Lycée Louis-le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n$^{\text{o}}$ 7 : Fonctions dérivables par morceaux

Correction du problème 1 –

Partie I – Préliminaires

1. Soit $S' = \{0 = y_1 < y_2 \cdots < y_M = 1\}$ une subdivision telle que $S \subset S'$. Remarquez que cela impose $0 \in S'$ et $1 \in S'$, d'où la cohérence de notre définition de y_1 et y_M. De plus tout x_i est égal à l'un des y_j.
   - Ainsi, tout $]y_j, y_{j+1}[$ est contenu dans l'un des $]x_i, x_{i+1}[$, ce qui assure la continuité de f sur $]y_j, y_{j+1}[$.
   - Les limites à droite en chaque y_j, $j \in [\![1, M-1]\!]$ existent, par le fait que $\{x_1 < \cdots < x_n\}$ est une partition subordonnée à f si y_j est égal à l'un des x_i, et par continuité de f en y_j sinon.
   - De même pour les limites à gauche en chaque y_j, $j \in [\![2, M]\!]$.

   Ainsi, $\boxed{S' \text{ est encore une partition subordonnée à } f.}$

2. (a) Soit f une fonction continue. Il suffit de prendre comme partition subordonnée $S = \{0 = x_1 < x_2 = 1\}$. En effet, la fonction f est bien continue sur $]0, 1[$, et comme elle est aussi continue en 0 et en 1, elle admet une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 1. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue par morceaux}}$.

   (b) Une fonction croissante est réglée, mais le nombre de points de discontinuité peut être grand, alors que par définition une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ n'a qu'un nombre fini de discontinuité. On peut alors par exemple prendre
$$\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}.$$
   Cette fonction est bien croissante sur $[0, 1]$, et admet des discontinuités en tout $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, elle ne peut pas être continue par morceaux.

   (c) Soit $f \in \mathcal{D}$. Par définition, f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $]0, 1[$, dérivable à droite en 0 et dérivable à gauche en 1. La dérivabilité à droite entraînant la continuité à droite (et de même à gauche), on en déduit que f est continue à gauche et à droite en tout point de $]0, 1[$, donc continue, et continue à droite en 0 et à gauche en 1. Cela implique la $\boxed{\text{continuité de } f \text{ sur } [0, 1]}$.

3. (a) La fonction f_1 admet une infinité de points de discontinuité sur $[0, 1]$, donc n'est pas continue par morceaux, et *a fortiori* pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : $\boxed{f_1 \notin \mathcal{C},\ f_1 \notin \mathcal{D}}$.

   (b) La fonction f_2 est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$, mais n'admet pas de limite à droite finie en 0. Donc $\boxed{f_2 \notin \mathcal{C} \text{ puis } f_2 \notin \mathcal{D}}$.

   (c)
   - La fonction f_3 est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$, admet une limite à droite en 0, égale à 0, une limite à gauche en $\frac{1}{2}$, égale à 0, une limite à droite en 0, égale à $\ln(1) = 0$, et une limite à gauche en 1, égale à $\ln(\frac{3}{2})$. Ainsi, $\boxed{f \in \mathcal{C}}$
   - Elle est même continue sur $[0, 1]$, ce qui laisse ouvert la possibilité de son appartenance à $\mathcal{D}$, que nous allons étudier : f_3 est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur les ouverts $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$, dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0) = -1$, dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$, de dérivée $f'_g(\frac{1}{2}) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1$, dérivable à droite en $\frac{1}{2}$, de dérivée $f'_d(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, dérivable à gauche en 1, de dérivée $f'_g(1) = \frac{2}{3}$. On vérifie facilement que f' admet des limites finies à gauche et à droite aux points de la subdivision. Ainsi, $\boxed{f \in \mathcal{D}}$. En revanche, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

   (d)
   - La fonction f_4 est continue sur $[0, 1]$, par composition de fonctions continues (Arcsin et la valeur absolue). Ainsi, $\boxed{f_4 \in \mathcal{C}}$.

- Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $f_4(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)$, donc

$$f_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} \underset{x \to \frac{1}{2}}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, f_4 ne peut pas être dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{f_4 \notin \mathcal{D}}$.

(e) Sans difficulté, f_5 est continue par morceaux, de subdivision associée $\{0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\}$, et n'est pas continue en $\frac{1}{4}$, donc $\boxed{f \in \mathcal{C} \text{ mais } f \notin \mathcal{D}}$.

Partie II – Dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

1. (a) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de subdivision subordonnée $\{0 = x_1 < x_2 \cdots < x_N = 1\}$, f' est continue sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$. De plus, f' admet des limites finies à gauche et à droite en x_i, ce qui assure le fait que g_0 est continue par morceaux, de subdivision subordonnée $\{0 = x_1 < x_2 \cdots < x_N = 1\}$.

(b) Notons, pour tout $k \in [1, N-1]\!]$, f_k' la fonction définie sur $[x_k, x_{k+1}]$, comme étant le prolongement par continuité de $f'_{|]x_k, x_{k+1}[}$ sur $[x_k, x_{k+1}]$. La fonction f_k' est alors la dérivée sur $[x_k, x_{k+1}]$ de $f_{|[x_k, x_{k+1}]}$. Soit alors $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \quad \int_0^x g_0(s)\ \mathrm{d}s &= \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_0(s)\ \mathrm{d}s + \int_{x_i}^{x} g_0(s)\ \mathrm{d}s \\ &\sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k'(s)\ \mathrm{d}s + \int_{x_i}^{x} f_i'(s)\ \mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) + f(x) - f(x_i) = f(x) - f(0).\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{f(x) = f(0) + \int_0^x g_0(s)\ \mathrm{d}s}$.

(c) Soit $g \in \mathcal{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x g(x)\ \mathrm{d}s \tag{1}$$

Quitte à prendre l'union des deux subdivisions associées à g et g_0, on peut supposer que $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ est une subdivision associée à la fois à g et g_0. On a alors, pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$ ($i \in [\![1, N-1]\!]$), en posant $y_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^{y_i} g(s) + \int_{y_i}^{x} g(s) = f(0) + \int_0^{y_i} g(s) + \int_{y_i}^{x} g_0(s)$$

Les deux fonctions g et g_0 étant continues sur $[y_i, x]$ (ou $[x, y_i]$), f est dérivable en ce point, et en dérivant :

$$f'(x) = g(x) = g_0(x).$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ et } g_0 \text{ coïncident en tout point de } [0,1] \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}}$

2. Soit $g \in \mathcal{C}$, et f définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s.$$

Soit $\{0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1\}$ une subdivision associée à g, et soit, pour $i \in [\![1, N-1]\!]$, g_i la fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ par prolongement de la restriction de g à $]x_i, x_{i+1}[$. Soit alors $x \in]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $x \mapsto \int_{x_i}^{x} g_i(s)$, définie sur $[x_i, x_{i+1}]$, est alors de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, et en particulier, elle est dérivable à gauche en x_{i+1}, à droite en x_i, et sa dérivée admet en ces points une limite finie (à gauche et droite respectivement), égale aux valeurs de ces dérivées à gauche et à droite.

Or, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^{x_i} g(s)\ \mathrm{d}s + \int_{x_i}^{x} g_i(s)\ \mathrm{d}s = C + \int_{x_i}^{x} g_i(s)\ \mathrm{d}s,$$

où C est une constante, donc f est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, dérivable à droite en x_i, dérivable à gauche en x_{i+1}, et f' admet une limite à droite en x_i et une limite à gauche en x_{i+1}. Ceci étant vrai sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $\boxed{f \in \mathcal{D}}$.

3. • Soit $\{0 = x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ une subdivision subordonnée à la fois à f et g. Alors fg est dérivable sur tout $]x_i, x_{i+1}[$, de dérivée $f'g + fg'$ (les dérivées étant ici les dérivées au sens usuel). Comme f, f', g et g' sont continues par morceaux, elles admettent toutes des limites finies en x_i et x_{i+1}, donc aussi $f'g + fg'$. De plus, f et g étant continue sur $[0, 1]$, fg aussi. Donc l'existence de limites à droite et/ou gauche en x_i de $(fg)'$ assure la dérivabilité à droite et/ou gauche en ces points (théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$). Ainsi, $fg \in \mathcal{D}$.
   • On peut alors construire comme dans la question 1 la fonction g_0 correspondant à la dérivée de fg, égale notamment à $f'g + fg'$ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, la dérivée étant prise ici au sens usuel.
   • Étant donné toute autre dérivée f' de f et toute autre dérivée g' de g (au sens de l'énoncé), f' et g' coïncident avec les dérivées usuelles en tout $x \neq x_i$, sauf en un nombre fini de points, donc $f'g + fg'$ coïncide avec g_0 sauf en un nombre fini de points.
   • L'énoncé nous faisant admettre qu'une intégrale est invariante par changement d'un nombre fini de point, la fonction $f'g + fg'$ vérifie la relation
$$f(x)g(x) = f(0)g(0) + \int_0^x g_0(s) = f(x)g(x) = f(0)g(0) + \int_0^x f'(s)g(s) + f(s)g'(s),$$
   et donc par définition $\boxed{f'g + fg' \text{ est une dérivée de } fg.}$

4. Soit
$$P(\lambda) = \int_0^1 (g(x) + \lambda)^2 \, \mathrm{d}x \geqslant 0.$$
On a, en développant :
$$P(\lambda) = \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x + 2\lambda \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x + \lambda^2.$$
Ce polynôme gardant un signe constant, son discriminant est négatif, d'où :
$$4 \left(\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x \right) - 4 \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x \right)^2}.$$
On a l'égalité si et seulement si le polynôme P admet une racine, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\int_0^1 (g(x) + \lambda)^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$
Pour un tel λ, la propriété de positivité de l'intégrale admise en début de l'énoncé nous permet d'affirmer que $g(x) + \lambda = 0$ presque partout. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bien constante presque partout}}$ (on entend par cette expression constante sauf en un nombre fini de points).

5. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(s) \, \mathrm{d}s$ est dans $\mathcal{D}$ (question 1(c)) et $x \mapsto x \int_0^1 g(s) \, \mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Donc la somme des deux est encore dans $\mathcal{D}$. De plus, de façon évidente, $f(0) = f(1) = 1$. Donc $\boxed{f \in \mathcal{D}_0}$.

6. En prenant pour θ la fonction f de la question précédente, on a, pour presque tout x :
$$\theta'(x) = g(x) - \int_0^1 g(s),$$
donc :
$$0 = \int_0^1 g(s)\theta'(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 g(s)^2 \, \mathrm{d}s - \left(\int_0^1 g(s) \right)^2.$$
Il découle de la question 2 que $\boxed{g \text{ est constante presque partout.}}$

7. Soit $\theta \in \mathcal{D}_0$. Soit, pour $x \in [0, 1]$:
$$\tilde{f}(x) = f(0) + \int_0^x g(s) \, \mathrm{d}s.$$

D'après la question 2, $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{D}}$. On a alors
$$(\tilde{f}\theta)' = \tilde{f}\theta' + g\theta.$$
Il en résulte que
$$\tilde{f}(1)\theta(1) = \tilde{f}(0)\theta(0) + \int_0^1 (\tilde{f}(s)\theta'(s) + g(s)\theta(s))\ \mathrm{d}s = \tilde{f}(0)\theta(0) + \int_0^1 (\tilde{f}(s)\theta'(s) - f(s)\theta'(s))$$
Comme $\theta(0) = \theta(1)$, et d'après la question précédente, il vient $\boxed{\tilde{f} = f \text{ presque partout}}$.
Comme par définition, $\tilde{f}(0) = f(0)$, la relation définissant $\tilde{f}$ amène
$$\boxed{\tilde{f}(x) = f(0) + \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s}.$$
Par ailleurs, si g est continue, $\tilde{f}$ est une primitive de g sur $[0,1]$, donc $\boxed{\tilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$.

Partie III – Minimisation d'une expression intégrale

1. Les fonctions étant continues par morceaux, les intégrales sont bien définies. Un choix de dérivées différentes ne modifie pas la valeur de l'intégrale (seul un nombre fini de points sont modifiés). Ainsi, $\boxed{E_\lambda \text{ est bien définie}}$.
2. (a) Soit $\psi \in \mathcal{D}_0$. Soit F la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
$$F(t) = E_\lambda(u_\lambda + t\psi)$$
Un petit développement montre que F est une fonction polynomiale en t, dont le coefficient du terme de degré 1 est :
$$\int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x.$$
Ainsi,
$$F'(0) = \boxed{\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{E_\lambda(u_\lambda + t\psi) - E_\lambda(u_\lambda)}{t} = \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x.}$$
(b) Comme F est minimale en 0 (par définition de u_λ) et que le domaine de F est ouvert, il vient $F'(0) = 0$, donc
$$\boxed{\int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x = 0},$$
ceci étant vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}_0$.
(c) La question II-7, appliquée à $f = u_\lambda'$ et $g = \lambda(1 - u_\lambda^2)u_\lambda$ montre que u_λ' coïncide avec une fonction de $\mathcal{D}$ sauf en un nombre fini de points, donc en particulier avec une fonction continue. Soit h cette fonction. La fonction h est aussi une dérivée de $u'\lambda$, donc
$$\forall x \in [0,1], \quad u_\lambda(x) = \int_0^x h(s)\ \mathrm{d}s,$$
d'où il vient que u_λ est une primitive au sens usuel de h, et est donc de classe $\mathcal{C}^1$.
Sa dérivée au sens classique différant de u_λ' initialement considéré d'un nombre fini de points, les équations intégrales restent vraies.
La fin de la question I-7 nous assure alors que u_λ' est de classe $\mathcal{C}^1$ (car la fonction g cosidérée, définie à partir de u_λ, est continue), donc que $\boxed{u_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$
Enfin, on a vu lors de II-7 que la fonction g est une dérivée de $\tilde{f}$, donc ici de u_λ', d'où il vient (l'égalité étant vraie partout par continuité) :
$$\forall x \in]0,1[, \quad \boxed{u_\lambda''(x) = -\lambda(1 - u_\lambda(x)^2)u_\lambda(x)}.$$
On a alors u_λ'' elle-même de classe $\mathcal{C}^2$, donc u_λ est de classe $\mathcal{C}^4$, et un argument de récurrence immédiate amène le fait que u_λ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{u_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty.}$

(d) En multipliant la relation précédente par u'_λ, on peut primitiver facilement, et, deux primitives différant d'une constante, il existe C_λ tel que

$$\forall x \in]0,1[, \quad \boxed{(u'_\lambda(x))^2 = \frac{\lambda}{2}((u_\lambda(x)^2 - 1)^2 - C_\lambda).}$$

(e) Puisque $u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0$, d'après le théorème de Rolle (u_λ étant continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$), il existe $c \in]0,1[$ tel que $u'_\lambda(c) = 0$, donc $\frac{\lambda}{2}((u_\lambda(c)^2 - 1)^2 - C_\lambda) = 0$, donc

$$C_\lambda = (u_\lambda(c)^2 - 1)^2 \geqslant 0.$$

Par ailleurs, en évaluant en 0, on obtient :

$$u'_\lambda(0)^2 = \frac{\lambda}{2}\left(1 - C_\lambda\right),$$

d'où, λ étant positif, $C_\lambda \leqslant 1$.

On a bien obtenu $\boxed{C_\lambda \in [0,1]}$.

(f) Par ailleurs, si $u_\lambda(x)$ prend la valeur 1 pour un certain x, alors, du fait du signe de $u'_\lambda(x)^2$, nécessairement $C_\lambda = 0$ puis $u'_\lambda(x) = 0$. Or, ilexiste une unique solution u de l'équation différentielle sur $]0,1[$ satisfaisant à $u(x) = 1$ et $u'(x) = 0$, et la fonction constante de valeur 1 convient, donc est égale à cette unique solution. Cela entre en contradiction avec $u_\lambda(0) = 0$ et la continuité de u_λ en 0.

Ainsi, u_λ ne prend pas la valeur 1 sur $]0,1[$, et $u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0$. De la même façon, $u_\lambda(x)$ ne peut pas prendre la valeur -1. Par continuité, le théorème des valeurs intermédiaire nous apprend que pour tout $x \in [0,1]$, $-1 < u_\lambda(x) < 1$, donc $(u_\lambda(x)^2 - 1)^2 < 1$, en particulier pour la valeur c de la question précédente.

Ainsi, il vient $\boxed{C_\lambda < 1}$.

3. (a) Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On vérifie facilement que v est un élément de $\mathcal{D}_0$. Une dérivée possible est :

$$\forall x \in [0,1], \quad v'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0,\varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \in]\varepsilon, 1-\varepsilon[\\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [1-\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\int_0^1 v'(t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}t}{\varepsilon^2} + \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon}.$$

De même,

$$\int_0^1 (1 - v(t)^2)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{1-\varepsilon}^1 \left(1 - \frac{(1-x)^2}{\varepsilon^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Un changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ dans la première intégrale et $y = \frac{1-x}{\varepsilon}$ dans la seconde amène :

$$\int_0^1 (1 - v(t)^2)^2 \, \mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1 - y^2)^2,$$

valeur que l'on pourrait calculer, indépendante de v, et que nous nommerons simplement $2I$. Alors

$$E_\lambda(v) = \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon I \frac{\lambda}{2}.$$

ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, on peut en particulier choisir $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, dès lors que $\lambda > 4$. Ainsi, pour tout $\lambda > 4$, il existe v tel que

$$E_\lambda(v) = \left(2 + \frac{I}{2}\right)\sqrt{\lambda}.$$

En posant $C = 1 + \frac{I}{2}$, on a bien, pour tout $\lambda > 4$, $E_\lambda(u_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}$

(b) De façon évident, $E_\lambda(u) = E_\lambda(-u)$, donc si $u_\lambda \neq 0$, la soltion n'est pas unique, puisque $-u_\lambda$ est aussi solution. Or,

$$E_\lambda(0) = \frac{\lambda}{4},$$

et $\sqrt{\lambda} = o\left(\frac{\lambda}{4}\right)$, donc il existe λ_0 que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{\lambda}{4} > C\sqrt{\lambda}$, ce qui empêche que 0 soit solution du problème de minimisation. Comme c'était le seul cas possible d'unicité, à partir de λ_0, la solution du problème de minimisation n'est $\boxed{\text{pas unique.}}$

4. (a) En posant $\varphi_\lambda = u_\lambda^2$, il vient :

$$\frac{\lambda}{4}\int_0^1 (\varphi_\lambda(x)-1)^2\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 (\varphi_\lambda(x)-1)^2\ \mathrm{d}x \leqslant C\sqrt{\lambda},$$

pour tout λ assez grand. Ainsi pour λ assez grand,

$$0 \leqslant \frac{\lambda}{4}\int_0^1 (\varphi_\lambda(x)-1)^2\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

et le théorème d'encadrement amène : $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 (\varphi_\lambda(x)-1)^2\ \mathrm{d}x = 0.}$

(b) D'après une des questions précédentes, u_λ est à valeurs dans $]-1,1[$, donc $\mu_\lambda < 1$, et donc

$$\forall x\in[0,1],\quad (\mu_\lambda^2-1)^2 = (1-\mu_\lambda^2)^2 \leqslant (1-u_\lambda(x)^2)^2,$$

d'où, par intégration :

$$\boxed{0 \leqslant (\mu_\lambda^2-1)^2 \leqslant \int_0^1 (\varphi_\lambda(x)-1)^2\ \mathrm{d}x}.$$

On déduit de la question précédente et du théorème d'encadrement que $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mu_\lambda = 1}$.

Partie IV – Minoration des réels C tels que $E_\lambda(u_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}$

1. On peut définir $v_\lambda = u_\lambda$ si $\lambda > \lambda_0$ et $v_\lambda = 0$ sinon. Alors, pour $\lambda < \lambda_0$,

$$E_\lambda(v_\lambda) = E_\lambda(0) = \frac{\lambda}{4} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\cdot\sqrt{\lambda} \leqslant \frac{\lambda_0}{4}\cdot\sqrt{\lambda},$$

et pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, $E_\lambda(v_\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda}$. Ainsi, en prenant $C_0 = \max\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{4}, C\right)$, on a bien, pour tout $\lambda > 0$, $\boxed{E_\lambda(v_\lambda) \leqslant C_0\sqrt{\lambda}}$.

2. Il suffit de constater que

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 - 2xy = \left(\sqrt{\varepsilon}x - \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geqslant 0,$$

il vient : $\boxed{\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geqslant 2xy.}$

En posant $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, il vient alors :

$$E_\lambda(v_\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\int_0^1 \left(\varepsilon v_\lambda'(x) + \frac{1}{\varepsilon}(1-v_\lambda(x)^2)^2\right)\ \mathrm{d}x \geqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_0^1 |v_\lambda'(x)(1-v_\lambda(x))^2|\ \mathrm{d}x.$$

3. On pose $\eta_\lambda = \sup\limits_{x\in[0,1]} |v_\lambda(x)|$ et on définit la fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(\theta) = \begin{cases} \theta - \frac{\theta}{3} & \text{si } 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \\ \frac{4}{3} + \frac{\theta}{3} - \theta & \text{si } \theta \geqslant 1. \end{cases}$$

(a) La fonction $|v_\lambda|$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle admet un maximum. Sa borne supérieure η_ℓ existe donc, et est $\boxed{\text{atteinte en un } x_\lambda \text{ de } [0,1]}$.

(b) On vérifie sans peine la cotinuité de F sur $\mathbb{R}_+$, la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, et les dérivabilités à gauche et à droite en 1, avec $F_g'(1) = 0$ et $F_d'(1) = 0$, donc F est dérivable en 1, $F'(1) = 0$, et on vérifie facilement la continuité de F' en 1. Ainsi, $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

Par ailleurs,

$$\forall\theta\geqslant 0,\quad F'(\theta) = \begin{cases} 1-\theta^2 & \text{si } \theta \leqslant 1 \\ \theta^2 - 1 & \text{si } \theta > 1 \end{cases} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{F'(\theta) = |1-\theta^2|}$$

On peut alors revenir à la question 2 : pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
E_\lambda(v_\lambda) &\geqslant \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^1 |v_\lambda(x)||F'(v_\lambda(x))| \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{x_0} |v_\lambda(x)||F'(v_\lambda(x))| \, \mathrm{d}x + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_{x_0}^1 |v_\lambda(x)||F'(v_\lambda(x))| \, \mathrm{d}x \\
&\geqslant \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \int_0^{x_0} v_\lambda(x) F'(v_\lambda(x)) \, \mathrm{d}x \right| + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \int_{x_0}^1 v_\lambda(x) F'(v_\lambda(x)) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\geqslant \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(|F(v_\lambda(x_0)) - F(v_\lambda(0))| + |F(v_\lambda(1)) - F(v_\lambda(x_0))| \right) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(|F(0) - F(\eta_\lambda)| + |F(\eta_\lambda) - F(0)| \right)
\end{aligned}$$

et ainsi, $\boxed{E_\lambda(v_\lambda) \geqslant \sqrt{2\lambda} F(\eta_\lambda).}$

4. En particulier, pour la famille de la question 1, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \sqrt{2} F(\eta_\lambda).$$

Par ailleurs, d'après III-4(b), $\eta_\lambda \longrightarrow 1$, donc $F(\eta_\lambda)$ tend vers $\frac{2}{3}$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe donc λ_1 tel que pour tout $\lambda_0 \leqslant l_1$, et tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} - \varepsilon,$$

d'où :

$$\forall \lambda_0 \geqslant \lambda_1, \quad \inf_{\lambda \geqslant \lambda_0} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} - \varepsilon.$$

La fonction $\lambda_0 \mapsto \inf\limits_{\lambda \geqslant \lambda_0} \dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ étant croissante, elle admet une limite en $+\infty$, et cette limite vérifie donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\lambda_0 \to +\infty} \inf_{\lambda \geqslant \lambda_0} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient :

$$\boxed{\lim_{\lambda_0 \to +\infty} \inf_{\lambda \geqslant \lambda_0} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}}.$$