DM n° 20 : Espaces euclidiens

Correction du problème 1 – (Pseudo-inverse d'une matrice - ESSEC 2012)

1. **Question préliminaire**
Soit $(U_1, \dots, U_n)$ une b.o.n. de E_n obtenue en complétant la b.o.n. de F. Ainsi, en particulier, par définition de la projectionn orthogonale :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad PU_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$
Or soit $M = \sum_{j=1}^{k} U_j \, {}^tU_j$. On a :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad MU_i = \sum_{j=1}^{k} U_j \, {}^tU_j U_i = \sum_{j=1}^{k} U_j \langle U_j U_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} \delta_{i,j} U_j,$$
car $(U_1, \dots, U_n)$ est une b.o.n.. Ainsi,
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad MU_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$
Ainsi, les endomorphismes canoniquement associés à M et P coïncident sur la base $(U_1, \dots, U_n)$. Par rigidité, on en déduit qu'ils sont égaux. Ainsi, $\boxed{M = P}$.

Partie I – Décomposition spéctrale de la matrice ${}^tAA$ associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. (a) Puisque ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on a $\boxed{{}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
Par ailleurs, si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $AX = 0$, donc ${}^tAAX = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA).}$

(b) Soit $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tAA$. On a alors
$$\|AX\|_n^2 = {}^t(AX)(AX) = ({}^tX \, {}^tA)(AX) == {}^tX({}^tAAX) = 0.$$
Ainsi, $\|.\|_n$ étant une norme, la propriété de séparation amène $AX = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tAA) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
L'autre inclusion ayant déjà été établie, $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}({}^tAA)}$.
En particulier, $A = 0 \iff \mathrm{Ker}(A) = E_n \iff \mathrm{Ker}({}^tAA = E) \iff {}^tAA = 0$.

(c)
- Soit $Y \in \mathrm{Im}\, {}^tAA$. Il existe donc $X \in E_n$ tel que $Y = {}^tAAX = {}^tA(AX)$. Ainsi $Y \in \mathrm{Im}({}^tA)$. On en déduit que $\mathrm{Im}({}^tA) \subset \mathrm{Im}({}^tAA)$.
- Comme une matrice et sa transposée ont même rang, et d'après le théorème du rang :
$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}({}^tA)) &= \mathrm{rg}({}^tA) \\ &= \mathrm{rg}(A) \\ &= n - \dim \mathrm{Ker}(A) && \text{(théorème du rang)} \\ &= n - \dim \mathrm{Ker}({}^tAA) && \text{(question 2(b))} \\ &= \mathrm{rg}({}^tAA) && \text{(théorème du rang)} \\ &= \dim \mathrm{Im}({}^tAA) \end{aligned}$$

- L'inclusion avec égalité des dimensions amène l'égalité : $\boxed{\mathrm{Im}({}^tA) = \mathrm{Im}({}^tAA)}$

3. (a) La matrice ${}^tAA$ est symétrique. En effet,

$$^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA.$$

Ainsi, elle est symétrique réelle, donc $\boxed{\text{diagonalisable.}}$
Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$, de valeur propre associée X. On a alors :

$$\|AX\|_m^2 = \langle AX, AX\rangle = {}^tX({}^tAAX) = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|_n^2.$$

Comme $\|AX\|_m^2 \geqslant 0$ et $\|X\|_n^2 > 0$, on en déduit que $\boxed{\lambda \geqslant 0}$.

(b) - Pour commencer, montrons que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale. En effet, cela provient du fait que d'après le théorème spectral (admis avant le problème), on peut diagonaliser ${}^tAA$ en b.o.n. Cela se redémontre très facilement directement : si λ et μ sont deux valeurs propres, et X et Y deux vecteurs propres associés :

$$\mu\langle X, Y\rangle = \left\langle X, {}^tAAY\right\rangle = {}^tX\,{}^tAAY = {}^t({}^tAAX)Y = \left\langle {}^tAAX, Y\right\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle.$$

Ainsi,

$$(\mu - \lambda)\langle X, Y\rangle = 0,$$

donc, puisque $\lambda \neq \mu$, $\langle X, Y\rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda({}^tAA)\perp E_\mu({}^tAA)$. La somme est donc orthogonale.

- Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note $p_k\mathcal{L}(E)$ la projection orthogonale de E_n associée à la matrice P_k.
Soit i et j distincts dans $[\![1, p]\!]$, et $x \in E$. On considère la décomposition de x dans la somme directe $bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}({}^tAA)$:

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k, \quad x_k \in E_{\lambda_k}({}^tAA).$$

Puisque pour tout $k \neq j$, $x_k \perp E_{\lambda_i}({}^tAA)$, $p_j(x_k) = x_j \in E_{\lambda_j}({}^tAA)$. On a alors $x_j \perp E_{\lambda_i}({}^tAA)$, donc $p_i \circ p_j(x) = 0$.
Ainsi, la matrice associée à $p_i \circ p_j$ vérifie $\boxed{P_iP_j = 0}$.

- Avec les notations précédents,

$$\sum_{i=1}^{p} p_i(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i = x, \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{id}.$$

On en déduit que $\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i}$

- Toujours avec les mêmes notations, en notant u l'endomorphisme associé à ${}^tAA$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p(x),$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\boxed{{}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i}.$$

On peut de plus exprimer P_i comme dans la question préliminaire. C'est sous cette forme-là qu'on donne souvent la décomposition spectrale.

4. Exemples :

(a) On calcule d'abord ${}^tAA$:

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Le réel λ est valeur propre de ${}^tAA$ ssi $\det({}^tAA - \lambda I_3) = 0$, ssi

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)^2 - 9)(6-\lambda) = -\lambda(6-\lambda)^2.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}({}^tAA) = \{0, 6\}$, et

$${}^tAA = 0P_0 + 6P_6.$$

On peut bien sûr déterminer facilement P_6 à partir de là, mais on va exprimer P_6 à l'aide de la question préliminaire. Pour cela on trouve les vecteurs propres associés à 6, donc le noyau de ${}^tAA - 6I$. Or

$${}^tAA - 6I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau. Comme celui-ci ne peut pas être de dimension supérieure à 2,

$$E_6({}^tAA) = \mathrm{Ker}({}^tAA - 6I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux. Ains, une b.o.n. de $E_6({}^tAA)$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. D'après la question préliminaire,

$$P_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ \ -1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 0\ 1).$$

On vérifie qu'on retrouve bien $\boxed{P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(b) • Soit $P = X^2 - (A\,{}^tA)X$. Puisque ${}^tAA$ est un scalaire, il commute avec toute matrice, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} P({}^tAA) &= ({}^tAA)({}^tAA) - (A\,{}^tA)({}^tAA) \\ &= ({}^tAA)({}^tAA) - {}^tA(A\,{}^tA)A \\ &= ({}^tAA)({}^tAA) - ({}^tAA)({}^tAA) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P \text{ est annulateur de } {}^tAA}$.

• Ainsi, $\mathrm{Sp}({}^tAA) \subset \mathrm{Rac}(P) = \{0, A\,{}^tA\}$.

• La décomposition spectrale est alors, d'après la question préliminaire :

$${}^tAA = 0P_0 + A\,{}^tAP_{A\,{}^tA} = A\,{}^tAP_{A\,{}^tA},$$

avec

$$\boxed{P_{A\,{}^tA} = \frac{{}^tAA}{A\,{}^tA}}.$$

Partie II – Pseudo solution d'une équation linéaire

5. Supposons qu'il existe une solution X_0 à l'équation.

- Soit X une pseudo-solution. On a donc

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m.$$

En particulier, pour $Z = X_0$:

$$\|AX - B\|_m \leqslant \|AX_0 - B\|_m = 0.$$

Ainsi, par propriété de séparation des normes, $AX - B = 0$, donc $\boxed{X \text{ est solution de l'équation}}$.

- Réciproquement, si X est solution, X vérifie $AX = B$, et par positivité d'une norme,

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX - B\|_m = 0 \leqslant \|AZ - B\|_m.$$

Donc X est

6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose alors $Z = X + \lambda Y$. On a, par définition (pour alléger les notations, j'omets l'indice m sur les normes) :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|AZ - B\|^2 - \|AX - B\|^2 \\
&= \|A(X + \lambda Y) - B\|^2 - \|AX - B\|^2 \\
&= \|(AX - B) + \lambda AY\|^2 - \|AX - B\|^2 \\
&= \|AX - B\|^2 + 2\lambda \langle \lambda AY, AX - B\rangle + \lambda^2 \|AY\|^2 - \|AX - B\|^2 \\
&= \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, {}^t(AY)(AX - B) \\
&= \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX - B).
\end{aligned}$$

   - Ainsi, on a bien obtenu $\boxed{\lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX - B) \geqslant 0}$. Le polynôme

$$P = X^2 \|AY\|^2 + 2X\, {}^tY\, {}^tA(AX - B)$$

est donc de signe constant. Il ne peut donc pas admettre deux racines distinctes. Or, 0 est une racine. Elle est nécessairement racine double. Par conséquent $P = X^2\|AY\|^2$. On en déduit que

$${}^tY\, {}^tA(AX - B) = 0$$

Ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t(\, {}^tA(AX - B))Y = 0.$$

On en déduit que l'AL canoniquement associée à ${}^t(\, {}^tA(AX - B))$ est nulle, donc sa matrice ${}^t(\, {}^tA(AX - B))$ aussi. En transposant

$${}^tA(AX - B) = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{{}^tAAX = {}^tAB}.$$

7.
   - Réciproquement, supposons que ${}^tAAX = {}^tAB$. Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et Y tel que $Z = A + Y$. On peut reprendre le calcul de la question précédente, avec $\lambda = 1$:

$$\|AZ - B\|^2 - \|AX - B\|^2 = \|AY\|^2 + 2\, {}^tY\, {}^tA(AX - B) = \|AY\|^2 + 2\, {}^tY(\, {}^tAAX - \, {}^tAB) = \|AY\|^2 \geqslant 0.$$

Ainsi $\boxed{X \text{ est bien une pseudo-solution de l'équation.}}$

   - D'après la question I-2(c), $\mathrm{Im}(\, {}^tAA) = \mathrm{Im}(\, {}^tA)$. Or, ${}^tAB \in \mathrm{Im}(\, {}^tA)$, donc ${}^tAB \in \mathrm{Im}(\, {}^tAA)$. On en déduit l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tAAX = {}^tAB.$$

D'après le point précédent, X est pseudo-solution de l'équation. Ainsi, $\boxed{\text{il existe au moins une pseudo-solution}}$.

8.
   - Les pseudo-solutions de ce système sont les vecteurs X solutions du système ${}^tAAX = {}^tAB$, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi X est pseudo-solution ssi (la deuxième équation est redondante) :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{ssi} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des pseudo-solutions est l'espace affine :

$$\boxed{\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ une pseudo-solution. On a

$$\|X\|^2 = x^2 + (x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 2x + 2.$$

Cette fonction polynomiale de degré 2 (à coefficient dominant positif) est décroissante puis croissante. Pour trouver son minimum, il suffit donc de trouver le zéro de sa dérivée $x \mapsto 4x - 2$. Ainsi, le minimum est atteint pour $x = \frac{1}{2}$, et la solution X_0 de norme minimale est donc

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

9. L'équation admet une unique pseudo-solution ssi ${}^tAAX = {}^tAB$ admet une unique solution, ssi le système homogèbe associé ${}^tAAX = 0$ admet une unique solution (l'existence de la solution étant déjà acquise), ssi ${}^tAA$ est inversible, ssi $\mathrm{rg}({}^tAA) = n$
Or, $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$ d'après la partie 1. Ainsi, $\boxed{\text{l'équation admet une unique pseudo-solution ssi } \mathrm{rg}(A) = n}$.

Partie III – Pseudo inverse d'une matrice

10. - L'ensemble $\mathcal{S}$ des pseudo-solutions est

$$\mathcal{S} = X_0 + \mathrm{Ker}({}^tAA),$$

où X_0 est une solution particulière du système ${}^tAAX = {}^tAB$.

- Montrons pour commencer qu'il existe une pseudo-solution X dans $\mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp$. Soit S le projeté orthogonal de X_0 sur $\mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp$. Il est caractérisé par le fait que

$$S \in \mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp \qquad \text{et} \qquad S - X_0 \in \mathrm{Ker}({}^tAA).$$

Cette deuxième condition et la description de l'ensemble $\mathcal{S}$ nous assure que $S \in \mathcal{S}$.

- Montrons l'unicité de S pseudo-solution dans $\mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp$. S'il en existe une autre S', on a

$$S - S' \in \mathrm{Ker}({}^tAA) \cap \mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp = \{0\}.$$

Donc $S = S'$. La première inclusion ci-dessus provient du fait que les deux vecteurs sont dans l'espace affine $\mathcal{S}$ dirigé par $\mathrm{Ker}({}^tAA)$.

- Montrons que S est de norme minimale, et que c'est le seul. Pour cela, soit $X \in \mathcal{S}$, différent de S. Ainsi, il existe $Y \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$ tel que

$$X - S = Y, \qquad \text{soit:} \qquad X = S + Y.$$

Comme $X \neq S$, $Y \neq 0$, et puisque $S \perp Y$, le théorème de Pythagore amène :

$$\|X\|^2 = \|S\|^2 + \|Y\|^2 > \|S\|^2.$$

Ainsi, $\boxed{S \text{ est bien de norme minimale dans } \mathcal{S}\text{, et c'est l'unique vecteur vérifiant cela}}$.

- On peut donc conclure que l'unique vecteur de norme minimal de $\mathcal{S}$ est l'unique vecteur de $\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}(\ {}^tAA)$. Comme les éléments de $\mathcal{S}$ sont caractérisés par l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$, on obtient bien la consition de l'énoncé.

11. Soit B fixé et appartenant à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
    (a) Supposons A de rang n. Que dire de plus que le fait que S est alors l'unique pseudo-solution, donc l'unique solution du système ${}^tAAX = {}^tAB$?
    (b) Si A est la matrice nulle, $AX = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\|AX - B\|$ est constant. Par conséquent, tout X est pseudo-solution (cela peut aussi se justifier en remarquant que $\mathrm{Ker}(\ {}^tAA) = E$).
    Clairement, $\boxed{\text{la pseudo-solution de norme minimale est alors } X = 0}$.

12. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à B associe l'unique pseudo-solution de norme minimale. Soit B_1, B_2 dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $X_1 = \varphi(B_1)$ et $X_2 = \varphi(B_2)$. D'après la question 10, X_1 et X_2 vérifient :

$$\begin{cases} {}^tAAX_1 = {}^tAB_1 \\ X_1 \in \mathrm{Ker}(\ {}^tAA)^\perp \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} {}^tAAX_2 = {}^tAB_2 \\ X_1 \in \mathrm{Ker}(\ {}^tAA)^\perp \end{cases}$$

On a donc aussi :

$$\begin{cases} {}^tAA(X_1 + \lambda X_2) = {}^tA(B_1 + \lambda B_2) \\ X_1 + \lambda X_2 \in \mathrm{Ker}(\ {}^tAA)^\perp \end{cases}.$$

La caractérisation de la question 10 nous assure alors que

$$\varphi(B_1 + \lambda B_2) = X_1 + \lambda X_2 = \varphi(B_1) + \lambda\varphi(B_2).$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire.}}$

13. (a) A est non nulle, et ${}^tAA$ est de même rang que A. Donc ${}^tAA$ est non nulle. Elle est diagonalisable. Donc si 0 est sa seule valeur propre $E_0(\ {}^tAA) = E$, ce qui implique ${}^tAA = 0$. Par conséquent, 0 n'est pas sa seule valeur propre. On en déduit que $\boxed{\Gamma(A) \neq \varnothing}$.
    (b) On utilise la caractérisation de la questionn 10. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On note $X = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\ {}^tAB$.
    - On a alors, d'après 3(b) :

$$\begin{aligned} {}^tAAX &= {}^tAA \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\ {}^tAB \\ &= \sum_{j\in\Gamma(A)} \lambda_j P_j \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\ {}^tAB \\ &= \sum_{j\in\Gamma(A)} \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} P_i P_j\ {}^tAB. \end{aligned}$$

    D'après I-3b, $P_iP_j = 0$, sauf si $i = j$. Dans ce cas, P_i étant un projecteur, $P_i^2 = P_i$. Ainsi

$$ {}^tAAX = \left(\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i \right) {}^tAB.$$

    Puisque les sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux, $P = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_i$ est la matrice de la projection sur $\bigoplus_{\lambda\in\Gamma(A)} E_\lambda(\ {}^tAA)$.
    - Montrons que $\bigoplus_{\lambda\in\Gamma(A)} E_\lambda(\ {}^tAA) = \mathrm{Im}(\ {}^tAA)$. En effet :
      * Pour tout $\lambda \in \Gamma(A)$, et tout $Y \in E_\lambda(\ {}^tAA)$, ${}^tAAY = \lambda Y$, et comme $\lambda \neq 0$,

$$Y = {}^tAA\left(\frac{1}{\lambda}Y\right) \in \mathrm{Im}(\ {}^tAA).$$

      Par conséquent, $E_\lambda(\ {}^tAA) \subset \mathrm{Im}(\ {}^tAA)$, puis

$$\bigoplus_{\lambda\in\Gamma(A)} E_\lambda(\ {}^tAA) \subset \mathrm{Im}(\ {}^tAA).$$

* Réciproquement, comme ${}^tAA$ est diagonalisable, on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)} E_\lambda({}^tAA) = E_0({}^tAA) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(A)} E_\lambda({}^tAA).$$

Or, les sous-espaces propres de ${}^tAA$ sont stables par ${}^tAA$, en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tAA$, pour plus de clarté :

$$\mathrm{Im}({}^tAA) = f(E) = f(E_0({}^tAA)) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(A)} f(E_\lambda({}^tAA)) \subset f(E_0({}^tAA)) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(A)} E_\lambda({}^tAA).$$

Par ailleurs, pour tout $Y \in E_0({}^tAA) = E_0(f)$, $f(Y) = 0$, donc $f(E_0({}^tAA)) = \{0\}$. On en déduit que

$$\mathrm{Im}({}^tAA) \subset \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(A)} E_\lambda({}^tAA).$$

* Par conséquent,

$$\mathrm{Im}({}^tAA) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(A)} E_\lambda({}^tAA).$$

C'est un résultat qu'on peut retenir, qui s'exprime de façon plus générale sous la forme suivante : si f est un endomorphisme diagonalisable, alors $\mathrm{Im}(f)$ est la somme de ses sous-esapces propres associés aux valeurs propres non nulles. On remarquera que dans ce cas, $\mathrm{Ker}(f)$ est le dernier sous-espace propre (celui associé à 0). Les sous-espaces propres étant en somme directe égale à E, par diagonalisabilité, on obtient $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
Ici, comme de plus, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, on a même :

$$\mathrm{Ker}({}^tAA) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}({}^tAA) = E.$$

On va s'en servir dans quelques instants.

- Ainsi, P étant la projection sur $\mathrm{Im}\ {}^tAA = \mathrm{Im}\ {}^tA$, et ${}^tAB$ étant un élément de $\mathrm{Im}({}^tA$, c'est un point fixe de P. Par conséquent,

$${}^tAAX = P\ {}^tAB = {}^tAB.$$

- Par ailleurs, par la description de l'image qu'on a obtenue plus haut, et par définition de P_i, pour tout $i \in \Gamma(A)$, $\mathrm{Im}(P_i) \subset \mathrm{Im}({}^tAA)$. Par conséquent, $X \in \mathrm{Im}({}^tAA) \perp \mathrm{Ker}({}^tAA)$ (remarque ci-dessus).
- Ainsi, X vérifie les conditions caractérisant l'unique pseudo-solution de norme minimale de l'équation $AX = B$. On en déduit que $X = \varphi(B)$, ce qui s'écrit matriciellement

$$A^+B = X = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\ {}^tAB.$$

Ceci étant vrai pour tout B :

$$\boxed{A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\ {}^tA}$$

14. On a donc avec les notations introduites à ce moment :

$$A^+ = \frac{1}{6} P_6\ {}^tA = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\boxed{A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Pour $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on retrouve :

$$X_0 = A^+B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

15. Soit $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

- On suppose A non nulle. D'après 13(b) et 4(b),

$$A^+ = \frac{1}{A\ {}^tA} P_{A\ {}^tA}\ {}^tA = \frac{1}{(A\ {}^tA)^2} \cdot (\ {}^tAA)\ {}^tA = \frac{1}{(A\ {}^tA)^2} \cdot\ {}^tA(A\ {}^tA),$$

et en simplifiant :

$$\boxed{A^+ = \frac{{}^tA}{A\ {}^tA}}.$$

- On suppose que $A = 0$. Alors d'après 11(b), pour tout B, $A^+B = 0$, donc A^+ est la matrice de l'application linéaire nulle. Ainsi, $\boxed{A^+ = 0}$.

Partie IV – Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

16. - Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, d'après la quesiton 10, $A^+(AX)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} {}^tAAA^+AX = {}^tAAX \\ A^+AX \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA)^\perp \end{cases}$$

En particulier, de la première condition, on obtient

$${}^tAA(A^+AX - X) = 0,$$

Donc $AA^+X - X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA) = \operatorname{Ker}(A)$ (question 2(b)). Par conséquent,

$$A(A^+AX - X) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad AA^+AX = AX.$$

Comme ceci est vrai pour tout X (ce qui assure l'égalité des applications linéaires canoniquement associées), on en déduit que

$$\boxed{AA^+A = A}.$$

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur A^+AA^+X est caractérisé par

$$\begin{cases} {}^tAAA^+AA^+X = {}^tAAA^+X \\ A^+AA^+X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA)^\perp. \end{cases}$$

En particulier,

$${}^tAA(A^+AA^+X - A^+X) = 0, \qquad \text{donc:} \qquad A^+AA^+X - A^+X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA).$$

Comme $A^+AA^+X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA)^\perp$, et par une caractérisation similaire, $A^+X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA)^\perp$, on obtient finalement

$$A^+AA^+X - A^+X \in \operatorname{Ker}(\ {}^tAA) \cap \operatorname{Ker}(\ {}^tAA)^\perp = \{0\}.$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^+AA^+X = A^+X$, et donc

$$\boxed{A^+AA^+ = A^+X}.$$

- Lemme 1 : si p est un projecteur orthogonal sur un sev F, alors la matrice de p dans une b.o.n. est symétrique. On montre d'abord que p est en endomorphisme symétrique, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. En effet, en décomposant $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ dans la somme $E = F \oplus F^\perp$, on a

$$\langle p(x), y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle\,,$$

car $x_1 \perp y_2$, et de même,

$$\langle x, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle p(x), y\rangle\,.$$

Soit alors $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une b.o.n.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = (\langle p(b_j), b_i\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\,,$$

Or, d'après ce qui précède et la symétrie du ps,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle p(b_j), b_i \rangle = \langle p(b_i), b_j \rangle .$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est symétrique.

- Lemme 2 : pour tout $i \in \Gamma(A)$, P_i commute avec ${}^tAA$. En effet, en notant $(U_1, \dots, U_k)$ une b.o.n. de vecteurs propres de $E_{\lambda_i}({}^tAA)$, on a d'après la QP :

$$P_i = \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^tU_j.$$

Ainsi,

$${}^tAAP_i = \sum_{j=1}^{k} ({}^tAAU_j)\, {}^tU_j = \lambda_i \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^tU_j,$$

puisque U_j est valeur de ${}^tAA$ associée à la valeur propre λ_i. D'un autre côté :

$$P_i\, {}^tAA = \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^tU_j\, {}^tAA = \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^t({}^tAAU_j) = \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^t(\lambda_i U_j) = \lambda_i \sum_{j=1}^{k} U_j\, {}^tU_j.$$

On a donc bien $P_i\, {}^tAA = {}^tAAP_i$.

- On utilise la description de la question 13(b) :

$$\begin{aligned}
{}^t(A^+A) &= {}^t\left(\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tAA \right) \\
&= \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i}\, {}^tAA\, {}^tP_i \\
&= \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i}\, {}^tAAP_i && \text{(lemme 1)} \\
&= \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tAA && \text{(lemme 2)} \\
&= A^+A.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{{}^t(A^+A) = A^+A}$

- La dernière égalité se démonntre de même :

$$\begin{aligned}
{}^t(AA^+) &= {}^t\left(\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} AP_i\, {}^tA \right) \\
&= \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} A\, {}^tP_i\, {}^tA \\
&= \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} AP_i\, {}^tA && \text{(lemme 1)}
\end{aligned}$$

Et comme avant, on conclut en réutilitant la question 13(b) que $\boxed{{}^t(AA^+) = AA^+.}$

17. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A = AMA, \qquad M = MAM, \qquad {}^t(MA) = MA, \qquad {}^t(AM) = AM \qquad (*)$$

(a) On obtient facilement, en combinant ces 4 relations :
  - $M\, {}^tM\, {}^tA = M\, {}^t(AM) = MAM = M$
  - ${}^tA\, {}^tMM = {}^t(MA)M = MAM = M$
  - $A\, {}^tA\, {}^tM = A\, {}^t(MA) = AMA = A$
  - ${}^tM\, {}^tAA = {}^t(AM)A = AMA = A$

- ${}^tAAM = {}^t({}^tM\,{}^tAA) = {}^tA$
- $MA\,{}^tA = {}^t(A\,{}^tA\,{}^tM) = {}^tA$.

Ainsi

$$\boxed{M = M\,{}^tM\,{}^tA = {}^tA\,{}^tMM, \qquad A = A\,{}^tA\,{}^tM = {}^tM\,{}^tAA, \qquad {}^tA = {}^tAAM = MA\,{}^tA}.$$

(b) Soit $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On utilise la caractérisation de la question 10 :
- ${}^tAAMB = {}^tAB$ d'après la 5e relation ci-dessus.
- Soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ (partie I). On a alors

$$\langle X, MB\rangle = {}^tXMB = {}^tX({}^tA\,{}^tMM) = {}^t(AX)\,{}^tMM = 0,$$

puisque $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, $X \perp MB$, et ceci pour tout $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$. Par conséquent, $MB \in \mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp$.
- La caractérisation de la question 10 assure alors que MB est la pseudo-solution de norme minimale de $AX = B$, égale par définition à A^+B. Ceci étant vrai pour tout B, $\boxed{M = A^+}$

18. Établir les formules suivantes :

(a) La matrice $(A^+)^+$ est l'unique matrice M vérifiant

$$A^+ = A^+MA^+, \qquad M = MA^+M, \qquad {}^t(MA^+) = MA^+, \qquad {}^t(A^+M) = A^+M$$

Or, d'après la question 16, la matrice $M = A$ vérifie cela. Ainsi, $\boxed{(A^+)^+ = A}$.

(b) La matrice $({}^tA)^+$ est l'unique matrice M telle que

$${}^tA = {}^tAM\,{}^tA, \qquad M = M\,{}^tAM, \qquad {}^t(M\,{}^tA) = M\,{}^tA, \qquad {}^t({}^tAM) = {}^tAM$$

$({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$. Or, en transposant les deux premières relations de la question 16, on obtient

$${}^tA = {}^tA\,{}^t(A^+)\,{}^tA \qquad \text{et} \qquad {}^t(A^+) = {}^t(A^+)\,{}^tA\,{}^t(A^+).$$

De plus, en réexprimant un peu les deux autres (en développant la transposition de gauche, et en écrivant le terme de droite comme double-transposée) :

$${}^tA\,{}^t(A^+) = {}^t({}^tA\,{}^t(A^+)) \qquad \text{et} \qquad {}^t(A^+)\,{}^tA = {}^t({}^t(A^+)\,{}^tA).$$

Ainsi, $M = {}^t(A^+)$ vérifie les conditions qui caractérisent $({}^tA)^+$. Par conséquent,

$$\boxed{({}^tA)^+ = {}^t(A^+)}.$$

19.
- Soit x un réel strictement positif et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Pour commencer,$\det({}^tAA + xI_n)$ est un polynôme en x de degré n (à quelques signes près, c'est la polynôme caractéristique de ${}^tAA$). Il est en particulier non nul, et possède un nombre fini de racines. Il existe donc un voisinage V de 0 tel que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, $\det({}^tAA + xI_n) \neq 0$, donc ${}^tAA + xI_n$ est inversible. L'expression de l'énoncé est donc bien définie au voisinage (épointé) de 0, et donc on peut bien envisager la limite
- Si $A = 0$, alors ${}^tA = 0$ et $A^+ = 0$. La relation est dans ce cas triviale. On suppose donc pour la suite que $A \neq 0$.
- On a pour tout $x \in V \setminus \{0\}$,

$$({}^tAA + xI_n)A^+ = {}^tAAA^+ + xA^+$$

Or, d'après la question 10, pour tout B, ${}^tAAA^+B = {}^tAB$, donc ${}^tAAA^+ = {}^tA$. Ainsi,

$$({}^tAA + xI_n)A^+ = {}^tA + xA^+$$

On en déduit que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$,

$$A^+ = ({}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^tA + x({}^tAA + xI_n)^{-1}A^+.$$

- La matrice ${}^tAA$ étant symétrique, elle est diagonalisable : on peut trouver une matrice P inversible (et même orthogonale, car on peut trouver une b.o.n. de diagonalisation) telle que

$$ {}^tAA = {}^tPDP, $$

où on a regroupé tous les coefficients nuls de D en haut de la matrice (ce qu'on peut toujours faire, il suffit de permuter les vecteurs de la base de diagonalisation)

$$ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} $$

où les d_i, $i \in [\![k, n]\!]$, sont non nuls. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ la base de diagonalisation. On a donc $E_0({}^tAA) = \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_k)$.
- Pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, $D + xI_n$ est inversible (étant semblable à ${}^tAA + xI_n$, elle est de même rang), et

$$ (D + xI_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{x} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{d_k+x} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n+x} \end{pmatrix} $$

Ainsi,

$$ x(D + xI_n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{x}{d_k+x} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{x}{d_n+x} \end{pmatrix} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Ainsi, $\lim x(D + xI_n)^{-1}$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal (la base étant orthonormale) sur $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_n)$. On en déduit que $\lim x({}^tAA + xI_n)$ est la matrice de ce même projecteur exprimée dans la base canonique. On note P_K cette matrice
- Or, d'après le deuxième point de la cvaractérisation de la question 10, $\mathrm{Im}(A^+) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA)^\perp$, donc $P_K A^+ = 0$. Ainsi,

$$ \lim_{x \to 0} ({}^tAA + xI_n)^{-1} A^+ = 0. $$

- En revenant à l'expression de A^+ qu'on avait obtenue plus haut, et en passant à la limite lorsque $x \to 0$, on obtient l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$ \boxed{A^+ = \lim_{x \to 0} ({}^tAA + xI_n)^{-1}\ {}^tA.} $$

- On utilise cette méthode pour retrouver l'exemple de la matrice de la question 8 :

$$ {}^tAA + xI_3 = \begin{pmatrix} 3+x & -3 & 0 \\ -3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & 6+x \end{pmatrix}. $$

C'est une matrice diagonale par blocs ; il suffit donc de trouver l'inverse de chaque bloc diagonal. Par la formule d'inversion des matrices 2×2, on obtient donc, pour tout x au voisinage épointé de 0 :

$$(\,{}^tAA + xI_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3+x}{x^2+6x} & \frac{3}{x^2+6x} & 0 \\ \frac{3}{x^2+6x} & \frac{3+x}{x^2+6x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6+x}. \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$(\,{}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^tA = \begin{pmatrix} \frac{3+x}{x^2+6x} & \frac{3}{x^2+6x} & 0 \\ \frac{3}{x^2+6x} & \frac{3+x}{x^2+6x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6+x}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+6x} & \frac{x}{x^2+6x} & -\frac{x}{x^2+6x} \\ -\frac{x}{x^2+6x} & -\frac{x}{x^2+6x} & \frac{x}{x^2+6x} \\ \frac{1}{6+x} & \frac{1}{6+x} & \frac{2}{6+x}. \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$A^+ = \lim_{x\to 0} (\,{}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^tA = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

20. Avec la formule de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} (\alpha A)^+ &= \lim_{x\to 0} (\alpha^2\,{}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^t(\alpha A) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \lim_{x\to 0} (\,{}^tAA + \frac{x}{\alpha^2} I_n)\alpha\,{}^tA \\ &= \frac{1}{\alpha} A^+. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha} A^+}$.

Si la matrice A^+ est non nulle, $(\alpha A)^+$ n'a pas de limite quand $\alpha \to 0$.

Pour tout α réel différent de 0 et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, exprimer $(\alpha A)^+$ en fonction de α et A^+. La matrice $(\alpha A)^+$ admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?