Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 05/11/2020

DM nº 6 : Réels

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro@gmail.com+dm`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm06-nom.pdf` (par exemple `dm06-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace. Pour les fratries, merci d'ajouter votre prénom.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus des problème ci-dessous obligatoires, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 2 du DS3 de l'année dernière (dimension de Hausdorff), ainsi que le problème 3 de la sélection sur ma page web (inégalité classique)

Suggestion de travail pour les vacances :

- Reprendre entièrement votre cours, c'est le moment d'approfondir les points qui sont peut-être passés un peu vite. Si vous ne le faites pas maintenant, ce sera beaucoup plus compliqué plus tard, les incertitudes sur le cours ne doivent pas s'accumuler.
- Reprendre les exercices « classiques » de chaque chapitre (voir liste ci-dessous). Reprendre signifie :
  - essayer de les refaire soi-même ;
  - confronter votre solution ou votre recherche à la correction qu'on en a donnée
  - si vous n'avez pas trouvé la solution par vous-même, bien étudier la correction, en vous demandant d'une part ce qui vous a manqué pour trouver, d'autre part ce qui aurait pu vous mettre sur la piste. Dans ce cas, reprendre l'exercice 3 ou 4 jours plus tard.
- Si vous n'en avez pas eu le temps jusque là : reprendre vos DM et DS, confronter votre copie au corrigé (même si vous avez réussi à répondre aux questions, il est possible que vous trouviez dans le corrigé d'autres méthodes intéressantes). Essayer de voir (avec corrigé si nécessaire) les questions ou parties auquelles vous n'aviez pas eu le temps de répondre.
- Faire le DM ci-dessous.
- Préparer les exercices du chapitre 6, aussi loin que possible (jusqu'à l'exercice 39, les derniers exercices portant sur les notions de topologie qu'on n'a pas encore vues.
  Les exercices les plus importants du chapitre 6 sont :
  5 - 6 - 7 - 9 - 11 - 15 - 18 - 20 (mais difficile) - 21 - 22 - 23 - 24 - 29 - 31 - 32 - 35 - 39.
- Vous reposer.
- Faire les problèmes suggérés en plus ci-dessus.

Liste des exercices importants qu'il faudrait vraiment revoir :
Cette liste est non exhaustive et à adapter pour chacun. Selon votre niveau, vous pouvez avoir intérêt à regarder aussi d'autres exercices, plus simples, ou plus difficiles. Par ailleurs, je vais essayer de vous fournir durant les vacances le corrigé des exercices que nous n'avons pas corrigé en classe (si je me souviens desquels il s'agit...)

- Chapitre 1 : 1 - 8 - 10 - 14 - 18 - 20 - 26.
- Chapitre 2 : 3 - 6 - 7 - 8 - 11.
- Chapitre 3 : 4 - 6 - 10 - 11 - 13 - 17 - 19 - 22.
- Chapitre 4 : 2 - 8 - 9 - 15 - 17 - 18 - 24.
- Chapitre 5 : 4 - 10 - 11 - 14 - 17 - 18 - 21 - 22.

Problème 1 – Autour de la propriété d'équirépartition

Soit une suite de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Étant donné un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *on note* $U_n(I)$ *le nombre de termes parmi* $u_1, \ldots, u_n$ *appartenant à* I, *c'est-à-dire le cardinal de* $\{i \in [\![1,n]\!] \mid u_i \in I\}$

Si $I = [a, b[$ *est un intervalle vérifiant* $I \subset [0, 1[$, *on note* $U_n(I \mod 1)$ *le nombre de termes* u_i, $i \in [\![1, n]\!]$, *tels que la réduction modulo* 1 *de* u_i *(c'est-à-dire sa partie décimale) soit dans* I. *Ainsi, la suite ayant été choisie positive :*

$$U(I \mod 1) = U\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(I+k)\right),$$

où $I + k$ *désigne l'intervalle* $[a + k, b + k[$.

On dit que (u_n) *est équirépartie modulo* 1 *si pour tout* $I = [a, b[\subset [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n(I \mod 1)}{n} = b - a$.

On rappelle que $\lceil x\rceil$ *désigne la partie entière de* x *par excès, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à* x.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équirépartie modulo 1, alors l'ensemble formé des parties décimales des u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est dense dans $[0, 1]$ (on dira que (u_n) est dense modulo 1)
2. On considère $u_n = \ln(n)$, pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que (u_n) est dense modulo 1.
   (c) Soit $I = [0, \frac{1}{2}[$. Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}$, $U_n(I + k) = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}\rceil - \lceil \mathrm{e}^k\rceil$.
   (d) Justifier que $U_n(I + k) \geqslant (\sqrt{e} - 1)\mathrm{e}^k - 1$.
   (e) En déduire que si $n = \lceil \mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}}\rceil$, $\dfrac{U_n(I \mod 1)}{n} \geqslant \dfrac{\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^{k+1} - 1) - (k + 1)}{\mathrm{e}^{k+\frac{1}{2}} + 1}$.
   (f) En comparant la limite du minorant obtenu à la question précédente à $\frac{1}{2}$, en déduire que (u_n) n'est pas équirépartie modulo 1.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$, et $u_n = n^\alpha$, pour $n \geqslant 1$. Soit $I = [a, b[\subset [0, 1[$, et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \left[(a + k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a + k + 1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{\ell=0}^{k} (b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$
   (b) On rappelle qu'une fonction f est convexe sur un intervalle si pour tout $x < y$ de cet intervalle et $\lambda \in]0, 1[$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. En admettant la convexité de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ (du fait que $\frac{1}{\alpha} > 1$), montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,
   $$(b+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (b-a)((a+\ell+1)^{\frac{1}{\alpha}} - (a+\ell)^{\frac{1}{\alpha}}).$$
   (c) En déduire que pour tout $n \in \left[(a + k)^{\frac{1}{\alpha}}, (a + k + 1)^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cap \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{U_n(I \mod 1)}{n} \leqslant (b-a)\frac{(a+k+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{k+1}{(a+k)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n(I \mod 1)}{n} = b - a$ et conclure.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le résultat de la question précédente pour les 3 intervalles $[0, a[$, $[a, b[$ et $[b, 1[$ pour trouver une contradiction.

Question subsidiaire : Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de limite $+\infty$, de pas $p_n = u_{n+1} - u_n$ décroissant de limite nulle et vérifiant, pour un certain réel $K > 0$ et un certain réel $\alpha \in]0, 1[$, l'inégalité $p_n \geqslant \frac{K}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle équirépartie modulo 1 ?

Problème 2 – Le premier nombre transcendant connu

Soit c la constante de Liouville, définie par :

$$c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}.$$

Le but est de démontrer que c est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers ou rationnels. On établit en fait cette propriété pour une famille plus large de réels, appelés nombres de Liouville. Nous démontrons d'abord dans la question 1 que c est bien défini, puis dans la question 2 que c est irrationnel.

1. **Convergence de la série définissant c**

   En étudiant la convergence de la série, montrer l'existence de la constante de Liouville $c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$.

2. **Irrationnalité de c**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.$$

   (b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. En remarquant que $10^{n!}S_n$ est entier, et en encadrant $p10^{n!}$, trouver une contradiction. Conclure.

3. **Inégalité des accroissements finis**

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. À l'aide d'une intégration, montrer que si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$, de dérivée continue sur $[a,b]$ et telle que $|f'|$ est majorée par M, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$. Justifiez que cette expression est encore valable si $b \leqslant a$, l'inervalle considéré étant alors $[b,a]$.

4. **Théorème de Liouville (approximation diophantienne)**

   Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

   Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geqslant 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$, $((p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, on ait : $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{A}{q^d}$.

   Ce théorème affirme que les nombres algébriques non rationnels sont « assez mal » approchés par des rationnels.

   Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.

   On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers tel que $P(\alpha) = 0$, de degré minimal dans l'ensemble de tous les polynômes non nuls vérifiant cette propriété. On se donne désormais un tel polynôme P et on note d son degré.

   (b) Justifier que $d \geqslant 2$.

   (c) Montrer que P ne peut pas avoir de racine rationnelle.

   (d) En déduire que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left|q^d P\left(\dfrac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1$.

   (e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ $((p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$ tel que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant 1$, on ait :

   $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^d}.$$

   (f) En posant $A = \min\left(1, \dfrac{1}{M}\right)$, montrer le théorème de Liouville.

5. **Transcendance de c**

   On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel x tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}\backslash\{0,1\}), \quad \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n}.$$

(a) À l'aide du théorème de Liouville, montrer qu'un nombre de Liouville n'est pas algébrique (on dit qu'il est transcendant).

(b) En déduire que c est transcendant.