Planche de colle

Question de cours

• définition du déterminant d'un endomophisme $f \in \mathscr{L}(E)$: indépendance de la base et propriétés ; lien entre $\det(f) \neq 0$ et $f \in GL(E)$: démonstration

Exercice de colle

Soit K un corps infini. On considère une application $\Phi : GL_n(K) \longrightarrow K^*$ qui est un morphisme de groupes tel que pour toute matrice inversible $M \in GL_n(K)$, le nombre $\Phi(M)$ s'exprime comme un polynôme en les coefficients de la matrice M.
On veut montrer que l'application Φ est une puissance du déterminant.

1. Pour tous indices $i \neq j$ et tout scalaire $\lambda \in K$, on pose $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{i,j}$ [matrice de transvection] et $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) \cdot E_{i,i}$ [matrice de dilatation].
   (a) Exprimer la matrice de transposition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme un produit de matrices de transvection ou de dilatation.
   (b) Montrer que toute matrice $M \in GL_n(K)$ est un produit fini de matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ ou $D_i(\lambda)$.
2. Calculer $T_{i,j}(\lambda)^2$.
3. Quels sont les polynômes $P(X) \in K[X]$ tels que $P(X^2) = P(2X)$?
4. En déduire la valeur de $\Phi(T_{i,j}(\lambda))$, pour $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$.
5. Montrer que la fonction polynomiale $\lambda \longmapsto \Phi(D_1(\lambda))$, pour $\lambda \in K^*$ est la fonction $\lambda \longmapsto \lambda^m$, pour un certain entier naturel m.
6. Conclure.