

Corr. 1 Dipôle tournant

1. Les expressions données dans l'énoncé pour le champ électromagnétique correspondent au rayonnement dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique et de la zone de rayonnement : on doit avoir la hiérarchie $a \ll \lambda \ll r$ (où a est la taille caractéristique de la distribution dipolaire et λ est la longueur d'onde caractéristique associée aux ondes générées).

On a $\vec{p}^* = p_0 [\vec{u}_x \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$

avec $\vec{u}_x = \vec{u} \sin \theta + \vec{v} \cos \theta$

On déduit la dérivée seconde

$$\ddot{\vec{p}}^* = -\omega^2 p_0 [(\vec{u} \sin \theta + \vec{v} \cos \theta) \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$$

On calcule alors les produits vectoriels nécessaires :

$$\ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0 [-\vec{u}_y \cos \theta \cos \omega t^* + \vec{v} \sin \omega t^*]$$

$$\text{et } \ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u} \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0 [-\vec{v} \cos \theta \cos \omega t^* - \vec{u}_y \sin \omega t^*]$$

En définitive, on tire les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} [\vec{v} \cos \theta \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$$

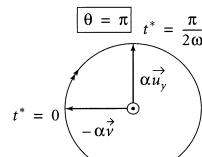
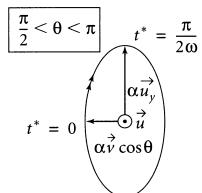
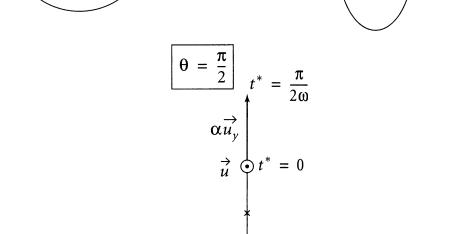
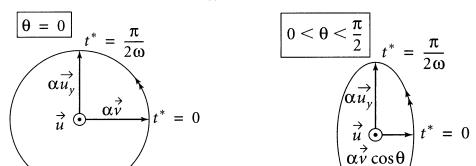
$$\text{et } \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} [-\vec{v} \sin \omega t^* + \vec{u}_y \cos \theta \cos \omega t^*]$$

On remarque que les champs ont, en M, la structure vectorielle **locale** d'une onde plane progressive monochromatique dont la pulsation est ω , la vitesse est c et de vecteur unitaire de propagation \vec{u} , c'est-à-dire

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

La notion de polarisation évoquée à la question suivante prend donc tout son sens.

2. On dessine la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} dans le plan (\vec{v}, \vec{u}_y) perpendiculaire à la direction de propagation (en posant $\alpha = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r}$).



Les polarisations recherchées sont par conséquent :

- circulaire gauche pour $\theta = 0$;
- elliptique gauche pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$;
- rectiligne pour $\theta = \frac{\pi}{2}$;
- elliptique droite pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$;
- circulaire droite pour $\theta = \pi$.

On peut remarquer que l'extrémité du vecteur champ électrique décrit la même courbe (à une homothétie près), et dans le même sens, que le vecteur \vec{p} vu en perspective depuis le point M : la **polarisation observée donne une vue en perspective du mouvement du dipôle** !

Ce résultat est logique le champ électrique obtenu est la superposition des champs électriques rayonnés par les dipôles $p_x \vec{u}_x$ et $p_y \vec{u}_y$ (linéarité des équations de Maxwell).

3. Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en M à l'instant t vaut (en utilisant la structure locale de l'onde) :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{u}$$

soit $\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c r^2} (\cos^2 \theta \cos^2 \omega t^* + \sin^2 \omega t^*) \vec{u}$

Sa valeur moyenne dans le temps, compte tenu des égalités $\langle \cos^2 \omega t^* \rangle = \langle \sin^2 \omega t^* \rangle = 1/2$, est

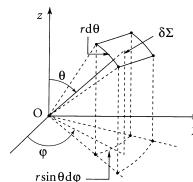
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c r^2} [\cos^2 \theta + 1] \vec{u}$$

Calculons maintenant la puissance moyenne qui traverse un élément de surface $\delta\Sigma$ (orthogonal à \vec{u} et orienté par \vec{u}) au voisinage de M :

$$d\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u} \cdot \delta\Sigma$$

$$d\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c r^2} [\cos^2 \theta + 1] \delta\Sigma$$

On aurait obtenu le même résultat pour un point M appartenant au plan Ox'z ($\phi = \text{Cte}$) ; il suffit alors de changer dans les calculs précédents ωt^* par $\omega t^* - \phi$, ce qui ne modifie pas les résultats après la moyenne temporelle.



Sachant que $\delta\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, on intègre $d\langle \mathcal{P} \rangle$ pour θ variant de 0 à π et ϕ variant de 0 à 2π (coordonnées sphériques !), et on trouve

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \frac{16\pi}{3}$$

soit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6\pi c}$$

On retrouve la proportionnalité bien connue **signalée en cours** avec ω^4 (diffusion atomique de Rayleigh).

Corr. 2 Interprétation classique de l'effet ZEEMAN

1. Le noyau a une masse très supérieure à celle de l'électron et est supposé immobile en O du repère (Oxyz) fixe dans le référentiel galiléen d'étude. Le théorème de la résultante dynamique appliquée à l'électron donne

$$\ddot{\vec{m}} = -e \vec{r} \wedge \vec{B}_0 - k \vec{r}$$

On introduit les pulsations propre et cyclotron $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\omega_c = e B_0 / m$, d'où les équations projetées

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \omega_c \dot{y} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y + \omega_c \dot{x} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z \quad (3)$$

L'équation (3) montre que le mouvement projeté sur (Oz) est sinusoïdal à la pulsation ω_0 :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$$

Pour résoudre les équations couplées restantes, on les dé-couple en posant $u = x + iy$ (**méthode classique !**) et en faisant (1) + i(2) :

$$\ddot{u} - i\omega_c \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Cette équation différentielle complexe admet pour racines de son équation caractéristique associée

$$r_{\pm} = \frac{i}{2} \left(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2} \right) \simeq \frac{i}{2} (\omega_c \pm 2\omega_0)$$

car $\omega_0 \gg \omega_c$. On en déduit la solution générale

$$u(t) = A e^{i(\omega_0 + \omega_c/2)t} + B e^{-i(\omega_0 - \omega_c/2)t}$$

cercle en sens trigono cercle en sens inverse

Le cercle en sens trigonométrique est parcouru à la pulsation $\omega_0 + \omega_c/2$, tandis que le cercle parcouru en sens inverse l'est à la pulsation $\omega_0 - \omega_c/2$. Finalement,

$$v'_0 = v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{\omega_c}{4\pi}$$

2. Soit un observateur dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda_0$. Le moment dipolaire $\vec{p} = -e \vec{r}$ est décomposable (« comme » \vec{r}') en la somme de trois moments dipolaires. Le champ électrique de l'onde perçue par l'observateur est la somme des 3 champs électriques rayonnés correspondants. Seulement, si l'observateur est sur l'axe (Oz), il ne perçoit aucune onde due au mouvement rectiligne sinusoïdal de

fréquence ω_0 selon (Oz) ! Il ne perçoit que deux opposées dues aux deux mouvements circulaires. Si $z > 0$, l'oeppmpc correspond à $\omega_0 + \Delta v$ et l'oeppmpcd à $\omega_0 - \Delta v$. Si $z < 0$, inverser les fréquences...

3. Si l'observateur est maintenant dans le plan (Oxz), il perçoit 3 oeeppmr : l'une de fréquence ω_0 avec \vec{E} suivant \vec{e}_z , et les deux autres de fréquences $\omega_0 \pm \Delta v$, polarisées orthogonalement à la précédente.

4. La présence d'un champ magnétique statique modifie l'état de polarisation de la lumière émise et sa fréquence. On peut mesurer ω_0 et Δv pour des étoiles en sélectionnant des polarisations de la lumière qu'elle émet et en déduire ainsi la valeur du champ magnétique existant à leur voisinage. Inutile d'envoyer un teslamètre... Notez que les champs magnétiques ainsi mesurés peuvent être très élevés. On sait par exemple que le champ magnétique pour une étoile à neutrons peut-être supérieur à 10^{10} T (valeur inimaginable sur Terre, où le champ maximal réalisé à ce jour est de l'ordre de 200 T en impulsionnel!).

Corr. 3 Rayonnement d'une antenne demi-onde

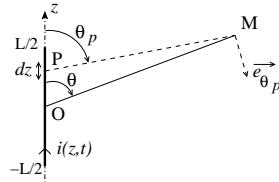
Il s'agit d'un exercice peu simple mais archi-classique aux concours !

1. Le courant $i(z,t) = I_0 \cos \frac{\pi z}{L} \cos \omega t$ représente une onde stationnaire sinusoïdale vérifiant les conditions aux limites $i(\pm L/2, t) = 0$. Ainsi,

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

Remarque : une antenne émet des ondes de longueur d'onde λ de l'ordre de sa longueur L (environ le mètre). Cela correspond à des signaux de fréquence $f = c/\lambda \simeq 100$ MHz, d'où l'intérêt des techniques de modulation en télécommunication pour transposer les spectres des signaux à transmettre autour de cette fréquence d'accord de l'antenne.

2. Dans ces conditions, on ne peut pas supposer $\lambda \gg L$! Ainsi, on ne peut négliger les retards propagatifs sur l'antenne entière et il faut la découper en morceaux de longueur $dz \ll \lambda$.



D'après l'énoncé, un élément dz situé en P est équivalent à un dipôle d' \vec{p} tel que

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{\partial i}{\partial t} dz \vec{e}_z$$

Cet élément crée, en utilisant l'énoncé,

$$\vec{dE} = c \vec{dB} \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\vec{e}_r \wedge \left(d\ddot{\vec{p}} \right)_{t-\text{PM}/c} \right] \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{dE} = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{4\pi} \frac{\sin \theta_p}{PM} \cos \frac{\pi z}{L} \sin \left(\omega t - \frac{\omega PM}{c} \right) dz \vec{e}_{\theta_p}$$

On peut simplifier cette expression car $r \gg L$, d'où $\theta_p \simeq \theta$ et $\vec{e}_{\theta_p} \simeq \vec{e}_\theta$ et $PM \simeq r - z \cos \theta$. Par conséquent,

$$\vec{dE} = j \frac{\mu_0 I_0 \omega}{4\pi} \frac{\sin \theta \cos \frac{\pi z}{L}}{r} e^{j\omega(t-r/c)} e^{j\omega \cos \theta / c} dz \vec{e}_\theta$$

On revient en réel en prenant la partie réelle de cette expression.

3. On intègre les champs \vec{dE} créés par chaque morceau de longueur dz d'antenne.

$$\vec{E} = \int_{z=-L/2}^{L/2} \vec{dE}$$

L'intégration est faisable simplement en gardant des vecteurs car \vec{e}_θ reste fixe au cours de l'intégration. De plus, on sait que

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{\pi z}{L} e^{j \frac{\omega z}{c} \cos \theta} dz &= \int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{\omega z}{c} e^{j \frac{\omega z}{c} \cos \theta} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [e^{j \frac{\omega z}{c} (\cos \theta + 1)} + e^{j \frac{\omega z}{c} (\cos \theta - 1)}] dz \end{aligned}$$

$$\text{soit } \int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{\pi z}{L} e^{j \frac{\omega z}{c} \cos \theta} dz = \frac{2L}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

Par conséquent, on trouve

$$\vec{E} = j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \exp(j\omega(t-r/c)) \vec{e}_\theta$$

$$\text{ie } \vec{E} = -\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \sin(\omega(t-r/c)) \vec{e}_\theta$$

4. L'onde rayonnée par l'élément de longueur dz suivant \vec{e}_r a une structure locale d'onde plane et, par intégration (\vec{e}_r restant fixe), il en est de même pour l'onde totale rayonnée, c'est-à-dire

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

On en déduit que le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_r$$

Sa moyenne temporelle se calcule en sachant que $\langle \sin^2(\omega t + C) \rangle = 1/2$ sur une période, donc

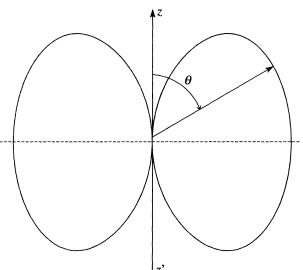
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = K f(\theta) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{avec } K = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \quad \text{et} \quad f(\theta) = \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2$$

5. Le diagramme de rayonnement est la représentation de la puissance moyenne rayonnée par unité d'angle solide suivant la direction (θ, φ) :

$$\left\langle \frac{d\Pi}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \rangle}{d\Omega} = \langle \Pi \rangle r^2 = K f(\theta)$$

Ainsi, on doit représenter dans un plan méridien la courbe polaire $\rho = K f(\theta)$ (attention à la position de θ !):



On observe un **rayonnement maximal dans une direction perpendiculaire à l'antenne** ($\theta = \pi/2$) et **nul dans la direction de l'antenne**. Voilà pourquoi on oriente les antennes verticalement en général (attention, on peut jouer sur la forme des antennes et alors, le diagramme de rayonnement est différent ; la directivité change...).

6. La puissance totale moyenne rayonnée est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{esp.} K f(\theta) d\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} K f(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

L'intégrale sur θ ne peut être calculée que numériquement et on trouve

$$\langle \mathcal{P} \rangle \simeq 1,22 \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi}$$

d'où

$$R = 1,22 \frac{\mu_0 c}{2\pi} = 73 \Omega$$

Aussi

$$I_0 = 5,2 \text{ A}$$

La valeur proche de 75Ω de la résistance équivalente de l'antenne ne doit pas surprendre. Ceux qui bricolent un peu autour des prises et câbles d'antennes savent que l'on doit travailler avec des impédances proches de 75Ω pour les câbles (adaptation d'impédance...).

Corr. 4 Incidence de Brewster

Do it yourself !

Corr. 5 Durée de vie d'un état excité d'un atome

1. Il s'agit d'un mouvement à force centrale et l'application du principe fondamental de la dynamique (ou d'un théorème énergétique) conduit à la relation

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R}}$$

$$\text{puis } a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^2} = 9,10^{22} \text{ m.s}^{-2}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{e^2}} = 1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$\text{et } \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -13,6 \text{ eV}$$

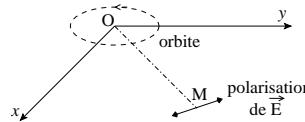
L'énergie correspond à celle du niveau $1s$ de l'atome d'hydrogène. De plus, on a numériquement $v = c/137 \ll c$ donc l'électron est non relativiste.

2. On sait que le champ de rayonnement possède une structure **locale** d'onde plane donc, avec $q = -e$,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{[\vec{e}_r \wedge \vec{d}(t-r/c)] \wedge \vec{e}_r}{r}$$

La polarisation de l'onde émise est donnée par la courbe décrite par la pointe du vecteur électrique \vec{E} dans un plan d'onde local et **dépend ici d'où l'on regarde**.

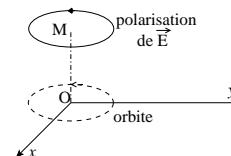
Si l'on regarde en étant dans le plan de l'orbite de l'électron, \vec{e}_r et \vec{d} sont dans le plan (xOy) donc on trouve \vec{E} dans ce plan et on voit une **polarisation rectiligne dans le plan de l'orbite**.



Ce résultat est logique car on peut décomposer le mouvement circulaire de l'électron en une superposition (linéarité !) de deux mouvements rectilignes oscillants orthogonaux déphasés de $\pi/2$. On voit le champ créé par le mouvement oscillant orthogonal à (OM) ; on obtient bien une onde polarisée dans la direction de ce mouvement oscillant (l'autre composante étant suivant (OM), elle ne rayonne pas vers l'observateur !).

Si l'on regarde en étant sur l'axe de révolution, $\vec{e}_r = \vec{e}_z$

(par exemple) et \vec{d} tourne dans (xOy). Ainsi, \vec{E} tourne parallèlement à (xOy) et la polarisation est **circulaire** (ce qui « reflète » le mouvement circulaire de l'électron vu de dessus ; c'est différent du cas précédent où l'on « voit » l'orbite par sa tranche, donc un mouvement d'oscillation rectiligne générant un polarisation rectiligne).



3. Le vecteur de Poynting est, en posant $\theta = (\vec{e}_r; \vec{d})$ l'angle entre les directions d'observation et d'accélération,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

La puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est alors

$$\mathcal{P} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r \cdot d\vec{S}$$

$$\text{soit } \mathcal{P} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Or, $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$. Par conséquent,

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2}{3c^3}$$

On retrouve la formule de Larmor. La puissance rayonnée est indépendante de la distance r (conservation de l'énergie rayon-

née dans le vide) et elle varie avec le carré de l'accélération de la charge.

4. L'électron perd, d'après ce qui précède, de l'énergie par rayonnement : son énergie mécanique diminue et, cette dernière étant en $-1/R$, le rayon de la trajectoire électronique doit décroître. Il est donc impossible avec un modèle purement classique d'expliquer la stabilité des atomes : il s'agit-là de l'une des difficultés rencontrées par les physiciens au début du XX^e siècle et qui a provoqué la construction de la mécanique quantique.

On peut évaluer le rapport de l'énergie rayonnée pour une révolution sur l'énergie mécanique d'une orbite :

$$\frac{\mathcal{P} T}{\mathcal{E}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2 R} \right)^{3/2} \sim 10^{-6}$$

La chute de l'électron est relativement lente, mais certaine dans ce modèle classique... On précise sa durée dans la question suivante.

5. La variation d'énergie mécanique de l'électron est due à la puissance rayonnée, soit

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}$$

$$\text{donc } \frac{dR}{dt} = \frac{-4}{3m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^2}$$

$$\text{d'où } R(t)^3 = R(0)^3 - \frac{4}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 t$$

$$\text{Alors } \mathcal{E}(t)^{-3} = \mathcal{E}(0)^{-3} + \frac{32t}{m^2 c^3} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)$$

$$\text{d'où } \tau = \frac{m^2 c^3}{32} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} [\mathcal{E}_1^{-3} - \mathcal{E}_2^{-3}] = 10^{-9} \text{ s}$$

Ce calcul simpliste de durée de vie donne un ordre de grandeur raisonnable. En fait, lorsque l'énoncé donne l'expression \mathcal{E}_n des niveaux d'énergie, il introduit de la mécanique quantique et le modèle étudié devient **semi-classique**.

Corr. 6 Rayonnement d'un dipôle magnétique oscillant

On procède comme en cours, mais pour un dipôle oscillant **magnétique**...

1. En utilisant le système de coordonnées sphériques, on a, dans la zone de rayonnement ($\lambda \ll r$, soit $1/r \ll \omega/c$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} j \omega M_0 e^{j\omega(t-r/c)} \frac{\sin \theta}{r} \vec{e}_\phi$$

et, comme $V = 0$, les calculs donnent à l'ordre le plus bas en $1/r$

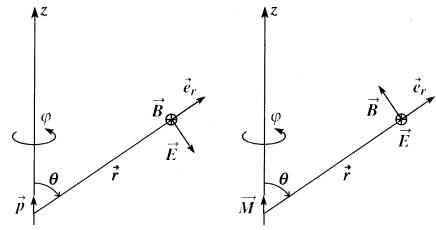
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\omega^2 M_0 \sin \theta}{r} e^{j\omega(t-r/c)} \vec{e}_\phi$$

$$\text{et } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\omega^2 M_0 \sin \theta}{r} e^{j\omega(t-r/c)} \vec{e}_\theta$$

Ce champ possède **localement** une structure d'onde plane qui se propage radialement puisque

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r$$

Les orientations des champs \vec{E} et \vec{B} sont interverties par rapport au cas du dipôle **électrique** rayonnant :



2. En complexes, on peut calculer la moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3} \frac{\omega^4 M_0^2 \sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r$$

d'où la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle \Pi \rangle r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{\mu_0 \omega^4 M_0^2}{12\pi c^3}}$$

On remarque que comme pour le dipôle électrique rayonnant, la puissance moyenne est en carré de l'accélération (soit en ω^4) et est indépendante de la distance r (conservation de l'énergie rayonnée dans le vide).

3. $p_0 \simeq ea$ et $M_0 = SI \simeq \pi a^2 e / T = eva/2$ (car $vT = 2\pi a$). De plus, la puissance moyenne rayonnée par un dipôle électrique est

$$\mathcal{P}'_{\text{moy}} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{\mathcal{P}'_{\text{moy}}} \simeq \frac{v^2}{4c^2} \ll 1}$$

Le rayonnement électrique domine largement devant le rayonnement magnétique, ce qui explique son étude privilégiée en cours.