Indications des exercices

MPSI 4

Alain TROESCH

Version du:

6 septembre 2020

Je remercie toutes les personnes m'ayant signalé des erreurs. En particulier Christophe Selvi, que je ne connais pas personnellement mais qui, pour passer le temps lors du confinement de 2020, s'est amusé à corriger les très nombreuses erreurs de calculs qui truffaient mes corrigés.

Table des matières

1 Logique et raisonnements **4**

2 Ensembles **7**

3 Applications **9**

4 Sommes, binôme **12**

5 Relations **16**

6 Nombres réels **20**

7 Nombres complexes **25**

8 Limites, dérivation **33**

9 Fonctions usuelles **39**

10 Calcul intégral **42**

11 Équations différentielles linéaires **49**

12 Suites **52**

13 Calcul asymptotique **59**

14 Approximations polynomiales **65**

15 Séries numériques **72**

16 Continuité et dérivabilité sur un intervalle **78**

17 Intégration **82**

18 Pivot de Gauss **85**

19 Structures algébriques **86**

20 Groupes symétriques **92**

21 Arithmétique **94**

22 Polynômes et fractions rationnelles **98**

23 Espaces vectoriels **104**

24 Applications linéaires **108**

25 Matrices **112**

26 Déterminants **117**

27 Algèbre bilinéaire **120**

28 Combinatoire **125**

29 Espaces probabilisés, calculs de probabilité **129**

30 Variables aléatoires **133**

1

Logique et raisonnements

Indications ou solutions pour l'exercice 1.1 – Pour le raisonnement déductif, bien décortiquer la structure logique, et poser les hypothèses.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.2 – La négation inverse les quantificateurs. Faire très attention au parenthésage.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.3 – La négation de l'existence et l'unicité équivaut à la négation de l'existence ou la négation de l'unicité.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.4 – Dans les phrases 2 et 3, se demander quelles sont les conditions à avoir pour obtenir la conclusion $x \in B$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.5 – Rappel : la contraposée de $A \Longrightarrow B$ est $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.6 –

1. Par l'absurde, en supposant qu'il n'y en a que n. Étudier la divisibilité de $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ par un nombre premier quelconque.
2. Par récurrence forte, en remarquant que le raisonnement de la question précédente amène :

$$p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 1.7 –

1. Par contraposée, puis disjonction de cas. Remarquer que $a^n - 1$ peut se factoriser par $a - 1$ et plus généralement par $a^d - 1$ lorsque d divise n.
2. Par contraposée, en cherchant de même que dans la question précédente une factorisation de $a^n + 1$.
3. Contraposée et disjonction de cas. Essayer de se ramener à la question précédente.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.8 – Même démonstration que pour $\sqrt{2}$. Essayez de généraliser à n quelconque, si n n'est pas un carré parfait (considérer un facteur premier de multiplicité impaire).

Indications ou solutions pour l'exercice 1.9 – Deux pistes :

- Par l'absurde, en renumérotant les x_i de sorte à ce qu'ils soient rangés dans l'ordre croissant (pour une gestion plus facile des valeurs absolues). Sommer les $|x_{i+1} - x_i|$.
- Découper l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.10 – Sinon, a et b ont même parité. Peuvent-ils être pairs ? Justifier alors que $c^2 \equiv 2\ [4]$. Est-ce possible ?

Indications ou solutions pour l'exercice 1.11 – Par l'absurde. Classer les droites suivant qu'elles contiennent 2 ou 3 points. Combien une droite portant 3 points permet-elle de former de paires de points. Montrer que le nombre de paires de points est de même parité que le nombre de droites. En déduire une contradiction.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.12 – Le joueur 1 peut toujours s'arranger pour retirer un nombre d'allumettes égal au complément à 8 du nombre d'allumettes tirées précédemment par le joueur 2. Arranger le premier coup pour tomber sur un multiple de 8. Généralisation évidente. Quel est le seul cas problématique ?

Indications ou solutions pour l'exercice 1.13 –

1. Analyse-synthèse. Solution $x = 5$
2. Analyse-synthèse. Solutions $x = 1$ et $x = 2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.14 –

1. Analyse-synthèse. $c = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Analyse-synthèse. Former un système satisfait par a et b, puis les exprimer en fonction de $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_0^1 tf(t)\ \mathrm{d}t$.
   Solution : $a = 12\int_0^1 tf(t)\ \mathrm{d}t - 6\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et $b = 4\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - 6\int_0^1 tf(t)\ \mathrm{d}t$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.15 – Par analyse-synthèse, en supposant qu'une telle décomposition existe. « Évaluer » successivement $(x+1)f(x)$ en -1, $(x-1)f(x)$ en 1, $(x-2)f(x)$ en 2 et $(x-5)f(x)$ en 5. La synthèse est alors une simple mise sur le même dénominateur. Un théorème qu'on verra en cours d'année nous dispensera par la suite de cette synthèse (ce théorème permet d'affirmer l'existence d'une telle décomposition).
Solution : $a = -\frac{1}{36}$, $b = \frac{1}{8}$, $c = -\frac{1}{9}$, $d = \frac{1}{72}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.16 – Analyse-synthèse. Écrire $Z = \lambda X + Y$, puis considérer la somme des coordonnées. Exprimer λ en fonction des coordonnées de Z et de X, puis exprimer Y.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.17 –

1. Analyse-synthèse. En notant S la somme des chiffres et n le code, montrer que $n = 33S$. Quelle est la plus grande valeur de n qu'on peut obtenir de la sorte ?
2. Analyse-synthèse : $n = 231S$. Utiliser $n \equiv S\ [9]$ (test classique de divisibilité par 9) et en déduire que $5n$ est divisible par 9. Il reste alors 3 valeurs possibles pour S. La synthèse permet d'en éliminer 2.

   Réponse : 4158.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.18 – Récurrence sur n. Former $q_{n+1} - q_n$, où q_n est le nombre étudié.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.19 – Récurrence sur n. Minorer

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} - \left(\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n+1},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence en isolant le dernier terme. Utiliser une quantité conjuguée et se débarrasser du $\sqrt{n+1}$ le plus tard possible. Même principe pour la deuxième inégalité. Utiliser le théorème d'encadrement pour obtenir la limite $\frac{2}{3}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.20 – Récurrence forte sur m. Pour l'hérédité, distinguer les deux cas possibles pour la première étape. Se ramener au cas $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.
On peut aussi utiliser la décomposition en base 2 de m.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.21 – Sans difficulté. Tout est basé sur des récurrences d'ordre 2. Le résultat exposé dans cet exercice est important (explicitation des suites récurrentes d'ordre 2). Nous le généraliserons en cours d'année.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.22 – Raisonner par récurrence sur n. Si des $n+2$ éléments sélectionnés de $[\![1, 2n+2]\!]$, seulement n sont dans $[\![1, 2n]\!]$, et qu'aucun ne divise un autre, ajouter à l'ensemble le nombre $n+1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.23 – Par HR, on peut déplacer la tour des $n-1$ plus petits en 3, puis le grand disque en 2 puis la tour des $n-1$ plus petits en 2. Le nombre minimal s'obtient par cet algorithme en considérant le nombre minimal au rang $n-1$, ce qui donne une relation de récurrence. Cette affirmation est à justifier soigneusement en remarquant que même si on fait des coups inutiles et des détours, il est nécessaire de se retrouver dans les configurations décrites ci-dessus.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.24 – Montrer que les nombres impairs ont tous même couleur, et que si un nombre pair a cette même couleur, il en est de même des suivants. En déduire que les nombres pairs sont tous de l'autre couleur.
Réponse : 40 en rouge, 2013 en bleu.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.25 – Récurrence forte descendante, à partir de $n = 101$. On traitera différemment les cas $n \leqslant 90$ et $n > 90$.

Indications ou solutions pour l'exercice 1.26 – Montrer plus généralement que u_n constitué de 3^n chiffres 1 est divisible par 3^n mais pas par 3^{n+1} (par récurrence sur n). On remarquera que :

$$u_{n+1} = u_n(1 + 10^{3^n} + 10^{2\cdot 3^n}).$$

2 Ensembles

Indications ou solutions pour l'exercice 2.1 –

- Sens direct : deux choix naturels de Z peuvent convenir.
- Sens réciproque : Prendre x dans X, et utiliser l'une ou l'autre des deux inclusions, suivant que $x \in Z$ ou non.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.2 – On peut raisonner élément par élément, en démontrant à chque fois les deux implications, ou alors, plus rapidement et plus élégamment, travailler dans un ensemble global A contenant X, Y et Z (par exemple $A = X \cup Y \cup Z$), et traduire les différences par $X\ Y = X \cap Y^C$, le complémentaire étant pris dans A. On s'en sort facilement avec les lois de de Morgan et les propriétés de distributivité.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.3 – Par double inclusion. Pour l'inclusion directe, considérant x dans l'union, considérer, s'il en existe, un indice tel que $x \in A_i \setminus A_{i+1}$, les indices étant compris cycliquement. Que signifie le fait qu'il n'existe pas un tel indice ?

Indications ou solutions pour l'exercice 2.4 – Non, tracer un diagramme en patates.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.5 – Considérer $x \in C \setminus A$, et montrer que $x \in (C \cup D) \setminus (A \cup B)$.
On peut aussi raisonner formellement uniquement avec des opérations ensemblistes en remarquant que $A = (A \cup B) \cap D^C$, le complémentaire étant pris dans un ensemble dont A, B, C et D sont des sous-ensembles.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.6 – Solution : $B \subset X \subset \overline{A}$. À quelle condition sur A et B l'équation admet-elle au moins une solution ?

Indications ou solutions pour l'exercice 2.7 – Plusieurs méthodes possibles :

- Par récurrence, en utilisant la distributivité pour l'hérédité.
- Par double-inclusion : si $x \in A_i \cup B_i$ pour un certain i, x est dans $\bigcup\limits_{j \in I} A_j$, sinon à l'autre union. Réciproque : sinon, construire I de sorte à n'avoir dans l'union que des ensembles ne contenant pas x.
- Montrer la relation en passant au complémentaire : se ramener à la propriété similaire dans $\mathbb{R}$, issue de la distributivité du produit sur la somme, en utilisant les fonctions caractéristiques, et le fait que $x \in A \cup B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \neq 0$. Cette relation n'est d'ailleurs rien d'autre que le développement généralisé, lorsqu'on dispose d'une loi distributive sur une autre.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.8 – L'appartenance de x à l'un ou l'autre de ces deux ensembles impose des contraintes sur le nombre maximal ou le nombre minimal de X_i auxquels x appartient.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.9 – Sens direct évident. Réciproque : considérer $X \in \mathcal{P}(X)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.10 – Utiliser les cardinaux et la propriété de Cantor. On peut aussi adapter l'argument de Russell, en considérant E l'ensemble des éléments x de X tels que $x \notin x$.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.11 –

1. Ne pas se tromper dans les hauteurs d'imbrication : bien compter les accolades ! Le sigleton $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide !

   Réponses (dans l'ordre) : oui, oui, oui, non.

2. (a) $\mathcal{P}_2(X)$ contient 16 éléments, chacun de ces éléments étant un ensemble de sous-ensembles de X. Par exemple, $\{\varnothing\}$, ou $\{\varnothing, \{1\}\}$. L'ensemble $\{\{\varnothing\}\}$ est-il élément de $\mathcal{P}_2(X)$? Pour quelles valeurs de k est-il élément de $\mathcal{P}_k(X)$?
   (b) Les cardinaux respectifs sont 1, 2 et 4.
   (c) Pour $Y \in \mathcal{P}(X)$, il s'agit de montrer que les éléments de Y sont éléments de $\mathcal{P}(X)$. Raisonner élément par élément en revenant à la transitivité de X.
   (d) Récurrence immédiate.

3. Classer les sous-ensembles de $E \cup \{E\}$ suivant qu'ils contienne l'élément E ou non, et étudier les 2 cas. Pour information, cette propriété est à la base de la définition des ordinaux de Cantor.

4. Sans difficulté.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.12 – Voir cette propriété comme une généralisation de la propriété de maximalité de l'intersection. Considérer la famille $(U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$.
On n'a pas unicité, puisqu'on peut ajouter à cette famille des parts redondantes ou vides, sans modifier la propriété requise. D'ailleurs, la famille considérée peut déjà contenir des redondances ou des parts vides. On peut reprendre le même exercice avec des partitions de X. Cette fois, on obtient l'unicité.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.13 – CNS : pour tout $(i,j) \in I^2$, f_i et f_j coïncident sur $X_i \cap X_j$. On a alors unicité de f.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.14 – La difficulté essentielle est de bien comprendre les objets manipulés.

1. Sans difficulté, en suivant les définitions.
2. Étant donné $S \in \mathcal{S}$, construire f non nulle sur S et nulle ailleurs, et en déduire que S est élément du nerf du recouvrement. Réciproquement, étant donné S' élément du nerf, montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $S' \subset S$, en déduire $S' \in \mathcal{S}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 2.15 – Je n'ai pas trouvé de solution élémentaire (sans algèbre linéaire). J'attends vos suggestions.

3 Applications

Indications ou solutions pour l'exercice 3.1 –

1. $f(I) = [1, \mathrm{e}[$
2. $f(I) = \mathbb{R}_-$
3. $f(I) = [\frac{1}{2}, 1]$
4. $f(I) = [1, \frac{31}{27}]$ (étudier les variations)
5. $f(I) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [2n, 2n+1[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.2 –

1. $f^{-1}(I) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $f^{-1}(I) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi]$
3. $f^{-1}(I) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [-\dfrac{pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi]$
4. $f^{-1}(I) =]-\infty, -4[\cup [6, +\infty[$ (étude de variations et résolution des équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 3$, ou directement résolution d'inéquations).

Indications ou solutions pour l'exercice 3.3 –

1. $[0, 1]$
2. $[\frac{1}{2}, 1]$
   (a)
3. (a) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi[$.
   (b) $[-1, 0] \cup [2, 3]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.4 – Montrer que $f(f^{-1}(F')) = F' \cap \mathrm{Im}(f)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.5 –

- Dans le sens direct, si U est un ouvert, considérer x de $f^{-1}(U)$ et montrer l'existence de δ en utilisant la continuité de f au point x et le fait que $f(x)$ est un élément de l'ouvert U.
- Réciproquement, considérer $U =]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.6 –

1. Pour l'exemple, considérer f non injective.

3. Par double-inclusion. Pour le sens direct, soit considérer les éléments, soit comparer B et $f(f^{-1}(B))$, pour $B \subset F$.

   Pour la minimalité, utiliser la question 2.
4. Montrer $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (i)$

   La dernière implication peut se faire par contraposée. La deuxième en écrivant $X \subset E$ comme union de singletons.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.7 –

1. Faire partir u en prenant x dans E et en le relevant par u dans E'.
2. Si $x \in \mathrm{Im}(u)$, construire $f(x)$ par choix d'un antécédent de $g(x')$ par v, où $u(x') = x$. Remarquez l'utilisation de l'axiome du choix...
3. Pour la première, l'injectivité de v est nécessaire (sinon construire deux fonctions f_1 et f_2 dont la différence disparaît grâce au défaut d'injectivité de v), ainsi que la surjectivité de u (faire différer f_1 et f_2 hors de l'image de u)

   Pour la deuxième, la surjectivité de v est CN par un résultat du cours (dé-composée). L'injectivité de u aussi (si x_1 et x_2 ont même image, on ne pourra obtenir aucune application différenciant les images de ces deux termes).

Indications ou solutions pour l'exercice 3.8 –

- Étant donné $f : A \times B \to C$, fixer b donne une application f_b de A dans C.
- Définir sur chacune des deux coordonnées.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.9 –

- Penser division euclidienne
- Revenir indéfiniment sur les premiers entiers, en allant à chaque fois un peu plus loin.

  Vous pouvez trouver de nombreux autres exemples. Essayez par exemple en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.10 – $f(n) = n$ par récurrence forte sur n : on n'a plus le choix de l'image.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.11 – Considérer $\max(f^{-1}([\![0, M]\!]))$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.12 – Dans les deux hypothèses, on en déduit $f \circ f = \mathrm{id}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.13 – L'injectivité permet de supprimer un étage de p, la surjectivité permet, partant de plus bas, de rajouter artificiellement un étage afin de récupérer l'hypothèse.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.14 – Application directe de la propriété du cours liée aux propriétés d'injectivité ou surjectivité d'une composée. Récupérer d'abord la bijectivité de g, puis utiliser sa réciproque.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.15 – Dans les deux cas, essayer de construire g explicitement, en remontant les flèches. Dans un cas, il faut voir quoi faire quand il n'y a pas de flèche à remonter, dans l'autre, il faut voir quoi faire quand il y a plusieurs flèches à remonter.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.16 – Ces caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité n'utilisent que les applications, et non les éléments. Cette caractérisation permet de définir des notions similaires à injectivité et surjectivité dans un contexte plus général et plus abstrait (dans une catégorie ou on a des objets, des flèches entre objets jouant le rôle d'applications, mais pas d'éléments). On parle dans ce contexte de monomorphismes et d'épimorphismes.

1. Sens direct immédiat en appliquant à x. Sens réciproque par contraposée, en construisant g et h nulles presque partout.
2. Sens direct facile. Sens réciproque par contraposée : sur quels éléments définir g et h différemment ?

Indications ou solutions pour l'exercice 3.17 –

- Injectivité ssi $A \cup B = E$
- Surjectivité ssi $A \cap B = \varnothing$

Indications ou solutions pour l'exercice 3.18 –

1. Si $(A, B) \neq (\varnothing, \varnothing)$, $(\varnothing, \varnothing)$ n'est pas dans l'image. Et sinon ?
2. CNS : $A \cap B = \varnothing$.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.19 –

1. - Si f injective, considérer $A, B \subset E$ et $x \in A \setminus B$. Que dire de $f(x)$ relativement à $f(B)$?
   - Si $\widehat{f}$ est injective, quel candidat naturel Y peut vérifier $f^{-1}(Y) = X$, pour X donné ?
   - Si $\widehat{f^{-1}}$ est surjective, considérer un antécédant par $\widehat{f^{-1}}$ des singletons.
2. - $(i) \Longrightarrow (iii)$: De quoi diffèrent deux ensembles Y et Y' ayant même image réciproque par f ?
   - $(ii) \Longrightarrow (i)$: contraposée
   - $(iii) \Longrightarrow (ii)$: Si $\widehat{f^{-1}}$ injective, que vaut $f(f^{-1}(B))$?

Indications ou solutions pour l'exercice 3.20 –

1. Montrer d'abord $f(P) \subset D$. On évitera $a + \mathrm{i}\, b$, et on utilisera l'expression du module, de la partie réelle et imaginaire en fonction du conjugué.

   Définir ensuite une $g : D \to P$ (ne pas oublier de justifier $g(D) \subset P$), réciproque de f.
2. Avec les conjugués. En déduire $g(P) \subset P$, puis définir une réciproque.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.21 – Pour la généralisation, raisonner par récurrence. Se ramener au rang $n - 1$, en composant deux flèches successives (sur le cercle). Montrer qu'on peut choisir les deux flèches qu'on compose de sorte que l'hypothèse au rang $n - 1$ est alors vérifiée (on a les mêmes compositions globale qu'au rang n, faisant le tour du cercle, sauf une ; on peut s'arranger pour que celle qu'on n'a pas n'est pas l'unique injective ou l'unique surjective).

Indications ou solutions pour l'exercice 3.22 – Définir $g(x)$ en relevant x dans E par s. Montrer l'indépendance vis-à-vis du choix de l'antécédent de x. Montrer que la composée $i \circ h$ est bien ce qu'on veut.

Indications ou solutions pour l'exercice 3.23 – Écrire les diagrammes pour mieux comprendre la situation.

1. CNS : $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Unicité ssi la restriction de f à $f^{-1}(\mathrm{Im}(g))$ est injective.
2. CNS : $f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)$. Unicité ssi f bijective.

4 Sommes, binôme

Indications ou solutions pour l'exercice 4.1 – Effectuer le changement d'indice $i' = i - 1$ dans le second facteur $S_{k+1}(n)$, et regrouper les deux sommes en factorisant autant que possible.
Solution : $S_k(n) = \dfrac{n!}{k \times (n-k)!}$

Indications ou solutions pour l'exercice 4.2 – Trouver P par identification, en imposant un coefficient constant nul. On trouve, sans surprise (puisqu'on connaît la valeur de la somme)

$$P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

Faire un télescopage pour trouver la somme voulue.
On obtient de même pour un exposant 3 : $P = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$, d'où la formule voulue par télescopage, et pour un exosant 4 :

$$P = \frac{1}{30}(X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1)$$

puis par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Indications ou solutions pour l'exercice 4.3 – Après quelques manipulations, se rendre compte que la racine se simplifie bien et part. Utiliser une décomposition de $\frac{1}{k(k+1)}$ puis un télescopage. Réponse : $n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.4 – Regrouper les termes consécutifs de la somme pour lesquels la partie entière de la racine est la même. La somme vaut $-2m$
Notant S_n la somme étudiée, comprendre les variations de S_n lorsque $n \in [\![(2m)^2 - 1, (2m+2)^2 - 1]\!]$, et en déduire que sur cet intervalle $|S_n|$ est majoré par $2m+2$. Conclure par la résolution d'une certaine inégalité. Les valeurs initiales de n doivent être étudiées à part.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.5 – Exprimer s et t comme sommes faisant intervenir les chiffres x_i de N.
Solution : $t = 11(n-1)s$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.6 – Couper la somme interne au niveau de i pour expliciter le minimum.
Solution : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.7 – Intervertir les deux sommes pour se ramener à la formule du binôme. On trouve :

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{p}k^p = (m+1)^n.$$

Remarquer que cet argument permet de retrouver rapidement la relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les sommes de puissances d'entiers.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.8 –
De façon directe, en utilisant la somme des entiers, on est ramené à sommer un polynôme de degré 2 en i, qu'on peut exprimer en fonction de la somme $S_2(n)$ des carrés
En intervertissant d'abord les deux sommes, on a directement $S_2(n)$.
On donne l'égalité des deux expressions, et on isole $S_2(n)$.
Même chose pour la somme des cubes en partant de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.9 – De façon directe : on obtient le terme de gauche
En intervertissant les signes $\sum$, on calcule une somme géométrique, puis une deuxième somme géométrique.
De même pour la somme de la question suivante :
De façon directe, on obtient une somme d'entiers j, ce qui donne, à un facteur 2 près, une somme sur i des $(i+1)(i+2)x^i$.
On fait passer la somme sur i devant, on effectue les différentes sommes, on passe à la limite avec la question 1, et on trouve :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)x^{i-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Nous avons obtenu les deux premirèes séries géométriques dérivées. Le résultat obtenu montre qu'au moins jusqu'à l'ordre 2 (et c'est vrai au-delà), on peut dériver les séries géométriques terme à terme.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.10 – Intervertir les deux sommes, en remarquant que le choix d'un indice (X, x) tel que $x \in X$, peut se faire en commençant d'abord par choisir x quelconque, puis X contenant x, ce qui revient à choisir X' quelconque ne contenant pas x et lui ajouter x.
On peut aussi se servir des fonctions caractéristiques pour intervertir plus formellement les deux signes.
On obtient

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}.$$

Même principe pour la deuxième somme. Solution : $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y| = n4^{n-1}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.11 –

1. Trivial pour $n < m$. Récurrence sur n à m fixé, initialisée à $n = m$. Utiliser la formule comité-président $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$ et la formule de Pascal.
2. Récurrence assez immédiate.
3. Récurrence.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.12 – Pour la question 2, penser à la symétrie du coefficient binomiale, permettant de se ramener à la somme complète du 1.
Question 3 : sommer l'égalité précédente, et regrouper les 2 sommes de $S_{n,i}$.
Question 4 : penser à exprimer 2^n comme somme de coefficients binomiaux (qu 1), exprimer la somme obtenue comme somme sur un triangle, intervertir les deux signes somme.
Question 5 : par dérivation.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.13 – Pour la deuxième question, regrouper les termes suivant leur parité dans la formule du binôme. Pour la dernière $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$, définir α_n et β_n en discutant suivant la parité de n.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.14 – Considérer la somme $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.15 – Comité-président pour les deux premières (en se ramenant à $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$ pour la seconde, et en comitant 2 fois). Comité président dans l'autre sens pour la seconde. On est alors ramené à des formules du binôme
On peut aussi procéder par dérivation de $(1+X)^n$ et identification, ou par primitivation pour la dernière. Les deux premières (ou la version réduite de la seconde) peuvent se démontrer combinatoirement, en n'imposant pas de taille pour le comité.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.16 – Par récurrence sur n.
On peut aussi poser $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k}X^k$, et montrer que $P'(X) = -Q'(1-X)$, d'où l'existence de C tel que $P(X) = Q(1-X) + C$. Évaluer C de deux manière et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.17 – (Formule de Vandermonde)
Plusieurs méthodes possibles :

- Récurrence sur p, avec la formule de Pascal
- Développer $(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$ avec 3 formules du binôme et identifier les coefficients du monôme de degré n.
- Compter les sous-ensembles à n éléments de $[\![1, p+q]\!]$, en les triant suivant le nombre de termes qu'ils ont dans $[\![1, p]\!]$. Autrement dit, si on dispose de p roses et q tulipes, compter tous les bouquets possibles de n fleurs, et les trier suivant le nombre de roses.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.18 – Par symétrie, montrer d'abord que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right)^2$$

(on pourra distinguer suivant la parité de n)
Ensuite, développez le carré pour vous ramener à la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n \text{ ou } p} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 4.19 – $R_n^2 + I_n^2 = |R_n + \mathrm{i}\, I_n|^2$, puis binôme. Solution : 2^n.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.20 – Bidouillage de factorielles, pour se ramener à une somme sur une colonne du triangle de Pascal, qu'on calcule par télescopage. Solution : 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.21 –

1. Commencer par écrire $k = n + k - n$, comité-président des deux côtés, formule de Pascal, et on est ramené à une somme télescopique.
2. Soit M la somme avec les max, m la somme avec les min. Calculer $M + m$ (facile) et $M - m$ (un peu moins). Pour la première, on trouve $n2^{2n}$, pour la seconde, séparer les indices $k \leqslant \ell$ et $k > \ell$, et constater que c'est égal. Par interversions et changements d'indices, se ramener à une somme de Vandermonde, puis à la question 1. On obtient $2n\binom{2n-1}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.22 – On peut supposer $x \leqslant y$. On a, par le binôme, $(y+1)^n - y^n \geqslant ny^{n-1}$. En déduire que $x^n \geqslant ny^{n-1}$, et sachant $x \leqslant y$, conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.23 – Il faut avoir une certaine maîtrise des signes $\sum$. Récurrence sur n à partir de la formule du binôme. Au rang $n+1$ appliquer $\mathcal{P}(n)$ en regroupant x_n et x_{n+1}, puis appliquer la formule du binôme à chaque $(x_n + x_{n+1})^k$ qui apparaît.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.24 – On prouve la formule de dérivation par récurrence. La pseudo-formule du binôme se montre aussi par récurrence. Pour la montrer au rang $n+1$, commencer par montrer l'égalité des dérivées par rapport à x des deux expressions (utiliser la question précédente pour exprimer ces dérivées). Primitiver, sans oublier la constante d'intégration, qui peut dépendre de y. Déterminer cette constante.

Indications ou solutions pour l'exercice 4.25 – L'exercice n'est pas si dur que cela avec un peu de recul sur les notions. Plus tard dans l'année, il n'aurait pas mérité ses étoiles. La difficulté provient ici du fait qu'il est (volontairement) un peu prématuré.

1. Utiliser la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ pour encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$, ou ici, simplement, pour la minorer par $\frac{1}{n^3}$. Sommer avec Chasles, et calculer l'intégrale obtenue.
2. (a) De même, inverser (en mettant bout-à-bout) l'encadrement de l'intégrale obtenu précédemment pour encadrer $\frac{1}{n^3}$ par deux intégrales. Sommer de $n+1$ à N, calculer, faire tendre N vers $+\infty$.
   (b) $n_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-4}$.
   (c) On somme les erreurs d'arrondi sur chaque somme, on obtient au final une erreur excédant 10^{-8}.
3. Foncer tête baissée : faire la différence des deux membres, réduire au même dénominateur, développer, identifier. On obtient :
$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{11}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$
   où
$$\varepsilon_n = \frac{50n+24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$
   On peut aussi développer $n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, puis factoriser par n^2, puis $n+4$ etc. C'est plutôt plus économe en calculs.
4. Remarquer que
$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{m}{n(n+1)\cdots(n+m)}.$$
   Cela permet de calculer $\zeta(3)$ à partir de l'expression précédente, en effectuant un télescopage pour les 3 premiers termes. Il ne restera plus que le quatrième terme faisant intervenir ε_n. On trouve pour $\zeta(3)$ l'expression de T_n en remplaçant la borne n de la somme par $+\infty$. On obtient l'encadrement par majoration du reste de cette série.
5. Meilleur n_0 : 64, ou 65 pour tenir compte des erreurs d'arrondi.

5

Relations

Indications ou solutions pour l'exercice 5.1 – Pour la question 2, une CS est l'injectivité de f. Pour un contre-exemple, on pourra considérer une fonction constante. Pour la question 3, montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas antisyémtrique si f n'est pas injective (utiliser $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$).

Indications ou solutions pour l'exercice 5.2 –

1. Si une propriété est fausse, elle implique tout ce qu'on veut.
2. Manipulation formelle (distributivité, tiers-exclus).
3. Sans difficulté pour $\mathcal{S}$. Pour $\mathcal{A}$, raisonner par l'absurde en supposant $z\mathcal{R}x$.
   Récirpoque : on peut trouver un contre-exemple avec 3 éléments (complet sur 2 et par sur le troisième)

Indications ou solutions pour l'exercice 5.3 –

1. Considérer $x\mathcal{R}x\mathcal{S}x$
2. (a) Ne pas oublier de construire sur l'objectif. Poser x et y tel que $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$, échanger $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, introduire z au milieu, utiliser la symétrie de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ et conclure.
   (b) Deux croix un peu décalées.
3. (a) La transitivité nous permet de nous ramener directement à l'antisymétrie de $\mathcal{R}$
   (b) Aller de x à y et de y à x en suivant deux chemins (de longueur 2) qui ne sont pas symétriques. Ne mettre que ces deux chemins dans les relations.
4. (a) Trop facile
   (b) Avec 3 points, s'arranger pour obtenir, avec un minimum de flèches, une composée décrite par $x_1 \to x_2$ et $x_2 \to x_3$.
5. Une inclusion provient de la transitivité, l'autre de la reflexivité qui permet d'ajouter une étape.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.4 –

1. Concaténer les deux chemins allant de x à y et de y à z.
2. Pour la symétrie, lire le chemin de x à y dans l'autre sens, en retournant toutes les flèches.
3. Considérer une autre $\mathcal{T}'$, et montrer $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ (au sens des graphes), c'est-à-dire $x\mathcal{T}y \Longrightarrow x\mathcal{T}'y$.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.5 –

1. Montrer séparément $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ et $(i) \Longleftrightarrow (iii)$. La propriété (iii) affirme (après réexpression en passant au complémentaire) que si un sous-ensemble est tel qu'il ne contient pas d'élément admettant tous ses antécédents hors de cet ensemble (donc pas d'antécédent dans cet ensemble), alors cet ensemble est vide. Comparer à (i) !

2. Sinon, il n'est pas difficile de construire des chaînes infinies.
3. (a) Considérer une partie à 2 éléments.
   (b) Montrer (i), en utilisant le minimum.
   (c) $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.6 –

1. oui
2. non
3. non
4. oui
5. oui
6. oui
7. oui

Indications ou solutions pour l'exercice 5.7 –

1. Par les éléments. Discuter suvant que $x \in C$ ou non.
2. Reflexivité car $X \vartriangle X = \varnothing$, transitivité par question 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.8 –

1. Transitivité : remarquer qu'on ne peut pas avoir $x = y = 0$ et $yz > 0$.
   Classes d'équivalence : $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\{0\}$
2. Le fait que $\mathcal{R}$ est une congruence traduit les règles de signe pour le produit de deux réels.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.9 – Pour la transitivité, utiliser le fait que l'union de deux ensembles au plus dénombrable est encore au plus dénombrable.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.10 – Un couple (a, b) va représenter l'entier relatif $a - b$. Deux couples sont équivalents si et seulement s'ils représentent le même entier relatif. Tout entier relatif est représenté par au moins un couple.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.11 –

1. Poser les éléments (X, Y, x et ε). Pour la transitivité, ε est à voir comme une marge d'erreur à répartir entre les différents points où l'on sera amené à faire une approximation : couper ε en 2 et utiliser les hypothèses avec $\frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que si l'un est non borné, l'autre aussi. Dans le cas où ils sont tous deux bornés, utiliser la caractérisation par ε de la borne supérieure. Pour montrer que M est inférieur à la borne sup de Y il suffit de montrer que pour tout ε, on peut trouver y tel que $y \geqslant M-$. Trouver d'abord x puis y par définition de la relation. Il y a deux marges d'erreur à utiliser, donc couper ε en 2.
3. Passage au quotient de l'application qui à X associe son sup.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.12 – Contredire la reflexivité.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.13 –

1. Voir X et Y comme deux étages ; de tout élément de x part un ascenseur vers Y. De là, on peut éventuellement repartir vers Z pour la transitivité. Pour l'antisymétrie, qui est le plus délicat, construire $x \leqslant y \leqslant x'$, et montrer $x = x' = y$ en utilisant la liberté de X et l'antisymétrie de $\leqslant$. cela prouve une des deux inclusions requises.

2. Il s'agit juste de comprendre ce que ça signifie : il faut montrer que $X \subset Y \Longrightarrow X\mathcal{R}Y$, ce qui est évident.
3. Il est facile de construire $X\mathcal{R}Y$ et X non inclus dans Y.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.14 – Commencer par montrer que tout ensemble ordonné non vide fini admet au moins un élément maximal. Construire φ par récurrence : à quel entier peut-on associer cet élément maximal ?

Indications ou solutions pour l'exercice 5.15 –

1. Vérifier les 3 points, ou alors remarquer qu'il s'agit de la relation d'inclusion de $\mathcal{P}(E\times E)$, restreinte à l'ensemble des graphes des relations d'ordre.
2. L'ordre discret $x \leqslant x$ ssi $x = x$.
3. Les ordres totaux, qui ne peuvent pas être prolongés strictement. Tout autre ordre peut être prolongé en un ordre total (c'est le résultat d'un autre exercice), donc n'est pas maximal.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.16 – C'est l'intersection.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.17 – Comparer les ensembles de majorant. On a égalité. Par application de la question 1, on obtient alors $\sup(x, \sup(y,z)) = \sup(x,y,z)$ (en remarquant que $x = \sup(\{x\})$). Pour la dernière question, appliquer 1, ou bien comparer directement les majorants à ceux que $X \cup Y \cup Z$.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.18 – L'ensemble des majorants est non vide (pourquoi ?). Considérer sa borne inférieure.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.19 – Il s'agit respectivement de l'union et l'intersection. Traduire la stabilité sur les éléments : pour tout $x \in X$, $f(x) \in X$.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.20 – Utiliser le lemme de Zorn, en montrant que l'ensemble des chaînes, ordonné par inclusion, est inductif. Pour cela, étant donnée une chaîne de chaîne, montrer que l'union est encore une chaîne, en remarquant que si x et y appartiennent à cette union, on peut trouver une chaîne les contenant les 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.21 – Par l'absurde, construire une suite croissante infinie, en énumérant tous les éléments de E.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.22 – On obtient facilement une inégalité en remarquant que deux éléments de la chaîne maximale ne peuvent pas être dans la part de la partition en cochaîne.
Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver une partition ayant nombre de parts égal à la longueur d'une chaîne maximale. Pour cela, considérer les éléments minimaux, les enlever, et recommencer récursivement.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.23 –

1. Montrer que si $T^k u < u$ alors $T^{2k} u < u$, et idem pour l'autre inégalité. Montrer alors la propriété par récurrence forte sur k, en se ramenant au cas k impair, et en discutant suivant la parité de la dernière séquence de 1.
2. Montrer que si ε est admissible minimale, elle débute par 110. En déduire que chaque séquence $\varepsilon 2n \quad {}_{2n+1}$ est égale à 10 ou 01 (on commencera par remarquer que cette propriété est aussi satisfaite pour u). Remarquer ensuite que si (ε_n) est admissible minimale, (ε_{2n}) aussi. Montrer alors par récurrence forte que $u = \varepsilon$.

Indications ou solutions pour l'exercice 5.24 –

1. Sans difficulté
2. (a) Supposer $y\mathcal{R} \subset x\mathcal{R}$ et montrer $\mathcal{R}x \subset \mathcal{R}y$. Pour $z \in \mathcal{R}x$, montrer $z \in \mathcal{R}y$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant l'antisymétrie. De même pour l'autre implication. Ne pas oublier de montrer l'antisymétrie.

   (b) La minimalité de x implique l'existence de $z \in y\mathcal{R}$ tel que $z \notin x\mathcal{R}$. Utiliser l'asymétrie pour conclure.

   Réciproquement, étant donné $y \neq x$, en supposant l'existence d'un z convenable, montrer $z = y$, puis contredire l'inclusion $x\mathcal{R} \subset y\mathcal{R}$ en considérant x.

   (c) Si $\mathcal{R}$ est transitif, $\mathcal{R} = T$.

6

Nombres réels

Indications ou solutions pour l'exercice 6.1 –

1. - Si $a < -\frac{1}{4}$, $\mathcal{S} = \varnothing$
   - Si $a \geqslant -\frac{1}{4}$, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{3-\sqrt{1+4a}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.
2. - Si $a > -2$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
   - Si $a \leqslant 2$, $\mathcal{S} = \left]-\infty, 1-\sqrt{-2-a}\right] \cup \left[1+\sqrt{-2-a}, +\infty\right[$.
3. - Si n est impair, $\mathcal{S} = [\sqrt[n]{a}, +\infty[$.
   - Si n est pair et $a < 0$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
   - Si n est pair et $a \geqslant 0$, $\mathcal{S} =]-\infty, -\sqrt[n]{a}] \cup [\sqrt[n]{a}, +\infty[$.

   Justifications par les variations.
4. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Se ramener à $2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$; Solution : $x \equiv \dfrac{\pi}{8} \mod \pi$ ou $x \equiv \dfrac{3\pi}{8} \mod \pi$.
6. $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$.
7. $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right]$.
8. $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.2 – Réduire le terme du milieu au même dénominateur, factoriser, et multiplier en haut et en bas par $(1+\sqrt{x})^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.3 –

1. Élever au carré (pourquoi est-ce une équivalence ?). Solution : $x \geqslant 1$.
2. Disjonction de cas, pour se ramener à des membres positifs. $\mathcal{S} =]-\infty, 1]$.
3. $\mathcal{S} = \left]\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right[$.
4. $\mathcal{S} = \left]-\infty, \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.4 – Nécessairement, $x \geqslant -m$. Élever alors au carré, et isoler x, en faisant une disjonction de cas.

- Si $m > 0$, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1-m^2}{2m}, +\infty\right[$
- Si $m- \leqslant 0$, $\mathcal{S} = \varnothing$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.5 – Tout passer du même côté, réduire au même dénominateur, puis étudier le signe du dénominateur et du numérateur. Grosse disjonction de cas, car il faut réussir à placer l'un par rapport à l'autre les 0 du numérateur et du dénominateur, qu'on note respectivement x_1 et x_2, et à placer les signes suivant les signes des coefficients dominants. On peut aussi s'aider d'une étude de variations

- Si $a > 6$ $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a-3}{a-6}\right[$
- Si $a < -\sqrt{6}$ ou $a \in [\sqrt{6}, 6[$, $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{3a-3}{a-6}\right] \cup \left]-\frac{a}{2}, +\infty\right[$
- Si $a \in]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$, $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{a}{2}\right[\cup \left]\frac{3a-3}{a-6}, +\infty\right[$.
- Si $a = 6$, $\mathcal{S} =]-3, +\infty[$.
- Si $a = \pm\sqrt{6}$, $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{2}\}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.6 – Traduire par un encadrement. Solution $]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{8}[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.7 –
Discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$. On pourra exprimer x sous la forme $n + d$.
Plus généralement, on disutera suivant la classe de congruence modulo m de $\lfloor x \rfloor$, et on exprimera $\left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor$ en fonction du quotient de $\lfloor x \rfloor$ par m.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.8 – Encadrer la racinde interne entre deux entiers consécutifs, puis propager cet encadrement de racine en racine. On continuerait ainsi en rajoutant des racines internes, en multiplicant à chaque étape le coefficient par 4.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.9 – Écrire $x = m + d$, puis exprimer le terme de gauche.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.10 –
Justifier que $x \geqslant 0$, et écrire $x = n + d$.
Solutions : $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n, \frac{-(2n+1) + \sqrt{(2n+1)^2 + 4(n+1)}}{2}\right[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.11 – Par encadrement se ramener à montrer que $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$. Utiliser pour cela les classes de congruence modulo 4 des carrés parfaits.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.12 – Changement d'indice $q \leftarrow q - k$, et sommer avec la somme initiale. Se ramener à la question 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.13 – Poser $\left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor = k + \frac{\alpha}{25}$, où $\alpha \in [\![0, 24]\!]$, et se ramener à montrer qu'il n'y a pas de multiple de 75 dans $]\!]25\alpha + 50, 24\alpha + 72]\!]$. Quel est le plus petit multiple de 75 possible strictement supérieur à $25\alpha + 50$?

Indications ou solutions pour l'exercice 6.14 – Montrer d'abord que $k \mapsto \lfloor ka \rfloor$ est injective, puis que α donné, il y a au plus une valeur de β qui convient, qu'on note $f(\alpha)$. Justifier que f est décroissante sur son domaine. Montrer que si α est irrationnel, $f(\alpha) = \beta$ tel que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (vérifier que cette valeur convient). Montrer que si α est rationnel, β l'est aussi (on pourra utiliser la croissante de f et la densité des irrationnels). En déduire que le couple (α, β) n'est pas solution (intersection non vide).

Indications ou solutions pour l'exercice 6.15 – Par l'absurde, on est ramené à une comparaison d'une puissance de a et d'une puissance de b.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.16 –

1. Si l'algorithme d'Euclide s'arrête, les deux derniers restent sont commensurables. Remonter petit à petit en montrant qu'à chaque étape, deux restes successifs sont commensurables. Réciproquement, se ramener à l'algorithme d'Euclide pour des entiers.

2. Soit c et d le côté et la diagonale d'un pentagone régulier. Soit r le reste de la division de c par d. Trouver un pentagone dont le côté est d et la diagonale r.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.17 – Si $0 \leqslant x < y$, passer à la racine.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.18 – Soit $0 < \varepsilon < y - x$, considérer n_0 tel que $f(x+1) - f(x) < \varepsilon$, pour $x \geqslant n_0$. Faire à partir de là parcourir à $f(n)$ un intervalle du type $[n_1, n_1 + 1]$; la progression sur cet intervalle se fait à petits pas.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.19 – Étant donné $x < y$, montrer qu'il existe n_0 tel que

$$\bigcup_{n \geqslant n_0} [nx, (n+1)x] \subset \bigcup_{n \geqslant n_0} [nx, ny].$$

En déduire que l'un des $[nx, ny]$ rencontre A.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.20 – Argument archi-classique ! (sous-groupes de $\mathbb{R}$). Remarquer que E est stable par somme et différence. Si $\varepsilon > 0$, montrer que $\varepsilon > 0$, en raisonnant par l'absurde (si ce n'est pas le cas, trouver x et y dans E proches de ε tels que $0 < y - x < \varepsilon$, et contredire la définition de ε. En déduire que $\mathbb{Z}\varepsilon = E$ (pour la réciproque raisonner par l'absurde, en utilisant le reste de la division de x par ε, qui est aussi dans E).
Déduire de ceci que nécessairement, $\varepsilon = 0$ (exprimer 1 et α en fonction de ε pour trouver une contradiction). Étant donnés $x < y$, trouver u et v suffisamment proches de 0 dans E, et avancer par petits pas de longueur $v - u$, en s'arranger pour tomber dans la rivière $]x, y[$, trop large pour être franchie les pieds secs.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.21 – Initialiser pour $n = 1$ mais aussi $n = 2$ (car nécessaire pour l'hérédité) : regrouper les 2 membres, développer, simplifier, refactoriser.
Hérédité pas trop dure. Utiliser $H(n)$ puis $H(2)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.22 – Une normalisation (diviser chaque a_i et b_i par $\|A\|$ et $\|B\|$ pour se ramener à des coordonnées d'un vercteur unitaire) permet parfois de tranformer une somme en produit. Y penser lorsque vous obtenez une somme au lieu d'un produit. Remarquer l'exploit : la première inégalité (celle de la question 2) est moins bonne que celle qu'on veut (dixit l'inégalité arithmético-géométrique), mais on parvient tout de même à montrer ce qu'on veut ! En fait, la normalisation nous a permis de nous raccrocher au cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.23 – Cauchy-Schwarz avec des b_i tous égaux à 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.24 – CS avec $|a_k| = |a_k|^{1/3}|a_k|^{2/3}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.25 – CS avec 1-trick.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.26 – CS (mais vous vous en doutiez...)

Indications ou solutions pour l'exercice 6.27 – Normalisation et IAG.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.28 – IAG sur plusieurs termes du développement, pour se ramener à des produits permettant d'exploiter l'hypothèse. Ou directement sur chaque $1 + x_i$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.29 – Montrer d'abord que tout a minore B, puis que $\inf(B)$ est un majorant de A, puis conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.30 – Réponse : $\sup(A) - \inf(A)$ (répartir la marge d'erreur ε en haut et en bas, en la coupant en 2).

Indications ou solutions pour l'exercice 6.31 – Clairement, $\sup(A) = \sup(B)$ majore $A + B$. Si on le diminue de ε, répartir ε autour de $\sup(A)$ et de $\sup(B)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.32 – Prendre un premier élément y ε-proche a, puis $x \in]y, a[$ (pourquoi est-ce possible), pour obtenir 2 points proches. On peut itérer cette construction, pour obtenir une suite strictement croissante convergeant vers a (donc une inifinité de points). Pour la dernière question, construire (a_n) par récurrence à l'aide d'un argument comparable à 1, et en s'arrangeant à la fois pour « coller » à a, et pour avoir la décroissance.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.33 – $\sup(E) = 2$ et $\inf(E) = -1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.34 – Assez facilement, $\inf(A) \leqslant \inf(B) \leqslant \sup(B) \leqslant \sup(A)$, et $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$ et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
Si A n'a rien autour de $\inf(B)$ et réciproquement, on ne peut pas dire grand chose de $\inf(A \cap B)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.35 – La somme de la série majore chacune des sommes sur I. Si on la diminue d'un ε, une somme partielle (donc somme sur un sous-ensemble fini) passe au-dessus.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.36 –

1. TCSTP
2. $\sum m_n$ est un majorant. Le diminuer de ε, en répartissant ε sur chacun des m_n (en coupant en $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$).

Indications ou solutions pour l'exercice 6.37 – Un majorant des $(u_{i,j})$ est aussi un majorant des $\sup_j(u_{i,j})$, $i \in I$, et vice-versa. Les deux ensembles ont donc même ensemble de majorants donc même borne supérieure.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.38 – Si l'intersection est non vide, montrer sa convexité.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.39 – Montrer la convexité, en remarquant que si x_0 est commun à tous les I_j, $[x, y] \subset [x, x_0] \cup [x_0, y]$, où $[a, b]$ désigne l'intervalle fermé d'extrémités a et b, y compris lorsque $b < a$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.40 –

1. On pourra raisonner par la contraposée, et supposant que E n'est pas fermé, considérer un point $x \notin E$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x, r) \cap E \neq \varnothing$.
2. Considérer un recouvrement par des boules de même rayon $r > 0$.
3. Les méthodes précédentes s'adaptent bien.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.41 –

1. Considérer l'union des intervalles ouverts contenant x et inclus dans U. Justifier que c'est un intervalle ouvert.
2. Montrer que soit $I_x = I_y$, soit $I_x \cap I_y = \varnothing$. Étant donnée une description de U comme union d'intervalles disjoints I_j indexés sur J, construire une injection $J \longrightarrow \mathbb{Q}$ en choisissant un rationnel dans I_j.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.42 – Après avoir éliminé le cas où un intervalle est inclus dans un autre, considérer un intervalle de borne sup maximale. Si c'est possible, choisir un intervalle incluant sa borne sup.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.43 – Si $X = U_1 \cup U_2$ disjointe, on peut par exemple considérer $x \in U_1$ et $y \in U_2$, en supposant $x < y$. Trouver une contradiction en considérant $\sup(U_1 \cap [x, y])$.

Indications ou solutions pour l'exercice 6.44 – Tout élément x de U appartient à un pavé à coins rationnels inclu dans U.

7

Nombres complexes

Indications ou solutions pour l'exercice 7.1 – Module : $\left|\frac{1}{\cos(\theta)}\right|$.
Argument : $-\theta+\varepsilon\pi$, où $\varepsilon = 0 si \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\mod 2\pi$ et 1 si $\theta \in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\mod 2\pi$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.2 – Reconnaître l'intervention d'exponentielles complexes. Module $|\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)|$, argument $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, selon le signe de la cotangente.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.3 – Ecrire le numérateur et le dénominateur en forme trigonométrique.
partie réelle : 2^9, partie imaginaire : $-2^9\sqrt{3}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.4 – Écrire la partie réelle avec le conjugué de z. Se ramener à une comparaison entre $1-\mathrm{Re}(z)$ et $1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.5 – Traduire l'appartenance à $\mathbb{R}$ par l'égalité avec le conjugué.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.6 –

1. Écrire la partie réelle à l'aide du conjugué, factoriser. Solution : union de l'axe imaginaire et d'un cercle.
2. Résoudre à l'aide du discriminant. Pour la seconde partie de la question, revenir à l'équation !

Indications ou solutions pour l'exercice 7.7 –

1. Utiliser les conjugués et développer les carrés.
2. Poser $z=\zeta^2$, $z'=\zeta'^2$, et se ramener à la question 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.8 –

1.
   - Justifier que $f_{|P}$ est bien à valeurs dans D (calculer $|f(z)|^2$ en utilisant le conjugué, et se ramener à $\frac{x}{y}$ où x et y sont deux quantités positives telles que $x<y$, ce qu'on obtient grâce à l'hypothèse sur la partie imaginaire de z. Évitez les écritures avec $a+\mathrm{i}\,b$, trop lourdes.
   - Résolvez en z l'équation $f(z)=z'$, afin de trouver une expression de la réciproque voulue, g.
   - Justifier que $g_{|D}$ est à valeurs dans P, en exporimant la partie imaginaire à l'aide du conjugué, en réduisant au même dénominateur, et en développant (on arrive à exprimer le numérateur à l'aide de $|z'|^2$, ce qui permet d'utiliser l'appartenance de z' à D).
   - On justifie que $f_{|P}$ et $g_{|D}$ sont récirpoques l'une de l'autre.
2. Calcul simple en exprimant la partie imaginaire à l'aide de $h(z)$ et son conjugué, et en utilisant l'hypothèse sur $ad-bc$.

3. Comme précédemment, on montre d'abord que h envoie P dans P, ce qui provient de la question précédente, on inverse l'expression, et on fait de même sur cette nouvelle expression (an remarquant qu'elle vérifie la même hypothèse sur $ab - bc$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.9 –

1. Provient de $|f(e^{i\theta})| = 1$, en développant, regrouper les termes variant en θ : cette partie s'annule, car $|f(e^{i\theta})|$ constante.
2. Ces couples ont carrés ayant même somme et même produit, donc solutions de la même équation de degré 2.
3. Étudier les deux cas : poser $c = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}a$ dans le premier cas et conclure à son impossibilité ; poser $d = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\overline{a}$ dans le second cas.
4. Vérification en calculant le module de $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, puis en vérifiant la surjection sur $\mathbb{U}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.10 –

1. Inégalité triangulaire
2. Utiliser la question précédente, en posant de nouveaux paramètres égaux à des différences de x, y, z, w ;

Indications ou solutions pour l'exercice 7.11 –

1. réponse : $2 + 3\mathrm{i}$ et $-(2 + 3\mathrm{i})$. N'oubliez pas votre méthode algébrique de recherche de la racine, en posant $a + \mathrm{i}b$ pour cette racine, en calculant son carré, en identifiant, et en rajoutant à cela l'égalité obtenue par les modules.
2. réponse : $1 - 2\mathrm{i}$ et $-1 + 2\mathrm{i}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.12 –

1. Remarquer que $\Delta = -(10 + 5\mathrm{i})^2$ (se devine facilement, ou sinon, méthode de recherche algébrique d'une racine, un peu fastidieux ici). On a $z^2 = -2\mathrm{i}$ ou $z^2 = 5 - 12\mathrm{i}$, puis $z = 1 - \mathrm{i}$ ou $z = -1 + \mathrm{i}$ ou $z = 3 - 2\mathrm{i}$ ou $z = -3 + 2\mathrm{i}$.
2. Remarquer qu'on doit avoir $3z^2 + z + 1 = \mathrm{i}(z^2 + 2z + 2)$ ou $3z^2 + z + 1 = -\mathrm{i}(z^2 + 2z + 2)$, et que z est solution de la première équation si et seulement si $\overline{z}$ est solution de la deuxième (ce qui évite d'avoir à résoudre les 2). On obtient, pour la première, $\Delta = (3 + 4\mathrm{i})^2$, puis $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$, et donc pour la deuxième $z_3 = -\mathrm{i}$ et $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
3. Si $n = 0$, tout z est solution. Sinon, i n'est pas solution, divisez par $(z - \mathrm{i})^n$, et utilisez les racines n-ièmes de 1. N'oubliez pas le principe de symétrisation des arguments.
   Solution : $z = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.13 – Équation bicarrée. $Z = z^2$ est égal à $3 - 4\mathrm{i}$ ou $3 + 4\mathrm{i}$. On cherche les racines de ces deux complexes, soit par la méthode algébrique, soit en devinant, en se souvenant que la partie réelle doit s'exprimer comme différence de 2 carrés, et que les nombres impairs sont différences de 2 carrés successifs (ici $3 = 2^2 - 1^2$). On trouve facilement

$$z_1 = 2 - \mathrm{i} \qquad z_2 = -2 + \mathrm{i} \qquad z_3 = 2 + \mathrm{i} \qquad z_4 = -2 - \mathrm{i}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 7.14 – Il s'agit d'une équation bicarrée. Chercher d'abord les solutions de $Z^2 - (3 + 2\mathrm{i})Z + (8 - 6\mathrm{i}) = 0$.
Solutions : $Z_1 = -2\mathrm{i}$ et $Z_2 = 3 + 4\mathrm{i}$, puis $x_1 = -x_2 = (1 - \mathrm{i})$, $x_3 = -x_4 = 2 + \mathrm{i}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.15 –

1. $\Delta = 3-4\,\mathrm{i} = (1-2\,\mathrm{i})^2$ (à deviner en essayant d'écrire 3 comme différence de carrés d'entiers divisant $\frac{4}{2}$.
   Réponse : $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$
2. $\Delta = -8+6\,\mathrm{i} = (1+3\,\mathrm{i})^2$ (se devine aussi sur le même principe)
   Réponse : $z_1 = 1-2\,\mathrm{i}$, $z_2 = 2+\mathrm{i}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.16 – Factorisation quasi-immédiate $(z^2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})(z^2-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta})$.
Solution : $\pm e^{\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.17 –

1. Pensez à la forme trigonométrique ! Réponse : $\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$.
2. $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{5}} = -1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{9\pi}{5}}\right\}$.
3. $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{9\pi}{16}}, \mathrm{e}^{13\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{17\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{21\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{25\pi}{16}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{29\pi}{16}}\right\}$
4. $\left\{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}+\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$
5. $\left\{\sqrt[n]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3n}+\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$

Indications ou solutions pour l'exercice 7.18 – Forme trigo : classique. On obtient :

$$\{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{8}}\}.$$

Pour la forme algébrique, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, ou alors appliquer à 2 reprises la méthode de calcul des racines carrées sous forme algébrique.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.19 – Solution : $2^{\frac{1}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{3}+2k\pi\right)}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.20 – Se ramener à $Z^n = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$. En notant $\alpha_k = \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{6}+k\right)$, obtenir d'abord

$$z = \frac{(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\alpha_k}}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\alpha_k}-1}.$$

Écrire $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique, et symétriser les arguments au numérateur et au dénominateur. On peut simplifier l'expression obtenue en utilisant une formule d'addition du cosinus.
Solution : $\mathrm{i}(1-\mathrm{cotan}(\alpha_k))$, $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.21 – Calculer $A+B+C$, $A+jB+j^2C$ et $A+j^2B+jC$. Pour résoudre le système obtenu, combiner convenablement de 3 manières différentes les 3 équations, de sorte à ne garder à chaque fois qu'une équation, en se servant de l'identité $1+j+j^2=0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.22 – Introduire T_n, la somme alternée des termes impairs et considérer $S_n+\mathrm{i}\,T_n$.
Réponse : $(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
On peut ensuite essayer de voir si on peut exprimer la même somme avec un $\cos(2k\theta)$ en plus.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.23 –

1. Multiplier le terme de droite par $j^3=1$, et distribuer les facteurs j convenablement.
2. Traiter d'abord $u=0$, puis pour $u\neq 0$, évaluer le polynôme de la question précédente en $\frac{v}{u}$, en remarquant qu'il s'agit du polynôme de degré 3 dont les 3 racines sont les 3 racines cubiques de -1. De quel polynôme s'agit-il ?

Indications ou solutions pour l'exercice 7.24 –

1. Remarquer que $\sum_k \omega_k^\ell = \sum_k \omega_\ell^k$.
2. Par l'absurde, contredire la question 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.25 –

1. Suite géométrique. On obtient 0
2. (a) Commencer par calculer $A+B$ et AB, et en déduire un polynôme dont A et B sont racines.
   (b) À part un calcul un peu bourrin, je ne vois pas.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.26 – Écrire $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ (pourquoi ?), et montrer que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$. Réponse : $z=\mathrm{e}^{\pm\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$, si $n\equiv 0\ [6]$, sinon pas de solution.
À retrouver par un argument purement géométrique.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.27 – Se ramener au cas où $\alpha=1$. En déduire $\beta=j$ et $\gamma=j^2$, ou l'inverse.
Au passage, remarquez qu'on a obtenu le fait que pour des points du cercle unité, l'égalité $\alpha+\beta+\gamma=0$ caractérise les triangles équilatéraux.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.28 –

1. Chercher les racines de P_n à l'aide des racines de l'unité. P_n doit avoir $n-1$ racines. On obtient les racines $\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Ne pas oublier de fixer le bon coefficient dominant
2. Prendre $n=2p+1$, évaluer en 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.29 – Pour la première somme, écrire avec le conjugué, développer, et se servir des propriétés des sommes des racines. Réponse $2n$
Pour la seconde, écrire le terme général sous forme d'un sinus. On est ramené à une somme de sinus. Réponse : $2\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.30 – Constater que $\omega^{k^2}=\omega^{(k+n)^2}$, en déduire que Z est la somme prise sur n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.
Calculer $|Z|^2$ à l'aide du conjugué, décaler les indices de la somme interne comme expliqué ci-dessus, de sorte qu'après chanegment d'indice, on soit ramené à une somme sur un carré d'un terme géométrique par rapport à un des deux indice.
Solution : n si n est impair, $2n$ si $n\equiv 0 \mod 4$ et 0 si $n\equiv 2 \mod 4$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.31 – Partir du terme de droite, en remarquant qu'ajouter le terme $x=0$ à la somme permet d'incorporer le terme p^{n-1} à l'expression générale.
Intervertir alors le produit et la somme interne (c'est l'expression de la distributivité généralisée, $\prod\limits_{i=1}^{n}\sum_j a_{i,j}=\sum\limits_{j_1,\dots,j_n}\prod_i a_{i,j_i}$).
Intervertir alors les deux sommes, et remarquer qu'on est ramené à des sommes de puissances de racines de l'unité, qui s'annulent, sauf lorsque la racine de l'unité en question est égale à 1. Remarquer que cette situation se produit justement lorsque les y_i sont solution de l'équation.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.32 – Plusieurs pistes possibles :

1. Par l'absurde. Considérer la partie imaginaire modulo 4^2. En déduire $n\equiv 0\ [4]$. Développer $(3+4\,\mathrm{i})^{4m}$ par la formule du binôme, extraire la partie réelle et la partie imaginaire, et travailler modulo 5, en simplifiant en utilisant $4^2\equiv 1\ [5]$ et $3^2\equiv -1\ [5]$. Recombiner les deux sommes de sorte à obtenir $2^{4m+1}\equiv 0\ [5]$ et conclure.
2. Ceux qui connaissent un peu l'arithmétique de $\mathbb{Z}[i]$ peuvent se rendre compte que c'en est une conséquence directe : les nombres premiers dans $\mathbb{Z}[i]$ (premiers de Gauss) sont, à multiplication près par $1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, les nombres premiers congrus à 3 modulo 4, $a+\mathrm{i}\,b$, et $a-\mathrm{i}\,b$, où $a^2+b^2=p$, p étant un nombre premier congru à 1 modulo 4. On peut montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est factoriel (ce qui signifie que la décomposition en facteurs premiers existe et est unique, à inversibles près). Ainsi, l'unique décomposition de 5^n est :

$$5^n=(2+\mathrm{i})^n(2-\mathrm{i})^n.$$

Or, $(3+4\,\mathrm{i})^n = (2+\mathrm{i})^{2n}$. L'égalité entre les deux contredirait l'unicité de la décomposition primaire dans $\mathbb{Z}[i]$.

3. De façon beaucoup plus élémentaire, remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(3+4\,\mathrm{i})^n \equiv 3+4\,\mathrm{i}\ [5]$...

Indications ou solutions pour l'exercice 7.33 – Évaluer en $z=1$, $z=-1$, $z=\mathrm{i}$ et $z=-\mathrm{i}$. En combinant, obtenir $b=c$ et $a=d=0$. Conclure $a=b=c=d=0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.34 – Conjuguer l'équation, et combiner les 2 de manière à récupérer z en fonction de j. Faire la synthèse pour s'assurer de l'équivalence. Symétriser les arguments pour obtenir l'expression sous forme trigonométrique.
Solution : $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.35 – Traiter les cas $n=0$ et $n=1$, puis supposer $n \geqslant 2$. Montrer que si $z \neq 0$, z est une racine n^2-1-ième de l'unité, puis en revenant à l'équation initiale, montrer que z est racine $n+1$-ième.
Alternative plus simple : montrer que si $z \neq 0$, $|z|=1$. Exprimer alors $\overline{z}$ en fonction de z et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.36 – À voir comme partie imaginaire d'une somme géométrique d'exponentielles. Solution :

$$\forall n \geqslant 2,\quad S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

On obtient $\dfrac{2}{\pi}$;
Comprendre géométriquement la signification de $\frac{S_n}{n}$, et en déduire une expression intégrale de cette limite. À vérifier ensuite par le calcul de l'intégrale.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.37 – Remarquer que $\omega_k = \omega_1^k$. On est donc ramené à la dérivée d'une somme géométrique d'une part, et, à un terme près, à une somme du binôme (qu'on fait suivre d'une symétrisation des arguments). Pour la somme géométrique dérivée, on peut s'en sortir par dérivation, mais cela nécessite un argument de dévivation d'une fonction de la variable complexe, ce que vous ne pouvez pas bien justifier. Plus tard, on pourra justifier ce calcul par les règles de dérivation formelle dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles. Pour l'instant, on peut aussi faire ce calcul par une méthode vue dans une feuille antérieure, en introduisant une somme double.
Solutions : somme 1 : $\frac{-n}{1-\omega_1}$; somme 2 : $-(1+(2\cos(\frac{\pi}{n}))^n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.38 – Voir le sinus comme la partie imaginaire de l'exponentielle, et utiliser la formule du binôme, puis symétrisation des arguments.
Réponse : $2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.39 – On écrit le cosinus du haut comme partie réelle de l'exponentielle, et on calcule la somme géométrique. Simplifier le dénominateur (qui est imaginaire pur).
Solution : $\frac{\sin(nx)}{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.40 – Minorer $|\cos(k)|$ par $\frac{1+\cos(2k)}{2}$, et calculer la somme de ces termes.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.41 – Délinéariser pour se ramener à une équation de degré 3 en $\cos(x)$. Trouver une solution particulière. On obtient $\cos(x) = 1, -1$ ou $\frac{1}{2}$, donc $x = ...$

Indications ou solutions pour l'exercice 7.42 –

- Factoriser dans $\mathbb{C}$ par les racines de l'unité, les associer 2 à 2 pour obtenir une factorisation dans $\mathbb{R}$.

- Factoriser par $X-1$, puis écrire le quotient comme polynôme du second degré en X^2-1. Factoriser ce polynôme.
- Solution : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.43 – Linéariser $\sin^{2m}(t)$, puis encore transformation de produit en somme :

$$\sin^{2m}(t) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} \cos(2(m-k)t) + \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}.$$

Remarquer ensuite, par transformation d'un produit en somme, que sauf si $k=\ell$, pour tout k et ℓ positifs,

$$\int_0^{\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Si $m>0$, ne subsiste alors de la somme que le terme $k=0$. On a à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(2mt)\ \mathrm{d}t$, par linéarisation.
Réponse : $\dfrac{(-1)^m\pi}{4^m}$, valable aussi si $m=0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.44 – $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ et $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$.
Avec $\theta = \frac{2\pi}{7}$, on a $\cos(3\theta) = \cos(4\theta)$, d'où on déduit que $\cos(\theta)$ est racine d'un certain polynôme de degré 4. Par l'absurde, supposer $\cos(\theta) = \frac{p}{q}$, irréductible. À l'aide de l'équation polynomiale, montrer que $p=1$ et q pair, et en écrivant $q=2\ell$, ℓ divise 1. Conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.45 –

1. Récurrence
2. Récurrence et Formules de trigonométrie
3. Formule de Moivre et formule du binôme, puis on exprime tous les sin avec cos. On passe à une identité polynomiale par propriété de rigidité.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.46 –

1. Récurrence facile
2. En prenant $z = e^{i\theta}$, $U_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.47 –

1. Linéarisation, c'est classique (Moivre + binôme).
   Pour $p=1$: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
   Pour $p=2$: $\sin(5x) = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$.
2. (a) Avec $t = \sin(\theta)$, remarquer que $\varphi(t)$ est aussi un sinus.
   (b) Majorer $|\varphi'|$, puis inégalité des accroissements finis, si on connaît, sinon, intégrer φ' entre t et t'.
3. (a) Récurrence immédiate. Degré : 3^{n-1}
   (b) Récurrence en appliquant 2(b) pour l'hérédité. Pour l'initialisation, il faut contrôler $\sin(x) - x$, voir par étude de fonction tant qu'on ne connaît pas les formules de Taylor (déterminer pour $x \geqslant 0$ le signe de $x - \sin(x) - \frac{x^3}{6}$).
4. Même principe. Cette fois, $0 \leqslant \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \leqslant \frac{x^5}{120}$, par formule de Taylor (ou étude de fonction, mais ça devient fastidieux).

Indications ou solutions pour l'exercice 7.48 –

1. Archi-classique : il s'agit des polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce. Partir de la formule de Moivre et développer à l'aide du binôme.

2. L'égalité provient de $U_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 0$. Étudier ensuite la parité des termes de la somme.
3. Justifier que $T_{n/2}(1/p) = 0$, et simplifier. Montrer que la somme est paire. Conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.49 – Exprimer sous forme d'un rapport le fait que l'angle des sommets est $\frac{\pi}{3}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.50 – Choisir convenablement son repère de sorte à ce que le triangle soit celui formé par les racines cubiques de 1 (on peut toujours le faire) Exprimer ensuite les rotations par des applications complexes, et distinguer les cas ABD direct et ABC indirect. On peut aussi se souvenir qu'une composée de rotation est une rotation, ce qui évite certains calculs.
Solutions :

- Cas ABC direct : symétrie centrale de centre B
- Cas ABC indirect : symétrie de centre le milieu de $[AC]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.51 – Exprimer b (affixe de B) à l'aide de c et d (par rotation). De même pour a.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.52 – Supposons a et b à coordonnées entières et ABC direct. Exprimer c en fonction de a et b (par une rotation), et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.53 – Exprimer e en remarquant que B se déduit de A par une rotation simple de centre E. De même pour les autres. Utiliser la condition d'orthogonalité donnée dans le cours.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.54 –

1. On a égalité entre 2 angles ; le triangle est donc isocèle. Comparer les longueurs des côtés
2. Déterminer les affixes a', b' et c' de A', B' et C' en remarquant qu'on passe de B à C par une certaine rotation de centre A'. Si ω est l'élément de $\mathbb{U}$ décrivant cette rotation, montrer que dire que le triangle est équilatéral équivaut à dire que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.55 –

1. Calculer le rapport $\frac{b-a}{c-a}$.
   Réponse : $z = 1$.
2. Calculer (avec conjugué) la partie réelle de $(b-a)(\overline{c-a})$, et exprimer sa nullité. Cela donne une equation sur z et $\overline{z}$, d'un type à reconnaître.
   Réponse : cercle de centre $-j^2$ de rayon 1.
3. Même principe. Réponse : $\mathbb{R}$.
4. Ne pas oublier tous les cas (triangle rectangle en chacun des sommets). Exprimer l'orthogonlité à l'aide de l'expression complexe du produit scalaire. Encore une fois, à exprimer comme équation en z et $\overline{z}$, et reconnaître la figure géométrique.
   Réponse : triangles dégénérés : $z = 0$, $z = 1$, rectangle en z : droite $\mathrm{Re}(z) = -1$; rectangle en z^2 : droite $\mathrm{Re}(z) = 0$; rectangle en z^3 : cercle de centre $-\frac{1}{2}$ de rayon $\frac{1}{2}$.
5. On doit avoir OA orthogonal à BC, à exprimer à l'aide du produit scalaire complexe (comme vu dans le cours), et de même pour les autres hauteurs. Cela donne 3 équations (mais redondantes, ce qui exprime le fait que les hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes).
   Réponse : $z = j$ ou $z = j^2$.
6. Exprimer la relation entre les sommes par une rotation exprimée par une multiplication par i ou $-$i.
   Réponse : $z = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$

7. De même avec une rotation donnée par $-j^2$ ou $-j$.
   Réponse : $z = -\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.56 –

1. Exprimer l'orthobonalité de (EP) et (AB), et l'alignement de A, P et B. Ne pas oublier que $\overline{a} = \frac{1}{a}$.
2. Se ramener au cercle unité et M d'affixe 1. Utiliser alors la question 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 7.57 – Choisir le repère de sorte que le centre soit 0, ce sera plus simple. Ainsi, $a+b+c=0$. Exprimer des relations de rotation permettant de définir d, e et f, les subdivisions internes des segments correspondant par exemple à $\frac{a+2b}{3}$ et $2a+b3$ (barycentres). Une combinaison judicieuse permet déjà d'obtenir $d+e+f=0$. Par ailleurs, calculer $d-f$ et $-j^2(d-e)$ et comparer (se servir de $a+b=c=0$).

Indications ou solutions pour l'exercice 7.58 – Exprimer la rotation de centre D et celle de centre E qui permettent de définir ces points en déduire une relation entre $d-e$ et $a-c$. Réponse : $\frac{\pi}{4}$ (angle absolu).

8

Limites, dérivation

Indications ou solutions pour l'exercice 8.1 –

1. Étudier limite à gauche et à droite ; Pas de limite.
2. Quantité conjuguée. $\frac{1}{2}$.
3. Quantités conjuguées. $-\frac{1}{6}$
4. Diviser en haut et en bas à droite pour se ramener à des limites remarquables. Si on a déjà vu les équivalents, sommer les équivalents du numérateur et du dénominateur, en utilisant o. $\frac{1}{2}$.
5. Se ramener en 0 puis limite remarquable. 1.
6. Encadrer la partie entière. Pour manipuler les inégalités convenablement, distinguer limite à gauche et limite à droite. 0.
7. Même principe que plus haut. Limite 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.2 – Si f non constante, critère séquentiel avec $u_n = a + nT$ et $v_n = b + nT$, en choisissant bien a et b.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.3 – Exprimer $\frac{f(x)-f(\{x\})}{x}$ à l'aide des $f(\{x\}+k+1) - f(\{x\}+k)$, par télescopage. Couper la somme en 2, à une valeur N ne dépendant que de ε, contrôler le début de la somme par $\frac{1}{x} \to 0$ et le fait que f reste bornée, sur un intervalle de longueur 1, et la fin par ε grâce à la limite de $f(x+1) - f(x)$ (c'est ce contrôle qui permet de définir N).
On retrouvera ce type d'arguments plus tard (moyenne de Cesaro, grand classique sur les suites).

Indications ou solutions pour l'exercice 8.4 – Si on connaît le critère de Cauchy de la convergence, c'est immédiat. Sinon, on le retrouve dans ce cas particulier : remarquer d'abord que la convergence de f permet de montrer que g est bornée sur $]0, \alpha[$. Poser $\varphi(x) = \sup_{t\in]0,x[} g(t)$, et justifier l'existence d'une limite ℓ en 0 de φ. Travailler avec ε en considérant $g(x) - g(t_0) + g(t_0) - \varphi(x) + \varphi(x) - \ell$, pour x assez petit et t_0 bien choisi.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.5 – Intuitivement, la condition est à rapprocher d'une hypothèse de convexité (même si ce n'est pas tout à fait cela). Sur un dessin, on se rend compte que pour une fonction convexe passant par l'origine, $\frac{f(t)}{t}$ est croissante, et sa limite en $+\infty$ est donc sa borne supérieure. Montrer que c'est aussi le cas ici : poser $\beta = \sup \frac{f(t)}{t}$, prendre x tel que $\frac{f(x)}{x} \geqslant \beta - \frac{\varepsilon}{2}$, et en considérant $y = qx + r$, justifier que $f(y) \geqslant qf(x) + f(r)$. En déduire que pour y assez grand, $\frac{f(y)}{y} \geqslant \beta - \varepsilon$. Étude similaire en 0, en faisant cette fois la division euclidienne de x par y : $x = py + r$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.6 –

1. Continuité sur $\mathbb{R}$ (étudier la limite à gauche et la limite à droite en tout point entier).

2. Continue sur $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}^*\pi)$ (limite à droite et à gauche, en utilisant le fait que π est irrationnel pour obtenir $\sin(n) \neq 0$)
3. Continue sur $\mathbb{R}$ (limite à gauche et à droite).

Indications ou solutions pour l'exercice 8.7 –

1. Discontinue en tout point (critère séquentiel avec $u_n \to x$ composée de rationnels ou d'irrationnels)
2. Discontinue en tout point sauf 0 (Comme 1, et majorer en v.a. par $|x|$ en 0)
3. Discontinue en tout point sauf $\frac{1}{2}$ (majorer $|f(x) - \frac{1}{2}|$)
4. Discontinue en tout rationnel, continue en tout irrationnel x : sinon, trouver ε tel que $B(x,1)$ contienne une infinité de rationnels donc le dénominateur est $< \frac{1}{\varepsilon}$. Est-ce possible ?

Indications ou solutions pour l'exercice 8.8 –

1. par exemple f constante sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$...
2. Tracer un graphe par morceaux sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sous forme de segments, de sorte à ce que ces segments ne s'intersectent pas.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.9 –

1. Montrer $f(0) = 0$. Montrer $f(nx) = nf(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Poser $a = f(1)$, montrer $f(n) = an$, pour $n \in \mathbb{N}$ puis $n \in \mathbb{Z}$. En considérant $f(qx)$, pour q bien choisi, montrer $f(x) = ax$ pour $x \in \mathbb{Q}$. Passer à $\mathbb{R}$ par continuité. Réponse : $f(x) = ax$
2. Considérer $g(x) = f(x) - f(0)$. Montrer que $g(\frac{x}{2^n}) = \frac{g(x)}{2^n}$. En déduire que $g(\frac{k+\ell}{2^n}) = g(\frac{k}{2^n}) + g(\frac{\ell}{2^n})$. En utilisant la continuité de g et la densité des dyadiques, montrer que g vérifie la relation du 1. Conclusion : $f(x) = ax + b$.
3. Même type d'étude qu'en 1. $f(x) = a^x$, $a \geqslant 0$ (car $a = f(1) = f(\frac{1}{2})^2$). On peut aussi se ramener au 1, en remarquant, par le même argument que pour $a = f(1)$, que $f(x) \geqslant 0$, et que si $f(x) = 0$, on obtient $f(x+y) = 0$ pour tout y, donc $f = 0$. Ainsi, si f n'est pas la fonction nulle, $f > 0$, et on peut considérer $x \mapsto \ln(f(x))$ qui vérifie l'équation du 1.
4. Considérer cette fois $f \circ \exp$, vérifiant 1 : $f(x) = a\ln(x)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.10 – Pour l'étude de la continuité en x, discuter suivant que $f(x) = g(x)$ ou non. Dans le premier cas, exploiter à la fois la continuité de f et de g. Dans le deuxième, montrer que $\inf(f,g)$ coïncide avec f (ou avec g) sur tout un voisinage de x.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.11 – Justifier d'abord que φ est réglée (admet des limites à gauche et à droite en tout point).
Terminer alors par ε, en séparant limite à droite (f ne peut pas grossir trop à droite de x) et limite à gauche.
On peut aussi procéder par la contraposée.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.12 – Se placer sur $B(0,M)$, et majorer sur cette boule, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n - y^n$ à l'aide de la factorisation de Bernoulli. Se servir d'une limite remarquable.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.13 – Par l'absurde, considérer $y < z$ tel que $f(y) > f(z)$, élagir cette inégalité à des voisinages de y et z, puis prendre un pas x suffisamment petit pour que (nx) rencontre chacun de ces voisinages.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.14 –

1. Écrire les inégalités sur les limites à gauche et droite pour les deux fonctions monotones f et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

2. Si $f(x_0) = 0$, la croissance de f impose le signe de f qui contredit la décroissance de $\frac{f(x)}{x}$ sauf si f est nulle.
3. Racine.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.15 – $f+g$ admet une limite en $+\infty$, donc g aussi. On est ramené à un exercice connu (fonction périodique admettant une limite en $+\infty$: g est constante, par l'absurde, en considérant 2 suites tendant vers l'infini, d'image constante différente par g.)

Indications ou solutions pour l'exercice 8.16 – On peut utiliser le théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement. Ou alors former les différents taux d'accroissement.
Réponse : $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$. La fonction f n'est pas $\mathcal{C}^3$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.17 – Étudier les limites à gauche et droite en 0, puis la dérivabilité à gauche et à droite, etc.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.18 – Grosse récurrence, en progressant sur les intervalles $]2k, 2k+2]$. Un peu technique, mais sans difficulté.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.19 –

1. Calcul et majoration.
2. Montrer que $f'(x)$ est majorée par $3x^2-4x^3+2(1-x)$ sur $[0, \frac{3}{4}]$, et $4x^3-3x^2+2(1-x)$ sur $[\frac{3}{4}, 1]$. En déduire, par étude de fonction, que $f'(x) < 2$. Trouver $x_n \to 0$ telle que $f'(x_n) \to 2$, en remarquant que le terme 2 provient du terme en cos.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.20 –

1. $f'(x) = \dfrac{6x}{(1-x^2)^2}$
2. $f'(x) = \dfrac{-5x^2+2x+5}{(1-x^2)^2}$
3. $f'(x) = \dfrac{-3x^2+2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$
4. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2} \mathrm{e}^{\frac{2x-1}{x^2+1}}$
5. $f'(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$
6. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{3x\sin(\ln(x))} \sin(\mathrm{e}^{3x\sin(\ln(x))}) (\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))$
7. $f'(x) = \dfrac{10x}{x^2+1} (\ln^3(x^2+1) - \ln(x^2+1))^4 (3\ln^2(x^2+1) - 1)$
8. $f'(x) = \dfrac{2x\cos(x^2)(x+\ln(x)) - 9(1+\frac{1}{x})\sin(x^2)}{(x+\ln(x))^{10}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.21 – Exprimer f comme fonction réciproque et utiliser des résultats du cours.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.22 – Récurrence pour l'expression. S'en servir pour former les taux d'accroissement, en utilisant les CC.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.23 – Par récurrence sur n, en écrivant $f_{n+1}(x) = (x-1)f_n(x)$, puis Leibniz. On peut le faire aussi de façon directe avec Leibniz et le binôme.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.24 –

- Leibniz. Rép : $(-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$.

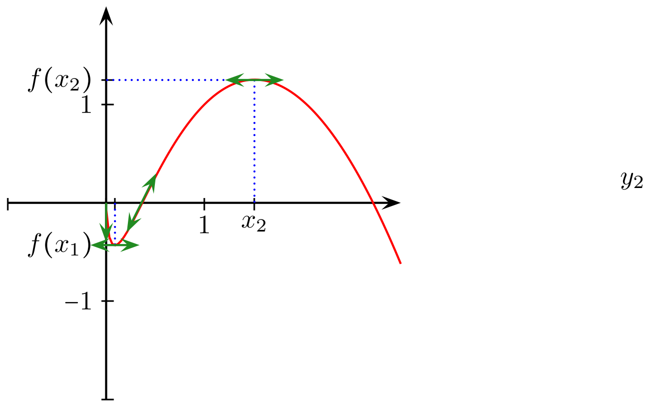
- Rép : $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{b}{a}\right)^{n+1}}$
- Décomposition en éléments simples ; Rép : $\dfrac{n!}{2}(-1)^n\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$
- Rép : $\dfrac{(x-a)^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-b)^n}+2n\dfrac{(x-a)(-1)^n(n-2)!}{(x-b)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x-b)^{n-2}}$ pour $n\geqslant 3$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.25 –

1. f est croissante puis décroissante, maximum en 0, et points d'inflexion en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Récurrence sur n. On trouve une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n, faisant intervenir aussi P'_n
3. Par récurrence d'ordre 2. On commence par réécrire, grâce à l'HR, la relation sans P'_n, mais avec P_{n-1}. On dérive et utilise l'HR et encore une fois la relation de récurrence initiale.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.26 –

1. Demi-tangente verticale vers le bas en 0.
2. Un seul point d'inflexion en $\frac{1}{\mathrm{e}}$.



3. Récurrence sur n. Calculer la dérivée troisième pour l'initialisation.
4. L'équation $f(x)=xf'(\theta x)$ équivaut à une équation du second degré en $\ln(\theta)$. Exprimer la somme et le produit des $\ln(\theta_i)$ à l'aide des relations coefficients/racines. Étudier le signe du produit pour discuter suivant que $\ln(\theta_1)$ et $\ln(\theta_2)$ sont de même signe (si $x<\frac{1}{\mathrm{e}}$, ce qui implique leur négativité d'après la valeur de leur somme) ou non (si $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$).

Indications ou solutions pour l'exercice 8.27 – Passer en complexe pour se ramener à la dérivée itérée de $\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Réponse : $2^{\frac{n}{2}}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{e}^x$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.28 – Dériver $f+\mathrm{i}\,g$, évidemment !
Réponse : $2^n\cos\left(\sqrt{3}\cdot x+\frac{2n\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour f, de même pour g avec sin.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.29 – Écrire $1+x^2=(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$ et décomposer la fraction.
Rép : $P_n=\dfrac{(-1)^n n!}{2\,\mathrm{i}}\left((x+\mathrm{i})^{n+1}-(x-\mathrm{i})^{n+1}\right)$.
Racines : $\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

Indications ou solutions pour l'exercice 8.30 –

1. Par récurrence : intialisation d'après la formule de dérivation des composées. Hérédité en remarquant que $f_{n+1}(x)=x\times f_n(x)$, et en utilisant Leibniz.

2. Réponses :
$$g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \qquad h_n^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 8.31 – Leibniz. Pour le deuxième, choisir l'ordre pour qu'il ne reste que le produit correspondant aux k minimaux pour lesquels la dérivée de s'annule pas pour chaque fonction.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.32 – Considérer $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{bx}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.33 – Analogie avec la formule du multinôme. A démonstrer ensuite par récurrence sur k.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.34 – Par récurrence. Initialisation immédiate au rang 0. Dériver soigneusement l'expression au rang n, ne pas avoir peur d'utiliser plusieus lignes (si possible, ne pas écrire trop gros). On a une somme interne de termes obtenus en dérivant successivement l'un des termes du produit, ce qui fournit un terme similaire, avec une puissance $m_j - 1$, une puissance $m_{j+1} + 1$ et un facteur multiplicatif $(m_{j+1} + 1)(j + 1)$ (pour avoir les bonnes factorielles) ; il y a aussi le terme obtenu en dérivant la composition, fournissant alors un terme similaire, avec un exposant $m_1 + 1$, et un facteur correctif $m_1 + 1$. Remarquer que tout cela peut s'écrire sous une somme indexée par des m_i' tels que $m_1' + 2m_2' + \cdots + (n+1)m_{n+1}' = n+1$, mais avec seulement une $n!$ (le reste de l'expression étant comme voulue), et chaque terme étant multiplié par un facteur $\lambda_{m_1',\dots,m_{n+1}'}$. En regroupant tous les termes donnant les mêmes indices $m_1',\dots,m_{n+1}$ dans l'expression initiale en $m_1,\dots,m_n$ (chaque indice de la somme interne en fournit un ainsi que le dernier terme obtenu par dérivation de la composition), remarquer que
$$\lambda_{m_1',\dots,m_{n+1}'} = m_1' + 2m_2' + \cdots + (n+1)m_{n+1}' = n+1,$$
et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.35 – Réponse : $y = 3x - 3$ en $+\infty$ et $-\infty$, et bien sûr, $x = 1$ et $x = -2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.36 –

1. f est décoissante sur $]-\infty, -2[$, croissante sur $]-2, +\infty[$, il y a deux points d'inflexion en 1 et en -1.
2. f est décroissante sur $]-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}[$, croissante sur $]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}[$, puis décroissante jusqu'à l'infini. Points d'inflexion : 2 et 5.
3. f croissante. Un unique point d'inflexion en $2\sqrt{3} - 3$, la courbe est d'abord convexe puis concave.
4. Fonction paire, croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$. Points d'inflexion :
$$x_1 = \sqrt[4]{2 - \frac{1}{3}\sqrt{33}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sqrt[4]{2 + \frac{1}{3}\sqrt{33}}$$
5. f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$; Deux points d'inflexion : 0 et $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
6. Fonction impaire. Croissante sur $[0, x_0]$ puis décroissante de limite nulle. x_0 ne peut pas être dterminé explicitement $x_0 \simeq 0.765$. Montrer par le théorème de la bijection l'existence et l'unicité d'un point d'inflexion.
7. Invariance de la courbe par translation de vecteur $(2\pi, 2\pi)$. Fonction croissante, points d'inflexion en tous les 0 modulo π.
8. Utiliser une fonction auxiliaire pour justifier que f' s'annule une unique fois dans $[-3, 1]$, en x_0. Alors, f est décroissante jusqu'à x_0 puis croissante. Justifier l'existence d'un unique point d'inflexion.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.37 –

1. Domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que $f'(x)$ s'annule ssi $x^2 - 2 + \ln x = 0$. Étudier les variations de la fonction ainsi définie, et montrer l'existence d'un unique 0. Calculer les valeurs en 1.3 et 1.35 pour conclure (avec la calculatrice)
3. Asymptote en $+\infty$: $y = x$. La courbe est au-dessus de l'asymptote sur $]0, \mathrm{e}]$, et en-dessous sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
4. $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e}) = \left(1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} = \left(1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)x + \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 8.38 –

- Sur $]-\infty, -1[$, f est décroissante puis croissante, avec un minimum en $-2 - \sqrt{3}$
- Sur $]-1, 1[$, f est croissante puis décroissante, avec un maximum en $-2 + \sqrt{3}$.
- Sur $]1, +\infty[$, f est décroissante.
- Étudier la convexité et montrer l'existence et l'unicité d'un point d'inflexion en étudiant une fonction auxiliaire (numérateur de f'').

9 Fonctions usuelles

Indications ou solutions pour l'exercice 9.1 –

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. 0 si $\alpha > 1$, 1 si $\alpha = 1$, $+\infty$ si $\alpha < 1$.
4. 0
5. $+\infty$

1. $+\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. 0
5. 0

Indications ou solutions pour l'exercice 9.2 – Faire apparaître des limites remarquables. On verra plus tard comment présenter ces calculs de façon beaucoup plus naturelle avec des développements limités.

1. 0
2. $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
3. 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.3 – N'oubliez pas les étages de composées dans la dérivation. N'oubliez pas la constante d'intégration lorsque vous primitivez.
Solution : $f = \frac{\pi}{2} + \mathrm{Arcsin}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.4 –

1. $\tan(a+b+c) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)+\tan(c)-\tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)-\tan(a)\tan(c)-\tan(b)\tan(c)}$.
2. On applique tan à l'expression α de l'énoncé. Grâce à la question 1, on obtient
$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Ne pas conclure trop vite que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (on n'obtient x que modulo π). Encadrer suffisamment finement les Arctan initiales pour pouvoir conclure que $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.5 –

- sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Attention au fait que le domaine est contitué de 2 intervalles : on primitive séparément sur chaque intervalle, avec une constante éventuellement différente ;
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ \mathrm{Arctan}(x) - \frac{3\pi}{4} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Indications ou solutions pour l'exercice 9.6 –

- Pour 2b : utiliser $\tan(y) \sim y$ avec y égal au terme de gauche.
- Pour 3b : théorème de la bijection sur chaque intervalle de monotonie de f'.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.7 – Vérifier la formule pour $n = 1$, puis récurrence. Pour $n = 1$, il faut bien sûr essayer d'exprimer avec des tan.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.8 – Remarquer que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, en déduire une solution, puis justifier que c'est la seule.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.9 – Se contenter de l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (périodicité). Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, utiliser $\sin(x) = \sin(\pi - x)$. On obtient une fonction triangle.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.10 –

1. Si $x_0 \notin [0, \pi]$, pas de solution, sinon $y \equiv \pm x_0 [2\pi]$.
2. Solution : tous les réels de $[0, \pi]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.11 – Exercice de type archi-classique. Principe : dériver, simplifier, reprimitiver !
En dérivant, ça se simplifie en $\pm\frac{2}{1+x^2}$, on retrouve donc $\pm 2\,\mathrm{Arctan}(x) + c$. Attention au signe qui dépend du domaine (en troisd morceaux. Arranger la constante en ragardant des points particuliers ou les limites. Vérifiez que ça se recolle bien par continuité.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.12 –

1. Solution $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4}$ sur $]-\infty, 1]$, et $-\mathrm{Arctan}(x) + \frac{3\pi}{4}$ sur $[1, +\infty[$.
2. Solution $f(x) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{Arcsin}(x)$ sur $[-1, 1[$
3.
   - Invariance par translation de $(2\pi, -\pi)$: étude sur un intervalle de longueur 2π, disons $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
   - $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(x)}{|\cos(x)|} - 1\right)$ en tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   - f constante de valeur $\frac{\pi}{4}$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
   - $f(x) = \frac{3\pi}{4} - x$.
4. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x)}{|\sin(x)|} - \dfrac{\cos(x)}{|\cos(x)|}\right)$. On obtient sur $[-\pi, \pi]$ (prolongé ensuite par périodicité) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ -\frac{\pi}{4} - x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{3\pi}{4} + x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Indications ou solutions pour l'exercice 9.13 –

1. Le sinus de l'expression de droite vaut $\frac{63}{65}$. Vérifier que la somme des Arcsin est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, (car $\frac{4}{5} \leqslant \frac{\pi}{3}$ et $\frac{5}{12} \leqslant \frac{\pi}{6}$), et conclure $x = \mathrm{Arcsin}\frac{63}{65}$.
2. Nécessairement $x \in [-1, 1]$. Faire le changement de variable $\theta = \mathrm{Arcsin}(x)$, donc $x = \sin(\theta)$, avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. L'équation est alors :
$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta)).$$
Solution : $\sin([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.
3. Appliquer sin. Solution $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
4. Appliquer sin à l'expression de droite : on obtient 0. Donc la fonction est égale en tout point de $[1, +\infty[$ (son domaine) à 0 modulo π puis constante, par continuité. Essayer en une valeur bien choisie. $\mathcal{S} = [1, +\infty[$.

On peut aussi justifier que la fonction est constante par dérivation. Essayez, c'est un bon entraînement.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.14 –

1. Exprimer $\text{th}(x) + \frac{1}{\text{th}(x)}$ avec des exponentielles, réduire et simplifier.
2. Télescopage d'après question. Réponse : $\dfrac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}x)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.15 – Analogie avec les formules d'Euler. $\text{ch}(x)+\text{sh}(x) = \text{e}^x$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) =$ .... Former la somme et la différence des deux sommes. Adapter l'argument de l'arc moitié.

Solution : $C = \dfrac{\text{ch}\left(a + \dfrac{(n-1)b}{2}\right)\text{sh}\left(\dfrac{nb}{2}\right)}{\text{sh}\left(\dfrac{b}{2}\right)}$ et $S = \dfrac{\text{sh}\left(a + \dfrac{(n-1)b}{2}\right)\text{sh}\left(\dfrac{nb}{2}\right)}{\text{sh}\left(\dfrac{b}{2}\right)}$

Indications ou solutions pour l'exercice 9.16 – Exprimer l'équation comme équation en $X = \text{e}^x$.
Solution :

- $\varnothing$ si $a + b \neq 0$ et $\dfrac{b-a}{a+b} \leqslant 0$
- $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-a}{a+b}\right)$ et $a + b \neq 0$ et $\dfrac{b-a}{a+b} > 0$.
- $\varnothing$ si $a + b = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$
- $\mathbb{R}$ si $a = b = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 9.17 –
Introduire $g : x \mapsto \text{e}^{x\text{ch}(a)}\text{sh}(x\text{sh}(a))$. Calculer les dérivées de $f + g$ et $f - g$.
Réponse : $f^{(n)}(x) = \text{e}^{x\text{ch}(a)}\text{ch}\left(x\text{sh}(a) + na\right)$.

10

Calcul intégral

Indications ou solutions pour l'exercice 10.1 –

1. Primitivation à vue.
   Solution : $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Primitivation à vue $u'u^{-\frac{1}{3}}$
   Solution : $F(x) = \dfrac{3}{2}(\operatorname{Arctan} x)^{\frac{2}{3}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement sur $\mathbb{R}_-^*$)
3. Primitivation à vue $\frac{u'}{u}$
   Solution : $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + C$, sur $\mathbb{R}$.
4. Primitivation à vue, $\frac{u'}{u}$
   Solution : $F(x) = \ln(|\ln x|) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Primitivation à vue $u'\sin(u)$
   Solution : $F(x) = -\cos(\mathrm{e}^x) + C$ sur $\mathbb{R}$
6. cdv $x = \mathrm{e}^y$: on est ramené au 8.
   Solution : $F(x) = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C$.
7. Sortir la racine de ln puis IPP très simple.
   Solution : $F(x) = \dfrac{1}{6}\left((x^3 - 1)\ln(1 - x) - (\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x)\right) + C$
8. 2 IPP, ou alors écrire $f(x) = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x})$, et primitiver dans $\mathbb{C}$. Solution : $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$
9. Se débarasser du x dans une intégration $u'u^{\frac{1}{2}}$, puis mise sous forme canonique et changement de variable en sh. Autre possibilité : intégration par partie, pour se ramener (après inévitable mise sous forme canonique) à la dérivée de Argsh. Dans les deux cas, on est amené à exprimer le résultat à l'aide de la fonction Argsh.
   Solution : $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{8}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{3}{16}\operatorname{Argsh}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
10. Primitivation à vue $u'\tan'(u)$

    Solution : $F(x) = \tan(\ln x) + C$.
11. Primitivation à vue $\frac{u'}{u}$
    Solution : $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + C$
    On peut aussi reconnaître $\operatorname{th}(x)$ et primitiver sous la forme $\ln(\operatorname{ch}(x)) + C$.
12. DES sous la forme $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$.
    Solution : $b = 3$, $a = -2$, d'où :
    $F(x) = 3\ln|x + 3| - 2\ln|x + 2| + C$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$, $]3, +\infty[$.

13. DES : $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.
Solution : $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$, sur chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$.
14. DES : $f(x) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}$.
Solution : $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$ sur $]-\infty,-1[$, $]1,-1[$ ou $]1,+\infty[$.
15. Constatez que la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$, d'où primitivation à vue.
Solution : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}\right)^2 + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
16. 2 IPP.
Solution : $F(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x)\operatorname{ch}(x) - \cos(x)\operatorname{sh}(x)) + C$
17. IPP puis DES. On peut éviter la DES par le cdv $y = x^2$
Solution : $F(x) = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{3}\ln(1-x^2)$. Pas besoin de valeurs absolues ici, vu le domaine de définition de la fonction initiale.
18. DES : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{1+x+x^2}$, puis :
Solution : $F(x) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right) + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
19. cdv $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, soit $x = \varphi(y)$, avec $\varphi : y \mapsto \frac{1-3y^2}{y^2-1}$. Faire le cdv sans calculer φ', et faire suivre d'une IPP pour revenir à φ, ou mieux, à φ plus une constante, de sorte à se ramener à un numérateur constant ! On est alors ramené à la question 14. On peut même encore mieux choisir la constante de sorte à ce que le numérateur ne soit pas constant, mais un multiple de y^2+1, pour se simplifier avec ce terme dans l'intégrale (prendre $\varphi(y)+2$).
Solution : $F(x) = (x+2)\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$
20. CDV $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ puis IPP
Solution : $F(x) = \frac{2y}{1-y^2} + \ln|1-y| - \ln|1+y| + C$, avec $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
21. IPP
Solution : $F(x) = -\dfrac{1+\ln x}{x} + C$.
22. Exprimer sous la forme $\sin(x)P(\cos(x))$ puis primitiver à vue (ou cdv $y = \cos(x)$)
Solution : $F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3 x + \dfrac{1}{5}\cos^5 x + C$, sur $\mathbb{R}$.
23. Tout exprimer avec sin puis linéarisation. On peut éviter la linéarisation en baissant le degré de sin petit à petit par IPP (voir intégrales de Wallis).
Solution : $F(x) = \dfrac{t}{16} - \dfrac{\sin 2x}{64} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin 6x}{192} + C$
24. IPP puis cdv $y = \sqrt{x^2-1}$, soit $y^2+1 = x^2$ (et en particulier, $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$).
Solution : $F(x) = \dfrac{x^4}{4}\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12}\sqrt{x^2-1}(x^2+3) + C$
25. cdv $y = \sqrt{\tan x}$, donc $x = \operatorname{Arctan}(y^2)$. On est ramené à $\int \frac{2y^2}{1+y^4}\,\mathrm{d}y$ puis DES :
$$\frac{x/\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x/\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$
Solution : $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}y-1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}y+1)\Big) + C$, où $y = \sqrt{\tan(x)}$

26. CDV $y = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(1 + y^2)$. On est ramené à $\int \frac{2y^2}{1+y^2}\, dy$.
    Solution : $F(x) = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\,\mathrm{Arctan}\,\sqrt{e^x - 1} + C$.
27. IPP.
    Solution : $F(x) = x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.2 – Merci de me signaler toute erreur. On donne à chaque fois UNE primitive. Rajouter une fonction localement constante pour les trouver toutes.

1. Transformer les cos sauf 1 un sin.
   Réponse : $\ln|\sin x| - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$
2. CDV $u = \cos x$ puis DES.
   Réponse : $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x - \sqrt{2}| - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x + \sqrt{2}|$.
3. CDV $y = \cos x$. DES par rapport à $z = y^2$, IPP, puis terminer DES par rapport à y. Réponse : $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}\right) - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{Arctan}\cos x$
4. Changement de variable $t = \tan x$, puis discussion. Réponse :
   - Si $\alpha = \beta = 0$, ce n'est pas défini ;
   - Si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $-\frac{1}{\beta\tan x}$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\frac{\tan x}{\alpha}$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta > 0$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x\right)$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta < 0$, $\dfrac{1}{2\beta\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\left(\ln\left|\tan(x) + \sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}}\right| - \ln\left|\tan(x) - \sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}}\right|\right)$.
5. Traiter avec la question suivante. Calculer la somme et la différence des deux intégrales.
   Réponse : $\dfrac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|)$ pour (5) et $(\frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|)$ pour (6).
6. Voir question précédente.
7. CDV $y = \cos(x)$, ou $y = \sin(x)$ puis $z = y^2$. Réponse : $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\cos^2(x) - 2}{\cos^2(x)}\right) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1 + \sin^2(x)}{1 - \sin^2(x)}\right)$.
8. IPP puis s'arranger pour retomber sur la même intégrale et regrouper. Autre solution : CDV $y = \tan(x)$.
   Réponse : $\tan(x) + \dfrac{1}{3}\tan^3(x)$.
9. CDV $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Autre solution : formules de duplication de l'angle...
   Réponse : $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
10. CDV $y = \mathrm{sh}(x)$, puis DES (fastidieux), ou mieux : CDV $z = \frac{1}{y}$.
    Réponse : $-\dfrac{1}{3\mathrm{sh}^3(x)} + \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right)$.
11. Écrire $\mathrm{th}(x)$ avec e^x et simplifier.
    Réponse : $\dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{x}{2}$.
12. CDV $y = \mathrm{sh}(x)$.
    Réponse : $\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{sh}(x) + 2\ln|1 + \mathrm{sh}(x)|$.
13. Analogie avec $\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. Réponse : $-\coth(x)$.
14. $\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2x)$, et utiliser question précédente.
    réponse : $-2\coth(2x)$.
15. CDV $y = \mathrm{sh}(x)$
    Réponse : $\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{2}\right)$

16. Formules de duplication, ou CDV $y = e^x$
Réponse : $\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Par le cdv $y = e^x$, on trouve $\dfrac{-2}{1+e^x}$ qui diffère d'une constante de la forme précédente.
17. Formules de duplication de l'angle.
Réponse : $2\sqrt{2}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$, $-2\sqrt{2}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}_-$. Recoller en 0 par ajustement de constante.
18. CDV $y = \mathrm{sh}(x)$, puis faire $1 + y^2 - y^2$ au numérateur, puis IPP en séparant le y^2 en 2.
Réponse : $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x)) + \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)}$

Indications ou solutions pour l'exercice 10.3 –

1. $u'u^{-3}$. Réponse : $\dfrac{1}{2\ln^2 2} - \dfrac{1}{2\ln^2 3}$
2. Primitive connue. Réponse : $-\dfrac{1}{2}\ln 2$.
3. $\frac{u'}{u}$ (dérivez $\ln\circ\ln$). Réponse : $\ln|\ln\ln x|$
4. $+1-1$ pour se ramener à une dérivée classique. Réponse : $1 - \dfrac{\pi}{4}$.
5. 1 IPP puis primitive de ln (ou 2e IPP). Réponse : $2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.
6. Quatre IPP successives (ou directement IPP itérée). Réponse : $9e - 24$.
7. Deux IPP successives, puis regrouper. On peut aussi passer en complexe. Réponse : $\dfrac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$
8. IPP pour retrouver tan : Réponse : $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$.
9. $-1+1$ sur $\tan^2$ pour avoir une dérivée classique, puis IPP. Réponse : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \dfrac{\pi^2}{18} - \ln 2$.
10. CDV $x = y^6$, puis division euclidienne. Réponse : $11 - 6\ln 3 + 6\ln 2$.
11. CDV $x = \sin t$ puis linéarisation. Réponse : $\dfrac{3\pi}{16}$.
12. $\frac{u'}{1+u^2}$... Réponse : $\dfrac{\pi}{4}$.
13. CDV $y = \sqrt{x+1}$. Réponse : $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
14. CDV $y = x^n$. Réponse : $\dfrac{n-2}{3n}\ln 2 + \dfrac{1}{3n}\ln\left(3 + \dfrac{1}{2^n}\right)$
15. DES (en commençant par DES en y^2). Réponse : $\dfrac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2) - \dfrac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\,3 - \mathrm{Arctan}\,2)$.
16. DES : $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{2x + 2\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{-2x + 2\sqrt{2}}{(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1}$
Réponse : $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2sqrt2}\left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1) - \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1)\right)$

Indications ou solutions pour l'exercice 10.4 – Merci de m'indiquer toute erreur (pour conserver la forme, j'ai fait tous les calculs à la main).
Attention, certaines bornes ont été modifiées par rapport à l'énoncé distribué.

1. IPP (la fraction rationnelle à côté du ln se primitive bien). On continue par DES, ou on peut éviter cette DES par changement de variable $y = \frac{1}{x}$.
Réponse : $\frac{3}{40}\ln(2) - \frac{1}{4}\mathrm{Arctan}(3) + \frac{1}{4}\mathrm{Arctan}(2)$.
2. Cvd $y = \ln(x)$ puis DES.
Réponse : $\frac{1}{6}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$.
3. Cdv $y = \frac{1}{x^2}$.
Réponse : $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. cdv $y = \ln(x)$ et IPP itérée.
   Réponse : $2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\ln(2))^{n-k}\dfrac{n!}{(n-k)!} - (-1)^n n!$.
5. Fonction impaire (et définie avec les nouvelles bornes considérées) sur l'intervalle d'intégration.
   Réponse : 0.
6. Cdv $y = \sin(x)$ puis linéarisation du $\cos^4$. On peut aussi isoler un terme $1 - x^2$, et faire une IPP, de sorte à réduire l'exposant, et recommencer jusqu'à obtenir la dérivée de l'Arcsin (ou à l'étape précédente, l'aire d'un quart de disque).
   Réponse : $\frac{3\pi}{16}$.
7. Mise sous forme canonique, cdv $y : \frac{x+1}{2}$ puis $y = \sin(t)$, et enfin linéarisation. On peut s'arrêter après le premier cdv et reconnaître, à un facteur près, l'aire d'un demi-disque.
   Réponse : 2π.
8. Cdv $x = y^6$.
   Réponse : $\frac{3\pi}{2} - \frac{152}{35}$.
9. Mettre $\cos^2(x)$ en facteur au dénominateur et faire le cdv $y = \tan(x)$.
   Réponse : $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
10. Le polynôme sous la racine se factorise en $(x+2)^2(x-4)$. Poser alors $y = x - 4$. Remarquer au passage qu'il s'agit d'une intégrale impropre.
    Réponse : $\frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
11. cdv $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, puis IPP pour diminuer le degré des pôles.
    Réponse : $\frac{\pi}{2} - 1$.
12. Faire partir le x du numérateur dans une intégration u'/u^2, pour le reste, faire une mise sous forme canonique, puis écrire au numérateur $1 = 1 + x^2 - x^2$ afin de pouvoir faire une IPP.
    Réponse : $\frac{5}{12} + \frac{\pi}{12}$
13. cdv $y = \sqrt{x+1}$,
    Réponse : $2\sqrt{2} - 2 + 2\ln(2\sqrt{2} - 2)$.
14. IPP, puis changement de variable $y = \sqrt{x}$. On est ramené à une fraction rationelle dont le dénominateur est $1 + y^4 = (1 + \sqrt{2}y + y^2)(1 - \sqrt{2}y + y^2)$. Terminer avec une DES.
    Réponse : attendre l'année prochaine.
15. Plusieurs façons de procéder : IPP puis cdv, ou cdv puis IPP, ou encore cdv global $y = \ln(1 + \sqrt{x})$, soit $x = (e^y - 1)^2$. Terminer par une IPP pour les ye^y.
    Réponse : $\frac{1}{2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.5 – Cdv $y = \sqrt{x}$, puis mise sous forme canonique de ce qui reste sous la racine, et cdv adéquat. On est ramené à l'aire du quart de disque $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.
Réponse : $\frac{\pi}{8}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.6 –

1. Changement de variable $u = a + b - t$. $\int tf(t) = \frac{a+b}{2}\int f$.
2. Utiliser 1, puis primitivation à vue. Réponse : $\frac{\pi^2}{4}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.7 – C'est ce qu'on a fait en cours de façon plus générale avec la formule de Taylor avec reste intégral. Le retrouver par IPP itérée (c'est ainsi qu'on avait montré la FTI), et majorer l'intégrale pour montrer qu'elle tend vers 0. L'irrationnalité de e s'obtient en majorant $n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ par 1, pour obtenir un encadrement strict de $n!e$ entre deux entiers consécutifs. Choisir convenablement n.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.8 –

1. $I_n + I_{n+2}$ nous donne quelque chose de la forme $u' \times u^n$ à primitiver.
   Réponse : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, d'où $I_n \to 0$ par encadrement. En progressant de 2 en 2 :
   $$I_{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad I_{2n+1} = (-1)^n \frac{\ln 2}{2} + (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}.$$
2. On passe à la limite :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$
   À comparer aux développements en série de $\ln(1+x)$ et Arctan, obtenus par primitivation de sommes de suites géométriques de raison $-x$ et $-x^2$ respectivement. Ici, on est au bord du domaine de convergence, donc ce ne sont pas des résultats anodins.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.9 – IPP pour former une relation de récurrence : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$.
Réponse : $I_n = \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.10 – Former une relation entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$ (par IPP), et itérer jusqu'à $I(p+q,0)$.
Réponse : $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.11 – Faire 2 IPP : $K_{n+2} = -(n+1)(n+2)K_n + (n+2)\dfrac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.12 – Pour $\lim\limits_{n\infty} I_n$, majorer par $x^n \tan 1$. Réponse : 0.
Pour $\lim nI_n = \lim(n+1)I_n$, intégrer par parties, puis s'inspirer du premier calcul. Réponse : $\tan(1)$

Indications ou solutions pour l'exercice 10.13 –

- La limite en 0 (et par périodicité aux $2m\pi$) s'obtient par limites remarquables.
- I ne dépend pas de son dernier paramètre (intégraltion d'une fonction périodique). En déduire par cdv $t' = t + x' - x$ que I ne dépend pas non plus de sa deuxième variable.
- Intégrer par parties en primitivant $\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}$ (cela donne de la cotangente). On obtient l'égalité avec l'intégrale de l'énoncé, à un facteur $\frac{1}{16\pi}$ près.
- $I_{n+1} - I_n$ s'écrit comme l'intégrale d'une fonction impaire.
- Réponse : 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.14 – Intégration par parties, pour faire apparaître un $\frac{1}{n}$, puis majorer l'intégrale, f' étant bornée (pourquoi ?)

Indications ou solutions pour l'exercice 10.15 –

1. (a) Majorer l'intégrande par $\frac{M^n}{n!}$, où M est un majorant de $x \mapsto x(bx-a)$.
   (b) Leibniz, ou plus simplement, écrire $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_{2n} X^{2n}$, et voir ce qu'il se passe lorsqu'on dérive k fois et qu'on évalue en 0. Pour les évaluations en $\frac{a}{b}$, on pourra faire le changement de variables $y : x - \frac{b}{a}$.
2. IPP itérée à l'ordre $2n+1$, et question précédente. La contradiction provient des propriétés des suites convergentes d'entiers.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.16 –

1. Dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes.

2. Primitivation à vue. Encadrer $\frac{1}{t}$ entre $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x}$, pour obtenir un encadrement de f à partir de l'intégrale calculée.
3. Déterminer les dérivées par taux d'accroissement, en majorant les intégrales (0 en 0, 1 en 1). Pour le taux d'accroissement en 1, voir $f(1)$ comme l'intégrale de la question 2, et encadrer $\frac{t-1}{\ln(t)}$ par ε pour x proche de 1.

   Comparer avec les limites de la dérivée.

   On peut remarquer (mais c'est un peu tôt dans l'année) que le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ permet d'éviter le calcul des dérivées en 0 et en 1 (la limite de la dérivée suffit).

Indications ou solutions pour l'exercice 10.17 – Idée : l'intégrande est à peut près comme $\frac{1}{x}$ en 0, donc on peut imaginer que la limite sera le même que celle de $\displaystyle\int_u^{3u} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
Première méthode : On approche cos par 1 par ε, valable pour u assez petit. Ça marche bien.
Deuxième méthode : on fait apparaître notre ln par IPP, puis on a des limites à calculer en faisant apparaître les limites remarquables du cos (afin d'approcher cos par 1). On majore l'intégrale restante également. Donne quelques calculs de limites, un peu plus long que la méthode précédente, mais permet d'éviter entièrement les ε.
Adapter l'une ou l'autre méthode pour la deuxième limite.
Réponses : $\ln(3)$ et $\ln(2)$.
Pouvez-vous imaginer un énoncé plus général ?

Indications ou solutions pour l'exercice 10.18 – Dériver, après avoir réduit le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on remarquera la symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$). On peut aussi s'en sortir par changement de variable.
Calculer avec $x = 0$ par exemple, par cdv puis IPP. On peut choisir x encore mieux que cela.
Réponse : $\frac{\pi}{4}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.19 – Pour plus de sécurité, et en attendant mieux, travailler d'abord sur l'intervalle $[1, A]$. On peut faire un cdv $y = \frac{1}{x}$, qui nous ramène à de l'Arcsin.
Réponse : $\frac{\pi}{2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.20 – cdv $y = \sqrt{x}$, puis cela se primitive à vue.
Réponse : $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6}\right)\pi^{\frac{3}{2}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.21 – Grand classique. Pas très difficile dans l'absolu lorsqu'on maîtrise bien les techniques liées aux intégrales impropres.
Prolonger par continuité en 0 et faire une IPP en $+\infty$, de sorte à récupérer la convergence absolue, grâce à une comparaison avec $\frac{1}{x^2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 10.22 – Exercice de bon niveau lorsqu'on n'a pas beaucoup de technique sur les intégrales impropres.
Exprimer de deux façons $\displaystyle\int \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int \ln(\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int \ln(\cos(t))$, en utilisant la formule de duplication de l'angle, ou un changement de variable. Comparer ces deux dernières intégrales.
On prendra garde à bien justifier la convergence des intégrales en restreignant les intervalles, puis en faisant tendre les bornes, à défaut de méthode plus efficace pour le moment.
Réponse : $-\frac{\pi}{2}\ \ln(2)$. Vérifiez la logique du signe.

11

Équations différentielles linéaires

Indications ou solutions pour l'exercice 11.1 –

1. Utiliser la méthode de variation de la constante pour la solution particulière.
   Réponse : $y(x) = (1+x^2)(K + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)) + \frac{x}{2}$
2. Sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ (et tout I inclus dans l'un de ces 3 intervalles) : $y(x) = K\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$
   Les solutions ne se recollent pas en 1 et -1, sauf si $K = 0$: sur tout intervalle ouvert contenant -1 ou 1, l'unique solution est la fonction nulle.
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$: $y(x) = (\ln(|x|) - 1 + \frac{K}{x})$. Pas de solution définie en 0, puisque l'équation ne l'est pas.
   Remarque : la valeur absolue de la primitivation du ln passe dans la constante K.
4. $y(x) = \dfrac{K + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{\operatorname{Arctan}(x)}$, sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
   Sur I contenant 0, se prolonge uniquement si $K = 0$: $y(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\operatorname{Arctan}(x)}$, $y(0) = 0$ (par équivalent).
   Vérifier que cette fonction est dérivable en 0, et que l'ED est vérifiée en 0.
5. $y(x) = K\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$.
   Ici, la solution particulière est évidente, inutile d'utiliser la méthode de variation de la constante !
6. $y(x) = K\mathrm{e}^{-x}$ ou $y(x) = K'\mathrm{e}^{x}$ sur tout I sur lequel y est de signe constant (avec $K \leqslant 0$, $K' \geqslant 0$, discuter suivant le signe). Par TVI, si y s'annule en x_0, y étant croissante, elle est de signe constant sur $]-\infty,x_0[$ et $]x_0,+\infty[$. La continuité assure alors $K = K' = 0$. Ainsi, la description ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}$ entier, on ne peut pas recoller les deux descriptions, sauf pour la fonction nulle.
7. Même principe, en résolvant sur des I sur lesquels $y-1$ est de signe constant.
   $y(x) = Kx + 1$, $K \geqslant 0$, ou $y(x) = \frac{K}{x} + 1$, $K \leqslant 0$. Les solutions ne peuvent pas se recoller en $x_0 > 0$.
8. Changement de fonction $z = \mathrm{e}^y$. $y(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|x| + \ln\left(K + \dfrac{|x|^{\frac{5}{2}}}{5}\right)$. Pour que ce soit défini sur $\mathbb{R}$, $K > 0$, sinon, ce n'est pas défini sur un intervalle centré en 0.
9. Changement de fonction $z = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $z = \frac{K}{x^2} + \frac{1}{x}$, $y = x\exp\left(\dfrac{K}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.2 – $f'' = f'$, donc par double quadrature, $f = K\mathrm{e}^x + L$, puis calculer l'intégrale, remplacer dans l'équation, cela donne une équation linéaire en K et L. La valeur en 0 en donne une autre. Solution : $K = \frac{2}{3-\mathrm{e}}$, $L = \frac{1-\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.3 – Solution $y(x) = Kx + x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, mais pas de solution sur $\mathbb{R}$ (fonction prolongeable par continuité mais pas dérivable en 0).

Indications ou solutions pour l'exercice 11.4 – Solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$: $x(\ln|x|+1)$. Pas de recollement possible en 0 par absence de dérivabilité.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.5 – On peut chercher une solution polynomiale, ou appliquer les méthodes usuelles directement. Enlever les points 2 et 0.
Solutions : $C\sqrt{|x(x-2)|}+x-1$ sur chaque intervalle. Ne se recolle que pour $C=0$ sur chaque intervalle.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.6 –

1. Soit $A=\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t$. Justifier à l'aide de la méthode de variation de la constante que la solution générale s'écrit sous la forme :
$$\mathrm{e}^{-A(x)}\left(C+\int_0^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}x\right).$$
Justifier que pour tout $t \leqslant x$, $A(t) \leqslant A(x)-(x-t)$. En déduire que pour tout ε, il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $\mathrm{e}^{-A(x)}\displaystyle\int_0^x |b(t)|\mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}x < \varepsilon$ et conclure.
2. Même type d'argument, en justifiant d'abord la convergence de $\int_{-\infty}^0 b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$. Comme $\mathrm{e}^{-A(x)} \to +\infty$, il est nécessaire de poser $C=\displaystyle\int_{-\infty}^0 b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}t$, d'iù la seule solution possible admettant une limite nulle :
$$\mathrm{e}^{-A(x)}\int_{-\infty}^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}t.$$
On termine à peu près comme en 1.
dans le cas où b n'est pas positive, on montre la convergence absolue de l'intégrale par les techniques usuelles sur les intégrales impropres.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.7 –

1. Solution : $y(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$.
2. Chercher d'abord une solution particulière pour un second membre égal à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, sous la forme $\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, puis prendre la partie imaginaire. On peut aussi chercher directement sous la forme $a\cos(x)+b\sin(x)$.
Solution : $y(x)=\dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{-x/2}(\cos(x/2)+2\sin(x/2))-\dfrac{4}{5}\cos(x)-\dfrac{2}{5}\sin(x)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, puis exprimer les conditions de recollement pour que la fonction obtenue soit 2 fois dérivable en 0.
Solution : $y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}+\alpha\cos(x)+(\beta+\varepsilon(x))\sin(x)$, où $\varepsilon(x)=0$ si $x<0$ et 1 sinon.
4. Poser pour $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $z(t)=y(\tan(t))$, c'est-à-dire $y(x)=z(\mathrm{Arctan}(x))$. Utiliser l'une ou l'autre de ces relations pour obtenir $z''+z=0$.
Solution : $y(x)=a\cos(\mathrm{Arctan}(x))+b\sin(\mathrm{Arctan}(x))=\dfrac{a+bx}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. Justifier qu'une solution polynomiale non nulle est de degré 1 ou 2, puis poser des coefficients. Une solution est $y_0(x)=x^2-1$. Utiliser alors une méthode adaptée du cours pour trouver les autres solutions, en les cherchant sous la forme $y_0 \times z$.
Solution : z vérifie $2(x^2+1)z''+x(x^2-1)z'=0$, d'où $z'=K\frac{x^2}{x^2-1}$ puis $y=K(-2x+(x^2-1)\ln\frac{x-1}{x+1})+c(x^2-1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.8 –

1. Montrer que $y''=y-x^2+2x$. Chercher une solution particulière polynomiale de degré 2.
Solution : $y(x)=\lambda\mathrm{e}^x=\mu\mathrm{e}^{-x}+x^2-2x+2$, $z(x)=\lambda\mathrm{e}^x-\mu\mathrm{e}^{-x}-x^2+2x-2$.
2. Dériver la première, substituer z' puis z à l'aide de l'équation initiale : $y''-2y'-15y=8\mathrm{e}^{-3t}$. On obtient :
$$y(t)=\lambda\mathrm{e}^{5t}+\mu\mathrm{e}^{-3t}-t\mathrm{e}^{-3t}, \qquad z(t)=\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{5t}-\frac{\mu}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^t.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 11.9 – Solution particulière polynomiale puis variation de la constante. Solutions sur les intervalles de définition : $ax(\ln|1+x| - \ln|1-x| - \frac{2}{x}) + bx$, les recollements imposent $a = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 11.10 – Diviser par y^2+1 et intégrer. Réponse : $y = \tan(x+c)$

12
Suites

Certains exercices de cette feuille nécessitent d'avoir vu certaines notions du chapitre suivant (équivalents, O). Ces notions sont utilisées ici de façon élémentaire, ne nécessitant pas de dextérité technique. On pourra par exemple partir des définitions suivantes :

- *Si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas pour n assez grand, elles sont dites équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$*
- *Sous les mêmes hypothèses, (u_n) est dite dominée par (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$.*

Indications ou solutions pour l'exercice 12.1 – Si u_n non constante, disons u_k différent de la limite ℓ, pour se fixer les idées $u_k > \ell$. Justifier que $[x_k, +\infty[$ contient un nombre fini de termes de la suite.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.2 – Pour la minoration, isoler un petit intervalle sur lequel f est compris entre $M - \varepsilon$ et M, et minorer l'intégrale sur cet intervalle. Voir ce qui se passe lorsque $n \to +\infty$, et traduire cela par un ε supplémentaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.3 –

1. Développer $\sin(n+1)$ et en déduire que si la limite existe, celle de $\cos(n)$ aussi. Utiliser ensuite $\sin(2n)$ et $\cos(2n)$ pour conclure, sauf si $\ell = 0$. Obtenir dans ce cas $\ell' = 0$ (limite du cos), et conclure.
2. On peut par exemple remarquer, par un argument du type Archimède (et rivière à franchir) que cette suite prend une inifinité de fois des valeurs $\geqslant \frac{1}{2}$ et une infinité de fois des valeurs $\leqslant -\frac{1}{2}$. Avec ces valeurs éloignées les unes des autres, d'indice arbitrairement grand, contredire la définition de la limite.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.4 – Par ε, contrôler d'abord $\frac{1}{k}$ puis $\frac{k}{n}$. Ou alors, choisir convenablement k en fonction de n, de sorte que les deux termes tendent vers 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.5 – Par encadrement !

Indications ou solutions pour l'exercice 12.6 – Montrer que $\max(u_n, u_{n+1})$ converge (on fait un lissage), puis $\min(u_n, u_{n+1})$ aussi.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.7 –

1. Si ℓ fini, se ramener à 0 par translation. Contrôler les derniers termes par $\frac{\varepsilon}{2}$ dès que possible ; le début de l'expression tend vers 0, donc peut être mise dans un autre $\frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand. Principe à adapter pour une limite infinie.
2. Cesàro appliqué à $u_n = v_{n+1} - v_n$.
3. Se ramener à 2 par ln

4. Utiliser 3. Réponse : 4.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.8 – On peut couper la somme en deux, contrôler la moitié par la convergence de a_n l'autre pa la convergence de b_n (par ε). Il faut juste savoir où couper et comment utiliser l'hypothèse un peu asymétrique. Cette hypothèse nous assurera un contrôle facile des termes pour a_n petit, et surtout en nombre aussi important qu'on veut. On commence donc par trouver une module N pour a_n, contrôler les N premiers termes grâce à (b_n), et tous les autres grâce à la convergence de (a_n).

Indications ou solutions pour l'exercice 12.9 –

1. Soit $v_n = \frac{u_n}{n}$ Tout d'abord, en prenant $n = m$, on se rend compte que pour tout n, il existe $n' > n$ tel que $v'_n \leqslant v_n$. Ainsi, si ℓ existe c'est nécessairement $\ell = \inf(v_n)$.

   Fixer n tel que v_n soit proche de u_n, puis, pour tout $m = qn + r$, utiliser l'inégalité $u_m \leqslant qu_n + u_r$.
2. Application de la question précédente en passant au logarithme.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.10 –

- Si pour tout ε, $\{n \mid u_n < \varepsilon\}$ est de densité nulle, montrer qu'on peut trouver une suite croissante $N_0 < N_1 < N_2 < \cdots$ telle que pour tout $n \geqslant N_k$, $B_k = \{m \mid u_m < \frac{1}{2^k}\}$ vérifie

$$\frac{|B_k \cap [\![0, n-1]\!]|}{n} \geqslant 1 - \frac{1}{2^k}.$$

  En considérant $B'_k = A_k \cap [\![0, N_{k+1} - 1]\!]$ et $B = \bigcup B'_k$, montrer que le complémentaire A de B permet d'assurer (ii).
- Ainsi, si (ii) n'est pas réalisé, il existe ε tel que $\{n \mid u_n < \varepsilon\}$ ne soit pas de densité nulle. Écrire la somme de Cesàro en isolant ces termes et contredire (i).
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) est plus simple, en séparant dans le somme les indices de A : certains termes sont contrôlés par Cesàro classique, les autres par le fait que u_n est borné et la densité de A est nulle.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.11 –

1. Étudier la monotonie de $u_{n+1} - u_n$, et si la CV ne se fait pas vers 0, montrer que u_n franchit des marches trop hautes (ou trop basses) pour rester bornée.
2. La question 1 fournit le signe de $u_{n+1} - u_n$...

Indications ou solutions pour l'exercice 12.12 – Le plus dur est d'exprimer de façon rigoureuse des faits qui semblent évidents.

1. $u_n(a)$ est une composée d'itérée de fonctions croissantes (définies en fonction de $a_0, \ldots, a_{n-1}$), appliquées à a_n ; $u_{n+1}(a_n)$ est la même itérée, appliquée à $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$ qui est plus grand.
2. Remarquer que $u_{n+1}((1)_k) = \sqrt{1 + u_n((1)_k)}$.
3. De façon évidente, mais délicate à justifier rigoureusement, $u_n((\lambda^{2^k})_k) = \lambda u_n((1)_k)$. Peut se justifier rigoureusement en montrant par récurrence sur $p \geqslant 0$ que pour tout n,

$$u_p((\lambda^{2^{n+1+k}})_k) = \lambda^{2^n} u_p((1)_k)$$

   (l'exprimer par radicaux pour comprendre).
4. Pour une comparaison rigoureuse, récurrence descendante pour chacun des termes $u_n(k)$.

   Ensuite, comparer à la suite de la question 3. Ces suites lui sont négligeable (montrer que le quotient tend vers 0).
5. Comparer à la suite dont les premiers termes sont tous nuls. Ensuite s'arranger pour que $a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ diverge vers $+\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.13 – Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, et en déduire la monotonie de (u_n).

Indications ou solutions pour l'exercice 12.14 – Montrer que les suites sont adjacentes. Pour la limite, trouver une CL des deux qui soit constante.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.15 –

1. (a) Par récurrence immédiate, les suites sont strictement positives puis croissantes à partir du rang 2. Remarquer qu'on a alors un minorant $(4n+2)u_2$
   (b) Par récurrence
   (c) Exprimer $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ comme somme d'une série alternée (utiliser un telescopage à partir de 2). Les deux suites sont alors adjacentes (technique usuelle)
   (d) Remarquer que la différence à la limite est majorée par la différence entre deux termes consécutifs.
2. Trouver λ et μ par les conditions initiales, puis récurrence
3. Exprimer 1(c) sous forme d'un équivalent, et en déduire en fonction de β_n, un équivalent de u_n lorsque $\lambda\ell + \mu \neq 0$. Discuter suivant le signe. Le cas où c'est nul nécessite qu'on y regarde de plus près. Utiliser pour cela 1(d). Das ce cas, la limite est nulle.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.16 –

1. Montrer par récurrence que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. Montrer que (u_n) et (w_n) sont adjacentes. Pour montrer que leur différence tend vers 0, on pourra montrer que $(w_n - u_n)$ est sous-géométrique.
3. Exprimer $\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+2} + \gamma w_{n+1}$ en fonction de u_n, v_n et w_n, et identifier les coefficients obtenus à α, β et γ. On trouve $\alpha = 10$, $\beta = 16$ et $\gamma = 21$ (et les triplets multiples de celui-ci.
4. Passer à la limite dans $\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.17 – Utiliser les résultats et méthodes du cours. Pour les dernières, résoudre d'abord l'équation homogène puis trouver une solution particulière.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.18 – Montrer que la seule limite possible est 4 et former $u_{n+2}-4$; factoriser par $(a+b)(a-b)$, et donner une inégalité satisfaite par les termes de la suite $w_n = \sqrt{u_n}-2$, après avoir justifié que u_n est supérieure à 1 à partir d'un certain rang. Conclure par majoration.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.19 – Études à savoir faire. S'entraîner. Les réponses ci-dessous :

1. - si $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 3]$, (u_n) croit vers 3.
   - si $u_0 \in [3, +\infty[$, (u_n) décroît vers 3.
2. Étudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) :
   - si $u_0 \in]0, \sqrt[3]{2}[$, $u_{2n} \to 0$ et $u_{2n+1} \to +\infty$
   - si $u_0 \in]\sqrt[3]{2}, +\infty[$, de même en inversant le rôle de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   - si $u_0 = \sqrt[3]{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, de valeur et donc de limite $\sqrt[3]{2}$.
3. Pas de point fixe, les seules limites possibles sont $-\infty$, $+\infty$ et 1. Vérifier que ce n'est pas le cas : (u_n) n'admet pas de limite.
4. - Si $u_0 \in]-\infty, -4[$, $u_n \to -\infty$.
   - Si $u_0 \in]0, \frac{4}{3}[$, $u_n \to 1$ (seul point fixe de $f \circ f$ dans l'intervalle fermé)
   - Si $u_0 \in]-4, 0[$, elle finit par dépasser 0 (sinon elle conevergerait sans point fixe). $u_n \to 1$ 1.
   - si $u_0 \in]\frac{4}{3}, 4[$, $(u_n) \to 1$.
   - si $u_0 \in]4, +\infty[$, $u_n \to -\infty$.

5. - Si $u_0 \in]-2,+\infty[$, alors $u_n \to 1$.
   - si $u_0 \in]-\infty,-5[$, $u_n \to 1$.
   - si $u_0 \in]-5,-2[$, on ne peut pas y rester, $u_n \to 1$, sauf si on tombe sur -5
6. Utiliser l'IAF, et en déduire que (u_n) est de Cauchy. La limite est l'unique réel ℓ tel que $\cos(\ell) = \ell$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.20 – Étudier u_{4n} (étudier les composées de f et g.) Une étude un peu pénible de point fixe (mais on pourra pour cela remarquer que f et g ont des points fixes communs, qui sont également points fixes de leur composée, cela permet de trouver facilement une factorisation).

Indications ou solutions pour l'exercice 12.21 –

1. Remarquer que $[a,+\infty[$ est stable par f définissant la récurrence, que f est croissante sur cet intervalle, et que tout s'y ramène. On obtient $u_n \longrightarrow \sqrt{a}$.
2. Récurrence.
3. Par itération, on obtient : $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{(u_1-a)^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$.
4. Réponse : $n = 8$. La convergence est extrêmement rapide : on double à peu près le nombre de décimales correctes à chaque itération. C'est en fait un cas particulier de méthode de Newton pour la résolution d'équations numériques, et cette convergence rapide est une caractéristique de cette méthode (en cas de convergence...)

Indications ou solutions pour l'exercice 12.22 –

1. Étudier la monotonie et les points fixes. Réponse : $+\infty$.
2. Regrouper les 2 logarithmes (en faisant passer un facteur 2 à l'intérieur sous forme d'un carré). Remplacer u_{n+p+1} par son expression en fonction de u_{n+p}, et terminer en utilisant la positivité et la croissance de (u_n).
3. Utiliser l'équivalence entre la convergence de la suite (v_n) et la convergence de la série de terme général $(v_{n+1}-v_n)$. Établir cette convergence par TCSTP.
4. En majorant le reste de la série précédente, montrer que $2^n b(v_n-\alpha) = o(1)$. Passer à l'exponentielle.
5. Réinjecter cet équivalent dans la majoration de la somme partielle de $\sum(v_{k+1}-v_k)$, pour montrer que β_n est bornée. En déduire la convergence vers 0 de la suite de l'énoncé. L'exprimer en réexprimant β_{n+1}. Conclure que $\beta_n \to \frac{1}{2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.23 –

2. Par télescopage d'une part, et en remplaçant u_k par son expression en u_{k-1} d'autre part ; se débarrasser des termes constants par un argument de négligeabilité.
   Réponse : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

On pourra remarquer qu'il s'agit d'un cas particulier dégénéré d'une méthode plus générale utilisant le théoèrme de Cesàro pour obtenir la limite de la somme télescopique (l'exposant étant choisi de sorte à ce que cette limite soit finie non nulle). Cette méthode est développée dans certains autres exercices.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.24 –

1. Classique (théorème de Cesàro) : par ε, encadrer la somme de n_0+1 à n ; contrôler les premiers termes en faisant tendre n vers l'infini, et en traduisant cette limite par un deuxième ε. Cela peut être considéré comme du cours, mais il faut savoir refaire la démonstration.

2. (b) On pourra utiliser $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0, et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Se ramener à l'équivalent classique de $(1+u_n)^\alpha - 1$ lorsque $u_n \to 0$.
   Réponse : $\alpha = -2$.

(c) Exprimer la somme télescopique $\sum u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$, et déterminer sa limite à l'aide de Cesàro.

Réponse : $\sqrt{\frac{3}{n}}$".

Indications ou solutions pour l'exercice 12.25 – Méthode générale de calcul d'un équivalent de suite récurrente en utilisant le théorème de Cesàro.

1. Pour u_0 assez petit $[0, u_0]$ est stable par f et (u_n) décroît.
2. Déterminer β tel que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} \to \ell \neq 0, \pm\infty$. Utiliser le théorème de Cesàro sur la somme $\frac{1}{n}\sum(u_{k+1}^{\beta} - u_k^{\beta})$.

   Réponse : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(na(\alpha-1))^{1/\alpha-1}}$
3. Respectivement $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.26 –

1. Calculer la dérivée (somme géométrique). Calculer le signe de $P_n(2)$ en regroupant les termes 2 par 2.
2. Minorer $t^{2n} - 1$ par $t^2 - 1$.
3. Remarquer que l'intégrande est égale à P_n'.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.27 –

1. Théorème de la bijection.
2. Étudier la monotonie en déterminant le signe de $P_{n+1}(x_n)$ (ce qui permet de comparer $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$).
3. Réexprimer P_n en utilisant la formule de sommation des suites géométriques. Passer à la limite, sachant que $\ell < 1$ (car (x_n) décroît).
4. Récupérer l'expression de $x_n - \frac{1}{2}$ à partir de l'égalité $P_n(x_n) = 0$, réexprimé par sommation. Montrer que $\ln(2x_n) \underset{+\infty}{\sim} x_n^{n+1}$, et en déduire $(n+1)\ln(x_n) = -(n+1)\ln(2) + o(1)$, ce qui permet de passer à l'exponentielle.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.28 –

1. Théorème de la bijection.
2. $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n - \alpha_n \leqslant 0 = f_n(\alpha_n)$, car $\alpha_n \in]0,1[$. On en déduit la décroissance de (α_n). En déduire $n\alpha_n \to 1$, ce qui permet de répondre à cette question et la suivante.
4. Minorer $f\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ en ne gardant que 3 termes du développement du binôme. Conclure que $\beta_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, puis $\beta_n \to 1$.
5. Appliquer ln à la relation $f_n(\beta_n)$. Réponse : $\beta_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.29 –

1. Théorème de la bijection.
2. $f_{n+1}(x_n) < 0$, donc (x_n) croît.
3. Par l'absurde $x_n \to +\infty$.
4. $x_n^k = o(x_n^{k+1})$, d'où $x_n^{k+1} + x_n^k \underset{+\infty}{\sim} x_n^{k+1}$. Réponse : $n^{\frac{1}{k+1}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.30 –

1. $x\tan(x)$ est croissante sur tout intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $x > 0$.

2. Exprimer la relation avec Arctan, et utiliser $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$. Ensuite, faire un DL.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.31 – Encadrer par des intégrales. Pour les restes (question 2), encadrer d'abord la somme entre $n+1$ et m, puis faire tendre m vers $+\infty$. Vérifier que les encadrants ont même équivalent simple.
Réponses :

1. $\dfrac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, $\ln(n)$ si $\alpha = 1$.
2. $\dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$
3. $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.32 –

1. En supposant $\alpha \neq 0$, et en notant ℓ la limite de $u_n + \alpha u_{2n}$, montrer que si a est valeur d'adhérence, $\dfrac{\ell - a}{\alpha}$ aussi. En déduire une suite non bornée de valeurs d'adhérences, sauf pour une unique valeur de a, donnant la seule valeur d'adhérence possible.
   Alternative : considérer $u_n = \sum_k (-1)^k \alpha^n (x_{2^k n} + \alpha x_{2^{k+1} n})$: (justifier la convergence de cette somme telescopique vers x_n, et pour n assez grand, encadrer par ε)
   Réponse : $x_n \to \frac{\ell}{1+\alpha}$.
2. $u_n = (-1)^{v_2(n)}$, ou $(-1)^{\lg(n)}$.
3. Appliquer la question 1 à nu_n
   Réponse : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n\,(2+\beta)}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.33 – Essentiellement technique. Donner le rang de la première et de la dernière valeur k (s'exprime sous forme de somme d'entiers consécutifs). En résolvant une équation de degré 2, en déduire

$$u_n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \right\rfloor,$$

puis $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.34 – Faire des essais avec différentes initialisations, et observer ce qu'il se passe.
Remarquer qu'une fois qu'on passe en dessous de 0 en retranchant n, on a $u_{n+2} = u_n + 1$. Réponse : $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.35 – Réponse : e et $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.36 – Si $u_n \to a$ et $v_n \to b$ et $f(u_n)$ et $f(v_n)$ tendent vers des limites différentes, mélanger (u_n) et (v_n) pour construire une suite contredisant l'hypothèse.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.37 – Considérer une suite (a_n) de valeurs d'adhérences convergeant avec a, et une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ telle que pour tout n, $|u_{\varphi(n)} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.38 – Remarquer que pour tout n, $A_n = \{n \mid u_n > \frac{1}{2^n}\}$ est fini. Parcourir les $A_n \setminus A_{n-1}$ dans l'ordre, rangés chacun par ordre décroissant.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.39 –

1. Utiliser le fait que l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.
2. Par l'absurde, considérer autour de chaque point, une boule ne contenant qu'un nombre fini de termes de la suite (u_n).

3. Sinon, construire (u_n) tq u_n se soit pas dans l'union des boules de centre les x_i, $i < n$, et de rayon ε.
4. Sinon, il existerait des x_n tels que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit inclus dans aucun U_i. En extraire une suite convergente, et considérer U_j contenant sa limite, et en déduire que pour n assez grand $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset U_j$.
5. Utiliser la précompacité avec r nombre de Lebesgue.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.40 – Justifier que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle. Si $a < b$ sont valeurs d'adhérence, prendre x entre les 2, et une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ convergeant vers x. Remarquer que $u_{\varphi(n)+1} \to x$ aussi, et en déduire que x est point fixe. Conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.41 –

1. Par l'absurde, utiliser Bolzano-Weierstrass pour trouver une suite x_n d'éléments de D_ε convergeant vers une valeur a, puis y_n s'approchant de plus en plus de x_n, en restant différent de a, et tel que $|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon/2$. Comparer les limites de $f(x_n)$ et $f(y_n)$.
2. Prendre une suite d'ε tendant vers 0 et faire l'union.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.42 – Considérer D_ε l'ensemble des a tels que soit la limite à gauche, soit la limite à droite en a diffère de $f(a)$ de plus de ε. Supposant D_ε infini, montrer l'existence d'une suite (x_n) strictement monotone (disons croissante) de D_ε convergeant vers a. Considérer y_n se resserrant vers x_n, restant inférieure à a et telle que $f(y_n)$ ne s'approche pas trop de $f(x_n)$. Obtenir une contradiction en passant à la limite. Pour terminer, considérer une suite ε_n tendant vers 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 12.43 – Si $|q_n|$ admet une valeur d'adhérence finie, extraire une suite $|q_{\varphi(n)}|$c onvergeant vers cette valeur. Déduire que $|p_{phi(n)}|$ converge aussi. Que peut-on dire de ces limites ?

Indications ou solutions pour l'exercice 12.44 – On pourra commencer par montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $0 < |1 - \mathrm{e}^{ik}| < \varepsilon$, puis montrer que tout intervalle $]\alpha, \beta[\subset] - 1, 1[$ contient une infinité de termes de la suite (tourner indéfiniment autour du cercle trigonométrique).

Indications ou solutions pour l'exercice 12.45 –

1. Montrer d'abord par le critère de Cauchy que (u_n) est bornée. Quel théorème du cours donne alors l'existence d'une valeur propre ?
2. Sinon, contredire le critère de Cauchy pour $\varepsilon/3$, où ε est la distance séparant les deux valeurs d'adhérence.

13

Calcul asymptotique

Indications ou solutions pour l'exercice 13.1 –

1. Séparer le ln en 2 : $\ln 2n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
2. $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$.
3. $\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
4. C'est déjà la forme la plus simple possible !
5. Mettre le terme prépondérant en facteur, couper le ln en 2, et étudier les prépondérances : $\ln(n^2+n+1) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.
6. $\ln(n^3+n) \underset{+\infty}{\sim} 3\ln(n) = o(n^2)$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$.
7. $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt{n}$.
8. $n^6 = (\sqrt{n})^{12} = o(\mathrm{e}^{\sqrt{n}})$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.
9. $\ln n = o(n)$, donc: $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
10. Factoriser pour faire apparaître des équivalents classiques, ou alors, de façon plus souple, écrire chaque équivalent des 4 termes qui interviennent avec o (sous forme d'un DL), afin de pouvoir faire la sommation au numérateur et au dénominateur. Revenir à des équivalents pour faire le quotient.
Réponse : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3}$ (c'est donc la limite de (u_n))
11. Introduire $+1-1$, pour récupérer les équivalents classiques du cos et de exp. Comparer les deux équivalents obtenus, afin d'obtenir un équivalent de la somme.
Réponse : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\ln^2 n}$.
12. Enchaîner les équivalents, en commençant par l'extérieur : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{5}{2n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.2 –

1. $\frac{x}{2}$
2. $-\frac{x^2}{2}$
3. $x\ln(x)$
4. $\frac{x}{12}$
5. $\frac{1}{x^2}$
6. $\frac{a}{x\ln(x)}$
7. $\pi - x$
8. $\frac{(\pi-x)^2}{2}$
9. x
10. $\frac{a}{\mathrm{e}}\left(x-\frac{\mathrm{e}-b}{a}\right)$

Indications ou solutions pour l'exercice 13.3 –

1. $-\ln(x)$ $(\mathrm{th}(x) \sim_{+\infty} 1)$

2. x (utiliser $\mathrm{sh}(x) \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x$, mettre le terme prépondérant en facteur et couper le ln en 2)
3. $\ln(x)$
4. $\frac{5x}{12}$ (tout rentrer dans ln, pour se ramener à un équivalenbt classique ; puis un autre ; sommer avec o).
5. x (factoriser par le terme prépondérant dans le ln)
6. $\frac{x}{2}$ (tout grouper dans ln, utiliser équivalent du ln puis sommer équivalents de exp avec o).
7. $\frac{x}{\mathrm{e}}$ (éq du ln externe puis regrouper tout dans le même ln et à nouveau éq du ln)
8. x (vérifier que le deuxième terme est en $o(x)$, donc n'intervient pas).
9. $\sqrt[4]{x}$
10. $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot x$.
11. $\frac{x}{4} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(2)}}}{\sqrt{\ln(2)}}$.
12. πx, aucune difficulté (enchaîner les équivalents en commençant par l'extérieur)
13. $\frac{\mathrm{e}x^2}{4}$ (factoriser par e, utiliser l'éq de e, puis de la racine , puis du cos, en sommant avec o).
14. x
15. $-\frac{x^3}{2}$
16. $\frac{1}{2}(x-1)$ (se ramener à au taux d'accroissement)
17. $4(\ln(2)+1)(x-2)$ (factoriser pour utiliser un éq de exp, puis cdv $y = x+2$; mettre de côté un terme $y(ln(y+2))$), et pour le reste, regrouper les ln et éq ; on somme les éq avec o).
18. $(x-1)^2$ (factoriser par x, éq de l'exp, puis du ln).
19. x^{2x} (le deviner et former le quotient dont on calcule la limite en l'écrivant sous forme exponentielle ; ou alors, tout écrire au départ sous forme exponentielle, et développer l'exposant à $o(1)$ près, ce qui peut se faire ici uniquement avec la connaissance des équivalents)

Indications ou solutions pour l'exercice 13.4 –

1. $2x$ (sommer avec o)
2. $\sqrt{x}$ (idem)
3. $2x^2$ (encore ; factoriser $1-\cos^2(x)$)

Indications ou solutions pour l'exercice 13.5 –

1. $2x\ln(x)$ (chercher un équivalent de chaque terme et étudier les prépondérances)
2. $-\frac{x^2}{2}$ (enchaîner les équivalents, dans le bon ordre (effeuiller, ne pas commencer par le coeur).
3. $\frac{x}{2}$ ($-1+1$ et étudier les prépondérances)

Indications ou solutions pour l'exercice 13.6 –

1. En divisant par $\frac{1}{n}$, on a le taux d'accroissement de tan en $\frac{\pi}{4}$. On peut aussi développer $\tan(a+b)$, mettre sur le même dénominateur, utiliser les équivalents classiques et comparer les termes les uns aux autres.

   Réponse : $\frac{2}{n}$.
2. Mettre $\sqrt{e}$ en facteur, et utiliser l'equivalent de $\mathrm{e}^x - 1$ en 0. Déterminer un équivalent du terme restant par développement du cos, et utilisation des équivalents classiques, exprimés sous forme de développement limités, ou comme avant, en introduisant un taux d'accroissement.

   Réponse : $\dfrac{\sqrt{3\mathrm{e}}}{2\ln(n)}$.
3. Utiliser la formule liant $\mathrm{Arctan}(n)$ et $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$. On peut aussi appliquer tan à l'expression initiale, en utilisant un équivalent de tan.

   Réponse : $\dfrac{1}{n}$.

4. Écrire sous forme exponentielle, développer le sinus, et former un développement à $o(1)$ de l'exposant, pour pouvoir obtenir un équivalent par passage à l'exponentielle.
   Réponse : $\mathrm{e}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.7 – Écrire sous forme exponentielle, et calculer la limite de l'exposant.
Réponse : e^2.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.8 – Écrire sous forme exponentielle.

- Si $\alpha < 2$, $\lim u_n = 1$.
- si $\alpha > 2$, $\lim u_n = 0$;
- si $\alpha = 2$, $\lim u_n = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$;

Indications ou solutions pour l'exercice 13.9 – Déterminer la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{25}{12}$
3. -5
4. $\frac{12}{33}$
5. 0
6. -2
7. e^2
8. $\frac{1}{2}$
9. e^2
10. $\frac{1}{2}$ (QC + équivalents)
11. $e^{-\frac{1}{2}}$
12. $\frac{1}{8}$
13. 1
14. $\frac{5}{2}$
15. $\frac{1}{4}$
16. 1

Indications ou solutions pour l'exercice 13.10 – Des limites simples, utilisant diverses techniques (règles usuelles, croissances comparées, équivalents...)

1. Réponse : 0 ;
2. Réponse : 0 ;
3. Réponse : $\frac{1}{3}$
4. Réponse : 0
5. Réponse : 0
6. Réponse : 0
7. Réponse : $+\infty$
8. Réponse : 0
9. Réponse : $-\infty$

Indications ou solutions pour l'exercice 13.11 –

1. Écrire sous forme exponentielle, puis déterminer un équivalent de l'exposant. Pour l'exponentielle, faire un développement à $o(1)$ de l'argument.
   Réponse : 0.
2. Tout écrire sous la même exponentielle et étudier les prépondérances par CC.
   Réponse : 0
3. Sous forme exponentielle, puis équivalents classiques dans l'exposant.
   Réponse : $\sqrt{e}$
4. Développer $\tan(a+b)$, puis appliquer le logarithme, et l'équivalent classique associé, sous forme de DL pour pouvoir sommer. Garder $o(1)$.
   Réponse : $e^{8/\sqrt{3}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.12 –

1. $\frac{a}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a-b}$
2. $\frac{n+1}{2}$
3. $e^{-\tan(a)}$
4. 1
5. a si $a > 1$; 1 si $a < 1$
6. $\sup(a, b)$
7. $\sqrt{ab}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.13 –

1. $-\infty$
2. $\frac{1}{2}$
3. 0
4. 0
5. $-\frac{6}{\pi}$
6. $\frac{1}{\pi}$
7. 0
8. 0
9. $\frac{\pi}{4}$
10. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$
11. 1
12. 0
13. -3
14. $\mathrm{e}\cos(\mathrm{e})$
15. 0
16. 1
17. 1
18. -2
19. $\frac{\pi}{8}$
20. $-\frac{1}{2}$
21. 0
22. 1
23. $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$
24. $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$
25. $\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{32}}$
26. e^2
27. 1
28. e
29. $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$
30. $1/\mathrm{e}$
31. 1
32. $1/\mathrm{e}$
33. $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$
34. 1
35. 1
36. $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$
37. $(2^4 \cdot 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}$
38. e
39. 1
40. $+\infty$
41. e^2
42. 1
43. $1/\mathrm{e}$
44. e
45. $\sqrt{\mathrm{e}}$
46. 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.14 – Étudier la convergence des suites définies par :

1. $u_n \to 1$
2. $u_n \to +\infty$
3. Avec Stirling :
   - $u_n \to 0$ si $|x| < \frac{1}{\alpha}$, où $\alpha = \dfrac{p^p}{q^q(p-q)^{1-q}}$.
   - $u_n \to +\infty$ si $x > \frac{1}{\alpha}$
   - $u_n \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{p}{q(p-q)}}$ si $x = \frac{1}{\alpha}$
   - (u_n) n'admet pas de limite sinon.
4. $u_n \to \frac{2}{\mathrm{e}}$
5. $u_n \to 1$
6. $u_n \to \mathrm{e}$
7. $u_n \to 1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.15 –

1. NON. Considérer $\ln(1+x)$ et $\ln(1+2x)$ en 0.
2. Écrire $g = f + o(f) = f \times (1 + o(1))$, puis $\ln(g) = \ln(f) + \ln(1 + o(1))$. Comparer les deux termes de cette somme.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.16 –

1. Considérer e^n et e^{n+1}.
2. Remarquer que $o(f) = o(1)$, donc $g = f + o(1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.17 – Par la contraposée, si $P \neq Q$, justifier l'existence de $k \leqslant n$ et $\lambda \neq 0$ tel que $P(x) - Q(x) \underset{x_0}{\sim} \lambda(x - x_0)^k$. On peut même dans un premier temps se ramener à un voisinage de 0, par changement de variable, si on est plus à l'aise dans ce contexte.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.18 – Argument de type Cesàro. Couper en N à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon v_n$. On obtient un cas particulier du théorème de sommation des o. L'autre moitié est le cas des séries convergentes (dans ce cas, on a une négligeabilité entre les restes). On en déduit un résultat similaire pour la sommation des équivalents.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.19 – Former le quotient, majorer simplement tous les termes sauf le dernier. On pourra aussi s'amuser à le voir comme conséquence du théorème de sommation des équivalents, en écrivant $n! - 1$ sous forme d'une somme télescopique.

Indications ou solutions pour l'exercice 13.20 –

1. Remarquer que si $a^m \leqslant x$, avec $a \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$, alors $a \leqslant \sqrt{x}$ et $m \leqslant \log_2(x)$.
2. De même, il faut simultanément $a^b \leqslant x$ et $c^d \leqslant x$ (mais ce n'est évidemment pas une condition suffisante). c vérifiant cela vérifie nécessairement $c \leqslant \sqrt[3]{x}$ (car $d \geqslant 3$).
3. Trier les (a, b, c, d) selon que $a = 0$ ou $a = 1$ ou $c = 0$ ou $c = 1$ (majorer par $N_1(x)$ ou $N_1(x-1)$), $a \geqslant 2$, $c \geqslant 2$, b ou $d \geqslant 3$ (en comptant plusieurs fois si à la fois b et d sont $\geqslant 3$, majorer en fonction de N_2), et dernier cas, $b = d = 2$. Utiliser les congruences modulo 4 des carrés pour majorer ce dernier cas par $\frac{3}{4}x$. Le reste étant négligeable devant x, il peut être majoré par εx pour x assez grand.

14

Approximations polynomiales

Indications ou solutions pour l'exercice 14.1 – Utiliser une formule de Taylor pour l'exponentielle, contrôlant le reste à 10^{-4} près (pour déterminer l'ordre nécessaire).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.2 – Par ITL, en se servant du signe des dérivées successives. Pour le membre de droite, on n'obtient pas tout-à-fait la constante $\frac{1}{16}$, mais elle se compare facilement à $\frac{1}{16}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.3 – Lorsque $n \to +\infty$, $\sin\left(\frac{1}{n}\sin x\right) \approx \frac{1}{n}\sin(x)$, et on se doute que la limite sera alors $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x = 2$.
Pour le justifier rigoureusement, former la différence, et la majorer par une formule de Taylor.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.4 – L'encadrement s'obtient en utilisant l'ITL, en contôlant le signe des dérivées successives.
Pour le produit infini, passer à l'exponentielle, et encadrer chacun des termes grâce à ce qui précède. On obtient des sommes qui se calculent explicitement (sommes d'entiers ou de puissances d'entiers).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.5 – Exploiter la symétrie en considérant $g(x) = f(x) - f(1-x)$. Si on applique mal la formule de Taylor, on peut se retrouver avec un facteur 2 en trop. En quel point appliquer la formule de Taylor pour diviser les longueurs par 2 ?

Indications ou solutions pour l'exercice 14.6 – Grand classique ! Majorer le reste de la série exponentielle, en remarquant que $\frac{1}{(n+1+k)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!k!}$, l'inégalité étant la plupart du temps stricte, et que $\mathrm{e} \geqslant \frac{1}{n}$.
Conclure en essayant de trouver à partir de cet encadrement un encadrement strict de l'entier m entre deux entiers consécutifs.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.7 – Formule de Taylor en a à l'ordre n (donc avec reste nul).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.8 – Inégalité de Taylor-Lagrange en a pour montrer que $N(f) \leqslant \dfrac{N(f^{(n)}}{n!}$, puis série exponentielle.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.9 –

1. ITL entre x et $x+h$, entre x et $x-h$, et on somme.
2. Inégalité triangulaire sur la première question, et majoration des deux termes $f(x+h)$ et $f(x-h)$.
3. L'inégalité est valable pour tout h, donc pour h réalisant le minimum du majorant. Rechercher ce minimum par étude de fonction.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.10 – FTY centrée en x, pour obtenir un DL à l'ordre 2 de $f(x+y)f(x-y)$ lorsque $y \to 0$. Terminer par un argument de conservation de signe (à partir d'un équivalent de $f(x+y)f(x-y) - f(x)^2$).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.11 – Voici une méthode pour justifier une dérivation sous le signe $\int$ (c'est-à-dire passer la dérivation sur x à l'intérieur de l'intégrale). Vous verrez en Spé des théorèmes efficaces pour permettant de le faire. En attendant, comprenez bien cet exemple.

1. Il s'agit d'étudier pour quelles valeurs de x l'intégrale est bien définie. Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Écrire F sous forme intégrale regrouper les intégrales, majorer avec l'inégalité triangulaire, reconnaître le début d'un développement de Taylor, et le majorer par ITL. Il faut pour cela un majorant de f_t'' entre x et $x+h$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$, $|f_t''(y)| \leqslant 4\mathrm{e}^{|y|}$, puis majorer $|y|$ par $|x|+|h|$ entre x et $x+h$. Il reste alors encore à intégrer entre 0 et 1 sur la variable t.
3. Par limite du taux d'accroissement, obtenu par la questin précédente.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.12 –

1. Écrire g sous forme intégrale, et se retrouver à intégrer une ITL. Pour contrôler la convergence, il faut réussir à bien maîtriser un majorant de $|f_t''|$ entre x et $x+u$. Pour faire cette majoration, on peut se contenter de $|u| < 1$, le but étant de faire tendre ensuite u vers 0. Montrer qu'on peut alors majorer f_t'' entre x et $x+u$ (pour $t \in [0,1]$) par $(4+16(|x|+1)^2)$. Conclure en intégrant entre 0 et 1. Il reste un facteur multiplicatif $|u|$ dans le majorant assurant la convergence vers 0.
   On en déduit que g' s'obtient par dérivation sous le signe $\int$.
2. Calculer h' (carré d'une primitive), et comparer à g' par changement de variable.
3. Calculer $(h+g)(0)$ et exprimer la limite en $+\infty$. La limite de g est nulle par majoration de l'intégrande (par e^{-x} par exemple, pour $x \geqslant 1$).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.13 –
Certains DL sont donnés à un ordre un peu plus élevé que demandé (si vous voulez vous entraîner en augmentant un peu la difficulté des calculs)

1. $\sin x\ \cos 2x = x - \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^4)$
2. $\mathrm{e}^{\sin 2x} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$
3. $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
4. Attention, pensez à sortir un facteur e, pour vous ramener à une composition par une expression **de limite nulle**.
   $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} \cdot x^2 o(x^3)$.
5. De même, mettez 2 en facteur dans la racine.
   $\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{384}x^4\right) + o(x^4)$
6. Diviser numérateur et dénominateur par x^3 pour se ramener à un DL à élever à une puissance judicieuse.
   $\frac{x^3}{\sin^3 x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + o(x^5)$.
7. Commencer par $\frac{x}{\sin(x)}$ à un ordre augmenté de 1, puis diviser par x.
   $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6),$$
   puis :
   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = -\left(\frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5\right) + o(x^5).$$
8. $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{61}{720}x^6 + o(x^6)$

9. Utiliser la π-périodicité de tan pour se ramener en 0.

$$\tan(\pi e^x) = \pi x + \frac{\pi}{2}x^2 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi^3}{2}\right)x^4 + o(x^4).$$

10. Écrire sous forme exponentielle. Diviser l'exposant par x nécessite d'augmenter l'ordre de 1 avant cette division.

$$(1 - x\sin x)^{\frac{1}{x}} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \frac{7}{20}x^5 + o(x^5).$$

11. De même : $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)$.
12. Mettre 4 en facteur, et sortir un facteur e^2 :

$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{1536} + o(x^3)\right)$$

13. Du calcul ! Les étapes (tout est au voisinage de 0) :
    - $\sqrt{1 + x - x^2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{45}{128}x^4 + o(x^4)$.
    - $(1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}u - \dfrac{1}{9}u^2 + 581u^3 + o(u^3)$
    - $(\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{72} - \dfrac{43}{6480}x^6 + o(x^6)$
    - $\sqrt{1 + x - x^2} - (\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{24}x^2 + \dfrac{5}{16}x^3 - \dfrac{389}{1152}x^4 - +o(x^4)$.
14. Séparer le ln en 2, développer d'abord par rapport à $\tan(x)$ pour faire quelques simplifications.

$$\ln\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^5 + o(x^5).$$

15. On a $\sin x - \sin 5x = -4x + o(x)$, donc en divisant par x, on est ramené à une forme $\frac{1}{1-u}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = \frac{1}{x}(\cos x - \cos 5x) \cdot \frac{x}{\sin x - \sin 5x}.$$

Il faut donc aller jusqu'à l'ordre 6, avant de diviser par x. La fraction en sinus donne un terme constant non nul, donc il faudra bien aller à l'ordre 6 pour les cosinus. En revanche, les termes constant des cosinus se compensent, et le premier terme non nul dans la différence des cosinus est un terme en x^2. Ainsi, il suffira d'aller à l'ordre 4 pour la fraction des sinus. Comme on divise la différence des sinus par x, il faut aller à l'ordre 5 pour les sinus. On obtient :
    - $ds\frac{x}{\sin x - \sin 5x} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{31}{6}x^2 + \frac{7267}{360}x^4 + o(x^4)\right)$
    - $\cos x - \cos 5x = 12x^2 - 26x^4 + \dfrac{217}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $(\cos x - \cos 5x) \cdot \dfrac{x}{\sin x - \sin 5x} = -3x^2 - 9x^4 - \dfrac{519}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = -3x - 9x^3 - \dfrac{519}{10}x^5 + o(x^5)$.
16.
    - $\sqrt{1 + x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{x^3}{2^4} + o(x^3)$.
    - $\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{x}{2^3} - \dfrac{5}{2^7}x^2 + \dfrac{21}{2^{10}}x^3 + o(x^3)\right)$
    - $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \cdot \left(1 + \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2^4}x - \dfrac{13 - 12\sqrt{2}}{2^8}x^2 + \dfrac{124 - 69\sqrt{2}}{2^{12}}x^3 + o(x^3)\right)$

Indications ou solutions pour l'exercice 14.16 –

1. Dériver : $f'(x) = -\dfrac{2}{1 + 4x^2}$. On obtient : $f(x) = \mathrm{Arctan}(2) - 2x + \dfrac{8}{3}x^3 - \dfrac{32}{5}x^5 + \dfrac{128}{7}x^7 + o(x^8)$.
2. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{56}{27}x^3 + o(x^3)\right)$ puis primitiver.

3. Exprimer d'abord le DL de $\operatorname{Arcsin}(x)$ (en dérivant), puis composer et ne pas craindre les calculs. Calculer séparément les DL des puissances de $\operatorname{Arcsin}(x)$ (en multipliant à chaque fois le résultat par $\operatorname{Arcsin}(x)$). Être ordonné et soigneux dans les calculs. Sans garantie :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{60}x^5 - \frac{583}{5040}x^7 + o(x^8).$$

4. Multiplier par x et dériver. Un peu de calcul et :

$$f(x) = -\sqrt{3}\left(\frac{2}{9} - \frac{23}{405}x^2 + o(x^3)\right)$$

5. Dériver $xf(x)$, puis faire un peu de calcul. J'obtiens :

$$f(x) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{x^2}{90} - \frac{169x^4}{63000} + o(x^5)\right).$$

6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{19}{162}x^9 + \frac{41}{330}x^{11} + o(x^{11})$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.17 –

1. Poser $y = x - 1$, puis DL à l'ordre 2. Attention à sortir un terme e pour le DL de exp en 1 !
   Réponse : $\dfrac{\mathrm{e}(2-\mathrm{e})}{2}(x-1)^2$.
2. Poser $y = x - \mathrm{e}$. Attention à sortir les constantes de l'exponentielle pour faire les compositions.
   Réponse : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}(x-\mathrm{e})^2$.
3. Factoriser par $\sqrt{x}$ puis utiliser un équivalent classique. Terminer en utilisant un DL du sinus.
   Réponse : $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}$
4. Factoriser par x^x puis utiliser un équivalent classique. On se retrouve à devoir faire un DA de $\ln(\sin(x))$. Pour cela développer $\sin(x)$, mettre x en facteur, et le sortie additivement du ln.
   Réponse : $\dfrac{x^{3+x}\ln x}{6}$.
5. Par mise en facteur, et utilisation d'équivalents classiques, se ramener d'abord à

   $$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} x\ln\tan x - \tan x \ln x.$$

   Développer ensuite $\ln(\tan(x))$, comme dans la question précédente, en sortant un terme $\ln(x)$. On obtient :

   $$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} -\frac{x^3\ln x}{3}$$

   Faire de même pour le dénominateur.
   Réponse : limite (donc aussi équivalent) : -1.
6. Compositions de DL sans difficulté, il faut juste savoir à quel ordre aller (après quelques essais : l'ordre 7) :

   $$\operatorname{sh}(\sin x) = x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o(x^7) \qquad \text{et} \qquad \sin(\operatorname{sh}(x)) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o(x^7).$$

   Réponse : $\dfrac{x^7}{45}$.
7. On s'en sort simplement en enchaînant les équivalents.
   Réponse : $\dfrac{x^3}{2}$.
8. Utiliser $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{y}$ (obtenu en composant le terme de gauche par tan et en utilisant un équivalent de tan).
   Réponse : $-\sqrt{x}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.18 – DA de l'exposant à l'ordre 0, après mise sous forme exponentielle. Développer le quotient de ln à l'ordre 2 chacun, simplifier par x. On peut alors terminer avec des équivalents.
Réponse : $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Indications ou solutions pour l'exercice 14.19 – DA de f à l'ordre 0 :

$$f(x) = \frac{1}{6} + o(1).$$

$f(x) \to \frac{1}{6}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.20 –

1. En factorisant, commencer par remarquer que

$$f(x) \equiv_{\frac{\pi}{4}} -\frac{n(\tan(x)-1)}{\cos(2x)}.$$

   Poser $x = \frac{\pi}{4} + y$. Utiliser la formule d'addition pour tan et les symétries pour cos. Travailler avec des équivalents. On obtient $f(x) \to n$.
2. Poser $y = \frac{\pi}{2} - x$ puis DA de chacun des 2 termes à l'ordre 0. $f(x) \to \frac{1}{2}$.
3. Factoriser chaque terme par $\sin(x) - 1$. Simplifier par $\sin(x) - 1$. Cela lève toute indétermination. $f(x) \to -\infty$.
4. Écrire sous forme exponentielle, et DA de l'exposant à l'ordre 0. $f(x) \to \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.
5. DA en la variable $y = \frac{1}{x}$. $f(x) \to \frac{1}{2}$.
6. Commencer par mettre e en facteur et utiliser un équivalent. Puis DL pour l'expression obtenue au numérateur. $f(x) \to -\frac{\mathrm{e}}{2}$.
7. DL du numérateur au plus petit ordre pour obtenir un équivalent (récupérer la partie principale de chaque terme). Équivalent direct du dénominateur. $f(x) \to \frac{1}{6}$.
8. DL du numérateur et du dénominateur séparément, au plus petit ordre pour obtenir un équivalent. $f(x) \to -\frac{3}{2}$.
9. $x = 2 + y$, puis factoriser par les constantes et utiliser des équivalents. $f(x) \to \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{6}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.21 – Rechercher un DA en $\frac{1}{x}$ à l'ordre qu'il faut pour obtenir le premier terme non nul après le terme constant (essayer l'ordre 1) :

$$f(x) = x + 1 - \frac{7}{6x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Asymptote : $y = x + 1$, la courbe de f est sous son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.22 – Méthode usuelle : DA en $\frac{1}{x}$ à l'ordre k, où k est le premier terme non nul après le terme constant (pour récupérer le signe de la différence entre f et l'équation de l'asymptote). On essaye $k = 1$. Ici :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}),$$

donc l'asymptote est $y = x - \frac{1}{2}$, la courbe est au dessus au voisinage de $+\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.23 – Les deux propriétés déterminent le DL à l'ordre n de f.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.24 – Par CC, $f(x) = o(x^n)$ pour tout n.
Vérifier que f' n'admet pas de limite en 0, donc ne peut pas être continue, donc pas dérivable non plus.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.25 – DL, puis identification des coefficients par TY. Pour le DL de Arctan(y) en 1, commencer par trouver un DL en 1 de la dérivée (ne pas hésiter à faire un changement de variable). Ce DL suffit à l'ordre $1,5$ (cela donne un DL à l'ordre $2,5$ de la primitive, qu'on compose ensuite en gagnant un facteur 2 sur l'ordre, sachant que $\cos(x) - 1$ étant d'ordre 2, puis on gagne encore 1 en multipliant par sin.
Réponse : $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{\pi}{4}$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$, $f^{(4)}(x) = 0$, $f^{(5)}(x) = \frac{\pi}{4}$, $f^{(6)}(x) = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.26 –

1. Dénombrement : partitionner selon que n est point fixe (reste à choisir une involution sur les $n-1$ autres) ou non (choisir l'image de n, qui s'échange avec n, puis une involution sur les $n-2$ autres).
2. Se ramener à un produit de deux DL (c'est plus facile qu'une composition !) et éviter la formule de Faa di Bruno... Montrer, grâce à une relation entre f et f', que les coefficients du DL de f vérifient la même relation de récurrence que (d_n). Conclure. Le résultat obtenu peut aussi se démontrer combinatoirement (classer suivant le nombre de points fixes, choisir les points points fixes, et associer les autres éléments par paires).

Indications ou solutions pour l'exercice 14.27 – Existence du DL par TY (dérivabilité des fonctions réciproques). Exprimer $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, En déduire les coefficients du DL de f^{-1} par identification. On peut simplifier les calculs en remarquant que f^{-1} est impair.
Solution : $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{x^3}{486} + o(x^3)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.28 – Se ramener au calcul du DL d'une fonction réciproque, puis travailler par identification.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Indications ou solutions pour l'exercice 14.29 –

1. Trouver une contradiction en formant le DL à l'ordre 2 en 0.
2. Y aller petit à petit en augmentant l'ordre.

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{160} + o(x^5).$$

Indications ou solutions pour l'exercice 14.30 – DL à l'ordre 2 grâce à Taylor-Young. Réponse : $\mathrm{e}^{-a^2/2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.31 – TY pour chaque $f(a + ph)$:

$$\Delta(h) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k + o(h^{n+1}).$$

Poser $A_{n,p} = \sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\dbinom{n}{p}p^k$, indépendant de f.
Considérer ensuite le cas particulier de $f = \exp$: calculer explicitement $\Delta(h)$, en faire un DL et utiliser l'unicité des DL pour déterminer les $A_{n,k}$ (tous nuls sauf $A_{n,n}$).
Réponse : $\lim\limits_{h\to 0}\Delta(h) = f^{(n)}(a)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 14.32 – Utiliser le théorème de la limite de la dérivée, en montrant par récurrence que $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ et g de classe $\mathcal{C}^n$. Appliquer l'HR avec la différence entre f et le début de son DL, pour avoir des dérivées nulles, puis faire un DL de chaque terme.
Pour la question 2, remarquer que $f'(0) = 0$ avec les hypothèses, et appliquer la question 1 avec $f(x)/x^2$.

On peut aussi procéder directement en injectant TY dans Leibniz, puis en utilisant un argument combinatoire en comptant les couples (E, f) où E est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ et f une injection de $[\![1, \ell-1]\!]$ dans E. On pourra penser à un interrupteur sur un élément qui n'est pas dans l'image de f.

15

Séries numériques

Indications ou solutions pour l'exercice 15.1 – F-V-V-F

Indications ou solutions pour l'exercice 15.2 – F-F-F-F

Indications ou solutions pour l'exercice 15.3 –

1. CV : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. CV : $n^2 u_n \to 0$
3. CV : $u_n = o(\mathrm{e}^{-n})$ ou $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
4. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{n}$.
5. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
6. DVG : $u_n \to \mathrm{e}$.
7. CV : $|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$
8. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$ (par quantité conjuguée)
9. CV : $n^2 u_n \to 0$, en mettant tout sous forme exponentielle et en étudiant les négligeabilités dans l'exposant).
10. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
11. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
12. CV : $n^{\frac{3}{2}} u_n \to 0$ (tout mettre sous forme exponentielle)
13. CV : $n^2 |u_n| \to 0$. Il est maladroit d'utiliser les séries alternées ici.
14. DVG : $(\sin(n))$ n'admet pas de limite.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^{-n^\alpha} = \mathrm{e}^{-n^\alpha \ln a}, a > 0$. On distingue plusieurs cas :
    - Si $\alpha \leqslant 0$, DVG : $u_n \to 1$ ou $\frac{1}{a}$.
    - Si $\alpha > 0$ et $a > 1$: CV : $n^2 u_n \to 0$
    - Si $\alpha > 0$ et $a < 1$: DVG : $u_n \to +\infty$
    - Si $\alpha > 0$ et $a = 1$: DVG.
16. CV : $n^2 u_n \to 0$
17. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{\mathrm{e}}{a}$
    - Si $|a| < \mathrm{e}$: DVG (d'Alembert)

- Si $|a| > \mathrm{e}$: CVA (d'Alembert)
- Si $a = \mathrm{e}$: DV : $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ (Stirling)
- Si $a = |\mathrm{e}|, a \neq \mathrm{e}$: CV (Abel)

18. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, puis $n^{\frac{3}{2}} u_n \to 0$.
19. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$, par DL
20. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
21. CV : $n^2 u_n \to 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.4 –

1. CV : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$
2. DVG : $u_n \to 1$
3. CV : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$
4. CV : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi^4}{n^4}$
5. CV : $n^2 u_n \to 0$
6. DV : $n u_n \to +\infty$
7. CVA : $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
8. CV : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$
9. DV : $n u_n \to +\infty$
10. CV : $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{4^n \sqrt{\pi n}} = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$ (Stirling).
    On peut aussi utiliser le critère de d'Alembert.
11. - CVA si $|z| < \frac{1}{4}$ par d'Alembert
    - DVG si $|z| > \frac{1}{4}$ par d'Alembert
    - DV si $z = \frac{1}{4}$ (équivalent, par Stirling)
    - CV si $|z| = \frac{1}{4}$, $z \neq \frac{1}{4}$ (Abel)
12. CV : $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$
13. CV : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$
14. CV : $n^2 u_n \to 0$
15. DVG : écrire u_n sous forme exponentielle + Cesaro

Indications ou solutions pour l'exercice 15.5 – $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, puis séries alternées. CV.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.6 –

1. Former un DL du tg pour en trouver un équivalent
2. Comment relier cela à la série précédente ?

Indications ou solutions pour l'exercice 15.7 –

1. SCV (série alternée, mq $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{x}}$ est décroissante)
2. CVA ($n^2 |u_n| \to 0$)
3. DV ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$)
4. DVG !
5. SCV : DA $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, puis série altérnée + série absolument convergente.

6. SCV : $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n} + O\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$; SCV +CVA.
7. SCV : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
8. L'intégrale se calcule, elle est décroissante de limite nulle ; D'où SCV (alternée). L'expression de l'intégrale permet de montrer que la convergence n'est pas absolue.
9. DV : $_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$, CV + DV (comparaison série/intégrale).
10. DVG : $u_{2n} \to -1$
11. CV : cdv $t = x - n\pi$, puis étudier la suite d'intégrales.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.8 – CV : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$: SCV + CVA

Indications ou solutions pour l'exercice 15.9 – Dans les deux cas, développer jusqu'au premier terme absolument convergeant, ou jusqu'au premier terme de signe constant assurant la divergence. Pourquoi cela suffit-il pour conclure ?

Indications ou solutions pour l'exercice 15.10 – Dans les deux cas, d'Alembert. Pour le cas limite, dans la première, utiliser Abel.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.11 –

1. CVA si $|x| < 3$, DV si $|x| \geqslant 3$
2. CVA si $|x| < 1$, DV si $|x| > 1$, converge en -1 diverge en 1.
3. CVA si $|x| < \frac{1}{2}$, DV si $|x| > \frac{1}{2}$, CV en 1, DV en -1.
4. CVA si $|x| < 1$, DV si $|x| > 1$, converge en -1 diverge en 1.
5. DV sauf si $x = 0$.
6. CVA si $|x| < 1$, DV si $|x| > 1$, converge en 1 diverge en -1.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.12 – Regrouper les termes de la série en paquets $\displaystyle\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$ de termes consécutifs de même signe, et montrer que ça ne tend pas vers 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.13 – Regrouper les termes de la série en paquets $\displaystyle\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$ de termes consécutifs de même signe. Montrer que ces paquets forment une suite décroissante de limite nulle. Quel théorème semble alors adapté ?

Indications ou solutions pour l'exercice 15.14 – Justifier (par des méthodes élémentaires) que $\binom{n}{3}$ est impair si et seulement si $n \equiv 1\ [4]$, puis grouper en paquets de 4 termes. Diverge.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.15 –

1. Solution : $\dfrac{21}{8}$
2. Solution : $55\mathrm{e}^2$

Indications ou solutions pour l'exercice 15.16 – $\cos((n-1)x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x})$, puis formule du binôme négatif.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.17 – Considérer $f_n(\theta)$ la somme partielle, calculer explicitement $f_n'(\theta)$, puis intégrer entre π et θ. Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour passer à la limite. Réponse : $-\ln\left(2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.18 – La convergence de la suite s'obtient facilement en recherchant les points fixes. 2 cas possibles. Dans un cas, la série diverge, dans l'autre, c'est presque une série de type connu.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.19 –

1. sin croissante sur l'intervalle stable $[-1,1]$...
2. $u_n - u_{n+1} \sim \frac{u_n^3}{6}$, et comparaison suite/série
3. Comparaison suite/série + équivalent.
4. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ d'où
   - $|x| < 1 \Longrightarrow$ CVA (d'Alembert)
   - $|x| > 1 \Longrightarrow$ DVG (d'Alembert)
   - $x = 1 \Longrightarrow$ DV ($u_n \geqslant u_n^2$)
   - $x = -1 \Longrightarrow$ CV (série alternée)

Indications ou solutions pour l'exercice 15.20 –

1. Théorème de la bijection puis $\ln(x_n) \sim n\pi$.
2. $x_n \geqslant \mathrm{e}^{n\pi}$. CV.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.21 – Même nature que $\sum \frac{\mathbb{1}_E(n)}{n}$, où E est l'ensemble des nombres s'écrivant sans 9. Compter ces nombres dans une tranche $[\![10^n, 10^{n+1}-1]\!]$, et majorer la somme sur cette tranche

Indications ou solutions pour l'exercice 15.22 – Justifier que la série diverge ssi $\prod_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{i_k}}$ tend vers $+\infty$. En considérant d'abord les sommes partielles de rang m, montrer que ce produit est minoré par $\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j}$, où $[\![1,s]\!]$ est constitué d'entiers dont la décomposition en facteurs premiers n'utilise que les n premiers nombres premiers, en multiplicité inférieure ou égale à m.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.23 – $0 \leqslant \max(a_n, b_n) \leqslant a_n + b_n$ puis TCSTP, puis $\sqrt{a_n b_n} \leqslant \max(a_n, b_n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.24 – Montrer que dans un sens ou dans l'autre, on aboutit à $u_n \to 0$, donc $u_n \sim \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.25 – Minorer $\sum_{n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n} u_n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.26 –

- $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_0 - n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$.
- Si $\sum a_n$ converge, avec a_n décroissante, $n a_n \to 0$
- Si $\sum b_n$ converge majorer $n a_n$ par le reste de la série $\sum b_n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.27 – Une implication est vraie, mais on peut avoir la divergence des deux pour tout x (contre-exemple en assurant la DVG soit sur les termes pairs, soit sur les termes impairs).

Indications ou solutions pour l'exercice 15.28 –

- Si $\alpha > 1$, comparer $\frac{u_n}{U_n^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- Si $\alpha = 1$, en éliminant le cas de divergence grossière, comparer à $\sum \ln(U_{n-1}) - \ln(U_n)$.
- Si $\alpha < 1$, comparer à $\sum \frac{u_n}{U_n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.29 –

1. Justifier que si $(u_{\varphi_1(n)})$ représente la suite extraite des termes $\geqslant 0$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ la suite extraite des termes négatifs, alors $\sum u_{\varphi_n(n)}$ et $\sum -u_{\varphi_2(n)}$ divergent vers $+\infty$. Construire la bijection en considérant d'abord une série de termes positifs (pris dans l'ordre dans la suite $(u_{\varphi(n)})$,jusqu'à ce que la somme dépasse x, puis des termes négatifs jusqu'à revenir en dessous de x, puis de nouveau des termes positifs jusqu'à revenir au-dessus de x etc.
2. De même avec le procédé suivant : imposer que la n-ième série de termes positifs permette de dépasser la valeur n, et ne considérer à chaque fois qu'un terme dans la série suivante de termes négatifs. On obtient alors une divergence vers $+\infty$.

   En symétrisant l'argument, on peut obtenir une divergence vers $-\infty$, et en considérant des séries de termes positifs permettant à chaque étape de dépasser 1, suivis de séries de termes négatifs jusqu'à passer en dessous de 0, on obtient une série dont la somme partielle n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Grossièrement, elle oscille entre 0 et 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.30 – Justifier qu'on peut trouver n, minimal, tel que $u_{\varphi(0)} < x$, et justifier que $u_{\varphi(0)} + \sum\limits_{n > \varphi(0)} u_n \geqslant x$, puis itérer cet argument.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.31 –

- Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur le n-uplet $(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$, où les b_i sont bien choisis. Prendre directement $(a_1, \dots, a_n)$ ne convient pas car on n'a pas de convergence. Donner un poids plus fort à a_n qu'à a_1 par choix des b_i. Par ailleurs, faire apparaître une factorielle est toujours une bonne idée lorsqu'on recherche une exponentielle.
  On a alors une petite majoration fine à faire par comparaison avec une intégrale et en utilisant une DES de $\frac{1}{k(k+1)}$.
- Définir a_n en se ramenant au cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique de sorte à optimiser l'inégalité précédente. Tronquer la suite obtenue pour assurer la convergence (cela donnera une famille de suite pour laquelle la constante optimale de la majoration s'approchera de e). Un petit coup de Stirling plus tard, on conclut en utilisant le fait que les sommes partielles de 2 séries divergentes à termes positifs équivalents sont elles-mêmes équivalentes.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.32 –

1. Encadrer $\sum\limits_{k=p^{n-1}}^{p^n-1} u_k$.
2. Montrer que $\sum \min(2^n u_{2^n}, 1)$ converge ssi $\sum 2^n u_n$ converge.

Grâce à ce critère de condensation, on peut obtenir une preuve très rapide de la nature des séries de Riemann, puis des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ (le critère de condensation nous ramène pour ces dernières à des séries de Riemann). Faites-le pour voir !

Indications ou solutions pour l'exercice 15.33 – Évaluer R_{2n} en se ramenant à l'étude asymlptotique d'une série à termes positifs (grouper des termes), qu'on étudie par comparaison série/intégrale.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.34 – $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où CV de $\sum u_{n+1} - u_n$. On obtient $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, donc $S_n \sim \ln(n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.35 – Encadrer par des intégrales. Pour les restes (question 2), encadrer d'abord la somme entre $n+1$ et m, puis faire tendre m vers $+\infty$. Vérifier que les encadrants ont même équivalent simple.
Réponses :

1. $\dfrac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, $\ln(n)$ si $\alpha = 1$.

2. $\dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$
3. $\dfrac{1}{2}\ln(n)^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 15.36 –

1. Par ε. Si (S_n) et (T_n) sont les 2 sommes partielles, encadrer $T_n - T_N$ par $(S_n - S_N)\times(1\pm\frac{\varepsilon}{2})$. Puis encadrer T_n en fonction de S_n et ε, indépendamment de N, en choisissant N assez grand.
2. Par l'absurde, en exprimant un équivalent de u_n à l'aide de la somme totale S
3. Exprimer w_n à l'aide des sommes partielles S_n, et utiliser la question 1, avec $S_n = anu_n$. On obtient $w_n = v_n - aw_n + o(w_n)$, puis $(a+1)w_n \sim v_n \sim a$
4. $w_n \to \frac{a}{a+1}$.

16

Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Indications ou solutions pour l'exercice 16.1 – Que peut-on dire du signe de fg ?

Indications ou solutions pour l'exercice 16.2 – Considérer $f(x) - x$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.3 – Considérer les deux points particuliers a et $f(a)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.4 – Quel théorème du cours donne l'existence de solutions d'équiations numériques ? Introduire g convenable.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.5 – Montrer que l'ensemble des points fixes est $\mathrm{Im}(f)$. Les fonctions de ce type sont $[0,1] \to [a,b] \subset [0,1]$, égales à l'indentité sur $[a,b]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.6 – Que sait-on de l'image d'un intervalle ? Utiliser une propriété de densité.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.7 –

1. Considérer $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.
2. Que dire du signe des $f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k+1}{n})$.
3. Non, monter périodiquement, une période incomplète permet de se recaler plus bas.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.8 – Si $f(x) > x$, considérer $[\alpha, \beta]$ l'intervalle tel que $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, et $f(x) > x$ sur $]\alpha, \beta[$. Remarquer que $[\alpha, \beta]$ est stable (sinon trouver une contradiction à l'aide d'un antécédent de β. Puis considérer la suite récurrente de fonction f, initialisée par x.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.9 – Par l'absurde. On sait décrire $f(\mathbb{R}_+*)$ et $f(\mathbb{R}_-^*)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.10 – Quel théorème du cours donne l'existence de solutions d'équations dans $\mathbb{R}$? Pour la dernière question, c'est plus simple en introduisant des réciproques.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.11 – $x_{n,0} = 1$, $x_{n,1}$ par TVI sur $[0,1]$. Pour obtenir $x_{n,2}$ supérieur à $x_{n,1}$, utiliser le TVI mais pas sur $[0,1]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.12 – Injectivité immédiate.
On en déduit la monotonie puis en discutant suivant le sens, en en considérant $y = 0$, les limites en $+\infty$

et $-\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.13 – $f+g$ admet des limites à gauche et droite en tous points et $f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+)$. Considérer $inf\{x \mid f(x) \leqslant 0\}$, et remarquer qu'en un tel point, $f(x^-) \geqslant 0 \geqslant f(x^+)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.14 – Montrer que $\bigcap_{n>0} f\left(\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]\right) = \{f(x)\}$. Une inclusion est facile. Pour l'autre, considérer y dans l'intersection et en déduire une certaine suite, qui converge nécessairement vers un antécédent de y (pourquoi ?)

Indications ou solutions pour l'exercice 16.15 – Se restreindre à un intervalle $[A, B]$ tel que hors de cet intervalle, $f \geqslant f(0)+1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.16 – Théorème de la borne atteinte.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.17 – La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur $[a, b]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.18 – Prendre c dans l'image, et ses deux antécédents, prendre un max ou min distinct de c dans le segment délimité. Étudier la monotonie sur les deux moitiés d'intervalle. Montrer que le maximum n'est atteint qu'une fois.
C'est faux pour la généralisation. Peut-être en imposant le nombre d'antécédants constants ? Je vous laisse réfléchir à ça.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.19 – Sens direct : utiliser un module de continuité uniforme pour contrôler $f(x_n) - f(y_n)$.
Sens réciproque : par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, fixer ε convenable, et considérer des mu_n tendant vers 0, permettant de contruire x_n et y_n vérifiant une certaine propriété.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.20 – Utiliser le critère séquentiel. Localiser le problème pour chaque fonction aux endroits où on a de fortes variations.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.21 – Par critère séquentiel, en construisant (x_n) convergeante tq $f(x_n) \to +\infty$, puis extraire (y_n) de (x_n) convenable.
Ou alors, par contraposée : on contrôle f en des points assez régulièrement répartis, puis entre ces points par continuité uniforme.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.22 – Couper les infinis. Attention aux jonctions.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.23 – Justifier d'abord que f est bornée. Puis par critère séquentiel, en considérant $x_n \to a$ et BW pour obtenir un candidat à être la limite, puis une autre $y_n \to a$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.24 – La continuité uniforme permet de contrôler les variations sur un intervalle de longueur t.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.25 – Regrouper 2 par 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.26 – Partitionner $\mathbb{R}$ en petits intervalles.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.27 – Considérer $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sur $[a, +\infty[$ où $|f'(x)| < \varepsilon$ pour $x \geqslant a$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.28 – Rolle. Montrer que $x \mapsto P(x) - e^x$ admet une dérivée d'un certain ordre sans zéro.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.29 – Récurrence sur n : simplifier par $e^{Q_n(x)}$ et dériver.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.30 –

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, et telles que :
$$\forall x \in]a,b[, \quad g'(x) \neq 0.$$
   (a) TAF
   (b) Écrire l'équation recherchée sous la forme $g'(c)(f(b)-f(a)) - f'(c)(g(b)-g(a))$, et introduire la fonction adéquate de sorte que ceci soit sa dérivée en c.
2. Application de ce qui précède entre a et x, en faisant tendre x vers a (c tend vers a aussi).

Indications ou solutions pour l'exercice 16.31 – De quelle fonction $x \mapsto \alpha f'(x)f(1-x) - \beta f(x)f'(1-x)$ est-il un facteur de la dérivée ? (Penser à un produit de certaines puissances de $f(x)$ et $f(1-x)$)

Indications ou solutions pour l'exercice 16.32 – Deux possibilités :
- Exprimer le problème par une équation : $f(c) = cf'(c)$.
- Introduire $\frac{f(x)}{x}$ (tout ça se résume à une étude de taux d'accroissement : on recherche un minimum ou maximum, au moins local, du taux d'accroissement).

Indications ou solutions pour l'exercice 16.33 – Récurrence sur n. Si f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [a,b]$, pour passer au rang $n+1$, TAF sur les intervalles $[a, a_{n,0}]$, $[a_{n,i}, a_{n,i+1}]$ et $[a_{n,n}, b]$. Faire un dessin pour essayer de comprendre la situation (graphe de $f^{(n)}$).

Indications ou solutions pour l'exercice 16.34 – En retranchant une fonction affine, on se ramène au cas ou $f(a) = f(b)$. Supposant $f'(a) > 0$, montrer qu'au voisinage de b, le taux d'accroissement $F_a(x)$ est négatif. Étudier l'existence d'un minimum de F_a. Conclure et le tour est joué ! Si $f'(a) = 0$, un autre exercice apporte la réponse.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.35 – La condition en a impose que f admette un extremum sur $]0, a[$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.36 – Mettre en équation, et introduire g telle que l'équation soit équivalente à $g'(c) = 0$. Penser à introduire une exponentielle.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.37 –

1. TAF sur des intervalles bien choisis de sorte à assurer la limite de c_n.
2. Justifier que f est décroissante, puis étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 16.38 – Qu2 : on a des informations en 2 points. Les exploiter ! Qu3 : L'IAF revient à intégrer un majorant constant de $|f'|$. On se rend compte que ce n'est pas suffisant pour conclure. Mais ici, on dispose d'un majorant non constant, donc potentiellement meilleur qu'un majorant constant. On peut donc espérer améliorer l'IAF. Qu4 : Pour quelle valeur de α le majorant précédent est-il le moins bon ?

Indications ou solutions pour l'exercice 16.39 – TAF puis caractérisation des fonctions continues injectives. Trouver la propriété des VI (toute valeur intermédiaire à 2 valeurs obtenues est réalisée) en faisant une translation sur f', ce qui revient à faire quoi sur f ?

Indications ou solutions pour l'exercice 16.40 –

1. Il nous faut une infinité de marges d'erreur ε_n, dont la somme totale vaut ε. Il faut donc les prendre de plus en plus petits.
2. Le faire d'abord sur un intervalle $[-n,n]$. Considérer $U = f'{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$. Quelle est sa description géométrique ? Que peut-on dire de f sur les sous-intervalles de U ?

17

Intégration

Indications ou solutions pour l'exercice 17.1 – L'ensemble des $\frac{k}{2^n}$ est dense dans $[0,1]$, le complémentaire (qui contient les irrationnels) aussi. Puis même argument que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.2 – Pour l'intégrabilité de f, considérer pour tout n une subdivision telle que sur chaque part ouverte, f soit majorée par $\frac{1}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.3 – Approximer f par des fonctions en escalier, et composer par g. Comme g n'est pas monotone, bien choisir la forme de l'approximation initiale. Un encadrement n'est peut-être pas le bon point de départ.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.4 – Couper les extrémités et les faire entrer dans un morceau d'ε.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.5 – Étudier l'intégrale sur $[a,b]$ contenant E. Couper autour des points d'accumulation de sorte à avoir une coupe de longueur total $\frac{\varepsilon}{2}$. L'intégrale est alors nulle. Généralisation par récurrence au cas où en itérant le fait de prendre les points d'accumulations, on tombe sur un ensemble fini.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.6 – En notant $M = \sup f$, montrer que pour tout x, $f(x) \leqslant \frac{Mx^2}{2}$. En déduire $M = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.7 – Dans un premier $\frac{\varepsilon}{2}$, approcher f par une fonction en escalier, puis dans un deuxième $\frac{\varepsilon}{2}$, rendre cette fonction en escalier continue, en remplaçant les points de discontinuité par des segments de droite de forte pente.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.8 – Par contraposée, remarquer que pour tout $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, on a alors $\int_a^b f = 0$. Construire par récurrence (I_n) suite d'intervalles fermés emboîtés, tels que $\int_{I_n} f = 0$ et $f \leqslant \frac{1}{2^n}$ sur cet intervalle.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.9 – Approcher f par une fonction en escalier (définition de l'intégrabilité), puis utiliser sur chaque palier le lemme correspondant pour les fonctions $\mathcal{C}^1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.10 – Montrer que g est continue, puis justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \mid |g(x) - f(x)| > \alpha\}$ est fini. Utiliser ce résultat pour construire une fonction en escalier.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.11 – f constante positive saut en un nombre fini de points où ses valeurs sont presque quelconques mais pas tout à fait quand même. Utiliser les propriétés de croissance.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.12 – Montrer d'abord $|f| \leqslant 1$, en raisonnant par l'absurde, et en considérant f^{2p}.
En considérant p et q tels que $\int f^{2p} = \int f^{2q}$, montrer que pour tout x, $f(x) \in \{-1, 0, 1\}$. Utiliser la continuité pour conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.13 – Considérer une suite de g, dont la variation est de plus en plus concentrée en 1. Contrôler l'intégrale par ε, en utilisant la continuité de f en 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.14 – Sinon, construire un polynôme P de degré au plus n, tel que Pf soit de signe constant.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.15 –
- Après IPP, il reste une intégrale qui vaut $\ln(3)$ et une intégrale qu'on peut majorer en utilisant la croissance de tan, et qui tend vers 0
- Par DL de tan. Terminer soit en majorant f, soit en utilisant la continuité d'une primitive de f, ce qui se rédige peut-être plus rapidement.

Réponse : $\ln(3)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.16 –
1. Calculer l'intégrale pour les polynômes d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis combiner comme il faut. Réponse : $\frac{X^2}{2\pi} - X$.
2. Sommer les intégrales finies. Calculer plus explicitement la somme partielle, et utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.17 – Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t) \in [\min(f)I, \max(f)I]$, où I est l'intégrale de g, puis utiliser un théorème d'analyse.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.18 – Pour tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$, construire une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ positive, et nulle hors de $[c, d]$. On pourra recoller des fonctions polynomiales.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.19 – Changement de variable $y = x^n$, et encadrement de $\sqrt[n]{y}$ sur l'intervalle considéré. On se ramène à la continuité d'une primitive de $y \mapsto \frac{f(y)}{y}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.20 – Introduire une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, sur les intervalles ouverts de laquelle f est de signe constant et ne s'annule pas. Montrer que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{e}^{nx}\, \mathrm{d}x = O(\mathrm{e}^{nx_{i+1}}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{nx_i} = o\left(\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{e}^{nx}\, \mathrm{d}x\right|\right).$$

Pour ce dernier, isoler un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de $]x_i, x_{i+1}[$ sur lequel $|f|$ reste supérieur à un certain $y_0 > 0$.
En déduire que le comportement général de l'intégrale est donnée par le dernier tronçon et conclure par la deuxième égalité.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.21 – Sommes de Riemann :
1. $\sqrt{3} - 1$
2. $2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2} - 2}$
3. $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.22 – Inégalité de Taylor, puis utiliser l'inégalité pour ramener le calcul de la limite de (v_n) à celui de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)$.
Réponse : $\ln(2)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.23 – Encadrer la somme en utilisant un encadrement de $\sin(\frac{k}{n^2})$, et se ramener, des deux côtés, à des sommes de Riemann. Réponse : $\sin(1) - \cos(1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.24 – Sommer d'abord sur $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$, (somme Riemann), montrer que la somme sur la diagonale tend vers 0, et comparer la somme sur les deux parties strictement au-dessus, et en-dessous de la diagonale.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.25 – Exprimer $x_k^{(k)}$ à l'aide de F^{-1}, où F est la primitive de f s'annulant en a. Utiliser les sommes de Riemann, puis un changement de variable. Réponse :
$$\frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\ \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^f f(t)\ \mathrm{d}t}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 17.26 – Utiliser la continuité uniforme.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.27 – Sortir ce qu'il faut pour écrire la somme en fonction de la variable $\frac{k}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.28 – Sommes de Riemann. Que faire ensuite d'une somme de logarithmes.

Indications ou solutions pour l'exercice 17.29 – La seule difficulté est de penser aux sommes de Riemann.

18

Pivot de Gauss

Indications ou solutions pour l'exercice 18.1 –

1. $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
2. N'introduisez pas de fractions dans votre pivot, il vaut mieux multiplier les lignes par ce qu'il faut. Solutions :
$$\frac{1}{11}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$
3. Faites cette question et la suivante en même temps, en faisant le pivot sur la matrice obtenue en juxtaposant la matrice du système aux deux matrices colonnes des deux secondx membres. Cela vous évite de faire plusieurs fois les mêmes calculs. Le système est compatible. L'unique solution est $x = 1$, $y = 0$.
4. Cette fois le système n'est pas compatible.
5. De même, cette question est à faire avec la suivante.
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z, t, u \in \mathbb{R}.$$
6. Système incompatible.

Indications ou solutions pour l'exercice 18.2 – Le système est incompatible pour tout $m \neq \frac{1}{2}$. Lorsque $m = \frac{1}{2}$, on obtient l'unique solution $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$.

19

Structures algébriques

Indications ou solutions pour l'exercice 19.1 – En multipliant de façon adéquate, montrer que $y = x^{-1}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.2 – Considérer le produit $x(xy)^{-1} \cdot y$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.3 –

1. simplifier $(x \star x) \star x = (x \star x) \star (x \star x)$
2. simplifier $(x \star x) \star y = x \star y$, et montrer que tout idempotent est neutre.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.4 – Montrer que $xy = (xy)^{n^2} = yx$. Pour la deuxième, écrire $(xy)^n$ comme produit de deux termes.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.5 – Un peu fastidieux à faire. Se servir du fait que dans le premier cas, l'ordre de tout élément est 1, 2 ou 4 (éliminer 4 qui fournit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dans le second cas, l'ordre de tout élément est $1, 2, 3$ ou 6 (de même, évacuer le cas $n = 6$). On pourra montrer que si l'ordre de tout élément différent du neutre est 2, le groupe est abélien. Construire alors la table de la loi, en remarquant que chaque ligne et chaque colonne est constituée d'une permutation des éléments de G (on les a tous une et une seule fois), puisque $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg$ sont bijectives. Lorsqu'on a des choix à faire entre 2 éléments jouant pour le moment des rôles symétriques, on peut en choisir un arbitrairement (l'autre donnera un cas isomorphe). Le lemme de Cauchy, si on le connait, permet d'éviter quelques études pour le cas $n = 6$, mais sinon, on le retrouve à la main : si on essaye de conrtuire une table pour une groupe d'ordre 6 n'ayant pas d'élément d'ordre 2 ou 3, on arrive vite à une contradiction.
Réponse : $n = 4$: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Virergruppe, ou groupe de Klein)
$n = 6$: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.6 –

- Commencer par définir $e = a/a$, aussi égal à z/z pour tout z. Traduire les 3 premiers points avec e
- Définir assez logiquement $a \times b = a/(e/b)$.
- Pour l'associativité, on doit comparer $(a/(e/b))/(e/c)$ et $(a/((e/c)/b))$. Introduire dans la seconde expression au « numérateur » et au « dénominateur » une division par (e/b) pour se rapprocher de la première expression (quelle règle permet de le faire ?) puis simplifier le dénominateur.
- Les dernières vérifications (e neutre et e/a inverse de a) ne posent pas de problème.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.7 – Montrer que pour tout $g \in E$, $x \mapsto gx$ est une bijection. En déduire d'une part un candidat à être élément neutre (et prouver que ça l'est effectivement), puis un inverse à droite de g (et montrer que c'est aussi un inverse à gauche.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.8 – Vérification immédiate, neutre $(0,0)$, associativité facile à vérifier, symétrique : $(-x, -y\mathrm{e}^{-2x})$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.9 – Simple vérification. Attention à bien revenir à la définition, il ne s'agit pas d'un sous-groupe !
Le neutre est (e_G, e_H) et $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.10 –

1. Sans difficulté par les règles de composition et d'inversion.
2. Écrire les choses proprement et comparer :
   - Pour l'associativité, écrire les 2 expressions à comparer, en faisant attention aux parenthésages, et à la signification des évaluations des applications. Utiliser le fait que φ est un morphisme.
   - (e_g, e_H) est neutre
   - $(g,h)^{-1} = (\varphi(h^{-1})(g^{-1}), h^{-1})$

   On pourra remarquer que la structure de morphisme de φ nous donne $\varphi(hk)(x) = \varphi(h) \circ \varphi(k)(x)$, et que le fait que $\varphi(h) \in \mathrm{Aut}(G)$ assure que $\varphi(h)(xy) = \varphi(h)(x)\varphi(x)(y)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.11 – Même démo que pour le groupe des inversibles d'un anneau (voir cours)

Indications ou solutions pour l'exercice 19.12 –

1. Montrer que c'est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que c'est un sous-groupe de l'ensemble des isométries de $\mathbb{C}$.
3. Par définition du groupe engendré, il suffit de vérifier que r et s sont dans D_n.
4. Considérer l'image de 1 égal à ω^k, où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Comparer l'image de ω (deux possibilités), et suivant le cas, montrer que f est égal à r^k ou $r^k s$.
5. D_n n'est pas abélien !
6. Restreindre f en une permutation de P_n.
7. Considérer $\varphi(\varepsilon) = (-1)^\varepsilon$. Remarquer que $s^k r = rs^{-k}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.13 – On peut le faire « à la main » ou remarquer que si $G < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\varphi^{-1}(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, où $\varphi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la projection canonique. On obtient $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $d \mid n$, ce qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z}$. Ainsi, il y a autant de sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que de diviseurs de n, et ils sont isomorphes aux $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.14 –

1. x^i et x^j commutent ! Considérer $f : \mathbb{Z} \to \langle x \rangle$ donné par $n \mapsto x^n$. On a alors $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n\mathbb{Z} = \mathrm{Ker}(f)$.
2. engendré par x^i avec $i > 0$ minimal (double-inclusion, avec de la division euclidienne, ou considérer $f^{-1}H$, avec h de tout-à-l'huure, et remarquer que c'est un $k\mathbb{Z}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.15 –

- Réciproque classique : un élément non neutre est nécessairement d'ordre p (Lagrange), G est le groupe monogène (fini donc cyclique) engendré par x
- Sens direct : tout $x \neq e$ doit être d'ordre $|G|$, sinon $< x >$ est un sous-groupe propre. Cela entraîne la cyclicité. Si $|G|$ non premier, trouver un élément d'ordre plus petit.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.16 –

1. G contient un élément d'ordre $\neq 1$, donc d'ordre p (Lagrange). Conclure $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
2. Considérer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.17 – Considérer l'ordre d'un élément de l'intersection.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.18 –

- Si G non cyclique, considérer x d'ordre maximal dans G et $y \in G \setminus \langle x \rangle$.
- Si G cyclique d'ordre $n \neq p^\alpha$, considérer x et y d'ordres p et q avec p et q premiers distincts
- Si G cyclique d'ordre p^α, décrire les sous-groupes de G et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.19 – Soit $\varphi_g : x \mapsto gx$. Montrer que $\varphi_g \in \mathfrak{S}_G$, puis que $\psi : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme injectif. En déduire que G est isomorphe à $\psi(G)$. On peut passer ensuite à $\mathfrak{S}_n$ au lieu de $\mathfrak{S}_G$, en remarquant qu'une bijection $f : X \mapsto Y$ induit un isomorphisme entre les groupes symétriques.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.20 – Vérifications élémentaires.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.21 –

- Cas de 2 sous-groupes : si les inclusions ne sont pas satisfaites, considérer x tel que $x \in H \setminus K$, $y \in K \setminus H$, puis trouver une contradiction avec $x + y$.
- Cela ne se généralise pas facilement. En tout cas, on ne peut pas dire qu'un des sous-groupes contient tous les autres. Par exemple, tout groupe est union de ses sous-groupes cycliques. Si G n'est pas cyclique et fini, cela donne un contre-exemple (voir par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, union de 3 sous-groupes propres).

Indications ou solutions pour l'exercice 19.22 –

1. HK sous-groupe : vérification facile. Montrer que si G' est un sous-groupe contenant H et K, on a $HK \subset G'$
2. montrer que $(iii) \iff (iv)$ (en passant à l'inverse). Montrer que $(i) \implies (iii)$ et $(iii) \wedge (iv) \implies (ii)$.
3. Montrer que $(HK) \cap L = H(K \cap L)$, et en déduire que $H(K \cap L)$ est un sous-groupe de G. En déduire l'autre égalité.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.23 – Si G est infini, soit il possède un sous-groupe monogène isomorphe à $\mathbb{Z}$, soit on peut contruire une suite infinie d'éléments x_i tels que les $< x_i >$ soient finis est 2 à 2 distincts (prendre x_{n+1} n'appartenant pas à l'union des groupes monogènes engendrés par les précédents).

Indications ou solutions pour l'exercice 19.24 –

1. Montrer que xy est d'ordre ab si a et b sont premiers entre eux. Dans le cas général, se ramener à cette situation, en distribuant les puissances de p^α dans la décomposition de $a \vee b$ de sorte à définir a' et b' tels que $a'|a$, $b'|b$, $a' \wedge b' = 1$ et $a'b' = a \vee b$. Trouver ensuite dans $\langle x \rangle$ un élément d'ordre a' et dans $\langle y \rangle$ un élément d'ordre b'.
2. Soit itérer, soit considérer l'élément x d'ordre maximal, et appliquer ce qui précède à (x, y), pour tout y.
3. Considérer $\mathfrak{S}_3$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.25 – Pour la question 2, montrer que si $(x_1, \dots, x_p) \in E$, il en est de même de toute ses permutations circulaires. En prolongeant périodiquement x_i à $i \in \mathbb{N}$, justifier que la période minimale est 1 ou p. Si une classe d'équivalence n'est pas de cardinal 1 ou p, trouver une contradition sur la période.
Pour la question 3, considérer la partition de E formée des classes d'équivalence, en n'oubliant pas celle de $(e, \dots, e)$. Remarquer pour dénombrer E que le choix quelconque des premiers termes détermine le dernier.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.26 –

1. Étudier la parité de l'ensemble des $x \in G$ tels que $x \neq x^{-1}$.
2. Pour le dernier point, éliminer le cas où un sous-groupe propre est d'ordre divisible par p. On peut donc supposer l'ordre de H non divisible par p. Le nombre de classes ℓ modulo H est alors divisible par p. prendre $x \in G \setminus H$, et $K =< x >$. Justifier $< H \cup K >= G$, et en déduire que $|K| = \ell|K'|$. Trouver y d'ordre p dans K.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.27 – Le cardinal de la classe de conjugaison de x est le nombre de classes modulo C_x, donc $|G|/|C_x|$. Considérer alors la partition formée par les classes de conjugaison, et remarquer que celle de e est triviale. Par étude de la divisibilité par p, ce ne peut pas être la seule.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.28 – Tout $x \neq 1$ est d'ordre p ou q. Si x est d'ordre p, considérer G/H, d'ordre q. En déduire l'existence d'un élément d'ordre q ou directement pq. Conclure avec un autre exercice.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.29 – Soit K distingué dans G. On pourra considérer $H = G/K$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.30 –

1. Parité par Lagrange. Commutativité en considérant $xyxy = e$, aboutir à $xy = yx$.
2. Par récurrence sur $|G|$, en considérant $H = \{e, x\}$, et G/H, satisfaisant à la même propriété.

   Autre méthode : utiliser le lemme de Cauchy stipulant que si p est un nombre premier divisant l'ordre du groupe G, alors il existe un élément d'ordre p. Plus précisément, il y en a un nombre congru à $p-1$ modulo p. Pour cela, considérer les p uplets tq $x_1 \cdots x_n = 1$, mettre une relation d'équivalence sur ces p-uplets traduisant l'invariance par permutation circulaire. Remarquez que le nombre de ces p-uplets est divisible par p (entièrement déterminé par le choix des $p-1$ premiers termes) et que les classes d'équivalence sont toutes de cardinal p ou 1. À quoi correspondent les classes de cardinal 1 ?

Indications ou solutions pour l'exercice 19.31 – On pourra considérer le commutateur de chaque élément, afin de montrer que G est constitué d'éléments d'ordre 1 ou 2. En déduire G abélien.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.32 – Qu2 : considérer un système de représentants de G/Z de la forme e, $a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ (on a alors $a^n \in Z$), écrire $x = a^k z$ et $y = a^\ell z'$ et comparer xy et yx.
Qu3 : considérer l'ordre de l'intersection : si le résultat est faux, $< x >=< y >$.
Qu4 : Si $|Z| = p$ ou p^2, G est abélien. Si pas cyclique, trouver x et y tel que dans la question précédente, et montrer que G est isomorphe au produit de $< x >$ et $< y >$. Le cas $|Z| = 1$ est impossible d'après un lemme d'un DM (centre d'un p-groupe divisible par p).
Ce fait peut se retrouver sans évoquer d'action de groupe (mais c'est la même preuve déguisée) : notant C_x le commutant de x (les z tels que $zx = xz$), montrer que c'est un sous-groupe, et considérer les classes modulo C_x. Montrer que la classe d'équivalence de x modulo la relation de conjugaison est de cardinal le nombre de ces classes modulo C_x (la valeur zxz^{-1}, ne dépend pas de z dans une de ces classes, et diffère d'une classe à l'autre). Sachant que e est seul dans sa classe d'équivalence, et que toutes les classes non réduites à un singleton sont de cardinal divisible par p, montrer qu'il existe x tel que C_x est de cardinal p^2 et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.33 –

1. C'est une histoire de Bézout.
2. Sans difficulté.
3.
   - Si g n'est pas dans l'intersection, il complète au moins un maximal en G entier.
   - Si g est dans l'intersection, considérer un maximal contenant le groupe engendré par A (pourquoi existe-t-il ?).

4. La question un peu délicate de l'exercice. Si $a \neq 0$ n'est pas non générateur, considérer H tel que $H + a\mathbb{Z} = \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{R}/H$ est monogène
   - Si $\mathbb{R}/H = \mathbb{Z}$, considérer la classe de $\frac{a}{2}$
   - Si $\mathbb{R}/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, considérer la classe de $\frac{a}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.34 – À considérer comme du cours. Vérifier que c'est un sous-anneau.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.35 – Sous-groupe : oui, sans difficulté. Sous anneau : oui sans difficulté (que vaut J^2 ?)

Indications ou solutions pour l'exercice 19.36 – Si a' est inverse à droite de a, et $ab = ac$, considérer $a(b - c + a')$. Puis considérer $aa'a$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.37 –

1. Associativités vues en cours, distributivité sans difficulté, neutre additif : $\varnothing$, neutre muliplicatif : E. Opposé de X : X.
2. (a) Non (pas le neutre).
   (b) Vérifier la stabilité des lois, et changer de neutre (prendre Y) on retrouve la loi définie en 1.
3. Sans difficulté
4. Considérer la partition de la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi pour tout $a \in A$, $x \in A \Longleftrightarrow y \in A$ (i.e. x et y ne sont séparés par aucun élément de A).

Indications ou solutions pour l'exercice 19.38 – Stabilité par différence en utilisant le binôme, pour un exposant bien choisi.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.39 – Considérer $b(ab)^n a$

Indications ou solutions pour l'exercice 19.40 – Comment exprimer, dans $\mathbb{R}$, $\frac{1}{1-x}$ sous forme d'une somme (infinie) ? Analogisez...

Indications ou solutions pour l'exercice 19.41 – Stabilité par produit : développer avec le binôme $(x + y(1 + x))^{2n}$ pour n assez grand. Inverser $1 + x$ en faisant une analogie avec les séries géométriques.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.42 – Inverser en se servant d'une somme géométrique.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.43 –

1. Écrire P et Q comme somme de monômes, écrire le produit en regroupant les 2 sommes.
2. Récurrence, à la façon de la formule du binôme.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.44 – En considérant $(ab)^{-1}ab$, déduire un inverse à gauche c de b. Justifier que $bc = e$ ssi $bcba = ba$ et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.45 – Le sens direct est évident par contraposée. Si x n'est pas inversible, il est représenté par k qui n'est pas premier avec n. Considérer $k \vee n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.46 –

1. La division euclidienne des entiers et des polynômes vérifie cette propriété.
2. Soit $A = a + \mathrm{i}\, b$ et $B \in \mathbb{Z}[i]$. Remarquer que l'ensemble $\{z \times A, z \in \mathbb{Z}[i]\}$ forme un réseau de sommets de carrés dont le côté est $|A|$, et que B est contenu au sens large dans un de ces carrés. Il existe alors un sommet du carré à distance $\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|A|$ de B. Conclure.
3. Considérer $b \in I \setminus \{0\}$ tel que $v(x)$ soit minimal. Justifier que $(b) = I$ (pour $a \in I$, faire la division de a par b et conclure).

Indications ou solutions pour l'exercice 19.47 – Sens direct : Si I contient $x \neq 0$, il contient $x^{-1}x = 1$. Sens réciproque : Si I est un idéal différente de $\{0\}$ et A, il ne contient pas 1 donc ses éléments ne peuvent pas être inversibles dans A.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.48 – Considérer l'image de i par un isomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.49 –

- Par trop dur en pensant à la quantité conjuguée.
- Utiliser le fait que les $\sqrt{n}$ sont soit entiers soit irrationnels. Ici si φ est un morphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, et si x désigne $\sqrt{2}$, il faut avoir $\varphi(x^2 - 2) = 0$, donc $\varphi(x)^2 = 2$. Montrer que ceci implique que
  $sqrt3$ est irrationnel.

Indications ou solutions pour l'exercice 19.50 – Sous-corps : facile. Non isomophes : considérer par l'absurde $\varphi(\mathrm{i})^2$, et justifier que i et $-$i ne sont pas dans $\mathbb{Q}(j)$ (contredire l'irrationnalité de $\sqrt{3}$).

20

Groupes symétriques

Indications ou solutions pour l'exercice 20.1 – Écrire une transposition (k, ℓ) comme produit de 3 telles transpositions (pourquoi 3) ? On pourra le voir sous forme d'une conjugaison.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.2 – Réponse : oui. On pourra commencer par composer (1234) par lui-même, puis vois comment composer par un 4-cycle pour obtenir une transposition. Renommer ensuite convenablement les éléments.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.3 – Décomposer en transpositions et regrouper 2 par 2. On pourra même utiliser un ensemble restreint de transposition, pour trouver une sous-famille des 3-cycles engendrant $\mathfrak{A}_n$, par exemple les $(1\ i\ j)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.4 – Non si n est impair et différent de 1 (quel objet permet d'exploiter la parité ?)
Si n est pair, composer un grand cycle par lui-même puis composer par un autre cycle de sorte à remettre presque tous les éléments à leur place initiale.
Cas de $\mathfrak{A}_n$ pour n impair : retrouver de même un système de générateurs connu de $\mathfrak{A}_n$ en composant des grands cycles.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.5 – Faux en toute généralité. Exemple : $(1\ 2\ 3\ 4)$ et $(1\ 3)$. CNS : $(i_1\ \dots\ i_n)$ et $(i_k\ i_\ell)$, avec $k - \ell \wedge n = 1$.
Se ramener à $(1\ 2\ \dots\ n)$ et $(1\ 2)$, puis construire un élément du groupe engendré ayant 1 comme point fixe et envoyant 2 sur i quelconque supérieur à 2. Terminer par un argument de conjugaison.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.6 – Réponse : $n-1$. Montrer que si un ensemble de transpositions de la famille génératrice a un support total de X distinct de $[\![1, n]\!]$, il existe une transposition de la famille dont le support est à cheval sur X et son complémentaire. Construire alors itérativement une suite de $n-1$ transpositions distincts.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.7 –

1. Considérer $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\sigma(i) = j \neq i$, et construire τ une transposition telle que $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$. On pourra éventuellement regarder un cycle de σ.
2. Considérer le noyau de $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{Int}\mathfrak{S}_n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.8 –

1. Sans difficulté.
2. Sans difficulté.

3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En étudiant les propriétés de commutativité, montrer que les images des transpositions $(i\ j)$ sont des transpositions dont l'intersection des supports est un singleton. Définir $\sigma(i)$ de la sorte, et vérifier que φ est la conjugaison par σ.
4. À ramener à un problème de conjugaison. Utiliser une description des cycles du conjugué en fonction des cycles de σ : pour que le conjugué de σ soit égal à σ il peut y avoir permutation circulaire au sein d'un même cycle, ou échanges de cycles de même longueur.
5. Considérer l'ordre de $\varphi(\tau)$, puis sa décomposition cyclique.
6. Utiliser le cardinal du centralisateur pour montrer que φ envoie transpositions sur transpositions. On pourra trouver une relation entre le centre de τ et le centre de $\varphi(\tau)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 20.9 – (Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$)

1. Première inclusion sans difficulté. Pour la deuxième, calculer la signature d'un commutateur.
2. Trouver une relation de conjuguaison dans $\mathfrak{S}_n$, puis adapter éventuellement en composant par une transposition bien choisie.
3. σ et σ^2 sont conjugués.
4. $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, qui sont des commutateurs.

21 Arithmétique

Indications ou solutions pour l'exercice 21.1 – Considérer aussi $p_2 \cdots p_n + 2$, ils ont chacun un diviseur premier différent des p_i, $i \leqslant n$, et distincts entre eux. Sommer les 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.2 –

1. Discuter suivant que n est impair, congru à 2 ou à 0 modulo 4.
2. Considérer une décomposition de $p_1 \cdots p_k$ comme dans la question 1. Un autre exercice de la feuille propose une autre méthode.
3. Considérer k_n l'unique entier tel que $p_1 \cdots p_{k_n} \leqslant n < p_1 \cdots p_{k_n+1}$, et montrer que $\frac{q_n}{n} \leqslant \frac{1}{p_{k_n}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.3 –

1. Adapter la preuve par l'absurde d'Euclide, en posant $p_1, \dots, p_n$ tous les nombres premiers p congrus à 3 modulo 4. Avec $\alpha = 3$, les facteurs premiers du nombre considérés sont tous congrus à 1.
2. $a^2 \equiv -1\ [d]$, puis élever à la puissance $\frac{d-1}{2}$.
3. Adapter 1 avec $(p_1 \dots p_n)^2 + 1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.4 – Le vérifier modulo 7, 3 et 2, ce qui découle directement d'une formule du cours.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.5 – À l'aide de la formule du binôme, itérée. À chaque fois qu'on a n^α congru à 1 modulo 2^β, l'écrire $1 + k2^\beta$. On obtient $n^{2^k} \equiv 1/[2^{k+2}]$
Pour la dernière question, vérifier la congruence modulo les puissances de premiers apparaissant dans la décomposition primaire de 16320. On s'aidera des premières questions.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.6 – À l'aide du petit théorème de Fermat, calculer cette somme modulo 3, 7 et 19.
Mais que peut bien représenter 1789 ? Sans doute la date de création du quintette avec clarinette de Mozart, je ne vois rien d'autre.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.7 –

1. Justifier que a est d'ordre $p - 1$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
2. Par l'absurde, en considérant un facteur premier q de p tel que $q \leqslant \sqrt{p}$. Justifier que a^s est d'ordre r dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ (on pourra d'abord montrer que l'ordre divise r), puis obtenir une contradiction sur les cardinaux.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.8 – Calculer les carrés modulo 7, et remarquer qu'on ne peut pas obtenir une somme nulle modulo 7. Mais par cette technique, cela se généralise mal. Deuxième méthode : en travaillant modulo 7, par l'absurde, contredire le petit théorème de Fermat. Cela se généralise à tout premier congru à 3 modulo 4.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.9 – Avec la formule du binôme constater que la classe modulo 3 détermine la classe modulo 9 du cube, égale à 0, 1 ou −1. Un 0 au moins est nécessaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.10 – Réduire l'exposant 10^k modulo 6. Ça vaut toujours 4 pour $k \geqslant 1$. Réponse : 5.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.11 –

1. Remarquer que $10^3 \equiv 1/[111]$.
2. Écrire $7(49^n - 1) - 48n$ puis factoriser, et simplifier par 48. Il reste à montrer que $1 + 49 + 49^2 + \cdots + 49^{n-1} - n$ est divisible par 6 ce qui est immédiat en réduisant modulo 6.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.12 –

1. Étudier les puissances de 2 modulo 7, puis modulo 3. Observer que de 4^{2^n} et 2^{2^n}, l'un vaut 4, l'autre vaut 2.
2. Remarquer que les puissances de 4 sont 3-périodiques modulo 9, ainsi que $15n - 1$, et vérifier l'égalité sur la première période.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.13 – Montrer que ceci équivaut à dire que $10^n - 1 \equiv 0\ [23]$ pour un n. À quel théorème du cours peut faire penser une telle égalité ? Le résultat est-il spécifique à 23 ?

Indications ou solutions pour l'exercice 21.14 – Réduire modulo 9 : $A = B = C$ modulo 9 (C étant la somme des chiffres de B). Majorer $A \leqslant 4 \times 4444 \times 9$ (9 fois nombre de chiffres), puis $B \leqslant 6 \times 9$, puis $C \leqslant 4 + 9 = 13$. Conclure $C = 7$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.15 – Pour 3 ou 9, remarquer que 10^n est congru à 1 modulo 3 ou 9 : écrire n en base 10 et réduire modulo 3 ou 9. La somme des chiffres donne la classe de congruence modulo 3 ou 9.
Même principe pour les autres, mais en pondérant les chiffres de la numération en base 10 par les valeurs des puissances de 10 modulo k (formant une période).

Indications ou solutions pour l'exercice 21.16 – Réduire modulo 8. Solutions : $(m, n) = (1, 0)$ ou $(2, 1)$

Indications ou solutions pour l'exercice 21.17 – Écrire $b = a + nk$ et développer avec la formule du binôme.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.18 – Qu2 : si k premiers distincts interviennent dans n, se ramener à $\sum\limits_{I \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{|I|}$, donc comparer sous-ensembles de cardinal impair, et sous-ensembles de cardinal pair.
Qu3 : par récurrence forte, en isolant $d = n$.
Qu4 : Partir de $\sum\limits_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$, et remplacer g par la somme le reliant à f. Intervertir les sommes en remarquant que $d \mid n$ et $d' \mid \frac{n}{d}$ équivaut à $dd' \mid n$, qui est symétrique en d et d'.
Qu5 : Montrer que $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$ et utiliser la formule d'inversion de Möbius. Pour chaque diviseur d de n, on pourra compter le nombre d'entiers k de $[\![0, n-1]\!]$ tels que $k \wedge n = \frac{n}{d}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.19 – Inversibilité ssi $k \wedge n = 1$. Algorithme d'Euclide étendu pour trouver une relation de Bézout et réduction modulo n.

Les 6 compositeurs qui se cachent derrière ces dates sont H..., B..., S..., M..., A..., C...
Réponses : 309, pas inversible, $-908 = 1063$, 243, $-669 = 1271$, -806.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.20 – Solution particulière + solution homogène. Partir d'une relation de Bézout pour la SP. Gauss pour la solution homogène.
Solution : $(-762 + 1981k, 752 - 1955k)$.
Ces dates ont à voir avec une oeuvre majeure de Bach, et un certain pianiste canadien.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.21 –

1. Il faut compter les non-multiples de p : $p^k - p^{k-1}$.
2. L'isomorphisme suggéré est $n \mapsto (n, n)$. Remarquer que $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$, et l'appliquer à l'isomorphisme précédent.
3. $\prod p^{\alpha-1}(p-1)$

Indications ou solutions pour l'exercice 21.22 –

1. Considérer $n < m$ et un facteur p premier de F_n. Justifier que $2^{2^m} \equiv 1\ [p]$.
2. Chaque F_n a des facteurs premiers distincts des précédents.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.23 –

1. Remarquer que si R est le reste de la division euclidienne de $a^b - 1$ par $a^c - 1$, et r celui de la division de b par c, alors $R = a^r - 1$. Ainsi, l'algo d'Euclide pour le calcul du pgcd de $a^b - 1$ et $a^c - 1$ se déroule parallèlement à celui du calcul du pgcd de b et c.
2. Diviser chaque facteur par $a - 1$ et montrer qu'ils divisent $\frac{a^{bc}-1}{a-1}$ et sont premiers entre eux.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.24 – Par récurrence, montrer que $F_n \wedge F_{n+1} = 1$. Se servir de $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$ pour montrer que $F_a \wedge F_b = F_b \wedge (F_rF_{b-1}^{\alpha})$, et conclure avec le premier point et l'algorithme d'Euclide.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.25 – En notant d le pgcd des différences 2 à 2 des masses, montrer que $2d$ divise d. Pour cela, on pourra isoler 2 vaches, faire les 2 regroupements correspondants, et former la différence des masses des 2 vaches, exprimées comme double de la différence portant la moitié des autres vaches.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.26 – Considérer une relation de Bézout, puis tous les termes $ax+by$, et rajouter la relation de Bézout pour récupérer tous les termes entre $ax+by$ et $ax+(b+1)y$, en choisissant b suffisamment grand pour absorber le signe négatif de la relation initiale. Éventuellement échanger le rôle de a et b. La valeur minimale est $m_0 = (a-1)(b-1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.27 – Décomposer 42 et 1680 en facteurs premiers. Distribuer les puissances maximales et minimales sur a et b. Réponse : $(1680, 42)$, $(672, 210)$ et les symétriques.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.28 – Notant u_n le nombre défini, remarquer que $u_{n+1} = 2(2n+1)$. Se calcule bien par récurrence ! Legendre marche aussi, mais c'est beaucoup plus lourd et maladroit.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.29 – Formule de Legendre et $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.30 –

1. Avec les règles de distributivité, se ramener à montrer que les $\frac{\mu}{a_i}$ sont premiers entre eux. Le contraire contredirait la minimalité de μ.

2. Utiliser la décomposition primaire de chacun des entiers.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.31 – Sens direct : c'est du cours
Réciproque : Considérer $\binom{p^\alpha \beta}{p^\alpha}$ avec $\beta \wedge p = 1$, si n n'est pas une puissance de p, $\binom{p^\alpha}{p}$ sinon, puis formule de Legendre.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.32 – Montrer $v_p((n!)^k)$ et $v_p((k!)^n) \leqslant v_p(m!)$ avec Legendre.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.33 – Pour la 2, considérer d'abord le cas $a \wedge r = 1$. Dans le cas général, s'y ramener en divisant et remultipliant les solutions obtenues par le pgcd.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.34 –

1. Penser à la minimalité de n (simplifier par p)
2. Remarquer que n est nécessairement composé, et que $p_1^2 \leqslant n$.
3. p_1 et p_2 divisent $N = n - p_1 p_2$, donc $p_1 p_2$ aussi (car N n'est pas anormal). Considérer ensuite $\frac{n}{q_1}$ pour obtenir une contradiction.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.35 – Décomposer en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Montrer que la classe de a est nipotente ssi $p_1 \cdots p_n$ divise a. Réponse : $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.36 – Justifier que les $N(p)$, pour p premier, déterminent entièrement N. Montrer que si N convient, $x \mapsto b^x N(x)$ aussi, si $0 < b < 1$. Montrer qu'on ne peut pas avoir $N(p) < 1 < N(q)$ pour deux entiers premiers distincts : on pourra pour cela exprimer une certaine quantité tendant vers l'infini en fonction de puissances de p. En déduire que $N(p) = N(q)$.
Réponse : $x \mapsto x^a$, $0 < a \leqslant 1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.37 – Commencer par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, puis écrire $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme produit des $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.
Cas $n = p$: pas de diviseur de 0 donc factoriser : 2 solutions.
Cas $n = p^k$: les diviseurs de 0 sont de la forme kp, donc si $x - 1$ est diviseur de 0, $x + 1$ ne l'est pas sauf si $p = 2$.
Cas $n = 2^k$: $x - 1 = 2^\ell$, $(2^\ell)(2^\ell + 2) = 2^{2\ell} + 2^{\ell+1}$; Seuls $\ell = k$ ou $\ell = k - 1$ conviennent. Donc 4 racines.
Cas général : discuter suivant la décomposition primaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.38 –

1. Regrouper par paires, k avec son inverse, sachant que seuls 1 et -1 vérifient $x^2 = 1$.
2. Discuter suivant que $n = p^k$ ou non, en cherchant les facteurs dans $(n-1)!$. Le cas 2^2 est particulier.
3. Même démo que 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.39 –

1. Considérer $\varphi : x \mapsto x^2$, morphisme de noyau de cardinal 2. Considérer les classes modulo $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. Factoriser $X^{p-1} - 1$ et compter les racines de chaque côté.
3. il faut $a^{\frac{p-1}{2}}$ carré avec a non carré. Par l'absurde, $\frac{p-1}{2}$ doit être pair.

Indications ou solutions pour l'exercice 21.40 –

1. C'est une équation de degré 2.
2. Montrer que tout (x, y) tel que $x \neq -1$ est sur l'une des droites $y = a(1 + x)$ passant par $(-1, 0)$. Obtenir la solution $x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ et $y = \frac{2a}{1+a^2}$. D'ailleurs, ça vous rappelle quoi ? Justifier que pour chaque valeur de a, on obtient une solution distincte, mais penser à enlever les racines de -1 (au nombre de 0 ou 2 suivant p). Réponse : $p + 1$ si $p \equiv 3\ [4]$, $p - 1$ sinon.

22

Polynômes et fractions rationnelles

Dans toute cette feuille, on admettra le théorème de Rolle, affirmant que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. On dispose du même résultat si f est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.1 – En considérant le coefficient dominant, montrer que $\deg(P) = 3$. Poser les coefficients et remplacer dans l'équation. Réponse : $P = \lambda(X^3 + X)$.

Ce type de calcul peut être utile pour trouver une solution particulière d'une ED, ce qui permet ensuite par une méthode de variation de la constante, de trouver les autres solutions.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.2 – Vérifier $\deg(P) = 2$. Par une évaluation bien choisie, montrer que 1 est racine de P, puis -1 aussi. Réponse : $\lambda(X^2 - 1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.3 – P et X coïncident sur les éléments de la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Réponse : $P = X$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.4 – **(CCP)** Soit n un entier naturel non nul.

1. Bézout.
2. Provient de l'unicité
3. Dériver, isoler le terme qui nous intéresse, considérer les racines et les degrés pour simplifier.

   Réponse : $a = -\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} X^i$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.5 – Essayer de construire le plus de racines possibles à partir d'une racine donnée. En conclure qu'une racine est nécessairement de module 1, puis qu'elles sont racines 6-ièmes de 1. Éliminer encore pour arriver finalement aux seules racines 0 et 1. Trouver leur multiplicité à l'aide de l'équation initiale.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.6 – Dériver et montrer que $P' = nQ$ ou $P' = -nQ$, où $n = \deg(P)$. En déduire une ED d'ordre 2 satisfaite par P. En déduire une relation sur les coefficients de P.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.7 – Considérer un polynôme dont x, y et z sont racines.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.8 – Relations de Viète. En notant Σ_k le polynôme symétrique élémentaire homogène de degré k en les racines (sans le signe), la somme S_2 des carrés est $\Sigma_1 - 2\Sigma_2$, et la somme S_3 des cubes vérifie $\Sigma_3^3 = S_3 + 3(\Sigma_1 S_2 - S_3) + 6\Sigma_3$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.9 –

1. Délinéarisation de $\sin((2n+1)x)$.
2. Chercher d'abord les racines dans $\mathbb{R}_+$, sous la forme $r = \operatorname{cotan}^2(\alpha)$. Déterminer les racines de P_n et leur somme.
3. On peut se ramener à une inégalité de convexité portant sur tan d'un côté, et sin de l'autre. On peut aussi faire des études de fonction.
4. Partir de l'expression des sommes des racines de P_n, puis encadrer.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.10 – Évaluer les dérivées successives de P en 1 jusqu'à obtenir une valeur non nulle. Multiplicité 2 pour (a), 3 pour les 2 autres.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.11 – $E_n' = E_{n-1}$, et ces deux polynômes ne peuvent pasavoir de racine commune.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.12 – Première question classique (Rolle + compter les multiplicités). Remarquer ensuite que P^2+1 ne peut pas avoir de racine réelle alors que sa dérivée n'a que des racines réelles.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.13 –

1. Degré n, coefficient dominant $\frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$.
2. (a) Leibniz
   (b) On a *presque* toujours $B_{n,k}(1) = 0$ et $B_{n,k}(-1) = 0$.
   (c) Utiliser 2(a). On peut aussi étudier la parité de $F_n = B_{2n,n}$ directement, et utiliser le fait que les propriétés de parité se « dérivent bien ».
3. Rolle en cascade, en utilisant aussi les racines 1 et -1.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.14 – Justifier que $P(r) \neq 0$, exprimer $P'(r)$ en fonction de $P(r)$, $Q(r)$ et $Q'(r)$, et remplacer dans $P'(r)^2 + Q'(r)^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.15 – Les racines de P' qui ne sont pas racines de P sont simples (argument classique de localisation des racines de P'). L'appliquer aussi à P''.
Plus généralement, toujours pour P scindé, si $\deg(P) \geqslant n$ et r est racine multiple de $P^{(n)}$, elle est racine de toutes les dérivées intermédiaires.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.16 –

1. Classique. Rolle.
2. Montrer qu'une des dérivées admettrait sinon 0 comme racine multiple.
3. Montrer que sinon, une des dérivées admettrait plusieurs extrema locaux entre deux racines consécutives. Est-ce possible ?

Indications ou solutions pour l'exercice 22.17 – Analyse : en exploitant les relations coefficients/racines, montrer que l'autre racine vérifie $s = -2r$, puis que $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.18 – Compter les racines avec multiplicité et comparer avec le degré.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.19 –

1. Écrire la factorisation de P, en séparant les racines de multiplicité 1 et les racines multiples. Traduire sur les racines la divisibilité de P par P'', et compter les racines.
2. Constater que nécessairement, il existe λ tel que $P'' = \lambda Q(X-s)^\alpha$. Exprimer λ en fonction du degré de P. On trouve une ED en dérivant $Q(X-s)^\alpha$ deux fois et en comparant à l'expression précédente. Évaluer l'ED en un complexe bien choisi, pour obtenir.

3. Cas $\deg(P) = 1$ ou 2 faciles. Cas $\deg(P) = 3$: les 3 racines de P se répartissent de sorte qu'une des 3 est le milieu des 2 autres.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.20 –

1. Exprimer le fait que A^2 possède un minimum en c.
2. Soit R l'ensemble des racines de tous les $P^{(k)}$, et $x \notin R$. Les $P^{(k)}$ sont continues en x et non nulles, donc de signe constant sur un voisinage de x.

   Par ailleurs, si $x \in R$ et si m est la multiplicité de x comme racine de $P^{(k)}$, la question 1 montre que pour toute la série des m dérivées successives s'annulant en x, $P^{(\ell)}P^{(\ell+1)}$ passe d'une valeur négative à une valeur positive. D'où une variation d'au moins m de V dû à cela. Il faut éventuellement ajouter un changement de signe supplémentaire (suivant le signe de $P^{(k-1)}$). Il peut y avoir d'autres racines d'autres $P^{(k)}$ (plusieurs séries de 0 dans la suite des dérivées), dans ce cas, les effets s'ajoutent (chute encore plus importante).
3. Découle de la question précédente : V est décroissante, et chute davantage que la multiplicité des racines de P.
4. Se restreindre à un compact englobant toutes les racines positives de P.
5. Si k est le nombre de 0 dans la suite des coefficients, il y a au plus $n-k$ changements de signe stricts. Compter les racines...

Indications ou solutions pour l'exercice 22.21 –

1. Compter les zéros communs, puis considérer $f(x) = Q(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
2. Récurrence sur n, écrire $P = XR - \alpha R$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.22 – Remarquer que $\prod(X - b\omega_k) = X^n - b^n$. Réponse : $a^n - b^n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.23 –

1. Dans $\mathbb{R}$: $P(X) = (X-1)(X+1)\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$.
2. Factoriser P par $X^2 - 1$: $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^{2k}$
3. Évaluer Q en 1, on obtient le carré de l'expression recherchée. Contrôler le signe pour passer à la racine. Réponse :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.24 –

1. Trouver les racines de P (équation à résoudre : éliminer d'emblée le cas $z = -\mathrm{i}$). Un petit travail sur les exponentielles complexes amène :

$$z = \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right), k \in [\![0, n-1]\!].$$

2. Factoriser et évaluer en 0.

   Le produit est bien défini si et seulement si $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha n} \neq (-1)^n$ et :

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan(n\alpha) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.25 – Factoriser d'abord en l'indéterminée $Y = X^3$, puis factoriser chaque polynôme de degré 3 obtenu en utilisant des racines cubiques. Regrouper les racines par conjuguées pour trouver la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
Réponse :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{6}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}5\pi}{6}})(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}}) \\ &= (X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.26 – Commencer par factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $Z^2 - 2\cos(na)Z + 1$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.27 –

1. Poser $R = aX+b$, écrire $P = (X^2-1)A+R$ et évaluer en 1 et -1. On obtient : $R = (-1)^n X + 1 - (-1)^n$.
2. De même, en évaluant en 1, puis en évaluant l'expression dérivée en 1. On obtient : $R = (3n+1)X + (3-3n)$.
3. De même, on posant $R = aX^3 + bX^2 + cX + d$, en évaluant en 1 et 0 et en évaluant la dérivée en 1 et 0. On obtient $R = (2n-1)X^3 + (2-2n)X^2 - X - 1$.
4. On évalue en -1 et en i (en identifiant partie réelle et partie imaginaire). Se souvenir que ce polynôme intervient dans une factorisation de $X^4 - 1$, dont les racines sont les racines 4-ième de l'unité (cas plus général de $1 + X + \cdots + X^n$). Réponse : si n est pair, $n = 2p$, $R = \frac{1}{2}(1-(-1)^p)X^2 + X + \frac{1}{2}(5+(-1)^p)$. Si n est impair, $n = 2p+1$, $R = \frac{1}{2}((-1)^p - 1)X^2 + ((-1)^p+1)X + \frac{1}{2}((-1)^p+3)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.28 – En considérant r le reste commun, considérer les racines de $P - r$ et factoriser. Terminer en évaluant en 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.29 – Regrouper les 2 hypothèses en considérant les racines de P'.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.30 – Équivaut à dire que j est racine de P et P'. Réponse : $n \equiv 1\ [6]$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.31 –

1. Expliciter $P(X^2+1)$ et poser la division euclidienne. On obtient un système (non linéaire) de 2 équations à résoudre. Lorsque $p \neq 0$, exprimer q en fonction de p, remplacer dans la seconde équation : on est ramené à une équation de degré 4 admettant 1 et -1 comme racines.
   Solutions :
   - $p = 0$ et q racine de $X^2 - X + 1$
   - $p \in \{1, -1, -1+\mathrm{i}\sqrt{3}, -1-\mathrm{i}\sqrt{3}\}$ et $q = 1 + \frac{p+p^2}{2}$.
2. Poser la division euclidienne. La nullité du reste donne 3 équations, dont l'une est $c^2 + c + 1 = 0$. Ainsi, $c = j$ ou $c = j^2$. Réponse : $c = j$, $a = 2(j+1)$, $b = (j+1)$, ou $c = j^2$, $a = 2(j^2+1$, $b = j^2+1$.
3. Exprimer que 1 est racine double, et utiliser la dérivée. On trouve $a = n$ et $b = -n-1$. La divisibilité se fait bien dans $\mathbb{Z}[X]$, puisqu'on divise par un polynôme dont le coefficient dominant est 1 (donc inversible dans $\mathbb{Z}$, condition pour pouvoir faire une division euclidienne dans $\mathbb{A}[X]$).

Indications ou solutions pour l'exercice 22.32 – Écrire la division euclidienne $A = BQ + R$, avec $B = X^2 + 1$. Évaluer aux racines de B : cela suffit à déterminer R.
Réponse : $R = \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)X + \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.33 – Les L_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire le reste dans cette base.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.34 – $X^2 + X + 1$ divise $P_n(X)$ si et seulement si les racines de $X^2 + X + 1$ sont racines de $P_n(X)$.
Réponse : $a = b = 1$ si $n \not\equiv 0$ [3], $a + b = -1$ si $n \equiv 0$ [3].

Indications ou solutions pour l'exercice 22.35 – L'algorithme d'Euclide se déroule de la même manière ! On peut aussi montrer la double-divisibilité : dans un sens c'est immédiat pas définition, dans l'autre, cela découle d'une identité de Bézout.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.36 –

- Se ramener au cas où P, Q et R sont premiers entre eux 2 à 2, et supposer $\deg(P) \geqslant \deg(Q) \geqslant \deg(R)$.
- Remarquer que si R est constant, P et Q aussi (factoriser $P^n + Q^n$ à l'aide des racines n-ièmes de -1)
- En supposant $\deg(R) > 0$, montrer que P^{n-1} divise $Q'R - QR'$
- En déduire $(n-1)\deg(P) \leqslant 2\deg(P) - 1$. Conclure.

On peut aussi commencer par montrer le lemme suivant : si $A \wedge B \wedge C = 1$, et $A + B + C = 0$, alors

$$r(A) + r(B) + r(C) = \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) + 1,$$

où r désigne le nombre de racines distinctes.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.37 –

1. Exprimer $P \wedge P'$ en fonction des racines de P, et compter.
2. Utiliser le fait que $P - 1$ et P sont premiers entre eux et que les deux polynômes divisent P'.
3. Montrer que $R = P - Q$ a au moins $n + 1$ zéros, n étant le degré de P (les zéros de P et de $P - 1$).

Indications ou solutions pour l'exercice 22.38 –

1. $F_1(X) = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$
2. $F_2(X) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$
   Pour trouver le dernier coefficient, on peut multiplier par X et considérer la limite en $+\infty$.
3. $F_3(X) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2}$
   Même technique qu'avant, ainsi qu'une évaluation en 0.
   On peut aussi s'en sortir, pour un pôle multiple, par DL au voisinage de chacun des pôles, puis identification.
4. $F_4(X) = \dfrac{1}{(X-1)^2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{j}{(X-j^2)^2} - \dfrac{j^2}{X-j^2} + \dfrac{j^2}{(X-j)^2} - \dfrac{j}{(X-j)}$.
   Trouver la partie polaire associée à 1 (par exemple par DL), puis remarquer que $F_4(jX) = F_4(j^2X) = F_4(X)$...
5. $F_5(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{X-k}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{n(X-1)^2} - \dfrac{n-1}{2n(X-1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)(X-\omega_k)}$.
7. $F_7(X) = \dfrac{(-1)^n}{X^2} + \dfrac{n(-1)^n}{X} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)}{(X-1)^k}$
   DL(1) en 0 de $x^2 f(x)$ et DL à l'ordre $n-1$ en 1.
8. De même, par DL : $F_8(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{p+q-k-1}{p-k}}{X^k} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\binom{p+q-k-1}{q-k}}{(1-X)^k}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.39 –

1. $F_1(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}$
2. Sauf erreur de calcul de ma part :
$$\begin{aligned}F_2(X) &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27}\cdot\frac{1}{X-1} + \frac{5}{108}\cdot\frac{1}{X+2} - \frac{4+j}{36}\cdot\frac{1}{X+2j} - \frac{4+j^2}{36}\cdot\frac{1}{X+2j^2}\\ &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27}\cdot\frac{1}{X-1} + \frac{5}{108}\cdot\frac{1}{X+2} + \frac{-7X+6}{36(X^2-2X+4)}\end{aligned}$$
3. Le faire d'abord dans $\mathbb{R}$:
$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}$$
Puis dans $\mathbb{C}$:
$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}\frac{1}{X+\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{1}{X-\mathrm{i}} + \frac{2+j}{3}\frac{1}{X-j} + \frac{2+j^2}{3}\frac{1}{X-j^2}.$$
4. Utiliser un argument de symétrie pour justifier que dans $\mathbb{C}$ les coefficients de la DES sont tous égaux.
$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{X-\omega^k},$$
où je vous laisse deviner ce qu'est ω.
$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{X-1} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{X-\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)X+1}\right).$$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.40 – Évident si x est racine de P. Sinon, remarquer qu'il s'agit à peu de chose près de la dérivée de $\frac{P'}{P}$. Que sait-on sur $\frac{P'}{P}$?
Réciproque : considérer $X^3 + X$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.41 – Montrer que $P(X)|P(-X)$ et réciproquement. En déduire que P est pair ou impair, de même pour Q. P et Q peuvent-ils être tous deux impairs ?

Indications ou solutions pour l'exercice 22.42 – La DES ne doit pas avoir de terme en $\frac{1}{X-1}$ et $\frac{1}{X+1}$.
Réponse : les fractions rationnelles $\frac{X^2+pX+1}{(X^2-1)^2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.43 – Montrer que $P_1Q_2 - P_2Q_1$ admet une infinité de racines.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.44 –

1. Dans $\mathbb{C}$, on peut utiliser un argument analytique, par exemple en considérant la limite en $+\infty$. On peut bien sûr utiliser l'argument de la question suivante aussi.
2. Montrer que sinon, il existe un polynôme Q tel que $F(Y) = Q\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$. On pourra utiliser un argument de parité et de rigidité.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.45 – Comparer les limites en -1^+ et en $+\infty$.

Indications ou solutions pour l'exercice 22.46 – Utiliser un développement limité de $\frac{h^3}{P(r_i+h)^3}$

Indications ou solutions pour l'exercice 22.47 – Utiliser le fait que si F et G coïncident sur une infinité de valeurs, alors $F = G$. Montrer que $\frac{a_0}{b_0}$ (terme constant du numérateur / terme constant du dénominateur) est premier et égal à $F(qa_0)$, pour tout nombre premier q différent de $\frac{a_0}{b_0}$ (considérer la valuation p-adique).

23

Espaces vectoriels

Indications ou solutions pour l'exercice 23.1 – Oui / Non (pas stable par somme)

Indications ou solutions pour l'exercice 23.2 – Oui : 2,4,5 ; Non : 1,3,6,7

Indications ou solutions pour l'exercice 23.3 –

1. Pour étudier $\lambda x + y$, considérer k tel que x et y soient dans F_k.
2. Faux si I peut être infini. Faux si I et $\mathbb{K}$ sont finis, vrai si I fini et $\mathbb{K}$ infini. Dans ce cas, on montre que l'un d'eux est égal à E, donc fournit un k universel. C'est l'objet d'un autre exercice.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.4 – Soit $(G,+)$ un groupe abélien.

1. En supposant qu'un telle structure existe. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, nx coïncide nécessairement avec $x + \cdots + x$, noté également nx généralement. On sait que la multipliciation par un élément de $\mathbb{Z}$ vérifie toutes les propriétés usuelles d'associativité, distributivité etc.

   Montrer l'associativité de la loi externe implique alors qu'il n'y a a pas le choix pour définir la loi externe pour un scalaire $\alpha \in \mathbb{Q}$ quelconque.
2. Des vérifications fastidieuses, en partant des propriétés satisfaites par la multiplication par un entier (correspondant à l'itération de $+$) et de la relation $q(\alpha x) = px$, où $\alpha = \frac{p}{q}$, relation caractérisant αx de façon unique d'après le point 2. Ne pas oublier de montrer que la définition de αx est indépendante du représentant de α choisi, et se ramener systématiquement à $q \times$ expression $= 0$ pour un certain y, et $q \neq 0$, ce qui amène expression $= 0$ d'après le point 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.5 – Ne pas hésiter à utiliser le cardinal des familles, ainsi que la caractérisation de la liberté par la non colinéarité pour une famille de 2 vecteurs. Ayez aussi le réflexe de deviner des relations.

1. Libre, pas génératrice
2. Pas libre, génératrice
3. Pas libre, pas génératrice
4. Pas libre, pas génératrice
5. Base

Indications ou solutions pour l'exercice 23.6 – On peut toujours compléter par ajout de vecteurs de la base canonique d'après le TBI. Les prendre l'un après l'autre, et regarder si on peut les ajouter sans perdre la liberté.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.7 – La méthode est bien balisée : poser des λ_i vérifiant $\sum \lambda_i f_i = 0$, et montrer que les λ_i sont alors tous nuls.

1. Plusieurs possibilités parmi lesquelles :
   - Récurrence sur n, en dérivant et combinant pour se débarrasser du e^{nx}
   - Par l'absurde, en considérant un équivalent.
   - Par une méthode polynomiale (écrire l'expression sous la forme $P(\mathrm{e}^x) = 0$, et considérer les racines de ce polynôme)

   Challenge : trouver le plus de méthodes possibles.
2. Par l'absurde, par un argument de multiplicité de racine (par exemple)
3. Broderie autour de 1 (qui en est un cas particulier). La méthode polynomiale ne s'applique plus, mais les autres si.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.8 – Comme dans toutes les études de ce type, considérer des coefficients λ_i tels que $\sum \lambda_i f_i = 0$, et utiliser tous les moyens du bord pour montrer que les λ_i sont nuls.

1. Libre ssi $a \not\equiv b\ [\pi]$. Évaluer en un 0 de l'une des deux.
2. Lié : à l'aide des formules de trigonométrie, montrer qu'elles sont toutes dans un espace engendré par 2 fonctions bien connues.
3. Libre : méthode polynomiale (écrire la CL comme polynôme en cos)
4. Libre d'après le point précédent et le cours.
5. Libre : Méthode polynomiale en écrivant $P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Trouver une infinité de racines de P et de Q.
6. Libre : méthode polynomiale
7. Libre : dériver, et considérer un équivalent en 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.9 – Méthode polynomiale.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.10 – Étudier la liberté de la famille, et chercher à quelle condition il y a une obstruction à pouvoir achever la preuve.
La famille est liée ssi $\sum \lambda_i = -1$.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.11 – Utiliser un argument de dérivabilité.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.12 – Poser le système. La famille est libre ssi le système est de Cramer (en les inconnues λ, μ, μ, avec les paramètres x, y, z).
C'est le cas ssi $xyz \neq 0$ (donc aucun des 3 n'est nul) et $xyz - x - y - z + 2 = 0$.
On peut le trouver par un calcul de déterminant, si on connait déjà, ou alors commencer par éliminer l'une des variables, se ramener à système 2×2, et là, utiliser le déterminant 2×2 pour caractériser le fait qu'il soit de Cramer (ça, vous connaissez).

Indications ou solutions pour l'exercice 23.13 – Encore méthode polynomiale.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.14 – Réponse : $a = -23$, $b = 3$.
À l'aide des deux premières coordonnées, chercher l'unique CL de v_1 et v_2 pouvant donner v_3. En déduire a. De même pour b. Remarquer que v_3 et v_4 ne sont pas colinéaires pour conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.15 –

1. Remarquer que $A \cap B \subset A \subset A + B$. Que déduire alors de l'égalité $A \cap B = A + B$? De même pour B.

2. Considérer $b+c$ avec $b \in A \cap B$ et $c \in A \cap C$.
3. . Ou alors, remarquer qu'on a inclusion pour chacun des termes de la somme et terminer par minimalité.
4. De même.
5. Inclusion $\subset$ toujours vraie (voir terme par terme de la somme). Pour la réciproque, revenir aux éléments.
6. Inclusion $\subset$ terme par terme de la somme. A-t-on l'inclusion réciproque en général ?

Indications ou solutions pour l'exercice 23.16 – Par l'absurde, et sans perte de généralité, considérer $x \in F_1 \setminus E_1$, et le décomposer de deux manières différentes dans $\bigoplus F_i$.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.17 – Fait en cours en début d'année (exemple d'analyse-synthèse). C'est l'existence et d'unicité d'une décomposition d'une fonction définie sur un intervalle symétrique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Remarquez que pour répondre complètement à la question, il faut aussi prouver que P et I sont bien des sev.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.18 – Analyse synthèse, ou considérer $g(x) = f(x) - xf(1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.19 – Division euclidienne.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.20 – Somme directe évidente. Pour $x \in C$, considérer sa décomposition dans $A \oplus B$ et vérifier qu'elle répond à la question.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.21 – C'est plus ou moins du cours. Considérer une famille libre de cardinal maximal. C'est alors une base.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.22 – Écrire $\mathrm{Vect}(S)$ comme somme de deux Vect.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.23 – Considérer la famille des vecteurs indicateurs des parties X_i. Utiliser une relation non triviale entre ces vecteurs.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.24 –

1. $\mathbb{K}$ contient le corps premier $\mathbb{F}_p$. Vérifier que c'est un $\mathbb{F}_p$-ev, donc isomorphe à un $\mathbb{F}_p^n$.
2. Considérer les racines de $X^{p^n-1} - 1$ dans un $\mathbb{K}'$ sur lequel ce polynôme est scindé. Justifier qu'elles sont simples. L'ensemble de ces racines auquel on joint 0 est un corps de cardinal p^n.
3. Remarquer que $\mathbb{K}$ est exactement l'ensemble des racines de ce polynôme : celui-ci est scindé dans $\mathbb{K}$, et diminuer $\mathbb{K}$ fait perdre une racine.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.25 – Adapter la preuve du cours de l'existence d'un supplémentaire : considérer H de dimension maximale en somme directe à la fois avec F et G. Remarquer que si $H + F \neq E$, alors $H + G \neq E$ (par les dimensions), et leur union non plus. Rajouter à H un vecteur n'appartenant pas à cette union.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.26 – **(ENS)** Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Raisonner par l'absurde. Considérer n maximal tel que $V_1 \cup \cdots V_{n-1} \neq E$. On a alors $V_1 \cup \cdots \cup V_n = E$. Choisir convenablement (comment ?) $x \in V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ et $y \in V_n$. Montrer qu'il existe $\lambda \neq \mu$ et $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda x + y \in V_i$ et $\mu x + y \in V_i$, et obtenir une contradiction, portant sur la façon (convenable) d'avoir choisi x et y.

2. Considérer H de dimension maximale en somme directe avec chacun des F_i, et si ce n'est pas un supplémentaire, justifier l'existence de x n'appartenant à aucun des $F_i \oplus H$.

Indications ou solutions pour l'exercice 23.27 –

1. Sinon, ce serait une base, et la positivité des coefficients contredirait l'unicité de la décomposition. Pour une famille de cardinal $n+1$, considérer la base canonique augmentée de $(-1,\dots,-1)$. Vous pouvez trouver un exemple similaire pour toute base, en prenant ajoutant à cette base un certain vecteur.
2. Extraire une base. Écrire le vecteur x de coordonnée $(-1,\dots,-1)$ (dans cette base) comme CL à coefficients positifs des éléments de $\mathcal{F}$. Écrire une relation entre les $n+1$ vecteurs qui ne sont pas dans la base, en déduire une relation

$$\sum \lambda_i b_i + \sum (\alpha\mu_j + \lambda_j) c_j = x,$$

où les b_i sont les vecteurs de la base, les c_i les autres, les λ_i sont > 0, les μ_j peuvent être de signe quelconque, et α est arbitraire. Choisir convenablement α de sorte à annuler un coefficient de la seconde somme et obtenir des coefficients positifs ou nuls pour les autres.

24

Applications linéaires

Indications ou solutions pour l'exercice 24.1 – Tout traduire au niveau des éléments. 1 à 4 ne doivent pas poser de problème.
Pour 5, le sens direct est simple avec les éléments. Pour la réciproque, une inclusion est déjà montrée. Pour l'autre, considérer, $y = f(x)$ pour $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
Pour 6, le sens réciproque est facile. Pour le sens direct, pour $y \in F$, considérer x tel que $g \circ f(x) = g(y)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.2 – u et $P(v)$ commutent. Il suffit donc de montrer la première assertion. Le faire en revenant aux éléments.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.3 – Faire une « chasse au diagramme » : pour l'injectivité, considérer le noyau, et chercher autant que possible à exploiter la commutativité du diagramme (écrire des composées pour pouvoir changer de chemin) de sorte à pouvoir exploiter l'exactitude des lignes (l'injectivité de f, la surjectivité de g ou trouver un élément dans le noyau de g afin de pouvoir utiliser l'exactitude au centre). Même principe pour la surjectivité.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.4 – Hyper-classique. Comparer le coefficient de colinéarité pour x et y en discutant suivant que (x, y) est libre ou non, et en passant par $x + y$. Définir des u assurant l'hypothèse de la question 1 (on pourra définir u sur une base, ce qu'on peut faire grâce à l'axiome du choix)

Indications ou solutions pour l'exercice 24.5 –

1. C'est la préservation de la liberté. Remarquer que $f(G \cap H)$ est réduit à un élément, et l'injectivité nous assure que c'est égal à l'intersection des images.
2. CNS : $(G \oplus H) \cap \mathrm{Ker}(f) = G \cap \mathrm{Ker}(f) + H \cap \mathrm{Ker}(f)$, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{Ker}(f)$ est somme (directe) d'un sous-espace de G et d'un sous-espace de H.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.6 – f est surjective non injective. Pour construire les e_i, utiliser la surjectivité. À quelle condition suffisante (mais pas nécessaire) une famille de polynômes est-elle une base ?

Indications ou solutions pour l'exercice 24.7 – En écrivant $P = XQ$, que peut-on dire que $Q(f)(x)$, en rapport avec la décomposition recherchée ?

Indications ou solutions pour l'exercice 24.8 – Il s'agit de comparer le rang d'une composée au rang de chaque terme. La somme est directe, et que vaut sa dimension ?

Indications ou solutions pour l'exercice 24.9 – Théorème du rang à chaque étage.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.10 – Considérer les inégalités de dimension fournies par les hypothèses. On a d'autres relations sur les dimensions, provenant de...

Indications ou solutions pour l'exercice 24.11 –

1. Se ramener à l'étude d'une certaine inclusion.
2. Trouver autant de relations possibles (égalités ou inégalités) sur les dimensions des noyaux, des images et de E.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.12 –

1. Considérer $u_{|\mathrm{Im}(v)}$. Comment passe-t-on de la première à la deuxième égalité ?
2. Immédiat.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.13 – Construire les f_i par rigidité sur les éléments d'une base, en séparant la contribution de chaque vecteur. La base ne doit pas être choisie n'importe comment.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.14 –

1. $x \mapsto ax$ est un endomorphisme injectif donc un ...
2. Existence de P du fait de la dimension finie. Considérer la décomposition en facteurs irréductible de P.
3. Ce polynôme est irréductible d'après question 2.
4. Mise sous forme canonique de l'expression précédente.
5. Construire $\varphi : \mathbb{C} \to K$ par $1 \mapsto 1$ et $\mathrm{i} \mapsto \mathrm{i}_a$, et prolonger par linéarité. Montrer le respect du produit. Montrer que $\mathbb{C}$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{i}_a)$. Montrer que pour tout $b \neq a$, $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{i}_b) = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{i}_a)$ (on pourra montrer que $\mathrm{i}_a = \pm \mathrm{i}_b$), et et déduire que $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{i}_a) = K$.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.15 – Montrer que si I est un idéal non trivial contenant $u \neq 0$, toute application de rang 1 est dans I (l'écrire comme composée d'AL impliquant u).
Matriciellement on peut utiliser une matrice standard équivalente à la matrice M de u, pour obtenir la même chose.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.16 – Suivre l'énoncé, bien détaillé ! Vous avez bien sûr reconnu les polynômes L_i. Pour la dernière question, on pourra remarquer que $f^n \circ L_3(f) = L_3(f)$, c'est bien pratique pour simplifier les calculs.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.17 – Sens direct évident. Sens réciproque : il suffit de comparer les noyaux.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.18 – Réciproque évidente. Un examen rapide du sens direct amène à $pq + qp = 0$. Exploiter la définition des projecteurs en composant cette relation à gauche et/ou à droite pour obtenir d'augres relations.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.19 – Sens direct facile en revenant aux éléments. Sens réciproque : vérifier la commutation sur $\mathrm{Ker}(p)$ et sur $\mathrm{Im}(p)$. Que peut-on dire de ces deux sous-espaces ?

Indications ou solutions pour l'exercice 24.20 –

1. N'oublier aucune des propriétés à montrer. Pour la décomposition, comment définir un élément de $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ à partir d'un élément de $\mathrm{Ker}(f \circ g)$?

2. De même. Comment construire un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ à partir d'un élément de $\mathrm{Im}(f \circ g)$ (n'oubliez pas que f est un projecteur).
3. Comparer les membres aux expressions obtenues dans les deux premières questions. Comment construire un projecteur qui échange le rôle du noyau et de l'image d'un projecteur donné ?

Indications ou solutions pour l'exercice 24.21 –

1. Par exemple par complétion d'une famille libre, en construisant une famille génératrice adaptée à la décomposition $E_1 + F_1$. Ou alors par maximalité, en regardant les sous-espaces de F vérifiant une certaine propriété. Ou encore (et cela simplifie la suite) en connsidérant des supplémentaires de $E_1 \cap F_1$.
2. Décrire géométriquement en se servant d'une décomposition de E en somme directe de 3 espaces.
3. Provient directement du calcul de la question précédente.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.22 – Considérer d'un coté un supplémentaire du noyau et de l'autre un supplémentaire de l'image, et construire g de façon adaptée à ces décompositions.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.23 – Ne pas se tromper dans la caractérisation par les intersections de la somme directe de n sous-espaces vectoriels. Une fois ce point bien clair, c'est sans difficulté.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.24 – (X) – Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$

1.
   - $g(F)$ idéal facile.
   - $f \circ g(F) = F$. Inclusion directe facile. Pour la réciproque, si $x \notin F$, construire u (par morceaux) dont le noyau est exactement F.
2. (a) Considérer $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$, et compléter l'image par u d'une base de S en une base de E. Construire f sur la base obtenue, de sorte que $f \circ u$ et v coïncide sur les vecteurs d'une certaine base.

   (b) Considérer p et q d'images F_1 et F_2, de noyau G_1 et G_2, puis en considérant la décomposition $E = S_1 \oplus G_1 \cap G_2 \oplus S_2 \oplus S_3$ où S_1 est un supplémentaire de $G_1 \cap G_2$ dans G_1, S_2 de même dans G_2, et S_3 un supplémentaire de $G_1 + G_2$ dans E, construire 3 projections de noyaux contenant l'un des G_i, les combiner pour obtenir un projecteur de noyau $G_1 \cap G_2$. Utiliser une question antérieure pour justifier que toutes les projections ainsi construites sont dans I.

   (c) Justifier qu'on peut se limiter aux projecteurs dans l'intersection définissant f (pour $u \in I$, il existe toujours un projecteur de I de même noyau), et considérer r dont la dimension du noyau est minimale. utiliser l'arguemnt de 1(a) pour obtenir la description de I.

   (d) $g \circ f(I) = I$. Ainsi, f et g sont des bijections réciproques.
   Étudier $g \circ f(I)$ et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.25 – Construire q en considérant la moyenne des conjugués de p par les éléments de G. Considérer ensuite le noyau de q.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.26 –

1. f est surjective non injective, g est injective non surjective.
2. Récurrence.
3. Trouver une contradiction sur l'existence du polynôme minimal de g.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.27 – Interdit de sécher sur cet exercice ! Considérer la famille formée par les images successives d'un élément x.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.28 –

1. Sans difficulté.
2. Par récurrence, en utilisant l'HR pour $u(x)$. Pour les images, on peut refaire une démo ou utiliser le théorème du rang.
3. Pour contrôler l'intersection, se souvenir que u^p et u^{2p} ont même noyau.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.29 –

1. Sans difficulté.
2. Montrer que u se restreint en une injection sur S_P et que son image se trouve « entre » $\mathrm{Ker}(u^{p-1})$ et $\mathrm{Ker}(u^p)$.
3. Application simple du théorème.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.30 – Remarquez que cela relève du théorème des noyaux itérés. On peut l'obtenir de façon assez élémentaire en constatant que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, ce qui ne laisse plus beaucoup de choix d'après le théorème du rang.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.31 – Appliquer le théorème du rang à $u : \mathrm{Im}(f) \to E$, la restriction de f, ainsi qu'à v, la restriction de f à $\mathrm{Im}(f^2)$.
Remarquez que ce résultat relève du théoèrme des noyaux itérés !

Indications ou solutions pour l'exercice 24.32 – Voir cet exercice à la lueur du théorème des noyaux itérés. On pourra alors adapter les méthodes, en introduisant des supplémentaires idoines, ou en appliquant le théorème du rang à certaines restrictions (deux approches possibles de la démonstration du théorème des noyaux itérés). La question 1 incite plutôt à la seconde approche.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.33 – Version vectorielle : Construire S' tel que $\mathrm{Ker}(f) \oplus S'$ et $\mathrm{Ker}(g)$ aient même dimension, puis S un supplémentaire commun. Étant donné $(b_1, \dots, b_k)$ base de S, compléter séparément $(f(b_1), \dots, f(b_k))$, et $(g(b_1), \dots, g(b_k))$ en des bases de E, et définir h et k convenablement par rigidité.
Version matricielle, une fois qu'on a le cours du chapitre suivant : se ramener à des matrices équivalentes à A et B (matrices de f et g dans des bases données), qu'on sait facilement relier entre elles.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.34 –

- Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ implique que f laisse $\mathrm{Ker}(g)$ stable, donc f se restreint en un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(g)$.
- La nilpotence des u_i implique que tout endomorphisme induit par u_i sur un sous-espace stable admet un noyau non nul.
- En déduire que la dimension du noyau aumente strictement à chaque composition supplémentaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 24.35 – Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, justifier $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(D)$, et en déduire une contradiction, en regardant la dimension de $\mathrm{Ker}(D)$.
On peut aussi remarquer que T stabilise $\mathbb{R}_n[X]$, puis que c'est un endomorphisme nipotent de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est son indice de nilpotence ?
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, expliciter un T qui convient, en dissociant partie réelle et partie imaginaire.

25
Matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.1 –

1. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
2. Aidez-vous de l'échelonnement de la base d'arrivée, pour décomposer les éléments $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans cette base. On obtient la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $\left(\binom{k}{i}(-a)^{k-i}\right)_{0\leqslant i,k\leqslant n}$, (formule du binôme) avec la convention $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$.
4. $\left(\binom{k}{i}a^{k-i}\right)_{0\leqslant i,k\leqslant n}$ (formule du binome pour $X^k = (X - a + a)^k$, ou formule de Taylor)
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^0 & 2-2^1 & 2-2^2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 2^0-1 & 2^1-1 & 2^2-1 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix}$

Indications ou solutions pour l'exercice 25.2 – Analyse synthèse, incitant à considérer b_3 tel que $f^2(b_3) \neq 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.3 – Analyse-synthèse.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.4 – Trouver $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{B}$ à l'aide d'une analyse synthèse. La matrice B_k s'obtient alors par le binôme (fait en cours). Si on a bien choisi $\mathcal{C}$, $b_n = c_n$ et l'image de b_n se lit alors facilement sur la matrice B^k.
Pour terminer, passer à la limite dans $\displaystyle\int_0^A x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, après primitivation. Observer qu'on obtient $n!$. L'intégrale calculée s'appelle $\Gamma(n+1)$ (intégrale gamma).

Indications ou solutions pour l'exercice 25.5 – Pour trouver A^{-1}, raisonner sur f et non matriciellement !

Indications ou solutions pour l'exercice 25.6 – Vous pouvez vérifier vos calculs en exprimant directement la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, sans passer par les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.7 – À part pour la dernière question, le plus simple est de procéder par formule de changement de base. Pour la dernière question : analyse-synthèse. Cela revient à chercher des vecteurs non nuls dans certains noyaux. Pour le calcul de A^n, écrire la formule de changement de base.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.8 –

1. Il s'agit de résoudre une équation du type $f(x) = \lambda x$.
2. Le sens réciproque est facile, en déterminant explicitement $f(\mathrm{Ker}(g^2))$. Pour le sens direct, considérer l'endomorphisme v de P induit par g. Vérifier $v^2 = 0$ (comment optimiser l'exposant ?). Lorsque $v \neq 0$, on pourra trouver un élément non nul dans $P \cap \mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v)$, et comparer cet espace à $\mathrm{Im}(g^2)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.9 – Pour la base : analyse-synthèse. Exprimer les conditions par l'appartenance à certains noyaux. Pour A^n : utiliser le fait que T^n est diagonale par blocs.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.10 –

1. Par récurrence, formule du binôme, ou polynôme annulateur. On peut aussi diagonaliser, mais ça, c'est plutôt pour l'année prochaine.
2. En extrapolant la formule précédente pour $n = -1$ (vérifier que la matrice obtenue convient !).
3. Extrapoler pour $n = \frac{1}{2}$, en passant aux complexes.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.11 – Méthode du cours : calculer le reste de la division de X^n par le polynôme annulateur. Extrapoler pour les puissances négatives, et vérifier.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.12 – Méthode 1 : binôme, séparer termes impairs et pairs ; puis binôme sur les scalaires.
Méthode 2 : Calculer le carré et aviser... Ça en devient beaucoup plus simple !

Indications ou solutions pour l'exercice 25.13 – Binôme, puis tester la formule en prenant formellement $n = \frac{1}{2}$ dans l'expression obtenue.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.14 –

1. Classique ! considérer la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$, où $x \notin \mathrm{Ker}(u^{p-1})$.
2. Classique ! Penser aux sommes géométriques !
3. Considérer l'indice de nilpotence.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.15 – On peut poser toutes les équations. Ou remarquer que quelques résultats classiques sur les matrices nilpotentes permettent de déterminer M^3, ce qui, par déscription du produit par les lignes et les colonnes, détermine une bonne partie de M.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.16 – Essayez de vous en sortir sans calcul en minorant le rang (trouvez des vecteurs colonnes linéairement indépendants), et en le majorant (trouvez des relations entre les colonnes). Les relations entre les colonnes fournissent des éléments du noyau, et les familles libres maximales extraites des colonnes fournissent une base de l'image.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.17 – Si possible, aidez-vous d'une « estimation » du rang et de relations entre les colonnes.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.18 – Si possible, aidez-vous de relations entre les colonnes pour majorer le rang. Pour les plus grosses matrices, un pivot peut s'avérer nécessaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.19 – Éliminer d'abord les cas triviaux $a = b = c = 0$ et $a = b = c \neq 0$, puis $a = b \neq c$ et symétriques. Il reste le cas a, b et c deux à deux distincts. Échelonner, en commençant par des opérations sur les colonnes.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.20 – Formules d'addition et observer les colonnes obtenues. Réponse : 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.21 – Pour la matrice M_2, on pourra remarquer que

$$1 - 3ab + a^3 + b^3 = (a + b + 1)(1 - b - a + b^2 + a^2 - ab),$$

puis montrer que si $(a, b) \neq (1, 1)$, $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 > 0$, en effectuant une mise sous forme canonique par rapport à la variable a (en considérant b comme une constante), puis par rapport à b.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.22 – Considérer un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(BC)$ dans $\mathrm{Ker}(ABC)$, et considérer $\varphi : S \to \mathrm{Ker}(AB)$ définie par $\varphi(X) = CX$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.23 – Considérer la matrice $(\mathbb{1}_{E_i}(j))$, et justifier qu'elle est de rang k. On pourra introduire du calcul matriciel modulaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.24 – À l'aide du calcul de P^2, trouver λ tel que λP soit la matrice d'un projecteur.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.25 – Coder les opérations du pivot qui transforme A en I_n. Leurs inverses codent aussi des opérations élémentaires.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.26 – Avec un pivot, où la formule avec comatrice pour P_1 :

$$P_1^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad P_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et P_3 non inversible.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.27 – Isoler le terme I_n et mettre A en facteur.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.28 – Remaerquer que B, C et D sont obtenues de A par des opérations simples sur les lignes et/ou colonnes. À quoi correspondent-elles après inversion ?

Indications ou solutions pour l'exercice 25.29 – Utiliser un polynôme annulateur de M.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.30 – Inversibilité : par pivot ou par polynôme annulateur. On pourrait aussi se servir de connaissances sur la dimension des sous-espaces propres, mais cela nécessite de connaître un minimum de choses sur la réduction.

Calcul de la puissance : binôme ou polynôme annulateur, ou le chercher sous la forme $cI + dA$. Extrapoler pour les négatifs.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.31 – Penser somme géométrique, ou Bernoulli.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.32 – Pivot, ou bien rechercher comme polynôme en une matrice de Jordan. Ou bien encore, faire une analogie avec le cas scalaire et remarquer que le pôlynôme en J est le début d'une série dont on sait calculer la somme, puis inverser.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.33 – Sinon, il y a au moins une matrice inversible sur le bord et on simplifie, puis rebelotte.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.34 – Évitez de procéder par pivot, qui ne permet pas d'exploiter les symétries de la matrice. Procédez par résolution du système $AX = Y$ en se ramenant à une propriété des sommes des racines de l'unité. On peut aussi, une fois qu'on a A_3, deviner l'expression générale et vérifier.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.35 – Faire le produit par colonnes de AA^{-1}, et justifier que toute colonne est utilisée au moins une fois. En déduire la propriété voulue sur les colonnes.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.36 – Pour l'inversibilité des $M(e_i) + J$, sans effort, considérer $C_i - C_n$. Pour l'étude de $M(a) + J$, à l'aide d'un pivot, remarquer que cette matrice est inversible sauf si θ est racine d'un certain polynôme. La connaissance des déterminants permet de simplifier cet argument.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.37 – Multiplier par $A + A^{-1}$ pour obtenir une relation de récurrence. Expliciter et simplifier, ou observer une périodicité.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.38 –

1. Récurrence
2. En déduire $AP(B) - P(B)A = P'(B)C$. Quel polynôme P peut-on prendre ?

Indications ou solutions pour l'exercice 25.39 – Étendre le commutateur dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et se servir de la dimension finie.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.40 – Se ramener à montrer que pour tout A non nul, $I + pA$ est d'ordre infini. Pour cela, montrer $(I + pA)^k \neq I$, respectivement pour $k = p$ et pour $k \wedge p = 1$.

Matrices équivalentes, matrices semblables

Indications ou solutions pour l'exercice 25.41 – Comparer leur trace !

Indications ou solutions pour l'exercice 25.42 – Calculer et comparer leur rang !

Indications ou solutions pour l'exercice 25.43 – Écrire la relation de similitude. Quelle relation a-t-on alors entre A^n et B^n ? Pour les valeurs propres, se souvenir que ce sont les racines du polynôme minimal (qui est le même) où bien le montrer en revenant à la définition.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.44 –

1. Si deux matrices ont même rang, elles sont équivalentes.
2. Connsidérer un représentant privilégié des classes d'équivalence des matrices considérées. Remarquez au passage que cela donne une résolution matricielle assez efficace d'un exercice d'X du chapitre précédent.

3. Si $I \neq \{0\}$, toute matrice de rang 1 est dans I. Obtenir les autres par somme.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.45 – CN évidente : $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(C)$ et $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A)$. Montrer que c'est une CS, en revenant aux AL : contruire une application linéaire intermédiaire, en partant d'une décomposition de l'espace en somme directe de $Ker(B) \oplus S_1 \oplus S_2$, où $\mathrm{Ker}(B) \oplus S_1 = \mathrm{Ker}(C)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.46 – Pour trouver la base, chercher une base de chaque facteur direct. Pour cela, chercher à construire un carré magique respectant les symétries imposées, et voir ce que cela impose.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.47 – CNS de bijectivité : étudier le noyau et trouver une CS. Montrer que c'est aussi une CN en trouvant sinon une matrice non nulle dans le noyau. Montrer que si T n'est pas bijective, T est une projection, déterminer son noyau et décrire son image à l'aide de la trace.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.48 – Exprimer les coefficients diagonaux dans la base $(E_{i,j} - E_{j,i})$. Réponse : $\mathrm{tr}(f) = (n-1)\,\mathrm{tr}(A)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.49 – Premier point de vue par récurrence :

- Si un des coefficients de la colonne 1 est non nul, annuler le coeff $a_{1,1}$ par une opération sur les lignes. Vérifier que l'opération correspondante sur les colonnes ne perturbe pas. De même pour la première ligne.
- Sinon, si un coeff non diagonal est non nul, le ramener sur la première colonne ou la première ligne ; même type de vérification. On est ramené au cas précédent.
- Sinon, la matrice est diagonale. Si deux coefficients sont distincts, s'arranger pour obtenir un coefficient non diagonal non nul par une opération sur les lignes.
- Sinon, conclure.

Deuxième point de vue : ne pas chercher forcément à annuler $a_{1,1}$: montrer que si la diagonale n'est pas nulle, on peut se ramener à une matrice diagonale avec strictement plus de coefficients diagonaux nuls.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.50 – Si u est de trace nulle, et non homothétie, considérer une base débutant par $x, u(x)$.
On pourra montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une des deux inclusions intéressantes pour $\mathrm{Im}(\varphi)$...

Indications ou solutions pour l'exercice 25.51 – Vérifier la coïncidence sur les vecteurs d'une base simple de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.52 – On pourra considérer l'image d'une certaine base.

Indications ou solutions pour l'exercice 25.53 – Utiliser le fait que tout hyperplan est noyau de $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$, et justifier qu'il suffit de trouver Y inversible tel que $J_r Y$ soit de trace nulle, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

26 Déterminants

Indications ou solutions pour l'exercice 26.1 – Utiliser la propriété de détermination sur certains vecteurs de la base, vue en cours. Réponse : $\binom{d}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.2 –

1. Utiliser la multilinéarité sur les colonnes. Rép : $2abcV(a,b,c)$.
2. Annuler des c. Rép : $(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$.
3. Se débarasser d'un certain nombre de a et b. Rép : $(1+2a+2b)(1+2a-2b)$.
4. Commencer par faire partir a^2 et b^2 et simplifier encore la dernière colonne. Rép : $2abc(a+b+c)^3$
5. En multipliant les colonnes de façon adéquate, on se ramène facilement à un Vandermonde. Rép : $-V(a,b,c,d)$.
6. Faire partir les ab et cd, et se ramener à une matrice triangulaire par blocs. Rép : $(bd-ac)((d-b)^2-(a-c)^2)$.
7. Faire partir des 1. Rép : $(c+a-b)(c-a+b)(c-a-b)(c+a+b)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.3 – On peut trouver explicitement des relations entre les 3 premières colonnes dans le cas 1 et entre les 4 premières dans le cas 2. On peut aussi procéder par opération sur les colonnes.
Rép : 0 sauf pour les petites valeurs de n (à calculer dans ces cas)

Indications ou solutions pour l'exercice 26.4 – Rép : $(-1)^{n-1}n!$, $(-1)^{n-1}n\prod_{i=1}^{n-1} a_i$, $(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.5 – On peut procéder par pivot, en supposant $aneq0$ dans un premier temps. On peut former une relation de récurrence en faisant 2 développements suivant une ligne ou colonne bine choisie. On peut enfin réordonner les lignes et les colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs.
Rép : $(a^2-b^2)^n$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.6 – Rép : $\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.7 –

1. Que vaut la différence de deux lignes successives ? Réponse : 1
2. Commencer par bien comprendre la répartition des coefficients, puis tenter un échelonnement.
   Réponse : $a_1(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})$.
3. Développer. À quelle opération matricielle vous fait penser l'expression obtenue ?
   Réponse : $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\prod_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}V(a_1,\dots,a_n)V(b_1,\dots,b_n)$.

4. Réponse : $\binom{p+n-1}{n}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.8 – Développer suivant la dernière ligne, puis redévelopper encore. De même pour la deuxième. La deuxième peut ensuite s'expliciter, mais pas la première.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.9 – Se ramener au cas où $A = I_{n,n,r}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.10 – Faire des opérations sur les colonnes pour n'avoir des X que sur une colonne, puis développer suivant cette colonne. Évaluer en 2 valeurs pour lesquelles le déterminant est simple à calculer. Attention au cas particulier $b = c$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.11 – Considérer $V(x_1, \dots, x_n, X)$, et développer suivant la ligne de l'indéterminée X.
Réponse : $\Sigma_{n-k} V(x_1, \dots, x_n)$, mais qu'est Σ_{n-k} ?...

Indications ou solutions pour l'exercice 26.12 – Développer, et reconnaître un produit de matrices.
Réponse : $\prod_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.13 – On peut s'en sortir par opérations sur les lignes et les colonnes, en agissant directement sur des blocs de lignes ou colonnes. Pourquoi est-ce valide ?

Indications ou solutions pour l'exercice 26.14 – Commencer par le cas $n = 2$, par opérations sur les lignes et les colonnes. Les traduire ensuite matriciellement et aviser.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.15 – Opérations sur les lignes, en agissant sur les deux termes I_n de gauche.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.16 – Réduire le problème à l'étude de l'existence d'une matrice inversible de la forme $P_1 + \lambda P_2$, pour certaines matrices P_1 et P_2.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.17 –
- Retrancher et ajouter une homotétie. Étudier l'inversibilité à l'aide du déterminant.
- On peut aussi faire une construction explicite, en utilisant une décomposition de l'espace de départ en $\mathrm{Ker}(f) \oplus S$ et de l'espace d'arrivée en $\mathrm{Im}(f) \oplus T$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.18 – Déplacer A de λI_n et voir l'effet sur l'inversibilité.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.19 –
1. Vérifier que c'est un sous-anneau. Exprimer l'inversibilité d'un élément à l'aide du déterminant, puis exprimer l'inverse pour vérifier qu'il s'écrit de la bonne forme.
2. $(x, y) \mapsto M(x, y)$ est injectif. Il suffit de vérifier l'existence d'un $a \in \mathbb{F}_5$ non carré.
3. De même. On pourra constater que $x \mapsto x^2$ n'est pas injective dans $\mathbb{F}_p$, donc pas surjective.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.20 –
1. Leur déterminant est non nul (étudier leur degré)
2. Le montrer dans le cas inversible. Dans le cas non inversible, se ramener au cas inversible grâce à la question 1.
3. Construire le corps des fractions et utiliser la question 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.21 – Utiliser des opérations sur les colonnes pour rendre toutes les colonnes sauf une paires.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.22 – Se ramener à $\det(I_r + Y) = \det(Y)$ pour tout Y, où $r = \mathrm{rg}(A - B)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.23 – Exprimer l'hypothèse sous forme d'un produit matriciel impliquant une matrice M de diagonale nulle, les autres coefficients étant 1 ou -1. Montrer que la sous-matrice des $2n$ premières lignes et $2n$ dernières colonnes est inversible, en calculant son déterminant après réduction modulo 2. En déduire la dimension du noyau de M et conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 26.24 – Factoriser $A^n + B^n$ avec les racines de l'unité, et regrouper les facteurs conjugués. Utiliser le fait que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

27

Algèbre bilinéaire

Indications ou solutions pour l'exercice 27.1 – Mettre la forme quadratique sous forme de combinaison linéaire de carrés (par mises sous forme canoniques successives).

Indications ou solutions pour l'exercice 27.2 – Mettre la forme quadratique sous forme de combinaison linéaire de carrés, et discuter suivant le signe des coefficients.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.3 – Symétriser l'expression en équiilibrant les ordres de dérivation.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.4 – À quelle condition une somme (infinie ou non) de termes positifs est-elle nulle ?

Indications ou solutions pour l'exercice 27.5 – Exprimer la forme quadratique associée en introduisant des polynômes.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.6 – Conséquence directe d'un autre exercice.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.7 – Considérer un changement de base de la base canonique vers une base orthonormale pour C.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.8 –

1. Calculer $B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1})$. On pourra faire apparaître un $B-A$, pour simplifier le terme $(B-A)^{-1}$.
2. Utiliser un autre exercice pour justifier qu'il suffit de montrer que $B(B-A)^{-1}A$ soit la matrice d'un produit scalaire. Essayer de rendre l'expression symétrique.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.9 – La définition du produit scalaire énonce une prapriété équivalente à $AX=0$, s'écrivant à l'aide du produit scalaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.10 – Exprimer l'unique candidat à l'aide de la formule de polarisation. On pourra utiliser la formule de l'énoncé en introduisant successivement les termes $\frac{y}{2}$, $\frac{x'}{2}$ et $\frac{x}{2}$, afin de relier $\|x+x'+y\|$ et $\|x+x'\|$, puis d'éliminer successivement les termes où apparaissent des $\frac{1}{2}$.
Montrer ensuite par récurrence que $\varphi(x,ky)=k\varphi(x,y)$ pour $k\in\mathbb{N}$ puis $k\in\mathbb{Z}$, puis $k\in\mathbb{Q}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.11 – Séparer une relation entre $e_1,\dots,e_n$ en $x=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i = \sum_{j\in J}\lambda_j e_j$, où les λ_i sont tous positifs. Considérer $\langle x,x\rangle$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.12 – Par récurrence en utilisant une inégalité classique.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.13 – Introduire un certain produit scalaire.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.14 – Introduire des produits scalaires adaptés.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.15 – Introduire un produit scalaire adapté.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.16 – Choisir convenablement la matrice A. Cela s'apparente au 1-trick.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.17 – Il y a une petite inégalité de Cauchy-Schwarz qui se cache derrière, après avoir explicité avec les coefficients.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.18 – Évident matriciellement !

Indications ou solutions pour l'exercice 27.19 – Utiliser la deuxième égalité avec $x = e_j$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.20 – Pour le caractère défini, montrer par récurrence sur n que si pour tout $k \in [[0, n]]$ $P^{(k)}(a_k) = 0$ et $\deg(P) \leqslant n$ alors $P = 0$.
Pour trouver une b.o.n., orthonormaliser la base canonique. On pourra faire le calcul préliminaire des $\langle X^i, X^j \rangle$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.21 – Montrer que $F^\perp = \{0\}$ (par l'aburde). On a donc $(F^\perp)^\perp \neq F$, et F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires. À voir comme un contre-exemple du cours.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.22 – Un des sens se fait à l'aide d'une identité remarquable classique en cas d'orthogonalité. Pour l'autre, raisonner par la contraposée en développant $\|x + \lambda y\|^2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.23 –

2. Pour obtenir la relation, il suffit de montrer que $XP_{n+1} \in \mathrm{Vect}(P_n, P_{n+1}, P_{n+2})$, donc que les coordonnées sur les autres vecteurs de la b.o.n. sont nulles. Comment s'expriment ces coordonnées ?
3. Contraposée de la propriété de positivité de l'intégrale.
4. Considérer $\langle Q, P_n \rangle$. Que dire du signe de QP_n.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.24 –

1. IPP, en remarquant que 1 ert -1 sont racines de forte multiplicité de P_n.
2. Vérifier l'égalité des drapeaux, et la condition de signe nécessaire pour avoir l'unicité dans le théorème d'orthonormalisation de GS. Pour ce signe, on pourra encore procéder par IPP.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.25 –

1. Par comparaison à Riemann aux deux bornes.
2. Toujours le même principe
3. Les relations s'obtienne par calcul direct.
4. L'intégrale s'exprime bien comme limite de dérivées de h. Calculer ces limites par CC, en montrant par récurrence que ces dérivées ont une certaine forme.
5. Montrer que la famille est orthonormale, et définie même drapeau que la bc. Vérifier l'hypothèse de signe (par IPP) pour obtenir l'unicité dans GS.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.26 –

1. Si la famille est liée, trouver une relation entre les colonnes de $G(x_1,\dots,x_n)$. Réciproquement, si la famille est libre, qu'est G pour le ps et cette famille ?
2. En notant M la matrice de $(x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathcal{B}$, trouver une relation entre G, M et ${}^tM$.
3. Cas $x \notin F$: montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(x,x_1,\dots,x_p)| = d(x,F)|\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)|$, en choisissant $\mathcal{B}$ bon de $G = F + \mathrm{Vect}(x)$, complétée d'une b.o.n. de F. Remarquez qu'on peut remplacer dans le déterminant x par sa composante sur le vecteur de la base dirigeant l'orthogonale de F

Indications ou solutions pour l'exercice 27.27 –

1. Faire le rapprochement avec le procédé d'orthonormalisation.
2. Considérer $x+y$. Utiliser la question précédente. On trouve $u = 0$

Indications ou solutions pour l'exercice 27.28 – Traduire ${}^tA_iA_j = 0$ comme une condition d'orthogonalité de certains sev de $\mathbb{R}^n$ définis à partie de A_i et A_j.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.29 – Que doit vérifier u par rapport au noyau de φ ?

Indications ou solutions pour l'exercice 27.30 – Trouver une bon de F ou de $F^\perp$ pour projeter.

1. bon de F_1 : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$.
2. bon de F_2 : $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}9&3&6\\3&1&2\\6&2&4\end{pmatrix}$.
3. bon de F_3 : $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&2&1\\2&2&4&2\\1&1&2&1\end{pmatrix}$
4. $F^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$.
5. $F^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&5&-2&4\\0&-2&8&2\\0&4&2&5\end{pmatrix}$
6. bon de F_6 : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$. Réponse : $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&3&0&3\\3&2&-2&1\\0&-2&8&2\\3&1&2&2\end{pmatrix}$
7. Réponse : $M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&2&2&-4\\2&9&-1&2\\2&-1&9&2\\-4&2&2&6\end{pmatrix}$
8. bon de $F^\perp$: $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1\end{pmatrix}$ et $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{287}}\begin{pmatrix}13&2&-7&8&1\end{pmatrix}$

   Réponse : $M = \frac{1}{41}\begin{pmatrix}9&8&13&-9&4\\8&17&2&-14&-12\\13&2&34&8&1\\-9&-14&8&26&-7\\4&-12&1&-7&35\end{pmatrix}$.

9. bon de F_9 : $(\sqrt{3}(X-1))$. Réponse : $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. b.o.n. de F_{10} : $f_1 = \sqrt{3}\cdot X$, $f_2 = \sqrt{5}\cdot(4X^2-3X)$. Réponse : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -\frac{10}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.31 –

1. Projeter sur l'orthogonal. Réponse : $M = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & -1 & 4 \\ -1 & 17 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Réponse : $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Indications ou solutions pour l'exercice 27.32 –

1. (a) Pour H : $F \cap G \subset H \subset F$ facile. Si $x \in H$, $x - p_G(x)$ vérifie deux hypothèses d'orthogonalité.
   (b) Considérer des supplémentaires orthogonaux S_F et S_G de $F \cap G$ dans F et G respectivement, et montrer que $S_G \subset F^\perp$, puis décomposer E en somme directe orthogonale.
2. (a) Décomposer $g \in G$ dans $F \oplus F^\perp$.
   (b) À partir de (a) écrire une décomposition en $\oplus$ de E.

Les deux dernières questions sont des applications de ce qui précède.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.33 – Considérer $\|\lambda x + y\|^2 - \|p(\lambda x + y)\|^2$ où $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.34 –

1. Décomposer x et y dans une certaine $\oplus$
3. Montrer que si $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.35 –

1. Écrire $x = x - p(x) + p(x)$.
2. À quel endroit de la matrice de p dans la b.o.n. retrouve-t-on les termes de la somme ?

Indications ou solutions pour l'exercice 27.36 – Montrer que $E = F^\perp \overset{\perp}{\oplus} (F \cap G) \overset{\perp}{\oplus} G^\perp$. On pourra remarquer que $G^\perp \subset F$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.37 –

- La deuxième inégalité s'obtient en remarquant que $|a_{i,j}| \leqslant 1$ (considérer la norme des colonnes)
- La troisième cache CS
- La première est un peu plus délicate. On peut décomposer $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la bon des colonnes, et considérer le carré de sa norme.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.38 – Exprimer ${}^t\exp(A)$ sous forme d'une exponentielle d'une matrice.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.39 – Comparer ${}^tAA$ à A

Indications ou solutions pour l'exercice 27.40 – Considérer $\det((A+B)(A-B))$ et se souvenir que le déterminant est invariant par une certaine transformation qui intervient lorsqu'on a affaire avec des matrices orthogonales.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.41 – Comment contrôler le caractère orthogonal par rigidité ?

Indications ou solutions pour l'exercice 27.42 –

1. Polarisation
2. Définir u par rigidité à partir d'une bon de $\mathrm{Im}(f)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.43 – Considérer une bon $(b_1, \dots, b_n)$ et remarquer que $b_1 + b_2 \perp b_1 - b_2$. L'utiliser pour comparer les coefficients k_1 et k_2 associés à b_1 et b_2.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.44 – L' égalité provient du caractère isométrique. Pour $V^\perp$, se servir de la conservation du ps par une isométrie.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.45 – Exprimer $\|f(x)\|^2$. Réponse : $\alpha\|a\|^2 = -2$.

Indications ou solutions pour l'exercice 27.46 –

1. Voir un autre exercice.
2. Utiliser la conservation du ps par f et par f^{-1}.
3. Exprimer $f^2(x)$ en introduisant f^{-1} et une valeur propre.
4. Cours.
5. Par récurrence forte sur la dimension, en cherchant d'abord une vp de f, et sinon, de $f + f^{-1}$.

28
Combinatoire

Indications ou solutions pour l'exercice 28.1 – Considérer les disques groupés comme un unique coffret ; ainsi on est ramené à compter le nombre de rangements dans les coffrets, puis le nombre de façon de permuter les disques et coffrets entre eux :

1. $7!4!$ et $(4!)^3$
2. $3! \times 2 \times (4!)^2$

Indications ou solutions pour l'exercice 28.2 –

1. $\binom{32}{8}$
2. $\binom{4}{4}\binom{28}{4}$
3. $\binom{32}{8} - \binom{21}{8}$
4. $\binom{4}{2}\binom{16}{8} - 2\times 4$: ne pas compter plusieurs fois les mains unicolores ! (peut se formaliser avec le crible)
5. $\binom{24}{8}$
6. $\sum\limits_{k=0}^{3} \binom{8}{k}\binom{24}{n-k}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.3 –

1. (a) $\dbinom{n}{k} A_r^k A_b^{n-k}$.

   (b) $\dbinom{k-1}{m-1} A_r^m A_b^{k-m} A_{b+r-k}^{n-k}$.
2. (a) $\dbinom{n}{k} A_b^{n-k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\min(r-m,n-m)} \binom{k-1}{m-1} A_b^{k-m} A_{b-k+m}^{n-m-i}$.
3. (a) $\dbinom{n}{k} A_r^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\min(r-m,n-m)} \binom{k-1}{m-1} A_r^m A_{r-m}^i$
4. (a) $\dbinom{n}{k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\min(r-m,n-m)} \binom{k-1}{m-1}\binom{r-m}{i}$.

Dans les exercices qui suivent, on tentera dans la mesure du possible, de donner une démonstration algébrique basée sur l'utilisation de la formule du binôme, ainsi qu'une démonstration combinatoire. L'étoilage des exercices se réfère surtout à la démonstration combinatoire

Indications ou solutions pour l'exercice 28.4 – (Formule de Vandermonde)
Plusieurs méthodes possibles :

- Récurrence sur p, avec la formule de Pascal
- Développer $(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$ avec 3 formules du binôme et identifier les coefficients du monôme de degré n.
- Compter les sous-ensembles à n éléments de $[\![1,p+q]\!]$, en les triant suivant le nombre de termes qu'ils ont dans $[\![1,p]\!]$. Autrement dit, si on dispose de p roses et q tulipes, compter tous les bouquets possibles de n fleurs, et les trier suivant le nombre de roses.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.5 –

1. Principe de l'interrupteur (bijection rajoutant ou enlevant un élément fixé) pour comparer le nombre de sous-ensembles de cardinal pair et le nombre de sous-ensembles de cardinal impair. Réponse : 0 (sauf si $n = 0$)
2. Principe du comité-président, sans fixer la taille du comité. Réponse : $n2^{n-1}$.
3. « Bijecter » les comités pairs et les comités impairs par un principe de l'interrupteur. Attention, le présient n'aime pas qu'on se débarrasse de lui ! (avoir un interrupteur de secours !). Réponse : 0 sauf si $n = 1$ (correspondant au cas où on n'a pas d'interrupteur de secours, le président passe à la trappe !)
4. Principe du comité-président dans le Meilleur des Mondes : le comité peut être formé d'Alphas ou Bêtas, mais le préident est nécessairement un Alpha. Réponse : $n\binom{2n-1}{p-1}$.
5. Un bouquet de tulipes et roses, en triant suivant le nombre de tulipes. Réponse : $\binom{2n}{n}$; ce n'est en fait qu'un cas particulier de Vandermonde.
6. Le principe combinatoire de Vandermonde ne s'applique pas bien ici. Il vaut mieux faire le choix de deux sous-ensembles dans le même ensemble de cardinal n, par exemple $[\![1,n]\!]$. Le carré du coefficient binomial est le choix d'un couple (A,B) formé d'un sous-ensemble A de cardinal k et d'un sous-ensemble B de cardinal $n-k$. Utiliser le principe de l'interrupteur, en faisant passer un élément de A vers B ou l'inverse. Prendre cet élément le plus petit possible (comment s'exprime-t-il avec les différence symétrique). Il y a un cas où ce n'est pas possible de trouver un tel élément. C'est ce qui donne notre second membre. Réponse : $(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n est pair, 0 sinon.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.6 –

- Par télescopage, avec la formule de Pascal.
- Plus amusant : l'interpréter combinatoirement, en passant les termes négatifs de l'autre côté, afin d'avoir une égalité entre termes positifs. Il s'agit alors de comparer le nombre de sous-ensembles de cardinal impair et de sous-ensembles de cardinal pair de $[\![1,n]\!]$, mais en restant avec des cardinaux inférieurs à p. On utilise un principe d'interrupteur : on crée une pseudo-bijection entre sous-ensembles de cardinal pair et sous-ensembles de cardinal impair vérifiant cette condition de cadinalité en enlevant ou rajoutant l'élément 1 selon qu'il est ou non dans l'ensemble. Le seul cas qui nous fait sortir du contexte de l'exercice est le cas d'un ensemble de cardinal maximal p, ne contenant pas 1, donc auquel on ajoute l'élément 1 : on obtient un cardinal trop gros. C'est cela qui nous donne le second membre de l'égalité recherchée.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.7 – Compter le nombre d'applications d'un sous-ensemble à p éléments de $[\![1,p+q]\!]$ à valeurs dans $\{0,1\}$. La somme de gauche trie ces applications suivant le nombre d'antécédents de 0.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.8 –

1. Récurrence sur n, en appliquant à deux reprises la formule de Pascal.
2. Écrire le terme 2^k à l'aide de la formule du binôme.
3. Interprétation combinatoire : On compte le nombre de sous-ensembles à au moins $n+1$ éléments de $[\![1,2n+1]\!]$. Les trier suivant la valeur de leur $n+1$-ième élément.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.9 –

1. Récurrence sur n en utilisant la formule de Pascal
2. Exprimer de deux manières différentes $(x-1+1)^n$ et identifier les coefficients.
3. Considérer les triplets (A,B,x), avec $A\subset B\subset [\![1,n]\!]$ et $x\in A$. Principe de l'interrupteur pour changer le cardinal de B (mais sans toucher à A) : il faut choisir un interrupteur variable, dans $B\smallsetminus A$, qu'on pourra facilement retrouver dans l'autre sens (donc ne pas le choisir n'importe comment). C'est possible, sauf si $n=m$.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.10 – Remarquer que le nombre de segments s'exprime facilement, un segment étant déterminé par le choix de ses deux extrémités, donc le choix d'un sous-ensemble à deux éléments de l'ensemble des sommets.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.11 – Construire une espèce de fonction indicatrice à 3 valeurs. Réponse : 3^n.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.12 – Réponse : $(n+2)!\frac{n+3n^2}{24}$

Indications ou solutions pour l'exercice 28.13 –

1. Déterminé par le choix du sous-ensemble des n images.
2. Se ramener au cas précédent par un principe de l'accordéon.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.14 –

1. C'est l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans un ensemble à $k-\ell$ éléments.
2. Exprimer l'ensemble des fonctions non surjectives à l'aide d'une construction ensembliste simple sur les E_i, puis formule du crible.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.15 –

1. Considérer l'application de l'ensemble des surjections vers l'ensemble des partitions à k parts qui à une surjection f associe la partition des images réciproques de chaque élément de $[\![1,k]\!]$ puis utiliser un certain résultat champêtre. Réponse : $s(n,k)=k!S(n,k)$
2. Classant les partitions selon que le singleton $\{n\}$ en est une part ou non.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.16 – Réponse : $9!/(3!2!)=30240$.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.17 – Se comprend bien avec les cycles. On passe de D_nD_{n+1} en insérant $n+1$ dans un cycle déjà existant. On passe de D_{n-1} à D_n en ajoutant une transposition (nécessitant le décalage d'une partie des éléments).

Indications ou solutions pour l'exercice 28.18 –

1. Trier les permutations suivant le nombre de points fixes : une fois choisis les points fixes, il reste à trouver une permutation sans point fixe des autres éléments.
2. Cela découle en fait de la formule d'inversion de Pascal. On peut s'en sortir directement en remarquant qu'il suffit de montrer que $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$. Cette égalité se démontre bien par récurrence forte, en isolant D_n dans l'expression de la question 1.
   La limite est $\frac{1}{\mathrm{e}}$ (série exponentielle)
3. Passer par le dénombrement des permutations laissant un élément donné fixe. Dénombrer ensuite l'union par le crible, et passer au complémentaire.
4. Utiliser la question 3. Majorer le reste de la série, en remarquant que c'est une série alternée.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.19 –

1. Principe de l'accordéon pour tout resserer. Réponse : $\binom{n-k+1}{k}$.
2. (a) Exprimer une relation de récurrence sur les A_n, en triant les ensembles suivant qu'ils contiennent n ou non.
   (b) Découle des deux questions précédentes, en triant les ensembles considérés suivant leur cardinal.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.20 – Généralisation de Vandermonde : faire un bouquet constitué de tulipes rouges, tulipes jaunes, tulipes blanches, tulipes noires, roses rouges, roses roses, roses blanches, lys (blancs, évidemment) etc.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.21 – Choisir l'image, on a nécessairement l'identité sur l'image, puis compléter de façon quelconque (à valeurs dans l'image) ailleurs.
Réponse : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} k^{n-k}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.22 –

1. Se ramener à une situation d'équiprobabilité pour pouvoir faire des dénombrements : on peut pour cela supposer que la liste (infinie) des choix des tirages dans la poche gauche ou droite est établie à l'avance. On peut remarquer ensuite qu'au bout de $2N+1$ tirages au plus, l'expérience décrite s'arrête. On peut donc se contenter de l'étude des $2N+1$ tirages et regarder dans l'ensemble des successions de $2N+1$ choix, lesquelles vont faire qu'on tombe en panne. On peut représenter les choix sous forme de chemin monotone dans le plan. L'expérience s'arrête au moment où l'on sort strictement du carré $N \times N$. On tombe en panne d'allumettes si le chemin sort stritement du carré par le coin supérieur droit. Compter les chemins de longueur $2N+1$ sortant du carré par ce coin.
2. Il suffit d'effectuer un tri des chemins de longueur $2N+1$ suivant l'endroit par où ils sortent du carré, sachant qu'ils sortent tous du carré.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.23 – Trier suivant le nombre de pas à droite. Après avoir positionné les pas à droite, colorier les pas à droite et les pas vers le haut. De façon directe, sans faire ce tri, remarquer qu'à chaque pas on a le choix entre $x+y$ pas de type différent.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.24 – Surélever de 1 toute la partie initiale jusqu'à la dernière rampe de longueur paire (s'il n'y en a pas, redescendre tout de suite).

Indications ou solutions pour l'exercice 28.25 – Méthode 1 : par récurrence, lorsqu'on ajoute un $n+1$-ième point en triant les autres points de 0 à $n-1$ dans l'ordre du cercle en partant d'un voisin du point rajouté, la corde reliant le point rajouté au i-ième point rajoute $i(n-1-i)$ points d'intersection (avec toutes les cordes reliant l'un des i points d'un côté, à l'un des $n-1-i$ points de l'autre côté de ladite corde). On est ramené à des calculs de somme
Méthode 2 : étant donnés 4 points du cercle, les cordes issues de ces 4 points ont exactement une intersection. Il y a donc autant d'intersections que de sous-ensembles à 4 éléments.
Réponse : $\binom{n}{4}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 28.26 – Raisonner sur les colonnes. Combien y a-t-il de colonnes différentes possibles ?

29

Espaces probabilisés, calculs de probabilité

Indications ou solutions pour l'exercice 29.1 – Construire un contre-exemple, à l'aide de tribus non triviales les plus petites possibles.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.2 – La décrire explicitement en formant des unions. Réponse : 2^n.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.3 –

1. Classique : il s'agit de construire un objet vérifiant une propriété de minimalité : faire une construction « par le haut ».
2. Montrer que les $A(\omega)$ sont soit disjoints soit égaux. Unicité : toute part de l'un est disjointe ou égale à une part de l'autre. Tribu engendrée : décomposer un événement E comme union de singletons.
3. Décrire explicitement la tribu engendrée par un système complet $\mathcal{C}$. Son cardinal est $2^{\mathcal{C}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.4 – Réponse $2^n - 1$. Peut se faire par récurrence.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.5 – Récurrence sur n.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.6 –

1. Juste de la manipulation d'événements (se rappeler que $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$),; pour vérifier les différentes propriétés d'une classe monotone.
2. Procéder en 2 temps en montrant d'abord que $\sigma(\mathcal{D})$ est indépendant de $\mathcal{C}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.7 – CN : si A et B sont indépendants, que peut-on dire de A et $\overline{B}$?
CS : Écrire $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et de même pour B. En déduire une expression de $P(A)P(B)$, et la simplifier à l'aide de l'hypothèse de l'énoncé.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.8 –

1. Grâce aux hypothèses, le produit de $P(A)$ et $P(B)$ est nul.
2. Considérer A et B tous les deux quasi-impossibles mais non impossibles.
3. Incompatible avec lui-même : seulement $A = \varnothing$. Indépendant de lui-même : tous les événements quasi-impossibles ou quasi-certains.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.9 – On a 4 relations fournies par les hypothèses. Dans celle différente des autres, utiliser la formule du crible (pour se ramener à des intersections) et simplifier avec une des 3 autres. Exprimer les probas des intersections avec 2 autres relations, simplifier, conclure.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.10 – Montrer que cela représente la moitié des cas, par symétrie. On pourra remarquer que le total tiré ne peut pas être égal au total non tiré.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.11 – Plusieurs pistes possibles :

- Par récurrence, en utilisant la FPT sur le SCE form du résultat du dernier tirage, pour se ramener à 1 tirage en moins. C'est classique et se retrouve dans de nombreux exercices
- Par un argument de symétrie : transformer le résultat d'un des dés, de façon à changer la parité.
- Compter le nombre de dés impairs, suivant une loi classique. Combien faut-il de dés impairs pour obtenir une somme paire ?

Indications ou solutions pour l'exercice 29.12 – Travailler modulo 10 puis modulo 100 pour montrer que c'est équivalent à $N \equiv 71[100]$. Réponse $\frac{1}{100}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.13 – Par combinatoire, en considérant l'événement contraire, on est ramené à un exemple du cours.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.14 – Privilégiez la méthode combinatoire :

1. Remarquez que l'ordre des tirages importe peu. On peut tirer une poignée de boules simultanément sans que ça change les probabiltiés. Réponse : $\dfrac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$
2. Là les tirages doivent être ordonnés. Toujours combinatoirement, on peut se contenter d'étudier les n premiers tirages, les suivants ne modifieront plus le résultat. Résultat : $\dfrac{A_r^{n-1}A_b^1}{A_{r+b}^n}$.
3. Précéder de même, il faut choisir l'emplacement des k premières BB tirées : obtenir la k-ième BB lors du n-ièlme tirage se fait avec une probabilité de $\dfrac{\binom{n-1}{k-1}A_b^k A_r^{n-k}}{A_{b+r}^n}$

Indications ou solutions pour l'exercice 29.15 – Évacuer le cas G abélien. Considérer le centre $Z(G)$ et montrer que son cardinal est inférieur à $|G|/4$ (on pourra se souvenir d'un exercice sur les groupes donnant une propriété du quotient $G/Z(G)$). Raisonner sur le complémentaire. Après avoir tiré un premier élément x, on pourra s'intéresser à son centralisateur C_x (l'ensemble des éléments commutant avec x).

Indications ou solutions pour l'exercice 29.16 –

1. Raisonner dé par dé, chaque dé devant avoir amené un 5 avant le n-ième lancer.
2. D'après question 1
3. Modéliser l'expérience en supposant que dans chaque jet effectué, on lance les 5 (ou moins) dés successivement. Considérer la suite des valeurs obtenues à cette succession de lancers.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.17 – Ici, ne pas vouloir être trop précis dans la définition des événements simplifie les choses. On pourra considérer l'événement A_n : après la n-ième étape, l'urne n'est pas unicolore. Pour passer de A_n à A_{n+1}, on pourra considérer l'événement B_{n+1} : lors de la $n+1$i-ième étape, on tire de la première urne la couleur de boule qu'il y n'y a pas majoritairement dans cette urne.
L'idée se comprend facilement, ce à quoi il faut s'attacher ici est une rédaction rigoureuse.

1. Réponse : $\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$.

2. Réponse : Par σ-additivité, sommer tout : réponse 1.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.18 –

1. FPT avec le SCE défini par A_n : le premier P est obtenu au n-ième lancer.
2. De même, mais ici, A_n étant réalisé, on ne connait pas précisément le nombre de boules rouges rajoutés : ce nombre est le nombre de succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, donc suit une loi classique. Ainsi, il faut encore reconditionner suivant le nombre BR ajoutée, donc encore la FPT. pour calculer $P_{A_n}(B)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.19 – Soit X le nombre de tirages effectués. Décrire les boules tirées pour la réalisation de $[X = n]$, et écrire cet événement sous forme d'une intersection. A-t-on indépendance des différents tirages ? Quelle formule du cours permet de calculer dans ce cas la probabilité d'une intersection ?

Indications ou solutions pour l'exercice 29.20 –

1. Réponse : $\frac{3}{4}$ (Par complémentation)
2. Réponse : $\frac{2}{5}$. remarquez que c'est une probabilité conditionnelle qu'on cherche à calculer. Utiliser la formule adaptée à cette situation.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.21 –

- FPT
- Encore FPT, appliquée à une mesure de probabilité conditionnelle
- Bayes (on remonte le temps)
- FPT pour trouver une relation de récurrence.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.22 – Montrer que $R = Q^2$ et trouver une contradiction sur la multiplicité des racines. C'est valable avec des dés à n faces, si ça existe ($n \geqslant 2$).
Plus amusant, c'est aussi valable pour deux dés pipés de façon pas forcément identique. C'est un peu plus compliqué, mais ça reste abordable avec des techniques de Sup (considérer la décomposition en facteurs irréductibles)

Indications ou solutions pour l'exercice 29.23 –

1. FPC
2. Intoduire l'événement D_n : les disques sont de compositeurs 2 à 2 distincts, et trouver une relation entre $P(D_{n+1})$ et $P(D_n)$, à l'aide d'un conditionnement.
3. (a) Bayes. Cela nécessite de connaître $P(B_n)$ (soit par le calcul en formant une relation de récurrence, soit par un argument de symétrie)
   (b) Jouer avec les probas conditionnelles, à la façon de Bayes
   (c) Idem.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.24 – Soit p_k la probabilité que la k-ième personne ait la bonne information. Former une relation de récurrence sur p_k. On peut aussi remarquer qu'il faut un nombre pair de changements, ce qui nous ramène à une somme des termes pairs d'une somme du binôme.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.25 – Au mépris d'un conflit de notation flagrant, notons A l'événement A est ruiné. Faire varier le capital de départ de a (à somme constante $a + b = N$). Ainsi, notant X la valeur de ce capital, on s'intéresse à $u_a = P(A \mid X = a)$. À l'aide de la FPT, trouver une relation entre u_a, u_{a-1} et u_{a+1}.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.26 – Se ramener à un calcul matriciel : pour cela, définit $X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix}$, où A_n est l'événement consistant à de retrouver au sommet A après le n-ième saut. Trouver une relation matricielle du type $X_{n+1} = AX_n$, et se ramener au calcul de A^n. Celui-ci peut être fait par exemple par formule du binôme.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.27 – À quelle condition le jeu ne s'est-il pas encore arrêté au bout de 2n parties. Notant A_n cet événement, relier $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 29.28 – Soit p_k la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne k. Former une relation de récurrence sur p_k.

30

Variables aléatoires

Indications ou solutions pour l'exercice 30.1 – Se ramener à la formule du binôme négatif. Comme parfois dans le cours, on poura simplifier le calcul en ne considérant pas directement $E(X)$ mais un translaté. Réponse : $E(X) = \frac{3}{2}$, $V(X) = \frac{13}{4}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.2 –

1. Combinatoire. $E(X) = \frac{2n+1}{n+1}$. Testez la cohérence intuitive.
2. Considérer Y : rang d'apparition de la 2e boule blanche.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.3 – Faire du dénombrement. Reconnaître en fait un exercice du chapitre de combinatoire.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.4 –

- Se ramener à une situation d'équiprobabilité en prolongeant l'expérience en vidant l'urne. Dénombrer en positionnant les BN. On peut aussi utiliser la FPC en partant des derniers tirages. Réponse, pour $k \geqslant n$, $P(X = k) = \dfrac{n \cdot n!(k-1)!}{(k-n)!(2n)!} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.
- Se ramener à une formule de sommations de coefficients binomiaux. Réponse $\dfrac{n(2n+1)}{n+1}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.5 – Formule du crible avec les événements $A_{i,n}$: le i-ième autocollant n'a pas été obtenue lors des i premiers achats.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.6 –

1. Remarquer que Y_n ne peut pas prendre beaucoup de valeurs différentes. $P(Y_n = 2)$ se calaule facilement par FPC, $P(Y_n = 1)$ en distinguant plusieurs cas, ou en formant une relation de récurrence. Et pour la dernière, qu'est-ce que vous suggérez pour économiser les calculs ?
2. Exprimer $Z_n = X$ en fonction de Y_n et Y_{n+1}
   Réponse : $P(Z = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2}{3^k}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.7 – C'est peut-être une indication bête, mais faites un schéma pour bien comprendre l'expérience : une urne, des boules de 2 couleur, une flèche qui revient dans l'urne pour la boule rose, une flèche qui sort définitivement pour les BB. Ça n'apporte rien de théorique, mais dans ce type d'exos (ce n'est largement pas le seul), un dessin permet de mieux visualiser les choses, et de mieux comprendre l'expérience.
Dans chacun des deux cas, combien de fois a-t-on dû tirer la BR ? A quel tirage ? Attention, le fait de mélanger tirages avec et sans nous oblige un peu à abandonner le raisonnement combinatoire et à nous diriger vers la FPC.

On est ramené à une somme harmonique, et l'équivalent classique de sa somme partielle.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.8 –

1. Notant X_n le nombre de marches franchies, X'_n le nombre de pas double, reconnaître la loi de X'_n, et trouver une relation simple entre X_n et X'_n.
2. (a) Discuter suivant la nature du premier pas.
   (b) Former une relation de récurrence pour $u_n = E(Y_n)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.9 – Indication valable pour toute variable calculant un min/max : Exprimer la fonction de répartition plutôt que les probabilités ponctuelles. Cela ramène à des unions ou intersections.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.10 – Loi : $P(X = k) = \frac{k-1}{k!}$
Espérance : $E(X) = \mathrm{e}$
Variance : $V(X) = \mathrm{e}(3 - \mathrm{e})$
$E((-1)^X X) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.11 –

1. $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) E(X_n) + \frac{3}{4}$. Exprimer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n = k$, puis l'espérance conditionnelle.
2. $E(X_n) = \frac{3}{2} \cdot S$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.12 – FPT sur le SCE défini par X. Ou décrire chaque $[Y = k]$ comme union de 2 cas. On obtient $E(Y) = np + \frac{n+1}{2}(1 - p)^n$. Essayez de vous ramener à $E(X)$ pour ne pas avoir besoin de refaire le calcul de la somme binomiale.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.13 – Il y a une variable binomiale qui traîne quelque part ici. Exprimer X_n à l'aide de cette variable binomiale. $E(X_n) = n(2p - 1)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.14 –

1. Montrer, avec le théorème de transfert, que $E(\mathrm{e}^{-sX_n}) = (p\mathrm{e}^{-s} + q\mathrm{e}^{s})^n$.
2. Majorer $P(Z_n \leqslant -\sqrt{n})$ par $nr^{\sqrt{n}}$, puis majorer $E(Z_n)$ en coupant la somme en $\sqrt{n}$ (ou à peu près).

Indications ou solutions pour l'exercice 30.15 – Introduire des variables aléatoires de Bernoulli X_k modélisant le fait que le jeton k peut ou non être dans la main. Exprimer X en fonction des X_k.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.16 – Chaque visiteur est confronté à une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$: choisir ou ne pas choisir la porte 1. Quelle est alors la loi de X_1 pour la mesure de probabilité conditionnelle $P_{N=n}$, N étant le nombre de visiteurs du parc.
Réponse : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1000)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.17 – C'est un temps d'attente dans une suite d'épreuves de Bernoulli. Le paramètre de ce temps d'attente peut aussi se ramener à une loi classique : le nombre de Pile doit être dans un certain ensemble de cardinal 2.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.18 –

1. Majoration
2. Complémentaire, limite monotone, et majoration de $P(X_n > n^{\beta})$.

3. Remarquer que l'événement précédent correspond à l'événement : un nombre fini de n vérifient $X_n > n^\beta$, et qu'il est alors inclus dans $\overline{A}$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.19 –

1. $P(S = j \mid X = k+1) = \frac{j}{n} P(S = j \mid X = k) + \frac{n-j+1}{n} P(S = j-1 \mid X = k)$
2. Former une relation de récurrence arithmético-géométrique pour l'espérance conditionnelle, à partir de la relation précédente. Utiliser ensuite la formule de l'espérance totale.

$$E(S) = n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}}\right).$$

Indications ou solutions pour l'exercice 30.20 –

1. Formule de l'espérance totale sur le SCE défini par N.
2. Utiliser la formule de l'espérance totale pour calculer dans un premier temps $E(X^2)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.21 –

1. Par théorème de transfert + binôme
2. Montrer que $E(Y_n) \to \mathrm{e}^p$. Utiliser Markov quadratique sur $Y_n - \mathrm{e}^p$ (ie Markov appliqué à $(Y_n - \mathrm{e}^p)^2$ (avec ε^2)), plutôt que BT qui nécessiterait de couper d'epsilonesques cheveux en 4.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.22 – Traduire la convergence presque sûrement par la définition de la limite, sous forme d'une intersection d'union d'intersection. Justifier que pour ε fixé, $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{n\geqslant N} (X_n - X) \leqslant \varepsilon\right) = 1$, et minorer $P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon)$ par un terme $1 - \delta$ à partir d'un certain rang en exprimant par δ la limite précédente.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.23 – Décomposer les différents événements en événements ponctuels pour la loi conjointe. En exploitant l'indépendance, on est ramené à des sommes doubles ou triples, les indices étant liés les uns aux autres par les relations définissant les événements qui nous intéressent.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.24 –

1. La somme doit valoir 1. La solution de l'équation qu'on obtient se « devine »
2. Trouver k et ℓ (les plus simples possibles) contredisant l'indépendance. Pas la peine d'exprimer le produit des lois marginales pour tout k et ℓ !
3. Théorème de transfert.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.25 –

1. Les lois de S et E conditionnellement aux valeurs prises par N sont connues. Utiliser ensuite une formule classique pour obtenir la loi inconditionnelle.
2. Écrire $(k+\ell)!P(N = k+\ell) = u_k v_\ell$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques On pourra pour cela exprimer $P(S = 0 \mid N = n)$ et $P(S = 1 \mid N = n)$ et en déduire que $n!P(E = n)$ est une suite géométrique. Peut-être une discussion à faire si $P(N = n) = 0$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.26 –

1. X_i suit une loi classique.
2. Si $i \neq j$, $X_i + X_j$ suit aussi une loi classique. Comment en déduire la covariance ?

Indications ou solutions pour l'exercice 30.27 –

1. Combinatoirement, ou par formule des probabilités totales, un événement ponctuel lié à (X,Y) fixant complètement les couleurs des premiers tirages. Inutile de s'intéresser aux tirages suivants.
2. Utiliser le théorème de transfert pour calculer $E(XY)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.28 –

1. Les variables ne sont pas indépendantes. Il faut donc calculer les covariances. Elles sont presque toutes nulles sauf...
2. Adapter la démonstration de la loi faible des grands nombres.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.29 – Bien prendre le temps de comprendre l'exercice, et les modalités de tirage, avec cette alternance de tirages avec et sans remise.

1. Le fait d'obtenir une BN au tirage $2j+1$ fixe complètement les tirages imparis précédents. Utiliser la FPC. Réponse $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. De même, un événement ponctuel lié à Y détermine complètement les premiers tirages.
3. Encore une fois, les événements qui nous intéressent déterminent la couleur à beaucoup (tous ?) de tirages, et la FPC permet de conclue
4. Exprimer X en fonction des X_i. Pour le calcul des covariances, distinguer suivant la parité. On pourra commencer par exprimer $P(X_{2i+k} = 1 \mid X_{2i} = 1)$. Si je ne me suis pas trompé,
$$V(X) = \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

Indications ou solutions pour l'exercice 30.30 –

1. Les choses se simplifie bien avec KH à 2 variables.
2. Remarquez que si $T = 0$, alors U est pair. Cela permet de voir comment contredire l'indépendance.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.31 –

1. Par le calcul : Décomposer $Z = k$ et $T - Z = \ell$ en toutes les possibilités sur X_1 et X_2 qui amènent ces valeurs.
2. L'exprimer en fonction de la variance de Z. La loi de Z ayant été calculée dans la question précédente, on est ramené à du pur calcul.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.32 –

1. Commencer par exprimer la loi conjointe de N_1 et N_2. Cela permet de se ramener au théoème de transfert pour toutes les espérance demandées.
2. Par développement du carré (avec covariance)

Indications ou solutions pour l'exercice 30.33 – Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour contrôler la convergence en probabilité. Majorer la variance en l'exprimant avec des covariances, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.34 – C'est juste du calcul. On peut utiliser la fomrule de l'espérance totale dans la question 3.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.35 – Cauchy-Schwarz appliquer aux variables de Bernoulli $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Les derniers exercices tournent autour de la notion d'estimateur. Étant donné un phénomène suivant une certaine loi $\mathcal{L}$ de type connu, mais dont un des paramètre θ est inconnu, (par exemple une loi de Bernoulli de paramètre inconnu p), un estimateur de θ est une variable aléatoire T_n définie à partir de variables indépendantes identiquement distrivuées $X_1, \dots, X_n$, suivant toutes la loi $\mathcal{L}$, et qui nous permettra d'estimer la valeur de θ en répétant un grand nombre de fois l'expérience. On dira qu'un estimateur est sans biais si $E(T_n) = \theta$ (ce qui nous permet d'estimer θ en moyenne). Par abus de langage, on appelle aussi souvent « estimateur de θ » la suite (T_n), si T_n admet une expression uniforme en les X_n. On dira alors que T_n est asymptotiquement sans biais si $E(T_n) \to \theta$. De manière générale, on appellera « biais » de l'estimateur T_n de θ la quantité $b_{T_n}(\theta) = E(T_n) - \theta$.
La meilleure notion de pertinence d'un estimateur est le risque quadratique, qui permet non seulement de mesurer le biais, mais également la concentration autour de la valeur à estimer. Un estimateur sera jugé d'autant meilleur que son risque quadratique est faible. Cette notion est étudiée dans l'exercice suivant, dont le résultat pourra être utilisé dans les exercices suivants
Enfin, on dit qu'un estimateur est convergent, s'il converge en probabilité vers le paramètre inconnu θ.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.36 –

1. Introduire $E(T_n)$ dans l'espérance définissant r_{T_n}. Développer le carré.
2. On peut faire de la chorurgie epsilonesque en utilisant Bienaymé-Tchbychev. Ou alors revenir à l'inégalité de Markov (dans sa version quadratique).

Indications ou solutions pour l'exercice 30.37 – Exercice essentiellement calculatoire. Exprimer toutes les variables avec les T_i afin de pouvoir exploiter leut indépendance. Notamment pour les calculs d'espérances de produits. En cas de biais, corriger l'espérance en rajoutant un coefficient multiplicatif. Comparer les deux estimateurs en comparant leur risque quadratique.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.38 – la première question est du cours. Pour l'étude de la convergence, on pourra utiliser 30.36 (en se souvenant comment on montre ce résultat) et majorer $E(P_n^2)$ par $E\left(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}\right)$.

Indications ou solutions pour l'exercice 30.39 – Pour l'étude des convergences, on pourra se ramener à un exercice précédent. Pour la dernière question, on pourra procéder par majoration, en s'inspirant aussi d'un exercice précédent.