Problème n° 18 : Espaces vectoriels

Correction du problème 1 – (Extrait de X-ENS 2013) – Opérateurs quantiques modulaires

Partie I – Opérateurs sur les fonctions à support fini

1. (a)
   - V est défini comme un sous-ensembe de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$;
   - La suite nulle est à support fini (vide)
   - Si u et v sont deux suites à supports finis, et $\lambda \in \mathbb{C}$, $(u+\lambda v)(k)$ est nul dès lors que $u(k) = 0$ et $v(k) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Supp}(u+\lambda v) \subset \mathrm{Supp}(u) \cup \mathrm{Supp}(v)$. Une union d'ensembles finis étant finie, on peut conclure que $u + \lambda v$ est aussi à support fini.

   Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}}$.

   (b)
   - $E(f)$ est par définition une application de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même. Montrons sa linéarité : si f et g sont deux suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ $E(f+\lambda g)$ est défini par :

     $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(f+\lambda g)(k) = (f+\lambda g)(k+1) = f(k+1) + \lambda g(k+1) = E(f)(k) + \lambda E(g)(k).$$

     Ainsi, $E(f+\lambda g) = E(f) + \lambda E(g)$. On en déduit la linéarité de E, puis $\boxed{E \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})}$.
   - Si $f \in V$, alors $E(f)(k)$ est nul dès lors que $k+1 \notin \mathrm{Supp}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Supp}(E(f)) \subset \mathrm{Supp}(f) - 1 = \{k-1, k \in \mathrm{Supp}(f)\}$.
     On a même l'égalité, mais l'inclusion est suffisante pour conclure que $E(f)$ est aussi à support fini, donc élément de V.
     Ainsi, $\boxed{V \text{ est stable par } E}$.

   (c) On définit $\tilde{E} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$ de façon symétrique par :

   $$\forall f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{E}(f)(k) = f(k-1).$$

   L'argument précédent s'adapte bien pour justifier que $\tilde{E}$ peut se restreindre en un endomorphisme de V, et $\tilde{E}$ est clairement une réciproque de E. Ainsi, E est un endomorphisme bijectif de V, donc un automorphisme de V : $\boxed{E \in \mathrm{GL}(V)}$.

2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $v_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par $v_i(k) = \delta_{i,k}$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = k$, et nul sinon.

   (a)
   - Soit $f \in V$, on a directement :

     $$f = \sum_{i \in \mathrm{Supp}(f)} f(i) v_i,$$

     cette somme étant finie, donc étant bien définie, et définissant un objet de $\mathrm{Vect}(v_i, i \in \mathbb{Z})$. Ainsi, la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille génératrice de V.
   - Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille de complexes presque tous nuls tels que

     $$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i v_i = 0,$$

     le 0 désignant la suite nulle. En évaluant cette égalité au point k, il vient :

     $$0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

     Ainsi, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k = 0$, d'où la liberté de la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

- Des deux points précédents, on déduit que $\boxed{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \text{ est une base de } V}$.

(b) Soit $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$E(v_i)(k) = v_i(k+1) = \delta_{i,k+1} = \delta_{i-1,k}.$$

Ainsi, $\boxed{E(v_i) = v_{i-1}}$.

Remarquez que c'est cohérent avec le fait que le support de $E(f)$ est obtenu par translation de -1 du support de f.

Partie II – Opérateurs quantiques

1. Une application linéaire étant entièrement déterminée par l'image d'une base, on a $H \circ E = q^2 E \circ H$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H \circ E(v_i) = q^2 E \circ H(v_i)$, donc si et seulement si $H(v_{i-1}) = q^2 E(\lambda(i)v_i)$, ou encore $\lambda(i-1)v_{i-1} = q^2\lambda(i)v_{i-1}$. Ceci équivaut à dire que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = q^{-2}\lambda(i-1)$, donc λ est géométrique (des deux côtés vers $-\infty$ et $+\infty$)

   Ainsi, par deux récurrences immédiates (l'une sur $\mathbb{N}$ l'autre sur $\mathbb{Z}_-$), on obtient la condition nécessaire (et clairement suffisante) : $\boxed{\forall i \in \mathbb{Z},\ \lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}}$.

2. H est dans $\mathcal{L}(V)$ par définition.

   La condition de la question précédente étant imposée, $\lambda(i)$ n'est nul pour aucune valeur de i. On peut alors définit l'endomorphisme $\tilde{H}$ de V de la même manière que H, par l'image des vecteurs de la base (v_i) :

$$\tilde{H}(v_i) = \lambda(i)^{-1}v_i.$$

   Alors $\tilde{H}$ est clairement réciproque de H donc H est un automorphisme : $\boxed{H \in \mathrm{GL}(V)}$.

3. À nouveau, $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ si et seulement si ces deux applications linéaires coïncident sur les vecteurs de la base (v_i), donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$E \circ F(v_i) = F \circ E(v_i) + H(v_i) - H^{-1}(v_i).$$

   En explicitant ces expressions, on obtient la condition nécessaire et suffisante :

$$\mu(i)v_i = \mu(i-1)v_i + \lambda(i)v_i - \lambda(i)^{-1}v_i,$$

   ce qui équivaut à

$$\boxed{\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}},$$

   du fait de l'expression imposée des $\lambda(i)$.

4. Puisque q est une racine ℓ-ième de 1, il en est de même de q^{-2}. Ainsi, $(q^{-2})^\ell = 1$, donc $\boxed{\lambda \text{ est } \ell\text{-périodique}}$.

   La relation de récurrence trouvée pour μ implique que pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(i+\ell) = \mu(i) + \lambda(0)\sum_{j=1}^{\ell} q^{-2j} + \lambda(0)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} q^{2j} = \mu(i) + \lambda(0)q^{-2j}\frac{1-(q^{-2})^\ell}{1-q^{-2}} + \lambda(0)^{-1}\frac{1-(q^2)^\ell}{1-q^2} = \mu(i),$$

   puisque q^2 et q^{-2} sont des racines ℓ-ièmes de l'unité. Ainsi, $\boxed{\mu \text{ est } \ell\text{-périodique}}$.

5. Soit $C = (q-q^{-1})E \circ F + q^{-1}H + qH^{-1}$.

   (a) Les conditions de la question 3 étant réunies, on a

$$C = (q-q^{-1})(F \circ E + H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1}.$$

   Une simplification facile amène :

$$\boxed{C = (q-q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1}}$$

(b) On justifie que C coïncide sur les éléments de la base (v_i) avec une certain homothétie. Soit $i \in \mathbb{Z}$. On a :

$$C(v_i) = (q - q^{-1})F(v_{i-1}) + q\lambda(i)v_i + q^{-1}\lambda(i)^{-1}v_i = (\mu(i-1)(q-q^{-1}) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1})v_i.$$

Montrons que l'expression $k_i = (\mu(i-1)(q-q^{-1}) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1})$ est indépendante de i. Cela provient du fait que la condition de la question 3 se réécrit :

$$\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}.$$

On a alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
k_{i+1} &= \mu(i)(q-q^{-1}) + q\lambda(i+1) - q^{-1}\lambda(i+1)^{-1} \\
&= (\mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1})(q-q^{-1}) + q^{-1}\lambda(i) - q\lambda(i)^{-1} \\
&= \mu(i)(q-q^{-1}) + q\lambda(i) - q^{-1}\lambda(i)^{-1}) \\
&= k_i.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $k_{i+1} = k_i$, donc (k_i) est une suite constante, égale à un certain réel k. On a alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $C(v_i) = kv_i$. Ainsi, C coïncide sur la base (v_i) avec $k\mathrm{Id}$. On en déduit que $C = k\mathrm{Id}$, donc que C est une $\boxed{\text{homothétie de rapport } k}$.

Partie III – Opérateurs quantiques modulaires

1. Pour tout $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, la division euclidienne de i par ℓ s'écrit $i = p\ell + r$ avec $p = 0$ et $r = i$. Ainsi, $P_a(v_i) = v_i$. Par linéarité, cette égalité reste vraie sur W_ℓ : W_ℓ est inclus dans l'ensemble des points fixes.
Soit maintenant $i \in \mathbb{Z}$, et p et r le quotient et le retse de la division euclidienne de i par ℓ. D'après ce qui précède, puisque $r \in [\![0, \ell-1]\!]$,

$$P_a \circ P_a(v_i) = P_a(a^p v_r) = a^p P_a(v_r) = a^p v_r = P_a(v_i).$$

Ainsi, $P_a \circ P_a$ et P_a coïncident sur une base, donc sont égales. On en déduit que $\boxed{P_a \text{ est un projecteur}}$.
Par définition, $P_a(W_\ell) \subset W_\ell$, et on a vu que les points de W_ℓ sont tous des points fixes (donc sont dans l'image de P_a). Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(P_a) = W_\ell}$.

2. (a) Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ commute avec P_a. On a alors :

$$P_a \circ \varphi \circ P_a = P_a \circ P_a \circ \varphi = P_a \circ \varphi.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est compatible avec } P_a}$.

(b) Soit $i \in \mathbb{Z}$, et p et r le quotient et le reste de la division euclidienne de i par ℓ. On a

$$P_a \circ H \circ P_a(v_i) = P_a \circ H(a^p v_r) = P_a(a^p \lambda(r) v_r) = a^p \lambda(r) v_r.$$

D'un autre côté,

$$P_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(i)v_i) = \lambda(i)a^p v_r.$$

Or, λ est ℓ-périodique, donc $\lambda(i) = \lambda(r)$. Ainsi, $P_a \circ H \circ P_a$ et $P_a \circ H$ coïncident sur une base, donc sont égales. On en déduit que $\boxed{H \text{ est compatible avec } P_a.}$
Puisque H^{-1} est défini comme H en remplaçant λ par λ^{-1} qui est aussi ℓ-périodique, on peut aussi affirmer que $\boxed{H^{-1} \text{ est aussi compatible avec } P_a}$.

3.
- L'application nulle est évidemment compatible avec P_a.
- La bilinéarité de la composition des applications linéaires montre que $\mathcal{U}_q$ est stable par combinaisons linéaires.
- L'application identité est dans $\mathcal{U}_q$ car $P_a \circ P_a = P_a$
- Si u et v sont dans $\mathcal{U}_q$, $u \circ v$ également, car :

$$P_a \circ u \circ v \circ P_a = (P_a \circ u \circ P_a) \circ v \circ P_a = P_a \circ u \circ (P_a \circ v \circ P_a) = P_a \circ u \circ (P_a \circ v) = (P_a \circ u \circ P_a) \circ v = (P_a \circ u) \circ v.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{U}_q \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(V)}$.

4. On a, pour tout $i \in ZZ$, avec les notations précédentes

$$P_a \circ E \circ P_a(v_i) = P_a \circ E(a^p v_r) = P_a(a^p v_{r-1}) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{-1} a^p v_{\ell-1} & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, si ℓ ne divise pas i (donc $r \neq 0$), le reste de la division euclidienne de $i-1$ par ℓ est $r-1$, et le quotient p, alors que si ℓ divise i, alors le reste de la division euclidienne de $i-1$ par ℓ est $\ell-1$ et le quotient $p-1$. On a donc :

$$P_a \circ E(v_i) = P_a(v_{i-1}) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } a \neq 0 \\ a^{p-1} v_{\ell-1} & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

On conclut comme précédemment que E est compatible avec P_a, donc $\boxed{E \in \mathcal{U}_q}$.
Un raisonnement similaire convient pour F :

$$P_a \circ F \circ P_a(v_i) = P_a \circ F(a^p v_r) = P_a(\mu(r) a^p v_{r+1}) = \begin{cases} \mu(r) a^p v_{r+1} & \text{si } r \neq \ell - 1 \\ \mu(r) a^{p+1} v_0 & \text{si } r = \ell - 1, \end{cases}$$

alors que d'un autre côté :

$$P_a \circ F(v_i) = P_a(\mu(i) v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i) a^p v_{r+1} & \text{si } r \neq \ell - 1 \\ \mu(r) a^{p+1} v_0 & \text{si } r = \ell - 1. \end{cases}$$

On conclut en utilisant la ℓ-périodicité de μ : $\boxed{F \in \mathcal{U}_q}$.

5. (a) On procède par analyse-synthèse :
   - Analyse. Soit $\varphi \in \mathcal{U}_q$, et supposons qu'il existe $\Psi_a(\varphi) = \psi \in \mathcal{L}(W_\ell)$ tel que $\psi \circ P_a = P_a \circ \varphi$. Pour tout $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, on a alors

     $$\psi(v_i) = \psi(P_a(v_i)) = P_a \circ \varphi(v_i).$$

     Ainsi, $\psi(v_i)$ est défini de façon unique. Ceci prouve l'unicité de $\Psi_a(\varphi)$ (les v_i, $0 \leqslant i < \ell$ formant une base de W_ℓ), sous reserve d'existence, donc aussi l'$\boxed{\text{unicité de } \Psi_a}$.
   - Synthèse. Pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_q$, on définit $\Psi_a(\varphi) \in \mathcal{L}(W_\ell)$ par l'image de la base $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$:

     $$\Psi_a(\varphi)(v_i) = P_a \circ \varphi(v_i).$$

     Cela définit bien une application linéaire $\Psi_a(\varphi)$. Par conséquent, Ψ_a est définie de $\mathcal{U}_q$ dans W_ℓ. Par ailleurs, la linéarité de P_a montre que Ψ_a est linéaire. Enfin, pour tout φ et ψ dans $\mathcal{U}_q$,

     $$\Psi_a(\varphi \circ \psi) = P_a \circ \varphi \circ \psi = (P_a \circ \varphi \circ P_a) \circ \psi = \Psi_a(\varphi) \circ \Psi_a(\psi).$$

     Ainsi, $\boxed{\Psi_a \text{ est un morphisme d'algèbre}}$.

   (b) On remarque que par définition, $\varphi \in \mathrm{Ker}(\Psi_a)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(P_a)$. On décrit donc $\mathrm{Ker}(P_a)$:
   - Soit $u = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in \mathrm{Ker}(P_a)$, les λ_i étant presque tous nuls. On a alors

     $$u = \sum_{r=0}^{\ell-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_{p\ell+r} v_{p\ell+r},$$

     d'où

     $$0 = P_a(u) = \sum_{r=0}^{\ell-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_{p\ell+r} a^p v_r.$$

     Ainsi, par liberté de la famille (v_i), pour tout $r \in [\![0, \ell-1]\!]$,

     $$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_{p\ell+r} a^p = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lambda_r = -\sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \lambda_{p\ell+r} a^p.$$

On peut alors réécrire :

$$u = \sum_{r=0}^{\ell-1}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\lambda_{p\ell+r}v_{p\ell+r} - \sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\lambda_{p\ell+r}a^p v_r\right) = \sum_{r=0}^{\ell-1}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\lambda_{p\ell+r}(v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r\right).$$

Toutes les sommes considérées sont finies, ce qui justifie toutes les manipulations qu'on effectue dessus, et qui assure qu'à l'issue de ce calcul, on peut conclure que

$$\mathrm{Ker}(P_a) \subset \mathrm{Vect}(v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r, p \in \mathbb{Z}^*, r \in [\![0, \ell-1]\!]).$$

- Réciproquement, la définition de P_a amène directement, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ et tout $r \in [\![0, \ell-1]\!]$,

$$v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r \in \mathrm{Ker}(P_a),$$

d'où l'inclusion réciproque : $\mathrm{Vect}(v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r, p \in \mathbb{Z}^*, r \in [\![0, \ell-1]\!]) \subset \mathrm{Ker}(P_a)$.

- On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P_a) = \mathrm{Vect}(v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r, p \in \mathbb{Z}^*, r \in [\![0, \ell-1]\!])},$$

puis que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi_a) = \{\varphi \in \mathcal{U}_q \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(v_{\mathcal{P}\ell+r} - a^p v_r, p \in \mathbb{Z}^*, r \in [\![0, \ell-1]\!])}.$$

6. $\Psi_a(F)$ est nipotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Psi_a(F)^n = 0$, donc, Φ_a étant un morphisme d'algèbre, si $\Psi_a(F^n) = 0$. Or, F^n envoie v_j sur $\mu(i)\cdots\mu(j+n-1)v_{i+n}$. Supposons que $F^n(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_j - a^p v_r)$. ces derniers vecteurs étant nuls pour $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, on peut donc écrire

$$F^n(v_i) \sum_{j \notin [\![0,\ell-1]\!]} \lambda_j(v_j - a^{p(j)}v_{r(j)}).$$

- Si $i + n \notin [\![0, \ell-1]\!]$, L'identification des composantes sur v_j, $j \in\in [\![0, \ell-1]\!]$, amène alors

$$\lambda_{i+n} = \mu(i)\cdots\mu(j+n-1) \qquad \text{et} \qquad \lambda_j = 0 \text{ si } j \neq i+n.$$

Ainsi, si $F^n(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_j - a^p v_r)$, alors

$$F^n(v_i) = \mu(i)\cdots\mu(j+n-1)(v_{i+n} - a^{p(i+n)}v_{r(i+n)}).$$

En comparant à l'expression initiale, on a nécessairement $\mu(i)\cdots\mu(j+n-1) = 0$, et au final, F lui-même est nilpotent, et au moins un des coefficients de la suite μ est nul.

- Si $i + n \in [\![0, \ell-1]\!]$, on obtient la même chose, les l_i étant ici directement tous nuls

La question précédente nous permet alors d'affirmer que $\Phi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si l'un des termes de la suite μ est nul (la réciproque étant évidente, en considérant F^ℓ, en se sovenant que μ est ℓ-périodique). En utilisant l'expression du facteur d'homothétie k trouvé dans la partie II, on trouver la CNS sur k : $\Phi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si il existe i tel que

$$k = q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1} = \lambda(0)(q^{-(2i-1)} + q^{2i-1}).$$

Ainsi, $\boxed{\Psi_a(F) \text{ est nilpotent ssi } k \in \{\lambda(0)(q^{-(2i-1)} + q^{2i-1}),\ i \in [\![0, \ell-1]\!]\}}$.