

LES NOMBRES

Exercice 1. Résolution des équations du troisième degré par la méthode de Cardan

On veut résoudre l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ à l'aide de la méthode de Cardan.

Pour cela, on remarque que le développement de $(u + v)^3$ peut s'écrire sous la forme

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

ce qui donne, après avoir posé $x = u + v$,

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0.$$

On pose en conséquence

$$3uv = 15 \quad \text{et} \quad u^3 + v^3 = 4$$

de sorte que l'on ait bien

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

1. Déterminer u^3 . On supposera, quitte à échanger u et v , le cas où $\Re(u^3) > 0$.
2. Calculer $(2 + i)^3$ et en déduire les solutions de l'équation.

Exercice 2. Un résultat d'Erdős

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que $f(2) = 2$ et

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad f(pq) = f(p)f(q).$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.