

# VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

♦ **Exercice 1.** [o]

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 3; 6 \rrbracket)$ . On pose  $Y = 2X^2 + 3$ . Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ ; l'espérance et la variance de  $Y$  et enfin la loi de  $Y$ .

On a

$$E(X) = 3 \times (1/4) + 4 \times (1/4) + 5 \times (1/4) + 6 \times (1/4) = 9/2$$

et

$$E(X^2) = 3^2 \times (1/4) + 4^2 \times (1/4) + 5^2 \times (1/4) + 6^2 \times (1/4) = 43/2$$

donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 43/2 - (9/2)^2 = 5/4.$$

On a

$$E(Y) = E(2X^2 + 3) = 2E(X^2) + 3 = 2 \times 43/2 + 3 = 45$$

et

$$V(Y) = V(2X^2 + 3) = 4V(X^2) = 4E(X^4) - 4E(X^2)^2 = 409$$

car

$$E(X^4) = 3^4 \times (1/4) + 4^4 \times (1/4) + 5^4 \times (1/4) + 6^4 \times (1/4) = 1129/2.$$

On a

$i$	21	35	53	75
$P(Y = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

♦ **Exercice 2.** [★]

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans une urne contenant initialement  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note  $k$  le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec  $k$  boules supplémentaires portant toutes le numéro  $k$  et l'on effectue alors un second tirage.

On note  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premiers et seconds tirages.

1. Donner la loi de  $X_1$ , son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de  $X_2$  en fonction de la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  et démontrer que l'on a  $2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n$ .

1. On a

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket), \quad E(X_1) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

2. Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . D'après la formule des probabilités totales appliquée pour l'événement  $(X_2 = j)$  à

travers le s.c.e.  $((X_1 = k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ , on a

$$\begin{aligned}
P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^n P(X_1 = k)P(X_2 = j | X_1 = k) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n P(X_1 = k)P(X_2 = j | X_1 = k) + P(X_1 = jk)P(X_2 = j | X_1 = j) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} \frac{1+j}{n+j} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{j}{n(n+j)},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X_2 = j) = \frac{S_n}{n} + \frac{j}{n(n+j)}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{j=1}^n j P(X_2 = j) \\
&= \sum_{j=1}^n j \left( \frac{S_n}{n} + \frac{j}{n(n+j)} \right) \\
&= \frac{S_n}{n} \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n(n+j)} \\
&= \frac{S_n}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j+n)(j-n)+n^2}{n+j} \\
&= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( j - n + \frac{n^2}{n+j} \right) \\
&= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1 + n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \\
&= \frac{n+1}{2} S_n + \frac{n+1}{2} - n + n S_n \\
&= \frac{3n+1}{2} S_n + \frac{1-n}{2},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E(X_2) = \frac{3n+1}{2} S_n + \frac{1-n}{2}}.$$

3. *Question bonus : Donner un équivalent de  $E(X_2)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*

Le théorème sur les sommes de Riemann nous dit que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+j/n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,$$

donc

$$\boxed{E(X_2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3 \ln 2 - 1}{2} n.}$$

### ♦ Exercice 3. [★]

Une urne contient  $n$  jetons numérotées de 1 à  $n$ . On tire une poignée aléatoire de jetons de cette urne. On note  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés et  $S$  la somme des numéros obtenus. On suppose que  $N$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$ .

1. Préciser  $S(\Omega)$ .
2. Soit  $X_k$  la variable aléatoire égale à 1 si le jeton numéro  $k$  est dans la poignée et 0 sinon.  
Démontrer que  $X_k$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .
3. Calculer  $E(S)$ .

1. On a

$$S(\Omega) = \llbracket 0; n(n+1)/2 \rrbracket.$$

2. On a  $X_k(\Omega) = \{0; 1\}$  et

$$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= \sum_{j=0}^n P(N = j)P(X_k = 1 \mid N = j) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{1 \times \binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j}} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

formule des probas totales  
avec le s.c.e.  $((N=j))_{j \in \llbracket 0; n \rrbracket}$

donc

$$X_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2.$$

3. On a

$$E(S) = E(1X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) = 1.E(X_1) + 2.E(X_2) + \dots + nE(X_n) = \frac{1}{2}(1+2+\dots+n),$$

donc

$$E(S) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

#### ♦ Exercice 4. [○]

Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée  $p$  avec  $p \in ]0; 1[$ .

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissement. Établir la loi de  $X$ .
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissement. Établir la loi de  $Y$ .
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de  $p$ , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

1. La variable  $X$  compte le nombre de raquettes à l'atterrissement attachées, de façon indépendante, aux 4 pattes, avec à chaque fois une probabilité de garder la raquette égale à  $1-p$ , donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(4; 1-p).$$

2. La variable  $X$  compte le nombre de raquettes à l'atterrissement attachées, de façon indépendante, aux 2 pattes, avec à chaque fois une probabilité de garder la raquette égale à  $1-p$ , donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(2; 1-p).$$

3. On veut comparer  $P(X \leq 1)$  et  $P(Y = 0)$ . On a

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = p^4 + 4(1-p)p^3 = p^3(4 - 3p)$$

et

$$P(Y = 0) = p^2,$$

donc

$$P(X \leq 1) - P(Y = 0) = p^2(-3p^2 + 4p - 1).$$

Or

$$-3p^2 + 4p - 1 \geq 0 \iff p \in \left[\frac{1}{3}; 1\right],$$

donc

si  $p \geq 1/3$ , mieux vaut avoir 2 raquettes à grands tamis  
et si  $p \leq 1/3$ , mieux vaut avoir 4 raquettes à petits tamis.

♦ **Exercice 5.** [★]

Soient  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ . On considère  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2n; p)$  et l'on pose  $Y = \lfloor X/2 \rfloor$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$ .

2. a) Soit  $n \geq 1$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k}$ .  
b) Déterminer  $E(Y)$ .

1. On a  $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$  et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P((X = 2k) \cup (X = 2k + 1)) = P(X = 2k) + P(X = 2k + 1)$$

donc

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}.}$$

2. a) On constate que

$$\begin{aligned} T_n + S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} + \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} \\ &= (p+q)^{2n} \quad \text{binôme} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} - \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} (-p)^\ell q^{2n-\ell} \\ &= (-p+q)^{2n} \quad \text{binôme} \\ &= (1-2p)^{2n}. \end{aligned}$$

Comme  $S_n = ((T_n + S_n) - (T_n - S_n))/2$ , il vient

$$\boxed{S_n = \frac{1 - (1-2p)^{2n}}{2}}.$$

b) On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^n \left( k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + k \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1}}_{=S_n} \\ &= E(X) - \frac{1}{2} S_n \\ &= np - \frac{1}{2} S_n, \end{aligned}$$

donc

$$E(Y) = np - \frac{1 - (1 - 2p)^{2n}}{4}.$$

♦ **Exercice 6.** [o] (Marche aléatoire)

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de +1 avec la probabilité  $p$  (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité  $q = 1 - p$  (on parle de « pas vers la gauche »). On note  $X_n$  l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant  $n$ .

1. Donner  $X_n(\Omega)$ .
2. On note  $D_n$  le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant  $n$ . En vous aidant de  $D_n$ , déterminer la loi de  $X_n$ .
3. Déterminer l'espérance et la variance de  $X_n$ .
4. Pour quelle valeur de  $p$  la variable  $X_n$  est-elle centrée ? Interpréter.

1. On a

$$X_n(\Omega) = \{k \in \llbracket -n; n \rrbracket : k \text{ et } n \text{ sont de même parité}\} = \{n; n+2; n+4; \dots; n-4; n-2; n\}.$$

2. La variable  $D_n$  compte le nombre de succès (faire un pas vers la droite) lors de  $n$  mouvements indépendants, avec à chaque fois une probabilité de succès égale à  $p$ , donc

$$D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p).$$

Le mobile effectue  $D_n$  pas vers la droite qui augmentent chacun l'abscisse de 1 et  $n - D_n$  pas vers la gauche qui diminuent chacun l'abscisse de 1, donc

$$X_n = D_n \times (+1) + (n - D_n) \times (-1),$$

c'est-à-dire

$$X_n = 2D_n - n.$$

Pour  $k \in X_n(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(2D_n - n = k) \\ &= P\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) \\ &= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \{k \in \llbracket -n; n \rrbracket : k \text{ et } n \text{ sont de même parité}\}, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}.$$

3. On a

$$E(X_n) = 2E(D_n) - n = 2np - n$$

donc

$$E(X_n) = n(2p - 1).$$

Par ailleurs, on a

$$V(X_n) = 4V(D_n)$$

d'où

$$V(X_n) = 4npq.$$

4. La variable  $X_n$  est centrée si, et seulement si,  $p = q$ , c'est-à-dire  $p = 1/2$ . Autrement dit,

si le mobile se déplace latéralement de manière équilibré, sa position moyenne est l'origine.

♦ **Exercice 7.** [o] (La règle du trois)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ .

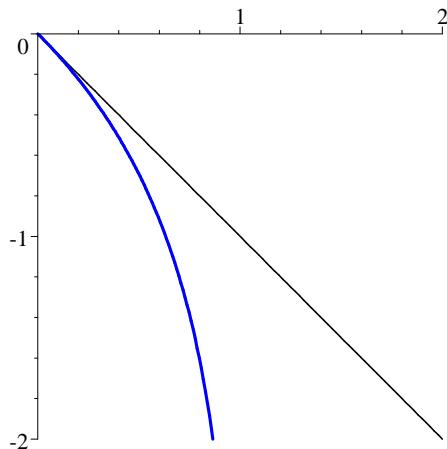
1. Démontrer que, sous l'hypothèse  $p > 3/n$ , on a  $(1 - p)^n < e^{-3}$ .
2. En analyse statistique des essais médicaux, la « règle du trois » énonce que : « si parmi  $n$  tentatives, aucune n'est réussie, alors on peut affirmer, avec seulement 5 % de risque de se tromper, que la probabilité de réussite  $p$  de chaque tentative est inférieure à  $3/n$  ».

Discuter la validité de cette règle.

*Donnée numérique :*  $e^{-3} = 4,98 \times 10^{-2}$

1. On a  $(1 - p)^n = e^{n \ln(1 - p)}$ , donc l'inégalité demandée est équivalente à  $\ln(1 - p) < -3/n$ .

Sur  $[0; 1[$ , la fonction  $x \mapsto \ln(1 - x)$  admet un graphe de la forme



ce qui permet de voir et d'affirmer, grâce à la concavité de cette fonction, que

$$\forall x \in [0; 1[, \quad \ln(1 - x) \leq -x.$$

Il s'ensuit que

$$\ln(1 - p) \leq -p < -\frac{3}{n},$$

c'est-à-dire

$$n \ln(1 - p) < -3.$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$(1 - p)^n < e^{-3}.$$

2. Notons  $X$  le nombre de succès parmi les  $n$  tentatives. Si l'on suppose que les tentatives sont indépendantes (ce qu'assure un bon protocole expérimental), la variable  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Le résultat de la question précédente nous dit alors que, sous l'hypothèse  $p > 3/n$ , on a

$$P(X = 0) = (1 - p)^n < e^{-3} < 5\%.$$

Dès lors, si le résultat de l'expérience est l'événement  $(X = 0)$ , c'est-à-dire si les  $n$  tentatives sont des échecs, cela signifie qu'il y a moins de 5 % de chance que cela se soit produit sous l'hypothèse  $p > 3/n$  et donc qu'il y a 95 % de chance que  $p \leq 3/n$ . En conclusion,

la « règle du trois » est bien valide !

♦ **Exercice 8.** [★]

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

1. On choisit un sous-ensemble  $A$  au hasard (tous les choix étant équiprobables). Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X = \text{card}(A)$ .
2. On choisit au hasard un second sous-ensemble  $B$  de  $E$ , indépendamment de  $A$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X = \text{card}(A \cap B)$ .

1. Deux solutions pour le prix d'une :

► On pose  $\Omega = \mathcal{P}(E)$ . On a  $\text{card}(\Omega) = 2^n$ . On utilise la loi uniforme sur  $\Omega$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $(X = k)$  est l'événement « obtenir une partie de cardinal  $n$  ». On a clairement  $\text{card}(X = k) = \binom{n}{k}$ .

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

En conclusion,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right).$$

► On égraine les éléments de  $E$  un par un en décidant pour chacun si on le retient dans  $A$ , avec probabilité  $1/2$ , ou si on le rejète (dans  $\bar{A}$ ), avec probabilité  $1/2$ . La variable  $X$  compte alors le nombre de succès dans une série de  $n$  expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec, à chaque fois, une probabilité de succès égale à  $1/2$ . On reconnaît un schéma binomial, donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right).$$

2. On égraine les éléments de  $E$  un par un, en décidant pour chacun si on le retient dans  $A$ , avec probabilité  $1/2$ , ou si on le rejète (dans  $\bar{A}$ ), avec probabilité  $1/2$  et si on le retient dans  $B$ , avec probabilité  $1/2$ , ou si on le rejète (dans  $\bar{B}$ ), avec probabilité  $1/2$ . La variable  $Y$  compte alors le nombre de succès dans une série de  $n$  expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec, à chaque fois, une probabilité de succès égale à  $1/4$ . On reconnaît un schéma binomial, donc

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{4}\right).$$

♦ **Exercice 9.** [★]

Deux urnes contiennent chacune  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$ . On tire simultanément  $n$  boules dans chaque urne et on note  $X$  le nombre de numéros en commun dans les deux tirages.

1. Pour tout  $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ , on note  $T_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule de numéro  $i$  a été tirée dans les deux urnes et qui vaut 0 sinon. Déterminer la loi de  $T_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$  et en déduire  $E(X)$ .
2. Démontrer que  $X$  suit une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres.

1. Soit  $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ . On a  $T_i(\Omega) = \{0; 1\}$  donc  $T_i$  suit une loi de Bernoulli.

Pour déterminer le nombre de bi-tirages avec le numéro  $i$  en commun, on choisit  $i$  dans chacune des urnes : 1 choix ; puis  $n - 1$  numéros parmi les  $2n - 1$  numéros (sauf  $i$ ) de la première urne :  $\binom{2n - 1}{n - 1}$  choix ; puis  $n - 1$  numéros (sauf  $i$ ) dans la seconde urne :  $\binom{2n - 1}{n - 1}$  choix. Donc

$$\text{card}(T_i = 1) = 1 \times \binom{2n - 1}{n - 1} \times \binom{2n - 1}{n - 1},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P(T_i = 1) &= \frac{\binom{2n - 1}{n - 1} \times \binom{2n - 1}{n - 1}}{\binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{\binom{2n - 1}{n - 1} \times \binom{2n - 1}{n - 1}}{\frac{2n}{n} \binom{2n - 1}{n - 1} \times \frac{2n}{n} \binom{2n - 1}{n - 1}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, T_i \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right).}$$

On constate que  $X = T_1 + \dots + T_{2n}$ , donc

$$E(X) = E(T_1) + \dots + E(T_{2n}) = \underbrace{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{2n \text{ fois}} = \frac{2n}{4},$$

ce qui donne

$$\boxed{E(X) = \frac{n}{2}.}$$

2. Considérons que le tirage des  $n$  boules a déjà été effectué dans la première urne. Lors du tirage dans la seconde urne, la variable  $X$  compte le nombre de succès (« tirer un numéro en commun avec le tirage dans la première urne ») lors d'un tirage sans remise de  $n$  boules dans une urne contenant  $2n$  boules avec, au départ, une probabilité de succès égale à  $n/2n$ . On reconnaît un schéma binomial de paramètre  $2n$ ,  $n$  et  $n/2n$ , c'est-à-dire

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(2n; n; \frac{1}{2}\right).}$$

♦ **Exercice 10.** [★] (Loi géométrique tronquée)

Legolas décoche  $n$  flèches sur un troll. Chacune a une probabilité  $p \in ]0; 1[$  d'atteindre la cible. On note  $X$  le numéro de la première flèche qui fait mouche (avec  $X = 0$  si le troll survit). Déterminer la loi de  $X$  et calculer son espérance.

On a  $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $T_j$  l'événement « la  $j$ -ème flèche trucide le troll ». Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k) \\ &= P(\overline{T_1})P(\overline{T_2} \mid \overline{T_1}) \cdots P(\overline{T_{k-1}} \mid \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-2}})P(T_k \mid \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}) \\ &= q^{k-1}p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{n-1}} \cap \overline{T_n}) \\ &= P(\overline{T_1})P(\overline{T_2} \mid \overline{T_1}) \cdots P(\overline{T_n} \mid \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{n-1}}) \\ &= q^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{si } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \\ q^n & \text{si } k = 0. \end{cases}}$$

On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n kq^{k-1}p \\ &= p \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \frac{d}{dx} \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \left( \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \left( \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} \\ &= p \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$E(X) = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{p}.$$

♦ **Exercice 11.** [★]

1. Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $a < b$ . On considère  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket$ . Démontrer que

$$E(X) = a + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k).$$

2. On dispose de  $n$  paires de chaussettes mélangées dans un tiroir. On tire les chaussettes au hasard une à une sans remise. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour reconstituer une première paire de chaussettes.

Déterminer  $P(X > k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et calculer l'espérance de  $X$ .

$$\text{Donnée : } \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$$

1. Pour tout  $k \in \llbracket a; b \rrbracket$ , on a  $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$ , donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=a}^b k P(X = k) \\ &= \sum_{k=a}^b k (P(X > k - 1) - P(X > k)) \\ &= \text{téléscopage} \\ &= \underbrace{a P(X > a - 1)}_{=1} + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k) - \underbrace{b P(X > b)}_{=0}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E(X) = a + \sum_{k=a}^{b-1} P(X > k).$$

2. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket.$$

Notons  $\Omega'$  l'ensemble des tirages de  $k$  chaussettes parmi  $2n$  chaussettes, ce qui donne

$$\text{card } \Omega' = \binom{2n}{k}.$$

Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Pour dénombrer le sous-ensemble  $A$  des tirages de  $k$  chaussettes parmi  $2n$  où aucune paire n'est constituée, on choisit  $k$  paires, ce qui laisse  $\binom{n}{k}$  choix, puis on choisit une chaussette dans chacune de ces paires, ce qui laisse  $2^k$  choix. On en déduit que

$$\text{card } A = \binom{n}{k} 2^k.$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X > k) = \frac{\binom{n}{k} 2^k}{\binom{2n}{k}}.$$

Dès lors, d'après la première question, on a

$$\begin{aligned}
E(X) &= 2 + \sum_{k=2}^n P(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^n P(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{2^k \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} \\
&= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^n 2^k \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{n}} 2^{2n},
\end{aligned}$$

donc

$$E(X) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}.$$

♦ **Exercice 12.** [★]

On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $Y_n$  le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du  $n$ -ème tirage.

1. Déterminer  $Y_1$ .
2. Soit  $n \geq 2$ . Démontrer que, pour  $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ , on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

3. Démontrer que la suite  $(E(Y_n))_{n \geq 1}$  est géométrique et en déduire l'expression de  $E(Y_n)$  pour tout  $n \geq 1$ .

1. À l'issue du premier tirage, un seul numéro est sorti donc il reste  $N-1$  numéros non encore sortis, ce qui signifie que

$$Y_1 = N-1.$$

2. Après  $n$  tirages, le nombre minimal de numéro(s) sorti(s) est 1 (dans le cas où tous les tirages ont donnés le même résultat) donc le nombre maximal de numéros non encore sortis est égal à  $N-1$ , ce qui prouve que

$$Y_n(\Omega) = \llbracket 1; N-1 \rrbracket.$$

*Remarque : On aurait aussi pu remarquer que la suite  $(Y_k)$  est décroissante (y réfléchir !) et donc que  $Y_n \leq Y_1 = N-1$ .*

Soit  $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ . L'événement  $(Y_n = k)$  possède deux causes possibles :  $(Y_{n-1} = k)$  et  $(Y_{n-1} = k+1)$ . En effet, s'il reste  $k$  numéros non encore sortis après le  $n$ -ème tirage, alors ou bien il restait  $k$  numéros non encore sortis au  $n-1$ -ème tirage et le  $n$ -ème tirage a fourni un numéro déjà tiré, ou bien il restait  $k+1$  numéros non encore sortis au  $n-1$ -ème tirage et le  $n$ -ème tirage a fourni un nouveau numéro. Par suite, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(Y_n = k) &= P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = k)P(Y_{n-1} = k) \\
&\quad + P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = k+1)P(Y_{n-1} = k+1).
\end{aligned}$$

Or

- pour obtenir  $(Y_n = k)$  sachant que  $(Y_{n-1} = k)$  s'est produit, il faut choisir, pour le  $n$ -ème tirage, l'un des  $N - k$  numéros déjà tirés parmi les  $N$  numéros possibles, ce qui donne

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = k) = \frac{N - k}{N},$$

- pour obtenir  $(Y_n = k)$  sachant que  $(Y_{n-1} = k + 1)$  s'est produit, il faut choisir, pour le  $n$ -ème tirage, l'un des  $k + 1$  numéros non déjà tirés parmi les  $N$  numéros possibles, ce qui donne

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = k + 1) = \frac{k + 1}{N}.$$

Par suite, on a bien

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket, \quad P(Y_n = k) = \frac{N - k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k + 1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1).}$$

3. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} k \left( \frac{N - k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k + 1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1) \right) \quad \text{d'après 2. b)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k + 1) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k + 1) \end{aligned}$$

Étudions un par un les quatres termes. On a tout d'abord

$$\sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k) = E(Y_{n-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k) = E(Y_{n-1}^2).$$

Par ailleurs, en effectuant le changement d'indice  $\ell = k + 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y_{n-1} = k + 1) &= \sum_{\ell=1}^N (\ell - 1)^2 P(Y_{n-1} = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell - 1)^2 P(Y_{n-1} = \ell) - P(Y_{n-1} = 0) \quad \text{car } P(Y_{n-1} = N) = 0 \\ &= E((Y_{n-1} - 1)^2) - P(Y_{n-1} = 0) \\ &= E(Y_{n-1}^2) - 2E(Y_{n-1}) + 1 - P(Y_{n-1} = 0). \end{aligned}$$

Avec le même changement d'indice, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y_{n-1} = k + 1) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell - 1) P(Y_{n-1} = \ell) + P(Y_{n-1} = 0) \quad \text{car } P(Y_{n-1} = N) = 0 \\ &= E(Y_{n-1} - 1) + P(Y_{n-1} = 0) \\ &= E(Y_{n-1}) - 1 + P(Y_{n-1} = 0). \end{aligned}$$

En rassemblant ces calculs, il vient

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(Y_{n-1}) - \frac{1}{N} E(Y_{n-1}^2) + \frac{1}{N} [E(Y_{n-1}^2) - 2E(Y_{n-1}) + 1 - P(Y_{n-1} = 0)] \\ &\quad + \frac{1}{N} [E(Y_{n-1}) - 1 + P(Y_{n-1} = 0)] \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_{n-1}), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la suite } (E(Y_n))_{n \geq 1} \text{ est géométrique de raison } 1 - \frac{1}{N}.}$$

Comme  $E(Y_1) = N - 1$  puisque  $Y_1$  est une variable aléatoire certaine égale à  $N - 1$ , on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $E(Y_n) = (N - 1)(1 - 1/N)^{n-1}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad E(Y_n) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.}$$

♦ **Exercice 13.** [★]

On tire  $m$  entiers au hasard dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , où  $m \leq n$ . On note  $X$  le plus petit et  $Y$  le plus grand.

1. Les tirages se font avec remise. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$  et calculer leurs espérances.
2. Même question avec des tirages sans remise.

On note  $N_1, N_2, \dots, N_m$  les entiers tirés au hasard dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

1. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(N_1 > k, N_2 > k, \dots, N_m > k) \\ &= P(N_1 > k)P(N_2 > k) \cdots P(N_m > k) \quad \text{par } \perp\!\!\!\perp \\ &= \left(\frac{n-k}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k),$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^m - \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.}$$

On a donc

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^m,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^n k^m.}$$

On a

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1; n - m + 1 \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} P(Y \leq k) &= P(N_1 \leq k, N_2 \leq k, \dots, N_m \leq k) \\ &= P(N_1 \leq k)P(N_2 \leq k) \cdots P(N_m \leq k) \quad \text{par } \perp\!\!\!\perp \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1),$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m.}$$

On a donc

$$E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} P(Y \leq k) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m$$

c'est-à-dire

$$\boxed{E(Y) = n - \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^{n-1} k^m.}$$

2. On a

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n-m+1 \rrbracket.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0; n-m \rrbracket$ , on a

$$P(X > k) = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket 1; n-m+1 \rrbracket, \quad P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k),$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n-m+1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{\binom{n+1-k}{m}}{\binom{n}{m}} - \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n-m} P(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-k}{m} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n+1}{m+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{m+1}}.$$

On a

$$Y(\Omega) = \llbracket m; n \rrbracket.$$

Pour tout  $k \in \llbracket m; n \rrbracket$ , on a

$$P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Comme

$$\forall k \in \llbracket m; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1),$$

on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket m; n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} - \frac{\binom{k-1}{m}}{\binom{n}{m}}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= n - \sum_{k=m}^{n-1} P(Y \leq k) \\
 &= n - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} \\
 &= n - \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \\
 &= n - \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n}{m+1} \\
 &= n - \frac{n-m}{m+1},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E(Y) = m \frac{n+1}{m+1}.$$

♦ **Exercice 14.** [o]

On lance  $n$  fois un dé à 6 faces. Comment choisir  $n$  pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et  $n/3$  soit supérieure à  $1/2$  ?

Considérons  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus lors des  $n$  lancés. On constate que  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n; 1/6)$  et donc que  $m = E(X) = n/6$  et  $\sigma^2 = V(X) = 5n/36$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout  $d > 0$ ,

$$P(|X - m| \geq d) \leq \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Prenons  $d = n/6$  de sorte que

$$P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \frac{n}{6}\right) \leq \frac{5}{n},$$

c'est-à-dire

$$1 - P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| < \frac{n}{6}\right) \leq \frac{5}{n}$$

ou encore

$$P\left(0 < X < \frac{n}{3}\right) \geq 1 - \frac{5}{n}.$$

Pour être certain d'avoir un nombre de 6 compris entre 0 et  $n/3$ , il suffit donc de choisir  $n$  tel que  $1 - 5/n \geq 1/2$ , c'est-à-dire qu'

il est suffisant de choisir  $n \geq 10$ .

♦ **Exercice 15.** [o]

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements (où  $m \in \mathbb{N}^*$ ). Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $E(X | A_k)$  l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $A_k$ , c'est-à-dire l'espérance de  $X$  pour la probabilité conditionnelle  $P_{A_k}$ . Démontrer la formule de l'espérance totale :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(A_k) E(X | A_k).$$

- Application. On lance un dé. On obtient le numéro  $X$ . On relance alors  $X$  fois le dé. Trouver l'espérance du nombre total de 6 obtenus.

1. On a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{k=1}^n P(A_k) P(X = x | A_k) && \text{formule des probabilités totales} \\
 &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x | A_k) && \text{Fubini,}
 \end{aligned}$$

donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(A_k) E(X | A_k).$$

2. Notons  $S_1$  le nombre de 6 obtenus au premier tour et  $S_2$  le nombre de 6 obtenus au second tour. On veut  $E(S_1 + S_2)$ .

La variable  $S_1$  suit clairement la loi  $\mathcal{B}(1/6)$ , donc

$$E(S_1) = \frac{1}{6}.$$

Sachant  $(X = k)$ , la loi conditionnelle de  $S_2$  est clairement  $\mathcal{B}(k, 1/6)$ . On a donc  $E(S_2 | X = k) = k/6$ . La formule de l'espérance totale nous donne alors

$$E(S_2) = \sum_{k=1}^6 P(X = k) E(S_2 | X = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \frac{k}{6} = \frac{1}{36} \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{12}.$$

En définitive, on a

$$E(S_1 + S_2) = \frac{9}{12}.$$

♦ **Exercice 16.** [★] (Les moments déterminent-ils la loi d'une variable aléatoire ?)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles finies telles que  $E(X^k) = E(Y^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

Posons  $E = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$  et énumérons ses éléments  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  où les  $e_j$  sont deux à deux distincts.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'égalité  $E(X^k) = E(Y^k)$  se réécrit sous la forme

$$\sum_{j=1}^n e_j^k [P(X = e_j) - P(Y = e_j)] = 0,$$

quitte à rajouter des termes nuls dans cette somme. Matriciellement, le système formé par ces équations lorsque  $k$  décrit  $[0; n-1]$  s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} e_1^0 & e_2^0 & \cdots & e_n^0 \\ e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1^n & e_2^n & \cdots & e_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X = e_0) - P(Y = e_0) \\ P(X = e_1) - P(Y = e_1) \\ \vdots \\ P(X = e_n) - P(Y = e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice  $V = (e_j^i)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n}$  est la matrice de passage de la base des polynômes élémentaires de Lagrange vers la base canonique (c'est une matrice de Vandermonde), donc  $V$  est inversible.

Cela implique que

$$\begin{pmatrix} P(X = e_0) - P(Y = e_0) \\ P(X = e_1) - P(Y = e_1) \\ \vdots \\ P(X = e_n) - P(Y = e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$

♦ **Exercice 17.** [★] (Une démonstration de la formule du crible)

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et  $A_1, \dots, A_n$  des événements. Démontrer que

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

et en déduire la formule du crible.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\overline{A_{1k}}} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_{1k}}) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \dots \mathbb{1}_{A_{i_k}} \quad \text{en développant} \\ &\quad \text{le produit} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}}.$$

En prenant l'espérance dans cette formule et en tenant compte de la linéarité de cette espérance, on obtient

$$E(\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} E(\mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}).$$

Comme  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ , on en déduit la formule du crible des probabilités :

$$\boxed{P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}.$$

En prenant pour  $P$  la probabilité uniforme, on en déduit la formule du crible du dénombrement :

$$\boxed{\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}.$$