DÉNOMBREMENT

Exercice 1. [★] (Dérangements)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire le nombre de permutations σ de $[\![1;n]\!]$ sans point fixe (c'est-à-dire $\forall i \in [\![1;k]\!]\,,\ \sigma(i) \neq i$). On convient que $d_0 = 1$.

Démontrer que

$$d_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Exercice 2. [★]

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu de 52 cartes telles qu'elles contiennent au moins un carré (quatre cartes de même valeur) ?

Exercice 3. [★]

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ des entiers naturels. Démontrer qu'il existe une somme (non vide) de termes parmi les a_k qui soit divisible par 10.

Exercice 4. [★]

Démontrer qu'il existe des entiers non tous nuls a, b et c avec $|a| < 10^6$, $|b| < 10^6$, $|c| \leqslant 10^6$ tels que $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

Exercice 5. [∘] (Déjà vu ??)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$?

Exercice 6. [★] (Nombre de surjections)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note $s(n,p)$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ sur $[\![1;p]\!]$. Démontrer que

$$s(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

Indication : Pour $k \in [\![1;p]\!]$, on utilisera l'ensemble A_k des applications $f : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;p]\!]$ qui n'atteignent pas k.

Exercice 7. (Problème des parenthésages de Catalan)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par P_n le nombre de façons de parenthèser l'expression $a_1 a_2 \cdots a_n$ (en conservant l'ordre des a_i), où les a_i sont des symboles que l'on peut interpréter comme des éléments d'un ensemble muni d'une loi de composition interne a priori non associative. Le nombre P_n est donc le nombre de façons, a priori différentes, de calculer le « produit » $a_1 a_2 \cdots a_n$. Ainsi,

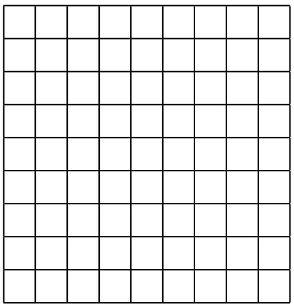
- $P_1 = 1$ car il n'y a qu'une seule façon de mettre des parenthèses autour de a_1 ;
- $P_2 = 1$ car le seul parenthèsage de $a_1 a_2$ est $a_1 a_2$;
- $P_3 = 2$ car $a_1 a_2 a_3$ se parenthèse des deux façons suivantes : $a_1(a_2 a_3)$ et $(a_1 a_2) a_3$;
- $P_4 = 5$ car il existe cinq parenthèsages de $a_1 a_2 a_3 a_4$ qui sont $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$ et $((a_1 a_2) a_3) a_4$.

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}.$$

Exercice 8. [$\star$]

Combien y a-t-il de carrés dans le quadrillage de taille $n \times n$ suivant :

n 

n

Exercice 9. [$\star$]

Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 10. [$\star$]

Le HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA (lire « who moo who moo noo koo noo koo ah pooh ah ah ») est un poisson multicolore emblématique des îles hawaïennes.

Le mot HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA comporte 9 U, 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P, ce qui fait 21 lettres.

Les anagrammes considérées dans cette exercice n'ont pas nécessairement de sens.

1. Démontrer que le nombre N d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par

$$N = \frac{12!}{(2!)^4\, 3!}.$$

► Les résultats des questions suivantes seront donnés sous forme de produits d'entiers, dans lesquels pourra apparaître le nombre N. Il n'est pas nécessaire de remplacer N par sa valeur, ni de simplifier les résultats.

2. Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dîte « jolie » lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet \mathrm{U} \bullet$$

   où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

   Dénombrer ces jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA.