Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 7 h 30

DÉRIVATION

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- la théorie des applications ;
- la droite réelle ;
- les limites de suites ;
- les limites de fonctions ;
- la continuité.

Par défaut, dans ce cours, les lettres I et J désignent de « vrais » intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'ils sont non vides et non réduits à un point. On dit que ce sont des intervalles d'intérieur non vide.

La plupart des énoncés de ce chapitre sont relatifs à des fonctions définies sur des intervalles. Lorsque ce n'est pas le cas, il suffit d'étudier la fonction sur chacun des intervalles qui composent l'ensemble de définition.

Quand on emploit la notation $[a;b]$ (ou $]a;b[$ ou $[a;b[$ ou $]a;b]$), cela signifie que a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Lorsqu'on ignore l'ordre dans lequel sont rangés a et b, on utilise la notation $[a \mathbin{\widetilde{;}} b]$ pour désigner le segment d'extrémités a et b.

Dans tout ce chapitre, à l'exception de la section G., les fonctions considérées sont réelles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Dérivabilité

A.1. Dérivabilité locale

a) Dérivabilité en un point

Définition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I. La fonction f est dite dérivable en x_0 si la fonction τ_{x_0}, appelée taux d'accroissement en x_0 et définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $\tau_{x_0} : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

On peut donner l'interprétation cinématique suivante du nombre dérivé : si $f(t)$ désigne la position à l'instant t d'un mobile sur un axe, le quotient $\big(f(t)-f(t_0)\big)/(t-t_0)$ est sa vitesse moyenne entre t_0 et t et la dérivée $f'(t_0)$ représente sa vitesse instantanée à l'instant t_0.

Exemples :

- Si f désigne une fonction constante, alors f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 0$.
- Plus généralement, toute fonction monomiale $M : x \longmapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $M'(a) = na^{n-1}$. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k a^{n-k} - a^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}a^{n-k} \xrightarrow[h\to 0]{} \binom{n}{1}h^0 a^{n-1} = na^{n-1}.$$

- La fonction $h : x \longmapsto 1/x$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $h'(x_0) = -1/{x_0}^2$ puisque

$$\frac{1/x - 1/x_0}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} -\frac{1}{{x_0}^2}.$$

- La fonction $r : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$. Si $x_0 > 0$, la fonction r est dérivable en x_0 et l'on a $r'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$ car le taux d'accroissement coïncide avec la fonction $x \longmapsto 1/(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})$. Par contre, r n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}/x = +\infty$.
- La fonction sin est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et l'on a $\sin' x_0 = \cos x_0$. En effet, comme $\sin h \underset{h\to 0}{\sim} h$ et $\lim\limits_{h\to 0}(1-\cos h)/h = 0$ (car $1-\cos h \underset{h\to 0}{\sim} h^2/2$), on a

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin h}{h}\cos x_0 - \frac{1-\cos h}{h}\sin x_0 \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x_0,$$

- De même, on montre que cos est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et l'on a $\cos' x_0 = -\sin x_0$.
- exp est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\exp'(x_0) = \mathrm{e}^{x_0}$. En effet, comme $\mathrm{e}^h - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{x_0+h}-\mathrm{e}^{x_0}}{h} = \mathrm{e}^{x_0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{e}^{x_0}.$$

- ln est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x_0) = 1/x_0$. En effet, comme $\ln(1+h/x_0) \underset{h\to 0}{\sim} h/x_0$, on a

$$\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h} = \frac{\ln(1+h/x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x_0}.$$

La dérivabilité est intimement liée à la notion géométrique de tangente.

Définition 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative du graphe de f et x_0 un point de I. Si f est dérivable en x_0, on appelle tangente au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ la droite $\mathscr{T}_{x_0}$ d'équation cartésienne

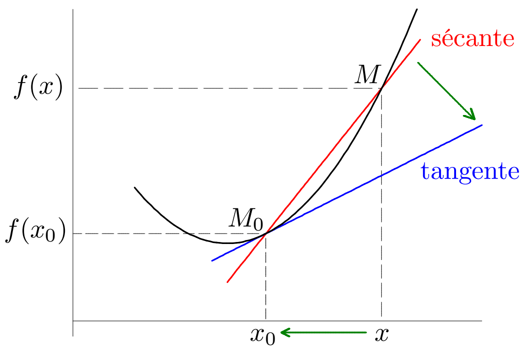
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On notera que la dérivée $f'(x_0)$ représente la pente de cette tangente.

On peut alors donner l'interprétation géométrique suivante de la dérivabilité.

La tangente : une corde limite

Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ de la fonction f entre x_0 et x, est aussi la pente de la corde de $\mathscr{C}_f$ joignant les points $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $M\big(x, f(x)\big)$. La dérivabilité de f en x_0 permet d'affirmer que cette sécante admet une position limite qui est la tangente à la courbe en M_0.



Lorsque la limite du taux d'accroissement en un point x_0 tend vers $\pm\infty$, on dit par extension que la fonction admet en x_0 une tangente verticale : la droite d'équation $x = x_0$ (dont la pente est infinie).

Nous verrons que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 (lorsqu'elle existe) constitue la meilleure approximation affine de $\mathscr{C}_f$ en x_0.

Exemples :

- En un point où la dérivée est nulle, une fonction admet une tangente horizontale.
- La racine carrée $\sqrt{\cdot}$ admet une tangente verticale en 0.

b) Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I. La fonction f est dite dérivable à droite (respectivement dérivable à gauche) en x_0 si la restriction de la fonction f à $I \cap [x_0; +\infty[$ (respectivement à $I \cap]-\infty; x_0]$) est dérivable en x_0, c'est-à-dire si la limite

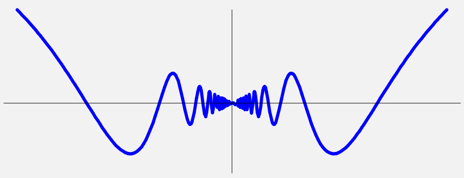
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{respectivement} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

existe. La valeur de cette limite s'appelle la dérivée à droite (respectivement dérivée à gauche) de f en x_0 et se note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$).

Lorsqu'une fonction est dérivable à gauche (respectivement à droite) en x_0, elle admet une demi-tangente à gauche (respectivement à droite) d'équation $y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$ (respectivement $y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$).

Exemples :

- $f : x \longmapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0 et l'on a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.
- Il existe des fonctions continues n'admettant ni dérivée à droite ni dérivée à gauche en un point comme l'illustre le cas de $x \longmapsto (x/2)\sin(1/x)$ prolongée par 0 en 0 :



Nous avons vu qu'une fonction f est continue en x_0 si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en x_0. Pour la dérivabilité, il faut une hypothèse supplémentaire.

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I. La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

■ C'est la traduction du fait que la fonction $\tau_{x_0} : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, qui n'est pas définie en x_0, possède une limite en x_0 si, et seulement si, elle admet des limites à gauche et à droite en x_0 qui sont égales. ■

Autrement dit, une fonction est dérivable en un point si, et seulement si, elle admet, en ce point, une demi-tangente non verticale à gauche et une demi-tangente non verticale à droite qui sont une seule et même droite.

Exemples :

- Il découle de cette proposition que la fonction « valeur absolue » n'est pas dérivable en 0 puisque ses dérivées à droite et à gauche en 0 ne sont pas égales. En ce point, elle admet une demi-tangente à gauche de pente -1 et une demi tangente à droite de pente $+1$.

La plupart des résultats qui seront énoncés dans la suite de ce cours resteront valides avec les dérivées à droite ou à gauche à condition de remplacer chaque dérivation par l'opération de dérivation latérale correspondante.

c) *Approximation affine*

Lorsque f est dérivable en x_0, la proposition suivante montre que la tangente constitue une bonne approximation graphique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Proposition 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Si f est dérivable en x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (en abrégé $\mathrm{DL}_1(x_0)$) donné par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0).$$

ou encore

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \mathscr{o}_0(h).$$

■ Comme f est dérivable en x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

ce qui démontre que $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0)$. Le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ en découle. ■

Ce résultat implique que, lorsque f est dérivable en x_0, alors la tangente est la meilleure approximation affine de $\mathscr{C}_f$ en x_0. Pour le justifier, on considère une fonction affine quelconque $x \longmapsto \alpha + \beta(x - x_0)$ et l'on compare l'erreur commise en approchant $f(x)$ par $\alpha + \beta(x - x_0)$ à l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ lorsque $(\alpha, \beta) \neq (f(x_0), f'(x_0))$. On a

$$\frac{|f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)|}{|f(x) - \alpha - \beta(x - x_0)|} = \begin{cases} \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0) & \text{si } f(x_0) \neq \alpha \\ \mathscr{o}_{x_0}(1) & \text{si } f(x_0) = \alpha \text{ et } f'(x_0) \neq \beta \end{cases}$$

donc l'erreur relative tend vers 0 dans tous les cas, ce qui donne

$$|f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)| = \mathscr{o}_{x_0}(|f(x) - \alpha - \beta(x - x_0)|).$$

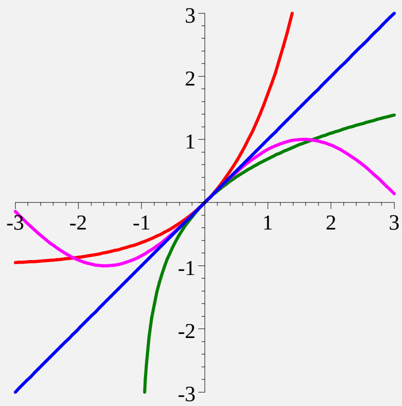
Cela démontre bien que la tangente est la droite « la plus proche » de $\mathscr{C}_f$ lorsque x tend vers x_0.

Exemples :

- Les $\mathrm{DL}_1(0)$ de l'exponentielle, du logarithme et du sinus, qui sont donnés par

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \mathscr{o}_0(x), \qquad \ln(1 + x) = x + \mathscr{o}_0(x), \qquad \sin x = x + \mathscr{o}_0(x),$$

  expriment la proximité en 0 des courbes de $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ (en rouge), de $x \longmapsto \ln(1 + x)$ (en vert) et de $x \longmapsto \sin(x)$ (en magenta) avec la première bissectrice (en bleu) :



L'énoncé suivant montre que l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en un point caractérise la dérivabilité en ce point.

Proposition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, c'est-à-dire s'il existe $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0)$, alors $f(x_0) = c_0$ et f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = c_1$.

■ En faisant tendre x vers x_0 dans la relation $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0)$, on obtient $\lim_{x_0} f = c_0$. Or la fonction f est définie en x_0 donc $\lim_{x_0} f = f(x_0)$, ce qui donne $c_0 = f(x_0)$.

Par conséquent, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c_0 + c_1(x - x_0) + \mathscr{o}_{x_0}(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = c_1 + \mathscr{o}_{x_0}(1) \xrightarrow[x \to x_0]{} c_1,$$

donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = c_1$. ■

L'association des deux propositions de ce paragraphe nous dit donc qu'une fonction est dérivable en un point si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point.

Graphiquement, une fonction est donc dérivable en un point si, et seulement si, elle possède une tangente non verticale en ce point. Reformuler négativement, cela signifie qu'une fonction non dérivable en un point admet ou bien une tangente verticale en ce point (c'est le cas de $\sqrt{\cdot}$ en 0) ou bien pas de tangente du tout (c'est le cas de $|\cdot|$).

Nous reviendrons en détail sur la notion de développement limité dans un prochain chapitre.

A. 2. Dérivabilité globale

Définition 4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir sa fonction dérivée f' sur I par

$$f' \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

On note aussi quelquefois $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ la fonction f'.

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathscr{D}^1(I, \mathbb{R})$.

On peut bien sûr définir la dérivée d'une fonction sur une partie « plus compliquée ». Il suffit pour cela de le faire sur chaque intervalle constituant cette partie.

f est dérivable sur $[a; b]$ (avec $a < b$) si, et seulement si, elle est dérivable en tout point de $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Exemples :

- Nous avons vu que :
  - toute fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$. En particulier, les fonctions constantes ont une dérivée nulle et la dérivée de l'identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est égale à 1 ;
  - toute fonction monomiale $M : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $M'(x) = nx^{n-1}$;
  - la fonction harmonique $h : x \longmapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = -1/x^2$;
  - la fonction $\sqrt{\cdot} : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = 1/(2\sqrt{x})$;
  - la dérivée sur $\mathbb{R}$ de sin (respectivement cos) existe et vaut cos (respectivement $-\sin$) ;
  - exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp' = \exp$;
  - ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (car elle ne l'est pas en 0).

Il faut bien noter que l'opération de dérivation agit sur les fonctions et non sur les nombres. Ainsi, la notation $(x\,\mathrm{e}^x)'$, que l'on rencontre parfois dans les copies pour désigner la dérivée de la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ est à proscrire (sinon je me fâche tout rouge !). Pour bien faire, on commence par donner un nom, disons f, à la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ puis on calcule $f'(x)$ en précisant bien dans quel contexte x est défini.

La notation $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ est due à Leibniz. Elle a le mérite de rappeler que la dérivée est la limite du taux d'accroissement $\Delta f/\Delta x$ quand Δx tend vers 0. C'est pourquoi elle est très utilisée en physique, chimie, mécanique, etc. Nous verrons qu'elle est également très pratique lorsque l'on dérive une fonction composée.

B. Théorèmes généraux de dérivabilité

On rassemble dans cette section les résultats, dits théorèmes généraux, qui permettent, dans les cas simples, de justifier la dérivabilité d'une fonction et d'effectuer le calcul de sa dérivée.

B.1. Lien entre continuité et dérivabilité

Théorème 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

■ Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f donne $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$, donc $\lim_{x_0} f = f(x_0)$, ce qui traduit la continuité de f en x_0.

On peut aussi écrire que

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \times 0 = 0,$$

ce qui redonne $\lim_{x_0} f = f(x_0)$, c'est-à-dire la continuité de f en x_0. ■

On retiendra donc que

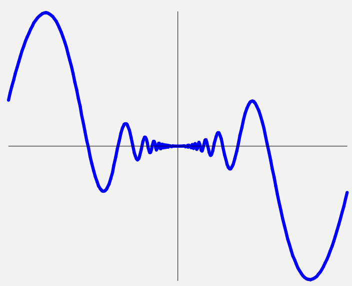
$$\boxed{\text{dérivable} \implies \text{continue}}$$

La réciproque est fausse. Ainsi, $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0. On a donc $\mathscr{D}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ mais l'inclusion contraire est fausse. En fait, il existe même des fonctions qui sont continues en tout point de $\mathbb{R}$ et dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$ (mais si ! mais si !).

Attention, la dérivabilité de f implique la continuité de f mais ne dit rien sur la continuité de f'. Il est en effet tout à fait possible que f soit une fonction dérivable en x_0 sans que la fonction f' ne soit continue en x_0 ! Un exemple vous est donné ci-dessous.

Exemples :

- Considérons, par exemple, la fontion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux et est dérivable en 0 de dérivée nulle car, d'après les croissances comparées,



$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(1/x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

puisque x tend vers 0 en 0 et $x \longmapsto \sin(1/x)$ est bornée. De plus, on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donc f' n'est pas continue en 0 puisque $\lim_{n \to +\infty} f'\big(1/(2n\pi)\big) = -1 \neq f'(0)$. Sur le graphique, on voit qu'il y a clairement une tangente horizontale en 0 (le graphe est compris entre les deux paraboles $y = \pm x^2$), mais les tangentes au graphe aux points d'intersection avec (Ox) ont des pentes qui tendent vers ± 1.

B.2. Opérations sur les dérivées

Cette section rassemble les principaux résultats sur le calcul des dérivées.

a) Dérivée d'une somme

Théorème 2

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et l'on a

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

■ Soit $x_0 \in I$. Les $\mathrm{DL}_1(x_0)$ des fonctions f et g donnent $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$ et $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$. Il s'ensuit, par combinaison de ces deux formules, que l'on a $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x_0) + \big(\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)\big)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$. On en déduit que $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et que $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

On peut aussi écrire que

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0),$$

ce qui redonne le résultat. ■

Ce résultat se généralise à un plus grand nombre de fonctions : si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont dérivables sur un intervalle I et si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors la combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$ est dérivable sur I et l'on a $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \cdots + \lambda_n f_n'$.

On fait souvent référence à ce résultat en disant qu'une somme de fonctions dérivables est dérivable et que la dérivée de cette somme est la somme des dérivées.

Exemples :

- Comme tout monôme $M : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ M'(x) = nx^{n-1}$, on en déduit que la fonction polynomiale

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

b) Dérivée d'un produit

Théorème 3

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont dérivables sur I alors le produit fg est dérivable sur I et l'on a
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

■ Soit $x_0 \in I$. Les $\mathrm{DL}_1(x_0)$ des fonctions f et g donnent $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$ et $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$. Il s'ensuit, par multiplication de ces deux formules, que $f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \big(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\big)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$. D'où le résultat.

On peut aussi écrire que
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$
ce qui redonne le résultat. ■

Ce résultat se généralise à un plus grand nombre de fonctions : si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions dérivables sur un même intervalle I alors le produit $f_1 f_2 \ldots f_n$ est dérivable sur I et l'on a $(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_n'$.

On fait souvent référence à ce résultat en disant qu'un produit de fonctions dérivables est une fonction dérivable et que la dérivée d'un produit est la somme des dérivées terme à terme.

c) *Dérivée d'une composée*

Théorème 4

Soient $u : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions avec $u(I) \subset J$. Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J, alors $f \circ u$ est dérivable sur I et l'on a

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u).$$

■ Soit $x_0 \in I$. Le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de u donne $u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)$ et le $\mathrm{DL}_1\big(u(x_0)\big)$ de f donne $f(y) = f\big(u(x_0)\big) + f'\big(u(x_0)\big)\big(y - u(x_0)\big) + \mathscr{O}_{x_0}\big(y - u(x_0)\big)$. Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f\big(u(x)\big) &= f\big(u(x_0)\big) + f'\big(u(x_0)\big)\big(u(x) - u(x_0)\big) + \mathscr{O}_{x_0}\big(u(x) - u(x_0)\big) \\
&= (f \circ u)(x_0) + (f' \circ u)(x_0)\big(u'(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0)\big) + \mathscr{O}_{x_0}\big(u'(x_0)(x - x_0)\big) \\
&= (f \circ u)(x_0) + u'(x_0)(f' \circ u)(x_0)(x - x_0) + \mathscr{O}_{x_0}(x - x_0).
\end{aligned}$$

On en déduit que $f \circ u$ est dérivable en x_0 et que $(f \circ u)'(x_0) = u'(x_0)(f' \circ u)(x_0)$.

Dans le cas particulier où l'application $x \longmapsto u(x) - u(x_0)$ ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 (sauf en x_0 bien sûr), on peut aussi écrire

$$\frac{f\big(u(x)\big) - f\big(u(x_0)\big)}{x - x_0} = \frac{f\big(u(x)\big) - f\big(u(x_0)\big)}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme u est dérivable en x_0, on a

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} u'(x_0).$$

Par ailleurs, comme u est continue en x_0 (puisqu'elle y est dérivable), on sait que $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Donc

$$\frac{f\big(u(x)\big) - f\big(u(x_0)\big)}{u(x) - u(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'\big(u(x_0)\big).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{f\big(u(x)\big) - f\big(u(x_0)\big)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'\big(u(x_0)\big)u'(x_0),$$

ce qui redonne le résultat. ■

On fait souvent référence à ce résultat en disant que la composée de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable.

Exemples :

- Si u est dérivable sur I, alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\cdot$
- Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\cdot$
- Si u est dérivable sur I, alors $\cos u$ est dérivable sur I et $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- Si u est dérivable sur I, alors $\sin u$ est dérivable sur I et $(\sin u)' = -u' \cos u$.
- Si u est dérivable sur I, alors e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.
- Si u est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors $\ln |u|$ est dérivable sur I et $(\ln |u|)' = \dfrac{u'}{u}\cdot$

La notation de Leibniz permet de retenir la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

On a l'impression que les « $\mathrm{d}u$ » se simplifient.

d) *Dérivée d'un quotient*

Théorème 5

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g ne s'annule pas sur I. Si f et g sont dérivables sur I, alors le quotient f/g est dérivable sur I et l'on peut dériver celui-ci de deux manières :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2}$$

dérivation comme un quotient — dérivation comme un produit.

■ Posons $h(x) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ de sorte que $f/g = f \times (h \circ g)$. Comme f et g sont dérivables sur I et h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, les théorèmes généraux précédents nous disent que f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} - f \times g' \times \left(-\frac{1}{g^2}\right) = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2}.$$

Cela nous donne la seconde formule. La première en découle après mise au même dénominateur. ■

On fait souvent référence à ce résultat en disant qu'un quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas, est une fonction dérivable.

Exemples :

- Si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et ne s'annule pas sur I, on retrouve que

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

- La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ comme quotient du sinus sur le cosinus. Par ailleurs, la dérivation comme un quotient nous donne

$$\tan' = \frac{\cos^2 - (-\sin^2)}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

et la dérivation comme un produit donne

$$\tan' = \cos\frac{1}{\cos} - \sin\frac{-\sin}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

- La dérivation comme un produit se révèle particulièrement plus « sobre » que la dérivation comme un quotient lorsque le dénominateur est une puissance. Par exemple, si f désigne la fonction

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1975}},$$

la dérivation comme un produit donne

$$f'(x) = 1 \times \frac{1}{(1+x^2)^{1975}} + x \times \left(-\frac{1975 \times 2x}{(1+x^2)^{1976}}\right) = \frac{1 - 3949x^2}{(1+x^2)^{1976}}$$

alors que la dérivation comme un quotient oblige à des simplifications

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (1+x^2)^{1975} - x \times 1975(2x)(1+x^2)^{1974}}{(1+x^2)^{3950}} \\ &= \frac{(1+x^2)^{1974}\left((1+x^2) - 3950x^2\right)}{(1+x^2)^{3950}} \\ &= \frac{1 - 3949x^2}{(1+x^2)^{1976}} \end{aligned}$$

B.3. Dérivée d'une fonction réciproque

Pour une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle, le théorème de la bijection assure que la fonction réciproque f^{-1} est également continue.

Pour la dérivabilité, les choses se compliquent un peu. En effet, si le graphe de f admet au moins une tangente horizontale, celle-ci donne une tangente verticale pour le graphe de f^{-1} (après réflexion par rapport à la première bissectrice). Ainsi, pour assurer le transfert de la dérivabilité de f vers f^{-1}, il faut que $\mathscr{C}_f$ n'admette pas de tangente horizontale. L'énoncé suivant nous dit que cette condition nécessaire est en fait suffisante.

Théorème 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Le théorème de la bijection dit que f réalise une bijection (encore notée f) entre les intervalles I et $J = f(I)$. On sait en outre que la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue sur J.

Si f est dérivable sur I et si le graphe de f n'admet pas de tangente horizontale sur I (c'est-à-dire si f' ne s'annule pas sur I), la fonction f^{-1} est dérivable sur J et l'on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

On dit alors que f est un difféomorphisme entre I et J.

■ Soit $y_0 \in J$. Pour tout $y \in J \setminus \{y_0\}$, on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(y_0)\big)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

où l'on a posé $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Comme la fonction f^{-1} est continue sur J (d'après le théorème de la bijection), on a $\lim\limits_{y \to y_0} x = \lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, donc

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

car $f'(x_0) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en y_0 et l'on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)},$$

ce qui démontre le résultat attendu. ■

Les amnésiques chroniques peuvent ne pas apprendre la formule de dérivation de f^{-1} et seulement retenir qu'elle vient de la dérivation de l'égalité $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$. En effet, en dérivant cette relation, on obtient $(f^{-1})' \times (f' \circ f^{-1}) = 1$, ce qui permet de retrouver la formule $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$.

Exemples :

- La fonction radicalaire $f = \sqrt[n]{\cdot}$ (qui est la réciproque de l'élévation à la puissance n) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque n est pair et sur $\mathbb{R}^*$ lorsque n est impair. On a

  $$f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

  Mnémotechniquement, on écrit que $f(x) = x^{1/n}$ et on dérive « comme un polynôme », ce qui donne

  $$f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n - 1} = \frac{x^{1/n}}{nx}$$

  mais ce calcul n'est pas rigoureux partout car l'écriture $x^{1/n}$ n'est valide que sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective et continue, dérivable et de dérivée non nulle en x_0. Si la tangente en x_0 à $\mathscr{C}_f$ est d'équation $y = ax + b$, alors la tangente en $f(x_0)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est d'équation $x = ay + b$.

B.4. Les théorèmes bidons

L'encadré suivant insiste sur le fait que les théorèmes généraux vus précédemment sont des conditions suffisantes de dérivabilité mais pas des conditions nécessaires.

Les théorèmes bidons, c'est pas bon !

Il est tout à fait possible de composer, d'additionner, de multiplier ou de quotienter des fonctions non dérivables et d'obtenir une fonction dérivable !!

Autrement dit, s'il existe bien des théorèmes généraux de dérivabilité, il n'existe par contre aucun théorème général sur la non dérivabilité !

Exemples :

- Disons que l'on veuille composer les fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $h : x \longmapsto x^4$. La première de ces deux fonctions n'est pas dérivable en 0, mais cela n'empèche pas la fonction $f \circ h : x \longmapsto x^2$ d'être dérivable en 0.
- La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Par contre, la somme de f et $-f$ est dérivable en 0 puisque c'est la fonction nulle. Le produit de f par f (c'est-à-dire le carré de f) est aussi dérivable en 0 puisque c'est la fonction identité sur $\mathbb{R}_+$.

C. Dérivées usuelles

Le tableau suivant rappelle les dérivées des fonctions usuelles. Il est à connaître par ♡.

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
c	0	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\, x$	$1-\mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$

La formule générale donnant la dérivée d'une fonction composée est

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

Elle est souvent utilisée dans les cas suivants :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u \qquad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \qquad (\cos u)' = -u' \sin u \qquad (\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

2 h 15

D. Dérivabilité sur un intervalle

D.1. Extremum local

Définition 5

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.
On dit que f présente un maximum local en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\, \cap I, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

On dit que f présente un minimum local en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\, \cap I, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Le terme extremum désigne indifféremment un maximum ou un minimum.

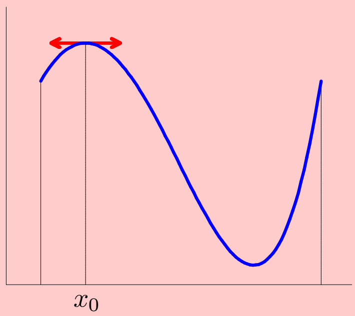
Si x_0 est une extrémité de l'intervalle I, le terme local signifie alors seulement local à gauche ou à droite. Ainsi, la fonction $\mathrm{Id}_{[0;1]}$ admet un maximum local en 1 puisque $\forall x \in [0;1]\,,\ \mathrm{Id}_{[0;1]}(x) \leqslant 1$.

Théorème 7

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de $\mathrm{Int}(I)$.

Si f présente un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$. On dit alors que x_0 est un point critique de f.

Graphiquement, la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



■ Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un maximum local, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\ \subset I$ et $\forall x \in \,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\,,\ f(x) \leqslant f(x_0)$. On en déduit que, pour tout $x_1 \in \,]x_0 - \alpha\,;\, x_0[$, on a

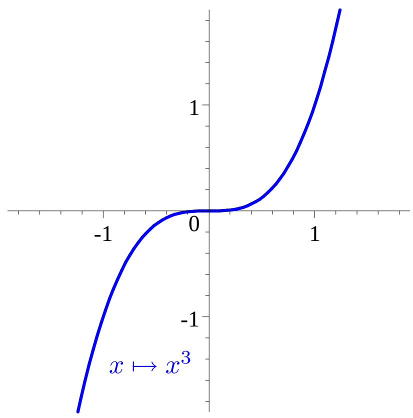
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0$$

et donc, par passage à la limite à gauche de x_0, on a $f'(x_0) \geqslant 0$. De même, par passage à la limite à droite de x_0, on obtient $f'(x_0) \leqslant 0$. Finalement, on a bien $f'(x_0) = 0$. ■

Toutes les hypothèses de cette proposition sont nécessaires ! D'une part, une fonction non dérivable peut présenter un extremum local en un point sans être dérivable en ce point (prendre $x \longmapsto |x|$). D'autre part, lorsque x_0 est une extrémité de I, la fonction f peut présenter un extremum en x_0 sans que sa dérivée s'annule en ce point (prendre l'identité sur $[0;1]$ et $x_0 = 1$).

La réciproque de ce résultat est fausse : une fonction dérivable dont la dérivée s'annule en un point ne présente pas nécessairement d'extremum local en ce point.

Il suffit pour s'en convaincre de considérer le graphe de $x \longmapsto x^3$:



D.2. Le théorème des accroissements finis (TAF)

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe (le théorème des accroissements finis ou TAF pour les intimes), nous en donnons ci-dessous un cas particulier intuitif et utile : le théorème de Rolle.

Pour l'anecdote, on pourra noter que l'énoncé de Rolle est à la fois un cas particulier du TAF mais aussi un résultat préliminaire nécessaire à la démonstration du TAF.

Théorème 8

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

■ La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$, on sait, d'après le théorème des bornes, que la fonction f est bornée sur le segment $[a;b]$ et atteint ses bornes m et M (avec $m \leqslant M$). Toute la saveur de la démonstration est là !

Si $m = M$, la fonction f est constante sur $[a;b]$ donc de dérivée nulle sur $]a;b[$. On peut donc prendre un c quelconque entre a et b.

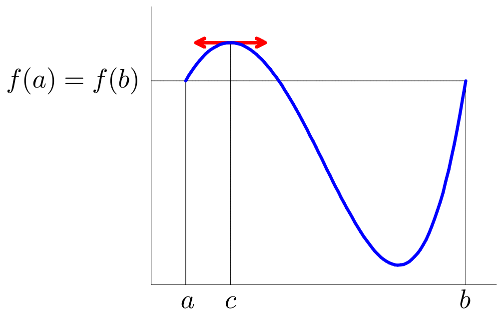
Sinon, l'un des réels m ou M est différent de la valeur commune prise par f en a et b. Supposons par exemple que $m \neq f(a)$. La fonction f atteint alors la valeur m en un point c différent de a et de b. Elle admet donc un minimum en ce point de l'intervalle ouvert $]a;b[$, ce qui implique que $f'(c) = 0$, d'après le théorème du paragraphe précédent. ■

Le théorème de Rolle assure l'existence d'un zéro de la dérivée mais ne dit pas qu'il est unique. C'est un théorème d'existence mais pas d'unicité.

Les fonctions $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ sont parfois appelées des fonctions « rollables ». Dans la pratique, les fonctions que nous utiliserons seront, le plus souvent, dérivables sur tout leur ensemble de définition. Elle seront ainsi parfaitement rollables entre tous points a et b de ce domaine de définition.

Graphiquement, le théorème de Rolle dit que, sous les hypothèses précédentes, le graphe de la fonction f possède au moins une tangente horizontale.

En cinématique, le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a nécessairement vu sa vitesse s'annuler à un instant donné. Le résultat devient clairement faux pour un point mobile se déplaçant dans un plan (i.e. pour une fonctions à valeurs complexes).



Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont indispensables. Si f n'est pas dérivable sur $]a;b[$, le théorème peut être mis en défaut (il suffit de choisir $x \longmapsto |x|$ sur $[-1;1]$). De même, si $f(a) \neq f(b)$, on ne peut pas conclure (prendre $x \longmapsto x$ sur $[0;1]$).

Exemples :

- Démontrons qu'entre deux racines d'un polynôme P, on trouve nécessairement (au moins) une racine de son polynôme dérivé P'.

  En effet, si a et b sont deux racines distinctes de P (telles que $a < b$), le polynôme P est alors continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ (pardi, il est dérivable sur $\mathbb{R}$) et l'on a $P(a) = 0 = P(b)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $P'(c) = 0$.

  On en déduit que si P est un polynôme réel scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire si P admet n racines réelles distinctes où $n = \deg(P)$) alors P' est aussi scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ (car P' admet $n-1$ racines réelles distinctes).

  Notons que sur $\mathbb{C}$, ce résultat est faux puisque $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-èmes de l'unité) alors que son polynôme dérivé nX^{n-1} n'est pas à racines simples.

On peut maintenant énoncer le théorème des accroissements finis (TAF).

Théorème 9

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a; b]$ (avec $a < b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$. Il existe alors un nombre réel $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■ Considérons la fonction $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a; b], \qquad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

La fonction φ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ comme somme de telles fonctions. De plus, on a

$$\varphi(a) - \varphi(b) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b = f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

donc $\varphi(a) = \varphi(b)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle pour affirmer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\forall x \in]a; b[, \qquad \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne

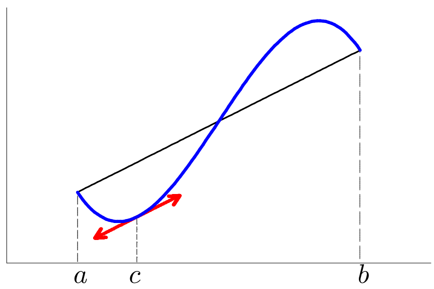
$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ce qui correspond bien au résultat attendu. ■

La formule $f'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)/(b - a)$ s'appelle formule des accroissements « finis » par opposition à la définition de la dérivée $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$ qui fait, elle, intervenir des accroissements « infinitésimaux ».

Comme le théorème de Rolle, le TAF est un théorème d'existence mais pas d'unicité.

Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc.



En cinématique, le TAF signifie qu'un mobile se déplaçant sur un axe possède au moins une fois une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne. Ainsi si une voiture réalise un parcours à la moyenne de 90 km/h, il existe un instant du trajet où sa vitesse instantanée a été de 90 km/h.

Autrement dit, le TAF est une version « oblique » du théorème de Rolle.

Le TAF est un outil de contrôle d'une fonction à partir de sa dérivée : il permet (en général) d'exploiter des informations sur f' pour en tirer des propriétés de f.

Par exemple, nous allons voir que c'est le TAF qui permet de justifier le principe de Lagrange donnant la monotonie d'une fonction dérivable en fonction du signe de la dérivée.

Les hypothèses de continuité sur le segment $[a; b]$ et de dérivabilité sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ sont indispensables pour appliquer le TAF.

Exemples :

- Démontrons que $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{1 + x} \leqslant \ln(1 + x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

  Soit $x > 0$. Le TAF appliqué à ln entre x et $x + 1$ (ln est continue sur $[x; x + 1]$ et dérivable sur $]x; x + 1[$) nous dit qu'il existe $c_x \in]x; x + 1[$ tel que $\ln(1 + x) - \ln(x) = \ln'(c_x) = 1/c_x$. On conclut alors en utilisant le fait que $1/c_x \in]1/(x + 1); 1/x[$.

Dans la pratique, l'égalité des accroissements finis permet d'encadrer la variation d'une fonction entre deux points lorsqu'on sait borner la dérivée de cette fonction entre ces deux points. On obtient ainsi l'inégalité des accroissements finis, énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 10

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec $a < b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

- Si $\forall x \in \,]a;b[\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
- S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \,]a;b[\,,\ |f'(t)| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a;b]$, c'est-à-dire
$$\forall x, y \in [a;b]\,, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

■ D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in \,]a;b[$, tel que $\big(f(b)-f(a)\big)/(b-a) = f'(c)$, d'où $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$ car $m \leqslant f'(c) \leqslant M$. Le deuxième résultat découle du premier et du fait que si $\forall t \in \,]a;b[\,,\ |f'(t)| \leqslant k$, alors $\forall t \in \,]a;b[\,,\ -k \leqslant f'(t) \leqslant k$. ■

Le théorème de l'inégalité des accroissements finis est exactement équivalent au suivant : une fonction continue $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité de la moyenne, c'est-à-dire l'un ou l'autre des encadrements :
$$(b-a)\min_{[a;b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\max_{[a;b]} f \qquad \text{ou} \qquad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |b-a| \max_{[a;b]} |f|.$$

Cinématiquement, l'inégalité des accroissements finis implique qu'une voiture qui ne dépasse pas la vitesse de 90 km/h, parcourt en une heure une distance inférieure ou égale à 90 km.

La seconde propriété de ce théorème est la façon la plus simple de démontrer qu'une fonction est k-lipschitzienne. Il ne faut pas en déduire pour autant que, pour montrer qu'une fonction est k-lipschitzienne, il faut nécessairement passer par la dérivée. En effet, il existe des fonctions lipschitziennes qui ne sont pas dérivables, comme $x \longmapsto |x|$ par exemple.

Exemples :

- La fonction sin, dont la dérivée cos est bornée, en valeur absolue, par 1 sur $\mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- Si f est dérivable et de dérivée continue sur un segment $[a;b]$ (on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$), alors f est k-lipschitzienne sur $[a;b]$ puisque la fonction f', continue sur le segment $[a;b]$, est nécessairement bornée sur $[a;b]$ (d'après le théorème des bornes).

Nous verrons que l'inégalité des accroissements finis se généralise aux fonctions à valeurs complexes.

D.3. Variations d'une fonction dérivable

La principale application de la dérivation est le principe de Lagrange énoncé ci-dessous.

Théorème 11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$.

- La fonction f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{Int}(I),\ f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{Int}(I),\ f'(x) \leqslant 0$.
- La fonction f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{Int}(I),\ f'(x) = 0$.

■ Traitons la première propriété. La deuxième est similaire. La troisième combine les deux premières.

Supposons f croissante sur I. Soit $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$. Le taux d'accroissement de f en x_0 est positif ou nul (comme quotient de quantités de même signe). Sa limite en x_0, qui est $f'(x_0)$, est donc positive ou nulle.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in \mathrm{Int}(I),\ f'(x) \geqslant 0$. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. Comme f est rollable entre x_1 et x_2, le TAF nous dit qu'il existe $c \in \,]x_1 ; x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geqslant 0$. Par suite, on a $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. La fonction f est donc bien croissante sur I. ■

Ce résultat n'est applicable que si l'on est sur **un** intervalle. Lorsque l'ensemble de départ de la fonction est constitué de plusieurs intervalles, le principe de Lagrange s'applique intervalle par intervalle mais pas sur tout l'ensemble de départ.

Par exemple, la fonction harmonique $h : x \longmapsto 1/x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée $h' : x \longmapsto -1/x^2$ est négative sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ ainsi que sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. D'ailleurs, c'est faux puisque $h(-1) < h(1)$.

De même, la partie entière est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle est donc constante sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais n'est pas globalement constante sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, on peut en déduire que f est strictement croissante mais la réciproque est fausse ! Il existe en effet des fonctions strictement croissantes dont la dérivée n'est pas strictement positive (prendre $x \longmapsto x^3$). On peut d'ailleurs énoncer le résultat suivant.

Corollaire 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$. La fonction f est strictement monotone sur I si, et seulement si, on a les deux conditions suivantes :

(i) la dérivée de f est de signe constant sur $\mathrm{Int}(I)$;

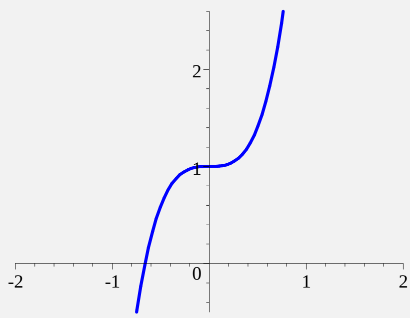
(ii) il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide inclus dans I sur lequel f' est nulle.

En particulier, si f' est de signe constant sur $\mathrm{Int}(I)$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

■ La condition (i) étant équivalente à la monotonie de f sur I, il suffit de montrer que pour une fonction f monotone dérivable, la stricte monotonie est équivalente à la condition (ii). Or, en tant que fonction monotone, f n'est pas strictement monotone si, et seulement si, f est constante sur un intervalle ouvert non vide, c'est-à-dire si, et seulement si, f' est nulle sur un tel intervalle. ■

Exemples :

- Posons $f(x) = x^5 + 3x^3 + 1$. C'est une fonction dérivable (comme toute fonction polynomiale) et l'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 5x^4 + 9x^2$. On constate alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geqslant 0$ et que f' ne s'annule qu'en 0. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, le fait d'admettre une tangente horizontale en 0 n'interdit pas à f d'être strictement croissante :



D.4. Théorème de la limite de la dérivée (TLD)

Il existe des situations où l'on sait qu'une fonction existe et est continue en un point sans pouvoir affirmer, à l'aide des théorèmes généraux de dérivabilité, que la fonction est dérivable en ce point. Pour étudier la dérivabilité dans ce genre de situation, on peut revenir à l'étude de la limite du taux d'accroissement ou encore utiliser le résultat suivant, qui a le mérite de donner, en plus de la dérivabilité de la fonction, la continuité de la dérivée. Ce théorème s'appelle le théorème de la limite de la dérivée.

Théorème 12

Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- Si $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers a, alors f est dérivable en a et l'on a $f'(a) = \ell$. La fonction f' est donc continue en a.
- Si $f'(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers a, alors le taux d'accroissement $\tau_a(x) = \big(f(x) - f(a)\big)/(x-a)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a et f n'est pas dérivable en a. La courbe admet alors en ce point une demi-tangente verticale.

■ Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, le TAF nous donne l'existence d'un point c_x, strictement compris entre a et x, tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

On obtient ainsi (selon l'axiome du choix) une fonction $x \longmapsto c_x$ telle que $\forall x \in I \setminus \{a\},\ c_x \in]a \,;\, x[$. Par conséquent, le théorème des gendarmes nous dit que c_x tend vers a quand x tend vers a. Dès lors, si l'on suppose que $\lim_a f' = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, le théorème de composition des limites nous dit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Cela démontre les deux résultats. ■

Le théorème de la limite de la dérivée ne dit rien si $f'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers a. Il faut alors revenir à l'étude du taux d'accroissement en a de f.

L'encadré ci-dessous et les exemples qui le suivent montrent comment le TLD permet d'étudier la dérivabilité en un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas.

Incertitude, quand tu nous tiens . . .

Il existe des situations où l'on sait qu'une fonction est continue en un point mais où l'on ne peut pas utiliser les théorèmes généraux de dérivabilité pour dire que la fonction est dérivable en ce point ! C'est par exemple le cas lorsqu'on effectue un prolongement par continuité, lors d'un raccord d'une fonction continue par morceaux ou encore avec des fonctions définies à l'aide d'applications « enquiquinantes » comme la valeur absolue, la racine carrée, arcsin ou arccos (toutes ces fonctions ont un ensemble de définition plus gros que leur ensemble de dérivabilité). On parle alors de point d'incertitude (pour la dérivabilité).

Pour savoir si une fonction est dérivable ou non en un point d'incertitude, on peut ou bien utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou même revenir à l'étude de la limite du taux d'accroissement.

Lorsqu'il « fonctionne », le TLD fournit, en plus de la dérivabilité de la fonction, la continuité de sa dérivée. Lorsque c'est possible, on préfèrera donc utiliser le TLD. Toutefois, pour toutes les fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue (on a déjà dit que cela existe), le retour au taux d'accroissement est indispensable.

Exemples :

- Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^2 \ln(x).$$
Les croissances comparées disent que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Les théorèmes généraux s'appliquent sur $\mathbb{R}_+^*$ pour dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a $\forall x > 0,\ f'(x) = 2x \ln x + x$. Mais ils ne s'appliquent pas en 0 (il n'y a pas de théorème général de dérivation pour les prolongements par continuité). Il ne faut pas, pour autant, en déduire que f n'est pas dérivable en 0. Elle peut l'être… ou pas ! On a un point d'incertitude.
Pour lever cette incertitude, on peut utiliser le TLD ou bien étudier le taux d'accroissement.
  - Comme $\lim_0 f' = 0$ d'après les croissances comparées, le TLD nous dit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De surcroît, le TLD affirme que f' est continue en 0.
  - On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

  On peut donc conclure que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et
$$\forall x \geqslant 0, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = |x|^3.$$
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes généraux avec $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = 3x|x|$. Par contre, en 0, les théorèmes généraux ne s'appliquant pas (puisque la valeur absolue n'est pas dérivable en 0), on a une incertitude de dérivation.
  - On constate que $\lim_0 g' = 0$. Le TLD permet alors d'affirmer que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$. De plus, g' est continue en 0.
  - On a $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|^3}{x} = |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.

  En conclusion, les résultats se rassemblent pour donner
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = 3x|x|.$$

4 h 15

E. Dérivées successives

E.1. Classe de régularité

Définition 6

Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, sa dérivée f' peut elle-même être dérivable sur I. On appelle alors dérivée seconde de f la dérivée de f' et on la note f''. Cette fonction peut elle-même être dérivable sur I, etc. Si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème.

Autrement dit, les dérivées successives de f sont définies par récurrence par

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

La dérivée n-ème de f est aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Cinématiquement, lorsque $f(t)$ représente au cours du temps l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, alors $f''(t)$ représente l'accélération instantanée du point à l'instant t.

Définition 7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathscr{D}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{D}^n$ sur I est noté $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Les fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ sont donc les fonctions continues. Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sont dites continûment dérivables.

On retiendra que $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Toutes ces définitions se généralisent à des parties qui ne sont pas des intervalles de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de travailler sur chacun des intervalles constituant cet ensemble.

Exemples :

- Toutes les fonctions de référence (sauf la partie entière) sont de classe $\mathscr{C}^0$ sur leurs ensembles de définition.
- Toutes les fonctions de référence (sauf la partie entière, les racines n-èmes, la valeur absolue) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

  Les racines n-èmes et la valeur absolue sont tout de même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition privé de 0.
- On démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

- La fonction $h : x \longmapsto 1/x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée d'ordre n est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

On énonce ci-dessous le théorème du prolongement $\mathscr{C}^n$ (dans sa forme faible). C'est une généralisation du théorème de la limite de la dérivée au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

Proposition 4

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I \setminus \{a\}$. Si, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite finie en a, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^n$ à I tout entier.

■ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad \left(\forall k \in [\![0;n]\!]\,,\ \lim_a f^{(k)} \in \mathbb{R}\right) \implies \left(f \text{ admet un prolongement de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } I\right)$$

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie d'après la définition du prolongement par continuité.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I \setminus \{a\}$ telle que, pour tout $k \in [\![0;n+1]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite finie en a. D'après $\mathscr{P}(n)$, f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^n$ à I tout entier. On note encore f ce prolongement. Alors $f^{(n)}$ est une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ telle que $(f^{(n)})'$ admet une limite finie en a. D'après le TLD, $f^{(n)}$ est dérivable en a et $f^{(n+1)}$ est continue en a, ce qui signifie que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I tout entier. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Lorsque ce résultat s'applique pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient un théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$.

Exemples :

- Considérons la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}\,.$$

  Cela permet de voir, d'après les croissances comparées, que $f^{(n)}$ tend vers 0 en 0 pour tout $n \geqslant 0$. Le théorème du prolongement $\mathscr{C}^\infty$ nous dit en conséquence que la fonction f, prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Il existe une forme forte du théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$ (nettement plus difficile à démontrer) qui donne le même résultat mais avec une hypothèse plus faible : on demande seulement que $f^{(n)}$ admette une limite finie pour conclure.

E.2. Théorèmes généraux sur les dérivées n-èmes

On rassemble ici les théorèmes généraux sur les dérivées successives qui permettent de préciser la classe de régularité d'une fonction et (parfois) de calculer sa n-ème dérivée.

a) Opérations sur les dérivées n-èmes

On commence par la somme.

Théorème 13

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I, alors la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et l'on a

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

■ On démontre par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad \lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

▷ Initialisation : La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie d'après les résultats sur les fonctions continues.

▷ Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Soient $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est une somme de fonctions dérivables sur I donc, par le théorème 2, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Puisque f, g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, les fonctions f', g' sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. D'après $\mathscr{P}_n$, $\lambda f' + \mu g'$ est donc de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, ce qui signifie que $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} &= \left((\lambda f + \mu g)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}\right)' && \text{d'après } \mathscr{P}_n \\
&= \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)} && \text{d'après le théorème 2}
\end{aligned}$$

Cela démontre que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

▷ Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure. ■

On peut ensuite traiter le cas du produit.

Théorème 14

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I, alors le produit fg est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et l'on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}.$$

■ On démontre par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

▷ Initialisation : La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie d'après les résultats sur les fonctions continues.

▷ Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Soient $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction fg est un produit de fonctions dérivables sur I donc, par le théorème 3, fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Puisque f, g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, les fonctions f', g' sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. D'après $\mathscr{P}_n$, les fonctions $f'g$ et fg' sont donc de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Leur somme l'est aussi d'après le théorème précédent. Dès lors, $(fg)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, ce qui signifie que fg est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' && \text{d'après } \mathscr{P}_n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)} && \text{d'après le théorème 3} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}f^{(\ell)}g^{(n+1-\ell)} && \text{en posant } \ell=k+1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}f^{(\ell)}g^{(n+1-\ell)} && \text{car } \binom{n}{n+1}=\binom{n}{-1}=0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} && \text{d'après la relation de Pascal,}
\end{aligned}$$

Cela démontre que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

▷ Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure. ■

On remarquera l'analogie entre la formule de Leibniz et celle du binôme de Newton.

Les deux théorèmes précédents nous disent que, pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, l'ensemble $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^I$.

Avant d'énoncer le résultat sur les quotients, nous donnons celui sur la composition.

Théorème 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $u(I) \subset J$. Si u est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur J, alors $f \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

■ On démontre par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}), \quad \forall f \in \mathscr{C}^n(J,\mathbb{R}), \quad \big(u(I)\subset J\big) \Longrightarrow \big(f\circ u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})\big).$$

▷ Initialisation : La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie d'après les résultats sur les fonctions continues.

▷ Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Soient $u \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(J,\mathbb{R})$ telles que $u(I) \subset J$. La fonction $f\circ u$ est une composée de fonctions dérivables sur I donc, par le théorème 4, $f \circ u$ est dérivable sur I et

$$(f\circ u)' = u' \times (f'\circ u).$$

Puisque $u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, $f' \in \mathscr{C}^n(J,\mathbb{R})$ et $u(I) \subset J$, l'hypothèse de récurrence montre que $f'\circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$, et comme u' est de classe $\mathscr{C}^n$, le produit $u' \times (f'\circ u)$ l'est aussi. L'application $(f\circ u)'$ étant de classe $\mathscr{C}^n$, on en déduit que $f \circ u \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ ce qui démontre que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

▷ Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure. ■

Vous vous demandez peut-être s'il est possible de donner une expression de la dérivée n-ème d'une composée. La réponse est positive !... mais le résultat n'est pas au programme. Et pour cause, la formule de Faà di Bruno (c'est son petit nom) est plutôt indigeste :

$$(f\circ u)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ 1m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n}} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\cdots m_n!n!^{m_n}} \times \prod_{j=1}^{n}\left(u^{(j)}\right)^{m_j} \times f^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)}\circ u.$$

On termine ce paragraphe avec le résultat sur les quotients.

Théorème 16

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors le quotient f/g est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

■ Il suffit de démontrer que la fonction $1/g$ est de même classe que g sur I ; le résultat sur les produits permettant ensuite de multiplier par f.

Puisque g est continue et ne s'annule pas, elle garde un signe constant, par exemple positif. On a donc $g(I) \subset \mathbb{R}_+^*$ et comme la fonction $h : x \longmapsto 1/x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $1/g = h \circ g$ est bien de même classe que g sur I. ■

En combinant les formules de Leibniz et Faà Di Bruno, on peut donner une expression générale de la dérivée n-ème d'un quotient. Inutile de dire que la formule est absolument indigeste. Dans le cas de l'inverse d'une fonction u, on obtient :

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n}} \frac{n!(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}(m_1+m_2+\cdots+m_n)!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\cdots m_n!n!^{m_n}} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(u^{(j)})^{m_j}}{u^{m_1+m_2+\cdots+m_n+1}}.$$

Exemples :

- Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle où elle est définie, puisque c'est le quotient de deux fonctions polynomiales.
- La fonction tan est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition comme quotient des fonctions sin et cos qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. 5 h 45

b) Dérivée n-ème d'une fonction réciproque

Théorème 17

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Le théorème de la bijection dit que f réalise une bijection (encore notée f) entre les intervalles I et $J = f(I)$. On sait en outre que la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue sur J.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si le graphe de f n'admet pas de tangente horizontale sur I (c'est-à-dire si f' ne s'annule pas sur I), alors la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur J.

On dit alors que f est un $\mathscr{C}^n$-difféomorphisme (respectivement $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme) entre I et J.

■ Démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ définie, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad \big(\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0\big) \Longrightarrow \big(f^{-1} \in \mathscr{C}^n(J, \mathbb{R})\big).$$

- ▷ <u>Initialisation :</u> $\mathscr{P}_1$ est vraie car si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ admet une dérivée ne s'annulant pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur I et $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur J, donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.
- ▷ <u>Hérédité :</u> Fixons $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I qui ne s'annule pas sur I. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I donc d'après l'hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. L'application $f' \circ f^{-1}$, composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, est donc aussi une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. Comme elle ne s'annule pas sur J, son inverse $1/(f' \circ f^{-1})$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. Cela montre que $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J et donc que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Cela prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- ▷ <u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence permet de conclure. ■

On retiendra que si une bijection f ne possède pas de tangente horizontale, alors sa régularité se transmet à sa réciproque.

On peut donner, dans certains cas, une expression explicite de la dérivée n-ème de f^{-1} : c'est la formule de réversion de Lagrange dont l'énoncé, très technique, n'est pas donné ici.

F. Formule de Taylor-Lagrange

F.1. Approximation pontuelle

L'énoncé suivant reformule le théorème des accroissements finis pour donner une mesure de l'erreur commise en remplaçant la valeur d'une fonction en un point par une autre de ses valeurs. On parle d'approximation ponctuelle locale.

Proposition 5

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et a un élément de I.
Pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a\,;x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a).$$

Autrement dit, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, il existe $c \in]a\,;a + h[$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h.$$

■ C'est une reformulation (avec une hypothèse de régularité un peu plus forte) du T.A.F. ■

Cet énoncé signifie que l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f(a)$ est proportionnelle à l'écart $x - a$ séparant x et a, avec un facteur de proportionnalité donné par une valeur de la dérivée entre a et x. Cette erreur est donc d'autant plus faible que x est proche de a (d'où le nom d'approximation locale) et que la fonction a de « faibles » variations.

Exemples :

- Quelle est l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{40\,001}$ par 200 ?
  En appliquant le théorème des accroissements finis entre 40 000 et 40 001 à la fonction $\sqrt{\cdot}$ (qui est continue sur $[40\,000; 40\,001]$ et dérivable sur $]40\,000; 40\,001[$), on obtient l'existence de $c \in]40\,000; 40\,001[$ tel que

$$\sqrt{40\,001} - 200 = \frac{40\,001 - 40\,000}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

  Or, comme $c \geqslant 40\,000$, on a $1/(2\sqrt{c}) \leqslant 1/(2\sqrt{40\,000}) = 1/400$, donc

$$\sqrt{40\,001} - 200 \leqslant \frac{1}{400}.$$

  Donc l'erreur commise en prenant 200 pour valeur approchée de $\sqrt{40\,001}$ est majorée par $1/400$ (c'est-à-dire une erreur relative de $1/(400 \times 200) \approx 10^{-5}$).

Dans cet exemple, l'approximation ponctuelle de $\sqrt{40\,001}$ par $\sqrt{40\,000}$ est de bonne qualité à la fois parce que 40 000 est proche de 40 001 mais aussi (et surtout) parce que la fonction $\sqrt{\cdot}$ varie doucement. Lorsque ce n'est plus le cas, il convient de recourir à des approximations plus précises, telles que celles décrites dans les paragraphes suivants.

F.2. Approximation affine (le retour de la vengeance 2)

L'énoncé suivant donne une mesure de l'erreur commise en remplaçant une fonction par l'une de ses tangentes. On parle d'approximation affine locale.

Proposition 6

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et a un élément de I.
Pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a \,;\, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$

Autrement dit, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$, il existe $c \in]a \,;\, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(c)}{2}h^2.$$

■ Traitons le cas $x > a$ (le cas où $x < a$ est similaire).
Posons, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}(t-a)^2.$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I par théorèmes généraux. Pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(a) - 2\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}(t-a)$$

et

$$\varphi''(t) = f''(t) - 2\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}.$$

On constate que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle appliqué à φ entre a et x, il existe $y \in]a; x[$ tel que $\varphi'(y) = 0$.

On constate aussi que $\varphi'(a) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle appliqué à φ' entre a et y, il existe $c \in]a; y[$ tel que $\varphi''(c) = 0$.

La condition $\varphi''(c) = 0$ se réécrit

$$f''(c) - 2\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$

Comme $c \in]a; y[$ et $y \in]a; x[$, on a bien $c \in]a; x[$. ■

Cet énoncé signifie que l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par sa tangente en a est proportionnelle à l'écart quadratique $(x-a)^2$, avec un facteur de proportionnalité donné par la moitié d'une valeur de la dérivée seconde entre a et x. Cette erreur est donc d'autant plus faible que x est proche de a (d'où le nom d'approximation locale) et que la fonction a de « faibles » torsions.

De plus, lorsque x est assez proche de a, le terme $(x-a)^2$ est plus petit que $(x-a)$, ce qui signifie que l'approximation affine est généralement de meilleure qualité que l'approximation ponctuelle (au prix d'un terme supplémentaire dans la formule).

Exemples :

- Appliquée à la fonction $f(t) = \mathrm{e}^t$ (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et x (où $x \in \mathbb{R}$), cette proposition donne l'existence de $c \in]0 \,;\, x[$ tel que

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0(x-0) + \frac{\mathrm{e}^c}{2}(x-0)^2 = 1 + x + \frac{\mathrm{e}^c}{2}x^2.$$

Cela permet de voir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

Autrement dit, la fonction exponentielle est partout au dessus de sa tangente en 0.

F.3. Formule de Taylor-Lagrange

Le théorème suivant généralise les approximations vues précédemment ainsi que la formule de Taylor que nous avons vue dans le chapitre sur les polynômes.

Théorème 18

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et a un élément de I. Pour tout $x \in I$, il existe $c \in \left]a\,;\,x\right[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Autrement dit, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$, il existe $c \in \left]a\,;\,a+h\right[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

L'une ou l'autre de ces deux formules s'appelle la formule de Taylor–Lagrange. La somme est appelée le polynôme de Taylor de f au point a à l'ordre n et le terme contenant $f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

■ Traitons le cas $x > a$ (le cas où $x < a$ est similaire).
Pour tout $t \in [a;x]$, on pose

$$R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$$

et

$$\varphi(t) = R_n(t) - \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(t-a)^{n+1}$$

de sorte que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a;x]$ par théorèmes généraux.

On constate que l'on a $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n)}(a) = 0$ (car $R_n(a) = R_n'(a) = \cdots = {R_n}^{(n)}(a) = 0$) et que $\varphi(x) = 0$.

D'après le théorème de Rolle appliqué à φ sur $[a;x]$, il existe $x_1 \in \left]a;x\right[$ tel que $\varphi'(x_1) = 0$.

D'après le théorème de Rolle appliqué à φ' sur $[a;x_1]$, il existe $x_2 \in \left]a;x_1\right[$ tel que $\varphi''(x_2) = 0$.

$$\vdots$$

D'après le théorème de Rolle appliqué à $\varphi^{(n)}$ sur $[a;x_{n-1}]$, il existe $x_n \in \left]a;x_{n-1}\right[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(x_n) = 0$.

Or

$$\forall t \in [a;x]\,, \qquad \varphi^{(n+1)}(t) = {R_n}^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}R_n(x) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}R_n(x)$$

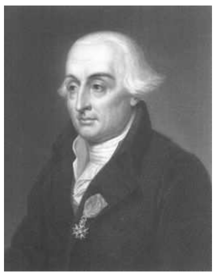
donc, si l'on pose $c = x_n$, l'égalité $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$ devient

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

LAGRANGE Joseph Louis, français, 1736-1813

Né à Turin d'un père d'origine française. Il se passionne dès son enfance pour l'astronomie et les mathématiques et reçoit, à 28 ans, le prix de l'Académie des sciences de Turin pour son étude sur la libération de la lune. Il s'installe ensuite à Berlin, à la cour de Frédéric le Grand (le « plus grand roi d'Europe », qui voulait le « plus grand mathématicien d'Europe ») puis à Paris, où il révolutionne la mécanique par sa <u>Mécanique analytique</u> (sans figure !). À partir de 1795, il enseigne à l'école polytechnique qui vient d'être créée. On lui doit le reste de Lagrange, la variation de la constante, les multiplicateurs de Lagrange.



Exemples :

- Lorsque f est une fonction polynomiale et n est supérieur au degré de celle-ci, on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.
- Au rang $n = 0$ et $n = 1$, on retrouve les approximations ponctuelles et affines décrites dans les paragraphes précédents.
- Au rang $n = 2$, la formule de Taylor permet d'approcher, au voisinage de a, le graphe de f par une parabole : il existe $c \in]a \,;\, x[$ tel que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{\text{trinôme du second degré}} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{6}(x-a)^3}_{\text{erreur}}.$$

On parle d'approximation parabolique locale.

- Démontrons que $\forall x \in [0;\pi]\,,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
D'après la formule de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction sin à l'ordre 2 en 0, on obtient, pour tout $x \in [0;\pi]$, l'existence de $c_x \in [0;x]$ tel que

$$\sin x = x + R_2(x) \qquad \text{où} \qquad R_2(x) = -\frac{x^3}{6}\cos c_x.$$

Comme $\cos c_x \leqslant 1$, on a $R_2(x) \geqslant -x^3/6$, ce qui donne la minoration.
Pour la majoration, on applique la formule de Taylor–Lagrange à la fonction sin à l'ordre 4 en 0, ce qui donne, pour tout $x \in [0;\pi]$, l'existence de $d_x \in [0;x]$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x) \qquad \text{où} \qquad R_4(x) = \frac{x^5}{120}\cos d_x.$$

Comme $\cos d_x \leqslant 1$, on a $R_4(x) \leqslant x^5/120$, ce qui donne la majoration.

Mac Laurin est un malin !

Dans la pratique, on utilise souvent la formule de Taylor–Lagrange pour $a = 0$. On obtient alors la formule de Taylor–Lagrange–Mac Laurin : si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de 0, alors, pour tout x assez proche de 0, il existe $c_x \in]0 \,;\, x[$ tel que

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{polynôme de Taylor en 0}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{reste lagrangien}}.$$

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c_x \in]0 \,;\, x[$ tel que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{c_x}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c_x \in]0 \,;\, x[$ et $d_x \in]0 \,;\, x[$ tels que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos c_x$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos d_x.$$

Dans la pratique, on ne connait pas la valeur exacte du nombre c_x. On sait seulement qu'il appartient à $]a \,\widetilde{;}\, x[$. Cela permet, connaissant les propriétés de la dérivée $n+1$-ème de f, d'encadrer la fonction f.

Théorème 19

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et a un élément de I. Pour tout $x \in I$, on a l'inégalité de Taylor–Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{\sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,\widetilde{;}\, x]\}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

■ AQT. L'existence de $\sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,\widetilde{;}\, x]\}$ est donnée par le théorème de bornes puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a \,\widetilde{;}\, x]$. ■

En général, on ne calcule pas $\sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,\widetilde{;}\, x]\}$. On se contente de trouver un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I (s'il existe).

G. Dérivabilité des fonctions complexes

On étend sans mal la dérivabilité aux fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes.

Définition 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe.

La fonction f est dite dérivable en $x_0 \in I$ si la fonction τ_{x_0}, appelée taux d'accroissement en x_0 et définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $\tau_{x_0} : x \longmapsto \big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir sa fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x_0.

Cinématique, si $f(t)$ représente la position à l'instant t d'un mobile dans le plan complexe, le quotient $(f(t) - f(t_0))/(t - t_0)$ est le vecteur vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ alors que $f'(t_0)$, si il existe, est le vecteur vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

Comme pour les fonctions à but réel, on peut introduire pour les fonctions complexes, les dérivées à droite et à gauche ; les développements limités d'ordre 1 ; les dérivées successives (sous réserve d'existence) ; les classes de régularité $\mathscr{C}^n$ (pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

De plus, les résultats suivants restent valables.

Théorème 20

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Comme dans le cas des fonctions réelles :

(i) une fonction complexe est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$;

(ii) une fonction complexe est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle a un $\mathrm{DL}_1(x_0)$;

(iii) une fonction complexe dérivable est continue ;

(iv) une somme de fonctions complexes de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et la dérivée n-ème de cette somme est la somme des dérivées n-èmes ;

(v) un produit de fonctions complexes de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et l'on a $(fg)' = f'g + fg'$ ainsi que la formule de Leibniz pour la dérivée n-ème ;

(vi) une composée de fonctions « complexes » de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et l'on a $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$;

(vii) un quotient de fonctions complexes de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et l'on a la formule classique pour dériver f/g.

■ On adapte... ■

Le théorème suivant permet de ramener l'étude de la dérivabilité d'une fonction complexe à celle de la dérivabilité de ses parties réelle et imaginaire.

Théorème 21

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est dérivable sur I si, et seulement si, $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ le sont. Dans ce cas, on a $f' = \big(\Re\mathrm{e}(f)\big)' + i\big(\Im\mathrm{m}(f)\big)'$.

■ Cela découle du fait que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(\Re\mathrm{e}\, f)(x) - (\Re\mathrm{e}\, f)(x_0)}{x - x_0} + i\dfrac{(\Im\mathrm{m}\, f)(x) - (\Im\mathrm{m}\, f)(x_0)}{x - x_0}$. ■

Il découle de ce résultat que, dans la plupart des cas, les calculs se déroulent comme dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}$ puisque
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = -\sin t + i\cos t = i(i\sin t + \cos t) = i\,\mathrm{e}^{it}.$$
On en déduit que la fonction $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\omega t} = \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{ibt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions dérivables $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$. De plus,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{at}\,ib\,\mathrm{e}^{ibt} = (a+ib)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{ibt} = \omega\,\mathrm{e}^{\omega t}.$$
- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I, alors sa conjuguée $\overline{f}$ est également dérivable sur I.
- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I, les théorèmes généraux assurent la dérivabilité de $|f|$ uniquement en dehors des points d'annulation de f. En ces points, on a des incertitudes.

Toutes les résultats sur les fonctions réelles qui sont directement liés à la relation d'ordre ne s'étendent pas aux fonctions complexes. C'est le cas des résultats sur les extrema ou sur les variations. De manière moins évidente, les fonctions à valeurs complexes ne vérifient pas le théorème de Rolle : par exemple, $x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ est rollable et prend des valeurs égales en 0 et 2π ; pourtant, sa dérivée $x \longmapsto i\,\mathrm{e}^{ix}$ ne s'annule jamais. De même, le théorème sur l'égalité des accroissements finis ainsi que la formule de Taylor–Lagrange deviennent faux dans le cadre des fonctions complexes.

On peut en revanche étendre le théorème sur l'inégalité des accroissements finis au cas des fonctions à valeurs complexes.

Théorème 22

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in\,]a;b[\,,\ |f'(t)| \leqslant k$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$.

■ Notons α un argument de $f(b) - f(a)$ et considérons $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [a;b]$, par $\varphi(x) = \Re\mathrm{e}(f(x)\,\mathrm{e}^{-i\alpha})$. La fonction φ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ car $f\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$ l'est. De plus, on a $\varphi' = \Re\mathrm{e}(f'\,\mathrm{e}^{-i\alpha})$ sur $]a;b[$, d'où $|\varphi'| = |\Re\mathrm{e}(f'\,\mathrm{e}^{-i\alpha})| \leqslant |f'\,\mathrm{e}^{-i\alpha}| = |f'| \leqslant k$ sur $]a;b[$. Le TAF réel, appliqué à φ entre a et b, implique alors l'existence de $c \in\,]a;b[$ tel que $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant k|b-a|$, c'est-à-dire $|\Re\mathrm{e}(f(b)\,\mathrm{e}^{-i\alpha} - f(a)\,\mathrm{e}^{-i\alpha})| \leqslant k|b-a|$ ou encore $|f(b)\,\mathrm{e}^{-i\alpha} - f(a)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}| \leqslant k|b-a|$ puisque $(f(b)-f(a))\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$ est réel. Comme $|\mathrm{e}^{-i\alpha}| = 1$, on obtient finalement $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$. ■

Nous verrons plus tard que, pour les fonctions à valeurs complexes, on peut démontrer une inégalité de Taylor–Lagrange.

L'inégalité des accroissements finis complexe permet de conserver la caractérisation différentielle des fonctions constantes.

Corollaire 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$. Si f' est nulle sur $\mathrm{Int}(I)$, alors f est constante sur I.

7 h 30

■ C'est une conséquence immédiate du théorème précédent. ■