

Corr. 1 Onde plane stationnaire entre deux plans

1. Puisque \vec{E}_T et \vec{B}_N sont continus en $x = 0$ et $x = a$, on a

$$\vec{E}(0, t) = \vec{0} \quad \vec{E}(a, t) = \vec{0}$$

$$B_x(0, t) = 0 \quad B_x(a, t) = 0$$

Pour remarque, on note que les deux autres relations de passage permettraient de calculer les charges et courants surfaciques sur les plans conducteurs ; notamment, on trouverait ici $\sigma = 0$ sur chaque plan.

2. Dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\text{Ainsi,} \quad f(x) = f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$$

et les conditions aux limites imposent $f(0) = f(a) = 0$, d'où $f_1 = 0$ et $\sin ka = 0$, soit

$$k_m = m \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad \omega_m = m \frac{\pi c}{a} \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

On constate que les modes possibles sont **quantifiés** et correspondent à l'**onde plane stationnaire**

$$\vec{E} = E_0 \sin k_m x \cos \omega_m t \vec{e}_y$$

3. Puisque l'on n'a pas affaire à une onde plane *progressive*, on ne peut pas utiliser la relation de structure des oepm. On doit revenir à l'équation de Maxwell-Faraday et le calcul, sans erreur de signe et en ne tenant pas compte des champs statiques non propagatifs, donne

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos k_m x \sin \omega_m t \vec{e}_z$$

Bien entendu, le champ magnétique est aussi stationnaire, mais en quadrature de phase dans l'espace et dans le temps.

Les nœuds de \vec{E} correspondent aux ventres de \vec{B} et vice-versa.

4. Les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique sont respectivement $\epsilon_0 E^2/2$ et $B^2/(2\mu_0)$. Par conséquent, on obtient

$$\mathcal{E}_E = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} a S \cos^2 \omega t$$

$$\mathcal{E}_B = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} a S \sin^2 \omega t$$

$$\mathcal{E}_E + \mathcal{E}_B = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} a S = C^{\text{te}}$$

Comme $\mathcal{E}_E + \mathcal{E}_B = C^{\text{te}}$, et avec les expressions oscillantes de \mathcal{E}_E et \mathcal{E}_B en opposition, on voit qu'il y a échange permanent d'énergie (comme \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p pour un oscillateur libre).

Corr. 2 Chauffage par induction

Je vous conseille de faire une figure où le courant I est bien orienté en accord avec la règle du tire-bouchon autour de (Oz) .

1. On choisit pour contour (C) un cercle d'axe (Oz) , orienté comme I , de rayon r et de surface (S) (orientée comme (Oz)). La forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday est la loi de Faraday

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\text{Si } r < a, \quad E_\theta(r < a) 2\pi r = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I \pi r^2)$$

$$\text{soit} \quad E_\theta(r < a) = \mu_0 n I_0 \omega \frac{r}{2} \sin \omega t$$

Si $r > a$, on trouve simplement

$$\vec{E}(r > a) = \vec{0}$$

2. La puissance moyenne dissipée par effet Joule en présence des courants de Foucault (induction) est

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle d\tau$$

Le milieu étant implicitement ohmique,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \gamma \langle E^2 \rangle d\tau$$

L'approximation (\mathcal{A}) permet de dire que le calcul et le résultat de la première question sont encore valables dans le cylindre métallique. On reprend donc l'expression de $E_\theta(r < a)$ vue et, comme la moyenne temporelle du carré du sinus est $1/2$, on a

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \int_0^b \gamma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \frac{r^2}{8} 2\pi r L dr$$

$$\text{soit} \quad \langle \mathcal{P}_J \rangle = \gamma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 b^4 \frac{\pi L}{16}$$

Pour faire fondre le métal, il faut que

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle \geq h(T_F - T_e) 2\pi b L$$

d'où

$$\omega \geq \sqrt{\frac{32 h (T_F - T_e)}{\gamma \mu_0^2 n^2 I_0^2 b^3}}$$

On note que la fusion est favorisée si b est grand. Le résultat ne dépend pas de la longueur du dispositif (invariance par translation supposée !).

3. En réalité, le champ magnétique dans le cylindre n'est pas seulement celui du solénoïde. En effet, les courants de Foucault générés par ce champ **par induction** génèrent à leur tour un champ magnétique \vec{B}' qui tend à modérer les causes de l'induction (notez que ce champ \vec{B}' est à son tour lui-même source d'induction, donc d'un champ \vec{E}' et de courants de Foucault associés qui génèrent alors \vec{B}'' et ainsi de suite... Il s'agit d'un raisonnement en développement en termes successifs).

On calcule \vec{B}' en notant que la couronne cylindrique comprise entre r et $r + dr$ dans le cylindre se comporte comme un solénoïde long et produit

$$d\vec{B} = \mu_0 n dI' \vec{e}_z = \mu_0 \gamma E_\theta dr$$

d'où, par intégration sur le cylindre,

$$\vec{B}' = \mu_0^2 n I_0 \gamma \omega \frac{b^2}{4} \sin \omega t \vec{e}_z$$

On note que $B'_{\text{max}} \ll B_{\text{max}}$ correspond à

$$b \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

L'approximation (\mathcal{A}) n'est vérifiée qu'à cette condition, c'est-à-dire plutôt à faible pulsation. Ce résultat est logique car plus la pulsation est faible, plus les effets inductifs de Neumann sont faibles.

Si $\delta \ll b$, alors l'approximation (\mathcal{A}) n'est plus valable : l'expression de \vec{E} utilisée pour calculer (\mathcal{P}_J) n'est plus correcte

car il faut tenir compte de \vec{E}' généré par la variation de \vec{B}' et ainsi de suite. En fait, il s'agit du cas où l'induction est très importante et arrive à modérer sa cause : le cylindre induit un \vec{B}' induit qui s'oppose totalement à \vec{B} solénoïde et il n'y a plus de champ en volume. Tous les champs se retrouvent surfaciques : **c'est l'effet de peau (courants surfaciques) !**

Finalement, le chauffage par induction n'est pas du tout efficace pour chauffer en volume à haute pulsation et il faut trouver un compromis avec le résultat de la question 2 où une pulsation élevée était avantageuse.

Corr. 3 Guide d'ondes et vitesse de l'énergie

1. Les parois du guide sont des conducteurs parfaits au sein desquels les champs sont nuls. Les relations de passage sur le champ électrique tangentiel et sur le champ magnétique normal (continus) donnent alors directement le résultat attendu. Les deux autres relations de passage donneraient accès aux répartitions surfaciques de charges et de courant.

2.a. Dans le vide, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

d'où

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

A ne dépend que de la variable x . Ensuite, le champ électrique tangentiel nul sur les parois $x = 0$ et $x = a$ impose

$$A(x = 0) = A(x = a) = 0$$

De plus, l'équation de propagation du champ électrique **dans le vide** s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) A = 0$$

Si l'on prenait $k_g^2 > \omega^2/c^2$, on obtiendrait des solutions de la forme

$$A(x) = \alpha' \text{sh } \gamma' x + \beta' \text{ch } \gamma' x \quad \text{où} \quad \gamma' = \sqrt{k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

et les conditions $A(0) = A(a) = 0$ donneraient $\alpha' = \beta' = 0$, d'où $A = 0$, **ce qui ne présente pas d'intérêt !**

Si l'on prend

$$k_g^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$$

alors, en posant

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}$$

on doit avoir $A(x) = \alpha \sin \gamma x + \beta \cos \gamma x$

et $A(0) = A(a) = 0$ imposent $\beta = 0$ et $\sin \gamma a = 0$, soit

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

Finalement, on obtient une quantification et les divers modes possibles sont caractérisés par

$$\vec{E}_n = \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} e^{j(\omega t - k_{g,n} z)} \vec{e}_y$$

et la relation de dispersion impose

$$k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

On peut écarter la valeur $n = 0$ correspondant à un champ nul.

2.b. k_g est imaginaire pur si

$$\omega < \omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}$$

Dans ce cas, on obtient une onde stationnaire amortie (évanescence), ce qui ne présente aucun intérêt pratique dans un guide d'ondes (pas de propagation d'énergie). Un guide d'ondes se comporte comme un **filtre passe-haut**. La plus basse fréquence admissible à la propagation correspond au mode $n = 1$ et vaut

$$f_{\min} = \frac{\omega_{1,c}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 3 \text{ GHz}$$

Les guides d'ondes ne permettent de propager que des **hyperfréquences (ondes centimétriques)** pour lesquelles l'épaisseur de peau des parois du guide est inférieure au micromètre : on réalise ainsi la condition de conducteur parfait sur les parois en utilisant une fine pellicule d'or (non oxydable). Pour $\omega > \omega_{n,c}$, $k_g \in \mathbb{R}$ et on obtient un champ réel de la forme

$$\vec{E}_n = \alpha \sin \frac{n\pi x}{a} \cos(\omega t - k_{g,n} z) \vec{e}_y$$

Il s'agit d'un champ progressif suivant les z croissants et stationnaire suivant les x (onde TE_{n0}). La partie stationnaire est

imposée par les nœuds de \vec{E} en $x = 0$ et $x = a$. L'onde n'est pas plane.

Suivant les z croissants, la vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_{g,n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}} > c$$

Une vitesse de phase supérieure à c n'a rien de gênant car il ne s'agit pas de la vitesse de propagation de l'énergie.

Pour calculer la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk_{g,n}}$, le plus simple est de différencier la relation de dispersion (qui est du type Klein-Gordon) :

$$2k_{g,n} dk_{g,n} = 2 \frac{\omega d\omega}{c^2}$$

d'où

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}} < c$$

On trouve $v_g < c$, ce qui est rassurant car on va voir que v_g représente la vitesse de propagation de l'énergie dans le guide

d'onde et doit donc obéir au principe de relativité.

3. L'onde n'est pas plane donc il est strictement interdit d'utiliser la relation de structure des oeppm dans le vide. On doit se contenter de l'équation de Maxwell-Faraday qui, une fois intégrée en éliminant les champs non propagatifs, donne

$$\vec{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{k_{g,n} \alpha}{\omega} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos(\omega t - k_{g,n} z) \\ 0 \\ -\frac{n\pi \alpha}{a\omega} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin(\omega t - k_{g,n} z) \end{pmatrix}$$

Ce résultat est cohérent avec les conditions aux limites \vec{B}_N nul en $x = 0$ et $x = a$. De plus, on constate que $B_{n,z} \neq 0$: **l'onde n'est pas transverse magnétique** (résultat qui aurait été impossible si l'onde avait été plane !). Cette onde n'est que transverse électrique (onde TE_{n0} en fait, non TEM).

Pour effectuer l'interprétation graphique demandée, on peut décomposer dans le champ électrique le terme $\sin \frac{n\pi x}{a}$ en exponentielles :

$$\vec{E}_n = \left\{ -j \frac{\alpha}{2} e^{j(\omega t - k_{g,n} z - n\pi x/a)} + j \frac{\alpha}{2} e^{j(\omega t - k_{g,n} z + n\pi x/a)} \right\} \vec{e}_y$$

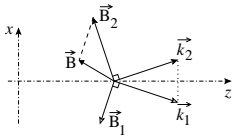
On reconnaît deux oeppm superposées de vecteurs d'ondes

$$\vec{k}_1 = -\frac{n\pi}{a} \vec{e}_x + k_{g,n} \vec{e}_z$$

et

$$\vec{k}_2 = \frac{n\pi}{a} \vec{e}_x + k_{g,n} \vec{e}_z$$

Ainsi, les deux oeppm, dans le vide, vérifient $k_1 = k_2 = \omega/c$ (en module) et présentent des structures $(\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2, \vec{k}_2)$ en trièdres droits directs. On en déduit la figure suivante, qui montre que \vec{B} ne peut être transverse pour l'onde totale (composante sur \vec{e}_z non nulle).



En fait, les deux oeppm de vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 correspondent aux ondes incidentes et réfléchies sur les parois du guide... Je vous laisse calculer l'angle d'incidence...

4.a. Puisque $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$ et $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z$, le vecteur de Poynting est, **en réel (bon sang !)**,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y B_z}{\mu_0} \vec{e}_x - \frac{E_y B_x}{\mu_0} \vec{e}_z$$

Or, E_y et B_z étant en quadrature de phase, $\langle E_y B_z \rangle = 0$, ce qui est cohérent avec une onde à caractère stationnaire suivant \vec{e}_x puisqu'alors

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{\langle E_y B_x \rangle}{\mu_0} \vec{e}_z$$

$$\text{d'où } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha_n^2 k_{g,n}}{\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \langle \cos^2(\omega t - k_{g,n} z) \rangle \vec{e}_z$$

$$\text{soit } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha_n^2 k_{g,n}}{2\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_z$$

On en déduit la puissance moyenne transférée par intégration sur la section du guide

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_{\text{section}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\alpha_n^2 k_{g,n} a b}{4\mu_0 \omega}$$

Le résultat ne dépend pas de z car il n'y a pas d'atténuation (pas d'effet Joule puisque les conducteurs sont parfaits). Pour le dipôle rayonnant, on a des champs en $1/r$ alors qu'ici, ce n'est pas le cas car la propagation est guidée à **une dimension**. Par conséquent, l'amplitude α_n reste constante.

4.b. L'énergie moyenne qui traverse une section du guide entre les instants t et $t + dt$ est contenue dans le cylindre de section ab et de hauteur $v_e dt$, où v_e est la vitesse de propagation de l'énergie, soit

$$\langle dU_{em} \rangle = v_e dt ab \langle u_{em} \rangle$$

où $\langle u_{em} \rangle$ est la densité d'énergie électromagnétique moyenne qu'il faut maintenant calculer

$$\langle u_{em} \rangle = \left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 \alpha_n^2}{4}$$

le calcul ayant été mené **en réel (re-bon sang !)**. On regroupe, en notant que

$$\langle dU_{em} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle dt$$

$$\text{d'où } \frac{\epsilon_0 \alpha_n^2 a b}{4} v_e dt = \frac{\alpha_n a b k_{g,n}}{4\mu_0 \omega} dt$$

soit

$$v_e = \frac{k_{g,n} c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g < c$$

On vérifie que l'on trouve une vitesse de propagation de l'énergie égale à la vitesse de groupe !! C'est cohérent car il n'y a pas d'absorption et le système est à dispersion raisonnable. Voilà pourquoi il était rassurant d'avoir $v_g < c$ dans une question antérieure.

Corr. 4 Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère

Attention, N est une densité particulaire (en m^{-3}).

1.a. On applique le principe fondamental de la dynamique aux électrons (d'une part) et aux ions positifs (d'autre part). Il n'y a pas de force de frottement comme en cours car l'énoncé ne le précise pas.

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{E}_2 \quad (\text{électron})$$

$$\text{et } M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e \vec{E}_2 \quad (\text{ion positif})$$

On a supposé les ions et les électrons **non relativistes** et dans un milieu **peu dense**, ce qui explique la négligence des forces magnétiques :

$$\left| \frac{q \vec{v} \wedge \vec{B}}{q \vec{E}} \right| \sim \left| \frac{q v B}{q E} \right| \sim \frac{|v|}{c} \ll 1$$

On peut alors passer en complexes (équations linéaires) en posant les champs en $e^{j(\omega t - k_2 z)}$, donc

$$\vec{v}_e = j \frac{e}{m \omega} \vec{E}_2$$

et

$$\vec{v}_i = -j \frac{e}{M \omega} \vec{E}_2$$

On en déduit le vecteur densité de courant de charges complexe

$$\vec{j} = -N e \vec{v}_e + N e \vec{v}_i = -j \frac{N e^2}{\omega} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \vec{E}_2$$

Or, $m/M = 5,45 \cdot 10^{-4} \ll 1$, donc la contribution des ions est négligeable (inertie plus importante), ce qui permet d'écrire

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma} = -j \frac{N e^2}{m \omega}$$

$\underline{\gamma}$ est la conductivité complexe équivalente du gaz ionisé.

1.b. Soit on injecte directement la pseudo-oeppm dans les équations de Maxwell et on touille, soit, ce qui est fait ici, on utilise les équations de Maxwell pour obtenir l'équation de propagation modifiée

$$\Delta \vec{E}_2 = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2}$$

puis on injecte la pseudo-oeppm, ce qui donne

$$\underline{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$$

Ainsi,

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}} = 6,95 \text{ MHz}$$

1.c. Dans un diélectrique d'indice complexe \underline{n} , la relation de dispersion est

$$\underline{k}_2^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Pour le plasma ionosphérique, l'identification avec la relation de dispersion de la question précédente donne son indice complexe au carré

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

On voit que l'indice est réel si $\omega \geq \omega_p$ et qu'il est imaginaire pur sinon. Dans le premier cas, la pseudo-oeppm est une vraie oeppm et dans le second cas, on a affaire à une onde évanescente (non propagation).

2.a. On a $\vec{E}_1 = \underline{E}_{01} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x$, $\vec{E}_1' = \underline{E}_{01}' e^{j(\omega t + k_2 z)} \vec{e}_x$ et $\vec{E}_2 = \underline{E}_{02} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x$. L'équation de Maxwell-Faraday montre que, pour chacune de ces ondes, la relation de structure

$$\underline{B} = \frac{\underline{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

est applicable. Or, $k = \omega/c$ et $k_2 = \underline{n} \omega/c$, donc les champs magnétiques correspondants sont $\vec{B}_1 = \frac{\underline{E}_{01}}{c} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y$, $\vec{B}_1' = -\frac{\underline{E}_{01}'}{c} e^{j(\omega t + k_2 z)} \vec{e}_y$ et $\vec{B}_2 = \frac{\underline{n} \underline{E}_{02}}{c} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y$.

Les conditions de passage en $z = 0$ conduisent, puisque \vec{E}_T est continu et \vec{B}_T aussi (pas de courants surfaciques pour un milieu de conductivité finie, sauf précision contraire) aux relations

$$\underline{E}_{01} + \underline{E}_{01}' = \underline{E}_{02} \quad \text{et} \quad \underline{E}_{01} - \underline{E}_{01}' = \underline{n} \underline{E}_{02}$$

2.b. On en déduit le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique

$$r = \frac{\underline{E}_{01}'}{\underline{E}_{01}} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$$

Le facteur R de réflexion en puissance (pour une section S) est

$$R = \frac{\langle \Pi_1' \rangle S}{\langle \Pi_1 \rangle S} = \left| \frac{\underline{E}_{01}'}{\underline{E}_{01}} \right|^2 = |r|^2$$

soit

$$R = \left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right|^2$$

On voit donc apparaître deux cas :

$$\text{— Si } \omega \leq \omega_p, \underline{n} = j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \text{ donc}$$

$$R_{\omega \leq \omega_p} = 1$$

Ce résultat est logique puisqu'alors on a une onde évanescente dans l'ionosphère, non propagative : l'onde incidente se réfléchit totalement.

$$\text{— Si } \omega > \omega_p, \underline{n} = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \text{ donc}$$

$$R_{\omega > \omega_p} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \right)^2$$

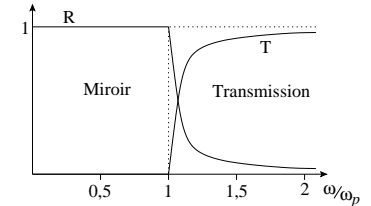
Dans ce cas, la réflexion n'est que partielle et disparaît aux hautes pulsations (inertie en réponse de l'ionosphère).

2.c. $R = 1$ donc l'ionosphère est dans ce cas un miroir parfaitement réfléchissant.

2.d. Les applications numériques sont les suivantes :

$$R_{7 \text{ MHz}} = 0,62 \quad \text{et} \quad R_{8 \text{ MHz}} = 0,11$$

2.e. Voici le graphe donnant l'allure de R , mais aussi celle de T (compte tenu du résultat de la question suivante...):



2.f. Par conservation de l'énergie au niveau de l'interface,

$$R + T = 1$$

Le calcul direct de T , qui permet de retrouver cette relation, est possible pour un élève de MP/MP* car, chance, le milieu est linéaire homogène isotrope. Voici comment on le fait... Le facteur T de transmission en puissance (pour une section S) est (k_2 réel ici pour $\omega \geq \omega_p$) :

$$T = \frac{\langle \Pi_2 \rangle S}{\langle \Pi_1 \rangle S} = \frac{k_2}{k} \left| \frac{\underline{E}_{02}}{\underline{E}_{01}} \right|^2 = n |t|^2$$

On note bien que ce n'est pas $|t|^2$ (beau piège) ! Or, les relations de la question 2.a donnent

$$t = \frac{2}{1 + \underline{n}}$$

$$\text{donc} \quad T = \frac{4n}{(1+n)^2}$$

$$\text{Finalement, } R + T = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2} + \frac{4n}{(1+n)^2} = 1$$

ce qu'il fallait démontrer. Cool !

2.g. Pour $f > f_p$, l'indice de l'ionosphère est réel : $\underline{n} = n$. La relation de Descartes $\sin i_1 = n \sin i'_1$ indique qu'il existe une réflexion totale si l'angle d'incidence i_1 vérifie

$$\sin i_1 > \sin i_{1L} = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

d'où

$$\cos i_{1L} = \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{f_p}{f}$$

Numériquement

$$i_{1L} \simeq 55^\circ$$

Si l'on respecte la condition de réflexion totale, il est possible de propager à grande distance des ondes radios (telles que $f > f_p$) à de grandes distances sans avoir à utiliser de relais. Néanmoins, il est préférable d'utiliser des ondes radios avec $f < f_p$ pour lesquelles la réflexion totale est toujours assurée. Enfin, si l'on souhaite communiquer avec des satellites, il est souhaitable d'utiliser $f > f_p$ et un angle d'incidence $i_1 < i_{1L}$ pour éviter la réflexion totale !

Corr. 5 Effet de peau dans un métal

1. Dans le domaine centimétrique, $\lambda_0 \sim 10^{-2}$ m et la fréquence $\nu = c/\lambda_0 \sim 30$ GHz. Le temps de relaxation τ d'un métal tel que le cuivre est $\tau \sim 10^{-14}$ s et pour $\nu \tau \ll 1$, la conductivité complexe vue en cours devient réelle :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \simeq \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs densité de courant de conduction et de déplacement sont respectivement

$$\vec{j}_c = \gamma_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et, dans le domaine de fréquences envisagé,

$$\left| \frac{j_d}{j_c} \right| \sim \left| \frac{\epsilon_0 \omega E}{\gamma_0 E} \right| \sim \frac{1}{36\pi 10^9} \times \frac{2\pi \times 3 \cdot 10^{10}}{6.10^7} \sim 10^{-7} \ll 1$$

On en déduit les équations de Maxwell **dans l'ARQS** (que l'on a vérifié) :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$$

Remarque :

Il est important de noter que $\rho = 0$ dans le conducteur. En effet, la loi de conservation de la charge, la loi d'Ohm (statique pour $\nu \ll 1/\tau$) et l'équation de Maxwell-Gauss conduisent à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$$

d'où $\rho(\mathbf{M}, t) = \rho(\mathbf{M}, 0) e^{-t/\tau'}$ avec $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} \sim 10^{-19}$ s

On voit que ρ est forcément nulle dans le cadre $\nu \ll 1/\tau$ de l'exercice !

2. On utilise directement une solution de type pseudo-oppm de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Alors, $\vec{\nabla} = -j \vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

et les équations couplées de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, dans le cadre des approximations de la question précédente, donnent

$$-j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{et} \quad -j \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$$

De plus, $\operatorname{div} \vec{E}$ et $\operatorname{div} \vec{B}$ sont nulles donc

$$j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Force est de constater que $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est un trièdre direct droit et les équations couplées conduisent simplement à la relation de dispersion

$$k^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Puisque $j = e^{j\pi/2}$, on trouve

$$k = \pm \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

δ , homogène à une longueur, est la **profondeur de peau**. On ne retient que le signe dans k qui donne une onde non amplifiée dans le sens des x croissants, d'où

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)}$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

et

On note que le produit vectoriel précédent entre complexes n'est pas gênant car le vecteur d'onde complexe est une constante uniforme (sinon, gare, les complexes ne supportent pas les produits...). En revenant en réels, on trouve

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta - \pi/4)$$

Remarque :

On aurait pu aussi obtenir la relation de dispersion en obtenant

d'abord l'EDP vérifiée par le champ électrique \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Puis, il suffisait d'injecter la forme pseudo-oppm précédente. On remarque aussi que l'effet de peau est décrit par **une équation de diffusion** et il est logique de trouver une solution formellement identique à l'onde thermique.

3. La puissance moyenne cédée au volume élémentaire $S dx$ (puis dissipée par effet Joule par diffusion, rayonnement, convection) est

$$d\mathcal{P} = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle S dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{j} \cdot \vec{E}^* \right] S dx$$

donc

$$d\mathcal{P} = \frac{\gamma_0}{2} |\vec{E}|^2 S dx$$

soit

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} S dx$$

Bien entendu, le résultat est indépendant du temps puisqu'on a effectué une moyenne temporelle ! Si tel n'est pas le cas dans votre résultat, c'est que vous avez maltraité le problème en utilisant n'importe comment les complexes (erreur fréquente).

4. Le vecteur de Poynting moyenné dans le temps est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right]$$

soit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \vec{e}_x^*$$

On en déduit le flux demandé à travers les faces du volume élémentaire $S dx$; on le compte positivement dans le sens entrant :

$$d\mathcal{P}_\pi = \underbrace{\langle \Pi \rangle_x S}_{\text{entre en } x} - \underbrace{\langle \Pi \rangle_{x+dx} S}_{\text{sort en } x+dx}$$

On en déduit, à l'ordre 1 en dx , que

$$d\mathcal{P}_\pi = \frac{SE_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \frac{2dx}{\delta} e^{-2x/\delta}$$

soit

$$d\mathcal{P}_\pi = d\mathcal{P}$$

Ce résultat montre que **la puissance moyenne globalement entrante** dans le volume élémentaire est **intégralement cédée aux charges, puis dissipée par effet Joule, en moyenne**. Ce résultat est cohérent avec le bilan local d'énergie de Poynting

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

En effet, en moyenne dans le temps, ce bilan donne

$$\operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle = -\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$$

ce qui est en accord avec la formulation intégrale traduite par $d\mathcal{P}_\pi = d\mathcal{P}$.

Corr. 6 Pression de radiation

1. Dans un conducteur **parfait**, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ (déjà vu lors de l'étude de l'effet de peau, en passant à la limite de l'épaisseur de peau nulle pour une conductivité infinie). Les charges et les courants ne peuvent alors être que **surfaiques** (cf les équations de Maxwell).

2. Puisque le conducteur est parfait, il y a **réflexion totale** de l'onde incidente selon les lois de Descartes. L'onde réfléchie est dans le plan d'incidence et, en absolu, $\theta_i = \theta_r = \theta$.

On écrit alors les vecteurs d'onde (de module $k_i = \omega_i/c$ pour des oeppm dans le vide) :

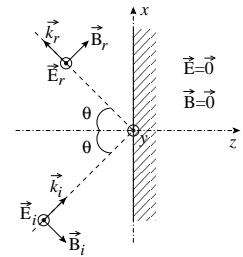
$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_i \sin \theta \\ 0 \\ k_i \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = \begin{pmatrix} k_r \sin \theta \\ 0 \\ -k_r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Par **linéarité** des équations du problème, le champ réfléchi (réponse) a la même pulsation que le champ incident (excitation) : $\omega_i = \omega_r = \omega$ donc $k_i = k_r = k = \omega/c$.

Remarque : Si cela ne vous paraît pas évident, il suffit d'écrire les relations de passage et de voir que si les pulsations étaient différentes, toutes les ondes seraient nulles (par liberté de la base des exponentielles complexes en $e^{j\omega t}$). D'ailleurs, c'est l'utilisation des relations de passage dans les milieux matériels (différentes de celles du vide !) et de la continuité de la phase des exponentielles complexes qui conduit aux relations de Descartes de la réflexion et de la réfraction entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 ...

Attention, il y a ensuite deux cas générateurs à envisager !

Premier cas : polarisation rectiligne orthogonale au plan d'incidence.



On remarque par que le plan d'incidence est de symétrie négative pour les sources du champ incident, donc le champ électrique réfléchi (qui est un effet) lui est orthogonal : **la polarisation de l'onde réfléchie reste la même que celle de l'onde incidente** (un raisonnement simple à partir des dipôles rayonnants (vus plus tard) excités dans le conducteur conduit au même résultat).

Les expressions des champs électriques associés aux oeppm sont par conséquent

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_y^j e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \vec{E}_r = E_{0,r} \vec{e}_y^j e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

et on déduit les expressions des champs magnétiques correspondants par la relation de structure des oeppm dans le vide :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_{0,i}}{c} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_{0,r}}{c} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Il ne reste qu'à exploiter les relations de passage à l'interface

$z = 0$. Puisque \vec{E}_T et \vec{B}_N sont continus, on déduit l'égalité (dans les deux cas)

$$E_{0,i} + E_{0,r} = 0 \quad (*)$$

Le champ réfléchi est alors totalement défini en fonction de l'incident. Il ne reste plus qu'à exploiter les deux dernières relations de passage. En notant par un indice 1 le vide et un indice 2 le conducteur, on a

$$\underbrace{\vec{E}_{2,N}(z=0)}_{\vec{0} \text{ (cond. parf.)}} - \underbrace{\vec{E}_{1,N}(z=0)}_{\vec{0} \text{ (cf polarisations)}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

$$\vec{0} \text{ (cond. parf.)} \quad \vec{0} \text{ (cf polarisations)}$$

d'où

$$\sigma = 0$$

$$\text{Puis} \quad \vec{B}_{2,T}(z=0) - \vec{B}_{1,T}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

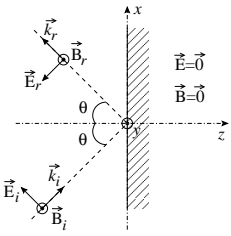
$$0 + \frac{E_{0,i}}{c} \cos \theta e^{j\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x} - \frac{E_{0,r}}{c} \cos \theta e^{j\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x} = \mu_0 j_s y$$

Ainsi, en utilisant la relation (*), on déduit en notation réelle

$$\vec{j}_s = 2\epsilon_0 c E_{0,i} \cos \theta \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_y^j$$

On remarque que \vec{j}_s respecte la symétrie négative par le plan d'incidence des sources. **Dans le cas d'une onde incidente polarisée orthogonalement au plan d'incidence, seuls des courants de surface sont générés pour conserver l'annulation du champ électromagnétique au sein du conducteur.**

Second cas : polarisation rectiligne dans le plan d'incidence.



Le raisonnement est du même esprit que précédemment mais je le refais quand même (petit copié-collé modifié).

On remarque que le plan d'incidence est de symétrie positive pour les sources du champ incident, donc le champ magnétique réfléchi (qui est un effet) lui est orthogonal : **la polarisation de l'onde réfléchie reste dans le plan d'incidence** (un raisonnement simple à partir des dipôles rayonnants (vus plus tard) excités dans le conducteur conduit au même résultat). Les expressions des champs magnétiques associés aux oeppm sont par conséquent

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0,i}}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \vec{B}_r = \frac{E_{0,r}}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

et on déduit les expressions des champs électriques correspondants par la relation de structure inversée des oeppm dans le vide :

$$\vec{E}_i = -c^2 \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{B}_i}{\omega} = E_{0,i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{E}_r = -c^2 \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{B}_r}{\omega} = E_{0,r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Il ne reste qu'à exploiter les relations de passage à l'interface $z = 0$. La continuité de \vec{B}_N n'apporte rien (puisque le champ magnétique est tangentiel) et la continuité de \vec{E}_T donne

$$E_{0,i} - E_{0,r} = 0 \quad (**)$$

Le champ réfléchi est alors totalement défini en fonction de l'incident. Il ne reste plus qu'à exploiter les deux dernières relations de passage. En notant par un indice 1 le vide et un indice 2 le conducteur, on a (en exploitant (**)) :

$$\vec{E}_{2,N}(z=0) - \vec{E}_{1,N}(z=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

$$\text{qui donne } \sigma = 2 \epsilon_0 E_{0,i} \sin \theta \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x \right)$$

$$\text{Puis } \vec{B}_{2,T}(z=0) - \vec{B}_{1,T}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\text{donne } \vec{j}_s = 2 \epsilon_0 c E_{0,i} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x \right) \vec{e}_x$$

On remarque que \vec{j}_s respecte la symétrie positive par le plan d'incidence des sources. **Dans le cas d'une onde incidente polarisée dans le plan d'incidence, des courants de surface et des charges surfaciques sont générés pour conserver l'annulation du champ électromagnétique au sein du conducteur.**

3. La pression moyennée dans le temps exercée par l'onde sur le conducteur est la pression de radiation qui, dans chacun des cas précédents, est

$$P_{\text{rad}} = \left\langle \frac{\mu_0 j_s^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} \right\rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta$$

4. Puisqu'il y a dualité onde-corpuscule, on doit retrouver le même résultat avec les photons ! On adopte l'approche simplifiée suivante : les photons sont des billes de quantité de mouvement $h v_0 / c$ chacune et ricochant sur la surface **plane** du conducteur. On peut donc supposer les lois de Descartes de la réflexion applicables (ce qui n'est en fait pas restrictif si l'on raisonnait en statistique) : après réflexion, le photon reste dans le plan d'incidence et l'angle de réflexion correspond à l'angle d'incidence ($\theta = \theta'$). De plus, le photon ne change pas de fréquence à la réflexion (son énergie $h v_0$ est conservée par le choc élastique).

La variation de quantité de mouvement **pour un photon** à la réflexion est

$$\vec{p}' - \vec{p} = -2 \frac{h v_0}{c} \cos \theta \vec{e}_z$$

Or, le nombre de photons incidents pendant dt sur la surface S du conducteur correspond aux photons contenus dans le cylindre d'incidence de longueur $c dt$ et d'inclinaison θ , soit

$$dN = n_v c dt S \cos \theta$$

où n_v est la densité particulaire des photons *incidents*. Alors, la variation de la quantité de mouvement **du conducteur** pendant dt est

$$d\vec{p}_{\text{conducteur}} = -dN (\vec{p}' - \vec{p}) = 2 n_v h v_0 \cos^2 \theta S dt \vec{e}_z$$

L'écriture du principe fondamental de la dynamique pour le conducteur conduit alors à l'expression de la pression perçue par celui-ci :

$$P_{\text{rad}} = \frac{d\vec{p}_{\text{conducteur}}}{S dt} \cdot \vec{e}_z = 2 n_v h v_0 \cos^2 \theta$$

Le résultat est le même que le précédent puisque l'énergie moyenne volumique du faisceau incident est, en corpusculaire

$$\langle e_i \rangle = n_v h v$$

et, en ondulatoire

$$\langle e_i \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Finalement, dans les deux cas,

$$P_{\text{rad}} = 2 \langle e_i \rangle \cos^2 \theta$$