

Oral de Maths ULCR

Soit (G, \cdot) un groupe fini d'ordre n . On note $(*)$ la propriété :

$\forall d|n$, il existe au plus un sous-groupe de G d'ordre d .

1. Montrer que si G est cyclique, alors $(*)$ est vérifiée.
2. Montrer la réciproque.
3. Soit p un nombre premier, F_{p^n} un corps commutatif fini de cardinal p^n . Montrer que $(F_{p^n}^*, \cdot)$ est cyclique.
4. On suppose $p \geq 3$. Montrer que $X^4 + 1$ admet au moins une racine dans F_{p^n} .