Problème n° 9 : Suites

Problème 1 –
Convergence en un point fixe attractif d'une suite définie par une récurrence
(Adapté de CAPES 1998)

Soit α et β deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \beta$, et soit $I =]\alpha, \beta[$ l'intervalle ouvert d'extrémités α et β. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On note $\Omega = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.

On suppose dans tout le problème que Ω est non vide.

On appellera suite récurrente, ou, s'il faut éviter une ambiguïté, suite récurrente associée à f, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces suites.

Partie I – Existence et convergence des suites récurrentes

1. *On définit par récurrence des sous-ensembles de I par $I_1 = I$, et : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{p+1} = f^{-1}(I_p)$.*
   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{p+1} \subset I_p$.
   On définit $A = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*} I_p$.
   (b) Montrer que A est un sous-ensemble non vide de I, et que A est stable par f.
   (c) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f.*
      i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En considérant l'existence de x_{n+p}, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I_p$.
      ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
      iii. En déduire que le choix d'une valeur initiale x_0 définit une suite récurrente associée à f si et seulement si $x_0 \in A$.
2. (a) Déterminer Ω et A pour chacun des exemples suivants :
      i. $I =]0, 2[$ et $\forall x \in I,\quad f_1(x) = \sqrt{x}$;
      ii. $I =]0, 2[$ et $\forall x \in I,\quad f_2(x) = x^2$;
      iii. $I =]0, 2[$ et $\forall x \in I,\quad f_3(x) = 2x - 1$.
   (b) Que vaut A lorsque I est stable par f ?
3. *On suppose f croissante, et soit x_0 un point de A tel que $x_0 \leqslant f(x_0)$.*
   (a) Montrer que la suite récurrente de valeur initiale x_0 converge vers un point de I si et seulement s'il existe un point fixe $y \in \Omega$ tel que $x_0 \leqslant y$.
   (b) Justifier que dans ce cas, la limite ℓ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le plus petit point fixe qui soit supérieur ou égal à x_0.
   (c) Préciser le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où elle ne converge pas vers un point de I.
   (d) Donner sans démonstration des résultats similaires lorsque $x_0 \geqslant f(x_0)$.

Partie II – Points fixes attractifs, répulsifs

On suppose dans cette partie que f est dérivable de dérivée continue sur I. On admettra la définition suivante : une fonction h est continue en un point a de son domaine D_h si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in B(a, \delta) \cap D_h, \quad |h(x) - h(a)| < \varepsilon.$$

(En gros : pour toute marge d'erreur ε, quitte à ne pas trop s'éloigner de a, disons de moins de δ, $h(x)$ ne s'éloigne pas de $h(a)$ de plus de ε)

1. **Inégalité des accroissements finis**
   Soit a et b deux éléments de I, et J l'intervalle fermé d'extrémités a et b. On suppose qu'il existe deux réels positifs m et M qu'on se fixe, tels que :

   $$\forall x \in J, \quad m \leqslant |f'(x)| \leqslant M.$$

   A l'aide d'une intégration, montrer que : $m|b-a| \leqslant |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$.

2. **Points fixes attractifs**
   *Soit r un point fixe de f tel que $|f'(r)| < 1$. Un tel point fixe sera dit **attractif**.*

   (a) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ et un réel $\delta > 0$, qu'on se fixe pour la suite, tels que la boule $B(r, \delta) =]r - \delta, r + \delta[$ soit incluse dans I, et que :

   $$\forall x \in B(r, \varepsilon), \quad |f(x) - r| \leqslant k|x - r|.$$

   (b) Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in B(r, \delta)$. Majorer $|u_n - r|$ en fonction de u_N, r, k, N et n.

   (c) En déduire qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si et seulement si il existe un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in B(r, \delta)$.

3. **Points fixes répulsifs**
   *Soit r un point fixe de f tel que $|f'(r)| > 1$. Un tel point fixe sera dit **répulsif**.*

   (a) Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$, qu'on se fixe pour la suite, tel que $B(r, \delta) =]r - \delta, r + \delta[$ soit inclus dans I, et que :

   $$\forall x \in B(r, \varepsilon), \quad |f(x) - r| \geqslant |x - r|.$$

   (b) Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si et seulement si elle est stationnaire de valeur r, c'est-à-dire s'il existe un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n = r$.

4. **Un exemple**
   On considère la fonction f_4 définie sur $I =]0, 2[$ par : $\forall x \in]0, 2[$, $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(4 - x^2)$.

   (a) Déterminer A.

   (b) Montrer que f_4 a un seul point fixe, et qu'il est répulsif.

   (c) Déterminer les points fixes de $f_4 \circ f_4$.

   (d) Préciser, suivant la valeur initiale, le comportement des suites récurrentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées à f_4.
   On étudiera notamment la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que celle de $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, en précisant la valeur des limites en cas de convergence.

Partie III – Estimation de la vitesse de convergence en un point attractif

Étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, on rappelle que $u_n = O(v_n)$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
On admettra le résultat suivant (formule de Taylor-Young à l'ordre 2) :

Soit $r \in I$. Alors, si f est dérivable 2 fois et de dérivée seconde continue sur I, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite r, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :

$$f(u_n) = f(r) + (u_n - r)f'(r) + \frac{1}{2}(u_n - r)^2 f''(r) + (u_n - r)^2\varepsilon_n.$$

On se propose d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire, convergeant vers un point fixe attractif r. On suppose dans la suite de cette partie que f est deux fois dérivable sur I, de dérivée continue.

1. Soit k comme dans la question II-2. Montrer que $|x_n - r| = O(k^n)$.
2. *Dans cette question, et uniquement dans cette question, f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$.*
   (a) Montrer que f est deux fois dérivable, de dérivée seconde continue, et admet un et un seul point fixe r. Montrer que $|f'(r)| < 1$.
   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f. Exprimer x_n en fonction de n et x_0.
   (c) En déduire l'existence d'une constante λ que l'on déterminera telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \lambda(f'(r))^n$

Nous cherchons dans la question suivante à généraliser ce résultat à des fonctions f plus générales.

3. *On suppose que $f'(r) \neq 0$.*
   (a) Montrer, grâce à la formule de Taylor rappelée dans l'énoncé, qu'on a :
   $$\forall j \in \mathbb{N},\quad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j), \qquad \text{où } R_j = O(k^j).$$
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\quad x_n - r = (f'(r))^n(x_0 - r)\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(1 + R_j)$.
   (c) i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\ln(|1 + R_j|)$ est défini.
   ii. Justifier que $\ln(|1 + R_j|) \underset{+\infty}{\sim} R_j$.
   iii. En déduire qu'il existe un réel M tel que : $\forall j \in \mathbb{N},\quad |\ln(|1 + R_j|)| \leqslant Mk^j$.
   iv. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} |\ln(|1 + R_j|)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, majorée, puis qu'elle converge.
   v. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(1 + R_j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
   On admettra pour ce faire que si $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
   vi. En déduire qu'il existe une constante λ telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \lambda(f'(r))^n$.
4. *On suppose que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.*
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :
   $$\forall j \in \mathbb{N},\quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
   $$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1 + S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}(1 + S_{n-1}).$$
   (c) En s'inspirant de la question III-2(c), montrer que la suite $\left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n-2}|1 + S_j|^{2^{-j-1}}\right)_{n\geqslant 2}$ converge et que sa limite est non nulle.
   (d) *On note, pour tout $n \geqslant 2$, $\pi_n = \displaystyle\lim_{m\to+\infty}\prod_{j=n-1}^{m}|1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Soit $\varepsilon > 0$.*
   i. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, et tout $j \geqslant n - 1$,
   $$\left|2^n \ln(|1 + S_j|^{2^{-j-1}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{j+1-n}}\varepsilon.$$

ii. En déduire que pour tout $n \geqslant N$, $|2^n \ln \pi_n| \leqslant 2\varepsilon$. Que dire de la suite $(2^n \ln \pi_n)_{n\geqslant 2}$?

iii. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in]0,1[$, dépendant de x_0, telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\lambda^{2^n}}{f''(r)}$.

Partie IV – Un exemple : les suites de Héron

Soit $a > 0$. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on définit une fonction f_p sur $I =]0,+\infty[$ par $f_p(x) = \dfrac{1}{p}\left((p-1)x + \dfrac{a}{x^{p-1}}\right)$.

1. Vérifier que la fonction f_p satisfait aux hypothèses de la partie III, question 4.
2. Étudier les variations de f_p.
3. Montrer que quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente associée à f_p existe, qu'elle vérifie $x_n \geqslant a^{\frac{1}{p}}$. pour tout $n \geqslant 1$, et qu'elle converge vers $a^{\frac{1}{p}}$

Étant donné une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire associée à f_p, on note $\lambda_0(x_0)$ la constante donnée par III-3(d)iii telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{f''(r)}(\lambda_p(x_0))^{2^n}$.

4. *Dans cette question, on suppose que $p = 2$.*

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire x_n sous la forme $\dfrac{u_n}{v_n}$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_nv_n.$$

(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{a}\cdot v_{n+1}$ en fonction de $u_n + \sqrt{a}\cdot v_n$.

(c) Exprimer $u_n + \sqrt{a}\cdot v_n$, $u_n - \sqrt{a}\cdot v_n$ puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n.

(d) En déduire que $\lambda_2(x_0) = \dfrac{2|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}$.

5. *On ne suppose plus que $p = 2$. Un nombre réel $r > 0$ étant donné, on associe, à tout entier naturel $q > 1$, la fonction g_q définie sur $]0,+\infty[$ par* $g_q(x) = \left(\dfrac{1}{2}\left(x^q + \dfrac{r^{2q}}{x^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$.

(a) i. Montrer que, quelle que soit la valeur $y_0 > 0$, la suite récurrente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g_q existe.

ii. Donner l'expression de y_n en fonction de y_0, r, p et n.

Indication : Exprimer et reconnaître une relation de récurrence pour $(y_n^q)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii. Justifier que $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{q-1} r^\ell y_n^{q-1-\ell} = y_n^{q-1} + ry_n^{q-2} + \cdots + r^{q-2}y_n + r^{q-1} \underset{+\infty}{\sim} qr^{q-1}$.

iv. En déduire que si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, il existe deux constantes non nulles μ_q et C, que l'on explicitera en fonction de r, q et y_0, telles que $y_n - r \underset{+\infty}{\sim} C(\mu_q)^{2^n}$.

(b) i. Soit k la fonction définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par $k(x) = \dfrac{x^2}{1+x} + \ln(1-x^2)$. Déterminer les variations de k, puis son signe.

ii. En déduire les variations de la fonction h définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par $h(x) = \ln(1-x) - \dfrac{1}{x}\ln(1-x^2)$.

Soit $(u_p)_{p\geqslant 2}$ la suite définie par $u_p = \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{p-1}$*, et soit, pour tout $p \geqslant 2$,* $v_p = \dfrac{u_{p+1}}{u_p}$.

iii. Montrer, à l'aide de la question précédente, que $(v_p)_{p\geqslant 2}$ est croissante de limite 1.

iv. En déduire que pour tout $p \geqslant 2$, $u_p \leqslant \frac{1}{2}$.

(c) On pose $r = a^{\frac{1}{p}}$. Montrer que pour tout $x \geqslant a^{\frac{1}{p}}$, $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$.

Indication : on pourra élever $f_p(x)$ à la puissance $p-1$, à l'aide de la formule du binôme, en ne gardant que les termes extrémaux. N'oubliez pas la question précédente.

(d) On suppose que $x_0 > a^{\frac{1}{p}}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites récurrentes de même valeur initiale x_0, associées respectivement à f_p et g_{p-1}.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{\frac{1}{p}} < x_n \leqslant y_n$.

ii. En déduire une majoration explicite de $\lambda_p(x_0)$.

(e) On suppose maintenant que $0 < x_0 < a^{\frac{1}{p}}$. Montrer que $\lambda_p(x_1) = \lambda_p(x_0)^2$. En déduire une majoration explicite de $\lambda_p(x_0)$.