Planche de colle

Exercice de colle

Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier 2^{n+1} divise $\left\lfloor \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} \right\rfloor$.

[indication : on pourra commencer par s'intéresser à la quantité $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$.]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}.$$

On peut utiliser le binôme de Newton dans $\mathbb{R}$ commutatif ou utiliser une récurrence linéaire d'ordre deux.

Par le binôme, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \left(\sqrt{3}\right)^i \left(1+(-1)^i\right) \\ &= 2 \sum_{i=0 \text{ et } i \text{ pair}}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \left(\sqrt{3}\right)^i \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est un entier naturel pair.

On peut aussi dire que la quantité u_n est de la forme :

$$u_n = \lambda\, \alpha^n + \mu\, \beta^n,$$

avec $\alpha = (1+\sqrt{3})^2 = 2(2+\sqrt{3})$ et $\beta = (1-\sqrt{3})^2 = 2(2-\sqrt{3})$.
La suite u ainsi définie vérifie le problème suivant, en utilisant le polynôme :

$$P(X) = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - 8X + 4 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n \text{ et } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 20 \end{cases}.$$

On voit par récurrence double que tous les u_n sont des entiers naturels pairs.

De plus, $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$, donc :

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} - 1 < u_n < (1+\sqrt{3})^{2n+1},$$

et donc :
$$\left\lfloor (1+\sqrt{3})^{2n+1} \right\rfloor = u_n.$$
Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier 2^n divise l'entier u_n, ce qui est plus facile à voir avec la formule de récurrence linéaire d'ordre deux.
On montre ce résultat par récurrence double.
• Si $n = 0$, alors 2 divise u_0 et 4 divise u_1.
• Supposons que 2^n divise u_n et 2^{n+1} divise u_{n+1}.
• Au rang suivant, en posant $u_n = 2^n \times k$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} \times \ell$, alors :
$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n = 2^{n+2} \times \Big(4 \times \ell - k\Big).$$
On obtient bien que l'entier u_{n+2} est multiple de 2^{n+2}.