DEVOIR SURVEILLÉ 6

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Inégalité de Taylor–Lagrange complexe

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et a un élément de I. Démontrer que, pour tout $x \in I$, on a l'*inégalité de Taylor–Lagrange « complexe »* :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

où $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,\widetilde{;}\, x]\}$.

EXERCICE 2

Ensemble de continuité

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $Z(f)$ l'ensemble des points d'annulation de f et $C(f)$ l'ensemble des points de continuité de f, c'est-à-dire

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad C(f) = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ est continue en } x\}.$$

On pose

$$\psi = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}.$$

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Démontrer que $C(\psi\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}) = U$.
2. a) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère la fonction d_A, appelée *distance* à A, définie par

$$\mathrm{d}_A \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\{|x-a| : a \in A\} \end{array} \right.$$

   α] Justifier que d_A est bien définie et qu'elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

   β] On suppose que A est un fermé de $\mathbb{R}$. Démontrer que $Z(\mathrm{d}_A) = A$.

   b) Soit $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $C(\psi\delta) = Z(\delta)$.

   c) Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $C(f) = F$.

EXERCICE 3

Théorème de Glaeser

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Comme f est positive, on peut introduire la fonction

$$g = \sqrt{f}.$$

On note $Z(f)$ l'ensemble des points d'annulation de f et $Z(f'')$ l'ensemble des points d'annulation de f'', c'est-à-dire

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad Z(f'') = \{x \in \mathbb{R} : f''(x) = 0\}.$$

1. Donner deux exemples de fonctions $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^2$, qui s'annulent chacune au moins une fois sur $\mathbb{R}$, telles que $\sqrt{f_0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{f_1}$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Que dire de la régularité de g au voisinage d'un point de $\mathbb{R} \setminus Z(f)$?
3. a) Soit $a \in Z(f)$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, il existe $c_x \in \left]a \,\widetilde{;}\, x\right[$ tel que

$$f(x) = \frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2.$$

   En déduire que g admet des dérivées à gauche et à droite en a dont on précisera les valeurs.

   b) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $Z(f) \subset Z(f'')$.
   Dans ce cas, on précisera $g'(a)$ lorsque $a \in Z(f)$.
4. On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Soient $a \in Z(f)$, $\varepsilon > 0$ et $x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. On considère la fonction polynomiale P définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) = \frac{M(\varepsilon)}{2}t^2 + f'(x)t + f(x)$$

   où

$$M(\varepsilon) = \sup\{|f''(y)| : y \in [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]\}.$$

   α] Justifier que $M(\varepsilon)$ est un nombre réel positif ou nul.

   β] Démontrer que $\forall t \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$, $P(t) \geqslant 0$ puis que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geqslant 0$.

   γ] En déduire que

$$f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x)$$

   puis que

$$|g'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{M(\varepsilon)}{2}}.$$

   b) Démontrer que g' est continue en tout point de $Z(f)$.

   c) Qu'a-t-on démontré dans cette question 4 ?

EXERCICE 4

Transcendance de e

Un nombre complexe est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers (relatifs). Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

L'objet de cet exercice est de démontrer que le nombre de Néper e est transcendant.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ avec $a_n \neq 0$ tels que

$$a_0 + a_1 \,\mathrm{e} + \cdots + a_n \,\mathrm{e}^n = 0.$$

On note p un entier naturel non nul dont la valeur sera choisie à la question 4 afin d'obtenir une absurdité.

On considère les polynômes d'Hermite H_p et F_p définis par

$$H_p = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{n} (X-k)^p \qquad \text{et} \qquad F_p = \sum_{\ell \geqslant 0} {H_p}^{(\ell)}.$$

1. a) Pourquoi peut-on supposer que $a_0 \neq 0$?
   b) Qu'est-ce qui justifie l'existence de F_p ?
2. a) Soit A un polynôme à coefficients entiers dont 0 est une racine de multiplicité $p-1$. Pour tout entier ℓ supérieur ou égal à p, démontrer que $A^{(\ell)}$ est un polynôme dont les coefficients sont des entiers divisibles par $p!$.
   b) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, démontrer que $F_p(k)$ est un entier divisible par p.
   c) Démontrer que $F_p(0)$ est un entier tel que $F_p(0) \equiv (-1)^{np}(n!)^p \ [p]$.
3. a) Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Démontrer que

$$|F_p(k) - \mathrm{e}^k \, F_p(0)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^k (kM)^p}{(p-1)!}.$$

   où

$$M = \max_{x \in [0;n]} \prod_{j=1}^{n} |x-j|.$$

   b) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de n) tel que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k) \right| \leqslant \frac{C\,(nM)^p}{(p-1)!}.$$

4. Expliquer comment choisir p afin d'obtenir une contradiction.

CORRECTION DU DS 6

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et $a \in I$. Démontrer que, pour tout $x \in I$, on a l'inégalité de Taylor–Lagrange complexe : $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$, *où $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,;\, x]\}$.*

Soit $x \in I$. On pose

$$\alpha = \arg\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

et l'on considère la fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \qquad \varphi(t) = \Re\mathrm{e}\big(f(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\big).$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I car $f\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$ l'est. De plus, on a

$$\forall t \in I, \quad \forall k \in [\![0; n+1]\!] \qquad \varphi^{(k)}(t) = \Re\mathrm{e}\big(f^{(k)}(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\big),$$

d'où

$$\forall t \in [a \,;\, x], \qquad |\varphi^{(n+1)}(t)| = \big|\Re\mathrm{e}\big(f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\big)\big| \leqslant |f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}| = |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$$

où l'existence de $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| : t \in [a \,;\, x]\}$ est justifiée par le théorème de bornes (puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a \,;\, x]$).

L'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction réelle φ entre a et x nous dit alors que

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\left|\Re\mathrm{e}\left(\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

ou encore

$$\left|\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\mathrm{e}^{-i\alpha}\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

puisque $\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\mathrm{e}^{-i\alpha}$ est réel. Comme $|\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,| = 1$, on obtient finalement

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

On a donc démontré que

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.}$$

EXERCICE 2

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $Z(f)$ l'ensemble des points d'annulation de f et $C(f)$ l'ensemble des points de continuité de f. On pose $\psi = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Démontrer que $C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}) = U$.*

   On procède évidemment par double-inclusion.

   $\supset$ Soit $a \in U$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]a-r;a+r[\subset U$. On a alors $\forall x \in\ ]a-r;a+r[\,,\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}(x) = 0$ et donc $\forall x \in\ ]a-r;a+r[\,,\ (\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(x) = 0$. Ainsi, sur $]a-r;a+r[$, la fonction $\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ coïncide avec la fonction nulle. Comme celle-ci est continue, on en déduit que $\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ est continue en tout point de $]a-r;a+r[$. En particulier, $\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ est continue en a, c'est-à-dire $a \in C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})$. On a donc $U \subset C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})$.

   $\subset$ Soit $a \in C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})$. Par l'absurde, supposons que $a \notin U$. On a alors $(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(a) = \psi(a) = \pm 1$. Supposons par exemple que $(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(a) = 1$ (le cas où $(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(a) = -1$ est similaire). Prenons alors $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de la continuité de $\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ en a. Cela nous donne l'existence de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in\ ]a-\eta;a+\eta[\,,\ |(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(x) - 1| \leqslant 1/2$. Comme $\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ est à valeurs entières, on en déduit que $\forall x \in\ ]a-\eta;a+\eta[\,,\ (\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U})(x) = 1$. Comme $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}$ prend ses valeurs dans $\{0;1\}$ et ψ prend ses valeurs dans $\{-1;1\}$, cela implique que $\forall x \in\ ]a-\eta;a+\eta[\,,\ \psi(x) = 1$, c'est-à-dire $]a-\eta;a+\eta[\subset \mathbb{Q}$. C'est absurde puisque $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide. Donc $a \in U$, ce qui démontre que $C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}) \subset U$.

   En conclusion,

   $$\boxed{C(\psi\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus U}) = U.}$$

2. a) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère la fonction $\mathrm{d}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée distance à A, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{d}_A(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$.*

   α] *Justifier que d_A est bien définie et qu'elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x-a| : a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car A ne l'est pas) minorée par 0, donc $\inf\{|x-a| : a \in A\}$ existe d'après la propriété de la borne inférieure. Autrement dit,

   $$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est bien définie.}}$$

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, l'inégalité triangulaire nous dit que

   $$|x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|.$$

   En passant à la borne inférieure sur $a \in A$ dans cette inégalité, il vient

   $$\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x-y| + \mathrm{d}_A(y),$$

   c'est-à-dire

   $$\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y) \leqslant |x-y|.$$

   En échangeant le rôle de x et de y, on obtient

   $$\mathrm{d}_A(y) - \mathrm{d}_A(x) \leqslant |y-x|.$$

   En combinant ces résultats, on a

   $$|\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y)| \leqslant |x-y|.$$

   En conclusion,

   $$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

   β] *On suppose que A est un fermé de $\mathbb{R}$. Démontrer que $Z(\mathrm{d}_A) = A$.*

   On procède à nouveau par double-inclusion.

   $\supset$ Soit $a \in A$. On a $|a-a| = 0$ donc $\mathrm{d}_A(a) = 0$. D'où $a \in Z(\mathrm{d}_A)$. Ainsi, $A \subset Z(\mathrm{d}_A)$.

   $\subset$ Soit $x \in Z(\mathrm{d}_A)$. On a alors $\inf\{|x-a| : a \in A\} = 0$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on sait qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} |x-a_n| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$. La caractérisation séquentielle de l'adhérence nous dit alors que $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Or A est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Adh}(A) = A$. Il s'ensuit que $x \in A$. Donc $Z(\mathrm{d}_A) \subset A$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } A \text{ est un fermé de } \mathbb{R}, \text{ alors } Z(\mathrm{d}_A) = A.}$$

b) *Soit $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $C(\psi\delta) = Z(\delta)$.*

Inutile de dire que nous allons raisonner par double inclusion.

- $\supset$ Soit $z \in Z(\delta)$. Démontrons que $\psi\delta$ est continue en z. Soit $\varepsilon > 0$. Comme δ est continue en z, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x - z| \leqslant \eta) \Rightarrow (|\delta(x) - \delta(z)| \leqslant \varepsilon)$. Or

$$\begin{aligned} |\delta(x) - \delta(z)| &= |\delta(x)| \qquad \text{car } \delta(z) = 0 \\ &= |\psi(x)\delta(x)| \qquad \text{car } |\psi(x)| = 1 \\ &= |\psi(x)\delta(x) - \psi(z)\delta(z)| \qquad \text{car } \delta(z) = 0, \end{aligned}$$

  donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x - z| \leqslant \eta) \Rightarrow (|\psi(x)\delta(x) - \psi(z)\delta(z)| \leqslant \varepsilon)$. Cela démontre la continuité de $\psi\delta$ en z, c'est-à-dire $z \in C(\psi\delta)$. Donc $C(\psi\delta) \supset Z(\delta)$.

- $\subset$ Soit $z \in C(\psi\delta)$. Par l'absurde, supposons que δ ne s'annule pas en z. Alors $\psi\delta$ ne s'annule pas non plus en z (puisque ψ prend les valeurs 1 ou -1). Comme δ et $\psi\delta$ sont toutes les deux continues en z, on en déduit qu'elles sont toutes les deux de signe constant sur un voisinage $]z - \eta; z + \eta[$ de z (avec $\eta > 0$). Cela implique que ψ est de signe constant sur $]z - \eta; z + \eta[$. Comme ψ est à valeurs entières, on en déduit que ψ garde la valeur 1 ou la valeur -1 sur $]z - \eta; z + \eta[$. On a donc $]z - \eta; z + \eta[\subset \mathbb{Q}$ ou $]z - \eta; z + \eta[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. C'est absurde dans les deux cas puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont d'intérieur vide. Donc $z \in Z(\delta)$, ce qui démontre que $C(\psi\delta) \subset Z(\delta)$.

En conclusion,

$$\boxed{C(\psi\delta) = Z(\delta).}$$

c) *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $C(f) = F$.*

C'est du tout cuit !

Si $F = \varnothing$, alors F est un ouvert (en plus d'être un fermé) et la question 1 nous dit que $C(\psi) = \varnothing$.

Supposons dorénavant que $F \neq \varnothing$. Comme d_F est 1-lipschtizienne sur $\mathbb{R}$ (d'après 2. a) β]), elle est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la question précédente nous dit que $C(\psi \mathrm{d}_F) = Z(\mathrm{d}_F)$. Or, d'après la question 2. a) γ], on a $Z(\mathrm{d}_F) = F$ puisque F est un fermé de $\mathbb{R}$. Par conséquent, on a $C(\psi \mathrm{d}_F) = F$.

En définitive, on peut affirmer qu'

$$\boxed{\text{il existe une fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } C(f) = F.}$$

Remarque culturelle :

Nous venons de démontrer que tout ouvert et tout fermé de $\mathbb{R}$ est un ensemble de continuité d'une fonction.

En fait, on peut démontrer (c'est à votre portée mais ce n'est pas immédiat) qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un ensemble de continuité si, et seulement si, cette partie est une intersection d'une famille dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Une telle partie est appelée un G_δ.

Il n'est pas difficile de se convaincre que les ouverts ou les fermés de $\mathbb{R}$ sont des G_δ. C'est pourquoi nous avons pu démontrer que ce sont bien des ensembles de continuité.

Mais les G_δ ne se limitent pas aux ouverts et aux fermés !

Ainsi, l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est clairement un G_δ puisque c'est l'intersection des $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ où q parcourt $\mathbb{Q}$, qui forment bien une famille dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Il existe donc des fonctions dont l'ensemble des points de continuité est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le prolongement 1-périodique de la dégoulinante (que nous avons vu en TD) en est un exemple !

A contrario, il est possible de démontrer qu'il n'existe pas de fonction dont l'ensemble de continuité est exactement $\mathbb{Q}$! Pour cela, on prouve que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ. L'argument repose sur le théorème de Baire : « une intersection dénombrable d'ouverts denses est un ensemble dense ». Ce résultat est un énoncé topologique très puissant qui permet de démontrer des propriétés fines d'analyse.

EXERCICE 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $g = \sqrt{f}$. On note $Z(f)$ l'ensemble des points d'annulation de f et $Z(f'')$ celui des points d'annulation de f''.

1. *Donner deux exemples de fonctions $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^2$, qui s'annulent chacune au moins une fois sur $\mathbb{R}$, telles que $\sqrt{f_0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas $\sqrt{f_1}$.*

   Considérons
$$f_0 \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^4 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_1 \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$
   Ce sont bien deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annulent chacune en 0 et telles que
$$\sqrt{f_0} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \sqrt{f_1} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$$
   On constate que $\sqrt{f_0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors que $\sqrt{f_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. Donc
$$\boxed{\text{avec les hypothèses faites sur } f, \text{ on ne peut a priori rien dire de la dérivabilité de } g = \sqrt{f}.}$$

2. *Que dire de la régularité de g au voisinage d'un point de $\mathbb{R} \setminus Z(f)$?*

   Soit $a \in \mathbb{R} \setminus Z(f)$ de sorte que $f(a) > 0$. Comme f est continue, il existe $r > 0$ tel que f est strictement positive sur $]a - r; a + r[$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de composition des fonctions $\mathscr{C}^2$ nous dit que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a - r; a + r[$. Par conséquent,
$$\boxed{\text{au voisinage d'un point de } \mathbb{R} \setminus Z(f), \text{ la fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2.}$$

3. a) *Soit $a \in Z(f)$. Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, il existe $c_x \in]a ; x[$ tel que $f(x) = f''(c_x)(x - a)^2/2$. En déduire que g admet des dérivées à gauche et à droite en a dont on précisera les valeurs.*

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Comme f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer le théorème de Taylor–Lagrange à l'ordre 2 entre les points a et x. Cela nous dit qu'il existe $c_x \in]a ; x[$ tel que
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2.$$
   Comme $a \in Z(f)$, on a
$$f(a) = 0.$$
   Par ailleurs, comme f est positive, l'annulation de f en a signifie que f admet en a un minimum local. Comme a est dans l'intérieur de $\mathbb{R}$ (pardi !), un résultat du cours nous dit que
$$f'(a) = 0.$$
   On a donc démontré que
$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, \text{ il existe } c_x \in]a ; x[\text{ tel que } f(x) = \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2.}$$
   On en déduit que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, il existe $c_x \in]a ; x[$ tel que
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{f(x)} - 0}{x - a} = \sqrt{\frac{f''(c_x)}{2}}\frac{|x - a|}{x - a}.$$
   Lorsque x tend vers a, le théorème des gendarmes nous dit que c_x tend vers a (ici, on utilise l'axiome du choix pour justifier l'existence de la fonction $x \longmapsto c_x$). Comme f'' est continue en a (puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier), on en déduit alors que
$$\lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\sqrt{\frac{f''(a)}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \sqrt{\frac{f''(a)}{2}}.$$
   Cela permet de conclure que
$$\boxed{\begin{array}{c} g \text{ admet des dérivées à gauche et à droite en } a \text{ qui sont} \\ \text{données par } g'(a^-) = -\sqrt{\dfrac{f''(a)}{2}} \text{ et } g'(a^+) = \sqrt{\dfrac{f''(a)}{2}}. \end{array}}$$

b) *Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $Z(f) \subset Z(f'')$. Dans ce cas, on précisera $g'(a)$ lorsque $a \in Z(f)$.*

On a

$$\begin{aligned}
& \big(g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\big) \\
\iff\ & \big(g \text{ est dérivable en tout point de } Z(f)\big) \\
\iff\ & \big(\forall a \in Z(f),\ g \text{ est dérivable à gauche et} \\
& \quad \text{à droite en } a \text{ avec } g'(a^-) = g'(a^+)\big) \\
\iff\ & \left(\forall a \in Z(f),\ -\sqrt{\frac{f''(a)}{2}} = \sqrt{\frac{f''(a)}{2}}\right) \\
\iff\ & \big(\forall a \in Z(f),\ f''(a) = 0\big) \\
\iff\ & \big(Z(f) \subset Z(f'')\big).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on constate que, pour tout $a \in Z(f)$, les dérivées à gauche et à droite en 0 sont toutes les deux nulles, c'est-à-dire

$$g'(a) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } Z(f) \subset Z(f'') \\ \text{et, dans ce cas, on a } g'(a) = 0 \text{ pour tout } a \in Z(f). \end{array}}$$

4. *On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

a) *Soient $a \in Z(f)$, $\varepsilon > 0$ et $x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. On considère la fonction polynomiale P définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \frac{1}{2}M(\varepsilon)t^2 + f'(x)t + f(x)$ où $M(\varepsilon) = \sup\{|f''(y)| : y \in [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]\}$.*

α] *Justifier que $M(\varepsilon)$ est un nombre réel positif ou nul.*

Comme f'' est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque f est $\mathscr{C}^2$), les théorèmes généraux de continuité nous disent que $|f''|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème des bornes implique alors que $|f''|$ est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. D'où

$$\boxed{M(\varepsilon) \text{ est un nombre réel positif ou nul.}}$$

β] *Démontrer que $\forall t \in [-\varepsilon; +\varepsilon]\,,\ P(t) \geqslant 0$ puis que $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0$.*

Soit $t \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$. Comme f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer le théorème de Taylor–Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+t$. Cela nous dit qu'il existe $c_t \in \,]x \,\widetilde{;}\, x+t[$ tel que

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(c_t)}{2}t^2.$$

D'une part, on a

$$f(x+t) \geqslant 0.$$

D'autre part, comme $x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$ et $t \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$, on a $]x \,\widetilde{;}\, x+t[\, \subset [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$, ce qui implique que $c_t \in [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$ et donc que

$$f''(c_t) \leqslant M(\varepsilon).$$

En rassemblant ces résultats, il vient

$$0 \leqslant f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(c_t)}{2}t^2 \leqslant f(x) + f'(x)t + \frac{M(\varepsilon)}{2}t^2 = P(t).$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in [-\varepsilon; +\varepsilon]\,, \qquad P(t) \geqslant 0.}$$

Nous allons en déduire que P est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, on traite deux cas.

<u>Premier cas : $M(\varepsilon) = 0$</u>

Dans ce cas, on sait que f'' est la fonction nulle sur le segment $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. Il s'ensuit que f' est constante sur $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. Nous avons déjà dit que $f'(a) = 0$ (car f admet en a un minimum local), donc f' est la fonction nulle sur $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. Dès lors, f est constante sur $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. Comme $f(a) = 0$, on en déduit que f est la fonction nulle sur le segment $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$. Mézalors, on a $\forall t \in [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]\,,\ P(t) = 0$, ce qui signifie que le polynôme P admet une infinité de racines et donc que c'est le polynôme nul ! A fortiori, on a bien $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0$.

Second cas : $M(\varepsilon) > 0$

Cette fois, P est une fonction polynomiale du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif. Comme $t \longmapsto at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet son minimum en $-b/(2a)$, on en déduit que $P : t \longmapsto \frac{1}{2}M(\varepsilon)t^2 + f'(x)t + f(x)$ atteint son minimum en $-f'(x)/M(\varepsilon)$. Or, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' (qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) entre les points a et x nous dit que

$$|f'(x) - f'(a)| \leqslant k|x - a|$$

où

$$k = \sup\{|f''(y)| : y \in \,]a \,;\, x[\}.$$

D'une part, on sait que $f'(a) = 0$. D'autre part, comme $]a \,;\, x[\subset [a - 2\varepsilon; a + 2\varepsilon]$, on a $k \leqslant M(\varepsilon)$. Enfin, on a $|x - a| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on a

$$|f'(x)| \leqslant M(\varepsilon)\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\frac{|f'(x)|}{M(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, on voit que P atteint son minimum dans l'intervalle $[-\varepsilon; \varepsilon]$. Comme P est positive sur cet intervalle d'après ce qui précède, on en déduit que le minimum de P est positif et donc que $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0$.

Bilan :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) \geqslant 0.}$$

γ] *En déduire que* $f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x)$ *puis que* $|g'(x)| \leqslant \sqrt{M(\varepsilon)/2}$.

Là encore, on ne doit pas oublier le cas $M(\varepsilon) = 0$. On envisage donc deux cas.

Premier cas : $M(\varepsilon) = 0$

Dans ce cas, nous avons vu que f est la fonction nulle sur $[a - 2\varepsilon; a + 2\varepsilon]$. Comme x est dans cet intervalle, cela implique que l'inégalité $f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x)$ est équivalente à $0 \leqslant 0$. Il n'y a donc rien à démontrer !

Second cas : $M(\varepsilon) > 0$

Dans ce cas, P est une fonction polynomiale du second degré qui reste positive. Elle ne peut donc pas admettre deux racines réelles distinctes. Autrement dit, son discriminant Δ est nécessairement négatif ou nul. Or $\Delta = f'(x)^2 - 2M(\varepsilon)f(x)$, donc $f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x)$.

Bilan :

$$\boxed{f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x).}$$

Pour démontrer $|g'(x)| \leqslant \sqrt{M(\varepsilon)/2}$, on envisage deux cas.

Premier cas : $x \in Z(f)$

Dans ce cas, le résultat de la question 3 nous dit que $g'(x) = 0$. L'inégalité est alors évidente.

Second cas : $x \notin Z(f)$

Dans ce cas, on sait que g est dérivable en x (puisque g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus Z(f)$) et que

$$g'(x) = (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

d'où

$$|g'(x)| = \sqrt{\frac{f'(x)^2}{4f(x)}}.$$

En tenant compte de l'inégalité $f'(x)^2 \leqslant 2M(\varepsilon)f(x)$, il vient alors

$$|g'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{M(\varepsilon)}{2}}.$$

Bilan :

$$\boxed{|g'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{M(\varepsilon)}{2}}.}$$

b) *Démontrer que g' est continue en tout point de $Z(f)$.*

Soit $a \in Z(f)$.
Nous avons déjà dit que la continuité de $|f''|$ sur le segment $[a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$ impliquait que la fonction $|f''|$ atteint sa borne supérieure $M(\varepsilon)$, autrement dit qu'il existe $d_\varepsilon \in [a-2\varepsilon; a+2\varepsilon]$ tel que $M(\varepsilon) = |f''(d_\varepsilon)|$. Lorsque ε tend vers 0, le théorème des gendarmes nous dit que d_ε tend vers a et donc que $|f''(d_\varepsilon)|$ tend vers $|f''(a)|$ puisque $|f''|$ est continue. Autrement dit, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = |f''(a)|$. Comme $f''(a) = 0$ (car $a \in Z(f)$ et $Z(f) \subset Z(f'')$ puisque g est dérivable), on a donc $\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = 0$.

Parallèlement, lorsque ε tend vers 0, le théorème des gendarmes dit que x tend vers a (car $x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$). Par conséquent, l'inégalité $|g'(x)| \leqslant \sqrt{M(\varepsilon)/2}$ de la question précédente et le théorème des gendarmes nous disent que

$$\lim_{x \to a} g'(x) = 0.$$

Comme $g'(a) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \to a} g'(x) = g'(a),$$

ce qui exprime la continuité de g' en a.
En conclusion,

$$\boxed{g' \text{ est continue en tout point de } Z(f).}$$

c) *Qu'a-t-on démontré dans cette question 4 ?*

On savait que g était de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus Z(f)$. En supposant que g est dérivable en tout point de $Z(f)$, on a démontré que g' est continue en tout point de $Z(f)$ et donc que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{dès que } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R},\ g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque culturelle :

On a ainsi démontré le théorème de Glaeser : si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\sqrt{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $Z(f) \subset Z(f'')$.

EXERCICE 4

L'objet de cet exercice est de démontrer que e *est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ *avec* $a_n \neq 0$ *tels que* $a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n = 0$. *On note* p *un entier naturel non nul dont la valeur sera choisie à la question 4. On considère les polynômes d'Hermite* H_p *et* F_p *définis par* $H_p = \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-k)^p$ *et* $F_p = \displaystyle\sum_{\ell \geqslant 0} {H_p}^{(\ell)}$.

1. a) *Pourquoi peut-on supposer que* $a_0 \neq 0$ *?*

   Comme tous les a_k ne sont pas nuls (puisque $a_n \neq 0$), on peut considérer le plus petit entier k, noté k_0, tel que $a_k \neq 0$. Dès lors, la relation $a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n = 0$ devient $a_{k_0} \mathrm{e}^{k_0} + a_{k_0+1} \mathrm{e}^{k_0+1} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n = 0$, ce qui permet de diviser par e^{k_0} pour se ramener à une relation du type $a_{k_0} + a_{k_0+1} \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^{n-k_0} = 0$ où $a_{k_0} \neq 0$. Ainsi,

   $$\boxed{\text{on peut, sans perte de généralité, supposer que } a_0 \neq 0.}$$

   b) *Qu'est-ce qui justifie l'existence de* F_p *?*

   On sait que pour tout ℓ strictement supérieur au degré de H_p (c'est-à-dire $\ell > pn + p - 1$), on a ${H_p}^{(\ell)} = 0$. Ainsi, la somme $\sum_{\ell \geqslant 0} {H_p}^{(\ell)}$ est une somme finie de polynômes, ce qui justifie que

   $$\boxed{F_p \text{ existe et c'est un polynôme !}}$$

2. a) *Soit* $A \in \mathbb{Z}[X]$ *un polynôme dont* 0 *est racine de multiplicité* $p-1$. *Pour tout* $\ell \geqslant p$, *démontrer que* $A^{(\ell)}$ *est un polynôme dont les coefficients sont des entiers divisibles par* $p!$.

   Comme A est un polynôme à coefficients entiers dont 0 est une racine de multiplicité $p-1$, on peut écrire A sous la forme

   $$A = \sum_{k \geqslant p-1} \alpha_k X^k \qquad \text{avec} \qquad \forall k \geqslant p-1,\ \alpha_k \in \mathbb{Z}.$$

   Pour tout entier $\ell \geqslant p$, on a alors

   $$A^{(\ell)} = \sum_{k \geqslant p-1} \alpha_k k(k-1)\cdots(k-\ell+1) X^{k-\ell} = \sum_{k \geqslant p-1} \alpha_k \ell! \binom{k}{\ell} X^{k-\ell}.$$

   On constate d'une part que les coefficients de $A^{(\ell)}$ sont des entiers et, d'autre part, que ces coefficients sont divisibles par $p!$ (car $\ell!$ est divisible par $p!$ puisque $\ell \geqslant p$). En conclusion,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout entier } \ell \geqslant p,\ A^{(\ell)} \text{ est un polynôme dont} \\ \text{les coefficients sont des entiers divisibles par } p!\end{array}}$$

   b) *Pour tout* $k \in [\![1;n]\!]$, *démontrer que* $F_p(k)$ *est un entier divisible par* p.

   Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a

   $$F_p(k) = \sum_{\ell \geqslant 0} {H_p}^{(\ell)}(k).$$

   Comme k est une racine de multiplicité p de H_p, on a

   $$H_p(k) = H_p'(k) = \cdots = {H_p}^{(p-1)}(k) = 0.$$

   Par ailleurs, comme $(p-1)! H_p = X^{p-1}(X-1)^p \cdots (X-n)^p$ est un polynôme à coefficients entiers dont 0 est racine de multiplicité $p-1$, la question précédente nous dit, pour tout entier $\ell \geqslant p$, les coefficients du polynôme $(p-1)! {H_p}^{(\ell)}$ sont des entiers divisibles par $p!$, ce qui revient à dire que les coefficients de ${H_p}^{(\ell)}$ sont des entiers divisibles par p. Il s'ensuit évidemment que

   $$\forall \ell \geqslant p, \qquad {H_p}^{(\ell)}(k) \in p\mathbb{Z}.$$

   En rassemblant ces informations, on en conclut que

   $$F_p(k) \in p\mathbb{Z}.$$

   Ainsi,

   $$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1;n]\!],\ F_p(k) \text{ est un entier divisible par } p.}$$

c) *Démontrer que $F_p(0)$ est un entier tel que $F_p(0) \equiv (-1)^{np}(n!)^p$ $[p]$.*

On a
$$F_p(0) = \sum_{\ell \geqslant 0} {H_p}^{(\ell)}(0).$$
Comme 0 est une racine de multiplicité $p-1$ de H_p, on a
$$H_p(0) = H_p'(0) = \cdots = {H_p}^{(p-2)}(0) = 0.$$
Par ailleurs, on peut reprendre l'argument de la question précédente pour affirmer que
$$\forall \ell \geqslant p, \qquad {H_p}^{(\ell)}(0) \in p\mathbb{Z}.$$
Reste à regarder ce que l'on peut dire de ${H_p}^{(p-1)}(0)$. D'après la formule de Taylor–Mac Laurin, on sait que $\dfrac{1}{(p-1)!}{H_p}^{(p-1)}(0)$ est le coefficient de X^{p-1} dans H_p. Or
$$\begin{aligned} H_p &= \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{n}(X-k)^p \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-k)^p}{(p-1)!}X^{p-1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\substack{\text{monômes} \\ \text{de degré } \geqslant p}} \\ &= \frac{(-1)^{pn}(n!)^p}{(p-1)!}X^{p-1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\substack{\text{monômes} \\ \text{de degré } \geqslant p}} \end{aligned}$$
donc
$${H_p}^{(p-1)}(0) = (-1)^{pn}(n!)^p.$$
En rassemblant ces informations, on en conclut que
$$\boxed{F_p(0) \text{ est un entier et } F_p(0) \equiv (-1)^{np}(n!)^p\ [p].}$$

3. a) *Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Démontrer que $|F_p(k) - \mathrm{e}^k F_p(0)| \leqslant \mathrm{e}^k(kM)^p/(p-1)!$ où $M = \displaystyle\max_{x\in[0;n]}\prod_{j=1}^{n}|x-j|$.*

Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{k-x}F_p(x).$$
L'application φ est continue sur $[0;k]$ et dérivable sur $]0;k[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\mathrm{e}^{k-x}F_p(x) + \mathrm{e}^{k-x}F_p'(x) \\ &= -\mathrm{e}^{k-x}\big(F_p(x) - F_p'(x)\big) \\ &= -\mathrm{e}^{k-x}\Big(\sum_{\ell\geqslant 0}{H_p}^{(\ell)}(x) - \sum_{\ell\geqslant 0}{H_p}^{(\ell+1)}(x)\Big) \\ &= -\mathrm{e}^{k-x}H_p(x) \\ &= -\mathrm{e}^{k-x}\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{j=1}^{n}(x-j)^p. \end{aligned}$$
Dès lors, pour tout $x \in]0;k[$, on a
$$|\varphi'(x)| = \mathrm{e}^{k-x}\frac{|x|^{p-1}}{(p-1)!}\Big(\prod_{j=1}^{n}|x-j|\Big)^p \leqslant \mathrm{e}^k\frac{k^{p-1}}{(p-1)!}\Big(\max_{x\in[0;n]}\prod_{j=1}^{n}|x-j|\Big)^p$$
où l'existence de $\max\limits_{x\in[0;n]}\prod\limits_{j=1}^{n}|x-j|$ est justifiée par la continuité de $x \longmapsto \prod\limits_{j=1}^{n}|x-j|$ sur le segment $[0;n]$ (théorème des bornes). En appliquant l'inégalité des accroissements finis à φ entre 0 et k, on a
$$|\varphi(k) - \varphi(0)| \leqslant \mathrm{e}^k\frac{k^{p-1}M^p}{(p-1)!}|k-0|$$
c'est-à-dire
$$\boxed{|F_p(k) - \mathrm{e}^k F_p(0)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^k(kM)^p}{(p-1)!}.}$$

b) *En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de n) tel que* $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k)\right| \leqslant \dfrac{C\,(nM)^p}{(p-1)!}$.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k) - F_p(0)\sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^k\right| \qquad \text{car } \sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^k = 0\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \big(F_p(k) - \mathrm{e}^k\,F_p(0)\big)\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \times |F_p(k) - \mathrm{e}^k\,F_p(0)|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \times \frac{\mathrm{e}^k (kM)^p}{(p-1)!}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \times \frac{\mathrm{e}^k (nM)^p}{(p-1)!}\\
&= \frac{C\,(nM)^p}{(p-1)!} \qquad \text{où } C = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,\mathrm{e}^k,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{il existe } C \in \mathbb{R}_+ \text{ (ne dépendant que de } n\text{) tel que } \left|\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k)\right| \leqslant \frac{C\,(nM)^p}{(p-1)!}.}$$

4. *Expliquer comment choisir p afin d'obtenir une contradiction.*

D'après les résultats de la question 2, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k) \equiv a_0 (-1)^{np} (n!)^p \ [p].$$

En choisissant pour p un nombre premier strictement supérieur à $\max\{|a_0|; n!\}$ (il en existe puisqu'il y a une infinité de nombres premiers), on a $a_0(-1)^{np}(n!)^p \not\equiv 0\ [p]$. Il s'ensuit que, pour un tel p, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k) \in \mathbb{Z}^*,$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k F_p(k)\right| \geqslant 1.$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, il vient

$$\frac{C\,(nM)^p}{(p-1)!} \geqslant 1.$$

Or, d'après les croissances comparées, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{C\,(nM)^p}{(p-1)!} = 0,$$

donc en prenant p assez grand (là encore, c'est possible car $\mathbb{P}$ est infini), on obtient une absurdité. En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{e} \text{ est transcendant.}}$$

Remarque culturelle :

Le premier exemple de nombre transcendant a été donné en 1844 par Liouville.
En 1963, Cantor, après avoir démontré que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, en a déduit que l'ensemble des nombres transcendants est lui aussi non dénombrable.
La transcendance de e a été démontrée par Hermite en 1873.
Neuf ans plus tard, Lindemann a démontré que π est aussi transcendant. Il a ainsi justifié l'impossibilité de la quadrature du cercle (c'est-à-dire l'impossibilité de construire à l'aide de la règle et du compas un carré de même aire qu'un disque donné).
