Renseignements généraux

— *Concours* : ENS Lyon
— *Matière* : Mathématiques
— *Nom* : Timothé Lemistre

Énonce des exercices

Exercice 1 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$; montrer que soit le spectre de A contient un complexe de module > 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}*$ tel que $A^k - I_n$ soit nilpotente.

Exercice 2 :

Montrer qu'existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 10 ayant 8 racines (au moins) dans $\mathbb{U}$, 2 (au moins) dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $P(0) = 1$ et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Remarques sur l'oral

J'ai esquissé la réponse de l'exercice 1 avant d'avouer avoir déjà fait quelque chose de proche. Pour le 2, j'ai parlé de polynômes réciproques, il m'a demandé de montrer qu'un tel polynôme s'écrit sous la forme $X^5 Q(X + \frac{1}{X})$ ou $degQ = 5$ et $Q \in \mathbb{Z}$ (8 racines de Q sont alors dans $]-2; 2[$, 2 dans $[2; +\infty[$), de montrer que si les racines (réelles) de A et B (polynômes à coefficients réels) sont enlacées et simples, c'est aussi le cas des racines de A et $A + \lambda B$ (avec λ réel) ; il voulait, avec $P_1 = \frac{X^{10}-1}{X^2-1}$, $P_2 = P_1(X)(X^2 - 1)$ et Q_1, Q_2 leurs polynômes associés, montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{N}$ tels que $Q_2 + \lambda Q_1$ ne soit pas irréductible est de densité nulle (les P correspondants vérifiant toutes les conditions désirées, sauf éventuellemnt l'irréductibilité).