Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Maths 1
- *NOM Prénom* : Anjolras Philippe

Énoncé des exercices

L'objectif de l'oral est de montrer le théorème suivant :

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction continue de B_n dans lui-même admet un point fixe.

On raisonne par l'absurde et on se donne f qui n'admet aucun point fixe.
1. Montrer qu'on peut se ramener à une fonction C^1.
2. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : B_n \to S_{n-1}$ (où S_{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$) C^1 telle que $\varphi_{|S_{n-1}} = id$.
3. On pose $\varphi_t : B_n \to B_n, x \mapsto (1-t)x + t\varphi(x)$. Montrer que pour t suffisamment petit, φ_t est injective.
4. Montrer que $det(J_\varphi(x)) = 0$ pour tout x (la jacobienne). Montrer que pour t suffisamment petit, $det(J_{\varphi_t}(x)) > 0$.
5. On admet que pour t suffisamment petit, φ_t est un C^1-difféomorphisme de $\overset{\circ}{B_n}$ dans lui-même. On pose $P(t) = \int_{\overset{\circ}{B_n}} det(J_{\varphi_t}(x))\, dx$.
Que dire de P au voisinnage de 0 ? En 1 ? En déduire le théorème.
(NB : Il faut utiliser la formule HP :

$$\int_D f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{D'} f \circ \varphi^{-1}(y_1, ..., y_n) |det(J_\varphi(y))|\, dy_1 \ldots dy_n$$

où φ est un C^1-difféomorphisme de D dans D', $\varphi(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$; changement de variable en dimension n.)

Remarques sur l'oral

L'examinateur était très gentil mais avait la voix complètement éraillée pendant tout l'oral (il m'a dit que ça devrait passer au bout d'un moment mais... non). J'étais le premier à passer l'après-midi donc il avait un peu de retard et l'oral a duré plutôt 45-50 minutes qu'une heure.
Au début, après avoir énoncé le théorème, il me demande si je sais le démontrer pour de petits cas, je traite rapidement $n = 1$, puis il donne la première question. J'essaie d'abord de montrer que si on a le théorème pour toutes les fonctions C^1, alors on l'a pour toutes les fonctions continues, mais il veut plutôt que je construise g C^1 sans point fixe à partir de f sans point fixe seulement continue. Sur la question 2, il faut bien comprendre qu'il faut construire φ à partir de la fonction C^1 obtenue en 1 : après avoir cherché un peu, je lui dis que j'ai l'impression qu'une telle fonction n'existe jamais mais que sur $\mathbb{R}^2$ ça n'a l'air de pouvoir exister que si on épointe B_2. Il m'explique alors qu'on a toujours l'hypothèse d'une fonction sans point fixe à utiliser, et me donne directement

ensuite la tête de φ avec un dessin (intersection de la demi-droite $[f(x), x)$ avec la sphère unité), je montre que c'est bien C^1.
La 3 et la 4 se font assez bien ensuite.
Pour la 5, il me laisse un peu devant la question puis demande « attendez une minute... c'est au programme ou pas le changement de variable en dimension n ? » puis me donne la formule générale de changement de variable, qui permet de calculer directement $P(t)$ pour t petit.
Comme P est un polynôme en t et que $P(1) = 0$, on a une contradiction, donc on a le théorème (et même qu'il n'existe aucune fonction φ comme en 2).