Questions / Réponses

Question

Manipulation des polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées.

Réponse

Imaginons que l'on dispose d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on dispose de n complexes **différents** $z_1, \cdots, z_n$ tels que pour tout entier k entre 1 et n, on ait :

$$\mathrm{Ker}(A - z_k \cdot I_n) \neq \{0\}.$$

Autrement dit les matrices $A - z_k \cdot I_n$ ne sont pas inversibles.
On peut choisir un vecteur colonne X_k non nul dans $\mathrm{Ker}(A - z_k \cdot I_n)$.
On va montrer la chose suivante.

La famille $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et chaque noyau $\mathrm{Ker}(A - z_k \cdot I_n)$ est de dimension 1 :

$$\mathrm{Vect}(X_k) = \mathrm{Ker}(A - z_k \cdot I_n).$$

Finalement, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vers la base $(X_1, \cdots, X_n)$, alors la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}.$$

Allons-y pour la démonstration.

On commence par montrer que la famille $\mathscr{F} = (X_1, \cdots, X_n)$ est une famille libre dans l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de dimension n : la famille $\mathscr{F}$ sera donc une base.

Soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot X_k = 0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
On va appliquer à cette combinaison linéaire la matrice carrée $P(A)$, où $P(X)$ est n'importe quel polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.
Il y a plusieurs choses à remarquer.
Premièrement, il est strictement interdit de calculer $P(AX_k)$ car l'objet AX_k est un vecteur colonne et par exemple le produit $(AX_k) \times (AX_k)$ est strictement interdit lorsque $n \geqslant 2$. Il est

donc interdit de calculer $P(AX_k)$ dès que le polynôme $P(X)$ est de degré supérieur ou égal à 2. Dans l'égalité que l'on va montrer :

$$P(A)X_k = P(z_k) \cdot X_k,$$

l'objet $P(A)$ est une matrice carrée, X_k est une matrice colonne, donc le produit $P(A)X_k$ est une matrice colonne, l'objet $P(z_k)$ est un scalaire et donc $P(z_k) \cdot X_k$ est encore une matrice colonne. Le physicien dirait que la formule « $P(A)X_k = P(z_k) \cdot X_k$ » est homogène.
Deuxièmement, on peut montrer facilement par récurrence sur l'entier m que :

$$A^m X_k = z_k^m \cdot X_k.$$

Il est donc facile de voir que si $P(U) = \sum_{m=0}^{d} a_m \; U^m$ – je ne mets pas l'indéterminée X mais plutôt U car la lettre X est déjà prise pour les matrices colonnes – alors :

$$P(A)X_k = \sum_{m=0}^{d} a_m \; A^m X_k = \sum_{m=0}^{d} a_m \; z_k^m \cdot X_k = P(z_k) \cdot X_k.$$

On en déduit en appliquant l'endomorphisme $P(A)$ à la combinaison linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= P(A)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot P(A)X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot P(z_k) \cdot X_k. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de considérer les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_n$ associés aux complexes différents $z_1, \cdots, z_n$.
On obtient pour tout entier i entre 1 et n en utilisant le polynôme $P(U) = L_i(U)$:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot L_i(z_k) \cdot X_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{i,k} \cdot X_k = \lambda_i \cdot X_i.$$

Comme le vecteur X_i est non nul, nécessairement, le scalaire λ_i est nul.
La famille $\mathscr{F}$ est libre et donc forme une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On montre maintenant que chaque noyau $F_k = \mathrm{Ker}(A - z_k \cdot I_n)$ est de dimension 1.
En effet, on va montrer que la somme $\sum_{k=1}^{n} F_k$ est directe.
Pour ce faire, on considère pour tout entier k entre 1 et n, un vecteur Y_k dans F_k de telle sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = 0.$$

Comme $AY_k = z_k \cdot Y_k$, en calquant le début de démonstration, on obtient que pour tout polynôme $P(U) \in \mathbb{C}[U]$:

$$P(A)Y_k = P(z_k) \cdot Y_k,$$

puis en considérant le $i^{ème}$ polynôme de Lagrange :

$$\begin{aligned} 0 &= L_i(A)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} L_i(A) Y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} L_i(z_k) \cdot Y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} \cdot Y_k \\ &= Y_i. \end{aligned}$$

Par conséquent, la somme est bien directe et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bigstar \qquad \sum_{k=1}^{n}\Big(\dim(F_k) - 1\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k) - n \\ &= \dim\left(\bigoplus_{k=1}^{n} F_k\right) - n \\ &\leqslant \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})) - n \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

La somme $\bigstar$ est à termes positifs ou nuls, car chaque F_k n'est pas réduit à $\{0\}$, donc est de dimension au moins égale à 1.
La somme est nulle et chaque terme est nul. Chaque dimension de F_k vaut 1.

Le reste est facile à voir. En prenant P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{F}$, alors :

$$P^{-1}AP = \mathscr{M}at_{\mathscr{F}}(u_A)$$

est une matrice diagonale car pour tout entier k entre 1 et n, on a :

$$u_A(X_k) = z_k \cdot X_k.$$