

## Problème n° 2 : Ensembles, relations

### Problème 1 – Équivalence entre l'axiome du choix et le lemme de Zorn

Le but de ce problème est de montrer que l'axiome du choix est équivalent au lemme de Zorn. Cela prouve au passage que le lemme de Zorn est indécidable, tout comme l'axiome du choix.

Dans tout le problème,  $E$  désigne un ensemble ordonné. Nous notons  $\leqslant$  la relation d'ordre large, et  $<$  la relation d'ordre stricte associée. Les notations  $\geqslant$  et  $>$  désignent comme d'habitude les relations duales de  $\leqslant$  et  $<$ .

Nous rappelons les définitions et résultats suivants :

- L'axiome du choix stipule que pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles non vides, il existe une fonction de choix  $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $f(i) \in A_i$ . Ainsi, on peut choisir simultanément un élément dans chacun des  $A_i$ .
- On rappelle qu'un élément  $m$  d'un ensemble ordonné  $E$  est maximal s'il n'admet aucun majorant strict.
- On appelle chaîne un sous-ensemble  $C$  de  $E$  tel que la restriction à  $C$  de l'ordre de  $E$  soit un ordre total. Autrement dit, une chaîne  $C$  de  $E$  est un sous-ensemble totalement ordonné de  $E$ .
- On dit qu'un ensemble  $E$  est inductif si toute chaîne de  $E$  admet un majorant.
- Le lemme de Zorn stipule que tout ensemble inductif admet un élément maximal.
- Étant donnés deux sous-ensembles  $I$  et  $A$  de  $E$ , nous dirons que  $I$  est un segment initial de  $A$  si  $I \subset A$ ,  $I \neq A$ , et si pour tout  $x \in A \setminus I$ ,  $x$  est un majorant de  $I$ .
- Enfin, pour tout  $x \in E$ , nous noterons  $J_x = \{y \in E \mid y < x\}$ .

### Partie I – Préliminaire sur les bonnes chaînes

Dans cette partie, nous supposons l'axiome du choix. Nous nous donnons un ensemble ordonné  $E$ , supposé inductif, dans le but de montrer qu'il admet un élément maximal (lemme de Zorn). Pour cela, nous notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des chaînes de  $E$ . L'ensemble  $E$  étant inductif, ces chaînes sont toutes majorées. On note  $\mathcal{C}_0$  l'ensemble des chaînes  $C$  de  $E$  admettant un majorant strict, donc  $M$  majorant  $C$ , avec  $M \notin C$ .

On définit une fonction  $m : \mathcal{C}_0 \longrightarrow E$ , en posant, pour tout  $C$  de  $\mathcal{C}_0$ ,  $m(C)$  un majorant strict de  $C$  dans  $E$ . Ainsi, pour tout  $C$  de  $\mathcal{C}_0$  et tout  $x \in C$ , on a  $x < m(C)$ .

1. Soit  $C \in \mathcal{C}$ , et  $I$  un segment initial de  $C$ . Montrer que  $I \in \mathcal{C}_0$ .

On dit qu'une chaîne  $C$  de  $\mathcal{C}$  est bonne si pour tout segment initial  $I$  de  $C$ ,  $m(I) \in C$  et  $m(I)$  est le plus petit élément de  $C \setminus I$ . On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bonnes chaînes.

2. Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux bonnes chaînes distinctes et  $x \in C_1 \cap C_2$ .
  - (a) Montrer que  $C_1 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_1$ .
  - (b) On suppose que  $C_1 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_2$ . Montrer que  $C_1 \cap J_x \in \mathcal{C}_0$ , que  $m(C_1 \cap J_x) \in C_1 \cap C_2$ , et que  $m(C_1 \cap J_x) = x$ .
  - (c) En déduire que si  $C_1 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_2$ , alors  $C_1 \cap J_x = C_2 \cap J_x$ .
  - (d) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
    - (i)  $C_1 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_2$
    - (ii)  $C_2 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_1$ .

On note  $C^* = \{x \in C_1 \cap C_2 \mid C_1 \cap J_x$  est un segment initial de  $C_2\}$ . On a évidemment  $C^* \subset C_1$  et  $C^* \subset C_2$ . Les chaînes  $C_1$  et  $C_2$  étant distinctes, une au moins de ces inclusions est stricte. On suppose dorénavant que  $C^* \neq C_1$ .

3. (a) Montrer que pour tout  $x \in C^*$ , et tout  $z \in C_1$ , si  $z < x$ , alors  $C_1 \cap J_z$  est un segment initial de  $C_2$ .

(b) En déduire que  $C^*$  est un segment initial de  $C_1$ .

4. En raisonnant par l'absurde, et en considérant  $m(C^*)$ , montrer que  $C^* = C_2$

Ainsi, on a montré qu'étant données deux bonnes chaînes  $C_1$  et  $C_2$  distinctes, l'une est segment initial de l'autre.

## Partie II – L'axiome du choix implique le lemme de Zorn

On garde les hypothèses, la terminologie et les notations de la partie précédente. L'ensemble  $\mathcal{B}$  étant toujours l'ensemble des bonnes chaînes, on note

$$\overline{\mathcal{C}} = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C,$$

l'union de toutes les bonnes chaînes. On pourra dans cette partie utiliser le résultat de la partie II, même si on n'est pas parvenu à le démontrer : de deux bonnes chaînes, l'une est segment initial de l'autre, et en particulier, l'une est incluse dans l'autre.

1. Montrer que  $\overline{\mathcal{C}}$  est une chaîne, c'est-à-dire un sous-ensemble totalement ordonné de  $E$ .

2. Soit  $C \in \mathcal{B}$  une bonne chaîne distincte de  $\overline{\mathcal{C}}$ . Montrer que  $C$  est un segment initial de  $\overline{\mathcal{C}}$ .

3. Réciproquement, soit  $I$  un segment initial de  $\overline{\mathcal{C}}$ .

(a) Montrer l'existence d'une bonne chaîne  $\overline{C_0}$  telle que  $I \subset C_0$ .

(b) Montrer que  $I$  est une bonne chaîne.

4. Montrer que  $\overline{\mathcal{C}}$  est une bonne chaîne.

5. On suppose que  $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_0$ , et on considère  $C' = \overline{\mathcal{C}} \cup \{m(\overline{\mathcal{C}})\}$ . Montrer que  $C'$  est une bonne chaîne. En déduire que  $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ .

6. En se souvenant que  $E$  est inductif, en déduire que  $\overline{\mathcal{C}}$  admet un maximum  $M$ , et que  $M$  est un élément maximal de  $E$ .

7. Où dans cette preuve a-t-on utilisé l'axiome du choix ?

## Partie III – Le lemme de Zorn implique l'axiome du choix

On suppose dans cette partie le lemme de Zorn. On se donne une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles non vides, et on cherche à donner l'existence d'une fonction de choix  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ , donc vérifiant  $f(i) \in A_i$ , pour tout  $i \in I$ . Pour cela, on définit une fonction de choix partielle  $g$  comme étant une fonction définie sur un sous-ensemble  $J$  de  $I$ , à valeurs dans  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , et vérifiant pour tout  $j \in J$ ,  $g(j) \in A_j$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions de choix partielles. On définit une relation  $\preceq$  sur  $\mathcal{C}$  par :

$$g_1 \preceq g_2 \iff \begin{cases} J_1 \subset J_2 \\ g_2|_{J_1} = g_1, \end{cases}$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont les domaines respectifs de  $g_1$  et  $g_2$ .

1. Montrer que  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{C}$ .

2. Montrer que si  $g$  est un élément maximal de  $(\mathcal{C}, \preceq)$ , alors le domaine de  $g$  est  $I$  (on pourra démontrer la contraposée).

3. Montrer que  $(\mathcal{C}, \preceq)$  est inductif.

4. En déduire l'axiome du choix.