas $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si on ajoute à un x_{i_0} une combinaison linéaire des autres x_i.

Corollaire 89 *Soient $f \in \mathcal{L}_a^n(E, F)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.*

2) Cas des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n :

Remarque : Si $\dim E < n$ et si $f \in \mathcal{L}_a^n(E, K)$, $f = 0$.

Dans toute la suite du chapitre, E est supposé de dimension finie.

Théorème 159 *On suppose que $\dim E = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.*

Alors $\mathcal{L}_a^n(E, K)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément si

$$\Delta_{\mathcal{B}} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \in K$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la colonne de } x_i \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

alors $\Delta_{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathcal{L}_a^n(E, K)$.

Remarque : On a $\Delta_{(e_1,\dots,e_n)}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Corollaire 90 *Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\lambda \in K$. Il existe un unique $\Delta \in \mathcal{L}_a^n(E, K)$ tel que*

$$\Delta(e_1, e_2, \dots, e_n) = \lambda$$

III. Déterminant de n vecteurs, déterminant d'un endomorphisme

1) Déterminant d'une famille de vecteurs :

Définition 274 *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E.*

On appelle déterminant des n vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ *le scalaire :*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la colonne de } x_i \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

Remarque : $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow K$ est une forme n-linéaire alternée. C'est d'ailleurs l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Théorème 160 *Soient* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *deux bases de* E. *Pour tout* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ *:*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{C}}(x_1, \ldots, x_n) \det_{\mathcal{B}}(f_1, \ldots, f_n)$$

Corollaire 91 *Soient* $\mathcal{B}$ *une base de* E *et* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *un système de vecteurs de* E.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *sont linéairement indépendants.*
(ii) $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$.

2) Déterminant d'un endomorphisme :

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, f et g deux formes n-linéaires alternées de E non nulle. Alors :

$$f' : (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \longmapsto f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) \in K$$

et

$$g' : (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \longmapsto g(u(x_1), \ldots, u(x_n)) \in K$$

sont deux formes n-linéaires alternées de E. Mais alors, il existe $\alpha \in K$ et $\beta \in K$ tels que

$$f' = \alpha f \quad \text{et} \quad g' = \beta g$$

Mais aussi, $g = \lambda f$ et par conséquent $g' = \lambda f'$. Donc $g' = \lambda f' = \lambda \alpha f = \alpha g$ et $\beta = \alpha$. Il en résulte que α tel que $f' = \alpha f$ ne dépend du choix de $f \in \mathcal{L}_a^n(E, K) \backslash \{0\}$.

Définition 275 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, E *de dimension* n.
On appelle déterminant de u, *et on note* $\det u$ *le scalaire* $\alpha \in K$ *tel que pour toute* $f \in \mathcal{L}_a^n(E, K)$ *non nulle et tout* $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, *on ait :*

$$f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \alpha f(x_1, \ldots, x_n)$$

Exemple : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On a pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Proposition 367 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, $w\in calL(E)$.*

Si $w(e_i)=x_i$ pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$,

$$\det w=\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$$

Théorème 161 *Soit $(u,v)\in\mathcal{L}(E)^2$.*

1. On a $\det I_E=1$.

2. $\det v\circ u=\det v\det u$.

3. $\det u\neq 0$ si et seulement si $u\in\mathrm{GL}(E)$ et dans ces conditions, $\det u^{-1}=(\det u)^{-1}$.

Exemple : • Si u est une homothétie de rapport λ, $\dim E=n$:

$$\det u=\lambda^n$$

• Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$, $u\in\mathcal{L}(E)$, $u(e_i)=e_{\sigma(i)}$ pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Alors $\det u=\varepsilon(\sigma)$.

• Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme dont la matrice dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec A triangulaire supérieure. Alors

$$\det u=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

De même si A est triangulaire inférieure.

3) Le groupe spécial linéaire :

L'application

$$\det : \begin{array}{ccc}\mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & K^* \\ u & \longmapsto & \det u\end{array}$$

est un morphisme du groupe $\mathrm{GL}(E)$ dans le groupe multiplicatif $(K^*,\times)$; son noyau est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Définition 276 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*

On appelle groupe spécial linéaire de E*, et on note* $\mathrm{SL}(E)$*, le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(E)$ *formé des $u\in\mathrm{GL}(E)$ tels que* $\det u=1$*.*

Remarque : $\mathrm{SL}(E)$ est donc un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$ et comme det est clairement surjective :

$$\mathrm{GL}(E)/\,\mathrm{SL}(E)\simeq K^*$$

IV. Déterminant d'une matrice carrée

1) Définition et premières propriétés :

Pour tout $M\in\mathcal{M}_n(K)$, on notera u_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associée à M. Soient $\mathcal{B}_0=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de K^n, C_1,..., C_n les colonnes de M. Alors

$$\det u_M=\det_{\mathcal{B}_0}(u_M(e_1),\dots,u_M(e_n))=\det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_n)$$

Si $M=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a donc

$$\det u_M=\det_{\mathcal{B}_0}(C_1,\dots,C_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}$$

Définition 277 *Soit $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle* déterminant de la matrice carrée M *le scalaire :*

$$\det M = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

$\det M$ *est aussi noté* $|a_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *ou encore*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple : • Soit $(a, b, c, d) \in K^4$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

• Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \in K^9$. On a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

Indiquer la règle de Sarrus.
Remarque : Comme $\det M = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_n)$, $\det M$ est une forme n-linéaire alternée des colonnes de M.

Proposition 368 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On note C_1, C_2,..., C_n les colonnes de M.*

1. On ne change pas le déterminant de M si on rajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a :

$$\det(C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}, \dots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \varepsilon(\sigma) \det M$$

3. Soient $\lambda \in K$ et $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a :

$$\det(C_1, \dots, C_{i_0-1}, \lambda C_{i_0}, C_{i_0+1}, \dots, C_n) = \lambda \det M$$

4. Si deux colonnes de M sont identiques, $\det M = 0$.

Remarque : $\det \lambda M = \lambda^n \det M$.
Exemple : Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $M = (\delta_{\sigma^{-1}(i)j})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$, $\det M = \varepsilon(\sigma) 1_K$.

2) Déterminant et endomorphismes :

Théorème 162 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a* $\det u = \det Mat_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 369 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux λ_1, λ_2,..., λ_n. Alors :*

$$\det M = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

3) Multiplicativité du déterminant :

Théorème 163 *Soit* $(M, N) \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. $\det I_n = 1$.
2. $\det MN = \det M \det N$.
3. *M est inversible si et seulement si* $\det M \neq 0$. *Dans ces conditions,*

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$$

Corollaire 92 *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Définition 278 $\mathrm{SL}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K),\ \det M = 1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(K)$ *appelé* groupe spécial linéaire d'ordre n.

Remarque : Si E est de dimension n, $\mathrm{SL}(E) \simeq \mathrm{SL}_n(K)$.

4) Déterminant de la transposée :

Théorème 164 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$. *On a* $\det {}^t M = \det M$.

Remarque : Comme $\det M = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, $\det M$ est une forme n-linéaire alternée des lignes de M.

Corollaire 93 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$. *On note* L_1, L_2,..., L_n *les lignes de* M.

1. *On ne change pas le déterminant de M si on rajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.*
2. *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$. *On a :*

$$\det \begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ L_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det M$$

3. *Soient* $\lambda \in K$ *et* $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *On a :*

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i_0-1} \\ \lambda L_{i_0} \\ L_{i_0+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda \det M$$

4. *Si M admet deux lignes identiques,* $\det M = 0$.

Application : Méthode du pivot de Gauss pour le calcul des déterminant.

Exemple : Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

Calcul de

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

On trouve $\Delta_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

5) Dérivation d'un déterminant :

Soit $C_i : t \in I \longmapsto C_i(t) \in \mathbb{K}^n$ dérivables. Alors, l'application

$$\Psi : t \in I \longmapsto \det(C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) \in K$$

est dérivable et sa dérivée est en $t \in I$:

$$\Psi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t))$$

V. Calcul des déterminants

Rappel : Cas des matrices diagonales et triangulaires.

1) Matrices par blocs :

Présentation des matrices par blocs. Produit de matrices par blocs.

Proposition 370 *Soient $A \in \mathcal{M}_p(K)$, $B \in \mathcal{M}_q(K)$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Alors*

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

Remarque : Extension à une matrice trigonale par blocs.

2) Développement d'un déterminant suivant une rangée :

Définition 279 *Soit $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.*

Le mineur de a_{ij} dans M *est le déterminant de la matrice $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ obtenue en rayant dans M la i-ème ligne et la j-ème colonne. Le* cofacteur de a_{ij} dans M *est* $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Théorème 165 (Développement d'un déterminant suivant une rangée) *Soit* $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* D_{ij} *le cofacteur de* a_{ij} *pour tout* $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$.

1. Fixons la colonne j*, on a :*

$$\det M = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$$

2. Fixons la ligne i*, on a :*

$$\det M = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$$

Exemple : Matrice compagnon

3) Comatrice :

Définition 280 *Soit* $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* D_ij *le cofacteur de* a_{ij} *pour tout* $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$.

La comatrice de M *est la matrice* $(D_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$*. On la note* $\operatorname{Com} M$*.*

Théorème 166 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$*. On a :*

$$M^t.\operatorname{Com} M =^t \operatorname{Com} M.M = (\det M).I_n$$

Corollaire 94 *Soit* $M \in \operatorname{GL} n(K)$*. On a*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}^t \operatorname{Com} M$$

Exemple : Si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4) Formules de Cramer :

Théorème 167 (Formules de Cramer) *Soit* $M = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \operatorname{GL} n(K)$*,* $B \in K^n$*, le système de Cramer* (S) *:* $MX = B$*. Pour chaque* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$*, on note* M_i *la matrice* $(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)$*. Alors si on note* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *la solution de* (S)*, pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$*, on a :*

$$x_i = \frac{1}{\det M}\det M_i$$

Remarque : Malgré leur élégance, les formules de Cramer se révèlent d'un usage peu pratique dès que n dépasse 3 à cause du grand nombre d'opérations nécéssitées par le calcul des déterminants.

Exemple : Condition d'inversibilité et inversion de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 5

Introduction à la réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, K désigne un corps commutatif, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel.

I. Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 168 (Théorème de décomposition des noyaux) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P et Q dans $K[X]$ premiers entre eux. Alors*

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

Exemple : • Si $u^2 = I$, $u \neq 0$ et K de caractéristique distincte de 2, u est une symétrie.

• Si $u^2 = u$, on retrouve que u est un projecteur.

Corollaire 95 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P_1, P_2,..., P_n dans $K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Si on note $P = P_1 P_2 \dots P_n$,*

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u)$$

II. Valeurs propres et vecteurs propres

1) Vocabulaire :

Définition 281 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

$x \in E$ est un vecteur propre de u *si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$.*

$\lambda \in K$ est une valeur propre de u *s'il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. $Sp(u)$, le* spectre de u *est l'ensemble des valeurs propres de u.*

Si λ est une valeur propre de u, $\ker(u - \lambda I_E) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$ est appelé sous-espace propre de u associée à λ.

Remarque : • Tout sous-espace propre de u est non réduit à $\{0\}$.

• Soit $\lambda \in K$. λ est une valeur propre de u si et seulement si $\ker(u - \lambda I_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

2) Somme directe des sous-espaces propres :

Proposition 371 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ_1, λ_2,..., λ_n dans K deux à deux distinctes. Alors*

$$\ker \prod_{i=1}^{n} (u - \lambda_i I_E) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(u - \lambda_i I_E)$$

Remarque : $\sum_{\lambda \in K} \ker(u - \lambda I_E)$ est directe.

Corollaire 96 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u possède au plus n valeurs propres distinctes.*

3) Endomorphismes diagonalisables :

Définition 282 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.*

On dit que u est diagonalisable *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de u dans cette base soit diagonale i.e. de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

autrement dit, u est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de E pour u.

Exemple : • Les homothéties sont diagonalisables.
dem • Les affinités sont diagonalisables.

Théorème 169 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) u est diagonalisable.
(ii) Il existe λ_1, λ_2,..., λ_p deux à deux distincts dans K tels que

$$\prod_{i=1}^{p} (u - \lambda_i I_E) = 0$$

(iii) Il existe $Q \in K[X]$ scindé sur K, à racines simples tel que $Q(u) = 0$.
(iv) Il existe λ_1, λ_2,..., λ_p deux à deux distincts dans K tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i I_E)$$

Remarque : u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de ses sous-espaces propres.
Remarque : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, F un sous-espace de E stable par u. Alors $\tilde{u} : x \in F \longrightarrow u(x) \in F$ est diagonalisable.
dem

4) Matrices carrées diagonalisables :

Définition 283 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

On dit que A est diagonalisable *si u_A l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A est diagonalisable. On appelle* valeur propre de A *(resp.* vecteur propre de A*) toute valeur propre (resp. tout vecteur propre) de u_A. Enfin, on appelle* sous-espace propre de A *tout sous-espace propre de u_A.*

Notation : • On note $Sp(A) = Sp(u_A)$ le *spectre de A*.

• Si $P \in K[X]$, on notera $\ker P(A)$ pour $\ker P(u_A)$ i.e.

$$\ker P(A) = \{X \in K^n, \;\; P(A)X = 0\}$$

En particulier, $\ker(A - \lambda I_n)$ est le sous-espace propre associé à λ pour u (si $\lambda \in Sp(A)$).

Remarque : • $X \in K^n$ est un vecteur propre de A si et seulement si $X \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $AX = \lambda X$.

• $\lambda \in K$ est valeur propre de A si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.

Proposition 372 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable ;

(ii) A est semblable à une matrice diagonale ;

(iii) Il existe $Q \in K[X]$ scindé sur K à racines simples tel que $Q(A) = 0$.

Proposition 373 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) A est diagonalisable.

III. Polynôme caractéristique

1) Polynôme caractéristique d'une matrices carrée :

Définition 284 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

Le polynôme caractéristique de A, *noté χ_A, est $\det(XI_n - A)$. Ainsi, si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{n-1\,1} & \dots & & X - a_{n-1\,n-1} & -a_{n-1\,n} \\ -a_{n1} & \dots & \dots & -a_{n\,n-1} & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque : • $XI_n - A$ est une matrice à coefficients dans $K(X)$; on peut donc envisager son déterminant.

• Si L est un surcorps de K, et $\lambda \in L$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Proposition 374 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $\chi_{{}^tA} = \chi_A$.*

Exemple : • Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire, ses éléments diagonaux notés λ_1, λ_2,..., λ_n :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

• Si A est triangulaire par blocs, les blocs successifs étant notés A_1, A_2,..., A_n :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$$

2) Propriétés du polynôme caractéristique :

Corollaire 97 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) λ est valeur propre de A ;
(ii) λ est racine de χ_A.

Théorème 170 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n > 0$.*
χ_A est un polynôme unitaire de degré n dont le coefficient constant est $(-1)^n \det A$ et le coefficient de X^{n-1} est $-\operatorname{Tr} A$:

$$\chi_A = X^n - \operatorname{Tr} A X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$$

Remarque : Si λ_1,..., λ_n sont les racines distinctes ou confondues de χ_A dans un surcorps commutatif L de K où χ_A est scindé, alors :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Proposition 375 *Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.*

Définition 285 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.*
Si $\mathcal{B}$ désigne une base de E, A la matrice de u dans $\mathcal{B}$, on appelle polynôme caractéristique de *u, noté χ_u, le polynôme χ_A (χ_u est indépendant du choix de $\mathcal{B}$ d'après la proposition précédente).*

Remarque : Si $\dim E = n$, χ_u est un polynôme unitaire de dégré n, de terme constant $(-1)^n \det u$ et dont le coefficient de X^{n-1} est $-\operatorname{Tr} u$.

Théorème 171 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u. On note $u_{|F} : x \in F \longmapsto u(x) \in F$.*
Alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

4) Diagonalisabilité et polynôme caractéristique :

Proposition 376 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ_1,..., λ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de u.*
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note α_i l'ordre de λ_i comme racine de χ_u et $\beta_i = \dim\ker(u - \lambda_i I_E)$.
Alors, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\beta_i \leqslant \alpha_i$.

Théorème 172 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ_1,..., λ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de u.*

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on note α_i l'ordre de λ_i comme racine de χ_u et $\beta_i = \dim\ker(u - \lambda_i I_E)$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) χ_u est scindé et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots p\}$, $\alpha_i = \beta_i$.

Corollaire 98 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Si χ_u est scindé sur K, à racines simples, u est diagonalisable.

Exemple : Exemples de matrices diagonalisables et de matrices non diagonalisables.

IV. Théorème de Cayley-Hamilton

1) Valeurs propres et polynôme annulateur :

Proposition 377 *Soit $Q \in K[X]$, $\lambda \in K$.*

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $Q(u) = 0$ et λ est une valeur propre de u, $Q(\lambda) = 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $Q(A) = 0$ et λ est une valeur propre de A, $Q(\lambda) = 0$.

Remarque : On demande souvent de prouver ce lemme.

Proposition 378 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n > 0$.*

Alors, il existe $Q \in K[X]$, $Q \neq 0$ tel que $Q(A) = 0$.

2) Polynôme minimal :

Théorème 173 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n > 0$.*

Il existe un unique polynôme unitaire non nul de degré minimal, noté μ_A, tel que si $Q \in K[X]$ avec $Q(A) = 0$, μ_A divise Q.

Définition 286 *Avec les notations du théorème précédent, μ_A est appelé* polynôme minimal de A.

Exemple : Si A est diagonalisable, λ_1,..., λ_p les valeurs propres de A deux à deux distinctes,

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$$

et réciproquement.

Remarque : On définit également le polynôme minimal d'un endomorphisme.

3) Théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème 174 (Théorème de Cayley-Hamilton) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors*

$$\chi_A(A) = 0$$

Corollaire 99 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$\chi_u(u) = 0$$

Exemple : Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$$

4) Calcul d'un polynôme de matrice :

• Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres, $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors, si $Q \in K[X]$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$[Q(u)](x) = \sum_{i=1}^{n} Q(\lambda_i) x_i e_i$$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable, $D = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $D = P^{-1}AP$ i.e. $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}D^kP$ et pour tout $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$:

$$Q(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k A^k = P(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k D^k)P^{-1} = P^{-1}Q(D)P$$

et $Q(D) = Diag(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$.

• Supposons que l'on veuille calculer $Q(A)$ ($A \in \mathcal{M}_n(K)$) sachant que $P(A) = 0$ avec $P \in K[X]\backslash\{0\}$ (par exemple si $P = \chi_A$). Si R est le reste de la division euclidienne de Q par P : $R(A) = P(A)$.
dem Si $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ avec les λ_i deux à deux distincts :

$$R = \sum_{k=1}^{p} Q(\lambda_k) \frac{\prod_{i\neq k}(X - \lambda_i)}{\prod_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)}$$

En caractéristique infinie, si $P = (X - \lambda)^p$, $R = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X - \lambda)^k$.
Exemple : ...

Partie E
Polynômes

Chapitre 1

Polynômes à une indéterminée

Dans ce chapitre, K désigne un corps commutatif et A un anneau commutatif.

I. Construction de $K[X]$

1) Le K-espace vectoriel $K^{(\mathbb{N})}$:

Définition 287 *Un* polynôme (à une idéterminée à coefficients dans K) *est une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* K *à support fini pour* $+$ *i.e. il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$.

Si $P \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$, $p = \max\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$ *existe (dans* $\mathbb{N}$*) et est appelé* degré de P *noté* $\deg P$. *Si* $P = (0)_{n\in\mathbb{N}}$, *par convention, on pose* $\deg P = -\infty$.

Si $P \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$, $p = \deg P$, a_p *est appelé* coefficient dominant de P. *On note* $CD(P) = a_p$.

Enfin, nous noterons provisoirement $K^{(\mathbb{N})}$ *l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans* K.

Proposition 379 *1.* $K^{(\mathbb{N})}$ *est un sous-espace du* K*-espace vectoriel* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, K) = K^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $(P, Q) \in (K^{(\mathbb{N})})^2$. *Alors* $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$. *De plus si* $\deg P > \deg Q$, *on a* $\deg(P + Q) = \deg P$ *et* $CD(P + Q) = C(P)$.

3. Si $\lambda \in K^*$, $P \in K^{(\mathbb{N})}$, $P \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$, *on a* $\deg(\lambda P) = \deg P$ *et* $CD(\lambda P) = \lambda CD(P)$.

Remarque :

$$\deg(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \deg P_i$$

Proposition 380 *On pose pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $X_p = (\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}}$. *Alors pour tout* $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{(\mathbb{N})}$, *on a*

$$P = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p X_p$$

et $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est une base du* K*-espace vectoriel* $K^{(\mathbb{N})}$. *En particulier,* $K^{(\mathbb{N})}$ *est de dimension infinie.*

2) Multiplication des polynômes :

Définition-Proposition 7 *Soit* $(P, Q) \in {K^{(\mathbb{N})}}^2$, $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Considérons la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* K *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un polynôme appelé* produit de P par Q *et noté* PQ.

Proposition 381 *Soit* $(P,Q)\in(K^{(\mathbb{N})})^2$. *Alors*

1. $PQ = QP$;
2. *Si* $P\neq 0$ *et* $Q\neq 0$, $PQ\neq 0$ *et*

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \quad et \quad CD(PQ) = CD(P)CD(Q)$$

3. $X_0P = PX_0 = P$.

Théorème 175 $K^{(\mathbb{N})}$ *muni des opérations définies précédemment est une* K*-algèbre intègre (en particulier commutative) de dimension infinie.*

Remarque : $\deg\prod_{i\in I} P_i$ et $CD(\prod_{i\in I} P_i)$.

3) Ecriture des polynômes :

On note toujours $X_p = (\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout p entier.

Proposition 382 *1.* $\lambda\in K \longmapsto \lambda X_0$ *est un isomorphisme du corps* K *sur un sous-anneau de* $K^{(\mathbb{N})}$.

2. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $X_p = (X_1)^p$.

Convention :

• On identifie $\lambda\in K$ et $\lambda X_0\in K^{(\mathbb{N})}$ i.e. on plonge K dans $K^{(\mathbb{N})}$. Si $\lambda\in K^*$, $\deg\lambda = 0$. Les $\lambda\in K\subset K^{(\mathbb{N})}$ sont appelés *polynômes constants*.

• On se donne un symbole X. On écrira alors X au lieu de X_1. Si $p\in\mathbb{N}$, $X_p = X_1^p = X^p$ et si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$$

On dit que a_p est le coefficient de X^p dans P. On note $K[X]$ au lieu de $K^{(\mathbb{N})}$.

• Tout polynôme de $K[X]$ peut s'écrire

$$P = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$$

Si $n = \deg P$, $a_n = CD(P)$.

• Si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$, $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$, $\lambda\in K$:

$$\lambda P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n x^n,\quad P+Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n)X^n,\quad \text{et}\quad PQ = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{p+q=n} a_p b_q) X^n$$

Proposition 383 *Soit* $n\in\mathbb{N}$. $K_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \{P\in K[X],\ \deg P\leqslant n\}$ *est un sous-espace de* $K[X]$ *de dimension* $n+1$.

4) Polynômes à coefficients dans un anneau :

On définit de la même manière qu'au 1) un polynôme à une indéterminée à coefficients dans un anneau commutatif A comme étant une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A à support fini.

On définit également de la même manière la somme et le produit de deux polynômes, le produit par un scalaire d'un polynôme.

En particulier, si on note $X_p = (\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout p entier, $X_p = X_1^p = X^p$ (on pose $X = X_1$) et $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit :

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$$

On note $A[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans A. $A[X]$ est un anneau commutatif, A se plonge dans $A[X]$. $A[X]$ est intègre si et seulement si A est intègre.

En particulier, si A n'est pas intègre, on n'a seulement que

$$\deg PQ \leqslant \deg P + \deg Q$$

II. Division euclidienne dans $K[X]$

1) Définition et algorithme de la division euclidienne :

Théorème 176 *Soit $(A,B) \in K[X]^2$ tel que $B \neq 0$.*
Il existe un unique couple $(Q,R) \in K[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg R < \deg Q$$

Définition 288 *Avec les notations du théorème précédent, Q s'appelle le* quotient de la division euclidienne de A par B *et R le* reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque : La démonstration fournit une méthode pratique pour calculer Q et R :
- On regarde le terme de plus haut degré aX^n de A et bX^p de B.
- On inscrit a/bX^{n-p} comme terme de Q.
- On calcule $A' = A - a/bX^{n-p}B$.
- On regarde le terme de plus haut degré $a'X^{n'}$ de A' et bX^p de B.
- On inscrit $a'/bX^{n'-p}$ comme terme de Q.

etc...

Exemple : Si $A = 3X^4 - 2X^3 + X^2 - 6X + 1$ et $B = 2X^3 + X^2 + X + 1$, on obtient $Q = 3/2X - 7/4$ et $R = 5/4X^2 - 23/4X + 11/4$ ($K = \mathbb{Q}$).

2) Relation de divisibilité de $K[X]$:

Définition 289 *Soit $(A,B) \in K[X]$. On dit que A* divise *B s'il existe $P \in K[X]$ tel que $PA = B$. On écrit alors $A|B$.*

Remarque : Supposons $A \neq 0$, $A|B$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de B par A est nul. Le quotient de cette division se note alors $\frac{B}{A}$

Définition 290 *Soit $P \in K[X]$.*
On dit que P est unitaire *si $P = 0$ ou si le coefficient directeur de P est* 1.

Remarque : La somme d'un polynôme P et d'un polynôme Q tel que $\deg Q < \deg P$ est unitaire.

Le produit de deux polynômes unitaires est unitaire.

Proposition 384 *1. La divisibilité sur $K[X]$ est une relation réflexive et transitive.*

2. Soit $(A,B) \in K[X]^2$. La condition "$A|B$ et $B|A$" équivaut à "il existe $\lambda \in K^*$ tel que $B = \lambda A$".

3. La divisibilité restreinte à l'ensemble des polynômes unitaires est une relation d'ordre.

Remarque : 0 est le plus grand élément de cette relation d'ordre.

3) Idéaux de $K[X]$:

Rappel : $K[X]$ est une K-algèbre commutative. Un idéal I (forcément bilatère) de $K[X]$ est un idéal de l'anneau $K[X]$. Nous savons qu'automatiquement, I est un sous-espace de $K[X]$.
Remarque : Si $P \in K[X]$, $PK[X]$ désigne l'idéal engendré par P. Si $Q \in K[X]$,

$$Q \in PK[X] \Longleftrightarrow P|Q$$

Soit $(P,Q) \in K[X]^2$. On pose $I = PK[X]$, $J = QK[X]$. Alors $I = J$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Théorème 177 *Soit I un idéal de $K[X]$.*
Il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que $I = PK[X]$.

Remarque : Les idéaux de $K[X]$ sont principaux. $K[X]$ est un anneau principal.
Comme pour $\mathbb{Z}$, c'est la division euclidienne qui entraîne la principalité de $K[X]$.

4) Congruences dans $K[X]$:

• $K[X]$ étant une K-algèbre, si I est un idéal de $K[X]$ (et donc en particulier, un sous-espace), on peut considérer la congruence modulo I : si $(A,B) \in K[X]^2$:

$$A \equiv B \pmod{I} \Longleftrightarrow A - B \in I$$

Mais I est de la forme $PK[X]$ où $P \in K[X]$ et :

$$A \equiv B \pmod{P}K[X] \Longleftrightarrow (\exists Q \in K[X])(A - B = QP) \Longleftrightarrow P|A - B$$

On note $A \equiv B \pmod{P}$ pour $A \equiv B \pmod{P}K[X]$: c'est la congruence modulo P : elle est compatible avec $+$, $\times$, la multiplication par un scalaire. Ainsi si $(A,B,C,D) \in K[X]^4$, $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}$ et si modulo P, $A \equiv C$ et $B \equiv D$, on a :

$$A + B \equiv C + D,\ AB \equiv CD,\ \lambda A \equiv \lambda B,\ A^n \equiv B^n \text{ et } (A \equiv 0 \Longleftrightarrow P|A)$$

• On peut également considérer la K-algèbre quotient $K[X]/PK[X]$.
Exercice : Soient $P \in K[X]$, $P \neq 0$, $\deg P = n$ et $I = PK[X]$.
Montrer que la K-algèbre quotient $K[X]/I$ admet pour base $(\dot{1}, \dot{X}, \dots, \dot{X^{n-1}})$ et $\dim K[X]/I = n$.

III. PGCD et PPCM de polynômes

1) Introduction :

Considérons E l'ensemble des polynômes unitaires de $K[X]$. La divisibilité $|$ est une relation d'ordre partiel sur E.
Soit $(A,B) \in K[X]^2$.

Qu'est que la borne inférieure de $\{A, B\}$? A priori, cette borne n'existe pas forcément. D est la borne inférieure de $\{A, B\}$ si et seulement si D est un minorant i.e. D divise A et B et D est le plus grand de tous les minorants i.e.

$$C|A \text{ et } C|B \Longrightarrow C|D$$

Dans ces conditions, D est appelé *plus grand commun diviseur de A et B.*

Qu'est que la borne supérieure de $\{A, B\}$? A priori, cette borne n'existe pas forcément. M est la borne supérieure de $\{A, B\}$ si et seulement si M est un majorant i.e. M est multiple de A et B et M est le plus petit de tous les majorants i.e.

$$A|N \text{ et } B|N \Longrightarrow M|N$$

Dans ces conditions, M est appelé *plus petit commun multiple de A et B.*

De manière générale, on définit le PGCD et le PPCM par

Définition 291 *Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de E.*

Sous réserve d'existence, on appelle PGCD des P_i *la borne inférieure des P_i (au sens de la divisibilité). Elle est notée* $\mathrm{pgcd}_{i\in I} P_i$.

Sous réserve d'existence, on appelle PPCM des P_i *la borne supérieure des P_i (au sens de la divisibilité). Elle est notée* $\mathrm{ppcm}_{i\in I} P_i$.

Définition 292 *Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$. On appelle* PGDC des P_i *le PGCD des P'_i où pour tout $i \in I$, $P'_i \in E$ est l'unique polynôme unitaire colinéaire à P_i.*

On appelle PPCM des P_i *le PPCM des P'_i où pour tout $i \in I$, $P'_i \in E$ est l'unique polynôme unitaire colinéaire à P_i.*

Remarque : Si $P_i = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ ($a_n \neq 0$), $P'_i = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}X^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}$

2) Existence du PGCD et PPCM :

Théorème 178 *Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$.*

Alors le PGCD des P_i existe et c'est le générateur unitaire D de l'idéal principal

$$DK[X] = \sum_{i\in I} P_iK[X]$$

De même le PPCM des P_i existe et c'est le générateur unitaire M de l'idéal principal

$$MK[X] = \bigcap_{i\in I} P_iK[X]$$

Remarque : Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de K^*,

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I} \lambda_iP_i = \mathrm{pgcd}_{i\in I} P_i \quad \text{et} \quad \mathop{\mathrm{ppcm}}_{i\in I} \lambda_iP_i = \mathop{\mathrm{ppcm}}_{i\in I} P_i$$

Proposition 385 (Identité de Bezout) *Soient P_1, P_2 ,..., P_n dans $K[X]$, D = $\mathrm{pgcd}(P_1, \ldots, P_n)$. Alors, il existe K_1,...,K_n dans $K[X]$ tels que*

$$D = K_1P_1 + K_2P_2 + \ldots + K_nP_n$$

Remarque : • Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$, $J \subset I$. Alors

$$\operatorname{pgcd}_{i\in I} P_i \mid \operatorname{pgcd}_{i\in J} P_i$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in J} P_i \mid \operatorname*{ppcm}_{i\in I} P_i$$

• Soient $(P_i)_{i\in I}$ et $(Q_i)_{i\in I}$ deux familles de $K[X]$ telles que pour tout i, P_i divise Q_i. Alors

$$\operatorname{pgcd}_{i\in I} P_i \mid \operatorname{pgcd}_{i\in I} Q_i$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I} P_i \mid \operatorname*{ppcm}_{i\in I} Q_i$$

• Si $(J_k)_{k\in K}$ est un recouvrement de l'ensemble I et $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$, on a

$$\operatorname{pgcd}_{i\in I} P_i = \operatorname{pgcd}_{k\in K}(\operatorname{pgcd}_{j\in J_k} P_j)$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I} P_i = \operatorname*{ppcm}_{k\in K}(\operatorname*{ppcm}_{j\in J_k} P_j)$$

3) Propriétés du PGCD et du PPCM :

Proposition 386 *Soient $I \neq \emptyset$, $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$, et $A \in K[X]$ unitaire. Alors*

$$\operatorname{pgcd}_{i\in I}(AP_i) = A \operatorname{pgcd}_{i\in I}(P_i)$$

$$\operatorname*{ppcm}_{i\in I}(AP_i) = A \operatorname*{ppcm}_{i\in I}(P_i)$$

Théorème 179 *Soient P et Q deux polynômes unitaires de $K[X]$. Alors*

$$\operatorname{pgcd}(P,Q)\operatorname{ppcm}(P,Q) = PQ$$

Remarque : • Ainsi, si $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ est connu, $\operatorname{ppcm}(P,Q)$ aussi.
• Si $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$, P et Q unitaires, $\operatorname{ppcm}(P,Q) = PQ$.
• Si P et Q divise A et $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$, PQ divise A.

4) Algorithme d'Euclide :

On désire construire un algorithme de calcul du PGCD de deux polynômes P et Q de $K[X]$. On va s'appuyer sur le résultat suivant :

Proposition 387 *Soient P et Q dans $K[X]$, $Q \neq 0$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par Q. Alors*

$$\operatorname{pgcd}(P,Q) = \operatorname{pgcd}(Q,R)$$

Supposons $\deg P \geqslant \deg Q$. Notons $P_0 = P$ et $P_1 = Q$ et définissons par récurrence la suite P_n de la manière suivante : si $P_{n-1} = 0$, alors $P_n = 0$; sinon P_n est le reste de la division euclidienne de P_{n-2} par P_{n-1}.

Il est clair si $P_n \neq 0$, $\deg P_n < \deg P_{n-1}$. Si pour tout n, $P_n \neq 0$, la suite de $\mathbb{N}$ $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante : impossible !

Soit donc N le plus petit entier tel que $P_N = 0$. Si $n \geqslant N$, $P_n = 0$ et si $n < N$, $P_n \neq 0$. De plus

$$\operatorname{pgcd}(P_0,P_1) = \operatorname{pgcd}(P_1,P_2) = \ldots = \operatorname{pgcd}(P_{N-2},P_{N-1}) = \operatorname{pgcd}(P_{N-1},0)$$

Or, à une constante multiplicative non nulle près, $\operatorname{pgcd}(P_{n-1},0)$ est P_{n-1}.

Remarque : Description de l'algorithme.

IV. Polynômes premiers entre eux

1) Théorème de Bezout :

Définition 293 *Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de $K[X]$. Les P_i sont dits* premiers entre eux *si*

$$\mathrm{pgcd}_{i\in I}\, P_i = 1$$

Remarque : • Les P_i sont premiers entre eux si et seulement si les polynômes constants non nuls sont les uniques diviseurs communs aux P_i.
• Si $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$ et P et Q unitaires, $\mathrm{ppcm}(P, Q) = PQ$.
• Soit $D = \mathrm{pgcd}_{i\in I}(P_i)$. Alors les P_i/D sont premiers entre eux.

Théorème 180 (Théorème de Bezout) *Soient P_1,..., P_n dans $K[X]$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) les P_i sont premiers entre eux ;
(ii) il existe n polynômes de $K[X]$ K_1, K_2,..., K_n tels que

$$1 = K_1P_1 + K_2P_2 + \ldots + K_nP_n$$

Remarque : L'algorithme d'Euclide établit si deux polynômes sont premiers entre eux (voir **III.**).
Probleme : Quels sont les polynômes K_i intervenant dans l'identité de Bezout ?
Exemple : $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X$. Alors :

$$1 = \frac{1}{2}\left[(X + 2)(X^2 + 1) + (X^2 + X)(-X - 1)\right]$$

2) Théorème de Gauss :

Proposition 388 *Soit $(P, A, B) \in K[X]^3$.*
Si P est premier avec A et avec B, alors P est premier avec le produit AB.

Remarque : Si pour tout i, P est premier avec A_i, P est aussi premier avec le produit $A_1A_2\ldots A_n$.
Remarque : Soient A_1,..., A_n des polynômes unitaires de $K[X]$. Si pour $i \neq j$, $\mathrm{pgcd}(A_i, A_j) = 1$ alors

$$\mathop{\mathrm{ppcm}}_{i\in I} A_i = |A_1A_2\ldots A_n|$$

Théorème 181 (Théorème de Gauss) *Soient $(P, A, B) \in K[X]^3$.*
Si P divise AB et si P est premier avec A, alors P divise B.

Exercice : Soient $P \in K[X]^*$, $Q \in K[X]$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\dot{Q}$ inversible dans $K[X]/PK[X]$;
(ii) $\dot{Q}$ régulier dans $K[X]/PK[X]$;
(iii) P et Q sont premiers entre eux.

V. Polynômes irréductibles

1) Généralités :

Définition 294 *Soit $P \in K[X]$.*
On dit que P est irréductible *si $P \notin K$ et si les seuls diviseurs de P sont les éléments de $K^* \cup K^*P$.*

Remarque : • Si P est irréductible et si $\lambda \in K^*$ alors λP est irréductible.
• Si P est unitaire, alors P est irréductible si et seulement si $P \neq 1$ et les seuls diviseurs unitaires de P sont 1 et P.

Proposition 389 *Soit $P \in K[X]$, $P \notin K$.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) P n'est pas irréductible ;
(ii) Il existe A et B dans $K[X]$ tel que $P = AB$ et $\deg A < \deg P$ et $\deg B < \deg P$.

Corollaire 100 *Tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible.*

2) Lemme d'Euclide :

Proposition 390 (Lemme d'Euclide) *Soit $(P, A, B) \in K[X]^3$, P irréductible.*
Si P divise le produit AB, alors P divise A ou P divise B.

Exercice : Soit $P \in K[X]$, $P \neq 0$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $K[X]/PK[X]$ est intègre ;
(ii) $K[X]/PK[X]$ est un corps ;
(iii) P est irréductible.
Exemple : $\mathbb{R}[X]/(X-1)\mathbb{R}[X] \simeq \mathbb{R}$.

3) Décomposition en facteurs irréductibles :

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires de $K[X]$.

Théorème 182 *Tout élément $A \in K[X]$, $A \neq 0$ s'écrit de façon unique*

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$$

avec $\lambda \in K^*$ et $(\alpha_P)_{P \in \mathcal{P}}$ une famille à support fini pour $+$ d'éléments de $\mathbb{N}$.

Remarque : Ainsi, pour tout élément $A \in K[X]$, $A \neq 0$, il existe $r \geqslant 0$, P_1, P_2,..., P_r des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts, α_1, α_2,..., α_r des entiers strictement positifs tels que

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r}$$

De plus, r est unique, les P_i sont uniques (à la numérotation près), ainsi que les α_i.

Corollaire 101 *1. Dire que $\prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$ divise $\prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\beta_P}$ signifie que $\alpha_P \leqslant \beta_P$ pour tout $P \in \mathcal{P}$.*
2. Soient $A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$ et $B = \mu \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\beta_P}$ deux polynômes non nuls. Alors

$$\operatorname{pgcd}(A, B) = \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\inf(\alpha_P, \beta_P)} \quad \text{et} \quad \operatorname{ppcm}(A, B) = \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\sup(\alpha_P, \beta_P)}$$

Exercice : Réécrire 2. pour une famille de polynômes quelconque.
Exercice : Soit $A \in K[X]$, $A \neq 0$. Montrer que A ne possède qu'un nombre fini de diviseurs unitaires. Les dénombrer.
Remarque : Dire que P et Q sont premiers entre eux, c'est dire que P et Q n'ont pas de diviseur irréductible commun.

VI. Changement du corps de base

Soient K un corps commutatif, L un sur-corps commutatif de K.

1) Plongement de $K[X]$ dans $L[X]$:

On a :

$$K[X] \subset L[X]$$

Soit $A \in K[X]$. Alors $\deg A$ est le même que l'on considère A comme élément de $K[X]$ ou de $L[X]$. Même remarque pour le coefficient directeur.

2) Comparaison des divisions euclidiennes :

• Soient $A \in K[X,\ B \in K[X]$, $B \neq 0$. Alors le quotient et le reste de la division de A par B sont identiques, que l'on effectue la division dans $K[X]$ ou dans $L[X]$.

• Soient $A \in K[X]$, $B \in K[X]$. Si $A|B$ dans $K[X]$, $A|B$ dans $L[X]$. Par unicité du quotient et du reste, si $A|B$ dans $L[X]$, $A|B$ dans $K[X]$.

3) Comparaison des PGCD et des PPCM :

Théorème 183 *Soit A_1, A_2,..., A_n une famille d'éléments de $K[X]$. On note D_K le PGCD des A_i dans $K[X]$, D_L le PGCD des A_i dans $L[X]$, M_K le PPCM des A_i dans $K[X]$, M_L le PPCM des A_i dans $L[X]$.*

Alors $D_K = D_L$ et $M_K = M_L$.

Remarque : Les A_i sont premiers entre eux dans $K[X]$ si et seulement si les A_i sont premiers entre eux dans $L[X]$.

Remarque : P irréductible dans $L[X]$ implique P irréductible dans $K[X]$. Nous verrons que l'inverse est faux.

Chapitre 2

Fonctions polynômiales

Dans ce chapitre, K désigne un corps commutatif.

I. Valeurs prises par un polynôme

1) Généralités :

Définition 295 *Soient $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$, A une K-algèbre, $\alpha \in K$.*
La valeur prise par P en α *est*

$$P(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \alpha^n \in A$$

On dit qu'on fait $X = \alpha$ dans P ou encore que l'on substitue α à X dans P.

Exemple : :

- Si $P = \lambda \in K$, $P(\alpha) = \lambda 1_A \in A$.
- $A = L$ un surcorps commutatif de K alors

$$P(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \alpha^n \in L$$

- Soit E un K-espace vectoriel. On peut prendre $A = \mathcal{L}(E)$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$P(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n u^n$$

- On peut prendre $A = \mathcal{M}_p(K)$. Si $M \in \mathcal{M}_p(K)$, on définit :

$$P(M) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n M^n \in \mathcal{M}_p(K)$$

- Enfin, on peut prendre $A = K[X]$. Si $Q \in K[X]$, on note

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Q^n \in K[X]$$

$P \circ Q$ est appelé *polynôme composé de P et Q.*

Théorème 184 *Soient A une K-algèbre, $\alpha \in A$.*

1. La fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme de K-algèbres.

2. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$. On a

$$P[Q(\alpha)] = P \circ Q(\alpha)$$

Exemple : • On a

$$(\sum_{i\in I} P_i)(\alpha) = \sum_{i\in I} P_i(\alpha), \ \ (\prod_{i\in I} P_i)(\alpha) = \prod_{i\in I} P_i(\alpha), \ \ (P^n)(\alpha) = P(\alpha)^n$$

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$(\sum_{i\in I} P_i)(u) = \sum_{i\in I} P_i(u), \ \ (\prod_{i\in I} P_i)(u) = \prod_{i\in I} P_i(u), \ \ (P^n)(u) = P(u)^n = P(u) \circ \ldots \circ P(u)$$

$$(P \circ Q)(u) = P(Q(u))$$

En particulier, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.

• Si $Q \in K[X]$,

$$(\sum_{i\in I} P_i) \circ Q = \sum_{i\in I} P_i \circ Q \text{ mais } (Q \circ \sum_{i\in I} P_i) \neq \sum_{i\in I} Q \circ P_i$$

$$(\prod_{i\in I} P_i) \circ Q = \prod_{i\in I} P_i \circ Q$$

$$P^n \circ Q = (P \circ Q)^n$$

• Si $(Q, R) \in K[X]^2$, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ et $X \circ P = P \circ X = P$. En particulier, $(K[X], \circ)$ est un monoïde d'élément neutre X.

Remarque : • Soit $\alpha \in K$. On a $(X - \alpha) \circ (X + \alpha) = X$ et $(X + \alpha) \circ (X - \alpha) = X$.

• $P \longmapsto P(X - \alpha)$ est un morphisme bijectif de la K-algèbre $K[X]$ dans elle-même, la bijection réciproque étant $P \longmapsto P(X + \alpha)$.

2) Racines d'un polynôme :

Définition 296 *Soit $P \in K[X]$.*

Une racine de P dans K *est un élément $\alpha \in K$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 391 *Soient $P \in K[X]$, $\alpha \in K$.*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\alpha) = 0$;

(ii) $X - \alpha$ divise P.

Corollaire 102 *Soit $P \in K[X]$, $\deg P = 2$ ou 3.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) P irréductible ;
(ii) P n'admet pas de racines dans K.

Proposition 392 *Soient $P \in K[X]$, α_1, α_2,..., α_n des racines distinctes deux à deux de P.*
Alors P est divisible par $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$.

Remarque : • Si $P \neq 0$, $\deg P \geqslant \deg \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i) = n$.

Corollaire 103 *Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines différentes.*
Un polynôme qui possède une infinité de racines est le polynôme nul.

3) Fonctions polynômes :

Définition 297 *Soit $P \in K[X]$.*
On appelle fonction polynôme associé à P *l'application $\tilde{P} \in \mathcal{F}(K,K)$ définie par :*

$$\tilde{P} : x \in K \longmapsto P(x) \in K$$

Proposition 393 *L'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(K,K) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbre dont
• *l'image est l'ensemble des fonctions polynômiales de K dans K qui est donc une sous-algèbre de $\mathcal{F}(K,K)$.*
• *le noyau est $\{0\}$ lorsque K est infini.*

Remarque : Si K est infini, on peut identifier polynômes et fonctions polynômes : $P \simeq \tilde{P}$.
Remarque : Si $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $P = X^p - X$, on a $\tilde{P} = 0$.

4) Polynômes d'interpolation de Lagrange :

Probleme : Soient x_1, x_2,..., x_n n éléments de K deux à deux distincts. On se donne λ_1, λ_2,..., λ_n n éléments de K. Existe t-il un polynôme $P \in K[X]$ tel que pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $P(x_i) = \lambda_i$.

Définition 298 *On appelle* polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la suite *$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les n polynômes :*

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Remarque : $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout i et j.

Théorème 185 *Il existe un unique polynôme P_0 répondant au problème : "pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $P(x_i) = \lambda_i$ et $\deg P \leqslant n-1$" ; c'est*

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$$

L'ensemble des solutions du problème est alors l'ensemble des polynômes $P = P_0 + Q(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$ où Q décrit $K[X]$.

II. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

1) Ordre de multiplicité d'une racine :

Définition 299 *Soient $P \in K[X]$, $P \neq 0$, $\alpha \in K$.*

$\{n \in \mathbb{N}, (X-\alpha)^n$ divise $P\}$ est une partie non vide (elle contient 0), majorée (par $\deg P$) de $\mathbb{N}$, donc, elle possède un plus grand élément ω.

*ω est l'*ordre (de multiplicité) de α comme racine de P.

Exemple : • α racine d'ordre 0 de P signifie que α n'est pas racine de P.

• α racine d'ordre 1 de P signifie que α est racine de P et $(X-\alpha)^2$ ne divise pas P : on dit que α est racine simple de P.

• α racine d'ordre 2 de P est une racine double.

Remarque : • L'ordre de α comme racine de P ne change pas si on remplace K par un surcorps commutatif de K.

• L'ordre de α comme racine de P est aussi l'exposant de $X-\alpha$ dans la décomposition de P en facteurs irréductibles.

Théorème 186 *Soient $P \in K[X]$, $P \neq 0$, $\alpha \in K$.*

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) α est racine d'ordre n de P.

(ii) $(X-\alpha)^n$ divise P et $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

(iii) Il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^n Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

2) Relations entre coefficients et racines :

Définition 300 *Soit $P \in K[X]$, $P \neq 0$.*

On dit que P est scindé (sur K) *si tous les diviseurs irréductibles de P dans $K[X]$ sont de degré 1, ou encore si tous les diviseurs irréductibles et unitaires de P dans $K[X]$ sont de la forme $X-\alpha$ avec $\alpha \in K$, ou encore P s'écrit*

$$P = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$$

où $\lambda \in K^*$ les $\alpha_i \in K$.

La décomposition de P en facteurs irréductibles étant unique, cette dernière écriture de P est unique à permutation près de P des facteurs : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont uniques à l'ordre près. On dit que α_1, α_2,..., α_n sont les racines distinctes ou confondues de P.

Remarque : P scindé et $Q|P$ implique Q scindé.

Exemple : $P = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$.

Alors P est scindé si et seulement si P possède une racine. Donc si la caractéristique est différente de 2, on a "P scindé" si et seulement si "$b^2 - 4ac$ est le carré d'un élément de K".

Théorème 187 *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$, $a_n \neq 0$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$.*

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_k = \sum_{\substack{\text{Card } I = k \\ I \subset \{1,2,\dots,n\}}} \prod_{i \in I} \alpha_i$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) P est scindé sur K et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les racines distinctes ou confondues de P.

(ii) Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Dans ces conditions,

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$$

$$\sigma_{n+1} = 0$$

$$\sigma_{n+2} = 0$$

$$\vdots$$

Exemple : • Soit $a \neq 0$. " α et β sont les racines distinctes ou confondues de $aX^2 + bX + c$" signifie

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

• Soit $a \neq 0$. "α, β et γ sont les racines distinctes ou confondues de $aX^3 + bX^2 + cX + d$" signifie

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

• En général

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3) Expressions symétriques des racines :

On reprend les notations du 2).

On pourra constater que si φ est une expression symétrique des racines α_1, α_2,..., α_n, φ s'exprime uniquement à l'aide des σ_1, σ_2,..., σ_n donc à l'aide des a_0, a_1,..., a_n.

Exemple : Soient α, β et γ les racines distinctes ou confondues de $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. On a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = (-b/a)^2 - 2c/a = b^2/a^2 - 2c/a$$

On peut donc calculer cette expression sans connaître explicitement les racines α, β et γ.

III. Théorème de D'Alembert

1) Corps algébriquement clos :

Définition 301 *Soit K un corps commutatif. On dit que K est* algébriquement clos *si tout polynôme irréductible de $K[X]$ est de degré 1, ou encore si tout polynôme irréductible et unitaire de $K[X]$ est de la forme $X - \alpha$ ($\alpha \in K$), on encore si tout polynôme de $K[X] \backslash \{0\}$ est scindé sur K.*

Proposition 394 *Soit K un corps commutatif.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) K algébriquement clos.
(ii) Tout polynôme non constant de $K[X]$ possède au moins une racine dans K.

Théorème 188 *Soit K un corps commutatif, $P \in K[X]$.*
Il existe L surcorps commutatif de K sur lequel P est scindé.

Théorème 189 *Soit K un corps commutatif.*
admis *Il existe un surcorps commutatif L de K qui est algébriquement clos.*

2) Conjugaison des polynômes :

Définition 302 *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$.*
On appelle polynôme conjugué de P *noté $\bar{P}$ l'élément de $\mathbb{C}[X]$:*

$$\bar{P} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n X^n$$

Proposition 395 *L'application $P \longmapsto \bar{P}$ est un isomorphisme involutif de l'anneau $\mathbb{C}[X]$ sur lui-même. De plus, si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :*

$$P \in \mathbb{R}[X] \Longleftrightarrow P = \bar{P}$$

Proposition 396 *Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*
1. $\bar{P}(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
2. L'ordre de α comme racine de P est le même que l'ordre de $\bar{\alpha}$ comme racine de $\bar{P}$.
3. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, α et $\bar{\alpha}$ ont le même ordre comme racine de P.

3) Le théorème fondamental de l'algèbre :

Théorème 190 (Théorème de d'Alembert) *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Corollaire 104 *Tout polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$ est du premier degré. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Exemple : On a dans $\mathbb{C}$ ($n \geqslant 2$) :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \quad \text{et} \quad X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

$$X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

4) Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

Théorème 191 *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont :*

1. *les polynômes de degré* 1 *;*
2. *les polynômes de degré* 2 *à discriminant strictement négatif.*

Exemple : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$. Soit

$$P = aX^4 + bX^2 + c$$

P ne possède aucune racine réelle. Donc P s'écrit comme produit de deux polynômes Q et R de degré 2 à discriminant strictement négatif. Plus précisément

$$P = a[(X^2 + \sqrt{2\sqrt{c/a} - b/a}X + \sqrt{c/a})(X^2 - \sqrt{2\sqrt{c/a} - b/a}X + \sqrt{c/a})]$$

Par exemple, $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

Remarque : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$. On peut écrire

$$P = \lambda \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (X-\alpha)^{n_\alpha} \prod_{\substack{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ a^2-4b<0}} (X^2 + aX + b)^{p_{ab}} = \lambda \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (X-\alpha)^{n_\alpha} \prod_{\substack{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ a^2-4b<0}} (X - \beta_{ab})^{p_{ab}} (X - \overline{\beta_{ab}})^{p_{ab}}$$

avec β_{ab} l'unique racine de $X^2 + aX + b$ à partie imaginaire> 0.

Si $P = \lambda \prod_{\alpha \in \mathbb{C}} (X-\alpha)^{n_\alpha}$, alors

$$P = \lambda \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (X-\alpha)^{n_\alpha} \prod_{\Im\alpha > 0} (X-\alpha)^{n_\alpha} (X - \bar{\alpha})^{n_\alpha}$$

Exemple : Si $P = X^4 + X^2 + 1$,

$$P = (X-j)(X+j)(X-j^2)(X+j^2) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$

IV. Dérivation des polynômes :

1) Polynômes dérivés :

Définition 303 *Soit* $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$.

Le polynôme dérivé P' de P *est*

$$P' = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} X^n$$

Remarque : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction associée au polynôme P' est exactement la dérivée au sens des fonctions à variable réelle de la fonction associée à P.

Proposition 397 *L'application* $D : P \longmapsto P'$ *est linéaire de* $K[X]$ *dans* $K[X]$. *Si la caractéristique de* K *est infinie, alors :*

1. $\deg P' = \deg P - 1$ *si* $P \notin K$ *;*
2. $\ker D = K$ *;*
3. $\operatorname{Im} D = K[X]$.

Remarque : Si K est de caractéristique p : $P = X^p$ vérifie $P' = 0$.

Proposition 398 *Soit $(P,Q) \in K[X]^2$. Alors*

1. $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
2. $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$.

Remarque :

$$(P_1P_2\dots P_n)' = \sum_{i=1}^{n} P_1\dots P_{i-1}P_i'P_{i+1}\dots P_n$$

2) Polynômes dérivés successifs :

Définition 304 *Soit $P \in K[X]$, $n \in \mathbb{N}$. On sait que $D \in \mathcal{L}(K[X])$, $D : P \longmapsto P'$.*
Le polynôme dérivé n-ième de P *est $P^{(n)} = D^n(P)$.*

Remarque : Si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$, on a :

$$P^{(p)}(X) = \sum_{n\geqslant p} n(n-1)\dots(n-p+1)a_nX^{n-p}$$

Proposition 399 *1. L'application $P \longmapsto P^{(n)}$ est linéaire de $K[X]$ dans $K[X]$. Si la caractéristique de K est infinie, l'image de cette application est $K[X]$ et son noyau est*

$$\{P \in K[X],\ \deg P < n\}$$

2. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et tout $P \in K[X]$, on a :

$$[P^{(n)}]^{(p)} = P^{(n+p)}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P,Q) \in K[X]^2$, on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)}Q^{(n-k)}$$

C'est la formule de Leibniz.

Remarque : Plus généralement :

$$(P_1P_2\dots P_q)^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_q=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_q!} P_1^{(k_1)}P_2^{(k_2)}\dots P_q^{(n_q)}$$

3) Formule de Taylor :

Théorème 192 (Formule de Taylor) *On suppose K de caractéristique infinie. Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$. Alors*

$$P(X+a) = P\circ(X+a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n$$

Remarque : • Pour tout $(a,b) \in K^2$:

$$P(a+b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} b^n$$

• On a

$$P(X+b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(X)}{n!} b^n$$

• En faisant $X = X - a$,

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n$$

• En faisant $X = X - b$,

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(X-b)}{n!} b^n$$

Théorème 193 *On suppose K de caractéristique infinie. Soient $P \in K[X]$, $P \neq 0$, $\alpha \in K$.*
L'ordre de α comme racine de P n'est autre que le plus petit entier ω tel que $P^{(\omega)}(\alpha) \neq 0$

Remarque : $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(\omega-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(\omega)}(\alpha) \neq 0$ signifie que l'ordre de α est ω.
Remarque : Si α est racine d'ordre $n \geqslant 1$ de P, α est racine d'ordre $n-1$ de P'.

V. Polynômes à n variables

1) Construction de $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$:

K est toujours un corps commutatif. On se donne X_1, X_2,..., X_n n symboles. On note $I = \mathbb{N}^n$.

Définition 305 *On appelle* polynômes à n variables à coefficients dans K *toute suite $P = (a_s)_{s\in I}$ à support fini pour $+$. On note $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ l'ensemble des polynômes à n variables à coefficients dans K.*

Proposition 400 *$K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(I,K)$ qui admet comme base $(P_s)_{s\in I}$ où $P_s = (\delta_{rs})_{r\in I}$.*

Définition 306 *Soient $P = (a_s)_{s\in I}$ et $Q = (b_s)_{s\in I}$ dans $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. On définit :*

$$PQ = \left(\sum_{\substack{r\in I, r'\in I \\ r+r'=s}} a_r b_{r'} \right)_{s\in I} = \sum_{s\in I} \sum_{\substack{r\in I, r'\in I \\ r+r'=s}} a_r b_{r'} P_s$$

Théorème 194 *Muni des opérations précédemment définies, $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ est une K-algèbre commutative.*

Convention : $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ admet comme élément neutre $P_{(0,0,\ldots,0)} = 1$. On note $X_1 = P_{(1,0,\ldots,0)}$, $X_2 = P_{(0,1,\ldots,0)}$,..., $X_n = P_{(0,0,\ldots,1)}$. On a alors

$$P_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}$$

Ainsi tout $P \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

On a

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} + \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} b_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

$$= \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \left(a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} + b_{(k_1,k_2,\dots,k_n)}\right) X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

et

$$\lambda \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

et

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} b_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} =$$

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{l_1+l'_1=k_1,\dots,l_n+l'_n=k_n} a_{(l_1,l_2,\dots,l_n)} b_{(l'_1,l'_2,\dots,l'_n)} \right) X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

2) Degré dans $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$:

Soit $P = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$.

Définition 307 *Si $P \neq 0$, on appelle* degré de P *noté* $\deg P$ *le plus grand des entiers $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ tels que $a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} \neq 0$. Par convention,* $\deg 0 = -\infty$.

Exemple : Dans $K[X, Y]$, $P = X^2Y^3 + 2Y^4 - X$ est de degré 5.

Proposition 401 *On a* $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ *et* $\deg PQ = \deg P + \deg Q$. *$K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est intègre.*

3) Substitution dans un polynôme :

Définition 308 *Soient A une K-algèbre, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n$, les x_i commutant deux à deux, $P \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$. La* valeur de P prise en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *est*

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in I} a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

Proposition 402 *Soient A une K-algèbre, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n$, les x_i commutant deux à deux. L'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K[X_1, X_2, \dots, X_n] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

est un morphisme de K-algèbre.

Exemple : $A = K$, $A = L$, L surcorps de K...

Chapitre 3

Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un corps commutatif.

I. Construction de $K(X)$

1) Définition du corps des fractions rationnelles :

On rappelle que $K[X]$ est un anneau intègre.

Définition 309 *Le corps des fractions de l'anneau $K[X]$ est le* corps des fractions rationnelles à une indéterminée X sur K *noté $K(X)$.*

Remarque : Tout élément de $K(X)$ s'écrit $\frac{P}{Q}$ avec $(P,Q) \in K[X] \times K[X]^*$.

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \Longleftrightarrow PQ' = P'Q$$

$K(X)$ est un corps commutatif, surcorps de K : $K \subset K[X] \subset K(X)$, les éléments de K sont les *fractions rationnelles constantes*. La caractéristique de $K(X)$ est égale à celle de K.

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' + P'Q}{QQ'} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q}\frac{P'}{Q'} = \frac{PP'}{QQ'}$$

$$\text{si } P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0, \ \ (\frac{P}{Q})^{-1} = \frac{Q}{P}$$

Proposition 403 *Soit $F \in K(X)$, $F \neq 0$.*

1. Il existe $(P,Q) \in K[X]^2$ tel que

$$F = \frac{P}{Q} \quad \textit{et} \quad \mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$$

2. Si $(A,B) \in K[X]^2$ vérifie $F = \frac{A}{B}$ alors il existe $R \in K[X]$ tel que

$$A = PR \quad \textit{et} \quad B = QR$$

(P et Q étant définis comme en 1.).

Définition 310 *Soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$. Si* $\mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$, *$\frac{P}{Q}$ est une* forme réduite de F.

Remarque : Si $\frac{P'}{Q'}$ et $\frac{P}{Q}$ sont deux formes réduites de F, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $P' = \lambda P$ et $B = \lambda Q$.

2) Dégré d'une fraction rationnelle :

Remarque : Soit $F \in K(X)^*$. Ecrivons $F = \frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$. Alors comme $PQ' = P'Q$, $\deg P - \deg Q = \deg P' - \deg Q'$.

Définition 311 *Soit $F \in K(X)$.*

Si $F \neq 0$, on écrit $F = \frac{P}{Q}$ avec $(P,Q) \in K[X]^2$ et on appelle degré de F *et on note* $\deg F$ *l'élément de $\mathbb{Z}$ tel que* $\deg F = \deg P - \deg Q$ *(indépendant du choix de (P,Q)).*

On pose aussi $\deg 0 = -\infty$.

Exemple : Si $F \in K[X]$, on retrouve le degré d'un polynôme.

Proposition 404 *Soit $(F,G) \in K[X]^2$.*

1. *On a $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$ et il y a égalité si $\deg F \neq \deg G$.*
2. *Si $FG \neq 0$, $\deg(FG) = \deg F + \deg G$ et $\deg(F/G) = \deg F - \deg G$.*

Remarque : $\deg(\sum_{i\in I} F_i) \leqslant \max_{i\in I} \deg F_i$ et $\deg(\prod_{i\in I} F_i) = \sum_{i\in I} \deg F_i$.

3) Partie entière :

Définition-Proposition 8 *Soit $F \in K(X)$.*

Il existe un unique couple $(Q,G) \in K(X)^2$ tel que $F = Q + G$ avec $Q \in K[X]$ et $\deg G < 0$.

Q est appelé partie entière de F *et est notée $E(F)$.*

Remarque : $E(P/Q)$ est le quotient la division euclidienne de P par Q.
Exemple : Si $F = \frac{aX^n + bX^{n-1} + \dots}{cX^n + dX^{n-1} + \dots}$, $E(F) = \frac{a}{c}$.

Proposition 405 $F \longmapsto E(F)$ *est une application linéaire de $K(X)$ dans $K[X]$.*

Remarque : $E(F+G) = E(F) + E(G)$.

II. Valeurs prises par une fraction rationnelle

1) Généralités :

Remarque : Soit L un surcorps commutatif de K et $\alpha \in L$, $F \in K(X)$. Soit $(P,Q,P',Q') \in K[X]^4$, $Q(\alpha)Q'(\alpha) \neq 0$ tel que $F = \frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$. Alors

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} = \frac{P'(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

Définition 312 *Soient L un surcorps commutatif de K, $\alpha \in L$, $F \in K(X)$. On dit que F* est définie en α *s'il existe $(P,Q) \in K[X]^2$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$ et $F = \frac{P}{Q}$.*

On dit alors que la valeur prise par F en α *est $F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$ (indépendante du choix (P,Q) d'après la remarque précédente).*

Exemple : • Si $F \in K[X]$, F est toujours définie en α et on retrouve la valeur prise en α par le polynôme F.

• On peut prendre $L = K$, mais aussi $L = K(X)$: Si $(F,G) \in K(X)^2$ et s'il existe $(P,Q) \in K[X]^2$ tel que $Q(G) \neq 0$ et $F = \frac{P}{Q}$, on définit $F(G) = \frac{P(G)}{Q(G)}$: c'est la fraction rationnelle *composée de F et G* notée $F \circ G$.

Remarque : Si $F = \frac{P}{Q}$ est une forme réduite, F est définie en α si et seulement si $Q(\alpha) \neq 0$.

Définition 313 *Soient L un surcorps commutatif de K, $F \in K(X)$, $\alpha \in L$.*

On dit que α est un pôle de F *si F n'est pas définie en α autrement dit si α est racine du dénominateur d'une forme réduite de F.*

On dit que α est pôle d'ordre n de F *si α est racine d'ordre n du dénominateur d'une forme réduite de F (indépendant du choix de la forme réduite).*

2) Propriétés :

Proposition 406 *Soit L un surcorps commutatif de K. Pour tout $\alpha \in L$, notons*

$$A_\alpha = \{F \in K(X),\ \ \alpha \textit{ non pôle de } F\}$$

Soit $\alpha \in L$.

1. A_α est un sous-anneau de $K(X)$ et $F \longmapsto F(\alpha)$ est un morphisme de l'anneau A_α dans L.

2. Soit $(F,G) \in A_\alpha^2$ tel que $G(\alpha) \neq 0$. Alors $\frac{F}{G} \in A_\alpha$ et $\frac{F}{G}(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{G(\alpha)}$.

3. Soient $G \in A_\alpha$ et $F \in A_{G(\alpha)}$. Alors $F \circ G \in A_\alpha$ et $(F \circ G)(\alpha) = F(G(\alpha))$.

Remarque : • $(\sum_{i\in I} F_i)(\alpha) = \sum_{i\in I} F_i(\alpha)$;
• $(\prod_{i\in I} F_i)(\alpha) = \prod_{i\in I} F_i(\alpha)$;
• $F^n(\alpha) = [F(\alpha)]^n$.

Exemple : • $(\sum_{i\in I} F_i) \circ G = \sum_{i\in I} F_i \circ G$;
• $(\prod_{i\in I} F_i) \circ G = \prod_{i\in I} F_i \circ G$;
• $F^n \circ G = (F \circ G)^n$;
• $\frac{F}{G} \circ H = \frac{F\circ H}{G\circ H}$;
• $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
• $F \circ X = X \circ F = F$.

Remarque : Si $\alpha \in K$.

Alors $F \circ (X+\alpha)$ est toujours défini. $F \longmapsto F(X+\alpha)$ est un isomorphisme du corps $K(X)$ sur lui-même, l'isomorphisme réciproque étant $F \longmapsto F(X-\alpha)$.

III. Dérivation des fractions rationnelles

1) Dérivée première :

Soit $(A,B,P,Q) \in K[X]^4$, $BQ \neq 0$ tel que $AQ = BP$ alors $A'Q + AQ' = B'P + BP'$.
Il s'ensuit que si $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$, i.e. $AP = BQ$ on a

$$(A'B - AB')Q^2 = (P'Q - PQ')B^2$$

Donc

$$\frac{A'B - AB'}{B^2} = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

ce qui autorise la définition :

Définition 314 *Soit $F \in K(X)$.*

Si $F = \frac{A}{B}$ avec $(A,B) \in K[X]^2$, $B \neq 0$. On appelle dérivée de F *la fraction rationnelle*

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$$

Exemple : Si $F \in K[X]$, on retrouve la dérivée d'un polynôme.
Remarque : Si F est définie en α, F' aussi.

2) Propriétés :

Proposition 407 *$D : F \longmapsto F'$ est linéaire de $K(X)$ dans $K(X)$. Si la caractéristique de K est infinie, alors* $\ker D = K$.

Proposition 408 *Soit $(F, G) \in K(X)^2$.*
1. *On a $(FG)' = F'G + FG'$.*
2. *Si $G \neq 0$, $(\frac{F}{G})' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$.*
3. *Si F est définie en G, $(F \circ G)' = (F' \circ G)G'$.*

IV. Décomposition en éléments simples :

1) Préliminaires :

Lemme 17 *Soient $A \in K[X]$, S_1, S_2,..., S_n non nuls dans $K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Il existe alors A_1, A_2,..., A_n dans $K[X]$ tels que :*

$$\frac{A}{S_1 S_2 \dots S_n} = \frac{A_1}{S_1} + \dots + \frac{A_n}{S_n}$$

Lemme 18 *Soient $A \in K[X]$, S_1, S_2,..., S_n non nuls dans $K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors, il existe $(E, R_1, \dots, R_n) \in K[X]^{n+1}$ unique tel que :*

$$\frac{A}{S_1 S_2 \dots S_n} = E + \frac{R_1}{S_1} + \dots + \frac{R_n}{S_n}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\deg R_i \leqslant \deg S_i$.

2) Méthode des divisions successives :

Proposition 409 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $A \in K[X]$, $P \in K[X]$, $P \neq 0$. $\frac{A}{P^n}$ s'écrit de façon unique*

$$\frac{A}{P^n} = Q + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{P^k}$$

avec Q et R_k polynômes pour tout k et $\deg R_k < \deg P$.

Remarque : La démonstration de l'existence fournit une méthode pratique de calcul appelée "méthode des divisions successives".

On divise A par P : quotient A_1, reste R_n ;

On divise A_1 par P : quotient A_2, reste R_{n-1} ;

....

On divise A_{n-1} par P : quotient A_n, reste R_1.

Exemple :

$$\frac{X^4 + X}{(X^2 + X + 1)^3} = \frac{2X}{(X^2 + X + 1)^3} + \frac{-2X - 1}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{1}{1 + X + X^2}$$

3) Décompositions en éléments simples :

Définition 315 *On appelle* éléments simples de $K(X)$ *tout monôme de* $K[X]$ *et tout élément de* $K(X)$ *de la forme* $\frac{C}{S^\alpha}$ *avec* $C \in K[X]$ *non nul,* $S \in K[X]$ *irréductible et* $\deg C < \deg S$*.*

Théorème 195 (Théorème de décomposition en éléments simples) *Soit* $F = \frac{A}{S_1^{\alpha_1}\ldots S_n^{\alpha_n}} \in K(X)$ *où* $A \in K[X]$*,* $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ *dans* $\mathbb{N}^*$*,* $S_1,\ldots,\ S_n$ *dans* $K[X]$ *irréductibles et premiers entre eux deux à deux.*

Il existe alors de manière unique E*,* $C_{1,1},\ldots,\ C_{1,\alpha_1},\ C_{2,1},\ldots,\ C_{n,\alpha_n}$ *dans* $K[X]$ *tels que :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{i,j}}{S_i^j}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$*,* $1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$*,* $\deg C_{\alpha_i,j} < \deg S_i$*.*

Remarque : On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires. Soit $F \in K(X)$. F s'écrit de manière unique :

$$F = E + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ P\in\mathcal{P}}} \frac{C_{k,P}}{P^k}$$

avec $E \in K[X]$, $C_{k,P} \in K[X]$ et $\deg C_{k,P} < \deg P$.

Remarque : E est la partie entière de F.

4) Méthodes de décomposition :

- $\frac{A}{\prod_{P\in\mathcal{P}} P^{n_P}} = Q + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}}{P^k}$. On peut écrire :

$$\frac{A}{\prod_{i=1}^{n} P_i^{k_i}} = Q + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant k_i}} \frac{R_{k,i}}{P_i^k}$$

En multipliant par $P_i^{k_i}$ et en faisant $X = \alpha$ où α est une racine de P_i dans un surcorps de K, on trouve :

$$R_{k_i,i}(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{\prod_{j\neq i} P_j(\alpha)^{k_i}}$$

Exemple :

$$\frac{X^6}{(X-1)(X^2+1)^2} = Q + \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1} + \frac{\gamma X + \delta}{(X^2+1)^2} \quad (K = \mathbb{R})$$

On multiplie par $X - 1$ et on fait $X = 1$, d'où $\lambda = 1/4$. On multiplie par $(X^2+1)^2$ et on fait $X = i$ d'où $\gamma = 1/2$ et $\delta = 1/2$.

- Soit α un pôle de F, $\alpha \in K$:

$$F = \frac{A}{(X-\alpha)^n Q} = \frac{A}{B} \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

Ecrivons

$$F = \frac{\lambda_n}{(X-\alpha)^n} + \frac{\lambda_{n-1}}{(X-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{\lambda_1}{(X-\alpha)} + R + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}}{P^k}$$

On a $\lambda_n = A(\alpha)/Q(\alpha)$. On veut $Q(\alpha)$. Mais $B = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{B^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k\geqslant n} \frac{B^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. D'où

$$Q = \sum_{k\geqslant n} \frac{B^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-n}$$

et

$$Q(\alpha) = \frac{B^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

Exemple : Décomposer $\frac{1}{X^5-1}$ sur $\mathbb{C}$. On trouve :

$$\frac{1}{X^5-1} = \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{5(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}})}$$

• Dans la relation $F = Q + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}}{P^k}$, on peut faire $X = \alpha$ avec α non pôle ce qui donne une relation sur les coefficients à calculer.
Exemple :

$$\frac{X^6}{(X-1)(X^2+1)^2} = lX + m + \frac{1/4}{X-1} + \frac{\lambda X+\mu}{X^2+1} + \frac{1/2X+1/2}{(X^2+1)^2})$$

On fait $X = 0$ et on obtient $\mu + \beta = -1/4$.
• Si $F = Q + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}}{P^k}$, Q est la partie entière de F. Pour la trouver, on effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
Exemple :

$$\frac{X^6}{(X-1)(X^2+1)^2} = X + 1 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{\lambda X-5/4}{X^2+1} + \frac{1/2X+1/2}{(X^2+1)^2}$$

On peut également multiplier par X et faire $X = \infty$:

$$\frac{X^6}{(X-1)(X^2+1)^2} = X + 1 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{-5/4X-5/4}{X^2+1} + \frac{1/2X+1/2}{(X^2+1)^2}$$

• Si $F = Q + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}}{P^k}$, on a

$$F(-X) = Q(-X) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\ P\in\mathcal{P}}} \frac{R_{k,P}(-X)}{P^k(-X)}$$

C'est la décomposition en éléments simples de $F(-X)$. S'il y a une relation entre $F(X)$ et $F(-X)$ (par exemple si F est paire ou impaire), on en déduit des relations simple sur les coefficients à calculer :

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

$$= \frac{-aX+b}{X^2-X+1} + \frac{-cX+d}{X^2+X+1}$$

D' où $a=-c$ et $b=d$. On fait ensuite $X=j$ et on trouve $a=b=1/2$.

- Si $F=\frac{A}{P^n}$ avec P irréductible, on emploie la méthode des divisions successives.

$$\frac{X^4+X}{(X^2+X+1)^3} = \frac{2X}{X^2+X+1} + \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{1}{(X^2+X+1)^3}$$

V. Décomposition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Conjugaison des fractions rationnelles :

Remarque : Si $F=\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}$, alors $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}=\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$.

Définition 316 *Soit $F\in\mathbb{C}(X)$, $F=\frac{A}{B}$ avec $(A,B)\in\mathbb{C}[X]^2$. On appelle* conjugué de F *la fraction rationnelle :*

$$\bar{F}=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$$

qui est indépendante du choix du couple (A,B).

Exemple : Si $F\in\mathbb{C}[X]$, on retrouve le conjugué d'un polynôme.

Proposition 410 *1. $F\longmapsto\bar{F}$ est un isomorphisme involutif du corps $\mathbb{C}(X)$ sur lui-même.*
2. Soit $F\in\mathbb{C}(X)$. $F=\bar{F}$ si et seulement si $F\in\mathbb{R}(X)$.

Proposition 411 *Soit $F\in\mathbb{C}(X)$, $\alpha\in\mathbb{C}$.*
1. Si F est définie en α, $\bar{F}$ est définie en $\bar{\alpha}$ et $\bar{F}(\bar{\alpha})=\overline{F(\alpha)}$.
2. Si n est l'ordre de α comme pôle de F, n est l'ordre de $\bar{\alpha}$ comme pôle de $\bar{F}$.
3. Si $F\in\mathbb{R}(X)$, les ordres de α et $\bar{\alpha}$ comme pôles de F sont les mêmes.

2) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

Corollaire 105 *Toute fraction rationnelle F de $\mathbb{C}(X)$ s'écrit de manière unique :*

$$F=Q+\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}^*}}\frac{\lambda_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n}$$

avec $Q\in\mathbb{C}[X]$ et $\lambda_{\alpha,n}\in\mathbb{C}$.

Remarque : On a

$$\bar{F}=\bar{Q}+\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}^*}}\frac{\overline{\lambda_{\alpha,n}}}{(X-\bar{\alpha})^n}$$

C'est la décomposition en éléments simples de $\bar{F}$. S'il existe une relation simple entre F et $\bar{F}$ ($F=\bar{F}$ ou $F=-\bar{F}$...), on obtient des relations sur les coefficients à calculer (ex : $F=1/(X^5-1)$).

3) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

Corollaire 106 *Toute fraction rationnelle F de $\mathbb{R}(X)$ s'écrit de manière unique :*

$$F = Q + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{\lambda_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^2-4b<0}} \frac{\mu_{a,b,n}X+\nu_{a,b,n}}{(X^2+aX+b)^n}$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et les $\lambda_{\alpha,n}$, $\mu_{a,b,n}$ et $\nu_{a,b,n}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 317 *Avec les notations du corollaire précédent, $\frac{\lambda_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n}$ est appelé* élément simple de première espèce *et $\frac{\mu_{a,b,n}X+\nu_{a,b,n}}{(X^2+aX+b)^n}$* élément simple de deuxième espèce*.*

Remarque : Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, $F = \bar{F}$. On peut décomposer F sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

$$F = Q + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{\lambda_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^2-4b<0}} \frac{\mu_{a,b,n}X+\nu_{a,b,n}}{(X^2+aX+b)^n} = Q + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{\delta_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n}$$

On a $\delta_{\alpha,n} = \delta_{\bar{\alpha},n}$. Donc $\frac{\delta_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n} + \frac{\delta_{\bar{\alpha},n}}{(X-\bar{\alpha})^n}$ est dans $\mathbb{R}(X)$. Il suffit donc de décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction $\frac{\delta_{\alpha,n}}{(X-\alpha)^n} + \frac{\delta_{\bar{\alpha},n}}{(X-\bar{\alpha})^n}$ pour passer de la décomposition complexe à la décomposition réelle.

Pour passer de la décomposition réelle à la décomposition complexe, on décompose sur $\mathbb{C}$ tout élément de seconde espèce :

$$\frac{\mu_{a,b,n}X+\nu_{a,b,n}}{(X^2+aX+b)^n}$$

Exemple :

$$\frac{1}{X^5-1} = \frac{1/5}{X-1} + \frac{1/5(2\cos(\frac{2\pi}{5})X-2)}{X^2-2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1} + \frac{1/5(2\cos(\frac{4\pi}{5})X-2)}{X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1}$$

VI. Division suivant les puissances croissantes

1) Description de l'algorithme :

Théorème 196 *Soient $(A,B) \in K[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.*

Il existe un unique couple $(Q,R) \in K[X]^2$ tel que

$$A = BQ + X^{n+1}R \quad et \quad \deg Q \leqslant n$$

Définition 318 *Avec les notations du théorème précédent, Q (resp. $X^{n+1}R$)est le* quotient *(resp.* le reste*) de la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n.*

Remarque : Algorithme : on écrit $A = a + a'X + ...$, $B = b + b'X + ...$ On écrit le quotient $\frac{a}{b}$. On calcule $A - \frac{a}{b}B = XA_1$.

On écrit $A_1 = a_1 + a_1'X + ...$ On écrit au quotient $\frac{a_1}{b}X$.

On calcule $A_1 - \frac{a_1}{b}B = X^2A_2$.

On écrit $A_2 = a_2 + ...$

Exemple : $A = 1 + X$, $B = 1 + X + X^2$, $n = 3$: on obtient

$$(1+X) = (1+X+X^2)(1-X^2+X^3) + X^4(-X)$$

Donc $Q = 1 - X^2 + X^3$ et $R = -X$.
Remarque : Si Q est le quotient de A par B à l'ordre n, et si $p \leqslant n$, on peut écrire :

$$Q = Q' + X^{p+1}Q''$$

Alors $A = BQ' + X^{p+1}BQ'' + X^{n+1}R = BQ' + X^{p+1}(X^{n-p}R + BQ'')$ et Q' est le quotient de A par B à l'ordre p.

2) Application à la décomposition en éléments simples :

Théorème 197 *Soit $F \in K(X)$, $\alpha \in K$. On suppose*

$$F = \frac{A}{(X-\alpha)^n B} \quad \textit{avec} \quad B(\alpha) \neq 0$$

Si le quotient de la division suivant les puissance croissantes de $A(X+\alpha)$ par $B(X+\alpha)$ à l'ordre $n-1$ est $a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$, alors

$$\frac{a_0}{(X-\alpha)^n} + \frac{a_1}{(X-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(X-\alpha)}$$

est la partie relative à α dans la décomposition en éléments simples de F.

Exemple : $K = \mathbb{R}$ et $F = \frac{1}{(X-1)^3(X^2+1)}$. Alors

$$F(X+1) = \frac{1}{X^3(X^2+2X+2)}$$

On a $1 = (2 + 2X + X^2)(1/2 - 1/2X + 1/4X^2) - 1/4X^4$. D'où

$$F(X+1) = \frac{1/2}{X^3} - \frac{1/2}{X^2} + \frac{1/4}{X} - \frac{1/4X}{X^2+2X+2}$$

D'où

$$F = \frac{1/2}{(X-1)^3} - \frac{1/2}{(X-1)^2} + \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4(X-1)}{X^2+1}$$

Partie F
Géométrie

Chapitre 1

Courbes paramétrées

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

I. Introduction

• On considère un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$, rapporté à un ROND $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Ce plan s'identifie à $\mathbb{R}^2$, chaque point M étant identifié au couple (x, y) de ses coordonnées dans le repère. Il s'identifie aussi à $\mathbb{C}$, le même point M étant alors identifié au complexe $x + iy$.

• Notons $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$.

Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = xx' + yy' = \Re(u\bar{v}).$$

Pour cette expression, il est nécessaire que $\mathcal{R}$ soit ON.

• Sur l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{P}$, on dispose d'une norme $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v})}$, et d'une distance : la distance de M à N est

$$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |n - m|,$$

lorsque $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et m et n sont les affixes respectives de M et N. On a pour trois points M, N et P et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

$$d(M, P) \leqslant d(M, N) + d(N, P), \quad \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.$$

• L'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'identifiant aux complexes u et v est l'argument de $\dfrac{v}{u}$.

$$(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

L'angle orienté de $(\overrightarrow{BAC})$ est l'argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$ où a, b, c sont les affixes respectives de A, B, C.

Dérivation de $t \longmapsto \overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}(t)$.

• Le déterminant de $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est la quantité

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - y'x.$$

Comme la base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ est OND, on parle aussi du produit mixte. Discussion sur le signe du produit mixte.

On a alors

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \iff \det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0.$$

Dérivation de $t \longmapsto [\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t)]$.

• Si M est un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur, $M + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$.

Lorsqu'on a choisi l'origine O, on identifie souvent M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Dans ces conditions, on peut faire des CL de points : si M et N sont deux points, λ, μ des réels, on notera $\lambda M + \mu N$ l'unique point P défini par

$$\lambda M + \mu N = P = O + \lambda\overrightarrow{OM} + \mu\overrightarrow{ON}.$$

Coordonnées de P.

Que représente $\dfrac{M+N}{2}$? Démontrer que si $\lambda+\mu = 1$, P ne dépend pas de O : c'est le barycentre de (M,λ), (N,μ).

II. Notion de courbes paramétrées

1) Arcs paramétrés :

Définition 319 *On dira qu'une fonction $\Phi : t \in I \longmapsto M(t) = O + x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \in \mathcal{P}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

Le couple (I,Φ) est appelé arc paramétrée (de classe $\mathcal{C}^k$)*. On dit également que (I,Φ) est une courbe paramétrée.*

Le support de Φ est son image $\Gamma = \Phi(I)$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant k$, e vecteur dérivé p-ième de (I,Φ) en t est

$$\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p} = x^{(k)}(t)\overrightarrow{i} + y^{(k)}(t)\overrightarrow{j}.$$

Remarque : Dans le langage de la cinématique, t est le temps, $M(t)$ la position du mobile à l'instant t, Γ la trajectoire, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}$ la vitesse, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}$ l'accélération.

Exemple :

1. La courbe représentative de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ correspond à l'arc $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$.
2. Le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $R > 0$ est paramétré par $x(t) = x_0 + R\cos t$, $y(t) = y_0 + R\sin t$.
3. Cas d'une ellipse.

2) Représentation polaire :

Définition 320 *Pour θ réel, on considère le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{U}(\theta), \overrightarrow{V}(\theta) = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ appelé* repère mobile.

Remarque : 1. Coordonnées cartésiennes

2. $\overrightarrow{V}$ s'obtient par rotation d'angle $+\pi/2$ de $\overrightarrow{U}$. $\overrightarrow{U}$ s'identifie à $e^{i\theta}$ et $\overrightarrow{V}$ à $ie^{i\theta}$ et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{V} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{U}.$$

Définition 321 *Soit $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. L'arc paramétré $t \longmapsto M(t) = O + r(\theta)\overrightarrow{U}(\theta)$ est l'arc donné par la représentation polaire $r = r(\theta)$. Il est de classe $\mathcal{C}^k$.*

Remarque : 1. Passage en cartésiens, intérêt ?

2. Très souvent, $\theta = t$ et on écrit $\theta \longmapsto r(\theta)\overrightarrow{U(\theta)}$.

Proposition 412 *1. On a*

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{V}.$$

2. Lorsqu'on a un arc $\theta \longmapsto M(\theta) = O + r(\theta)\overrightarrow{U}(\theta)$, on a

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\overrightarrow{U} + r\overrightarrow{V} \quad et \quad \frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2} = \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\right)\overrightarrow{U} + 2\frac{dr}{d\theta}\overrightarrow{V}.$$

3) Changement de paramètre admissible :

Rappel : Condition suffiante pour que $f : J \longrightarrow I$ soit un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme.

Définition 322 *Soit (I, Φ) un arc paramétré $\mathcal{C}^k$, $\varphi : J \longrightarrow I$ un $\mathcal{C}^k$-difémorphisme.*

Alors l'arc $(J, \Phi \circ \varphi)$ est un paramétrage admissible *de (I, Phi).*

Remarque : • Deux paramétrages admissibles ont le même support.

• (I, Φ) est un paramétrage admissible de (J, Ψ) si $\Psi = \Phi \circ \varphi$.

• Le caractère simple d'un arc ne change pas par changement de paramètre admissible.

Exemple : Paramétrage rationnel d'un cercle privé d'un point.

4) Points simples, points multiples :

Définition 323 *Un point $M(t_0)$ d'un arc (I, Φ) est* simple *si t_0 est l'unique réel $t \in I$ tel que $\Phi(t) = M(t_0)$. Dans le cas contraire, on parle de* point multiple*. La multiplicité est défini comme le cardinal (au sens large) de $\{t \in I, M(t) = M(t_0)\}$.*

Un arc dont tous les points sont simples est appelé arc simple*.*

Remarque : Dans la pratique, pour repérer des points doubles, il suffit de résoudre

$$(S) \;\; x(t_1) = x(t_2), \;\; y(t_1) = y(t_2), \;\; t_1 - t_2 \neq 0.$$

En général les deux premières équations peuvent se simplifier par $t_1 - t_2$. (S) étant symétrique, on peut introduire les quantités $p = t_1t_2$ et $s = t_1 + t_2$.

Exemple : Point double de $x(t) = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)}$ et $y(t) = \frac{t^2-2t}{t-1}$ (trouver $t = \sqrt{2}$ et $t = -\sqrt{2}$.

III. Etude locale d'un arc

1) Notion générale de tangente :

Définition 324 *Soit (I, Φ) un arc de classe $\mathcal{C}^k$, $t_0 \in I$. On suppose $M(t)$ distinct de $M(t_0)$ sur un voisinage pointé de t_0.*

On dit que l'arc Φ admet en $M(t_0)$ une tangente D s'il existe une fonction λ défini sur un voisinage pointé de t_0 et $\overrightarrow{\tau}$ un vecteur non nul tels que

$$\lim_{t \to t_0} \lambda(t)\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \overrightarrow{\tau}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\tau}$ est unique à un facteur multiplicatif non nuls près. La tangente en $M(t_0)$ *est alors $M(t_0) + \mathbb{R}\overrightarrow{\tau}$.*

Dessin.

2) Tangente et vecteurs dérivés successifs :

Proposition 413 (Formule de Taylor-Young) *Soit (I, Φ) un arc de classe $\mathcal{C}^k$, $t_0 \in I$. Il existe une fonction $\overrightarrow{\varepsilon} : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$ telle que*

$$M(t_0+h) = M(t_0) + h\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{\frac{d^kM}{dt^k}}(t_0) + h^k\overrightarrow{\varepsilon}(t),$$

ce qu'on peut noter

$$M(t_0+h) = M(t_0) + h\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{\frac{d^kM}{dt^k}}(t_0) + o(h^k).$$

Proposition 414 *Lorsque qu'il existe un vecteur dérivé $\overrightarrow{\frac{d^kM}{dt^k}}(t_0)$ non nul, si on note p le plus petit des entiers k tels que $\overrightarrow{\frac{d^kM}{dt^k}}(t_0) \neq 0$, la tangente à l'arc en $M(t_0)$ est*

$$T_{M(t_0)} = M(t_0) + \mathbb{R}\overrightarrow{\frac{d^pM}{dt^p}}(t_0).$$

Définition 325 *Lorsque $p = 1$, i.e. $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0) \neq 0$, on dit que l'arc est régulier en t_0. Dans le cas contraire, le point est* stationnaire. *L'arc (I, Φ) est dit régulier si tous les points de l'arc sont réguliers.*

Remarque : • Pour un point régulier, la tangente est dirigé par le vecteur vitesse.

• Pour un arc donné par $\theta \longmapsto O + r(\theta)\overrightarrow{U}(\theta)$, le seul point qui peut être stationnaire est l'origine.

Remarque : Pente et angle des tangentes en un point régulier. Angle β en polaire.

Remarque : Détermination de l'équation de la tangente pour un point régulier :

• Cas de la courbe $x \longmapsto f(x)$;
• Cartésien.
• En polaire, dans le repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, on trouve

$$r(\theta)X - r'(\theta)Y - r(\theta)^2 = 0.$$

3) Détermination de la tangente au point stationnaire :

Lorsqu'on est en présence de $M(t_0)$ point stationnaire $x'(t_0) = 0 = y'(t_0)$, il y a trois possibilités pour déterminer la tangente en $M(t_0)$:

1. On recherche le premier vecteur dérivé successif non nul ;
2. On recherche $l = \lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$: cela donne la pente de la tangente.
3. On recherhce $l = \lim_{t\to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$: cela donne la pente de la tangente en vertu de la règle de l'Hopital ($x'(t)$ non nul sur un voisinage pointé de t_0).

4) Classification des points d'un arc :

Soit (I, Φ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $t_0 \in I$.

Définition 326 *1. Si l'arc tranverse toute droite passant par M_0 sauf sa tangente en M_0, on dit que M_0 est un* point ordinaire.

2. Si l'arc tranverse toute droite passant par M_0, y compris sa tangente, on dit que M_0 est un point d'inflexion.

3. Si l'arc ne tranverse aucune droite passant par M_0 sauf sa tangente, on dit que M_0 est un point de rebroussement de première espèce.

4. Si l'arc ne tranverse aucune droite passant par M_0, y compris sa tangente, on dit que M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce.

On suppose dans toute la suite qu'il existe $1 \leqslant i < k$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^i M}}{\mathrm{d}t^i}(t_0) \neq 0$. On note p le plus petit de ces entiers.

On a alors

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + \frac{h^p}{p!}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + o(h^p) \quad \text{en } 0.$$

On suppose de plus qu'il existe $p < j \leqslant k$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^j M}}{\mathrm{d}t^j}(t_0)$ ne soient pas colinéaires. On note q le plus petit de ces entiers. Pour $i \in [\![p+1, q-1]\!]$, on peut écrire $\dfrac{1}{i!}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^i M}}{\mathrm{d}t^i}(t_0) = \lambda_i \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ et alors

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + \left(\frac{h^p}{p!} + \sum_{i=p+1}^{q-1} \lambda_i h^i\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \frac{h^q}{q!}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^q M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0) + o(h^q).$$

On remarque que $\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^q M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)\right)$ compose une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Définition 327 *Les entiers $p < q$ sont appelés les entiers caractéristiques de l'arc (I, Φ) en $M(t_0)$.*

Remarque : : en général les entiers p et q existent.

On note $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{p!}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{q!}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^q M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)$. $(M(t_0), \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère. On écrit

$$M(t) = M(t_0) + X(t)\overrightarrow{e_1} + Y(t)\overrightarrow{e_2}.$$

Alors

$$X(t_0 + h) \sim h^p \quad \text{et} \quad Y(t_0 + h) \sim h^q.$$

Théorème 198 *On se retrouve dans l'un des quatre cas suivants :*

1. p impair, q pair : M_0 est un point ordinaire.

2. p impair, q impair : M_0 est un point d'inflexion.

3. p pair, q impair : e M_0 est un point de rebroussement de première espèce.

4. p pair, q pair : M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce.

Remarque : Les arcs en général sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. La plupart des points sont réguliers et même biréguliers : ce sont donc des points ordinaires.

Pour déterminer les entiers caractéristiques p et q, on peut calculer les dérivées successives ou le plus souvent, on utilise des DL.

Exemple : • Nature du point stationnaire de l'arc $t \longmapsto (3t - t^3, 2t^2 - t^4)$.

• Nature du point de l'arc $t \longmapsto (\operatorname{ch} t + kt^3, \operatorname{sh} t - t + t^2/2)$ en 0.

• Nature du point stationnaire de $t \longmapsto (e^{t-1} - t, t^3 - 3t)$.

5) Utilisation de la concavité :

Remarque : La quantité $[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)]$ indique dans quel sens tourne la courbe.

Proposition 415 *Si $M(t_0)$ est un point régulier, $M(t_0)$ est un point d'inflexion si et seulement si $\delta(t)$ s'annule et change de signe en t_0.*

Définition 328 *En un point $M(t_0)$ birégulier, on appelle* concavité de l'arc (I, Φ) en $M(t_0)$ *le demi-plan*

$$M_0 + \mathbb{R}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) + \mathbb{R}_+^*\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0).$$

Remarque : Le demi-plan de concavité contient localement l'arc en t_0.

IV. Comportement aux bornes du domaine

On considère un arc $\Phi : I \longrightarrow \mathcal{P}$ avec I un intervalle et on suppose que $ain\overline{\mathbb{R}}$ est une borne. On s'intéresse au comportement de la courbe lorsque t tend vers a

1) Point asymptote :

Si $\lim x(t) = \alpha$ et $\lim y(t) = \beta$, on dira que $M_0 = (\alpha, \beta)$ est un point asymptote de la courbe en a.

Si on prolonge l'arc par continuité, on peut étudier la tangente de la courbe en a.

2) Branches infinies :

On se donne un arc (I, Φ) de $\mathcal{P}$ et on note $M(t) = (x(t), y(t))$. Soit a une borne dans $\overline{\mathbb{R}}$ de I.

Définition 329 *On dit que l'arc présente une* branche infinie en a *si*

$$\lim_{t \to a} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty.$$

Exemple : ça ne veut pas dire que $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'un ou l'autre vers $\pm\infty$ (penser à la spirale) mais en général, c'est ce qui se passe.

Définition 330 *On suppose qu'en a, l'arc admet une branche infinie. On dit que l'arc admet en a une direction asymptotique de pente l si*

$$\lim_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = l.$$

Remarque : si l est fini, on dit que $y = lx$ est DA, si $l = \pm\infty$, on dit $y = 0$ est DA.

Définition 331 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie implicitement par $g(x,y)=0$ avec g continue. On dit que Φ est asymptote à $\mathcal{C}$ si*

$$\lim_{t\to a} g(x(t),y(t))=0.$$

Définition 332 *On dit que D est* asymptote à l'arc en *a lorsque*

$$\lim_{t\to a} d(M(t),D)=0 \textit{ ou encore } \lim_{t\to a} ax(t)+by(t)+c=0.$$

Rappel : Soit D la droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$. La distance de $M(x,y)$ à D est

$$d(M,D)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On voit dans ce cas là, que cela signifie que la distance de $M(t)$ à D tend vers 0 en a.

3) Etude pratique :

On suppose ici que $t\longmapsto x(t)$ ou $t\longmapsto y(t)$ tend vers $\pm\infty$ en a.
• Recherche de la direction asymptotique. On détermine $\lim_{t\to a} y(t)/x(t)$=l.
• Ensuite, si l n'est pas infini, on évalue la limite éventuelle β de $y(t)-lx(t)$ en a. Si β est reélle, il y a une asymptote $y=lx+\beta$. Si $\beta=\pm$, on dit qu'il y a une *branche parabolique (BP) dans la direction $y=lx$.*
Si $l=\pm\infty$, on évalue $=\alpha\lim_{t\to a} x(t)$. Si α est réelle, alors $x=\alpha$ est une asymptote de la courbe. Si $\alpha=\pm\infty$, il y a une BP de pente infinie.
Remarque : Avant le tracé, on fait un DL de $y(t)-lx(t)-\beta$ lorsque t tend vers a pour connaitre la position relative de l'arc par rapport à l'asymptote.
Exemple : Etude des BI de $\Phi : t\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto(t/\ln t, t^2/(t-1))$.

V. Courbes en coordonnées polaires

1) Courbes paramétrées en polaires :

Définition 333 *Si on se donne une fonction $\theta\longmapsto r(\theta)$, l'arc paramétré $\theta\longmapsto O+r(\theta)\overrightarrow{U}(\theta)$ est l'arc correspondant à l'*équation polaire *$r=r(\theta)$.*

Remarque : Interpréter $r(\theta+2\pi)=r(\theta)$, $r(\theta+\pi)=r(\theta)$, $r(-\theta)=r(\theta)$ et $r(-\theta)=-r(\theta)$, $r(\theta+\alpha)=r(\theta)$.

2) Equations polaires de courbes usuelles :

• Droite : $\theta=\alpha$ pour les droite passant par O.
Sinon, $r=\frac{a}{\cos(\theta-\alpha)}$.
• Cercle de centre O : $r=R$
Cercle passant par O : $r=a\cos(\theta-\alpha)$.
• Conique de foyer O : de directrice $x=d$, d'excentricité $e>0$ est

$$r=\frac{ed}{1+e\cos\theta} \text{ ou } r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}.$$

3) Etude d'une courbe paramétrée en polaire :

• Domaine de définition.
• Réduction du domaine d'étude.
• Signe de $r(\theta)$. Si $r(\theta)$ garde un signe constant dans $[\alpha, \beta]$, $M(\theta)$ reste dans un des deux secteurs angulaires délimités par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$.

En plus, on peut déterminer les variations de $r(\theta)$. Lorsque $r'(\theta) = 0$, il s'agit d'un point o ùla tangente est orthogonale à $(OM(\theta))$.

Tableau de signe de ρ avec $\tan \beta$.

4) Tangente :

• Tangente en $M(\theta_0) \neq O$: Le point est régulier. Si $\beta = (\overrightarrow{U}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(\theta_0))$, on a

$$\tan \beta = \frac{r}{r'}.$$

Si $\alpha = (\overrightarrow{i}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(\theta_0))$, $\alpha = \beta + \theta$.
• Tangente en O :

Théorème 199 *On suppose que $M(\theta_0) = O$. On suppose de plus que $\rho(\theta)$ ne s'annule pas pour $\theta \neq \theta_0$ voisin de θ_0. Alors la courbe admet une tangente en $M(\theta_0) = O$ porté par la droite $\theta = \theta_0$.*

De plus, si ρ change de signe en θ_0, $M(\theta_0) = O$ est un point ordinaire. Sinon, lorsque ρ garde un signe constant en θ_0, $M(\theta_0) = O$ est un point de rebroussement de première espèce.

Exemple : Tracé de $r(\theta) = \sin(3\theta)$ (trifolium)
Exemple : Tracé de la cardioïde : $r = K(1 + \cos\theta)$.

5) Concavité :

En $O = M(\theta_0)$, le signe de $r(\theta)$ au voisinage de θ_0 donne l'allure de la courbe.

Pour voir dans quel sens tourne la courbe, on évalue le signe

$$[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}] = r^2 + 2r'^2 - rr'' = r^3(q + q'')$$

en posant $q = 1/r$.

Corollaire 107 *Si $\rho(\theta_0) \neq 0$, tout point de changement de signe de $\delta(\theta)$ est un point d'inflexion.*

Exemple : Ellipse

6) Branches infinies (hors programme) :

• Branches spirales : lorsque $\lim_{\theta\to+\infty} r(\theta) = +\infty$.
Exemple : spirale d'archimède $r = a\theta$ avec $a > 0$.
• Cercle ou point asymptote : lorsque $\lim_{\theta\to+\infty} r(\theta) = b \in \mathbb{R}$.
Exemple : $r = \dfrac{e^\theta}{1 + e\theta}$.
• Direction asymptotique : Dans le cas où $\lim_{\theta\to\theta_0} r(\theta) = \pm\infty$, il y a DA dans la direction de $\overrightarrow{U}(\theta_0)$.

• Asymptote ou BP : Si $\overrightarrow{U}(\theta_0)$ est DA, on évalue la limite de $r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ (éventuellement on fait un DL pour la position par rapport à l'asymptote) : c'est la composante $Y(\theta)$ dans le repère de $(\overrightarrow{U}(\theta_0), \overrightarrow{V}(\theta_0))$.
Exemple : $r = 1 + \tan\theta/2$

VI. Conclusion

1) Plan d'étude d'une corbe paramétrée par $x = x(t)$ et $y = y(t)$:

1. Domaine de définition de x et y. Domaine de régularité.
2. Réduction du domaine d'étude (périodicité, parité...).
3. Variations de x et y par le signe de x' et y' le plus souvent. Tableau de variations.
4. Etude des branches infinies : DA, puis BP ou asymptote, position relative par rapport à l'asymptote.
5. Etude des points stationnaires : on repère les réels t_0 tels que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$. Type du point en question.
6. Tracé. Si le tracé suggère des points doubles, ou des symétries, on les justifie a posteriori.
7. Compléments éventuels : concavité...

2) Plan détude d'une courbe définie en polaire par $r = r(\theta)$:

1. Domaine de définition de $r(\theta)$.
2. Réduction du domaine d'étude (périodicité, antipériode, parité...).
3. Signe de $r(\theta)$, point d'annulation de $r(\theta)$. Dresser un tableau de signe.
4. Etude de la courbe en $M(\theta_0) = O$ éventuellement.
5. Branche infinie : DA...
6. Tracé : points où la tangente est orthogonale à (OM), tangente en l'origine éventuellement, points d'intersection avec les axes. Veiller à l'application du principe du secteur angulaire. Si le tracé suggère des points doubles, ou des symétries, on les justifie a posteriori.
7. Compléments éventuels : concavité...

Chapitre 2

Espaces euclidiens

I. Produit scalaire

1) Généralités :

Définition 334 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectotiel, $\varphi : (x,y) \in E \times E \longmapsto (x|y) \in \mathbb{R}$. φ est un* produit scalaire *si :*

1. φ est bilinéaire ;

2. φ est symétrique : pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) = (y|x)$.

3. φ est définie positive : pour tout $x \in E$, $(x|x) \geqslant 0$ et si $x \neq 0$, $(x|x) > 0$.

Un espace euclidien *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

Remarque : $(|)$ est un produit scalaire si :

1. Pour tout $(x,y,y') \in E^3$, $(x|y+y') = (x|y) + (x|y')$.
2. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x|\lambda y) = \lambda(x|y)$.
3. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) = (y|x)$.
4. Pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $(x|x) > 0$.

Remarque : On a :

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i | \sum_{j \in J} \mu_j y_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_i \mu_j (x_i|y_j)$$

Remarque : Restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel.

2) Exemples de produits scalaires :

• Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on définit *le produit scalaire cononique* par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire canonique est dit *muni de sa structure euclidienne canonique.*

• Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. La forme

$$(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_a^b fg$$

définit un produit scalaire sur E.

• Soit $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ (p est appelé poids) continue et$E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. La forme

$$(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)p(x)\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.

• Soit $E = \mathbb{R}[X]$. La forme

$$(P,Q) \longmapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.

3) Norme euclidienne :

Définition 335 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

$\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une* norme *si*

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Exemple : $| \ |$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Les normes servent à estimer des distances. Nous en avons vu quelques exemples déjà. Nous allons nous intéresser à celles qui dérive d'un produit scalaire.

Théorème 200 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire. Pour tout $(x,y) \in E^2$:*

$$(x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y)$$

et il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Application : • Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

• Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Définition 336 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire.*

On appelle norme euclidienne *de E l'application $\| \ \| : x \in E \longmapsto \sqrt{(x|x)} \in \mathbb{R}_+$.*

Remarque : Si $(x,y) \in E^2$, $|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Théorème 201 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire. La norme euclidienne de E est une norme. En particulier :*

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski).

Application : • Soient $(x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots , y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

• Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

$$\sqrt{\int_a^b (f + g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Proposition 416 *Soient E un $\mathbb{R}$ espace muni d'un produit scalaire, $(x, y) \in E$. Alors :*

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

La dernière relation est connue sous identité du parallélogramme.

Probleme : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un norme $\| \ \|$. A quelle condition cette norme dérive telle d'un produit scalaire ?

4) Angles non orientés :

Définition 337 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire, x et y deux vecteurs non nuls de E. L'*angle non orienté de x et y *est*

$$\widehat{x, y} = \arccos\left(\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

ce qui est justifié d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque : • Si θ est l'angle non orienté de x et y :

$$(x|y) = \|x\|\|y\| \cos\theta$$

• $\widehat{\lambda x, \mu y} = \widehat{x, y}$ si $\lambda\mu > 0$ et $\pi - \widehat{x, y}$ si $\lambda\mu < 0$.

Remarque : x et y sont colinéaires de même sens si et seulement si $\widehat{x, y} = 0$. x et y sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $\widehat{x, y} = \pi$.

5) Forme linéaire et produit scalaire :

Théorème 202 *Soit E un espace euclidien. Pour tout $x \in E$, on note x^* l'élément de E^* défini par*

$$x^* : y \in E \longmapsto (x|y) \in \mathbb{R}$$

Alors, pour tout $u \in E^*$, il existe un unique $x \in E$ tel que $u = x^*$ i.e. :

$$(\forall y \in E)\ (u(y) = (x|y))$$

Exercice : Montrer que l'application $x \longmapsto x^*$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E^*.
Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa s.e.c, le vecteur est associé la forme linéaire

$$l : (x, y, z) \longmapsto 4x - 2y + 3z \quad \text{est} \quad (4, -2, 3)$$

II. Orthogonalité

1) Propriétés élémentaires :

Définition 338 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire.*

x et y dans E sont dits orthogonaux *si $(x|y) = 0$, et on note alors $x \perp y$. Deux parties A et B de E sont dites* orthogonales *si pour tout $(x, y) \in A \times B$, $(x|y) = 0$ et on note alors $A \perp B$. Si $A \subset E$, on appelle* orthogonal de A *la partie :*

$$A^{\perp} = \{x \in E,\ \ \forall a \in A,\ (x|a) = 0\}$$

Exemple : 0 est orthogonal à tout vecteur. $E^{\perp} = \{0\}$.
Remarque : x et y (non nuls) sont orthogonaux si et seulement si $\widehat{x, y} = \pi/2$.

Proposition 417 (Théorème de Pythagore) *Soit E un espace muni d'un produit scalaire, $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Remarque : Si les x_i sont orthogonaux deux à deux

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$$

Proposition 418 *Soit E un espace muni d'un produit scalaire, $A \subset E$.*

1. *Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*
2. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On a :*

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}$$

3. *$A \subset A^{\perp\perp}$.*
4. *$A^{\perp}$ est un sous-espace de E.*
5. *Soit $F = \operatorname{Vect} A$, alors $A^{\perp} = F^{\perp}$.*

Remarque : Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v. de E.

$$(\sum_{i\in I} F_i)^\perp = \bigcap_{i\in I} F_i^\perp$$

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

Proposition 419 *1. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E orthogonaux deux à deux. Alors la somme des E_i est directe.*

2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E d'éléments deux à deux orthogonaux et tous non nuls. Alors $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

2) Orthogonal d'un sous-espace en dimension finie :

En général, si E est un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire, F un sous-espace, on a : $F\cap F^\perp = \{0\}$.

Théorème 203 *Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E. Alors :*
1. $F \oplus F^\perp = E$;
2. $F^{\perp\perp} = F$.

Remarque : En dimension finie :

$$(\bigcap_{i\in I} F_i)^\perp = \sum_{i\in I} {F_i}^\perp$$

Définition 339 *Soient E un espace euclidien, F un sous-espace et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*1. L'*affinité orthogonale par rapport à F de rapport λ *est l'affinité par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$ de rapport λ :*

$$x_{\in F} + y_{\in F^\perp} \longmapsto x + \lambda y$$

2. La symétrie orthogonale par rapport à F *est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$:*

$$x_{\in F} + y_{\in F^\perp} \longmapsto x - y$$

3. La projection orthogonale sur F *est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$:*

$$x_{\in F} + y_{\in F^\perp} \longmapsto x$$

4. Une réflexion *est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.*

3) Bases orthonormales :

Définition 340 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire,$(e_i)_{i\in I}$ une famille de E. On dit que les e_i constituent un* système orthonormal *si pour tout $(i,j) \in I^2$, on a :*

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

Si de plus, E est un espace euclidien, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E.

Remarque : Une famille orthonormale est libre donc finie.

Proposition 420 *Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a*

$$x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i, \quad (x|y) = \sum_{i\in I} x_i y_i \quad et \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} x_i^2$$

Remarque : $x \longmapsto (x|e_i)$ est la forme linéaire qui à x associe sa i-ème coordonnées dans cette base.
Exemple : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique. Inversement, à toute base de E, on peut associer un produit scalaire qui rend cette base orthonormale.

Théorème 204 *Dans tout espace euclidien E, il existe des bases orthonormales.*

Plus précisément, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est un système orthonormal de E, il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ dans E tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base orthonormale de E.

Remarque : Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$a_{ij} = (u(e_j)|e_i)$$

III. Projecteurs orthogonaux

1) Propriétés des projecteurs orthogonaux :

Rappel : définition d'un projecteur orthogonal.

Proposition 421 *Soient E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) p est un projecteur orthogonal.
(ii) $p \circ p = p$ et pour tout $(x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.

Corollaire 108 *Soient E un espace euclidien, $(\mathcal{B})$ une base orthonormale de E, $p \in \mathcal{L}(E)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(p)$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) p est un projecteur orthogonal.
(ii) $A^2 = A$ et ${}^tA = A$ (A est symétrique).

2) Problème de minimum et projection :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire.

Proposition 422 *L'orthogonal de F, sous-espace de dimension finie de E est un supplémentaire de F :*

$$F \oplus F^\perp = E$$

Si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$$

Cet "inf" est-il atteint ? et si oui, par quels éléments ? En général, ce problème est difficile (avec la norme infinie par exemple). Si $A = F$ est un s.e.v les choses se passent bien : l'inf est atteint en un unique point qui est le projeté orthogonal de x sur F.

Théorème 205 *Soient F un sous-espace de E, $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F, $x \in E$. La distance entre x et F est atteinte en x_F, le projeté orthogonal de x sur F. On a :*

$$x_F = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$$

et $\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$.

3) Orthonormalisation au sens de Gram-Schmidt :

Théorème 206 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire, $(a_1, \dots, a_n)$ un système libre de E. Il existe un unique système $(e_1, \dots, e_n)$ de E tel que :*

1. $(e_1, \dots, e_n)$ est un système orthonormal de E ;

2. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, \dots, a_i)$$

3. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(a_i|e_i) > 0$.

Le système $(e_1, \dots, e_n)$ constitue l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $(a_1, \dots, a_n)$.

Exemple : Orthonormalisation d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Si $(a_1, \dots, a_n)$ est une base de E, il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale telle que la matrice de passage de $(a_1, \dots, a_n)$ à $(e_1, \dots, e_n)$ soit triangulaire supérieure avec tous les éléments diagonaux strictement positifs.

Exemple : approximation d'une fonction continue par des polynômes dans $L^2([a, b])$: soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'orthonormalis de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \int_a^b fg$. Alors,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (Q_n|f)^2.$$

Chapitre 3

Groupe orthogonal

Dans ce chapitre, E, F et G désignerons des espaces euclidiens de dimension finie.

I. Isomorphisme orthogonal

1) Généralités :

Proposition 423 *Soit $u : E \longrightarrow E$ linéaire. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
(ii) Pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Remarque : Dans ces conditions, u est injective et $\dim E = \dim F$.

Définition 341 *Tout application linéaire bijective de E dans F conservant la norme (ou, ce qui est équivalent, le produit scalaire) est appelé* isomorphisme orthogonal. *On note $O(E)$ l'ensemble des isomorphismes orthogonaux de E.*

Remarque : • $I_E \in O(E)$.
• Si $u \in O(E)$, les seules valeurs propres de u ne peuvent être que 1 et -1.
• Un isomorphisme orthogonal conserve les angles non orientés.

Proposition 424 *Soient $u, v \in O(E)$. Alors :*
1. $I_E \in O(E)$.
2. $v \circ u \in O(E)$.
3. $u^{-1} \in O(E)$.

Remarque : $O(E)$ est donc un sous-groupe de $GL(E)$ appelé *groupe orthogonal de E*. Si $E = \mathbb{R}$, $O(E) = \{\pm I_E\}$.

Exemple : Les symétries orthogonales, et en particulier les réflexions sont des isomorphismes orthogonaux. Réciproquement, une symétrie qui est un endomorphisme orthogonal est une symétrie orthogonale.

2) Transformation des bases orthonormales :

Proposition 425 *Soient $u : E \longrightarrow E$ linéaire, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base orthonormale de E. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $u \in O(E)$.
(ii) $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Proposition 426 *Soient $u \in O(E)$, E' un sous-espace stable par u. Alors ${E'}^{\perp}$ est aussi stable par u.*

3) Exemple des réflexions et des retournements :

Les réflexions sont des isomorphismes orthogonaux. Voici un autre exemple :

Définition 342 *Si* $\dim E \geqslant 2$*, on appelle retournement toute symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension* $\dim E - 2$.

Proposition 427 *Soit* $(x, y) \in E^2$ *tel que* $\|x\| = \|y\|$, $x \neq y$. *Il existe une unique réflexion* u *tel que* $u(x) = y$ *et* $u(y) = x$.

II. Matrices orthogonales

1) Généralités :

Définition 343 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* A *est* orthogonale *si les colonnes de* A *forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *(pour le produit scalaire canonique). On note* $O(n)$ *l'ensemble des matrices orthogonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : $I_n \in O(n)$.

Théorème 207 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On a :*

$$A \in O(n) \Longleftrightarrow^t AA = I_n \Longleftrightarrow A^t A = I_n$$

$O(n)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *appelé* groupe orthogonal d'ordre n .

Remarque : • Si A est orthogonale, $A^{-1} =^t A$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A \in O(n) \Longleftrightarrow^t A \in O(n)$$

En particulier, dire que A est orthogonale revient à dire que les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

• Si $A \in O(n)$, $\det A = \pm 1$.

Proposition 428 *Soient* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale de* E, $\mathcal{B}'$ *une autre base,* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \in O(n)$.

(ii) $\mathcal{B}'$ *est orthonormée.*

2) Lien avec les isomorphismes orthogonaux :

Proposition 429 *On suppose* $\dim E = n$ *et* E *rapporté à la base orthonormale* $\mathcal{B}$. *Soit* $u : E \longrightarrow E$ *linéaire et* A *la matrice de* u *dans la base* $\mathcal{B}$. *Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in O(E)$.

(ii) $A \in O(n)$.

Corollaire 109 *Soient* $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ *une base orthonormale de* E, A *la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}$. *Alors* u *est un isomorphisme orthogonal si, et seulement si,* $A \in O(n)$.

Remarque : • En choisissant une BON de E, on établit que $O(E)$ est isomorphe à $O(n)$ en tant que groupes ($n = \dim E$).

• Si $A \in O(n)$, $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$.

III. Produit mixte

1) Orientation d'un espace vectoriel réel :

Définition 344 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont dites* de même signe *si le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est strictement positif.*

Remarque : Si deux bases ne sont pas de même signe, on dit qu'elles sont de signes contraires.

Proposition 430 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. La relation "avoir le même signe" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.*

De plus, il y a exactement deux classes d'équivalences.

Remarque : Si $\dim E = 1$, $e \neq 0$, la base (e) est de signe contraire avec la base $(-e)$.
Remarque : Soit $\mathcal{C}$ une base de E. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même signe si et seulement si $\det_{\mathcal{C}} \mathcal{B}. \det_{\mathcal{C}} \mathcal{B}' > 0$.

Définition 345 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$.*

Munir E d'une orientation*, c'est choisir une base positive $\mathcal{B}$ et toute base de E de même signe que $\mathcal{B}$ sera dite également* positive*. Toute base de E de signe contraire à celui de $\mathcal{B}$ est dite* négative*.*

Dans ces conditions, E est dit orienté*.*

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est muni d'une orientation canonique : celle pour laquelle la base canonique est positive. Dans ces conditions, $(C_1, \dots, C_n)$ est une base positive de $\mathbb{R}^n$ si $\det(C_1, \dots, C_n) > 0$.

Proposition 431 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté, D une droite de E orienté (on a choisi un vecteur e "positif"), H un hyperplan supplémentaire de D.*

*Alors, il existe une unique orientation de H telle que si $(e_2, \dots, e_n)$ est une base positive de H, $(e, e_2, \dots, e_n)$ est positive. C'est l'*orientation de H induite par l'orientation de D*.*

Exemple : en dimension 2 ou 3. Si E est un espace euclidien orienté, D une droite de E, on a donc sur l'hyperplan une orientation induite par celle de D. Exemple en dimension 2 ou 3.

2) Construction du produit mixte :

remarque Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases orthonormales de E, espace euclidien, P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. On a $\det P = 1$ si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont de même signe et $\det P = -1$ si elles sont de signes contraires.

Définition 346 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension finie n, $\mathcal{C}$ une base orthonormale positive.*

On appelle produit mixte *la fonction multilinéaire alternée de E définie par*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \longmapsto [x_1, x_2, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Proposition 432 *Avec les notations de la définition précédente, le produit mixte est indépendant de la base orthonormale positive. Si $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormale positive (resp. négative), $[x_1, \dots x_n] = 1$ (resp. -1).*

Exemple : Si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté et $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$:

$$[C_1, \dots, C_n] = \det(C_1, \dots, C_n)$$

Remarque : $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto [x_1, x_2, \dots, x_n]$ est une forme n-linéaire alternée. Par conséquent :

$$[\lambda x_1, x_2, \dots, x_n] = \lambda[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$[x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = \varepsilon(\sigma)[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0 \iff (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ liés}$$

Si A est la matrice des vecteurs $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans une base $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a :

$$[y_1, y_2, \dots, y_n] = \det A[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base orthonormale positive (resp. négative), $[x_1, x_2, \dots, x_n] = 1$ (resp. -1). Si on change l'orientation de E, le produit mixte est changé en son opposé.

3) Identité de Gram :

Théorème 208 (Identité de Gram) *Soit E un espace euclidien orienté de dimension finie n. Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n$, si on note $P = ((x_i|y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$:*

$$\det P = [x_1, x_2, \dots, x_n][y_1, y_2, \dots, y_n]$$

Théorème 209 *Soient E un espace euclidien, $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$. Alors*

$$\det((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \geqslant 0$$

et ce déterminant est nul si et seulement si les x_i sont liés.

Définition 347 *Soient E un espace euclidien, $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$. On appelle* Gram *de $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le scalaire :*

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sqrt{\det(x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}$$

Si les x_i sont liés, $\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$. Sinon, si $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$, et si l'on oriente F de manière arbitraire, on a :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p) = |[x_1, x_2, \dots, x_p]|$$

Proposition 433 *Soient E un espace euclidien, x et y non nuls. Alors :*

$$\mathcal{G}(x, y) = \|x\|\|y\| \sin \widehat{x, y}$$

Exemple : Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté :

$$|[x, y]| = \|x\|\|y\| \sin \widehat{x, y}$$

Remarque : • Si les x_i sont deux à deux orthogonaux :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \|x_1\|\|x_2\| \dots \|x_p\|$$

• Si x_1,x_2, …, x_p sont orthogonaux à tous les x_{p+1},…, x_{p+q}, on a

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_p)\mathcal{G}(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

Remarque : Interprétation géométrique du Gram.

4) Rotations et antirotations :

Proposition 434 *Si* $u \in O(E)$, $\det u = \pm 1$.

Définition 348 *Une* rotation de E *(resp.* antirotation*) est un morphisme orthogonal de* E *de déterminant* 1 *(resp.* -1*).*

Remarque : Composition des rotations, antirotations, inverse, cas de l'identité.

Définition 349 $SO(E)$, *l'ensemble des rotations de* E *est appelé* groupe spécial orthogonal de E.

Exemple : Soient F un sous-espace de E, s la symétrie orthogonale par rapport à F. s est une rotation (resp. antirotation) si $\dim E - \dim F$ est paire (resp. impaire). dem

En particulier, les réflexions sont des antirotations. Les retournements sont des rotations.

$-I_E$ est une rotation si $\dim E$ paire, et une antirotation si $\dim E$ est impaire.

Proposition 435 *On suppose que* E *est orienté, que* $u \in O(E)$. *Si* u *est une rotation (resp. antirotation),* u *conserve le produit mixte (resp. le change en son opposé).*

Remarque : Autrement dit, si$\varepsilon = \det u$, $n = \dim E$, alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a :

$$[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)] = \varepsilon[x_1, \dots, x_n]$$

5) Matrices orthogonales positives :

Définition 350 *Soit* $A \in O(n)$. A *est dite positive si* $\det A = 1$ *et négative si* $\det A = -1$. $SO(n)$, *l'ensemble des matrices orthogonales positives de taille* n, *est un sous-groupe de* $O(n)$ *appelé* groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Remarque : • Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale positive de E, $\mathcal{B}'$ une autre base, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$P \in SO(n)$ signifie que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale positive.

• Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$A \in SO(n) \Longleftrightarrow u \in SO(E)$$

et même :

$$SO(n) \simeq SO(E)$$

IV. Groupe orthogonal d'un plan euclidien

Soit P un plan euclidien, par exemple $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. Il s'agit de décrire quels sont les isomorphismes orthogonaux de P.

1) Description de $SO(2)$:

Théorème 210 *On considère*

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R} & \longrightarrow & SO(2) \\ \varphi : & \theta & \longmapsto & A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

φ *est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *sur le groupe* $SO(2)$ *dont le noyau est* $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque : • $SO(2) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

• $\chi_{A(\theta)} = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

• $A(0) = I_2$ et $A(\pi) = -I_2$.

2) Rotation d'angle θ dans le plan euclidien orienté :

Dans tout ce sous-paragraphe, on supposera P orienté.

Définition 351 *On suppose que P est muni d'une orientation. Soit (i, j) une base orthonormale directe de P, $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle* rotation d'angle θ *l'élément r_θ de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans (i, j) est :*

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A priori, cette définition dépend de la base orthonormale positive (i, j) choisie. En fait :

Proposition 436 *Soit r_θ construit dans la définition précédente. Pour toute base orthonormée positive (i', j'), la matrice de r_θ dans (i', j') est :*

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

De plus, r_θ est un isomorphisme orthogonal positif : $r_\theta \in SO(P)$.

Il existe donc, pour un plan euclidien orienté, qu'une seule rotation d'angle θ.
Remarque : Interprétation géométrique.
Remarque : • $r_\theta = r_{\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.
• On a :

$$r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta = r_{\theta+\theta'} \text{ et } (r_\theta)^{-1} = r_{-\theta}$$

Théorème 211 *On suppose P orienté. Soit $u \in SO(P)$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que u soit la rotation d'angle θ de P.*

Remarque : Si on change l'orientation de P, u devient la rotation d'angle $-\theta$.
Exemple : La rotation d'angle 0 est l'identité et celle d'angle π, $-I_P$ (symétrie par rapport à 0).
Description de $r_{\frac{\pi}{2}}$.

3) Symétries orthogonale par rapport à une droite :

Soit D une droite de P, notons s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Description géométrique. s_D est une réflexion, donc un isomorphisme orthogonal négatif i.e. une antirotation.

Théorème 212 *Toute antirotation de P est une réflexion.*

Si u est un réflexion, u est la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(u - I_P)$.
Conclusion : Si $u \in O(P)$, u est soit une rotation (d'angle un certain θ si P est muni d'une orientation), soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

4) Identification d'un plan euclidien avec $\mathbb{C}$:

Soit (e, ε) une BON de P. On peut identifier P à $\mathbb{C}$ en identifiant $xe+y\varepsilon$ avec $x+iy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$). La norme de P s'identifie au module.

Supposons P identifié à $\mathbb{C}$. Alors les éléments de $O(P)$ sont les applications de la forme $z \in \mathbb{C} \longmapsto az$ ou $z \in \mathbb{C} \longmapsto a\bar{z}$ avec $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. De façon plus précise :
• Si E est orienté, $(1, i)$ positive, la rotation d'angle θ est $z \longmapsto e^{i\theta}z$;
• La symétrie othogonale s_θ par rapport à la droite $\mathbb{R}e^{i\theta}$ est $z \longmapsto e^{2i\theta}\bar{z}$. Sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Exercice : $s_\theta \circ r_{\theta'}$? $s_\theta \circ s_{\theta'}$? $r_{\theta'} \circ s_\theta$?

Théorème 213 *Tout élément de $O(P)$ est produit d'au plus deux réflexions.*

Remarque : Construction graphique

5) Angles orientés :

Proposition 437 *Soit P un plan euclidien, $(x, y) \in P^2$ unitaires.*
Il existe un unique $u \in SO(P)$ tel que $u(x) = y$.

Définition 352 *Soit P un plan euclidien orienté, x et y deux vecteurs non nuls de P.*
Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$r_\theta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$$

*L'*angle orienté de x et y, *noté $\overrightarrow{x, y}$ est la classe de θ modulo $2\pi\mathbb{Z}$ ou par abus de langage θ.*

Remarque : • Soient λ et μ dans K^*. On a modulo 2π, $\overrightarrow{\lambda x, \mu y} = \overrightarrow{x, y}$ si $\lambda\mu > 0$ et $\overrightarrow{\lambda x, \mu y} = \overrightarrow{x, y} + \pi$ si $\lambda\mu < 0$.

• Si on change l'orientation de P, l'angle orienté de x et y est changé en son opposé.

• Si on identifie P à $\mathbb{C}$, $\overrightarrow{x, y} = \arg \frac{y}{x}$.

Proposition 438 *Soit P un plan euclidien orienté, x, y et z trois vecteurs non nuls de P. Modulo $2\pi\mathbb{Z}$:*

1. $\overrightarrow{x, x} = 0$;
2. $\overrightarrow{x, z} = \overrightarrow{x, y} + \overrightarrow{y, z}$;
3. $\overrightarrow{x, y} = -\overrightarrow{y, x}$.

6) Expression du produit scalaire et du produit mixte à l'aide des angles orientés :

Proposition 439 *Soient P un plan euclidien orienté, x et y deux vecteurs non nuls de P, $\theta = \overrightarrow{x, y}$. Alors :*

$$(x|y) = \|x\|\|y\| \cos\theta \quad et \quad [x, y] = \|x\|\|y\| \sin\theta$$

Remarque : $|\overrightarrow{x, y}| = \widehat{x, y}$.

Remarque : A quelle condition a t-on colinéarité de même sens, de sens contraires, (x, y) orthogonaux, (x, y) base positive, (x, y) base négative ?

Corollaire 110 *Soient P un plan euclidien orienté, $u \in O(P)$, $\varepsilon = \det u$, x et y non nuls dans P. Alors, modulo $2\pi\mathbb{Z}$:*

$$\overrightarrow{u(x), u(y)} = \varepsilon \overrightarrow{x, y}$$

V. Groupe orthogonal d'un espace euclidien de dimension 3 :

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension 3. On veut, là encore, décrire $O(E)$.

1) Expression du produit vectoriel :

Définition 353 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(x,y) \in E^2$.*

Alors, $z \in E \longmapsto [x,y,z]$ est une forme linéaire de E qui s'identifie à un vecteur $x \wedge y$ appelé produit vectoriel de x et y. *$x \wedge y$ est l'unique vecteur $t \in E$ tel que*

$$(\forall z \in E)(\ (t|z) = [x,y,z]\ )$$

Remarque : Si on change l'orientation de E, le produit vectoriel est changé en son opposé.

Proposition 440 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(x,y) \in E^2$, (i,j,k) une base orthonormale positive. On note $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$) la colonne de x (resp. y) dans cette base. Alors la colonne de $x \wedge y$ dans (i,j,k) est*

$$\begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$$

Exemple : Cas de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique.

2) Propriétés du produit vectoriel :

Proposition 441 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3.*

1. Pour tout $(x,y,y') \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x \wedge (y+y') = x \wedge y + x \wedge y', \quad x \wedge (\lambda y) = \lambda x \wedge y \quad et \quad y \wedge x = -x \wedge y$$

2. Soit $(x,y) \in E^2$. $x \wedge y \in (\mathrm{Vect}(x,y))^{\perp}$.

3. Soit $(x,y) \in E^2$. $x \wedge y = 0$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 442 (Identité de Lagrange) *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(x,y,a,b) \in E^4$. Alors :*

$$(a \wedge b | x \wedge y) = \det \begin{pmatrix} (a|x) & (b|x) \\ (a|y) & (b|y) \end{pmatrix}$$

Application : On a donc $\|x \wedge y\| = \mathcal{G}(x,y)$. Supposons x et y libres. Comme $[x,y,x \wedge y] = \|x \wedge y\|^2 > 0$, $(x,y,x \wedge y)$ est une base positive. Dessin !

Proposition 443 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(x,y) \in E^2$ libre. Alors $x \wedge y$ est l'unique vecteur de E orthogonal à x et y, de norme*

$$\mathcal{G}(x,y) = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - (x|y)^2} = \|x\|\|y\| \sin \widehat{x,y}$$

et tel que la base $(x,y,x \wedge y)$ est positive.

Exemple : Si (i,j) est un système orthonormal de E, $(i,j,i \wedge j)$ est une base orthonormale positive de E.

Exercice : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(a,b,c) \in E^3$. Montrer que

$$(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$$

3) Rotation d'angle θ dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :

Définition 354 *Soient k un vecteur unitaire de E, $\theta \in \mathbb{R}$. On suppose E orienté.*

Considérons le plan euclidien $P = k^{\perp}$. On oriente P de telle manière que si (i, j) est une base orthonormale positive de P, (i, j, k) est une base positive de E. On note $r_{P,\theta}$ la rotation de P d'angle θ. Alors la rotation d'angle θ et d'axe orienté k *est l'application défini par :*

$$r_{\theta,k} : x + \lambda k \longmapsto r_{P,\theta}(x) + \lambda k$$

Remarque : Interprétation géométrique.

Remarque : • $r_{\theta+2l\pi,k} = r_{\theta,k}$, $r_{0,k} = I_E$, $r_{\pi,k}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}k$, $r_{\theta,k} \circ r_{\theta',k} = r_{\theta+\theta',k}$, $r_{\theta,k}^{-1} = r_{-\theta,k}$.

• Si on change l'orientation de l'axe (en prenant $-k$ au lieu de k), ou l'orientation de E, l'angle de la rotation devient $-\theta$.

Théorème 214 *Avec les notations de la définition précédente, $r_{\theta,k} \in SO(E)$.*

Proposition 444 *Avec les notations de la définition, si $u = r_{\theta,k}$, on a :*

$$\theta = \pm \arccos \frac{\operatorname{Tr} u - 1}{2} \pmod{2\pi}$$

et pour $x \in E$, orthogonal à $\mathbb{R}k$, on a :

$$u(x) = \cos\theta.x + \sin\theta.k \wedge x$$

4) Description de $O(E)$:

Remarque : On suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension 3, $u \in O(E)$, $\varepsilon = \det u$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$u(x \wedge y) = \varepsilon u(x) \wedge u(y)$$

Théorème 215 *Soit $u \in O(E)$. On suppose E orienté.*

1. Si $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in E$ tel que $u = r_{\theta,k}$.

2. Si u est une antirotation, alors $-u \in SO(E)$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in E$ tel que $u = -r_{\theta,k}$.

Remarque : Interprétation géométrique des antirotations.

Théorème 216 *Tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus trois réflexions.*

Chapitre 4

Espaces affines

I. Généralités

1) Notion d'espaces affines :

Définition 355 *Soit V un K-espace vectoriel.*

*Un K-*espace affine attaché à V *est un ensemble non vide E muni d'une loi de composition externe noté additivement à opérateurs dans V :*

$$(M, v) \in E \times V \longmapsto M + v \in E$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tout $M \in E$ et tout $(u, v) \in V$:

$$(M + u) + v = M + (u + v)$$

2. Pour tout $(M, N) \in E$, il existe un unique $v \in V$ tel que $N = M + v$.

Les éléments de E sont appelés des points.

Si $(M, N) \in E^2$, l'unique $v \in V$ tel que $N = M + v$ s'appelle le vecteur joignant M à N *et il se note $\overrightarrow{MN}$.*

Remarque : Dessin.
Exemple : Soit V un K-ev. Alors V est canoniquement muni d'une structure de K-espace affine attaché à V ; l'addition externe étant l'addition interne de V.
Remarque : Soit $\Omega \in E$. Alors $v \in V \longmapsto \Omega + v$ est une bijection de V sur E (de réciproque $M \longmapsto \overrightarrow{\Omega M}$).

Définition 356 *Soit E un K-espace affine attaché à V.*

On dit que E est de dimension finie *si la dimension de V est finie. Dans ce cas, la* dimension de E, *noté* $\dim E$, *est* $\dim V$. *Si* $\dim E = 0$, *E est un singleton. Si* $\dim E = 1$, *E est une* droite affine. *Si* $\dim E = 2$, *E est un* plan affine.

Proposition 445 *Soient E un K-espace affine attaché à V, $(A, B, C) \in E$.*

1. $A + 0 = A$ et $\overrightarrow{AA} = 0$.

2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$: c'est la relation de Chasles.

3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

2) Choix d'une origine :

Soit E un K-espace affine attaché à V. Choisissons un point $\Omega \in E$. Alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \Omega + u \end{array}$$

est une bijection de V sur E qui permet d'identifier V et E. Cette identification n'est pas canonique car elle dépend du choix de Ω. On dit alors que l'on a choisi Ω comme origine de E.

L'intérêt de cette identification est que l'addition externe sur E s'identifie à l'addition interne de V : si M s'identifie à u (i.e. $u = \overrightarrow{\Omega M}$, $M + x = (\Omega + u) + x = \Omega + (u + x)$ s'identifie à $u + x$.

Si $(M_1, \dots, M_n)$ est une famille de E, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ une famille de K, on notera donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i$ le point de E :

$$\Omega + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_i}$$

Exemple : Contruction de $A - B$, $A + B$, $A + B + C$. On remarque que ces points dépendent du choix de l'origine.

3) Barycentre :

Dans toute la suite, I désigne un ensemble fini.

Proposition 446 *Soient E un K-espace affine attaché à V rapporté à une origine Ω, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de K telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. Alors le point $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$ ne dépend pas du choix de l'origine Ω.*

Remarque : Si $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ et $i_0 \in I$, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i A_i = A_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i \overrightarrow{A_{i_0} A_i}$$

Définition 357 *Soient E un K-espace affine attaché à V rapporté à une origine Ω, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de K vérifiant $\sum_{i\in I} \mu_i \neq 0$. Alors :*

$$\frac{\sum_{i\in I} \mu_i A_i}{\sum_{i\in I} \mu_i} = \Omega + \frac{\sum_{i\in I} \mu_i \overrightarrow{\Omega A_i}}{\sum_{i\in I} \mu_i}$$

s'appelle barycentre des A_i affectés des coefficients λ_i.

Exemple : • Si A_1,..., A_n sont dans E,

$$\frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} = \Omega + \frac{1}{n} \sum_{i\in I} \overrightarrow{\Omega A_i}$$

est appelé *isobarycentre des A_i*.

• Soit $(A, B) \in E^2$. Alors $\frac{A+B}{2}$ est appelé *milieu de A et B*.

• Isobarycentre de trois points.

Remarque : • Si $\sum_{i\in I} \mu_i \neq 0$,

$$G = \frac{\sum_{i\in I} \mu_i A_i}{\sum_{i\in I} \mu_i} \Longleftrightarrow \sum_{i\in I} \mu_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

- Si $\sum_{i\in I}\mu_i \neq 0$, $(J_l)_{l\in L}$ est une partition de I telle que $\sum_{i\in J_l}\mu_i \neq 0$, on a :

$$\frac{\sum_{i\in I}\mu_i A_i}{\sum_{i\in I}\mu_i} = \frac{\sum_{l\in L}\left(\sum_{i\in J_l}\mu_i\right)\left(\frac{\sum_{i\in J_l}\mu_i A_i}{\sum_{i\in J_l}\mu_i}\right)}{\sum_{l\in L}\left(\sum_{i\in J_l}\mu_i\right)}$$

C'est l'associativité du barycentre. On peut calculer un barycentre par itération. Par exemple :

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in I} A_i = \left[(n-1)\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i\right) + A_n\right] \times \frac{1}{n}$$

4) Combinaison linéaire à somme de coefficients nulle :

Proposition 447 *Soient E un K-espace affine attaché à V rapporté à une origine Ω, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de K telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i = 0$ et $M = \sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{\Omega A_i}$.*

Alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ ne dépend pas du choix de l'origine Ω.

Ainsi, lorsque nous aurons une combinaison linéaire de points à somme de coefficients nulle, nous ne la considèrerons pas comme un point, mais comme un vecteur de V.
Exemple : $B - A = \overrightarrow{AB}$

II. Sous-espaces affines

1) Généralités :

Proposition 448 *Soient E un K-espace affine attaché à V, $F \subset E$. Pour tout $A \in F$ on note :*

$$F_A = \{\overrightarrow{AM} \in V,\ M \in F\}$$

S'il existe $A \in F$ tel que F_A soit un sous-espace de V, alors pour tout $B \in F$, $F_A = F_B$.

Remarque : Dessin.

Définition 358 *Soient E un K-espace affine attaché à V, $F \subset E$.*

On dit que F est un sous-espace affine de E *s'il existe $A \in F$ tel que $\{\overrightarrow{AM} \in V,\ M \in F\}$ soit un sous-espace de V. Alors, $\{\overrightarrow{AM} \in V,\ M \in F\}$ est un sous-espace de V indépendant du choix de A dans F d'après la proposition précédente : on l'appelle* direction de F *et on le note $\overrightarrow{F}$.*

Remarque : • Si $\Omega \in F$ sous-espace affine, $u \in V$, $\Omega + u \Longleftrightarrow u \in \overrightarrow{E}$.

• On parle parfois de variétés affines.

• Si $(A, B) \in F$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$. Si $A \in F$, $v \in \overrightarrow{F}$, $A + v \in F$. Il en résulte que l'on peut considérer F comme un K-espace affine attaché à $\overrightarrow{F}$. On peut en particulier, parler de dimension d'un sous-espace affine.

Proposition 449 *Soit E un K-espace affine, F un sous-espace affine, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de F, $(\lambda_i) \in I$ une famille de K à support fini pour $+$.*

1. *Si $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$, $\sum_{i\in I}\lambda_i A_i \in F$.*
2. *Si $\sum_{i\in I}\lambda_i = 0$, $\sum_{i\in I}\lambda_i A_i \in \overrightarrow{F}$.*

Remarque : Le barycentre de points de F est encore dans F.

2) Détermination d'un sous-espace affine par un point et sa direction :

Proposition 450 *Soient E un K-espace affine attaché à V, $a \in E$, W un sous-espace de V.*

Il existe un unique sous-espace affine F de E telle que :

1. $A \in F$;

2. $\overrightarrow{F} = W$.

Exemple :

• Les sous-espaces affines de direction $\{0\}$ sont les singletons de E.

• Le seul sous-espace affine de E de direction V est E : on notera donc dorénavant $\overrightarrow{E}$ au lieu de V et quand on parlera d'espace affine E il sera sous-entendu qu'il est attaché à $\overrightarrow{E}$.

• Soit W un sous-espace de V. Alors les sous-espaces affines de E de direction W sont les ensembles $A + W$.

Exemple : • Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Alors, l'ensemble des solutions de E est un sous-espace affine de dimension 1, de direction :

$$\{y \in E,\ y' + a(x)y = 0\}$$

• Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Alors, l'ensemble des solutions de E est un sous-espace affine de dimension 2, de direction :

$$\{y \in E,\ y'' + a(x)y' + b(x)y = 0\}$$

Exemple : Soient $E = K^n$, u_1,..., u_p p formes linéaires de E, $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$. On considère le système d'inconnue x :

$$(S) : \quad u_i(x) = \alpha_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

Les solutions de (S), s'il y en a, constituent un sous-espace affine de E dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associé :

$$(S_0) : \quad u_i(x) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

Définition 359 *Soient E un K-espace affine, F et F' deux sous-espaces affines de E. On dit F et F' sont* parallèles *si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{F'}$ ou $\overrightarrow{F'} \subset \overrightarrow{F}$. On dit que F et F' sont strictement parallèles si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'}$.*

Remarque : • Si $F \subset F'$, $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{F'}$.

• Si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{F'}$ et $F \cap F' \neq \emptyset$, alors $F \subset F'$.

• Si $F \subset F'$ et si $\dim F = \dim F'$, $F = F'$.

3) Intersection de deux sous-espaces affines :

Proposition 451 *Soient E un K-espace affine, F et F' deux sous-espaces affines de E.*

1. Si $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{F'} = \{0\}$, $F \cap F'$ contient au plus un élément.

2. Si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap F'$ est non vide.

3. Si $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F'} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap F'$ est un singleton.

Exemple : Supposons E de dimension finie. Soient H un hyperplan affine (i.e. sous-espace affine de dimension $n - 1$), D une droite affine de E non parallèle à H. Alors $D \cap H$ est un singleton.

Proposition 452 *Soient E un K-espace affine, $(E_l)_{l \in L}$ une famille de sous-espaces affines de E. Alors, si $\bigcap_{l \in L} E_l$ est non vide, $\bigcap_{l \in L} E_l$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{l \in L} \overrightarrow{E_l}$.*

4) Sous-espace affine engendrée :

Définition 360 *Soient E un K-espace affine, A une partie non vide de E.*

On appelle sous-espace affine engendrée par A *l'intersection des sous-espaces affines de E qui contiennent A. C'est donc la plus petit sous-espace affine qui contient A.*

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de points de E, le sous-espace affine engendrée par les A_i *est le sous-espace affine engendrée par $\{A_i \in E, i \in I\}$.*

Théorème 217 *Soient E un K-espace affine, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de points de E.*

Le sous-espace affine engendrée par les A_i est l'ensemble F des éléments de E de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i A_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de K telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$: c'est l'ensemble des barycentres des A_i.

Sa direction $\overrightarrow{F}$ est l'ensemble des éléments de E de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i A_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de K à support fini telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$.

Remarque : $\overrightarrow{F}$ est aussi $\mathrm{Vect}_{i\in I}(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})$.
Exemple : • Le sous-espace affine engendré par A est $\{A\}$.

• Soient $A \neq B$ dans E. Le sous-espace affine engendré par A et B est par définition la *droite passant par A et B* noté (AB) :

$$(AB) = \{\lambda A + \mu B, \lambda + \mu = 1\} = \{A + k\overrightarrow{AB}, k \in K\} = A + K\overrightarrow{AB}$$

• Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ libres. Le sous-espace affine engendrée par A, B et C est par définition *le plan passant par A, B et C* et est noté (ABC) :

$$(ABC) = \{\lambda A + \mu B + \nu C, \lambda + \mu + \nu = 1\} = \{A + k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}, k \in K \text{ et } l \in K\}$$

$$= A + K\overrightarrow{AB} + K\overrightarrow{AC}$$

Remarque : On dit que les A_i engendrent affinement E, si la varité affine engendrée par les A_i est E tout entier. Cas de la dimension finie.
Exercice : Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

III. Bases affines et repères affines

Dans ce paragraphe, E désignera un K-espace affine de dimension finie.

1) Base affine :

Définition 361 $(A_0, A_2, \dots, A_n)$ *est une* base affine de E *si, et seulement si* $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ *est une base de $\overrightarrow{E}$. Dans ces conditions,* $\dim E = n$.

Proposition 453 *Soit $(A_0, A_2, \dots, A_n)$ une* base affine de E. *Alors, tout point de E s'écrit de manière unique $\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.*

Définition 362 *Avec les notations de la proposition précédente, si $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i \in E$ ($\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$), λ_i est* la coordonnée barycentrique de M d'indice i dans la base affine *$(A_0, A_2, \dots, A_n)$.*

2) Repères affines :

Définition 363 *On appelle* repère de E *tout couple* $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ *où* Ω *est un point de* E *appelé* origine du repère *et* $\mathcal{B}$ *une base de* $\overrightarrow{E}$ *appelé* base du repère. *Si* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$*, tout point* M *de* E *s'écrit de manière unique :*

$$M = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, x_i *est appelé* coordonnée d'indice i de M dans le repère $\mathcal{R}$. *La colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ *est appelé* colonne de M dans le repère $\mathcal{R}$. *On note :*

$$M :_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{ou encore} \quad M : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple : Cas des K-espaces vectoriels.

Proposition 454 *On suppose* E *rapporté à un repère* $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$.

1. Soient $M \in E$ *et* $v \in \overrightarrow{E}$, X *la colonne de* M *dans* $\mathcal{R}$ *et* U *la colonne de* v *dans* $\mathcal{B}$*. Alors, la colonne de* $M + v$ *dans* $\mathcal{R}$ *est* $X + U$.

2. Soient M_1,..., M_n *des points de* E, λ_1,..., λ_n *des éléments de* K *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *(resp.* 0*). On note* X_i *la colonne de* M_i *dans* $\mathcal{R}$.

Alors la colonne de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i$ *dans* $\mathcal{R}$ *(resp.* $\mathcal{B}$*) est* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$.

Remarque : Colonne de $\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$.

Proposition 455 *Soient* $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ *et* $\mathcal{R}' = (\Omega', \mathcal{B}')$ *deux repères de* E*,* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*.,* A *la colonne de* Ω' *dans* $\mathcal{R}$.

Pour tout $M \in E$*, on note* X *(resp.* X'*) la colonne de* M *dans* $\mathcal{R}$ *(resp.* $\mathcal{R}'$*). Alors :*

$$X = PX' + A$$

Définition 364 *Un* $\mathbb{R}$*-espace affine* E *de dimension finie est dit* orienté *si* $\overrightarrow{E}$ *l'est. Un repère* $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ *est dit* positif *(resp.* négatif*) si* $\mathcal{B}$ *est positif (resp. négatif).*

IV. Ensembles convexes

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{R}$-espace affine.

1) Généralités :

Définition 365 *Soit* $(A, B) \in E^2$*. On appelle* segment de droites d'extrémités A et B *l'ensemble :*

$$[AB] = \{\lambda A + \mu B \in E, \ \ \lambda + \mu = 1, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0\} = \{(1 - \lambda)A + \lambda B \in E, \ \lambda \in [0, 1]\}$$

Définition 366 $A \subset E$ *est dit* convexe *si pour tout* $(A, B) \in E^2$, $[AB] \subset E$.

Exemple : • $\emptyset$ est convexe.

• Les sous-espaces affines sont convexes.

• Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 456 *Soit $A \subset E$ convexe. Pour toute famille de points de A $(M_i)_{i\in I}$, et toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, on a :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i M_i \in A$$

Remarque : Si A est convexe, tout barycentre à coefficients positifs de points de A est encore dans A.

2) Enveloppe convexe :

Proposition 457 *Soit $(A_l)_{l\in L}$ une famille de convexes de E. Alors $\bigcap_{l\in L} A_l$ est convexe.*

Définition 367 *Soit $B \subset E$.*

On appelle enveloppe convexe *de B l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent B. D'après la proposition précédente, c'est le plus petit convexe contenant B.*

*Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de points de E, l'*enveloppe convexe des M_i *est l'enveloppe convexe de $\{M_i \in E,\ i \in I\}$.*

Théorème 218 *Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de points de E.*

L'enveloppe convexe des M_i est constituée de tous les barycentres à coefficients positifs des M_i, ou encore des

$$\sum_{i\in I} \lambda_i M_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, ou encore :

$$M_{i_0} + \sum_{i\in I, i\neq i_0} \lambda_i \overrightarrow{M_{i_0}M_i} \in E,\ \ (\lambda_i \geqslant 0 \ \textit{et} \ \sum_{i\neq i_0} \lambda_i \leqslant 1)$$

Exemple : • L'enveloppe convexe de $\{M\}$ est $\{M\}$.

• L'enveloppe convexe de $\{M, N\}$ est $[MN]$.

• L'enveloppe convexe de $\{M, N, P\}$ est

$$\{M + \lambda\overrightarrow{MN} + \mu\overrightarrow{MP},\ \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0 \text{ et } \lambda + \mu \leqslant 1\}$$

Dessin.

V. Applications affines

E, F et G désignent des K-espaces affines.

1) Généralités :

Proposition 458 *Soit $u : E \longrightarrow F$. Pour tout $\Omega \in E$, on note*

$$u_\Omega : x \in \overrightarrow{E} \longmapsto u(\Omega + x) - u(\Omega) = \overrightarrow{u(\Omega)u(\Omega + x)} \in \overrightarrow{F}$$

S'il existe $\Omega \in E$ tel que u_Ω soit linéaire, pour tout point $\Omega' \in E$, $u_\Omega = u_{\Omega'}$.

Définition 368 *Soit $u : E \longrightarrow F$.*

*On dit que u est (*une application*)* affine *s'il existe $\Omega \in E$ tel que*

$$u_\Omega : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{F} \\ x & \longmapsto & u(\Omega + x) - u(\Omega) \end{array}$$

soit linéaire. Cette application est alors indépendante de $\Omega \in E$ d'après la proposition précédente et est appelé application linéaire associée à *u (ou* flèche*) et on la note $\overrightarrow{u}$. On a donc pour tout $\Omega \in E$ et tout $x \in \overrightarrow{E}$:*

$$u(\Omega + x) = u(\Omega) + \overrightarrow{u}(x)$$

On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications affines de E dans F ; on note $\mathcal{A}(E)$ pour $\mathcal{A}(E, E)$.

Remarque : Restriction d'une application affine à un sous-espace affine de E.

Si $u : E \longrightarrow F$ affine, M et N deux points, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{u(M)u(N)}$.

Proposition 459 (Conservation du barycentre) *Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $(M_i)_{i\in I}$ une famille de points de E, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini de K.*

1. *Si $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, $u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i M_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(M_i)$.*
2. *Si $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$, $\overrightarrow{u}\left(\sum_{i\in I} \lambda_i M_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(M_i)$.*

Exemple : Image d'un barycentre par une application linéaire.

Corollaire 111 *Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces affines, A un convexe de E, $u : E \longrightarrow F$ affine. Alors $u(A)$ est un convexe.*

2) Détermination d'une application affine à l'aide de la flèche et du transformé d'un point :

Proposition 460 *Soient $A \in E$, $B \in F$ et $l : E \longrightarrow F$ linéaire.*

Alors, il existe une unique application affine $u : E \longrightarrow F$ telle que $u(A) = B$ et $\overrightarrow{u} = l$.

Exemple : • Les applications constantes sont les applications affines de flèche nulle.

• Si E et F sont des K-espaces vectoriels, les applications affines de E dans F sont les applications $l + Cte$ où $l \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 461 *On suppose E rapporté au repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$, F au repère $\mathcal{R}' = (\Omega', \mathcal{B}')$. Soient $u : E \longrightarrow F$ affine, A la matrice de $\overrightarrow{u}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, B la colonne de $u(\Omega)$ dans $\mathcal{R}'$.*

Pour tout $M \in E$, on note X la colonne de M dans $\mathcal{R}$ et Y la colonne de $u(M)$ dans $\mathcal{R}'$. Alors

$$Y = AX + B$$

3) Image directe et image réciproque d'un sous-espace affine :

Proposition 462 *Soit $u : E \longrightarrow F$ affine.*

1. Si E' désigne un sous-espace affine de E, alors $u(E')$ est un sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{u}(E')$.

2. Si F' est un sous-espace affine de F et si $u^{-1}(F')$ est non vide, $u^{-1}(F')$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{u}^{-1}(F')$.

Remarque : • $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace affine de F de direction $\operatorname{Im} \overrightarrow{u}$. En particulier :

$$u \text{ surjective } \iff \overrightarrow{u} \text{ surjective}$$

• Si $b \in F$, $u^{-1}(\{b\})$, s'il est non vide, est un sous-espace affine de E de direction $\ker \overrightarrow{u}$. En particulier :

$$u \text{ injective } \iff \overrightarrow{u} \text{ injective}$$

• Si E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$:

$$u \text{ injective } \iff u \text{ surjective}$$

4) Composition des applications affines :

Proposition 463 *Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ affines.*

1. I_E est affine et $\overrightarrow{I_E} = I_{\overrightarrow{E}}$.

2. $v \circ u$ est affine et $\overrightarrow{v \circ u} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$.

3. Si u est bijective, alors u^{-1} est affine et $\overrightarrow{u^{-1}} = \overrightarrow{u}^{-1}$.

Définition 369 *L'ensemble des bijections affines de E sur lui-même est un sous-groupe des permutations de E qu'on appelle* groupe affine de E *et qu'on note* $\mathrm{GA}(E)$.

Remarque : $u \longmapsto \overrightarrow{u}$ est un morphisme surjectif du groupe $\mathrm{GA}(E)$ sur le groupe $\mathrm{GL}(E)$.
Remarque : A bijection affine près, il existe un unique K-espace affine de dimension n, à savoir K^n.

5) Le K-espace vectoriel $\mathcal{A}(E)$:

Proposition 464 *Soit V un K-espace vectoriel. $\mathcal{A}(E,V)$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(E,V)$ et l'application $u \in \mathcal{A}(E,V) \longmapsto \overrightarrow{u} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{E},V)$ est linéaire.*

Si E et V sont de dimension finie, alors $\mathcal{A}(E,V)$ est finie et :

$$\dim \mathcal{A}(E,V) = \dim V(\dim E + 1)$$

6) Points invariants d'une application affine :

On remarque que si $u \in \mathcal{A}(E)$ admet un point invariant Ω, u s'identifie à une application linéaire, à savoir $\overrightarrow{u}$:

$$u(\Omega + x) = \Omega + \overrightarrow{u}(x) \;\text{ pour } x \in \overrightarrow{E}$$

Proposition 465 *Soit $u \in \mathcal{A}(E)$, E de dimension finie. On note $Inv\, u = \{M \in E, u(M) = M\}$.*

1. Si $Inv\, f$ est non vide, $Inv\, f$ est un sous-espace affine de E de direction $\ker(\overrightarrow{u} - I)$.

2. Alors, si 1 *n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point fixe pour u.*

VI. Translations, Homothéties et affinités

E désigne dans ce paragraphe un K-espace affine de dimension finie.

1) Le groupe des translations :

Définition 370 *Soit* $x \in \overrightarrow{E}$.
La translation de vecteur x *est l'application*

$$t_x : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + x \end{array}$$

Théorème 219 *Soit* $u : E \longrightarrow E$.
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u *est une translation.*
(ii) $u \in \mathcal{A}(E)$ *et* $\overrightarrow{u} = I_{\overrightarrow{E}}$.

Remarque : $\mathcal{T}$, l'ensemble des translations de E est le noyau du morphisme de groupe $u \in \mathrm{GA}(E) \longmapsto \overrightarrow{u} \in GL(E)$. C'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$.

Théorème 220 *Pour tout* $(x, y) \in E^2$, $t_0 = I_E$, $t_{x+y} = t_x \circ t_y = t_y \circ t_x$, $(t_x)^{-1} = t_{-x}$ *et si* $x \neq y$, $t_x \neq t_y$.

Remarque : $(\mathcal{T}, \circ) \simeq (\overrightarrow{E}, +)$.

2) Homothéties :

Définition 371 *Soient* $\lambda \in K$ *et* $\Omega \in E$.
*L'*homothétie *(*affine*)* de rapport λ et de centre Ω *est l'application :*

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M} = (1 - \lambda)\Omega + \lambda M \end{array}$$

Théorème 221 *Soit* $\lambda \in K$.
1. *Si* $\Omega \in E$ *et si* u *est l'homothétie de centre* Ω *de rapport* λ, *alors* u *est affine et* $\overrightarrow{u} = \lambda I_{\overrightarrow{E}}$.
2. *Réciproquement, si* $u \in \mathcal{A}(E)$ *et si* $\overrightarrow{u} = \lambda I_{\overrightarrow{E}}$ *avec* $\lambda \neq 1$, *alors* u *est une homothétie.*

Remarque : $\mathcal{H}$, l'ensemble des homothéties et des translations de E, est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$, appelé *groupe des homothétie-translations.*

3) Affinités :

Lemme 19 *Soient* F *un sous-espace de* E, W *un sous-espace de* $\overrightarrow{E}$ *tel que :*

$$\overrightarrow{F} \oplus W = \overrightarrow{E}$$

Alors, pour tout $M \in E$, *il existe un unique* $(P, x) \in F \times W$ *tel que*

$$M = P + x$$

Dessin !

Définition 372 *Soient $\lambda \in K$, $\lambda \neq 1$, F un sous-espace affine de E, W un sous-espace de $\overrightarrow{E}$ tel que :*

$$\overrightarrow{F} \oplus W = \overrightarrow{E}$$

*L'*affinité par rapport à F parallèlement à W et de rapport λ *est l'application :*

$$M = P_{\in F} + x_{\in W} \longmapsto P + \lambda x$$

Si $\lambda = -1$, c'est la symétrie par rapport F parallèlement à W.
Si $\lambda = 0$, c'est la projection sur F parallèlement à W.

Remarque : Si $F = \{\Omega\}$, on retrouve les homothéties.

Théorème 222 *Soient V et W deux sous-espaces de $\overrightarrow{E}$ tels que $V \oplus W = \overrightarrow{E}$, l l'affinité de $\overrightarrow{E}$ de rapport λ par rapport à V parallèlement à W.*

1. Si F est un sous-espace affine telle $\overrightarrow{F} = V$ et si u est l'affinité de rapport λ par rapport à F parallèlement à W, alors u est affine et $\overrightarrow{u} = l$.

2. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ possèdant un point invariant et telle que $\overrightarrow{u} = l$. Alors u est une affinité.

3. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ telle que $\overrightarrow{u} = l$. Alors u s'écrit de façon unique :

$$u = t_x \circ v$$

avec v affinité et $x \in \ker(\overrightarrow{u} - I_{\overrightarrow{E}})$

Exemple : Les symétries glissées en dimension 2.

4) Théorème de Thalès :

Théorème 223 (Théorème de Thalès) *Soient H, H' et H'' trois hyperplans affines parallèles, D et D' deux droites affines non parallèles à H, H' et H'', coupant H en A et B respectivement, H' en A' et B' respectivement, H'' en A'' et B'' respectivement.*

Si on a $\overrightarrow{AA''} = \lambda\overrightarrow{AA'}$, alors on a aussi $\overrightarrow{BB''} = \lambda\overrightarrow{BB'}$.

Exemple : Dimension 2.

Proposition 466 (Théorème de Thalès) *Soient $\mathcal{P}$ un plan affine, $(A, B, C, A', B', C') \in \mathcal{P}^6$ tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. On suppose que (AA') est parallèle à (BB'). Alors (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles deux à deux.*

Remarque : Introduire les mesures algébriques. Théorème de la droite des milieux.

VII. Formes affines et équations cartésiennes

E désigne ici un K-espace affine de dimension finie.

1) Equations cartésiennes d'un hyperplan :

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère affine de E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$. Soit $\varphi : E \longrightarrow K$ une forme affine de E i.e. une application affine de E dans K. Alors, si $\varphi(\Omega) = \alpha_0$ et $\overrightarrow{\varphi}(e_i) = \alpha_i$ pour tout i :

$$\varphi(M) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{où } M = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Dans ces conditions, $\overrightarrow{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$.

Proposition 467 *Si φ est une forme affine de E non constante i.e. $(\alpha_1, \dots \alpha_n) \neq 0$), l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = 0$ est un hyperplan de direction*

$$\ker \overrightarrow{\varphi} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \overrightarrow{E}, \;\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \right\}$$

Définition 373 *Soient H un hyperplan de E et φ une forme affine de E. Si H est l'ensemble des points $M \in E$ tels que $\varphi(M) = 0$, on dit φ est une* équation cartésienne de H.

Proposition 468 *Tout hyperplan de E admet une équation cartésienne, unique à un scalaire multiplicatif non nul près.*

Proposition 469 *Soient H et H' deux hyperplan d'équations cartésiennes respectives φ et φ'. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) H et H' sont parallèles ;
(ii) $\overrightarrow{\varphi'} \in K\overrightarrow{\varphi}$;
(iii) $\varphi' \in K\varphi + K$.

2) Représentation cartésienne d'un sous-espace affine :

Proposition 470 *Soit $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E, d'équations cartésienne φ_1,..., φ_p respectivement. On suppose les $\overrightarrow{\varphi_i}$ sont libres dans $\overrightarrow{E}^*$.*
Alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est un sous-espace affine de dimension $n - p$.

Définition 374 *Soit F un sous-espace affine. On dit qu'une famille $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de formes affines sur E constitue une représentation cartésienne de F si*

$$F = \{M \in E, \; \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = \ldots = \varphi_p(M) = 0\}$$

Elle est dite régulière *si les $\overrightarrow{\varphi_i}$ sont libres dans $\overrightarrow{E}^*$.*

Proposition 471 *Soit F un sous-espace affine.*
Alors F admet une repésentation cartésienne régulière i.e il existe φ_1,..., φ_p formes affines sur E telles que

$$F = \{M \in E, \; \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = \ldots = \varphi_p(M) = 0\}$$

et les $\overrightarrow{\varphi_i}$ sont libres dans $\overrightarrow{E}^*$.

3) Demi-espaces :

Définition 375 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie, H un hyperplan de E, M et N deux points de E.*
On dit que M et N sont strictement du même coté de H *si $\varphi(M)\varphi(N) > 0$, φ étant une équation cartésienne de H. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont* de part et d'autre de H.

Remarque : Cette définition est indépendante du choix de l'équation cartésienne de H choisie.

Proposition 472 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie, H un hyperplan de E.*
La relation "être du même coté de H" est une relation d'équivalence sur $E \backslash H$ ayant exactement deux classes.

Définition 376 *Avec les notations de la proposition précédente, les deux classes d'équivalences sont appelées* demi-espaces ouverts limités par H. *Un* demi-espace fermé *est la réunion d'un demi-espace ouvert et de H.*

VIII. Droites et plans en dimension 2 ou 3

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine, (Ω, i, j) un repère affine de $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 rapporté à un repère (Ω, i, j, k).

1) Droites dans un plan affine :

a-Position relative de deux droites :

Proposition 473 *Deux droites de $\mathcal{P}$ sont*

1. ou parallèles distinctes et disjointes

2. ou parallèles confondues

3. ou sécantes (et leur intersection est un point).

Définition 377 *Soit $A \in \mathcal{P}$. L'ensemble des droites de $\mathcal{P}$ passant par A s'appelle* faisceau de droites de sommet A. *Si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes du faisceau, on dit que (D_1, D_2) est une base du faisceau.*

i b-Equations cartésiennes d'une droite dans un plan affine :

Pour $M \in E$, on note (x, y) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$.

• Soit D une droite. D admet une équation cartésienne de la forme :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

avec $(\alpha, \beta) \neq 0$. Dans ces conditions, $(\beta, -\alpha)$ est un vecteur directeur de D.

• Si A de coordonnées (x_0, y_0) est dans D et $u = (\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de D,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

• Supposons $\mathcal{P}$ rapporté à une base affine. Alors trois points de $\mathcal{P}$ sont alignés si et seulement si le déterminant des coordonnées barycentriques est nul.

• Soient M_1, M_2 et M_3 trois points de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3). Ces trois points sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient donc une équation cartésienne de la droite passant par $A_1 : (x_1, y_1)$ et $A_2 : (x_2, y_2)$ avec :

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

• Soient les deux droites :

$$D_1 : \varphi_1(M) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad D_2 : \varphi_2(M) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Si D_1 et D_2 sont sécantes en A, les coordonnées de A s'obtiennent par résolution du système de Cramer :

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

• D est une droite du faisceau de sommet A si, et seulement si, il existe λ_1 et λ_2, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ tels que

$$\lambda_1 \varphi_1(M) + \lambda_2 \varphi_2(M) = 0$$

soit une équation de D.

• Soient les trois droites

$$D_1 : \varphi_1(M) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \ \ D_2 : \varphi_2(M) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

$$\text{et} \quad D_3 : \varphi_3(M) = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$$

Proposition 474 *Elles sont parallèles deux à deux ou concourantes si, et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

2) Positions relatives des sous-espaces affines en dimension 3 :

Proposition 475 *Dans $\mathcal{E}$:*

1. Deux plans sont parallèles ou ont pour intersection une droite.

2. Une droite non parallèle à un plan coupe ce plan en un point unique.

3. Soient D_1 et D_2 deux droites. Ou bien D_1 et D_2 sont parallèles, ou bien D_1 et D_2 sont sécantes en un point, ou nien D_1 et D_2 ne sont ni parallèles ni sécantes.

Définition 378 *Soit D une droite de $\mathcal{E}$. L'ensemble des plans de $\mathcal{E}$ contenant D s'appelle le* faisceau de plans d'axe D.

Si $\varphi_1(M) = 0$ et $\varphi_2(M) = 0$ sont les équations de deux plans distincts du faisceau d'axe D, les plans du faisceau ont pour équations :

$$\lambda_1 \varphi_1(M) + \lambda_2 \varphi_2(M) = 0$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$ non nul.

3) Equations cartésiennes d'un plan en dimension 3 :

Pour $M \in \mathcal{E}$, on note (x, y, z) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$, ou encore $M : (x, y, z)$.

• Soit P un plan de $\mathcal{E}$. P admet une équation cartésienne de la forme :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. La direction de P est l'ensemble des $Xi + Yj + Zk$ tel que

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$$

• Soit $A \in P$, $A : (x_0, y_0, z_0)$, $u_1 = \alpha_1 i + \beta_1 j + \gamma_1 k$ et $u_2 = \alpha_2 i + \beta_2 j + \gamma_2 k$ une base de $\overrightarrow{P}$. Alors P admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

• Supposons $\mathcal{E}$ rapporté à une base affine. Alors quatre points de $\mathcal{E}$ sont coplanaires si et seulement si le déterminant des coordonnées barycentriques est nul.

• Soient quatre point $M_i : (x_i, y_i, z_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ dans $\mathcal{E}$. Ces quatre points sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

• Soit $A_i : (x_i, y_i, z_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ trois points affinement libres. L'équation du plan passant par ces trois points est :

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \end{cases} \qquad \text{où } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

4) Représentations de droites en dimension 3 :

• Soient deux plans P_1 et P_2 de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : \varphi_1(M) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$$

$$P_2 : \varphi_2(M) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

P_1 et P_2 sont parallèles si $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont colinéaires.

Si P_1 et P_2 ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite D et (φ_1, φ_2) un représentation cartésienne régulière de D. Un vecteur directeur de D est :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}$$

• Soit $P_3 : \varphi_3(M) = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$ un troisième plan. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Si rg $A = 3$ i.e. $\det A \neq 0$ l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un point dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant le système de Cramer :

$$\varphi_1(M) = \varphi_2(M) = \varphi_3(M) = 0$$

Si rg $A = 2$, il existe une droite parallèle aux trois plans.
Si rg $A = 1$, les plans sont deux à deux parallèles.
• Soient $u = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $D = A + Ku$ où $A : (x_0, y_0, z_0)$. Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \qquad \text{où } \lambda \in K$$

Exercice : Soient quatre plans P_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ d'équations

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_1 = 0$$

Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

si, et seulement si, les plans sont concourants ou parallèles à une même droite affine.

Chapitre 5

Isométries

Dans ce chapitre, E désigne un espace affine euclidien, $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 et $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

I. Distance dans un espace euclidien

1) Définition d'un espace affine euclidien :

Définition 379 *Deux sous-espace affines de E sont dites* orthogonales *si leurs directions sont orthogonales.*

Un repère $(\Omega, \mathcal{B})$ est dit orthonormée *si $\mathcal{B}$ est orthonormée.*

Si A et B sont dans E, la distance de A à B *notée $d(A, B)$ est $\|\overrightarrow{AB}\|$.*

Si A B, C sont dans E et $A \neq B$, $A \neq C$, l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ est $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$.

Si E est un plan affine euclidien orienté, l'angle orienté $\overrightarrow{BAC}$ est $\overrightarrow{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$.

Remarque : On a $d(A, B) = 0 \iff A = B$, $d(A, B) = d(B, A)$ et

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

On dit que d est une distance. On a de manière plus générale :

$$d(A_0, A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(A_{k-1}, A_k)$$

D'autre part :

$$|d(A, B) - d(B, C)| \leqslant d(A, B)$$

Dans toute la suite, E et F désigneront des espaces affines euclidiens de dimension finie.

Proposition 476 (Théorème de Pythagore) *Soient A, B et C dans E. Alors, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si :*

$$\|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AC\|^2$$

Définition 380 *Soient F un sous-espace affine de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$.*

*L'*affinité orthogonale par rapport à F de rapport λ *est l'affinité de E, de rapport λ, par rapport à F et parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$.*

Si $\lambda = 0$, on l'appelle projection orthogonale sur F *et si $\lambda = -1$, on l'appelle* symétrie orthogonale par rapport à F.

Enfin, si $\lambda = -1$ et si F est un hyperplan affine, on l'appelle réflexion.

2) Distance d'un point à un sous-espace affine :

Définition 381 *Soient A et B deux parties non vides de E, $M \in E$.*
On appelle distance de M à A *le réel positif :*

$$d(M,A) = \inf_{N \in A} \|\overrightarrow{NM}\|$$

et distance de A à B *:*

$$d(A,B) = \inf_{N \in A, P \in B} \|\overrightarrow{NP}\|$$

Théorème 224 *Soient F un sous-espace affine de E, $M \in E$ et P le projeté orthogonal de M sur F. Alors :*

$$d(M,F) = d(M,P) \text{ et si } N \in F,\ N \neq P \text{ , on a } d(M,N) > d(M,P)$$

De plus, si $(\Omega, e_1, e_2, \ldots, e_p)$ désigne un repère de F, on a :

$$d(M,F) = \frac{\mathcal{G}(\overrightarrow{\Omega M}, e_1, e_2, \ldots, e_p)}{\mathcal{G}(e_1, e_2, \ldots, e_p)}$$

<u>Exemple :</u> • Dans le cas où F est un hyperplan H rapporté au repère $(\Omega, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$:

$$d(M,H) = \frac{|[\overrightarrow{\Omega M}, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}]|}{\mathcal{G}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})}$$

• Si $\dim E = 2$, D la droite $\Omega + \mathbb{R}e$,

$$d(M,D) = \frac{|[\overrightarrow{\Omega M}, e]|}{\|e\|}$$

• Si $\dim E = 3$ et D la droite $\Omega + \mathbb{R}e$,

$$d(M,D) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega M} \wedge e\|}{\|e\|}$$

• Si $\dim E = 3$ et P le plan $\Omega + \mathbb{R}e + \mathbb{R}\varepsilon$,

$$d(M,P) = \frac{\|[\overrightarrow{\Omega M}, e, \varepsilon]|}{\|e \wedge \varepsilon\|}$$

3) Distances et hyperplans affines :

• Soients E rapporté à un repère $(\Omega, e_1, e_2, \ldots, e_n)$, H un hyperplan affine d'équation cartésienne :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

ou encore, si $k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$:

$$(\overrightarrow{\Omega M} | k) = b$$

On dit que c'est une *équation normale de H si* $\|k\| = 1 = a_1^2 + \ldots + a_n^2$.

Proposition 477 *Soit* $M : \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$*. Alors :*

$$d(M,H) = \frac{|a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}} = \frac{|a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n - b|}{\|k\|}$$

Si l'équation est normale : $d(M,H) = |a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n - b|$*.*

- Lignes de niveau : $(k|\overrightarrow{\Omega M}) = \lambda$.

Proposition 478 *Soient* $\Omega \in E$ *et* $k \in \overrightarrow{E}$ *non nul. On note pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$H_\lambda = \{M \in E,\ (k|\overrightarrow{\Omega M}) = \lambda\}$$

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, H_λ *est un hyperplan de direction* $k^\perp$*.*
2. *Pour tout hyperplan affine* H *de direction* $k^\perp$*, il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $H = H_\lambda$*.*

- Hyperplan médiateur :

Théorème 225 *Soient* A *et* B *deux points distincts de* E*. On considère :*

$$\mathcal{H} = \{M \in E,\ d(A,M) = d(B,M)\}$$

$\mathcal{H}$ *est l'hyperplan affine passant par* $I = \frac{A+B}{2}$ *et de direction* $\overrightarrow{AB}^\perp$ *:*

$$\mathcal{H} = \frac{A+B}{2} + \overrightarrow{AB}^\perp$$

Définition 382 *L'hyperplan* $\mathcal{H}$ *défini dans la proposition précédente est appelé* hyperplan médiateur de A et B*, ou encore* médiatrice *si* $\dim E = 2$ *et* plan médiateur *si* $\dim E = 3$*.*

4) Isométrie affines :

Définition 383 *On suppose que* $\dim E = \dim F$*.*

Une isométrie (affine) de E sur F *est une application affine* $u : E \longrightarrow F$ *tel que* $\overrightarrow{u} \in O(E,F)$*.*

On note $\mathcal{I}(E,F)$ *l'ensemble des isométries de* E *sur* F *et* $\mathcal{I}(E)$ *pour* $\mathcal{I}(E,E)$*.*

Remarque : • Si $u \in \mathcal{I}(E)$, on a :

$$d(u(A),u(B)) = \|\overrightarrow{u(A)u(B)}\| = \|\overrightarrow{u}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B)$$

- $\mathcal{I}(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

Exemple : Les translations et les symétries orthogonales sont des isométries.

Définition 384 *Une isométrie de* E *est un* déplacement *si* $\overrightarrow{u} \in SO(E)$*. Dans le cas contraire, on dit que* u *est un antidéplacement.*

On note $\mathcal{I}^+(E)$ *l'ensemble des déplacements de* E *et* $\mathcal{I}^-(E)$ *l'ensemble des antidéplacements de* E*.*

Remarque : • Compositions des déplacements et des antidéplacements.

- $\mathcal{I}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{I}(E)$.
- Conservation des angles.

Exemple : • Les translations sont des déplacements.

- La symétrie orthoganale par rapport à F est un déplacement si $\dim E - \dim F$ est paire et un antidéplacement si $\dim E - \dim F$ est impaire.
- Une réflexion affine est un antidéplacement.

Théorème 226 *Soient A et B deux points de E. Il existe une unique réflexion affine u qui échange A et B i.e. telle que $u(A) = B$ et $u(B) = A$.*

Exemple : Donner A, B, M. Calculer $u(M)$.

II. Isométries d'un plan affine euclidien

Dans ce paragraphe, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté.

1) Déplacements de $\mathcal{P}$:

Définition 385 *Soient $\Omega \in \mathcal{P}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et r_θ la rotation d'angle θ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.*
La rotation d'angle θ et de centre Ω *est l'application :*

$$r_{\Omega,\theta} : M \in \mathcal{P} \longmapsto \Omega + r_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$$

Proposition 479 *Les rotations de $\mathcal{P}$ sont des déplacements.*

Théorème 227 *Soit $u \in \mathcal{I}(\mathcal{P})^+$.*
1. Si $\overrightarrow{u} = I_{\overrightarrow{E}}$, u est une translation.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq I_{\overrightarrow{u}}$, il existe Ω dans $\mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que u soit la rotation d'angle θ, de centre Ω.

Remarque : $\mathcal{I}^+(E)$ est le groupe des rotations-translations de $\mathcal{P}$. Si on identifie $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$, ces transformations s'écrivent :

$$z \longmapsto e^{i\theta} z + a$$

2) Antidéplacements de $\mathcal{P}$:

Nous savons que les réflexions affines sont des antidéplacements. Il en existe d'autres :

Définition 386 *Soient D une droite de E, x un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ non nul.*
On appelle symétrie glissée par rapport à D de vecteur x *la composée de la symétrie orthogonale par rapport à D et de la translation de vecteur x (cette composée commute).*

Remarque : Une symétrie glissée n'a aucun point invariant. C'est un antidéplacement.

Proposition 480 *Soit u un antidéplacement de $\mathcal{P}$.*
1. Si u possède un point invariant, u est une réflexion affine.
2. Si u n'a pas de point invariant, u est une symétrie glissée.

Remarque : Comment distinguer les cas ? Soient $d \in \ker(\overrightarrow{u} - I)$ et $M \in E$, $M' = u(M)$.

• Si $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à d , u est la symétrie par rapport à la droite passant par le milieu de M et M' dirigé par d.

• Si $\overrightarrow{MM'}$ n'est pas orthogonal à d, u est la symétrie glissée par rapport à la droite passant par le milieu de M et M' dirigé par d et de vecteur x où

$$\overrightarrow{MM'} = x_{\in \ker(\overrightarrow{u} - I)} + y_{\in \ker(\overrightarrow{u} - I)^\perp}$$

Conclusion : Classification des isométries selon les points invariants.

3) Composition et décomposition d'isométries :

• La composée de réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation. Réciproquement, toute translation se décompose en un produit de deux réflexions par rapport à des droites parallèles.

• La composée de deux symétries par rapport à des droites sécantes en Ω est une rotation de centre Ω. Réciproquement, une rotation de centre Ω se décompose en symétries par rapport à des droites sécantes en Ω.

Proposition 481 *Les réflexions engendrent $\mathcal{I}(\mathcal{P})$.*

Exercice : Construire la composée de deux rotations.
Remarque : Si $\mathcal{P}$ est identifié à $\mathbb{C}$, les antidéplacements de E sont les applications du type $z \longmapsto e^{i\theta}\bar{z} + a$.

III. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté.

1) Déplacements de $\mathcal{E}$:

Définition 387 *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et D une droite affine, k un vecteur unitaire de $\overrightarrow{D}$.*
La rotation d'angle θ et d'axe D orienté par k *est l'application qui à $M = P_{\in D} + x_{\in D^\perp}$ associe :*

$$P + r_{\theta,k}(x)$$

Dessin !

Proposition 482 *Si u est une rotation d'angle θ, d'axe orienté D, u est un déplacement.*

Exemple : Les *demi-tours* sont les rotations d'angle π ; c'est aussi les symétries par rapport à une droite.

Définition 388 *Soient u une rotation d'angle θ d'axe orienté D, $x \in \overrightarrow{D} = \ker(\overrightarrow{u} - I)$.*
Alors $u = t_x \circ u$ est appelé vissage d'axe orienté D, d'angle θ et de vecteur x.

Proposition 483 *Soit u un déplacement de $\mathcal{E}$.*
1. Si u possède un point fixe, il existe θ et un axe orienté D tel que u soit la rotation d'angle θ et d'axe orienté D.
2. Si u n'a pas de point fixe, il existe θ et un axe orienté D, $x \in \overrightarrow{D}$ non nul tel que u est le vissage d'axe orienté D, d'angle θ et de vecteur x.

Remarque : Soit u un déplacement, $P = \ker(\overrightarrow{u} - I)^\perp$, $M \in \mathcal{E}$, $M' = u(M)$. Alors $\overrightarrow{MM'} = x + y$ avec $x \in \ker(\overrightarrow{u} - I)$ et $y \in P$. u est une rotation si et seulement si $x = 0$. Sinon, u est un vissage d'angle θ et de vecteur x.
Remarque : • Si D_1 est parallèle à D_2, $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une translation. Réciproquement, toute translation se décompose en produit de deux demi-tours de droites parallèles.

• Si D_1 et D_2 sont sécantes en Ω, $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une rotation d'axe la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 de centre Ω. Réciproquement, toute rotation se décompose en produit de demi-tours de droites sécantes.

• Si D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires, $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est un vissage. Réciproquement, tout vissage se décompose en produit de deux demi-tours de droites non coplanaires.

Proposition 484 *Les demi-tours de $\mathcal{E}$ engendrent $\mathcal{I}^+(\mathcal{E})$.*

2) Antidéplacements de $\mathcal{E}$:

Proposition 485 *Soit u un antidéplacement de $\mathcal{E}$.*

1. Si u possède un point invariant, u s'écrit de manière unique $v \circ w$ où v est une rotation d'angle θ, d'axe orienté D et w une symétrie par rapport à un point de D.

2. Si u ne possède pas de point invariant, u s'écrit $t_x \circ v$ où v est une réflexion et $x \in \ker(\overrightarrow{v} - I)$ (on parle aussi de symétrie glissée.

Remarque : Si l'angle de la rotation dans le cas vaut π, il s'agit d'une réflexion.
Conclusion : Classification des isométries selon les points invariants.

IV. Cercles et sphères

1) Boules et sphères :

Définition 389 *Un espace affine E est dit* normé *si $\overrightarrow{E}$ est muni d'une norme.*

Définition 390 *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé, $\Omega \in E$ et $R > 0$.*

La sphère de centre Ω et de rayon R *est $S(\Omega, R) = \{M \in E,\ \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\}$.*

La boule ouverte de centre Ω et de rayon R *est $B(\Omega, R) = \{M \in E,\ \|\overrightarrow{\Omega M}\| < R\}$.*

La boule fermée de centre Ω et de rayon R *est $\bar{B}(\Omega, R) = \{M \in E,\ \|\overrightarrow{\Omega M}\| \leqslant R\}$.*

Si $\dim E = 2$, *on parle respectivement de* cercle de centre Ω et de rayon R, *de* disque ouvert de centre Ω et de rayon R *et de* de disque fermé de centre Ω et de rayon R.

Exemple : Si $\dim E = 1$ et si la norme est la valeur absolue, $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$, $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et $\bar{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

On va s'intéresser au cas euclidien.

2) Equation cartésienne d'une sphère :

Théorème 228 *Soient E un espace affine euclidien, $\Omega \in E$, $k \in \overrightarrow{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons*

$$S = \{M \in E, \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 + (k|\overrightarrow{\Omega M}) + \lambda = 0\}$$

Alors, S est une sphère, ou un singleton, ou l'ensemble vide.

Donnons une interprétation analytique de ce théorème : Si on rapporte E à un repère $(\Omega, e_1, \dots, e_n)$, si on note $k : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, l'équation :

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 + (k|\overrightarrow{\Omega M}) + \lambda = 0$$

devient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda = 0$$

CNS pour qu'on ait bien une sphère : $\lambda > \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Le rayon est alors $\sqrt{\lambda - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ et le centre $(-a_1/2, \dots, -a_n/2)$.

Proposition 486 *1. Supposons le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère (Ω, i, j). Alors, l'équation du cercle de centre de coordonées (a, b) de rayon R est :*

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

où $c = a^2 + b^2 - R^2$. Le disque ouvert a pour équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$$

2. Supposons l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ rapporté à un repère (Ω, i, j, k). Alors, l'équation de la sphère de centre de coordonées (a, b, c) de rayon R est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Le disque ouvert a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d < 0$$

3) Intersection de sphères et de sous-espaces affines :

Théorème 229 *Soit F un sous-espace affine de E, S une sphère de centre Ω et de rayon R, P le projeté orthogonal de Ω sur F, $d = d(\Omega, F)$. Alors, l'intersection de F et S est :*
1. $\emptyset$ si $d > R$ (on dit que S et F sont disjoints);
2. $\{P\}$ si $d = R$ (on dit que S et F sont tangents);
3. la sphère de F de centre P et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$ (on dit que F et S sont tangents).

Exemple : Cas où $\dim F = 1$ ou 2.

Théorème 230 *Soient $S = S(\Omega, R)$ et $S' = S(\Omega', R')$, $\Omega \neq \Omega'$. Alors $S \cap S'$ est :*
1. une sphère d'un hyperplan affine de direction $\overrightarrow{\Omega\Omega'}^{\perp}$ centrée sur la droite (Ω, Ω') lorsque

$$|R' - R| < \|\Omega\Omega'\| < R + R'$$

2. un point de $(\Omega\Omega')$ si $\|\Omega\Omega'\| = R + R'$ ou $|R' - R|$.
3. $\emptyset$ si $\|\Omega\Omega'\| < |R' - R|$ ou $\|\Omega\Omega'\| > R + R'$.

Dessin.

4) Etude de lieux géométriques :

a- Points M tels que $(MA|MB) = 0$:

Soient A et B deux points de E, $A \neq B$. Alors l'ensemble des points M de E tels que $(\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}) = 0$ est la sphère centre le milieu de A et B et de rayon $1/2\|\overrightarrow{AB}\|$; on dit que cette sphère est de diamètre $[AB]$.

i b- Points M tels que $d(A, M)/d(B, M) = \lambda$:

Soient A et B deux points de E, $A \neq B$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Alors l'ensemble des points M de E tels que $d(A, M) = \lambda d(B, M)$ est une sphère centrée sur (AB).

ii c- Points M tels que l'angle orienté $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$:

Soient $\mathcal{P}$ le plan affine auclidien orienté, $\alpha \in]0, \pi[$, A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$.

• L'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash\{A, B\}$ tels que $\overrightarrow{(AMB)} = \alpha \pmod{\pi}$ est un cercle passant par A et B privé des points A et B. Plus précisément, il existe un unique $\Omega \in \mathcal{P}$ tel que $\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \|\overrightarrow{\Omega B}\|$ et $\overrightarrow{A\Omega B} = 2\alpha \pmod{2\pi}$. Le cercle en question est centré en Ω (de rayon $\|\overrightarrow{\Omega A}\|$).

• L'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash\{A, B\}$ tels que $\overrightarrow{(AMB)} = \alpha \pmod{2\pi}$ est l'intersection du cercle précédent avec l'un des demi-plan ouverts limités par la droite affine (AB).

• On obtient la conséquence suivante : Si A, B, M sont trois points distincts sur un cercle centré en Ω,

$$\overrightarrow{(A\Omega B)} = 2\overrightarrow{(AMB)} \pmod{2\pi}$$

V. Géométrie du triangle

$\mathcal{P}$ désigne un plan affine, $T = (A, B, C)$ trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

1) Propriétés affines :

a- Les médianes sont concourantes :

Soient :

$$I = \frac{B+C}{2}, \quad J = \frac{C+A}{2}, \quad K = \frac{A+B}{2}$$

les mileux de chaque cotés du triangle. On appelle *médiane de T* les droites (AI), (BJ) et (CK).

Proposition 487 *Les médianes de T sont concourantes en $G = \frac{A+B+C}{3}$ l'isobarycentre des points A, B et C.*

i b- Théorème de Ménélaüs :

Soient $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ et $P \in (AB)$ trois points de $\mathcal{P}$ distincts des sommets A, B et C de T. Alors

Proposition 488 (Théorème de Ménélaüs) *M, N et P sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} . \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} . \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

ii c- Théorème de Céva :

Proposition 489 (Théorème deCéva) *(AM), (BN) et (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si :*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} . \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} . \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

2) Propriétés métriques :

On suppose maintenant $\mathcal{P}$ affine euclidien orienté.

a- Angles dans un triangle :

Soient $\hat{A} = \widehat{CAB}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{BCA}$. On dit que le triangle T est *rectangle* si l'un de ces angles vaut $\frac{\pi}{2}$. On pose :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|, \quad BC = \|\overrightarrow{BC}\| \text{ et } CA = \|\overrightarrow{CA}\|$$

On dit que T est *isocèle* si deux de ces longueurs sont égales et *équilatéral* si $AB = BC = CA$.

Théorème 231 *On a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$.*

Proposition 490 *On a :*

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AB.CA.\cos \hat{A}$$

Si T est rectangle en A (i.e. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux) :

$$\cos \hat{A} = \frac{CA}{AB}, \quad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} \quad \textit{et} \quad \tan \hat{A} = \frac{BC}{CA}$$

i b- Médiatrices :

On appelle *médiatrices de T* les droites médiatrices des couples de points (A, B), (B, C) et (C, A).

Théorème 232 *Les médiatrices de T sont concourantes et se coupent en un point Ω tel que $\Omega A = \Omega B = \Omega C$.*

Le *cercle circonscrit à T* est le cercle centré en Ω passant par A, B et C.

Proposition 491 *Si R désigne le rayon de cercle :*

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{CA}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{A}} = 2R$$

ii c- Hauteurs et orthocentre :

Les *hauteurs de T* sont les droite $h_A = A + \overrightarrow{BC}^{\perp}$, $h_B = B + \overrightarrow{CA}^{\perp}$ et $h_C = C + \overrightarrow{AB}^{\perp}$.

Théorème 233 *Les hauteurs h_A, h_B et h_C sont concourantes en un point H appelé* orthocentre de T.

Théorème 234 *On a :*

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$$

et Ω, H et G sont alignés. Si T n'est pas équilatéral, Ω est distinct de G, et la droite (ΩG) est appelé droite d'Euler du triangle T.

iii d- Bissectrices :

Proposition 492 *Soient i et j deux vecteurs unitaires de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $x \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $x \neq 0$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $(\overrightarrow{i, x}) + (\overrightarrow{j, x}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ *(resp.* $\pi \pmod{2\pi}$*).*
(ii) $\widehat{i, x} = \widehat{j, x}$ *(resp.* $\pi - \widehat{j, x}$*).*
(iii) $x \in \mathbb{R}(i + j)$ *(resp.* $x \in \mathbb{R}(i - j)$*).*

Soient $i = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $j = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$. La *bissectrice intérieure en* A est $D_A = A + \mathbb{R}(i+j)$ et la *bissectrice extérieure en* A est $\Delta_A = A + \mathbb{R}(i-j)$. On définit de même D_B, Δ_B, D_C et Δ_C.

Théorème 235 *Soient $D = (AB)$ et $D' = (AC)$.*

L'ensemble des points de M de $\mathcal{P}$ tel que $d(M,D) = d(M,D')$ est la réunion des deux bissectrices en A, D_A et Δ_A.

Théorème 236 *D_A, D_B, D_C ont un point unique en commun.*

Δ_A, Δ_B, D_C ont un point unique en commun.

Δ_A, D_B, Δ_C ont un point unique en commun.

D_A, Δ_B, Δ_C ont un point unique en commun.

Les points ainsi définis sont équidistants des droites (AB), (BC) et (CA). Ils sont les centres de cercles tangents à (AB), (BC) et (CA). Le premier cercle est le *cercle inscrit dans* T. Les trois autres sont les *cercles exinscrits de* T.

VI. Similitudes

1) Généralités :

Définition 391 *Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. On dit que u est une* similitude *s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $(A,B) \in E^2$:*

$$\|\overrightarrow{u(A)u(B)}\| = k\|\overrightarrow{AB}\|$$

k est alors appelé rapport de la similitude.

Proposition 493 *Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est une similitude ;

(ii) Il existe $k > 0$ tel que $\overrightarrow{u} = kv$ où $v \in O(E)$.

Dans ces conditions, k est le rapport de la similitude.

Exemple : Les isométries, les homothéties sont des similitudes.

Remarque : Une similitude conserve les angles non orientés.

Corollaire 112 *La composée de deux similitudes de rapport k et k' est une similitude de rapport kk'. Une similitude de rapport est bijective, et sa réciproque est une similitude de rapport $1/k$. Ainsi, l'ensemble des similitudes de E est un sous-groupe de $GA(E)$.*

Définition 392 *Soit u une similitude.*

u est dit directe *(resp.* indirecte*) si* det $\overrightarrow{u} > 0$ *(resp.* det $\overrightarrow{u} > 0$*).*

Remarque : Composée de similitudes directes, indirectes...

2) Similitudes directes d'un plan euclidien orienté :

On suppose $\mathcal{P}$ orienté.

Exemple : Les homothéties, les translations, les rotations sont des similitudes directes.

Remarque : Les similitudes directes conserve les angles orientés. Une similitude indirecte les change en leur opposé.

Théorème 237 *Soit u une similitude directe de rapport k. On suppose que u n'est pas une translation.*

Alors u admet un unique point fixe Ω appelé centre de u. *De plus, u s'écrit de manière unique $u = h \circ r$ où h est une homothétie de centre Ω et de rapport k, r une rotation de centre Ω. L'*angle de u *est l'angle de r.*

Proposition 494 *Soit u et u' deux similitudes directes d'angle α et α'. Si modulo 2π, $\alpha + \alpha' \not\equiv 0$, $u \circ u'$ est une similitude d'angle $\alpha + \alpha'$.*

Remarque : Si $\mathcal{P}$ est identifié à $\mathbb{C}$, une similitude directe est une application de la forme $z \in \mathbb{C} \longmapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Si $a = 1$, c'est une translation de vecteur b, sinon c'est similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

Les similtudes indirectes sont les applications du type $z \in \mathbb{C} \longmapsto a\bar{z} + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Théorème 238 *Soient $A \neq B$ et $A' \neq B'$ dans $\mathcal{P}$.*

Il existe alors une unique similitude directe u telle que $u(A) = A'$ et $u(B) = B'$. Son rapport est $A'B'/AB$ et, lorsque u n'est pas une translation, son angle est l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Chapitre 6

Arcs paramétrés

Dans ce chapitre, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé positif, $P = \overrightarrow{\mathcal{P}}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, $k \geqslant 1$ un entier.

I. Arcs paramétrés

1) Compléments de calcul différentiel :

Rappel : Dérivation d'une fonction $f : I \longrightarrow E$. Utilisation d'une base.

Proposition 495 *Soit* $\varphi : P^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire,* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivables. Alors* $\psi : t \in I \longmapsto \varphi(f(t), g(t))$ *est dérivable et si* $t \in I$ *:*

$$\psi'(t) = \varphi(f'(t), g(t)) + \varphi(f(t), g'(t))$$

Corollaire 113 *Soit* $f, g : I \longrightarrow P$ *dérivables. Alors* $\varphi : t \in I \longmapsto (f(t)|g(t))$ *est dérivable et si* $t \in I$

$$\varphi'(t) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$$

Remarque : Cas où f et g sont $\mathcal{C}^k$.

Corollaire 114 *Soit* $f, g : I \longrightarrow P$ *dérivables,* $\mathcal{B}$ *une base. Alors :*

$$\varphi : t \in I \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(t), g(t))$$

Alors φ *est dérivable et si* $t \in I$ *:*

$$\varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f'(t), g(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f(t), g't))$$

Remarque : Cas où f et g sont $\mathcal{C}^k$.

2) Vocabulaire :

Définition 393 *Un* arc paramétré de E *(de classe* $\mathcal{C}^k$*) est une application* $\varphi : t \in I \longmapsto M(t) \in E$ *de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

$\Gamma = \varphi(I)$ *est appelé* support de l'arc. *On dit aussi que* Γ *est une* courbe paramétrée définie par le paramétrage $t \longmapsto \varphi(t) = M(t)$, t *est appelé le* paramètre.

On dit que φ *est* simple *si* φ *est injective. Un point* $A \in \Gamma$ *est dit de multiplicité* $n \in \mathbb{N} \cup +\infty$ *si* Card $\varphi^{<-1>}(\{A\}) = n$*. Si* $n = 1$*, on parle de* point simple*, si* $n = 2$*, de* point double*...*

Remarque : Par abus de langage, on confond l'arc φ et son support Γ. En cinématique du point, $\varphi(t) = M(t)$ est appelé *point mobile* et Γ est la *trajectoire*.

Dans la suite, $\varphi : t \in I \longmapsto M(t)$ désigne un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

3) Vecteurs dérivés :

Définition 394 *On appelle* vecteur dérivé de φ en $t_0 \in I$ *(ou encore* vecteur vitesse*) le vecteur :*

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = \varphi'(t_0)$$

Si $k \geqslant 2$, on appelle vecteur dérivé second de φ en $t_0 \in I$ *(ou encore* vecteur accélération*) le vecteur :*

$$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0) = \varphi''(t_0)$$

Si $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) \neq 0$, le point $M(t_0)$ est dit régulier. *Si $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = 0$, le point $M(t_0)$ est dit* stationnaire. *Si $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ et $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0)$ sont libles, c'est-à-dire, si :*

$$\det\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\right)(t_0) \neq 0$$

on dit que le point $M(t_0)$ est birégulier.

L'arc est dit régulier *(resp.* birégulier*) si tous les points de l'arcs le sont.*

4) Changement de paramétrages :

Soit $T : u \in J \longmapsto t(u) \in I$. On rappelle que T est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si T est bijectif et T et T^{-1} sont $\mathcal{C}^k$. Pour cela, il suffit que :

- T soit $\mathcal{C}^k$,
- $T' > 0$ où $T' < 0$,
- $T(J) = I$.

Alors $\psi : u \in J \longmapsto \varphi(t(u))$ est un arc $\mathcal{C}^k$ de même support Γ que φ. On dit que l'on effectué le *changement de paramétrage* $t = t(u)$.

Proposition 496 *Les changements de paramétrages ne changent pas le caractère régulier ou birégulier des points d'un arc.*

Si $T' > 0$, i.e. T croissant, on dit que φ et ψ définissent la *même orientation*. Si $T' < 0$, l'orientation est dite opposé.

II. Etude locale des courbes planes :

1) Demi-tangentes :

On considère un arc $\varphi : t \in I \longmapsto M(t) \in P$. Soit $t_0 \in I$. On suppose qu'au voisinage de t_0, si $t \neq t_0$, $M = M(t) \neq M(t_0) = M_0$. On pose alors $D_t = (M(t_0)M(t)) = (M_0M)$ et :

$$\tau(t) = \frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\|\overrightarrow{M_0M(t)}\|}$$

On suppose que les limites :

$$\tau_1 = \lim_{t \to t_0^+} \tau(t) \quad \text{et } \tau_2 = \lim_{t \to t_0^-} \tau(t) \text{ existent.}$$

τ_1 et τ_2 sont unitaires.

Définition 395 *Les demi-droites $M_0 + \mathbb{R}_+\tau_1$ et $M_0 + \mathbb{R}_+\tau_2$ sont apellées* demi-tangentes à l'arc *φent_0.*

Si τ_1 et τ_2 sont colinéaires, la droite $T_0 = M_0 + \mathbb{R}\tau_1$ est la tangente à l'arc φ en M_0*. La droite N_0 orthogonale à T_0 passant par M_0 est appelé* normale à l'arc φ en M_0*.*

Remarque : dessin

Si $\tau_1 = -\tau_2$, les deux demi-tangentes sont opposées et on oriente T_0 par τ_1.

Si $\tau_1 = \tau_2$, les deux demi-tangentes sont confondues et on dit que M_0 est un *point de rebroussement.*

2) Condition suffisante d'existence des tangentes :

Rappel : Formule de Taylor-Young pour les fonctions vectorielles.

Théorème 239 *On suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que :*

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = \dots \frac{\overrightarrow{d^{p-1}M}}{dt^{p-1}}(t_0) = 0 \quad et \quad \frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0) \neq 0$$

Alors, l'arc admet une tangente en M_0 qui est la droite :

$$M_0 + \mathbb{R}\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$$

De plus, M_0 est un point de rebroussement si, et seulement si p est pair et la demi-tangente est $M_0 + \mathbb{R}_+\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$.

Exemple : Si $p = 1$, i.e. si M_0 est régulier, l'arc admet une tangente :

$$M_0 + \mathbb{R}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

Ce n'est pas un point de rebroussement.

On oriente dans ces conditions la tangente par $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0)$

3) Classification des points admettant une tangente :

On considère un arc $\varphi : t \in I \longmapsto M(t) \in P$. Soit $t_0 \in I$, $M_0 = M(t_0)$. Soit Δ une droite passant par M_0.

Définition 396 *On dit que l'arc tranverse Δ en t_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'un des deux plans ouverts délimités par H contient tous les points de l'arc pour $t \in]t_0, t_0 + \alpha[$ et l'autre demi-plan tous points correspondant à $t \in]t_0 - \alpha, t_0[$.*

Théorème 240 *Supposons qu'il existe $p \geqslant 1$ tels que $\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0) \neq 0$. On choisit de plus p minimal. On suppose ensuite qu'il existe $q > p$ tel que $\frac{\overrightarrow{d^qM}}{dt^q}(t_0)$ et $\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$ soient libres. On choisit là encore q minimal. Dans ces conditions, on a l'un des quatre cas suivants :*

1. p impair, q pair : l'arc tranverse toute droite passant par M_0 sauf sa tangente en M_0. On dit que M_0 est un point ordinaire.

2. p impair, q impair : l'arc tranverse toute droite passant par M_0, y compris sa tangente. On dit que M_0 est un point d'inflexion.

3. p pair, q impair : l'arc ne tranverse aucune droite passant par M_0 sauf sa tangente. On dit que M_0 est un point de rebroussement de première espèce.

4. p pair, q pair : l'arc ne tranverse aucune droite passant par M_0, y compris sa tangente. On dit que M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce.

Remarque : Dans la pratique on fait des DL.

Définition 397 *Dans le cas 1., si on note $H = M_0 + \mathbb{R}\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0) + \mathbb{R}_+^*\frac{\overrightarrow{d^qM}}{dt^q}(t_0)$, H est le demi-plan délimité par la tangente en M_0 et contenant la demi droite $M_0 + \frac{\overrightarrow{d^qM}}{dt^q}(t_0)$. Ce demi plan est appelé* concavité de l'arc en M_0. *Il contient contient tous les points $M(t)$ pour t voisin de t_0.*

Exemple : Pour un point birégulier, on se trouve dans le cas 1. et

$$H = M_0 + \mathbb{R}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) + \mathbb{R}_+^*\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)$$

Le vecteur accélération est dirigé vers la concavité.

III. Etude des arcs paramétrés en coordonnées cartésiennes

On considère une fonction :

$$\varphi : t \longmapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

1) Domaine d'étude :

On détermine d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}$ de φ en faisant notamment attention aux ln, $\sqrt{}$, t^α, dénominateurs...

On cherche ensuite à réduire le domaine d'étude D :

1. On cherche D_1 tel que $\varphi(D_1) = \Gamma$. Par exemple, si φ est T-périodique, on peut prendre $D_1 = \mathcal{D} \cap [a, a+T]$, a quelconque. Cas où x et y sont paires.

2. On cherche D_2 telle que Γ soit la réunion de $\Gamma' = \varphi(D_2)$ et d'images de Γ' par des transformations simples. Si x paire et y impaire, on prend $D_2 = \mathbb{R}_+ \cap D_1$, puis on fait une symétrie par rapport à $O + \mathbb{R}i$. Cas x impaire, y paire puis x et y impaires.

Il peut arriver que le tracé suggère que l'arc possède une certaine symétrie. On s'attachera alors à justifier cette symétrie.

2) Tableaux de variations :

On étudie la régularité de φ.

On calcule x' et y' et on fait le tableau de variations de x et y. On mentionnera notamment les points où φ n'est pas définie, les points tels que $x'(t) = 0$ ou $y'(t) = 0$, le signe de x' et y' et les variations de x et y avec les limites éventuelles de x et y aux bornes du domaine d'études.

3) Points stationnaires :

On recherche les points stationnaires M_0 i.e. les $t_0 \in D$ tels que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

• On déterminera la tangente en ces points stationnaires :

1. soit en trouvant le plus petit p tel que $\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^p M}{\mathrm{d}t^p}}(t_0) \neq 0$.

2. soit en considérant $p(t) = \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$: si $p(t)$ tend vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en t_0, l'arc admet en M_0 une tangente de pente l.

3. soit en considérant $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (pente de la tangente en $M(t)$) : si $m(t)$ tend vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en t_0, l'arc admet en M_0 une tangente de pente l.

• On peut ensuite s'intéresser à la nature des points stationnaires : on procède comme indiquer en **II.3)**.

4) Branches infinies :

Soit $t_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ une borne d'un intervalle du domaine de définition.

Définition 398 *On dit que l'arc φ présente une* branche infinie lorsque t tend vers t_0^+ *(BI en t_0^+) si $\lim_{t \to t_0^+} \|\overrightarrow{OM}(t)\| = +\infty$. On a une définition analogue avec t_0^-.*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que φ présente une BI en t_0^+. On dit que la droite $y = ax$ est une direction asymptotique de φ lorsque t tend vers t_0^+ *(DA en t_0^+ si :*

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = a$$

$x = 0$ *est une* direction asymptotique de φ lorsque t tend vers t_0^+ *si*

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$$

5) Asymptotes :

On suppose que φ admet une BI en t_0^+.

Définition 399 *Soit* $\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *une droite de* P. *On dit que* Δ *est* asymptote à φ quand t tend vers t_0^+ *si :*

$$\lim_{t \to t_0^+} \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma = 0$$

Remarque : • Cela signifie que $lim_{t \to t_0^+} d(M(t), \Delta) = 0$.

• Si Δ est asymptote à φ, alors la direction de Δ est direction asymptotique de φ, mais la réciproque est fausse.

Remarque : Pour rechercher les asymptotes éventuelles, on on étudie par exemple $y(t)/x(t)$ pour déterminer une DA.

• Si $y = ax$ est DA, on étudie $\lim_{t \to t_0^+} y(t) - ax(t)$. Cette limite existe si et seulement si φ admet une asymptote $y = ax + b$ où b désigne cette limite.

• Si $x = 0$ est DA, φ une asymptote si, et seulement si $\lim_{t \to t_0^+} x(t)$ existe. $x = b$ est alors asymptote (b désignant la limite en question).

On peut également s'interesser à la position de l'arc par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma$.

6) Branches paraboliques :

Définition 400 *On suppose que* φ *admet une* BI *en* t_0^+ *et une DA :* $y = ax$. *On dit que* φ *admet une* branche parabolique de direction $y = ax$ quand t tend vers t_0^+ *(BP) si :*

$$\lim_{t \to t_0^+} y(t) - ax(t) = \pm\infty$$

Définition 401 *On suppose que* φ *admet une* BI *en* t_0^+ *et une DA :* $x = 0$. *On dit que* φ *admet une* branche parabolique de direction $x = 0$ quand t tend vers t_0^+ *(BP) si :*

$$\lim_{t \to t_0^+} x(t) = \pm\infty$$

Remarque : On peut chercher simultanément DA, asymptotes, BP en faisant des DL de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers t_0^+.

7) Points asymptotes :

Définition 402 *Si* $\lim_{t \to t_0^+} x(t) = \alpha$ *et* $\lim_{t \to t_0^+} y(t) = \beta$, *on dit que* (α, β) *est un* point asymptote.

8) Etude de la concavité, points d'inflexion :

On suppose φ au moins $\mathcal{C}^2$.

On considère $\delta(t) = [\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}]$.

Proposition 497 *Si M_0 est un point d'inflexion, $\delta(t_0) = 0$. Réciproquement, si $\delta(t_0) = 0$ et $\delta(t)$ change en t_0 de signe au voisinage de t_0 et si M_0 est régulier, alors M_0 est un point d'inflexion.*

Au lieu de $\delta(t)$ on peut utiliser $m(t) = y'(t)/x'(t)$ si $x'(t_0) \neq 0$, car $\delta(t) = m'(t)x'(t)^2$ ce qui peut bien simplifier les calculs.

Le signe de $\delta(t)$ donne le sens dans lequel tourne la courbe. Si $\delta(t) > 0$, la courbe est parcouru "dans le sens trigonométrique" ; si $\delta(t) < 0$, c'est le sens inverse.

Enfin, on peut également s'intéresser aux points multiples.

9) Etude d'un exemple :

Construire l'arc défini par $x(t) = (t+2)e^{1/t}$ et $y(t) = te^{1/t}$. Points d'inflexion ?

IV. Courbes en coordonnées polaires :

1) Coordonnées polaires :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\overrightarrow{U}(\theta) = \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V}(\theta) = \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{V} = r(\overrightarrow{U})$ où r est la rotation vectorielle d'angle $+\pi/2$. Si on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on a : $\overrightarrow{U} = e^{i\theta}$ et $\overrightarrow{V}(\theta) = ie^{i\theta}$.

De plus :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{V} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{U}$$

Définition 403 *On dit que (ρ, θ) sont des* coordonnées polaires de $M = (x, y)$ *si $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.*

Si $M \neq O$, $M = (x, y)$, $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ_1 une mesure de l'angle orienté entre i et $\overrightarrow{OM}$, les coordonnées polaires de M sont les couples :

$$\rho = (-1)^k\rho_1 \quad \text{et} \quad \theta = \theta_1 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On a $\|\overrightarrow{OM}\| = |\rho|$.

2) Expression de certaines transformations :

Soient M de coordonnées polaires (ρ, θ), u une tranformation du plan. On suppose $u(M) = M'$.
• si u est homothétie de centre O et de rapport k : $\rho' = k\rho$, $\theta' = \theta$;
• si u est une similitude directe de centre O, de rapport k, d'angle α : $\rho' = k\rho$, $\theta' = \theta + \alpha$;
• si u est une symétrie par rapport à O : $\rho' = -\rho$, $\theta' = \theta$ ou $\rho' = \rho$, $\theta' = \theta + \pi$,
• si u est une symétrie par rapport à (Ox) : $\rho' = \rho$, $\theta' = -\theta$;
• si u est une symétrie par rapport à (Oy) : $\rho' = \rho$, $\theta' = \pi - \theta$ ou $\rho' = -\rho$, $\theta' = -\theta$;
• si u est la symétrie par rapport à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{U}(\alpha)$, $\rho' = \rho$, $\theta' = 2\alpha - \theta$;
et (ρ', θ') sont des coordonnées polaires de M'.

3) Equations polaires :

Soit G définie sur sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles.

Définition 404 *On appelle* équation polaire *une équation où les inconnues sont les points $M \in P$ de coordonnées (ρ, θ) vérifiant $G(\rho, \theta) = 0$.*

Exemple : Elle pourra souvent se mettre de la forme $\rho = f(\theta)$.

Proposition 498 *Une droite passant par O admet une équation polaire de la forme $\theta = \theta_0$. Une droite ne passant par O admet une équation du type $Ax + By = 1$ et une équation normale* $\cos\theta_0 x + \sin\theta_0 y = C$ *($C \neq 0$). Cette droite admet comme équation polaire :*

$$\rho = \frac{1}{A\cos\theta + B\sin\theta} \quad ou \quad \rho = \frac{C}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

Proposition 499 *Un cercle de centre O et de rayon r a comme équation polaire $\rho = r$. Un cercle passant par O possède une équation polaire de la forme $\rho = a\cos(\theta - \theta_0)$ où (a, θ) sont des coordonnées polaires de A tel que $[OA]$ est un diamètre du cercle.*

Remarque : Cas des cercles centré sur (Ox) passant par O.

4) Courbe définie par une représentation paramétrique polaire :

Etant donné deux applications $t \longmapsto \rho(t)$, $t \longmapsto \theta(t)$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$. Elles définissent *une représentation paramétrique polaire* de l'arc :

$$\varphi : t \longmapsto \rho(t)\overrightarrow{U}(\theta(t))$$

En coordonnées cartésiennes, c'est l'arc :

$$x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \rho(t)\sin\theta(t)$$

Certains arcs n'admettent pas de représentation paramétrique polaire. Cependant :

Théorème 241 *Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tout $t \in I$, on suppose $\varphi(t) = M(t) \neq 0$.*
Alors, il existe $t \longmapsto \rho(t)$ et $t \longmapsto \theta(t)$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $\varphi(t) = O + \rho(t)\overrightarrow{U}(\theta(t))$ pour tout $t \in I$.

On suppose $\varphi(t) = O + \rho(t)\overrightarrow{U}(\theta(t))$. Alors :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{U} + \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{V}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}^2\right)\overrightarrow{U} + \left(2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\overrightarrow{V}$$

5) Courbe définie par $\theta \longmapsto \rho(\theta)$:

On s'intéresse ici à : $\varphi(\theta) = M(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{U}(\theta)$ où $\theta \longmapsto \rho(\theta)$ est une application donnée de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$. Raccrocher à ce qui précède. On a :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\overrightarrow{U} + \rho\overrightarrow{V}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2} = (\rho'' - \rho)\overrightarrow{U} + 2\rho'\overrightarrow{V}$$

Soit $\theta_0 \in I$, $M_0 = M(\theta_0)$.

• On suppose $M_0 \neq O$. Alors $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ et M_0 est un point régulier. L'arc admet donc une tangente et une normale. On note $\beta = \widehat{\left(\overrightarrow{U}(\theta_0), \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)\right)}$. On a :

$$\cos\beta = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

et si $\rho' \neq 0$:

$$\tan\beta = \frac{\rho}{\rho'}$$

La tangente ne passe jamais par O. L'angle orienté α entre i et $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)$ est $\theta_0 + \beta$.

• Tangente en l'origine : on suppose $M_0 = O$. De plus, on suppose que ρ au voisinage de θ_0 ne s'annule qu'en θ_0. Alors l'arc admet en θ_0 une tangente dirigé par $\overrightarrow{U}(\theta_0)$. C'est un point de rebroussement si, seulement si ρ garde un signe constant au voisinage de θ_0. Préciser la demi-tangente.

6) Plan d'étude d'une courbe définie par $\theta \longmapsto \rho(\theta)$:

On peut se ramener aux coordonnées cartésiennes, mais il vaut mieux éviter.

• Réduction du domaine d'étude : on précise d'abord le domaine de définition.

- si ρ admet une période $2m\pi$, l'étude sur un intervalle de longueur $2m\pi$ donne la totalité de Γ.

- si $\rho(\theta + (2m+1)\pi) = -\rho(\theta)$, l'étude sur un intervalle de longueur $(2m+1)\pi$ donne la totalité de Γ.

- si T est une période de ρ, on fait l'étude sur un intervalle de longueur T. On obtient Γ'. Pour obtenir Γ, on prend la réunion des images de Γ' avec par les rotations centrés en O d'angle kT où $k \in \mathbb{Z}$.

- si $\rho(\theta + T) = -\rho(\theta)$, on fait l'étude sur un intervalle de longueur T. On obtient Γ'. Pour obtenir Γ, on prend la réunion des images de Γ' avec par les rotations centrés en O d'angle $k(T+\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- si ρ est paire, on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+$, puis une symétrie par rapport à (Ox).

- si ρ est impaire, on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+$, puis une symétrie par rapport à O.

• Tableau de ρ : Signe de ρ et valeurs où ρ s'annule. Eventuellement, calcul de ρ' et variations de ρ, calcul de $\tan\alpha$.

• Branches infinies : Supposons que $\lim_{\theta \to \theta_0^+} |\rho(\theta)| = +\infty$. Dans ces conditions, l'arc admet une DA dans la direction donné par $\overrightarrow{U}(\theta_0)$.

On se place alors dans le repère $(O, \overrightarrow{U}_0, \overrightarrow{V}_0)$, $\overrightarrow{U}_0 = \overrightarrow{U}(\theta_0)$, $\overrightarrow{V}_0 = \overrightarrow{V}(\theta_0)$. Soit $(X(\theta), Y(\theta))$ les coordonnées de $M(\theta)$ dans ce repère. Alors :

$$X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

La recherche de l'asymptote ou de la BP revient à l'étude de la limite de $Y(\theta)$ (qui en valeur absolue vaut $d(M(\theta), O + \mathbb{R}\overrightarrow{U}_0)$) en θ_0^+.

• Autres types de branche : supposons que $\lim \rho(\theta) = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $l = 0$, le point O est asymptote. Si $l \in \mathbb{R}^*$, le cercle d'équation polaire $\rho = l$ est *cercle asymptote*. Si l est infinie, on a une *branche infinie spirale*.

• Tracé : on utilise les renseignements précédents complétés par quelques valeurs et quelques tangentes.

• Concavité (si demandé) : on a :

$$\delta(t) = \left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}\right] = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$$

Si $\delta(t) > 0$, O est dans la concavité au point M_0. Les points d'inflexions s'obtiennent lorsque $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$ s'annule en changeant de signe.

En posant $u = 1/\rho$, on a $u + u'' = \rho^{-3}(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')$ d'où par là-même des calculs plus simples.

• Points multiples (si demandé).

7) Etudes de quelques exemples :

Tracé de courbes en polaires.

V. Etude métrique des courbes planes :

1) Longueur, abscisse curviligne :

Soit $\varphi : I \longmapsto \mathcal{P}$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$.

Théorème 242 *Soit $a < b$ dans I. Il existe un unique réel $L \geqslant 0$ appelé* longueur de l'arc entre *$M(a)$* et *$M(b)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout subdivision S de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, de pas inférieur ou égal à h,*

$$|L - L_S| \leqslant \varepsilon$$

$$\text{où} \quad L_S = \sum_{k=1}^{n} \|\overrightarrow{M(t_{k-1})M(t_k)}\|$$

De plus,

$$L = \int_a^b \left\|\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}\right\| dt$$

Définition 405 *Une* abscisse curviligne de *φ est une application $t \in I \longmapsto s(t) \in \mathbb{R}$ dérivable telle que :*

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}\right\|$$

Remarque : Soit $t_0 \in I$. Les abscisses curvilignes sont les applications de la forme :

$$s : t \in I \longmapsto \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M(t)}}{\mathrm{d}u} \right\| \mathrm{d}u + C$$

où C est une constante arbitraire. Si s est une abscisse curviligne, la longueur entre $M(a)$ et $M(b)$ est $s(b) - s(a)$.
Remarque : En coordonnées catésiennes, $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

En paramétrage polaire, $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2\theta'(t)^2}$$

Si l'arc est donné par $\rho = \rho(\theta)$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\rho(t)^2 + \rho'(t)^2}$$

2) Représentation normale d'un arc :

Définition 406 *Soit $\psi : t \in J \longmapsto g(t) \in \mathcal{P}$ un arc. On dit que ψ est un* paramétrage normal *si pour tout $u \in J$:*

$$\|\psi'(u)\| = 1$$

Remarque : $u \longmapsto s(u) = s$ est une abscisse curviligne.
Notation : On notera ainsi s au lieu de $s(u)$. On dit que l'arc est paramétré par l'abscisse curviligne.

On s'interèsse maintenant à l'existence de paramétrages normaux pour un arc quelconque :

Théorème 243 *Soit $\varphi : I \longmapsto \mathcal{P}$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, $g : t \longmapsto s$ une abscisse curviligne. Posons $J = g(I)$.*

Alors g est un changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$. Le paramétrage ψ induit sur J est alors un paramétrage normal.

3) Vecteur tangent, repère de Frenet :

Dans ce qui suit $\varphi : t \longmapsto M(t)$ est un un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$ et $\psi : s \in J \longmapsto M(s)$ le paramétrage normal induit par φ.
Remarque : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}$ est de norme 1.

Définition 407 *On appelle* vecteur tangent (en s) *le vecteur unitaire :*

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$$

Il est porté par la tangente en $M(s)$, il est unitaire et il oriente la tangente.

Remarque : On a :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}\right\|}$$

Définition 408 *On appelle* vecteur normal (en s) *le vecteur* $\overrightarrow{N}$ *tel que* $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ *soit une base orthonormale directe.*

Remarque : On obtient $\overrightarrow{N}$ par une rotation d'angle $\pi/2$.

Si on identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$, on obtient $\overrightarrow{N}$ en multipliant $\overrightarrow{T}$ par i.

Définition 409 *Le repère orthonormal direct* $(M(s), \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ *est appelé* repère de Frenet *(ou* repère mobile*).*

Remarque : Dessin !

4) Utilisation de l'angle α entre i et T :

Soit α l'angle orienté entre i et $\overrightarrow{T}$. On a $\overrightarrow{T} = \cos\alpha i + \sin\alpha j$. Donc en coordonnées cartésiennes :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

En polaire, $\alpha = \theta + \beta$ avec

$$\cos\beta = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

La fonction $t \longmapsto \overrightarrow{T}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. On peut alors définir α en fonction de t de manière $\mathcal{C}^{k-1}$:

Théorème 244 (Théorème de relèvement) *Il existe une application $t \longmapsto \alpha(t)$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ tel que $\alpha(t)$ soit l'angle orienté entre i et $\overrightarrow{T}(s)$.*

5) Courbure :

On suppose $k \geqslant 2$. On a $\psi''(s)$ colinéaire à $\overrightarrow{N}(s)$. Il existe un unique réel $\gamma(s)$ tel que :

$$\psi''(s) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}s^2} = \gamma(s)\overrightarrow{N}(s)$$

Définition 410 *Le réel $\gamma(s)$ est appelé* courbure (algébrique) en s. *La* courbure géométrique *est* $|\gamma(s)|$.

Remarque : Le point $M(s)$ est birégulier si $\gamma(s) \neq 0$.

Définition 411 *Si $M(s)$ est birégulier, on appelle* rayon de courbure algébrique en s *le réel* $R(s) = 1/\gamma(s)$. *Sa valeur absolue est le* rayon de courbure géométrique.

Proposition 500 (Formules de Frenet) *On a :*

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} \quad \textit{et} \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

Proposition 501 *Si $s \longmapsto \alpha(s)$ est la fonction angulaire $\overrightarrow{(i, \overrightarrow{T})}$:*

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

<u>Exemple :</u> Courbes de courbure nulle, de courbure constante non nulle.
<u>Remarque :</u> Si l'arc est birégulier, on peut donc paramétrer l'arc en fonction de α. Dans ces conditions :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\alpha} = -\overrightarrow{T}$$

6) Vitesse et accélération dans le repère de Frenet :

On a :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{T} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\overrightarrow{N}$$

<u>Remarque :</u> accélération tangentielle, accélération normale, expression en fonction de la vitesse.
<u>Remarque :</u> Expression de la courbure : dans tous les cas, on a :

$$\gamma(t) = \frac{\left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}{\left\|\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}\right\|^3}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\gamma = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

En paramétrage : $\rho = \rho(\theta)$:

$$\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2})} = \frac{u^3(u + u'')}{(u^2 + u'^2)^{3/2}}$$

si $u = 1/\rho$. Dans ces formules, il n'est point besion de déterminer un paramétrage normal. Si α se calcule aisément, on peut utiliser la formule :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

<u>Remarque :</u> Si un changement de paramétrage n'est pas positivement admissible, la courbure est changée en son opposée.

VI. Formes différentielles

1) Présentation :

Définition 412 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle* forme différentielle sur U *toute application $\omega : U \longmapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

Remarque : Dans ces conditions, il existe $A_1, \dots, A_n : U \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_j.$$

Les A_j sont appelés les coeffcients de la forme ω.

Définition 413 *Soit ω une forme différentielle sur U.*

On dit que ω est exacte *s'il existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $dF = \omega$: F est appelé* primitive de ω.

Exemple : $\omega : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{j=1}^n x_j \mathrm{d}x_j$ admet la primitive $F : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n x_j^2$.
Remarque : Si ω est exacte et si U est connexe, alors les primitives de ω diffèrent d'une constante.

2) Formes différentielles fermées :

Définition 414 *Soit ω une forme différentielle sur U de coefficients $A_1, \dots, A_N$. On dit que ω est* fermée sur U *si pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,*

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

Théorème 245 (Théorème de Poincaré) *Soit omega une forme différentielle sur U.*

Si ω est exacte, alors ω est fermée.

Réciproquement, si U est étoilé, ω fermée implique ω exacte.

Exemple : Montrer que

$$\frac{2x\tan y}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \frac{1+\tan^2 y}{1+x^2}\mathrm{d}y$$

est exacte et calculer un primitive ($(x, y) \longmapsto -\dfrac{\tan y}{1+x^2}$).

3) Intégrales curvilignes :

Dans ce paragraphe, on appellera arc orienté de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (ou plus simplement arc orienté) toute application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec I intervalle segment et φ $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 415 *Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que φ et Ψ sont* équivalent *s'il existe $\theta : I \longrightarrow J$ strictement croissante, bijective, $\mathcal{C}^1$ par morceaux ainsi que θ^{-1}, et vérifiant*

$$\varphi = \Psi \circ \theta.$$

Remarque : La relation "est équivalent à" est une relation déquivalence sur les arcs orientés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 416 *On appelle* courbe orientée *toute classe d'équivalence d'un arc orienté.*

Un arc paramétré $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ appartenant à la courbe orienté (C) est appelée paramétrisation de $\mathcal{C}$. *$\varphi(a) = A$ et $\varphi(b) = B$ sont appelées* origine *et* extrémité de (C) *respectivement.*

Si $A = B$, on dit que (C) est un lacet.

Théorème 246 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ω une forme différentielle sur U ; $\varphi : t \in [a,b] \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in U$ un arc orienté contenu dans U ($a < b$). On pose*

$$I_\varphi = \int_a^b \sum_{j=1}^n A_j(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_j'(t)\, dt.$$

Pour tout arc Ψ équivalent à φ, on a $I_\varphi = I_\Psi$.

Définition 417 *I_φ ne dépend donc que de ω et la courbe orientée (C) définie par φ. I_φ est appelée* intégrale curviligne de ω le long de $\mathcal{C}$. *On la note*

$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C)} A_1\, dx_1 + \cdots A_n\, dx_n.$$

4) Intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte :

Théorème 247 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ω une forme différentielle sur U, (C) une courbe orientée incluse dans U d'origine A et d'extrémité B.*

On suppose ω exacte et admettant F comme primitive . Alors

$$\int_{(C)} \omega = F(B) - F(A)$$

Corollaire 115 *Soit ω une forme différentielle exacte sur U, (C) un lacet. Alors*

$$\int_{(C)} \omega = 0.$$

Exemple : Montrer que $\omega : (x,y) \longmapsto -\frac{y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y$ est fermée mais non exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

5) Circulation d'un champs de vecteurs :

Soit $\overrightarrow{F} : (x_1, \ldots, x_n) \in U \longmapsto (F_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (c'est un champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$). La forme différentielle associée à $\overrightarrow{F}$ est

$$\omega_F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n F_j(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_j$$

.

On peut écrire abusivement *omega* $= \overrightarrow{F} . \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$.

Définition 418 *La* circulation du champs de vecteurs $\overrightarrow{F}$ le long de (C) contenu dans U *est*

$$\int_{(C)} \omega_F = \int_{(C)} \overrightarrow{F(M)} . \overrightarrow{dM}.$$

6) Formule de Green-Riemann :

Théorème 248 (Formule de Green-Riemann) *Soit D un domaine quarrable de $\mathbb{R}^2$ limitée par une courbe (C), U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D, $\omega : (x,y) \in U \longmapsto P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle. Alors*

$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C)} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Remarque : Avec $P = -y$ et $Q = 0$ ou $P = 0$ et $Q = x$, on trouve

Corollaire 116 *Soit D un domaine quarrable de $\mathbb{R}^2$ limitée par une courbe (C). $\mathcal{A}(D)$, l'aire de D vaut*

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx\,dy = -\int_{(C)} y\,dx = \int_{(C)} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{(C)} x\,dy - y\,dx.$$

Exemple : Soit (C) une courbe orientée définie par une représentation polaire $\rho = \rho(\theta)$, d'origine A et d'extrémité B. L'aire du secteur D limité par (C), OA et OB vaut

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C)} \rho^2 \mathrm{d}\theta.$$

Par exemple pour $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, l'aire de la lemniscate est

$$4.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta = 1.$$

Chapitre 7

Coniques

Dans ce chapitre, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé positif, $P = \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

I. Définition géométrique des coniques

1) Foyer et directrice d'une conique :

Définition 419 *Soient D une droite de $\mathcal{P}$, F un point de $\mathcal{P}$ en dehors de D et $e > 0$.*

L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MF = eMH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D (et donc MH la distance de M à D) est appelé conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

On dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse *si $0 < e < 1$, une* parabole *si $e = 1$, une* hyperbole *si $e > 1$.*

Remarque : Remarquons que $\mathcal{C}$ ne rencontre ni D, ni F, donc $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ en dehors de D et F tel que :

$$\frac{MF}{MH} = e$$

Les coniques de foyer F et de directrice D sont des lignes de niveau de $M \longmapsto MF/MH$.

Remarque : La droite orthogonale à D passant par F est un axe de symétrie de la conique. Elle est appelée *axe focal de* $\mathcal{C}$.

Proposition 502 *Soit u une similitude de $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.*

Alors $u(\mathcal{C})$ est une conique de foyer $u(F)$ de directrice $u(D)$ et d'excentricité e.

2) Equation polaire :

Définition 420 *Soient $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, $d = d(F, D)$. $p = ed$ est appelé* paramètre de la conique $\mathcal{C}$.

Proposition 503 *Soient $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, de paramètre p. On rapporte $\mathcal{P}$ au repère orthonormal direct (F, i, j) tel que D ait pour équation $x = d$. Dans ces conditions, $\mathcal{C}$ admet l'équation polaire :*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Remarque : $\rho = \frac{p}{e\cos\theta - 1}$ est une autre équation de $\mathcal{C}$.

Sauf mention explicite du contraire, lorsque on considèrera une conique F designera son foyer, D la directrice, e l'excentricité et $p = ed$ le paramètre.

II. II. Etude de l'ellipse

1) Equation réduite :

Proposition 504 *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Il existe un RON (O, i, j) tel que $\mathcal{E}$ admette dans ce repère l'équation :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < b < a$ On a en outre

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad et \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Remarque : Cette équation est appelé *équation réduite de* $\mathcal{E}$.

Proposition 505 *Soit (O, i, j) un RON. L'ensemble des points vérifiant*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < b < a$ est une ellipse de foyer F, D la directrice, e l'excentricité et p le paramètre avec :

$$F = (0, c) \;\; avec \; c = \sqrt{a^2 - b^2}, \; D : x = \frac{a}{e}, \;\; e = \frac{c}{a} \;\; et \;\; p = \frac{b^2}{a}$$

Remarque : • L'équation $\mathcal{E}$ est symétrique par rapport au axes Ox et Oy et par la symétrie de centre O.

• Notons $F' = (-c, 0)$ et D' la droite d'équation $x = -a/e$.

$\mathcal{E}$ est aussi l'ellipse de foyer F', de directrice D' et d'excentricité e.

Définition 421 *On dit que O est le* centre *de l'ellipse, l'axe focal Ox est aussi appelé* grand axe *et l'axe Oy* petit axe. *Les points $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ et $B' = (0, -b)$ sont les* sommets. *On dit que $AA' = 2a$ est la* longueur du grand axe *et $BB' = 2b$ est la* longueur du petit axe.

2) Paramétrage :

L'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ possède le paramétrage :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array} \right.$$

où t parcourt $] - \pi, pi]$.

$C(O, a)$ est le cercle principal de $\mathcal{E}$, $C(O, b)$ est le cercle secondaire.

$\mathcal{E}$ est l'image de $C(O, a)$ (resp. $C(O, b)$) par l'affinité orthogonale par rapport à Ox (resp. Oy) de rapport b/a (resp. a/b).

Proposition 506 *1. L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est un cercle ou une ellipse.*

2. Le projeté orthogonal d'un cercle de l'espace sur un plan non perpendiculaire au plan du cercle est une ellipse ou un cercle.

3) Propriété bifocale :

Théorème 249 *Avec les notations précédentes, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points vérifiant :*

$$MF + MF' = 2a$$

Réciproquement, si F et F' sont deux points distincts de $\mathcal{P}$, l'ensemble des points vérifiant $MF + MF' = 2a$ est une ellipse.

Remarque : Soit $\Gamma = C(O, R)$ avec $R > 0$. Notons $p = a = b = R$ et $e = 0$. On constante alors que Γ vérifie l'équation polaire $\rho = p/(1 - e \cos \theta)$, l'équation cartésienne $x^2/R^2 + y^2/R^2 = 1$ et le paramétrage du **2)**. Pour le théorème précédent, Γ le vérifie à condition de prendre $F = F'$. Ces propriétés expliquent que l'on considère le cercle Γ comme une ellipse d'excentricité nulle.

III. Etude de la parabole

P désigne une parabole.

Proposition 507 *Il existe une RON (O, i, j) tel que P admette dans ce repère l'équation réduite :*

$$y^2 = 2px$$

où $p = d$ est le paramètre de la parabole.

Proposition 508 *Soient* (O, i, j) *un RON,* $p > 0$*. Les points vérifiant :*

$$y^2 = 2px$$

constituent une parabole de foyer $F = (p/2, 0)$*, de directrice* $D : x = -p/2$*.*

Remarque : Si $p < 0$, on obtient une parabole de paramètre $|p|$, de foyer $F = (p/2, 0)$, $D : x = -p/2$.
Le point O est eppelé *sommet de* P : c'est seul point de P sur l'axe focal.
Remarque : $x = y^2/2$ fournit un paramétrage de P.

IV. Etude de l'hyperbole

1) Equation réduite :

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole.

Proposition 509 *Il existe un RON* (O, i, j) *tel que* $\mathcal{H}$ *admette dans ce repère l'équation réduite :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > 0$ *et* $b > 0$*. On a de plus*

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad et \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

où $p = ed$ *est le paramètre de* $\mathcal{H}$*.*

Proposition 510 *Soit* (O, i, j) *un RON. L'ensemble des points vérifiant :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une hyperbole de foyer $F = (c, 0)$ *avec* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$*, d'excentricité* $e = c/a$*, de directrice* $D : x = a/e$*, de paramétrage* $p = b^2/a$*.*

Remarque : • $\mathcal{H}$ est invariante par symétrie centrale de centre O, les réflexions d'axe Ox et Oy.
• Si $F' = (-c, 0)$ et $D' : x = -a/e$, on constate que $\mathcal{H}$ est aussi l'hyperbole de foyer F' de directrice D' et d'excentricité e.

On dit que O est le *centre* de $\mathcal{H}$, l'axe focal Ox est appelé *axe transverse*, *Oy axe non transverse*. Les points $A = (a, 0)$ et $A' = (-a, 0)$ sont les *sommets*.

Les deux droites $\Delta : x/a - y/b = 0$ et $\Delta' : x/a + y/b = 0$ sont les *asymptotes*. Si elles sont orthogonales (i.e $a = b$), $\mathcal{H}$ est dite *équilatère*.

L'ensemble des points (x, y) de $\mathcal{H}$ tels que $x > 0$ (resp. $x < 0$) est appelé *branche*.

2) Paramétrage :

Les relations :

$$\begin{cases} x = a\varepsilon \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

3) Proprieté bifocale :

Théorème 250 *L'hyperbole $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points M tels que :*

$$|MF - MF'| = 2a$$

Inversement, si F et F' sont deux points distincts, et si $0 < 2a < FF'$, l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ définit une hyperbole.

V. Etude à partir d'une équation cartésienne

1) Réduction de l'équation d'une conique :

Soit (O, i, j) un RON et $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5$ et $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Proposition 511 *On suppose $\alpha\beta \neq 0$. Alors il existe Ω tel que $\mathcal{C}$ admette dans le repère (Ω, i, j) une équation de la forme :*

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \lambda$$

De plus :

1. Si $\alpha\beta > 0$, on constate que $\mathcal{C}$ est une ellipse ou un cercle de centre Ω lorsque $\alpha\lambda > 0$, est $\{\Omega\}$ si $\lambda = 0$, est $\emptyset$ si $\alpha\lambda < 0$.

2. Si $\alpha\beta < 0$, on constate que $\mathcal{C}$ est une hyperbole si $\lambda \neq 0$ et est la réunion de deux droites sécantes en Ω si $\lambda = 0$.

Proposition 512 *On suppose $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$. Il existe alors Ω tel que dans le repère (Ω, i, j), $\mathcal{C}$ admette une équation de la forme :*

$$\beta Y^2 + \lambda X = 0 \quad \textit{avec } \lambda \neq 0$$

$$ou \quad \beta Y^2 + \mu = 0$$

Dans le premier cas, $\mathcal{C}$ est une parabole. Dans le second, c'est la réunion de deux droites parallèles à OX si $\beta\mu \geqslant 0$, et c'est $\emptyset$ sinon.

Proposition 513 *L'ensemble $xy = k$ est pour $k \neq 0$ une hyperbole d'asymptote Ox et Oy*

2) Tangente à une conique :

Remarque : On peut utiliser des paramétrages.

Proposition 514 *Soit $\mathcal{C} : \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$ et (x_0, y_0) un point de $\mathcal{C}$. La tangente en ce point a pour équation :*

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma(x + x_0) + \delta(y + y_0) + \varepsilon = 0$$

Exemple : Application aux équations réduites :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \quad y_0 y = p(x + x_0), \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Partie G
Fonctions à plusieurs variables

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

I. Généralités :

1) Normes sur un espace vectoriel réel :

Définition 422 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle* norme sur E *toute application* $\| \ \|$ *vérifiant :*

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. Pour tout x et y dans E, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel normé *(evn) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme.*

Exemple : Les espaces euclidiens sont des evn.
Remarque : On peut également supposer que le corps de base est $\mathbb{C}$, $| \ \|$ désigne alors le module.

Sauf mention explicite du contraire, E et F désigneront des evn.

Définition 423 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, $l \in E$.*

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui s'écrit :*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (|x_n - l| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(x_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 515 (Unicité de la limite) *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Notation : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on note $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.

2) Exemples d'espaces vectoriels normés :

• Soit $E = \mathbb{R}^n$. On definit les normes suivantes sur E :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$$

pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$.

• Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On définit les normes suivantes sur E :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

pour tout $f \in E$.

• Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit les normes suivantes sur E :

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad N(P) = \sqrt{\int_0^1 P^2} \quad \text{et} \quad \nu(P) = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t}$$

pour tout $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in E$

Remarque : On notera $B = \bar{B}(0,1)$. B est convexe. Dessin pour $E = \mathbb{R}^2$ et $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

3) Identité du parallélogramme :

Est-ce que les normes que nous avons définies dérivent d'un produit scalaire ? La réponse est non. Nous allons caractériser les normes euclidiennes par le théorème suivant :

Théorème 251 (Identité du parallélogramme) *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\| \|$ est euclidienne.

(ii) Pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Exemple : $\| \|_\infty$ n'est pas euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

4) Normes équivalentes :

Exemple : Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge pour $\| \|_1$ et pas pour $\| \|_2$!

Définition 424 *Soit $\| \|$ et N deux normes sur E.*

On dit que $\| \|$ et N sont équivalentes *s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :*

$$\alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$$

pour tout $x \in E$.

Remarque : "Etre équivalente" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E

Proposition 516 *Si $\| \|$ et N sont deux normes équivalentes de E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, $l \in E$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans $(E, \| \|)$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans (E, N).*

5) Cas de la dimension finie :

Théorème 252 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.*

admis*Alors, les normes de E sont équivalentes.*

Remarque : En dimension finie, pour prouver un résultat topologique, on pourra choisir la norme la plus adaptée au problème.

Théorème 253 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E, $l \in E$. On écrit pour tout $n \geqslant 0$, $x_n = x_n(1)e_1 + \dots x_n(p)e_p$ et $l = l(1)e_1 + \dots l(p)e_p$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

(ii) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, $(x_n(k))_{n\geqslant 0}$ converge vers $l(k)$.

II. Ensembles bornés et voisinages

1) Propriétés des bornés :

Définition 425 *Soient $A \subset E$, $f : E \longrightarrow F$.*

A est dit borné *s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset \bar{B}(0,R)$ i.e.*

$$(\forall x \in A)\ (\|x\| \leqslant R)$$

f est dite borné *si* $\operatorname{Im} f$ *est borné.*

Remarque : A est borné dès qu'il existe $a \in E$ et $R > 0$ tel que $A \subset \bar{B}(a,R)$.
Exemple : • Les boules et les sphères sont bornées, les ensembles finis sont bornés.
Remarque : En dimension finie, si $\|\ \|$ et N sont deux normes, A est borné dans $(E,\|\ \|)$ si et seulement si A est borné dans (E,N).

Proposition 517 *1. Soient $A \subset B \subset E$. Si B est borné, A aussi.*

2. Soient A_1, A_2,..., A_n des parties bornées de E. Alors $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est borné.

2) Voisinages d'un point de E :

Définition 426 *Soient $a \in E$ et $V \subset E$.*

On dit que V est un voisinage de a *s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$.*

On appelle voisinage pointé de A *toute partie de E de la forme $W\backslash\{a\}$ où W est un voisinage de a.*

Remarque : • En dimension finie, si V est un voisinage de a pour une certaine norme, V est un voisinage de a pour toute norme de E.

• On peut remplacer la boule ouverte par une boule fermée dans la définition.

Proposition 518 *Soit $(a,b) \in E^2$, $a \neq b$.*

1. Si $V \subset W$ et si V est un voisinage de a, W est un voisinage de a.

2. Si V et W sont deux voisinages de a, $V \cap W$ est un voisinage de a.

3. Il existe V voisinage de a et W voisinage de b tel que $V \cap W = \emptyset$.

3) Systèmes fondamentaux de voisinages :

Définition 427 *Soit $a \in E$.*

Un système fondamental de voisinages de a *est un ensemble $\mathcal{S}$ de voisinages de a tel que pour tout voisinage V de a, il existe $W \in \mathcal{S}$ tel que $W \subset V$.*

Exemple : • Les boules ouvertes (resp. fermées) centrées en a constituent un système fondamental de voisinage de a.

• Les boules ouvertes (resp. fermées) centrées en a de rayon $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ constituent un système fondamental de voisinage de a.

Remarque : Soit $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages de l. $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ si et seulement si :

$$(\forall W \in \mathcal{S})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(x_n \in W)$$

III. Adhérence et intérieur

1) Point adhérent à une partie :

Définition 428 *Soient $a \in E$ et $A \subset E$.*
On dit que a est adhérent à A *si tout voisinage de a rencontre A.*

Remarque : • Soit $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages de a. a est adhérent à A si pour tout $W \in \mathcal{S}$, $W \cap A \neq \emptyset$.
• a est adhérent à A si seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ (\|x - a\| \leqslant \varepsilon)$$

Proposition 519 *Soient $a \in E$, $A \subset E$.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) a est adhérent à A.
(ii) Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

Définition 429 *Soit $A \subset E$.*
On appelle adhérence de A *et, on note $\bar{A}$ l'ensemble des points de E adhérent à A.*
On dit que A est dense dans E *si $\bar{A} = E$.*

Exemple : Les fonctions polynômes sont denses dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ (théorème de Stone-Weierstrass).

Proposition 520 *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$.*
1. $A \subset \bar{A}$.
2. Si $A \subset B$, $\bar{A} \subset \bar{B}$.
3. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

2) Intérieur d'une partie de A :

Définition 430 *Soient $a \in E$, $A \subset E$.*
On dit a est un point intérieur de A *si A est un voisinage de a i.e. s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.*
On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieur de A.

Proposition 521 *Soit $A \subset E$. On a :*

$$\complement_E \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_E A} \quad \text{et} \quad \complement_E \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$$

Proposition 522 *Soient $A \subset B \subset E$.*
1. $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

3) Ouverts et fermés de E :

Définition 431 *$A \subset E$ est dite* fermée *si $\bar{A} = A$.*

Remarque : A est fermé si, et seulement si, pour tout suite de A convergente vers $l \in E$, on a $l \in A$.

Proposition 523 *1. $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
2. Toute réunion finie de fermés est une partie fermée.
3. Une intersection (finie ou pas) de fermés est une partie fermée.

Définition 432 *$A \subset E$ est dite* ouverte *si $\mathring{A} = A$ i.e pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

Proposition 524 *Soit $A \subset E$. On a :*

$$A \text{ ouvert} \iff \complement_E A \text{ fermé}$$

$$A \text{ fermé} \iff \complement_E A \text{ ouvert}$$

Proposition 525 *1. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Une réunion (finie ou pas) d'ouverts est un ouvert.

Remarque : En dimension finie, toutes ces notions sont invariantes par changement de normes.
Exemple : • E et $\emptyset$ sont à la fois fermé et ouvert.
• $\{a\}$ est fermé et toute partie finie de E est fermé.
• Les boules fermées (resp. ouvertes) sont fermées (resp. ouvertes). Les sphères sont fermées.

Proposition 526 *On suppose E de dimension finie.*
Tout sous-espace affine de E (et donc tout sous-espace) est fermée.

IV. Limites

A désigne une partie de E, a adhérent à A.

1) Généralités :

Définition 433 *Soient $f : A \longrightarrow F$, a adhérent à A, $l \in F$.*
On dit que $f(x)$ tend vers *l* lorsque *x* tend vers *a si pour tout voisinage W de l, il existe un voisinage V de a tel que $f(V \cap A) \subset W$. On écrit alors $l = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_a f$.*

Exemple : Cas $f = Cte$ et $f = I_E$.

Proposition 527 *Avec les mêmes notations, si $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) désigne un système fondamental de voisinages de a (resp. l), les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\lim_{x \to a} f(x) = l$.
(ii) Pour tout $W \in \mathcal{S}'$, il existe $V \in \mathcal{S}$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.

Exemple : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in A)\ (\|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque : Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut définir $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$...
Remarque : Si $a \in A$ et si f a une limite l en a, alors $f(a) = l$.

2) Propriétés des limites :

Proposition 528 *Soient $a \in \bar{A}$, $l \in F$ et $f : A \longrightarrow F$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergente vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

En particulier, la limite, si elle existe, est unique.

Proposition 529 *1. La limite d'une fonction en a, si elle existe, est unique.*

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $l \in \overline{f(A)}$.

3. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $g : B \longrightarrow G$, *G espace vectoriel normé, $f(A) \subset B$, $b \in \bar{B}$ et* $\lim_{y\to b} g(y) = l$. *Alors :*

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$$

4. Si f et g admettent des limites en a, l et l' respectivement , $f + g$, fg et f/g tendent vers $l + l'$, ll' et l/l' si cela à un sens.

5. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|l\|$.

Proposition 530 *Soient $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{A}$.*

1. Si $f \leqslant g$, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = l'$, *on a $l \leqslant l'$.*

2. Si $f \leqslant g \leqslant h$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, *alors* $\lim_{x\to a} g(x) = l$ *(théorème des gendarmes).*

Remarque : Ces théorèmes se démontrent aussi bien à l'aide de suites ou à l'aide de voisinages.

3) Limites des composantes d'une application en dimension finie :

Proposition 531 *Soient $f : A \longrightarrow F$, $a \in \bar{A}$, $l \in F$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F. On écrit $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ et $l = \sum_{i=1}^n l_i e_i$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

(ii) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$.

4) Restriction du domaine de définition :

Proposition 532 *Soient $f : A \longrightarrow F$, $l \in F$, $a \in \bar{A}$.*

1. Si $B \subset A$, $a \in \bar{B}$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$, *alors* $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x) = l$.

2. Soit V un voisinage de a. Si $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in V\cap A}} f(x) = l$, *alors* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

3. Soient $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de parties de A telles que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $a \in \overline{A_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On suppose que $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A_i}} f_i(x) = l$. *Alors* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

V. Fonctions continues

E et F désignent deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$.

1) Généralités :

Définition 434 *Soit $f : A \longrightarrow E$, $a \in A$.*

On dit que f est continue en a *si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *i.e.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)(\forall x \in A)\ (\|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon)$$

$$\textit{ou encore } \lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$$

On dit que f est continue *si f est continue en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans F.*

Exemple : $I_E : E \longrightarrow E$, les applications constantes sont continues. $x \longmapsto \|x\|$ est continue sur E. Si f est continue, $x \longmapsto \|f(x)\|$ est continue.
Remarque : • La somme (et le produit ou le quotient si cela a un sens) de fonctions continues est continue. $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(A, F)$ et $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
- Si f est continue sur A et $B \subset A$, $f_{|B}$ est continue.
- Si V est voisinage de a, $f_{V \cap A}$ est continue en a, f est continue en a.
- La composée d'applications continues est continue.
- Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F. Si $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$.

$$f \text{ continue } \iff (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(f_i \text{ continue })$$

2) Continuité des applications linéaires :

Théorème 254 *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un espace vectoriel, $u : E \longrightarrow F$ linéaire.*
Alors u est continue.

Exemple : Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue.

Corollaire 117 *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. L'application* $\det_{\mathcal{B}} : (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ *est continue.*

Corollaire 118 *Si E est un evn de dimension finie, toute application affine de E est continue.*

3) Caractérisation globale de la continuité :

Théorème 255 *Soit $f : A \longrightarrow F$.*
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue.
(ii) Pour tout ouvert V de F, il existe un ouvert U de E tel que $f^{-1}(V) = U \cap A$.
(iii) Pour tout fermé Φ de F, il existe un fermé T de E tel que $f^{-1}(\Phi) = T \cap A$.

Exemple : • $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 + xy - 1 > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Les demi-espaces ouverts (resp. fermés) limités par un hyperplan sont ouverts (resp. fermés).

Exercice : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_{,n}(\mathbb{R})$.

4) Homéomorphismes :

Définition 435 *Soient $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \longrightarrow B$.*
f est un homéomorphisme de A sur B *est une bijection de A sur B telle que f est continue et f^{-1} est continue.*
On dit alors que A et B sont homéomorphes.

Exemple : Si E et F sont de dimension finie, u une bijection affine, u est un homéomorphisme.
Remarque : I_E est un homéomorphisme de E. Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont des homéomorphismes, $g \circ f$ est un homéomorphisme de A sur C et f^{-1} est un homéomorphisme de B sur A.
Remarque : f est un homéomorphisme de A sur B si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. Pour tout ouvert U de E, il existe V ouvert de F tel que $f(U) = V \cap B$.

5) Continuité uniforme :

Définition 436 *Soit $f : A \longrightarrow F$.*

On dit que f est uniformément continue *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in A^2$ vérifiant $\|x - y\| \leqslant \eta$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall (x, y) \in A^2)\ (\|x - y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon)$$

Proposition 533 *Si f est uniformément continue, f est continue.*

Remarque : Cette notion est indépendante de la norme si E et F sont de dimension finie.

Définition 437 *Soient $f : A \longrightarrow F$, $k > 0$.*

*On dit que f est k-*lipschitzienne *si pour tout $(x, y) \in A^2$:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Définition 438 *On dit que f est* lipschitzienne *s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Exemple : Les normes et les isométries sont 1-lipschitzienne.
Remarque : Si E et F sont de dimension finie, le fait d'être lipschitzienne ne dépend pas des normes choisie sur E et F.

Proposition 534 *Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

Proposition 535 *Soient $u : E \longrightarrow F$ linéaire où E est de dimension finie.*

Alors u est lipschitzienne.

6) Application séparément continue :

Soit $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$. On note pour tout $(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$f_{i,(a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_n)} : x \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Si f est continue, $f_{i,(a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_n)}$ est continue.

Fixons $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_{i,(a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_n)}$ est continue en a_i, on dit que f est *séparément continue en* $(a_1, \dots, a_n)$.
ATTENTION ! Si f est séparément continue en $(a_1, \dots, a_n)$, f n'est pas forcément continue en $(a_1, \dots, a_n)$. En effet, considérer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq 0$$

et $f(0, 0) = 0$.

VI. Parties compactes en dimension finie

1) Théorème de Bolzano-Weierstrass :

Théorème 256 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E.*

Alors, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente.

2) Compacts d'un evn de dimension finie :

Définition 439 *Soit $K \subset E$, E espace vectoriel normé de dimension finie.*

Si K est fermé et borné, on dit que K est compact.

Remarque : Cette définition n'est valable que pour E de dimension finie.
Exemple : La boule fermée unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Théorème 257 *Soient E un evn de dimension finie, $K \subset E$.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes.
(i) K est compacte.
(ii) De toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

3) Image d'un compact par une application continue :

Théorème 258 *On suppose E et F de dimension fine. Soient K un compact, $f : K \longrightarrow F$ continue.*

Alors, $f(K)$ est compact.

Remarque : Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes.
Exemple : Soit $u : E \longrightarrow F$ linéaire (E et F evn de dimension finie). Alors u est bornée sur $\bar{B}(0,1)$ et on définit la *triple norme de u* par :

$$|||u||| = \sup_{x\in\bar{B}(0,1)} \|u(x)\|$$

On montre que $|||u||| = \sup_{x\in B(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x\in\bar{S}(0,1)} \|u(x)\|$.

De plus, $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
Exercice : Prouver que $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\|x\|$ et $|||v\circ u||| \leqslant |||v||||||u|||$.

4) Théorème de Heine :

Théorème 259 (Théorème de Heine) *Soient $f : K \longrightarrow F$, K compact et f continue.*

Alors f est uniformément continue.

VII. Complétude des espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Suites de Cauchy :

Définition 440 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E (E evn de dimension quelconque).*

On dit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon$$

Remarque : "Etre de Cauchy" est une propriété indépendante de la norme en dimension finie.

Proposition 536 *Soient E un evn de dimension quelconque, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*
2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Définition 441 *Un espace vectoriel normé E est dit* complet *ou* (espace de) Banach *si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Exemple : $\mathbb{R}[X]$ muni de $\| \|_\infty$ n'est pas un Banach.
Exercice : Montrer que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$ est un Banach

2) Cas de la dimension finie :

Théorème 260 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un Banach.*

Exercice : Montrer que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$ est un Banach.
Exercice : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à p, $(x_0,\dots,x_p)$. On suppose que $P_n(x_i)$ converge vers λ_i pour tout $0 \leqslant i \leqslant p$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

3) Théorème du point fixe :

Théorème 261 *Soient E un espace de Banach, $A \subset E$ fermé, $f : A \longrightarrow A$ contractante (i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$).*

Alors f admet un unique point fixe l (i.e. tel que $f(l) = l$).

Plus précisément, si $x_0 \in A$ et si on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \geqslant 0)$, l est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Application : Théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème des fonctions implicites.

4) Condition de Cauchy pour une fonction :

Théorème 262 *Soient E et F deux evn de dimension finie, $f : A \subset F$, $a \in \bar{A}$.*

On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a tel que si $(x,y) \in (V \cap A)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$ (on dit que f vérifie le critère de Cauchy fonctionnel).

Alors, $f(x)$ admet une limite dans F lorsque x tend vers a.

Exemple : Soit $f : A \longrightarrow F$ uniformément continue. Alors f se prolonge en une fonction continue sur $\bar{A}$

Chapitre 2

Différentielles

Soit n et p des entiers naturels non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont supposés munis d'une norme quelconque

I. Différentielles d'une fonction en un point

1) Propriétés élémentaires :

Définition 442 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$. f est dite* dérivable en a *(ou* différentiable en a*) s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$, une application linéaire $l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et une fonction $\varepsilon : B(0,r) \longrightarrow E$ tels que pour tout $h \in B(0,r)$:*

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad et \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

l est alors appelée différentielle de f en a *et elle est notée df_a.*

Remarque : • Cette définition ne dépend pas de la norme.
- La dérivation est une propriété locale.
- f est différentiable en a si, et seulement si, pour x voisin de a :

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, $(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0 :

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + l_1h_1 + l_2h_2 + \ldots + l_nh_n + \left\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\| \varepsilon(h_1, \ldots, h_n)$$

Proposition 537 *Si f est différentiable en a, avec les notations de la définition précédente, l est unique.*

Proposition 538 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*
Si f est différentiable en a, f est continue en a.

2) Lien avec les fonctions dérivables de la variable réelle, cas des fonctions scalaires :

Proposition 539 *Soient I un intervalle ouvert non vide, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in I$.*

Alors f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a au sens usuel. Dans ces conditions :

$$df_a : h \in \mathbb{R} \longmapsto f'(a)h \in \mathbb{R}^n \quad et \quad f'(a) = df_a(1)$$

Remarque : On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ supposé différentiable en a. Alors $\mathrm{d}f(a) \in \mathbb{R}^{n*}$ s'identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^n$, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$ appelé *vecteur gradient de f en a* : au voisinage de 0,

$$f(a+h) = f(a) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)|h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Remarque : Si $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si pour tout $i \in \{1, 2, \dots p\}$, f_i est différentiable en a.

3) Exemples de fonctions différentiables :

Définition 443 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. f est dite* différentiable *(si f est dérivable en tout point de U. Alors :*

$$df = : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{array}$$

est appelé différentielle de f. *On note $\mathcal{D}(U, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications différentiables sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*

Remarque : Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans U, et f différentiable sur U, alors $f_{|V}$ est différentiable.

Exemple : • Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire. Alors u est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}u_a = u$. $\mathrm{d}u$ est donc constante.

• Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ affine . Alors u est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}u_a = \overrightarrow{u}$. $\mathrm{d}u$ est donc constante.

• $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\|^2$ est différentiable et $\mathrm{d}f_a : h \longmapsto 2(x|h)$ (il s'agit ici de la norme euclidienne).

• $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

II. Dérivées partielles

1) Dérivée selon un vecteur :

Proposition 540 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$. Alors :*

$$df(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

C'est la dérivée de f en a selon le vecteur h.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas différentiable en 0 mais que f admet des dérivées en 0 selon tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

2) Dérivées partielles :

Soient $f : (x_1, \dots, x_n) \in U \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$, $(a_1, \dots, a_n) \in U$. On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ l'application partielle :

$$f_i : x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, x_n)$$

définie au voisinage de a_i.

Définition 444 *On dit que* f admet une dérivée partielle selon x_i en $(a_1, \dots, a_n) \in U$ *si* f_i *est différentiable en* a_i *et on note alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i)$$

Proposition 541 *Si* f *est différentiable en* a*, les dérivées partielles en* a *existent et si* $i \in \{1, 2, \dots n\}$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i)$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ *désignent la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

ATTENTION ! Ce n'est pas parce que les dérivées partielles existent en a que f est différentiable en a.

Remarque : • Supposons f différentiable en a. Alors :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ désignent la base duale de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. En calcul différentiel, on note plutot $\mathrm{d}x_i$ pour e_i^* pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En particulier $\mathrm{d}x_i(h_1, \dots, h_n) = h_i$. Ainsi :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i$$

• Supposons $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a. Alors, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans la base duale est $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ et

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) | h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Remarque : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n)$. Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, $(l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0 :

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) + \frac{\partial f}{\mathrm{d}x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\mathrm{d}x_2}(a) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\mathrm{d}x_n}(a) h_n + \left\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\| \varepsilon \left(\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}\right)$$

3) Matrice jacobienne :

Définition 445 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en a, $(f_1, \dots, f_p)$ les composantes de f.*

On appelle matrice jacobienne de f en a *la matrice de $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, à savoir :*

$$Jac(f)_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Si $p = n$, la jacobienne de f en a est une matrice carrée, on appelle jacobien de f en a *son déterminant :*

$$\frac{D(f_1, \dots f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

III. Opérations sur les différentielles

1) Linéarité et multilinéarité :

Proposition 542 *Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en a, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Alors $f + g$ et λf est différentiable en a et $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$ et $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$.

Proposition 543 *On note pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note E_i un espace du type $\mathbb{R}^{n_i}$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, \mathbb{R}^p)$, $f_i : U \longrightarrow E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ différentiable en a.*

Alors $x \in U \longmapsto \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^p$ est différentiable et :

$$d[\varphi(f_1, \dots, f_n)](a) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), df_i(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a))$$

Corollaire 119 *1. Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a. Alors fg est différentiable en a et :*

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

2. Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en a. Alors $(f|g)$ est différentiable en a et :

$$d(f|g)(a) = (f(a)|dg(a)) + (g(a)|df(a))$$

3. $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det M$ *est différentiable.*

4. Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable.

Proposition 544 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ différentiables en a. Alors f/g est différentiable en a et*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2}$$

2) Différentielle d'une composée :

Théorème 263 *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow V$ différentiable en a, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en $b = f(a)$.*

Alors, $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Exemple : • Soit $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ affine. Alors :

$$\mathrm{d}(u \circ f)(a) = \overrightarrow{u} \circ \mathrm{d}f(a)$$

• Cas $n = p = 1$: on retrouve la formule connue de dérivation des composées.
• Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ différentiable en a. Alors si $\alpha > 0$, f^α est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(f^\alpha)(a) = \alpha f(a)^{\alpha-1}\mathrm{d}f(a)$$

Proposition 545 *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow V$ différentiable en a, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en $b = f(a)$. On note $(f_1, \dots, f_p)$ les composantes de f et $h = g \circ f$. Alors, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

ce qui traduit :

$$Jac(h)_a = Jac(g)_b Jac(f)_a$$

Remarque : Si on note $z = h$, $y = f$, on écrit parfois abusivement :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(a)$$

Exemple : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles pour tout $t \in I$, $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in U$. On note pour $t \in I$:

$$g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Dans ces conditions :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

3) Difféomorphismes :

Théorème 264 *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ une bijection, $a \in U$, $b = f(a) \in V$. On suppose que f est différentiable en a, f^{-1} continue en b et $df(a)$ un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Alors f^{-1} est différentiable en b et :*

$$d(f^{-1})(b) = [df(a)]^{-1}$$

Remarque : Si on note y la fonction f de $(x_1, \dots, x_n)$, on a donc

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial h y_j}{\partial x_i} = \delta_{i,k}$$

Définition 446 *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$.*
On dit que f est difféomorphisme de U sur V si f est bijective et f et f^{-1} différentiables.

Remarque : Composée d'isomorphismes.

Corollaire 120 *f est un difféomorphisme de U sur V si, et seulement si f est un homéomorphisme, f est différentiable et pour tout $a \in U$, $df(a)$ est un isomorphisme.*

4) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

Définition 447 *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si f est différentiable sur U et si $a \in U \longmapsto df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue. L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.*

Théorème 265 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$.
(ii) Toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^p)$. $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

IV. Difféomorphismes fondamentaux

1) Passage en coordonnées polaires :

On met sur $\mathbb{R}^2$ sa structure canonique d'espace euclidien orienté.

Définition 448 *Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.*
$x = \rho \cos\theta i + \rho \sin\theta j$ est appelé le point de coordonnées polaires (ρ, θ).

Proposition 546 *On considère :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Alors f est différentiable et le jacobien de f en (ρ, θ) est ρ.
2. $f_{|\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ privé du demi-axe $y = 0$ et $x \leqslant 0$.

Remarque : $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^- \longmapsto \arg z \in]-\pi, \pi[$ est donc continue et différentiable.

2) Passage en coordonnées cylindriques :

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace euclidien orienté et on note (i, j, k) sa base canonique.

Définition 449 *Soit $(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$.*
$x = \rho\cos\theta i + \rho\sin\theta j + zk$ est le point de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

Remarque : Dessin !

Proposition 547 *On considère*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta,z) & \longmapsto & \rho\cos\theta i + \rho\sin\theta j + zk \end{array}$$

1. *Alors f est différentiable et le jacobien de f en (ρ,θ,z) est ρ.*
2. *$f_{|\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3\backslash(\mathbb{R}_- i + \mathbb{R}k)$*

3) Passage en coordonnées sphériques :

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace euclidien orienté et on note (i,j,k) sa base canonique.

Définition 450 *Soit $(\theta,\varphi,r)\in\mathbb{R}^3$.*
$x = r\cos\theta\cos\varphi i + r\cos\theta\sin\varphi j + r\sin\varphi k$ *est* le point de coordonnées sphériques (θ,φ,r) *: θ est la* longitude*, φ est la* latitude *et r le* rayon sphérique.

Proposition 548 *On considère :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi,r) & \longmapsto & r\cos\theta\cos\varphi i + r\cos\theta\sin\varphi j + r\sin\varphi k \end{array}$$

1. *f est différentiable et le jacobien de f en (θ,φ,r) est $r^2\cos\varphi$.*
2. *$f_{|]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,+\pi/2[\times\mathbb{R}_+^*}$ est un difféomorphisme de $]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,+\pi/2[\times\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{R}_- i + \mathbb{R}k$.*

V. Formule des accroissements finis

Théorème 266 (Formule des accroissements finis) *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b)\in U^2$ tel que $[a,b]\subset U$, $a\neq b$. On suppose f continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$.*
Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$$

Définition 451 *Soit $U\subset\mathbb{R}^n$. U est dit* étoilé *s'il existe ω tel que pour tout $x\in U$, $[\omega x]\subset U$.*

Exemple : Les convexes sont étoilés.

Corollaire 121 *Soient U un ouvert étoilé, $f : U\longrightarrow\mathbb{R}^p$ différentiable. On suppose que $df = 0$.*
Alors f est constante.

Théorème 267 *Soit $f : U\longrightarrow\mathbb{R}$ différentiable. On suppose que f admet un extrémum local en a. Alors, $df(a) = 0$ i.e :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

ATTENTION ! La réciproque est fausse ($(x,y)\longmapsto x^2-y^2)$).
Remarque : Un point tel que $\mathrm{d}f(a)=0$ est appelé *point critique de f*.
Exercice : • Extrema locaux et globaux de $(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto x^2+(x+y-1)^2+y^2$.
• De tous les triangles inscrits dans dans le cercle unité d'un plan affine euclidien, trouver celui de longueur maximale.

VI. Dérivées partielles successives

1) Généralités :

Définition 452 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$.*

f admet une dérivée partielle seconde en a par rapport à x_i et x_j successivement *si :*

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur un voisinage de a.

2. $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(a)$ existe .

Le réel $\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(a)$ est alors noté :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

et est appelé dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j successivement*.*

Plus généralement, on se donne la définition par récurrence suivante :

Définition 453 *On dit que f admet une* dérivée partielle d'ordre k en a par rapport à x_{i_1}, ..., x_{i_k} successivement *si :*

1. $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}$, $\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)$, ..., $\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\dots\right)\right)$ existent sur un voisinage de a.

2. $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\dots\right)\right)(a)$ existe.

Ce réel est noté :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a)$$

et est appelé dérivée partielle d'ordre k en a par rapport à x_{i_1}, ..., x_{i_k} successivement.

Définition 454 *L'application $a \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a)$ défini sur une partie de U est appelée rm fonction dérivée partielle d'ordre k en a par rapport à x_{i_1}, ..., x_{i_k} successivement.*

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Définition 455 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}^*$.*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U *si f admet des dérivées partielles successives sur U jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les variables possibles et si ces dérivées partielles sont continues sur U.*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ *si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

Proposition 549 *Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*

$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$, ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^p$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^p)$.

$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 550 *Si $f : U \longrightarrow V$, V ouvert de $\mathbb{R}^m$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$.*

3) Théorème de Schwarz :

Théorème 268 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Corollaire 122 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_k$, on a :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}} \partial x_{i_{\sigma(k-1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$$

Notation : Regroupement des indices.

VII. Théorème de la fonction implicite

1) Position du problème en dimension 2 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : (x,y) \in U \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On s'intéresse à $C = \{(x,y) \in U, f(x,y) = 0\}$. On a envie d'exprimer les points de C sous la forme $(x, \varphi(x))$, $x \in I$, I intervalle. C'est raremant possible globalement : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Et même localement, cela pose parfois problème, par exemple en $(1,0)$.

Théorème 269 (Théorème de fonction implicite) *Soit $(a,b) \in U$. On suppose que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Il existe I intervalle ouvert contenant a et J intervalle ouvert contenant b, $\varphi : I \longrightarrow J$ tels que $I \times J \subset U$ et pour tout $(x,y) \in I \times J$:

$$(x,y) \in C \iff f(x,y) = 0 \iff \varphi(x) = y$$

Si $\overrightarrow{\text{grad}} f(a,b) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Nous venons de traiter le premier cas ; dans le second cas, localement on peut exprimer x en fonction de y :

$$(x,y) \in C \iff f(x,y) = 0 \iff x = \psi(x)$$

2) Dérivation de la fonction implicite :

On se place dans les hypothèses du problème : alors

$$(\forall x \in I)\ (f(x, \varphi(x)) = 0$$

D'où, localement :

$$\varphi' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

En particulier la tangente à la courbe est orthogonale au gradient. Tangentes au cercle, à une ellipse.

3) Cas de la dimension 3 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : (x, y, z) \in U \longmapsto f(x, y, z)\mathbb{R}$ supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On s'intéresse à $S = \{(x, y, z) \in U, f(x, y, z) = 0\}$. On a envie d'exprimer les points de S sous la forme $(x, y, \varphi(x, y))$, $(x, y) \in V$, V ouvert.

Théorème 270 (Théorème de fonction implicite) *Soit $(a, b, c) \in U$. On suppose que*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$$

Il existe V ouvert de $\mathbb{R}^2$ ouvert contenant (a, b) et J intervalle ouvert contenant c, $\varphi : V \longrightarrow J$ tels que $V \times J \subset U$ et pour tout $(x, y, z) \in U \times J$:

$$(x, y, z) \in S \Longleftrightarrow f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x, y) = z$$

On a alors localement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Table des matières