Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n° 9 : Suites

Correction du problème 1 – Convergence en un point fixe attractif d'une suite définie par une récurrence (Adapté de CAPES 1998)

Partie I – Existence et convergence des suites récurrentes

1. (a) Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $I_{p+1} \subset I_p$.

   Soit $p = 1$. Alors $I_2 = f^{-1}(I_1) = f^{-1}(I)$. Par définition, $f^{-1}(I)$ est inclus dans le domaine de définition de f, donc $f^{-1}(I) \subset I = I_1$. Ainsi, $I_2 \subset I_1$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(p)$. Alors $I_{p+1} \subset I_p$, d'où $f^{-1}(I_{p+1}) \subset f^{-1}(I_p)$, ainsi $I_{p+2} \subset I_{p+1}$. On en déduit $\mathcal{P}(p+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{p+1} \subset I_p$.
   - D'après la suite d'inclusions de la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p \subset I$. Ainsi, $A \subset I$.
   - Soit r un point fixe de f.
     Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}(p)$: $r \in I_p$.
     Par définition, r est dans le domaine de définition de f, donc $r \in I = I_1$. D'où $\mathcal{Q}(1)$.
     Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(p)$. Alors $r \in I_p$. Or, $f(r) = r$, donc $r \in f^{-1}(\{r\})$. Ainsi, $r \in f^{-1}(I_p) = I_{p+1}$. D'où $\mathcal{Q}(p+1)$.

     Par conséquent, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(p)$ entraîne $\mathcal{Q}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.
     Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in I_p$, donc $r \in A$. Ceci étant vrai pour tout point fixe, on en déduit que $\Omega \subset A$. Or, par hypothèse, $\Omega \neq \varnothing$, donc $A \neq \varnothing$.
   - Soit $x \in A$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, puisque $x \in A$, $x \in I_{p+1}$, et donc $f(x) \in f(I_{p+1}) = f(f^{-1}(I_p)) = I_p$ Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \in I_p$, et par conséquent, $f(x) \in A$. On en déduit que A est stable par f.

   (c) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f.*

   i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant définie, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+p} existe. Ainsi, x_{n+p-1} est dans le domaine de définition de f, donc $x_{n+p-1} \in I_1$. Or, $x_{n+p-1} = f^{p-1}(x_n)$, où la puissance désigne la composition itérée. Ainsi,

   $$x_n \in (f^{-1}(f^{-1} \cdots f^{-1}(I_1))) = I_{1+p-1} = I_p$$

   (on applique $p-1$ fois f^{-1} à I_1).

   ii. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in I_p$, donc $x_n \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*} I_p = A$.

   iii. - Soit x_0 définissant une suite récurrente. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$. En particulier, pour $n = 0$, $x_0 \in A$.
   - Réciproquement, si $x_0 \in A$, comme A est stable par f, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est défini et $x_n \in A$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie.

2. (a) i. $I =]0, 2[$ et $\forall x \in I, \quad f_1(x) = \sqrt{x}$.
   - Soit r un point fixe de f_1. Alors $r \in I$ et $f(r) = r$, donc $\sqrt{r} = r$, et comme r est strictement positif, $r = r^2$, puis $r = 1$. Ainsi, $\Omega = \{1\}$.

- Soit $x \in f_1^{-1}(I)$. Alors $x \in I$, et $f_1(x) \in]0,2[$, c'est-à-dire $0 < \sqrt{x} < 2$. Comme $x > 0$, cette dernière inéquation est équivalente à $0 < x < 4$. Ainsi, $f_1^{-1}(I) =]0,2[\cap]0,4[= I$. Ainsi, $f^{-1}(I) = I$. On en déduit, en répétant cette opération, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = I$.

ii. $I =]0,2[$ et $\forall x \in I, \quad f_2(x) = x^2$;
- Soit $r \in \Omega$. Alors $r \in I$ et $r = r^2$, donc $r = 1$. Ainsi, $\Omega = \{1\}$.
- Soit $x \in I_2$. Alors $x \in I$ et $0 < x^2 < 2$, donc $0 < x < \sqrt{2}$. Donc $I_2 =]0, \sqrt{2}[$.

  Soit $x \in I_3$. Alors $x \in I$ et $0 < x^2 < \sqrt{2}$, donc $0 < x < \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$. Donc $I_3 =]0, 2^{\frac{1}{4}}[$.

  Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{R}(p)$: $\;I_p =]0, 2^{\frac{1}{2^{p-1}}}[$.

  Par hypothèse $\mathcal{R}(1)$ est vrai. On a aussi montré $\mathcal{R}(2)$ et $\mathcal{R}(3)$, plus pour deviner le résultat que par nécessité.

  Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{R}(p)$. Alors $x \in I_{p+1}$ si et seulement si $x \in I$ et $0 < x^2 < 2^{\frac{1}{2^{p-1}}}$ si et seulement si $x \in I$ et $0 < x < (2^{\frac{1}{2^{p-1}}})^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, $I_{p+1} =]0, 2^{\frac{1}{2^p}}[$, d'où $\mathcal{R}(p+1)$

  Par conséquent, $\mathcal{R}(1)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{R}(p)$ entraîne $\mathcal{R}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

  Or, $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1}{2^p} = 0$, donc $\lim\limits_{p \to +\infty} 2^{\frac{1}{2^p}} = 2^0 = 1$ (pas de forme indéterminée ici). De plus, cette suite tend vers sa limite en décroissant strictement, de manière évidente. Montrons qu'alors, $A =]0,1]$.

  $*$ Tout d'abord, $]0,1] \subset A$. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $]0,1] \subset I_p$, car la borne supérieure de I_p décroît strictement vers 1, donc est toujours strictement plus grande que 1. Donc $]0,1] \subset \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}^*} I_p = A$.

  $*$ Réciproquement, $A \subset]0,1]$. En effet, soit $x \in A$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in I_p$, donc $0 < x < 2^{\frac{1}{2^{p-1}}}$.

  D'après le théorème de prolongement des inégalités, on obtient, en passant à la limite dans la deuxième inégalité : $0 < x \leqslant 1$. Ainsi $x \in]0,1]$.

  Les deux inclusions montrent l'égalité $A =]0,1]$.

iii. $I =]0,2[$ et $\forall x \in I, \quad f_3(x) = 2x - 1$.
- Tout d'abord, $f_3(x) = x$ si et seulement si $x = 2x - 1$ si et seulement si $x = 1$. Donc $\Omega = \{1\}$.
- La fonction f_3 est strictement croissante sur son domaine, et sur $\mathbb{R}$ si on la prolonge. Alors,

$$I_2 = f_3^{-1}(I) =]f_3^{-1}(0), f_3^{-1}(2)[\cap]0,2[= \left]\frac{0+1}{2}, \frac{2+1}{2}\right[\cap]0,2[= \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[.$$

  On obtient alors de même
$$I_3 = \left]\frac{\frac{1}{2}+1}{2}, \frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right[= \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[.$$

  Par une récurrence que je ne fais pas (même chose que précédemment), on trouve :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \left]1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right[.$$

  Les I_n sont alors une suite d'intervalles enboîtés, de longueur de limite nulle. Ainsi, d'après le théorème des intervalles emboités, l'intersection est un singleton, constitué du seule point, limite commune des bornes des I_n. Ainsi, $A = \{1\}$.

(b) Supposons que I est stable par f. Alors $f(I) \subset I$, donc, $I \subset f^{-1}(I)$. Par ailleurs, I étant le domaine de définition de f, $f^{-1}(I) \subset I$. Les deux inclusions amènent l'égalité $I = f^{-1}(I)$. Par itération, on trouve donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I$, puis $A = I$.

3. (a) Tout d'abord, I étant stable, $A = I$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\;x_n \leqslant x_{n+1}$.

L'inégalité $x_0 \leqslant f(x_0) = x_1$ nous donne $\mathcal{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, $x_n \leqslant x_{n+1}$. Comme f est croissante sur I, et que x_n et x_{n+1} sont dans I, on en déduit que $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$, donc que $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- S'il existe $y \in \Omega$ un point fixe tel que $x_0 \leqslant y$, montrons que y majore la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $x_n \leqslant y$.
  L'inégalité $x_0 \leqslant y$ nous donne $\mathcal{P}(0)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, $x_n \leqslant y$. Comme f est croissante sur I, et que x_n et y sont dans I, on en déduit que $f(x_n) \leqslant f(y)$, donc que $x_{n+1} \leqslant y$, puisque y est un point fixe de f. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié.

  Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
  Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée, donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \leqslant x_n \leqslant y$, donc la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_0 \leqslant \ell \leqslant y$, d'après le théorème de prolongement des inégalités. Or, x_0 et y sont dans I, et I étant un intervalle, il est convexe. Donc $\ell \in I$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point de I.
- Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans I, et soit $y \in I$ sa limite. Alors, f étant continue sur I (hypothèse donnée dans l'entête du problème), $f(y) = y$, donc $y \in \Omega$. De plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a $x_0 \leqslant y$. Ainsi, il existe un point fixe y tel que $x_0 \leqslant y$.

En conclusion, la suite récurrente de valeur initiale x_0 converge vers un point de I si et seulement s'il existe un point fixe $y \in \Omega$ tel que $x_0 \leqslant y$.

(b) Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point de I. Soit ℓ sa limite.
- La fonction f étant continue, $\ell \in \Omega$.
- De plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $x_0 \leqslant \ell$.
- Enfin, soit y un point fixe tel que $x_0 \leqslant y$. Alors, d'après un argument précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant y$, et par passage à la limite, $\ell \leqslant y$. Ainsi, ℓ est le plus petit point fixe qui soit supérieur ou égal à x_0.

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ sa limite. Soit $I =]a, b[$, où a et b sont éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a < x_n < b$, d'où, d'après le théorème de prolongement des inégalités, $a \leqslant \ell \leqslant b$, dans $\overline{\mathbb{R}}$. De plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $\ell \neq a$. Enfin, $\ell \notin I$, donc $\ell = b$. Par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, la borne supérieure de I, qu'elle soit finie ou infinie.

(d) Lorsque $x_0 \geqslant f(x_0)$:
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Elle converge dans I si et seulement s'il existe un point fixe $y \in \Omega$ tel que $y \leqslant x_0$.
- Dans ce cas, sa limite est le plus grand point fixe qui soit inférieur ou égal à x_0.
- Dans le cas inverse $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la borne inférieure de I, qu'elle soit finie ou $-\infty$.

Partie II – Points fixes attractifs, répulsifs

1. **Inégalité des accroissements finis**
   - On suppose dans un premier temps que $a \leqslant b$.
     * Si $m = 0$, alors, pour tout x de J, $-M \leqslant f'(x) \leqslant M$. Ainsi, par positivité de l'intégrale,
     $$-\int_a^b M \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x \qquad \text{soit:} \qquad -M(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
     Ainsi, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$. D'autre part, $|f(b) - f(a)| \geqslant 0 = m|b-a|$.
     * Si $m > 0$, alors, puisque pour tout x de l'intervalle J, $|f'(x)| > m$, on obtient que soit pour tout $x \in J$, $f'(x) \geqslant m$, soit pour tout $x \in J$, $f'(x) \leqslant -m$. En effet, si ce n'était le cas, , il existerait deux réels x et y de J tels que $f'(x) \geqslant m$ et $f'(y) \leqslant -m$. Alors, puisque f' est continue sur l'intervalle J, et que $0 \in]-m, m[\subset]f(y), f(x)[$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un élément c compris entre x et y, donc $c \in J$ tel que $f'(c) = 0$ donc $|f'(c)| < m$, ce qui contredit les hypothèses.
     — Premier cas : pour tout $x \in J$, $f'(x) \geqslant m > 0$. Alors, puisque par ailleurs, $|f'(x)| \leqslant M$, on obtient :
     $$\forall x \in J,\ \ m \leqslant f'(x) \leqslant M, \qquad \text{puis:} \qquad \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$
     $$\text{soit:} \qquad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Comme $m(b-a)$ et $M(b-a)$ sont positifs, on en déduit que $f(b)-f(a)$ aussi et que :

$$m|b-a| \leqslant |f(b)-f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

— Deuxième cas : pour tout $x \in J$, $f'(x) \leqslant -m$, d'où $-M \leqslant f'(x) \leqslant -m$. Alors de même :

$$-M(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant -m(b-a) \qquad \text{donc:} \qquad m|b-a| \leqslant |f(b)-f(a)| \leqslant M|b-a|,$$

puisque $-m(b-a)$ et $-M(b-a)$ sont négatifs.

- Supposons maintenant que $b \leqslant a$. On utilise alors le résultat précédent avec $a' = b$ et $b' = a$. On a alors :

$$\begin{aligned} m|b'-a'| \leqslant |f(b')-f(a')| \leqslant M|b'-a'| \qquad &\text{soit:} \qquad m|a-b| \leqslant |f(a)-f(b) \leqslant M|a-b| \\ &\text{soit:} \qquad M|b-a| \leqslant |f(b)-f(a)| \leqslant M|b-a|. \end{aligned}$$

2. **Points fixes attractifs**

(a) Par hypothèse, f' est continue en r, donc, par définition (rappelée dans l'énoncé) de la continuité,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in B(r,\delta) \cap I, \quad |f'(x) - f'(r)| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1-|f'(r)|}{2}$, et δ_1 comme dans la définition. Alors, pour tout $x \in B(r,\delta_1) \cap I$,

$$\begin{aligned} & \big||f'(x)| - |f'(r)|\big| \leqslant |f'(x) - f'(r)| < \frac{1-|f'(r)|}{2} \\ \text{donc:} \qquad & -\frac{1-|f'(r)|}{2} \leqslant |f'(x)| - |f'(r)| < \frac{1-|f'(r)|}{2} \\ \text{donc:} \qquad & |f'(x)| < \frac{1+|f'(r)|}{2}. \end{aligned}$$

De plus, I est ouvert, donc est un voisinage de tous ses points, et en particulier de r. Ainsi, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $B(r,\delta_2) \subset I$. Soit alors $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors $B(r,\delta) \subset B(r,\delta_2) \subset I$, et $B(r,\delta) \subset B(r,\delta_1)$, donc $B(r,\delta) \subset B(r,\delta_1) \cap I$.
On en déduit que pour tout $x \in B(r,\delta)$, $x \in I$ et $|f'(x)| \leqslant k$, où on a posé $k = \frac{1+|f'(r)|}{2}$, qui vérifie $k \in [0,1[$, puisque $|f'(r)| < 1$.
Soit $x \in B(r,\delta)$. Alors, pour tout y entre x et r, $y \in B(r,\delta)$, donc $|f'(y)| \leqslant k$. D'après l'inégalité des accroissements finis, démontrée dans la question II-1, on en déduit que $|f(x) - f(r)| \leqslant k|x-r|$.
Or, r est un point fixe de f, donc finalement, $|f(x) - r| \leqslant k|x-r|$, où $k \in [0,1[$.

(b) Voyons ce qu'il se passe sur les premiers rangs : $u_N \in B(r,\delta)$, donc

$$|f(x_N) - r| \leqslant k|x_N - r|, \qquad \text{soit:} \qquad |x_{N+1} - r| \leqslant k|x_N - r|.$$

En particulier, puisque $k < 1$ et $|x_N - r| < \delta$, on en déduit que $x_{N+1} \in B(r,\delta)$, et on peut continuer : la question précédente amène

$$|f(x_{N+1}) - r| \leqslant k|x_{N+1} - r|, \qquad \text{donc:} \qquad |x_{N+2} - r| \leqslant k|x_{N+1} - r| \leqslant k^2|x_N - r|.$$

On peut continuer comme cela : chaque étape rajoute un facteur k. On va donc procéder par récurrence pour montrer proprement la formule souhaitée (tout ce début, bien entendu, vous le faites au brouillon, mais inutile de le mettre au propre : contentez-vous de la démonstration rigoureuse donnée par la récurrence)
Soit, pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|x_n - r| \leqslant k^{n-N}|u_N - r|$.
$\mathcal{P}(N)$ est trivialement vraie, puisque l'inégalité se réduit alors à $|x_N - r| \leqslant |x_N - r|$.
Soit $n \geqslant N$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors,

$$|x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r| \leqslant |x_N - r| < \delta,$$

car $k \in [0,1[$, et $n - N \geqslant 0$. Ainsi, $u_n \in B(r,\delta)$. On applique la question précédente, cela donne :

$$|f(x_n) - r| \leqslant k|u_n - r|, \qquad \text{donc:} \qquad |x_{n+1} - r| \leqslant k|x_n - r| \leqslant k^{n+1-N}|x_N - r|,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(N)$ est vraie, et pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$.

(c) • Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in B(r,\delta)$. Alors, d'après II-2(c), pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - r| \leqslant k^{n-N}|u_N - r|.$$

Or, $k \in [0,1[$, donc $\lim_{n\to+\infty} k^{n-N} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - r| = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = r.$$

• Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Alors, par définition, avec $\varepsilon = \delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - r| \leqslant \delta$. En particulier, cette inégalité est vraie pour $n = N$, ainsi, $x_N \in B(r,\delta)$.

3. **Points fixes répulsifs**

(a) On procède de même que pour les points fixes attractifs, et on s'autorise donc une rédaction un peu plus rapide.

Tout d'abord, f' étant continue en r, et $|f'(r)|$ étant strictement supérieur à 1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(r,\delta) \cap I$, $|f'(x)| \geqslant 1$ (prendre $\varepsilon = |f'(r)| - 1$ dans la définition de la continuité). Puisque I est ouvert, quitte à choisir δ plus petit, on peut supposer que $B(x,\delta) \subset I$.

Alors, soit $x \in B(x,\delta)$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre x et r, avec $m = 1$, on obtient donc

$$|f(x) - f(r)| > |x - r| \qquad \text{donc:} \qquad |f(x) - r| \geqslant |x - r|.$$

(b) • Une suite stationnaire de valeur r converge évidemment vers r. Remarquez que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = r$, on est dans ce cas, car r étant un point fixe, toutes les valeurs suivantes vont être égales à r.

• Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente convergeant vers r. Alors, puisque $\delta > 0$, par définition de la limite d'une suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in B(r,\delta)$. Ainsi, on peut appliquer l'inégalité de la question précédente à u_n :

$$\forall n \geqslant N, |u_{n+1} - r| = |f(u_n) - r| \geqslant |u_n - r|.$$

Par conséquent, $(|u_n - r|)_{n\geqslant N}$ est croissante, positive, et de limite nulle puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, de l'inégalité

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant |u_N - r| \leqslant |u_n - r|,$$

on déduit, par passage à la limite :

$$0 \leqslant |u_N - r| \leqslant 0, \qquad \text{donc:} \qquad u_N = r$$

Ainsi, r étant un point fixe, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = r$.

4. **Un exemple**

(a) Soit $x \in]0,2[$. Alors $0 < x^2 < 4$, donc $0 < 4 - x^2 < 4$. Ainsi, $0 < f(x) < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$, puisque $\sqrt{5} > 2$. Ainsi, I est stable par f. La question I-2(b) amène alors $A = I =]0,2[$. Donc une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout choix de x_0 dans I.

(b) On a :

$$f_4(x) = x \iff \sqrt{5}\cdot x = 4 - x^2 \iff x^2 + \sqrt{5}\cdot x - 4 = 0$$

Résolvons cette équation du second degré. Le discriminant est $\Delta = 5 + 16 = 21$. Alors, les deux racines sont

$$r_1 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{21}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{21}}{2}.$$

r_1 étant strictement négatif, $r_1 \notin I$. De plus, $-3 < \sqrt{5} < -2$ et $4 < \sqrt{21} < 5$, donc

$$1 < -\sqrt{5} + \sqrt{21} < 3 \qquad \text{donc:} \qquad \frac{1}{2} < r_2 < \frac{3}{2} \qquad \text{donc:} \qquad r_2 \in I.$$

Ainsi, $\Omega = \{r_2\}$.

De plus, f est dérivable sur I, de dérivée continue, et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x.$$

Par conséquent,

$$f'(r_2) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Or, $\sqrt{21} > \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, donc

$$\sqrt{5} - \sqrt{21} < -\sqrt{5} \qquad \text{donc:} \qquad |f'(r_2)| > 1.$$

Ainsi, f_4 a un seul point fixe, et il est répulsif.

(c) On a, pour tout $x \in I$, $f_4 \circ f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(4 - \frac{1}{5}(4 - x^2)^2\right) = \frac{1}{5\sqrt{5}}(20 - 16 + 8x^2 - x^4)$. On a donc

$$f_4 \circ f_4(x) = x \iff x^4 - 8x^2 + 5\sqrt{5}x - 4 = 0.$$

Or, les points fixes de f_4 (et de son prolongement à $\mathbb{R}$) sont bien sûr des points fixes de $f_4 \circ f_4$. Ainsi, r_1 et r_2 sont des racines de cette équation, donc $x^2 + \sqrt{5} \cdot x - 4$ se met en facteur. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 8x^2 + 5\sqrt{5} \cdot x - 4 = (x^2 + \sqrt{5} \cdot x - 4)(x^2 - \sqrt{5} \cdot x + 1).$$

Le discriminant du second facteur est $\Delta = 5 - 4 = 1$. Ainsi, les racines de $X^4 - 8X^2 + X + 12$ sont r_1, r_2, ainsi que :

$$r_3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \text{et} \qquad r_4 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

On a $2 < \sqrt{5} < 3$, donc r_3 et r_4 sont dans I. Ce sont donc des points fixes de $f_4 \circ f_4$.
Ainsi, les points fixes de $f_4 \circ f_4$ sont r_2, r_3 et r_4.
De plus, $r_4 > \frac{3}{2}$, donc $r_4 > r_2$. De plus,

$$r_3 - r_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{21}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{5} - \sqrt{21} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{20} - \sqrt{21} - 1) < 0,$$

donc $r_3 < r_2$. Ainsi, $0 < r_3 < r_2 < r_4 < 2$.

(d) f_4 est décroissante car $x \mapsto x^2$ est croissante sur I. Ainsi, $f_4 \circ f_4$ est croissante. Or, les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes associées à la fonction $f_4 \circ f_4$. Ainsi, d'après la question I-3, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. De plus :

- Si $x_0 \in]0, r_3[$, alors, d'après la question I-3,
  - ∗ soit $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers la borne inférieure de I, à savoir 0, ce qui est impossible, car il faudrait que 0 soit un point fixe du prolongement par continuité de $f_4 \circ f_4$ en 0, ce qui n'est pas le cas ;
  - ∗ soit $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croît et converge vers le plus petit point fixe de $f_4 \circ f_4$ qui soit supérieur à x_0, à savoir r_3.

  Ainsi, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers r_3. Par continuité et décroissance de f_4, on en déduit que $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $f_4(r_3)$. Or :
  - ∗ $f_4 \circ f_4(f_4(r_3)) = f_4(f_4 \circ f_4(r_3)) = f_4(r_3)$. Ainsi, $f_4(r_3)$ est un point fixe de $f_4 \circ f_4$.
  - ∗ $f_4(r_3) \neq r_3$, car r_3 n'est pas un point fixe de f_4.
  - ∗ $f_4(r_3) \neq r_2$, sinon on aurait $r_3 = f_4 \circ f_4(r_3) = f_4(r_2) = r_2$.
  - ∗ Ainsi, $f_4(r_3) = r_4$, et de même $f_4(r_4) = r_3$.

  Par conséquent, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers x_4.
- Si $x_0 \in]r_3, r_2[$, alors, d'après la question I-3,
  - ∗ soit $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers r_2, le point fixe directement supérieur à x_0 ;
  - ∗ soit $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers r_3.

  La première solution est impossible. En effet, par continuité de f_4, on aurait alors la convergence de $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f_4(r_2) = r_2$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettrait r_2 pour limite, ce qui, d'après la question II-3, impliquerait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur r_2. Or, f_4 est strictement décroissante sur I, donc injective. Ainsi, r_2 admet un unique antécédent par f_4, qui est r_2 lui-même. On en déduit qu'une suite est stationnaire de valeur r_2 si et seulement si $x_0 = r_2$.

Par conséquent, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_3 en décroissant, et par conséquent, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(r_3) = r_4$ en croissant.

- Si $x_0 \in]r_2, r_4[$, de même, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers r_2, donc $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers r_4, puis $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers r_3.
- Si $x_0 \in]r_4, 2[$, de même, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers 2 qui n'est pas point fixe du prolongement pas continuité de $f_4 \circ f_4$ en 2, donc $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_4 en décroissant, puis $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_4) = x_3$ en croissant.

Récapitulatif :

- Si $x_0 \in]0, r_2[$, alors $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r_3 et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r_4. Chacune de ces deux suites est constante dans le cas où $x_0 = r_3$.
- Si $x_0 \in]r_2, 2[$, alors $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r_4 et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r_3. Chacune de ces deux suites est constante dans le cas où $x_0 = r_4$.
- Si $x_0 = r_2$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur r_2. C'est le seul cas de convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III – Estimation de la vitesse de convergence en un point attractif

1. Soit k et δ comme dans la question II-2(a). Comme par hypothèse, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r, d'après la question II-2(c), il existe N satisfaisant aux critères de la question II-2(b). Soit un tel N, alors, d'après II-2(b),

$$\forall n \geqslant N, \quad |x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r| = k^n \cdot \frac{|x_N - r|}{k^N}.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{|x_n - r|}{k^n} \leqslant \frac{|x_N - r|}{k^N}.$$

Ce majorant est indépendant de n, ainsi, $|x_n - r| = O(k^n)$.

2. (a) f est une fonction polynomiale, donc dérivable autant de fois que l'on veut, de dérivées successives continues. En l'occurrence, ici, $f'' = 0$, donc f'' est bien entendu continue.

Soit r tel que $f(r) = r$. Alors $r = \frac{r}{2} + 2$, donc $r = 4$. Ainsi, $\Omega = \{4\}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}$, donc $|f'(r)| = \frac{1}{2} < 1$.

Nous somme donc dans le cadre d'un point fixe attractif.

(b) Tout d'abord, remarquez que comme f est définie sur $I = \mathbb{R}$, alors I est stable par f, et par conséquent, $A = I = \mathbb{R}$, d'après I-2(b). Ainsi, tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}$ définit une suite récurrente.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. En effet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2.$$

On a déjà déterminé le point fixe de f, qui est 4. Posons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - 4$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = x_{n+1} - 4 = \frac{x_n}{2} + 2 - 4 = \frac{x_n - 4}{2} = \frac{y_n}{2}.$$

Ainsi, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{y_0}{2^n} = \frac{x_0 - 4}{2^n} \qquad \text{donc:} \qquad x_n = \frac{x_0 - 4}{2^n} + 4.$$

(c) Ainsi,

$$x_n - r = x_n - 4 = \frac{x_0 - 4}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \lambda(f'(r))^n,$$

où $\lambda = x_0 - 4$, du fait que $f'(r) = \frac{1}{2}$. Cet équivalent est même une égalité, en fait.

3. (a) Par hypothèse, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Donc, d'après la formule de Taylor-Young, rappelée dans l'énoncé, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, telle que :

$$\begin{aligned}\forall j\in\mathbb{N},\quad f(x_j) &= r+f'(r)(x_j-r)+\frac{f''(r)}{2}(x_j-r)^2+(x_j-r)^2\varepsilon_j\\ &= r+f'(r)(x_j-r)\left(1+\frac{f''(r)}{2f'(r)}(x_j-r)+\frac{1}{f'(r)}(x_j-r)\right),\end{aligned}$$

factorisation que l'on peut faire car $f'(r)\neq 0$. Ainsi,

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad x_{j+1}-r=f'(r)(x_j-r)(1+R_j),$$

où :

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad R_j=\left(\frac{f''(r)}{2f'(r)}+\frac{1}{f'(r)}\right)(x_j-r),$$

Comme $(x_j-r)=O(k^j)$ d'après III-1, on en déduit que $R_j=O(k^j)$.

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad x_n-r=(f'(r))^n(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j)$.

Pour $n=1$, cela donne $x_1-r=f'(r)(x_0-r)(1+R_0)$, ce qui est exactement la relation trouvée dans la question précédente, au rang 0. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vrai.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, d'après la question précédente suivie de l'hypothèse de récurrence, on a :

$$x_{n+1}-r=f'(r)(x_n-r)(1+R_n)=f'(r)(1+R_n)(f'(r))^n(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j)=(f'(r))^{n+1}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n}(1+R_j).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vrai.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

(c) i. On a pour tout $j\in\mathbb{N}$, $|1+R_j|\geqslant 0$. De plus, si $|1+R_j|=0$, alors $R_j=-1$, et en remplaçant dans l'expression de la question III-3(a), on obtient $x_{j+1}=r$, et donc, comme r est point fixe de f, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur r. Ce cas a été exclus des hypothèses de la partie III.

Ainsi, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $|1+R_j|>0$, donc $\ln(|1+R_j|)$ est défini.

ii. On a $R_j=O(k^n)$, donc, puisque $k\in[0,1[$, en particulier, $(R_j)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $j\geqslant N$, $R_j>-1$, donc $|1+R_j|=1+R_j$, donc $\ln(|1+R_j|)=\ln(1+R_j)$. De plus, comme $(R_j)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, l'équivalent usuel du logarithme fournit alors :

$$\ln(|1+R_j|)\underset{+\infty}{\sim}R_j.$$

iii. Or, $R_j=O(k^n)$, donc toute suite équivalente à (R_j) est aussi en $O(k^n)$. Ainsi,

$$\ln(|1+R_j|)=O(k^n),\qquad\text{soit:}\qquad \exists M\in\mathbb{R},\ \ \forall j\in\mathbb{N},\ \ |\ln(|1+R_j|)|\leqslant Mk^j.$$

iv. Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum\limits_{j=0}^{n}|\ln(|1+R_j|)|$.

- Chacun des termes de cette somme est défini d'après (i).
- D'après (iii) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant\sum_{j=0}^{n}Mk^j=M\frac{1-k^{n+1}}{1-k}\leqslant\frac{M}{1-k}.$$

  Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=|\ln(1+R_{n+1})|>0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Étant également majorée, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$.

v. D'après le résultat admis, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\ln(|1+R_j|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente. Soit ℓ sa limite. Alors,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \prod_{j=0}^{n}(1+R_j)=\mathrm{e}^{v_n},$$

donc, par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{j=0}^{n} (1+R_j) = \mathrm{e}^{\ell} > 0.$$

vi. Notons ℓ' la limite du produit, trouvée dans la question précédente. Alors, puisque $\ell' \neq 0$, on a

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1+R_j) \underset{+\infty}{\sim} \ell', \qquad \text{donc:} \qquad x_n - r \underset{+\infty}{\sim} (f'(r))^n (x_0 - r)\ell' = \lambda (f'(r))^n,$$

où on a posé $\lambda = \ell'(x_0 - r)$.

4. (a) On utilise à nouveau la formule de Taylor-Young, donnant l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, et telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} = f(x_j) = r + \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2 + (x_j - r)^2 \varepsilon_j,$$

puisque $f'(r) = 0$. Comme $f''(r) \neq 0$, on peut écrire

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2 (1 + S_j),$$

où on a posé : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad S_j = \dfrac{2\varepsilon_j}{f''(r)}$. Comme $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, la suite $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ également.

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

.

En appliquant deux fois la relation de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} x_2 - r &= \frac{f''(r)}{2}(x_1 - r)^2(1+S_1) = \frac{f''(r)}{2}\left(\frac{f''(r)}{2}\right)^2 (x_0 - r)^4 (1+S_0)^2(1+S_1) \\ &= \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^3 (x_0 - r)^4 (1+S_0)^2 (1+S_1), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(2)$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, d'après la relation de la question précédente, suivie de l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= \frac{f''(r)}{2}(x_n - r)^2 (1+S_n) \\ &= \frac{f''(r)}{2} \left[\frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1+S_{n-1}) \right]^2 (1+S_n) \\ &= \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^{n+1}} \left(|1+S_{n-1}|^{2^{-n+1-1}}\right)^{2^{n+1}} (1+S_n) \end{aligned}$$

Le passage aux valeurs absolues pour $(1+S_{n-1})$ est justifié par le fait que l'exposant est pair (l'expression est élevée au carré). On obtient donc :

$$x_{n+1} - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} |1+S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^{n+1}} (1+S_n).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

(c) Par continuité de l'exponentielle, la convergence de la suite $\left(\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)_{n\geqslant 2}$ vers une limite non nulle est équivalente à la convergence de la suite $\left(\ln\left(\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire à la convergence de la suite $\left(\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{2^{j+1}}\ln|1+S_j|\right)_{n\geqslant 2}$. D'après le résultat admis, il suffit de montrer que la suite $\left(\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{2^{j+1}}|\ln|1+S_j||\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

Or, comme dans la question III-3(c), cette suite est croissante. Montrons qu'elle est majorée.

Comme (S_j) est de limite nulle, $(\ln|1+S_j|)$ tend aussi vers 0, donc en particulier est bornée. Il existe donc $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $|\ln|1+S_j||\leqslant M$. Ainsi,

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{2^{j+1}}|\ln|1+S_j||\leqslant\frac{M}{2^{j+1}}.$$

En sommant, on obtient donc :

$$\forall n\geqslant 2,\quad \sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{2^{j+1}}|\ln|1+S_j||\leqslant\sum_{j=0}^{n-2}\frac{M}{2^{j+1}}=\frac{M}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-2}}}{\frac{1}{2}}=M\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\leqslant M.$$

Ainsi, cette suite est majorée. Étant croissante, elle converge donc dans $\mathbb{R}$. Nous avons expliqué plus haut en quoi cela répond à la question posée.

(d) i. Soit $\varepsilon>0$. La suite $(\ln|1+S_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $j\geqslant N-1$, $|\ln|1+S_j||\leqslant\varepsilon$. Alors, pour tout $n\geqslant N$, et tout $j\geqslant n-1$, on a en particulier $j\geqslant N-1$, donc :

$$\left|2^n\ln(|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|=\left|\frac{2^n}{2^{j+1}}\ln|1+S_j|\right|\leqslant\frac{1}{2^{j+1-n}}\varepsilon.$$

ii. On a donc, pour tout $n\geqslant N$, et tout $m\geqslant n$,

$$\left|2^n\ln\prod_{j=n-1}^{m}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|\leqslant\sum_{j=n-1}^{m}2^n\left|\ln|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|\leqslant\sum_{j=n-1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^{j+1-n}},$$

la première inégalité découlant de l'inégalité triangulaire, la seconde de la question précédente. Calculons la dernière somme, qui est une somme géométrique :

$$\sum_{j=n-1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^{j+1-n}}=\varepsilon\sum_{j=0}^{m-n+1}\frac{1}{2^j}=2\varepsilon\cdot\left(1-\frac{1}{2^{m-n+2}}\right)\leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant N$, et tout $m\geqslant n$: $\left|2^n\ln\prod_{j=n-1}^{m}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|\leqslant 2\varepsilon.$

Passons à la limite dans cette inégalité lorsque m tend vers $+\infty$: le produit tend vers π_n, et le logarithme étant continu, on en déduit que l'expression de gauche tend vers $|2^n\ln\pi_n|$. Ainsi, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\forall n\geqslant N,\quad |2^n\ln\pi_n|\leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la convergence d'une suite, la suite $(2^n\ln\pi_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 0.

iii. Soit λ la limite de $\left(\left|\frac{f''(r)}{2}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|\right)_{n\geqslant 2}$ (on sait qu'elle existe d'après la question 4(c), et qu'elle est non nulle, d'après les hypothèses). Donc $\lambda>0$. De plus, pour tout $n\geqslant 2$,

$$\lambda=\left|\frac{f''(r)}{2}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\cdot\pi_n\right|$$

et par conséquent, l'exposant 2^n étant pair :

$$\frac{\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}}{\lambda^{2^n}} = \frac{\left|\frac{f''(r)}{2}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|^{2^n}}{\lambda^{2^n}} = |\pi_n^{2^n}|.$$

Or, d'après la question précédente, $(\ln(\pi_n^{2^n})$ tend vers 0, donc $\pi_n^{2^n}$ tend vers $e^0 = 1$, par continuité de l'exponentielle. On en déduit que

$$\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \lambda^{2^n}.$$

Ainsi, d'après la question 4(b) :

$$x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\lambda^{2^n}}{f''(r)}.$$

Partie IV – Un exemple : les suites de Héron

1. f_p est deux fois dérivable sur I, de dérivée seconde continue, car il s'agit d'une fraction rationnelle (donc du quotient de deux polynômes).
   Déterminons les points fixes de f_p : soit $r \in I$. On a :
   $$f_p(r) = r \iff (p-1)r + \frac{a}{r^{p-1}} = pr \iff r^p = a \iff r = \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}.$$
   En effet, r est positif, et a admet une unique racine p-ième positive.
   Ainsi $\Omega = \{\sqrt[p]{a}\}$.
   Calculons les dérivées successives de f_p en r :
   - $\forall x \in I,\ f_p'(x) = \frac{1}{p}\left(p - 1 - \frac{(p-1)a}{x^p}\right)$, donc, puisque $r^p = a$, $f_p'(r) = 0$.
   - $\forall x \in I,\ f_p''(x) = \frac{(p-1)a}{x^{p+1}}$, donc $f''(r) = \dfrac{p-1}{\sqrt[p]{a}} \neq 0$.

   Ainsi, la fonction f_p satisfait aux hypothèses de la partie III, question 4 (et non 3).
2. D'après l'expression de f_p', on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt[p]{a}$	$+\infty$
${f_p}'(x)$	$-$	0	$+$
$f_p(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt[p]{a}$	↗ $+\infty$

3. D'après le tableau ci-dessus, puisque $\sqrt[p]{a} > 0$, $f_p(I) \subset I$. Ainsi, d'après la question I-2(b), $A = I$, et d'après la question I-1(c), tout choix de x_0 dans I définit une suite récurrente.
   De plus, toujours d'après le tableau de variations, pour tout $x > 0$, $f_p(x) \geqslant \sqrt[p]{a}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = f_p(x_{n-1}) \geqslant \sqrt[p]{a}$.
   De plus, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right) - x_n = \frac{x_n}{p}\left(\frac{a}{x_n^p} - 1\right).$$
   Comme $x_n \geqslant \sqrt[p]{a}$, on obtient $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, au moins à partir du rang 1.
   Étant décroissante et minorée par $\sqrt[p]{a}$ (à partir du rang 1), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, et f_p étant continue, sa limite est l'unique point fixe de f_p, à savoir $\sqrt[p]{a}$.

4. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_nv_n.$$

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $x_n = \frac{u_n}{v_n}$.
On a $u_0 = x_0 > 0$, $v_0 = 1 > 0$ et $x_0 = \frac{u_0}{v_0}$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors

$$u_{n+1} = u_n^2 + v_n^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_nv_n > 0.$$

On peut donc considérer le quotient $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$:

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + av_n^2}{2u_nv_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{v_n} + \frac{av_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{v_n} + \frac{av_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} + \sqrt{a}\cdot v_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 + 2\sqrt{a}u_nv_n = (u_n + \sqrt{a}\cdot v_n)^2.$$

(c) Ainsi, une récurrence rapide amène :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n + \sqrt{a}v_n = (u_0 + \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n}.$$

Le même raisonnement donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n - \sqrt{a}v_n = (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}.$$

(d) En additionnant les deux égalités précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 2u_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n},$$

et de même, en les soustrayant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 2\sqrt{a}v_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n - r = \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{a} = \sqrt{a}\cdot\frac{(x_0+\sqrt{a})^{2^n} + (x_0-\sqrt{a})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{a})^{2^n} - (x_0-\sqrt{a})^{2^n}} - \sqrt{a} = \sqrt{a}\cdot\frac{2(x_0-\sqrt{a})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{a})^{2^n} - (x_0-\sqrt{a})^{2^n}}.$$

Or, comme $x_0 > 0$, on a $|x_0 - \sqrt{a}| < |x_0 + \sqrt{a}|$, donc $(x_0 - \sqrt{a})^{2^n} = o((x_0+\sqrt{a})^{2^n})$, et donc :

$$x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{a}\cdot\left(\frac{2(x_0-\sqrt{a})}{(x_0+\sqrt{a})}\right)^{2^n} = \sqrt{a}\cdot\left(\frac{2|x_0-\sqrt{a}|}{(x_0+\sqrt{a})}\right)^{2^n}.$$

Ainsi, $\lambda_2(x_0) = \dfrac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}$.

5. (a) i. Pour tout $x > 0$, $g_p(x) > 0$, donc $I =]0, +\infty[$ est stable par g_p. D'après la partie I, tout choix de $y_0 > 0$ définit donc une suite récurrente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g_q.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(y_n^q + \frac{r^{2q}}{y_n^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{soit:} \qquad y_{n+1}^q = \frac{1}{2}\left(y_n^q + \frac{r^{2q}}{y_n^q}\right).$$

Ainsi, la suite $(y_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente associée à f_2, de valeur initiale y_0^p, avec $a = r^{2q}$. D'après IV-4(d), on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad y_n^p = \sqrt{r^{2q}}\cdot\frac{(y_0^p + \sqrt{r^{2q}})^{2^n} + (y_0^p - \sqrt{r^{2q}})^{2^n}}{(y_0^p + \sqrt{r^{2q}})^{2^n} - (y_0^p - \sqrt{r^{2q}})^{2^n}} = r^q\cdot\frac{(y_0^p + r^q)^{2^n} + (y_0^p - r^q)^{2^n}}{(y_0^p + r^q)^{2^n} - (y_0^p - r^q)^{2^n}}.$$

Ainsi, r et y_n étant positifs,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad y_n = r\cdot\left(\frac{(y_0^p + r^q)^{2^n} + (y_0^p - r^q)^{2^n}}{(y_0^p + r^q)^{2^n} - (y_0^p - r^q)^{2^n}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

iii. D'après la question IV-3, $(y_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a} = r^p$, donc, y_n et r étant positifs, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Ainsi, pour tout $\ell \in [\![0, q-1]\!]$, $(r^\ell y_n^{q-1-\ell})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r^{q-1}, et, d'après les propriétés de sommes de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{q-1} r^\ell y_n^{q-1-\ell} = qr^{q-1}.$$

Comme cette limite est non nulle et non infinie, on en déduit que :

$$\sum_{\ell=0}^{q-1} r^\ell y_n^{q-1-\ell} \underset{+\infty}{\sim} qr^{q-1}.$$

iv. D'après la question IV-4(d), puisque $(y_n^q)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à f_2, on a :

$$y_n^q - r^q \underset{+\infty}{\sim} r^q \cdot \left(\frac{2|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r^q}\right)^{2^n}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n^q - r^q = (y_n - r)\left(\sum\limits_{\ell=0}^{q-1} r^\ell y_n^{q-1-\ell}\right)$, donc, d'après la question précédente,

$$y_n - r \underset{+\infty}{\sim} \frac{y_n^q - r^q}{qr^{q-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{r}{q}\left(\frac{2|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r^q}\right)^{2^n}.$$

Ainsi, en posant $\mu_q = \dfrac{2|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r^q}$ et $C = \frac{r}{q}$, on obtient :

$$y_n - r \underset{+\infty}{\sim} C(\mu_q)^{2^n}.$$

(b) i. L'énoncé ne tient pas la route, suite à une erreur de calcul de ma part lors de sa conception. Il faut contidérer k définie par $k(x) = \frac{x^2}{1+x} + \ln(1-x^2)$. Cette fonction k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ en tant que composée, quotient et somme de fonctions qui le sont, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad k'(x) &= \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \\ &= x \cdot \frac{(2+x)(1-x) - 2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = -x^2 \cdot \frac{x+3}{(1-x)^2(1+x)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $k'(x) \leqslant 0$, donc k est décroissante. De plus, $k(0) = 0$, donc, étant décroissante, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $k(x) \leqslant 0$

ii. On corrige de même : h est définie par $h(x) = \ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x^2)$. Cette fonction h est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ en tant que composée, quotient et somme de fonctions qui le sont, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h'(x) &= -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{-x^2(1+x) + 2x^2}{1-x^2} + \ln(1-x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2(1-x)}{1-x^2} + \ln(1-x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{1+x} + \ln(1-x^2)\right) = \frac{k(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

D'après l'étude du signe de k, cette expression est négative sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc h est décroissante sur cet intervalle.

iii. On a, pour tout $p \geqslant 2$:

$$v_p = \frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} = \frac{p^{2p-1}(p-1)}{(p^2-1)^p} = \frac{p-1}{p} \cdot \left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)^p.$$

Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$,
$$\ln v_n = \ln\left(1-\frac{1}{p}\right) - p\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$
Or, lorsque p croît, $\frac{1}{p}$ décroît, et comme $p \geqslant 2$, $\frac{1}{p} \in [0, \frac{1}{2}]$. D'après la question 5(b)ii, on en déduit que $\ln\left(1-\frac{1}{p}\right) - p\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$ croît. Ainsi, $(\ln(v_p))_{p\geqslant 2}$ est croissante, et par croissance de l'exponentielle, $(v_n)_{p\geqslant 2}$ est croissante.

De plus, $\lim\limits_{p\to\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{p}\right) = 0$ et
$$p\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-p}{p^2} = -\frac{1}{p},$$
donc $\lim\limits_{p\to+\infty} p\ln\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{p\to+\infty} \ln v_n = 0$, puis $\lim\limits_{p\to\infty} v_n = 1$.

iv. Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$, $v_p \leqslant 1$, et donc $u_{p+1} \leqslant u_p$. Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$, $u_p \leqslant u_2 = \frac{1}{2}$.

(c) Soit $x \geqslant a^{\frac{1}{p}}$. On a alors $x^{p-2} \geqslant a^{\frac{p-2}{p}}$, donc $\frac{a}{x^{p-1}} \leqslant \frac{a^{\frac{2}{p}}}{x}$. Ainsi :
$$\begin{aligned}(f_p(x))^{p-1} &= \frac{1}{p^{p-1}}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right)^{p-1}\\ &\leqslant \frac{1}{p^{p-1}}\left((p-1)x + \frac{a^{\frac{2}{p}}}{x}\right)^{p-1} = \frac{1}{p^p}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(p-1)^k x^k \frac{a^{\frac{2(p-1-k)}{p}}}{x^{p-1-k}}\\ &\leqslant \frac{1}{p^{p-1}}\left((p-1)^{p-1}x^{p-1} + \frac{a^{\frac{2(p-1)}{p}}}{x^{p-1}}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} x^{p-1} + \frac{1}{p^p}\cdot\frac{r^{2(p-1)}}{x^{p-1}}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $p \geqslant 2$, $\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}$, et de plus, $p^p \geqslant 2$, donc $\frac{1}{p^p} \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi :
$$f_p(x)^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}\left(x^{p-1} + \frac{r^{2(p-1)}}{x^{p-1}}\right) = g_{p-1}(x)^{p-1}.$$

Les expressions étant toutes positives, et la fonction puissance $p-1$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $x \geqslant a^{\frac{1}{p}}$, $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$.

(d) i. Du fait de la condition initiale, on a immédiatement, d'après la question IV-3, $x_n > a^{\frac{1}{p}}$ (elle ne peut pas être stationnaire).

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a^{\frac{1}{p}} < x_n \leqslant y_n$.

$\mathcal{P}(0)$ provient des conditions initiales.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors $a^{\frac{1}{p}} < x_n \leqslant y_n$, donc, f_p étant croissante sur $[a^{\frac{1}{p}}, +\infty[$,
$$x_{n+1} = f_p(x_n) \leqslant f_p(y_n) \leqslant g_{p-1}(y_n) = y_{n+1}$$
l'avant-dernière inégalité provenant de la question précédente. Ainsi puisqu'on a déjà justifié que $x_{n+1} > a^{\frac{1}{p}}$, on obtient $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

ii. On a $x_n \underset{+\infty}{\sim} C'(\lambda_p(x_0))^{2^n}$, et $y_n \underset{+\infty}{\sim} C\mu_{q-1}(x_0)$. Ainsi, si $\lambda_p(x_0) > \mu_{q-1}(x_0)$, on obtient
$$\frac{x_n}{y_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C'}{C}\left(\frac{\lambda_p(x_0)}{\mu_{q-1}(x_0)}\right)$$
qui tend vers $+\infty$. Donc $\frac{x_n}{y_n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n$. Par conséquent :
$$\lambda_p(x_0) \leqslant \mu_{q-1}(x_0) = \frac{2|x_0^{q-1} - r^{q-1}|}{x_0^{q-1} + r^{q-1}}.$$

(e) La suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f_p vérifiant $x'_0 = x_1$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad x'_n = x_{n+1}$. Ainsi, soit C et C' tels que

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} C(\lambda_p(x_0))^{2^n} \qquad \text{et} \qquad x'_n \underset{+\infty}{\sim} C'(\lambda_p(x_1))^{2^n}.$$

On a alors

$$x'_n = x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} C(\lambda_p(x_0))^{2^{n+1}} = C(\lambda_p(x_0)^2)^{2^n}.$$

Par conséquent, $C = C'$ et $\lambda_p(x_1) = \lambda_p(x_0)^2$.

Or, d'après le tableau de variations de f_p, on a $x_1 > a^{\frac{1}{p}}$, donc on peut appliquer les récultats précédents :

$$\lambda_p(x_1) \leqslant \frac{2|x_1^{q-1} - r^{q-1}|}{x_1^{q-1} + r^{q-1}}.$$

On en déduit que

$$\lambda_p(x_0) \leqslant \left(\frac{2|x_1^{q-1} - r^{q-1}|}{x_1^{q-1} + r^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

avec $x_1 = f_p(x_0)$.