DM 4. Enoncé

Exercice 1 :

Soient E un ensemble, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de parties de E. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m} A_{i,j} \quad \text{et} \quad V = \bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}.$$

1°) Déterminer une inclusion liant U et V .
Démontrer qu'en général cette inclusion est stricte.

2°) On suppose que :

$$\forall i_1, i_2 \in [\![1, n]\!],\ \forall j_1, j_2 \in [\![1, m]\!],\ (i_1 \neq i_2) \Longrightarrow (A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \emptyset).$$

Démontrer que $U = V$.

Exercice 2 :

Soient n un entier strictement positif, et p_n, s'il existe, le n-ième nombre premier.

1°) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2°) Montrer que pour tout entier n strictement positif, $p_n \leq 2^{(2^{n-1})}$.

3°) On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\pi(n) \geq \ln(\ln n)$.

4°) On peut faire beaucoup mieux : le théorème des nombres premiers, démontré en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin affirme que $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln n}$.
En déduire que $p_n \sim n \ln n$.

Exercice 3 :

Cet exercice donne un aperçu de la démonstration d'un des théorèmes d'incomplétude de Gödel : "Pour toute théorie mathématique T, non contradictoire et contenant la théorie des entiers naturels, il existe une assertion, énonçable dans le cadre de la théorie T, qui est vraie mais qui n'est pas démontrable dans le cadre de la théorie T".

Supposons que l'on a numéroté toutes les assertions (vraies ou fausses) énonçables dans le cadre de la théorie T : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ On se limite donc au cas où l'ensemble des assertions énonçables dans le cadre de la théorie T est dénombrable. Ce n'est pas très restrictif, car si l'alphabet utilisé pour écrire ces énoncés est fini, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'ensemble des énoncés formant une phrase de longueur inférieure à ℓ est fini, donc l'ensemble de tous les énoncés est bien dénombrable.
Supposons par ailleurs que l'on a numéroté certaines parties de $\mathbb{N}$, appelées parties répertoriées et notées $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$
On dit que n est remarquable lorsque $n \in P_n$. T contient la théorie des entiers, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété "$n \in P_n$" est un énoncé de T : ainsi, il existe m tel que A_m est l'assertion " n est remarquable ". On dira alors que m est le conjugué de n.
Pour conserver la simplicité de l'argument, nous éludons certaines difficultés, relatives au formalisme définissant ce qu'est une théorie T. De plus, nous admettons qu'il est possible de choisir les parties répertoriées de sorte que :

1. Les numéros des assertions démontrables dans le cadre de la théorie T forment une partie répertoriée.
2. Si X est une partie répertoriée, alors $\mathbb{N} \setminus X$ est aussi répertoriée.
3. Pour toute partie répertoriée X, il existe une partie répertoriée Y dont les éléments sont exactement les entiers dont le conjugué est dans X.

Considérons alors la partie X constituée des numéros des assertions non démontrables. C'est une partie répertoriée d'après (1) et (2). On peut donc lui associer, d'après (3), une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X. On note n le numéro de Y (de sorte que $Y = P_n$) et l'on désigne par m le conjugué de n (de sorte que A_m est l'assertion : " n est remarquable ").

1°) Démontrer que n est remarquable. *Raisonner par l'absurde et utiliser le fait que T n'est pas contradictoire, c'est-à-dire que toutes les assertions démontrables dans le cadre de la théorie T sont vraies.*

2°) En déduire que A_m est une assertion vraie mais non démontrable dans le cadre de la théorie T.

Exercice 4 :

On admet ici que, pour tout ensemble x, $x \notin x$.

1°) Soit b un ensemble. Résoudre l'équation (E) : $\{a\} \in \{a, b\}$.

2°) De même, résoudre les équations $a \subset \{a\}$ et $a \subset \{a, b\}$, où l'inconnue a est un ensemble.

Exercice 5 :

1°) Formule de Taylor avec reste intégral :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une application de classe C^{n+1} de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in I$, montrer que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

2°) Inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On se place sur $I = [\min(a,b), \max(a,b)]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une application de classe C^{n+1} de I dans $\mathbb{R}$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Montrer que

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3°) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

4°) Formule de Taylor-Young :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est une application de classe C^{n+1} de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < 0 < b$, de sorte que f soit définie et C^{n+1} au "voisinage de 0".
Montrer qu'il existe une application $\varepsilon : [a, b] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + t^n \varepsilon(t) \text{ et } \varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

5°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + t^n \varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

Exercice 6 :

On rappelle qu'une paire est un ensemble possédant exactement 2 éléments.
Par définition, un village est un ensemble fini non vide de personnes, tel que pour toute paire de personnes de ce village, exactement une personne espionne l'autre.
On convient que toute personne s'espionne elle-même.
Ainsi, si l'on note R la relation d'espionnage sur le village V, R est réflexive, antisymétrique et pour tout $x, y \in V$, $(x \; R \; y) \vee (y \; R \; x)$.
Dans un village, une personne E est appelée un espion si, pour toute personne Y du village, il existe une personne X du village telle que E espionne X qui espionne Y (d'après la convention précédente, il est possible que X soit égal à E).

On fixe un village V.

1°) On rappelle que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum. Montrer qu'il existe une personne de V qui espionne un nombre maximal de personnes.

2°) Montrer que dans tout village, il y a au moins un espion.

3°) Soit $X \in V$. Si X est espionné par une autre personne de V, montrer qu'il existe un espion différent de X qui espionne X.

4°) A quelle condition V possède-t-il un unique espion ?

5°) Est-il possible d'avoir exactement 2 espions ?