Renseignements généraux

— *Concours* : ENS Ulm-Lyon-Cachan-Rennes
— *Matière* : Mathématiques
— *NOM Prénom* : LAMY Raphaël

Énoncé des exercices

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

On définit $M(P) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Max(1, |a_i|)$.

On cherche à montrer que $M(P) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{i\theta})|d\theta\right)$

(a) Montrer que l'intégrale dans l'exponentielle est bien définie en se ramenant après justification à des polynômes unitaires de degré 1.

(b) On étudie l'intégrale dans le cas où P est de degré 1, $P = X - a_i$.

(i) Montrer que l'on peut se ramener dans l'intégrale à une racine réelle positive.

(ii) Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(\theta) + a^2)d\theta$. Montrer que I est paire et trouver son lien avec l'intégrale de P.

(*D'autres questions suivaient afin de conclure*)

Remarques sur l'oral

Examinatrice très sympathique qui annonce me laisser une dizaine de minutes en autonomie. Une fois l'espace disponible complètement rempli je lui explique la bonne définition de l'intégrale (problématique dans le cas d'une racine de module 1). Puis en écrivant $a_i = \rho e^{i\alpha}$ je me ramène à $\displaystyle\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln|e^{ih} - \rho|dh$ et je mets un certain temps à penser à la 2π-périodicité de la fonction intégrée pour me ramener à 0, 2π aux bornes de l'intégrale. Enfin la parité de I et son lien avec l'intégrale de P se sont faits en même temps.