

Feuille d'exercices n° 15 : corrigés

Exercice 1

1. Un simple calcul matriciel donne :

$$AB = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -17 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Il est facile de voir que les deux colonnes de A ne sont pas colinéaires : le rang de A vaut 2, donc l'application linéaire associée à A est surjective de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vers le même espace. Il s'agit d'un isomorphisme.

De même pour la matrice B .

Pour calculer l'inverse, ce qui précède ne sert à rien. Le plus efficace est de fixer une matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de résoudre l'équation matricielle $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Après résolution du système linéaire, on ne trouve qu'une seule solution sous la forme $X = CY$ avec C une matrice carrée et donc directement A est inversible d'inverse C .

Après calculs, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. L'esprit de la question revient à calculer les résolutions des systèmes $ABX = Y$ et $BAX = Y$, d'inconnue X . On obtient une fois les résolutions effectuées :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -17 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } (BA)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. On remarque que :

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I_2.$$

Cela suffit à montrer que AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. De même pour BA . La question nous suggère d'effectuer la vérification par les produits matriciels, ce qui ne pose pas franchement de problème.

5. On observe que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \text{ et } B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

La famille (I_2, A) est libre car A n'est pas une homothétie. Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée est équivalent à montrer que A^2 appartient à $\text{Vect}(I_2, A)$.

En résolvant le système de quatre équations (les quatre coefficients des matrices) à deux inconnues a et b pour

$$A^2 = a I_2 + b A,$$

on obtient :

$$A^2 = 4A + I_2.$$

Le résultat est plus facile pour la matrice B car on remarque tout de suite que :

$$B^2 = -14I_2.$$

Les deux familles sont bien liées.

Le polynôme $P(X) = X^2 - 4X - 1$ est annulateur de la matrice A et $P(0) \neq 0$. De même, le polynôme $Q(X) = X^2 + 14$ est annulateur de la matrice B et $Q(0) \neq 0$.

Ceci suffit à montrer que les matrices A et B sont inversibles. On redémontre ce résultat.

Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle il existe $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ annulant la matrice R et tel que $P(0) \neq 0$.

Le polynôme P est de la forme :

$$P(X) = P(0) + XQ(X),$$

car le polynôme $P - P(0)$ admet bien évidemment 0 comme racine et donc est multiple de X .

On remarque alors que comme $P(R) = 0$, alors :

$$0 = P(0) I_n + RQ(R),$$

ou encore :

$$R \times \left(-\frac{Q(R)}{P(0)} \right) = I_n.$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse la matrice entre parenthèses.

6. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant la relation $A^2 = 4A + I_2$ par A^n , on obtient :

$$A^{n+2} = 4A^{n+1} + A^n.$$

On détaillera par exemple le calcul du coefficient ligne 1 colonne 1 dans les matrices A^n .

Ce coefficient que l'on note u_n vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n \end{cases}.$$

La méthode est la suivante : poser $P(X) = X^2 - 4X - 1$; trouver les deux racines de P , ici deux racines réelles λ et μ ; obtenir u_n sous la forme :

$$u_n = a\lambda^n + b\mu^n,$$

et calculer a et b en résolvant le système de deux équations $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ à deux inconnues a et b . On obtient alors u_n explicitement.

On fait cela avec les trois autres coefficients de A^n .

On réitère avec les coefficients de B^n , cette fois-ci avec le polynôme :

$$P(X) = X^2 + 14 = (X - i\sqrt{14})(X + i\sqrt{14}).$$

Exercice 2

1. On remarque que la somme par ligne des coefficients est nulle : ainsi $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de A .

D'autre part, on remarque que les deux premières colonnes de A constituent une famille libre : il s'agit d'une famille libre à deux vecteurs dans $\text{Im}(A)$.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = 3$ [dimension de l'espace de départ $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$] et comme $\dim(\text{Ker}(A)) \geq 1$ et $\text{Rg}(A) \geq 2$, alors $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$ de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\dim(\text{Im}(A)) = 2$ de base $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il suffit par la formule de Grassmann de montrer que la somme $\text{Ker}(A) + \text{Im}(A)$ est directe.

Soit X dans l'intersection. Alors X est de la forme :

$$X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Même si on est confiné, on peut quand même se faire plaisir en faisant un peu de dualité. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors en appliquant la forme linéaire $e_1^* + e_2^* + e_3^*$ à X , on obtient :

$$3a = 0.$$

Ainsi, $X = 0$ et on a tout.

2. Tout a déjà été fait.

3. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En résolvant l'équation matricielle $PX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Le moins coûteux est d'effectuer le produit matriciel. On obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'autre manière revient à interpréter la matrice $P^{-1}AP$ comme la matrice représentant l'endomorphisme A selon la base \mathcal{B} .

En notant $\mathcal{B} = (u, v, w)$ cette base trouvée en question 2. on remarque que :

$$A(u) = 0, \quad A(v) = 3v \text{ et } A(w) = 3w.$$

On obtient alors immédiatement la même matrice diagonale.

Une remarque : on a le même rang et la même trace entre A et $P^{-1}AP$...

5. Le plus simple pour calculer A^n est d'écrire $D = P^{-1}AP$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut effectuer le produit matriciel, mais la question suggère de développer seulement la méthode.

On vient de calculer les puissances d'une matrice en la diagonalisant.

Exercice 4

1. On remarque qu'en posant la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en notant (e_1, \dots, e_d) la base canonique de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$, alors :

$$N(e_1) = 0 \text{ et } \forall k \geq 2, \quad N(e_k) = e_{k-1}.$$

On peut alors facilement calculer $N^i(e_k)$ pour tous entiers naturels i et k :

$$N^i(e_k) = \begin{cases} 0, \text{ si } i \geq k \\ e_{k-i}, \text{ sinon} \end{cases}.$$

La matrice N^i est une matrice remplie de 0 où la diagonale de 1 remonte vers le coin haut-gauche.

La matrice N répond en tout cas à la question.

2. On remarque que $N^d = 0$. On voit que l'ensemble $\mathbb{C}[N]$ l'espace des polynômes en la matrice N est un espace de base (I_d, N, \dots, N^{d-1}) .

On voit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $A \in \mathbb{C}[N]$, alors $A^n \in \mathbb{C}[N]$ et on peut poser :

$$A^n = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{k,n} \cdot N^k,$$

avec $\lambda_{k,n}$ un complexe qui on le verra est en fait un entier naturel.

En utilisant :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{k,n} \cdot N^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{d-1} N^\ell \right)$$

en développant le produit, on obtient que la coordonnée de A^{n+1} selon le vecteur N^k est :

$$\lambda_{k,n+1} = \sum_{i=0}^k \lambda_{i,n}.$$

Par récurrence rapide sur l'entier n (l'hypothèse de récurrence englobe tous les entiers k), tous les $\lambda_{k,n}$ sont dans \mathbb{N} .

De proche en proche, on obtient les valeurs des $\lambda_{k,n}$.

3. On remarque que :

$$(I_d - N) \sum_{k=0}^d N^k = \sum_{k=0}^d N^k - \sum_{k=1}^{d+1} N^k = I_d - N^{d+1} = I_d.$$

La matrice A est inversible d'inverse $I_d - N$.

Exercice 5

On remarque qu'en posant $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, alors la matrice dont les coefficients sont en fonction de a, b et c dans l'ensemble \mathcal{A} est exactement la matrice :

$$aI_3 + bB + cC.$$

L'ensemble \mathcal{A} est donc clairement l'espace vectoriel engendré par les matrices I_3, B et C . Il est clair que la famille (I_3, B, C) est une famille libre : l'espace vectoriel \mathcal{A} est de dimension 3, de base (I_3, B, C) .

Ensuite, on remarque que :

$$B^2 = C \text{ et } B^3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3(I_3 - B).$$

On va montrer que :

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[B].$$

En effet, les éléments de \mathcal{A} sont les matrices $aI_3 + bB + cC = P(B)$, avec le polynôme :

$$P(X) = a + bX + cX^2,$$

d'où l'inclusion « \subset ».

Réiproquement, soit M une matrice dans $\mathbb{C}[B]$. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$M = Q(B).$$

Le polynôme $\chi(X) = X^3 + 3X - 3$ est annulateur de la matrice B . On pose la division euclidienne de $Q(X)$ par $\chi(X)$, ce qui donne :

$$Q = S \chi + R, \text{ avec } \deg(R) < \deg(\chi) = 3.$$

En évaluant cette égalité entre polynômes en la matrice B , comme $\chi(B) = 0$, alors :

$$M = Q(B) = R(B)$$

et cette matrice est dans $\text{Vect}(I_3, B, B^2)$ puisque le polynôme $R(X)$ est de degré inférieur ou égal à 2.

Il apparaît alors immédiatement que l'espace $\mathbb{C}[B]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, sous-algèbre de dimension trois.

Exercice 6

1. L'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X+1) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'isomorphisme réciproque :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X-1) \end{cases} .$$

D'autre part, en notant \mathcal{B}_c la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, alors pour tout j entre 0 et n , par le binôme de Newton applicable dans cet anneau commutatif de polynômes :

$$f(X^j) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

En notant B la matrice de f selon la base canonique, si i et j sont deux entiers entre 1 et $n+1$, alors le coefficient $B_{i,j}$ correspond à la coordonnée du vecteur $f(X^{j-1})$ selon le vecteur X^{i-1} de la base canonique, ce décalage d'indice s'expliquant par le fait que les colonnes commencent à l'indice 1 alors que les vecteurs de la base canonique commencent à l'exposant 0.

Par conséquent,

$$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(f).$$

2. La matrice A est triangulaire supérieure à diagonale comportant uniquement des coefficients non nuls : elle est inversible car de rang $(n+1)$. Ou alors, comme f est déjà un isomorphisme, alors A est inversible directement.

De plus, la matrice A^{-1} est exactement la matrice représentant f^{-1} selon la base canonique. En notant $C = A^{-1}$, si i et j sont deux entiers entre 1 et $n+1$, alors le coefficient $C_{i,j}$ est la coordonnée de $f^{-1}(X^{j-1})$ selon le vecteur X^{i-1} de la base canonique.

Toujours par le binôme, ce coefficient vaut :

$$C_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i}.$$

On obtient ainsi les coefficients de A^{-1} .

Exercice 7

- Lorsque $n = 1$, la matrice est $A_1 = (\sin 2)$ qui est de rang 1 car $\sin 2$ est non nul.
- On se place maintenant dans le cas $n \geq 2$.

La première colonne de A_n est non nulle : son rang est au moins égal à 1.

La deuxième colonne de A_n n'est pas colinéaire à la première colonne sinon, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $C_2 = \lambda \cdot C_1$.

Dans ce cas, en ne conservant que les deux premiers coefficients, on aurait :

$$\begin{pmatrix} \sin 3 \\ \sin 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \sin 2 \\ \sin 3 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\sin 3 \times \sin 3 - \sin 2 \times \sin 4 = \lambda \sin 2 \times \sin 3 - \sin 2 \times (\lambda \sin 3) = 0,$$

ce qui est faux en le vérifiant par exemple avec :

$$\sin 2 \times \sin 4 = \sin(3 - 1) \sin(3 + 1) = (\sin^2 3 \cos^2 1 - \sin^2 1 \cos^2 3) < \sin^2 3.$$

Le rang de A_n vaut au moins 2.

Enfin, par les formules trigonométriques, on remarque que si l'entier j est fixé, alors pour tout entier i , on a :

$$\sin(i + j) = \sin i \cdot \cos j + \sin j \cdot \cos i.$$

D'où l'idée de poser les deux matrices colonnes :

$$C'_1 = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \sin 2 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix} \text{ et } C'_2 = \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \cos 2 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}.$$

Il apparaît que la $j^{ème}$ colonne de la matrice A_n est exactement la colonne :

$$C_j = \cos j \cdot C'_1 + \sin j \cdot C'_2.$$

Par conséquent, en posant $F = \text{Vect}(C'_1, C'_2)$, alors chaque colonne est dans F , donc l'espace vectoriel engendré par ces colonnes est inclus dans F et cet espace vectoriel engendré n'est autre que $\text{Im}(A_n)$: $\text{Rg}(A_n) \leq 2$.

Conclusion, lorsque $n \geq 2$, $\text{Rg}(A_n) = 2$.

Exercice 8

1. On calcule les matrices A^2 et A^3 et on observe que le polynôme :

$$\chi(X) = X^3 - 6X^2 - 6X + 26$$

est annulateur de la matrice A .

Autrement dit, tous calculs faits, on a :

$$A^3 = 6A^2 + 6A - 26I_3.$$

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 31 & 12 & -3 \\ 20 & 14 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, la matrice A^2 n'est pas dans l'espace engendré par I_3 et A , car sinon, on aurait :

$$A^2 = a I_3 + b A,$$

et donc en prenant par exemple le coefficient ligne 3 et colonne 1, on aurait $5 = a \times 0 + b \times 0$.

On va alors montrer que la famille (I_3, A, A^2) est une base de $\mathbb{C}[A]$.

La famille est déjà libre.

Si $M \in \mathbb{C}[A]$, on écrit :

$$M = Q(A),$$

pour un certain polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$. On effectue [une fois de plus, on l'a déjà fait dans les exercices précédents] la division euclidienne de Q par $\chi(X) = X^3 - 6X^2 - 6X + 26$, ce qui donne une écriture de la forme :

$$Q = S \chi + R, \text{ avec } \deg(R) < 3.$$

En évaluant ceci en la matrice A , on obtient :

$$M = Q(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_3, A, A^2),$$

puisque le polynôme R est de degré inférieur ou égal à 2.

2. Comme $A^3 - 6A^2 - 6A = -26I_3$, alors :

$$A \left(\frac{A^2 - 6A - 6I_3}{-26} \right) = I_3,$$

ce qui montre que A est inversible et que A^{-1} est la matrice entre parenthèses.

Tous calculs faits, on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 10 & -8 & -4 \\ -5 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

3. Soit λ un complexe.

La matrice $A - \lambda I_3$ est la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 3 & 0 \\ 5 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il y a plusieurs façons de faire. On peut résoudre le système $BX = 0$, d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ pour voir si le système est de Cramer, auquel cas la matrice B sera injective donc bijective et inversible car B est une matrice carrée.

On peut aussi calculer le rang de B . Il est facile de voir que les deux premières colonnes de B ne sont jamais colinéaires avec les coefficients en ligne 3.

On cherche à voir que la troisième colonne est combinaison linéaire des deux premières.

Le système linéaire associé à $C_3 = a C_1 + b C_2$ est de matrice augmentée :

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cc|c} 4-\lambda & 3 & 0 \\ 5 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -\lambda & -1 \\ 4-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{array} \right) [L_1 \longleftrightarrow L_2] \\
 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -\lambda & -1 \\ 0 & \frac{15+4\lambda-\lambda^2}{5} & \frac{4-\lambda}{5} \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{array} \right) [L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4-\lambda}{5}L_1] \\
 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 15+4\lambda-\lambda^2 & 4-\lambda \end{array} \right) [L_2 \longleftrightarrow L_3] \\
 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda - 26 \end{array} \right) [L_3 \leftarrow L_3 - (15+4\lambda-\lambda^2)L_2]
 \end{array}$$

Ce système est compatible si et seulement si :

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 6\lambda + 26 = 0.$$

Comme par hasard, on retrouve notre polynôme $\chi(X)$ de tout à l'heure qui annulait notre matrice A ... (résultat prévisible mais c'est du programme de deuxième année plutôt).

On cherche les racines du polynôme $\chi(X)$.

Il n'y a pas de racines évidentes.

On cherche comme d'habitude les racines rationnelles sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers premiers entre eux et $b \in \mathbb{N}^*$. On obtient que b divise a^3 puis $b = 1$ et que a divise $26b^3$ donc a divise 26 et donc $a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$.

On observe finalement qu'aucune de ces racines ne convient.

En désespoir de cause, on peut déterminer si les racines sont réelles ou non.

La fonction $f : t \mapsto t^3 - 6t^2 - 6t + 26$ est continue sur \mathbb{R} . On évalue la fonction f en des valeurs entières.

Voici les valeurs numériques utiles :

$$f(-3) = -37 < 0 < f(-2) = 6,$$

$$f(1) = 15 > 0 > f(2) = -2,$$

$$f(6) = -10 < 0 < f(7) = 33.$$

Par le TVI, la fonction f s'annule au moins trois fois – et comme c'est une fonction polynomiale de degré 3, elle ne peut s'annuler plus – en trois nombres $a \in]-3, -2[$, $b \in]1, 2[$ et $c \in]6, 7[$ qui sont tous irrationnels.

Les nombres complexes qui répondent à la question sont les complexes a , b et c .

Exercice 10

1. L'application Θ est bien définie car si A est fixée, l'application $M \mapsto \text{Tr}(AM)$ est bien une forme linéaire.

Ensuite, l'application Θ est bien linéaire car si A_1 et A_2 sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ est dans \mathbb{C} , alors pour toute matrice carrée M ,

$$\text{Tr}((\lambda A_1 + A_2)M) = \lambda \text{Tr}(A_1 M) + \text{Tr}(A_2 M),$$

donc :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Theta(\lambda A_1 + A_2)(M) = (\lambda \Theta(A_1) + \Theta(A_2))(M).$$

Enfin, les espaces de départ et d'arrivée de Θ sont de même dimension finie n^2 . Il suffit alors de montrer que Θ est injective.

Soit $A \in \text{Ker}(\Theta)$. Alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on obtient :

$$\text{Tr}(AM) = 0.$$

Sans perte de généralité, on utilise ce résultat avec les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique. Tous calculs faits, on obtient que la matrice $AE_{i,j}$ n'a que des colonnes nulles sauf la colonne numéro j qui est égale à la colonne C_i de la matrice A . La trace de cette matrice est donc le $j^{\text{ème}}$ coefficient de C_i , à savoir $A_{j,i}$.

Tous les coefficients $A_{j,i}$ sont nuls et la matrice A est nulle.

L'application linéaire Θ est bijective par le théorème du rang (injective et par conséquent surjective par les dimensions finies).

2. On suppose $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a déjà vu dans un exercice corrigé dans la feuille 14 que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contenait une matrice inversible. On redémontre ceci en utilisant cette fois-ci la question Q1.

Comme H est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$H = \text{Ker}(\varphi).$$

On pose $A = \Theta^{-1}(\varphi)$, de sorte que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \Theta(A)(M) = \text{Tr}(AM).$$

Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \in H \iff \text{Tr}(AM) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver une matrice inversible M telle que :

$$\text{Tr}(AM) = 0.$$

Comme la forme linéaire φ est non nulle, alors la matrice A est non nulle. On note $r = \text{Rg}(A)$ son rang nécessairement supérieur ou égal à 1.

La matrice A est équivalente à une matrice de type J_r :

$$A = QJ_rP^{-1},$$

avec deux matrices inversibles P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On cherche une matrice M convenable sous la forme :

$$M = P N Q^{-1},$$

avec la matrice N inversible de sorte que :

$$AM = Q J_r N Q^{-1},$$

est semblable à la matrice $J_r N$, donc

$$\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(J_r N).$$

Il reste à trouver une matrice N inversible telle que $\text{Tr}(J_r N) = 0$.

On cherche une bonne matrice N sous la forme d'une disposition par blocs :

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix},$$

avec N_1 bloc carré de format $r \times r$ et les autres blocs de format en conséquence de façon à ce que la matrice N soit bien de format $n \times n$.

On obtient :

$$J_r \times N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On veut donc N_1 de trace nulle de telle sorte que la matrice N soit inversible.

On distingue ici deux cas :

→ si le rang r est supérieur ou égal à 2, on prend la matrice de permutation de la base canonique (e_1, \dots, e_r) de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, \quad N(e_k) = e_{k+1} \text{ et } N(e_r) = e_1.$$

La matrice N_1 est inversible et est de trace nulle.

On prend $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ et $N_4 = I_{n-r}$. Il est facile de voir que la matrice $N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ ou bien il est facile de voir que la matrice N est de rang n .

→ si $r = 1$, alors N_1 doit être le bloc (0) avec un seul coefficient. Il suffit alors de prendre la matrice N de permutation :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quoiqu'il arrive on trouve une matrice inversible N telle que $\text{Tr}(J_r N) = 0$. La matrice $M = Q N P^{-1}$ est un produit de matrices inversibles, donc l'est encore et :

$$\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(J_r N) = 0,$$

donc la matrice inversible M appartient à $\text{Ker}(\varphi) = H$, ce qui répond à la question.

Exercice 11

1. La réponse est non. En effet, si de telles matrices existaient, en prenant la trace, on obtient :

$$p = \text{Tr}(I_p) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0.$$

On obtient une contradiction.

2. Si $p \neq 0$ dans un corps K , alors on obtient encore l'impossibilité de l'existence de telles matrices.

Regardons ce qui se passe dans le corps $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier.

Il faut prendre deux matrices « simples » mais qui ne commutent pas.

On note (e_1, \dots, e_p) la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$. On va choisir des endomorphismes A et B dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(K))$ tels que :

$$A \circ B - B \circ A = \text{id}.$$

On choisit par exemple A tel que :

$$A(e_1) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, A(e_k) = e_{k-1}.$$

On choisit maintenant l'endomorphisme B en conséquence en commençant par le calculer $B(e_1)$, $B(e_2)$, etc.

On trouve :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, B(e_k) = k \cdot e_{k+1} \text{ et } B(e_p) = 0.$$

On vérifie que les applications linéaires $A \circ B - B \circ A$ et id coïncident sur la base canonique.

Soit k un entier entre 1 et p .

\triangleright Si $k = 1$, alors $A(e_1) = 0$, donc :

$$(AB - BA)(e_1) = A(e_2) = e_1.$$

\triangleright Si $2 \leq k < p$, alors $A(e_k) = e_{k-1}$ et $B(e_k) = k \cdot e_{k+1}$, donc :

$$(AB - BA)(e_k) = A(k \cdot e_{k+1}) - B(e_{k-1}) = k \cdot e_k - (k-1) \cdot e_k = e_k.$$

\triangleright Si $k = p$, alors $A(e_p) = e_{p-1}$ et $B(e_p) = 0$, donc :

$$(AB - BA)(e_p) = -B(e_{p-1}) = -(p-1) \cdot e_p = (1-p) \cdot e_p = e_p,$$

car $1-p=1$ dans le corps $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p-1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifient $AB - BA = I_p$, dans le corps des scalaires $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 14

1. On vérifie que la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

répond à la question.

Voici le détail.

Si i et j sont deux entiers entre 1 et n , alors :

$$(U^T U)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (U^T)_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^n U_{k,i} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 \times 1 = \min(i, j) = A_{i,j}.$$

On a utilisé le fait que :

$$U_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. La matrice U est triangulaire supérieure à diagonale remplie de coefficients tous non nuls : la matrice U est inversible (son rang est facilement calculable : il vaut n).

La matrice transposée U^T reste inversible et A apparaît le produit de deux matrices inversibles : elle l'est encore !

D'autre part,

$$A^{-1} = U^{-1} \times (U^T)^{-1} = U^{-1} \times (U^{-1})^T.$$

On calcule déjà la matrice U^{-1} . Le plus simple est de résoudre l'équation matricielle $UX = Y$, d'inconnue X matrice colonne. Le système est directement triangulaire de Cramer.

On obtient la seule solution en ayant x_n en fonction de y_n , puis on remonte dans les lignes. Tous calculs faits, on trouve :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : en posant la matrice nilpotente N avec des 1 uniquement juste au-dessus de la diagonale, partout ailleurs que des 0, alors :

$$U = \sum_{k=0}^n N^k,$$

et on remarque que $(I_n - N)U = I_n$, donc U est inversible d'inverse $I_n - N$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel $U^{-1} \times (U^{-1})^T$ pour avoir A^{-1} . On trouve :

$$A^{-1} = (I_n - N)(I_n - N^T) = I_n - (N + N^T) + NN^T$$

$$\begin{aligned}
&= I_n - (N + N^T) + J_{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Soit λ un scalaire réel. On suppose que la matrice $A^{-1} - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Montrer l'existence d'un tel θ tel que :

$$\lambda = 2 - 2 \cos \theta,$$

revient à montrer que le nombre λ appartient à l'intervalle $[0, 4]$, puisque la fonction $f : t \mapsto 2 - 2 \cos t$ vérifie :

$$f(\mathbb{R}) = [0, 4].$$

Comme $A^{-1} - \lambda I_n$ n'est pas inversible, l'endomorphisme associé n'est pas injectif (ni surjectif d'ailleurs). On trouve un vecteur colonne X non nul dans son noyau.

On en déduit $A^{-1}X = \lambda X$. En notant x_k les composantes du vecteur colonne X , en posant de plus $x_0 = 0$, on aboutit aux équations suivantes :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = \lambda x_k$$

et :

$$-x_{n-1} + x_n = \lambda x_n.$$

On choisit parmi les composantes x_k de X une composante x_k tel que $|x_k|$ soit maximal. On en déduit déjà que k ne peut valoir 0 car sinon, toutes les composantes de X seraient de module inférieur à $|x_0| = 0$ et X serait le vecteur nul, ce qui n'est pas le cas.

• Ensuite, supposons dans un premier temps que k soit différent de n . En prenant le module dans l'équation $-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = \lambda x_k$, on obtient puisque $|x_{k-1}| \leq |x_k|$ et $|x_{k+1}| \leq |x_k|$ par maximalité :

$$|\lambda| |x_k| = |\lambda x_k| = |-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1}| \leq 4 |x_k|,$$

En divisant par $|x_k| > 0$, on aboutit déjà à $|\lambda| \leq 4$, donc $\lambda \leq 4$.

• Lorsque $k = n$, on reprend le module dans $-x_{n-1} + x_n = \lambda x_n$, ce qui donne :

$$|\lambda| |x_n| \leq 2 |x_n|,$$

et donc $|\lambda| \leq 2$, ce qui implique la même conclusion : $\lambda \leq 4$.

Enfin, de $A^{-1}X = \lambda \cdot X$, en multipliant à gauche par A , on obtient :

$$X = \lambda \cdot AX = \lambda \cdot U^T \times UX.$$

On multiplie maintenant à gauche par X^T . On obtient :

$$X^T X = \lambda \cdot (Y^T Y), \text{ avec } Y = UX \text{ matrice colonne.}$$

La matrice U étant inversible et X étant non nul, il est impossible que UX soit nul, donc les vecteurs colonne X et Y ne sont pas nuls.

On montre finalement que si Z est une matrice colonne non nulle à coefficients réels, alors $Z^T Z > 0$, où la matrice $Z^T Z$ à un seul coefficient est identifiée à ce coefficient.

En effet, en notant Z_ℓ les composantes non toutes nulles et réelles du vecteur Z , le calcul matriciel donne :

$$Z^T Z = \sum_{\ell=1}^n (Z_\ell)^2 > 0.$$

En conclusion,

$$\lambda = \frac{X^T X}{Y^T Y} > 0.$$

On a bien globalement λ dans $[0, 4]$ et donc l'existence d'un θ convenable.

Exercice 16

1. L'application linéaire A est :

$$A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} .$$

Le théorème du rang dit que :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{Rg}(A) = q = \text{le nombre de \textbf{colonnes} de la matrice } A.$$

2. Il y a bien 2^n parties possibles de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Premier problème : il y a « seulement » $(2^n)!$ façons de les énumérer et donc potentiellement autant de matrices A différentes possibles définies comme dans l'énoncé.

On montre déjà que quelle que soit l'énumération, la matrice A obtenue a le même rang que pour une autre énumération. On remarque facilement que comme $E_i \cap E_j = E_j \cap E_i$, la matrice A est symétrique.

Supposons par exemple que l'on considère deux énumérations E_1, \dots, E_{2^n} et F_1, \dots, F_{2^n} , avec seulement deux changements. Les listes sont donc presque égales, sauf à deux endroits i et j , d'où :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \quad E_k = F_k \text{ et } \begin{cases} E_i = F_j \\ E_j = F_i \end{cases} .$$

Les matrices que l'on note A (pour l'énumération des E_k) et B (pour l'énumération des F_ℓ) sont un peu pareilles.

Si k et ℓ sont deux indices hors de $\{i, j\}$, alors :

$$A_{k,\ell} = B_{k,\ell}.$$

Ensuite, si $k = i$ et $\ell = j$,

$$A_{i,j} = B_{i,j}.$$

Enfin, si $k = i$ par exemple et $\ell \notin \{i, j\}$, alors :

$$A_{i,\ell} = B_{j,\ell}$$

et si $k = i$ et $\ell = i$, alors :

$$A_{i,i} = B_{j,j}.$$

On passe de la matrice A à la matrice B en échangeant les colonnes i et j et les lignes i et j . Ces deux opérations sont des opérations interprétables comme une multiplication à droite (pour l'opération sur les colonnes) et à gauche (pour l'opération sur les lignes) par une matrice inversible. Ces multiplications par une matrice inversible donnent des matrices toujours équivalentes entre elles, donc de même rang.

On peut donc choisir une énumération « qui nous arrange ».

On va en fait établir un lien entre la matrice A_n (au rang n) et la matrice A_{n+1} (au rang $n+1$).

Déjà lorsque $n = 1$, on choisit l'énumération suivante :

$$E_1 = \emptyset \text{ et } E_2 = \{1\},$$

ce qui donne la matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice de rang 1.

Supposons construite une énumération E_1, \dots, E_{2^n} des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On choisit alors l'énumération suivante pour les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, en énumérant d'abord les parties ne contenant pas $n+1$ donc incluses dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ en rajoutant aux parties E_k le singleton $\{n+1\}$ pour former toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ contenant $n+1$.

On pose alors $F_k = E_k \cup \{n+1\}$, de sorte que l'on considère au rang $n+1$ l'énumération $E_1, \dots, E_{2^n}, F_1, \dots, F_{2^n}$.

On voit que si i et j sont entre 1 et 2^n , alors :

$$E_i \cap F_j = E_i \cap E_j \text{ et } n+1 \in F_i \cap F_j \neq \emptyset.$$

Par conséquent, la matrice A_{n+1} est la matrice décrite par blocs :

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & J \end{pmatrix},$$

les quatre blocs étant de format $2^n \times 2^n$ et le bloc de J rempli intégralement de 1.

Comme la première partie E_1 est la partie vide, alors la première colonne de A_n et de A_{n+1} est 0. Les premières lignes sont égales à 0 par symétrie.

Calculons le rang de A_{n+1} en fonction du rang de A_n .

On va montrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) \text{ « le rang de la matrice } A_n \text{ est exactement } 2^n - 1. \text{ »}$$

Lorsque $n = 1$, le résultat a déjà été vu.

Supposons le résultat vrai pour un certain entier $n \geq 1$.

Au rang suivant, comme la première colonne de la matrice A_n est nulle, par H.R. cela signifie que la famille constituée de toutes les autres colonnes C_2, \dots, C_{2^n} forme une base de $\text{Im}(A_n)$.

On pose dans la suite :

$$Y_i = \begin{pmatrix} C_i \\ C_i \end{pmatrix} \text{ et } Z_i = \begin{pmatrix} C_i \\ U \end{pmatrix},$$

où la matrice colonne U est remplie de n chiffres 1.

On va montrer que la famille $(Y_2, \dots, Y_{2^n}, Z_1, \dots, Z_{2^n})$ est libre.

Soit $\sum_{k=2}^{2^n} a_k Y_k + \sum_{k=1}^{2^n} b_k Z_k = 0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille.

En prenant uniquement les coefficients en ligne $(n+1)$ dans les matrices colonnes, sachant que $(Y_i)_{n+1} = 0$ (première ligne de A_n nulle) et $(Z_k)_{n+1} = 1$ (première ligne de J remplie de 1), alors :

$$\sum_{k=1}^{2^n} b_k = 0.$$

En prenant maintenant les blocs inférieurs (à partir de la $(n+1)^{\text{ème}}$ composante des vecteurs colonnes Y_k ou Z_ℓ), on obtient sachant que $\sum_{k=1}^{2^n} b_k U = 0$:

$$\sum_{k=2}^{2^n} a_k Y_k = 0.$$

On obtient une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille libre (Y_2, \dots, Y_{2^n}) : tous les scalaires a_k sont nuls.

Ainsi, en prenant maintenant les blocs supérieurs (les n premières composantes) dans la combinaison linéaire nulle, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2^n} b_k Y_k = 0, \text{ donc } \sum_{k=2}^{2^n} b_k Y_k = 0,$$

puisque la colonne Y_1 est nulle. Là encore, on obtient que tous les scalaires b_k , pour k entre 2 et 2^n sont nuls. Il ne reste que le scalaire b_1 éventuellement non nul, mais il l'est car la combinaison linéaire nulle initiale devient maintenant :

$$b_1 Z_1 = 0, \text{ donc } b_1 = 0.$$

Conclusion, la famille $(Y_2, \dots, Y_{2^n}, Z_1, \dots, Z_{2^n})$ est libre dans $\text{Im}(A_{n+1})$ donc $\text{Rg}(A_{n+1}) \geq 2^{n+1} - 1$ mais la matrice A_{n+1} admet une première colonne nulle, donc le rang de A_{n+1} ne peut pas être égal à son nombre de colonnes qui est 2^{n+1} :

$$\text{Rg}(A_{n+1}) = 2^{n+1} - 1.$$

En définitive, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rang de A_n vaut $2^n - 1$ et la dimension du noyau de A_n vaut 1.

Exercice 17

1. On vérifie que f est bien linéaire et que si P est un polynôme de degré inférieur à 3, il en est de même pour $f(P)$.

2. On obtient facilement la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. On transpose déjà le problème à la matrice A .

On trouve facilement que A est de rang 3, donc $\text{Ker}(A)$ est de dimension 1.

Une base de $\text{Ker}(A)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et une base de $\text{Im}(A)$ est (C_2, C_3, C_4) .

Une base de $\text{Ker}(f)$ est donc $\text{Vect}(1)$ et une base de $\text{Im}(f)$ est $(f(X), f(X^2), f(X^3))$.

4. La réponse est oui. On remarque que la matrice A est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux 0, 2, 6 et 12. Si λ est l'une de ces quatre valeurs, alors la matrice $A - \lambda I_4$ est triangulaire supérieure dont la diagonale comporte un 0 : la matrice A ne sera pas inversible car le rang de cette matrice ne pourra être égal à 4.

On peut alors choisir des vecteurs non nuls X_0, X_2, X_6, X_{12} de telle sorte que X_λ appartienne à $\text{Ker}(A - \lambda I_4)$, pour $\lambda \in \{0, 2, 6, 12\}$.

La famille (X_0, X_2, X_6, X_{12}) est libre car si on a une combinaison linéaire nulle $aX_0 + bX_2 + cX_6 + dX_{12} = 0$, en appliquant à cette combinaison linéaire la matrice $P(A)$ où P est n'importe quel polynôme, alors sachant que :

$$AX_\lambda = \lambda X_\lambda,$$

par récurrence, on aurait :

$$A^k X_\lambda = \lambda^k X_\lambda,$$

puis bientôt :

$$P(A)X_\lambda = P(\lambda) X_\lambda.$$

Ainsi, pour tout polynôme P , on a :

$$a P(0)X_0 + b P(2)X_2 + c P(6)X_6 + d P(12)X_{12} = 0.$$

Il suffit alors de choisir les polynômes de Lagrange L_0, L_2, L_6 et L_{12} associés aux valeurs différentes 0, 2, 6 et 12. Les scalaires a, b, c et d sont bien nuls.

On obtient que chaque scalaire est nul et donc que la famille à quatre vecteurs est en fait une base de $\mathbb{R}_3[X]$. La matrice de passage R de la base canonique vers cette base vérifie :

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18

1. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une famille libre à $\dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs.
2. On trouve en interprétant chaque élément (a, b, c) de \mathbb{R}^3 comme le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,
$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. On obtient :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. En utilisant la méthode classique $PX = Y$, d'inconnue X par exemple, on trouve :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale de la question 2., ce qui n'est pas du tout une surprise.

On vient de vérifier sur l'exemple que la formule de changement de base fonctionnait.
On vient accessoirement de diagonaliser la matrice A .

Exercice 19

1. On vérifie implicitement que f est linéaire et que $f(E) \subset F$.

On trouve facilement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. On montre facilement que les familles \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des familles libres de cardinaux respectifs $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$.
3. Le plus simple pour calculer B est de suivre la démarche des questions suivantes. On pourrait calculer $f(u_1)$, avec u_1 le premier vecteur de \mathcal{B} puis calculer ses coordonnées selon \mathcal{B}' et constituer la première colonne de B , mais cela revient à faire plusieurs fois presque le même système. Il est plus court d'utiliser les matrices de passage ... On passe la question en suivant la méthode des questions suivantes.
4. On trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. On trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 6 & -8 \\ 3 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la matrice $B = Q^{-1}AP$. On trouve :

$$B = \begin{pmatrix} -14 & -14 & -31 & 65 \\ 10 & 10 & 23 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Cet exercice est purement pédagogique. La matrice B n'est pas plus simple que la matrice A . Il était mathématiquement inutile de procéder à tous ces changements de base.

Mieux (mais c'est un autre exercice) aurait été de trouver des changement de base pour que la nouvelle matrice soit la matrice J_3 au lieu de B .

Exercice 20

1. La matrice A est une matrice triangulaire supérieure. On utilise le binôme dans $\mathbb{C}[X]$ commutatif pour avoir les colonnes.

Si i et j sont entre 1 et $n + 1$, alors :

$$A_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} a^{j-i}.$$

2. L'endomorphisme f est clairement inversible de fonction réciproque :

$$f^{-1} : P(X) \longmapsto P(X - a).$$

La matrice A est alors immédiatement inversible et A^{-1} est la matrice de f^{-1} selon les bases canoniques. On trouve comme matrice :

$$(A^{-1})_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} (-a)^{j-i}.$$

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on sait que A^k est la matrice de $f^k : P(X) \longmapsto P(X + ka)$ selon les bases canoniques. On en déduit les matrices :

$$(A^k)_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} (ka)^{j-i}.$$

Exercice 21

1. Il suffit de prendre un vecteur x_0 de E tel que :

$$f^{n-1}(x_0) \neq 0.$$

On a déjà vu en cours en appliquant plusieurs fois la fonction f à une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille que la famille $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ était libre donc était une base de E .

2. La matrice A représentant f selon cette base est la matrice nilpotente classique avec que des coefficients nuls partout, sauf ceux situés juste en-dessous de la diagonale qui valent 1.
3. Il est facile de voir que le rang de cette matrice nilpotente vaut $n-1$, donc $\text{Rg}(f) = n-1$.

Exercice 26

On remarque que la matrice AB est de rang 2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $(AB(e_2), AB(e_3))$ forme une base de $\text{Im}(AB)$. La famille $(AB(e_2), AB(e_3))$ est donc libre. La famille $(B(e_2), B(e_3))$ est donc libre aussi en appliquant l'endomorphisme A (ou u_A) à une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille.

On en déduit que la famille $(B(e_2), B(e_3))$ est une famille libre dans $\text{Im}(B)$. Or, B est une application linéaire telle que $B : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que l'application linéaire B est surjective ou encore que :

$$\text{Vect}(B(e_2), B(e_3)) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

Finalement,

$$BA(B(e_2)) = BAB(e_2) = B(e_2) \text{ et } BA(B(e_3)) = BAB(e_3) = B(e_3).$$

Les endomorphismes $B \circ A$ (ou BA) et id définis sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ coïncident sur une base donc partout :

$$B \circ A = \text{id}, \text{ donc } BA = I_2.$$

Exercice 27

1. Il y a plusieurs méthodes. On peut déterminer une base de $\text{Im}(A)$ et une base de $\text{Ker}(A)$, puis procéder à un changement de base.

Le moins coûteux est la méthode suivante.

On pose (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On fixe (x, y, z) dans \mathbb{R}^3 . On pose $H = \text{Im}(A)$ qui est l'hyperplan :

$$H = \text{Ker}(e_1^* + e_2^* + e_3^*).$$

On pose $D = \text{Ker}(A)$ qui est $\text{Vect}((1, 2, 3))$.

On écrit avec des notations évidentes :

$$(x, y, z) = \vec{u}_H + \lambda \cdot (1, 2, 3).$$

On applique la forme linéaire $e_1^* + e_2^* + e_3^*$, ce qui donne :

$$x + y + z = 6\lambda.$$

On en déduit :

$$\vec{u}_H = \frac{1}{6} (5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$

On obtient alors :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit B une matrice telle que $B^2 = B$ et $AB = BA$.

On rappelle les notations déjà utilisées : $H = \text{Im}(A)$ et $D = \text{Ker}(A)$.

Si $X \in H$, alors $AX = X$, donc $ABX = BAX = BX$ et $BX \in \text{Ker}(A - I_3) = H$.

Si $X \in D$, alors $AX = 0$, donc $ABX = BAX = B0 = 0$ et $BX \in D$.

On en déduit que B est une projection laissant stable H et D .

Réiproquement, si B est une projection laissant stable H et D , alors $B^2 = B$. De plus, si $Y \in H$, alors $AY = Y$ et $BY = Y$, donc $ABY = BAY$. Si $Y \in D$, alors $BY = 0$ et $AY = 0$, donc $ABY = BAY$.

Les applications linéaires AB et BA coïncident sur H et D , donc sur $\text{Vect}(H, D) = H + D = \mathbb{R}^3$.

Il y a une infinité de telles matrices B . On peut prendre n'importe quelle base (a, b) de H , puis poser $c = (1, 2, 3)$ qui forme une base de D . La projection sur $\text{Vect}(a, c)$ parallèlement à $\text{Vect}(b)$ sera une projection convenable et en faisant varier la direction du vecteur b dans $H \setminus \text{Vect}(a)$ (les vecteurs a et c étant fixes), on aura une infinité de noyaux possibles, donc une infinité de projections différentes B .

3. Soit F un sous-espace de \mathbb{R}^3 stable par A . On catalogue les sous-espaces F possibles selon leur dimension $d = \dim(F)$.

- Si $d = 0$, alors $F = \{0\}$ qui est stable.

- Si $d = 1$, alors $F = \text{Vect}(\vec{a})$ pour un certain vecteur \vec{a} . Comme $A(\vec{a}) \in F$, on pose :

$$A(\vec{a}) = \lambda \vec{a}.$$

En réappliquant l'endomorphisme A , on obtient :

$$A^2(\vec{a}) = \lambda^2 \vec{a}.$$

Or $A^2 = A$, donc on doit avoir $\lambda^2 \vec{a} = \lambda \vec{a}$, ou encore :

$$(\lambda^2 - \lambda)\vec{a} = 0.$$

Comme \vec{a} est non nul, alors $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda \in \{0, 1\}$.

Si $\lambda = 0$, alors $F \subset \text{Ker}(A)$, donc $F = \text{Ker}(A)$ par les dimensions et si $\lambda = 1$, alors F est engendré par n'importe quel vecteur \vec{a} non nul dans $\text{Im}(A)$. Réiproquement, toutes ces droites vectorielles sont stables par A .

- Si $d = 2$, alors l'endomorphisme $A' = A|_F$ reste une projection car $A'^2 = (A^2)|_F = A'$. Il y a deux possibilités.

▷ Soit $A' = \text{id}$, auquel cas $F \subset \text{Im}(A)$, puis $F = \text{Im}(A)$ par les dimensions.

▷ Soit $A' \neq \text{id}$ et dans ce cas, A' qui est une projection ne peut être inversible (la seule projection inversible est id). On trouve un vecteur non nul \vec{c} dans $\text{Ker}(A') = F \cap \text{Ker}(A)$ et on trouve un vecteur \vec{d} non nul dans $\text{Im}(A') = F \cap \text{Im}(A)$. Dans ce cas, F est généré par $(1, 2, 3)$ et n'importe quel vecteur non nul de $\text{Im}(A)$. Réiproquement, F est alors stable par A .

- Si $d = 3$, alors $F = \mathbb{R}^3$ qui est stable.

Globalement, il y a une infinité de droites vectorielles stables et une infinité d'hyperplans stables par A .

Exercice 28

- Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ un projecteur. Alors, $A^2 = A$ et A est la projection sur F parallèlement à G . Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ vers une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, alors :

$$P^{-1}AP = J_r.$$

On en déduit que $r = \text{Rg}(A)$ et $r = \text{Tr}(J_r) = \text{Tr}(A)$, car A est semblable à J_r .

Remarque : ce résultat est à connaître. À mettre en annexe de cours. Ceci ne marche que pour les matrices de projection.

- On calcule Q^2 . Par distributivité :

$$Q^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_k A_\ell = \sum_{k=1}^n A_k = Q.$$

La matrice Q est la matrice d'une projection.

- (a) Soit $X \in F$. Alors,

$$X = QX = \sum_{k=1}^n A_k X \in \sum_{k=1}^n F_k.$$

(b) Par les dimensions, on obtient en utilisant aussi la question Q1 :

$$\begin{aligned} \dim(F) = \text{Rg}(Q) = \text{Tr}(Q) &= \text{Tr}\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Tr}(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Rg}(A_k) \quad [\text{question Q1}] \\ &= \sum_{k=1}^n \dim(F_k). \end{aligned}$$

On sait alors que la somme $\sum_{k=1}^n F_k$ est directe (résultat de cours sur les espaces vectoriels).

- Soit X dans l'intersection. Alors, pour tout k , $A_k X = 0$, donc $QX = 0$ directement par sommation.

Soit X dans G . Alors, $QX = 0$, donc :

$$\sum_{k=1}^n A_k X = 0.$$

Ceci est une somme nulle d'éléments dans F_k . La somme étant directe, chaque vecteur est nul, donc pour tout entier k entre 1 et n :

$$A_k X = 0 \text{ et } X \in G_k.$$

- (d) Soient i et j deux entiers entre 1 et n . Soit X un vecteur colonne dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Si $i = j$, alors comme A_i est une projection,

$$A_i^2 = A_i.$$

Si $i \neq j$, alors, le vecteur $A_j X = Y$ est dans F_j , donc dans F . Par conséquent, $QY = Y$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^n A_k Y = Y,$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n A_k A_j X = 0,$$

car les vecteurs $A_j^2 X$ et $A_j X$ de part et d'autre de l'égalité se simplifient.

On obtient une somme nulle de vecteurs dans la somme directe $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n F_k$ (ou alors

on rajoute arbitrairement en indice j le vecteur nul qui appartient à F_j) et tous les $A_k A_j X$ sont nuls (si $k \neq j$). En particulier, $A_i A_j X = 0$ et ceci pour tout vecteur colonne X . L'endomorphisme $A_i A_j$ est nul et la matrice $A_i A_j$ est nulle.

On obtient tout ce qu'il faut.

Exercice 31

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche une base de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$A(\varepsilon_1) = 0, \quad A(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \text{ et } A(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3.$$

On choisit ε_1 non nul dans $\text{Ker}(A)$, ε_2 non nul dans $\text{Ker}(A - I_3)$ et ε_3 non nul dans $\text{Ker}(A - 3I_3)$.

Après calculs, on peut prendre $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie :

$$P^{-1}AP = D.$$

Les matrices A et D sont bien semblables.

Exercice 32

C'est encore la même démarche. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On veut une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que :

$$A(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad A(\varepsilon_2) = 0 \text{ et } A(\varepsilon_3) = 0.$$

Il faut ici choisir d'abord le vecteur ε_2 qui concentre le maximum de contraintes : le vecteur ε_2 appartient à $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$.

On remarque que A est de rang 1, l'image étant générée par la première colonne C_1 . On remarque aussi que :

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On est obligé de prendre ε_2 un vecteur non nul et colinéaire à $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et il se trouve que le vecteur C_1 est dans $\text{Ker}(A)$.

On choisit ε_3 un vecteur dans $\text{Ker}(A) \setminus \text{Vect}(C_1)$. Par exemple, on prend $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il y a plein d'autres possibilités...

On choisit $\varepsilon_1 = e_1$ le premier vecteur de la base canonique de telle sorte que $A(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$. Conclusion, en prenant la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}.$$

Exercice 34

Dans cet exercice, on note (e_1, \dots, e_p) la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$.

- Soient i, j, k et ℓ quatre indices entre 1 et p .

On explicite le produit :

$$A = E_{i,j} \times E_{k,\ell}.$$

Soit on fait le produit matriciel et on trouve ce qu'il faut. On va plutôt travailler avec les endomorphismes.

Soit r un entier entre 1 et n . On calcule $A(e_r)$.

Or, $A(e_r) = E_{i,j}(E_{k,\ell}(e_r))$.

\triangleright Si $r \neq \ell$, alors $E_{k,\ell}(e_r) = 0$, donc $A(e_r) = 0$.

\triangleright Si $r = \ell$, alors $E_{k,\ell}(e_r) = e_k$, puis :

$$A(e_r) = E_{i,j}(e_k).$$

\longrightarrow Si $k = j$, alors $E_{i,j}(e_k) = e_i$.

\longrightarrow Si $k \neq j$, alors $E_{i,j}(e_k) = 0$.

Conclusion, si $r = \ell$ et $k = j$, alors $A(e_r) = e_i$ et sinon $A(e_r) = 0$.

On remarque que quoiqu'il arrive,

$$A(e_r) = \delta_{j,k} \cdot E_{i,\ell}(e_r).$$

Les endomorphismes A et $\delta_{j,k} \cdot E_{i,\ell}$ coïncident sur la base canonique donc partout.

Voici une formule qu'il est bon d'avoir en tête :

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,\ell}.$$

2. La réponse est oui car toute matrice $E_{i,j}$ est de rang 1.

Soient i et j deux indices entre 1 et p .

Explicitons des matrices de changement de base P et Q de telle sorte :

$$Q^{-1}E_{i,j}P = E_{1,1}.$$

Toutes les matrices $E_{i,j}$ seront alors équivalentes à la même matrice $E_{1,1}$, et donc seront équivalentes entre elles. On procède à l'explicitation de telles matrices P et Q pour réviser nos changements de base...

On suit la méthode vue en cours pour déterminer P et Q en lisant progressivement les colonnes de $E_{i,j}$.

On note (C_1, \dots, C_p) les colonnes de $E_{i,j}$. Elles sont toutes nulles sauf pour C_j qui vaut e_i .

Pour les $(j - 1)$ premières colonnes nulles, C_1, \dots, C_{j-1} , on a des vecteurs du noyau e_1, \dots, e_{j-1} qui vont remplir la matrice P à partir de la deuxième colonne par exemple (on peut aussi décider de remplir la matrice P à partir de la fin...)

Ensuite vient la colonne C_j que l'on place en première position dans Q et on place impérativement en première colonne de P le vecteur e_j de la base canonique.

On poursuit la lecture des colonnes de $E_{i,j}$ en ne lisant que des colonnes nulles.

Conclusion, voici les colonnes d'une bonne matrice P de passage pour l'espace de départ :

$$P = (e_j \ e_1 \ \cdots \ e_{j-1} \ e_{j+1} \ \cdots \ e_p).$$

Voici les colonnes d'une bonne matrice Q , où on a dû compléter la première colonne de Q avec des vecteurs de la base canonique. Il y a beaucoup de possibilités qui marchent. En voici une :

$$Q = (e_i \ e_1 \ \cdots \ e_{i-1} \ e_{i+1} \ \cdots \ e_p).$$

3. Soient i, j, k et ℓ quatre indices entre 1 et p .

On va montrer que les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace. Cela nécessitera de distinguer les cas où les deux indices sont égaux (trace égale à 1) ou non (trace nulle).

Plus fort (en fait équivalent) : on va montrer que les matrices $E_{i,i}$ sont toutes semblables entre elles et que les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont toutes semblables en tête.

Encore plus fort (en fait équivalent) : on va montrer que chaque matrice $E_{i,i}$ est semblable à $E_{1,1}$, que chaque matrice $E_{i,j}$ (avec $i \neq j$) est semblable à $E_{2,1}$ et que $E_{1,1}$ n'est pas semblable à $E_{2,1}$, ce qui montrera tout.

On commence par montrer que $E_{2,1}$ n'est pas semblable à $E_{1,1}$. C'est facile : elles n'ont pas la même trace !

Ensuite, on montre que la matrice $E_{i,i}$ est semblable à $E_{1,1}$.

Si i est entre 1 et p , alors on pose P la matrice dont les colonnes sont dans cet ordre

$$e_i \ e_1 \ \cdots \ e_{i-1} \ e_{i+1} \ \cdots \ e_p.$$

On vérifie que $P^{-1}E_{i,i}P = E_{1,1}$.

Si i et j sont deux indices différents entre 1 et p , on pose P la matrice dont les colonnes sont dans cet ordre :

$e_j \ e_i$ les autres vecteurs de la base canonique dans n'importe quel ordre.

Si on lieu de e_j puis e_i on met e_i puis e_j , on a $P^{-1}E_{i,j}P = E_{1,2}$.

Il serait bon de mettre cet exercice en annexe de cours.

Exercice 35

Exercice à mettre aussi en annexe de cours. L'objet de cet exercice est du cours de deuxième année.

Dans la suite, on note (e_1, \dots, e_p) la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Soit A une matrice semblable à une matrice triangulaire supérieure T à diagonale nulle. On montre que A est nilpotente.

On note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ avec donc $F_p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $F_0 = \{0\}$.

Comme pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a : $T(e_k) \in F_{k-1}$, alors :

$$T(F_k) = \text{Vect}(T(e_1), \dots, T(e_k)) \subset F_{k-1}.$$

En réitérant, on obtient :

$$T^p(F_p) \subset T^{p-1}(F_{p-1}) \subset \cdots \subset T(F_1) \subset F_0 = \{0\}.$$

Autrement dit, l'image de T^p est nulle et donc la matrice T^p est nulle. Comme A est semblable à T , on dispose d'une matrice inversible P telle que :

$$A = PTP^{-1}.$$

Ainsi,

$$A^p = PT^pP^{-1} = 0.$$

La matrice A est nilpotente.

Pour l'autre sens plus difficile, on effectue une récurrence sur l'entier p :

$\mathcal{P}(p)$: « si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire supérieure à diagonale nulle. »

- Lorsque $p = 1$, alors $A = (a)$ donc pour tout k , $A^k = (a^k)$ et comme A est nilpotente, il existe k tel que $A^k = (0)$, donc $a^k = 0$ et nécessairement $a = 0$. La matrice A est nulle et $P = (1)$ convient, avec $T = (0)$ triangulaire supérieure à diagonale nulle.

- Supposons $\mathcal{P}(p)$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

La matrice A est non inversible car sinon, tout produit de A avec elle-même serait inversible, donc toute matrice de la forme A^k serait inversible et donc la matrice nulle serait inversible, ce qui n'est pas le cas.

On peut donc choisir un vecteur $X \in \mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{C})$ non nul dans $\text{Ker}(A)$.

On complète la famille libre (X) en une base $\mathcal{C} = (X, Y_2, \dots, Y_{p+1})$ de $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{C})$. On pose P_1 la matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{C} .

La matrice $A_1 = P_1^{-1}AP_1$ est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

où \star est un bloc ligne et \star est un bloc carré $p \times p$.

Ensuite, cette matrice A_1 se met sous la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où le bloc B est de format $p \times p$. De plus, le produit matriciel en blocs fait que pour récurrence, il est facile de montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_1^k = \begin{pmatrix} 0 & \star_k \\ 0 & B^k \end{pmatrix}.$$

Ici, le bloc \star_k est un bloc ligne.

Comme A est nilpotente et que A_1 est semblable à A , alors A_1 reste nilpotente et il existe un entier k tel que $A_1^k = 0$. Donc $B^k = 0$ (et $\star_k = 0$ totalement inutile ici).

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice nilpotente B . Il existe une matrice inversible $Q \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}BQ = T_1,$$

soit triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On pose la matrice :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

La matrice P_2 est inversible d'inverse :

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit matriciel, on obtient :

$$A_2 = P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice T_2 est triangulaire supérieure à diagonale nulle. La matrice A_2 est encore triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Conclusion, A est semblable à A_1 , elle-même semblable à A_2 . La matrice A_2 est triangulaire supérieure à diagonale nulle et A est semblable à cette matrice. On a $\mathcal{P}(p+1)$ au rang suivant.

Pour ceux qui se destinent aux plus grands concours, retenez ce principe de démonstration par récurrence sur la taille des matrices.

Exercice 36

On reprend le même principe que l'exercice 35. Allons-y !

On montre par récurrence la propriété :

$\mathcal{P}(n)$: « si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de trace nulle, elle est semblable à une matrice de diagonale nulle. ».

Remarque : cette matrice à diagonale nulle n'est pas forcément triangulaire (sauf si la matrice de départ était nilpotente éventuellement).

- Lorsque $n = 1$, alors si $A = (a)$ est de trace nulle, alors $a = 0$ et A est la matrice nulle de forme convenable (à diagonale nulle).

- Supposons $\mathcal{P}(n)$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice de trace nulle.

On distingue deux cas :

- ▷ si A est une homothétie, alors on note λ le rapport de l'homothétie, de sorte que $A = \lambda I_{n+1}$ puis :

$$0 = \text{Tr}(A) = \lambda \text{Tr}(I_{n+1}) = \lambda(n+1).$$

Cela impose $\lambda = 0$ et A est la matrice nulle ;

- ▷ si A n'est pas une homothétie, d'après un exercice déjà fait (et refait), il existe un vecteur X dans $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{C})$ tel que la famille (X, AX) soit libre dans cet espace $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{C})$. On complète cette famille libre en une base :

$$\mathcal{B} = (X, AX, Y_3, \dots, Y_{n+1}).$$

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{C})$ vers \mathcal{C} . Alors, la matrice $A_1 = P^{-1}AP$ est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et A_1 sont semblables donc ont même trace :

$$\text{Tr}(A_1) = 0.$$

Or, on voit que :

$$\text{Tr}(A_1) = \text{Tr}(B).$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle. On trouve une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}BQ = M$ soit une matrice à diagonale nulle. On pose « comme d'habitude » la matrice inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Le produit matriciel conduit aux calculs suivants :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & Q^{-1}BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & M \end{pmatrix}.$$

La matrice A est semblable à la matrice A_1 elle-même semblable à cette dernière matrice A_2 qui est bien à diagonale nulle. On a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ au rang suivant.

Exercice 37

On note (e_1, \dots, e_5) la base canonique de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$ celle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On note C_1, \dots, C_5 les cinq colonnes de la matrice A .

En suivant toujours la même méthode, on retient C_1 , puis C_2 , puis C_3 (faire ici le calcul pour montrer que $C_3 \notin \text{Vect}(C_1, C_2)$), on laisse tomber C_4 et on laisse tomber C_5 .

On complète la famille libre (C_1, C_2, C_3) avec l'un des vecteurs de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. En prenant ε_1 cela marche (poser le calcul pour voir que ε_1 n'est pas dans $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$).

On obtient par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & -6 & 0 \\ -3 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On obtient ainsi } Q^{-1}AP = J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39

Par le théorème du rang, $\text{Ker}(A)$ est de dimension $3n - 2n = n$.

Comme $A^3 = 0$, alors $\text{Im}(A^2) \subset \text{Ker}(A)$, donc $\text{Rg}(A^2)$ est inférieur ou égal à n .

Considérons l'application linéaire :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \text{Im}(A) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3n,1}(K) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right..$$

On peut appliquer le théorème du rang à cette application linéaire, ce qui donne :

- $\text{Ker}(f) = \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A)$
- $\text{Im}(f) = A(\text{Im}(A)) = \text{Im}(A^2)$
- $2n = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{Rg}(f)$.

Résultat des courses :

$$\dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)) + \text{Rg}(A^2) = \text{Rg}(A) = 2n.$$

La somme des deux termes positifs $(n - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A))) + (n - \text{Rg}(A^2))$ est nulle : chaque terme est nul et on utilise surtout le fait que $\text{Rg}(A^2) = n$.

Soit $(A^2(e_1), \dots, A^2(e_n))$ une base de $\text{Im}(A^2)$.

On vérifie que la famille :

$$\mathcal{F} = \left(A^2(e_1), \dots, A^2(e_n), A(e_1), \dots, A(e_n), e_1, \dots, e_n \right),$$

en libre en appliquant A^2 à une combinaison linéaire nulle, puis en appliquant A à cette même combinaison linéaire, puis en déduisant la nullité des scalaires devant les $A^2(e_k)$.

La famille \mathcal{F} est donc une base de $\mathcal{M}_{3n,1}(K)$ et on vérifie immédiatement que la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_{3n,1}(K)$ vers \mathcal{F} satisfait à :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40

Une petite erreur de frappe a été signalée dans le cahier de textes il y a quelque temps.

1. Question déjà traitée en exercice 34, troisième question.
2. On remarque que $S^2 = S : S$ est une projection. De plus, $\text{Rg}(S) = 1$ immédiatement. En notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis :

$$\varepsilon_1 = \sum_{k=1}^n e_k$$

et pour tout entier $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\varepsilon_k = -e_1 + e_k,$$

alors la famille (ε_1) est une base de $\text{Im}(A)$, la famille $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\text{Ker}(A)$.

En regroupant ces deux bases, on a une base notée \mathcal{C} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$.

En posant P la matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{C} , alors :

$$P^{-1}SP = J_1 = E_{1,1}.$$

3. • Si $n = 1$, l'espace des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R} est de dimension 1 et la trace est une forme linéaire non nulle donc constitue une base de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. La forme linéaire φ est dans cet espace donc est colinéaire à Tr .
- Si $n \geq 2$, il y a de la place pour avoir des matrices $E_{i,j}$, avec $i \neq j$.

La question 1. et l'hypothèse sur φ montrent que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$$

et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{1,2}).$$

On pose dans la suite $\lambda = \varphi(E_{1,1})$ et $\alpha = \varphi(E_{1,2})$.

Comme $S \sim E_{1,1}$, alors $\varphi(S) = \lambda$. Or,

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n E_{i,j},$$

donc par linéarité de φ :

$$\lambda = \varphi(S) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \varphi(E_{i,j}) = \frac{1}{n} \left(n \lambda + (n^2 - n) \alpha \right).$$

Conclusion, $(n^2 - n) \alpha = 0$, donc $\alpha = 0$.

En définitive, les applications linéaires φ et $\lambda \cdot \text{Tr}$ coïncident sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc partout.

Exercice 41

- On vérifie facilement que f est linéaire. Le truc à ne pas oublier est que si P est un polynôme de degré inférieur à n , alors $f(P)$ reste de degré inférieur ou égal à n . Soit k un entier entre 0 et n . Alors,

$$f(X^k) = (n - k)X^{k+1} + X^k - kX^{k-1}.$$

Même lorsque $k = n$, le terme en X^{n+1} s'élimine et lorsque $k = 0$, le terme en X^{-1} est éliminé par le coefficient k nul.

La fonction f laisse donc bien stable l'espace $\mathbb{C}_n[X]$: c'est un endomorphisme.

- (a) On écrit :

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_n[X]}),$$

qui est le noyau d'un endomorphisme : c'est un espace vectoriel.

- (b) On pose :

$$P(X) = \xi \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où les λ_k sont les racines différentes de $P(X)$, on sait que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

D'autre part, le calcul élémentaire de la D.E.S. de l'autre fraction rationnelle conduit à :

$$\frac{nX + 1 - \lambda}{X^2 + 1} = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + i},$$

avec tous calculs faits :

$$a = \frac{1}{2}((\lambda - 1)i + n) \text{ et } b = \frac{1}{2}((1 - \lambda)i + n).$$

- (c) Comme $P \in E_\lambda$, alors $f(P) = \lambda P$ et on constate rapidement que :

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX + 1 - \lambda}{X^2 + 1}.$$

Les deux décompositions en éléments simples précédemment calculées sont égales.
Par unicité à ordre près, $r = 2$ et par exemple :

$$\alpha_1 = a, \lambda_1 = i, \alpha_2 = b \text{ et } \lambda_2 = -i.$$

La multiplicité α_1 est un entier entre 0 et n (le polynôme $P(X)$ admet au maximum comme racines les complexes i et $-i$ autorisant aux exposants à être nuls).

On pose $k = \alpha_1 = a$ appartenant donc à $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Ainsi,

$$2k = 2a = (\lambda - 1)i + n = (\zeta - 1)i + (n - \xi).$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\zeta = 1 \text{ et } \xi = n - 2k.$$

- (d) Soit k un entier entre 0 et n . On pose $\lambda_k = 1 + i(n - 2k)$. Soit P un polynôme éventuellement non nul dans E_{λ_k} . Par ce qui précède, alors le polynôme P s'écrit :

$$P(X) = \xi (X - i)^{\alpha_1} (X + i)^{\alpha_2},$$

avec $\alpha_1 = k$ et $\alpha_2 = n - k$.

On vient de montrer que :

$$E_{\lambda_k} \subset \text{Vect}\left((X - i)^k (X + i)^{n-k}\right).$$

Réciproquement, si P est non nul dans la droite vectorielle de droite (sans jeu de mots) alors on vérifie facilement que :

$$\frac{P'}{P} = \frac{k}{X - i} + \frac{n - k}{X + i} = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + i},$$

avec $a = \frac{1}{2}((\lambda_k - 1)i + n)$ et $b = \frac{1}{2}((1 - \lambda_k)i + n)$. Par conséquent,

$$f(P) = \lambda_k \cdot P.$$

On a l'autre inclusion, d'où l'égalité.

3. Il suffit de montrer que la famille proposée est libre.

Soit $\sum_{k=0}^n a_k (X - i)^k (X + i)^{n-k} = 0$ une combinaison linéaire nulle. On a déjà traité ce genre de chose...

Supposons que les scalaires a_k ne soient pas tous nuls. On choisit alors un indice k_0 minimal tel que a_{k_0} ne soit pas nul. Ainsi, la combinaison linéaire nulle se simplifie un peu en :

$$\sum_{k=k_0}^n a_k (X - i)^k (X + i)^{n-k} = 0,$$

car si $k < k_0$ est un entier naturel, par minimalité, $a_k = 0$ et on supprime le terme de la somme.

La dernière égalité devient en factorisant par $(X - i)^{k_0}$:

$$(X - i)^{k_0} \times \left(\sum_{k=k_0}^n a_k (X - i)^{k-k_0} (X + i)^{n-k} \right) = 0.$$

Par intégrité de l'anneau $\mathbb{C}[X]$, on obtient :

$$\sum_{k=k_0}^n a_k (X - i)^{k-k_0} (X + i)^{n-k} = 0.$$

L'évaluation en i donne maintenant :

$$a_{k_0} = 0.$$

Ceci contredit le choix de l'indice k_0 .

4. Par le calcul fait plus haut pour $f(X^k)$, on en déduit assez directement que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & -3 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

5. En posant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ vers la base trouvée en question 3., on obtient que la matrice A est diagonalisable (c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale).

La matrice $P^{-1}AP$ est exactement la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans cet ordre :

$$1 + in, 1 + i(n-2), 1 + i(n-4), \dots, 1 - in.$$

Exercice 42

1. On sait que $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$ puisque $A^2 = 0$. Par le théorème du rang,

$$3 = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) \geqslant 2 \dim(\text{Im}(A)).$$

Comme $\text{Rg}(A)$ est un entier inférieur à $\frac{3}{2}$, alors soit $\text{Rg}(A) = 0$, ce qui est exclu vu que la matrice A est non nulle, soit $\text{Rg}(A) = 1$, seul cas possible.

2. On choisit $\varepsilon_1 = A(x)$ un vecteur non nul dans $\text{Im}(A)$.

On choisit $\varepsilon_2 = x$.

On choisit ε_3 un vecteur dans $\text{Ker}(A) \setminus \text{Vect}(\varepsilon_1)$, ensemble non vide puisque $\text{Ker}(A)$ est un plan vectoriel.

On vérifie que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. En effet, si $a \varepsilon_1 + b \varepsilon_2 + c \varepsilon_3 = 0$ est une combinaison linéaire nulle, on applique A , ce qui donne :

$$b A(\varepsilon_2) = 0.$$

Or, $A(\varepsilon_2)$ est non nul, donc $b = 0$.

On revient à :

$$a \varepsilon_1 + c \varepsilon_3 = 0.$$

Comme ε_3 n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par ε_1 , la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ est libre et les scalaires a et c sont maintenant nuls.

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ constitue par conséquent une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et la matrice représentant l'endomorphisme u_A selon cette base est la matrice $E_{1,2}$.

On peut faire de même pour la matrice B vérifiant les mêmes hypothèses que A . On découvre que la matrice B est semblable à la matrice $E_{1,2}$: les matrices A et B sont donc semblables, car toutes les deux semblables à $E_{1,2}$.

Exercice 45

1. L'ensemble I_A est un sous-groupe de $\mathbb{C}[X]$ muni de l'addition car le polynôme nul est dans I_A et si P et Q sont dans I_A , alors $P - Q$ aussi.

Si P est dans I_A et Q est n'importe quel polynôme, alors :

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = 0 \times Q(A) = 0.$$

Le produit $P \times Q$ reste dans I_A .

On remarque finalement que la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ est de cardinal $n^2 + 1 > \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Il s'agit d'une famille liée, d'où l'existence d'une combinaison linéaire nulle non triviale (les scalaires ne sont pas tous nuls) de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0.$$

Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est non nul et appartient à I_A .

2. • **Question difficile !** On donne la réponse :

$$\mu_A(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

On commence par montrer que $\deg(\mu_A) \geq n$. En effet, en notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, si P est dans I_A avec $\deg(P) \leq n-1$, en posant $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0.$$

On applique ceci au vecteur e_1 . Par la forme de la matrice A , si k est un entier entre 1 et $n - 1$, alors :

$$A(e_k) = e_{k+1},$$

donc :

$$0 = P(A)(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_{k+1}.$$

Immédiatement, tous les scalaires λ_k sont nuls, et donc le polynôme P est nul. Le polynôme $\mu_A(X)$ ne peut être de degré inférieur ou égal à $n - 1$, donc $\deg(\mu_A) \geq n$.

On va maintenant montrer que :

$$\mu_A(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k,$$

avec les coefficients a_k de la matrice A .

Il suffit pour cela de montrer que le polynôme $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ annule la matrice A , ou encore que $Q(X)$ appartient à I_A .

Le cours de deuxième année donnera des résultats à ce sujet. On essaie malgré tout avec les moyens du bord.

On pose :

$$F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall p \in \mathbb{N}, u_{p+n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{p+k} \right\}.$$

L'ensemble F est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et comme les éléments de F sont uniquement déterminés par les n premiers termes de la suite, alors l'application :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ u & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{n-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

On pose (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n de sorte que la famille

$$\mathcal{B} = \left(U_k = \varphi^{-1}(e_k) \right)_{1 \leq k \leq n}$$

forme une base de F .

On pose le décalage :

$$f : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ (u_p)_{p \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{p+1})_{p \in \mathbb{N}} \end{array}.$$

Il est facile de vérifier que $f(F) \subset F$ (si u vérifie la relation de récurrence linéaire, alors $f(u)$ aussi) et que f est linéaire. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall u = (u_p)_{p \in \mathbb{N}}, f^k(u) = (u_{p+k})_{p \in \mathbb{N}}.$$

On note A' la matrice représentant l'endomorphisme f selon \mathcal{B} .

La matrice A' est de format $n \times n$.

Soit j est le numéro d'une colonne, j étant un entier entre 1 et n . Pour calculer les colonnes de A' , on a besoin d'avoir les termes $(U_j)_k$, lorsque k décrit $0, \dots, n$ que l'on note u_0, \dots, u_n .

On aura alors :

$$\varphi(f(U_j)) = (u_1, \dots, u_n) = \left(u_1, \dots, u_{n-1}, \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k \right),$$

donc :

$$\varphi(f(U_j)) = \sum_{k=1}^n u_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n u_k \cdot \varphi(U_k) = \varphi \left(\sum_{k=1}^n u_k \cdot U_k \right).$$

Par injectivité de φ :

$$f(U_j) = \sum_{k=1}^n u_k \cdot U_k.$$

La colonne C_j dans la matrice A' sera alors :

$$C_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } u_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k.$$

En posant à tête reposée les calculs des différentes colonnes, on aboutit à :

$$A' = A^T$$

la transposée de la matrice A .

Ensuite, en utilisant le polynôme $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on obtient que l'endomorphisme $Q(f)$ est l'endomorphisme agissant sur les suites appartenant à F :

$$Q(f) : u \longmapsto \left(u_{p+n} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{p+k} \right)_{p \in \mathbb{N}}.$$

Par définition de l'espace F , on constate que $Q(f)$ est l'application linéaire nulle et donc comme $Q(A')$ est l'application linéaire associée à $Q(f)$ selon la base \mathcal{B} , alors :

$$A'^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k A'^k = 0.$$

En prenant finalement la transposée, sachant que $(A^T)^k = (A^k)^T$, alors :

$$Q(A) = 0.$$

Le polynôme $Q(X)$ est bien dans l'idéal I_A et il n'y a pas d'autres polynômes non nuls dans I_A de degré inférieur à n : $Q(X) = \mu_A(X)$.

- Si $i = j$ et $n = 1$, alors $\mu_A(X) = X - 1$.

Si $i = j$ et $n \geq 2$, alors $\mu_A(X) = X(X - 1)$, car ce polynôme annule $E_{i,i}$ et tout polynôme unitaire de degré 1 ne peut annuler la matrice de projection $E_{i,i}$ car $E_{i,i}$ n'est pas la matrice d'une homothétie.

Si $i \neq j$, on remarque que la matrice $A = E_{i,j}$ est non nulle (donc $X \notin I_A$) et $A^2 = 0$. Ainsi, $\mu_A(X) = X^2$.

- Si A est remplie de 1 seulement, si $n = 1$, alors $\mu_A(X) = X - 1$ car A est l'identité.

Lorsque $n \geq 2$, on remarque que $A^2 = nA$, donc le polynôme $X(X - n)$ appartient à I_A . Comme A n'est pas une homothétie, alors $\mu_A(X)$ n'est pas de degré 1 : $\mu_A(X) = X(X - n)$ dans ce cas.

- On pose A la matrice diagonale de coefficients diagonaux d_1, \dots, d_n .

On pose $\{d_1, \dots, d_n\} = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$, ensemble de cardinal r .

On va montrer que :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^r (X - \delta_k) = \prod_{\omega \in \{d_1, \dots, d_n\}} (X - \omega).$$

On sait que si P est un polynôme quelconque dans $\mathbb{C}[X]$, alors la matrice $P(A)$ est diagonale de coefficients diagonaux $P(d_1), \dots, P(d_n)$.

Si $P \in I_A$, alors tous les d_k sont racines de $P(X)$, donc tous les nombres différents δ_k sont racines de $P(X)$ et donc $P(X)$ est multiple de :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^r (X - \delta_k).$$

Réiproquement, ce polynôme $Q(X)$ appartient bien à I_A et c'est le meilleur en terme de degré – i.e. de degré minimal dans $I_A \setminus \{0\}$. On a prouvé ce qui était annoncé.

3. La réponse est oui !

Si $A \sim B$, on écrit : $B = R^{-1}AR$ avec R une matrice inversible.

Pour tout polynôme $P(X)$,

$$P(B) = R^{-1}P(A)R.$$

On en déduit :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(B) = 0 \iff P(A) = 0.$$

Ainsi, les ensembles I_A et I_B sont égaux et ces deux idéaux possèdent le même polynôme minimal unitaire :

$$\mu_A(X) = \mu_B(X).$$

Exercice 47

Il est bien de placer cet exercice en annexe de cours sur les matrices nilpotentes.

1. On a déjà vu ce genre de choses...

On note (e_1, \dots, e_d) la base canonique de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$. On note :

$$F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Comme pour tout entier k entre 1 et d ,

$$N(e_k) \in F_{k-1},$$

on voit que :

$$N(F_k) \subset F_{k-1}.$$

Ainsi,

$$\text{Im}(N^d) = N^d(F_d) \subset N^{d-1}(F_{d-1}) \subset \dots \subset N(F_1) \subset F_0 = \{0\}.$$

L'endomorphisme N^d est d'image nulle, donc $N^d = 0$.

2. On numérote les points de (1) à (5).

• (1) \implies (4)

On suppose N^{d-1} non nulle. Il existe un vecteur colonne X dans $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ tel que $N^{d-1}X \neq 0$. On montre facilement (déjà fait plein de fois) que la famille

$$(N^{d-1}X, N^{d-2}X, \dots, NX, X)$$

est libre, donc forme une base de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$.

Selon cette base, l'endomorphisme u_N se représente selon $\sum_{k=2}^d E_{k-1,k}$.

• (4) \implies (1)

On voit que la matrice $M = \sum_{k=2}^d E_{k-1,k}$ vérifie :

$$M^{d-1}(e_d) = e_1 \neq 0.$$

Ainsi, la matrice M^{d-1} n'est pas nulle.

• (4) \implies (2)

Il est clair que la matrice N étant semblable à la matrice $M = \sum_{k=2}^d E_{k-1,k}$ a un rang égal à $\text{Rg}(M)$. Il est facile de voir que $\text{Rg}(M) = d - 1$.

• (2) \implies (3)

On suppose N de rang $d - 1$. La première colonne de N est nulle. Il est nécessaire de conserver les colonnes C_2, \dots, C_d de la matrice N pour en constituer une base de son image. Cela impose que C_2 soit une base de F_1 , puis (C_2, C_3) soit une base de F_2 , etc. Nécessairement, cela impose que le coefficient numéro $j - 1$ dans la colonne C_j ne soit pas nul, sinon on aurait C_j dans $F_{j-2} = \text{Vect}(C_2, \dots, C_{j-1})$.

En définitive, tous les coefficients juste au-dessus de la diagonale de N sont non nuls. Leur produit aussi.

- $(3) \implies (2)$

Il devient clair sous l'hypothèse (3) que la famille (C_2, \dots, C_d) est libre et comme C_1 est nulle, alors (C_2, \dots, C_d) est une base de $\text{Im}(N)$: $\text{Rg}(N) = d - 1$.

- $(4) \implies (5)$

Si N est semblable à la matrice $M = \sum_{k=2}^d E_{k-1,k}$, on écrit :

$$N = PMP^{-1},$$

pour une certaine matrice inversible P .

Soit $\sum_{k=0}^{d-1} a_k N^k = 0$ une combinaison linéaire nulle.

On multiplie le tout à gauche par P^{-1} et à droite par P , ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k M^k = 0.$$

On applique cette égalité entre matrices et donc entre endomorphismes en le vecteur e_d , sachant que $M(e_k) = e_{k-1}$ si $k \geq 2$ et $M(e_1) = 0$. On obtient :

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{d-1} a_k M^k \right) (e_d) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k e_{d-k} = \sum_{\ell=1}^d a_{d-\ell} e_\ell.$$

Tous les scalaires $a_{d-\ell}$ sont nuls, et donc tous les scalaires a_k .

La famille est bien libre.

- $(5) \implies (1)$

Comme N^{d-1} fait partie de cette famille libre, alors N^{d-1} n'est pas nul.

- $(3) \implies (1)$

On note a_1, \dots, a_{d-1} les coefficients dans N juste au-dessus de la diagonale et dans cet ordre : $N_{k-2,k} = a_{k-1}$ pour k entre 2 et d .

On calcule N^{d-1} , ou plutôt, on calcule $N^{d-1}(e_d)$. Avec les notations déjà vues, on écrit :

$$\begin{aligned} N^{d-1}(e_d) &= N^{d-2}(N(e_d)) \\ &= N^{d-2}(a_{d-1} \cdot e_{d-1} + x), \text{ avec } x \in F_{d-2} \\ &= a_{d-1} \cdot N^{d-2}(e_{d-1}), \text{ car } N^{d-2} \text{ nul sur } F_{d-2} \\ &= a_{d-1} \cdot N^{d-3}(N(e_{d-1})) \\ &= a_{d-1} \cdot N^{d-3}(a_{d-2} \cdot e_{d-2} + y), \text{ avec } y \in F_{d-3} \\ &= a_{d-1} a_{d-2} \cdot N^{d-3}(e_{d-2}) \\ &\quad \vdots \\ &= a_{d-1} a_{d-2} \cdots a_2 \cdot N(e_2) \\ &= a_{d-1} a_{d-2} \cdots a_2 a_1 \cdot e_1. \end{aligned}$$

Tout ceci montre que $N^{d-1}(e_d)$ n'est pas le vecteur nul et donc que la matrice N^{d-1} n'est pas nulle.

Comme N^{d-1} est nul sur F_{d-1} , alors :

$$N^{d-1} = \left(\prod_{k=1}^{d-1} a_k \right) \cdot E_{1,d},$$

car les deux endomorphismes associés à ces deux matrices coïncident sur la base canonique de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$: ces deux matrices sont bien égales.

Exercice 49

- Il suffit de montrer que $B^2 = B$.

On écrit une somme rectangulaire, en posant d le cardinal de G :

$$B^2 = \frac{1}{d^2} \left(\sum_{A_1 \in G} A_1 \right) \left(\sum_{A_2 \in G} A_2 \right) = \frac{1}{d^2} \sum_{A_1 \in G} \left(\sum_{A_2 \in G} A_1 A_2 \right).$$

Or, si l'élément A_1 est fixé dans le groupe G , l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A_2 & \mapsto & A_1 A_2 \end{array}$$

est une bijection d'inverse : $\varphi^{-1} : A_2 \mapsto A_1^{-1} A_2$.

On en déduit que les matrices $A_1 A_2$, lorsque A_1 est fixé et lorsque A_2 varie dans G forme exactement l'ensemble $\varphi(G) = G$. Résultat des courses :

$$\forall A_1 \in G, \quad \sum_{A_2 \in G} A_1 A_2 = \sum_{C \in G} C = d \cdot B.$$

Ainsi,

$$B^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{A_1 \in G} (d \cdot B) = \frac{1}{d} \sum_{A_1 \in G} B = B.$$

- La matrice B est semblable à une matrice de type J_r , avec $r = \text{Rg}(B)$, donc :

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(J_r) = r.$$

On utilise maintenant la linéarité de la trace, ce qui donne :

$$r = \text{Tr} \left(\frac{1}{d} \sum_{A \in G} A \right) = \frac{1}{d} \sum_{A \in G} \text{Tr}(A).$$

La quantité $N = \sum_{A \in G} \text{Tr}(A)$ est donc égal à $d \cdot r$: c'est un entier multiple de l'entier $d = \text{card}(G)$, d'où le résultat.

Exercice 51

1. facile
2. Comme $A^2 = 0$, alors $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$. Le théorème du rang donne :

$$3 = \text{Rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)).$$

Or, $\text{Rg}(A) \leq \dim(\text{Ker}(A))$: les seules possibilités sont $\text{Rg}(A) = 0$ ou $\text{Rg}(A) = 1$. Cependant, comme la matrice A est non nulle, son rang est non nul et donc $\text{Rg}(A) = 1$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On choisit une bonne base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ comme suit :

- choisir ε_1 un vecteur non nul dans $\text{Im}(A)$: le vecteur ε_1 sera dans $\text{Ker}(A)$;
- choisir ε_2 un vecteur non colinéaire à ε_1 et ε_2 dans le plan vectoriel $\text{Ker}(A)$;
- choisir un antécédent ε_3 du vecteur ε_1 par l'application linéaire u_A .

La famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre car en appliquant u_A à une combinaison linéaire nulle, on obtient que le scalaire devant ε_3 est nul. On obtient une combinaison linéaire nulle entre ε_1 et ε_2 non colinéaire : les deux autres scalaires sont nuls.

La matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{C} vérifie ce qui est demandé.

3. Ce type de question est assez classique : à comprendre.

On note :

$$F' = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A'M + MA' = 0 \right\}.$$

On montrerait que F' est encore un espace vectoriel. De plus, l'application :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

est un isomorphisme – c'est carrément un automorphisme d'algèbres !!

Les espaces F et F' sont de dimension finie inférieure à $9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.

De plus, si M est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM + MA = 0 \\ &\iff PA'P^{-1}M + MPA'P^{-1} = 0 \\ &\iff A'P^{-1}MP + P^{-1}MPA' = 0 && \times \text{ à droite par } P, \text{ à gauche par } P^{-1} \\ &\iff \varphi(M) \in F'. \end{aligned}$$

L'application $\psi : M \mapsto \varphi(M)$ restreinte à F est un isomorphisme de F vers F' : ces deux espaces ont même dimension.

On va en fait calculer $\dim(F')$ car A' est plus simple.

Comme la matrice A' est très simple, le mieux est de prendre une matrice quelconque :

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et le calcul matriciel fait :

$$A'M' + M'A' = \begin{pmatrix} g & h & a+i \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$$

La matrice M' appartient à F' si et seulement si :

$$g = h = d = a + i = 0$$

si et seulement si :

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

On voit que la famille $(E_{1,1} - E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ forme une base de F' :

$$\boxed{\dim(F) = \dim(F') = 5.}$$

Exercice 52

Exercice classique sur les matrices que l'on appelle à diagonale dominante.

- Il faut comprendre que le corps K est nécessairement un sous-corps de \mathbb{C} , pour pouvoir calculer les modules ou les valeurs absolues. On oublie les corps bizarres du type $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Soit X un vecteur dans $\text{Ker}(A)$. Alors, $AX = 0$, donc pour tout entier i entre 1 et n :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j = 0.$$

On suppose le vecteur X non nul, par l'absurde.

Parmi toutes les composantes x_i , on choisit un indice i_0 tel que la quantité $|x_{i_0}|$ soit maximale, donc nécessairement strictement positive.

On obtient en piochant l'équation numéro i_0 :

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \cdot x_j = 0 \text{ ou encore } a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} \cdot x_j.$$

On prend les modules puis on utilise l'inégalité triangulaire, ce qui donne :

$$|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} \cdot x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \cdot |x_j|.$$

Par choix de i_0 , $|x_j| \leq |x_{i_0}|$, donc :

$$|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leq \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) \cdot |x_{i_0}|.$$

En divisant par $|x_{i_0}| > 0$, on obtient :

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|,$$

ce qui constitue une contradiction avec l'énoncé.

Le noyau $\text{Ker}(A)$ ne contient que le vecteur nul.

2. L'application linéaire u_A est injective et donc surjective sur $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ par le théorème du rang.

Exercice 58

Il y a plusieurs manières de faire.

Je choisis de détailler un raisonnement par récurrence forte sur n en montrant :

$\mathcal{P}(n)$: « si A_1, \dots, A_n sont n matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent entre elles, alors le produit :

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

est nul. »

- Lorsque $n = 1$, si $A_1 = (a)$ est une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, alors le complexe a vérifie : $\exists k \in \mathbb{N}$, $a^k = 0$, donc $a = 0$ et $A_1 = 0$.
- Supposons les propriétés $\mathcal{P}(k)$, vraies jusqu'au rang n .
- Soient A_1, \dots, A_n, A_{n+1} , $(n+1)$ matrices nilpotentes qui commutent toutes entre elles.

On distingue deux cas :

- ▷ la matrice A_{n+1} est nulle. Dans ce cas, le produit des matrices A_k est nul.
- ▷ la matrice A_{n+1} n'est pas nulle. On pose $F = \text{Ker}(A_{n+1})$. L'espace F n'est pas réduit à $\{0\}$ car sinon la matrice A_{n+1} serait inversible mais aucune matrice nilpotente n'est inversible (si N nilpotente est inversible, pour tout entier naturel k , N^k reste inversible et donc pour un certain entier k , $0 = N^k$ serait inversible...).

L'espace F est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ et $d = \dim(F)$ est compris entre 1 et n , la matrice A_{n+1} étant non nulle, l'espace F est différent de l'espace tout entier.

Soit $X \in F$. Alors, pour tout entier i entre 1 et n , on peut écrire :

$$A_{n+1}A_iX = A_iA_{n+1}X = A_i0 = 0.$$

On en déduit que l'espace F est stable par chaque endomorphisme A_i .

Prenons une base de F que l'on complète en une base \mathcal{C} de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on pose :

$$A'_i = P^{-1}A_iP,$$

où P est la matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{C} . Ainsi,

$$A'_i = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u_{A_i}).$$

Comme les matrices A_i commutent entre elles, alors les matrices A'_i également.

Comme les matrices A_i sont nilpotentes, alors les matrices A'_i également.

On pose la représentation par blocs :

$$A'_i = \begin{pmatrix} B_i & C_i \\ D_i & E_i \end{pmatrix},$$

où le bloc B_i est de format $d \times d$ et le bloc E_i est de format $n+1-d$.

Comme les d premiers vecteurs de la base \mathcal{C} représentant les endomorphismes u_{A_i} sont les vecteurs d'une base de $\text{Ker}(A_{n+1})$ qui est stable par chaque u_{A_i} , alors chaque bloc D_i est nul :

$$A'_i = \begin{pmatrix} B_i & C_i \\ 0 & E_i \end{pmatrix}.$$

Si i et j sont deux entiers, alors par un calcul matriciel par blocs :

$$A'_i \times A'_j = \begin{pmatrix} B_i B_j & B_i C_j + C_i E_j \\ 0 & E_i E_j \end{pmatrix}.$$

Comme $A'_i A'_j = A'_j A'_i$, alors les matrices carrées B_i commutent entre elles et les matrices E_i commutent entre elles.

Ensuite, pour tout entier k ,

$$A'^k_i = \begin{pmatrix} B_i^k & \star \\ 0 & E_i^k \end{pmatrix}.$$

Il existe un entier k tel que $A'^k_i = 0$, donc pour ce même entier k , $B_i^k = 0$ et $E_i^k = 0$.

En fait, on va utiliser l'hypothèse de récurrence forte $\mathcal{P}(n+1-d)$, ce qui est possible car $d \geq 1$.

Les matrices E_i sont toutes nilpotentes et de format $\delta = n+1-d$. Par H.R. forte, on sait que le produit :

$$E_1 \times \cdots \times E_\delta,$$

est nul dans $\mathcal{M}_\delta(\mathbb{C})$. On déduit en rajoutant encore d'autres matrices E_i que le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est encore nul.

De ce fait, la matrice $M = A'_1 \times \cdots \times A'_n$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A'_{n+1} est de la forme :

$$A'_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_{n+1} \\ 0 & E_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Comme les matrices A'_i commutent avec la matrice A'_{n+1} , alors la matrice A'_{n+1} commute avec M . Le calcul par blocs donne :

$$A'_1 \times \cdots \times A'_n \times A'_{n+1} = M A'_{n+1} = A'_{n+1} M = \begin{pmatrix} 0 & C_{n+1} \\ 0 & E_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Conclusion, le produit :

$$A'_1 \times \cdots \times A'_{n+1} = P(A_1 \times \cdots \times A_{n+1})P^{-1}$$

est nul : le produit $A_1 \times \cdots \times A_{n+1}$ est nul également.

Quoiqu'il arrive, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie au rang suivant.