Planche de colle

Question de cours

Surtout ne pas de ruer sur le CSSA dans cet exercice : vous vous casseriez les dents sur la décroissance en module.
Deuxième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers n et n^2 ont toujours la même parité, donc les nombres $(-1)^n$ et $(-1)^{n^2}$ sont toujours égaux ! !
Ensuite, on effectue un développement asymptotique du terme général :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^a}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^a}} - \left[\frac{1}{2(1+n^a)} + \circ\left(\frac{1}{1+n^a}\right)\right]. \end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^a}}$ est directement convergente par l'application immédiate du CSSA.
Comme $\left[\frac{1}{2(1+n^a)} + \circ\left(\frac{1}{1+n^a}\right)\right] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\ n^a}$ et que tout est positif, on en déduit que les séries $\sum_n \left[\frac{1}{2(1+n^a)} + \circ\left(\frac{1}{1+n^a}\right)\right]$ et $\sum_n \frac{1}{n^a}$ sont de même nature, en l'occurrence convergentes si et seulement si $a > 1$, par les séries de Riemann.
Conclusion, la série proposée converge si et seulement si $a > 1$ et lorsque $a \in]0,1]$, la série proposée diverge vers $-\infty$.

Exercice de colle

1. On vérifie que la partie vide convient quoiqu'il arrive.
   Lorsque $n = 1$, alors $\mathscr{A}_1 = \Big\{\emptyset, \{1\}\Big\}$, donc $a_1 = 2$.
   Lorsque $n = 2$, alors $\mathscr{A}_2 = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\Big\}$, donc $a_2 = 3$.
   Lorsque $n = 3$, alors $\mathscr{A}_3 = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\Big\}$ et $a_3 = 5$.
2. Ici, c'est une question de dénombrement. Faire une récurrence ne sert à rien...
   Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On va partager l'ensemble $\mathscr{A}_{n+2}$ en deux paquets :
   $$\mathscr{A}_{n+2} = \mathscr{B} \sqcup \mathscr{C},$$
   avec :
   $$\mathscr{B} = \Big\{A \in \mathscr{A}_{n+2} \mid n+2 \in A\Big\} \text{ et } \mathscr{C} = \Big\{A \in \mathscr{A}_{n+2} \mid n+2 \notin A\Big\}.$$

Les parties $A \in \mathscr{B}$ sont exactement les parties A dans $\mathscr{A}_{n+1}$: l'ensemble $\mathscr{B}$ est de cardinal a_{n+1}.

Les parties $A \in \mathscr{C}$ sont exactement les parties A dans $\mathscr{A}_{n+2}$ qui contiennent $n+2$, donc qui ne contiennent pas $n+1$ et qui sont donc de la forme :

$$A = B \cup \{n+2\},$$

où B est n'importe quelle partie de l'ensemble $\mathscr{A}_n$.

Il y a autant de choix de parties A dans $\mathscr{C}$ que de parties B dans $\mathscr{A}_n$, c'est-à-dire a_n choix.

Conclusion,

$$a_{n+2} = \mathrm{Card}(\mathscr{A}_{n+2}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) + \mathrm{Card}(\mathscr{C}) = a_{n+1} + a_n.$$

3. La série proposée fait penser à une série de Riemann, mais l'ensemble $\mathscr{S}$ ne comporte pas tous les entiers strictement positifs. Prudence donc...

   Le plus simple est de confectionner des paquets, en regroupant les éléments de l'ensemble $\mathscr{S}$ suivant leur nombre de chiffres en base deux.

   L'entier 2^{r-1} est le plus petit entier comportant exactement r chiffres en base deux, alors que l'entier $2^r - 1$ est le plus grand entier comportant exactement r chiffres en base deux. On pose alors le paquet :

$$\mathscr{P}_r = [2^{r-1}, 2^r - 1] \cap \mathscr{S}.$$

   On pose de plus :

$$v_r = \sum_{k \in \mathscr{P}_r} \frac{1}{k^\alpha}.$$

   La somme définissant v_r comporte exactement $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_r)$ termes.

   Choisir un élément de $\mathscr{P}_r$ revient à choisir sa décomposition binaire. Cette décomposition binaire comporte exactement r chiffres, avec donc un chiffre 1 en position tout à gauche. Comme cette décomposition binaire ne doit pas comporter deux chiffres 1 côte à côte, les deux chiffres les plus à gauche sont $1\ 0$.

   Il s'agit maintenant de remplir les $(r-2)$ chiffres les plus à droite, en n'ayant jamais deux chiffres 1 côte à côte. Il y a exactement a_{r-2} possibilités, car on voit le lien avec la première question.

   La somme définissant v_r comporte donc exactement a_{r-2} termes. Or, pour tout $k \in \mathscr{P}_r$, on a l'encadrement :

$$2^{r-1} \leqslant k < 2^r,$$

   donc :

$$w_r = \sum_{k \in \mathscr{P}_r} \frac{1}{2^{\alpha r}} = \frac{a_{r-2}}{2^{\alpha r}} \leqslant v_r \leqslant \sum_{k \in \mathscr{P}_r} \frac{1}{2^{\alpha(r-1)}} = 2^\alpha \cdot w_r.$$

   On reconnaît par ailleurs à travers la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire d'ordre deux de type Fibonacci. On pose le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$ de racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et on obtient une expression de a_n de la forme :

$$a_n = \chi_1 \cdot \rho_1^n + \chi_2 \cdot \rho_2^n,$$

avec χ_1 et χ_2 donnés par une condition initiale du type $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{array} \right.$ et :

$$\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\rho_2 < 0$ et que tous les termes a_n sont positifs, il est impossible que χ_1 soit nul, sinon, la quantité a_n serait alternée.
Comme $0 < |\rho_2| < \rho_1$, alors $(\rho_2)^n = \circ(\rho_1)^n$ et donc :

$$a_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \chi_1 \cdot \rho_1^n,$$

avec nécessairement $\chi_1 > 0$.
On en déduit deux constantes $0 < C_1 < C_2$ telles que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ C_1 \frac{\rho_1^r}{2^{\alpha r}} \leqslant w_r \leqslant C_2 \frac{\rho_1^r}{2^{\alpha r}}.$$

La série $\sum_r w_r$ est de même nature que la série $\sum_r \frac{\rho_1^r}{2^{\alpha r}} = \sum_r q^r$, avec :

$$q = \frac{\rho_1}{2^\alpha}.$$

Cette série est convergente si et seulement si $|q| < 1$, si et seulement si :

$$\alpha > \lambda = \frac{\ln \rho_1}{\ln 2}.$$

• Si $\alpha > \lambda$, alors la série $\sum_r w_r$ est convergente.

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ si } k \in \mathscr{S} \\ 0, \text{ sinon} \end{array} \right. .$$

Il s'agit d'étudier selon la valeur de α, la nature de la série $\sum_n u_n$. On notera $S_n = \sum_{m=1}^{n} u_m$, la somme partielle, qui est donc croissante en la variable n.
On remarque que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{r=1}^{N} w_r = \sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{k \in \mathscr{P}_r} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{2^N-1} u_k = S_{2^N-1}.$$

La sous-suite $(S_{2^N-1})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite ℓ, donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N \leqslant S_{2^N-1} \leqslant \ell.$$

La série $\sum_n u_n$ est croissante et majorée par ℓ, donc convergente.

• Si $\alpha \leqslant \lambda$, la série $\sum_r w_r$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que la quantité :

$$\sum_{r=1}^{N} w_r = S_{2^N - 1}$$

diverge vers $+\infty$, lorsque N tend vers $+\infty$.
La suite croissante $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger : la série $\sum_n u_n$ diverge vers $+\infty$.

Conclusion, le réel :

$$\lambda = \frac{\ln(1 + \sqrt{5})}{\ln 2} - 1$$

répond à la question.