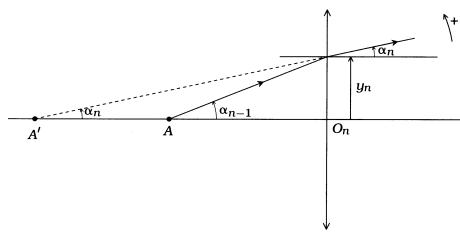


## Corrigé du T.D. O1

## Spé MP<sup>1</sup>

### Corr. 1 Succession de lentilles identiques

1. Soit A un point de l'axe optique et A' son image par la lentille  $\mathcal{L}_n$  (peu importe dans le calcul que ces points soient réels ou virtuels).



$$\text{On a } \alpha_n = -\frac{y_n}{O_n A'} \text{ et } \alpha_{n-1} = -\frac{y_n}{O_n A}$$

puisque l'on est dans les conditions de Gauss. En utilisant la relation de conjugaison de la lentille, multipliée par  $y_n$ , on tire

$$-\frac{y_n}{O_n A} + \frac{y_n}{O_n A'} = \frac{y_n}{f'}$$

$$\text{soit } \alpha_{n-1} - \alpha_n = \frac{y_n}{f'} \quad (1)$$

Cette relation aurait aussi pu être trouvée par une construction géométrique, ce qui est en fait plus élégant !

Par ailleurs, on lit sur la figure de l'énoncé

$$\alpha_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{a} \text{ et } \alpha_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{a} \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on trouve la relation de récurrence

$$y_{n+1} + y_{n-1} + \left( \frac{a}{f'} - 2 \right) y_n = 0$$

On pourrait résoudre cette récurrence et obtenir  $y_n$  (en passant par l'équation caractéristique ; voir cours de maths !). L'énoncé propose une approche dans un cas simplifié ( $a \ll f'$ ).

2. Considérons les  $y_n$  comme les valeurs que prend une fonction inconnue  $y(z)$  aux points  $z_n = na$ . En effectuant un développement limité d'ordre 2, on obtient

$$y_{n\pm 1} \simeq y_n \pm a \left( \frac{dy}{dz} \right)_{z_n} + \frac{a^2}{2} \left( \frac{d^2y}{dz^2} \right)_{z_n}$$

On reporte alors ceci dans la relation de récurrence, d'où

$$a^2 \left( \frac{d^2y}{dz^2} \right)_{z_n} + \frac{a}{f'} y(z_n) = 0$$

Dans l'approximation des milieux continus, la référence à  $z_n$  devient superflue et on tire l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 y = 0 \quad \text{avec } k = \frac{1}{\sqrt{af'}}$$

La solution de cette équation différentielle classique est

$$y(z) = y_0 \cos[k(z - z_0)]$$

pour un rayon passant par  $(z_0, y_0)$  et parallèle à l'axe optique en ce point.

3. On constate que le rayon est canalisé par la succession de lentilles : on parle de **stabilité péricopique** et cela a été utilisé dans les télescopes de sous-marins et dans les endoscopes médicaux. Maintenant, on priviliege les fibres optiques ou les petites caméras électroniques...

**Remarque:** On peut aborder les exercices de stabilité péricopique de façon plus générale en passant par l'optique matricielle : on peut traduire les relations (1) et (2) par une matrice de transfert M telle que

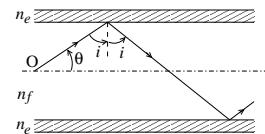
$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ensuite, la matrice de transfert pour N lentilles consécutives est  $M^N$  et il suffit de faire une étude aux valeurs propres pour savoir si la stabilité péricopique est acquise (il faut des valeurs propres de module strictement inférieur à 1).

### Corr. 2 Propagation de la lumière dans une fibre optique

1. On met à profit la réflexion totale **au-delà de l'angle de réfraction limite** qui existe puisque  $n_e < n_f$ . Ainsi, l'onde est guidée dans la fibre optique. Il y a réflexion totale pour

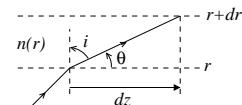
$$i > i_0 = \arcsin \frac{n_e}{n_f}$$



Or  $i = \frac{\pi}{2} - \theta$ , d'où  $\theta < \Lambda_0 = \arccos \frac{n_e}{n_f}$

2. Dès que l'indice  $n$  dépend continûment d'une variable d'espace (ici, c'est  $r$ ), une méthode fructueuse et classique consiste à raisonnner sur des tranches infinitésimales d'indice uniforme pour chacune. Ici, on prend des tranches cylindriques entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  d'indice  $n(r)$  (uniforme entre  $r$  et  $r + dr$ ).

Si l'onde arrive dans un plan méridien, elle y reste d'après la loi de Descartes en  $r$  (rayon transmis dans le plan d'incidence) : **le rayon reste toujours dans le plan méridien**.



La loi de Descartes au passage en  $r$  s'écrit

$$n(r) \sin i(r) = Cte$$

$$\text{soit } n(r) \cos \theta(r) = n_0 \cos \theta_0$$

On repasse en continu en faisant très attention aux signes. Notamment,  $r$  étant la distance à l'axe (énoncé), cette quantité est toujours positive ! On note que, avec les angles orientés,

$$\frac{dr}{dz} = \tan \theta$$

$$\text{Puisque } \cos \theta = \frac{n_0}{n} \cos \theta_0 \text{ et } \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

on en déduit l'**équation des rayons lumineux** :

$$\frac{dr}{dz} = \pm \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \cos^2 \theta_0}}{n_0 \cos \theta_0} \quad \text{pour } \theta > 0$$

Le signe + correspond au cas où le rayon s'éloigne de l'axe Oz, et le signe - correspond à l'autre cas. Il reste à l'intégrer pour  $n^2(r) = n_0^2(1 - \alpha^2 r^2)$ . On écrit d'abord l'équation différentielle en séparant les variables :

$$dz = \pm \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \alpha^2 r^2}} dr$$

Les primitives sont connues (en tout cas, je croise les doigts pour que vous les connaissiez...). Par conséquent, sachant que  $r \geq 0$  car il s'agit de la distance à l'axe,

$$r(z) = \left| \frac{\sin \theta_0}{\alpha} \sin \left( \frac{\alpha z}{\cos \theta_0} \right) \right|$$

Finalement, le rayon lumineux décrit dans la fibre une sinusoïde et se retrouve guidée (si  $r_{\max} < r_{\text{fibre}}$ ). Le rayon recoupe l'axe de la fibre aux points d'abscisses

$$z_p = p \pi \frac{\cos \theta_0}{\alpha} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}$$

Pour des petites valeurs de  $\theta_0$ ,  $z_p$  devient « indépendant » de  $\theta_0$  et on pourrait montrer que le temps de parcours sur une longueur  $L$  est aussi peu dépendant de  $\theta_0$  : ceci permet d'augmenter le débit des informations transmises dans ce second type de fibre (à gradient d'indice) par rapport au type précédent (à saut d'indice).

### Corr. 3 Comment faire avec une lentille ?

Il s'agit d'un exercice (simple) très important dont vous avez tendance à oublier l'intérêt principal pour l'optique interférentielle : on peut, sans tenir compte de ce qui se passe dans la lentille, calculer la différence de chemin optique demandée. Il ne faut surtout pas raisonner géométriquement bêtement (sinon il faudrait tenir compte de la forme de la lentille !). Cette exercice montre comment « faire abstraction » des lentilles en optique interférentielle.

1. D'après le théorème de Malus, les rayons sont orthogonaux aux surfaces d'ondes (lieu de points équiphasiques). Par conséquent, la lentille transformant les sphères d'ondes issues de A en plans d'onde,

$$(AQ) = (AP)$$

$$\text{donc } (AM) - (AP) = (AQ) + (QM) - (AP) = (QM) = QM$$

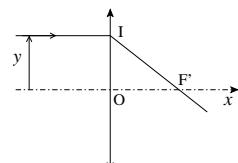
$$\text{soit } (AM) - (AP) = a \sin \alpha$$

2. D'après le principe de retour inverse de la lumière, la différence des chemins optiques est la même que précédemment !

$$(MA) - (PA) = a \sin \alpha$$

### Corr. 4 Chemin optique introduit par une lentille mince

1. On commence par calculer le chemin optique  $L(y)$  introduit par la lentille **dans le cadre de l'optique paraxiale de Gauss**.



$$L(y) + (IF') = L(0) + (OF')$$

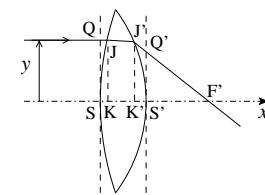
en utilisant le rayon passant par le centre de la lentille qui conjugue aussi l'infini à F'. Pour ce rayon,  $L(0) = Ne$ , donc

$$L(y) = Ne + n \left( f' - \sqrt{y^2 + f'^2} \right)$$

Or, dans l'optique de Gauss,  $|y| \ll f'$ , d'où un premier résultat intéressant

$$L(y) \simeq Ne - \frac{ny^2}{2f'}$$

2. Maintenant, on va recalculer  $L(y)$  pour le trajet réel du rayon paraxial, **en tenant compte de la forme de la lentille**. Les notations sont introduites sur la figure suivante :



On continue de travailler dans les conditions de Gauss donc (QQ') est quasiment parallèle à l'axe optique de la lentille. On note R et R' les rayons des dioptrées sphériques d'entrée et de sortie. Géométriquement, on a donc

$$L(y) = nQJ + NJJ' + nJ'Q' \simeq nSK + NKK' + nK'S'$$

$$\text{soit } L(y) = nSK + N(e - SK - K'S') + nK'S'$$

$$\text{d'où } L(y) = Ne - (N - n)(SK + K'S')$$

$$\text{Or } \tan \alpha = \frac{y}{2R - SK} = \frac{SK}{y}$$

$$\text{donc, puisque } SK \ll 2R, \text{ on obtient}$$

$$SK \simeq \frac{y^2}{2R} \quad \text{et, de même, } SK' \simeq \frac{y^2}{2R'}$$

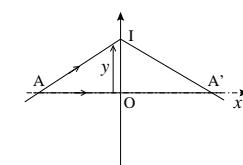
$$\text{Ainsi, } L(y) = Ne - (N - n) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{y^2}{2}$$

Il ne reste qu'à identifier les deux résultats précédents, en posant  $R = SC$  et  $R' = -SC'$ . On tire

$$\frac{1}{f'} = \left( \frac{N}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{SC} - \frac{1}{SC'} \right)$$

Cette formule donne accès à la focale  $f'$  d'une lentille, en fonction de ses caractéristiques, pour les conditions de Gauss.

3. Pour obtenir la relation de conjugaison de Descartes, il suffit de traduire la condition de **stigmatisme approché** dans l'optique de Gauss : pour deux points conjugués A et A',  $(AA') = C^{te}$  indépendante du rayon considéré.



Pour le trajet passant par le centre O de la lentille, et en posant  $p = SA < 0$  et  $p' = S'A' > 0$ ,

$$(AA') = (AOA') = -np + Ne + np'$$

Pour le trajet passant par I,

$$(AA') = (AIA') = -np \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} + L(y) + np' \sqrt{1 + \frac{y^2}{p'^2}}$$

Or,  $L(y) \simeq Ne - ny^2/(2f')$ , donc on arrive en identifiant les expressions de  $(AA')$  à

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

ce qu'il fallait démontrer ( $O$  étant confondu avec  $S$  et  $S'$  dans la limite de l'optique de Gauss des lentilles minces)...

### Corr. 5 Différence de marche introduite par une lentille mince divergente

Je vous laisse représenter la figure correspondant à l'exercice (l'objet  $A$  réel donne  $A'$  virtuel par la lentille divergente quelque soit la position de  $A$ ...).

Avec la condition de stigmatisme approché,  $(AA')$  ne dépend pas du rayon choisi pour effectuer le calcul. On considère alors le rayon le plus simple : celui qui passe par le centre de la lentille. On note  $S$  et  $S'$  les points d'entrée et de sortie de la lentille sur son axe optique. Alors,

$$(AA') = (\underbrace{AS}_{\text{trajets réels}}) + (\underbrace{SS'}_{\text{trajets virtuels}}) + (\underbrace{S'S}_{\text{trajets virtuels}}) + (\underbrace{SA'}_{\text{trajets réels}})$$

donc  $(AA') = n\overline{AS} + N\overline{SS'} + n\overline{S'S} + n\overline{SA'}$

soit  $(AA') = (N-n)e + n\overline{AA'}$

La moralité de l'exercice est la suivante : il faut faire attention pour le calcul des chemins optiques lorsqu'il y a des trajets virtuels...

### Corr. 6 Interprétation interférentielle de la cavité résonante

1. L'onde qui a subi deux réflexions a parcouru une distance supplémentaire  $d = 2L$ . La différence de phase est donc

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2L + \pi + \pi$$

Les deux derniers termes correspondent à la réflexion en opposition de phase sur un conducteur parfait (incidence normale).

2. On recherche les longueurs d'onde des modes propres de la cavité. Ces modes correspondent aux cas où la superposition de toutes les ondes réfléchies ne donne pas un champ électrique nul. Pour cela, il faut que les interférences entre toutes les ondes soient **constructives** (c'est-à-dire que les ondes se superposent bien), ce qui est le cas si les ondes en un même point sont déphasées d'un multiple entier de  $2\pi$ , soit

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} 2L = 2p\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^*$$

soit  $\lambda_{0p} = \frac{2L}{p}$

3. On peut retrouver ce résultat par une méthode électromagnétique. Le champ électrique dans la cavité est de la forme

$$\vec{E}(z, t) = (\underline{A} e^{i(\omega t - kz)} + \underline{B} e^{i(\omega t + kz)}) \vec{e}_x$$

avec  $k = \omega/c$  (somme de deux ondes planes dans le vide). On utilise les conditions aux limites sachant que les plans conducteurs sont parfaits :

$$\vec{E}_T(z=0, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_T(z=L, t) = \vec{0}$$

Alors,  $\underline{A} + \underline{B} = 0$

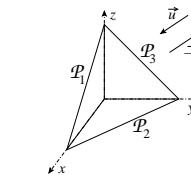
et il vient ensuite  $\sin kL = 0$

On en déduit la condition de quantification de la longueur d'onde de la question 2 et le champ réel solution de chaque mode  $p$  est

$$\vec{E} = E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi c}{L}t + \varphi_p\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \vec{u}_x$$

### Corr. 7 Mesure de la distance Terre-Lune

*Remarque préliminaire :* il faut savoir montrer qu'un coin de cube de miroirs réfléchis la lumière. Pour ce faire, il suffit de dire que le coin de cube est l'association de trois miroirs plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ , orthogonaux deux à deux ; ensuite, on fait l'image du vecteur



$\vec{u}$  de l'onde incidente par chacun des plans successivement (ordre sans importance) sur lesquels elle se réfléchit :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{P}_1} \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \\ u_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{P}_2} \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \\ -u_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{P}_3} \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ -u_z \end{pmatrix} = -\vec{u}$$

La lumière est bien « rétroréfléctorisée » par le dispositif. Ce dispositif est bien plus intéressant qu'un miroir plan seul car celui-ci ne « rétroréflécte » que la lumière en incidence normale ; le dispositif en coin de cube n'a pas besoin d'être ajusté précisément en inclinaison pour qu'il fonctionne en « rétroréflecteur » !

La puissance émise par le télescope est  $\mathcal{P} = \mathcal{E}S$  où  $\mathcal{E}$  est l'éclairement en  $\text{W.m}^{-2}$  et  $S$  la surface éclairée. Ici, la puissance émise par la Terre à la distance  $d$  dans un cône d'angle  $2\alpha$  au sommet est

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{E}\pi(d\alpha)^2$$

L'ensemble des 100 coins de cube sur la Lune ne reçoit qu'une partie de cette puissance correspondant à sa surface. La puissance reçue par ces coins est

$$\mathcal{P}_c \simeq \mathcal{E}(100a^2) = 100a^2 \frac{\mathcal{P}_e}{\pi(d\alpha)^2}$$

Or, chaque coin de cube diffracte dans l'angle  $\beta \simeq \frac{\lambda_0}{a}$  donc, de la même manière, le télescope sur la Terre reçoit en retour

$$\mathcal{P}_r = \frac{\pi R^2}{\pi(d\beta)^2} \mathcal{P}_e$$

$$\text{Alors, } \rho = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e} = \frac{100a^2 R^2}{\pi(\beta\alpha d^2)^2} = \frac{100R^2 a^4}{\pi\alpha^2 \lambda_0^2 d^4}$$

Numériquement  $\rho \simeq 1,4 \cdot 10^{-19}$

Le nombre d'impulsion à envoyer est donc tel que

$$N > N_{\min} = E \left[ \frac{\mathcal{E}}{\rho E} \right] + 1 = E \left[ \frac{hc}{\lambda_0 \rho E} \right] + 1 = 9$$

L'expérience est tout à fait réalisable et a été faite en 1973 (la difficulté étant de bien viser le dispositif réflecteur depuis la Terre)...