IUT d'Évry Val d'Essonne
Département TC (S3)

UE31 M3104C, 2018-2019
D. Fourer

TD3 : Variables aléatoires

Rappels :

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$: une v.a. à valeurs réelles (affecte un nombre réel à un événement de Ω)
- x : une valeur possible prise par X
- $P(X = x)$: probabilité que l'événement $\{X = x\}$ se réalise
- $p_X(x)$: loi de probabilité de X définie comme $p_X(x) = P(X = x)$
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: fonction de répartition de X

Exercice 1 : On tire successivement, avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R, une verte V et une blanche B.

1. On gagne 1 euro avec R, 2 euros avec V et on perd 3 euros avec B. Quels sont les gains possibles ? Définir la v.a. X qui représente le gain. On a $3^2 = 9$ tirages possibles :
   $\Omega = \{BB, BR, BV, RR, RV, VV\}$.

   La v.a. X est définie comme suit :

Evénement	x
BB	-6
BR	-2
RB	-2
BV	-1
VB	-1
RR	2
RV	3
VR	3
VV	4

   Les gains possibles sont :

x	#	$P(X = x)$
-6	1	$\frac{1}{9}$
-2	2	$\frac{2}{9}$
-1	2	$\frac{2}{9}$
2	1	$\frac{1}{9}$
3	2	$\frac{2}{9}$
4	1	$\frac{1}{9}$

   $P(X = -6) = P(X = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{9}$
   $P(X = -1) = P(X = -2) = P(X = 3) = \frac{2}{9}$
   $X : \Omega \to \{-6, -2, -1, 2, 3, 4\}$

2. Maintenant on change les règles. On gagne 2 euros si les deux boules sont identiques et on perd 1 euro dans tous les autres cas. Définir la v.a. Y correspondante. On a $3^2 = 9$ tirages possibles :
   $\Omega = \{BB, BR, RB, BV, VB, RR, RV, VR, VV\}$.

   La v.a. est définie comme suit :

Événement	y
BB	2
RR	2
VV	2
BR	-1
RB	-1
BV	-1
VB	-1
RV	-1
VR	-1

$Y : \Omega \to \{-1, 2\}$
On a $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(Y = -1) = \frac{2}{3}$

3. On revient au cas initial : on suppose équiprobable chaque tirage.
   (a) Définir l'événement $A = \{$"obtenir un V sans B"$\}$. $A = \{VV, RV, VR\}$
   (b) Calculer la probabilité de A. $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
   (c) Quelle est l'image de A par X ?

Evénement	x
RV	3
VR	3
VV	4

   (d) Quelle est la probabilité de $X(A)$? $P(X = 3) = \frac{2}{9}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{9}$.
   On a aussi $P(X = 3|A) = \frac{2}{3}$ et $P(X = 4|A) = \frac{1}{3}$.
4. Définir la loi de probabilité de X (faire un tableau de p_X).

x :	-6	-2	-1	2	3	4
p_X :	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

5. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 0 ? $P(X \geq 0) = \sum_{x \geq 0} p_X(x) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{9}$
6. Quelle est la probabilité de gagner de l'argent à ce jeu ? cf. réponse ci-dessus, $P(X > 0) = P(X \geq 0)$
7. Que peut on espérer gagner ? (calculer l'espérance de X définie par $E[X] = \sum_x xP(X = x)$)

$$E[X] = -6 \times \frac{1}{9} + -2 \times \frac{2}{9} + (-1) \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} \quad (1)$$
$$= 0 \quad (2)$$

Exercice 2 : Les 3 commerciaux d'une entreprise ont respectivement une probabilité de 0,1 - 0,2 - 0,3 de conclure un contrat chaque jour ouvrable. La probabilité pour chacun d'eux de signer plusieurs contrats est nulle.

1. Définir X, la v.a. du nombre de contrats signés pour l'entreprise un jour donné. Faire un arbre, chaque commercial signe ou ne signe pas de contrat avec sa probabilité. $2^3 = 8$ feuilles.
   $X : \{\bar{S}1\bar{S}2\bar{S}3, S1, S2, S3, S1S2, S1S3, S2S3, S1S2S3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$
2. Définir la loi de probabilité de X.

Événement	x	$p(x = X)$
$\bar{S}1\bar{S}2\bar{S}3$	0	$(1 - 0,1)(1 - 0,2)(1 - 0,3) \approx 0,504$
$S1\bar{S}2\bar{S}3$	1	$0,1(1 - 0,2)(1 - 0,3) \approx 0,056$
$S2\bar{S}1\bar{S}3$	1	$0,2(1 - 0,1)(1 - 0,3) \approx 0,126$
$S3\bar{S}1\bar{S}2$	1	$\approx 0,216$
$S1S2\bar{S}3$	2	$\approx 0,014$
$S1S3\bar{S}2$	2	$\approx 0,024$
$S2S3\bar{S}1$	2	$\approx 0,054$
$S1S2S3$	3	$\approx 0,006$

3. Définir sa fonction de répartition. On trie par ordre croissant les valeurs x et on fait la somme des probabilités associées à chaque valeur :

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0,504	0.398	0.092	0,006
$F_X(x)$	0,504	0,902	0.994	1

4. Quelle est la probabilité de signer 0, 1, 2, ou 3 contrat(s) ? On utilise $P(X = x)$ calculée plus haut.
5. Quelle est la probabilité de signer au moins un contrat ? $P(X \geq 1) = \sum_{x>0} P(X = x) = 0,496$

Exercice 3 : Une entreprise fabrique des interrupteurs avec voyants lumineux. Un relevé statistique indique que 5% des interrupteurs fabriqués sont défectueux. Supposons que l'on prélève successivement et au hasard de la production deux interrupteurs. Notons X la v.a. « nombre d'interrupteurs défectueux dans l'échantillon prélevé ».

1. Définir la v.a. X.
   Avec $A = \{$l'interrupteur fonctionne$\}$, on a : $X : \{AA, A\bar{A}, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\} \to \{0, 1, 2\}$

2. Déterminer la loi de probabilité de X. (Faire un arbre) avec $P(A) = 0,95$. On a :

x	$P(X = x)$
0	$0,9025$
1	0.0950
2	$0,0025$

3. Définir la fonction de répartition de X.
   On a :

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,9025$	0.0950	$0,0025$
$F_X(x)$	$0,9025$	$0,9975$	1

4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus, un interrupteur soit défectueux ? $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0,9975$.