Lycée Henri IV
MPSI

Devoir maison

ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. Systèmes de racines

Soit n un nombre entier strictement positif. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, c'est-à-dire $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ de telle sorte que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit une base orthonormée. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Si a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on note S_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même définie par

$$S_a(x) = x - p(a, x)a \qquad \text{où} \qquad p(a, x) := 2\frac{\langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} \in \mathbb{R}.$$

Cela étant, on se donne une partie <u>finie</u> Δ de $\mathbb{R}^n$ possédant les propriétés suivantes :

(i) Le vecteur nul n'appartient pas à Δ.

(ii) Δ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$.

(iii) Si a et b appartiennent à Δ, $p(a, b)$ est un entier.

(iv) Si a et b sont dans Δ, le vecteur $S_a(b) = b - p(a, b)a$ est aussi un élément de Δ.

(v) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si a et λa appartiennent à Δ, alors $\lambda = \pm 1$.

1. a) Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que S_a est une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.
   b) Vérifier que a appartient à Δ si, et seulement si, $-a$ appartient à Δ.
2. Soient a et b deux vecteurs de Δ et θ la mesure de l'angle qu'ils forment, c'est-à-dire l'unique nombre réel dans $[0; \pi]$ tel que
$$\cos\theta = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \, \|b\|}.$$
   a) Justifier l'existence et l'unicité de θ.
   b) Démontrer que θ est un élément de l'ensemble
$$\Theta = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi\right\}.$$
   c) Si θ est différent de $\pi/2$, quelles valeurs peut prendre le rapport $\|a\| \, / \, \|b\|$?
   d) Démontrer que si a et b sont linéairement indépendants et si $\langle a, b \rangle > 0$, alors les vecteurs $a - b$ et $b - a$ appartiennent à Δ.
3. Déterminer toutes les possibilités (à homothétie et isométrie près) pour Δ lorsque $n = 2$.