SÉRIES NUMÉRIQUES

♦ ***Exercice 1.*** [$\star$]
Étudier la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\ln\Big(1+\frac{\ln n}{n}\Big), \qquad \sum_{n\geqslant 1}\Big(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big)^{-\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\big(\pi^{3/5}-(2\arctan n)^{3/5}\big) \qquad \sum_{n\geqslant 0}\sin\Big(\frac{\pi n^2}{n+1}\Big).$$

À chaque fois, on note u_n le terme général de la série.

1. On a
$$\forall n\geqslant 1, \qquad u_n\geqslant 0$$
et
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} = o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$$
donc, en vertu du TCSTP par $\sim$,
$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\ln\Big(1+\frac{\ln n}{n}\Big) \text{ converge.}}$$

2. On a
$$\forall n\geqslant 1, \qquad u_n\geqslant 0$$
et
$$\begin{aligned} n^2u_n &= n^2\Big(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big)^{-\sqrt{n}} \\ &= \exp\Big\{2\ln n-\sqrt{n}\ln\Big(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big)\Big\} \\ &= \exp\Big\{2\ln n-\sqrt{n}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+o\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big)\Big)\Big\} \\ &= \exp\{2\ln n-n^{1/6}+o(n^{1/6})\},\end{aligned}$$
donc, d'après les croissances comparées,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2u_n = 0,$$
c'est-à-dire
$$u_n = o_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$
Le TCSTP par o nous dit que
$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\Big(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big)^{-\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

3. On a
$$\forall n\geqslant 1, \qquad u_n\geqslant 0$$
et
$$nu_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \geqslant \frac{1}{2n}\cdot$$

Le TCSTP nous dit que

$$\boxed{\sum\nolimits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \text{ diverge.}}$$

4. On a

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \geqslant 0$$

et

$$u_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{4^n\left[\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right]^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

donc, d'après le TCSTP par $\sim$,

$$\boxed{\sum\nolimits_{n\geqslant 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \text{ diverge.}}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2\arctan x < \pi$, donc $\forall n \geqslant 0,\ \pi^{3/5} - (2\arctan n)^{3/5} > 0$, ce qui prouve que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n \geqslant 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a $\arctan x = \pi/2 - \arctan(1/x)$, donc

$$\begin{aligned} u_n &= \pi^{3/5} - \left(\pi - 2\arctan\frac{1}{n}\right)^{3/5} \\ &= \pi^{3/5} - \left(\pi - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{3/5} \\ &= \pi^{3/5} - \pi^{3/5}\left(1 - \frac{2}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{3/5} \\ &= \pi^{3/5} - \pi^{3/5}\left(1 - \frac{6}{5\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{6}{5\pi^{2/5} n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{5\pi^{2/5} n}\cdot$$

Le TCSTP par $\sim$ nous dit alors que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \left(\pi^{3/5} - (2\arctan n)^{3/5}\right) \text{ diverge.}}$$

6. On a

$$u_n = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\cdot$$

Le CSSA nous dit alors que

$$\boxed{\sum\nolimits_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) \text{ converge.}}$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Étudier, en fonction de $a > 0$ et $\alpha > 0$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)}\cdot$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\frac{1}{1+a^{n+1}},$$

donc, si $a \geqslant 1$, on a $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et le critère de d'Alembert nous dit que la série converge (pour tout $\alpha > 0$).

Si $0 < a < 1$ le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 et l'on doit faire autrement. On recherche alors un équivalent du terme général qui est positif. On a

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a^k) = \exp\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a^k).$$

Or $\ln(1+a^k) \underset{k\to+\infty}{\sim} a^k$ donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\ln(1+a^k)$ converge d'après le critère de comparaison en $\sim$ des séries positives, ce qui prouve que $\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)$ admet une limite finie $\ell > 0$. Par suite, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n^\alpha},$$

ce qui permet d'affirmer, en vertu du critère de comparaison en $\sim$ des séries positives, que la série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{la série converge si, et seulement si, } a \geqslant 1 \text{ ou } (a < 1 \text{ et } \alpha > 1).}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\circ$]
Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent des sommes suivantes

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}.$$

A faire.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\ \iff \quad & \int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\ \iff \quad & \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\circ$]
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives convergentes. Démontrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

On a

$$\forall n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n+v_n}{2}$$

ce qui permet d'appliquer le TCSTP. Donc

$$\boxed{\sum \sqrt{u_n v_n} \text{ converge.}}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]

Si la série $\sum u_n$ converge, peut-on affirmer que $\sum {u_n}^2$ converge ? Et si la convergence de la série $\sum u_n$ est absolue, peut-on affirmer que $\sum {u_n}^2$ converge ?

La série $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après le critère des séries alternées mais $\sum 1/n$ diverge. Donc

$$\boxed{\text{lorsque } \sum u_n \text{ converge, il est possible que } \sum {u_n}^2 \text{ diverge.}}$$

Comme $\sum u_n$ converge (absolument), on a $u_n \longrightarrow 0$ d'où ${u_n}^2 = o(|u_n|)$. Le TCSTP par o implique alors que $\sum {u_n}^2$ converge. En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } \sum u_n \text{ converge absolument, } \sum {u_n}^2 \text{ converge.}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\star$] (Règle de Raabe–Duhamel)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Démontrer que, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et que, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
2. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$
   a) Démontrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
   b) Démontrer que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
   c) Que peut-on dire si $\alpha = 1$?

   Remarque : Les résultats de cette question constitue la règle de Raabe–Duhamel qui précise ce qui peut se passer dans le cas d'incertitude de la règle de d'Alembert.

1. Par téléscopage, on a
$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$$
ce qui permet d'appliquer le TCSTP. Donc
$$\boxed{\text{si } \sum v_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ converge et si } \sum u_n \text{ diverge, alors } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

2. a) Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1/n^\beta$. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
donc, comme $\beta < \alpha$, on a, à partir d'un certain rang,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Comme la série $\sum v_n$ converge (c'est une série de Riemann convergente), la question 1 nous dit que
$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$
   b) Soit β tel que $\alpha < \beta < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1/n^\beta$. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
donc, comme $\beta > \alpha$, on a, à partir d'un certain rang,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Comme la série $\sum v_n$ diverge (c'est une série de Riemann divergente), la question 1 nous dit que

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

c) Rien comme le prouve les séries de Bertrand.

♦ ***Exercice 7.*** [⋆]

1. Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante. Démontrer que les séries $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 1} 2^k u_{2^k}$ ont même nature.
2. En utilisant la première question, étudier la convergence des séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} 1/\big(n(\ln n)^\alpha\big)$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_k \leqslant \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_{2^j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j u_{2^j}$$

donc si $\sum_{k\geqslant 1} 2^k u_k$ converge alors $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge aussi.
Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=2}^{2^{n+1}} u_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} u_k \geqslant \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} u_{2^{j+1}} = \sum_{j=0}^{n} 2^j u_{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} 2^{j+1} u_{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} 2^j u_{2^j}$$

donc si $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge alors $\sum_{k\geqslant 1} 2^k u_k$ converge aussi.
Donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} u_k \text{ et } \sum_{k\geqslant 1} 2^k u_k \text{ ont même nature.}}$$

2. Comme la suite de terme général $1/\big(n(\ln n)^\alpha\big)$ est positive décroissante, on peut appliquer le résultat de la question 1 pour affirmer que $\sum_{n\geqslant 2} 1/\big(n(\ln n)^\alpha\big)$ a la même nature que

$$\frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)} n^\alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, le terme général de cette série ne tend pas vers 0 donc la convergence est grossière. Si $\alpha = 1$, on retrouve la série harmonique et sa divergence. Enfin, si $\alpha > 1$, la série est inférieure à la série géométrique convergente $\sum_{n\geqslant 2} 1/2^{n(\alpha-1)}$ donc elle converge. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]

Démontrer que la série suivante converge et calculer sa somme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

On a $1/\big(n(n+1)(2n+1)\big) \sim 1/(2n^3)$ donc la série converge d'après le théorème de comparaison par $\sim$ des séries positives avec la série de Riemann convergente $\sum 1/n^3$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

donc, si l'on pose $S_N = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} 1/\big(n(n+1)(2n+1)\big)$, on a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}-4\Big(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}-1-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\Big) \\ &= 3+\frac{1}{N+1}+4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-4\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n} \\ &= 3+\frac{1}{N+1}-4\sum_{n=N+1}^{2N+1}\frac{1}{n} \\ &= 3+\frac{1}{N+1}-\frac{4}{N}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{1+n/N}. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{1+n/N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2,$$

donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=3-4\ln 2.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]

Démontrer que la série suivante converge et calculer sa somme

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{n!}.$$

Pour tout $N\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N}\frac{n^2+1}{n!} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)+n+1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-2}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{la série }\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{n!}\text{ converge et }\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n!}=3\,\mathrm{e}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [★]

Démontrer que le nombre N_n de classements à l'issue d'un marathon, auquel ont participé n coureurs, vaut $\lfloor n!\,\mathrm{e}\rfloor$. On tiendra compte du fait que, dans un marathon, il peut y avoir des abandons.

Si k coureurs ont terminé la course (avec $k\in [\![0;n]\!]$), le nombre de classements vaut

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Par conséquent, le nombre total de classements à l'issue de la course vaut

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\cdot$$

Comme

$$\mathrm{e} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!},$$

il vient

$$N_n = n!\Big(\mathrm{e} - \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\Big) = n!\,\mathrm{e} - \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{\ell!}\cdot$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{\ell!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1-1/(n+1)} \\ &= \frac{1}{n},\end{aligned}$$

donc

$$0 \leqslant n!\,\mathrm{e} - N_n \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui donne

$$\lfloor n!\,\mathrm{e} - N_n \rfloor = 0$$

et donc

$$\boxed{N_n = \lfloor n!\,\mathrm{e} \rfloor.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\star$]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$$

Connaissant la valeur de $\zeta(2)$, démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln \frac{k}{k-1},$$

donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k}{k-1} = 1 + \ln n,$$

ce qui implique que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1+\ln n}{n^2}$$

et donc

$$u_n = o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\cdot$$

Le critère de comparaison des séries positives permet alors de conclure que

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$$

Pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\underbrace{\sum_{n=2}^{N+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}_{\text{on peut commencer à } n=1}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\Big)\right)-\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+O\Big(\frac{\ln N}{N}\Big),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

♦ ***Exercice 12.*** [∘]
Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n\ln n + (-1)^n n}\cdot$$

1. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\frac{1}{1+\dfrac{\cos n}{n^{3/4}}}\\
&= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{n^{3/4}}\Big)\right\}\\
&= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}+\underbrace{O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)}_{=\varepsilon_n}\cdot
\end{aligned}$$

Or :

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ est une série alternée convergente ;
- $\sum \varepsilon_n$ est une série absolument convergente d'après le théorème de comparaison par O des séries positives (en effet, $|\varepsilon_n| = O\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ et $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente).

En conclusion,

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n} \text{ converge.}}$$

Remarque : On voit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/4}}$ qui est le terme d'une série divergente. La convergence de $\sum u_n$ n'est donc pas absolue.

2. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\ln n}}\\
&= \frac{(-1)^n}{n}\left\{1-\frac{(-1)^n}{\ln n}+O\Big(\frac{1}{(\ln n)^2}\Big)\right\}\\
&= \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n\ln n}+\underbrace{O\Big(\frac{1}{n(\ln n)^2}\Big)}_{=\varepsilon_n}\cdot
\end{aligned}$$

Or :

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente ;
- $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ est une série de Bertrand divergente ;
- $\sum \varepsilon_n$ est une série absolument convergente d'après le théorème de comparaison par O des séries positives (en effet, $|\varepsilon_n| = O\Big(\dfrac{1}{n(\ln n)^2}\Big)$ et $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand convergente).

En conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n\ln n+(-1)^n n}\ \text{diverge.}}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]
Est-il vrai que si la série de terme général u_n converge, alors pour toute suite (ε_n) positive et de limite nulle, la série de terme général $\varepsilon_n u_n$ converge aussi ?

Non, c'est totalement faux ! Pour s'en convaincre, considérons la série de terme général $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ qui converge d'après le critère des séries alternées et introduisons la suite (ε_n) telle que $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$ si n est pair et $\varepsilon_n = 0$ si n et impair de sorte que (ε_n) est bien positive de limite nulle. Alors, $\varepsilon_n u_n = 1/n$ si n est pair et $\varepsilon_n u_n = 0$ sinon. Comme $\sum_{k\geqslant 1} 1/(2k)$ est une série divergente, la série $\sum \varepsilon_n u_n$ est bien divergente. Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si la série de terme général } u_n \text{ converge et si la suite } (\varepsilon_n) \text{ est positive de limite nulle,}\\ \text{alors on ne peut pas affirmer que la série de terme général } \varepsilon_n u_n \text{ converge également.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\star$]
Soit (u_n) une suite réelle décroissante. On suppose que $\sum u_n$ converge. À l'aide de la suite $(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n})_{n\geqslant 0}$ démontrer que $u_n = o(1/n)$.

Notons $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ et S sa somme. On a

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n} = S_{2n}-S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S-S=0.$$

Par ailleurs, comme (u_n) décroit et $\sum u_n$ converge, on peut dire que (u_n) est décroissante positive de limite nulle. Donc

$$0 \leqslant nu_{2n} \leqslant u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}$$

ce qui donne, par le théorème des gendarmes,

$$\lim nu_{2n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim 2nu_{2n} = 0.$$

Par ailleurs,

$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} = 2nu_{2n+1}+u_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n}+u_{2n+1}$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim(2n+1)u_{2n+1} = 0.$$

En conclusion, on a

$$\lim nu_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot}$$

♦ ***Exercice 15.*** [∘] (Une démonstration de la formule de Stirling)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \ln\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)\cdot$$

1. Justifier que la série de terme général u_n est convergente.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite $\ell > 0$.
3. En admettant que $\ell = \sqrt{2\pi}$, trouver un équivalent de $n!$

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \ln\Big(\frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+3/2}}\,\frac{n^{n+1/2}}{n!\,\mathrm{e}^n}\Big) = \ln\left(\mathrm{e}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1/2}\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 - \big(n+\frac{1}{2}\big)\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)\cdot$$

On a

$$\begin{aligned} u_n &= 1-\big(n+\frac{1}{2}\big)\Big\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big\} \\ &= 1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{12n^2}+o_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}\cdot$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, le TCSTP par $\sim$ s'applique pour dire que la série $\sum |u_n|$ converge. Par conséquent,

$$\boxed{\textstyle\sum u_n \text{ converge (absolument).}}$$

2. Pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{N-1} u_n = \sum_{k=1}^{N-1}\big(\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)\big) = \text{ téléscopage } = \ln(a_N)-\ln(a_1) = \ln(a_N)-1,$$

c'est-à-dire

$$\ln(a_N) = 1+\sum_{k=1}^{N-1} u_n.$$

Or, comme la série $\sum u_n$ converge, la suite de ses sommes partielles converge, ce qui implique que la suite $(\ln a_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers une limite notée λ. Dès lors, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \mathrm{e}^\lambda > 0$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ admet une limite } \ell > 0.}$$

3. En admettant que $\ell = \sqrt{2\pi}$, on trouve que

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n\cdot}$$