Chapitre 11 : polynômes à une indéterminée

Table des matières

1 Construction, premières propriétés **2**
1.1 Sous-ensemble de suites, opérations . . . 2
1.2 Notations définitives . . . 2
1.3 Degré et valuation . . . 2
1.4 Premières caractéristiques de l'anneau $K[X]$ . . . 3

2 Arithmétique des polynômes **3**
2.1 Division euclidienne . . . 3
2.2 Idéal d'un anneau commutatif . . . 4
2.3 PGCD, PPCM, relation de Bezout et théorème de Gauss . . . 5
2.4 Polynômes irréductibles . . . 5

3 Deux autres opérations **6**
3.1 Dérivation . . . 6
3.2 Évaluation . . . 6
3.3 Formule de Taylor . . . 7

4 Racines de polynômes **7**
4.1 Définitions . . . 7
4.2 Factorisation des polynômes . . . 7
4.3 Polynôme conjugué dans $\mathbb{C}[X]$ . . . 8

5 Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ **9**
5.1 Anneau $\mathbb{C}[X]$ . . . 9
5.2 Anneau $\mathbb{R}[X]$ . . . 9
5.3 Anneau $\mathbb{Q}[X]$ . . . 10

6 Relations entre coefficients et racines **10**

1 Construction, premières propriétés

1.1 Sous-ensemble de suites, opérations

Soit K un corps commutatif . On définit l'ensemble $K^{(\mathbb{N})}$ des suites $u \in K^{\mathbb{N}}$ s'annulant à partir d'un certain rang ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = 0_K$) sur lequel on pose :

- ***une addition*** $+$: $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- ***une multiplication*** $\times$: $(u \times v) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i+j=n} u_i \cdot v_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- ***une multiplication par les scalaires*** $\cdot$: $\lambda \cdot u = (\lambda \times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 1 L'ensemble $(K^{(\mathbb{N})}, +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément nul la suite nulle $0 = (0, 0, 0, \cdots)$ et d'élément unité $1 = (1, 0, 0, \cdots)$.

1.2 Notations définitives

On pose $X = (0, 1, 0, 0, \cdots)$ dans $K^{(\mathbb{N})}$.

Proposition 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X^n = X \cdot X \cdots X = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, 0, \cdots)$, avec un seul 1 précédé de n zéros.

Étant donnée une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble $K^{(\mathbb{N})}$, soit n_0 un rang à partir duquel la suite u s'annule. On peut alors poser : $u = \sum_{n=0}^{n_0} u_n \cdot X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot X^n$.

Définition 1 Étant donné un corps K commutatif, on appelle ***polynôme à une indéterminée à coefficients dans le corps*** K, tout élément de $K^{(\mathbb{N})}$.
Les polynômes seront notés : $P(X) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \cdot X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$.
On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K à une indéterminée X.

Exemple 1 Le polynôme $P(X) = X^2 + X + \frac{6}{5}$ appartient au choix à $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou à $\mathbb{C}[X]$. Le polynôme $Q(X) = X^6 + i$ appartient seulement à l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

1.3 Degré et valuation

Définition 2 Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ un polynôme dans $K[X]$.
On définit le ***degré*** du polynôme P, noté $\deg(P)$ de la façon suivante :

- si le polynôme P est le polynôme nul, alors $\deg(0) = -\infty$
- si le polynôme P n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. Par conséquent :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n \cdot X^n.$$

Définition 3 Soit $P(X)$ un polynôme non nul de $K[X]$. On pose $p = \deg(P) \in \mathbb{N}$.
On appelle ***coefficient dominant*** du polynôme $P(X)$ le coefficient non nul a_p. C'est le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme $P(X)$.
On appelle ***terme dominant*** du polynôme $P(X)$ le monôme $a_p\ X^p$, lorsque $P(X)$ est non nul.
On dit que le polynôme $P(X)$ est ***unitaire*** si son coefficient dominant est égal à 1.

Exemple 2 • Tous les polynômes X^n, pour $n \in \mathbb{N}$ sont unitaires.
• Déterminer les degrés et les valuations des polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$: $P_1(X) = 1 + 2X - 7X^5$ et $P_2(X) = -6X^9 + 7X^5 - 8X^{10}$.

Définition 4 Soient P et Q deux polynômes dans $K[X]$. On pose $P(X) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \cdot X^n$, pour un certain entier n_0. On définit la composée des deux polynômes $P \circ Q(X)$ par :

$$P \circ Q(X) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \cdot (Q(X))^n.$$

Proposition 3 Soient P et Q deux polynômes dans $K[X]$, λ dans K. Alors :
- $\deg(P + Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$, avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$
- $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$ lorsque $\lambda \neq 0$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$, lorsque $Q(X)$ est non constant.

Exemple 3 • Tester les formules ci-dessus avec les polynômes $P_1(X) = 1 + X^2$ et $Q_1(X) = -X^2$ et d'autre part : $P_2(X) = 1 + X^2$ et $Q_2(X) = -2X^2$;
• Soient $P(X) = 1 + X$ et $Q(X) = -2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$. Calculer $P \circ Q(X)$ et $Q \circ P(X)$.

1.4 Premières caractéristiques de l'anneau $K[X]$

Proposition 4 L'anneau $K[X]$ est intègre.

Proposition 5 L'ensemble $K[X]^*$ des inversibles de l'anneau $K[X]$ est formé des polynômes constants non nuls (c'est-à-dire des polynômes de degré 0).

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Division euclidienne

Proposition 6 Soient A et B deux polynômes de $K[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes dans $K[X]$ tels que :

- $A = B \cdot Q + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$.

Le polynôme Q s'appelle le ***quotient*** dans la division euclidienne de A par B et le polynôme R s'appelle le ***reste***.

Méthode : Comment faire une division euclidienne entre polynômes ?

Pour calculer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$:

- ▶ poser le signe de division
- ▶ écrire en haut à gauche $P(X)$ sous forme développée selon les puissances décroissantes
- ▶ écrire en haut à droite $Q(X)$ sous forme développée selon les puissances décroissantes
- ▶ écrire le premier monôme αX^p de sorte que le produit de celui-ci par $Q(X)$ corresponde au même terme dominant dans $P(X)$
- ▶ effectuer le produit, l'écrire sous forme développée selon les puissances décroissantes en dessous de $P(X)$
- ▶ effectuer la différence
- ▶ recommencer le processus : le quotient est obtenu en dessous de $Q(X)$ et le reste est tout en dessous de $P(X)$.

Exemple 4 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^2 + 3X + 2$ par $B(X) = X^3 + 3X^2 - 5X + 4$.

2.2 Idéal d'un anneau commutatif

Définition 5 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit I une partie de A.
On dit que I est un ***idéal*** de A si on a les deux conditions suivantes :

- l'ensemble $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ (autrement dit, I contient l'élément nul 0_A et pour tout $(x, y) \in I^2$, on a $x - y \in I$.)
- pour tout $x \in I$ et pour tout $a \in A$, on a : $a \times x \in I$.

Exemple 5 Pour tout anneau commutatif $(A, +, \times)$ et pour tout élément $a \in A$, l'ensemble que l'on note $I = a \cdot A = \{a \times x \in A \mid x \in A\}$ est un idéal de A.

Définition 6 On dit que l'anneau A est ***principal*** si tous les idéaux I de A sont de la forme $I = a \cdot A$. Un tel élément a sera appelé ***générateur*** de l'idéal I.

Proposition 7 L'anneau $K[X]$ est principal. Plus précisément, si I est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$ (si $I = \{0\}$, alors $I = 0 \cdot K[X]$), il existe un unique générateur unitaire de l'idéal I.

2.3 PGCD, PPCM, relation de Bezout et théorème de Gauss

Définition 7 Soient A et B deux polynômes dans $K[X]$. On définit le ***PGCD*** des deux polynômes A et B, noté $A \wedge B$ par :
- si $A = B = 0$, alors $A \wedge B = 0$
- si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, l'ensemble $I = A \cdot K[X] + B \cdot K[X] = \{A \cdot U + B \cdot V \in K[X] \mid (U, V) \in K[X]^2\}$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$. On note $A \wedge B$ le générateur unitaire de cet idéal.

On dit que deux polynômes A et B sont ***premiers entre eux*** si :$A \wedge B = 1$.

Définition 8 Soient A et B deux polynômes dans $K[X]$. On définit le ***PPCM*** des deux polynômes A et B, noté $A \vee B$ par :
- si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $A \vee B = 0$
- si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, l'ensemble $I = A \cdot K[X] \cap B \cdot K[X]$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$. On note $A \vee B$ le générateur unitaire de cet idéal.

On dispose des mêmes résultats d'arithmétique que dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 8 Soient A et B deux polynômes non nuls dans $K[X]$.
- Si P divise A et si P divise B, alors P divise $A \wedge B$.
- Si A divise P et si B divise P, alors $A \vee B$ divise P.
- $A \wedge B = 1 \iff \exists (U, V) \in K[X]^2,\ AU + BV = 1$ [relation de Bezout] ; algorithme d'Euclide
- $\left.\begin{array}{l} \triangleright \quad \text{si } A \text{ divise } (B \cdot C) \text{ et si } A \wedge B = 1, \text{ alors } A \text{ divise } C \\ \triangleright \quad \text{si } A \text{ divise } C, \text{ si } B \text{ divise } C \text{ et si } A \wedge B = 1, \text{ alors } (A \cdot B) \text{ divise } C \\ \triangleright \quad \text{si } A \wedge C = 1 \text{ et } B \wedge C = 1, \text{ alors } (A \cdot B) \wedge C = 1 \end{array}\right\}$ [théorème de Gauss]

2.4 Polynômes irréductibles

Définition 9 Soit $P(X) \in K[X]$. On dit que le polynôme $P(X)$ est ***irréductible dans*** $K[X]$ si le polynôme $P(X)$ n'est pas constant et :

$$\forall (Q, R) \in K[X]^2, \quad P(X) = Q(X) \cdot R(X) \Longrightarrow \deg(Q) = 0 \text{ ou } \deg(R) = 0.$$

Remarque 1 Un polynôme n'est pas irréductible si on peut le factoriser en deux polynômes non constants.

Proposition 9 Tous les polynômes de degré 1 dans $K[X]$ sont irréductibles.

Théoréme 1 Sout $P(X) \in K[X]$ un polynôme non constant. Alors, il existe :
- un nombre $\xi \in K^*$
- des polynômes irréductibles unitaires $\pi_1(X), \cdots, \pi_r(X)$ différents
- des entiers $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ dans $\mathbb{N}^*$

tels que :

$$P(X) = \xi \cdot \pi_1(X)^{\alpha_1} \cdots \pi_r(X)^{\alpha_r}.$$

De plus, cette décomposition appelée ***factorisation du polynôme*** $P(X)$ ***en produit d'irréductibles*** est unique à ordre près.

3 Deux autres opérations

3.1 Dérivation

Définition 10 Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ un polynôme dans $K[X]$. On définit le ***polynôme dérivé*** par :

$$P'(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot X^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot X^n.$$

On définit par récurrence les polynômes dérivés $P^{(k)}(X)$.

Exemple 6 Pour tous entiers naturels n et k, calculer $(X^n)^{(k)}$.

Proposition 10 On dispose des propriétés suivantes pour tous polynômes P et Q dans $K[X]$, pour tout scalaire $\lambda \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $(P+Q)' = P' + Q'$ et $(\lambda \cdot P)' = \lambda \cdot P'$
- $(P \cdot Q)' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$
- $(P^n)' = n \cdot P' \cdot P^{n-1}$
- $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$

Proposition 11 Si K est le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors pour tout polynôme $P(X)$ non constant, on a : $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
En particulier, pour tout polynôme $P(X) \in K[X]$ et pour tout entier $k > \deg(P)$, on a : $P^{(k)} = 0$.

3.2 Évaluation

Définition 11 Soient $P(X) = \sum_{n=0}^{p} a_n \cdot X^n$ un polynôme dans $K[X]$ et x un élément de K. On appelle ***évaluation du polynôme*** $P(X)$ ***en*** x et on note abusivement $P(x)$ le nombre :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n \cdot x^n.$$

L'application $x \longmapsto P(x)$ de K dans K est appelée ***fonction polynomiale*** associée au polynôme $P(X)$.

Exemple 7 • Dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (corps des congruences modulo 7), quelle est la fonction polynomiale associée au polynôme $P(X) = X^7 - X$?
• Si $P(X)$ est un polynôme non nul à coefficients complexes de valuation s et de degré d, déterminer un équivalent de $P(z)$, lorsque $|z|$ tend vers ∞ et lorsque z tend vers 0.

3.3 Formule de Taylor

Proposition 12 Soit K le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $P(X) \in K[X]$ et $a \in K$. Alors, on a :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \cdot (X-a)^n.$$

4 Racines de polynômes

4.1 Définitions

Définition 12 Soit $P(X) \in K[X]$ où K est un corps commutatif. Soit $a \in K$.
On dit que le nombre a est une ***racine*** du polynôme $P(X)$ si $P(a) = 0$.

Proposition 13 Soit $P(X) \in K[X]$. Soit $a \in K$. Alors, a est une racine de $P(X)$ si et seulement si $(X-a)$ divise $P(X)$ dans $K[X]$.

Définition 13 Soit $P(X)$ dans $K[X]$. Soit a une racine du polynôme $P(X)$. Alors $(X-a)$ est un facteur irréductible unitaire divisant $P(X)$.
On appelle ***multiplicité de la racine*** a ***dans le polynôme*** $P(X)$, l'exposant de $(X-a)$ dans la décomposition de $P(X)$ en facteurs irréductibles.

Remarque 2 • Par extension, si a n'est pas une racine de $P(X)$, on pourra dire que a est une racine de $P(X)$ de multiplicité égale à 0.
• On dit que la racine est ***simple*** si elle est de multiplicité égale à 1 et ***double*** si sa multiplicité vaut 2.

Proposition 14 Soit $P(X)$ un polynôme non nul dans $\mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
• Si λ est une racine de multiplicité $\nu \geqslant 1$ dans le polynôme $P(X)$, alors λ est une racine de multiplicité $\nu - 1$ dans le polynôme dérivé $P'(X)$.
• La multiplicité de λ dans le polynôme $P(X)$ est le plus petit entier k tel que $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

4.2 Factorisation des polynômes

Proposition 15 Soit $P(X)$ un polynôme non nul dans $K[X]$. On pose $p = \deg(P)$. Alors, le polynôme $P(X)$ admet un nombre fini de racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. En notant $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les multiplicités respectives de ces racines, il existe un polynôme $Q(X)$ n'admettant aucune racine dans K tel que :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{\alpha_k} \cdot Q(X).$$

Le nombre r est appelé le nombre de racines ***comptées sans multiplicités*** du polynôme $P(X)$.

Le nombre $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k$ est appelé le nombre de racines ***comptées avec multiplicités*** du polynôme $P(X)$.

Exemple 8 Combien le polynôme $P(X) = (X^2+1)^5 \cdot (X^2-1) \cdot (X^3-1)^3$ admet-il de racines comptées avec ou sans multiplicité dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$? dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$?

Théoréme 2 Tout polynôme non nul admet toujours moins de racines comptées avec ou sans multiplicités que son degré. En particulier, le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Définition 14 Soit $P(X)$ un polynôme non nul dans $K[X]$. On dit que le polynôme $P(X)$ est ***scindé sur*** K si le nombre de ses racines comptées avec multiplicités est exactement égal à son degré.

Exemple 9 On pose $f : x \longmapsto e^{-x^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples et tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot e^{-x^2}.$$

Exemple 10 [polynômes de Tchebytchev]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

2. Montrer que la suite $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le problème :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2X\ T_{n+1}(X) - T_n(X) \end{cases}.$$

3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme dominant de $T_n(X)$.
4. Déterminer les racines du polynôme et vérifier que $T_n(X)$ est scindé à racines simples dans $[-1, 1]$.
5. Déterminer les entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre $\cos\dfrac{\pi}{q}$ soit irrationnel.

4.3 Polynôme conjugué dans $\mathbb{C}[X]$

Définition 15 Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ X^n$ un polynôme à coefficients complexes.

On appelle ***polynôme conjugué*** de $P(X)$, le polynôme noté $\overline{P}(X)$:

$$\overline{P}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}\ X^n \in \mathbb{C}[X].$$

Proposition 16 On dispose des propriétés suivantes.

- Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a l'équivalence :

$$P = \overline{P} \iff P(X) \in \mathbb{R}[X].$$

- Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :
$$\overline{P(\lambda)} = \overline{P}(\overline{\lambda}).$$
- Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{C}[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[X]$,
$\longrightarrow$ $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$
$\longrightarrow$ $\overline{\alpha \cdot P} = \overline{\alpha} \cdot \overline{P}$
$\longrightarrow$ $\overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$.
- si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$ de multiplicité égale à $\nu \in \mathbb{N}^*$, alors $\overline{\lambda}$ est encore racine de $P(X)$ de multiplicité égale à ν.

5 Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

5.1 Anneau $\mathbb{C}[X]$

Le théorème suivant est fondamental pour l'étude des facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Théoréme 3 théorème de d'Alembert-Gauss

Tous les polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$ sont scindés. Autrement dit :
- tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe
- les seuls facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

On dit que le corps $\mathbb{C}$ est ***algébriquement clos***.

Méthode : Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$?

Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Pour obtenir sa factorisation :
- ▶ trouver une racine λ évidente dans l'ensemble $\{0, \pm 1, \pm 2\}$
- ▶ déterminer la multiplicité de λ dans $P(X)$: pour cela
  - dériver $P(X)$
  - calculer alors l'évaluation en λ
  - recommencer les dérivations puis calculer les évaluations en λ jusqu'à tomber sur une évaluation non nulle en λ
  - compter le nombre de fois où on a dérivé pour aboutir à une évaluation non nulle pour la première fois : c'est la multiplicité α de λ dans $P(X)$
- ▶ effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-\lambda)^\alpha$: on trouve le reste nul et le quotient $Q(X)$
- ▶ tout recommencer avec $Q(X)$ jusqu'à tomber sur un polynôme de degré inférieur à 2.

Exemple 11 • Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^6 + 10X^5 + 38X^4 + 61X^3 + 14X^2 - 68X - 56$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ et $X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

5.2 Anneau $\mathbb{R}[X]$

Proposition 17 Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Soit λ un nombre complexe. Alors : $\overline{P(\lambda)} = P(\overline{\lambda})$.
Par conséquent, si le complexe λ est une racine de $P(X)$, alors $\overline{\lambda}$ aussi, avec la même multiplicité.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss :

Théoréme 4 Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Méthode : Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$?

Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Pour obtenir sa factorisation :
- ▶ factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$
- ▶ regrouper les racines complexes de $P(X)$ par conjugués
- ▶ former les facteurs irréductibles $(X-\alpha)$, avec α racine réelle de $P(X)$
- ▶ former les facteurs irréductibles $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - 2\Re e(\lambda)\cdot X + |\lambda|^2$, avec λ racine complexe non réelle de $P(X)$.

Exemple 12 • Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme X^4+X^2+1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser X^n-1 et X^n+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

5.3 Anneau $\mathbb{Q}[X]$

Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$, les choses sont plus difficiles. Par exemple, il n'y a pas d'expression simple des polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exemple 13 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme X^n+2 est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Le polynôme $4X^3+3X^2+X+7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

6 Relations entre coefficients et racines

Méthode : Comment trouver les relations entre coefficients et racines de polynômes ?

Soit $P(X)$ un polynôme scindé. On pose : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ et d'autre part : $P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$, avec les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ et les racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Pour trouver les formules entre a_k et le reste :
- ▶ calculer le terme en X^k dans la forme développée : a_k
- ▶ développer la forme factorisée
- ▶ isoler le terme en X^k dans cette expression : $a_n \cdot (-1)^{n-k} \cdot \sum_{I \subset [\![1,n]\!]\ ;\ \#(I)=n-k} \prod_{p\in I} \lambda_p$
- ▶ identifier les deux coefficients en X^k.

Exemple 14 • Développer complètement le polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta)$.
- Si $P(X) = X^6+4X^5-6X^3+2X+2$, déterminer la somme et le produit des racines complexes de $P(X)$ comptées avec multiplicités.