Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

OUTILS D'ANALYSE

Exercice 1. Wallis sans Futuna

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n la n-ème intégrale de Wallis définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

A. Généralités

1. a) Calculer W_0 et W_1.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)(\cos t)^{n+1}$, démontrer que

   $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

   c) Démontrer que, pour tout $p \geqslant 0$,

   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. a) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   b) Démontrer que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant n{W_n}^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

   puis que

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

B. Calcul de $\zeta(2)$ par la méthode de Matsuoka

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. a) Justifier que

   $$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \qquad t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t.$$

   b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$0 \leqslant M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{W_{2n}}{2n+2}$$

   et en déduire que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2 M_{2n}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big).$$

3. En déduire finalement que

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Remarque : On a ainsi démontré que

$$\zeta(2):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

C. Calcul de l'intégrale de Gauss

On pourra utiliser sans justification l'inégalité classique :

$$\forall a>-1,\qquad \ln(1+a)\leqslant a.$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout $u\in[0;\sqrt{n}]$, on a

$$\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-u^2}\leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$$

2. a) Effectuer le changement de variable $u=\sqrt{n}\sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1}.

   b) Effectuer le changement de variable $u=\sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$

3. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n}W_{2n+1}\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-u^2}\;\mathrm{d}u\leqslant\sqrt{n}W_{2n-2}$$

et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-u^2}\;\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Remarque : On a ainsi démontré que

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\;\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Récréation mathématique

Une ville est habitée par deux types de gens : les sédentaires et les facteurs. Les sédentaires ne sortent jamais de chez eux et les facteurs font leur travail en livrant les paquets. Cependant, les facteurs sont tous d'incurables voleurs et, si un paquet n'est pas fermé à l'aide d'une chaine cadenassée, ils en dérobent systématiquement le contenu.

La question est simple : comment un sédentaire peut-il envoyer par la poste le cadeau qu'il a acheté pour l'un de ses amis, sédentaire lui-aussi ?