

Corr. 1 Fin d'une surfusion

L'état d'équilibre final correspond soit à un équilibre liquide-solide, soit à du phosphore solide. D'autre part, on travaille avec un tube à essais très bien isolé thermiquement et à $P_{\text{ext}} = C^{\text{te}}$. Par conséquent, le contenu du tube évolue de façon isenthalpique :

$$\Delta H = 0$$

1. La température initiale $\theta = 42^\circ\text{C}$ est proche de la température de fusion $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$. Il est donc raisonnable de faire l'hypothèse que **l'état final est un équilibre liquide-solide (hypothèse à vérifier à la fin)**.

Dans ce cas, la température finale est obligatoirement $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$. Pour préciser l'état final, on doit traduire $\Delta H = 0$ pour le contenu du tube. Les états limites étant fixés, ΔH est fixé et ne dépend pas du chemin suivi (H fonction d'état). Aussi considère-t-on dès à présent un **chemin réversible entre les états limites**. On peut préciser le chemin comme suit :

- État initial I : 30 g de phosphore liquide à $\theta = 42^\circ\text{C}$.
- État intermédiaire E : 30 g de phosphore liquide à $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$.
- État final F : $x \times 30$ g de phosphore solide et $(1-x) \times 30$ g de phosphore liquide à $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$.

$$\text{Alors,} \quad \Delta H = \Delta H_{\text{IE}} + \Delta H_{\text{EF}} = 0$$

$$\text{soit} \quad m c_l (\theta_0 - \theta) + x m (-h_{\text{fusion}}) = 0$$

$$\text{donc} \quad x = \frac{c_l (\theta_0 - \theta)}{h_{\text{fusion}}} = 0,08$$

L'hypothèse de départ est bien correcte puisqu'on a obtenu $x \in [0; 1]$. On précise l'état final demandé comme suit :

$$2,4 \text{ g de P solide, } 27,6 \text{ g de P liquide et } \theta_0 = 44^\circ\text{C}$$

2. Cette fois-ci, θ est éloignée de θ_0 donc il est raisonnable de supposer que **tout le phosphore est solide à l'état final (hypothèse dont la cohérence est à vérifier à la fin)**. Le chemin fictif réversible passe par les états suivants :

- État initial I : 30 g de phosphore liquide à $\theta = 12,5^\circ\text{C}$.
- Premier état intermédiaire E1 : 30 g de phosphore liquide à $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$.
- Second état intermédiaire E2 : 30 g de phosphore solide à $\theta_0 = 44^\circ\text{C}$.
- État final F : 30 g de phosphore solide à θ_f .

$$\text{On a} \quad \Delta H = \Delta H_{\text{IE1}} + \Delta H_{\text{E1E2}} + \Delta H_{\text{E2F}} = 0$$

$$\text{soit} \quad m c_l (\theta_0 - \theta) + m (-h_{\text{fusion}}) + m c_s (\theta_f - \theta_0) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \theta_f = \theta_0 + \frac{h_{\text{fusion}} - c_l (\theta_0 - \theta)}{c_s} = 37,1^\circ\text{C}$$

On valide bien l'hypothèse de calcul en notant que $\theta_f < \theta_0$.

Corr. 2 Congélation d'une masse d'eau

Le système considéré est le fluide frigorigène. On utilise des notations algébriques. Le système échange Q_1 avec la source froide (l'eau) à la température T variant de T_1 à T_2 . Il échange Q_2 avec la source chaude (l'extérieur) à la température T_e . Enfin, il reçoit un travail W (compresseur...).

Pour l'eau incompressible, l'évolution est à pression constante et passe par sa solidification donc

$$Q_1 = -\Delta H_{\text{eau}} = -m [c_l (T_0 - T_1) - L_{\text{fus}} + c_g (T_2 - T_0)]$$

Or, le fluide frigorigère effectue un cycle pour lequel le bilan énergétique est

$$\Delta U = 0 = Q_1 + Q_2 + W$$

et la réversibilité des transformations pour l'ensemble {fluide, eau, extérieur} se traduit par

$$\Delta S_{\text{total}} = 0 = \Delta S_{\text{fluide}} + \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{ext}}$$

$$\text{Comme } \Delta S_{\text{fluide}} = 0, \Delta S_{\text{eau}} = m c_l \ln \frac{T_0}{T_1} - m \frac{L_{\text{fus}}}{T_0} + m c_g \ln \frac{T_2}{T_0}$$

$$\text{et } \Delta S_{\text{ext}} = -\frac{Q_2}{T_e}, \text{ on en déduit}$$

$$Q_2 = T_e m \left(c_l \ln \frac{T_0}{T_1} - \frac{L_{\text{fus}}}{T_0} + c_g \ln \frac{T_2}{T_0} \right)$$

Finalement, le temps nécessaire à la congélation de l'eau est tel que $\mathcal{P} \tau = W = -(Q_1 + Q_2)$. On en déduit que

$$\tau = -\frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{P}} \approx 12 \text{ min}$$

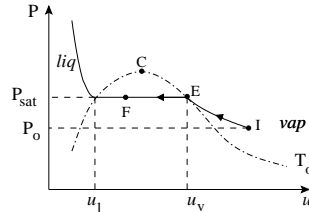
Corr. 3 Compression d'une vapeur

1. On supposera dans tout ce qui suit que l'eau est un liquide incompressible et que la vapeur est un gaz parfait. Le volume limite, noté V^* et tel que l'eau liquide est présente pour $V \leq V^*$, est le volume pour lequel il n'y a encore que du gaz (à part une goutte de liquide) et pour lequel la pression est égale à la pression de vapeur saturante. Ainsi :

$$V^* = \frac{m_0 R T_0}{M P_{\text{sat}}(T_0)} = 5,77 \text{ L}$$

(On a noté M la masse molaire de l'eau).

Ainsi, au départ, puisque $V_0 = 10 \text{ L} > V^*$, l'eau est entièrement sous forme de vapeur. Le point I est représentatif de cet état sur le diagramme suivant.



2. Sachant qu'une masse $m_0 = 0,1 \text{ g}$ d'eau liquide (de masse volumique μ) occupe un volume $V_{\text{min}} = m_0/\mu = 0,1 \text{ mL}$, et que $V_{\text{min}} < V = 1 \text{ L} < V^*$, il est clair que l'eau est dans un état d'équilibre liquide-vapeur dans l'état final (point représentatif F sur le diagramme).

La masse d'eau vapeur est égale à

$$m_v = \frac{M P_{\text{sat}}(T_0) V_g}{R T_0} = \frac{M P_{\text{sat}}(T_0) (V - V_1)}{R T_0}$$

où l'on a noté $V_{g(1)}$ le volume d'eau gaz (liquide). Le rigoriste s'empresserait ici d'utiliser la conservation de la matière et donc d'écrire $V_1 = (m_0 - m_v)/\mu$, puis d'en déduire la valeur exacte de m_v (quel bel homme ce rigoriste). Le physicien, quant à lui, remarque que $V_1 \leq m_0/\mu = 0,1 \text{ mL} \ll V = 1 \text{ L}$, et qu'il peut donc négliger V_1 , ce qui lui permettra, à moindre frais, d'obtenir une valeur correcte à environ $0,1 \cdot 10^{-3}/1 = 10^{-4} = 10^{-2}\%$ (il est pas mal aussi ce physicien).

Ainsi

$$m_v = \frac{M P_{\text{sat}}(T_0) V}{R T_0} = m_0 \frac{V}{V^*}$$

On tire de ce résultat $m_v = 0,0173 \text{ g}$ puis la masse de li-

$$\text{quide } m_l = m_0 - m_v, \text{ soit } m_l = 0,0827 \text{ g}.$$

L'évolution IF représentée sur le diagramme pression-volume massique est isotherme réversible (elle suit une isotherme d'Andrews passant sous le point critique C). On calculera les différentes grandeurs successivement sur la portion IE et la portion EF.

IE correspond à la compression isotherme réversible d'un gaz parfait donc

$$W_{\text{IE}} = - \int_1^E P dV = - \frac{m_0 R T_0}{M} \ln \frac{V_E}{V_1} = \frac{m_0 R T_0}{M} \ln \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{P_0}$$

On a noté $P_0 = \frac{m_0 R T_0}{M V_0} = 1,35 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ la pression initiale.

L'énergie interne du gaz parfait ne dépend que de la température (1^{re} loi de Joule) donc $\Delta U_{\text{IE}} = 0$. De plus, en appliquant le premier principe, $Q_{\text{IE}} = \Delta U_{\text{IE}} - W_{\text{IE}}$ soit $Q_{\text{IE}} = - \frac{m_0 R T_0}{M} \ln \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{P_0}$. Enfin, pour le gaz parfait en évolution

$$\text{isotherme réversible, le second principe donne } \Delta S_{\text{IE}} = \frac{Q_{\text{IE}}}{T_0}.$$

L'évolution EF correspond à la condensation de la masse m_l d'eau. Ainsi, $W_{\text{EF}} = -P_{\text{sat}}(T_0) (V_F - V_E)$, soit

$$W_{\text{EF}} = -P_{\text{sat}}(T_0) (V - V^*) = -P_{\text{sat}}(T_0) \left(V - \frac{m_0 R T_0}{M P_{\text{sat}}(T_0)} \right)$$

et $Q_{\text{EF}} = -m_l L_{\text{vap}}$ (évolution isobare $\Delta H = Q_P$)

Le premier principe donne $\Delta U_{\text{EF}} = W_{\text{EF}} + Q_{\text{EF}}$. Et pour finir,

$$\Delta S_{\text{EF}} = m_l \frac{-L_{\text{vap}}}{T_0}.$$

On regroupe les résultats et on obtient :

$$W_e = \frac{m_0 R T_0}{M} \ln \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{P_0} - P_{\text{sat}}(T_0) \left(V - \frac{m_0 R T_0}{M P_{\text{sat}}(T_0)} \right)$$

$$Q_e = - \frac{m_0 R T_0}{M} \ln \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{P_0} - m_l L_{\text{vap}}$$

$$\Delta U = -P_{\text{sat}}(T_0) \left(V - \frac{m_0 R T_0}{M P_{\text{sat}}(T_0)} \right) - m_l L_{\text{vap}}$$

$$\Delta S = - \frac{m_0 R}{M} \ln \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{P_0} - m_l \frac{L_{\text{vap}}}{T_0}$$

Ainsi, on obtient $W_e = 18,6 \text{ J}$, $Q_e = -210 \text{ J}$, $\Delta U = -192 \text{ J}$ et $\Delta S = -0,717 \text{ J.K}^{-1}$.

3. La température du milieu extérieur est fixe (T_0) et celui-ci reçoit $-Q_e$ donc

$$\Delta S_{\text{ext}} = -\frac{Q_e}{T_0} \quad \text{soit} \quad \Delta S_{\text{ext}} = 0,717 \text{ J.K}^{-1}.$$

La variation d'entropie du milieu extérieur correspond à l'entropie échangée entre l'eau et le milieu extérieur. Or, pour le milieu constitué de l'eau, $\Delta S = S_e + S_c$ où $S_e = -\Delta S_{\text{ext}}$ est l'entropie échangée et S_c est l'entropie créée.

On obtient ainsi $S_c = 0$, ce qui est conforme à l'hypothèse de réversibilité de l'évolution IF. On peut aussi voir les choses de la façon suivante : l'Univers est un système isolé qui subit une transformation réversible et pour lequel $\Delta S_U = \Delta S_{\text{ext}} + \Delta S = 0$.

Corr. 4 Cylindre fermé par un piston

1. On traduit dans un premier temps les équilibres mécaniques :

$$\text{Initial} \quad P_0 S = m_0 g \quad (1)$$

$$\text{Final} \quad P S = (m + m_0) g \quad (2)$$

où S est la surface du piston. Le premier principe appliqué au gaz s'écrit

$$\Delta U = W + Q$$

avec $Q = 0$ (adiabatique), $W = (m_0 + m) g \Delta h > 0$ (compression) et pour le gaz parfait, la première loi de Joule donne

$$\Delta U = \frac{n R}{\gamma - 1} (T - T_0)$$

$$\text{Donc} \quad \frac{n R}{\gamma - 1} (T - T_0) = (m_0 + m) g \Delta h \quad (3)$$

Remarque: On a négligé la variation d'énergie potentielle de pesanteur du gaz !

De plus, la loi des gaz parfaits permet de dire que

$$n R = \frac{P_0 h S}{T_0} = \frac{P (h - \Delta h) S}{T} \quad (4)$$

En utilisant les relations (1), (2), (3) et (4), les calculs conduisent à

$$\Delta h = \frac{m}{m + m_0} \frac{h}{\gamma}$$

et

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{m}{m_0} \right)$$

Remarque: Le transfert d'énergie mécanique de pesanteur en énergie interne du gaz est en fait dissipatif. Des forces de friction **internes** au gaz (viscosité notamment) sont nécessaires pour cela : ce sont elles qui assurent l'amortissement indispensable pour atteindre l'équilibre final.

2. Méthode 1 (plus physique) :

Puisqu'on réalise un ajout progressif de petites masses, il y a à tout instant équilibre mécanique (quasistaticité). En plus, on a un gaz parfait avec γ constante donc on peut utiliser la loi de Laplace $P V^\gamma = C^{\text{te}}$ ou, mieux ici, $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{\text{te}}$. Ainsi,

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

soit

$$T = T_0 \left(1 + \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Les relations (1), (2) et (4) sont toujours valables. Après calcul, on en tire

$$\Delta h = h \left(1 - \left(1 + \frac{m}{m_0} \right)^{-1/\gamma} \right)$$

Remarque: On peut montrer que T est plus basse dans ce second cas que dans le premier cas. En effet, le travail reçu est inférieur dans le second cas.

Méthode 2 (plus mathématique) :

Ce qui a été fait à la question 1 peut être recyclé ! Supposons qu'on parte d'un état initial avec (h_i, T_i, m_i) (où m_i est la masse du piston plus celle qui a déjà été ajoutée) et qu'on arrive après ajout d'une masse δm petite, à un état final (h_f, T_f, m_f) . En plus de la relation évidente $m_f = m_i + \delta m$, on a d'après la première question :

$$T_f = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta m}{m_i} \right) T_i$$

$$h_f = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\delta m}{m_i + \delta m} \right) h_i \approx \left(1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\delta m}{m_i} \right) h_i$$

On peut alors considérer une succession de N ajouts de masse (bien choisie !) telle que, par exemple pour h ,

$$h_0 \rightarrow h_1 \rightarrow \dots \rightarrow h_n \rightarrow h_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow h_N = h$$

et prendre la limite $N \rightarrow \infty$. On procèdera donc par récurrence en utilisant les formules ci-dessus avec $i = n$ et $f = n + 1$. Comme c'est le rapport $\delta m/m_i$ qui apparaît dans les formules précédentes, on fait en sorte que ce rapport soit petit et fixé (à N fixé), et on le pose égal à ε . On peut trouver ε en fonction de N car $m_{n+1} = (1 + \varepsilon)m_n$, donc $m_0 + m = m_N = m_0(1 + \varepsilon)^N$ ce qui donne $N \ln(1 + \varepsilon) = \ln((m + m_0)/m_0)$ soit encore, puisque ε est petit (et tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$) :

$$N\varepsilon = \ln\left(\frac{m_0 + m}{m_0}\right)$$

Enfin, il ne reste plus qu'à se rendre compte que, de même,

$$h - \Delta h = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \varepsilon\right)^N h = h \exp[N \ln(1 - \varepsilon/\gamma)]$$

On fait alors un développement limité du \ln , on utilise la formule donnant $N\varepsilon$ et on trouve

$$h - \Delta h = \left(\frac{m_0 + m}{m_0}\right)^{-1/\gamma} h$$

Exactement de même avec la température :

$$T = T_N = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varepsilon\right)^N T_0 = T_0 \exp[N \ln(1 - (\gamma - 1)/\gamma)]$$

donne après DL

$$T = \left(\frac{m_0 + m}{m_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} T_0$$

Et bien entendu, on retrouve les mêmes résultats !

3. Soit z l'altitude du piston par rapport au fond (axe (Oz) ascendant). Il est soumis à son poids $m_0 \vec{g}$ et aux forces de pression $PS \vec{e}_z$ dues au gaz (rien du côté du vide). Il n'y a pas de friction sur le piston.

Alors, la relation fondamentale de la dynamique appliquée au piston dans le référentiel galiléen d'étude donne

$$m_0 \ddot{z} = -m_0 g + PS$$

Or, les conditions d'application de la loi de Laplace $PV^\gamma = C^{\text{te}}$ sont respectées (pour les petites oscillations, l'équilibre mécanique interne est possible), donc

$$P = P_0 \left(\frac{h}{z}\right)^\gamma$$

Pour se placer au voisinage de l'équilibre $z_{\text{eq}} = h$, on pose $z = h(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. Alors, on tire

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{\gamma P_0 S}{h m_0} = \frac{\gamma g}{h}$$

En conclusion, la période des petites oscillations du piston est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{\gamma g}}$$

Corr. 5 Chauffages d'un gaz

1.a. Soit le gaz du compartiment de droite (sans la résistance). La progression de la transformation est suffisamment lente pour pouvoir supposer l'équilibre mécanique du gaz à tout instant. De plus, l'évolution de ce système fermé est adiabatique et le rapport γ est supposé constant ($\gamma = 7/5 = 1,4$

pour un gaz parfait diatomique). On peut donc appliquer la loi de Laplace ; en notant V_2 le volume final du gaz,

$$PV_2^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \text{avec} \quad P = 2P_0 \quad \text{et} \quad V_0 = \frac{RT_0}{P_0}.$$

Ainsi,

$$V_2 = \frac{RT_0}{P_0} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma}$$

On en déduit la température T_2 de ce gaz :

$$T_2 = \frac{PV_2}{R} = \frac{P}{P_0} T_0 \left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma}$$

soit

$$T_2 = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-1/\gamma}$$

Il ne reste qu'à préciser l'état du gaz du compartiment avec résistance dont le volume final est $V_1 = 2V_0 - V_2$ et la température est $T_1 = \frac{PV_1}{R}$, soit

$$V_1 = \frac{RT_0}{P_0} \left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma}\right] \quad T_1 = T_0 \frac{P}{P_0} \left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma}\right]$$

Les applications numériques donnent $V_2 = 14,7 \text{ L}$, $T_2 = 353 \text{ K}$, $V_1 = 33,5 \text{ L}$ et $T_1 = 806 \text{ K}$.

1.b. Pour ne pas avoir à faire intervenir immédiatement le travail W , on peut appliquer le premier principe à l'ensemble des deux gaz, système qui ne reçoit de l'énergie que de la résistance chauffante (transfert thermique Q). En continuant d'indiquer par 1 le compartiment avec résistance, et par 2 celui sans, on a donc

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q$$

On utilise la première loi de Joule (cf gaz parfaits), d'où

$$Q = C_v (T_1 - T_0) + C_v (T_2 - T_0)$$

Or, $PV_1 = RT_1$, $PV_2 = RT_2$ et $P_0 V_0 = RT_0$. De plus, $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $V_1 + V_2 = 2V_0$. En combinant le tout, on obtient

$$Q = \frac{2RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P}{P_0} - 1\right)$$

Il reste à calculer le travail W reçu par le gaz du compartiment de droite (sans la résistance). On applique le premier principe à ce seul gaz parfait et on utilise la première loi de Joule :

$$\Delta U_2 = W \quad \text{soit} \quad W = \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_0)$$

d'où

$$W = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-1/\gamma} - 1\right]$$

Les applications numériques pour $P = 2P_0$ donnent $Q = 12,0 \text{ kJ}$ et $W = 1,32 \text{ kJ}$.

2.a. On note x le déplacement du piston vers la droite depuis sa position initiale (au départ, le ressort a sa longueur au repos puisque le piston est soumis à la même pression P_0 de part et d'autre). Le chauffage du gaz est suffisamment progressif pour supposer qu'il y a équilibre mécanique à tout instant, ce qui se traduit pour le piston par le bilan de forces nul suivant :

$$PS - P_0 S - kx = 0$$

Or, le volume du gaz est devenu $V = V_0 + Sx$ donc on en tire

$$P = P_0 + \frac{k}{S} \frac{V - V_0}{S}$$

La pression varie selon une fonction affine de V , ce qui se traduit par un trajet rectiligne dans le diagramme $P(V)$. La valeur de la raideur k du ressort fixe la pente de la droite représentative de la transformation (plus la raideur est élevée, plus on se rapproche d'un chauffage à volume constant).

À l'état final, $P = 2P_0$ soit $x = x_F = \frac{S}{k} (P - P_0) = \frac{S}{k} P_0$. On en déduit le volume final

$$V_F = V_0 + \frac{S^2 P_0}{k}$$

La température finale s'obtient par la loi des gaz parfaits. Puisque $2P_0 V_F = RT_F$ et $P_0 V_0 = RT_0$, on déduit

$$T_F = 2T_0 + \frac{2S^2 P_0^2}{Rk}$$

Numériquement, on tire $x_F = 0,2 \text{ m}$, $V_F = 34,1 \text{ L}$ et $T_F = 821 \text{ K}$.

2.b. Toujours grâce à l'équilibre mécanique à chaque instant, on peut dire que le travail reçu par le gaz au cours du chauffage est

$$W_1 = - \int_{V_0}^{V_F} P dV = - \int_0^{x_F} \left(P_0 + \frac{k}{S} x\right) S dx$$

soit

$$W_1 = -P_0 S x_F - k \frac{x_F^2}{2}$$

Le premier terme correspond au travail dépensé contre l'air atmosphérique et le second au travail de compression du ressort. En remplaçant x_F par son expression, on tire

$$W_1 = -\frac{3}{2} \frac{S^2 P_0^2}{k}$$

et l'énergie absorbée par le ressort seul est

$$W_{\text{ressort}} = \frac{S^2 P_0^2}{2k}$$

Notez que l'on aurait pu trouver ce résultat directement à partir de l'énergie potentielle finale $\frac{1}{2} k x_F^2$ du ressort (car elle est nulle au départ).

Enfin, le premier principe appliqué au gaz donne Q_1 :

$$Q_1 = \Delta U_{\text{gaz}} - W_1 = \frac{1}{\gamma - 1} (PV - P_0 V_0) - W_1$$

Puis,

$$Q_1 = \frac{RT_0}{\gamma - 1} + \frac{S^2 P_0^2}{k} \left(\frac{2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2}\right)$$

Numériquement, $W_{\text{ressort}} = 500 \text{ J}$ et $Q_1 = 12,5 \text{ kJ}$.

Corr. 6 Bilans entropiques

1. L'état d'équilibre final correspond à un équilibre thermique entre le gaz et le thermostat. Ainsi,

$$T_f = T_0 = 273 \text{ K}$$

L'hélium subit une transformation **isochore** de l'état initial (T_i) à l'état final ($T_f = T_0$). La variation d'entropie du gaz s'obtient en prenant un chemin réversible entre ces deux états (puisque'elle ne dépend pas du chemin suivi) :

$$(dS)_{\text{gaz}} = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = \frac{dU + p dV}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

en exploitant le premier principe, puis la première loi de Joule pour la mole de gaz parfait en cours de route... L'intégration est immédiate et donne

$$(\Delta S)_{\text{gaz}} = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_i}$$

L'application numérique se fait en notant que pour un gaz parfait monoatomique, $\gamma = 5/3$, donc

$$(\Delta S)_{\text{gaz}} = -1,18 \text{ J.K}^{-1}$$

La variation d'entropie du thermostat est donnée par

$$\Delta S_0 = \frac{Q_0}{T_0}$$

où Q_0 est la chaleur reçue par le thermostat (en effet, il est par définition en transformation isotherme réversible). Or, le premier principe appliqué au gaz conduit à

$$(\Delta U)_{\text{gaz}} = -Q_0 = \frac{R}{\gamma - 1} (T_0 - T_i)$$

donc Q_0 est connue et on tire la variation d'entropie du thermostat

$$\Delta S_0 = \frac{R}{\gamma - 1} \left(\frac{T_i}{T_0} - 1\right) = 1,23 \text{ J.K}^{-1}$$

L'Univers {gaz + thermostat} est **isolé** et sa variation d'entropie (qui est l'entropie créée...) est

$$(\Delta S)_U = (\Delta S)_{\text{gaz}} + \Delta S_0 = \frac{R}{\gamma - 1} \left(-\ln \frac{T_i}{T_0} + \frac{T_i}{T_0} - 1\right)$$

Cette quantité est toujours positive par argument de convexité sur la fonction $f(x) = \ln x$ par rapport à sa tangente $y = x - 1$ en $x = 1$. Notamment, l'application numérique donne bien un résultat positif :

$$(\Delta S)_U = 5,7.10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$$

La transformation est bien irréversible : ouf !

2. On procède toujours de la même manière, mais en évolution isotherme réversible à T_0 . On a

$$(dS')_{\text{gaz}} = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T_0} = \frac{dU + p dV}{T_0}$$

La première loi de Joule pour le gaz parfait assure ici que $dU = 0$ et il reste un terme qui s'arrange avec l'équation d'état du gaz parfait pour une mole :

$$(dS')_{\text{gaz}} = \frac{p dV}{T_0} = R \frac{dV}{V}$$

L'intégration est immédiate et donne le résultat

$$(\Delta S')_{\text{gaz}} = -R \ln 2 = -5,76 \text{ J.K}^{-1}$$

Pour le thermostat, on écrit la variation d'entropie en exploitant le premier principe sur l'hélium :

$$\Delta S'_0 = \frac{Q'_0}{T_0} = \frac{-\Delta U'_{\text{He}} + W}{T_0} = \frac{W}{T_0} = \int_i^f -R \frac{dV}{V}$$

soit

$$\Delta S'_0 = -(\Delta S')_{\text{gaz}}$$

Conclusion :

$$(\Delta S)_U = 0$$

Ce résultat est logique puisque l'Univers est isolé et est ici en évolution réversible !

Corr. 7 Contacts thermiques successifs

On procède de façon usuelle. On considère l'évolution qui mène le corps de l'état i (T_i) à l'état $i+1$ (T_{i+1}). Le volume du corps étant constant, on a, sur un chemin réversible entre ces états,

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = \frac{dU - \delta W_{\text{rév}}}{T} = \frac{dU}{T} = m c_p \frac{dT}{T}$$

L'intégration conduit au résultat indépendant du chemin suivi :

$$\Delta S_{i \rightarrow i+1}^{\text{corps}} = m c_p \ln \left(\frac{T_{i+1}}{T_i} \right)$$

Pour le thermostat (source idéale), la température est T_{i+1} et la chaleur qu'il reçoit est $Q_{i \rightarrow i+1}$. Sa variation d'entropie s'écrit

$$\Delta S_{i \rightarrow i+1}^{\text{source}} = \frac{Q_{i \rightarrow i+1}}{T_{i+1}}$$

Le premier principe appliqué au corps permet d'obtenir

$$\Delta S_{i \rightarrow i+1}^{\text{source}} = \frac{-\Delta U_{i \rightarrow i+1}^{\text{corps}}}{T_{i+1}}$$

$$d'où \quad \Delta S_{i \rightarrow i+1}^{\text{source}} = m c_p \left(\frac{T_i}{T_{i+1}} - 1 \right)$$

Ainsi, la variation d'entropie totale sur l'évolution $i \rightarrow i+1$ est

$$\Delta S_{i \rightarrow i+1}^{\text{tot}} = m c_p \left(\ln \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$

On note que cette variation d'entropie est bien **positive** car l'évolution de l'Univers (isolé) est irréversible (cf la fonction $\ln x$ en dessous de sa tangente $y = x - 1$ en $x = 1$ par convexité). Le cas de nullité correspond à l'équilibre puisqu'alors $T_i = T_{i+1}$: c'est bien réversible dans ce cas.

On considère maintenant l'évolution totale de T_0 à T_f . On peut sommer toutes les variations d'entropies et on trouve simplement

$$\Delta S_n = m c_p n \left(\ln \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$

car α est une constante.

Études le cas limite $n \rightarrow \infty$. On note que

$$\alpha^n = \frac{T_f}{T_0}$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{\alpha} = \exp \left(-\frac{1}{n} \ln \frac{T_f}{T_0} \right)$$

Le développement limité en $1/n$ s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{n} \ln \frac{T_f}{T_0} + \frac{1}{2n^2} \left(\ln \frac{T_f}{T_0} \right)^2 + \dots$$

Par conséquent, à l'ordre le plus bas, sachant que $n \ln \alpha = \ln \frac{T_f}{T_0}$, on tire

$$\Delta S_n \simeq \frac{1}{2n} m c_p \left(\ln \frac{T_f}{T_0} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On constate que l'on peut obtenir une variation d'entropie de l'Univers (ou plutôt une entropie créée) aussi faible que désirée en utilisant une infinité de sources : une évolution réversible apparaît ici comme un cas limite idéal.

Corr. 8 Détente irréversible d'un gaz parfait

1. L'équation du gaz parfait pour une mole donne

$$T_A = \frac{P_0 V_A}{R} = 301 \text{ K}$$

2.a. Le gaz passe du compartiment A au B, ce qui entraîne un déplacement du piston. La fin de la transformation est atteinte :

- soit lorsque $P_B = P_0$ (équilibre mécanique) ;
- soit lorsque le piston bute sur la cloison F, tout le gaz étant passé en B.

La seconde possibilité ne se réalise que si $V_B > V_s$ à déterminer. . .

2.b. À l'équilibre mécanique, $P_A = P_B = P_0$ donc

$$P_1 = P_0$$

L'équation d'état donne alors $P_0 V_1 = R T_1$, mais ceci ne fournit qu'une équation pour deux inconnues. . . il faut donc trouver autre chose, et comme d'habitude, il faut penser au premier principe. Celui-ci, appliqué au système $\{A+B\}$ comprenant parois et gaz, donne

$$\Delta U = (\Delta U)_{\text{gaz}} + \underbrace{(\Delta U)_{\text{parois}}}_{=0} = (\Delta U)_{\text{gaz}} = W + \underbrace{Q}_{=0}$$

les parois n'absorbant pas d'énergie et l'évolution étant adiabatique. L'utilisation de la première loi de Joule pour la mole de gaz parfait conduit à

$$\frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_A) = W \quad (1)$$

On évalue le travail reçu par

$$W = - \int_{\text{transfo.}} P_{\text{ext}} dV = -P_0 \Delta V$$

où ΔV représente le volume (algébrique, négatif ici !) balayé par le piston mobile :

$$\Delta V = V'_A - V_A = (V_1 - V_B) - V_A$$

$$\text{soit} \quad W = -P_0 (V_1 - V_A - V_B) \quad (2)$$

Remarque: Pour ne pas s'embêter avec les signes, on peut aussi dire que le travail des forces de pression est ici positif (cf déplacement vers la droite du piston c'est-à-dire dans le sens des forces de pression extérieures), donc $W = P_0 \Delta V$ où ΔV est le volume positif balayé par le piston (on a utilisé $P_{\text{ext}} = P_0$), qui vaut $\Delta V = (V_A + V_B) - V_1$. Les équations (1) et (2) permettent l'écriture de

$$\frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_A) = -P_0 V_1 + P_0 (V_A + V_B) \quad (3)$$

L'équation d'état nous a déjà permis de dire que

$$P_0 V_1 = R T_1 \quad \text{et} \quad P_0 V_A = R T_A \quad (4)$$

On élimine avec les températures de (3) et on déduit

$$V_1 = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_B = 32,1 \text{ L}$$

L'équation d'état (voir (4)) fournit enfin

$$T_1 = \frac{P_0}{R} \left(V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_B \right) = 387 \text{ K}$$

2.c. La solution précédente n'est valable que tant que du gaz reste en A, soit

$$V'_A = V_1 - V_B > 0$$

donc, d'après la question précédente, si $\gamma V_A > V_B$. Par conséquent,

$$V_s = \gamma V_A = 35 \text{ L}$$

2.d. Dans ce cas, tout le gaz passe de A dans B :

$$V_2 = V_B$$

On a ici $P_2 \leq P_0$ et $P_2 V_2 = R T_2$. Le travail reçu par le gaz via le piston est

$$W = -P_0 \Delta V = -P_0 (-V_A) = P_0 V_A$$

Ce travail est logiquement positif (compression) ! Le premier principe conduit, comme précédemment, à

$$\frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_A) = P_0 V_A$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{\gamma-1} (P_2 V_2 - P_0 V_A) = P_0 V_A$$

$$d'où \quad P_2 = \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B} = 0,710^5 \text{ Pa}$$

Puisque $T_2 = P_2 V_2 / R$, on tire

$$T_2 = \frac{\gamma P_0 V_A}{R} = \gamma T_A = 421 \text{ K}$$

Remarque: On vérifie bien que $P_2 \leq P_0$ revient à avoir $V_B \geq \gamma V_A = V_s$. . .

3. **La transformation est irréversible.** Démontrons-le en vérifiant que le bilan entropique donne bien une entropie créée strictement positive.

En considérant toujours le système $\{A+B\}$ comprenant parois et gaz, l'entropie d'échange est nulle puisque l'évolution est adiabatique. Par conséquent, on sait que

$$S^c = \Delta S$$

Pour calculer l'entropie créée, il suffit de calculer la variation d'entropie du gaz parfait. Or, celle-ci ne dépend pas du chemin suivi entre les états limites alors on choisit tranquillement un chemin réversible. On montre alors sans difficulté (faites-le. . .) que, pour la mole de gaz parfait avec $\gamma = C^{\text{te}}$,

$$\Delta S = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} \right)$$

entre des états (P_1, V_1) et (P_F, V_F) . Dans le cadre de la question 2.b, on trouve alors

$$S^c = \Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{V_1}{V_A} > 0$$

et dans le cadre de la question 2.d,

$$S^c = \Delta S = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\gamma \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \right)$$

$$\text{et} \quad S^c \geq \frac{R}{\gamma-1} \ln (\gamma \times \gamma^{\gamma-1}) > 0$$

L'irréversibilité est bien vérifiée.

Remarque: On voit bien qu'il serait faux de dire $P V^\gamma = C^{\text{te}}$ (loi de Laplace) dans cet exercice ! En effet, la pression n'est pas définie de façon homogène dans tout le système (pas d'équilibre interne au cours de l'évolution permettant la quasi-staticité).

Corr. 9 Cycle de l'air dans un moteur Diesel à double combustion

1. Le cycle Diesel classique est à combustion simple alors qu'ici, il est à combustion double (oh, la réponse était dans

le titre de l'exercice !). La combustion qui a lieu en plus est l'étape 2-3 (l'autre combustion étant l'étape 3-4).

2. On considère le modèle d'une machine cyclique ditherme *réversible* (cf traits pleins du diagramme de Clapeyron). Le système (supposé fermé du combustible) reçoit l'échange thermique $Q_c > 0$ avec la source chaude (étapes 2-3 et 3-4) et $Q_f < 0$ de la source froide (étape 5-1 modélisant le refroidissement à l'échappement). Le travail reçu est $W < 0$ (moteur !).

Le rendement correspond au rapport de « l'utile » sur le « payé », soit

$$\eta_m = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \quad (\text{cf 1}^{\text{er}} \text{ principe})$$

Or, $Q_{2-3} = C_v (T_3 - T_2)$ (isochore), $Q_{3-4} = C_p (T_4 - T_3)$ (**isobare**), donc

$$Q_c = Q_{2-3} + Q_{3-4} = C_v (T_3 - T_2) + C_p (T_4 - T_3)$$

De même, $Q_f = C_v (T_1 - T_5)$ et finalement,

$$\eta_m = 1 + \frac{T_1 - T_5}{T_3 - T_2 + \gamma (T_4 - T_3)}$$

3. Pour des évolutions réversibles, adiabatiques, avec $\gamma = 7/5$ constant, du gaz parfait diatomique, on peut utiliser dans cette question les lois de Laplace. Ainsi,

$$T_2 = T_1 \alpha_v^{\gamma-1} = 951 \text{ K}$$

Puis on calcule T_3 à partir de T_2 (on pense à utiliser la loi du gaz parfait) :

$$\frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{donne} \quad T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2}$$

Or, les lois de Laplace donnent $p_2 = p_1 \alpha_v^\gamma$. Par conséquent,

$$T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_1 \alpha_v^\gamma} = 1002 \text{ K}$$

Enfin, on calcule T_5 à partir de T_4 avec les relations :

$$T_5 V_5^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \quad \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_4 V_4}{T_4}$$

$$p_3 = p_4 \quad V_3 = V_2 \quad V_5 = V_1$$

$$\text{Ainsi,} \quad T_5 = T_4 \left(\frac{T_4}{T_3 \alpha_v} \right)^{\gamma-1} = 912 \text{ K}$$

$$\text{On en déduit} \quad \eta_m = 63\%$$

Il s'agit d'un rendement relativement bon pour un moteur thermique (classique pour un moteur Diesel).

4. Pour le gaz diatomique, on a d'après ce qui précède

$$Q_{2-4} = Q_c = \frac{5}{2} m R (T_3 - T_2) + \frac{7}{2} m R (T_4 - T_3)$$

$$\text{et} \quad Q_{5-1} = Q_f = \frac{5}{2} m R (T_1 - T_5)$$

Numériquement, $q_{2-4} = 1212 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $q_{5-1} = -444 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Par le premier principe sur le cycle, on tire le travail massique **fourni** :

$$w_u = -w = q_c + q_f = 768 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$$

Il est heureux de constater que le système est bien moteur !

Corr. 10 Écoulement et entropie

1.a. On procède comme en cours pour l'étude du système en écoulement. Attention, toutefois, le raisonnement est ici fait avec des grandeurs molaires au lieu de massiques. On trouve avec le premier principe

$$\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_t = \mathcal{D}(h_s - h_e)$$

Faisons le raisonnement pour le bilan entropique. On considère un système ouvert \mathcal{S} fixe et le système **fermé** \mathcal{S}^* en écoulement correspondant à $dn_e \cup \mathcal{S}$ à l'instant t et à $\mathcal{S} \cup dn_s$ (on a posé dn_e et dn_s les quantités de matière entrant et sortant de \mathcal{S} pendant dt).

En régime permanent, la conservation de la matière donne

$$dn = dn_e = dn_s$$

Le second principe appliqué au système \mathcal{S}^* fermé pendant dt s'écrit

$$dS = \delta S^e + \delta S^c$$

$$\text{soit} \quad dn(s_s - s_e) = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S^c$$

avec l'entropie créée positive (nulle dans un cas réversible). Or, $\delta Q = \mathcal{P}_t dt$ et $\mathcal{D} = dn/dt$ donc

$$\mathcal{D}(s_s - s_e) - \frac{\mathcal{P}_t}{T_0} = \frac{\delta S^c}{dt} \geq 0$$

1.b. Pour un gaz parfait, la seconde loi de Joule assure que

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT$$

D'autre part, on peut aussi, en utilisant un chemin réversible, calculer pour une mole de gaz

$$ds = \frac{\delta q_{\text{rév}}}{T} = \frac{d(h - pv) - \delta w_{\text{rév}}}{T} = \frac{c_{p,\text{mol}} dT - v dp}{T}$$

$$\text{soit} \quad ds = R \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right)$$

$$\text{qui s'intègre en} \quad s = R \ln \left(\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p} \right) + C^{\text{te}}$$

Finalement, pour la détente de Joule-Thomson, $\delta q = 0$ et $\delta w_u = 0$ donc

$$h_s = h_e$$

Par conséquent,

$$T_s = T_e$$

et

$$\dot{S}_{\text{créée}} = \mathcal{D} R \ln \frac{p_e}{p_s} > 0$$

Le signe obtenu est cohérent avec le second principe de la thermodynamique. Ouf !

2.a. Le CAR est tel que $\dot{S} = 0$ et $\mathcal{P}_t = 0$ d'où $s_s = s_e$. On en déduit que

$$\frac{T_e^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_s} = \frac{T_s^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_e}$$

Il s'agit d'une loi de Laplace et on tire

$$T' = T_e \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1062 \text{ K}$$

On a pris $\gamma \simeq 1,4$ (molécules de l'air essentiellement diatomiques).

2.b. On trouve directement

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{D} \gamma R}{\gamma-1} (T' - T_e) = 51,2 \text{ kW}$$

2.c. De même, on trouve

$$\mathcal{P}_t = \frac{\mathcal{D} \gamma R}{\gamma-1} (T_s - T') = -61,2 \text{ kW}$$

Le signe est logique. . .

2.d. Seul le transfert thermique isobare est irréversible, accompagné de la création d'entropie

$$\dot{S}_{\text{créée}} = \mathcal{D}(s_s - s_e) - \frac{\mathcal{P}_t}{T_0}$$

$$\text{soit} \quad \dot{S}_{\text{créée}} = \frac{\mathcal{D}}{M} \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{T_s}{T'} - \frac{\mathcal{P}_t}{T_0} = 118 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

Corr. 11 Bilan énergétique d'un système ouvert

Comme en cours, **montrez** par bilan que $\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$ (par unité de masse). On rappelle que w_u est le travail massique utile reçu et n'inclut pas le travail des forces de pression (masqué dans h) !

Ensuite, si dm est la masse d'eau transférée vers le réservoir pendant dt , on a par conséquent, avec le débit massique $D_m = \frac{dm}{dt}$,

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{\text{th}}$$

La puissance mécanique reçue par cette eau est $\mathcal{P}_m = D_m w_u$ et la puissance thermique reçue est $\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m q = -45 \text{ MJ.min}^{-1} = -750 \text{ kW}$. De plus, $\Delta e_c = 0$ et $\Delta e_p = gz$. Enfin, $\Delta h = c_m (\theta_r - \theta_b)$. On regroupe le tout et, compte tenu de $D_m = \rho_{\text{eau}} q_v$, on tire

$$\theta_r = \theta_b + \frac{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{\text{th}} - \rho_{\text{eau}} q_v c_m z}{\rho_{\text{eau}} q_v c_m}$$

L'application numérique avec $q_v = 3.10^{-3} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$ donne

$$\theta_r = 30,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

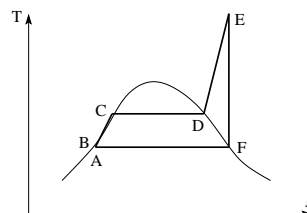
Corr. 12 Machine à vapeur et diagramme de Mollier

1. La pression en F est de 1 bar puisque le changement d'état basse pression FA se fait sous cette pression. La vapeur est saturante sans liquide, donc la fraction massique de cette vapeur est $x = 1$. La pression en E est de 50 bar puisque le changement haute pression se fait à cette pression (CD) et que DE est isobare.

La transformation EF est isentropique : il s'agit d'une verticale sur le diagramme de Mollier. Il suffit alors de partir du point (1 bar, $100 \text{ }^\circ\text{C}$, $x = 1$) sur le diagramme et de tracer la verticale : l'intersection avec l'isobare 50 bar correspond au point E cherché. On lit alors

$$T_E = 620 \text{ }^\circ\text{C} = 893 \text{ K}$$

2. Le diagramme entropique (T, s) est représenté qualitativement compte tenu des remarques suivantes :



- AB est isentropique et, comme le liquide est incompressible (en bonne approximation), la variation de température durant la compression est négligeable : A et B sont confondus sur le diagramme (T, s).
- BC peut être représentée sur la courbe de saturation (le liquide est incompressible).
- CD est une isotherme (changement d'état isobare).
- DE correspond à une augmentation de température à pression constante ; l'entropie augmente (augmentation du désordre).
- EF est une isentropique.
- FA est une isotherme (changement d'état isobare).

3. Pour chaque élément de la machine, on peut utiliser (après démonstration comme en cours. . .)

$$\Delta h + \Delta e_c^M + \Delta e_{p,\text{ext}} = q + w_u$$

Ici, les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle sont négligeables. On rappelle que q est le transfert thermique massique reçu par le fluide dans l'élément de machine et w_u représente le travail massique utile (**ne comprenant pas les forces de pression !**).

Pour la pompe, $w_p = h_B - h_A = v_1 (P_B - P_A)$

$$\text{soit} \quad w_p = 10^{-3} (50 - 1) 10^5 = 4,9 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Pour le générateur de vapeur, $q_{\text{gv}} = C(T_C - T_A) + l_v(T_C)$ avec T_C lue par extrapolation sur le diagramme de Mollier à l'intersection de l'isobare 50 bar et de l'isotire $x = 1$. Par conséquent,

$$q_{\text{gv}} = 4,45 (275 - 100) + 1641 = 2420 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

En ce qui concerne le surchauffeur, en lisant les enthalpies massiques sur le diagramme (où E (50 bar, $620 \text{ }^\circ\text{C}$) et D (50 bar, $x = 1$) :

$$q_s = h_E - h_D = 3700 - 2810 = 890 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Pour la turbine, en lisant sur le diagramme h_F au point F (1 bar, $x = 1$), on tire

$$w_t = h_F - h_E = 2675 - 3700 = -1025 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Enfin, dans le condenseur,

$$q_c = -l_v(1 \text{ bar}) = -2256 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

On remarque que la somme des termes énergétiques calculés pour le cycle complet est bien nulle (aux erreurs de lecture et d'arrondis près) puisque h est une fonction d'état.

4. Le rendement correspond au travail utile massique total échangé sur un cycle rapporté à la somme des transferts thermiques massiques *effectivement reçus* (« payés ») par le fluide :

$$\rho = \frac{|w_p + w_t|}{q_{\text{gv}} + q_s} = 0,31$$

Corr. 13 Détente dans une tuyère

1. Voyons si l'air est assimilable à un gaz parfait.

1.a. Sur le diagramme, on trouve que le volume massique vaut $v_e = 0,2 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$. La loi des gaz parfaits s'écrit $\frac{P M v}{RT} = 1$. Or pour l'air $M = 0,8.28 + 0,2.32 = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$. Sur le diagramme on lit $v \simeq 0,2$ et on trouve $\frac{P M v}{RT} = 1,006 \approx 1$ à la précision de la lecture. L'air se compte bien comme un gaz parfait en entrée !

1.b. Les isenthalpes sont horizontales, ce qui montre que la deuxième loi de Joule est vérifiée. De plus elles sont réguliè-

rement espacées, ce qui montre que la capacité thermique c_p est constante.

1.c. Le point A a pour température $T_A = 214 \text{ }^\circ\text{C}$ et pour enthalpie massique $h_A = 720 \text{ kJ.kg}^{-1}$. En se déplaçant sur la courbe isobare à $P = P_A$, on arrive sur un point voisin B tel que $h_B = 740 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et on mesure $T_B = 234 \text{ }^\circ\text{C}$. On en déduit que $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{h_B - h_A}{T_B - T_A} = 1 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. Or pour

un gaz parfait diatomique, $c_p = \frac{7R}{2M}$, ce qui donne pour l'air : $c_p = 1,003 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. L'accord est parfait à la précision de lecture près !

Pour calculer c_v , il faut se déplacer sur l'isochore $v = 0,7$. On aboutit au point C voisin tel que $h_C = h_B = 740 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $T_C = T_B = 234 \text{ }^\circ\text{C}$. On mesure $P_C = 2,08 \text{ bar}$ (ce n'est pas facile sur le dessin, il faut faire la mesure directement depuis le logiciel COOLPACK). On peut donc calculer $u_A = h_A - P_A v_A$, $u_C = h_C - P_C v_C$, puis $c_v \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \simeq \frac{u_C - u_A}{T_C - T_A} = 720 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. Or pour un gaz parfait diatomique, $c_v = \frac{5R}{2M}$, ce qui donne pour l'air : $c_v = 0,717 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. L'accord est très bon, toujours à la précision de lecture près !

2. On écrit de deux façons le volume occupé par une masse dm entrant dans la tuyère : $S_e v_e dt = v_e D_m dt$, d'où

$$S_e = \frac{v_e D_m}{v_e} = 0,15 \text{ m}^2 \quad (\text{ce qui correspond à l'aire d'un disque de rayon } 22 \text{ cm})$$

3. Le premier principe donne $\Delta(h + e_c) = 0$ d'où

$$\Delta h = -\frac{1}{2} (v_s^2 - v_e^2) = -125 \text{ kJ.kg}^{-1} < 0$$

Ce n'est pas une détente de JOULE-THOMSON car $\Delta e_c \neq 0$ donc la détente n'est pas isenthalpique. D'après la relation $\Delta h = c_p \Delta T$ (on utilise le modèle du gaz parfait), on trouve que $T_s = T_e + \frac{\Delta h}{c_p} = 225 \text{ }^\circ\text{C}$. On peut aussi utiliser le diagramme.

L'enthalpie massique en entrée vaut $h_e = 860 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Celle en sortie vaut donc $h_s = h_e + \Delta h = 735 \text{ kJ.kg}^{-1}$, ce qui correspond à une température de $230 \text{ }^\circ\text{C}$. Les résultats calculés ainsi diffèrent de 2% (le modèle du gaz parfait n'est pas exact). On gardera la valeur de $T_s = 230 \text{ }^\circ\text{C}$ lue sur le diagramme

4. Sachant qu'on veut une pression P_s en sortie, on sait placer le point correspondant à la sortie sur le diagramme. On y lit la valeur $v_s = 0,48 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$ du volume massique de sortie (aussi trouvable avec la loi des gaz parfaits). Finalement,

$$S_s = \frac{v_s D_m}{v_s} = 0,225 \text{ m}^2 \quad (\text{ce qui correspond à l'aire d'un disque de rayon } 27 \text{ cm}).$$

5. Comme la tuyère est adiabatique, on a

$$s_{\text{cr}} = \Delta s = 90 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

la valeur étant trouvée par lecture du diagramme. La pression la plus grande est obtenue pour une évolution adiabatique et réversible (donc isentropique). On trouve par lecture que $P_{\text{max}} = 4,1 \text{ bar}$

Corr. 14 Production d'entropie dans une chambre de mélange

On appelle $D_{m,1}$ et $D_{m,2}$ les débits massiques en entrées (positifs) et $D_{m,3}$ le débit massique en sortie, qu'on prend par convention tous positifs. Le stationnarité de l'écoulement impose que $D_{m,3} - D_{m,1} - D_{m,2} = 0$. Le premier principe appliqué à la chambre de mélange donne $D_{m,3} h_3 - D_{m,1} h_1 - D_{m,2} h_2 = -\Phi$. Des deux relations précédentes, on déduit le débit massique de la deuxième entrée

$$D_{m,2} = \frac{\Phi - D_{m,1}(h_3 - h_1)}{h_2 - h_3} = 9,18 \text{ kg.min}^{-1}.$$

Il reste ensuite à appliquer le deuxième principe, qui s'écrit

$$\text{ici } D_{m,3}s_3 - D_{m,1}s_1 - D_{m,2}s_2 = -\frac{\Phi}{T_e} + \mathcal{J}_{cr}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{J}_{cr} = \frac{\Phi}{T_e} + [D_{m,1}(s_3 - s_1) + D_{m,2}(s_3 - s_2)] \text{ ,} \qquad \text{soit}$$

$$\mathcal{J}_{cr} = 0,637 + 13,9 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{min}^{-1} = 14,6 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{min}^{-1}.$$

On voit que c'est le fait de mélanger qui crée le plus d'entropie pour le mélangeur étudié ici.