Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths ULCR
- *NOM Prénom* : LESBATS Rémi

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Pour $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, on définit les opérateurs suivants :
$P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) + f(x))$
$D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$
Montrer l'inégalité suivante, pour tout $n, x \in \mathbb{N}$:

$$P^n(f^2)(x) - (P^n(f)(x))^2 \leq \frac{n}{4} P^{n-1}((D(f)(x))^2)$$

Remarques sur l'oral

Examinateur plutôt agréable qui n'hésite pas à se lever pour venir écrire au tableau, mais me laisse systématiquement aller au bout d'un calcul avant de vérifier s'il est juste/utile, puis de me réorienter si nécessaire. Il m'indique que c'est la première question, mais je ne connais pas la suite. Il me laisse 10min qui sont bien nécessaires pour assimiler toutes les définitions ainsi que l'inégalité à démontrer. Je fais rapidement le cas n=1 modulo une petite erreur de calcul, on trouve une égalité. Je propose d'effacer mais l'examinateur me suggère plutôt de garder ce résultat pour la suite et de continuer ailleurs. Je procède par récurrence. Il me laisse tenter de développer et de faire des inégalités arithmético-géométriques pour essayer de me ramener à l'hypothèse de récurrence mais rien ne marche et il y a trop de termes pour y voir clair. Il m'explique alors que le problème vient que les carrés sont "trop éloignés", l'un à l'intérieur d'un P^n et l'autre à l'extérieur du P^n. Je ne vois pas où il veut en venir donc il finit par me prendre la craie pour écrire

$$P^{n+1}(f^2) - (P^{n+1}(f))^2 = P^{n+1}(f^2) - P^n(P(f)^2) + P^n(P(f)^2) - (P^{n+1}(f))^2$$

On reconnaît alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $P(f)$ d'une part, et le cas $n = 1$ à l'intérieur d'un P^n d'autre part. On se rappelle que le cas $n = 1$ était une égalité. On remarque aussi que si $f \leq g$ alors $P(f) \leq P(g)$ par linéarité donc on peut simplifier par P^n. Après calculs on se ramène à montrer que $P^2(D(f)) \leq P(D(f^2))$ (Je crois) et il faut tout développer. Je m'attendais au moins à voir apparaître une inégalité classique comme l'inégalité arithmético-géométrique ou Cauchy-Schwarz, mais le corrigé de l'examinateur ne semblait pas en mentionner, il y avait d'ailleurs une erreur dans cette étape puisqu'il m'a repris sur un calcul juste et a paru confus en relisant son corrigé, ce qui l'a conduit à me laisser "le bénéfice du doute" sur la dernière inégalité quand le temps était écoulé. Finalement je termine de justesse la question dans le temps imparti, mais avec son aide sur la seule étape qui demande une vraie réflexion.