

FEUILLE D'EXERCICES N° 2

TECHNIQUES EN ALGÈBRE

RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE

Exercice 1

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour tous entiers naturels $p < q$, alors $F_q = 2[F_p]$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_n - 2u_{n+1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + 2 \cdot (-3)^n$.

Exercice 4

Montrer que pour tous réels x_1, \dots, x_n dans $]0, +\infty[$, $(x_1 + \dots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

1. On suppose f injective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$, alors $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose f surjective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$, alors $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis z_1, \dots, z_n des nombres complexes et p

un entier naturel. Montrer la formule multinomiale :

$$(z_1 + \dots + z_n)^p = p! \times \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n = 0 \\ k_1 + \dots + k_n = p}}^p \frac{z_1^{k_1} \times \dots \times z_n^{k_n}}{k_1! \times \dots \times k_n!}.$$

CALCULS DE SOMMES

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\sum_{p,q=1}^n \min\{p, q\}$ et $\sum_{p,q=1}^n \max\{p, q\}$.

Exercice 9

Calculer les sommes suivantes :

- $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
- $T_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, en posant $j = n - k$.

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$ et

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.$$

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $\sum_{k=0}^n k \cos(k\theta)$.

(b) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

(c) Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$.

Exercice 11

Soient n, p et q trois éléments dans \mathbb{N} . Simplifier la formule :

$$\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n}{k} \times \binom{p}{q-k}.$$

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 13

Calculer $A = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $B = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 14

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y = 3 \\ -z + y = 1 \end{cases} ; \bullet \begin{cases} x + t = 1 \\ y + x = 0 \\ z + y = 1 \\ t + z = -1 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} mx + y - z = 0 \\ y + 3z = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}, [m \in \mathbb{C}] ; \bullet \begin{cases} y + 3z + t = 3 \\ x + 3z - t = 2 \end{cases} ; \\ & \bullet \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 15

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x + my + m^2z + m^3t = 1 \\ mx + m^2y + m^3z + t = 1 \\ m^2x + m^3y + z + mt = 1 \\ m^3x + y + mz + m^2t = 1 \end{cases}, \text{ où } m \in \mathbb{C} \\ & \bullet \begin{cases} ax_1 + b = x_2 \\ ax_2 + b = x_3 \\ \vdots \\ ax_{n-1} + b = x_n \\ ax_n + b = x_1 \end{cases}, \text{ avec } n \geq 2, \text{ et } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis α et β dans \mathbb{R} . Déterminer tous les réels x_0, \dots, x_{n+1} tels que :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = \beta \\ \text{pour tout } k \in [1, n], x_k \text{ est la moyenne des nombres } x_j, \text{ pour } j = k-1, k, k+1 \end{cases}$$

THÈMES VARIÉS

Exercice 17

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\bullet |x+1| = 2 - |6-x|$$

$$\bullet \sqrt{1+x^2} = 2+x$$

Exercice 18

1. Déterminer trois nombres a, b et c tels que :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 19

Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq 2n$.

- Dans le polynôme $(1+X)^{2n}$, quel est le coefficient devant le terme en X^k .
- Dans le polynôme $(1+X)^n \times (1+X)^n$, comment peut-on calculer ce même coefficient ?
- En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2$.
- Généraliser pour en déduire la formule de Van der Monde :

$$\forall (a, b, q) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{q-k} = \binom{a+b}{q}.$$

Exercice 20

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{N}^p à l'équation :

$$\sum_{k=1}^p x_k = n.$$

2. Déterminer le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^p$ à l'équation :

$$\sum_{k=1}^p x_k = n.$$

Exercice 21

Soient n_1, \dots, n_9 des entiers naturels de somme égale à 90. Montrer que la somme de trois de ces entiers est supérieure ou égale à 30.

Exercice 22

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 23

Soit $m \in \mathbb{R}$.

- Donner les caractéristiques de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\begin{cases} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases}$.
- Donner les caractéristiques de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $(m+1)x + my + (m-1)z = m-1$.
- Étudier l'intersection des deux ensembles précédents.

Exercice 24

Soit un échiquier de taille $n \times n$.

1. Combien au maximum peut-on placer de tours sur cet échiquier de façon à ce qu'aucune tour ne soit en prise ?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De combien de manières peut-on placer ces p tours pour qu'aucune ne soit en prise ?

Exercice 25

Soient a un entier naturel impair et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) = \begin{cases} \frac{f(n)}{2}, & \text{si } f(n) \text{ pair} \\ f(n) + a, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) > a \implies \exists n' > n, f(n') < f(n)$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n' > n, f(n') \leq a$.
3. Montrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 26

Soit E un ensemble non vide. Montrer que E est infini si et seulement si pour tout $f : E \rightarrow E$, il existe une partie A non vide et différente de E telle que $f(A) \subset A$.

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 27

Soient n droites en position générale dans le plan.

1. Combien de régions du plan délimitent-elles ?
2. Parmi ces régions, combien sont-elles bornées dans le plan ?

Exercice 28

Soient n droites du plan. Montrer que l'on peut colorier les régions qu'elles délimitent en noir et blanc de sorte que deux régions adjacentes aient toujours des couleurs différentes.

Exercice 29

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P(X)$ à coefficients valant 0 ou 1 et tel que $P(-2) = p$.

Exercice 30

Soient x_1, \dots, x_{13} treize réels. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que : $0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i \cdot x_j} \leq 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 31

1. Soit x un nombre réel. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n sa $n^{\text{ème}}$ décimale dans un développement décimal du réel x selon :

$$x = [x] + 0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Montrer que le nombre x est rationnel si et seulement si la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. Donner l'exemple d'une suite de décimales $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ correspondant aux décimales d'un nombre irrationnel.

Exercice 32

Soit φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. On note \mathcal{A} l'ensemble des nombres réels de la forme :

$$x = \sum_{k \in A} \varphi^k,$$

lorsque A décrit toutes les parties finies de \mathbb{Z} .

Les éléments de \mathcal{A} sont donc exactement les éléments de la forme :

$$x = \sum_{k=-p}^q \varepsilon_k \varphi^k,$$

où p et q sont deux entiers naturels et chaque ε_k vaut 0 ou 1. Dans ce cas, on écrira : $x = \varepsilon_q \varepsilon_{q-1} \dots \varepsilon_0, \varepsilon_{-1} \dots \varepsilon_{-p}$. Le fait de rajouter des « 0 » à gauche ou à droite ne modifie pas la décomposition.

1. Soit $x \in \mathcal{A}$ associé à une séquence $\varepsilon_q \dots \varepsilon_0, \varepsilon_{-1} \dots \varepsilon_{-p}$. Montrer qu'en modifiant dans cette séquence chaque groupe « 011 », par « 100 », on obtient une nouvelle séquence associée à x .
2. En déduire que si $x \in \mathcal{A}$, le réel x est associé à une séquence sans deux chiffres « 1 » côte à côte.
3. Montrer l'inclusion : $\mathbb{N}^* \subset \mathcal{A}$.
4. Dans la suite, si $x \in \mathcal{A}$, on appelle une décomposition en or pur de x , une séquence du type $\varepsilon_q \dots \varepsilon_0, \varepsilon_{-1} \dots \varepsilon_{-p}$, sans deux chiffres « 1 » consécutifs. Montrer que tout élément de \mathcal{A} admet une seule décomposition en or pur.
5. Tous les nombres réels strictement positifs sont-ils dans \mathcal{A} ?