

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

♦ Exercice 1. [o]

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 3; 6 \rrbracket)$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y .

On a

$$E(X) = 3 \times (1/4) + 4 \times (1/4) + 5 \times (1/4) + 6 \times (1/4) = 9/2$$

et

$$E(X^2) = 3^2 \times (1/4) + 4^2 \times (1/4) + 5^2 \times (1/4) + 6^2 \times (1/4) = 43/2$$

donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 43/2 - (9/2)^2 = 5/4.$$

On a

$$E(Y) = E(2X^2 + 3) = 2E(X^2) + 3 = 2 \times 43/2 + 3 = 45$$

et

$$V(Y) = V(2X^2 + 3) = 4V(X^2) = 4E(X^4) - 4E(X^2)^2 = 409$$

car

$$E(X^4) = 3^4 \times (1/4) + 4^4 \times (1/4) + 5^4 \times (1/4) + 6^4 \times (1/4) = 1129/2.$$

On a

i	21	35	53	75
$P(Y = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

♦ Exercice 2. [★]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a $2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n$.

1. On a

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket), \quad E(X_1) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales appliquée pour l'événement $(X_2 = j)$ à

travers le s.c.e. $((X_1 = k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, on a

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^n P(X_1 = k)P(X_2 = j | X_1 = k) \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n P(X_1 = k)P(X_2 = j | X_1 = k) + P(X_1 = j)P(X_2 = j | X_1 = j) \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} \frac{1+j}{n+j} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{j}{n(n+j)},
 \end{aligned}$$

donc

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X_2 = j) = \frac{S_n}{n} + \frac{j}{n(n+j)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
 E(X_2) &= \sum_{j=1}^n jP(X_2 = j) \\
 &= \sum_{j=1}^n j \left(\frac{S_n}{n} + \frac{j}{n(n+j)} \right) \\
 &= \frac{S_n}{n} \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n(n+j)} \\
 &= \frac{S_n}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j+n)(j-n) + n^2}{n+j} \\
 &= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(j - n + \frac{n^2}{n+j} \right) \\
 &= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1 + n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \\
 &= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{n+1}{2} - n + nS_n \\
 &= \frac{3n+1}{2} S_n + \frac{1-n}{2},
 \end{aligned}$$

donc

$$E(X_2) = \frac{3n+1}{2} S_n + \frac{1-n}{2}.$$

3. *Question bonus : Donner un équivalent de $E(X_2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

Le théorème sur les sommes de Riemann nous dit que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+j/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,$$

donc

$$E(X_2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3 \ln 2 - 1}{2} n.$$

♦ Exercice 3. [★]

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire une poignée aléatoire de jetons de cette urne. On note N la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés et S la somme des numéros obtenus. On suppose que N suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; n \rrbracket$.

1. Préciser $S(\Omega)$.
2. Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si le jeton numéro k est dans la poignée et 0 sinon. Démontrer que X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
3. Calculer $E(S)$.

1. On a

$$S(\Omega) = \llbracket 0; n(n+1)/2 \rrbracket.$$

2. On a $X_k(\Omega) = \{0; 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= \sum_{j=0}^n P(N = j) P(X_k = 1 | N = j) && \text{formule des probas totales} \\ &&& \text{avec le s.c.e. } ((N = j))_{j \in \llbracket 0; n \rrbracket} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{1 \times \binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j}} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc

$$X_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2.$$

3. On a

$$E(S) = E(1X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) = 1.E(X_1) + 2.E(X_2) + \dots + nE(X_n) = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n),$$

donc

$$E(S) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

♦ Exercice 4. [o]

Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0; 1[$.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X .
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y .
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

1. La variable X compte le nombre de raquettes à l'atterrissage attachées, de façon indépendante, aux 4 pattes, avec à chaque fois une probabilité de garder la raquette égale à $1 - p$, donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(4; 1 - p).$$

2. La variable X compte le nombre de raquettes à l'atterrissage attachées, de façon indépendante, aux 2 pattes, avec à chaque fois une probabilité de garder la raquette égale à $1 - p$, donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(2; 1 - p).$$

3. On veut comparer $P(X \leq 1)$ et $P(Y = 0)$. On a

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = p^4 + 4(1 - p)p^3 = p^3(4 - 3p)$$

et

$$P(Y = 0) = p^2,$$

donc

$$P(X \leq 1) - P(Y = 0) = p^2(-3p^2 + 4p - 1).$$

Or

$$-3p^2 + 4p - 1 \geq 0 \iff p \in \left[\frac{1}{3}; 1\right],$$

donc

si $p \geq 1/3$, mieux vaut avoir 2 raquettes à grands tamis
et si $p \leq 1/3$, mieux vaut avoir 4 raquettes à petits tamis.

♦ **Exercice 5.** [★]

Soient $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$. On considère $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2n; p)$ et l'on pose $Y = \lfloor X/2 \rfloor$.

1. Déterminer la loi de Y .

2. a) Soit $n \geq 1$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k}$.
b) Déterminer $E(Y)$.

1. On a $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P((X = 2k) \cup (X = 2k + 1)) = P(X = 2k) + P(X = 2k + 1)$$

donc

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}.$$

2. a) On constate que

$$\begin{aligned} T_n + S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-\ell} + \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-\ell} \\ &= (p + q)^{2n} \quad \text{binôme} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-\ell} - \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} (-p)^{\ell} q^{2n-\ell} \\ &= (-p + q)^{2n} \quad \text{binôme} \\ &= (1 - 2p)^{2n}. \end{aligned}$$

Comme $S_n = ((T_n + S_n) - (T_n - S_n))/2$, il vient

$$S_n = \frac{1 - (1 - 2p)^{2n}}{2}.$$

b) On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^n \left(k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + k \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}}_{=S_n} \\ &= E(X) - \frac{1}{2} S_n \\ &= np - \frac{1}{2} S_n, \end{aligned}$$

donc

$$E(Y) = np - \frac{1 - (1 - 2p)^{2n}}{4}.$$

♦ **Exercice 6.** [o] (Marche aléatoire)

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (on parle de « pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n .

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n . En vous aidant de D_n , déterminer la loi de X_n .
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

1. On a

$$X_n(\Omega) = \{k \in \llbracket -n; n \rrbracket : k \text{ et } n \text{ sont de même parité}\} = \{n; n+2; n+4; \dots; n-4; n-2; n\}.$$

2. La variable D_n compte le nombre de succès (faire un pas vers la droite) lors de n mouvements indépendants, avec à chaque fois une probabilité de succès égale à p , donc

$$D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p).$$

Le mobile effectue D_n pas vers la droite qui augmentent chacun l'abscisse de 1 et $n - D_n$ pas vers la gauche qui diminuent chacun l'abscisse de 1, donc

$$X_n = D_n \times (+1) + (n - D_n) \times (-1),$$

c'est-à-dire

$$X_n = 2D_n - n.$$

Pour $k \in X_n(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(2D_n - n = k) \\ &= P\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) \\ &= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \{k \in \llbracket -n; n \rrbracket : k \text{ et } n \text{ sont de même parité}\}, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}.$$

3. On a

$$E(X_n) = 2E(D_n) - n = 2np - n$$

donc

$$E(X_n) = n(2p - 1).$$

Par ailleurs, on a

$$V(X_n) = 4V(D_n)$$

d'où

$$V(X_n) = 4npq.$$

4. La variable X_n est centrée si, et seulement si, $p = q$, c'est-à-dire $p = 1/2$. Autrement dit,

si le mobile se déplace latéralement de manière équilibré, sa position moyenne est l'origine.

♦ **Exercice 7.** [o] (La règle du trois)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

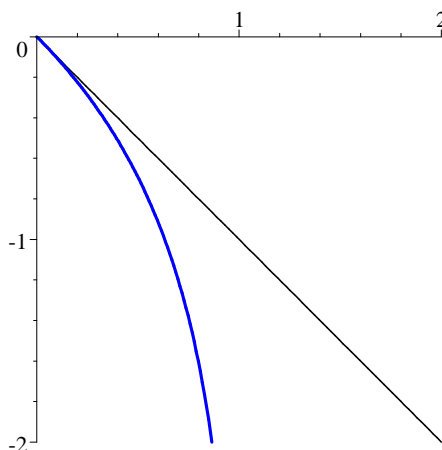
1. Démontrer que, sous l'hypothèse $p > 3/n$, on a $(1 - p)^n < e^{-3}$.
2. En analyse statistique des essais médicaux, la «règle du trois» énonce que : «si parmi n tentatives, aucune n'est réussie, alors on peut affirmer, avec seulement 5 % de risque de se tromper, que la probabilité de réussite p de chaque tentative est inférieure à $3/n$ ».

Discuter la validité de cette règle.

Donnée numérique : $e^{-3} = 4,98 \times 10^{-2}$

1. On a $(1 - p)^n = e^{n \ln(1-p)}$, donc l'inégalité demandée est équivalente à $\ln(1 - p) < -3/n$.

Sur $[0; 1[$, la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ admet un graphe de la forme



ce qui permet de voir et d'affirmer, grâce à la concavité de cette fonction, que

$$\forall x \in [0; 1[, \quad \ln(1 - x) \leq -x.$$

Il s'ensuit que

$$\ln(1 - p) \leq -p < -\frac{3}{n},$$

c'est-à-dire

$$n \ln(1 - p) < -3.$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$(1 - p)^n < e^{-3}.$$

2. Notons X le nombre de succès parmi les n tentatives. Si l'on suppose que les tentatives sont indépendantes (ce qu'assure un bon protocole expérimental), la variable X suit la loi binomiale de paramètre n et p . Le résultat de la question précédente nous dit alors que, sous l'hypothèse $p > 3/n$, on a

$$P(X = 0) = (1 - p)^n < e^{-3} < 5\%.$$

Dès lors, si le résultat de l'expérience est l'événement $(X = 0)$, c'est-à-dire si les n tentatives sont des échecs, cela signifie qu'il y a moins de 5 % de chance que cela se soit produit sous l'hypothèse $p > 3/n$ et donc qu'il y a 95 % de chance que $p \leq 3/n$. En conclusion,

la «règle du trois» est bien valide!

♦ **Exercice 8.** [★]

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

1. On choisit un sous-ensemble A au hasard (tous les choix étant équiprobables). Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \text{card}(A)$.
2. On choisit au hasard un second sous-ensemble B de E , indépendamment de A . Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \text{card}(A \cap B)$.

1. Deux solutions pour le prix d'une :

► On pose $\Omega = \mathcal{P}(E)$. On a $\text{card}(\Omega) = 2^n$. On utilise la loi uniforme sur Ω .

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $(X = k)$ est l'événement « obtenir une partie de cardinal n ». On a clairement $\text{card}(X = k) = \binom{n}{k}$.

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

En conclusion,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right).$$

► On égraine les éléments de E un par un en décidant pour chacun si on le retient dans A , avec probabilité $1/2$, ou si on le rejète (dans \overline{A}), avec probabilité $1/2$. La variable X compte alors le nombre de succès dans une série de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec, à chaque fois, une probabilité de succès égale à $1/2$. On reconnaît un schéma binomial, donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right).$$

2. On égraine les éléments de E un par un, en décidant pour chacun si on le retient dans A , avec probabilité $1/2$, ou si on le rejète (dans \overline{A}), avec probabilité $1/2$ et si on le retient dans B , avec probabilité $1/2$, ou si on le rejète (dans \overline{B}), avec probabilité $1/2$. La variable Y compte alors le nombre de succès dans une série de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec, à chaque fois, une probabilité de succès égale à $1/4$. On reconnaît un schéma binomial, donc

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{4}\right).$$

♦ **Exercice 9.** [★]

Deux urnes contiennent chacune $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire simultanément n boules dans chaque urne et on note X le nombre de numéros en commun dans les deux tirages.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule de numéro i a été tirée dans les deux urnes et qui vaut 0 sinon. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ et en déduire $E(X)$.
2. Démontrer que X suit une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres.

1. Soit $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$. On a $T_i(\Omega) = \{0; 1\}$ donc T_i suit une loi de Bernoulli.

Pour déterminer le nombre de bi-tirages avec le numéro i en commun, on choisit i dans chacune des urnes : 1 choix ; puis $n-1$ numéros parmi les $2n-1$ numéros (sauf i) de la première urne : $\binom{2n-1}{n-1}$

choix ; puis $n-1$ numéros (sauf i) dans la seconde urne : $\binom{2n-1}{n-1}$ choix. Donc

$$\text{card}(T_i = 1) = 1 \times \binom{2n-1}{n-1} \times \binom{2n-1}{n-1},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P(T_i = 1) &= \frac{\binom{2n-1}{n-1} \times \binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{\binom{2n-1}{n-1} \times \binom{2n-1}{n-1}}{\frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} \times \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, T_i \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right).$$

On constate que $X = T_1 + \dots + T_{2n}$, donc

$$E(X) = E(T_1) + \dots + E(T_{2n}) = \underbrace{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{2n \text{ fois}} = \frac{2n}{4},$$

ce qui donne

$$E(X) = \frac{n}{2}.$$

2. Considérons que le tirage des n boules a déjà été effectué dans la première urne. Lors du tirage dans la seconde urne, la variable X compte le nombre de succès (« tirer un numéro en commun avec le tirage dans la première urne ») lors d'un tirage sans remise de n boules dans une urne contenant $2n$ boules avec, au départ, une probabilité de succès égale à $n/2n$. On reconnaît un schéma binomial de paramètre $2n$, n et $n/2n$, c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(2n; n; \frac{1}{2}\right).$$

♦ **Exercice 10.** [★] (Loi géométrique tronquée)

Legolas décoche n flèches sur un troll. Chacune a une probabilité $p \in]0; 1[$ d'atteindre la cible. On note X le numéro de la première flèche qui fait mouche (avec $X = 0$ si le troll survit). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

On a $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note T_j l'événement « la j -ème flèche trucidé le troll ». Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k) \\ &= P(\overline{T_1})P(\overline{T_2} | \overline{T_1}) \dots P(\overline{T_{k-1}} | \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-2}})P(T_k | \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}) \\ &= q^{k-1}p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{n-1}} \cap \overline{T_n}) \\ &= P(\overline{T_1})P(\overline{T_2} | \overline{T_1}) \dots P(\overline{T_n} | \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{n-1}}) \\ &= q^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{si } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \\ q^n & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{à } n}}^n kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n kq^{k-1}p \\ &= p \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \left(\frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \left(\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$E(X) = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{p}.$$

♦ **Exercice 11.** [★]

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. On considère X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket$. Démontrer que

$$E(X) = a + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k).$$

2. On dispose de n paires de chaussettes mélangées dans un tiroir. On tire les chaussettes au hasard une à une sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour reconstituer une première paire de chaussettes.

Déterminer $P(X > k)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et calculer l'espérance de X .

Donnée : $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$

1. Pour tout $k \in \llbracket a; b \rrbracket$, on a $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$, donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=a}^b k P(X = k) \\ &= \sum_{k=a}^b k (P(X > k-1) - P(X > k)) \\ &= \text{téléscopage} \\ &= a \underbrace{P(X > a-1)}_{=1} + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k) - b \underbrace{P(X > b)}_{=0}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E(X) = a + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k).$$

2. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket.$$

Notons Ω' l'ensemble des tirages de k chaussettes parmi $2n$ chaussettes, ce qui donne

$$\text{card } \Omega' = \binom{2n}{k}.$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour dénombrer le sous-ensemble A des tirages de k chaussettes parmi $2n$ où aucune paire n'est constituée, on choisit k paires, ce qui laisse $\binom{n}{k}$ choix, puis on choisit une chaussette dans chacune de ces paires, ce qui laisse 2^k choix. On en déduit que

$$\text{card } A = \binom{n}{k} 2^k.$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X > k) = \frac{\binom{n}{k} 2^k}{\binom{2n}{k}}.$$

Dès lors, d'après la première question, on a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 2 + \sum_{k=2}^n P(X > k) \\
 &= \sum_{k=0}^n P(X > k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} \\
 &= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^n 2^k \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} \\
 &= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n} \\
 &= \frac{1}{\binom{2n}{n}} 2^{2n},
 \end{aligned}$$

donc

$$E(X) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}.$$

♦ **Exercice 12.** [★]

On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n -ème tirage.

1. Déterminer Y_1 .
2. Soit $n \geq 2$. Démontrer que, pour $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$, on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

3. Démontrer que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est géométrique et en déduire l'expression de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

1. À l'issue du premier tirage, un seul numéro est sorti donc il reste $N-1$ numéros non encore sortis, ce qui signifie que

$$Y_1 = N-1.$$

2. Après n tirages, le nombre minimal de numéro(s) sorti(s) est 1 (dans le cas où tous les tirages ont donnés le même résultat) donc le nombre maximal de numéros non encore sortis est égal à $N-1$, ce qui prouve que

$$Y_n(\Omega) = \llbracket 1; N-1 \rrbracket.$$

Remarque : On aurait aussi pu remarquer que la suite (Y_k) est décroissante (y réfléchir !) et donc que $Y_n \leq Y_1 = N-1$.

Soit $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$. L'événement $(Y_n = k)$ possède deux causes possibles : $(Y_{n-1} = k)$ et $(Y_{n-1} = k+1)$. En effet, s'il reste k numéros non encore sortis après le n -ème tirage, alors ou bien il restait k numéros non encore sortis au $n-1$ -ème tirage et le n -ème tirage a fourni un numéro déjà tiré, ou bien il restait $k+1$ numéros non encore sortis au $n-1$ -ème tirage et le n -ème tirage a fourni un nouveau numéro. Par suite, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
 P(Y_n = k) &= P(Y_n = k | Y_{n-1} = k) P(Y_{n-1} = k) \\
 &\quad + P(Y_n = k | Y_{n-1} = k+1) P(Y_{n-1} = k+1).
 \end{aligned}$$

Or

- pour obtenir $(Y_n = k)$ sachant que $(Y_{n-1} = k)$ s'est produit, il faut choisir, pour le n -ème tirage, l'un des $N - k$ numéros déjà tirés parmi les N numéros possibles, ce qui donne

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = k) = \frac{N - k}{N},$$

- pour obtenir $(Y_n = k)$ sachant que $(Y_{n-1} = k + 1)$ s'est produit, il faut choisir, pour le n -ème tirage, l'un des $k + 1$ numéros non déjà tirés parmi les N numéros possibles, ce qui donne

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = k + 1) = \frac{k + 1}{N}.$$

Par suite, on a bien

$$\forall k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket, \quad P(Y_n = k) = \frac{N - k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k + 1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1).$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{N - k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k + 1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1) \right) \quad \text{d'après 2. b)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k + 1) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k + 1) \end{aligned}$$

Étudions un par un les quatres termes. On a tout d'abord

$$\sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k) = E(Y_{n-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k) = E(Y_{n-1}^2).$$

Par ailleurs, en effectuant le changement d'indice $\ell = k + 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k + 1) &= \sum_{\ell=1}^N (\ell - 1)^2 P(Y_{n-1} = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell - 1)^2 P(Y_{n-1} = \ell) - P(Y_{n-1} = 0) \quad \text{car } P(Y_{n-1} = N) = 0 \\ &= E((Y_{n-1} - 1)^2) - P(Y_{n-1} = 0) \\ &= E(Y_{n-1}^2) - 2E(Y_{n-1}) + 1 - P(Y_{n-1} = 0). \end{aligned}$$

Avec le même changement d'indice, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k + 1) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell - 1) P(Y_{n-1} = \ell) + P(Y_{n-1} = 0) \quad \text{car } P(Y_{n-1} = N) = 0 \\ &= E(Y_{n-1} - 1) + P(Y_{n-1} = 0) \\ &= E(Y_{n-1}) - 1 + P(Y_{n-1} = 0). \end{aligned}$$

En rassemblant ces calculs, il vient

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(Y_{n-1}) - \frac{1}{N} E(Y_{n-1}^2) + \frac{1}{N} [E(Y_{n-1}^2) - 2E(Y_{n-1}) + 1 - P(Y_{n-1} = 0)] \\ &\quad + \frac{1}{N} [E(Y_{n-1}) - 1 + P(Y_{n-1} = 0)] \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_{n-1}), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la suite } (E(Y_n))_{n \geq 1} \text{ est géométrique de raison } 1 - \frac{1}{N}.}$$

Comme $E(Y_1) = N - 1$ puisque Y_1 est une variable aléatoire certaine égale à $N - 1$, on a, pour tout $n \geq 1$, $E(Y_n) = (N - 1)(1 - 1/N)^{n-1}$, c'est-à-dire

$$\forall n \geq 1, \quad E(Y_n) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

♦ **Exercice 13.** [★]

On tire m entiers au hasard dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, où $m \leq n$. On note X le plus petit et Y le plus grand.

1. Les tirages se font avec remise. Déterminer les lois de X et Y et calculer leurs espérances.
2. Même question avec des tirages sans remise.

On note N_1, N_2, \dots, N_m les entiers tirés au hasard dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(N_1 > k, N_2 > k, \dots, N_m > k) \\ &= P(N_1 > k)P(N_2 > k) \cdots P(N_m > k) \quad \text{par } \perp\!\!\!\perp \\ &= \left(\frac{n-k}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k),$$

on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^m - \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.$$

On a donc

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^m,$$

c'est-à-dire

$$E(X) = \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^n k^m.$$

On a

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1; n - m + 1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(Y \leq k) &= P(N_1 \leq k, N_2 \leq k, \dots, N_m \leq k) \\ &= P(N_1 \leq k)P(N_2 \leq k) \cdots P(N_m \leq k) \quad \text{par } \perp\!\!\!\perp \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1),$$

on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m.$$

On a donc

$$E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} P(Y \leq k) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m$$

c'est-à-dire

$$E(Y) = n - \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^{n-1} k^m.$$

2. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n - m + 1 \rrbracket.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n - m \rrbracket$, on a

$$P(X > k) = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n - m + 1 \rrbracket, \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k),$$

on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1; n - m + 1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{\binom{n+1-k}{m}}{\binom{n}{m}} - \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n-m} P(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-k}{m} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n+1}{m+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E(X) = \frac{n+1}{m+1}.$$

On a

$$Y(\Omega) = \llbracket m; n \rrbracket.$$

Pour tout $k \in \llbracket m; n \rrbracket$, on a

$$P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket m; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1),$$

on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket m; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} - \frac{\binom{k-1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= n - \sum_{k=m}^{n-1} P(Y \leq k) \\
 &= n - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} \\
 &= n - \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \\
 &= n - \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n}{m+1} \\
 &= n - \frac{n-m}{m+1},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E(Y) = m \frac{n+1}{m+1}.$$

♦ **Exercice 14.** [o]

On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $1/2$?

Considérons X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus lors des n lancers. On constate que X suit la loi $\mathcal{B}(n; 1/6)$ et donc que $m = E(X) = n/6$ et $\sigma^2 = V(X) = 5n/36$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout $d > 0$,

$$P(|X - m| \geq d) \leq \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Prenons $d = n/6$ de sorte que

$$P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \frac{n}{6}\right) \leq \frac{5}{n},$$

c'est-à-dire

$$1 - P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| < \frac{n}{6}\right) \leq \frac{5}{n}$$

ou encore

$$P\left(0 < X < \frac{n}{3}\right) \geq 1 - \frac{5}{n}.$$

Pour être certain d'avoir un nombre de 6 compris entre 0 et $n/3$, il suffit donc de choisir n tel que $1 - 5/n \geq 1/2$, c'est-à-dire qu'

$$\text{il est suffisant de choisir } n \geq 10.$$

♦ **Exercice 15.** [o]

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathcal{T}, P) . Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système complet d'événements (où $m \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $E(X | A_k)$ l'espérance conditionnelle de X sachant A_k , c'est-à-dire l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_{A_k} . Démontrer la *formule de l'espérance totale* :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(A_k) E(X | A_k).$$

2. Application. On lance un dé. On obtient le numéro X . On relance alors X fois le dé. Trouver l'espérance du nombre total de 6 obtenus.

1. On a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{k=1}^n P(A_k) P(X = x | A_k) && \text{formule des probabilités totales} \\
 &&& \text{à travers le s.c.e } (A_k)_{1 \leq k \leq n} \\
 &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x | A_k) && \text{Fubini,}
 \end{aligned}$$

donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(A_k) E(X | A_k).$$

2. Notons S_1 le nombre de 6 obtenus au premier tour et S_2 le nombre de 6 obtenus au second tour. On veut $E(S_1 + S_2)$.

La variable S_1 suit clairement la loi $\mathcal{B}(1/6)$, donc

$$E(S_1) = \frac{1}{6}.$$

Sachant $(X = k)$, la loi conditionnelle de S_2 est clairement $\mathcal{B}(k, 1/6)$. On a donc $E(S_2 | X = k) = k/6$. La formule de l'espérance totale nous donne alors

$$E(S_2) = \sum_{k=1}^6 P(X = k) E(S_2 | X = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \frac{k}{6} = \frac{1}{36} \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{12}.$$

En définitive, on a

$$E(S_1 + S_2) = \frac{9}{12}.$$

♦ **Exercice 16.** [★] (Les moments déterminent-ils la loi d'une variable aléatoire ?)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies telles que $E(X^k) = E(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que X et Y ont la même loi.

Posons $E = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ et énumérons ses éléments $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où les e_j sont deux à deux distincts.

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'égalité $E(X^k) = E(Y^k)$ se réécrit sous la forme

$$\sum_{j=1}^n e_j^k [P(X = e_j) - P(Y = e_j)] = 0,$$

quitte à rajouter des termes nulles dans cette somme. Matriciellement, le système formé par ces équations lorsque k décrit $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} e_1^0 & e_2^0 & \cdots & e_n^0 \\ e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1^{n-1} & e_2^{n-1} & \cdots & e_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X = e_0) - P(Y = e_0) \\ P(X = e_1) - P(Y = e_1) \\ \vdots \\ P(X = e_n) - P(Y = e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice $V = (e_j^i)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n}$ est la matrice de passage de la base des polynômes élémentaires de Lagrange vers la base canonique (c'est une matrice de Vandermonde), donc V est inversible.

Cela implique que

$$\begin{pmatrix} P(X = e_0) - P(Y = e_0) \\ P(X = e_1) - P(Y = e_1) \\ \vdots \\ P(X = e_n) - P(Y = e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$

♦ **Exercice 17.** [★] (Une démonstration de la formule du crible)

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et A_1, \dots, A_n des événements. Démontrer que

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

et en déduire la formule du crible.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\overline{A_{1k}}} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_{1k}}) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \dots \mathbb{1}_{A_{i_k}} \quad \text{en développant le produit} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}.$$

En prenant l'espérance dans cette formule et en tenant compte de la linéarité de cette espérance, on obtient

$$E(\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} E(\mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}).$$

Comme $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$, on en déduit la formule du crible des probabilités :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

En prenant pour P la probabilité uniforme, on en déduit la formule du crible du dénombrement :

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$