ESPACES VECTORIELS

✠ ***Exercice 1.*** [○]

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et Q un élément de $\mathbb{R}[X]$. On note G l'ensemble des restes des divisions euclidiennes des polynômes de F par Q.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans le cas où $F = \mathbb{R}[X]$, déterminer G.

1. D'abord le polynôme nul appartient bien à G car c'est le reste de la division euclidienne par Q du polynôme nul, qui appartient bien à F. Ensuite, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et si R_1 et R_2 sont les restes des divisions euclidiennes par Q de deux polynômes P_1 et P_2 de F, alors $\lambda R_1 + \mu R_2$ est le reste de la division euclidienne par Q du polynôme $\lambda P_1 + \mu P_2$, qui appartient à F. Donc

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

2. Supposons que $F = \mathbb{R}[X]$ et notons $n = \deg Q$. On sait déjà que $G \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par ailleurs, chacun des polynômes X^i pour $i = 0, \ldots, n-1$ est son propre reste dans sa division euclienne par Q, donc $\forall i = 1, \ldots, n,\ X^i \in G$. On en déduit que $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^{n-1}) \subset G$ et donc que

$$\boxed{G = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

✠ ***Exercice 2.*** [○]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les applications $c_k : x \longmapsto \cos(kx)$ et $C_k : x \longmapsto \cos^k(x)$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$L_n = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad \text{et} \qquad P_m = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Comparer L_n et P_m pour tous n et m variant entre 1 et $+\infty$.

Il est clair que si $n_1 \leqslant n_2$, alors $L_{n_1} \subset L_{n_2}$ et si $m_1 \leqslant m_2$, alors $P_{m_1} \subset P_{m_2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La technique de linéarisation des produits de fonctions trigonométriques permet d'exprimer $x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \cos^2 x, \ldots, x \longmapsto \cos^n x$ à l'aide de $x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \cos 2x, \ldots, x \longmapsto \cos nx$, donc $P_n \subset L_n$. Réciproquement, la formule de de Moivre permet d'exprimer $x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \cos 2x, \ldots, x \longmapsto \cos nx$ sous forme de polynômes trigonométriques de degrés inférieurs ou égaux à n, donc $L_n \subset P_n$. Ainsi $L_n = P_n$.

Pour résumer, on a

$$\boxed{L_1 = P_1 \subset L_2 = P_2 \subset L_3 = P_3 \subset \cdots \subset L_n = P_n \subset \cdots}$$

✠ ***Exercice 3.*** [⋆]

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par :

1. l'ensemble A des fonctions qui s'annulent une infinité de fois ;
2. l'ensemble B des fonctions qui ne s'annulent pas ;
3. l'ensemble C des fonctions qui s'annulent exactement une fois.

1. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a
$$f = \underbrace{f.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}}_{\in A} + \underbrace{f.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}}_{\in A}$$
donc
$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.}$$
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. On a
$$f = \underbrace{\left(\frac{f}{2} + \mathbb{1}_{Z(f)}\right)}_{\in B} + \underbrace{\left(\frac{f}{2} - \mathbb{1}_{Z(f)}\right)}_{\in B}$$
donc
$$\boxed{\mathrm{Vect}(B) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.}$$
3. Soit $f \in B$. On a
$$f = \underbrace{\mathrm{Id}.f}_{\in C} + \underbrace{(1-\mathrm{Id}).f}_{\in C},$$
donc $f \in \mathrm{Vect}(C)$. On a donc
$$B \subset \mathrm{Vect}(C).$$
Il s'ensuit que
$$\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(C)$$
et donc
$$\boxed{\mathrm{Vect}(C) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.}$$

✠ ***Exercice 4.*** [○]
L'ensemble des quaternions est-il une $\mathbb{C}$-algèbre ?

Nan ! Car $i(jk) \neq j(ik)$.

✠ ***Exercice 5.*** [○]
Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, démontrer que la famille $\big(x \longmapsto |x-\alpha|\big)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1|x-\alpha_1| + \cdots + \lambda_n|x-\alpha_n| = 0$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, si $\lambda_i \neq 0$, alors $x \longmapsto \lambda_1|x-\alpha_1| + \cdots + \lambda_n|x-\alpha_n|$ n'est pas dérivable en α_i alors que la fonction nulle l'est, ce qui est absurde. Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]\,,\ \lambda_i = 0$, ce qui démontre que
$$\boxed{\text{la famille } \big(x \longmapsto |x-\alpha|\big)_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{ est libre dans } \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

✠ ***Exercice 6.*** [★]
Soit G un groupe. Un morphisme de groupe de G vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ est appelé un *caractère* de G. On considère des caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ de G deux à deux distincts. Démontrer que $(\chi_1,\dots,\chi_n)$ est une famille libre de l'espace $\mathbb{C}^G$.

On procède par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « toute famille de n caractères de G deux à deux distincts est libre dans $\mathbb{C}^G$ ».

Initialisation : Si χ est un caractère, il est non nul (puisqu'il est à valeur dans $\mathbb{C}^*$). Par conséquent, la famille (χ) est libre. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $(\chi_1,\dots,\chi_n,\chi_{n+1})$ une famille de $n+1$ caractères de G deux à deux distincts. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ tels que
$$\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n + \lambda_{n+1}\chi_{n+1} = \widetilde{0},$$
c'est-à-dire, pour tout $g \in G$,
$$\lambda_1\chi_1(g) + \cdots + \lambda_n\chi_n(g) + \lambda_{n+1}\chi_{n+1}(g) = 0. \qquad (*)$$

Pour tous $g, h \in G$, on a

$$\lambda_1 \chi_1(gh) + \cdots + \lambda_n \chi_n(gh) + \lambda_{n+1} \chi_{n+1}(gh) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \chi_1(g) \chi_1(h) + \cdots + \lambda_n \chi_n(g) \chi_k(h) + \lambda_{n+1} \chi_{n+1}(g) \chi_{k+1}(h) = 0. \qquad (**)$$

En soutrayant $\chi_{n+1}(h)$ fois la relation $(*)$ à la relation $(**)$, on obtient, pour tous $g, h \in G$,

$$\lambda_1 \big(\chi_1(h) - \chi_{n+1}(h)\big) \chi_1(g) + \cdots + \lambda_n \big(\chi_n(h) - \chi_{n+1}(h)\big) \chi_n(g) = 0.$$

Autrement dit, on a, pour tout $h \in G$, on a

$$\lambda_1 \big(\chi_1(h) - \chi_{n+1}(h)\big) \chi_1 + \cdots + \lambda_n \big(\chi_n(h) - \chi_{n+1}(h)\big) \chi_n = \widetilde{0}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ est libre, ce qui implique que, pour tout $h \in G$,

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad \lambda_k \big(\chi_k(h) - \chi_{n+1}(h)\big) = 0.$$

Comme χ_{n+1} diffère de chacun des χ_k pour $k \in [\![1; n]\!]$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad \lambda_k = 0.$$

Dès lors, la relation de départ devient

$$\lambda_{n+1} \chi_{n+1} = \widetilde{0},$$

ce qui impose que

$$\lambda_{n+1} = 0$$

puisque $\chi_{n+1} \neq \widetilde{0}$. On en déduit que $(\chi_1, \ldots, \chi_n, \chi_{n+1})$ est libre, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{toute famille finie de caractères de } G \text{ deux à deux distincts est libre dans } \mathbb{C}^G}$$

✠ *Exercice 7.* [⋆]

Soient E un K-espace vectoriel et F_1, F_2, G_1, G_2 quatre sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2$ avec $F_2 \subset G_1$. Démontrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus (G_1 \cap G_2) = E$.

Soit $x \in E$.

Comme $E = F_1 \oplus G_1$, il existe $f_1 \in F_1$ et $g_1 \in G_1$ tels que $x = f_1 + g_1$.

Comme $E = F_2 \oplus G_2$, il existe $f_2 \in F_2$ et $g_2 \in G_2$ tels que $g_1 = f_2 + g_2$. Alors $g_2 = g_1 - f_2 \in G_1$ puisque $F_2 \subset G_1$, donc $g_1 \in G_1 \cap G_2$.

On a donc $x = f_1 + f_2 + g_2$ où $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ et $g_2 \in G_1 \cap G_2$, ce qui démontre que $x \in F_1 + F_2 + (G_1 \cap G_2)$.

Soient $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ et $g \in G_1 \cap G_2$ tels que $f_1 + f_2 + g = 0_E$. Comme $f_2 \in F_2$, $g \in G_1$ et $F_2 \subset G_1$, on a $f_2 + g \in G_1$. Du coup, l'égalité $f_1 + (f_2 + g) = 0_E$ avec $f_1 \in F_1$ et $f_2 + g \in G_1$ implique que $f_1 = 0_E$ et $f_2 + g = 0_E$ puisque F_1 et G_1 sont en somme directe. Comme $f_2 \in F_2$, $g \in G_2$ et comme F_2 et G_2 sont en somme directe, l'égalité $f_2 + g = 0_E$ implique que $f_2 = 0_E$ et $g = 0_E$. Au bilan, on a démontré que $f_1 = f_2 = g = 0_E$, ce qui justifie que F_1, F_2 et $G_1 \cap G_2$ sont en somme directe.

En conclusion, on a

$$\boxed{F_1 \oplus F_2 \oplus (G_1 \cap G_2) = E.}$$