Lycée du Parc
Classe MPSI 833

La série harmonique

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle harmonique :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Calcul d'un équivalent de H_n

On effectue une comparaison série / intégrale. On pose la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \end{array} \right.$$

qui est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$.
On obtient l'encadrement classique :

$$\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f,$$

l'inégalité de gauche étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et celle de droite étant valable seulement pour les entiers $k \geqslant 2$.
En procédant à une sommation – à l'aide de la relation de Chasles, on obtient ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} f = \ln(n+1) \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f = 1 + \ln n.$$

Or, $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln n + \circ(1) = \ln n + \circ(\ln n)$.
Par conséquent, on dispose d'un encadrement du type :

$$\ln n + \circ(\ln n) \leqslant H_n \leqslant \ln n + \circ(\ln n).$$

En divisant le tout par $\ln n$ puis en utilisant le théorème des gendarmes, on conclut que :

$$\boxed{H_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \ln n.}$$

Calcul du terme suivant dans le développement asymptotique

On utilise cette fois-ci les séries télescopiques. Ce paragraphe démontre également le paragraphe précédent.
On pose $v_n = H_n - \ln n$, de sorte que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= H_{n+1} - H_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ de série absolument convergente.} \end{aligned}$$

Conclusion, la série télescopique $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
On note γ, sa limite, appelée constante d'Euler, de sorte que $v_n = \gamma + \circ(1)$ et :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \circ(1).}$$

Calcul du terme suivant dans le développement asymptotique

Pour obtenir le terme suivant, on utilise un terme de plus dans le développement limité. On écrit avec les notations déjà utilisées :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

On en déduit en effectuant la sommation de ces termes dont les séries associées sont bien absolument convergentes, donc convergentes :

$$\gamma - v_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2k^2} + \circ\left(\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\frac{1}{n^2} \leqslant \left(-\frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \leqslant \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\frac{1}{n^2}.$$

Par sommation, on obtient pour $n \geqslant n_0$:

$$\left(-\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \gamma - v_n \leqslant \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Ceci montre avec les ε que :

$$\gamma - v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer à un équivalent de cette dernière somme, en utilisant une comparaison série / intégrale.

On pose la fonction $g : \left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$, qui est continue et décroissante.

De l'encadrement :

$$\int_k^{k+1} g \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g,$$

en fixant $n \geqslant 2$, on somme sur les entiers $k \geqslant n$, ce qui donne :

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{N}\int_k^{k+1} g \leqslant \lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{N} g(k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{N}\int_{k-1}^{k} g.$$

Or, $\displaystyle\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{N}\int_k^{k+1} g = \lim_{N\longrightarrow+\infty}\int_n^N g = \frac{1}{n}$, donc :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}$$

et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Conclusion, $\gamma - v_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$ et :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Calcul du terme suivant dans le développement asymptotique

On réitère le processus. On pose :

$$w_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = v_n - \gamma - \frac{1}{2n}$$

de façon à avoir tous calculs faits :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{6n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc :

$$w_n = -\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1} - w_k) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

en utilisant un encadrement série / intégrale avec la fonction continue décroissante $h : t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$.

Conclusion :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$