DÉRIVATION

Exercice 1. [$\star$]

Soient $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha;\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lambda.$$

Démontrer que f est dérivable en 0.

Indication : On pourra commencer par démontrer que, pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{f(x)-f(x/2^{n+1})}{x} - \lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(\frac{f(x/2^k)-f(x/2^{k+1})}{x/2^{k+1}} - \lambda\Big) - \frac{\lambda}{2^{n+1}}.$$

Exercice 2. [$\circ$]

Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ qui est égale à $f(0)$. Démontrer qu'il existe $c \in]0;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. C'est le *théorème de Rolle généralisé*.

Indication : On pourra utiliser la fonction g définie par $\forall x \in [0;\pi/2[\,,\ g(x) = f\big(\tan(x)\big)$.

Exercice 3. [$\star$]

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et $\forall x \in [0;1]\,,\ |f'(x)| \leqslant 2$. Démontrer que f est positive sur $[0;1]$.

Exercice 4. [$\star$] (Distance à la corde)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. Démontrer que, pour tout $x \in]a;b[$, il existe $d \in]a;b[$ tel que

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - \frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(d).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 5. [$\bigstar$] (Inégalités de Kolmogorov)

Soien $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ soient deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. Dans tout l'exercice, $\|\cdot\|$ désigne la norme infinie.

1. Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(t)| \leqslant \frac{2}{h}\|f\| + \frac{h}{2}\|f''\|.$$

Améliorer cette majoration en démontrant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(t)| \leqslant \frac{1}{h}\|f\| + \frac{h}{2}\|f''\|.$$

En déduire une majoration de $\|f'\|$.

b) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a

$$\|f^{(k)}\| \leqslant 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}.$$

Exercice 6. [★] (Super TAF et application)

1. Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, pour tout $x \in \mathscr{D}$ et pour tout $h > 0$ tel que $x + nh \in \mathscr{D}$, il existe $c \in \left]x; x+nh\right[$ tel que
$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kh) = f^{(n)}(c).$$
2. Soit $p \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \ell^p \in \mathbb{N}$. Démontrer que $p \in \mathbb{N}$.