Devoir Surveillé n° 6 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Problème 1 – Convergence radiale des séries entières

Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie à partir d'un certain rang n_0 dans $\mathbb{N}$. On appelle série entière associée à la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$, définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \cdots + a_n z^n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k z^k.$$

Le domaine de convergence D de cette série entière est alors par définition le domaine de convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant n_0}$, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des complexes z pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n z^n$ est convergente. Pour tout $z \in D$, on définit alors la somme f de cette série entière par :

$$f(z) = \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On étudie dans ce problème quelques propriétés asymptotiques de f.

Partie I – Généralités sur les séries entières

1. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ pour lequel la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. On pourra faire apparaître le quotient $\frac{z}{z_0}$.
2. Soit $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\geqslant n_0} \text{ est bornée}\}$. Après avoir justifié l'existence de R dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que la série $\sum a_n z^n$ est :
   (i) absolument convergente si $|z| < R$
   (ii) grossièrement divergente si $|z| > R$.

   On prendra garde au fait que $(a_n R^n)$ peut être bornée ou non.

   On dit que R est le *rayon de convergence* de la série entière associée à $(a_n)_{n\geqslant n_0}$.
3. Déterminer le domaine D de convergence dans les cas suivants :
   (i) $a_n = 1$, $n \geqslant 0$;
   (ii) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{(n+\ln(n))^2}$, $n \geqslant 1$.
4. Dans cette question, $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série associée à $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) Soit z dans $\mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. On pose $S_n = 1 + z + \cdots + z^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (S_n) est bornée, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$
   (c) En déduire le domaine de convergence D de la série entière associée à $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie II – Étude de la continuité de la somme

On dit que la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

1. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, f_n est continue sur l'intervalle I, et que (f_n) converge uniformément vers f sur I. On montre dans cette question qu'alors $f_{|I}$ est continue sur I également.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $(x, y) \in I^2$,
   $$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + |f_n(y) - f_n(x)|.$$
   (b) En déduire que la restriction $f_{|I}$ de f à I est continue sur I.

La suite (f_n) et la fonction f sont celles définies dans le préambule du problème, pour une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ (on suppose par commodité que $n_0 = 0$). On fait de plus l'hypothèse que $R > 0$. Enfin, on restreint f sur son domaine réel de convergence (donc sur $D \cap \mathbb{R}$). On note encore f cette restriction. Ainsi, f définit une fonction d'un intervalle I d'extrémités R et $-R$ (qui peuvent être dans I ou non) dans $\mathbb{R}$. On souhaite étudier la continuité de f.

2. (a) Soit $\rho \in [0, R[$. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-\rho, \rho], \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\rho^k.$$
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-\rho, \rho]$, puis montrer que f est continue sur $]-R, R[$.
3. Justifier de même que si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, f est continue sur $[-R, R]$.
4. On suppose dans cette question que $\sum a_n R^n$ est convergente. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$
   (a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p > n$ et $x \in [0, R]$. En écrivant $a_k R^k$ à l'aide de r_{k-1} et r_k, montrer que :
   $$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{k} \right) + r_n \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - r_p \left(\frac{x}{R}\right)^{p}.$$
   (b) En déduire que (f_n) est uniformément convergente sur $[0, R]$. Qu'en déduit-on sur f ?
5. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$, et que $\sum a_n R^n$ diverge.
   (a) Justifier que f admet en R^- une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, R[$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
   (c) En déduire la limite de f en R^-.
6. Trouver un exemple de suite (a_n) pour laquelle $\sum a_n R^n$ diverge, et f admet une limite finie en R^-.

Partie III – Séries de Fourier et approximations polynomiales

On montre dans cette partie qu'on peut approcher uniformément toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ par une suite de fonctions polynomiales, autrement dit que pour toute fonction continue f sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$ (théorème de Weierstrass).
On se contente du cas où $[a, b] = [0, 2\pi]$, et où $f(0) = f(2\pi)$. On admettra que le cas général s'en déduit (sans difficulté) par un changement de variable affine (pour se ramener au bon intervalle) et en retranchant une fonction

affine, donc polynomiale (pour se ramener à l'hypothèse $f(0) = f(2\pi)$). Avec ces hypothèses, on peut prolonger f sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité, en une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera encore f.
Notre construction de l'approximation polynomiale est basée sur les séries de Fourier.
On appelle série de Fourier de f la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}t.$$

On définit la n-ième somme de Cesàro associée à f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right) f(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u \qquad \text{puis:} \qquad S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u.$$

   Cette formule est appelée formule de Dirichlet.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u.$$

3. En choisissant judicieusement f, calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u$, et en déduire (pour f quelconque continue 2π-périodique) :

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\ \mathrm{d}u.$$

4. (a) Soit $\delta \in]0, \pi]$. Montrer qu'on peut majorer $\displaystyle\int_{\delta}^{\pi}\left|(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\right|\ \mathrm{d}u$ par un réel A dépendant de δ, mais indépendant de n et de x.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\delta > 0$, qu'on peut choisir inférieur à π, tel que pour tout u tel que $|u| \leqslant \delta$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

   (c) En déduire que (σ_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

5. En utilisant un développement en série du cosinus et du sinus, et certains résultats de la partie II, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \sin(kx)$ et $x \mapsto \cos(kx)$ sont limites uniformes de suites de fonctions polynomiales sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

6. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $|f(x) - Q(x)| \leqslant \varepsilon$.

Nous supposons donc désormais acquis la version plus générale de ce théorème : pour toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - Q(x)| \leqslant \varepsilon$ (théorème de Weierstrass).

Partie IV – Approximations polynomiales de certaines fonctions continues par morceaux

1. Soit $\chi = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ définie sur $[0,1]$, donc la fonction en escalier sur $[0,1]$ prenant la valeur 1 sur $[\frac{1}{2},1]$ et 0 ailleurs. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2, définies et continues sur $[0,1]$, telles que
$$g_1 \leqslant \chi \leqslant g_2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
On pourra construire g_1 et g_2 affines par morceaux, de sorte à effacer le saut de discontinuité en $\frac{1}{2}$.
2. Soit φ une fonction définie sur $[0,1]$, continue sauf en $\frac{1}{2}$, admettant des limites gauche et à droite finies en $\frac{1}{2}$, telles que $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \varphi(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux fonctions continues h_1 et h_2 telles que $h_1 \leqslant \varphi \leqslant h_2$ sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (h_2(x) - h_1(x))\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
3. (a) En considérant $h_2 + \delta$ pour un certain réel δ à déterminer, montrer qu'il existe un polynôme B_2 tel que
$$\forall x \in [0,1], \quad h_2(x) \leqslant B_2(x) \leqslant h_2(x) + \frac{\varepsilon}{4}.$$
   (b) En déduire l'existence de deux polynômes B_1 et B_2 tels que
$$\forall x \in [0,1], \quad B_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant B_2(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 (B_2(x) - B_1(x))\, \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$
   (c) Soit χ la fonction de la question 1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes P_1 et P_2 tels que $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$, et vérifiant sur $[0,1]$:
$$P_1 \leqslant \chi \leqslant P_2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\, \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$
   On pourra chercher P_i sous la forme $P_i(x) = x(1-x)Q_i(x) + x$, avec Q_i polynomiale.

Partie V – Théorème Taubérien

Dans cette partie, on considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière associée ait un rayon de convergence R au moins égal à 1, et tel que sa somme f admette une limite ℓ en 1^-. On suppose de plus que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, et on note A un réel tel que $n|a_n| \leqslant A$. On montre qu'alors $\sum a_n$ converge.

1. (a) Soit P un polynôme réel de terme constant nul. Montrer que la série $\sum a_n P(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1,1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1^-, la limite de sa somme à l'aide de ℓ et d'une valeur prise par P en un point qu'on précisera.
   (b) Soit Q un polynôme réel. Montrer que la série $\sum x^n Q(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1,1[$ et montrer que
$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) = \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t.$$
2. On reprend la fonction χ et les fonctions polynomiales P_1 et P_2 ainsi que Q_1 et Q_2 construites à la fin de la partie précédente, pour un $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum a_n \chi(x^n)$ converge, puis que les deux différences
$$\delta_1(x) = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \qquad \text{et} \qquad \delta_2(x) = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_2(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)\right|$$
   sont majorées par $A(1-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n (Q_2 - Q_1)(x^n)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in [\alpha, 1[$, on ait
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) - \ell\right| \leqslant (A+1)\varepsilon.$$
   (c) En déduire que la série $\sum a_n$ converge.