ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES
ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES :
L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

par Yves Chevallard
IUFM d'Aix-Marseille

Leçon 1. – La notion d'organisation praxéologique

1. Pourquoi *anthropologique* ?

L'étiquette d'approche – ou de théorie – *anthropologique* semble proclamer une exclusivité (les autres approches, existantes ou possibles, ne mériteraient pas ce qualificatif...) dont il faut dire tout de suite qu'elle n'est qu'un effet de langage. Il n'y a aucune raison pour que l'organisation de savoir qui sera présentée dans les développements qui suivent se voit accorder le monopole de la référence légitime au champ de l'anthropologie, même si elle semble bien être, aujourd'hui, la seule à s'autodésigner ainsi.

Pour l'essentiel, je parlerai donc de *la* théorie anthropologique du didactique – *la* TAD – comme, en tel village, on vous présentera *le* Louis, *le* Charles, *le* François, etc. L'exclusivité n'est évidemment pas garantie ! Le fait de s'appeler Louis, Charles ou François ne dit pas grand chose de la personne qui le porte. C'est là peut-être que s'arrête la comparaison précédente. Car, bien sûr, ce n'est pas *sans raison* que l'on dit *anthropologique* la théorisation dont certains éléments seront explicités dans ci-après. De fait, l'emploi de cet adjectif *veut dire* quelque chose, et quelque chose dont il vaut mieux être prévenu pour éviter d'aller d'incompréhensions en malentendus.

Le point crucial à cet égard, dont nous découvrirons peu à peu toutes les implications, est que la TAD situe l'activité *mathématique*, et donc l'activité *d'étude* en mathématiques, *dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales*. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à *traverser* en tous sens – ou même à *ignorer* – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de *se tenir*, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme *allant de soi*, quasi *naturel*, et en fin de compte *obligé*.

Selon cette *vulgate* du « culturellement correct », parler valablement de didactique des mathématiques, par exemple, suppose que l'on parle de certains objets distinctifs – les mathématiques, d'abord, et ensuite, solidairement, les élèves, les professeurs, les manuels, etc. –, *à l'exclusion d'à peu près tout autre type d'objets*, et en particulier de tous ceux que l'on croit trop vite scientifiquement non pertinents pour cette raison qu'ils apparaissent *culturellement étrangers* aux objets tenus pour emblématiques des questions de didactique des mathématiques.

Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*. Avant même d'examiner ce qu'est une praxéologie, on doit donc noter que l'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie *nullement* l'activité *mathématique* parmi les activités humaines : c'est *autrement* que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité.

2. La notion de praxéologie

2.1. Types de tâches. – À la racine de la notion de praxéologie se trouve les notions solidaires de *tâche*, t, et de *type* de tâches, T. Quand une tâche t relève d'un type de tâches T, on écrira parfois : $t \in T$. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un *verbe* : *balayer* la pièce, *développer* l'expression littérale donnée, *diviser* un entier par un autre, *saluer* un voisin, *lire* un mode d'emploi, *monter* l'escalier, *intégrer* la fonction $x \mapsto x\ln x$ entre $x = 1$ et $x = 2$, etc. Trois points doivent être soulignés immédiatement.

Tout d'abord, la notion de tâche employée ici est à l'évidence *plus large* que celle du français courant : se gratter la joue, marcher du divan jusqu'au buffet, et même sourire à quelqu'un, *sont ainsi des tâches*. Il s'agit là d'une mise en pratique particulièrement simple du « principe anthropologique » évoqué plus haut.

Ensuite, la notion de tâche, ou plutôt de *type* de tâches, suppose un objet relativement précis. *Monter un escalier* est un type de tâches, mais *monter*, tout court, n'en est pas un. De même, *calculer la valeur d'une fonction en un point* est un type de tâches ; mais *calculer*, tout court, est ce qu'on appellera un *genre* de tâches, qui appelle un déterminatif.

> Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents *types* de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié. *Calculer...* est un genre de tâches ; *calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical* est un type de tâches, de même que *calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée*. Tout au long des années de collège, le genre *Calculer...* s'enrichit de nouveaux types de tâches ; il en sera de même au lycée, où l'élève va d'abord apprendre à *calculer avec des vecteurs*, puis, plus tard, à *calculer une intégrale* ou *une primitive*, etc. Il en va de même, bien sûr, des genres *Démontrer...*, *Construire...*, ou encore *Exprimer... en fonction de...*

Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des *construits institutionnels*, dont la *re*construction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, *qui est l'objet même de la didactique*.

2.2. Techniques. – En dépit de la remarque précédente, on ne considérera d'abord, dans cette leçon, que la *statique* des praxéologies, en ignorant donc provisoirement la question de leur *dynamique*, et en particulier de leur *genèse*. Soit donc T un type de tâches *donné*. Une praxéologie relative à T précise (en principe) *une manière d'accomplir*, de *réaliser* les tâches $t \in T$: à une telle *manière de faire*, τ, on donne ici le nom de *technique* (du grec *tekhnê*, savoir-faire). Une praxéologie relative au type de tâches T contient donc, en principe, une technique τ relative à T. Elle contient ainsi un « bloc » $[T/\tau]$, qu'on appelle bloc *pratico-technique*, et qu'on identifiera génériquement à ce qu'on nomme couramment *un savoir-faire* : un certain type de tâches, T, et une certaine manière, τ, d'accomplir les tâches de ce type. Là encore, trois remarques doivent être faites d'emblée.

Tout d'abord, une technique τ – une « manière de faire » – ne réussit que sur une *partie* $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la *portée* de la technique : elle tend à *échouer* sur $T \backslash P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, *en général*, accomplir les tâches du type T ».

> La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur $\mathbf{N}$ échoue-t-elle à partir d'une certaine taille de nombres. Le fait qu'on ne sache pas *en général* factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de *cryptographie*.

À cet égard, une technique peut être *supérieure* à une autre, sinon sur T tout entier, du moins sur une certaine partie de T : sujet sur lequel on reviendra à propos de l'*évaluation* des praxéologies.

Ensuite, une technique τ n'est pas nécessairement de nature *algorithmique* ou *quasi* algorithmique : il n'en est ainsi que dans de trop rares cas. Axiomatiser tel domaine des mathématiques, peindre un paysage, fonder une famille sont ainsi des types de tâches pour lesquelles il n'existe guère de technique algorithmique… Mais il est vrai qu'il semble exister une tendance assez générale à l'algorithmisation – encore que ce processus de *progrès technique* paraisse parfois durablement arrêté, en telle institution, à propos de tel type de tâches ou de tel complexe de types de tâches.

Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques *institutionnelles* dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme *artificielles*, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables *passions institutionnelles* pour les techniques naturalisées dans l'institution.

> Ainsi on peut déterminer le *signe* d'un binôme $ax+b$ en récrivant cette expression sous la forme $a[x–(–\frac{b}{a})]$, ce qui permet de conclure moyennant un petit raisonnement : $2–3x = –3(x – \frac{2}{3})$ est négatif si $x > \frac{2}{3}$, positif pour $x < \frac{2}{3}$; $5x+3 = 5[x–(–0{,}6)]$ est positif pour $x > –0{,}6$, négatif pour $x < –0{,}6$; etc. Mais cette manière de faire, à peu près inconnue dans l'enseignement secondaire français d'aujourd'hui, y recevrait sans doute un flot de critiques.

2.3. Technologies. – On entend par *technologie*, et on note généralement θ, un *discours rationnel* (*logos*) sur la technique – la *tekhnê* – τ, discours ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis telle autre institution. À nouveau trois remarques compléteront cette présentation.

On admettra d'abord comme un fait d'observation que, dans une institution I, quel que soit le type de tâches T, la technique τ relative à T est toujours accompagnée d'au moins un *embryon* ou, plus souvent encore, d'un *vestige* de technologie, θ. En nombre de cas, même, certains éléments technologiques sont *intégrés dans la technique*.

> Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit : « Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 *fois plus*, soit 3 fois 10 F ».

En outre, le fait qu'existe dans *I* une technique *canonique*, en principe seule reconnue et seule employée, confère à cette technique une vertu « autotechnologique » : faire ainsi n'appelle pas, ou plus, de justification, puisque c'est *la bonne* manière de faire (dans *I*).

On notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer* la technique. Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer *pourquoi* il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de *justification* l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'*explication*.

On sait qu'une équation $ax^2+bx+c = 0$ (où $a \neq 0$) a une racine double lorsque $b^2–4ac = 0$, n'a pas de racine (dans $\mathbf{R}$) si $b^2–4ac < 0$ etc. On peut *expliquer* un tel résultat à l'aide de la technologie des *nombres complexes*. Soit en effet z et $\bar{z}$ les racines complexes de l'équation. On a : $(z–\bar{z})^2 = (z+\bar{z})^2–4z\bar{z} = (b/a)^2–4(c/a) = (b^2–4ac)/a^2$. On voit ainsi que $b^2–4ac = 0$ si et seulement si $z = \bar{z}$; que si $b^2–4ac < 0$, alors z et $\bar{z}$ ne sauraient être réels, etc.

Enfin une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la fonction de *production* de techniques. On notera ainsi qu'il existe des technologies *potentielles*, en attente de techniques, qui ne sont encore technologies d'aucune technique ou de très peu de techniques. À cet égard, on soulignera le phénomène de *sous-exploitation* des technologies disponibles, tant du point de vue de la justification ou de l'explication que de la production.

C'est ainsi que la technologie des nombres *fractionnaires* (quotients de décimaux) permet d'engendrer une technique qui surclasse celle vue précédemment à propos du prix de sucettes, et que concrétise le schéma discursif suivant : « Si a choses valent b francs, alors x choses, soit $\frac{x}{a}$ fois a choses, vaudront $\frac{x}{a}$ *fois plus*, soit $\frac{x}{a}$ fois b francs. » Ainsi dira-t-on : « 11 sucettes coûtent $\frac{11}{8}$ *fois plus* (que 8 sucettes), soit $\frac{11}{8}$ fois 10 F (= 13,75 F) » ; et, par une extension hardie du sens de l'expression : « 3 sucettes coûtent $\frac{3}{8}$ *fois plus* (que 8 sucettes), soit $\frac{3}{8}$ fois 10 F (= 3,75 F) ». (On notera que l'on a : $\frac{3}{8} \times 10\ \text{F} = \frac{11}{8} \times 10\ \text{F} – \frac{8}{8} \times 10\ \text{F} = 13{,}75\ \text{F} – 10\ \text{F} = 3{,}75\ \text{F}$.) Plus correctement, on dira simplement que « x choses, c'est $\frac{x}{a}$ *fois* a choses », etc.

2.4. Théories. – À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Bien entendu, on peut imaginer que cette régression justificative se poursuive à l'infini – qu'il y ait une théorie de la théorie, etc. En fait, la description à trois niveaux présentée ici (technique/technologie/théorie) suffit, en général, à rendre compte de l'activité à analyser. La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissante : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens du classique « On démontre en mathématiques... » du professeur de physique, ou encore du « On a vu en géométrie... » du professeur de mathématiques d'autrefois.

En tout domaine, la *nature* de la théorie peut fluctuer, et de fait, fluctue historiquement. Comme il en va en matière technique ou technologique, il y a ici un *progrès théorique*, qui conduit en général à substituer aux évidences « métaphysiques » des énoncés théoriques positifs.

Soit ainsi le principe de récurrence : $\mathrm{P} \subseteq \mathbf{N} \wedge 0 \in \mathrm{P} \wedge \forall n\ (n \in \mathrm{P} \Rightarrow n+1 \in \mathrm{P}) \Rightarrow \mathrm{P} = \mathbf{N}$. Pour justifier cet ingrédient technologique principal des démonstrations par récurrence, on peut, entre autres choses, soit se référer, comme le faisait encore Henri Poincaré, à « la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*La science et l'hypothèse*, 1902), soit admettre comme un axiome que toute partie non vide de **N** a un premier élément, et montrer alors que le principe de récurrence en découle.

En grec, *theôria* a pris à partir de Platon le sens moderne de « spéculation abstraite ». Mais à l'origine, il renvoyait simplement à l'idée de contemplation d'un spectacle, le *theôros* étant le spectateur qui regarde l'action sans y participer. De fait, les énoncés théoriques apparaissent fréquemment comme *abstraits*, éloignés des préoccupations des « simples » technologues et techniciens. Cet effet d'abstraction est corrélé à ce qui fonde la grande *générativité* des énoncés théoriques – leur capacité à justifier, à expliquer, à produire.

Le fait que, dans **R**, la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 est un résultat technologique très « concret ». Sa justification théorique tient dans l'axiome d'Eudoxe-Archimède, tenu ordinairement pour fort abstrait : si A et ε sont des réels strictement positifs, alors il existe un entier n tel que $n\varepsilon > A$. On notera qu'en fait les deux assertions sont équivalentes !

2.5. Savoir-faire et savoirs. – Autour d'un type de tâches T, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une *technique* (au moins), τ, d'une technologie de τ, θ, et d'une théorie de θ, Θ. Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie *ponctuelle*, ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. Une telle praxéologie – ou *organisation praxéologique* – est donc constituée d'un bloc pratico-technique, $[T/\tau]$, et d'un bloc *technologico-théorique*, $[\theta/\Theta]$.

Le bloc $[\theta/\Theta]$ est, ordinairement, identifié comme *un savoir* (alors que le bloc $[T/\tau]$ constitue *un savoir-faire*). Par métonymie; on désigne couramment comme étant un savoir la praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ *toute entière*, ou même une partie quelconque de celle-ci. Mais cette manière de faire encourage à minorer le savoir-faire, notamment dans la production et la diffusion des praxéologies : ainsi qu'on l'a noté, on rencontre souvent des technologies qui « attendent leur premier emploi », ou qui ont « perdu leur emploi ».

Une telle mise en avant du savoir n'est nullement fortuite. On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations *locales*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations *régionales*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. (Au-delà, on nommera organisation *globale* le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.) Or le passage d'une praxéologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ à une praxéologie locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ met en avant la technologie θ, de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ portera au premier plan la théorie Θ. Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment de celle du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification : car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches T précède *génétiquement* le bloc $[\theta/\Theta]$ (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, *structuralement*, le savoir [θ/Θ] permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire [T/τ] pourra être classiquement *présenté*, dans le *texte* du savoir, comme une simple *application* du « savoir » [θ/Θ].

> Dans l'enseignement des mathématiques, un *thème d'étude* (« Pythagore », « Thalès », etc.) est souvent identifié à une *technologie* θ déterminée (théorème de Pythagore, théorème de Thalès), ou plutôt, implicitement, au bloc de savoir [θ,Θ] correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'applications, des techniques relatives à divers types de tâches. On notera cependant que d'autres thèmes d'étude (« factorisation », « développement », « résolution d'équations », etc.) s'expriment, très classiquement, en termes de types de tâches.

Une organisation praxéologique, même ponctuelle, n'est pas en général entièrement conforme aux canons évoqués ci-dessus. Le type de tâches autour duquel elle s'est construite, peut ainsi être mal identifié, tandis que la technique associée se révélera presque impraticable. La technologie pourra parfois se réduire à une pure pétition de principe, et la théorie être parfaitement sibylline. La notion de praxéologie apparaît ainsi comme une notion générique dont il convient d'approfondir l'étude – notamment par l'enquête empirique et l'analyse des données d'observation recueillies.