DM 22

A rendre le mardi 2 juin

Pour les questions II.3.a, II.5, III.4.a et III.4.c, veuillez consulter le document annexe.

Notations

Dans toute l'épreuve, K désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$ et Γ un groupe fini dont l'élément neutre est noté 1_Γ. Tous les espaces vectoriels sur K qui interviennent sont de dimension finie. Si E, F sont deux K-espaces vectoriels, on note $L(E,F)$ l'espace vectoriel constitué des applications K-linéaires de E dans F ; si $E = F$, on utilise $L(E)$ au lieu de $L(E,E)$; on note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des bijections linéaires de E sur lui même (pour la loi de composition). Enfin, *si X est un ensemble fini, on note $\#X$ son cardinal.*

Certaines définitions ou notations sont données au fur et à mesure : en général, elles sont annoncées par un point • et à l'aide de **mots en gras** ; l'usage de *mots en italique* est destiné à attirer l'attention du candidat.

Partie I : Formule de Burnside et représentations linéaires

• Un **Γ-espace** ou une **représentation linéaire de** Γ est la donnée d'un K-espace vectoriel E de dimension finie et d'un morphisme de groupes $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(E)$. Cette donnée définit une opération $\Gamma \times E \to E$, à savoir $(\gamma, x) \mapsto \rho(\gamma)(x)$, que l'on note souvent (quand cela ne prête pas à confusion) $\gamma.x$ au lieu de $\rho(\gamma)(x)$ et qui vérifie les propriétés (pour $x, y \in E$, $\gamma, \gamma', \in \Gamma$, $\lambda \in K$) :

$$\gamma.(x+y) = \gamma.x + \gamma.y, \qquad \gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x) \qquad 1_\Gamma.x = x, \qquad \gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$$

Réciproquement, une telle opération $\Gamma \times E \to E$ définit un morphisme de groupes $\Gamma \to \mathrm{GL}(E)$. Avec les abus de langage habituels, on dira parfois dans la suite "soit E un Γ-espace", ou bien "soit E une représentation linéaire de Γ", sans référer nécessairement au morphisme $\Gamma \to \mathrm{GL}(E)$, sauf bien sûr si le contexte est ambigü. On écrira parfois ρ_γ au lieu de $\rho(\gamma)$ ($\rho_\gamma : E \to E$ est donc la "multiplication" par γ i.e. l'application linéaire $x \mapsto \gamma.x$).

• Si E, F sont deux Γ-espaces, un **Γ-morphisme** $\varphi : E \to F$ est une application linéaire satisfaisant à $\varphi(\gamma.x) = \gamma.\varphi(x)$ pour $x \in E$, $\gamma \in \Gamma$. Un **Γ-isomorphisme** est un Γ-morphisme bijectif.

1. Soit E un Γ-espace ; on note E_Γ le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs **Γ-invariants** c'est-à-dire $E_\Gamma = \{x \in E \mid \gamma.x = x, \ \forall \gamma \in \Gamma\}$ et on définit $\pi : E \to E$ par :

$$\pi = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho_\gamma$$

Montrer que π est un projecteur d'image E_Γ. En déduire que la trace de π est donnée par :

$$\mathrm{tr}(\pi) = \dim E_\Gamma$$

• A toute représentation linéaire $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(E)$ de Γ, on associe son **caractère** χ_E (que l'on note parfois χ_ρ) qui est la fonction $\Gamma \to K$ définie à l'aide de la trace par : $\chi_E(\gamma) = \mathrm{tr}(\rho_\gamma)$.
• Un **caractère** du groupe Γ est une fonction $\chi : \Gamma \to K$ telle qu'il existe un Γ-espace E vérifiant $\chi = \chi_E$.

2. Soit χ un caractère. Montrer que tous les Γ-espaces E tels que $\chi_E = \chi$ ont même dimension que l'on peut calculer à partir de χ. Dans la suite, on notera $\dim \chi$ cette dimension.

3. Montrer l'égalité :

$$\frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma) = \dim E_\Gamma$$

• Une opération (ou une action) du groupe Γ sur un ensemble X est une loi $\Gamma \times X \xrightarrow{(\gamma,x) \mapsto \gamma.x} X$ ayant les propriétés suivantes :

$$1_\Gamma.x = x, \quad \forall x \in X, \qquad \gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \quad \forall x \in X$$

• La relation orbitale sur X définie par l'action de Γ est la relation définie sur X par :

$$x \mathcal{R} y \overset{\text{def}}{=} \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma.x$$

Rappelons que c'est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées les **orbites** de X sous Γ ; l'action est dite **transitive** si X est une orbite.

Etant donné un ensemble fini X, on note K^X le K-espace vectoriel constitué de toutes les fonctions de X dans K ; la base canonique de K^X est la base $(e_x)_{x \in X}$ définie par :

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

(si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, K^X s'identifie à K^n). A toute action de Γ sur X, on associe une représentation de Γ sur K^X via :

$$\gamma.e_x = e_{\gamma.x}, \qquad \text{ou, ce qui revient au même,} \qquad \gamma.f = \{x \mapsto f(\gamma^{-1}.x)\} \quad \text{pour } f \in K^X$$

4. Caractériser les $f \in K^X$ invariants par Γ. En déduire que la dimension du sous-espace des invariants de K^X est égale au nombre d'orbites de X sous Γ.

5. On dit que $x \in X$ est fixé par $\gamma \in \Gamma$ si $\gamma.x = x$.

a. On désigne par $\chi_X : \Gamma \to K$ le caractère de la représentation $\Gamma \to \mathrm{GL}(K^X)$, et pour $\gamma \in \Gamma$, par r_γ le nombre d'éléments de X fixés par γ. Montrer que :

$$\chi_X(\gamma) = r_\gamma$$

b. On désigne par s le nombre d'orbites ; déduire des questions précédentes la formule dite "de Burnside" :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma = s \times \#\Gamma$$

6. Déduire de la formule de Burnside un lemme dû à Jordan : si Γ agit *transitivement* sur un ensemble X non réduit à un singleton, alors il existe $\gamma \in \Gamma$ sans point fixe (i.e. $\gamma.x \neq x$ pour tout $x \in X$).

Partie II : Propriétés élémentaires des caractères des représentations

1. Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L(E)$, $v \in L(F)$; on définit une application linéaire $\psi : L(E,F) \to L(E,F)$ par :

$$\psi(f) = v \circ f \circ u, \qquad f \in L(E,F)$$

Montrer que $\mathrm{tr}(\psi) = \mathrm{tr}(u)\,\mathrm{tr}(v)$.

2. Soient E, F deux Γ-espaces.

a. Pour $\gamma \in \Gamma$, $u \in L(E,F)$, on définit $\gamma.u \in L(E,F)$ par $\gamma.u : x \mapsto \gamma.u(\gamma^{-1}.x)$. Montrer que l'on munit ainsi $L(E,F)$ d'une structure de Γ-espace dont le caractère est noté $\chi_{L(E,F)}$.

b. Si $\chi : \Gamma \to K$ est une fonction quelconque, on note $\chi^* : \Gamma \to K$ la fonction $\gamma \mapsto \chi(\gamma^{-1})$. Déduire de la question **II-1.** l'égalité :

$$\chi_{L(E,F)} = \chi_E^* \chi_F \quad \text{c'est à dire} \quad \chi_{L(E,F)}(\gamma) = \chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma) \text{ pour } \gamma \in \Gamma$$

• On note K^Γ le K-espace vectoriel de toutes les fonctions de Γ dans K que l'on munit de la forme bilinéaire, notée $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1}), \qquad f, g \in K^\Gamma$$

3.a. Vérifier que cette forme bilinéaire est symétrique et non dégénérée.

b. Pour deux Γ-espaces E, F, on note $\hom_\Gamma(E,F)$ le sous-espace vectoriel de $L(E,F)$ constitué des Γ-morphismes. Montrer l'égalité :

$$\langle \chi_E, \chi_F\rangle = \dim \hom_\Gamma(E,F)$$

En déduire que $\langle \chi_E, \chi_E\rangle$ est un entier strictement positif si $E \neq \{0\}$.

4.a. Vérifier que la fonction constante $\Gamma \xrightarrow{\gamma\mapsto 1} K$ est un caractère que l'on note $\chi_{\mathbf{unit}}$ puis que pour tout Γ-espace E, $\langle \chi_E, \chi_{\mathbf{unit}}\rangle$ est la dimension du sous-espace E_Γ de E constitué des vecteurs Γ-invariants.

b. Si χ, χ' sont deux caractères, montrer que $\chi + \chi'$ est un caractère (munir le produit de deux Γ-espaces d'une structure de Γ-espace).

c. Si χ est caractère, montrer que χ^* est aussi un caractère (munir le dual d'un Γ-espace d'une structure de Γ-espace).

d. Si χ, χ' sont deux caractères, montrer que $\chi\chi'$ est un caractère.

5. Dans cette question, on suppose que $K = \mathbf{C}$. Montrer, pour tout caractère $\chi : \Gamma \to \mathbf{C}$, que $\chi^* = \overline{\chi}$; retrouver le fait que $\langle \chi, \chi\rangle > 0$.

Partie III : Représentations irréductibles et orthogonalité des caractères

• Un Γ-sous-espace F d'un Γ-espace E est un sous-espace vectoriel tel que $x \in F \Rightarrow \gamma.x \in F,\ \forall \gamma \in \Gamma$.
• Une représentation de Γ d'espace E non réduit à $\{0\}$ est dite **irréductible** si les seuls Γ-sous-espaces sont E et $\{0\}$.
• Un **caractère irréductible** du groupe Γ est une application $\chi : \Gamma \to K$ tel qu'il existe une représentation irréductible (E, ρ) de Γ telle que $\chi = \chi_E$.

1.a. Soit $\varphi : E \to F$ un Γ-morphisme entre deux Γ-espaces. Montrer les implications :

$$E \text{ irréductible } \Rightarrow \varphi \text{ est soit nul soit injectif,}$$
$$F \text{ irréductible } \Rightarrow \varphi \text{ est soit nul soit surjectif.}$$

En déduire qu'un Γ-morphisme entre deux espaces irréductibles est soit nul soit un isomorphisme.

b. On rappelle que pour deux Γ-espaces E, F, $\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim \hom_\Gamma(E, F)$, cf. question **II-3.b**. Si E, F sont *irréductibles*, montrer les équivalences :

$$\langle \chi_E, \chi_F \rangle > 0 \iff E, F \text{ sont } \Gamma\text{-isomorphes} \iff \chi_E = \chi_F$$

En particulier, deux caractères irréductibles distincts sont orthogonaux pour la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$.

c. En déduire que l'ensemble des caractères irréductibles de Γ est une partie libre de K^Γ, finie, de cardinal inférieur ou égal à celui de Γ. Montrer également que l'ensemble des classes de Γ-isomorphie de Γ-espaces irréductibles est en bijection avec l'ensemble des caractères irréductibles de Γ.

2.a. Etant donné $f \in L(E, F)$ où E, F sont deux Γ-espaces, on définit $\widehat{f} : E \to F$ par :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma . f(\gamma^{-1}.x), \qquad x \in E$$

Vérifier que $\widehat{f}$ est un Γ-morphisme.

b. Soit $F \subset E$ un sous-espace de E stable par Γ et $\pi : E \to E$ un projecteur quelconque d'image F. Vérifier que $\widehat{\pi}$ est un projecteur d'image F et en déduire l'existence d'un sous-espace $F' \subset E$ *stable par* Γ tel que $E = F \oplus F'$.

c. En déduire que toute représentation est une somme directe (finie) de représentations irréductibles c'est-à-dire que tout Γ-espace E s'écrit (de manière non unique en général) comme une somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ où chaque E_j est un Γ-sous-espace irréductible de E.

3. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_s$ les caractères irréductibles d'un groupe Γ ; pour chaque χ_i, on fixe une représentation irréductible V_i de Γ ayant χ_i pour caractère (tout Γ-espace irréductible est donc Γ-isomorphe à un et un seul des V_i).

a. Soit E une représentation linéaire de Γ ; en utilisant une décomposition de E en sous-espaces irréductibles, montrer l'existence et l'unicité d'une suite d'entiers positifs ou nuls $d_1, d_2, \ldots, d_s$ tels que :

$$\chi_E = d_1 \chi_1 + \cdots + d_s \chi_s$$

Vérifier que :

$$\langle \chi_E, \chi_i \rangle = d_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle, \qquad \langle \chi_E, \chi_E \rangle = \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle,$$

et que pour une décomposition de E en sous-espaces irréductibles, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, l'entier d_i est le nombre de E_j Γ-isomorphes à V_i.

Pour $1 \le i \le s$, on pose $d_i(E) = \langle \chi_E, \chi_i \rangle / \langle \chi_i, \chi_i \rangle$, que l'on appelle la **multiplicité de V_i dans la représentation E**.

b. En déduire l'équivalence pour deux Γ-espaces E, F :

$$E \text{ est } \Gamma\text{-isomorphe à } F \iff \chi_E = \chi_F \iff d_i(E) = d_i(F), \quad i = 1, \ldots, s$$

4. Dans cette question, on suppose que K est un corps *algébriquement clos* (par exemple $K = \mathbf{C}$).

a. Soit E un Γ-espace *irréductible* et $\varphi : E \to E$ un Γ-morphisme ; en utilisant une valeur propre de φ, montrer que φ est une homothétie.

b. En déduire qu'un Γ-espace E est irréductible si et seulement si $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = 1$.

c. On suppose que le groupe Γ est *abélien*. Soit (E, ρ) une représentation de Γ avec $E \neq \{0\}$; montrer que les endomorphismes de E $\{\rho_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ ont un vecteur propre en commun. En déduire que E est irréductible si et seulement si $\dim E = 1$.

Partie IV : Actions doublement transitives. La représentation régulière

On reprend les notations figurant dans la partie **I** avant la question **4** : X est un ensemble fini sur lequel Γ opère et pour $\gamma \in \Gamma$, r_γ est le nombre d'éléments de X fixés par γ.

1. On suppose que l'action de Γ sur X est **doublement transitive** i.e. possède la propriété "pour $x, y, x', y' \in X$, $x \neq y$, $x' \neq y'$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma.x = x'$, $\gamma.y = y'$". On veut montrer que $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$; on propose deux solutions (questions **a.** et **b.**).

a. Montrer que :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma^2 = 2 \times \#\Gamma.$$

En déduire que $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$.

b. Soit $\varphi \in L(K^X)$ et $(a_{x,y})_{(x,y)\in X^2}$ sa matrice dans la base canonique $(e_x)_{x\in X}$ de K^X. Montrer que φ est un Γ-morphisme si et seulement si $a_{\gamma.x,\gamma.y} = a_{x,y}$ pour tous $\gamma \in \Gamma$, $x, y \in X$. En déduire que $\dim \hom_\Gamma(K^X, K^X) = 2$ puis de nouveau que $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$.

c. Soit $V \subset K^X$ défini par $V = K.\sum_{x\in X} e_x$. Vérifier que V est un Γ-sous-espace de K^X et trouver un Γ-sous-espace W de K^X tel que $K^X = V \oplus W$. Calculer $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ et $\langle \chi_W, \chi_W \rangle$ et en déduire que V et W sont irréductibles.

• Par définition, la **représentation régulière** de Γ a pour espace K^Γ et pour opération :

$$\gamma.e_{\gamma'} = e_{\gamma\gamma'}, \qquad \gamma, \gamma' \in \Gamma \qquad \Big((e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \text{ est la base canonique de } K^\Gamma\Big)$$

On note χ_{reg} le caractère de la représentation régulière.

2. Déterminer χ_{reg}. En déduire, pour tout caractère χ que $\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \dim \chi$.

3. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_s$ les différents caractères irréductibles de Γ et d_i la multiplicité de χ_i dans la représentation régulière. Montrer les égalités :

$$d_i = \frac{\dim \chi_i}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}, \qquad \#\Gamma = \sum_{i=1}^{s} \frac{(\dim \chi_i)^2}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}$$

En particulier, $d_i \neq 0$ (toute représentation irréductible "figure" dans la représentation régulière).