ESPACES VECTORIELS

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]

À résoudre de tête !

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$; $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geqslant 0\}$;
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$; $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \in \mathbb{Z}\}$;
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$; $H = \{(a+b, a-b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$; $I = \{(1+x, x) : x \in \mathbb{R}\}$;
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$; $J = \{(\lambda - 2\mu, -3\lambda + 6\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y - z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\big\}$;
$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y - z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\big\}$.

3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$A = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = n\}$; $D = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) + P(1) = 0\}$;
$B = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$; $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$;
$C = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$; $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(X+1) - P(X) = P'(X)\}$.

4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ injective}\}$; $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = 0\}$;
$B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ discontinue}\}$; $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f' - 2f = 0\}$;
$C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ positive}\}$; $G = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f' - 2f = 1\}$;
$D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ 1-périodique}\}$; $H = \Big\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\Big\}$.

5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

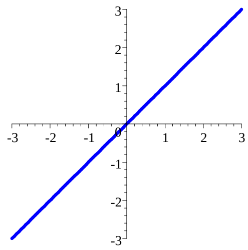
$A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ croît}\}$; $D = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim u_n = \pi/17\}$;
$B = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ majorée}\}$; $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$;
$C = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim u_n = 0\}$; $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - {u_n}^2\}$.

6. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

$A = \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$; $C = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M) I_n\}$;
$B = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$; $D = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M) M\}$.

1. a) La partie A est définie par l'équation cartésienne $x - y = 0$, ce qui signifie que A est la première

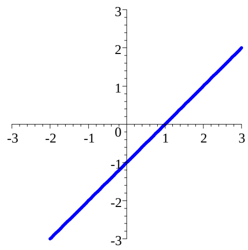
bissectrice de $\mathbb{R}^2$:



Donc

$$\boxed{A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

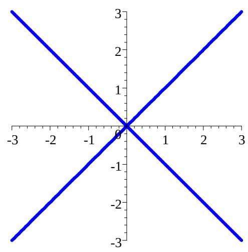
b) La partie B est définie par l'équation cartésienne $x - y = 1$, ce qui signifie que B est une droite affine de $\mathbb{R}^2$ ne passant pas par l'origine :



Donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

c) La partie C est définie par l'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 0$, c'est-à-dire $(x - y)(x + y) = 0$ ou encore ($y = x$ ou $y = -x$), ce qui signifie que C est la réunion des deux bissectrices du plan



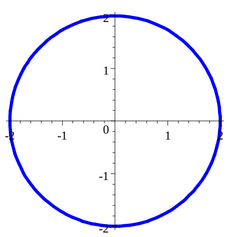
On voit que $(1,1) \in C$ et $(1,-1) \in C$ mais $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin C$, donc

$$\boxed{C \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

d) La partie D est définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 0$, c'est-à-dire $(x = y = 0)$, ce qui signifie que

$$\boxed{D \text{ est le sous-espace vectoriel trivial } \{(0,0)\} \text{ de } \mathbb{R}^2.}$$

e) La partie C est définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4$. C'est donc le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 :



Comme $(0,0)$ n'appartient pas à ce cercle, on peut affirmer que

$$\boxed{C \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

f) À faire
g) À faire
h) La partie H est définie par la représentation paramétrique

$$H : \begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

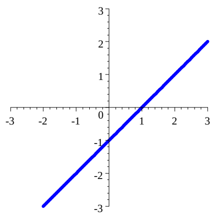
ce qui signifie que H est le plan porté par les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ car ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Comme le seul plan de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$ lui-même, on en déduit que

$$\boxed{H \text{ est le sous-espace vectoriel trivial } \mathbb{R}^2.}$$

i) La partie I est définie par la représentation paramétrique

$$I : \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

ce qui signifie que I est la droite affine passant par le point $(1,0)$ et dirigée par le vecteur $(1,1)$:



On constate alors que le vecteur nul $(0,0)$ n'appartient pas à I, donc

$$\boxed{I \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

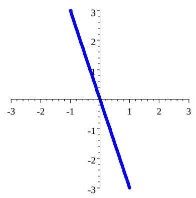
j) La partie J est définie par la représentation paramétrique

$$J : \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = -3\lambda + 6\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Or, on constate que les vecteurs $(1,-3)$ et $(-2,6)$ sont colinéaires, donc, en posant $a = \lambda - 2\mu$, on voit que

$$J : \begin{cases} x = a \\ y = -3a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R},$$

ce qui donne



ce qui prouve que

$$\boxed{J \text{ est la droite vectorielle de } \mathbb{R}^2 \text{ dirigée par le vecteur } (1,-3).}$$

2.
3.
4.
5.
6.

◆ ***Exercice 2.*** [$\star$]

1. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites périodiques est-il un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions périodiques est-il un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

1. Yes !
Démontrons que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il est clair que la suite nulle est périodique. Si u et v sont périodiques de périodes respectives T_u et T_v, alors u et v sont *a fortiori* périodiques de période $T = T_u T_v$, ce qui prouve que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u + \mu v$ est périodique de période T. Donc

$$\boxed{\text{le sous-ensemble de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constitué des suites périodiques est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel.}}$$

2. Que nenni !
Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \cos(x)$ et $g : \cos(\sqrt{2}x)$. La fonction f est 2π-périodique et la fonction g est $\sqrt{2}\pi$-périodique. Par contre, la fonction $f + g$ n'est pas périodique. Et pour cause, elle ne prend la valeur 2 qu'une seule fois. En effet,

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) = 2 \quad &\iff \quad \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) = 2 \\
&\iff \quad \cos(x) = \cos(\sqrt{2}x) = 1 \\
&\iff \quad \exists k, \ell \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi \text{ et } \sqrt{2}x = 2\ell\pi \\
&\iff \quad \exists k, \ell \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi \text{ et } \big(x = 0 \text{ ou } \sqrt{2} = \ell/k\big) \\
&\iff \quad x = 0 \qquad \text{car } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{le sous-ensemble de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ constitué des fonctions périodiques n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.}$$

◆ ***Exercice 3.*** [$\circ$]

Soient E un K-espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $A \cup B$ est un sous-espace de E si et seulement si $\big(A \subset B$ ou $B \subset A\big)$.
2. On suppose que $A \neq E$. Déterminer $\mathrm{Vect}(E \setminus A)$.

1. $\Leftarrow$ C'est évident !

   $\Rightarrow$ Supposons que $A \cup B$ est un sous-espace de E et que l'on a n'a pas $A \subset B$. Il existe alors $a \in A$ tel que $a \notin B$. Soit $b \in B$. Comme $a, b \in A \cup B$ et comme $A \cup B$ est un sous-espace de E, on sait que $a + b \in A \cup B$. Si $a + b \in B$, alors $(a + b) - b \in B$, c'est-à-dire $a \in B$, ce qui est absurde. Donc $a + b \in A$. Mézalors $(a + b) - a \in A$, c'est-à-dire $b \in A$. Donc $B \subset A$.

En conclusion,

$$\boxed{A \cup B \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ si et seulement si } \big(A \subset B \text{ ou } B \subset A\big).}$$

Remarque : On avait déjà vu ce résultat à propos des groupes. Cela s'applique ici puisque la démonstration ci-dessus n'utilise que la structure de groupe additif de l'espace vectoriel.

2. On a $A \cup \mathrm{Vect}(E \setminus A) = E$ donc $A \cup \mathrm{Vect}(E \setminus A)$ est un sous-espace de E. Cela n'est possible que si $A \subset \mathrm{Vect}(E \setminus A)$ ou $\mathrm{Vect}(E \setminus A) \subset A$. La seconde inclusion n'est pas possible (car $E \setminus A$ n'est pas contenu dans A puisque $A \neq E$). On a donc $A \subset \mathrm{Vect}(E \setminus A)$, ce qui signifie que $\mathrm{Vect}(E \setminus A)$ contient à la fois A et $E \setminus A$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{Vect}(E \setminus A) = E.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le sous-ensemble M des suites monotones est-il un sous-espace vectoriel ? Si ce n'est pas le cas, déterminer son sous-espace vectoriel engendré. *Indication : Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on introduira la suite v telle que $\forall n \geqslant 0,\ v_n = |u_1 - u_0| + |u_2 - u_1| + \cdots + |u_n - u_{n-1}|$.*

Une combinaison linéaire de suites monotones n'est pas nécessairement monotone. Ainsi $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(\mathrm{e}^{-n})_{n\geqslant 0}$ sont monotones mais $(n - \mathrm{e}^{-n})_{n\geqslant 0}$ ne l'est pas. Donc

$$\boxed{M \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On considère la suite v de terme général $v_n = |u_1 - u_0| + |u_2 - u_1| + \cdots + |u_n - u_{n-1}|$.
La suite v est clairement croissante.
Étudions la monotonie de la suite $u - v$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) & = & (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) \\ & = & (u_{n+1} - u_n) - |u_{n+1} - u_n| \\ & \leqslant & 0, \end{array}$$

donc $u - v$ est décroissante.
On a $u = (u - v) + v$ donc u est la somme de deux éléments de M, ce qui démontre que

$$\boxed{\text{le sous-espace vectoriel engendré par } M \text{ est } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]

Soit A une K-algèbre. Soit I un idéal de l'algèbre A (c'est-à-dire un idéal de l'anneau A). Démontrer que I est un sous-espace vectoriel de A.

Comme I est un idéal de A, on sait que $(I, +)$ est un groupe. Cela démontre que $0_A \in I$ et $\forall x, y \in I,\ x + y \in I$.
Reste à démontrer que $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in I,\ \lambda x \in I$.
Soient $\lambda \in K$ et $x \in I$. On a

$$\lambda x = \lambda(1_A.x) = \underbrace{(\lambda 1_A)}_{\in A} \underbrace{x}_{\in I} \in I,$$

d'après l'hyperstabilité de l'idéal I.
Donc

$$\boxed{I \text{ est un sous-espace vectoriel de } A.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [$\circ$]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une base du sous-espace vectoiel F_a de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs (x, y, z, t) tels que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & at & = & 0 \end{array}\right.$$

F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en tant qu'intersection de trois hyperplans.
Déterminons une représentation paramétrique de F_a en résolvant le système de ses équations cartésiennes. On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & \boxed{z} & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & at & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & \boxed{z} & - & t & = & 0 \\ -\ x & - & 2y & & & + & 2t & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 2y & & & - & at & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & \boxed{z} & - & t & = & 0 \\ & & & & & & (2-a)t & = & 0 \\ \boxed{x} & + & 2y & & & - & at & = & 0 \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas :

Premier cas : $a = 2$ La méthode du pivot est alors terminée et l'on peut prendre y et t comme paramètres, ce qui donne

$$\begin{cases} x &= -2\lambda + 2\mu \\ y &= \lambda \\ z &= 3\lambda - 3\mu \\ t &= \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{\text{si } a = 2,\ F_a \text{ est un plan de base } \big((-2,1,3,0),(2,0,-3,1)\big).}$$

Second cas : $a \neq 2$ La méthode du pivot se porsuit en prenant $2 - a$ comme dernier pivot. On peut alors prendre y comme paramètre, ce qui donne

$$\begin{cases} x &= -2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 3\lambda \\ t &= 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{\text{si } a \neq 2,\ F_a \text{ est une droite dirigée par le vecteur } (-2,1,3,0).}$$

♦ ***Exercice 7.*** [∘]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \longmapsto e^{x^2}$.

1. Démontrer que (f, g, h) est libre à l'aide d'évaluations.
2. Démontrer que (f, g, h) est libre à l'aide du développement limité $e^u = 1 + u + u^2/2 + o_0(u^2)$.
   On pourra admettre l'unicité du développement limité.
3. Démontrer que (f, g, h) est libre à l'aide des comportements asymptotiques.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg + ch = \widetilde{0}$.

1. En évaluant en 0, en 1 et en 2, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ e\,a + e^2 b + e\,c &= 0 \\ e^2 x + e^4 b + e^4 c &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = b = c = 0.$$

Donc

$$\boxed{(f, g, h) \text{ est libre.}}$$

2. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 en 0, on obtient

$$a + ax + \frac{a}{2}x^2 + b + 2bx + 2bx^2 + c + cx^2 + o(x^2) = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ (a/2)x + 2b + c &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = b = c = 0.$$

Donc

$$\boxed{(f, g, h) \text{ est libre.}}$$

3. En divisant par e^{x^2}, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\,e^{x-x^2} + b\,e^{2x-x^2} + c = 0.$$
En faisant tendre x vers $+\infty$, cela donne
$$c = 0,$$
ce qui implique que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\,e^{x} + b\,e^{2x} = 0.$$
En divisant par e^{2x}, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\,e^{-x} + b = 0.$$
En faisant tendre x vers $+\infty$, cela donne
$$b = 0,$$
ce qui implique que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\,e^{x} = 0$$
et donc
$$a = 0.$$
Donc
$$\boxed{(f, g, h) \text{ est libre.}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les applications $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \cos^n(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \cos(nx)$.

1. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
2. a) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, intégrer $g_p g_q$ entre 0 et 2π. En déduire que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $g_n = T_n(\cos)$. Retrouver ainsi le fait que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrons que $(f_n)_{n\in[\![0;m]\!]}$ est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m = \widetilde{0}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_m \cos^m(x) = 0$. Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_m X^m$ admet alors $\cos(x)$ comme racine pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit P admet tous les nombres réels de $[-1; 1]$ comme racines. Comme seul le polynôme nul possède une infinité de racines, on en déduit que P est le polynôme nul et donc que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Cela démontre que
$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille libre.}}$$

2. a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g_p(x) g_q(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(px - qx) + \cos(px + qx)\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{\sin(px-qx)}{p-q} + \dfrac{\sin(px+qx)}{p+q}\Big]_0^{2\pi} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{1}{2}\Big[x + \dfrac{\sin(px+qx)}{p+q}\Big]_0^{2\pi} & \text{si } p = q \neq 0 \\ \big[x\big]_0^{2\pi} & \text{si } p = q = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$
donc
$$\boxed{\int_0^{2\pi} g_p(x) g_q(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } p = q = 0 \end{cases}}$$
Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrons que $(g_n)_{n\in[\![0;m]\!]}$ est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m = \widetilde{0}.$$
Pour tout $k \in [\![0; m]\!]$, on a
$$\int_0^{2\pi} (\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m) g_k = 0,$$

ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_0^{2\pi} g_j g_k = 0$$

ou encore

$$(2)\pi \lambda_k = 0,$$

d'où

$$\lambda_k = 0.$$

Cela démontre que

$$\boxed{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille libre.}}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On procède à l'antilinéarisation de $\cos(nx)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{inx}) \\
&= \Re\mathrm{e}\Big[\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n\Big] \\
&= \Re\mathrm{e}\Big[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(x)\big)^{n-j} \big(i\sin(x)\big)^j\Big] \qquad \text{binôme} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{j} \big(\cos(x)\big)^{n-j} \big(i\sin(x)\big)^j \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \big(\cos(x)\big)^{n-2\ell} \big(-\sin^2(x)\big)^{\ell} \qquad \text{en posant } j = 2\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^{\ell} \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(1-\cos^2(x)\big)^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^{\ell} \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \big(-\cos^2(\theta)\big)^{\ell-k} \\
&= \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant \lfloor n/2\rfloor} (-1)^{2\ell-k} \binom{n}{2\ell} \binom{\ell}{k} \big(\cos(x)\big)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^{k} \binom{n}{2\ell} \binom{\ell}{k} \big(\cos(x)\big)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^{k} \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \binom{\ell}{k} \big(\cos(x)\big)^{n-2k}
\end{aligned}$$

donc

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_{n,k} \big(\cos(x)\big)^{n-2k}$$

où, pour tout $k \in [\![1; \lfloor n/2\rfloor]\!]$, on a

$$a_{n,k} = (-1)^k \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \binom{\ell}{k}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } T_n \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ tel que } g_n = T_n(\cos).}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrons que $(g_n)_{n\in[\![0;m]\!]}$ est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m = \widetilde{0}.$$

On a alors

$$\lambda_0 T_0(\cos) + \lambda_1 T_1(\cos) + \cdots + \lambda_m T_m(\cos) = \widetilde{0},$$

ce qui démontre que le polynôme $\lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_m T_m$ admet comme racines tous les cosinus, c'est-à-dire tous les nombres réels de $[-1; 1]$. Comme seul le polynôme nul possède une infinité de racines, on en déduit que

$$\lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_m T_m = 0.$$

Or la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_m)$ est échelonnée donc libre. Cela démontre que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

On retrouve donc que

$$\boxed{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille libre.}}$$

♦ ***Exercice 9.*** [★]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la famille $\big((X+k)^n\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Indication : Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$ pour tout $p \in [\![0;n]\!]$ et conclure.

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0.$$

Soit $p \in [\![0;n]\!]$. En dérivant $n-p$ fois cette relation, on obtient

$$n(n-1)\cdots(p+1)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$$

puisque $n(n-1)\cdots(p+1) \neq 0$. En substituant 0 à X, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0.$$

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. On a

$$\sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{p=0}^{n} a_p k^p = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = 0.$$

Pour tout $k_0 \in [\![0;n]\!]$, on choisit pour P le polynôme élémentaire de Lagrange L_{k_0}, ce qui donne

$$\lambda_{k_0} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\big((X+k)^n\big)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est libre dans } \mathbb{R}[X].}$$

♦ ***Exercice 10.*** [○]
On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. a) Démontrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre.
   b) En déduire qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
2. Démontrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre ($\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers).

1. a) Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}$ tels que $\lambda+\mu\sqrt{2}+\nu\sqrt{3}=0$. Alors $\lambda^2=(\mu\sqrt{2}+\nu\sqrt{3})^2=2\mu^2+3\nu^2+2\mu\nu\sqrt{6}$, or $\sqrt{6}$ est irrationnel, donc $\mu\nu=0$, donc $\mu=0$ ou $\nu=0$. En reportant l'une ou l'autre de ces informations dans l'égalité $\lambda+\mu\sqrt{2}+\nu\sqrt{3}=0$, on en déduit que $\mu=\nu=0$. En reportant à nouveau dans $\lambda+\mu\sqrt{2}+\nu\sqrt{3}=0$, il vient $\lambda=0$. Donc

$$\boxed{(1,\sqrt{2},\sqrt{3}) \text{ est une famille } \mathbb{Q}\text{-libre.}}$$

   b) Sous réserve d'existence, on considère (r_1,s_1) et (r_2,s_2) deux points à coordonnées rationnelles du cercle de centre $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ et de rayon $R>0$. On a alors

$$(r_1-\sqrt{2})^2+(s_1-\sqrt{3})^2=R^2=(r_2-\sqrt{2})^2+(s_2-\sqrt{3})^2,$$

   ce qui donne

$${r_1}^2-2\sqrt{2}r_1+2+{s_1}^2-2\sqrt{3}s_1+3={r_2}^2-2\sqrt{2}r_2+2+{s_2}^2-2\sqrt{3}s_2+3$$

   ou encore

$${r_1}^2+{s_1}^2-2\sqrt{2}r_1-2\sqrt{3}s_1={r_2}^2+{s_2}^2-2\sqrt{2}r_2-2\sqrt{3}s_2.$$

   La $\mathbb{Q}$-liberté de $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ implique alors que

$$r_1=r_2 \qquad \text{et} \qquad s_1=s_2.$$

   Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{un cercle de } \mathbb{R}^2 \text{ de centre } (\sqrt{2},\sqrt{3}) \text{ et de rayon } R>0\\ \text{possède au plus un point à coordonnées rationnelles.}\end{array}}$$

2. Soient $p_1,\dots,p_n$ des nombres premiers et $\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i \ln p_i=0$. Quitte à multiplier les μ_i par une constante, on peut les supposer entiers relatifs. On a alors $\prod_{i=1}^n p_i^{\mu_i}=1$. Le théorème d'unicité de la décomposition en facteurs premiers de 1 impose que les μ_i sont tous nuls. Donc

$$\boxed{\text{la famille } (\ln p)_{p \text{ premier}} \text{ est } \mathbb{Q}\text{-libre}}$$

On en déduit que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

♦ ***Exercice 11.*** [○]

Avant tout, un conseil :

> Pour déterminer une base d'un espace vectoriel, on « décortique » un élément générique de l'espace pour voir de quoi il est fait. Cela fournit une famille génératrice (que l'on essaye de choisir la plus petite possible). On vérifie ensuite que cette famille est une base de l'espace. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il faut ôter des vecteurs « inutiles » dans la famille génératrice.

1. Déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X] : P(1)=0\}$.
2. Même question avec $E=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists a,\varphi\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos(x+\varphi)\right\}$.

Notons qu'il est laissé au son du lecteur consciencieux le fait de vérifier que E est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dans chacune des deux questions. C'est très facile pour la question 1 mais c'est un peu plus enquiquinant dans la question 2.

1. Trois solutions pour le prix d'une !

   Si $P\in E$, alors 1 est racine de P, ce qui justifie l'existence de $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P=(X-1)Q$. Dès lors, il existe $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ tels que $P=(X-1)(a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1})$, c'est-à-dire $P=a_0(X-1)+a_1X(X-1)+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}(X-1)$. Comme les vecteurs de la famille $\big((X-1)X^k\big)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ sont bien dans E, cela démontre qu'elle est génératrice de E.

   La famille $\big((X-1)X^k\big)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ est également libre puisqu'elle est échelonnée en degré.

   On en conclut que

$$\boxed{\big((X-1)X^k\big)_{k\in[\![0;n-1]\!]} \text{ est une base de } E.}$$

Si $P \in E$, alors $P(1) = 0$, donc, si on note $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on a $P = P - P(1) = a_1(X-1) + \cdots + a_n(X^n - 1)$. Comme les vecteurs de la famille $(X^k - 1)_{k \in [\![1;n]\!]}$ sont bien dans E, cela démontre que cette famille est génératrice de E.

La famille $(X^k - 1)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est également libre puisqu'elle est échelonnée en degré.

On en conclut que

$$\boxed{(X^k - 1)_{k \in [\![1;n]\!]} \text{ est une base de } E.}$$

Si $P \in E$, la formule de Taylor et le fait que $P(1) = 0$ nous dit que

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k.$$

Comme les vecteurs de la famille $\big((X-1)^k\big)_{k \in [\![1;n]\!]}$ sont bien dans E, cela démontre que cette famille est génératrice de E.

La famille $\big((X-1)^k\big)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est également libre puisqu'elle est échelonnée en degré.

On en conclut que

$$\boxed{\big((X-1)^k\big)_{k \in [\![1;n]\!]} \text{ est une base de } E.}$$

2. Si $f \in E$, il existe $a, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x+\varphi)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(\varphi)\cos(x) - a\sin(\varphi)\sin(x)$. Comme $x \longmapsto \cos(x) = 1\cos(x+0)$ et $x \longmapsto \sin(x) = 1\cos(x - \pi/2)$ sont bien dans E, cela démontre que $(\cos, \sin)$ est génératrice de E.

   La famille $(\cos, \sin)$ est libre puisque cos et sin ne sont pas proportionnelles (sinon elle s'annuleraient en même temps).

   On en conclut que

$$\boxed{(\sin, \cos) \text{ est une base de } E.}$$

♦ ***Exercice 12.*** $[\circ]$

1. Démontrer que la famille $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une expression simplifiée de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3 - 2k^2 + 2k - 3}{k!}$.

1. La famille $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est échelonnée en degré donc elle est libre.

   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On voudrait savoir s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$. Si c'est le cas, alors nécessairement $P(0) = a$, $P(1) = a + b$, $P(2) = a + 2b + 2c$ et $P(3) = a + 3b + 6c + 6d$, ce qui donne $a = P(0)$, $b = P(1) - P(0)$, $c = \big(P(2) - 2P(1) + P(0)\big)/2$ et $d = \big(P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0)\big)/6$. On vérifie sans mal qu'en choisissant a, b, c, d ainsi, on a bien $P = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$. Donc $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est génératrice.

   En conclusion,

$$\boxed{\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. D'après la question précédente, on a

$$X^3 - 2X^2 + 2X - 3 = -3 + X + X(X-1) + X(X-1)(X-2).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3-2k^2+2k-3}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{-3+k+k(k-1)+k(k-1)(k-2)}{k!} \\
&= -3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} \\
&= -3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} \\
&= -3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-3)!} \\
&= -3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!} \\
&= -3\frac{1}{n!} - 2\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{S_n = -\frac{n^2+n+3}{n!}\cdot}$$

♦ ***Exercice 13.*** [⋆] (Théorème de la base téléscopique)
Soient $K \subset L \subset M$ trois corps commutatifs. On suppose donnée une base $(e_i)_{i\in I}$ du K-espace vectorielle L ainsi qu'une base $(f_j)_{j\in J}$ du L-espace vectorielle M. Démontrer que la famille $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base du K-espace vectoriel M.

▷ Caractère générateur
Soit $z \in M$.
Comme $(f_j)_{j\in J}$ est une base du L-espace vectorielle M, il existe $(\ell_j)_{j\in J} \in L^{(J)}$ telle que

$$z = \sum_{j\in J} \ell_j f_j.$$

Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base du K-espace vectorielle L, pour tout $j \in J$, il existe $(k_{j,i})_{i\in I} \in K^{(I)}$ telle que

$$\ell_j = \sum_{i\in I} k_{j,i} e_i.$$

Par suite, on a

$$z = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} k_{j,i}e_i\Big) f_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} k_{j,i} e_i f_j.$$

Cela démontre que $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille génératrice du K-espace vectoriel M.

▷ Liberté
Soit $(k_{j,i})_{(i,j)\in I\times J} \in K^{(I\times J)}$ telle que

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} k_{j,i} e_i f_j = 0.$$

On a alors

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} k_{j,i}e_i\Big) f_j = 0.$$

Comme la famille $(f_j)_{j\in J}$ est L-libre, on en déduit que

$$\forall j \in J, \qquad \sum_{i\in I} k_{j,i} e_i = 0.$$

Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est K-libre, on en déduit que

$$\forall j \in J, \quad \forall i \in I, \qquad k_{j,i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in I \times J, \qquad k_{j,i} = 0.$$

Cela démontre que $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille K-libre.

▷ <u>Conclusion</u>

$$\boxed{(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J} \text{ est une base du } K\text{-espace vectoriel } M.}$$

◆ ***Exercice 14.*** [$\circ$]
Soient E un K-espace vectoriel et F, G, F', G' des sous-espaces de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.
Démontrer que $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.

On a $F \subset F + (G \cap F')$ et $F \subset F + (G \cap G')$, donc $F \subset \big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big)$.

Soit $x \in \big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big)$. Alors $x \in F + (G \cap F')$ et $x \in F + (G \cap G')$, d'où $x = f_1 + x_1 = f_2 + x_2$ avec $f_1, f_2 \in F$, $x_1 \in G \cap F'$ et $x_2 \in G \cap G'$. Alors $x_1 - x_2 = f_2 - f_1 \in F$ et $x_1 - x_2 \in G$, donc $x_1 - x_2 \in F \cap G$, ce qui implique, d'après l'hypothèse, que $x_1 - x_2 \in F' \cap G'$. Comme $x_1 \in F'$ et $x_2 \in G'$, on en déduit que $x_1, x_2 \in F' \cap G'$. En réutilisant l'hypothèse, on obtient que $x_1, x_2 \in F \cap G$. En particulier, on a $x_1, x_2 \in F$, d'où $x = f_1 + x_1 \in F$. Donc $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) \subset F$.

En conclusion,

$$\boxed{\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F.}$$

◆ ***Exercice 15.*** [$\circ$]
Soient A, B, C, D quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B = C \oplus D$. On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Démontrer que $A = C$ et $B = D$.

Démontrons que $C \subset A$. Soit $x \in C$. Alors $x \in E$ et comme $E = A \oplus B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Or $A \subset C$ donc $a \in C$, ce qui prouve que $b = x - a$ est élément de C. Mais, de plus, $b \in D$ puisque $B \subset D$, donc $b \in C \cap D = \{0\}$ c'est-à-dire $b = 0$. Donc $x = a$, ce qui démontre que $x \in A$. Ainsi $C \subset A$.

On procède de même pour démontrer que $D \subset B$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{lorsque } E = A \oplus B = C \oplus D \text{ avec } A \subset C \text{ et } B \subset D, \text{ on a nécessairement } A = C \text{ et } B = D.}$$

◆ ***Exercice 16.*** [$\star$] (Associativité des sommes directes)
Soient E un K-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E. On note $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Pour tout $j \in J$, on pose $G_j = \sum_{i\in I_j} F_i$. Prouver qu'on a équivalence entre :

(i) les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe ;

(ii) pour tout $j \in J$, les $(F_i)_{i\in I_j}$ sont en somme directe et les $(G_j)_{j\in J}$ sont en somme directe.

On procède par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose que les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe.

▷ Soit $j \in J$. Démontrons que les $(F_i)_{i\in I_j}$ sont en somme directe.
Soit $(x_i)_{i\in I_j} \in \prod_{i\in (I_j)} F_i$ tel que $\sum_{i\in I_j} x_i = 0_E$.
Pour tout $i \in I \setminus I_j$, on pose $x_i = 0_E$.
Alors $\sum_{i\in I} x_i = 0_E$.
Comme les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe, on a $\forall i \in I,\ x_i = 0_E$.
En particulier, on a $\forall i \in I_j,\ x_i = 0_E$.
Donc les $(F_i)_{i\in I_j}$ sont en somme directe.

▷ Démontrons que les $(G_j)_{j\in J}$ sont en somme directe.
Soit $(g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in(J)} G_j$ tel que $\sum_{j\in J} g_j = 0_E$.
Pour tout $j \in I$, on a $g_j \in G_j$ et $G_j = \sum_{i\in I_j} F_i$, donc il existe $(x_{j,i})_{i\in I_j} \in \prod_{i\in(I_j)} F_i$ tel que $g_j = \sum_{i\in I_j} x_{j,i}$.
Dès lors, on a $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_{j,i} = 0_E$.
Comme $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, la somme $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_{j,i}$ fait intervenir des vecteurs qui n'appartiennent pas au même F_i. Par conséquent, comme les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe, on a $\forall j \in J,\ \forall i \in I_j,\ x_{j,i} = 0_E$.
Il s'ensuit que $\forall j \in J,\ g_j = 0_E$.
Donc les $(G_j)_{j\in J}$ sont en somme directe.

$\Leftarrow$ On suppose que, pour tout $j \in J$, les $(F_i)_{i\in I_j}$ sont en somme directe et les $(G_j)_{j\in J}$ sont en somme directe.
Démontrons que les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe.
Soit $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} F_i$ tel que $\sum_{i\in I} x_i = 0_E$.
On regroupe des vecteurs selon la partition $(I_j)_{j\in J}$, ce qui donne $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_i = 0_E$.
Comme les $(G_j)_{j\in J}$ sont en somme directe, on en déduit que $\forall j \in J,\ \sum_{i\in I_j} x_i = 0_E$.
Comme, pour tout $j \in J$, les $(F_i)_{i\in I_j}$ sont en somme directe, on en déduit que $\forall j \in J,\ \forall i \in I_j,\ x_i = 0_E$.
On a donc $\forall i \in I,\ x_i = 0_E$.
Donc les $(F_i)_{i\in I}$ sont en somme directe.

En conclusion,

$$\boxed{\text{on a démontré l'associativité des sommes directes.}}$$

♦ ***Exercice 17.*** [○]
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes convergentes. On note E_0 le sous-espace de E constitué des suites qui tendent vers 0. Déterminer un supplémentaire de E_0 dans E.

On note C le sous-espace de E constitué des suites constantes.

Toute suite u de E s'écrit $u = (u - \ell) + \ell$ où ℓ est la limite de u. Or $u - \ell$ tend vers 0, c'est-à-dire $u - \ell \in E_0$. Donc $u \in E_0 + C$. Cela démontre que $E = E_0 + C$.

Si $u \in E_0 \cap C$, alors u est une suite constante qui tend vers 0, c'est donc la suite nulle. Donc $E_0 \cap C = \{(0)_{n\geqslant 0}\}$, ce qui signifie que E_0 et C sont en somme directe.

En conclusion, on a $E_0 \oplus C = E$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{le sous-espace de } E \text{ constitué des suites constantes est un supplémentaire de } E_0 \text{ dans } E.}$$

♦ ***Exercice 18.*** [○]
Soient E un K-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$. On considère un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F. Démontrer que $F' \oplus G = E$.

On a
$$E = F + G = (F' + F \cap G) + G = F' + (F \cap G + G) = F' + G.$$
On a
$$F' \cap G = (F' \cap F) \cap G = F' \cap (F \cap G) = \{0_E\}$$
donc F' et G sont en somme directe.

En conclusion,

$$\boxed{F' \oplus G = E.}$$

♦ *Exercice 19.* [★]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

1. Pour $k, \ell \in [\![0; n-1]\!]$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-\ell)}$. Inverser la matrice $A = (\omega^{jk})_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1}$.
2. Démontrer que $\mathbb{C}^{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{k=0}^{n-1} \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\}$.

1. Soient $k, \ell \in [\![0; n-1]\!]$.
   Si $k = \ell$, on a
   $$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-\ell)} = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n.$$
   Si $k \neq \ell$, la formule de sommation d'une suite géométrique nous dit que
   $$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-\ell)} = \frac{\omega^{n(k-\ell)} - 1}{\omega^{k-\ell} - 1} = \frac{1-1}{\omega^{k-\ell} - 1} = 0.$$
   En conclusion, on a
   $$\boxed{\forall k, \ell \in [\![1; n]\!], \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-\ell)} = \begin{cases} n & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}}$$
   Ce résultat nous dit que
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-(n-1)2} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$
   c'est-à-dire
   $$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{n}(\omega^{-jk})_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1}.}$$
2. Pour $n = 2$, on constate que le résultat demandé est la décomposition de toute fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On procède donc selon le même schéma de démonstration en raisonnant par analyse/synthèse.
   Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.
   <u>Analyse</u>
   Supposons l'existence de $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}) \in \prod\limits_{k=0}^{n-1} \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\}$ telles que
   $$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1}.$$
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
   $$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)$$
   $$f(\omega z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\omega z) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k f_k(z)$$
   $$f(\omega^2 z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\omega^2 z) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2k} f_k(z)$$
   $$\vdots$$
   $$f(\omega^{n-1} z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\omega^{n-1} z) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(n-1)k} f_k(z),$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(\omega z) \\ f(\omega^2 z) \\ \vdots \\ f(\omega^{n-1} z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(z) \\ f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\begin{pmatrix} f_0(z) \\ f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-(n-1)2} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z) \\ f(\omega z) \\ f(\omega^2 z) \\ \vdots \\ f(\omega^{n-1} z) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \qquad f_k(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^j z).$$

Si elles existent les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ sont nécessairement définies par ces formules, ce qui démontre l'unicité du n-uplet $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$. Par conséquent

$$\boxed{\text{la somme } \sum_{k=0}^{n-1} \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\} \text{ est directe.}}$$

Synthèse

Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on définit la fonction $f_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_k(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^j z).$$

On constate alors que, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} f_k(\omega z) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^{j+1} z) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^{n} \omega^{-(j'-1)k} f(\omega^{j'} z) \qquad \text{en posant } j = j' - 1 \\ &= \frac{\omega^k}{n} \sum_{j'=1}^{n} \omega^{-j'k} f(\omega^{j'} z) \\ &= \frac{\omega^k}{n} \sum_{j'=0}^{n-1} \omega^{-j'k} f(\omega^{j'} z) \qquad \text{car } \omega^{-nk} f(\omega^n z) = \omega^{-0.k} f(\omega^0 z) \\ &= \omega^k f_k(z), \end{aligned}$$

donc

$$f_k \in \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\}.$$

Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^j z) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\omega^j z) \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} \\
&= \frac{1}{n} f(\omega^0 z) \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-0.k} + \sum_{j=1}^{n-1} f(\omega^j z) \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} \\
&= \frac{1}{n} f(\omega^0 z) \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f(\omega^j z) \frac{\omega^{-jn} - 1}{\omega^{-j} - 1} \\
&= \frac{1}{n} f(\omega^0 z) \times n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f(\omega^j z) \times 0 \\
&= f(z),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\} = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}.}$$

<u>Conclusion</u>

On a bien

$$\boxed{\bigoplus_{k=0}^{n-1} \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \forall z \in \mathbb{C},\ f(\omega z) = \omega^k f(z)\} = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [⋆]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions F et G.

1. On suppose que $F + G = E$. Démontrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'intersectent.
2. On suppose que $F \oplus G = E$. Démontrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'intersectent en exactement un point.

On pose $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$.

1. <u>Analyse</u>

   Supposons l'existence d'un point M appartenant à la fois à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Il existe alors $\overrightarrow{f} \in F$ et $\overrightarrow{g} \in G$ tels que $M = A + \overrightarrow{f}$ et $M = B + \overrightarrow{g}$. Par soustraction, on obtient $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$. On constate donc qu'il faut que $\overrightarrow{AB}$ se décompose sur $F + G$. Cela tombe bien, c'est précisément notre hypothèse.

   <u>Synthèse</u>

   Comme $E = F + G$, il existe $\overrightarrow{f} \in F$ et $\overrightarrow{g} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. Posons $M = A + \overrightarrow{f}$ de sorte que $M \in \mathscr{F}$. Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{g}$, on a $M = A + \overrightarrow{f} = A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{g} = B - \overrightarrow{g}$, ce qui démontre que $M \in \mathscr{G}$. Donc $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$.

   <u>Conclusion</u>

   $$\boxed{\text{si } F + G = E, \text{ alors } \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing.}$$

2. Soient $M_1, M_2 \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Alors $\overrightarrow{M_1M_2} \in F \cap G$, donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{0}$, ce qui donne $M_1 = M_2$. Donc

   $$\boxed{\text{si } F \oplus G = E, \text{ alors } \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \text{ est un singleton.}}$$

♦ ***Exercice 21.*** [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines disjoints de E de directions respectives F et G. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces affines $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Soient $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{G}$ de sorte que $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$.

▷ Analyse

Supposons l'existence de deux sous-espaces affines $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ disjoints, de même direction H et contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.
On a $A \in \mathscr{F}_0$ et $B \in \mathscr{G}_0$.
Par ailleurs, on a $F \subset H$ et $G \subset H$. Par conséquent, on a nécessairement $F + G \subset H$.

▷ Synthèse

Posons

$$\mathscr{F}_0 = A + (F + G) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G}_0 = B + (F + G)$$

de sorte que $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ sont deux sous-espaces affines de E de même direction contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.
Reste à démontrer que $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ sont disjoints. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $M \in \mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}_0$. Il existe alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \in F$ et $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}' \in G$ tels que $M = A + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{v}'$, ce qui donne $A + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}' = B + \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{v}$. Or $A + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}' \in \mathscr{F}$ et $B + \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{v} \in \mathscr{G}$, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$, ce qui est absurde ! Donc $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{G}_0$ sont bien disjoints.
En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe deux sous-espaces affines } \mathscr{F}_0 \text{ et } \mathscr{G}_0 \text{ disjoints,}\\ \text{de même direction et contenant respectivement } \mathscr{F} \text{ et } \mathscr{G}.\end{array}}$$