DEVOIR SURVEILLÉ 1

(durée : 2 h 30)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou souligné. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Primitive de arcsin

La fonction arcsin (qu'on étudiera plus tard) est, sur $]-1;1[$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer une primitive F de arcsin. *On exprimera F à l'aide de fonctions usuelles et de* arcsin.

EXERCICE 2

Trois manières de calculer une intégrale

Pour tout $x > 0$, on pose

$$\Phi(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}.$$

L'objet de cet exercice est de déterminer Φ de trois façons indépendantes.

1. Le théorème de décomposition en éléments simples (que nous verrons plus tard) affirme l'existence de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}.$$

   Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x > 0$.

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, déterminer l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x > 0$.

3. On note F une primitive de la fonction

$$f : t \longmapsto \frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)}.$$

   Exprimer Φ en fonction de F et déterminer, à l'aide de Φ', l'expression de Φ.

EXERCICE 3

Équation fonctionnelle de d'Alembert

L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

On raisonne par analyse/synthèse.

1. Dans cette question, on traite l'analyse. Soit $f \in \mathscr{E}$.
   a) Démontrer que $f(0) \in \{0; 1\}$.
   b) Dans cette question, on suppose que $f(0) = 0$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
   c) Dans cette question, on suppose que $f(0) = 1$. On note F la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   α] Démontrer que f est paire.
   β] Démontrer l'existence de $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $F(a) \neq 0$. Dans la suite, on considère un tel a.
   γ] Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$2F(a)f(x) = F(x+a) - F(x-a).$$
   δ] Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et démontrer l'existence d'une constante réelle λ telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \lambda\, f(x).$$
   ε] En déduire l'existence de $\omega \in \mathbb{R}_+$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(\omega x) \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{ch}(\omega x).$$
2. Faire la synthèse et conclure.

EXERCICE 4

Une caractérisation de la disjonction

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que

$$\big(A \cap B = \varnothing\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B), \quad \exists X \in \mathscr{P}(E), \quad \begin{cases} X \cap A = X_1 \\ X \cap B = X_2 \end{cases}\right).$$

CORRECTION DU DS1

(durée : 2 h 30)

EXERCICE 1

La fonction arcsin *est, sur* $]-1;1[$*, une primitive de* $x \longmapsto 1/\sqrt{1-x^2}$*. Déterminer une primitive* F *de* arcsin*.*

Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$F(x) = \int^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons une primitivation par parties en utilisant les fonctions u et v (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$) définies par

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \arcsin(t)$$
$$u(t) = t \qquad v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On obtient, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \big[t\arcsin(t)\big]^x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $t \longmapsto t/\sqrt{1-t^2}$ est la dérivée de $t \longmapsto -\sqrt{1-t^2}$, on en conclut que

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\,, \qquad F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.}$$

EXERCICE 2

Pour tout $x > 0$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}\cdot$

1. *Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,* $\dfrac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{(1+t)^2} + \dfrac{ct+d}{1+t^2}$ *et en déduire l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x > 0$.*

   Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2} \\
\iff\ & \frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{(a+b+d)+(a+c+2d)t+(a+b+2c+d)t^2+(a+c)t^3}{(1+t)^2(1+t^2)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
a & + & \boxed{b} & & & + & d & = & 2 & L_1 \\
a & & & + & c & + & 2d & = & 0 & L_2 \\
a & + & b & + & 2c & + & d & = & 0 & L_3 \\
a & & & + & c & & & = & 0 & L_4
\end{array}\right. \quad \text{par identification} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
a & + & \boxed{b} & & & + & d & = & 2 & L_1 \\
\boxed{a} & & & + & c & + & 2d & = & 0 & L_2 \\
 & & & & 2c & & & = & -2 & L_3 - L_1 \to L_3 \\
a & & & + & c & & & = & 0 & L_4
\end{array}\right. \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
a & + & \boxed{b} & & & + & d & = & 2 & L_1 \\
\boxed{a} & & & + & c & + & 2d & = & 0 & L_2 \\
 & & & & \boxed{2c} & & & = & -2 & L_3 \\
 & & & & & & \boxed{2d} & = & 0 & L_2 - L_4 \to L_4
\end{array}\right. \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcl}
a & = & 1 \\
b & = & 1 \\
c & = & -1 \\
d & = & 0
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

   Par conséquent, on a

$$
\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{t}{1+t^2}\cdot}
$$

   Pour tout $x > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_{1/x}^{x} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\ln|1+t| - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_{1/x}^{x} \\
&= \ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{1+1/x} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right| \\
&= \ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln\frac{|x+1|}{|x|} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln|x+1| + \ln|x| + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln|x| \\
&= \frac{x-1}{x+1},
\end{aligned}
$$

   donc

$$
\boxed{\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \frac{x-1}{x+1}\cdot}
$$

2. *À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, déterminer l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x > 0$.*

Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $u = 1/t$.

<u>Nouvelles bornes</u>
Si $t = 1/x$, on a $u = x$ et si $t = x$, on a $u = 1/x$.

<u>Nouvelle différentielle</u>
L'application $u : t \longmapsto 1/t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'on a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{t^2}$ ce qui donne $\mathrm{d}t = -t^2\,\mathrm{d}u$.

<u>Nouvel intégrant</u>
On a

$$\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} = -\frac{2\,t^2\,\mathrm{d}u}{(1+t)^2(1+t^2)} = -\frac{2\,\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)} = -\frac{2\,u^2\,\mathrm{d}u}{(u+1)^2(u^2+1)}\cdot$$

<u>« Nouvelle » intégrale</u>
Il vient

$$\Phi(x) = -\int_x^{1/x} \frac{2\,u^2\,\mathrm{d}u}{(u+1)^2(u^2+1)} = \int_{1/x}^{x} \frac{2\,u^2\,\mathrm{d}u}{(u+1)^2(u^2+1)},$$

c'est-à-dire, en changeant le nom de la variable puisqu'elle est muette,

$$\Phi(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{2\,t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}\cdot$$

En utilisant les deux expressions connues de $\Phi(x)$ (c'est-à-dire celle de la définition et celle que nous venons d'obtenir), on a

$$\begin{aligned}
\Phi(x) + \Phi(x) &= \int_{1/x}^{x} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} + \int_{1/x}^{x} \frac{2\,t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{2(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \\
&= \left[-\frac{2}{1+t}\right]_{1/x}^{x} \\
&= -\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+1/x} \\
&= -\frac{2}{1+x} + \frac{2x}{x+1} \\
&= \frac{2(x-1)}{x+1},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \frac{x-1}{x+1}\cdot}$$

3. *On note F une primitive de la fonction $f : t \longmapsto 2/\big((1+t)^2(1+t^2)\big)$. Exprimer Φ en fonction de F et déterminer, à l'aide de Φ', l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x > 0$.*

Pour tout $x > 0$, on a

$$\Phi(x) = F(x) - F\Big(\frac{1}{x}\Big)\cdot$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sa primitive F l'est également. Dès lors, les théorèmes généraux de dérivabilité nous disent que

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= F'(x) - \Big(-\frac{1}{x^2}\Big)F'\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&= f(x) + \frac{1}{x^2} f\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&= \frac{2}{(1+x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{x^2}\frac{2}{\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^2\Big(1+\dfrac{1}{x^2}\Big)} \\
&= \frac{2}{(1+x)^2(1+x^2)} + \frac{2x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2(1+x^2)} \\
&= \frac{2}{(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on en déduit, en primitivant, qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = -\frac{2}{1+x} + c.$$

Or

$$\Phi(1) = \int_1^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} = 0,$$

donc

$$-\frac{2}{1+1} + c = 0,$$

ce qui donne

$$c = 1.$$

Dès lors, on a

$$\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = 1 - \frac{2}{1+x},$$

ce qui redonne

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \frac{x-1}{x+1}.}$$

EXERCICE 3

On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues qui satisfont la relation $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$. On raisonne par analyse/synthèse.

1. *Dans cette question, on traite l'analyse. Soit $f \in \mathscr{E}$.*

   a) *Démontrer que $f(0) \in \{0; 1\}$.*

   L'égalité $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ étant satisfaite pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on peut choisir de prendre $x = 0$ et $y = 0$. Cela donne $2f(0)^2 = 2f(0)$, c'est-à-dire $f(0)\big(f(0)-1\big) = 0$. Cela donne $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Donc

   $$\boxed{f(0) \in \{0; 1\}.}$$

   b) *Dans cette question, on suppose que $f(0) = 0$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.*

   Dans la relation $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, on choisit de laisser x quelconque et de poser $y = 0$. On obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(0) = 2f(x)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = f(x)$ puisque $f(0) = 0$. Donc f est la fonction nulle. Ainsi,

   $$\boxed{\text{si } f(0) = 0, \text{ alors } f \text{ est la fonction nulle.}}$$

   c) *Dans cette question, on suppose que $f(0) = 1$. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.*

   α] *Démontrer que f est paire.*

   Dans la relation $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, on choisit de poser $x = 0$ et de laisser y quelconque. On obtient $\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(0)f(y) = f(y) + f(-y)$, c'est-à-dire $\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(y) = f(y) + f(-y)$ puisque $f(0) = 1$. Cela donne $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(-y)$, ce qui signifie que

   $$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

   β] *Démontrer l'existence de $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $F(a) \neq 0$. Dans la suite, on considère un tel a.*

   Par l'absurde, supposons que $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ F(a) = 0$. Cela signifie que F est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. Or F est continue (elle est même dérivable puisque c'est une primitive), donc F est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. Mézalors, la dérivée F, à savoir f, est aussi la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. C'est absurde puisque $f(0) = 1$. Donc

   $$\boxed{\text{il existe } a \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } F(a) \neq 0.}$$

   γ] *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2F(a)f(x) = F(x+a) - F(x-a)$.*

   Intégrons la relation $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ par rapport à la variable y entre les bornes 0 et a. On obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$2f(x)\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x+y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

   c'est-à-dire

   $$2f(x)F(a) = \int_0^a f(x+y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

   Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u = x + y$ et, dans la seconde, on pose $v = x - y$. Cela donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$2f(x)F(a) = \int_a^{x+a} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_x^{x-a} f(v)\,\mathrm{d}v$$

   c'est-à-dire

   $$\begin{aligned} 2f(x)F(a) &= \big[F(u)\big]_a^{x+a} - \big[F(u)\big]_a^{x-a} \\ &= F(x+a) - F(a) - F(x-a) + F(a) \\ &= F(x+a) - F(x-a). \end{aligned}$$

   Donc

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2F(a)f(x) = F(x+a) - F(x-a).}$$

$\delta]$ *Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et démontrer l'existence d'une constante réelle λ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \lambda\, f(x)$.*

La question précédente nous dit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{F(x+a) - F(x-a)}{2F(a)} \qquad (*),$$

où la division par $F(a)$ est légitime puisque cette quantité n'est pas nulle.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, sa primitive F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la relation $(*)$ et les théorèmes généraux de dérivabilité nous disent que f et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Mézalors, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa primitive F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la relation $(*)$ et les théorèmes généraux de dérivabilité nous disent que f et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

En poursuivant ainsi, on démontrerait (par récurrence) que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme on ne nous en demande pas tant, on se contente de conclure que

$$\boxed{f \text{ et de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivons la relation $(*)$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2F(a)} \qquad (**).$$

Obstinons nous et dérivons une nouvelle fois cette relation. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \frac{f'(x+a) - f'(x-a)}{2F(a)} \qquad (***).$$

En tenant compte de $(**)$ dans $(***)$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2F(a)}\left[\frac{f(x+2a) - f(x)}{2F(a)} - \frac{f(x) - f(x-2a)}{2F(a)}\right]$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \frac{f(x+2a) + f(x-2a) - 2f(x)}{4F(a)^2}.$$

Dans la relation $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, on laisse x quelconque et on pose $y = 2a$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2f(x)f(2a) = f(x+2a) + f(x-2a).$$

En combinant ces deux égalités, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \frac{f(2a) - 1}{2F(a)^2} f(x).$$

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{f(2a) - 1}{2F(a)^2},$$

on peut bien conclure qu'

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \lambda f(x).}$$

$\varepsilon]$ *En déduire qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\omega x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{ch}(\omega x)$.*

La question précédente dit que f est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - \lambda y = 0.$$

Si $\lambda > 0$, les solutions de cette équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$. Comme f est l'une de ces solutions, on sait donc qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Comme f est paire, on a nécessairement $A = B$, ce qui implique que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2A\,\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x)$. Comme $f(0) = 1$, on a $2A = 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x)$.

Si $\lambda > 0$, les solutions de cette équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(-\sqrt{\lambda}x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$. Comme f est l'une de ces solutions, on sait donc qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(-\sqrt{\lambda}x)$. Comme f est paire, on a nécessairement $B = 0$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x)$. Comme $f(0) = 1$, on a $A = 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

Enfin, si $\lambda = 0$, les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont toutes les fonctions affines. Comme f est l'une de ces solutions, on sait donc qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A + Bx$. Comme f est paire, on a nécessairement $B = 0$. Comme $f(0) = 1$, on a $A = 1$. Donc, dans ce cas, f est la fonction constante égale à 1. On remarque que cette solution peut être vue comme un cosinus (circulaire ou hyperbolique) à condition d'autoriser la pulsation à valoir 0.

On en conclut qu'

$$\boxed{\text{il existe } \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\omega x) \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{ch}(\omega x).}$$

2. *Faire la synthèse et conclure.*

L'analyse nous dit que les seules fonctions qui peuvent appartenir à $\mathscr{E}$ sont la fonction nulle, les fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}_+$ et les fonctions $x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}_+$. Vérifions que ces fonctions appartiennent bien à $\mathscr{E}$.

Tout d'abord, il est évident que la fonction nulle est dans $\mathscr{E}$.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les formules de trigonométrie donnant $\cos(a \pm b)$ nous disent que

$$\begin{aligned} & \cos\big(\omega(x+y)\big) + \cos\big(\omega(x-y)\big) \\ = \ & \cos(\omega x)\cos(\omega y) - \sin(\omega x)\sin(\omega y) + \cos(\omega x)\cos(\omega y) + \sin(\omega x)\sin(\omega y) \\ = \ & 2\cos(\omega x)\cos(\omega y). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $x \longmapsto \cos(\omega x)$ (qui est continue) appartient bien à $\mathscr{E}$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{ch}(\omega x)\,\mathrm{ch}(\omega y) &= 2\frac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\omega y} + \mathrm{e}^{-\omega y}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\omega(x+y)} + \mathrm{e}^{\omega(x-y)} + \mathrm{e}^{-\omega(x-y)} + \mathrm{e}^{-\omega(x+y)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\omega(x+y)} + \mathrm{e}^{-\omega(x+y)}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\omega(x-y)} + \mathrm{e}^{-\omega(x-y)}}{2} \\ &= \mathrm{ch}\big(\omega(x+y)\big) + \mathrm{ch}\big(\omega(x-y)\big). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ (qui est continue) appartient bien à $\mathscr{E}$.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{E} \text{ est constitué de la fonction nulle, des fonctions } x \longmapsto \cos(\omega x) \\ \text{où } \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ et des fonctions } x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x) \text{ où } \omega \in \mathbb{R}_+. \end{array}}$$

EXERCICE 4

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que $A \cap B = \varnothing$ si, et seulement si, $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B),\ \exists X \in \mathscr{P}(E),\ (X \cap A = X_1 \text{ et } X \cap B = X_2)$.

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \cap B = \varnothing$.
Soient $X_1 \in \mathscr{P}(A)$ et $X_2 \in \mathscr{P}(B)$.
Posons $X = X_1 \cup X_2$.
Alors

$$X \cap A = (X_1 \cup X_2) \cap A = \underbrace{(X_1 \cap A)}_{\substack{=X_1 \\ \text{car } X_1 \subset A}} \cup \underbrace{(X_2 \cap A)}_{\substack{=\varnothing \\ \text{car } X_2 \subset B \subset \overline{A}}} = X_1 \cup \varnothing = X_1$$

et

$$X \cap B = (X_1 \cup X_2) \cap B = \underbrace{(X_1 \cap B)}_{\substack{=\varnothing \\ \text{car } X_1 \subset A \subset \overline{B}}} \cup \underbrace{(X_2 \cap B)}_{\substack{=X_2 \\ \text{car } X_2 \subset B}} = \varnothing \cup X_2 = X_2.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B),\ \exists X \in \mathscr{P}(E),\ (X \cap A = X_1 \text{ et } X \cap B = X_2)$.
Prenons $X_1 = A$ et $X_2 = \varnothing$.
Il existe alors $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$ et $X \cap B = \varnothing$.
L'égalité $X \cap A = A$ dit que $A \subset X$ et l'égalité $X \cap B = \varnothing$ dit que $X \subset \overline{B}$.
On a donc $A \subset X \subset \overline{B}$, ce qui prouve que $A \cap B = \varnothing$.

En conclusion,

$$\boxed{\left(A \cap B = \varnothing\right) \iff \left(\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B),\quad \exists X \in \mathscr{P}(E),\quad \begin{cases} X \cap A = X_1 \\ X \cap B = X_2 \end{cases}\right).}$$