

## Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths Lyon
- *NOM Prénom* : Cahen Paul

## Énoncés des exercices

### Exercice 1

Soit  $f : x \in [0; 1] \mapsto 4x(1 - x) \in [0; 1]$ . Pour  $u \in [0; 1]$ , on définit  $x_0(u) = u$  et  $x_{n+1}(u) = f(x_n(u))$ .

1. Soit  $u$  tel que  $(x_n(u))_n$  converge. Montrer que  $x_n(u)$  est stationnaire.
2. Soit  $n$  un entier naturel. Soit  $k_n$  variable aléatoire de loi uniforme dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$ ; calculer la probabilité que la suite  $\left(x_m \left(\sin^2\left(\frac{k_n \pi}{n}\right)\right)\right)_m$  converge (pour  $n$  grand par exemple).
3. Soit  $u$  variable aléatoire uniforme dans  $[0; 1]$ . Calculer la probabilité que  $(x_n(u))_n$  converge.

### Exercice 2

Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$ . On suppose que  $|P(e^{i\theta})| \leq 1$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $P$  est soit nul, soit égal à  $\pm X^n$  pour un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

## Remarques

L'examineur a en fait commencé par me donner l'exercice 64 de la RMS, qu'on avait corrigé en cours. Je lui ai dit ; il m'a alors déclaré qu'il pensait "qu'il n'avait pas fuité". Il m'a ensuite donné un exercice sur des parenthésages qui avait déjà été donné à deux élèves de MP\*3 (et dont j'étais au courant via le dropbox); je lui de nouveau signalé. Il m'a alors dit que tous ses exos étaient recyclés (si vous n'avez pas encore passé Lyon, c'est le moment de bachoter salement !!) et m'en a proposé un troisième que je ne connaissais pas et que j'ai donc fait.

A vous de voir ce que vous allez faire de cette information.