Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

DIMENSION FINIE

Exercice 1. Matrices harmoniques

Soients $p, q \geqslant 3$. Une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est dite *harmonique* lorsque tout coefficient qui n'est pas sur le bord est la moyenne arithmétique de ses quatre voisins, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![2;p-1]\!] \times [\![2;q-1]\!], \qquad a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}}{4}.$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices harmoniques.

1. Justifier que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont la dimension est supérieure ou égale à $pq-(p-2)(q-2)$.
2. a) Démontrer que les valeurs extrémales des coefficients d'une matrice harmonique sont nécessairement atteintes sur son bord.
   b) En déduire qu'il existe une matrice harmonique et une seule de bord donné et préciser la dimension de $\mathscr{H}$. *On pourra introduire une application linéaire ad-hoc.*
3. Déterminer un supplémentaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Matrices de trace nulle

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les coefficients de la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soient tous nuls sauf le deuxième qui vaut 1.

   Indication : On pourra utiliser le résultat d'un exercice classique vu en TD.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, toute matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Récréation mathématique

Peut-on paver un échiquier privé de deux de ses coins opposés à l'aide de dominos ?