Planche de colle

Exercice de colle

Soit $M : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & (M_{i,j}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{array} \right.$ une fonction dérivable à valeurs matricielle, chaque fonction $M_{i,j} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant donc dérivable.

1. Montrer que la fonction $\det \circ M$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter la dérivée.

On note J la matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1.

2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(tI_n + J)$.
3. Soit D une matrice diagonale. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(t\ J + D)$.

1. Par la formule sommatoire du déterminant, on obtient que $f = \det \circ M$ est une somme de $n!$ fonctions, chacune de ces fonctions étant un produit fini de fonctions dérivables $M_{i,j}$. Le tout est dérivable.
   Comme :
   $$f = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M_{\sigma(k),k},$$
   alors :
   $$f' = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) M'_{\sigma(\ell),\ell} \prod_{k=1,k\neq\ell}^{n} M_{\sigma(k),k}.$$
   Tout se passe comme si on prenait la matrice M, on prenait une colonne C_ℓ, on dérivait les coefficients de cette colonne, on calculait le déterminant de la matrice où seulement la colonne C_ℓ a été remplacée par sa dérivée, puis on faisait la somme lorsque ℓ varie entre 1 et n. Cela nous donne f'.
2. On peut résoudre la question en disant que la matrice J est semblable à la matrice $n\ E_{1,1}$, donc :
   $$t\ I_n + J \sim \mathrm{Diag}(t+n, t, \cdots, t),$$
   donc :
   $$f_n(t) = \det(tI_n + J) = (t+n)\ t^{n-1}.$$
3. On note $d_1, \cdots, d_n$ les coefficients de la diagonale de la matrice D.
   On pose $f : t \longmapsto \det(t\ J + D)$. Directement :
   $$f(0) = \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

Ensuite, la fonction f est dérivable et $f'(t)$ est la somme des déterminants Δ_ℓ, pour ℓ variant entre 1 et n, avec Δ_ℓ le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice $t\ J + D$, la colonne C_ℓ par une colonne remplie de 1. Il est facile alors de calculer Δ_ℓ. On obtient :

$$\Delta_\ell = \prod_{k \neq \ell} d_k.$$

On en déduit :

$$f(t) = \prod_{i=1}^{n} d_i + t \sum_{\ell=1}^{n} \left(\prod_{k \neq \ell} d_k \right).$$