CONTINUITÉ CORRECTION

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}$. On considère l'application $f : \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow]0;\alpha[$ telle que $f(x) = x - \alpha\,\lfloor x/\alpha \rfloor$.

1. a) *Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{Q}_+^*$, $(|y-x| < \delta) \Longrightarrow (\lfloor x/\alpha \rfloor = \lfloor y/\alpha \rfloor)$.*

Comme x/α est un nombre irrationnel, il ne peut pas être entier. Donc, si l'on considère un nombre réel $\delta' > 0$ strictement inférieur à la distance $\mathrm{d}(x/\alpha, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire

$$\delta' < \min\left\{\frac{x}{\alpha} - \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor ; \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + 1 - \frac{x}{\alpha}\right\},$$

alors

$$\left]\frac{x}{\alpha} - \delta' ; \frac{x}{\alpha} + \delta'\right[\subset \left]\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor ; \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + 1\right[$$

et donc

$$\forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \qquad \left(\frac{y}{\alpha} \in \left]\frac{x}{\alpha} - \delta' ; \frac{x}{\alpha} + \delta'\right[\right) \Longrightarrow \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor\right).$$

Par conséquent, si l'on pose $\delta = \alpha\delta'$, alors

$$\forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \qquad (y \in]x - \delta ; x + \delta[) \Longrightarrow \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor\right).$$

Donc

$$\boxed{\exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \qquad (|y - x| < \delta) \Longrightarrow \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor\right).}$$

b) *En déduire que f est continue sur $\mathbb{Q}_+^*$.*

Soient $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\varepsilon > 0$. Considérons le nombre réel $\delta > 0$ introduit à la question précédente et posons $\eta = \min\{\delta, \varepsilon\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $|y - x| < \eta$, on a $\lfloor x/\alpha \rfloor = \lfloor y/\alpha \rfloor$ et donc $|f(y) - f(x)| = |y - x| < \delta \leqslant \varepsilon$. On a donc démontré que

$$\forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \qquad (|y - x| < \eta) \Longrightarrow \big(|f(y) - f(x)| < \varepsilon\big),$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{Q}_+^*.}$$

2. a) *Démontrer que f réalise une bijection entre $\mathbb{Q}_+^*$ et $f(\mathbb{Q}_+^*)$.*

Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $x - y = \alpha\big(\lfloor y/\alpha \rfloor - \lfloor x/\alpha \rfloor\big)$, ce qui prouve que $\alpha\big(\lfloor y/\alpha \rfloor - \lfloor x/\alpha \rfloor\big)$ est un nombre rationnel. Comme α est irrationnel, cela prouve que $\lfloor y/\alpha \rfloor - \lfloor x/\alpha \rfloor = 0$ et donc $x - y = 0$ ou encore $x = y$. On en déduit que f est injective. En se restreignant à $f(\mathbb{Q}_+^*)$ à l'arrivée, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection entre } \mathbb{Q}_+^* \text{ et } f(\mathbb{Q}_+^*).}$$

b) *Soient $y \in f(\mathbb{Q}_+^*)$ et $x \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $y = f(x)$. On pose $I_n =]n\alpha + y - 1/n ; n\alpha + y + 1/n[$.*

α] *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre rationnel x_n dans l'intervalle I_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$. Quelle est la limite de cette suite ?*

La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un nombre rationnel } x_n \text{ dans l'intervalle } I_n.}$$

Le théorème du gendarme implique alors que

$$\boxed{(x_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

β] *Démontrer qu'il existe un rang $N \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N,\ f(x_n) \in \left]y - 1/n\,;\, y + 1/n\right[$ et en déduire la limite de la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \geqslant N}$.*

Comme $y = f(x) \in \left]0;\alpha\right[$ et comme la suite $(1/n)$ tend vers 0, on peut clairement affirmer qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \left]y - 1/n\,;\, y + 1/n\right[\subset \left]0;\alpha\right[$. Par suite, pour tout $n \geqslant N$, on a $I_n \subset \left]n\alpha;(n+1)\alpha\right[$. Or, pour tout $n \geqslant N$, x_n appartient à I_n, donc $\forall n \geqslant N,\ \lfloor x_n/\alpha \rfloor = n$, ce qui donne $\forall n \geqslant N,\ f(x_n) = x_n - \alpha n$. En réutilisant le fait que x_n appartient à $I_n = \left]n\alpha + y - 1/n\,;\, n\alpha + y + 1/n\right[$, on en déduit que, pour tout $n \geqslant N$, on a $f(x_n) \in \left]y - 1/n\,;\, y + 1/n\right[$. On a donc bien démontré que

$$\boxed{\exists N \geqslant 1, \quad \forall n \geqslant N, \qquad f(x_n) \in \left]y - \frac{1}{n}\,;\, y + \frac{1}{n}\right[.}$$

Le théorème des gendarmes implique alors que

$$\boxed{\big(f(x_n)\big) \text{ tend vers } y.}$$

γ] *Démontrer que f^{-1} est discontinue en y.*

La suite $(y_n)_{n \geqslant N}$ définie par $\forall n \geqslant N,\ y_n = f(x_n)$ tend vers y (d'après la question précédente) alors que la suite $\big(f^{-1}(y_n)\big)_{n \geqslant N} = (x_n)_{n \geqslant N}$ ne tend pas vers $f^{-1}(y) = x$, donc

$$\boxed{f^{-1} \text{ est discontinue en } y.}$$