Problème n° 19 : Algèbre linéaire matricielle

Problème 1 – (Trigonalisation des algèbres nipotentes, d'après X 1996)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on notera plus simplement $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes sur E. Pour tout élément u de $\mathcal{L}(E,F)$, on note $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ respectivement le noyau de u dans E, et son sous-espace image dans F. Un élément t de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier positif r tel que $t^r = 0$. La valeur minimale de r est appelée indice de nilpotence de t.

On appelle sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ tout sous-espace vectoriel stable par multiplication (i.e. par composition). Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ est dite commutative si l'on a $st = ts$ pour tous s et t dans $\mathcal{A}$. Enfin, $\mathcal{A}$ est dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif r tel que le produit de r éléments quelconques de $\mathcal{A}$ soit nul. On appelle ordre de nilpotence de $\mathcal{A}$ la valeur minimale de r vérifiant cela.

Le but de ce problème est de montrer que toute sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$ est simultanément s"trictement trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ (commune à tous les éléments t de $\mathcal{A}$) telle que pour tout $t \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t)$ soit strictement triangulaire supérieure.

On note $\mathcal{T}_n^+$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures, et $\mathcal{T}_n^{++}$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices strictement triangulaires supérieures.

Étant donnée une décomposition $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ d'un espace E, on dira que $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition si $\mathcal{B}$ est obtenue par juxtaposition de bases de E_1, E_2, ..., E_k, dans cet ordre.

Toute utilisation de théorème de réduction de Jordan est illicite, ce résultat n'étant pas au programme.

Partie I – Questions préliminaires

1. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que tout élément t de $\mathcal{A}$ est un endomorphisme nilpotent. Comparer l'indice de nilpotence de t et l'ordre de nilpotence de $\mathcal{A}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que $\mathcal{T} = \{t \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) \in \mathcal{T}^{++}(E)\}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$, et déterminer son ordre de nilpotence.
3. En trouver une autre $\mathcal{S}$, vérifiant $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{0\}$
4. Trouver, si $n \geqslant 3$, une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$ non nulle et strictement incluse dans $\mathcal{T}$.

Partie II – Le cas de la dimension 2

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2.

1. Soit t un endomorphisme nilpotent non nul de E, et r son indice de nilpotence.
   (a) t est-elle injective ? surjective ?
   (b) Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(t)$ et $\mathrm{Im}(t)$.
   (c) Construire une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle t est représentée par la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et préciser la valeur de r.

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle de $\mathcal{L}(E)$. Soit t_0 un élément non nul de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathcal{A}$, $t(b_1)$ et b_1 sont colinéaires, puis que $t(b_1) = 0$
   (b) En déduire que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(t_0)$.
3. Justifier que le résultat reste vrai si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre nilpotente non nulle de $\mathcal{L}(E)$, non nécessairement commutative.

Partie III – Trigonalisation des endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, E est de dimension $n > 0$. On considère un endomorphisme t nilpotent non nul de E, et on note r son indice de nilpotence. On pose $E_1 = \mathrm{Im}(t) \cap \mathrm{Ker}(t)$.

1. Vérifier que E_1 est distinct de $\{0\}$ et E.
2. Pour quelles valeurs de r a-t-on $E_1 = \mathrm{Im}(t)$?
3. Dans cette question, on suppose $r \geqslant 3$, et on note E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathrm{Im}(t)$ et E_3 un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Im}(t)$ dans E.
   (a) Justifier que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.
   (b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Montrer que la matrice de t relativement à la base $\mathcal{B}$ admet une représentation par blocs de la forme suivante :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2} & T_{1,3} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On précisera la taille des blocs en fonction des dimensions de E_1, E_2 et E_3.
   (c) Montrer que $T_{2,2}$ est nilpotente, et comparer son indice de nilpotence à r.
4. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) \in \mathcal{T}_n^{++}$ (i.e. soit strictement triangulaire supérieure).
5. Comparer r et n.
6. Appliquer la méthode précédente pour trouver une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \in \mathcal{T}_n^{++}$, lorsque t est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie IV – Trigonalisation d'une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$

Dans cette dernière partie, E désigne toujours un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
Nous utiliserons les notations suivantes : Si X et Y sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et si $\mathcal{Z}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}(X, Y)$, nous désignerons par $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ l'intersection des noyaux des éléments de $\mathcal{Z}$, et par $\mathcal{I}(\mathcal{Z})$ la somme des sous-espaces vectoriels images des éléments de $\mathcal{Z}$.
On considère une sous-algèbre nilpotente non nulle $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E, E)$, où $E = K^n$; on note r son ordre de nilpotence et on pose $E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

1. (a) Justifier que si $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = E$, et si F est un sous-espace vectoriel strict de E, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Im}(u) \not\subset F$
   (b) En déduire que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ est distinct de E
2. Vérifier que E_1 est distinct de $\{0\}$ et de E.
3. Pour quelles valeurs de r a-t-on $E_1 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$?

Dans la suite du problème, on suppose $r \geqslant 3$; on note E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ et E_3 un supplémentaire de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ dans E. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases associées de E_1, E_2 et E_3 respectivement.

4. Justifier que pour tout $t \in \mathcal{A}$, la matrice de t dans la base $\mathcal{B}$ admet une représentation par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & T_{1,2} & T_{1,3} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $T_{2,2}$ est une matrice nilpotente.

On note $\mathcal{A}_{i,j}$ l'espace vectoriel des endomorphismes u de $\mathcal{L}(E_j, E_i)$ tels qu'il existe $t \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_i}(u) = T_{i,j}$, les $T_{i,j}$ étant définis à partir de t par la représentation ci-dessus.

5. (a) Vérifier que $\mathcal{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E_2)$.
   (b) Montrer que si $\mathcal{A}_{2,2}$ est nulle, alors $r = 3$.
   (c) Réciproquement, montrer que si $\mathcal{A}_{2,2} \neq \{0\}$, alors $r > 3$.
   (d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que tout élément t de $\mathcal{A}$ vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(t) \in \mathcal{T}_n^{++}$.
   (e) Comparer r et n.

À partir de maintenant, on suppose que $r \geqslant 4$.

6. Montrer que l'ordre de nilpotence r' de $\mathcal{A}_{2,2}$ est égal à $r - 2$.

   Indication : On pourra procéder par double-inégalité, en explicitant le produit de n matrices du même type que dans la question 4.

7. (a) Soit $t \in \mathcal{A}$. Soit s l'endomorphisme de E_2 défini par le bloc $T_{2,2}$ de la matrice T de t. Démontrer que l'on a $s(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$.
   (b) Démontrer que l'on a $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3}) = E_2$.

   Indication : On pourra montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $E_2 \subset \mathcal{I}^k(\mathcal{A}_{2,2}) + \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,3})$, où $\mathcal{I}^k(\mathcal{Z})$ est la somme des images des composées à k termes d'éléments de $\mathcal{Z}$.

8. On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est nilpotente. Soit t un élément de $\mathcal{A}$ tel que $T_{2,3} = 0$.
   (a) Démontrer que $T_{2,2}$ et $T_{1,2}$ sont nuls.
   (b) $T_{1,3}$ est-il nul aussi ?