Mathématiques CR

Aline Cahuzac

Juillet 2019

1 Énoncé

1. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est *continue inférieurement*, *ie* que :
$$\forall\ a \in E, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \mathcal{V} \text{ voisinage de } a, \forall\ x \in \mathcal{V}, f(x) \geqslant f(a) - \varepsilon$$
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in E$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} f(x_k) \geqslant f(x)$$

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On prend $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour $u \in\ E$ $L(u) = \int_0^1 \varphi(u(x))dx$. Soit $u \in\ E$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\ v \in E, \int_0^1 u_k(x)v(x)dx \to \int_0^1 u(x)v(x)dx$ *($(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u)*. Montrer que si φ est convexe de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a $(*)$:
$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} L(u_k) \geqslant L(u)$$

3. Montrer la réciproque : si pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in\ E^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers un $u \in\ E$, $(*)$ est vraie, alors φ est convexe. *On pourra raisonner par contraposée et considérer les fonctions $(u_k\ :\ x \to\ g(\{kx\}))_{k\in\mathbb{N}}$ où l'on a posé pour $x \in [0,1]$ $g(x) = a$ si $x \leqslant t$ et $g(x) = b$ sinon pour a, b dans $\mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ bien choisis.*

Déroulé

Devant une candidate manifestement peu préparée à l'épreuve de sprint du poignet sur tableau noir, l'examinateur légèrement impatient consent à ralentir son débit mais remarque à la fin de la première question "vous avez déjà pris tout le tableau pour la consigne, tâchez d'écrire plus petit pour la suivante".

Cette première réponse trouvée assez rapidement, il me signale lorsque j'attaque la deuxième qu'*il ne faut pas utiliser ce qui précède.* Ma remarque sur la convergence faible n'apporte rien à la résolution mais permit néanmoins de simplifier grandement l'énoncé de la question 3), de fluidifier l'échange et de nous faire abandonner toute prétention de connaissance précise du contenu du programme. Je tente dans un premier de forcer une dérivée de φ à apparaître ; il me conseille de plutôt faire un dessin rapide du graphe pour mieux m'y retrouver.

L'indication de la question 3) vient alors que j'ai annoncé une approche par contraposée et recherche d'une suite contre-exemple, et traduit l'hypothèse "φ non convexe". Convaincue à présent de l'utilité des dessins, je dessine les graphes de u_k pour intuiter la limite faible et calculer les intégrales. Plus enjoué, l'examinateur me fait remarquer les quelques oublis qui me bloquent par moments, puis me demande pour finir une démonstration rigoureuse de la convergence faible que j'ai précédemment bâclée. Je m'emmêle un peu en tentant un théorème de double limite, la preuve s'écrit en fait très simplement en utilisant le fait que les intégrales des $(|u_k|)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ont toutes la même valeur.