Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison facultatif

DÉRIVATION

Exercice 1. La fonction du blanc-manger : continue partout et dérivable nulle part

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{d}(x)$ la distance de x à l'entier le plus proche, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}(x) = \min\{x - \lfloor x \rfloor\,;\, \lceil x \rceil - x\}.$$

Pour tout $n > 0$, on introduit la fonction $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k}\cdot$$

1. <u>Existence et représentation graphique de la fonction du blanc-manger</u>
   a) Soit $x \in [0;1]$. Démontrer que la suite $\big(g_n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge. On note $g(x)$ sa limite.
   ► La fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction du blanc-manger. Elle est donnée par

   $$\forall x \in [0;1]\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(2^k x)}{2^k}\cdot$$

   b) Écrire un script `Python` qui représente la fonction du blanc manger. *On imprimera le graphe obtenu et on le joindra à la copie.*
2. <u>La fonction du blanc-manger est continue</u>
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $[0;1]$.
   b) Démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g(x) - g_n(x)| \leqslant 1/2^{n+1}$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que g est continue sur $[0;1]$.
3. <u>La fonction du blanc-manger n'est oncques dérivable</u>
   Soit $x \in [0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $$a_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}{2^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor + 1}{2^{n+1}}\cdot$$

   a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ sont convergentes. Quelle est leur limite ?
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
      α] Démontrer que $\forall k > n,\ \mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = 0$.
      β] Démontrer que $\forall k \in [\![0;n]\!]\,,\ \exists \delta_k \in \{-1;1\},\ \mathrm{d}(2^k b_n) - \mathrm{d}(2^k a_n) = \delta_k 2^{k-n-1}$.
      Indication : Commencer par démontrer que $\left]2^{k+1}a_n; 2^{k+1}b_n\right[\cap \mathbb{N} = \varnothing$.
      γ] Démontrer que $\dfrac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n}$ est un entier de même parité que $n+1$.
   c) Démontrer que g n'est pas dérivable en x.
4. <u>Travaux pratiques</u>
   Cuisiner un blanc-manger (on cherchera la recette sur internet) qui ressemble le plus possible à la courbe de la fonction du même nom. Joindre une photo de l'entremet !