

**DM n° 5 : Réels**

**Le problème 3 est facultatif pour les élèves classés au delà de la 25-ième place au DS1**

**Problème 1 – (e n'est pas racine d'un polynôme de  $\mathbb{Q}_2[X]$ )**

*Nous montrons dans ce problème que e est irrationnel, puis nous montrons qu'il ne peut pas être racine d'un polynôme du second degré à coefficients rationnels. Ce résultat peut être vu comme un premier pas vers la propriété de transcendance de e, affirmant que e n'est racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels. On admettra dans l'ensemble de ce problème que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

*cette série étant convergente pour toute valeur de x dans  $\mathbb{R}$ .*

*Beaucoup de preuves liées à l'irrationnalité ou la transcendance reposent sur la lapalissade suivante : il n'y a pas d'entiers entre deux entiers consécutifs. Ainsi, une méthode classique pour ce type de problèmes est de raisonner par l'absurde et d'essayer alors d'encadrer un entier strictement entre deux entiers consécutifs.*

**1. Irrationnalité de e.**

- (a) Montrer que pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{e}{(q+1)!}.$$

On pourra pour cela comparer  $\frac{(q+1)!}{n!}$  à  $\frac{1}{(n-q-1)!}$ .

- (b) Supposons que  $e = \frac{p}{q}$ , où p et q sont entiers. Quitte à prendre une fraction non irréductible, on peut supposer que  $q+1 > e$ . Montrer que :

$$\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < \frac{p}{q} < \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{1}{q!}.$$

- (c) En multipliant par  $q!$ , trouver une contradiction et conclure.

**2. Indépendance sur  $\mathbb{Q}$  de 1, e et  $e^2$**

*Le but de cette question est de montrer qu'il n'existe pas de rationnels p, q et r non tous nuls tels que  $p+qe+re^2 = 0$ . Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant leur existence.*

- (a) Montrer qu'il existe alors des entiers a, b et c non tous nuls tels que  $c = ae + be^{-1}$ , et que nécessairement, a et b sont non nuls.

- (b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $d_n$  tel que :

$$c = a \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + d_n,$$

tel que

$$|d_n| \leq \frac{(|a| + |b|)e}{(n+1)!}.$$

- (c) Montrer que  $n!d_n \rightarrow 0$ , et en déduire que pour tout n assez grand,

$$c = a \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

(d) En déduire que pour tout  $n$  assez grand,

$$a \cdot \frac{1}{n!} = b \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

(e) Conclure.

## Problème 2 – Développements d'un réel comme limite de fractions égyptiennes

Ce court problème expose un développement des réels par les fractions égyptiennes, c'est-à-dire des sommes d'inverses d'entiers..

### Partie I – Décomposition d'un rationnel comme fraction égyptienne

Soit  $x \in \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ . On écrit  $x = \frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers positifs vérifiant  $p < q$ . On montre dans cette question la propriété  $\mathcal{P}(x)$  suivante : il existe un entier naturel  $n$  et des entiers  $a_0, \dots, a_n$  tels que  $2 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n$  et

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k}.$$

On appelle fraction égyptienne une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire du type  $\frac{1}{a}$ , avec  $a$  entier, donc les dénominateurs sont deux à deux distincts (on peut donc les ranger dans l'ordre strictement croissant). Ainsi, le but de cette partie est de montrer que tout rationnel de  $]0, 1[$  est une fraction égyptienne.

1. Montrer que l'ensemble  $\{a \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{a} \leq x\}$  admet un plus petit élément  $a_0$ , et que  $a_0 \geq 2$ .
2. Montrer que  $0 \leq pa_0 - q < p$ .
3. En raisonnant par récurrence sur  $p$ , correctement quantifiée sur  $q$ , montrer que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie pour tout  $x \in \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$   
On écrira soigneusement la propriété  $\mathcal{Q}(p)$  sur laquelle on effectuera la récurrence, et on pourra considérer  $x - \frac{1}{a_0}$ . On n'oubliera pas de justifier l'inégalité  $a_0 < a_1$ .
4. Donner un développement en fractions égyptiennes de  $\frac{2}{3}$ . Donner deux développements distincts en fractions égyptiennes de  $\frac{7}{12}$ .

Ainsi, ce développement n'est pas unique. L'algorithme de construction d'un développement en fractions égyptiennes utilisé dans la preuve a été décrit par Fibonacci (vers 1200) et justifié rigoureusement par Sylvester (en 1880).

### Partie II – Développement d'un irrationnel par les fractions égyptiennes

On montre dans cette partie que tout nombre irrationnel de  $]0, 1[$  peut être écrit comme somme infinie de fractions  $\frac{1}{a_k}$ . Remarquons dans un premier temps qu'il est vain d'essayer de trouver un tel développement fini, une somme finie de rationnels étant nécessairement un rationnel aussi. On se donne  $x$  un irrationnel de  $]0, 1[$ .

On construit la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par la relation :

$$a_n = \min\{a \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a} \leq x\}.$$

Remarquez que cette égalité définit également  $a_0$ , la somme étant dans ce cas vide.

1. Justifier que la construction est infinie, autrement dit,  $a_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - 1}.$$

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 2$ , et  $\frac{2}{a_n} \geq \frac{1}{a_n - 1}$ .
4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} > a_n$ . Quelle est la limite de  $a_n$  ?

5. Montrer enfin que

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

On dit que  $x$  admet un développement infini en fractions égyptiennes.

*Ainsi, les rationnels de  $]0, 1[$  admettent un développement fini en fractions égyptiennes, les irrationnels de  $]0, 1[$  admettent un développement infini en fractions. Mais les rationnels peuvent admettre aussi des développements infinis, et c'est même une situation générale comme on le montre dans la dernière partie du problème.*

### Partie III – Développement infini d'un rationnel

1. À l'aide de suites géométriques, montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\frac{1}{N}$  admet un développement infini en fractions égyptiennes.
2. En déduire que tout rationnel  $x$  de  $]0, 1[$  admet un développement infini en séries égyptiennes. Attention, n'oubliez pas la propriété de stricte croissance de  $(a_n)$ .
3. Comment aurait-on pu adapter la preuve de la partie II pour démontrer la même chose ?

**Problème 3** – Soit  $c$  la constante de Liouville, définie par :

$$c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n 10^{-k!}.$$

*Le but est de démontrer que  $c$  est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers ou rationnels. On établit en fait cette propriété pour une famille plus large de réels, appelés nombres de Liouville. Nous démontrons d'abord dans la question 1 que  $c$  est bien défini, puis dans la question 2 que  $c$  est irrationnel.*

#### 1. Convergence de la série définissant $c$

En étudiant la convergence de la série, montrer l'existence de la constante de Liouville  $c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ .

#### 2. Irrationalité de $c$

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.$$

- (b) Supposons qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $c = \frac{p}{q}$ . En remarquant que  $10^n S_n$  est entier, et en encadrant  $p10^n!$ , trouver une contradiction. Conclure.

#### 3. Inégalité des accroissements finis

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . À l'aide d'une intégration, montrer que si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $[a, b]$ , de dérivée continue sur  $[a, b]$  et telle que  $|f'|$  est majorée par  $M$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ . Justifiez que cette expression est encore valable si  $b \leq a$ , l'intervalle considéré étant alors  $[b, a]$ .

#### 4. Théorème de Liouville (approximation diophantienne)

*Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :*

**Théorème de Liouville.** Soit  $\alpha$  un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel  $A > 0$  et un entier  $d \geq 2$ , tels que pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ ,  $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$ , on ait :  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}$ .

*Ce théorème affirme que les nombres algébriques non rationnels sont « assez mal » approchés par des rationnels.*

*Soit  $\alpha$  un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme  $P$  non nul à coefficients entiers vérifiant  $P(\alpha) = 0$ . On suppose de plus que  $\alpha$  n'est pas rationnel.*

*On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.*

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  non nul à coefficients entiers tel que  $P(\alpha) = 0$ , de degré minimal dans l'ensemble de tous les polynômes non nuls vérifiant cette propriété. On se donne désormais un tel polynôme  $P$  et on note  $d$  son degré.

- (b) Justifier que  $d \geq 2$ .
- (c) Montrer que  $P$  ne peut pas avoir de racine rationnelle.
- (d) En déduire que pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $\left| q^d P \left( \frac{p}{q} \right) \right| \geq 1$ .
- (e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire l'existence d'un réel  $M > 0$  tel que pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  ( $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ) tel que  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq 1$ , on ait :
- $$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^d}.$$
- (f) En posant  $A = \min \left( 1, \frac{1}{M} \right)$ , montrer le théorème de Liouville.

## 5. Transcendance de $c$

*On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel  $x$  tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}), \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^n}.$$

- (a) À l'aide du théorème de Liouville, montrer qu'un nombre de Liouville n'est pas algébrique (on dit qu'il est transcendant).
- (b) En déduire que  $c$  est transcendant.