Lycée Henri IV **Cours**
MPSI Durée : 4 h 30

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- la continuité ;
- la dérivabilité ;
- les fonctions circulaires réciproques ;
- l'étude des fonctions.

Par défaut, dans ce cours, les lettres I et J désignent de « vrais » intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'ils sont non vides et non réduits à un point.

On note $[a \,\tilde{;}\, b]$ le segment d'extrémités a et b (quitte à inverser les bornes de l'intervalle si elles ne sont pas dans le bon ordre).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Développements limités

A.1. Développements limités

Définition 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a, en abrégé un $\mathrm{DL}_n(a)$, lorsqu'il existe $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o_{h \to 0}(h^n).$$

La fonction polynomiale $h \longrightarrow c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n$ est la partie régulière du développement limité et l'entier n est son ordre de précision.

Un développement limité est donc une approximation locale d'une fonction par un polynôme.

La notation $o_{h \to 0}(h^n)$ est souvent abrégé en $o(h^n)$, avec le sous-entendu que h tend vers 0.

Pour avoir un $\mathrm{DL}_n(a)$, une fonction f doit être définie au voisinage de a mais pas nécessairement en a ! Cependant, il n'est pas interdit à f d'être définie en a et, dans ce cas, on a $c_0 = f(a)$.

Qui peut le plus peut le moins : l'existence d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ implique bien sûr l'existence d'un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$! Plus précisément, le $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ est obtenu en tronquant le $\mathrm{DL}_n(a)$.

L'équivalent et ce qui se cache derrière...

Le premier terme (non nul) du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f fournit un équivalent de f en a. Par exemple, si $f(x) = -2x^2 + x^4 + o_{x \to 0}(x^4)$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -2x^2$.

Les autres termes améliorent la précision de l'approximation. En effet, le développement $f(x) = -2x^2 + x^4 + o_{x \to 0}(x^4)$ permet d'affirmer que $f(x) + 2x^2 \underset{0}{\sim} x^4$, ce que ne permet pas l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -2x^2$.

On retriendra donc qu'un développement limité donne un équivalent mais aussi qu'il dévoile les termes cachés par cet équivalent.

Les développements limités sont donc des outils d'approximation plus performants que les équivalents. Toutefois, ils n'apportent (comme les équivalents) qu'un renseignement local sur la fonction et ne permettent jamais de préciser un comportement global. Ainsi, on pourra les utiliser pour calculer des limites ou pour préciser le signe d'une fonction au voisinage d'un point. Ils seront par contre inutilisables pour déterminer la monotonie ou la parité d'une fonction.

Exemples :

- On a
$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n),$$
donc
$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$
- En changeant x en $-x$, on obtient
$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

Les propositions qui suivent font le lien entre l'existence d'un développement limité et les propriétés de régularité (continuité et dérivabilité) de la fonction.

Le premier énoncé fait le lien entre l'existence d'un DL_0 et la continuité.

Proposition 1

L'existence d'un $\mathrm{DL}_0(a)$: $f(a+h) = c_0 + \mathcal{o}_{h\to 0}(1)$ équivaut à l'existence d'une limite finie c_0 en a. Par conséquent :

- si f est définie en a, la fonction f est continue en a et l'on a $f(a) = c_0$;
- si f n'est pas définie en a, on peut la prolonger par continuité en a en posant $f(a) = c_0$.

■ AQT ■

Le second énoncé fait le lien entre l'existence d'un DL_1 et la dérivabilité.

Proposition 2

L'existence d'un $\mathrm{DL}_1(a)$: $f(a+h) = c_0 + c_1 h + \mathcal{o}_{h\to 0}(h)$ équivaut à la dérivabilité en a de f ou de son prolongement continu. Et, dans ce cas, on a $f'(a) = c_1$.

■ On a déjà vu ce résultat dans le chapitre de dérivation. ■

On peut évidemment se demander si le processus se poursuit. Il n'en est rien ! L'existence d'un DL_2 n'implique pas l'existence d'une dérivée seconde en a, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemples :

- Posons
$$f(x) = \frac{\pi}{17} + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x}\cdot$$
On a
$$f(x) = \frac{\pi}{17} + x^2 + x^2\Big(x\sin\frac{1}{x}\Big) = \frac{\pi}{17} + x^2 + \mathcal{o}(x^2),$$
car $\lim\limits_{x\to 0}\big(x\sin\frac{1}{x}\big) = 0$ puisque sin est bornée.
Ce DL_2, exploité à l'ordre 0, nous dit que f se prolonge par continuité en posant
$$f(0) = \frac{\pi}{17}\cdot$$
Ce même DL_2, exploité cette fois à l'ordre 1, nous dit que f est dérivable en 0 avec
$$f'(0) = 0.$$
Par contre, il n'est pas possible d'utiliser ce DL_2 pour en déduire que f est deux fois dérivable en 0. D'ailleurs, ce n'est pas vrai ! En effet, la dérivée
$$f'(x) = 2x + 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$
n'est elle-même pas dérivable en 0 puisque son taux d'accroissement en ce point, qui vaut
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 2 + 3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$
n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 0.
Ce DL_2 signifie donc que f ressemble, en 0, à la fonction polynomiale $x \longmapsto \frac{\pi}{17} + x^2$ pour ce qui est de sa valeur et de sa tangente mais pas au niveau de ses propriétés de courbure.

A.2. Unicité d'un développement limité

Proposition 3

Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors ce développement est unique.

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que f admettent deux $\mathrm{DL}_n(a)$ distincts donnés par

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + \mathscr{O}(h^n) \qquad \text{et} \qquad f(a+h) = d_0 + d_1 h + \cdots + d_n h^n + \mathscr{O}(h^n).$$

La soustraction de ces deux relations nous dit que

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)h + \cdots + (c_n - d_n)h^n = \mathscr{O}(h^n).$$

Notons $p \in [\![0;n]\!]$ le plus petit indice i tel que $c_i \neq d_i$ de sorte que

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)h + \cdots + (c_n - d_n)h^n \underset{0}{\sim} (c_p - d_p)h^p.$$

Il s'ensuit que

$$(c_p - d_p)h^p = \mathscr{O}(h^n),$$

ce qui donne $p > n$. C'est absurde ! ■

Cet énoncé nous dit donc que, pour une fonction donnée, il existe au plus un $\mathrm{DL}_n(a)$ pour tout $n \geqslant 0$. La réciproque de ce résultat est fausse : il existe des fonctions qui ne coïncident pas au voisinage de a et qui ont le même $\mathrm{DL}_n(a)$ à tout ordre $n \geqslant 0$.

C'est une illustration du caractère partiel de l'information (même locale) donnée par un développement limité.

L'unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$ d'une fonction fournit un principe d'identification : lorsque le $\mathrm{DL}_n(a)$ d'une fonction s'exprime sous deux formes, il est possible d'identifier les coefficients. Le corollaire suivant exploite cette idée.

Corollaire 1

Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité en 0, ce développement n'admet que des monômes pairs (respectivement impairs).

■ Soit f une fonction paire qui admet un développement limité en 0 donné par

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \mathscr{O}(x^n).$$

On a alors

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - \cdots + (-1)^n c_n x^n + \mathscr{O}(x^n).$$

Or les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$ sont égales donc, d'après l'unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f, on a

$$c_0 = c_0, \qquad c_1 = -c_1, \qquad c_2 = c_2, \qquad \ldots \qquad c_n = (-1)^n c_n,$$

ce qui démontre que tous les coefficients d'indice impair sont nuls. C'est le résultat attendu.

On procède de même avec une fonction impaire. ■

La réciproque de ce résultat est fausse : une fonction admettant un DL pair, fût-ce à tout ordre, n'est pas nécessairement paire.

A.3. Existence d'un développement limité : théorème de Taylor-Young

Théorème 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors, pour tout $a \in I$, la fonction f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donnée par la formule de Taylor–Young :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \to 0}(h^n).$$

■ D'après la formule de Taylor–Lagrange appliquée à f entre a et $a+h$ à l'ordre $n-1$, il existe $c_h \in \,]a \,;\, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(c_h)}{n!} h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c_h) - f^{(n)}(a)}{n!} h^n}_{= R_n(h)}.$$

Par l'axiome du choix, on obtient ainsi une fonction $h \longrightarrow c_h$. Or, lorsque h tend vers 0, le théorème des gendarmes nous dit que c_h tend vers a. Par conséquent, la continuité de la fonction $t \longmapsto f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$ nous dit que la quantité $f^{(n)}(c_h) - f^{(n)}(a)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Il s'ensuit que $R_n(h) = o(h^n)$, ce qui démontre le résultat. ■

Plus qu'un théorème d'existence, le théorème de Taylor–Young est un résultat constructif qui permet d'écrire le $\mathrm{DL}_n(0)$ des fonctions usuelles dont il est facile de calculer les dérivées successives.

Exemples :

- Fonction exponentielle :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$

- Fonctions circulaires :

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).}$$

- Fonction binomiale :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\text{où } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.}$$

- Pour déterminer les $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, il suffit d'utiliser la formule donnant le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = -1/2$, ce qui donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4).$$

B. Opérations sur les développements limités

L'utilisation de la formule de Taylor–Young n'est pas en général la meilleure méthode pour calculer effectivement le développement limité d'une fonction f, car elle nécessite la recherche des dérivées successives de f dont le calcul est souvent pénible. On préfère alors utiliser les résultats que l'on va établir dans ce paragraphe et qui permettent d'obtenir un développement limité comme somme, produit, quotient, composition ou intégration d'autres développements limités.

B.1. Somme

Proposition 4

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et si g admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre $\min\{n; m\}$, obtenu en combinant linéairement les développements limités de f et g.

■ AQT ■

Moralité : rien ne sert de développer à des ordres différents, l'ordre de la somme est le plus petit des ordres.

Exemples :

- On a

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \\ &= 2 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

- Fonctions hyperboliques :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

B.2. Produit

Proposition 5

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et g admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ alors fg admet un développement limité à l'ordre $\min\{n;m\}$ (au moins), obtenu en multipliant les développements limités de f et g.

■ AQT ■

Dans le calcul on ne conserve que les termes significatifs, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas absorbés par les o.

Exemples :

- On a

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x - 1)\sin x &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

  et l'on constate que l'absence de terme constant dans les développements de $\mathrm{e}^x - 1$ et $\sin x$ permet d'obtenir un DL d'ordre supérieur à celui attendu initialement.

$\mathscr{B}$.3. Composition

Proposition 6

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont le terme constant vaut b et si g admet un $\mathrm{DL}_m(b)$ alors $g\circ f$ admet un développement limité à l'ordre $\min\{n; m\}$ (au moins), obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.

■ Posons $p = \min\{n; m\}$. On a

$$f(a+h) = b + B(h) + o(h^p) \qquad \text{et} \qquad g(b+u) = C(u) + o(u^p)$$

où B est un polynôme de degré inférieur ou égal à p tel que $B(0) = 0$ et C est un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Par conséquent, on a

$$(g\circ f)(a+h) = g\big(b + B(h) + o(h^p)\big) = C\big(B(h) + o(h^p)\big) + o\big(\big(B(h) + o(h^p)\big)^p\big).$$

On constate aisément que

$$C\big(B(h) + O(h^p)\big) = C\big(B(h)\big) + o(h^p).$$

De plus, B se factorise au moins une fois par h car $B(0) = 0$, donc

$$o\big(\big(B(h) + o(h^p)\big)^p\big) = o(h^p).$$

Il s'ensuit que

$$(g\circ f)(a+h) = C\big(B(h)\big) + o(h^p)$$

et il suffit de ne conserver dans $C\big(B(h)\big)$ que les puissances de h inférieures ou égales à p. ■

La seule difficulté lorsqu'on compose deux DL, c'est d'organiser les calculs de manière suffisamment claire pour éviter les erreurs. En général, on travaille sous forme de tableau comme décrit dans l'exemple suivant.

Exemples :

- On veut calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin x}$. On écrit que

$$u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + o(u^5).$$

Ici, $u \sim x$, donc $o(u^5) = o(x^5)$. Alors

1	1	$=$	1						
1	u	$=$		x		$-\frac{x^3}{6}$		$+\frac{x^5}{120}$	$+o(x^5)$
$\frac{1}{2}$	u^2	$=$			x^2		$-\frac{x^4}{3}$		$+o(x^5)$
$\frac{1}{6}$	u^3	$=$				x^3		$-\frac{x^5}{2}$	$+o(x^5)$
$\frac{1}{24}$	u^4	$=$					x^4		$+o(x^5)$
$\frac{1}{120}$	u^5	$=$						x^5	$+o(x^5)$
$\mathrm{e}^{\sin x}$		$=$	1	$+x$	$+\frac{x^2}{2}$		$-\frac{x^4}{8}$	$-\frac{x^5}{15}$	$+o(x^5)$

B.4. Quotient

Proposition 7

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et si g admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ dont le coefficient constant est non nul, alors f/g admet un développement limité à l'ordre $\min\{n;m\}$ (au moins).

■ Posons $p=\min\{n;m\}$. Il suffit de montrer que $1/g$ admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ puis de faire le produit avec le $\mathrm{DL}_p(a)$ de f. Or $g(a+h)=c_0+c_1h+\cdots+c_ph^p+\mathcal{O}(h^p)$ avec $c_0\neq 0$, donc

$$\frac{1}{g(a+h)}=\frac{1}{c_0}\frac{1}{1+u} \qquad \text{où} \qquad u=\frac{c_1}{c_0}h+\cdots+\frac{c_p}{c_0}h^p+\mathcal{O}(h^p),$$

Il suffit alors d'effectuer la composition du développement limité de $1/(1+u)$ par celui de u. ■

Cette démonstration permet de calculer effectivement le DL de certains quotients, en se ramenant à la composition de deux développements limités.

Exemples :

- On veut le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{2+2x+x^2}$. Pour cela, on écrit

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x+x^2/2}=\frac{1}{2}\Big\{1-\Big(x+\frac{x^2}{2}\Big)+\Big(x+\frac{x^2}{2}\Big)^2+\mathcal{O}(x^2)\Big\}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\mathcal{O}(x^2).$$

- Déterminons un $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan. On écrit

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^5)=x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathcal{O}(x^4)\Big)$$

et la factorisation par x au numérateur nous incite à ne développer le cos qu'à l'ordre 4 :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^4).$$

On détermine alors le développement limité de $1/\cos x$ en composant les développements limités de $u=-x^2/2+x^4/24+\mathcal{O}(x^4)$ et de $1/(1+u)=1-u+u^2+\mathcal{O}(u^2)$:

1	1	$=$	1			
-1	u	$=$		$-\dfrac{x^2}{2}$	$+\dfrac{x^4}{24}$	$+\mathcal{O}(x^4)$
1	u^2	$=$			$\dfrac{x^4}{4}$	$+\mathcal{O}(x^4)$
$\dfrac{1}{\cos x}$		$=$	1	$+\dfrac{x^2}{2}$	$+\dfrac{5x^4}{24}$	$+\mathcal{O}(x^4)$

Alors

$$\tan x=x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathcal{O}(x^4)\Big)\Big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^4)\Big)$$

d'où

$$\boxed{\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathcal{O}_{x\to 0}(x^5).}$$

Ce dernier exemple nous montre que lorsqu'une puissance de x se factorise au numérateur, on peut diminuer l'ordre du DL au dénominateur. Au contraire, lorsqu'une puissance de x se factorise au dénominateur, il est nécessaire d'augmenter l'ordre du DL du numérateur.

B.5. Primitivation

L'énoncé suivant nous dit qu'il est toujours possible de primitiver un développement limité. Nous verrons, au paragraphe suivant, que les choses ne sont pas si simples pour la dérivation.

Proposition 8

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par $f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + \mathcal{O}_{h\to 0}(h^n)$, alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ obtenu en intégrant celui de f, c'est-à-dire de la forme

$$F(a+h) = \underbrace{F(a)}_{\text{constante d'intégration}} + c_0 h + \frac{c_1}{2}h^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}h^{n+1} + \mathcal{O}_{h\to 0}(h^{n+1}).$$

■ Posons $G(h) = F(a+h) - F(a) - c_0 h - c_1 h^2/2 - \cdots - c_n h^{n+1}/(n+1)$ de sorte que $G'(h) = \mathcal{O}(h^n)$. Le théorème des accroissements finis appliqué à G entre 0 et h donne l'existence de $c_h \in \,]0 \,;\, h[$ tel que $G(h) - G(0) = G'(c_h) \times (h-0)$, c'est-à-dire $G(h) = hG'(c_h)$ puisque $G(0) = 0$. Or $G'(h) = \mathcal{O}(h^n)$ et $c_h \in \,]0 \,;\, h[$ donc $G'(c_h) = \mathcal{O}({c_h}^n) = \mathcal{O}(h^n)$, ce qui donne $G(h) = \mathcal{O}(h^{n+1})$. C'est le résultat attendu. ■

On notera que la primitivation d'un développement limité fait gagner un ordre !

Cette proposition permet de compléter notre liste de développements limités usuels.

Exemples :

- Fonction logarithme :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}_{x\to 0}(x^n).}$$

- Fonctions circulaires réciproques :

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}_{x\to 0}(x^{2n+2}),}$$

et

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}_{x\to 0}(x^{2n+2}).}$$

- Voici une méthode simple pour retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan. On sait que $\tan x \underset{0}{\sim} x$ donc

$$\tan x = x + \mathcal{O}(x).$$

En élevant ce $\mathrm{DL}_1(0)$ au carré et en lui ajoutant 1, on obtient $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^2)$. En primitivant (tout en tenant compte du fait que $\tan 0 = 0$), on obtient

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3).$$

En recommençant ce processus, on obtient $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + 2x^4/3 + \mathcal{O}(x^4)$ d'où

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^5).$$

B.6. Dérivation

La réciproque de la proposition 8 est fausse : si une fonction dérivable f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité à l'ordre $n-1$ en a. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3 \sin(1/x)$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par $f(x) = \mathscr{o}(x^2)$, est dérivable en 0 mais sa dérivée f' n'est pas dérivable en 0 et n'admet donc pas de $\mathrm{DL}_1(0)$.

On a cependant l'énoncé suivant.

Proposition 9

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et si l'on sait par avance que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ (par exemple parce que f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a), alors le $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ de f' s'obtient en dérivant terme à terme le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

■ C'est une conséquence directe du fait que le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f s'obtient en intégrant le $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$. ■

On notera que la dérivation d'un développement limité fait perdre un ordre !

Exemples :

- En dérivant le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $1/(1-x)$, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^n + \mathscr{o}(x^n).$$

2 h 30

C. Applications des développements limités

C.1. Equivalents et limites

Recherche d'équivalents

Les développements limités permettent d'obtenir très facilement des équivalents.

Exemples :

- Déterminons un équivalent en 0 de $f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x$.

  Le recours direct à des équivalents donne $x(1+\cos x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $-2\tan x \underset{0}{\sim} -2x$, ce qui ne permet pas de conclure. Les DL s'imposent !

  On constate que f est impaire et que le terme en x dans le DL est nul, ce qui oblige à chercher un développement limité à un ordre au moins égal à 3. On a

  $$x(1+\cos x) = x\Big(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad -2\tan x = -2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3),$$

  ce qui donne

  $$f(x) = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

  d'où

  $$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}x^3.$$

Calcul de limites

Les développements limités sont des outils privilégiés pour calculer des limites. En particulier, ils se substituent aux équivalents lorsque ceux-ci ne suffisent pas ou lorsqu'on ne peut pas les utiliser sans risque (par exemple dans une différence ou une composée).

Exemples :

- Déterminons, si elle existe, la limite de $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

  On a

  $$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2},$$

  donc

  $$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

- Déterminons, si elle existe, la limite de $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ lorsque x tend vers 0.

  On a

  $$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}.$$

  Or

  $$x\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^2 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2.$$

  donc

  $$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

C.2. Etude des tangentes

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

L'existence d'une tangente non verticale au point A d'abscisse a du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en a, c'est-à-dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de a. Dans ce cas, l'étude du signe de

$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$$

permet de préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.

Si l'on peut pousser ce DL à un ordre supérieur, le premier terme non nul qui suit $(x-a)f'(a)$ permet de préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de a. Plus précisément, si l'on a

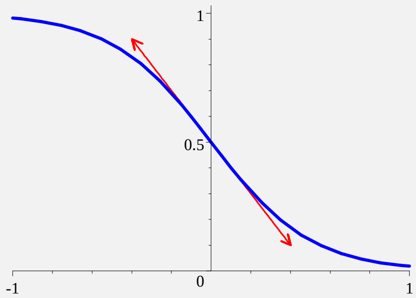
$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_p(x-a)^p + o_{x\to a}\big((x-a)^p\big) \qquad \text{avec } p \geqslant 2 \text{ et } c_p \neq 0,$$

alors la tangente est la droite d'équation $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position par rapport à la tangente est donnée par le signe de $c_p(x-a)^p$.

En particulier, lorsque p est impair, on a un point d'inflexion, c'est-à-dire que la courbe traverse la tangente au point A.

Ces considérations n'ont qu'une valeur locale : la courbe peut retraverser cette tangente non loin de A.

Exemples :



- Déterminons la position de la tangente au point d'abscisse 0 du graphe de

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{4x}}.$$

La fonction f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ donné par

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{4x}} = \frac{1}{2} - x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Au point d'abscisse 0, le graphe est donc tangent à la droite d'équation

$$y = \frac{1}{2} - x$$

et, au voisinage de 0, la quantité

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{2} + x \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}x^3$$

est positive à droite et négative à gauche. Le graphe traverse donc la tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.

C.3. Etude des asymptotes

Position d'une courbe par rapport à son asymptote

Soit f une fonction admettant une branche infinie, c'est-à-dire $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

L'existence d'une asymptote au graphe d'une fonction f est équivalente à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f(x)/x$ en fonction de la variable $1/x$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{x} = c_0 + \frac{c_1}{x} + o_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dans ce cas, l'étude du signe de

$$f(x) - c_0 x - c_1$$

permet de préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Si l'on peut pousser ce DL à un ordre supérieur, le premier terme non nul qui suit c_1/x permet de préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Plus précisément, si l'on a

$$(*) \qquad \frac{f(x)}{x} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_p}{x^p} + o_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^p}\right) \qquad \text{avec } p \geqslant 2 \text{ et } c_p \neq 0,$$

alors

$$f(x) - c_0 x - c_1 = \frac{c_p}{x^{p-1}} + o_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$$

et la courbe admet la droite d'équation $y = c_0 x + c_1$ comme asymptote. La position par rapport à l'asymptote, au voisinage de l'infini, est donnée par le signe de c_p/x^{p-1}.

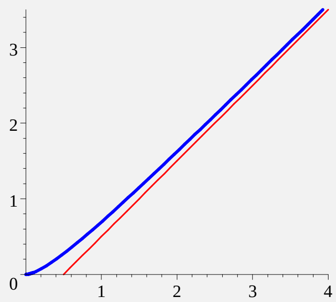
La formule $(*)$ peut encore s'écrire $f(x) = c_0 x + c_1 + c_p/x^{p-1} + o_{x\to\infty}(1/x^{p-1})$. C'est un développement asymptotique au voisinage de l'infini.

Exemples :

- Étudions le comportement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

  On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= x\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$



  d'où

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

  Le graphe de f admet donc une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - 1/2$ et le graphe est au dessus de son asymptote.

On ne négligera cependant pas les méthodes usuelles lorsque $\lim_\infty |f| = +\infty$, à savoir :

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$, il y a une branche parabolique de direction (Ox).
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$, il y a une branche parabolique de direction (Oy).
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = a$, il y a une direction asymptotique d'axe $y = ax$ et dans ce cas,
  - si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$, alors $y = ax + b$ est asymptote ;
  - si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$, alors il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

D. Exemples de développements asymptotiques

On note $\varphi \ggg_a \psi$ pour dire que ψ est négligeable devant φ en a, c'est-à-dire $\psi = o_a(\varphi)$.

Définition 2

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Une échelle de comparaison en a est une famille $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ de fonctions définies au voisinage de a telles que $\varphi_0 \ggg_a \varphi_1 \ggg_a \varphi_2 \ggg_a \varphi_3 \ggg_a \cdots$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un développement asymptotique à l'ordre n en a selon l'échelle $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ lorsqu'il existe $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + o_{x\to a}\big(\varphi_n(x)\big).$$

Si une fonction f admet un développement asymptotique à l'ordre n en a selon l'échelle $(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ alors ce développement est unique (il suffit d'adapter la démonstration de l'unicité du DL).

Exemples :

- Un développement asymptotique en $a \in \mathbb{R}$ selon l'échelle $\big((x-a)^k\big)_{k\geqslant 0}$ est un DL.
- Un développement asymptotique de f en $\pm\infty$ selon l'échelle $(x^{-k})_{k\geqslant -m}$ est de la forme

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 + \frac{c_{-1}}{x} + \cdots + \frac{c_{-n+1}}{x^{n-1}} + \frac{c_{-n}}{x^n} + o_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{1}{x^n}\Big).$$

  C'est un tel développement (avec $m = 1$) que nous avons utilisé pour étudier les asymptotes.
- La formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$ est équivalente au développement asymptotique

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o_{n\to+\infty}(1)$$

Le programme de mathématiques en MPSI précise que l'étude systématique des développements asymptotiques n'est pas un objectif et qu'on doit se contenter de traiter quelques exemples simples.

Commençons par l'étude de arccos en 1.

Exemples :

- La fonction arccos n'est pas dérivable en 1. Elle n'admet donc pas de développement limité en ce point. Cela n'interdit cependant pas de rechercher son ordre de grandeur en 1. D'ailleurs, en exercice, nous avons vu que $\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}$. Regardons si l'on peut établir un développement asymptotique plus précis.
  - ▷ Lemme Pour tout $h \in [0;1]$, on a

$$\arccos(1-h) = 2\arcsin\sqrt{h/2}.$$

    Démonstration Comme $\sin(\theta/2) = +\sqrt{(1-\cos\theta)/2}$ pour tout $\theta \in [0;2\pi]$ et comme $\arccos(1-h) \in [0;\pi/2]$ pour tout $h \in [0;1]$, on a

$$\sin\Big(\frac{\arccos(1-h)}{2}\Big) = \sqrt{\frac{1-\cos\big(\arccos(1-h)\big)}{2}} = \sqrt{\frac{1-(1-h)}{2}} = \sqrt{\frac{h}{2}},$$

    ce qui donne immédiatement le résultat.
  - ▷ Comme $\arcsin x = x + x^3/6 + 3x^5/40 + o(x^6)$, on en déduit que

$$\arccos(1-h) = \sqrt{2}h^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{12}h^{3/2} + \frac{3\sqrt{2}}{160}h^{5/2} + o(h^{5/2}).$$

Traitons ensuite le cas du développement asymptotique de la somme harmonique.

Exemples :

- Démontrons qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1).$$

Le nombre $\gamma \approx 0,577\,215\,665$ est appelé la constante d'Euler–Mascheroni. Elle intervient très souvent en théorie des nombres. Si on connait aujourd'hui plus de dix milliards de décimales de γ, on ignore toujours si c'est un nombre irrationnel ou non.

Démontrons l'adjacence des suites $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ dont les termes généraux sont

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \qquad \text{et} \qquad \Gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

On note tout d'abord que

$$\Gamma_n - \gamma_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, en utilisant la majoration $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$, on constate que la suite $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puisque, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$

et que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante puisque, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0,$$

Par conséquent, les suites $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, ce qui démontre qu'elles convergent vers une limite finie commune, que l'on peut noter γ. Comme $\gamma_2 = 1 - \ln(2) > 0$, on a bien $\gamma > 0$.

La convergence de $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vers γ démontre le résultat attendu.

On termine avec l'étude d'une suite définie implicitement.

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(E_n) \qquad \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} = n.$$

Démontrons que, pour $n \geqslant 5$, l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $]\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}; +\infty[$ et donnons un développement asymptotique à trois termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

  ▷ La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{x}{(\ln x)^2}$ est définie, continue et dérivable sur $]\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}; +\infty[$ et l'on a

$$\forall x > \mathrm{e}^{\sqrt{2}}, \qquad f'(x) = \frac{1}{\ln x}\left[\underbrace{1 - \frac{2}{(\ln x)^2}}_{>0 \text{ car } x > \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}\right] > 0,$$

  donc f est strictement croissante sur $]\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}; +\infty[$ vers $]f(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}); +\infty[$. Comme $f(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}) \approx 4,97$, on en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $]\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}; +\infty[$.

▷ Pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, on a $f(u_n) = n$, c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{\ln u_n} + \frac{u_n}{(\ln u_n)^2} = n \qquad (*).$$

- $*$ Pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, on a $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$. Or f^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $(u_n)_{n\geqslant 5}$ tend vers $+\infty$.
- $*$ En prenant le logarithme dans la relation $(*)$, on obtient

$$\ln(u_n) - \ln(\ln u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{\ln u_n}\right) = \ln n,$$

ce qui donne

$$\ln u_n \sim \ln n.$$

Or $(*)$ nous dit que

$$\frac{u_n}{\ln u_n} \sim n,$$

donc

$$u_n \sim n \ln n.$$

- $*$ Pour tout $n \geqslant 5$, on réécrit la relation $(*)$ sous la forme

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\ln u_n}{1 + \dfrac{1}{\ln u_n}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{n} &= (\ln u_n)\left\{1 - \frac{1}{\ln u_n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln u_n}\right)\right\} \\ &= \ln u_n - 1 + o_{n\to+\infty}(1)\cdot\end{aligned}$$

Or l'équivalence $u_n \sim n \ln n$ se traduit par

$$\ln u_n = \ln n + \ln(\ln n) + o_{n\to+\infty}(1),$$

donc

$$\frac{u_n}{n} = \ln n + \ln(\ln n) - 1 + o_{n\to+\infty}(1),$$

c'est-à-dire

$$u_n = n \ln n + n \ln(\ln n) - n + o_{n\to+\infty}(n).$$

▷ Note culturelle : Pour tout $x \geqslant 2$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. En 1896, Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin ont démontré (simultanément et indépendamment) le théorème des nombres premiers, qui implique en particulier que

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note p_n le n-ème nombre premier. Le théorème des nombres premiers et le raisonnement tenu ci-dessus (*mutatis mutandis*) nous disent que

4 h 30

$$p_n = n \ln n + n \ln(\ln n) - n + o_{n\to+\infty}(n).$$