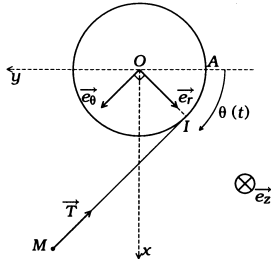


Corr. 1 Enroulement d'un fil sur un cylindre

1. On choisit un repérage de type polaire adapté pour bien décrire l'enroulement. À l'instant t , une longueur de fil $a\theta(t)$ est enroulée sur le cylindre. Le référentiel de toute l'étude est celui du laboratoire où le cylindre est fixe et il est supposé galiléen.



Les inconnues du problème, le fil restant tendu par hypothèse, sont l'angle $\theta(t)$ d'enroulement et la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta$ sur la masse M.

Remarque: On peut prendre la tension colinéaire au fil dès lors qu'il est sans raideur, hypothèse usuelle (et souvent implicite) des énoncés.

Puisqu'il y a deux inconnues, il nous faut deux équations. On peut utiliser un théorème énergétique sur la masse M qui donnera directement accès à une équation différentielle sur θ puisque la tension ne travaille pas. Ensuite, on obtiendra la tension *via* le théorème du moment cinétique **par rapport à un point fixe** (le point O ici est adapté, mais pas le point A !!!). Maintenant que l'on a convaincu l'examinateur (et soi-même) que l'on a tout ce qu'il faut pour réussir, il reste à mener les calculs...

On a besoin de la vitesse de M, donc on calcule

$$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM} = a\vec{e}_r + (\ell_0 - a\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\text{d'où } \vec{v}(M) = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + (\ell_0 - a\theta)(-\dot{\theta})\vec{e}_r - a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{soit } \vec{v}(M) = -(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r \quad (1)$$

Ainsi, la vitesse de M est toujours parallèle à (OI) ! C'est logique car le point I constitue un centre instantané de rotation pour le point M et le fil au-delà de I.

Le théorème de la puissance cinétique sur la masse m s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{T} \cdot \vec{v}(M) = 0$$

puisque la tension est orthogonale à la vitesse (tant que le fil reste tendu). Par conséquent, **l'énergie cinétique est une intégrale première du mouvement (constante du mouvement)** et donne l'équation différentielle du mouvement

$$(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta} = C^{\text{te}}$$

avec $\dot{\theta} > 0$ et $\ell_0 - a\theta > 0$ (enroulement du fil étudié). Or, à l'instant initial, $\theta = 0$ et $v_0 = \ell_0\dot{\theta}_0$ donc

$$(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta} = v_0 \quad (2)$$

Il reste à intégrer cette équation différentielle à variables séparables :

$$(\ell_0 - a\theta) d\theta = v_0 dt$$

$$\text{donc } \ell_0\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = v_0 t$$

d'après les conditions initiales. On en déduit

$$\theta(t) = \theta_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}} \right)$$

où

$$\theta_0 = \frac{\ell_0}{a} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\ell_0^2}{2av_0}$$

L'angle θ_0 représente l'angle d'enroulement total du fil, enroulement obtenu au bout des temps τ . À partir de cet instant, la théorie précédente ne marche plus car la tension du fil n'est plus la seule action sur la masse...

Pour déterminer la tension du fil, on applique comme déjà annoncé le théorème du moment cinétique à la masse par rapport au point fixe O. On a

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{T} = -T a \vec{e}_z$$

Or, le moment cinétique en O de la masse est

$$\vec{L}(O) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\text{soit } \vec{L}(O) = m \left(a\vec{e}_r + (\ell_0 - a\theta)\vec{e}_\theta \right) \wedge \left(-v_0\vec{e}_r \right)$$

$$\text{soit } \vec{L}(O) = mv_0(\ell_0 - a\theta)\vec{e}_z$$

Remarque: On trouve en fait rapidement les résultats des produits vectoriels par la technique du bras de levier que l'on aura l'occasion d'utiliser souvent en mécanique...

Le théorème du moment cinétique donne par conséquent, compte tenu de (2),

$$-mv_0 a \dot{\theta} = -\frac{mv_0^2 a}{\ell_0 - a\theta} = -T a$$

$$\text{soit } T = \frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\theta}$$

La corde reste toujours tendue (tension positive) et sa tension augmente lors de l'enroulement du fil (T est même théoriquement infinie en fin d'enroulement mais on aurait alors un choc à étudier...).

2. La relation (1) n'est évidemment pas modifiée mais le théorème de la puissance cinétique s'écrit à présent

$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{v}(M)}_0 + \underbrace{m\vec{g} \cdot \vec{v}(M)}_{-mg(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta} \sin \theta}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\ell_0 - a\theta)^2 \dot{\theta}^2 \right) = -mg(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta} \sin \theta$$

soit encore, en développant la dérivée et en simplifiant par la quantité non identiquement nulle $m(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta}$,

$$(\ell_0 - a\theta)\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2 = -g \sin \theta \quad (4)$$

On aurait pu aussi trouver cette équation en partant directement de la **conservation de l'énergie mécanique** puisque la tension de travaille pas :

$$E_m = \frac{1}{2} m (\ell_0 - a\theta)^2 \dot{\theta}^2 - mg(a \sin \theta + (\ell_0 - a\theta) \cos \theta)$$

L'utilisation des conditions initiales donne la relation (5) :

$$\frac{1}{2} (\ell_0 - a\theta)^2 - g(a \sin \theta + (\ell_0 - a\theta) \cos \theta) = \frac{1}{2} v_0^2 - g\ell_0$$

La dérivation de (5) (**équation intégrale première** liée à la conservation de l'énergie) par rapport au temps conduit à l'équation (4) du mouvement.

Pour déterminer la tension T, appliquons pour changer un peu le théorème de la résultante dynamique à la masse m (le théorème du moment cinétique en O convenant aussi, bien sûr !) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + m\vec{g}$$

La projection sur \vec{e}_θ conduit à

$$-m(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta$$

donc

$$T = mg \cos \theta + m(\ell_0 - a\theta)\dot{\theta}^2$$

On obtient une tension qui dépend encore d'un paramètre dérivé dans le temps et on élimine classiquement celui-ci en se servant de l'intégrale première énergie (c'est-à-dire de l'équation (5) qui permet « de passer » de $\dot{\theta}^2$ à θ).

$$T = mg \cos \theta + \frac{m}{\ell_0 - a\theta} (2g(a \sin \theta + (\ell_0 - a\theta) \cos \theta) + v_0^2 - 2g\ell_0)$$

soit la relation (6)

$$T = mg \left(\frac{2a \sin \theta}{\ell_0 - a\theta} + 3 \cos \theta + \frac{1}{\ell_0 - a\theta} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2\ell_0 \right) \right)$$

Il est à noter que l'étude ne reste valable que tant que T > 0 (fil tendu). Cela correspond à

$$a \sin \theta + \frac{3}{2}(\ell_0 - a\theta) \cos \theta > \ell_0 - \frac{v_0^2}{2g} \quad (7)$$

avec

$$\theta < \frac{\ell_0}{a}$$

(limite d'enroulement complet du fil).

Pour étudier le mouvement, on note que les valeurs de θ permises par l'équation (5) sont celles telles que

$$f(\theta) = -a(\sin \theta + (\ell_0 - a\theta) \cos \theta) \leq \frac{v_0^2}{2g} - \ell_0 \quad (8)$$

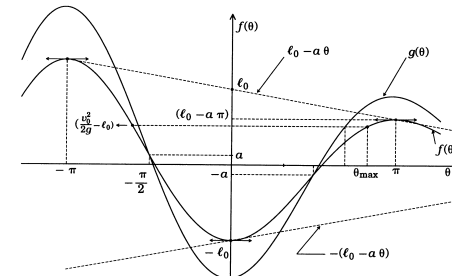
avec

$$\theta \leq \frac{\ell_0}{a}$$

Il faut de plus que la corde reste tendue, ce qui suppose d'après (7) que

$$g(\theta) = -a \sin \theta - \frac{3}{2}(\ell_0 - a\theta) \cos \theta < \frac{v_0^2}{2g} - \ell_0 \quad (9)$$

On trace $f(\theta)$ et $g(\theta)$.



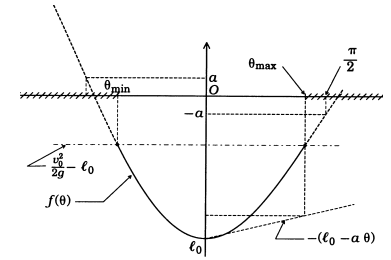
On constate alors que pour avoir un mouvement avec corde tendue, **il suffit** que θ_{\max} soit inférieur ou égal à $\pi/2$, d'où

$$\frac{v_0^2}{2g} - \ell_0 \leq -a$$

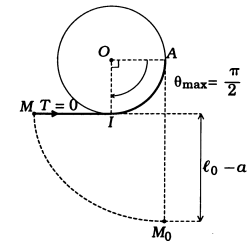
soit

$$\frac{v_0^2}{2} \leq g(\ell_0 - a)$$

Si cette condition est réalisée, le fil reste tendu au cours du mouvement et la masse m présente un mouvement oscillatoire non sinusoïdal entre les valeurs θ_{\max} et θ_{\min} (voir figure).



Remarque: La condition limite $\frac{v_0^2}{2} = g(\ell_0 - a)$ correspond à $\theta_{\max} = \pi/2$, c'est-à-dire à un fil horizontal.



Pour v_0 légèrement supérieure à v_{0l} , $\dot{\theta}$ s'annulerait pour une valeur de θ légèrement supérieure à $\pi/2$; la composante du poids serait alors négative selon \vec{e}_θ et donc celle de \vec{T} positive, ce qui signifie que le fil s'est détendu entre $\theta = \pi/2$ et θ_{\max} ...

Corr. 2 Charge soumise à l'action d'un dipôle

1. Le point matériel est soumis à la force électrique $\vec{f} = q\vec{E}$ où \vec{E} est le champ électrostatique créé par le dipôle au niveau de M, donc la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

Le point matériel et sa vitesse initiale sont initialement dans un plan π_0 défini par $(0, \vec{p}, \vec{OM}_0)$ et en M_0 , le champ électrique est dans ce plan donc le point reste au départ dans ce plan, et y reste pour toute la suite du mouvement car le champ est toujours dans ce plan le long de sa trajectoire (on vérifie encore une fois le principe de curie...). On raisonne maintenant dans ce plan, en base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de centre O. Alors,

$$\vec{a} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right]$$

Or, on sait en base polaire (ou on retrouve par double dérivation de $\vec{OM} = r\vec{e}_r$) que

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\text{Puisque } r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$$

on en déduit par identification les relations

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \quad (1)$$

et

$$\frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (2)$$

De plus, l'énergie mécanique du point M soumis à la seule force électrostatique conservative se conserve. Si initialement elle vaut \mathcal{E}_0 , on a

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} m v^2 + qV = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{qp}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\text{soit} \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{2 \cos \theta}{r^2} = \frac{2\mathcal{E}_0}{m} \quad (3)$$

On peut obtenir l'expression de r^2 demandée en procédant comme suit. On élimine $\dot{\theta}^2$ entre les équations (1) et (3), d'où

$$r \ddot{r} + \dot{r}^2 = \frac{2\mathcal{E}_0}{m}$$

On intègre cette équation en posant $u(t) = r^2(t)$, puisqu'elle devient alors

$$\frac{1}{2} \dot{u} = \frac{2\mathcal{E}_0}{m}$$

L'intégration en tenant compte des conditions initiales conduit finalement à

$$r^2(t) = Kt^2 + \alpha t + \beta$$

$$\text{avec} \quad K = \frac{2\mathcal{E}_0}{m} \quad \alpha = 2r(0)\dot{r}(0) \quad \beta = r^2(0)$$

2. Dans le cas où la trajectoire s'inscrit sur un cercle de centre O, l'expression précédente donne $r = r(0) = r_0$, $K = 0$ et $\alpha = 0$. On en déduit que **l'énergie mécanique est nulle**. Il reste à déterminer le portrait de phase. La relation (2) s'écrit

$$r_0^2 \dot{\theta} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\sin \theta}{r_0^2}$$

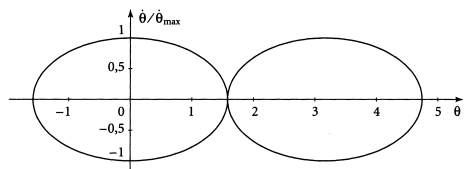
Les équations (1) et (3) reviennent à

$$r_0 \dot{\theta}^2 = -\frac{qp}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{2 \cos \theta}{r_0^3}$$

Ces deux relations sont compatibles, l'une étant la dérivée de l'autre. Le tracé du portrait de phase se fait à partir de

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{-\frac{qp}{\pi\epsilon_0 m} \frac{2 \cos \theta}{r_0^4}}$$

Attention, pour $pq < 0$, $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$ et pour $pq > 0$, $\theta \in [\pi/2; 3\pi/2]$. On obtient des courbes fermées correspondant à un mouvement oscillatoire non sinusoïdal (les courbes obtenues ne sont pas des ellipses) dans ces domaines de valeurs de θ suivant le signe de pq .



On peut déterminer la période du mouvement en intégrant de $\theta = 0$ à $\pi/2$ pour t variant de 0 à $T/4$ (quitte à translater le domaine de $\theta \dots$):

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = r_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m}{|pq|}} dt$$

d'où

$$T = 4r_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m}{|pq|}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$$

Cette intégrale est convergente (ouf...).

Corr. 3 Mouvement d'un point dans un cône

1. Les forces appliquées au point matériel sont son poids et la réaction du support **qui coupe l'axe Oz**. On peut donc écrire avec profit le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe Oz :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$$

On en déduit que L_{Oz} est une constante du mouvement qui constitue une **intégrale première du mouvement** (ne fait intervenir que des dérivées premières au maximum des paramètres cinématiques). Puisque, en coordonnées cylindriques,

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$\text{alors} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\text{Ainsi,} \quad L_{Oz} = (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$$

donne

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m} = C^{\text{te}}$$

Cette relation impose notamment que le signe de $\dot{\theta}$ reste toujours le même pour des conditions initiales données : la rotation du point matériel dans le cône se fait toujours dans le même sens.

2. Le mouvement ayant lieu sans frottements, l'énergie mécanique se conserve :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgz = C^{\text{te}'}$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + mgz = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgz_0$$

On remplace r par $z \tan \alpha$, \dot{r} par $\dot{z} \tan \alpha$ et $\dot{\theta}$ par $\frac{L_{Oz}}{mr^2}$. Alors, on en déduit l'équation demandée avec

$$f(z) = \left(\frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \frac{1}{z^2} + 2gz$$

3. Dans l'équation intégrale première de la question précédente, le terme $(1 + \tan^2 \alpha) \dot{z}^2$ est positif ou nul. Alors, le mouvement n'est possible que si $f(z) \leq 2 \frac{\mathcal{E}_0}{m}$. Pour mieux visualiser cette condition, on doit tracer $f(z)$ en notant que $f(z)$ est extrême en

$$z = z_1 = \left[\frac{1}{g} \left(\frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \right]^{1/3}$$

(expression obtenue après traduction de $f'(z_1) = 0 \dots$).



On note que le mouvement a lieu entre les deux plans $z = z_m$ et $z = z_M$ vérifiant $f(z) = 2\mathcal{E}_0/m$.

4. On remarque que si $2 \frac{\mathcal{E}_0}{m} = f(z_1)$, $z = z_1$ reste constant et le mouvement est circulaire de rayon r_0 . Cela correspond à

$$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2} m \left[g \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right]^{2/3}$$

$$\text{et} \quad r_0 = z_1 \tan \alpha = \left[\frac{1}{g} \left(\frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \right]^{1/3} \tan \alpha$$

On peut simplifier cette expression en notant que pour le mouvement circulaire, $L_{Oz} = m r_0 v_0$, d'où

$$r_0 = \frac{v_0^2}{g} \tan \alpha$$

On peut retrouver ce rayon r_0 en partant de la relation fondamentale de la dynamique pour un mouvement circulaire :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En projection sur \vec{e}_z et sur \vec{e}_r , on tire respectivement (en notant R le module de la réaction)

$$0 = R \sin \alpha - mg$$

et

$$-m r_0 \dot{\theta}^2 = -R \cos \alpha$$

Il ne reste qu'à éliminer R pour obtenir à nouveau l'expression de $r_0 \dots$

Corr. 4 Changement de trajectoire

Par le petit accroissement de vitesse δv_0 , l'énergie totale (négative) augmente et la nouvelle trajectoire du satellite devient une ellipse de demi-grand axe a . La troisième loi de Kepler permet de dire que

$$\frac{(T_0 + \delta T)^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}$$

Il faut donc déterminer a sous la forme $a = r_0 + \delta r$ avec $\delta r \ll r_0$. Pour cela, on utilise la relation entre l'énergie et a (**à connaître par cœur**) :

$$\mathcal{E} = -\frac{GM_T}{2a}$$

Or, sur la nouvelle trajectoire, l'énergie du satellite est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m (v_0 + \delta v_0)^2 - \frac{GM_T}{r_0}$$

et on sait que sur la trajectoire circulaire de rayon r_0 , on avait

$$v_0^2 = \frac{GM_T}{r_0}$$

Cette expression permet d'éliminer GM_T des équations précédentes :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m (v_0 + \delta v_0)^2 - m v_0^2 = -m \frac{v_0^2 r_0}{2a}$$

On développe au premier ordre et on simplifie par m , d'où

$$-\frac{v_0^2}{2} + v_0 \delta v_0 = -\frac{v_0^2}{2} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0} \right)$$

soit

$$\frac{\delta r}{r_0} = 2 \frac{\delta v_0}{v_0}$$

Le développement au premier ordre de la troisième loi de Kepler fournit

$$1 + 2 \frac{\delta T}{T_0} = 1 + 3 \frac{\delta r}{r_0}$$

soit

$$\frac{\delta T}{T_0} = 3 \frac{\delta v_0}{v_0}$$

Corr. 5 Demi-ellipse de transfert

On raisonne dans le référentiel géocentrique dans cet exercice, supposé galiléen. L'application de la relation fondamentale de la dynamique au satellite permet d'arriver à l'équation suivante, l'accélération étant purement centrale,

$$V^2 = \frac{GM_T}{r}$$

ce qui détermine la vitesse V du satellite sur une orbite circulaire. On peut remplacer le terme GM_T en notant que le poids d'un corps au sol est essentiellement dû à la force de gravitation (le terme dû à la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre est négligeable) :

$$mg \simeq \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

soit

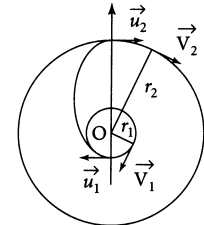
$$GM_T = g R_T^2$$

Ainsi,

$$V_1 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_1}} = 7,74 \text{ km.s}^{-1}$$

et

$$V_2 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_2}} = 3,09 \text{ km.s}^{-1}$$



Moteurs éteints, l'ellipse de transfert est décrite sous le seul effet de la force de gravitation terrestre. La vitesse au départ de la demi-ellipse (au périhélie) vaut u_1 ($u_1 > V_1$) et elle vaut u_2 ($u_2 < V_2$) à l'autre extrémité de l'orbite de transfert qui correspond à l'apogée : en effet, l'apogée et le périhélie sont les seuls points d'une trajectoire elliptique où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur.

L'énergie mécanique **se conserve** sur **cette** trajectoire :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{GM_T m}{r_1} = \frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{GM_T m}{r_2}$$

soit

$$u_1^2 - \frac{2gR_T^2}{r_1} = u_2^2 - \frac{2gR_T^2}{r_2}$$

La conservation du moment cinétique donne quant à elle

$$C = r_1 u_1 = r_2 u_2$$

Des deux relations précédentes, on peut extraire après calcul u_1 et u_2 :

$$u_1 = R_T \sqrt{\frac{2gr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = 10,16 \text{ km.s}^{-1}$$

$$u_2 = R_T \sqrt{\frac{2gr_1}{r_2(r_1 + r_2)}} = 1,62 \text{ km.s}^{-1}$$

On en déduit les suppléments de vitesse **demandés** :

$$\Delta V_1 = u_1 - V_1 = 2,42 \text{ km.s}^{-1}$$

et

$$\Delta V_2 = V_2 - u_2 = 1,47 \text{ km.s}^{-1}$$

On remarque que les deux mises en marche des propulseurs correspondent effectivement à des augmentations de vitesse. C'était prévisible car l'ellipse de transfert est extérieure à la première orbite circulaire (énergie mécanique plus élevée) alors que c'est la situation inverse pour la deuxième orbite circulaire.

Corr. 6 Miroir parabolique

1. Soit un élément de volume $d\tau$ du fluide dans le référentiel tournant non galiléen où le fluide est immobile. Les forces volumiques agissant dessus correspondent au poids ($\rho \vec{g}$), aux actions de pression ($-\text{grad } P$) et aux actions d'inertie d'entraînement ($\rho \Omega^2 r \vec{e}_r$). Il n'y a pas d'action de CORIOLIS le fluide étant immobile dans le référentiel considéré et le bilan associé des forces volumiques est donc

$$\rho \vec{g} - \text{grad } P + \rho \Omega^2 r \vec{e}_r = \vec{0}$$

L'invariance de révolution autour de Oz assure que la pression ne dépend que de r et z . Ensuite, on projette sur \vec{e}_r et \vec{e}_z , d'où

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_r = -\rho g \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_z = \rho \Omega^2 r \quad (*)$$

On intègre la première équation, ce qui donne

$$P(r, z) = -\rho g z + f(r)$$

On détermine la fonction $f(r)$ issue de l'intégration en reportant ce résultat dans la seconde équation différentielle. Par conséquent, on a

$$f'(r) = \rho \Omega^2 r$$

$$\text{Finalement} \quad P(r, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + C^{\text{te}}$$

Attention, la démarche d'intégration de (*) est bien la précédente ! Le résultat n'est en aucun cas la somme des résultats des intégrations de chaque équation séparément (voir cours de maths).

On constate que la pression augmente lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation, ce qui paraît cohérent avec le sens physique. De plus, la surface libre est isobare à la pression atmosphérique $P(r, H(r)) = P_0$. On en déduit que la forme de la surface libre est parabolique puisque la hauteur d'eau $H(r)$ est un trinôme :

$$H(r) = H(0) + \frac{r^2 \Omega^2}{2g}$$

2. La constante d'intégration est $H(0)$ et le liquide étant incompressible, on peut la déterminer en écrivant la conservation du volume d'eau dans le récipient. Initialement, le volume d'eau est $V = \pi R^2 h$ et, lors de la rotation, il est

$$V = \int_0^R 2\pi r h(r) dr = \pi R^2 \left[H(0) + \frac{R^2 \Omega^2}{4g} \right]$$

L'identification conduit finalement à

$$H(0) = h - \frac{R^2 \Omega^2}{4g}$$

On vérifie bien que la hauteur d'eau au centre correspond à h au repos et diminue si la vitesse de rotation augmente ou si la gravité diminue... On remarque aussi qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire Ω_c , $H(0)$ s'annule : le mercure ne recouvre plus totalement le récipient, situation à éviter bien sûr !

3. Le système étudié constitue un miroir parabolique utile dans les télescopes réflecteurs. Il est intéressant car il ne présente pas d'aberration de sphéricité, comme tous les miroirs paraboliques. Mais en plus, ce miroir est 100 fois moins cher qu'un miroir solide classique de mêmes caractéristiques. Néanmoins, il présente des inconvénients : sensibilité aux vibrations (rides sur le mercure), pas inclinable, obligation de travailler dans l'atmosphère (ce qui gêne à cause des turbulences)...

Des télescopes reposant sur ce principe ont été mis au point notamment par l'équipe de Ermanno Borra, à l'université Laval, Canada. Une mince pellicule de mercure de 1 mm environ – une couche plus épaisse serait perturbée par la moindre vibration – est entraînée en rotation dans un récipient en mousse à haute densité, ayant déjà la forme requise (laquelle ?). De tels télescopes, de 3 m de diamètre, sont déjà utilisés dans plusieurs observatoires. Leur prix est 100 fois moindre que celui d'un télescope normal !

Corr. 7 Pendule secoué horizontalement

Je vous laisse faire le dessin. On a trois théorèmes à notre disposition : PFD, TMC et TPC. C'est parti...

On suppose le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T), i.e. du laboratoire, galiléen et on se place dans le référentiel (\mathcal{R}) en translation rectiligne non uniforme (donc non galiléen) par rapport à (\mathcal{R}_T), dans lequel A est immobile. Ce référentiel est muni du repère cartésien (A, x, y, z), mais il est plus pratique de travailler en coordonnées cylindriques d'axe (Ay).

La masse est soumise à son poids

$$\vec{P} = mg \vec{e}_z = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta,$$

à la tension du fil $\vec{T} = T \vec{e}_r$ ($T < 0$) et à la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_e = -m \vec{a}_e = -m \vec{a}_A \Big|_{\mathcal{R}_T} = -m \ddot{x}_A \vec{e}_x,$$

soit encore

$$\vec{f}_e = -m \ddot{x}_A (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta),$$

avec $\ddot{x}_A = -m \omega^2 x_0 \sin(\omega t)$. Il n'y a pas de force de CORIOLIS car (\mathcal{R}) est en translation dans (\mathcal{R}_T) (attention à ne pas dire qu'il y a une force de CORIOLIS parce que le pendule tourne ! ce serait une énorme bourde !).

PFD : Dans le référentiel (\mathcal{R}) où A est, rappelons-le, fixe, on a les grandeurs cinématiques suivantes du point M :

$$\vec{r} = \vec{AM} = L \vec{e}_r, \quad \vec{v} = L \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -L \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + L \ddot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Le PFD $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_e$ projeté sur \vec{e}_θ pour éliminer \vec{T} donne, après simplification par m

$$L \ddot{\theta} = -g \sin \theta - \ddot{x}_A \cos \theta$$

soit encore en introduisant $\omega_0 = \sqrt{g/L}$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{x_0}{L} \omega^2 \cos \theta \sin(\omega t)$$

Aux petites oscillations, cette équation se simplifie en

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{x_0}{L} \omega^2 \sin(\omega t)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti, de pulsation propre ω_0 , avec un terme d'excitation à ω . On peut résoudre cette équation en passant en complexes, et on trouverait une résonance à $\omega = \omega_0$: cf Sup !

TMC : Le moment cinétique de M en A, dans (\mathcal{R}), s'exprime facilement comme $\vec{\sigma}_A = m \vec{r} \wedge \vec{v} = mL^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$. Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_e).$$

Les moments se trouvent en appliquant la définition et en calculant le produit vectoriel, ou en utilisant la technique du bras de levier. On obtient $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = -mgL \sin \theta \vec{e}_\theta$, $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$

et $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_e) = -m \ddot{x}_A L \cos \theta \vec{e}_\theta$.

Le TMC projeté sur \vec{e}_θ donne

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - m \ddot{x}_A L \cos \theta,$$

ce qui après simplification par mL^2 redonne l'équation trouvée grâce au PFD : ouf !

TPC : L'énergie cinétique de M dans (\mathcal{R}) vaut $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (L \dot{\theta})^2$. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{f}_e).$$

Les puissances valent : $\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = -mgL \dot{\theta} \sin \theta$, $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$ et $\mathcal{P}(\vec{f}_e) = \vec{f}_e \cdot \vec{v} = -m \ddot{x}_A L \dot{\theta} \cos \theta$. Ainsi le TPC s'écrit

$$mL^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mgL \dot{\theta} \sin \theta - m \ddot{x}_A L \dot{\theta} \cos \theta,$$

ce qui après simplification par $mL^2 \dot{\theta}$ redonne l'équation trouvée grâce au PFD : re-ouf !

Corr. 8 Déviation vers l'est

1. Dans le référentiel terrestre, la masse m est soumise à son poids (qui contient la force d'inertie d'entraînement !) et à la force de CORIOLIS. Le PFD simplifié par m fournit

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2 \vec{\omega} \wedge \frac{d \vec{r}}{dt}$$

2. Si $\vec{\omega} = \vec{0}$, on obtient que $\dot{z} = -gt$ et $z = h - gt^2/2$ d'où un temps de chute $\tau = \sqrt{2h/g} \simeq 5,68 \text{ s}$. Comme $\tau \ll 1$ jour, on s'attend à une déviation faible (de l'ordre de $h\tau/(1 \text{ jour})$, i.e. du centimètre, cf le cours).

3. On trouve facilement l'équation de l'énoncé, avec

$$\varepsilon = 2\omega\tau = 2\omega\sqrt{2h/g} \simeq 8,29 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

4. On a trivialement $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -2 \vec{e}_z$, qui s'intègre vectoriellement en $\frac{d \vec{R}}{dt} = -2T \vec{e}_z$ puis en $\vec{R} = (1 - T^2) \vec{e}_z$ en imposant les conditions initiales.

5. L'équation vérifiée, à l'ordre suivant, par $\vec{R}^{(1)}$ est $\frac{d^2 \vec{R}^{(1)}}{dt^2} = -\hat{\omega} \wedge \frac{d \vec{R}^{(0)}}{dt}$, soit $\frac{d^2 \vec{R}^{(1)}}{dt^2} = -(\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z) \wedge (-2T \vec{e}_z) = 2T \cos \lambda \vec{e}_x$

Cette équation s'intègre en $\frac{d \vec{R}^{(1)}}{dt} = T^2 \cos \lambda \vec{e}_x$ puis en

$$\vec{R}^{(1)} = \frac{T^3}{3} \cos \lambda \vec{e}_x, \text{ en utilisant les conditions initiales.}$$

Ainsi, à l'ordre 1, on a

$$\vec{R} = \vec{R}^{(0)} + \varepsilon \vec{R}^{(1)} = (1 - T^2) \vec{e}_z + \varepsilon \frac{T^3}{3} \cos \lambda \vec{e}_x$$

À cet ordre, il n'y a pas de correction sur z , et la bille arrive au fond du puits à l'instant $T = 1$ (i.e. $t = \tau$). À cet instant, elle a été déviée vers l'est (car vers \vec{e}_x) de $h \varepsilon \frac{1^3}{3} \cos \lambda$ en revenant aux variables dimensionnées. La déviation s'écrit finalement

$$\frac{\omega g \cos \lambda}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \simeq 2,76 \text{ cm}$$

ce qui est en parfait accord avec les mesures de REICH.

6. Une fois que la bille commence à se déplacer vers l'est, apparaît une composante de la force de CORIOLIS dirigée vers le sud, et donc une déviation vers le sud.

Le formalisme précédent permet de la calculer, en trouvant $\vec{R}^{(2)}$. Je laisse les courageux s'y atteler !

Corr. 9 Le pendule de FOUCAULT

1. Il est dit dans l'énoncé que le pendule effectue de petites oscillations. Ainsi la masse est quasiment en translation et assimilable à un point matériel (son centre de masse).

Dans le référentiel terrestre, le point A est soumis à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$ (qui contient la force d'inertie d'entraînement !), à la tension du fil \vec{T} et à la force d'inertie de CORIOLIS $\vec{f}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$. Ainsi

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{T} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

2. Comme le pendule effectue de petites oscillations et que sa vitesse est horizontale, $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$. Or $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$ à l'équateur (faites un dessin !). Donc \vec{f}_c est portée par \vec{e}_z et n'a pas de composante horizontale. Comme il en va de même du poids et que la force de tension est parallèle au fil, le pendule va osciller dans un plan fixe vertical, défini par les points O, O₁ et A ($t = 0$).

3. Dans le référentiel géocentrique galiléen, le pendule oscillera selon un plan fixe puisque la rotation de la Terre ne se fait pas sentir aux pôles.

Remarque : en fait, la vitesse initiale due à la rotation de la Terre est ωr où r est la distance de A ($t = 0$) à l'axe des pôles et est négligeable pour $\omega = \frac{2\pi}{86164}$ et r de quelques mètres. Par exemple, même pour $r = 6 \text{ m}$, on obtient $\omega r \simeq 0,4 \text{ mm.s}^{-1}$ ce qui à vitesse constante donnerait un déplacement horizontal, au bout d'un quart de période (rappel $\omega_0 = \sqrt{g/L}$), de $\omega r \pi \sqrt{L/g}/4 \simeq 2 \text{ mm}$ ce qui est négligeable, et le serait encore plus si r était pris plus petit.

Par conséquent, un observateur terrestre verra le plan du pendule tourner autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire $-\vec{\omega}$. Le plan d'oscillation effectue une rotation complète en un demi jour sidéral (un plan est invariant par rotation de π autour d'un axe contenu dans le plan et non seulement de 2π !).

4.a. La tension du fil s'écrit $\vec{T} = T\hat{T}$ où \hat{T} est unitaire, dirigé

$$\text{de A vers } O_1, \text{ i.e. } \hat{T} = \overrightarrow{AO_1}/L, \text{ d'où } \boxed{\vec{T} = -T \frac{\overrightarrow{O_1A}}{L}}.$$

4.b. En effectuant le produit vectoriel intervenant dans l'expression de \vec{f}_c et en utilisant l'expression de la tension de la question précédente, avec $A(x,y,z)$ et $O_1(0,0,L)$ donc $\overrightarrow{O_1A}(x,y,z-L)$, il vient en projection sur les trois axes

$$m\ddot{x} = -T \frac{x}{L} + 2m\omega \sin \lambda \dot{y} - 2m\omega \cos \lambda \dot{z} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -T \frac{y}{L} - 2m\omega \sin \lambda \dot{x} \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -mg - T \frac{z-L}{L} + 2m\omega \cos \lambda \dot{x} \quad (3)$$

4.c. Avec les hypothèses de l'énoncé, $\dot{z} \simeq 0$, $\ddot{z} \simeq 0$ et $z \simeq L$ donc (3) devient $T = mg$. En utilisant cette relation et $\dot{z} \simeq 0$, les deux premières équations s'écrivent, après simplification par m et en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/L}}$:

$$\ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\omega \sin \lambda \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2)$$

5. Une A.N. donne $\omega = \frac{2\pi}{86164} \simeq 7,29.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ ainsi

$$\text{que } \omega_0 = \sqrt{\frac{9,81}{67}} \simeq 0,383 \text{ rad.s}^{-1}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\omega/\omega_0 \simeq 1,91.10^{-4} \ll 1}$$

L'astuce habituelle pour résoudre ces équations est de considérer la grandeur $u = x + iy$ (cf mouvement d'une particule en champ magnétique) et de prendre la combinaison linéaire $(1) + i \times (2)$. On trouve $\ddot{u} + 2\omega \sin \lambda i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$, dont l'équation caractéristique $r^2 + 2\omega \sin \lambda i r + \omega_0^2 = 0$ a un discriminant réduit $\delta = (\omega \sin \lambda i)^2 - \omega_0^2 \simeq -\omega_0^2$ et des racines approchées $r_{\pm} \simeq (-\omega \sin \lambda \pm \omega_0)i$ (on pourra vérifier qu'on a uniquement négligé des termes d'ordre deux en ω/ω_0). La solution générale s'écrit donc

$$u = A e^{i(\omega_0 - \omega \sin \lambda)t} + B e^{-i(\omega_0 + \omega \sin \lambda)t}$$

u est donc la somme de deux termes, le premier décrivant un cercle dans le sens trigonométrique, à la pulsation $\omega_- = \omega_0 - \omega \sin \lambda$, et le deuxième un cercle dans le sens antitrigonométrique, à la pulsation $\omega_+ = \omega_0 + \omega \sin \lambda$. Les conditions initiales imposent $u(0) = x_0 + iy_0$ et $\dot{u}(0) = 0$, soit $A + B = x_0 + iy_0$ et $A\omega_- - B\omega_+ = 0$. La deuxième équation montre que $B \simeq A$ puis la première donne $B \simeq A \simeq (x_0 + iy_0)/2$.

Remarque : la résolution exacte donne $A = \frac{x_0 + iy_0}{2} \frac{\omega_+}{\omega_0}$ et $B = \frac{x_0 + iy_0}{2} \frac{\omega_-}{\omega_0}$ donc écrire que $B \simeq A \simeq (x_0 + iy_0)/2$ conserve les arguments de A et B intactes, mais modifie légèrement leur module. Et c'est comme d'habitude : on peut faire les gorettes sur les amplitudes, mais pas sur les phases, donc l'approximation est correcte.

6. Dans le système d'axes tournant proposé, il vient $u' = \frac{x_0 + iy_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, soit $u' = (x_0 + iy_0) \cos(\omega_0 t)$ et la masse effectue des oscillations rectilignes à la pulsation ω_0 , dans le plan contenant O, O_1 et $A(t=0)$. On vérifie bien qu'à

l'équateur où $\lambda = 0^\circ$ le plan reste fixe pour un observateur terrestre ($\omega \sin \lambda = 0$) alors qu'au pôle nord ($\lambda = 90^\circ$), le plan tourne à la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda = \omega$ dans le sens prévu à la question 3.

L'instant T_2 est la période associée à la pulsation $\omega \sin \lambda$, ainsi

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T_2 \sin \lambda} \simeq 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}}$$

à comparer à $\frac{2\pi}{86164} \simeq 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$: pas mal !

Corr. 10 Perle sur une tige en rotation (problème ouvert)

L'expérience dure 10 secondes, temps suffisamment faible pour supposer le référentiel terrestre galiléen. On se place dans le référentiel (\mathcal{R}) en rotation avec la tige, non galiléen. La perle est assimilée à un point matériel P de masse m , ce qui est légitime puisqu'elle est en translation dans (\mathcal{R}) (et donc ses degrés de liberté de rotation ne sont pas mis en jeu, et on ne peut la distinguer, d'un point de vue mécanique, d'un système ponctuel). On utilise le repère cartésien (O, X, Y, Z) avec Z vertical pointant vers le haut (faites un dessin !).

La perle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la réaction de la tige \vec{R} n'ayant pas de composante sur $e_X^{\mathcal{R}}$ puisqu'il n'y a pas de frottements, à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_c = m\omega^2 \overrightarrow{OP} = m\omega^2 X e_X^{\mathcal{R}}$ et à la force de CORIOLIS $\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega \dot{X} e_Z^{\mathcal{R}} \wedge e_X^{\mathcal{R}} = -2m\omega \dot{X} e_Y^{\mathcal{R}}$. Le principe fondamental appliqué à P et projeté sur la base cartésienne donne

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X \quad (3)$$

$$0 = R_Y - 2m\omega \dot{X} \quad (4)$$

$$0 = -mg + R_Z \quad (5)$$

L'équation (3) donne $R_Z = mg$ et (2) donne $R_Y = 2m\omega \dot{X}$, ce qui permet de calculer la réaction de l'axe, une fois le mouvement déterminé. L'équation (1) se simplifie en $\ddot{X} - \omega^2 X = 0$ qui s'intègre en $X(t) = X_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$ avec les conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = v_0$.

Bien sûr, si on avait accès à un relevé de points, on essaierait de modéliser la courbe par la formule trouvée ci-dessus, et on obtiendrait les paramètres recherchés, à savoir X_0 , v_0 et ω . On va ici voir une méthode moins précise mais basée sur la mesure de quelques valeurs sur la courbe.

La figure donne $X_0 = 3,6 \text{ cm}$. La tangente à $t = 0$ permet de mesurer $v_0 \simeq -\frac{0,80}{19,10^{-3}} \simeq -42 \text{ cm.s}^{-1}$. La perle est lancée initialement vers l'axe de rotation. Elle est repoussée par la force "centrifuge" et sa vitesse s'annule à l'instant $t^* \simeq 36 \text{ ms}$.

Remarque : la mesure de t^* est très peu précise à cause de la tangente horizontale ! Par contre, la mesure de $X(t^*) = X^*$ est très précise grâce à la tangente horizontale ! Mais la connaissance de X^* seule n'est pas utile ici, donc nous n'utiliserons pas sa valeur.

Il ne reste qu'à utiliser le fait que t^* est défini par l'équation $\dot{X}(t^*) = 0 = \omega X_0 \sinh(\omega t^*) + v_0 \cosh(\omega t^*)$, que l'on peut réécrire en posant $u = \omega t^*$ comme $u \thickapprox \frac{v_0 t^*}{X_0} \simeq 0,42$. La résolution numérique de cette équation fournit $u \simeq 0,70$ dont on déduit $\omega = \frac{u}{t^*} \simeq 19 \text{ rad.s}^{-1}$ soit approximativement 3,1 tours par seconde.

Corr. 11 Exemple simple de bifurcation en mécanique

1. Le système ne présente qu'un seul degré de liberté et pas de frottements. Par conséquent, il est très utile de penser à un

théorème énergétique pour l'étudier rapidement. Par exemple, utilisons le théorème de l'énergie mécanique. Le système de la perle possède ici une énergie mécanique constante, quelque soit le référentiel.

Vu que l'on cherche l'équilibre de A par rapport au guide, autant se placer dans le référentiel lié au guide, qui n'est pas galiléen. Dans ce référentiel,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{\text{te}}$$

et on doit exprimer les énergies cinétique et potentielle. On a

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2$$

$$\text{et } \mathcal{E}_p = \underbrace{-mgr \cos \theta}_{\text{dû au poids}} - \underbrace{\frac{m\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2}}_{\text{dû à l'inertie d'entraînement}}$$

Notez que l'énergie potentielle est définie à une constante près sans importance, que l'énergie potentielle du poids augmente quand la perle monte (à toujours vérifier pour le bien-être des signes...). On retrouve d'ailleurs facilement le terme dû à la

force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\Omega^2 r \sin \theta e_\rho^{\mathcal{R}}$ en intégrant $\vec{f}_{ie} = -\text{grad } \mathcal{E}_{p,ie}$.

Alors, la constance de l'énergie mécanique assure

$$\frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 - mgr \cos \theta - \frac{m\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2} = C^{\text{te}}$$

On déduit l'équation différentielle du mouvement en dérivant cette relation par rapport au temps ; on trouve en simplifiant (la solution $\dot{\theta} = 0$ étant dégagéeable)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \Omega_c^2 \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{r}}}$$

On vérifie que l'on obtient l'équation d'un pendule oscillant de pulsation caractéristique Ω_c pour $\Omega = 0$, ce qui est logique. De plus, il est cohérent avec le sens physique de voir que l'inertie d'entraînement temps à déstabiliser le pendule (ce que l'on précise ensuite).

À l'équilibre, on a $\ddot{\theta} = 0$

$$\sin \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \theta = \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right)^2$$

Les positions d'équilibre de la perle sur le guide sont finalement les positions

$$\boxed{\theta_0 = 0 \quad \text{et, pour } \Omega > \Omega_c, \theta_{\pm} = \pm \text{Arccos} \left[\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} \right]}$$

Remarque : Une autre façon de trouver les positions d'équilibre consiste à dire qu'elles correspondent aux extrema de l'énergie potentielle totale (fonction de θ)...

On étudie la stabilité d'une position d'équilibre θ_{eq} en posant le changement de fonction $\varepsilon = \theta - \theta_{eq}$, avec $|\varepsilon| \ll 1$, dans l'équation du mouvement et en regardant si ε reste effectivement voisine de 0 (si θ_{eq} est effectivement stable). L'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$\ddot{\varepsilon} + \Omega_c^2 \sin(\varepsilon + \theta_{eq}) - \Omega^2 \sin(\varepsilon + \theta_{eq}) \cos(\varepsilon + \theta_{eq}) = 0$$

on développe les sinus et cosinus à l'ordre 1 et on remarque que l'ordre 0 disparaît par les relations des positions définissant les positions d'équilibre possibles (ce qui est logique...). On trouve

$$\ddot{\varepsilon} + (\Omega_c^2 - \Omega^2) \varepsilon = 0 \quad \text{pour } \theta_{eq} = \theta_0$$

$$\ddot{\varepsilon} - (\Omega_c^2 - \Omega^2) \varepsilon = 0 \quad \text{pour } \theta_{eq} = \theta_{\pm}$$

On constate alors les résultats suivants (en notant qu'il s'agit d'une équation de type oscillateur harmonique (stable) si le facteur de ε est positif) :

$$\boxed{\theta_0 \text{ n'est stable que si } \Omega < \Omega_c}$$

$$\boxed{\theta_{\pm} \text{ sont stables seulement si } \Omega > \Omega_c}$$

Remarque : On retrouve ces résultats en notant que les positions d'équilibre stable correspondent forcément aux minima de l'énergie potentielle (fonction de θ).

En y réfléchissant bien (mettez vous à la place de la perle), ces résultats ne sont pas surprenants : il faut que la rotation soit assez rapide pour que la force d'inertie d'entraînement (radiale par rapport à l'axe de rotation) arrive à faire monter la perle malgré son poids.

2. Je vous laisse faire le tracé : on obtient une fourche qui s'ouvre en Ω_c pour tendre vers $\pm \pi/2$ (position de perle logique pour des vitesses de rotation très très élevées !). La pente $d\theta_e/d\Omega$ est nulle pour Ω infinie et est infinie pour Ω proche de Ω_c par valeurs supérieures. La suite est évidente...

Remarque : Ce diagramme est appelé diagramme de bifurcation sur-critique. Il est très utilisé en physique non linéaire et permet de décrire (entre autres choses amusantes) des transitions de phases qui font intervenir des brisures de symétrie (cas du système mécanique étudié)... On utilisation permet aussi de tracer rapidement l'allure de portraits de phase (ici $\dot{\theta}$ fonction de θ suivant la valeur de Ω).

Corr. 12 Limite de roche de la comète Shoemaker-Levy 9

1. Dans le référentiel « Cométocentrique » \mathcal{R}_C , le petit volume élémentaire de masse δm situé autour du point P est soumis à l'attraction gravitationnelle de la comète \mathcal{C} et à celle de Jupiter \mathcal{J} , sans oublier la force d'inertie d'entraînement car ce référentiel n'est pas galiléen (pas de force de Coriolis ici). La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors

$$\delta m \vec{a}(P/\mathcal{R}_C) = \delta m \vec{G}_C(P) + \delta m \vec{G}_J(P) - \delta m \vec{a}_e$$

L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération du centre de la comète par rapport au référentiel « Jupiterocentrique » \mathcal{R}_J (les deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre).

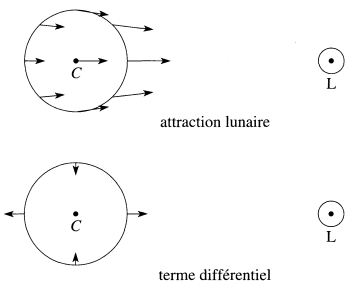
On applique donc la relation fondamentale de la dynamique à la comète dans \mathcal{R}_J :

$$M_C \vec{a}(C/\mathcal{R}_J) = M_C \vec{G}_J(C)$$

On reporte dans l'équation précédente et il vient

$$\boxed{\delta m \vec{a}(P/\mathcal{R}_C) = \underbrace{\delta m \vec{G}_C(P)}_{\text{gravitation propre}} + \underbrace{\delta m \left[\vec{G}_J(P) - \vec{G}_J(C) \right]}_{\text{terme des marées}}}$$

On peut alors expliquer l'effet de marées. Prenons le cas plus connu de l'effet de la Lune sur les océans de la Terre. Les deux figures suivantes montrent les orientations des termes précédents dans ce cas :



Le terme différentiel des marées tend à former un bourrelet : il étire les océans (et en bien moindre mesure la surface de la Terre) de façon non négligeable à l'échelle de la Terre (on retrouve un résultat connu : les effets inertiels ne sont visibles que pour des échelles de temps ou d'espace assez importants). Cet effet de marées peut provoquer pour une comète trop près de Jupiter, par exemple, la destruction de celle-ci !

2. Le module de $\vec{G}_\ell(P)$ est de l'ordre de $\frac{GM_C}{R_C^2}$ et celui du terme des marées (sans δm) est de l'ordre de

$$GM_J \left[\frac{1}{(d-R_C)^2} - \frac{1}{d^2} \right] \simeq 2GM_J \frac{R_C}{d^3} \quad \text{car } d \ll R_C$$

Dans le modèle simpliste considéré, la cohésion de la comète est assurée si

$$\frac{GM_C}{R_C^2} > 2GM_J \frac{R_C}{d^3}$$

soit
$$d > d_{\text{lim}} = \left(\frac{2M_J}{M_C} \right)^{1/3} R_C$$

La comète et Jupiter étant supposées sphériques et homogènes,

$$\frac{M_J}{M_C} = \frac{\mu_J}{\mu_C} \left(\frac{R_J}{R_C} \right)^3$$

d'où
$$d_{\text{lim}} = \left(\frac{2\mu_J}{\mu_C} \right)^{1/3} R_J = 1,31 R_J = 93600 \text{ km}$$

depuis le centre de Jupiter. Cela correspond à une altitude de 22200 km au-dessus de Jupiter.

Il faut avoir conscience que la limite de roche intervient dans l'espace et provoque des destructions de comètes, satellites...

Corr. 13 Vibrographe

1. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' non galiléen lié au bâti et on pose $X = x - x_0$, ce qui élimine les forces définissant l'équilibre en l'absence de mouvement du bâti. Par rapport à cet état, la masse M est soumise aux forces supplémentaires $\vec{f}_1 = -kX \vec{u}_x$ (allongement supplémentaire X par rapport à la situation de référence) et $\vec{f}_2 = -\lambda \dot{X} \vec{u}_x$ (force de frottement visqueux) et $\vec{f}_{ie} = -m(-\ddot{y}) \vec{e}_x$ (force d'inertie d'entraînement). Alors, le principe fondamental donne

$$m\ddot{X} = -kX - \lambda \dot{X} + m\ddot{y}$$

Remarque: On trouve aussi cette équation en écrivant directement la relation fondamentale de la dynamique et en retranchant cette même relation écrite pour l'équilibre.

Étant donné $y(t) = Y_m \cos \omega t$, on tire

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = -\omega^2 Y_m \cos \omega t \quad (1)$$

Au-delà de quelques $\tau \simeq \omega_0/Q$, la réponse $X(t)$ devient sinusoïdale en régime établi et on l'obtient en passant en notation complexe $X(t) = \text{Re}[X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$. On tire

$$X_m e^{j\varphi} = \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} Y_m$$

On en déduit l'amplitude X_m des oscillations forcées

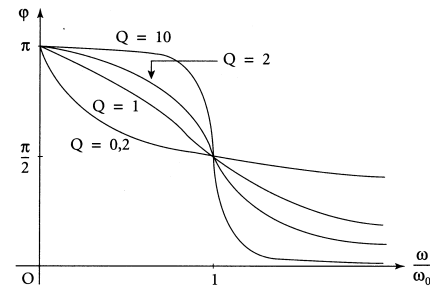
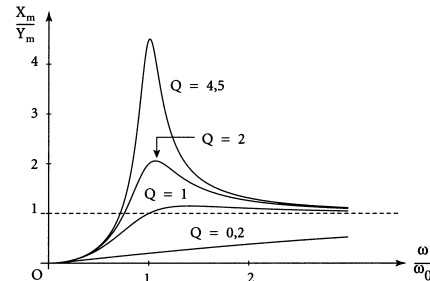
$$X_m = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \eta^2/Q^2}} Y_m$$

et
$$\tan \varphi = -\frac{1}{Q} \frac{\eta}{1-\eta^2} \quad \text{avec } \sin \varphi > 0 \text{ soit } \varphi \in [0, \pi]$$

Le tracé des courbes X_m/Y_m est à faire en procédant comme d'habitude (études asymptotiques à hautes et basses pulsations, recherche d'un maximum éventuel...). On note que pour $Q > 1/\sqrt{2}$, il y a un maximum pour la pulsation

$$\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

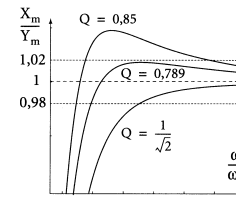
voisine de ω_0 pour des valeurs de facteur de qualité Q très élevées. On note aussi que plus le facteur de qualité est important, plus le système réagit avec une résonance aigüe à $\omega_m \simeq \omega_0$...



2. On désire que l'amplitude X_m des oscillations de la masse M s'identifie, à 2% près, à celle Y_m des oscillations du bâti. On cherche donc à obtenir

$$(1 - 0,02) Y_m \leq X_m \leq (1 + 0,02) Y_m$$

sur une bande continue de fréquences la plus large possible. On obtiendra ce résultat en choisissant la valeur de Q supérieure à $1/\sqrt{2}$ telle que le maximum $Q/\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ soit juste égal à 1,02, ce que montrent les courbes suivantes :



Ainsi,
$$\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 1,02$$

soit
$$Q = 0,789$$

La plage de pulsations sur laquelle on pourra confondre Y_m et X_m à 2% près s'étend théoriquement d'une valeur minimale ω'_m à l'infini, avec ω'_m solution de

$$\frac{\eta'^2}{\sqrt{(1-\eta'^2)^2 + \eta'^2/Q^2}} = 0,98 \quad \text{où } \eta' = \frac{\omega'_m}{\omega_0}$$

soit
$$\omega'_m = 1,44 \omega_0$$

Remarque: Une valeur supérieure de Q donnerait une plage en fréquence plus étroite et un phénomène de résonance plus aigu, ce qui pourrait avoir pour effet « d'amplifier » des fréquences non désirées...