Problème n^o 3 : Réels

Correction du problème 1 – (Inégalités classiques)

Partie I – Convexité

1. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$.
   - Soit $z \in]x, y[$. Effectuons une analyse synthèse pour trouver λ convenable.
     * Analyse : Si λ est un réel de $]0, 1[$ vérifiant $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, on a $z = y - \lambda(y - x)$, donc :
     $$\lambda = \frac{y - z}{y - x},$$
     ce qui est licite puisque $x \neq y$.
     * Synthèse : posons $\lambda = \dfrac{y - z}{y - x}$. Comme $z \in]x, y[$, $y - z \in]0, y - x[$, donc $\lambda \in]0, 1[$. De plus,
     $$\lambda x + (1 - \lambda)y = \frac{x(y - z)}{y - x} + \frac{y(y - x - y + z)}{y - x} = \frac{z(y - x)}{y - x} = z.$$
     Ainsi, λ répond au problème.

     Par conséquent, $\boxed{\text{tout } z \in]x, y[\text{ s'écrit sous la forme } z = \lambda x + (1 - \lambda)y,\ \lambda \in]0, 1[.}$
   - Réciproquement, si $\lambda \in]0, 1[$, on a $1 - \lambda \in]0, 1[$ aussi, et donc, puisque $x < y$:
   $$x = \lambda x + (1 - \lambda)y < \lambda x + (1 - \lambda)y < \lambda y + (1 - \lambda)y = y.$$
   Ainsi, $\boxed{\text{tout réel de la forme } \lambda x + (1 - \lambda)y, \text{ pour } \lambda \in]0, 1[, \text{ est dans }]x, y[}$.
2. Pour écrire la somme sous la forme décrite dans l'énoncé, il suffit de sortir le terme $\lambda_n x_n$ de la somme. On a alors :
   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)y_n,$$
   où
   $$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k.$$
   Appliquer l'inégalité de convexité, amène alors :
   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k} x_k\right).$$
   Pour pouvoir continuer la majoration, il faudrait donc utiliser la propriété de convexité généralisée (l'inégalité qu'on est en train de montrer) pour une somme de $n - 1$ termes. Cela nous incite donc à construire une récurrence.

   Procédons donc par récurrence sur $n \geqslant 2$ pour montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]0, 1[^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a
   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
   - Pour $n = 2$, il s'agit de l'inégalité de convexité, vérifiée par hypothèse, f étant supposée convexe.

- Soit $n \geqslant 3$, et supposons que la propriété est vraie pour une somme de $n-1$ termes. Soit alors $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de réels, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0,1[^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. On a alors, d'après le calcul ci-dessus :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} x_k\right).$$

Soit pour tout $k \in [\![0,1]\!]$, $\lambda'_k = \dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_k}$. Pour pouvoir utiliser la propriété au rang $n-1$, il est indispensable de vérifier que la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ vérifie les propriétés requises. N'oubliez pas de le faire !
On a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda'_k = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 - \lambda_n$, donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda'_k = 1.$$

Par ailleurs, $1-\lambda_n > 0$, donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda'_k > 0$. Enfin, puisque $n \geqslant 3$, et puisque

$$1 - \lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k,$$

on a aussi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_k < (1-\lambda_n)$ (car il y a plusieurs termes strictement positifs dans cette somme, donc chacun est strictement plus petit que la somme totale), donc $\lambda'_k < 1$.
Ces vérifications étant faites, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, qui amène :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \lambda'_k f(x_k) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

On a bien obtenu la propriété au rang n.
- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0,1[^n$ de somme égale à 1, on a :

$$\boxed{f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).}$$

3. (a) Soit f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I. Soit $(x,y) \in I^2$, et $\lambda \in]0,1[$. On a alors :

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x(1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y),$$

par convexité de f et g. En regroupant les termes, il vient donc :

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda (f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y).$$

Ainsi, $\boxed{f+g \text{ est convexe sur } I}$.
En changeant toutes les inégalités, on obtient de même que $\boxed{\text{la somme de deux fonctions convaves est concave}}$.

(b) Soit $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in]0,1[$. On a alors, par convexité de f :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

La croissance de g permet d'appliquer g à cette inégalité :

$$g(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \leqslant \lambda g(f(x)) + (1-\lambda) g(f(y)),$$

la seconde inégalité découlant de la convexité de g. Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est convexe}}$.

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $(x,y)\in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

(a) Pour $n=1$, il s'agit de la propriété satisfaite par f par hypothèse.
Soit $n\geqslant 1$, tel que pour tout $(y_1,\dots,y_{2^n})\in I^{2^n}$, on ait :

$$f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_k\right)\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k).$$

Considérons une famille $(x_1,\dots,x_{2^{n+1}})\in I^{2^{n+1}}$. On a alors, en groupant les termes en deux paquets de cardinal 2^n pour utiliser la propriété satisfaite par f, puis en appliquant l'hypothèse de récurrence à chaque terme obtenu :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_k+\frac{1}{2^n}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_k\right)+f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_{k+2^n}\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k)+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_{k+2^n})\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^{n+1}} f(x_k)
\end{aligned}$$

Ceci nous donne bien notre propriété au rang $n+1$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n\geqslant 1$, et tout $(x_1,\dots,x_{2^n})\in I^{2^n}$, on a :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_k\right)\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k)}.$$

(b) Soit $(x,y)\in I^2$ et $(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p-2^n$. On pose $x_1=\cdots=x_p=x$ et $x_{p+1}=\cdots=x_{2^n}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{2^n} x_k = px+(2^n-p)y \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{2^n} f(x_k)=pf(x)+(2^n-p)f(y).$$

L'inégalité de la question précédente, appliquée à la famille $(x_1,\dots,x_{2^n})$, amène donc :

$$\boxed{f\left(\frac{px+(2^n-p)y}{2^n}\right)\leqslant \frac{p}{2^n}f(x)+\frac{2^n-p}{2^n}f(y)}.$$

(c) Soit $x<y$ dans $]0,1[$. Soit n tel que $2^{-n}<y-x$. La propriété d'Archimède nous assure de l'existence d'un entier $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $q2^{-n}>x$. La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ nous permet de considérer p, le plus petit entier pour lequel cette propriété est vérifiée. On a alors $p2^{-n}>x$, et $(p-1)2^{-n}\leqslant x$, donc

$$p2^{-n}+\leqslant x+2^{-n}<x+y-x=y$$

Ainsi, $x<\frac{p}{2^n}<y$ et comme $\frac{p}{2^n}\in E$, cela prouve bien $\boxed{\text{la densité de } E \text{ dans }]0,1[}$ (en effet, comme $y<1$, $p<2^n$ ce qui nous assure bien l'appartenance à E).

(d) Il s'agit ici de caractériser la densité par la convergence de suites. Soit $\lambda\in]0,1[$. Par densité de E, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\lambda_n\in E\cap]\lambda-\frac{1}{2^n},\lambda+\frac{1}{2^n}[$. On a donc $\boxed{\text{une suite } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } E \text{ telle que } \lambda_n\to\lambda}$ (d'après le théorème d'encadrement).

(e) On admet, conformément à l'énoncé, que la continuité de f permet de passer à la limite sous la fonction f. Soit $(x,y)\in I^2$, $\lambda\in]0,1[$, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lambda_n\to\lambda$, comme dans la questino précédente. D'après la question 4(b), on a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(\lambda_n x+(1-\lambda_n)y)\leqslant \lambda_n f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

En passant à la limite dans cette inégalité, et d'après la propriété admise pour la fonction continue f, il vient :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Cette inégalité prouve $\boxed{\text{la convexité de } f}$.

Partie II – Exemples de fonctions convexes ou concaves

1. Il s'agit donc de montrer que les deux inégalités sont satisfaites, autrement dit qu'on a ici l'égalité. Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in]0,1[$,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = a(\lambda x+(1-\lambda))x+b = \lambda(ax+b)(1-\lambda)(ax+b) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Cette égalité montre que $\boxed{f : x\mapsto ax+b \text{ est concave et convexe sur } \mathbb{R}.}$

2. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $f_p : x\mapsto x^p$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

(a) En utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k}+\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{p-k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k}+\sum_{k=p-\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}^{n}\binom{p}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k}+\sum_{k=\lceil \frac{p}{2}\rceil}^{n}\binom{p}{k}\right)\end{aligned}$$

Or, si n est impair, $\lceil \frac{p}{2}\rceil = \lfloor \frac{p}{2}\rfloor+1$, et les sommes se recollent bien. En revanche si p est pair, $\lceil \frac{p}{2}\rceil = \lfloor \frac{p}{2}\rfloor$, et on a un doublon dans ces deux sommes. Ainsi :

- Si p est impair :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k} = 2^{p-1}};$$

- Si p est pair :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}+\binom{p}{\frac{p}{2}}\right), \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{k} = 2^{p-1}+\frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}}}.$$

(b) Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, et $k\in[\![0,p]\!]$. On a :

$$x^p+y^p-(x^ky^{p-k}+x^{p-k}y^k) = x^k(x^{p-k}-y^{p-k})+y^k(y^{p-k}-x^{p-k}) = (x^k-y^k)(x^{p-k}-y^{p-k}).$$

Comme $x\mapsto x^k$ et $x\mapsto x^{p-k}$ sont toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, les deux termes de ce produit sont de même signe, d'où :

$$\boxed{x^p+y^p \geqslant x^ky^{p-k}+x^{p-k}y^k}$$

(c) D'après la formule du binôme,

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{k}{p}x^ky^{p-k}.$$

Regroupons les termes deux par deux en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux. Cela nécessite comme ci-dessus une discussion sur la parité de p, pour gérer l'éventuel terme isolé lorsque p est pair.

- Si p est pair,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^p &= \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \binom{p}{k} (x^k y^{n-k} + x^{n-k} y^k) + \binom{p}{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}} y^{\frac{p}{2}} \\
&\leqslant (x^p + y^p) \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \binom{p}{k} + \frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}} (x^{\frac{p}{2}} y^{\frac{p}{2}} + x^{\frac{p}{2}} y^{\frac{p}{2}}) \\
&\leqslant (x^p + y^p) \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \binom{p}{k} + (x^p + y^p) \frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}} \\
&= (x^p + y^p) \left(\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{k} \right) - \frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}} \right) \\
&= (x^p + y^p) \left(2^{p-1} + \frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}} - \frac{1}{2}\binom{p}{\frac{p}{2}} \right) = 2^{p-1}(x^p + y^p).
\end{aligned}
$$

- Si p est impair, les calculs sont plus directs, puisqu'il n'y a pas de terme isolé :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^p &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{k} (x^k y^{n-k} + x^{n-k} y^k) \\
&\leqslant (x^p + y^p) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{k} = 2^{p-1}(x^P + y^p),
\end{aligned}
$$

d'après la question 2(a).

Ainsi dans les deux cas, $\boxed{(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p + y^p).}$

(d) Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+$, on obtient, en divisant l'inégalité précédente par 2^p :

$$
\left(\frac{x+y}{2} \right)^p \leqslant \frac{x^p + y^p}{2} \qquad \text{soit:} \qquad f_p\left(\frac{x+y}{2} \right) \leqslant \frac{f_p(x) + f_p(y)}{2}.
$$

D'après la question I-4, f_p étant de plus continue, on en déduit que $\boxed{f_p \text{ est convexe}}$.

3. On fixe x et y deux réels strictement positifs tels que $x < y$. On considère la fonction f de la variable t définie pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$
f(t) = \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).
$$

(a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ de la variable t, et, en utilisant la règle de dérivation d'une composée (ici, composée par une fonction affine), on obtient

$$
\forall t \in [0,1], \quad f'(t) = \frac{x-y}{tx + (1-t)y} - (\ln(x) - \ln(y)) = \frac{(x-y) - y(\ln(x) - \ln(y)) + t(y-x)(\ln(x) - \ln(y))}{tx + (1-t)y}.
$$

Le dénominateur est toujours strictement positif (car d'après la question I-1, il est toujours dans $[x, y]$), et le numérateur est une fonction affine de coefficient directeur non nul (car $x \neq y$), donc s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$, donc au plus une fois sur $[0, 1]$. Ainsi, $\boxed{f' \text{ s'annule au plus une fois sur } [0,1]}$.

(b) Si f' ne s'annule pas sur $[0, 1]$, alors f' étant continue, elle garde un signe constant strict, donc f serait strictement monotone, ce qui contredit $f(0) = f(1) = 0$. Donc f' s'annule exactement une fois sur $[0, 1]$, en un t_0 qu'on peut expliciter, mais c'est sans intérêt.

Le coefficient dominant de la fonction affine égal au numérateur de f' ci-dessus étant négatif (car $y - x$ et $\ln(x) - \ln(y)$ sont de signe opposé, par croissance de ln), on en déduit le signe de f' puis les variations de f :

x	0		t_0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(t_0)$	$\searrow$	0

Ainsi, les variations de f montrent que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \geqslant 0$, donc

$$\ln(tx + (1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$

Ceci prouve bien $\boxed{\text{la concavité de ln}}$.

Partie III – Inégalités classiques

1. **Comparaison des moyennes**

(a) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ par concavité du logarithme, et d'après l'inégalité de la question I-2 (pour les fonctions concaves, l'inégalité est dans l'autre sens, il suffit d'appliquer la question I-2 à la fonction convexe $-f$), en choisissant les coefficients λ_i tous égaux à $\frac{1}{n}$, il vient :

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(x_i).$$

En appliquant l'exponentielle, croissante, il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_i \geqslant \left(\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^n \ln(x_i)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{\ln(x_i)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Nous avons bien obtenu la comparaison des moyennes arithmétique et géométrique :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente à $(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n}\right)$, pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$0 < \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{y_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{y_k}}}.$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder**

(a) Suivant l'indication, on considère une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels de somme 1, qu'on déterminera plus précisément plus tard, et on applique la convexité de la fonction carré avec cette famille de scalaire et les $\frac{x_i}{y_i}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{x_k}{y_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_i \frac{x_i^2}{y_i^2}.$$

Comme à gauche, on veut récupérer la somme des $x_i y_i$, il faudrait que les λ_i aient un facteur y_i^2. Cela permet aussi de faire partir le terme y_i^2 du terme de droite. On ne peut par prendre pour λ_i directement la famille des y_i^2, car il n'y a pas de raison que cette famille vérifie les hypothèses requises. En revanche, on peut la normaliser, en divisant par la somme. On définit donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \frac{y_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}.$$

Cette famille vérifie clairement $\lambda_k \in]0,1[$ (car les y_i ont été supposés strictement positifs, et quye la somme comprend au moins deux termes, puisque $n \geqslant 2$), et la normalisation effectuée nous assure que $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Ainsi, l'inégalité obtenue ci-dessus devient :

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}.$$

On peut alors multiplier par $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Enfin, en prenant la racine (toutes les quantités étant positives) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}$$

(b) Si certains x_i ou y_i sont nuls, on enlève tous les indices tels que $x_i y_i = 0$. Plus précisément, soit $I \subset [\![1, n]\!]$ le sous-ensemble des indices i tels que $x_i y_i \neq 0$ (les x_i et y_i étant toujours supposés positifs ou nuls dans un premier temps). On applique alors l'inégalité en se restreignant à une sommation sur I (l'inégalité reste valable pour une sommation sur un ensemble fini quelconque, il suffit pour le prouver de faire une numérotation des éléments de I). On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k \in I} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k \in I} x_k^2}\sqrt{\sum_{k \in I} y_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

les termes qu'on ajoute à la dernière étape étant positifs.

Ainsi, $\boxed{\text{l'inégalité reste vraie pour des termes positifs ou nuls}}$.

Si les x_i et y_i ne sont plus supposés positifs, on utilise l'inégalité triangulaire pour se ramener à des réels positifs ou nuls :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Ainsi, l'inégalité reste vraie pour des familles quelconques.

(c) On fait de même en posant $\lambda_k = \frac{y_k^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}$, avec la famille $\left(\frac{x_k}{y_k^{q-1}}\right)$. On obtient alors par convexité de $x \mapsto x^p$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k y_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}\right)^p \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q \frac{x_k^p}{y_k^{p(q-1)}}.$$

Or, par définition de q, on a $pq = p + q$, donc $p(q-1) = q$. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k y_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}\right)^p \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q} \sum_{k=1}^{n} x_k^p.$$

En mutlipliant par $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^p$, il vient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{p-1}.$$

Toutes ces quantités étant positives, on peut prendre la racine p-ième :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(d) Soit $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$. On applique l'inégalité de Hölder à la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k(x_k+y_k)^{p-1}$:

$$\sum_{k=1}^n x_k(x_k+y_k)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac1q}=\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{p}\right)^{\frac1q}$$

De même, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n y_k(x_k+y_k)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{p}\right)^{\frac1p}.$$

En sommant les deux inégalités obtenues, il vient alors :

$$\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{p}\right)^{\frac1q}\left(\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac1p}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac1p}\right).$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{p}\right)^{\frac1q}$, et à arranger l'exposant du terme de gauche, en remarquant que $1-\frac1q=\frac1p$. Il vient donc :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^{p}\right)^{\frac1p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac1p}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac1p}}$$

Partie IV – Inégalité maîtresse

1. Soit $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ concave. On définit la fonction $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y)=y\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

(a) Soit $(x_1,x_2,y_1,y_2)\in(\mathbb{R}_+^*)^4$, on a :

$$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)=(y_1+y_2)\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+\frac{y_2}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de concavité pour φ,

$$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)\leqslant(y_1+y_2)\varphi\left(\frac{x_1}{y_1+y_2}+\frac{x_2}{y_1+y_2}\right)=(y_1+y_2)\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right).$$

Par définition de f, on a donc obtenu :

$$\boxed{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)\leqslant f(x_1+x_2,y_1+y_2)}$$

(b) On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. Le cas $n=1$ est trivial, et le cas $n=2$ est la question précédente. Cela fournit l'initialisation.

Soit $n\in\mathbb{N}$, et supposons la propriété vérifiée pour des sommes de n termes. Soit $(x_1,\dots,x_{n+1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ et $(y_1,\dots,y_{n+1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$. On a alors, d'après la question précédente :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k,\sum_{k=1}^{n+1}y_k\right)\leqslant f\left(\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}y_k\right)+f(x_{n+1},y_{n+1}).$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au premier terme su membre de droite :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k,\sum_{k=1}^{n+1}y_k\right)\leqslant \sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)+f(x_{n+1},y_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}f(x_k,y_k).$$

Ainsi, la propriété est héréditaire, et d'après le principe de récurrence, on peut conclure que pour tout $n \geqslant 1$, tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, et tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \leqslant f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right)}.$$

2. On remarque au passage que la concavité de la racine peut s'obtenir de la convexité de sa fonction récirproque $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On a en effet, pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}_+^*$, et tout $\lambda \in]0,1[$:

$$(\lambda\sqrt{x} + (1-\lambda)\sqrt{y})^2 \leqslant \lambda(\sqrt{x})^2 + (1-\lambda)(\sqrt{y})^2.$$

Ainsi, ces quantités étant toutes positives, en simplifiant les écritures et en prenant la racine, il vient :

$$\lambda\sqrt{x} + (1-\lambda)\sqrt{y} \leqslant \sqrt{\lambda x + (1-\lambda)y}.$$

ceci prouve bien la concavité de $\boxed{x \mapsto \sqrt{x}}$.
On peut donc appliquer la question précédente : pour tout $(x'_1, \dots, x'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y'_1, \dots, y'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} y'_k \sqrt{\frac{x'_k}{y'_k}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} y'_k\right) \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} x'_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} y'_k}},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{x'_k y'_k} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} x'_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y'_k\right)}$$

Soit alors $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. En posant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x'_k = x_k^2$ et $y'_k = y_k^2$, il vient alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} y_k^2\right)}}.$$

On a donc retrouvé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. En appliquant la formule à la fonction convexe (admis) $x \mapsto (x^{\frac{1}{p}} + 1)^p$, il vient, pour tout $(x'_1, \dots, x'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y'_1, \dots, y'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y'_k}\left(\left(\frac{x'_k}{y'_k}\right)^{\frac{1}{p}} + 1)^p\right) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} y'_k}\left(\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x'_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} y'_k}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right),$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_i'^{\frac{1}{p}} + y_k'^{\frac{1}{p}}\right)^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x'_k\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y'_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

Pour $(x'_1, \dots, x'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(y'_1, \dots, y'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, en posant $x'_i = x_i^p$ et $y'_i = y_i^p$, et en élevant cette expression à la puissance $\frac{1}{p}$, il vient alors :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

On retrouve l'inégalité de Minkowski.

Partie V – Applications combinatoires

1. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ une famille de réels positifs. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)^2}.$$

Or,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}}}.$$

2. (a) La quantité $\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k}$ vaut 0 ou 1, et ne vaut 1 que si M_i est à la fois dans $\mathcal{D}_j$ et dans $\mathcal{D}_k$, donc si M_i est le point d'intersection de $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}_k$. Comme les M_i sont distincts, et j et k fixé, puisque deux droites distinctes admettent au plus un point d'intersection, l'égalité $\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} = 1$ est vérifiée pour au plus un indice i, et $\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} = 0$ pour les autres indices. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} \leqslant 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} \leqslant 1$$

(b) Par définition,

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}.$$

On utilise la question 1 :

$$\begin{aligned}
I &\leqslant \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k}}\\
&= \sqrt{n\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k}}.\\
&= \sqrt{n\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\substack{(j,k)\in[\![1,m]\!]^2\\ j\neq k}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k}\right)}.
\end{aligned}$$

On déduit alors de la question précédente que

$$I \leqslant \sqrt{n\left(\sum_{\substack{(j,k)\in[\![1,m]\!]^2\\ j\neq k}} 1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1\right)} \leqslant \sqrt{n\,(m(m-1)+mn)} \leqslant \sqrt{n\,(m^2+mn)}$$

On a bien obtenu : $\boxed{I \leqslant \sqrt{nm^2+mn^2}}$.