Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n° 24 : Variables aléatoires

Correction du problème 1 – (d'après EDHEC 2008)

Partie I – Quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. On peut modéliser l'expérience par $\boxed{\Omega = \{0,1\}^{2p+1} \text{ et } \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)}$, chaque $2p+1$-uplet de Ω représentant une succession de Pile (1) ou Face (0). Les épreuves élémentaires sont équiprobables, ainsi, on muni $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probabilité uniforme P.
2. Pour tout i, X_i est le nombre de succès dans une répétition de $2p+1$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$, un succès étant la coïncidence entre la prévision et le tirage pour un rang donné (on a une chance sur deux de deviner juste à chaque rang). Ainsi, X_i suit une loi binomiale de paramètres $\left(2p+1, \frac{1}{2}\right)$: $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2p+1, \frac{1}{2}\right)}$.
3. On a :
$$r_p = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}.$$
Notons
$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \qquad \text{et} \qquad T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}.$$
D'après la symétrie des coefficients binomiaux, $S_p = T_p$, et d'après la formule du binôme $S_p + T_p = 2^{2p+1}$. Ainsi, $S_{2p} = 2^{2p}$, et $\boxed{r_p = \frac{1}{2}}$.
4. Soit $(A_1, \dots, A_s)$ un système complet d'événements non quasi-impossibles. On a alors, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $x \in X(\Omega)$:
$$P(X = x) = \sum_{k=1}^{s} P_{A_k}(X = x) P(A_k).$$
Ainsi, par définition de l'espérance (existant du fait que X est une variable aléatoire finie) :
$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{k=1}^{s} P_{A_k}(X = x) P(A_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{k=1}^{s} x P_{A_k}(X = x) P(A_k).$$
Les deux sommes étant finies, et les indices indépendants l'un de l'autre, on peut intervertir les signes sommes :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_k}(X = x) P(A_k) = \sum_{k=1}^{s} \left(P(A_k) \sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_k}(X = x) \right) = \sum_{k=1}^{s} P(A_k) E(X \mid A_k),$$
par définition de l'espérance conditionnelle. Ainsi, on obtient bien la formule de l'espérance conditionnelle :
$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{s} E(X \mid A_k) P(A_k).}$$

Partie II – Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

5. Soit G_1 prend la valeur 0, soit je joueur J_1 fait partie du groupe de joueurs ayant eu un nombre maximal de bonnes prévisions. Le cardinal de ce groupe de joueurs peut varier de 1 à n. S'il est égal à j, J_1 gagne $\frac{n!}{j}$ euros. Ainsi
$$\boxed{G_1(\Omega) = \left\{ \frac{n!}{j}, \quad j \in [\![1, n]\!] \right\} \cup \{0\}.}$$
6. Sachant que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé,
   - soit G_1 prend la valeur 0 si au moins un joueur a strictement plus de k prévisions correctes. L'évenement complémentaire de cette condition consiste à ce que tout autre joueur ait au plus $k-1$ prévisions correctes. Comme les X_i sont indépendantes, cet événement est de probabilité r_{k-1}^{n-1}. Ainsi,
$$P_{[X_1=k]}(G_1 = 0) = 1 - r_{k-1}^{n-1}.$$
   - soit G_1 prend la valeur $\frac{n!}{j}$, pour $j \in [\![1, n]\!]$. Ceci se produit si et seulement si $j-1$ joueurs parmi les $n-1$ autres ont exactement k prévisions correctes, et les autres en ont strictement moins. Comme il y a $\binom{n-1}{j-1}$ façons de choisir le groupe de joueurs ayant une prévision correcte, et par indépendance :
$$P_{[X_1=k]}(G_1 = \frac{n!}{j}) = \binom{n-1}{j-1}(r_k - r_{k-1})^{j-1} r_{k-1}^{n-j}.$$

   L'espérance conditionnelle est alors :
$$\begin{aligned} E(G_1 \mid X_1 = k) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j}\binom{n-1}{j-1}(r_k - r_{k-1})^{j-1} r_{k-1}^{n-j}. \\ &= (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}(r_k - r_{k-1})^{j-1} r_{k-1}^{n-j} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r_k - r_{k-1})}\left((r_k - r_{k-1} + r_{k-1})^n - r_{k-1}^n\right) \\ &= \boxed{\frac{(n-1)!(r_k^n - r_{k-1}^n)}{q_k}}. \end{aligned}$$

   Remarquez que ce calcul reste valable pour $k = 0$ (par convention, $r_{-1} = 0$).
7. On utilise la formule de l'espérance totale prouvée dans la partie I. Ici G_1 est bien une variable aléatoire finie, et le système complet $(X_1 = k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est bien constitué d'événements non quasi-impossibles. Ainsi,
$$\begin{aligned} E(G_1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) E(G_1 \mid X_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} q_k \cdot (n-1)! \frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} \\ &= (n-1)! \sum_{k=0}^{n} (r_k)^n - r_{k-1}^n \\ &= (n-1)!((r_n)^n - (r_{-1})^n) = (n-1)! \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient bien $\boxed{E(G_1) = (n-1)!}$
   Ce résultat n'est surprenant, et peut être obtenu beaucoup plus rapidement par l'argument ci-dessous.
   Les n joueurs jouent tous des rôles symétriques. Aucun n'est privilégié par rapport aux autres. Ainsi, cette symétrie amène l'égalité de leurs espérances de gain :
$$E(G_1) = E(G_2) = \cdots = E(G_n).$$

   De plus, les joueurs se partagent la somme totale de $n!$, donc
$$G_1 + \cdots + G_n = n! \qquad \text{donc:} \qquad E(G_1) + \cdots + E(G_n) = n!$$

   L'égalité des espérances amène donc $nE(G_1) = n!$, d'où le résultat.

Partie III – J_1 et J_2 forment un groupe, les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

8. Pour chaque lancer, un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a une prévision correcte. Ainsi, $X_1 + X_2 = 2p+1$. Par conséquent, au moins l'un des deux joueurs a au moins $k+1$ prévisions correctes, donc $Y \geqslant p+1$

   Il est bien entendu possible que Y prenne toute valeur k entre $p+1$ et $2p+1$ (il suffit que J_1 ait les bonnes prévisions sur les k premiers lancers et pas sur les autres).

   On en déduit que $\boxed{Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]}$.

9. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Alors l'événement $[Y = k]$ est réalisé si et seulement si $[X_1 = k]$ est réalisé, ou $[X_2 = k]$ est réalisé. Ainsi

$$[Y = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k], \qquad \text{donc:} \qquad P(Y = k) = P([X_1 = k] \cup [X_2 = k])$$

   Or, $X_1 + X_2 = 2p+1$, donc, $2p+1$ étant impair, on ne peut pas avoir $X_1 = X_2$. Par conséquent, les événements $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$ sont incompatibles, et, par additivité d'une mesure de probabilité,

$$P(Y = k) = P(X_1 = k) + P(X_2 = k) = \boxed{2q_k = P(Y = k)}.$$

   En effet, X_1 et X_2 suivent toutes deux la loi étudiée dans la partie II (car on peut voir l'expérience comme un choix aléatoire de prévisions pour J_1, puis J_2 prend les prévisions opposées ; de la sorte, la loi de X_1 est celle étudiée en partie II ; inversement, on peut échanger le rôle des deux joueurs)

10. La variable G' peut prendre la valeur 0 (si ni J_1 ni J_2 ne gagne, ou les valeurs $\frac{n!}{j}$, pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ si l'un des deux est gagnant (ce qui empêche l'autre de gagner) et qu'au total, il y a j joueurs gagnants.

    Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Tout d'abord, puisque $k \geqslant p+1$, l'événement $(Y = k)$ n'est pas quasi-impossible, on peut donc considérer la probabilité conditionnellement à cet événement.

    Sachant que $(Y = k)$ est réalisé, G' prend la valeur $\frac{n!}{j}$ si et seulement si exactement $j-1$ joueurs autres que J_1 et J_2 ont k prévisions correctes, et tous les autres strictement moins. En effet, un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a dans ce cas k prévisions correctes, l'autre en a strictement moins.

    Ainsi, le même raisonnement qu'en II-3(a) amène :

$$\forall k \in [\![p+1, 2p+1]\!], \quad \forall j \in [\![0, n-2]\!], \quad P_{(Y=k)}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j},$$

    le coefficient binomial correspondant au choix des j joueurs autres que J_1 et J_2 ayant un nombre maximal (égal à k) de prévisions correctes, le coefficient $(q_k)^j$ correpondant à la probabilité pour chacun de ces joueurs d'avoir exactement k prévisions correctes, et le coefficient $(r_{k-1})^{n-2-j}$ correspondant à la probabilité, pour chacun des $n-2-j$ autres joueurs (différents des joueurs J_1 et J_2) d'avoir au plus $k-1$ prévisions correctes.

    Par un calcul similaire à celui de la partie II, on obtient alors :

$$\begin{aligned} E(G' \mid Y = k) &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \cdot \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} = \frac{n!}{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} \\ &= \frac{n!}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} (q_k)^{j-1} (r_{k-1})^{n-1-j} = \frac{n!}{q_k(n-1)} ((q_k + r_{k-1})^{n-1})^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}), \end{aligned}$$

    d'après la formule du binôme, d'où :

$$\forall k \in [\![p+1, 2p+1,]\!], \quad \boxed{E(G' \mid Y = k) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}}.$$

11. D'après la formule de l'espérance totale,

$$E(G') = \sum_{k=p+1}^{2p+1} P(Y = k) E(G' \mid Y = k) = \sum_{k=p+1}^{2p+1} 2n(n-2)!((r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}).$$

    La somme étant télescopique,

$$E(G') = 2n(n-2)!((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1}).$$

On a calculé précédemment r_p et r_{2p+1} est la probabilité de l'événement certain. Ainsi :

$$\boxed{E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).}$$

Le gain est alors partagé équitablement entre J_1 et J_2 ; Ainsi,

$$E(G'_1) = n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

On a alors

$$E(G'_1) - E(G_1) = (n-1)! - n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = (n-2)!\left(1 - \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{(n-2)!}{n2^{n-1}}\left(2^{n-1} - n\right).$$

Or, l'inégalité $2^{n-1} \geqslant n$, pour $n \geqslant 1$, est classique (elle se montre facilement par récurrence). Elle est même stricte pour $n \geqslant 3$.

Ainsi, dès lors qu'il y a au moins 3 joueurs, $\boxed{\text{la stratégie est strictement meilleure}}$.

12. Les G_i, $i \in [\![3, n]\!]$, jouent un rôle symétrique, et aucun n'est avantagé par rapport aux autres. Ainsi, $E(G_3) = E(G_4) = \cdots = E(G_n)$. De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} E(G_i) = n! \qquad \text{donc:} \qquad E(G') + (n-2)E(G_n) = n!.$$

On obtient donc

$$\boxed{E(G_n) = \frac{1}{n-2}\left(n! - 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)}.$$

Cette espérance est aussi celle des G_i, $i \in [\![3, n]\!]$.