Problème n° 7 : Fonctions dérivables par morceaux

Problème 1 –

Notations et rappels

- *On dit qu'une fonction f définie sur $[0,1]$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision de $[0,1]$, donnée par des réels :*
$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1,$$
telle que f soit continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $i \in [\![1, N-1]\!]$, et telle que f admette en tout x_i, $i \in [\![1, N]\!]$ des limites à droites finies si $i \neq N$, et des limites à gauches finies si $i \neq 1$. On pourra remarquer que la valeur de f en un des x_i peut être différente à la fois de la limite à droite et de la limite à gauche en ce point.
- *On appellera dans ce cas* subdivision subordonnée à f *la partition $\{0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1\}$ décrite ci-dessus. Il s'agit formellement d'un sous-ensemble de $[0,1]$ constitué de N valeurs numérotés dans l'ordre croissant.*
- *Dans tout le problème, on notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$ et continues par morceaux sur $[0,1]$.*
- *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ s'il existe une subdivision de $[0,1]$: $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$, telle que f soit continûment dérivable (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$) sur tous les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, $i \in [\![1, N-1]\!]$, et dérivable à droite en tout x_i, $i \in [\![1, N-1]\!]$ et à gauche en tout x_i, $i \in [\![2, N]\!]$; de plus f' doit admettre en tout x_i une limite à droite et une limite à gauche finies.*
- *Nous appelerons également dans ce cas* subdivision subordonnée à f *la subdivision $\{0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1.\}$*
- *On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$.*
- *On note $\mathcal{D}_0 = \{u \in \mathcal{D},\quad u(0) = u(1) = 0\}$.*
- *On admet que toute fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ est intégrable sur $[0,1]$.*
- *On admet que si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, qui coïncident sur $[0,1]$, sauf en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$*
- *On admet enfin que si f est une fonction positive de $\mathcal{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
- *Évidemment, tout cela peut se généraliser à des fonctions continues ou de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout autre segment que $[0,1]$.*

Partie I – Préliminaires

Cette partie a essentiellement pour but de vous familiariser avec les notions introduites.

1. Soit $f \in \mathcal{C}$, et $S = \{0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1\}$ une subdivision subordonnée à f. Montrer que tout sous-ensemble fini S' de $[0,1]$ tel que $S \subset S'$ définit une subdivision subordonnée à f
2. (a) Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est continue par morceaux.

   (b) Donner un exemple de fonction croissante sur $[0,1]$ et non continue par morceaux.

   (c) Montrer que toute fonction de $\mathcal{D}$ est continue sur $[0,1]$.

3. Parmi les fonctions suivantes, définies sur $[0,1]$, lesquelles sont continues par morceaux, lesquelles sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Justifiez vos réponses. On représentera sommairement le graphe de ces fonctions, sans en faire une étude poussée.

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad f_2 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \frac{2}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_3 : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$f_4 : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(1 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \qquad\qquad f_5 : x \mapsto \sqrt{x} \cdot \lfloor 4x \rfloor$$

Partie II – Dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

1. Soit $f \in \mathcal{D}$, $\{0 = x_1 < x_2 \cdots < x_N = 1\}$ une subdivision subordonnée à f, et g_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g_0(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_N\} \\ f'_d(x) & \text{si } x = x_i,\ i \in [\![1, N-1]\!] \\ f'_g(x) & \text{si } x = x_N. \end{cases}$$

   (a) Montrer que g_0 est dans $\mathcal{C}$.

   (b) À l'aide de la relation de Chasles, montrer que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x g_0(s)\ \mathrm{d}s.$

   (c) Montrer que toute autre fonction g de $\mathcal{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s \tag{1}$$

   coïncide avec g_0 sauf éventuellement en un nombre fini de points (on pourra considérer, après avoir justifié son existence, une subdivision subordonnée à la fois à g et à g_0).

   Pour $f \in \mathcal{D}$, on appellera dérivée de f *toute fonction g de $\mathcal{C}$ vérifiant la relation (1). On notera, par abus, f' une dérivée arbitraire de f. On remarquera que cette notation n'est pas bien définie, puisqu'on n'a pas unicité de la dérivée, mais elle est seulement définie « à un nombre fini de points près ».*

2. Réciproquement, soit $g \in \mathcal{C}$. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s$$

   est un élément de $\mathcal{D}$.

   Autrement dit, g est une dérivée de f, donc toute fonction de $\mathcal{C}$ est primitivable au sens de la notion de dérivation introduite dans la question précédente.

3. Montrer que si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{D}$, alors fg est dans $\mathcal{D}$, et pour toute dérivée f' de f et toute dérivée g' de g, $fg' + f'g$ est une dérivée de fg.

4. En étudiant le signe du polynôme en λ suivant :

$$\lambda \mapsto \int_0^1 (g(x) + \lambda)^2\ \mathrm{d}x,$$

   montrer que pour tout g de $\mathcal{C}$, on a

$$\int_0^1 g(x)^2\ \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x\right)^2.$$

   Montrer qu'il y a égalité si et seulement s'il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

5. Soit $g \in \mathcal{C}$. Montrer que la fonction f défini par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s - x \int_0^1 g(s)\ \mathrm{d}s,$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_0$.

6. Soit $g \in \mathcal{C}$, démontrer que g vérifie

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 g(s)\theta'(s)\ \mathrm{d}s = 0$$

si et seulement s'il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

7. Soient $f, g \in \mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 (f(s)\theta'(s) + g(s)\theta(s))\ \mathrm{d}s = 0$$

Montrer qu'alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ telle que f coïncide avec $\tilde{f}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, et que

$$\forall x \in [0,1], \quad \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s.$$

Observer que si de plus $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Partie III – Minimisation d'une expression intégrale

Pour tout $u \in \mathcal{D}_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 (1 - u(x)^2)^2\ \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $E_\lambda(u)$ est bien définie pour $u \in \mathcal{D}_0$ et qu'en particulier sa valeur ne dépend pas du choix de u' parmi les dérivées de u.

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème, on admettra que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, le problème de minimisation :

$$\min_{u \in \mathcal{D}_0} E_\lambda(u), \tag{2}$$

a au moins une solution, que l'on notera u_λ. Ainsi, u_λ vérifie

$$\begin{cases} u_\lambda \in \mathcal{D}_0 \\ \forall v \in \mathcal{D}_0, \ E_\lambda(v) \geqslant E_\lambda(u_\lambda). \end{cases}$$

Le but du problème est d'étudier u_λ, et en particulier son comportement lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. (a) Soit $\psi \in \mathcal{D}_0$. Montrer que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{E_\lambda(u_\lambda + t\psi) - E_\lambda(u_\lambda)}{t} = \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

(b) En déduire que u_λ vérifie

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

(c) À l'aide de la partie II, montrer que u_λ' coïncide avec une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. En déduire que u_λ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée au sens classique vérifie encore (3). Montrer enfin que u_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle

$$-u''(x) = \lambda(1 - u(x)^2)u(x), \tag{4}$$

sur $]0,1[$, puis que u_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

(d) Montrer qu'il existe une constante $C_\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,1[, \quad (u'_\lambda(x))^2 = \frac{\lambda}{2}((u_\lambda(x)^2 - 1)^2 - C_\lambda).$$

(e) En se souvenant que $u_\lambda \in \mathcal{D}_0$, montrer que $C_\lambda \geqslant 0$, puis que $C_\lambda \in [0,1]$.

(f) En admettant que pour tout $x_0 \in]0,1[$ et tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle (4) admet une unique solution u définie sur $]0,1[$ telle que $u(x_0) = y_0$ et $u'(x_0) = y_1$ (ce qui découle du théorème de Cauchy-Lipschitz), montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad u_\lambda(x)^2 < 1.$$

3. (a) En considérant, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, la fonction $v(x)$ définie par :

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \\ 1 & \text{si } x \in]\varepsilon, 1-\varepsilon[, \\ \frac{1-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in [1-\varepsilon, 1], \end{cases}$$

montrer qu'il existe une constante C indépendante de λ telle que pour tout λ suffisamment grand,

$$E_\lambda(u_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}.$$

(b) En constatant que pour tout $u \in \mathcal{D}_0$, $E_\lambda(u) = E_\lambda(-u)$, en déduire qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, la solution du problème de minimalisation (2) n'est pas unique.

4. (a) Montrer que si l'on pose $\varphi_\lambda = u_\lambda^2$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 (\varphi_\lambda(x) - 1)^2 \, dx = 0.$$

(b) Soit $\mu_\lambda = \max_{x \in [0,1]} |u_\lambda(x)|$. Montrer que

$$(\mu_\lambda^2 - 1)^2 \leqslant \int_0^1 (\varphi_\lambda(x) - 1)^2 \, dx,$$

puis que $\lim_{\lambda \to +\infty} \mu_\lambda = 1$.

Partie IV – Minoration des réels C tels que $E_\lambda(u_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}$

Dans cette partie, on considère une famille de fonctions $(v_\lambda)_{\lambda>0}$ de $\mathcal{D}_0$ vérifiant :

$$\exists C > 0, \quad \forall \lambda > 0, \quad E_\lambda(v_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}.$$

1. Justifier le fait qu'une telle famille existe.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2 \geqslant 2xy.$$

En déduire que : $E_\lambda(v_\lambda) \geqslant \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^1 |v'_\lambda(x)(1 - v_\lambda(x)^2)| \, dx$.

3. On pose $\eta_\lambda = \sup_{x \in [0,1]} |v_\lambda(x)|$ et on définit la fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(\theta) = \begin{cases} \theta - \frac{\theta^3}{3} & \text{si } 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \\ \frac{4}{3} + \frac{\theta^3}{3} - \theta & \text{si } \theta \geqslant 1. \end{cases}$$

(a) Justifier l'existence de $|\eta_\lambda|$, et l'existence d'un point x_λ de $[0,1]$ tel que $v_\lambda(x_\lambda) = \eta_\lambda$.

(b) En constatant que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad F'(\theta) = |1 - \theta^2|,$$

montrer que : $E_\lambda(v_\lambda) \geqslant \sqrt{2\lambda} F(\eta_\lambda)$.

4. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{\lambda_0 \to +\infty} \inf_{\lambda \geqslant \lambda_0} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$