SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1. Polynômes de Tchebychev

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\cos(n\theta) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2\ell} \big(1-\cos^2(\theta)\big)^\ell$$

et en déduire que

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,k} \big(\cos(\theta)\big)^{n-2k}$$

où

$$\forall k \in [\![1; \lfloor n/2 \rfloor]\!], \qquad a_{n,k} = (-1)^k \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} \binom{\ell}{k}.$$

Exercice 2. Sommes trigonométriques lacunaires

On note $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et l'on pose

$$S_0 = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}, \qquad S_1 = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2}.$$

1. Calculer
$$S_0 + S_1 + S_2, \qquad S_0 + jS_1 + j^2 S_2 \qquad \text{et} \qquad S_0 + j^2 S_1 + jS_2.$$
2. Vérifier que $(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\cos(n\pi/3)$ et $(1+j)^n - (1+j^2)^n = 2i\sin(n\pi/3)$ et en déduire les expressions de S_0, S_1 et S_2 en fonction de $\cos(n\pi/3)$ et $\sin(n\pi/3)$.