

Feuille d'exercices n° 20 : corrigés

Exercice 1

- L'événement contraire est \overline{A} : « il y a au moins un garçon ».
- L'événement contraire est \overline{B} : « les trois billets sont perdants ».
L'événement contraire est \overline{C} : « les trois billets sont gagnants ».

Exercice 2

1. C'est un cas d'équiprobabilité.

Il y a $\binom{n+5}{2} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$ tirages possibles.

Il y a $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{n}{2} = 4 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 8}{2}$ tirages favorables à l'événement « avoir un tirage unicolore ».

Ainsi,

$$\mathbb{P}_n = \frac{n^2 - n + 8}{2} \times \frac{2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 9n + 20}.$$

2. La probabilité \mathbb{Q}_n vaut immédiatement :

$$\mathbb{Q}_n = 1 - \mathbb{P}_n.$$

3. On note u_n la probabilité de tirer deux boules blanches. On obtient avec le même raisonnement que précédemment :

$$u_n = \binom{n}{2} \times \frac{1}{\binom{n+5}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

On résout alors l'équation polynomiale :

$$(n+5)(n+4) = 6n(n-1) \iff 5n^2 - 15n - 20 = 0 \iff n^2 - 3n - 4 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions réelles : $n = -1$ et $n = 4$. La seule possibilité est ici $n = 4$ et dans ce cas,

$$\mathbb{P}_4 = \frac{5}{18}.$$

Exercice 3

- On note l'événement A : « l'as de trèfle est présent dans les 10 cartes retirées du jeu ». On note B l'événement « l'as de trèfle est présent dans l'une des 5 cartes piochées ». L'énoncé suggère un tirage sans remise ou plutôt simultané, ce qui revient au même. On va utiliser le SCE (A, \overline{A}) .

Par la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$

L'événement $B \cap A$ est clairement vide.

La probabilité de l'événement \overline{A} vaut :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{51}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{42}{52},$$

car le nombre de tirages favorables à l'événement \overline{A} est le nombre de façons de piocher 10 cartes simultanément parmi 51 cartes – toutes les cartes sauf l'as de trèfle. On choisit de ne pas simplifier la fraction obtenue. Intuitivement, le probabiliste se dit que le nombre obtenu tient la route.

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B | \overline{A})$ vaut exactement la probabilité de piocher l'as de trèfle parmi 42 cartes contenant l'as de trèfle.

Intuitivement, cette probabilité conditionnelle vaut $\frac{5}{42}$. On choisit malgré tout de faire le calcul du dénombrement.

Le nombre de pioches possibles est de $\binom{42}{5}$.

Le nombre de pioches favorables à l'événement B correspond au nombre de pioches de quatre cartes dans un ensemble à 41 cartes, car l'as de trèfle est pris de toutes façons.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(B | \overline{A}) = \frac{\binom{41}{4}}{\binom{42}{5}} = \frac{5}{42}.$$

Tout va bien : on vient de réconcilier le probabiliste qui avait sa réponse intuitive et l'ensembliste qui préfère faire le calcul.

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{52}.$$

Tout se passe comme si on n'avait pas enlevé les 10 cartes du paquet.

- On commence à se poser la question : est-il utile de retirer les 10 cartes ?

On va tenter de montrer que non.

Déjà, intuitivement, le fait d'enlever les 10 cartes puis de piocher 5 cartes sur lesquelles on effectue le test de l'événement revient au même que de piocher les 5 cartes, puis d'enlever 10 cartes, c'est-à-dire de piocher 5 cartes uniquement.

On va formaliser un peu les choses, ce qui n'est pas si simple.

On numérote les 52 cartes de 1 à 52.

L'expérience décrite correspond à l'univers :

$$\Omega = \left\{ (A, B) \mid A \cup B \subset \llbracket 1, 52 \rrbracket, A \cap B = \emptyset, \text{Card}(A) = 10 \text{ et } \text{Card}(B) = 5 \right\}.$$

Une expérience $\omega = (A, B)$ nous donne les informations suivantes : on connaît à travers l'ensemble A à 10 éléments les dix cartes enlevées. On connaît à travers l'ensemble B à 5 éléments les cinq cartes piochées.

On considère un événement C donnant une condition sur les cinq cartes piochées.

L'univers Ω est fini et compte $N = \binom{52}{10} \times \binom{42}{5}$ éléments. Chaque expérience est équiprobable. On munira Ω de la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Imaginons qu'il y ait exactement N_1 parties B à cinq éléments favorables à l'événement C .

Sans enlever les 10 cartes et en piochant directement les cinq cartes, la probabilité de l'événement C serait égale à $\frac{N_1}{\binom{52}{5}}$.

En enlevant les 10 cartes, on compte le nombre d'expériences favorables à l'événement C . Il s'agit de compter le nombre de couples de parties (A, B) , avec A et B disjoints inclus dans $\llbracket 1, 52 \rrbracket$ et B étant égal à l'une des N_1 parties favorables à l'événement C .

Pour compter ce nombre de couples, on commence par choisir la partie B , ce qui laisse N_1 possibilités. Une fois la partie B choisie à 5 éléments, on choisit n'importe quelle partie A à dix éléments avec :

$$A \subset \llbracket 1, 52 \rrbracket \setminus B.$$

Cela donne $\binom{47}{10}$ possibilités pour choisir A .

Il y a donc $N_1 \times \binom{47}{10}$ couples $\omega = (A, B)$ favorables à l'événement C .

Conclusion, la probabilité de l'événement C vaut :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{N_1 \times \binom{47}{10}}{N} = \frac{N_1}{N},$$

après simplifications de toutes les factorielles.

Conclusion, enlever les 10 cartes ou non revient au même.

On poursuit l'exercice en n'enlevant pas les 10 cartes.

Pour la deuxième question, avec ce nouveau protocole allégé, on obtient $\binom{52}{5}$ expériences possibles.

Pour compter le nombre d'expériences favorables à l'événement proposé C : « avoir exactement deux valeurs », on choisit les deux valeurs : $\binom{13}{2}$ choix pour ces deux valeurs.

Ensuite, une fois ces deux valeurs V_1 et V_2 choisies, il faut compter le nombre de pioches de cinq cartes où on a exactement ces deux valeurs. Comme chaque valeur concerne seulement quatre cartes et qu'on en pioche cinq, il suffit de choisir les cinq cartes parmi les huit cartes de ces deux valeurs réunies. Il y a donc $\binom{8}{5}$ choix.

En conclusion, la probabilité vaut :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{13}{2} \times \binom{8}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

3. De la même façon, on conserve $\binom{52}{5}$ expériences possibles (on ne retire plus les dix cartes).

Il s'agit maintenant pour les expériences favorables à l'événement D proposé de choisir les cinq valeurs différentes, ce qui donne $\binom{13}{5}$ choix des cinq valeurs. Ensuite, pour chaque valeur, il y a quatre possibilités de choix de carte.

La probabilité vaut finalement :

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{13}{5} \times 4^5}{\binom{52}{5}}.$$

Exercice 4

On commence par calculer $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, puis $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ puis $\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

▷ L'événement \mathcal{A} est la réunion disjointes des deux événements suivants : « obtenir uniquement des « pile » », événement de probabilité $\frac{1}{2^n}$ et « obtenir un seul « face » », événement de probabilité $\frac{n}{2^n}$ car il y a n expériences favorables à ce dernier événement, une telle expérience favorable correspondant à un n -uplet où il faut choisir la place du seul « face ».

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{n+1}{2^n}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{P}(\mathcal{B})$, il vaut mieux passer à l'événement contraire. Or, l'événement $\overline{\mathcal{B}}$ est la réunion de deux singletons qui est d'obtenir que des « pile », ou d'obtenir que des « face ».

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

▷ On termine par l'intersection des deux événements. Cette intersection consiste à avoir un seul « face ». Cela correspond à n expériences favorables et :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \frac{n}{2^n}.$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation :

$$\frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{n}{2^n}$$

ou encore :

$$\frac{n+1}{2^{n-1}} = 1.$$

On remarque que l'équation admet $n = 3$ comme solution.

Ensuite, l'entier $n = 2$ ne convient pas.

On définit la fonction $f : x \mapsto 2^{x-1} - x - 1$ dérivable sur $[3, +\infty[$, vérifie :

$$f(3) = 0 \text{ et } f' : x \mapsto (\ln 2) 2^{x-1} - 1.$$

Pour tout x dans $[3, +\infty[$, on en déduit :

$$f'(x) \geq (\ln 2) 4 - 1 > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[3, +\infty[$: l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution : $x = 3$ qui est le seul entier répondant à l'indépendance entre les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Exercice 5

1. On différencie les n personnes. On les numérote de 1 à n . Une expérience est donc un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$. Ainsi,

$$\Omega = \{P, F\}^n.$$

Comme la pièce est parfaitement équilibrée et les lancers sont implicitement indépendants, on considère la loi uniforme $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$.

2. L'événement A considéré est la réunion de $2n$ événements élémentaires. En effet, il y a 2^n expériences au total.

Il y a $2n$ expériences favorables à l'événement A en choisissant si le seul résultat différent des autres est P ou F puis la place de ce résultat différent des autres. Le fait que n soit un entier supérieur ou égal à 3 joue un rôle car dans ce mode de comptage, on ne compte pas plusieurs fois la même chose.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 6

1. On utilise des notations intuitives. Par exemple, l'événement D_i est : « utiliser le dé D_i ». En utilisant la formule des probabilités composées lorsque le dé A donne 1, on en déduit :

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(A_1 = 1 \cap A_2 \leq 3) = \mathbb{P}(A_2 \leq 3 \mid A_1 = 1) \times \mathbb{P}(A_1 = 1) = \frac{1}{12}.$$

De même, $\mathbb{P}(D_7) = \frac{1}{12}$ et pour tout entier i entre 1 et 6,

$$\mathbb{P}(D_i) = \frac{1}{6}.$$

On va maintenant utiliser le SCE $(D_i)_{1 \leq i \leq 7}$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k ou F_k pour dire qu'on a obtenu « pile » ou « face » au $k^{\text{ème}}$ lancer.

On veut calculer $\mathbb{P}(F_1)$, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_1) &= \sum_{i=1}^7 \mathbb{P}(F_1 \cap D_i) \\ &= \sum_{i=1}^7 \mathbb{P}(F_1 \mid D_i) \cdot \mathbb{P}(D_i) \\ &= \sum_{i=1}^7 \frac{7-i}{6} \mathbb{P}(D_i) \\ &= \frac{1}{12} + \sum_{i=2}^6 \frac{7-i}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \times \frac{6 \times 5}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. On veut calculer $\mathbb{P}(F_3 \mid F_1 \cap F_2)$.

Premièrement,

$$\mathbb{P}(F_3 \mid F_1 \cap F_2) = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3)}{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}.$$

Pour simplifier les choses, on va calculer la probabilité :

$$u_n = \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n).$$

On utilise le même SCE $(D_i)_{1 \leq i \leq 7}$.

On remarque que $\mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n \mid D_i) = \left(\frac{7-i}{6}\right)^n$.

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{12} + \sum_{i=2}^6 \frac{1}{6} \left(\frac{7-i}{6}\right)^n.$$

L'application numérique donne :

$$\mathbb{P}(F_3 \mid F_1 \cap F_2) = \frac{u_3}{u_2} = \frac{111}{146}.$$

3. On obtient :

$$\mathbb{P}_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

4. On voit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{12}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_n = 1.$$

Ceci s'interprète de la manière suivante : sachant qu'on a obtenu un grand nombre de « face » consécutivement, il y a de très fortes chances d'utiliser le dé D_1 qui n'a que des faces noires et donc on obtiendra très certainement uniquement des « face » dans les lancers ultérieurs.

Exercice 7

Cet exercice démontre les deux lemmes de Borel-Cantelli. C'est un exercice classique de deuxième année. Le résultat est à savoir en vue des concours.

1. On remarque qu'on a l'égalité suivante :

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right),$$

pour signifier qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq n$, l'événement A_k se réalise. Pour détailler peut-être un peu trop :

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \in B \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, \omega \in A_k.$$

L'événement C est exprimé selon :

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right).$$

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$,

- si $\omega \in C$, alors l'ensemble d'entiers $\{k \in \mathbb{N}, \omega \in A_k\}$ est infini, donc n'est pas majoré et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k \geq n$ tel que ω appartienne à A_k ;
- si $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$, alors l'ensemble d'entiers $\{k \in \mathbb{N}, \omega \in A_k\}$ n'est pas majoré, donc est infini et par définition de l'événement C :

$$\omega \in C.$$

2. Soit n dans \mathbb{N} . Alors, par l'inclusion

$$C \subset \bigcup_{k \geq n} A_k,$$

puis en utilisant l'indication, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Comme la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ est convergente, alors le reste $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - S_{n-1}$ converge vers 0.

On peut passer à la limite dans l'encadrement :

$$0 \leq \mathbb{P}(C) \leq r_n,$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(C) = 0.$$

3. L'événement contraire \overline{C} vaut :

$$\overline{C} = \overline{\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right).$$

On fixe n dans \mathbb{N} . On pose l'événement :

$$D_n = \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k},$$

et pour tout $N \geq n$, on pose l'intersection finie :

$$D_{n,N} = \bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}.$$

Par mutuelle indépendance des A_k , alors les événements $\overline{A_k}$ restent mutuellement indépendants. On en déduit :

$$\mathbb{P}(D_{n,N}) = \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

▷ S'il existe un entier $k \geq n$ tel que $\mathbb{P}(A_k) = 1$, alors pour tout $N \geq n$, on a $\mathbb{P}(D_{n,N}) = 0$.

▷ On se place dans le cas où pour tout $k \geq n$ tel que $\mathbb{P}(A_k) < 1$. On peut prendre le logarithme dans le produit des probabilités :

$$\ln(\mathbb{P}(D_{n,N})) = \sum_{k=n}^N \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

On distingue deux cas.

- Premier cas : la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ diverge grossièrement. Donc la suite $(\mathbb{P}(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la suite définie à partir d'un certain rang $(\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)))_{k \geq n}$ ne converge pas non plus vers 0. La série à termes négatifs $\sum_k \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ diverge vers $-\infty$.

- Second cas : la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ ne diverge pas grossièrement. Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0, \text{ puis } \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \sim -\mathbb{P}(A_k).$$

Comme tous les termes sont négatifs, les deux séries $\sum_k -\mathbb{P}(A_k)$ et $\sum_k \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ sont de même nature à savoir divergentes vers $-\infty$.

On aurait pu utiliser également l'inégalité :

$$\forall x \in [0, 1[, \ln(1 - x) \leq -x,$$

pour en déduire que pour k assez grand pour avoir $\mathbb{P}(A_k) < 1$:

$$\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq -\mathbb{P}(A_k),$$

la divergence vers $-\infty$ de $\sum_k -\mathbb{P}(A_k)$ entraînant la divergence vers $-\infty$ de $\sum_k \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$.

On en déduit dans les deux cas que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^N \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) = -\infty.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(D_{n,N}) = \exp(\ln(\mathbb{P}(D_{n,N})))$ est une quantité qui converge vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On remarque ensuite que pour tout $N \geq n$,

$$D_{n,N+1} \subset D_{n,N}$$

et :

$$\bigcap_{N \geq n} D_{n,N} = D_n.$$

D'après l'indication qui est un résultat de cours de deuxième année,

$$\mathbb{P}(D_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_{n,N}) = 0.$$

En utilisant maintenant l'indication de la deuxième question qui est encore un résultat de cours de deuxième année, on en déduit :

$$\mathbb{P}(\overline{C}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

On obtient ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = 1.$$

4. On part du principe que le singe appuie sur les touches de l'ordinateur de manière toute à fait indépendante. Il choisit de manière aléatoire l'un des appuis. Il y a un nombre fini de possibilités d'appuis, nombre de possibilités que l'on note N .

Il faut effectuer un grand nombre d'appuis de touches pour réaliser l'énoncé ainsi que la correction de cet exercice, mais il n'y en a qu'un nombre fini, que l'on note s . Ainsi, il faut s appuis consécutifs judicieusement choisis pour effectuer la rédaction de l'énoncé ainsi que de sa correction.

On note I_1, \dots, I_s la suite précise de ces s instructions.

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'événement A_n : « le singe tape conséutivement les instructions I_1, \dots, I_s lors des appuis entre les instants $ns + 1$ et $ns + s$ ».

Chaque événement A_n ne dépend que des instants entre $ns + 1$ et $ns + s$. Comme les intervalles discrets $J_n = [ns + 1, ns + s]$ sont deux à deux disjoints, alors par le lemme des coalitions, les événements A_n sont mutuellement indépendants lorsque n parcourt \mathbb{N} . De plus, la probabilité de chaque événement A_n est infime mais strictement positive valant $\frac{1}{N^s}$, quantité indépendante de l'entier n .

On en déduit que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge grossièrement.

On peut appliquer le second lemme de Borel-Cantelli.

Presque sûrement, il y a une infinité d'événements A_n qui se réalisent. Autrement dit, presque sûrement, le singe tapera une infinité de fois l'énoncé de cet exercice ainsi que sa correction.

Il n'est alors pas très difficile de montrer que presque sûrement, le singe écrira tous les écrits existants sur Terre, et même les écrits qui seront publiés jusqu'à l'extinction de l'humanité... Il faudra juste être patient pour le vérifier.

Exercice 8

1. Il s'agit d'un calcul de probabilité combinatoire.

- ▷ Il y a en tout n^n fonctions possibles de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$.
- ▷ Choisir maintenant une fonction $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ telle que $f \circ f = f$ revient à :
 - fixer un entier k entre 1 et n ;
 - choisir une partie non vide I incluse dans $\{1, \dots, n\}$ et de cardinal k , ce qui fait $\binom{n}{k}$ possibilités ;
 - choisir une fonction f convenable et pour laquelle $f(\{1, \dots, n\}) = I$. Ces fonctions f sont exactement les fonctions f qui, en restriction à I sont égales à id_I – ce qui ne laisse aucune latitude de choix sur les images des éléments de I par f – et qui en restriction à $\{1, \dots, n\} \setminus I$ donnent n'importe quelle fonction de $\{1, \dots, n\} \setminus I$ vers I , ce qui laisse exactement k^{n-k} choix.

En définitive :

$$p_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot k^{n-k}.$$

2. Nous allons montrer que la limite est nulle en découplant la somme en deux morceaux.
Fixons un entier $n \geq 1$.

▷ On s'occupe tout d'abord des termes k tels que :

$$1 \leq k \leq \frac{n}{3}.$$

Si k est un tel entier, alors :

$$\binom{n}{k} \cdot k^{n-k} \leq \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n/3} \binom{n}{k} \cdot k^{n-k} \leq \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = n^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

▷ On s'occupe maintenant des termes k tels que :

$$\frac{n}{3} < k \leq n.$$

Si k est un tel entier, alors :

$$\binom{n}{k} \cdot k^{n-k} \leq \binom{n}{k} \cdot n^{2n/3},$$

donc :

$$\sum_{k>n/3}^n \binom{n}{k} \cdot k^{n-k} \leq n^{2n/3} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = n^{2n/3} \cdot 2^n.$$

En conclusion :

$$0 \leq p_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{n^{1/3}}\right)^n,$$

cette dernière quantité tendant bien évidemment vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

1. L'univers Ω est ici $\llbracket 1, n \rrbracket^k$, en numérotant les objets et les tiroirs. Chaque rangement est un n -uplet $\omega = (t_1, \dots, t_k)$ où t_i est le numéro du tiroir dans lequel on range le $i^{\text{ème}}$ objet. On utilise la loi uniforme \mathbb{P} .

Si $k > n$, la probabilité de l'événement A : « les objets se trouvent dans des tiroirs distincts » est nulle car il y a plus d'objets que de tiroirs.

Si $1 \leq k \leq n$, il y a n^k rangements possibles. Le nombre de rangements favorables à l'événement A est égal à :

$$\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

La probabilité recherchée vaut donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

2. Le groupe compte k personnes et on range chaque personne dans un tiroir : le jour d'anniversaire. On néglige les années bissextiles et on modélise le tout par l'indépendance et l'équiprobabilité, ce qui n'est pas le cas en pratique.

La probabilité que les k personnes aient des dates d'anniversaires toutes différentes a été calculée en première question.

On cherche le plus petit entier k tel que :

$$\frac{365!}{(365-k)!} \frac{1}{365^k} < \frac{1}{2}.$$

Il vaut mieux utiliser une calculatrice ou un programme PYTHON pour calculer cet entier minimal.

On trouve 23 personnes pour le seuil à 50 %.

On trouve 41 personnes pour le seuil à 90 %.

3. (a) On pose les fonctions :

$$f : x \mapsto \ln(1-x) + x + x^2 \text{ et } g : x \mapsto -x - \ln(1-x)$$

définies sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ces deux fonctions sont dérivables et :

$$f' : x \mapsto -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0 \text{ et } g' : x \mapsto \frac{x}{1-x} \geq 0.$$

Les fonctions f et g sont croissantes et valent 0 en 0, donc sont positives sur I .

- (b) On peut écrire :

$$p_n = \prod_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

On prend le logarithme et on procède à l'encadrement car pour n assez grand, pour tout entier i entre 0 et $\lfloor t\sqrt{n} \rfloor$,

$$\frac{i}{n} \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Pour n assez grand, on en déduit :

$$-\sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{n} - \sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \leq \ln p_n \leq -\sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{n}.$$

Or, par les sommes arithmétiques ,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor^2}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{2},$$

et par les sommes de carrés :

$$\sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \frac{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor (\lfloor t\sqrt{n} \rfloor + 1)(2\lfloor t\sqrt{n} \rfloor + 1)}{6} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(1).$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln p_n = -\frac{t^2}{2},$$

et en passant à l'exponentielle continue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Exercice 10

Exercice archi-classique sur les chaînes de markov et qui utilise les matrices pour résoudre une marche aléatoire.

Le principe est à comprendre impérativement.

1. On note M_n , D_n et J_n les événements associés.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne :

$$X_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}.$$

Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. On va calculer X_{n+1} en fonction de X_n , à l'aide du SCE (M_n, D_n, J_n) et de la formule des probabilités totales.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= \mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n) m_n + \mathbb{P}(M_{n+1} \mid D_n) d_n + \mathbb{P}(M_{n+1} \mid J_n) j_n \\ &= \frac{1}{2} m_n + \frac{1}{4} d_n + \frac{1}{4} j_n. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$d_{n+1} = \frac{3}{4} d_n + \frac{3}{4} j_n$$

et :

$$j_{n+1} = \frac{1}{2} m_n.$$

Conclusion, en posant la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

À l'instant $n = 0$, le chat mange, donc le vecteur X_0 est le premier vecteur de la base canonique.

Il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0.$$

Il reste à calculer la première colonne de la matrice A^n qui donnera la matrice colonne X_n .

On tente de diagonaliser la matrice A .

On voit que la matrice A est de rang 2. Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Ker}(A)$.

On voit que tous les coefficients sont positifs et que la somme sur chaque colonne vaut 1 : **la matrice A est la transposée d'une matrice stochastique**. De plus, la matrice $A - I_3$

n'est pas inversible puisque le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Ker}(A - I_3)$.

Ensuite, la trace de la matrice A vaut :

$$\text{Tr}(A) = \frac{5}{4}.$$

En complétant la famille libre (U, V) en une base (U, V, W) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en notant P la matrice de passage de la base canonique vers cette base (U, V, W) , alors la matrice $P^{-1}AP$ est de la forme :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Comme la trace de deux matrices semblables est la même, nécessairement,

$$1 + c = \frac{5}{4}, \text{ donc } c = \frac{1}{4}.$$

En calculant $A - \frac{1}{4}I_3$, on trouve que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Ker}\left(A - \frac{1}{4}I_3\right)$.

La famille $\mathcal{C} = (U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ – on peut calculer le déterminant de \mathcal{C} dans la base canonique pour s'apercevoir que ce déterminant est non nul. En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{C} , alors :

$$P^{-1}AP = D = \text{Diag}\left(0, 1, \frac{1}{4}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \text{ Diag}\left(0, 1, \frac{1}{4^n}\right) P^{-1}.$$

La matrice P vaut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de la matrice $A^n = PD^nP^{-1}$ vaut en posant $\alpha_n = \frac{1}{4^n}$:

$$X_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 + 4\alpha_n \\ 3 - 12\alpha_n \\ 1 + 8\alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X_\infty = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne après un long laps de temps les probabilités qu'a le chat de faire telle ou telle activité.

Par exemple après un très long moment, la probabilité que le chat dorme vaut $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 11

1. Voici un algorithme, non pas en pseudo-code mais en PYTHON :

```
from random import *

def MAH(N,a,p) :
    """ modélise la marche au hasard pour la particule partant de a """
    k=0
    position=a
    while not(position in [0,N]) :
        k+=1
        x=uniform(0,1)
        if x<=p :
            position-=1
        else :
            position+=1
    return (k,position)
```

2. (a) Clairement, $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, car partant de 0, la particule s'arrête immédiatement, ainsi que lorsque la particule commence à N .
- (b) Soit a un entier strictement compris entre 0 et N . On va utiliser le SCE $(+1, -1)$, où $+1$ correspond à « faire un bond de $+1$ à la première étape » et -1 correspond à « faire un bond de -1 à la première étape ».

On en déduit par les formules de probabilités totales la formule escomptée puisque la probabilité conditionnelle de terminer le processus en 0 en ayant fait un bond de +1 au début revient à calculer la probabilité de terminer le processus en 0 en commençant non pas en a , mais en $a + 1$.

- (c) On obtient une relation de récurrence linéaire :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p} u_a - \frac{q}{p} u_{a-1},$$

avec des conditions qui ne sont pas des conditions initiales mais plutôt des conditions aux bords.

On introduit le polynôme :

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{q}{p} = (X - 1) \left(X - \frac{q}{p} \right).$$

Les deux racines sont différentes car $\frac{q}{p} \neq 1$, puisque p ne vaut pas $\frac{1}{2}$.

On trouve deux scalaires λ et μ tels que pour tout entier a entre 0 et N , on obtient :

$$u_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p} \right)^n.$$

On a les conditions $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, donc on trouve après résolution :

$$\lambda = \frac{q^N}{q^N - p^N} \text{ et } \mu = \frac{p^N}{p^N - q^N}.$$

Ainsi,

$$\forall a \in \llbracket 0, N \rrbracket, u_a = \frac{1}{q^N - p^N} \left(q^N - q^a p^{N-a} \right).$$

3. On peut utiliser la symétrie du problème.

On effet, si l'on effectue la symétrie de la marche aléatoire par rapport au milieu du segment $[0, N]$, le point 0 devient le point N et vice-versa, les bonds +1 deviennent des bonds -1 et vice-versa, « terminer le processus en 0 » devient « terminer le processus en N » et les probabilités p et q sont interchangées puisque les bonds +1 et -1 ont été changés. Le point de départ a devient le point de départ $N - a$.

On en déduit grâce à toutes ces modifications que :

$$\forall a \in \llbracket 0, N \rrbracket, v_a = \frac{1}{p^N - q^N} \left(p^N - p^{N-a} q^a \right).$$

4. Pour tout entier a entre 0 et N , on obtient :

$$u_a + v_a = 1.$$

En partant de n'importe quelle abscisse a , presque sûrement, on termine le processus en se rendant ou bien en 0 ou bien en N .

Ce résultat se comprend assez bien et peut être vu comme une conséquence du second lemme de Borel-Cantelli.

On considère des tranches de N déplacements consécutifs, entre les instants $kN + 1$ et $kN + N$. On note par exemple A_k l'événement : « la particule s'est déplacée N fois conséutivement sur la droite au cours des instants $kN + 1, kN + 2, \dots, kN + N$ ».

Par le lemme des coalitions, les événements A_k sont mutuellement indépendants, car ne dépendent pas des mêmes déplacements. Ensuite, la probabilité de chaque événement A_k vaut p^N . La série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ diverge grossièrement.

Presque sûrement, une infinité d'événements A_k se réalisent et lorsque l'un des A_k se réalise, la particule est déjà sortie de l'intervalle $]0, N[$, terminant dans le pire des cas le processus à cet instant.

Exercice 12

1. Par le théorème de Gauss, l'entier p appartient à l'événement B si et seulement si pour tout entier k entre 1 et r , le nombre premier p_k ne divise pas l'entier p :

$$B = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_{p_k}}.$$

2. Soit m un entier entre 1 et n . Voici la liste des expériences favorables à l'événement A_m :

$$m, 2m, \dots, k m,$$

avec $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, car après, on dépasse n .

Il y a donc $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ expériences favorables, avec n expériences (entiers) possibles :

$$\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor.$$

3. Soit $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ une partie finie incluse dans $\llbracket 1, r \rrbracket$.

Par le théorème de Gauss, un entier p appartient à l'intersecton $\bigcap_{j \in I} A_{p_j}$ si et seulement

si l'entier p est multiple du produit $\prod_{j \in I} p_j = q$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_{p_j}\right) &= \mathbb{P}(A_q) \\ &= \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} \\
&= \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{p_j}).
\end{aligned}$$

On a l'indépendance.

4. Les événements $\overline{A_{p_k}}$ restent mutuellement indépendants, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^r (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) \\
&= \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).
\end{aligned}$$

5. On va montrer qu'une classe \bar{k} dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si l'entier k est premier avec n .

En effet, si \bar{k} est inversible, en notant $\bar{\ell} = \bar{k}^{-1}$, alors :

$$\bar{k} \bar{\ell} = \bar{1},$$

donc $k \ell \equiv 1 \pmod{n}$. Il existe un entier u tel que :

$$k \ell = 1 + u n \text{ ou encore } k \ell - u n = 1.$$

Ceci constitue une relation de Bezout entre les entiers k et n : $k \wedge n = 1$.

Réiproquement, si k est un entier entre 1 et n premier avec n , on écrit une relation de Bezout :

$$k \ell + n v = 1.$$

En passant modulo n , on obtient :

$$\bar{k} \bar{\ell} = \bar{1},$$

donc $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

En conclusion, le nombre $\varphi(n)$ – appelé indicatrice d'Euler – est le nombre d'entiers k entre 1 et n qui sont premiers avec n .

Ainsi,

$$\varphi(n) = n \mathbb{P}(B),$$

et on obtient alors la formule voulue.

Exercice 13

1. On modélise les choses de la manière suivante.

On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée de manière indépendante et on s'arrête lorsque l'on a atteint globalement n « pile » ou n « face » pour la première fois. On compte alors le nombre de lancers effectués et on note X la variable aléatoire égale à $2n$ moins le nombre de lancers.

Cette modélisation correspond à l'énoncé, malgré les apparences. En effet, on peut décider que faire « pile » revient à choisir la poche de droite et y prendre une allumette, et dès qu'on a fait n résultats identiques pour la première fois, cela veut dire qu'on a vidé une boîte pour la première fois. La variable X définie précédemment compte alors le nombre d'allumettes présentes dans l'autre poche.

On veut calculer $\mathbb{P}(X = k)$.

Premièrement, si l'entier k vaut 0, alors l'événement $\{X = 0\}$ est vide. En effet, cela impliquerait qu'on a lancé $2n$ fois la pièce de monnaie et qu'on a eu globalement n résultats identiques pour la première fois au bout du $(2n)^{\text{ème}}$ lancer, ce qui est impossible. La variable X prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On suppose alors que l'entier k est entre 1 et n .

Cela signifie que l'on a effectué $2n - k$ lancers de pièce.

Le dernier résultat nous indique quel résultat se retrouvera globalement n fois.

Pour fixer les idées, mettons que le dernier résultat soit P .

Il faut maintenant placer les $n - 1$ autres P dans les $2n - k - 1$ premières places, ce qui déterminera entièrement la séquence des lancers, avec $n - k$ « face ».

En interchangeant les rôles symétriques de P et de F , on interprète l'événement $\{X = k\}$ comme une réunion de $2 \times \binom{2n - k - 1}{n - 1}$ événements élémentaires, chaque événement élémentaire étant de probabilité $\frac{1}{2^{2n-k}}$.

Conclusion,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{2n - k - 1}{n - 1} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

2. Prenons $n = 6$. Il s'agit de calculer l'espérance de la variable X .

Après calculs fait par machine, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \binom{11 - k}{5} \frac{1}{2^{11-k}} = 2.70703125$$

Exercice 14

La situation ressemble très fortement à l'exercice 11.

Une particule se déplace dans l'intervalle $\llbracket 0, N \rrbracket$, avec $N = s$.

Initialement, la particule part du point d'abscisse $a = n$.

La particule fait un bond de $+1$ avec une probabilité égale à p et fait un bond de -1 avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.

À tout instant, l'abscisse du point où se situe la particule donne le capital de A , la somme des deux capitaux de A et de B vaut invariablement s .

Le déplacement de la particule s'arrête lorsque celle-ci atteint 0 ou $N = s$.

Lorsque la particule atteint 0, c'est le joueur A qui a perdu et si la particule atteint s , c'est le joueur B qui perdu.

Il faut cependant distinguer les deux cas selon que p vaille $\frac{1}{2}$ ou non.

▷ Supposons que p soit différent de $\frac{1}{2}$.

En utilisant l'exercice 11, on sait que le jeu finit presque sûrement et que la probabilité que le joueur A perde est égale à :

$$u_n = \frac{1}{q^s - p^s} (q^s - q^n p^{s-n}).$$

La probabilité que le joueur A gagne vaut donc $1 - u_n$.

▷ Lorsque $p = \frac{1}{2}$, en renotant u_a la probabilité que le joueur A perde avec un capital initial égal à a , alors :

$$u_a = \frac{1}{2} (u_{a+1} + u_{a-1}).$$

On en déduit la relation de récurrence linéaire :

$$u_{a+1} = 2u_a - u_{a-1}.$$

Le polynôme associé est :

$$P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

La quantité u_a est donc de la forme :

$$u_a = \lambda + a\mu,$$

où les deux constantes λ et μ sont déterminées avec les conditions $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_s = 0 \end{cases}$.

On en déduit :

$$\forall a \in \llbracket 0, s \rrbracket, u_a = 1 - \frac{a}{s}.$$

Dans cette situation, la probabilité que A perde vaut $1 - \frac{n}{s}$ et la probabilité que B perde vaut $\frac{n}{s}$.

Exercice 15

Cela revient à ranger les n souris aléatoirement dans l'une des trois cages C_1 , C_2 ou C_3 . L'univers Ω associé est l'ensemble $\{1, 2, 3\}^n$, chaque expérience

$$\omega = (c_1, \dots, c_n)$$

indiquant selon le numéro i de la souris le numéro de la cage c_i associée.

On considère la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Il est clair que l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est $\llbracket 0, 1, 2 \rrbracket$, car il ne peut y avoir trois cages vides finalement.

Ensuite, l'événement $\{X = 2\}$ revient à choisir l'une des trois cages, puis à obliger chaque souris à aller dans cette cage. Cela concerne donc trois expériences favorables :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

L'événement $\{X = 1\}$ revient à choisir deux cages parmi trois, mettons les cages c_i et c_j .

Ensuite, cela revient à considérer les 2^n expériences où les souris vont dans l'une de ces deux cages puis à supprimer de ces expériences les deux expériences non favorables où les souris ont toutes pris la même cage.

Cela fait donc $\binom{3}{2} (2^n - 2)$ expériences favorables à l'événement $\{X = 1\}$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 3 \frac{2^n - 2}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2),$$

probabilité que l'on pourrait légèrement simplifier.

On calcule maintenant l'espérance de X avec la formule habituelle. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = 1) + 2 \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Exercice 16

- Le protocole expérimental est équivalent à prendre k cartes simultanément puis à considérer la valeur maximal sur ces k numéros tirés.

La probabilité est uniforme sur l'ensemble Ω de cardinal $\binom{n}{k}$.

On a clairement l'inclusion :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$$

même si certaines valeurs de l'ensemble de droite seront des valeurs prises avec une probabilité nulle – ou alors ne seront pas du tout des valeurs prises par X .

Fixons un entier ℓ entre 1 et n .

Au lieu de détailler l'événement $\{X = \ell\}$, on préfère détailler l'événement $\{X \leq \ell\}$.

Cet événement $\{X \leq \ell\}$ équivaut à : « les k cartes ont été piochées dans l'ensemble $\llbracket 1, \ell \rrbracket$ ».

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \leq \ell) = \frac{\binom{\ell}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = \ell) &= \mathbb{P}(X \leq \ell) - \mathbb{P}(X \leq \ell - 1) \\
&= \frac{\binom{\ell}{k} - \binom{\ell-1}{k}}{\binom{n}{k}} \\
&= \mathbb{P}(X \leq \ell) - \mathbb{P}(X \leq \ell - 1) \\
&= \frac{\binom{\ell-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.
\end{aligned}$$

On aurait pu calculer directement $\mathbb{P}(X = k)$ en comptant les expériences favorables à savoir : prendre la carte k puis prendre les $\ell - 1$ cartes dans l'ensemble $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, ce qui donne le même résultat.

En fait, les seules valeurs prises par X avec une probabilité non nulles forment l'ensemble $\llbracket k, n \rrbracket$.

2. On sait que :

$$1 = \sum_{\ell=k}^n \mathbb{P}(X = \ell).$$

En multipliant le tout par $\binom{n}{k}$, on écrit :

$$\binom{n}{k} = \sum_{\ell=k}^n \binom{\ell-1}{k-1}.$$

Cette formule est valable pour tout couple d'entiers k et n avec $1 \leq k \leq n$.

Si on fixe deux entiers p et q avec $0 \leq p \leq q$, il suffit d'appliquer la formule du haut en remplaçant k par $p + 1$, n par $q + 1$ et effectuer un petit changement d'indice.

La formule proposée se montre également par récurrence sur la variable q , en incorporant la variable p dans l'hypothèse de récurrence.

3. L'espérance de X vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\ell=k}^n \ell \frac{\binom{\ell-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\ell=k}^n \ell \binom{\ell-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\ell=k}^n k \binom{\ell}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{\binom{n}{k}} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{k}{k+1} (n+1).
\end{aligned}$$

Il est normal que l'espérance augmente lorsque le nombre k de boules augmente.

Il est normal que l'espérance augment lorsque l'entier n augmente.

Lorsque $k = n$, on a constamment $X = n$, d'espérance n .

Lorsque $k = 1$, cela revient à piocher une seule boule, et l'espérance vaut le résultat connu de la probabilité uniforme : $\frac{n+1}{2}$.

Exercice 17

1. La probabilité que la somme des deux dés fasse au moins 8 est égale à $\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = p$.

La probabilité que la somme des deux dés soit plus grande que 5 – sous-entendu ici strictement supérieure à 5 mais le raisonnement est identique de toutes façons sans ce sous-entendu – est égale à $\frac{5+6+5+4+3+2+1}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} = q$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements A_n : « le joueur A gagne à la $n^{\text{ème}}$ étape » et B_n : « le joueur B gagne à la $n^{\text{ème}}$ étape ».

On note J l'événement : « le jeu ne finit jamais ».

Intuitivement et par la loi forte des grands nombres ou le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, on aura ou bien une somme supérieure ou égal à 8 pour A ou bien une somme supérieure ou égale à 6 pour B à un moment donné et donc : $\mathbb{P}(J) = 0$.

Plus formellement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J \subset \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}.$$

Les événements A_k sont mutuellement indépendants car ils ne dépendent pas des mêmes lancers. Les événements contraires restent mutuellement indépendants.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(J) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = (1-p)^n,$$

quantité de limite nulle.

Conclusion, $\mathbb{P}(J) = 0$.

2. L'événement G_A que le joueur gagne est la réunion disjointe des événements :

$$G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \cap \overline{B_k} \right) \cap A_n.$$

Tous les événements sont indépendants, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(G_n) = (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} p.$$

Par σ -additivité, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_A) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} p \\ &= \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{p}{p+q-pq}.\end{aligned}$$

On peut également décrire l'événement G_B que le joueur B gagne comme la réunion disjointe des événements :

$$H_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \cap \overline{B_k} \right) \cap \overline{A_n} \cap B_n.$$

Plus simplement, la famille (G_A, G_B, J) forme un SCE, donc :

$$\mathbb{P}(G_B) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(J) = 1 - \frac{p}{p+q-pq} = \frac{(1-p)q}{p+q-pq}.$$

Numériquement, cela donne :

$$\mathbb{P}(G_A) \simeq 49.7 \% \text{ et } \mathbb{P}(G_B) \simeq 50.3 \%.$$

3. Vous verrez l'an prochain que le probabiliste adopte cette formule : $+\infty \times 0 = 0$ afin de gérer le terme $+\infty \times \mathbb{P}(X = +\infty)$ dans l'espérance de X .

La probabilité, pour chaque étape, que la partie se termine est égale à :

$$p + (1-p) q = p + q - pq = \lambda \simeq 83.8 \%.$$

On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement P_k : « à la $k^{\text{ème}}$ étape, A ou B gagne ».

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{X = k\}$ vaut :

$$\{X_k\} = \bigsqcup_{\ell=1}^{k-1} \overline{P_\ell} \cap P_k.$$

Tous les événements P_ℓ sont mutuellement indépendants donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-\lambda)^{k-1} \lambda.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (1 - \lambda)^{k-1} \lambda.$$

En fixant N dans \mathbb{N}^* , on peut calculer la somme $\sum_{k=1}^N k (1 - \lambda)^{k-1} \lambda$ en utilisant une dérivation de la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^N x^k$. Il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \simeq 1.19.$$

En moyenne, le jeu se termine au bout de 1.19 parties.

L'écart-type de X serait après des calculs un peu pénibles égal à :

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\lambda} \simeq 0.48$$

Exercice 18

On montre par récurrence la propriété :

$$\mathcal{P}(k) : N_k \sim \mathcal{U}_{[1,k+1]}.$$

- Lorsque $k = 0$, l'urne contient assurément une seule boule blanche : $N_0 \sim \delta_0$ ce qui donne ce qu'il faut.
- Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain entier k .
- Au rang $k + 1$, on utilise le SCE $(\{N_k = i\})_{1 \leq i \leq k+1}$.

Fixons un entier j entre 1 et $k + 2$.

Alors :

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(N_{k+1} = j, N_k = i).$$

Si i est un entier entre 1 et $k + 1$, alors l'événement $\{N_{k+1} = j, N_k = i\}$ est vide si i n'est pas dans l'ensemble $\{j, j - 1\}$.

La probabilité conditionnelle de $\{N_{k+1} = j\}$ sachant $\{N_k = j\}$ est égale à la probabilité de piocher une boule noire dans une urne contenant $k + 2$ boules avec exactement j boules blanches :

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = j \mid N_k = j) = \frac{k + 2 - j}{k + 2}.$$

De même, la probabilité conditionnelle de $\{N_{k+1} = j\}$ sachant $\{N_k = j - 1\}$ est égale à la probabilité de piocher une boule blanche dans une urne contenant $k + 2$ boules avec exactement $j - 1$ boules blanches :

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = j \mid N_k = j - 1) = \frac{j - 1}{k + 2}.$$

On en déduit par la formule des probabilités conditionnelles et l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = j) = \frac{j-1}{k+2} \frac{1}{k+1} + \frac{k+2-j}{k+2} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}.$$

On obtient la propriété $\mathcal{P}(k+1)$.

Exercice 19

- La variable G_1 suit une loi hypergéométrique.

D'une part, on a :

$$G_1(\Omega) \subset \llbracket 0, g \rrbracket.$$

D'autre part, si k est un entier entre 0 et g , alors en utilisant l'équiprobabilité des tirages simultanés :

$$\mathbb{P}(G_1 = k) = \frac{\binom{g}{k} \times \binom{n-g}{g-k}}{\binom{n}{g}}.$$

Le plus simple pour gérer l'espérance d'une loi hypergéométrique est de revenir à une somme d'indicatrice.

Pour tout entier i entre 1 et g , on note A_i l'événement : « la boule gagnante i a été piochée ».

On sait alors que :

$$G_1 = \sum_{i=1}^g \mathbf{1}_{A_i},$$

donc :

$$\mathbb{E}(G_1) = \sum_{i=1}^g \mathbb{P}(A_i).$$

On calcule $\mathbb{P}(A_i)$ par dénombrement, avec $\binom{n}{g}$ expériences possibles au total et $\binom{n-1}{g-1}$ expériences favorables (prendre l'élément i puis piocher simultanément $g-1$ boules dans les $n-1$ boules autres que i).

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{g}{n} \text{ et } \mathbb{E}(G_1) = \frac{g^2}{n}.$$

- Sachant $\{G_1 = k\}$, on va maintenant piocher les g boules dans les $n-2g$ boules restantes, ces $n-2g$ boules restantes comportant exactement $g-k$ boules gagnantes.

Il s'agit donc encore d'une loi hypergéométrique :

$$\forall j \in \llbracket 0, g \rrbracket, \mathbb{P}(G_2 = j \mid G_1 = k) = \frac{\binom{g-k}{j} \times \binom{n-3g+k}{g-j}}{\binom{n-2g}{g}}.$$

3. En reproduisant le calcul de l'espérance, on trouve :

$$\mathbb{E}_k(G_2) = g \frac{g - k}{n - 2g}.$$

4. On va utiliser le SCE $\left(\{G_1 = k\}\right)_{0 \leq k \leq g}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_2) &= \sum_{i=0}^g i \mathbb{P}(G_2 = i) \\ &= \sum_{i=0}^g i \left(\sum_{k=0}^g \mathbb{P}(G_2 = i, G_1 = k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^g \left(\sum_{i=0}^g i \mathbb{P}(G_2 = i \mid G_1 = k) \right) \cdot \mathbb{P}(G_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^g \mathbb{E}_k(G_2) \cdot \mathbb{P}(G_1 = k). \end{aligned}$$

5. On en déduit en utilisant la formule de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_2) &= \sum_{k=0}^g g \frac{g - k}{n - 2g} \cdot \mathbb{P}(G_1 = k) \\ &= \frac{g}{n - 2g} \mathbb{E}(g - G_1) \\ &= \frac{g}{n - 2g} \left(g - \mathbb{E}(G_1) \right) \\ &= \frac{g}{n - 2g} \left(g - \frac{g}{n} \right) \\ &= \frac{g^2(n - g)}{n(n - 2g)}. \end{aligned}$$

6. On en déduit :

$$\mathbb{E}(G_2) = \mathbb{E}(G_1) \times \frac{n - g}{n - 2g}.$$

L'application $f : x \mapsto \frac{n - x}{n - 2x}$ est dérivable sur $I = \left[0, \frac{n}{3}\right]$ et :

$$f' : x \mapsto \frac{n}{(n - 2x)^2} \geq 0.$$

La fonction f est croissante sur l'intervalle I et en particulier,

$$f(g) \geq f(0) = 1.$$

L'espérance de G_2 est plus grande que celle de G_1 .

La stratégie 2 est meilleure.

Exercice 20

1. Le plus simple de vider complètement l'urne et voir l'ordre d'apparition des boules impaires.

Il y a $(2n)!$ tirages possibles.

On compte le nombre de tirages favorables à l'événement proposé.

Il faut choisir la place d'apparition de la boule 1. Il y a k boules paires avant la boule 1, avec k un entier entre 0 et n .

Il y a donc $\sum_{k=0}^n n! = (n+1)!$ expériences favorables.

La probabilité de l'événement vaut :

$$\frac{(n+1)!}{(2n)!}.$$

2. On voit que la probabilité d'ordre d'apparition des boules impaires selon n'importe quelle permutatin ne dépend pas de la permutation choisie.

La probabilité de l'événement proposé vaut donc $\frac{1}{n!}$.

3. On note pour tout entier i entre n et $2n$, l'événement A_i : « la dernière boule impaire se loge en $i^{\text{ème}}$ place ».

On voit que :

$$X = \sum_{i=n}^{2n} i \mathbf{1}_{A_i},$$

donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=n}^{2n} i \mathbb{P}(A_i).$$

Pour compter les tirages favorables à l'événement A_i , on place une boule impaire en $i^{\text{ème}}$ position [n choix], on remplit les $2n-i$ cases ultérieures avec des nombres pairs [$\frac{n!}{(i-n)!}$ choix] puis on remplit les $i-1$ premières cases avec les boules restantes, ce qui donne $i!$ rangements.

La probabilité de l'événement A_i vaut donc :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n \times n! \times i!}{(i-n)!} \times \frac{1}{(2n)!}.$$

L'espérance de X vaut donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=n}^{2n} i \times \frac{n \times n! \times i!}{(i-n)!} \times \frac{1}{(2n)!}.$$

On peut simplifier le tout selon :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{n \times n!}{(2n)!} \sum_{i=0}^n (i+n) \binom{n}{i} \\ &= \frac{n^2 \times n!}{(2n)!} \times 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 21

Cet exercice est archi-classique sur la loi hypergéométrique. Il est peu coûteux de retenir le résultat de l'espérance – qui est le même que pour la loi binomiale – mais ce n'est pas nécessaire de retenir la variance dont la formule est peu utile.

1. On traite directement avec les indicatrices, sans passer par les calculs assez lourds, pour l'espérance.

On a clairement :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, s \rrbracket.$$

Ensuite, en faisant intervenir un dénombrement, on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 0, s \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{p}{k} \times \binom{n-p}{s-k}}{\binom{n}{s}}.$$

Ensuite, on utilise les événements A_k de la question 3.

On a clairement :

$$X = \sum_{k=1}^p \mathbf{1}_{A_k},$$

car la somme de droite compte les indices k pour lesquels la boule k a été tirée, c'est-à-dire le nombre aléatoire X .

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^p \mathbb{P}(A_k).$$

Or, toujours par un comptage, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{s}{n}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = p \frac{s}{n} = s \frac{p}{n}.$$

Si l'on pioche avec remise s boules de l'urne, on obtiendrait via une loi binomiale la même espérance.

2. Lorsque les entiers p et n sont grands, l'espérance de X vaut :

$$\mathbb{E}(X) = s \rho.$$

On obtient la même espérance que lors de tirages avec remise.

Ensuite, si l'entier k est fixé entre 0 et s , alors lorsque n (et donc $p = \rho n$) tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(X = k) \sim \frac{\frac{p^k}{k!} \times \frac{(n-p)^{s-k}}{(s-k)!}}{\frac{n^s}{s!}} \sim \binom{s}{k} \times \rho^k (1-\rho)^{s-k}.$$

On obtient à la limite la loi binomiale $\mathcal{B}(s, \rho)$.

Ceci se comprend assez bien. Le nombre ρ correspond à la proportion de boules blanches dans l'urne et lorsque le nombre de boules n est très grand, effectuer des tirages avec ou sans remise ne change pas grand chose dans les calculs. Les tirages avec remise impliquent une loi binomiale alors que les tirages sans remise impliquent une loi hypergéométrique.

3. On termine par le calcul de la variance.

On calcule $\mathbb{E}(X^2)$ pour commencer. Or, après développement, on obtient :

$$\begin{aligned} X^2 &= \sum_{i=1}^p \mathbf{1}_{A_i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \mathbf{1}_{A_i} \cdot \mathbf{1}_{A_j} \\ &= \sum_{i=1}^p \mathbf{1}_{A_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

La première somme vaut $\mathbb{E}(X) = \frac{s}{n}p$.

Si $i < j$ sont deux entiers entre 1 et p , toujours par un comptage, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{n-2}{s-2}}{\binom{n}{s}} = \frac{s(s-1)}{n(n-1)}.$$

Il y a $\frac{p(p-1)}{2}$ termes dans la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq p} \star$.

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{s}{n}p + p(p-1) \frac{s(s-1)}{n(n-1)}.$$

Conclusion, après toutes simplifications

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{n-s}{n-1} \times s \times \frac{p}{n} \times \left(1 - \frac{p}{n}\right).$$

Exercice 22

1. Il est clair que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\{Y_n = 1\} = \{P_1 P_2 \cdots P_n\}$. Ainsi,

$$Y_n \sim \mathcal{B}(p^n) \text{ et } \mathbb{E}(Y_n) = p^n.$$

2. L'événement $\{Y_{n-1} = 1\}$ est l'ensemble :

$$\left\{ F_1 P_2 \cdots P_n, P_1 \cdots P_{n-1} F_n \right\}.$$

La probabilité $\mathbb{P}(Y_{n-1} = 1)$ vaut donc $2 q p^{n-1}$ par indépendance et σ -additivité.
 Or, $Y_{n-1}(\Omega) = \{0, 1\}$ car il n'y a pas de place pour au moins deux $(n-1)$ -chaînes.
 Ainsi, $Y_{n-1} \sim \mathcal{B}(2qp^{n-1})$ donc $\mathbb{E}(Y_{n-1}) = 2 q p^{n-1}$.

3. L'événement $\{X_{1,k} = 1\}$ correspond à $\{P_1 \cdots P_k F_{k+1}\}$ de probabilité $p^k q$.
4. L'événement $\{X_{i,k} = 1\}$ correspond à $\{F_{i-1} P_i \cdots P_{i+k-1} F_{i+k}\}$ de probabilité $q^2 p^k$.
5. L'événement $\{X_{n-k+1,k} = 1\}$ correspond à $\{F_{n-k} P_{n-k+1} \cdots P_n\}$ de probabilité $q p^k$.
6. (a) Il est clair que :

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_k) &= \sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{E}(X_{i,k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{P}(X_{i,k} = 1) \\ &= q p^k + \sum_{i=2}^{n-k} q^2 p^k + q p^k \\ &= q p^k (2 + (n - k - 1)q). \end{aligned}$$

Exercice 23

Voici un exercice pas si facile que cela. Cet exercice démontre la loi forte des grands nombres dans le cas où les variables aléatoires admettent un moment fini d'ordre quatre, autrement dit lorsque la série $\sum_{x \in X_n(\Omega)} x^4 \mathbb{P}(X_n = x)$ est convergente.

Dans le programme de première année, c'est toujours le cas puisque la série ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. Ce n'est pas toujours le cas lorsque l'on considère des variables aléatoires discrètes quelconques...

Il est à noter que cet exercice utilise le premier lemme de Borel-Cantelli.

1. IL s'agit d'une inégalité de type « Markov ».

On fixe un entier $n \geq 1$.

On pose $Z = \left| \frac{S_n}{n} \right|$. Il est facile de voir que :

$$\varepsilon^4 \mathbf{1}_{\{Z \geq \varepsilon\}} \leq Z^4,$$

en prenant ω dans Ω et en vérifiant que l'on a bien :

$$\varepsilon^4 \mathbf{1}_{\{Z \geq \varepsilon\}}(\omega) \leq Z^4(\omega),$$

en distinguant les deux cas où ω appartient ou non à l'événement $\{Z \geq \varepsilon\}$.

Il suffit alors de prendre l'espérance dans cette inégalité.

2. Chaque variable Y_k est centrée et par le lemme des coalitions, les variables Y_k sont mutuellement indépendantes. De plus, les Y_k suivent toutes la même loi que la variable $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

On fixe un entier $n \geq 1$. On développe le terme S_n^4 .

Dans le développement, il y a n^4 termes de la forme $Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4}$, où i_1, i_2, i_3 et i_4 varient librement dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'espérance $\mathbb{E}(S_n^4)$ est donc la somme des espérances $\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4})$, lorsque les quatre indices i_j varient librement.

- Lorsque les quatre indices i_j sont égaux, cela nous donne n termes chacun égal à $\mathbb{E}(Y^4)$.
- Le point crucial est le suivant : si dans la liste i_1, i_2, i_3, i_4 ne figure qu'une seule fois un indice, par exemple l'indice i_3 est différent des trois autres, par le lemme des coalitions, les variables Y_{i_3} et $W = Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_4}$ sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4}) = \mathbb{E}(Y_{i_3} W) = \mathbb{E}(Y_{i_3}) \times \mathbb{E}(W) = 0.$$

Autrement dit, dès que l'ensemble $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ compte au moins trois éléments, alors cela signifie que figure dans la liste i_1, i_2, i_3, i_4 un indice tout seul, amenant à la nullité du terme $\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4})$.

- Il ne reste finalement après développement que les termes où les indices i_1, i_2, i_3, i_4 forment un ensemble à un seul élément [cas déjà exploré] où bien un ensemble à deux éléments sans indice tout seul ce qui revient à choisir deux indices k et ℓ parmi les quatre, puis à choisir deux indices différents I et J entre 1 et n , pour avoir la liste i_1, i_2, i_3, i_4 égale à la liste I, I, J, J à ordre près. Cela fait $\mathcal{O}(n^2)$ possibilités, d'où :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathcal{O}(n^2).$$

Résultat des courses,

$$\frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ de série absolument convergente.}$$

3. Fixons $\varepsilon > 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement :

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

D'après la première question,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathcal{O}\left(\frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}\right).$$

La série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

D'après le lemme de Bore-Cantelli, la probabilité de l'événement :

$$C = \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{n \geq n_0} A_n \right)$$

est nulle.

Le complémentaire de l'événement C est :

$$\overline{C} = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{n \geq n_0} \overline{A_n} \right).$$

Or, on remarque que $\overline{C} = \Omega_\varepsilon$ qui est bien un événement presque sûr.

4. On passe par l'événement contraire.

D'une part,

$$\overline{\Omega'} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \overline{\Omega_{1/p}}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(\overline{\Omega'}) \leq \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\overline{\Omega_{1/p}}) = 0.$$

L'événement Ω' est bien négligeable : l'événement Ω' est presque sûr.

5. On note L l'événement :

$$L : \ll \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}(X) \gg$$

Il est facile de voir que l'événement L est identique à l'événement :

$$\ll : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \gg$$

ou encore :

$$\ll : \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left| \frac{S_n}{n} \right| \leq \frac{1}{p} \gg$$

Il est maintenant évident que remarquer que :

$$\Omega' = L,$$

donc $\mathbb{P}(L) = 1$.

6. Il suffit d'appliquer le résultat de la question 5. – **la loi forte des grands nombres** – à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, où X_n vaut 1 ou 0 selon que l'événement A soit réalisé ou non à la $n^{\text{ème}}$ fois.

Chaque variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Par indépendance des essais, les variables X_n sont mutuellement indépendantes.

Chaque X_n est finie, donc X_n^4 admet une espérance finie.

On est dans les conditions d'application de la loi forte des grands nombres : presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{P}(A).$$

Or, la moyenne $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ correspond à $\frac{N_n}{n}$ qui est la proportion des réalisations de l'événement A sur les n premiers essais.

On obtient ce qu'il faut. La limite probable – en fait la limite presque sûre – de $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = N_n n$ est égale à $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 24

On pose les événements avec des notations intuitives P_1/F_1 pour le premier jet de pièce, P_2/F_2 pour le deuxième jet de pièce, B_1/N_1 pour le premier tirage de boule et B_2/N_2 pour le deuxième tirage de boule.

1. (a) On a clairement $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- (b) L'événement $\{X = 2\}$ vaut $\{P_1 \cap B_1 \cap B_2\}$. En utilisant la formule des probabilités composées, on aboutit à :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

De la même façon, l'événement $\{X = 0\}$ vaut $\{P_1 \cap N_1 \cap N_2\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}.$$

- (c) Par σ -additivité, on obtient :

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{4}.$$

L'espérance vaut immédiatement :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 1.$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4}, \text{ donc } V(X) = \frac{1}{4}.$$

2. (a) L'événement $\{Y = 2\}$ correspond à vider l'urne au bout de deux étapes, ce qui revient à faire F_1 , puis F_2 pour – à chaque tirage – enlever une boule de l'urne. On obtient facilement par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}.$$

Les valeurs prises par la variable Y forment l'ensemble $\{2, 3\}$ car on ne peut vider l'urne au bout d'une seule étape.

On en déduit que la loi de Y vaut :

$$\mathbb{P}_Y = \frac{1}{4} \delta_2 + \frac{3}{4} \delta_3.$$

- (b) L'événement $\{Y = 3, Z = 1\}$ correspond à :

$$\{Y = 3, Z = 1\} = \{P_1 B_1 P_2 N_2 N_3, P_1 N_1 P_2 B_2 N_3, P_1 N_1 P_2 N_2 B_3, P_1 N_1 F_2\}.$$

On trouve ce qu'il faut.

- (c) On observe que $\{Y = 2, Z = 1\} = \{Y = 2\}$ puis que par symétrie des rôles des couleurs, $\mathbb{P}(Y = 3, Z = 2) = \frac{11}{32}$.

Enfin, $\{Y = 3, Z = 0\} = \{P_1 N_1 P_2 N_2 N_3\}$ de probabilité $\frac{1}{32}$ et toujours par symétrie des couleurs, on peut maintenant compléter le tableau de la loi conjointe :

$Y \setminus Z$	0	1	2	3
2	0	$\frac{1}{4}$	0	0
3	$\frac{1}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{32}$

La somme sur toutes les cases fait bien 1.

- (d) On en déduit les lois marginales puis les espérances :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{4} \text{ et } \mathbb{E}(Z) = \frac{11}{8}.$$

Ensuite, par la formule de transfert, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y|Z) = \frac{31}{8}.$$

En définitive :

$$\text{Cov}(Y, Z) = \frac{3}{32}.$$

Les variables Y et Z ne sont pas indépendantes, car la covariance est non nulle. On aurait pu aussi le voir directement par le tableau de la loi conjointe et la disposition des zéros.

Exercice 25

1. On peut décider de différencier toutes les boules, auquel cas, l'univers sera \mathfrak{S}_N .

On choisit ici de ne tenir compte que des couleurs. Dans ce cas, l'univers Ω est un ensemble de $\binom{N}{2}$ uplet constitués de $n - 2$ B et de deux N .

La probabilité est uniforme et la tribu est :

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$

l'ensemble de toutes les parties de Ω .

2. Je crois que les résultats donnés sont évidents, l'événement $\{X_1 \geq X_2\}$ étant impossible.
 On en déduit que si i est fixé dans $\llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = i) &= \sum_{j=1}^N \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= \sum_{j=i+1}^N \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N-i)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

Si j est fixé dans $\llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(j-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes si $N \geq 3$ car :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{2}{N(N-1)}$$

alors que :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{N} \times \frac{2}{N(N-1)} \neq \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2).$$

Lorsque $N = 2$, alors l'urne ne contient que deux boules noires. Dans ce cas, $X_1 = 1$ presque sûrement et $X_2 = 2$ presque sûrement. Il est facile de voir que si $(i, j) \neq (1, 2)$, alors $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = 0$ est le produit des probabilités et $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = 1$ également.

3. (a) Intuitivement, il suffit de faire la symétrie dans l'ordre de tirage des boules. Le résultat demandé est alors immédiat.

Plus formellement, la variable $N + 1 - X_2$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ et si k est un entier entre 1 et N , alors :

$$\mathbb{P}(N + 1 - X_2 = k) = \mathbb{P}(X_2 = N + 1 - k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} = \mathbb{P}(X_1 = k).$$

- (b) Intuitivement, la variable $X_2 - X_1$ traduit l'écart entre les deux boules noires. Cela équivaut à l'écart entre le début et la première boule noire, donc $X_2 - X_1$ suit la même loi que X_1 .

Plus formellement, la variable $X_2 - X_1$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$.

Si k est un entier entre 1 et N , en utilisant le SCE $\left(\{X_1 = i\} \right)_{1 \leq i \leq N}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 - X_1 = k) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_2 - X_1 = k, X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = i + k) \\
&= \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = i + k) \quad [\text{suppression de termes nuls}] \\
&= \sum_{i=1}^{N-k} \frac{2}{N(N-1)} \\
&= \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = k).
\end{aligned}$$

Les variables $X_2 - X_1$ et X_1 suivent bien la même loi.

(c) On peut tout calculer avec les lois, mais ce n'est pas l'idée de la question.

On utilise le fait que l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi. Ainsi,

$$\mathbb{E}(N + 1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \mathbb{E}(X_2 - X_1) = \mathbb{E}(X_1),$$

ce qui se réécrit :

$$\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = N + 1 \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = 2\mathbb{E}(X_1).$$

En définitive,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3} \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = \frac{2}{3}(N+1).$$

(d) De même, la variance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi, donc :

$$V(N + 1 - X_2) = V(X_1).$$

On utilise maintenant :

$$V(aX_2 + b) = a^2 V(X_2)$$

avec $b = N + 1$ et $a = -1$, ce qui donne ce qu'il faut.

(e) D'autre part,

$$V(X_2 - X_1) = V(X_1)$$

et en développant la variance de $X_2 - X_1$, on aboutit à :

$$V(X_2 - X_1) = V(X_2) + V(X_1) - 2\text{Cov}(X_1, X_2).$$

On obtient alors ce qu'il faut.

4. On calcule $V(X_1)$ en utilisant plutôt la loi de X_2 .

Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_2^2) &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N j^2(j-1) \\
 &= \frac{2}{N(N-1)} \left(\frac{N^2(N+1)^2}{4} - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{2}{N(N-1)} \frac{N(N+1)}{12} \times (N-1)(3N+2) \\
 &= \frac{1}{6} (N+1)(3N+2)
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$V(X_2) = \frac{1}{6} (N+1)(3N+2) - \frac{4}{9} (N+1)^2 = \frac{1}{18} (N+1)(N-2).$$

Ainsi, on obtient $V(X_1) = V(X_2)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{V(X_1)}{2}$

5. (a) On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \neq Y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{N^2} \\
 &= \frac{N-1}{N}.
 \end{aligned}$$

(b) On fixe i et j deux indices entre 1 et N . Si $i \geq j$, alors la probabilité conditionnelle proposée est nulle puisque $Z_1 \geq Z_2$ implique $Z_1 = Z_2$ ce qui impose $X = Y$.

Si $i < j$, alors la probabilité, l'événement $\{Z_1 = i, Z_2 = j\}$ implique l'événement D . D'autre part, $\{Z_1 = i, Z_2 = j\} = \{X = i, Y = j\} \cup \{X = j, Y = i\}$, événement de probabilité $\frac{2}{N^2}$.

On en déduit que la probabilité $\mathbb{P}(Z_1 = i, Z_2 = j \mid D)$ vaut exactement $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$ de la question 2.

Exercice 26

1. Soit k un entier entre 2 et $n + 1$.

On utilise le SCE $\left(\{X = i\}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = k, X = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \quad [\text{indépendance}] \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \quad [\text{suppression de termes nuls}] \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{k-1}{n^2}.
 \end{aligned}$$

2. Soit k un entier entre $n + 2$ et $2n$. Par le même raisonnement,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = k, X = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \quad [\text{indépendance}] \\
 &= \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \quad [\text{suppression de termes nuls}] \\
 &= \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{2n - k + 1}{n^2}.
 \end{aligned}$$

3. Là encore, on utilise le SCE $\left(\{Z = i\}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X + Y = Z) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = Z, Z = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = i, Z = i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = i) \mathbb{P}(Z = i) \quad [\text{lemme des coalitions et indépendance}] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{n^2} \\
&= \frac{(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^3} \quad [\text{somme arithmétique}] \\
&= \frac{n-1}{2 n^2}
\end{aligned}$$

4. (a) Il est visible que la variable T suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
(b) La réponse est oui, par le lemme des coalitions.
(c) On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y + Z = n + 1) &= \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - Z) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - Z, Z = i) \quad [\text{probabilités totales}] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - i) \mathbb{P}(Z = i) \quad [\text{indépendance}] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - i) \mathbb{P}(T = i) \quad [\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_T] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - i, T = i) \quad [\text{indépendance}] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = n + 1 - T) \quad [\text{probabilités totales}] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X + Y = Z) \\
&= \frac{n-1}{2 n^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 27

1. Tout se passe comme si on passait en revue de manière indépendante chaque élément i entre 1 et n , pour savoir si on comptabilise l'élément i dans la partie X ou non.

Ainsi, la variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}.$$

2. (a) On effectue un comptage de cas favorables ou possibles.

Il y a $2^n \times 2^n$ cas possibles de couples (A, B) .

On compte les couples (A, B) avec $A \subset B$.

On a le calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset B} 1 &= \sum_{B \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{A \subset B} 1 \right) \\ &= \sum_{B \subset \llbracket 1, n \rrbracket} 2^{\text{Card}(B)} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\text{Card}(B)=k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \\ &= (1+2)^n \\ &= 3^n. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(A \subset B) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

- (b) On interprète la variable Y comme une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chaque variable testant si on met l'élément i dans A et dans B , ce qui arrive avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Ainsi,

$$Y \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right).$$

3. Lorsque les tirages sont sans remise, pour l'événement $\{A \subset B\}$ il faut enlever les couples (A, A) .

Il y a $2^n \times (2^n - 1)$ expériences possibles et $3^n - 2^n$ expériences favorables. La probabilité vaut alors :

$$\mathbb{P}(A \subset B) = \frac{3^n - 2^n}{2^n \times (2^n - 1)}.$$

Pour la variable $Y = \text{Card}(A \cap B)$, cette variable Y prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Si k est un entier entre 0 et n , on compte les cas favorables en comptant les cas favorables avec remise et enlevant tous les cas favorables où $A = B$, ce qui revient à avoir :

$$4^n \times \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)(\{k\}) - \binom{n}{k}.$$

On peut alors tout calculer.

Exercice 28

1. On fixe un entier k entre 1 et $n - 1$.

Par le lemme des coalitions, les variables Π_k et X_{k+1} sont indépendantes. On utilise le SCE $(\{X_{k+1} = 1\}, \{X_{k+1} = -1\})$. On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \mathbb{P}(\Pi_{k+1} = 1, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(\Pi_{k+1} = 1, X_{k+1} = -1) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_k = 1, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(\Pi_k = -1, X_{k+1} = -1) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_k = 1) p + \mathbb{P}(\Pi_k = -1) (1 - p) \\ &= u_k p + v_k (1 - p). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \mathbb{P}(\Pi_{k+1} = -1, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(\Pi_{k+1} = -1, X_{k+1} = -1) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_k = -1, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(\Pi_k = 1, X_{k+1} = -1) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_k = -1) p + \mathbb{P}(\Pi_k = 1) (1 - p) \\ &= v_k p + u_k (1 - p). \end{aligned}$$

2. Il est clair que la variable Π_k prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$:

$$u_k + v_k = 1.$$

On calcule u_k par la relation de récurrence linéaire :

$$u_{k+1} = (2p - 1)u_k + (1 - p).$$

La suite (u_k) est une suite arithmético-géométrique.

L'équation $\lambda = (2p - 1)\lambda + 1 - p$ admet comme solution :

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, avec la condition initiale $u_1 = p$, on obtient :

$$u_k = \frac{1}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right) (2p - 1)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p - 1)^k.$$

On obtient également :

$$v_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (2p - 1)^k.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, puisque $|2p - 1| < 1$, alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k.$$

Un grand produit des X_k suit une loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. Supposons que les variables Π_1 et Π_2 soient indépendantes.

D'une part :

$$\mathbb{P}(\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = p^2.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(\Pi_1 = 1) \mathbb{P}(\Pi_2 = 1) = p u_2 = p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p - 1)^2 \right).$$

Par indépendance, on doit avoir :

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p - 1)^2,$$

ce qui donne $2p - 1 = (2p - 1)^2$ et donc $2p + 1 \in \{0, 1\}$. Comme $p \neq 1$, alors $p = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, alors en testant les quatre cas selon le couple (i, j) dans $\{-1, 1\}^2$, on obtient l'indépendance du couple (Π_1, Π_2) . En fait, il n'est pas utile de regarder les quatre cas... De toutes façons, on détaille un résultat encore plus fort dans la question suivante.

4. On se place dans le cas où $p = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, chaque u_k vaut $\frac{1}{2}$.

Comme les variables Π_k sont à valeurs $\{-1, 1\}$, si on montre que les événements $\{\Pi_k = 1\}$ sont mutuellement indépendants, alors en remplaçant éventuellement certains de ces événements par leur événement contraire qui est :

$$\overline{\{\Pi_k = 1\}} = \{\Pi_k \neq 1\} = \{\Pi_k = -1\},$$

alors pour tout uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on a :

$$\mathbb{P}(\Pi_1 = \varepsilon_1, \dots, \Pi_n = \varepsilon_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\Pi_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{2^n}.$$

Or, l'événement $\{\Pi_1 = 1, \dots, \Pi_n = 1\}$ est exactement l'événement :

$$\{X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k = 1\},$$

événement qui est bien de probabilité $\frac{1}{2^n}$.

On a donc la mutuelle indépendance des Π_k .

Exercice 29

1. On peut interpréter la variable X_k comme une somme de va.i.id $X = \sum_{i=1}^p \mathbf{1}_{A_i}$, où A_i est l'événement : « la $i^{ème}$ boule va dans le tiroir T_k ».

Dès lors,

$$X_k \sim \mathcal{B}\left(p, \frac{1}{n}\right).$$

2. Non, car $\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = p) = 0$ alors que chaque probabilité $\mathbb{P}(X_k = p)$ est non nulle.

3. On remarque que :

$$Y = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=0\}}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 0) = n \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

4. La variable Y vérifie :

$$Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On fixe un entier ℓ entre 0 et n .

On détermine $\mathbb{P}(Y = \ell)$ par comptage assez difficile.

Imaginons un sac possédant p boules blanches et $n - 1$ boules noires.

On dispose les $p + n - 1$ boules les unes à la suite des autres. Les $n - 1$ boules noires délimitent des groupes éventuellement vides de n groupes consécutifs de boules blanches.

On décide de mettre dans T_1 le premier nombre de boules blanches du premier groupe, etc, jusqu'à remplir dans T_n le nombre de boules blanches du $n^{\text{ème}}$ groupement.

Il y a $\binom{p+n-1}{n-1}$ dispositions possibles de couleurs.

On cherche le nombre de dispositions où il n'y a aucun tiroir vide. Il faut déjà que l'entier p soit supérieur ou égal à n .

Cela revient à réserver n boules blanches de côté, à répartir les $p - 1$ boules blanches ou noires puis à disposer dans chaque groupe une boule blanche pour être assuré que chaque groupe soit non vide.

Il y a dans ce cas $\binom{p-1}{n-1}$ répartitions possibles de couleurs.

La probabilité que lorsque l'on range p boules dans n tiroirs qu'aucun tiroir ne soit vide vaut :

$$\frac{\binom{p-1}{n-1}}{\binom{p+n-1}{n-1}}.$$

De là, on peut calculer $\mathbb{P}(Y = \ell)$ où ℓ est un entier entre 0 et n .

Je ne détaille pas complètement les calculs un peu lourds mais l'idée est la suivante : il y a $\binom{n}{\ell}$ façons de choisir les ℓ tiroirs qui seront vides. Connaissant ces ℓ tiroirs vides, on peut connaître la probabilité de placer p boules dans $n - \ell$ tiroirs de façon à ce qu'aucun de ces $n - \ell$ tiroirs ne soit vide. Il suffira de multiplier cette probabilité par $\binom{n}{\ell}$.

On obtient une expression moyennement simplifiable.

Exercice 30

C'est une matrice de Gram !

- Supposons que la matrice A soit non inversible. On pose dans la suite pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k)$, de sorte que :

$$A = \left(\mathbb{E}(Y_i \cdot Y_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Il existe donc une combinaison linéaire non triviale entre les colonnes :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot C_k = 0.$$

On en déduit pour tout i entre 1 et n :

$$\mathbb{E} \left(Y_i \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot Y_k \right) = 0.$$

Par linéarité de l'espérance, en posant :

$$Z = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot Y_k,$$

alors :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z \cdot Z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mathbb{E}(Y_k \cdot Z) = 0.$$

Comme $\mathbb{E}(Z^2) = 0$, alors presque sûrement – c'est du cours – la variable Z est nulle.

On en déduit que la variable $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X_k$ est constante presque sûrement.

Réciproquement, supposons l'existence n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que la variable $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X_k$ soit presque sûrement constante.

On sait alors que cette constante est l'espérance de $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X_k$. Autrement dit, la variable

$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot Y_k$ est presque sûrement nulle, ce qui conduit au fait que pour tout i entre 1 et n :

$$\mathbb{E} \left(Y_i \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot Y_k \right) = 0.$$

Autrement dit, la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot C_k$ entre les colonnes de la matrice A est nulle : la matrice A n'est pas inversible.

Conclusion, une CNS est :

pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls, alors la variable $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X_k$ n'est pas presque sûrement constante ; autrement dit : $V\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X_k\right) > 0$.

Exercice 31

Voici un très bel exercice qui mélange un peu de tout. C'est bien de comprendre ce qui se passe dans cet exercice.

- En posant pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, la nouvelle variable :

$$Y_{i,j} = \frac{1 + X_{i,j}}{2},$$

alors par le lemme des coalitions les $Y_{i,j}$ restent mutuellement indépendantes et chaque $Y_{i,j}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_{i,i} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n Y_{i,i}.$$

On sait que la variable $Z = \sum_{i=1}^n Y_{i,i}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On connaît alors la loi de $\text{Tr}(M)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = x) = \mathbb{P}(Z = 2x - n) = \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)(\{2x - n\}).$$

Cette variable $\text{Tr}(M)$ prend ses valeurs dans $\{n - 2k ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Il est plus facile de revenir aux $X_{i,i}$ pour calculer l'espérance et la variance.

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\text{Tr}(M)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_{i,i}) = 0.$$

Par indépendance, et comme $X_{i,j}^2 = 1$ presque sûrement – en fait toujours, alors :

$$V(\text{Tr}(M)) = \sum_{i=1}^n V(X_{i,i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_{i,i}^2) = n.$$

- On procède à un comptage.

Il y a 2^{n^2} matrices possibles à coefficients dans $\{-1, 1\}$, toutes les matrices étant équiprobales.

On compte maintenant les matrices de rang 1.

On choisit n'importe quelle colonne, ce qui fait déjà 2^n possibilités.

Chaque colonne C_k , à partir de la deuxième colonne, est combinaison linéaire de la première colonne non nulle C_1 qui constitue une base de l'image de la matrice de rang 1. Le coefficient de colinéarité λ_k tel que :

$$C_k = \lambda_k \cdot C_1,$$

est uniquement déterminé par le premier coefficient de la colonne C_k .

On peut donc procéder au comptage complet des matrices de rang 1 : choisir n'importe quelle colonne [2ⁿ choix] ; choisir les premiers coefficients de chaque colonne C_2, \dots, C_n [2ⁿ⁻¹ choix] et la matrice de rang un sera alors totalement déterminée.

Conclusion :

$$\mathbb{P}(\text{Rg}(M) = 1) = \frac{2^n \cdot 2^{n-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2^{(n-1)^2}}.$$

3. On va très fortement utiliser la formule :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k}.$$

Si σ est une permutation fixée dans \mathfrak{S}_n , les variables $X_{\sigma(k),k}$ sont mutuellement indépendantes lorsque l'entier k varie. Chaque variable $X_{\sigma(k),k}$ est centrée et :

$$\mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{\sigma(k),k}) = 0.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(\det(M)) = 0.$$

On sait alors que :

$$V(\det(M)) = \mathbb{E}(\det(M)^2).$$

Or,

$$\begin{aligned} \det(M)^2 &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \right) \times \left(\sum_{\chi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\chi) \cdot \prod_{k=1}^n X_{\chi(k),k} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\chi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\chi) \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \prod_{\ell=1}^n X_{\chi(\ell),\ell}. \end{aligned}$$

On fixe deux permutations σ et χ dans \mathfrak{S}_n .

Si $\sigma = \chi$, alors :

$$\prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \prod_{\ell=1}^n X_{\chi(\ell),\ell} = \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k}^2 = 1.$$

Si $\sigma \neq \chi$, il existe i entre 1 et n tel que $\sigma(i) \neq \chi(i)$.

Dans le produit $\prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \prod_{\ell=1}^n X_{\chi(\ell),\ell}$, la variable $X_{\sigma(i),i}$ est « toute seule » et par le lemme des coalitions est indépendante des autres. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n X_{\sigma(k),k} \prod_{\ell=1}^n X_{\chi(\ell),\ell} \right) &= \mathbb{E} (X_{\sigma(i),i} \times \text{« les autres »}) \\ &= \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}) \times \mathbb{E}(\text{« les autres »}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion, lorsque l'on prend l'espérance de la variable $\det(M)^2$, la majorité des termes a une espérance nulle. Il ne reste que les termes pour lesquels $\sigma = \chi$, ce qui laisse donc « seulement » $n!$ termes et chaque terme est alors d'espérance 1 :

$$\mathbb{E}(\det(M)^2) = n!.$$

En définitive :

$$V(\det(M)) = n!.$$

Exercice 32

Exercice archi-classique.

On aborde en deuxième question la loi géométrique qui sera une loi usuelle de deuxième année.

1. On ne détaille pas complètement la question. La variable X suit la loi hypergéométrique :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = \ell) = \frac{\binom{p}{\ell} \times \binom{n-p}{k-\ell}}{\binom{n}{k}}.$$

On obtient en interprétant la variable X comme une somme d'indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$, où A_i : « la boule i a été piochée » :

$$\mathbb{E}(X) = k \frac{p}{n}.$$

2. Le lemme de Borel-Cantelli nous dit que presque sûrement, l'événement A sera réalisé à un certain moment.

Plus formellement,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$

Dans la suite, on notera pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_ℓ : « l'événement A se réalise à la $k^{\text{ème}}$ étape » et l'événement B_k : « l'événement \overline{A} se réalise à la $k^{\text{ème}}$ étape ».

Si k est un entier, il est clair que :

$$\{X = k\} = \left(\bigcap_{\ell=1}^{k-1} B_\ell \right) \cap A_k.$$

Par indépendance des essais d'une étape à l'autre, les événements A_k sont mutuellement indépendants, donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p.$$

On remarque facilement par le calcul d'une somme géométrique que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

Par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0.$$

D'après l'annexe de cours, on sait que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (1 - p)^{k-1} p.$$

On va calculer la quantité :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1},$$

où le réel x est fixé dans $]0, 1[$.

On sait que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

En dérivant, on obtient :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^N k x^{k-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2}.$$

Par les croissances comparées, comme $|x| < 1$, on obtient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N k x^{k-1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En prenant $x = 1 - p \in]0, 1[$, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Il faut en moyenne $\frac{1}{p}$ essais pour réaliser l'événement A de probabilité p pour la première fois.

Exercice 33

1. Comme $p = \mathbb{P}(X = 0)$, en passant à l'événement contraire, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - p.$$

On suppose la probabilité de cet événement strictement positive dans l'énoncé.

2. (a) Soient n et m dans \mathbb{N} .

On écrit en utilisant $\{X \geq n + m\} \subset \{X \geq m\}$:

$$\mathbb{P}(X \geq n + m) = \frac{\mathbb{P}(X \geq n + m, X \geq n)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq n + m)}{\mathbb{P}(X \geq m)},$$

d'où la formule proposée.

(b) La récurrence est facile à faire sur l'entier n .

(c) On conclut que en posant $q = f(1) = 1 - p$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n + 1) = q^n - q^{n-1} = (1 - p)^{n-1} p.$$

La loi \mathbb{P}_X est la loi géométrique de paramètre p que l'on rencontre dans l'exercice 32. En refaisant le même calcul, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Exercice 34

Exercice archi-classique. La démarche sur les matrices stochastiques et le traitement des chaînes de Markov qui ont déjà été vues au cours de l'exercice 10 – et en fait aussi au cours des exercices 11 et 28 – est à connaître dans les grandes lignes :

- modéliser les transitions par une matrice stochastique ;
- réduire la matrice ;
- avoir la distribution limite grâce aux puissances de cette matrice.

1. En notant U le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ les composantes du vecteur colonne BU sont exactement les sommes par ligne des coefficients de la matrice B .

En d'autres termes, une matrice $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si tous ses coefficients sont positifs et $AU = U$.

On démontre maintenant la question.

Soient A et B deux matrices stochastiques. Il faut montrer que le segment $[A, B]$ reliant les deux matrices est inclus dans \mathcal{S} pour avoir la convexité.

Soit t un réel dans $[0, 1]$. Il est clair que chaque coefficient de la matrice $t A + (1 - t) B$ est positif. D'autre part,

$$(t A + (1 - t) B)U = t AU + (1 - t) BU = t U + (1 - t) U = U.$$

L'ensemble \mathcal{S} est bien convexe.

Ensuite, les coefficients du produit AB sont encore positifs puisque :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^s A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

et finalement,

$$(AB)U = ABU = AU = U.$$

Donc :

$$AB \in \mathcal{S}.$$

2. (a) Comme chaque $p_{i,j}$ est une probabilité conditionnelle – la probabilité d'aller en e_j sachant qu'on était en e_i , alors les coefficients de la matrice P sont positifs.

Fixons un entier i entre 1 et s .

Fixons un entier n . On pose les événements A_i : « le marcheur à l'instant n est en e_i » et B_j : « le marcheur à l'instant $n+1$ est en e_j ».

Comme le marcheur occupe une seule position à l'étape $n+1$ entre e_1, \dots, e_s , alors la famille (B_1, \dots, B_s) est un système complet d'événements. On en déduit par σ -additivité de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot | A_i)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}_i(\Omega) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}_i(B_j) \\ &= \sum_{j=1}^n p_{i,j} \end{aligned}$$

La somme des coefficients de P sur la $i^{\text{ème}}$ ligne est égale à 1. La matrice P est bien stochastique.

(b) **Résultat à connaître...**

On montre le résultat par récurrence sur l'entier n .

- Lorsque $n = 0$, on a $P^n = I_s$ et pour tous indices i et j entre 1 et s , la probabilité de transiter de e_i vers e_j en 0 étape vaut $\delta_{i,j} = (P^0)_{i,j}$.

- Supposons le résultat vrai au rang n .

On va utiliser le SCE (C_1, \dots, C_s) , où C_k est l'événement : « le marcheur est parti de e_i et est en e_k à l'instant n ».

On fixe deux entiers i et j entre 1 et s .

En notant $D_{i,j}$ l'événement : « transiter de e_i vers e_j en $n+1$ étapes », on en déduit :

$$\mathbb{P}(D_{i,j}) = \sum_{k=1}^s \mathbb{P}(D_{i,j} \cap C_k) = \sum_{k=1}^s \mathbb{P}(C_k) \cdot \mathbb{P}(D_{i,j} | C_k).$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{P}(C_k) = (P^n)_{i,k}.$$

D'autre part, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(D_{i,j} \mid C_k)$ est exactement la probabilité de transiter de e_k [à l'instant n] vers e_j [à l'instant $n+1$], c'est-à-dire $p_{k,j}$.

Conclusion,

$$\mathbb{P}(D_{i,j}) = \sum_{k=1}^s (P^n)_{i,k} \times (P)_{k,j} = (P^n \times P)_{i,j}.$$

On obtient ce qu'il faut au rang suivant.

3. (a) Voici la matrice stochastique associée :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}).$$

- (b) Vous verrez l'an prochain que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable...

On voit qu'en posant la matrice J de permutation associée au cycle $c = (1, 2, \dots, n)$, alors la matrice J est diagonalisable sur le corps \mathbb{C} et on peut tout expliciter. D'autre part,

$$P = \frac{1}{2}(J + J^{-1}).$$

On aurait donc une base convenable pour la matrice J et aussi pour la matrice P ...

- i. En notant $X_0 = X_s$ et $X_{s+1} = X_1$, on obtient les équations suivantes sans devoir distinguer les cas $i = 1$ ou $i = s$:

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \frac{1}{2}(X_{i+1} + X_{i-1}) = \lambda X_i.$$

En effet, cela revient à prendre la $i^{\text{ème}}$ composante dans le vecteur colonne $PX = \lambda X$.

Supposons maintenant $|\lambda| \geq 1$.

Prenons un indice i tel que $|X_i|$ soit maximal.

Comme $(X_{i+1} + X_{i-1}) = 2 \lambda X_i$, en prenant les valeurs absolues, on obtient :

$$2 |\lambda| |X_i| = |X_{i+1} + X_{i-1}| \leq |X_{i+1}| + |X_{i-1}| \leq |X_i| + |X_i| = 2 |X_i|.$$

En divisant par $|X_i| > 0$ [car le vecteur X est non nul], on obtient :

$$|\lambda| = 1, \text{ puis } \lambda = \pm 1.$$

On réinjecte dans les équations initiales, ce qui impose $|X_{i+1}| = |X_i| = |X_{i-1}|$.

En valeur absolue, tous les $|X_k|$ sont égaux.

On traite le cas $\lambda = -1$ pour montrer que ce cas n'est pas possible – en utilisant le fait que l'entier s est impair.

On a les équations :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, X_{i+1} + X_{i-1} = -2 X_i.$$

Cela impose que les termes X_i et X_{i+1} sont opposés ainsi que les termes X_i et X_{i-1} .

Par conséquent, les composantes X_1, X_2, \dots, X_s sont alternées, de la forme :

$$X_i = (-1)^i \times X_0$$

cette dernière formule étant valable pour tout entier i entre 0 et $s+1$. Or, $X_s = X_0$, donc :

$$(-1)^s X_0 = X_0,$$

mais comme s est impair, cela donne $-X_0 = X_0$, puis $X_0 = 0$ et le vecteur X est nul, ce qui est contraire aux hypothèses.

Il ne reste que le cas $\lambda = 1$.

Dans ce cas, pour tout entier i entre 1 et s ,

$$X_{i+1} + X_{i-1} = 2 X_i,$$

imposant le fait que les termes X_{i-1}, X_i et X_{i+1} sont égaux. Toutes les composantes X_k sont égales à X_i et donc le vecteur X est colinéaire au vecteur

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- ii. La matrice P est diagonalisable. Il existe une base (X_1, \dots, X_s) de $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, P X_k = \lambda_k \cdot X_k.$$

La question 3.(b).i montre que chaque valeur propre λ_k est de module strictement inférieur à 1 sauf pour une valeur propre valant 1. Par exemple, $\lambda_1 = 1$, $X_1 = c U$ et pour tout entier k entre 2 et s , on a :

$$|\lambda_k| < 1.$$

On note R la matrice de passage de la base canonique vers la base (X_1, \dots, X_s) de telle sorte que :

$$R^{-1} P R = \text{Diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_s).$$

En passant à la puissance n , on obtient :

$$P^n = R \text{ Diag}(1, \lambda_2^n, \dots, \lambda_s^n) R^{-1},$$

matrice de limite $P_\infty = R E_{1,1} R^{-1}$.

- iii. Si $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers B_∞ , on voit que chaque coefficient de B^n va converger vers chaque coefficient de B_∞ .
 Ainsi, pour tout couple (i, j)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} ((B^n)^2)_{i,j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^s (B^n)_{i,k} (B^n)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^s (B_\infty)_{i,k} (B_\infty)_{k,j} \\ &= (B_\infty^2)_{i,j}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B^{2n} = B_\infty^2.$$

Or, la suite $(B^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite convergente $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$. La sous-suite converge encore vers B_∞ :

$$B_\infty^2 = B_\infty.$$

- iv. Question plusieurs fois abordée. Soient $X \in \text{Ker}(Q)$ et Y dans $\text{Im}(Q)$. Avec le produit scalaire habituel, on obtient sachant que $QX = 0$ et $QY = Y$:

$$X^T Y = X^T QY = X^T Q^T Y = (QX)^T Y = 0^T Y = 0_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi, $\text{Ker}(Q) \subset \text{Im}(Q)^\perp$ et on a égalité des dimensions finies par le théorème du rang, donc égalité.

- v. On sait que la matrice P est symétrique, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (P^n)^T = (P^T)^n = P^n.$$

En passant à la limite dans cette égalité, on aboutit au fait que la matrice P_∞ est symétrique. De plus, la matrice P_∞ , en tant que limite de la suite $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une matrice de projection.

Finalement, la matrice P_∞ est une matrice de projection orthogonale et la matrice P_∞ étant semblable à la matrice $E_{1,1}$ est une matrice de rang 1.

Comme $PU = U$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P^n U = U,$$

et en passant à la limite dans cette égalité lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$P_\infty U = U.$$

Ainsi,

$$\text{Im}(P_\infty) = \text{Vect}(U).$$

On en déduit que le noyau $\text{Ker}(P_\infty)$ vaut $\text{Vect}(U)^\perp$.

On remarque que la matrice Q dont tous les coefficients valent $\frac{1}{s}$ est une matrice telle que :

- $Q^2 = Q$
- $Q^T = Q$
- $QU = U$ et $\text{Rg}(Q) = 1$.

Donc Q est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}(U)$:

$$Q = P_\infty.$$

- (c) Lorsque n est grand, la probabilité qu'a le marcheur d'arriver en ω étant parti de 1 est renseigné dans les composantes de la première colonne de la matrice P^n .

Ces composantes sont proches des composantes de la matrice P_∞ , donc ces composantes sont toutes proches de $\frac{1}{s}$.

On aboutit à une situation d'équiprobabilité en distribution limite.

Exercice 35

On peut qualifier cet exercice de classique, portant sur la formule du crible de Poincaré et le problème des facteurs...

1. On peut montrer cette formule par récurrence sur l'entier n .

On choisit « un calcul mental ».

Lorsque l'on développe le produit commutatif $\prod_{k=1}^n (1-x_k)$, on obtient 2^n termes où chaque terme est un produit de termes-bis, où chaque terme-bis [terminologie personnelle] a été choisi entre 1 et $(-x_k)$ dans la $k^{\text{ème}}$ parenthèse.

Prendre le terme-bis égal à 1 ne sert à rien dans la description précédente. On attribue à chacun des 2^n termes du développement une partie A incluse dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ où A englobe tous les entiers k entre 1 et n pour lesquels on a choisi le terme-bis $(-x_k)$ dans la $k^{\text{ème}}$ parenthèse.

Ainsi,

$$\prod_{k=1}^n (1-x_k) = \sum_{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \prod_{j \in A} (-x_j) = \sum_{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\text{Card}(A)} \prod_{j \in A} x_j.$$

On choisit de partitionner l'indexation à cardinal constant ce qui donne :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1-x_k) &= \sum_{s=0}^n \left(\sum_{\substack{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \text{Card}(A)=s}} (-1)^{\text{Card}(A)} \prod_{j \in A} x_j \right) \\ &= \sum_{s=0}^n \left(\sum_{\substack{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \text{Card}(A)=s}} (-1)^s \prod_{j \in A} x_j \right) \\ &= 1 + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{\substack{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \text{Card}(A)=s}} (-1)^s \prod_{j \in A} x_j \right). \end{aligned}$$

On obtient assez rapidement ce qu'il faut.

2. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé. Soient A_1, \dots, A_n des événements.

On va appliquer la première question à l'anneau commutatif $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires finies de Ω vers \mathbb{R} .

Ensuite, on considère les éléments :

$$x_k = \mathbf{1}_{A_k}.$$

On peut appliquer la première question.

On remarque d'une part que :

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{k=1}^n (1 - x_k) &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{\overline{A_k}} \\ &= 1 - \mathbf{1} \left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k} \right) \\ &= \mathbf{1} \overline{\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k} \right)} \\ &= \mathbf{1} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \left(\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I) = s}} \prod_{j \in I} x_j \right) &= \\ \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \left(\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I) = s}} \mathbf{1} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre l'espérance, qui est linéaire et d'utiliser $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ pour avoir la formule voulue.

3. (a) On note A_i l'événement : « la permutation choisie vérifie $\sigma(i) = i$ ».

L'événement $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est : « la permutation admet au moins un point fixe ».

Si I est une partie de cardinal s , la probabilité $\mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in I} A_j \right)$ se calcule par comptage. Il

y a $n!$ permutations globalement et il y a seulement $(n-s)!$ permutations favorables à cet événement car il y a déjà s éléments dont l'image est fixe, les $(n-s)$ autres

images pouvant être prises n'importe comment tout en étant différentes [ce n'est pas grave si il y a encore des points fixes].

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) = \frac{(n-s)!}{n!}$$

et la sommation sur les parties I de cardinal s compte $\binom{n}{s}$ termes.

Ainsi, en faisant l'application numérique dans la formule de Poincaré de la question 2. la probabilité que la permutation σ n'ait aucun point fixe vaut :

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 + \sum_{s=1}^n (-1)^s \binom{n}{s} \frac{(n-s)!}{n!} = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!}.$$

(b) On peut espérer que sur une journée, le facteur distribue beaucoup de lettres.

La probabilité que personne n'ait eu le bon courrier est la probabilité précédente :

$$\sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \simeq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!} = \exp(-1),$$

en utilisant la série exponentielle.

La probabilité que notre facteur étourdi n'ait jamais distribué le bon courrier est environ de 36.78 %.

Exercice 36

1. (a) Un chemin de $(0, s_0)$ vers (p, s_p) consiste en un point de départ $(0, s_0)$, puis d'une succession de p nombres valant ± 1 pour passer de (i, s_i) à $(i+1, s_i \pm 1)$:



Si γ est un chemin de $(0, s_0)$ vers (p, s_p) , alors pour tout i entre 0 et $p-1$, les nombres s_i et s_{i+1} sont de parités différentes, ce qui implique que les nombres $s_p - s_0$ et $(-1)^p$ sont de même signe.

Ainsi, lorsque $s_p - s_0$ et p ne sont pas de même parité, il n'existe aucun chemin entre $(0, s_0)$ et (p, s_p) .

De plus, en reprenant les notations précédentes, on a $|s_{i+1} - s_i| \leq 1$, par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|s_p - s_0| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |s_{i+1} - s_i| = p.$$

Par conséquent, si $|s_p - s_0| > p$, il n'y a aucun chemin possible.

Raisonnons maintenant dans le cas où $s_p - s_0$ et p ont la même parité et lorsque $|s_p - s_0|$ est inférieur ou égal à p . Dans ce cas, un chemin γ convenable consiste en un certain nombre de mouvements vers le haut [correspondant aux indices i tels que $s_{i+1} - s_i = 1$] et un certain nombre de mouvements vers le bas [correspondant aux autres indices]. Notons par exemple k le nombre de mouvements vers le haut. On obtient alors par commutativité de l'addition :

$$s_p = s_0 + k - (p - k) = s_0 - p + 2k.$$

On retrouve le fait que $s_p - s_0$ et p ont la même parité. De plus, on découvre qu'il faut exactement $k = \frac{s_p - s_0 + p}{2}$ mouvements vers le haut parmi les p mouvements au total pour former notre chemin. Il y a donc $\binom{\frac{s_p - s_0 + p}{2}}{p}$ chemins possibles reliant $(0, s_0)$ à (p, s_p) .

(b) Lorsque s_0 ou s_p est nul, tous les chemins reliant s_0 à s_p touchent l'axe des abscisses en l'une de ses extrémités.

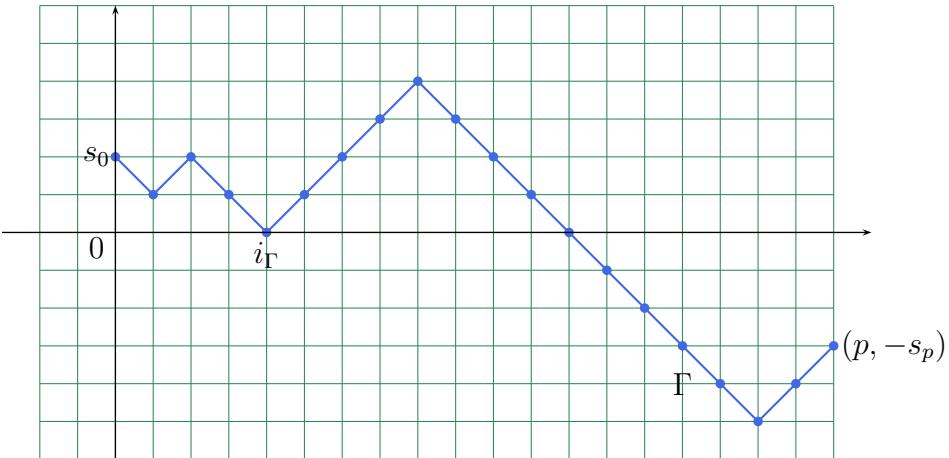
▷ Si $s_p = 0$, alors comme $-s_p = s_p$, le résultat à montrer est évident.

▷ Si $s_p > 0$, on pose les deux ensembles :

- \mathcal{E} : l'ensemble des chemins γ reliant $(0, s_0)$ à (p, s_p) et touchant l'axe des abscisses
- \mathcal{F} : l'ensemble des chemins Γ reliant $(0, s_0)$ à $(p, -s_p)$.

On va montrer qu'il existe une bijection Φ entre \mathcal{F} et \mathcal{E} .

Soit $\Gamma \in \mathcal{F}$. Graphiquement, on voit que le chemin Γ touche l'axe des abscisses :



Si l'on veut rédiger les choses, voici ce que cela peut donner.

On pose pour tout i entre 0 et p , $\Gamma(i) = (i, \tau_i)$.

L'ensemble fini $I = \{i \in \{0, \dots, p\} \text{ t.q. } \tau_i \geq 0\}$ n'est pas égal à $\{0, \dots, p\}$ tout entier car l'entier p n'appartient pas à I , puisque $\tau_p = -s_p < 0$. On note i_0 le plus grand élément de I , de sorte que $i_0 + 1$ appartient encore à $\{0, \dots, p\}$ mais pas à I . Nécessairement, $\tau_{i_0+1} < 0$, alors que $\tau_{i_0} \geq 0$. De plus, par définition du chemin Γ , on a : $|\tau_{i_0+1} - \tau_{i_0}| = 1$, ce qui impose :

$$\tau_{i_0} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{i_0+1} = -1.$$

Le point $\Gamma(i_0)$ du chemin Γ est bien sur l'axe des abscisses.

Ensuite, pour tout chemin $\Gamma \in \mathcal{F}$, en notant i_Γ le plus petit indice tel que le point $\Gamma(i_\Gamma)$ soit sur l'axe des abscisses.

On définit l'application $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ par : si $\Gamma \in \mathcal{F}$, on pose $\gamma = \Phi(\Gamma)$ le chemin suivant :

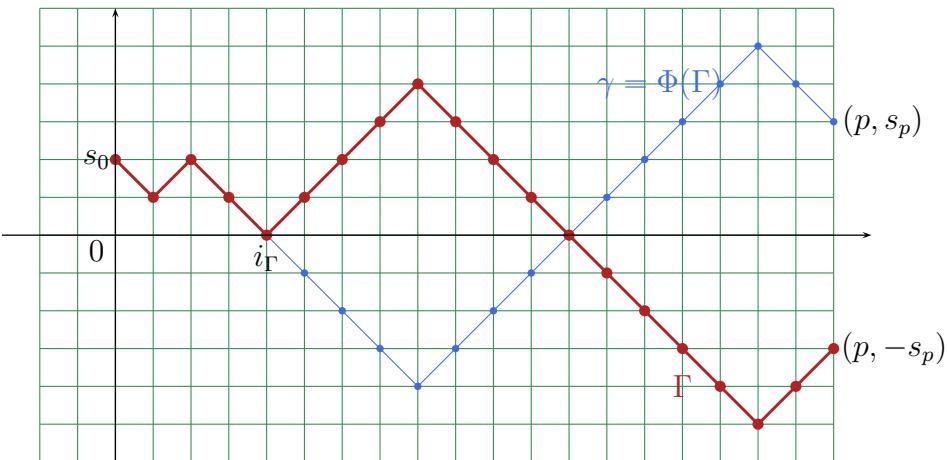
$$\forall i \in \{0, \dots, i_\Gamma\}, \quad \gamma(i) = (i, \tau_i)$$

et :

$$\forall i \in \{i_\Gamma, \dots, p\}, \quad \gamma(i) = (i, -\tau_i).$$

Il est clair que pour tout i entre 0 et $p - 1$, alors les ordonnées de $\gamma(i)$ et $\gamma(i + 1)$ diffèrent d'une unité lorsque $i < i_\Gamma$, lorsque $i = i_\Gamma$ et lorsque $i > i_\Gamma$.

Schématiquement, voici ce que cela donne :



Autrement dit, on vient de définir un chemin γ reliant $\gamma(0) = (0, s_0)$ à $\gamma(p) = (p, s_p)$: le chemin γ appartient effectivement à l'ensemble \mathcal{E} .

On va maintenant montrer que l'application Φ est une bijection. En effet, si Γ et Γ' sont deux chemins dans \mathcal{F} tels que $\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma')$, les chemins Γ et Γ' touchent l'axe des abscisses pour la première fois en $i_\Gamma = i_{\Gamma'}$. Avant cet indice, les chemins Γ et Γ' restent inchangés et après, on obtient les chemins symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Cela implique que les chemins Γ et Γ' après l'indice i_Γ sont encore les mêmes. L'application Φ est injective.

Soit finalement un chemin γ dans l'ensemble \mathcal{E} . Parmi les points $\gamma(i)$ du chemin γ touchant l'axe des abscisses, on choisit l'indice i minimal. On note le chemin Γ égal à γ avant i , et égal au symétrique de γ par rapport à l'axe des abscisses après l'indice i . Alors, le chemin Γ relie $(0, s_0)$ à $(0, -s_p)$, donc appartient à \mathcal{F} et on a clairement par construction $\Phi(\Gamma) = \gamma$.

En définitive, l'application Φ bijective entre les deux ensembles finis \mathcal{F} et \mathcal{E} montre que ces deux ensembles possèdent exactement le même nombre d'éléments.

2. On modélise l'expérience de la manière suivante. On pose $s_0 = 0$ et pour tout i entre 1 et p , on note le point :

$$\gamma(i) = (i, \text{nombre de boules blanches} -$$

nombre de boules noires tirées à l'issu du $i^{\text{ème}}$ tirage).

Chaque expérience de tirages des $2n$ boules conduit à un chemin γ reliant $(0, 0)$ à $(2n, 0)$, car à l'issu du dernier tirage, il y a autant de boules blanches que de boules noires tirées.

La probabilité \mathbb{P} est équiprobable sur chaque tirage, donc sur chaque chemin.

Il y a donc en tout $\binom{2n}{n}$ chemins possibles.

En notant A l'événement considéré dans la question, les chemins γ pour lesquels l'événement A n'est pas réalisé sont les chemins γ qui touchent à un moment donné la droite horizontale d'équation $y = -1$ [où l'on a tiré strictement plus de boules noires que de boules blanches].

Or, en translatant le tout d'une unité vers le haut, il y a autant de chemins défavorables à l'événement A que de chemins reliant $(0, 1)$ à $(2n, 1)$ et touchant l'axe des abscisses. D'après la question 1.(b), il y a autant de tels chemins que de chemins reliant $(0, 1)$ à $(2n, -1)$, c'est-à-dire :

$$\binom{2n}{n-1}.$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = 1 - \frac{(n-1)!(n+1)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Chaque dépouillement correspond au chemin γ défini par :

$$\forall i \in \{0, \dots, 100\}, \quad \gamma(i) = (i, \text{nombre de voix pour } A -$$

nombre de voix pour B après i bulletins dépouillés).

Il s'agit d'un chemin reliant $(0, 0)$ à $(1000, 200)$.

Le dépouillement donne toujours le candidat A gagnant ou à égalité si et seulement si le chemin γ ne touche jamais la droite horizontale d'équation $y = -1$. En effectuant de nouveau la translation de tous les chemins possibles d'une unité vers le haut, les dépouilements toujours favorables à A sont les chemins reliant $(0, 1)$ à $(1000, 201)$ sans toucher l'axe des abscisses. Il y a autant de chemins défavorables à l'événement A que de chemins reliant $(0, 1)$ à $(1000, -201)$.

En résumé, il y a exactement $\binom{1000}{600}$ dépouilements possibles et il y a $\binom{1000}{399}$ dépouilements défavorables.

On en déduit que la probabilité de l'événement considéré est :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\binom{1000}{399}}{\binom{1000}{600}} &= 1 - \frac{600! \times 400!}{399! \times 601!} \\ &= 1 - \frac{400}{601} = \frac{201}{601} \approx 33,44\% \end{aligned}$$

3) On modélise la situation de la façon suivante. On note s_0 le nombre de billets de 5 euros en réserve au guichet. Lorsqu'une personne dispose d'un billet de 5 euros et paie sa place, le nombre de billets de 5 euros en réserve au guichet augmente de une unité, alors qu'une personne ne disposant que d'un billet de 10 euros et qui paie sa place se verra remettre un billet de 5 euros en retour de monnaie et le nombre de billets de 5 euros en réserve diminuera d'une unité.

Par conséquent, en notant s_i le nombre de billets de 5 euros en réserve au guichet une fois que i personnes dans la queue ont payé leur place, alors l'application $\gamma : i \mapsto (i, s_i)$ est un chemin reliant le point $(0, s_0)$ au point $(100, s_0 + 10)$ car à l'issue du passage des 100 personnes, il y aura dix billets de 5 euros en guichet.

Il y aura un problème lors du passage des personnes si et seulement si le chemin γ touche la droite $y = -1$ à un moment donné. On translate le tout d'une unité vers le haut.

Le nombre total de chemins est égal à $\binom{100}{55}$.

Le nombre de chemins conduisant à un problème est égal au nombre de chemins reliant les points $(0, s_0 + 1)$ à $(100, -s_0 - 11)$, c'est-à-dire $\binom{100}{44 - s_0}$.

La probabilité pour qu'il y ait un problème lors du paiement au guichet est égal à :

$$\frac{\binom{100}{44 - s_0}}{\binom{100}{55}} = \frac{55! \times 45!}{(44 - s_0)! \times (56 + s_0)!} = \prod_{k=0}^{s_0} \frac{45 - s_0 + k}{56 + k}.$$

Conformément à l'intuition, la probabilité qu'il se produise un problème diminue lorsque le nombre s_0 de billets en réserve augmente.

Dressons le tableau des valeurs de la probabilité \mathbb{P}_{s_0} en fonction de s_0 , pour savoir à quel moment cette probabilité \mathbb{P}_{s_0} descend en dessous de 5% :

s_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\mathbb{P}_{s_0}	0.80	0.62	0.46	0.33	0.22	0.15	0.092	0.056	0.032

Il faut avoir en réserve au minimum 8 billets de 5 euros en réserve pour qu'il n'y ait pas de problème avec une probabilité de 95% au moins.

Remarque : le modèle déterministe prévoit d'avoir en réserve 45 billets de 5 euros pour parer au cas le plus défavorable où les 45 premières personnes sont celles qui ne disposent que d'un billet de 10 euros.

Exercice 37

Exercice qui sort un peu de l'ordinaire et pas si facile.

On va montrer que la réponse est **NON**.

Supposons que la réponse soit oui.

En notant Y et Z les variables aléatoires associées à nos deux dés truqués, on voit que la variable $X = Y + Z$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$ et que les variables Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On pose les fonctions $f : t \mapsto \mathbb{E}(t^Y)$ et $g : t \mapsto \mathbb{E}(t^Z)$.

Par la formule de transfert, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=1}^6 t^k \mathbb{P}(Y = k).$$

La fonction f – tout comme la fonction g – est polynomiale.

De plus,

$$\mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{11} \text{ et } \mathbb{P}(X = 12) = \mathbb{P}(Y + Z = 12) = \mathbb{P}(Y = 6, Z = 6) = \mathbb{P}(Y = 6) \times \mathbb{P}(Z = 6).$$

Par conséquent, les quantités $\mathbb{P}(Y = 6)$ et $\mathbb{P}(Z = 6)$ sont non nulles.

Les fonctions polynomiales f et g sont donc exactement de degré 6 et il est visible que :

$$f(0) = g(0) = 0.$$

De la même façon, puisque $0 \neq \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) \times \mathbb{P}(Z = 1)$, alors les quantités $\mathbb{P}(Y = 1)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$ sont non nulles.

Il existe donc deux polynômes réels P et Q de degré 5 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t P(t) \text{ et } g(t) = t Q(t).$$

De plus, $P(0)$ et $Q(0)$ ne sont pas nuls, donc les polynômes P et Q n'admettent pas 0 comme racine.

Fixons maintenant un réel t . Par le lemme des coalitions, les variables t^Y et t^Z sont indépendantes. On en déduit :

$$\mathbb{E}(t^X) = \mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y \times t^Z) = \mathbb{E}(t^Y) \times \mathbb{E}(t^Z) = f(t) \times g(t).$$

Or, on peut calculer la fonction polynomiale $h : t \mapsto \mathbb{E}(t^X)$, puisque l'on connaît la loi de X . On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11} t^k = \frac{1}{11} t^2 \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.$$

Il apparaît que les racines complexes du polynôme H associé à cette fonction polynomiale forment l'ensemble :

$$\{0\} \cup (\mathbb{U}_{11} \setminus \{1\}).$$

Autrement dit, le polynôme H n'admet qu'une seule racine réelle qui est 0 [heureusement que l'entier 11 est impair !!].

Le polynôme P de degré 5 admet au moins une racine réelle, car la fonction $t \mapsto P(t)$ admet des limites infinies et opposées en $\pm\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne au moins un point d'annulation de la fonction polynomiale associée et donc une racine réelle α au polynôme P . Comme $P(0) \neq 0$, alors la racine α est non nulle.

On découvre alors que le nombre α est également une racine du polynôme H qui est censé n'avoir que 0 comme seule racine réelle : contradiction.

La réponse est complètement montrée.

Exercice 38

L'ensemble des valeurs prises avec une probabilité strictement positive forme l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega)$.

On pose pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{x \in X(\Omega)} t^x \mathbb{P}(X = x)$.

On peut poser dans toute la suite, $f(t) = G_X(t)$ de sorte que pour tout t dans $[0, 1]$:

$$f(t^2) = f(t)^2,$$

car les hypothèses se traduisent par :

$$\forall t \in [0, 1], G_X(t^2) = G_{2X}(t) = G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2.$$

On remarque que si $t > 0$, $f(t)$ est strictement positif car la série est composée de termes positifs non tous nuls.

On pose alors la fonction $g : t \mapsto \frac{\ln f(t)}{\ln t}$, de sorte que :

$$\forall t \in]0, 1[, g(t^2) = \frac{\ln(f(t^2)^2)}{\ln(t^2)} = \frac{2 \ln(f(t))}{2 \ln t} = g(t).$$

Ensuite, en notant $x_0 = \inf X(\Omega)$, on montre que $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = x_0$.

En effet, pour tout $t \in]0, 1[$, pour tout $x \in X(\Omega)$, $t^{x_0} \geq t^x$, donc :

$$G_X(t) = f(t) \geq \sum_{x \in X(\Omega)} t^x \mathbb{P}(X = x) = t^{x_0}$$

donc $\ln f(t) \geq x_0 \ln t$ d'où : $g(t) \leq x_0$.

Ensuite, si $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in X(\Omega)$ tel que $\alpha < x_0 + \varepsilon$, donc :

$$\forall t \in]0, 1[, f(t) \geq \mathbb{P}(X = \alpha) t^\alpha, \text{ donc } \ln f(t) \geq \ln(\mathbb{P}(X = \alpha)) + \alpha \ln t.$$

Ainsi,

$$\forall t \in]0, 1[, g(t) \leq \alpha + \frac{\ln(\mathbb{P}(X = \alpha))}{\ln t} \leq x_0 + \varepsilon + \frac{\ln(\mathbb{P}(X = \alpha))}{\ln t}.$$

Or, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(x_0 + \varepsilon + \frac{\ln(\mathbb{P}(X = \alpha))}{\ln t} \right) = x_0 + \varepsilon$, donc il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_0[$, $x_0 \leq g(t) \leq x_0 + 2\varepsilon$, ce qui montre le résultat annoncé.

Enfin, on montre que la fonction g est constante égale à x_0 . En effet, si $t \in]0, 1[$, par récurrence, on montre facilement que :

$$\forall t \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, g(t) = g(t^{2^n}).$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(t^{2^n}) = x_0$.

On en déduit

$$\forall t \in]0, 1[, f(t) = t^{x_0}.$$

Si $t \in]0, 1[$, la série convergente $t^{x_0} - f(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)(t^{x_0} - t^x)$ est à termes positifs et

donne une somme nulle. Tous les termes sont nuls imposant que pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{x_0\}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$, car $t^{x_0} - t^x > 0$. Par définition de l'ensemble $X(\Omega)$, l'ensemble $X(\Omega) \setminus \{x_0\}$ est vide.

En définitive, $X(\Omega) = \{x_0\}$ et $X = x_0$ presque sûrement.

Remarque : autre solution plus simple

On pose $Y_1 = e^{-X_1}$, $Y_2 = e^{-X_2}$ et $Y = e^{-X}$ de sorte que les variables Y_1 et Y_2 restent indépendantes, les trois variables Y_1 , Y_2 et Y sont de même loi et :

$$Y_1 \cdot Y_2 \sim Y^2.$$

D'autre part, les trois variables sont à valeurs dans $[0, 1]$: elles admettent une variance finie, puis :

$$\mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y_1) \cdot \mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 \cdot Y_2) = \mathbb{E}(Y^2).$$

On conclut que $V(Y) = 0$, puis Y est constante presque sûrement, ainsi que X .

Exercice 39

Il suffit de montrer que $a = 0$: X sera alors égale à b presque sûrement.

Supposons a non nul. On pose $f : x \mapsto ax + b$. La fonction f admet au maximum un seul point fixe (valant $\alpha = \frac{b}{1-a}$ lorsque $a \neq 1$ et aucun point fixe sinon).

L'événement $A = \{X \text{ n'est pas un point fixe de } f\}$ est de probabilité strictement positive. On peut choisir $x \in X(\Omega)$ tel que $A \cap \{X = x\}$ est de probabilité strictement positive, car la famille $(\mathbb{P}(A \cap \{X = x\}))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable de somme strictement positive.

On pose la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente :
$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$
.

La sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est d'itératrice $f \circ f$ strictement croissante, donc cette sous-suite est monotone et comme le seul point fixe éventuel de $f \circ f$ est α , la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone donc prend un nombre infini de valeurs différentes.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = u_n) = \mathbb{P}(aX + b = au_n + b) = \mathbb{P}(X = u_{n+1}).$$

La suite $(\mathbb{P}(X = u_{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et sommable par injectivité de $n \mapsto u_{2n}$ et σ -additivité de \mathbb{P} , donc nécessairement nulle : on obtient une contradiction.

Exercice 40

1. Comme $\mathbb{E}(X^0) = 1$, on part du principe que, par linéarité de l'espérance, toutes les quantités $\mathbb{E}(P(X))$ sont connues, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ [X étant ici l'indéterminée]. On note L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés aux réels $1, \dots, n$. Chaque $L_i(X)$ est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et vérifie : $L_i(j) = \delta_{i,j}$.

Par la formule de transfert, $\mathbb{E}(L_i(X)) = \sum_{j=1}^n L_i(j) \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X = i)$.

Les quantités $\mathbb{P}(X = i)$ sont donc connues pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\left(k^n \mathbb{P}(Y = n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n \mathbb{P}(Y = n)$ est absolument convergente – le terme général étant en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: chaque Y^n admet une espérance finie.

- (b) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < -\ln a$.

La famille $\left(\frac{(kt)^n}{n!} \mathbb{P}(Y = k) \right)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable. En effet, à k fixé, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(kt)^n}{n!} \mathbb{P}(Y = k) \right|$ est convergente vers $e^{k|t|} \mathbb{P}(Y = k)$.

Comme $\mathbb{P}(Y = k) = o(a^k)$, alors $e^{k|t|} \mathbb{P}(Y = k) = o(e^{k(|t| + \ln a)})$, de série absolument convergente puisque $|t| + \ln a < 0$.

On en déduit que la quantité $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(kt)^n}{n!} \mathbb{P}(Y = k)$ est convergente et que l'on peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(kt)^n}{n!} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(Y^n)$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kt)^n}{n!} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{kt} \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(e^{tY}) = G_Y(e^t)$$

où $G_Y(\cdot)$ désigne la fonction génératrice de la variable Y .

On en déduit que la donnée des $\mathbb{E}(Y^n)$ détermine entièrement la fonction génératrice G_Y sur un domaine du type $\left] a, \frac{1}{a} \right[= \mathcal{V}$ qui est un voisinage de 1.

Or, deux fonctions DSE au voisinage à gauche en 1 et qui coïncident sur ce voisinage sont égales partout où elles sont définies. La donnée des $\mathbb{E}(Y^n)$ détermine donc entièrement la fonction génératrice de Y , ainsi que sa loi.

Exercice 41

1. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Omega_{j,k} = \left\{ \omega \in \Omega \mid X_1(\omega), \dots, X_k(\omega) \text{ tous différents de } j \right\}.$$

Il est clair que $\Omega_{j,k+1} \subset \Omega_{j,k}$ et que $\mathbb{P}(\Omega_{j,k}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ de limite nulle lorsque k tend vers $+\infty$.

Par la limite monotone, l'ensemble $\Omega_j = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_{j,k}$ est négligeable.

On en déduit que la réunion $\bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ reste négligeable. L'ensemble $\overline{\bigcup_{j=1}^n \Omega_j}$ correspond exactement à l'ensemble proposé dans l'énoncé et est de probabilité égale à 1.

2. Dans l'ensemble presque sûr de la question précédente, on trouve des indices $N_1 < N_2 < \dots < N_n$ les plus petits possibles tels que $\{X_{N_1}, \dots, X_{N_n}\} = \llbracket 1, n \rrbracket$. Par minimalité des N_k , la seconde condition est vérifiée.

Il reste à vérifier que chaque N_k est une variable aléatoire. Elle est discrète car à valeurs dans \mathbb{N} . Si $\ell \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{N_k = \ell\}$ correspond à l'événement : « les nombres $X_1, \dots, X_{\ell-1}$ forment un ensemble de cardinal $k-1$ et les nombres X_1, \dots, X_ℓ forme un ensemble de cardinal k ».

Cet ensemble est un élément de la tribu car il s'agit de la réunion des événements $\{X_1 = L_1, \dots, X_\ell = L_\ell\}$ avec $\{L_1, \dots, L_{\ell-1}\}$ de cardinal $k-1$ et L_ℓ différent des précédents L_r , pour $1 \leq r \leq \ell-1$.

3. On calcule la loi conjointe du vecteur aléatoire (Y_1, \dots, Y_n) .

Soit $(1, k_2, \dots, k_n)$ un uplet d'entiers strictement positifs. Alors, l'événement $\{Y_1 = 1, Y_2 = k_2, \dots, Y_n = k_n\}$ correspond à l'événement : $\{N_1 = K_1, N_2 = K_2, \dots, N_n = K_n\}$, avec $K_1 = 1$, $K_2 = 1+k_2$ et plus généralement, pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $K_j = 1+k_2+\dots+k_j$. On peut décomposer l'événement selon les variables X_k :

« X_2, \dots, X_{K_2-1} valent X_1 ; $X_{K_2} \neq X_1$; $X_{K_2+1}, \dots, X_{K_3-1}$ appartiennent à $\{X_1, X_{K_2}\}$ et pour tout $j \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket$, $X_{K_j} \notin \{X_1, X_{K_2}, \dots, X_{K_{j-1}}\}$ et $X_{K_j+1}, \dots, X_{K_{j+1}-1}$ appartiennent à $\{X_1, X_{K_2}, \dots, X_{K_j}\}$ et

$X_{K_n} \notin \{X_1, X_{K_2}, \dots, X_{K_{n-1}}\}$. »

En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 = 1, Y_2 = k_2, \dots, Y_n = k_n) &= \prod_{j=2}^n \left(\frac{j-1}{n} \right)^{K_j - K_{j-1} - 1} \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n} \right) \\ &= \prod_{j=2}^n \left(\frac{j-1}{n} \right)^{k_j - 1} \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Si j est fixé dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, on obtient la loi de Y_j comme suit :

- $Y_j(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$
- $P(Y_j = +\infty) = 0$ grâce à la première question ; si $r \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{Y_j = r\}$ est la réunion disjointe des événements $\{Y_1 = 1, \dots, Y_n = k_n\}$, avec $k_j = r$ et la sommation portant sur les indices k_s pour $s \neq j$ et k_s variant dans \mathbb{N}^* .

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_j = r) \\ & \sum_{k_2 \geq 1, \dots, k_{j-1} \geq 1, k_{j+1} \geq 1, \dots, k_n \geq 1} \left(\prod_{j=2}^n \left(\frac{j-1}{n} \right)^{k_j-1} \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n} \right) \right) \times \left(\left(\frac{j-1}{n} \right)^{r-1} \times \left(1 - \frac{j-1}{n} \right) \right) = \\ & \left(\frac{j-1}{n} \right)^{r-1} \times \left(1 - \frac{j-1}{n} \right). \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_j \sim \mathcal{G}\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)$.

Intuitivement, Y_j mesure le temps d'attente pour que l'on pioche de manière équiprobable un nombre hors d'un ensemble de cardinal $j-1$ dans un ensemble de cardinal n .

4. On utilise le fait que $N_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(Y_j) = \sum_{j=1}^n \frac{n}{n-j+1} = n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Ainsi, $\mathbb{E}(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \ln n$.

5. Grâce au calcul de la loi conjointe des Y_j , ces variables sont mutuellement indépendantes :

$$\begin{aligned} V(N_n) &= \sum_{j=1}^n V(Y_j) &= n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{(n-j+1)^2} \\ &= n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{j^2} \\ &= n^2 \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \mathcal{O}(n \ln n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 \pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 42

On note $L^\infty(\mathbb{Z})$ l'espace des fonctions bornées sur \mathbb{Z} et $L^1(\mathbb{Z})$ l'espace des fonctions $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(X)$ admet une espérance finie.

Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{P}(X = x_0) > 0$.

En prenant $f = \mathbf{1}_{\{x_0\}}$ qui est bien dans $L^\infty(\mathbb{Z})$, alors si une fonction g existe, nécessairement $\mathbb{E}(g(X)f(X)) = g(x_0) \mathbb{P}(X = x_0)$ et $\mathbb{E}(Y f(X)) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \mathbb{P}(Y = y, X = x_0)$, donc :

$$g(x_0) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x_0)} \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \mathbb{P}(Y = y, X = x_0).$$

Ceci assure l'unicité de la fonction g \mathbb{P}_X -presque sûrement.

Posons maintenant la fonction :

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(X=x)} \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \mathbb{P}(Y=y, X=x), & \text{si } \mathbb{P}(X=x) > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que $g(X)$ admet bien une espérance finie, ce qui est le cas car si J est une partie finie incluse dans \mathbb{Z} , alors :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in J} |g(x) \mathbb{P}(X=x)| &= \sum_{x \in J \text{ et } \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x) \mathbb{P}(X=x)| \\ &= \sum_{x \in J \text{ et } \mathbb{P}(X=x)>0} \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \mathbb{P}(Y=y, X=x) \right| \\ &\leq \sum_{x \in J} \sum_{y \in \mathbb{Z}} |y| \mathbb{P}(Y=y, X=x) \\ &\leq \mathbb{E}(|Y|) < +\infty. \end{aligned}$$

La famille $(g(x) \mathbb{P}(X=x))_{x \in \mathbb{Z}}$ est bien sommable.

Ensuite, si $f \in L^\infty(\mathbb{Z})$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X) f(X)) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} g(x) f(x) \mathbb{P}(X=x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{P}(X=x)>0} g(x) f(x) \mathbb{P}(X=x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{P}(X=x)>0} \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \mathbb{P}(Y=y, X=x) f(x) \\ &= \mathbb{E}(Y f(X)). \end{aligned}$$

Exercice 43

La fonction génératrice G_X vaut : $G_X : t \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k = \frac{t}{n} \frac{1-t^n}{1-t}$.



On écrit $n = p q$, avec $2 \leq p$ et $2 \leq q$. Alors :

$$G_X(t) = \frac{t}{n} \frac{1-t^p}{1-t} \sum_{k=0}^{q-1} t^{kp} = P(t) Q(t),$$

avec $P(t) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p t^k$ et $Q(t) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} t^{kp}$ deux fonctions polynomiales à coefficients positifs telles que $P(1) = Q(1) = 1$.

On peut construire Y et Z indépendantes telles que $G_Y = P$ et $G_Z = Q$.

Ainsi, $G_X = G_Y \times G_Z = G_{Y+Z}$, d'où $X \sim Y + Z$ et comme P et Q ne sont pas réduites à un seul monôme, alors Y et Z ne sont pas certaines.



On suppose n premier.

On suppose également l'existence des variables aléatoires Y et Z vérifiant l'énoncé. On en déduit :

$$G_X = G_Y \times G_Z$$

ce qui se traduit par : $\forall t \in]-1, 1[$, $\frac{t}{n} \frac{t^n - 1}{t - 1} = P(t)Q(t)$, ou encore $\frac{t^n - 1}{t - 1} = n R(t) Q(t)$, avec $R(T)$ et $Q(T)$ dans $\mathbb{R}[T]$.

En posant $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, alors les racines du polynôme $\frac{T^n - 1}{T - 1}$ sont les complexes ω^ℓ , pour ℓ parcourant $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Les polynômes $R(T)$ et $Q(T)$ sont à coefficients réels, les racines complexes de ces deux polynômes se regroupant par conjugués. Par exemple,

$$R(T) = \prod_{k \in J} (X - \omega^k)(X - \omega^{-k}),$$

avec J inclus dans $\llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$.

On en déduit : $R(T) = \alpha \prod_{k \in J} \left(T^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) T + 1 \right)$, avec $\alpha > 0$ car tous les termes de $R(T)$ sont positifs ou nuls. Le terme en $T^{\deg(R)-1}$ doit être positif ou nul et vaut :

$$A = -2 \sum_{k \in J} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \geqslant 0.$$

De même le terme en $T^{\deg(Q)-1}$ dans $Q(T)$ vaut $B = -2 \sum_{k \notin J} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \geqslant 0$.

Or, la somme des racines $n^{\text{ème}}$ est nulle : $A + B = 0$ imposant $A = B = 0$.

Le polynôme $\xi(T) = \sum_{k \in J} (T^k + T^{n-k})$ est annulateur de ω .

On montre que le polynôme $\chi(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$ est le polynôme minimal irréductible de ω sur le corps \mathbb{Q} .

En effet, si $\chi(T) = S_1(T)S_2(T)$ avec S_1 et S_2 à coefficients rationnels, on montre classiquement qu'il existe deux entiers N_1 et N_2 strictement positifs tels que $\frac{N_1}{N_2}S_1(T)$ et $\frac{N_2}{N_1}S_2(T)$ soient à coefficients entiers.

Ensuite, $\chi(T) = \frac{T^n - 1}{T - 1}$, donc $\chi(T + 1) = \frac{(T + 1)^n - 1}{T} = T^{n-1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ et on ne peut avoir $\chi(T + 1) = \tilde{S}_1(T)\tilde{S}_2(T)$ décomposition dans $\mathbb{Z}[X]$, sinon, $\tilde{S}_k(X) = X^{\alpha_k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$, puis $\chi(1) = n$ devient égal à $\tilde{S}_1(0)\tilde{S}_2(0)$ qui est un multiple de n^2 ...

Conclusion, $\xi(T)$ est multiple du polynôme minimal $\chi(T)$ et idem pour le polynôme $\zeta(T) = \sum_{k \notin J} (T^k + T^{n-k})$: contradiction.

Exercice 44

1. Supposons que l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers soit fini. On pose :

$$N = 1 + \prod_{p \in \mathcal{P}} p.$$

Il s'agit d'un entier supérieur ou égal à 2, donc nécessairement divisible par un nombre premier q . Or, $q \in \mathcal{P}$ et q divise à la fois N et $\prod_{p \in \mathcal{P}} p$, donc leur différence qui vaut 1 : contradiction.

2. Soient a et b dans B_0 . On écrit :

$$a = x \ell_1 \text{ et } b = x \ell_2,$$

avec ℓ_1 et ℓ_2 étant les classes de deux entiers entre $k+1$ et $2k+1$.

On en déduit dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$$a + b = x (\ell_1 + \ell_2).$$

Il suffit de montrer que $a + b$ n'appartient pas à $x B$ et comme x est inversible et donc que l'application $y \mapsto x y$ est une bijection sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, il suffit de montrer que $\ell_1 + \ell_2$ n'appartient pas à $\llbracket k+1, 2k+1 \rrbracket$, le tout modulo p .

Or, dans \mathbb{Z} , $\ell_1 + \ell_2$ appartient à $\llbracket 2k+2, 3k+2 \rrbracket$, et dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes des entiers de l'ensemble $\llbracket 2k+2, 3k+2 \rrbracket$ est l'ensemble des classes des entiers de l'ensemble $\llbracket 2k+2, 3k+1 \rrbracket \sqcup \{0\}$.

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a bien :

$$\ell_1 + \ell_2 \notin \left\{ \bar{r} ; r \in \llbracket k+1, 2k+1 \rrbracket \right\}.$$

On a ce qu'il faut.

3. Comme l'ensemble A est fini inclus dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et que l'ensemble des nombres premiers p de la forme $p = 3k+2$ est non majoré, on peut choisir un nombre premier p suffisamment grand pour que :

$$A \subset \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right].$$

Tous les éléments de A sont espacés d'une distance strictement inférieure à p . Cela sera utile plus tard.

Il est impossible que l'entier p divise r : les entiers r et p sont premiers entre eux. En passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'ensemble \tilde{A} constitué des classes d'équivalence des éléments de A est inclus dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

On munit l'ensemble fini $\Omega = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ de cardinal $(p-1)$ de la loi uniforme :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{p-1} \sum_{x \in \Omega} \delta_x.$$

On note :

$$\tilde{B} = \left\{ \bar{r} ; r \in \llbracket k+1, 2k+1 \rrbracket \right\}.$$

On considère maintenant la variable aléatoire :

$$X : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \omega & \longmapsto \text{Card}((x \tilde{B}) \cap \tilde{A}) \end{cases}.$$

On sait que pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $(x \tilde{B}) \cap \tilde{A}$ est sans somme, par la question précédente et c'est une partie de \tilde{A} .

On va calculer l'espérance de la variable aléatoire X .

On remarque que pour tout ω dans Ω , l'élément ω appartient à $(x \tilde{B}) \cap \tilde{A}$ si et seulement si il existe $b \in \tilde{B}$ et $a \in \tilde{A}$ tels que :

$$\omega b = a$$

ou encore :

$$\omega = a \times b^{-1}.$$

On va montrer que :

$$X = \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \mathbf{1}_{\{a \times b^{-1}\}}.$$

En effet, si ω est dans Ω , la quantité $\left(\sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \mathbf{1}_{\{a \times b^{-1}\}} \right) (\omega) = \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \mathbf{1}_{\{a \times b^{-1}\}}(\omega)$ compte le nombre de couples $(a, b) \in \tilde{A} \times \tilde{B}$ tels que :

$$\omega b = a.$$

Lorsque a est fixé, il n'y a qu'une seule possibilité pour b , donc le nombre de couples possibles (a, b) est exactement le nombre de possibilités d'avoir un élément dans $(\omega \tilde{B}) \cap \tilde{A}$. Ce nombre de couples vaut donc $X(\omega)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{a \times b^{-1}\}}) \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \mathbb{P}(\{a \times b^{-1}\}) \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \tilde{B}} \frac{1}{p-1} \\ &= \text{card}(\tilde{A}) \times \text{card}(\tilde{B}) \times \frac{1}{p-1} \\ &= \text{card}(\tilde{A}) \times \frac{k+1}{3k+1} \\ &> \frac{\text{card}(\tilde{A})}{3}. \end{aligned}$$

L'espérance d'une variable aléatoire finie comme X par exemple est toujours comprise entre $\min(X(\Omega))$ et $\max(X(\Omega))$.

On peut donc choisir $\omega \in \Omega$ réalisant la plus grande valeur prise. Cette plus grande valeur prise est strictement supérieure à $\frac{\text{Card}(\tilde{A})}{3}$.

Il existe donc une partie \tilde{C} de \tilde{A} , avec \tilde{C} sans somme telle que :

$$\text{Card}(\tilde{C}) > \frac{\text{card}(\tilde{A})}{3}.$$

Il suffit de poser :

$$\tilde{C} = (\omega \tilde{B}) \cap \tilde{A}.$$

Pour tout $\bar{c} \in \tilde{C}$, il existe $c \in A$ tel que l'entier c dans A ait sa classe modulo p dans \tilde{C} . De plus, comme tous les éléments de A sont distants les uns des autres d'une quantité strictement inférieure à p , alors il y a unicité de cet entier c .

$$\tilde{C} = \{\bar{c} ; c \in C\}.$$

Les ensembles \tilde{C} et C ont le même cardinal, ainsi que les ensembles \tilde{A} et A .

Par ailleurs, la partie C de A est sans somme. Dans le cas contraire, on trouverait a, b et c dans C tels que :

$$a + b = c.$$

En passant modulo p , on obtiendrait :

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c},$$

aboutissant au fait que la partie \tilde{C} n'est pas sans somme, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion, la partie C répond à la question.

4. Supposons que l'ensemble \mathcal{Q} des nombres premiers congrus à 2 modulo 3 soit fini.

On pose l'entier :

$$M = 1 + \left(\prod_{p \in \mathcal{Q}} p \right)^2.$$

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, chaque élément $p \in \mathcal{Q}$ vaut (-1) , donc :

$$M \equiv 2 [3].$$

Soit π un nombre premier divisant M .

Il est impossible que $\pi \equiv 0 [3]$, car alors $M \equiv 0 [3]$, ce qui n'est pas le cas.

Il est impossible que $\pi \equiv 2[3]$, car alors π appartiendrait à \mathcal{Q} et l'entier π diviserait M et $\left(\prod_{p \in \mathcal{Q}} p \right)^2$, donc leur différence à savoir 1.

On vient de montrer que tous les premiers π divisant N sont congrus à 1 modulo 3. Leur produit également amenant le fait que N est lui-même congru à 1 modulo 3 ce qui n'est pas le cas.

On obtient une contradiction : l'ensemble \mathcal{Q} est infini.