

# DEVOIR SURVEILLÉ 6

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

**La calculatrice n'est pas autorisée.**

## EXERCICE 1

Condition pour être le centre d'un  $n$ -agone

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour toute famille  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  de nombres complexes deux à deux distincts, on considère les deux propriétés :

$$(\mathcal{P}) : \quad \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \exists u \in \mathbb{U}_n, \quad z_k = a + (z_0 - a)u$$

$$(\mathcal{M}) : \quad \forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(a) = \frac{P(z_0) + P(z_1) + \dots + P(z_{n-1})}{n}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer que  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{M})$  sont équivalentes.

1. Soit  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  une famille de nombres complexes deux à deux distincts qui satisfait la propriété  $(\mathcal{P})$ .
  - a) Quelle est la signification géométrique de la propriété  $(\mathcal{P})$  ?
  - b) On pose  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Démontrer que  $(0, \omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{M})$ .
  - c) Démontrer que  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{M})$ .
2. Soit  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  une famille de nombres complexes deux à deux distincts qui satisfait la propriété  $(\mathcal{M})$ . On pose

$$\Phi = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) - \prod_{k=0}^{n-1} (a - z_k).$$

- a) Démontrer que  $\forall j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, (z_j - a)\Phi'(z_j) = n\Phi(z_j)$ .

Indication : Utiliser les polynômes  $P_\ell = \prod_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \setminus \{\ell\}} (X - z_k)$  où  $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

- b) Démontrer que  $n\Phi = (X - a)\Phi'$ .
- c) Démontrer que  $\Phi = (X - a)^n$ .
- d) En conclure que  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ .

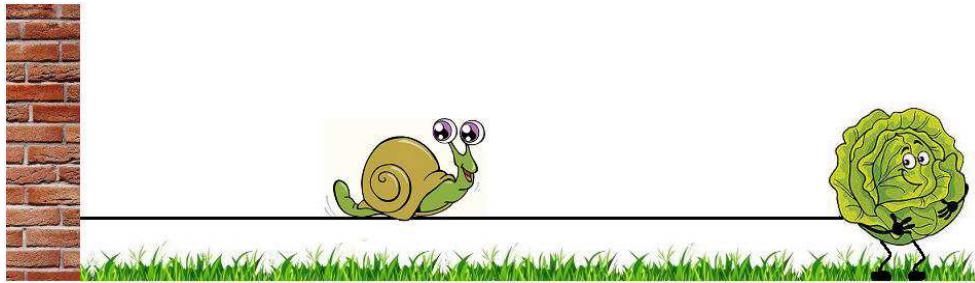
## EXERCICE 2

### Bug on band

M. Escargot en bave pour Mme Laitue. Mais la croquer n'est pas si simple ! Il va d'abord falloir la rattraper car (et ce n'est pas courant !) Mme Laitue gambade sur ses petites jambes. On peut même dire qu'elle court ! Et vite en plus !

Heureusement pour notre gastéropode, la salade est attachée à un mur par un élastique. M. Escargot n'a donc qu'à grimper sur la bande caoutchouteuse et à entreprendre son périple jusqu'à la belle feuillue.

Pendant ce temps là, l'ingénue s'éloigne, s'éloigne, ... poursuivie par notre soupirant et son estomac dans le talon.



Disons le clairement, tout ceci n'est pas très réaliste et le sera encore moins quand j'aurai rajouté les deux informations suivantes. D'une part, l'escargot et la salade sont infatigables et immortels, ce qui leur permet d'avancer sans jamais s'arrêter. D'autre part, l'élastique est incassable et homogène, ce qui lui permet de s'étendre uniformément sans jamais rompre !

On suppose en outre que l'escargot ne dérape pas sur l'élastique, autrement dit que le mouvement relatif du gastéropode n'est dû qu'à son propre déplacement.

On note  $v$  la vitesse de l'escargot et l'on suppose qu'elle est constante. On note  $\ell(t)$  la longueur de l'élastique à l'instant  $t$ . Enfin, on note  $y(t)$  la distance qui sépare l'escargot de la salade à l'instant  $t$ .

L'escargot grimpe sur l'élastique à l'instant  $t = 0$ . À cet instant initial, la longueur de l'élastique vaut  $\ell_0$ . Comme l'escargot a rejoint l'élastique en grimpant sur le mur,  $\ell_0$  est aussi la distance qui sépare initialement l'escargot de son repas, autrement dit  $y(0) = \ell_0$ .

Les fonctions  $\ell$  et  $y$  sont supposées dérивables.

Dans ces conditions, la fonction  $y$  satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - \frac{\ell'(t)}{\ell(t)}y = -v.$$

1. Dans un premier temps, Mme Laitue, très en confiance, décide d'avancer à une vitesse  $V$  constante. Dans ces conditions, on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad \ell(t) = \ell_0 + Vt.$$

- a) Résoudre  $(E)$  et en déduire que l'escargot rattrape la salade en un temps fini  $T$  dans tous les cas (c'est-à-dire même si  $V > v$ ) ! On exprimera  $T$  en fonction de  $\ell_0$ ,  $v$  et  $V$ .
  - b) Déterminer la limite de  $T$  lorsque  $V$  tend vers 0 ? Le résultat obtenu est-il logique ?
2. Obligée d'abandonner son rythme régulier sous peine de se faire machouiller, Mme Laitue adopte une foulée uniformément accélérée. Si  $A$  est la constante qui désigne son accélération, on a donc
- $$\forall t \geq 0, \quad \ell(t) = \ell_0 + \frac{A}{2}t^2.$$
- a) Résoudre  $(E)$  et préciser l'accélération minimale  $A_0$  que doit adopter la salade pour échapper au colimaçon.
  - b) Dans le cas où  $A = A_0$ , donner un équivalent de  $y(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

### EXERCICE 3

#### Estimation du nombre de valeurs entières aux points entiers

Soit  $m$  un entier naturel non nul.

A. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^m$  prenant  $m+1$  valeurs entières sur des entiers

Soient  $I$  un segment d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $I$  et  $t_0, t_1, \dots, t_m \in I$  tels que  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ .

1. On note  $L$  le polynôme de Lagrange du nuage de points  $(t_i, f(t_i))_{0 \leq i \leq m}$ . Démontrer qu'il existe  $c \in I$  tel que  $f^{(m)}(c) = L^{(m)}(c)$ .
2. Donner l'expression de  $L$  (c'est du cours !) et en déduire que

$$f^{(m)}(c) = m! \sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{t_j - t_i}.$$

3. On suppose désormais que  $t_0, t_1, \dots, t_m, f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)$  sont des entiers relatifs et que  $f^{(m)}$  ne s'annule pas sur  $I$ . Démontrer que

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \in \mathbb{Z}^*$$

et en déduire que

$$(t_m - t_0)^{m(m+1)/2} \geq \frac{m!}{\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\}}.$$

B. Estimation du nombre de valeurs entières aux points entiers de fonctions de classe  $\mathcal{C}^m$

Soit  $f : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $[1; +\infty[$ . On suppose qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  et  $A \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 < |f^{(m)}(x)| < \frac{A}{x^\alpha}.$$

L'objet de cette partie est de donner une estimation du cardinal de l'ensemble  $E_f \cap [1; n]$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_f$  est défini par

$$E_f = \{t \in \mathbb{N}^* : f(t) \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Un exemple. Vérifier que la fonction racine carrée  $\sqrt{\cdot}$  satisfait l'hypothèse de cette partie (on précisera  $m$ ,  $\alpha$  et  $A$ ). Déterminer  $E_{\sqrt{\cdot}}$  et calculer  $\text{card}(E_{\sqrt{\cdot}} \cap [1; n])$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Soient  $u, v \in [1; +\infty[$  tels que  $u < v$ . On suppose que

$$\text{card}(E_f \cap [u; v]) \geq m + 1.$$

Démontrer que

$$(v - u)^{m(m+1)/2} > \frac{m! u^\alpha}{A}.$$

3. On pose

$$\beta = \frac{2\alpha}{m(m+1)} \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{m!}{A}\right)^{\beta/\alpha}.$$

On considère la suite  $(u_p)_{p \geq 0}$  définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et de la relation de récurrence

$$\forall p \geq 0, \quad u_{p+1} = u_p + B u_p^\beta.$$

Démontrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{card}(E_f \cap [u_p; u_{p+1}]) \leq m.$$

4. Démontrer qu'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}_+^*$  (que l'on précisera) telle que

$$u_p \sim k p^{1/(1-\beta)}.$$

*Indication : On s'intéressera à  $u_{p+1}^{1-\beta} - u_p^{1-\beta}$ .*

5. Démontrer que

$$\text{card}(E_f \cap [1; n]) = \mathcal{O}(n^{1-\beta}).$$

# CORRECTION DU DS 6

(durée: 4 h 00)

## EXERCICE 1

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour toute famille  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  de complexes deux à deux distincts, on considère les deux propriétés:  $(\mathcal{P})$ :  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \exists u \in \mathbb{U}_n, z_k = a + (z_0 - a)u$  et  $(\mathcal{M})$ :  $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], P(a) = [P(z_0) + P(z_1) + \dots + P(z_{n-1})]/n$ . L'objet de cet exercice est de démontrer que  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{M})$  sont équivalentes.

1. Soit  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  une famille de nombres complexes deux à deux distincts qui satisfait  $(\mathcal{P})$ .

- a) Quelle est la signification géométrique de la propriété  $(\mathcal{P})$ ?

Les nombres  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sont  $n$  complexes deux à deux distincts de la forme  $a + (z_0 - a)u$  où  $u \in \mathbb{U}_n$ . Comme  $\mathbb{U}_n$  est de cardinal  $n$ , cela signifie que l'application  $u \mapsto a + (z_0 - a)u$  réalise une bijection entre  $\mathbb{U}_n$  et  $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ . Dès lors, quitte à permuter les indices des  $z_k$ , on peut supposer que  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z_k = a + (z_0 - a)e^{2ik\pi/n}$ . Cela signifie que

les images de  $z_0, \dots, z_{n-1}$  forment un  $n$ -agone régulier de centre  $a$ .

- b) On pose  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Démontrer que  $(0, \omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{M})$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ . On pose  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{P(\omega^0) + P(\omega^1) + \dots + P(\omega^{n-1})}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\omega^k)^j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \quad \text{Fubini} \\ &= \frac{a_0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^0)^k + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \\ &= \frac{a_0}{n} n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{(\omega^j)^n - 1}{\omega^j - 1} \\ &= a_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{1 - 1}{\omega^j - 1} \quad \text{car } \omega^n = 1 \\ &= a_0 \\ &= P(0). \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$(0, \omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{M})$ .

c) Démontrer que  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{M})$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ . Le résultat de la question précédente nous permet d'appliquer la propriété  $(\mathcal{M})$  à la famille  $(0, \omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$  avec le polynôme  $P(a + (z_0 - a)X)$ . Cela donne

$$P(a + (z_0 - a).0) = \frac{P(a + (z_0 - a)\omega^0) + P(a + (z_0 - a)\omega^1) + \dots + P(a + (z_0 - a)\omega^{n-1})}{n}.$$

Le terme du membre de gauche vaut  $P(a)$ . Dans le membre de droite, les termes de la somme au numérateur sont, à une permutation près, les nombres  $P(z_0), P(z_1), \dots, P(z_{n-1})$ . Donc

$$P(a) = \frac{P(z_0) + P(z_1) + \dots + P(z_{n-1})}{n}.$$

Cela démontre que

$$(a, z_0, \dots, z_{n-1}) \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{M}).$$

2. Soit  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  une famille de nombres complexes deux à deux distincts qui satisfait  $(\mathcal{M})$ . On pose  $\Phi = (X - z_0)(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1}) - (a - z_0)(a - z_1) \cdots (a - z_{n-1})$ .

a) Démontrer que  $\forall j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $(z_j - a)\Phi'(z_j) = -n\Phi(z_j)$ .

On a

$$\Phi' = \sum_{\ell=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^{n-1} (X - z_k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} P_\ell$$

où, pour tout  $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a posé

$$P_\ell = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^{n-1} (X - z_k).$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a donc

$$\begin{aligned} (z_j - a)\Phi'(z_j) &= (z_j - a) \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{P_\ell(z_j)}_{=0 \text{ sauf si } k=j} \\ &= (z_j - a)P_j(z_j) \\ &= (z_j - a)[P_j(z_0) + \dots + P_j(z_j) + \dots + P_j(z_{n-1})] \quad \begin{array}{l} \text{on rajoute des termes nuls} \\ \text{puisque } \forall k \neq j, P_j(z_k) = 0 \end{array} \\ &= (z_j - a)nP_j(a) \quad \text{car } (a, z_0, \dots, z_{n-1}) \text{ satisfait } (\mathcal{M}) \\ &= -n(a - z_0) \cdots (a - z_j) \cdots (a - z_{n-1}) \\ &= n\Phi(z_j). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad (z_j - a)\Phi'(z_j) = n\Phi(z_j).}$$

b) Démontrer que  $n\Phi = (X - a)\Phi'$ .

On pose

$$R = n\Phi - (X - a)\Phi'.$$

Comme  $\Phi$  est de degré  $n$ , on a

$$\deg(R) \leq n.$$

On a

$$R(a) = n\Phi(a) - (a - a)\Phi'(a) = 0$$

car  $\Phi(a)$  est clairement nul. Par ailleurs, pour tout  $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a

$$R(z_j) = n\Phi(z_j) - (z_j - a)\Phi'(z_j) = 0$$

d'après la question précédente. Cela signifie que  $R$  admet  $a, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  comme racines. Le polynôme  $R$  est ainsi un polynôme de degré au plus  $n$  qui possède au moins  $n+1$  racines distinctes. Par conséquent,  $R$  est le polynôme nul. Autrement dit,

$$\boxed{n\Phi = (X - a)\Phi'}.$$

*Remarque : En fait, on a  $\deg(R) \leq n-1$ . Par conséquent, il n'est pas indispensable de supposer que  $a$  est distinct des  $z_k$ .*

c) Démontrer que  $\Phi = (X - a)^n$ .

Considérons la fraction rationnelle

$$F = \frac{\Phi}{(X - a)^n}.$$

On a

$$F' = \frac{\Phi'}{(X - a)^n} - \frac{n\Phi}{(X - a)^{n+1}} = \frac{(X - a)\Phi' - n\Phi}{(X - a)^{n+1}} = 0,$$

d'après la question précédente. Cela signifie que  $F$  est constante, autrement dit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  telle que

$$\frac{\Phi}{(X - a)^n} = \lambda$$

ou encore

$$\Phi = \lambda(X - a)^n.$$

Comme  $\Phi$  et  $(X - a)^n$  sont tous les deux unitaires, on a nécessairement  $\lambda = 1$ . Donc

$$\boxed{\Phi = (X - a)^n.}$$

d) En conclure que  $(a, z_0, \dots, z_{n-1})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ .

On possède donc deux expressions de  $\Phi$ , à savoir

$$\Phi = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) - \prod_{k=0}^{n-1} (a - z_k) \quad \text{et} \quad \Phi = (X - a)^n.$$

En évaluant en  $z_j$ , on en déduit que, pour tout  $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z_j - z_k) - \prod_{k=0}^{n-1} (a - z_k) = (z_j - a)^n,$$

c'est-à-dire

$$-\prod_{k=0}^{n-1} (a - z_k) = (z_j - a)^n.$$

Par conséquent, les nombres  $z_0 - a, z_1 - a, \dots, z_{n-1} - a$  sont les racines  $n$ -èmes du nombres complexes  $A = -\prod_{k=0}^{n-1} (a - z_k)$ . Comme  $A$  est non nul, le cours nous dit que l'on obtient les  $n$  racines  $n$ -èmes de  $A$  en prenant l'une de ses racines  $n$ -èmes et en la multipliant par chacune des racines  $n$ -èmes de l'unité. Autrement dit, on a

$$\forall j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \exists u \in \mathbb{U}_n, \quad z_j - a = (z_0 - a)u,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{(a, z_0, \dots, z_{n-1}) \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{P}).}$$

## EXERCICE 2

Remarque culturelle :

Andrei Dmitrievitch Sakharov, né à Moscou le 21 mai 1921 et mort à Moscou le 14 décembre 1989, est un physicien nucléaire soviétique d'origine russe, militant pour les droits de l'Homme, les libertés civiles et la réforme de l'Union soviétique. Il a obtenu le prix Nobel de la paix en 1975.

L'histoire qui suit est tirée de l'article « Three Encounters » de Lev B. Okun's (1990) publié dans la revue russe Nature, peu après la mort de Sakharov.

« 21 July 1976, Restaurant Aragvi in Tbilisi, Georgia, where a dinner party was held for the International Conference on High Energy Physics (XVIII in a series of so-called Rochester Conferences). There were lots of long tables, and at one of them I sat near Sakharov. The conversation meandered randomly, we started talking about new problems, and then I suggested to Andrei Dmitrievich the problem of a bug on an ideal rubber band [...] Both before and after that evening I gave the problem to different people. One demanded about an hour to solve it, another demanded a day ... Sakharov asked for a piece of paper. I gave him my invitation to the banquet, and immediately, without any comment, he wrote the solution on the back. All together it took about a minute. »

D'après [http://www.feynmanlectures.info/exercises/bug\\_on\\_band.html](http://www.feynmanlectures.info/exercises/bug_on_band.html)

*Une salade est attachée à un mur par un élastique. Un escargot poursuit la salade en avançant sur l'élastique. La salade s'enfuit. L'escargot et la salade sont infatigables et immortels, ce qui leur permet d'avancer sans jamais s'arrêter. L'élastique est incassable et homogène, ce qui lui permet de s'étendre uniformément sans jamais rompre ! L'escargot ne dérape pas sur l'élastique. On note  $v$  la vitesse de l'escargot et l'on suppose qu'elle est constante. On note  $\ell(t)$  la longueur de l'élastique à l'instant  $t$ . Enfin, on note  $y(t)$  la distance qui sépare l'escargot de la salade à l'instant  $t$ . À l'instant  $t = 0$ , on a  $\ell(0) = \ell_0$  et  $y(0) = \ell_0$ . Les fonctions  $\ell$  et  $y$  sont supposées dérивables. Dans ces conditions, la fonction  $y$  satisfait l'équation différentielle : (E) :  $y' - (\ell'(t)/\ell(t))y = -v$ .*

1. *Dans un premier temps, la salade avance à une vitesse  $V$  constante. Dans ces conditions, on a donc  $\forall t \geq 0, \ell(t) = \ell_0 + Vt$ .*

- a) *Résoudre (E) et en déduire que l'escargot rattrape la salade en un temps fini  $T$  dans tous les cas (c'est-à-dire même si  $V > v$ ) ! On exprimera  $T$  en fonction de  $\ell_0$ ,  $v$  et  $V$ .*

L'équation (E) s'écrit dans ce cas

$$(E) \quad y' - \frac{V}{\ell_0 + Vt}y = -v.$$

Solutions homogènes : D'après le cours, on sait que les solutions de l'équation homogène ( $E_h$ ) :

$$y' - \frac{\ell'(t)}{\ell(t)}y = 0 \text{ sont toutes les fonctions de la forme}$$

$$\forall t \geq 0, \quad y_h(t) = \lambda \exp \left\{ - \int^t \frac{\ell'(u)}{\ell(u)} du \right\} = \lambda e^{\ln |\ell(t)|} = \lambda \ell(t) = \lambda(\ell_0 + Vt),$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire (on a retiré les valeurs absolues car  $\forall t \geq 0, \ell(t) > 0$ ).

Solution particulière : Selon la méthode variation de la constante, nous recherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y_p(t) = \lambda(t)(\ell_0 + Vt)$$

où  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable. En reportant dans l'équation (E), il vient alors

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t)(\ell_0 + Vt) = -v,$$

ce qui donne

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) = -\frac{v}{\ell_0 + Vt}.$$

Nous choisissons

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) = -\frac{v}{V} \ln(\ell_0 + Vt),$$

de sorte que

$$\forall t \geq 0, \quad y_p(t) = -\frac{v}{V}(\ell_0 + Vt) \ln(\ell_0 + Vt).$$

Solutions générales: On en conclut, d'après le cours, que les solutions générales de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = (\ell_0 + Vt) \left[ \lambda - \frac{v}{V} \ln(\ell_0 + Vt) \right],$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire.

Condition initiale: On a

$$y(0) = \ell_0 \iff \ell_0 \left[ \lambda - \frac{v}{V} \ln(\ell_0) \right] = \ell_0 \iff \lambda = 1 + \frac{v}{V} \ln(\ell_0),$$

donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t) = (\ell_0 + Vt) \left[ 1 - \frac{v}{V} \ln \left( 1 + \frac{Vt}{\ell_0} \right) \right].}$$

L'escargot rattrape la salade si, et seulement si,  $y$  s'annule. Or

$$y(t) = 0 \iff 1 - \frac{v}{V} \ln \left( 1 + \frac{Vt}{\ell_0} \right) = 0 \iff 1 + \frac{Vt}{\ell_0} = e^{V/v} \iff t = \frac{\ell_0}{V} (e^{V/v} - 1).$$

Donc

$$\boxed{\text{l'escargot rattrape toujours la salade en un temps fini } T = \frac{\ell_0}{V} (e^{V/v} - 1).}$$

Remarque culturelle :

Ce résultat n'a rien d'intuitif. En cosmologie, on peut l'interpréter ainsi: si l'Univers se dilate à vitesse constante, n'importe quel vaisseau spatial (même très lent) parviendra aux extrémités de l'Univers...

- b) Déterminer la limite de  $T$  lorsque  $V$  tend vers 0 ? Le résultat obtenu est-il logique ?

On a

$$\frac{\ell_0}{V} (e^{V/v} - 1) \underset{V \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ell_0}{V} \frac{V}{v} \underset{V \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ell_0}{v},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{V \rightarrow 0} T = \frac{\ell_0}{v}.}$$

Logiquement, on retrouve le fait que

si la salade est immobile, l'escargot parcourt la distance  $\ell_0$  à la vitesse  $v$  en un temps égal à  $\frac{\ell_0}{v}$ .

2. La salade adopte un mouvement uniformément accéléré. Si  $A$  est la constante qui désigne son accélération, on a donc  $\forall t \geq 0$ ,  $\ell(t) = \ell_0 + At^2/2$ .

- a) Résoudre (E) et préciser l'accélération minimale  $A_0$  que doit avoir la salade pour échapper à l'escargot ?

L'équation (E) s'écrit dans ce cas

$$(E) \quad y' - \frac{At}{\ell_0 + At^2/2} y = -v.$$

Solutions homogènes: Les mêmes calculs qu'à la question 1.a) nous disent que les solutions de l'équation homogène  $(E_h)$ :  $y' - \frac{\ell'(t)}{\ell(t)} y = 0$  sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y_h(t) = \lambda \ell(t),$$

c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \quad y_h(t) = \lambda \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right),$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire.

Solution particulière: Selon la méthode variation de la constante, nous recherchons une solution particulière de ( $E$ ) sous la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y_p(t) = \lambda(t) \cdot \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right)$$

où  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable. En reportant dans l'équation ( $E$ ), il vient alors

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) \cdot \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right) = -v,$$

ce qui donne

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) = -\frac{v}{\ell_0 + At^2/2}$$

ou encore

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) = -\frac{v}{\ell_0} \frac{v}{1 + \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right)^2}$$

Nous choisissons

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) = -\frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right),$$

de sorte que

$$\forall t \geq 0, \quad y_p(t) = -\frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right) \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right).$$

Solutions générales: On en conclut, d'après le cours, que les solutions générales de ( $E$ ) sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right) \left[ \lambda - \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right) \right],$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire.

Condition initiale: On a

$$y(0) = \ell_0 \iff \ell_0 \lambda = \ell_0 \iff \lambda = 1,$$

donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left( \ell_0 + \frac{A}{2} t^2 \right) \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right) \right].}$$

Examinons à quelle condition nécessaire et suffisante l'équation  $y(t) = 0$  possède une solution. On a

$$\begin{aligned} y(t) = 0 &\iff 1 - \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right) = 0 \\ &\iff \arctan \left( \sqrt{\frac{A}{2\ell_0}} t \right) = \frac{\sqrt{A\ell_0}}{\sqrt{2}v} \end{aligned}$$

et cette dernière équation possède une solution si, et seulement si,

$$\frac{\sqrt{A\ell_0}}{\sqrt{2}v} < \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$A < \frac{\pi^2 v^2}{2\ell_0}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{l'accélération minimale pour que la salade ne se fasse pas croquer est } A_0 = \frac{\pi^2 v^2}{2\ell_0}.}$$

b) Dans le cas où  $A = A_0$ , donner un équivalent de  $y(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

En tenant compte de la relation

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left(\ell_0 + \frac{A}{2}t^2\right) \left[1 - \frac{\pi v}{\sqrt{2A\ell_0}} + \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{A\ell_0}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\ell_0}{A}} \frac{1}{t}\right)\right].$$

En remplaçant  $A$  par  $A_0$ , il s'ensuit que

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left(\ell_0 + \frac{\pi^2 v^2}{4\ell_0} t^2\right) \left[0 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2\ell_0}{\pi v t}\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left(\frac{2\ell_0}{\pi} + \frac{\pi v^2}{2\ell_0} t^2\right) \arctan\left(\frac{2\ell_0}{\pi v t}\right).$$

Comme  $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , on a

$$y(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi v^2}{2\ell_0} t^2 \times \frac{2\ell_0}{\pi v t}$$

c'est-à-dire

$$y(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} vt.$$

### EXERCICE 3

Soit  $m$  un entier naturel non nul.

- A. Soient  $I$  un segment d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $I$  et  $t_0, t_1, \dots, t_m \in I$  tels que  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ .

1. On note  $L$  le polynôme de Lagrange du nuage de points  $(t_i, f(t_i))_{0 \leq i \leq m}$ . Démontrer qu'il existe  $c \in I$  tel que  $f^{(m)}(c) = L^{(m)}(c)$ .

Posons  $g = f - L$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $I$  par théorèmes généraux.

Pour tout  $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$ , on a  $g(t_i) = f(t_i) - L(t_i) = 0$ , c'est-à-dire  $g(t_0) = g(t_1) = \dots = g(t_m) = 0$ . Le théorème de Rolle, appliqué à  $g$  successivement sur  $[t_0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{m-1}; t_m]$ , donne l'existence de  $s_0 \in ]t_0; t_1[, s_1 \in ]t_1; t_2[, \dots, s_{m-1} \in ]t_{m-1}; t_m[$  tels que  $g'(s_0) = g'(s_1) = \dots = g'(s_{m-1}) = 0$ .

On recommence! Le théorème de Rolle, appliqué à  $g'$  successivement sur  $[s_0; s_1], [s_1; s_2], \dots, [s_{m-2}; s_{m-1}]$ , donne l'existence de  $r_0 \in ]s_0; s_1[, r_1 \in ]s_1; s_2[, \dots, r_{m-2} \in ]s_{m-2}; s_{m-1}[$  tels que  $g''(r_0) = g''(r_1) = \dots = g''(r_{m-1}) = 0$ .

Ainsi de suite...

Après  $m$  étapes, on obtient l'existence de  $c \in I$  tel que  $g^{(m)}(c) = 0$ . Comme  $g^{(m)} = f^{(m)} - L^{(m)}$ , on en conclut que

$$\boxed{\text{il existe } c \in I \text{ tel que } f^{(m)}(c) = L^{(m)}(c).}$$

2. Donner l'expression de  $L$  et en déduire que  $f^{(m)}(c) = m! \sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{t_j - t_i}$ .

D'après le cours, on a

$$\boxed{L = \sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{X - t_i}{t_j - t_i}.}$$

On constate ainsi que le polynôme de Lagrange  $L$  est un polynôme de degré au plus  $m$  dont le coefficient de  $X^m$  vaut

$$\sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{t_j - t_i}.$$

Par conséquent,  $L^{(m)}$  est un polynôme constant donné par

$$L^{(m)} = m! \sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{t_j - t_i}.$$

Comme  $f^{(m)}(c) = L^{(m)}(c)$ , on en déduit que

$$\boxed{f^{(m)}(c) = m! \sum_{j=0}^m f(t_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{t_j - t_i}.}$$

3. On suppose que  $t_0, t_1, \dots, t_m, f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m) \in \mathbb{Z}$  et que  $f^{(m)}$  ne s'annule pas sur  $I$ . Démontrer que  $\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \in \mathbb{Z}^*$  et en déduire que  $(t_m - t_0)^{m(m+1)/2} \geq \frac{m!}{\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\}}$ .

Notons tout d'abord que, puisque  $f^{(m)}$  ne s'annule pas sur  $I$  et puisque les  $t_i$  sont deux à deux distincts, on sait que

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \neq 0.$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) = \sum_{j=0}^m f(t_j) \frac{\prod_{\substack{0 \leq k < \ell \leq m \\ k \neq j}} (t_\ell - t_k)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m (t_j - t_i)}.$$

Or, pour tout  $j \in \llbracket 0; m \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) &= \prod_{\ell=j+1}^m (t_\ell - t_j) \times \prod_{k=0}^{j-1} (t_j - t_k) \times \prod_{\substack{0 \leq k < \ell \leq m \\ k \neq j, \ell \neq j}} (t_\ell - t_k) \\ &= (-1)^{m-j} \prod_{\ell=j+1}^m (t_j - t_\ell) \times \prod_{k=0}^{j-1} (t_j - t_k) \times \prod_{\substack{0 \leq k < \ell \leq m \\ k \neq j, \ell \neq j}} (t_\ell - t_k) \\ &= (-1)^{m-j} \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m (t_j - t_k) \times \prod_{\substack{0 \leq k < \ell \leq m \\ k \neq j, \ell \neq j}} (t_\ell - t_k), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) = \sum_{j=0}^m f(t_j) (-1)^{m-j} \prod_{\substack{0 \leq k < \ell \leq m \\ k \neq j, \ell \neq j}} (t_\ell - t_k).$$

Comme  $t_0, t_1, \dots, t_m, f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)$  sont des entiers relatifs, on en conclut que

$$\boxed{\frac{f^{(m)}(c)}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \in \mathbb{Z}^*}.$$

On constate alors trois choses :

▷ la valeur absolue d'un entier non nul étant supérieure ou égale à 1, on a

$$\boxed{\frac{|f^{(m)}(c)|}{m!} \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \geq 1};$$

▷ pour les  $m(m+1)/2$  couples  $(k, \ell) \in \llbracket 0; m \rrbracket$  tels que  $k < \ell$ , on a  $t_\ell - t_k \leq t_m - t_0$  (puisque  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ ), ce qui implique que

$$\prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_\ell - t_k) \leq \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (t_m - t_0) = (t_m - t_0)^{m(m+1)/2};$$

▷ on a

$$|f^{(m)}(c)| \leq \max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\}$$

où l'existence du max est justifiée par le fait que  $|f^{(m)}|$  est une fonction continue sur le segment  $I$  (théorème des bornes).

En combinant ces trois inégalités, on obtient

$$\boxed{\frac{\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\}}{m!} (t_m - t_0)^{m(m+1)/2} \geq 1},$$

c'est-à-dire (puisque  $\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\} \neq 0$ )

$$\boxed{(t_m - t_0)^{m(m+1)/2} \geq \frac{m!}{\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in I\}}}.$$

B. Soit  $f : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $[1; +\infty[$ . On suppose qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  et  $A \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\forall x \in [1; +\infty[, 0 < |f^{(m)}(x)| < Ax^{-\alpha}$ . On veut donner une estimation du cardinal de l'ensemble  $E_f \cap [1; n]$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_f$  est défini par  $E_f = \{t \in \mathbb{N}^* : f(t) \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Vérifier que la racine carrée  $\sqrt{\cdot}$  satisfait l'hypothèse de cette partie (on précisera  $m$ ,  $\alpha$  et  $A$ ). Déterminer  $E_{\sqrt{\cdot}}$  et calculer  $\text{card}(E_{\sqrt{\cdot}} \cap [1; n])$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La racine carrée  $\sqrt{\cdot}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1; +\infty[$  et l'on a

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ce qui implique que

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 < |f'(x)| < \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Par conséquent,

la racine carrée satisfait l'hypothèse de cette question avec (par exemple)  $m = 1$ ,  $\alpha = 1/2$  et  $A = 1$ .

On a  $E_{\sqrt{\cdot}} = \{t \in \mathbb{N}^* : \sqrt{t} \in \mathbb{Z}\}$ , donc

$$E_{\sqrt{\cdot}} = \{k^2 : k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\text{card}(E_{\sqrt{\cdot}} \cap [1; n]) = \text{card}\{k^2 : k \in [1; \sqrt{n}] \cap \mathbb{N}\},$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{card}(E_{\sqrt{\cdot}} \cap [1; n]) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

2. Soient  $u, v \in [1; +\infty[$  tels que  $u < v$ . On suppose que  $\text{card}(E_f \cap [u; v]) \geq m+1$ . Démontrer que  $(v-u)^{m(m+1)/2} > m! u^\alpha / A$ .

Posons  $I = [u; v]$ . La fonction  $f$  définit une application de classe  $\mathcal{C}^m$  de  $I$  vers  $\mathbb{R}$ . De plus, l'hypothèse  $\text{card}(E_f \cap [u; v]) \geq m+1$  nous dit que la fonction  $f$  prend des valeurs entières sur au moins  $m+1$  points entiers de  $I$ . Toutes les hypothèses sont donc rassemblées pour appliquer le résultat de la question A.3. avec  $t_0 \geq u$  et  $t_m \leq v$ . Cela donne

$$(v-u)^{m(m+1)/2} \geq \frac{m!}{\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in [u; v]\}} \quad (*).$$

Comme  $\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in [u; v]\}$  est atteint puisque  $|f^{(m)}$  est une fonction continue sur le segment  $[u; v]$ , il existe  $t_{\max} \in [u; v]$  tel que

$$\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in [u; v]\} = |f^{(m)}(t_{\max})|,$$

ce qui donne, d'après l'hypothèse,

$$\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in [u; v]\} < \frac{A}{t_{\max}^\alpha}.$$

Or  $t \mapsto t^{-\alpha}$  est une fonction décroissante, donc

$$\max\{|f^{(m)}(t)| : t \in [u; v]\} < \frac{A}{u^\alpha} \quad (**).$$

En rassemblant (\*) et (\*\*), on conclut que

$$(v-u)^{m(m+1)/2} > \frac{m! u^\alpha}{A}.$$

3. On pose  $\beta = 2\alpha/(m(m+1))$  et  $B = (m!/A)^{\beta/\alpha}$ . On considère la suite  $(u_p)_{p \geq 0}$  définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et de la relation de récurrence  $\forall p \geq 0$ ,  $u_{p+1} = u_p + Bu_p^\beta$ . Démontrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{card}(E_f \cap [u_p; u_{p+1}]) \leq m$ .

Notons tout d'abord qu'une récurrence immédiate permet de voir que  $(u_p)_{p \geq 0}$  est une suite strictement positive. Dès lors, comme  $\forall p \geq 0$ ,  $u_{p+1} - u_p = Bu_p^\beta > 0$ , on sait que  $(u_p)_{p \geq 0}$  est une suite strictement croissante. Cela démontre que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , les bornes du segment  $[u_p; u_{p+1}]$  sont bien orientées.

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Par l'absurde, supposons que  $\text{card}(E_f \cap [u_p; u_{p+1}]) \geq m+1$ . D'après la question précédente, on a

$$(u_{p+1} - u_p)^{m(m+1)/2} > \frac{m! u_p^\alpha}{A},$$

c'est-à-dire, puisque  $u_{p+1} - u_p = Bu_p^\beta$ ,

$$B^{m(m+1)/2} u_p^{\beta m(m+1)/2} > \frac{m! u_p^\alpha}{A}.$$

Or

$$B^{m(m+1)/2} = B^{\alpha/\beta} = \frac{m!}{A} \quad \text{et} \quad u_p^{\beta m(m+1)/2} = u_p^\alpha,$$

donc

$$\frac{m! u_p^\alpha}{A} > \frac{m! u_p^\alpha}{A}.$$

C'est absurde ! Donc

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ on a } \text{card}(E_f \cap [u_p; u_{p+1}]) \leq m.}$$

4. Démontrer qu'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}_+^*$  (que l'on précisera) telle que  $u_p \sim kp^{1/(1-\beta)}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} u_{p+1}^{1-\beta} - u_p^{1-\beta} &= (u_p + Bu_p^\beta)^{1-\beta} - u_p^{1-\beta} \\ &= u_p^{1-\beta} \left[ \left(1 + \frac{B}{u_p^{1-\beta}}\right)^{1-\beta} - 1 \right]. \end{aligned}$$

On a déjà dit que la suite  $(u_p)_{p \geq 0}$  est croissante. Elle admet donc, en vertu du théorème de la limite monotone une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Un passage à la limite dans la relation  $\forall p \geq 0$ ,  $u_{p+1} - u_p = Bu_p^\beta$  nous dit que  $\ell = \ell + B\ell^\beta$ , ce qui impose que  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = 0$ . Comme  $\ell = 0$  n'est pas possible puisque  $(u_p)_{p \geq 0}$  est (strictement) croissante avec  $u_0 = 1$ , on en déduit que  $\ell = +\infty$ . On sait donc que

$$u_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Or  $\alpha \in ]0; 1[$  et  $m \geq 1$ , donc

$$1 - \beta = 1 - \frac{2\alpha}{m(m+1)} > 0,$$

ce qui démontre que

$$\frac{B}{u_p^{1-\beta}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit que

$$u_{p+1}^{1-\beta} - u_p^{1-\beta} \sim u_p^{1-\beta} \times (1 - \beta) \frac{B}{u_p^{1-\beta}} \sim (1 - \beta)B,$$

c'est-à-dire

$$u_{p+1}^{1-\beta} - u_p^{1-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (1 - \beta)B.$$

Le théorème de Cesàro nous dit alors que

$$\frac{(u_1^{1-\beta} - u_0^{1-\beta}) + (u_2^{1-\beta} - u_1^{1-\beta}) + \cdots + (u_p^{1-\beta} - u_{p-1}^{1-\beta})}{p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (1 - \beta)B,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_p^{1-\beta} - u_0^{1-\beta}}{p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (1 - \beta)B$$

ou encore, puisque  $u_0^{1-\beta}/p$  tend vers 0,

$$\frac{u_p^{1-\beta}}{p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (1 - \beta)B.$$

Cela signifie que

$$u_p^{1-\beta} \sim (1 - \beta)Bp$$

ou encore que

$$u_p \sim kp^{1/(1-\beta)} \quad \text{où} \quad k = ((1 - \beta)B)^{1/(1-\beta)}.$$

5. Démontrer que  $\text{card}(E_f \cap [1; n]) = \mathcal{O}(n^{1-\beta})$ .

Comme la suite  $(u_p)_{p \geq 0}$  est strictement croissante, on a, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$E_f \cap [1; u_q] = \bigsqcup_{p=0}^{q-1} (E_f \cap [u_p; u_{p+1}]),$$

ce qui donne

$$\text{card}(E_f \cap [1; u_q]) = \sum_{p=0}^{q-1} \text{card}(E_f \cap [u_p; u_{p+1}]).$$

En tenant compte du résultat de la question B. 3., on obtient que, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{card}(E_f \cap [1; u_q]) \leq \sum_{p=0}^{q-1} m,$$

c'est-à-dire

$$\text{card}(E_f \cap [1; u_q]) \leq mq.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $(u_p)_{p \geq 0}$  est une suite strictement croissante qui tend vers  $+\infty$ , il existe  $q_n \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$u_{q_n-1} \leq n < u_{q_n}.$$

Dès lors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\text{card}(E_f \cap [1; n]) \leq \text{card}(E_f \cap [1; u_{q_n}]) \leq mq_n \quad (*).$$

Or, comme

$$u_{q_n-1} \sim u_{q_n} \sim kq_n^{1/(1-\beta)},$$

l'encadrement  $u_{q_n-1} \leq n < u_{q_n}$  nous dit que

$$n \sim kq_n^{1/(1-\beta)},$$

c'est-à-dire

$$q_n \sim k^{\beta-1} n^{1-\beta} \quad (**).$$

En combinant (\*) et (\*\*), il vient

$$\boxed{\text{card}(E_f \cap [1; n]) = \mathcal{O}(n^{1-\beta})}.$$