Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir Maison n^o 18

– à rendre pour le mardi 05 mai –

Exercice 1

On fixe une matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 2$ un entier.
Dans toute la suite, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice C si pour tous indices i et j entre 1 et n, la suite de coefficients complexes $\left((B_k)_{i,j}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le coefficient $C_{i,j}$ de la matrice C.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\mathrm{Com}(\lambda \cdot A) = \lambda^{n-1} \cdot \mathrm{Com}(A).$$
2. (a) Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda \cdot I_n - A) \end{array} \right.$ est polynomiale et que son terme dominant est λ^n.
   (b) En déduire qu'il existe une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $A - \lambda_k \cdot I_n$ soit inversible.
   (c) En déduire que l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. (a) On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que :
$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$
   (b) Cette formule reste-t-elle juste lorsque la matrice A n'est plus inversible ?
4. (a) On suppose la matrice A inversible. Montrer que :
$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-2} \cdot A.$$
   (b) Montrer que la formule précédente reste valable pour toute matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Soit u une suite réelle positive telle que la série $\sum_n u_n$ soit convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose le reste :
$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

1. Montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.
2. Construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \ell \geqslant \varphi(n),\ R_\ell \leqslant \frac{1}{2^n}$$
3. Construire une suite v réelle positive, croissante, de limite $+\infty$ telle que la série $\sum_n v_n \times u_n$ soit convergente.
4. Expliciter un exemple de suite u vérifiant les conditions de l'énoncé et pour laquelle pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum_n n^\alpha \cdot u_n$ soit divergente.