DM n$^{\text{o}}$ 6 : Réels

Correction du problème 1 – Autour de la propriété d'équirépartition

1. Soit $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, et $z = \dfrac{x+y}{2}$. Soit $I = [z, y[$. Alors, la suite étant équirépartie,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n(I \mod 1)}{n} = y - z > 0, \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} U_n(I \mod 1) = +\infty.$$

   En particulier, il existe n tel que $U_n(I \mod 1) > 0$, et donc, par définition, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que la partie décimale $\{u_i\}$ soit dans I. Ainsi, il existe i tel que

$$x < z \leqslant \{u_i\} < y.$$

   En oubliant z, cela fournit bien la propriété de $\boxed{\text{densité de l'ensemble des } \{u_i\} \text{ dans } [0,1].}$

2. On considère $u_n = \ln(n)$, pour tout $n \geqslant 1$.

   (a) On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

   Par continuité du logarithme, on en déduit alors que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(n) = 0}.$$

   (b) Soit $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. Comme $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $0 < u_{n+1} - u_n < y - x$. Soit alors un entier k tel que $k + x > \ln(N)$, et n_0 l'indice minimal tel que $u_{n_0} > k + x$ (un tel n_0 existe par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, et du fait qu'il existe au moins un indice vérifiant cette inégalité, puisque $\ln(n) \to +\infty$). On a alors $u_{n_0-1} \leqslant k + x$, et $n_0 > N$ par choix de k, donc $u_{n_0} - u_{n_0-1} < y - x$. On en déduit que $u_{n_0} < y + k$.
   Ainsi, $x + k < u_{n_0} < y + k$. En réduisant modulo 1, on a bien $x < \{u_{n_0}\} < y$, d'où la $\boxed{\text{densité de } (\ln(n)) \text{ modulo } 1.}$

   (c) Soit $I = [0, \frac{1}{2}[$, et $n \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$.
   Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a

$$u_i \in I + k \iff \mathrm{e}^k \leqslant i < \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}.$$

   Or, le nombre d'entiers dans l'intervalle $[\mathrm{e}^k, \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}[$ est $\lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil - \lceil \mathrm{e}^k \rceil$, et ces entiers sont tous dans $[\![1, n]\!]$, donc

$$\boxed{U_n(I + k) = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil - \lceil \mathrm{e}^k \rceil}.$$

   (d) Or, $\lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$, et $\lceil \mathrm{e}^k \rceil \leqslant \mathrm{e}^k + 1$, d'où

$$\boxed{U_n(I + k) \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^k - 1 = \mathrm{e}^k(\sqrt{\mathrm{e}} - 1) - 1.}$$

   (e) Soit $k \in \mathbb{N}$, et $n = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} \rceil$. D'après la question précédente, pour tout $\ell \leqslant k$,

$$U_n(I + \ell) \geqslant \mathrm{e}^\ell(\sqrt{\mathrm{e}} - 1) - 1.$$

   Les intervalles $I + k$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$U_n(I \mod 1) = \sum_{\ell \geqslant 0} U_n(I + \ell) \geqslant \sum_{\ell=0}^{k} U_n(I + \ell),$$

et donc

$$U_n(I \mod 1) \geqslant (\sqrt{\mathrm{e}}-1)\sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{e}^{\ell} - (\ell+1) = (\sqrt{\mathrm{e}}-1)\frac{\mathrm{e}^{k+1}-1}{\mathrm{e}-1} - (\ell+1).$$

En factorisant le dénominateur $\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)$, et en majorant n par $\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}+1$, il vient donc :

$$\boxed{\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \geqslant \frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1}-1)-(k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}+1}}.$$

(f) Or,

$$\frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1}-1)-(k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}+1} = \frac{\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{\mathrm{e}}+1}-(k+1)\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{-k}}.$$

Lorsque k tend vers l'infini, d'après les croissances comparées, il vient :

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1}-1)-(k+1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}+1} = \frac{\mathrm{e}}{(\sqrt{\mathrm{e}}+1)\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} > \frac{1}{2},$$

la dernière inégalité provenant du fait que $1 < \sqrt{\mathrm{e}}$ (majoration faite au dénominateur).

Or, si (u_n) est équirépartie modulo 1, l'expression définissant n en fonction de k tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, donc le quotient $\dfrac{U_n(I \mod 1)}{n}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2}$ (équirépartition) lorsque k tend vers l'infini (pour les valeurs de n définies en fonction de k. En passant à la limite dans l'inégalité de la question 2(e), il vient donc :

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}+1},$$

d'où une contradiction.

Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas équirépartie modulo 1}}$.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$, et $u_n = n^{\alpha}$, pour $n \geqslant 1$. Soit $I = [a,b[\subset [0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$. L'entier $U_n(I \mod 1)$ est alors inférieur à $U_{n_0}(I \mod n)$, où $n_0 = \lfloor (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor$, donc, vu la borne imposée à n,

$$U_n(I \mod 1) \leqslant \sum_{\ell=0}^{k} U_{n_0}(I+\ell).$$

Or, comme précédemment, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$u_i \in I+\ell \iff a+\ell \leqslant i^{\alpha} < b+\ell \iff (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant i < (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et ceci restant inférieur à n_0, on a

$$U_{n_0}(I+\ell) \leqslant \lceil (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \rceil - \lceil (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \rceil \leqslant (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1.$$

Comme par ailleurs, $n \geqslant (a+k)^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient bien, en sommant ces inégalité et divisant par le minorant de n :

$$\boxed{\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant \frac{\sum_{\ell=0}^{n} (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

(b) La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ étant convexe, avec $\lambda = 1-(b-a) \in]0,1[$, on obtient :

$$((1-(b-a))(a+\ell) + (b-a)(a+1+\ell))^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (1-(b-a))(a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

donc

$$(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (1-(b-a))(a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (b-a)(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}})}.$$

(c) Ainsi, on déduit des deux questions précédentes que

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{k}(a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}}-(a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

On reconnaît une somme télescopique, d'où :

$$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}-a^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \boxed{(b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

(d) En mettant $k^{\frac{1}{\alpha}}$ en facteur, on lève l'indétermination des limites lorsque $k \to +\infty$ (y compris pour le deuxième terme puisque $\frac{1}{\alpha} > 0$) et on trouve

$$\lim_{k\to+\infty}(b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} = (b-a).$$

Soit alors $I' = [0,a[$ et $I'' = [b,1[$. Les intervalles I, I' et I'' étant disjoints d'union $[0,1[$, et tous les termes de la suite étant dans $[0,1[$ modulo 1, on a

$$1 = U_n([0,1[\mod 1) = U_n(I' \mod 1) + U_n(I \mod 1) + U_n(I'' \mod 1).$$

En notant $M_k(I)$ le majorant trouvé dans la question précédente pour l'intervalle I, et $k(n)$ l'entier k tel que $n \in \left[(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[$, on a, pour tout n :

$$1 \leqslant M_{k(n)}(I') + \frac{U_n(I \mod 1)}{n} + M_{k(n)}(I'').$$

Si on suppose que $\frac{U_n(I \mod 1)}{n}$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ (qu'on se donne), tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $\left|\frac{U_n(I \mod 1)}{n} - (b-a)\right| > \varepsilon$ En prenant $N = 0$ on trouve une première valeur n_1 de n vérifiant cette inégalité, puis avec $N = n_1$, on en trouve une deuxième n_2, telle que de plus $n_2 > n_1$. En continuant ainsi, et en prenant successivement pour N les valeurs n_1, n_2, n_2, etc. , on trouve une infinité de termes n_i vérifiant

$$\left|\frac{U_{n_i}(I \mod 1)}{n_i} - (b-a)\right| > \varepsilon$$

S'il existe une infinité de termes parmi ceux là vérifiant

$$\frac{U_{n_i}(I \mod 1)}{n_i} - (b-a) > \varepsilon,$$

alors on peut construire une suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissante (obtenue en sélectionnant les indices fournissant cette inégalité), telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{U_{m_i}(I \mod 1)}{m_i} > (b-a) + \varepsilon.$$

La majoration de la question 3(c) amène alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(b-a) + \varepsilon < M_{k(m_i)}(b-a).$$

Lorsque i tend vers $+\infty$, m_i aussi (car suite strictement croissante d'entiers, donc minorée par i), et donc $k(m_i)$ aussi. Ainsi, en passant à la limite, il vient :

$$(b-a) + \varepsilon \leqslant (b-a),$$

d'où une contradiction.

Ainsi, seul un nombre fini des n_i vérifient l'inégalité dans ce sens, donc il existe i_0 tel que pour tout $i > i_0$,

$$\frac{U_{m_i}(I \mod 1)}{m_i} < (b-a) - \varepsilon.$$

En reprenant l'inégalité établie en début de question, on a alors, pour tout $i > i_0$,

$$1 \leqslant M_{k(n_i)}(I') + (b-a) - \varepsilon + M_{k(n_i)}(I''),$$

et en passant à la limite,

$$1 \leqslant (a-0) + (b-a) - \varepsilon + (1-b) = 1 - \varepsilon,$$

d'où une contradiction.

Ainsi, notre hypothèse initiale est fausse, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n(I \mod 1)}{n} = (b-a)}$. Cela étant vrai pour tout intervalle semi-ouvert à droite de $[0,1[$, par définition, $\boxed{(n^\alpha) \text{ est équirépartie modulo 1 pour tout } \alpha \in]0,1[}$.

Question subsidiaire : *Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de limite $+\infty$, de pas $p_n = u_{n+1} - u_n$ décroissant de limite nulle et vérifiant, pour un certain réel $K > 0$ et un certain réel $\alpha \in]0,1[$, l'inégalité $p_n \geqslant \frac{K}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle équirépartie modulo 1 ?*

Je laisse cette question en suspens pour le moment...

Correction du problème 2 –

1. **Convergence de la série définissant c**

   Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$.

   (a) On peut faire la comparaison de deux manières, soit en rajoutant des termes $10^{-\ell}$ manquant entre les termes présents, soit en majorant chacun des termes $10^{-k!}$ par 10^{-k}. On obtient alors (en prenant la deuxième méthode) :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} = \frac{1-10^{-n+1}}{1-10^{-1}} \leqslant \frac{1}{1-10^{-1}} = \frac{10}{9}.$$

   Ainsi, la suite $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

   (b) Elle est aussi croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$S_{n+1} - S_n = 10^{-(n+1)!} \geqslant 0.$$

   Ainsi, étant croissante et majorée, (S_n) est convergente, donc $\boxed{c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!} \text{ est bien défini}}$.

2. **Irrationnalité de c**

   (a) On utilise ici plutôt la première des majorations suggérées dans la première question. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $N > n$. On a alors :

   $$\sum_{k=n+1}^{N} 10^{-k!} \leqslant \sum_{\ell=(n+1)!}^{(N+1)!} 10^{-\ell} = 10^{-(n+1)!} \frac{1-10^{-(N+1)!+(n+1)!-1}}{1-10^{-1}} \leqslant 10^{-(n+1)!} \cdot \frac{10}{9},$$

   d'où finalement,

   $$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}}.$$

   (b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. On a

   $$\frac{p}{q} 10^{n!} = c10^{n!} = S_n 10^{n!} + 10^{n!} \sum_{k=n+1}^{N} 10^{-k!},$$

   donc

   $$qS_n 10^{n!} < p10^{n!} \leqslant qS_n 10^{n!} + \frac{10^{n!} q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}} = qS_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-n!-1}} = qS_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n! - 1}}.$$

   Comme $\frac{q}{9 \cdot 10^{n\cdot n!-1}} \to 0$ lorsque $n \to 0$, on en déduit qu'il existe une valeur de n telle que

   $$\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n! - 1}} < 1,$$

et donc
$$qS_n 10^{n!} < p10^{n!} < qS_n 10^{n!} + 1.$$

Ainsi, l'entier $p10^{n!}$ est strictement encadré entre deux entiers consécutifs ($S_n 10^{n!}$ étant entier comme somme des entiers $10^{n!-k!}$, avec $n! - k! \geqslant 0$). Ceci est impossible.

On en déduit que $\boxed{c \text{ est irrationnel}}$.

3. **Inégalité des accroissements finis**

On peut soit utiliser l'inégalité triangulaire intégrale, soit (si vous ne la connaissez pas) revenir à un encadrement de f' : pour tout $x \in [a, b]$,
$$-M \leqslant f'(x) \leqslant M,$$
et par croissance de l'intégrale,
$$-\int_a^b M \text{ d}x \leqslant \int_a^b f'(x) \text{ d}x \leqslant \int_a^b M \text{ d}x, \qquad \text{soit:} \qquad -(b-a)M \leqslant f(b) - f(a) \leqslant (b-a)M.$$
On a bien obtenu
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|},$$
puisque $b - a > 0$. Si $b < a$, on obtient la même chose (il suffit d'inverser le rôle de a et b, et de remarquer que du fait des valeurs absolues, l'expression est symétrique en a et b), et pour $a = b$, le résultat est trivial.

4. **Théorème de Liouville (approximation diophantienne)**

Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geqslant 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, ($(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$), on ait : $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^d}$.

Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.

On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

(a) Soit $E = \{\deg P \mid P \in \mathbb{Z}[X], P \neq 0, P(\alpha) = 0\}$. C'est un sous-ensemble non vide (car α et algébrique) de $\mathbb{N}$. D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, E admet un minimum d. Comme $d \in E$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$, de degré minimal, tel que $d = \deg(P)$.

(b) Le polynôme P ne peut pas être constant non nul, donc $d \neq 0$. Si $d = 1$, il existe a et b des entiers tels que $a\alpha + b = 0$, donc $\alpha = -\frac{b}{a}$, ce qui contredit le fait que α n'est pas rationnel. Ainsi, $\boxed{d \geqslant 2}$.

(c) Si P admet une racine rationnelle q, on peut factoriser P :
$$P = (X - q)Q = (X - q)(a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0),$$
et en notant $P = b_d X^d + \cdots + b_1 X + b_0$, les b_i étant entiers, on obtient :
$$a_{d-1} = b_d \qquad \forall k \in [\![1, d-1]\!],\ a_{k-1} - a_k q = b_k \qquad -a_0 q = b_0.$$
L'équation $a_{d-1} = b_d$ nous assure que a_{d-1} est rationnel, puis $a_{d-2} = b_{d-1} + q a_{d-1}$ est aussi rationnel, puis également $a_{d-3} = b_{d-2} + q a_{d-2}$ etc. Ainsi, le polynôme Q est à coefficients rationnels. Par ailleurs, puisque $P(\alpha) = 0$ et $(\alpha - q) \neq 0$, il vient $Q(\alpha) = 0$. Ainsi, α est racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré $d - 1$. Quitte à multiplier par le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q, on obtient donc un polynôme à coefficients entiers de degré $d - 1$ dont α est racine, ce qui contredit la minimalité du degré de P.

Ainsi, $\boxed{P \text{ ne peut pas admettre de racine rationnelle}}$.

(d) En reprenant les notations de la question précédente, on a
$$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{d} q^d b_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \sum_{k=0}^{d} b_k p^k q^{d-k}.$$
Tous les exposants étant positifs, les termes de cette somme sont tous entiers, donc $q^d P\left(\frac{p}{q}\right)$ est un entier. Par ailleurs, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*$, donc $\boxed{\left|q^d P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1}$.

(e) La fonction P' est continue sur $[\alpha-1,\alpha+1]$ (en tant que fonction polynomiale), donc elle est bornée sur cet intervalle d'après le résultat admis. Soit M un majorant de $|P'|$ sur $[\alpha-1,\alpha+1]$.

Soit alors $\frac{p}{q} \in [\alpha-1,\alpha+1]$, $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$. Alors M est aussi un majorant de P' entre α et $\frac{p}{q}$, et P est dérivable de derivée continue entre ces bornes. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|P(\alpha)-P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

Puisque $P(\alpha)=0$, et d'après la question précédente, il vient

$$\frac{1}{q^d} \leqslant \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \in [\alpha-1,\alpha+1]$, on obtient :

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^d}.$$

Remarquez la nécessité de choisir M avant α (pour qu'il ne dépende pas de α), et donc de devoir travailler dans un premier temps dans un intervalle fermé borné $[\alpha-1,\alpha+1]$ de longueur fixe. On récupère le cas de $\mathbb{R}$ tout entier dans la question suivante.

(f) Posons $A=\min\left(1,\dfrac{1}{M}\right)$. Soit $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.

- Si $\frac{p}{q}\in[\alpha-1,\alpha+1]$, alors $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{1}{Mq^d} \geqslant \dfrac{1}{Aq^d}$.
- Sinon, $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \dfrac{1}{q^d} \geqslant \dfrac{1}{Aq^d}$, puisque $A\leqslant 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer le $\boxed{\text{théorème de Liouville.}}$

5. **Transcendance de c**

On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel x tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \exists(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\backslash\{0,1\}),\quad \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n}.$$

(a) Supposons que x est algébrique (et non rationnel d'après léhypothèse). Il existe alors d'après le théorème de Liouville un entier d et un réel $A>0$, qu'on se donne, tels que pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}\times NN^*$, $\left|x-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^d}$.

On se donne également une suite (p_n,q_n) telle que dans la définition d'un nombre de Liouville. On a alors, pour tout $n\geqslant d$,

$$\frac{A}{(q_n)^d} \leqslant \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n} = \frac{1}{(q_n)^d}\cdot\frac{1}{(q_n)^{n-q}} \leqslant \frac{1}{(q_n)^d}\cdot\frac{1}{2^{n-d}},$$

et en ne gardant que les termes extrêmes, il vient :

$$\forall n\geqslant d,\quad A\leqslant\frac{1}{2^{n-d}}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $A\leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse $A>0$.

Ainsi, $\boxed{\text{un nombre de Liouville est transcendant}}$.

(b) Montrons que c est un nombre de Liouville. On a déjà montré dans la question 2 qu'il est irrationnel.

Par ailleurs, étant donné $n\in\mathbb{N}^*$, l'encadrement obtenu au cours de cette question s'écrivait :

$$S_n \leqslant c \leqslant S_n + 10^{-(n+1)!}\frac{10}{9}.$$

Comme $10^{n!}S_n$ est entier, on peut écrire $S_n=\frac{p_n}{q_n}$, où $p_n\in\mathbb{Z}$, et $q_n=10^{n!}\geqslant 2$. On a alors

$$0\leqslant c-\frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{1}{9\cdot 10^{n!(n+1)-1}} = \frac{1}{q_n^n}\cdot\frac{1}{9\cdot 10^{n!-1}} \leqslant \frac{1}{q_n^n}.$$

Ainsi, c est un nombre de Liouville, donc $\boxed{c\text{ est transcendant}}$.