DS 6
Une construction de $\mathbb{R}$.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

— Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont supposés connus, avec leurs additions, multplications et relations d'ordre usuels. En particulier, la notion de valeur absolue dans $\mathbb{Q}$ est connue, avec son inégalité triangulaire.

— Au contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels n'est pas supposé connu. En effet, l'objectif de ce problème est de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. En particulier, la théorie des séries de réels n'est pas utilisable.

Partie I : Non complétude de $\mathbb{Q}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, on dit que (u_n) est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall p \geq N,\ \ \forall q \geq N,\ \ |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1°) Soit (u_n) une suite de Cauchy de rationnels. Montrer que cette suite est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

2°) Montrer que l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{Q}$. On dit que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (dans $\mathbb{Q}$) si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

3°) Montrer que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (dans $\mathbb{Q}$).

4°) Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{Q}$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (dans $\mathbb{Q}$), montrer que (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, on dit que la suite (u_n) de rationnels est convergente dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{Q}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (dans $\mathbb{Q}$). On note alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5°) **a)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes de rationnels est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

b) Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, on pose $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Montrer que f est une forme linéaire.

c) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, on convient que

$$(u_n) \leq (v_n) \Longleftrightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq v_n].$$

Montrer que l'on définit ainsi un ordre partiel sur $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que f est croissante de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{Q}$ lorsque l'on munit $\mathcal{C}$ de la restriction de cet ordre à $\mathcal{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

6°) Montrer que (s_n) est une suite de Cauchy.

Afin de montrer que (s_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, on raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a}{b}$ dans $\mathbb{Q}$.

7°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_{2n+1} \leq \dfrac{a}{b} \leq s_{2n}$.

8°) En multipliant ces inégalités par $(2n)!b$, obtenir une contradiction et conclure.

Partie II : définition du corps des réels

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
Lorsque $(u_n), (v_n) \in \mathcal{S}$, on pose $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$.

9°) Montrer que l'on vient de définir une loi interne sur $\mathcal{S}$.
En déduire que $\mathcal{S}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.
On pose $I = \{(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ /\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (dans } \mathbb{Q})\}$.

10°) Montrer que I est un idéal et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

11°) Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative et J une partie de A.
On suppose que J est un idéal ainsi qu'un sous-espace vectoriel de A.
Pour tout $a, b \in A$, on convient que $a\ R\ b \Longleftrightarrow b - a \in J$.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence sur A.
Pour tout $a \in A$, préciser la classe d'équivalence de a, que l'on notera $\overline{a}$.

On note A/J l'ensemble des classes d'équivalence de R.
Pour tout $a, b \in A$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on convient que $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$ et $\alpha.\overline{a} = \overline{\alpha.a}$.

b) Montrer que A/J muni de ces trois lois est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.

En particulier, $\mathcal{S}/I$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.

Pour toute la suite, on pose $\mathbb{R} = \mathcal{S}/I$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ seront appelés des réels.

12°) Soit $(x_n) \in \mathcal{S}$. On suppose que la suite (x_n) ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{Q}$.
a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha \leq |x_n|$.
b) On définit la suite (y_n) de rationnels en convenant que :
pour tout $n < n_0$, $y_n = 0$ et pour tout $n \geq n_0$, $y_n = \dfrac{1}{x_n}$.
Montrer que $(y_n) \in \mathcal{S}$.

13°) Montrer que $\mathbb{R}$ est un corps.

Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on note $j(x)$ la classe d'équivalence de la suite constante égale à x.

14°) Montrer que j est un morphisme injectif de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour la suite, on identifie $\mathbb{Q}$ et $j(\mathbb{Q})$. Plus précisément, on identifie le rationnel x avec le réel $j(x)$, c'est-à-dire que l'on accepte d'écrire $x = j(x)$. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et même un sous-corps de $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de le démontrer).

Partie III : l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe donc $(x_n) \in \mathcal{S}$ tel que $x = \overline{(x_n)}$. On convient que x est *strictement positif* si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \geq \alpha$.

15°) Montrer que cette définition est correcte.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On convient que $x \leq y$ si et seulement si $x = y$ ou bien $y - x$ est un réel *strictement positif.*

16°) Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

17°) Montrer que j est une application croissante de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, après identification de $\mathbb{Q}$ avec $j(\mathbb{Q})$, l'ordre que l'on vient de définir sur $\mathbb{R}$ prolonge l'ordre naturel sur $\mathbb{Q}$.

18°) Soit $(x_n) \in \mathcal{S}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
Montrer que $(x_{\varphi(n)}) \in \mathcal{S}$ et que $\overline{(x_n)} = \overline{(x_{\varphi(n)})}$.

19°) Soit $x \in \mathbb{R}$.
On suppose que x et $-x$ ne sont pas strictement positifs. Montrer que x est nul.
En déduire que l'ordre que l'on a construit sur $\mathbb{R}$ est total.

20°) **a)** Montrer que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$.
b) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Longrightarrow xy \geq 0$.

On en déduit facilement, et on ne demande pas de le démontrer, que la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés usuelles relativement à l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

21°) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$.

22°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique entier relatif, que l'on notera $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Remarque : cette propriété est bien sûr supposée connue lorsque $x \in \mathbb{Q}$.

23°) Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que,
pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$ et $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.