

Questions / Réponses

Questions

Voici la question posée :

« J'ai du mal à comprendre pourquoi comparer avec $\frac{1}{n^2}$ (ou autre chose) et voir que c'est un \mathcal{O} permet de dire que la série est ACV. »

Réponse

Il est absolument primordial de comprendre ce qui va suivre et qui est une redite du cours, mais cela ne fera pas de mal.

On va déjà redémontrer dans les détails que si $\sum_n u_n$ est une série à valeurs complexes telle que :

$$u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^a}\right),$$

pour un certain $a > 1$, alors la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

Soit $\sum_n u_n$ une série à valeurs complexes telle que :

$$u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^a}\right),$$

pour un certain $a > 1$.

Il existe par définition une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{C}{n^a}.$$

Par les séries de Riemann, on sait que la série $\sum_n \frac{1}{n^a}$ est convergente. La série $\sum_n \frac{C}{n^a}$ reste donc convergente, puisque l'ensemble des séries complexes convergentes (tout comme les suites) forme un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} par exemple.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n^a}$ est donc convergente et comme elle est croissante car à termes positifs, alors elle est majorée par M (on peut prendre par exemple $M = C \cdot \zeta(a)$ qui sera le meilleur majorant

car la limite de la série, mais on n'est pas obligé dans la suite de prendre le meilleur majorant – un majorant M suffit, quel qu'il soit.

La série à termes positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ est donc croissante et comme :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N |u_n| \leq \sum_{n=1}^N \frac{C}{n^a} \leq M,$$

alors la série croissante $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ est majorée, donc convergente.

On voit alors que la série $\sum_n |u_n|$ est convergente, ce qui signifie que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, puis convergente.

Ce qu'il faut voir aussi, c'est que comparer le terme u_n à $\frac{1}{n}$ ne sert à rien puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente. Dans ce qui précède, le fait que le réel a soit strictement supérieur à 1 est très important.

Traitions un exemple.

Étudier selon la valeur de $a > 0$ la nature de la série :

$$\sum_n \frac{\ln n - (2 + \cos n) \times n^a}{\sqrt{n^3 + n + 1}}.$$

On pose $u_n = \frac{\ln n - (2 + \cos n) \times n^a}{\sqrt{n^3 + n + 1}}$, bien défini pour n assez grand, en fait bien défini lorsque $n \geq 1$.

Comme $a > 0$, par les croissances comparées, on obtient :

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2 + \cos n) \times n^a}{n^{3/2}},$$

car $\ln n = o(n^a)$ et $n^a \leq (2 + \cos n) n^a$.

Comme tout est positif, les séries $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n v_n$, avec :

$$v_n = \frac{2 + \cos n}{n^{3/2-a}},$$

sont de même nature.

Ensuite, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$, en posant $w_n = \frac{1}{n^{3/2-a}}$, on a :

$$v_n = \mathcal{O}(w_n) \text{ et } w_n = \mathcal{O}(v_n),$$

ce qui implique que si l'une des deux séries $\sum_n v_n$ ou $\sum_n w_n$ est convergente, alors l'autre aussi.

Résultat des courses, les séries $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n w_n$ sont de même nature.

Il est maintenant facile de voir que la série $\sum_n w_n$ est convergente si et seulement si :

$$\frac{3}{2} - a > 1 \iff a < \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

- si $a \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, alors la série $\sum_n u_n$ est ACV donc CV ;
- si $a \geq \frac{1}{2}$, la série $\sum_n |u_n|$ est divergente (ce qui a priori ne sert à rien pour l'étude de la série $\sum_n u_n$) et comme les u_n sont négatifs à partir d'un certain rang, alors pour n assez grand,

$$u_n = -|u_n|,$$

donc la série $\sum_n (-u_n)$ est divergente, ainsi que la série $\sum_n u_n$. Cette série diverge même vers $-\infty$.
