

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Exercice 1. Protocole de vaccination en groupes

Une population de N individus est répartie en n groupes de k personnes chacun (donc $N = nk$). On suppose que dans cette population, la probabilité d'être porteur de *Plasmodium falciparum* (le parasite responsable de la forme la plus sévère du paludisme) est égale à $p \in]0; 1[$.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite. Pour éviter d'effectuer N tests (un par individu), on procède de la manière suivante :

- ▷ pour chacun des N individus, on prélève un échantillon de sang et l'on répartit ces N prélèvements selon n groupes prédefinis G_1, G_2, \dots, G_n (chaque groupe contenant k prélèvements) ;
- ▷ pour chaque groupe G_i , on extrait du sang de chacun des k prélèvements que l'on mélange pour obtenir un échantillon H_i ;
- ▷ on teste tous les échantillons H_1, H_2, \dots, H_n : si le test de H_i est négatif, aucun des individus du groupe G_i n'est porteur du parasite et si le test H_i est positif, on teste un à un les k prélèvements du groupe G_i pour détecter les individus infectés.

On note X le nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i est positif et T le nombre total de tests effectués par cette méthode.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Donner l'espérance et la variance de T en fonction de n et p .
3. Que représente la variable aléatoire $nk - T$? Déterminer $E(nk - T)$.
4. Dans la province d'Isfahan en Iran, la proportion d'individus infectés vaut $p = 0,092$. Pour des raisons techniques, le nombre de groupes n est préalablement fixé à la valeur n_0 . Quelle est la valeur optimale de k (c'est-à-dire la valeur de k pour laquelle $n_0k - T$ est maximale en moyenne)?

Exercice 2. Des dés (le cochon)

On dispose de deux dés. L'un est pipé, l'autre non mais on ignore lequel (et on ne cherchera pas à le savoir). Comment faire pour simuler un dé non pipé avec ces deux dés ?