MP*1

Passage à la limite sous l'intégrale

1 Convergence dominée : exemples

1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Étudier, lorsque λ tend vers $+\infty$:
$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(\lambda x)\ f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. (*) Déterminer la limite en $+\infty$ de :
$$\int_0^{+\infty} \arctan(nx)\ e^{-x^n}\,\mathrm{d}x.$$
3. (*) On pose :
$$f_n(t) = \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}}.$$
Étudier la suite :
$$\left(\int_0^{+\infty} f_n\right)_{n\geq 2}.$$
4. Limite de :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$
5. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, soit :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Trouver la limite de (I_n) puis un équivalent.
6. (*) Limite de :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x\ e^{-n\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$
7. Limite de :
$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$
8. Soit f une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit
$$I_n = \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x.$$
Étudier la convergence de (I_n). Si x est de classe C^1, donner un développement asymptotique de I_n à la précision $o(1/n)$.

9. Soit f une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit
$$J_n = \int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Étudier la convergence de (J_n).
10. Donner un équivalent simple de
$$a_n = \int_0^1 \ln(1-x^n)\,\mathrm{d}x.$$
11. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite réelle l en $+\infty$. Montrer, si :
$$I_n = \int_0^2 f(x^n)\,\frac{1+x^n}{2+x^n}\,\mathrm{d}x,$$
que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge, et calculer sa limite.
12. (*) Étudier la limite de
$$u_n = n\int_1^{1+1/n} f(x^n)\,\mathrm{d}x,$$
où f est une fonction continue de $[1,e]$ dans $\mathbb{C}$.
13. Limite de :
$$\int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\,\mathrm{d}x.$$
Généraliser à des intégrales de la forme :
$$\int_1^{+\infty} nf(x^n)\,\mathrm{d}x$$
sous des hypothèses appropriées.
14. Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de :
$$u_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-n\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
15. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^{n-1}}.$$
a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à préciser.
b) Trouver un équivalent simple de $u_n - l$ lorsque $n \to +\infty$, puis un développement asymptotique.
16. (**) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ continue. Étudier :
$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2/n}}{f(x)+1/n}\,\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1}.$$

17. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \geq 2$ entier, soit

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + f(x)}.$$

Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geq 2}$.

18. (**) Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 0 \ ; \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \geq x.$$

a) Existence, pour n dans $\mathbb{N}^*$, de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 f^2(x)} \, \mathrm{d}x.$$

b) Limite de la suite (I_n).

19. Soit f une application de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose :

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad f''(x) < 0.$$

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \, \mathrm{d}x.$$

Limite de (I_n).

20. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^n f(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x,$$

converge vers une limite à préciser.

21. a) Si $x > 0$, montrer :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

b) Donner une expression simple de

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

22. Étudier la convergence de (I_n) où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \int_0^n x^{-1/n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

23. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\ln(1 - x^n)} \mathrm{d}x.$$

Limite et équivalent de (I_n).

24. Soient $\alpha > 0$ et f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :
$$I_n = \int_0^1 n^\alpha (1-x)^{\alpha-1} x^n f(x) \mathrm{d}x.$$
Trouver la limite de (I_n) en $+\infty$.
25. Soient c dans $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[0, 1]$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :
$$I_n = n \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{f^c}{n^c}\right).$$
Étudier la convergence de la suite (I_n).
26. (*) *Intégrale de Gauss et intégrales de Wallis*
a) Montrer que :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$
b) En utilisant les intégrales de Wallis, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.
27. *Variante du précédent*
Montrer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2/n)^n} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ \mathrm{d}x,$$
et en déduire le calcul de
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ \mathrm{d}x.$$
(On pourra utiliser le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan u$ et se ramener aux intégrales de Wallis.)
28. *Intégrale de Gauss et formule de Stirling*
a) Montrer, si n est dans $\mathbb{N}$:
$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n$$
où la fonction φ_n est nulle sur $]-\infty, -\sqrt{n}]$ et telle que :
$$\forall t > -\sqrt{n}, \qquad \varphi_n(x) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}.$$
b) En déduire la formule de Stirling.
29. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :
$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{x\sqrt{n}} \mathrm{d}x.$$
Étudier la convergence de (I_n).

30. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ où

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+e^{nf}).$$

31. Soit f une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+|x-n|}\,\mathrm{d}x$$

lorsque $n \to +\infty$?

32. Étudier la convergence de :

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\ \mathrm{d}t.$$

33. (*) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0,1]$, soit :

$$f_n(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+x}}}.$$

Limite de $(\int_0^1 f_n)$.

34. Soit, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{t+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Donner la limite ℓ de $(I_n)_{n\geq 0}$, puis un équivalent simple de $I_n - \ell$.

35. Donner un équivalent simple de :

$$I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n^2}} \frac{x\ln x}{x^{2n}-1}\,\mathrm{d}x.$$

36. Soit, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{n}}\ \mathrm{d}x\right)^n.$$

Étudier la convergence de (I_n).

37. (**) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k.$$

a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1}{t}\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

b) Donner un développement asymptotique de u_n à la précision $o(1)$.

38. (**) a) Pour $n \geq 2$, établir l'existence de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sin(x^n)\ \mathrm{d}x.$$

b) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de I_n.

39. Soit f une fonction de classe C^1 et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer que :

$$\int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

a une limite que l'on notera :

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, f \right\rangle$$

lorsque ε tend vers 0^+.
b) Étudier la limite lorsque ε tend vers 0^+ de :

$$I_\varepsilon(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - i\varepsilon}\,\mathrm{d}t.$$

40. (***) Soient α dans $]1, 3[$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - (\cos(x))^n}{x^\alpha}\mathrm{d}x.$$

Montrer :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{\alpha-1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2/2}}{x^\alpha}\mathrm{d}x.$$

41. Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ valant 1 en 0 et strictement inférieure à 1 sur $]0, 1]$, a, b, c trois éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to0}{=} 1 - cx^a + o(x^a).$$

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 f(x)^n x^{b-1}\mathrm{d}x.$$

2 Permutation série intégrale : exemples

42. Démontrer, si $a > 1$:

$$\int_a^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \ln n}.$$

43. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln t\ \ln(1+t)}{t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3}.$$

44. Calculer :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
45. Calculer :
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$
46. (*) Prouver :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
47. (*) *Un calcul de $\zeta(2)$ dû à Euler*

a) Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n\,(2n+1)} x^{2n+1}.$$
b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$
c) Retrouver $\zeta(2)$.

48. (*) *Une expression intégrale de $\Gamma(s)\zeta(s)$*

Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(s)\zeta(s).$$
49. En remarquant que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t,$$
calculer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$
50. Convergence et calcul de
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t.$$
51. *Intégrale de Dirichlet*

a) En développant chacun des deux membres en série entière, établir
$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{Re}\left(e^{ixe^{iu}}\right)\mathrm{d}u.$$
b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

52. (*) *La fonction* ζ *au point* 1

a) Pour $s > 0$, justifier l'existence de :

$$\Phi(s) = \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} \mathrm{d}t$$

et montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Exprimer $\Phi(1)$ en fonction de la constante d'Euler.

c) Si $s > 1$, montrer :

$$\Phi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}.$$

d) En déduire la limite de $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ quand s tend vers 1.

53. *Une expression intégrale de la constante d'Euler*

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t} \mathrm{d}t.$$

b) En déduire, si γ est la constante d'Euler, la formule :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

54. Si $x > 0$ soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} \mathrm{d}t.$$

a) Justifier, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Écrire $f(x)$ comme somme d'une série de fractions rationnelles.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

d) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 ; préciser le rayon de convergence.

55. Soit α dans $]0, 2[$. Développer :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(\mathrm{sh}\ t)^{\alpha}} \mathrm{d}t$$

en série entière et préciser le rayon.

56. Pour $x > -1$, soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.

b) Prouver, si $x > -1$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$

c) Trouver un développement asymptotique à n termes de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

57. *Transformation de Laplace et série factorielle*
Soient $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $a_n = O(n^k)$.
a) Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, (1 - e^{-t})^n.$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Pour x dans $]k+1, +\infty[$, démontrer la relation

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! \, a_n}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)}.$$

58. (*) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

59. *L'intégrale eulérienne* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt$.
a) Si $x > -1$, prouver :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}.$$

b) Montrer, pour $0 < x < 1$, l'existence de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.
c) Démontrer, pour $0 < x < 1$:

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{x-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

d) On rappelle le développement eulérien de la cotangente

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi \mathrm{cotan}(\pi x).$$

En déduire :

$$\forall x \in]0,1[, \qquad f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

60. a) Pour x dans $]-1,1[$, justifier l'existence de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(xt)}{\mathrm{sh}\,(t)} \, \mathrm{d}t.$$

b) Démontrer

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = 4x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - x^2}.$$

c) En utilisant le développement eulérien de cotan, en déduire

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \pi \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

d) Établir, par une méthode analogue :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

61. a) Si $x \in \mathbb{R}^+$, justifier l'existence de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer, si $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

d) Trouver un équivalent de $f'(x)$ puis un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

62. (***) *Un théorème de Borel*
Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que la série de terme général c_n converge.
a) Montrer qu'en posant, pour t dans $\mathbb{R}^+$:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

on définit une fonction g continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) On se propose de montrer :

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Traiter le cas où la série de terme général c_n converge absolument.
c) Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}^+$, soit :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Trouver la limite de φ_n en $+\infty$. Déterminer le signe de $\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)$.
d) Montrer que dans le cas général, la série de fonctions de terme général $c_n\varphi_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ et conclure.

3 Exercices plus théoriques

63. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers > 0. Pour $x \in]0,1[$, soit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

On suppose que $\sum 1/p_n$ converge.
Montrer que f est intégrable sur $[0,1[$. En déduire que :

$$f(x) \underset{x\to 1-}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

64. (**) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle tendant vers $+\infty$, $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, et a et b deux réels tels que $a < b$.

a) Étudier

$$\int_a^b \cos^2(\lambda_n x + \varphi_n)\ \mathrm{d}x$$

lorsque $n \to +\infty$.

b) Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout x de $[a,b]$, $c_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n) \to 0$. Montrer que $c_n \to 0$.

Indication. Commencer par le cas où (c_n) est bornée et, dans ce cas, utiliser a).

c) Généraliser b) en remplaçant cos par une fonction continue périodique non identiquement nulle.

65. *Théorème de Denjoy-Lusin*

Soient (a_n), (λ_n) et (φ_n) trois suites réelles telles que

$$\lambda_n \to +\infty \qquad \text{et} \qquad \left\{t \in \mathbb{R},\ \sum |a_n \cos(\lambda_n t + \varphi_n)| \ \text{converge}\right\}$$

est d'intérieur non vide. Montrer que $\sum |a_n|$ converge.

66. *Coefficients de Fourier*

Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe indexée par $\mathbb{Z}$, et, pour n dans $\mathbb{Z}$, x dans $\mathbb{R}$:

$$u_n(x) = c_n e^{inx}.$$

On suppose que les séries de fonctions de terme général u_n et u_{-n} convergent uniformément sur $[-\pi,\pi]$. Justifier la définition et la continuité de

$$f\ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Pour m dans $\mathbb{Z}$, établir

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-imx}\ \mathrm{d}x.$$

67. (**) Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$a_n = O(e^{\varepsilon n}).$$

a) Montrer qu'en posant

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inz},$$

on définit une fonction continue et 2π-périodique sur $\{z \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } z > 0\}$.
b) On suppose ici $a_n = O(n^\rho)$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \qquad |f(x+iy)| \ \leq \ \frac{C}{y^{1+\rho}} \ \cdot .$$

c) Réciproquement, on suppose qu'existent $C > 0$ et $\rho > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]0,1], \qquad |f(x+iy)| \leq \frac{C}{y^\rho}.$$

Montrer que :

$$a_n = O(n^\rho).$$

Indication. Écrire les a_n comme coefficients de Fourier, cf exercice précédent.

68. (**) *Intégrale de P'/P sur un cercle*
Soient P dans $\mathbb{C}[X]$, a dans $\mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que P ne s'annule pas sur le cercle de centre a et de rayon r. Calculer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} P'(a + r^{e^i t})}{P(a + re^{it})} \mathrm{d}t.$$

Indication. Décomposer P'/P en éléments simples.

69. (***) *Lemme de Lerch*
Soit f une application continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{C}$ où $T > 0$. Pour $n \geq 1$, soit $g_n : [0,T] \to \mathbb{C}$ définie par :

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T f(u)\ e^{-kn(t-u)}\,\mathrm{d}u.$$

a) Justifier la définition de $g_n(t)$.
b) Écrire $g_n(t)$ sous forme intégrale.
c) Déterminer la limite simple de la suite (g_n).
d) On suppose que :

$$\left(\int_0^T f(t)\ e^{nt}\,\mathrm{d}t \right)_{n\geq 0}$$

est bornée. Montrer que $g_n(t) \to 0$ si $t \in [0,T[$, puis que f est nulle.
e) Soient $a > 1$ et $g : [1,a] \to \mathbb{C}$ continue telle que :

$$\left(\int_1^a g(t)\ t^n\,\mathrm{d}t \right)$$

soit bornée. Montrer que g est nulle.

70. (***) *Suite de fonctions positives et intégrables convergeant simplement vers une fonction non intégrable*
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que (f_n) converge simplement vers f sur I, que f est continue par morceaux et non intégrable sur I. Montrer que :
$$\int_I f_n \to +\infty\ .$$
71. *Une caractérisation de la convergence en moyenne*
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I et intégrables convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux et intégrable sur I. Montrer que :
$$\int_I |f_n - f| \longrightarrow 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_I |f_n| \longrightarrow \int_I |f|.$$
Indication. Poser $g_n = |f_n - f| + |f| - |f_n|$.
72. *Suite croissante et convergence simple*
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ soit croissante et que la suite $(\int_0^1 f_n)_{n\geq 0}$ converge. Montrer que l'ensemble des x de $[0,1]$ tels que $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge est dense dans $[0,1]$.
73. *Séries de fonctions intégrables et convergence simple*
a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I telle que :
$$\sum \int_I |f_n|$$
converge. Montrer que $\left\{x \in I,\ \sum |f_n(x)| \text{ converge}\right\}$ est dense dans I.
b) Si $(r_k)_{k\geq 1}$ est une suite d'éléments de I, construire une suite (f_n) de fonctions continues intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge et que, pour tout $k \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(r_k)$ diverge.
74. *Translation sur l'espace des fonctions intégrables*
Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit :
$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\ \mathrm{d}x.$$
a) Déterminer la limite de $F(t)$ lorsque $t \to 0$.
b) Déterminer la limite de $F(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
75. *Distance de la convergence en mesure*
Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(f,g) \in \mathcal{C}^2$, on pose :
$$\mathrm{d}(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

a) Montrer que d est une distance sur $\mathcal{C}$.

Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ et f dans $\mathcal{C}$.

b) Étudier les liens logiques entre $\mathrm{d}(f_n, f) \to 0$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

c) On pose, si $\alpha > 0$:

$$A_n(\alpha) = \{x \in [0,1],\ |f_n - f| > \alpha\}.$$

Établir que $(A_n(\alpha))$ est une réunion dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints. Si $(\mu(A_n(\alpha)))$ désigne la somme des longueurs de ces intervalles, établir :

$$\mathrm{d}(f_n, f) \ \to\ 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \alpha > 0, \quad \mu(A_n(\alpha)) \ \to\ 0.$$

76. Soient f une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$,

$$A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq 1\}.$$

a) Montrer que $\int_0^1 f^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si A est un ensemble fini.

b) On suppose que A est un ensemble fini. Etudier la convergence de :

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^1 f^n.$$

4 Suites de variables aléatoires

77. *Convergence L^1 et convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose

$$E(|X_n|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers 0.

78. *Convergence presque sûre et convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, convergeant presque partout vers 0.

a) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers 0.

b) Montrer que la réciproque de a) est fausse.

c) Montrer que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers 0, alors il existe une suite extraite de $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge presque sûrement vers 0.

79. *Théorème d'Egorov*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers 0. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie Ω_ε de Ω, de mesure majorée par ε et telle que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 uniformément sur $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

80. *Convergence dominée*

a) Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie. Montrer que, si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute partie A de Ω telle que $P(A) \leq \delta$, on ait

$$E(1_A\, X) \leq \varepsilon.$$

b) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers 0. On suppose qu'il existe une variable aléatoire X d'espérance finie telle que, pour tout n, on ait, presque sûrement $|X_n| \leq X$. Démontrer

$$E(|X_n|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$