Ch1. Probabilités

Quelles sont vos chances de gagner à un jeu de grattage ? D'être assis à côté d'une personne sympathique dans cette salle de classe en ce début d'année ? De réussir votre prochain devoir ?

Ces questions relèvent du domaine des **probabilités** et vont être traitées en maîtrisant quelques notions et du vocabulaire.

Objectifs

- ✓ Maîtriser le vocabulaire des probabilités ;
- ✓ Déterminer une probabilité dans un cas simple ;
- ✓ Interpréter une probabilité par rapport à une situation réelle.

1.1 Une première situation

La tombola de la kermesse d'une école propose les lots suivants à gagner :

- Une console de jeu portable (valeur 200€)
- Cinq caisses à outils (valeur unitaire 75€)
- Un séjour pour deux personnes et une nuit dans un logement "nuit insolite" (valeur unitaire 150€)
- 25 lots de valeur moindre (<50€)

Pour calculer une probabilité on utilise la formule :

$$P = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues au total}}$$

Problématique : Comment déterminer si les chances d'emporter un lot ayant une valeur d'au moins 50€ sont importantes ?

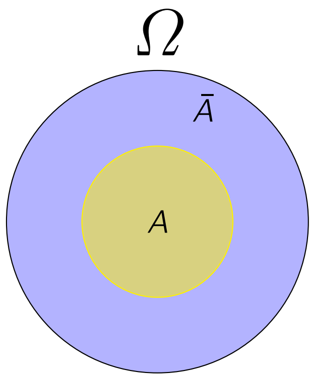
Proposez vos pistes de réflexion ou d'éventuelles données manquantes pour répondre à la problématique :

Répondre à la problématique sachant que 350 tickets ont été vendus.

1.2 Remarques, Définitions et notations

Quelques remarques importantes :

- **Une probabilité est toujours comprise entre 0** (l'événement n'a aucunes chances de se produire) **et 1** (l'événement est certain de se produire). Ou encore si on parle en pourcentages ; les chances sont **toujours entre 0%** (impossible) **et 100%** (certain).
- Une probabilité se note sous forme fractionnaire ou décimale tel que $0 \leqslant P \leqslant 1$.
- Si un événement est nommé A alors il existe son contraire noté $\bar{A}$ tel que si l'on note P_A et $P_{\bar{A}}$ leur probabilité alors $P_A + P_{\bar{A}} = 1$ (voir schéma ci-dessous).



Pour passer d'une probabilité décimale à un pourcentage : $\times 100$

- Quand une situation met en jeu plusieurs expériences aléatoires consécutives ou/et une situation complexe, on ne peut pas calculer directement la probabilité, on passera alors par l'utilisation d'un tableau ou d'un arbre de probabilités.
- Définitions à maîtriser :

  - **Univers** : l'ensemble des issues possibles ;
  - **Issue** : un résultat possible d'une expérience ;
  - **Expérience Aléatoire** : phénomène faisant intervenir le hasard ;
  - **Événement** : une ou plusieurs issues formant un objectif spécifique.

Exemple d'une expérience aléatoire : lancer un dé non truqué à 6 faces.

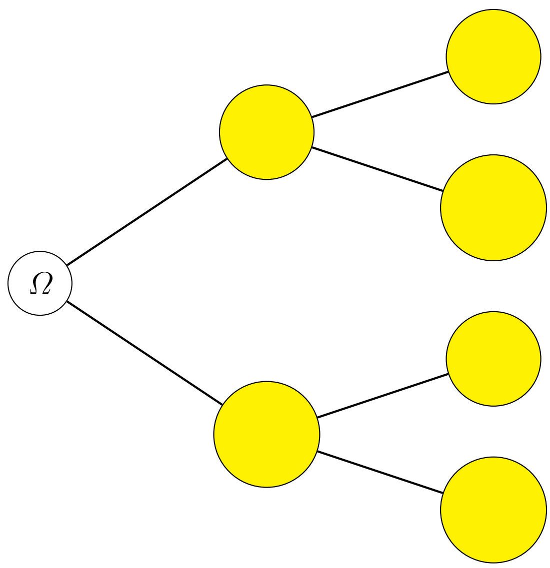
- L'univers est l'ensemble des possibles : _________________________
- L'événement "Obtenir un nombre pair" est constitué des issues : _________________________
- L'issue "faire 6" à une probabilité : $P(6) = \dfrac{1}{6} \approx 0.17$
- Le résultat précédent correspond, en pourcentage, à environ 17%

1.3 Arbres de probabilités

Quand une situation fait intervenir plusieurs expériences aléatoires successives (l'expérience peut être la même réalisée plusieurs fois), l'utilisation d'un schéma (arbre) est une aide à la résolution.

Exemple : je jette une pièce de monnaie deux fois de suite.

Problématique : Comment évaluer les chances d'obtenir exactement l'ordre : Face - Pile en utilisant l'arbre ci-dessous ?



Mes notes pour répondre à la problématique :

Conclusion : --

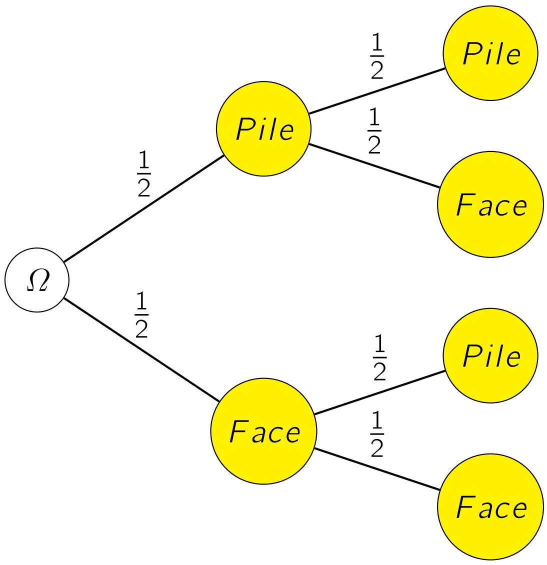
L'arbre de la page précédente représente la totalité des résultats possibles qui se lisent sur la droite de l'arbre : il y a ainsi 4 combinaisons avec 2 lancers :

$$\{PP, PF, FP, FF\}$$

Dans ce cas précis où la probabilité est toujours la même, on devine que la probabilité d'obtenir par exemple l'événement : obtenir Face Pile sera de

$$P_{F-P} = \frac{1}{4}$$

Mais si on veut retenir une méthode générale on doit commencer par écrire sur l'arbre, au dessus de chaque branche, la probabilité.



Propriétés de calcul sur l'arbre :

- La probabilité d'un chemin (entre le début de l'arbre et la fin) est égale au résultat de la **multiplication entre elles** de toutes les probabilités rencontrées.
- Si plusieurs chemins réalisent un événement, on calcule séparément la probabilité de chaque chemin et **ensuite on additionne** les résultats.

Donc pour calculer la probabilité de l'événement A : obtenir FACE puis PILE on doit écrire

$$P_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On retrouve le résultat intuitif du début. Cette méthode est valable pour tous les cas même si les probabilités ne sont pas toujours les mêmes comme sur une pièce de monnaie.

1.4 Exercices

EXERCICE 1.1. On possède une urne contenant 15 boules de couleurs : 4 rouges (R), 5 bleues (B) et 6 jaunes (J). Je prélève une boule au hasard, je regarde sa couleur et je la repose dans l'urne. **Compléter** les phrases avec le vocabulaire du cours.
On ne peut pas prévoir le résultat, l'expérience est donc ....
On peut dire que "Rouge" "Bleu" et "Jaune" sont les .... possibles de cette expérience.
Un .... peut être "piocher une boule rouge".

> Pour les exercices suivants on demande d'exprimer les résultats des probabilités sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal arrondi au centième et enfin d'un pourcentage.

EXERCICE 1.2. Une urne contient 6 boules rouges, 4 vertes, 3 jaunes. On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

A. De tirer une boule rouge.

B. De tirer une boule verte.

C. De tirer une boule verte OU jaune.

D. De ne pas tirer une boule rouge.

EXERCICE 1.3. Sur un parking de 40 places sont garées 10 voitures de type "berline", 12 "monospace" , 6 "4x4" et 3 "coupés". En prenant une place numérotée de 1 à 40 au hasard quelles sont les chances de :

A. De tomber sur une place occupée par un monospace.

B. De ne pas tomber sur une place occupée par un 4x4.

C. De tomber sur une place vide.

EXERCICE 1.4. Dans une classe de 28 élèves, 6 font une activité sportive, 5 autres participent au club photo et enfin 10 autres jouent d'un instrument de musique. Les autres ne font rien. On interroge un élève au hasard. Quelles sont les probabilités de chacun des événements suivants ?

A. De tomber sur un élève jouant de la musique.

B. De tomber sur un élève ne faisant pas partie du club photo.

C. De tomber sur un élève sans activité.

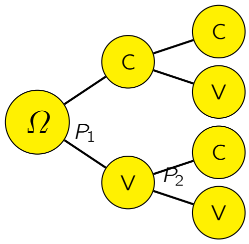
EXERCICE 1.5. Un sac d'un jeu de société contient des lettres. Il y a 10 voyelles (a,e,i,o,u,y) et 15 consonnes. On effectue le tirage d'une lettre **sans remise**. Calculer les probabilités :

A. De piocher une voyelle au premier tirage.

B. De piocher une voyelle au second tirage si une consonne a été tirée en premier.

C. De piocher une consonne au second tirage si une voyelle a été tirée en premier.

D. De piocher deux voyelles à la suite. (On pourra s'aider de l'arbre).



EXERCICE 1.6. Je joue au Monopoly et je jette 2 dés non truqués à 6 faces. Je rejoue si je fais un double (c'est à dire si les deux dés tombent sur la même figure.

1. Donner toutes les combinaisons de double qui existent avec 2 dés.
2. Sachant qu'il y a 36 combinaisons possibles avec un dé, déterminer par la méthode de votre choix les chances de faire un double (peu importe lequel) en jetant deux dés.

EXERCICE 1.7. Un avion est constitué de 20 rangées de sièges. Chacune de ces rangées étant coupée en deux par une allée centrale. A gauche de cette allée on peut placer 4 sièges, à droite on peut placer 3 sièges. Un voyageur achète un billet aléatoirement placé dans l'avion.

1. Calculer le nombre de siège au total dans l'avion.
2. Faire un schéma à main levé de deux rangées de sièges en indiquant l'allée centrale.
3. Quelles sont les chances de réaliser l'événement A : avoir une place côté hublot ?
4. Quelles sont les chances de réaliser l'événement B : avoir une place côté allée centrale ?
5. Déduire (ou calculer) des réponses précédentes les chances d'avoir deux voisins, un de chaque côté.

> Pour les exercices suivants l'utilisation d'un arbre de probabilités est recommandée.

EXERCICE 1.8. Dans un sac se trouvent 12 jetons : 4 blancs , 4 verts et 4 rouges.
On pioche **sans remise** trois jetons. Déterminer les probabilités d'obtenir les événements :

A. Trois jetons de la même couleur
B. Trois jetons avec au moins deux couleurs parmi les 3
C. Trois jetons dans l'ordre exact : V - B - R

EXERCICE 1.9. Dans une armoire on dispose de 4 T.Shirt (V N B R), de 2 casquettes (N R) et de 3 paires de chaussures (G N O). La personne apprécie de pouvoir changer de tenue et surtout de ne pas porter la même couleur sur les trois parties. Il choisit aléatoirement une pièce de chaque pour s'habiller. L'événement A est "Sortir avec trois objets de la même couleur".

1. Dessiner un arbre de probabilités correspondant à la situation (On pourra dessiner un arbre partiel).
2. Déterminer la probabilité de réaliser l'événement A.
3. Il espère avoir moins de 5% de chance que l'événement se produise. Est-ce le cas ?

CORRIGE 1.1 On possède une urne contenant 15 boules de couleurs : 4 rouges (R), 5 bleues (B) et 6 jaunes (J). Je prélève une boule au hasard, je regarde sa couleur et je la repose dans l'urne. Compléter les phrases avec le vocabulaire du cours.
On ne peut pas prévoir le résultat, l'expérience est donc aléatoire On peut dire que "Rouge" "Bleu" et "Jaune" sont les issues possibles de cette expérience. Un événement peut être "piocher une boule rouge".

CORRIGE 1.2 A. $P_A = \frac{6}{13}$ B.$P_B = \frac{4}{13}$ C. $P_C = \frac{7}{13}$ D. $P_C = P_D$

CORRIGE 1.3 A. $P_A = \frac{12}{40}$ B.$P_B = \frac{34}{40}$ C. $P_C = \frac{9}{40}$

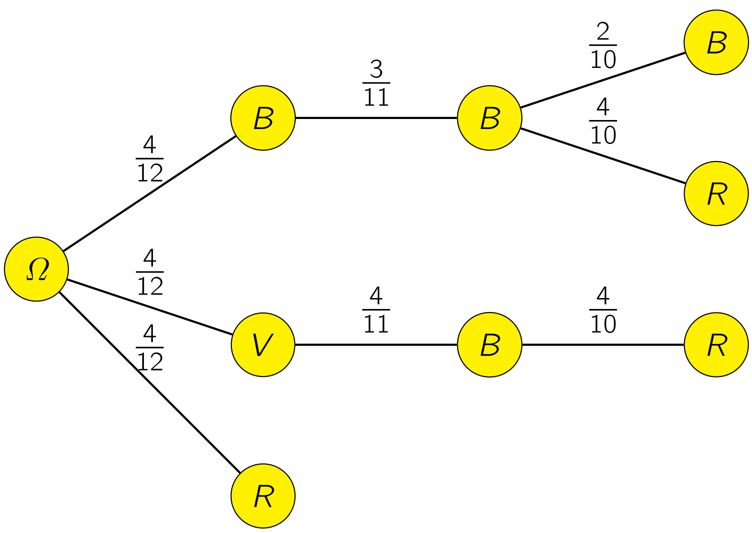
CORRIGE 1.4 A. $P_A = \frac{10}{26}$ B.$P_B = \frac{21}{26}$ C. $P_C = \frac{7}{28}$

CORRIGE 1.5 $P_A = \frac{10}{25}$, $P_B = \frac{10}{24}$, $P_C = \frac{15}{24}$ et $P_D = \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} = \frac{90}{600} = \frac{3}{20} = 0.15$

CORRIGE 1.6 1. Les couples sont : 1-1 2-2 3-3 4-4 5-5 6-6
2. On a 6 combinaisons donnant un double sur 36 au total ; $P_{double} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

CORRIGE 1.7 1. $N = 20 \times 7 = 140$ places
2. 3. Il y a deux hublots par rangée (un de chaque côté) donc $P_H = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}$
4. Il y a autant de places côté allée centrale que de hublots donc $P_{AC} = P_H = \frac{2}{7}$
5. Par déduction ce sont toutes les autres places donc le complément : $P_{autre} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

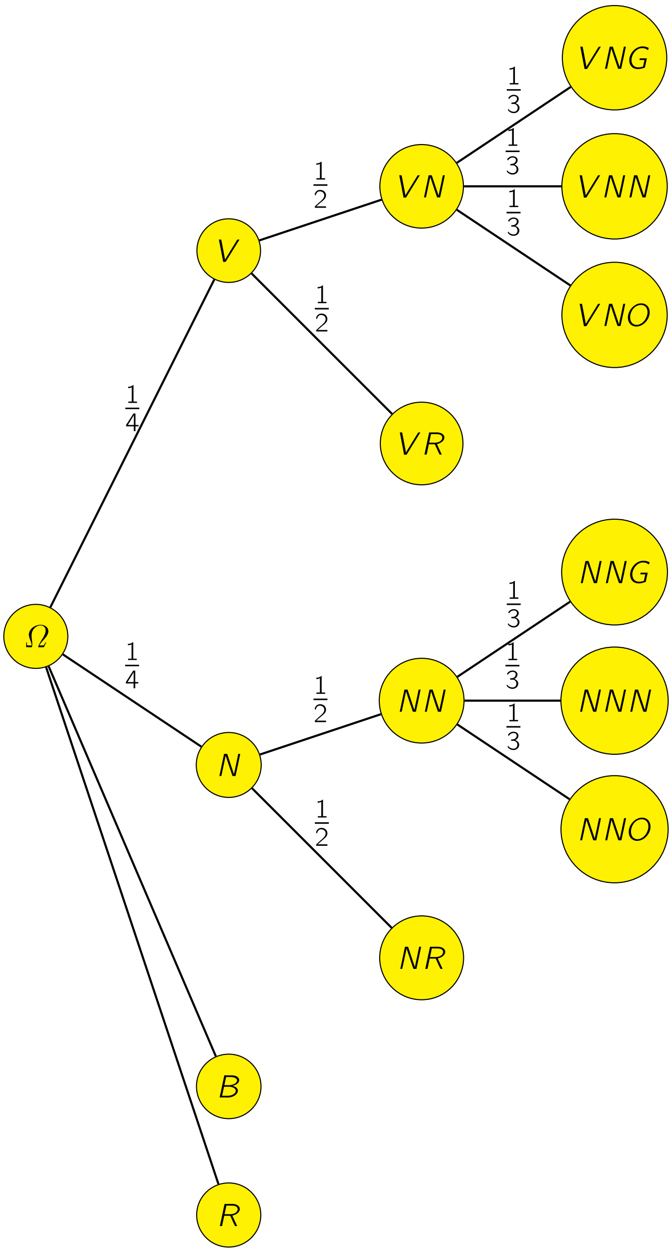
CORRIGE 1.8 Un arbre est recommandé pour les questions A et C. La B est une question qui va se déduire de la A. Nous allons le dessiner partiellement.



Pour trois jetons de la même couleur calculons les chances de faire par exemple B-B-B et multiplions par 3 le résultat (trois couleurs, les chemins seraient les mêmes).
$P_{BBB} = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{55}$ Donc finalement $P_A = \frac{3}{55} \approx 0.05$
La probabilité d'avoir au moins deux couleurs dans le tirage est donc l'événement contraire à avoir trois couleurs et vaut donc $P_B = \frac{52}{55} \approx 0.95$
Pour déterminer l'ordre exact V B R il faut dessiner cette branche de l'arbre et le calcul s'écrit :

$P_{VBR} = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165} \approx 0.05$ en arrondissant au centième.

CORRIGE 1.9 Par soucis de clarté l'arbre est tronqué :



Le chemin menant à trois vêtements de même couleur est N N N dont la probabilité est

$$P_A = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \approx 0.042$$

Concernant la question des 5% on multiplie le résultat précédent par 100 et on trouve 4.2%.