FONCTIONS

Exercice 1. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une fonction périodique est bornée.
2. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

Exercice 2. [$\circ$]

Un matin à 9h00, le Petit Chaperon Rouge part de chez sa mère pour aller porter un petit pot de beurre et une galette à sa mère-grand. Flanant dans les bois, cueillant des fleurs et des baies sauvages, discutant avec un loup, la jeune enfant n'arrive chez sa mère-grand que bien plus tard.

Après une sombre histoire de chevillette, de grandes dents, de « c'est pour mieux te manger mon enfant » et de chasseur passant là par hasard, la jeune fille décide de passer la nuit avec sa mère-grand (mais pas plus, parce que la vieille, elle ronfle !).

Le lendemain à 9h00 tapante, le Petit Chaperon Rouge reprend la route pour rentrer chez sa mère. Là aussi, elle périgrine et n'arrive qu'à l'heure où elle veut bien arriver. Son chemin est par contre exactement le même que celui de la veille (en sens inverse évidemment !).

1. Justifier qu'il existe un horaire, commun aux deux journées, où le Petit Chaperon Rouge est au même endroit.
2. On note $d_1(t)$ la distance parcourue, le premier jour, entre l'instant $t_0 = 9\text{h}$ et l'instant t. On note $d_2(t)$ la distance parcourue, le second jour, entre l'instant $t_0 = 9\text{h}$ et l'instant t. Expliquer comment utiliser les courbes représentatives de d_1 et d_2 pour déterminer la (les) solution(s) de la première question.

Exercice 3. [$\circ$]

Représenter le graphe de la fonction tangente et, sur le même dessin, le graphe de la fonction cotangente définie par $\text{cotan} = \cos / \sin$. *On notera que* $\text{cotan}(x) = \tan(\pi/2 - x)$.

Exercice 4. [$\star$]

Soit $\mathscr{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

1. Démontrer que si $0 \in \mathscr{D}$, alors toute fonction impaire sur $\mathscr{D}$ est nulle en 0.
2. Démontrer que la seule application paire et impaire sur $\mathscr{D}$ est la fonction nulle.
3. Démontrer que toute fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose, de manière unique, sous la forme de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 5. [$\circ$]

Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies. On justifiera les réponses.

1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$ alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.

Exercice 6. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. On a $\ln(a+b) = \ln(a)\ln(b)$ et $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$.
2. Lorsque $xy > 0$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. Lorsque $xy \geqslant 0$, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt[3]{x^3} = |x|$.
6. Les fonctions $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \longmapsto x^{1/3}$ sont identiques.
7. Pour tout $x > 0$, on a $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.
8. La fonction cosinus est une fonction sinus déphasée.
9. Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont bornées sur leurs ensembles de définition.
10. La fonction tangente est π-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
11. La fonction tangente est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 7. [$\star$]

Dans le cours, nous avons admis l'existence du logarithme ln, défini sur $\mathbb{R}_+^*$ comme l'unique fonction strictement croissante qui vaut 1 en e et qui transforme les produits en sommes. De même, nous avons admis l'existence de l'exponentielle exp définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction strictement croissante qui vaut e en 1 et qui transforme les sommes en produits.

L'objectif de cet exercice est de justifier que ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.
   b) Démontrer que $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$.
   c) Démontrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.
   d) On suppose en outre que f est croissante. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
   Indication : Pour cette question, on admettra qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. Ce résultat (que l'on appelle la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) sera démontré plus tard.
2. En utilisant la fonction $f = \ln \circ \exp$, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

Exercice 8. [$\star$]

On considère l'équation

$$\mathrm{e}^{x-2} + \mathrm{e}^{x+8} = \mathrm{e}^{4-x} + \mathrm{e}^{3x+2}\,.$$

1. Toto a résolu cette équation en utilisant la formule (archi-fausse) $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{ab}$. Déterminer les solutions trouvées par Toto.
2. Résoudre l'équation. Que dire ?