

OUTILS D'ANALYSE

Exercice 1. Irrationalité de π

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n et l'intégrale I_n définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = (t - t^2)^n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t) dt.$$

1. a) Calculer I_0 et I_1 .
- b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$$

et en déduire que

$$I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq f_n(t) \sin(\pi t) \leq \frac{1}{4^n}$$

et en déduire que

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}.$$

3. Dans cette question, on utilise les résultats des questions 1 et 2 afin de démontrer que π est un nombre irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que π est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi = a/b$.
 - a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b^n I_n \in \mathbb{Z}$.
 - b) Démontrer que la suite $(b^n I_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0. *On pourra utiliser le fait que, pour tout $c > 0$, la suite $(c^n/n!)_{n \geq 0}$ tend vers 0 (on dit que la factorielle l'emporte sur toutes les suites géométriques).*
 - c) Justifier que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ stationne à la valeur 0 et aboutir à une contradiction.

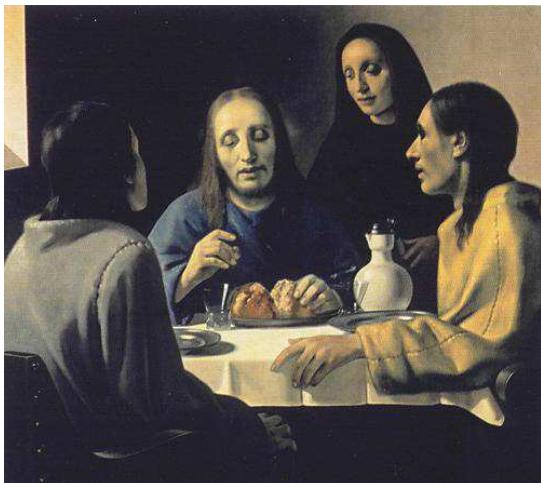
Exercice 2. Vermeer et Van Meegeren

Cet exercice est directement issu du cours « Mathématiques et autres disciplines » de Daniel Perrin, professeur à l'université d'Orsay (<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>).

Les faussaires aiment généralement l'anonymat – sans doute en raison de leur « travail » – et laissent donc rarement une marque dans l'histoire. Ceci rend le cas de Han van Meegeren (1889-1947) d'autant plus remarquable.

D'origine hollandaise, van Meegeren se dirige dès son jeune âge vers la peinture. Il se construit une réputation de portraitiste et obtient de nombreuses commandes. Les choses changent vers la fin des années 1920, quand il décide de modifier son style et de s'inspirer des maîtres hollandais du 17ème siècle. Les critiques, qui chantaient ses louanges, l'accusent maintenant de n'être bon qu'à imiter. Enragé, van Meegeren entreprend de leur démontrer qu'il est capable de rivaliser avec les grands maîtres : il décide de créer le parfait faux, un travail minutieux qui lui demandera près de six ans (1932-1937).





Les disciples d'Emmaüs

En 1932, il loue une villa à Roquebrune, dans le sud de la France, d'où il lance son projet. Il choisit judicieusement Vermeer (1632-1675) comme modèle pour son faux. Cet artiste, resté relativement méconnu jusqu'au 20ème siècle, est, depuis, en pleine ascendance. Comme il n'a laissé qu'environ 35 tableaux, ces derniers ont acquis une grande valeur. Pour obtenir une toile authentique, il utilise un tableau sans valeur du 17ème siècle duquel il enlève la peinture à la pierre ponce. Pour les couleurs, il prépare ses propres pigments en servant des matériaux de l'époque : pour le blanc, un oxyde de plomb (aujourd'hui interdit en raison de sa toxicité) : la céruse ; pour le bleu, une pierre rare : le lapis lazuli ; et pour le rouge, un minerai à base de mercure : le cinabre. Pour son matériel, il recourt à des

pinceaux en poils de blaireau, du type de ceux utilisés par Vermeer. Mais ce sont ses connaissances de chimiste qui seront essentielles à sa réussite. Pour déterminer si un tableau est d'époque, les experts procèdent au test à l'alcool. Les pigments d'un tableau ancien se polymérisent avec le temps et résistent quand ils sont frottés avec un coton imbibé d'alcool, ce qui n'est pas le cas avec un tableau fraîchement peint, où la peinture déteint. Pour contrer ce test, van Meegeren a l'idée d'utiliser un vernis à base de bakélite, un polymère synthétique qui durcit rapidement quand il est chauffé. Après un traitement à 100°C, le tableau a l'air d'avoir 300 ans. Enfin, le génie du faussaire réside aussi dans le choix du thème de son Vermeer. Il sait que l'expert qui sera responsable de l'authentification du tableau, Abraham Bredius, soutient que Vermeer a été influencé par le peintre italien Le Caravage (1571-1610). Une des œuvres du Caravage s'intitulant *Souper à Emmaüs*, van Meegeren peint en conséquence son tableau dans le style du Caravage et lui donne comme titre *Les disciples d'Emmaüs*.

En 1937, van Meegeren présente son tableau à Abraham Bredius. Après validation par le test à l'alcool, l'expert, heureux de voir confirmer sa théorie, déclare le tableau authentique. Fort de cette recommandation, van Meegeren vend la toile pour l'équivalent actuel de plus de trois millions d'euro.

Dans les années qui suivent et tout au long de la guerre, alors que la Hollande est occupée par les Allemands, le peintre continue à « découvrir » et à vendre des « Vermeer », mais aussi d'autres toiles de maîtres hollandais. Extrêmement riche, il mène la belle vie alors que ses compatriotes souffrent.

À la fin de la guerre, on découvre un de ses « Vermeer », la *femme adultère*, dans la collection particulière d'Hermann Göring, l'acolyte d'Hitler et l'un des membres influents du Troisième Reich. Han van Meegeren est alors accusé d'avoir vendu aux Nazis des trésors culturels du pays, un crime passible de la peine de mort.

Pour se disculper, van Meegeren avoue sa tromperie : cette toile, ainsi que plusieurs autres Vermeer dont les fameux *Disciples d'Emmaüs*, sont des faux qu'il a lui-même peints. Le problème est qu'à ce stade, personne ne le croit ! On pense, les juges en tête, que c'est une histoire inventée pour échapper à la condamnation. Les experts, Abraham Bredius en premier, qui ne veulent pas admettre avoir été dupés, insistent pour dire que van Meegeren est incapable d'accomplir de tels chefs d'œuvre.

Pour prouver sa bonne foi et ses capacités, van Meegeren peint, dans sa cellule et sous la supervision de témoins, un nouveau « Vermeer » : *Jésus parmi les docteurs*. Par ailleurs, un groupe d'experts scientifiques réussit à déceler, dans les toiles du faussaire, des traces de bleu de cobalt moderne ainsi que d'une substance qui n'existant pas au 17ème siècle (le phénolformaldéhyde) ayant servi à décapser les anciennes peintures.

Cela suffit à convaincre les juges et, comme il le souhaitait, van Meegeren est condamné, en octobre 1947, comme faussaire plutôt que comme collaborateur. Il écope d'un an de prison, mais meurt d'une crise cardiaque en décembre de la même année, avant même d'avoir purgé sa sentence.

Aujourd’hui, grâce à la notoriété de cette histoire, les vrais van Meegeren, signés de son propre nom, ont pris une certaine valeur. C'est pourquoi, et vous appréciez l'ironie, on retrouve, sur le marché, des faux van Meegeren !

Mais l’histoire ne s’arrête pas là car la controverse entre experts, notamment à propos des *Disciples d’Emmaüs*, se poursuivit après la mort de van Meegeren. Ce n’est qu’en 1968 qu’une datation à l'aide d'éléments radioactifs permet de prouver définitivement que ce « Vermeer » est bel et bien un van Meegeren ! L’objectif de cet exercice est d’expliquer ce procédé de datation.

La cérule (ou blanc de plomb) contient deux isotopes radioactifs (provenant de la désintégration de l’uranium-238) : le plomb-210 et le radium-226, respectivement de demi-vies 22 ans et 1600 ans. Le plomb-210 se désintègre en donnant du plomb-206 (le plomb ordinaire, qui n'est plus radioactif) et le radium-226 donne du plomb-210 (en passant par le radon-222, le polonium-218, le plomb-214, le bismuth-214, le polonium-214, mais ces éléments ont des demi-vies tellement petites – moins de quatre jours en tout – qu'on peut négliger ces étapes). Ce qu'il faut bien comprendre ici c'est que, dans le minerai dont est extrait le plomb, il y a un équilibre radioactif : le plomb-210 qui se désintègre est remplacé à l'identique par la désintégration du radium-226, elle-même équilibrée par celle de l’uranium-238. En revanche, lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l’uranium sont éliminés avec les scories. Dans le plomb purifié utilisé en peinture, la désintégration du plomb n'est donc plus totalement compensée par celle du radium. Cependant, comme il reste encore du radium, pour établir l'équation différentielle du phénomène, il faut tenir compte non seulement de la désintégration du plomb, mais aussi de celle du radium.

Fixons les notations. On note $p(t)$ le nombre d'atomes de plomb-210 et $r(t)$ le nombre d'atomes de radium-226 par gramme de blanc de plomb au temps t . Lorsque ces éléments sont isolés, ils se désintègrent avec des lois classiques $p'(t) = -\lambda p(t)$ et $r'(t) = -\mu r(t)$. En revanche, lorsque les deux éléments cohabitent, la première équation devient $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r(t)$, puisque la désintégration du radium redonne du plomb. Par ailleurs, comme la demi-vie du radium (1600 ans) est beaucoup plus grande que celle du plomb (22 ans) et qu'elle est aussi très grande par rapport aux temps qui sont en jeu (environ 300 ans entre Vermeer et 1968), on peut supposer que $r(t)$ est constant, égal à r .

On a donc l'équation différentielle

$$(E) \quad p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r.$$

On note t_0 l'époque où le tableau a été peint et t_1 la date où les mesures ont été faites (1968).

1. Exprimer $t_1 - t_0$ en fonction de λ , μ , r , $p(t_0)$ et $p(t_1)$.
2. La constante λ est liée à la demi-vie τ du plomb par la formule $\lambda = (\ln 2)/\tau$.

La quantité $\lambda p(t_1)$, qui est la vitesse de désintégration actuelle du plomb-210 dans le tableau, est aisément mesurable. On trouve $\lambda p(t_1) \approx 8,5$ atomes de plomb-210 désintégrés par minute et par gramme de minerai.

La quantité μr , qui est la vitesse de désintégration du radium-226 dans le tableau, est aisément mesurable de nos jours (nous avons fait l'hypothèse raisonnable que cette vitesse n'a pas bougé depuis la période où le tableau a été peint). On trouve $\mu r \approx 0,8$ atomes de radium-226 désintégrés par minute et par gramme de minerai.

La quantité $\lambda p(t_0)$, qui est la vitesse de désintégration du plumb-210 dans le tableau à la période où il a été peint, est par contre inconnue puisqu'on ignore l'origine du minerai dont est tiré le blanc de plomb utilisé par le peintre. Toutefois, si cette teneur en plumb-210 est inconnue, on peut la majorer en tenant compte des minerais les plus riches en uranium-238, et donc en plumb-210, de la planète (le taux d'uranium est quasi-constant puisque la demi-vie de l'uranium est extrêmement longue, de l'ordre de 4,5 milliards d'années). Dans le cas extrême de quelques minerais américains très rares (qu'il est peu plausible que le peintre ait utilisé), la teneur en uranium-238 monte à 3% et, dans ce cas, la vitesse de désintégration du plumb-210 atteint une valeur proche de 25000 atomes de plumb-210 désintégrés par minute et par gramme de minerai. On peut donc considérer que $\lambda p(t_0) \leq 25000$ (et la majoration est très grossière).

Déterminer un majorant de $t_1 - t_0$ et conclure.