POLYNÔMES

Exercice 1. [$\star$]

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 2. [$\star$]

Selon la valeur de $b \in \mathbb{R}$, décomposer $P_b = X^4 + 2bX^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. [$\circ$] (Polynômes de Tchebychev)

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré n tel que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
   c) Pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le coefficient dominant de T_n. Démontrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et en déduire l'expression de a_n pour tout $n \geqslant 1$.
   d) Déterminer $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Retrouver ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos n\theta = S_n(\cos\theta)$. Démontrer que $S_n = T_n$.
   c) Déterminer des racines de T_n.
   d) Donner la factorisation de T_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 4. [$\bigstar$] (Les polynômes positifs sont sommes de deux carrés)

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) \geqslant 0.$$

Démontrer l'existence de deux polynômes A et B à coefficients réels tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

Exercice 5. [$\bigstar$]

Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers relatifs. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de terme général $u_n = \operatorname{pgcd}\big(P(n), Q(n)\big)$ est périodique.