Questions / Réponses

Questions

Détails de la démonstration de la propriété 4 sur les intégrales.

Réponse

Première chose : on va s'apercevoir que la démonstration n'est pas si facile ...
Ensuite, la démonstration en elle-même n'apporte pas vraiment grand chose pour la résolution des futurs exercices. Pour faire simple, retenez avant tout la méthode en haut de la page 4 du cours et cela suffira pour traiter les exercices sur le sujet.

Passons à la démonstration.

On fixe $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$.
On pose dans la suite :

$$F = \left\{ f \in E \mid \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right\}.$$

Compte tenu des démonstrations déjà mises en ligne dans l'onglet « questions en tout genre », on sait que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'intégrale est linéaire.
On montre alors facilement que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.
Le but de la suite est de montrer que F contient l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et donc on aura bien la propriété 4.

On ne va pas commencer par montrer cela... On va montrer que F contient déjà toutes les fonctions en escalier sur $[a, b]$ et on verra après...

On se donne deux réels c et d tels que :

$$a \leqslant c \leqslant d \leqslant b,$$

avec éventuellement $c = d$.
On va montrer que la fonction indicatrice φ du segment $[c, d]$ appartient à F. Rappelons la définition de cette indicatrice :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1, \text{ si } t \in [c,d] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Il s'agit d'une fonction en escaliers de subdivision adaptée (a, c, d, b) ou (a, d, b) (si $c = a$ et $a < d < b$) ou par exemple (a, c, b) (si $c = d$) et il y a encore d'autres cas, mais peu importe...
Montrons que la fonction φ appartient à l'ensemble F.
D'une part, l'intégrale de φ vaut $(d - c)$. Il s'agit donc de montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Si on fixe un entier n, alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est une somme de 1 ou de 0 et vaut en fait exactement le nombre d'entiers k entre 0 et $n - 1$ tels que :

$$c \leqslant a + k\frac{b-a}{n} \leqslant d$$

ce qui est équivalent à :

$$n\ \frac{c-a}{b-a} \leqslant k \leqslant n\ \frac{d-a}{b-a}.$$

Ce nombre d'entiers est de la forme :

$$n\ \frac{d-a}{b-a} - n\ \frac{c-a}{b-a} + \mathscr{O}(1) = n\ \frac{d-c}{b-a} + \mathscr{O}(1),$$

le $\mathscr{O}(1)$ étant là pour gérer les cas où les extrémités $n\ \dfrac{c-a}{b-a}$ ou $n\ \dfrac{d-a}{b-a}$ sont des entiers ou non, ce qui dépend de n. On regroupe le tout en une quantité bornée.
Conclusion,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} n\ \frac{d-c}{b-a}.$$

en divisant le tout par n, on découvre avec joie que :

$$\varphi \in F.$$

Dans toute la suite, si $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on note $\varphi_{c,d}$ la fonction indicatrice φ ci-dessus et on va très fortement exploiter ces indicatrices.
Ensuite, soient deux réels c et d tels que :

$$a \leqslant c < d \leqslant b.$$

On note maintenant $\psi_{c,d}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $]c, d[$ ouvert cette fois-ci. On remarque alors que $\psi_{c,d}$ et $\varphi_{c,d}$ sont presque les mêmes fonctions, sauf aux points c et d.
On en déduit cette formule utile pour la suite :

$$\psi_{c,d} = \varphi_{c,d} - \varphi_{c,c} - \varphi_{d,d}.$$

On découvre avec extase que chaque $\psi_{c,d}$ appartient à l'espace F.

Soit maintenant une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escaliers. On note :

$$\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{r-1} < x_r = b),$$

une subdivision adaptée.
Pour tout entier k entre 0 et $r-1$, la fonction f est constante égale à ξ_k sur le morceau ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.
On en déduit cette belle formule :

$$f = \sum_{k=0}^{r} f(x_k) \cdot \varphi_{x_k, x_k} + \sum_{k=0}^{r-1} \xi_k \cdot \psi_{x_k, x_{k+1}}.$$

Ainsi, toutes les fonctions en escaliers sont dans F.

Pour alleger les notations, on pose dans la suite pour toute fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

Soit finalement une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On fixe $\varepsilon > 0$.
En calquant le principe de la démonstration sur le fait que chaque fonction continue par morceaux est Riemann-intégrable (démonstration faite dans l'aide à la compréhension), on trouve une subdivision σ' très fine adaptée à f et on trouve $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ deux fonctions en escalier telles que :

$$0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

On utilise dans l'histoire les restrictions de f aux morceaux ouverts que l'on prolonge aux morceaux fermés pour ensuite utiliser l'uniforme continuité. Bref, je ne refais pas les choses...
On a donc deux fonctions en escaliers φ et ψ qui encadrent à ε près la fonction f par en dessous ou par au-dessus. On remarque que :

$$f - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant f \leqslant \psi \leqslant f + \varepsilon.$$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) - \varepsilon \leqslant S_n(\varphi) \leqslant S_n(f) \leqslant S_n(\psi) \leqslant S_n(f) + \varepsilon,$$

et :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f - \varepsilon \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f + \varepsilon.$$

Comme φ et ψ sont dans F, on trouve n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ \left| S_n(\varphi) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left| S_n(\psi) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi \right| \leqslant \varepsilon.$$

Résultat des courses, si $n \geqslant n_0$ est un entier, alors :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f - 2\varepsilon \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi - \varepsilon \leqslant S_n(\varphi) \leqslant S_n(f) \leqslant S_n(\psi) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi + \varepsilon \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f + 2\varepsilon.$$

Conclusion,

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left|S_n(f) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Quitte à remplacer ε par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ dès le début, on a bien que f est dans E et la démonstration est finie ! ! !