INSPE Antony 2024-2025
M1 PLP MPC L. Lagon

TD : Raisonnements

1 Raisonnement par récurrence

Exercice 1 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 2 : Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que :

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Exercice 3 : Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. Calculer $f(f(x)), f(f(f(x)))$ et généraliser.

Exercice 4 : Soit (u_n), la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Montrer que :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 5 : Soit (U_n), la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$$

Trouver une forme générale de u_n.

Exercice 6 : La suite de Fibonacci (F_n) est définir par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

De plus, posons :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

1. Calculer F_2, F_3, F_4
2. Montrer que α et β sont solutions de $x^2 - x - 1 = 0$

3. Montrer que $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$
4. On pose :
$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$$
Calculer Δ_n pour quelques valeurs de n. Généraliser à l'aide d'une récurrence.
5. Montrer que $\alpha\beta = -1$ et $\alpha + \beta = 1$
6. Calculer directement Δ_n à partir de la formule établie précédemment.

2 Raisonnement par contraposée

Exercice 7 : Soit n un entier. Enoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 8 : Démontrer la propriété suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

3 Raisonnement par l'absurde

Exercice 9 : Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \epsilon$ quel que soit $\epsilon > 0$, alors $x = 0$

Exercice 10 : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 11 : Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que
$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$$
Montrer que $a = b$ et $b = d$

Exercice 12 : Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 13 : Montrer que $\dfrac{ln(3)}{ln(2)}$ est irrationnel

4 Raisonnement par Analyse Synthèse

Exercice 14 : Déterminer les réels tels que $\sqrt{2-x} = x$

Exercice 15 : Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 16 : Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$