Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 19/12/2018

DM n° 9 : Intégration

Problème 1 – Autour de la moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. On définit $m_a(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ la moyenne arithmétique de a et b, et $m_g(a,b) = \sqrt{ab}$ la moyenne géométrique de a et b.

Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique
Montrer que pour tout couple (a,b) de réels positifs, $m_g(a,b) \leqslant m_a(a,b)$.

Partie I – Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{cases}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = m_a(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n, b_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note α et β leur limite respective.
2. Montrer que $\alpha = \beta$.

On appelle moyenne arithmético-géométrique *de a et b la valeur de cette limite commune, et on la note $M(a,b)$.*

3. Comparer $M(a,b)$, $m_a(a,b)$ et $m_g(a,b)$.

Partie II – Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} \qquad \text{et} \qquad J(\lambda,\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2(t) + \mu^2 \sin^2(t)}}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $(1+x)I(x) = I\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.
   Indication : changement de variable $u = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{(1+x)\sin(t)}{1 + x\sin^2(t)}\right)$
2. En se ramenant à l'intégrale I, montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $J(1,x) = J\left(\dfrac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$.
3. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \geqslant b$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies en début de partie I. Montrer que $(J(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < M(a,b)$. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a,b) + \varepsilon} \leqslant J(a_n,b_n) \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a,b) - \varepsilon}.$$
5. En déduire une expression de $M(a,b)$ en fonction de $J(a,b)$.

Partie III – Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit cette fois (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

1. En étudiant leur monotonie, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune (on pourra distinguer les cas $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$)
2. Soit α un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$B_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.
3. On suppose que $a \leqslant b$, et $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{a}{b}\right)$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \begin{cases} \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$
4. On suppose de $a \geqslant b$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $a = \mathrm{ch}(\alpha) b$, et montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \begin{cases} \dfrac{b \cdot \mathrm{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Problème 2 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On note pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

On pourra utiliser, sans les justifier, les trois résultats suivants :

- *une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$;*
- *une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$, telle que $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ admet un prolongement par continuité en a, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$;*
- *au voisinage de 0, $\sin(t) - t \sim -\dfrac{t^3}{6}$.*

On rappelle par ailleurs que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, telles que $|f| \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ (c'est-à-dire si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge), il en est de même de $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de $I(x)$**
   (a) Montrer que $I(x)$ est bien définie pour toute valeur de x.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, montrer que $I(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, qu'on note
   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. **Valeur de I (première méthode)**
   (a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.
      i. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.
      iii. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $J_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) En considérant la fonction $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$, en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

3. **Valeur de I (deuxième méthode)**

   On admet dans cette question le théorème de Fubini pour les intégrales : Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y.$$

   (a) Montrer que pour tout $u > 0$, et tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y = \frac{\sin(x)}{x}(1-\mathrm{e}^{-xu})$.

   (b) En déduire que pour tout $u > 0$, on a :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1-\mathrm{e}^{-xu})\ \mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1-\mathrm{e}^{-yu}(\cos(u)+y\sin(u))}{1+y^2}\ \mathrm{d}y.$$

   (c) À l'aide d'un passage à la limite dont on justifiera soigneusement toutes les étapes, en déduire la valeur de I (on pourra procéder par majorations).

4. **Estimation du reste**

   Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$