

Corr. 1 Temps de cuisson d'une dinde

1. On modélise grossièrement la dinde par une sphère (si, si, regardez-la bien !). La cuisson s'opère par diffusion de chaleur dans la masse de la dinde (mode de transfert thermique dominant ici). La distance **caractéristique** sur laquelle se fait la diffusion est le rayon R de la sphère. Le temps **caractéristique** de cuisson est $t \simeq R^2/D_{\text{th}}$ où D_{th} est le coefficient de diffusion thermique moyen dans la dinde.

En supposant la dinde **homogène**, sa masse est

$$m = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$$

donc R évolue en $m^{1/3}$. Finalement, le **temps t de cuisson évolue en $m^{2/3}$** . Alors,

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{2/3}$$

donne un **temps de cuisson de 1h53min pour la dinde de 3,5 kg**.

2. Par une loi linéaire de cuisson, on trouve un temps de cuisson de 2h06min et la dinde est trop cuite !

3. La tarte est différente de la dinde au niveau de sa géométrie (pas que ça...) : il s'agit plutôt d'un disque d'épaisseur h et de rayon R avec $h \ll R$. La diffusion se fait selon l'épaisseur majoritairement donc le temps caractéristique de cuisson est $t \simeq h^2/D_{\text{th}}$. Or, la masse de la tarte est $m = \mu \pi R^2 h$ donc son temps de cuisson est proportionnel à m^2 .

La géométrie de la merguez est encore différente. C'est un cylindre de rayon R et de longueur L $\gg R$ (grosses modèles). La cuisson se fait surtout radialement et $t \simeq R^2/D_{\text{th}}$ et $m = \mu \pi R^2 L$. Alors, le temps de cuisson est proportionnel à m.

Corr. 2 Isolation thermique d'une conduite cylindrique

1.a. En régime permanent sans sources et unidirectionnel, la puissance thermique se conserve :

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}_0 = j_{\text{th}}(r) 2\pi r L$$

$$\text{Or, } j_{\text{th}}(r) = -\kappa_1 \frac{dT}{dr}$$

et en intégrant, en tenant compte de la condition limite $T(R_1) = T_1$, on trouve

$$T(r) = T_1 - \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi \kappa_1 L} \ln \frac{r}{R_1}$$

Ensuite, on traduit la seconde condition limite $T(R_2) = T_2$, d'où

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}$$

1.b. L'analogie a été vue en cours... La résistance thermique est

$$\mathcal{R}_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_0} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \kappa_1 L} = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ K.W}^{-1}$$

Prenez bien garde à ne pas exprimer la résistance thermique en Ohms !

2.a. En régime permanent sans sources et unidirectionnel, on a toujours

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}_0 = C^{\text{te}}$$

On peut par conséquent écrire

$$h2\pi R_1 L (T_i - T_1) = \frac{1}{\mathcal{R}_{\text{th}}} (T_1 - T_2) = h2\pi R_2 L (T_2 - T_e)$$

Tout se passe donc comme si on avait trois résistances thermiques parcourues par le même flux thermique : c'est une association série.

$$\mathcal{R}_0 = \underbrace{\frac{1}{2\pi h R_1 L}}_{\text{de } T_i \text{ à } T_1} + \underbrace{\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \kappa_1 L}}_{\text{de } T_1 \text{ à } T_2} + \underbrace{\frac{1}{2\pi h R_2 L}}_{\text{de } T_2 \text{ à } T_e}$$

$$\mathcal{R}_0 = 9,10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \gg \mathcal{R}_{\text{th}}$$

Il est à noter que l'essentiel de la résistance est dû aux effets conducto-convectifs.

2.b. Le calcul donne $\mathcal{P}_0 = 17,8 \text{ kW}$.

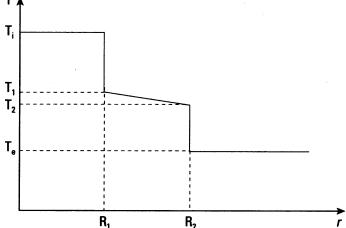
2.c. On calcule

$$T_1 = T_i - \frac{1}{2\pi h R_1 L} \mathcal{P}_0 = 371 \text{ K}$$

$$\text{et } T_2 = T_e - \frac{1}{2\pi h R_2 L} \mathcal{P}_0 = 370 \text{ K}$$

On constate que $T_i - T_1 = 82 \text{ K}$, $T_2 - T_e = 77 \text{ K}$ alors que $T_1 - T_2 = 1 \text{ K}$: les effets conducto-convectifs sont dominants.

2.d.



2.e. On choisit le système fermé suivant : tuyau+contenu (choisi fermé sinon il faut faire un bilan thermodynamique sur l'écoulement qui redonne le résultat). On est en régime permanent, donc

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \dot{S}_{\text{éch}} + \dot{S}_{\text{crée}}$$

$$\text{Or, } \dot{S}_{\text{éch}} = \frac{\mathcal{P}_0}{T_1} - \frac{\mathcal{P}_0}{T_2}$$

$$\text{donc } \dot{S}_{\text{crée}} = \mathcal{P}_0 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

On vérifie, oh joie, que l'entropie créée par unité de temps est positive puisque

$$\dot{S} = 0,15 \text{ W.K}^{-1}$$

Ceci est logique et est lié à l'irréversibilité des effets diffusifs.

3.a. Le même raisonnement qu'à la question 2.a donne

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \frac{1}{2\pi h \kappa_1 L} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \kappa_1 L} + \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi \kappa_2 L} + \frac{1}{2\pi h R_3 L}$$

qui se met sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \mathcal{R}_0 + \frac{1}{2\pi \kappa_2 L} \left[\underbrace{\frac{\kappa_2}{h R_2} (y-1) - \ln y}_{f(y)} \right]$$

3.b. On a $y \in [0;1]$. Pour $\frac{\kappa_2}{h R_2} \leq 1$, $f(y) \geq \ln y$ (obtenu rapidement par argument de convexité).

3.c. Il y a diminution des pertes si $\mathcal{R}_{\text{tot}} > \mathcal{R}_0$. On le veut pour tout y donc la question précédente donne la condition

$$\frac{\kappa_2}{h R_2} \leq 1$$

3.d. La condition précédente n'est pas vérifiée ici. Il y a alors diminution des pertes si $y \leq y_0$ avec y_0 tel que

$$\frac{\kappa_2}{h R_2} (y_0 - 1) = \ln y_0$$

Pour que l'isolant isolé, il faut donc une épaisseur d'isolant **supérieure** à

$$e_0 = R_3 - R_2 = R_2 \left(\frac{1}{y_0} - 1 \right)$$

Avec les valeurs numériques, $\frac{\kappa_2}{h R_2} \simeq 1,09$ donc $y_0 \simeq 0,84$, d'où l'épaisseur minimale

$$e_0 = 3,0 \text{ cm}$$

En conclusion, si $e < e_0$, l'isolant contribue à augmenter les pertes ! On explique ce pseudo-paradoxe par la compétition entre :

- d'une part, l'augmentation de l'épaisseur de l'isolant (tendant à isoler);
- et, d'autre part, l'augmentation simultanée de surface de contact avec l'air ambiant (ce qui favorise les pertes!).

Corr. 3 Flux géothermique

1. Voici une première méthode. On exprime la résistance thermique de la croûte en utilisant « $R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \frac{dl}{ds}$ » et en remarquant que $l \ll R_T$ (rayon de la Terre) :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{4\pi R_T^2}$$

$$\text{Ensuite, } \Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} = 4\pi R_T^2 J_{\text{th}}$$

$$\text{Enfin, } J_{\text{th}} = \frac{\lambda}{l} (T_1 - T_2)$$

Numériquement, on obtient $J_{\text{th}} = 39,4 \text{ mW.m}^{-2}$.

Une autre méthode consiste simplement à remarquer que, puisque $l \ll R_T$,

$$J_{\text{th}} = -\lambda |\vec{\text{grad}} T| \simeq -\lambda \frac{T_2 - T_1}{l}$$

On a le même résultat que précédemment...

2. On pourrait si l'on nous donnait le laplacien en coordonnées sphériques, écrire directement l'équation de la chaleur avec terme source σ_u ; mais, comme on ne le donne pas, le plus simple est d'effectuer un bilan de puissance thermique entre deux sphères concentriques de rayons r et $r+dr$ (*cf* symétrie sphérique) et en régime permanent :

$$\underbrace{4\pi(r+dr)^2 j_{\text{th}}(r+dr)}_{\text{puissance qui sort en } r+dr} - \underbrace{4\pi r^2 j_{\text{th}}(r)}_{\text{celle qui entre en } r} = \underbrace{[4\pi r^2 dr] \sigma_u}_{\text{source}}$$

$$\text{donc } \frac{d(4\pi r^2 j_{\text{th}})}{dr} = 4\pi r^2 \sigma_u$$

et, en utilisant la loi de FOURIER, on aboutit à l'équation différentielle de la chaleur

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -r^2 \frac{\sigma_u}{\lambda}$$

Maintenant, on s'intéresse à $j_{\text{th}}(r)$ et, les conditions aux limites étant données sur la température, on doit calculer d'abord $T(r)$. Une première intégration de l'équation de la chaleur conduit, avec A constante d'intégration, à

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma_u}{3\lambda} r + \frac{A}{r^2}$$

Une seconde intégration donne, avec B nouvelle constante d'intégration :

$$T(r) = -\frac{\sigma_u}{6\lambda} r^2 + \frac{A}{r} + B$$

Ensuite, il « suffit » d'écrire les conditions aux limites :

$$T(R_T) = T_1 \quad \text{et} \quad T(R_T - l) = T_2 \quad (*)$$

Petit problème : les calculs sont alors un peu pénibles... On peut s'en sortir autrement...

On se rend compte que l'hypothèse $R_T \gg l$ doit servir ! Eh oui ! On peut obtenir grâce à celle-ci une équation de la chaleur simplifiée ! En effet, dans la croûte fine, l'équation

$$\frac{d(4\pi r^2 j_{\text{th}})}{dr} = 4\pi r^2 \sigma_u$$

s'écrit en première approximation ($r \simeq R_T$) :

$$\frac{d(4\pi R_T^2 j_{\text{th}})}{dr} \simeq 4\pi R_T^2 \sigma_u$$

$$\text{Alors, } \frac{d^2 T}{dr^2} \simeq -\frac{\sigma_u}{\lambda}$$

$$\text{soit } T(r) \simeq -\frac{\sigma_u}{2\lambda} r^2 + Ar + B$$

et on détermine les constantes d'intégration A et B avec (*); en fait, seul A nous intéresse puisqu'on cherche dT/dr :

$$T_1 = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} R_T^2 + AR_T + B$$

$$\text{et } T_2 = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} (R_T - l)^2 + A(R_T - l) + B$$

La soustraction donne, à l'**ordre 2** en l/R_T ,

$$T_1 - T_2 \simeq -\frac{\sigma_u R_T^2}{2\lambda} \left[\frac{2l}{R_T} - \frac{l^2}{R_T^2} \right] + Al$$

Par conséquent,

$$\frac{dT}{dr}(r=R_T) = -\frac{\sigma_u}{\lambda} R_T + \frac{T_1 - T_2}{l} + \frac{\sigma_u R_T}{\lambda} \left[1 - \frac{l}{2R} \right]$$

$$\text{soit } \frac{dT}{dr}(r=R_T) = \frac{T_1 - T_2}{l} - \frac{\sigma_u l}{2\lambda}$$

$$\text{Finalement, } J'_{\text{th}} = J_{\text{th}} + \frac{\sigma_u l}{2}$$

Puisque $\sigma_u l/2 = 52 \text{ mW.m}^{-2}$, l'application numérique donne $J'_{\text{th}} = 92 \text{ mW.m}^{-2}$. La radioactivité des roches représente 52/92 $\simeq 57\%$ de la puissance géothermique.

Corr. 4 Température dans un câble électrique

1. Le problème est à symétrie cylindrique donc on a $T = T(r)$ et, dans le conducteur,

$$\vec{j}_{\text{th}}(r < r_1) = -\lambda_1 \frac{dT}{dr} \hat{e}_r$$

$$\text{et dans la gaine, } \vec{j}_{\text{th}}(r > r_1) = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \hat{e}_r$$

On considère le flux thermique à travers un cylindre de longueur L et de rayon r variable, et on effectue un bilan thermique en régime permanent.

- Dans la gaine ($r > r_1$) : en régime permanent, il n'y a pas d'accumulation d'énergie et le flux thermique est indépendant de r :

$$2\pi r L j_{\text{th}}(r) = \Phi_0 = C^{\text{te}}$$

On en déduit, en posant le flux linéaire $\Psi_0 = \Phi_0/L$ et en utilisant la loi de FOURIER,

$$j_{\text{th}} = \frac{\Psi_0}{2\pi r} = -\lambda_2 \frac{dT}{dr}$$

$$\text{soit } T(r > r_1) = -\frac{\Psi_0}{2\pi \lambda_2} \ln \frac{r}{r_2} + T(r_2)$$

- Dans le conducteur ($r < r_1$) : il faut tenir compte de la puissance dissipée par effet JOULE. Un cylindre interne de rayon r et de longueur L a une résistance $R(r) = \frac{L}{\sigma \pi r^2}$ et est parcouru par une intensité proportionnelle à sa section, soit $I(r) = I \left(\frac{r}{r_1} \right)^2$. En régime permanent, le flux thermique à travers le cylindre de rayon r est égal à la puissance dissipée par effet Joule à l'intérieur de ce cylindre :

$$2\pi r L j_{\text{th}}(r) = R(r) I^2(r)$$

$$\text{soit } j_{\text{th}}(r) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 \frac{r^2 - r_1^2}{4}$$

et intégrant, on trouve

$$T(r < r_1) = -\frac{1}{\lambda_1 \sigma} \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 \frac{r^2 - r_1^2}{4} + T(r_1)$$

Il reste à déterminer Ψ_0 et $T(r_2)$. Pour cela, il suffit d'écrire la continuité du flux thermique à travers les cylindres de longueur L et de rayons r_2 et r_1 :

$$\Psi_0 = 2\pi r_2 j_{\text{th}}(r_2) = 2\pi r_2 h(T(r_2) - T_0)$$

$$\text{et } \Psi_0 = 2\pi r_1 j_{\text{th}}(r_1) = 2\pi r_1 \frac{1}{\sigma} \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 \frac{r_1}{2}$$

De ces deux relations, on déduit

$$T(r_2) = \frac{\Psi_0}{2\pi r_2 h} + T_0 \quad \text{et} \quad \Psi_0 = \frac{I^2}{\sigma^2 \pi r_1^2}$$

- On écrit les expressions des températures et on prend sa calculatrice :

$$T(r_2) = \frac{I^2}{2\pi^2 r_1^2 r_2 h \sigma} + T_0 = 301 \text{ K}$$

$$T(r_1) = \frac{I^2}{2\pi^2 r_1^2 \sigma \lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + T(r_2) = 302,4 \text{ K}$$

$$T(0) = \frac{1}{\lambda_1 \sigma} \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 \frac{r_1^2}{4} + T(r_1) \simeq T(r_1) = 302,4 \text{ K}$$

On constate que la température varie très peu radialement dans le fil conducteur.

Corr. 5 Étude de la sensation de froid et de chaud

- Par analogie avec les résistances électriques, on a simplement

$$R_{\text{th},1} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1}{S} \quad \text{et} \quad R_{\text{th},2} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2}{S}$$

Or, les cylindres sont placés en série (cf lignes de flux), d'où

$$R_{\text{th}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$$

- Par analogie avec la conduction électrique, on peut dire que $T_2 - T_1 = R_{\text{th}} \phi$ et, par pont diviseur,

$$T_i - T_1 = \alpha (T_2 - T_1) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{R_{\text{th},1}}{R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}}$$

Alors, la température T_i se met sous forme d'un barycentre par les conductances :

$$T_i = \frac{R_{\text{th},1} T_2 + R_{\text{th},2} T_1}{R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}} = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$$

- Les conductivités sont en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et on trouve

$$T_i^{\text{bois}} = 35,5 \text{ °C} \quad \text{et} \quad T_i^{\text{acier}} = 21,5 \text{ °C}$$

Le bois semble être à la température de la main, tandis que l'acier paraît froid au toucher.

- On pose la variable adimensionnée $X = \frac{x}{2\sqrt{at}}$. La fonction $f_a(x, t)$ proposée vérifie l'équation de diffusion à une dimension si $f_a(X)$ la vérifie aussi (en toute rigueur, il faudrait changer le nom de la fonction mais c'est plus « léger » comme ça). Or, on a

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{df_a}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \left(-\frac{x}{4\sqrt{at^3}} \right)$$

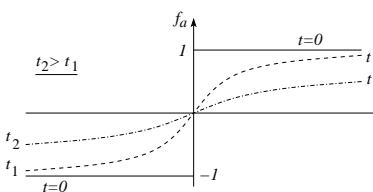
$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = \frac{df_a}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{at}} \right)$$

$$\text{puis } \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{\partial f_a}{\partial x} \right) \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \frac{-x}{4\sqrt{a^3 t^3}}$$

f_a vérifie donc bien l'équation de diffusion thermique

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}$$

$f_a(x, t)$ est une fonction croissante de x et varie entre les valeurs $f_a(-\infty, t) = -1$ et $f_a(+\infty, t) = 1$ en passant par $f_a(0, t) = 0$ à t donné quelconque. De plus, la limite de $f_a(x, t)$ pour $t \rightarrow 0$ est une fonction en marche d'escalier entre -1 et 1 (voir figure).



- La fonction $T(x, t) = A + B f_a(x, t)$ est solution de l'équation de diffusion linéaire. Les constantes A et B sont déterminées pour que $T(0, t) = T_i$ et $T(-\infty, t) = T_1$, d'où

$$T(x < 0, t) = T_i + (T_i - T_1) f_a(x, t)$$

- De même, en faisant gaffe aux signes,

$$T(x > 0, t) = T_i - (T_i - T_2) f_a(x, t)$$

- De la continuité du flux thermique en $x = 0$, on tire

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{0+,t}$$

$$\text{soit } -\lambda_1 \frac{T_i - T_1}{\sqrt{at}} = \lambda_2 \frac{T_i - T_2}{\sqrt{at}}$$

Par conséquent, en introduisant les effusivités, on obtient

$$T_i = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

On reconnaît encore dans ce modèle un barycentre, mais cette fois-ci pondéré par les effusivités.

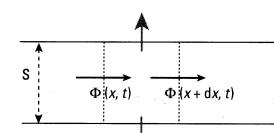
- On trouve par ce modèle plus sophistiqué des valeurs numériques proches de celles obtenues par le modèle statique de la première partie :

$$T_i^{\text{bois}} = 33,9 \text{ °C} \quad \text{et} \quad T_i^{\text{acier}} = 21,9 \text{ °C}$$

- Le gradient thermique, et donc le flux, sont très intenses à l'interface entre les deux cylindres au moment du contact : la température y varie donc très rapidement et on peut considérer que l'interface prend la température T_i de manière quasi-instantanée.

Corr. 6 Efficacité d'une ailette de refroidissement

- Piège !! Attention aux échanges thermiques latéraux qui rendent caduque l'équation de la chaleur simple du cours ; il faut refaire la démonstration !



On effectue un bilan énergétique en régime permanent sur une tranche comprise entre x et $x + dx$:

$$\frac{dU}{dt} = 0 = \underbrace{\phi(x, t) dr}_{\text{permanent}} - \underbrace{\phi(x + dx, t) dt}_{\text{perdu en } x+dx} - \underbrace{d\mathcal{P}_{\text{lat}} dt}_{\text{perdu latéralement}}$$

$$\text{où } d\mathcal{P}_{\text{lat}} = h [T(x) - T_0] 2\pi a dx$$

On note que l'on peut enlever les dépendances en temps (régime permanent) et on tire

$$\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\mathcal{P}_{\text{lat}}}{dx} = 0$$

Or,

$$\phi(x) = -\kappa \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

donc

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T(x) = \frac{T_0}{\delta^2}$$

avec

$$\delta = \sqrt{\frac{a \kappa}{2h}}$$

homogène à une longueur (par analyse dimensionnelle sur l'équation différentielle ; c'est le plus rapide !). La solution générale s'écrit

$$T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$$

et les conditions limites ($T(0) = T_1$ et $T(x)$ finie pour $x \rightarrow \infty$) permettent de déterminer les constantes d'intégration A et B . On trouve

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-x/\delta}$$

On constate que $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} T_0$, température environnante.

- L'ailette a pour fonction de « refroidir » plus efficacement le milieu de température T_1 (ou plutôt d'aider à l'évacuation de la chaleur) : il faut comparer la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{avec}}$ prélevée par l'ailette à ce milieu avec celle $\mathcal{P}_{\text{sans}}$ prélevée au milieu sans celle-ci, à travers la même section :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{avec}}}{\mathcal{P}_{\text{sans}}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{avec}} = \phi(x=0) = -\kappa \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \pi a^2 = \frac{\kappa \pi a^2 (T_1 - T_0)}{\delta}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{\text{sans}} = h(T_1 - T_0) \pi a^2$$

$$\text{soit } \eta = \frac{\kappa}{\delta h} = \sqrt{\frac{2\kappa}{ha}} \simeq 231$$

Grâce à la surface plus étendue de l'ailette, celle-ci évacue 231 fois mieux la chaleur !

- Hypothèse (ii) : au-delà de quelques δ , $T \simeq T_0$ uniforme. L'hypothèse de longueur infinie est alors valable si $L \gg \delta$. Ici, $\delta \simeq 11,5 \text{ cm}$ et $L = 10 \text{ cm}$ donc l'hypothèse (ii) n'est pas valide.

- Hypothèse (i) : cette hypothèse revient à négliger le gradient transversal $\frac{\partial T}{\partial r}$ devant le gradient longitudinal $\frac{\partial T}{\partial x}$. Or, on a en ordre de grandeur

$$\left| \frac{\frac{\partial T}{\partial r}}{\frac{\partial T}{\partial x}} \right| \simeq \left| \frac{j_{\text{th,radial}}(r=a, x)}{j_{\text{th,long}}(x)} \right| \simeq \frac{h(T(x) - T_0)}{\kappa \frac{T_1 - T_0}{\delta} e^{-x/\delta}}$$

$$\text{soit } \left| \frac{\frac{\partial T}{\partial r}}{\frac{\partial T}{\partial x}} \right| \simeq \frac{h\delta}{\kappa} = \frac{1}{231} \ll 1$$

L'hypothèse de l'ailette est bien vérifiée (ouf, c'est quand même un exo sur les ailettes !).

- On a toujours l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T(x) = \frac{T_0}{\delta^2}$$

de solution $T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

Les conditions aux limites ont changé : $T(0) = T_1$ et continuité du flux thermique en $x = L$:

$$-\kappa \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} \pi a^2 = h[T(x=L) - T_0] \pi a^2$$

On en déduit que $A + B = T_1 - T_0$ et une seconde relation qui, en éliminant B, donne

$$A = \frac{T_1 - T_0}{2} \frac{\left(\frac{\kappa}{\delta} + h\right) e^{L/\delta}}{\delta \operatorname{ch} \frac{L}{\delta} + h \operatorname{sh} \frac{L}{\delta}}$$

Or, $\kappa/\delta \gg h$, donc

$$A \simeq \frac{T_1 - T_0}{2} \frac{e^{L/\delta}}{\operatorname{ch} \frac{L}{\delta}}$$

$$\text{Ainsi, } B \simeq \frac{T_1 - T_0}{2} \frac{e^{-L/\delta}}{\operatorname{ch} \frac{L}{\delta}}$$

$$\text{d'où } T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2} \frac{e^{\frac{L-x}{\delta}} + e^{\frac{x-L}{\delta}}}{\operatorname{ch} \frac{L}{\delta}}$$

L'efficacité de l'ailette se calcule en procédant comme précédemment :

$$\mathcal{P}_{\text{avec}} = \phi(x=0) = \kappa \pi a^2 \frac{T_1 - T_0}{\delta} \operatorname{th} \frac{L}{\delta}$$

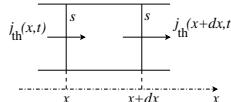
$$\text{et } \mathcal{P}_{\text{sans}} = h(T_1 - T_0) \pi a^2$$

$$\text{d'où } \eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{avec}}}{\mathcal{P}_{\text{sans}}} = \frac{\kappa}{\delta h} \operatorname{th} \frac{L}{\delta} \simeq 162$$

On obtient une efficacité plus faible que précédemment car la surface de l'ailette n'a pas été surévaluée ici.

Corr. 7 Diffusion thermique le long d'un fil en régime sinusoïdal

1. On effectue un bilan d'énergie interne pour une tranche comprise entre les abscisses x et $x+dx$ et de volume dt .



Comme $d^2(\mathcal{E}_c^M + \mathcal{E}_{p,\text{ext}}) = 0$,

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W$$

$$\text{avec } d^2U = \rho c dt [T(t+dt) - T(t)] = \rho c dt dt \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\delta^2W = 0$$

En effet, le volume étudié reste inchangé et il n'y a pas d'écoulement. De plus,

$$\delta^2Q = \left(\underbrace{j_{\text{th}}(x,t)s}_{\mathcal{P}_{\text{th}} \text{ entrant en } x} - \underbrace{j_{\text{th}}(x+dx,t)s}_{\text{celle sortant en } x+dx} \right) dt$$

$$\text{soit } \delta^2Q = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dt dt$$

(On retrouve en fait $-\operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}} dt dt$.)

En utilisant la loi de FOURIER $j_{\text{th}} = -\lambda \partial T / \partial x$, le regroupement de tous les termes conduit à l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2. En régime stationnaire, l'équation de la chaleur devient $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ et l'intégration avec les conditions aux limites donne facilement la loi linéaire

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1$$

Puisque le flux thermique (puissance thermique) est $\Phi = 2400 \text{ J.min}^{-1}$, et que

$$\Phi = j_{\text{th}} s = (T_1 - T_2) \frac{\lambda s}{L}$$

on tire

$$\lambda = \frac{\Phi L}{s(T_1 - T_2)}$$

Numériquement, $\lambda = 200 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$

3.a. Posons $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ et utilisons la notation complexe

$$\underline{\theta}(x,t) = A \exp[j(\omega t - \phi(x) - mx)]$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = j \omega \theta$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = [(m^2 - \phi'^2) + j(2m\phi' - \phi'')] \underline{\theta}$$

En injectant ces expressions dans l'équation de diffusion, on trouve

$$(m^2 - \phi'^2) + j(2m\phi' - \phi'') = j \frac{\omega}{a} \quad \text{avec } a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

On identifie les parties réelles et les parties imaginaires d'où, d'une part $m^2 = \phi'^2$, soit $\phi'(x) = \pm m$ et $\phi''(x) = 0$. D'autre part,

$$2m\phi' - \phi'' = \frac{\omega}{a}$$

soit

$$\phi'(x) = \frac{\omega}{2am} = \pm m$$

On en déduit que le signe négatif n'est pas possible et

$$m = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

De $\phi'(x) = +m$, on tire $\phi(x) = mx + \phi_0$ et, avec $T(0,t)$, on note que $\phi_0 = 0$. Finalement,

$$\phi(x) = mx \quad \text{et} \quad T(x,t) = T_0 + A e^{-mx} \cos[\omega t - \phi(x)]$$

On reconnaît une onde thermique plane pseudo-progressif monochromatique (5/2).

3.b. L'amplitude des oscillations est

$$\alpha(x) = A e^{-mx} = \alpha(0) e^{-mx}$$

donc

$$m = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\alpha(0)}{\alpha(x)} \right) \simeq 0,53 \text{ m}^{-1}$$

La période des oscillations annuelles est $T = 2\pi/\omega$, d'où $a = \omega/(2m^2)$, soit

$$a = \frac{\pi}{m^2 T} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit le retard τ à la profondeur de 4 m :

$$\tau = \frac{mx}{\omega} = \frac{mxT}{2\pi} \simeq 122 \text{ jours}$$

Il y a opposition de phase quand $\tau = T/2$, d'où

$$x_1 = \frac{\pi}{m} \simeq 6 \text{ m}$$

Pour $x > x_1$, la température est donc quasi-uniforme et égale à T_0 puisque $\alpha(x_i) = \alpha(0) e^{-\pi} = 0,043 \alpha(0) \ll T_0$.

Corr. 8 Gel d'un lac

1.a. En régime quasi-stationnaire, et en l'absence de source d'énergie dans la glace, on peut utiliser le concept de conductance thermique et on obtient immédiatement

$$\phi = \frac{S \lambda (T_f - T_a)}{e(t)}$$

On vérifie que $\phi > 0$ car $T_a < T_f$ et le flux thermique se dirige bien du lac vers l'air (plus froid). Notons que l'énoncé ne précise pas la côte z du flux thermique puisqu'en régime quasi-stationnaire sans source, il est conservatif !

1.b. Appliquons le premier principe de la thermodynamique à la couche d'eau d'épaisseur de , de masse $dm = \mu ds de$, qui gèle entre t et $t+dt$. On a $d(\mathcal{E}_c^M + \mathcal{E}_{p,\text{ext}}) = 0$ (évident), $\delta W = \delta W_{\text{fp}}$ (forces pressantes que l'on intègre dans l'enthalpie ; condition isobare) et la chaleur reçue par l'eau vaut $\delta Q = -\phi dt$ car le flux est sortant. Par conséquent,

$$dH = -\phi dt$$

Or,

$$dH = dm(-l_f) = -\mu S de l_f$$

Finalement,

$$e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f}$$

On intègre cette équation différentielle à variables séparables et on obtient

$$\frac{e^2(t)}{2} - \frac{e_0^2}{2} = \frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f} t$$

On vérifie alors que $e(t)$ évolue en \sqrt{t} aux grands temps (caractéristique des phénomènes diffusifs).

1.c. On peut définir une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$ par

$$\left| \frac{de}{dt} \right| \simeq \left| \frac{e}{\tau} \right|$$

soit

$$\frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f e} \simeq \frac{e}{\tau}$$

donc

$$\tau = \frac{\mu l_f e^2}{\lambda (T_f - T_a)}$$

Il faut bien noter que τ dépend de t (lentement) via $e(t)$: il s'agit donc d'une durée caractéristique au voisinage d'une certaine date t .

L'ARQS est valable si le champ des températures $T(z,t)$ dans la glace a le temps de s'adapter aux modifications imposées par le fait que l'épaisseur de la couche de glace varie. Or, ce temps d'adaptation n'est autre que la durée caractéristique de la diffusion thermique à l'échelle $e(t)$, soit $\tau_{\text{diff}} = e^2/D_{\text{th}} = \mu c e^2 / \lambda$. En définitive, l'ARQS est valable si $t \gg \tau_{\text{diff}}$, soit

$$T_f - T_a \ll \frac{l_f}{c} = 79 \text{ K}$$

Si l'on impose un facteur 10, on trouve que l'ARQS n'est valable que pour $T_f - T_a < 8 \text{ K}$, ce qui est assez restrictif en Sibérie...

On remarque que la condition de validité de l'ARQS est indépendante du temps, ce qui était loin d'être prévisible.

2.a. La surface du lac est un système sans masse, donc son énergie totale est toujours nulle. Or, elle reçoit un flux thermique diffusif ϕ de la part de la glace et cède un flux conducto-convectif ϕ_{cc} à l'air. Le premier principe impose immédiatement que

$$\underbrace{\delta \mathcal{E}}_{0} = \underbrace{\delta W}_{0} + \underbrace{\delta Q}_{(\phi - \phi_{cc}) dt}$$

Ainsi, en $z = 0$,

$$\phi = \phi_{cc}$$

2.b. Dans l'expression du flux diffusif ϕ établie à la question 1, il convient de remplacer T_a par la température de surface effective T_s . En remplaçant ϕ_{cc} par son expression, on peut calculer T_s :

$$\frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e} = h S (T_s - T_a)$$

soit

$$T_s = \frac{T_a + \frac{\lambda}{eh} T_f}{1 + \frac{\lambda}{eh}}$$

Ainsi, la température de surface est une moyenne pondérée des températures T_f et T_a . On obtient $T_s \simeq T_a$ si $h \gg \lambda/e$. Concrètement, cela correspond au cas où un vent souffle fort (en négligeant les vagues...). En tout état de cause, l'approximation de la première question est mauvaise au début où l'épaisseur est faible.

Remarque :

On pourrait calculer $T_s(t)$ et $e(t)$ via les égalités traduisant la conservation du flux thermique :

$$\phi = \frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e} = h S (T_s - T_a) = \mu S l_f \frac{de}{dt}$$

Corr. 9 Crédation d'entropie en régime stationnaire

1. Le régime étant stationnaire, l'entropie d'un élément de volume, de section \mathcal{S} et de hauteur dx , ne varie pas au cours du temps. Quant à l'entropie reçue par cet élément, elle s'écrit :

$$\delta S^e = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} - \frac{\delta Q(x+dx)}{T(x+dx)} = dt \mathcal{S} \left[\frac{j_{\text{th}}(x)}{T(x)} - \frac{j_{\text{th}}(x+dx)}{T(x+dx)} \right]$$

$$ie \quad \delta S^e = -dt \mathcal{S} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{j_{\text{th}}(x)}{T(x)} \right)$$

soit, puisque $j_{\text{th}} = -\lambda dT/dx$ est uniforme :

$$\delta S^e = -dt \mathcal{S} dx j_{\text{th}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T(x)} \right) = dt \mathcal{S} dx \frac{j_{\text{th}}}{T^2} \frac{dT}{dx}$$

$$\text{Alors, } \delta S^e = -dt \mathcal{S} dx \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2$$

2. Comme le régime est stationnaire, l'entropie produite est l'opposée de l'entropie reçue (*cf* bilan d'entropie) :

$$\delta S^c = -\delta S^e = dt \mathcal{S} dx \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 > 0$$

$$\text{d'où } \sigma_s = \frac{\delta S^c}{dt \mathcal{S} dx} = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2$$

Le taux de production d'entropie σ_s est plus élevé au voisinage de l'extrême froide !

Ici, puisque $dT/dx = 100 \text{ K.m}^{-1}$, on obtient à ce bout

$$\sigma_s \simeq 1,78 \text{ W.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

Notez qu'il est possible de montrer plus généralement pour un volume de diffusion quelconque que $\sigma_s = \frac{\lambda}{T^2} (\vec{\text{grad}} T)^2$ (bon exo de colle...). On vérifie que l'entropie produite est toujours positive, ce qui vient du choix du signe négatif dans la loi de FOURIER.