Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 6 h 15

MATRICES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les systèmes linéaires.

Dans tout ce chapitre, les lettres n, m, p, q, r, ℓ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Sauf mention explicite du contraire, la lettre Z désigne une anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et K un corps commutatif. Les éléments de Z ou K sont appelés les scalaires.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Calcul matriciel

A.1. Matrices

Définition 1

On appelle matrice à n lignes et m colonnes à coefficients dans Z, la donnée d'une famille de nm éléments de Z, que l'on peut disposer en tableau

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On dit aussi « matrice de type (n, m) », ou « matrice de format (n, m) » ou encore « matrice $n \times m$ ».

L'ensemble des matrices $n \times m$ à coefficients dans Z est noté $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$.

La matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ dont tous les coefficients sont nuls est appelé matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$. Elle est notée $0_{n,m}$ ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur les valeurs de n et m, on note $A = (a_{i,j})$; le premier indice désignant toujours le numéro de la ligne et le second celui de la colonne.

Exemples :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à coefficients entiers, c'est-à-dire $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$.
- $\begin{pmatrix} \mathrm{e} & -2+i \\ 0 & \ln 2 \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×2 à coefficients complexes.
- Les matrices $n \times 1$ (c'est-à-dire celles de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(Z)$) sont appelées des matrices colonnes (ou vecteurs colonnes) et les matrices $1 \times m$ (c'est-à-dire celles de l'ensemble $\mathscr{M}_{1,m}(Z)$) sont appelées des matrices lignes (ou vecteurs lignes). Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne 1×3.

Les matrices carrées sont particulièrement importantes.

Définition 2

On appelle matrice carrée d'ordre n une matrice $n \times n$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice carrée, les éléments $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ forment la diagonale de A.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans Z est noté $\mathscr{M}_n(Z)$.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ \ln 2 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle 2×2.
- La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(Z)$ est notée 0_n.
- La matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est appellée matrice identité.

La définition suivante vous présente les matrices triangulaires et diagonales, qui sont des types de matrices carrées lacunaires (c'est-à-dire avec beaucoup de zéros) que nous utiliserons souvent.

Définition 3

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans Z.

- On dit que A est triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire lorsque A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}.$$

  L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est noté $\mathscr{T}_n^+(Z)$.

- On dit que A est triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i < j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire lorsque A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

  L'ensemble des matrices triangulaires inférieures est noté $\mathscr{T}_n^-(Z)$.

- On dit que A est diagonale lorsque $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i \neq j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire lorsque A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Cette matrice se note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. L'ensemble des matrices diagonale est noté $\mathscr{D}_n(Z)$.

Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{Diag}(\lambda, \lambda, \text{——}, \lambda) = \lambda I_n$, est dite scalaire.

Lorsqu'on dit qu'une matrice A est triangulaire supérieure, on exprime la nullité des coefficients qui sont en dessous de la diagonale. Ceux qui sont sur la diagonale ou au dessus de celle-ci sont quelconques. En particulier, ils peuvent eux aussi être nuls.

Ainsi, une matrice diagonale est a fortiori triangulaire inférieure et supérieure. Plus précisément, on a $\mathscr{T}_n^+(Z) \cap \mathscr{T}_n^-(Z) = \mathscr{D}_n(Z)$.

Une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) dont les coefficients diagonaux sont nuls est dite strictement triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Exemples :

- Les matrices $0_n = \mathrm{Diag}(0, 0, \text{——}, 0)$ et $I_n = \mathrm{Diag}(1, 1, \text{——}, 1)$ sont scalaires.

$\mathcal{A}$.2. Addition

L'addition matricielle s'effectue coefficient par coefficient sur des matrices de même format.

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ telles que $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On appelle somme de A et B la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ notée $A + B$ définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{e} & 4 \\ \ln 2 & 5+\pi & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ n'existe pas !

La structure de groupe de Z se transfert immédiatement à $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$.

Proposition 1

$\big(\mathscr{M}_{n,m}(Z), +\big)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est la matrice nulle $n \times m$.

■ L'addition matricielle hérite son associativité et sa commutativité de la loi d'addition sur Z. Il est clair que la matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ est élément neutre pour l'addition matricielle. Enfin, toute matrice $A = (a_{i,j})$ admet une opposée qui est $-A = (-a_{i,j})$. ■

A. 3. « Dilatation »

La « dilatation » d'une matrice par un scalaire s'effectue en multipliant chacun des coefficients par le scalaire. On obtient ainsi une multiplication externe (un nombre agit sur une matrice).

Définition 5

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ telle que $A = (a_{i,j})$ et $\lambda \in Z$. On appelle produit de A par le scalaire λ la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ notée λA définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

L'addition et la dilatation permettent d'envisager des combinaisons linéaires de matrices.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$
- On a $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ -2 & \pi \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

  Plus généralement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ définies par

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \begin{matrix} 0 \\ | \\ 0 \end{matrix} & \mathbb{O} \\ 0 \text{---} 0 & 1 & 0 \text{---} 0 \\ \mathbb{O} & \begin{matrix} 0 \\ | \\ 0 \end{matrix} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème ligne} \\ \uparrow \\ j\text{-ème colonne} \end{array}$$

  sous la forme

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Les propriétés de la dilatation, notée $\cdot$, sont rassemblées ci-dessous.

Proposition 2

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ et $\lambda, \mu \in Z$. On a

(i) $1A = A$;

(ii) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

(iii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Ces propriétés, associées au fait que $\big(\mathscr{M}_{n,m}(Z), +\big)$ est un groupe, confère à $\big(\mathscr{M}_{n,m}(Z), +, \cdot\big)$ une structure dite de Z-module.

■ Ces propriétés découlent des règles de calcul dans Z. ■

Dans le cas où $Z = K$ est un corps, un K-module est appelé un K-espace vectoriel. C'est une structure fondamentale en mathématiques sur laquelle nous reviendrons longuement.

$\mathcal{A}$.4. Multiplication matricielle

Définition 6

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(Z)$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,q}(Z)$ de sorte que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (c'est pour cette raison que l'indice de colonne de A est le même que l'indice de ligne de B).

On peut alors définir le produit matriciel de A par B, noté AB, comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(Z)$ dont le coefficient général $(ab)_{i,k}$ est donné par

$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad (ab)_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}.$$

Le produit AB de A par B a donc le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B. La multiplication agit donc sur les formats comme la relation de Chasles : « $(n,m) \times (m,q) = (n,q)$ ».

Calcul d'un produit de matrices

Le calcul de $(ab)_{i,k}$ se fait comme le calcul du produit scalaire du i-ème vecteur ligne de A par le k-ème vecteur colonne de B, ce que l'on peut visualiser de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,k}} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,k} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,k} & \cdots & b_{m,q} \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (ab)_{1,1} & \cdots & & \cdots & (ab)_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{(ab)_{i,k}} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ (ab)_{n,1} & \cdots & & \cdots & (ab)_{n,q} \end{pmatrix} = AB$$

$\otimes$ $\oplus$

Exemples :

- Pour $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$, on a
$$0_{p,n}A = 0_{p,m} \qquad \text{et} \qquad A0_{m,q} = 0_{n,q}.$$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -11 \\ -1 & -9 & 37 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA \text{ n'existe pas !}$$
- Si $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante rassemble les propriétés de base du produit matriciel.

Proposition 3

Le produit matriciel :

(i) est « associatif » :
$\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad \forall B \in \mathscr{M}_{m,q}(Z), \quad \forall C \in \mathscr{M}_{q,r}(Z), \qquad (AB)C = A(BC)$;

(ii) est « distributif » :
$\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad \forall B, C \in \mathscr{M}_{m,q}(Z), \qquad A(B+C) = AB + AC$;
$\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad \forall C \in \mathscr{M}_{m,q}(Z), \qquad (A+B)C = AC + BC$;

(iii) « commute » avec le produit par les scalaires :
$\forall \lambda \in Z, \quad \forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad \forall B \in \mathscr{M}_{m,q}(Z), \qquad (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

■ (i) Considérons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$, $C = (c_{k,\ell})$, $AB = ((ab)_{i,k})$, $(AB)C = (((ab)c)_{i,\ell})$, $BC = ((bc)_{j,\ell})$ et $A(BC) = ((a(bc))_{i,\ell})$. Alors, pour tout $(i, \ell) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; r]\!]$, on a

$$((ab)c)_{i,\ell} = \sum_{k=1}^{q} (ab)_{i,k} c_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} (bc)_{j,\ell} = (a(bc))_{i,\ell},$$

donc $(AB)C = A(BC)$.

(ii) Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$, $C = (c_{j,k})$, $A(B+C) = ((a(b+c))_{i,k})$ et $B + C = ((b+c)_{j,k})$, donc

$$(a(b+c))_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} (b+c)_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} (b_{j,k} + c_{j,k}) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} + \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} c_{j,k} = (ab)_{i,k} + (ac)_{i,k},$$

donc $A(B+C) = AB + AC$. On procède de même pour la distributivité à droite.

(iii) Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$, $\lambda A = ((\lambda a)_{i,j})$ et $(\lambda A)B = (((\lambda a)b)_{i,k})$. Alors

$$((\lambda a)b)_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} (\lambda a)_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} \lambda a_{i,j} b_{j,k} = \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} = \lambda (ab)_{i,k},$$

ce qui démontre que $(\lambda A)B = \lambda(AB)$. On prouve de même que $\lambda(AB) = A(\lambda B)$. ■

Les mots « associatif » et « distributif » sont entre guillemets car le produit matriciel n'est pas une opération interne (puisque l'on ne multiplie pas nécessairement des matrices de même format). En toute rigueur, on ne devrait donc pas parler d'associativité et de distributivité dans ce cadre.

Il découle de l'« associativité » que l'on peut écrire ABC à la place de $(AB)C$ ou $A(BC)$.

Cela dit, tout n'est pas tout à fait rose au pays des matrices.

Défaut de commutativité

Comme le montrent les exemples de la page précédente, le produit matriciel n'est pas « commutatif » :

- le produit AB peut exister sans que le produit BA n'existe ;
- même lorsque les produits AB et BA existent tous les deux, ils ne sont pas nécessairement égaux (ils n'ont d'ailleurs a priori pas le même format).

A.5. Transposition

Définition 7

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$. La transposée de A est la matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(Z)$, notée ${}^tA$ (ou A^T), dont les lignes sont les colonnes de A (et vice-versa). L'élément générique $({}^ta)_{i,j}$ de ${}^tA$ vaut donc $a_{j,i}$.

On notera bien que si A est une matrice $n \times m$, sa transposée est $m \times n$.

Exemples :

- La transposée de $0_{n,m}$ est $0_{m,n}$.
- La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et vice-versa.
- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \pi \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.
- La transposée de $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 4 & e & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ est ${}^tA = \begin{pmatrix} \pi & 4 & 5 \\ 1 & e & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui illustre le fait que

  pour une matrice carrée, la transposition est à une symétrie par rapport à la diagonale.

- La transposée de I_n est I_n.
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure et vice-versa.

La proposition suivante présente les propriétés fondamentales de la transposition.

Proposition 4

On a

(i) $\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad {}^t({}^tA) = A\,;$

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB\,;$

(iii) $\forall \lambda \in Z, \quad \forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA\,;$

(iv) $\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z), \quad \forall B \in \mathscr{M}_{m,q}(Z), \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ Attention à l'ordre !!

■(i), (ii) et (iii) : AQT

(iv) En notant $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$, ${}^tA = (({}^ta)_{j,i})$, ${}^tB = (({}^tb)_{k,j})$, $AB = ((ab)_{i,k})$, ${}^t(AB) = (({}^t(ab))_{k,i})$ et ${}^tB\,{}^tA = (({}^tb\,{}^ta)_{k,i})$, on a

$$({}^t(ab))_{k,i} = (ab)_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} ({}^ta)_{j,i} ({}^tb)_{k,j} = ({}^tb\,{}^ta)_{k,i},$$

donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. ■

La conjonction des propriétés (ii) et (iii) permet de dire que la transposée d'une combinaison linéaire de matrices est la combinaison linéaire des transposées. On dit que la transposition est une application linéaire.

A.6. Calcul par blocs

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le produit matriciel peut s'effectuer en regroupant les coefficients des matrices par blocs rectangulaires.

a) Décomposition en lignes et en colonnes

Définition 8

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, C_2, \dots, C_m$ les colonnes de A. Les écritures

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} C_1 & \vert & C_2 & \vert & \cdots & \vert & C_m \end{pmatrix}$$

s'appellent respectivement la décomposition en lignes et la décomposition en colonnes de A.

Nous avons vu que, par définition, le coefficient de position (i, j) dans la matrice AB est le produit scalaire de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B. Ainsi, dans le calcul d'un produit AB de deux matrices, on met en rapport les lignes de A avec les colonnes de B.

Dans l'énoncé suivant, on montre que les décompositions en lignes et colonnes permettent de donner une nouvelle vision de la mécanique du produit matriciel.

Proposition 5

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_m$ les colonnes de A. On considère aussi $M \in \mathscr{M}_{\ell,n}(Z)$ et $N \in \mathscr{M}_{m,q}(Z)$. Alors

$$MA = M \begin{pmatrix} C_1 & \vert & C_2 & \vert & \cdots & \vert & C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MC_1 & \vert & MC_2 & \vert & \cdots & \vert & MC_m \end{pmatrix}$$

et

$$AN = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} L_1 N \\ \hline L_2 N \\ \hline \vdots \\ \hline L_n N \end{pmatrix}.$$

■ AQT ■

Ainsi on peut interpréter le produit AB comme l'action successive de A sur chacune des colonnes de B par multiplication à gauche ou encore comme l'action successive de B sur chacune des lignes de A par multiplication à droite.

Il n'est d'ailleurs pas inutile de retenir cette petite règle toute bête (qui nous servira plus tard pour traduire matriciellement la méthode du pivot) : pour agir sur les lignes de A, on multiplie A par la gauche (Left pour Ligne) et pour agir sur les colonnes de A, on multiplie A par la droite.

Exemples :

- Si la j-ème colonne de B est nulle, la j-ème colonne de AB l'est aussi (peu importe A).
  Lorsque la i-ème ligne de A est nulle, la i-ème ligne de AB l'est aussi (peu importe B).

Regardons maintenant ce qui se passe lorsqu'on multiplie une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne.

Proposition 6

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_m$ les colonnes de A.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{m,1}(Z)$ une matrice colonne de coefficients $x_1, \dots, x_m$. Alors

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & = X \\ A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{array}\right) & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} x_k C_k\right) & = AX \end{array}$$

- Soit $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(Z)$ une matrice ligne de coefficients $y_1, \dots, y_n$. Alors

$$\begin{array}{ccc} & \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right) & = A \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k L_k\right) & = YA \end{array}$$

■ AQT ■

On constate ainsi que multiplier A à droite par une matrice colonne revient à effectuer une combinaison linéaire des colonnes de A, avec comme coefficients les éléments de la matrice colonne. De même, multiplier A à gauche par une matrice ligne revient à effectuer une combinaison linéaire des lignes de A, avec comme coefficients les éléments de la matrice ligne.

Exemples :

- Soit $\ell \in [\![1; m]\!]$. La ℓ-ème colonne de la matrice I_m est une matrice colonne (pardi !) dont tous les coefficients sont nuls sauf le ℓ-ème qui vaut 1. Cette colonne est appelée le ℓ-ème vecteur canonique de $\mathscr{M}_{m,1}(Z)$. Lorsqu'on effectue le produit de A par cette ℓ-ème colonne canonique, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vert \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vert \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \longleftarrow \ell\text{-ème position} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_1 & \cdots & C_\ell & \cdots & C_m \end{array}\right) & \begin{pmatrix} C_\ell \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut donc retenir la règle suivante : multiplier A à droite par la ℓ-ème colonne canonique permet d'extraire la ℓ-ème colonne de A.

- Soit $k \in [\![1;n]\!]$. La k-ème ligne de la matrice I_n est une matrice ligne dont tous les coefficients sont nuls sauf le k-ème qui vaut 1. Cette ligne est appelée le k-ème vecteur canonique de $\mathscr{M}_{1,n}(Z)$. Lorsqu'on effectue le produit de cette k-ème ligne canonique par la matrice A, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_k \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right) = A \\ \begin{pmatrix} 0 & - & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ème position}}}{1} & 0 & -\!\!- & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad L_k \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut donc retenir la règle suivante : multiplier A à gauche par la k-ème ligne canonique permet d'extraire la k-ème ligne de A.

- On peut alors décrire ce que donne le produit d'une matrice quelconque avec une matrice diagonale.

Dans le cas où l'on multiplie $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ par $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ à droite, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} = D \\ A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{array}\right) & \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 C_1 & \lambda_2 C_2 & \cdots & \lambda_m C_m \end{array}\right) = AD \end{array}$$

Dans le cas où l'on multiplie $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ par $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ à gauche, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right) = A \\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} & \left(\begin{array}{c} \lambda_1 L_1 \\ \hline \lambda_2 L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda_n L_n \end{array}\right) = DA \end{array}$$

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, notons U_p le vecteur d'Attila de taille p, c'est-à-dire la matrice colonne $p \times 1$ dont tous les coefficients valent 1.

Alors, pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$, calculer AU_m renvoie le vecteur colonne dont les élèments sont les sommes de chacune des lignes de A et calculer ${}^tU_n A$ renvoie le vecteur ligne dont les élèments sont les sommes de chacune des colonnes de A.

En conséquence, ${}^tU_n A U_m$ est un scalaire (pour être précis, c'est une matrice 1×1) dont la valeur est la somme de tous les coefficients de A.

b) *Décomposition en « quadrillage »*

La décomposition en lignes ou en colonnes n'est pas la seule manière de découper une matrice en plusieurs blocs rectangulaires. La situation la plus communément rencontrée est celle où les matrices sont décomposées en quatre blocs. La proposition suivante explique alors comment effectuer le produit de deux matrices de ce type.

Proposition 7

Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans Z dont les formats sont indiqués ci-dessous. On a

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{array}{cc} q & q' \end{array} \\
 & & \begin{array}{c} m \\ m' \end{array} & \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{cc} m & m' \end{array} & & \\
\begin{array}{c} n \\ n' \end{array} & \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} AA'+CB' & AC'+CD' \\ BA'+DB' & BC'+DD' \end{pmatrix} \begin{array}{c} n \\ n' \end{array} \\
 & & & \begin{array}{cc} q & q' \end{array}
\end{array}$$

■ AQT (c'est un tantinet bourrin). ■

On retiendra que dans un produit de matrices définies par blocs, les calculs s'effectuent exactement de la même façon que si les blocs étaient des scalaires, à condition toutefois de bien vérifier la compatibilité (multiplicative) des formats des différents blocs.

Plus généralement, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 8

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(Z)$ et $B \in \mathscr{M}_{m,q}(Z)$. On considère les subdivisions de $[\![1;n]\!]$, $[\![1;m]\!]$ et $[\![1;q]\!]$ suivantes : $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{r-1} < i_r = n$, $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_{s-1} < j_s = m$ et $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{t-1} < k_t = q$ où $r \in [\![1;n]\!]$, $s \in [\![1;m]\!]$ et $t \in [\![1;q]\!]$. Les deux premières subdivisions définissent une décomposition par blocs de A de la forme $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;r]\!]\times[\![1;s]\!]}$ et les deux dernières subdivisions définissent une décomposition par blocs de B de la forme $B = (B_{j,k})_{(j,k)\in[\![1;s]\!]\times[\![1;t]\!]}$.

Alors AB admet une décomposition par blocs de la forme $AB = (C_{i,k})_{(i,k)\in[\![1;r]\!]\times[\![1;t]\!]}$ où

$$\forall (i,k) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;t]\!]\,, \qquad C_{i,k} = \sum_{j=1}^{s} A_{i,j} B_{j,k}.$$

■ AQT (encore plus bourrin !). ■

Là encore, on retrouve la formule du coefficient d'un produit en fonction des coefficients des matrices multipliées. Cependant ici, $A_{i,k}$ et $B_{j,k}$ désignent des matrices et non des scalaires.

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_nB_n \end{pmatrix}$.

  Dans ce calcul, les blocs absents désignent des blocs nuls.

  On parle de matrices diagonales par blocs.

2 h 30

B. Matrices carrées

B.1. Anneau des matrices carrées

Le produit matriciel est noté $\times$.

Proposition 9

$\big(\mathscr{M}_n(Z), +, \times\big)$ est un anneau dont l'élément neutre multiplicatif est la matrice identité I_n.

■ On sait déjà que $\big(\mathscr{M}_n(Z), +\big)$ est un groupe abélien.

De plus, dans $\mathscr{M}_n(Z)$, le produit matriciel est une opération interne (si A, B appartiennent à $\mathscr{M}_n(Z)$, alors AB existe et appartient à $\mathscr{M}_n(Z)$). L'associativité de $\times$ et la distributivité de $\times$ sur $+$ sont données par la proposition 3. Enfin, on voit aisément que I_n est l'élément neutre pour $\times$. ■

La combinaison des structures de Z-module et d'anneau font de $\big(\mathscr{M}_n(Z), +, \cdot, \times\big)$ une Z-algèbre.

Lorsqu'on dispose de deux matrices carrées A et B, on peut toujours les multiplier aussi bien dans un sens, ce qui donne AB, que dans l'autre sens, ce qui donne BA. Autrement dit, avec des matrices carrées (de même ordre), il n'y a pas de problème d'existence des produits.

Exemples :

- Dire que I_n est l'élément neutre de $\times$ dans $\mathscr{M}_n(Z)$ signifie que, pour $A \in \mathscr{M}_n(Z)$, on a
$$AI_n = I_nA = A$$
- Dans le cas de matrices diagonales, on retrouve aisément le résultat déjà rencontré pour des matrices diagonales par blocs, c'est-à-dire
$$\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\,\mathrm{Diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \mathrm{Diag}(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n).$$
Autrement dit, un produit de matrices diagonales est une matrice diagonale dont le i-ème coefficient diagonal est le produit des i-èmes coefficients diagonaux des facteurs du produit.
- Pour
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$
on a
$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}^{=B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=AB} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{=A} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{=B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=BA} \end{array}$$
- Pour
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
on a
$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}^{=D} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=C} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=CD} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=C} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=D} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{=DC} \end{array}$$

Les exemples précédents illustrent deux défauts du produit matriciel. D'une part, les produits AB et BA peuvent aussi bien être égaux que différents. D'autre part, on peut trouver des matrices non nulles dont le produit est nul. L'anti-énoncé suivant s'impose donc.

Proposition 10

Dès que $n \geqslant 2$, l'anneau $\big(\mathscr{M}_n(Z), +, \times\big)$ n'est ni commutatif ni intègre.

■ Cf exemples précédents. ■

L'anneau $\mathscr{M}_n(Z)$ contient donc des diviseurs de zéro. Par conséquent, lorsque l'on sait qu'un produit de matrices est nul, il n'est pas possible d'en déduire que l'une des matrices est nulle.

L'anneau $\mathscr{M}_n(Z)$ n'étant pas commutatif, on introduit le concept suivant.

Définition 9

On dit que deux matrices carrées $A, B \in \mathscr{M}_n(Z)$ commutent lorsque $AB = BA$.

Comme dans tout anneau, on peut définir la notion de puissance de matrices carrées.

Définition 10

Si A est une matrice carrée $n \times n$, on pose $A^0 = I_n$ et $A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemples :

- Pour une matrice diagonale, une récurrence immédiate nous dit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\big(\operatorname{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\big)^p = \operatorname{Diag}({a_1}^p, {a_2}^p, \dots, {a_n}^p).$$

  Autrement dit, pour calculer la puissance p-ème d'une matrice diagonale, il suffit d'élever chacun de ses coefficients diagonaux à la puissance p.

  Ce résultat se généralise au cas de matrices diagonales par blocs.

- Pour toute matrice carrée A et tout $p \in \mathbb{N}$, on a ${}^t(A^p) = ({}^tA)^p$.
- On a

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}}^{=A} & \overbrace{\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}}^{=A} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A^3} \end{array}$$

  donc

$$A^3 = 0_3.$$

La matrice de ce dernier exemple satisfait la définition suivante.

Définition 11

Une matrice A qui admet une puissance nulle est dite nilpotente.

L'encadré suivant résume les précautions à prendre lorsqu'on calcule avec des matrices. On y retrouve les avertissements déjà rencontrés dans un anneau quelconque (ni commutatif, ni intègre).

Précautions calculatoires

Les défauts de commutativité et d'intégrité du produit matriciel ainsi que la convention $A^0 = I_n$ obligent à prendre quelques précautions calculatoires.

- Lorsqu'on factorise une expression, il faut, d'une part, tenir compte de l'ordre et, d'autre part, ne pas oublier les termes I_n qui peuvent apparaître, comme par exemple dans l'égalité $AB + A = A(B + I_n)$.
- Une matrice A peut être un diviseur de zéro (par exemple si elle est nilpotente).
- La quantité $(AB)^p$ n'est pas égale à A^pB^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ (sauf si A et B commutent).
- L'expression $A^2 - B^2$ ne se factorise pas en $(A + B)(A - B)$ car, sans savoir que A et B commutent, on ne peut pas annuler $AB - BA$.

  En général, la formule de Bernoulli ne s'applique qu'à des matrices qui commutent :

$$(AB = BA) \quad \Longrightarrow \quad \left(\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p - B^p = (A - B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big)\right).$$

- Le développement de $(A + B)^2$ donne $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ et rien ne dit, sans hypothèse de commutativité, que $AB + BA$ soit égale au double-produit $2AB$.

  Plus généralement, la formule du binôme n'est utilisable que pour des matrices qui commutent :

$$(AB = BA) \quad \Longrightarrow \quad \left(\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}\right).$$

En pratique, la formule du binôme matriciel sert souvent pour calculer les puissances d'une matrice. L'exercice suivant donne un exemple.

Exercice 1.
Calculer les puissances de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Diamond$ On remarque que M est liée à la matrice d'Attila A (envahie par les 1), de la façon suivante :

$$M = A - I_3 \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme A et I_3 commutent, la formule du binôme s'applique et donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M^p = (A - I_3)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k (-I_3)^{p-k}.$$

Or on constate que $A^2 = 3A$, ce qui donne $\forall k \geqslant 1,\ A^k = 3^{k-1}A$ à l'aide d'une récurrence immédiate. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M^p = (-I_3)^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^{k-1} A (-I_3)^{p-k} = (-I_3)^p + \frac{1}{3}\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^k (-1)^{p-k}}_{=(3-1)^p - (-1)^p \ (\text{binôme})}\Big] A$$

c'est-à-dire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad M^p = (-1)^p I_3 + \frac{2^p - (-1)^p}{3} A. \qquad \Diamond$$

$\mathscr{B}$.2. Groupe des matrices inversibles

Ce qui suit contextualise dans le cadre des matrices carrées la notion d'inversibilité. Les définitions et énoncés de ce paragraphe ont donc déjà été rencontrés pour des anneaux quelconques.

Définition 12

Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(Z)$ est dite inversible dans $\mathscr{M}_n(Z)$ s'il existe une matrice carrée $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(Z)$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. L'inverse A^{-1} de A est alors unique.

Le groupe des unités de $\mathscr{M}_n(Z)$, contitué des matrices inversibles, s'appelle le groupe linéaire et il est noté $\mathscr{GL}_n(Z)$. Ce groupe n'est pas abélien (si $n \geqslant 2$).

■ Les affirmations de cette définition sont des résultats généraux sur les anneaux. ■

Pour être inversible, une matrice doit d'abord être carrée !! En effet, si les matrices ne sont pas carrées, il n'y a pas de structure d'anneau sous-jacente et la notion d'inversibilité n'existe pas.

Une matrice inversible est simplifiable, autrement dit, si A est inversible et si l'on a $AB = AC$, on peut en déduire que $B = C$ en multipliant par A^{-1} à gauche.

Mais attention, la simplification $AA^{-1} = I_n$ n'est envisageable que lorsque A et A^{-1} sont contiguës. Ainsi, dans le produit ABA^{-1}, on ne peut pas simplifier par A (sauf si l'on sait que A et B commutent). Par exemple, si l'on a $AB = CA$, on ne peut pas simplifier par A.

Exemples :

- La matrice identité I_n est inversible et l'on a clairement ${I_n}^{-1} = I_n$.
- La matrice nulle 0_n n'est pas inversible (il n'y a pas de matrice A telle que $0_nA = I_n$).
- Rappelons qu'un diviseur de zéro ne peut pas être inversible. En effet, si $A, B \in \mathscr{M}_n(Z)$ sont deux matrices telles que $AB = 0_n$ et $B \neq 0_n$, alors A ne peut être inversible sinon on aurait $B = I_nB = A^{-1}AB = A^{-1}0_n = 0_n$, ce qui est absurde !

  Par exemple, la matrice d'Attila d'ordre $n \geqslant 2$, notée A, dont tous les coefficients valent 1 n'est pas inversible. En effet, elle vérifie $A^2 = nA$, c'est-à-dire $A(A - nI_n) = 0_n$, ce qui démontre que A est un diviseur de zéro (car $A - nI_n \neq 0_n$ pour $n \geqslant 2$).

  De même, une matrice nilpotente n'est jamais inversible.

Les propriétés élémentaires de l'inversion des matrices sont rassemblées dans l'énoncé suivant.

Proposition 11

Soient $A, B \in \mathscr{GL}_n(Z)$ deux matrices inversibles et $\lambda \in \mathrm{U}(Z)$ un scalaire inversible. Alors

(i) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;

(ii) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Attention à l'ordre !) ;

(iii) λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$;

(iv) ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

■ (i) et (ii) sont des résultats généraux sur les anneaux.

(iii) AQT

(iv) ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = I_n = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})\,{}^tA$ donc ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. ■

On retient (iv) sous la forme : l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

La propriété (ii) implique que si A est une matrice carrée inversible, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible d'inverse $(A^{-1})^p$. Cette dernière matrice est notée A^{-p}.

En particulier, la formule ${}^t(A^p) = ({}^tA)^p$ que l'on sait être vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ s'étend au cas $p \in \mathbb{Z}$ dès que A est inversible.

B.3. Sous-anneaux des matrices triangulaires et diagonales

Regardons ce qui se passe lorsqu'on multiplie des matrices triangulaires ou diagonales.

Proposition 12

Les ensembles $\mathscr{T}_n^+(Z)$, $\mathscr{T}_n^-(Z)$ et $\mathscr{D}_n(Z)$ sont des sous-anneaux de $\big(\mathscr{M}_n(Z),+,\times\big)$. De plus, $\mathscr{D}_n(Z)$ est commutatif !

■ ▷ La matrice identité I_n appartient bien à $\mathscr{T}_n^+(Z)$, $\mathscr{T}_n^-(Z)$ et $\mathscr{D}_n(Z)$.

▷ Il est clair que la différence de deux matrices de $\mathscr{T}_n^+(Z)$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(Z)$, respectivement $\mathscr{D}_n(Z)$) est bien une matrice de $\mathscr{T}_n^+(Z)$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(Z)$, respectivement $\mathscr{D}_n(Z)$).

▷ Reste à démontrer la stabilité de $\mathscr{T}_n^+(Z)$, $\mathscr{T}_n^-(Z)$ et $\mathscr{D}_n(Z)$ par produit.
Le cas $\mathscr{D}_n(Z)$ est simple car $\operatorname{Diag}(a_1,a_2,\dots,a_n)\operatorname{Diag}(b_1,b_2,\dots,b_n) = \operatorname{Diag}(a_1b_1,a_2b_2,\dots,a_nb_n)$ pour tous $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in Z$. On constate de plus que $\mathscr{D}_n(Z)$ est commutatif.
Soient $A,B \in \mathscr{T}_n^+(Z)$. On pose $AB = \big((ab)_{i,j}\big)$. Pour tous $i,k \in [\![1;n]\!]$ tels que $i>k$, on a

$$(*) \qquad (ab)_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}.$$

Or si $j>k$, alors $b_{j,k}=0$ car B est triangulaire supérieure et si $j \leqslant k$, alors $j<i$ (puisque $k<i$) et donc $a_{i,j}=0$. Du coup, tous les termes intervenant dans la somme $(*)$ sont nuls, ce qui implique que $(ab)_{i,k}=0$. Par suite, AB est bien triangulaire supérieure. On procède de même avec $\mathscr{T}_n^-(Z)$. ■

Ainsi, un produit de matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures, respectivement diagonales) est donc une matrice triangulaire supérieure (respectivement triangulaire inférieure, respectivement diagonale). On peut en outre préciser que, dans ces trois cas, la diagonale du produit est le produit élément par élément des diagonales des matrices du produit.

Voyons ce qui se passe lorsqu'on élève à la puissance une matrice strictement triangulaire.

Dans une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, les coefficients $a_{1,k+1}, a_{2,k+2}, \dots, a_{n-k,n}$ forment la k-ème sur-diagonale de A et les coefficients $a_{k+1,1}, a_{k+2,2}, \dots, a_{n,n-k}$ forment la k-ème sous-diagonale de A (où $k \in [\![0;n-1]\!]$). La 0-ème sur(sous)-diagonale de A est donc sa diagonale.

Proposition 13

Soit A une matrice $n\times n$ qui est strictement triangulaire supérieure. Pour tout $p \in [\![1;n-1]\!]$, les 0-ème, 1-ème, …, $(p-1)$-ème sur-diagonales de A^p sont nulles. En particulier, on a $A^n=0$, c'est-à-dire que A est une matrice nilpotente.

On a le même résultat pour une matrice strictement triangulaire inférieure à condition de remplacer les « sur-diagonales » par des « sous-diagonales ».

■ Pour tout $p \in [\![1;n-1]\!]$, on pose $\mathscr{H}(p)$: « les 0-ème, 1-ème, …, $(p-1)$-ème sur-diagonales de A^p sont nulles ». On procède par récurrence finie.

<u>Initialisation :</u> La propriété $\mathscr{H}(1)$ est vraie puisque A est strictement triangulaire supérieure.

<u>Hérédité :</u> Fixons $p \in [\![2;n-1]\!]$ tel que $\mathscr{H}(p-1)$ est vraie et démontrons $\mathscr{H}(p)$. Notons $A=(a_{i,j})$, $A^{p-1}=(u_{i,j})$ et $A^p=(v_{i,j})$. L'assertion $\mathscr{H}(p-1)$ dit que $\forall i,j \in [\![1;n]\!]\,,\ (j-i\leqslant p-2) \Longrightarrow (u_{i,j}=0)$. Le fait que A est strictement triangulaire supérieure dit que $\forall j,k \in [\![1;n]\!]\,,\ (k-j\leqslant 0) \Longrightarrow (a_{j,k}=0)$. Avec tout cela, il faut prouver que $\forall i,k \in [\![1;n]\!]\,,\ (k-i\leqslant p-1) \Longrightarrow (v_{i,k}=0)$. Soient $i,k\in[\![1;n]\!]$ tels que $k-i\leqslant p-1$. Comme $A^p = A^{p-1}A$, on a

$$v_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} u_{i,j}a_{j,k} = \sum_{j=1}^{i+p-2} \underbrace{u_{i,j}}_{\substack{=0\\ \text{car } j\leqslant i+p-2}} a_{j,k} + \sum_{j=i+p-1}^{n} u_{i,j} \underbrace{a_{j,k}}_{\substack{=0\\ \text{car } j\geqslant i+p-1\geqslant k}} = 0$$

donc $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![1;n-1]\!]$. ■

Les matrices strictement triangulaires supérieures ont une fuite : à chaque fois que la puissance augmente, elles perdent une diagonale par leur coin supérieur droit.

Terminons ce paragraphe en donnant les résultats d'inversibilité sur les matrices diagonales et triangulaires.

On commence par le cas des matrices diagonales.

Proposition 14

Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont inversibles dans Z. Dans ce cas, on a

$$\big(\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\big)^{-1} = \mathrm{Diag}({a_1}^{-1}, {a_2}^{-1}, \ldots, {a_n}^{-1}).$$

Si $Z = K$ est un corps, la condition d'inversibilité d'une matrice diagonale est donc que tous ses coefficients diagonaux soient non nuls.

■ Soit $D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ une matrice diagonale où $a_1, \ldots, a_n \in Z$.

$\Leftarrow$ Supposons que $a_1, \ldots, a_n$ sont inversibles dans Z. Alors, si on pose $C = \mathrm{Diag}({a_1}^{-1}, \ldots, {a_n}^{-1})$, on voit sans mal que $DC = CD = I_n$, ce qui démontre à la fois que D est inversible et que $D^{-1} = \mathrm{Diag}({a_1}^{-1}, \ldots, {a_n}^{-1})$.

$\Rightarrow$ Supposons réciproquement que D est inversible dans $\mathscr{M}_n(Z)$. Notons $E = (e_{i,j})$ l'inverse de D. En identifiant les coefficients diagonaux dans l'égalité $DE = I_n$, on obtient $\forall i \in [\![1;n]\!]\,,\ a_i e_{i,i} = 1$, ce qui signifie que $a_1, \ldots, a_n$ sont inversibles dans Z. ■

Le résultat précédent se généralise au cas d'une matrice carrée diagonale par blocs : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des matrices carrées, alors la matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont $A_1, \ldots, A_n$, est inversible si, et seulement si, les matrices $A_1, \ldots, A_n$ sont toutes inversibles et, dans ce cas, on a

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {A_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & {A_n}^{-1} \end{pmatrix}$$

où les blocs vides désignent des blocs nuls.

On peut alors énoncer le résultat sur les matrices triangulaires.

Proposition 15

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont inversibles dans Z. Dans ce cas, si la matrice A est triangulaire supérieure (respectivement inférieure), la matrice A^{-1} est aussi triangulaire supérieure (respectivement inférieure) et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

Si $Z = K$ est un corps, la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire est donc que tous ses coefficients diagonaux soient non nuls.

■ On traite le cas des matrices triangulaires supérieures. L'autre cas s'obtient en transposant.

On raisonne par récurrence. La propriété $\mathscr{Q}(n)$ correspond à tout l'énoncé de cette proposition (avec n l'ordre de la matrice).

<u>Initialisation :</u> $\mathscr{Q}(1)$ est vraie d'après la proposition précédente.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{Q}(n+1)$. Soit $A \in \mathscr{T}^+_{n+1}(Z)$. On décompose A par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha \end{array}\right)$$

avec $A' \in \mathscr{T}^+_n(Z)$, $\alpha \in Z$ et $C \in M_{n,1}(Z)$. On raisonne alors par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que A est inversible. Notons B l'inverse de A et décomposons B par blocs :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B' & * \\ \hline L & \beta \end{array}\right)$$

avec $B' \in \mathscr{M}_n(Z)$ et $\beta \in Z$. Alors les égalités $AB = I_{n+1}$ et $BA = I_{n+1}$ donnent

$$\left(\begin{array}{c|c} A'B' + CL & * \\ \hline \alpha L & \alpha\beta \end{array}\right) = I_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{array}{c|c} B'A' & * \\ \hline LA' & LC + \beta\alpha \end{array}\right) = I_{n+1}$$

ce qui implique, en particulier, que

$$A'B' + CL = B'A' = I_n, \qquad \alpha L = 0_{1,n} \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta = 1.$$

La troisième égalité nous dit que α est inversible dans Z d'inverse β. En reportant cette information dans la seconde égalité, on obtient $L = 0_{1,n}$. Dès lors, la première information devient $A'B' = B'A' = I_n$, ce qui permet de dire que A' est une matrice triangulaire supérieure d'ordre n d'inverse B'. L'hypothèse de récurrence s'applique alors pour dire que les coefficients diagonaux de A' sont tous inversibles dans Z' et que B' est une matrice triangulaire supérieure. Comme les coefficients diagonaux de A sont ceux de A' accompagnés de α, on obtient donc bien qu'ils sont tous inversibles dans Z. Par ailleurs, comme B' est triangulaire supérieure et comme $L = 0$, la matrice B est bien elle-même triangulaire supérieure.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que les coefficients diagonaux de A sont inversibles dans Z. Dès lors, A' est triangulaire supérieure d'ordre n à coefficients diagonaux inversibles, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour dire que A' est inversible et que son inverse B' est triangulaire supérieure avec, sur sa diagonale, les inverses des coefficients diagonaux de A'. On pose alors

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B' & -\alpha^{-1}B'C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha^{-1} \end{array}\right)$$

et on vérifie sans mal que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A' & C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B' & -\alpha^{-1}B'C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & 1 \end{array}\right) = I_{n+1}$$

et

$$BA = \left(\begin{array}{c|c} B' & -\alpha^{-1}B'C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & C \\ \hline 0_{1,n} & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & 1 \end{array}\right) = I_{n+1},$$

donc B est l'inverse de A. Par ailleurs, B est bien triangulaire supérieure avec, sur sa diagonale, les inverses des coefficients diagonaux de A.

Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\blacksquare$

Là aussi, ce résultat se généralise au cas d'une matrice carrée triangulaire par blocs : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des matrices carrées, alors toute matrice triangulaire par blocs, dont les blocs diagonaux sont $A_1, \ldots, A_n$, est inversible si, et seulement si, les matrices $A_1, \ldots, A_n$ sont toutes inversibles et, dans ce cas, l'inverse est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {A_1}^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ & & {A_n}^{-1} \end{pmatrix}$$

où les blocs vides désignent des blocs nuls et $*$ des coefficients non connus

$\mathcal{B}.4.$ *Matrices symétriques et antisymétriques*

Dans ce paragraphe, Z désigne un anneau commutatif de caractéristique différente de 2.

Définition 13

Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(Z)$ est dite :

(i) symétrique lorsque ${}^tA = A$;

(ii) antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(Z)$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathscr{A}_n(Z)$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Autrement dit :

- ▷ une matrice carrée est symétrique lorsque les coefficients au dessus de la diagonale sont les symétriques des coefficients en dessous de la diagonale ;
- ▷ une matrice carrée est antisymétrique lorsque les coefficients de la diagonale sont nuls et les coefficients au dessus de la diagonale sont les opposés des coefficients en dessous de la diagonale.

Exemples :

- 0_n est symétrique et antisymétrique.
  I_n est symétrique.
  Plus généralement, toute matrice diagonale est symétrique.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique.
- $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -\mathrm{e} \\ -12 & 0 & -i \\ \mathrm{e} & i & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.
- Le produit de deux matrices symétriques peut ne pas être symétrique, comme le montre l'exemple
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce dernier exemple nous montre que l'ensemble $\mathscr{S}_n(Z)$ n'est pas un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(Z)$. Pour $\mathscr{A}_n(Z)$, c'est pire ! Il ne risque pas d'être un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(Z)$ car $I_n \notin \mathscr{A}_n(Z)$.

L'énoncé suivant vous explique que, dans le cadre des matrices inversibles, le caractère symétrique ou antisymétrique d'une matrice se conserve par passage à l'inverse.

Proposition 16

L'inverse d'une matrice symétrique (respectivement antisymétrique) inversible est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique).

■ Si $A \in \mathscr{GL}_n(Z) \cap \mathscr{S}_n(Z)$, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$, d'où $A^{-1} \in \mathscr{S}_n(Z)$.

Si $A \in \mathscr{GL}_n(Z) \cap \mathscr{A}_n(Z)$, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$, d'où $A^{-1} \in \mathscr{A}_n(Z)$. ■

B.5. Trace

Définition 14

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux. Autrement dit, si l'on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors la trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est l'élément de Z défini par

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}.$$

La trace n'existe que pour une matrice carrée.

Exemples :

- $\mathrm{Tr}(0_n) = 0$.
- $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.
- Si A est la matrice d'Attila d'ordre n, on a $\mathrm{Tr}(A) = n$.

La proposition suivante rassemble les principales propriétés de la trace.

Proposition 17

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(Z)$ et $\lambda \in Z$. On a

(i) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$;

(ii) $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$;

(iii) $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$;

(iv) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

■ On pose $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

(i) On a $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A+B) &= (a_{1,1}+b_{1,1}) + (a_{2,2}+b_{2,2}) + \cdots + (a_{n,n}+b_{n,n})\\ &= (a_{1,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{n,n}) + (b_{1,1}+b_{2,2}+\cdots+b_{n,n})\\ &= \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).\end{aligned}$$

(ii) On a $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$ donc

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda a_{1,1} + \lambda a_{2,2} + \cdots + \lambda a_{n,n} = \lambda(a_{1,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{n,n}) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A).$$

(iii) AQT

(iv) En notant $AB = ((ab)_{i,k})$ et $BA = ((ba)_{k,i})$, on a

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (ab)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} (ba)_{k,k} = \mathrm{Tr}(BA).$$ ■

L'association de (i) et (ii) nous dit que la trace d'une combinaison linéaire de matrices carrées est la combinaison linéaire des traces. On dit que la trace est linéaire.

La propriété (iv) n'est pas du tout anodine ! Nous verrons qu'elle confère à la trace une propriété forte lors d'un changement de base...

Il ne faut toutefois pas lui faire dire plus que ce qu'elle énonce. En particulier, (iv) ne dit pas que l'on peut commuter comme on le souhaite des matrices à l'intérieur de la trace. Par exemple, s'il est possible d'en déduire que $\mathrm{Tr}(ABBA) = \mathrm{Tr}(A^2B^2)$ en échangeant l'ordre de ABB et A, il est en revanche impossible d'utiliser (iv) pour démontrer que $\mathrm{Tr}(ABBA)$ est égal à $\mathrm{Tr}(BABA)$ car on ne peut pas passer de $ABBA$ à $BABA$ à l'aide d'inversions du type de celles qu'autorise (iv). 4 h 40

C. Matrices et systémes linéaires

C.1. Ecriture matricielle d'un systéme linéaire

Définition 15

À tout système linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,m}x_m & = & y_n \end{array} \right.$$

on associe sa matrice, donnée par

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On notera que la matrice d'un système ne dépend pas des constantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Par conséquent, on peut associer à tout système une unique matrice mais, réciproquement, chaque matrice est associée à une infinité de systèmes.

Exemples :

- La matrice associée au système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & b & + & c & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & b & & & = & z \end{array} \right.$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La proposition suivante est la première occasion de justifier la façon dont a été défini le produit matriciel.

Proposition 18

Avec les notations de la définition précédente, on a

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=Y} \iff AX = Y.$$

On obtient ainsi l'écriture matricielle du système (S).

■ AQT ■

Un système linéaire est donc une équation matricielle de degré 1.

Exemples :

- Le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & b & + & c & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & b & & & = & z \end{array} \right.$ se réécrit sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

C.2. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

La méthode de calcul de l'inverse d'une matrice repose sur la proposition suivante.

Proposition 19

Soit $A \in \mathscr{M}_n(Z)$. La matrice A est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$ admet une unique solution (rappelons que l'on parle alors de système de Cramer).

■ $\Rightarrow$ Supposons A inversible. Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$, l'égalité $AX = Y$ est équivalente à $X = A^{-1}Y$, ce qui signifie que le système $AX = Y$ est de Cramer.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$, le système $AX = Y$ est de Cramer. Notons $Y_1, \ldots, Y_n$ les colonnes de I_n. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le système $AX = Y_k$ possède une unique solution, notée X_k. Si l'on note B la matrice dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_n$, on a $AB = I_n$. Reste à vérifier que $BA = I_n$. On constate que $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_nA - A = 0_n$. Les colonnes de la matrice $BA - I_n$ sont donc des solutions du système $AX = 0_n$. Comme ce système n'a qu'une seule solution et que la colonne nulle est une solution évidente, on en déduit que toutes les colonnes de $BA - I_n$ sont nulles, autrement dit que $BA - I_n = 0_n$ ou encore $BA = I_n$.
Ainsi, A est bien inversible. ■

L'encadré suivant explique comment utiliser concrètement cette proposition.

Calcul pratique de l'inverse

Pour savoir si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(Z)$ est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse, on considère $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$ tels que $AX = Y$. On résout ensuite ce système. S'il est de Cramer, alors X s'exprime en fonction de Y sous la forme $X = BY$ et l'on peut en conclure que $B = A^{-1}$. Dans le cas contraire, la matrice A n'est pas inversible.

Exemples :

- Démontrons que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminons son inverse.

  On pose $X = {}^t\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. On a

$$
\begin{aligned}
(MX = Y) &\iff \begin{cases} b + c = x \\ \boxed{a} + c = y \\ a + b = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{b} + c = x \\ \boxed{a} + c = y \\ b - c = z - y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{b} + c = x \\ \boxed{a} + c = y \\ \boxed{-2c} = z - y - x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x + y + z) \\ b = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ c = \frac{1}{2}(x + y - z) \end{cases}
\end{aligned}
$$

  donc M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La proposition 19 n'a pas que des conséquences pratiques. On peut aussi l'utiliser pour démontrer des résultats plus théoriques. Nous donnons deux exemples ci-dessous.

Dans un anneau non commutatif quelconque, un élément n'est inversible que s'il possède un inverse à droite et un inverse à gauche. Dans le cas des matrices, le résultat suivant dit qu'il suffit d'avoir un inverse à droite ou un inverse à gauche pour conclure à l'inversibilité.

Proposition 20

Soit $A \in \mathscr{M}_n(Z)$. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(Z)$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors A est inversible d'inverse B.

■ Si $BA = I_n$, alors le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution qui est $X = 0_{n,1}$, ce qui prouve que ce système est de rang n. Dès lors, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(Z)$ le système $AX = Y$ est aussi de rang n (on garde les mêmes pivots), ce qui signifie que ce système possède une unique solution. La proposition 19 nous dit alors que A est inversible d'inverse B.

Si $AB = I_n$, on tient exactement le même raisonnement pour en déduire que B est inversible d'inverse A. Cela implique que A est inversible d'inverse B. ■

Concrètement, cette proposition nous dit que, pour $A \in \mathscr{M}_n(Z)$ donnée, si l'on a trouvé une matrice $B \in \mathscr{M}_n(Z)$ telle que $AB = I_n$, il n'est pas nécessaire de vérifier que $BA = I_n$ pour pouvoir affirmer que B est l'inverse de A.

Voici une seconde application.

Proposition 21

Soit L un surcorps de K. Si $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(L)$, alors A est inversible dans $\mathscr{M}_n(K)$. Autrement dit, $\mathscr{M}_n(K) \cap \mathscr{GL}_n(L) = \mathscr{GL}_n(K)$.

■ Soit $A \in \mathscr{M}_n(K) \cap \mathscr{GL}_n(L)$. Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(L)$, le système $AX = Y$ possède une unique solution $X \in \mathscr{M}_{n,1}(L)$. A fortiori, si on se limite aux $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, le système $AX = Y$ possède une unique solution $X \in \mathscr{M}_{n,1}(L)$. Sauf que lorsqu'on applique la méthode du pivot au système $AX = Y$ avec $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, l'unique solution X que l'on trouve est nécessairement dans $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. Pour résumer, on sait donc que, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, le système $AX = Y$ possède une unique solution $X \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, ce qui prouve que $A \in \mathscr{GL}_n(K)$. Donc $\mathscr{M}_n(K) \cap \mathscr{GL}_n(L) \subset \mathscr{GL}_n(K)$.

L'inclusion $\mathscr{GL}_n(K) \subset \mathscr{M}_n(K) \cap \mathscr{GL}_n(L)$ est une évidence. ■

Attention, ce résultat est faux dans le cadre des anneaux : une matrice à coefficients entiers qui est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ n'a pas nécessairement une inverse à coefficients entiers ; il peut y avoir des coefficients rationnels dans l'inverse. Par contre, la proposition ci-dessus nous dit qu'il ne peut pas y avoir de coefficients irrationnels dans l'inverse.

D. Déterminants 2×2

Dans le chapitre sur la résolution des systèmes, nous avons introduit le « produit en croix » pour faciliter les calculs. Nous allons voir que ce « produit en croix » est utile pour les matrices 2×2 et les systèmes associés.

Définition 16

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(Z)$. On appelle déterminant de A le scalaire, noté $\det(A)$ ou $|A|$, défini comme le « produit en croix » des éléments de A, c'est-à-dire

$$\det(A) = ad - bc \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Nous généraliserons plus tard la notion de déterminant à des matrices $n \times n$ pour n quelconque.

Exemples :

- $\det(0_2) = 0$
- $\det(I_2) = 1$
- $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-3) \times 5 = 17$
- $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 2 \times 9 = 0$

Le déterminant est multiplicatif.

Proposition 22

Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(Z)$. On a

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(ii) A est inversible dans $\mathscr{M}_2(Z)$ si et seulement si $\det(A)$ est inversible dans Z et, dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Si $Z = K$ est un corps, la condition d'inversibilité est donc la non-nullité du déterminant.

■ (i) On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, x, y, z, t \in Z$. On a $AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$, donc $\det(AB) = (ax + bz)(cy + dt) - (cx + dz)(ay + bt) = axdt + bzcy - cxbt - dzay$. Comme $\det(A)\det(B) = (ad - bc)(xt - zy) = axdt + bzcy - cxbt - dzay$, on a bien $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\Rightarrow$ Supposons que $A \in \mathscr{GL}_2(Z)$ de sorte que $AA^{-1} = I_2$. En passant au déterminant, on obtient $\det(AA^{-1}) = \det(I_2)$, c'est-à-dire $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ d'après (i). Il s'ensuit que $\det(A)$ est inversible dans Z et $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

$\Leftarrow$ Si $\det A$ est inversible dans Z, on a (avec les notations du (i))

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui démontre que A est inversible. ■

La formule (i) se généralise, par récurrence, à un plus grand nombre de matrices. En particulier, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(Z)$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\det(A^p) = (\det A)^p$. Si A est inversible, cette formule s'étend même aux $p \in \mathbb{Z}$ d'après (ii).

On retient (ii) en disant que le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant.

En fait, la démonstration précédente permet de déterminer l'inverse (si elle existe).

Corollaire 1

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(Z)$ est inversible dans $\mathscr{M}_2(Z)$ alors $\det(A)$ est inversible dans Z et

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

■ C'est fait dans la démonstration de la proposition précédente. ■

Exemples :

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(A) = \pm 1$.

On peut alors résoudre rapidement un système de deux équations à deux inconnues.

Résolution d'un système 2×2

Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ est de Cramer si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si vous avez quelques neuronnes encore inexploités, vous pouvez retenir que le calcul matriciel ci-dessus (qui donne les expressions de x et y) aboutit aux formules de Cramer suivantes :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Exemples :

- Le système $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$ est de Cramer puisque son déterminant est non nul (on a vu qu'il valait 17). De plus, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc la solution du système est $(x, y) = \left(-\dfrac{3}{17}; \dfrac{4}{17} \right)$.

6 h 15