Renseignements généraux

— *Concours* : X
— *Matière* : Maths
— *NOM Prénom* : LESBATS Rémi

Exercice :

Soit $E = \left(\mathcal{C}^0([0,1]), ||.||_\infty\right)$. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables sur $[0,1]$ est dense dans E.
On admet le résultat suivant : dans E, toute intersection quelconque d'ouverts denses est un ouvert dense.

Remarques sur l'oral

Examinateur qui m'accueille avec le sourire, mais qui bégaie malheureusement beaucoup ce qui pose des soucis de compréhension par moments. Je commence par proposer de considérer les ensembles des fonctions dérivables en un seul point, avant de remarquer que ces ensembles ne sont pas ouverts. Il introduit alors les ensembles suivants :

$$\Omega_{n,\epsilon} = \{f \in E,\ \forall y \in [0,1],\ \exists x \in]y-\epsilon, y+\epsilon[, \quad |f(y) - f(x)| > n|x-y|\}$$

On veut montrer que ce sont des ouvertes denses. Je me rends compte que la topologie est un lointain souvenir quand je n'arrive plus à caractériser les ouverts correctement. Finalement je cherche à montrer que le complémentaire est fermé. On prend (f_k) une suite de fonctions dans le complémentaire de $\Omega_{n,\epsilon}$, qui converge (uniformément car la norme est $||.||_\infty$) vers $f \in E$. On considère alors y_k pour lequel on a une négation de la définition de $\Omega_{n,\epsilon}$ pour f_k. Quitte à extraire on peut supposer que $y_k \to y$ (on a une valeur d'adhérence y par BW). Ici il faut faire un dessin au lieu de chercher à faire des inégalités triangulaires. On fixe x à distance plus petite que ϵ de y. On montre qu'il est à distance au plus ϵ de tous les y_k à partir d'un certain rang (Je n'avais que 2ϵ avec des inégalités triangulaires). A partir de là on écrit

$$|f_k(y_k) - f_k(x)| \leq n|x - y_k|$$

et on passe à la limite (le $f_k(y_k)$ me dérangeait un peu mais en fait il ne pose pas problème). On en déduit que f est dans le complémentaire, donc que $\Omega_{n,\epsilon}$ est ouvert.
Ensuite vient une question intermédiaire : montrer que les fonctions affines par morceaux sont denses dans E. Je commence par essayer de faire un découpage simple en $\frac{1}{2^n}$, mais je me rends compte que ça ne marche pas. J'utilise alors Heine, on peut découper par intervalles de longueur δ d'$\frac{1}{n}$-uniforme continuité. Ensuite pour montrer que $\Omega_{n,\epsilon}$ est dense il faut approcher les fonctions affines par des fonctions moches de cet ensemble. Je fais alors un dessin avec une fonction en dents de scie serrées entre deux fonctions affines à distance ϵ' de la fonction à approcher. L'oral se termine mais l'examinateur m'indique qu'il a bien vu ma construction et que c'est l'idée.