POLYNÔMES CORRECTION

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le plan complexe, sur quelle figure simple sont placées les images des solutions de l'équation $z^n = 1$? Même question avec les solutions de l'équation $(z+1)^n = 1$? En déduire les deux valeurs que peut prendre z s'il est solution des deux équations $z^n = 1$ et $(z+1)^n = 1$.*

   Si $z^n = 1$, on a $|z|^n = 1$, c'est-à-dire $|z| = 1$. Donc

   $$\boxed{\text{les solutions de } z^n = 1 \text{ sont sur le cercle trigonométrique } \mathscr{C}.}$$

   De même, si $(z+1)^n = 1$, on a $|z+1|^n = 1$, c'est-à-dire $|z+1| = 1$. Donc

   $$\boxed{\text{les solutions de } (z+1)^n = 1 \text{ sont sur le cercle } \mathscr{C}' \text{ de centre le point d'affixe } -1 \text{ et de rayon } 1.}$$

   On notera que les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont d'affixes $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \mathrm{e}^{-2i\pi/3}$, donc

   $$\boxed{\text{si } z \in \mathbb{C} \text{ vérifie à la fois } z^n = 1 \text{ et } (z+1)^n = 1, \text{ alors } z \in \{j, j^2\}.}$$

2. *Soit E l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ pour lesquelles P_n admet au moins une racine multiple complexe.*

   a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs possibles des racines multiples de P_n ?*

   On a

   $$\begin{aligned}
   z_0 \in \mathbb{C} \text{ est racine multiple de } P_n' \quad & \iff \quad \begin{cases} P_n(z_0) = 0 \\ P_n'(z_0) = 0 \end{cases} \\
   & \iff \quad \begin{cases} (z_0+1)^{n+1} - {z_0}^{n+1} - 1 = 0 \\ (n+1)[(z_0+1)^n - {z_0}^n] = 0 \end{cases} \\
   & \iff \quad \begin{cases} (z_0+1){z_0}^n - {z_0}^{n+1} - 1 = 0 \\ (z_0+1)^n - {z_0}^n = 0 \end{cases} \\
   & \iff \quad \begin{cases} {z_0}^n = 1 \\ (z_0+1)^n = {z_0}^n \end{cases} \\
   & \iff \quad \begin{cases} {z_0}^n = 1 \\ (z_0+1)^n = 1 \end{cases}
   \end{aligned}$$

   D'après la question 1, il s'ensuit nécessairement que

   $$\boxed{\text{une racine multiple de } P_n \text{ vaut nécessairement } j \text{ ou } j^2.}$$

   b) *En déduire que $E = 6\mathbb{N}^*$.*

   Nous savons qu'une racine multiple de P_n vaut j ou j^2. Pour que j soit effectivement une racine multiple de P_n, il faut et suffit qu'il vérifie le système $(\mathscr{S})$, c'est-à-dire

   $$\begin{cases} j^n = 1 \\ (j+1)^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} j^n = 1 \\ (-j^2)^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^{2in\pi/3} = 1 \\ \mathrm{e}^{in\pi/3} = 1 \end{cases} \iff \mathrm{e}^{in\pi/3} = 1 \iff 6 \mid n.$$

   De même, on trouve que j^2 est une racine multiple de P_n si, et seulement si, $6 \mid n$. Donc

   $$\boxed{E = 6\mathbb{N}^*.}$$

c) *Calculer $P_n \wedge P'_n$ selon que $n \in E$ ou $n \notin E$.*

Si $n \notin E$, P_n et P'_n n'ont pas de racines en commun dans $\mathbb{C}$ donc

$$\boxed{\text{si } n \notin E, \text{ on a } P_n \wedge P'_n = 1.}$$

Si $n \in E$, on sait que j et j^2 sont les seules racines communes possibles pour P_n et P'_n et que ce sont des racines au moins doubles de P_n. Montrons qu'elles sont bien de multiplicité 2 en vérifiant que $P''_n(j) \neq 0$. On a

$$P''_n = n(n+1)[(X+1)^{n-1} - X^{n-1}]$$

donc

$$P''_n(j) = n(n+1)[(j+1)^{n-1} - j^{n-1}] = n(n+1)[\pm j - j^2] \neq 0$$

Donc j est une racine double de P_n. Comme j^2 est le conjugué de j et que P_n est à coefficients réels, j^2 est aussi racine double de P_n. D'où

$$P_n \wedge P'_n = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1,$$

donc

$$\boxed{\text{si } n \in E, \text{ on a } P_n \wedge P'_n = X^2 + X + 1.}$$

3. a) *Factoriser P_6 sur $\mathbb{C}$.*

On sait que j et j^2 sont des racines doubles de $P_6 = (X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X$. On constate aussi que 0 et -1 sont des racines évidentes. On a ainsi déterminé $2+2+1+1 = 6$ racines de P_6 qui est de degré 6, donc

$$\boxed{P_6 = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2.}$$

b) *Déterminer la valeur de $P_6 \wedge P_n$ selon la classe de congruence de n modulo 6.*

Étudions chaque classe de congruence modulo 6.

- Si $n \equiv 0 \pmod 6$, alors $n \in E$, donc, d'après la question 2, j et j^2 sont des racines doubles de P_n. De plus, on a $P_n(0) = 0$ et $P_n(-1) = 0$. Donc P_6 divise P_n, ce qui donne

$$P_6 \wedge P_n = \frac{1}{7}P_6 = X^6 + 3X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X.$$

- Si $n \equiv 1 \pmod 6$, on constate que $P_n(0) = 0$, que $P_n(-1) \neq 0$ car n est impair, que $P_n(j) = (j+1)^{n+1} - j^{n+1} - 1 = j - j^2 - 1 \neq 0$ et, de même, que $P_n(j^2) \neq 0$. Donc

$$P_6 \wedge P_n = X.$$

- Si $n \equiv 2 \pmod 6$, on constate que $P_n(0) = 0$, que $P_n(-1) = 0$ car n est pair, que $P_n(j) = (j+1)^{n+1} - j^{n+1} - 1 = -1 - 1 - 1 \neq 0$ et, de même, que $P_n(j^2) \neq 0$. Donc

$$P_6 \wedge P_n = X(X+1) = X^2 + X.$$

- Si $n \equiv 3 \pmod 6$, on constate que $P_n(0) = 0$, que $P_n(-1) \neq 0$ car n est impair, que $P_n(j) = (j+1)^{n+1} - j^{n+1} - 1 = j^2 - j - 1 \neq 0$ et, de même, que $P_n(j^2) \neq 0$. Donc

$$P_6 \wedge P_n = X.$$

- Si $n \equiv 4 \pmod 6$, on constate que $P_n(0) = 0$, que $P_n(-1) = 0$ car n est pair, que $P_n(j) = (j+1)^{n+1} - j^{n+1} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$ et, de même, que $P_n(j^2) = 0$. De plus, $P'_n(j) = (n+1)[(-j^2)^n - j^n] = (n+1)(j^2 - j) \neq 0$ et, de même, $P'_n(j^2) \neq 0$. Donc

$$P_6 \wedge P_n = X(X+1)(X-j)(X-j^2) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X.$$

- Si $n \equiv 5 \pmod 6$, on constate que $P_n(0) = 0$, que $P_n(-1) \neq 0$ car n est impair, que $P_n(j) = (j+1)^{n+1} - j^{n+1} - 1 = 1 - 1 - 1 \neq 0$ et, de même, que $P_n(j^2) \neq 0$. Donc

$$P_6 \wedge P_n = X.$$

Pour résumer, on a

n	$n \equiv 0$ [6]	$n \equiv 1$ [6]	$n \equiv 2$ [6]	$n \equiv 3$ [6]	$n \equiv 4$ [6]	$n \equiv 5$ [6]
$P_6 \wedge P_n$	$\frac{1}{7}P_6$	X	$X^2 + X$	X	$X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X$	X

4. *Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $r = m \wedge n$.*

   a) *Démontrer que les racines de P_n' sont simples.*

   On a
$$P_n' = (n+1)[(X+1)^n - X^n] \qquad \text{et} \qquad P_n'' = n(n+1)[(X+1)^{n-1} - X^{n-1}].$$
   Donc
$$\begin{aligned} z_0 \in \mathbb{C} \text{ est racine multiple de } P_n' \quad & \iff \quad \begin{cases} (z_0+1)^n = {z_0}^n \\ (z_0+1)^{n-1} = {z_0}^{n-1} \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} (z_0+1){z_0}^{n-1} = {z_0}^n \\ (z_0+1)^{n-1} = {z_0}^{n-1} \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} {z_0}^{n-1} = 0 \\ (z_0+1)^{n-1} = {z_0}^{n-1} \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} z_0 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   ce qui prouve que l'assertion « $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine multiple de P_n' » est fausse, autrement dit que
$$\boxed{P_n' \text{ n'a que des racines simples.}}$$

   b) *Démontrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_r$ puis que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\big(P_m'(z) = 0$ et $P_n'(z) = 0\big) \iff \big(P_r'(z) = 0\big)$.*

   Soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^m = 1$ et $Z^n = 1$. Comme r est le pgcd de n et m, on sait qu'il existe un couple de coefficients de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vm = r$. Dès lors, on a $Z^r = Z^{un+vm} = (Z^n)^u \times (Z^m)^v = 1^u \times 1^v = 1$. Donc $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_r$.
   Soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^r = 1$. On sait que r divise n et m donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $n = \alpha r$ et $m = \beta r$. Donc $Z^n = Z^{\alpha r} = (Z^r)^\alpha = 1^\alpha = 1$ et $Z^m = Z^{\beta r} = (Z^r)^\beta = 1^\beta = 1$. Donc $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \supset \mathbb{U}_r$.
   Donc
$$\boxed{\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_r}$$
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$\begin{aligned} \big(P_m'(z) = 0 \text{ et } P_n'(z) = 0\big) \quad & \iff \quad \begin{cases} (z+1)^m = z^m \\ (z+1)^n = z^n \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^m = 1 \\ \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^n = 1 \end{cases} \qquad \text{car } z \neq 0 \\ & \iff \quad \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^r = 1 \qquad \text{car } \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_r \\ & \iff \quad (z+1)^r = z^r \\ & \iff \quad P_r'(z) = 0. \end{aligned}$$
   Donc
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \big(P_m'(z) = 0 \text{ et } P_n'(z) = 0\big) \iff \big(P_r'(z) = 0\big).}$$

   c) *En déduire $P_m' \wedge P_n'$.*

   Les deux questions précédentes nous disent que les racines de P_m' et P_n' sont simples et que ce sont exactement les racines de P_r'. Comme le coefficient dominant de P_r' est $r(r+1)$, il s'ensuit que
$$\boxed{P_m' \wedge P_n' = \frac{1}{r(r+1)} P_r'.}$$