Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 3 h 30

FRACTIONS RATIONNELLES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les structures algébriques ;
- la caractéristique d'un anneau ;
- les polynômes ;
- le corps des fractions d'un anneau commutatif intègre.

Dans tout ce chapitre, la lettre K désigne un corps commutatif.

La lettre « éclaircie » $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Le corps des fractions rationnelles

A.1. Fractions rationnelles, degré, racines, pôles et fonctions rationnelles

a) Fraction rationnelle formelle

Avant tout, je vous conseille de relire l'annexe du cours sur les structures algébriques concernant le corps des fractions d'un anneau commutatif intègre.

Rappelons que l'anneau des polynômes $K[X]$ est commutatif et intègre.

On note $K[X]^* = K[X] \setminus \{0\}$.

Définition 1

On note $K(X)$ le corps des fractions de $K[X]$. Les éléments de $K(X)$ sont appelées des fractions rationnelles sur K d'indéterminée X.

Pour toute fraction rationnelle $F \in K(X)$, on appelle représentant de F tout couple (A, S) de polynômes sur K, avec $S \neq 0$, tel que $F = A/S$. Ces représentants satisfont la règle d'égalité du produit en croix :

$$\frac{A}{S} = \frac{B}{T} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (AT = BS),$$

où A, S, B, T sont quatre polynômes sur K avec $S \neq 0$ et $T \neq 0$.

Dans l'écriture A/S, on dit que A est le numérateur et que S est le dénominateur.

Les fractions rationnelles ainsi définies sont des objets formels. En particulier, la lettre X n'est pas une variable. Elle ne correspond pas à une valeur de K et n'a d'ailleurs pas à être quantifiée.

On notera la subtile différence de notation entre l'anneau $K[X]$ des polynômes et le corps $K(X)$ des fractions rationnelles. En l'occurence, il ne faut donc pas confondre crochets et parenthèses.

La règle du produit en croix dit que, pour $A \in K[X]$ et $S, R \in K[X]^*$, on a

$$\frac{AR}{SR} = \frac{A}{S},$$

où l'on passe de la fraction de gauche à celle de droite par l'opération dite de simplification par R.

Exemples :

- Le plongement naturel de $K[X]$ dans $K(X)$, opéré par l'injection $j : K[X] \longrightarrow K(X)$ définie par $\forall P \in K[X],\ j(P) = P/1$, permet de considérer les polynômes comme des fractions rationnelles, c'est-à-dire $K[X] \subset K(X)$.

  En particulier, le polynôme nul est une fraction rationnelle, que l'on appelle naturellement la fraction rationnelle nulle et que l'on note encore 0. Pour $S \in K[X]^*$, on a donc $0 = 0/S$.
- Voici d'autres exemples de fractions rationnelles :
  - $F = \dfrac{X^3 - 1}{X^2 - 1} \in \mathbb{Q}(X)$ s'écrit aussi $F = \dfrac{X^2 + X + 1}{X + 1}$ en simplifiant par $X - 1$
  - $\dfrac{X^{1975} - \pi X^7 + 1}{\mathrm{e}\, X^{31} - 1} \in \mathbb{R}(X)$
  - $\dfrac{2iX + 1}{X^3 + j} \in \mathbb{C}(X)$.

Dans la suite de ce cours, lorsque l'on écrit $F = A/S$ sans plus de précision, il est sous-entendu que A/S est un représentant de la fraction rationnel F, autrement dit que $A \in K[X]$ et $S \in K[X]^*$.

Parmi les représentants d'une fraction rationnelle, les plus simples sont ceux dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs en communs, c'est-à-dire ceux que l'on ne peut pas simplifier.

Définition 2

Soit F une fraction rationnelle sur K.

On appelle représentant irréductible de F tout représentant A/S de F tel que $A \wedge S = 1$.

On appelle représentant unitaire de F tout représentant A/S de F tel que S est unitaire.

La proposition suivante rassemble les propriétés des représentants irréductibles.

Proposition 1

On a

(i) Toute fraction rationnelle non nulle admet un représentant irréductible.

(ii) Si $\dfrac{A}{S}$ est un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F, alors tout représentant de F est de la forme $\dfrac{AR}{SR}$ où $R \in K[X]^*$.

(iii) Si $\dfrac{A}{S}$ est un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F, alors tout représentant irréductible de F est de la forme $\dfrac{\lambda A}{\lambda S}$ où $\lambda \in K^*$.

(iv) Toute fraction rationnelle non nulle admet un unique représentant irréductible unitaire

■ (i) Il suffit de prendre pour F un représentant quelconque A/S puis de diviser A et S par leur pgcd.

(ii) Soit A_1/S_1 un autre représentant de la fraction rationnelle A/S. On a alors $A_1S = AS_1$. Comme $A \wedge S = 1$, le lemme de Gauß dit que S divise S_1. D'où l'existence de $R \in K[X]$ tel que $S_1 = RS$. De plus, R est non nul puisque S_1 ne l'est pas. En reportant dans l'égalité $A_1S = AS_1$, il vient $A_1S = ARS$, ce qui donne $A_1 = AR$ puisque $S \neq 0$ et $K[X]$ est intègre.

(iii) Soit A_1/S_1 un autre représentant irréductible de la fraction rationnelle A/S. Il découle de (ii) qu'il existe $R \in K[X]^*$ tel que $A_1 = RA$ et $S_1 = RS$. Alors $1 = A_1 \wedge S = RA \wedge RS = \mu(A \wedge S)R = \mu R$ où $\mu \in K^*$ est l'inverse du coefficient dominant de R. Il s'ensuit que R est associé à 1 dans K et donc que $R = \lambda$ où $\lambda \in K^*$.

(iv) Pour l'existence, on prend un représentant irréductible quelconque et on divise le numérateur et le dénominateur par le coefficient dominant de ce dernier. L'unicité découle de (iii). ■

Exemples :

- Le représentant irréductible unitaire de $\dfrac{X^3-1}{X^2-1}$ est $\dfrac{X^2+X+1}{X+1}$.

b) Degré

Définition 3

Soit $F = A/S$ une fraction rationnelle sur K.

La quantité $\deg(A) - \deg(S)$ est un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ qui ne dépend pas du représentant A/S choisi pour la fraction F.

Cette quantité est appelée degré de F et est notée $\deg(F)$.

■ Soient A/S et B/T deux représentants de la fraction rationnelle F. Alors $AT = BS$, ce qui implique que $\deg(A) - \deg(S) = \deg(AT) - \deg(T) - \deg(S) = \deg(BS) - \deg(S) - \deg(T) = \deg(B) - \deg(T)$. ■

L'application $\deg : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ prolonge l'application $\deg : K[X] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ puisque, pour tout polynôme P, on a

$$\deg\left(\frac{P}{1}\right) = \deg(P) - \deg(1) = \deg(P).$$

Mais attention, une fraction rationnelle de degré positif n'est pas nécessairement un polynôme !

Exemples :

- $\deg(0) = -\infty$
- $\deg\left(\dfrac{X^3 + X - 2}{X^2 - 1}\right) = 3 - 2 = 1$
- $\deg\left(\dfrac{X^{20} - \pi X^7 + 2i + 1}{iX^{31} + 1}\right) = 20 - 31 = -11.$

c) *Racines et pôles*

Définition 4

Soit F une fraction rationnelle sur K dont A/S est un représentant irréductible.

On appelle racine de F dans K toute racine de A dans K.

On appelle pôle de F dans K toute racine de S dans K.

Si α est une racine (respectivement un pôle) de $F \neq 0$ dans K, l'ordre de multiplicité de α est l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de A (respectivement S) dans K.

■ Cette définition ne dépend pas du représentant irréductible choisi puisque les autres représentants irréductibles sont de la forme $(\lambda A)/(\lambda S)$ avec $\lambda \in K^*$. ■

Il est courant de donner la liste des racines et des pôles d'une fraction rationnelle sur K dans un sur-corps L de K. Ainsi, pour une fraction rationnelle sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on donne souvent la liste des racines et des pôles dans $\mathbb{C}$.

Avant de donner les racines et les pôles d'une fraction rationnelle, il faut déterminer un représentant irréductible de cette fraction. Ainsi, malgré les apparences, 1 n'est ni une racine ni un pôle de $\dfrac{X^3-1}{X^2-1}$ puisque le représentant irréductible unitaire de cette fraction rationnelle est $\dfrac{X^2+X+1}{X+1}$.

Cela implique en particulier qu'un nombre $\alpha \in K$ ne peut être simultanément racine et pôle d'une fraction rationnelle. Sinon, en prenant un représentant irréductible A/S de F, on aurait $A(\alpha) = S(\alpha) = 0$ et A et S seraient simultanément divisible par $X - \alpha$, ce qui contredirait l'irréductibilité de A/S.

Dans $\mathbb{C}(X)$, le théorème de d'Alembert–Gauss implique que le degré est égal à la différence entre la somme des multiplicités des racines complexes de F et la somme des multiplicités des pôles complexes de F.

Exemples :

- La fraction rationnelle nulle, dont le représentant irréductible unitaire est $0/1$, admet tout élément de K comme racine et n'admet aucun pôle.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n - 1} \in \mathbb{C}[X]$ n'admet aucune racine. Ses pôles sont les racines n-èmes de l'unité. Ils sont tous simples.
- Si F est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de F (respectivement un pôle complexe de F), alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine complexe de F (respectivement un pôle complexe de F). De plus, la multiplicité de $\overline{\alpha}$ en tant que racine ou pôle est la même que celle de α.

d) Fonctions rationnelles

Comme dans le cas des polynômes, il est souvent commode de considérer une fraction rationnelle comme une fonction.

Définition 5

Soient F une fraction rationnelle sur K et A/S un représentant irréductible de cette fraction. On appelle fonction rationnelle associée à F sur K la fonction $\widetilde{F}$ définie par

$$\widetilde{F}\left\{\begin{array}{ccc} K\setminus\{\text{pôles de } F\} & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \dfrac{A(x)}{S(x)} \end{array}\right.$$

■ Cette définition est licite puisqu'en vertu de la proposition 1, les représentants irréductibles de F sont les $(\lambda A)/(\lambda S)$ avec $\lambda \in K^*$. Ainsi, choisir un représentant irréductible plutôt qu'un autre ne modifie pas la fonction rationnelle associée : il suffit de simplifier par λ. ■

Il est indispensable de se ramener à un représentant irréductible avant d'écrire la fonction rationnelle. Cela permet au dénominateur S d'avoir le moins de racines possibles et donc aussi à la fonction rationnelle d'avoir le plus grand ensemble de définition possible.

Exemples :

- La fonction rationnelle associée à la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1} \in \mathbb{R}(X)$ est

$$\widetilde{F}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x+1}{x+1} \end{array}\right.$$

  puisque $F = \dfrac{X^2+X+1}{X+1}$ est un représentant irréductible de F.
- Soit p un nombre premier. La fonction rationnelle associée à $F = \dfrac{X-1}{X^p-1} \in \mathbb{F}_p(X)$ est, en vertu du petit théorème de Fermat, l'application $\widetilde{F} : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ qui est constante égale à 1.

La fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle permet d'envisager d'évaluer la fraction rationnelle en un élément de K.

Définition 6

Soient F une fraction rationnelle sur K et $\alpha \in K$. Si α n'est pas un pôle de F, on appelle évaluation de F en α la valeur de K, notée $F(\alpha)$, prise par la fonction $\widetilde{F}$ en α, c'est-à-dire $\widetilde{F}(\alpha)$. Pour évaluer F en α, on dit que l'on substitue α à X dans F.

Si A/S n'est pas un représentant irréductible de F et si $A(\alpha) \neq 0$, on peut tout de même écrire que $F(\alpha) = A(\alpha)/S(\alpha)$ (c'est une conséquence du (ii) de la proposition 1). Ainsi, pour évaluer une fraction rationnelle en α, il n'est pas absolument nécessaire de déterminer un représentant irréductible de la fraction tant que le représentant dont on dispose possède un dénominateur qui ne s'annule pas en α.

Il est courant d'évaluer une fraction rationnelle sur K en un élément d'un sur-corps L de K. Ainsi, pour une fraction rationnelle F sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, il est possible d'évaluer F en n'importe quel nombre complexe α (du moment que α n'est pas un pôle complexe de F).

Dans le cas où le corps K est infini, il est possible d'énoncer un principe « trop de zéros » pour les fractions rationnelles.

Y'a que les nuls qui ont trop de zéros !

Si K est infini, la seule fraction rationnelle qui possède une infinité de racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité) est la fraction rationnelle nulle.

En particulier, si deux fractions rationnelles donnent la même évaluation en une infinité de valeurs de K, les deux fractions rationnelles sont égales.

■ AQT (on utilise la possibilité de soustraire deux fractions rationnelles dans le corps $K(X)$; on en reparle dans le prochain paragraphe). ■

A. 2. Addition et multiplication

La construction du corps des fractions d'un anneau intègre s'accompagnent de l'extension des lois $+$ et $\times$ de l'anneau vers le corps. On retrouve ainsi les opérations d'addition et de multiplication des fractions telles qu'on avait l'habitude de les pratiquer dans $\mathbb{Q}$. Autrement dit, pour deux fractions rationnelles $F = A/S$ et $G = B/T$, on a

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{T} = \frac{AT + BS}{ST} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{S} \times \frac{B}{T} = \frac{AB}{ST}.$$

Comme nous l'avons montré lors de la construction du corps des fractions, ces deux opérations sont légitimes puisqu'elles ne dépendent pas des représentants choisis.

En outre, ces opérations confèrent à $K(X)$ une structure de corps : toute fraction rationnelle non nulle $F = A/S$ est inversible dans $K(X)$ d'inverse $F^{-1} = S/A$. Cela permet, comme on en a l'habitude dans un corps, de définir une division entre les éléments de $K(X)$: pour deux fractions rationnelles $F = A/S$ et $G = B/T$ avec $G \neq 0$, on pose $F/G = FG^{-1} = (AT)/(SB)$.

On constate ainsi que l'addition et la multiplication entre fractions rationnelles s'effectuent comme celles des fonctions rationnelles associées. Autrement dit, pour toutes fractions rationnelles F et G, on a

$$\widetilde{F+G} = \widetilde{F} + \widetilde{G} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{FG} = \widetilde{F} \times \widetilde{G}.$$

Ces opérations prolongeant naturellement celles des polynômes, il est légitime de retrouver les règles sur le degré, déjà vues pour les polynômes. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2

Soient F, G deux fractions rationnelles sur K (avec $G \neq 0$ si nécessaire) et $\lambda \in K$. On a

(i) $\deg(F+G) \leqslant \max\{\deg(F), \deg(G)\}$ avec égalité dès que $\deg(F) \neq \deg(G)$;

(ii) $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;

(iii) $\deg(F/G) = \deg(F) - \deg(G)$;

(iv) $\deg(\lambda F) = \begin{cases} \deg(F) & \text{si } \lambda \neq 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$

■ Posons $F = A/S$ et $G = B/T$.

(i) On a $F + G = (AT + BS)/(ST)$, d'où

$$\begin{aligned} \deg(F+G) &= \deg(AT+BS) - \deg(ST) \\ &\leqslant \max\{\deg(AT), \deg(BS)\} - \deg(ST) \qquad (*) \\ &= \max\{\deg(AT) - \deg(ST), \deg(BS) - \deg(ST)\} \\ &= \max\{\deg(A) - \deg(S), \deg(B) - \deg(T)\} \\ &= \max\{\deg(F), \deg(G)\}. \end{aligned}$$

Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(A) - \deg(S) \neq \deg(B) - \deg(T)$ i.e. $\deg(A) + \deg(T) \neq \deg(B) + \deg(S)$ ou encore $\deg(AT) \neq \deg(BS)$. On sait que cette condition est suffisante pour avoir égalité dans l'inégalité $(*)$. Donc, si $\deg(F) \neq \deg(G)$, on a bien $\deg(F+G) = \max\{\deg(F), \deg(G)\}$.

(ii) On a $FG = (AB)/(ST)$, d'où

$$\begin{aligned} \deg(FG) &= \deg(AB) - \deg(ST) &&= \deg(A) + \deg(B) - \deg(S) - \deg(T) \\ &= \deg(A/S) + \deg(B/T) &&= \deg F + \deg G. \end{aligned}$$

(iii) On a

$$\deg(F) = \deg\left(\frac{F}{G}G\right) = \deg\left(\frac{F}{G}\right) + \deg(G),$$

ce qui donne le résultat en « faisant passer $\deg(G)$ de l'autre côté de l'inégalité ».

(iv) C'est un cas particulier de (ii) avec $G = \lambda \in K$. ■

A.3. Composition

Définition 7

Pour tout polynôme $P = \sum_{j\geqslant 0} a_j X^j$ sur K et toute fraction rationnelle F sur K, on appelle composée de F et P la fraction rationnelle sur K, notée $P \circ F$ ou $P(F)$, définie par

$$P \circ F = \sum_{j\geqslant 0} a_j F^j.$$

Soient F et G deux fractions rationnelles sur K et $G = A/S$ un représentant irréductible de G. Si F et G sont composables, c'est-à-dire si $S \circ F \neq 0$, on appelle composée de F et G la fraction rationnelle sur K, notée $G \circ F$ ou $G(F)$, définie par

$$G \circ F = \frac{A \circ F}{S \circ F}$$

Nous verrons en exercice que « F et G sont composables » revient à dire que F n'est pas constante égale à un pôle de G.

■ On vérifie que le résultat ne dépend pas du représentant irréductible de G choisi puisque si A_1/S_1 est un autre représentant irréductible de G, on a $A_1 = \lambda A$ et $S_1 = \lambda S$ avec $\lambda \in K^*$, ce qui donne le même résultat pour $G \circ F$. ■

La composition des fractions rationnelles prolonge celle des polynômes.

La composition des fractions rationnelles s'effectuent comme celles des fonctions rationnelles associées. Autrement dit, pour toutes fractions rationnelles composables F et G, on a

$$\widetilde{G \circ F} = \widetilde{G} \circ \widetilde{F}.$$

Exemples :

- Si $F = \dfrac{X^3}{X+1}$ et $G = 1 + X^2$, on a $G \circ F = 1 + \left(\dfrac{X^3}{X+1}\right)^2 = \dfrac{X^6 + X^2 + 2X + 1}{(X+1)^2}$.
  Dans ce cas, on voit que $\deg(G \circ F) = \deg(G) \times \deg(F)$.
- Si $G = \dfrac{1+X}{X}$ et $F = \dfrac{X}{1-X}$, on a $G \circ F = \dfrac{1 + \dfrac{X}{1-X}}{\dfrac{X}{1-X}} = \dfrac{1}{X}$.
  Dans ce cas, on voit que $\deg(G \circ F) = -1$ alors que $\deg(G) = \deg(F) = 0$.

Les propriétés de cette composition sont données dans l'énoncé suivant.

Proposition 3

Soient F, G, H trois fractions rationnelles sur K qui sont composables. Alors

(i) $(F + G) \circ H = F \circ H + G \circ H$;

(ii) $(FG) \circ H = (F \circ H)(G \circ H)$;

(iii) $\circ$ est associative, c'est-à-dire $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

■ En exercice. ■

La propriété (ii) montre qu'il n'est pas nécessaire de déterminer un représentant irréductible de G pour composer F et G. Si A/S est un représentant quelconque de G tel que $S \circ F \neq 0$, alors $G \circ F = (A \circ F)/(S \circ F)$.

A.4. Dérivation

Définition 8

On associe à toute fraction rationnelle F sa fraction rationnelle dérivée F' définie, pour n'importe quel représentant A/S de F, par la formule

$$F' = \frac{A'S - AS'}{S^2}.$$

■ Il faut vérifier que la dérivée ne dépend pas du représentant de F choisi. On considère donc un autre représentant B/T de F de sorte que $AT = BS$. En dérivant, on a $A'T + AT' = B'S + BS'$. D'où

$$\begin{aligned}
(A'S - AS')T^2 &= (A'T)ST + (AT)S'T \\
&= (B'S + BS' - AT')ST + (BS)S'T \\
&= B'S^2T - (AT)ST' \\
&= B'S^2T - BS^2T' \\
&= S^2(B'T - BT'),
\end{aligned}$$

donc $(A'S - AS')/S^2 = (B'T - BT')/T^2$. La dérivée ne dépend donc pas du représentant de F choisi. ■

La dérivation des fractions rationnelles prolonge celle des polynômes.

On peut itérer le processus de dérivation en définissant par récurrence les dérivées successives : on pose $F^{(0)} = F$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $F^{(m)} = \left(F^{(m-1)}\right)'$. Lorsque m est petit, on préfère utiliser les notations F', F'' et F'''.

Dans $\mathbb{R}$, on peut retenir que la dérivation d'une fraction rationnelle F s'effectue comme celle de sa fonction rationnelle associée, c'est-à-dire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{F^{(m)}} = \widetilde{F}^{(m)}.$$

Exemples :

- La dérivée d'une fraction rationnelle constante est la fraction rationnelle nulle.
  La réciproque est vraie lorsque K est un corps de caractéristique nulle (y réfléchir).
- Soit $p \in \mathbb{P}$. Dans $\mathbb{F}_p(X)$, la dérivée de $\dfrac{X^p}{(X+1)^p}$ est la fraction rationnelle nulle.

Les propriétés de la dérivation sont données dans l'énoncé suivant.

Proposition 4

Soient F, G deux fractions rationnelles sur K (avec $G \neq 0$ et F et G composables si nécessaire) et $\lambda, \mu \in K$. On a

(i) $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G'$
plus généralement, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(\lambda F + \mu G)^{(m)} = \lambda F^{(m)} + \mu G^{(m)}$;

(ii) $(FG)' = F'G + FG'$
plus généralement, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a la formule de Leibniz :
$$(FG)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} F^{(k)} G^{(m-k)} ;$$

(iii) $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - FG'}{G^2}$;

(iv) $(G \circ F)' = F'(G' \circ F)$.

■ En exercice. ■

La proposition suivante rassemble les règles sur le degré des dérivées.

Proposition 5

Soit F une fraction rationnelle sur K. On a

$$\deg(F') \leqslant \deg(F) - 1.$$

Si K est de caractéristique nulle et $\deg(F) \neq 0$, il y a égalité dans cette inégalité.
Plus généralement, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \deg(F^{(m)}) \leqslant \deg(F) - m.$$

■ En exercice. ■

Exemples :

- Si $F = \dfrac{X+1}{X}$ alors $F' = -\dfrac{1}{X^2}$.
  Cet exemple illustre le fait que si $\deg(F) = 0$, il est tout à fait possible que $\deg(F')$ soit strictement inférieur à $\deg(F) - 1$.

B. Décomposition en éléments simples

B.1. La théorie

a) Décomposition sur un corps quelconque

Définition 9

On appelle éléments simples de $K(X)$:

(i) les polynômes sur K ;

(ii) les fractions rationnelles de la forme C/S^m où S est un polynôme irréductible, m un entier naturel non nul et C un polynôme non nul tel que $\deg C < \deg S$.

On peut alors énoncer le théorème de décomposition en éléments simples.

Théorème 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et F une fraction rationnelle sur K telle que

$$F = \frac{A}{{S_1}^{m_1}{S_2}^{m_2}\cdots{S_n}^{m_n}}$$

où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des polynômes irréductibles de $K[X]$ premiers entre eux deux à deux, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in K[X]$.

Il existe une unique famille $(E, T_{1,1}, \ldots, T_{1,m_1}, T_{2,1}, \ldots, T_{2,m_2}, \ldots\ldots, T_{n,1}, \ldots, T_{n,m_n})$ de polynômes sur K telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}\right)$$

avec

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \forall j \in [\![1;m_i]\!], \qquad \deg(T_{i,j}) < \deg(S_i).$$

La formule ci-dessus s'appelle la décomposition en éléments simples de F sur K.

Le polynôme E est la partie entière de F.

Pour $i \in [\![1;n]\!]$, la somme $\sum\limits_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}$ s'appelle la partie polaire de F relative au polynôme S_i.

■ Voir l'annexe. ■

Le cas particulier suivant est très utile en pratique.

Proposition 6

Soit $P \in K[X]$ scindé sur K, c'est-à-dire de la forme $P = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}$ où $\lambda \in K^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_n$. On a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{X-\alpha_i}.$$

■ On a $P' = \lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\Bigg(\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(X-\alpha_j)^{m_j}\Bigg)m_i(X-\alpha_i)^{m_i-1} = \lambda\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{P}{X-\alpha_i}$, ce qui donne le résultat. ■

Exemples :

- Pour $P(X) = X(X-1)^2$, on a $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X-1}$.

b) Décomposition sur $\mathbb{C}$

La proposition suivante décrit les éléments simples de $\mathbb{C}(X)$.

Proposition 7

Dans $\mathbb{C}(X)$, les éléments simples sont

- les polynômes ;
- les éléments simples de première espèce : $\dfrac{\lambda}{(aX+b)^m}$ $\quad (a \in \mathbb{C}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}^*)$.

■ Cela découle immédiatement de la classification des polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$. ■

Dans $\mathbb{C}(X)$, le théorème de décomposition en éléments simples prend l'allure suivante.

Théorème 2

Soit F une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ dont A/B est le représentant irréductible unitaire. On suppose que la décomposition primaire de B sur $\mathbb{C}$ est de la forme

$$B = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines complexes distinctes de B de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et une unique famille $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant m_r}}$ de nombres complexes telle que

$$F = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \sum_{i=1}^{r} \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}}_{\text{partie polaire relative à } \alpha_i} \Bigg).$$

■ C'est une conséquence directe du théorème 1 et de la classification sur $\mathbb{C}$ des éléments simples. ■

Le calcul de tous les coefficients du développement en éléments simples est d'une technicité qui n'est pas dans l'esprit du programme de MPSI. On se contentera donc, par la suite, de situations assez élémentaires. Dans le cas contraire, on pourra se tourner vers des outils informatiques.

Exemples :

- La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de

$$F = \frac{3X^7 + (2-i)X^3 - 1}{X^2(X-i)(X+j)^3}$$

est de la forme

$$F = E + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+j} + \frac{e}{(X+j)^2} + \frac{f}{(X+j)^3},$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ et $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. On peut préciser que la partie entière E est un polynôme de degré 1. 2 h 20

c) Décomposition sur $\mathbb{R}$

La proposition suivante décrit les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

Proposition 8

Dans $\mathbb{R}(X)$, les éléments simples sont

- les polynômes ;
- les éléments simples de première espèce : $\dfrac{\lambda}{(aX+b)^m}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^*)$;
- les éléments simples de seconde espèce :

$$\frac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^p} \text{ avec } b^2-4ac<0 \qquad (a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, \mu, b, c \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{N}^*).$$

■ Cela découle immédiatement de la classification des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. ■

Dans $\mathbb{R}(X)$, le théorème de décomposition en éléments simples prend l'allure suivante.

Théorème 3

Soit F une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ dont A/B est le représentant irréductible unitaire. On suppose que la décomposition primaire de B sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$B = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{s}(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{p_i}$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles distinctes de B de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$, $(\beta_1, \gamma_1), \dots, (\beta_s, \gamma_s) \in \mathbb{R}^2$ distincts tels que $\forall i \in [\![1;s]\!]\,,\ {\beta_i}^2 - 4\gamma_i < 0$ et $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{N}^*$.

Il existe alors un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ (la partie entière de F) et un unique triplet de familles $\left((\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant m_i}}, (\mu_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant p_i}}, (\nu_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant p_i}}\right)$ de nombres réels telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\right) + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\mu_{i,j}X+\nu_{i,j}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^j}\right).$$

■ C'est une conséquence directe du théorème 1 et de la classification sur $\mathbb{R}$ des éléments simples. ■

Cette décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est utile pour calculer des sommes, des dérivées ou des intégrales. Elle vous servira en seconde année pour effectuer le développement en série entière d'une fraction rationnelle.

Comme $\mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$, rien n'interdit de décomposer sur $\mathbb{C}$ une fraction rationnelle réelle.

Exemples :

- La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de

$$F = \frac{X-5}{X^3(X-1)(X^2+1)^2}$$

est de la forme

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X-1} + \frac{eX+f}{X^2+1} + \frac{gX+h}{(X^2+1)^2},$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Ici la partie entière est nulle.

B.2. La pratique

a) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Ce paragraphe vous résume, en trois étapes, comment décomposer une fraction rationnelle complexe $F = A/S$, écrite sous forme irréductible, en une somme d'éléments simples complexes, c'est-à-dire une somme de termes polynômiaux et d'éléments simples complexes de première espèce :

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^m} \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}^*.$$

Première étape : Détermination de la partie entière de F

Si F est de degré strictement négatif, on peut directement passer à la deuxième étape.

Dans le cas contraire, on effectue la division euclidienne de A par S de sorte que $A = SE + R$ où E est le quotient et R le reste (on a donc $\deg(R) < \deg(S)$). On peut alors écrire

$$F = \frac{SE+R}{S} = E + \frac{R}{S}$$

où E est un polynôme sur $\mathbb{C}$ et R/S est une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ de degré strictement négatif. Le polynôme E est appelé la partie entière de la fraction rationnelle F et entre dans la décomposition en éléments simples de F. La fraction rationnelle R/S est appelée la partie fractionnaire de F. On passe alors à la deuxième étape.

Deuxième étape : Factorisation du dénominateur

On peut dorénavant considérer que l'on travaille sur une fraction rationnelle $F = A/S$ qui est de degré strictement négatif.

On factorise alors dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme S. On obtient ainsi pour S un produit de facteurs de la forme $(aX+b)^m$.

On peut alors passer à la troisième étape.

Troisième étape : Décomposition en éléments simples

On est alors prêt pour écrire F sous forme d'une somme Σ d'éléments simples. Au début, $\Sigma = E$ où E désigne la partie entière de F. Le tableau ci-dessous résume les éléments simples qu'il faut ajouter à Σ en fonction de la nature des facteurs qui interviennent dans la factorisation de S.

Lorsqu'on rencontre un facteur dans S de la forme suivante :	on doit ajouter à Σ les éléments simples suivants :
$(aX+b)$	$\dfrac{\lambda}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2} + \dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
...	...

Il reste alors à déterminer les coefficients qui apparaissent dans Σ. La méthode standard consiste à mettre tous les éléments simples de Σ sur le même dénominateur S puis à identifier les coefficients du numérateur avec les coefficients de A pour se ramener à un système d'équations.

On peut aussi exploiter des techniques « astucieuses » que nous verrons plus loin dans ce cours et en travaux dirigés.

b) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Ce paragraphe vous résume, de deux manières, comment décomposer n'importe quelle fraction rationnelle réelle $F = A/S$, écrite sous forme irréductible, en une somme d'éléments simples réels, c'est-à-dire une somme de termes polynômiaux, d'éléments simples réels de première espèce :

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^m} \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, b \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^*$$

et d'éléments simples de seconde espèce :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda X + \mu}{(aX^2+bX+c)^p} \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda, \mu, b, c \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{N}^*.$$

<u>La méthode directe</u>

<u>Première étape : Détermination de la partie entière de F</u>

Cette étape est identique à celle décrite pour la décomposition sur $\mathbb{C}$.

<u>Deuxième étape : Factorisation du dénominateur</u>

On considére dorénavant que $F = A/S$ est de degré strictement négatif.

Dans cette étape, on factorise dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme S. On obtient pour S un produit de facteurs de la forme $(aX+b)^m$ et de termes du type $(aX^2+bX+c)^p$ avec $b^2-4ac<0$.

On peut alors passer à la troisième étape.

<u>Troisième étape : Décomposition en éléments simples</u>

On est alors prêt pour écrire F sous forme d'une somme Σ d'éléments simples. Au début, $\Sigma = E$ où E désigne la partie entière de F. Le tableau suivant résume les éléments simples qu'il faut ajouter à Σ en fonction de la nature des facteurs qui interviennent dans la factorisation de S.

Lorsqu'on rencontre un facteur dans S de la forme suivante :	on doit ajouter à Σ les éléments simples suivants :
$(aX+b)$	$\dfrac{\lambda}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2} + \dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
$\dots$	
(aX^2+bX+c)	$\dfrac{\lambda X+\mu}{aX^2+bX+c}$
$(aX^2+bX+c)^2$	$\dfrac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c} + \dfrac{\lambda_2 X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2}$
$(aX^2+bX+c)^3$	$\dfrac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c} + \dfrac{\lambda_2 X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2} + \dfrac{\lambda_3 X+\mu_3}{(aX^2+bX+c)^3}$
$\dots$	

Comme pour la décomposition sur $\mathbb{C}$, il reste alors à déterminer les différents coefficients de Σ.

À partir de la décomposition sur $\mathbb{C}$

On commence par décomposer F sur $\mathbb{C}$.
La fraction rationnelle étant à coefficients réelles, chaque éléments simples du type

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^m} \qquad \lambda, a, b \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}^*$$

possède dans la somme un élément simple qui lui est conjugué (y réfléchir), c'est-à-dire qui est de la forme

$$\frac{\overline{\lambda}}{(\overline{a}X+\overline{b})^m}.$$

Il suffit alors d'additionner deux à deux (par réduction au même dénominateur) les éléments simples conjugués pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Si la décomposition sur $\mathbb{C}$ de $F \in \mathbb{R}(X)$ a donné

$$F = \frac{3}{X+1} - \frac{i}{(X-j)^2} + \frac{i}{(X-j^2)^2},$$

on obtient la décomposition sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$F = \frac{3}{X+1} + \frac{2\sqrt{3}X+\sqrt{3}}{(X^2+X+1)^2}.$$

c) *Quelques méthodes de calcul des coefficients*

Le seul résultat officiellement au programme de MPSI concerne les pôles simples.

Proposition 9

Soit F une fraction rationnelle sur K dont A/S est un représentant irréductible. Si α est un pôle simple de F, alors le coefficient λ de l'élément simple $\lambda/(X-\alpha)$ dans la décomposition de F est donné par

$$\lambda = \big((X-\alpha)F\big)(\alpha) \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{A(\alpha)}{S'(\alpha)}.$$

■ Comme α est un pôle simple de S, la décomposition en éléments simple de F sur K est alors de la forme

$$F = \frac{\lambda}{X-\alpha} + G$$

où G est une fraction rationnelle sur K dont α n'est pas un pôle. En multipliant par $X-\alpha$, on obtient

$$(X-\alpha)F = \lambda + (X-\alpha)G.$$

En évaluant en α, on obtient

$$\lambda = \big((X-\alpha)F\big)(\alpha),$$

ce qui démontre la première des deux formules données dans l'énoncé.

Comme α est un pôle simple de S, il existe $T \in K[X]$ tel que $S = (X-\alpha)T$ où $T(\alpha) \neq 0$, ce qui donne

$$F = \frac{A}{S} = \frac{A}{(X-\alpha)T}.$$

En reportant cette information dans la formule ci-dessus, on obtient $\lambda = (A/T)(\alpha)$, c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{T(\alpha)}.$$

Or $S' = T + (X-\alpha)T'$ donc $S'(\alpha) = T(\alpha)$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{S'(\alpha)}.$$

C'est la deuxième formule attendue. ■

La première formule signifie que λ est obtenu en multipliant A/S par $X-\alpha$ avant d'évaluer en α. En pratique, cela revient à « cacher » le facteur $(X-\alpha)$ au dénominateur de F avant de substituer α à X.

Cette première façon de calculer λ est plus particulièrement adaptée au cas où S est factorisé.

Exemples :

- Déterminons le développement en éléments simples de

$$F = \frac{14}{(X-2)(X+5)}.$$

Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{14}{(X-2)(X+5)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+5}.$$

En multipliant par $X-2$ puis en évaluant en 2, on obtient $a = 2$.
En multipliant par $X+5$ puis en évaluant en -5, on obtient $b = -2$.
En conclusion,

$$\frac{14}{(X-2)(X+5)} = \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X+5}.$$

La seconde formule de la proposition 9 s'utilise lorsque l'expression développée de S est plus simple que sa forme factorisée.

Exemples :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons le développement en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de
$$F = \frac{1}{X^n - 1}.$$
Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
On a $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$ donc il existe une famille $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_n}$ telle que
$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$
Si $P_n = X^n - 1$, alors $P_n' = nX^{n-1}$, d'où, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$,
$$a_\omega = \frac{1}{P_n'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n\omega^n} = \frac{\omega}{n},$$
ce qui donne
$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{X - \mathrm{e}^{2ik\pi/n}}.$$

La proposition 9 se généralise au cas d'un pôle multiple de la façon suivante.

Proposition 10

Soit F une fraction rationnelle sur K dont A/S est un représentant irréductible. Si α est un pôle de F de multiplicité m, alors le coefficient λ de l'élément simple $\lambda/(X - \alpha)^m$ dans la décomposition de F est donné par
$$\lambda = \big((X - \alpha)^m F\big)(\alpha) \qquad \text{ou} \qquad \lambda = m! \frac{A(\alpha)}{S^{(m)}(\alpha)}.$$

■ En exercice. ■

Ce résultat ne donne que le coefficient de l'élément simple d'exposant l'ordre de multiplicité du pôle. Pour les exposants intermédiaires, il faut ruser ! On peut, par exemple, évaluer en un point.

Exemples :

- Déterminons le développement en éléments simples de
$$F = \frac{4X}{(X + 1)(X - 1)^2}.$$
Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
Il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{4X}{(X - 1)^2(X + 1)} = \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{(X - 1)^2}.$$
En multipliant par $X + 1$ puis en évaluant en -1, on obtient $a = -1$.
En multipliant par $(X - 1)^2$ puis en évaluant en 1, on obtient $c = 2$.
Reste à trouver b. Pour cela, on évalue en 0, ce qui donne $0 = -1 - b + 2$, c'est-à-dire $b = 1$.
Donc
$$\frac{4X}{(X + 1)(X - 1)^2} = -\frac{1}{X + 1} + \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2}.$$

On peut aussi utiliser une évaluation asymptotique.

Exemples :

- Déterminons le développement en éléments simples de
$$F = \frac{4X^3+16}{X(X+1)(X-1)^2}.$$
Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
Il existe alors $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{4X^3+16}{X(X+1)(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}.$$
En multipliant par X puis en évaluant en 0, on obtient $a = 16$.
En multipliant par $X+1$ puis en évaluant en -1, on obtient $b = -3$.
En multipliant par $(X-1)^2$ puis en évaluant en 1, on obtient $d = 10$.
Reste à trouver c. On ne peut évaluer ni en 0, ni en 1, ni en -1. Du coup, on préfère utiliser une évaluation asymptotique. Pour cela, on multiplie par X, ce qui donne
$$\frac{4X^3+16}{(X+1)(X-1)^2} = 16 - \frac{3X}{X+1} + \frac{cX}{X-1} + \frac{10X}{(X-1)^2}.$$
En regardant la limite en $\pm\infty$ dans <u>la fonction rationnelle associée</u>, on obtient $4 = 16-3+c$, c'est-à-dire $c = -9$.
Donc
$$\frac{X^3+1}{X(X+1)(X-1)^2} = \frac{16}{X} - \frac{3}{X+1} - \frac{9}{X-1} + \frac{10}{(X-1)^2}.$$

Parfois, on peut aussi utiliser la parité de F (on change X en $-X$ et on utilise l'unicité de la décomposition). Cela diminue (environ) de moitié le nombre de coefficients à calculer.

Exemples :

- Déterminons le développement en éléments simples de
$$F = \frac{2X^2+6}{(X^2-1)^2}.$$
Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
Comme $(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$, il existe alors $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{2X^2+6}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$
Avant de se lancer dans les calculs, on remarque que F est paire (i.e. que $F(-X) = F(X)$), donc
$$\frac{2X^2+6}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2},$$
ce qui nous dit, par unicité de la décomposition en éléments simples, que
$$a = -c \qquad \text{et} \qquad b = d.$$
En multipliant par $(X-1)^2$ puis en évaluant en 1, on obtient $b = 2$.
En évaluant en 0, on a $6 = -a + 2 - a + 2$, ce qui donne $a = -1$.
Donc
$$\frac{2X^2+6}{(X^2-1)^2} = -\frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2}.$$

Si la fraction est réelle et qu'on vous demande de la décomposer sur $\mathbb{C}$, utiliser la conjugaison permet de diminuer le nombre de coefficients complexes à calculer.

Exemples :

- Déterminons le développement en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de

$$F = \frac{4X}{(X^2+1)^2}.$$

Sur $\mathbb{R}$, il n'y a rien à dire : c'est déjà un élément simple !
Travaillons sur $\mathbb{C}$.
Comme $\deg(F) < 0$, la partie entière est nulle.
Comme $(X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, il existe alors $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{4X}{(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2}.$$

Avant de se lancer dans les calculs, on conjugue les coefficients de la fraction rationnelle, ce qui donne

$$\frac{4X}{(X+i)^2(X-i)^2} = \frac{\overline{a}}{X+i} + \frac{\overline{b}}{(X-i)^2} + \frac{\overline{c}}{X-i} + \frac{\overline{d}}{(X-i)^2},$$

ce qui nous dit, par unicité de la décomposition en éléments simples, que

$$\overline{a} = c \qquad \text{et} \qquad \overline{b} = d.$$

En multipliant par $(X-i)^2$ puis en évaluant en i, on obtient $b = -i$.
En évaluant en 0, on a $0 = a + i - i\overline{a} + i$, ce qui donne $a = i\overline{a}$. Par ailleurs, en multipliant par X, et en regardant la limite en $\pm\infty$ dans la fonction rationnelle associée, on obtient $0 = a + \overline{a}$, c'est-à-dire $a = -\overline{a}$. Cela donne $a = 0$.
Donc

$$\frac{4X}{(X^2+1)^2} = -\frac{i}{(X-i)^2} + \frac{i}{(X+i)^2}.$$

Et il existe encore bien d'autres techniques de calcul de ces maudits coefficients... 3 h 30