Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Samedi 12/12/2020

Devoir Surveillé n° 4 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Problème – Groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$.

Le but de ce problème est d'introduire la notion de groupe fondamental d'un espace topologique X : il s'agit d'une quantité algébrique indépendante par « déformation » de l'espace topologique, qui peut donc être utilisé pour classifier les espaces topologies suivant leur géométrie.

Plus précisément, on définit et on calcule dans ce problème $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$, le groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$. Les parties I à IV ont pour but de faire ce calcul (ce calcul s'entend « à isomorphisme près » : il s'agit donc de trouver un groupe classique isomorphe à $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$). La partie V donne une jolie et rapide démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss basée sur les techniques introduites dans les quatre premières parties. Elle ne dépend que des parties II et III. La partie VI est un complément donnant, dans le cas $\mathcal{C}^1$, une description plus explicite (intégrale) de l'indice d'un lacet défini plus généralement lors de la partie II. Cette partie ne dépend que des résultats de la partie II.

Rappels sur les groupes

Les connaissances requises sur les groupes sont minimes ; elles se limitent aux définitions suivantes, qu'on rappelle :

- *Un groupe $(G, \times)$ est un ensemble G muni d'une loi interne $\times$ (c'est-à-dire une opération définie pour tout $(g, h) \in G^2$, telle que $g \times h \in G$), telle que :*
  - *la loi $\times$ est associative : pour tout $(g, h, k) \in G$, $(g \times h) \times k) = g \times (h \times k)$;*
  - *G admet un élément neutre e vérifiant $e \times g = g \times e = g$ pour tout $g \in G$;*
  - *Tout élément $g \in G$ admet un inverse g^{-1} tel que $g \times g^{-1} = g^{-1} \times g = e$.*
- *Si $(G, \times)$ et $(H, \star)$ sont deux groupes, une application $f : G \to H$ est un morphisme de groupes si et seulement si pour tout (g_1, g_2) dans G^2,*
$$f(g_1 \times g_2) = f(g_1) \star f(g_2).$$
- *Un isomorphisme de groupes est un morphisme bijectif.*
- *On admettra sans justification que $\mathbb{Z}$ muni de l'addition usuelle est un groupe.*

Rappels et compléments sur les fonctions continues

- *On rappelle la définition générale de la continuité entre deux espaces métriques : si (E, d_E) et (F, d_F) sont deux espaces métriques, $f : E \to F$ est continue en $x \in E$ si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0, \quad \forall y \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
- *On rappelle également que f est uniformément continue sur E si*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
Ainsi, le module de continuité η, qui dépend de ε, peut dans ce cas être choisi indépendamment de x.
- *On admettra le résultat suivant, généralisant le théorème de Heine, vu dans le cours pour les fonctions de la variable réelle :*
Théorème. Soit $f : [0,1]^2 \to F$ une fonction de deux variables définie sur le pavé $[0,1]^2$. Si f est continue sur $[0,1]^2$, alors elle est uniformément continue.

- *On rappelle qu'une fonction $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ à valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est continue si et seulement si f_1 et f_2 le sont (on l'avait évoqué en parlant de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$).*
- *On admettra la continuité sur leur domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}^2$) de tous les polynômes et de toutes les fractions rationnelles en deux variables x et y.*
- *On admettra la propriété de composition suivante : si H est une application continue sur $[0,1]^2$ et si $(t,x) \mapsto f(t,x)$ et $(t,x) \mapsto g(t,x)$ sont deux applications continues à valeurs dans $[0,1]$, alors $(t,x) \mapsto H(f(t,x), g(t,x))$ est continue.*

Définitions

- *Un lacet γ de $\mathbb{C}^*$ est une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.*
- *On dira que le lacet est basé en $z_0 \in \mathbb{C}^*$ (ou est de base z_0) si $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$. Le point z_0 sera appelé point base de γ. On note $\mathcal{L}_{z_0}$ l'ensemble des lacets de $\mathbb{C}^*$ basés en z_0.*
- *Deux lacets γ_0 et γ_1 basés en z_0 sont dits homotopes (ou plus précisément strctement homotopes) s'il existe une application* <u>continue</u> *$H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ telle :*
  - $\forall t \in [0,1]$, $H(t,0) = \gamma_0(t)$
  - $\forall t \in [0,1]$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$
  - $\forall x \in [0,1]$, $H(0,x) = H(1,x) = z_0$.

  La continuité de H est définie avec la distance euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$. On dira que H est une homotopie de γ_0 vers γ_1. Ainsi, une homotopie est une transformation continue du lacet γ_0 vers le lacet γ_1.
- *On notera $\gamma_0 \underset{H}{\sim} \gamma_1$ lorsqu'il existe une homotopie de γ_0 à γ_1.*

Dans tout le problème, on se donne $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Questions préliminaires

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ une application continue. Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est également continue.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-ensembles fermés de $[0,1]^2$ tels que $\bigcup_{i \in I} F_i = [0,1]^2$. Soit $H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$.

   On suppose que pour tout $i \in I$, $H_{|F_i}$ est continue. Montrer que H est continue sur $[0,1]^2$.

En vue d'utiliser cette propriété, on pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une portion du plan définie par un système d'inéquations affines ***larges*** *est un fermé.*

Partie I – Lacets, homotopie et groupe fondamental

1. **Produit de lacets**

   Soit γ_1 et γ_2 deux lacets de $\mathcal{L}_{z_0}$. On note $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ l'application définie sur $[0,1]$ par :

   $$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   Montrer que $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est un élément de $\mathcal{L}_{z_0}$.
2. **La relation d'homotopie**

   (a) Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{z_0}$. Montrer que $\gamma \underset{H}{\sim} \gamma$

   (b) Soit γ_0, γ_1 dans $\mathcal{L}_{z_0}$ tels que $\gamma_0 \underset{H}{\sim} \gamma_1$. Montrer que $\gamma_1 \underset{H}{\sim} \gamma_0$.

   (c) Soit $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ trois lacets dans $\mathcal{L}_{z_0}$, et H_1 une homotopie de γ_0 à γ_1 et H_2 une homotopie de γ_1 à γ_2. On définit H sur $[0,1]^2$ par :

   $$H(t,x) = \begin{cases} H_1(t, 2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(t, 2x-1) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   Montrer que H est une homotopie de γ_0 à γ_2.

   (d) Que peut-on déduire des trois questions précédentes pour la relation $\underset{H}{\sim}$?
3. **Le groupe fondamental $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$**

   On note $\Pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathcal{L}_{z_0} / \underset{H}{\sim}$ le quotient de l'ensemble des lacets basés en z_0 par la relation d'homotopie $\underset{H}{\sim}$. On note $\overline{\gamma}$ la classe (d'homotopie) d'un lacet γ dans $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$.

(a) Soit $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0', \gamma_1'$ quatre lacets de $\mathcal{L}_{z_0}$. En s'inspirant des constructions des questions précédentes, montrer que si $\gamma_0 \underset{H}{\sim} \gamma_0'$ et $\gamma_1 \underset{H}{\sim} \gamma_1'$, alors $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \underset{H}{\sim} \gamma_0' \cdot \gamma_1'$.
Ainsi, le produit des lacets passe au quotient et définit une loi, encore notée $\cdot$, sur $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$.

(b) Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{x_0}$ et e le lacet de $\mathcal{L}_0$ constant de valeur z_0. À l'aide de H définie sur $[0,1]^2$ par :

$$H(t,x) = \begin{cases} z_0 & \text{si } 0 \leqslant t < \frac{1}{2}(1-x) \\ \gamma\left(\frac{2}{x+1}\left(t - \frac{1}{2}(1-x)\right)\right) & \text{si } \frac{1}{2}(1-x) \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

montrer que $e \cdot \gamma \underset{H}{\sim} \gamma$.

(c) Montrer par une construction similaire que $\gamma \cdot e \underset{H}{\sim} \gamma$

(d) En définissant cette fois H en trois morceaux, montrer que si γ_1, γ_2 et γ_3 sont trois lacets basés en x_0, $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \underset{H}{\sim} \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot g_3)$.
Indication : *les deux lacets diffèrent essentiellement de la part de l'intervalle I attribuée au parcours de chacun des sous-lacets $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. L'homotopie à construire doit décaler et dilater petit à petit ces parts pour passer d'un partage à l'autre.*

(e) Soit γ un lacet de $\mathcal{L}_{z_0}$. On définit le lacet γ^{-1} sur $[0,1]$ par : $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.
Montrer que $\gamma \cdot \gamma^{-1} \underset{H}{\sim} e$ et $\gamma^{-1} \cdot \gamma \underset{H}{\sim} e$

(f) En déduire que $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$ est un groupe (appelé groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$)

Partie II – Théorème de relèvement et indice d'un lacet

Soit $z_0' \in \mathbb{U}$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_0' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}$.
Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant (appelé théorème de relèvement) : si $f : [0,1] \to \mathbb{U}$ est une application continue telle que $f(0) = z_0'$, alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(0) = \theta_0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{f}(t)}$. On dit alors que $\tilde{f}$ est un relèvement continu de f tel que $\tilde{f}(0) = \theta_0$.
Autrement dit, on recherche une fonction continue $\tilde{f}$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{U} \end{tikzcd}$$

1. **Théorème de relèvement.**
On se donne une application $f : [0,1] \to \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On définit $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$, et $\mathbb{U}_4$ les quatre sous-ensembles de $\mathbb{U}$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_1 &= \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}, \\ \mathbb{U}_2 &= \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}, \\ \mathbb{U}_3 &= \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}, \\ \mathbb{U}_4 &= \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que les fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont continues sur $\mathbb{C}$.

(b) Soit φ_1 la bijection $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{U}_1$ définie par $\varphi_1(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$ et ξ_1 sa réciproque. Montrer que ξ_1 est continue. On pourra pour ce faire exprimer $\xi_1(z)$ à l'aide de la fonction Arctan, et de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

(c) Adapter cet argument sur les autres portions $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

(d) Montrer qu'il existe un entier n et des réels

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = 1$$

tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $\ell \in [\![1, 4]\!]$ tel que $f([\sigma_k, \sigma_{k+1}]) \subset \mathbb{U}_\ell$.
On pourra pour cela utiliser le théorème de Heine.

(e) En déduire l'existence d'un relèvement continu $\tilde{f}$ de f tel que $\tilde{f}(0) = \theta_0$.

(f) En considérant l'image de l'intervalle $[0,1]$ par $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$, montrer que si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux relèvements continus de f tels que $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = \theta_1$, alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

2. **Indice d'un lacet**

(a) Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{z_0}$. On note $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}$. On définit $\psi_\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ par

$$\psi_\gamma(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Montrer que ψ_γ est continue.

(b) On note $\tilde{\psi}_\gamma$ le relèvement continu de ψ_γ tel que $\tilde{\psi}_\gamma(0) = \theta_0$. On définit l'indice du lacet γ par :

$$\mathrm{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi}_\gamma(1) - \tilde{\psi}_\gamma(0)).$$

Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma)$ est indépendant du choix de θ_0 modulo 2π.

(c) Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

(d) Soit, pour $n \in \mathbb{Z}$, γ défini sur $[0,1]$ par $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi n t}$. Déterminer $\mathrm{Ind}(\gamma)$.

Intuitivement, et par définition même, l'indice d'un lacet γ correspond donc au nombre de tours qu'il effectue autour de l'origine (chaque tour effectué dans un sens amenant un décalage de 2π sur l'argument, donc sur le relèvement)

Partie III – Invariance de l'indice par homotopie

On montre dans cette partie que l'indice d'un lacet est invariant par homotopie. En d'autres termes, si deux lacets γ_0 et γ_1 sont homotopes, alors $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1)$.
On définit, pour deux applications $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, la distance d_∞ par :

$$d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{t\in[0,1]} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

On ne demande pas de montrer qu'il s'agit bien d'une distance sur l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C}^*)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}^*$. Cela définit en particulier la distance entre deux lacets.
On se donne γ_0 et γ_1 deux lacets tels qu'il existe une homotopie H de γ_0 à γ_1. On définit, pour tout $x \in [0,1]$, le lacet γ_x par $\gamma_x(t) = H(t,x)$. On note $\Phi : [0,1] \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $\Phi(x) = \mathrm{Ind}(\gamma_x)$.

1. Montrer que $x \mapsto \gamma_x$ est continue de $[0,1]$ (avec la distance usuelle) dans $\mathcal{L}_{z_0}$ (avec la distance d_∞).

2. On utilise les notations de la partie II.

(a) Soit γ et ζ deux lacets de $\mathcal{L}_{z_0}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$|\psi_\gamma(t) - \psi_\zeta(t)| \leqslant \frac{1}{|\gamma(t)|}\left(|\gamma(t) - \zeta(t)| + \big||\zeta(t)| - |\gamma(t)|\big|\right).$$

(b) En déduire que l'application $\gamma \mapsto \psi_\gamma$ est continue sur l'ensemble des lacets (pour la distance d_∞ au départ et à l'arrivée).

3. (a) Soit ψ_1 et ψ_2 deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{U}$, et $t \in [0,1]$. Montrer que si δ est suffisamment petit, on a :

$$|\psi_2(t) - \psi_1(t)| < 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \Longrightarrow |\tilde{\psi}_2(t) - \tilde{\psi}_1(t)| \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi - \delta, 2k\pi + \delta[.$$

Indication : *On pourra calculer, pour δ assez petit, la longueur de la corde du cercle trigonométrique définit par un angle δ.*

(b) En déduire que $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ est continue de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{U})$ dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, pour les distances d_∞ au départ et à l'arrivée.

4. En déduire que Φ est continue.

5. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1)$

Partie IV – Groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$

Ainsi, Ind *passe au quotient et définit une application* $\alpha : \Pi_1(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{Z}$.

1. Justifier que α est surjective.
2. Montrer que α est un morphisme de groupe.
3. Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{z_0}$. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma) = 0$ si et seulement si $\gamma \underset{H}{\sim} e$.
4. En déduire que α est un isomorphisme

Partie V – Application : une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

Dans cette partie, on utilise l'invariance de l'indice d'un lacet par homotopie pour démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss, affirmant qu'un polynôme à coefficients complexes de degré au moins 1 *admet toujours une racine dans* $\mathbb{C}$*. On raisonne par la contraposée en se donnant un polynôme* P *à coefficients complexes, de degré* n *et sans racine complexe, qu'on peut, sans perte de généralité, supposer unitaire. On note alors* $P = X^n + Q$*, où* Q *est un polynôme de degré strictement inférieur à* n*.*

Pour tout polynôme R *tel que pour tout* $z \in \mathbb{U}$, $R(z) \neq 0$*, on définit :* $\gamma_R : t \mapsto \dfrac{R(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t})}{R(1)}$.

1. Justifier que pour tout polynôme R tel que R ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$, γ_R est un élément de $\mathcal{L}_1$, c'est-à-dire un lacet de $\mathbb{C}^*$ de point base 1.
2. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout nombre complexe z de module r, on ait $|z^n| > |Q(z)|$. On se donne un tel r.
3. Pour $x \in [0, 1]$, on note P_x le polynôme défini par $z \mapsto P_x(z) = P(xrz)$. Que vaut $\mathrm{Ind}(\gamma_{P_0})$? En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma_{P_1}) = 0$.
4. On définit pour tout $x \in [0, 1]$, le polynôme Q_x par : $Q_x(z) = (rz)^n + xQ(rz)$.
   Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$, Q_x ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$, et montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma_{Q_1}) = n$.
5. Conclure.

Partie VI – Complément : expression intégrale de l'indice d'un lacet de classe $\mathcal{C}^1$

On reprend les notations de la partie II.

Soit γ *un lacet de classe* $\mathcal{C}^1$*. On note* γ_r *et* γ_i *les parties réelle et imaginaire respectivement du lacet* γ *:*

$$\forall t \in [0, 1],\ \gamma_r(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t)) \qquad \textit{et} \qquad \gamma_i(t) = \mathrm{Im}(\gamma(t)).$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) = \frac{\gamma_r'(t)\gamma_r(t) + \gamma_i'(t)\gamma_i(t)}{\gamma_r^2(t) + \gamma_i^2(t)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) = \frac{\gamma_r(t)\gamma_i'(t) - \gamma_i(t)\gamma_r'(t)}{\gamma_r^2(t) + \gamma_i^2(t)}$$
2. En déduire que $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.
3. Soit $[a, b] \subset [0, 1]$ un intervalle tel que $\psi_\gamma([a, b]) \subset \mathbb{U}_1$. Exprimer par un calcul similaire $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right)$ avec la fonction Arctan, et en déduire que
$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) \equiv \arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))\ [2\pi].$$
4. Géraliser rapidement ce calcul lorsque $\psi_\gamma([a, b]) \subset \mathbb{U}_k$, $k \in [\![1, 4]\!]$ et en déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$\mathrm{Im}\left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) \equiv \arg(\gamma(x)) - \arg(\gamma(0))\ [2\pi].$$
5. En déduire que
$$\mathrm{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule intégrale de l'indice est à la base de la formule intégrale de Cauchy, qui est à la base de techniques calculatoires intégrales importantes, en particulier le théorème des résidus.