

## Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Mathématiques
- *NOM Prénom* : NABIL Réda

## Énoncé des exercices

### Exercice 1 : Théorème de Baire

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach - i.e un espace vectoriel normé où toutes les suites de Cauchy convergent (Il rappelle la définition d'une suite de Cauchy). On considère  $(U_n)$  une suite d'ouverts denses dans  $E$  et on cherche à montrer que  $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  est dense dans  $E$ . On pourra commencer par montrer  $U$  non vide.

Application : Soit  $E$  de Banach.  $F$  un e.v.n quelconque et  $(T_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .  
On suppose :

$\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty,$   
 $\forall i \in I, \|T_i\|_{op} = \sup_{i \in I, \|x\|=1} \|T_i(x)\| < +\infty$   
On veut montrer que  $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{op} < +\infty$   
On pose  $g(x) = \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|$  et  $U_n = \{x \in E, g(x) > n\}$

- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n$  ouvert.
- Montrer qu'il existe  $U_n$  non dense.
- Conclure.

## Remarques sur l'oral

Examinateur assez tranquille, il aime les démonstrations bien quantifiées même s'il m'a fait abréger les dernières questions. Il aime aussi guider les preuves pour ne pas me laisser perdre trop de temps, même si le début était assez laborieux. Lorsqu'il m'a vu m'empêtrer dans la question 1, il a amorcé la démonstration par récurrence en me rappelant la caractérisation d'un ensemble dense : " toute boule de  $E$  rencontre  $U$ ". La deuxième partie s'est mieux passée. Pour la a) il m'a fait remarquer que les  $T_i$  étaient continues par hypothèse et les  $U_n$  ouverts comme union d'ouverts. La b) se montre par absurdité en appliquant la propriété de Baire. c) on conclut en voyant que la sphère unité peut se ramener à une bonne sphère autour de  $x$  qui traduit la non densité de  $U_n$ .

Il semblait satisfait que j'ai pu finir l'exercice même s'il était agacé que je n'ai pas vu directement la bonne caractérisation de la densité qui aurait conclut la démonstration plus rapidement : "la réponse à la question est déjà écrite au tableau".

Il a peut-être essayé une touche d'humour en me demandant à la fin de l'oral : "Il y a un rapport entre Nabil et Nabila ? C'est elle qui disait allo ? Je suivais son histoire de loin."