

# Chapitre 3 : nombres complexes

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Propriétés algébriques</b>	<b>2</b>
1.1	Rappels, opérations . . . . .	2
1.2	Conjugué . . . . .	2
1.3	Module . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Groupe unimodulaire <math>\mathbb{U}</math> des nombres complexes de module 1</b>	<b>3</b>
2.1	Présentation . . . . .	3
2.2	Exponentielle d'un nombre complexe . . . . .	3
2.3	Applications à la trigonométrie . . . . .	3
2.3.1	Comment retrouver des formules de trigonométrie ? . . . . .	3
2.3.2	Formules de trigonométrie à connaître . . . . .	4
2.3.3	Formules de trigonométrie à savoir retrouver . . . . .	4
2.4	Équations trigonométriques . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Arguments d'un nombre complexe</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Équations algébriques dans <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>6</b>
4.1	Équations $z^n = 1$ , racines $n$ -ièmes de l'unité . . . . .	6
4.2	Équations $z^n = a$ . . . . .	6
4.3	Cas particulier : équations $z^2 = a$ . . . . .	7
4.4	Équations du second degré . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Interprétation géométrique des nombres complexes</b>	<b>7</b>
5.1	Affixe d'un point, module et argument d'un complexe . . . . .	7
5.2	Interprétations géométriques de transformations complexes . . . . .	8
5.2.1	Applications $z \mapsto a \cdot z + b$ . . . . .	8
5.2.2	Application $z \mapsto \pm \bar{z}$ . . . . .	8

# 1 Propriétés algébriques

## 1.1 Rappels, opérations

**Définition 1** On munit l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couples de nombres réels de deux lois de composition :

- l'addition :  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
- la multiplication :  $(a, b) \times (a', b') = (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b)$

On vérifie que les lois  $+$  et  $\times$  ainsi définies sont associatives, commutatives, admettent un élément neutre  $(0, 0)$  pour  $+$  et  $(1, 0)$  pour  $\times$  et  $\times$  est distributive sur  $+$ .

On pose  $i = (0, 1)$ , puis on associe à chaque couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , le complexe :  $z = a + ib$ . On remarque que  $i^2 = -1$ .

L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$  et les nombres  $a$  et  $b$  s'appellent respectivement les parties réelle et imaginaire de  $z$  :  $a = \operatorname{Re}(z)$  et  $b = \operatorname{Im}(z)$ .

Les calculs d'addition  $+$  et de multiplication  $\times$  ou  $\cdot$  sur les nombres complexes se font de manière habituelle.

## 1.2 Conjugué

**Définition 2** Pour tout complexe  $z = a + ib$ , on définit le *conjugué de  $z$*  noté  $\bar{z}$  par :  $\bar{z} = a - ib$ .

Méthode : Comment calculer les parties réelle ou imaginaire d'un quotient  $\frac{z}{z'}$  ?

- multiplier le dénominateur par l'expression conjuguée : le dénominateur devient réel
- faire le calcul sur l'expression transformée.

**Exemple 1** Calculer la partie réelle de  $\frac{1+2i}{-1+3i}$  et la partie imaginaire de  $(1+i\sqrt{3})^n$ .

**Proposition 1** On a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$  et  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- pour  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_+$ .

Méthode : Comment montrer qu'un complexe est réel, ou imaginaire pur ?

- comparer  $z$  à  $\bar{z}$
- si  $z = \bar{z}$ , alors  $z$  est réel ; si  $z = -\bar{z}$ , alors  $z$  est imaginaire pur.

## 1.3 Module

**Définition 3** On appelle *module de  $z$* , le nombre  $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$ .

**Remarque 1** Calculer le module ou la valeur absolue d'une nombre réel (qui est en fait un nombre complexe) revient au même.

**Proposition 2** •  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \in \mathbb{R}_+$

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$  et  $|\bar{z}| = |z|$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$  et l'égalité a lieu si et seulement si il existe  $\rho \in \mathbb{R}_+$  tel que :  $z = \rho \cdot z'$  ou  $z' = \rho \cdot z$ . (on dit que  $z$  et  $z'$  sont positivement liés)

## 2 Groupe unimodulaire $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

### 2.1 Présentation

**Définition 4** On définit *le groupe unimodulaire* noté  $\mathbb{U}$  par l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = \frac{1}{z} \right\}.$$

### 2.2 Exponentielle d'un nombre complexe

**Définition 5** Pour tout nombre complexe  $z$ , on note :

$$e^z = e^{\Re(z)} \cdot \left( \cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)) \right),$$

où la première exponentielle appliquée à  $\Re(z)$  est la fonction exponentielle que l'on connaît pour les nombres réels.

**Théorème 1** On a :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- tout nombre complexe  $z$  de module 1 est de la forme  $z = e^{i\theta}$  pour un certain  $\theta$  dans  $\mathbb{R}$
- pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$ , alors  $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$ .

**Corollaire 1 (Formules de Moivre et d'Euler)**

On a :

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

### 2.3 Applications à la trigonométrie

#### 2.3.1 Comment retrouver des formules de trigonométrie ?

Méthode : Comment exprimer  $\cos(n\theta)$  ou  $\sin(n\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  ou  $\sin \theta$  ?

- ▶ appliquer la formule du binôme de Newton à  $a = \cos \theta$  et  $b = i \sin \theta$
- ▶ prendre la partie réelle (ou imaginaire) dans cette expression pour avoir une formule pour  $\cos(n\theta)$  ou pour  $\sin(n\theta)$ .

**Méthode :** Comment linéariser  $\cos^n \theta$  ou  $\sin^n \theta$  ?

- appliquer la formule d'Euler pour  $\cos \theta$  ou  $\sin \theta$
- appliquer la formule du binôme de Newton
- regrouper les termes de la somme deux par deux par expressions conjuguées.

**Exemple 2** • Exprimer  $\sin 5t$  en fonction de  $\cos t$  et  $\sin t$ .

- Linéariser  $\sin^5 x$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

**Méthode :** Comment calculer une somme de cosinus ou de sinus ?

- poser chaque cosinus (resp. chaque sinus) comme partie réelle (resp. imaginaire) d'un certain complexe
- calculer la somme de ces complexes par une formule (du binôme ou géométrique)
- prendre la partie réelle (resp. imaginaire) dans la formule trouvée.

**Exemple 3** Démontrer la formule :  $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}.$

### 2.3.2 Formules de trigonométrie à connaître

**Proposition 3** Pour tous  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

### 2.3.3 Formules de trigonométrie à savoir retrouver

**Proposition 4** Pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Là où cela est bien défini en posant  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  :

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

**Remarque 2** De manière générale, lorsque l'on a une somme ou une différence de deux éléments de  $\mathbb{U}$ , il faut penser à factoriser par la demi-somme des angles (technique de l'arc moitié) :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times 2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \text{ et } e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times 2i \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

En particulier :  $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

## 2.4 Équations trigonométriques

**Méthode :** Comment résoudre  $\cos \theta = \alpha$ , ou  $\sin \theta = \alpha$  ou  $\tan \theta = \alpha$  ?

- trouver une solution particulière  $\theta_0$
- donner directement les solutions :
  - $\cos \theta = \cos \theta_0 \iff \theta = \pm \theta_0 [2\pi]$
  - $\sin \theta = \sin \theta_0 \iff \begin{cases} \theta = \theta_0 [2\pi] \\ \theta = \pi - \theta_0 [2\pi] \end{cases}$
  - $\tan \theta = \tan \theta_0 \iff \theta = \theta_0 [\pi]$ .

**Méthode :** Comment résoudre  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$  ?

- Lorsque  $(a, b) = (0, 0)$ , si  $c = 0$ , tout est solution et si  $c \neq 0$ , il n'y a aucune solution.
- Lorsque  $(a, b) \neq (0, 0)$  :
  - poser  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - trouver un angle  $\theta_0$  tel que  $\cos \theta_0 = \frac{a}{r}$  et  $\sin \theta_0 = \frac{b}{r}$
  - transformer l'équation selon :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \iff \cos(\theta - \theta_0) = \frac{c}{r}$$

- distinguer le cas  $\left| \frac{c}{r} \right| > 1$  où il n'y a aucune solution et le cas  $\left| \frac{c}{r} \right| \leq 1$  pour se ramener à une équation du type  $\cos \Theta = \cos \Theta_0$ .

**Exemple 4** • Résoudre l'équation  $\cos(2x) - \sin(2x) = 1$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

- Résoudre l'équation  $\sqrt{3} \sin(3x) + \cos(3x) = 1$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

## 3 Arguments d'un nombre complexe

**Définition 6** Étant donné un nombre complexe  $z \neq 0$ , on appelle **un argument de  $z$**  tout nombre réel  $\theta$  tel que  $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$ . Par abus de notation, un argument de  $z$  est noté  $\arg z$ . En fait, si  $\theta_0$  est un argument de  $z$ , tous les arguments sont  $\theta_0 + 2k\pi$ , pour  $k$  décrivant  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 7** On appelle **argument principal** de  $z$  le seul argument de  $z$  qui appartient à  $] -\pi, \pi]$ .

**Remarque 3** Tout nombre complexe  $z \neq 0$  peut s'écrire d'une unique façon sous la forme :

$$z = r \cdot e^{i\theta}, \text{ où } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ] -\pi, \pi].$$

Cette notation est appelée **notation exponentielle** : elle est très adaptée pour calculer produits, quotients et puissances entières d'un nombre complexe.

**Proposition 5** Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}^*$ , on a :

$$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg \left( \frac{z'}{z} \right) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$$

**Exemple 5** Soit  $Z \in \mathbb{C}$ . Résoudre l'équation  $e^z = Z$ , d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

## 4 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

### 4.1 Équations $z^n = 1$ , racines $n$ -ièmes de l'unité

**Définition 8** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *racines  $n$ -ièmes de l'unité* les nombres complexes  $z$  tels que  $z^n = 1$ . On note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Théorème 2** L'ensemble  $\mathbb{U}_n$  contient exactement  $n$  éléments qui sont :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

**Exemple 6** On a :

$$\mathbb{U}_1 = \{1\}, \quad \mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{U}_3 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}.$$

On note dans toute la suite le nombre complexe  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

### 4.2 Équations $z^n = a$

**Méthode :** Comment résoudre une équation de la forme  $z^n = a$  ?

- trouver une solution particulière  $z_0$  en calculant  $a = r \cdot e^{i\theta}$
- donner directement toutes les solutions  $z = z_0 \times e^{2ik\pi/n}$ , pour  $k$  entre 0 et  $(n-1)$ .

**Exemple 7** Déterminer les racines 5-ièmes de  $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$ .

### 4.3 Cas particulier : équations $z^2 = a$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme  $z^2 = a$  ?

- ▶ si on peut mettre  $a$  sous la forme  $a = r \cdot e^{i\theta}$ , se reporter à la méthode précédente.
- ▶ sinon,
  - poser  $a = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels
  - poser l'inconnue  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels
  - élever  $z$  au carré puis identifier parties réelle et imaginaire
  - rajouter l'équation :  $|z|^2 = |a|$
  - calculer  $x^2$  et  $y^2$
  - utiliser une équation pour avoir les signes entre  $x$  et  $y$ .

**Exemple 8** Déterminer les racines carrées de  $\Delta = -15 + 8i$ .

### 4.4 Équations du second degré

Méthode : Comment résoudre  $az^2 + bz + c = 0$  lorsque  $a \neq 0$  ?

- ▶ calculer le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$
- ▶ trouver une solution  $\delta_0$  à l'équation :  $\delta^2 = \Delta$  (méthode précédente)
- ▶ donner les solutions de  $az^2 + bz + c = 0$  :  $z = \frac{-b \pm \delta_0}{2a}$ .

**Exemple 9** • Résoudre l'équation :  $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ .  
• Résoudre l'équation :  $2iz^2 - 3z - 1 - 3i = 0$ .

## 5 Interprétation géométrique des nombres complexes

### 5.1 Affixe d'un point, module et argument d'un complexe

**Définition 9** On munit le plan  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . À tout nombre complexe  $z$ , on peut associer le seul point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(\Re(z), \Im(z))$ . Ce point sera noté  $M(z)$ . Réciproquement, à tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$ , on peut lui associer le couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de ses coordonnées et ainsi définir le nombre complexe  $z = x + iy$ . Ce nombre complexe sera appelé *l'affixe du point M*.

**Proposition 6** On dispose des propriétés suivantes :

- pour tous  $A(a)$  et  $B(b)$  dans le plan, la longueur  $AB$  vaut  $|b - a|$
- pour tous points  $A(a), B(b), C(c), D(d)$  du plan tels que  $A \neq B$  et  $C \neq D$ , alors l'angle orienté  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$  vaut  $\arg \left( \frac{d - c}{b - a} \right)$ .

**Exemple 10** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes différents.

- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes  $z$  tels que la quantité  $\frac{z - a}{z - b}$  soit un nombre réel positif.

- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes  $z$  tels que la quantité  $\frac{z-a}{z-b}$  soit un nombre réel négatif.
- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes  $z$  tels que la quantité  $\frac{z-a}{z-b}$  soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire positive.
- Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes  $z$  tels que la quantité  $\frac{z-a}{z-b}$  soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire négative.

**Définition 10** Pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , on appelle *disque ouvert de centre  $a$  et de rayon  $r$*  l'ensemble :  $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ .

On appelle *disque fermé de centre  $a$  et de rayon  $r$*  l'ensemble :  $\overline{D(a, r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ .

## 5.2 Interprétations géométriques de transformations complexes

### 5.2.1 Applications $z \mapsto a \cdot z + b$

Méthode : Comment interpréter une transformation de la forme  $f : z \mapsto a \cdot z + b$  ?

- si  $a = 1$ , la fonction  $f$  est la translation de vecteur d'affixe  $b$ .
- sinon,
  - mettre  $a$  sous forme exponentielle :  $a = r \cdot e^{i\theta}$
  - trouver un point fixe  $\omega$  en résolvant  $z = a \cdot z + b$
  - la fonction  $f$  est la similitude de centre  $\Omega(\omega)$ , de rapport d'homothétie  $r$  et d'angle de rotation  $\theta$ .

**Exemple 11** Interpréter géométriquement l'application  $z \mapsto (1 + i)z + 2$ .

### 5.2.2 Application $z \mapsto \pm \bar{z}$

**Proposition 7** • L'application  $z \mapsto \bar{z}$  est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- L'application  $z \mapsto -\bar{z}$  est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.