LES NOMBRES CORRECTION

Exercice 1

On veut résoudre l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ à l'aide de la méthode de Cardan. Pour cela, on pose $x = u + v$, $3uv = 15$ et $u^3 + v^3 = 4$ de sorte que l'on ait bien $x^3 - 15x - 4 = 0$.

1. *Déterminer u^3. On considère, quitte à échanger u et v, le cas où $\mathscr{I}\mathrm{m}(u^3) > 0$.*

   On a $u^3 + v^3 = 4$ et $u^3v^3 = (uv)^3 = 5^3 = 125$. On reconnaît un système somme/produit donc u^3 et v^3 sont les racines de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 125 = -484 = (22i)^2$, donc les solutions sont $X_1 = 2 + 11i$ et $X_2 = 2 - 11i$. En tenant compte du choix $\mathscr{I}\mathrm{m}(u^3) > 0$, on a donc

$$\boxed{u^3 = 2 + 11i.}$$

2. *Calculer $(2+i)^3$ et en déduire les solutions de l'équation.*

   On a $(2+i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 2 + 11i$, donc

$$\boxed{(2+i)^3 = 2 + 11i.}$$

   Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
u^3 = 2 + 11i \quad &\Longleftrightarrow \quad u^3 = (2+i)^3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u}{2+i}\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u}{2+i} \in \mathbb{U}_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u}{2+i} = 1 \text{ ou } \frac{u}{2+i} = j \text{ ou } \frac{u}{2+i} = j^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad u = 2 + i \text{ ou } u = (2+i)j \text{ ou } u = (2+i)j^2.
\end{aligned}$$

   Comme $uv = 5$, on en déduit que les valeurs possibles de $x = u + 5/u$ sont

$$x = (2+i) + \frac{5}{2+i} = (2+i) + (2-i) = 4$$

   ou

$$x = (2+i)j + \frac{5}{(2+i)j} = (2+i)j + (2-i)j^2 = \sqrt{3} - 2$$

   ou

$$x = (2+i)j^2 + \frac{5}{(2+i)j^2} = (2+i)j^2 + (2-i)j = -\sqrt{3} - 2$$

   On vérifie aisément que ce sont bien des solutions de l'équation. Donc

$$\boxed{\text{les solutions de } x^3 - 15x - 4 = 0 \text{ sont } 4,\ \sqrt{3} - 2 \text{ et } -\sqrt{3} - 2.}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que $\forall p, q \in \mathbb{N},\ f(pq) = f(p)f(q)$ et $f(2) = 2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n) : f(n) = n$. Procédons par récurrence forte.

Initialisation : On sait déjà, par hypothèse, que $\mathscr{P}(2)$ est vraie. Démontrons que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont aussi vraies. Le fait que f soit strictement croissante nous oblige à avoir $f(0) < f(1) < f(2)$ et comme $f(2) = 2$, on en conclut que l'on a nécessairement $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également. On distingue deux cas :

- Si $n+1$ est un entier pair, on sait qu'il existe $p \in [\![1; n]\!]$ tel que $n+1 = 2p$. On en déduit alors que $f(n+1) = f(2p) = f(2)f(p) = 2p = n+1$, où l'on a utilisé $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(p)$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie dans ce cas.
- Si $n+1$ est impair, on sait qu'il existe $p \in [\![1; n]\!]$ tel que $n+2 = 2p$. On peut alors écrire $f(n+2) = f(2p) = f(2)f(p) = 2p = n+2$, où l'on a utilisé $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(p)$. La stricte croissance de f nous dit alors que $f(n) < f(n+1) < f(n+2)$ ou encore $n < f(n+1) < n+2$, ce qui nous donne $f(n+1) = n+1$. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie dans ce cas.

Conclusion : Le principe de récurrence forte nous permet d'affirmer que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la seule application strictement croissante } f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ telle que} \\ f(2) = 2 \text{ et } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ f(pq) = f(p)f(q) \text{ est l'identité de } \mathbb{N}.\end{array}}$$