Problème n$^{\text{o}}$ 1 : Ensembles

Problème 1 – Topologies et filtres

Dans ce problème, nous introduisons les notions de topologie et de filtre sur un ensemble, et nous démontrons une caractérisation de la continuité (notion définie par la topologie) par des propriétés de certains filtres.

Partie I – Topologies

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(X)$ (donc un ensemble constitué de sous-ensembles de X) vérifiant :

($\mathcal{O}_1$) Pour toute famille quelconque $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, l'union $\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i$ est un élément de $\mathcal{O}$.

*($\mathcal{O}_2$) Pour toute famille **finie** $(U_i)_{i\in I}$ (où I est donc un ensemble **fini**), l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i\in I} U_i$ est élément de $\mathcal{O}$*

Par convention, une union vide (c'est-à-dire indexée sur l'ensemble vide) est égale à $\varnothing$, et une intersection vide d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ est égale à X.

Ainsi, une topologie sur X est la donnée d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ stable par union quelconque et par intersection finie.

L'ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé espace topologique, et désigné par le couple $(X, \mathcal{O})$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont alors appelés ouverts *de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$, ou plus simplement, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie choisie,* ouverts *de X.*

1. **Reformulation.**
   Montrer que la propriété ($\mathcal{O}_2$) est équivalent à la conjonction des deux propriétés suivantes :
   ($\mathcal{O}_{2a}$) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$
   ($\mathcal{O}_{2b}$) X est un élément de $\mathcal{O}$.

2. **Exemples triviaux.**
   (a) Topologie triviale : montrer que $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur X.
   (b) Topologie discrète : montrer que $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X.

3. **Un autre exemple : la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.**
   On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si :

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |y - x| < \varepsilon \Longrightarrow y \in U. \tag{1}$$

   (a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$.
   (b) Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}$ (on justifiera les réponses) :
      (i) $\varnothing$;
      (ii) $\mathbb{R}$;
      (iii) $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$;
      (iv) $]a, b[$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$;
      (v) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.
   (c) Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble formé de tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

4. **Voisinages.**
   Soit X un ensemble, muni d'une topologie $\mathcal{O}$. Soit $x \in X$ et $V \subset X$. On dit que V est un voisinage de x si et seulement s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U$ et $U \subset V$.
   On note $\mathcal{V}(x)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ constitué de tous les voisinages du point x.

(a) Dans cette question, et uniquement dans cette question, on considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.

(b) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique quelconque. Montrer qu'un ensemble U est ouvert (donc élément de $\mathcal{O}$) si et seulement s'il est voisinage de tous ses points. On pourra pour cela remarquer que $U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$.

(c) Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ un voisinage d'un élément x de X. Montrer que tout ensemble W vérifiant $V \subset W \subset X$ est encore un voisinage de x.

(d) Montrer que l'intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x.

Partie II – Filtres

Un filtre sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ tel que :

($\mathcal{F}_1$) Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, s'il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \subset A$, alors $A \in \mathcal{F}$.

($\mathcal{F}_2$) Toute intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

($\mathcal{F}_3$) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres. On dit que $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

1. **Des exemples**

(a) Soit X un espace topologique, et $x \in X$. Montrer que $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur X.

(b) Soit X un ensemble infini. Montrer que les complémentaires (dans X) des sous-ensembles finis de X forment un filtre sur X. Lorsque $X = \mathbb{N}$, ce filtre est appelé filtre de Fréchet.

2. **Filtre engendré par une partie de $\mathcal{P}(X)$, base de filtre**

(a) Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ tel que :

($\mathcal{B}_1$) Pour tous B et C de $\mathcal{B}$ il existe $D \in \mathcal{B}$ tel que $D \subset B \cap C$.

($\mathcal{B}_2$) $\mathcal{B} \neq \varnothing$,

($\mathcal{B}_3$) $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ constitué des ensembles $F \subset X$ tels qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ vérifiant $B \subset F$ est un filtre sur X, et que c'est le plus petit filtre (au sens de l'inclusion) tel que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

On dit que $\mathcal{B}$ est une base du filtre $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par $\mathcal{B}$. Un ensemble $\mathcal{B}$ vérifiant les hypothèses ($\mathcal{B}_1$), ($\mathcal{B}_2$) et ($\mathcal{B}_2$) est appelé une base de filtre, et est donc une base du filtre qu'elle engendre.

(b) Soit $\mathcal{F}$ un filtre. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de lui-même.

(c) Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ tel qu'aucune intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ ne soit vide. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ constitué de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{D}$ est une base de filtre.

On définit alors le filtre engendré par $\mathcal{D}$ comme étant le filtre engendré par la base de filtre $\mathcal{B}$. On le note $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

(d) Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ est le plus petit filtre, au sens de l'inclusion, contenant tous les éléments de $\mathcal{D}$.

(e) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X, et $A \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que si pour tout $F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \varnothing$, alors il existe un filtre $\mathcal{F}'$, plus fin que $\mathcal{F}$ et tel que $A \in \mathcal{F}'$.

3. **Ultrafiltres**

Un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur X est un filtre tel qu'il n'existe aucun filtre plus fin que lui.

On admettra que tout filtre $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre (donc qu'il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$). Cette propriété est une conséquence du lemme de Zorn, donc de l'axiome du choix.

(a) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X, et A et B deux sous-ensembles de X. Montrer que si $A \cup B \in \mathcal{F}$, alors $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

(b) i. A un sous-ensemble de X tel que $A \notin \mathcal{F}$. Soit A^C son complémentaire dans X. Montrer l'existence d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$ et contenant A^C, le complémentaire de A dans X.

ii. Montrer que tout filtre $\mathcal{F}$ est l'intersection des ultrafiltres plus fins que lui.

Partie III – Une caractérisation de la continuité

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. On dit que f est continue en $x \in X$ si pour tout voisinage W (au sens de la topologie $\mathcal{O}_Y$) de $f(x)$, il existe un voisinage V (au sens de la topologie $\mathcal{O}_X$) de x tel que $f(V) \subset W$.

1. **Exemple : cas des fonctions réelles**
   On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}$ (au sens défini ci-dessus) si et seulement si :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$
2. **Reformulation**
   Soit $f : X \to Y$, et $a \in X$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour tout $W \in \mathcal{V}(f(a))$, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a)$.
3. **Limite d'un filtre**
   Soit X un espace topologique. On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers $x \in X$ si $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x. On dit qu'une base de filtre $\mathcal{B}$ converge vers x si le filtre $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ engendré par $\mathcal{B}$ converge vers x.

   Montrer que pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x, il faut et il suffit que tous les ultrafiltres plus fins que $\mathcal{F}$ convergent vers x.
4. **Caractérisation de la continuité**
   (a) Soit $f : X \to Y$ une application, et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X. Montrer que l'ensemble $f(\mathcal{B})$ constitué des images $f(F)$ de tout élément F de $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur Y.

   (b) Soit X et Y deux espaces topologiques, $a \in X$, et $f : X \to Y$. Montrer que si f est continue en a, alors pour toute base de filtre $\mathcal{B}$ sur X convergeant vers a, la base de filtre $f(\mathcal{B})$ converge vers $f(a)$.

   *(c) Montrer que, réciproquement, si pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ qui converge vers a, la base de filtre $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(a)$, alors f est continue en a.