Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 5 h

LA DROITE RÉELLE

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les relations ;
- les nombres.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. La droite réelle

A.1. Propriété de la borne supérieure

Dans le chapitre sur les nombres, nous avons expliqué que la construction de $\mathbb{R}$ permet d'acquérir le résultat fondamental rappelé dans le théorème ci-dessous, que l'on a l'habitude d'appeler la propriété de la borne supérieure.

Théorème 1

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

■ Rappelons que nous avions admis ce résultat dont la démonstration dépend directement de la façon dont $\mathbb{R}$ est construit (construction que nous avions passée sous silence). ■

Cet énoncé, sous des dehors assez abstraits, permet de comprendre la différence de structure qui existe entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. En effet, dans $\mathbb{Q}$, certaines parties non vides et majorées ne possèdent pas de borne supérieure (par exemple $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$). Cela signifie, en substance, que l'ensemble des nombre rationnels n'est pas « complet ». Autrement dit, si l'on représente le diagramme de Hasse de $\mathbb{Q}$, l'ordre total nous conduit à dessiner une droite, mais cette droite est lacunaire, constellée un peu partout de « petits trous ».(†)

Au contraire, la propriété de la borne supérieure, vérifiée sur $\mathbb{R}$, permet d'identifier l'ensemble des nombres réels à une droite que l'on appelle la droite réelle. Cette analogie nous incite à voir les nombres réels comme des points.

L'encadré suivant vous décrit les méthodes de raisonnement autour des bornes supérieures.

Raisonner avec des bornes supérieures

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- ▶ Pour démontrer qu'un nombre réel s est la borne supérieure de A, il faut montrer :
  - ▷ que s est un majorant de cette partie :
  $$\forall x \in A, \qquad x \leqslant s\,;$$
  - ▷ que s est majorée par n'importe quel majorant de A :
  $$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad (\forall x \in A,\ x \leqslant m) \Longrightarrow (s \leqslant m).$$
  ou, ce qui revient au même, que s est le plus petit majorant de A :
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \qquad x > s - \varepsilon$$
- ▶ Lorsqu'il existe un nombre réel m tel que
  $$\forall x \in A, \qquad x \leqslant m,$$
  on peut effectuer un passage à la borne supérieure pour en déduire que
  $$\sup A \leqslant m.$$

On a les mêmes résultats pour les bornes inférieures à condition de remplacer le signe $\leqslant$ par $\geqslant$ là où c'est nécessaire.

(†) Ce sont les fameux trous de $\mathbb{Q}$! Et il est bien connu que, des trous de $\mathbb{Q}$, on en trouve un peu partout . . .

L'exemple suivant, fort classique, utilise les méthodes de raisonnement de l'encadré précédent.

Exemples :

- Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Démontrons que $A \cup B$ est majorée et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A; \sup B\}$.

  Les parties A et B étant non vides et majorées dans $\mathbb{R}$, $\sup A$ et $\sup B$ existent.

  Procédons par double inégalité.

  $\boxed{\leqslant}$ On sait que $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup A$ et $\forall b \in B,\ b \leqslant \sup B$, ce qui implique que

  $$\forall c \in A \cup B, \qquad c \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}.$$

  D'une part, cela nous dit que $A \cup B$ est majorée et donc que $A \cup B$ admet une borne supérieure (puisque $A \cup B \neq \varnothing$). D'autre part, en passant à la borne supérieure, on obtient

  $$\sup(A \cup B) \leqslant \max\{\sup A; \sup B\}.$$

  $\boxed{\geqslant}$ Pour démontrer l'inégalité dans l'autre sens, on propose deux méthodes.

  - $\triangleright$ Considérons un majorant m de $A \cup B$. C'est aussi un majorant de A et de B car $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\sup A \leqslant m$ et $\sup B \leqslant m$. Il s'ensuit que $\max\{\sup A; \sup B\} \leqslant m$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout majorant m de $A \cup B$, on en déduit que

    $$\max\{\sup A; \sup B\} \leqslant \sup(A \cup B).$$

  - $\triangleright$ Soit $\varepsilon > 0$. Traitons le cas où $\sup A \geqslant \sup B$ (le cas contraire est similaire). Alors $\sup A - \varepsilon$ n'est pas un majorant que A, donc il existe $a \in A$ tel que $a > \sup A - \varepsilon$. Cela signifie qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $\max\{\sup A; \sup B\} - \varepsilon < x$. Il s'ensuit que

    $$\max\{\sup A; \sup B\} - \varepsilon \leqslant \sup(A \cup B).$$

    Comme cette égalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit (en passant à la borne inférieure sur $\varepsilon > 0$) que

    $$\max\{\sup A; \sup B\} \leqslant \sup(A \cup B).$$

A.2. La droite réelle achevée et son algèbre

En analyse, pour le calcul des limites, nous rencontrerons des propriétés qui sont valables aussi bien en un point fini de la droite réelle qu'en ses extrémités $\pm\infty$. Pour tous ces énoncés, il est commode d'adjoindre à la droite réelle deux points « à l'infini » pour travailler dans $[-\infty;+\infty]$.

Sur cette droite réelle, dite achevée puisqu'on lui a (enfin) rajoutée ses bouts, toutes les parties deviennent bornées (y compris $\mathbb{R}$!). Mais (il y a toujours un mais), cette « extension » de $\mathbb{R}$ ne se fait pas sans quelques tracasseries algébriques qui nous font perdre la structure de corps !

Définition 1

On appelle droite réelle achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$ obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments distincts (non réels) $-\infty$ et $+\infty$.

Pour tous $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, on écrit que $x \leqslant y$ lorsque ou bien $x = -\infty$, ou bien $y = +\infty$ ou bien encore x et y sont réels et vérifient $x \leqslant y$ au sens habituel. On obtient ainsi sur $\overline{\mathbb{R}}$ un ordre total, qui prolonge celui de $\mathbb{R}$, et pour lequel on a la propriété naturelle $\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

En outre, on prolonge sur $\overline{\mathbb{R}}$ les lois $+$, $\times$ et $\div$ de la façon suivante :

$+$	$-\infty$	$y\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$x\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y\in\mathbb{R}_-^*$	0	$y\in\mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$x\in\mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	F.I.	0	0	0	F.I.
$x\in\mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

$\div$	$-\infty$	$y\in\mathbb{R}_-^*$	0^-	0^+	$y\in\mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$x\in\mathbb{R}_-^*$	0^+	$\frac{x}{y}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{x}{y}$	0^-
0^-	0^+	0^+	F.I.	F.I.	0^-	0^-
0^+	0^-	0^-	F.I.	F.I.	0^+	0^+
$x\in\mathbb{R}_+^*$	0^-	$\frac{x}{y}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{x}{y}$	0^+
$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

les lettres F.I. signifient « forme indéterminée » et désignent un calcul qui n'a pas de sens.

On remarque que :

- ▷ dans $\overline{\mathbb{R}}$, certaines opérations n'aboutissent pas : le résultat est une forme indéterminée ;
- ▷ pour le quotient, il faut attribuer une certaine duplicité à 0 en distinguant 0^- et 0^+.

Autrement dit, calculer dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est travailler dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; 0^-; 0^+; +\infty, \text{F.I.}\}$.

L'intérêt de la droite réelle achevée apparaîtra clairement pour l'énoncé de certaines propriétés de limite (aussi bien valables en un point fini qu'en $\pm\infty$). Mais, pour les impatients, il n'est pas nécessaire d'attendre si longtemps : on peut d'ores et déjà reformuler plus agréablement la propriété de la borne supérieure.

Théorème 2

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

■ AQT ■

Exemples :

- $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing = -\infty$ et $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing = +\infty$. C'est le seul cas où la borne supérieure est strictement plus petite que la borne inférieure.
- $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \overline{\mathbb{R}} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R} = +\infty$.
- $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{N} = +\infty$.
- Lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}$ est non vide et majorée, sa borne supérieure est la même que l'on considère A comme une partie de $\mathbb{R}$ ou comme une partie de $\overline{\mathbb{R}}$.
- Écrire que $\sup A = +\infty$ pour une partie A de $\mathbb{R}$ revient à dire que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x \geqslant M$.

Nous verrons dans le chapitre sur les limites de suites que si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A$. Ce qu'il faut bien noter, c'est que ce résultat est vrai que la partie A soit majorée (i.e. $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A \in \mathbb{R}$) ou qu'elle ne le soit pas (i.e. $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = +\infty$). Cette propriété nous donne donc un deuxième exemple d'un énoncé plus simple dans $\overline{\mathbb{R}}$ que dans $\mathbb{R}$.

Voici un troisième exemple : la droite réelle achevée permet de donner une définition très compacte des intervalles de $\mathbb{R}$. On utilise pour cela les symboles égyptiens $\rfloor$ et $\lceil$ qui signifient indifféremment] ou [.

Définition 2

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $\rfloor a;b \lceil$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a \leqslant b$ et la convention que les symboles égyptiens sont toujours ouverts lorsqu'ils sont voisins de $\pm\infty$.

Si l'on enlève la convention « les symboles égyptiens sont toujours ouverts lorsqu'ils sont voisins de $\pm\infty$ », on obtient la notion d'intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ et non de $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ où les deux symboles égyptiens sont fermés s'appelle un segment ; qu'un intervalle où l'un des deux symboles égyptiens est ouvert et l'autre est fermé est dit semi-ouvert (ou semi-fermé) et qu'un intervalle où les deux symboles égyptiens sont ouverts est lui-même dit ouvert.

Par ailleurs, lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que l'intervalle est borné. Au contraire, lorsque ou bien $a = -\infty$ ou bien $b = +\infty$, on parle de demi-droite. Enfin, lorsque $a = -\infty$ et $b = +\infty$, on retrouve la droite réelle toute entière.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le segment $[a;a]$ se réduit au singleton $\{a\}$. Avec l'ensemble vide, les singletons sont les seuls intervalles qui contiennent un nombre fini de points. Pour résumer, un intervalle possède 0, 1 ou une infinité d'éléments.

B. Topologie de la droite réelle

La topologie est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter les notions de limite et de continuité.

B.1. Métrique

La valeur absolue permet de mesurer les distances sur la droite réelle.

Définition 3

On appelle distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}$ l'application

$$\mathrm{d} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & |x - y|. \end{array} \right.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, le réel $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ est appelé la distance de x à y.

Les propriétés de la valeur absolue impliquent les résultats de la proposition suivante.

Proposition 1

Le couple $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ est un espace métrique, c'est-à-dire :

(i)	$\forall x, y \in \mathbb{R},$	$\mathrm{d}(x, y) \geqslant 0$	positivité ;
(ii)	$\forall x, y \in \mathbb{R},$	$\big(\mathrm{d}(x, y) = 0\big) \iff (x = y)$	séparation ;
(iii)	$\forall x, y \in \mathbb{R},$	$\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$	symétrie ;
(iv)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R},$	$\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$	inégalité triangulaire.

■ AQT ■

Le nom de « séparation » donnée à la deuxième de ces propriétés ne se comprend que si on la contrapose : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \neq y) \iff \big(\mathrm{d}(x, y) > 0\big)$. Autrement dit, deux points séparés sont nécessairement distants l'un de l'autre.

La définition ci-dessous introduit la notion fondamentale de boule.

Définition 4

On appelle boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble noté $b(a, r)$ défini par $b(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$. On reconnaît l'intervalle ouvert $]a - r; a + r[$.

On appelle boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble noté $B(a, r)$ défini par $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leqslant r\}$. On reconnaît le segment $[a - r; a + r]$.

On note que $b(a; r) \subset B(a; r)$.

Exemples :

- $b(0; 1) = \,]-1; 1[\,;$
- $B(0; 1) = [-1; 1]$.

Si les boules sont des objets importants en topologie des espaces métriques, il faut bien avouer que le concept est pauvre dans le cas de la droite réelle puisque les boules ne sont alors que de « simples » intervalles. Nous n'utiliserons donc quasiment pas le vocabulaire des boules dans la suite de ce cours. Elles serviront davantage plus tard . . . Patience !

B.2. Ouverts, fermés, compacts et voisinages

a) Ouverts, fermés et compacts

La définition suivante introduit les concepts fondamentaux d'ouvert et de fermé, qui sont à la base de la topologie.

Définition 5

On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ lorsque, pour tout $x \in U$, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x - r; x + r[$ soit contenu dans U.

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ lorsque son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Avec le langage des boules, un ouvert de $\mathbb{R}$ est une partie U telle qu'il existe, autour de chaque point de U, une boule de rayon non nulle entièrement incluse dans U. Dans un ouvert, on est donc assuré de ne jamais être sur le bord : où que l'on soit dans l'ouvert, il existe une petite zone autour de cet endroit qui est encore dans l'ouvert. Bref, dans un ouvert, il n'y a pas de bord !

En langage symbolique, dire que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit $\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ ]x - r; x + r[\subset U$. Vu l'ordre des quantificateurs, le nombre r dépend de l'élément x ! Autrement dit, dans un ouvert, on est toujours éloigné du bord mais cet éloignement n'est pas uniforme ; il dépend fortement de l'endroit où l'on se trouve dans l'ouvert.

La terminologie d'intervalle ouvert et d'intervalle fermé est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 2

Un intervalle ouvert est ouvert. Un intervalle fermé est fermé.

■ Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Si $I = \varnothing$ alors I est ouvert. Sinon, on considère $x \in I$ et l'on constate que les distances $\mathrm{d}(x, a)$ et $\mathrm{d}(x, b)$ sont strictement positive (voire infinie), ce qui permet de considérer $r > 0$ tel que $r < \mathrm{d}(x, a)$ et $r < \mathrm{d}(x, b)$. Par suite, si y est un élément de $]x - r; x + r[$, on a $\mathrm{d}(x, y) < r < \min\{\mathrm{d}(x, a); \mathrm{d}(x, b)\}$, d'où $y \in I$, ce qui signifie que $]x - r; x + r[\subset I$. Donc I est ouvert.

Le complémentaire d'un intervalle fermé est ou bien un intervalle ouvert ou bien la réunion de deux intervalles ouverts. On peut alors facilement adapter la démonstration ci-dessus pour justifier que ce complémentaire est ouvert. Cela démontre qu'un intervalle fermé est fermé. ■

Exemples :

- $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont fermés et ouverts.
- Les segments $[a; b]$ sont des fermés.
  En particulier, les singletons sont des fermés puisque ce sont des segments.
- Les demi-droites fermées $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$ sont fermées.
  Les demi-droites ouvertes $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ sont ouvertes.
- Les intervalles semi-ouverts $]a, b]$, $[a, b[$ ne sont ni ouverts, ni fermés (y réfléchir !).
- Les boules ouvertes sont ouvertes. Les boules fermées sont fermées.

En topologie, les mots « ouvert » et « fermé » ne sont pas contraires l'un de l'autre ! D'une part, parce qu'il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées, comme $[1; 2[$ par exemple. D'autre part, parce que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}$!!

Cela signifie que, si l'on vous demande de démontrer qu'une certaine partie A n'est pas ouverte (respectivement n'est pas fermée), vous ne devez jamais répondre que c'est parce qu'elle est fermée (respectivement ouverte).

Les propriétés rassemblées dans la proposition suivante caractérisent la notion d'ouvert. En topologie plus générale, elles servent d'ailleurs à définir les notions d'ouverts et de topologie.

Proposition 3

Les ouverts de $\mathbb{R}$ forment une topologie, c'est-à-dire :

(i) $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des ouverts ;

(ii) toute réunion d'ouverts est un ouvert ;

(iii) l'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

■ (i) $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont ouverts en tant qu'intervalles ouverts.

(ii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) d'ouverts. Démontrons que $U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert. Soit $x \in U$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $]x-r; x+r[\subset U_i$. Mézalors $]x-r; x+r[\subset U$ car $U_i \subset U$. Cela prouve que U est ouvert dans $\mathbb{R}$.

(iii) Soit $(U_1, \ldots, U_p)$ une famille finie d'ouverts. Démontrons que $U \overset{\text{déf}}{=} U_1 \cap \cdots \cap U_p$ est un ouvert. Soit $x \in U$. Alors, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, x appartient à l'ouvert U_i, d'où l'existence de $r_i > 0$ tel que $]x-r_i; x+r_i[\subset U_i$. Posons $r = \min\{r_1, \ldots, r_p\}$. Alors $r > 0$ en tant que minimum d'un nombre fini de réels strictement positifs. De plus, $]x-r; x+r[$ est inclus dans chaque $]x-r_i; x+r_i[$ et donc dans chaque U_i pour $i \in [\![1;p]\!]$. Alors $]x-r; x+r[\subset U$, ce qui prouve que U est un ouvert. ■

Attention ! L'intersection d'une famille infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Ainsi, l'intersection des ouverts $]-1/n; 1/n[$ (où n parcourt $\mathbb{N}^*$) est le singleton $\{0\}$ qui n'est pas ouvert.

Exemples :

- $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. En effet, son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]k; k+1[$ est un ouvert en tant que réunion d'intervalles ouverts.

On dispose de résultats similaires pour les fermés.

Proposition 4

On a

(i) $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés ;

(ii) toute intersection de fermés est un fermé ;

(iii) l'union d'une famille finie de fermés est un fermé.

■ Il suffit de passer au complémentaire dans les propriétés de la proposition précédente. ■

Attention ! L'union d'une famille infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé, sinon toute partie de $\mathbb{R}$ serait fermée en tant que réunion de ses singletons (qui sont des fermés) !

Exemples :

- Une partie finie de $\mathbb{R}$ est toujours un fermé de $\mathbb{R}$ puisqu'elle est la réunion finie de ses singletons.

Nous verrons en TD qu'un ouvert est la réunion d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts. En revanche, décrire un fermé est nettement plus compliqué (sauf à dire que son complémentaire est un ouvert !). En effet, il existe des fermés de toute sorte : des simples (comme les parties finies) et d'autres nettement plus « moches » dont le nombre de morceaux (on parle de composantes connexes) est non dénombrable.

Terminons ce paragraphe en introduisant la notion de compacité. Nous verrons que c'est une propriété topologique fondamentale pour plusieurs résultats d'analyse.

Définition 6

On dit qu'une partie K de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$ lorsque K est à la fois fermée et bornée dans $\mathbb{R}$.

La compacité n'est pas une notion nouvelle : elle n'est que la conjonction des caractères « fermé » et « borné ». En analyse, elle permet de s'assurer que les limites restent bien dans la partie : elles ne peuvent ni s'échapper au bord, ni vers l'infini...

Exemples :

- $\varnothing$ est un compact de $\mathbb{R}$.
- Une partie finie de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
- Un segment de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Avec l'ensemble vide, ce sont les seuls intervalles qui sont compacts ; les autres ne sont ou bien pas fermés (par exemple $]a;b]$) ou bien pas bornés (par exemple $[\pi/17;+\infty[$) ou bien ni l'un ni l'autre (par exemple $\mathbb{R}_-^*$).

La proposition suivante rassemble les propriétés des compacts.

Proposition 5

On a

(i) toute intersection de compacts est un compact ;

(ii) l'union d'une famille finie de compacts est un compact.

■ AQT ■

Exemples :

- Une union finie de segments de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
- Un compact peut être nettement plus compliqué qu'on ne le pense a priori. Nous rencontrerons en TD l'ensemble de Cantor, qui est un compact dont le nombre de composantes connexes est non dénombrable et dont la longueur est nulle ! 1 h 30

b) Voisinages

La notion de « voisinage » va nous permettre de traduire mathématiquement la périphrase « à proximité immédiate de ».

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x lorsqu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $]x-r; x+r[\subset W$.

On dit qu'une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset W$ (respectivement $]-\infty; a[\subset W$).

Les liens entre les notions d'« ouvert » et de « voisinage » sont manifestement très étroits. On peut formaliser ces liens des deux façons suivantes :

- ▷ une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe un ouvert contenu dans W dont x est un élément ;
- ▷ une partie U de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, U est un voisinage de chacun de ses points.

Pour autant, il ne faut pas confondre les notions d'« ouvert » et de « voisinage ». En particulier, un voisinage peut très bien ne pas être un ouvert !

Exemples :

- $[-1; 1]$, $[-1/2; 3/4[$ et $\left]-10^{-1975}; 10^{-1975}\right[$ sont tous les trois des voisinages de 0.
- $]0; 1[\cup]1; 2[$ n'est pas un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$.

  Pour être un voisinage de $x \in \mathbb{R}$, une partie doit donc, au minimum, contenir x. Mais ce n'est pas vrai pour $\pm\infty$!
- $[0; 1]$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.
  On dit parfois que $[0; 1]$ est un voisinage lattéral droit de 0 dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie en fait que $[0; 1]$ est un voisinage de 0 pour la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\mathbb{R}$. Vous n'y comprenez plus rien ? C'est normal et ce n'est pas bien grave...
- L'ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ du logarihme est un voisinage de $+\infty$ (mais pas de $-\infty$). Cela aura donc du sens de parler de la limite de ln en $+\infty$.
- L'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ de la fonction tangente n'est pas un voisinage de $\pm\infty$. Cela n'aura donc aucun sens de parler de la limite de tan en $\pm\infty$.

La proposition suivante donne les propriétés de stabilité de la notion de voisinage.

Proposition 6

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

(i) si W est un voisinage de a dans $\mathbb{R}$ et si W' est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient W alors W' est également un voisinage de a dans $\mathbb{R}$;

(ii) si $W_1, W_2, \ldots, W_p$ sont des voisinages de a dans $\mathbb{R}$ alors $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_p$ est encore un voisinage de a dans $\mathbb{R}$.

■ AQT ■

La propriété (i) dit que la notion de voisinage est également stable par réunion mais cela ne sert quasiment à rien.

Les voisinages sont très utiles en analyse (pour le langage des limites). Ils permettent en particulier de « séparer » les points, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 7

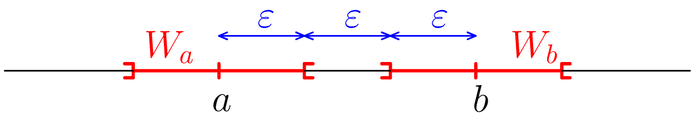
Si a, b sont deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$, on peut trouver un voisinage W_a de a et un voisinage W_b de b qui ne s'intersectent pas (i.e. $W_a \cap W_b = \varnothing$).

■ Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, on prend par exemple $W_{-\infty} =]-\infty; 0[$ et $W_{+\infty} =]0; +\infty[$.

Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, on prend par exemple $W_a =]a-1; a+1[$ et $W_{+\infty} =]a+1; +\infty[$.

Si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$, on prend par exemple $W_{-\infty} =]-\infty; b-1[$ et $W_b =]b-1; b+1[$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on traite le cas où $a < b$. Le cas $a > b$ est évidemment similaire. Posons $\varepsilon = |b-a|/3$ de sorte que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ comme l'illustre le dessin ci-dessous :



Les parties $W_a =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ et $W_b =]b-\varepsilon; b+\varepsilon[$ sont alors des voisinages disjoints respectivement de a et de b. ■

B. 3. Intérieur, adhérence et frontière

a) Intérieur

Définition 8

On dit qu'un point x de $\mathbb{R}$ est intérieur à une partie A de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une nombre réel $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset A$. Cela revient à dire que A est un voisinage de x.

On appelle intérieur de A, et l'on note $\operatorname{Int} A$, l'ensemble des points de A qui sont intérieurs à A. C'est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans A, c'est-à-dire la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

■ Démontrons tout d'abord que $\operatorname{Int} A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \operatorname{Int} A$. Comme x est intérieur à A, il existe $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset A$. Démontrons que $]x - r; x + r[\subset \operatorname{Int} A$. Soit $y \in]x - r; x + r[$. Posons $r' = \min\{d(y, x - r), d(y, x + r)\}$. On a alors $]y - r'; y + r'[\subset]x - r; x + r[\subset A$, ce qui démontre que $y \in \operatorname{Int} A$. On a ainsi démontré que $]x - r; x + r[\subset \operatorname{Int} A$. Donc $\operatorname{Int} A$ est un ouvert.

Démontrons maintenant que $\operatorname{Int} A$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Déjà, il est clair que $\operatorname{Int} A$ est contenu dans A. Par ailleurs, considérons un ouvert U contenu dans A. Comme U est ouvert, U est un voisinage de chacun de ses points. Par ailleurs, A contient U. Donc A est aussi un voisinage de chacun des points de U (propriété (i) de la proposition 6). Cela signifie que $U \subset \operatorname{Int} A$. Ainsi $\operatorname{Int} A$ contient tous les ouverts contenus dans A, ce qui prouve que $\operatorname{Int} A$ est le plus grand ouvert qui est contenu dans A. ■

Les points qui appartiennent à l'intérieur d'une partie sont ceux qui sont dans cette partie (pardi !) sans être sur son bord.

On rencontre également la notation $\mathring{A}$ pour désigner l'intérieur d'une partie.

Exemples :

- Considérons un intervalle $\rfloor a; b \lfloor$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (avec $a \leqslant b$ et la convention habituelle que les symboles égyptiens sont ouverts lorsqu'ils sont voisins de $\pm\infty$). Alors

$$\operatorname{Int} \rfloor a; b \lfloor =]a; b[.$$

En particulier,

$$\operatorname{Int} \mathbb{R} = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Int} \varnothing = \varnothing.$$

- Si A est une partie finie de $\mathbb{R}$, alors $\operatorname{Int} A = \varnothing$.
- L'intérieur de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble vide $\varnothing$.

La proposition suivante rassemble les propriétés élémentaires de l'intérieur d'une partie.

Proposition 8

Soient A, B, U trois parties de $\mathbb{R}$. On a

(i) $\operatorname{Int} A \subset A$;

(ii) si $A \subset B$, alors $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;

(iii) U est un ouvert de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\operatorname{Int} U = U$;

(iv) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

■ (i) Déjà vu.

(ii) Supposons que $A \subset B$. Comme $\operatorname{Int} A \subset A$, on a donc $\operatorname{Int} A \subset B$. Dès lors, $\operatorname{Int} A$ est un ouvert contenu dans B. Comme le plus grand ouvert contenu dans B est $\operatorname{Int} B$, on en déduit que $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

(iii) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que U est un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors, U est nécessairement le plus grand ouvert contenu dans U, ce qui démontre que $\operatorname{Int} U = U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Int} U = U$. Comme $\operatorname{Int} U$ est ouvert, U l'est aussi.

(iv) Cela découle immédiatement du (iii) puisque $\operatorname{Int} A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. ■

b) Adhérence

Définition 9

On dit qu'un point x de $\mathbb{R}$ est adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert contenant x rencontre A, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \ ]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$.

On appelle adhérence de A, et l'on note $\operatorname{Adh} A$, l'ensemble des points qui sont adhérents à A. C'est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A, c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés qui contiennent A.

■ Démontrons d'abord que

$$\boxed{\operatorname{Adh} A = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)}$$

Pour cela, on procède par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Adh} A & \iff \forall \varepsilon > 0,\ \ ]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing \\
& \iff \overline{\exists \varepsilon > 0,\ \ ]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\cap A = \varnothing} \\
& \iff \overline{\exists \varepsilon > 0,\ \ ]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A} \\
& \iff \overline{x \in \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)} \\
& \iff x \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)
\end{aligned}$$

On constate ainsi que $\operatorname{Adh} A$ est le complémentaire de l'ouvert $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$ et donc que $\operatorname{Adh} A$ est bien un fermé de $\mathbb{R}$.

De plus, si F est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant A, alors $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{R} \setminus A$. Comme $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$ est le plus gros ouvert contenu dans $\mathbb{R} \setminus A$, on a $\mathbb{R} \setminus F \subset \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$. Il s'ensuit que $\mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A) \subset F$, c'est-à-dire $\operatorname{Adh}(A) \subset F$. Donc F est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A. ■

L'adhérence d'une partie est constituée des points de la partie, mais aussi des points qui sont sur le bord de la partie (et qui n'appartiennent peut-être pas à la partie).

On rencontre également la notation $\overline{A}$ pour désigner l'adhérence d'une partie, mais ce n'est pas pratique car cela se confond avec la notation du complémentaire.

Exemples :

- Regardons ce qui se passe pour l'adhérence d'un intervalle. Tout d'abord, on a

  $$\operatorname{Adh} \varnothing = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Adh} \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

  Ensuite, si a, b sont deux réels tels que $a \leqslant b$ (avec $a \neq b$ pour l'intervalle $]a;b[$), alors

  $$\operatorname{Adh} \lfloor a;b \rceil = [a;b], \qquad \operatorname{Adh}]-\infty;b \rceil =]-\infty;b] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Adh} \lfloor a;+\infty[= [a;+\infty[.$$

- Si A est une partie finie A de $\mathbb{R}$, alors l'adhérence de A est A.
- L'adhérence de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$.
- Si elle existe, la borne supérieure (ou inférieure) d'une partie A appartient à l'adhérence de A. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A donc il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A$, ce qui démontre que $]\sup A - \varepsilon ; \sup A + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$ et donc que $\sup A \in \operatorname{Adh} A$.

Nous verrons que l'on peut traduire l'adhérence d'un point x à une partie A avec des suites.

Proposition 9

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un élément x de $\mathbb{R}$ est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

■ Nous le démontrerons dans le chapitre sur les limites de suites. ■

La proposition suivante rassemble les propriétés élémentaires de l'adhérence d'une partie.

Proposition 10

Soient A, B, F trois parties de $\mathbb{R}$. On a

(i) $A \subset \operatorname{Adh} A$;

(ii) si $A \subset B$, alors $\operatorname{Adh} A \subset \operatorname{Adh} B$;

(iii) F est un fermé de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\operatorname{Adh} F = F$;

(iv) $\operatorname{Adh}(\operatorname{Adh} A) = \operatorname{Adh} A$.

■ Cela découle de la proposition 8 et de la formule $\operatorname{Adh} A = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$. ■

Exemples :

- Si F est une partie fermée, non vide et majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$, alors F possède un maximum (respectivement un minimum). En effet, comme F est non vide et majorée, $\sup(F)$ existe et appartient à l'adhérence de F. Or F est égal à son adhérence puisque F est fermé. Donc $\sup(F) \in F$, ce qui signifie que $\sup(F) = \max(F)$.

c) *Frontière*

Définition 10

On appelle frontière d'une partie A de $\mathbb{R}$, et l'on note $\operatorname{Fr} A$, l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas intérieurs à A, c'est-à-dire $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$. C'est un fermé de $\mathbb{R}$.

■ On a $\operatorname{Fr} A = (\operatorname{Adh} A) \cap (\mathbb{R} \setminus \operatorname{Int} A)$ donc $\operatorname{Fr} A$ est un fermé en tant qu'intersection de deux fermés. ■

La frontière d'une partie est constituée des points sur le bord de la partie (ces points n'appartiennent peut-être pas à la partie).

On rencontre également la notation δA pour désigner la frontière d'une partie.

Exemples :

- On a
$$\operatorname{Fr} \varnothing = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Fr} \mathbb{R} = \varnothing.$$
Par ailleurs, si a, b sont deux réels tels que $a \leqslant b$ (avec $a \neq b$ pour l'intervalle $]a;b[$), alors
$$\operatorname{Fr} \rfloor a;b \lceil = \{a;b\}, \qquad \operatorname{Fr}]-\infty;b\lceil = \{b\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Fr} \rfloor a;+\infty[= \{a\}.$$
- $\operatorname{Fr} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
- Les parties A de $\mathbb{R}$ dont la frontière est vide sont telles que $\operatorname{Adh} A = \operatorname{Int} A$. Ce sont donc des parties à la fois ouvertes et fermées. Dans $\mathbb{R}$, seuls $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ ont cette particularité. On dit que $\mathbb{R}$ est connexe, c'est-à-dire qu'il est en un seul morceau... Vous en reparlerez l'an prochain.

B.4. Densité

L'outil développé dans ce paragraphe va nous permettre, en particulier, de préciser l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Définition 11

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de D, c'est-à-dire $\forall x < y \in \mathbb{R},\ \exists d \in D,\ x < d < y$. Dans ce cas, un tel intervalle contient en fait une infinité d'éléments de D.

En terme topologique, la densité de D dans $\mathbb{R}$ signifie que $\operatorname{Adh} D = \mathbb{R}$.

■ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Voyons comment on passe d'« au moins » un élément de D dans $]x; y[$ à une « infinité » d'éléments de D dans $]x; y[$. Il suffit pour cela de partitionner l'intervalle $]x; y[$ en une infinité de sous-intervalles (non vides et non réduits à un point), ce qui peut se faire, par exemple, par dichotomie (on coupe en deux puis on coupe en deux les deux morceaux, puis encore en deux les quatre morceaux, etc.). L'hypothèse nous dit que l'on peut trouver un élément de D à l'intérieur de chacun de ces sous-intervalles, ce qui donne une infinité d'éléments de D dans $]x; y[$.

Si D est dense dans $\mathbb{R}$, tout intervalle contient au moins un élément de D donc, en particulier, tout intervalle de la forme $]t - \varepsilon; t + \varepsilon[$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ contient un élément de D, ce qui signifie que $\operatorname{Adh} D = \mathbb{R}$. Réciproquement, si $\operatorname{Adh} D = \mathbb{R}$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $]t - \varepsilon; t + \varepsilon[\cap D \neq \varnothing$ donc, si $]x; y[$ désigne un intervalle ouvert non vide, alors, en écrivant $]x; y[$ sous la forme $]t - \varepsilon; t + \varepsilon[$ avec $t = (x + y)/2$ et $\varepsilon = (y - x)/2$, on voit que $]x; y[$ contient un élément de D, ce qui démontre que D est dense dans $\mathbb{R}$. ■

La densité de D signifie intuitivement que l'on peut trouver des éléments de D « partout » dans $\mathbb{R}$, sans que D soit nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier ! Ainsi, si l'on dessine un ensemble dense, on obtient visuellement une droite superposable à la droite réelle. Mais, en réalité, cette droite n'est pas une droite ! C'est un ensemble de points qui peut être lacunaire ; constellé de petits « trous » diffus. Autrement dit, si l'on utilise son plus joli stylo noir, l'axe réel apparaît comme une droite bien noire alors qu'une partie dense donne l'impression d'une droite plus ou moins grise.

Le programme de MPSI se limite à la densité dans $\mathbb{R}$. Mais on peut évidemment généraliser cette notion à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$: on dit qu'une partie D d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans E lorsque $\forall x < y \in E,\ \exists d \in D,\ x < d < y$.

Exemples :

- Évidemment, $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Si A est une partie finie, alors son complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On peut le justifer en invoquant le fait que $\operatorname{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{R}$ ou encore en constatant qu'entre deux réels distincts, il y a toujours un nombre non entier.

Signalons que la densité d'un ensemble peut également être traduite en terme d'approximation ou encore dans le langage des suites.

Proposition 11

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe dans D une approximation de x à ε près, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists d \in D,\ |x - d| \leqslant \varepsilon$.

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers x.

■ La première de ces deux équivalences est une traduction directe de la propriété topologique $\operatorname{Adh} D = \mathbb{R}$.
La seconde équivalence sera démontrée dans le chapitre sur les limites de suites. ■

Les exemples vus jusqu'ici ne sont pas bien folichons. Pour trouver des parties denses plus intéressantes, il faut aller fouiner du côté des rationnels et des irrationnels.

Théorème 3

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels sont tous les deux denses dans $\mathbb{R}$.

■ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On va prouver l'existence d'un rationnel et d'un irrationnel dans $]x; y[$.

▷ Endossons notre plus joli déguisement de grenouille et plaçons-nous en 0. La mare est située entre l'abscisse x et l'abscisse y. Comment doit-on choisir la longueur de nos bonds pour être sûr de finir la bedaine bien au frais, à barboter avec nos amis les canards ? C'est simple, il faut que la longueur du bond soit inférieure à celle de la mare !

Formalisons un peu...
On traite le cas où $0 < x < y$. Le cas $x < y < 0$ se traite de manière similaire et le cas $x < 0 < y$ est une formalité puisque 0 est lui-même rationnel.
Posons $d = y - x$ et prenons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < d$ (il suffit de prendre $n = \lfloor 1/d \rfloor + 1$). Nous partons alors de 0 en effectuant des pas de longueur $1/n$, autrement dit, on considère la famille $(k/n)_{k\in\mathbb{N}}$. Si aucun élément de cette famille n'appartient à l'intervalle $]x; y[$, c'est qu'il existe deux éléments consécutifs p/n et $(p+1)/n$ (où $p \in \mathbb{N}$) tels que $p/n \leqslant x < y \leqslant (p+1)/n$. Mézalors $(p+1)/n - p/n \geqslant y - x$, c'est-à-dire $1/n \geqslant d$, ce qui est absurde ! D'où l'existence d'un terme k/n dans l'intervalle $]x; y[$. On a ainsi trouvé notre rationnel entre x et y.

▷ Pour démontrer la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on utilise celle de $\mathbb{Q}$: on sait qu'il existe un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $\left]x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}\right[$, ce qui prouve que $r + \sqrt{2} \in]x; y[$. Comme $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a ainsi trouvé notre irrationnel entre x et y. ■

Ce théorème exprime donc que les rationnels et les irrationnels sont intimement liés au sein de la droite réelle : entre deux rationnels, on trouve toujours un irrationnel et entre deux irrationnels, il y a toujours un rationnel.

À première vue, cela peut paraître surprenant puisqu'il y a beaucoup plus d'irrationnels que de rationnels : on sait en effet que $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais pas $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cet apparent paradoxe découle de la présentation malicieuse que je viens de faire de l'entrelacement entre les rationnels et les irrationnels. En fait, pour être plus précis, il aurait fallu dire qu'entre deux rationnels, on trouve une infinité non dénombrable d'irrationnels alors qu'entre deux irrationnels, on trouve une infinité dénombrable de rationnels !

On peut encore voir les choses d'une autre manière. Comme on l'a dit, si l'on dessine à l'encre noire une partie dense de $\mathbb{R}$, on obtient une pseudo-droite plus ou moins grise (pseudo car mitraillée d'infimes petits trous). Avec cette interprétation, la pseudo-droite des irrationnelles est d'un gris très foncé alors que celle des rationnels est, au contraire, d'un gris très clair !

Avec le vocabulaire de la topologie, la densité dans $\mathbb{R}$ des rationnels et des irrationnels revient à dire que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses et d'intérieurs vides dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Adh} \mathbb{Q} = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Adh} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Int} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \varnothing.$$

Pour terminer, donnons un exemple où le concept de densité intervient. Dans l'énoncé suivant, on donne une description des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Ce résultat est à rapprocher de celui qui décrivait les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Théorème 4

Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ou bien dense dans $\mathbb{R}$.

4 h 00

■ Nous traiterons cette démonstration en exercice. ■

$\mathcal{B}$.5. Convexité

Définition 12

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque $\forall x, y \in A,\ [x;y] \subset A$.

La proposition suivante caractérise les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Proposition 12

Une partie I de $\mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, I est un intervalle.

■ On procède par double-implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Les intervalles sont clairement convexes. Il suffit de le vérifier sur les 9 types d'intervalles existants.

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, soit I une partie convexe de $\mathbb{R}$.
Si $I = \varnothing$, alors I est un intervalle. Sinon, on considère un élément $c \in I$ et l'on définit les parties

$$G_c = \{x \in I : x \leqslant c\} = I \cap \,]-\infty;c] \qquad \text{et} \qquad D_c = \{x \in I : x \geqslant c\} = I \cap [c;+\infty[\,.$$

On distingue alors deux cas :

▷ Supposons que D_c n'est pas majorée et démontrons que $D_c = [c;+\infty[$.
L'inclusion $D_c \subset [c;+\infty[$ est évidente.
Soit $x \in [c;+\infty[$. Comme D_c n'est pas majorée, il existe $d \in D_c$ tel que $d \geqslant x$. On a alors $c \leqslant x \leqslant d$ et $c, d \in I$, d'où $x \in I$ puisque I est convexe et donc $x \in D_c$. Ainsi, $[c;+\infty[\, \subset D_c$.
On a donc bien $D_c = [c;+\infty[$.

▷ Supposons que D_c est majorée, posons $b = \sup D_c$ et démontrons que $D_c = [c;b[$ ou $D_c = [c;b]$.
L'inclusion $D_c \subset [c;b]$ est évidente.
Soit $x \in [c;b[$. Comme $x < b$, le nombre x n'est pas un majorant de D_c, donc il existe $d \in D_d$ tel que $x \leqslant d \leqslant b$. Mézalors, on a $c \leqslant x \leqslant d$ avec $c, d \in I$ donc $x \in I$ puisque I est convexe, ce qui donne $x \in D_c$. Donc $[c;b[\, \subset D_c$.
On a donc bien $D_c = [c;b[$ ou $D_c = [c;b]$.

Par conséquent, D_c est l'un des trois intervalles $[c;+\infty[$, $[c;b[$ ou $[c;b]$.
De même, on obtient que G_c est de la forme $]-\infty;c]$, $]a;c]$ ou $[a;c]$ avec $a = \inf G_c$ si G_c est minorée.
Comme $I = G_c \cup D_c$, on voit alors que I est un intervalle de $\mathbb{R}$. ■

On peut donc retenir, en substance, que dans $\mathbb{R}$ les mots « convexe » et « intervalle » sont synonymes. Cela justifie pleinement l'interprétation faite à propos des intervalles dans le chapitre sur les nombres : les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ que l'on peut dessiner sans lever le crayon.

On peut alors énoncer les propriétés de stabilité de la notion d'intervalle.

Proposition 13

On a

(i) l'intersection d'une famille (finie ou infinie) d'intervalles est un intervalle ;

(ii) si une famille d'intervalles est d'intersection non vide, alors la réunion des intervalles de cette famille est un intervalle.

■ Dans le deux cas, on travaille avec la convexité plutôt qu'avec la notion d'intervalle. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}$. On note K leur intersection et L leur réunion.

(i) Soient $a, b \in K$. Alors $a, b \in I_j$ pour tout $j \in J$ et comme I_j est convexe, on a $[a;b] \subset I_j$ pour tout $j \in J$. Cela démontre que $[a;b] \subset K$. Ainsi K est bien un convexe.

(ii) On suppose que $K \neq \varnothing$, ce qui autorise à prendre $c \in K$. Soient $a, b \in L$. Il existe alors $j_1, j_2 \in J$ tels que $a \in I_{j_1}$ et $b \in I_{j_2}$. Comme $c \in I_{j_1}$ et $c \in I_{j_2}$ et comme I_{j_1} et I_{j_2} sont des convexes, on a $[a,c] \subset I_{j_1}$ et $[c,b] \subset I_{j_2}$ (avec l'ordre de a et c d'une part et celui de b et c d'autre part qu'il faut peut-être inverser). Mézalors $[a;c] \cup [c;b] \subset I_{j_1} \cup I_{j_2}$, c'est-à-dire $[a;b] \subset I_{j_1} \cup I_{j_2}$. A fortiori, on a $[a;b] \subset L$. Ainsi L est bien un convexe. ■

4 h 45