

# SUITES

## **Exercice 1.** [○]

Étudier la monotonie des suites définies, pour  $n \geq 1$ , par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, \quad v_n = \frac{5^n}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(n) + \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

## **Exercice 2.** [★]

Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites strictement positives. On suppose qu'il existe  $n_0 \geq 0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}_+^*$  telle que  $\forall n \geq 0, u_n \leq cv_n$ .

## **Exercice 3.** [○]

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes telle que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Démontrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est arithmétique.

## **Exercice 4.** [★]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la pyramide suivante constituée des entiers impairs (les nombres  $A_n$  et  $B_n$  désignent respectivement le premier et le dernier entier de la  $n$ -ème ligne) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 3 & 5 & \\ & & & & 7 & 9 & 11 \\ & & & & 13 & 15 & 17 & 19 \\ A_n & . & . & . & . & . & . & B_n \end{array}$$

1. Déterminer, en fonction de  $n$ , le nombre  $N_n$  d'entiers impairs dans cette pyramide.

2. Déterminer  $B_n$  et  $A_n$  en fonction de  $n$ .

3. Déterminer la somme des nombres de la  $n$ -ème ligne.

4. Retrouver ainsi l'expression de la troisième somme d'Euler  $E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .

## **Exercice 5.** [○]

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels strictement positifs telle que chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}.$$

Démontrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est géométrique.

**Exercice 6.** [o]

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 7.** [o]

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 8.** [o] (La « vraie » suite logistique)

La croissance d'une population est proportionnelle à la taille de celle-ci. Toutefois, lorsque cette population évolue dans un milieu fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant contenir une population supérieure à  $P$  individus, cette croissance est freinée, et d'autant plus freinée que l'effectif des individus est proche de la limite  $P$ .

Soit  $u_n$  l'effectif de la population à la génération  $n \in \mathbb{N}$ . On admet que les mécanismes de régulation interviennent après l'apparition de la génération  $n + 1$ , de sorte que l'accroissement de la population est proportionnel à la différence  $P - u_{n+1}$ . La dynamique de la population est ainsi régie par une relation de récurrence logistique du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = ku_n(P - u_{n+1})$$

où  $k > 0$  désigne une constante.

On suppose que  $0 < u_0 \leq P$ .

1. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n > 0$ .
2. En utilisant la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = 1/u_n$ , déterminer l'expression, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de  $u_n$ , en fonction  $n$ ,  $k$ ,  $P$  et  $u_0$ . Préciser le comportement asymptotique de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 9.** [o]

Déterminer, en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n.$$

**Exercice 10.** [★]

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite récurrente double définie par la donnée de  $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$  et par la relation de récurrence  $\forall n \geq 0$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ , où  $a \in \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}^*$ .

En cours, nous avons donné l'expression explicite du terme général de la suite en fonction du nombre de racines de l'équation caractéristique  $q^2 = aq + b$  et nous avons justifié que ces formules sont exactes à l'aide de réurrences doubles.

Cet exercice vous propose de retrouver ces formules sans utiliser de récurrence double.

On note  $q_1$  et  $q_2$  les deux racines de l'équation caractéristique  $q^2 = aq + b$ , avec  $q_1 = q_2$  si la solution est double. Comme  $b \neq 0$ , on a  $q_1 \neq 0$  (et  $q_2 \neq 0$ ), ce qui permet d'introduire la suite auxiliaire  $(v_n)_{n \geq 0}$  dont le terme général est donné, pour tout  $n \geq 0$ , par

$$v_n = \frac{u_n}{q_1^n}.$$

Démontrer que  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une suite arithmético-géométrique de raison géométrique  $q_2/q_1$  et conclure.

### Exercice 11. [★]

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 4$  et la relation de récurrence multiplicative d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement positive.
2. Pour tout  $n \geq 0$ , déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 12. [★] (Suites définies par une relation de récurrence affine d'ordre 2)

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . On considère une suite  $(u_n)$  définie par la donnée de ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$  et la relation de récurrence affine d'ordre 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c.$$

1. On suppose que  $a + b \neq 1$ .
  - a) En vous inspirant des suites arithmético-géométriques, donner une méthode de détermination de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Le faire dans le cas où  $a = -1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 4$ ,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = -2$ .
2. On suppose que  $a + b = 1$ .
  - a) En introduisant la suite auxiliaire  $(u_{n+1} - u_n)$ , donner une méthode de détermination de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Le faire dans le cas où  $a = 3$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$ ,  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 0$ .

### Exercice 13. [★]

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 8$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 - 11.$$

1. Déterminer la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  dont le terme général est  $v_n = an^2 + bn + c$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  qui satisfait la relation de récurrence ci-dessus. *On ne demande pas que  $v_0 = 0$  et  $v_1 = 1$ .*
2. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 14. [○]

Déterminer une expression explicite du terme général de la suite récurrente triple  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 6$  et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

### Exercice 15. [○]

Déterminer, en fonction de  $n$ , l'expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

En déduire la valeur de

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

### Exercice 16. [★]

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}.$$

Déterminer les valeurs de  $u_0 \in \mathbb{C}$  pour lesquelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  existe et démontrer qu'alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  est périodique.