Problème n° 10 : Séries

Correction du problème 1 –

Partie I – Un critère de comparaison de séries à termes positifs

1. Effectuons une récurrence sur $n \in [\![N, +\infty[\![$.
   Soit, pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $b_N a_n \leqslant a_N b_n$.
   Pour commencer, $b_N a_N = a_N b_N$ donc $b_N a_N \leqslant a_N b_N$, d'où $\mathcal{P}(N)$.
   Soit $n \in [\![N, +\infty[\![$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. D'après l'inégalité vérifiée par les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a (les suites étant à termes strictement positifs) :
   $$a_{n+1} \leqslant a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   Ainsi :
   $$b_N a_{n+1} \leqslant b_N a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant a_N b_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
   d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $b_N a_{n+1} \leqslant a_N b_{n+1}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(N)$ est vraie, et pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $[\![N, +\infty[\![$.

2. (a) Ainsi, si $\sum b_n$ converge, alors, a_N étant une constante, $\sum a_N b_n$ converge. Tous les termes étant strictement positifs d'après l'énoncé, on déduit de l'inégalité précédente, d'après le théorème de convergence des séries à termes positifs (TCSTP), que $\sum b_N a_n$ converge. Comme b_N est une constante non nulle, $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$.

   (b) De même, si $\sum a_n$ diverge, b_N étant non nulle, $\sum b_N a_n$ diverge, puis $\sum a_N b_n$ aussi, d'après le TCSTP, donc $\boxed{\sum b_n \text{ diverge}}$.

   (c) Montrons la contraposée. Supposons que $\sum b_n$ ne diverge pas grossièrement. Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc aussi $(a_N b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, l'encadrement $0 \leqslant b_N a_n \leqslant a_N b_n$ amène, grâce au théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_N a_n = 0$, et comme $b_N \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et par conséquent, $\sum a_n$ ne diverge par grossièrement.
   Par contraposée, $\boxed{\text{si } \sum a_n \text{ diverge grossièrement, alors } \sum b_n \text{ aussi}}$.

3. **Règle de d'Alembert.**

   (a) Soit ℓ' tel que $\ell < \ell' < 1$. En utilisant la définition de limite avec $\varepsilon = \ell' - \ell$, on trouve l'existence de N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell'$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (\ell')^n$. Alors
   $$\forall n \geqslant N, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   D'après la question précédente, puisque $\sum b_n$ converge (série géométrique de raison $\ell' \in]-1, 1[$), on en déduit que $\sum |u_n|$ converge donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument}}$ (les séries sont à termes positifs, et même strictement positifs au moins à partir d'un certain rang, ce qui est sous-entendu pour $\sum |u_n|$ par l'existence de la limite du quotient, qui nécéssite que ce quotient soit bien défini, au moins à partir d'un certain rang).

   (b) si $\ell > 1$, alors il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. Alors $\sum a_n$ diverge grossièrement, et pour tout $n \geqslant N$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Donc, d'après la question I-2, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement. Ainsi, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.
   $\boxed{\text{Donc } \sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

4. **Exemples**

(a) *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

i. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 4}$.

ii. • Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{4}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{|x|}{4} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert démontrée dans la question I-3, on en déduit que : $\boxed{\text{Si } |x[< \frac{1}{4},\ \sum u_n x^n \text{ converge absolument}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \frac{1}{4}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{|x|}{4} > 1.$$

D'après la règle de d'Alembert démontrée dans la question I-3, on en déduit que : $\boxed{\text{Si } |x| > \frac{1}{4},\ \sum u_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$.

(b) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \cdot \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4n+2}{n+2}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 4$. Par conséquent :

- si $|x| < \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_n x^n|} < 1$, donc $\boxed{\sum v_n x^n \text{ converge absolument}}$;
- si $|x| > \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_n x^n|} > 1$, donc $\boxed{\sum v_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$;

(c) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 3^3 = 27$. Par conséquent :

- si $|x| < \frac{1}{27}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|w_{n+1}x^{n+1}|}{|w_n x^n|} < 1$, donc $\boxed{\sum w_n x^n \text{ converge absolument}}$;
- si $|x| > \frac{1}{27}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|w_{n+1}x^{n+1}|}{|w_n x^n|} > 1$, donc $\boxed{\sum w_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$;

Partie II – Règle de Duhamel.

1. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1}$.

(b) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha}$.

Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a un équivalent classique :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n},$$

et par conséquent,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}-1=-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\qquad\text{soit:}\qquad\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

2. **Règle de Duhamel.**

(a) Supposons que $\beta > 1$.

i. Considérons un α tel que $1 < \alpha < \beta$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{donc:}\qquad\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\alpha-\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\alpha-\beta\neq 0$, on en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\alpha-\beta}{n}$. Ainsi, pour n assez grand ces deux expressions sont de même signe (en effet, leur quotient étant de limite 1, il existe un rang N à partir duquel ce quotient est strictement positif, d'où l'égalité des signes) Or, $\alpha-\beta<0$. Par conséquent, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 0\qquad\text{donc:}\qquad\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{x_{n+1}}{x_n}}.$$

ii. Les séries étant par hypothèse à termes strictement positifs, on peut appliquer le résultat de la question I-2 : la série $\sum x_n$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha>1$, donc convergente, par conséquent, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

(b) De même, si $\beta<1$, on peut choisir α tel que $\beta<\alpha<1$. On obtiendra de la même façon :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\alpha-\beta}{n}.$$

Ainsi, ces deux expressions sont de même signe à partir d'un certain rang, mais cette fois, $\alpha-\beta>0$. Donc, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 0\qquad\text{donc:}\qquad\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Or, $\sum x_n$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha<1$, donc, les séries étant à termes strictement positif, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ d'après la question I-2.

Partie III – Exemples

1. (a) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot x=\frac{4n+2}{4(n+1)}=\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}=1-\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

(b) La série $\sum u_nx^n$ étant à termes strictement positifs, d'après la règle de Duhamel, puisque $\frac{1}{2}<1$, $\boxed{\sum u_nx^n \text{ est divergente}}$

(c) D'après ce qui précède, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}=\frac{4n+2}{4n+4}<1,$$

donc, puisque $u_nx^n>0$, on en déduit que $\boxed{(u_nx^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}x^{n+1})-\ln(u_nx^n)=\ln\left(\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}\right)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = 1$, donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

puisque, d'après la question III-3a,

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, les deux séries étant à termes tous négatifs, d'après le théorème de comparaison par équivalents, $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right)$ et $\sum -\dfrac{1}{2n}$ sont de même nature. Or, la seconde diverge (en tant que série de Riemann de paramètre 1), donc la première aussi. Par conséquent, la série $\sum \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n)$ diverge. Cette divergence se fait forcément vers $-\infty$, puisque la série est à termes négatifs. Or,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n) = \ln(u_N x^N) - \ln(u_0 x^0),$$

(il s'agit d'une somme télescopique), donc, d'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}x^{n+1}) - \ln(u_n x^n) = -\infty, \qquad \text{donc:} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 0}.$$

(d) On utilise la technique des séries alternées. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(-x)^k$. Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2}(-x)^{2n+2} + u_{2n+1}(-x)^{2n+1} = u_{2n+2}x^{2n+2} - u_{2n+1}x^{2n+1} \leqslant 0$, puisque $(u_n x^n)$ décroit. Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3}(-x)^{2n+3} + u_{2n+2}(-x)^{2n+2} = u_{2n+2}x^{2n+2} - u_{2n+3}x^{2n+3} \geqslant 0$, puisque $(u_n x^n)$ décroit. Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1}x^{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite commune. $\boxed{\text{D'où la convergence de } \sum u_n(-x)^n.}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I-4, et $x = \frac{1}{\ell}$.

(a) On procède de même que pour $\sum u_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = \frac{4n+2}{2(n+2)} = \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{2}{n}},$$

donc

$$\frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{v_{n+1}x^{n+1}}{v_n x^n}}.$$

(b) Par conséquent, la série $\sum v_n x^n$ étant à termes strictement positifs, en utilisant la règle de Duhamel avec $\beta = \frac{3}{2} > 1$, on obtient la $\boxed{\text{convergence de } \sum v_n x^n}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(-x)^n| = v_n x^n$, puisque $x > 0$, donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\sum v_n(-x)^n \text{ converge absolument}}$.

Partie IV – Une petite amélioration à la règle de Duhamel

1. On a $\dfrac{1}{n+a} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et les séries sont toutes deux à termes positifs (en se restreignant à $n > -a$, conformément à l'énoncé). Ainsi, $\sum \frac{1}{n+a}$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$, donc $\boxed{\sum \frac{1}{n+a} \text{ est divergente}}$.

2. D'après les DL classiques, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a+1}{n} = 0$,

$$\frac{1}{1+\frac{a+1}{n}} = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + O\left(\frac{(a+1)^3}{n^3}\right) = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

en supposant que $a \neq -1$ (hypothèse manquante dans l'énoncé).

Or, pour tout entier $n > -a$,

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{n+a}{n+1+a} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{a+1}{n}}\\ &= \left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2} + \frac{a}{n} - \frac{a(a+1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

les termes que je n'ai pas écrits dans ce développement étant des termes en $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. En simplifiant un peu, on obtient :

$$\boxed{\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1+a}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(a) Par définition des O, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\frac{M}{n^2} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{M}{n^2}$$

Il existe de même M' tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1+a}{n^2} \leqslant \frac{M'}{n^3}.$$

D'où, en soustrayant ces encadrements (en les croisant bien entendu !)

$$-\frac{M}{n^2} - \frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} + \frac{1+a}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2} + \frac{M'}{n^3},$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{M+1+a}{n^2} - \frac{M'}{n^3} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \leqslant \frac{M-1-a}{n^2} + \frac{M'}{n^3},$$

Choisissons a de sorte que $M+1+a < 0$, par exemple $a = -(M+2)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \frac{1}{n^2} - \frac{M'}{n^3} = \frac{n-M'}{n^3}.$$

Or, cette expression est positive pour n assez grand (plus précisément pour $n > M'$). Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{\forall n \geqslant N,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}}$$

(b) Les séries étant à termes strictement positifs (pour $n > -a$), d'après la question I-2, puisque $\sum y_n$ diverge, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

4. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}x^{n+1}}{w_n x^n} &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{27(n+1)^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\\ &= \left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

les autres termes dans ce développement étant en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\frac{w_{n+1}x^{n+1}}{w_n x^n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum w_n x^n$ est à termes strictement positifs, on peut appliquer la question IV-3. On en déduit que $\boxed{\sum w_n x^n \text{ diverge}}$.