

Maths Cachan-Rennes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On pose $(L_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une suite de formes linéaires continues telles que

$$\forall x, y \in E, L_n(x) = L_n(y) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$$

Soit \mathcal{C} un convexe compact de E . On veut montrer l'existence d'un point extrémal de \mathcal{C} , i.e

$$\exists x \in \mathcal{C}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall t \in]0, 1[, x = tx_1 + (1 - t)x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2$$

1) Soit $M_0 = \{x \in \mathcal{C}, L_0(x) = \sup_{y \in \mathcal{C}} L_0(y)\}$. Montrer que M_0 est un convexe compact non vide.

2) On définit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de la relation de récurrence

$$M_{n+1} = \{x \in M_n, L_{n+1}(x) = \sup_{y \in M_n} L_{n+1}(y)\}.$$

On pose $M_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Montrer que M_∞ est réduit à un seul point qui est extremal.

3) Donner des exemples d'application de ce résultat.