

Problème n° 23 : Variables aléatoires

Correction du problème 1 – (d'après ESCP 2007)

Partie I –

1. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, X_i suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est $P(X_i = 1)$.
 Calculons $P(X_i = 1)$. Soit Y_i le nombre de boules dans l'urne i à l'issue de l'expérience. Il s'agit du nombre de succès lors d'une répétition de m expériences de Bernoulli indépendantes, consistant à mettre ou non une boule donnée dans l'urne i . La probabilité de succès est de $\frac{1}{n}$. Ainsi, Y_i suit une loi binomiale de paramètres $(m, \frac{1}{n})$, et

$$P(X_i = 1) = P(Y_i = 0) = \binom{m}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$, et par conséquent,

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right).$$

- (b) Soit i et j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si chaque boule est placée dans l'une des $n - 2$ autres boules. En raisonnant comme plus haut, et en notant $Z_{i,j}$ la variable aléatoire égale au nombre totale de boules dans les urnes i et j , $Z_{i,j}$ compte le nombre de succès dans une répétition de m expériences de Bernoulli indépendante, un succès (mettre la boule dans l'urne i ou dans l'urne j se produisant avec une probabilité de $\frac{2}{n}$). Ainsi, $Z_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{2}{n}\right)$, et

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = P(Z_{i,j} = 0) = \binom{m}{0} \left(\frac{2}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m,$$

donc :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

Les variables X_i et X_j admettent des variances en tant que variables de Bernoulli, donc le couple (X_i, X_j) admet une covariance.

La variable aléatoire $X_i X_j$, produit de deux variables de Bernoulli, prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc suit aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est $P(X_i X_j = 1)$. Or, X_i et X_j étant égaux à 0 ou à 1, leur produit vaut 1 si et seulement si chacune est égale à 1. Ainsi

$$P(X_i X_j = 1) = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $X_i X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right)$, donc $E(X_i X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$.

On a donc

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}.$$

On a

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^m = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m.$$

Or, puisque $n \geq 3$,

$$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2},$$

et donc, puisque $m \geq 4 > 0$,

$$0 < \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m < \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}.$$

On en déduit que $\text{cov}(X_i, X_j) < 0$, donc en particulier $\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$. Il en résulte que les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^n E(W_k) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $E(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$

(b) On a :

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} + n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - n(n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}, \end{aligned}$$

puisque le nombre de couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i < j$ est égal au nombre de sous-ensemble à 2 éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, à savoir $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ainsi,

$$V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m + n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

(c) Des résultats précédents on obtient

$$E(W_n) - V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m + n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m},$$

donc

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

En utilisant l'inégalité obtenue lorsque nous avons déterminé le signe de $\text{cov}(X_i, X_j)$, nous obtenons :

$$E(W_n) - V(W_n) > n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m > 0.$$

Ainsi $E(W_n) - V(W_n) \geq 0$ (l'inégalité est même stricte)

3. (a) On a ici, pour tout $n \geq 3$,

$$E(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor n \ln n + \theta n \rfloor} = \exp \left(\ln n + \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right).$$

Il existe une suite (u_n) bornée (à valeurs dans $[-1, 0]$)

$$\lfloor n \ln n + \theta n \rfloor = n \ln n + \theta n + u_n.$$

Un développement limité donne alors :

$$\begin{aligned}\ln n + \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \ln n + (n \ln n + \theta n + u_n) \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln n - \ln n + \frac{\ln n}{2n} - \theta + \frac{\theta}{2n} - \frac{u_n}{n} + \frac{u_n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) = -\theta + o(1),\end{aligned}$$

tous les autres termes étant de limite nulle.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n + \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\theta$, d'où, par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta}}.$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} = E(W_n)^2, \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} = e^{-2\theta}.$$

Par ailleurs, en adaptant un peu le calcul précédent,

$$\ln \left(n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right) = 2 \ln n + (n \ln n + \theta n + u_n) \left(-\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même que plus haut,

$$\ln \left(n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right) = -2\theta + o(1).$$

Par continuité de l'exponentielle, et du fait de l'équivalence $n^2 \sim n(n-1)$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = e^{-2\theta}.$$

On déduit alors de l'expression trouvée pour $E(V_n) - W(V_n)$, que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0}.$$

(c) **On admet** que pour tout k de \mathbb{N} , on a :

$$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq \min \left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n)).$$

Alors, puisque $\min \left(1, \frac{1}{\mu_n}\right)$ est majoré et que $(\mu_n - V(W_n))$ tend vers 0 d'après la question précédente, on obtient l'existence et la valeur des limites suivantes, d'après le théorème d'encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim |P(W_n = k) - P(T_n = k)| = 0.$$

Par ailleurs, étant donné $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T_n = k) = e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = P(T = k)$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(T_n = k) - P(T = k)| = 0.$$

Puisque par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|P(W_n = k) - P(T = k)| \leq |P(W_n = k) - P(T_n = k)| + |P(T_n = k) - P(T = k)|,$$

une nouvelle application du théorème d'encadrement nous donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = P(T = k)}.$$

Ainsi, la suite (W_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $e^{-\theta}$.

Partie II –

1. (a) • Soit $A = \emptyset$. Alors par convention $[M \in A] = \emptyset$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[M \in A] \cap [M \leq k] = \emptyset$. On a donc

$$P([M \in A]) = 0 \quad \text{et} \quad P([M \in A] \cap [M \leq k]) = 0$$

Ainsi, pour tout k de \mathbb{N} , $\boxed{f_{\emptyset}(k+1) = 0}$.

- Soit $A = \mathbb{N}$. Alors $[M \in A] = \Omega$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_{\mathbb{N}}(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} (P(\Omega \cap [M \leq k]) - P(\Omega)P([M \leq k])) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} (P([M \leq k]) - 1 \cdot P([M \leq k])),$$

et finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{f_{\mathbb{N}}(k+1) = 0}$.

- (b) • Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $0 \in A$. Alors si $[M \leq 0]$ est réalisé, $[M \in A]$ est réalisé. On a donc une inclusion $[M \leq 0] \subset [M \in A]$. Par conséquent

$$P([M \in A] \cap [M \leq 0]) = P(M \in A).$$

On en déduit que

$$f_A(1) = \frac{0!}{\lambda^1} e^{\lambda} (P(M \leq 0) - P(M \leq 0)P(M \in A)) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda} P(M \leq 0)(1 - P(M \in A)).$$

Puisque M est à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$P(M \leq 0) = P(M = 0) = e^{-\lambda},$$

donc

$$\boxed{f_A(1) = \frac{1}{\lambda}(1 - P(M \in A)) = \frac{1}{\lambda}P(M \in \overline{A})}.$$

- Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $0 \notin A$, c'est-à-dire $0 \in \overline{A}$. Alors, si $[M \leq 0]$ est réalisé, $[M \in A]$ ne peut pas être réalisé, donc $[M \in A] \cap [M \leq 0] = \emptyset$. On en déduit cette fois que

$$f_A(1) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda}(0 - P(M \in A)e^{-\lambda}),$$

et donc

$$\boxed{f_A(1) = -\frac{1}{\lambda}P(M \in A)}.$$

- Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$. Alors, de même que ci-dessus, $[M \leq 1] \subset [M \in A]$. Par conséquent,

$$f_A(2) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^2} (P(M \leq 2) - P(M \in A)P(M \leq 2)) = P(M \leq 2) \frac{e^{\lambda}}{\lambda^2} P(M \in \overline{A}).$$

Ainsi,

$$\boxed{f_A(2) = \frac{1 + \lambda}{\lambda^2} P(M \in \overline{A})}.$$

2. Soit A et B deux parties de \mathbb{N} disjointes.

- (a) On a :

$$[M \in A \cup B] = [M \in A] \cup [M \in B].$$

On a aussi :

$$[M \in A \cup B] \cap [M \leq k] = ([M \in A] \cup [M \in B]) \cap [M \leq k] = ([M \in A] \cap [M \leq k]) \cup ([M \in B] \cap [M \leq k]).$$

Comme A et B sont disjoints, les événements $[M \in A]$ et $[M \in B]$ sont incompatibles, sont aussi les événements $[M \in A] \cap [M \leq k]$ et $[M \in B] \cap [M \leq k]$. Il vient alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
f_{A \cup B}(k+1) &= \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} (P([M \in A] \cap [M \leq k]) \cup ([M \in B] \cap [M \leq k]) \\
&\quad - P([M \in A] \cup [M \in B])P(M \leq k)) \\
&= \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} (P([M \in A] \cap [M \leq k]) + P([M \in B] \cap [M \leq k]) \\
&\quad - (P(M \in A) + P(M \in B))P(M \leq k)) \\
&= \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P(M \in A)(M \leq k)) \\
&\quad + \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} (P([M \in B] \cap [M \leq k]) - P(M \in B)(M \leq k)) \\
&= f_A(k+1) + f_B(k+1).
\end{aligned}$$

On a bien obtenu, lorsque A et B sont disjoints, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$ (l'égalité $f_{A \cup B}(0) = f_A(0) + f_B(0)$ étant également trivialement vraie)

(b) En particulier, A et \overline{A} étant disjoints, et vérifiant l'égalité $A \cup \overline{A} = \mathbb{N}$, on obtient :

$$f_A + f_{\overline{A}} = f_{A \cup \overline{A}} = f_{\mathbb{N}} = 0 \quad \text{donc:} \quad f_{\overline{A}} = -f_A.$$

3. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$, et soit $k \in \mathbb{N}$

• Supposons que $k \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) &= \frac{k! e^\lambda}{\lambda^k} (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P(M \in A)P(M \leq k) \\
&\quad - P([M \in A] \cap [M \leq k-1]) + P(M \in A)P(M \leq k-1)) \\
&= \frac{k! e^\lambda}{\lambda^k} (P([M \in A] \cap [M = k]) - P(M \in A)P(M = k)),
\end{aligned}$$

car $[M \leq k-1] \subset [M \leq k]$, et $[M \leq k] \setminus [M \leq k-1] = [M = k]$, et de même avec l'intersection avec $[M \in A]$.

* Supposons que $k \in A$, alors $[M = k] \subset [M \in A]$, donc

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k! e^\lambda}{\lambda^k} P(M = k)(1 - P(M \in A)) = \frac{k! e^\lambda}{\lambda^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} P(M \in \overline{A}),$$

puisque M suit une loi de Poisson. Ainsi

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = P(M \in \overline{A}).$$

* Supposons que $k \in \overline{A}$. On applique le résultat qu'on vient d'établir à $f_{\overline{A}}$:

$$\lambda f_{\overline{A}}(k+1) - k f_{\overline{A}}(k) = P(M \in \overline{\overline{A}}) = P(M \in A).$$

Ainsi, puisque $f_{\overline{A}} = -f_A$, on obtient bien :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = -P(M \in A).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P(M \in \overline{A}) & \text{si } k \in A \\ -P(M \in A) & \text{si } k \in \overline{A}. \end{cases}$$

• Il reste donc à voir la propriété pour $k = 0$, ce qui découle de manière immédiate de la question II-1(b).

(b) Si A est non vide et distinct de \mathbb{N} , les probabilités $P([M \in A])$ et $P([M \in \overline{A}])$ ne sont pas nulles (sommes non vides de termes strictement positifs). Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) \neq 0,$$

ce qui ne serait pas possible si f_A était identiquement nulle. Donc f n'est pas identiquement nulle.

4. (a) • Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{k \geq j}$. Alors

$$[M \in \{j\}] \subset [M \leq k] \quad \text{donc:} \quad [M \in \{j\}] \cap [M \leq k] = [M \in \{j\}] = [M = j].$$

On obtient donc :

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P(M=j) - P(M=j)(M \leq k)) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda P(M=j)(1 - P(M \leq k)).$$

Ainsi, puisque $P(M=j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$, et d'après la formule du complémentaire,

$$\boxed{f_j(k+1) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(M \geq k+1)},$$

puisque $\overline{[M \leq k]} = [M > k] = [M \geq k+1]$.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{k < j}$. Alors l'événement $[M \in \{j\}] \cap [M \leq k]$ est impossible, donc

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (0 - P(M=j)(M \leq k)) \quad \text{donc:} \quad \boxed{f_j(k+1) = -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(M \leq k)}$$

(b) On a alors

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{j!}{j! \lambda} P(M \geq j+1) + \frac{(j-1)!}{j!} P(M \leq j-1) = \boxed{\frac{1}{\lambda} P(M \geq j+1) + \frac{1}{j} P(M \leq j-1) > 0}$$

(c) • Soit $k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(M \leq k) + \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-1-j+1}} P(M \leq k-1) \\ &= \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \left(\frac{\lambda}{k} P(M \leq k-1) - P(M \leq k) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\lambda}{k} P(M \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{k i!}.$$

Or, pour toute les valeurs possibles de l'indice i , on a $k \geq i+1$, et tous les termes sont positifs. Ainsi :

$$\frac{\lambda}{k} P(M \leq k-1) \leq \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} < \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = P(M \leq k).$$

On obtient donc :

$$\boxed{f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \left(\frac{\lambda}{k} P(M \leq k-1) - P(M \leq k) \right) < 0.}$$

• Soit $k \in \llbracket j+1, +\infty \rrbracket$. On a alors :

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(M \geq k+1) - \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-1-j+1}} P(M \geq k) \\ &= \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \left(P(M \geq k+1) - \frac{\lambda}{k} P(M \geq k) \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\lambda}{k} P(M \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda \cdot \lambda^i}{k \cdot i!} > \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1) \cdot i!} = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = P(M \geq k+1).$$

$$\text{Ainsi, on obtient : } \boxed{f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \left(P(M \geq k+1) - \frac{\lambda}{k} P(M \geq k) \right) < 0.}$$

Ainsi, la seule valeur de k pour laquelle $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive est celle trouvée dans la question précédente, à savoir $k = j$.

(d) On a alors :

$$\begin{aligned}
f_j(j+1) - f_j(j) &= \frac{1}{\lambda} P(M \geq j+1) + \frac{1}{j} P(M \leq j-1) \\
&= \frac{1}{\lambda} (1 - P(M \leq j)) + \frac{1}{j} P(M \leq j-1) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \sum_{i=0}^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \right) + \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=1}^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} + \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i+1)!} + \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} \right).
\end{aligned}$$

Or, pour tous les termes i considérés, on a $i+1 \leq j$, donc $\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} \geq 0$. Ainsi,

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Par ailleurs, l'exponentielle étant toujours positive, on a toujours $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$. Par ailleurs,

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - 1 = \frac{1 - \lambda - e^{-\lambda}}{\lambda},$$

et la fonction $\lambda \mapsto e^{-\lambda}$ étant convexe, sa courbe est située au dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 - x$. Ainsi, pour tout λ , $e^{-\lambda} \geq 1 - \lambda$. On en déduit que

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - 1 \leq 0 \quad \text{donc:} \quad \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq 1.$$

Des deux inégalités obtenues, on déduit :

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right)$$

5. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} P(M=0)(1 - P(M \leq k)) = \frac{e^{-\lambda} k!}{\lambda^{k+1}} P(M \geq k+1).$$

Ainsi

$$f_0(k+1) - f_0(k) = \frac{e^{-\lambda} k!}{\lambda^{k+1}} \left(P(M \geq k+1) - \frac{\lambda}{k} P(M \geq k) \right).$$

D'après le calcul fait en II-4(c),

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0$$

On complète ce résultat en remarquant que d'après 1(b),

$$f_0(1) - f_0(0) = f_0(1) - 0 = \frac{1}{\lambda} P(M > 0) > 0.$$

Ainsi, on a une propriété similaire à celle trouvée précédemment : $f_0(k+1) - f_0(k)$ est positif si et seulement si $k = 0$.

Ce résultat nous sera utile dans la question suivante.

6. (a) On a $A = \bigcup_{j \in A} \{j\}$, ces unions étant 2 à 2 disjointes. Ainsi, d'après la question II-2(a), on obtient :

$$f_A = \sum_{j \in A} f_j.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j \in A} f_j(k+1) - f_j(k).$$

- Soit $k \in A$. Alors, pour tout $j \in A \setminus \{k\}$, $f_j(k+1) - f_j(k) \leq 0$ d'après les questions 4(c) et 5. Ainsi, le seul terme positif dans la somme est celui correspondant à l'indice $j = k$, donc

$$f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k).$$

- Soit $k \in \overline{A}$. Alors, tous les termes de la somme précédente sont négatifs, donc

$$f_A(k+1) - f_A(k) \leq 0 \leq f_k(k+1) - f_k(k)$$

(inégalité également valable pour $k = 0$ d'après le complément apporté à la question précédente).

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_k(k+1) - f_k(k) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right),$$

et cette inégalité est encore valable pour $k = 0$, puisque, d'après le calcul fait en fin de question 5,

$$f_0(1) - f_0(0) = \frac{1}{\lambda} P(M > 0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right),$$

la dernière inégalité provenant de 4(d).

Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_A(k+1) - f_A(k) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right).$$

Ces inégalités étant valables pour tout A , on obtient, en l'appliquant avec \overline{A} :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{\overline{A}}(k+1) - f_{\overline{A}}(k) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right),$$

et donc, d'après 2(b), pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-f_A(k+1) + f_A(k) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right).$$

On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-\min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right) \leq f_A(k+1) - f_A(k) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{soit:} \quad |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right).$$

L'inégalité étant vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$, il en découle :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda} \right).$$

Partie III –

1. (a) La variable aléatoire X_i prend les seules valeurs 0 et 1. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X_i(\omega) = 0$, alors $X_i f(W_n)(\omega) = X_i f(1 + R_i)(\omega) = 0$
- Si $X_i(\omega) = 1$, alors $1 + R_i(\omega) = X_i(\omega) + R_i(\omega) = W_n(\omega)$, donc $f(W_n)(\omega) = f(1 + R_i)(\omega)$, donc $X_i f(W_n)(\omega) = X_i f(1 + R_i)(\omega)$.

On obtient l'égalité dans les deux cas possibles, donc $\boxed{X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i)}$.

(b) Ainsi,

$$E(X_i f(W_n)) = E(X_i f(1 + R_i)).$$

Or, R_i est la somme des variables X_j , pour $j \neq i$, et est donc indépendante de X_i (les variables X_1, \dots, X_n étant mutuellement indépendantes). Donc $1 + R_i$ et X_i sont indépendantes, donc aussi $f(1 + R_i)$ et X_i . Par conséquent :

$$E(X_i f(1 + R_i)) = E(X_i)E(f(1 + R_i)) = p_i E(f(1 + R_i)).$$

En mettant bout-à-bout les égalités trouvées, cela donne bien : $\boxed{E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i) &= E \left(\sum_{i=1}^n (p_i f(1 + W_n) - p_i f(1 + R_i)) \right) \\ &= E \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i \right) f(1 + W_n) \right) - \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + R_i)) \\ &= E(\lambda_n f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^n E(X_i f(W_n)) \\ &= E \left(\lambda_n f(1 + W_n) - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) f(W_n) \right) \\ &= E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)). \end{aligned}$$

On obtient bien la relation : $\boxed{E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i)}$.

3. (a) Soit ω tel que $X_i(\omega) = 1$. Alors $W_n(\omega) = R_i(\omega) + 1$, donc

$$Y_i(\omega) = f(1 + W_n)(\omega) - f(1 + R_i)(\omega) = f(2 + R_i)(\omega) - f(1 + R_i)(\omega).$$

Ainsi, sachant que $X_i = 1$ est réalisé, les variables Y_i et $f(2 + R_i) - f(1 + R_i)$ sont égales. Ainsi

$$E(Y_i \mid X_i = 1) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i) \mid X_i = 1),$$

et puisque R_i et X_i sont indépendantes,

$$\boxed{E(Y_i \mid X_i = 1) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}$$

(b) De la même façon, si $[X_i = 0]$ est réalisé, $W_n = R_i$, donc, de même qui ci-dessus :

$$\boxed{E(Y_i \mid X_i = 0) = E(f(1 + R_i) - f(1 + R_i)) = 0}.$$

(c) On en déduit, d'après la formule de l'espérance totale (il n'y a pas de problème de convergence, toutes les variables étant finies) :

$$E(Y_i) = P(X_i = 0)E(Y_i \mid X_i = 0) + P(X_i = 1)E(Y_i \mid X_i = 1) = p_i E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

On obtient alors, d'après l'égalité de la question 2,

$$\boxed{E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}.$$

4. D'après la partie II, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, et la croissance de l'espérance,

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 E(|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)|) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

On obtient bien :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

5. D'après la question II-3(a), si l'événement $[W_n \in A]$ est réalisé, $\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)$ prend la valeur constante $P(M \in \bar{A})$. Ainsi,

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n) \mid W_n \in A) = P(M \in \bar{A}).$$

De la même façon,

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n) \mid W_n \in \bar{A}) = -P(M \in A).$$

Ainsi, d'après la formule de l'espérance totale sur le système complet $([W_n \in A], [W_n \in \bar{A}])$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) &= P(M \in \bar{A})P(W_n \in A) - P(M \in A)P(W_n \in \bar{A}) \\ &= (1 - P(M \in A))P(W_n \in A) - P(M \in A)(1 - P(W_n \in A)). \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve bien :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]).$$

Le résultat de la question 4 permet alors de conclure que :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

6. (a) On a :

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}.$$

D'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1$$

et donc $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \ln 2.$

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i^2 = \frac{1}{(n+i)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc :

$$0 \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Par conséquent, on obtient l'existence et la valeur de la limite suivante, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0.$$

Attention à ne pas écrire $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i^2$ pour désigner cette limite, car les p_i dépendent chacun aussi de n , l'indice supérieur de la somme.

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} = e^{-\ln 2} \frac{(\ln 2)^k}{k!}.$$

Ainsi, M_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\ln 2$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons M une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \ln 2$. On a alors, en prenant $A = \{k\}$ dans l'inégalité de la question 5, et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |P(W_n = k) - P(M = k)| &\leq |P(W_n = k) - P(M_n = k)| + |P(M_n = k) - P(M = k)| \\ &\leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^n p_i^2 + |P(M_n = k) - P(M = k)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i^2 + |P(M_n = k) - P(M = k)|. \end{aligned}$$

Par les questions 6(a) et 6(b), on en déduit, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(W_n = k) - P(M = k)| = 0.$$

Ainsi, (W_n) converge en loi vers une variable de Poisson de paramètre $\ln 2$

Partie IV –

1. (a) Lorsque $[X_i = 1]$ est réalisé, W_n est égal à $R_i + 1$, donc $X_i f(W_n)$ est égal à $f(1 + R_i)$. Lorsque $[X_i = 0]$ est réalisé, $X_i f(W_n)$ prend la valeur 0. Ainsi,

$$E(X_i f(W_n) \mid X_i = 0) = 0 \quad \text{et} \quad E(X_i f(W_n) \mid X_i = 1) = E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1).$$

Ainsi, d'après le théorème de l'espérance total sur le système complet $([X_i = 0], [X_i = 1])$,

$$E(X_i f(W_n)) = E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1)P(X_i = 1) = p_i E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1]).$$

- (b) On adapte le raisonnement de la question III-2 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])] &= \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^n E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1) \\ &= \lambda_n E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^n E(X_i f(W_n)) \\ &= E\left(\lambda_n f(1 + W_n) - f(W_n) \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) \end{aligned}$$

La première égalité de la question III-5 est valable sans hypothèse d'indépendance. Par conséquent, on trouve :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])]$$

2. On suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{N} , telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$

- (a) Soit $(\ell, j) \in \mathbb{N}^2$. On peut supposer $\ell > j$, l'inégalité inverse en découlant facilement, et le cas d'égalité étant trivial. Soit donc $\ell > j$. On a

$$|f(\ell) - f(j)| = \left| \sum_{k=j}^{\ell-1} f(k+1) - f(k) \right| \leq \sum_{k=j}^{\ell-1} |f(k+1) - f(k)|,$$

d'après l'inégalité triangulaire. On déduit alors de la question II-6(b) que

$$|f(\ell) - f(j)| \leq \sum_{k=j}^{\ell-1} \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) = (\ell - j) \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) = |\ell - j| \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Ainsi, d'après la remarque faite en début de question, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels,

$$|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \times \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

La loi de Z_i étant égale à la loi conditionnelle de R_i sachant $X_i = 1$, on a :

$$E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1) = E(f(1 + Z_i)).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| &= \left| \sum_{i=1}^n p_i (E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + Z_i))) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i |E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + Z_i))| \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i E(|f(1 + W_n) - f(1 + Z_i)|). \end{aligned}$$

En utilisant la majoration trouvée en début de question et la croissance de l'espérance, il vient alors :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \sum_{i=1}^n p_i E\left(|W_n - Z_i| \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)\right),$$

et donc enfin :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

- (b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$. On a alors pour tout i , $W_n - Z_i \geq 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) &= \sum_{i=1}^n p_i (E(W_n) - E(R_i \mid X_i = 1)) = \sum_{i=1}^n E(X_i) E(W_n) - \sum_{i=1}^n p_i E(R_i \mid X_i = 1) \\ &= E(W_n) E(W_n) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} k p(X_i = 1) P(R_i = k \mid X_i = 1) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 \cdot P(R_i = k, X_i = 1) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^1 k \cdot \ell \cdot P(R_i = k, X_i = \ell) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^n E(X_i R_i), \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) &= E(W_n)^2 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n X_j - X_i\right)\right) \\ &= E(W_n)^2 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{i=1}^n X_i^2\right) \\ &= E(W_n)^2 - E(W_n^2) + \sum_{i=1}^n E(X_i^2). \end{aligned}$$

Or, le moment d'ordre 2 d'une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est p , donc

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = -V(W_n) + \sum_{i=1}^n p_i,$$

et donc finalement :

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n).$$

On déduit alors directement de cette égalité et de l'inégalité trouvée dans la question 2(a) que :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n)).$$