

## DM 10. Enoncé

### 1 Actions de groupes

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe, dont l'élément neutre est noté 1, ou bien  $1_G$  et soit  $E$  un ensemble quelconque.

On dit qu'une application quelconque, de  $G \times E$  dans  $E$ , notée 
$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$$
 est une action (ou opération) du groupe  $G$  sur l'ensemble  $E$  si et seulement si

1.  $\forall x \in E, 1_G \times x = x$ ;
2.  $\forall g, h \in G, \forall x \in E, g \times (h \times x) = (g \cdot h) \times x$ .

Le fait de noter " $\times$ " cette application de  $G \times E$  dans  $E$  rend la seconde propriété très naturelle. Dans cette optique, on pourra même noter, pour tout  $g \in G$  et  $x \in X$ ,  $g.x$  voire  $gx$  au lieu de  $g \times x$ . Il conviendra cependant de ne pas confondre le produit interne de deux éléments de  $G$ ,  $gh$  où  $g, h \in G$ , avec l'action d'un élément  $g$  de  $G$  sur un élément  $x$  de  $X$ , noté  $gx$  ou  $g.x$  ou  $g \times x$ .

#### 1.1 Exemples

1°) Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

a) Montrer que 
$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hg \end{array}$$
 est une action du groupe  $H$  sur l'ensemble  $G$ . On dit alors que l'on fait opérer  $H$  sur  $G$  par translation à gauche.

b) Montrer que 
$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hgh^{-1} \end{array}$$
 est une action du groupe  $H$  sur l'ensemble  $G$ . On dit alors que l'on fait opérer  $H$  sur  $G$  par conjugaison.

2°) Si l'on dispose d'une action du groupe  $G$  sur un ensemble  $E$ , proposer une action de  $G$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .

3°) Si  $E$  est un ensemble, on note  $\mathcal{S}(E)$  le groupe symétrique de  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ .

Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}(E)$  et  $x \in E$ , on pose  $\sigma \times x = \sigma(x)$ .

Montrer que l'on définit ainsi une action du groupe  $\mathcal{S}(E)$  sur  $E$ .

---

## 1.2 Théorème de Cayley

On suppose que  $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$  est une action du groupe  $G$  sur un ensemble  $E$ .

Pour tout  $g \in G$ , notons  $\gamma_g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g \times x \end{array}$ .

4°) Montrer que pour tout  $g \in G$ ,  $\gamma_g \in \mathcal{S}(E)$ .

5°) Montrer que

l'application  $\gamma : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{S}(E) \\ g & \longmapsto & \gamma_g \end{array}$  est un morphisme de groupes.

6°) En déduire le théorème de Cayley : tout groupe fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$ .

## 1.3 Théorème de Lagrange

On suppose toujours que  $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$  est une action du groupe  $G$  sur un ensemble  $E$ . On définit sur  $E$  la relation binaire  $R$  en convenant que :

$$\forall x, y \in E, \quad x R y \iff [\exists g \in G, \quad y = g \times x].$$

7°) Montrer que  $R$  est une relation d'équivalence et, si  $a \in E$ , préciser la classe d'équivalence de  $a$ , que l'on notera  $\bar{a}$ .

$\bar{a}$  s'appelle l'orbite de  $a$  sous l'action du groupe  $G$ .

8°) Lorsque  $G$  est d'ordre fini, en déduire le théorème de Lagrange : pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ , le cardinal de  $H$  divise celui de  $G$ .

## 2 Le groupe symétrique de degré $n$

### 2.1 Décomposition en produit de cycles

On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ .

9°) Pour tout  $a \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{O}(a) = \{\sigma^k(a) / k \in \mathbb{Z}\}$ , que l'on appelle l'orbite de  $a$  pour la permutation  $\sigma$ .

Montrer que l'ensemble  $\{\mathcal{O}(a) / a \in \{1, \dots, n\}\}$  est une partition de  $\{1, \dots, n\}$ .

10°) On suppose dans cette question que  $\sigma$  est un cycle, que l'on notera  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ , où  $p \in \mathbb{N}$  avec  $p \geq 2$  et où  $a_1, \dots, a_p$  sont  $p$  éléments deux à deux distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . Quelles sont les orbites de  $\sigma$  ?

11°) Soit  $\mathcal{O}$  une orbite pour  $\sigma$ . Soit  $a \in \mathcal{O}$ .

a) Montrer qu'on peut définir  $\ell = \min(\{k \in \mathbb{N}^* / \sigma^k(a) = a\})$ .

b) Montrer que les éléments de  $\mathcal{O}$  sont exactement  $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{\ell-1}(a)$  et que ces éléments sont deux à deux distincts.

c) Posons  $p = \text{Card}(\mathcal{O})$ . Montrer que  $\sigma^p(a) = a$ .

d) Pour tout  $a \in \mathcal{O}$ , on note  $c_a$  le cycle  $(a \ \sigma(a) \ \dots \ \sigma^{p-1}(a))$ . Montrer que  $c_a$  ne dépend pas de  $a$ . Ainsi, il ne dépend que de  $\mathcal{O}$ . On le notera  $c_{\mathcal{O}}$  pour la suite.

12°) a) On suppose que  $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$  où  $c_1, \dots, c_r$  sont des cycles dont les supports, notés  $S_1, \dots, S_r$ , sont deux à deux disjoints.

Montrer que  $\{c_1, \dots, c_r\}$  est exactement l'ensemble des  $c_{\mathcal{O}}$ , où  $\mathcal{O}$  décrit l'ensemble des orbites pour  $\sigma$  qui possèdent au moins 2 éléments.

Notons  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_q$  l'ensemble des orbites pour  $\sigma$  contenant au moins 2 éléments.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ , on note  $p_i = \text{Card}(\mathcal{O}_i)$ .

b) Démontrer le théorème suivant : toute permutation de  $\mathcal{S}_n$  se décompose de manière unique sous la forme d'un produit (commutatif) de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints.

## 2.2 Signature d'une permutation

On fixe un entier  $n \geq 2$ . Si  $f$  est une application de  $\mathbb{Q}^n$  dans  $\mathbb{Q}$  et si  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on pose  $\sigma \times f :$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^n &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

13°) Montrer que l'on vient ainsi de définir une action du groupe  $\mathcal{S}_n$  sur l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{Q}^n$  dans  $\mathbb{Q}$ .

On considère l'application  $\Delta :$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^n &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

14°) a) Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k < n$ . Démontrer que si  $\tau$  est la transposition  $(k \ n)$ , alors  $\tau \times \Delta = -\Delta$ .

b) En déduire que pour toute transposition  $\tau$  de  $\mathcal{S}_n$ ,  $\tau \times \Delta = -\Delta$ .

15°) Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe  $k$  transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_k$  telles que  $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ . Montrer que

$$(-1)^k = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}.$$

Ceci démontre que la parité de  $k$  ne dépend que de  $\sigma$  (alors même qu'il existe plusieurs façons d'écrire  $\sigma$  comme un produit de transpositions).

---

On peut donc poser  $\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}$ . C'est une définition de la signature de  $\sigma$ .

- 16°)** a) Si  $c$  est un cycle de longueur  $\ell$  (où  $2 \leq \ell \leq n$ ), quelle est la signature de  $c$  ?  
b) Montrer que, pour toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$ , où  $m$  est le nombre d'orbites pour  $\sigma$  (en comptant également les orbites réduites à un singleton).