ESPACES VECTORIELS

Exercice 1. [$\circ$]

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et Q un élément de $\mathbb{R}[X]$. On note G l'ensemble des restes des divisions euclidiennes des polynômes de F par Q.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans le cas où $F = \mathbb{R}[X]$, déterminer G.

Exercice 2. [$\circ$]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les applications $c_k : x \longmapsto \cos(kx)$ et $C_k : x \longmapsto \cos^k(x)$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$L_n = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad \text{et} \qquad P_m = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Comparer L_n et P_m pour tous n et m variant entre 1 et $+\infty$.

Exercice 3. [$\star$]

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par :

1. l'ensemble A des fonctions qui s'annulent une infinité de fois ;
2. l'ensemble B des fonctions qui ne s'annulent pas ;
3. l'ensemble C des fonctions qui s'annulent exactement une fois.

Exercice 4. [$\circ$]

L'ensemble des quaternions est-il une $\mathbb{C}$-algèbre ?

Exercice 5. [$\circ$]

Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, démontrer que la famille $\big(x \longmapsto |x - \alpha|\big)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 6. [$\bigstar$]

Soit G un groupe. Un morphisme de groupe de G vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ est appelé un *caractère* de G. On considère des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_n$ de G deux à deux distincts. Démontrer que $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ est une famille libre de l'espace $\mathbb{C}^G$.

Exercice 7. [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel et F_1, F_2, G_1, G_2 quatre sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2$ avec $F_2 \subset G_1$. Démontrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus (G_1 \cap G_2) = E$.