

Test de contrôle

- durée 3 heures / calculatrices interdites -

Compléter les cases en validant par ou en invalidant par les affirmations suivantes.

Sur les probabilités et les variables aléatoires ...

Sur les variables et les vecteurs aléatoires

<p>Si X_1, \dots, X_s sont s variables mutuellement indépendantes définies de Ω vers $\{0, 1\}$, alors la somme $\sum_{i=1}^s X_i$ suit une loi binomiale.</p>	
<p>Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors la variable X suit une loi de Bernoulli si et seulement si : $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$.</p>	
<p>Si X suit une loi de Rademacher, alors la variable $1 - X$ aussi.</p>	
<p>Si X et Y sont deux variables aléatoires définies de Ω vers $\{0, 1\}$, alors les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si : $\mathbb{P}(X = Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$.</p>	
<p>Si X et Y sont deux variables aléatoires définies d'un univers fini Ω vers \mathbb{R}, alors ces deux variables ont la même loi si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, on a : $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.</p>	
<p>Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi binomiale, alors la somme $X + Y$ peut ne pas suivre une loi binomiale.</p>	
<p>Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, si $\max(X(\Omega)) = \mathbb{E}(X)$, alors la variable X est une fonction constante.</p>	
<p>Si X_1, \dots, X_r sont des variables aléatoires finies, alors ces variables sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$,</p> $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(X_i = x_i).$	
<p>Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, l'ensemble E des variables aléatoires $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ indépendantes avec X forme un \mathbb{R}-espace vectoriel.</p>	

Un pot pourri ...

Une suite d'entiers est bornée si et seulement si elle admet une sous-suite constante.	
Si λ est un réel, puis A , B et C sont trois points non alignés, l'ensemble des points M du plan affine euclidien tels que $\lambda MA^2 + (1 - \lambda) MB^2 = MC^2$ est une droite affine.	
Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$.	
Si u_n est le nombre de chiffres en base 10 de l'entier 2^n , alors $\exists \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.	
Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$ est bien définie sur $] -1, 1 [$ et est une fraction rationnelle.	
Si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est continue et décroissante, la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.	
Si Ω est fini, si A_1, \dots, A_r sont des événements et si pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(B \cap A_i)$, alors la famille (A_1, \dots, A_r) est un SCE.	
Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.	
L'ensemble des matrices triangulaires inversibles complexes forme un groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ pour \times .	
La série $\sum_n \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ ne vérifie pas le CSSA puisqu'elle est divergente.	
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ n'est pas à coefficients tous entiers, la matrice A ne peut pas être semblable à une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.	

Encore des probabilités ...

<p>Si $\left(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de va.i.id, si $\varepsilon > 0$ et</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 1 \right \geq \varepsilon \right) = 0,$ <p>alors chaque X_k vérifie $\mathbb{E}(X_k) = 1$.</p>	
<p>Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, la fonction $f : t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$ est une fonction croissante et toujours continue à droite.</p>	
<p>Il est possible de construire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \alpha$ vérifie $\mathbb{P}(X = \alpha) > 0$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \geq \mathbb{P}(X = \alpha)$.</p>	
<p>Si $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda)$, alors l'espérance $\mathbb{E}(\exp(X))$ est une formule polynomiale en la variable λ.</p>	
<p>Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie et si A est une partie de \mathbb{R} telle que $\mathbb{P}(X \in A) = 0$, alors la loi de X peut ne pas être entièrement déterminée par la donnée des quantités $\mathbb{P}(X = x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R} \setminus A$.</p>	
<p>Si X et Y suivent deux lois de Bernoulli, avec $V(X) = V(Y)$, alors $X = Y$ presque sûrement ou $X = 1 - Y$ presque sûrement.</p>	
<p>Il existe une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\mathbb{P}(X = k)$ soit proportionnelle à $\frac{2 + \sin k}{1 + \sqrt{k}}$.</p>	
<p>Si X, Y, Z et T sont quatre va.i.id, alors les variables $X + Y$ et $Z + T$ suivant la même loi et sont indépendantes.</p>	