DEVOIR MAISON n° 8

MP*4 - LOUIS-LE-GRAND

MATHÉMATIQUES 2 (ENSAE, 1986)

Définitions et notations

Dans tout le problème, on considère
— $I = [x_0, x_1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$;
— $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$;
— $C = \{v \in E \mid \forall (x, x') \in I^2, x \leq x' \Rightarrow v(x) \leq v(x')\}$ l'ensemble des fonctions continues croissantes de I dans $\mathbb{R}$;
— $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est, de plus, strictement concave par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire telle que

$$(A) \begin{cases} \forall x \in I,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow F(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) > \lambda F(x, y_1) + (1-\lambda) F(x, y_2) \end{cases} .$$

On définit alors une application E dans $\mathbb{R}$ en posant pour tout $v \in E$

$$\Psi(v) = \int_{x_0}^{-x_1} F(x, v(x))dx. \tag{1}$$

Le but du problème est de montrer que, sous certaines conditions, l'application Ψ admet un unique maximum sur l'ensemble C et de caractériser ce maximum.

Partie I

On pose, pour tout $v \in E$, $\|v\| = \sup_{x \in I} |v(x)|$. (2)

1. Montrer que :
   (a) L'application $v \mapsto \|v\|$ est une norme sur E ;
   (b) E, munie de cette norme, est un espace de Banach ;
   (c) L'application Ψ est définie et continue sur E pour la norme définie par (2) ;
   (d) L'application Ψ est strictement concave, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall \lambda \in]0,1[,\ \forall (v_1, v_2) \in E^2 \\ v_1 \neq v_2 \Rightarrow \Psi(\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2) > \lambda \Psi(v_1) + (1-\lambda) \Psi(v_2) \end{cases} ;$$

   (e) C est un sous-ensemble fermé de E, et que C est un cône convexe, c'est-à-dire

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall (v_1, v_2) \in C^2,\ (\alpha v_1 + \beta v_2) \in C.$$

2. On fait désormais l'hypothèse suivante

$$\exists M > 0,\ \forall x \in I,\ \sup_{y\in\mathbb{R}} F(x,y) = \max_{|y|\leq M} F(x,y).$$

Montrer que :

(a) Pour tout $x \in I$, l'application partielle $y \mapsto F(x,y)$ admet un maximum unique. Ce maximum est atteint en un point y noté $v_0(x)$.

(b) L'application de I dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto v_0(x)$ est continue sur I. On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le résultat suivant :
Soit (X,d) un espace métrique compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle n'a qu'une valeur d'adhérence.

(c) Ψ admet un unique maximum sur E, atteint pour $v = v_0$.

3. On se restreint désormais à l'ensemble C. Montrer que :

(a) $\sup_{v\in C} \Psi(v) < +\infty$;

(b) $\sup_{v\in C} \Psi(v) = \sup_{v\in C_M} \Psi(v)$, où $C_M = \{v/v \in C,\ \forall x \in I,\ |v(x)| \leq M\}$;

(c) La borne supérieure est atteinte en, au plus, un élément $v^* \in C$ (on ne cherchera pas à démontrer que cette borne supérieure est atteinte).

4. On postule l'existence d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C_M qui converge simplement vers une fonction $\overline{v} \in E$, et qui est telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi(v_n) = \lim_{v\in C} \Psi(v).$$

Montrer que :

(a) v_n converge uniformément vers $\overline{v}$;

(b) $\overline{v} \in C$;

(c) $\overline{v}$ est le maximum de Ψ sur C, c'est-à-dire

$$\overline{v} = v^*.$$

Partie II

On fait désormais l'hypothèse que F est dérivable par rapport à y et que la dérivée partielle $(x,y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$. On supposera que $\sup_{v\in C} \Psi(v)$ est atteint en $v^* \in C$. Le but de cette partie est de trouver des conditions nécessaires que doit satisfaire la fonction v^*.

1. En utilisant la concavité de F par rapport à v, montrer que

$$\forall x \in I,\ \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y_1) - F(x,y_2) \leq \frac{\partial F}{\partial y}(x,y_2)(y_1 - y_2).$$

2. En déduire que $x \mapsto v_0(x)$ est caractérisé par la condition

$$\forall x \in I,\ \left\{y = v_0(x) \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0\right\}.$$

3. Pour h élément quelconque de C et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t) = \Psi(v^* + th) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v^*(x) + th(x))dx.$$

   (a) Montrer que si φ est dérivable, sa dérivée en $t = 0$ ne peut être que négative ou nulle.

   (b) En déduire que $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))h(x)dx \leq 0$.

   (c) En prenant $h(x) = 1$, montrer que

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))dx = 0. \qquad (3)$$

4. Soit $\overline{x}$ un point quelconque de I et $\varepsilon > 0$. On pose

$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) & = 0 \ si \ x \leq \overline{x} \\ & = \frac{1}{\varepsilon}(x - \overline{x}) \ si \ \overline{x} < x < \overline{x} + \varepsilon \\ & = 1 \ si \ x \geq \overline{x} + \varepsilon \end{cases}.$$

   Déduire de la question 3.(b) la propriété suivante

$$\forall \overline{x} \in [x_0, x_1], \ \int_{\overline{x}}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))dx \leq 0. \qquad (4)$$

5. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$: $\Phi(t) = \Psi[(1 - t)v^*]$. En s'inspirant des raisonnements précédents, prouver la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))v^*(x)dx = 0. \qquad (5)$$

Partie III

On se propose de démontrer que les conditions nécessaires $(3), (4)$ et (5) établies dans la deuxième partie sont aussi suffisantes pour que v^* réalise le maximum de Ψ sur C. Pour cela, on a besoin d'un résultat d'approximation que l'on démontrera dans la partie III.A, résultat de l'on utilisera dans la partie III.B pour démontrer que les conditions $(3), (4)$ et (5) sont suffisantes.

Partie III.A

1. On définit une fonction p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant

$$\begin{cases} p(t) & = 1 - 3t^2 + 2|t|^3 & si \ |t| \leq 1 \\ & = 0 & si \ |t| > 1 \end{cases}.$$

Montrer que :

(a) p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

(b) p est à valeurs positives ;

(c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$.

2. Pour tout $v \in E$, $t > 0$ et $x \in I$, on pose

$$v_\varepsilon(x) = \int_{-1}^{1} p(s)\overline{v}(x - \varepsilon s)ds.$$

où $\overline{v}$ est définie par

$$\begin{cases} \overline{v} & = v(x_0) \quad si\ |t| \leq 1 \\ & = v(t) \quad\ \ si\ t \in I \\ & = v(x_1) \quad si\ t > x_1 \end{cases}.$$

Montrer que :

(a) Si $v \in C$, alors $v_t \in C$;

(b) Quand $\varepsilon \to 0$, v_t tend vers v, uniformément sur I ;

(c) $\forall x \in I$, $v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\overline{v}(t)dt$;

(d) v_ε est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $Int(I)$.

3. En déduire que l'ensemble C_1, défini par

$$C_1 = \{v \in C / v\ est\ de\ classe\ \mathcal{C}^1\ sur\ Int(I)\},$$

est dense dans C.

Partie III.B

On considère maintenant que $v^* \in C$ vérifie les conditions (3), (4) et (5). On va montrer que

$$\Psi(v^*) = \sup_{v \in C} \Psi(v).$$

1. En utilisant le résultat de la question II.1, établir que

$$\forall v \in E, \quad \Psi(v) - \Psi(v^*) \leq \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))(v(x) - v^*(x))dx. \qquad (6)$$

2. En intégrant par parties (après simplification) le second membre de (6), déduire des conditions (3), (4) et (5) que

$$\forall v \in C_1, \quad \Psi(v) - \Psi(v^*) \leq 0.$$

3. En déduire que $\Psi(v^*) = \sup\limits_{v \in C} \Psi(v)$.

Partie IV

On se propose de montrer l'existence de v^* et de le calculer explicitement dans le cas particulier suivant

$$F(x,y) = y\cos x - \frac{1}{2}y^2, \ \textit{avec } I = [0, 2\pi].$$

1. Soit $v^* \in C$ un candidat à la maximisation de Ψ sur C. On pose, pour $x \in I$

$$V^*(x) = \int_0^x v^*(t)dt.$$

   (a) On suppose dans un premier temps que v^* est de classe de $\mathcal{C}^1$ sur $Int(I)$. Montrer que l'ensemble des conditions $(3), (4)$ et (5) équivaut à l'ensemble des trois conditions suivantes :

$$V^*(2\pi) = 0 \qquad (3)'$$

$$\forall x \in [0, 2\pi], \ V^*(x) \leq \sin x \qquad (4)'$$

$$\int_0^{2\pi} (V^*(x) - \sin x)\frac{dv^*}{dx}(x)dx = 0. \qquad (5)'$$

   (b) On suppose désormais que v^* est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, on adopte la convention suivante : en tout point x de $]0, 2\pi[$ où v^* n'est pas dérivable, on pose

$$\frac{dv^*}{dx}(x) = 0.$$

   Montrer que l'équivalence démontrée en (a) reste valable.

2. Soit $I_1 = \left\{ x \in I / \frac{dv^*}{dx}(x) > 0 \right\}$. Montrer que :

   (a) I_1 est un ouvert de I ;

   (b) $\forall x \in I_1$, $V^*(x) = \sin x$;

   (c) $\exists \alpha \in [\pi, 2\pi]$, $I_1 =]\alpha, 2\pi]$.

3. (a) Montrer que v^* est constante sur $[0, \alpha]$.

   (b) En déduire que v^* est nécessairement telle que

$$\begin{cases} v^*(x) & = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \ \textit{pour } x \in \ [0, \alpha] \\ & = \cos x \ \textit{pour } x \in \ ]\alpha, 2\pi] \end{cases},$$

   où α est l'unique solution, sur $[\pi, 2\pi]$, de l'équation $\tan\alpha = \alpha$.

   (c) Montrer que le v^* ainsi défini permet bien d'atteindre le maximum de Ψ sur C.