FEUILLE D'EXERCICES N° 15

MATRICES

Calculs matriciels

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.
2. Montrer que A et B sont inversibles et calculer leur inverse.
3. Montrer que AB et BA sont inversibles et calculer leur inverse.
4. Vérifier la formule du cours : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. Montrer que les familles (I_2, A, A^2) et (I_2, B, B^2) sont liées et retrouver le caractère inversible des matrices A et B.
6. Comment calculer les matrices A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$ et montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}A$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Im}A$. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, puis P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer P et P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}AP$ de deux manières différentes.
5. Proposer un calcul pour A^n, lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On pose A la matrice triangulaire supérieure dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ n'admettant que des 1 sur et au-dessus de la diagonale.

1. Déterminer une matrice $N \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ telle que :
$$A = \sum_{k=0}^{d} N^k.$$
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5

On pose :

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et en déterminer une base.

Exercice 6

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}.$$

1. Expliciter un endomorphisme f sur un espace de polynômes dont A est une matrice représentant f selon une base.
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7

Déterminer le rang des matrices

$$A_n = \Big(\sin(i+j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

lorsque l'entier n décrit $\mathbb{N}^*$.

Exercice 8

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(A^k \ ; \ k \in \mathbb{N})$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer les complexes λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

Exercice 9

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice inversible et ne comportant que des 0 ou des 1.
Déterminer le nombre minimal ou maximal de 1 possible dans la matrice A.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application Θ définie par : $\Theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & \big(M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
2. En déduire que si $n \geqslant 2$, alors tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 11

1. Existe-t-il des matrices A et B dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_p$?
2. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un autre corps ?

Exercice 12

Montrer que pour qu'il existe A et B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et x, y dans $\mathbb{R}$ tels que :

- $AB = \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$ et $x \leqslant y$, il faut que $(x, y) = (10, 20)$.

Exercice 13

Soit $H = \left\{ M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \right\}$.

1. Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on donnera la dimension.
2. On pose $I = M(0,1,0,0)$, $J = M(0,0,1,0)$ et $K = M(0,0,0,1)$. Calculer les produits XY avec X et Y dans $\{I, J, K\}$.
3. Montrer que $(H, +, \times)$ est un corps non commutatif.
4. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ admet au moins 6 racines dans le corps H.

Exercice 14

On pose $A = (\min\{i,j\})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice triangulaire supérieure U avec des 1 sur la diagonale telle que $A = U^T \times U$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $(A^{-1} - \lambda I_n)$ n'est pas inversible, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = 2 - 2\cos\theta$.

Exercice 15

On note $SL_2(\mathbb{N})$, l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$ et $ad - bc = 1$.

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit A une matrice dans $SL_2(\mathbb{N})$. Montrer que si $A \neq I_2$, alors il existe une seule matrice $M \in \{G, D\}$ telle que la matrice $M^{-1}A$ appartienne encore à $SL_2(\mathbb{N})$.
2. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{N})$ peut s'écrire comme un produit de matrices $A = M_1 \cdots M_r$, avec chaque M_k valant D ou G, et que ce produit est unique.

Matrices et applications linéaires

Exercice 16

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

1. Appliquer le théorème du rang à l'application linéaire A.
2. Effectuer l'application numérique dans le cas suivant : on donne la liste $(E_1, \cdots, E_{2^n})$ de toutes les parties possibles de $[\![1, n]\!]$ et on pose :

$$\forall (i,j) \in [\![1, 2^n]\!],\ A_{i,j} = \begin{cases} 1\text{ , si } E_i \cap E_j \neq \emptyset \\ 0\text{, sinon} \end{cases}.$$

Exercice 17

1. Montrer que $f : P(X) \longmapsto (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X)$ est dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer la matrice de f selon la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
4. Peut-on déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ selon laquelle l'endomorphimse f est représenté selon une matrice diagonale ?

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \big((1,2,1), (1,2,2), (0,1,2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(A)$.
3. Calculer la matrice P de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}$.
4. Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 19

On considère les espaces $E = \mathbb{C}_3[X]$ et $F = \mathbb{C}_2[X]$, puis $f : P(X) \longmapsto P'(X+1) + XP''(X+2)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application linéaire f selon les bases canoniques de E et F.
2. Montrer que les familles $\mathscr{B} = (X^2+1, X^2+2, 2X^2+3X-1, -X^3+X+1)$ et $\mathscr{B}' = (2-X, 3-X, 1-X^2)$ forment des bases respectives de E et F.

3. Déterminer la matrice B représentant l'application linéaire f selon les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}'$ de F.
4. Calculer les matrices P de passage de la base canonique de E à $\mathscr{B}$, puis Q de la base canonique de F à $\mathscr{B}'$.
5. Calculer P^{-1} et Q^{-1}.
6. Vérifier que $Q^{-1}AP = B$.

—— ○ ——

Exercice 20

Soient $a \in \mathbb{C}$, puis $n \in \mathbb{N}$. On pose $f : P(X) \longmapsto P(X+a)$.

1. Calculer la matrice A représentant f selon la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Calculer pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice A^k.

—— ○ ——

Exercice 21

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim\ E = n \geqslant 1$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. Déterminer la matrice représentant f selon cette base.
3. Calculer $\mathrm{Rg} f$.

—— ○ ——

Exercice 22

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection parallèlement à $\mathrm{Vect}(-1, 1, 2)$ sur le plan d'équation : $x - 2y + z = 0$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $X \cdot X^T$ est une matrice de projection si et seulement si $X^T \cdot X = (1)$.

—— ○ ——

Exercice 23

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ une matrice. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{Rg}(A) \leqslant 1$
- il existe une matrice-ligne $L \in \mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{C})$ et une matrice-colonne $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ telles que $A = C \times L$.

—— ○ ——

Exercice 24

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, puis $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On pose P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$. Quelle est la matrice de passage de la base duale $\mathscr{B}^*$ vers la base duale $\mathscr{C}^*$?
2. En déduire que toute base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ est une base duale d'une base de E.
3. On pose $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u)$, puis $\Phi : \varphi \longmapsto \varphi \circ u$. Calculer $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}^*}(\Phi)$.

—— ○ ——

Exercice 25

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(K)$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(K),\ AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

—— ○ ——

Exercice 26

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $BA = I_2$

—— ○ ——

Exercice 27

1. Déterminer la matrice A selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan $x+y+z = 0$, parallèlement à la droite $6x = 3y = 2z$.
2. Déterminer toutes les matrices B vérifiant $B^2 = B$ et $AB = BA$.
3. Déterminer tous les sous-espaces stables par l'application linéaire A.

—— ○ ——

Exercice 28

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est un projecteur, alors $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Tr}(A)$.

Soient $A_1, \cdots, A_n$ des matrices de projections. On pose $Q = A_1 + \cdots + A_n$.

2. On suppose que pour tous entiers i et j entre 1 et n, on a $A_iA_j = \delta_{i,j} \cdot A_i$. Montrer que Q est une matrice de projection.
3. On suppose que Q est une matrice de projection. On note $F = \mathrm{Im}(Q)$, $G = \mathrm{Ker}(Q)$, puis $F_k = \mathrm{Im}(A_k)$ et $G_k = \mathrm{Ker}(A_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Montrer que $F \subset \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k$.
   (b) Montrer que $F = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$.
   (c) Montrer que $G = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} G_k$.
   (d) Montrer que pour tous entiers i et j entre 1 et n, $A_iA_j = \delta_{i,j} \cdot A_i$.

—— ○ ——

Exercice 29

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- la matrice A n'est pas inversible
- il existe une matrice B non nulle telle que $AB = BA = 0$.

—— ○ ——

Réductions de matrices

Exercice 30

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(A-4I)$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(A-I)$.
2. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(A)$.

——— ○ ———

Exercice 31

Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

——— ○ ———

Exercice 32

Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice $E_{2,1}$.

——— ○ ———

Exercice 33

Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. En utilisant $r=\mathrm{Rg}(A)$, montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice PA soit symétrique.

——— ○ ———

Exercice 34

On considère la base canonique de $\mathscr{M}_p(K)$.

1. Expliciter le produit matriciel de deux vecteurs de cette base.
2. Deux matrices de cette base sont-elles équivalentes ? Si oui, expliciter les matrices de changement de base.
3. Deux matrices de cette base sont-elles semblables ? Si oui, expliciter la matrice de changement de base.

——— ○ ———

Exercice 35

Montrer que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices semblables aux matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle.

——— ○ ———

Exercice 36

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle. [On pourra effectuer une récurrence sur l'entier n et distinguer deux cas selon que la matrice A est une homothétie ou non.]

——— ○ ———

Exercice 37

On pose $A=\begin{pmatrix}1&-4&-3&-2&-2\\2&-6&-6&-4&-2\\-3&12&12&6&3\\0&2&3&0&-1\end{pmatrix}$. Expliciter une matrice de type J_r et les matrices de passage telles que la matrice A soit équivalente à la matrice J_r.

——— ○ ———

Exercice 38

Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I_n$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(A)$ soit diagonale par blocs avec des blocs $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

——— ○ ———

Exercice 39

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, K un corps et $A\in\mathscr{M}_{3n}(K)$ telle que $\mathrm{Rg}(A)=2n$ et $A^3=0$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix}0&I_n&0\\0&0&I_n\\0&0&0\end{pmatrix}$.

——— ○ ———

Exercice 40

Soient $n\geqslant 1$ un entier, φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $M\sim N$ dès que M et N sont semblables. On suppose que si $A\sim B$, alors $\varphi(A)=\varphi(B)$.

1. Montrer que pour tous i et j entre 1 et n, $E_{i,i}\sim E_{j,j}$ et pour tous $i\neq j$ et $k\neq l$ entre 1 et n, $E_{ij}\sim E_{k,l}$.
2. Montrer que $S=\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$ est semblable à E_{11}
3. Conclure qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\varphi=\lambda\cdot\mathrm{Tr}$.

——— ○ ———

Exercice 41

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C}_n[X]&\to&\mathbb{C}_n[X]\\P&\longmapsto&(nX+1)\cdot P(X)-(X^2+1)\cdot P'(X)\end{array}\right.$.

1. Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On pose $E_\lambda=\Big\{P\in\mathbb{C}_n[X]\mid f(P)=\lambda\cdot P\Big\}$.
   (a) Montrer que E_λ est un sous-espace de $\mathbb{C}_n[X]$.
   On suppose trouvé $\lambda=\zeta+i\xi$, où $(\zeta,\xi)\in\mathbb{R}^2$, tel que E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $P(X)\in E_\lambda\setminus\{0\}$.
   (b) Effectuer les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$ et $\dfrac{nX+1-\lambda}{X^2+1}$.
   (c) En déduire que $\zeta=1$ et $\xi=n-2k$, pour un certain entier $k\in\{0,\cdots,n\}$.
   (d) Montrer que pour tout $k\in\{0,\cdots,n\}$, en posant $\lambda_k=1+i(n-2k)$, alors : $E_{\lambda_k}=\mathrm{Vect}\Big((X-i)^k\cdot(X+i)^{n-k}\Big)$.
3. Montrer que la famille $\Big((X-i)^k\cdot(X+i)^{n-k}\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Déterminer la matrice A représentant canoniquement l'endomorphisme f.
5. Diagonaliser la matrice A.

——— ○ ———

Exercice 42

Soient A et B dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ non nulles telles que $A^2=B^2=0$.

1. Calculer $\mathrm{Rg}(A)$.
2. Montrer que A et B sont semblables.

Thèmes variés

Exercice 43

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de réels m tels que la matrice :
$$A_m = \begin{pmatrix} 2+m & 2 & 3 \\ 1 & 1+m & 4 \\ 1 & -2 & 1+m \end{pmatrix}$$
ne soit pas inversible.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un nombre fini de complexes λ tels que la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ ne soit pas inversible.

Exercice 44

1. Montrer que $\varphi : \theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.
2. Calculer $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que la matrice $\varphi(\theta)$ n'est pas semblable à une matrice diagonale dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la matrice $\varphi(\theta)$ est semblable à une matrice diagonale dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et expliciter la matrice de passage permettant de diagonaliser la matrice.

Exercice 45

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que l'ensemble $I_A = \Big\{P(X) \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\Big\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
2. Déterminer le polynôme minimal $\mu_A(X)$ de la matrice A – c'est-à-dire le générateur unitaire de l'idéal I_A dans les cas suivants :
   - la matrice A est une matrice compagnon : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$
   - la matrice A est une matrice $E_{i,j}$ de la base canonique
   - la matrice A est la matrice remplie de 1
   - la matrice A est une matrice diagonale.
3. Si la matrice A est semblable à une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, a-t-on $\mu_A(X) = \mu_B(X)$?

Exercice 46

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}$ des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_p(K)$.
2. Calculer $\dim \mathscr{S}$ et $\dim \mathscr{A}$.

Exercice 47

Soit $N \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

1. Montrer que $N^d = 0$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - la matrice N^{d-1} est non nulle
   - la matrice N est de rang $(d-1)$
   - $\displaystyle\prod_{k=2}^{d} N_{k-1,k}$ est non nul
   - la matrice N est semblable à la matrice $\displaystyle\sum_{k=2}^{d} E_{k-1,k}$
   - la famille $(N^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est libre.

Exercice 48

1. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{T}$ des matrices triangulaires supérieures forme une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$. Cette algèbre est-elle commutative ? intègre ? de dimension finie ?
2. Soient $T \in \mathfrak{T}$ et $P(X) \in K[X]$. Que peut-on dire des coefficients diagonaux de la matrice $P(T)$?
3. Soit $T \in \mathfrak{T}$ une matrice inversible. Montrer par un calcul matriciel ou par les endomorphismes que $T^{-1} \in \mathfrak{T}$.

Exercice 49

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe fini de matrices de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

1. Montrer que la matrice $B = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(G)} \displaystyle\sum_{A \in G} A$ est un projecteur.
2. En déduire que $\mathrm{Card}(G)$ divise le nombre $\displaystyle\sum_{A \in G} \mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 50

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X) \cdot A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 51

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. On pose : $F = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Établir l'existence d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$
3. En déduire $\dim F$.

Exercice 52

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ telle que pour tout i : $|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker} A = \{0\}$.
2. En déduire que A est inversible.

Un peu plus difficile

Exercice 53

1. On se donne deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}.$$
Déterminer les formules exprimant u_n et v_n en fonction de n.
2. On se donne d suites $(w_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in [\![1, d]\!]$ définies par :
$$\begin{cases} w_{0,1} = 1 \text{ et } \forall k \in [\![2, d]\!],\ w_{0,k} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, d]\!],\ w_{n+1,k} = \dfrac{1}{d-1} \displaystyle\sum_{j=1, j\neq k}^{d} w_{n,j} \end{cases}.$$
Étudier le comportement des suites $(w_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 54

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ contient au moins une matrice inversible.
2. Montrer que les seuls automorphismes de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont les applications $M \longmapsto P^{-1}MP$, avec P inversible.

Exercice 55

Soient $a_1, \cdots, a_{13}$ treize entiers entre 1 et 40. Montrer qu'il existe un 13-uplet d'entiers $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{13})$ non tous nuls tel que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{13} a_k^{\alpha_k} = 1$.

Exercice 56

1. Soit $n \geqslant 3$. On appelle matrice harmonique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, toute matrice dont chaque coefficient intérieur à la matrice est la moyenne arithmétique des quatre coefficients qui lui sont adjacents.
   (a) L'ensemble des matrices harmoniques forme-t-il un espace vectoriel ?
   (b) Existe-t-il deux matrices harmoniques différentes ayant le même bord ?
2. Soit a une suite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ telle que pour tous i, j dans $\mathbb{Z}$:
   - $a_{i,j} = \dfrac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$
   - $a_{ij} \geqslant 0$.

   Montrer que la suite a est constante.

Exercice 57

1. Montrer que le rang d'une matrice est la taille maximale de ses sous-matrices carrées inversibles.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall M \in V$, $\mathrm{Rg}(M) \leqslant p$. Montrer que $\dim(V) \leqslant np$.

Exercice 58

Soient $A_1, \cdots, A_n$ n matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \times \cdots \times A_n = 0$.

Exercice 59

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices triangulaires supérieures T_1 et T_2, puis P une matrice de permutation telles que :
$$A = T_1 P T_2.$$

Exercice 60

Déterminer tous les sous-espaces de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stables par toutes les matrices de permutation.