Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Écoles Normales Supérieures – MP

1. ★ [PLSR] Une barrière circulaire est constituée de 17 poteaux dont 5 sont pourris. Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.

2. ★ [P] Soit $(C_k)_{k\geqslant 1}$ une suite sommable de $\mathbb{R}^+$ de somme inférieure ou égale à 1. Montrer que l'on peut ranger des carrés d'aire les C_k dans un carré 10×10.

3. ★ [P] Une partition multiplicative d'un entier $n>1$ est la donnée d'une famille $1<d_1\leqslant\cdots\leqslant d_r$ d'entiers tels que

$$n=\prod_{i=1}^{r} d_i.$$

On note $f(n)$ le nombre de partitions multiplicatives de n. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $f(n)\leqslant n^{1+\varepsilon}$ pour n assez grand.

4. ★ [L] Soit $p\geqslant 5$ un nombre premier. Quand n n'est pas un multiple de p, on note n^* un entier tel que $nn^*\equiv 1[p^2]$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^*\equiv 0\ [p^2].$$

5. ★ [L] Soient $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble

$$\{n\in\mathbb{Z},\ (an+b)\wedge(cn+d)=1\}$$

soit infini.

6. ★ [L] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le cardinal de l'ensemble des $d \in \mathbb{N}^*$ tels que d divise n et

$$\sqrt{n/2} \leqslant d < \sqrt{2n}.$$

a) La suite (a_n) est-elle convergente ?
b) La suite (a_n) est-elle bornée ?

7. ★ [L] Soit A un anneau commutatif fini possédant $n \geqslant 2$ diviseurs de 0. Que peut-on dire du cardinal de A ?

8. ★ Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 = \cos$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f_n \circ \cos$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est libre.

9. ★ [P] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(AB) + \operatorname{rg}(BC) \leqslant \operatorname{rg} B + \operatorname{rg}(ABC)$.

10. ★ [P] Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout i, $a_{i,i} = 1$ et que, pour tous $i \neq j$, $|a_{i,j}| \leqslant 1/\sqrt{n}$. Montrer que le rang de A est supérieur ou égal à $n/4$.

11. ★ [P] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $p \leqslant n$, on ordonne arbitrairement l'ensemble I_p des parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et on note B_p la matrice carrée de taille $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ dont les coefficients sont les mineurs $\det[A]_{I,J}$, $I, J \in I_p$, où les indices sont rangés par ordre croissant. Montrer qu'il existe un unique p tel que B_p soit de rang 1.
Application : montrer que si A est antisymétrique alors elle est de rang pair.

12. ★ [P] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
a) Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
b) Existe-t-il toujours p premier tel que $\operatorname{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \operatorname{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$?

13. ★ [PLSR] Soient A et B dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr} A \neq 0$. Montrer que A et B sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A^2 et B^2 sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
Rappel. Si $(G, \cdot)$ est un groupe, on dit que g et g' sont conjugués dans G s'il existe $a \in G$ tel que $g = ag'a^{-1}$.

14. ★ [PLSR] Déterminer les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.

15. ★ [P] Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sont équivalents s'il existe une isométrie φ telle que que $u = \varphi \circ v$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = \|v(x)\|$. Les endomorphismes u et v sont-ils équivalents ?

16. ★ [PLSR] ***a)*** Soient $n \geqslant 2$, $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que P induit une bijection de $\mathcal{N}_n$ sur lui-même.
b) Montrer que $R(X) = X^3 + X$ induit une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

17. ★ [L] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $F \oplus G = E$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Soit u un automorphisme de E. Montrer que u est échangeur si et seulement s'il existe $v, w \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = v + w$, $v^2 = 0$ et $w^2 = 0$.

18. ★ [PLSR] On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algèbre H ayant une base $(1_H, i, j, k)$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et dans laquelle $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. On admet en outre que toute $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. Montrer que toute $\mathbb{R}$-algèbre intègre non commutative de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à H.

19. ★ [SR] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i,

$$a_{i,i} \geqslant - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \forall i \neq j, \quad a_{i,j} \leqslant 0.$$

Montrer que $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$.

20. ★ [P] Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ surjective telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $t \in \mathbb{C}$ on ait

$$\det(A + t\,B) = \det(f(A) + t\,f(B)).$$

Montrer que f est bijective et préserve le rang.

21. ★ [SR] On considère les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont diagonalisables, et préciser leurs valeurs propres.

b) On pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geqslant |y|\}$. Montrer que

$$M_1 C \subset C, \qquad M_2 C \subset C \qquad \text{et} \qquad M_1 C \cap M_2 C = \{0\}.$$

c) Pour $\omega \in \{1, 2\}^n$, on pose

$$\psi(\omega) = \prod_{k=1}^{n} M_{\omega_k}.$$

Montrer que $\psi : \{1, 2\}^n \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est injective.

d) Montrer que $\psi(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\omega \in \{1, 2\}^n$.

22. ★ [PLSR] ***a)*** Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G^k est semblable à G pour tout entier $k \geqslant 1$. Montrer que $G - I_n$ est nilpotente.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On pose $M = I_n + A$. Montrer que M^k est semblable à M pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

23. ★ [L] ***a)*** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.
c) Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

24. ⋆ [PLSR] Trouver un espace vectoriel E, deux normes N_1 et N_2 sur E et une suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers ℓ_1 pour N_1, ℓ_2 pour N_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

25. ⋆ [PLSR] ***a)*** Soit X un ensemble fini. Déterminer les normes N sur $\mathbb{R}^X$ telles que :

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \qquad N(f^2) = N(f)^2.$$

b) Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \qquad N(fg) = N(f)\, N(g)\ ?$$

c) Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A^2) = N(A)^2$?
d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une et une seule norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \qquad N(A^2) = N(A)^2.$$

26. ⋆ [PLSR] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $\|\ \|$ est une norme euclidienne si et seulement si

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|ax + by\| = \|bx + ay\|.$$

27. ⋆ [L] Soit $q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. On pose

$$G = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ q \circ f = q \right\}.$$

a) Montrer que G est un groupe.
b) Déterminer les composantes connexes par arcs de G.

28. ⋆ [PLSR] Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $(\mathcal{P})$ la propriété :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i \right\|.$$

a) Illustrer par deux exemples le fait que la propriété $(\mathcal{P})$ peut être ou ne pas être vérifiée.
b) On suppose $(\mathcal{P})$ vérifiée. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout i, $|a_i| \leqslant |b_i|$. Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n b_i e_i \right\|.$$

29. ★ [L] On veut montrer que $\mathbb{R}$ ne peut s'écrire comme union dénombrable de segments disjoints. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est l'union disjointe des $[a_n, b_n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $a_n \leqslant b_n$. On pose

$$E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que E est fermé.
b) Montrer que E ne possède aucun point isolé.
c) Conclure.

30. ★ [P] On munit l'espace E des suites réelles bornées de la norme $\| \ \|_\infty$. On note F le sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes et G le sous-espace vectoriel des suites qui tendent vers 0.
a) Existe-t-il un isomorphisme linéaire bicontinu de $(F, \| \ \|_\infty)$ sur $(G, \| \ \|_\infty)$?
b) Existe-t-il un isomorphisme linéaire isométrique de F sur G ?

31. ★ [SR] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ continue telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $h(x,x) = 0$.
Si $\varphi \in E$, on pose

$$T(\varphi) : x \in [0,1] \mapsto \inf \{\varphi(t) + h(t,x),\ t \in [0,1]\}.$$

a) Montrer que T est une application de E dans E. Est-elle continue ?
b) Montrer que les applications constantes sont des points fixes de T.
c) Soit $\varphi \in E$. Montrer que $(T^n(\varphi))_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers un point fixe de T.

32. ★ [PLSR] Soient $(a_n) \in \,]0,1[^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et $\alpha > 0$. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\,(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe une unique valeur de u_0 telle que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in]0, +\infty[$. Déterminer la valeur de ℓ.

33. ★ [P] On note $\{x\}$ la partie fractionnaire du réel x. Que dire des valeurs d'adhérence de $(\{\ln(n!)\})_{n \geqslant 1}$?

34. [PLSR] ★ Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et x, y, z trois réels. Montrer que
$\frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(f(x) + f(y) + f(z)\right)) + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$

35. ★ Déterminer les $(p, \tau) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que toute fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + p\,f(t - \tau) = 0$$

possède une infinité de zéros $\geqslant 0$.

36. ★ [PLSR] Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui envoient $[0,1]$ sur lui-même et tels que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \qquad \int_0^1 f(P(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

37. ★ [P] ***a)*** Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $a_1,\dots,a_n$ des points de $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite (P_k) de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et qui prend les mêmes valeurs que f aux points $a_1,\dots,a_n$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant les même zéros que f sur $[0,1]$ et tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$?

38. ★ [L] Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tX} \in G\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Que dire de $\mathcal{G}$ si $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
c) Si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{G}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

39. ★ [PLSR] Soit n un nombre premier. Démontrer que les triangles T_i du plan $\mathbb{R}^2$ de sommets respectifs $(0,0)$, $(n-i+1, i-1)$, $(n-i, i)$ pour $i \in \{2,\dots,n-1\}$, contiennent tous le même nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ dans leur intérieur.

40. ★ [P] Soient L_1, L_2, L_3, L_4 des droites de $\mathbb{R}^3$ en position générale. Combien peut-on trouver de droites D rencontrant ces quatre droites ?

41. ★ [P] On considère des voitures de longueur 2 et un parc de stationnement à n places symbolisé par $\{1,2,...,n\}$. À chaque fois qu'une voiture arrive, on tire au hasard un nombre entre 1 et $n-1$ et la voiture se gare (si possible) sur les emplacements i, $i+1$. On continue jusqu'à ce qu'aucune voiture ne puisse se garer. Donner une estimation asymptotique du nombre d'emplacements libres à l'issue de ce processus quand n tend vers $+\infty$.

42. ★ [P] Dans une urne, on a n boules noires et n boules blanches. On les tire indépendamment et uniformément sans remise jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des boules d'une seule couleur. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de boules restantes : $O(1)$, $\ln(n)$, $\sqrt{n}$ ou n ?

43. ★ [P] Soit $\alpha > 0$. On se donne n corbeilles dans lesquelles on jette N boules indépendamment et uniformément, où N suit la loi de Poisson de paramètre $n\alpha$. On note X_k le nombre de boules dans la k-ième corbeille.
a) Montrer que $X_1,\dots,X_n$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre α.
b) On pose $S_{\alpha,n} = \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Montrer que

$$\frac{\ln(\ln n) \times S_{\alpha,n}}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

en probabilité.
c) On jette maintenant exactement n boules dans n corbeilles, on note toujours $X_1,\dots,X_n$ le nombre de boules de chacune des corbeilles, et $S_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Montrer que

$$\frac{\ln(\ln n) \times S_n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

en probabilité.

44. * [SR] ***a)*** Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers.
b) Soit k un entier naturel non nul tel que $p = 3k + 2$ soit premier. On fixe une partie A de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et un élément x de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On note B l'ensemble des classes modulo p des éléments de $[\![k+1, 2k+1]\!]$ et $B_0 = A \cap (xB)$. Montrer que B_0 est sans somme, autrement dit $\forall (x,y) \in B_0^2,\ x + y \notin B_0$.
c) Soit A une partie de $\mathbb{Z}^*$. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3. Montrer qu'il existe une partie $B \subset A$ sans somme et telle que

$$|B| > \frac{|A|}{3}.$$

Ind. Considérer une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
d) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

45. * [P] Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, et on considère l'événement

$$A_n = \big\{\omega\ ;\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ \exists \sigma \in \langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle,\ \sigma(1) = j\big\}$$

(où $\langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle$ désigne le sous-groupe engendré par les éléments $X_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$), et on note p_n sa probabilité. Montrer que p_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

46. * [PLSR] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson, la variable aléatoire $f(X)$ suive une loi de Poisson.

47. * [P] Existe-t-il deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, non presque sûrement constantes, indépendantes et telles que XY suive une loi de Poisson ?

48. * [PLSR] ***a)*** Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$\varphi_r : i \in \mathbb{N}^* \mapsto \left\lfloor \frac{i-1}{r} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi géométrique. Montrer que la loi de $\varphi_r \circ X$ est, elle aussi, géométrique.
Soit $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que, pour toute variable aléatoire X suivant une loi géométrique, $\psi \circ X$ suive aussi une loi géométrique.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_k : t \in]-1, 1[\mapsto \sum_{i \in \psi^{-1}(\{k\})} t^{i-1}.$$

b) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]-1,1[, \qquad f_k(t) = f_1(t)\,(1 - f_1(t) + t\, f_1(t))^{k-1}.$$

c) Calculer $f_k(0)$.
d) En déduire que ψ est l'une des φ_r.

49. ★ [SR] Soit $(r_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le dispositif aléatoire suivant : dans n urnes sont disposées, en toute indépendance et équiprobabilité, r_n boules ; la variable aléatoire N_n indique le nombre d'urnes vides.
a) On suppose que $r_n/n \to c \in \mathbb{R}^+$.
Établir l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) On suppose que $n\,e^{-r_n/n} \to \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de $(\mathbf{P}(N_n = k))_{n\geqslant 1}$.

50. ★ [P] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace probabilisé fini. On munit E^n de la loi produit. Soient $\varepsilon > 0$ et

$$A_n = \inf\{|A| \,;\, A \subset E^n \text{ et } P(A) > 1 - \varepsilon\}.$$

Montrer que

$$\left(\frac{\ln(A_n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$$

converge vers une limite qui ne dépend pas de ε.

51. ★ [P] Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\| \ \|_{op}$ la norme d'opérateur associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_i)_{i\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à support fini, indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{m}\ln\left(\|A_1 \ldots A_m\|_{op}\right)$$

converge en probabilité vers un réel c.

52. ★ [P] Soient $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_k = j) = e^{-\beta k j}(1 - e^{-\beta k}).$$

On pose

$$N = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, X_k.$$

a) Montrer que N est presque sûrement fini.
b) Trouver un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ lorsque $\beta \to 0^+$.
c) Trouver un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ lorsque $\beta \to 0^+$.
d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. Exprimer la loi de N à l'aide de $p(n)$.
e) En déduire que

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}}\right) \leqslant 1.$$

f) En utilisant la croissance de $n \mapsto p(n)$, montrer que

$$\underline{\lim} \left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \right) \geqslant 1.$$

Écoles Normales Supérieures – PSI

53. ★ Soit $s > 1$. Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. L'objectif de cet exercice est de montrer que la série de terme général $\frac{d(n)}{n^s}$ converge. Fixons $\varepsilon \in]0, 1]$.
a) En notant $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n, montrer l'égalité suivante

$$d(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1).$$

b) Avec les mêmes notations, montrer que si $p_i \geqslant 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ alors

$$\frac{\alpha_i + 1}{p_i^{\varepsilon \alpha_i}} \leqslant 1.$$

c) Déterminer le maximum de la fonction

$$x \mapsto \frac{x+1}{2^{\varepsilon x}}$$

sur $\mathbb{R}_+$.
d) En déduire qu'il existe C_ε ne dépendant que de ε tel que $d(n) \leqslant C_\varepsilon n^\varepsilon$.
e) Conclure.

54. ★ Soit $n \geqslant 5$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \leqslant n - 4$. Notons p_V la projection orthogonale sur V et P sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Considérons un vecteur aléatoire X dont les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons enfin

$$R = d(X, V) = \min\{\|X - v\|,\ v \in V\}.$$

a) Montrer que $R \leqslant \sqrt{n}$.
b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, V)^2 = \langle x, x - p_v(x) \rangle$.
c) En déduire que $R^2 = n - k - {}^t\!XAX$ où A désigne la matrice P privée de sa diagonale. Calculer $\mathbf{E}(R^2)$.
d) Soit $D = P - A$. Montrer que

$$\mathrm{tr}(D^2) \geqslant \frac{k^2}{n}.$$

e) Montrer que

$$\mathbf{E}(({}^t\!XAX)^2) \leqslant \frac{2k(n-k)}{n}$$

f) Montrer que

$$\mathbf{P}(R \geqslant \sqrt{n-k}+2) \leqslant \frac{k}{8n}.$$

55. ★ Soit $n \geqslant 5$ impair, $p \in]0,1[$ et P un polygone régulier à n côtés ; on trace chaque diagonale entre deux sommets de P non adjacents quelconques avec probabilité p. Considérons X_n la variable aléatoire égale au nombre de points d'intersection à l'intérieur du polygone.
a) Montrer que

$$0 \leqslant X_n \leqslant \binom{n}{4}.$$

b) Pour tous sommets distincts A, B, C, D de P, posons $U_{A,B,C,D}$ la variable indicatrice d'existence des diagonales du quadrilatère $ABCD$. Exprimer X_n en fonction des variables $U_{A,B,C,D}$. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et trouver un équivalent en $+\infty$.
c) Soit A, B, C, D, A', B', C' et D' huit sommets distincts de P.
Montrer que

$$\mathbf{E}(U_{A,B,C,D}U_{A',B',C',D'}) = \mathbf{E}(U_{A,B,C,D})\,\mathbf{E}(U_{A',B',C',D'}).$$

d) Calculer $\mathbf{V}(X_n)$ et montrer que

$$\frac{\mathbf{V}(X_n)}{\mathbf{E}(X_n)^2} \to 0.$$

Écoles Normales Supérieures – PC

56. ★ Soient A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On dit que (A,B) est *sans relation* si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $(n_1,\ldots n_k) \in (\mathbb{Z}^*)^k$, $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}\cdots B^{n_k} \neq I_n$ si k est pair, $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}\cdots A^{n_k} \neq I_n$ si k est impair.
a) Montrer que si (A,B) est sans relation alors (B,A) est sans relation.
b) Dans cette question, $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = {}^tA$. Soit $(n_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}^*$. On note c_k le coefficient d'indice $(2,1)$ de $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}\cdots B^{n_k}$ si k est pair, et le coefficient d'indice $(1,1)$ de $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}\cdots A^{n_k}$ si k est impair. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $c_{k+1} = 2n_{k+1}c_k + c_{k-1}$. En déduire que (A,B) est sans relation.

57. ★ ***a)*** Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) \leqslant f(x) \times f(y).$$

b) Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, non de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) \leqslant f(x) \times f(y)\ ?$$

58. $\star$ Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f \in E$, $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E.
a) On suppose que

$$\int_0^1 {f_n}^2 \to \int_0^1 f^2$$

et que, pour tout $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,

$$\int_0^1 f_n g \to \int_0^1 fg.$$

Montrer que

$$\int_0^1 (f_n - f)^2 \to 0.$$

b) On suppose que

$$\int_0^1 |f_n| \to \int_0^1 |f|$$

et que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 |f_n - f| \to 0.$$

59. $\star$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

b) Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $\displaystyle(-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \geqslant 0$.

c) Soient $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_1,\ldots,A_n$ des événements.

Montrer que $\displaystyle\mathbf{P}(A_1 \cup\cdots\cup A_n) - \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap\cdots\cap A_{i_j}\right)$ est du signe de $(-1)^k$.

École Polytechnique – MP

60. $\star$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les racines de P.
a) Montrer que P' est simplement scindé.
b) On note $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}$ ses racines. Montrer que $2b_1 \leqslant a_1 + a_2$. À quelle condition a-t-on égalité ?
c) On suppose de plus P unitaire et on écrit $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} + X^n$.
Montrer que $\alpha_{n-1}^2 \geqslant \dfrac{2n}{n-1}\alpha_{n-2}$. Montrer que les racines de P appartiennent à l'intervalle

$$\left[-\frac{\alpha_{n-1}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2}}\ ,\ -\frac{\alpha_{n-1}}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}\alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2}}\right].$$

61. ★ On dit que X est une antichaîne de $\{1,\ldots,n\}$ si $X \subset \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ et si, pour tout couple $(A,B) \in X^2$, $A \subset B$ implique $A = B$.
a) Soit X une antichaîne de $\{1,\ldots,n\}$. Pour $k \in \{0,\ldots,n\}$, on note L_k le cardinal de $\{A \in X, |A| = k\}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k!\,(n-k)!\,L_k \leqslant n!.$$

Ind. Pour $A \in X$ de cardinal m, considérer

$$\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma(\{1,\ldots,m\}) = A\}\,.$$

b) Montrer que le cardinal maximal d'une antichaîne de $\{1,\ldots,n\}$ est $\begin{pmatrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{pmatrix}$.
c) Soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le nombre de n-uplets $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = 0$ est inférieur ou égal à $\begin{pmatrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{pmatrix}$.
d) On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients ± 1 telles qu'il existe $x \in \operatorname{Ker} M$ à coefficients dans

$$\left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Montrer que $|\mathcal{E}_n| = o\left(2^{n^2}\right)$.

62. ★ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $T_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que si A est nilpotente alors T_A est nilpotent.
b) Montrer que si A possède une unique valeur propre alors T_A est nilpotent.
c) Montrer que si A possède plusieurs valeurs propres alors T_A n'est pas nilpotent.
d) Que peut-on dire de T_A si A est diagonalisable ?
e) Quel est le rang maximal de T_A ?
f) Montrer que s'il existe $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$ tel que $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \geqslant 2$, alors T_A n'est pas de rang maximal.

63. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad {}^tXAY = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^tYAX = 0.$$

Montrer que A est symétrique ou antisymétrique.

64. ★ Lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $N(M) = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)}$.
a) Montrer que N est une norme sous-multiplicative, invariante par la conjugaison des éléments du groupe orthogonal.
b) Soit $(A,B) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})^2$. On note $[A,B] = ABA^{-1}B^{-1}$. On suppose que $N(B - I_3) < 2$ et que A commute avec $[A,B]$. Montrer que A et B commutent.
c) Soit $(A,B) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})^2$. Montrer que

$$N(I - AB) \leqslant 4\,N(I - A)\,N(I - B).$$

65. ★ On note E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles non nulles des polynômes non nuls de E.
a) Examiner A quant aux transformations $x \mapsto -x$, $x \mapsto 1/x$.
b) Montrer que $A \subset [-2, 2]$.
c) Montrer que A est dense dans $[-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$.

66. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que tout barycentre à coefficients positifs de points de $\mathbb{R}^n$ peut être récrit comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $n + 1$ de ces points.
b) Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que son enveloppe convexe est compacte.
c) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe des nombres $t_1 \ldots, t_{n+1}$ dans $[0, 1]$, des nombres réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$ et

$$\int_0^1 f = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(t_i).$$

d) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ appartient au segment formé par deux points de l'image de f.

67. ★ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

68. ★ Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

69. ★ Soit $(T_1, \ldots, T_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ avec, pour $i \neq j$, $T_i/T_j \notin \mathbb{Q}$. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions $T_1, \ldots, T_n$ périodiques et continues. On suppose que $f_1 + \cdots + f_n = 0$. Montrer que les f_i sont constantes.

70. ★ ***a)*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < b < a$. Montrer

$$1 \leqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} \leqslant \Big(\frac{a-b}{a+b}\Big)^2.$$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < b < a$. On pose

$$I(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}.$$

i) Montrer que

$$I(a, b) = I\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big).$$

ii) En déduire une méthode de calcul approché de $I(a, b)$.

71. ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^3.$$

a) On suppose n impair. Montrer que $I_n = 0$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer
$$I_{2n} = (-1)^n \frac{4^{3n-1}}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, \sin^{2n} y \, \sin^{2n}(x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule
$$I_{2n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

72. ★ Soient $\lambda \in [1, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$. Établir l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \left| e^{-\lambda x} - e^{-x} P(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

73. ★ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et
$$\Gamma = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$
Maximiser $\Phi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$ sur Γ.

74. ★ On considère un polyèdre de $\mathbb{R}^3$. À chaque sommet, on associe un nombre a_s telle que la somme des a_s vaut 1. Montrer que la somme des $a_s a_{s'}$ pour chaque côté $[s, s']$ du polyèdre est inférieur ou égale à $3/8$.

75. ★ ***a)*** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{2k, k \in [\![1, n]\!]\}$. Calculer $\mathbf{P}(|X - Y| \leqslant 2)$ et $\mathbf{P}(|X - Y| \leqslant 1)$.
b) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note
$$S_p : \omega \mapsto \operatorname{card}\{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ |X_i(\omega) - X_j(\omega)| \leqslant p\}.$$
Montrer que
$$\mathbf{E}(S_p) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leqslant p).$$

c) Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ et
$$s_p(x) = \operatorname{card}\{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ |x_i - x_j| \leqslant p\}$$
pour $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $s_2(x) \leqslant 3\, s_1(x)$. *Ind.* Procéder par récurrence sur n.

d) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leqslant 2) \leqslant 3\,\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leqslant 1).$$

76. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0,1\}$ (resp. $\{-1,1\}$). On note

$$p_n = \mathbf{P}\left(A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right) \quad \text{et} \quad q_n = \mathbf{P}\left(B_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right).$$

a) Montrer que $q_{n+1} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

École Polytechnique - ESPCI – PC

77. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, on pose

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

et

$$[a_1, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Soient $n \geqslant 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. Montrer que

$$[a_1, \ldots, a_n] = \frac{D(a_1, \ldots, a_n)}{D(a_2, \ldots, a_n)}.$$

Mines - Ponts – MP

78. ★ Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si tout entier supérieur ou égal à $(a-1)(b-1)$ est de la forme $au + bv$ pour un couple $(u,v) \in \mathbb{N}^2$.

79. ★ Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $P = aX^2 + (c-b)X + e - d$ et

$Q = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. Montrer que si P possède une racine dans $[1, +\infty[$ alors Q possède une racine dans $\mathbb{R}$.

80. ★ Soient P et Q deux polynômes unitaires dans $\mathbb{C}[X]$, de degrés respectifs 2 et 3 ; si $P^3 - Q^2$ est de degré $\leqslant 1$, montrer que $P^3 = Q^2$.

81. ★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal P. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E.
a) Montrer que

$$I \mapsto \{Q(u)(x),\ Q \in I\}$$

réalise une correspondance bijective entre les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ contenant P et les sous-espaces de E stables par u.
b) En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E stables par u.
c) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par v est fini. Établir l'existence de $y \in E$ tel que $\big(y, v(y), \ldots, v^{n-1}(y)\big)$ soit une base de E.

82. ★ Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (\min\{i, j\}\, \alpha_i \alpha_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi : (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto {}^tXAY$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

83. ★ Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant n$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

84. ★ Soit A une matrice antisymétrique réelle.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires.
b) Montrer que le rang de A est pair.

85. ★ Existe-t-il $(a_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} {a_n}^k = \frac{1}{k^2}\ ?$$

86. ★ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{i=2}^{n} \left\lfloor n^{1/i} \right\rfloor = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor$$

87. ★ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in [0, 1],\ f'(x) \geqslant f(x)^3$. Montrer que

$$f(0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

88. ★ Montrer qu'il existe $a > 0$ et une fonction $f :]-a, a[\mapsto \mathbb{R}$ somme d'une série entière de rayon de convergence au moins a telle que

$$\forall t \in]-a, a[, \qquad t\, f'(t) = t + f(t)^2.$$

89. ★ Soient X, Y deux variables indépendantes et de même loi à valeurs strictement positives. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1$.

Mines - Ponts – PSI

90. ★ ***a)*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$.
b) Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Centrale – MP

91. ★ Soient $\alpha > \beta$ les deux racines de $P = X^2 - X - 1$. On pose

$$A = \left\{x + \alpha\, y,\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

et $\sigma : x + \alpha\, y \mapsto x + \beta\, y$.
a) Montrer que A est un anneau et que σ est un automorphisme de A. Expliciter σ^{-1}.
b) On note U l'ensemble des inversibles de A et $N : z \in A \mapsto z\, \sigma(z)$.
i) Montrer :

$$\forall z \in A\,,\ z \in U \quad \Longleftrightarrow \quad \big|N(z)\big| = 1.$$

ii) Soit $V = U \cap]1, +\infty[$. Montrer que si $x + \alpha\, y \in V$, alors $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$.
iii) En déduire que $V = \left\{\alpha^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

92. ★ ***a)*** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.
b) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, il en est de même de P'.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note $z_1, \ldots, z_r$ ses racines . Montrer que les racines non réelles de P' sont dans

$$\bigcup_{k=1}^{r} \Big\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \big|z - \operatorname{Re}(z_k)\big| \leqslant \big|\operatorname{Im}(z_k)\big|\Big\}.$$

93. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. On considère la matrice

$$M = \left(e^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que $\det M > 0$ lorsque $n = 2$.

b) On suppose $\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ b_k = k-1$. Calculer $\det M$.
c) Montrer que M est inversible et en déduire $\det M > 0$.

94. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in [\![0,2n]\!]$, on pose $f_j : t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sh}^j t \ \operatorname{ch}^{2n-j} t$.
On note $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_{2n})$ et $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.
a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de F.
b) Montrer que la dérivation induit un endomorphisme de F. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

95. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \neq j$, on pose $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda\, E_{i,j}$.
a) Montrer que $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et donner son inverse.
b) Déterminer les morphismes continus de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même.
c) Montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $T_{i,j}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1}$.
Ind. On pourra chercher A sous la forme d'une matrice de dilatation.
d) En déduire les morphismes continus de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

96. ★ Soit I un intervalle non vide et non réduit à point de $\mathbb{R}$. On pose $E = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Soit $\mu \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire. On suppose que μ est positive c'est-à-dire que, pour tout $f \in E$ avec $f \geqslant 0$ on a $\mu(f) \geqslant 0$.
a) Soit $f \in E$. Montrer que $|\mu(f)| \leqslant \mu\left(|f|\right)$.
b) On suppose dans ***b)*** que $I = [a,b]$ avec $a < b$, et on munit E de $\| \ \|_\infty$. Montrer que μ est continue.
c) Soient f et g dans E. Montrer que $\mu(fg)^2 \leqslant \mu(f^2)\,\mu(g^2)$.
d) On suppose $\mu \neq 0$ et on donne $h \in E$ avec $h > 0$. Montrer que $\mu(h) > 0$.
e) On suppose que $I = \mathbb{R}$. Établir l'existence de $A > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \qquad f|_{[-A,A]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(f) = 0.$$

97. ★ PYTHON. Soient a et p dans $\mathbb{N}^*$ avec $a \geqslant 2$. On définit par récurrence la suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ si u_n est un carré, $u_{n+1} = u_n + p$ sinon.
a) Écrire une fonction de paramètres (a,p,N) qui renvoie la liste des termes de u_0 à u_N.
Conjecturer un comportement asymptotique pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$ (deux cas).
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \geqslant 2$.
c) Montrer que la suite est ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang) ou diverge vers $+\infty$.
d) Si p ne divise pas a, montrer qu'il ne divise aucun terme.
Si p est premier et divise a, montrer qu'il divise tous les termes.
e) Que dire de la suite si un des termes n'est pas un carré modulo p ?
f) Justifier l'existence d'une valeur minimale c atteinte par la suite. Si c est un carré modulo p, montrer que $c < \sqrt{c} + p$.
g) Démontrer les conjectures.

98. ★ Soient $\lambda \in \,]-1,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad f'(x) = f(x) + f(\lambda x).$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\| \ \|$ la norme de la convergence uniforme sur $[-T, T]$. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \|f^{k+1}\| \leqslant \big(1 + |\lambda|\big)^k \, \|f'\|.$$

En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

99. ★ ***a)*** Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $s \in [0, 1]$, montrer que la variable aléatoire s^Y possède une espérance.
On pose

$$G_Y : s \in [0, 1] \mapsto \mathbf{E}(s^Y).$$

b) Soient $\omega \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \omega(1 - \omega)^k.$$

Calculer G_X.
Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires vérifiant : $Z_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_n = \sum_{i=0}^{Z_{n-1}} X_{n,i}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$G_{Z_{n+1}} = G_X \left(G_{Z_n} \circ G_X \right).$$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(Z_n = k) = \alpha_n(1 - \alpha_n)^k.$$

e) Exprimer α_n.
f) Étudier la convergence de (α_n).