

PROBABILITÉS FINIES

♦ ***Exercice 1.*** [∘]
Soient A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes (union, intersection et passage au contraire) les événements suivants :

1. les trois événements se produisent ;
2. A seul se produit ;
3. deux événements exactement se produisent ;
4. deux événements au moins se produisent ;
5. au plus deux événements se produisent.

1. $A \cap B \cap C$
2. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
3. $(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C)$
4. $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C)$
5. $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

♦ ***Exercice 2.*** [∘]
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

<u>Initialisation :</u> Il est clair que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Par ailleurs, la formule de Poincaré nous dit que $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2)$, ce qui démontre $\mathscr{P}(2)$.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= P\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) \\ &\leqslant P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \qquad \text{d'après } \mathscr{P}(2) \\ &\leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \qquad \text{d'après } \mathscr{P}(n), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \cdots + P(A_n).}$$

♦ ***Exercice 3.*** [∘]
Dans un jeu de 32 cartes, Cécile a remplacé une carte, autre que l'as de pique, par un second as de pique. Nicolas prend au hasard et simultanément 3 cartes du jeu. Quelle est la probabilité p que Nicolas s'aperçoive de la supercherie ?

Pour se rendre compte de la supercherie, il faut que Nicolas tire les deux as de pique.

L'univers Ω est l'ensemble des mains de 3 cartes choisies parmi 32, donc $\operatorname{card} \Omega = \binom{32}{3} = \dfrac{32 \times 31 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4960$.

Considérons l'événement A : « obtenir les deux as de pique ». Pour dénombrer A, il faut choisir les deux as de pique, ce qui laisse 1 possibilité puis choisir un autre carte parmi les 30 restantes, ce qui laisse 30 possibilités. Donc $\operatorname{card} A = 30$.

Par conséquent, on a

$$\boxed{p = \frac{30}{4960} \approx 0,006}$$

♦ *Exercice 4.* [○]

Dans une classe de n élèves, calculer la probabilité que les jours anniversaires soient tous différents et en donner une valeur approchée pour l'effectif de cette année. On oubliera le problème du 29 février.

La liste des n jours d'anniversaires est un n-uplet de l'ensemble $[\![1;365]\!]$ puisque l'ordre compte et qu'il peut y avoir des répétitions. L'univers Ω est donc l'ensemble des n-uplets de $[\![1;365]\!]$ et l'on a

$$\operatorname{card}\Omega = 365^n.$$

On note A : « les jours anniversaires sont tous différents ». Pour dénombrer A, il faut choisir les jours d'anniversaire dans $[\![1;365]\!]$ sans répétition. Pour la première personne, on a 365 choix ; pour la deuxième, on a 364 choix ; ... ; pour la n-ème personne, on a $365-(n-1)$ choix. On a donc

$$\operatorname{card} A = 365 \times 364 \times \cdots \times \big(365-(n-1)\big).$$

On reconnaît A_{365}^n ce qui est normal pour des choix successifs d'unités sans répétion.

Par conséquent, on a

$$\boxed{P(A) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times \big(365-(n-1)\big)}{365^n}.}$$

Application numérique : Pour $n = 41$, on a $P(A) \approx 0,097$. Ainsi, dans cette classe, il y a environ 90 % de chance pour que au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire.

♦ *Exercice 5.* [⋆]

On tire au hasard un entier naturel dont l'écriture décimale possède au plus n chiffres (où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![0;9]\!]$, calculer la probabilité p_k que le nombre tiré possède exactement deux fois le chiffre k. *On traitera le cas $k = 0$ à part.*

L'entier est tiré dans l'ensemble $[\![0;10^n[\![$ dont le cardinal vaut 10^n.

<u>Premier cas : $k \in [\![1;9]\!]$</u>

On peut considérer que tous les nombres de $[\![0;10^n[\![$ possède n chiffres quitte à rajouter des 0 à gauche des nombres. Dès lors, pour obtenir un nombre avec exactement deux fois le chiffre k, on choisit deux places pour les chiffres k, ce qui laisse $\binom{n}{2}$ possibilités, puis on choisit successivement avec remise $n-2$ chiffres parmi les 9 chiffres différents de k, ce qui multiplie le nombre de possibilités par 9^{n-2}. Par conséquent, le cardinal de l'ensemble des entiers de $[\![0;10^n[\![$ avec exactement deux fois le chiffre k vaut $\binom{n}{2}9^{n-2}$.

On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in [\![1;9]\!], \qquad p_k = \frac{\binom{n}{2}9^{n-2}}{10^n}.}$$

<u>Second cas : $k = 0$</u>

Cette fois, on considère plusieurs cas en fonction du nombre j de chiffres du nombre tiré. On constate que j parcourt $[\![3;n]\!]$ puisque l'on ne peut pas écrire un nombre avec strictement moins de 3 chiffres contenant deux 0.

Pour obtenir un nombre à j chiffres avec exactement deux fois le chiffre 0, on place les deux 0 parmi les j chiffres en évitant la première place (sinon le nombre n'aurait pas j chiffres), ce qui laisse $\binom{j-1}{2}$ possibilités, puis on choisit successivement avec remise $j-2$ chiffres parmi les 9 chiffres différents de 0, ce qui multiplie le nombre de possibilités par 9^{j-2}. Par conséquent, le cardinal de l'ensemble des entiers de $[\![0;10^n[\![$ avec j chiffres et exactement deux fois le chiffre 0 vaut $\binom{j-1}{2}9^{j-2}$.

On en déduit que

$$\boxed{p_0 = \frac{\displaystyle\sum_{j=3}^{n} \binom{j-1}{2} 9^{j-2}}{10^n}\cdot}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\star$]
Une urne contient n boules numérotés de 1 à n. On tire n boules dans cette urne, successivement, avec remise. Calculer la probabilité p_n que la boule numérotée 1 soit piochée un nombre impair de fois. Déterminer la limite de p_n.

Pour déterminer p_n, on propose deux solutions :

▷ Avec la loi uniforme

Il y a n^n tirages possibles de n boules parmi n, avec remise. Il y a $\binom{n}{1}(n-1)^{n-1}$ tirages avec exactement 1 fois la boule 1 ; $\binom{n}{3}(n-1)^{n-3}$ tirages avec exactement 3 fois la boule 1 ; $\binom{n}{5}(n-1)^{n-5}$ tirages avec exactement 5 fois la boule 1 ; etc. Donc

$$p_n = \frac{1}{n^n} \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}.$$

Posons

$$I_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad P_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k},$$

de sorte que, d'après la formule du binôme,

$$P_n + I_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k} = n^n$$

et

$$P_n - I_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}(-1)^k(n-1)^{n-k} = (n-2)^n,$$

ce qui donne

$$I_n = \frac{n^n - (n-2)^n}{2}\cdot$$

Par suite, on a

$$p_n = \frac{n^n - (n-2)^n}{2n^n}\cdot$$

▷ Avec la formule des probas totales

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note I_k l'événement « on a tiré un nombre impair de 1 lors des k premiers tirages ». En utilisant la formule des probas totales à travers le sce $(I_k, \overline{I_k})$, on a, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$,

$$P(I_{k+1}) = P(I_k)P(I_{k+1} \mid I_k) + P(\overline{I_k})P(I_{k+1} \mid \overline{I_k}).$$

On a clairement, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$,

$$P(I_{k+1} \mid I_k) = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad P(I_{k+1} \mid \overline{I_k}) = \frac{1}{n}$$

puisque la première probabilité est celle de ne pas tirer la boule 1 au $k+1$-ème tirage et la seconde probabilité est celle de tirer la boule 1 au $k+1$-ème tirage. En tenant compte du fait que $P(\overline{I_k}) = 1 - P(I_k)$, il vient alors

$$P(I_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)P(I_k) + \frac{1}{n}\cdot$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. Son point fixe est $1/2$ et sa raison géométrique est $1 - 2/n$, donc

$$\forall k \in [\![1;n-1]\!], \qquad P(I_k) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}\left(P(I_1) - \frac{1}{2}\right)\cdot$$

Comme $P(I_1) = 1/n$, il vient

$$\forall k \in [\![1;n-1]\!], \qquad P(I_k) = \frac{1}{2} - \frac{n-2}{2n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}.$$

Par suite, on a

$$P(I_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^n.$$

▷ Bilan

$$\boxed{P(I_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^n.}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\Big\{n\ln\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\Big\{n\Big(-\frac{2}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\{-2 + o(1)\}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}^2}.}$$

♦ ***Exercice 7.*** [⋆] (Étude probabiliste de l'indicatrice d'Euler)

Pour tout entier naturel m, on rappelle que l'*indicatrice d'Euler* $\varphi(m)$ désigne le cardinal de l'ensemble des entiers de $[\![1;m]\!]$ qui sont premiers avec m.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\Omega = [\![1;n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

1. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'événement « être divisible par d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(A_d)$.
   b) Si $p_1, \dots, p_r$ désignent les facteurs premiers distincts de n, démontrer que les événements A_{p_i} sont indépendants.
   c) En déduire $\varphi(n)$.
2. Pour tout diviseur d de n, on note B_d l'événement « avoir un pgcd avec n qui vaut d ».
   a) Pour tout diviseur d de n, calculer $P(B_d)$ à l'aide de φ.
   b) En déduire que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

1. a) Soit d un diviseur de n de sorte que $n = md$ où $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $A_d = \{d, 2d, \dots, md\}$ donc $\operatorname{card} A_d = m$, ce qui donne $P(A_d) = m/n = 1/d$. Donc

$$\boxed{\forall d \mid n, \qquad P(A_d) = \frac{1}{d}.}$$

b) Soient $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$ des diviseurs premiers distincts de n. Les nombres premiers p_{i_j} étant premiers entre eux, le théorème d'indépendance divisorielle nous dit que, si l'on pose $d = p_{i_1} \cdots p_{i_m}$, on a $A_d = A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}$. On en déduit que

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}) = P(A_d) = \frac{1}{d} = \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_m}} = P(A_{p_{i_1}}) \cdots P(A_{p_{i_m}}).$$

Donc

$$\boxed{\text{les événements } A_{p_i} \text{ sont indépendants.}}$$

c) Notons B_1 l'événement « être premier avec n ». La définition de $\varphi(n)$ nous dit que

$$P(B_1) = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Par ailleurs, on a $B_1 = \overline{A_{p_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_r}}$ donc, par indépendance des A_{p_i}, on a

$$P(B_1) = P(\overline{A_{p_1}}) \cdots P(\overline{A_{p_r}}) = \prod_{k=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

En conclusion,

$$\boxed{\varphi(n) = n\prod_{p\mid n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\cdot}$$

2. a) On a

$$\begin{aligned} P(B_d) &= \frac{\operatorname{card}\{k\in [\![1;n]\!] : k\wedge n = d\}}{n} \\ &= \frac{\operatorname{card}\{\ell\in [\![1;n/d]\!] : \ell\wedge (n/d) = 1\}}{n} \\ &= \frac{\varphi(n/d)}{n}\cdot \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall d\mid n,\qquad P(B_d) = \frac{\varphi(n/d)}{n}\cdot}$$

b) La famille $(B_d)_{d\mid n}$ est clairement un système complet d'événements. Par suite, on a

$$\sum_{d\mid n} P(B_d) = 1,$$

ce qui donne

$$\sum_{d\mid n}\varphi\Big(\frac{n}{d}\Big) = n.$$

En effectuant le changement d'indice $d \rightsquigarrow n/d$, on obtient

$$\boxed{\sum_{d\mid n}\varphi(d) = n.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$] (Permutations sans point fixe)

Un mot est constitué de n lettres distinctes. On choisit au hasard et de manière équiprobable une anagramme de ce mot.

Calculer la probabilité p_n qu'aucune lettre ne retrouve sa place dans l'anagramme.

Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$? *Donnée :* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/k! = 1/\mathrm{e}$.

Exprimons la probabilité qu'au moins une lettre de l'anagramme soit à la même place que dans le mot d'origine. Une anagramme du mot de n lettres peut être représentée par une permutation de $[\![1;n]\!]$ (puisque cela revient à permuter les lettres numérotées de 1 à n sur les n emplacements possibles), donc Ω est l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ dont le cardinal est $n!$ Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, nous notons A_i l'événement « la lettre numéro i est à la i-ème place ». L'événement « au moins une lettre de l'anagramme est à la même place que dans le mot d'origine » est alors égal à $A = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$. Donc

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

Or, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, la somme $\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ comporte $\binom{n}{k}$ termes qui sont tous égaux à $(n-k)!/n!$. Donc

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot$$

Par conséquent, comme $p_n = 1-P(A)$, on a

$$\boxed{p_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot}$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]
Est-il plus facile d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un seul dé ou d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés ? *N.B : Cette question, posée par le Chevalier de Méré en 1654 à Pascal, est à l'origine de la théorie mathématique des probabilités...*

Notons A l'événement « n'obtenir aucun as lors des 4 tirages » et, pour $k \in [\![1;4]\!]$, A_k l'événement « ne pas obtenir d'as au k-ème tirage » de sorte que les événements A_1, A_2, A_3, A_4 sont mutuellement indépendants. Alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4),$$

donc

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,52}$$

Notons B l'événement « n'obtenir aucun double-as lors des 24 tirages » et, pour $k \in [\![1;24]\!]$, B_k l'événement « ne pas obtenir de double-as au k-ème tirage » de sorte que les événements A_1, ..., A_{24} sont mutuellement indépendants. Alors

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - P(B_1 \cap \cdots \cap B_{24}) = 1 - P(B_1) \times \cdots \times P(B_{24}),$$

donc

$$\boxed{P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,49}$$

On constate donc que qu'on a plus de chance d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un seul dé que d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés. De plus, on voit que $P(\overline{A}) > 1/2$ alors que $P(\overline{B}) < 1/2$, ce qui signifie que le premier jeu est favorable au joueur alors que le second jeu lui est défavorable.

♦ ***Exercice 10.*** [○]
Le professeur K. se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il effectue k essais au hasard. Mais, comme il est très distrait, il ne met pas à l'écart les clefs qu'il a déjà essayées. Quelle est la probabilité p_k que la porte s'ouvre au k-ème essai ?

Numérotons les clefs de 1 à n de sorte que la bonne clé soit la numéro 1.

Pour définir l'univers de cette expérience aléatoire, on pense naturellement à prendre pour Ω l'ensemble qui contient, d'une part, les p-uplets de nombres de $[\![1;n]\!]$, où p parcourt $[\![1;k]\!]$, qui contiennent un unique 1 placé en p-ème position (le professeur K. termine avec un succès sans avoir eu de succès avant) et, d'autre part, les k-uplets sans aucun 1 (le professeur K. échoue lamentablement). Cependant, ce modèle pose un problème. En effet, avec cet univers, les événements S_ℓ : « le professeur K. choisit la bonne clef au ℓ-ème essai » ne sont pas indépendants, alors même que le fait que les tirages soient avec remise laisse intuitivement penser le contraire. En effet, si S_ℓ se produit, alors il n'y a pas de tirages numéro $\ell + 1$, ce qui établit bien une relation de dépendance entre S_ℓ et $S_{\ell+1}$.

Voyons comment modifier le modèle pour éviter cet écueil. L'idée est simple : il suffit de considérer que le professeur K. continue ses essais jusqu'au k-ème, qu'il ait ou non un succès auparavant. L'univers Ω est alors l'ensemble des p-uplets d'entiers de $[\![1;n]\!]$. Ce n'est pas exactement l'ensemble des résultats possibles de l'expérience mais un ensemble plus gros ; peu importe ! Avec ce modèle, le fait que les tirages soient avec remise implique que les évéments S_ℓ : « le professeur K. choisit la bonne clef au ℓ-ème essai » sont indépendants. On peut alors déterminer aisément la probabilité de l'événement « la porte s'ouvre, pour la première fois, au k-ème essai », c'est-à-dire de l'événement $\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$. On a

$$\begin{aligned} P\big(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k\big) &= P\big(\overline{S_1}\big) \times \cdots \times P\big(\overline{S_{k-1}}\big) \times P\big(S_k\big) \qquad \text{par ind.} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{p_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆]

Une colonie de n vampires a élu domicile dans un château des Carpates. Une nuit de pleine lune, le comte Drakul en capture cent, leur mord les oreilles, puis les relâche.

La nuit suivante, il en capture cent au hasard. Douze ont une morsure aux oreilles.

Le compte Drakull espère ainsi pouvoir estimer la taille de la population de vampires, c'est-à-dire la valeur la plus probable de n.

On note Ω_n l'ensemble des combinaisons de 100 vampires parmi n (avec $n \geqslant 100$). Les vampires étant indiscernables les uns des autres, on considère qu'ils peuvent être choisis avec équiprobabilité, ce qui revient à considérer sur Ω_n la loi de probabilité uniforme P_n.

On note A_n l'événement « il y a douze vampires mordus parmi les cent capturés ».

Enfin, on considère la suite (u_n) définie pour les entiers $n \geqslant 188$ par $u_n = P_n(A_n)$.

1. Soit $n \geqslant 188$. Déterminer u_n.
2. Démontrer que (u_n) atteint un maximum pour un certain entier $n \geqslant 188$ et déterminer cet entier. On l'appelle le *maximum de vraisemblance*.

1. On a $\operatorname{card} \Omega_n = \binom{n}{100}$.
   Pour déterminer un élément de l'événement A_n, il faut d'abord choisir 12 vampires parmi les 100 qui ont été mordus, ce qui laisse $\binom{100}{12}$ possibilités, puis compléter notre échantillon de 100 vampires en choisissant 88 vampires parmi les $n-100$ restants, ce qui multiplie le nombre de possibilités par $\binom{n-100}{88}$. Donc $\operatorname{card} A_n = \binom{100}{12}\binom{n-100}{88}$.
   Comme P_n est la loi uniforme sur Ω_n, on a $P_n(A_n) = \operatorname{card} A_n / \operatorname{card} \Omega_n$, c'est-à-dire

$$\boxed{u_n = \frac{\binom{100}{12}\binom{n-100}{88}}{\binom{n}{100}}.}$$

2. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\binom{100}{12}\binom{n-100}{88}}{\binom{n}{100}} \frac{\binom{n+1}{100}}{\binom{100}{12}\binom{n-99}{88}} \\
&= \frac{88! \times (n-187)! \times (n+1)! \times 100! \times (n-100)! \times (n-100)!}{(n-99)! \times 100! \times (n-99)! \times n! \times 88! \times (n-188)!} \\
&= \frac{(n-187) \times (n+1)}{(n-99)^2} \\
&= \frac{n^2 - 186n - 187}{n^2 - 198n + 9801} \\
&= 1 + \frac{12n - 9988}{(n-99)^2}.
\end{aligned}$$

   La position de u_n/u_{n+1} par rapport à 1 dépend donc du signe de $12n - 9988$. Or la fonction affine $x \longmapsto 12x - 9988$ est strictement croissante et s'annule entre 832 et 833. On déduit de la question précédente que lorsque $188 \leqslant n \leqslant 832$, nous avons $u_n < u_{n+1}$ et lorsque $n \geqslant 833$, nous avons $u_n > u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) croit strictement sur l'intervalle $[\![188; 833]\!]$ et décroit strictement sur l'intervalle $[\![833; +\infty[\![$. On peut donc conclure que

$$\boxed{\begin{array}{l}(u_n) \text{ atteint son maximum sur } [\![188;+\infty[\![\\ \text{en son maximum de vraisemblance : } 833.\end{array}}$$

   Partant du principe que l'événement A_n a d'autant plus de chance de se produire que sa probabilité est grande, le maximum de vraisemblance est l'effectif de la population de chauve-souris le plus probable puisque nous savons que A_n s'est effectivement réalisé. Autrement dit,

$$\boxed{\text{l'effectif « le plus propable » pour la population de vampires est 833.}}$$

♦ ***Exercice 12.*** [○]

Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (respectivement q) avec $q < p$. On suppose que les tirs sont indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint les deux cibles consécutivement.

Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Notons S un succès et E un échec. En commençant par la cible à 20 m, on gagne ou bien si l'on effectue SSS ou SSE ce qui arrive avec probabilité $pqp + pq(1-p) = pq$ ou bien si l'on fait ESS, ce qui se produit avec probabilité $(1-p)qp$. Donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m est égale à } (2-p)pq.}$$

En faisant un raisonnement similaire, on trouve que

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 50 m est égale à } (2-q)qp.}$$

On a $(2-p)pq < (2-q)qp$, donc

$$\boxed{\text{il faut mieux commencer par la cible à 50 m.}}$$

Cela peut paraître surprenant mais cela tient au fait qu'en choisissant deux cibles faciles à 20 m (en premier et troisième essais), on place la cible la plus difficile au milieu, ce qui gène la consécutivité des succès.

♦ ***Exercice 13.*** [○]

Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les évènements: A_n : « obtenir au plus un pile » et B_n : « obtenir au moins un pile et au moins un face ». Démontrer que A_n et B_n ne sont jamais indépendants sauf lorsque $n = 3$.

On a

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(\text{« obtenir aucun pile »}) + P(\text{« obtenir exactement un pile »}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(B_n) &= 1 - P(\overline{B_n}) \\ &= 1 - P(\text{« n'obtenir aucun pile ou n'obtenir aucun face »}) \\ &= 1 - P(\text{« n'obtenir aucun pile »}) - P(\text{« n'obtenir aucun face »}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(A_n \cap B_n) &= P(\text{« obtenir exactement un pile »}) \\ &= \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

On a donc $P(A_n \cap B_n) = P(A_n)P(B_n)$ si, et seulement si,

$$\frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{n}{2^n} \iff 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n}{n+1} \iff n+1 = 2^{n-1} \iff n = 3.$$

♦ **Exercice 14.** [$\circ$]

Un sac contient trois pièces : une avec deux piles, une avec deux faces et la dernière avec un face et un pile. On tire une pièce du sac au hasard et on la pose sur la table. La face visible est pile. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit également pile ?

Posons A : « la face cachée est pile » et B : « la face visible est pile ». La probabilité que l'on veut calculer est $P(A\,|\,B)$. On a

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

♦ **Exercice 15.** [$\star$]

Un être humain a six chances sur mille d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnanbule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. Huit fois sur dix, un des jumeaux est droitier et l'autre est gaucher. Ces deux phénomènes sont indépendants. Nicolas est somnanbule et droitier. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un frère jumeau gaucher et somnanbule ?

Notons J l'événement « Nicolas a un vrai jumeau », G l'événement « Nicolas a un vrai jumeau gaucher » et S l'événement « Nicolas a un vrai jumeau somnanbule » de sorte que

$$P(J) = \frac{6}{1000}, \qquad P(G\,|\,J) = \frac{8}{10} \qquad \text{et} \qquad P(S\,|\,J) = \frac{1}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
P(G\cap S) &= P(G\cap S\cap J) \qquad \text{car } G\cap S \text{ implique } J\\
&= P(G\cap S\,|\,J)P(J) \qquad \text{par conditionnement}\\
&= P(G\,|\,J)P(S\,|\,J)P(J) \qquad \text{car } G \text{ et } S \text{ sont indépendants sachant } J\\
&= \frac{8}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{1000}\\
&= \frac{24}{10000}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{Nicolas a 24 chances sur 10 000 d'avoir un frère jumeau gaucher et somnanbule.}}$$

♦ **Exercice 16.** [$\circ$]

Le professeur B. (moins distrait que le professeur K.) se trouve devant la salle L3.08 fermée à clef. Il dispose d'un trousseau de n clefs dont une seule ouvre la porte. Comme il ne sait plus laquelle, il essaie les clefs au hasard les unes après les autres en écartant à chaque fois les clefs qui n'ont pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au k-ème essai ($1 \leqslant k \leqslant n$) ?

Notons O_j l'événement « le professeur B. choisit la bonne clef au j-ème essai ». On veut $P(\overline{O_1}\cap\cdots\cap\overline{O_{k-1}}\cap O_k)$. On utilise la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&P(\overline{O_1}\cap\cdots\cap\overline{O_{k-1}}\cap O_k)\\
=\ &P(\overline{O_1})P(\overline{O_2}\,|\,\overline{O_1})P(\overline{O_3}\,|\,\overline{O_1}\cap\overline{O_2})\cdots P(\overline{O_{k-1}}\,|\,\overline{O_1}\cap\cdots\cap\overline{O_{k-2}})P(O_k\,|\,\overline{O_1}\cap\cdots\cap\overline{O_{k-1}})\\
=\ &\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\times\frac{1}{n-k+1}\\
=\ &\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

On constate donc que

$$\boxed{\text{les événements } \overline{O_1}\cap\cdots\cap\overline{O_{k-1}}\cap O_k \text{ pour } 1\leqslant k\leqslant n \text{ sont équiprobables.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\circ$]

Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain est $0,7$ (il craque !). En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$ (il s'en veut !). Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-ème jour ? Que se passe-t-il si n est grand ?

Notons F_n l'événement « la personne fume le n-ème jour ». Alors

$$\begin{aligned} P(\overline{F_n}) &= P(\overline{F_n} \mid F_{n-1})P(F_{n-1}) + P(\overline{F_n} \mid \overline{F_{n-1}})P(\overline{F_{n-1}}) \\ &= 0,9\big(1 - P(\overline{F_{n-1}})\big) + 0,3P(\overline{F_{n-1}}) \\ &= 0,9 - 0,6\, P(\overline{F_{n-1}}), \end{aligned}$$

donc $\big(P(\overline{F_n})\big)$ est une suite arithmético-géométrique. Posons $\ell = 9/16$. Alors

$$P(\overline{F_n}) - \frac{9}{16} = -0,6\left(P(\overline{F_{n-1}}) - \frac{9}{16}\right),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(\overline{F_n}) - \frac{9}{16} = (-0,6)^n\left(P(\overline{F_0}) - \frac{9}{16}\right) = \left(1 - \frac{9}{16}\right)(-0,6)^n = \frac{7}{16}(-0,6)^n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(\overline{F_n}) = \frac{9 + 7 \times (-0,6)^n}{16}\cdot}$$

Donc

$$\boxed{\lim P(\overline{F_n}) = \frac{9}{16}\cdot}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\star$]

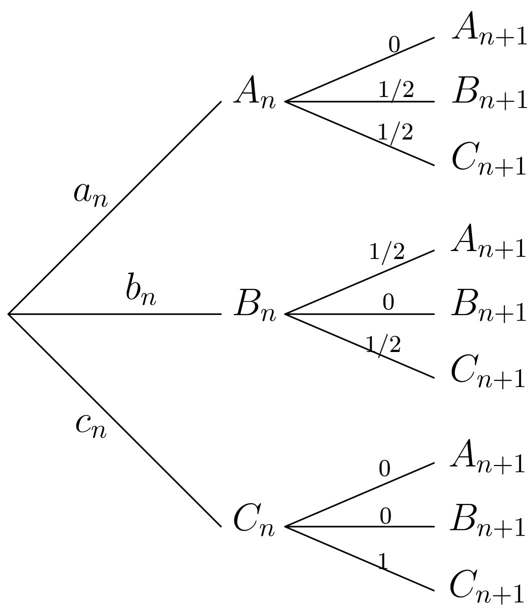
1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}\cdot$
2. Pour étudier le comportement des MPSI, on a mis au point le protocole suivant. On place un MPSI dans une pièce comportant trois issues A, B et C. Les deux premières conduisent vers un morceau de chocolat alors que la troisième conduit à une calculatrice. Après que le MPSI a choisi son issue, on le remet dans la pièce pour répéter l'expérience. On observe les résultats suivants :
   - si le MPSI choisit la sortie A, il sort la fois suivante en B ou C de façon équiprobable ;
   - si le MPSI choisit la sortie B, il sort la fois suivante en A ou C avec la même probabilité ;
   - si le MPSI choisit la sortie C, il la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

   On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « le MPSI a choisi la sortie A (respectivement B, C) à la n-ème expérience ». On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$. À la première expérience le MPSI sort par l'issue A, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

   b) Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n. Quelle est la limite de (c_n). Interpréter.

1. Faire une récurrence.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient



Les événements A_n, B_n et C_n formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n)P(A_{n+1} \mid A_n) + P(B_n)P(A_{n+1} \mid B_n) + P(C_n)P(A_{n+1} \mid C_n) \\ &= P(A_n) \times 0 + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times 0 \\ &= \frac{b_n}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n)P(B_{n+1} \mid A_n) + P(B_n)P(B_{n+1} \mid B_n) + P(C_n)P(B_{n+1} \mid C_n) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times 0 + P(C_n) \times 0 \\ &= \frac{a_n}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n)P(C_{n+1} \mid A_n) + P(B_n)P(C_{n+1} \mid B_n) + P(C_n)P(C_{n+1} \mid C_n) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times 1 \\ &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} + c_n. \end{aligned}$$

En résumé,

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n}{2} \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} + c_n.}$$

b) On peut écrire le système constitué de ces trois égalité sous sa forme matriciel, ce qui donne

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

En s'inspirant du modèle des suites géométriques, on conjecture que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}\, M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

On le démontre bien sûr par récurrence :
Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$\frac{1}{2^{1-1}}\, M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

donc la relation est vraie au rang 1.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la relation soit vraie au rang n et démontrons la au rang $n+1$.
On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} && \text{d'après a)} \\ &= \frac{1}{2} M \frac{1}{2^{n-1}}\, M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^n}\, M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc la relation est vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}\, M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}}$$

En tenant compte de l'expression de M^{n-1} déterminée à la question 1 et des valeurs de a_1, b_1 et c_1, on obtient alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(-1)^{n-1} & 1-(-1)^{n-1} & 0 \\ 1-(-1)^{n-1} & 1+(-1)^{n-1} & 0 \\ 2^n - 2 & 2^n - 2 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+(-1)^{n-1} \\ 1-(-1)^{n-1} \\ 2^n - 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}, \qquad b_n = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2^n} \qquad \text{et} \qquad c_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

On constate que

$$\boxed{\lim c_n = 1.}$$

Cela signifie que

lorsqu'on effectue un grand nombre d'expériences, le MPSI apprend quasi-certainement à choisir la direction de la calculette.

♦ ***Exercice 19.*** [$\star$]

Un groupe de candidats répond à un QCM constitué de deux questions Q1 et Q2. Lorsqu'un candidat connaît la bonne réponse à l'une des questions, il la donne. Sinon, il choisit au hasard parmi les quatre réponses possibles. On a par ailleurs constaté que trois quarts des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q1 ; deux tiers des candidats ne connaissent pas la réponse à la question Q2 et les trois cinquièmes des candidats ne connaissent la réponse ni à Q1 ni à Q2.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat ait répondu au hasard à la réponse Q1 et qu'il ait trouvé la bonne réponse.
2. Déterminer la probabilité qu'un candidat trouve la bonne réponse aux deux questions.
3. Mathilde a répondu correctement aux deux questions. Quelle est la probabilité qu'elle connaisse 0 réponse ? 1 réponse ? 2 réponses ? Commenter.

Pour $k \in \{1;2\}$, on note Q_k l'événement « le candidat connaît la réponse à la question Qk » et J_k l'événement « la réponse du candidat à la question Qk est juste ». Les hypothèses de l'énoncé nous disent que

$$P(\overline{Q_1}) = \frac{3}{4}, \qquad P(\overline{Q_2}) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}) = \frac{3}{5}.$$

1. On a
$$P(\overline{Q_1} \cap J_1) = P(\overline{Q_1})P(J_1 \,|\, \overline{Q_1}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$
donc
$$\boxed{\text{la probabilité qu'un candidat ait répondu au hasard à la réponse Q1 et qu'il ait trouvé la bonne réponse vaut } \frac{3}{16}.}$$

2. Il existe quatre types de candidats : ceux qui connaissent les réponses aux deux questions ; ceux qui connaissent la réponse à la question Q1 mais pas celle à la question Q2 ; ceux qui connaissent la réponse à la question Q2 mais pas celle à la question Q1 et enfin ceux qui ne connaissent aucune des deux réponses. Par conséquent, la famille $(Q_1 \cap Q_2, Q_1 \cap \overline{Q_2}, \overline{Q_1} \cap Q_2, \overline{Q_1} \cap \overline{Q_2})$ est un système complet d'événements. Par suite, la formule des probabilités totales nous dit que
$$\begin{aligned} P(J_1 \cap J_2) \quad = \quad & P(Q_1 \cap Q_2)P(J_1 \cap J_2 \,|\, Q_1 \cap Q_2) + P(Q_1 \cap \overline{Q_2})P(J_1 \cap J_2 \,|\, Q_1 \cap \overline{Q_2}) \\ & + P(\overline{Q_1} \cap Q_2)P(J_1 \cap J_2 \,|\, \overline{Q_1} \cap Q_2) + P(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2})P(J_1 \cap J_2 \,|\, \overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}). \end{aligned}$$
Il est clair que
$$P(J_1 \cap J_2 \,|\, Q_1 \cap Q_2) = 1, \qquad P(J_1 \cap J_2 \,|\, Q_1 \cap \overline{Q_2}) = \frac{1}{4},$$
$$P(J_1 \cap J_2 \,|\, \overline{Q_1} \cap Q_2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P(J_1 \cap J_2 \,|\, \overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$
De plus, on a
$$\begin{aligned} P(Q_1 \cap Q_2) &= 1 - P(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}) \\ &= 1 - P(\overline{Q_1}) - P(\overline{Q_2}) + P(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}) \qquad \text{(Poincaré)} \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{11}{60}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P(Q_1 \cap \overline{Q_2}) &= P(Q_1 \setminus Q_2) \\ &= P(Q_1) - P(Q_1 \cap Q_2) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{11}{60} \\ &= \frac{1}{15}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P(\overline{Q_1} \cap Q_2) &= P(Q_2 \setminus Q_1) \\ &= P(Q_2) - P(Q_1 \cap Q_2) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{11}{60} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

et, rappelons le,

$$P(\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2}) = \frac{3}{5}.$$

En combinant tous ces résultats, il vient

$$P(J_1\cap J_2) = \frac{11}{60}\times 1+\frac{1}{15}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{16} = \frac{11}{40},$$

donc

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un candidat trouve la bonne réponse aux deux questions vaut } \frac{11}{40}.}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
P(\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2}\,|\,J_1\cap J_2) &= \frac{P\big((\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2}\,)\cap(J_1\cap J_2)\big)}{P(J_1\cap J_2)} && \text{par définition}\\
&= \frac{P(\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2})P(J_1\cap J_2\,|\,\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2})}{P(J_1\cap J_2)} && \text{en conditionnant}\\
&= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{16}}{\frac{11}{40}}\\
&= \frac{3}{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Q_1\cap Q_2\,|\,J_1\cap J_2) &= \frac{P\big((Q_1\cap Q_2\,)\cap(J_1\cap J_2)\big)}{P(J_1\cap J_2)}\\
&= \frac{P(Q_1\cap Q_2)P(J_1\cap J_2\,|\,Q_1\cap Q_2)}{P(J_1\cap J_2)}\\
&= \frac{\frac{11}{60}\times 1}{\frac{11}{40}}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P\big((\overline{Q_1}\cap Q_2)\cup(Q_1\cap\overline{Q_2})\,|\,J_1\cap J_2\big) &= 1-P\big((\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2})\cup(Q_1\cap Q_2)\,|\,J_1\cap J_2\big)\\
&= 1-P(\overline{Q_1}\cap\overline{Q_2}\,|\,J_1\cap J_2)-P(Q_1\cap Q_2\,|\,J_1\cap J_2)\\
&= 1-\frac{3}{22}-\frac{2}{3}\\
&= \frac{13}{66}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les probabilités que Mathilde connaisse 0 réponse, 1 réponse, 2 réponses}\\ \text{valent respectivement } \frac{3}{22}\approx 0,14,\ \frac{13}{66}\approx 0,20 \text{ et } \frac{2}{3}\approx 0,67\end{array}}$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les deux bonnes réponses de Mathilde sont, de façon la plus plausible,}\\ \text{dues au fait qu'elle connaissait au moins l'une des deux réponses.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 20.*** [∘]

Un industriel propose un « kit » pour tester la présence d'une protéine allergisante, notée A, dans la chair de poisson. Le fabricant annonce que le test révèle la présence de la protéine A (test positif) dans 99 cas sur 100 lorsque les poissons ont effectivement la protéine A dans leur chair et dans 10 cas sur 100 lorsqu'ils n'ont pas la protéine A. On suppose que 1 poisson sur 10 contient la protéine A.

1. On choisit un poisson au hasard. On le teste, le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.
2. On choisit un autre un poisson au hasard. On le teste, le test est négatif. Quelle est la probabilité qu'il contienne la protéine A ? Interprétation.

On note

$$\begin{aligned}
A \text{ l'événement :} & \text{ « la chair de poisson contient la protéine A »,}\\
+ \text{ l'événement :} & \text{ « le test est positif »,}\\
- \text{ l'événement :} & \text{ « le test est négatif »}
\end{aligned}$$

1. On veut calculer $P(A\,|\,+)$. On le fait grace à la technique de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(A\,|\,+) &= \frac{P(A\cap +)}{P(+)} && \text{par définition}\\
&= \frac{P(A)P(+\,|\,A)}{P(A)P(+\,|\,A)+P(\overline{A})P(+\,|\,\overline{A})} && \begin{array}{l}\longleftarrow \text{ par conditionnement}\\ \longleftarrow \text{ par probas totales}\end{array}\\
&= \frac{\frac{1}{10}\frac{99}{100}}{\frac{1}{10}\frac{99}{100}+\frac{9}{10}\frac{10}{100}},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(A\,|\,+) = \frac{11}{21}.}$$

Lorsque le test est positif, le poisson n'est en fait malade qu'à peu près une fois sur deux, ce qui signifie que le kit n'est pas génial pour le pisciculteur.

2. On veut calculer $P(A\,|\,-)$. On le fait grace à la technique de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(A\,|\,-) &= \frac{P(A\cap -)}{P(-)} && \text{par définition}\\
&= \frac{P(A)P(-\,|\,A)}{P(A)P(-\,|\,A)+P(\overline{A})P(-\,|\,\overline{A})} && \begin{array}{l}\longleftarrow \text{ par conditionnement}\\ \longleftarrow \text{ par probas totales}\end{array}\\
&= \frac{\frac{1}{10}\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}\frac{1}{100}+\frac{9}{10}\frac{90}{100}},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(A\,|\,-) = \frac{1}{811}.}$$

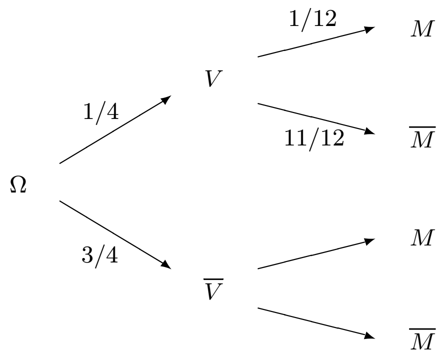
Lorsque le test est négatif, le poisson n'est quasiment jamais malade, ce qui signifie que le kit est très bon pour le consommateur.

♦ ***Exercice 21.*** [∘]

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Lors d'une épidémie, on constate que, parmi les malades, 20 % ont été vaccinés. De plus, on constate que dans l'ensemble des vaccinés, 1 sur 12 a quand même été malade. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

On note V l'événement « la personne est vaccinée » et on note M l'événement « la personne est malade ».

On a



et

$$P(V \mid M) = \frac{1}{5}\cdot$$

En appliquant la méthode de Bayes à $P(V \mid M)$, on obtient

$$P(V \mid M) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{P(V)P(M \mid V)}{P(V)P(M \mid V) + P(\overline{V})P(M \mid \overline{V})} \qquad \text{par conditionnement et formule des probas totales}$$

donc

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{12}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times P(M \mid \overline{V})},$$

ce qui donne

$$P(M \mid \overline{V}) = \frac{4}{3}\left(\frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{12}}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9}\cdot$$

Donc

$$\boxed{P(M \mid \overline{V}) = \frac{1}{9}\cdot}$$

<u>Une autre solution :</u>
On a

$$P(M \mid \overline{V}) = \frac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \qquad \text{par définition.}$$

Le calcul de $P(\overline{V})$ se fait par passage au contraire :

$$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\cdot$$

Pour calculer $P(M \cap \overline{V})$, on conditionne :

$$P(M \cap \overline{V}) = P(\overline{V} \mid M)P(M).$$

Or, par passage au contraire

$$P(\overline{V} \mid M) = 1 - P(V \mid M) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\cdot$$

De plus,

$$P(M) = \frac{P(V \cap M)}{P(V \mid M)} = \frac{P(M \mid V)P(V)}{P(V \mid M)} = \frac{\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{48}\cdot$$

D'où

$$P(M \cap \overline{V}) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{48} = \frac{1}{12}\cdot$$

En définitive, on a

$$P(M \mid \overline{V}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(M \mid \overline{V}) = \frac{1}{9}.}$$

♦ ***Exercice 22.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs S_1, …, S_n. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons rouges. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à $k\alpha$ (pour $k \in [\![1;n]\!]$). Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Le jeton pioché est blanc. Exprimer en fonction de $k \in \{1, \dots, n\}$ la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k. Simplifier au maximum l'expression obtenue.

1. Pour que tout roule, il faut et siffit que $\alpha \geqslant 0$ et $\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha n = 1$, donc

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.}$$

2. Notons B l'événement « le pion pioché est blanc » et S_k l'événement « le sac choisi est le numéro k ». On a

$$\begin{aligned}
P(S_k \mid B) &= \frac{P(S_k \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \mid S_k)P(S_k)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(B \mid S_j)P(S_j)} && \longleftarrow \text{ par conditionnement} \\
& && \longleftarrow \text{ par probas totales} \\
&= \frac{\dfrac{k}{n+1}\alpha k}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n+1}\alpha j} \\
&= \frac{k^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{P(S_k \mid B) = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.}$$

♦ ***Exercice 23.*** [⋆] (Urnes de Pólya)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on ajoute dans l'urne k autres boules de la même couleur.

1. On effectue deux tirages consécutifs. Sachant qu'au second on a tiré une boule rouge, déterminer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge également au premier.
2. On effectue n tirages consécutifs. Démontrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ème tirage est indépendante de n.

1. On note R_1 (respectivement R_2) l'événement « on tire une boule rouge au tirage numéro 1 (respectivement 2) » et B_1 (respectivement B_2) l'événement « on tire une boule blanche au tirage numéro 1 (respectivement 2) ». On a

$$\begin{aligned}
P(R_1 \mid R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} \\
&= \frac{P(R_2 \mid R_1)P(R_1)}{P(R_1)P(R_2 \mid R_1) + P(B_1)P(R_2 \mid B_1)} \\
&= \frac{\dfrac{r+k}{r+b+k}\dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r}{r+b}\dfrac{r+k}{r+b+k} + \dfrac{b}{r+b}\dfrac{r}{r+b+k}}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(R_1 \mid R_2) = \frac{r+k}{r+k+b}.}$$

2. On généralise de manière transparente les notations de la première question. On note aussi r_n le nombre de boule rouge à l'étape n et b_n le nombre de boules blanches à l'étape n. On a

$$\begin{aligned}
P(R_n) &= P(R_n \cap R_{n-1}) + P(R_n \cap B_{n-1}) \\
&= P(R_{n-1})P(R_n \mid R_{n-1}) + P(B_{n-1})P(R_n \mid B_{n-1}) \\
&= \frac{r_{n-1}+k}{r_{n-1}+b_{n-1}+k}\frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+b_{n-1}} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+b_{n-1}+k}\frac{b_{n-1}}{r_{n-1}+b_{n-1}} \\
&= \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+b_{n-1}} \\
&= P(R_{n-1}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\big(P(R_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est constante. Donc

$$\boxed{\text{la probabilité de tirer une boule rouge au } n\text{-ème tirage ne dépend pas de } n.}$$