# *Chapitre 5 : fonctions usuelles*

## Table des matières

# 1 Préambule

## 1.1 Symétrie par rapport à la première bissectrice

**Définition 1** On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel seront calculées les coordonnées cartésiennes des points.
On appelle ***première bissectrice***, la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

**Proposition 1** L'application $s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array} \right.$ correspond à la symétrie par rapport à la première bissectrice $\Delta$.

## 1.2 Courbes d'une bijection et de sa réciproque

**Proposition 2** Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective entre deux parties $I$ et $J$ de $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x, f(x))$, pour $x$ variant dans $I$.
Alors, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta$ : $s(\mathscr{C}_f) = \mathscr{C}_{f^{-1}}$.

# 2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

## 2.1 Fonction logarithme

**Définition 2** On appelle fonction ***logarithme népérien***, la primitive de la fonction $\left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ s'annulant en $x = 1$. Cette fonction est notée ln et on a donc :

$$\forall x > 0, \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

**Proposition 3** On a les formules suivantes :
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- pour tout $(a,b) \in ]0,+\infty[^2$, on a :

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \text{ et } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

**Définition 3** Soit $a > 1$. On appelle fonction ***logarithme en base*** $a$, la fonction : $\log_a = \dfrac{\ln}{\ln a}$. On note d'autre part : $\log = \log_{10}$.

**Exemple 1** • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\log 10^n = n$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, combien l'entier $n$ admet-il de chiffres en base 10 ?

## 2.2 Fonction exponentielle

**Définition 4** La fonction $\ln : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de dérivée strictement positive. On appelle fonction ***exponentielle*** notée exp, la fonction réciproque de cette application.

**Proposition 4** La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[$ est dérivable, de dérivée égale à elle-même.

**Proposition 5** On dispose des formules suivantes :

- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \text{ et } e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

**Définition 5** Soit $a > 0$. On appelle ***exponentielle en base*** $a$, la fonction $\exp_a : x \longmapsto e^{x \cdot \ln a}$ que l'on note $a^x$.

## 2.3 Fonction puissance

**Définition 6** On appelle fonction ***puissance***, toute fonction de la forme : $\begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = e^{a \cdot \ln x} \end{array}$, où $a$ est une constante réelle.

**Proposition 6** Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $x \longmapsto x^a$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ de dérivée égale à $x \longmapsto a \cdot x^{a-1}$.

**Exemple 2** Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x^x$ et dériver cette fonction.

**Proposition 7** On dispose des formules suivantes :

- pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^a = +\infty$
- pour tous $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ et $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
- pour tous $a$ et $b$ strictement positifs et $x \in \mathbb{R}$, $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- pour tous $a$, $b$ et $c$ strictement positifs, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.

## 2.4 Comportements au voisinage de $+\infty$

**Proposition 8** La comparaison des fonctions de référence au voisinage de $+\infty$ fournit :

- pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$
- pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0$

**Remarque 1** • Les autres formes indéterminées peuvent normalement se déduire de ces deux limites, les formes indéterminées "$\dfrac{0}{0}$" pouvant également faire intervenir des taux de variation.

• Lorsque $\alpha = n$ est un entier naturel, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $x^n = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}$. On peut alors prolonger la fonction puissance sur $\mathbb{R}$ en une fonction polynomiale.

• Lorsque $\alpha = n$ est un entier strictement négatif, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on obtient $x^n = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$. On peut alors prolonger la fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$.

• Lorsque $\alpha$ est l'inverse d'un entier impair, en posant $\dfrac{1}{\alpha} = 2s+1$, alors la fonction polynomiale $x \longmapsto x^{2s+1}$ étant bijective sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = \sqrt[2s+1]{x}$ est la bijection réciproque de cette application. La fonction puissance est alors définie sur $\mathbb{R}$.

**Exemple 3** Déterminer pour tout $a > 0$, la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^a \cdot \ln x$.

# 3 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

## 3.1 Fonctions circulaires

### 3.1.1 Fonction cosinus

La fonction $x \longmapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, est $2\pi$-périodique, paire de dérivée $x \longmapsto -\sin x$. Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

### 3.1.2 Fonction sinus

La fonction $x \longmapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, est $2\pi$-périodique, impaire de dérivée $x \longmapsto \cos x$. Il suffit également de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

### 3.1.3 Fonction tangente

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right)$, est $\pi$-périodique, impaire de dérivée $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$. Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

## 3.2 Fonctions circulaires réciproques

### 3.2.1 Fonction arccosinus

**Définition 7** La fonction $\cos : \left| \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right.$ est une bijection strictement décroissante. On appelle fonction ***arccosinus*** et on note $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, la fonction réciproque de cette bijection. Autrement dit, pour $x \in [-1, 1]$, le nombre $\theta = \arccos x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes : $\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = x \\ \theta \in [0, \pi] \end{array} \right.$.

**Méthode : Comment calculer $\arccos x$ ?**

- résoudre $\cos\theta = x$ d'inconnue $\theta$
- ne retenir que la seule solution entre $0$ et $\pi$.

**Exemple 4** Calculer $\arccos\frac{1}{2}$ et $\arccos\sin\frac{13\pi}{5}$.

**Proposition 9** La fonction $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 3.2.2 Fonction arcsinus

**Définition 8** La fonction $\sin : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est une bijection strictement croissante. On appelle fonction ***arcsinus*** et on note $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction réciproque de cette bijection. Autrement dit, pour $x \in [-1,1]$, le nombre $\theta = \arcsin x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes : $\left\{ \begin{array}{l} \sin\theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right.$ .

**Méthode : Comment calculer $\arcsin x$ ?**

- résoudre $\sin\theta = x$ d'inconnue $\theta$
- ne retenir que la seule solution entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

**Exemple 5** Calculer $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arcsin\cos\frac{13\pi}{5}$.

**Proposition 10** La fonction $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 3.2.3 Fonction arctangente

**Définition 9** La fonction $\tan : \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array} \right.$ est une bijection strictement croissante. On appelle fonction ***arctangente*** et on note $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction réciproque de cette bijection. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\theta = \arctan x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes : $\begin{cases} \tan\theta = x \\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$.

**Méthode : Comment calculer $\arctan x$ ?**

- résoudre $\tan\theta = x$ d'inconnue $\theta$
- ne retenir que la seule solution strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

**Exemple 6** Calculer $\arctan 1$ et $\arctan\tan\frac{45\pi}{7}$.

**Proposition 11** La fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

### 3.3 Formules

**Proposition 12** On dispose des formules suivantes :

- pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin\arccos x = \cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$
- pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos\arccos x = \sin\arcsin x = x$
- pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

**Proposition 13** On a également :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan\arctan x = x$
- pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x < 0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

## 4 Fonctions hyperboliques

### 4.1 Fonction cosinus hyperbolique

**Définition 10** On appelle fonction ***cosinus hyperbolique***, et on note ch la fonction : ch : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[ \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \right.$.

**Proposition 14** La fonction ch est paire, dérivable de dérivée égale à $\mathrm{ch}'x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. La fonction ch réalise une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$. De plus, les courbes $y = \mathrm{ch}x$ et $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$, la courbe $y = \mathrm{ch}x$ étant au-dessus.

## 4.2 Fonction sinus hyperbolique

**Définition 11** On appelle fonction ***sinus hyperbolique***, et on note sh la fonction : sh : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$.

**Proposition 15** La fonction sh est impaire, dérivable de dérivée égale à $\mathrm{sh}'x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. La fonction sh réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, les courbes $y = \mathrm{sh}x$ et $y = \dfrac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$, la courbe $y = \mathrm{sh}x$ étant en dessous.

## 4.3 Fonction tangente hyperbolique

**Définition 12** On appelle fonction ***tangente hyperbolique***, et on note th la fonction : th : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & ]-1,1[ \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \end{array} \right.$. On a donc les différentes formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

**Proposition 16** La fonction th est impaire, dérivable de dérivée égale à $\mathrm{th}\,' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$. La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

## 4.4 Trigonométrie hyperbolique

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après les formules d'Euler : $\cos x = \mathrm{ch}(ix)$, $\sin x = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$ et $\tan x = \dfrac{\mathrm{th}\ (ix)}{i}$. Les formules de trigonométrie classique induisent ainsi des formules de trigonométrie hyperbolique.

**Proposition 17** On peut écrire :

- $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{th}\,' = 1 - \mathrm{th}^{\,2}$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
- pour tous $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a \cdot \mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a \cdot \mathrm{sh}b$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a \cdot \mathrm{ch}b + \mathrm{sh}b \cdot \mathrm{ch}a$$

$$\mathrm{th}\ (a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a \cdot \mathrm{th}\ b}$$

## 4.5 Fonctions hyperboliques réciproques

**Définition 13** • La fonction ch : $[0,+\infty[\longrightarrow[1,+\infty[$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction argch : $[1,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ comme la fonction réciproque de cette application.

• La fonction sh : $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction argsh : $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ comme la réciproque de cette application.

• La fonction th : $\mathbb{R}\longrightarrow]-1,1[$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction argth : $]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ comme la réciproque de cette application.

**Proposition 18** • La fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ \operatorname{argch}'x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

• La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

• La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \operatorname{argth}'x=\frac{1}{1-x^2}.$$

• Pour tout $x\in[1,+\infty[$ :

$$\operatorname{argch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$\operatorname{argsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

• Pour tout $x\in]-1,1[$ :

$$\operatorname{argth}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$