

Corr. 1 Franges de YOUNG au voisinage de l'image géométrique

Note importante : comme souvent, il ne faut pas faire une confiance absolue au tracé des rayons de l'énoncé. Notamment, ici, il est faux puisque les rayons qui arrivent en T₁ et T₂ (et qui sont ensuite diffractés, ce qui permet d'avoir les interférences. ...) devraient avoir leur prolongement se coupant en S' !

1. On observe sur l'écran un système de franges quasirectilignes, parallèles à \vec{e}_y (on reste dans les conditions de Gauss bien sûr). Caractérisons ce système de franges.

La condition de stigmatisme entre S et S' conjugués par la lentille permet de dire que (ST₁S') = (ST₂S') (autrement dit, tous les rayons arrivant en S' sont en phase). Par conséquent, on voit déjà que **la frange centrale est en S'**.

De plus, aucune lentille n'est interposée entre les fentes et l'écran donc tout se passe comme si on remplaçait la source S et la lentille par une source S' virtuelle seule, ou bien (si ça vous aide) par S'' réelle, symétrique de S' par rapport au milieu de [T₁T₂]. Ainsi, on a un montage classique de trous de Young sans lentille et l'interfrange vaut

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

2. Si l'on translate l'écran suivant (Ox), on n'observe aucune modification du système interférentiel (évident).

Si la translation de l'écran est suivant (Oz) et reste modérée, alors la frange centrale reste à peu près fixe mais l'interfrange varie (modification de D) : il y a dilatation des franges autour de la frange centrale par éloignement de l'écran.

3. Si l'on translate la lentille suivant (Ox) tout en restant dans les conditions de Gauss, S' bouge (en sens contraire) donc la frange centrale aussi. Par contre, l'interfrange reste inchangée (a et D fixés).

4. Le but est de calculer la différence de marche $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (ST_2) + (T_2M) - (ST_1) - (T_1M)$, d'en déduire la forme des franges et aussi de voir comment elle est affectée par le déplacement des éléments optiques. Pour prendre en compte l'effet de la lentille, on utilise la propriété de stigmatisme qui montre que (SS')₂ = (SS')₁, i.e. que (ST₂) + (T₂S') = (ST₁) + (T₁S'). La différence de marche se réécrit donc $\delta(M) = (T_1S') - (T_1M) - [(T_2S') - (T_2M)]$ soit encore (n = 1)

$$\delta(M) = T_1S' - T_1M - [T_2S' - T_2M]$$

On introduit ensuite les coordonnées des quatre points apparaissant dans la dernière formule : M(x,y,0), S'(X,0,0), T₁(a/2 + ε, 0, -D) et T₂(-a/2 + ε, 0, -D) (le paramètre ε permet de décrire la translation de l'écran T de la question 2). On montre comme en cours, et après développement limité,

que T₁S' ≈ D $\left[1 + \frac{1}{2} \frac{(a/2 + \varepsilon - X)^2}{D^2} \right]^{1/2}$ et de même

que T₁M ≈ D $\left[1 + \frac{1}{2} \frac{(a/2 + \varepsilon - x)^2 + y^2}{D^2} \right]^{1/2}$, d'où

$$T_1S' - T_1M \approx \frac{1}{2D} [(x-X)(a+2\varepsilon-x-X) - y^2].$$

En remplaçant a par -a on trouve aussi

$$T_2S' - T_2M \approx \frac{1}{2D} [(x-X)(-a+2\varepsilon-x-X) - y^2].$$

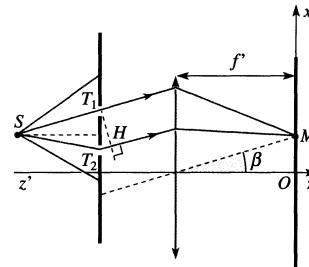
Par conséquent, il vient

$$\delta(M) = \frac{a(x-X)}{D}$$

Sachant que δ(M) ne dépend que de x, et non de y, les interférences sont rectilignes sur l'écran (avec un interfrange $i = \lambda_0 D/a$). δ(M) ne dépend pas de ε, par conséquent, rien ne change si on translate T à la question 2. Une translation de la lentille L change la position de l'image géométrique, donc X varie. Par conséquent les franges se traduisent en bloc, d'autant que la frange centrale (qui est en δ(M) = 0 donc en x = X).

Corr. 2 Fentes de YOUNG avec observation à l'infini

1. Les rayons issus de T₁ et T₂, qui arrivent au même point M, sont parallèles à la sortie des deux trous et on note que $\beta \simeq \frac{x}{f'}$ (conditions de Gauss).



Ce dispositif réalise l'observation sur un écran à distance finie d'interférences à l'infini.

2. D'après le principe de retour inverse de la lumière, on peut considérer le point M comme une source qui émet une onde sphérique qui se transforme en onde plane « après » la lentille. Les chemins optiques (MT₁) et (MH) sont égaux, car T₁ et H sont sur un même plan d'onde (cf théorème de Malus). Ainsi, on peut dire que

$$\delta = (T_2M) - (T_1M) = T_2H + (HM) - (T_1M) = T_2H = a \sin \beta$$

Dans les conditions de Gauss, on tire

$$\delta \simeq a\beta = a \frac{x}{f'}$$

3. Puisqu'il s'agit d'un cas connu d'interférences à deux ondes, on a directement

$$I = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right)$$

Les franges d'interférences sont rectilignes et parallèles à (Oy), équidistantes de l'interfrange

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

Ces franges sont invariantes pour une translation de la source parallèlement à (Oy). La source ponctuelle peut *a priori* être remplacée par une fente fine parallèle à (Oy) et les deux trous par deux fentes parallèles à la fente source (on peut le faire car chaque élément de source est incohérent avec les autres).

Le contraste vaut toujours 1 et les franges sont ainsi visibles dans tout le champ d'interférences : **elles sont non localisées.**

4. Les trois distances ST₁, ST₂ et ST₃ ne peuvent être égales et on sait que dans l'air d'indice proche de l'unité, (ST_i) = ST₁. On en déduit le résultat demandé.

5. Puisque la source est au foyer d'une lentille, T₁, T₂ et T₃

sont sur un même plan d'onde et, d'après le théorème de Malus,

$$(ST_1) = (ST_2) = (ST_3)$$

La différence de marche entre les ondes passées par T₁ et T₂ est

$$\delta_{12} = \frac{ax}{f'}$$

De même, relativement aux trous T₂ et T₃,

$$\delta_{23} = \frac{ax}{f'}$$

En conséquence, on pose le déphasage φ entre deux trous consécutifs :

$$\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda f'}$$

On est obligé de reprendre le calcul de l'intensité sur l'écran car on n'a pas affaire à des interférences à deux ondes mais trois ondes ! Pour ce faire, on note \mathfrak{s}_i l'amplitude complexe de l'onde reçue en M après être passée par le trou T_i (i ∈ {1, 2, 3}). Alors, on a

$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2 e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{s}_2 e^{-j\varphi}$$

L'amplitude complexe résultante en M est la somme des amplitudes complexes incidentes

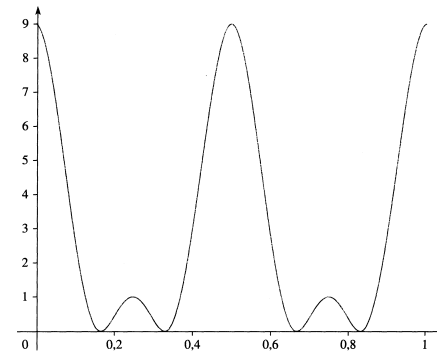
$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3$$

soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_2 (1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = \mathfrak{s}_2 (1 + 2 \cos \varphi)$

Finalement, en notant I₀ l'intensité d'une onde seule,

$$I(M) = |\mathfrak{s}|^2 = I_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2$$

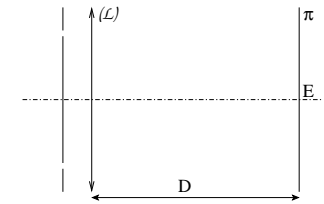
Les franges obtenues sont différentes du cas à deux ondes. Les maxima globaux d'intensité (9 I₀) correspondent à cos φ = 1 ; il y a aussi des maxima locaux, d'intensité I₀, pour cos φ = -1. Enfin, les minima d'intensité (franges noires) sont pour cos φ = -1/2. La figure suivante représente I/I₀ en fonction de φ/4π.



6. L'expression de I ne fait intervenir ni l'abscisse x des fentes, ni leur distance aux lentilles. On peut donc les translaté sans modifier la figure d'interférences, à condition toutefois de rester dans les conditions de Gauss !

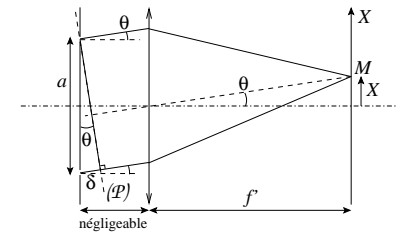
Corr. 3 Lentille en aval de fentes de YOUNG

Dans le premier cas (D = f'), le plan d'observation est confondu avec le plan focal image de la lentille (ℒ') donc on observe **les interférences à l'infini ramenées dans le plan focal image de la lentille** (les rayons qui provoquent les interférences sur l'écran sont parallèles avant la lentille).



Le second cas (D = 2 f') est différent et concerne des interférences à distance finie...

1. Le déphasage φ(M) entre les rayons qui interfèrent au point M s'obtient en utilisant le principe de retour inverse de la lumière.



En effet, si on imagine une source en M, celle-ci émet des ondes sphériques converties en plans équiphasés à gauche de la lentille et la différence de marche introduite entre les rayons se lit simplement sur la figure (δ). Par conséquent,

$$\varphi(M) = \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda}$$

avec

$$\delta(M) = a \sin \theta(M) \simeq a \theta(M) = a \frac{X}{f'}$$

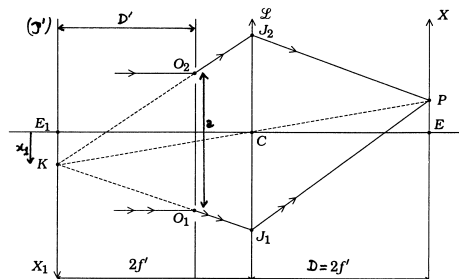
car on est dans les conditions de Gauss ($\theta \ll 1$) et on a pensé à exploiter le rayon passant par le centre de la lentille.

L'interfrange i est la période spatiale ΔX du phénomène d'interférences observé sur l'écran et correspond à une rotation de phase de 2π, c'est-à-dire une variation de δ de λ₀. Ainsi, on tire

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

Ce résultat est classique : lorsqu'on veut observer les interférences à l'infini (distance D fentes-écran sans lentille infinie), on utilise une lentille de focale f' et on place l'écran dans son plan focal image et les résultats connus pour les fentes de Young à distance finie sont conservés **en remplaçant le paramètre D par la focale f' de la lentille.**

2. Ce qui est embêtant *a priori* dans ce nouveau cas, c'est la lentille. Elle rend difficile le calcul de la différence de marche si on veut le faire directement. **il faut alors, comme toujours avec une lentille, penser à exploiter la condition de stigmatisme et/ou le principe de retour inverse de la lumière et/ou le théorème de Malus** (comme dans le cas précédent d'ailleurs). Cela permet de ne pas avoir à tenir compte de la forme de la lentille !! Je rappelle qu'il est interdit de faire des calculs géométriques direct avec des rayons tombant sur une lentille !!



Pour s'en sortir ici, on remarque donc que l'écran est le conjugué par la lentille du plan (\mathcal{P}) en amont à une distance $2f'$. En effet, avec la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{CE_1} - \frac{1}{CE} = \frac{1}{f'} \quad \text{donne} \quad \overline{CE_1} = -2f'$$

Les rayons venant interférer en P sont ceux diffractés par les fentes selon les directions dont les prolongements passent par le point K (conjugué de P par la lentille). La condition de stigmatisme impose (KJ_2P) = (KJ_1P). Ainsi, la différence de marche au point P est

$$\delta(P) = KO_2 - KO_1$$

On peut alors utiliser une analogie avec les fentes de Young, mais en regardant vers K, pour dire directement que

$$\delta(P) \simeq \frac{ax_1}{D'} = \frac{ax_1}{2f'}$$

la lentille étant collée au plan des fentes. Or, le grandissement de la lentille est ici $\gamma = -1$ donc $X = +x_1$ (voir les axes inversés), d'où

$$\delta(P) = \frac{aX}{2f'}$$

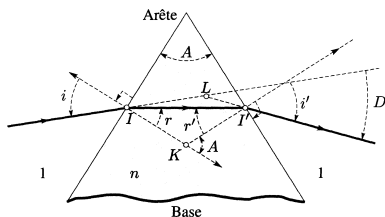
Il ne reste qu'à calculer la période spatiale des franges d'interférences (correspondant à une variation de λ_0 de δ). Finalement, l'interfrange obtenue est doublée par rapport au cas précédent :

$$i = \frac{2f'\lambda}{a}$$

Corr. 4 Biprisme de Fresnel

1. Cette question archi-classique est à savoir faire très rapidement !. Les formules générales du prisme s'écrivent (en angles orientés comptés positivement sur la figure par convention, ou bien avec les angles absolus, et en notant $D = \alpha$ la déviation) :

$$r + r' = A \quad D = i + i' - A \quad \sin i = n \sin r \quad \sin i' = n \sin r'$$



L'angle i étant supposé faible, r l'est donc aussi et la relation $r' = A - r$ montre que r' est aussi petit devant l'unité. Par conséquent, i' l'est aussi ! Finalement, on peut reprendre les équations précédentes après linéarisation aux petits angles :

$$r + r' = A \quad D = i + i' - A \quad i = nr \quad i' = nr'$$

Il ne reste qu'à éliminer r et r' grâce aux formules de Descartes linéarisées, d'où $i + i' = nA$, puis

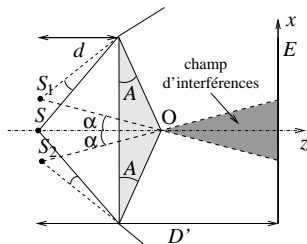
$$\alpha = D = (n - 1) A$$

Attention, comme toujours pour un prisme, les rayons sont déviés vers la base du prisme ! Une simulation numérique permettrait de voir que la formule précédente, déterminée aux petits angles, marche encore bien pour des angles de 20° !

Finalement, d'après le résultat précédent, les rayons qui passent dans le prisme du haut sont déviés en bloc vers le bas de α et ils semblent provenir de S_1 obtenu par rotation d'angle $-\alpha$ autour de O (il faut bien comprendre que le prisme étant considéré comme "petit", il est quasiment indistinguable du point O si on fait un dessin à l'échelle). S_2 est le symétrique de S_1 par rapport à l'axe optique du système (voir figure suivante). On obtient simplement, puisque $\alpha \ll 1$,

$$a = S_1 S_2 \simeq 2d\alpha = 2Ad(n - 1)$$

2. Le champ d'interférences est précisé sur la figure suivante :



3. Puisque S_1 et S_2 constituent deux sources secondaires synchrones en phase, il y a équivalence avec le dispositif des trous de Young (qui seraient en S_1 et S_2). La frange centrale est en $x = 0$, l'interfrange vaut $i = \lambda D'/a$ et l'intensité est donnée par

$$I(M) = I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi x}{i} \right]$$

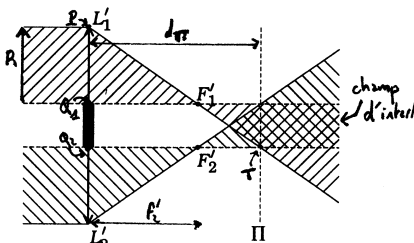
Les franges d'interférences sont rectilignes, parallèles à (Oy).

4. L'interfrange vaut $i = 0,34$ mm et la largeur du champ sur l'écran est de 1,57 cm. On observe donc 23 franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale brillante (à ne pas oublier !), soit en tout 47 franges brillantes.

L'interfrange est trop faible pour une observation confortable à l'œil nu et on doit donc utiliser un viseur micrométrique pointé sur le plan de l'écran.

Corr. 5 Bilentilles de BILLET

1. L'onde incidente sur (L') est constituée de plans équi-phases en incidence normale. Chaque morceau de lentille fait converger cette onde aux foyers images F'_1 et F'_2 (séparés) qui se comportent alors comme deux sources cohérentes en phase ! On pose $F'_1 F'_2 = 2a$.



Le dispositif est donc analogue aux trous de Young (placés fictivement en F'_1 et F'_2) et la largeur du champ d'interférences est $2a$ au-delà du plan Π .

Question légitime : l'écran est-il bien au-delà du plan Π ? Pour y répondre, on utilise les triangles homothétiques (PQ_2T) et ($PQ_1F'_1$) :

$$\frac{d_{\Pi}}{PQ_2} = \frac{Q_1 F'_1}{Q_1 P} \quad \text{soit} \quad \frac{d_{\Pi}}{2a + R} = \frac{f'_2}{R}$$

donc

$$d_{\Pi} = f'_2 \left(1 + \frac{2a}{R} \right)$$

La condition $d > d_{\Pi}$ revient par conséquent à avoir

$$R > \frac{2a}{d/f'_2 - 1} = 2 \text{ mm}$$

En conclusion, l'écran est fort probablement au-delà du plan Π !

On observe sur l'écran des franges d'interférences quasirectilignes, parallèles à la direction de coupure de (L'), avec

$$i = \frac{\lambda(d - f'_2)}{2a} = 60 \mu\text{m}$$

2. Si l'on remplace S par un fil source, chaque point de ce fil se comporte comme une source incohérente vis-à-vis des autres. On doit donc sommer les intensités des figures obtenues pour chacun de ces points. Or, le fil est dans une direction parallèle aux franges : on somme les mêmes figures donc on obtient la même figure que pour S seule, plus lumineuse.

3. L'intensité s'écrit par analogie avec les trous de Young :

$$I(x) = I_0 \left[1 + \cos \left(4\pi \frac{ax}{\lambda(d - f'_2)} \right) \right]$$

et on voit un nombre N de franges brillantes (en pensant à la frange centrale !)

$$N = 2E \left[\frac{a}{i} \right] + 1 = 33 \text{ franges}$$

Remarque : L'interfrange est très faible alors il faut utiliser un viseur micrométrique pour pouvoir les observer et réaliser des mesures.

Corr. 6 Équerre optique

1. Dans cette question, il n'y a pas la lame donc les deux fentes produisent des ondes en phase. Le déphasage $\varphi(M)$ entre les rayons qui interfèrent en un point M sur l'écran s'obtient en utilisant le principe de retour inverse de la lumière. En effet, si on imagine une source en M, celle-ci émet des ondes sphériques converties en plans équi-phases à gauche de la lentille de projection et la différence de marche introduite entre les rayons se lit simplement entre le premier plan équi-phase passant par un trou et l'autre trou (déjà vu). Par conséquent,

$$\varphi(M) = \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda}$$

avec

$$\delta(M) = a \sin \alpha(M) \simeq a \alpha(M) = \frac{x}{f'}$$

car on est dans les conditions de Gauss (angle α du rayon passant par le centre de la lentille de projection et arrivant en M vérifiant $\alpha \ll 1$).

L'interfrange i est la période spatiale Δx du phénomène d'interférences observé sur l'écran et correspond à une rotation de phase de 2π , c'est-à-dire une variation de δ de λ_0 . Ainsi, on tire

$$i = \frac{\lambda f'}{a} = 0,3 \text{ mm}$$

La répartition d'intensité obtenue sur l'écran est

$$I(x) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta(x)}{\lambda} \right) \right]$$

2. En introduisant la lame, on modifie le chemin optique du faisceau arrivant sur le trou du haut de la quantité $ne - e = (n - 1)e$. Alors, la différence de marche δ du faisceau passant par le trou du bas par rapport à celui du haut devient

$$\delta' = \frac{ax}{f'} - (n - 1)e$$

et le système de franges s'est par conséquent traduit en bloc vers le côté de la lame (ici vers le haut), ce qui est logique (pour compenser le chemin optique supplémentaire dû à la lame pour le faisceau supérieur) ! La translation est de X_0 tel que

$$\frac{aX_0}{f'} - (n - 1)e = 0$$

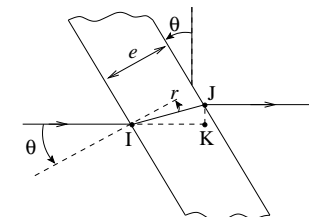
soit

$$X_0 = (n - 1) \frac{ef'}{a} > 0$$

Le nombre de franges brillantes ayant défilé au centre de l'écran est

$$N = E \left[\frac{X_0}{i} \right] = E \left[(n - 1) \frac{e}{\lambda} \right] = 416$$

3. Cette question est traîtresse car il faut évaluer correctement le chemin optique introduit par la lame inclinée, ce qui n'est pas si simple que ça (voir figure où les angles sont positifs).



La différence de marche introduite par la lame inclinée est $nIJ - IK$ car l'autre faisceau, en l'absence de lame, parcourt la distance IK dans le vide !. Or,

$$IJ \cos r = e \quad \text{et} \quad IK = IJ \cos(\theta - r)$$

donc

$$nIJ - IK = \frac{ne}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} \cos(\theta - r)$$

$$nIJ - IK = \frac{e}{\cos r} [n - (\cos \theta \cos r + \sin \theta \sin r)]$$

Ensuite, en utilisant les relations de Descartes,

$$nIJ - IK = \frac{e}{\cos r} [n - \cos \theta \cos r - n \sin^2 r]$$

$$nIJ - IK = \frac{e}{\cos r} [n \cos^2 r - \cos \theta \cos r]$$

soit

$$\Delta = nIJ - IK = e[n \cos r - \cos \theta]$$

Pour $\theta = 0$, on a $r = 0$ donc on retrouve $\Delta = (n - 1)e$, ce qui est rassurant !

Pour $|\theta| \ll 1$, $r \simeq \theta/n$ avec les relations de Descartes et on fait un développement limité à l'ordre 2 de Δ :

$$\Delta \simeq e \left[n \left(1 - \frac{\theta^2}{2n^2} \right) - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right]$$

d'où

$$\Delta \simeq (n - 1)e \left[1 + \frac{\theta^2}{2n} \right]$$

Or, le nombre de franges qui ont défilé au centre de l'écran est donné par Δ/λ (minimal pour $\theta = 0$). Si l'on peut apprécier un déplacement de 0,1 frange (au mieux), on pourra régler la position de la lame ($\theta = 0$) à $\pm \varepsilon$ près avec

$$(n - 1)e \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2n} \right) - (n - 1)e = 0,1\lambda$$

donc

$$\varepsilon^2 = \frac{2n}{n - 1} \frac{0,1\lambda}{e}$$

Numériquement, $\varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,5^\circ$

On constitue ainsi une **équerre optique** à $1,5^\circ$ près (on peut faire mieux...).

Corr. 7 Interférences avec deux miroirs parallèles

Les deux sources, S et S', sont *a priori* **incohérentes entre elles** puisqu'on ne nous dit rien de particulier à leur sujet. Par conséquent, on va raisonner séparément avec chaque source seule pour calculer les intensités correspondantes sur l'écran. Ensuite, **on pourra sommer ces intensités**.

Commençons par la source S seule. Cette source a pour images respectives S₁ et S₂ par les miroirs plans (M₁) et (M₂) (faire des symétries planes). S₁ et S₂ sont des sources secondaires cohérentes en phase situées à une distance D de l'écran, distantes de 4l, et symétriques par rapport au plan $x = -a$. Ainsi, ce qui est connu pour les trous de Young s'applique ici : pour S seule, on obtient des franges rectilignes sur l'écran (placé loin) avec un interfrange

$$i = \frac{\lambda D}{4l}$$

et la frange centrale est en $x = -a$ sur l'écran. L'intensité associée est

$$I_S(M) = I_0 \left[1 + \cos \frac{8\pi l(x+a)}{\lambda D} \right]$$

De même, pour S' seule, on arrive à un résultat « symétrique » :

$$I_{S'}(M) = I_0 \left[1 + \cos \frac{8\pi l(x-a)}{\lambda D} \right]$$

Finalement, on somme les intensités produites sur l'écran par les sources incohérentes, d'où (grâce à la trigonométrie bien connue...)

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma \cos \frac{8\pi l x}{\lambda D} \right] \quad \text{avec} \quad \gamma = \cos \frac{8\pi l a}{\lambda D}$$

Le terme γ est appelé **degré de cohérence spatiale** et le contraste des franges, uniforme, est

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma|$$

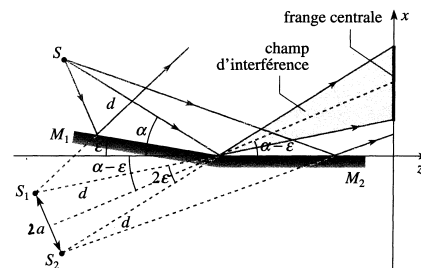
On remarque que si a augmente depuis la valeur nulle, le contraste des franges s'annule une première fois pour

$$a_0 = \frac{\lambda D}{16l}$$

Ensuite, au-delà de a_0 , le contraste réaugmente mais les franges sont inversées ($\gamma < 0$), et ainsi de suite... Une telle évolution du contraste de la figure d'interférences, en raison de problèmes de cohérence spatiale, est utilisée dans la technique de synthèse d'ouverture (qui permet notamment de mesurer le diamètre angulaire d'étoiles doubles... cf le classique interféromètre stellaire de Michelson).

Corr. 8 Miroirs de FRESNEL

1. On représente le dispositif en faisant apparaître les sources secondaires S₁ et S₂, synchrones et en phase (cf (SM)₁ = S₁M et (SM)₂ = S₂M). Sur la figure, l'angle ε a été exagéré.



S₁ et S₂ se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon $d = OS$. En utilisant la propriété des angles inscrits, $\widehat{S_1 S S_2} = \varepsilon$ donne $\widehat{S_1 O S_2} = 2\varepsilon$, donc

$$S_1 S_2 = 2a = 2d\varepsilon$$

On observe sur l'écran des franges quasi-rectilignes par analogie avec les trous de Young (qui seraient en S₁ et S₂). On peut faire cette analogie notamment parce que (S₁S₂) est quasiment parallèle à l'écran. La frange centrale est sur la médiatrice de [S₁S₂] repérée par l'angle $\alpha - \varepsilon$, à l'abscisse $x_0 \simeq D(\alpha - \varepsilon)$. Enfin, l'interfrange est

$$i = \frac{\lambda(D+d)}{2d\varepsilon} = 0,5 \text{ mm}$$

Le contraste vaut l'unité dans tout le champ d'interférences donc **les interférences sont non localisées**.

2. La largeur du champ d'interférences sur l'écran est $L = 2\varepsilon D = 15 \text{ mm}$ donc on peut espérer voir **une trentaine de franges**.

3. Soit $\Delta\alpha$ la largeur angulaire de la fente large considérée comme un ensemble de fentes fines **incohérentes entre elles**. Le déplacement angulaire d'une fente fine de $\Delta\alpha/2$ provoque un déplacement de la frange centrale de $\Delta x_0 = D\Delta\alpha/2$. On sait que si ce déplacement correspond à une demi-interfrange, les franges sont brouillées (interférences destructives vues en cours...). La largeur angulaire critique $\Delta\alpha_c$ de la fente source est donc telle que

$$D \frac{\Delta\alpha_c}{2} = \frac{i}{2} = \frac{\lambda(D+d)}{4d\varepsilon}$$

$$\text{soit} \quad \Delta\alpha_c = \frac{\lambda}{2d\varepsilon} \left(1 + \frac{d}{D} \right)$$

La largeur critique de la source, ou **largeur de cohérence (spatiale)**, est

$$l_s = d\Delta\alpha_c = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{d}{D} \right) = 0,07 \text{ mm}$$

L'expérience sera donc en pratique **fort peu lumineuse**. En effet, si l'on élargit la source, dans le but d'avoir plus de luminosité, on ne peut le faire que jusqu'à une taille de l'ordre de l_s qui reste très faible, sous peine de perdre en contraste ! Éventuellement, on peut augmenter l_s en réduisant ε , mais alors l'interfrange augmente dramatiquement et les franges deviennent encore une fois difficiles à observer !

Corr. 9 Interférences lumineuses données par une raie à profil rectangulaire

1. Le dispositif abordé est analogue à celui des trous de Young. On observe des franges quasi-rectilignes orthogonales à la direction de la droite (S₁S₂) et l'éclairement est

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(x))] \quad \text{où} \quad \delta(x) = \frac{sx}{D}$$

2. Le spectre est une raie rectangulaire. Pour les nombres d'ondes de la raie compris entre σ et $\sigma + d\sigma$, on peut dire que $d\mathcal{E}(x) = [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(x))] I_0 d\sigma$

Chaque élément du spectre, de largeur $d\sigma$, étant **incohérent avec les autres** (fréquences différentes), on peut sommer les intensités :

$$\mathcal{E}(x) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(x))] I_0 d\sigma$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{E}(x) = I_0 \left[\sigma_2 - \sigma_1 + \frac{\sin(2\pi\sigma_2\delta) - \sin(2\pi\sigma_1\delta)}{2\pi\delta} \right]$$

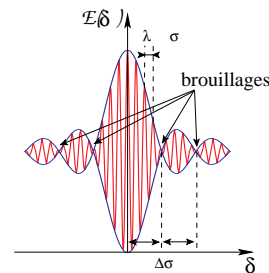
En posant le nombre d'onde moyen $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ et la largeur $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$, on trouve alors

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} [1 + \mathcal{V}(x) \cos(2\pi\sigma_0\delta(x))]$$

avec

$$\mathcal{V}(x) = \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta(x)) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_0 = 2I_0\Delta\sigma$$

Sur l'écran, on observera des franges de contraste variable (modulation par le facteur de visibilité en sinus cardinal). On peut préciser l'évolution de l'éclairement en traçant l'interférogramme (à savoir faire vite, complet et juste ! Les enveloppes sont d'équation $1 \pm \mathcal{V}$) :



Les points de brouillage par décohérence temporelle correspondent aux différences de marche multiples de $1/\Delta\sigma$.

3. Il y a brouillage si deux ordres d'interférences décalés de Δp entre deux ondes émises par les raies en σ et $\sigma + \Delta\sigma/2$

sont **destructifs**. Pour le premier brouillage, $\Delta p = 1/2$ (décalage d'une demi-interfrange). Or,

$$p = \sigma\delta(x) \quad \text{et} \quad p + \Delta p = \left(\sigma + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \delta(x)$$

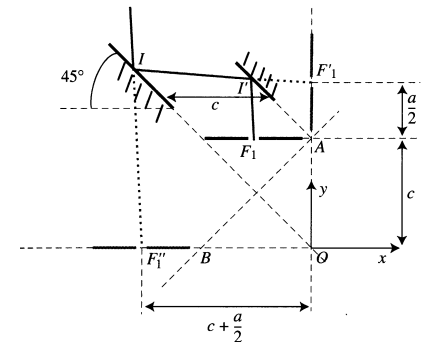
Alors

$$\delta(x) = \frac{2\Delta p}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

On retrouve bien le premier point de brouillage.

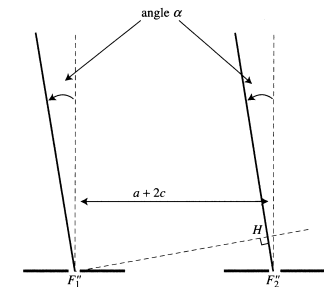
Corr. 10 Interféromètre stellaire de MICHELSON

1. Vues de l'extérieur, les deux fentes F₁ et F₂ sont équivalentes à leurs images F'₁ et F'₂ par les miroirs parallèles. Voici par exemple la construction de F'₁ (il en va de même pour F'₂) :



De plus, F'₁ est en phase avec F₁ car c'est une image par des **miroirs de F₁** ! Idem pour F'₂ vis-à-vis de F₂. Ainsi, tout se passe comme si on avait deux fentes F'₁ et F'₂ avec

$$F'_1 F'_2 = a + 2c$$



Puisqu'on a des plans d'onde incidents (voir théorème de Malus), le déphasage entre les rayons arrivant dans chaque fente est

$$\varphi(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda_0} F'_1 H$$

Or, $F'_1 H \simeq (a + 2c) \alpha$, donc finalement

$$\varphi(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (a + 2c) \alpha$$

2. Il y a brouillage si les franges sont de même intensité et sont décalées d'une demi-interfrange, c'est-à-dire déphasées de $(2q + 1)\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, on a des brouillages si

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} (a + 2c) \Delta\alpha_q = (2q + 1)\pi$$

soit

$$\Delta\alpha_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{a + 2c}$$

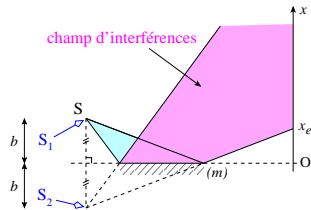
3. On part de c petit et on l'augmente en écartant les miroirs. Pendant l'opération, on observe le contraste des franges. Sa première annulation (brouillage) est obtenue pour une valeur c_0 de c et

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda_0}{2a + 4c_0}$$

Remarquons que $c_0 + a/2 \sim 1$ m pour $\Delta\alpha \sim 0,05''$ (secondes d'arc). Le pouvoir de résolution théorique augmente avec la longueur c des bras de l'appareil. En pratique, sur Terre, la résolution sera limitée par les turbulences atmosphériques. On peut faire une autre remarque : ce dispositif de Michelson met en œuvre la **synthèse d'ouverture** (mise à profit des brouillages par décohérence spatiale pour mesurer des diamètres angulaires d'objets célestes).

Corr. 11 Miroir de LLOYD

1. La figure du dispositif est la suivante :



On peut faire apparaître deux sources secondaires cohérentes S_1 et S_2 : S_1 correspond à S et S_2 correspond à son symétrique par rapport au miroir. Dans tout le champ d'interférences, les franges sont alors des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 . Sur l'écran lointain, on observe des **franges quasi-rectilignes**, orthogonales à (S_1S_2) .

Ce dispositif est analogue à celui des trous de Young et les mêmes calculs donnent la différence de marche géométrique

$$\delta_{\text{géom}} = \frac{2bx}{D}$$

Or, l'un des faisceaux interférant subit une réflexion sur un milieu d'indice supérieur à celui du milieu d'incidence, donc on doit tenir compte d'une différence de marche supplémentaire traduisant le déphasage de π à la réflexion :

$$\delta = \frac{2bx}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

L'interfrange est

$$i = \frac{\lambda_0 D}{2b}$$

Enfin,

$$I(x) = I_0 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right]$$

Attention au signe négatif qui vient du déphasage supplémentaire ! La frange centrale, dans le plan du miroir, serait noire si elle était dans le champ d'interférences !

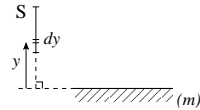
2.a. Pour un élément très fin de la fente source, de largeur dy , on peut utiliser l'expression précédente de l'intensité pour écrire l'éclairement élémentaire sous la forme

$$d\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \frac{dy}{2a} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{i(y)}\right) \right]$$

car l'éclairement est proportionnel à la surface de la source d'éclairement \mathcal{E}_0 . Ici,

$$i(y) = \frac{\lambda_0 D}{2y}$$

où y est la position de l'élément dy .



Ainsi,

$$d\mathcal{E}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{2a} \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi xy}{\lambda_0 D}\right) \right] dy$$

2.b. Les éléments de source de largeur dy sont tous **incohérents entre eux**. On peut donc sommer les éclaircissements :

$$\mathcal{E}(x) = \int_{b-a}^{b+a} \frac{\mathcal{E}_0}{2a} \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi xy}{\lambda_0 D}\right) \right] dy$$

$$d'où \quad \mathcal{E}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{2a} \left[2a - \frac{\lambda_0 D}{4\pi x} \left\{ \sin \frac{4\pi x(b+a)}{\lambda_0 D} - \sin \frac{4\pi x(b-a)}{\lambda_0 D} \right\} \right]$$

Il ne reste qu'à factoriser les sinus, d'où

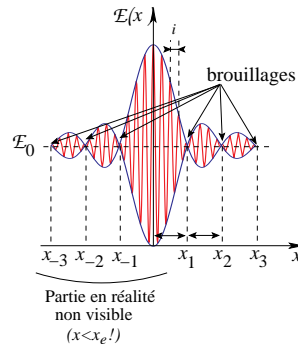
$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \left[1 - \mathcal{V}(x) \cos\left(\frac{2\pi x}{i_0}\right) \right]$$

avec

$$\mathcal{V}(x) = \text{sinc}\left(\frac{2\pi xa}{i_0 b}\right) \quad \text{et} \quad i_0 = \frac{\lambda_0 D}{2b}$$

On constate que i_0 correspond à l'interfrange obtenue pour une source ponctuelle (voir première question). L'élargissement de la source entraîne une **perte de cohérence spatiale** caractérisée par le terme de degré de cohérence spatiale $\mathcal{V}(x)$.

3. Les franges d'interférences sont modulées par le facteur de visibilité $\mathcal{V}(x)$ en sinus cardinal autour de la valeur moyenne \mathcal{E}_0 , car $a \ll b$ (enveloppes d'équations $1 \pm \mathcal{V}$). L'allure de l'éclairement de l'écran est la suivante :



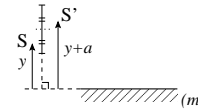
Les points de brouillage des interférences correspondent à $\mathcal{V}(x_q) = 0$, soit

$$x_q = q \frac{\lambda_0 D}{4a} \quad \text{où} \quad q \in \mathbb{Z}^*$$

Attention, en réalité, on n'observe des franges que dans le champ d'interférences (soit $x > x_e$ indiqué sur la figure de la première question).

4. Il y a brouillage des franges en des points où les interférences sont **destructives** entre elles. Considérons un élément

de source S de largeur dy , en y au-dessus du miroir (m).



$$\text{Pour cet élément,} \quad \delta_S(M) = \frac{2yx}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

Pour un élément de source S' de largeur dy en $y+a$, on a

$$\delta_{S'}(M) = \frac{2(y+a)x}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

L'ensemble des couples (S, S') permet de décrire tous les points de la source lorsque y varie de $b-a$ à b . Or, tous les éléments (S, S') donnent deux à deux le premier brouillage pour un décalage d'une demi-interfrange des franges correspondantes, soit

$$\delta_{S'}(M) - \delta_S(M) = \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

Mais

$$\delta_{S'}(M) - \delta_S(M) = \frac{2ax}{D}$$

est indépendant de y !! Pour chaque couple (S, S') de la source, on a destruction des interférences pour

$$\frac{2ax_{\pm 1}}{D} = \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

On trouve le premier point de brouillage

$$x_{\pm 1} = \pm \frac{\lambda_0 D}{4a}$$

On obtient les autres points de brouillage x_q ($q \in \mathbb{Z}^*$) en divisant la fente en q morceaux d'égale longueur $2a/|q|$ et en prenant les couples (S, S') , distants de $a/|q|$, « destructifs » et parcourant ces morceaux. La démarche est donc la même que précédemment en changeant la taille a par $a/|q|$, et on trouve

$$x_q = q \frac{\lambda_0 D}{4a}$$