RELATIONS

Exercice 1. Carré d'une relation

Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation sur E. La relation $\mathscr{R}^2$ est définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad \big(x \mathscr{R}^2\, y\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists u \in E,\ x \mathscr{R}\, u \text{ et } u \mathscr{R}\, y\big).$$

1. Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\ll$ définie par

   $$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((x,y) \ll (a,b)\big) \Longleftrightarrow \big(x \leqslant a \text{ ou } y \leqslant b\big).$$

   Démontrer que $\ll^2$ est la relation pleine sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que l'on a $(x,y) \ll^2 (a,b)$ pour tous $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On suppose que $\mathscr{R}$ est réflexive et transitive. Démontrer que $\mathscr{R}^2 = \mathscr{R}$.
   Donner, en conséquence, deux grands types de relations $\mathscr{R}$ vérifiant $\mathscr{R}^2 = \mathscr{R}$.
3. Démontrer que si $\mathscr{R}$ est réflexive, alors $\mathscr{R}^2$ l'est aussi.
4. Démontrer que si $\mathscr{R}$ est transitive, alors $\mathscr{R}^2$ l'est aussi.
5. Démontrer que si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $\mathscr{R}^2$ l'est aussi.
6. Démontrer que si $\mathscr{R}$ est antisymétrique et transitive, alors $\mathscr{R}^2$ est antisymétrique.

Exercice 2. Relation et arithmétique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un diviseur impair de n^2+1. On considère la relation $\sim$ sur $[\![1; p-1]\!]$ définie par

$$\forall x, y \in [\![1; p-1]\!], \qquad (x \sim y) \iff (\exists k \in [\![0; 3]\!],\ y \equiv n^k x\ [p]).$$

1. a) Quelle est la valeur de n^4 modulo p ?
   b) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![1; p-1]\!]$.
2. a) Démontrer que p ne divise ni $n-1$, ni n^2-1, ni n^3-1.
   b) En déduire que chaque classe d'équivalence de $[\![1; p-1]\!]$ pour la relation $\sim$ est un ensemble à quatre éléments.
   c) En conclure que $p \equiv 1$ $[4]$.