STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Exercice 1. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}^2$

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'anneau $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$.

1. L'anneau $\mathbb{Z}^2$ est-il intègre ?
2. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On pose

$$I_1 = \{x \in \mathbb{Z} : (x, 0) \in I\} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \{y \in \mathbb{Z} : (0, y) \in I\}.$$

   a) Démontrer que I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$.
   b) Démontrer que $I = I_1 \times I_2$.
   c) En conclure qu'il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $I = (n_1, n_2)\mathbb{Z}^2$.
3. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose $B_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y \equiv x\ [d]\}$.
   a) Préciser B_0 et B_1.
   b) Vérifier que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, B_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
   c) Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, qui est différent de B_0. Après avoir justifier l'existence de $d = \min\{n \in \mathbb{N}^* : (0, n) \in B\}$, démontrer que $B = B_d$.