

## Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Math ULCR
- *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

## Enoncé des exercices

On définit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

On note  $P_n(X) = \det(\Delta - XI_n)$

- 1) Donner une relation entre  $P_{n+2}$ ,  $P_{n+1}$  et  $P_n$ .
- 2) On pose  $U_n$  tel que

$$U_n(\cos(x)) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

partout où ça a un sens. On admet que

$$U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - U_n(X)$$

Relier  $U_n$  à  $P_n$  et trouver les valeurs propres de  $\Delta_n$

- 3) On note  $y_{1,n}, \dots, y_{n,n}$  les valeurs propres de  $\Delta_n$ . On pose

$$S_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{k,n} \ln(y_{k,n})$$

Etudier  $S_n$  en  $+\infty$ .

## Remarques sur l'oral

L'examinatrice n'était pas seulement gentille, elle était drôle aussi ! Par contre elle a demandé beaucoup de justification, me demandant pourquoi tel objet était bien défini, sur quel intervalle, quelles hypothèses il faut pour appliquer tel truc...

Elle m'explique que pendant 10 minutes elle va me laisser réfléchir sans réagir. Mais je me retourne avant pour lui montrer la relation de récurrence et l'oral reprend sous le format d'une discussion.

"Connaissez-vous des polynômes de Tchebychev ?". Je lui parle de ceux qu'on connaît, elle me dit qu'elle va me parler d'un autre qui est moins connu (c'est  $U_n$ ). Un changement de variable permet de relier  $U_n$  à  $P_n$ . On détermine les 0 de  $U$  pour déduire les 0 de  $P_n$ .

Elle me dit que  $S_n$  est une entropie mais que si ce terme me fait peur, je peux l'oublier. La 3 revient à un calcul d'intégrale. L'oral s'arrête juste au moment où il reste à calculer l'intégrale de  $\ln(\sin())$  et si j'ai une idée pour calculer ça. Je dis qu'on peut regarder celle de  $\ln(\cos())$ , que ça a la même valeur et qu'on peut calculer la somme de ces deux intégrales un peu plus aisément. Elle accepte mais c'est trop tard pour avoir la valeur numérique.