Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir surveillé n^o 10

– durée 4 heures ; calculatrices interdites –

Ce devoir est à rendre, scanné en un seul fichier d'extension *pdf* à l'adresse suivante :
833duparc@gmail.com
une fois que vous avez terminé votre composition.
En plus de la pièce jointe, votre message aura pour « Objet » un intitulé de la forme « [NOM/Prénom/DS10] ».

Problème : la fonction $\zeta(\cdot)$ de Riemann

Dans toute la suite, on pose la fonction :

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x},$$

définie là où la série réelle converge.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}.$$

Partie I : premières propriétés

1. Démontrer que la fonction ζ est bien définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$. On justifiera soigneusement la réponse.
2. Montrer que la fonction ζ est décroissante sur I.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{3^x}\right).$$

4. Soit $M > 0$.
   (a) Établir l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} > M + 1.$$

(b) Établir l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]1, 1+\eta], \ \sum_{k=1}^{n_0} f_k(x) > M.$$

(c) Montrer que :

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty.$$

5. Montrer que la fonction $\zeta(\cdot)$ n'est pas une fraction rationnelle sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

——— ○ ———

Partie II : dérivation d'une série de fonctions

On considère le segment $S = [a, b]$ et on se donne une suite $(h_n : S \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues.

On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in S$,

$$|h_n(t)| \leqslant u_n$$

- la série $\sum\limits_n u_n$ est convergente.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall t \in S, \ H_N(t) = \sum_{n=0}^{N} h_n(t).$$

6. Montrer que pour tout $t \in S$, la suite $(H_N(t))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera $K(t)$. On définit ainsi une fonction $K : S \longrightarrow \mathbb{R}$.
7. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$\forall t \in S, \ |K(t) - H_{N_0}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

   (b) Montrer que la fonction $K : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur S.

   (c) Montrer que :

   $$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \int_a^b H_N(t)\ dt = \int_a^b K(t)\ dt.$$

8. Soit $(g_n : S \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur le segment S vérifiant les conditions suivantes :
   - il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $$\forall t \in S, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |g_n'(t)| \leqslant u_n \text{ et la série } \sum_n u_n \text{ converge}$$

   - il existe $t_0 \in S$ tel que la série $\sum\limits_n g_n(t_0)$ converge.

(a) Montrer que pour tout $t \in S$, la série $\sum_n g_n(t)$ converge. On définit ainsi une fonction :

$$G : \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) \end{array} \right. .$$

(b) Montrer que la fonction $G : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et :

$$\forall t \in S,\ G'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(t).$$

9. Soient deux réels $1 < a < b$. Montrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur le segment $S = [a, b]$.
10. Montrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur le segment $S = [a, b]$.
11. En déduire que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $I =]1, +\infty[$.

—— ○ ——

Partie III : irrationnalité de $\zeta(2)$

Dans cette partie, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$\rho_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^n\ (1-t)^n}{n!} \end{array} \right. .$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $c_n, c_{n+1}, \cdots, c_{2n}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k\ t^k.$$

13. Montrer que pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, le nombre $\rho_n^{(k)}(0)$ est un entier.
14. Montrer que pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, le nombre $\rho_n^{(k)}(1)$ est un entier.

On suppose dans la suite qu'il existe deux entiers strictement positifs u et v premiers entre eux tels que :

$$\pi^2 = \frac{u}{v}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction :

$$F_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & v^n \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \pi^{2n-2k}\ \rho_n^{(2k)}(t) \end{array} \right. .$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.
16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n la fonction :

$$\varphi_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & F_n'(t)\ \sin(\pi\ t) - \pi\ F_n(t)\ \cos(\pi\ t) \end{array} \right. .$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n'(t) = \pi^2\ u^n\ \rho_n(t)\ \sin(\pi\ t).$$

17. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$A_n = \pi \ u^n \ \int_0^1 \rho_n(t) \ \sin(\pi \ t) \ dt$$

est un entier.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = \dfrac{u^n}{n!}$.

18. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$\omega_n < \frac{1}{2}.$$

Justifier soigneusement la réponse.

19. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{n!}.$$

20. Conclure que $\zeta(2)$ est irrationnel.
21. Peut-on en déduire que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est injective ? Détaillez votre réponse.