FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- la trigonométrie ;
- les fonctions ;
- leses limites de fonctions ;
- la continuité ;
- la dérivabilité.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Fonction arc sinus

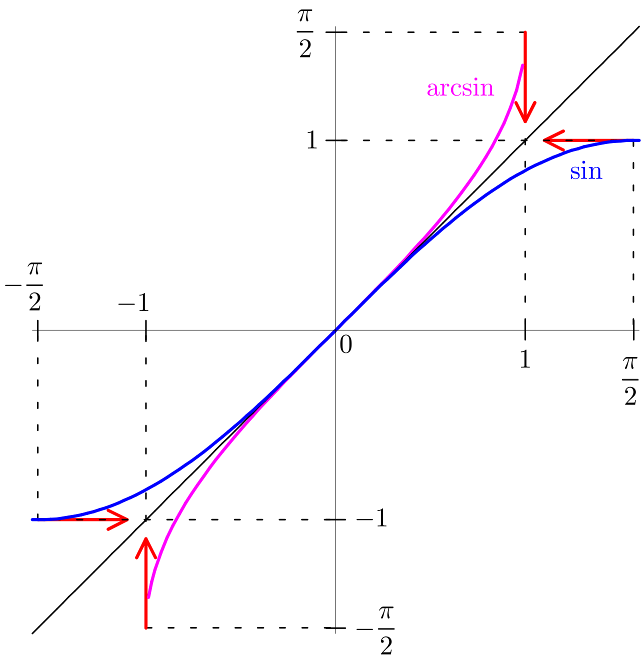
Connaissant la valeur du sinus d'un angle, votre calculatrice possède une touche $\boxed{\sin^{-1}}$ qui permet de retrouver la mesure de l'angle (qui appartient à $[-\pi/2; \pi/2]$). En termes mathématiques, cette touche correspond à la réciproque de la restriction du sinus à l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$. Dans ce paragraphe, nous décrivons cette fonction et ses propriétés.

Définition 1

La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$ est continue et strictement croissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection entre $[-\pi/2; \pi/2]$ et $[-1; 1]$. Son application réciproque, définie de $[-1; 1]$ dans $[-\pi/2; \pi/2]$ est appelée arc sinus et est notée arcsin :

$$\arcsin \left\{ \begin{array}{ccc} [-1; 1] & \longrightarrow & [-\pi/2; \pi/2] \\ s & \longmapsto & \arcsin s \end{array} \right.$$

Graphiquement, on obtient



On a

$$\sin\big|_{[-\pi/2;\pi/2]} \circ \arcsin = \mathrm{Id}_{[-1;1]} \qquad \text{et} \qquad \arcsin \circ \sin\big|_{[-\pi/2;\pi/2]} = \mathrm{Id}_{[-\pi/2;\pi/2]},$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arcsin s \\ s \in [-1; 1] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} s = \sin\theta \\ \theta \in [-\pi/2; \pi/2]. \end{array} \right.$$

La fonction arcsin avale donc un sinus et renvoie l'angle associé dans $[-\pi/2; \pi/2]$.
Par conséquent, pour calculer $\arcsin s$ où $s \in [-1; 1]$, on se pose la question :

« quel est l'angle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus vaut s ? »

Exemples :

- Les valeurs particulières de la fonction sinus permettent de dresser le tableau des valeurs usuelles de l'arc sinus :

s	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin s$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- La relation $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ n'est valable que pour $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. Lorsque θ n'est pas dans cet intervalle, on détermine l'angle $\theta_0 \in [-\pi/2; \pi/2]$ tel que $\sin\theta_0 = \sin\theta$ et l'on écrit que $\arcsin(\sin\theta) = \theta_0$. Par exemple, on a

$$\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

La proposition suivante rassemble les propriétés de la fonction arcsin.

Proposition 1

La fonction arcsin est

(i) impaire sur $[-1;1]$;

(ii) strictement croissante sur $[-1;1]$;

(iii) continue sur $[-1;1]$;

(iv) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et

$$\forall s \in \,]-1;1[, \qquad \arcsin'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\ ;$$

(v) $\arcsin s \underset{s\to 0}{\sim} s$.

■(i), (ii) et (iii) La fonction arcsin est impaire, continue et strictement croissante comme réciproque d'une fonction impaire, continue et strictement croissante.

(iv) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $]-1,1[$, donc arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$. De plus, pour tout $s \in \,]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned} \arcsin'(s) &= \frac{1}{\cos(\arcsin s)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin s)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du fait que $\forall\theta \in \,]-\pi/2, \pi/2[\,,\ \cos\theta = +\sqrt{1-\sin^2\theta}$.

(v) Le développement limité d'ordre 1 de arcsin en 0 donne

$$\arcsin(s) = \arcsin(0) + \arcsin'(0)(s-0) + o_{s\to 0}(s) = s + o_{s\to 0}(s),$$

ce qui démontre le résultat. ■

B. Fonction arc cosinus

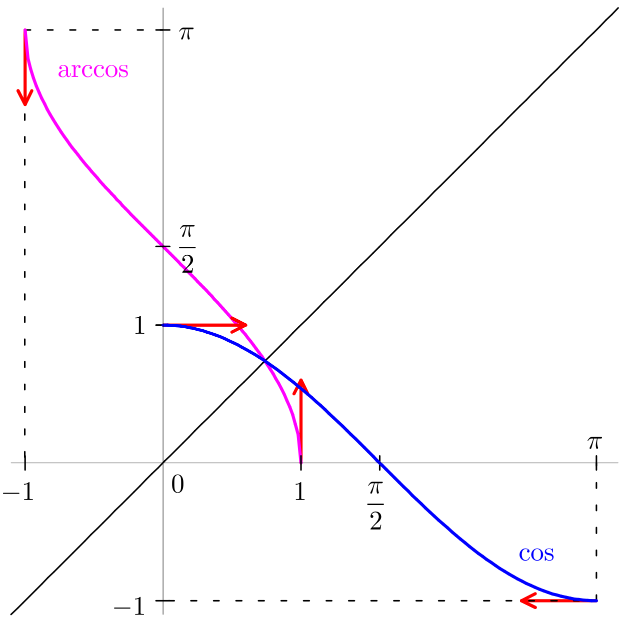
Là encore, connaissant la valeur du cosinus d'un angle, la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ de votre calculette permet de retrouver la mesure de l'angle (qui appartient à $[0;\pi]$). En termes mathématiques, cette touche correspond à la réciproque de la restriction du cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$. Dans ce paragraphe, nous décrivons cette fonction et ses propriétés.

Définition 2

La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$ est continue et strictement décroissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection entre $[0;\pi]$ et $[-1;1]$. Son application réciproque, définie de $[-1;1]$ dans $[0;\pi]$ est appelée arc cosinus et est notée arccos :

$$\arccos \left\{ \begin{array}{ccc} [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ c & \longmapsto & \arccos c \end{array} \right.$$

Graphiquement, on obtient



On a

$$\cos\big|_{[0;\pi]} \circ \arccos = \mathrm{Id}_{[-1;1]} \qquad \text{et} \qquad \arccos \circ \cos\big|_{[0;\pi]} = \mathrm{Id}_{[0;\pi]},$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arccos c \\ c \in [-1;1] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \theta \in [0;\pi]\,. \end{array} \right.$$

La fonction arccos avale donc un cosinus et renvoie l'angle associé dans $[0;\pi]$.
Par conséquent, pour calculer $\arccos c$ où $c \in [-1;1]$, on se pose la question :

« quel est l'angle entre 0 et π dont le cosinus vaut c ? »

Exemples :

- Les valeurs particulières de la fonction cosinus permettent de dresser le tableau des valeurs usuelles de l'arc cosinus :

c	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos c$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- La relation $\arccos(\cos\theta) = \theta$ n'est valable que pour $\theta \in [0;\pi]$. Lorsque θ n'est pas dans cet intervalle, on détermine $\theta_0 \in [0;\pi]$ tel que $\cos\theta_0 = \cos\theta$ et l'on écrit que $\arccos(\cos\theta) = \theta_0$. Par exemple,
$$\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}.$$

La proposition suivante rassemble les propriétés de la fonction arccos.

Proposition 2

La fonction arccos est

(i) strictement décroissante sur $[-1;1]$;

(ii) continue sur $[-1;1]$;

(iii) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et
$$\forall c \in \,]-1;1[, \qquad \arccos'(c) = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}.$$

■ (i) et (ii) La fonction arccos est continue et strictement décroissante comme réciproque d'une fonction continue et strictement croissante.

(iii) La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas de $]0;\pi[$ sur $]-1,1[$, donc arccos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ De plus, pour tout $s \in \,]-1;1[$, on a
$$\begin{aligned}\arccos'(s) &= \frac{1}{-\sin(\arccos s)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos\arccos s)^2}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}},\end{aligned}$$
où la seconde égalité découle du fait que $\forall\theta \in \,]0;\pi[\,,\ \sin\theta = +\sqrt{1-\cos^2\theta}$. ■

Exercice 1.
Démontrer que, pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

◊ Pour $x \in \,]-1;1[$, on pose
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x.$$
La fonction f est dérivable sur $]-1;1[$ et l'on a, pour tout $x \in \,]-1;1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$
ce qui démontre que f est constante sur $]-1;1[$. Comme $f(0) = \pi/2$, on obtient
$$\forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

La relation est par ailleurs clairement vérifiée pour $x = -1$ et $x = 1$. ◊

C. Fonction arc tangente

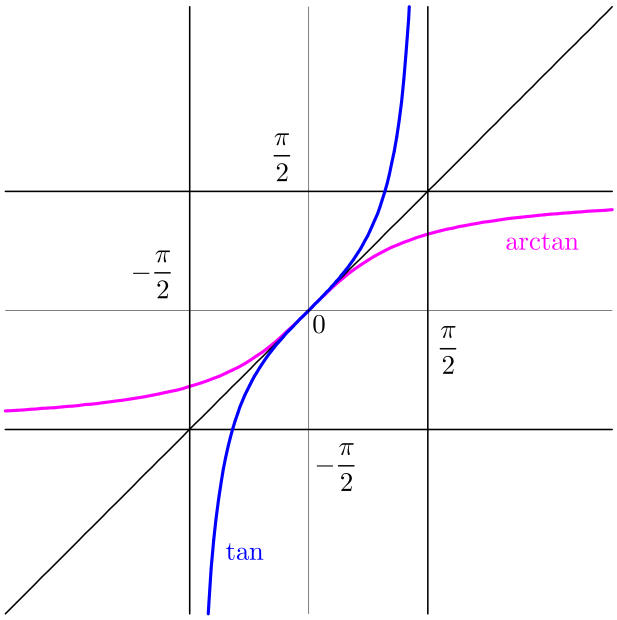
Enfin, connaissant la valeur de la tangente d'un angle, la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ de la calculatrice fournit la mesure de l'angle (dans $]-\pi/2;\pi/2[$). Cette touche correspond à la réciproque de la restriction de la tangente à $]-\pi/2;\pi/2[$. Nous décrivons ci-dessous cette fonction et ses propriétés.

Définition 3

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$ est continue et strictement croissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection entre $]-\pi/2;\pi/2[$ et $\mathbb{R}$. Son application réciproque, définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2;\pi/2[$ est appelée arc tangente et est notée arctan :

$$\arctan \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2;\pi/2[\\ t & \longmapsto & \arctan t \end{array} \right.$$

Graphiquement, on obtient



On a

$$\tan\big|_{]-\pi/2;\pi/2[} \circ \arctan = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad \arctan \circ \tan\big|_{]-\pi/2;\pi/2[} = \mathrm{Id}_{]-\pi/2;\pi/2[},$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arctan t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \tan\theta \\ \theta \in]-\pi/2;\pi/2[\,. \end{array} \right.$$

La fonction arctan avale donc une tangente et renvoie l'angle associé dans $]-\pi/2;\pi/2[$. Par conséquent, pour calculer $\arctan t$ où $t \in \mathbb{R}$, on se pose la question :

« quel est l'angle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut t ? »

Exemples :

- Les valeurs particulières de la fonction tangente permettent de dresser le tableau des valeurs usuelles de l'arc tangente :

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\longrightarrow +\infty$
$\arctan t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\longrightarrow \frac{\pi}{2}$

- La relation $\arctan(\tan\theta) = \theta$ n'est valable que pour $\theta \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[$. Lorsque θ n'est pas dans cet intervalle, on détermine $\theta_0 \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[$ tel que $\tan\theta_0 = \tan\theta$ et l'on écrit que $\arctan(\tan\theta) = \theta_0$. Par exemple,

$$\arctan\left(\tan\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}\cdot$$

La proposition suivante rassemble les propriétés de la fonction arctan.

Proposition 3

La fonction arctan est

(i) impaire sur $\mathbb{R}$;

(ii) strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

(iii) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}\ ;$$

(iv) $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$.

■ (i) et (ii) La fonction arctan est impaire et strictement croissante comme réciproque d'une fonction impaire et strictement croissante.

(iii) La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas de $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$ sur $\mathbb{R}$, donc arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+(\tan\arctan t)^2} = \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

(iv) Le développement limité d'ordre 1 de arctan en 0 donne

$$\arctan(t) = \arctan(0) + \arctan'(0)(t-0) + o_{t\to 0}(t) = t + o_{t\to 0}(t),$$

ce qui démontre le résultat. ■

Exercice 2.

Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$. Qu'en est-il si $x < 0$?

◊ Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}\cdot$$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et l'on a, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

ce qui implique que f est constante sur $]0;+\infty[$. Comme $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, on obtient

$$\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Pour $x < 0$, on obtient que

$$\forall x < 0, \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}\cdot$$

1 h 30

car f est impaire sur $\mathbb{R}^*$. ◊