LIMITE D'UNE SUITE

✠ ***Exercice 1.*** [○]
Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n), définies pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \sin\big(\ln(n+1)\big) - \sin(\ln n).$$

Comme
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$
on a
$$\begin{aligned} u_n &= 2\cos\Big(\frac{\ln(n+1)+\ln n}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{2}\Big) \\ &= 2\cos\big(\ln\sqrt{n(n+1)}\big)\sin\left(\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\right). \end{aligned}$$

Or $\big(\cos\big(\ln\sqrt{n(n+1)}\big)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée et $\left(\sin\left(\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [⋆]
Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général

$$u_n = \sin\big((2+\sqrt{3})^n\pi\big).$$

On constate que la suite $\big((2+\sqrt{3})^n\pi\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. On sait que sin n'a pas de limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire ? Et bien : RIEN, NADA, QUE'TCHI, WALOU, PEAU DE BALLE ! S'il existe bien des théorèmes de composition des limites, il n'existe en revanche pas de théorème de composition des non-limites ! Je l'ai déjà dit, je le redirai ...

En fait, on constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\big((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k\big) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n+1-k}(\sqrt{3})^k \\ &= 2\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^{k/2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un nombre entier pair. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait qu'il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2k_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_n = \sin\big((2+\sqrt{3})^n\pi\big) = \sin\big(2k_n\pi - (2-\sqrt{3})^n\pi\big) = -\sin\big((2-\sqrt{3})^n\pi\big).$$
Or $\lim_{n\to+\infty}(2-\sqrt{3})^n\pi = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\sin\big((2-\sqrt{3})^n\pi\big) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

✠ ***Exercice 3.*** [○] (Limites doubles différentes)
Calculer
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right).$$

Sans difficulté, on voit que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right)=\lim_{n\to\infty}0=0$$
et
$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k}\right)=\lim_{k\to\infty}1=1.$$
Donc
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)=0\neq 1=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right).}$$
0 et 1 respectivement.

✠ ***Exercice 4.*** [⋆]
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n=1!+2!+3!+\cdots+n!$$
Démontrer que
$$S_n\sim n!$$

En majorant chaque terme de la somme S_{n-2} par le plus grand, on obtient, pour tout $n\geqslant 3$,
$$S_{n-2}=1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!\leqslant(n-2)!+(n-2)!+\cdots+(n-2)!=(n-2)\times(n-2)!$$
donc
$$\forall n\geqslant 3,\qquad 0\leqslant\frac{S_{n-2}}{n!}\leqslant\frac{(n-2)\times(n-2)!}{n!},$$
c'est-à-dire
$$\forall n\geqslant 3,\qquad 0\leqslant\frac{S_{n-2}}{n!}\leqslant\frac{(n-2)}{n(n-1)}.$$
Or $\lim\dfrac{(n-2)}{n(n-1)}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a
$$\lim\frac{S_{n-2}}{n!}=0.$$

Pour tout $n\geqslant 3$, on a $S_n=S_{n-2}+(n-1)!+n!$ donc
$$\frac{S_n}{n!}=\frac{S_{n-2}+(n-1)!+n!}{n!}=\frac{S_{n-2}}{n!}+\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{n!}{n!}=\frac{S_{n-2}}{n!}+\frac{1}{n}+1.$$
Or $\lim S_{n-2}/n!=0$ d'après la question précédente et $\lim 1/n=0$, donc
$$\lim\frac{S_n}{n!}=1.$$
Par suite, on a
$$\boxed{S_n\sim n!}$$

✠ ***Exercice 5.*** [○]

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_{n+1} \sim u_n$.
2. Démontrer que si (u_n) converge vers 0, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.
3. Démontrer que si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.
4. Démontrer que si (u_n) n'admet pas de limite (divergence de seconde espèce), alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.

1. *Démontrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_{n+1} \sim u_n$.*

   Si (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_n \sim \ell$. Par ailleurs, la suite (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n) donc elle converge aussi vers ℓ, ce qui nous permet d'écrire que $u_{n+1} \sim \ell$. Par suite, par transitivité de la relation $\sim$, on a $u_n \sim u_{n+1}$. Donc

   $$\boxed{\text{si la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \text{ non nulle, alors } u_{n+1} \sim u_n.}$$

2. *Démontrer que si (u_n) converge vers 0, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.*

   Nous devons donner un contre-exemple. Prenons $u_n = 1/n!$ de sorte que (u_n) tend vers 0 et

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

   donc u_{n+1} n'est pas équivalent à u_n. En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge vers } 0, \text{ on n'a pas nécessairement } u_{n+1} \sim u_n.}$$

3. *Démontrer que si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.*

   Prenons cette fois $u_n = n!$ de sorte que (u_n) tend vers $+\infty$ et

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

   donc u_{n+1} n'est pas équivalent à u_n. En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge vers } +\infty, \text{ on n'a pas nécessairement } u_{n+1} \sim u_n.}$$

4. *Démontrer que si (u_n) n'admet pas de limite (divergence de seconde espèce), alors on n'a pas nécessairement $u_{n+1} \sim u_n$.*

   Prenons cette fois $u_n = (-1)^n$ de sorte que (u_n) admet une divergence de seconde espèce et

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1,$$

   donc u_{n+1} n'est pas équivalent à u_n. En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } (u_n) \text{ n'admet pas de limite, on n'a pas nécessairement } u_{n+1} \sim u_n.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [○]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites qui ne s'annulent (au moins à partir d'un certain rang). On considère les assertions $\mathscr{P}$: $u_n \sim v_n$ et $\mathscr{Q}$: $\lim(u_n - v_n) = 0$. Démontrer que $\mathscr{P}$ n'implique pas $\mathscr{Q}$ et que $\mathscr{Q}$ n'implique pas non plus $\mathscr{P}$.

On nous demande des contre-exemples.

On a $e^n + n \sim e^n$ et pourtant $(e^n + n) - (e^n) = n$ ne tend pas vers 0, donc

$$\boxed{\mathscr{P} \text{ n'implique pas } \mathscr{Q}.}$$

On a $\lim(1/n - 1/n^2) = 0$ et pourtant $1/n$ n'est pas équivalent à $1/n^2$, donc

$$\boxed{\mathscr{Q} \text{ n'implique pas } \mathscr{P}.}$$

✠ *Exercice 7.* [⋆] (Les additions, oui ! Les soustractions, non !)

On suppose que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites strictement positives. Démontrer que $u_n + v_n \sim a_n + b_n$.

On veut démontrer que le quotient $\dfrac{u_n+v_n}{a_n+b_n}$ tend vers 1. Pour cela, on essaye de démontrer que la différence $\dfrac{u_n+v_n}{a_n+b_n} - 1$ tend vers 0. Concrètement, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left|\frac{u_n+v_n}{a_n+b_n} - 1\right| &= \frac{|u_n - a_n + v_n - b_n|}{a_n+b_n} && \text{car } a_n + b_n > 0 \\
&\leqslant \frac{|u_n - a_n| + |v_n - b_n|}{a_n+b_n} && \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&= \frac{|u_n - a_n|}{a_n+b_n} + \frac{|v_n - b_n|}{a_n+b_n} \\
&\leqslant \frac{|u_n - a_n|}{a_n} + \frac{|v_n - b_n|}{b_n} && \text{car } a_n > 0 \text{ et } b_n > 0 \\
&= \left|\frac{u_n}{a_n} - 1\right| + \left|\frac{v_n}{b_n} - 1\right|.
\end{aligned}$$

Comme les quotient $\dfrac{u_n}{a_n}$ et $\dfrac{v_n}{b_n}$ tendent vers 1, il s'ensuit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_n+v_n}{a_n+b_n} - 1\right| = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n+v_n}{a_n+b_n} = 1,$$

ou encore

$$\boxed{u_n + v_n \sim a_n + b_n.}$$

✠ *Exercice 8.* [○]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. Démontrer que $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$?
3. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$.
   a) La suite $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle nécessairement ?
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge et préciser alors la limite de cette suite.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\lfloor u_n \rfloor > u_n - 1$, donc, par le théorème du gendarme, $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

   $$\boxed{\text{lorsque } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } +\infty, \text{ la suite } \big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0} \text{ tend aussi vers } +\infty.}$$

2. Posons $\varepsilon = \mathrm{d}(\ell;\mathbb{Z}) = \min\{\ell - \lfloor \ell \rfloor ; \lceil \ell \rceil - \ell\}$ de sorte que $W_\ell =]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$ soit un voisinage de ℓ contenu dans $]\lfloor \ell \rfloor ; \lceil \ell \rceil[$. La définition de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in W_\ell$, ce qui implique que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in]\lfloor \ell \rfloor ; \lceil \ell \rceil[$ et donc que $\forall n \geqslant N,\ \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor$. Donc

   $$\boxed{\text{lorsque } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \text{ la suite } \big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0} \text{ stationne à la valeur } \lfloor \ell \rfloor.}$$

3. a) Non, il suffit de prendre par exemple $u_n = (-1)^n/n$, de sorte que $\lfloor u_n \rfloor = 0$ si n est pair et $\lfloor u_n \rfloor = -1$ si n est impair. Donc

   $$\boxed{\text{lorsque } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{Z}, \text{ la suite } \big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0} \text{ peut ne pas converger.}}$$

b) La définition de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in]\ell-1;\ell+1[$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor u_n \rfloor$ vaut ℓ ou $\ell-1$. Pour que la suite d'entiers $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge, il est nécessaire et suffisant qu'elle stationne (c'est dans le cours). Comme elle ne peut prendre que les deux valeur ℓ et $\ell-1$, il est donc nécessaire et suffisant que $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ stationne à la valeur ℓ ou à la valeur $\ell-1$, ce qui revient respectivement à dire que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in [\ell;\ell+1]$ ou $\forall n \geqslant N,\ u_n \in]\ell-1;\ell[$. En conclusion,

lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$, la suite $\big(\lfloor u_n \rfloor\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ' si, et seulement si, ou bien u_n reste au dessus de ℓ à partir d'un certain rang (et alors $\ell' = \ell$) ou bien u_n reste strictement en dessous de ℓ à partir d'un certain rang (et alors $\ell' = \ell - 1$).

✠ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$? Démontrer que $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant u_n v_n \leqslant v_n \leqslant 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim u_n = \lim v_n = 1.}$$

✠ ***Exercice 10.*** [$\star$]
Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$$

où le terme de droite comporte n radicaux. *On pourra majorer $u_{n+1} - u_n$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{{u_{n+1}}^2 - {u_n}^2}{u_{n+1} + u_n} \\
&= \frac{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}} - 1 - \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}}} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}} - \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}{2\sqrt{1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1}} \frac{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}} - 2 - \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}} + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{1}} \frac{\sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}} - \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}{2\sqrt{2}} \\
&\ \text{etc} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}} \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \leqslant \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est majorée.

Comme (u_n) est clairement croissante, le théorème de la limite monotone nous dit que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leqslant 2.}$$

✠ *Exercice 11.* [$\star$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = u_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est donc une suite obtenue en modifiant l'ordre des termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que, malgré ce changement d'ordre, on a $\lim v_n = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

On pose $J = \varphi^{-1}\big([\![0, N]\!]\big)$ et $P = \max J$.

Alors, pour tout $p \geqslant P$, on a $p \notin J$ et par conséquent, φ étant bijective, on a $\varphi(p) \notin \varphi(J) = [\![0, N]\!]$, et donc $\varphi(p) > N$. En conséquence de quoi, pour tout $p \geqslant P$, on a $|v_p| = |u_{\varphi(p)}| \leqslant \varepsilon$.

On a ainsi démontré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p > P,\ |v_p| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{une modification univoque de l'ordre des termes d'une}\\ \text{suite convergente ne modifie pas sa convergence.}\end{array}}$$

✠ *Exercice 12.* [$\star$] (Contre-exemples liés à Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On considère la suite des moyennes de Cesàro $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ non bornée telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui diverge sévèrement telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge sévèrement.
3. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ bornée telle que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge (sévèrement).

1. Prendre $u_n = \sqrt[3]{n}$ si n est un cube parfait et $u_n = 0$ sinon.
2. Prendre $u = \big((-2)^n\big)_{n\geqslant 0}$ qui diverge sévèrement. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-2)^k = \frac{(-2)^{n+1} + 2}{n(-2-1)} = \frac{2}{3}\frac{(-2)^n - 1}{n}$$

   qui est le terme général d'une suite qui diverge sévèrement.
3. Prendre $u = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ où l'on alterne 2^0 zéros, 2^0 uns, 2^1 zéros, 2^1 uns, 2^2 zéros, 2^2 uns, 2^3 zéros, 2^3 uns, etc. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge sévèrement.

   On note $N_k = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^k = 2^{k+2} - 2$ le nombres de termes après la k-ème série de uns. On a

$$v_{N_k} = \frac{\frac{1}{2}N_k}{N_k} = \frac{1}{2}$$

   et

$$v_{N_k - 2^k} = \frac{\frac{1}{2}N_{k-1}}{N_k - 2^k} = \frac{2^k - 1}{2^{k+2} - 2 - 2^k} = \frac{2^k - 1}{3.2^k - 2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^k}{3.2^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

   donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge sévèrement.

✠ ***Exercice 13.*** [$\star$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Démontrer que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Donnée : On admettra que $\dfrac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{3}$.

On montre que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante positive donc convergente vers $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Avec un passage à la limite, on en déduit que $\ell = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } 0.}$$

Vu l'équivalent demandé, on peut essayer le « critère ${u_{n+1}}^{-2} - {u_n}^{-2}$ ». Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2} = \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{{u_n}^2} = \frac{{u_n}^2 - \sin^2(u_n)}{{u_n}^2 \sin^2(u_n)} \sim \frac{{u_n}^2 - \sin^2(u_n)}{{u_n}^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, par le théorème de Césàro, on a

$$\frac{\left(\frac{1}{{u_1}^2} - \frac{1}{{u_0}^2}\right) + \left(\frac{1}{{u_2}^2} - \frac{1}{{u_1}^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{{u_n}^2} - \frac{1}{{u_{n-1}}^2}\right)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire, après téléscopage et utilisation du fait que $1/({u_0}^2 n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{1}{{u_n}^2 n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

On en déduit que ${u_n}^2 \sim 3/n$, ce qui donne

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

✠ ***Exercice 14.*** [$\bigstar$]

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes de limites respectives ℓ_u et ℓ_v. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Démontrer que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell_u \ell_v$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
|w_n - \ell_u\ell_v| &= \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k v_{n-k} - \ell_u\ell_v)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\big((u_k - \ell_u)v_{n-k} + \ell_u(v_{n-k} - \ell_v)\big)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell_u)v_{n-k} + \frac{\ell_u}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(v_{n-k} - \ell_v)\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell_u|.|v_{n-k}| + \frac{\ell_u}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|v_{n-k} - \ell_v| \\
&\leqslant \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell_u| + \frac{\ell_u}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|v_{n-k} - \ell_v|,
\end{aligned}$$

où M désigne la borne supérieure de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, qui existe puisque $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. D'après le théorème de Cesàro, on a

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell_u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|v_{n-k}-\ell_v| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{(w_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell_u\ell_v.}$$