DEVOIR SURVEILLÉ 1

(durée : 3 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou* <u>*soulignée*</u>*. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Union et produit cartésien

Soient E, F, G trois ensembles. Démontrer que

$$(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G.$$

EXERCICE 2

Wallis sans Futuna

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n la n-ème intégrale de Wallis définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

A. <u>Généralités</u>

1. a) Calculer W_0 et W_1.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)(\cos t)^{n+1}$, démontrer que
   $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
   c) Démontrer que, pour tout $p \geqslant 0$,
   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
2. a) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   b) Démontrer que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant n{W_n}^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$$
   puis que
   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

B. Calcul de $\zeta(2)$ par la méthode de Matsuoka

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. a) Justifier que

$$\forall t \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big], \qquad t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t.$$

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{W_{2n}}{2n+2}$$

et en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2 M_{2n}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big)\cdot$$

3. En déduire finalement que

$$\lim_{N \to +\infty} \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Remarque : On a ainsi démontré que

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

C. Calcul de l'intégrale de Gauss

On pourra utiliser sans justification l'inégalité classique :

$$\forall a > -1, \qquad \ln(1+a) \leqslant a.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout $u \in [0; \sqrt{n}]$, on a

$$\Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{\Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^n}\cdot$$

2. a) Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{n} \sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1}.

b) Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{n} \tan t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}u}{\Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^n}\cdot$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n} W_{2n-2}$$

et en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Remarque : On a ainsi démontré que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

EXERCICE 3

Cuisson d'un œuf

On souhaite modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

On suppose que l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_e = 100°\text{C}$.

L'œuf est constitué de deux compartiments : le blanc et le jaune. Il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole. Dès lors, on suppose que la chaleur se répartit uniformément à l'intérieur de chaque compartiment et diffuse de l'eau vers le blanc (à travers la coquille) puis du blanc vers le jaune.

On note $T_b(t)$ et $T_j(t)$ les températures respectives du blanc et du jaune à l'instant t (mesuré en minutes). Les fonctions T_b et T_j sont supposées dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

L'œuf est initialement stocké à la température T_0. On a donc $T_b(0) = T_j(0) = T_0$.

Les adeptes de la « cuisine moléculaire » connaissent bien les paramètres régissant la cuisson d'un œuf : le blanc commence à coaguler à partir de 62°C et le jaune à partir de 68°C.

A. Cuisson du blanc

Les lois de la conduction thermique indiquent que la variation de température dans le blanc est proportionnelle au gradient de température $T_e - T_b$ qui existe entre l'eau et le blanc. La fonction T_b satisfait donc l'équation différentielle

$$(E_b) \qquad T_b' = \alpha(T_e - T_b)$$

où $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_b) en tenant compte du fait qu'à l'instant $t = 0$, le blanc est à la température T_0.
2. Donner l'allure du graphe de la fonction $t \longmapsto T_b(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}_+$.
3. a) L'œuf est initialement stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$. Après trois minutes de cuisson, la température de son blanc est de 68°C. Calculer la valeur du paramètre α ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.
   b) Dans le cas où l'œuf est initialement à la température d'un réfrigérateur : $T_0 = 4°\text{C}$, déterminer le temps nécessaire pour que le blanc atteigne 62°C. On prendra $\alpha = 0,3$
   c) Dans La cuisine Familiale et Pratique (1955), Henri-Paul Pellaprat indique que, pour obtenir un œuf à la coque, il faut plonger l'œuf trois minutes dans de l'eau bouillante. Commentez !

B. Cuisson du jaune

Les lois de la conduction thermique (encore elles !) indiquent que la variation de température dans le jaune est proportionnelle au gradient de température $T_b - T_j$ qui existe entre le blanc et le jaune. La fonction T_j satisfait donc l'équation différentielle

$$(E_j) \qquad T_j' = \beta(T_b - T_j)$$

où $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Cette membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que

$$\beta > \alpha.$$

1. Démontrer que $T_j'(0) = 0$.
2. Justifier que la fonction T_j' est dérivable et démontrer que T_j satisfait l'équation différentielle

$$(E_j^*) \qquad T_j'' + (\alpha + \beta)T_j' + \alpha\beta T_j = \alpha\beta T_e$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E_j^*) en tenant compte du fait que $T_j(0) = T_0$ et $T_j'(0) = 0$.
4. Donner l'allure du graphe de la fonction $t \longmapsto T_j(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}_+$.

CORRECTION DU DS1

(durée : 3 h 00)

EXERCICE 1

Soient E, F, G trois ensembles. Démontrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

On procède par double inclusion.

$\subset$ Soit $c \in (E \times G) \cup (F \times G)$. Notons que c désigne un couple !
On a $c \in E \times G$ ou $c \in F \times G$. Par conséquent, on peut distinguer deux cas (qui ne s'exclut pas nécessairement l'un l'autre).

- $\triangleright$ Supposons que $c \in E \times G$. Il existe alors $e \in E$ et $g \in G$ tels que $c = (e, g)$. Comme $e \in E$, on a $e \in E \cup F$. Donc $(e, g) \in (E \cup F) \times G$, c'est-à-dire $c \in (E \cup F) \times G$.
- $\triangleright$ Supposons que $c \in F \times G$. Il existe alors $f \in F$ et $g' \in G$ tels que $c = (f, g')$. Comme $f \in F$, on a $f \in E \cup F$. Donc $(f, g') \in (E \cup F) \times G$, c'est-à-dire $c \in (E \cup F) \times G$.

Dans tous les cas, on a $c \in (E \cup F) \times G$.
Donc $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$.

$\supset$ Soit $c \in (E \cup F) \times G$. Là encore, c désigne un couple.
Il existe $x \in E \cup F$ et $g \in G$ tels que $c = (x, g)$.
Comme $x \in E \cup F$, on a $x \in E$ ou $x \in F$.
Si $x \in E$, alors $(x, g) \in E \times G$. Si $x \in F$, alors $(x, g) \in F \times G$.
Donc $(x, g) \in (E \times G) \cup (F \times G)$.
Donc $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$.

En conclusion,

$$\boxed{(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G.}$$

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n la n-ème intégrale de Wallis définie par $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

A. *Généralités*

1. a) *Calculer W_0 et W_1.*

On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1,$$

donc

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = 1.}$$

b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

On a
$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t) \times (\cos t)^{n+1} \, \mathrm{d}t.$$
On effectue une intégration par parties en choisissant
$$\begin{array}{ll} u'(t) = \cos t & v(t) = (\cos t)^{n+1} \\ u(t) = \sin t & v'(t) = (n+1)(-\sin t)(\cos t)^n \end{array}$$
ce qui donne
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[(\sin t)(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t)(n+1)(-\sin t)(\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$
En utilisant la formule $(\cos t)^2 = 1 - (\sin t)^2$, il vient
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n - (\cos t)^{n+2} \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}. \end{aligned}$$
On en déduit que
$$(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n,$$
c'est-à-dire
$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

c) *Démontrer que, pour tout* $p \geqslant 0$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{2}$ *et* $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

On procède par récurrence.

<u>Initialisation :</u> Au rang 0, on a, sans difficulté, $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2} \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que la propriété soit vérifiée au rang $p \geqslant 0$. Au rang $p+1$, on a

$$\begin{array}{lll} W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2} W_{2p} & W_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} & \text{d'après la question précédente} \\[2ex] = \dfrac{2p+1}{2p+2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{2} & = \dfrac{2p+2}{2p+3} \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} & \text{par hypothèse de récurrence} \\[2ex] = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p+1} p!(p+1)!} \dfrac{\pi}{2} & = \dfrac{2^{2p+1} p!(p+1)!}{(2p+1)!(2p+3)} & \\[2ex] = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2} \dfrac{\pi}{2} & = \dfrac{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)!} & \text{en multipliant par } \dfrac{2p+2}{2p+2}. \end{array}$$

ce qui démontre les propriétés au rang $p+1$.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence affirme que, pour tout $p \geqslant 0$, on a
$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

2. a) *Démontrer que la suite* $(W_n)_{n \geqslant 0}$ *est décroissante.*

Soit $n \geqslant 0$. Sur $[0; \pi/2]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $(\cos t)^n \geqslant (\cos t)^{n+1}$. La propriété de croissance de l'intégrale vue en cours permet alors d'affirmer que
$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t = W_n.$$
Cela montre bien que
$$\boxed{(W_n)_{n \geqslant 0} \text{ est une suite décroissante.}}$$

b) *Démontrer que $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $n\pi/(2n+2)\leqslant n{W_n}^2\leqslant \pi/2$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_n=\sqrt{\pi/2}$.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$nW_nW_{n-1}=n\frac{n-1}{n}W_{n-2}W_{n-1}=(n-1)W_{n-1}W_{n-2},$$

donc la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 0}$ est constante. Or $1W_1W_0=\pi/2$, donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad nW_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2}\cdot}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. La décroissance de W_n nous dit que

$$W_{n+1}\leqslant W_n\leqslant W_{n-1}.$$

En multipliant par nW_n, qui est positif d'après la question A. 1. c), on obtient

$$nW_{n+1}W_n\leqslant n{W_n}^2\leqslant nW_nW_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{n+1}(n+1)W_{n+1}W_n\leqslant n{W_n}^2\leqslant nW_nW_{n-1}.$$

Or, d'après le résultat établi au début de cette question, on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n=\frac{\pi}{2}\qquad\text{et}\qquad nW_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2},$$

donc

$$\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}\leqslant n{W_n}^2\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}\leqslant n{W_n}^2\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot}$$

B. *Calcul de $\zeta(2)$*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $M_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. a) *Justifier que $\forall t\in[0;\pi/2]\,,\ t\leqslant(\pi\sin t)/2$.*

On considère la fonction f définie pour tout $t\in[0;\pi/2]$ par

$$f(t)=\pi\sin t-2t.$$

C'est une fonction dérivable et l'on a, pour tout $t\in[0;\pi/2]$,

$$f'(t)=\pi\cos t-2.$$

Donc

$$f'(t)\geqslant 0\iff \pi\cos t-2\geqslant 0\iff \cos t\geqslant\frac{2}{\pi}\iff t\in[0;\alpha]$$

où α est le nombre réel de l'intervalle $[0;\pi/2]$ tel que $\cos\alpha=2/\pi$. On en déduit que

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0

On constate ainsi que

$$\forall t\in[0;\pi/2]\,,\qquad f(t)\geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall t\in[0;\pi/2]\,,\qquad t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t.}$$

b) *Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant M_{2n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{W_{2n}}{2n+2}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall t \in [0;\pi/2], \qquad t^2(\cos t)^{2n} \geqslant 0,$$

donc, d'après la positivité de l'intégrale, on a

$$M_{2n} \geqslant 0.$$

Par ailleurs, le résultat de la question précédente nous dit que

$$\forall t \in [0;\pi/2], \qquad t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}(\sin t)^2,$$

donc, d'après la croissance de l'intégrale, on a

$$M_{2n} = \int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}(\sin t)^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

Or $(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} - (\cos t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\
&= W_{2n} - W_{2n+2} \\
&= W_{2n} - \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \qquad \text{d'après 1. b)} \\
&= \frac{1}{2n+2}W_{2n},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{W_{2n}}{2n+2}.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant M_{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{W_{2n}}{2n+2}.}$$

Comme $W_{2n} > 0$ d'après A. 1.c), cela implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \frac{M_{2n}}{W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2} = 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{2n}}{W_{2n}} = 0.}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2M_{2n}$ puis que $\dfrac{1}{n^2} = 2\Big(\dfrac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \dfrac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big)$.*

On a

$$W_{2n} = \int_0^{\pi/2} 1 \times (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

On effectue une intégration par parties en choisissant

$$\begin{array}{ll}
u'(t) = 1 & v(t) = (\cos t)^{2n} \\
u(t) = t & v'(t) = 2n(-\sin t)(\cos t)^{2n-1}
\end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \big[t(\cos t)^{2n}\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t2n(-\sin t)(\cos t)^{2n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + n\int_0^{\pi/2} 2t \times (\sin t)(\cos t)^{2n-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en choisissant

$$u'(t) = 2t \qquad v(t) = (\sin t)(\cos t)^{2n-1}$$
$$u(t) = t^2 \qquad v'(t) = (\cos t)^{2n} + (\sin t)(2n-1)(-\sin t)(\cos t)^{2n-2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} W_{2n} &= n\big[t^2(\sin t)(\cos t)^{2n-1}\big]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2} t^2\big((\cos t)^{2n} - (2n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{2n-2}\big)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - n\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\sin t)^2(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $(\sin t)^2 = 1-(\cos t)^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} W_{2n} &= -nM_{2n} + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\big(1-(\cos t)^2\big)(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= -nM_{2n} + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t - n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= -nM_{2n} + n(2n-1)M_{2n-2} - n(2n-1)M_{2n}. \end{aligned}$$

Comme $-n-\ n(2n-1) = -2n^2$, on en conclut que

$$\boxed{W_{2n} = n(2n-1)M_{2n-2} - 2n^2M_{2n}.}$$

En divisant cette égalité par n^2W_{2n}, qui est non nulle d'après A. 1. c) , on obtient

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\frac{M_{2n-2}}{W_{2n}} - 2\frac{M_{2n}}{W_{2n}}\cdot$$

Or, d'après A. 1. b), on a

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2},$$

donc

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\frac{M_{2n-2}}{\frac{2n-1}{2n}W_{2n-2}} - 2\frac{M_{2n}}{W_{2n}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{M_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{M_{2n}}{W_{2n}}\Big)\cdot}$$

3. *En déduire finalement que* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le résultat de la question précédente nous dit que

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2} = 2\bigg(\Big(\frac{M_0}{W_0}-\frac{M_2}{W_2}\Big)+\Big(\frac{M_2}{W_2}-\frac{M_4}{W_4}\Big)+\cdots+\Big(\frac{M_{2N-2}}{W_{2N-2}}-\frac{M_{2N}}{W_{2N}}\Big)\bigg)$$

ce qui donne, après téléscopage,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2} = 2\bigg(\frac{M_0}{W_0}-\frac{M_{2N}}{W_{2N}}\bigg)\cdot$$

Or la question B. 1. b) nous dit que

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{M_{2N}}{W_{2N}} = 0,$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\Big) = 2\frac{M_0}{W_0}\cdot$$

Comme

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

et

$$M_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24},$$

on en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

C. *Calcul de l'intégrale de Gauss*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout $u \in [0;\sqrt{n}]$, on a* $\left(1-\dfrac{u^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^{-n}$.

Soit $u \in [0;\sqrt{n}]$. On a

$$\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1-\frac{u^2}{n}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{n\times\left(-\frac{u^2}{n}\right)\right\} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

et

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n} = \exp\left\{-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)\right\} \geqslant \exp\left\{-n\times\frac{u^2}{n}\right\} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

où les inégalités découlent de $\forall a > -1,\ \ln(1+a) \leqslant a$. Donc

$$\boxed{\forall u \in [0;\sqrt{n}], \qquad \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}.}$$

2. a) *Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{n}\sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1}.*

Dans l'intégrale

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

on effectue le changement de variable

$$u = \sqrt{n}\sin t.$$

- ▷ Si $t=0$, on a $u=0$. Si $t=\pi/2$, on a $u=\sqrt{n}$.
- ▷ L'application $t \longmapsto \sqrt{n}\sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$ et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sqrt{n}\cos t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}\cos t}.$$

- ▷ On a

$$(\cos t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = (\cos t)^{2n+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}\cos t} = \frac{(\cos^2 t)^n}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \frac{(1-\sin^2 t)^n}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n\mathrm{d}u.$$

- ▷ On en conclut que

$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n\mathrm{d}u.}$$

b) *Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}u$.

Dans l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}$$

on effectue le changement de variable

$$u = \sqrt{n}\tan t.$$

- ▷ Si $u=0$, on a $t=0$. Si $u=\sqrt{n}$, on a $t=\pi/4$.
- ▷ L'application $t \longmapsto \sqrt{n}\tan t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$ et

$$\mathrm{d}u = \sqrt{n}\big(1+(\tan t)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

- ▷ On a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt{n}\big(1+(\tan t)^2\big)\,\mathrm{d}t}{\big(1+(\tan t)^2\big)^n} = \sqrt{n}\frac{\mathrm{d}t}{\left(\dfrac{1}{(\cos t)^2}\right)^{n-1}} = \sqrt{n}(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

- ▷ On en conclut que

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos t)^{2n-2}\,\mathrm{d}t.}$$

3. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2} du \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$ *puis que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question C. 1. nous dit que

$$\forall u \in \left[0; \sqrt{n}\right], \qquad \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$$

La croissance de l'intégrale implique alors que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}u}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n}\cdot$$

Les résultats des questions 2. a) et 2. b) donnent

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (\cos t)^{2n-2}\, \mathrm{d}t.$$

Or $\forall t \in [0; \pi/2]$, $(\cos t)^{2n-2} \geqslant 0$, donc

$$\int_0^{\pi/4} (\cos t)^{2n-2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-2}\, \mathrm{d}t = W_{2n-2},$$

ce qui donne

$$\boxed{\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.}$$

On a

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}}\sqrt{2n-2}W_{2n-2}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{2n-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, d'après la question 1. 2. b),

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n-2}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n-2}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Le théorème des gendarmes implique alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot}$$

EXERCICE 3

On souhaite modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans de l'eau bouillante. On suppose que l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_e = 100°C$. L'œuf est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole. Dès lors, on suppose que la chaleur se répartit uniformément à l'intérieur de l'œuf et diffuse de l'eau vers le blanc (à travers la coquille) puis du blanc vers le jaune. On note $T_b(t)$ et $T_j(t)$ les températures respectives du blanc et du jaune à l'instant t (mesuré en minutes). Les fonctions T_b et T_j sont supposées dérivables sur $\mathbb{R}_+$. L'œuf est initialement stocké à la température T_0. On a donc $T_b(0) = T_j(0) = T_0$. Le blanc commence à coaguler à partir de $62°C$ et le jaune à partir de $68°C$.

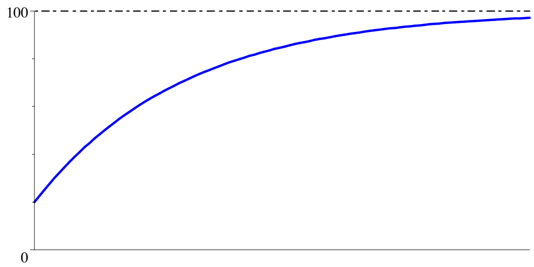
A. *Les lois de la conduction thermique indiquent que la variation de température dans le blanc est proportionnelle au gradient de température $T_e - T_b$ entre l'eau et le blanc. La fonction T_b satisfait donc (E_b) $T_b' = \alpha(T_e - T_b)$ où $\alpha > 0$ est le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.*

1. *Résoudre l'équation différentielle (E_b) en tenant compte du fait que $T_b(0) = T_0$.*

   On a
   $$(E_b) \qquad T_b' + \alpha T_b = \alpha T_e$$
   Les solutions de l'équation différentielle homogène
   $$(E_{b,h}) \qquad T_b' + \alpha T_b = 0$$
   sont les fonctions de la forme
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad T_{b,h}(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
   L'équation différentielle (E_b) admet une solution particulière évidente donnée par
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad T_{b,p}(t) = T_e.$$
   On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E_b) sont les fonctions de la forme
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad T_b(t) = T_e + \lambda\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
   On a
   $$T_b(0) = T_0 \iff T_e + \lambda = T_0 \iff \lambda = -(T_e - T_0),$$
   donc
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad T_b(t) = T_e - (T_e - T_0)\, \mathrm{e}^{-\alpha t}.}$$

2. *Donner l'allure du graphe de la fonction $t \longmapsto T_b(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}_+$.*

   On obtient :



3. a) *L'œuf est initialement stocké à température ambiante $T_0 = 20°C$. Après trois minutes de cuisson, la température de son blanc est de $68°C$. Calculer la valeur du paramètre α ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.*

   On a
   $$T_b(3) = T_e - (T_e - T_0)\, \mathrm{e}^{-3\alpha}.$$
   Or, les données de l'énoncé indiquent que
   $$T_b(3) = 68, \qquad T_e = 100 \qquad \text{et} \qquad T_0 = 20,$$
   donc
   $$68 = 100 - 80\, \mathrm{e}^{-3\alpha},$$
   ce qui donne
   $$\boxed{\alpha = \frac{1}{3} \ln \frac{80}{32} \approx 0,305}$$

b) *Dans le cas où l'œuf est initialement à la température d'un réfrigérateur : $T_0 = 4°C$, déterminer le temps minimum nécessaire pour que le blanc atteigne $62°C$. On prendra $\alpha = 0,3$*

On cherche $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$T_b(t_0) = 62,$$
c'est-à-dire
$$T_e - (T_e - T_0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t_0} = 62$$
ou encore
$$100 - 96\,\mathrm{e}^{-0,3t_0} = 62,$$
ce qui donne
$$t_0 = \frac{1}{0,3}\ln\frac{96}{38} \approx 3,01$$
Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{le blanc d'un œuf sorti du frigo commence à coaguler}\\ \text{un peu après la troisième minute de cuisson.}\end{array}}$$

c) *Un vieux livre de cuisine indique que, pour obtenir un œuf à la coque, il faut plonger l'œuf trois minutes dans de l'eau bouillante. Commentez !*

La donnée de la question a) montre qu'avec un œuf initialement à température ambiante, trois minutes de cuisson conduisent le blanc au dessus de sa température de coagulation sans atteindre la température de coagulation du jaune. On obtient ainsi un parfait œuf à la coque !

Par contre, le calcul de la question précédente nous montre qu'avec un œuf stocké initialement au frigo, les trois minutes de cuisson ne suffisent pas pour atteindre la température de coagulation du blanc. Avec un tel temps de cuisson, l'œuf n'est donc pas cuit !

Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{notre vieux livre de cuisine dit vrai pour un œuf à température ambiante et}\\ \text{se trompe pour un œuf sorti du frigo (mais autrefois, les frigo étaient rares)}\end{array}}$$

B. *Les lois de la conduction thermique indiquent que la variation de température dans le jaune est proportionnelle au gradient de température $T_b - T_j$ entre le blanc et le jaune. La fonction T_j satisfait donc (E_j) $T_j' = \beta(T_b - T_j)$ où $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Celle-ci étant moins épaisse que la coquille, on a $\beta > \alpha$.*

1. *Démontrer que $T_j'(0) = 0$.*

En donnant la valeur 0 à la variable t dans l'équation différentielle (E_j), on a
$$T_j'(0) = \beta\big(T_b(0) - T_j(0)\big) = \beta(T_0 - T_0) = 0,$$
donc
$$\boxed{T_j'(0) = 0.}$$

2. *Justifier que T_j' est dérivable et démontrer que T_j vérifie (E_j^*) $T_j'' + (\alpha+\beta)T_j' + \alpha\beta T_j = \alpha\beta T_e$.*

L'égalité (E_j) $T_j' = \beta(T_b - T_j)$ dit que T_j' est la différence de deux fonctions dérivables donc
$$\boxed{T_j' \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$
En dérivant la relation (E_j), on obtient
$$T_j'' = \beta(T_b' - T_j').$$
Or, d'après l'équation (E_b), on a $T_b' = \alpha(T_e - T_b)$, ce qui donne, après report dans la relation ci-dessus,
$$T_j'' = \beta\big(\alpha(T_e - T_b) - T_j'\big)$$
c'est-à-dire
$$T_j'' = \alpha\beta T_e - \alpha\beta T_b - \beta T_j'.$$
En utilisant à nouveau l'équation (E_b), on a $\beta T_b = T_j' + \beta T_j$, ce qui implique, après un nouveau report dans la relation ci-dessus,
$$T_j'' = \alpha\beta T_e - \alpha(T_j' + \beta T_j) - \beta T_j'.$$
En réordonnant les termes, on obtient finalement
$$\boxed{(E_j^*) \qquad T_j'' + (\alpha+\beta)T_j' + \alpha\beta T_j = \alpha\beta T_e.}$$

3. *Résoudre l'équation différentielle* (E_j^*) *en tenant compte du fait que* $T_j(0) = T_0$ *et* $T_j'(0) = 0$.
L'équation différentielle (E_j^*) est du second ordre à coefficients constants.
L'équation homogène associée à (E_j^*) est

$$(E_{j,h}^*) \qquad T_j'' + (\alpha+\beta)T_j' + \alpha\beta T_j = 0.$$

On associe à $(E_{j,h}^*)$ son équation caractéristique

$$r^2 + (\alpha+\beta)r + \alpha\beta = 0.$$

On a

$$\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 > 0,$$

donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles données par

$$r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2} = -\alpha \qquad \text{et} \qquad r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} = -\beta.$$

Dès lors, d'après le cours, les solutions homogènes sont les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad T_{j,h}(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mu\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

L'équation différentielle (E_j^*) admet une solution particulière évidente donnée par

$$\forall t \geqslant 0, \qquad T_{j,p}(t) = T_e.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E_j^*) sont les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad T_j(t) = T_e + \lambda\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mu\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

La condition $T_j(0) = T_0$ nous dit que

$$T_e + \lambda + \mu = T_0.$$

Par ailleurs, on a

$$\forall t \geqslant 0, \qquad T_j'(t) = -\lambda\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mu\beta\,\mathrm{e}^{-\beta t}$$

donc la condition $T_j'(0) = 0$ implique

$$-\lambda\alpha - \mu\beta = 0.$$

On a donc

$$\begin{cases} \boxed{\lambda} + \mu = T_0 - T_e \\ -\alpha\lambda - \beta\mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\lambda} + \mu = T_0 - T_e \\ \boxed{(\alpha-\beta)\mu} = \alpha(T_0 - T_e) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}(T_e - T_0) \\ \mu = \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}(T_e - T_0) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad T_j(t) = T_e - \frac{T_e - T_0}{\beta - \alpha}(\beta\,\mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha\,\mathrm{e}^{-\beta t}).}$$

4. *Donner l'allure du graphe de la fonction* $t \longmapsto T_j(t)$ *lorsque* t *parcourt* $\mathbb{R}_+$.
On obtient :