Planche de colle

Exercice de colle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des complexes $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ tels que pour tous i et j, $a_i + b_j$ soit non nul.

On pose la matrice $A_n = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que le déterminant de la matrice $B_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}(X))$ obtenue en rajoutant à A_{n-1} la dernière ligne : $\dfrac{1}{X+b_1}, \cdots, \dfrac{1}{X+b_n}$ et la dernière colonne : $\dfrac{1}{a_1+b_n}, \cdots, \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n}, \dfrac{1}{X+b_n}$ est une fraction rationnelle $F(X)$.
2. Calculer $\det(A_n)$ lorsque les complexes $b_1, \cdots, b_n$ ne sont pas tous différents. On suppose dans la suite qu'ils sont tous différents.
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que
$$F(X) = \lambda \, \frac{(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)\cdots(X+b_n)}.$$
4. Montrer que dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$ apparaît le terme :
$$\frac{\det(A_{n-1})}{X+b_n} = \lambda \, \frac{(b_n+a_1)\cdots(b_n+a_{n-1})}{(b_n-b_1)\cdots(b_n-b_{n-1})} \, \frac{1}{X+b_n}.$$
5. Proposer une formule de $\det(A_n)$ sous forme d'un quotient de produits.

1. Il suffit de développer le déterminant de la matrice B_n par rapport à la dernière ligne. On obtient une fraction rationnelle de la forme :
$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{X+b_k}.$$
2. Si $b_k = b_\ell$ pour deux indices k et ℓ différents, alors, pour tout entier i entre 1 et n :
$$\frac{1}{a_i+b_k} = \frac{1}{a_i+b_\ell}.$$
La matrice A_n admet deux colonnes identiques : $C_k = C_\ell$ et donc :
$$\det(A_n) = 0.$$

3. On a vu tout à l'heure que la DES de la fraction $F(X)$ était de la forme :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{X + b_k}.$$

En mettant le tout sur le dénominateur commun $Q(X) = \prod_{k=1}^{n}(X + b_k)$, alors on écrit :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},$$

avec $\deg(P) < \deg(Q)$, puisque la fraction rationnelle $F(X)$ est de degré strictement négatif.
D'autre part, en évaluant la fraction rationnelle en a_i, pour un indice donné entre 1 et $n-1$, on obtient que $F(a_i)$ est le déterminant d'une matrice comportant deux mêmes lignes, la ligne L_i et la ligne L_n.
Ainsi, $F(a_i) = 0$, puis $P(a_i) = 0$.
Si la liste $a_1, \cdots, a_n$ n'est pas composée de termes différents, alors $F(X) = 0$ car la matrice B_n n'est jamais inversible puisqu'elle comporte toujours deux lignes égales. Dans ce cas, on peut prendre $\lambda = 0$ pour répondre à la question.
Si la liste $a_1, \cdots, a_n$ est composée de complexes tous différents, alors le produit $\prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i)$ divise $P(X)$ et pour des raisons de degrés :

$$P(X) = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i),$$

avec λ une constante.
On a ce qu'il faut quoiqu'il arrive.

4. Par développement par rapport à la dernière ligne dans le déterminant de B_n, on a effectivement le terme $\dfrac{\det(A_{n-1})}{X + b_n}$ qui apparaît.
On peut aussi calculer la constant c_n qui apparaît dans la DES de $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ d'une autre manière en écrivant :

$$c_n = \left((X + b_n) \frac{P(X)}{Q(X)} \right)_{\text{évalué en } -b_n}.$$

Cette évaluation vaut :

$$c_n = \lambda \left(\prod_{i=1}^{n-1}(-b_n - a_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{-b_n + b_i} \right).$$

Par unicité de la DES, on a :

$$c_n = \det(A_{n-1}),$$

et cela nous conduit rapidement à la formule voulue.

5. On va montrer la formule suivante par récurrence sur l'entier n :

$$\det(A_n) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j)}.$$

- Lorsque $n = 1$, le produit du numérateur est vide et la formule devient :

$$\det(A_1) = \frac{1}{a_1 + b_1},$$

qui est vraie.
- Supposons la formule vraie au rang $n - 1$.
- On sait par les questions précédentes que :

$$\det(A_n) = F(a_n) = \lambda \, \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (a_n + b_j)}.$$

Ensuite,

$$\lambda = \det(A_{n-1}) \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)}.$$

On en déduit :

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) \times \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (a_n + b_j)} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)},$$

amenant à la formule voulue au rang n.