

CONCOURS D'ADMISSION 2000

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.

On désigne par E l'espace euclidien \mathbf{R}^n ($n \geq 1$), par $(\cdot|.)$ son produit scalaire usuel, et par $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour toute partie X de E , on note X^\perp (resp. X^+) l'ensemble des éléments x de E satisfaisant $(x|y) = 0$ (resp. $(x|y) \geq 0$) pour tout y de X .

Une partie C de E sera appelée *cône à faces* s'il existe une famille finie d'éléments c_1, \dots, c_r ($r > 0$) de E telle que C soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$. On supposera toujours les c_i non nuls, et on dira qu'ils *engendrent* C . Enfin on appelle *face* de C toute partie de C de la forme $C \cap \{w\}^\perp$ avec $w \in C^+$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

1. Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de E est un cône à faces.
2. Supposant $n = r = 2$, décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C , C^+ et donner sous chaque figure la liste des faces de C suivant les diverses positions relatives de c_1 et c_2 .
3. Supposant que $n = r = 3$ et que (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale de E , décrire sans démonstration C , C^+ et les faces de C .

Deuxième partie

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans E .

a) Soit K une partie compacte de E ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme λx , où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E .

b) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose K seulement fermé, ou si K , compact, contient 0 ?

5. On considère maintenant un cône à faces C engendré par des éléments c_1, \dots, c_r .

a) Montrer que C est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble K des éléments $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}_+$ et $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.]

b) Soit V un sous-espace vectoriel de E (éventuellement réduit à 0) contenu dans C et distinct de C . On note P le projecteur orthogonal de E sur V^\perp . Vérifier que $P(C)$ est un cône à faces contenu dans C .

c) Supposant que $P(C)$ contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de E contenu dans C et contenant strictement V .

d) Montrer que C est fermé dans E .

Troisième partie

6. On se propose ici de démontrer que tout cône à faces C vérifie $(C^+)^+ = C$.

a) Soit a un élément de E . Montrer que la fonction réelle définie sur C par $c \mapsto \|c - a\|$ atteint sa borne inférieure en un point unique de C . On le notera $p(a)$.

b) Déterminer le signe de $(p(a) - a|c)$ lorsque $c \in C$, ainsi que la valeur de $(p(a) - a|p(a))$.

c) Conclure.

Quatrième partie

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de E de la forme $\{a\}^+$ avec $a \in E$, $a \neq 0$).

7. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces C :

- (α) le sous-espace vectoriel de E engendré par C est égal à E ;
- (β) l'intérieur de C est non vide.

8. On suppose dans cette question les conditions de la question 7. satisfaites pour un cône à faces C .

a) Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément x de C :

- (α') x est un point frontière de C ;
- (β') x appartient à une face de C distincte de C .

b) Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question 7. ?

c) Soit x un point de E n'appartenant pas à C . Construire une face F de C , distincte de C et ayant la propriété suivante : pour tout $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $(x|w) < 0$.

[On pourra considérer le segment de droite joignant x à un point x_0 de l'intérieur de C].

9.a) Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.

b) Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

10. Déduire de ce qui précède que, si C est un cône à faces, il en est de même de C^+ .

* *
*

||

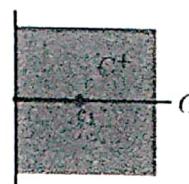
Ecole Polytechnique 2000 MP 2^{ème} épreuve

Partie I

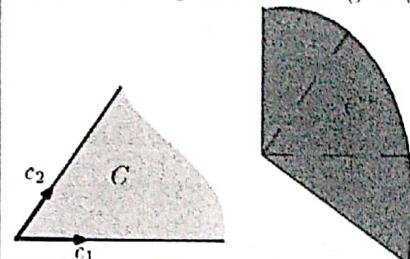
- Soit F un sous espace vectoriel non nul de E , et (u_1, \dots, u_p) une base de F . F est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls des vecteurs $(u_1, \dots, u_p - u_1, \dots, -u_p)$, donc F est un cône à faces.
- Distinguons quatre cas, selon la position respective de c_1 et c_2 :

Cas 1 : $c_2 = \alpha c_1$, $\alpha > 0$.

C est la demi-droite $\mathbb{R}^+ c_1$.
 C^+ est un demi-plan.

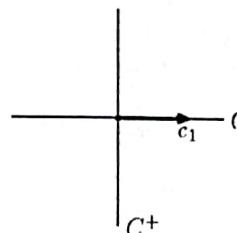


Cas 2 : c_1 et c_2 forment un angle aigu.

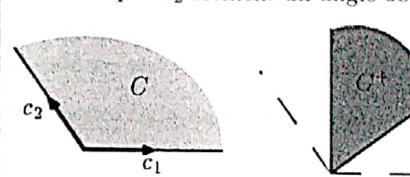


Cas 3 : $c_2 = \alpha c_1$, $\alpha < 0$.

C est la droite $\mathbb{R} c_1$.
 C^+ est la droite orthogonale à C passant par O .



Cas 4 : c_1 et c_2 forment un angle obtus.



Dans les cas 2 et 4, les faces de C sont le vecteur nul et les deux demi-droites $\mathbb{R}^+ c_1$ et $\mathbb{R}^+ c_2$.

Dans les cas 1 et 3, les seules faces de C sont C lui-même, et bien sûr le vecteur nul.

- $\left(\frac{c_1}{\|c_1\|}, \frac{c_2}{\|c_2\|}, \frac{c_3}{\|c_3\|} \right)$ est une base orthonormée de E .

C est alors le quadrant formé des vecteurs $xc_1 + yc_2 + zc_3$ avec $x \geq 0, y \geq 0$ et $z \geq 0$.
 $C^+ = C$.

Les faces de C sont les quarts de plan ($x \geq 0, y \geq 0, z = 0$), ($x \geq 0, y = 0, z \geq 0$), ($x = 0, y \geq 0, z \geq 0$), ainsi que les demi-droites $\mathbb{R}^+ c_1, \mathbb{R}^+ c_2, \mathbb{R}^+ c_3$ et le vecteur nul.

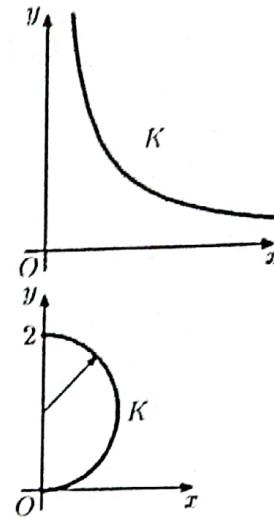
Partie II

- (a) Soit $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers y , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite dans K et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}^+ . On veut montrer que y appartient à $L = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in K\}$.
 Par compacité de K , on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$. 0 n'appartenant pas à K , $x \neq 0$, donc il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1$, $\|x_{\phi(n)}\| \geq \frac{\|x\|}{2}$.
 $(\lambda_{\phi(n)} x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y , donc il existe n_2 tel que $\forall n \geq n_2$, $\|\lambda_{\phi(n)} x_{\phi(n)}\| \leq 1 + \|y\|$.
 Ainsi, $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$, $|\lambda_{\phi(n)}| \leq 2 \frac{1 + \|y\|}{\|x\|}$. $(\lambda_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(\lambda_{(\phi \circ \psi)(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de limite λ .
 Dès lors, $(x_{(\phi \circ \psi)(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x par extraction, et $(\lambda_{(\phi \circ \psi)(n)} x_{(\phi \circ \psi)(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λx . Par unicité de limite, il en résulte que $y = \lambda x$.

Toute suite convergente d'éléments de L a sa limite dans L , donc L est fermé.

(b) Deux contre-exemples :

- Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } xy = 1\}$. K est fermé (comme graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^{++}) non borné. On vérifie aisément que $L = \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$. Donc $\bar{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ est distinct de L , donc L n'est pas fermé.



- Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ le demi-cercle de centre $(0, 1)$ de rayon 1 du demi-plan $x \geq 0$. K est compact (intersection d'un cercle, compact, et d'un demi-plan fermé). On vérifie de même aisément que $L = \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$. Donc $\bar{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ est distinct de L , donc L n'est pas fermé.

5. (a) - Soit donc $K = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i / \forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$.

Soit aussi $T = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r / \forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$. T est fermé borné dans \mathbb{R}^r , donc est compact.

Soit encore $\phi : T \rightarrow E_r$. ϕ est continue comme restriction à T d'une application linéaire. Ainsi $K = \phi(T)$ est compact dans E .

On suppose que C ne contient aucune droite vectorielle.

Si 0 appartenait à K , on pourrait écrire $0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$, avec les $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors par exemple

λ_1 serait non nul, ce qui permettrait d'écrire $-c_1 = \frac{\sum_{i=2}^r \lambda_i c_i}{\lambda_1}$, et C contiendrait la droite vectorielle $\mathbb{R}c_1$, ce qui est impossible.

Finalement, K est un compact ne contenant pas 0, donc $\{\lambda x / \lambda \geq 0 \text{ et } x \in K\}$ est fermé d'après ??.

Or tout élément de C s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$, soit λx , avec $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ et $x = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda} c_i$ (lorsque

les λ_i sont non tous nuls, sinon on prend x quelconque dans C), de sorte que $\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, et donc $x \in K$.

Ainsi $C = \{\lambda x / \lambda \geq 0 \text{ et } x \in K\}$, et C est donc fermé.

(b) On remarque qu'un cône à faces C vérifie clairement les deux propriétés suivantes : $C + C \subset C$, et $\forall \lambda \geq 0, \lambda C \subset C$.

On pose $c'_i = P(c_i)$ pour $1 \leq i \leq r$. On enlève les éléments c'_i qui sont nuls, et quitte à renommer, on peut supposer que $c'_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq q$, et $c'_i = 0$ pour $q+1 \leq i \leq r$.

On constate alors que $P(C) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i c'_i / \forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$ par double inclusion immédiate, ce qui prouve que $P(C)$ est le cône à faces engendré par (c'_1, \dots, c'_q) .

Soit $x \in C$. On peut écrire $x = P(x) + y$ avec $y \in V$ (décomposition dans $V^\perp \oplus V$), d'où $P(x) = x + (-y)$.

Or $-y \in V$ donc $-y \in C$, d'où $P(x) \in C + C$ d'où $P(x) \in C$. Ainsi $P(C) \subset C$.

(c) Soit $\mathbb{R}x$ une droite incluse dans $P(C)$. x est un vecteur non nul de $P(C)$, donc il existe $y \in C$ tel que $P(y) = x$. $y \notin V$ car $x \neq 0$. Posons alors $W = V + \mathbb{R}y$, W est un sous-espace vectoriel de E contenant strictement V (car $y \notin V$)

$y \in C$ donc $\{\lambda y / \lambda \geq 0\} \subset C$. $-x \in P(C)$, donc il existe $y' \in C$ tel que $P(y') = -x$.

On écrit $y = x + z$, $y' = -x + z'$ avec z et z' éléments de V .

On en déduit $-y = y' - z' - z$. or $-z' - z \in V \subset C$, et $y' \in C$ donc $-y \in C$, d'où $\{\lambda y / \lambda \leq 0\} \subset C$.

Finalement $\mathbb{R}y \subset C$ et $W \subset C$.

- (d) Si C ne contient aucune droite vectorielle, C est fermé d'après ??.
- Dans le cas contraire, soit V un sous-espace vectoriel de E (non réduit à $\{0\}$), de dimension maximale parmi les sous-espaces inclus dans C . Soit p le projecteur orthogonal sur V^\perp . D'après ?? et la maximalité de V , $P(C)$ ne contient aucune droite vectorielle et, d'après ??, est un cône à faces ; en appliquant ??, on en déduit que $P(C)$ est fermé dans E .
 - On montre à présent que $C = P^{-1}(P(C))$.
 - l'inclusion $C \subset P^{-1}(P(C))$ est évidente (elle est vraie pour tout ensemble et toute application) ; soit $x \in P^{-1}(P(C))$: il existe $y \in C$ tel que $P(x) = P(y)$, donc $\exists y \in C, \exists z \in V, x = y + z$; or $V \subset C$, donc $z \in C$, d'où $x \in C$.
 - Finalement, p est linéaire, donc continue, et $P(C)$ est fermé, donc $P^{-1}(P(C))$ est fermé, donc C est fermé dans E .

Partie III

6. (a) Soit $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$; ϕ est continue (car 1-lipschitzienne), et à valeurs positives, donc elle admet une borne inférieure.
- existence du minimum*
- Choisissons $b \in C$. Si $b \notin B'(a, \|b - a\|)$, alors $\phi(b) = \|b - a\| > \phi(a)$.
 Ainsi, $\inf_C \phi = \inf_{C \cap B'(a, \|b - a\|)} \phi$. Or $C \cap B'(a, \|b - a\|)$ est fermé borné donc compact, et ϕ est continue, sa borne inférieure sur cet ensemble est donc atteinte. Il existe finalement $x \in C$ tel que $\phi(x) = \inf_C \phi$.
- *unicité du minimum*
- Supposons que $\inf_C \phi = \phi(c_1) = \phi(c_2)$.
- C étant convexe (c'est l'enveloppe convexe des demi-droites $\mathbb{R}^+ c_i$), $\frac{c_1 + c_2}{2} \in C$.
- $$2\|c_1 - a\|^2 + 2\|c_2 - a\|^2 = \|c_2 - c_1\|^2 + 4\left\|\frac{c_1 + c_2}{2} - a\right\|^2.$$
- L'inégalité $\phi\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) \geq \phi(c_1)$ se traduit alors par $4\phi(c_1)^2 \geq \|c_2 - c_1\|^2 + 4\phi(c_1)^2$, soit $\|c_2 - c_1\|^2 \leq 0$, et finalement $c_1 = c_2$.
- (b) Démontrons d'abord le résultat suivant : $\forall x \in C, (P(a) - a|x - P(a)|) \geq 0 \quad (E)$.
 Soit $\lambda \in]0, 1]$; $\lambda x + (1 - \lambda)P(a) \in C$, donc $\|\lambda x + (1 - \lambda)P(a) - a\| \geq \|P(a) - a\|$, d'où $\|\lambda(x - P(a)) + P(a) - a\|^2 \geq \|P(a) - a\|^2$.
 Développons : $\lambda^2\|x - P(a)\|^2 + 2\lambda(x - P(a)|P(a) - a|) \geq 0$. Simplifiant alors par λ , et faisant tendre λ vers 0^+ , on obtient le résultat annoncé.
- Soit $c \in C$, alors $c + P(a) \in C$, donc en reportant dans (E) : $(P(a) - a|c|) \geq 0$; en particulier pour $c = P(a)$: $(P(a) - a|P(a)|) \geq 0$.
 De même, $0 \in C$, donc en reportant dans (E) : $(P(a) - a|0 - P(a)|) \geq 0$.
 Finalement, $(P(a) - a|P(a)|) = 0$.
- (c) - Soit $x \in C$. Par définition de C^+ , pour tout $y \in C^+$, $(x|y) \geq 0$, ce qui — par définition de $(C^+)^+$ — signifie précisément que $x \in (C^+)^+$. Ainsi $C \subset (C^+)^+$.
- Soit $a \in (C^+)^+$: alors $\forall y \in C^+$, $(a|y) \geq 0$, or $P(a) \in C$, donc $\forall y \in C^+$, $(P(a)|y) \geq 0$.
 D'après ??, $\forall c \in C$, $(P(a) - a|c) \geq 0$, donc $P(a) - a \in C^+$, d'où $(P(a) - a|a) \geq 0$.
 Or $\|P(a) - a\|^2 = \underbrace{(P(a) - a|P(a))}_{=0} - (P(a) - a|a) = -(P(a) - a|a)$, d'où $(P(a) - a|a) \leq 0$.
 Finalement $(P(a) - a|a) = 0$, soit $\|P(a) - a\|^2 = 0$, i.e. $P(a) = a$, ce qui signifie que $a \in C$.
 Donc $(C^+)^+ \subset C$.

Partie IV

7. $\alpha \Rightarrow \beta$

On suppose $\text{Vect}C = E$. Il existe une base (v_1, \dots, v_n) de E constituée d'éléments de C . Soit N la «norme sup» associée à cette base.

$$v_1, \dots, v_n \text{ appartenant à } C, \left\{ \sum_i \lambda_i v_i / \forall i, \lambda_i \geq 0 \right\} \subset C.$$

Soit $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k \in E$ tel que $N \left(v - \sum_i v_i \right) < 1$; alors $\forall k, |x_k - 1| < 1$, donc $\forall k, x_k \geq 0$, donc $v \in C$.

Finalement C contient la boule de centre $\sum_{i=1}^n v_i$ de rayon 1 pour la norme N . Les normes étant équivalentes dans \mathbb{R}^n , le vecteur $\sum_{i=1}^n v_i$ est intérieur à C .

- $\beta \Rightarrow \alpha$

Soit x intérieur à C . $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset C$. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E .

$P(t) = \det(x + te_1, x + te_2, \dots, x + te_n)$ est un polynôme en t , de terme de plus haut degré t^n . Il possède donc un nombre fini de racines, d'où l'existence de $t_0 \in]0, r[$ tel que $P(t_0) \neq 0$.
 $(x + t_0 e_1, x + t_0 e_2, \dots, x + t_0 e_n)$ est donc une base de E constituée d'éléments de C .

8. (a) $\neg \beta' \Rightarrow \alpha'$

x appartient à la face $C \cap \{w\}^\perp$, où $w \in C^+$. $w \neq 0$ car cette face est distincte de C .

$(x|w) = 0$, donc $\forall \lambda < 0$, $(x + \lambda w|w) = \lambda \|w\|^2 < 0$. Par conséquent, $x + \lambda w \notin C$ pour tout $\lambda < 0$, donc x n'appartient pas à l'intérieur de C .

x est donc un point frontière de C .

$\alpha' \Rightarrow \beta'$

Soit $x \in \text{Fr}C$. Soit S la sphère unité de E . $S \cap C^+$ est fermé borné donc compact (en effet, $C^+ = \bigcap_{y \in C} \{x \in E / (x|y) \geq 0\}$ est une intersection de fermés, donc est fermé).

L'application continue $w \mapsto (x|w)$ atteint donc sa borne inférieure sur $S \cap C^+$ en un point w_0 .

Soit $\alpha = (x|w_0)$. $\alpha \geq 0$ car $w_0 \in C^+$. Supposons $\alpha > 0$.

Soit y un élément quelconque de E tel que $\|y - x\| \leq \frac{\alpha}{2}$.

Alors $(x|w) - (y|w) \leq |(x - y|w)| \stackrel{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \|x - y\| \cdot \|w\| \leq \frac{\alpha}{2} \|w\|$.

Donc $\forall w \in C^+ \cap S$, $(y|w) \geq (x|w) - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$. Par homogénéité, $\forall w \in C^+$, $(y|w) \geq \frac{\alpha}{2} \|w\| \geq 0$, ce qui prouve que $y \in (C^+)^+$.

D'après la ??, $y \in C$ donc C contient la boule de centre x de rayon $\frac{\alpha}{2}$, ce qui est absurde puisque x est un point frontière de C .

Finalement, $\alpha = 0$ d'où l'existence de $w_0 \in C$ non nul tel que $(x|w_0) = 0$. x appartient donc à la face $C \cap \{w_0\}^\perp$, qui est distincte de C car d'après les conditions de la question ??, C n'est pas inclus dans le sous-espace strict $\{w_0\}^\perp$.

(b) On suppose maintenant que $F = \text{Vect}C$ est un sous-espace vectoriel strict de E . On note C_F le cône à faces C considéré comme une partie de F , de sorte que $C_F^+ = \{x \in F / \forall y \in C, (x|y) \geq 0\}$.

Si $w \in C^+$, on l'écrit $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in F$ et $w_2 \in F^\perp$. $\forall x \in C$, $(x|w) = (x|w_1)$ d'où $w_1 \in C_F^+$, d'où $C^+ \subset C_F^+ + F^\perp$, et réciproquement, d'où $C^+ = C_F^+ + F^\perp$.

Une face de C s'écrit $C \cap \{w\}^\perp = C \cap (F \cap \{w\}^\perp) = C \cap \{w_1\}^\perp$. Par conséquent, les faces de C et de C_F sont les mêmes.

x est un point frontière de C_F si et seulement si x appartient à une face de C_F distincte de C_F^+ , donc à une face de C distincte de C .

(c) Supposons C d'intérieur non vide, soit x_0 un point intérieur à C .

Soit $A = \{\lambda \in [0, 1] / \lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in C\}$. x_0 est intérieur à C , donc A contient un intervalle $[0, \lambda]$ avec $\lambda > 0$. $x \notin C$ donc $1 \notin A$. Enfin C est fermé convexe, donc A est un segment de la forme $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.

Posons alors $x_1 = \alpha x + (1 - \alpha)x_0$. $x_1 \in C$, mais $x_1 \notin C$ par définition de la borne supérieure, donc $x_1 \in \text{Fr}C$.

D'après ??, x_1 appartient à une face F stricte de C donc il existe $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$.

$(x_1|w) = 0$ et $(x_0|w) > 0$ car $x_0 \in \overset{\circ}{C}$, donc $0 = (w|x_1) = \alpha(w|x) + (1 - \alpha)(w|x_0)$. Ainsi $(w|x) < 0$. Si C est d'intérieur vide, on se ramène au cas précédent grâce à la question ??.

9. (a) Soit C le cône à faces engendré par c_1, \dots, c_r .

Soit F une face de C . $\exists w \in C^+$, $F = C \cap \{w\}^\perp$. On pose $J = \{i \in [1, r] / (w|c_i) = 0\}$ et $C_J = \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i c_i / \forall i \in J, \lambda_i \geq 0 \right\}$. On constate que $C_J \subset F$.

Inversement, soit $x \in F : x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ avec les $\lambda_i \geq 0$, d'où $0 = (w|x) = \sum_{i=1}^r \underbrace{\lambda_i (w|c_i)}_{\geq 0}$, donc $\forall i \in [1, r], \lambda_i (w|c_i) = 0$.

En particulier, $\forall i \notin J, \lambda_i = 0$, d'où $x \in C_J$.

Finalement, $F = C_J$.

J étant une partie de l'ensemble fini $[1, r]$, le nombre de faces de C est au plus égal au nombre de parties J de $[1, r]$, soit 2^r .

C possède donc un nombre fini de faces.

- (b) Soient F_1, \dots, F_q les faces de C distinctes de C . On écrit $F_i = C \cap \{w_i\}^\perp$, avec w_i élément non nul de C^+ . On pose alors $C' = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+$.

Soit $x \notin C$, alors d'après ??, il existe une face $F_i = C \cap \{w_i\}^\perp$ pour laquelle $(x|w_i) < 0$, donc $x \notin C'$.

Soit $x \in C$; puisque $w_i \in C^+$, $(x|w_i) \geq 0$, et ceci étant vrai pour tout i , $x \in C'$.

Finalement, $C = C'$.

10. C étant un cône à faces, il s'écrit sous la forme précédente : $C = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+$, les w_i étant des vecteurs non nuls.

Démontrons le lemme suivant : A_1, \dots, A_k étant des parties de E , $A_1 + \dots + A_k$ étant l'ensemble $\{x_1 + \dots + x_k / x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}$

$$\text{alors } \left(\sum_{1 \leq i \leq k} A_i \right)^+ = \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i^+.$$

En effet :

si $A \subset B$, on a clairement $B^+ \subset A^+$, d'où $\left(\sum A_i \right)^+ \subset A_j^+$ pour tout j , donc $\left(\sum A_i \right)^+ \subset \bigcap A_j^+$;

si $x \in \bigcap A_j^+$, soit $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \dots \times A_k$, alors $\left(x | \sum_{i=1}^k x_i \right) = \sum_{i=1}^k \underbrace{(x|x_i)}_{\geq 0} \geq 0$, donc $x \in \left(\sum A_i \right)^+$.

– Appliquons alors le lemme à $A_i = \mathbb{R}^+ w_i$, la demi-droite dirigée par w_i .

$$C = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+ = \bigcap_{1 \leq i \leq q} A_i^+ = \left(\sum_{1 \leq i \leq q} A_i \right)^+.$$

$\sum_{1 \leq i \leq q} A_i$ est par définition un cône à faces.

Par conséquent, d'après la troisième partie, $C^+ = \left(\sum_{1 \leq i \leq q} A_i \right)^{++} = \sum_{1 \leq i \leq q} A_i$, donc C^+ est effectivement un cône à faces.