LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

A. Révision du cours

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Il existe des assertions mathématiques qui sont un peu vraies, un peu fausses.
2. Toutes les propriétés mathématiques sont des assertions.
3. La négation de (f est une fonction impaire) est (f est une fonction paire).
4. Lorsque la propriété ($\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$) est vraie, la propriété ($\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$) l'est aussi.
5. Lorsque la propriété ($\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$) est vraie, la propriété ($\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$) l'est aussi.
6. Lorsqu'on me propose $\big($(fromage et crême brulée) ou (fromage et île flottante)$\big)$, je peux prendre les deux et obtenir par conséquent deux fois du fromage !!
7. Lorsque $\mathscr{P}$ est fausse et ($\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$), alors $\mathscr{Q}$ est également fausse.
8. L'équivalence ($\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$) signifie que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux vraies.
9. Lorsque ($\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$) et ($\overline{\mathscr{P}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{Q}}$) sont vraies, $\mathscr{P}$ est équivalente à $\mathscr{Q}$.
10. La négation de ($\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$) est $\big(\mathscr{P} \Longrightarrow \overline{\mathscr{Q}}\big)$.
11. Si A, B et D sont trois parties de E telles que $D \subset A \cup B$, alors $D \subset A$ ou $D \subset B$.
12. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cup B = \varnothing$, on a $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$.
13. Lorsque A et B sont deux parties de E telles que $A \cap B = E$, on a $A = E$ et $B = E$.
14. Il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathscr{P}(E) = \varnothing$.
15. Lorsque $\{x, y\} = \{a, b\}$, on a $x = a$ et $y = b$.
16. Lorsque $(x, y) = (a, b)$, on a $x = a$ et $y = b$.
17. L'assertion $\exists x \in \varnothing,\ \forall y \in \varnothing,\ x < y$ est vraie.
18. L'assertion $\forall x \in \varnothing,\ \exists y \in \varnothing,\ x < y$ est vraie.
19. Dans une assertion, l'ordre des quantificateurs n'a aucune importance.

1. Faux.
2. Faux car la propriété ($x > 1$) dépend d'un paramètre et ne devient donc une assertion qu'après spécification de ce paramètre. C'est un *prédicat*.
3. Faux.
4. Vrai.
5. Faux.
6. Faux car je peux prendre les deux mais je n'aurai qu'une seule fois du fromage car $\big($(fromage et crême brulée) ou (fromage et île flottante)$\big)$ est équivalent à $\big($fromage et (crême brulée ou île flottante)$\big)$.
7. Faux, car le faux implique tout, même le vrai.
8. Faux.
9. Vrai.
10. Faux car $\big(\overline{\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}}\big)$ impose que $\mathscr{P}$ soit vraie alors que $\big(\mathscr{P} \Longrightarrow \overline{\mathscr{Q}}\big)$ laisse la possibilité que $\mathscr{P}$ soit fausse.
11. Faux. Prendre $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$ et $D = \{1, 2\}$.
12. Vrai.
13. Vrai.
14. Vrai.

15. Faux.
16. Vrai.
17. Faux.
18. Vrai.
19. Faux.

B. Logique et quantificateurs

♦ **Exercice 2.** [○]
Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Il suffit qu'un réel soit strictement supérieur à 2 pour qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Pour qu'un entier soit supérieur ou égal à 1, il faut et suffit qu'il soit strictement positif.
3. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

1. Faux. Prendre $2,5$
2. Vrai.
3. Faux. Prendre -3

♦ **Exercice 3.** [○]
Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$ trois assertions.

1. Démontrer que $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \Longrightarrow \big((\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{P}) \Longrightarrow (\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{Q})\big)$.
2. Les assertions $\mathscr{P} \Longrightarrow (\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{R})$ et $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \Longrightarrow \mathscr{R}$ sont-elles équivalentes ?

1. Supposons que $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$ et démontrons que $(\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{P}) \Longrightarrow (\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{Q})$.
   Supposons que $(\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{P})$ et démontrons que $(\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{Q})$.
   Comme $(\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{P})$ et $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$, le syllogisme dit que $(\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{Q})$.
   Donc
   $$\boxed{(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \Longrightarrow \big((\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{P}) \Longrightarrow (\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{Q})\big).}$$
2. Faire des tables de vérité pour constater que
   $$\boxed{\mathscr{P} \Longrightarrow (\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{R}) \text{ et } (\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \Longrightarrow \mathscr{R} \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

♦ **Exercice 4.** [○]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
   b) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;
   c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
   d) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
   e) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang) ;
   f) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Inversement, traduire en langage « clair » les assertions suivantes :
   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ u_p = 0$;
   b) $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ u_p < u_n$;
   c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ u_p \neq u_n$.

1. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
   b) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
   c) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
e) $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = a$.
f) $\exists T \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_{n+T} = u_n$.

2. a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois.
b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

♦ ***Exercice 5.*** [∘]
Donner (en justifiant) la valeur booléenne de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs.

- Démontrons que l'assertion proposée : $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est fausse.
  Supposons pour cela l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = x_0 y$ et choisissons $y = 1/x_0$ et $z = 2$ de sorte que l'on obtienne $2 = 1$: absurde !
- Démontrons que l'assertion $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est également fausse.
  Si elle était vraie, en prenant $y = 1$, on aurait l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = x_0$, ce qui est bien sûr absurde (prendre $z = x_0 + 1$ par exemple).
- Démontrons que l'assertion $\forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est encore fausse.
  Si elle était vraie, en prenant $z = 1$, on aurait l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ y = 1/x_0$, ce qui est bien sûr absurde (prendre $y = 1/x_0 + 1$ par exemple).
- Démontrons que l'assertion $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est vraie.
  Soient $y, z \in \mathbb{R}^*$. Prenons $x = z/y$ de sorte que l'on ait bien $z = xy$. C'est gagné !

♦ ***Exercice 6.*** [∘]
Les lettres $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x, compléter à l'aide des symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, les propriétés mathématiques suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
\big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)\big) & \ldots & \big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ et } \big(\forall x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)\big) & \ldots & \big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ et } \big(\exists x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{Q}(x)\big) & \ldots & \big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ ou } \big(\forall x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{Q}(x)\big) & \ldots & \big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ ou } \big(\exists x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big).
\end{array}$$

On a

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)\big) & \Longleftrightarrow & \big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ et } \big(\forall x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)\big) & \Longrightarrow & \big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ et } \big(\exists x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{Q}(x)\big) & \Longleftarrow & \big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ ou } \big(\forall x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big),\\
\big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{Q}(x)\big) & \Longleftrightarrow & \big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ ou } \big(\exists x \in E,\ \mathscr{Q}(x)\big).
\end{array}}$$

♦ ***Exercice 7.*** [∘]
Soient a, b et c trois nombres réels tels que $c > a + b$. Démontrer qu'il existe $a' > a$ et $b' > b$ tels que $a' + b' = c$.

Posons

$$a' = a + \frac{c-(a+b)}{2} \qquad \text{et} \qquad b' = b + \frac{c-(a+b)}{2}.$$

Comme $c > a + b$, on a

$$a' > a \qquad \text{et} \qquad b' > b.$$

Par ailleurs, on a

$$a' + b' = a + \frac{c-(a+b)}{2} + b + \frac{c-(a+b)}{2} = a + b + c - (a+b) = c.$$

Donc

$$\boxed{\text{il existe } a' > a \text{ et } b' > b \text{ tels que } a' + b' = c.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\circ$]
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1\leqslant x<y$,
2. $(x^2=1)\Longrightarrow x=1$,
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x+y=0$.
4. $\forall x\in E,\ \forall x'\in E,\ (x\neq x')\Longrightarrow f(x)\neq f(x')$.
5. $\forall(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ (A\cap B=\varnothing)\Longrightarrow(A=\varnothing \text{ ou } B=\varnothing)$.

1. $x<1$ ou $x\geqslant y$.
2. $x^2=1$ et $x\neq 1$ (ce qui est équivalent à $x=-1$ si x est un nombre réel).
3. $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x+y\neq 0$.
4. $\exists(x,x')\in E^2,\ x\neq x'$ et $f(x)=f(x')$.
5. $\exists(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ (A\cap B=\varnothing)$ et $(A\neq\varnothing$ et $B\neq\varnothing)$.

C. Ensembles

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
Démontrer que $\{x\in\mathbb{R} : \exists a\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists b\in\mathbb{R}_-^*,\ x=a+b\}=\mathbb{R}$.

Posons $E=\{x\in\mathbb{R} : \exists a\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists b\in\mathbb{R}_-^*,\ x=a+b\}$ et démontrons que $E=\mathbb{R}$ par double inclusion.

L'inclusion $\subset$ est évidente.

Démontrons l'inclusion $\supset$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x>0$, on écrit $x=(x+1)+(-1)$ (c'est Binet !) avec $x+1\in\mathbb{R}_+^*$ et $-1\in\mathbb{R}_-^*$. Si $x<0$, on écrit $x=1+(x-1)$ (c'est encore Binet !) avec $1\in\mathbb{R}_+^*$ et $x-1\in\mathbb{R}_-^*$. Enfin, si $x=0$, on écrit $x=1+(-1)$ (et oui, et oui, c'est toujours Binet !) avec $1\in\mathbb{R}_+^*$ et $-1\in\mathbb{R}_-^*$. Donc $x\in E$. Cela démontre l'inclusion $\supset$.

En conclusion, on a

$$\boxed{\{x\in\mathbb{R} : \exists a\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists b\in\mathbb{R}_-^*,\ x=a+b\}=\mathbb{R}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [$\circ$]
Soient E un ensemble et A,B,D trois parties de E. Démontrer que :

1. $A\setminus B=\overline{B}\setminus\overline{A}$,
2. $A\setminus(B\cap D)=(A\setminus B)\cup(A\setminus D)$,
3. $A\setminus(B\cup D)=(A\setminus B)\cap(A\setminus D)$;
4. $(A\cup B)\cap(B\cup D)\cap(D\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap D)\cup(D\cap A)$.

1. Deux solutions :
   - On a
   $$A\setminus B=A\cap\overline{B}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}=\overline{B}\setminus\overline{A}.$$
   - Pour tout $x\in E$, on a
   $$\begin{aligned} x\in A\setminus B &\iff x\in A \text{ et } x\notin B\\ &\iff x\notin\overline{A} \text{ et } x\in\overline{B}\\ &\iff x\in\overline{B}\setminus\overline{A}.\end{aligned}$$

   Donc
   $$\boxed{A\setminus B=\overline{B}\setminus\overline{A}.}$$
2. Deux solutions :
   - On a
   $$A\setminus(B\cap D)=A\cap\overline{B\cap D}=A\cap(\overline{B}\cup\overline{D})=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{D})=(A\setminus B)\cup(A\setminus D).$$

- Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} x \in A \setminus (B \cap D) & \iff & x \in A \text{ et } x \notin B \cap D \\ & \iff & x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin D) \\ & \iff & (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \notin D) \\ & \iff & (x \in A \setminus B) \text{ ou } (x \in A \setminus D) \\ & \iff & x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus D). \end{array}$$

Donc

$$\boxed{A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D).}$$

3. Deux solutions :
   - On a

$$A \setminus (B \cup D) = A \cap \overline{B \cup D} = A \cap \overline{B} \cap \overline{D} = A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{D} = (A \setminus B) \cap (A \setminus D).$$

   - Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} x \in A \setminus (B \cup D) & \iff & x \in A \text{ et } x \notin B \cup D \\ & \iff & x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin D \\ & \iff & (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin D) \\ & \iff & (x \in A \setminus B) \text{ et } (x \in A \setminus D) \\ & \iff & x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus D) \end{array}$$

Donc

$$\boxed{A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D).}$$

4. Deux solutions :
   - On a

$$\begin{array}{rl} & (A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) \\ = & \big((A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap B) \cup (B \cap D)\big) \cap (D \cup A) \\ = & \big((A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)\big) \cap (D \cup A) \\ = & (A \cap B \cap D) \cup (A \cap D \cap D) \cup (B \cap D \cap D) \cup (A \cap B \cap A) \cup (A \cap D \cap A) \cup (B \cap D \cap A) \\ = & (A \cap B \cap D) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D \cap A) \\ = & (A \cap B \cap D) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (A \cap B) \\ = & (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (A \cap B) \qquad \text{car } A \cap B \cap D \text{ est inclus dans } A \cap D,\ B \cap D \text{ et } A \cap B. \end{array}$$

   - Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} x \in (A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) & \iff & x \in A \cup B \text{ et } x \in B \cup D \text{ et } x \in D \cup A \\ & \iff & (x \in A \cup B \text{ et } x \in B \cup D) \text{ et } (x \in D \text{ ou } x \in A) \\ & \iff & (x \in A \cup B \text{ et } x \in B \cup D \text{ et } x \in D) \text{ ou } \\ & & \quad (x \in A \cup B \text{ et } x \in B \cup D \text{ et } x \in A) \\ & \iff & (x \in A \cup B \text{ et } x \in D) \text{ ou } (x \in B \cup D \text{ et } x \in A) \\ & \iff & \big((x \in A \cup B \text{ et } x \in D) \text{ ou } x \in B \cup D\big) \text{ et } \\ & & \quad \big((x \in A \cup B \text{ et } x \in D) \text{ ou } x \in A\big) \\ & \iff & \big((x \in A \cup B \text{ ou } x \in B \cup D) \text{ et } (x \in D \text{ ou } x \in B \cup D\big) \text{ et } \\ & & \quad \big((x \in A \cup B \text{ ou } x \in A) \text{ et } (x \in D \text{ ou } x \in A)\big) \\ & \iff & x \in B \cup D \text{ et } x \in A \cup B \text{ et } x \in D \cup A \\ & \iff & x \in (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A) \end{array}$$

Donc

$$\boxed{(A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A).}$$

♦ ***Exercice 11.*** [$\circ$]

Soient E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E. Démontrer que :

1. $(A \cap B = A \cup B) \Longleftrightarrow (A = B)$;
2. $(A \cup B = B \cap C) \Longleftrightarrow (A \subset B \subset C)$;
3. $\big((A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C)\big) \Longrightarrow (B \subset C)$;
4. $\big((A \cup B = A \cap C)$ et $(B \cup C = B \cap A)$ et $(C \cup A = C \cap B)\big) \Longrightarrow (A = B = C)$;
5. $\big((A \subset C)$ et $(B \subset D)$ et $(C \cap D = \varnothing)$ et $(A \cup B = C \cup D)\big) \Longrightarrow \big((A = C)$ et $(B = D)\big)$.

1. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $A = B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = A$ donc $A \cap B = A \cup B$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons réciproquement que $A \cap B = A \cup B$.
   Soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$, donc $a \in A \cap B$, d'où $a \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
   On procède de même pour démontrer que $B \subset A$.
   Donc $A = B$.

   En conclusion,
   $$\boxed{(A \cap B = A \cup B) \quad \Longleftrightarrow \quad (A = B).}$$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $A \subset B \subset C$, alors $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$, d'où $A \cup B = B \cap C$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons réciproquement que $A \cup B = B \cap C$.
   Soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$, donc $a \in B \cap C$, d'où $a \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
   Soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$, donc $b \in B \cap C$, d'où $b \in C$. Ainsi, $B \subset C$.
   Donc $A \subset B \subset C$.

   En conclusion,
   $$\boxed{(A \cup B = B \cap C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subset B \subset C).}$$

3. Supposons que $(A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C)$.
   Soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$, donc $b \in A \cup C$, ce qui signifie que $b \in A$ ou $b \in C$. Or, si $b \in A$, on a $b \in A \cap B$, d'où $b \in A \cap C$, ce qui donne $b \in C$. Ainsi, dans tous les cas, on a $b \in C$. Donc $B \subset C$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\big((A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C)\big) \Longrightarrow (B \subset C).}$$

4. Supposons que $(A \cup B = A \cap C)$ et $(B \cup C = B \cap A)$ et $(C \cup A = C \cap B)$.
   Soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup C$, donc $a \in C \cap B$, d'où $a \in B$ et $a \in C$. Donc $A \subset B$ et $A \subset C$.
   Soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$, donc $b \in A \cap C$, d'où $b \in A$ et $b \in C$. Donc $B \subset A$ et $B \subset C$.
   Soit $c \in C$. Alors $c \in B \cup C$, donc $c \in B \cap A$, d'où $c \in B$ et $c \in A$. Donc $C \subset B$ et $C \subset A$.
   Donc $A = B = C$.
   En conclusion,
   $$\boxed{\big((A \cup B = A \cap C) \text{ et } (B \cup C = B \cap A) \text{ et } (C \cup A = C \cap B)\big) \Longrightarrow (A = B = C).}$$

5. Supposons que $(A \subset C)$ et $(B \subset D)$ et $(C \cap D = \varnothing)$ et $(A \cup B = C \cup D)$.

   L'inclusion $A \subset C$ faisant partie des hypothèses, il reste à démontrer que $C \subset A$ pour justifier que $A = C$.
   Soit $c \in C$. On a $c \in C \cup D$, donc $c \in A \cup B$, ce qui signifie que $c \in A$ ou $c \in B$. Si $c \in B$, on a $c \in D$, mézalors $c \in C \cap D$, c'est-à-dire $c \in \varnothing$, ce qui évidemment pas possible. Il ne reste donc que la possibilité $c \in A$. Donc $C \subset A$.
   Ainsi, $A = C$.

   On démontre de même que $B = D$.

   En conclusion,
   $$\boxed{\big((A \subset C) \text{ et } (B \subset D) \text{ et } (C \cap D = \varnothing) \text{ et } (A \cup B = C \cup D)\big) \Longrightarrow \big((A = C) \text{ et } (B = D)\big).}$$

♦ ***Exercice 12.*** [⋆] (La différence symétrique)

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E, on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A\Delta B$ définie par

$$A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

1. Justifier l'égalité affirmée par la définition ci-dessus. *Faire un dessin est une excellente idée mais ne constitue pas une démonstration.*
2. Soient A, B deux parties de E. Vérifier que $(A\Delta B=\varnothing)\iff(A=B)$.

   Cela rend la différence symétrique utile pour la théorie de la reconnaissance des formes (par exemple en informatique) : les ensembles A et B se ressemblent d'autant plus que la différence symétrique $A\Delta B$ est « petite ».
3. a) Justifier que l'opération Δ est commutative.
   b) Donner l'élément neutre de l'opération Δ.
   c) Démontrer que l'opération Δ est associative.
   d) Démontrer que $\cap$ est distributive sur Δ mais que Δ n'est pas distributive sur $\cap$.
4. a) Démontrer que toute partie A de E admet un symétrique pour la loi Δ, c'est-à-dire qu'il existe $A'\in\mathscr{P}(E)$ tel que $A\Delta A'=\varnothing$.
   b) Soient A, B, C trois parties de E. Démontrer que $(A\Delta B = A\Delta C)\iff(B=C)$. On dit que l'opération Δ est régulière, c'est-à-dire que l'on peut faire des simplifications.
5. Soient A, B deux parties de E. Démontrer que $\overline{A\Delta B}=\overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$.

1. On a

$$\begin{aligned}(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) &= \underbrace{(A\cup\overline{A})}_{=E}\cap(A\cup B)\cap\underbrace{(\overline{B}\cup\overline{A})}_{=\overline{A\cap B}}\cap\underbrace{(\overline{B}\cup B)}_{=E}\\ &= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\\ &= (A\cup B)\setminus(A\cap B),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{l'égalité de la définition est valide.}}$$

2. On a

$$\begin{aligned}(A\Delta B=\varnothing) &\iff (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\varnothing\\ &\iff A\cap\overline{B}=\varnothing \quad\text{et}\quad \overline{A}\cap B=\varnothing\\ &\iff A\subset B\quad\text{et}\quad B\subset A\\ &\iff A=B,\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(A\Delta B=\varnothing)\iff(A=B).}$$

3. a) Pour tous $A, B\in E$, on a

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (B\cup A)\setminus(B\cap A) = B\Delta A,$$

donc

$$\boxed{\Delta \text{ est commutative.}}$$

   b) Pour tout $A\subset E$, on a

$$A\Delta\varnothing = (A\cup\varnothing)\setminus(A\cap\varnothing) = A\setminus\varnothing = A,$$

donc

$$\boxed{\varnothing \text{ est l'élément neutre de } \Delta \text{ dans } \mathscr{P}(E).}$$

c) Pour tous $A, B, C \subset E$, on a

$$\begin{aligned}
& (A\Delta B)\Delta C \\
= \; & \big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\Delta C \\
= \; & \big[\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\cap\overline{C}\big]\cup\big[\overline{\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)}\cap C\big] \\
= \; & (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup\big(\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap B)}\cap C\big) \\
= \; & (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup\big((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap C\big) \\
= \; & (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup\underbrace{(\overline{A}\cap A\cap C)}_{=\varnothing}\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(B\cap A\cap C)\cup\underbrace{(B\cap\overline{B}\cap C)}_{=\varnothing} \\
= \; & (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).
\end{aligned}$$

On constate que cette expression est symétrique en A, B, C, donc elle est aussi égale à $(B\Delta C)\Delta A$, c'est-à-dire $A\Delta(B\Delta C)$ puisque Δ est commutative. On a donc

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C),$$

ce qui donne

$$\boxed{\Delta \text{ est associative.}}$$

d) Pour tous $A, B, C \subset E$, on a

$$(A\Delta B)\cap C = \big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\cap C = (A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$$

et

$$\begin{aligned}
(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= (A\cap C\cap\overline{B\cap C})\cup(\overline{A\cap C}\cap B\cap C) \\
&= \big(A\cap C\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\big)\cup\big((\overline{A}\cup\overline{C})\cap B\cap C\big) \\
&= \big((A\cap C\cap\overline{B})\cup\underbrace{(A\cap C\cap\overline{C})}_{=\varnothing}\big)\cup\big((\overline{A}\cap B\cap C)\cup\underbrace{(\overline{C}\cap B\cap C)}_{=\varnothing}\big) \\
&= (A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C),
\end{aligned}$$

donc

$$(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C).$$

Cela prouve que

$$\boxed{\cap \text{ est distributive sur } \Delta}$$

On a

$$E\Delta(E\cap\varnothing) = E\Delta\varnothing = E$$

et

$$(E\Delta E)\cap(E\Delta\varnothing) = \varnothing\cap E = \varnothing,$$

donc, comme $E \neq \varnothing$,

$$E\Delta(E\cap\varnothing) \neq (E\Delta E)\cap(E\Delta\varnothing),$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\Delta \text{ n'est pas distributive sur } \cap.}$$

4. a) On constate que $A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \varnothing$, donc

$$\boxed{\text{toute partie } A \text{ de } E \text{ est son propre symétrique pour la loi } \Delta.}$$

b) Si $B = C$, il est clair que $A\Delta B = A\Delta C$.

Réciproquement, supposons que $A\Delta B = A\Delta C$. En faisant la différence symétrique par A, on obtient $A\Delta A\Delta B = A\Delta A\Delta C$. Or $A\Delta A = \varnothing$, donc $\varnothing\Delta B = \varnothing\Delta C$, c'est-à-dire $B = C$.

En conclusion,

$$\boxed{\Delta \text{ est régulière.}}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)}\\
&= (\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\\
&= \underbrace{(\overline{A}\cap A)}_{=\varnothing}\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup\underbrace{(B\cap\overline{B})}_{=\varnothing}\\
&= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{\overline{A}}\cap B),
\end{aligned}$$

ce qui donne effectivement

$$\boxed{\overline{A\Delta B}=\overline{A}\Delta B=A\Delta\overline{B}.}$$

On en conclut que

$$\boxed{A\Delta B=\overline{A}\Delta\overline{B}.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\circ$]
Soit $E=\{a,b\}$. À quels ensembles appartiennent les couples suivants :

$$(a,b),\qquad (a,\{b\}),\qquad (E,a)\qquad \text{et}\qquad (\varnothing,\{a\})\,?$$

On a

$$\boxed{(a,b)\in E^2,\qquad (a,\{b\})\in E\times\mathscr{P}(E),\qquad (E,a)\in\mathscr{P}(E)\times E\qquad \text{et}\qquad (\varnothing,\{a\})\in\mathscr{P}(E)^2.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\circ$]
Soient E et F deux ensembles. Démontrer que $E=F$ si, et seulement si, $\mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F)$.

Si $E=F$, il est clair que $\mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F)$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F)$ et démontrons que $E=F$. Soit $x\in E$. On a alors $\{x\}\in\mathscr{P}(E)$, ce qui donne $\{x\}\in\mathscr{P}(F)$, c'est-à-dire $x\in F$. Donc $E\subset F$. On montre de même que $F\subset E$. Donc $E=F$.

Ainsi,

$$\boxed{E=F \text{ si, et seulement si, } \mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F).}$$

♦ ***Exercice 15.*** [$\star$]
Soient E un ensemble et A,B deux parties de E.

1. Démontrer que $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subset\mathscr{P}(A\cup B)$ et $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$.
2. Démontrer qu'en général la première inclusion ci-dessus n'est pas une égalité.
3. Démontrer que $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cup B)$ si, et seulement si, $A\subset B$ ou $B\subset A$.

1. Soit $C\in\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$, alors $C\subset A$ ou $C\subset B$, donc $C\subset A\cup B$, c'est-à-dire $C\in\mathscr{P}(A\cup B)$. On a donc bien démontré que
$$\boxed{\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subset\mathscr{P}(A\cup B).}$$
Soit $C\in\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$, alors $C\subset A$ et $C\subset B$, donc $C\subset A\cap B$, c'est-à-dire $C\in\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$. Donc $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)\subset\mathscr{P}(A\cap B)$. Soit $C\in\mathscr{P}(A\cap B)$, alors $C\subset A\cap B$, donc $C\subset A$ et $C\subset B$, c'est-à-dire $C\in\mathscr{P}(A)$ et $C\in\mathscr{P}(B)$, ou encore $C\in\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$. D'où $\mathscr{P}(A\cap B)\subset\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$. On a donc bien démontré que
$$\boxed{\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B).}$$
2. Considérons les deux ensembles $A=\{1,2\}$ et $B=\{2,3\}$. On a alors $\mathscr{P}(A)=\big\{\varnothing,\{1\},\{2\},A\big\}$, $\mathscr{P}(B)=\big\{\varnothing,\{2\},\{3\},B\big\}$, $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)=\big\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},A,B\big\}$, $A\cup B=\{1,2,3\}$ et enfin $\mathscr{P}(A\cup B)=\big\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},A\cup B\big\}$. On constate donc bien, dans ce cas, que $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subsetneq\mathscr{P}(A\cup B)$. En conclusion,
$$\boxed{\text{en général, } \mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\supset\mathscr{P}(A\cup B) \text{ n'est pas vraie.}}$$

3. $\Leftarrow$ AQT

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$ et déduisons en que $A \subset B$ ou $B \subset A$. On donne deux démonstrations.

- On a $A \cup B \in \mathscr{P}(A \cup B)$ donc $A \cup B \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. Cela implique que $A \cup B \in \mathscr{P}(A)$ ou $A \cup B \in \mathscr{P}(B)$. Cela signifie que $A \cup B \subset A$ ou $A \cup B \subset B$, c'est-à-dire $B \subset A$ ou $A \subset B$.
- Supposons pour cela que $B \not\subset A$ et considérons un élément x appartenant à A. Nous voulons démontré que x appartient à B. On sait qu'il existe un élément y appartenant à B et pas à A. Considérons la partie $C = \{x, y\}$. C'est une partie de $A \cup B$ et donc, par hypothèse, aussi un élément de $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$, c'est-à-dire ou bien une partie de A, ou bien une partie de B. Mais, y n'appartenant pas à A, C ne peut être qu'une partie de B. Cela implique bien que x appartient à B et termine notre démonstration.

Donc

$$\boxed{\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B) \text{ si, et seulement si, } A \subset B \text{ ou } B \subset A.}$$

D. Modes de raisonnements

♦ ***Exercice 16.*** [$\star$]
Démontrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit un rationnel. *Utiliser* $\sqrt{2}$.

Considérons le nombre $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Selon le tiers exclus, x est un rationnel ou bien ne l'est pas. S'il l'est, le résultat est établi puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. S'il ne l'est pas, on choisit $a = x$ (qui est donc irrationnel) et $b = \sqrt{2}$ (qui est aussi irrationnel) de sorte que $a^b = 2$, ce qui finit d'établir notre résultat. En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe deux irrationnels } a \text{ et } b \text{ tels que } a^b \text{ soit un rationnel.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [$\circ$]
Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Démontrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.

Raisonnons par l'absurde. Si tous les tiroirs contiennent strictement moins de 5 chaussettes, ils en contiennent au plus quatre chacun. Il y a donc au plus $4n$ chaussettes dans les tiroirs. C'est absurde ! Donc

$$\boxed{\text{l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.}}$$

♦ ***Exercice 18.*** [$\circ$]
Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Supposons que $x \neq 1$ et $y \neq 1$ puis raisonnons par l'absurde. Si $xy+1-x-y = 0$, on a $(1-x)(1-y) = 0$, donc $(x = 1 \text{ ou } y = 1)$, ce qui contredit le fait que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1)$. Donc

$$\boxed{(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow (xy + 1 - x - y \neq 0).}$$

♦ ***Exercice 19.*** [$\circ$]
Soient a et b deux nombres réels tels que $\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon$. Démontrer que $a \leqslant b$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $a > b$. Posons alors $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$ dans l'hypothèse $\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon$. On obtient $a < b + (a - b)/2$, ce qui donne $a < b$: absurde ! Donc

$$\boxed{\text{si } \forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon, \text{ on a } a \leqslant b.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [○]
Démontrer que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec $a,b\in\mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Soient $a,b,a',b'\in\mathbb{Z}$ tels que $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ de sorte que $a-a'=(b'-b)\sqrt{2}$. Si l'on suppose que $b\neq b'$, alors $\sqrt{2}=(a-a')/(b-b')$ est un rationnel, ce qui est absurde (puisque $\sqrt{2}$ n'en est pas un). Donc $b=b'$ et par suite $a=a'$. En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme } a+b\sqrt{2} \text{ avec } a,b\in\mathbb{Z}, \text{ alors cette écriture est unique.}}$$

♦ ***Exercice 21.*** [★]
Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f\big(x-f(y)\big)=2-x-y$.

On raisonne par analyse-synthèse.

<u>Analyse :</u> Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f\big(x-f(y)\big)=2-x-y$. Pour tout $z\in\mathbb{R}$, on choisit $x=z+f(0)$ et $y=0$, ce qui donne $\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)=2-f(0)-z$. En posant $z=0$, on obtient $f(0)=2-f(0)$, c'est-à-dire $f(0)=1$. On en déduit que f est donc la fonction $x\longmapsto 1-x$.

<u>Synthèse :</u> Soit $f:x\longmapsto 1-x$. Pour $x,y\in\mathbb{R}$, on a $f\big(x-f(y)\big)=f(x-1+y)=\lambda-(x-1+y)=2-x-y$, ce qui démontre que f est bien solution du problème.

En conclusion,

$$\boxed{\text{la seule fonction solution de notre problème est la fonction } x\longmapsto 1-x.}$$