DÉNOMBREMENT

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]

Dans une classe de 26 élèves, 22 étudient l'anglais, 16 l'allemand et 10 l'espagnol. On sait en outre que 12 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 4 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 8 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Soit A l'ensemble des élèves étudiant l'anglais, D l'ensemble de ceux qui étudient l'allemand et E celui de ceux qui étudient l'espagnol. L'application de la formule de Poincaré donne

$$\operatorname{card}(A \cup D \cup E) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} D + \operatorname{card} E - \operatorname{card} A \cap D - \operatorname{card} D \cap E - \operatorname{card} A \cap E + \operatorname{card}(A \cap D \cap E)$$

ce qui est équivalent à

$$26 = 22 + 16 + 10 - 12 - 4 - 8 + \operatorname{card}(A \cap D \cap E),$$

d'où

$$\operatorname{card}(A \cap D \cap E) = 2.$$

♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]

Les dominos sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. Chaque ensemble contient entre 0 et 6 points. Une boîte de dominos contient tous les dominos différents qu'il est possible de constituer. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?

Il y a clairement 7 doubles : le double zéro, le double un, ..., le double 6.

Pour fabriquer les autres dominos, il suffit de choisir simultanément deux nombres entiers entre 0 et 6, ce qui laisse $\binom{7}{2} = 21$ choix.

Comme $21 + 7 = 28$ (si ! si !), on peut donc conclure qu'

$$\boxed{\text{une boîte de dominos contient 28 pièces.}}$$

♦ ***Exercice 3.*** [$\circ$] (À connaître !)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de suites strictement croissantes constituées de p nombres de l'intervalle $[\![1; n]\!]$?

Pour déterminer une suite $(a_1, \dots, a_p)$ strictement croissante de p nombres de l'intervalle $[\![1; n]\!]$, il faut et il suffit d'attribuer à chacun des nombres $a_1, \dots, a_p$ une valeur dans $[\![1; n]\!]$ de sorte que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$. Pour cela, on choisit p valeurs dans $[\![1; n]\!]$: $\binom{n}{p}$ choix, puis on ordonne ces valeurs pour les attribuer à $a_1, \dots, a_p$: une seule façon de le faire. Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{n}{p} \text{ suites strictement croissantes constituées de } p \text{ nombres de l'intervalle } [\![1; n]\!].}$$

♦ ***Exercice 4.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une grenouille grimpe un escalier de n marches. À chaque bond, elle peut sauter ou bien de la marche k à la marche $k+1$ ou bien de la marche k à la marche $k+2$. On note u_n le nombre de façons différentes pour la grenouille de grimper l'escalier. On convient que $u_0 = 1$.

1. En discutant sur le dernier saut de la grenouille, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. Indépendamment de la première question, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k},$$
où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$.

   Préciser ce que représente cette somme dans le triangle de Pascal et retrouver ainsi le résultat de la question 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque la grenouille monte un escalier de $n+2$ marches, le dernier saut est ou bien un saut d'une marche ou bien un saut de deux marches. Or,
   - ▷ si le dernier saut est un saut de une marche, le nombre de façons de grimper l'escalier est aussi le nombre de façons d'atteindre la $(n+1)$-ème marche, c'est-à-dire u_{n+1} ;
   - ▷ si le dernier saut est un saut de deux marches, le nombre de façons de grimper l'escalier est aussi le nombre de façons d'atteindre la n-ème marche, c'est-à-dire u_n.

   En vertu du principe du « ou », le nombre de façons de grimper l'escalier de $n+2$ marches est la somme de u_{n+1} et u_n, c'est-à-dire $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

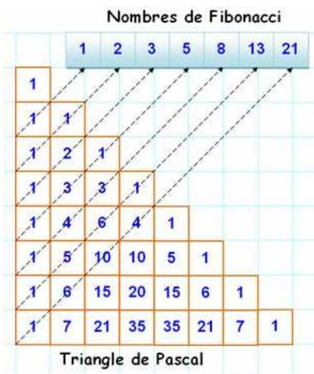
   En conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour grimper n marches, la grenouille doit faire k sauts de 2 marches (pour $k \in [\![0; \lfloor n/2 \rfloor]\!]$) et $n-2k$ sauts de 1 marche, ce qui fait en tout $n-k$ sauts.
   Pour $k \in [\![0; \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, il faut placer les k sauts de deux marches parmi les $n-k$ sauts : $\binom{n-k}{k}$ possibilités, puis placer les $n-2k$ sauts de 1 marche parmi les $n-2k$ places restantes : $\binom{n-2k}{n-2k} = 1$ choix. Il y a donc $\binom{n-k}{k}$ façons de grimper l'escalier en faisant k sauts de 2 marches.
   Le principe du « ou » nous dit alors que
$$\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}.}$$

   On constate que
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \text{ est la somme de la diagonale numérotée } n \text{ dans le triangle de Pascal.}}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Pascal exprime qu'un coefficient de la diagonale numérotée $n+2$ est la somme d'un coefficient de la diagonale numérotée n et de la diagonale numérotée $n+1$. En sommant, on voit donc que la somme de la diagonale numérotée $n+2$ est obtenue en additionnant la somme de la diagonale numérotée n et la somme de la diagonale numérotée $n+1$. Cela redonne la relation

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.}$$



♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]

Le jeu d'échec se joue sur un échiquier de 8 lignes et 8 colonnes. Une tour peut prendre toute pièce située dans sa ligne ou sa colonne. De combien de façons peut-on placer 8 tours de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres ?

On doit mettre une tour par colonne. Dès lors, les tours deviennent discernables (il y a la tour de la première colonne, celle de la deuxième colonne, etc). Pour la tour de la première colonne, on a le choix entre 8 lignes. Pour la tour de la deuxième colonne, on a le choix entre 7 lignes. Etc. Pour la tour de la huitième colonne, il n'y a plus qu'un seul choix de ligne. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il y a } 8! = 40\,320 \text{ façons de placer 8 tours de sorte} \\ \text{qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres.}\end{array}}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\star$]

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions différentes (on considérera différentes deux configurations qui diffèrent par une rotation) :

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

1. On permute les $2n$ personnes sur les $2n$ chaises, ce qui donne
$$\boxed{(2n)! \text{ plans de table.}}$$
2. On choisit successivement :
   - ▷ le sexe de la personne assise sur la première chaise : 2 choix ;
   - ▷ une permutation des n femmes sur les n chaises qui leurs sont réservées : $n!$ choix ;
   - ▷ une permutation des n hommes sur les n autres chaises : $n!$ choix.

   On obtient donc
$$\boxed{2(n!)^2 \text{ plans de table avec alternance des sexes.}}$$
3. On choisit successivement :
   - ▷ une façon de fabriquer des bichaises (deux chaises côte à côte que l'on colle) en collant la première chaise avec celle de droite ou avec celle de gauche puis en continuant à coller les autres : 2 choix ;
   - ▷ une permutation des n couples sur les n bichaises : $n!$ choix ;
   - ▷ pour chaque bichaise, une permutation de l'homme et de la femme sur la bichaise : 2^n choix.

   On obtient donc
$$\boxed{2^{n+1}(n!) \text{ plans de table sans séparer les couples.}}$$
4. On choisit successivement :
   - ▷ une façon de fabriquer des bichaises (deux chaises côte à côte que l'on colle) en collant la première chaise avec celle de droite ou avec celle de gauche puis en continuant à coller les autres : 2 choix ;
   - ▷ une permutation des n couples sur les n bichaises : $n!$ choix ;
   - ▷ pour la première bichaise, une permutation de l'homme et de la femme sur cette bichaise : 2 choix (sur les autres bichaises, l'alternance des sexes impose la position de l'homme et de la femme).

   On obtient donc
$$\boxed{4(n!) \text{ plans de table sans séparer les couples et avec alternance des sexes.}}$$

♦ ***Exercice 7.*** [$\star$] (Permutation sans point fixe)

Avant un spectacle, 4 personnes (Laurent, Olivier, Florent et Patrick) déposent leurs chapeaux à la loge. En fin du spectacle, un peu pressés, ils récupèrent chacun un chapeau au hasard.

On voudrait dénombrer l'ensemble M des situations dans lesquelles aucun des quatre ne récupère son chapeau. On note L (respectivement O, F et P) l'ensemble des situations dans lesquelles Laurent (respectivement Olivier, Florent et Patrick) récupère son chapeau.

Calculer $\operatorname{card}(L \cup O \cup F \cup P)$ et en déduire $\operatorname{card}(M)$.

Généraliser.

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(L \cup O \cup F \cup P) &= \operatorname{card} L + \operatorname{card} O + \operatorname{card} F + \operatorname{card} P \\
&\quad - \operatorname{card}(L \cap O) - \operatorname{card}(L \cap F) - \operatorname{card}(L \cap P) - \operatorname{card}(O \cap F) - \operatorname{card}(O \cap P) - \operatorname{card}(F \cap P) \\
&\quad + \operatorname{card}(L \cap O \cap F) + \operatorname{card}(L \cap O \cap P) + \operatorname{card}(L \cap F \cap P) + \operatorname{card}(O \cap F \cap P) \\
&\quad - \operatorname{card}(L \cap O \cap F \cap P).
\end{aligned}$$

Pour décrire les situations qui constituent L, on doit attribuer son chapeau à Laurent et permuter les 3 autres chapeaux entre Olivier, Florent et Patrick. Il y a donc 3! situations de ce genre. Les ensembles O, F et P ont bien entendu le même cardinal que L.

Pour dénombrer $L \cap O$, $L \cap F$, $L \cap P$, $O \cap F$, $O \cap P$ et $F \cap P$, on considère que deux enfants sont fixés et on permute les deux autres, ce qui laisse 2! de ce type.

Un raisonnement identique, laissant fixe trois enfants, montre que $L \cap O \cap F$, $L \cap O \cap P$, $L \cap F \cap P$ et $O \cap F \cap P$ sont tous de cardinal 1!

Enfin, on a $\operatorname{card}(L \cap O \cap F \cap P) = 0! = 1$ puisqu'il n'y a qu'une seule façon d'attribuer à chaque individu son chapeau.

Donc

$$\operatorname{card}(L \cup O \cup P \cup C) = 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1! - 0!,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\operatorname{card}(L \cup O \cup F \cup P) = 15.}$$

On a clairement $M = \overline{L} \cap \overline{O} \cap \overline{F} \cap \overline{P}$, donc

$$M = \overline{L \cup O \cup F \cup P}.$$

Si l'on note E l'ensemble de toutes les situations, on a

$$\operatorname{card} M = \operatorname{card}(\overline{L \cup O \cup F \cup P}) = \operatorname{card} E - \operatorname{card}(L \cup O \cup F \cup P) = 4! - 15,$$

donc

$$\boxed{\operatorname{card} M = 9.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on note A_k l'ensemble des configurations où l'individu k repart avec son chapeau. On note encore M l'ensemble des situations dans lesquelles aucun des invidus ne récupère son chapeau. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(M) &= \operatorname{card}\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) \\
&= n! - \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \qquad \text{en passant au complémentaire} \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \qquad \text{formule du crible} \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} (n-k)! \qquad \begin{array}{l}\text{car, pour dénombrer } A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\text{, on} \\ \text{permute les chapeaux des } n-k \text{ individus} \\ \text{dont le numéro n'est pas dans } \{i_1, \ldots, i_k\}\end{array} \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \qquad \text{car il y a } \binom{n}{k} \text{ termes dans la somme } \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} \\
&= n! + n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la probabilité que tous les individus repartent avec le chapeau d'un autre vaut } \frac{\mathrm{card}(M)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot}$$

Nous verrons plus tard que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1},$$

donc

$$\boxed{\text{asymptotiquement, la probabilité que tous les individus repartent avec le chapeau d'un autre vaut } \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot}$$

♦ ***Exercice 8.*** [○]

Dans l'ancienne formule de l'Euromillions, le joueur remplissait son bulletin de jeu en cochant 5 cases dans une première grille avec 50 numéros puis 2 cases dans une seconde grille avec 10 numéros (les « étoiles »). Dans la nouvelle formule de l'Euromillions (en cours depuis le 10 mai 2011), le joueur doit toujours cocher 5 cases dans une première grille avec 50 numéros puis 2 cases dans une seconde grille avec 11 numéros (et non plus 10).

Déterminer, pour chacune des versions, le nombre de bulletins différents que l'on peut remplir.

Par quel facteur le nombre de bulletins différents a-t-il été multiplié dans la nouvelle formule par rapport à l'ancienne ?

Dans l'ancienne formule de l'Euromillions, on constituait une grille en choisissant successivement :

- 5 numéros dans la grille avec 50 numéros : $\binom{50}{5}$ choix ;
- 2 étoiles dans la grille avec 10 étoiles : $\binom{10}{2}$ choix.

Le « principe du et » nous dit donc que

$$\boxed{\text{dans l'ancien Euromillions, il y avait } \binom{50}{5}\binom{10}{2} = 95\,344\,200 \text{ bulletins différents.}}$$

En procédant *mutatis mutandis*, on obtient que

$$\boxed{\text{dans le nouvel Euromillions, il y a } \binom{50}{5}\binom{11}{2} = 116\,531\,800 \text{ bulletins différents.}}$$

Comme

$$\frac{\binom{50}{5}\binom{11}{2}}{\binom{50}{5}\binom{10}{2}} = \frac{\binom{11}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{11\times 10}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{11}{9},$$

on constate qu'

$$\boxed{\text{entre l'ancienne et la nouvelle formule, le nombre de bulletins a été multiplié par } \frac{11}{9} \approx 1,2}$$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]

1. On dispose de lettres accentuées permettant de distinguer E, É et È. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot THÉORÈME ?
2. On supprime les accents. Combien reste-t-il d'anagrammes ? *On veut deux démonstrations.*

1. Les 8 lettres étant discernables, il faut leur choisir successivement une place parmi les 8 possibles, ce qui revient à permuter ces 8 lettres. Donc

$$\boxed{\text{on peut former } 8! = 40\,320 \text{ anagrammes de THÉORÈME.}}$$

2. Solution utilisant la question précédente : Si l'on supprime les accents, chaque mot est alors compté $3!$ fois de trop puisque l'on peut à loisir permuter les 3 E sans modifier le mot. On obtient donc $40320/6 = 6\,720$ mots différents.

   Solution directe : Il faut choisir successivement :
   - d'abord 3 emplacements parmi les 8 possibles pour disposer les trois E, ce qui laisse $\binom{8}{3} = 56$ possibilités ;
   - puis un emplacement parmi les 5 restants pour chacune des lettres T, H, O, R, M, ce qui donne $5! = 120$ possibilités.

   On retrouve finalement $56 \times 120 = 6\,720$ mots différents.

   En conclusion,

$$\boxed{\text{on peut former } 8! = 6\,720 \text{ anagrammes de THEOREME.}}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\star$]

Pour le 14 juillet, un artificier s'occupe d'un feu d'artifice composé de 8 blocs comportant chacun quatre fusées. Le pupitre de commande de mise à feu possède 32 boutons, correspondant chacun à une fusée. L'artificier appuie simultanément et au hasard sur 5 boutons.

1. Dénombrer tous les cas possibles.
2. Dénombrer tous les cas où les 5 fusées partent de 5 blocs différents.
3. Dénombrer tous les cas où 3 fusées partent d'un même bloc et les deux autres d'un même bloc, différent du précédent.
4. Dénombrer tous les cas où 2 fusées partent d'un même bloc, 2 d'un autre bloc et 1 d'un autre encore.
5. Dénombrer tous les cas où 2 fusées partent d'un même bloc et 3 de trois blocs différents entre eux et différents du précédent.

1. On choisit simultanément 5 boutons parmi 32, donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{32}{5} \text{ cas possibles.}}$$

2. On choisit successivement :
   - 5 blocs parmi 8 : $\binom{8}{5}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans le premier bloc : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans le deuxième bloc : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - ...
   - 1 fusée parmi 4 dans le cinquième bloc : $\binom{4}{1}$ choix.

   Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{8}{5}\binom{4}{1}^5 \text{ cas où les 5 fusées partent de 5 blocs différents.}}$$

3. On choisit successivement :
   - 1 bloc parmi 8 : $\binom{8}{1}$ choix ;
   - 3 fusées parmi 4 dans ce bloc : $\binom{4}{3}$ choix ;
   - 1 bloc parmi 7 : $\binom{7}{1}$ choix ;
   - 2 fusées parmi 4 dans ce bloc : $\binom{4}{2}$ choix.

Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{2} \text{ cas où 3 fusées partent d'un même bloc et les deux autres d'un même bloc, différent du précédent.}}$$

4. On choisit successivement :
   - 2 blocs parmi 8 : $\binom{8}{2}$ choix ;
   - 2 fusées parmi 4 dans le premier de ces deux blocs : $\binom{4}{2}$ choix ;
   - 2 fusées parmi 4 dans le second de ces deux blocs : $\binom{4}{2}$ choix ;
   - 1 bloc parmi 6 : $\binom{6}{1}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans ce bloc : $\binom{4}{1}$ choix.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{8}{2}\binom{4}{2}^2\binom{6}{1}\binom{4}{1} \text{ cas où 2 fusées partent d'un même bloc, 2 d'un autre bloc et 1 d'un autre encore.}}$$

5. On choisit successivement :
   - 1 bloc parmi 8 : $\binom{8}{1}$ choix ;
   - 2 fusées parmi 4 dans ce bloc : $\binom{4}{2}$ choix ;
   - 3 blocs parmi 7 : $\binom{7}{3}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans le premier de ces trois blocs : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans le deuxième de ces trois blocs : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - 1 fusée parmi 4 dans le troisième de ces trois blocs : $\binom{4}{1}$ choix.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3 \text{ cas où 2 fusées partent d'un même bloc et 3 de trois blocs différents entre eux et différents du précédent.}}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆]

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu de 52 cartes telles que :

1. elles contiennent exactement un roi ?
2. elles contiennent au plus un roi ?
3. elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
4. elles contiennent 5 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 4 cartes d'une troisième ?

1. On choisit successivement :
   - 1 roi parmi 4 : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - 12 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des rois : $\binom{48}{12}$ choix.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{4}{1}\binom{48}{12} \text{ mains avec exactement un roi.}}$$

2. Avant d'attaquer cette question, rappellons le principe suivant :

   > Pour dénombrer un ensemble défini à l'aide d'un « ... au moins ... » ou d'un « ... au plus ... », on le partitionne en plusieurs sous-ensembles définis à l'aide de « ... exactement ... ».
   >
   > Parfois, il est alors plus simple de dénombrer le complémentaire.

   Ainsi, ici, pour dénombrer les mains avec au plus un roi, on dénombre celle avec aucun roi et celle avec exactement un roi.
   Pour avoir une main avec aucun roi, on choisit nos 13 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des rois : $\binom{48}{13}$ choix.

Les mains avec exactement un roi sont au nombre de $\binom{4}{1}\binom{48}{12}$ d'après la question 1.
Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{48}{13} + \binom{4}{1}\binom{48}{12} \text{ mains avec au plus un roi.}}$$

3. On commence par choisir le roi de trèfle : $\binom{1}{1}$ choix.
Il reste alors à choisir, parmi les 51 cartes restantes, une sous-main de 12 autres cartes avec au moins 2 piques. Ici, plutôt que de dénombrer les sous-mains avec exactement 2 piques, puis 3 piques, puis 4, etc, on préfère passer au complémentaire en retirant au nombre total de sous-mains les sous-mains qui ont au plus 1 pique, c'est-à-dire celles qui n'ont aucun pique et celles qui en ont exactement 1.
Le nombre total de sous-mains de 12 cartes prises parmi les 51 restantes est $\binom{51}{12}$.
Pour avoir une sous-main de 12 cartes sans aucun pique, on choisit 12 cartes parmi les 38 cartes sans pique (et sans roi de trèfle) : $\binom{38}{12}$ choix.
Pour avoir une sous-main de 12 cartes sans exactement 1 pique, on choisit 1 pique parmi les 13 disponibles : $\binom{13}{1}$ choix, puis on choisit 11 autres cartes parmi les 38 cartes sans pique (et sans roi de trèfle) : $\binom{38}{11}$ choix. Cela donne donc $\binom{13}{1}\binom{38}{11}$ sous-mains avec exactement 1 pique.
Ainsi, on a $\binom{51}{12} - \binom{38}{12} - \binom{13}{1}\binom{38}{11}$ sous-mains avec au moins 2 piques.
En conclusion,

$$\boxed{\text{il y a } \binom{1}{1}\left[\binom{51}{12} - \binom{38}{12} - \binom{13}{1}\binom{38}{11}\right] \text{ mains avec le roi de trèfle et au moins 2 piques.}}$$

4. On choisit successivement :
   - 1 couleur parmi 4 : $\binom{4}{1}$ choix ;
   - 5 cartes dans cette couleur : $\binom{13}{5}$ choix ;
   - 2 autres couleurs parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2}$ choix ;
   - 4 cartes dans la première de ces couleurs : $\binom{13}{4}$ choix ;
   - 4 cartes dans la seconde de ces couleurs : $\binom{13}{4}$ choix.

   Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{4}{1}\binom{13}{5}\binom{3}{2}\binom{13}{4}^2 \text{ mains avec 5 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 4 cartes d'une troisième.}}$$

♦ ***Exercice 12.*** [⋆]

Monsieur DELABOUZE, aviculteur industriel, vend des poulets élevés en batterie. Pour des raisons commerciales, il souhaite changer le nom de son entreprise. Le nouveau nom doit comporter exactement quatre lettres choisies parmi les lettres du nom DELABOUZE.

1. Combien peut-il former de noms différents ?
2. Combien peut-il former de noms dont les lettres sont dans le même ordre que dans le nom DELABOUZE.

1. On distingue deux cas : celui où les quatre lettres sont distinctes et celui où il y a deux E.

   Dans le cas où les quatre lettres sont distinctes, on choisit successivement 4 lettres différentes parmi les 8 lettres distinctes du nom DELABOUZE. Cela donne $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ noms possibles avec quatre lettres distinctes.

   Dans l'autre cas, il y a les deux E et deux autres lettres. On choisit d'abord 2 positions pour placer les E ce qui donne $\binom{4}{2} = 6$ possibilités. On choisit ensuite successivement 2 lettres différentes parmi les 7 lettres distinctes restantes, ce qui laisse $7 \times 6 = 42$ possibilités. Cela donne $6 \times 42 = 252$ noms possibles avec les deux E.

   Comme $1680 + 252 = 1932$, on en conclut qu'

$$\boxed{\text{il existe 1932 noms différents.}}$$

2. Si l'on doit laisser les lettres dans le même ordre que dans le nom DELABOUZE, le premier E ne peut occuper que la première ou la deuxième place et le second E ne peut occuper que la dernière place. Il n'y a donc aucune chance de confondre les deux E. Ils sont donc discernables. Pour les distinguer, on les notera E_1 et E_2.

On choisit alors simultanément 4 lettres parmi les 9 lettres D,E_1,L,A,B,O,U,Z,E_2, ce qui laisse $\binom{9}{4} = 126$ choix possibles. Puis on place les lettres dans le même ordre que dans le nom de notre sympathique industriel, ce qui ne peut se faire que d'une seule manière. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe 126 noms différents avec des lettres dans le même ordre que dans le nom DELABOUZE.}}$$

♦ ***Exercice 13.*** [★]

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

Une combinaison à répétition de p éléments de E est une façon de choisir (sans ordre) p éléments, <u>distincts ou non</u>, dans E. Une telle combinaison est représentée formellement par un n-uplet d'entiers $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $k_1 + \cdots + k_n = p$, chaque k_i indiquant le nombre d'occurrences de x_i dans la combinaison.

On note $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ le nombre de combinaisons à répétition de p éléments de E, égal au nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $k_1 + \cdots + k_n = p$.

1. On propose plusieurs méthodes indépendantes pour démontrer que $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n+p-1}{p}$.
   a) On code une combinaison par un tableau de $n+p-1$ cases blanches ou noires, constitué de n blocs de cases blanches de longueurs respectives $k_1, ..., k_n$, séparés par $n-1$ cases noires. Par exemple, la combinaison $(1, 3, 1, 0, 1)$ est codée par □■□□□■□■■□.

      À l'aide de ce codage, aboutir au résultat attendu.
   b) Déterminer le nombre de n-uplets d'entiers <u>non nuls</u> $(\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ solutions de $\ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p$ puis conclure.
   c) α] Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1; n]\!]$ vers $[\![0; m]\!]$, où $m \in \mathbb{N}$

      β] Démontrer qu'une application $f : [\![1; n]\!] \longrightarrow [\![0; p]\!]$ est croissante si, et seulement si, $f + \mathrm{Id} - 1$ est strictement croissante. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1; n]\!]$ vers $[\![0; p]\!]$.

      γ] Déterminer le nombre de solutions $(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'inéquation $j_1 + \cdots + j_n \leqslant p$ puis conclure.
2. Vérifier que
$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{\text{« } p \text{ qui montent depuis } n \text{ »}}{\text{« } p \text{ qui montent depuis } 1 \text{ »}}.$$
3. Application : Les dominos à n points sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. Chaque ensemble contient entre 0 et n points. Une boîte de dominos contient tous les dominos différents qu'il est possible de constituer. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?

1. a) Pour obtenir une combinaison à répétition de p éléments de E, il faut choisir, dans le codage proposé, la position des p cases noires parmi les $n + p - 1$ cases, ce qui donne $\binom{n+p-1}{p}$ choix. Donc
$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n+p-1}{p}.}$$
   b) On a $n + p = 1 + 1 + \cdots + 1$ où le nombre de 1 vaut $n + p$. Pour obtenir le nombre de solutions de $\ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p$ avec $(\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, il faut parenthéser cette somme avec n paires de parenthèses, de sorte que ℓ_1 est la somme des 1 dans la première paire de parenthèses, ℓ_2 est la somme des 1 dans la deuxième, etc. Pour cela, on place une parenthèse ouvrante au début et une parenthèse fermante à la fin, puis on place $n - 1$ séparations du type)(parmi les $n + p - 1$ signe $+$. Cela laisse $\binom{n+p-1}{n-1}$ possibilités. Avec la formule de symétrie, on obtient
$$\boxed{\text{le nombre de solutions de l'équation } \ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p \text{ avec } (\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \text{ est } \binom{n+p-1}{p}.}$$
      L'équation $\ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p$ d'inconnues $(\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ est équivalente à l'équation $(\ell_1 - 1) + \cdots + (\ell_n - 1) = p$ d'inconnues $(\ell_1 - 1, ..., \ell_n - 1) \in \mathbb{N}^n$. On en déduit que le nombre de solutions de l'équation $\ell_1 + \cdots + \ell_n = n + p$ d'inconnues $(\ell_1, ..., \ell_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ est le même que le nombre de solutions de l'équation $j_1 + \cdots + j_n = p$ d'inconnues $(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$. Donc
$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n+p-1}{p}.}$$

c) α] Pour déterminer une application strictement croissante de $[\![1;n]\!]$ vers $[\![0;m]\!]$, il faut et il suffit d'attribuer à chacun des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ une valeur dans $[\![0;m]\!]$ de sorte que $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$. Pour cela, on choisit n valeurs dans $[\![0;m]\!]$: $\binom{m+1}{n}$ choix, puis on ordonne ces valeurs pour les attribuer à $f(1), f(2), \ldots, f(n)$: une seule façon de le faire. Donc

$$\boxed{\text{le nombre d'applications strictement croissantes de } [\![1;n]\!] \text{ dans } [\![0;m]\!] \text{ est égal à } \binom{m+1}{n}.}$$

β] Les valeurs de f étant des entiers, on a

$$\begin{aligned}
& f \text{ est croissante sur } [\![1;n]\!] \\
\iff\ & f(1) \leqslant f(2) \leqslant f(3) \leqslant \cdots \leqslant f(n-1) \leqslant f(n) \\
\iff\ & f(1) < f(2)+1 \leqslant f(3)+1 \leqslant \cdots \leqslant f(n-1)+1 \leqslant f(p)+1 \\
\iff\ & f(1) < f(2)+2 < f(3)+2 \leqslant \cdots \leqslant f(n-1)+2 \leqslant f(n)+2 \\
\iff\ & \text{etc} \\
\iff\ & f(1) < f(2)+2 < f(3)+2 < \cdots < f(n-1)+n-2 < f(n)+n-1 \\
\iff\ & f+\mathrm{Id}-1 \text{ est strictement croissante sur } [\![1;n]\!],
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![0;p]\!] \text{ est croissante si, et seulement si, } f+\mathrm{Id}-1 \text{ est strictement croissante.}}$$

Dès lors, comme

$$\begin{cases} [\![0;p]\!]^{[\![1;n]\!]} & \longrightarrow & [\![0;p+n-1]\!]^{[\![1;n]\!]} \\ f & \longmapsto & f+\mathrm{Id}-1 \end{cases}$$

est une bijection de réciproque

$$\begin{cases} [\![0;p+n-1]\!]^{[\![1;n]\!]} & \longrightarrow & [\![0;p]\!]^{[\![1;n]\!]} \\ g & \longmapsto & g-\mathrm{Id}+1 \end{cases}$$

on en déduit que le nombre d'applications croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![0;p]\!]$ est égal au nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![0;p+n-1]\!]$. La question précédente nous dit que ce nombre est égal à $\binom{p+n}{n}$. Donc

$$\boxed{\text{le nombre d'applications croissantes de } [\![1;n]\!] \text{ vers } [\![0;p]\!] \text{ vaut } \binom{p+n}{n}.}$$

γ] Notons $C_{n,p}$ l'ensemble des applications croissantes de $[\![1;n]\!]$ vers $[\![0;p]\!]$ et $S_{n,p}$ l'ensemble des solutions $(j_1, ..., j_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ de l'inéquation $j_1 + \cdots + j_n \leqslant p$.
L'application

$$\begin{cases} C_{n,p} & \longrightarrow & S_{n,p} \\ f & \longmapsto & \big(f(1), f(2)-f(1), \ldots, f(n)-f(n-1)\big) \end{cases}$$

est bien définie (y réfléchir) et réalise une bijection entre $C_{n,p}$ et $S_{n,p}$ de réciproque

$$\begin{cases} S_{n,p} & \longrightarrow & C_{n,p} \\ f & \longmapsto & \big((j_1, j_1+j_2, ..., j_1+j_2+\cdots+j_n)\big) \end{cases}$$

On a donc

$$\operatorname{card} S_{n,p} = \operatorname{card} C_{n,p}.$$

Or, d'après la question précédente, on a

$$\operatorname{card} C_{n,p} = \binom{p+n}{n},$$

donc

$$\boxed{\text{le nombre de solutions } (j_1, ..., j_n) \text{ dans } \mathbb{N}^n \text{ de l'inéquation } j_1+\cdots+j_n \leqslant p \text{ vaut } \binom{p+n}{n}.}$$

Dès lors, les solutions $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'équation $k_1 + \cdots + k_n = p$ étant celles de l'inéquation $k_1 + \cdots + k_n \leqslant p$ privées de celles de l'inéquation $k_1 + \cdots + k_n \leqslant p - 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} &= \binom{p+n}{n} - \binom{p+n-1}{n} \\ &= \binom{n+p-1}{n-1} \qquad \text{formule de Pascal} \\ &= \binom{n+p-1}{p} \qquad \text{formule de symétrie.}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n+p-1}{p}.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} &= \binom{n+p-1}{p} \\ &= \frac{\text{« } p \text{ qui descendent depuis } n+p-1 \text{ »}}{\text{« } p \text{ qui montent depuis } 1 \text{ »}} \\ &= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots n}{p!},\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{\text{« } p \text{ qui montent depuis } n \text{ »}}{\text{« } p \text{ qui montent depuis } 1 \text{ »}}}$$

3. Un domino est une 2-combinaison à répétition dans $[\![0; n]\!]$, donc le nombre de dominos est égal à

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(n+1) \times (n+2)}{2},$$

donc

$$\boxed{\text{une boîte de dominos à } n \text{ points contient } \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ pièces.}}$$

Question subsidiaire : Pour quelles valeurs de n peut-on mettre les dominos bout à bout pour former un cercle (en respectant bien entendu la règle du jeu de domino : deux dominos contigüs doivent avoir le même nombre de points sur leurs parties voisines) ?

♦ *Exercice 14.* [⋆]

On choisit 19 nombres dans la suite arithmétique $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$. Démontrer que deux de ces nombres ont une somme égale à 104.

On partitionne la suite $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ en 18 parties : $\{1\}$, $\{4; 100\}$, $\{7; 97\}$, $\{10; 94\}$, ..., $\{49, 55\}$ et $\{52\}$. En choisissant 19 nombres dans cette suite, le principe des tiroirs impose que l'on prenne deux nombres dans l'un des tirois de la forme $\{1 + 3k, 103 - 3k\}_{k \in [\![1;16]\!]}$. La somme de ces deux nombres fait 104. Donc

$$\boxed{\text{deux de ces 19 nombres ont une somme égale à 104.}}$$

♦ *Exercice 15.* [⋆]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un nombre rationnel p/q avec $1 \leqslant q \leqslant N$ tel que $|\alpha - p/q| < 1/(Nq)$.

Indication : Considérer les nombres $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ où $k \in [\![0; N]\!]$ et utiliser le principe des tiroirs.

Les nombres $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ avec $k \in [\![0; N]\!]$ constitue une famille de $N + 1$ nombres dans $[0; 1[$. D'après le principe des tiroirs, il en existe au moins deux qui sont à une distance strictement inférieur à $1/N$, c'est-à-dire qu'il existe $k_1, k_2 \in [\![0; N]\!]$ avec $k_1 \neq k_2$ tels que

$$|k_1\alpha - \lfloor k_1\alpha \rfloor - k_2\alpha + \lfloor k_2\alpha \rfloor| < \frac{1}{N}$$

ou encore, en posant $p = \lfloor k_1\alpha \rfloor - \lfloor k_2\alpha \rfloor$

$$|(k_1 - k_2)\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Comme $k_1 \neq k_2$, on peut diviser par $q := |k_1 - k_2| \in [\![1;N]\!]$, ce qui donne

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}.$$

Donc

$$\boxed{\text{il existe un nombre rationnel } p/q \text{ avec } 1 \leqslant q \leqslant N \text{ tel que } |\alpha - p/q| < 1/(Nq).}$$

♦ ***Exercice 16.*** [○]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection entre $[\![1;n]\!]$ et E et inversement (regarder le diagramme de Hasse de la relation pour s'en convaincre). Par suite,

$$\boxed{\text{il y a exactement } n! \text{ relations d'ordre total possibles sur un ensemble à } n \text{ éléments.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [○]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer les bijections $f : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;n]\!]$ qui respectent la parité, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [\![1;n]\!]\,,\ (k \text{ pair}) \Longrightarrow \big(f(k) \text{ pair}\big)$?
2. Dénombrer les applications $f : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;n]\!]$ qui respectent la parité.

1. Une telle bijection permute les $\lfloor n/2 \rfloor$ nombres pairs de $[\![1;n]\!]$ d'un côté et permute les $\lceil n/2 \rceil$ nombres impairs d'un autre côté. Donc

$$\boxed{\text{il y a } \lfloor n/2 \rfloor! \times \lceil n/2 \rceil! \text{ bijections de } [\![1;n]\!] \text{ qui respectent la parité.}}$$

2. Si f respectent la parité, alors chacun des $\lfloor n/2 \rfloor$ nombres pairs de $[\![1;n]\!]$ a $\lfloor n/2 \rfloor$ images possibles, ce qui donne $\lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor}$ choix. D'un autre côté, chacun des $\lceil n/2 \rceil$ nombres impairs de $[\![1;n]\!]$ a n images possibles, ce qui laisse $n^{\lceil n/2 \rceil}$ possibilités. Donc

$$\boxed{\text{il y a } \lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor} \times n^{\lceil n/2 \rceil} \text{ applications de } [\![1;n]\!] \text{ qui respectent la parité.}}$$

♦ ***Exercice 18.*** [⋆]
Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Dénombrer les lois de composition internes sur E.
2. Dénombrer celles qui admettent un élément neutre.
3. Dénombrer celles qui sont commutatives.
4. Dénombrer celles qui sont commutatives et qui admettent un élément neutre.

Une loi de composition intersne sur E est caractérisée par une table $n \times n$ dont chaque case est remplie par un des n éléments de E.

1. Pour obtenir une telle table, il faut choisir successivement pour les n^2 cases de la table un des n éléments de E, ce qui donne n^{n^2} choix possibles. Donc

$$\boxed{\text{il y a } n^{n^2} \text{ lois de composition internes sur } E.}$$

2. Pour avoir un élément neutr, on commence par le choisir : n choix. Dès lors, les choix successifs décrits ci-dessus n'ont plus à être faits pour les cases situées dans la colonne et dans la ligne de l'élément neutre. Il faut donc choisir successivement pour les $(n-1)^2$ autres cases un des n éléments de E, ce qui donne $n^{(n-1)^2}$ choix possibles. Donc

$$\boxed{\text{il y a } n \times n^{(n-1)^2} \text{ lois de composition internes sur } E \text{ qui admettent un élément neutre.}}$$

3. Si la loi est commutative, cela signifie que lorsqu'on choisit le résultat pour une case de la table située au dessus de la diagonale, on choisit le même résultat pour la case en dessous de la diagonales. Il faut donc choisir successivement pour les $n(n+1)/2$ cases au dessus de la diagonale (diagonale comprise) un des n éléments de E, ce qui donne $n^{n(n+1)/2}$ choix possibles. Donc

$$\boxed{\text{il y a } n^{n(n+1)/2} \text{ lois de composition internes commutatives sur } E.}$$

4. En combinant les deux raisonnements ci-dessus, on voit qu'il faut choisir l'élément neutre : n choix, puis choisir successivement pour les $(n-1)n/2$ cases au dessus de la diagonale qui ne sont ni dans la ligne ni dans la colonne de l'élément neutre un des n éléments de E, ce qui donne $n^{(n-1)n/2}$ choix possibles. Donc

$$\boxed{\text{il y a } n \times n^{(n-1)n/2} \text{ lois de composition internes commutatives sur } E \text{ qui admettent un élément neutre.}}$$

♦ ***Exercice 19.*** [⋆]

1. De combien de façons peut-on constituer des trinômes de colle dans une classe de 24 élèves
   a) lorsque les groupes sont numérotés ?
   b) lorsqu'ils ne le sont pas ?
2. Plus généralement, combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

1. a) Pour le groupe 1, on doit choisir simultanément 3 élèves parmi 24. Pour le groupe 2, on doit choisir simultanément 3 élèves parmi 21. ... Pour le groupe 8, on doit choisir simultanément 3 élèves parmi 3. Donc le nombre de trinôme numérotés est donné par

$$N = \binom{24}{3}\binom{21}{3}\cdots\binom{3}{3} = \frac{24!}{21!3!}\,\frac{21!}{18!3!}\cdots\frac{3!}{0!3!},$$

ce qui donne, après téléscopage,

$$\boxed{N = \frac{24!}{(3!)^8}.}$$

   b) <u>Solution utilisant la question précédente :</u> À chaque liste de trinômes non munérotés correspond 8! listes de trinômes numérotés obtenues en permutant les 8 trinômes. Le lemme des bergers nous dit donc que le nombre de liste de trinômes non numérotés est

$$\frac{N}{8!} = \frac{24!}{(3!)^8 8!}.$$

<u>Solution directe :</u> On peut fabriquer une série de 8 trinômes à partir d'une liste d'élèves en mettant dans le premier groupe les trois premiers, dans le deuxième groupe les trois suivants, etc. Il y a 24! listes possibles. Combien de fois a-t-on ainsi fabriqué la même liste de trinômes ? Déjà, chaque trinôme peut être rangé dans 3! positions. Ensuite, chacun des 8 trinômes peut être rangé de 8! possibilités différentes. Le nombre de façons de constituer des trinômes de colle vaut donc

$$\frac{24!}{(3!)^8 8!}$$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il y a } \dfrac{24!}{(3!)^8 8!} = 9\,161\,680\,528\,000 \text{ façons de constituer une} \\ \text{liste de trinômes de colle dans une classe de 24 élèves.}\end{array}}$$

2. Généralisation :

$$\boxed{\text{il y a } \frac{(np)!}{(p!)^n n!} \text{ partitions d'un ensemble de cardinal } np \text{ en } n \text{ parties de cardinal } p.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ème *nombre de Bell* le nombre B_n de partitions de l'ensemble $E_n = [\![1; n]\!]$ (avec $B_0 = 1$ puisque $\{\varnothing\}$ est la seule partition de $E_0 = \varnothing\}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Indication : Discuter suivant le cardinal du sous-ensemble de la partition qui contient $n+1$.

La formule est évidente dans le cas $n = 0$ puisque $B_1 = 1$ (la seule partition d'un singleton $\{a\}$ étant $\{\{a\}\}$) et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_k = B_0 = 1$.

Fixons dorénavant un entier $n \geqslant 1$. Pour dénombrer les partitions de E_{n+1}, nous regardons les différentes possibilités pour la taille de la partie contenant l'élément $n+1$. On distingue alors :

Le cas où $n+1$ est dans un singleton (en l'occurence le singleton $\{n+1\}$ bien sûr). Le reste de la partition constitue alors une partition de E_n, ce qui laisse B_n choix. On trouve donc $B_n = \binom{n}{0} B_n$ partitions de ce type.

ou Le cas où $n+1$ est dans une paire. On choisit d'abord dans $[\![1; n]\!]$ l'élément qui accompagne $n+1$, ce qui laisse $\binom{n}{1}$ choix. Ensuite, on constate que le reste de la partition est une partition de E_n privé d'un de ses éléments, ce qui laisse B_{n-1} choix possibles. On trouve donc $\binom{n}{1} B_{n-1}$ partitions de ce type.

ou ...

ou Le cas où $n+1$ est dans une partie à n éléments. On choisit d'abord dans $[\![1; n]\!]$ $n-1$ éléments qui accompagnent $n+1$, ce qui laisse $\binom{n}{n-1}$ choix. Ensuite, on constate que le reste de la partition est une partition de E_n privé de $n-1$ de ses éléments, ce qui laisse $B_{n-(n-1)} = B_1$ choix possibles. On trouve donc $\binom{n}{n-1} B_1$ partitions de ce type.

ou Le cas où $n+1$ est dans une partie à $n+1$ éléments (tout l'ensemble E_{n+1} dans ce cas). Il n'y a bien sûr qu'une partition dans ce cas. On trouve donc $\binom{n}{n} B_{n-n}$ partitions de ce type (car $B_0 = 1$).

Ainsi, en rasemblant ces différents cas, on voit que le nombre B_{n+1} de partitions distinctes de $[\![1; n+1]\!]$ est égal à $\binom{n}{0} B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-(n-1)} + \binom{n}{n} B_{n-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ ce qui prouve la relation pour $n \geqslant 1$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.}$$

♦ ***Exercice 21.*** [$\circ$]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et A, B deux ensembles disjoints ayant tous les deux n éléments. En dénombrant de deux manières le nombre de façons de choisir n éléments dans $A \cup B$, démontrer que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Pour dénombrer le nombre de façons de choisir n éléments dans $A \cup B$, on peut procéder de deux manières :

- On peut choisir directement n éléments parmi les $2n$ de $A \cup B$, ce qui laisse $\binom{2n}{n}$ possibilités.
- On peut choisir :
  - 0 éléments dans A et n dans B, ce qui laisse $\binom{n}{0}\binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2$ possibilités ;
  - 1 éléments dans A et $n-1$ dans B, ce qui laisse $\binom{n}{1}\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}^2$ possibilités ;
  - 2 éléments dans A et $n-2$ dans B, ce qui laisse $\binom{n}{2}\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}^2$ possibilités ;
  - etc
  - n éléments dans A et 0 dans B, ce qui laisse $\binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{n}^2$ possibilités.

  Avec cette façon de faire, on a donc $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ possibilités de choisir n éléments dans $A \cup B$.

Finalement, on obtient bien

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

♦ ***Exercice 22.*** [⋆]
Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \operatorname{card} X \qquad \text{et} \qquad \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} (-1)^{\operatorname{card} X}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \operatorname{card} X &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \operatorname{card} X=k}} \operatorname{card} X \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \operatorname{card} X=k}} k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \operatorname{card}\{X\subset E : \operatorname{card} X = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} && \text{le premier terme est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{formule du pion} \\
&= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} && \text{en posant } \ell=k-1 \\
&= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^{\ell}1^{n-1-\ell}
\end{aligned}$$

donc, d'après la formule du binôme,

$$\boxed{\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \operatorname{card} X = n2^{n-1}.}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} (-1)^{\operatorname{card} X} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \operatorname{card} X=k}} (-1)^{\operatorname{card} X} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \operatorname{card} X=k}} (-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{card}\{X\subset E : \operatorname{card} X = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\
&= (-1+1)^n,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} (-1)^{\operatorname{card} X} = 0.}$$

♦ ***Exercice 23.*** [⋆]
Soit E un ensemble infini.

1. Démontrer que E contient un sous-ensemble infini dénombrable.
2. Soit $x \in E$. Démontrer que $E \setminus \{x\}$ est équipotent à E.

1. Comme $E \neq \varnothing$, il existe $x_0 \in E$. Comme $E \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$, il existe $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$. Comme $E \setminus \{x_0, x_1\} \neq \varnothing$, il existe $x_2 \in E \setminus \{x_0, x_1\}$. Etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, distints deux à deux. Les termes de cette suite constitue alors un sous-ensemble infini dénombrable de E. Donc

   $$\boxed{\text{tout ensemble infini contient un sous-ensemble infini dénombrable.}}$$

   Remarque : Pour faire cette démonstration, on a implicitement utilisé l'axiome du choix (dans sa version dénombrable). Le résultat démontré signifie que les ensembles infinis dénombrables sont les « plus petits » ensembles infinis.

2. Reprenons « la » suite construite à la question précédente dans le cas où $x_0 = x$ et considérons l'application

   $$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \setminus \{x\} \\ y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x_{k+1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   C'est une bijection de réciproque

   $$\varphi^{-1} \left\{ \begin{array}{ccc} E \setminus \{x\} & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x_{k-1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   ce qui prouve bien que

   $$\boxed{E \setminus \{x\} \text{ est équipotent à } E.}$$

♦ ***Exercice 24.*** [⋆]
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. a) On suppose que A est dénombrable. Démontrer que $f(A)$ est dénombrable.
   b) On suppose que f est injective et que $f(A)$ est dénombrable. Démontrer que A est dénombrable.
2. On suppose que A est <u>non</u> dénombrable et f injective. Démontrer il existe $x_0 \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. a) La restriction $\widehat{f} : A \longrightarrow f(A)$ est surjective. Comme A est dénombrable, il existe une surjection φ de $\mathbb{N}$ sur A. Alors $\widehat{f} \circ \varphi$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur $f(A)$, ce qui démontre que $f(A)$ est dénombrable. Ainsi,

   $$\boxed{\text{l'image directe d'une partie dénombrable est dénombrable.}}$$

   b) La restriction $\widehat{f} : A \longrightarrow f(A)$ est bijective. Comme $f(A)$ est dénombrable, il existe une surjection φ de $\mathbb{N}$ sur $f(A)$. Dès lors, l'application $\widehat{f}^{-1} \circ \varphi$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur A, ce qui démontre que A est dénombrable. Ainsi,

   $$\boxed{\text{l'image injective réciproque d'une partie dénombrable est dénombrable.}}$$

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $x \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, on a $f(x) \in \mathbb{Q}$, ce qui revient à dire que $f\big(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big) \subset \mathbb{Q}$. On en déduit que $f\big(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big)$ est dénombrable.
   Par ailleurs, $A \cap \mathbb{Q}$ est également dénombrable puisque c'est une partie de $\mathbb{Q}$. On en déduit que $f(A \cap \mathbb{Q})$ est dénombrable (cf question 1. a)).

Dès lors, $f(A) = f(A \cap \mathbb{Q}) \cup f\big(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big)$ est dénombrable.
La question 1. b) nous dit que A est dénombrable. C'est absurde !
En conclusion,

$$\boxed{\text{si } A \text{ n'est pas dénombrable, alors il existe } x_0 \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \text{ tel que } f(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.}$$

♦ ***Exercice 25.*** [$\star$]
Démontrer que l'ensemble $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable de deux manières : d'une part en utilisant le procédé diagonal et d'autre part en justifiant que $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

▷ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable.
On peut alors indexer les suites à valeurs dans $\{0;1\}$, c'est-à-dire $\{0;1\}^{\mathbb{N}} = \{(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n^n$.
Dès lors, la suite (v_n) est un élément de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ et pourtant elle est distincte de toutes les suites $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Absurde !
Donc

$$\boxed{\{0;1\}^{\mathbb{N}} \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

▷ Les applications

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \{0;1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} \{0;1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \{n \in \mathbb{N} : u_n = 1\} \end{array}\right.$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre, donc $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Comme ce dernier ensemble n'est pas dénombrable (d'après l'antinomie de Cantor), on en déduit que

$$\boxed{\{0;1\}^{\mathbb{N}} \text{ n'est pas dénombrable.}}$$