

_____ ○ _____

Sur les probabilités et les variables aléatoires ...

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies égales presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $V(X) = V(Y)$, mais la réciproque est fausse.	
Si A_1, \dots, A_r sont r événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(A_i)$, alors les événements A_1, \dots, A_r sont deux à deux incompatibles.	
L'ensemble des événements presque sûrs est stable par intersection.	
Deux événements incompatibles ne sont jamais indépendants.	
Si on lance une pièce de monnaie une infinité de fois, la probabilité de ne jamais avoir la séquence « <i>PPPPPFPPFPFPPFPFPFPFF</i> » consécutivement est nulle.	
Dans un jeu de 52 cartes, si on pioche 20 cartes simultanément, la probabilité de piocher les quatre rois vaut $\frac{\binom{48}{16}}{\binom{52}{20}}$.	
Si N est très grand, si on liste les N premières décimales de $\frac{1}{7}$, la probabilité de tomber sur le chiffre 4 vaut environ $\frac{1}{6}$.	
Il existe une seule probabilité d'univers associé $\Omega = [1, 1000]$ telle que pour tout $k \in [1, 1000]$, $\mathbb{P}([1, k]) = \ln\left(\frac{k+1000}{2000}\right)$.	

Si X_1, \dots, X_s sont s variables mutuellement indépendantes définies de Ω vers $\{0, 1\}$, alors la somme $\sum_{i=1}^s X_i$ suit une loi binomiale.	
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors la variable X suit une loi de Bernoulli si et seulement si : $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$.	
Si X suit une loi de Rademacher, alors la variable $1 - X$ aussi.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies de Ω vers $\{0, 1\}$, alors les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si : $\mathbb{P}(X = Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies d'un univers fini Ω vers \mathbb{R} , alors ces deux variables ont la même loi si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$, on a : $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi binomiale, alors la somme $X + Y$ peut ne pas suivre une loi binomiale.	
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, si $\max(X(\Omega)) = \mathbb{E}(X)$, alors la variable X est une fonction constante.	
Si X_1, \dots, X_r sont des variables aléatoires finies, alors ces variables sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(X_i = x_i).$	
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, l'ensemble E des variables aléatoires $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ indépendantes avec X forme un \mathbb{R} -espace vectoriel.	

Une suite d'entiers est bornée si et seulement si elle admet une sous-suite constante.	
Si λ est un réel, puis A , B et C sont trois points non alignés, l'ensemble des points M du plan affine euclidien tels que $\lambda MA^2 + (1 - \lambda) MB^2 = MC^2$ est une droite affine.	
Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$.	
Si u_n est le nombre de chiffres en base 10 de l'entier 2^n , alors $\exists \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.	
Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et est une fraction rationnelle.	
Si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ est continue et décroissante, la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.	
Si Ω est fini, si A_1, \dots, A_r sont des événements et si pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(B \cap A_i)$, alors la famille (A_1, \dots, A_r) est un SCE.	
Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.	
L'ensemble des matrices triangulaires inversibles complexes forme un groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ pour \times .	
La série $\sum_n \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ ne vérifie pas le CSSA puisqu'elle est divergente.	
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ n'est pas à coefficients tous entiers, la matrice A ne peut pas être semblable à une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.	

Si $(X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de va.i.id, si $\varepsilon > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 \right \geq \varepsilon \right) = 0$, alors chaque X_k vérifie $\mathbb{E}(X_k) = 1$.	
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, la fonction $f : t \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t)$ est une fonction croissante et toujours continue à droite.	
Il est possible de construire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \alpha$ vérifie $\mathbb{P}(X = \alpha) > 0$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \geq \mathbb{P}(X = \alpha)$.	
Si $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda)$, alors l'espérance $\mathbb{E}(\exp(X))$ est une formule polynomiale en la variable λ .	
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie et si A est une partie de \mathbb{R} telle que $\mathbb{P}(X \in A) = 0$, alors la loi de X peut ne pas être entièrement déterminée par la donnée des quantités $\mathbb{P}(X = x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R} \setminus A$.	
Si X et Y suivent deux lois de Bernoulli, avec $V(X) = V(Y)$, alors $X = Y$ presque sûrement ou $X = 1 - Y$ presque sûrement.	
Il existe une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\mathbb{P}(X = k)$ soit proportionnelle à $\frac{2 + \sin k}{1 + \sqrt{k}}$.	
Si X, Y, Z et T sont quatre va.i.id, alors les variables $X + Y$ et $Z + T$ suivant la même loi et sont indépendantes.	