Oral mathématiques ENS Ulm Lyon Cachan Rennes - Christophe Vauthier

11 juillet 2019

Exercice

Existe-t-il une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction g développable en série entière avec un rayon de $+\infty$, on ait $g(x) = o(F(x))$ au voisinage de $+\infty$?

Déroulement

Après dix minutes infructeuses de réflexion, l'examinatrice me demande si je pense que cette fonction existe. Je réponds que ça me semble plausible puisque les coefficients d'une série entière de rayon infini doivent être très petits, ce qui limite donc la croissance de la série entière. Mais l'examinatrice me dit qu'en fait, une telle fonction F n'existe pas, et me propose de suivre la piste suivante : étant donné une suite $(u_n)_n \in {\mathbb{R}^+}^{\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe une série entière g de rayon infini telle que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \geqslant u_n$. Après avoir établi facilement le lien avec l'exercice, je construis une rayon lacunaire qui majore bien u_n de la façon voulue, mais qui n'est pas de rayon infini. L'examinatrice me suggère alors de travailler sur les coefficients de la série entière lacunaire (que j'avais dans un premier temps pris égaux à 1), et après une discussion sur les critères permettant de déterminer le rayon d'une série entière, je finis par construire, juste avant la fin de l'oral, une série de la forme $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{k_n}$ avec $0 \leqslant {a_n}^{\frac{1}{k_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_n n^{k_n} \geqslant u_n$ pour tout n, qui fonctionne et est de rayon infini.