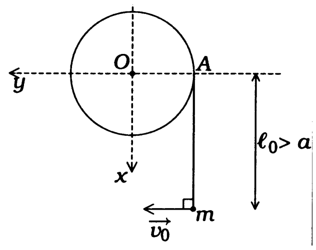
T.D. M_{1-2} : Mécanique du point en référentiel galiléen et non galiléen

Exercice 1 Enroulement d'un fil sur un cylindre



Sur un cylindre fixe, de centre O et de rayon a, s'enroule un fil inextensible et sans masse à l'extrémité duquel est suspendue une masse ponctuelle m.

À l'instant initial $t = 0$, le fil est tendu et la masse m possède une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ perpendiculaire au fil et à l'axe du cylindre.

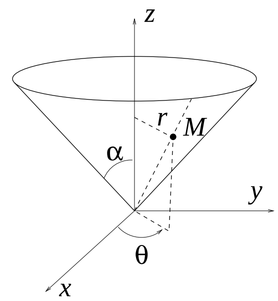
1. Dans cette question, on considère qu'il n'y a pas de pesanteur ($\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$). Caractériser le mouvement de la masse m et donner la valeur à chaque instant de la tension de la corde.
2. Comment sont modifiés les résultats précédents en présence de pesanteur ($\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{e_x}$) ? Donner une condition suffisante pour que la corde reste tendue au cours du mouvement. On pourra illustrer le phénomène en prenant $\dfrac{\ell_0}{a} = 2\pi$.

Exercice 2 Charge soumise à l'action d'un dipôle

Un point matériel M (masse m, charge q) est soumis à l'action d'un dipôle électrostatique $\overrightarrow{p}$ fixé en O. On ne tient pas compte de la pesanteur. À l'instant initial $t = 0$, $\overrightarrow{v}(t = 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t = 0)$ et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{p})$ définissent un même plan.

1. Déterminer les équations du mouvement en $r = \mathrm{OM}$ et $\theta = (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$. En déduire que $r^2(t) = \mathrm{K}t^2 + \alpha t + \beta$ où K, α et β sont des constantes dont on précisera la signification physique. On pourra poser $u(t) = r^2(t)$.
2. On étudie un mouvement particulier où la trajectoire s'inscrit sur un cercle de centre O. Déterminer l'énergie mécanique correspondante et caractériser ce mouvement en traçant son portrait de phase.

Exercice 3 Mouvement d'un point dans un cône



Soit un cône d'axe vertical Oz, de demi-angle au sommet α. Un point matériel M de masse m repose sans frottement sur la surface interne du cône. La position du point M est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz). Les conditions initiales sont quelconques mais connues. Si besoin est, on appellera $\mathscr{E}_0$ l'énergie initiale, v_0 le module de la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de la cote du point.

1. Écrire une intégrale première du mouvement en considérant le moment cinétique.
2. Déterminer l'équation du mouvement sous forme d'intégrale première du mouvement en utilisant l'énergie mécanique. On mettra cette équation sous la forme :
$$(1 + \tan^2\alpha)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + f(z) = \frac{2\mathscr{E}_0}{m}$$
3. Montrer que le mouvement du point a lieu entre deux plans de cote $z = z_m$ et $z = z_\mathrm{M} \geqslant z_m$ suivant les valeurs de l'énergie initiale.
4. Déterminer la valeur de $\mathscr{E}_0$ pour laquelle le mouvement est circulaire. Quel est le rayon du cercle en fonction de v_0, g et α ? Retrouver ce résultat avec la relation fondamentale de la dynamique.

Exercice 4 Changement de trajectoire

Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r_0 à la vitesse v_0. On lui communique un petit accroissement de vitesse $\delta\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$. Sa période de révolution T_0 varie de $\delta\mathrm{T}$. Calculer $\delta\mathrm{T}/\mathrm{T}_0$.

Exercice 5 Demi-ellipse de transfert

Un satellite de masse m tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire (orbite basse de rayon r_1, vitesse du satellite V_1). On veut le transférer sur une autre orbite circulaire (orbite haute de rayon r_2, vitesse V_2). Pour cela, on lui fait décrire une demi-ellipse (orbite de transfert) dont un des foyers est le centre de la Terre et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de direction) de façon quasi-instantanée. On donne $r_1 = 6{,}70.10^3$ km, $r_2 = 42{,}0.10^3$ km, le rayon terrestre $\mathrm{R} = 6{,}40.10^3$ km et la pesanteur au niveau du sol $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Calculer les suppléments de vitesse.

Exercice 6 Miroir parabolique

Un récipient cylindrique de rayon R contient, au repos, du mercure liquide sur une hauteur h. Ce récipient est entraîné en mouvement de rotation uniforme Ω autour de son axe vertical Oz. La pression atmosphérique est notée P_0.

1. Exprimer la pression P en tout point du liquide, sans oublier de prendre en compte les forces d'inertie ; cette expression fait intervenir une constante d'intégration. En déduire la nature de la surface de contact air/mercure (surface libre).
2. En utilisant le fait que le liquide est incompressible, déterminer la constante d'intégration.
3. Quelle propriété intéressante possède ce système du point de vue optique ? Application aux télescopes : quels peuvent être les avantages d'un tel dispositif ? Quel est son énorme inconvénient ?

Exercice 7 Pendule secoué horizontalement

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible et sans masse de longueur L et d'une masse m ponctuelle suspendue à son extrémité M. Le pendule oscille dans le plan (O,x,z) où $(\mathrm{O}x)$ est horizontal et $(\mathrm{O}z)$ vertical et dirigé vers le bas. Le point d'attache A du pendule a un mouvement oscillatoire sur $(\mathrm{O}x)$ avec la loi horaire $x_\mathrm{A} = x_0 \sin(\omega t)$. On note θ l'angle entre la vertical descendante et la droite AM compté positivement dans le sens conventionnel associé à l'axe $(\mathrm{O}y)$. Faire une figure, puis trouver l'équation du mouvement de trois façons différentes, sans travailler dans le référentiel du laboratoire.

Exercice 8 Déviation vers l'est

L'expérience historique de FERDINAND REICH en 1833 a consisté en le lâcher de 106 billes, sans vitesse initiale, dans un puits de mine de hauteur $h = 158{,}5$ m, situé dans la ville de Freiberg, à la latitude $\lambda = 50^\circ 54'$. FERDINAND REICH observa une déviation moyenne vers l'est, de 28 mm. On note m la masse des billes. Dans le référentiel terrestre, on choisit un repère cartésien (O,x,y,z) d'origine O au fond du puits, d'axe z orienté verticalement vers le haut, tel que le champ de pesanteur soit $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. L'axe des x est dirigé vers l'est. On note $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. Les frottements de l'air sont négligés. Dans tout le problème, le référentiel géocentrique est supposé galiléen.

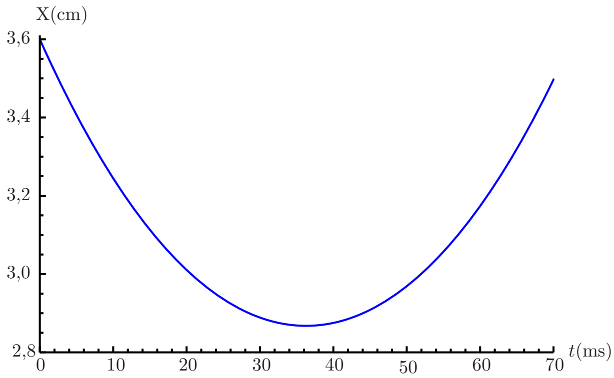
1. Écrire l'équation du mouvement vérifiée par le vecteur position $\overrightarrow{r}$ de la bille, dans le référentiel terrestre. Cette équation peut être intégrée exactement, mais la résolution est assez lourde, et on se propose dans cet exercice de raisonner par approximation.
2. Si la Terre ne tournait pas sur elle-même, quel serait le temps τ que mettrait la bille à atteindre le fond du puits ? Expliquer qualitativement que la déviation de la bille par rapport à la verticale, générée par la rotation de la Terre sur elle-même est faible.
3. Afin de mettre en évidence le caractère perturbatif de l'effet de rotation de la Terre, on introduit les grandeurs sans dimensions $\mathrm{T} = t/\tau$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \overrightarrow{r}/h$. On pose de plus $\overrightarrow{\omega} = \omega\widehat{\omega}$ où $\|\widehat{\omega}\| = 1$. Montrer que l'équation du mouvement peut se réécrire $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{dT}^2} = -2\overrightarrow{e_z} - \varepsilon\widehat{\omega}\wedge\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{dT}}$. Donner l'expression et la valeur du paramètre ε.
4. Comme $\varepsilon \ll 1$, on peut résoudre l'équation précédente en effectuant un développement perturbatif (développement en série en puissances de ε), i.e. en écrivant $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \overrightarrow{\mathrm{R}}^{(0)} + \varepsilon\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(1)} + \varepsilon^2\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(2)} + \ldots$ Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(i)}$ s'écrivent $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(i)} = \left(\mathrm{X}^{(i)}, \mathrm{Y}^{(i)}, \mathrm{Z}^{(i)}\right)$ dans le repère cartésien. Pour les conditions initiales, on impose que $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(0)}(\mathrm{T}=0) = \overrightarrow{\mathrm{R}}(\mathrm{T}=0)$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(0)}}{\mathrm{dT}}(\mathrm{T}=0) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{dT}}(\mathrm{T}=0)$ et que les $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(i)}$ et leur dérivée première sont nuls, pour tout $i > 0$. Écrire l'équation vérifiée par $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(0)}$ et la résoudre.
5. Faire de même avec $\overrightarrow{\mathrm{R}}^{(1)}$ et conclure.
6. Si on poussait le développement à l'ordre 2, une autre déviation (elle aussi mesurable, même si elle est plus faible) apparaîtrait. Dire, sans calcul, dans quel sens cette déviation a lieu.

Exercice 9 Le pendule de FOUCAULT

Le pendule de FOUCAULT installé au Panthéon en 1851 est modélisable par un pendule simple constitué d'un point matériel A de masse $m = 28$ kg, suspendu en un point O_1 par un fil de longueur $\mathrm{L} = 67$ m et de masse négligeable devant m. Le point A se déplace au voisinage du sol, en effectuant de petites oscillations, après avoir été lâché sans vitesse initiale. On note λ la latitude (qu'on gardera quelconque dans les calculs et qu'on prendra égale à $\lambda = 48^\circ 51'$ pour Paris). Dans le référentiel terrestre, on choisit un repère cartésien (O,x,y,z) d'origine O la position d'équilibre du centre de masse de la boule, d'axe z orienté verticalement vers le haut, tel que le champ de pesanteur soit $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. L'axe des x est dirigé vers l'est. On note $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. Dans tout le problème, le référentiel géocentrique est supposé galiléen et on néglige les frottements.

1. Justifier que la boule puisse être assimilée à un point matériel et écrire l'équation vectorielle du mouvement.
2. Décrire sans calcul la nature de la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre local, pour un pendule placé à l'équateur. On rappelle que le pendule effectue de petites oscillations et donc que la vitesse du pendule est dans le plan horizontal.
3. On considère cette fois un pendule placé au pôle nord. Quel serait, sans calcul, le mouvement du pendule pour un observateur lié au référentiel géocentrique ? En déduire la nature de ce même mouvement pour un observateur lié à la Terre.
4. On s'intéresse maintenant à ce qui se passe à une latitude quelconque.
   a. Montrer que la tension du fil peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}}{\mathrm{L}}$.
   b. Expliciter les équations du mouvement dans la base cartésienne du référentiel terrestre local.
   c. Réécrire ces équations en considérant que le mouvement a lieu dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ et que la composante de la force de CORIOLIS sur l'axe vertical est négligeable devant le poids. Montrer que dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, les équations du mouvement s'écrivent $\ddot{x} - 2\omega\sin\lambda\,\dot{y} + \omega_0^2 x = 0$ (1) et $\ddot{y} + 2\omega\sin\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2 y = 0$ (2), pour un ω_0 à expliciter.
5. Comparer numériquement ω_0 et ω puis résoudre ces équations pour obtenir l'expression de $u = x + \mathrm{i}y$, en introduisant des constantes d'intégration complexes A et B. Commenter l'expression de u obtenue, puis déterminer A et B de manière approchée, sachant que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.
6. Quelle forme cette solution prend elle dans un système d'axes tournant à la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$? Quel est le mouvement correspondant ? Vérifier la cohérence des résultats pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 90^\circ$.
7. Au Panthéon, le plan d'oscillation du pendule de FOUCAULT revient à sa position initiale une première fois au bout d'un temps T_1, puis une deuxième fois après un temps $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{T}_1 = 31$ h 47 min. En déduire la période de rotation de la Terre.

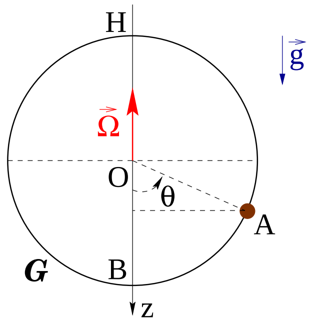
Exercice 10 Perle sur une tige en rotation (problème ouvert)



Une perle P peut glisser sans frottement sur une tige horizontale qui est en rotation à vitesse angulaire ω uniforme autour d'un axe vertical. On prend l'origine O à l'intersection de la tige et de son axe de rotation, et on prend l'axe (OX) le long de la tige, avec le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_X}$ s'eloignant de O. La position $X(t)$ de la perle $\left(\overrightarrow{OP} = X(t)\overrightarrow{e_X}\right)$ en fonction du temps est donnée sur la figure ci-contre.

Déduire de cette figure les conditions initiales et la vitesse angulaire de rotation. On apportera un soin particulier à la rédaction, en particulier aux hypothèses faites pour résoudre ce problème.

Exercice 11 Exemple simple de bifurcation en mécanique



Un point matériel A, de masse m, évolue sans frottement sur un guide circulaire $\mathscr{G}$, vertical, de centre O et de rayon r. Le contact se maintient au cours du mouvement : concrètement, A peut-être représenté par une perle enfilée sur $\mathscr{G}$. Ce guide tourne uniformément, à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega} = -\Omega\overrightarrow{e_z}$ $(\Omega > 0)$, autour de son diamètre BH situé dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen. On caractérise la position de A sur $\mathscr{G}$ par le paramètre angulaire $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$. En outre, on note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur terrestre.

1. Trouver les positions d'équilibre de A sur le guide $\mathscr{G}$. Que peut-on dire de la stabilité de ces positions d'équilibre ?
2. Tracer le graphe donnant la position d'équilibre stable θ_e en fonction de Ω. On précisera les valeurs de la pente $d\theta_e/d\Omega$ pour $\Omega = \Omega_c^+$ et $\Omega \gg \Omega_c$ avec $\Omega_c = (g/r)^{1/2}$. Le point B correspondant à $\Omega = \Omega_c$ est appelé point de bifurcation. Quelles sont les positions d'équilibre stable pour $\Omega = \Omega_c/\sqrt{2}$ et $\Omega = \Omega_c\sqrt{2}$?

Exercice 12 Limite de roche de la comète Shoemaker-Levy 9

La comète Shoemaker-Levy 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter et éclater en morceaux à cause des forces de marées dues à Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994, et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier.

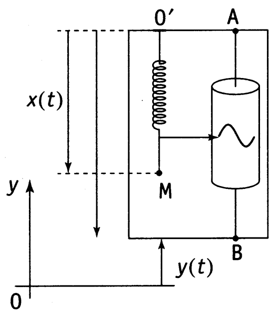
On se propose, dans cet exercice, de déterminer par un modèle **simple** la distance en dessous de laquelle la comète se disloque en s'approchant de Jupiter.

On suppose que le référentiel Jupiterocentrique est galiléen et on néglige les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposée sphérique, homogène, de masse $M_J = 1{,}91.10^{27}$ kg, de rayon $R_J = 71400$ km et de masse volumique μ_J.

La comète est sphérique, homogène, de rayon R_C et de masse volumique $\mu_C = 1{,}00.10^3$ kg. m^{-3}. Elle est en orbite circulaire de rayon $d \gg R_C$ autour de Jupiter.

1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un petit volume élémentaire, de masse δm, de la comète dans le référentiel « Cométocentrique ». Identifier le terme lié au champ gravitationnel propre de la comète et celui des marées. Expliquer l'effet de marées.
2. On considère un modèle dans lequel la cohésion de la comète n'est plus assurée si le terme des marées dépasse le champ gravitationnel propre de la comète. En se plaçant à la périphérie de la comète pour comparer les deux termes, déduire l'ordre de grandeur de la distance limite d_{lim} à laquelle la comète peut s'approcher de Jupiter sans risque (appelée « limite de Roche »).

Exercice 13 Vibrographe



Un vibrographe est constitué d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'extrémité O′ de cet oscillateur est solidaire d'un bâti subissant, par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$, un mouvement vertical représenté par la fonction $y(t)$.

La masse m subit de plus une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\,\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$. En l'absence de mouvement du bâti $(y = 0)$, la position d'équilibre de M est repérée par $x = x_0$.

On suppose que le bâti subit dans $\mathscr{R}_0$ des oscillations sinusoïdales de pulsation ω : $y(t) = Y_m \cos\omega t$.

1. Déterminer, en régime établi, l'amplitude X_m des oscillations de la masse m par rapport au bâti, ainsi que le déphasage φ de ces mêmes oscillations par rapport à celles du bâti.
   On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\eta = \omega/\omega_0$ et $Q = m\,\omega_0/\lambda$.
   Tracer les courbes donnant X_m/Y_m et φ en fonction de la variable réduite ω/ω_0.
2. Comment choisir la valeur de Q pour que X_m se confonde avec Y_m, à 2% près, sur un domaine continu en fréquence aussi grand que possible, la valeur de ω_0 étant fixée ?

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Pour la première question, on trouve l'angle d'enroulement de la forme $\theta(t)=\theta_0\left(1-\sqrt{1-\frac{t}{\tau}}\right)$ *et la tension* $\mathrm{T}=\dfrac{m{v_0}^2}{\ell_0-a\,\theta}$.

Dans la seconde question, l'équation différentielle du mouvement n'est plus intégrable mais on arrive quand même à obtenir la tension $\mathrm{T}=m\,g\left(\dfrac{2a\,\sin\theta}{\ell_0-a\,\theta}+3\,\cos\theta+\dfrac{1}{\ell_0-a\,\theta}\left(\dfrac{{v_0}^2}{g}-2\,\ell_0\right)\right)$.

Exercice 2

$\mathrm{K}=\frac{2\,\mathscr{E}_{\text{méca}}(t=0)}{m}$ *;* $\alpha=2\,r_0\,\dot r_0$ *;* $\beta={r_0}^2$. *Pour le mouvement inscrit sur le cercle, on obtient une énergie mécanique nulle. Le portrait de phase dépend du signe de la charge et correspond à des mouvements oscillatoires non sinusoïdaux de période* $\mathrm{T}=4\,{r_0}^2\,\sqrt{\frac{2\pi\,\varepsilon_0\,m}{|p\,q|}}\,\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$.

Exercice 3

Intégrale première $r^2\,\dot\theta=\frac{\mathrm{L}_{\mathrm{O}z}}{m}$ *;* $f(z)=\left(\frac{\mathrm{L}_{\mathrm{O}z}}{m\tan\alpha}\right)^2\,\frac{1}{z^2}+2\,g\,z$ *(méthode de l'énergie potentielle efficace) ; Cercle de rayon* $r_0=\frac{{v_0}^2}{g}\,\tan\alpha$.

Exercice 4

Utiliser notamment l'expression de l'énergie mécanique d'un mouvement à force centrale en $1/r^2$ *(à savoir par cœur ! ! ! !) et trouver finalement* $\delta\mathrm{T}/\mathrm{T}_0=3\,\delta v_0/v_0$.

Exercice 5

Vous penserez, comme d'habitude (eh oui…), à utiliser les constantes du mouvement du problème (ici, l'énergie mécanique et le moment cinétique). On obtient des suppléments de vitesse $\Delta v_1=2{,}42$ *km.s*$^{-1}$ *et* $\Delta v_2=1{,}47$ *km.s*$^{-1}$.

Exercice 6

$\mathrm{H}(r)=\mathrm{H}(0)+\frac{r^2\,\Omega^2}{2\,g}$.

Exercice 7

Exercice d'application directe du cours… si vous ne le connaissez pas, secouez vous, comme le pendule !

Exercice 8

Essayez de ne pas être à l'ouest :)

Exercice 9

Pas d'indication

Exercice 10

Demerden Sie sich !

Exercice 11

Utiliser le théorème de l'énergie mécanique dans le référentiel tournant en n'oubliant pas l'énergie potentielle des forces d'inertie d'entraînement. On en déduit l'intégrale première : $\frac{1}{2}\,m\,(r\dot\theta)^2-m\,g\,r\cos\theta-\frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,r^2\,\sin^2\theta=$ *Cte. En la dérivant, on trouve une équation du mouvement qui donne accès aux positions d'équilibre relatif et permet l'étude de leur stabilité (étudier pour cela les petites oscillations à leur voisinage). Le diagramme de bifurcation ressemble à une fourche…*

Exercice 12

Pas d'indication.

Exercice 13

On trouve $\mathrm{X}_m=\dfrac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\eta^2/\mathrm{Q}^2}}\,\mathrm{Y}_m$. *La valeur de* Q *adaptée est* $\mathrm{Q}=0{,}789$.