DM n^{o} 8 : Études de fonctions, fonctions usuelles

Exercice 1 – (Étude d'une fonction)

On définit la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de f. Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en -2.
2. Étudier les variations de f (on pourra dériver $x \mapsto \ln(f(x))$ afin d'exprimer f' en fonction de f).
3. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition, et déterminer les demi-tangentes aux bornes du domaine et en -2.
4. Montrer que f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et une asymptote oblique (D') en $-\infty$, et exprimer leurs équations.
5. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote (D) sur $]0, +\infty[$.
6. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote (D') sur $]-\infty, -2[$.
7. Étudier la concavité de f.
8. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$. Montrer que f est infiniment dérivable à gauche en 0 et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_g^{(n)}(0)$.
9. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Problème 1 – Formule de Machin et calcul de π

Dans ce problème, on démontre la formule de John Machin (1706) :

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

et on montre comment cette formule peut être utilisée pour le calcul approché de π. On s'intéresse ensuite à l'existence d'autres formules de type « Machin » reliant 2 arctangentes ou plus.

Partie I – Formule de Machin

On pose $\theta = \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$

1. Calculer $\tan(2\theta)$, puis $\tan(4\theta)$, puis montrer que
$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}.$$
2. En déduire la formule de Machin.
3. On propose ci-dessous une autre présentation de cette démonstration, passant par l'utilisation des nombres complexes.
   (a) Montrer que pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$, on a :
   $$\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \mod \pi$$
   (b) Vérifier (sans calculatrice) que
   $$\frac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}} = 2 \times (1+\mathrm{i}),$$
   et conclure.

Partie II – Calcul approché de π

On montre dans cette partie comment la formule de Machin peut être utilisée pour calculer une valeur approchée de π. On note f la fonction Arctan.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$
2. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\left| f'(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \right| \leqslant x^{2n+2}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\left| \operatorname{Arctan}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant x^{2n+3}$$
4. Étant donné $\varepsilon > 0$, exprimer en fonction de ε un entier n_0 et un entier m_0 tels que
$$\left| 16 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 16 \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left| 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) - 4 \sum_{k=0}^{m_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Application numérique pour $\varepsilon = 10^{-15}$ et $\varepsilon = 10^{-100}$ (précision du calcul de π effectué par Machin, à la main bien entendu).
5. Écrire une fonction en Python calculant π à une marge d'erreur ε près fournie en paramètre. Si vous implémentez cet algorithme, donner la valeur obtenue pour $\varepsilon = 10^{-15}$.

Partie III – D'autres formules de type « Machin »

1. (a) Calculer $(2+\mathrm{i}) \times (3+\mathrm{i})$, et en déduire une expression de $\frac{\pi}{4}$ comme somme de deux arctangentes simples.
   (b) Retrouver cette formule sans utiliser les nombres complexes, en adaptant la première méthode de la partie I.
2. Montrer de même, par 2 méthodes différentes, que :
$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}.$$
3. Démontrer que
$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$
Quelle est la condition pour qu'une formule de Machin donne une bonne convergence vers π ? Que dire de cette formule ?

Pour information, on donne une formule démontrée par Gauss :
$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{Arctan} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}.$$
Vous pouvez vous amuser à essayer de la démontrer...
En voici une autre (Hwang Chien-Lih, 2003) :
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = 183 \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} + 32 \operatorname{Arctan} \frac{1}{1023} - 68 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5032} + 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{113021} \\ - 100 \operatorname{Arctan} \frac{1}{6826318} - 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{33366019650} + 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{43599522992503626068}\end{aligned}$$

Problème 2 – Etude d'une fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(t) = t^3 + t$.
Dans la première partie, on étudie la fonction réciproque g de f. Dans la deuxième partie, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles.
Dans tout le problème, on pourra admettre et utiliser les trois théorèmes suivants :

- *Théorème de compacité : Une fonction f continue sur intervalle fermé borné $[a,b]$ est bornée (et atteint ses bornes)*
- *Inégalité des accroissements finis : si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur $]a,b[$, alors*
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
- *Théorème de la bijection : si f est une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle I, elle se corestreint en une bijection de I sur $\mathrm{Im}(f)$.*

PARTIE I – Étude de g

1. **Variations de g.**
   (a) Étudier la fonction f. On déterminera notamment le(s) point(s) d'inflexion et la convexité de f.
   (b) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f. On tracera la tangente au(x) point(s) d'inflexion
   (c) Montrer que f admet une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g^3(x) + g(x) = x.$$
   (d) Montrer que g est strictement croissante et impaire. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   (e) Étudier les variations et les propriétés de convexité de g ainsi que les points d'inflexion de g. On donnera l'expression de g'.
   (f) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (g) Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que $\mathcal{C}$. Expliquez votre construction.
2. **Étude de g'** – *Certaines propriétés de g' ne se déduisent pas de f'.*
   (a) La courbe de f' admet-elle des points d'inflexion ?
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et α une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Montrer que si $\alpha(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x)$, alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que α présente un extremum local en c.
   (c) En que g' admet au moins deux points d'inflexion.
3. **Étude locale et asymptotique de g**
   Lorsque f et g sont définis et ne s'annulent pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a), on dit que f et g sont équivalents en a, et on note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ainsi, f et g sont de même ordre de grandeur lorsque x est proche de a.
   (a) Montrer que $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{F}_a$ des fonctions h pour lesquelles il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $h(x) \neq 0$.
   (b) Montrer que $g(x) \underset{0}{\sim} x$.
   (c) En déduire que $g(x) - x \underset{0}{\sim} -x^3$.
   (d) Montrer que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}$.
   (e) On définit h sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + h(x))$. Justifier que h est bien défini, et déterminer sa limite en $+\infty$.
   (f) Déterminer une relation satisfaite par h, et en déduire l'existence et la valeur de la limite de $x^{\frac{2}{3}} h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. **Étude d'une primitive de g** – Nécessite le théorème de changement de variables (voir chapitre 9)
   Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(u)\, du$.
   (a) À l'aide du changement de variable $u = f(t)$, calculer G en fonction de g.
   (b) Déterminer les variations et la parité de G.
   (c) Déterminer un équivalent de G au voisinage de 0 et un équivalent de G au voisinage de $+\infty$.

PARTIE II – Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0,+\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3+t=x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}_x$ parallèle à l'axe des abscisses, et l'ordonnée x. On se propose d'approcher g par des fonctions rationnelles u_n, construites par l'algorithme de Newton. Pour cela, on pose $u_0(x)=x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{D}_x$ avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x ; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de $\mathcal{D}_x$ avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. **Construction de l'algorithme d'approximation**

   Soit t un nombre réel positif. Expliciter en fonction de t et de x l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{D}_x$ avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t. En déduire une relation de récurrence définissant la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **Étude graphique d'un exemple**

   Dans cette question, $x=1$. Sur une même figure, tracer soigneusement l'arc de $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0,1]$ et construire $u_1(1)$ et $u_2(1)$.

3. **Étude de l'algorithme**

   Soit φ la fonction numérique qui à tout nombre réel positif t associe :

   $$\varphi(t)=\frac{2t^3+x}{3t^2+1}.$$

   (a) Montrer que $g(x)$ est un point fixe de φ.

   (b) Déterminer, pour tout $t>0$, le signe de $t-\varphi(t)$ en fonction de celui de $f(t)-x$.

   (c) Déterminer le signe de $\varphi'(t)$ en fonction de celui de $f(t)-x$. En déduire les variations de φ sur l'intervalle $[g(x),x]$.

   (d) Montrer que l'intervalle $I_x=[g(x),x]$ est stable par φ, c'est-à-dire $\varphi(I_x)\subset I_x$.

   (e) Montrer que pour tout $t\in[g(x),x]$,
   $$0\leqslant\varphi'(t)\leqslant\frac{2}{3}.$$

4. **Étude de la convergence**

   (a) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, la suite $(u_n(x))$ est décroissante, et qu'elle converge vers $g(x)$.

   (b) Prouver que pour tout nombre entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}(x)-g(x)\leqslant\frac{2}{3}(u_n(x)-g(x))$.

   (c) Soit a un nombre réel positif. On pose $\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,a]}(u_n(x)-g(x))$. Montrer que $\beta_n\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n a$.

   (d) Montrer que, pour tout nombre réel positif t : $\varphi(t)-g(x)=(t-g(x))^2\dfrac{2t+g(x)}{3t^2+1}$.

   (e) Étudier la fonction $t\mapsto\dfrac{3t}{3t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. On déterminera notamment ses limites, ses extrema, ses points d'inflexion et sa concavité. Tracer l'allure de cette fonction.

   (f) En déduire que : $0\leqslant u_n(x)-g(x)\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}(x-g(x))^{2^n}$,

   puis que : $0\leqslant u_n(x)-g(x)\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}u_n(x)^{3\cdot 2^n}$.

   (g) Écrire une fonction en Python prenant en argument un réel $x\in[0,1]$, une marge d'erreur `err` et calculant $g(x)$ à la marge d'erreur `err` près.