SUITES ET TAF

Dans le chapitre sur les limites de suites, nous avons appris à étudier qualitativement le comportement asymptotique des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans cette annexe, nous voyons comment le théorème des accroissements finis permet, dans certaines situations de convergence, de préciser quantitativement la vitesse de convergence de la suite vers sa limite.

A. Le théoréme du point fixe de Banach

Définition 1

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite k-contractante lorsqu'elle est k-lipschitzienne sur I avec une constante de lipschitz k qui est strictement inférieure à 1.

Dire que f est k-contractante sur I signifie que, pour tous $x, y \in I$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ avec $0 \leqslant k < 1$. Une fonction k-contractante réduit donc strictement les distances entre les points. L'inégalité stricte $k < 1$ est ainsi nécessaire ! Une fonction 1-lipschitzienne n'est pas contractante.

Exemples :

- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et vérifie $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$ avec $0 \leqslant k < 1$, alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est k-contractante sur I.
- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et s'il existe $\ell \in I$ tel que $|f'(\ell)| < 1$ alors, par continuité de f', pour tout $k \in]|f'(\ell)|, 1[$, il existe un voisinage W_ℓ de ℓ tel que $\forall x \in W_\ell,\ |f'(x)| \leqslant k$, ce qui implique, toujours par l'inégalité des accroissements finis, que f est k-contractante sur le voisinage W_ℓ de ℓ.

Voici le théorème du point fixe de Banach (qui est également attribué à Émile Picard).

Théorème 1

Toute fonction $f : [a; b] \longrightarrow [a; b]$ qui est k-contractante admet un unique point fixe ℓ (c'est-à-dire qu'il existe une unique solution $\ell \in [a; b]$ à l'équation $f(x) = x$). De plus, pour tout nombre réel $u_0 \in [a; b]$, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$, définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers ℓ et l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$.

■ La fonction $x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[a; b]$. On a $f(a) - a \geqslant 0$ et $f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction prend la valeur 0 sur $[a; b]$. Il existe donc un nombre réel $\ell \in [a; b]$ tel que $f(\ell) = \ell$. Si on suppose l'existence de deux points fixes ℓ_1 et ℓ_2, le caractère k-contractant de f implique que $|\ell_2 - \ell_1| = |f(\ell_2) - f(\ell_1)| \leqslant k|\ell_2 - \ell_1|$, ce qui implique $\ell_1 = \ell_2$.

Nous allons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|u_n - \ell| \leqslant k^n |\lambda - \ell|$. Elle est clairement vraie pour $n = 0$. Supposons cette relation vérifiée pour un entier n fixé et démontrons la au rang suivant. On a $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell| \leqslant k.k^n |u_0 - \ell| = k^{n+1}|u_0 - \ell|$, ce qui démontre la propriété au rang $n + 1$. Le principe de récurrence permet de conclure que l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème des gendarmes nous dit alors que $\lim u_n = \ell$. ■

Dans ce théorème, on peut remplacer le segment $[a;b]$ par n'importe quel autre intervalle fermé (par contre, il faut que cet intervalle reste stable par f). Mais alors, il n'est plus aussi évident de justifier, en toute généralité, l'existence du point fixe (cela utilise des concepts qui ne sont pas au programme des classes préparatoires). Lorsqu'on rencontrera une telle situation, on s'adaptera au cas particulier traité pour prouver cette existence.

Ce théorème a l'avantage de donner la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers le point fixe sans avoir à déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Il est donc particulièrement efficace lorsque le sens de variation de la suite n'est pas simple, par exemple lorsque la suite oscille vers sa limite (cas des dynamiques en escargot).

Enfin, il est important de noter que ce théorème ne se contente pas de fournir un résultat qualitatif de convergence. Il donne en outre une information quantitiative : la convergence de la suite vers le point fixe est rapide ! En effet, u_n se rapproche de ℓ au moins aussi vite que la suite géométrique (k^n) tend vers 0.

Exemples :

- Soit $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Le raisonnement tenu dans la démonstration ci-dessus nous dit que f admet au moins un point fixe dans $[a;b]$.

  Si l'un de ces points fixes, noté ℓ, vérifie $|f'(\ell)| < 1$, alors, pour tout $k \in \,]|f'(\ell)|, 1[$, f est k-contractante au voisinage de ℓ. Le théorème du point fixe de Banach dit alors qu'en prenant u_0 assez proche de ℓ, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers ℓ. Un tel point fixe est dit attractif.

  A contrario, un point fixe ℓ tel que $|f'(\ell)| > 1$ est dit répulsif. On peut montrer (y réfléchir) que pour un tel point fixe, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, ne converge vers ℓ que si elle stationne à cette valeur (autrement dit, la convergence n'a lieu que pour des valeurs très particulières de u_0). Mais rien n'est perdu ! Pour obtenir une suite convergeant vers un tel point fixe, il suffit (lorsque c'est possible) de travailler avec la réciproque de f (car alors $|(f^{-1})'(\ell)| = 1/|f'(\ell)| < 1$).

Le théorème du point fixe de Banach n'est pas au programme. Par conséquent, l'essentiel n'est pas de retenir son énoncé mais la démarche adoptée au cours de sa démonstration. Celle-ci est résumée dans l'encadré suivant.

Recette de la convergence à la Banach

Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction laissant stable l'intervalle I. Pour étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on peut adopter la démarche suivante :

- on démontre que f admet un point fixe ℓ dans I (c'est mieux s'il est unique) ;
- on démontre que f est k-contractante (souvent à l'aide du TAF) sur I (ou sur un voisinage de ℓ) ;
- on écrit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|$, ce qui prouve que la suite $(|u_n - \ell|)_{n\geqslant 0}$ est sous-géométrique de raison k ;
- on en déduit (par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$;
- on utilise le théorème des gendarmes pour affirmer la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ ;
- on peut utiliser la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$ pour quantifier comment u_n se rapproche de ℓ.

$\mathcal{B}$. *Un exemple*

> **Exercice 1.**
> Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln u_n}$.

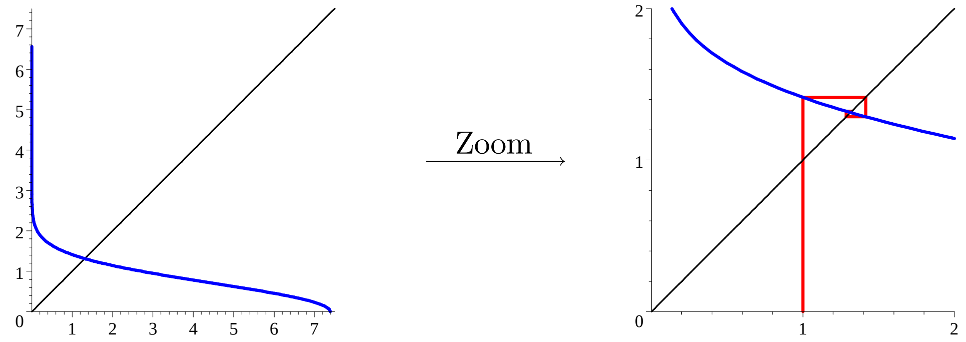
$\Diamond$ Posons

$$f(x) = \sqrt{2 - \ln x}.$$

La fonction est définie sur $\left]0;\mathrm{e}^2\right]$, continue sur ce même intervalle et dérivable sur $\left]0;\mathrm{e}^2\right[$ avec un point d'incertitude en e^2. Pour tout $x \in \left]0;\mathrm{e}^2\right[$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln x}} < 0,$$

ce qui démontre que f est strictement décroissante sur $\left]0;\mathrm{e}^2\right]$ (par ailleurs, comme $\lim_{\mathrm{e}^2} f' = -\infty$, la fonction f admet une demi-tangente verticale en e^2). On peut alors représenter le graphe de f ainsi que la dynamique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Cela donne



On constate que $f\left(\left[1;\sqrt{2}\right]\right) \subset \left[1;\sqrt{2}\right]$, ce qui justifie l'existence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in \left[1;\sqrt{2}\right]$. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[1;\sqrt{2}\right]$. On a $g(1) = f(1) - 1 > 0$ et $g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) - \sqrt{2} < 0$. D'après le théorème de la bijection, g prend la valeur 0 une unique fois sur $\left[1;\sqrt{2}\right]$. Il existe donc un unique réel $\ell \in \left[1;\sqrt{2}\right]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

On a

$$\forall x \in \left[1;\sqrt{2}\right], \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2 - \ln\sqrt{2}}} \leqslant \frac{2}{5},$$

donc, d'après le TAF appliqué à f entre ℓ et u_n, on a

$$\forall n \geqslant 0, \qquad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - \ell|,$$

ce qui démontre que la suite $(|u_n - \ell|)_{n\geqslant 0}$ est sous-géométrique de raison $2/5$. Il s'ensuit, par récurrence immédiate, que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Comme $u_0 = 1$ et $\ell \in \left[1;\sqrt{2}\right]$, on a $|u_0 - \ell| \leqslant \sqrt{2} - 1 \leqslant 1/2$, donc

$$\forall n \geqslant 0, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Le théorème des gendarmes nous dit que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell.}$$

Si l'on souhaite que u_n soit une approximation de ℓ à 10^{-2} près, il suffit que l'entier naturel n vérifie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 10^{-2},$$

ce qui donne

$$n \geqslant \frac{\ln(2 \times 10^{-2})}{\ln(2/5)} \approx 4,3$$

donc u_5 est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près. Comme $u_5 \approx 1,315$ on en déduit que

$$\boxed{\ell \approx 1,31 \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près}).}$$

$\Diamond$