Renseignements généraux

— *Concours* : X
— *Matière* : Maths
— *NOM Prénom* : Bergerès Martin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On pose $Z = \{z \in \mathbb{R}^2, \varphi(z) = 0\}$. On suppose que Z est non vide, et que le gradient de φ sur Z ne s'annule pas. On note $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, et on pose enfin $\psi : z \in Z \to \frac{\nabla\varphi(z)}{\|\nabla\varphi(z)\|} \in \mathcal{C}$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}, \{v, -v\} \cap \psi(Z) \neq \emptyset$.
   Indications :
   - Faire un dessin : tracer le courbe $\varphi = 0$ dans le plan. Comment est orienté le gradient sur cette courbe. Lorsque l'on parcourt toute la courbe, quelles directions prend le gradient ?
   - Si $v \in \mathcal{C}$ est fixé, considérer $f(x) =< x, v >$ et son maximum sur Z. Prendre aussi $\psi : [-\epsilon, +\epsilon] \to Z$ aussi $\mathcal{C}^1$ telle que $\psi(0) = z_{max}$.
2. Montrer qu'en fait, sous des hypothèses plus fortes (dont j'ai vraiment du mal à me rappeler...), on peut avoir ψ injective.

Remarques sur l'oral

Beaucoup d'indications données par l'examinateur. Avec un dessin, le résultat parait naturel (sur la courbe $\varphi = 0$, le gradient prend toutes les directions) mais il est difficile à démontrer. J'ai du mal à me rappeler des hypothèses pour la 2, mais elles sont nombreuses et d'apparence absurdes (cela revient à supposer φ strictement positive au dela de Z, à peu près...).