

SUITES

Exercice 1. Démographie apicole et suite de Fibonacci

Nous avons tous deux parents, quatre grands-parents, huit arrière-grands-parents, etc. Si l'on ne tient pas compte des mariages entre cousins plus ou moins éloignés, remonter une génération fait doubler le nombre d'ancêtres. Il est donc facile de calculer le nombre d'ascendants : à la n -ème génération, nous en avons 2^n .

Le problème se complique chez les abeilles. En effet, si chaque femelle a toujours un père et une mère, les mâles, en revanche, n'ont qu'un seul parent : une mère.

L'objet de cet exercice est de calculer le nombre d'ascendants d'une abeille à chaque génération. Nous verrons que le résultat permet de démontrer que les générations d'abeilles s'accroissent comme si toutes les abeilles avaient environ 1,618 parents, et non pas $3/2$ comme on aurait pu l'imaginer.

On considère Willy un faux-bourdon (une abeille mâle) et Maya une butineuse (une abeille femelle) et l'on note :

- m_n le nombre d'ascendants mâles à la n -ème génération de Willy ;
- f_n le nombre d'ascendants femelles à la n -ème génération de Willy ;
- $a_n = m_n + f_n$ le nombre d'ascendants à la n -ème génération de Willy ;
- b_n le nombre d'ascendants à la n -ème génération de Maya.

On suppose que la génération 1 est celle de Willy. On a donc $a_1 = 1$ (Willy lui-même).

1. Que valent a_2 et a_3 ?
2. Soit $n \geq 1$. Justifier que $f_{n+1} = a_n$ et $m_{n+1} = f_n$ et en déduire que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. Pour tout $n \geq 1$, déterminer l'expression de a_n en fonction de n . On notera $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ le nombre d'or et on remarquera que $(1 - \sqrt{5})/2 = -1/\varphi$.
4. Pour $n \geq 1$, que vaut le nombre b_n ?
5. Déterminer les limites des rapports a_{n+1}/a_n et b_{n+1}/b_n et interpréter ces résultats.
6. Déterminer le nombre d'ascendants à la 14-ème génération de Willy.
7. Exprimer, pour tout $n \geq 1$, la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ en fonction de a_{n+2} . En déduire le nombre d'ascendants de Willy sur 12 générations.

Récréation mathématique

Dans ce tableau, il y a

... fois le chiffre 0	... fois le chiffre 5
... fois le chiffre 1	... fois le chiffre 6
... fois le chiffre 2	... fois le chiffre 7
... fois le chiffre 3	... fois le chiffre 8
... fois le chiffre 4	... fois le chiffre 9

