Maths L Victor Dubois

1 Exercice

$\forall n \in \mathbb{N}$, on nomme $Z_n = \{\sigma \in S_{2n+1} \mid \sigma \text{ zigzagante}\}$. Une permutation σ zigzagante de S_{2n+1} vérifie (avec les notations de l'examinateur) :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) \cdots > \sigma(2n+1)$$

Autrement dit, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\sigma(2k+1) < \sigma(2k+2)$ et $\sigma(2k+3) < \sigma(2k+2)$.

On nomme $T_n = |Z_n|$. L'objectif de l'exercice est de calculer T_n en étudiant la série entière :

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1.1 Déroulé de l'exercice

Examinateur totalement perché (je suis passé en dernier, un samedi) qui a totalement oublié les conventions de l'oral. Il me laisse justifier que la série possède un rayon non nul (tout d'abord, comme $T_n \leq |S_n|$, $R \geq 1$), commencer un encadrement de F et se plaint d'avoir dû attendre 5 minutes pour me dire que non, un encadrement ne me permettrait jamais de calculer T_n, et que si, mon idée d'étudier une possible relation de récurrence pour T_n est faisable, et que c'est la bonne, même si « effectivement, cette relation sera horrible ».

Il me demande de tracer le graphe d'une permutation zigzagante pour se faire une idée, et il m'annonce qu'on va trouver la relation de récurrence non pas en considérant les dernières valeurs de σ, mais en considérant son maximum.

Le maximum de σ est nécessairement atteint en un entier pair $2k$, et en découpant la permutation autour de celui-ci, on obtient deux permutations zigzagantes. Evidemment, celles-ci ne peuvent prendre les mêmes valeur (σ bijective), il suffit donc de choisir quelles valeurs « iront à gauche »(seront dans l'image de la permutation de gauche), les autres « iront à droite », puis choisir les deux permutations zigzagantes de gauche et de droite. On aboutit à la relation :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} T_{k-1} T_{n-k}$$

En réijectant l'expression dans la série entière (il faut penser à mettre le premier coefficient de côté), en arrangeant les termes et en dérivant, il vient que :

$$(E) : F'(x) = 1 + F(x)^2 \quad \forall x \in]-1;1[$$

Alors, d'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz non linéaire ($F(0) = 0$), comme tan est solution de (E), $F(x) = \tan(x)$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Par le théorème d'unicité des séries entières, comme tan est DSE de rayon $R = \frac{\pi}{2}$, on exprime T_n en fonction des coefficients de la série de tan.

1.2 Question bonus

Comment se comporte la probabilité de tomber sur une permutation zigzagante lorsque n tend vers l'infini ?

On montre que :

$$\frac{T_{n+1}}{(2n+1)!} \frac{(2n)!}{T_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

Par conséquent, la probabilité $\frac{T_n}{(2n+1)!}$ se comporte à peu près comme une série géométrique de raison $\frac{2}{\pi}$.

2 Commentaire général

L'examinateur avait un sens de la rigueur inexistant, puisqu'il m'a forcé à « avancer, sinon on finira jamais l'exo », j'aurais bien aimé voir un prof de spé s'insurger devant cet oral. Voici quelques citations (de mémoire) qui, je l'espère, vous laisseront entrevoir toute l'ambiance de cet oral, qui était très amusant :

— « Faites un dessin, comme ça vous n'aurez pas besoin de justifier la relation de récurrence ».
— « Attention, votre relation n'est valable que pour $n \geq 2$, faites sortir le 1. Ah bon, c'est un "x" ? Ah merde ...Euh pardon, mince. »
— « Ah, vous justifiez encore les interversions de sommes infinies ? »
— « Oui, les indices sont pénibles, mais on a bien ce résultat, c'est pas intéressant de vérifier et j'ai fait le calcul, ça marche. »
— « Cauchy-Lipschitz non linéaire ? Vous différenciez encore les deux ? Non mais ça fonctionne pareil, utilisez-le à votre guise, c'est du cours tout ça. »
— « Bah comme tan est définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, on admet facilement que c'est son rayon de convergence. »
— « Effectivement, c'est une série lacunaire, mais ça marche pareil, c'est une sorte de réciproque de d'Alembert, le rapport des termes généraux converge vers $\frac{2}{\pi}$, j'ai fait le calcul, ça marche. »

On notera donc que d'Alembert admet une réciproque : si le rayon de la série est non nul, alors le rapport des termes généraux (ceux qui se succèdent, si la série est lacunaire) converge vers l'inverse du rayon.