MP*1

Exercices de révision

Ce qui suit est une liste de questions de cours et d'exercices d'application, dont beaucoup ont été traités pendant l'année, choisis en raison de leur caractère classique et/ou instructif.

1 Séries, familles sommables

Séries

1. Une série de nombres réels dont les sommes partielles sont majorées converge-t-elle ?
2. Nature de la série de terme général :
   (a) $e^{-(\ln n)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$,
   (b) $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$.
   Déduire de b) que le théorème d'équivalence ne s'applique pas aux séries dont le terme général est de signe variable.
   (c) Démontrer que, dans un espace normé de dimension finie, une série absolument convergente est convergente.

   Équivalents de sommes partielles, de restes

3. Énoncer la formule de Stirling ; la prouver « sans la constante » $\sqrt{2\pi}$.
4. Justifier l'existence d'un réel C tel que :
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2 n + C + o(1)$$
5. Donner, si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue et croissante, une condition suffisante pour que :
   $$f(1) + \cdots + f(n) \sim \int_0^n f.$$
   Donner un exemple de fonction continue, croissante et non intégrable ne vérifiant pas cette formule.
6. Déterminer un équivalent des restes d'une somme de Riemann dans le cas convergent, des sommes partielles dans le cas divergent.
7. Equivalent de $\sum_{k=0}^{n} k!$, de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

   Familles sommables

8. Énoncer le théorème de sommation par paquets, dans le cas positif et dans le cas sommable.

9. Soit φ la fonction d'Euler, $a > 1$. Calculer, en justifiant précisément :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{a^n - 1}.$$
On rappelle que
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

2 Fonctions de variable réelle, numériques et vectorielles

Continuité, continuité uniforme

10. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f a un point fixe.
11. Exemple de fonction bornée et non uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
12. Montrer que si f est une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ il existe a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f(x)| \leq ax + b.$$

Convexité

13. Définition d'une fonction convexe, caractérisation par les pentes, par la dérivée, par la dérivée seconde.
14. Comment démontrer, par convexité, les inégalités :
    (a) $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x,$
    (b) $\forall (a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$?
15. Soit A l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer, si f est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sup \{d(x),\ d \in A,\ d \leq f\}.$$

Dérivabilité

16. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en p points distincts de $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels f' s'annule ?
17. Dérivée de $B(u,v)$ où B est bilinéaire sur le produit de deux espaces normés de dimension finie E et F et où u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E et F respectivement.
18. Soit M une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad N(t) = M(t)^{-1}.$$
Montrer que N est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $N'(t)$ pour t réel.
19. Soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.

Fonctions de classe C^k

20. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young.
21. Soient f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

    a) Si f a un minimum local en x_0, montrer que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.

    b) Inversement, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, montrer que f a un minimum local en x_0.
22. Si f est C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$, et si x_0 est un zéro non isolé de f, montrer :
$$\forall j \in \{0, \cdots, k\}, \quad f^{(j)}(x_0) = 0.$$
23. Rappeler comment construire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ strictement positive sur $]-1, 1[$ et nulle ailleurs.
24. Définition et caractérisation d'un C^k-difféomorphisme d'un intervalle sur un autre.
25. Trouver une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, tendant vers une limite en $+\infty$ mais telle que $f'(x)$ ne tende pas vers 0 en $+\infty$ (on pourra penser au cours d'intégration).

3 Intégration

Intégrales convergentes, intégrabilité

26. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Les fonctions
$$t \in]0, 1[\longmapsto \frac{\ln(t)}{(1-t)^\alpha}, \qquad t \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \ln(t) \ (\sin(1/t))^\alpha$$
sont-elles intégrables ?
27. Soient u et v dans $L^2(I)$. Montrer que uv est dans $L^1(I)$. Généraliser à u dans L^p, v dans L^q si $p > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
28. Donner un exemple de fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ intégrable mais non bornée. Quelle hypothèse rajouter à l'intégrabilité de f pour obtenir la conclusion : $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$?
29. Soit f une fonction continue décroissante et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Analogue pour les séries ?
30. Montrer soigneusement que :
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$
a une limite en $+\infty$ mais que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Intégration des relations de comparaison

31. Enoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison.

32. Existence pour $x > 0$, puis équivalent en 0^+ de

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos \mathrm{t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Equivalent en $+\infty$ de

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Passage à la limite sous l'intégrale, permutation somme-intégrale

33. Limite en $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}\ \ln(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

34. a) Indiquer les méthodes permettant de justifier une permutation série intégrale.

    b) Démontrer soigneusement, pour s dans $]1,+\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t = \Gamma(s)\ \zeta(s).$$

    c) Démontrer, pour s dans $]0,1[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \lim \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{s-n}.$$

    On découpera l'intégrale en deux. Pour la portion $[1,+\infty[$, poser $u = 1/t$.

Intégrales à paramètre

35. Rappeler la démonstration du théorème de continuité des intégrales à paramètres à partir du théorème de convergence dominée. Idem pour le théorème de classe C^1.
36. Montrer soigneusement que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
37. Pour $x \geq 0$, justifier l'existence de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

    Calculer $f''(x)$ pour $x > 0$ (en justifiant). En déduire $f(x)$ pour $x \geq 0$.
38. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Pour $x > 0$, justifier l'existence de $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Démontrer

$$xL_f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

    Que dire lorsque x tend vers $+\infty$?

4 Suites et séries de fonctions, séries entières

Approximation

39. Rappeler le théorème d'approximation de Weierstrass. En déduire que si une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ a tous ses moments nuls, elle est identiquement nulle.

40. Énoncer et démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue. Preuve de poche dans le cas C^1 ?

Suites et séries de fonctions

41. Énoncer et démontrer le théorème assurant la classe C^1 d'une limite de fonctions de classe C^1. Énoncer le théorème relatif à la classe C^k.

42. Expliquer les liens, pour une série de fonctions, entre : convergence simple, convergence absolue en tout point, convergence normale, convergence uniforme.

43. a) Montrer soigneusement que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. En trouver la limite en $+\infty$ et en 1^+.

    b) Montrer que, si $x > 1$ et $|h| < 1 - x$:

$$\zeta(x + h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\zeta^{(k)}(x)}{k!} h^k.$$

44. Montrer soigneusement que la fonction ζ_2 définie par :

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

    est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

45. Pour x dans $\mathbb{R}$, soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2^n ix}}{n!}.$$

    Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0 est nul.

Séries entières

46. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel. Définir du rayon de convergence.

47. Montrer qu'une série entière converge uniformément (et même normalement) sur tout compact du disque ouvert de convergence, et qu'il en est de même de ses séries dérivées.

    Y a-t-il convergence uniforme sur le disque ouvert de convergence ?

48. Montrer soigneusement qu'une somme de série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence, les dérivées s'obtenant par dérivation terme à terme.

49. Développement en série entière et rayon de convergence d'une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle.

50. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

Démontrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

51. a) Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, montrer, si $n \in \mathbb{N}$ et $0 < r < R$ que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

b) Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et bornée. Montrer que f est constante.

5 Topologie

Comparaison de normes

52. Sur l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, comparer les normes de convergence uniforme, de convergence en moyenne quadratique et de convergence en moyenne.

Ouverts, fermés, continuité

53. Montrer que tout sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé est d'intérieur vide.

54. Démontrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(E, || \, ||)$ est fermé dans $(E, || \, ||)$.

55. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le sous-espace V des fonctions nulles en 0 et en 1 est dense dans $(E, \| \, \|_1)$.

56. Montrer, si $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ s'annule sur un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de parties infinies de K, alors $P = 0$. En déduire, si K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que

$$V_P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n, \; P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

est un fermé d'intérieur vide de K^n.

57. Montrer que l'intersection de deux ouverts denses d'un espace métrique est un ouvert dense.

Topologie matricielle

58. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Continuité de :

$$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}.$$

59. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

60. Soit $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ convergeant vers M. On suppose que les M_k sont toutes de rang r. Que dire de M ?

61. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
62. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pourquoi n'est-il pas connexe par arcs ? Quelles en sont les composantes connexes par arcs ?

    Compacité

63. Énoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans K^n.
64. Montrer qu'une partie fermée d'un espace métrique compact est compacte.
65. Soit X une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_m\}$ de points de E tels que X soit contenu dans la réunion des boules fermées de centres $a_1, \dots, a_m$ et de rayon ε (propriété de précompacité).
66. Exemple de compact de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas une réunion finie de segments.
67. Si $n \geq 2$, montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
68. Montrer, si $(E, || \, ||)$ est un evn, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et x un point de $E \setminus F$, qu'il existe $f \in F$ tel que
    $$||x - f|| = \mathrm{d}(x, F).$$
69. Montrer qu'une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle a au plus une valeur d'adhérence.
70. Construire une suite (f_n) de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que :
    $$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad m \neq n \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty = 1.$$
    Qu'en déduit-on sur la sphère unité de l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme ?
71. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ continue, tendant vers 0 quand $\|x\| \to +\infty$. Montrer l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :
    $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) \leq f(x_0).$$
72. Montrer, si X est un compact non vide d'un e.v.n de dimension finie, l'existence d'une boule fermée de rayon minimal contenant X.

    Applications linéaires continues

73. Caractérisation des applications linéaires continues. Cas où la source est de dimension finie ?
74. Donner un exemple de forme linéaire non continue.
75. Définition et propriété de la norme opératorielle d'une application linéaire continue. Montrer que, si la source est de dimension finie, la norme opératorielle est atteinte.
76. Montrer :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists c_n > 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad |P'(0)| \ \leq \ c_n ||P||_{\infty, [-1,1]}.$$
    Déterminer la limite de $(c_n)_{n \geq 1}$.

    Connexité par arcs

77. Démontrer qu'un espace métrique connexe par arcs est connexe.
78. Expliquer pourquoi $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes si $n \geq 2$.

6 Calcul différentiel

Différentiabilité et classe C^1

79. Calculer la dérivée de $f \circ \gamma$ si f est différentiable sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et γ une fonction C^1 de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans Ω. En déduire l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe C^1.
80. Définition, calcul en base orthonormée et interprétation du gradient.
81. Caractériser les applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ à l'aide des dérivées partielles.
82. Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe par arcs Ω de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que f est affine si et seulement si f est différentiable sur Ω et df est constante
83. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $||\ ||$ la norme associée.

    a) Vérifier que $x \longmapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et donner son gradient.

    b) Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Vérifier que $x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$ est différentiable sur E et donner son gradient.

    c) Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et donner son gradient.
84. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $A \longmapsto A^p$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle.
85. Montrer que $M \in GL_n(K) \longmapsto M^{-1}$ est de classe C^1, calculer sa différentielle au point M. Retrouver à l'aide de ce résultat celui de l'exercice 18.
86. Montrer que l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1. En utilisant les dérivées partielles par rapport aux $E_{i,j}$, calculer sa différentielle en M. Quels sont ses points critiques ?
87. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x)$ ne dépend que de la norme euclidienne de x si et seulement si $\nabla f(x)$ est, pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, colinéaire à x.

Dérivées partielles

88. Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \leq 0.$$

    Montrer que f atteint son maximum en $x = 0$.
89. Enoncer et démontrer le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

90. Décrire géométriquement les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 et telles que

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

91. Calculer le gradient en coordonnées polaires.

92. a) Trouver les fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0.$$

b) a) Trouver les fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

93. Soit $f={}^t(f_1,\dots,f_n)$ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe une fonction U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\nabla U=f$ si et seulement si, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Arcs, espace tangent

94. Soient f une fonction de classe C^1 sur l'ouvert Ω de l'espace euclidien E, X une partie non vide de E, x un point de X. On suppose que la restriction $f_{|X}$ de f à X atteint un extremum local en x. Montrer que $df_x(h)=0$ pour tout vecteur h tangent à X en x.

95. Énoncer précisément et démontrer : « le gradient est orthogonal aux lignes de niveau ».

96. Montrer que l'espace tangent à la sphère unité S de l'espace euclidien E en x est $x^\perp$.

97. Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, u un endomorphisme symétrique de E, x un élément de S. Pour x dans E, soit $q(x)=\langle u(x),x\rangle$. Calculer $\nabla q(x)$ si $x\in E$. Montrer que dq_x est nulle sur T_xS si et seulement si x est vecteur propre de u. Retrouver alors le théorème spectral.

98. a) Montrer que l'espace tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

b) Déterminer de même l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Classe C^k

99. Énoncé du théorème de Schwarz. Idée de la preuve ?

100. Calculer la dérivée seconde de $f\circ\gamma$ si f est de classe C^2 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et γ une fonction C^2 de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans Ω.

101. a) Si f est de classe C^2 sur Ω avec $\Delta f>0$, montrer que f n'a pas de maximum local. Si K est un compact de Ω, en déduire :

$$(1) \qquad \max_K f=\max_{\mathrm{Fr}K} f.$$

b) Montrer que (1) subsiste si $\Delta f\geq 0$ (approcher f judicieusement).

7 Equations différentielles

Exponentielle de matrice

102. Calculer le déterminant de $\exp(M)$ si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
103. Montrer, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que M est antisymétrique si et seulement si, pour tout réel t, e^{tM} est orthogonale.
104. Calculer e^{tA} où :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
105. Quelles sont les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $e^{tA} \to 0$ quand $t \to +\infty$?

Équation différentielles linéaire

106. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Donner l'idée de la démonstration.
107. Soient I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 un élément de I, A une fonction continue de I dans $\mathcal{M}_n(K)$, $X_1, \ldots, X_n$ des fonctions de I dans K^n solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$. Soit t_0 dans I. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'espace des solutions de (1) si et seulement si $(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0))$ est une base de K^n.
108. Soient A et B des applications continues et T-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans respectivement $\mathcal{M}_n(K)$ et K^n, X une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans K^n telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$
Montrer que X est T-périodique si et seulement si $X(0) = X(T)$.
109. Soit q une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la seule solution de $x'' + qx = 0$ telle que $x(0) = x(1) = 0$ est la fonction nulle. Montrer que, pour toute fonction continue f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et tout couple (a, b) de réels, il existe une unique solution du problème aux limites
$$x'' + qx = f,\ x(0) = a,\ x(1) = b.$$
110. L'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de :
$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$
où a, b et c sont trois fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est-il de dimension 2 ? Donner une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi. Que peut-on dire de sa dimension si a s'annule en exactement p points de $\mathbb{R}$?
111. a) Expliquer la méthode de variation des constantes dans le cas général (coefficients non forcément constants).

     b) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = f$ par variation de « la » constante, i.e. donner une expression intégrale des solutions.
112. Déduire du lemme de décompostion des noyaux la résolution des équations différentielles linéaire s homogènes à coefficients constants.
113. Indiquer comment résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ une équation d'Euler :
$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

114. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$, λ un nombre complexe de partie réelle strictement négative. On suppose que $(f' - \lambda f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
115. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, x une solution non identiquement nulle de $x'' + ax' + bx = 0$. Montrer que les zéros de x sont isolés.
116. Énoncer et démontrer le lemme de Gronwall.
117. Énoncer et démontrer le théorème de Sturm.

8 Algèbre linéaire : généralités

Espaces vectoriels et applications linéaires

118. Si $H_1, \cdots, H_p$ sont des hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n, montrer que :
$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i \right) \geq n - p.$$
119. Montrer que tout sous-espace de dimension m d'un espace vectoriel de dimension n est intersection de $n - m$ hyperplans.
120. Montrer qu'un endomorphisme d'un K-espace de dimension finie E stabilisant toute droite de E est une homothétie.
121. Si u et v sont dans $\mathcal{L}(E)$, montrer :
    (a) rg $(u + v) \leq$ rg $u+$ rg v,
    (b) rg $(uv) \leq \min$ (rg u, rg v),
    (c) si u est inversible, rg $u \circ v =$ rg $v =$ rg $v \circ u$,
    (d) rg $(uv) =$ rg $v-$ dim (Ker $u\cap$ Im v).
122. Soient f et g deux endomorphismes du K-espace de dimension finie E. Calculer la dimension de
$$\{u \in \mathcal{L}(E),\ g \circ u \circ f = 0\}.$$
123. Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 vérifie $u^2 = \mathrm{Tr}(u)u$.

Matrices

124. Pourquoi, pour M dans $\mathcal{M}_n(K)$, est-il vrai que « M inversible à gauche » implique M inversible ? Donner un exemple d'endomorphisme injectif mais non surjectif (resp. surjectif mais non injectif) de l'espace $\mathbb{R}[X]$.
125. Définition et caractérisation (avec preuve) de l'équivalence de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
126. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ équivalentes à une matrice nilpotente ?
127. Cardinal de $GL_n(K)$ si K est un corps fini de cardinal q.
128. Montrer que les inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de cet anneau de déterminant ± 1.

129. Décrire les opérations élémentaires sur les matrices et les interpréter comme des produits matriciels. Comment calculer le déterminant et l'inverse par opérations élémentaires ? Ces opérations préservent-elles la similitude ?
130. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 non orthogonale. Interpréter géométriquement les matrices de déterminant 1.
131. Expliquer et justifier la phrase : le rang d'une matrice est indépendant du corps de base.
132. Rang et déterminant de :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \to & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \mapsto & AMB \end{array}.$$

133. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(K)$ avec B de rang 1, montrer que

$$\lambda \in K \longmapsto \det(A + \lambda B)$$

est affine.
134. Soit P dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tPP$ et P ont même noyau.
135. Définition du produit tensoriel de deux matrices et calcul du produit de deux produits tensoriels.
136. Calculer le rang du produit tensoriel de deux matrices. On pourra se ramener au cas où les matrices sont de la forme J_r et utiliser l'exercice précédent.

9 Algèbre linéaire : réduction

Étude géométrique

137. Pourquoi toute matrice non scalaire est-elle semblable à une matrice de première colonne :

$${}^t(0, 1, 0, \ldots, 0)?$$

138. Soient E un K-espace de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E)$, V un sous-espace de E stable par f. Montrer que le polynôme caractéristique de l'induit de f sur V divise celui de f.
139. Énoncer et démontrer les critères de diagonalisation et trigonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.
140. Une matrice symétrique complexe est-elle diagonalisable ?
141. Montrer que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.
142. Description des sous-espaces stables et du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.
143. À quelle condition portant sur la trace un endomorphisme de rang 1 est-il diagonalisable ?
144. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme nilpotent d'indice n de E. Décrire les sous-espaces stables de E stables par u.

145. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ soit diagonalisable. Dans le cas contraire, montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}$ tel que M soit semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

146. Montrer qu'une matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes.

147. Démontrer qu'une matrice nilpotente est trigonalisable.

148. Montrer que deux matrices diagonalisables sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique. Contre-exemple sans hypothèse de diagonalisabilité ?

149. Montrer qu'une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel de dimension finie est codiagonalisable.

150. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$ diagonalisables. Montrer que l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par

$$\Phi\ : M \longmapsto AM - MB$$

est diagonalisable.

151. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si seuelement si

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, , \qquad \mathrm{Tr}(M^j) = 0.$$

152. Montrer que le produit tensoriel de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Étude algébrique

153. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice de transvection. Idem pour une matrice de permutation.

154. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice compagnon.

155. Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux.

156. Énoncer et démontrer le critère de diagonalisation faisant intervenir le polynôme minimal.

157. Démontrer que si u est un endomorphisme à polynôme minimal scindé d'un espace E de dimension finie, E est somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels la restriction de u est somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

158. Caractériser les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$M^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

159. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les éléments de G sont diagonalisables.

160. Montrer qu'une matrice M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ appartient à un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si elle est diagonalisable à valeurs propres de module 1.

10 Espace préhilbertiens, endomorphismes des espaces euclidiens

Projection orthogonale

161. Énoncer et démontrer le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie V d'un espace préhilbertien E. Montrer que le carré de la distance de x à V est $\langle x, x - p_V(x)\rangle$. Exprimer la quantité précédente au moyen d'une base orthonormée de V.

162. Interpréter de manière préhilbertienne et calculer

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 \mathrm{dt},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

163. Si p est un projecteur d'un espace euclidien, montrer que $|||p||| \leq 1$ si et seulement si p est une projection orthogonale.

164. Montrer que les projecteurs orthogonaux de l'espace euclidien E sont exactement les projecteurs symétriques de E.

165. Soient $x_1, \cdots, x_p$ des vecteurs de l'espace préhilbertien $(E, < \ , \ >)$. Montrer que la matrice de Gram $(< x_i, x_j >)_{1\leq i,j\leq p}$ a pour rang le rang de $\{x_1, \cdots, x_p\}$.

166. Si C est un convexe fermé de l'espace euclidien $(E, < \ , \ >)$, montrer, pour tout x de $E \setminus C$, qu'il existe un unique $a \in C$ tel que :

$$\|x - a\| = d(x, C).$$

Si $c \in C$, quel est le signe de $< x - a, c - a >$?

Suites orthonormées totales

167. Soient $(E, < \ , \ >)$ un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Si $x \in E$, montrer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, x >^2 \ \leq \ \|x\|^2.$$

Montrer, si $V = \text{Vect}\ (e_n,\ n \geq 0)$, que, pour $x \in E$:

$$x \in \bar{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, x >^2 = \|x\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Qu'en déduit-on si $(e_n)_{n\geq 0}$ est totale ?

168. L'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire euclidien

$$(u, v) \in E^2 \longmapsto \int_0^{\pi} uv.$$

a) Montrer que l'espace des fonctions

$$x \in [0, \pi] \longmapsto p(\cos(x)), \qquad p \in \mathbb{R}[X]$$

est dense dans E muni de la norme uniforme, puis dans E muni de la norme provenant du produit scalaire précédent.

b) On pose

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad c_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(mx), \qquad c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Montrer que $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé total de l'espace préhilbertien précédent.

Matrices orthogonales

169. Décrire les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$. Montrer que toute matrice de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ est orthosemblable à
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
170. Déterminer les matrices de $O_n(\mathbb{Z})$.
171. Montrer qu'une matrice de $O_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Quelles sont les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$?
172. Quels sont les endomorphismes de l'espace euclidien E qui commutent à toutes les isométries de E ?
173. Rappeler l'énoncé et la démonstration du théorème de réduction des isométries d'un espace euclidien.
174. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Exprimer la trace de u à l'aide des $\langle e_i, u(e_i)\rangle$.
175. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si :
$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x), x\rangle = 0.$$

Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

176. Le produit de deux matrices symétriques réelles est-il symétrique ?
177. Soit M dans $S_n(\mathbb{R})$. Donner une interprétation variationnelle de la plus grande valeur propre $\lambda_n(M)$ de M. Si A et B sont dans $S_n(\mathbb{R})$, comparer $\lambda_n(A+B)$ et $\lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
178. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la norme d'opérateur de M est le maximum de l'ensemble des valeurs absolues des valeurs propres de M.
179. Rappeler définition et caractérisations des matrices symétriques positives, des matrices symétriques définies positives. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques positives est fermé dans $S_n(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
180. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $S_n(\mathbb{R})$. Quelle est son adhérence ?
181. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive alors :
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad m_{i,i} \geq 0.$$
Montrer que la réciproque est fausse.
182. Montrer qu'une matrice de Gram est symétrique positive.
183. Montrer qu'un endomorphisme symétrique positif a une unique racine carrée symétrique positive.

11 Anneaux et algèbres, polynômes

Anneaux

184. Définition de la caractéristique d'un anneau.

185. Définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme, et caractérisation avec les dérivées (avec hypothèse convenable sur le corps).

186. Définition d'un idéal dans un anneau commutatif. Structure des idéaux de $\mathbb{Z}$, de $K[X]$. Application à la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension finie.

187. Soit x un élément algébrique d'une K-algèbre A.

   a) Montrer que $K[x]$ est un K-espace vectoriel de dimension égale au degré de $\Pi_{K,x}$.

   b) Montrer que, si $Q \in K[X]$, $Q(x)$ est un inversible de $K[x]$ si et seulement si $Q \wedge \Pi_{K,x} = 1$.

   c) Si A est un corps, démontrer que $K[x]$ est un sous-corps de A.

Polynômes

188. Soient A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. Montrer que le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

189. Comment calculer la somme des racines d'un polynôme complexe à partir des coefficients ? le produit des racines ?

190. Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P sont de module majoré par :

$$\max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}.$$

191. Factoriser $X^{2n} - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$..

192. Définition, unicité, relation de récurrence, racines pour les polynômes de Tchebychev.

193. Montrer, si $P \in K[X]$ est de degré 3, que P est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si P n'a pas de racine dans K. Cas du degré 4 ?

Fractions rationnelles

194. Décomposer P'/P en éléments simples si P est un polynôme complexe non constant. En déduire le théorème de Gauss-Lucas.

195. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer en utilisant par exemple P'/P que $P' - \lambda P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ pour tout réel λ.

196. Décomposer $\frac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

197. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Si p est dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, si $p \wedge q = 1$ et si p/q est racine de P, montrer que p divise a_0 et que q divise a_n.

198. Montrer que $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, et a exactement une racine réelle α.

12 Groupes, arithmétique

Groupes

199. Pour chacun des groupes : S_n, $SL_n(K)$, citer une famille simple de générateurs.
200. Déterminer le cardinal minimal d'une famille génératrice de $(\mathbb{Z}^n, +)$. Pour quels couples (m, n) de $\mathbb{N}^{*2}$ les groupes $(\mathbb{Z}^n, +)$ et $(\mathbb{Z}^m, +)$ sont-ils isomorphes ?
201. Calculer $S_\lambda S_\mu$ où :
$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Trouver le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ engendré par les matrices de symétrie.
202. Montrer que tout groupe de cardinal premier est cyclique.
203. Donner un groupe de cardinal 6 non abélien.
204. Les groupes additifs : $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ? Généraliser : à quelle condition le produit de deux groupes cycliques est-il cyclique ?
205. Montrer que si deux éléments a et b du groupe fini G ont pour ordre respectifs m et n avec $m \wedge n = 1$, et commutent, alors ab est d'ordre mn.
206. Expliquer comment calculer l'ordre d'une permutation de S_n.
207. A quelle condition deux permutations sont-elles conjuguées dans S_n ?
208. A quelle condition deux symétries orthogonales sont-elles conjuguées dans $O_n(\mathbb{R})$?
209. Calculer le cardinal de la classe de similitude de :
$$S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$
dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ avec p premier ≥ 2.

Arithmétique

210. Si $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge n = 1$, montrer :
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; [n].$$
Comment en déduit-on le petit théorème de Fermat ?
211. Si $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $d(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.
212. Soient n un entier ≥ 2, a, b, c dans $\mathbb{N}^*$ tels que $ab = c^n$ et que a et b soient premiers entre eux. Montrer que a et b sont puissances n-ièmes d'entiers.
213. Énoncer et démontrer la formule de Legendre donnant la p-valuation de $n!$.

13 Probabilités

Axiomatique de Kolmogorov

214. Déterminer les événements indépendants d'eux-mêmes.

215. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements.

a) Définir l'événement $\overline{\lim}(A_n)$.

b) On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. Montrer que $P(\overline{\lim}(A_n)) = 0$.

c) On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ et que les A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que $P(\overline{\lim}(A_n)) = 1$.

Variables aléatoires

216. a) Démontrer que la somme de n variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

c) Si X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, déterminer k tel que $P(X=k)$ soit maximal.

d) On suppose $p \leq p'$. Soient X et X' deux variables aléatoires suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $B(n,p')$. Pour k dans $\{0,\dots,n\}$, comparer, par un argument de couplage $P(X\geq k)$ et $P(X'\geq k)$.

217. On suppose que X et Y sont deux variables de Poisson indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $X+Y$.

218. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi géométrique, de paramètres respectifs $p_1,\dots,p_n$. Déterminer la loi de

$$Y = \min\left(X_1,\dots,X_n\right).$$

219. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une fonction φ définie sur l'image de X telle que $Y=\varphi(X)$ et que X et Y sont indépendantes. Que peut-on dire ?

Suites de variables aléatoires

220. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ mutuellement indépendantes.

a) On définit une suite $(T_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ en posant $T_0=0$ et, pour k dans $\mathbb{N}^*$:

$$T_{k+1} = \min\left\{n > T_k, n\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\},\ X_n = 1\right\}.$$

Déterminer la loi de T_k. Montrer en particulier que T_k est presque sûrement finie.

b) Pour j dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\tau_j = T_{j+1} - T_j$$

est presque sûrement définie. Pour m dans $\mathbb{N}^*$, donner la loi de $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$. Qu'en déduit-on sur les variables aléatoires τ_i ?

c) Déterminer l'espérance et la variance de T_k.

221. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, S la somme aléatoire

$$S = X_1 + \cdots + X_N.$$

Déterminer la loi de S. Expliciter le cas où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Espérance, variance

222. Interpréter géométriquement espérance et variance d'une variable aléatoire X de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

223. Justifier qu'une variable aléatoire bornée a des moments de tous ordres. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

224. Rappeler espérance et la variance d'une variable aléatoire de Poisson, d'une variable aléatoire géométrique.

225. a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) \leq E(X) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geq n).$$

226. Énoncer la formule du crible. La démontrer en utilisant la linéarité de l'espérance.

227. Une k-clique d'un graphe est une partie de cardinal k de l'ensemble des sommets dont deux éléments quelconques sont reliés par une arête. Dans le modèle $G(n, p)$ d'Erdös-Renyi, déterminer l'espérance du nombre de k-cliques.

228. Soit $X = {}^t(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel. Montrer que sa matrice de covariance est symétrique positive.

Inégalités de concentration

229. Énoncer et démontrer l'inégalité de Tchebychev. Application à la loi faible des grands nombres.

230. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Rademacher mutuellement indépendantes. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

a) Pour t dans $\mathbb{R}$, calculer $E(e^{tS_n})$ et montrer que

$$E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right).$$

b) Montrer que, si $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_n \geq n\lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

Fonctions génératrices

231. Définir la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que cette fonction détermine la loi de X.
232. Fonction génératrice d'une variable binomiale, d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.
233. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, m dans $\mathbb{N}$. Montrer que G_X est de classe C^m sur $[0,1]$ si et seulement si $E(X^m) < +\infty$. Dans le cas contraire, quelle est la limite de $G_X^{(m)}(t)$ lorsque t tend vers 1 ?
234. Déterminer la fonction caractéristique d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
235. Déduire de l'exercice précédent la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative.
236. Comment calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ à partir de sa fonction caractéristique ? Application à une variable géométrique, à une variable de Poisson.
237. On se donne $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i et on pose :

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Montrer que la fonction génératrice des probabilités de S_N est $G_N \circ G_X$.

238. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi de X. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (avec $S_0 = 0$). Soit T la variable aléatoire égale à

$$\min\{n \geq 1\ ;\ S_n = 0\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, à $+\infty$ sinon. Montrer, si $n \geq 1$

$$P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(T = k) P(S_{n-k} = 0).$$

Pour t dans $[0, 1[$, soit

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) t^n.$$

Montrer
$$F(t) = \frac{1}{1 - E(t^T\ 1_{T<+\infty})}.$$
En déduire
$$P(T < +\infty) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = 0) = +\infty.$$