MP*1

Problème

Chaînes de Markov homogènes finies

Dans tout le texte, d est un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des matrices

$$P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$$

de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout (i,j) de $\{1,\ldots,d\}^2$, $P_{i,j} \geq 0$;

- pour tout i de $\{1,\ldots,d\}$, $\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = 1$.

Pour k dans $\mathbb{N}$ et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M_{i,j}^k$ le coefficient de M^k situé à la ligne i et à la colonne j.

I. Matrices stochastiques

A. Généralités

1. Soit U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Si $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ est dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer que P est dans $\mathcal{S}_d$ si et seulement si $PU = U$ et si tous les $P_{i,j}$ sont dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_d$ est une partie compacte convexe de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ stable par produit.
3. Soit P dans $\mathcal{S}_d$. Montrer que les valeurs propres de P dans $\mathbb{C}$ sont de module au plus 1.
4. On note $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des vecteurs lignes

$$L = (\ell_1,\ldots,\ell_d)$$

où les ℓ_i sont dans $\mathbb{R}^+$ et de somme 1. Vérifier

$$\forall (L,P) \in \mathcal{M}_d \times \mathcal{S}_d, \qquad LP \in \mathcal{M}_d.$$

B. Convergence en moyenne de Cesàro

Soit P dans $\mathcal{S}_d$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad Q_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P^k.$$

5. a) Soit X dans $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. Étudier la convergence de $(Q_n X)_{n\geq 0}$ pour X dans $\mathrm{Ker}(P - I_d)$, puis pour X dans $\mathrm{Im}(P - I_d)$.

b) Montrer
$$\mathbb{R}^d = \mathrm{Ker}(P - I_d) \oplus \mathrm{Im}(P - I_d).$$

c) Conclure que la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ converge vers la matrice Q canoniquement associée au projecteur de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathrm{Ker}(P - I_d)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(P - I_d)$.

d) Justifier les égalités :
$$PQ = QP = Q.$$

6. a) Vérifier que, si L est dans $\mathcal{M}_d$, il en est de même de LQ_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que, si P est dans $\mathcal{S}_d$, alors l'ensemble $\mathrm{Inv}(P)$ des vecteurs lignes L appartenant à $\mathcal{M}_d$ tels que $LP = L$ est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^d$. Pour le caractère non vide, on pourra utiliser les questions 5.c) et 5.d).

c) On suppose que $\mathrm{Inv}(P)$ est un singleton $\{L\}$. Pour X dans $\mathcal{M}_d$, que dire de la suite $(XQ_n)_{n\geq 0}$?

II. CMH ergodiques, irréductibles

Soit E l'ensemble
$$E = \{1, \ldots, d\}.$$

Si μ est une loi de probabilité sur E, on pose
$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \qquad \mu_i = \mu(\{i\})$$

et on identifie μ à l'élément de $\mathcal{M}_d$:
$$(\mu_1, \ldots \mu_d)\,.$$

Une *chaîne de Markov d'ensemble d'états E* est une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E telle que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et $(x_0, \ldots, x_n)$ dans E^{n+1}, on ait :
$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

La chaîne est dite *homogène* s'il existe une matrice $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (i,j) \in E^2, \qquad P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P_{i,j}.$$

On dit que *P est la matrice associée à la chaîne* $(X_n)_{n\geq 0}$ et que les $P_{i,j}$ sont les probabilités de transition de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. On abrège « chaîne de Markov homogène » en « CMH ».

Dans cette partie, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une CMH d'ensemble d'états E et de matrice P. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit π_n le vecteur ligne associé à la loi de X_n :

$$\pi_n = (P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = d)).$$

A. Généralités

7. a) Vérifier que P est dans $\mathcal{S}_d$.

   b) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \quad \text{et} \quad \pi_n = \pi_0 P^n.$$

8. a) Une loi de probabilité sur E de vecteur ligne μ est dite *P-invariante* si, dès que X_0 a pour loi μ, il en est de même de X_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Montrer que cette condition équivaut à

$$\mu \in \mathrm{Inv}(P).$$

   b) La matrice P est dite *ergodique* si $\mathrm{Inv}(P)$ est un singleton. On note alors

$$(\mu_1, \ldots, \mu_d)$$

   l'unique élément de cet ensemble. On suppose que P est ergodique. Pour $1 \leq i, j \leq n$, que peut-on dire de la suite de terme général :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_{i,j}^k \ ?$$

   Exprimer la matrice Q à l'aide des μ_j, $1 \leq j \leq d$.

   c) On suppose que l'espace propre de P associé à la valeur propre 1 est la droite $\mathbb{R}U$. Déterminer le rang de ${}^tP - I_d$ et montrer que P est ergodique.

9. On suppose

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

   Montrer que P est ergodique et déterminer la loi invariante..

10. On suppose que P est bistochastique, i.e. que ${}^tP$ est également dans $\mathcal{S}_d$. Montrer que la loi uniforme sur E est invariante.

B. Irréductiblité

11. On définit la relation d'*accessibilité* $\rightarrow$ sur E par

$$i \rightarrow j \iff \exists m \in \mathbb{N}^*,\ P_{i,j}^m > 0.$$

On dit que P est *irréductible* si

$$\forall (i,j) \in E^2, \qquad i \to j.$$ [1]

a) Montrer que, si P est irréductible, l'espace propre de P associé à la valeur propre 1 est la droite $\mathbb{R}U$: P est donc ergodique.

b) Montrer que, si P est irréductible, la loi invariante de P charge tous les états, c'est-à-dire que, si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ est l'élément de $\mathcal{M}_d$ associé à la loi invariante, alors :

$$\forall j \in E, \qquad \mu_j > 0.$$

12. Montrer que, si P est ergodique et si la loi invariante de P charge tous les états, alors P est irréductible.

13. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{S}_d$ ergodique mais non irréductible.

III. Loi invariante et premier retour

A. Un résultat sur les séries entières

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que la série entière $\sum u_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

14. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

15. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose

$$v_n \underset{n \Rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \underset{x \to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

1. Pour bien se représenter la situation : on peut associer à P un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est E et en considérant qu'il y a una arête allant de i vers j si $P_{i,j} > 0$. L'irréductibilité de P revient à la connexité de ce graphe.

B. Identification de la loi invariante

Dans cette partie, on fixe i dans E et on suppose que

$$P(X_0 = i) = 1.$$

On note T_i la variable aléatoire égale à $+\infty$ si l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_n = i\}$$

est vide, au plus petit élément de cet ensemble sinon.

16. a) Justifier la définition des fonctions f et g définies respectivement sur $]-1,1[$ et $[-1,1]$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{i,i}^n x^n,$$

$$\forall x \in [-1,1], \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_i = n) x^n.$$

Justifier que f et g sont de classe C^∞ sur $]-1,1[$, que g est continue sur $[-1,1]$.

b) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\{1,\ldots,n\}$:

$$P(T_i = k, X_n = i) = P_{i,i}^{n-k}\, P(T_i = k).$$

En déduire :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = 1 + f(x)g(x).$$

17. On suppose que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle telle que la série entière

$$\sum a_n x^n$$

ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour x dans $]-1,1[$, soit $f(x)$ la somme de cette série entière. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

a) Montrer, pour x dans $]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

b) On suppose que λ est un nombre réel tel que :

$$A_n \underset{n\to+\infty}{=} \lambda n + o(n).$$

Montrer

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{=} \frac{\lambda}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Donner un résultat analogue pour $f'(x)$.

18. On suppose que P est un élément de $\mathcal{S}_d$ irréductible, on note $(\mu_1, \dots \mu_d)$ l'élément de $\mathcal{M}_d$ associé à la loi invariante de P.

a) Démontrer :

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{=} \frac{\mu_i}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

b) Démontrer :

$$P(T_i < +\infty) = 1.$$

c) Montrer

$$E(T_i) = \frac{1}{\mu_i}\,{}^2$$

C. Applications

19. Soient p dans $]0,1[$, $q = 1-p$. Un promeneur se déplace sur un polygone régulier à d sommets. À chaque étape, il choisit de se déplacer vers le sommet adjacent à celui où il se trouve et situé « après » (resp. « avant ») dans le sens direct, avec probabilité p (resp. q). Quel est le temps moyen de retour à la position initiale ?

20. *Marche aléatoire sur un graphe connexe*
Soit G un graphe connexe non orienté. On note $V = \{v_1, \dots, v_d\}$ l'ensemble des sommets de G. Pour i dans $\{1, \dots, d\}$, soit $|v_i|$ le nombre de sommets reliés à v_i. Un promeneur parcourt G. Arrivé en v_i, il choisit sa destination de manière équiprobable parmi les $|v_i|$ sommets reliés à v_i. Montrer que, si le promeneur part du sommet v_i le temps moyen qu'il met pour y revenir est [3]

$$\frac{\sum_{j\in V} |v_j|}{|v_i|}.$$

21. *Urne d'Ehrenfest macroscopique*
Une urne contient m boules, réparties dans deux compartiments. À un instant donné, on choisit une boule uniformément parmi les m et on la change de compartiment. On note X_n le nombre de boules dans le premier compartiment à l'instant n.

a) Vérifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et écrire la matrice P de cette chaîne.

b) Montrer que P est irréductible.

c) Déterminer la loi invariante de P.

---

2. Ce résultat assez naturel peut être justifié de manière plus probabiliste.

3. Application ludique : un cavalier se déplace aléatoirement sur un jeu d'échec. Il lui faut en moyenne 168 mouvements pour revenir à sa position initiale. Vous pouvez aussi essayer le Monopoly.

d) On suppose que le premier compartiment contient initialement i boules. Déterminer le temps moyen nécessaire pour revenir à cet état. Comment ce temps moyen dépend-il de i ?[4]

22. *Marche aléatoire sur un groupe*

Soient $(G, .)$ un groupe fini de neutre e, Y et Y_0 deux variables aléatoires à valeurs dans G, $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. dont tous les éléments suivent la loi de Y. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = Y_n \dots Y_1 Y_0.$$

a) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la matrice associée P est bistochastique.

b) Montrer que P est irréductible si et seulement si

$$\{g \in G\ ;\ P(Y = g) > 0\}$$

engendre G. Que déduit-on dans ce cas de la question 18.c) ? Retrouver le résultat de la question 19.

IV. Matrices stochastiques strictes

On note $\mathcal{S}_d^+$ l'ensemble des P de $\mathcal{S}_d$ qui possèdent la propriété suivante : il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de P^m appartiennent à $\mathbb{R}^{+*}$.

23. Soit P dans $\mathcal{S}_d^+$.

a) Montrer que le sous-espace propre de P pour la valeur propre 1 est la droite dirigée par u.

b) Montrer que 1 est une racine simple de χ_P.

c) Montrer que, si λ est une valeur propre complexe de P autre que 1, alors $|\lambda| < 1$.

24. Soit P dans $\mathcal{S}_d^+$. Conformément à l'étude précédente, on écrit

$$\chi_P = \prod_{j=0}^{d-1} (X - \lambda_j)$$

4. Ce modèle a été proposé en 1907 par Paul et Tatiana Ehrenfest pour lever un paradoxe. La croissance de l'entropie tend à indiquer une convergence vers un état d'équilibre (Boltzmann). Or, la réversibilité des lois physiques va dans le sens contraire (objection de Zermelo). Dans le modèle précédent, on peut bien, en théorie, observer tous les états (convergence au sens de Cesàro vers la loi invariante, qui charge tous les états), mais ce n'est pas le cas en pratique, les états « extrêmes » n'étant en moyenne atteints qu'en un temps très long. Pour être entièrement convaincant, il faudrait -c'est possible- estimer le temps moyen (gigantesque) pour passer d'un état à peu près équilibré à un état extrême et celui (raisonnable) pour passer d'un état extrême à un état à peu près équilibré.

avec $\lambda_0 = 1$ et
$$1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{d-1}|.$$

Soit ρ un élément de $]|\lambda_1|, 1[$. Avec les notations de la partie **I**, montrer que :
$$P^n \underset{n\to+\infty}{=} Q + O(\rho^n).$$

25. Soit P dans $\mathcal{S}_d$. Montrer que P est dans $\mathcal{S}_d^+$ si et seulement si P est irréductible et $(P^n)_{n\geq 0}$ convergente[5].

5. On peut encore démontrer que ces conditions équivalent au fait que, pour un état i donné (et alors pour tous), le p.g.c.d. des éléments de l'ensemble
$$\{n \in \mathbb{N}^* \; ; \; P_{i,i}^n > 0\}$$
soit égal à 1. On dit alors que P est irréductible et apériodique