À ajouter à la fin du paragraphe 1.2 :

Supposons que A est un anneau commutatif intègre.

◇ Soit $P \in (A[X])[Y]$: Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, \dots, P_n \in A[X]$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} P_k(X)Y^k$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $m_k \in \mathbb{N}$ et $a_{0,k}, \dots, a_{m_k,k} \in A$ tels que $P_k(X) = \sum_{h=0}^{m_k} a_{h,k}X^h$.

Posons $m = \max_{0 \le k \le n} m_k$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, pour tout $h > m_k$, $a_{h,k} = 0$.

Ainsi, $P = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{h=0}^{m} a_{h,k}X^h)Y^k = \sum_{\substack{0 \le h \le m \\ 0 \le k \le n}} a_{h,k}X^hY^k$.

◇ Ceci démontre que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & A^{(\mathbb{N}^2)} & \longrightarrow & (A[X])[Y] \\ & (a_{h,k})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2} & \longmapsto & \sum_{\substack{0 \le h \le m \\ 0 \le k \le n}} a_{h,k}X^hY^k \end{array}$ est une application surjective.

De plus, on peut vérifier que φ est un morphisme de groupes additifs.

On vérifie que, pour tout $(a_{h,k})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2} \in A^{(\mathbb{N}^2)}$,

$\sum_{\substack{0 \le h \le m \\ 0 \le k \le n}} a_{h,k}X^hY^k = 0 \Longrightarrow [\forall h, k \in \mathbb{N}^2,\ \ a_{h,k} = 0]$, donc φ est un morphisme injectif.

Ainsi φ est un isomorphisme de groupes.

En posant, pour tout $P, Q \in A^{(\mathbb{N}^2)}$, $P \times Q \triangleq \varphi^{-1}(\varphi(P) \times \varphi(Q))$, on munit $A^{(\mathbb{N}^2)}$ d'une structure d'anneau commutatif intègre, isomorphe à $(A[X])[Y]$, dont l'élément neutre multiplicatif est égal à $(\delta_{h,0}\delta_{k,0})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2}$.

On note $A^{(\mathbb{N}^2)} \triangleq A[X, Y]$ et on identifie les deux anneaux $A[X, Y]$ et $(A[X])[Y]$.

◇ Pour parachever cette identification, c'est-à-dire pour permettre d'écrire $(a_{h,k})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2} = \sum_{\substack{0 \le h \le m \\ 0 \le k \le n}} a_{h,k}X^hY^k$, il est naturel de poser, dans le cadre de polynômes aux deux indéterminées X et Y : $\boxed{X = (\delta_{h,1}\delta_{k,0})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2} \text{ et } Y = (\delta_{h,0}\delta_{k,1})}$.

On peut vérifier que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}^2$, $X^pY^q = (\delta_{h,p}\delta_{k,q})_{(h,k)\in\mathbb{N}^2}$.

On peut écrire : $\sum_{\substack{0 \le h \le m \\ 0 \le k \le n}} a_{h,k}X^hY^k = \sum_{h\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{h,k}Y^k \Big) X^h \in (A[Y])[X]$,

en convenant que $A[Y] = \{\sum_{k\in\mathbb{N}} b_kY^k \ /\ (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{(\mathbb{N})}\}$ (on peut vérifier que c'est un sous-anneau de $A[X, Y]$).

En conclusion, $(A[X])[Y] = A[X, Y] = (A[Y])[X]$.

◇ On peut généraliser à p indéterminées $X_1, \dots, X_p$, où $p \in \mathbb{N}^*$:

$A[X_1, \dots, X_p] \triangleq A^{(\mathbb{N}_p)} = (A[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_p])[X_i]$, quel que soit $i \in \mathbb{N}_p$.