SOMMES ET PRODUITS CORRECTION

Exercice 2

1. On a
$$S_0 + S_1 + S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n,$$
où la dernière égalité découle de la formule du binôme. Donc
$$\boxed{(1) \qquad S_0 + S_1 + S_3 = 2^n.}$$

On a
$$\begin{aligned} S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} + \sum_{0\leqslant 3k+1\leqslant n} \binom{n}{3k+1} j + \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k+2} j^2 \\ &= \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} j^{3k} + \sum_{0\leqslant 3k+1\leqslant n} \binom{n}{3k+1} j^{3k+1} + \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k+2} j^{3k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k 1^{n-k} \\ &= (1+j)^n \end{aligned}$$
où la dernière égalité découle de la formule du binôme. Donc
$$\boxed{S_0 + jS_1 + j^2S_2 = (1+j)^n.}$$
De même, on obtient
$$\boxed{S_0 + j^2S_1 + jS_2 = (1+j^2)^n.}$$

2. On a
$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = (1+j)^n + (\overline{1+j})^n = 2\Re\mathrm{e}\big((1+j)^n\big) = 2\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{in\pi/3}) = 2\cos(n\pi/3)$$
et
$$(1+j)^n - (1+j^2)^n = (1+j)^n - (\overline{1+j})^n = 2i\Im\mathrm{m}\big((1+j)^n\big) = 2i\Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{in\pi/3}) = 2i\sin(n\pi/3).$$
Donc
$$\boxed{(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\cos(n\pi/3) \qquad \text{et} \qquad (1+j)^n - (1+j^2)^n = 2i\sin(n\pi/3).}$$
On a donc
$$2\cos(n\pi/3) = (1+j)^n + (1+j^2)^n = S_0 + jS_1 + j^2S_2 + S_0 + jS_2 + j^2S_1 = 2S_0 - S_1 - S_2,$$
d'où
$$\boxed{(2) \qquad 2S_0 - S_1 - S_2 = 2\cos(n\pi/3).}$$

Par ailleurs, on a

$$2i\sin(n\pi/3) = (1+j)^n - (1+j^2)^n = S_0 + jS_1 + j^2S_2 - S_0 - jS_2 - j^2S_1 = i\sqrt{3}(S_1 - S_2),$$

d'où

$$\boxed{(3) \qquad S_1 - S_2 = (2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3).}$$

En additionnant les équations (1) et (2), on obtient

$$\boxed{S_0 = \frac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}.}$$

En additionnant (1) et (3), il vient $S_0 + 2S_1 = 2^n + (2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3)$, d'où

$$\boxed{S_1 = \frac{2^n + (2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3) - \big(2^n + 2\cos(n\pi/3)\big)/3}{2}.}$$

En soustrayant (1) et (3), on obtient $S_0 + 2S_2 = 2^n - (2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3)$, d'où

$$\boxed{S_2 = \frac{2^n - (2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3) - \big(2^n + 2\cos(n\pi/3)\big)/3}{2}.}$$

Exercice 1

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\cos(n\theta) = \sum\limits_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(1 - \cos^2(\theta)\big)^\ell$ *et en déduire que* $\cos(n\theta) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,k} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2k}$ *où* $\forall k \in [\![1; \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, $a_{n,k} = (-1)^k \sum\limits_{\ell=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{k}$.

On procède à l'antilinéarisation de $\cos(n\theta)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{in\theta}) \\
&= \Re\mathrm{e}\big((\mathrm{e}^{i\theta})^n\big) \\
&= \Re\mathrm{e}\big[\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n\big] \\
&= \Re\mathrm{e}\Big[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(i\sin(\theta)\big)^j\Big] \qquad \text{binôme de Newton} \\
&= \Re\mathrm{e}\Big[\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(i\sin(\theta)\big)^j + \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(i\sin(\theta)\big)^j\Big] \\
&= \Re\mathrm{e}\Big[\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(-\sin^2(\theta)\big)^{j/2} + i\sin(\theta) \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(-\sin^2(\theta)\big)^{(j-1)/2}\Big] \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(\theta)\big)^{n-j} \big(-\sin^2(\theta)\big)^{j/2} \qquad \text{en ne gardant que la partie réelle} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(-\sin^2(\theta)\big)^\ell \qquad \text{en posant } j = 2\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(\sin^2(\theta)\big)^\ell
\end{aligned}$$

donc, comme $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, il vient

$$\boxed{\cos(n\theta) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(1 - \cos^2(\theta)\big)^\ell.}$$

On peut alors poursuivre le calcul en développant $\big(1-\cos^2(\theta)\big)^\ell$ à l'aide de la formule du binôme, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\big(-\cos^2(\theta)\big)^{\ell-k}\\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell}\binom{\ell}{k}\big(-\cos^2(\theta)\big)^{\ell-k}\\
&= \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant \lfloor n/2\rfloor}(-1)^{2\ell-k}\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{k}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{k}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2k} \qquad \text{car } (-1)^{2\ell-k}=(-1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{k}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2k},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\cos(n\theta)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{n,k}\big(\cos(\theta)\big)^{n-2k} \qquad \text{avec} \qquad \forall k\in[\![1;\lfloor n/2\rfloor]\!]\,,\quad a_{n,k}=(-1)^k\sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{k}}$$

Remarque : En procédant d'une toute autre manière, on peut démontrer que, pour tout $k\in[\![1;\lfloor n/2\rfloor]\!]$, *on a*

$$a_{n,k}=(-1)^k n\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}2^{n-1-2k}=(-1)^k\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-1-k}{k-1}\right]2^{n-1-2k},$$

ce qui donne

$$\cos(n\theta)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}\big(2\cos(\theta)\big)^{n-2k}.$$

Le polynôme

$$T_n(X)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2X)^{n-2k}$$

s'appelle le n-ème polynôme de Tchebychev (de première espèce). Il permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ *comme un polynôme en* $\cos(\theta)$. *Nous croiserons à nouveau ces polynômes au cours de cette année.*