Exercices de mathématiques

MPSI 4

Alain TROESCH

Version du:

3 septembre 2020

Table des matières

1 Logique et raisonnements **3**

2 Ensembles **8**

3 Applications **11**

4 Sommes, binôme **15**

5 Relations **19**

6 Nombres réels **24**

7 Nombres complexes **29**

8 Limites, dérivation **36**

9 Fonctions usuelles **41**

10 Calcul intégral **44**

11 Équations différentielles linéaires **48**

12 Suites **50**

13 Calcul asymptotique **58**

14 Approximations polynomiales **63**

15 Séries numériques **68**

16 Continuité et dérivabilité sur un intervalle **73**

17 Intégration **78**

18 Pivot de Gauss **82**

19 Structures algébriques **84**

20 Groupes symétriques **91**

21 Arithmétique **93**

22 Polynômes et fractions rationnelles **99**

23 Espaces vectoriels **104**

24 Applications linéaires **108**

25 Matrices **114**

26 Déterminants **123**

27 Algèbre bilinéaire **127**

28 Combinatoire **134**

29 Espaces probabilisés, calculs de probabilité **139**

30 Variables aléatoires **144**

1

Logique et raisonnements

Manipulation d'expressions logiques formelles

☆☆☆☆ **Exercice 1.1** – Soit R, S et T des propositions. Montrer à l'aide de tables de vérité, puis par manipulations logiques en utilisant des tautologies connues, et enfin par un raisonnement déductif, que les propositions suivantes sont vraies :

1. $R \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)$.
2. $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T))$.
3. $(R \vee S) \Longleftrightarrow ((R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S)$.
4. $(R \Longrightarrow (S \vee T)) \Longleftrightarrow (S \vee \neg R \vee T)$.
5. $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((R \wedge T) \Longrightarrow (S \wedge T))$.
6. $(R \Longleftrightarrow S) \Longrightarrow ((T \Longrightarrow R) \Longleftrightarrow (T \Longrightarrow S))$.

☆☆☆☆ **Exercice 1.2** –
Nier formellement les propositions suivantes.

1. $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (P(y) \Longrightarrow Q(x,y))$;
2. $\forall x \in A,\ ((\exists y \in B,\ P(y)) \Longrightarrow Q(x,y))$;
3. $(A \Longrightarrow (\forall x,\ B(x))) \Longleftrightarrow (\forall y,\ C(y))$;
4. $A \Longrightarrow ((\forall x,\ B(x)) \Longleftrightarrow (\forall y,\ C(y)))$;
5. $A \Longrightarrow (\forall x,\ (B(x) \Longleftrightarrow (\forall y,\ C(y))))$.

★☆☆☆ **Exercice 1.3** – **Négations logiques**
Nier formellement les propositions suivantes :

1. $((A \vee B) \Longrightarrow C) \Longrightarrow (D \wedge E)$;
2. $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow \neg C)$;
3. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ A(x,y) \vee B(x)$;
4. $(\exists x \in E,\ A(x)) \Longrightarrow (\forall x \in E,\ A(x))$;
5. $\exists x \in E,\ A \Longleftrightarrow (\exists y \in E,\ A(x,y) \wedge B(y))$;
6. $\exists! x,\ A(x)$.

☆☆☆☆ **Exercice 1.4** – Nier les propositions suivantes :

1. $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (x \in C$ et $(x,y) \in D)$ ou $x \notin C$.
2. $\forall x, \exists y, ((x,y) \in A \Longrightarrow x \in B)$.
3. $\forall x, ((\exists y, (x,y) \in A) \Longrightarrow x \in B)$.
4. $(A$ et $(B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow (A \Longleftrightarrow C))$.

Quelle différence de sens faites-vous entre les phrases 2 et 3 ?

☆☆☆☆ **Exercice 1.5** – Donner la contraposée des expressions suivantes :

1. $(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Longrightarrow (B \text{ ou } (A \text{ et } C))$.
2. $(\exists! x, (x \in A \text{ et } x \in B)) \Longrightarrow (\forall y, \exists! x, (x \in A \text{ et } (y - x) \in B))$.

Raisonnements par l'absurde et la contraposée

★★☆☆ **Exercice 1.6** – Soient n un entier strictement positif, et p_n, s'il existe, le n-ième nombre premier.

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (considérer $p_1 p_2 \dots p_n + 1$)
2. Montrer que pour tout entier n strictement positif, $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

★★☆☆ **Exercice 1.7** – Soient a et n deux entiers positifs ou nuls. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer les assertions suivantes.

1. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Si $a^n + 1$ est premier et $a \geqslant 2$, alors n est pair.
3. Si $a^n + 1$ est premier et $a \geqslant 2$, alors a est pair et n est une puissance de 2.

★☆☆☆ **Exercice 1.8** – Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel. Généraliser à $\sqrt{n}$, pour n entier quelconque, lorsque n n'est pas un carré parfait.

★★☆☆ **Exercice 1.9** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des points de l'intervalle $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 1.10** – **(Autour des triplets pythagoriciens)**
Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien, c'est à dire un élément de $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$. On suppose que a, b et c n'ont pas de diviseur commun. Montrer que c est impair.

★★★☆ **Exercice 1.11** – **(Rallye mathématique d'Alsace 2012)**
Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes. Justifier que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Analyse-Synthèse

★★☆☆ **Exercice 1.12** – Deux joueurs s'affrontent de la manière suivante : au début du jeu, ils disposent 100 allumettes sur la table. Ils jouent chacun à leur tour. À chaque étape, le joueur qui joue enlève au choix de 1 à 7 allumettes. Le joueur qui retire la dernière allumette gagne.

1. Montrer que le premier joueur a une stratégie gagnante, et décrire cette stratégie.
2. Généraliser à un nombre n quelconque d'allumettes, les joueurs pouvant enlever de 1 à k allumettes à chaque tour ($(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$).

☆☆☆☆ **Exercice 1.13** –

1. Trouver les solutions de l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. De même avec l'équation $(x^x)^x = x^{x^x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

★☆☆☆ **Exercice 1.14** –

1. Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + c$ où $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Cette décomposition est-elle unique ?

2. Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + h$, où $h : x \mapsto ax + b$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1, et où pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 1, $\int_0^1 P(t)g(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Cette décomposition est-elle unique ? Si oui, exprimer g, a et b en fonction de f.

★☆☆☆ **Exercice 1.15** – Soit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 5\}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-5)}$.
En évaluant $(x+1)f(x)$ en un réel bien choisi, montrer qu'il existe des réels uniques a, b, c et d que l'on déterminera, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 5\}, \quad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-5}.$$

★☆☆☆ **Exercice 1.16** – Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$. et soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$H = \{Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + \cdots + y_n = 0.\}$$

Montrer que tout vecteur Z de $\mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $Z = \lambda X + Y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Y \in H$. Justifier que cette décomposition est unique.

★★★☆ **Exercice 1.17 – (d'après Rallye mathématique d'Alsace 2012)**

1. Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls. Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres (dans un sens ou dans un autre), je retrouve mon code. Quel est mon code ?
2. Oups, je m'étais trompé, il faut encore multiplier le résultat par 7 pour trouver mon code. Quel est mon code ?

Récurrences

★★☆☆ **Exercice 1.18** – Montrer que pour tout entier n positif, $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9.

★★★☆ **Exercice 1.19** – Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.
En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

★★☆☆ **Exercice 1.20 – (Multiplication par la méthode dite « du paysan russe »)**
On propose l'algorithme suivant. Soient m et n deux entiers strictement positifs. Sur une première ligne, on écrit côte à côte m et n. Sur la ligne suivante, on écrit le quotient de la division euclidienne de m par 2 (on oublie donc les décimales) sous la valeur de m, et on écrit $2n$ sous la valeur de n. On continue ainsi : dans la première colonne, on passe d'une ligne à l'autre en divisant par 2, dans la deuxième colonne, on multiplie par 2. On s'arrête lorsqu'on a obtenu 1 dans la première colonne. On barre ensuite toutes les lignes pour lesquelles le nombre situé dans la première colonne est pair. On fait enfin la somme des nombres situés dans la deuxième colonne et non barrés. On note $\varphi(m,n)$ l'entier obtenu. Montrer que $\varphi(m,n) = m \cdot n$.
Un exemple de mise en application de cet algorithme pour calculer $11 \cdot 17$ (les lignes à barrer sont en gris)

11	17
5	34
2	68
1	136
	187

★☆☆☆ **Exercice 1.21 – (Explicitation des suites récurrentes doubles)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée par ses deux termes initiaux u_0 et u_1, et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels fixés.

1. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que pour tous complexes λ et μ, la suite complexe $(\lambda r^n + \mu s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer qu'il existe un et un seul couple (λ, μ) de nombres complexes tels que $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r + \mu s = u_1$. Montrer qu'alors, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$.
   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (d) Même question avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).
   (e) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
2. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet une racine double $r \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe d'uniques réels λ et μ tels que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (c) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

★★★☆ **Exercice 1.22** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un sous ensemble de $[\![1, 2n]\!]$ contenant $n+1$ éléments. Montrer qu'il existe $(p, q) \in A^2$ tels que $p \neq q$ et p divise q.

★★☆☆ **Exercice 1.23 –(Tours de Hanoï)**
Le casse-tête des tours de Hanoï consiste à déplacer une tour constituée d'un emplilement de n disques de plus en plus petits d'un emplacement à un autre, en respectant les règles suivantes :
- On dispose de 3 emplacements ;
- On déplace un et un seul disque à chaque étape, pris au sommet d'une des 3 piles, pour la placer au sommet d'une autre pile
- On ne peut placer un disque que sur un disque plus grand.
- Initialement, tous les disques sont sur l'emplacement 1 (empilés en rayon décroissant), le but étant de les déplacer dans le même ordre sur l'emplacement 2.

En raisonnant par récurrence, montrer que le casse-tête des tours de Hanoï possède une solution. Déterminer le nombre minimal de déplacements à effectuer.

★★☆☆ **Exercice 1.24 – (rallye mathématique d'Alsace)**
Jean attribue à chaque nombre entier strictement positif une couleur, soit bleue, soit rouge. Pour cela, il suit la règle suivante : si trois nombres (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur. On sait que la couleur rouge a été attribuée au nombre 58 et que la couleur bleue a été attribuée de nombreuses fois. Quelle couleur a été attribuée au nombre 40 ? Et au nombre 2013 ?

★★☆☆ **Exercice 1.25 – (Fonction 91 de MacCarthy)** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{si } n \leqslant 100. \end{cases}$$

1. Calculer $f(101)$, $f(95)$, $f(91)$, $f(0)$. Qu'observez-vous ?
2. Prouver l'identité obtenue pour $f(n)$, pour tout $n \leqslant 101$.

★★★☆ **Exercice 1.26 – (Rallye mathématique d'Alsace 2010)**
On considère l'entier naturel ayant 3^{2010} chiffres tous égaux à 1. Montrer qu'il est divisible par 3^{2010} mais pas par 3^{2011}.

2

Ensembles

Manipulations ensemblistes, inclusions

☆☆☆☆ **Exercice 2.1** – Montrer que $X \subset Y$ si et seulement s'il existe Z tel que $Z \cap X \subset Z \cap Y$ et $Z \cup X \subset Z \cup Y$.

☆☆☆☆ **Exercice 2.2** – Montrer que :

a) $X \smallsetminus (Y \cup Z) = (X \smallsetminus Y) \cap (X \smallsetminus Z)$;
b) $X \smallsetminus (Y \cap Z) = (X \smallsetminus Y) \cup (X \smallsetminus Z)$;
c) $X \smallsetminus (Y \smallsetminus Z) = (X \smallsetminus Y) \cup (X \cap Z)$;
d) $(X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z = X \smallsetminus (Y \cup Z)$.

★★☆☆ **Exercice 2.3** – Soit k un entier au moins égal à 2, et soient $A_1, \ldots, A_k$ des parties d'un ensemble. Montrer :

$$A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_{k-1} - A_k) \cup (A_k - A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

☆☆☆☆ **Exercice 2.4** – A-t-on $(E \subset E') \wedge (F \subset F') \Longrightarrow E \bigtriangleup F \subset E' \bigtriangleup F'$?

★☆☆☆ **Exercice 2.5** – Soient A, B, C, D quatre ensembles. Montrer que si $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ et $A \cup B = C \cup D$, alors $A = C$ et $B = D$.

★★☆☆ **Exercice 2.6** – Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E, et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ l'application définie par $f(X) = (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})$, où $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E. Résoudre et discuter l'équation $f(X) = \varnothing$.

★★☆☆ **Exercice 2.7** – Soient E un ensemble, n un entier naturel non nul, et $A_1, \ldots, A_n$, et $B_1, \ldots, B_n$ des sous-ensembles de E. On note $I = [\![1, n]\!]$. Montrer que :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \complement_I(X)} B_j \right) \right)$$

★★★☆ **Exercice 2.8** – Soit $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

1. si $k \leqslant \frac{n+1}{2}$, $\displaystyle\bigcap_{H \in \mathcal{P}_k(n)} \bigcup_{i \in H} X_i \subset \bigcup_{H \in \mathcal{P}_k(n)} \bigcap_{i \in H} X_i$;
2. si $k \geqslant \frac{n+1}{2}$, $\displaystyle\bigcup_{H \in \mathcal{P}_k(n)} \bigcap_{i \in H} X_i \subset \bigcap_{H \in \mathcal{P}_k(n)} \bigcup_{i \in H} X_i$;

Ensemble des parties

☆☆☆☆ **Exercice 2.9** – Soient X et Y deux ensembles. Montrer que $X \subset Y$ si et seulement si $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$

★★★☆ **Exercice 2.10** – Montrer, sans utiliser l'axiome de fondation, qu'il n'existe aucun ensemble X tel que $\mathcal{P}(X) \subset X$.

★★★☆ **Exercice 2.11** – *Soit E un ensemble éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que E est* transitif *si :* $\forall x, \quad x \in E \Longrightarrow x \subset E$.

1. Les ensembles suivants sont-ils transitifs ($\varnothing$ désigne l'ensemble vide) :

   (a) $E_1 = \varnothing$ (b) $E_2 = \{\varnothing\}$ (c) $E_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (d) $E_4 = \{\{\varnothing\}\}$.

2. *Soit X un ensemble quelconque. On note $\mathcal{P}^0(X) = X$, et $\mathcal{P}^1(X) = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. On définit alors par récurrence sur n, pour tout $n \geqslant 1$: $\mathcal{P}^{n+1}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(X))$.*

   (a) Montrer que si X est transitif, alors l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ est transitif.

   (b) Montrer que si X est transitif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^n(X)$ est transitif.

3. Montrer que si E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ l'est également.

4. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) d'ensembles transitifs. Montrer que les ensembles $\bigcup_{i \in I} E_i$ et $\bigcap_{i \in I} E_i$ sont transitifs.

Recouvrements

★★☆☆ **Exercice 2.12** – Soit X un ensemble. On appelle recouvrement de X une famille $(U_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X dont l'union est égale à X. On dit qu'un recouvrement $(V_j)_{j \in J}$ est plus fin qu'un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$.
Montrer qu'étant donné deux recouvrements de X, il existe toujours un troisième recouvrement plus fin que les deux premiers, et maximal pour cette propriété (donc moins fin que tout autre recouvrement vérifiant la même propriété). A-t-on unicité ?

★☆☆☆ **Exercice 2.13** – Soient X et Y deux ensembles, et $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X (*i.e.* l'union des X_i est X). On se donne une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'applications de X_i dans Y. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les f_i pour qu'il existe une applicationn $f : X \to Y$ coïncidant avec f_i sur X_i, pour tout $i \in I$. L'application f est-elle alors unique ?

★★★★ **Exercice 2.14 – Schémas simpliciaux**
On appelle schéma simplicial un couple $(K, \mathcal{S})$, où K est un ensemble et $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de parties finies et non vides de K, et tel que tout sous-ensemble non vide d'un élément de $\mathcal{S}$ est encore dans $\mathcal{S}$.
Les éléments de $\mathcal{S}$ sont appelés simplexes de K. La *dimension* d'un simplexe est un de moins que le cardinal de ce simplexe. Ainsi, les simplexes de dimension 0 sont les singletons de $\mathcal{S}$, aussi appelés *sommets*. Les simplexes de dimension 1 sont des paires, aussi appelés *arêtes*. Les simplexes de dimension 2 ont trois éléments, et sont aussi appelés *faces*, etc.

1. Soit X un ensemble quelconque, et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X. On convient de dire qu'une partie S de l'ensemble I est un simplexe si elle est finie, non vide, et si l'intersection $\bigcap_{i \in S} U_i$ est non vide. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des simplexes ainsi définis.
   Montrer que le couple $(I, \mathcal{S})$ est un schéma simplicial (appelé *nerf* du recouvrement)

2. Soit $(K, \mathcal{S})$ un schéma simplicial. On désigne par $P(K)$ l'ensemble des fonctions f définies sur l'ensemble K, à valeurs réelles, et possédant les 3 propriétés suivantes :

   (i) l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$ est un simplexe de $\mathcal{S}$,

   (ii) on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in K$

   (iii) $\sum_{x \in K} f(x) = 1$.

Soit, pour tout $x \in K$, U_x l'ensemble des $f \in P(K)$ telles que $f(x) \neq 0$. Montrer que $(U_x)_{x \in K}$ est un recouvrement de $P(K)$ dont le nerf est égal à $(K, \mathcal{S})$.

Ainsi, on a montré que tout schéma simplicial est le nerf d'un recouvrement.

Une colle

⋆⋆⋆⋆ **Exercice 2.15 – (ENS Lyon)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints I et J de $[\![1,n+1]\!]$ tels que

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j.$$

3

Applications

Images directes, images réciproques

☆☆☆☆ **Exercice 3.1** – Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f = \exp$, $I = [0,1[$
2. $f = \ln$, $I =]-1,1]$
3. $f = \sin$, $I = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$
4. $f : x \mapsto 1 + x^2 + x^3$, $I = [-\frac{4}{5}, \frac{1}{6}]$
5. $f : x \mapsto x + \lfloor x \rfloor$, $I = \mathbb{R}_+$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.2** – Déterminer $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :

1. $f = \sin$, $I = \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$
2. $f = \cos$, $I = [\frac{1}{2}, +\infty[$
3. $f = \tan$, $I = [-1,1]$
4. $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$, $I =]1,3]$

☆☆☆☆ **Exercice 3.3** –

1. Déterminer $f(f^{-1}(I))$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \tan$, $I = [0,1]$
   (b) $f = \sin$, $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
2. Déterminer $f^{-1}(f(I))$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \cos$, $I = [0, \frac{\pi}{3}[$
   (b) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$, $I = [2,3]$

★☆☆☆ **Exercice 3.4** – Soit $f : E \to F$, et $F' \subset F$. Décrire $f(f^{-1}(F'))$ en fonction de F' et $\mathrm{Im}(f)$.

★★★★ **Exercice 3.5** – Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ (|y-x| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si :

$$\forall x \in U,\ \exists \delta > 0,\ ]x-\delta, x+\delta[\subset U.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

★★★☆ **Exercice 3.6** – Soit $f \in F^E$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \in f^{-1}(f(\{x\}))$. Donner un exemple pour lequel $f^{-1}(f(\{x\}))$ contient au moins deux éléments.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$. Exemple d'inclusion stricte ?
3. Soit $S = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid f^{-1}(f(X)) = X\}$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' = f^{-1}(f(A))$. Montrer que $A' \in S$. Montrer que A' est le plus petit ensemble de S contenant A.
4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est injective ;
   (ii) $\forall x \in E,\ \{x\} \in S$;
   (iii) $S = \mathcal{P}(E)$;
   (iv) le seul élément X de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $f^{-1}(f(X)) = E$ est E lui-même.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

★★★☆ **Exercice 3.7** – Soit E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \to E$ et $v : F \to F'$ deux applications. On définit $\Phi : F^E \to (F')^{E'}$ par $\Phi(f) = v \circ f \circ u$.

1. Montrer que si u est surjective et v injective, Φ est injective.
2. Montrer que si u est injective et v est surjective, Φ est surjective.
3. Étudier les réciproques.

★★☆☆ **Exercice 3.8** – Soit A, B, C, D des ensembles. Construire une bijection entre $C^{A\times B}$ et $(C^A)^B$ et une injection de $C^A \times D^B$ dans $(C \times D)^{A\times B}$.

★☆☆☆ **Exercice 3.9** – Construire une surjection de $\mathbb{N}$ sur lui-même pour laquelle chaque entier possède exactement p antécédents ($p \geqslant 1$ fixé). En construire une pour laquelle chaque entier possède une infinité d'antécédents.

★☆☆☆ **Exercice 3.10** – Soit f une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Même question en supposant que f est une surjection vérifiant $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★★☆☆ **Exercice 3.11** – Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $M \geqslant 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \geqslant M$. Cette propriété revient à dire que la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers l'infini est $+\infty$. Cette propriété est-elle vérifiée pour une injection ? une surjection ?

★☆☆☆ **Exercice 3.12** – Soit E un ensemble, et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

★☆☆☆ **Exercice 3.13** – Soit E un ensemble, et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est surjective ou injective, alors $p = \mathrm{id}_E$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.14** – Soit $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, alors f, g et h sont toutes trois des bijections.

★☆☆☆ **Exercice 3.15** – **(Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par l'inversibilité)** Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si elle est inversible à gauche, c'est-à-dire s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
2. On admet l'axiome du choix. Montrer que f est surjective si et seulement si elle est inversible à droite, c'est-à-dire s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

★★☆☆ **Exercice 3.16** –

1. Soient E, F, G trois ensembles tels que $E \neq \varnothing$, et soit $f : F \to G$. Montrer que f est injective si et seulement si
$$\forall g, h \in F^E,\ (f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h).$$
2. Soit F, G, H trois ensembles tels que $|H| \geqslant 2$, et soit $f : F \to G$. Montrer que f est surjective si et seulement si
$$\forall g, h \in H^G,\ (g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h).$$

★★☆☆ **Exercice 3.17** – Soient E un ensemble, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective).

★★☆☆ **Exercice 3.18** – Soit E un ensemble non vide, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B). \end{array}$$
1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Donner une CNS pour que f soit injective.

★★★☆ **Exercice 3.19** – Soit $f : E \to F$, $\widetilde{f}$ l'application « image directe » de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, et $\widehat{f^{-1}}$ l'application « image réciproque » de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.
1. f est injective ssi $\widetilde{f}$ est injective ssi $\widehat{f^{-1}}$ est surjective.
2. f est surjective ssi $\widetilde{f}$ est surjective ssi $\widehat{f^{-1}}$ est injective.

★★☆☆ **Exercice 3.20** – **(Étude d'une homographie)**
On pose $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On note f l'application définie pour tout $z \neq -\mathrm{i}$ par $f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.
1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans $\mathbb{C}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
   (a) Montrer que pour tout z du domaine de définition D_h de h,
   $$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$
   (b) En déduire que h est une bijection de P sur P.

★★★★ **Exercice 3.21** –
1. Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to A$ deux applications telles que $g \circ f$ est injective, et $f \circ g$ est surjective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soient A, B, C des ensembles, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$, trois applications. On suppose que toutes les applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont chacune soit injective soit surjective (éventuellement les deux). On suppose de plus qu'au moins une de ces applications est injective, et au moins une est surjective. Montrer que f, g et h sont des bijections.
3. Généraliser à n ensembles $A_1, \dots, A_n$ et n applications $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i \in [\![1, n-1]\!]$, et $f_n : A_n \to A_1$.

Factorisations

★★☆☆ **Exercice 3.22** – Soit E, F, G et H quatre ensembles, $s : E \to F$, $f : E \to G$, $i : G \to H$ et $g : F \to H$ des applications telles que s est surjective, i est injective, et $i \circ f = g \circ s$. Montrer qu'il existe une unique application $h : F \to G$ telle que $f = h \circ s$ et $g = i \circ h$.

★★★☆ **Exercice 3.23** – (Factorisation d'une application.)

1. Soit $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications. Donner une CNS pour qu'il existe $h : G \longrightarrow F$ tel que $g = f \circ h$. À quelle condition h est-elle unique ?
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Donner une CNS pour qu'il existe $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$.
   À quelle condition h est-elle unique ?

4

Sommes, binôme

Manipulations élémentaires, sommes télescopiques

★☆☆☆ **Exercice 4.1** – On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+k-1).$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En effectuant l'opération $S_{k+1}(n) - S_{k+1}(n)$, exprimer $S_k(n)$ en fonction de k et de n.

★☆☆☆ **Exercice 4.2 – (Somme des carrés, cubes...)**

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.
3. Calculer par la même méthode $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^4$.

★★☆☆ **Exercice 4.3** – Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$

★★★☆ **Exercice 4.4** – Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{(2m)^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \right| \leqslant \sqrt{n} + 1$.

★★☆☆ **Exercice 4.5** – Soit N un nombre entier de n chiffres. Soit s la somme de ses chiffres, et t la somme de tous les nombres obtenus en combinant 2 quelconques des chiffres de N de rangs distincts (si 2 chiffres sont égaux, un même nombre peut apparaître plusieurs fois dans la somme)
Exprimer t en fonction de s.

★☆☆☆ **Exercice 4.6** – Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \min(i,j)$.

Sommes multiples

☆☆☆☆ **Exercice 4.7** – Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p$

★☆☆☆ **Exercice 4.8 – (Encore la somme des carrés et des cubes)**

1. En calculant de deux manières la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k$, retrouver la formule explicite de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
2. Adapter cet argument pour le calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^3$

★★☆☆ **Exercice 4.9 – (Dérivée de la série géométrique)**
Soit $x \in]-1,1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} x^i$, démontrer que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. Quelle formule similaire obtient-on en partant de la somme triple $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j} x^i$?

★★★☆ **Exercice 4.10** – Soit E un ensemble de cardinal n.

1. En considérant $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{x \in X} 1$, calculer $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X|$.
2. Calculer de même $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)} |X \cap Y|$.

Coefficients binomiaux, formule du binôme

★★★☆ **Exercice 4.11 – (Suite harmonique)**
Soit H_n la suite harmonique, définie par : $H_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On rappelle que par convention, $\binom{n}{p}$ est nul si $p > n$. Montrer que :

1. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$.

★★☆☆ **Exercice 4.12** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}.$$

1. Montrer que $S_{n,n} = 2^n$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $S_{n,k} = 2^n - S_{n,n-k-1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n-1} S_{n,i}$.
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (2^n - S_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, puis en conclure que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

5. Retrouver cette formule directement à l'aide de la formule du binôme

★★☆☆ **Exercice 4.13** –

1. Exprimer, pour $n \in \{1,2,3\}$, $(1+\sqrt{2})^n$ sous la forme $\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\alpha_n+1}$, où $\alpha_n \in \mathbb{N}$

Le but de l'exercice est de généraliser cette propriété en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel α_n tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\alpha_n+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que :

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}.$$

3. Déterminer $a_n^2 - 2b_n^2$ et conclure.

★☆☆☆ **Exercice 4.14** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est impair.

★☆☆☆ **Exercice 4.15** – Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

★★☆☆ **Exercice 4.16** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

★★☆☆ **Exercice 4.17** – **(Formule de Vandermonde)**
Montrer de trois manières différentes que pour tout $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

★★★☆ **Exercice 4.18** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 4.19** – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}$ et $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$. Que vaut $R_n^2+I_n^2$?

★★☆☆ **Exercice 4.20** – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$.

★★★★ **Exercice 4.21** –

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{n+k} = n\binom{2n-1}{n}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\max(k,\ell)\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\min(k,\ell)\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}$

★★★☆ **Exercice 4.22** – Supposons que les entiers strictements positifs x, y et z soient solution de l'équation de Fermat $x^n+y^n=z^n$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$). En minorant $(y+1)^n - y^n$, montrer que x, y et z sont supérieurs ou égaux à n.

★★★☆ **Exercice 4.23** – Pour $i_1,\cdots,i_n \geqslant 0$ tels que $i_1+\cdots+i_n = k$, on note $\displaystyle\binom{k}{i_1,\cdots,i_n} = \frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}$. Par convention, $\displaystyle\binom{k}{i_1,\cdots,i_n}$ est nul dans les autres cas. Montrer la formule du multinôme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad (x_1+\cdots+x_n)^k = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ \text{tq } i_1+\cdots+i_n=k}}\binom{k}{i_1,\cdots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}.$$

★★★☆ **Exercice 4.24** – **(Polynômes d'Abel)**
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n : x \mapsto x(x-an)^{n-1}$. P_0 est prolongé par continuité en 0.

1. Expliciter P_0 et P_1
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(n-k)!P_n^{(k)}(x) = n!P_{n-k}(x-ak)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(y).$$

On dit que la famille (P_n) est binomiale.

Introduction aux séries

★★★★ **Exercice 4.25 – (Méthode de Stirling pour le calcul approché de $\zeta(3)$).**
Le but de l'exercice est de donner une méthode de calcul de la valeur approchée à 10^{-8} près de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. (a) En comparant, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^3}$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^3}$, montrer que (S_n) est majoré. En déduire que la limite $\zeta(3)$ de (S_n) est finie.

   (b) En s'inspirant de la méthode de la question précédente, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \zeta(3) - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

   (c) Déterminer n_0 la valeur minimale pour laquelle S_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$.

   (d) En admettant une erreur d'arrondi de 10^{-11} sur chaque quotient $\frac{1}{k^3}$, montrer que le calcul effectif de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près est impossible par cette méthode.

2. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{n^3} = \frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$

   où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 \varepsilon_n = 0$ (on explicitera ε_n)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{2\cdot 2!} + \dfrac{3}{3\cdot 3!} + \dfrac{11}{4\cdot 4!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \zeta(3) - T_n < \dfrac{10}{n^5}$.

4. Quelle valeur de n_0 suffit-il de prendre pour que T_{n_0} soit une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près ?

5

Relations

Généralités sur les relations

☆☆☆☆ **Exercice 5.1** – Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $\mathcal{S}$ une relation dans F ; on définit une relation $\mathcal{R}$ dans E par $x\mathcal{R}y \iff f(x)\mathcal{S}f(y)$.

1. Montrer que si $\mathcal{S}$ est réflexive (resp. symétrique, resp. transitive, resp irréflexive), alors $\mathcal{R}$ l'est aussi
2. Si $\mathcal{S}$ est antisymétrique, $\mathcal{R}$ l'est-elle nécessairement ? Donner une condition suffisante sur f pour que ce soit le cas.
3. Montrer que la condition suffisante de la question précédente est aussi une condition nécessaire si on suppose de plus $\mathcal{S}$ réflexive.

★☆☆☆ **Exercice 5.2** – Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On définit les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \begin{cases} x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \\ x\mathcal{A}y \iff (x\mathcal{R}y) \wedge \neg(y\mathcal{R}x). \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est symétrique et $\mathcal{A}$ est antisymétrique.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\ x\mathcal{R}y \iff (x\mathcal{S}y \vee x\mathcal{A}y)$.
3. Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ le sont, mais que la réciproque est fausse.

★★☆☆ **Exercice 5.3** – **(Composition de relations)**
Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations sur E. On rappelle que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est la relation définie par :

$$\forall (x,z) \in E^2, \quad x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff \exists y \in E, \ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{S}z).$$

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ aussi.
2. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques et $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est symétrique.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques, et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
3. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ est antisymétrique et transitive, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ est antisymétrique.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
4. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ l'est aussi.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
5. Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

★☆☆☆ **Exercice 5.4** – **(Fermeture transitive)**
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. Soit $\mathcal{T}$ la relation définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad x\mathcal{T}y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (x_0,\ldots,x_n) \in E^{n+1}, \begin{cases} x_0 = x, \quad x_n = y \\ x_0\mathcal{R}x_1, \ x_1\mathcal{R}x_2, \ldots, x_{n-1}\mathcal{R}x_n. \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est transitive.
2. Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique, $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
3. Montrer que $\mathcal{T}$ est la plus petite relation transitive contenant $\mathcal{R}$.

★★★☆ **Exercice 5.5** – **(Relations bien fondées)**
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Étant donnés deux éléments x et y de E, on dit que y est un $\mathcal{R}$-antécédent de x si $y\mathcal{R}x$.

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   - Pour tout $X \subset E$ non vide, il existe $x \in X$ n'admettant aucun $\mathcal{R}$-antécédent dans X ;
   - Il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}\mathcal{R}x_n$;
   - Pour tout $X \subset E$, $\Big(\forall x \in E, \ \big((\forall y \in E, \ (y\mathcal{R}x \Longrightarrow y \in X)) \implies x \in X\big)\Big) \implies X = E$.

   Une relation $\mathcal{R}$ vérifiant ces propriétés est appelée relation bien fondée.
2. Montrer qu'une relation bien fondée est irréflexive (pour tout x, x n'est pas en relation avec lui-même) et antisymétrique.
3. Une relation d'ordre $\leqslant$ sur E est appelée relation de bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.
   (a) Montrer qu'une relation de bon ordre est totale.
   (b) Montrer que si $\leqslant$ est une relation de bon ordre, alors la relation stricte associée $<$ est une relation bien fondée.
   (c) Donner un exemple de bon ordre.

Relations d'équivalence

☆☆☆☆ **Exercice 5.6** – Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalences :

1. Sur $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \iff (A = B)$ ou $(A = \overline{B})$.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \iff A \cap B = \varnothing$.
3. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A\mathcal{R}B \iff \exists (P,Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = PBQ$
4. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A\mathcal{R}B \iff \exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A = PBQ$
5. Sur $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$, $\sigma\mathcal{R}\tau \iff \exists \varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, $\sigma = \varphi^{-1}\tau\varphi$.
6. Sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, $f\mathcal{R}g \iff \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$
7. Sur $\mathcal{C}^1([0,1])$, $f\mathcal{R}g \iff f' = g'$

★☆☆☆ **Exercice 5.7** – Soit E un ensemble.

1. Montrer que pour toutes parties A, B, C, D de E, si $B \smallsetminus C \subset A$ et $C \smallsetminus D \subset A$, alors $B \smallsetminus D \subset A$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Prouver que la relation $\mathcal{R}_A$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$B\mathcal{R}_A C \iff B \triangle C \subset A,$$

   est une relation d'équivalence.

☆☆☆☆ **Exercice 5.8** – Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff (x = y = 0) \lor xy > 0.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence associées.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une congruence sur $(\mathbb{R}, \times)$.

★☆☆☆ **Exercice 5.9** – Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par la propriété suivante : on dit que $f\mathcal{R}g$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}$, au plus dénombrable tel que f et g coincident sur $\mathbb{R} \setminus F$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

★★☆☆ **Exercice 5.10** – **(Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$)**

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c$$
est une relation d'équivalence.
2. Expliquer en quoi l'ensemble quotient (l'ensemble des classes d'équivalence) pour cette relation permet de définir $\mathbb{Z}$.
3. Montrer que la loi d'addition sur $\mathbb{N}^2$ est compatible avec la relation $\sim$, et qu'elle coïncide, par passage au quotient, avec l'addition de $\mathbb{Z}$.

★★★☆ **Exercice 5.11** – **(Une construction de $\mathbb{R}$)**

1. Soit $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Q}$ non vides et majorées. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ par :
$$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow (\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists y \in Y, x - \varepsilon \leqslant y) \wedge (\forall y \in Y, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \exists x \in X, y - \varepsilon \leqslant x)$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$.
2. Montrer que pour tout X et Y, $X\mathcal{R}Y$ si et seulement si $\sup_{\mathbb{R}} X = \sup_{\mathbb{R}} Y$.
3. En déduire une bijection entre $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}$ et $\mathbb{R}$.

Ceci peut constituer une construction de $\mathbb{R}$: les éléments de $\mathbb{R}$ sont vus comme les bornes supérieures de sous-ensembles non vides majorés de $\mathbb{Q}$.

Relations d'ordre

☆☆☆☆ **Exercice 5.12** – Soit, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow (x \leqslant x') \wedge (x \leqslant y') \wedge (y \leqslant x') \wedge (y \leqslant y').$$
Est-ce une relation d'ordre ?

★☆☆☆ **Exercice 5.13** – **(Parties libres)**
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit qu'une partie X de E est libre si ses éléments sont 2 à 2 non comparables. On note $L(E)$ l'ensemble des parties libres de E. On définit sur $L(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow (\forall x \in X, \exists y \in Y, x \leqslant y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Montrer que la fonction $\mathrm{id}_{L(E)}$ est croissante de $(L(E), \subset)$ dans $(L(E), \mathcal{R})$.
3. Sa réciproque est-elle croissante ?

★★★☆ **Exercice 5.14** – **(Lemme de Spilrajn-Marczewski)**
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini, de cardinal n. Montrer qu'il existe une bijection croissante φ de E dans $[\![1, n]\!]$.
En déduire qu'on peut munir E d'un ordre total $\leqslant'$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow x \leqslant' y$.
Un tel ordre est appelé *extension linéaire de* $(E, \leqslant)$.

★★☆☆ **Exercice 5.15** – Soit E un ensemble fini et O_E l'ensemble des ordres sur E. Si $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$ sont deux ordres sur E, on dit que $\leqslant_1$ implique $\leqslant_2$ si pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \leqslant_1 y \Longrightarrow x \leqslant_2 y$.

1. Montrer que cela définit une relation d'ordre sur O_E.
2. Montrer que O_E admet un minimum pour cette relation.
3. Quels sont les éléments maximaux de O_E ?

☆☆☆☆ **Exercice 5.16** – Étant donné un sous-ensemble X d'un ensemble ordonné E, on note $\mathrm{Maj}(X)$ l'ensemble des majorants de X dans E. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Exprimer $\mathrm{Maj}\left(\bigcup A_i\right)$ en fonction des $\mathrm{Maj}(A_i)$.

★☆☆☆ **Exercice 5.17** – Soit E un ensemble ordonné.

1. Soit X, Y des sous-ensembles de E. Comparer (en cas d'existence) $\sup(\sup(X), \sup(Y))$ et $\sup(X \cup Y)$.
2. Soit $x, y, z \in E$. Que dire de $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$?
3. Soit X, Y et Z des sous-ensembles de E. Comparer $\sup(X \cup \{\sup(Y \cup Z)\})$ et $\sup(\{\sup(X \cup Y)\} \cup Z)$.

★☆☆☆ **Exercice 5.18** – Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné admettant un plus grand élément, et tel que toute partie de E non vide admette une borne inférieure. Montrer que toute partie non vide de E admet une borne supérieure.

★★☆☆ **Exercice 5.19** – Soit E un ensemble, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E^E)$, et $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \forall f \in \mathcal{A},\ f(X) \subset X\}$.
Montrer que pour l'inclusion, toute partie non vide de $\mathcal{F}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{F}$.

★★★★ **Exercice 5.20** – **(Principe de maximalité de Haussdorff)**
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On appelle chaîne de E tout sous-ensemble totalement ordonné de E. En supposant l'axiome du choix, montrer le principe de maximalité de Hausdorff : tout ensemble ordonné contient une chaîne maximale pour l'inclusion.
Ce principe est en fait équivalent au lemme de Zorn, donc à l'axiome du choix.

★★☆☆ **Exercice 5.21** – Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie non vide de E admet minimum et un maximum. Montrer que E est fini.

★★★★ **Exercice 5.22** – Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini. On appelle chaîne de E un sous-ensemble totalement ordonné, et cochaîne de E un sous-ensemble formé d'éléments deux à deux incomparables.
Montrer que la longueur maximale d'une chaîne de E est égale au minimum du nombre de parts d'une partition de E dont toutes les parts sont des cochaînes de E.

★★★★ **Exercice 5.23** – **(Suite de Prouhet-Thue-Morse, ENS)**
On munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de l'ordre lexicographique, noté $\leqslant$, la relation stricte associé étant noté $<$. Pour $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, on note Tu la suite de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $(Tu)_n = u_{n+1}$. La suite $T^k u$ est alors obtenue en itérant k fois l'opérateur T sur u. On dit qu'une suite ε est admissible si pour tout k :

- $\varepsilon_k = 0 \Longrightarrow T^k\varepsilon < \varepsilon$
- $\varepsilon_k = 1 \Longrightarrow 1 - T^k\varepsilon < \varepsilon$

1. Soit u_n de nombre de 1 dans l'écriture en base 2 de n, réduit modulo 2 (suite de Prouhet-Thue-Morse). Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est admissible
2. Montrer que (u_n) est le plus petit admissible (au sens de l'ordre lexicographique).

★★★★ **Exercice 5.24** – Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble X, et x un élément de X. On pose $x\mathcal{R} = \{z \in X \mid x\mathcal{R}z\}$ et $\mathcal{R}x = \{z \in X \mid z\mathcal{R}x\}$. Ces deux ensembles sont respectivement appelés *section finissante* et *section commençante* de base x. On définit trois relations sur X par $xT_d y$ ssi $y\mathcal{R} \subset x\mathcal{R}$, $xT_g y$ ssi $\mathcal{R}x \subset \mathcal{R}y$ et $T = T_d \cap T_g$. Ces relations sont appelées respectivement *trace à droite*, *trace à gauche* et *trace.*

1. Montrer que T_d, T_g et T sont des préordres (c'est-à-dire sont réflexives et transitives).
2. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X est appelée *tournoi* si elle est asymétrique et si deux éléments distincts sont toujours comparables. On suppose que $\mathcal{R}$ est un tournoi.
   (a) Montrer que T_d et T_g sont deux ordres identiques dont l'ordre strict associé est contenu dans $\mathcal{R}$.
   (b) Montrer que x est un élément minimal de (X, T) si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in \mathcal{R}$ et $(z, y) \in \mathcal{R}$. On dit que z est un *centre* du tournoi.
   (c) Que dire si $\mathcal{R}$ est un tournoi transitif ?

6

Nombres réels

Inéquations

☆☆☆☆ **Exercice 6.1** – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (a désigne un paramètre réel) :

1. $x^2 - 3x + 2 \leqslant a$
2. $-x^2 + 2x - 3 \leqslant a$
3. $x^n \geqslant a$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\sin x + \cos x = 1$
6. $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$
7. $\sin(x)\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$
8. $\tan x \geqslant 1$.

★☆☆☆ **Exercice 6.2** – Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 1$. Montrer que $\dfrac{(x-1)^2}{8x} \leqslant \dfrac{x+1}{2} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{(x-1)^2}{8}$.

★☆☆☆ **Exercice 6.3** – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geqslant |x - 1|$;
2. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geqslant x - 1$;
3. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > |2x + 1|$;
4. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 2x + 1$.

★☆☆☆ **Exercice 6.4** – Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1 + x^2} \leqslant x + m$.

★★☆☆ **Exercice 6.5** – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, en discutant suivant la valeur du paramètre a :

$$\frac{ax + 3}{a + 2x} \leqslant 3.$$

Partie entière

☆☆☆☆ **Exercice 6.6** – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.

★★★☆ **Exercice 6.7** –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

2. Plus généralement, montrer que pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

★★☆☆ **Exercice 6.8** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2+1}}}}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor = n$. Comment généraliseriez-vous ce résultat ?

★☆☆☆ **Exercice 6.9** – Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

★☆☆☆ **Exercice 6.10** – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+x} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

★★★☆ **Exercice 6.11** – Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.

★★☆☆ **Exercice 6.12** –

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x) - 1$.
2. Soit p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$.

★★★☆ **Exercice 6.13** – Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{n+2-\lfloor \frac{n}{25} \rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{8n+24}{25} \right\rfloor$.

★★★★ **Exercice 6.14** – Pour $\alpha > 0$, on désigne par $\mathrm{Spec}(\alpha) = \{\lfloor k\alpha \rfloor,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\mathrm{Spec}(\alpha)$ et $\mathrm{Spec}(\beta)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ et α et β sont irrationnels.

Rationnalité, Irrationnalité

★☆☆☆ **Exercice 6.15** – Soit a et b des entiers strictement supérieurs à 1. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ est irrationnel.

★★★☆ **Exercice 6.16** – **(incommensurabilité du côté et de la diagonale d'un pentagone)**

1. Montrer que deux réels a et b sont incommensurables si et seulement si l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a,b) ne s'arrête pas.
2. En déduire, par un argument géométrique, que le côté et la diagonale d'un pentagone régulier sont incommensurables.

Densité

★☆☆☆ **Exercice 6.17** – Montrer que $\{q^2,\ q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

★★★☆ **Exercice 6.18** – Soit f une application strictement croissante de limite $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $f(x+1) - f(x) \to 0$ en $+\infty$. Montrer que $E = \{f(n) - \lfloor f(n) \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

★★☆☆ **Exercice 6.19** – Soit A un sous-ensemble non majoré de $\mathbb{R}_+$. Soit

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} A, \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{n} A = \{\frac{a}{n},\ a \in nA\}.$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}_+$.

★★★★ **Exercice 6.20** – Soit α un nombre irrationnel, et soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$E = \{a + b\alpha \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Soit $\varepsilon = \inf(E \cap \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que si $\varepsilon > 0$, alors
$$E = \mathbb{Z}\varepsilon = \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$
2. Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

Inégalités classiques

★★★☆ **Exercice 6.21 – (Cauchy-Schwarz)**
Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz par récurrence.

★★☆☆ **Exercice 6.22 – (Encore Cauchy-Schwarz, ou le coup de la normalisation)**

1. Montrer que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$.
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

☆☆☆☆ **Exercice 6.23 – (Le coup du 1 – The 1-Trick)**
Montrer que pour tous réels $a_1, \dots, a_n$,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

☆☆☆☆ **Exercice 6.24 – (Le coup du partage)**
Montrer que pour tous réels $a_1, \dots, a_n$,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{4/3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

★☆☆☆ **Exercice 6.25** – Montrer que pour tous réels x, y, z strictement positifs :
$$\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x+z}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{6}.$$

★★☆☆ **Exercice 6.26** – Montrer que pour tous réels strictement positifs x, y et z,
$$x + y + z \leqslant 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right).$$

★★☆☆ **Exercice 6.27** – Montrer que pour tous réels positifs ou nuls $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$,
$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

★★★☆ **Exercice 6.28** – Soit x, y et z des réels positifs. Montrer que si $xyz \geqslant 1$, alors $(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 8$. Généraliser.

Bornes supérieures, inférieures

★☆☆☆ **Exercice 6.29** – Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Comparer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.

★☆☆☆ **Exercice 6.30** – Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Exprimer $\sup_{(x,y)\in A^2} |y-x|$ en fonction de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

★☆☆☆ **Exercice 6.31** – Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, et soit

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que A, B et $A+B$ admettent des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$, et que ces bornes vérifient la relation : $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

★★☆☆ **Exercice 6.32** – Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, et soit a sa borne supérieure. On suppose que $a \notin A$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[a-\varepsilon, a]$ contient une infinité de points de A.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux éléments distincts x et y dans A tels que $|y-x| < \varepsilon$. Donner un contre-exemple si $a \in A$.
3. Montrer, sous les mêmes conditions, qu'il existe une suite strictement décroissance (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \to a$.

★☆☆☆ **Exercice 6.33** – Soit $E = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{p},\ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*\right\}$. L'ensemble E admet-t-il une borne supérieure ? une borne inférieure ? Si oui, les déterminer.

★★☆☆ **Exercice 6.34** – Soit A et B deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on suppose que $A \subset B$. Comparer $\inf(A)$, $\inf(B)$, $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
2. Est-ce que $A \cup B$ admet des bornes inférieure et supérieure ? Si oui, les déterminer en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$, $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
3. Est-ce que $A \cap B$ admet des bornes inférieure et supérieure ? Si oui, que peut-on en dire ?

★★★☆ **Exercice 6.35** – Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{I \subset \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I} a_i\right),$$

le sup étant pris sur tous les sous ensembles *finis* de $\mathbb{N}$.

★★★☆ **Exercice 6.36** – Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles non vide bornés de $\mathbb{R}_+$, de borne supérieure m_n. On suppose que $\sum m_n$ converge.

1. Montrer que pour toute suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$, la série $\sum x_n$ est convergente.
2. Soit $S = \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \middle|\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A_n\right\}$. Montrer que S admet une borne supérieure m, et exprimer m en fonction des m_n.

★★☆☆ **Exercice 6.37** – Soit I et J deux ensembles non vides, et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. Montrer que cette famille est majorée si et seulement si pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est majorée et la famille $\left(\sup_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est majorée. Dans ce cas, on a :

$$\sup_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} u_{i,j}\right).$$

Topologie et intervalles

☆☆☆☆ **Exercice 6.38** – Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles. Montrer que $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

★☆☆☆ **Exercice 6.39** – Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$ est non vide. Montrer que $\bigcup\limits_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

★★☆☆ **Exercice 6.40 – (Autour de Borel-Lebesgue)**
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle *recouvrement de E par des ouverts* une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts tels que $E \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ (les unions ne sont pas forcément disjointes). Le recouvrement est dit *fini* si la famille $(U_i)_{i\in I}$ est une famille finie.
On suppose que E vérifie la propriété suivante (propriété de Borel-Lebesgue) : de tout recouvrement de E par des ouverts de $\mathbb{R}$, on peut extraire un recouvrement fini.

1. Montrer que E est borné
2. Montrer que E est fermé.
3. Mêmes questions si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

★★★☆ **Exercice 6.41 – (Description des ouverts de $\mathbb{R}$)**
Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrer, pour tout $x \in U$, l'existence d'un intervalle ouvert I_x maximal pour l'inclusion tel que $x \in I_x \subset U$.
2. Montrer que U est union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

★★★☆ **Exercice 6.42** – Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $I_1, \dots, I_n$ des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k = I$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\bigcup\limits_{k\neq i} I_k$ est un intervalle. Que se passe-t-il si la famille est infinie ?

★★★☆ **Exercice 6.43 – (Connexité de $\mathbb{R}$)**
Montrer qur $\mathbb{R}$ n'est pas l'union disjointe de deux ouverts non vides.

★★★★ **Exercice 6.44 – (Ouverts de $\mathbb{R}^n$)**
Un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme $I_1 \times \cdots \times I_n$, où les I_k sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'un pavé ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Justifier que tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme union au plus dénombrable de pavés ouverts.

7
Nombres complexes

Forme trigonométrique, forme algébrique

☆☆☆☆ **Exercice 7.1** – Module et argument de $z = 1 - \mathrm{i} \cdot \tan\theta$.

★☆☆☆ **Exercice 7.2** – Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et $z = \dfrac{1+\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$. Calculer le module et l'argument de z.

★☆☆☆ **Exercice 7.3** – Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$.

Manipulations algébriques

★☆☆☆ **Exercice 7.4** – Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| \leqslant 1$, on a : $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

★☆☆☆ **Exercice 7.5** – Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u}$ est réel si et seulement si $|u| = 1$.

★★☆☆ **Exercice 7.6** – Pour $z \neq -\mathrm{i}$, on pose $Z = \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}$.

1. Déterminer l'ensemble A des points z pour lesquels Z est imaginaire pur.
2. Résoudre, pour a réel fixé, $z^2 + 2\,\mathrm{i}\,az - 2a = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions est inclus dans A.

★★☆☆ **Exercice 7.7** –

1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :
$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right).$$
2. En déduire que pour tout $(z, z', u) \in \mathbb{C}^3$ tel que $zz' = u^2$,
$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|.$$

★★★☆ **Exercice 7.8** –
On pose $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On note f l'application définie pour tout $z \neq -\mathrm{i}$ par $f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans $\mathbb{C}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

(a) Montrer que pour tout z du domaine de définition D_h de h,

$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

(b) En déduire que h est une bijection de P sur P.

★★★★ **Exercice 7.9 – (Homographie préservant le cercle unité)**
On recherche toutes les homographies (c'est-à-dire les fonctions non constantes de la forme $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d et z sont complexes), telles que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies vérifiant cette condition.

1. Soit f dans $\mathcal{H}$, décrite comme ci-dessus. Montrer que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$
2. En déduire que $(|c|, |d|)$ est égal à $(|a|, |b|)$, ou $(|b|, |a|)$.
3. Montrer qu'il existe un réel α tel que $f : z \mapsto e^{i\alpha} \dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$.
4. Étudier la réciproque.

★★☆☆ **Exercice 7.10 – (Inégalité de Ptolémée)**

1. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $|x| \cdot |y-z| \leqslant |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|$.
2. Montrer l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4, \quad |x-y| \cdot |z-w| \leqslant |x-z| \cdot |y-w| + |x-w| \cdot |y-z|.$$

Racines carrées, trinômes du second degré

☆☆☆☆ **Exercice 7.11** – Déterminer les racines carrées de

1. $z_1 = -5 + 12\,i$
2. $z_2 = -3 - 4\,i$

★☆☆☆ **Exercice 7.12** – Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^4 - (5 - 14\,i)z^2 - 2(5\,i + 12) = 0$
2. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$
3. $(z + i)^n = (z - i)^n$

☆☆☆☆ **Exercice 7.13** – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.

☆☆☆☆ **Exercice 7.14** – Déterminer les solutions de l'équation $x^4 - (3 + 2\,i)x^2 + (8 - 6\,i) = 0$.
NB : les solutions s'expriment toutes sans radicaux.

☆☆☆☆ **Exercice 7.15** – Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - z + i + 1 = 0$. Même question avec $z^2 + (i - 3)z + (4 - 3\,i) = 0$.

☆☆☆☆ **Exercice 7.16** – Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

Racines n-ièmes

☆☆☆☆ **Exercice 7.17** –

1. Racines carrées de $\sqrt{2}(1 + i)$.
2. Racines 5-ièmes de -1
3. Racines 8-ièmes de i
4. Racines n-ièmes de $-i$

5. Racines n-ièmes de $2j$.

★☆☆☆ **Exercice 7.18** – Déterminer les racines de $X^4 + \mathrm{i}$, sous forme trigonométrique, sous forme algébrique.

☆☆☆☆ **Exercice 7.19** – Donner une expression des racines n-ièmes de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

★☆☆☆ **Exercice 7.20** – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1+\mathrm{i})^n = \frac{1}{2}(z-1+\mathrm{i})^n(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1)$.

★★☆☆ **Exercice 7.21** – Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}, \qquad B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1} \qquad \text{et} \qquad C = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+2}.$$

On pourra faire intervenir les racines cubiques de l'unité.

★★☆☆ **Exercice 7.22** – Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{2k}$.

★☆☆☆ **Exercice 7.23** – Soit la racine cubique de l'unité $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z)$.
2. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $u^3 + v^3 = (u+v)(u+jv)(u+j^2v)$.

★★☆☆ **Exercice 7.24** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n, tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. On note, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} P(\omega_k) = n+1$
2. En déduire que $\sup\limits_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 7.25** –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit ω une racine n-ième de l'unité, différente de 1. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$?
2. On note β la racine 7-ième de l'unité différente de 1 de plus petit argument strictement positif.
   (a) Calculer $A = \beta + \beta^2 + \beta^4$ et $B = \beta^3 + \beta^5 + \beta^6$
   (b) Montrer que $\dfrac{\beta}{1+\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1+\beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$.

★★☆☆ **Exercice 7.26** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre suivant les valeurs de n l'équation $z^n = (z+1)^n = 1$.

★★★☆ **Exercice 7.27** – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{U}^3$ tels que $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = 1$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que n est un multiple de 3.

★★☆☆ **Exercice 7.28** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{p} \tan \dfrac{k\pi}{2p+1} = \sqrt{2p+1}$.

★★☆☆ **Exercice 7.29** – Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|$.

★★★★ **Exercice 7.30** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Soit $Z = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. Calculer $|Z|^2$.

★★★☆ **Exercice 7.31** – **(extrait ENS)**

Soit p un nombre premier supérieur, $p \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $F : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r$. Soit N le nombre de solutions de l'équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Montrer que $N = p^{n-1} + \frac{1}{p}\left(\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \zeta^{a_i x y^{r_i}}\right)\right)\right)$, où $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{p}}$.

★★★★ **Exercice 7.32** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3+4\,\mathrm{i}}{5}$ n'est pas une racine n-ième de 1.

Équations

★☆☆☆ **Exercice 7.33** – Déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az + b = (cz + d)\overline{z}$.

★★☆☆ **Exercice 7.34** – Résoudre $\overline{z} = 2z + j$, où $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$. On exprimera z sous forme trigonométrique.

★★☆☆ **Exercice 7.35** – Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $z^n = \overline{z}$.

Sommes de sinus, cosinus

★★☆☆ **Exercice 7.36** – Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{n}$, et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 7.37** – Soit $n \geqslant 2$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ω_k la racine n-ième de 1 d'argument $\dfrac{2\pi k}{n}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega_k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega_k$.

★☆☆☆ **Exercice 7.38** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$.

★☆☆☆ **Exercice 7.39** – Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

★★★☆ **Exercice 7.40** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \dfrac{n}{4}$.

Trigonométrie

★★☆☆ **Exercice 7.41** – Résoudre $\cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x) = 1$.

★★★☆ **Exercice 7.42** – En factorisant de deux manières différentes $X^5 - 1$, calculer $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos \dfrac{4\pi}{5}$, puis $\cos \dfrac{\pi}{5}$.

★★☆☆ **Exercice 7.43** – Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi} \sin^{2m} t \cos(2mt)\ \mathrm{d}t$.

★★★★ **Exercice 7.44** – En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ n'est pas rationnel.

★★☆☆ **Exercice 7.45** – **Polynômes de Tchebychev de première espèce**
On définit les polynômes de Tchebychev par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0 = 1; \qquad T_1 = X; \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \ \textit{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme, et déterminer son degré.
2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $T_n(\cos(\theta))$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$, puis une expression du polynôme T_n sous forme d'une somme.

★★☆☆ **Exercice 7.46 – Polynômes de Tchebychev de seconde espèce**

Soit U_n la suite de polynômes définie par : $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$ et $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$, $U_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \dfrac{z^{n+1} - \dfrac{1}{z^{n+1}}}{z - \dfrac{1}{z}}$.
2. En déduire $U_n(\cos\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$. Cas où $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$?
3. En déduire une expression de $\sin(7\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

★★☆☆ **Exercice 7.47 –**

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\sin((2p+1)x) = \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^{\ell} \binom{2p+1}{2\ell+1} \sin^{2\ell+1}(x)(1 - \sin^2 x)^{p-\ell}.$$
Expliciter cette formule pour $p = 1$ et $p = 2$.
2. Soit, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\varphi(t) = 3t - 4t^3$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $\varphi(t) \in [-1, 1]$.
   (b) Établir que, pour tout couple $(t, t') \in [-1, 1]^2$, $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant 9|t - t'|$.
3. On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions numériques par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3.$$
   (a) Montrer que f_n est une fonction polynomiale, déterminer son degré.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [-1, 1]$,
$$|f_n(x) - \sin(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{2 \cdot 3^n}.$$
4. En considérant la fonction $\psi : x \mapsto 5x - 20x^3 + 16x^5$, et en s'inspirant de la construction ci-dessus, définir à l'aide d'une relation de récurrence une suite de fonctions polynomiales $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |g_n(x) - \sin(x)| = \frac{|x|^5}{6 \cdot 5^{n-1}}.$$

★★★★ **Exercice 7.48 – (Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\frac{1}{p}$)**

Le but de l'exercice est de montrer que si $\cos\theta = \frac{1}{p}$, où p est un entier impair au moins égal à 3, alors $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Autrement dit $\text{Arccos}\frac{1}{p}$ est incommensurable à π. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n}$, avec m et n premiers entre eux.

1. Déterminer explicitement des polynômes T_n et U_n tels que :
$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ et $\sin(n\theta) = \sin\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$.
2. Montrer que $n = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^{j+1} \binom{n}{2j+1} (p^2 - 1)^j$, puis que n est pair et m impair.
3. Montrer que $1 = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{j+1} \binom{\frac{n}{2}}{2j} (p^2 - 1)^j$. Conclure.

Géométrie

★★☆☆ **Exercice 7.49** – Soit A, B et C trois points d'affixes a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

★★☆☆ **Exercice 7.50** – Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations de centre A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Exprimer $R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

★☆☆☆ **Exercice 7.51** – Soit $ABCD$ un carré ; on suppose que C et D ont des coordonnées entières ; montrer qu'il en est de même de A et B.

★★☆☆ **Exercice 7.52** – Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

★★☆☆ **Exercice 7.53** – Soient A, B, C, D quatre points du plan, E, F, G, H tels que les triangles ABE, BCF, CDG, DAH soient rectangles isocèles directs en E, F, G, H. Montrer que $EG \perp FH$ et $\|EG\| = \|FH\|$.

★★★☆ **Exercice 7.54** –

1. Soit A, B et C des points du plan complexe d'affixes a, b et c. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{c-b}{a-b}$, si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
2. On considère un triangle ABC, et on construit sur chaque face un n-gône régulier, de centres A' (pour le n-gône construit sur le côté BC), B' et C'. À quelle condition sur n le triangle $A'B'C'$ est-il équilatéral quel que soit le choix initial de ABC ?

★★★☆ **Exercice 7.55** – Trouver, dans chacune des situations ci-dessous, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les points d'affixes $1 + \mathrm{i}$, $z + \mathrm{i}$ et $1 + \mathrm{i}\, z$ sont alignés.
2. Les points d'affixes j, z et jz sont alignés
3. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 sont alignés
4. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle
5. 0 est l'orthocentre (l'intersection des hauteurs) du triangle formé par les points d'affixe z, z^2 et z^3
6. Les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\, z$ forment un triangle rectangle isocèle en i
7. Les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\, z$ forment un triangle équilatéral.

★★★★ **Exercice 7.56** – **(Théorème de Pappus)**

1. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{U}$. On note A, B, et E les points d'affixe a, b et 1. Soit P le projeté orthogonal de E sur (AB), et p son affixe. Montrer que
$$1 - p = \frac{(1-a)(1-b)}{2}.$$
2. En déduire le théorème de Pappus : Étant donné un quadrilatère $ABCD$ inscriptible dans un cercle $\mathcal{C}$, pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$, le produit de la distance de M à deux côtés opposés, ou aux deux diagonales est le même, pour chacun des choix des deux paires de côtés opposés, ou des deux diagonales.

★★☆☆ **Exercice 7.57** – Soit ABC un triangle direct. On coupe chaque côté en trois parts égales, et on contruit sur le tiers du milieu un triangle equilatéral extérieur au triangle ABC, de sommets respectifs D, E et F (D étant contruit à partir de (AB), E à partir de (BC) et F à partir de (AC)). Montrer que DEF est équilatéral, de même centre que ABC.

★★★☆ **Exercice 7.58** – Soit ABC un triangle direct. Soit D le centre d'un carré de côté AB, de sorte que D

et C soient du même côté de la droite (AB) et E le centre d'un carré de côté BC, de sorte que E et A ne soient pas du même côté de la droite (BC).
Déterminer l'angle formé entre la droite (AC) et la droite (DE).

8

Limites, dérivation

Limites

☆☆☆☆ **Exercice 8.1** – Étudier l'existence, et le cas échéant la valeur de la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

$a)$ $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{|x|}}$; $x_0 = 0$; $\qquad b)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$; $x_0 = +\infty$;

$c)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $x_0 = 1$; $\qquad d)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x - 5}}$; $x_0 = 2$;

$e)$ $f(x) = \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x + \sin x}$; $x_0 = 0$; $\qquad h)$ $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

$i)$ $f(x) = 1 - x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$; $x_0 = 0$; $\qquad j)$ $f(x) = (\sin x)\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$; $x_0 = 0$.

☆☆☆☆ **Exercice 8.2** – Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

★★★★ **Exercice 8.3** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout intervalle de longueur 1. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

★★★☆ **Exercice 8.4** – Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et f et g deux applications. On suppose que f admet en 0^+ une limite finie et que pour tout $(x, y) \in]0, \alpha[^2$, $|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$ Montrer que g admet en 0^+ une limite finie.

★★★★ **Exercice 8.5** – **(Oral X)**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\;f(s+t) \geqslant f(s) + f(t)$, et telle qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leqslant Mt$. Montrer l'existence de

$$\alpha = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

Comparer $f(t)$ avec αt et βt pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Continuité

☆☆☆☆ **Exercice 8.6** – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$a)\ f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x); \qquad b)\ f(x) = \lfloor x \rfloor \sin x \qquad c)\ f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

★★☆☆ **Exercice 8.7** – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
2. $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
3. $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
4. $f(x) = \frac{1}{q}$, où $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, si $x \in \mathbb{Q}$, et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

★☆☆☆ **Exercice 8.8** –

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$, et telle que $|f|$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple d'application $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective, et discontinue en tout point de $[0,1]$.

★★★☆ **Exercice 8.9** – Déterminer toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.
4. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

★★☆☆ **Exercice 8.10** – Soit f et g deux applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Étudier la continuité de l'application $\inf(f,g)$ qui à x associe $\min(f(x), g(x))$.

★★★☆ **Exercice 8.11** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et φ définie par :

$$\varphi(x) = \sup_{t \in [0,x]} f(t).$$

Montrer que φ est continue.

★★★☆ **Exercice 8.12** – Sans expliciter f, montrer que $f : x \mapsto \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

★★★☆ **Exercice 8.13** – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout $x > 0$, $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante. Montrer que f est croissante.

★☆☆☆ **Exercice 8.14** – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne s'annule pas.
3. Donner un exemple de telle fonction.

★★☆☆ **Exercice 8.15** – Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. On suppose que $f + g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Étude de régularité

★☆☆☆ **Exercice 8.16** – Déterminer les réels a, b et c de sorte que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ax^2}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^2$. Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^3$?

☆☆☆☆ **Exercice 8.17** – Étudier la régularité de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \in]-1,0] \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$

★★★☆ **Exercice 8.18** – **(Une source de contre-exemples)**
Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'on peut prolonger f_α par continuité en 0. On note encore f_α la fonction prolongée.
2. On écrit $\alpha = 2p + \lambda$, où $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0,2]$. Montrer que :
   (i) si $\lambda \in]0,1]$, f_α est $\mathcal{C}^p$, mais n'est pas $p+1$ fois dérivable en 0 ;
   (ii) si $\lambda \in]1,2[$, f_α est $\mathcal{D}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $f_\alpha^{(p+1)}$ n'est bornée sur aucun voisinage de 0 ;
   (iii) si $\lambda = 2$, f_α est $\mathcal{D}^{p+1}$ mais pas $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, et que $f_\alpha^{(p+1)}$ est bornée au voisinage de 0.
   On pourra procéder par récurrence sur p.

★★★☆ **Exercice 8.19** – Soit f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x^3(1-x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et prolongée par continuité en 0.

1. Montrer que f est dérivable à dérivée bornée.
2. Montrer que $f'([0,1])$ n'est pas un intervalle fermé.

Calculs de dérivées

☆☆☆☆ **Exercice 8.20** – Dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3x^2}{1-x^2}$
2. $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$
4. $f(x) = \exp\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right)$
5. $f(x) = x\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
6. $f(x) = \cos\left(e^{3x\sin(\ln(x))}\right)$
7. $f(x) = (\ln^3(x^2+1) - \ln(x^2+1))^5$
8. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{(x+\ln(x))^9}$

★☆☆☆ **Exercice 8.21** – Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x positif, il existe un unique réel positif, noté $f(x)$, tel que

$$f(x)e^{f(x)} = x^\alpha.$$

Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

★★☆☆ **Exercice 8.22** – Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par 0 en 0. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Que vaut $f^{(n)}(0)$?

★★☆☆ **Exercice 8.23** – Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = (x-1)^n \ln x$. Montrer que f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n-1}^{(n)}(x) = (n-1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}$.

☆☆☆☆ **Exercice 8.24** – Montrer que les fonctions f suivantes sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition D_f, et calculer leurs dérivées successives.

a) $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$

b) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$, $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$

c) $D_f = \mathbb{R} - \{1,-1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

d) $D_f =]b,+\infty[$, $f(x) = (x-a)^2\ln(x-b)$

★★☆☆ **Exercice 8.25** – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Etude de f. Points d'inflexion.

2. Montrer que la dérivée n-ième s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

où P_n est un polynôme de degré n. Calculer a_n, le coefficient dominant de P_n.

3. Montrer que $P_n' = -n^2 P_{n-1}$.

★★★☆ **Exercice 8.26** – Soit f la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x(1-(\ln(x))^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Continuité, dérivabilité, variations ? Tangente en 0 ?
2. Concavité ? Existence de points d'inflexion ? Tracer la courbe.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x > 0$, la dérivée $n+2$-ième de f est donnée par la formule :

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{x^{n+1}}n!\left(\ln(x) - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer (sans le théorème des accroissements finis) qu'il existe exactement deux solutions $\theta_1 < \theta_2$ de l'équation $f(x) = xf'(\theta x)$. Calculer $\ln(\theta_1) + \ln(\theta_2)$ et $\ln(\theta_1).\ln(\theta_2)$. Etudier la position relative de θ_1 et θ_2 par rapport à 1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(x) = xf'(\theta x)$.

☆☆☆☆ **Exercice 8.27** – **(oral CCP)** Donner la dérivée d'ordre n de $x \mapsto e^x \cos(x)$.

☆☆☆☆ **Exercice 8.28** – Exprimer les dérivées successives de $f : x \mapsto e^{-x}\cos(\sqrt{3}\cdot x)$ et $g : x \mapsto e^{-x}\sin(\sqrt{3}\cdot x)$

★☆☆☆ **Exercice 8.29** – **(oral CCP)** Soit $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n, qu'on explicitera, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Déterminer les racines de P_n.

★★☆☆ **Exercice 8.30** –

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $f_n(x) = x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. En déduire l'expression de la dérivée n-ième des fonctions $g_n : x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ et $h_n : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Autour des formules de dérivation

★★☆☆ **Exercice 8.31** – Étudier la stabilité par produit de $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0\}$, et de $\mathcal{C}^\infty \setminus \mathcal{F}_0$.

★☆☆☆ **Exercice 8.32** – **(Démonstration de la formule du binôme via la formule de Leibniz)**
En choisissant convenablement deux fonctions f et g dépendant de deux paramètres a et b, retrouver la formule du binôme pour $(a+b)^n$ à partir de la formule de Leibniz.

★★★☆ **Exercice 8.33** – **(Dérivée n-ième d'un produit de k termes)**
Généraliser la formule de Leibniz pour $(f_1 \cdots f_k)^{(n)}$.

★★★★ **Exercice 8.34** – **(Formule de Faà di Bruno pour la dérivée n-ième d'une composée)**

Démontrer la formule de Faà di Bruno pour f et g n fois dérivables, l'une sur un intervalle I, l'autre sur un intervalle J contenant $f(I)$:

$$(g\circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ 1m_1+2m_2+\dots+nm_n=n}} \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{m_k} \times g^{(m_1+\dots+m_n)}\circ f.$$

Études de fonction

☆☆☆☆ **Exercice 8.35** – Étudier les asymptotes de $f : x \mapsto \dfrac{3x^3-2x+1}{(x-1)(x+2)}$.

★★☆☆ **Exercice 8.36** – Étudier aussi précisément que possible les fonctions suivantes sur leur domaine de définition (à préciser). On étudiera notamment les points d'inflexion, les propriétés de convexité, et l'existence éventuelle de droites ou de paraboles asymptotes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^4-6x^2+8x-2)$

b) $f(x) = (x-1)(x-2)\mathrm{e}^{-x}$

c) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^3}$

f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x^2}$

g) $f(x) = x+\sin x$

h) $f(x) = (x+\sin x)\mathrm{e}^{x}$

★☆☆☆ **Exercice 8.37** – Soit f la fonction définie là ou cela a un sens par $f(x) = \frac{1}{x}(x^2+1-\ln x)$.

1. Domaine de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que f' admet un unique zéro α, et que $1.30 < \alpha < 1.35$.
3. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, et donner la position relative de la courbe et de l'asymptote.
4. Soit A l'unique point d'intersection de la courbe et de l'asymptote. Donner l'équation de la tangente en A.
5. Représentation graphique.

★★☆☆ **Exercice 8.38** – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$, là où cela a un sens.

1. Domaine de f.
2. Étudier les limites au bord du domaine. Déterminer la ou les éventuelle(s) asymptotes.
3. Discuter de la position de la courbe par rapport aux asymptotes au voisinage de l'infini.
4. Variations de f.
5. Étudier la convexité de f, et justifier que f admet un et un seul point d'inflexion, situé entre -6 et -5.
6. Tracer sans calcul supplémentaire l'allure du graphe de f.

9

Fonctions usuelles

Limites remarquables, croissances comparées

★☆☆☆ **Exercice 9.1** – Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}-3}}{x^5 \ln(x)}$
2. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$
4. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)}{\sqrt{x} - \ln(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{x^2+1}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x+1}} - e^{\sqrt{\ln(x)}}$
7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$
8. $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}} - e^x$
9. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$

★☆☆☆ **Exercice 9.2** – Étudier la limite en 0 (ou 0^+) de :

1. $f_1(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{\ln(1+\sqrt{x})^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}\cdot e^x}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin(x)\right)}{1 - \sqrt{\cos(\sqrt{x})}}$

Arctangente

☆☆☆☆ **Exercice 9.3** –

1. Calculer et simplifier la dérivée de la fonction f définie par
$$f(x) = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
pour tout x réel pour lequel cette expression est définie.
2. En déduire une expression simplifiée de f sur son domaine.

★☆☆☆ **Exercice 9.4** –

1. Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$.

2. En exploitant la formule précédente, calculer

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 + \operatorname{Arctan}(2+\sqrt{3}).$$

☆☆☆☆ **Exercice 9.5** – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Exprimer la dérivée de f.
2. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x$.

★★☆☆ **Exercice 9.6 –Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan} x$.
Pour les besoins de certaines comparaisons, et du tracé du graphe, on donne : $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \cong 0.46$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. **Asymptotes**
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Justifier que $\operatorname{Arctan} x - \dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ et que $\operatorname{Arctan} x + \dfrac{\pi}{2} \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$.
   (c) En déduire que la courbe de f présente en $+\infty$ et en $-\infty$ deux droites asymptotes dont on précisera les équations.
3. **Étude de f'**
   (a) Étudier les variations de f'. Déterminer les extrema éventuels, et les valeurs des limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$. On consignera ces résultats dans un tableau.
   (b) Justifier qu'il existe un unique réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$; justifier que $x_0 \in]-\frac{1}{2}, 0[$.
4. **Étude de f**
   (a) Dresser le tableau de variations de f. On ne cherchera pas à calculer la valeur de $f(x_0)$.
   (b) Justifier que $f(x_0) < 0$.
   (c) Déterminer la concavité de f.
   (d) Déterminer les éventuels points d'inflexion de f, et l'équation des tangentes à la courbe de f en ces points.
   (e) Tracer l'allure du graphe de f, en y positionnant asymptotes, extrema et points d'inflexion.

★★★☆ **Exercice 9.7** – Soit $x \mapsto f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ la réciproque de $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right).$$

★☆☆☆ **Exercice 9.8** – Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$.

Arcsinus et Arccosinus

☆☆☆☆ **Exercice 9.9** – Étude et graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\sin x$.

☆☆☆☆ **Exercice 9.10** –

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arccos}\cos x = x_0$.
2. Même question avec $\operatorname{Arccos}\cos x = x$.

★☆☆☆ **Exercice 9.11** – **(oral CCP)** Simplifier l'expression de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

★☆☆☆ **Exercice 9.12** – Simplifier les expressions.

$$a)\ f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right) \qquad b)\ f(x) = 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$c)\ f(x) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \frac{x}{2} \qquad d)\ f(x) = \text{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

★★☆☆ **Exercice 9.13** – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

1. $\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}\dfrac{4}{5} + \text{Arcsin}\dfrac{5}{13}$.
2. $2\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
3. $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$.
4. $\text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi$.

Fonctions hyperboliques

★★☆☆ **Exercice 9.14** –

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \text{th}(2^k x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

★★☆☆ **Exercice 9.15** – Pour $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \text{ch}(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(a+kb)$.

★★☆☆ **Exercice 9.16** – Résoudre l'équation $a\text{ch}(x) + b\text{sh}(x) = 0$ ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$), d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

★★☆☆ **Exercice 9.17** – Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x\text{ch}a}\text{ch}(x\text{sh}(a))$, où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

10

Calcul intégral

Calculs de primitives

★★☆☆ **Exercice 10.1** – Déterminer les primitives (sur des intervalles à préciser) des fonctions f définies de la manière suivante (on précisera le domaine de définition de f) :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{\mathrm{Arctan}(x)}}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(e^x)$
6. $f(x) = \sin(\ln(x))$
7. $f(x) = x^2 \ln(\sqrt{1-x})$,
8. $f(x) = \sin(x)\ e^x$
9. $f(x) = x\sqrt{x^2+x+1}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x\cos^2(\ln x)}$
11. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x+3)}$
13. $f(x) = \dfrac{3x^4+2x+1}{x(x^2-1)}$
14. $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$
15. $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}$
16. $f(x) = \sin(x)\ \mathrm{sh}(x)$,
17. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,
18. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$
19. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
20. $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}\right)$,
21. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$
22. $f(x) = \cos^2(x)\sin^3(x)$
23. $f(x) = \cos^2(x)\sin^4(x)$
24. $f(x) = x^3 \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$,
25. $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
26. $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$.
27. $f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

★★☆☆ **Exercice 10.2** – Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos^3(x)}{\sin(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{(\sin(x))^2+1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^3(x)(1+\cos^2(x))}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\alpha\cos^2(x)+\beta\sin^2(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$
6. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$
7. $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}$
8. $f(x) = (1+\tan^2(x))^2$
9. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^4(x)\mathrm{ch}(x)}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{th}(x)}$
12. $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^3(x)}{1+\mathrm{sh}(x)}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
14. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)\mathrm{ch}^2(x)}$
15. $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{3+\mathrm{ch}^2(x)}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$
17. $f(x) = \sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^3(x)}$

Calculs d'intégrales

★☆☆☆ **Exercice 10.3** – Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))(\ln(\ln(t)))}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^4\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\tan^2(x)\ \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$
11. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2(x))}$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+3)}$
15. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

★★☆☆ **Exercice 10.4** – Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)\ln x}{(x^2+2x+2)^2}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\ln(x)+\ln^2(x))(2+\ln(x))}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{3}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{6}{\pi}}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \ln^n x\ \mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$ sous forme de $\sum$.
5. $\displaystyle\int_{-1/42}^{1/42} \frac{x(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2-1)(2x^4+x^2+1)}\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)+3\sin^2(x)}$
10. $\displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-12x-16}}$
11. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_2^5 \frac{9x}{(x^2-4x+13)^2}\ \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+1}$
14. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\ \mathrm{d}x.$

★☆☆☆ **Exercice 10.5** – Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\ \mathrm{d}x.$

★☆☆☆ **Exercice 10.6** – Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall t\in[a,b],\ f(a+b-t)=f(t)$.

1. Trouver une relation simple entre $\displaystyle\int_a^b tf(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x.$

★★★☆ **Exercice 10.7 – (Développement en série de l'exponentielle et irrationnalité)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t.$

1. Trouver, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\mathrm{e}-\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}.$
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}=\mathrm{e}.$
3. En déduire que e est irrationnel.

Suites d'intégrales

★★☆☆ **Exercice 10.8** – Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1, $I_n + I_{n+2}$, puis I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 10.9** – Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x$.

★★☆☆ **Exercice 10.10** – Calculer $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x$ pour tout (p,q) dans $\mathbb{N}^2$.

★★☆☆ **Exercice 10.11** – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, \mathrm{d}x$. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★★☆☆ **Exercice 10.12** – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n \tan x \, \mathrm{d}x$. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$ et $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

★★★☆ **Exercice 10.13** – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{n,x}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\}, \quad f_{n,x}(t) = \frac{1}{2n\pi} \frac{\sin^2\left(n\frac{x-t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}.$$

1. Justifier que $f_{n,x}$ peut se prolonger sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue et 2π-périodique $\tilde{f}_{n,x}$.

On pose, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $I(n,x,\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+\pi} \tilde{f}_{n,x}(t) \, \mathrm{d}t$.

2. Montrer que pour tout $(n,x,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$, on a $I(n,x,\alpha) = I(n,0,-\pi)$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_{n,0,-\pi}$.
   (a) Exprimer I_n à l'aide de $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)\sin(u)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} \, \mathrm{d}u$
   (b) En que $I_{n+1} - I_n = 0$
   (c) En déduire la valeur de $I(n,x,\alpha)$, pour tout $(n,x,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$.

★☆☆☆ **Exercice 10.14** – **(Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)**
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt)f(t) \, \mathrm{d}t = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt)f(t) \, \mathrm{d}t = 0$

★★★☆ **Exercice 10.15** – **(Irrationnalité de π)**

1. Soit a, $b \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $n \geqslant 1$: $\quad P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n, \qquad I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x.$
   (a) Montrer que I_n tend vers 0.
   (b) Montrer que pour tout n, P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et en $\frac{a}{b}$.
2. On veut montrer que π est irrationnel. On raisonne par l'absurde. On peut alors choisir dans la question précédente (a,b) tels que $\pi = \frac{a}{b}$.
   Montrer que pour tout n, I_n est entier. En déduire une contradiction

Intégrales dépendant de leurs bornes

★★★☆ **Exercice 10.16** – Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$: $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$.

1. Existence, dérivabilité, dérivée, variations de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$. En déduire un encadrement, puis les limites en 0, 1 et $+\infty$ de f.
3. On prolonge f par continuité en 0 et 1. Montrer que la fonction obtenue g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

★★☆☆ **Exercice 10.17** – Calculer $\displaystyle\lim_{u\to 0}\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

★★☆☆ **Exercice 10.18** – Soit, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \mathrm{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \mathrm{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f est constante, puis expliciter f.

Intégrales impropres

★★☆☆ **Exercice 10.19** – Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

★★☆☆ **Exercice 10.20** – Calculer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A} \frac{\sqrt{\mathrm{Arctan}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$

★★★☆ **Exercice 10.21** – **(Intégrale de Dirichlet)**
Montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, c'est-à-dire que

$$a \mapsto \int_a^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad b \mapsto \int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

admettent une limite lorsque $a\to 0^+$ et $b\to+\infty$.

★★★★ **Exercice 10.22** – Pour une fonction f continue sur $]a,b[$, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la limite lorsque x tend vers a^+ et y vers b^- de $\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$, lorsque cette limite existe. En considérant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t$, déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

11

Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires du premier ordre

★★☆☆ **Exercice 11.1** – Résoudre sur tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : x \mapsto y(x)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $(1+x^2)y' - 2xy = 1$
2. $(1-x^2)y' - y = 0$
3. $xy' + y - \ln|x| = 0$
4. $y'(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x) + y = x$
5. $y' - (x+1)(y+1) = 0$.
6. $y' = |y|$ sur $\mathbb{R}$
7. $xy' = |y-1|$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. $2xe^y y' + e^y - x^2 = 0$
9. $y' = \dfrac{x+1}{x^2}y - 2\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

☆☆☆☆ **Exercice 11.2** – Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

★☆☆☆ **Exercice 11.3** – **(X)** Résoudre l'ED $xy' = y + x$.

★☆☆☆ **Exercice 11.4** – Résoudre l'équation différentielle $xy' = y + x$

★★☆☆ **Exercice 11.5** – Résoudre $(2x - x^2)y' + (x-1)y - 1 = 0$. Étudier l'existence de solutions sur $]-\infty, 2[$, sur $]0, +\infty[$.

★★★★ **Exercice 11.6** – Soit a et b deux fonctions continues telles que $a \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$, alors toute solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.
2. Montrer que si $b \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = 0$, alors il existe une et une seule solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$. Que peut-on dire des limites des autres solutions ?

La deuxième propriété reste vraie sans l'hypothèse de positivité sur b, mais cela nécessite l'utilisation de quelques arguments liés à l'étude des intégrales impropres.

Équations différentielles linéaires du second ordre

★☆☆☆ **Exercice 11.7** – Déterminer les solutions des ED suivantes d'inconnue y, de la variable réelle x.

1. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x - x - 1$, avec $y(0) = y'(0) = 0$

2. $y'' + y' + \frac{1}{2}y = \sin(x)$, avec $y(0) = y'(0) = 0$.
3. $y'' + y = \mathrm{e}^{-|x|}$.
4. $y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ (on pourra poser $t = \mathrm{Arctan}(x)$)
5. $x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$ (on pourra chercher une solution polynomiale)

★☆☆☆ **Exercice 11.8** – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations différentielles suivants, d'inconnues y et z, de la variable x, en se ramenant à des équations d'ordre 2 portant sur chacune des variables :

1. $\begin{cases} y' = z + x^2 \\ z' = y - x^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' = y + 8z + \mathrm{e}^t \\ z' = 2y + z + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$

★★★☆ **Exercice 11.9** – Résoudre $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Quelques équations non linéaires

★☆☆☆ **Exercice 11.10** – Résoudre $y' = y^2 + 1$.

12

Suites

Certains exercices de cette feuille nécessitent d'avoir vu certaines notions du chapitre suivant (équivalents, O). Ces notions sont utilisées ici de façon élémentaire, ne nécessitant pas de dextérité technique. On pourra par exemple partir des définitions suivantes :

- *Si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas pour n assez grand, elles sont dites équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$*
- *Sous les mêmes hypothèses, (u_n) est dite dominée par (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$.*

Convergence, divergence, majorations

★☆☆☆ **Exercice 12.1** – Soit (u_n) une suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que u_n admet un plus grand ou un plus petit élément.

★★★☆ **Exercice 12.2** – Soit f une fonction réelle continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$. et M son maximum. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n\ dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

★★☆☆ **Exercice 12.3** –

1. En considérant $\sin(n+1)$, montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Retrouver le résultat à l'aide de la définition de la limite, en condidérant la répartition des $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}$ sur le cercle trigonométrique

★☆☆☆ **Exercice 12.4** – Soit (u_n) telle que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer de deux manières différentes (dont l'une avec ε) que $u_n \to 0$.

☆☆☆☆ **Exercice 12.5** – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 1.

★★★☆ **Exercice 12.6** – Soit (u_n) une suite minorée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer que (u_n) converge.

★★★☆ **Exercice 12.7 – (Théorème de la moyenne de Cesàro, à considérer comme du cours)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers ℓ (théorème de Cesàro).

La suite de l'exercice propose une application du théorème de Cesàro.

2. Montrer que si $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \binom{2n}{n}^{1/n}$.

★★★☆ **Exercice 12.8** – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes tendant vers 0. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|b_k|\leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}$ tend vers 0.

★★★★ **Exercice 12.9** –

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $u_{n+m}\leqslant u_n+u_m$. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers une limite $-\infty$ ou finie.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $v_{m+n}\leqslant v_mv_n$. Montrer que $\left(\sqrt[n]{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sqrt[n]{v_n}\right)$.

★★★★ **Exercice 12.10** – **(Caractérisation de la convergence au sens de Cesàro, oral X)**
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive, majorée. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_n \longrightarrow 0$

(ii) Il existe A une partie de $\mathbb{N}$ de densité nulle (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|A\cap[\![0,n-1]\!]|}{n}\longrightarrow 0$) tel que $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}}a_n = 0$.

Monotonie

★★☆☆ **Exercice 12.11** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2u_n\leqslant u_{n+1}+u_{n-1}$.

1. Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

★★★☆ **Exercice 12.12** – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. À cette suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe une suite $u(a)=(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n(a)=\sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}}.$$

1. Montrer que $u(a)$ est une suite croissante.
2. Si a est la suite constante égale à 1, montrer que $u(a)$ converge, et calculer sa limite.
3. Si la suite a est donnée par $a_n=\lambda^{2^{n+1}}$, pour un $\lambda>0$ donné, montrer que $u(a)$ converge, et calculer sa limite.
4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqslant a'_n$, montrer que on a aussi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(a)\leqslant u_n(a')$. Est -ce que $u(a)$ converge lorsque $a_n=n$? $a_n=n!$? $a_n=n^n$?
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n(a)\geqslant a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Trouver un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u(a)$ ne converge pas.

★★☆☆ **Exercice 12.13** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

★☆☆☆ **Exercice 12.14** – Soient $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $u_0 \geqslant v_0$, $0 < q < p$, et pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}.$$

Montre que (u_n) et (v_n) converge vers une limite commune, qu'on déterminera.

★★☆☆ **Exercice 12.15 – (Étude d'une relation de récurrence linéaire à coefficients non constants)** On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}.$$

1. On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.
   (a) Étudier la monotonie et la convergence des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
   (c) En étudiant les deux suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.
2. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n$.
   (b) Déterminer, suivant les valeurs de λ et μ la limite de (u_n) (la discussion pourra faire intervenir le réel ℓ).

★★☆☆ **Exercice 12.16** –
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_1 = 0,\quad v_1 = 1,\quad w_1 = 2,$$

et les trois relations :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n+w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n+2w_n}{4} \\ w_{n+1} = \frac{u_n+2v_n+3w_n}{6} \end{cases}$$

1. Comparer les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite.
3. Trouver trois réels non nuls α, β, γ tels que la suite $(\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit constante.
4. Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Suites récurrentes

☆☆☆☆ **Exercice 12.17 – (Explicitation de suites de type classique)**
Pour chacune des suites ci-dessous, expliciter le terme u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 2$, pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 4$
2. $u_0 = 3$, pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$
3. $u_0 = 1$, pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+2} = 12u_n - u_{n+1}$.

5. $u_0 = 1$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$
6. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 3$.
7. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n - 4^{n+3} + 2n + 1$.

★★★☆ **Exercice 12.18 – (Étude d'une relation de récurrence d'ordre 2 non linéaire)**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie qu'on déterminera.

★★☆☆ **Exercice 12.19 – (Étude de la convergence de suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$)**
Étudier la convergence des suites définies par les récurrences ci-dessous :

(a) $u_0 \geqslant \dfrac{-3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ (b) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2}$ (c) $u_0 \neq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$

(d) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$ (e) $u_0 \neq -5$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ (f) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

★★☆☆ **Exercice 12.20 – (Récurrence alternée)**
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$, et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

Étudier la convergence de (u_n).

★★☆☆ **Exercice 12.21 – (Algorithme de Héron)**
Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?
5. On prend $a = u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

★★★☆ **Exercice 12.22** – *On considère les suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$u_0 = a, \ a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 \qquad \textit{et} \qquad v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n).$$

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que quels que soient les entiers naturels n et p :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note α sa limite.
4. Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$.

5. On pose : $\beta_n = \exp(\alpha \cdot 2^n) - u_n$. En exprimant $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha \cdot 2^n)$, prouver que $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha \cdot 2^n) + O(\mathrm{e}^{-\alpha 2^n})$.

★☆☆☆ **Exercice 12.23 – Équivalent d'une suite récurrente)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En calculant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right)$ de deux manières différentes, déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★★☆☆ **Exercice 12.24 – (Équivalent d'une suite récurrente à l'aide du théorème de Cesàro)**
On pourra utiliser dans cet exercice le développement suivant au voisinage de 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)$ converge vers ℓ.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.
   (b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha})$ existe et est un réel non nul.
   (c) Déterminer un équivalent de u_n.

La méthode est à retenir.

★★★☆ **Exercice 12.25 – (Oral X)**
Soit $c > 0$ et $f : [0,c] \to [0,c]$ une fonction continue, telle que au voisinage de 0,

$$f(x) = x - ax^{\alpha} + o(x^{\alpha}), \quad \text{où} \quad a > 0 \text{ et } \alpha > 1.$$

1. Montrer que pour u_0 assez petit, (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.
2. Déterminer alors un équivalent de u_n.
3. Traiter l'exemple de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

Suites définies implicitement

★★☆☆ **Exercice 12.26 – (Une suite définie implicitement)**
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme : $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $P_n(x_n) = 0$, et que de plus $1 < x_n \leqslant 2$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$.
3. En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

★★★☆ **Exercice 12.27 – (Équivalent d'une suite définie implicitement)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.

3. Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que $x_n - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

★★★☆ **Exercice 12.28 – (Équivalent d'une suite définie implicitement)**
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. En considérant $f_n\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$, déterminer la limite ℓ de β_n.
5. Déterminer un équivalent de $\ln(\beta_n)$, puis de $\beta_n - \ell$.

★★☆☆ **Exercice 12.29 – (Équivalent d'une suite définie implicitement)**
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = x^{k+1} + x^k - n = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$
2. Étudier les variations de x_n.
3. Étudier la limite éventuelle de (x_n).
4. Trouver un équivalent simple de x_n.

★★★★ **Exercice 12.30** – (Oral X)

1. Montrer que l'équation $x\sin(x) - c\cos(x)$ (où $c > 0$) admet une unique racine x_n dans tout intervalle $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, et qu'elle n'en admet pas d'autre dans $\mathbb{R}_+$.
2. Trouver un équivalent θ_n de $x_n - n\pi$ puis un équivalent de $x_n - n\pi - \theta_n$.

Recherche d'équivalents

★☆☆☆ **Exercice 12.31 – (Équivalent de sommes partielles et restes de séries)**

1. Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où $\alpha \leqslant 1$.
2. Même question pour $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.
3. Même question pour $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

★★★★ **Exercice 12.32** –

1. Soit $\alpha \in]-1,1[$, et soit (x_n) une suite bornée telle que $x_n + \alpha x_{2n}$ converge. Montrer que (x_n) converge.
2. Montrer que le résultat précédent peut être mis en défaut lorsque $\alpha = 1$.
3. Soit $\beta \in]-2,2[$ et (u_n) une suite telle que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, et telle que $u_n + \beta u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer un équivalent de u_n.

★★☆☆ **Exercice 12.33 – (Oral X)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$, etc. Elle prend une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3 et ainsi de suite. Donner une expression du terme général (à l'aide de la fonction partie entière) et un équivalent de u_n.

★★★☆ **Exercice 12.34 – (Oral ENS)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout n. Déterminer un équivalent de u_n.

Suites extraites, valeurs d'adhérence, compacité

☆☆☆☆ **Exercice 12.35** – Déterminer les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

★★☆☆ **Exercice 12.36** – Soit f une application continue de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]a,b]$ et telle que $u_n \to a$, $f(u_n)$ est convergente. Montrer que f admet une limite finie en a.

★★★☆ **Exercice 12.37** – Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est fermé.

★★★☆ **Exercice 12.38** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim u_n = 0$. Montrer qu'on peut trouver une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante de limite nulle.

★★★☆ **Exercice 12.39 – (Compacité au sens de Borel et Lebesgue)**
Soit (E,d) un espace métrique et $K \subset E$. On dit que K est BW-compact s'il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass (i.e. de toute suite de K on peut extraire une suite convergente dans K) ; K est BL-compact si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ (propriété de Borel-Lebesgue). On dit que de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

1. Montrer que BL-compact $\Longrightarrow$ BW-compact.
2. Montrer que si K est BW-compact, K est précompact (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε)
3. Supposons K BW-compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant K. Montrer qu'il existe r tel que pour tout $x \in K$, $B(x,r)$ soit inclus dans l'un des U_i (r est appelé nombre de Lebesgue du recouvrement).
4. En déduire que BW-compact $\Longrightarrow$ BL-compact.

★★★★ **Exercice 12.40** – Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue, $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

★★★☆ **Exercice 12.41** – Soit f définie sur un intervalle $[a,b]$, telle que pour tout $x_0 \in [a,b]$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} f(x)$ existe.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $D_\varepsilon = \left\{x_0 \in [a,b] \mid \left|\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} f(x) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble $D = \left\{x_0 \in [a,b] \mid \left|\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} f(x) - f(x_0)\right| \neq 0\right\}$ est au plus dénombrable.

★★★★ **Exercice 12.42 – (Oral X)**
Soit $[a,b]$ un intervalle. On dit que f définie sur $[a,b]$ est réglée, si elle admet une limite à gauche et à droite en tout point. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.

★★☆☆ **Exercice 12.43** – Soit x un irrationnel, et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs entières, (q_n) ne s'annulant pas. Montrer que si $\frac{p_n}{q_n} \to x$, alors $|p_n| \to +\infty$ et $|q_n| \to +\infty$.

★★★★ **Exercice 12.44** – Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))$ est $[-1,1]$

★★☆☆ **Exercice 12.45 – (Convergence des suites de Cauchy réelles)**

Cet exercice propose une démonstration de la convergence des suites de Cauchy réelles basée sur l'étude des valeurs d'adhérence.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy réelle, c'est à dire une suite réelle telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant \mathbb{N}, \quad |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

1. Montrer que (u_n) admet une valeur d'adhérence réelle.
2. Montrer que (u_n) ne peut pas admettre deux valeurs d'adhérence distinctes. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

13 Calcul asymptotique

Calculs d'équivalents

★☆☆☆ **Exercice 13.1** – Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln 2n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right),\ a \in \mathbb{R}^*$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$;
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{n^2+n+1}$;
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n^2 + n + 1)$;
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 + n - \ln(n^3 + n)$;
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(n^2 + 1) - \sqrt{n}$;
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}} - n^6$;
9. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}} - \ln n$;
10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n}}$;
11. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$;
12. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\cos\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^5 - 1.$

★☆☆☆ **Exercice 13.2** – Déterminer des équivalents simples des fonctions f suivantes au point x_0 :

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)};\ x_0 = 0;$
2. $f(x) = \ln(\cos x);\ x_0 = 0;$
3. $f(x) = x^x - 1;\ x_0 = 0;$
4. $f(x) = (8+x)^{\frac{1}{3}} - 2;\ x_0 = 0;$
5. $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}};\ x_0 = +\infty;$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(x+a)}{\ln x}\right);\ a \in \mathbb{R}^*;\ x_0 = +\infty;$
7. $f(x) = \sin x;\ x_0 = \pi;$
8. $f(x) = 1 + \cos x;\ x_0 = \pi;$
9. $f(x) = x^{x^{\frac{1}{x}}};\ x_0 = +\infty;$
10. $f(x) = \ln(\ln(ax+b));\ a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R};\ x_0 = \dfrac{e-b}{a}.$

★★☆☆ **Exercice 13.3** – Déterminer un équivalent, le plus simple possible, de f en x_0 :

1. $\ln\left(\dfrac{\mathrm{th}(x)}{x}\right),\ x_0 = +\infty$
2. $\ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right),\ x_0 = +\infty$
3. $\ln(1 + x + \sqrt{4+x}),\ x_0 = +\infty$
4. $\ln(1 + x + \sqrt{4+x}) - \ln(3),\ x_0 = 0$
5. $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}),\ x_0 = +\infty$
6. $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 2\ln(2),\ x_0 = 0$
7. $\ln(\ln(\mathrm{e} + x)),\ x_0 = 0$
8. $x\left(\sqrt{\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right)\right),\ x_0 = 0$

9. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $x_0 = +\infty$
10. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} - \sqrt{2}$, $x_0 = 0$
11. $e^{\sqrt{\ln(2+x)}} - e^{\sqrt{\ln(2)}}$, $x_0 = 0$
12. $\mathrm{Arcsin}(\pi(\sin(x)))$, $x_0 = 0$
13. $e^{\sqrt{x^2+\cos(x)}} - e$, $x_0 = 0$
14. $(1+\sin(x))^{\cos(x)} - 1$, $x_0 = 0$
15. $\cos(x)^{\sin(x)} - 1$, $x_0 = 0$
16. $\mathrm{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 1$
17. $x^x - 4$, $x_0 = 2$
18. $x^x - x$, $x_0 = 1$
19. $(1+x^2)^x$, $x_0 = +\infty$

★☆☆☆ **Exercice 13.4** – Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes en x_0 :

1. $f(x) = \sin 3x - \tan x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$, $x_0 = +\infty$
3. $f(x) = \ln(1+\sin x)^2 - \cos^2 x + 1$, $x_0 = 0$.

☆☆☆☆ **Exercice 13.5** – Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes en x_0

1. $f(x) = \sin(2x\ln x) - \ln(2+x)\tan x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \cos(1-e^{\sin x}) - 1$, $x_0 = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-e^x}} - (\cos x)^{\frac{1}{3}}$

★☆☆☆ **Exercice 13.6** – Donner un équivalent simple des suites définies par :

1. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right) - 1$
2. $u_n = e^{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\ln n}\right)} - \sqrt{e}$
3. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n)$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Utilisation des équivalents pour des calculs de limites

☆☆☆☆ **Exercice 13.7** – Déterminer la limite de $u_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$.

☆☆☆☆ **Exercice 13.8** – Déterminer la limite de $\left(\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de α dans $\mathbb{R}$.

★☆☆☆ **Exercice 13.9** – Déterminer la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{x\sin(x)\ln(1-x^2)}$; $x_0 = 0$;
2. $f(x) = \dfrac{1-\cos 5x}{x(x-2)\tan 3x}$; $x_0 = 0$;
3. $f(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})^5-1}{x-\sqrt{x}}$; $x_0 = 0$;
4. $f(x) = \dfrac{x^{12}-1}{x^{33}-1}$; $x_0 = 1$;
5. $f(x) = (\ln x)(\tan(\ln(1+x)))$; $x_0 = 0$;
6. $f(x) = \sqrt{1+x^2}\ln\left(1-\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)$; $x_0 = +\infty$;
7. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; $x_0 = +\infty$;
8. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{x+1}{x}}-x}{\ln(1+x^2)}$; $x_0 = +\infty$;
9. $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$; $x_0 = +\infty$;
10. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$; $x_0 = +\infty$;
11. $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; $x_0 = 0$;
12. $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;
13. $f(x) = \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\tan x}$; $x_0 = 0$;
14. $f(x) = \dfrac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2 x}$; $x_0 = 0$;
15. $f(x) = \dfrac{(8x^3+1)^{\frac{1}{3}}-2x}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}-x}$; $x_0 = +\infty$;
16. $f(x) = (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$; $x_0 = 2^-$.

★☆☆☆ **Exercice 13.10** – Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$;
3. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n+1}$.
4. $u_n = \dfrac{(\ln n)(\sin n)}{n}$
5. $u_n = (n^2+1)e^{-\sqrt{n}}$
6. $u_n = \sqrt{\sin\dfrac{1}{n}\ln(n^3+n+1)}$
7. $u_n = \dfrac{e^{\frac{n^2+1}{n+2}}}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$
8. $u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^3+2}\right)$
9. $u_n = \ln\left(\sin\left(\pi\cos(e^{-n})\right)\right)$

★☆☆☆ **Exercice 13.11** – Calculer la limite de :

1. $u_n = \left(1+\sin\dfrac{1}{n}-\exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln(n+\sqrt{n})\right)\right)^{n+\ln n}$
2. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n}}}{(\ln n)^n}$
3. $u_n = \mathrm{ch}\left(\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.
4. $u_n = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{3^n}$

★★☆☆ **Exercice 13.12** – Calculer les limites en x_0 :

1. $f(x) = \dfrac{x^a-\left(\frac{a+b}{2}\right)^a}{x^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^b}$; $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$; $x_0 = \frac{a+b}{2}$.
2. $f(x) = \left(((x+1)(x+2)\cdots(x+n))^{\frac{1}{n}}-x\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x_0 = +\infty$
3. $f(x) = \left(\dfrac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos(a)}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$, $\cos(a) \neq 0$; $x_0 = +\infty$.
4. $f(x) = (\cos(ax))^{\mathrm{cotan}(bx)}$, $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; $x_0 = +\infty$
6. $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$: $x_0 = +\infty$
7. $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$: $x_0 = 0^+$

★★☆☆ **Exercice 13.13 – (Et le Calcul fut. Et l'Homo Bestialus maîtrisa le Calcul.)**
Calculer les limites en x_0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)e^{1/\cos(x)}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}^-$
2. $f(x) = \ln(1+\sin(x))\cdot\mathrm{cotan}(2x)$; $x_0 = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{\ln^2(x)+1}{\ln(x)+2}}$; $x_0 = +\infty$
4. $f(x) = x^2e^{1/\sin(x)}$; $x_0 = 0^-$
5. $f(x) = (x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$; $x_0 = 1$
6. $f(x) = (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$; $x_0 = \frac{1}{2}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$, $x \to 0$
8. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$; $x_0 = 1$
9. $f(x) = \dfrac{(\mathrm{Arcsin}(x))^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$; $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
10. $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(2\sin(x))-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$
11. $f(x) = \dfrac{x\ln(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2+1}$; $x_0 = +\infty$
12. $f(x) = \dfrac{e^{\tan(x)}}{x-\frac{\pi}{2}}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}^+$
13. $f(x) = \dfrac{2\cos^2(x)+\cos(x)-1}{2\cos^2(x)-3\cos(x)+1}$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$
14. $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}$; $x_0 = e$
15. $f(x) = \dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$; $x_0 = 1^+$
16. $f(x) = \dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$; $x_0 = 0^+$
17. $f(x) = \dfrac{\sin(x)^{\sin(x)}-1}{\tan(x)^{\tan(x)}-1}$; $x_0 = 0^+$
18. $f(x) = \dfrac{1}{xe^x(x+1)} - \dfrac{1}{x\cos(x)}$; $x_0 = 0$
19. $f(x) = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2x(e^{\pi x}+1)}$; $x_0 = 0$
20. $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}$; $x_0 = 1$
21. $f(x) = \left(\sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right)$; $x_0 = -\infty$
22. $f(x) = (\ln(x))^{\ln(e-x)}$, $x_0 = e^-$
23. $f(x) = (2-x)^{1/\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; $x_0 = 1$
24. $f(x) = (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; $x_0 = 1$
25. $f(x) = \left(\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)\right)^{x^2}$; $x_0 = +\infty$
26. $f(x) = (1+\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x/2)}}$; $x_0 = \pi$
27. $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{2}}$; $x_0 = +\infty$
28. $f(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\mathrm{cotan}(x)}$; $x_0 = 0$
29. $f(x) = (1+\ln(x))^{\tan\frac{\pi}{x}}$; $x_0 = 1$
30. $f(x) = \left(\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; $x_0 = 1$
31. $f(x) = (\cos(x))^{\ln(x)}$; $x_0 = 0^+$
32. $f(x) = \left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos(3x)}}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$
33. $f(x) = \left(\dfrac{1+\tan(x)}{1+\mathrm{th}(x)}\right)^{\frac{1}{\sin^3(x)}}$; $x_0 = 0$
34. $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)}\right)^{x}$; $x_0 = +\infty$
35. $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{ch}\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\right)^{\mathrm{cotan}(x)}$; $x_0 = 0^+$
36. $f(x) = (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$; $x_0 = 0$
37. $f(x) = (2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$; $x_0 = 2$
38. $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{\sin(x)}{\ln(\cos(x))}}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}^-$
39. $f(x) = \dfrac{1}{x^{(x^x)-1}}$, $x_0 = 0^+$
40. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-\ln(x))^x}$; $x_0 = 0^+$
41. $f(x) = (3-2e^{\tan(x)})^{\pi-2x}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}^-$
42. $f(x) = \tan(x)^{\sin(x)}$; $x_0 = 0^+$
43. $f(x) = (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$; $x_0 = +\infty$
44. $f(x) = x^{1/\ln(e^x-1)}$, $x_0 = 0^+$
45. $f(x) = x^{1/(1+2\ln(x))}$, $x_0 = 0^+$
46. $f(x) = \left(x\cos\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{x/(x^2+1)}$; $x_0 = 0^+$

Merci à Jean-Marie Monier pour tous ces exercices, calculatoires et moins calculatoires, ayant accompagné ma propre formation.

★★☆☆ **Exercice 13.14** – Étudier la convergence des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{\ln n}}}{\ln(n)}$
3. $u_n = \sqrt{n}\dbinom{pn}{qn}x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q < p$

4. $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$
5. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$
6. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
7. $u_n = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$

Logarithme et exponentielle d'un équivalent

☆☆☆☆ **Exercice 13.15** – Soit $f,g:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ deux fonctions et $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f \underset{x_0}{\sim} g$.

1. Est-ce que $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$?
2. On suppose que f admet en x_0 une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^+$, $\ell\neq 1$. Montrer que $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$.

☆☆☆☆ **Exercice 13.16** – Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions, et $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f \underset{x_0}{\sim} g$.

1. Est-ce que $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$?
2. On suppose que f est bornée sur un voisinage de x_0. Montrer que $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$.

Domination, négligeabilité

★★☆☆ **Exercice 13.17** – Soit P et Q deux polynômes de degré au plus n, et $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que si $P(x)-Q(x) = o((x-x_0)^n)$ au voisinage de x_0, alors $P=Q$.

★★☆☆ **Exercice 13.18** – Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = +\infty$. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$. Que dire dans le cas où $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$?

★☆☆☆ **Exercice 13.19** – Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!)$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$

★★★☆ **Exercice 13.20** – Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

- $N_1(x)$ le nombre d'entiers naturels $n\leqslant x$ de la forme a^m, $a\geqslant 2$, $m\geqslant 2$;
- $N_2(x)$ le nombre d'entiers naturels $n\leqslant x$ de la forme $n=a^b+c^d$, $a,b,c\geqslant 2$, $d\geqslant 3$
- $N(x)$ le nombre d'entiers naturels $n\leqslant x$ de la forme a^b+c^d, $a,c\geqslant 0$, $b,d\geqslant 2$.

1. Montrer que $N_1(x) = O(\sqrt{x}\ln(x))$
2. Montrer que $N_2(x) = O(x^{\frac{5}{6}}(\ln(x))^2)$
3. En déduire que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A>0$, tel que pour tout $x>A$,

$$N(x)\leqslant\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x.$$

14

Approximations polynomiales

Formules de Taylor

☆☆☆☆ **Exercice 14.1** – Trouver une valeur approchée rationnelle à 10^{-4} près de $\sqrt{e}$.

☆☆☆☆ **Exercice 14.2** – Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} < (1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16}.$$

★☆☆☆ **Exercice 14.3** – En majorant $\left|\sin\left(\frac{1}{n}\sin x\right) - \frac{1}{n}\sin x\right|$, déterminer la limite de $u_n = n\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin x\right)\ \mathrm{d}x$.

★★☆☆ **Exercice 14.4** – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

★★★☆ **Exercice 14.5** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geqslant 4$.

★★☆☆ **Exercice 14.6** – Le but de cet exercice est de montrer que e est irrationnel. On suppose que $e = \frac{m}{n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}$. Quitte à multiplier m et n par un même coefficient, on peut supposer que $n + 1 > \mathrm{e}$.

1. Montrer que $0 < \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$.
2. En déduire une contradiction.

☆☆☆☆ **Exercice 14.7** – Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a)$, $P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$ soient strictement positifs. Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

★☆☆☆ **Exercice 14.8** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N(f^{(n)})} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{N(f)}$, où $N(g)$ désigne $\sup_{[0,1]} |g|$.

★★☆☆ **Exercice 14.9** – On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose alors $M_0 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. On se propose de montrer que f' est alors bornée sur $\mathbb{R}$, et d'établir une majoration de $M_1 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ à l'aide de M_0 et M_2.

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$: $|2hf'(x) - (f(x+h) - f(x-h))| \leqslant M_2 h^2$.
2. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_2 h}{2} + \dfrac{M_0}{h}$.
3. Conclure que f' est bornée, et $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

★★☆☆ **Exercice 14.10** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, telle que pour tout x et pour tout y, on ait
$$f(x+y)f(x-y) \leqslant f(x)^2.$$
Montrer qu'alors, pour tout x, on a : $f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$.

★★☆☆ **Exercice 14.11 – Interversion dérivée/intégrale**
Soit, pour tout $t \in [0,1]$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_t(x) = \sin(xt)\mathrm{e}^{xt^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f_t(x)\ \mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $h \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_0^1 f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 2|h|\mathrm{e}^{|x|+|h|}.$$
3. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

★★☆☆ **Exercice 14.12 – Intégrale de Gauss**
L'objet de cet exercice est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qu'on note : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Pour tout $t \in [0,1]$, on note f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_t(x) = \mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}$, et on définit g sur $\mathbb{R}_+$ par
$$g(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}\ \mathrm{d}t$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{g(x+u) - g(x)}{u} - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right|$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0.
Qu'en déduisez-vous ?
2. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2$.
Montrer que $h + g$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Développements limités, développements asymptotiques

☆☆☆☆ **Exercice 14.13** – Calculer les développements limités en 0 à l'ordre indiqué de :

1. $\sin x\ \cos 2x$ (ordre 4)
2. $\mathrm{e}^{\sin 2x}$ (ordre 4)
3. $\ln(1+\sin x)$ (ordre 3)
4. $\mathrm{e}^{\cos x}$ (ordre 3)
5. $\sqrt{1+\cos x}$ (ordre 4)
6. $\dfrac{x^3}{\sin^3(x)}$ (ordre 5)
7. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ (ordre 3)
8. $\dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 4)
9. $\tan(\pi \mathrm{e}^x)$ (ordre 4)
10. $(1 - x\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 3)
11. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (ordre 3)
12. $\mathrm{e}^{\sqrt{4+x}}$ (ordre 2)
13. $\sqrt{1+x-x^2} - (\cos x)^{\frac{1}{3}}$ (ordre 4)
14. $\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ (ordre 5)
15. $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x}$ (ordre 4)
16. $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ (ordre 2)

☆☆☆☆ **Exercice 14.14** – Calculer les développements limités à l'ordre indiqué, au voisinage de 0

1. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\sin x)}$ (ordre 4)
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ (ordre 4)
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}}{\sqrt{1+\sin x}}$ (ordre 2)
4. $f(x) = \ln(\sqrt{3+x}) - \sqrt[3]{1+x}$ (ordre 2)

☆☆☆☆ **Exercice 14.15** –

1. DL à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{1}{2}$ de $\cos(\pi x(1-x))$
2. DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\ln\sqrt[5]{2+\cos x}$
3. DL à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de $\ln(\sin x)$.

★☆☆☆ **Exercice 14.16** – Déterminer les développements limités à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

1. $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$ (ordre 8)
2. $\mathrm{Arcsin}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ (ordre 4)
3. $\mathrm{Arcsin}(\mathrm{Arcsin} x)$ (ordre 8)
4. $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3)
5. $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\dfrac{\sin x}{x}$ (ordre 5)
6. $\sin(x - \mathrm{Arctan}\, x)$ (ordre 11)

★☆☆☆ **Exercice 14.17** – Déterminer un équivalent simple en x_0 de :

1. $\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}} - (\mathrm{e}-1)$ $(x_0 = 1)$
2. $\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}}$ $(x_0 = \mathrm{e})$
3. $\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$ $(x_0 = 0)$
4. $x^x - \sin x^{\sin x}$ $(x_0 = 0^+)$
5. $\dfrac{(\tan x)^x - x^{\tan x}}{(\mathrm{th} x)^x - x^{\mathrm{th} x}}$ $(x_0 = 0^+)$
6. $\mathrm{sh}(\sin x) - \sin(\mathrm{sh} x)$ $(x_0 = 0)$
7. $\mathrm{Arctan}(x - x\cos x)$ $(x_0 = 0)$
8. $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} - \dfrac{\pi}{2}$ $(x_0 = 0)$

☆☆☆☆ **Exercice 14.18** – Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x+2x^2)}{\ln(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)}$.

☆☆☆☆ **Exercice 14.19** – Calculer $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{2}{x(\mathrm{e}^x-1)} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)$.

☆☆☆☆ **Exercice 14.20** – Calculer les limites en x_0 des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\tan^n x - 1}{2\sin^2 x - 1}$ $(x_0 = \dfrac{\pi}{4})$
2. $\dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\ln\sin x}$ $(x_0 = \dfrac{\pi}{2})$
3. $\dfrac{\sin^{p+q} x - 1}{(\sin^p x - 1)(\sin^q x - 1)}$ $(x_0 = \dfrac{\pi}{2})$
4. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(x_0 = 0)$
5. $x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x_0 = +\infty)$
6. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ $(x_0 = 0)$
7. $\dfrac{\sin x(\tan x - x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$ $(x_0 = 0)$
8. $\dfrac{\sin x - \tan x}{1 - x + \ln(1+x) - \cos x}$ $(x_0 = 0)$
9. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$ $(x_0 = 2)$

☆☆☆☆ **Exercice 14.21** – Asymptote en $+\infty$ et position de la courbe au voisinage de $+\infty$ pour $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$.

☆☆☆☆ **Exercice 14.22** – Asymptote en $+\infty$ et position de la courbe au voisinage de $+\infty$ pour $x \mapsto f(x) =$

$\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]\sqrt{x^2+1}.$

☆☆☆☆ **Exercice 14.23** – Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ ssi $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$.

★☆☆☆ **Exercice 14.24** – Soit f la fonction définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ si $x\neq0$. Montrer que f admet un DL à tout ordre en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

★☆☆☆ **Exercice 14.25** – Déterminer les dérivées successives en 0 de f jusqu'à l'ordre 6, où f est définie là où cela a un sens par $f(x)=\sin x\,\mathrm{Arctan}(\cos x)$

★★☆☆ **Exercice 14.26** –
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des involutions de $[\![1,n]\!]$. On rappelle qu'une application $\sigma:[\![1,n]\!]\to[\![1,n]\!]$ est une involution si et seulement si $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}$.

1. On pose $d_0=1$.
   (a) Calculer d_1, d_2, d_3.
   (b) Montrer que : pour tout $n\geqslant2$, $\quad d_n=d_{n-1}+(n-1)d_{n-2}$.
2. On pose, pour tout réel x : $f(x)=\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Prouver pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence d'un développement limité pour f à l'ordre n au voisinage de 0.

   On définit alors les coefficients a_k par :
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n).$$
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\displaystyle\sum_{\substack{p+2q=n\\(p,q)\in\mathbb{N}^2}}\frac{1}{p!}\times\frac{1}{2^qq!}$.
   (c) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad d_n=a_nn!$.

☆☆☆☆ **Exercice 14.27** – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+\sin(x)$. Montrer que f est bijective, et exprimer un DL à l'ordre 3 en 0 de f^{-1}.

★☆☆☆ **Exercice 14.28** – Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique réel $f(x)$ tel que $f(x)=\cos(f(x))+x-1$. Justifier que f admet un DL à l'ordre 3 en 0 et le calculer.

★★☆☆ **Exercice 14.29** –

1. Montrer que l'équation différentielle $f+2(f')^2=\sin(x)$ n'admet pas de solution de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, telle que $f(0)=0$.
2. On admet l'existence d'une solution de $f^2+2f'=\sin(x)$ telle que $f(0)=0$, définie au voisinage de 0. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en déterminer son DL à l'ordre 5 au voisinage de 0.

★☆☆☆ **Exercice 14.30** – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)=1$, $f'(0)=0$ et $f''(0)=-1$. Calculer, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la limite en $+\infty$ de $f\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^x$.

★★★★ **Exercice 14.31** – Soit $a,\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, et $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, où $I=]a-\alpha,a+\alpha[$. On définit une application Δ sur $]-\frac{\alpha}{n},\frac{\alpha}{n}[$ par :
$$\Delta(h)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f(a+ph).$$

Montrer l'existence de la limite en 0 de $\dfrac{\Delta(h)}{h^n}$ et la calculer.

⋆⋆⋆⋆ **Exercice 14.32** – **(Théorème de division, X)**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$
2. On suppose de plus que $f''(0) \neq 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g^2 = f$.

15
Séries numériques

Vrai ou faux

☆☆☆☆ **Exercice 15.1 – Vrai ou faux** (Corrigez les énoncés faux, justifiez les énoncés corrects)

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n < \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$.
3. Si $\lim_{n\to+\infty} n^2(u_n - v_n) = 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
4. Si $\sum |u_n|$ diverge, alors $\sum u_n$ aussi.

☆☆☆☆ **Exercice 15.2** – Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réel positifs. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.
2. Si $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ et $\sum a_n$ est convergente, alors la série $\sum b_n$ est convergente.
3. Si la série de terme général $\inf\left(a_n, \dfrac{1}{n}\right)$ est convergente, alors la série $\sum a_n$ est convergente.
4. Si $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_{2n}) = 0$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

Nature de séries explicites

★☆☆☆ **Exercice 15.3** – Nature des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^5}$
2. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{5+n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^4 \ln(3n)}{\mathrm{e}^{2n}}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{3 + \sin\frac{1}{n}}{3 - \sin\frac{1}{n}}\right)$
5. $u_n = \dfrac{n + \mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^3}$
6. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$
7. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2\sqrt{n}}$
8. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
9. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$
11. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-2n} + n}{n^3 + 1}$
12. $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{(2+\frac{3}{n})\ln n}}$
13. $u_n = (-1)^n n \mathrm{e}^{-n}$
14. $u_n = \sin n$
15. $u_n = a^{-n^\alpha}, a > 0$
16. $u_n = \dfrac{1}{n^{\ln n}(\ln n)^n}$
17. $u_n = \dfrac{n^n}{n!\ a^n}$, $a \in \mathbb{C}^*$
18. $u_n = \dfrac{1}{n}\ln n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
19. $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
20. $u_n = \ln(\cos\dfrac{1}{n})$
21. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \ln n$

★★☆☆ **Exercice 15.4** – Etudier la nature des séries de terme général :

1. $u_n = n\left(\sin \frac{1}{n}\right)^3$
2. $u_n = n^{1/n}$
3. $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$
4. $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
6. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$
7. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2+1}$
8. $u_n = \dfrac{2n+1}{n^3 + \sin n}$
9. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^p}$ $(p \in \mathbb{N})$
10. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
11. $u_n = \dbinom{2n}{n} z^n$, $z \in \mathbb{C}$
12. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$
13. $u_n = \sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
14. $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
15. $u_n = \left(\dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a+k)\right)^{\frac{1}{n}}$

☆☆☆☆ **Exercice 15.5** – Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(n\pi + \frac{1}{n})$.

★★☆☆ **Exercice 15.6** – Soit $a > 0$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n^{a-1}(n!)}$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite strictement positive.

★★☆☆ **Exercice 15.7** – Étude de la convergence absolue et de la semi-convergence des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$
2. $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{\sqrt{6n+5}-n}$
3. $u_n = \dfrac{\ln n + (-1)^n 10 \ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$
5. $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \ln n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
7. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$
8. $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$, $\alpha > 0$.
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n + 1}{n \ln n}$
10. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n} - (-1)^n \cdot n}$
11. $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}} \sin x\,\mathrm{d}x$

★☆☆☆ **Exercice 15.8** – Montrer que $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$ converge.

★★☆☆ **Exercice 15.9** – Étude de la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$.

★☆☆☆ **Exercice 15.10** – Nature des séries suivantes, selon la valeur de $z \in \mathbb{C}$:

1. $\sum 5^n z^{2n}$
2. $\sum \dfrac{1}{n!} z^{n^2}$.

★★☆☆ **Exercice 15.11** – Nature des séries $\sum a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, dans les cas suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n + n}$
2. $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{\sqrt{n}}$
4. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $a_n = 2^{2^n}$
6. $a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

★★★☆ **Exercice 15.12** – Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$.

★★★★ **Exercice 15.13** – Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 15.14** – Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$.

Calcul de sommes

☆☆☆☆ **Exercice 15.15** – Après avoir justifié leur convergence, calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3-2n^2+1}{3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^3+n^2+n+3}{n!}\cdot 2^n$

★☆☆☆ **Exercice 15.16** – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}\cos((n-1)x) = 4\cdot\frac{3-4\cos x+2\cos^2 x}{(5-4\cos x)^2}.$$

★★★☆ **Exercice 15.17** – Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$, pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

Nature de séries moins explicitement définies

★★☆☆ **Exercice 15.18** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.

1. Étudier la limite de (u_n), suivant la valeur de u_0.
2. Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$, suivant la valeur de u_0.

★★☆☆ **Exercice 15.19** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En étudiant la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, montrer que la série de terme général u_n^3 est convergente.
3. Montrer que les séries de termes généraux : $\ln \dfrac{\sin u_n}{u_n}$ et u_n^2 sont divergentes.
4. Étudier la convergence de la série $\sum u_n x^n$ pour toutes les valeurs du réel x.

★☆☆☆ **Exercice 15.20** –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln(x) = \mathrm{Arctan}(x) + n\pi$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n. Quelle est la limite de (x_n) ?
2. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{x_n}$ est convergente.

★★★☆ **Exercice 15.21** – **(X)** Soit p_n le n-ième nombre entier dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$.

★★★★ **Exercice 15.22** – **(ENS)** Soit p_n le n-ième nombre premier. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

Autour des propriétés de convergence

★☆☆☆ **Exercice 15.23** – Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$ convergent

2. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.
3. En déduire que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

★☆☆☆ **Exercice 15.24** – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

★★★☆ **Exercice 15.25** – Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2. Montrer par un contre-exemple que cela n'est pas vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

★★★☆ **Exercice 15.26** – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.
Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum b_n$ converge, et que dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

★★☆☆ **Exercice 15.27** – Soit $a_n > 0$. A-t-on l'équivalence entre :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum a_n x^n$ converge

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\sum \dfrac{1}{a_n} x^n$ diverge

★★★☆ **Exercice 15.28** – Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs divergente. On pose $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
En comparant $\dfrac{u_n}{U_n^\alpha}$ à une intégrale, étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{u_n}{U_n^\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

★★★☆ **Exercice 15.29** – **(Théorème de Riemann)**
Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe, une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.
2. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ telle que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ diverge.

★★★☆ **Exercice 15.30** – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Soit $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer que pour tout $x \in]0, S]$ il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

★★★★ **Exercice 15.31** – **(Inégalité de Carleman)**
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ une série à termes positifs convergente, et $u_n = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$. On note $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge et qu'en notant $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, on a : $U \leqslant \mathrm{e}A$.
2. Montrer que e est optimal, autrement dit que si k est un réel vérifiant $U \leqslant kA$ pour toute série convergente $\sum a_n$, alors $k \geqslant \mathrm{e}$.

★★☆☆ **Exercice 15.32** – **(X - Critère de condensation de Cauchy)**
Soit (u_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Établir :

$$\sum u_n \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum p^n u_{p^n} \text{ converge}$$

2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n, \frac{1}{n})$ diverge.

Calcul asympototique

★★★☆ **Exercice 15.33** – Déterminer un équivalent du reste de la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

★★☆☆ **Exercice 15.34** – Soit pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, et $u_n = S_n - \ln n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie γ, et en déduire un équivalent de S_n.

★☆☆☆ **Exercice 15.35** – **(Équivalent de sommes partielles et restes de séries)**

1. Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où $\alpha \leqslant 1$.
2. Même question pour $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.
3. Même question pour $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

★★★☆ **Exercice 15.36** –
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On considère les deux suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{nu_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k u_k\right).$$

On suppose que (v_n) converge vers un réel a.

1. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $\sum\limits_n a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.
2. Montrer que la série de terme général u_n est divergente.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, si $a \neq 0$, $w_n = a - aw_n + o(w_n)$
4. En déduire, en fonction de a, la limite de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

16

Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection et similaires

☆☆☆☆ **Exercice 16.1** – Soit I un intervalle ouvert, et f et g deux applications continues sur I, ne s'annulant pas sur I, et telles que $|f| = |g|$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

☆☆☆☆ **Exercice 16.2** – Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ (autrement dit, f admet un point fixe).

★☆☆☆ **Exercice 16.3** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

★☆☆☆ **Exercice 16.4** – Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

★★☆☆ **Exercice 16.5** –

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $f \circ f = f$. Soit $E_f = \{x \in [0, 1],\ f(x) = x\}$. Montrer que E_f est un intervalle.
2. Décrire les applications $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ f = f$

★☆☆☆ **Exercice 16.6** – Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

★★★☆ **Exercice 16.7** – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$.
3. Le résultat reste-t-il vrai en remplaçant $\frac{1}{n}$ par un réel quelconque $x \in]0, 1[$?

★★★☆ **Exercice 16.8** – Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $n \geqslant 2$ tel que $f^n(x) = x$, où f^n est la composée n fois de f. Montrer que $f(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$.

★★☆☆ **Exercice 16.9** – Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

★☆☆☆ **Exercice 16.10 – (Une fonction définie implicitement)**

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée x_0
2. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{e^x}{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$, et montrer que f admet en x_0 un minimum, dont on notera la valeur y_0 (ne pas chercher à expliciter y_0).
3. Montrer que pour tout $x \geqslant y_0$, il existe un unique réel de $]1, x_0]$, noté $g(x)$, tel que $\mathrm{e}^{g(x)} = x \ln g(x)$, et qu'il existe un unique réel de $[x_0, +\infty[$, noté $h(x)$, tel que $\mathrm{e}^{h(x)} = x \ln h(x)$.
4. En se servant des variations de f, justifier que g est décroissante sur $[y_0, +\infty[$, et que h est croissante sur $[y_0, +\infty[$. Déterminer la limite de g et h en $+\infty$.

★☆☆☆ **Exercice 16.11** – Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tel que :

$$0 \leqslant x_{n,0} \leqslant x_{n,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{n,n} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad f(x_{n,k}) = \frac{k}{n}.$$

★★☆☆ **Exercice 16.12** – Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a|x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

★★★☆ **Exercice 16.13** –
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 0$. On suppose qu'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f + g$ soit croissante. Montrer que f s'annule sur $[0,1]$.

★★★★ **Exercice 16.14** – **(Oral ENS – Une réciproque au TVI)**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $f([a,b])$ est un segment, et telle que $f^{-1}(\{x\})$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

Théorème de compacité

★☆☆☆ **Exercice 16.15** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

★☆☆☆ **Exercice 16.16** – Montrer qu'il n'existe par de surjection continue de $[0,1] \to]0,1[$. Trouver une surjection continue de $]0,1[\to [0,1]$.

☆☆☆☆ **Exercice 16.17** – Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x > 0,\ f(x) < x$. Montrer que pour tout $0 < a < b$, il existe $M < 1$ tel que $f(x) \leqslant Mx$ sur $[a,b]$.

★★★☆ **Exercice 16.18** –

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $|f^{-1}(\{c\})| \in \{0,2\}$.
2. Peut-on généraliser pour une fonction pour laquelle tout point aurait un nombre fini pair d'antécédents.

Continuité uniforme, théorème de Heine

☆☆☆☆ **Exercice 16.19** – Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) f est uniformément continue sur A ;

(ii) Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A telles que $x_n - y_n \to 0$, on a $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

★☆☆☆ **Exercice 16.20** – Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas uniformément continues :

1. $f_1 : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f_3 : x \mapsto \tan(x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

★★☆☆ **Exercice 16.21** – Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose $\sup_A f = +\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

★★☆☆ **Exercice 16.22** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

★★★☆ **Exercice 16.23** – Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f est prolongeable par continuité en a.

★★☆☆ **Exercice 16.24** – Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nt) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

★★☆☆ **Exercice 16.25** – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

★★★☆ **Exercice 16.26** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

★☆☆☆ **Exercice 16.27** – Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

★☆☆☆ **Exercice 16.28** –
Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

★★★☆ **Exercice 16.29** – Soit $P_1, \ldots, P_n$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, les P_i étant non nuls, et les Q_i deux à deux distincts et tels que si $i \neq j$, $Q_i - Q_j$ ne soit pas constant. Montrer que la fonction

$$f_n \;:\; x \mapsto \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\mathrm{e}^{Q_k(x)}$$

admet un nombre fini de zéros.

★★☆☆ **Exercice 16.30** –

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, et telles que :

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) \neq 0.$$

   (a) Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]a,b[$ et telles que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a. Montrer que $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet en a une limite dans $\mathbb{R}$ et l'exprimer en fonction de ℓ (règle de L'Hôpital)

★★☆☆ **Exercice 16.31** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0) = 0$, et $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$. Soit α et β deux réels strictement plus grands que 0. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que :

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

★☆☆☆ **Exercice 16.32** – Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par l'origine.

★★★☆ **Exercice 16.33** – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, à support compact, c'est-à-dire nulle sauf éventuellement sur un intervalle borné. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver des réels $a_{n,0} < a_{n,1} < \cdots < a_{n,n}$ tels que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f^{(n)}(a_{n,i-1})f^{(n)}(a_{n,i}) < 0$.

★★☆☆ **Exercice 16.34** – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

★★☆☆ **Exercice 16.35** – Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,a]$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

★☆☆☆ **Exercice 16.36** – Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par $(c-1,0)$.

★★☆☆ **Exercice 16.37** –

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admette une limite ℓ en $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite c_n de limite $+\infty$ telle que $f'(c_n)$ tende vers 0.
2. On suppose dans cette question que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.

★★★☆ **Exercice 16.38** – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.

1. Justifier l'existence de bornes supérieures M, M' et M'' de $|f|$, $|f'|$ et $|f''|$, et l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $|f(\alpha)| = M$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M'' \cdot \min(x, |x-\alpha|)$.
3. En déduire que $|f(\alpha)| \leqslant M'' \cdot \min\left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right)$.
4. En déduire que $M \leqslant \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot M''$
5. On suppose de plus que $f'(1) = 0$. Montrer que $M \leqslant \frac{1}{16} \cdot M''$.

★★☆☆ **Exercice 16.39** – **Autour de la propriété des valeurs intermédiaires (Théorème de Darboux)**

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Montrer que si f' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors f est injective sur $[a,b]$.
2. En déduire que si f' ne s'annule pas, alors f' est de signe constant.
3. Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
4. Trouver une fonction non continue vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

★★★★ **Exercice 16.40 – (Cas particulier du lemme de Sard, oral X)**

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles ouverts tels que

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon,$$

où $\mu(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I.

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note C l'ensemble des zéros de f'. Montrer que $f(C)$ est négligeable.

17

Intégration

Intégrabilité

☆☆☆☆ **Exercice 17.1** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ x = \frac{k}{2^n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

★★☆☆ **Exercice 17.2 – (Contre-exemple à la stabilité par composition)**
Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ pour toute fraction irréductible. Soit g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = 0$ si $x = 0$ et $g(x) = 1$ sinon.
Montrer que f et g sont intégrables mais pas $g \circ f$.

★☆☆☆ **Exercice 17.3 – (Condition d'intégrabilité d'une composée)**
Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors $g \circ f$ est intégrable.

★★☆☆ **Exercice 17.4** – Soit f définie sur $[a,b]$, continue et bornée sur $]a,b[$. Montrer que f est intégrable sur $[a,b]$.

★★★☆ **Exercice 17.5** – Étudier l'intégrabilité de $\mathbb{1}_E$, où E est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ ayant un nombre fini de points d'accumulation. Le cas échéant, donner la valeur de l'intégrale. Étudier le cas d'un ensemble dont l'ensemble des points d'accumulation admet un nombre fini de points d'accumulation. Généraliser.

Propriétés des fonctions intégrables et de leurs intégrales

★★☆☆ **Exercice 17.6** – Soit f et g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables, et telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f = g = 0$.

★★★☆ **Exercice 17.7** – Soit $\varepsilon > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer qu'il existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b |f - g| < \varepsilon$

★★★★ **Exercice 17.8** – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$,

$f(x) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

★★★☆ **Exercice 17.9 – (Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions intégrables)**
Soit f une fonction intégrable. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt)f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt)f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Intégrales de fonctions continues

★★★☆ **Exercice 17.10** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admettant en tout point x une limite finie lorsque $y \to x$, avec $y \neq x$, et soit $g : x \mapsto \lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} f(y)$. Montrer que f et g sont intégrables, et que $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$.

★★☆☆ **Exercice 17.11** – Déterminer toutes les applications continues par morceaux sur $[a,b]$ telles que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

★★★☆ **Exercice 17.12** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int f^n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $f = -1$, $f = 1$ ou $f = 0$.

★★★☆ **Exercice 17.13** – Soit C l'ensemble des applications f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continues strictement croissantes telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et D l'ensemble des applications g de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continues strictement décroissantes, telles que $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$. Soit $f \in C$. Montrer que

$$\sup_{g\in D} \int_0^1 f(t)f(g(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t,$$

mais que cette borne n'est pas atteinte.

★★☆☆ **Exercice 17.14** – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_a^b t^k f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f admet dans $]a,b[$ au moins $n+1$ zéros distincts.

★★☆☆ **Exercice 17.15** – Déterminer $\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan x}{x^2}\ \mathrm{d}x$ à l'aide des deux méthodes suggérées ci-dessous :

1. à l'aide de deux intégrations par parties ;
2. en justifiant qu'il existe une fonction f continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, et prolongeable par continuité en 0 et telle que pour tout $x > 0$, $\frac{\tan x}{x^2} = \frac{1}{x} + f(x)$.

★★★☆ **Exercice 17.16 – (Calcul de la somme de la série de Riemann de paramètre 2)**

1. Trouver une fonction polynomiale h de degré au plus 2 telle que $h(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi h(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

★★☆☆ **Exercice 17.17 – (Égalité de la moyenne)**
Soit f continue sur $[a,b]$ et g continue par morceaux sur $[a,b]$ et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

★★★☆ **Exercice 17.18** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) = 0$. Montrer que $f = 0$

★★☆☆ **Exercice 17.19** – Soit $f : [0,\mathrm{e}] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\ \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x$.

★★★☆ **Exercice 17.20** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue n'admettant qu'un nombre fini de zéros. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 \mathrm{e}^{nx} f(x)\ \mathrm{d}x \right| = +\infty.$$

Sommes de Riemann

☆☆☆☆ **Exercice 17.21** – Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$(a)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}, \qquad (b)\ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (c)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{\mathrm{e}^k}}$$

★☆☆☆ **Exercice 17.22** –

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2\mathrm{e}}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$.

★☆☆☆ **Exercice 17.23** –

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n^2}$.

★★☆☆ **Exercice 17.24** – Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer

$$\lim \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right).$$

★★★☆ **Exercice 17.25** – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique subdivision $(x_k^{(n)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)}$.

★★★☆ **Exercice 17.26** – Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[0,1]$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$.

★☆☆☆ **Exercice 17.27** – Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Même question pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

★★★☆ **Exercice 17.28** – Soit $a > 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\ \mathrm{d}x$

★☆☆☆ **Exercice 17.29** – On rappelle qu'une fonction φ est convexe sur un intervalle I si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

1. Généraliser l'inégalité ci-dessus pour $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$ où les λ_i sont positifs de somme égale à 1.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et φ une fonction convexe continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f$.

Ce résultat reste vrai sans l'hypothèse de continuité mais nécessite des connaissances supplémentaires sur les fonctions convexes.

18

Pivot de Gauss

Résolution de systèmes linéaires

☆☆☆☆ **Exercice 18.1** – Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x-y+3z & = & 1 \\ 2x-2y+z & = & 3 \\ 2x-y-z & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-5t & = & 1 \\ x-2y+t & = & 0 \\ 2x-z-t & = & 2 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 1 \\ 2x+y & = & 2 \\ 3x+4y & = & 3 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 1 \\ 2x+y & = & 2 \\ 3x+4y & = & 1 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z+2t+3u & = & 2 \\ x+3y+z+2t & = & 1 \\ y-3u & = & -1 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z+2t+3u & = & 2 \\ x+3y+z+2t & = & 1 \\ y-3u & = & 0 \end{array}\right.$

☆☆☆☆ **Exercice 18.2** – Déterminer l'ensemble des solutions du système suivant, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-2y+z & = & 1 \\ -x+3z & = & 5 \\ x-3y+z & = & 1 \\ 2x+2y+z & = & m \end{array}\right.$$

★☆☆☆ **Exercice 18.3** – Trouver suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax_1 & = & x_2+1 \\ ax_2 & = & x_3+1 \\ \vdots & & \\ ax_{n-1} & = & x_n+1 \\ ax_n & = & x_1+1 \end{array}\right.$$

★☆☆☆ **Exercice 18.4** – Résoudre, en discutant suivant la valeur des paramètres λ et a, les systèmes suivants, en les variables réelles x, y, z et t :

1. $\begin{cases} (1-\lambda)x - y + z &= 0 \\ 2x - (5+\lambda)y + 4z &= 0 \\ 2x - 7y + (6-\lambda)z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -\lambda x + 9y + 3z &= 0 \\ -4x + (13-\lambda)y + 2z &= 0 \\ 2x - 2y + (5-\lambda)z &= 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x + 2y + 2z &= \lambda x \\ -2x + y + 2z &= \lambda y \\ -2x - 2y + z &= \lambda z \\ -2x - 2y + t &= \lambda t \end{cases}$

4. $\begin{cases} (3-\lambda)x - y + z + t &= 0 \\ -2x + (2-\lambda)y + 2t &= 0 \\ -4x + (2-\lambda)z + 4t &= 0 \\ -x - y + z + (5-\lambda)t &= 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} ax + ay + az + at &= \lambda x \\ x + y + z + t &= \lambda y \\ x + y + z + t &= \lambda z \\ ax + ay + az + at &= \lambda t \end{cases}$

Application du pivot au calcul de l'inverse d'une matrice

★☆☆☆ **Exercice 18.5** – Inverser *à la main* la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pourra pour ce faire résoudre le système $AX = Y$, pour toute colonne Y.

19

Structures algébriques

Lois de composition

☆☆☆☆ **Exercice 19.1 – (Inverses, inverses à droite, inverses à gauche dans un groupe)**
Soit G un groupe, de neutre e. Montrer que si $xy = e$, alors $yx = e$.

☆☆☆☆ **Exercice 19.2** – Soit $(E, \cdot)$ un monoïde commutatif. Soit $(x, y) \in E^2$. On suppose que xy est symétrisable. Montrer que x et y le sont aussi.

★☆☆☆ **Exercice 19.3 – (Idempotents)**
Soit $(E, \star)$ un magma . On dit que $x \in E$ est idempotent si $x \star x = x$.

1. Montrer que si tout élément de E est régulier et si $\star$ est distributive par rapport à elle-même, alors tout élément est idempotent.
2. Montrer que si tout élément de E est régulier et si $\star$ est associative, alors E admet au plus un idempotent.

★★☆☆ **Exercice 19.4** – Soit $(E, \cdot)$ un magma associatif tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2, tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(xy)^n = yx$. Montrer que $\cdot$ est commutative.

Exemples et constructions de groupes

★★☆☆ **Exercice 19.5** – Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4 et d'ordre 6 (on pourra dresser la table de la loi).

★★★☆ **Exercice 19.6** – Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition / vérifiant, pour tout $(a, b, c) \in G^3$:

- $a/a = b/b$
- $a/(b/b) = a$
- $(a/a)/(b/c) = c/b$
- $(a/c)/(b/c) = a/b$.

En interprétant la loi / comme une « division », construire sur G une structure de groupe.

★★☆☆ **Exercice 19.7** – Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative, pour laquelle tous les éléments de E sont réguliers. Montrer que $(E, \cdot)$ est un groupe.

☆☆☆☆ **Exercice 19.8** – Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de la loi $\star$ définie par

$$(x, y) \star (x', y') = (x + x', y\mathrm{e}^{x'} + y'\mathrm{e}^{x})$$

est un groupe.

☆☆☆☆ **Exercice 19.9 – (Produit direct)**
Soit G et H deux groupes multiplicatifs, de neutres 1_G et 1_H. On muni $G \times H$ de la loi de composition définie par :

$$(g,h) \times (g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $G \times H$ est un groupe. On précisera l'élément neutre.

★★☆☆ **Exercice 19.10 – (Produit semi-direct)**
Soit G un groupe.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ muni de la composition est un groupe.
2. Soit G et H deux groupes, et $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ un homomorphisme de groupe. On définit, pour tout $(g,h) \in G \times H$:
$$(g,h) \star (g',h') = (g \cdot \varphi(h)(g'), hh').$$
Montrer que $(G \times H, \star)$ est un groupe. Ce groupe est appelé produit semi-direct de G par H relativement à φ et est noté $G \rtimes_\varphi H$, ou plus simplement $G \rtimes H$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

☆☆☆☆ **Exercice 19.11 – (groupe des inversibles d'un monoïde)**
Soit $(E, \cdot)$ un monoïde, et $S(E)$ l'ensemble des éléments symétrisables de E. Montrer que $S(E)$ est stable par $\cdot$, et que la loi induite munit $S(E)$ d'une structure de groupe.

★★★★ **Exercice 19.12 – (Groupe diédral)**
Soit $n \geqslant 3$. Soit D_n l'ensemble des isométries f de $\mathbb{C}$ stabilisant le polygône régulier $P_n = \{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$, c'est à dire telles que $f(P_n) \subset P_n$ (en raison de son cardinal, de nombreux auteurs préfèrent la notation D_{2n} au lieu de D_n).

1. Soit $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{C}$. Montrer que $(\mathrm{Iso}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que $(D_n, \circ)$ est un groupe.
3. Soit r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et $s : z \mapsto \overline{z}$. Justifier que $< r, s > \subset D_n$.
4. Montrer que tout élément z de D_n s'écrit de façon unique sous la forme $z = r^k s^\varepsilon$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\varepsilon \in [\![0,1]\!]$. Quel est le cardinal de D_n ? Que dire de l'inclusion de la question précédente ?
5. Le groupe D_n est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/(2n)\mathbb{Z}$? à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni de la structure produit ?
6. Justifier que D_n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
7. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que D_n soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est à dire à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni de la loi :
$$(g,h) \star (g',h') = (g \cdot \varphi(h)(g'), hh').$$

Groupes cycliques

★★☆☆ **Exercice 19.13** – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

★★☆☆ **Exercice 19.14 – (Groupes cycliques)**

1. Montrer que tout groupe cyclique est abélien, et isomorphe à un groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

★☆☆☆ **Exercice 19.15** – Soit G un groupe non réduit à son élément neutre. Montrer que G n'admet aucun sous-groupe propre si et seulement si G est cyclique d'ordre p premier.

★☆☆☆ **Exercice 19.16** –

1. Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre p premier.
2. Soit G un groupe abélien tel que tous ses sous-groupes propres soient cycliques. Est-ce que G est cyclique ?

Sous-groupes, ordre, Lagrange

☆☆☆☆ **Exercice 19.17** – Soit H et K deux sous-groupes de G d'ordres finis respectifs α et β tels que $\alpha \wedge \beta = 1$. Montrer que $H \cap K = \{e\}$, où e est le neutre de G.

★★☆☆ **Exercice 19.18** – Soit G un groupe fini. Montrer que la relation « H est un sous-groupe de K » définit un ordre total sur l'ensemble des sous-groupes de G si et seulement si G est cyclique d'ordre p^α, p premier.

★★☆☆ **Exercice 19.19** – **(Théorème de Cayley)**
En considérant $\varphi_g : x \mapsto gx$, montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

★☆☆☆ **Exercice 19.20** –**(Groupes engendrés)**
Soit H et K deux sous-groupes de G. Montrer que :

$$< H \cup K >= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (HK)^n,$$

où $(HK)^n = \{h_1k_1h_2k_2 \cdots h_nk_n,\ h_i \in H, k_i \in K\}$. Par convention, $(HK)^0 = \{e\}$.

★★☆☆ **Exercice 19.21** – **(Caractérisation des couples de sous-groupes dont l'union est un groupe)**
Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. Peut-on généraliser cela à une union de n sous-groupes ?

★★★☆ **Exercice 19.22** – **(Autour du produit HK)**
Soit $(G, \times)$ un groupe, et H et K deux sous-groupes de G. Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que si G est abélien, alors HK est un groupe, et que c'est le plus petit sous-groupe de G contenant $H \cup K$.
2. Dans le cas général, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) HK est un sous-groupe de G
   (ii) KH est un sous-groupe de G
   (iii) $HK \subset KH$
   (iv) $KH \subset HK$
3. Soit H, K, L trois sous-groupes de G tels que $HK = KH$ et $H \subset L$. Montrer que

$$H(K \cap L) = (K \cap L)H = (HK) \cap L.$$

★★☆☆ **Exercice 19.23** – **(ENS)**
Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

★★★★ **Exercice 19.24** – **(Exposant d'un groupe)**
Soit G un groupe fini abélien.

1. Montrer que pour tout x et y d'ordre a et b, il existe un élément z dans G d'ordre $a \vee b$
2. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre égal au ppcm de l'ordre de tous les éléments. Cet ordre est appelé exposant du groupe G.
3. Le résultat reste-t-il vrai si G n'est pas supposé abélien ?

★★★☆ **Exercice 19.25 – (Lemme de Cauchy)**
Le but de cet exercice est de donner une démonstration rapide et efficace du lemme de Cauchy, basé sur l'étude d'une relation d'équivalence. On rappelle que le lemme de Cauchy affirme que si un nombre premier p divise l'ordre de G, alors il existe dans G un élément d'ordre p. Vu l'utilité de ce lemme, il peut être conseillé de retenir cette démontration.
On définit $E \subset G^p$ l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ tels que $x_1 \cdots x_p = e$. On définit sur E la relation $(x_1, \dots, x_p) \sim (y_1, \dots, y_p)$, si $(y_1, \dots, y_p)$ est obtenu de $(x_1, \dots, x_p)$ par permutation circulaire.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence
2. Justifier que les classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou p.
3. En considérant le cardinal de E, en déduire que le nombre d'éléments d'ordre p est congru à -1 modulo p et conclure.

★★★★ **Exercice 19.26 – (Autour du lemme de Cauchy)**
Les deux questions sont indépendantes et proposent, dans des situations particulières, une démonstration du lemme de Cauchy (voir DM) ne faisant pas intervenir les actions de groupes.

1. Soit G de cardinal pair. Montrer que G contient un élément d'ordre 2.
2. Soit G un groupe abélien (en notation multiplicative) de cardinal divisible par p.
   (a) Soit H et K deux sous-groupes de G. Montrer que
   $$G' = \{a \in G \mid K \cap aH \neq \varnothing\}$$
   est un sous-groupe de G contenant $H \cup K$.
   (b) Soit $K' = K \cap H$. Montrer que si $K \cap aH \neq \varnothing$, alors $|K \cap aH| = |K'|$.
   (c) En considérant H d'ordre maximal, et K un groupe monogène, montrer par récurrence sur $|G|$ l'existence d'un élément d'ordre p dans G.

★★★★ **Exercice 19.27 – (Centre d'un p-groupe)**
Soit p un entier premier. Soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe tel qu'il existe un entier $\alpha > 0$ (qu'on se fixe pour la suite) tel que $|G| = p^\alpha$. On note e l'élément neutre de G. Soit Z le centre de G, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in G$ commutant avec tous les autres. Pour $x \in G$, on notre C_x l'ensemble des commutants de x (les éléments de G commutant avec x). Le but de l'exercice est de montrer que le centre de G n'est pas réduit à e.

1. Montrer que Z est un sous-groupe de G, ainsi que C_x, pour tout $x \in G$.
2. Trouver une relation entre l'ordre de C_x et le cardinal de la classe de conjugaison de x.
3. En déduire qu'il existe $x \neq e$ tel que l'ordre de C_x soit égal à p^α, et conclure.

★★★☆ **Exercice 19.28 – (ENS)**
Soit G un groupe abélien d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Sous-groupes distingués, groupes quotients

★☆☆☆ **Exercice 19.29 –**

1. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Réciproquement, montrer que tout sous-groupe distingué de G est le noyau d'un certain morphisme de groupes $f : G \to H$.

★★★☆ **Exercice 19.30** – Soit $(G, \times)$ un groupe, de neutre e. On suppose que pour tout $x \in E$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien et que s'il est fini et n'est pas réduit à $\{e\}$, son cardinal est pair.

2. Montrer que si G est fini, $|G|$ est une puissance de 2.

★★★☆ **Exercice 19.31 – (ENS)**
Soit G un groupe fini non trivial, de neutre e. On suppose que deux éléments quelconques de $G \setminus \{e\}$ sont systématiquement conjugués. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

★★★★ **Exercice 19.32** – Soit $(G, \times)$ un groupe.

1. On définit le centre Z de G par $Z = \{a \in G \mid \forall g \in G, ag = ga.\}$. Montrer que Z est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si G/Z est cyclique, alors G est abélien.
3. Soit G un groupe de neutre e, et x, y deux éléments de G d'ordre p premier, tel que y ne soit pas dans le sous-groupe monogène $< x >$ engendré par x. Montrer que $< x > \cap < y >= \{e\}$.
4. En déduire que si p est un entier premier, tout groupe d'ordre p^2 est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

★★★★ **Exercice 19.33 – (ENS Lyon)** Si $(G, .)$ est un groupe, un élément de g est dit non générateur si, pour toute partie A de G n'engendrant pas G, $A \cup \{g\}$ n'engendre pas G. On note $F(G)$ l'ensemble des éléments non générateurs de G.

1. Déterminer $F(G)$ pour $(G, .) = (\mathbb{Z}, +)$.
2. Montrer que $F(G)$ est un sous-groupe de G.
3. On suppose G fini. On appelle sous-groupe maximal un sous-groupe de G distinct de G lui-même, et maximal pour l'inclusion. Montrer que $F(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G.
4. Déterminer $F(G)$ pour $(G, .) = (\mathbb{R}, +)$.

Anneaux

☆☆☆☆ **Exercice 19.34** – Soit A un anneau. Montrer que l'intersection de deux sous-anneaux de A est encore un anneau.

☆☆☆☆ **Exercice 19.35** – Soit $J = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$A = \{aI_n + bJ, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est-il un sous-groupe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un sous-anneau ?

★☆☆☆ **Exercice 19.36** – Soit A un anneau, et $a \in A$. On suppose que a admet un unique inverse à droite. Montrer que a est régulier à gauche, puis que a est inversible. Quel est son inverse ?

★★★☆ **Exercice 19.37** – Soit X un ensemble non vide.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ est un anneau. Quels sont les éléments neutres ? Est-ce un corps ?
2. (a) Soit $Y \subset X$. $\mathcal{P}(Y)$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{P}(X)$?
   (b) Montrer que $\mathcal{P}(Y)$ peut être muni à l'aide des lois induites d'une structure d'anneau.
3. Soit $\{I_k, k \in K\}$ une partition de X, et $A = \left\{\bigcup_{j \in J} I_j, \quad J \in \mathcal{P}(K)\right\}$. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathcal{P}(X)$.
4. Réciproquement, montrer que tout sous-anneau de $\mathcal{P}(X)$ est de cette forme.

★☆☆☆ **Exercice 19.38** – Soit A un anneau commutatif, et $\mathrm{Nil}(A)$ le sous-ensemble de A constitué des éléments nilpotents de A. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.

☆☆☆☆ **Exercice 19.39** – Soit A un anneau, et a et b deux éléments de A. Montrer que si ab est nilpotent, alors ba aussi.

★☆☆☆ **Exercice 19.40** – Soit A un anneau et a un élément nilpotent de A. Montrer que $1-a$ est inversible, et exprimer son inverse en fonction des puissances successives de a.

★☆☆☆ **Exercice 19.41** – Soit A un anneau commutatif. Soit N l'ensemble des éléments nilpotents de A. Soit $B = \{1+x,\ x \in N\}$. Montrer que $(B, \times)$ est un groupe.

★☆☆☆ **Exercice 19.42** – Soit A un anneau, a un élément nilpotent de A, et $B = \{1+aP(a),\ P \in \mathbb{Z}[X]\}$. Montrer que B est stable par $\times$, et que $(B, \times)$ est un groupe.

★★☆☆ **Exercice 19.43** – Soit A un anneau. Pour tout $x \in A$, on définit

$$x^{(0)} = 1, \qquad x^{(1)} = x, \qquad x^{(2)} = x(x-1), \qquad \dots \qquad x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

1. Soit P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que si x et y commutent, alors $P(x)$ et $Q(y)$ aussi.
2. Montrer que pour tout x et y de A, si $xy = yx$, alors :

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^{(k)}.$$

★★☆☆ **Exercice 19.44** – Soit A un anneau, et a et b deux éléments de A tels que ab soit inversible et ba ne soit pas diviseur de zéro. Montrer que a et b sont inversibles.

★★☆☆ **Exercice 19.45** – **(Description des diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un diviseur de 0 si et seulement s'il n'est pas inversible.

★★★☆ **Exercice 19.46** – **(Anneaux euclidiens et anneaux principaux)**
Soit A un anneau. On dit que A est euclidien si A est intègre, et s'il existe une fonction $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, appelée stathme, telle que :

$$\forall (a,b) \in (A \setminus \{0\})^2, \quad \exists (q,r) \in A^2, \quad a = bq + r \text{ et } (r = 0 \text{ ou } v(r) < v(b)).$$

1. Justifier que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens.
2. Soit $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{(a + \mathrm{i}\, b),\ (a,b) \in \mathbb{Z}\}$ (entiers de Gauss) En considérant $v : z \mapsto |z|^2$, montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est euclidien.
3. Montrer qu'un anneau euclidien est principal.

Corps

★☆☆☆ **Exercice 19.47** – **(Caractérisation d'un corps parmi les anneaux par ses idéaux)**
Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$. Montrer que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

★☆☆☆ **Exercice 19.48** – Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont-ils isomorphes ?

★★☆☆ **Exercice 19.49** – **(Un corps de nombres)**
Soit $a \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. On définit :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{\lambda + \mu\sqrt{a}\}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2.$$

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

★★☆☆ **Exercice 19.50** – Soit $\mathbb{Q}(i)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des nombres complexes $a + \mathrm{i}\, b$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, et $\mathbb{Q}(j)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des $a + jb$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ et $\mathbb{Q}(j)$ sont des corps non isomorphes.

20

Groupes symétriques

Systèmes de générateurs

☆☆☆☆ **Exercice 20.1** – Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1\ i)$, $i \in [\![2, n]\!]$.

★★☆☆ **Exercice 20.2** – Soit $n \geqslant 4$. $\mathfrak{S}_n$ est-il engendré par les 4-cycles ?

★☆☆☆ **Exercice 20.3** – Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

★★★☆ **Exercice 20.4** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathfrak{S}_n$ est-il engendré par les grands cycles ? Et $\mathfrak{A}_n$?

★★★★ **Exercice 20.5** – $\mathfrak{S}_n$ est-il engendré par un grand cycle et une transposition quelconques ?

★★★☆ **Exercice 20.6** – Quel est le cardinal minimal d'une famille génératrice de $\mathfrak{S}_n$ constituée exclusivement de transpositions ?

Automorphismes

★★★☆ **Exercice 20.7** – **(Automorphismes intérieurs de $\mathfrak{S}_n$)**

1. Montrer que si $n \geqslant 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}\}$ ($Z(G)$ est le centre de G, donc l'ensemble des éléments g commutant avec tous les autres).
2. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $\mathrm{Int}\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{S}_n$, où $\mathrm{Int}G$ est le groupe des automorphismes intérieurs de G, c'est-à-dire du type $h \mapsto ghg^{-1}$.

★★★★ **Exercice 20.8** – **(Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$)**

1. On appelle automorphisme intérieur d'un groupe G un morphisme $h \mapsto ghg^{-1}$. Montrer qu'il s'agit bien d'un automorphisme.
2. On note $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un groupe.
3. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{S}_n$. Montrer que si l'image par φ de toute transposition est une transposition, alors $\varphi \in \mathrm{Int}\mathfrak{S}_n$.
4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, de type cyclique $1^{k_1}2^{k_2}\dots n^{k_n}$. Montrer que le cardinal du centralisateur de σ (ensemble des éléments commutant avec σ) est :

$$|c(\sigma)| = \prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}.$$

5. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{S}_n$. Montrer que si τ est une transposition, $\varphi(\tau)$ est un produit de transpositions à supports disjoints.

6. En déduire que si $n \neq 6$, $\mathrm{Aut}\mathfrak{S}_n = \mathrm{Int}\mathfrak{S}_n$. On peut montrer que cette égalité est fausse pour $n = 6$.

Problèmes de commutativité

★★★☆ **Exercice 20.9 – (Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$)**
Étant donné un groupe G, on note $D(G)$ le groupe dérivé de G, défini comme le groupe engendré par les éléments $xyx^{-1}y^{-1}$ pour $(x,y) \in G^2$ (appelés commutateurs). Il s'agit donc du plus petit sous-groupe de G contenant tous ces éléments. On se fixe $n \geqslant 5$.

1. Montrer que $D(\mathfrak{A}_n) \subset D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$.
2. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
3. En considérant σ et σ^2, en déduire que tout 3-cycle σ est un commutateur
4. En déduire que $D(\mathfrak{S}_n) = D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$.

21

Arithmétique

Nombres premiers, théorème de Fermat

★★☆☆ **Exercice 21.1** – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n le n-ième nombre premier. En considérant $p_2 \cdots p_n - 2$, montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_{n+1} + p_{n+2}.$$

★★☆☆ **Exercice 21.2** – **(ENS)**

1. Montrer que tout $n > 6$ s'écrit comme somme de deux entiers premiers entre eux, strictement supérieurs à 1.
2. Soit (p_n) la suite strictement croissante des nombres premiers. Déduire de la question précédente que pour tout $k > 2$, $p_{k+1} + p_{k+2} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_k$.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, q_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n. Montrer que $\frac{q_n}{n} \to 0$.

★★★☆ **Exercice 21.3** –

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p vérifiant $p \equiv 3\ [4]$ (on pourra considérer $\alpha p_1 \cdots p_n - 1$, où α est convenablement choisi)
2. Soit a et d deux entiers, d étant premier impair. À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que si d divise $a^2 + 1$, alors $d \equiv 1[4]$.
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 1[4]$.

Ceci est un cas particulier du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, stipulant que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à b modulo a.

★☆☆☆ **Exercice 21.4** – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 \equiv n\ [42]$.

★★☆☆ **Exercice 21.5** –

1. Soit n un nombre impair. Montrer que $n^2 \equiv 1\ [8]$ et $n^4 \equiv 1\ [16]$.
2. Généraliser.
3. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 17. Montrer que $p^{16} - 1 \equiv 0\ [16320]$.

★☆☆☆ **Exercice 21.6** – Considérons 1789 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances 37-ièmes est divisible par 399.

★★★★ **Exercice 21.7** – **(Tests de primalité de Lehmer, ENS)**
Soit a et p des entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$, et $p \neq 1$.

1. On suppose que pour tout diviseur d de $p-1$ distinct de $p-1$, a^d-1 est premier avec p. Montrer que p est premier.
2. On suppose que $p-1$ se décompose en $p-1=rs$, où r et s sont des entiers tels que $r \geqslant s$, et tels que pour tout diviseur t de r distinct de 1, l'entier $a^{\frac{p-1}{t}}-1$ est premier avec p. Montrer que p est premier.

Divisibilité, diviseurs, congruences

★☆☆☆ **Exercice 21.8** – Soit a et b tels que 7 divise a^2+b^2. Montrer que 7 divise a et 7 divise b. Comment généraliser ?

★☆☆☆ **Exercice 21.9** – Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tel que 9 divise $a^3+b^3+c^3$. Montrer que 3 divise a, b ou c.

☆☆☆☆ **Exercice 21.10 – (CCP)**
Quel est le reste de la division euclidienne de $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}$ par 7 ?

★☆☆☆ **Exercice 21.11** – Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $10^{6n}+10^{3n}-2 \equiv 0\ [111]$
2. $7^{2n+1}-48n-7 \equiv 0\ [288]$

★☆☆☆ **Exercice 21.12** – Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $4^{2^n}+2^{2^n}+1 \equiv 0\ [7]$
2. $2^{2n}+15n-1 \equiv 0\ [9]$.

★☆☆☆ **Exercice 21.13 – (X)**
Montrer qu'il existe un multiple de 23 qui ne s'écrive qu'avec des 1 en base 10.

★★☆☆ **Exercice 21.14 – (Olympiades 1975)** Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B ; la numération est la numération décimale.

★☆☆☆ **Exercice 21.15 – (Critères de divisibilité)**

1. Montrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
2. Montrer qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. (a) Montrer qu'un nombre est divisible par 11 si et seulement si ses chiffres $c_n,\dots,c_0$ (c_0 étant le chiffre des unités) vérifient $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i \equiv 0\ [11]$.
   (b) 978381778401775 est-il divisible par 11 ?
4. (a) Trouver de même un critère de divisibilité par 7.
   (b) Le nombre 231442433142493650563 est-il divisible par 7 ?
5. Justifier que pour tout nombre $N>1$ premier avec 10, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, k périodique ($k \in \mathbb{N}^*$), telle qu'un nombre dont les chiffres sont $c_n,c_{n-1},\dots,c_0$ est divisible par N si et seulement si
$$\sum_{k=0}^{n} a_k c_k \equiv 0\ [N].$$

★☆☆☆ **Exercice 21.16 – (Ben Gershon, 13e siècle ; cas particulier du théorème de Catalan-Mihailescu)**
Déterminer $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid 2^m-3^n=1\}$

★☆☆☆ **Exercice 21.17** – Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^n \equiv b^n\ [n^2]$.

★★★☆ **Exercice 21.18 – (Formule d'inversion de Möbius)**
On définit la fonction de Möbius par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré non égal à 1} \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k \text{ où les } p_i \text{ sont premiers 2 à 2 distincts.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $m \wedge n = 1$, alors $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon.
3. Montrer que réciproquement, si ν est une fonction vérifiant l'identité de la question précédente, alors $\nu = \mu$.
4. Soit f et g deux fonctions telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Montrer (formule d'inversion de Möbius) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

5. Soit φ l'indicatrice d'Euler. En effectuant un tri des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

PGCD, PPCM, entiers premiers entre eux, Bézout

☆☆☆☆ **Exercice 21.19 – (Quelques compositeurs)**
Étudier l'inversibilité modulo n de k, et le cas échéant, trouver les inverses modulo n des entiers k.

1. $k = 1685$, $n = 1759$
2. $k = 1770$, $n = 1827$
3. $k = 1882$, $n = 1971$
4. $k = 1809$, $n = 1847$
5. $k = 1911$, $n = 1940$
6. $k = 1810$, $n = 1849$

★☆☆☆ **Exercice 21.20 – (Un pianiste excentrique)**
Trouver les solutions entières de l'équation en (x,y) :

$$1955x + 1981y = 2.$$

★★★☆ **Exercice 21.21 – (Multiplicativité arithmétique de l'indicatrice d'Euler)**
Soit φ l'indicatrice d'Euler.

1. Déterminer pour tout nombre premier p et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\varphi(p^k)$.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a \wedge b = 1$, on a $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
(on pourra remarquer que $\mathbb{Z}/(ab)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$).

3. En déduire l'expression de $\varphi(n)$, connaissant la décomposition primaire de n.

★★☆☆ **Exercice 21.22 – (Nombres de Fermat)**

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$, le n-ième nombre de Fermat. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, $F_m \wedge F_n = 1$.
2. Donner une preuve, basée sur la question 1, du fait qu'il existe une infinité de nombre premiers.

★★☆☆ **Exercice 21.23** – Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, tel que $a > 1$.

1. Montrer que $(a^b - 1) \wedge (a^c - 1) = a^{b \wedge c} - 1$.
2. En déduire que si $b \wedge c = 1$, alors $(a^b - 1)(a^c - 1)$ divise $(a-1)(a^{bc} - 1)$.

★★★☆ **Exercice 21.24 – (Nombres de Fibonacci)**
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le n-ième nombre de Fibonacci. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $F_{m \wedge n} = F_m \wedge F_n$.

★★★☆ **Exercice 21.25 – (Le problème des vaches, version entière)**
Un paysan possède $2n+1$ vaches. Lorsqu'il isole n'importe laquelle d'entre elles, il peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n vaches dont la somme des masses est égale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse. On supposera que toutes les masses sont des entiers et on considérera le pgcd des différences 2 à 2.

★★★☆ **Exercice 21.26** – Soit a et b dans $\mathbb{N}^*$, deux nombres premiers entre eux. Soit $\mathcal{S} = \{ax + by,\ (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer qu'il existe un entier m_0 tel que pour tout entier $m \geqslant m_0$, $m \in \mathcal{S}$. Déterminer la valeur minimale de m_0.

Décomposition en facteurs premiers, valuation p-adique

★☆☆☆ **Exercice 21.27** – Résoudre $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

★☆☆☆ **Exercice 21.28 – (CCP)**
Déterminer la valuation 2-adique de $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k$.

★☆☆☆ **Exercice 21.29** – Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ est un entier.

★★☆☆ **Exercice 21.30** – Soit $a_1, \dots a_n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$ et $M = a_1 \dots a_n$, $\mu = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, $M_i = \frac{M}{a_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $\Delta = M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_n$.

1. Montrer que $M = \mu\Delta$
2. Soit $R = M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_n$ et $D = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$. Prouver que $M = RD$.

★☆☆☆ **Exercice 21.31** – Montrer que si n est premier, alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, n divise $\binom{n}{k}$. Étudier la réciproque.

★☆☆☆ **Exercice 21.32** – Soit m, n et k des entiers strictement supérieurs à 1 tels que $m = nk$. Montrer que $(n!)^k \vee (k!)^n$ divise $m!$.

★★★☆ **Exercice 21.33 – (X)**

1. Soit a et r premiers entre eux. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1\ [r]$.
2. Soit a et r deux entiers relatifs avec $a > r \geqslant 2$. Montrer que la progression arithmétique de premier terme a et de raison r contient une infinité de termes ayant tous les mêmes diviseurs premiers.

★★★☆ **Exercice 21.34** – **(Démonnstration anormale du théorème fondamental de l'arithmétique)**
Le but de cet exercice est de donner une démonstration de l'unicité de la décomposition primaire différente de celle du cours. Nous supposons en particulier dans cet exercice que le lemme d'Euclide et le théorème de Gauss ne sont pas connus. On sait en revanche que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier. Nous appelons nombre anormal un entier naturel non nul admettant deux décompositions en facteurs premiers distinctes. On suppose qu'il existe des nombres anormaux, et on note n le plus petit de ces nombres

1. Démontrer qu'un nombre premier p ne peut pas apparaître simultanément dans deux décompositions distinctes de n en facteurs premiers.
2. Notons $n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_\ell$ deux décompositions distinctes de n, où les p_i et q_i sont numérotés en ordre croissant. Montrer que $p_1 q_1 < n$.
3. En considérant $n - p_1 q_1$, montrer que $p_1 q_1$ divise n.
4. Conclure.

Remarquons que l'existence de la décomposition se démontre facilement avec peu d'outils, par récurrence forte. Ainsi, cette méthode propose une alternative dans la construction du cours : le théorème de décomposition primaire y est démontré assez au début, les autres résultats en découlant facilement.

★★☆☆ **Exercice 21.35** – **(X)** Dénombrer les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

★★★★ **Exercice 21.36** – **(ENS Lyon)**
Déterminer toutes les applications N de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que

(i) $N(x) = 0 \iff x = 0$
(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(xy) = N(x)N(y)$
(iv) $\exists n \in \mathbb{N},\ N(n) > 1$.

Utilisation de la structure algébrique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_p$

★★★☆ **Exercice 21.37** – Combien l'équation $x^2 = 1$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Déterminer les valeurs de n pour lesquelles il y a exactement 2 racines.

★★★☆ **Exercice 21.38** – **(Théorème de Wilson)**

1. Montrer que si p est premier, alors $(p-1)! \equiv -1\ [p]$ (théorème de Wilson).
2. Montrer que si n n'est pas premier, $n > 4$, alors $(n-1)! \equiv 0\ [n]$. En déduire que le théorème de Wilson fournit une caractérisation des nombres premiers.
3. Montrer plus généralement que dans tout corps fini K, $\prod_{x \in K^*} x = -1$.

★★★☆ **Exercice 21.39** – **(Un résidu quadratique)**
On admet dans cet exercice qu'un polynôme de degré n à coefficients dans un corps K admet au plus n racines dans K. Soit p un nombre premier impair. On dit qu'un entier n est un résidu quadratique modulo p s'il existe un entier k tel que $k^2 \equiv n\ [p]$.

1. Montrer que $\mathbb{F}_p^*$ contient autant de carrés que de non carrés.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{F}_p^*$:
$$a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. En déduire que pour que -1 soit un résidu quadratique modulo p, il faut et il suffit que $p \equiv 1\ [4]$.

★★★★ **Exercice 21.40** – **(ENS)**
Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 1$ a au plus 2 solutions sur une droite $y = ax + b$ de $\mathbb{F}_p^2$.
2. Déterminer le cardinal de $\mathcal{C}_p = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2, x^2 + y^2 = 1\}$. On recherchera ces solutions sur toutes les droites passant par une solution qu'on s'est fixée, par exemple $(-1, 0)$.

22

Polynômes et fractions rationnelles

Dans toute cette feuille, on admettra le théorème de Rolle, affirmant que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. On dispose du même résultat si f est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Équations à inconnues polynomiales

★☆☆☆ **Exercice 22.1** – Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X^2+1)P''-6P=0$?

★☆☆☆ **Exercice 22.2** – Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$

★★☆☆ **Exercice 22.3** – Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(0)=0$ et $P(X^2+1)=P(X)^2+1$.

★★☆☆ **Exercice 22.4** – **(CCP)** Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(P,Q)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ tel que $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$.
2. Montrer que $P(1-X)=Q(X)$, $Q(1-X)=P(X)$.
3. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$, $(1-X)P'(X)-nP(X)=aX^{n-1}$. Déterminer a et P.

★★★☆ **Exercice 22.5** – Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2)=-P(X)P(X+1)$.

★★★★ **Exercice 22.6** – **(X)**
Trouver tous les couples $(P,Q)\in\mathbb{C}[X]^2$ tels que $P^2=1+(X^2-1)Q^2$.

Relations de Viète

★☆☆☆ **Exercice 22.7** – **(CCP)**
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ tels que $x+y+z=0$ et $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Montrer que $|x|=|y|=|z|$.

★★☆☆ **Exercice 22.8** – Déterminer la somme des carrés et des cubes des racines (comptées avec éventuelle multiplicité) de $X^5-2X^4+3X^2-X-1$

★★★☆ **Exercice 22.9** –

1. Démontrer l'existence d'un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,
$$P_n(\cotan^2(x))=\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}$$
2. Déterminer les racines de P_n et leur somme.
3. Montrer que : $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\quad \cotan^2(x)\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant 1+\cotan^2(x)$.

4. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Racines, multiplicité, rigidité

☆☆☆☆ **Exercice 22.10** – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine des polynômes :
a) $X^n - nX + (n-1)$; b) $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$; c) $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

☆☆☆☆ **Exercice 22.11** – Soit $E_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Montrer que E_n n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

★☆☆☆ **Exercice 22.12** – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si toutes les racines de P sont réelles, alors il en est de même de P'. En déduire que dans ce cas, toutes les racines de $P^2 + 1$ sont non réelles, et simples.

★★★☆ **Exercice 22.13** –
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes $F_n = \frac{1}{2^n n!}(X-1)^n(X+1)^n$, et on pose $P_n = F_n^{(n)}$. Les polynômes P_n sont appelés polynômes de Legendre.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $B_{n,k} = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.
   (a) Démontrer que $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}$.
   (b) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.
   (c) Déterminer la parité de P_n.
3. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

★★☆☆ **Exercice 22.14** – Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Montrer que si r est racine double de $P^2 + Q^2$, alors r est racine de $P'^2 + Q'^2$.

★★☆☆ **Exercice 22.15** – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré supérieur ou égal à 4. Montrer que si r est racine au moins double de P'', alors r est racine d'ordre de multiplicité au moins 4 de P. Généraliser.

★★★☆ **Exercice 22.16** – **Mines**
Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$ à racines simples, de degré $n \geqslant 2$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples
2. Montrer que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ne peut pas avoir deux coefficients successifs nuls.
3. Montrer que P ne peut pas avoir un coefficient nul entouré de deux coefficients non nuls de même signe.

★☆☆☆ **Exercice 22.17** – **(CCP)**
Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Condition nécessaire et suffisante pour que $P(X) = X^3 + pX + q$ admette une racine double. Déterminer dans ce cas les racines de P.

★★☆☆ **Exercice 22.18** – Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

★★★☆ **Exercice 22.19** – *On se propose dans cet exercice d'étudier les polynômes P vérifiant que P'' divise P. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ satisfaisant cette condition, et n son degré*

1. Montrer que P admet au plus une racine multiple.
2. Si P admet une racine multiple s de multiplicité α, en notant Q tel que $P = Q(X-s)^\alpha$, former une équation différentielle satisfaite par Q et en déduire que $\alpha = n$. Conclusion ?
3. Caractériser les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 tels que P'' divise P, et sans racine multiple.

★★★★ **Exercice 22.20** – Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré n.

1. Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, et c une racine de A. Montrer que pour tout h non nul assez petit, $A(c+h)A'(c+h)$ est du même signe que h.
2. Soit pour tout x, $V(x)$ le nombre de changements de signes stricts dans la suite $(P^{(k)}(x))_{k\in[\![0,n]\!]}$: $V(x)$ est le cardinal de
$$\{(i,j),\ 0 \leqslant i < j \leqslant n,\quad P^{(i)}(x)P^{(j)}(x) < 0 \text{ et } P^{(k)}(x) = 0 \text{ si } i < k < j.\}.$$
Montrer que V est constante sur tous les intervalles ouverts délimités par les racines des $P^{(k)}$, $k \in [\![0,n]\!]$, et qu'en une racine r d'un $P^{(k)}$, sa valeur chute d'au moins m si $k = 0$, et d'au moins $m-1$ si $k \neq 0$, m étant la multiplicité de r comme racine de $P^{(k)}$.
3. En déduire que le nombre de racines de P dans $]a,b[$, comptées avec multiplicité, est majoré par $V(a) - V(b)$.
4. Montrer que si $P \neq 0$, le nombre de racines avec multiplicité de P dans $\mathbb{R}_+^*$ est majoré par le nombre de changements de signe stricts dans la suite des coefficients de P (règle de Descartes)
5. On suppose que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $a_i \neq 0$ implique que i est racine de P. Montrer que $P = 0$.

★★★★ **Exercice 22.21** – **(X)**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et Q un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $Q' - aQ$ est aussi scindé.
2. Soit P et Q deux polynômes scindés. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_n Q^{(k)}$ est scindé.

Factorisations

★☆☆☆ **Exercice 22.22** – Soit $n \geqslant 2$, et pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$.
Calculer, pour tous complexes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\prod_{k=0}^{n-1}(a - b\omega_k)$.

★★☆☆ **Exercice 22.23** –

1. Soit $P = X^{2n} - 1$. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $Q = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.

★★★☆ **Exercice 22.24** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\alpha} \neq (-1)^n$. Soit P le polynôme :
$$P = (1 + \mathrm{i}X)^n - (\cos(2n\alpha) + \mathrm{i}\sin(2n\alpha))(1 - \mathrm{i}X)^n.$$
En factorisant P, calculer $\prod_{k=1}^{n}\tan\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$, dans les cas où cette expression est bien définie.

★☆☆☆ **Exercice 22.25** – Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

★☆☆☆ **Exercice 22.26** – **(CCP)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Factoriser $P(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Division euclidienne, divisibilité, arithmétique

★☆☆☆ **Exercice 22.27** – Trouver le reste de la division euclidienne de P par Q dans les cas suivants :

1. $P = X^{n+1} - X^n + 1$, $Q = X^2 - 1$

2. $P = X^{2n} + X^n + X + 1$, $Q = (X-1)^2$
3. $P = X^{2n+1} - X - 1$, $Q = X^2(X-1)^2$
4. $P = X^n + X + 2$, $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

★★☆☆ **Exercice 22.28** – Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, unitaires, de degré 3, divisibles par $X-1$, et dont les restes des divisions euclidiennes par $X-2$, $X-3$, $X-4$ sont égaux.

★★☆☆ **Exercice 22.29** – Trouver tous les polynômes P de degré 7 tels que le reste de la division euclidienne de P par $(X+2)^4$ soit égal à 2 et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^4$ soit égal à -2.

★★☆☆ **Exercice 22.30** – Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(X^2+X+1)^2$ divise $(X+1)^n - X^n - 1$.

★★★☆ **Exercice 22.31** – Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes

1. sur $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^2 + pX + q$ divise $P(X^2+1)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
2. sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $X^3 + X^2 - cX + 1$ divise $X^5 + aX^2 + b$ dans $\mathbb{C}[X]$;
3. sur $(a,b) \in \mathbb{Z}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Déterminer le quotient.

★☆☆☆ **Exercice 22.32** – Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X\cos t + \sin t)^n$ par X^2+1.

★☆☆☆ **Exercice 22.33** – **(d'après CCP)** Soit $a_0, \dots, a_n$ des complexes deux à deux distincts, et $P = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$. Soit $(L_0, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée aux a_i. Exprimer, pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$, le reste de la division euclidienne de A par P en fonction des polynômes L_i.

★☆☆☆ **Exercice 22.34** – **(CCP)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P_n(X) = X^{2n} + aX^n + b$.

★☆☆☆ **Exercice 22.35** – Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ (ainsi $\mathbb{L}$ est un corps dont $\mathbb{K}$ est un sous-corps). Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P et Q ont même PGCD dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{L}[X]$.

★★★★ **Exercice 22.36** – **(ENS, théorème de Liouville, 1879)** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes P, Q, R de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$ sans que P, Q et R soient tous égaux, à une constante multiplicative près, à un même polynôme.

★★★☆ **Exercice 22.37** – Soit P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que P et Q aient même ensemble de racines (dans $\mathbb{C}$), ainsi que $P-1$ et $Q-1$.

1. Soit n le degré de P. Montrer que le nombre de zéros distincts de P est égal à $n - \deg(P \wedge P')$.
2. Montrer que $\deg((P-1) \wedge P') + \deg(P \wedge P') \leqslant n-1$.
3. En déduire que $P = Q$

Fractions rationnelles

★☆☆☆ **Exercice 22.38** – Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$:

1. $F_1(X) = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
2. $F_2(X) = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$
4. $F_4(X) = \dfrac{3}{(X^3-1)^2}$
5. $F_5(X) = \dfrac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$
7. $F_7(X) = \dfrac{1}{X^2(X-1)^n}$
8. $F_8(X) = \dfrac{1}{X^p(1-X)^q}$

★☆☆☆ **Exercice 22.39** – Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

1. $F_1(X) = \dfrac{3}{X^3+1}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X^3+8)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$
4. $F_4(X) = \dfrac{X^{2n}}{X^{2n+1}-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

★☆☆☆ **Exercice 22.40** –
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles. Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.
Réciproquement, si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?

★★☆☆ **Exercice 22.41** – Soit $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, tel que $Q \neq 0$, et $P \wedge Q = 1$. Soit $F = \frac{P}{Q}$. Trouver une CNS sur la parité de P et Q pour que F soit paire. Même question pour F impaire.

★☆☆☆ **Exercice 22.42** – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels p et q pour que $\dfrac{X^2+pX+q}{(X^2-1)^2}$ admette une primitive dans $\mathbb{R}(X)$.

★☆☆☆ **Exercice 22.43 – (Une propriété de rigidité pour les fractions rationnelle)**
Soit F et G deux fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ prenant la même valeur en une infinité de points de $\mathbb{K}$. Montrer que $F = G$.

★★★☆ **Exercice 22.44** – Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, non constante.

1. Montrer que si 1 n'est pas pôle de F, alors $F\left(\frac{X^2}{1+X^2}\right)$ n'est pas un polynôme.
2. Montrer que cela reste vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par un corps dans lequel $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ prend une infinité de valeurs.
3. Montrer que cela reste vrai sans l'hypothèse d'infinitude.

★★☆☆ **Exercice 22.45** – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $F\left(\frac{X^2}{1+X}\right) = P(X)$.

★★★☆ **Exercice 22.46** – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, scindé, à racines simples $r_1, \dots, r_n$. Exprimer la DÉS de $\dfrac{1}{P^3}$ à l'aide des $P'(r_i)$, $P''(r_i)$ et $P^{(3)}(r_i)$.

★★★☆ **Exercice 22.47** – Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers, et $F = \frac{P}{Q}$. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ est un nombre premier, alors F est constante.

23
Espaces vectoriels

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

☆☆☆☆ **Exercice 23.1** – L'ensemble des polynômes dont 0 et 1 sont des racines est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$? Même question pour l'ensemble des polynômes dont 0 ou 1 est une racine.

☆☆☆☆ **Exercice 23.2** – Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. Le sous-ensemble des fonctions positives.
2. Le sous-ensemble des fonctions s'annulant en 1.
3. Le sous-ensemble des fonctions tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Le sous-ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$
5. Le sous-ensemble des fonctions périodiques dont T est une période.
6. Le sous-ensemble de toutes les fonctions périodiques (quelle que soit la période).
7. Le sous-ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, mais pas $\mathcal{C}^{n+1}$.

★★☆☆ **Exercice 23.3** –

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E. On suppose que pour tout (i,j) de I^2 il existe k dans I tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$. Démontrer que $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace de E.
2. Étudier la réciproque.

★★★☆ **Exercice 23.4** – Soit $(G,+)$ un groupe abélien.

1. Montrer que G peut être muni d'au plus une structure de $\mathbb{Q}$-ev.
2. Montrer que pour que G puisse être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions :
   - G est sans torsion (*i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in G$ tel que $x \neq 0$, on a $n\cdot x \neq 0$)
   - G est divisible (*i.e.* pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in G$ tel que $x = ny$)

Familles libres, génératrices, bases

☆☆☆☆ **Exercice 23.5** – Pour chacune des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, génératrices ; lesquelles sont des bases ?

1. $((1,3,-2),(2,1,0))$
2. $((1,5,6),(2,3,0),(3,8,6),(1,0,0))$
3. $((2,2,1),(1,1,2),(1,1,1))$
4. $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$.
5. $((1,2,0),(0,1,1),(2,0,1))$.

★☆☆☆ **Exercice 23.6** – Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^5$, et les compléter en une base. Décrire un supplémentaire des espaces engendrés par ces familles.

$$1. \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\2\end{pmatrix}; \qquad 2. \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$$

★★☆☆ **Exercice 23.7** – Liberté des familles suivantes :

1. $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, où $f_k : x \mapsto e^{kx}$, dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (on demande trois méthodes différentes)
2. $(X^k(1-X)^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$, dans $\mathbb{K}[X]$
3. $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, où $f_k : x \mapsto r_k^x$, où $0 < r_0 < \cdots < r_n$.

★★☆☆ **Exercice 23.8** – Étudier la liberté des familles suivantes (dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

1. (φ_a, φ_b), $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, où pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : x \mapsto \sin(x+a)$.
2. $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
3. $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $f_k : x \mapsto \cos^k x$
4. idem pour $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
5. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : x \mapsto x^n \cos(x)$, $g_n : x \mapsto x^n \sin(x)$.
6. $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})$ soit infini.
7. $(f_n)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : x \mapsto \cos(x^k)$.

★☆☆☆ **Exercice 23.9** – Liberté sur $\mathbb{C}$ de la famille $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$.

★★☆☆ **Exercice 23.10** – Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, u le vecteur défini par $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = u + e_i$. À quelle condition sur $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la famille $(v_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est-elle liée ?

★☆☆☆ **Exercice 23.11** – Soit pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto |x-\alpha|$. Montrer que pour tout $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, la famille $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ est libre.

★★☆☆ **Exercice 23.12** – Déterminer une CNS sur les réels x, y et z pour que les trois vecteurs

$$u = (yz, z, y), \qquad v = (z, xz, x), \qquad w = (y, x, xy)$$

soient liés.

★☆☆☆ **Exercice 23.13** – Étudier la liberté dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la famille $(f_0, \dots, f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est la fonction $x \mapsto e^{-kx^2}$.

★☆☆☆ **Exercice 23.14** – Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les quatre vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,1,-1), \qquad v_2 = (1,2,4), \qquad v_3 = (3,-1,a), \qquad v_4 = (2,3,b).$$

Déterminer a et b tels que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$.

Sommes

☆☆☆☆ **Exercice 23.15** – Soit E un $\mathbb{K}$-ev, A, B et C des sev de E. Montrer que :

1. $A \cap B = A + B \Longrightarrow A = B$
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$
3. $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$
4. $A \subset B \Longrightarrow A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$
5. $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

★☆☆☆ **Exercice 23.16** – Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ des sev de E tels que :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad E_i \subset F_i.$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = F_i$.

Supplémentaires

★☆☆☆ **Exercice 23.17** – Soit $S \subset \mathbb{R}$ telle que $-S = S$, c'est à dire que pour tout $x \in S$, $-x$ est encore élément de S. Soit :

$$P = \{f \in \mathbb{R}^S,\ \forall x \in S, f(-x) = f(x)\}, \qquad \text{et} \qquad I = \{f \in \mathbb{R}^S,\ \forall x \in S, f(-x) = -f(x)\}.$$

Montrer que P et I sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^S$.

★☆☆☆ **Exercice 23.18** – Montrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

★☆☆☆ **Exercice 23.19** – Soit n un entier naturel. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$. On note $P \cdot \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes divisibles par P.

1. Montrer que $P \cdot \mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ et $P \cdot \mathbb{R}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

★☆☆☆ **Exercice 23.20** – Soient E un $\mathbb{K}$-ev, A, B, C trois sev de E tels que $A \subset C$ et A et B sont supplémentaires dans E. Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Dimension finie, rang

☆☆☆☆ **Exercice 23.21** – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que tout système libre de E a au plus n éléments. Montrer que E est de dimension finie, et que $\dim E \leqslant n$.

★★☆☆ **Exercice 23.22** – On considère dans un $\mathbb{K}$-ev E les deux système de vecteurs $S = (u_1, \dots, u_n)$ et $S' = (u_1, \dots u_p)$ extrait de S. Montrer que si $\operatorname{rg}(S) = r$, alors $\operatorname{rg}(S') \geqslant r + p - n$.

★★☆☆ **Exercice 23.23** – **(ENS Lyon)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_i)_{i \in [\![1, n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints I et J non vides de $[\![1, n+1]\!]$ tels que

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j.$$

★★★☆ **Exercice 23.24 – (Les corps finis)**
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Dans cet exercice, on admettra, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, l'existence d'un corps $\mathbb{K}'$ contenant $\mathbb{K}$, sur lequel P est scindé. Si ce corps $\mathbb{K}'$ est minimal pour l'inclusion, on dit que $\mathbb{K}'$ est un corps de décomposition de P.

1. Soit p un nombre premier, et $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique p. En munissant $\mathbb{K}$ d'un certaine structure d'espace vectoriel, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{K}$ soit de cardinal p^n.
2. On étudie la réciproque. Soit p un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les racines de $X^{p^n-1} - 1$, montrer qu'il existe un corps de cardinal p^n.
3. Réciproquement, étant donné $\mathbb{K}$ un corps de cardinal p^n, montrer que $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition du polynôme $X^{p^n-1} - 1$ de $\mathbb{F}_p[X]$.

Un théorème d'algèbre affirme l'unicité à isomorphisme près du corps de décomposition d'un polynôme. Ainsi, pour tout nombre premier p, et tout entier strictement positif n, il existe, à isomorphisme près, un unique corps de cardinal $q = p^n$. Ce corps est noté $\mathbb{F}_q$. Les corps finis sont tous isomorphes à un $\mathbb{F}_q$.

★★★☆ **Exercice 23.25** – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \leqslant n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

★★★★ **Exercice 23.26 – (ENS)** Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'on ne peut pas avoir $E = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_N$, où les V_i sont des sous-espaces vectoriels stricts de E. Que se passe-t-il si $\mathbb{K}$ est fini ?
2. Montrer que si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, de même dimension (finie), il existe G supplémentaire commun à tous les F_i.

★★★★ **Exercice 23.27 – (ENS, familles positivement génératrices)**
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 1$, et une famille $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est positivement génératrice si pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$. On se donne $\mathcal{F}$ une famille positivement génératrice de cardinal p.

1. Montrer que $p \geqslant n + 1$. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $n + 1$.
2. On suppose que $p \geqslant 2n + 1$. Montrer qu'il existe une sous-famille stricte de $\mathcal{F}$ qui est encore positivement génératrice. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $2n$ dont aucune famille stricte ne l'est.

24 Applications linéaires

Applications linéaires en dimension quelconque

★☆☆☆ **Exercice 24.1** – Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$;
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}(f)$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$;
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$;
5. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$;
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

☆☆☆☆ **Exercice 24.2** – **(Stabilité de l'image et du noyau par un élément du commutateur)** Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u, ainsi que plus généralement $\mathrm{Ker}(P(v))$ et $\mathrm{Im}(P(v))$, où P est un polynôme.

★★★☆ **Exercice 24.3** – Soit A, B, C et B' quatre espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit f, g, f', g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & C \\ & B' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

On suppose en outre que :

(i) $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$,

(ii) f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives,

(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.

Montrer que h est un isomorphisme.

★★☆☆ **Exercice 24.4** – **(Lemme de Schur)**

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. Montrer que si pour tout $x \in E$ les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires, alors f est une homothétie, i.e. $f = \lambda \mathrm{id}$ pour un certain λ (lemme de Schur).
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f = f \circ u$. Montrer que f est une homothétie (avec l'axiome du choix).

★★★☆ **Exercice 24.5** – **(Préservation des sommes directes par les AL injectives)**

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Montrer que si G et H sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G + H$ soit directe, alors $f(G) + f(H)$ est également directe.
2. À quelle condition sur G, H et $\operatorname{Ker}(f)$ peut-on affirmer cela si f n'est plus supposée injective ?

★☆☆☆ **Exercice 24.6** – Soit $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Étudier la surjectivité et l'injectivité de f.
4. Montrer qu'il existe une base $(e_0, \dots, e_i, \dots)$ de $\mathbb{C}[X]$ telle que pour tout $i > 0$ on ait $f(e_i) = e_{i-1}$.

★★★☆ **Exercice 24.7** – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. Plus généralement, soit P un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Applications linéaires en dimension finie

★☆☆☆ **Exercice 24.8** – Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ v)$.
2. Que peut-on dire de $\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u$?

★☆☆☆ **Exercice 24.9** – Soit $E_0, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, de dimension finie, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : E_{i-1} \longrightarrow E_i$ une application linéaire. On suppose que :

$$\{0\} \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} E_n \longrightarrow \{0\},$$

est *exacte*, ce qui signifie que f_1 est injective, f_n est surjective, et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0.$$

★☆☆☆ **Exercice 24.10** – Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

★★☆☆ **Exercice 24.11** – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est un automorphisme. Montrer que

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim(E).$$

★★☆☆ **Exercice 24.12** – Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u et v des endomorphismes de E.

1. Démontrer que :

(a) $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}\, v - \dim(\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u)$

(b) $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}\, u - \dim E + \dim(\mathrm{Im}\, v + \mathrm{Ker}\, u)$.

2. En déduire que :
$$\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\mathrm{rg}\, u, \mathrm{rg}\, v).$$

★★☆☆ **Exercice 24.13** – Soit E un espace de dimension finie, f un endomorphisme de E de rang r. Montrer que f est la somme de r endomorphismes de E de rang 1.

★★★☆ **Exercice 24.14 – Caractérisation de $\mathbb{C}$**
Soit K une $\mathbb{R}$-algèbre sans diviseur de 0, de dimension finie $n \geqslant 2$. On identifie $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R} \cdot 1_K$.

1. En considérant $x \mapsto ax$, montrer que tout élément non nul de K est inversible.
2. Soit $a \in K \smallsetminus \mathbb{R}$. Montrer que $(1, a)$ est libre sur $\mathbb{R}$, et que $(1, a, a^2)$ est liée (on pourra commencer par justifier l'existence de $P \in \mathbb{R}[X] \smallsetminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$).
En déduire l'existence de réels α et β tels que $a^2 = \alpha 1 + \beta a$.
3. En considérant le polynôme $X^2 - \beta X - \alpha$, montrer que $\alpha + \frac{\beta^2}{4} < 0$.
4. Montrer qu'il existe $i_a \in \mathrm{Vect}(1, a)$ tel que $i_a^2 = -1$.
5. Montrer que si K est commutative, alors il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre entre K et $\mathbb{C}$.

★★★★ **Exercice 24.15 – (d'après ENS) – Simplicité de $\mathcal{L}(E)$**
Soit E un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères (c'est-à-dire stables par multiplication à droite et à gauche) de $\mathcal{L}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{L}(E)$. Cela reste-t-il vrai en dimension infinie ?

Projecteurs et symétries

★☆☆☆ **Exercice 24.16** –

- *E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*
- *Id_E désigne l'identité de E, Θ l'endomorphisme nul.*
- *On désigne par T le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$,
et par f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation : $T(f) = \Theta$.*

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de T. Soient α et $\bar{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées. Calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$
2. On note L_1, L_2, L_3 les polynômes définis par :
$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha), \qquad L_2(X) = (X-1)(X-\bar{\alpha}), \qquad L_3(X) = (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}).$$
(a) Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un triplet (a_n, b_n, c_n) de complexes tel que
$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$
(c) Justifier la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n) vers des réels respectifs a, b, c.
3. On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$. Montrer que h est un projecteur.

★★☆☆ **Exercice 24.17** – Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$ et $p \circ q = q \circ p$.

★☆☆☆ **Exercice 24.18** – Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, et p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

★☆☆☆ **Exercice 24.19** – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

★★★☆ **Exercice 24.20** – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$.
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g)$.
3. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :
$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

★★☆☆ **Exercice 24.21** – Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et E_1 et F_1 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 + F_1$.

1. Montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel E_2 inclus dans F_1 et d'un sous-espace vectoriel F_2 inclus dans E_1 tels que
$$E = E_1 \oplus E_2 \qquad \text{et} \qquad E = F_1 \oplus F_2.$$
2. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à E_1 de direction E_2, et s' la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2. Démontrer que $s' \circ s = s \circ s'$.
3. Démontrer que $s' \circ s$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

★★☆☆ **Exercice 24.22** – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)\cdot$ Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tels que $f = g \circ p$.

★★☆☆ **Exercice 24.23 – (X) – Somme de projecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On se donne n endomorphismes non nuls de E, $p_1, \dots, p_n$, tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(p_i)$ sont en somme directe et que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{rg}(p_i) = 1$.

★★★★ **Exercice 24.24 – (X) – Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$**
On rappelle qu'un idéal à gauche d'un anneau A est un sous-groupe additif de A stable par multiplication à gauche par un élément de A. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note, pour tout F sous-espace de E,
$$g(F) = \{u \in \mathcal{L}(E), F \subset \mathrm{Ker}(u)\},$$
et si H est une partie de $\mathcal{L}(E)$, on note $f(H) = \bigcap_{u \in H} \mathrm{Ker}(u)$.

1. Vérifier que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $g(F)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$ et que l'on a $(f \circ g)(F) = F$.
2. Soit I un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$
   (a) Soit $u \in I$, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $v \in I$.
   (b) Si p et q sont des projecteurs appartenant à I, montrer qu'il existe un projecteur r dans I tel que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
   (c) Prouver qu'il existe un projecteur p appartenant à I tel que $\mathrm{Ker}(p) = f(I)$, puis que $I = \mathcal{L}(E)p$.
   (d) Étudier $g \circ f(I)$ et conclure.

★★★★ **Exercice 24.25 – (d'après ENS) – Théorème de Maschke**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G.

1. Soit p un projecteur sur F. Construire à partir de p un projecteur q invariant par conjugaison par les éléments de G.

2. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Puissances et polynômes d'endomorphismes, endomorphismes nilpotents

★★★☆ **Exercice 24.26** – Soit $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$. On note f et g les applications de E dans E définies par : $f(P) = P'$; $\quad g(P) = XP$.

1. Montrer que f et g sont linéaires et étudier leur injectivité et surjectivité.
2. Montrer que pour tout n strictement positif, on a : $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.
3. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}$. Montrer que la relation précédente reste vraie, et en déduire que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, E est de dimension infinie.

★☆☆☆ **Exercice 24.27** – **(ENS) –Majoration de l'indice de nilpotence**
Soit u un endomorphisme nilpotent de E de dimension n. Montrer que son indice de nilpotence est au plus égal à n.

★★☆☆ **Exercice 24.28** – **(Sous-espaces caractéristiques)** Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension quelconque, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\mathrm{Im}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geqslant p$. Qu'en est-il de $\mathrm{Im}(u^k)$?

L'espace $\mathrm{Ker}(u^p)$ est appelé sous-espace caractéristique de u associé à la valeur (propre) 0. On peut considérer plus généralement l'espace obtenu de la sorte avec l'endomophisme $u - \lambda\mathrm{id}$, appelé, s'il est non trivial, sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.

★★★☆ **Exercice 24.29** – **(Théorème des noyaux itérés)** Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. En restreignant u à un supplémentaire S_p de $\mathrm{Ker}(u^p)$ dans $\mathrm{Ker}(u^{p+1})$, montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\, u^{p+1} - \dim \mathrm{Ker}\, u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En d'autres termes, les sauts de dimension sont de plus en plus petits (théorème des noyaux itérés)
3. On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant \dim(E)$, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

★☆☆☆ **Exercice 24.30** – Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer que le rang de f est 1.

★★★☆ **Exercice 24.31** – On considère E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $(p+1)n$, n et p étant des entiers non nuls, avec $p \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E, vérifiant : $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = pn$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.

★★★☆ **Exercice 24.32** – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $3n$, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$.

1. En considérant g l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{Im}(f), E)$, obtenue par restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$, montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2n$
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2n$, alors $\mathrm{rg}(f^2) = n$ (on pourra dans un premier temps exprimer $\mathrm{rg}(g)$)
3. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2n - 1$, alors $\mathrm{rg}(f^2) = n - 1$ ou $\mathrm{rg}(f^2) = n - 2$.

★★★☆ **Exercice 24.33 – (X) – Condition pour que** $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev non nuls de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ si et seulement s'il existe $h \in \mathrm{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

★★★☆ **Exercice 24.34 – (X) – Produit commutatif d'endomorphismes nilpotents**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $u_1, \dots, u_n$ des endormophismes nilpotents de E, qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$?

★★★☆ **Exercice 24.35 – (ENS) – Racine de la dérivation**

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $D = E \to E$ l'opérateur de dérivation. Existe-t-il T dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$?

25

Matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

Matrice d'une application linéaire

☆☆☆☆ **Exercice 25.1 – (Matrice d'une AL relativement à des bases)**
Montrer que les applications f ci-dessus sont des applications linéaires de E dans F, et donner leur matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et de F.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+2y, 3x-3y)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-2y, y+z, z-x)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \mathrm{id}$, $\mathcal{B} = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$, $\mathcal{C} = $ b.c.
4. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \mathrm{id}$, $\mathcal{B} = $ b.c., $\mathcal{C} = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$
5. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \mathrm{id}$, $\mathcal{B} = $ b.c., $\mathcal{C} = (1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$.
6. $E = F = \mathrm{Vect}(\cos, x \mapsto x\cos x, \sin, x \mapsto x \sin x)$, $f(g) = g'$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (\cos, x \mapsto x\cos x, \sin, x \mapsto x\sin x)$
7. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$, $f(P) = R$, reste de la division de P par $X^2 - 3X + 2$, $\mathcal{B} = $ b.c., $\mathcal{C} = $ b.c.

★☆☆☆ **Exercice 25.2** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

★☆☆☆ **Exercice 25.3** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

★☆☆☆ **Exercice 25.4** –
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

On note, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de E ?

2. Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E, et donner sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$. D est-il un isomorphisme ?
3. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de D est $B = I_{n+1} + J_{n+1}$.
4. Calculer B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. En déduire la dérivée k-ième de la fonction b_n. Retrouver ce résultat directement à l'aide d'une formule du cours.
6. (a) Déterminer B^{-1}.
   (b) En déduire une primitive de la fonction b_n.
   (c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

★☆☆☆ **Exercice 25.5** – Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et α un nombre réel non nul. On considère $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X + \alpha)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Montrer que pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.6** – **(Changements de base)**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ($n = 2$ ou 3) associé à la matrice A ci-dessous, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, en se servant de la formule de changement de base.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \text{b.c.}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \text{b.c.}$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \text{b.c.}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \text{b.c.}$

★☆☆☆ **Exercice 25.7** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Exprimer la matrice de f :

1. relativement à la base canonique et à la base $((1,1),(1,-1))$;
2. relativement à la base $((1,1),(1,-1))$ et à la base canonique ;
3. relativement à la base canonique et à la base $((1,-1),(1,1))$;
4. dans la base $((1,2),(-1,2))$;
5. dans une base dans laquelle sa matrice est diagonale ; en déduire A^n.

★★★☆ **Exercice 25.8** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $g = f - 2\mathrm{id}$.

1. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f.
2. Montrer qu'un plan P est stable par f si et seulement si $\mathrm{Im}(g^2) \subset P \subset \mathrm{Ker}(g^2)$.

★★★☆ **Exercice 25.9** – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ et leur dimension.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et une base de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{id})^2)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
5. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n.

Puissances, racines carrées, polynômes annulateurs

★★☆☆ **Exercice 25.10** –

1. Calculer, par au moins trois méthodes, les puissances la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Déterminer l'inverse de A.
3. Trouver une matrice B telle que $B^2 = A$.

★☆☆☆ **Exercice 25.11** – Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 + 2A$. Déterminer A^n en fonction de A et A^2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en cas d'inversibilité.

★★☆☆ **Exercice 25.12** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$. Calculer de deux façons différentes $(I_n + A)^p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

★★☆☆ **Exercice 25.13** – **(X)**
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver A^n et montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

★★☆☆ **Exercice 25.14** – **(d'après X)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \quad u^k = 0\}$.

1. Justifier l'existence de p. Montrer que $p \leqslant n$, et qu'en particulier $u^n = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est bijective, déterminer son inverse comme un polynôme en u.
3. Prouver que l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune solution $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

★☆☆☆ **Exercice 25.15 – (École Navale)**

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Image, noyau, rang

☆☆☆☆ **Exercice 25.16** – Déterminer les images et noyaux des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ ($n = 2$ ou 3) canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.17** – Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires sur $\mathbb{K}$ canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.18** – Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

★★☆☆ **Exercice 25.19** – Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$.

★☆☆☆ **Exercice 25.20** – Déterminer le rang de la matrice $(\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

★★★☆ **Exercice 25.21** – Déterminer, suivant la valeur des paramètres a et b dans $\mathbb{R}$, le rang des matrices suivantes. Déterminer une base de l'image et du noyau de l'endomorphisme canoniquement associé.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ b & 1 & b \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

★★★☆ **Exercice 25.22 – (X) – Inégalité de Frobenius**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) \leqslant \mathrm{rg}(ABC) + \mathrm{rg}(B).$$

★★★☆ **Exercice 25.23 – (ENS Lyon)**

Soit n un entier. Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, \dots, E_k$, parties de $[\![1, n]\!]$, vérifiant :

(i) $|E_i|$ est impair pour tout i

(ii) $|E_i \cap E_j|$ est pair pour tout $i \neq j$.

★☆☆☆ **Exercice 25.24** –
Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 & -2 \\ -2 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 et en déduire $\mathrm{rg}(P)$.

Inversibilité, calcul d'inverses, GL_n

☆☆☆☆ **Exercice 25.25** – Montrer que toute matrice inversible peut s'écrire sous forme d'un produit de matrices d'opérations élémentaires

☆☆☆☆ **Exercice 25.26** – Étudier l'inversibilité, et le cas échéant calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.27** – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

★☆☆☆ **Exercice 25.28** – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est inversible. Calculer A^{-1}. En déduire B^{-1}, C^{-1}, D^{-1}.

★☆☆☆ **Exercice 25.29** – **(Centrale)**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M \in \mathcal{A}$ est une matrice inversible. Montrer que $M^{-1} \in \mathcal{A}$.

★★☆☆ **Exercice 25.30** – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
Soit a et b deux réels et $B = aI_n + bA$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que B soit inversible. Calculer B^p, pour $p \in \mathbb{Z}$.

★☆☆☆ **Exercice 25.31** – **(ESM Saint-Cyr)**
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$, et B est nilpotente. Montrer que :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

★★☆☆ **Exercice 25.32** – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible, et calculer son inverse.

☆☆☆☆ **Exercice 25.33** – Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'aucune des matrices n'est nulle, et que $ABC = 0$. Montrer qu'au moins deux des trois matrices A,B, C sont non inversibles.

★★☆☆ **Exercice 25.34** – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$. Soit A_n la matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}.$$

1. Calculer l'inverse de A_3.
2. Plus généralement, déterminer A_n^{-1}.

★★☆☆ **Exercice 25.35** – **(Matrices à coefficients positifs ainsi que leur inverse)**
Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un et un seul coefficient non nul.

★★☆☆ **Exercice 25.36** – **(Sous-espaces de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sans matrice inversible)**

Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ On note F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $i \in [\![1,4]\!]$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que $\forall i \in [\![1,4]\!]$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ est libre.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible, alors $a = (0,0,0,0)$.
4. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.
   (a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.
   (b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

★★☆☆ **Exercice 25.37** – **(Mines)**
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Exprimer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

★★★☆ **Exercice 25.38** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$, tel que $C = AB - BA$ et $BC = CB$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $AB^{p+1} = B^p(BA + (p+1)C)$
2. En déduire que C n'est pas inversible.

★★★☆ **Exercice 25.39** – **(ENS)**
Étant donnée une partie X d'un groupe G, on note $C_G(X) = \{g \in G \mid \forall x \in X,\ xg = gx\}$.
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $X \subset G$. Montrer qu'il existe une partie finie X_0 de X telle que $C_G(X) = C_G(X_0)$.

★★★☆ **Exercice 25.40** – **(ENS)** Soit $p > 3$ un nombre premier et $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction canonique. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\varphi_{|G}$ est injective.

Matrices équivalentes, matrices semblables

☆☆☆☆ **Exercice 25.41** – Les matrices suivantes sont-elles semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.42** –

1. Les matrices suivantes sont elles équivalentes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Même question avec la même matrice A qu'en question 1 et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

☆☆☆☆ **Exercice 25.43** – Soit A et B deux matrices semblables. Montrer que A et B ont mêmes polynômes annulateurs et mêmes valeurs propres

★★☆☆ **Exercice 25.44** – **(Version matriciel de la simplicité de $\mathcal{L}(E)$)**
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit I un idéal bilatère non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Justifier que si $M \in I$, toute matrice de même rang que M est dans I.
2. Montrer que plus généralement, si $M \in I$, toute matrice de rang inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(M)$ est dans I.
3. En déduire que $I = \{0\}$ ou $I = \mathcal{L}(E)$.

Factorisations

★★★☆ **Exercice 25.45** – **(ENS)**
Soit A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C = AXB$.

Trace, sev et hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

★★☆☆ **Exercice 25.46** – **(Carrés magiques)**
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On appelle *carré magique* d'ordre 3, toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales. Cette somme est notée $s(M)$.
On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'application s définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout M de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(M)$, est linéaire et que :

$$\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(J) \oplus \mathrm{Ker}\, s$$

2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que :
   $$\mathrm{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}).$$
   (b) En déduire une base de $\mathcal{C}$ formée de matrices symétriques et antisymétriques.

★☆☆☆ **Exercice 25.47** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A,$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.
3. Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

★★★☆ **Exercice 25.48** – Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, et $n > 0$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Montrer que $f : M \mapsto {}^tAM + MA$ définit un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, et exprimer sa trace en fonction de celle de A.

★★★★ **Exercice 25.49 – (Étude algorithmique des matrices de trace nulle)**
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et n un entier positif. À l'aide d'opérations élémentaires, et en travaillant simultanément sur les lignes et les colonnes, montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle. On pourra étudier successivement les trois cas suivants : au moins un coefficient de la première ligne ou première colonne, en position différente de $(1,1)$ est non nul ; au moins un coefficient non diagonal est non nul ; la matrice est diagonale.

★★★★ **Exercice 25.50 – (Centrale, Étude des matrices de trace nulle)**
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à coefficients diagonaux tous nuls.
3. Montrer que sont équivalents, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
   (i) $\mathrm{tr}(A) = 0$
   (ii) $\exists (U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $A = UV - VU$ (crochet de Lie).
   On pourra étudier l'image de $\varphi : M \mapsto MD - DM$, où D est la matrice diagonale de coefficients $1, 2, \dots, n$.

★★☆☆ **Exercice 25.51 – (Caratérisation de la trace)**
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que la trace de M est la somme des coefficients diagonaux de M, et que lorsque les produits sont possibles, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Soit φ une forme linéaire non nulle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

★★★☆ **Exercice 25.52 – (ENS, hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note f_A la forme linéaire définie, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par $f_A(X) = \text{tr}(AX)$. Montrer que l'application f qui à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe f_A établit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

⋆⋆⋆⋆ **Exercice 25.53 – (X, Existence d'une matrice inversible dans un hyperplan)**
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

26

Déterminants

Formes alternées

★★☆☆ **Exercice 26.1 – (ENS)**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 1$, calculer la dimension de $\mathcal{A}_n(E)$, espace des formes n-linéaires alternées sur E.

Calculs de déterminants

★★★☆ **Exercice 26.2** – Calculer les déterminants suivants. On cherchera des expressions aussi factorisées que possible.

1. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$

★★☆☆ **Exercice 26.3** – Calculer $\det((a+i+j)_{1\leqslant i,j\leqslant n})$ et $\det(((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.

★★☆☆ **Exercice 26.4** – Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & & n \\ n & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ n-1 & & 2 & 1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

★☆☆☆ **Exercice 26.5** – Calculer le déterminant d'ordre $2n$, par 3 méthodes différentes :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & & \cdots & & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & & \vdots \\ & & b & a & & & \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & & \cdots & & 0 & a \end{vmatrix}$$

★☆☆☆ **Exercice 26.6** – En se ramenant à une matrice diagonale par blocs, calculer le déterminant d'ordre $2n$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & 0 & 0 & b_n \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_n & 0 & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

★★★☆ **Exercice 26.7** – Calculer :

1. $\det\left(\binom{i}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
2. $\det\left((a_{\min(i,j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$
3. $\det\left(((a_i+b_j)^{n-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$
4. $\det\left((\binom{p}{j-i+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$

★☆☆☆ **Exercice 26.8** – Exprimer une relation de récurrence permettant de calculer les déterminants suivants de proche en proche :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n-1 & n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & n-1 \\ 0 & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 1 & 2 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cos\theta \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

★★☆☆ **Exercice 26.9** – Soit A une matrice de rang r, et M une matrice quelconque. Montrer que $\deg(\det(M - XA)) \leqslant r$.

★★★☆ **Exercice 26.10** –

Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{pmatrix}$ et J la matrice d'ordre n : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det(M - XJ)$ est un polynôme de degré au plus 1.
2. En déduire $\det(M)$.

★★★☆ **Exercice 26.11 – (X) – Matrice de Vandermonde incomplète**

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

★★★☆ **Exercice 26.12 – (X)**

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer $\det(((x_i - y_j)^k)_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.

Calculs de déterminants par blocs

★★☆☆ **Exercice 26.13** – Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right| = \det(A+B)\det(A-B) \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right| = \det(A+\mathrm{i}\,B)\det(A-\mathrm{i}\,B)$$

★★☆☆ **Exercice 26.14** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D soit inversible et $CD = DC$. Montrer que

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \det(AD - BC).$$

★★☆☆ **Exercice 26.15** – Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\det\left(\lambda I_{2n} - \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & -B \end{array}\right)\right) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda B - A)$$

Déterminants et inversibilité ; comatrice

★★★☆ **Exercice 26.16** – Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Monter que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

★☆☆☆ **Exercice 26.17** – Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, et E un espace vectoriel de dimension finie sur E. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe φ et ψ dans $\mathrm{GL}(E)$ tels que $f = \varphi + \psi$.

★☆☆☆ **Exercice 26.18** – Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit, pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\|A\| = \max(|a_{i,j}|)$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dans le sens où :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \|B - A\| \leqslant \varepsilon.$$

★★☆☆ **Exercice 26.19 – Mines**

1. Soit K un corps, et $a \in K$. Pour $(x, y) \in K^2$, on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & ay \\ y & x \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des matrices $M(x,y)$ lorsque (x,y) décrit K^2 et un corps si et seulement si a n'est pas le carré d'un élément de K.
2. Montrer l'existence d'un corps à 25 éléments
3. Soit p un nombre premier impair. Montrer l'existence d'un corps à p^2 éléments.

★★★★ **Exercice 26.20 – (d'après ENS) – Comatrice d'un produit**
Soit K un corps. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que les matrices $A - XI_n$ et $B - XI_n$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(K(X))$.
2. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$.
3. Généraliser le résultat au cas de matrices A et B à coefficients dans un anneau intègre.

Autres exercices

★☆☆☆ **Exercice 26.21** – Soit A tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{-1,1\}$. Montrer que $\det(A)$ est divisible par 2^{n-1}.

★★★☆ **Exercice 26.22** – **(Mines)** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det(B+X)$. Montrer que $A = B$.

★★★★ **Exercice 26.23** – **(Le problème des vaches, version réelle, ENS Cachan-Rennes)**
Un paysan possède $2n+1$ vaches. Lorsqu'il isole n'importe laquelle d'entre elles, il peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n vaches dont la somme des masses est égale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse. Les masses sont supposées réelles quelconques.

★★★★ **Exercice 26.24** – **(ENS)**
Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ et $\det(A+B) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\det(A^p + B^p) \geqslant 0$.

27

Algèbre bilinéaire

Produits scalaires, normes euclidiennes

★☆☆☆ **Exercice 27.1** –

1. Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. La forme bilinéaire φ est-elle un produit scalaire ?
2. Même question si φ est canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

★★☆☆ **Exercice 27.2** – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M_λ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$. On assimile les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à des vecteurs colonnes, et on note Φ_λ l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie par : $\Phi_\lambda(X, Y) = {}^tXM_\lambda Y$. Montrer que Φ_λ est un produit scalaire si et seulement si $\lambda \in]-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}[$.

☆☆☆☆ **Exercice 27.3** – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que φ définit un produit scalaire.

☆☆☆☆ **Exercice 27.4** –

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(n)}{n!}$ converge.
2. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

★☆☆☆ **Exercice 27.5** – Soit $a < b$. Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$, non identiquement nulle. Montrer que la matrice $\left(\int_a^b t^{i+j} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définit un produit scalaire.

★☆☆☆ **Exercice 27.6** – Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définit un produit scalaire.

★★☆☆ **Exercice 27.7** – Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1} (on pourra chercher à écrire C sous la forme ${}^tPP$)

★★★☆ **Exercice 27.8** –

1. Soit $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que
$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A.$$
2. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
Montre que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

★★☆☆ **Exercice 27.9** – Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$.

★★★★ **Exercice 27.10** – Soit E un espace vectoriel, muni d'une norme $\|\bullet\|$, vérifiant
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
Montrer que cette norme est euclidienne.

★★★★ **Exercice 27.11** – **(Familles obtusangles)**
Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ tels que pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle < 0$. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

Inégalités

★☆☆☆ **Exercice 27.12** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt[2^k]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$

☆☆☆☆ **Exercice 27.13** – Soit f une application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Démontrer que
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t}.$$
Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

☆☆☆☆ **Exercice 27.14** – Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$,
$$\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \left|\int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$
Déterminer dans chacun des deux cas quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité est une égalité.

☆☆☆☆ **Exercice 27.15** – Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$. Justifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \geqslant \frac{\ell}{2}$, et tout $f \in E$,
$$\left|\int_0^1 t^k f(t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{1}{2k - \ell + 1}\int_0^1 t^\ell f^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

★☆☆☆ **Exercice 27.16** – Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(M) \leqslant \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2}$. Cas d'égalité ?

★★☆☆ **Exercice 27.17 – (Mines)**
Soit, pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. Montrer que cela définit un produit scalaire.
2. Montrer que la norme associée vérifie $\|MN\| \leqslant \|M\| \times \|N\|$ (norme matricielle)

Orthogonalité, bases orthonormales

☆☆☆☆ **Exercice 27.18** – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Justifier qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

☆☆☆☆ **Exercice 27.19** – Soit E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et pour tout $x \in E$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

★☆☆☆ **Exercice 27.20** – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

★☆☆☆ **Exercice 27.21** –
Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 , $n \in \mathbb{N}$ converge. On note F l'ensemble des suites de E nulles à partir d'un certain rang.
On définit :

$$\forall (u, v) \in \ell^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Démontrer que $(\ell^2, \langle \bullet, \bullet\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, et que F en est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F dans ℓ^2, ainsi que $(F^\perp)^\perp$. Commentaires ?

★★☆☆ **Exercice 27.22** – Montrer que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien sont orthogonaux si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$.

★★★☆ **Exercice 27.23 – (Étude d'une famille orthogonale de polynômes, méthodes classiques)**
Soient a et b deux réels, tels que $a < b$, f une fonction continue strictement positive sur $[a, b]$. On définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_a^b f(t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note aussi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ la restriction de ce produit scalaire à $\mathbb{R}_d[X]$. Soit $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_d)$ la base orthonormale construite pour le produit scalaire précédent à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. La notation n'est pas ambiguë dans le sens où si $d' > d$, le début de la base orthonormale obtenue avec d' correspond à la base obtenue avec d. En particulier, en faisant tendre d vers l'infini, cela défini une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes.

1. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k.
2. Justifier l'existence de 3 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_nP_n + (b_n - X)P_{n+1} + c_nP_{n+2} = 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Du calcul de $\langle P_n, P_0\rangle$, déduire que P_n possède au moins une racine d'ordre impair dans $]a,b[$.
4. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines d'ordre impair de P_n, appartenant à $]a,b[$. En considérant $Q = \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$, montrer que les racines de P_n sont simples et contenues dans l'intervalle $]a,b[$.

★★★☆ **Exercice 27.24 – (Polynômes de Legendre)**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X^2-1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre). On muni E du produit scalaire défini par

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que (Q_n) est une famille orthogonale. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme de Q_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, $W_k = \dfrac{Q_k}{\|Q_k\|}$. Démontrer que $(W_0, \dots, W_n)$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

★★★☆ **Exercice 27.25 – (Polynômes de Charles Hermite)**

1. Justifier, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$.
2. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par
$$\varphi(P,Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t.$$
Montrer que φ est un produit scalaire.
3. Soient $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.
   (a) Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'
   (b) Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
   Les polynômes H_n sont appelés « polynômes de Hermite ».
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n' = nH_{n-1}$.
4. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$.
5. Montrer que la famille des $\dfrac{H_k}{\|H_k\|}$ peut s'obtenir par orthonormalisation de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

★★★☆ **Exercice 27.26 – (Matrice de Gram)** Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien. On définit la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ par :

$$G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\,.$$

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$
2. Supposons E de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que
$$\det G(x_1, \dots, x_n) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n))^2$$
3. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit $x \in E$. Montrer que
$$\det G(x, x_1, \dots, x_p) = d(x,F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p).$$

★★☆☆ **Exercice 27.27 –**
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
2. On suppose de plus que pour tout x de E, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$. Que peut-on dire de u ?

★★★☆ **Exercice 27.28** – **(X)**
Soit $A_1, \dots A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_p$ soit inversible, et pour tout $i \neq j$, ${}^tA_iA_j = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A_1) + \cdots + \mathrm{rg}(A_p) = n$.

★★☆☆ **Exercice 27.29** – Soit E un espace euclidien non réduit à 0, et φ une forme linéaire sur E. Montrer qu'il existe un unique vecteur u tel que : $\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle u, x\rangle$.

Projections orthogonales

☆☆☆☆ **Exercice 27.30** – Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F_i :

1. $F_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
2. $F_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$
3. $F_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$
4. $F_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
5. $F_5 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
6. $F_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
7. F_7 hyperplan d'équation $2x - y - z + 2t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$
8. F_8 sev d'équations $x - 2y - t - u = 0$ et $2x - z + t = 0$ dans $\mathbb{R}^5$.
9. $F_9 = \mathrm{Vect}(X-1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du ps $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.
10. $F_{10} = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du ps $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.

☆☆☆☆ **Exercice 27.31** –

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - 4z = 0$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,1,0,0)$ et $(0,1,1,1)$.

★★★☆ **Exercice 27.32** – **Composée de deux projecteurs orthogonaux**
Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sev de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.

1. Soient F et G deux sev de E, et p_F et p_G les projections orthogonales respectivement sur F et G. On suppose dans cette question que $p_F \circ p_G$ est la projection orthogonale sur un sev H.
   (a) Montrer que $H = F \cap G$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
2. On suppose dans cette question que p_F et p_G commutent.
   (a) Montrer que $G = (F \cap G) \oplus (F^\perp \cap G)$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_G$ est la projection orthogonale sur $F \cap G$.
3. On suppose que F et G sont deux droites vectorielles. Montrer que $p_F \circ p_G$ est une projection orthogonale non nulle si et seulement si $F = G$.

4. On suppose que G est une droite vectorielle. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que $p_F \circ p_G$ soit une projection orthogonale non nulle.

★★☆☆ **Exercice 27.33** – Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

★★☆☆ **Exercice 27.34** – **(Les projecteurs orthogonaux comme endomorphismes symétriques)**
Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Un endomorphisme vérifiant cela est dit *symétrique*.
2. En déduire que la matrice de p dans une base orthonormale est symétrique.
3. Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi l'ensemble de tous les projecteurs.

★★☆☆ **Exercice 27.35** – Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.
2. Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $\sum\limits_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

★★☆☆ **Exercice 27.36** – Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E tels que $F^\perp$ et $G^\perp$ soient orthogonaux. En notant, pour tout sous-espace H, p_H la projection orthogonale sur H, montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Matrices orthogonales

★★★☆ **Exercice 27.37** – Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. Montrer que : $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

★★★☆ **Exercice 27.38** – Montrer que pour toute matrice antisymétrique A, $\exp(A)$ est orthogonale.

★★☆☆ **Exercice 27.39** – Soit $(x_1, \dots, x_n)$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et $A = (x_i x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $S = 2A - I_n$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n \cap O_n$.

★★★☆ **Exercice 27.40** – Soit A et B deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si n est impair parmi les deux matrices $A + B$ et $A - B$, l'une au moins n'est pas inversible.

Isométries et similitudes

★☆☆☆ **Exercice 27.41** – Soit F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E de même dimension. Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.

★★★☆ **Exercice 27.42** – On considère un espace euclidien réel E. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$.
2. Montrer qu'il existe une isométrie u de E tel que $g = u \circ f$.

★★☆☆ **Exercice 27.43 – (Similitudes)**
Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E,\quad \langle x,y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

★★☆☆ **Exercice 27.44** – Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E tel que $f(V) \subset V$. Montrer que $f(V) = V$ et $f(V^\perp) = V^\perp$.

★★☆☆ **Exercice 27.45** – Soit E un espace euclidien, $a \in E$, $a \neq 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante l'application

$$x \mapsto f(x) = x + \alpha \langle x, a\rangle a$$

est-elle une isométrie ?

★★★☆ **Exercice 27.46** – Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E. Soit g un endomorphisme de E. On dit que g est symétrique si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle g(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$. On admettra que tout endomorphisme symétrique admet au moins une valeur propre réelle (en fait, un endomorphisme est même diagonalisable dans une base orthonormale). Ceci équivaut à la diagonalisabilité des matrices symétriques réelles.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^\perp$ est également stable par f.
2. Montrer que $f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E.
3. Soit x un vecteur propre de $f + f^{-1}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
4. Montrer que si E est de dimension 2, et si f n'admet pas de valeur propre, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et un réel θ tels que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
5. En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & \varepsilon_k & & & \\ & & & R_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R_p \end{pmatrix}$$

où les ε_i sont égaux à 1 ou -1, et les R_j sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$

6. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que u est une isométrie.

   (b) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est de la forme annoncée à la question précédente.

28

Combinatoire

Tirages et rangements

★☆☆☆ **Exercice 28.1** – On dispose de 10 CD dont 4 de Bach et 4 de Mozart.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger les CD sur une étagère de sorte que les disques de Bach restent groupés ? qu'à la fois les disques de Bach et les disques de Mozart restent groupés ?
2. Combien y a-t-il de façons de ranger les CD de sorte que les 8 CD de Bach ou Mozart restent groupés, mais en alternant ?

☆☆☆☆ **Exercice 28.2** – Un jeu comporte 32 cartes (8 par couleurs, 4 couleurs). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent les 4 as ?
3. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent pas plus de deux couleurs ?
5. Combien de mains contiennent exactement 4 trèfles dont la dame ?
6. Combien de mains ne contiennent pas de cœur ?
7. Combien de mains contiennent au plus 3 carreaux ?

★☆☆☆ **Exercice 28.3** – On tire sans remise n boules dans une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges, où $n \leqslant b + r$.

1. On suppose les boules blanches discernables entre elles (par exemple par une numérotation) ainsi que les boules rouges.
   (a) Dénombrer le nombre de tirages possibles amenant un total de exactement k boules rouges ($k \leqslant \min(n, r)$)
   (b) Déterminer le nombre de tirages telles que la m-ième boule rouge tirée le soit lors du k-ième tirage ($m \leqslant r$, $k - m \leqslant b$)
2. Mêmes questions en supposant les boules blanches discernables et les boules rouges indiscernables.
3. Mêmes questions en supposant les boules blanches indiscernables et les boules rouges discernables.
4. Mêmes questions en supposant les boules blanches indiscernables entre elles, ainsi que les boules rouges.

Formule du binôme et combinatoire

Dans les exercices qui suivent, on tentera dans la mesure du possible, de donner une démonstration algébrique basée sur l'utilisation de la formule du binôme, ainsi qu'une démonstration combinatoire. L'étoilage des exercices se réfère surtout à la démonstration combinatoire

★★☆☆ **Exercice 28.4 – (Formule de Vandermonde)**

Montrer de trois manières différentes que pour tout $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

★★★☆ **Exercice 28.5** – Calculer les expressions suivantes par une méthode combinatoire :

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{p-k}\binom{n}{k}$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$
6. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$

★★★☆ **Exercice 28.6** – Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

★★☆☆ **Exercice 28.7** – Montrer par une méthode combinatoire que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k}\binom{p+q-k}{p-k} = 2^p \binom{p+q}{p}$$

.

★★★☆ **Exercice 28.8** – On pose, par convention, $\binom{a}{b} = 0$ dès lors que $b > a$.

1. Montrer que pour tout $(p,q,n) \in \mathbb{N}^3$, on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{p}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1}$.
2. En écrivant 2^k sous forme d'une somme, en déduire que : $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$.

★★★★ **Exercice 28.9** – *Le but de cet exercice est de démontrer de trois manières différentes l'identité suivante, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{28.1}$$

1. Démontrer la formule (28.1) par récurrence.
2. Démontrer la formule (28.1) en utilisant la formule du multinôme (i.e., ici, la formule du binôme itérée 2 fois).
3. Donner une démonstration combinatoire, en utilisant un principe de l'interrupteur pour changer la parité du cardinal d'un ensemble.

Dénombrements liés à des sous-ensembles, applications ou relations

☆☆☆☆ **Exercice 28.10** – Soit $A_1 \cdots A_n$ un polygone général. On trace chaque côté et chaque diagonale soit en noir soit en rouge.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Cas d'un hexagone.
   (a) Montrer qu'il existe à partir de A_1 trois segments de même couleur.
   (b) En déduire qu'il existe toujours un triangle unicolore.
3. Montrer que la question 2 entre en défaut si l'on remplace l'hexagone par un pentagone.

★☆☆☆ **Exercice 28.11** – Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A,B) de sous-ensembles de E tels que $A \subset B$?

★☆☆☆ **Exercice 28.12** – Soit $n \geqslant 2$. Quel est le nombre de surjections de $[\![1,n+2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

☆☆☆☆ **Exercice 28.13** –

1. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1,\cdots,n\}$ dans $\{1,\cdots,k\}$?
2. Quel est le nombre d'applications croissantes de $\{1,\cdots,n\}$ dans $\{1,\cdots,k\}$?

★★★☆ **Exercice 28.14** – Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. et soit $s(n,k)$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$.
Soit, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, E_i l'ensemble des applications f de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$, telles que i ne soit pas dans l'image de f.

1. Soit $\ell \in [\![1,k]\!]$, et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant k$. Déterminer le cardinal de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_\ell}$.
2. En déduire que
$$s(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

★★☆☆ **Exercice 28.15** – On note $S(n,k)$ le nombre de partitions en k parts de $[\![1,n]\!]$ et $s(n,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$

1. Trouver une relation entre $s(n,k)$ et $S(n,k)$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$ et tout $k > 0$, $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$. Quelle relation obtient-on pour $s(n,k)$?

☆☆☆☆ **Exercice 28.16** – Combien le mot anagramme a-t-il d'anagrammes ?

★★★☆ **Exercice 28.17** – **(Une récurrence pour le calcul du nombre de dérangements)**
On appelle dérangement de $[\![1,n]\!]$ une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$. Par convention, $D_0 = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

★★★★ **Exercice 28.18** – **Étude des dérangements de** $\{1,\ldots,n\}$
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle point fixe de s tout élément a de E_n tel que $s(a) = a$.
On note D_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui n'ont pas de point fixe (une telle permutation est appelée un dérangement de $[\![1,n]\!]$).

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.
2. En raisonnant par récurrence, établir la relation :
$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!}$
3. Le retrouver à l'aide de la formule du crible.
4. Montrer que $D_k = \left\lfloor \dfrac{k!}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$

★★★☆ **Exercice 28.19** – Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ à k éléments ne contenant pas deux entiers consécutifs ?
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ (de cardinal quelconque) ne contenant pas deux entiers consécutifs.

(a) Exprimer A_n à l'aide des nombres de Fibonacci.

(b) En déduire pour tout n une expression du nombre de Fibonacci F_n comme une somme de coefficients binomiaux.

★★☆☆ **Exercice 28.20** – Soit $p \geqslant 2$, $q \geqslant 0$, et $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{N}^p$. Montrer que

$$\sum_{j_1+\cdots+j_p=q} \binom{a_1}{j_1} \cdots \binom{a_p}{j_p} = \binom{a_1+\cdots+a_p}{q}.$$

★★☆☆ **Exercice 28.21 – (Nombre d'applications idempotentes)**
Compter les applications p de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même telles que $p \circ p = p$. On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Chemins

★★★☆ **Exercice 28.22** – (problème des allumettes de Banach) Un individu se promène toujours avec deux boîtes d'allumettes dans ses poches. Les deux boîtes contiennent initialement N allumettes.

1. Quelle est la probabilité que l'individu tombe en panne d'allumettes, c'est-à-dire que la première fois qu'un tirage d'allumettes échoue dans une boîte, l'autre boîte est vide également ?
2. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{N} \binom{2N-n}{N} \frac{1}{2^{2N-n}} = 1.$$

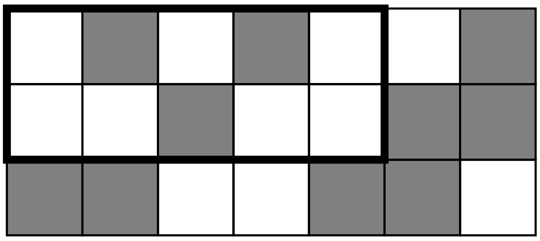
★★☆☆ **Exercice 28.23 – Une démonstration combinatoire de la formule du binôme**. Soit a et b deux entiers positifs ou nuls. On appelle chemin monotone de $(0,0)$ vers (a,b) une succession de pas de longueur 1 vers la droite ou vers le haut, de point de départ $(0,0)$ et de point d'arrivée (a,b). On dispose de x couleurs pour colorier les pas vers le haut, et de y couleurs pour les pas vers la droite. En comptant de deux manières différentes les chemins coloriés de longueur n, retrouver la formule du binôme pour $(x+y)^n$, dans le cas où x et y sont entiers positifs.

★★★☆ **Exercice 28.24 – (Putnam)** On considère dans $\mathbb{N}^2$ des chemins partant de l'origine $(0,0)$, et constitués de pas montants $(x,y) \to (x+1,y+1)$ et de pas descendants $(x,y) \to (x+1,y-1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des chemins de n pas montants et n pas descendants et restant toujours au-dessus de l'axe des abscisses (au sens large). Ainsi, au bout de $2n$ pas, ces chemins se terminent sur l'axe des abscisses. Ces chemins sont appelés chemins de Dyck. On appelle rampe descendante de longueur k une succession d'un pas montant, et de k pas descendants terminant sur l'axe des abscisses. On note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des chemins de $\mathcal{D}_n$ n'ayant aucune rampe descendante de longueur paire. Établir une bijection entre $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

Dénombrements divers

★★☆☆ **Exercice 28.25** – Déterminer le nombre de points d'intersections internes au cercle des cordes issues de n points distincts d'un cercle, en supposant que trois quelconques de ces cordes ne sont jamais concourantes.

★★☆☆ **Exercice 28.26 – (D'après Rallye d'Alsace)** Soit un rectangle R de côtés 3 et 7, quadrillé en 21 carrés de côté 1. On colorie chaque carré en noir ou blanc. Montrer qu'on peut trouver 4 petits carrés distincts de la même couleur, formant les coins d'un rectangle :



29

Espaces probabilisés, calculs de probabilité

Tribus, manipulations de la mesure de probabilité

☆☆☆☆ **Exercice 29.1** – L'union de deux tribus est-elle une tribu ?

★★☆☆ **Exercice 29.2** – Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, et soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet fini d'événements. Soit $\mathcal{T}'$ la tribu engendrée par $\{A_1, \dots, A_n\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{T}'$?

★★★☆ **Exercice 29.3** – Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini ou dénombrable. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{T}$ est minimal si les seuls événements inclus dans A sont $\varnothing$ et A.

1. Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'un unique événement minimal contenant ω, qu'on notera $A(\omega)$.
2. On dit qu'un système complet est minimal s'il est constitué d'événements minimaux. Justifiez l'existence d'un unique système complet minimal. Montrer que la tribu engendrée par ce système est égale à $\mathcal{T}$.
3. Montrer que soit $\mathcal{T}$ est fini, de cardinal égal à une puissance de 2, soit $\mathcal{T}$ est infini non dénombrable.

★★★☆ **Exercice 29.4** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, et soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Soit I est l'ensemble des n-uplets $(B_1, \dots, B_n)$ tels que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in I} P(B_1 \cup \dots \cup B_n)$.

★★★★ **Exercice 29.5** – **(ENS Ulm 2016)**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note C_k l'événement « appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i ». Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Indépendance

★★★☆ **Exercice 29.6** – Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont indépendants si pour tout $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{D}$, A et B sont indépendants. On dit qu'une classe $\mathcal{M} \subset P(\Omega)$ est une classe monotone si elle contient Ω, est stable par l'opération $B \smallsetminus A$ pour tout $A \subset B$ de $\mathcal{M}$, et si elle est stable par union dénombrable d'éléments formant une chaîne croissante. On admettra que :

- Toute tribu est une classe monotone (vérification facile)

- si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un π-système (i.e. stable par intersection finie), alors la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$.

On considère $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux π-systèmes indépendants, inclus dans $\mathcal{T}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des événements B indépendants de $\mathcal{C}$ (donc de chaque élément de $\mathcal{C}$) est une classe monotone.
2. En déduire que $\sigma(\mathcal{C})$ et $\sigma(\mathcal{D})$ sont indépendantes.

★★☆☆ **Exercice 29.7 – (QC ESCP 2010)**
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que :

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

☆☆☆☆ **Exercice 29.8** – Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. Deux événements A et B sont à la fois incompatibles et indépendants. Montrer que l'un des deux est presque-impossible.
2. Réciproquement, peut-on dire que si soit A soit B est presque-impossible, alors A et B sont incompatibles et indépendants ?
3. Un événement A peut-il être incompatible avec lui-même ? indépendant de lui-même ?

★★☆☆ **Exercice 29.9** – Supposons A indépendant de $B \cup C$ et de $B \cap C$, B indépendant de $C \cap A$ et C indépendant de $A \cap B$. On suppose de plus que les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ sont non nulles. Montrer que A, B et C sont mutuellement indépendantes.

Arguments combinatoire

★☆☆☆ **Exercice 29.10 – (QC ESCP)** Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

★★☆☆ **Exercice 29.11** – On lance n dés. Soit A_n l'événement : le total des numéros est pair. Probabilité de A_n ?

★★☆☆ **Exercice 29.12** – On choisit au hasard un nombre N de 100 chiffres au plus. Quelle est la probabilité que N^3 se termine par 11 ?

★★☆☆ **Exercice 29.13** – On effectue un tirage de 6 boules parmis 49 boules numérotées de 1 à 49. Quelle est la probabilité que parmi les 6 boules tirées, il y ait deux numéros consécutifs ?

★★☆☆ **Exercice 29.14 – (Autour de la loi hypergéométrique)**
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une série de tirages sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches lors de n tirages ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée le soit au n-ième tirage ? (temps d'attente de le première boule blanche)
3. Déterminer de la même façon la loi du temps d'attente de la k-ième boule blanche ($k \in [\![1, b]\!]$).

★★★★ **Exercice 29.15 – (ENS Ulm)** Soit G un groupe fini. Montrer que la probabilité que 2 éléments de G pris au hasard commutent est soit égale à 1, soit majorée par $\frac{5}{8}$.

Utilisation des formules du calcul des probabilités

★★★☆ **Exercice 29.16** – On lance 5 dés. À l'issue du premier lancer, on reprend les dés qui n'ont pas amené l'as et on les relance. On répète l'opération le nombre de fois qu'il faut pour obtenir 5 as. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in [\![5, +\infty[\![$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les 5 as en au plus n lancers ?
2. Quelle est la probabilité qu'on obtienne les 5 as en n lancers exactement ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre total de dés jetés soit égal à m ?

★★☆☆ **Exercice 29.17** – On dispose de 2 urnes. L'urne numéro 1 contient 2 boules blanches et une boule noire. L'urne numéro 2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires. Une étape de l'expérience consiste à tirer une boule de l'urne 1, la mettre dans l'urne 2, puis tirer une boule de l'urne 2 et la mettre dans l'urne 1. Ainsi, à l'issue d'une étape, les deux urnes contiennent chacune 3 boules.
On répète ce processus jusqu'à ce qu'à l'issue d'une étape, les boules de l'urne 1 (et donc aussi celles de l'urne 2) soient toutes de la même couleur.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que l'expérience s'arrête au bout de n étapes exactement ?
2. Quelle est la probabilité que l'expérience s'arrête ?

.

★★☆☆ **Exercice 29.18** –

1. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche, d'un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant :
   - Si on obtient « Face » au n-ième lancer ($n \geqslant 1$), on ajoute une boule rouge au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce.
   - La première fois que l'on obtient « Pile », on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   Calculer la probabilité r d'avoir tiré la boule blanche.
2. On procède de même, mais la règle est maintenant la suivante :
   - Si on obtient « Face » au n-ième lancer ($n \geqslant 1$), on lance une boule rouge en direction de l'urne et on a à chaque fois une chance sur deux pour que cette boule tombe dans l'urne, indépendamment de ce qui a pu se produire avant, puis on effectue le lancer suivant de la pièce
   - La première fois que l'on obtient « Pile », on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   Déterminer la probabilité r d'obtenir la boule blanche.

★★★☆ **Exercice 29.19** – Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement avec et sans remise (en commençant par un tirage avec remise). Lors d'un tirage avec remise, si la boule tirée est blanche, on ajoute dans l'urne une autre boule blanche, en plus de celle qu'on a tirée et remise. On arrête l'expérience dès qu'on retire de l'urne l'unique boule noire (sans l'y remettre). Quelle est la probabilité d'avoir effectué exactement n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$) ? Montrer que l'expérience s'arrête presque sûrement.

☆☆☆☆ **Exercice 29.20** – Deux joueurs A et B tirent sur une cible. La probabilité que A atteigne la cible est $\frac{1}{4}$, et pour B, elle est de $\frac{1}{3}$. Les différents tirs sont indépendants les uns des autres.

1. A et B tirent chacun deux fois. Probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois ?
2. A et B tirent chacun une fois, la cible est atteinte une et une seule fois. Probabilité que ce soit par A ?

★★☆☆ **Exercice 29.21** – Deux pièces de monnaies déséquilibrées amènent pile avec des probabilités respectives de p et q contenus dans $]0, 1[$. Au départ, on choisit une des deux pièces au hasard. On joue infiniment à pile ou face avec la règle suivante : si on obtient pile, on garde la même pièce. Si on obtient face, on change de pièce.

1. Probabilité qu'on joue le deuxième lancer avec la pièce 1 ?
2. Sachant qu'on a joué le 2e lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le 4e lancer avec la pièce 2 ?
3. On joue le 2e lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
4. Probabilité de jouer le n-ième lancer avec la pièce 1.

★★★☆ **Exercice 29.22** – On lance deux fois un dé à 6 faces déséquilibré. On note :

- pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, A_i l'événement : « on obtient i au premier lancer »
- pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, B_i l'événement : « on obtient i au deuxième lancer »
- pour tout $i \in [\![2,12]\!]$, C_i l'événement : « la somme des deux résultats est i »

En trouvant une relation entre les polynômes $Q = \sum_{i=1}^{6} P(A_i)X^i = \sum_{i=1}^{6} P(B_i)X^i$, et $R = \sum_{i=2}^{12} P(C_i)X^i$, montrer qu'il n'est pas possible qu'un dé soit équilibré de sorte que la somme des résultats de deux lancers successifs indépendants suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. Généraliser au cas de dés non nécessairement identiques.

★★☆☆ **Exercice 29.23** – J'ai des disques de n compositeurs. Je suppose que lorsque j'écoute un disque d'un compositeur donné, la probabilité que j'écoute un disque du même compositeur ensuite est $\frac{1}{2}$. La probabilité que j'écoute un disque d'un autre quelconque des compositeurs est de $\frac{1}{2(n-1)}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque que j'écoute est de Bach. Probabilité que les k premiers disques écoutés soient de Bach.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque écouté est quelconque. Probabilité que les k premiers disques soient de compositeurs tous différents.
3. Le compositeur du premier disque est choisi aléatoirement et uniformément sur l'ensemble des compositeurs possibles. Le k-ième disque que j'écoute est de Bach.
   (a) Probabilité que le $(k-1)$-ième ait aussi été de Bach.
   (b) Probabilité que les $(k-2)$- et $(k-1)$-ièmes ait été de Bach.
   (c) Probabilité que le $(k-2)$-ième ait été de Bach.

★★☆☆ **Exercice 29.24** – Soit p un réel de $]0,1[$. N personnes numérotées se transmettent dans l'ordre une information. Chacun décide de transmettre l'information qu'il a reçue (avec une probabilité p) ou son contraire (probabilité $1-p$). Le contraire du contraire est l'information initiale. Quelle est la probabilité que la N-ième personne ait reçu l'information détenue initialement par la première personne ?

★★★☆ **Exercice 29.25 – (La ruine du joueur)**
Deux joueurs A et B jouent avec une probabilité p que A gagne et $1-p$ que B gagne. Celui qui perd donne un euro au gagnant. Ils répètent ce jeu jusqu'à ce qu'un des deux joueurs soit ruiné. Leurs capitaux initiaux respectifs sont a et b. Quelle est la probabilité que A soit ruiné ? Limite lorsque b tend vers $+\infty$ et commentaire. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

★★★☆ **Exercice 29.26 – (Une chaîne de Markov - déplacement aléatoire sur un carré)**
On se déplace sur les 4 sommets A, B, C et D d'un carré, AB étant horizontal. Au pas 0, on est en A. À chaque étape, on peut aller sur un sommet adjacent à celui sur lequel on se trouve, ou sur le sommet opposé. Les déplacements verticaux ont une probabilité p de se produire, les déplacements horizontaux une probabilité q, et les déplacement en diagonale, une probabilité r (avec $p+q+r=1$)
Déterminer la probabilité de se retrouver en A, B, C ou D au n-ième pas.

★★☆☆ **Exercice 29.27** – Deux joueurs jouent une suite de parties avec une probabilité p de victoire pour A. Les parties sont indépendantes les unes des autres. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre. Quelles sont les probabilités, pour chacun des joueurs, de gagner ? Montrer que la partie s'arrête presque sûrement.

★★☆☆ **Exercice 29.28** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $N \geqslant n$. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n. L'urne numéro k ($k \in [\![1, n]\!]$) contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On tire successivement dans chaque urne, de la première à la $n - 1$-ième dans cette ordre, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne suivante avant de procéder au tirage suivant. On effectue ensuite un dernier tirage dans l'urne numéro n. Déterminer la probabilité p_n que la boule tirée dans l'urne numéro n soit une boule blanche.

30

Variables aléatoires

Loi d'une v.a.r.d., espérance, variance

★☆☆☆ **Exercice 30.1** – Déterminer a pour que les égalités $p(X = n) = \dfrac{a(n+3)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ définissent une loi de probabilité. Calculer son espérance, son moment d'ordre 2, sa variance.

★★☆☆ **Exercice 30.2** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire une à une les boules d'une urne contenant initialement n boules blanches et n boules noires.

1. Soit X : rang d'apparition de la première boule blanche. Loi de X, espérance de $E(2n+1-X)$ puis de $E(X)$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(j+1)\binom{2n-2-j}{n-2}$.

★★☆☆ **Exercice 30.3 – (Loi hypergéométrique)**
Une urne contient N boules dont Np blanches ($p \in]0,1[$). On effectue des tirages sans remise.

1. Déterminer la loi du nombre de boules blanches tirées lors de n tirages. Espérance, variance.
2. Déterminer la loi du temps d'attente de la r-ième boule blanche tirée.

★★☆☆ **Exercice 30.4** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire sans remise dans une urne contenant n boules noires, et n boules blanches, jusqu'à obtention de toutes les boules noires. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires. Loi et espérance de X ?

★★★☆ **Exercice 30.5 – (Le problème du collectionneur)**
Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On admettra le résultat suivant (vu lors d'un exercice sur les séries) : X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $[X > n]$, $n \in \mathbb{N}$, converge, et dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

Une marque de gâteaux édite une collection de 4 autocollants différents, et en offre un au hasard dans chaque paquet de gâteaux. Une personne achète ces paquets de gâteaux et fait collection de ces autocollants. On suppose les achats indépendants. Déterminer le nombre de moyen de paquets de gâteaux à acheter pour compléter la collection.

★★☆☆ **Exercice 30.6** –
Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On appelle « épreuve » la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne ;
- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n-ième épreuve. Déterminer la loi et l'espérance de Y_n.
2. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge. Déterminer la loi de Z.

★★★☆ **Exercice 30.7** –
Soit n un entier $\geqslant 1$. Une urne contient n boules blanches et une boule rose. On effectue une sucession de tirages d'une boule à chaque fois. Si on tire la boule rose, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour qu'il n'y ait plus aucune boule blanche dans l'urne.
Calculer $P(X = n+1)$ et $P(X = n+2)$, et en donner un équivalent simple lorque n tend vers $+\infty$.

★★★☆ **Exercice 30.8** –
Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

1. Déterminer le nombre moyen de marches gravies au bout de n pas.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$P(Y_n = k) = p \times P(Y_{n-1} = k-1) + (1-p) \times P(Y_{n-2} = k-1).$$
   (b) En déduire l'espérance de Y_n.

★★☆☆ **Exercice 30.9** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite, et de façon indépendante, un dé équilibré. On note X_i le résultat obtenu au i-ième lancer, et M_n le maximum obtenu lors des n lancers :
$$M_n = \sup(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{soit:} \qquad \forall \omega \in \Omega, \;\; M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$
Déterminer la loi de M et son espérance.

★☆☆☆ **Exercice 30.10** – On dispose d'une urne contenant initialement une seule boule noire. On effectue une série de tirages suivant les modalités suivantes : tant qu'on tire une boule noire, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche. Déterminer la loi de X, ainsi, que son espérance et sa variance, si elles existent. La variable $Y = (-1)^X \cdot X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

★★☆☆ **Exercice 30.11** –
Soit $S > 0$. Une urne contient S boules rouges, S boules vertes et $2S$ boules bleues.
On effectue des tirages successifs avec le protocole suivant :

- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule bleue.
- Si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne
- Si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule rouge.

Soit, pour tout n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges dans l'urne après le n-ième tirage. On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S.

1. Établir pour tout $n \geqslant 2S$, une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$.

2. En déduire la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Lois usuelles

★☆☆☆ **Exercice 30.12** – Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Chaque résultat de X est affiché sur un compteur détraqué : si X n'est pas nul, le compteur affiche la bonne valeur ; si X est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché. Déterminer la loi de Y et son espérance.

☆☆☆☆ **Exercice 30.13** – Soit $p \in]0,1[$. Un mobile évolue de façon aléatoire sur un axe avec une probabilité p de se déplacer de $+1$ à chaque mouvement et une probabilité $1-p$ de se déplacer de -1. Initialement, il est en position 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n sa position après n mouvement. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n)$ et $V(X_n)$. Pour quelle valeur de p la v.a.r. X_n est-elle centrée ?

★★★★ **Exercice 30.14** – On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, telle que pour tout $n \geqslant 1$, U_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $p \in]\frac{1}{2},1[$. On pose $q = 1-p$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable X_n par : $X_n = 2U_n - n$.

1. En comparant $P(X_n \leqslant 0)$ et $E(\mathrm{e}^{-sX_n})$, $s \in \mathbb{R}_+$, montrer que $P(X_n \leqslant 0) \leqslant r^n$, où $r = 2\sqrt{pq}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $Z_n = \inf(0, X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(Z_n)}{n} = 0$.

★★☆☆ **Exercice 30.15** – Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée aléatoire éventuellement vide. On note Y le nombre de jetons, et X la somme des numéros obtenus. On suppose que Y suit une loi uniforme et que les tirages avec un nombre fixé de jetons sont équiprobables. Calculer $E(X)$.

★☆☆☆ **Exercice 30.16** – Le nombre N de visiteurs quotidiens d'un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix entrées $E_1, \cdots, E_{10}$. Chaque visiteur choisit de façon équiprobable une de ces 10 entrées. On note X_1 le nombre de visiteurs entrant par la porte E_1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

★☆☆☆ **Exercice 30.17** – n personnes jettent simultanément une pièce de monnaie ($n > 2$). Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

★★★★ **Exercice 30.18** –
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
On pose $q = 1-p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}.$$

1. Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.

On suppose désormais que $\alpha \in]0,1[$; on pose $\beta = 1-\alpha$.

2. Montrer que $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^\beta]\right)\right) = 1$.
3. En déduire la probabilité de l'événement A.

★★★☆ **Exercice 30.19** – Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. À chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée est une v.a.r., notée X, suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$. Trouver une relation entre $P(S = j \mid X = k+1)$, $P(S = j \mid X = k)$ et $P(S = j-1 \mid X = k)$.
2. En déduire, pour tout entier naturel k, l'espérance de S sachant que $X = k$, puis $E(S)$.

★★☆☆ **Exercice 30.20** –

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \dots, X_n, \dots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ possédant un moment d'ordre 2 et que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant un moment d'ordre 2.

On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

1. Déterminer l'espérance $E(Y)$ en fonction de $E(X)$ et de $E(N)$.
2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec la probabilité p, où $0 < p < 1$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton.

   Calculer l'espérance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de pile obtenu.
3. Expliquer comment on pourrait déterminer la variance.

Convergences

★★☆☆ **Exercice 30.21** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in]0, 1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée, avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p.

Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de « Pile » obtenus. Enfin, Y_n est la variable définie par $Y_n = \mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

★★★☆ **Exercice 30.22** – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

Vecteurs aléatoires réels, covariance

★☆☆☆ **Exercice 30.23** – Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$, et soit X, Y et Z trois v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{J}(1,p)$, c'est-à-dire $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p(X = k) = pq^k$, et de même pour Y et Z. Calculer $P(X = Y)$, $P(X \geqslant 2Y)$, $P(X + Y \leqslant Z)$.

★☆☆☆ **Exercice 30.24** – Soit (X,Y) un couple de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = j, Y = k) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{\mathrm{e}j!k!}$$

1. Déterminer λ.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance de la v.a.r. 2^{X+Y}.

★★★☆ **Exercice 30.25** – On considère une v.a.r. N, $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Si N prend la valeur n, on procède à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On note S et E le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

1. Montrer que si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors E et S sont des v.a.r. de Poisson dont on déterminera le paramètre. Montrer que dans ce cas, E et S sont indépendantes.
2. Réciproquement, montrer que si E et S sont indépendantes, alors N est de Poisson.

★☆☆☆ **Exercice 30.26** – Soient a un entier naturel non nul, et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. À un péage d'autoroute comportant n guichets, na voitures se présentent. Chaque conducteur choisit un guichet au hasard, de manière équiprobable. Les choix des automobilistes sont supposés indépendants entre eux. On note X_i le nombre de voitures ayant passé par le guichet numéro i.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j. Commenter le cas $n = 2$.

★★☆☆ **Exercice 30.27** – Dans un sac, il y a $n-2$ boules noires et 2 boules blanches. On tire les boules une à une sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche, Y le rang d'apparition de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer le coefficient de corrélation du couple (X,Y).

★★★☆ **Exercice 30.28** – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Calculer la variance de $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.
2. Étudier la convergence en probabilité de $\frac{S_n}{n}$.

★★★☆ **Exercice 30.29** –

Une urne contient une boule noire et $n-1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2.
On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise...
D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.
On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au k-ième tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve, et Y le premier rang auquel apparaît la boule noire.

1. Déterminer la loi suivie par toutes les variables X_k.
2. Déterminer la loi de Y
3. Calculer $P(X=1)$ et $P(X=n)$.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. On pourra pour cela calculer $\mathrm{cov}(X_i, X_{i+j})$, en discutant suivant la parité de i.

★☆☆☆ **Exercice 30.30** –
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).
On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Calculer $\mathrm{cov}(U,T)$.
2. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

★★☆☆ **Exercice 30.31** – Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \sup(X_1, X_2)$, $Z = \inf(X_1, X_2)$.

1. Établir que Z et $T - Z$ sont indépendantes
2. Déterminer $\mathrm{cov}(Z,T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

★★☆☆ **Exercice 30.32** – On considère un nombre entier n supérieur ou égal à 2 et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne successivement et sans remise deux jetons et on désigne alors par N_1 la variable indiquant le numéro du premier jeton tiré, et N_2 la variable indiquant le numéro du deuxième jeton.

1. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.
2. Exprimer la variance $V(N_1 + N_2)$.

★★★☆ **Exercice 30.33** – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes suivant des lois de même espérance m et de même écart-type σ. On suppose qu'il existe k tel que pour tout $(\ell, m) \in \mathbb{N}$ tel que $|m-\ell| > k$, $\mathrm{cov}(X_\ell, X_m) = 0$. Montrer que $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilités vers la variable certaine de valeur m.

★★★☆ **Exercice 30.34** –
Soit p un réel donné de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère un couple (U,T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$P([U=n] \cap [T=t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leqslant n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que cela définit bien une loi conjointe
2. Déterminer les lois de U et T, puis l'espérance de T.
3. Déterminer $E(U)$ et $E(TU)$ (on pourra commencer par calculer $E(T \mid U = n)$). Calculer $\mathrm{cov}(U,T)$.
4. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

★★☆☆ **Exercice 30.35** – **(ENS Cachan, Rennes 2016)**
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer que $|P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$. Caractériser l'égalité.

Estimation

Les derniers exercices tournent autour de la notion d'estimateur. Étant donné un phénomène suivant une certaine loi $\mathcal{L}$ de type connu, mais dont un des paramètre θ est inconnu, (par exemple une loi de Bernoulli de paramètre inconnu p), un estimateur de θ est une variable aléatoire T_n définie à partir de variables indépendantes identiquement distrivuées $X_1, \dots, X_n$, suivant toutes la loi $\mathcal{L}$, et qui nous permettra d'estimer la valeur de θ en répétant un grand nombre de fois l'expérience. On dira qu'un estimateur est sans biais si $E(T_n) = \theta$ (ce qui nous permet d'estimer θ en moyenne). Par abus de langage, on appelle aussi souvent « estimateur de θ » la suite (T_n), si T_n admet une expression uniforme en les X_n. On dira alors que T_n est asymptotiquement sans biais si $E(T_n) \to \theta$. De manière générale, on appellera « biais » de l'estimateur T_n de θ la quantité $b_{T_n}(\theta) = E(T_n) - \theta$.
La meilleure notion de pertinence d'un estimateur est le risque quadratique, qui permet non seulement de mesurer le biais, mais également la concentration autour de la valeur à estimer. Un estimateur sera jugé d'autant meilleur que son risque quadratique est faible. Cette notion est étudiée dans l'exercice suivant, dont le résultat pourra être utilisé dans les exercices suivants
Enfin, on dit qu'un estimateur est convergent, s'il converge en probabilité vers le paramètre inconnu θ.

★☆☆☆ **Exercice 30.36** – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un échantillon identiquement distribué, de loi parente $\mathcal{L}$, dont le paramètre θ est inconnu. Soit (T_n) une suite d'estimateurs de θ. On suppose que T_n admet une espérance et une variance. Le risque quadratique de T_n est défini par $r_{T_n}(\theta) = E((T_n - \theta)^2)$.

1. Montrer que $r_{T_n}(\theta) = V(T_n) + b_{T_n}(\theta)^2$.
2. Montrer qu'un estimateur (T_n) de θ, asymptotiquement sans biais et tel que $V(T_n)$ tend vers 0 converge en probabilité vers θ

★★★☆ **Exercice 30.37** – Soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ, et $T_1, T_2, \dots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T ; on cherche à estimer le paramètre inconnu λ.

1. Montrer que $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ est un estimateur sans biais de λ. Est-il convergent ?
2. On pose $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T_k - M_n)^2$. Est-ce que V_n est un estimateur sans biais de λ ? Proposer un estimateur W_n sans biais de λ obtenu à l'aide de V_n.
3. On admet que la variance de W_n est égale à $\dfrac{n}{(n-1)^2}\lambda(1+2\lambda)$. Quel est, entre M_n et W_n, le meilleur estimateur ?

★★★☆ **Exercice 30.38** – Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit la loi de Pascal de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$, et si pour tout $k \geqslant n$, $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$, où $q = 1 - p$.
Soient $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = T_1 + \cdots + T_k$.

1. Montrer que S_k suit une loi de Pascal de paramètres k et p.
2. On suppose p inconnu, montrer que $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ est un estimateur convergent de p.

★★★☆ **Exercice 30.39** – **(Estimation par capture-recapture, oral ESCP)**
On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un étang. On prélève dans l'étang un échantillon de m poissons, que l'on marque et que l'on remet dans l'étang.
On propose deux méthodes différentes pour estimer N.

1. **Méthode 1**

   Soit n un entier naturel non nul. On prélève des poissons dans l'étang au hasard et avec remise, et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire (et suffisant) de pêcher pour obtenir n poissons marqués.
   On pose $A_n = \dfrac{m}{n}X_n$. Montrer que A_n est un estimateur sans biais de N. Est-il convergent ?

2. **Méthode 2**

   On prélève successivement et avec remise n poissons. Soit Y_n le nombre de poissons marqués ainsi recueillis.

   (a) Montrer que $\dfrac{1}{nm}Y_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{N}$.

   (b) On pose $B_n = \dfrac{m(n+1)}{Y_n+1}$. B_n est-il un estimateur sans biais de N ? Est-il asymptotiquement sans biais ? Est-il convergent ?