Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

RELATIONS

Exercice 1. (Clan)

Soit Ω un ensemble. Un *clan* sur Ω est un ensemble $\mathscr{C}$ de parties de Ω (i.e. $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$) tel que

(i) $\varnothing \in \mathscr{C}$;

(ii) $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire $\forall A \in \mathscr{C},\ \overline{A} \in \mathscr{C}$;

(iii) $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie, c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cup B \in \mathscr{C}$.

1. Soit $\mathscr{C}$ un clan sur Ω.
   a) Démontrer que $\Omega \in \mathscr{C}$.
   b) Démontrer que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathscr{C},\ A \cap B \in \mathscr{C}$.
2. a) Donner le plus petit clan et plus gros clan sur Ω.
   b) On note $\mathscr{I}$ l'ensemble formé par toutes les réunions d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathscr{I}$ est un clan sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : On utilisera librement le fait que l'intersection de deux intervalles est un intervalle. Nous le démontrerons prochainement (et cela semble de toute façon évident).
3. a) Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une partition de Ω. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble formé par toutes les réunions d'un certain nombre (éventuellement nul) de E_k, c'est-à-dire
   $$\mathscr{C} = \Big\{ \bigcup_{i \in I} E_i : I \subset [\![1;n]\!] \Big\}.$$
   Démontrer que $\mathscr{C}$ est un clan sur Ω, appelé *clan engendré par la partition* $(E_1, \ldots, E_n)$.
   b) Soit $\mathscr{C}$ un clan sur Ω.
   α] On définit une relation $\mathscr{R}$ sur Ω par
   $$\forall x, y \in \Omega, \qquad (x \mathscr{R} y) \iff \big(\forall A \in \mathscr{C},\ (x \in A) \iff (y \in A)\big).$$
   Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur Ω.
   ► Pour tout $x \in \Omega$, on note $\widehat{x}$ la classe d'équivalence de x module $\mathscr{R}$. Cette classe est appelée l'*atome de $\mathscr{C}$ engendré par x*.
   β] Démontrer que tout élément de $\mathscr{C}$ est la réunion de ses atomes, c'est-à-dire
   $$\forall A \in \mathscr{C}, \qquad A = \bigcup_{x \in A} \widehat{x}.$$
   γ] Démontrer que, pour tout $x \in \Omega$, on a
   $$\widehat{x} = \bigcap_{\substack{X \in \mathscr{C} \\ x \in X}} X.$$
   δ] On suppose que $\mathscr{C}$ est un ensemble fini. Démontrer que $\mathscr{C}$ contient chacun de ses atomes (c'est-à-dire $\forall x \in \Omega,\ \widehat{x} \in \mathscr{C}$) et en déduire que $\mathscr{C}$ est un clan engendré par une partition finie.

Récréation mathématique

Si six chats chopent six souris en six secondes, … chats chopent cent souris en cent secondes.