Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 12/11/2018

DM n° 6 : Complexes

Problème 1 – (Racines primitives et polynômes cyclotomiques)

Le but de ce problème est d'introduire la notion de racine primitive, et de polynôme cyclotomique. Nous en voyons quelques propriétés élémentaires, en terminant par une application au calcul d'un produit de sinus et d'un produit de cosinus. Ce problème n'est qu'un point de vue très étroit sur le monde très riche des polynômes cyclotomiques, et n'est à voir que comme une introduction.

Partie I – Racines primitives de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note ξ_n la racine n-ième de 1 de plus petit argument strictement positif, c'est-à-dire :

$$\xi_n = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}.$$

On notera comme il en est l'usage $j = \xi_3$.

On appelle racine n-ième primitive de 1 un élément $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel $\omega^k \neq 1$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On note $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes primitives de 1

Étant donnés deux entiers n et m, on notera $n \wedge m$ le pgcd de m et n. On rappelle le théorème de Bézout : si $d = n \wedge m$, alors il existe des entiers u et v tels que $d = un + vm$, la réciproque étant également vraie lorsque $d = 1$.

On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n, c'est-à-dire tels que $k \wedge n = 1$. Il s'agit de l'indicatrice d'Euler.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ξ_n est racine n-ième primitive de 1. Pouvez-vous en donner une autre lorsque $n > 2$?
2. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.
   (a) Montrer que $\omega \in \mathbb{P}_n$ si et seulement si $\{\omega^k, k \in [\![1, n]\!]\} = \mathbb{U}_n$.
   (b) Montrer que $\omega \in \mathbb{P}_n$ si et seulement s'il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\omega^\ell = \xi_n$
   (c) En déduire que $\omega \in \mathbb{P}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega = \xi_n^k$ et $k \wedge n = 1$. Quel est le cardinal de $\mathbb{P}_n$?
3. (a) Décrire en fonction de j l'ensemble $\mathbb{P}_6$
   (b) Décrire l'ensemble $\mathbb{P}_p$ lorsque p est un nombre premier.
   (c) Décrire l'ensemble $\mathbb{P}_n$ lorsque n est une puissance de 2.
4. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, et $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega = \xi_n^k$
   (a) Soit d un diviseur de n. Montrer que $\omega \in \mathbb{P}_{\frac{n}{d}}$ si et seulement si $k \wedge n = d$.
   (b) En déduire que $\mathbb{U}_n = \bigsqcup\limits_{d \mid n} \mathbb{P}_{\frac{n}{d}}$, l'union étant prise sur l'ensemble des diviseurs de n, et l'union étant disjointe.
   (c) En déduire que $n = \sum\limits_{d \mid n} \varphi(d)$.
5. Montrer que pour $n > 2$, $\varphi(n)$ est pair.
6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \wedge n = 1}} k$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{d \mid n} d S_{\frac{n}{d}}.$$

(b) En raisonnant par récurrence, en déduire que $S_1 = \frac{1}{2}\varphi(1) + \frac{1}{2}$, et que pour tout $n > 1$, $S_n = \frac{1}{2}n\varphi(n)$.

Partie II – Polynômes cyclotomiques

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Φ_n le polynôme :

$$\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mathbb{P}_n} (X - \omega) = \prod_{\substack{k \in [\![0, n-1]\!] \\ \text{tq } k \wedge n = 1}} (X - \xi_n^k)$$

1. Quel est le degré de Φ_n ?
2. (a) Déterminer Φ_3, Φ_6.
   (b) Déterminer Φ_p lorsque p est premier
   (c) Déterminer Φ_n lorsque n est une puissance de 2.
3. Soit q un entier impair différent de 1.
   (a) Montrer que $\omega \in \mathbb{P}_{2q}$ si et seulement si $-\omega \in \mathbb{P}_q$.
   (b) En déduire que $\Phi_{2q}(X) = \Phi_q(-X)$.

Partie III – Calcul de $\Phi_n(1)$

1. Soit p un nombre premier et $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\Phi_{p^k} = \frac{X^{p^k} - 1}{X^{p^{k-1}} - 1}.$$

2. Montrer que si p est un nombre premier, pour tout $k \geqslant 1$, $\Phi_{p^k}(1) = p$
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1.$$

   (b) Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers. On suppose de plus que le coefficient dominant de Q est égal à 1. Montrer que s'il existe R tel que $P = QR$, alors R est à coefficients entiers (on pourra raisonner par l'absurde)
   (c) Montrer que Φ_n est à coefficients entiers
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(1) = n$.
5. En considérant la décomposition primaire de n, en déduire que si n n'est pas une puissance d'exposant strictement positif d'un nombre premier p, alors $\Phi_n(1) = 1$.

Partie IV – Un produit de sinus

Avec les résultats des parties précédentes, montrer les deux égalités suivantes :

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$ différent d'une puissance d'un nombre premier :

$$\prod_{\substack{k \in [\![1, n]\!] \\ k \wedge n = 1}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{\varphi(n)}}.$$

2. Pour tout n entier positif impair différent de 1,

$$\prod_{\substack{k \in [\![1, n]\!] \\ k \wedge n = 1}} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}}{2^{\varphi(n)}}.$$