Théorie de l'intégration

Table des matières

Dans tout ce chapitre,
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- a et b sont deux réels fixés avec $a < b$;
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach. En pratique, E sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et le plus souvent, on sera dans le cas où $E = \mathbb{K}$;
- f est une application de $[a, b]$ dans E.

Nous présentons ici la théorie de l'intégration de Riemann, qui consiste à définir l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ lorsque f est une application en escalier (c'est-à-dire une application constante par morceaux) puis à prolonger cette définition à toute fonction qui est limite uniforme d'applications en escalier, donc en particulier aux applications continues par morceaux.
C'est historiquement la première construction complètement formalisée de la notion d'intégrale, due à Bernhard Riemann en 1854. Elle se construit rapidement, mais elle se prolonge plus ou moins difficilement à des intégrales plus générales :
- l'objet $\int_I f(t)dt$ où I est un intervalle quelconque (a priori ni fermé, ni borné) et où f est une application continue par morceaux de I dans E, sera étudié en seconde année. Il s'agit d'une intégrale "impropre" ou "généralisée" ;
- l'intégrale de Riemann se généralise très mal aux intégrales multiples de la forme $\int_K f(x)dx$, où K est une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et où f est une application continue de K dans E ;
- de plus, parce que sa construction repose sur la convergence uniforme, l'intégrale de Riemann ne présente pas un comportement optimal pour certains théorèmes d'interversion.

La théorie de l'intégration de Lebesgue (1902) n'a pas ces défauts, mais sa construction est nettement plus longue, elle correspond à la théorie de la mesure que nous effleurerons au début du cours de probabilités.

1 Intégration des applications en escalier

1.1 Les applications en escalier

Définition. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \le i \le n}$ de réels telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

Notation. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple. $\displaystyle\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$. On dit que c'est une subdivision uniforme.

Définition. Si $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$, on appelle pas de la subdivision σ le réel

$$\delta(\sigma) = \max_{1 \le i \le n} (a_i - a_{i-1}).$$

Remarque. Informellement, une subdivision $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ correspond à un découpage de l'intervalle $[a,b]$ en les sous-intervalles $[a_{i-1},a_i]$. Le pas de cette subdivision représente la longueur du plus grand de ces sous-intervalles.

Notation. Soit $\sigma=(a_i)_{0\leq i\leq n}\in\mathcal{S}$. On appelle support de la subdivision σ l'ensemble

$$A(\sigma)\stackrel{\Delta}{=}\{a_i\ /\ 0\leq i\leq n\}.$$

Propriété. Notons $\mathcal{P}_f([a,b])$ l'ensemble des parties finies de $[a,b]$ contenant a et b.

L'application $\begin{array}{rccc} A: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}_f([a,b]) \\ & \sigma & \longmapsto & A(\sigma) \end{array}$ est bijective.

Démonstration.
Si $B\in\mathcal{P}_f([a,b])$, il existe une unique façon d'ordonner les éléments de B selon une suite $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ strictement croissante. Alors $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$, donc B possède un unique antécédent pour A. □

Définition. Soit $(\sigma,\sigma')\in\mathcal{S}^2$. On dit que σ est plus fine que σ' si et seulement si $A(\sigma)\supseteq A(\sigma')$. Dans ce cas, on note $\sigma'\preceq\sigma$.

Propriété. $\preceq$ est une relation d'ordre partiel.

Démonstration.
Si $\sigma\preceq\sigma'$ et $\sigma'\preceq\sigma$, alors $A(\sigma)=A(\sigma')$, or A est bijective, donc $\sigma=\sigma'$. Ainsi $\preceq$ est antisymétrique. On établit facilement qu'elle est également réflexive et transitive. □

Définition. Si $\sigma,\sigma'\in\mathcal{S}$, on pose $\sigma\cup\sigma'\stackrel{\Delta}{=}A^{-1}(A(\sigma)\cup A(\sigma'))$. Ainsi, $\sigma\cup\sigma'$ est l'unique subdivision de $[a,b]$ dont le support est la réunion des supports de σ et de σ'.

Remarque. Pour la relation d'ordre $\preceq$, $\sigma\cup\sigma'=\sup\{\sigma,\sigma'\}$.

Définition.

f est une application en escalier sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, f est constante sur l'intervalle $]a_{i-1},a_i[$.

Remarque. Aucune condition ne porte sur les valeurs de f en les points a_i de la subdivision.

Exemple. Les fonctions constantes sont des applications en escalier.
L'application partie entière restreinte à un segment est une application en escalier.

Définition. Supposons que f est une application en escalier et soit $\sigma=(a_i)_{0\leq i\leq n}\in\mathcal{S}$. On dit que σ est une subdivision adaptée à f si et seulement si, pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, f est constante sur l'intervalle $]a_{i-1},a_i[$.

Remarque. Si f est une application en escalier, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (ce nombre étant inférieur à $2n+1$, si $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision adaptée à f). Cependant la réciproque est fausse. En effet, l'application caractéristique de $[a,b]\cap\mathbb{Q}$

(qui renvoie 1 pour un rationnel et 0 pour un irrationnel) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, mais elle n'est pas en escalier.

Propriété. Les applications en escalier de $[a, b]$ sont bornées.

Démonstration.
Une telle application ne prend qu'un nombre fini de valeurs. □

Propriété. Soit f une application en escalier et σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Alors toute subdivision plus fine que σ est aussi adaptée à f.

Démonstration.
Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\sigma' = (b_i)_{0 \leq i \leq p}$ deux subdivisions de $[a, b]$. On suppose que σ est adaptée à f et que σ' est plus fine que σ.
Alors chaque sous-intervalle $]b_{i-1}, b_i[$, où $i \in \mathbb{N}_p$, est inclus dans l'un des sous-intervalles $]a_{j-1}, a_j[$, donc f est constante sur $]b_{i-1}, b_i[$, ce qui prouve que σ' est adapté à f. □

1.2 Intégrale d'une application en escalier

Définition. Soit f une application en escalier et $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons λ_i la valeur constante de f sur $]a_{i-1}, a_i[$. On pose

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\lambda_i}.$$

Cette quantité est indépendante du choix de σ parmi les subdivisions adaptées à f.

Démonstration.
Notons $I(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\lambda_i$ et montrons que si σ' est une seconde subdivision adaptée à f, alors $I(\sigma') = I(\sigma)$.
◇ Supposons d'abord que σ' est plus fine que σ et que $|A(\sigma')| = |A(\sigma)| + 1$.
Il existe c tel que $A(\sigma') = A(\sigma) \sqcup \{c\}$. Il existe $p \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_{p-1} < c < a_p$.
Alors $I(\sigma') = \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i-1})\lambda_i + (c - a_{p-1})\lambda_p + (a_p - c)\lambda_p + \sum_{i=p+1}^{n} (a_i - a_{i-1})\lambda_i$, or $(c - a_{p-1})\lambda_p + (a_p - c)\lambda_p = (a_p - a_{p-1})\lambda_p$, donc $I(\sigma') = I(\sigma)$.
◇ Par récurrence sur $|A(\sigma')| - |A(\sigma)|$, on montre ensuite que si σ' est plus fine que σ, alors $I(\sigma') = I(\sigma)$.
◇ $\sigma' \cup \sigma$ est plus fine que σ, donc $I(\sigma) = I(\sigma \cup \sigma')$, puis en échangeant les rôles joués par σ et σ', $I(\sigma') = I(\sigma \cup \sigma')$, donc $I(\sigma) = I(\sigma')$. □

Remarque. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i \in E$, donc $\int_a^b f$ est un vecteur de E, en tant que combinaison linéaire de vecteurs de E.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f$ représente une somme d'aires de rectangles, affectées d'un signe négatif lorsque $\lambda_i < 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire algébrique de la surface située entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Propriété. Supposons que f est une application en escalier et soit g une application de $[a, b]$ dans E qui ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de $[a, b]$.
Alors g est une application en escalier et $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Démonstration.
Notons σ une subdivision adaptée à f et $P = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) \neq g(x)\}$. P étant fini, on peut poser $\sigma' = A^{-1}(A(\sigma) \cup P)$. σ' est plus fine que σ, donc elle est adaptée à f.
Posons $\sigma' = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ et notons λ_i la valeur constante de f sur $]a_{i-1}, a_i[$.
$P \subset \{a_i \ / \ 0 \leq i \leq n\}$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f et g sont égales sur $]a_{i-1}, a_i[$. Ainsi, g est une application en escalier et $\int_a^b g = \int_a^b f$. $\square$

Théorème. Notons $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ dans E. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a, b], E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ est linéaire.

Démonstration.
Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], E)$. Notons σ_f et σ_g des subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f et à g respectivement. Posons $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g = (a_i)_{0\leq i\leq n}$. σ est adaptée à la fois à f et à g. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons $\lambda_{f,i}$ la valeur constante de f sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $\lambda_{g,i}$ celle de g.
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, $\alpha f + g$ est constante, égale à $\alpha\lambda_{f,i} + \lambda_{g,i}$. Ceci prouve que $\alpha f + g$ est un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$, or ce dernier est clairement non vide, donc $\mathcal{E}([a, b], E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, ceci prouve que $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))\, dt = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})(\alpha\lambda_{f,i} + \lambda_{g,i})$, donc

$$\int_a^b (\alpha f(t)+g(t))\, dt = \alpha \sum_{i=1}^{n} (a_i-a_{i-1})\lambda_{f,i}+\sum_{i=1}^{n} (a_i-a_{i-1})\lambda_{g,i} = \alpha \int_a^b f(t)\, dt+\int_a^b g(t)\, dt.$$

$\square$

Propriété. Soient F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E, F)$.
Si f est une application en escalier, $u \circ f$ est une application en escalier et

$$\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right).$$

Démonstration.
Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons λ_i la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u \circ f$ est constamment égale à $u(\lambda_i)$ sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, ce qui prouve que $u \circ f$ est une application en escalier. De plus,

$$\int_a^b u\circ f = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})u(\lambda_i) = u\left(\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\lambda_i\right) = u\left(\int_a^b f\right), \text{ car } u \text{ est linéaire.}$$
$\square$

Propriété. Si f est une application en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\int_a^b f \geq 0$.

Corollaire. Si $f, g \in \mathcal{E}([a,b], E)$, alors $[\forall t \in [a,b],\ \ f(t) \leq g(t)] \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$: l'intégrale est croissante.

Démonstration.
$g - f \geq 0$, donc $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. $\square$

Inégalité triangulaire : Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b], E)$, $\left\|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \displaystyle\int_a^b \|f(t)\|dt$.

Démonstration.
Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons λ_i la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.
$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\lambda_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\|\lambda_i\| = \int_a^b \|f(t)\|dt. \ \square$$

Relation de Chasles : Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], E)$ et $c \in]a,b[$.
Alors $f_{/[a,c]}$ et $f_{/[c,b]}$ sont des applications en escalier et $\boxed{\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$.

Démonstration.
Ajouter c à une subdivision σ adaptée à f. $\square$

2 Les applications réglées

2.1 Définition

Définition. On dit que $f\ :\ [a,b] \longrightarrow E$ est réglée si et seulement si c'est la limite uniforme d'une suite d'applications en escalier, c'est-à-dire si et seulement si il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sup\limits_{x\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notation. On note $\mathcal{R}([a,b], E)$ l'ensemble des applications réglées de $[a,b]$ dans E.
On rappelle que $\mathcal{B}([a,b], E)$ est l'ensemble des applications bornées de $[a,b]$ dans E et que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on le munit de la norme de la convergence uniforme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$.

Remarque. Si f est réglée, la définition précédente sous-entend qu'il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ est bornée. En particulier, $f_N - f$ est bornée, or f_N est bornée en tant qu'application en escalier. Ainsi, toute application réglée est bornée. Ceci justifie la propriété suivante.

Propriété. $\mathcal{R}([a,b], E)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a,b], E)$ dans $(\mathcal{B}([a,b], E), \|.\|_\infty)$.

Remarque. Nous verrons ci-dessous que la notion d'intégrale se prolonge naturellement des applications en escalier aux applications réglées par passage à la limite uniforme. Il est donc important de préciser quelles sont les applications réglées.

2.2 Les applications continues par morceaux

Propriété. $C([a,b],E) \subset \mathcal{R}([a,b],E)$: toute application continue est réglée.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(a_{i,n})_{0\leq i\leq n}$ la subdivision uniforme de $[a,b]$:
pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, $a_{i,n} = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Notons f_n l'application en escalier définie par : $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \ \forall x \in [a_{i-1,n}, a_{i,n}[,\ \ f_n(x) = f(a_{i-1,n})$, et $f_n(b) = f(b)$.
Montrons que la suite (f_n) converge uniformément vers f.
Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le compact $[a,b]$, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que
$\forall (x,y) \in [a,b]^2\ \ (|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon)$.
Posons $N = \left\lfloor \dfrac{b-a}{\alpha} \right\rfloor + 1$ et soit $n \geq N$: $\dfrac{b-a}{n} \leq \dfrac{b-a}{N} \leq \dfrac{b-a}{\frac{b-a}{\alpha}} = \alpha$.
Soit $x \in [a,b[$. Il existe $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ tel que $x \in [a_{i-1,n}, a_{i,n}[$. Alors
$\|f(x)-f_n(x)\| = \|f(x)-f(a_{i-1,n})\| \leq \varepsilon$ car $|x-a_{i-1,n}| \leq \dfrac{b-a}{n} \leq \alpha$.
Ainsi, par passage au sup, $\|f-f_n\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$. $\square$

Définition. Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$. f est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que,
— pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_{/]a_{i-1},a_i[}$ est prolongeable par continuité sur $[a_{i-1}, a_i]$,
ce qui est équivalent à
— f est continue sur $[a,b]\setminus\{a_0,\ldots,a_n\}$ et f admet en chaque a_i une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a).
Dans ce cas, on dit que la subdivision σ est adaptée à f.

Démonstration.
On sait que $f_{/]a_{i-1},a_i[}$ est prolongeable par continuité en a_i si et seulement si f admet en a_i une limite à gauche : cf le chapitre "Limites et continuité", page 22. $\square$

Exemples. Les fonctions continues sont continues par morceaux.
Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

Exemples graphiques.

Définition. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, une application $f : I \longrightarrow E$ est continue par morceaux si et seulement si toutes ses restrictions aux segments inclus dans I sont continues par morceaux.

Propriété. Les applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans E sont réglées.

Démonstration.
Supposons que $f : [a,b] \longrightarrow E$ est continue par morceaux et notons $(a_i)_{0\leq i\leq p}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, notons f_i le prolongement par continuité sur $[a_{i-1},a_i]$ de $f_{/]a_{i-1},a_i[}$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, d'après la propriété précédente, il existe une suite $(f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a_{i-1},a_i]$ qui converge uniformément vers f_i sur $[a_{i-1},a_i]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit f_n sur $[a,b]$ en convenant que, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, pour tout $x \in]a_{i-1},a_i[$, $f_n(x) = f_{i,n}(x)$, et que pour tout $i \in \{0,\ldots,p\}$, $f_n(a_i) = f(a_i)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien une application en escalier sur $[a,b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a,b]$,
$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \sum_{i=1}^{p} \sup_{y\in]a_{i-1},a_i[} \|f(y) - f_{i,n}(y)\| + \sum_{i=0}^{p} \|f(a_i) - f_n(a_i)\|$, donc
$\sup_{x\in[a,b]} \|f(x) - f_n(x)\| \leq \sum_{i=1}^{p} \sup_{y\in[a_{i-1},a_i]} \|f_i(y) - f_{i,n}(y)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$. □

Remarque. Nous construisons ci-dessous l'intégrale sur $[a,b]$ de toute application réglée. En particulier, nous définirons ainsi la notion d'intégrale de toute application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E, qui seule est prévue par le programme officiel. Cependant le chapitre suivant donne une caractérisation simple des applications réglées.

2.3 Caractérisation des applications réglées (hors programme)

Critère de Cauchy pour les applications : Soient R un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A \subset R$, $a \in R \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ tel que A rencontre tout voisinage de a et $f : A \longrightarrow E$ une application. On rappelle que E est supposé complet.
Alors $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x,y \in V \cap A,\ d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.
Démonstration.
• Supposons qu'il existe $l \in E$ tel que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(V \cap A) \subset B_o(l, \frac{\varepsilon}{2})$.
Soit $(x,y) \in (V \cap A)^2$. $d(f(x),f(y)) \leq d(f(x),l) + d(l,f(y)) < \varepsilon$.
• Réciproquement, supposons que le critère de Cauchy est vérifié.
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall (x,y) \in (V \cap A)^2\ \ d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.
Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o(a,\alpha) \subset V$, puis il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que,
pour tout $n \geq N$, $d(x_n,a) < \alpha$.
Soient $p \geq N$ et $q \geq N$. $(x_p,x_q) \in (V \cap A)^2$, donc $d(f(x_p),f(x_q)) < \varepsilon$. Ainsi $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de E, lequel est supposé complet, donc la suite $(f(x_n))$ converge.
Il reste à montrer que la limite de la suite $(f(x_n))$ ne dépend pas du choix de la suite (x_n) ; soit (y_n) une seconde suite d'éléments de A telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Il existe $(l,l') \in E^2$ tel que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = z_{2n}$ et $y_n = z_{2n+1}$. On définit ainsi une nouvelle suite (z_n) d'éléments de A telle que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Il existe $l" \in E$ tel que $f(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l"$.
Mais les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont des suites extraites de la suite $(f(z_n))$, donc $l = l" = l'$. $\square$

Théorème. Une application de $[a,b]$ dans E est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $[a,b]$ une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a).

Démonstration.
$\diamond$ Supposons que $f : [a,b] \longrightarrow E$ est une application réglée.
Soit $x_0 \in [a,b[$. Montrons que f possède en x_0 une limite à droite en vérifiant le critère de Cauchy, avec $R = \mathbb{R}$, $A =]x_0, b]$ et $a = x_0$. Il s'agit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in]x_0, x_0 + \alpha[$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.
<u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. f est dans l'adhérence de $\mathcal{E}([a,b], E)$, donc il existe une application en escalier $\varphi : [a,b] \longrightarrow E$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Notons $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ.
Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_0 \in [a_{i-1}, a_i[$, puis <u>il existe $\alpha > 0$</u> tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset]a_{i-1}, a_i[$.
<u>Soit $x, y \in]x_0, x_0 + \alpha[$.</u>
$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - \varphi(x)\| + \|\varphi(x) - \varphi(y)\| + \|\varphi(y) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi(x) - \varphi(y\| + \frac{\varepsilon}{2}$,
mais $x, y \in]a_{i-1}, a_i[$, donc $\varphi(x) = \varphi(y)$. Ainsi, <u>$\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.</u>
De même, on montre que f possède une limite à gauche en tout réel de $]a,b]$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que f admet en tout point de $[a,b]$ une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a).
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in [a,b[$. $f(t)$ admet une limite lorsque t tend vers x en appartenant à $]x,b]$, donc d'après le critère de Cauchy, il existe $\alpha_x > 0$ tel que, pour tout $t, t' \in]x, x + \alpha_x[\cap [a,b]$, $\|f(t) - f(t')\| \leq \varepsilon$.
C'est encore vrai lorsque $x = b$ en prenant $\alpha_b = 1$, car $]b, b+1[\cap [a,b] = \emptyset$.
De même, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\beta_x > 0$ tel que pour tout $t, t' \in]x - \beta_x, x[\cap [a,b]$, $\|f(t) - f(t')\| \leq \varepsilon$.
$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]}]x - \beta_x, x + \alpha_x[$, or $[a,b]$ est compact, donc d'après la caractérisation de la compacité selon Borel-Lebesgue (cf chapitre "Limites et continuité" page 13), il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in [a,b]$ tels que (1) : $[a,b] \subset \bigcup_{1\leq i\leq p}]x_i - \beta_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$.
Posons $P = \{a,b\} \cup \left([a,b] \cap \bigcup_{1\leq i\leq p} \{x_i - \beta_{x_i}, x_i, x_i + \alpha_{x_i}\}\right)$:
P est une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b.
Il existe alors une unique subdivision $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ dont le support est P.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. D'après (1), il existe $k \in \mathbb{N}_p$ tel que $a_{i-1} \in]x_k - \beta_{x_k}, x_k + \alpha_{x_k}[$, or $]a_{i-1}, a_i[\cap P = \emptyset$, donc $]a_{i-1}, a_i[\subset]x_k - \beta_{x_k}, x_k[$ ou bien $]a_{i-1}, a_i[\subset]x_k, x_k + \alpha_{x_k}[$.
Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et pour tout $t, t' \in]a_{i-1}, a_i[$, $\|f(t) - f(t')\| \leq \varepsilon$.
Notons maintenant φ l'unique application en escalier de $[a,b]$ dans E telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\varphi(a_i) = f(a_i)$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$,

$\varphi(x) = f\Big(\dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}\Big)$. Alors, pour tout $t \in [a,b]$, $\|f(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$.
Avec $\varepsilon = 1$, ceci montre que $f \in \mathcal{B}([a,b],E)$. Avec ε quelconque, ceci démontre que $\mathcal{E}([a,b],E)$ rencontre toute boule ouverte centrée en f,
donc que $f \in \overline{\mathcal{E}([a,b],E)} = \mathcal{R}([a,b],E)$. □

Remarque.
On retrouve ainsi que les applications continues par morceaux sont réglées.

Corollaire. Les applications monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées.

Corollaire. Le produit de deux applications réglées est réglé.

3 Intégration des applications réglées

3.1 Construction

Définition. Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ une application réglée.
Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$. On pose

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)\ dt\Big)},$$

ce qui est acceptable car cette limite existe et car elle ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$.

Démonstration.
• Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $x \in [a,b]$, $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Soient $p \geq N$ et $q \geq N$. Pour tout $x \in [a,b]$,
$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Ainsi, d'après les propriétés des intégrales d'applications en escalier,
$\|\int_a^b f_p - \int_a^b f_q\| = \|\int_a^b (f_p - f_q)\| \leq \int_a^b \|f_p(x) - f_q(x)\|dx \leq \int_a^b \dfrac{\varepsilon}{b-a}\ dt = \varepsilon$, ce qui prouve que la suite $\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E. Or E est supposé complet, donc cette suite converge. Notons l sa limite.
• Soit (g_n) une seconde suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans E telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$. Il existe $l' \in E$ tel que $\int_a^b g_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(N', N'') \in \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $n \geq \max(N', N'')$ et $x \in [a,b]$, $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et $\|f(x) - g_n(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Posons $N = \max(N', N'')$. Soit $n \geq N$.

Pour tout $t \in [a,b]$, $\|f_n(t) - g_n(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t) - g_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$,
donc, d'après les propriétés des intégrales d'applications en escalier,
$\|\int_a^b f_n - \int_a^b g_n\| = \|\int_a^b (f_n - g_n)\| \leq \int_a^b \|f_n(t) - g_n(t)\| dt \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt = \varepsilon$, ce qui prouve que $\int_a^b f_n - \int_a^b g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après l'unicité de la limite, $l = l'$. $\square$

Remarque. Supposons que $f : [a,b] \longrightarrow E$ est continue. On a alors construit une suite d'applications f_n qui converge uniformément vers f, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_{i,n} = a + i\frac{b-a}{n}$ et en convenant que
$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \forall x \in [a_{i-1,n}, a_{i,n}[,\ \ f_n(x) = f(a_{i-1,n})$, et $f_n(b) = f(b)$.
Ainsi, lorsque f est continue, $\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\, dt\Big)$, c'est-à-dire
$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + (i-1)\frac{b-a}{n})$: cette égalité est un cas particulier des sommes de Riemann que nous étudierons plus loin.
Ceci permet d'interpréter $\int_a^b f(t)\, dt$, lorsque f est à valeurs réelles, comme une aire algébrique.

Remarque. Lorsque $f \in \mathcal{E}([a,b],E)$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f$, la suite d'applications en escalier (f_n) converge uniformément vers f, donc $\int_a^b f(t)\, dt$, en tant qu'intégrale de l'application *réglée* f, coïncide avec $\int_a^b f(t)\, dt$, en tant qu'intégrable de l'application *en escalier* f.

3.2 Propriétés

Théorème. $\mathcal{R}([a,b],E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application
$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}([a,b],E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ est linéaire.

Démonstration.
Soit $f, g \in \mathcal{R}([a,b],E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$ et $g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} g$.
On sait alors que $(\alpha f_n + g_n)$ est une suite d'applications en escalier et que
$\alpha f_n + g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} \alpha f + g$, donc $\alpha f + g$ est une application réglée. Or l'application identiquement nulle est réglée, donc $\mathcal{R}([a,b],E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
De plus, d'après la définition de l'intégrale d'une application réglée,
$\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))\, dt = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b (\alpha f_n(t) + g_n(t))\, dt\Big)$,
mais d'après la linéarité des intégrales d'applications en escalier,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f_n(t) + g_n(t))\ dt = \alpha \int_a^b f_n(t)\ dt + \int_a^b g_n(t)\ dt$, donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))\ dt &= \alpha \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\ dt\Big) + \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b g_n(t)\ dt\Big)\\ &= \alpha \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt.\end{aligned}$$

□

Propriété. Soit F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $u \in L(E, F)$.
Alors u est continue si et seulement si elle est lipschitzienne.

Démonstration.
La réciproque étant connue, supposons que u est continue.
Elle est en particulier continue en 0, donc avec $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leq \varepsilon = 1$.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$. $\|\alpha \dfrac{x}{\|x\|}\| = \alpha$, donc $\|u\Big(\alpha \dfrac{x}{\|x\|}\Big)\| \leq 1$, puis $\|u(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|$.
C'est encore vrai pour $x = 0$.
On en déduit que, pour tout $x, y \in E$, $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x - y\|$. □

Propriété. Soit F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de Banach et $u \in L(E, F)$ que l'on suppose continue. Si $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$, alors $u \circ f \in \mathcal{R}([a, b], F)$ et $\displaystyle\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right)$.

Démonstration.
D'après la propriété précédente, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E\ \ \|u(x)\| \leq k\|x\|$.
Il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{E}([a, b], E)$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $x \in [a, b]$, $\|u \circ f_n(x) - u \circ f(x)\| \leq k\|f_n(x) - f(x)\| \leq k \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\|$,
donc $\sup\limits_{t\in[a,b]} \|u \circ f_n(t) - u \circ f(t)\| \leq k \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
ce qui prouve que $u \circ f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} u \circ f$.
Or on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ f_n$ est une application en escalier de $[a, b]$ dans F, donc $u \circ f$ est une application réglée de $[a, b]$ dans F.
Alors le fait que $u \circ f_n \in \mathcal{E}([a, b], F)$ et $u \circ f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} u \circ f$ implique que
$\displaystyle\int_a^b u \circ f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b u \circ f$. D'autre part, les applications f_n étant en escaliers,
$\displaystyle\int_a^b u \circ f_n(t)dt = u\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ car u est continue,
donc $\displaystyle\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f(t)dt\right)$. □

Propriété. On suppose que E est de dimension finie et que $e = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$. Notons $f_1, \ldots, f_p$ les applications coordonnées de f, de sorte que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)e_j$. Alors $f_1, \dots, f_p$ sont réglées et $\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j(t)\ dt \right) e_j$.

Démonstration.
Notons $e^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ la base duale de e. Pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, $f_j = e_j^* \circ f$, or e_j^* est linéaire continue (car E est de dimension finie) donc f_j est réglée et $\int_a^b f_j = e_j^* \left(\int_a^b f \right)$.
Ainsi $\int_a^b f = \sum_{1 \leq j \leq p} e_j^* \left(\int_a^b f \right) e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j(t)dt \right) e_j$. □

Remarque. Réciproquement, si $f_1, \dots, f_p$ sont réglées, alors f est aussi réglée : c'est évident en utilisant la caractérisation des applications réglées par les limites.

Propriété. Supposons que $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, E_i est un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b], E)$. Notons $f_1, \dots, f_p$ les applications composantes de f, de sorte que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))$. Alors $f_1, \dots, f_p$ sont réglées et $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_i \right)_{1 \leq i \leq p}$.

Démonstration.
E est bien un espace de Banach, car si (x_n) est une suite de Cauchy de E, on peut montrer en passant aux "ε" que les suites composantes sont des suites de Cauchy des E_i, donc elles sont convergentes, donc (x_n) est également convergente.
Soit $j \in \mathbb{N}_p$. Notons $p_j\ :\ E \longrightarrow E_j$ définie par $p_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$. p_j est lipschitzienne, donc c'est une application linéaire continue. Or $f_j = p_j \circ f$, donc f_j est réglée et $\int_a^b f_j = p_j \left(\int_a^b f \right)$. On en déduit que $\int_a^b f = \left(p_j \left(\int_a^b f \right) \right)_{1 \leq j \leq p} = \left(\int_a^b f_j(t)dt \right)_{1 \leq j \leq p}$.
□

Remarque. Réciproquement, si $f_1, \dots, f_p$ sont réglées, alors f est aussi réglée : c'est évident en utilisant la caractérisation des applications réglées par les limites.

Inégalité triangulaire : Pour tout $f \in \mathcal{R}([a,b], E)$,
$t \longmapsto \|f(t)\|$ est réglée et $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{R}([a,b], E)$. Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|_\infty} f$.
Pour tout $t \in [a,b]$, $|\|f_n(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|f_n(t) - f(t)\| \leq \|f_n - f\|_\infty$, donc par passage au sup, $\sup_{t \in [a,b]} |\|f_n(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que la suite d'applications en escalier $(t \longmapsto \|f_n(t)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $t \longmapsto \|f(t)\|$, donc cette dernière application est réglée et $\int_a^b \|f(t)\|\ dt = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b \|f_n(t)\|\ dt \right)$,

mais d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales d'applications en escalier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \int_a^b f_n(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f_n(t)\|dt$, et on conclut en faisant tendre n vers $+\infty$ □

Propriété. Si f est une application réglée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration.
$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b |f(t)|\ dt \geq \left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \geq 0$, d'après l'inégalité triangulaire. □

Corollaire. Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b], E)$, alors $[\forall t \in [a,b],\ \ f(t) \leq g(t)] \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$: l'intégrale est croissante.

Démonstration.
$g - f \geq 0$, donc $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. □

Exemple. Si f est réglée, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

Propriété. Soit f une application réglée (resp : continue par morceaux) de $[a,b]$ dans E. Si g est une application de $[a,b]$ dans E qui ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors g est réglée (resp : continue par morceaux) et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration.
$g - f$ est nulle sauf en un nombre fini de réels de $[a,b]$, donc c'est une application en escalier sur $[a,b]$ qui ne différe de l'application identiquement nulle qu'en un nombre fini de points, donc $g = (g-f) + f$ est réglée et $\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b (g-f) = \int_a^b f$. □

Relation de Chasles : soit $f \in \mathcal{R}([a,b], E)$ et $c \in]a,b[$.
Alors $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont réglées et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{R}([a,b], E)$. Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n|_{[a,c]}$ et $f_n|_{[c,b]}$ sont des applications en escalier.
De plus $\sup_{t \in [a,c]} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f_n(t) - f(t)\|$, donc $f_n|_{[a,c]} \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f|_{[a,c]}$ et de même, $f_n|_{[c,b]} \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f|_{[c,b]}$, donc $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont réglées.
De plus, d'après la relation de Chasles pour les applications en escalier,
$\int_a^b f_n = \int_a^c f_n|_{[a,c]} + \int_c^b f_n|_{[c,b]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^c f + \int_c^b f$, or $\int_a^b f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$, donc d'après l'unicité de la limite $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Convention : Si f est une application définie en $\alpha \in \mathbb{R}$, on convient $\int_\alpha^\alpha f = 0$.

Convention : Si $f : [a,b] \longrightarrow E$ est réglée, on convient que $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Propriété. La relation de Chasles se généralise au cas d'une application f réglée sur l'intervalle $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, les réels (a,b,c) étant quelconques.

Démonstration.
Soit $f : [\min(a,b,c), \max(a,b,c)] \longrightarrow E$ une application réglée. Avec les conventions précédentes, il s'agit de montrer que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
C'est clair si $a = c$ ou bien $b = c$ ou encore $a = b$.
C'est connu lorsque $a < c < b$.
Supposons que $c < a < b$: on sait que $\displaystyle\int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f$,
donc $\displaystyle\int_a^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Les autres cas se traitent de la même façon. □

Remarque. Avec ces conventions, les égalités établies dans ce paragraphe restent valables, mais ce n'est pas le cas des inégalités.

4 Sommes de Riemann

Notation. On fixe une application f de $[a,b]$ dans E.

Définition. On appelle subdivision pointée de $[a,b]$ tout couple (σ, ξ), où $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ et où $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifie $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

Notation. On notera $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions pointées de $[a,b]$.
Si $(\sigma, \xi) = ((a_i)_{0 \leq i \leq n}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}) \in \mathcal{S}'$, on notera $f_{\sigma,\xi}$ l'application en escalier définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \forall x \in]a_{i-1}, a_i[\quad f_{\sigma,\xi}(x) = f(\xi_i),$$

les valeurs de $f_{\sigma,\xi}$ en les points $a_0, \ldots, a_n$ étant arbitrairement choisies.

Définition. Soit $(\sigma, \xi) = ((a_i)_{0 \leq i \leq n}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}) \in \mathcal{S}'$. On appelle somme de Riemann associée à f et à (σ, ξ) la quantité

$$S(f, \sigma, \xi) = \int_a^b f_{\sigma,\xi} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i).$$

Théorème. Si f est une application réglée de $[a,b]$ dans E,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}' \ \left(\delta(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow \|S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f\| \leq \varepsilon\right).$$

Démonstration.
$\diamond$ La démonstration est à connaître dans le cas particulier où f est continue : alors f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a, b]$, $|x - y| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Soit $(\sigma, \xi) = ((a_i)_{0\leq i\leq n}, (\xi_i)_{1\leq i\leq n}) \in \mathcal{S}'$ tel que $\delta(\sigma) \leq \alpha$. D'après la relation de Chasles,
$S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \Big((a_i - a_{i-1})f(\xi_i) - \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\ dt\Big) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f(t))\ dt$,
or pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $t \in [a_{i-1}, a_i]$, $|\xi_i - t| \leq \delta(\sigma) \leq \alpha$, donc $\|f(\xi_i) - f(t)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Ainsi, $\|S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f\| = \|\sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f(t))\ dt\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|f(\xi_i) - f(t)\|\ dt$,
puis $\|S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\varepsilon}{b-a}\ dt = \varepsilon$.
$\diamond$ Supposons maintenant que f est une application en escalier. Notons $s = (b_j)_{0\leq j\leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ qui est adaptée à f.
Soit à nouveau $(\sigma, \xi) = ((a_i)_{0\leq i\leq n}, (\xi_i)_{1\leq i\leq n})$ une subdivision pointée de $[a, b]$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Lorsque $[a_{i-1}, a_i] \cap A(s) = \emptyset$, f est constante sur $[a_{i-1}, a_i]$,
donc $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f(t))\ dt = 0$. Sinon, en posant $M = \|f\|_\infty$,
$\|\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f(t))\ dt\| \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} (\|f(\xi_i)\| + \|f(t)\|)\ dt \leq 2M\delta(\sigma)$, donc
$\|S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f\| \leq 2NM\delta(\sigma)$,
où N est le cardinal de $B = \{i \in \mathbb{N}_n / [a_{i-1}, a_i] \cap A(s) \neq \emptyset\}$.
Or pour tout $j \in \{0, \ldots, p\}$, b_j appartient au plus à deux intervalles de la forme $[a_{i-1}, a_i]$, donc $N \leq 2(p + 1)$. En effet, plus formellement,
$B = \displaystyle\bigcup_{0\leq j\leq p} \{i \in \mathbb{N}_n\ /\ [a_{i-1}, a_i] \cap \{b_j\} \neq \emptyset\}$, donc
$|B| \leq \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \Big|\{i \in \mathbb{N}_n\ /\ b_j \in [a_{i-1}, a_i]\}\Big| \leq \sum_{j=0}^{p} 2 = 2(p + 1)$.
On a ainsi montré que, pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathcal{S}'$,
$\|S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f\| \leq 4(p + 1)M\delta(\sigma)$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$,
en choisissant $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{4(p + 1)(M + 1)}$, pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathcal{S}'$, lorsque $\delta(\sigma) \leq \alpha$, on a
$\|S(f, \sigma, \xi) - \displaystyle\int_a^b f\| \leq \varepsilon$.
$\diamond$ Plaçons-nous maintenant dans le cas général, où f est seulement supposée réglée.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{E}([a, b], E)$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$.
D'après le point précédent appliqué à g, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathcal{S}'$,

lorsque $\delta(\sigma) \leq \alpha$, on a $\|S(g,\sigma,\xi) - \int_a^b g\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $(\sigma,\xi) = ((a_i)_{0\leq i\leq n},(\xi_i)_{1\leq i\leq n}) \in \mathcal{S}'$ tel que $\delta(\sigma) \leq \alpha$. D'après l'inégalité triangulaire, $\|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\| \leq \|S(f,\sigma,\xi) - S(g,\sigma,\xi)\| + \|S(g,\sigma,\xi) - \int_a^b g\| + \|\int_a^b g - \int_a^b f\|$.
Or $\|S(f,\sigma,\xi) - S(g,\sigma,\xi)\| = \|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})(f(\xi_i) - g(\xi_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\|f-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$,
donc $\|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

Remarque. Dans cette démonstration, on montre la propriété pour les applications en escalier, puis on prolonge cette propriété aux applications réglées par limite uniforme. Cette stratégie se retrouve dans l'exercice qui suit.

Exercice. Lemme de Riemann-Lebesgue. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue par morceaux.
Montrer que $\int_a^b f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution :

• *Première étape.* On suppose que f est constante.
On suppose donc qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in [a,b] \quad f(t) = C$.
Ainsi $\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| = \left|C\left[\frac{e^{int}}{in}\right]_a^b\right| \leq \frac{2}{n}|C| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• *Deuxième étape.* On suppose que f est une application en escalier.
On suppose donc qu'il existe une subdivision $(a_k)_{0\leq k\leq p}$ de $[a,b]$ et une famille $(C_k)_{1\leq k\leq p}$ de complexes telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}_p \quad \forall t \in]a_{k-1},a_k[\quad f(t) = C_k.$$

Ainsi $\int_a^b f(t)e^{int}dt = \sum_{k=1}^{p}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la première étape.

• *Troisième étape.* Cas général.
Il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-\varphi_p(t))e^{int}dt + \int_a^b \varphi_p(t)e^{int}dt\right| \\
&\leq \int_a^b |(f(t)-\varphi_p(t))|dt + \left|\int_a^b \varphi_p(t)e^{int}dt\right| \\
&\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-\varphi_p(t)| + \left|\int_a^b \varphi_p(t)e^{int}dt\right|.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq P$, $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)-\varphi_p(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi_P(t)e^{int}dt\right|$.

D'après la deuxième étape $\int_a^b \varphi_P(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $\left|\int_a^b \varphi_P(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq N$. $\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Ainsi $\int_a^b f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. En adaptant l'exercice précédent, on peut également montrer que, lorsque f est réglée, $\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \underset{\substack{\lambda\to+\infty\\ \lambda\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} 0$.

Corollaire. Soit $(\sigma_n, \xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions pointées dont le pas tend vers 0. Alors, si f est réglée, la suite des sommes de Riemann associée à f et à (σ_n, ξ_n) converge vers $\int_a^b f$. Plus précisément, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = (a_{i,n})_{0\leq i\leq\varphi(n)}$ et $\xi_n = (\xi_{i,n})_{1\leq i\leq\varphi(n)}$, si f est réglée et si $\max_{1\leq i\leq\varphi(n)} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

alors $\sum_{i=1}^{\varphi(n)} (a_{i,n} - a_{i-1,n})f(\xi_{i,n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall(\sigma, \xi) \in \mathcal{S}'$ $(\delta(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow \|S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f\| \leq \varepsilon)$.
$\delta(\sigma_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $\delta(\sigma_n) \leq \alpha$. Alors pour tout $n \geq N$, $\|S(f, \sigma_n, \xi_n) - \int_a^b f\| \leq \varepsilon)$. □

Cas particulier : si f est continue par morceaux,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

5 Primitives

Notation. Conformément au programme officiel, on se limite au cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. On sait alors qu'il est complet, donc c'est bien un espace de Banach.
On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et une application $f : I \longrightarrow E$.

Lemme : f est constante sur I si et seulement si
f est dérivable sur I et si $\forall x \in I, \ f'(x) = 0$.

Démonstration.

• Si f est constante, alors f est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in I \setminus \{x\}}} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in I \setminus \{x\}}} 0 = 0.$$

• Réciproquement, supposons que f est dérivable sur I et que $\forall x \in I \;\; f'(x) = 0$.
Même lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer E comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Choisissons une $\mathbb{R}$-base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et notons $\begin{array}{rccc} f : & I & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i \end{array}$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Pour tout $x \in I$, $0 = f'(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f'_j(x) e_j$ donc $f'_i(x) = 0$.

Ainsi f_i est une application à valeurs réelles dont la dérivée est identiquement nulle. Alors d'après l'égalité des accroissements finis, f_i est constante, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, ce qui prouve que f est constante sur I. □

Définition.

$g \; : I \longrightarrow E$ est une primitive de f si et seulement si g est dérivable sur I et $g' = f$.

Propriété. Si f admet une primitive g_0 sur I, alors g est une primitive de f si et seulement si il existe $k \in E$ tel que $\forall x \in I \;\; g(x) = g_0(x) + k$.

Démonstration.

g est une primitive de f si et seulement si g est dérivable et $(g - g_0)' = 0$, donc si et seulement si $g - g_0$ est constante. □

Propriété. On suppose que f est réglée sur I (c'est-à-dire que les restrictions de f aux intervalles compacts inclus dans I sont réglées). Soit $a \in I$.

Alors l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est continue sur I.

Démonstration.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. f est réglée donc bornée sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$: il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $\|f(t)\| \leq M$.
Soit $x, y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. D'après la relation de Chasles,

$F(y) - F(x) = \displaystyle\int_x^a f + \int_a^y f = \int_x^y f$, donc

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} M = |x - y| M.$$

Ainsi, $f|_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]}$ est lipschitzienne, donc f est continue en x_0, pour tout $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

De même, on montre que f est continue à droite en $\min(I)$ (si ce minimum existe) et qu'elle est continue à gauche en $\max(I)$ (si ce maximum existe). □

Théorème fondamental de l'analyse :
On suppose que f est continue sur I. Soit $a \in I$.
Alors $\boxed{\begin{array}{rccl} F: & I & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \text{ est l'unique primitive de } f \text{ s'annulant en } a.}$

Démonstration.
$\diamond$ *Unicité* : supposons qu'il existe deux primitives F et G de f s'annulant en a. Alors il existe $k \in E$ tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. En particulier, pour $x = a$, $k = G(a) - F(a) = 0$, donc $G = F$.
$\diamond$ Soit $x \in I$. Nous devons montrer que $\dfrac{F(x) - F(t)}{x - t} \underset{\substack{t \to x \\ t \in I \setminus \{x\}}}{\longrightarrow} f(x)$: Soit $t \in I \setminus \{x\}$.
D'après la relation de Chasles, $F(x) - F(t) = \displaystyle\int_t^a f + \int_a^x f = \int_t^x f$, donc
$\|\dfrac{F(x) - F(t)}{x - t} - f(x)\| = \|\dfrac{1}{x - t}\displaystyle\int_t^x (f(u) - f(x))du\| \leq \dfrac{1}{|x - t|}\int_{\min(x,t)}^{\max(x,t)} \|f(u) - f(x)\|du.$
Soit $\varepsilon > 0$. f est continue en x, donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in I$, $(|u - x| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(u)\| \leq \varepsilon)$.
Soit $t \in I \setminus \{x\}$ tel que $|t - x| \leq \alpha$. Pour tout $u \in [x, t]$, $|u - x| \leq |t - x| \leq \alpha$, donc
$\|\dfrac{F(x) - F(t)}{x - t} - f(x)\| \leq \dfrac{1}{|x - t|}\displaystyle\int_{\min(x,t)}^{\max(x,t)} \varepsilon du = \varepsilon.$
Ceci montre que $\dfrac{F(x) - F(t)}{x - t} \underset{\substack{t \to x \\ t \in I \setminus \{x\}}}{\longrightarrow} f(x)$, donc F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.
$\square$

Remarque. Cette démonstration prouve en fait un résultat plus fin :
On suppose que f est réglée sur I (c'est-à-dire que les restrictions de f aux intervalles compacts inclus dans I sont réglées). Soit $a \in I$.
On pose à nouveau, pour tout $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
Pour tout $x_0 \in I$, si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0, et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Remarque. Supposons que f est réglée sur I et qu'elle admet une primitive F sur I. Soit $x \in I$. Supposons que x n'est pas le maximum (s'il existe) de I. Il existe $y > x$ tel que $[x, y] \subset I$. F est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y]$. De plus, f étant réglée, $F'(t) = f(t)$ admet une limite ℓ lorsque $t \underset{t \in]x,y]}{\longrightarrow} x$. Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée (qui reste valable pour une application à valeurs dans E en passant par ses applications coordonnées dans une base), $F'(x) = \ell$, donc $f(t) \underset{\substack{t \to x \\ t \in]x,y]}}{\longrightarrow} f(x)$. Ainsi, f est continue à droite en tout réel x de I différent de $\max(I)$ (s'il existe). On montre de même que f est continue à gauche en tout réel x de I différent de $\min(I)$ (s'il existe), donc f est continue.
On a donc montré que si f est une application réglée qui possède une primitive, elle est nécessairement continue.

Corollaire. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$ et f une application continue de $[a,b]$ dans E. Si F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{\text{notation}}{=} [F(t)]_a^b$.

Démonstration.
Il existe $C \in E$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. En particulier,
$F(a) = C + \int_a^a f(t)dt = C$, donc $F(b) = C + \int_a^b f(t)dt = F(a) + \int_a^b f(t)dt$. □

Corollaire. Si f est une application de classe C^1 sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Démonstration.
f est une primitive de f'. □

Notation. L'écriture "$\int f(t)dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue par morceaux sur I et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k/k \in E\}$.

Théorème. Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est **continue**, positive et si $\int_a^b f = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Démonstration.
Posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x) \geq 0$, donc F est croissante. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, $0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0$, donc F est constante, puis $f = F'$ est identiquement nulle. □

Définition. Si $f : [a,b] \longrightarrow E$ est une application réglée,
la valeur moyenne de f est la quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$.

Propriété. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, f atteint sa valeur moyenne : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$.

Démonstration.
On note F une primitive de f. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c)$. □

Remarque. Le théorème de changement de variable au sein d'une intégrale vu en page 33 du chapitre "Dérivation et intégration, une première approche" s'adapte mot pour mot au cas d'une fonction f à valeurs dans E. La fonction φ de changement de variable est encore une fonction d'un intervalle J vers un autre intervalle I.