$\mathbb{MP}^*2$
Lycée Louis le Grand

2016-2017

Mathématiques

Classe de Mathématiques Spéciales

Table des matières

Chapitre 1

Suites Réelles et Complexes

I Bornes supérieures et bornes inférieures

Vocabulaire 1.1 (Espace ordonné)**.** *E un ensemble, $\lhd$ une relation d'ordre sur E. Alors $(E, \lhd)$ est dit* espace ordonné*.*

Définition 1.2 (Majorant)**.** *$(E, \lhd)$ un espace ordonné. $X \subset E$, $a \in E$. On dit que a* majore *X lorsque :*

$$\forall x \in X,\ x \lhd a.$$

On note $\operatorname{Maj} X$ *l'ensemble des majorants de X.*

Définition 1.3 (Minimum)**.** *$(E, \lhd)$ un espace ordonné. $X \subset E$, $\omega \in E$. On dit que ω est un minimum de X lorsque $\omega \in X$* et *$\forall x \in X,\ \omega \lhd x$.*

Remarque 1.4. *Avec les notations de la définition précédente, si X admet un minimum ω, alors ce minimum est unique. Dans ce cas, on peut noter $\omega = \min X$.*

Définition 1.5 (Borne supérieure)**.** *$(E, \lhd)$ un espace ordonné. $X \subset E$. Si* $\operatorname{Maj} X$ *possède un minimum, alors ce minimum est appelé* borne supérieure *de X et noté $\sup X$. On définit de manière analogue la* borne inférieure*, notée* $\inf X$*.*

Proposition 1.6 (Passage au sup)**.** *$(E, \lhd)$ un espace ordonné. $X \subset E$, $M \in E$. On suppose que X possède une borne supérieure. S'équivalent :*

(i) $\forall x \in X,\ x \lhd M$,

(ii) $\sup X \lhd M$.

Théorème 1.7. *Il existe un ensemble $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ tel que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ vérifie la* propriété de la borne supérieure *(i.e. toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure).*

Proposition 1.8 (Critère de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. S'équivalent :*

(i) *a est la borne supérieure de X.*

(ii) $\begin{cases} \forall x \in X,\ x \leqslant a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ a - \varepsilon < x \leqslant a \end{cases}$.

Exemple 1.9. *D un ensemble non vide. On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^D$ par :*

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow \forall d \in D,\ f(d) \leqslant g(d).$$

Alors :

(i) *$\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^D$.*

(ii) *$\preccurlyeq$ est un ordre total* ssi *D est un singleton.*

(iii) *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^D$ possède une borne supérieure pour $\preccurlyeq$.*

Remarque 1.10. *La borne supérieure d'un ensemble majoré de fonctions continues de $\mathbb{R}^I$, où I est un intervalle, n'est pas toujours continue.*

Définition 1.11 ($\overline{\mathbb{R}}$)**.** *On définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, muni de $+$, $\times$ et $\leqslant$ définies ci-dessous (on appelle $\widetilde{+}$ et $\widetilde{\times}$ respectivement $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$) :*

$+$	$-\infty$	$x_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$x_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x_1 \widetilde{+} x_2$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$x_2 \in \mathbb{R}_-^*$	0	$x_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$x_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$x_1 \widetilde{\times} x_2$	0	$x_1 \widetilde{\times} x_2$	$-\infty$
0		0	0	0	
$x_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$x_1 \widetilde{\times} x_2$	0	$x_1 \widetilde{\times} x_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$	$-\infty \leqslant +\infty$

II Suites réelles et monotonie

Proposition 1.12. *$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u \nearrow$.*

(i) *Si u est majorée, alors u converge.*

(ii) *Si u n'est pas majorée, alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 1.13. $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Soit* $u \in A^{\mathbb{N}}$ *t.q.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

(i) *Si $f \nearrow$, alors (u_n) est monotone.*

(ii) *Si $f \searrow$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie inverses.*

Définition 1.14 (Suites adjacentes)**.** $(u, v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *On dit que u et v sont* adjacentes *lorsque $u \nearrow$, $v \searrow$ et* $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 1.15. *u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent vers une même limite notée ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell \in [u_n, v_n]$.*

III Fonctions convexes de la variable réelle

Notation 1.16. *Dans toute cette section, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial (i.e. non vide et non réduit à un point).*

Définition 1.17 (Fonction convexe)**.** *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est* convexe *lorsque :*

$$\forall (a, b) \in I^2,\ \forall t \in]0, 1[,\ f\left((1-t)a + tb\right) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b).$$

Notation 1.18 (Fonction pente)**.** $f : I \to \mathbb{R}$. *Si $\omega \in I$, on définit la* fonction pente *en ω par :*

$$p_\omega : x \in I \backslash \{\omega\} \longmapsto \frac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega}.$$

Proposition 1.19. $f : I \to \mathbb{R}$. *Alors f est convexe* ssi $\forall \omega \in I$, $p_\omega \nearrow$.

Proposition 1.20. *$f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in I$. On suppose que ω n'est pas le maximum de I. Alors f admet une dérivée à droite en ω :*

$$p_\omega(x) \xrightarrow[x\to\omega^+]{} f'_d(\omega).$$

Proposition 1.21. *$f : I \to \mathbb{R}$. On définit $g : x \in (-I) \longmapsto f(-x)$. Alors f est convexe* ssi *g est convexe.*

Proposition 1.22. *$f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathring{I}$.*

Proposition 1.23. *$f : I \to \mathbb{R}$ convexe. $(a_1, \ldots, a_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. On suppose que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \in I$ et*

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k).$$

Proposition 1.24. *$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe* ssi *$f' \nearrow$.*

Proposition 1.25. *$f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe* ssi *$f'' \geqslant 0$.*

Application 1.26 (Inégalité arithmético-géométrique)**.**

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Utiliser la convexité de $(-\ln)$ et la proposition 1.23. □

Proposition 1.27. *$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}^I$. On suppose que :*

(i) *$\forall \lambda \in \Lambda,\ f_\lambda$ est convexe.*

(ii) *$\exists M \in \mathbb{R}^I,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ f_\lambda \leqslant M$.*

On peut alors poser

$$g : x \in I \longmapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x),$$

et g est convexe.

Corollaire 1.28. *Si elle est définie, la borne supérieure d'une famille de fonctions affines est convexe.*

Proposition 1.29. *On suppose ici que I est ouvert. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est la borne supérieure d'une famille de fonctions affines.*

Démonstration. Pour $x \in I$, poser $\mathscr{T}_x$ la fonction affine associée à la tangente à droite à la courbe représentative de f en x :

$$\mathscr{T}_x : t \in I \longmapsto f(x) + (t - x) f'_d(x).$$

Vérifier alors que $\forall x \in I,\ \mathscr{T}_x \leqslant f$, puis que $\sup_{x \in I} \mathscr{T}_x = f$. □

Proposition 1.30. *On suppose encore I ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $a \in I$. Alors il existe $B : I \to \mathbb{R}$ affine t.q. $B(a) = f(a)$ et $B \leqslant f$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $B = \mathscr{T}_a$. □

Proposition 1.31 (Inégalité de Jensen)**.** *$(a, b, m, M) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ et $m < M$, I intervalle ouvert contenant $[m, M]$. $w : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue t.q. $\int_a^b w = 1$; $\varphi : [a, b] \to [m, M]$ continue ; $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors :*

$$f\left(\int_a^b w\varphi \right) \leqslant \int_a^b w \cdot (f \circ \varphi). \qquad (*)$$

Démonstration. *Première étape.* En supposant f affine, montrer que $(*)$ est en fait une égalité. *Deuxième étape.* Utiliser alors la proposition 1.29 pour obtenir une famille $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fonctions affines t.q. $f = \sup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Ainsi, d'après la première étape :

$$\forall\lambda \in \Lambda,\ A_\lambda\left(\int_a^b w\varphi\right) = \int_a^b w\cdot(A_\lambda\circ\varphi) \leqslant \int_a^b w\cdot(f\circ\varphi)\,.$$

Obtenir alors $(*)$ en passant au sup sur λ. $\square$

IV Valeurs d'adhérence d'une suite réelle ou complexe

IV.1 Valeurs d'adhérence

Notation 1.32. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Vocabulaire 1.33 (Extractrice)**.** *On appelle* extractrice *toute application* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$.

Proposition 1.34. *Soit φ une extractrice. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n.$$

Proposition 1.35. *La composée de deux extractrices est une extractrice.*

Proposition 1.36. $A \subset \mathbb{N}$. *S'équivalent :*

(i) *A est non majoré.*

(ii) *A est infini.*

(iii) *Il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) \subset A$.*

(iv) *Il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$.*

Proposition 1.37 (Suite extraite)**.** $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On appelle* suite extraite *de u toute suite de la forme $u\circ\varphi$, où φ est une extractrice.*

Proposition 1.38 (Valeur d'adhérence)**.** $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On appelle* valeur d'adhérence *de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe une suite v extraite de u telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.*

Proposition 1.39. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Si v est une suite extraite de u et w est une suite extraite de v, alors w est une suite extraite de u.*

Proposition 1.40. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{K}$, alors $\Lambda(u) = \{\ell\}$.*

Exemple 1.41. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{i\sqrt{n}}$. *Alors* $\Lambda(u) = \mathbb{U}$.

Lemme 1.42. $(E, \lhd)$ *un espace totalement ordonné. Si* $u \in E^{\mathbb{N}}$, *alors* u *possède une sous-suite monotone.*

Démonstration. Poser

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall q \geqslant P,\ u_n \lhd u_q\}.$$

Si A est infini, extraire de u une sous-suite croissante. Sinon, A est majoré et extraire alors de u une sous-suite décroissante. □

Théorème 1.43 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$)**.** *Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence dans* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.44. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *bornée. S'équivalent :*

(i) u *converge.*

(ii) u *a exactement une valeur d'adhérence.*

(iii) u *a au plus une valeur d'adhérence.*

IV.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass : extensions

Théorème 1.45 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$)**.** *Toute suite complexe bornée possède au moins une valeur d'adhérence dans* $\mathbb{C}$.

Proposition 1.46. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *bornée. S'équivalent :*

(i) u *converge.*

(ii) u *a exactement une valeur d'adhérence.*

(iii) u *a au plus une valeur d'adhérence.*

Théorème 1.47 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\overline{\mathbb{R}}$)**.** *Toute suite réelle admet une suite extraite qui converge (au sens de* $\overline{\mathbb{R}}$*) vers un élément de* $\overline{\mathbb{R}}$.

V Suites de Cauchy

Définition 1.48 (Suite de Cauchy)**.** $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On dit que* u *est* de Cauchy *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 1.49. *Toute suite convergeante est de Cauchy.*

Lemme 1.50. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 1.51. *Toute suite de Cauchy converge.*

Théorème 1.52. *Les suites de Cauchy sont exactement les suites convergeantes.*

VI Relations de comparaison pour les suites

Définition 1.53 (o, $\mathcal{O}$ et $\sim$)**.** $(u,v) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$.

(i) *On dit que* $u_n = o(v_n)$ *lorsqu'il existe* $\varepsilon \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *de limite* 0 *telle que* $u_n = \varepsilon_n v_n$ *à PCR.*

(ii) *On dit que* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *lorsqu'il existe* $\phi \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *bornée telle que* $u_n = \phi_n v_n$ *à PCR.*

(iii) *On dit que* $u_n \sim v_n$ *lorsqu'il existe* $\psi \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *de limite* 1 *telle que* $u_n = \psi_n v_n$ *à PCR.*

Proposition 1.54. $(u,v) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N$, $v_n \neq 0$, *alors :*

(i) $u_n = o\left(v_n\right) \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(ii) $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ *est bornée.*

(iii) $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Vocabulaire 1.55 (Propriété de nature asymptotique)**.** *On dit qu'une propriété* $\mathcal{P}$ *d'une suite* u *est* de nature asymptotique *lorsque* $\mathcal{P}$ *reste vraie si on modifie un nombre fini de termes de la suite* u.

Proposition 1.56. o, $\mathcal{O}$ *et* $\sim$ *sont de nature asymptotique.*

Chapitre 2

Développements Asymptotiques

I Fonctions équivalentes

Définition 2.1 (Voisinage de $+\infty$)**.** *On appelle* voisinage de $+\infty$ *toute partie* $V \subset \mathbb{R}$ *telle que* $\exists M \in \mathbb{R}$, $[M, +\infty[\subset V$.

Vocabulaire 2.2 (Fonction définie au voisinage de $+\infty$)**.** *F un ensemble non vide. On dit que* $f : D \subset \mathbb{R} \to F$ *est* définie au voisinage de $+\infty$ *lorsque D est un voisinage de $+\infty$.*

Remarque 2.3. *Dans la suite de ce chapitre, on travaillera exclusivement au voisinage de $+\infty$.*

Définition 2.4 (Fonctions équivalentes)**.** *f, g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies au voisinage de $+\infty$. On dit que $f \underset{+\infty}{\sim} g$ lorsqu'il existe u à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de $+\infty$ telle que :*

(i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [M, +\infty[, \ f(x) = u(x)g(x)$.

(ii) $\lim_{+\infty} u = 1$.

Proposition 2.5. *f, g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies au voisinage de $+\infty$. Si g ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$, alors $\frac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de $+\infty$ et :*

$$f \underset{+\infty}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} \left(\frac{f}{g} \right) = 1.$$

Proposition 2.6. $\underset{+\infty}{\sim}$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de $+\infty$.*

Proposition 2.7. *f, f_1, g, g_1 quatre fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies au voisinage de $+\infty$.*

(i) *Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et $g \underset{+\infty}{\sim} g_1$, alors $fg \underset{+\infty}{\sim} f_1 g_1$.*

(ii) *Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{+\infty}{\sim} f_1^n$.*

(iii) *Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et f ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$, alors f_1 ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f^k \underset{+\infty}{\sim} f_1^k$.*

(iv) *On suppose ici que f et f_1 sont à valeurs réelles. Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et $f > 0$ dans un voisinage de $+\infty$, alors $f_1 > 0$ dans un voisinage de $+\infty$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{+\infty}{\sim} f_1^\alpha$.*

Proposition 2.8. *f, g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de $+\infty$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et $\lim_{+\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{+\infty} g = \ell$.*

Exemple 2.9 (Résine $\mathcal{C}^\infty$)**.** *On pose :*

$$\psi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors :

(i) *ψ ne s'annule qu'en 0.*

(ii) *ψ est $\mathcal{C}^\infty$.*

(iii) *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi^{(n)}(0) = 0$.*

Démonstration. Procéder par récurrence sur n en posant $\mathcal{H}(n)$: ψ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et $q_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},$$

et $\psi^{(n)}(0) = 0$. □

II Notation o

Définition 2.10 (o)**.** *f, g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies au voisinage de $+\infty$. On dit que $f = o_{+\infty}(g)$ lorsqu'il existe ε à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de $+\infty$ telle que :*

(i) *$\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [M, +\infty[$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.*

(ii) *$\lim_{+\infty} \varepsilon = 0$.*

Proposition 2.11. *f, g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies au voisinage de $+\infty$. Alors :*

$$f = o_{+\infty}(g) \Longleftrightarrow g + f \underset{+\infty}{\sim} g.$$

III Développements asymptotiques

Vocabulaire 2.12 (Développement asymptotique)**.** *f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de $+\infty$. On appelle* développement asymptotique *de f au voisinage de $+\infty$ toute relation du type :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(x) + o_{+\infty}\left(\varphi_n(x)\right),$$

où $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ sont définies au voisinage de $+\infty$ et :

$$\forall i \in [\![0, n[\![,\ \varphi_{i+1} = o_{+\infty}\left(\varphi_i\right).$$

IV Formules de Taylor

Proposition 2.13 (Formule de Taylor formelle)**.** *$P \in \mathbb{C}[X]$, $a \in \mathbb{C}$. Si* $\deg P \leqslant N$*, alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Proposition 2.14 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 2.15. *Pour $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse.*

Proposition 2.16 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange)**.** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors :*

$$\exists \zeta \in]a,b[,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta).$$

Remarque 2.17. *Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.*

Proposition 2.18 (Formule de Taylor-Young)**.** *f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et n fois dérivable en x_0. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k + o_{x_0}\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

V Développements limités

Vocabulaire 2.19 (Développement limité)**.** *f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de x_0. On appelle* développement limité *de f à l'ordre $o\left((x-x_0)^n\right)$ tout développement asymptotique du type :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(x - x_0\right)^k + o_{+\infty}\left((x-x_0)^n\right),$$

où $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Chapitre 3

Séries Numériques

I Définitions

Définition 3.1 (Série)**.** *$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle* série *de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. S_n est appelée* somme partielle *au rang n de la série $\sum u_n$. On dit que $\sum u_n$* converge *lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on pose :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Si $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on notera $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 3.2. *$z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum z^n$ converge* ssi *$|z| < 1$; et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Proposition 3.3. *$\sum u_n$ une série convergente. Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum u_{q+n}$ converge, et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{q-1} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{q+k}.$$

On notera $\sum_{k=q}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_{q+k}$.

Remarque 3.4 (Équivalence suites-séries)**.** *$p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par*

$u_0 = p_0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - p_{n-1}$. *Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Ainsi, étudier la suite p *équivaut à étudier la série* $\sum u_n$.

Proposition 3.5. $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *Alors* $\sum u_n$ *converge* ssi $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Proposition 3.6. $\sum u_n$ *une série convergente. Alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 3.7. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *S'équivalent :*

(i) $\sum u_n$ *converge.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} u_k\right| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1.52. □

Proposition 3.8. $s \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sum \frac{1}{n^s}$ *converge* ssi $s > 1$.

Définition 3.9 (Fonction ζ de Riemann)**.** *On définit :*

$$\zeta : s \in]1, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Proposition 3.10.

(i) ζ *est décroissante.*

(ii) ζ *est convexe.*

(iii) ζ *est continue.*

(iv) $\lim_{+\infty} \zeta = 1$ *et* $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$.

II Absolue convergence

Définition 3.11 (Absolue convergence)**.** $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On dit que la série* $\sum u_n$ converge absolument *lorsque la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Proposition 3.12. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Si* $\sum u_n$ *converge absolument, alors* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration. Utiliser la proposition 3.7. □

Vocabulaire 3.13 (Série semi-convergente)**.** *Une série convergente non absolument convergente est dite* semi-convergente.

III Séries alternées

Proposition 3.14. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et que* $a \searrow$. *Alors la série* $\sum(-1)^n a_n$ *converge et :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p},$$

où $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ *et* $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. *On peut aussi écrire :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Démonstration. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes puis appliquer la proposition 1.15. □

Définition 3.15 (Série alternée). $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) *On dit que la série* $\sum v_n$ *est* alternée *lorsque* $(-1)^n v_n$ *garde un signe constant.*

(ii) *On dit que* $\sum v_n$ *vérifie le* critère spécifique des séries alternées *lorsque* $\sum v_n$ *est alternée et la suite* $(|v_n|)$ *tend vers* 0 *en décroissant.*

Proposition 3.16. *Si* $\sum v_n$ *est une série vérifiant le critère spécifique des séries alternées, alors* $\sum v_n$ *converge, et on a les inégalités données dans la proposition 3.14.*

IV Quelques applications

Application 3.17. $(\cos 1) \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (proposition 2.14), écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos 1 = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n \sin t \,\mathrm{d}t}_{\varepsilon_n}.$$

Montrer que $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{(2n)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où :

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Comme $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ vérifie le critère spécifique des séries alternées, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n - \frac{1}{(4n+2)!} \leqslant \cos 1 \leqslant A_n$, où $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. On obtient aisément des inégalités strictes en écrivant la même inégalité au rang $(n+1)$. On suppose alors par l'absurde que $\cos 1 = \frac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $q \mid (4n)!$ (par exemple, $n \geqslant q$ convient), on multiplie l'inégalité par $(4n)!$, et on a :

$$(4n)!A_n - \frac{1}{(4n+1)(4n+2)} < \frac{(4n)!}{q}p < (4n)!A_n,$$

ce qui est absurde. □

V Domination

Proposition 3.18. $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *On suppose que* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

(ii) *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Proposition 3.19. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *Si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*

Proposition 3.20. $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *On suppose que* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \geqslant 0$ *à PCR. Alors :*

(i) $u_n \geqslant 0$ *à PCR.*

(ii) *Les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Exemple 3.21. $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a\ln n + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. *Alors :*

(i) $\sum u_n$ *converge* ssi $(a,b,c) \in \operatorname{Vect}((1,-2,1))$.

(ii) *Si* $\sum u_n$ *converge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -a\ln 2$.

VI Intégrales impropres sur $[a, +\infty[$

Notation 3.22. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Vocabulaire 3.23 (Continuité par morceaux sur un intervalle non borné)**.** $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$. *On dit que* f *est* continue par morceaux *(*$\mathcal{C}^0_{pm}$*) sur* $[a,+\infty[$ *lorsque, pour tout* $b \in [a,+\infty[$, f *est* $\mathcal{C}^0_{pm}$ *sur* $[a,b]$.

Définition 3.24 (Intégrale impropre)**.** $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^0_{pm}$. *On dit que l'*intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ *converge lorsque* $x \longmapsto \int_a^x f$ *a une limite dans* $\mathbb{K}$ *quand* $x \to +\infty$. *On pose alors :*

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f.$$

Proposition 3.25. *Soit* $\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0_{pm}\left([a, +\infty[, \mathbb{K}\right),\ \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \right\}$*. Alors :*

(i) *$\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0_{pm}\left([a, +\infty[, \mathbb{K}\right)$*.*

(ii) *L'application* $f \in \mathcal{A} \longmapsto \int_a^{+\infty} f$ *est une forme linéaire.*

(iii) *Si* $f \in \mathcal{A}$ *et* $f \geqslant 0$ *alors* $\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$*.*

Proposition 3.26. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*,* $a < b$*.* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^0_{pm}$*. Alors* $\int_a^{+\infty} f$ *converge* ssi $\int_b^{+\infty} f$ *converge. Et en cas de convergence :*

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Proposition 3.27. $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^0_{pm}$*. Soit* $u \in [a, +\infty[^{\mathbb{N}}$*, avec* $u_0 = a$ *et* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$*.*

(i) *Si* $\int_a^{+\infty} f$ *converge, alors* $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ *converge.*

(ii) *On suppose de plus que f est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*. Alors* $\int_a^{+\infty} f$ *converge* ssi $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ *converge.*

En cas de convergence :

$$\int_a^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f.$$

Proposition 3.28. $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^0_{pm}$*. Alors* $\int_a^{+\infty} f$ *converge* ssi

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ \int_a^x f \leqslant M.$$

Proposition 3.29. $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^0_{pm}$*. On suppose que* $0 \leqslant f \leqslant g$*. Alors :*

(i) *Si* $\int_a^{+\infty} g$ *converge alors* $\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

(ii) *Si* $\int_a^{+\infty} f$ *diverge alors* $\int_a^{+\infty} g$ *diverge.*

Proposition 3.30 (Intégrales de Bertrand)**.** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*.* $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}$ *converge* ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$*.*

VII Comparaison séries-intégrales

Proposition 3.31. $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^0_{pm}$*. On suppose que* $f \geqslant 0$*,* $f \searrow$ *et* $\lim_{+\infty} f = 0$*. Alors* $\sum f(n)$ *converge* ssi $\int_0^{+\infty} f$ *converge. En cas de convergence, on a :*

$$\int_1^{+\infty} f \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_0^{+\infty} f.$$

Proposition 3.32 (Séries de Bertrand)**.** *$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge* ssi *$(\alpha, \beta) > (1, 1)$.*

VIII Comparaison logarithmique

VIII.1 Comparaison logarithmique

Proposition 3.33 (Comparaison logarithmique)**.** *$(u, v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(i) *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Proposition 3.34 (Critère de d'Alembert)**.** *$u \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

(i) *Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ell = 1$, alors $\sum u_n$ peut converger ou diverger.*

(iii) *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

VIII.2 Règle du $n^\alpha u_n$

Méthode 3.35 (Règle du $n^\alpha u_n$)**.** *$u \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. Pour déterminer la nature de $\sum u_n$, on peut étudier $\ln(n^\alpha u_n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. En effet :*

(i) *Si $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ avec $\alpha \leqslant 1$ (il suffit en fait de tester $\alpha = 1$), alors $\sum u_n$ diverge.*

IX Asymptotique des sommes partielles des séries divergentes et des restes des séries convergentes

Proposition 3.36. *$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et que $v_n \geqslant 0$ à PCR.*

(i) *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument et :*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

(ii) *Si* $\sum v_n$ *diverge, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Idem en remplaçant $\mathcal{O}$ *par* o *ou* $\sim$*.*

Proposition 3.37.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où γ *est la* constante d'Euler*.*

Démonstration. Écrire

$$\ln n = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{(\ln k - \ln(k-1))}_{\sim \frac{1}{k}} \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

en utilisant la proposition 3.36 car $\frac{1}{n} \geqslant 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Poser ensuite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et écrire $v_n = \sum_{k=2}^{n} (v_k - v_{k-1}) + v_1$, montrer que $v_k - v_{k-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, et continuer en utilisant la même méthode. □

Proposition 3.38. $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \tag{i}$$

$$\alpha < 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{ii}$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition 3.37. Par exemple, pour $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right)}_{\sim \frac{1}{k^\alpha}} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},$$

en utilisant la proposition 3.36 car $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. □

Proposition 3.39 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Démonstration. Poser $A_n = \ln(n!) - \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \, \mathrm{d}t$. Montrer que $A_n - A_{n-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que $A_n = L + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $L \in \mathbb{R}$. En déduire alors que $n! = K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, où $K \in \mathbb{R}_+^*$. Utiliser enfin des intégrales de Wallis pour montrer que $K = \sqrt{2\pi}$. □

Chapitre 4

Compléments sur les Séries Numériques

I Exemples de transformations d'Abel

Méthode 4.1 (Transformation d'Abel)**.** $(a,u) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$*. On dispose d'informations sur la série* $\sum u_n$ *et on souhaite étudier la série* $\sum a_n u_n$*. On note* $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$*. Une* transformation d'Abel *consiste à écrire :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k u_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sigma_k - \sigma_{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sigma_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\sigma_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \left(a_k - a_{k+1}\right) + \sigma_n a_{n+1}.\end{aligned}$$

Cette réécriture peut faciliter l'étude de $\sum a_n u_n$*.*

Application 4.2. $(\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^2$.

(i) *Si* $\alpha \in]-\infty, 0]$*, alors* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *diverge grossièrement.*

(ii) *Si* $\alpha \in]1, +\infty[$*, alors* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *est absolument convergente.*

(iii) *Si* $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$*, alors* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *diverge.*

(iv) *Si* $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$*, alors* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *est semi-convergente.*

Démonstration. Seul le (iv) nécessite une démonstration. Pour cela, appliquer une transformation d'Abel en remarquant que $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \mathcal{O}(1)$. □

Application 4.3. $(a, u) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *Si* $\sum u_n$ *converge,* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $\sum |a_{n+1} - a_n|$ *converge absolument, alors* $\sum a_n u_n$ *converge.*

Démonstration. Poser $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$, puis écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{r_k \left(a_k - a_{k-1}\right)}_{=o(|a_{k+1}-a_k|)} + a_0 r_0 - \underbrace{a_n r_{n+1}}_{=o(1)}.$$

. □

II Exemples d'études de séries alternées

Exemple 4.4. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *On définit* $u \in \mathbb{R}^{[\![2,+\infty[\![}$ *par :*

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{n}{\ln^\alpha n}}.$$

Alors $\sum u_n$ *converge* ssi $\alpha > 1$.

Démonstration. On a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$; mais comme $\frac{(-1)^n}{n}$ ne garde pas un signe constant, la proposition 3.20 ne permet pas de conclure. On poursuit donc le développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n \ln^\alpha n} \left(1 + o(1)\right).$$

On peut alors conclure : $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$. □

III Carrés sommables

Définition 4.5 $(\ell^2(\mathbb{N}))$**.** *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *on note :*

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum |u_n|^2 \text{ converge}\right\}.$$

Une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ *est dite* de carré sommable.

Remarque 4.6. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) $\sum |u_n|$ *converge* $\Longrightarrow \sum |u_n|^2$ *converge.*

(ii) $\sum |u_n|^2$ *converge* $\not\Longrightarrow \sum u_n$ *converge.*

(iii) $\sum u_n$ *converge* $\not\Rightarrow \sum |u_n|^2$ *converge.*

Proposition 4.7. $\ell^2(\mathbb{N})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*.*

Démonstration. Cela repose sur l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)$. □

Notation 4.8. *On définit un* produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *sur* $\ell^2(\mathbb{N})$ *par :*

$$\forall (u,v) \in \left(\ell^2(\mathbb{N})\right)^2, \ \langle u \mid v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

La norme hilbertienne $\|\cdot\|_2$ *associée à* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est donnée par :*

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}), \ \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}.$$

Proposition 4.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall (u,v) \in \left(\ell^2(\mathbb{N})\right)^2, \ \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2}.$$

IV Produits infinis

Définition 4.10 (Produit infini)**.** $u \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. *On dit que le* produit infini $\prod u_n$ *converge lorsque*

$$\exists L \in \mathbb{C}^*, \ \prod_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} L.$$

On note alors

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = L.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\prod u_n$ *diverge.*

Proposition 4.11. $u \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. *Si* $\prod u_n$ *converge alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Proposition 4.12. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *Alors* $\prod (1 + a_n)$ *converge* ssi $\sum a_n$ *converge.*

Application 4.13. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* p_n *le* n*-ième nombre premier. Alors* $\sum \frac{1}{p_n}$ *diverge.*

Démonstration. Supposer par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Poser $Q_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$. Montrer, en utilisant l'hypothèse $\sum \frac{1}{p_n}$ converge, que $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \mathbb{R}_+^*$. En remarquant que $Q_n = \prod_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k}\right)^j$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant Q_n \leqslant L.$$

C'est une contradiction puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge. □

Proposition 4.14. *$a \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\prod (1 + a_n)$ converge.*

Démonstration. Noter $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$, $\hat{P}_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + |a_k|)$. Montrer d'abord que $\hat{P}$ converge et que $\hat{P} \nearrow$. Montrer ensuite, pour $1 \leqslant r \leqslant s$, que :

$$|P_s - P_r| \leqslant \left|\hat{P}_s - \hat{P}_r\right|.$$

En déduire que P est de Cauchy, donc $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \mathbb{C}$. Pour montrer que $L \neq 0$, écrire $\frac{1}{P_n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + b_k)$, avec $|b_k| \sim |a_k|$, d'où par ce qui précède : $\frac{1}{P_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} M \in \mathbb{C}$. Comme $LM = 1$, il vient $L \neq 0$. □

V Systèmes dynamiques réels

Définition 4.15 (Suite f-récurrente)**.** *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u \in A^{\mathbb{N}}$ est dite f-récurrente lorsque :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour $a \in A$, il existe au plus une suite f-récurrente u t.q. $u_0 = a$. Si une telle suite existe, elle sera notée $\hat{a}$.

Proposition 4.16. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. u une suite f-récurrente. Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega$ et f est $\mathcal{C}^0$ en ω alors ω est un point fixe de f.*

Vocabulaire 4.17. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe de f t.q. f soit dérivable en ω.*

(i) *Si $|f'(\omega)| > 1$, alors ω est dit* répulsif.

(ii) *Si $|f'(\omega)| = 1$, alors ω est dit* indifférent.

(iii) *Si $|f'(\omega)| < 1$, alors ω est dit* attractif.

(iv) *Si $|f'(\omega)| = 0$, alors ω est dit* super-attractif.

Proposition 4.18. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. u une suite f-récurrente de limite ω. Si ω est répulsif, alors u stationne en ω.*

Démonstration. Revenir à la définition de la dérivée comme limite de la pente et en déduire l'existence de $\rho > 0$ t.q. $]\omega - \rho, \omega + \rho[\subset A$ et :

$$\forall x \in]\omega - \rho, \omega + \rho[\setminus\{\omega\}, \ \left|\frac{f(x) - \omega}{x - \omega}\right| \geqslant 1.$$

□

Proposition 4.19. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe attractif de f. Alors il existe $\rho > 0$ t.q. $]\omega-\rho, \omega+\rho[\subset A$, $\hat{a}$ est bien définie pour tout $a \in]\omega-\rho, \omega+\rho[$, et :*

$$\forall \Delta \in \left]\left|f'(\omega)\right|, 1\right[, \ \hat{a}_n = \omega + \mathcal{O}\left(\Delta^n\right).$$

Proposition 4.20. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe attractif (non super-attractif) de f. $r > 0$ t.q. $[\omega - r, \omega + r] \subset A$. u une suite f-récurrente de limite ω ne stationnant pas en ω. On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\omega - r, \omega + r[$. Alors :*

$$\exists C \in \mathbb{R}^*, \ u_n - \omega \sim C\left(f'(\omega)\right)^n.$$

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [\omega - r, \omega + r]$. Pour $n \geqslant n_0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\zeta_n \in [\omega, u_n]$ t.q.

$$\frac{u_{n+1} - \omega}{u_n - \omega} = f'\left(\zeta_n\right).$$

Or $|\zeta_n - \omega| = \mathcal{O}\left(|u_n - \omega|\right) = \mathcal{O}\left(\Delta^n\right)$ pour tout $\Delta \in \left]\left|f'(\omega)\right|, 1\right[$, d'après la proposition 4.19. Donc $f'\left(\zeta_n\right) = f'(\omega) + \mathcal{O}\left(\Delta^n\right)$. Poser ensuite $v_n = \frac{u_n - \omega}{(f'(\omega))^n}$, et montrer que $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = 1 + \mathcal{O}\left(\Delta^n\right)$. En déduire que $\sum\left(\ln|v_{n+1}| - \ln|v_n|\right)$ converge, donc $\ln|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$. En déduire que $|v_n| = e^L + \mathcal{O}\left(\Delta^n\right)$, puis que $v_n \sim \pm e^L$. □

Exemple 4.21. *u une suite* sin*-récurrente t.q. $u_1 > 0$. Alors :*

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Démonstration. Montrer d'abord que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On applique ensuite la méthode de l'*agrandissement* : on recherche $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in]0, +\infty[.$$

Pour cela, montrer que $\frac{1}{\sin^\beta x} - \frac{1}{x^\beta} \sim \frac{\beta}{6}x^{2-\beta}$. Ainsi, en prenant $\beta = 2$, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$. En déduire $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. □

VI Convergence commutative

Lemme 4.22. $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. *Alors* $\sum u_n$ *converge* ssi $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge. Dans ce cas* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Proposition 4.23. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\sum u_n$ *converge absolument.* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. *Alors* $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge absolument et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. Appliquer le lemme 4.22 à $\sum |u_n|$ pour montrer l'absolue convergence de $\sum u_{\sigma(n)}$. Écrire ensuite u_n comme somme de termes positifs : $u_n = -(|u_n| - u_n) + |u_n|$. Les séries $\sum (|u_n| - u_n)$ et $\sum |u_n|$ convergent ; appliquer le lemme 4.22 à ces séries pour montrer l'égalité voulue. □

Proposition 4.24. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $\sum u_n$ *est semi-convergente. Alors :*

(i) *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$. *Alors il existe* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

(ii) *Soit* I *un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$. *Alors il existe* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *t.q.*

$$\Lambda\left(\left(\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = I.$$

VII Numération

Proposition 4.25. $b \in [\![2, +\infty[\![$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *il existe un unique* $\nu \in \mathbb{N}$ *et un unique* $(\nu+1)$*-uplet* $(a_0, \cdots, a_\nu) \in [\![0, b[\![^{\nu+1}$ *avec* $a_\nu \neq 0$ *t.q.*

$$n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k b^k.$$

Proposition 4.26. $b \in [\![2, +\infty[\![$. *Pour tout* $x \in [0, 1[$, *il existe une unique suite* $u \in [\![0, b[\![^{(\mathbb{N}^*)}$ *ne stationnant pas en* $(b-1)$ *t.q.*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{b^k}.$$

Cette écriture est appelée développement propre *de* x *en base* b.

Proposition 4.27. $b \in [\![2, +\infty[\![$. $x \in [0, 1[$. *Le développement propre de* x *en base* b *est ultimement périodique (i.e. périodique à PCR)* ssi $x \in \mathbb{Q}$.

Chapitre 5

Séries Entières à Usage Probabiliste

I Permutation des bornes supérieures

Proposition 5.1. *I et J deux ensembles non vides. $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} x_{ij}\right) = \sup_{(i,j)\in I\times J} x_{ij} = \sup_{j\in J}\left(\sup_{i\in I} x_{ij}\right).$$

Démonstration. *Première étape.* Noter que

$$\forall (i_0,j_0)\in I\times J,\ x_{i_0j_0} \leqslant \sup_{(i,j)\in I\times J} x_{ij}.$$

Passer au sup sur j_0 puis sur i_0 pour obtenir $\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} x_{ij}\right) \leqslant \sup_{(i,j)\in I\times J} x_{ij}$.
Deuxième étape. Noter que

$$\forall (i_0,j_0)\in I\times J,\ x_{i_0j_0} \leqslant \sup_{j\in J} x_{i_0j} \leqslant \sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} x_{ij}\right).$$

Passer au sup sur (i_0,j_0) pour en déduire $\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} x_{ij}\right) \geqslant \sup_{(i,j)\in I\times J} x_{ij}$. □

Remarque 5.2. *I et J deux ensembles non vides. $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$\sup_{i\in I}\left(\inf_{j\in J} x_{ij}\right) \leqslant \inf_{j\in J}\left(\sup_{i\in I} x_{ij}\right).$$

II Généralités sur les séries entières

Notation 5.3. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On notera*

$$I_a = \left\{ x \in \mathbb{R}_+, \ \sum a_n x^n \ \textit{converge} \right\},$$

et $R_a = \sup I_a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 5.4. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors $I_a = [0, R_a[$ ou $[0, R_a]$.*

Notation 5.5. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On définit :*

$$\varphi_a : x \in I_a \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque 5.6. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Si a stationne en 0, alors φ_a est polynomiale.*

Proposition 5.7. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors :*

(i) *φ_a est croissante.*

(ii) *φ_a est convexe.*

(iii) *φ_a est continue.*

Démonstration. (i) et (ii). Écrire la croissance (resp. convexité) des fonctions $x \longmapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ puis faire tendre $N \to +\infty$. (iii) φ_a étant convexe, elle est continue sur $\mathring{I}_a$. *Continuité en* 0. Soit $u \in \mathring{I}_a$ fixé. En notant $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{n-1}$, montrer que :

$$\forall x \in]0, u], \ |\varphi_a(x) - \varphi_a(0)| = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \leqslant Ax.$$

En déduire $\lim_{0^+} \varphi_a = \varphi_a(0)$. *Continuité en R_a* (si $R_a \in I_a$). Par croissance de φ_a, $\lim_{R_a^-} \varphi_a$ existe et, en permutant les sup, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{R_a^-} \varphi_a &= \sup_{x \in [0, R_a[} \varphi_a(x) = \sup_{x \in [0, R_a[} \left(\sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right) \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in [0, R_a[} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} a_n R_a^n = \varphi_a(R_a).\end{aligned}$$

Donc φ_a est continue en R_a. □

Proposition 5.8. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Si $R_a \notin I_a$, alors*

$$\lim_{R_a^-} \varphi_a = +\infty.$$

III Dérivabilité

Lemme 5.9. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. On définit $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (n+1)a_{n+1}$. Alors $R_b = R_a$.*

Démonstration. *Première étape* : $[0, R_a[\subset [0, R_b]$. Soit $x \in [0, R_a[$. On fixe $y \in]x, R_a[$. Alors :

$$(n+1)a_{n+1}x^n = (n+1)\left(\frac{x}{y}\right)^n a_{n+1}y^n = o\left(a_{n+1}y^n\right).$$

Or $\sum a_{n+1}y^n$ converge donc $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ converge, d'où $x \in [0, R_b]$. *Deuxième étape* : $[0, R_b[\subset [0, R_a]$. Soit $x \in [0, R_b[$. Alors $a_n x^n = o\left(na_n x^{n-1}\right)$, et $\sum na_n x^{n-1}$ converge donc $\sum a_n x^n$ converge, d'où $x \in [0, R_a]$. □

Proposition 5.10. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors φ_a est dérivable sur $[0, R_a[$ et :*

$$\forall x \in [0, R_a[\,,\ \varphi_a'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Démonstration. On définit $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (n+1)a_{n+1}$. On fixe $x_0 \in [0, R_a[$. Soit $x \in [0, R_a[\setminus \{x_0\}$ et $\varrho = \left|\frac{\varphi_a(x)-\varphi_a(x_0)}{x-x_0} - \varphi_b(x_0)\right|$. Montrer d'abord :

$$\varrho \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\left|\frac{x^{n+1}-x_0^{n+1}}{x-x_0} - (n+1)x_0^n\right|.$$

Appliquer ensuite le théorème de Rolle, pour $n \in \mathbb{N}$, pour obtenir l'existence de $\zeta_n \in]x_0, x[$ tel que :

$$\varrho \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\left|\zeta_n^n - x_0^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\left|x^n - x_0^n\right| = \left|\varphi_b(x) - \varphi_b(x_0)\right|.$$

La dérivabilité de φ_a en x_0 découle alors de la continuité de φ_b en x_0. □

Corollaire 5.11. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors φ_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, R_a[$ et :*

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, R_a[\,,\ \varphi_a^{(q)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!}a_{n+q}x^n.$$

Proposition 5.12. *$a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. On suppose que $R_a \in I_a$. Alors φ_a est dérivable en R_a* ssi *$\sum (n+1)a_{n+1}R_a^n$ converge. Dans ce cas :*

$$\varphi_a'(R_a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}R_a^n.$$

Démonstration. Soit $p : x \in [0, R_a[\longmapsto \frac{\varphi_a(R_a)-\varphi_a(x)}{R_a-x}$. Comme φ_a est convexe, p est croissante. Et :

$$\begin{aligned}\lim_{R_a^-} p &= \sup_{x\in[0,R_a[} \frac{\varphi_a\left(R_a\right)-\varphi_a(x)}{R_a-x} = \sup_{x\in[0,R_a[}\left(\sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=0}^{N} a_{n+1}\frac{R_a^{n+1}-x^{n+1}}{R_a-x}\right)\\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left(\sup_{x\in[0,R_a[}\sum_{n=0}^{N} a_{n+1}\frac{R_a^{n+1}-x^{n+1}}{R_a-x}\right) = \sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=0}^{N}(n+1)a_{n+1}R_a^n.\end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Dénombrabilité

I Équipotence

Définition 6.1 (Fonction)**.** *A, B deux ensembles. On définit :*

$$\mathcal{F}(A,B) = \{f \subset A \times B,\ \forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ (a,b) \in f\}.$$

Les éléments de $\mathcal{F}(A,B)$ sont dits fonctions *de A dans B. Si $f \in \mathcal{F}(A,B)$ et $a \in A$, on note $f(a)$ l'unique élément de B tel que $(a, f(a)) \in f$.*

Définition 6.2. *A, B deux ensembles.*

(i) *On dit que A est* équipotent *à B, et on note $A \sim B$, lorsqu'il existe une bijection de A dans B.*

(ii) *On dit que A* s'injecte *dans B, et on note $A \hookrightarrow B$, lorsqu'il existe une injection de A dans B.*

Proposition 6.3. *A, B deux ensembles. Alors il existe une injection de A dans B* ssi *il existe une surjection de B dans A.*

Théorème 6.4. *A, B deux ensembles. Alors $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$.*

Théorème 6.5 (Théorème de Cantor-Bernstein)**.** *A, B deux ensembles. Si $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$, alors $A \sim B$.*

Démonstration (Première méthode)**.** Soit $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux injections. Par commodité, on suppose $A \cap B = \varnothing$. On appelle *généalogie* de $x \in A \cup B$ la suite des antécédents successifs de x par f et g. On note $A(\infty)$ l'ensemble des $a \in A$ admettant une généalogie infinie, $A(A)$ l'ensemble des $a \in A$ dont la généalogie s'arrête dans A, et $A(B)$ l'ensemble des $a \in A$ dont la généalogie s'arrête dans B. On définit $B(\infty)$, $B(A)$ et $B(B)$ de manière analogue. On a alors $A = A(\infty) \sqcup A(A) \sqcup A(B)$, $B = B(\infty) \sqcup B(A) \sqcup B(B)$, $A(\infty) \sim B(\infty)$, $A(A) \sim B(A)$ et $A(B) \sim B(B)$, ce qui permet de construire une bijection de A dans B. $\square$

Démonstration (Deuxième méthode)**.** Soit $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux injections. On définit :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ X & \longmapsto & A \backslash g\left(B \backslash f(X)\right) \end{array} \right. .$$

Montrer que φ est croissante pour l'inclusion puis que φ admet un point fixe X_0 (pour cela, considérer $\Delta = \{X \in \mathcal{P}(A),\ X \supset \varphi(X)\}$, montrer que Δ est stable par intersection quelconque, puis que Δ admet un plus petit élément pour l'inclusion X_0). On a alors $X_0 \sim f\left(X_0\right)$ et $B \backslash f\left(X_0\right) \sim g\left(B \backslash f\left(X_0\right)\right) = A \backslash X_0$, ce qui permet de construire une bijection de A dans B. $\square$

Théorème 6.6 (Théorème de Cantor)**.** *E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E) \not\hookrightarrow E$.*

Démonstration. Supposer par l'absurde qu'il existe une surjection $s : E \to \mathcal{P}(E)$. Montrer alors que $\{x \in E,\ x \notin s(x)\} \notin s(E)$, ce qui est absurde. $\square$

II Ensembles finis

Définition 6.7 (Ensemble fini)**.** *A un ensemble. On dit que A est* fini *lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \sim [\![1, n]\!]$. Si tel est le cas, n est unique, on l'appelle* cardinal *de A et on le note $|A|$.*

Lemme 6.8. *$X \subset \mathbb{N}$. Alors X est fini* ssi *X est majoré.*

Proposition 6.9. *A, B deux ensembles.*

(i) *On suppose que $A \sim B$. Alors A est fini* ssi *B est fini. Dans ce cas, $|A| = |B|$.*
(ii) *On suppose que $A \hookrightarrow B$. Si B est fini, alors A est fini. Dans ce cas, $|A| \leqslant |B|$.*

Proposition 6.10. *$A_1, \cdots, A_p$ p ensembles finis.*

(i) *$\prod_{k=1}^{p} A_k$ est fini et $\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.*
(ii) *${A_1}^{A_2}$ est fini et $\left|{A_1}^{A_2}\right| = |A_1|^{|A_2|}$.*
(iii) *$\mathcal{P}\left(A_1\right)$ est fini et $\left|\mathcal{P}\left(A_1\right)\right| = 2^{|A_1|}$.*

III Ensembles dénombrables

Définition 6.11 (Ensemble dénombrable)**.** *E un ensemble. On dit que E est* dénombrable *lorsque E est fini ou $E \sim \mathbb{N}$.*

Proposition 6.12. *E, F deux ensembles tels que $E \sim F$. Alors E est dénombrable* ssi *F est dénombrable.*

Lemme 6.13. *Toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Proposition 6.14. *Tout ensemble s'injectant dans un ensemble dénombrable est dénombrable.*

Lemme 6.15. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.*

Proposition 6.16. *Tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Proposition 6.17. *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exemple 6.18. *$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais pas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Exemple 6.19. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \nearrow$. Alors le nombre de points de discontinuité de f est au plus dénombrable.*

Démonstration. Construire une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$ en associant à chaque point de discontinuité ω un élément de $\mathbb{Q} \cap]\lim_{\omega^-} f, \lim_{\omega^+} f[$. □

IV Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Lemme 6.20. *$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.*

Démonstration (Première méthode)**.** Supposer par l'absurde qu'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Construire alors $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (s(n))_n$. Montrer alors que $u \notin s(\mathbb{N})$. C'est une contradiction. □

Démonstration (Deuxième méthode)**.** Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ puis utiliser le théorème 6.6 pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \mathbb{N}$. □

Proposition 6.21. $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Montrer d'abord $\mathbb{R} \sim [0,1[$ puis utiliser les développements propres en bases 2 et 3 pour obtenir $[0,1[\hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow [0,1[$. □

Proposition 6.22. *$\mathbb{R}$ est non dénombrable.*

Lemme 6.23. *X, Y, Z trois ensembles. Alors $X^{Y\times Z} \sim \left(X^Y\right)^Z$.*

Proposition 6.24. *$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$.*

Démonstration. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\left(\mathbb{N}^2\right)} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc $\mathbb{R} \sim \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

Chapitre 7

Familles Sommables

I Introduction

I.1 Familles

Définition 7.1 (Famille)**.** *E, Λ deux ensembles, $\Lambda \neq \varnothing$. On appelle* famille *indexée par Λ toute application $a : \Lambda \to E$, qu'on notera alors $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Vocabulaire 7.2 (Famille finie ou dénombrable)**.** *Une famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est dite* finie *(resp.* dénombrable*) lorsque Λ est fini (resp. dénombrable).*

Vocabulaire 7.3 (Sous-famille)**.** *$(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de E. Si $K \subset \Lambda$, alors on dit que $(a_\lambda)_{\lambda \in K}$ est une* sous-famille *de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Vocabulaire 7.4 (Famille obtenue par réindexation)**.** *$(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de E. Si $\varphi : L \to \Lambda$ est une bijection, alors la famille $\left(a_{\varphi(\ell)}\right)_{\ell \in L}$ est dite obtenue par* réindexation *à partir de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

I.2 Quelques mots sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Notation 7.5. *On se place dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c.f. définition 1.11) et on note*

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty].$$

Proposition 7.6. *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ admet un* sup *dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Définition 7.7 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)**.** *$u \in \left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)^{\mathbb{N}}$.*

(i) *On dit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *On dit que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

Définition 7.8 (Séries dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)**.** *$u \in \left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)^{\mathbb{N}}$. Alors on pose :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

I.3 Borne supérieure d'une famille

Définition 7.9 (Borne supérieure d'une famille)**.** *$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On définit :*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sup\left\{a_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\right\}.$$

Proposition 7.10. *$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(L_\delta)_{\delta\in\Delta}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Lambda)$ telle que $\bigcup_{\delta\in\Delta} L_\delta = \Lambda$. Alors :*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sup_{\delta\in\Delta}\left(\sup_{\lambda\in L_\delta} a_\lambda\right).$$

Corollaire 7.11. *$(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :*

$$\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J} x_{ij}\right) = \sup_{(i,j)\in I\times J} x_{ij} = \sup_{j\in J}\left(\sup_{i\in I} x_{ij}\right).$$

II Familles sommables de $\overline{\mathbb{R}}_+$

II.1 Généralités

Remarque 7.12. *Si $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille finie d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$, la notation $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ a bien un sens car l'addition est associative et commutative dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Notation 7.13. *Si Λ est un ensemble, on note :*

$$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda) = \{M \in \mathcal{P}(\Lambda),\ M \text{ est fini}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\Lambda).$$

Définition 7.14 (Somme d'une famille dénombrable)**.** *$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On pose :*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sup_{M\in\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda)} \sum_{\lambda\in M} a_\lambda.$$

Proposition 7.15. $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *deux familles dénombrables d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(i) *Si* $\forall\lambda\in\Lambda,\ 0\leqslant a_\lambda\leqslant b_\lambda\leqslant+\infty$, *alors* $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$.

(ii) *Si* $L\subset\Lambda$, *alors* $\sum_{\ell\in L} a_\ell\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$.

Proposition 7.16. $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille dénombrable d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* $\mathcal{P}(\Lambda)$ *vérifiant :*

(i) $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\subset I_{n+1}$,

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n=\Lambda$.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda\in I_n} a_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda.$$

Vocabulaire 7.17 (Exhaustion)**.** Λ *un ensemble dénombrable. On appelle* exhaustion *de* Λ *toute suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda)$ *telle que :*

(i) $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\subset I_{n+1}$,

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n=\Lambda$.

Proposition 7.18. *Tout ensemble dénombrable admet une exhaustion.*

Proposition 7.19. $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *deux familles dénombrables d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. $t\in\mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda+b_\lambda)=\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda+\sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda, \tag{i}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(ta_\lambda)=t\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda. \tag{ii}$$

II.2 Associativité

Lemme 7.20 (Lemme d'associativité)**.** $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille dénombrable d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(L_\delta)_{\delta\in\Delta}$ *une famille dénombrable d'éléments de* $\mathcal{P}(\Lambda)$ *vérifiant :*

(i) $\bigcup_{\delta\in\Delta} L_\delta=\Lambda$.

(ii) $\forall(\delta_1,\delta_2)\in\Delta^2,\ \delta_1\neq\delta_2\Longrightarrow L_{\delta_1}\cap L_{\delta_2}=\varnothing$.

Alors :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda=\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{\lambda\in L_\delta} a_\lambda.$$

Démonstration. ($\leqslant$) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda), \sum_{\lambda \in M} a_\lambda \leqslant \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda$ puis passer au sup sur M. ($\geqslant$) Soit $D \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Delta)$. On suppose $\forall \delta \in D, \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda < +\infty$, sinon l'inégalité est claire. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\delta \in D$, on choisit $M_\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(L_\delta)$ t.q.

$$\sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{1 + |D|} + \sum_{\lambda \in M_\delta} a_\lambda.$$

Il vient alors :

$$\sum_{\delta \in D} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leqslant \varepsilon + \sum_{\delta \in D} \sum_{\lambda \in M_\delta} a_\lambda = \varepsilon + \sum_{\lambda \in \bigsqcup_{\delta \in D} M_\delta} a_\lambda \leqslant \varepsilon + \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda.$$

On en déduit $\sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$. □

Proposition 7.21. *$(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :*

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Proposition 7.22. *$(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :*

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

II.3 Lien avec les séries à terme général positif

Proposition 7.23. *$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Proposition 7.24. *$(a_{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors :*

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} a_{pq}.$$

III Familles sommables de réels

III.1 Généralités

Définition 7.25 (Famille sommable de réels positifs)**.** *$a \in (\mathbb{R}_+)^\Lambda$ dénombrable. On dit que a est* sommable *lorsque*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < +\infty.$$

Définition 7.26 (Famille sommable de réels)**.** *$a \in \mathbb{R}^\Lambda$ dénombrable. On dit que a est* sommable *lorsque*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < +\infty.$$

Définition 7.27 (Somme d'une famille sommable)**.** *$a \in \mathbb{R}^\Lambda$ sommable. $I \in (\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda))^{\mathbb{N}}$ une exhaustion de Λ. Alors la suite $\left(\sum_{\lambda \in I_n} a_\lambda\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de l'exhaustion choisie, et on pose :*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \lim_{n \to +\infty} \sum_{\lambda \in I_n} a_\lambda.$$

Notation 7.28 ($\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R})$)**.** *$\Lambda$ dénombrable. On note :*

$$\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R}) = \left\{ a \in \mathbb{R}^\Lambda, \ \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < +\infty \right\}.$$

Proposition 7.29. *Λ dénombrable. Alors :*

(i) *$\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Lambda$.*

(ii) *L'application $a \in \mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R}) \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire.*

Proposition 7.30. *Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.*

Lemme 7.31 (Lemme d'associativité)**.** *$a \in \mathbb{R}^\Lambda$ sommable. $L \in (\mathcal{P}(\Lambda))^\Delta$ dénombrable avec :*

(i) *$\bigcup_{\delta \in \Delta} L_\delta = \Lambda$.*

(ii) *$\forall (\delta_1, \delta_2) \in \Delta^2, \ \delta_1 \neq \delta_2 \Longrightarrow L_{\delta_1} \cap L_{\delta_2} = \varnothing$.*

Alors :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda.$$

III.2 Lien avec les séries

Proposition 7.32. *$a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La famille a est sommable* ssi *$\sum a_n$ est absolument convergente. Si tel est le cas, alors :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Définition 7.33 (Produit de Cauchy)**.** *$(a, b) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. Le* produit de Cauchy *de a et b est la suite $c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

Proposition 7.34. $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *On note c le produit de Cauchy de a et b. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors $\sum c_n$ converge absolument et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Théorème 7.35 (Théorème de permutation des sommes)**.** $a \in \mathbb{R}^{\left(\mathbb{N}^2\right)}$. *On suppose que*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < +\infty.$$

Alors :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

IV Familles sommables de complexes

Définition 7.36 (Famille sommable de complexes)**.** $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ *dénombrable. On dit que a est* sommable *lorsque*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < +\infty.$$

Définition 7.37 (Somme d'une famille sommable)**.** $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ *sommable. $I \in \left(\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\Lambda)\right)^{\mathbb{N}}$ une exhaustion de Λ. Alors la suite $\left(\sum_{\lambda\in I_n} a_\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de l'exhaustion choisie, et on pose :*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\lambda\in I_n} a_\lambda.$$

Proposition 7.38. $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ *dénombrable. Alors a est sommable* ssi $\Re(a)$ *et* $\Im(a)$ *sont sommables. Et dans ce cas :*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Re(a_\lambda) + i\sum_{\lambda\in\Lambda} \Im(a_\lambda).$$

Notation 7.39 ($\mathcal{S}^1(\Lambda,\mathbb{C})$)**.** Λ *dénombrable. On note :*

$$\mathcal{S}^1(\Lambda,\mathbb{C}) = \left\{a \in \mathbb{C}^{\Lambda},\ \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < +\infty\right\}.$$

Proposition 7.40. Λ *dénombrable. Alors :*

(i) $\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^\Lambda$.

(ii) *L'application* $a \in \mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C}) \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \in \mathbb{C}$ *est une forme linéaire.*

Remarque 7.41. *On généralise aux familles sommables de complexes toutes les propositions de la section III.*

Chapitre 8

Espaces Probabilisables et Espaces Probabilisés

I Espaces probabilisables

Définition 8.1 (Espace probabilisable)**.** Ω *un ensemble. On appelle* tribu *sur* Ω *tout* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *vérifiant :*

(i) $\varnothing \in \mathcal{T}$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{T}$, $\overline{A} \in \mathcal{T}$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{T}^I$ *dénombrable*, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T})$ *est un* espace probabilisable*. Les éléments de* Ω *sont dits* issues *ou* aléas*, et les éléments de* $\mathcal{T}$ *sont dits* événements*.*

Proposition 8.2. $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace probabilisable. Alors :*

$$\forall A \in \mathcal{T}^I \text{ dénombrable}, \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}.$$

II Opérations sur les tribus

Proposition 8.3. $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace probabilisable,* $\mathcal{U}$ *un ensemble, et* $X : \mathcal{U} \to \Omega$*. On pose :*

$$\mathcal{T}_X = \left\{X^{-1}(V),\, V \in \mathcal{T}\right\}.$$

Alors $\mathcal{T}_X$ *est une tribu sur* $\mathcal{U}$*.*

Définition 8.4 (Tribu engendrée)**.** *Ω un ensemble. $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On considère :*

$$\Theta = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega),\ \mathcal{T} \textit{ est une tribu sur } \Omega \text{ et } \mathcal{T} \supset S\}.$$

Alors Θ admet un plus petit élément pour l'inclusion, appelé tribu engendrée *par S, et noté $\mathcal{T}(S)$.*

Exemple 8.5. *Ω un ensemble. $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une partition dénombrable de Ω. Alors :*

$$\mathcal{T}(S) = \left\{ \bigcup_{A \in M} A,\ M \subset S \right\}.$$

Définition 8.6 (Tribu produit)**.** *$(\Omega_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (\Omega_s, \mathcal{T}_s)$ des espaces probabilisables. On appelle* tribu produit *sur $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_s$ la tribu*

$$\mathcal{T}\left(\bigcup_{i=1}^{s} \{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_s,\ A_i \in \mathcal{T}_i\} \right).$$

III Variables aléatoires

Définition 8.7 (Variable aléatoire)**.** *$(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ deux espaces probabilisables. On dit que $X : \Omega \to \mathcal{U}$ est une* variable aléatoire *lorsque :*

$$\forall V \in \mathcal{S},\ X^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Notation 8.8. *$(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ deux espaces probabilisables. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ une variable aléatoire. Alors, pour $V \in \mathcal{S}$, l'événement $X^{-1}(V)$ sera noté $(X \in V)$.*

IV Probabilités

Définition 8.9 (Probabilité)**.** *$(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle* probabilité *sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0, 1]$ avec :*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) *Pour toute famille $A \in \mathcal{T}^I$ dénombrable d'événements deux à deux disjoints :*

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Proposition 8.10. *$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.*

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(iii) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Proposition 8.11. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.* $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$*. On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$*. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. La suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in [0,1]$. Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left((A_0) \sqcup \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1} \backslash A_n)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)\right) = \ell.\end{aligned}$$

□

Corollaire 8.12. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.* $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$*. On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supset A_{n+1}$*. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

V Loi d'une variable aléatoire

Notation 8.13. *Dans tout le chapitre,* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé et* $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ *est un espace probabilisable.*

Définition 8.14 (Loi de probabilité)**.** $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une variable aléatoire. On pose :*

$$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{l} \mathcal{S} \longrightarrow [0,1] \\ V \longmapsto \mathbb{P}(X \in V) \end{array} \right. .$$

Alors $\mathbb{P}_X$ *est une probabilité sur* $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$*, dite* loi de probabilité *de* X*.*

Vocabulaire 8.15. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une variable aléatoire.* Q *une probabilité sur* $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$*. On dit que* X *suit la loi* Q*, et on note* $X \hookrightarrow Q$*, lorsque* $\mathbb{P}_X = Q$*.*

Exemple 8.16 (Quelques lois classiques)**.**

(i) Ω *un ensemble fini non vide. On définit* $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

$\mathbb{P}$ *est dite* loi uniforme *sur* Ω*, et notée* $\mathcal{U}(\Omega)$*.*

(ii) $p \in [0,1]$*. On définit* $\mathbb{P}$ *sur* $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ *par :*

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = p.$$

$\mathbb{P}$ *est dite* loi de Bernoulli *de paramètre* p*, et notée* $\mathrm{Be}(p)$*.*

(iii) $p \in [0,1]$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*. On définit* $\mathbb{P}$ *sur* $(\llbracket 0,n \rrbracket, \mathcal{P}(\llbracket 0,n \rrbracket))$ *par :*

$$\forall k \in \llbracket 0,n \rrbracket,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$\mathbb{P}$ *est dite* loi binomiale *de paramètres* n, p*, et notée* $\mathcal{B}(n,p)$*.*

(iv) $p \in]0,1[$*. On définit* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = p(1-p)^{n-1}.$$

$\mathbb{P}$ *est dite* loi géométrique *de paramètre* p*, et notée* $G(p)$*.*

(v) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. On définit* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

$\mathbb{P}$ *est dite* loi de Poisson *de paramètre* λ*, et notée* $\mathcal{P}(\lambda)$*.*

VI Probabilités conditionnelles

Vocabulaire 8.17. $A \in \mathcal{T}$*.*

(i) *On dit que* A *est* presque certain *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 1$*.*

(ii) *On dit que* A *est* négligeable *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 0$*.*

Proposition 8.18. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$*.*

(i) *Si* A *est presque certain alors* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$*.*

(ii) *Si* A *est négligeable alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$*.*

Définition 8.19 (Probabilité conditionnelle)**.** *$A \in \mathcal{T}$ non négligeable. On définit :*

$$\mathbb{P}\left(\cdot \mid A\right) : \left| \begin{array}{l} \mathcal{T} \longrightarrow [0,1] \\ B \longmapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array} \right. .$$

Alors $\mathbb{P}\left(\cdot \mid A\right)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$, dite probabilité conditionnelle *sachant A.*

Proposition 8.20. *$(A, B) \in \mathcal{T}^2$ non négligeables. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(B \mid A\right).$$

Vocabulaire 8.21 (Système complet d'événements)**.** *On dit qu'une famille $A \in \mathcal{T}^I$ est un* système complet d'événements *(SCE) lorsque $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$.*

Proposition 8.22. *$A \in \mathcal{T}^I$ un système complet d'événements non négligeables dénombrable. $B \in \mathcal{T}$. Alors :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right).$$

Proposition 8.23 (Formule de Bayes)**.** *$A \in \mathcal{T}^I$ un système complet d'événements non négligeables dénombrable. $B \in \mathcal{T}$ non négligeable. Alors :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_j\right) \mathbb{P}\left(B \mid A_j\right)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right)}.$$

VII Indépendance d'événements et de variables aléatoires

Définition 8.24 (Événements indépendants)**.** *$(A, B) \in \mathcal{T}^2$. On dit que A et B sont* indépendants *lorsque*

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 8.25. *$(A, B) \in \mathcal{T}^2$. A et B sont indépendants* ssi *$\overline{A}$ et B sont indépendants* ssi *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Définition 8.26 (Événements mutuellement indépendants)**.** *$(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. On dit que $A_1, \ldots, A_p$ sont* mutuellement indépendants *lorsque*

$$\forall J \subset [\![1, p]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

Proposition 8.27. *$(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. Si $A_1, \ldots, A_p$ sont mutuellement indépendants, alors $A_1, \ldots, A_p$ sont deux à deux indépendants.*

Notation 8.28. *Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $A \in \mathcal{T}$, on note :*

$$A^\varepsilon = \begin{cases} A & si\ \varepsilon = 1 \\ \overline{A} & si\ \varepsilon = -1 \end{cases}.$$

Proposition 8.29. *$(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. Alors $A_1, \ldots, A_p$ sont mutuellement indépendants* ssi

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^p A_i^{\varepsilon_i}\right) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}\left(A_i^{\varepsilon_i}\right).$$

Définition 8.30 (Variables aléatoires indépendantes)**.** *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ n ensembles. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont* mutuellement indépendantes *lorsque pour tout $(V_1, \ldots, V_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$, les événements $(X_1 \in V_1), \ldots, (X_n \in V_n)$ sont mutuellement indépendants dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.*

Proposition 8.31. *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ n ensembles. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires. Alors $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes* ssi

$$\forall (V_1, \ldots, V_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in V_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in V_i).$$

Proposition 8.32. *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ $2n$ ensembles. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors :*

(i) *Pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.*

(ii) *Soit $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_t = n$, soit $Y_k = \left(X_{1+m_{k-1}}, \ldots, X_{m_k}\right)$ pour $k \in [\![1, t]\!]$. Alors $Y_1, \ldots, Y_t$ sont mutuellement indépendantes.*

(iii) *Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$. Alors $(f_1 \circ X_1), \ldots, (f_n \circ X_n)$ sont mutuellement indépendantes.*

Exemple 8.33. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi* Be(p)*. Alors :*

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Chapitre 9

Variables Aléatoires Discrètes

Notation 9.1. *Dans tout le chapitre,* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé et* $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$ *est un espace probabilisable.*

I Introduction aux variables aléatoires discrètes

I.1 Variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs

Proposition 9.2. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une application, avec* $X(\Omega)$ *fini. S'équivalent :*

(i) X *est une variable aléatoire de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.

(ii) $\forall u \in \mathcal{U},\ X^{-1}(\{u\}) \in \mathcal{T}$.

Proposition 9.3. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une variable aléatoire, avec* $X(\Omega)$ *fini. Alors :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}),\ \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = a).$$

Définition 9.4 (Espérance)**.** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire (on considère* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *comme espace probabilisable), avec* $X(\Omega)$ *fini. Alors l'*espérance *de* X *est par définition :*

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbb{P}(X = a).$$

Exemple 9.5.

(i) $F \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$, *alors* $E(X) = \frac{1}{|F|} \sum_{x \in F} x$.

(ii) $p \in [0,1]$. *Si* $X \hookrightarrow \mathrm{Be}(p)$, *alors* $E(X) = p$.

(iii) $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, *alors* $E(X) = np$.

Lemme 9.6. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire, avec* $X(\Omega)$ *fini.* $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ *un système complet d'événements dénombrable t.q.* $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_{|A_\lambda}$ *est constante. On pose, pour* $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X_{|A_\lambda} \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.7. *On pose* $\mathfrak{V}$ *l'ensemble des* $X \in \mathbb{R}^\Omega$ *tels que* $X(\Omega)$ *est fini* et X *est une variable aléatoire de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. *Alors :*

(i) $\mathfrak{V}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^\Omega$.

(ii) *L'espérance* $E : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}$ *est une forme linéaire.*

I.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 9.8 (Variable aléatoire discrète)**.** *Une variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *est dite* discrète *lorsque* $X(\Omega)$ *est dénombrable.*

Proposition 9.9. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une application, avec* $X(\Omega)$ *dénombrable. S'équivalent :*

(i) X *est une variable aléatoire discrète de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.

(ii) $\forall u \in \mathcal{U}$, $X^{-1}(\{u\}) \in \mathcal{T}$.

Proposition 9.10. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une variable aléatoire discrète. Alors :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}),\ \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = a).$$

II Génie fonctionnel

Proposition 9.11. $X : \Omega \to \mathcal{U}$ *une variable aléatoire discrète,* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *une application. Alors* $f \circ X$ *est une variable aléatoire discrète de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathcal{V}, \mathcal{P}(\mathcal{V}))$.

Proposition 9.12. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ *n applications. On pose :*

$$X : \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_n \\ \omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array} \right. .$$

S'équivalent :

(i) X *est une variable aléatoire discrète de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $\left(\prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i, \mathcal{P}\left(\prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i\right)\right)$.

(ii) *Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$, X_i *est une variable aléatoire discrète de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathcal{U}_i, \mathcal{P}(\mathcal{U}_i))$.

III Variables aléatoires discrètes réelles positives

Définition 9.13 (Espérance). *$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. On définit l'*espérance *de X par :*

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbb{P}(X = a) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On dit que X admet une espérance finie lorsque $E(X) < +\infty$, sinon on dit que l'espérance de X est infinie.

Exemple 9.14.

(i) $p \in]0,1[$. *Si $X \hookrightarrow G(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.*

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.*

Lemme 9.15. *$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ un système complet d'événements dénombrable t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_{|A_\lambda}$ est constante. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X_{|A_\lambda} \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.16. *$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. S'équivalent :*

(i) $E(X) < +\infty$.

(ii) *Il existe un système complet d'événements dénombrable $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_{|A_\lambda} = \varphi_\lambda \in \mathbb{R}$ et $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda) < +\infty$.*

(iii) *Pour tout système complet d'événements dénombrable $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_{|A_\lambda} = \varphi_\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda) < +\infty$.*

Proposition 9.17. *$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ deux variables aléatoires discrètes, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*

(i) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

(ii) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

(iii) *Si $0 \leqslant X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.*

IV Variables aléatoires discrètes de signe quelconque

Définition 9.18 (Espérance). *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X est* d'espérance finie *lorsque $|X|$ admet une espérance finie. Si tel est le* *cas, on définit à bon droit :*

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbb{P}(X = a) \in \mathbb{R}.$$

Lemme 9.19. *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète d'espérance finie. $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ un système complet d'événements dénombrable t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_{|A_\lambda}$ est constante. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X_{|A_\lambda} \in \mathbb{R}$. Alors la famille $(\varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable et :*

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.20. *On note $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant une espérance finie.*

(i) *$\mathfrak{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$.*

(ii) *L'espérance $E : \mathfrak{M}_1 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.*

Proposition 9.21 (Formule de transfert)**.** *$X : \Omega \to \mathcal{U}$ une variable aléatoire discrète. $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $f \circ X$ est d'espérance finie* ssi *la famille $(f(a)\mathbb{P}(X = a))_{a \in X(\Omega)}$ est sommable. Si tel est le cas :*

$$E(f \circ X) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a)\mathbb{P}(X = a).$$

Proposition 9.22. *$(X, Y) \in \mathfrak{M}_1^2$. Alors :*

$$X \leqslant Y \Longrightarrow E(X) \leqslant E(Y).$$

Proposition 9.23 (Inégalité de Markov)**.** *$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. Si X est d'espérance finie, alors :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Démonstration. Poser $Y = \mathbb{1}_{(X \geqslant \lambda)}$, et montrer que $E(Y) = \mathbb{P}(X \geqslant \lambda)$ et que $X \geqslant \lambda Y$. □

V Moments d'une variable aléatoire discrète

V.1 Moment d'ordre k

Définition 9.24 (Moment d'ordre k)**.** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que X possède un* moment d'ordre k *lorsque X^k est d'espérance finie.*

Notation 9.25. *On note $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant un moment d'ordre k.*

Proposition 9.26.

(i) *$\mathfrak{M}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$.*

(ii) *$\mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_{k+1}$.*

Proposition 9.27. *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète.*

(i) *Si X est bornée, alors $X \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathfrak{M}_k$.*

(ii) *Si $X(\Omega)$ est fini, alors $X \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathfrak{M}_k$.*

V.2 Moment d'ordre 2 et variance

Définition 9.28 (Variance)**.** *$X \in \mathfrak{M}_2$. On définit la* variance *de X par :*

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

Proposition 9.29. *$X \in \mathfrak{M}_2$.*

(i) *$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.*

(ii) *$V(X) \geqslant 0$.*

(iii) *$\forall c \in \mathbb{R},\ V(X + c) = V(X)$.*

Lemme 9.30. *$X \in \mathfrak{M}_2$. Si X est centrée, alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) = E\left(\mathbb{1}_{|X|\geqslant\varepsilon}\right) = E\left(\mathbb{1}_{X^2\geqslant\varepsilon^2}\right) \leqslant E\left(\frac{X^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$. □

Proposition 9.31 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *$X \in \mathfrak{M}_2$. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Proposition 9.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *$(X, Y) \in \mathfrak{M}_2$. Alors $XY \in \mathfrak{M}_1$ et :*

$$|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}.$$

VI Variables aléatoires indépendantes

VI.1 Couples de variables aléatoires indépendantes

Proposition 9.33. *$X : \Omega \to \mathcal{U}$ et $Y : \Omega \to \mathcal{V}$ deux variables aléatoires discrètes. S'équivalent :*

(i) *X et Y sont indépendantes.*

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{V}), \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B)$.

(iii) $\forall (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\mathbb{P}((X = u) \cap (Y = v)) = \mathbb{P}(X = u)\, \mathbb{P}(Y = v)$.

Vocabulaire 9.34. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. *On dit que X et Y sont* décorrélées *lorsque*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Proposition 9.35. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. *Si X et Y sont mutuellement indépendantes alors X et Y sont décorrélées.*

Proposition 9.36. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. *Si X et Y sont décorrélées, alors :*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

VI.2 n-uplets de variables aléatoires indépendantes

Proposition 9.37. *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ des ensembles. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires discrètes. S'équivalent :*

(i) *$X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

(ii) *$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$, les événements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.*

(iii) *$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, les événements $(X_1 = u_1), \ldots, (X_n = u_n)$ sont mutuellement indépendants.*

Proposition 9.38. *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ $2n$ ensembles. $X_1 : \Omega \to \mathcal{U}_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors :*

(i) *Pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.*

(ii) *Soit $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_t = n$, soit $Y_k = \left(X_{1+m_{k-1}}, \ldots, X_{m_k}\right)$ pour $k \in [\![1, t]\!]$. Alors $Y_1, \ldots, Y_t$ sont mutuellement indépendantes.*

(iii) *Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$. Alors $(f_1 \circ X_1), \ldots, (f_n \circ X_n)$ sont mutuellement indépendantes.*

VI.3 Variance et indépendance

Proposition 9.39. $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. *On suppose que* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes. Alors :*

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Proposition 9.40. $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. *On suppose que* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Corollaire 9.41. $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. *On suppose que* $X_1, \ldots, X_n$ *sont de même loi et mutuellement indépendantes. On note* $\mu = E(X_1)$, $V = V(X_1)$. *Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V}{n\varepsilon^2}.$$

VI.4 Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 9.42 (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ *une variable aléatoire. On dit que les* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* mutuellement indépendantes *lorsque, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $X_0, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes.*

Proposition 9.43. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $X_n : \Omega \to \mathcal{U}_n$ *une variable aléatoire. Alors les* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont mutuellement indépendantes* ssi, *pour tout* $F \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{N})$, *les* $(X_n)_{n\in F}$ *sont mutuellement indépendantes.*

VII Fonctions génératrices

VII.1 Généralités

Définition 9.44 (Fonction génératrice)**.** $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. On appelle* fonction génératrice *de* X *la fonction*

$$\mathcal{G}_X : t \in [0,1] \longmapsto E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbb{P}(X = n).$$

Proposition 9.45. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. Alors :*

(i) $\mathcal{G}_X$ *est croissante, convexe et continue sur* $[0,1]$.

(ii) $\mathcal{G}_X$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0,1[$.

(iii) *La loi de* X *est caractérisée par* $\mathcal{G}_X$ *:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{\mathcal{G}_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proposition 9.46. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. Alors* $X \in \mathfrak{M}_1$ ssi $\mathcal{G}_X$ *est dérivable en* 1*. Si tel est le cas :*

$$E(X) = \mathcal{G}_X'(1).$$

Proposition 9.47. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. Alors* $X \in \mathfrak{M}_2$ ssi $\mathcal{G}_X$ *est deux fois dérivable en* 1*. Si tel est le cas :*

$$V(X) = \mathcal{G}_X''(1) + \mathcal{G}_X'(1) - \mathcal{G}_X'(1)^2.$$

VII.2 Fonctions génératrices et indépendance

Proposition 9.48. $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ *deux variables aléatoires. Si* X *et* Y *sont mutuellement indépendantes, alors :*

$$\mathcal{G}_{X+Y} = \mathcal{G}_X \mathcal{G}_Y.$$

Corollaire 9.49. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{N}$ n *variables aléatoires. Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors :*

$$\mathcal{G}_{X_1+\cdots+X_n} = \mathcal{G}_{X_1} \cdots \mathcal{G}_{X_n}.$$

Exemple 9.50.

(i) $p \in [0,1]$. *Si* $X \hookrightarrow \mathrm{Be}(p)$*, alors :*

$$\forall t \in [0,1],\ \mathcal{G}_X(t) = (1-p) + pt.$$

(ii) $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$*, alors :*

$$\forall t \in [0,1],\ \mathcal{G}_X(t) = ((1-p)+pt)^n.$$

(iii) $p \in]0,1[$. *Si* $X \hookrightarrow G(p)$*, alors :*

$$\forall t \in [0,1],\ \mathcal{G}_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$*, alors :*

$$\forall t \in [0,1],\ \mathcal{G}_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

VII.3 Étude d'un exemple

Application 9.51. *$X, N : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec :*

(i) *$N, X_1, \dots, X_n, \dots$ sont mutuellement indépendantes.*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de X.*

On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

i.e. $\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. Alors :

(i) *$\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X$.*

(ii) *Si $X \in \mathfrak{M}_1$ et $N \in \mathfrak{M}_1$, alors $S \in \mathfrak{M}_1$ et :*

$$E(S) = E(N)E(X).$$

(iii) *Si $X \in \mathfrak{M}_2$ et $N \in \mathfrak{M}_2$, alors $S \in \mathfrak{M}_2$ et :*

$$V(S) = E(X)^2 V(N) + E(N)V(X).$$

Démonstration. (i) Montrer d'abord que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_1 + \dots + X_n = k\right) \mathbb{P}\left(N = n\right),$$

puis injecter cette expression dans la définition de $\mathcal{G}_S(t)$ et intervertir les sommes. (ii) et (iii) Utiliser (i). $\square$

Chapitre 10

Suites de Variables Aléatoires

Notation 10.1. *Dans tout le chapitre,* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé.*

I Lemme de Borel-Cantelli

Lemme 10.2 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. On note E l'événement : "parmi les* A_n*, une infinité sont réalisés". Autrement dit :*

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geqslant n} A_p.$$

On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *converge. Alors* $\mathbb{P}(E) = 0$*.*

Démonstration. D'après le corollaire 8.12, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geqslant n} A_p\right) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_p) = 0.$$

□

Proposition 10.3. $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. On note E l'événement : "parmi les* A_n*, une infinité sont réalisés". On suppose que les* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sont indépendants. On a alors :*

(i) *Si* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *converge, alors* $\mathbb{P}(E) = 0$*.*

(ii) *Si* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *diverge, alors* $\mathbb{P}(E) = 1$*.*

Démonstration. (i) Utiliser le lemme 10.2. (ii) Écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{p=n}^{N} A_p\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\lim_{N\to+\infty}\prod_{p=n}^{N}\left(1-\mathbb{P}\left(A_p\right)\right)\right)\\
&\geqslant \lim_{n\to+\infty}\left(1-\lim_{N\to+\infty}\prod_{p=n}^{N}\exp\left(-\mathbb{P}\left(A_p\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\lim_{N\to+\infty}\left[\exp\left(-\sum_{p=n}^{N}\mathbb{P}\left(A_p\right)\right)\right]\right) = 1.
\end{aligned}$$

□

II Convergence de suites de variables aléatoires

Lemme 10.4. *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\lambda\in\mathbb{R}$.*

(i) $\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right)$ *est un événement.*

(ii) $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{converge}\right)$ *est un événement.*

Démonstration. (i) Écrire :

$$\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant n_0}\left(|X_n-\lambda|\leqslant\frac{1}{\alpha}\right).$$

(ii) Utiliser le théorème 1.52 pour écrire :

$$\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{converge}\right) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant n_0}\bigcap_{q\geqslant n_0}\left(|X_p-X_q|\leqslant\frac{1}{\alpha}\right).$$

□

Définition 10.5 (Convergence en probabilité, convergence presque-sûre)**.** *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\lambda\in\mathbb{R}$.*

(i) *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge en probabilité *vers λ, et on note*

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \lambda,$$

lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}\left(|X_n-\lambda|\geqslant\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(ii) *On dit que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement *vers* λ, *et on note*

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \lambda,$$

lorsque :

$$\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right) = 1.$$

Proposition 10.6. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles discrètes. Alors :*

(i) $\left(E\left(X_n^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \Longrightarrow \left(E\left(|X_n|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$.

(ii) $\left(E\left(|X_n|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0\right)$.

(iii) $\left(\sum E\left(|X_n|\right)\ \textit{converge}\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0\right)$.

(iv) $\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0\right)$.

Démonstration. (i) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 9.32). (ii) Utiliser l'inégalité de Markov (proposition 9.23). (iii) En supposant que $\sum E\left(|X_n|\right)$ converge, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant n}\left(|X_k| \geqslant \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant n}\left(|X_k| \geqslant \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
&= 1 - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n}\left(|X_k| \geqslant \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(|X_k| \geqslant \frac{1}{\alpha}\right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\alpha E\left(|X_k|\right) = 1.
\end{aligned}$$

(iv) On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \left(|X_k| \geqslant \varepsilon\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geqslant n} \left(|X_k| \geqslant \varepsilon\right)\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geqslant n} \left(|X_k| \geqslant \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 10.7. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes t.q.* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1,1\})$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. *Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(S_n^2\right) = n$.

(ii) (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(|S_{2n+2}|\right) = E\left(|S_{2n+1}|\right)$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(|S_{2n+1}|\right) = E\left(|S_{2n}|\right) + \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right)$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

(iv) $E\left(|S_n|\right) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

III Loi des grands nombres

Théorème 10.8 (Loi faible des grands nombres)**.** $X \in \mathfrak{M}_2$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, X_n *suit la loi de* X. *Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} E(X).$$

Démonstration. Voir le corollaire 9.41. □

Lemme 10.9. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles discrètes. Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} E\left(|X_n|\right) < +\infty$, *alors :*

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0.$$

Théorème 10.10 (Loi forte des grands nombres)**.** *$X \in \mathfrak{M}_2$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de X. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} E(X).$$

Démonstration (Cas où $X \in \mathfrak{M}_4$)**.** On note $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Gamma = \left(Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X)\right)$. En utilisant la proposition 8.11 et le corollaire 8.12, montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{\Gamma}\right) &= \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n_0\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant n_0}\left(|Y_n| \geqslant \frac{1}{p}\right)\right)\right)\\
&\leqslant \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n_0\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}\mathbb{P}\left(|Y_n| \geqslant \frac{1}{p}\right)\right)\\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n_0\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}\mathbb{P}\left(Y_n^4 \geqslant \frac{1}{p^4}\right)\right)\\
&\leqslant \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n_0\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}p^4E\left(Y_n^4\right)\right).
\end{aligned}$$

Montrer alors que $p^4E\left(Y_n^4\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que la série $\sum p^4E\left(Y_n^4\right)$ converge, et donc que $\mathbb{P}\left(\overline{\Gamma}\right) = 0$. □

Démonstration (Cas où $X \in \mathfrak{M}_2$)**.** On se place dans le cas où $E(X) = 0$. On pose $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer d'abord que $\mathbb{P}\left(|\mu_{n^2}| \geqslant \varepsilon\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par le lemme 10.2, en déduire que $(|\mu_{n^2}| \geqslant \varepsilon)$ ne se produit presque-sûrement que pour un nombre fini de valeurs de n, donc $\mu_{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$. Poser alors

$$V_n = \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\left(\mu_k - \mu_{n^2}\right)^2.$$

Montrer que $E(V_n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire avec le lemme 10.9 que $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$. Écrire alors :

$$\mu_N = \mu_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2} + \left(\mu_N - \mu_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}\right).$$

Or $\mu_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{p.s.} 0$, et :

$$0 \leqslant \left(\mu_N - \mu_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}\right)^2 \leqslant V_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{p.s.} 0.$$

Donc $\mu_N \xrightarrow[N\to+\infty]{p.s.} 0$. □

IV Convergence en loi

Notation 10.11. *Dans cette section,* $((\Omega_n, \mathcal{T}_n, \mathbb{P}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'espaces probabilisés.*

Définition 10.12 (Convergence en loi)**.** $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $X_n : \Omega_n \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. S'équivalent :*

(i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = a)$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{P}(X_n \in A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X \in A)$.

On dit alors que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ en loi.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Clair (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbb{P}(X_n \in A)$. Alors $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ donc $\Lambda(u) \neq \varnothing$ (d'après le théorème 1.43). Soit donc $\lambda \in \Lambda(u)$, soit φ extraction t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. On a :

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A), \mathbb{P}(X \in B) &= \sum_{b\in B} \mathbb{P}(X \in b) = \sum_{b\in B} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_{\varphi_n} = b) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_{\varphi(n)} \in B\right) \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_{\varphi(n)} \in A\right) = \lambda.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sup_{B\in\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A)} \mathbb{P}(X \in B) \leqslant \lambda.$$

En raisonnant de même avec $\overline{A}$, on obtient $\mathbb{P}\left(X \in \overline{A}\right) \leqslant 1 - \lambda$. Il vient $\lambda = \mathbb{P}(X \in A)$. Donc $\mathbb{P}(X \in A)$ est la seule valeur d'adhérence de u, d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X \in A)$ (c.f. proposition 1.44). □

Proposition 10.13. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $X_n : \Omega_n \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire. S'équivalent :*

(i) $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ *en loi.*

(ii) $\forall t \in [0,1]$, $\mathcal{G}_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{G}_X(t)$.

Exemple 10.14. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. Pour* $n \in [\![\lceil\lambda\rceil, +\infty[\![$*, soit* $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$*. Soit* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$*. Alors* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ *en loi.*

Chapitre 11

Espaces Métriques et Espaces Normés

I Notion de distance

Définition 11.1 (Distance)**.** *E un ensemble. On dit que $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ est une* distance *lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Séparation *: $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$.*

(ii) Symétrie *: $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$.*

(iii) Inégalité triangulaire *: $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.*

Dans ce cas, on dit que (E, d) est un espace métrique.

Définition 11.2 (Isométrie)**.** *(E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On dit qu'une bijection $\varphi : E \to F$ est une* isométrie *lorsque :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \delta\left(\varphi(x), \varphi(y)\right).$$

Définition 11.3 (Espace induit)**.** *(E, d) un espace métrique, $X \subset E$. Alors $d_{|X^2}$ est une distance sur X, et l'espace métrique $\left(X, d_{|X^2}\right)$ est dit* espace induit *par (E, d) sur X.*

II Suites convergentes dans un espace métrique

Définition 11.4 (Convergence)**.** *(E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. On dit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ d\left(u_n, \ell\right) \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 11.5. *(E,d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$* ssi *$d(u_n,\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Proposition 11.6. *(E,d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $(\ell,\ell') \in E^2$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.*

Proposition 11.7 (Valeur d'adhérence)**.** *(E,d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle* valeur d'adhérence *de u tout $\lambda \in E$ tel qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.*

Exemple 11.8. *E un ensemble. On muni E de la distance*

$$d : \left| \begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & 1 - \mathbb{1}_{\{x\}}(y) \end{array} \right. .$$

$u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ssi *u stationne en ℓ.*

III Parties bornées d'un espace métrique

Définition 11.9 (Boules et sphères)**.** *(E,d) un espace métrique. $\omega \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit :*

(i) $\mathcal{B}_o(\omega,r) = \{x \in E,\ d(x,\omega) < r\}$ *(*boule ouverte*).*

(ii) $\mathcal{B}_f(\omega,r) = \{x \in E,\ d(x,\omega) \leqslant r\}$ *(*boule fermée*).*

(iii) $\mathcal{S}(\omega,r) = \{x \in E,\ d(x,\omega) = r\}$ *(*sphère*).*

Définition 11.10 (Partie bornée)**.** *(E,d) un espace métrique. $A \subset E$. S'équivalent :*

(i) $\exists \omega \in E,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}_f(\omega,r) \supset A$.

(ii) $\forall \omega \in E,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}_f(\omega,r) \supset A$.

On dit alors que A est bornée.

Proposition 11.11. *Toute réunion finie de parties bornées est bornée.*

Proposition 11.12. *(E,d) un espace métrique. $A \subset E$. Alors A est bornée* ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in A^2,\ d(x,y) \leqslant M.$$

Proposition 11.13. *(E,d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u converge, alors u est bornée (i.e. $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné).*

IV Définition d'un espace normé

Notation 11.14. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition 11.15 (Norme)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $\mathfrak{N} : E \to \mathbb{R}_+$ est une* $\mathbb{K}$-norme *lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Séparation *:* $\forall x \in E \backslash \{0\},\ \mathfrak{N}(x) > 0$.

(ii) Homogénéité *:* $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathfrak{N}(\lambda x) = |\lambda| \cdot \mathfrak{N}(x)$.

(iii) Inégalité triangulaire *:* $\forall (x, y) \in E^2,\ \mathfrak{N}(x + y) \leqslant \mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(y)$.

Dans ce cas, on dit que $(E, \mathfrak{N})$ est un espace normé.

Proposition 11.16. *$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors :*

$$\forall (u, v) \in E^2,\ |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|\,.$$

V Distance associée à une norme

Proposition 11.17. *$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors l'application*

$$d : \left|\begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array}\right.$$

est une distance sur E, donc E a une structure d'espace métrique.

Proposition 11.18. *$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors :*

(i) $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(ii) $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \implies \|u_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|\ell\|$.

Proposition 11.19. *$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On pose :*

$$\mathfrak{V} = \left\{u \in E^{\mathbb{N}},\ u \text{ converge}\right\}.$$

Alors :

(i) *$\mathfrak{V}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.*

(ii) *L'application $\mathfrak{L} : \left|\begin{array}{rcl} \mathfrak{V} & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array}\right.$ est linéaire.*

(iii) *L'ensemble $\operatorname{Ker} \mathfrak{L} = \left\{u \in E^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{V}$.*

Définition 11.20 (Série dans un espace normé)**.** *$(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la* série *$\sum u_n$ converge lorsque la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si tel est le cas, on pose :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

VI Comparaison de normes

Proposition 11.21. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ deux normes sur E. S'équivalent :*

(i) $\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \mathfrak{N}_2(x) \leqslant A\mathfrak{N}_1(x)$.

(ii) *Toute partie de E bornée pour $\mathfrak{N}_1$ est bornée pour $\mathfrak{N}_2$.*

(iii) *Pour tout $u \in E^{\mathbb{N}}$, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ au sens de $\mathfrak{N}_1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ au sens de $\mathfrak{N}_2$.*

On dit alors que $\mathfrak{N}_1$ est plus fine que $\mathfrak{N}_2$.

Vocabulaire 11.22 (Normes équivalentes)**.** *Deux normes sont dites* équivalentes *lorsque chacune est plus fine que l'autre.*

Proposition 11.23. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ deux normes sur E. S'équivalent :*

(i) *$\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont équivalentes.*

(ii) $\exists (A, B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall x \in E,\ A\mathfrak{N}_1(x) \leqslant \mathfrak{N}_2(x) \leqslant B\mathfrak{N}_1(x)$.

(iii) *L'ensemble des parties de E bornées pour $\mathfrak{N}_1$ est égal à l'ensemble des parties de E bornées pour $\mathfrak{N}_2$.*

(iv) *L'ensemble des suites de E convergeant vers 0 au sens de $\mathfrak{N}_1$ est égal à l'ensemble des suites de E convergeant vers 0 au sens de $\mathfrak{N}_2$.*

(v) *Pour $\ell \in E$, l'ensemble des suites de E convergeant vers ℓ au sens de $\mathfrak{N}_1$ est égal à l'ensemble des suites de E convergeant vers ℓ au sens de $\mathfrak{N}_2$.*

Exemple 11.24. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([-2, 2], \mathbb{R})$. On pose*

$$\psi : x \in [-2, 2] \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-2, -1] \\ x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}.$$

En utilisant le théorème de Weierstrass, il existe une suite $P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|P_n - \psi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On se place alors dans le sous-espace $\mathbb{R}[X]$, on définit *deux normes* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *par :*

$$\mathfrak{N}_1 : Q \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \sup_{[-2,-1]} |Q| \quad \textit{et} \quad \mathfrak{N}_2 : Q \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \sup_{[1,2]} |Q|.$$

Alors $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ *au sens de* $\mathfrak{N}_1$ *et* $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *au sens de* $\mathfrak{N}_2$*. Donc* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *ne sont pas équivalentes.*

Chapitre 12

Topologie d'un Espace Métrique

Notation 12.1. *Dans tout le chapitre, (E, d) est un espace métrique.*

I Ouverts

I.1 Généralités

Définition 12.2 (Ouvert)**.** *On appelle* ouvert *de (E, d) tout $\Omega \subset E$ tel que :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \Omega.$$

Proposition 12.3.

(i) *$\varnothing$ et E sont des ouverts.*

(ii) *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*

(iii) *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 12.4.

(i) *Une boule ouverte est un ouvert.*

(ii) *Le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.*

Proposition 12.5. *$\Omega \subset E$. Ω est un ouvert* ssi *Ω s'écrit comme réunion de boules ouvertes.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Pour $\omega \in \Omega$, choisir $r_\omega > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r_\omega) \subset \Omega$. Écrire alors :

$$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{B}_o(\omega, r_\omega).$$

□

I.2 Intérieur d'une partie

Définition 12.6 (Intérieur)**.** *$A \subset E$. On pose :*

$$\mathcal{U}(A) = \{\Omega \in \mathcal{P}(E),\ \Omega \subset A \text{ et } \Omega \text{ est un ouvert}\}.$$

Alors $\mathcal{U}(A)$ possède un plus grand élément (au sens de $\subset$), appelé intérieur de *A et noté $\mathring{A}$.*

Démonstration. Montrer que $\bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(A)} \Omega = \max \mathcal{U}(A)$. □

Proposition 12.7. *$A, B \subset E$. Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.*

Proposition 12.8. *$A \subset E$. Alors :*

$$\mathring{A} = \{\omega \in E,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}_o(\omega, r) \subset A\}.$$

Proposition 12.9. *$(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ un espace normé. $\omega \in \mathfrak{V}$, $r > 0$. Alors :*

$$\overbrace{\mathcal{B}_f(\omega, r)}^{\circ} = \mathcal{B}_o(\omega, r).$$

II Fermés

II.1 Généralités

Définition 12.10 (Fermé)**.** *$F \subset E$. On dit que F est un* fermé *lorsque $E \backslash F$ est un ouvert.*

Proposition 12.11.

(i) *$\varnothing$ et E sont des fermés.*

(ii) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

(iii) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Proposition 12.12.

(i) *Une boule fermée est un fermé.*

(ii) *Le complémentaire d'une boule ouverte est un fermé.*

Proposition 12.13. *$F \subset E$. Alors F est un fermé* ssi

$$\forall u \in F^{\mathbb{N}},\ \forall \ell \in E,\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \Longrightarrow \ell \in F.$$

Corollaire 12.14. *d_1, d_2 deux distances sur E. Si d_1 et d_2 sont équivalentes (i.e. d_1 et d_2 définissent la même notion de convergence), alors d_1 et d_2 définissent les mêmes fermés (et donc les mêmes ouverts).*

II.2 Adhérence d'une partie

Définition 12.15 (Adhérence). *$A \subset E$. On pose :*

$$\mathcal{F}(A) = \{F \in \mathcal{P}(E),\ F \supset A \text{ et } F \textit{ est un fermé}\}.$$

Alors $\mathcal{F}(A)$ possède un plus petit élément (au sens de $\subset$), appelé adhérence de *A et noté $\overline{A}$.*

Proposition 12.16. *$A \subset E$. Alors :*

$$E \backslash \overline{A} = \overbrace{(E \backslash A)}^{\circ}.$$

Proposition 12.17. *$A, B \subset E$. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Proposition 12.18. *$A \subset E$, $\omega \in E$. S'équivalent :*

(i) $\omega \in \overline{A}$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ d(a, \omega) < \varepsilon$.

(iii) $\exists u \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega$.

Proposition 12.19. *$(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ un espace normé. $\omega \in \mathfrak{V}$, $r > 0$. Alors :*

$$\overline{\mathcal{B}_o(\omega, r)} = \mathcal{B}_f(\omega, r).$$

III Densité et séparabilité

Définition 12.20 (Partie dense). *$A \subset E$. S'équivalent :*

(i) $\overline{A} = E$.

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ d(x, a) < \varepsilon$.

(iii) $\forall x \in E,\ \exists u \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

(iv) $\forall \Omega$ *ouvert non vide de E*, $\Omega \cap A \neq \varnothing$.

Si tel est le cas, on dit que A est dense *dans E.*

Définition 12.21 (Espace séparable). *On dit que l'espace métrique (E, d) est* séparable *lorsqu'il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Proposition 12.22. *$\mathbb{R}^d$ est séparable (car $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^d$).*

Proposition 12.23. *$(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (muni de $\|\cdot\|_\infty$) est séparable.*

Démonstration. On pose :

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in [a,b],\ f(x) = P(x) \right\},$$
$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \exists P \in \mathbb{Q}[X],\ \forall x \in [a,b],\ f(x) = P(x) \right\}.$$

$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}\right)$ d'après le théorème de Weierstrass. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, en déduire que $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}\right)$. Montrer de plus que $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable (car $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{Q}[X]$). □

IV Topologie induite

Vocabulaire 12.24 (Trace)**.** *$X, A \subset E$. On dit que $A \cap X$ est la* trace de A *sur X.*

Lemme 12.25. *$X \subset E$. $\omega \in X$, $r > 0$. On note $\delta = d_{|X^2}$. Alors :*

$$\mathcal{B}_o^{(X,\delta)}(\omega, r) = X \cap \mathcal{B}_o^{(E,d)}(\omega, r),$$

où $\mathcal{B}_o^{(X,\delta)}(\omega, r)$ (resp. $\mathcal{B}_o^{(E,d)}(\omega, r)$) est la boule ouverte de centre ω et de rayon r au sens de (X, δ) (resp. (E, d)).

Proposition 12.26. *$X \subset E$.*

(i) *Les ouverts de $\left(X, d_{|X^2}\right)$ sont les traces sur X des ouverts de (E, d).*

(ii) *Les fermés de $\left(X, d_{|X^2}\right)$ sont les traces sur X des fermés de (E, d).*

Proposition 12.27. *$X \subset E$.*

(i) *Si X est un ouvert, alors les ouverts de $\left(X, d_{|X^2}\right)$ sont les ouverts de (E, d) qui sont inclus dans X.*

(ii) *Si X est un fermé, alors les fermés de $\left(X, d_{|X^2}\right)$ sont les fermés de (E, d) qui sont inclus dans X.*

V Notion de voisinage

Définition 12.28 (Voisinage)**.** *$a \in E$, $V \subset E$. On dit que V est un* voisinage *de a lorsque :*

$$\exists r > 0,\ \mathcal{B}_o(a, r) \subset V.$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Proposition 12.29. *$a \in E$.*

(i) *Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(a)$.*

(ii) *Si $(V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{V}(a)^n$, alors $\bigcap_{k=1}^n V_k \in \mathcal{V}(a)$.*

Proposition 12.30.

(i) $\Omega \subset E$. *Alors Ω est ouvert* ssi $\forall \omega \in \Omega,\ \Omega \in \mathcal{V}(\omega)$.

(ii) $A \subset E$. *Alors* $\mathring{A} = \{\omega \in E,\ A \in \mathcal{V}(\omega)\}$.

(iii) $A \subset E$. *Alors* $\overline{A} = \{\omega \in E,\ \forall V \in \mathcal{V}(\omega),\ V \cap A \neq \varnothing\}$.

(iv) $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. *Alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in V.$$

Chapitre 13

Continuité

Notation 13.1. *Dans tout le chapitre, (E, d), (F, δ) et $(G, \mathfrak{d})$ sont des espaces métriques, et $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ est un espace normé.*

I Limite

Définition 13.2 (Limite)**.** *$f : A \subset E \to F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. On dit que ℓ est une limite de f en ω lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d(x, \omega) \leqslant \eta \Longrightarrow \delta\left(f(x), \ell\right) \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 13.3. *$f : A \subset E \to F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. S'équivalent :*

(i) *ℓ est une limite de f en ω.*

(ii) *$\forall u \in A^{\mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \Longrightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Proposition 13.4. *$f : A \subset E \to F$. $\omega \in \overline{A}$. Si f possède une limite ℓ en ω, alors celle-ci est unique. On note alors :*

$$\lim_{\omega} f = \ell.$$

Proposition 13.5. *$f : A \subset E \to F$. $\omega \in \overline{A}$. Si $\lim_\omega f$ existe, alors $\lim_\omega f \in \overline{f(A)}$.*

Proposition 13.6. *$f : A \subset E \to F$. $B \subset A$, $\omega \in \overline{B}$. Si $\lim_\omega f$ existe, alors $\lim_\omega f_{|B}$ existe et :*

$$\lim_{\omega} f = \lim_{\omega} f_{|B}\,.$$

Proposition 13.7. *$f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$, avec $f(A) \subset B$. $\omega \in \overline{A}$. On suppose que f admet une limite en ω, et on note $\ell = \lim_\omega f$. On suppose de plus que g admet une limite en ℓ (cela a un sens car $\ell \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$). Alors :*

$$\lim_{\omega} (g \circ f) = \lim_{\ell} g.$$

Proposition 13.8. *$f : A \subset E \to F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. Alors ℓ est limite de f en ω* ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists W \in \mathcal{V}(\omega),\ f(W \cap A) \subset V.$$

II Continuité en un point

Définition 13.9 (Continuité en un point)**.** *$f : E \to F$, $\omega \in E$. On dit que f est* continue *en ω lorsque $\lim_\omega f$ existe.*

Proposition 13.10. *$f : E \to F$, $\omega \in E$. S'équivalent :*

(i) *f est continue en ω.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, \omega) \leqslant \eta \Longrightarrow \delta\left(f(x), f(\omega)\right) \leqslant \varepsilon.$

(iii) $\forall u \in E^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega \Longrightarrow f\left(u_n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\omega).$

(iv) $\forall V \in \mathcal{V}\left(f(\omega)\right),\ \exists W \in \mathcal{V}(\omega),\ f(W) \subset V.$

(v) $\forall V \in \mathcal{V}\left(f(\omega)\right),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(\omega).$

Définition 13.11 (Frontière)**.** *$A \subset E$. On appelle* frontière *de A l'ensemble :*

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

Proposition 13.12. *$A \subset E$.*

(i) $\mathrm{Fr}(A) = \{\omega \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}_o(\omega, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } \mathcal{B}_o(\omega, \varepsilon) \cap (E \backslash A) \neq \varnothing\}.$

(ii) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \backslash A)}.$

(iii) $\mathrm{Fr}(E \backslash A) = \mathrm{Fr}(A).$

(iv) $\mathrm{Fr}(A)$ *est un fermé.*

Exemple 13.13. *$A \subset E$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{R}$ est $E \backslash \mathrm{Fr}(A)$.*

Proposition 13.14. *$f : E \to F$, $g : F \to G$. $\omega \in E$. Si f est continue en ω et g est continue en $f(\omega)$, alors $(g \circ f)$ est continue en ω.*

Proposition 13.15. *$f : E \to F$. $A \subset E$, $\omega \in A$. Si f est continue en ω, alors $f_{|A}$ est continue en ω.*

III Le miracle de la continuité

III.1 Caractérisation topologique de la continuité

Définition 13.16 (Continuité d'une fonction)**.** *$f : E \to F$ est dite* continue *si f est continue en tout point de E. On notera $\mathcal{C}^0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F.*

Théorème 13.17. *$f : E \to F$. S'équivalent :*

(i) *f est continue.*

(ii) *Pour tout V ouvert de (F, δ), $f^{-1}(V)$ est un ouvert de (E, d).*

(iii) *Pour tout Y fermé de (F, δ), $f^{-1}(Y)$ est un fermé de (E, d).*

III.2 Fonctions lipschitziennes et höldériennes

Définition 13.18 (Fonction lipschitzienne)**.** *$f : E \to F$. $\rho \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est* ρ-lipschitzienne *lorsque*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \delta\left(f(x), f(y)\right) \leqslant \rho \cdot d(x, y).$$

Définition 13.19 (Fonction contractante)**.** *$f : E \to F$. On dit que f est* contractante *lorsqu'il existe $\rho \in [0, 1[$ t.q. f est ρ-lipschitzienne.*

Proposition 13.20. *Toute fonction lipschitzienne est continue.*

Définition 13.21 (Fonction höldérienne)**.** *$f : E \to F$. $r \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est* r-höldérienne *lorsque*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, y) \in E^2,\ \delta\left(f(x), f(y)\right) \leqslant M\left(d(x, y)\right)^r.$$

Proposition 13.22. *Toute fonction höldérienne est continue.*

III.3 Distance à une partie

Définition 13.23 (Distance à une partie)**.** *$x \in E$. $A \subset E$, $A \neq \varnothing$. On définit :*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition 13.24. *$A \subset E$, $A \neq \varnothing$. La fonction $D_A : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x, A) \end{array} \right.$ est 1-lipschitzienne donc continue.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Écrire

$$\forall a \in A,\ D_A(x) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a).$$

En passant à l'inf, en déduire $D_A(x) \leqslant d(x, y) + D_A(y)$, i.e. $D_A(x) - D_A(y) \leqslant d(x, y)$. En permutant x et y, obtenir $-(D_A(x) - D_A(y)) \leqslant d(x, y)$, d'où $|D_A(x) - D_A(y)| \leqslant d(x, y)$. □

Vocabulaire 13.25. *$x \in E$. $A \subset E$, $A \neq \varnothing$. On dit que $d(x, A)$ est* réalisée *lorsqu'il existe $a \in A$ t.q. $d(x, a) = d(x, A)$.*

Proposition 13.26. *$A \subset E$, A non fermé. Alors il existe $x \in E$ t.q. $d(x, A)$ n'est pas réalisée.*

Proposition 13.27. *$\mathfrak{U}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{V}$. Alors* (i) *ou* (ii) *est vraie :*

(i) $\forall x \in \mathfrak{V} \backslash \mathfrak{U}$, $d(x, \mathfrak{U})$ *est réalisée.*

(ii) $\forall x \in \mathfrak{V} \backslash \mathfrak{U}$, $d(x, \mathfrak{U})$ *n'est pas réalisée.*

De plus, (i) *et* (ii) *sont effectifs.*

Proposition 13.28. *$A \subset E$, $A \neq \varnothing$. Pour $r > 0$, on pose :*

$$A(r) = \{x \in E,\ d(x, A) < r\}.$$

Alors :

$$A(r) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{B}_o(a, r).$$

Application 13.29. *$A, B \subset E$. On suppose que A et B sont fermés et que $A \cap B = \varnothing$. Alors il existe U et V ouverts t.q. $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.*

Démonstration. On définit : $U = \{x \in E,\ d(x, A) < d(x, B)\}$, puis $V = \{x \in E,\ d(x, B) < d(x, A)\}$. Vérifier que U et V conviennent. □

IV Qu'est-ce qu'une propriété topologique ?

Définition 13.30 (Topologie d'un espace)**.** *La* topologie *de l'espace métrique (E, d) est l'ensemble des ouverts de (E, d).*

Vocabulaire 13.31 (Propriété purement topologique)**.** *Une propriété $\mathcal{P}$ d'un espace métrique (E, d) est dite* purement topologique *si, pour toutes distances d_1 et d_2 définissant la même topologie sur E, (E, d_1) vérifie $\mathcal{P}$* ssi *(E, d_2) vérifie $\mathcal{P}$.*

Lemme 13.32. *$u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$* ssi *pour tout Ω ouvert de (E, d) contenant ℓ, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \Omega$.*

Exemple 13.33. *$A \subset E$, $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$, $f : E \to F$.*

(i) *La propriété "A est un ouvert de (E,d)" est purement topologique.*

(ii) *La propriété "A est un fermé de (E,d)" est purement topologique.*

(iii) *La propriété "$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$" est purement topologique.*

(iv) *La propriété "f est continue" est purement topologique.*

(v) *La propriété "A est une partie bornée de (E,d)" n'est pas purement topologique.*

Définition 13.34 (Homéomorphisme)**.** *On appelle* homéomorphisme *de (E,d) sur (F,δ) toute bijection $f : E \to F$ t.q. f est continue et f^{-1} est continue. On dit alors que E et F sont* homéomorphes, *et on note $E \sim F$.*

Proposition 13.35. *$\sim$ est une relation d'équivalence entre les espaces métriques.*

Proposition 13.36. *$f : E \to F$ un homéomorphisme. Alors :*

$$\forall u \in E^{\mathbb{N}},\ \forall \ell \in E,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Longleftrightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell).$$

Proposition 13.37. *$f : E \to F$ une bijection. S'équivalent :*

(i) *f est un homéomorphisme.*

(ii) *$\forall V \in \mathcal{P}(E), V$ est un ouvert de $(E,d) \Longleftrightarrow f(V)$ est un ouvert de (F,δ).*

(iii) *$\forall Y \in \mathcal{P}(E), Y$ est un fermé de $(E,d) \Longleftrightarrow f(Y)$ est un fermé de (F,δ).*

Exemple 13.38. *$\mathbb{U}$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit par l'absurde $A \subset \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{U} \to A$ un homéomorphisme. En notant $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi\left(e^{it}\right) \in \mathbb{R}$, montrer que f est continue et que $A = f([0,2\pi])$, et en déduire que A est un segment. Considérer alors l'application $g : z \in \mathbb{U} \longmapsto -z \in \mathbb{U}$: g n'admet aucun point fixe, et pourtant $\left(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}\right)$ est une fonction continue d'un segment sur lui-même donc admet un point fixe. En déduire une contradiction. □

Exemple 13.39. *Pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$, $\mathbb{U} \setminus \{z_0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.*

V Espace produit

Proposition 13.40. *d_1, d_2 deux distances sur un ensemble E. Pour $i \in [\![1,2]\!]$, on note $\mathcal{T}_i$ la topologie de (E,d_i) (i.e. l'ensemble des ouverts de (E,d_i)), et $\mathcal{C}_i = \left\{(u,\ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ au sens de } d_i\right\}$. Alors :*

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2.$$

Définition 13.41 (Distance compatible avec un produit)**.** $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ *s espaces métriques. Une distance d sur $E_1 \times \cdots \times E_s$ est dite $(d_1, \dots, d_s)$-*compatible *lorsque, pour toute suite $u \in (E_1 \times \cdots \times E_s)^{\mathbb{N}}$, et pour tout $\ell \in E_1 \times \cdots \times E_s$ on a :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ au sens de } d \iff \forall i \in [\![1, s]\!],\ u_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_i \text{ au sens de } d_i$$

Proposition 13.42. *$(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. Alors il existe des distances $(d_1, \dots, d_s)$-compatibles.*

Proposition 13.43. *$(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_s$ d'une distance $(d_1, \dots, d_s)$-compatible.*

(i) *Pour $i \in [\![1, s]\!]$, la fonction*

$$\pi_i : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E_i \\ x \longmapsto x_i \end{array} \right.$$

est continue.

(ii) *Pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $a \in E$, la fonction*

$$s_{i,a} : \left| \begin{array}{l} E_i \longrightarrow E \\ x_i \longmapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_s) \end{array} \right.$$

est continue.

Proposition 13.44. *(E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ d'une distance (d, d)-compatible. Alors l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est continue.*

Proposition 13.45. *$(X, \mathfrak{d})$ un espace métrique. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_s$ d'une distance $(d_1, \dots, d_s)$-compatible. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, soit $f_i : X \to E_i$, puis soit*

$$f : \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_s(x)) \end{array} \right. .$$

Alors f est continue ssi *pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, f_i est continue.*

Définition 13.46 (Fonction séparément continue)**.** *$(X, \mathfrak{d})$ un espace métrique. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_s$ d'une distance $(d_1, \dots, d_s)$-compatible. On considère $f : E \to X$. Pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $a \in E$, on définit :*

$$f_{i,a} = f \circ s_{i,a},$$

où $s_{i,a}$ est définie dans la proposition 13.43. On dit que f est séparément continue *lorsque pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ et pour tout $a \in E$, $f_{i,a}$ est continue.*

Proposition 13.47. *Toute fonction continue est séparément continue.*

Proposition 13.48. *Il existe des fonctions séparément continues mais pas continues.*

Démonstration. Montrer que la fonction suivante est séparément continue mais pas continue :

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

□

VI Génie fonctionnel

Notation 13.49. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Proposition 13.50. *Les fonctions* $\|\cdot\| : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}_+$, $+ : \mathfrak{V}^2 \to \mathfrak{V}$ *et* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ *sont continues.*

Corollaire 13.51. *La fonction* $\times : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ *est continue.*

Proposition 13.52.

(i) $\mathcal{C}^0(E, \mathfrak{V})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{V}^E$*.*

(ii) $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{K}^E$ *(i.e. c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^E$ *stable par* $\times$ *et contenant* 1*).*

Proposition 13.53. *On note* $\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions polynomiales de* $\mathbb{K}^n$ *dans* $\mathbb{K}$ *(autrement dit,* $\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ *est le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{(\mathbb{K}^n)}$ *engendré par les* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$*, où* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$*). Alors :*

$$\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}).$$

Remarque 13.54. *Les résultats précédents peuvent être écrits en utilisant la continuité en un point.*

VII Continuité dans un espace induit

Proposition 13.55. $f : E \to F$*,* $X \subset E$*. Si* f *est continue en tout point de* X*, alors* $f_{|X}$ *est continue.*

Vocabulaire 13.56 (Recouvrement ouvert)**.** *On appelle* recouvrement ouvert *de* (E,d) *toute famille* $(\Omega_i)_{i\in I}$ *d'ouverts de* (E,d) *t.q.*

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E.$$

Proposition 13.57. $(\Omega_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de* (E,d). $f : E \to F$. *S'équivalent :*

(i) f *est continue.*

(ii) $\forall i \in I,\ f_{|\Omega_i}$ *est continue.*

Proposition 13.58. $(F_1,\dots,F_p)$ *un p-uplet de fermés de* (E,d) *t.q.* $E = F_1 \cup \dots \cup F_p$. $f : E \to F$. *S'équivalent :*

(i) f *est continue.*

(ii) $\forall i \in [\![1,p]\!],\ f_{|F_i}$ *est continue.*

VIII Prolongements en tous genres

Proposition 13.59. $f : A \subset E \to F$, $\omega \in \overline{A}\backslash A$. *S'équivalent :*

(i) $\lim_\omega f$ *existe.*

(ii) *Il existe une unique fonction* $\widetilde{f} : A \cup \{\omega\} \to F$ *t.q.* $\widetilde{f}_{|A} = f$ *et* $\widetilde{f}$ *est continue en* ω.

On dit alors que $\widetilde{f}$ *est le* prolongement par continuité *de* f *en* ω.

Proposition 13.60. $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^0(E,F)\right)^2$. $A \subset E$. *Alors :*

$$(\forall x \in A,\ f(x) = g(x)) \Longrightarrow \left(\forall x \in \overline{A},\ f(x) = g(x)\right).$$

Chapitre 14

Compacité

Notation 14.1. *Dans tout le chapitre, (E, d) et (F, δ) sont des espaces métriques, et $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ est un espace normé.*

I Valeurs d'adhérence

Proposition 14.2 (Valeur d'adhérence)**.** $u \in E^{\mathbb{N}}$. *On appelle* valeur d'adhérence *de u tout $\lambda \in E$ tel qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.*

Proposition 14.3. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\Lambda(u) = \{\ell\}$.*

Lemme 14.4. $u \in E^{\mathbb{N}}$.

$$\Lambda(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_{n+p},\ p \in \mathbb{N}\}}.$$

Proposition 14.5. $u \in E^{\mathbb{N}}$. *Alors $\Lambda(u)$ est un fermé.*

Lemme 14.6. *Si Y est un fermé non vide et majoré de $\mathbb{R}$, alors* $\sup Y \in Y$.

Proposition 14.7. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Si u est bornée, alors $\Lambda(u)$ est non vide, fermé et borné. Donc $\Lambda(u)$ possède un plus petit élément et un plus grand élément, que l'on note respectivement $\underline{\lim}\, u$ et $\overline{\lim}\, u$.*

II Compacité

Définition 14.8 (Espace métrique compact)**.** *On dit que l'espace métrique* (E,d) *est* compact *lorsque :*

$$\forall u \in E^{\mathbb{N}},\ \Lambda(u) \neq \varnothing.$$

Exemple 14.9. *Tout espace métrique fini est compact.*

Proposition 14.10. *La compacité est une propriété purement topologique. Supposons en effet que* (E,d) *et* (F,δ) *sont homéomorphes. Alors* (E,d) *est compact* ssi (F,δ) *est compact.*

Définition 14.11 (Partie compacte d'un espace métrique)**.** $X \subset E$*. On dit que* X *est une* partie compacte *de* (E,d) *lorsque l'espace métrique* $\left(X, d_{|X^2}\right)$ *est compact.*

Proposition 14.12. $X \subset E$*. S'équivalent :*

(i) X *est une partie compacte de* E*.*

(ii) $\forall u \in X^{\mathbb{N}},\ \Lambda(u) \cap X \neq \varnothing$*.*

Proposition 14.13. $\varnothing$ *est compact.*

Proposition 14.14. *Toute réunion finie de parties compactes est compacte.*

Proposition 14.15. *Tout produit fini d'espaces compacts est compact.*

Exemple 14.16. $u \in E^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in E$*. Soit* $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$*. Alors* K *est une partie compacte de* E*.*

III Compacts et fermés bornés

Proposition 14.17. *Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée et bornée.*

Théorème 14.18. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On munit* $\mathbb{K}^n$ *de* $\|\cdot\|_\infty$*. Alors les compacts de* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *sont les fermés bornés de* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$*.*

Proposition 14.19. *On suppose que* (E,d) *est un espace métrique compact. Alors les parties compactes de* (E,d) *sont les fermés de* (E,d)*.*

IV Image continue d'un compact

Théorème 14.20. *On suppose que (E, d) est compact. Si $f : E \to F$ est continue, alors $f(E)$ est une partie compacte de (F, δ).*

Corollaire 14.21. *K une partie compacte de (E, d) (qui est un espace métrique quelconque). Si $f : E \to F$ est continue, alors $f(K)$ est une partie compacte de (F, δ).*

Théorème 14.22. *K une partie compacte non vide de (E, d). On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f_{|K}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Définition 14.23 (Diamètre)**.** *$X \subset E$, $X \neq \varnothing$. On définit :*

$$\operatorname{diam} X = \sup_{(a,b) \in X^2} d(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 14.24. *$X \subset E$, $X \neq \varnothing$. Alors :*

(i) *X est borné* ssi $\operatorname{diam} X < +\infty$.

(ii) *Si X est compact, alors* $\operatorname{diam} X$ *est atteint.*

Proposition 14.25. *K une partie compacte non vide de (E, d). Alors :*

$$\forall x \in E,\ \exists k \in K,\ d(x, k) = d(x, K).$$

Proposition 14.26. *$K_1, \ldots, K_s$ des parties compactes de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$. Alors $K_1 + \cdots + K_s$ est une partie compacte de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. Considérer $\varphi : (x_1, \ldots, x_s) \in K_1 \times \cdots \times K_s \longmapsto x_1 + \cdots + x_s$. $K_1 \times \cdots \times K_s$ est compact (comme produit de compacts) et φ est continue, donc $K_1 + \cdots + K_s = \varphi\left(K_1 \times \cdots \times K_s\right)$ est compact. □

V Théorème de Heine

Définition 14.27 (Uniforme continuité)**.** *Une fonction $f : E \to F$ est dite* uniformément continue *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \leqslant \eta \Longrightarrow \delta\left(f(x), f(y)\right) \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 14.28. *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Théorème 14.29 (Théorème de Heine)**.** *On suppose que (E, d) est compact. Soit $f : E \to F$. Alors f est continue* ssi *f est uniformément continue.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Voir proposition 14.28. ($\Rightarrow$) Par contraposée : on suppose que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \eta > 0$, $\exists (x,y) \in E^2$, $d(x,y) \leqslant \eta$ et $\delta(f(x), f(y)) > \varepsilon_0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(x_n, y_n) \in E^2$ t.q.

$$d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon_0.$$

E étant supposé compact, il existe φ extractrice et $\lambda \in E$ t.q. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Montrer alors $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Si f était continue, on aurait $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\lambda)$ et $f\left(y_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\lambda)$, donc $\delta\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) > \varepsilon_0$. $\square$

Application 14.30. $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. $\varepsilon > 0$.

(i) *Il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escaliers t.q. $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

(ii) *Il existe $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux et $\mathcal{C}^0$ t.q. $\|f - \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

VI Suites admettant une unique valeur d'adhérence

Théorème 14.31. *On suppose que (E,d) est compact. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u possède une unique valeur d'adhérence, alors u converge.*

Démonstration. On écrit $\Lambda(u) = \{\lambda\}$. Supposer par l'absurde que u ne converge pas vers λ. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $A = \{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \lambda) > \varepsilon_0\}$ est infini. Soit alors $\varphi : \mathbb{N} \to A$ une extraction. Extraire de $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une sous-suite convergente et en déduire une contradiction. $\square$

Proposition 14.32. *K une partie compacte non vide de (E,d). On suppose que :*

$$\forall \omega \in E,\ \exists! k \in K,\ d(\omega, k) = d(\omega, K).$$

On définit alors $\pi : E \to K$ par :

$$\forall \omega \in E,\ d(\omega, \pi(\omega)) = d(\omega, K).$$

Alors π est continue.

Démonstration. Soit $\omega \in E$. Montrons que π est continue en ω. Soit donc $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$. Soit alors $\lambda \in \Lambda(\pi(u))$ et φ une extractrice associée. Montrons que $\lambda = \pi(\omega)$. On a :

$$\begin{aligned} &\left(u_{\varphi(n)}, \pi\left(u_{\varphi(n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\omega, \lambda) \\ &\qquad\qquad \text{donc} \quad d\left(u_{\varphi(n)}, K\right) = d\left(u_{\varphi(n)}, \pi\left(u_{\varphi(n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(\omega, \lambda). \end{aligned}$$

Or par continuité de $x \longmapsto d(x,K)$, on a :

$$d\left(u_{\varphi(n)}, K\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(\omega, K).$$

Donc $d(\omega,\lambda) = d(\omega,K)$, donc $\lambda = \pi(\omega)$. Ainsi $\varnothing \subsetneq \Lambda(\pi(u)) \subset \{\pi(\omega)\}$, donc $\Lambda(\pi(u)) = \{\pi(\omega)\}$, donc par le théorème 14.31, $\pi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi(\omega)$ et π est continue en ω. $\square$

Exemple 14.33. $(\mathfrak{V}, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ *un espace euclidien. K une partie convexe compacte non vide de $\mathfrak{V}$. Alors :*

$$\forall \omega \in \mathfrak{V},\ \exists! k \in K,\ d(\omega,k) = d(\omega,K).$$

VII Compacts, bijections continues et homéomorphismes

Théorème 14.34. *On suppose que (E,d) est compact. Si $f : E \to F$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. Pour cela, soit Y un fermé de (E,d). Montrons que $\left(f^{-1}\right)^{-1}(Y)$ est un fermé de (F,δ). Comme E est compact, Y est compact (d'après la proposition 14.19). Donc $\left(f^{-1}\right)^{-1}(Y) = f(Y)$ est compact (d'après le corollaire 14.21), donc fermé. $\square$

VIII Intersections décroissantes de fermés

Théorème 14.35. *On suppose que (E,d) est compact. Soit $\Gamma \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ t.q.*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, Γ_n *est fermé.*

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n \neq \varnothing$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$.

Alors :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \neq \varnothing.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n \in \Gamma_n$. Montrer que $\varnothing \subsetneq \Lambda(u) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. $\square$

IX Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 14.36 (Propriété de Borel-Lebesgue)**.** *On dit que l'espace métrique (E, d) vérifie la* propriété de Borel-Lebesgue *lorsque, pour tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i \in I}$ de (E, d), il existe $J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I)$ tel que :*

$$E = \bigcup_{j \in J} \Omega_j.$$

En d'autres termes, (E, d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement ouvert de (E, d) on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Lemme 14.37. *On suppose que (E, d) est compact. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists \left(\omega_1, \ldots, \omega_n\right) \in E^n,\ E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_o\left(\omega_i, \varepsilon\right).$$

Démonstration. Raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \left(\omega_1, \ldots, \omega_n\right) \in E^n,\ E \supsetneq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_o\left(\omega_i, \varepsilon\right)$. Construire alors $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m \neq n \Longrightarrow d\left(u_m, u_n\right) \geqslant \varepsilon.$$

Extraire de u une sous-suite convergente et aboutir à une contradiction. □

Corollaire 14.38. *Si (E, d) est compact, alors (E, d) est séparable.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, poser $\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_{s_n}^{(n)}\right) \in E^{s_n}$ t.q.

$$E = \bigcup_{k=1}^{s_n} \mathcal{B}_o\left(x_k^{(n)}, \frac{1}{n}\right).$$

Poser ensuite :

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{x_k^{(n)},\ k \in [\![1, s_n]\!]\right\}.$$

D est clairement dénombrable ; montrer que $\overline{D} = E$. □

Lemme 14.39. *On suppose que (E, d) est compact. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (E, d). Alors :*

$$\exists \rho > 0,\ \forall x \in K,\ \exists i \in I,\ \mathcal{B}_o\left(x, \rho\right) \subset \Omega_i.$$

Démonstration. Raisonner par l'absurde et construire $x \in E^{(\mathbb{N}^*)}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in I,\ \mathcal{B}_o\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \Omega_i.$$

Extraire de x une sous-suite convergente et aboutir à une contradiction. □

Théorème 14.40. *S'équivalent :*

(i) (E, d) *est compact.*

(ii) (E, d) *vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Lemmes 14.37 et 14.39. (ii) $\Rightarrow$ (i) Pour $u \in E^{\mathbb{N}}$, écrire $\Lambda(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$, avec $V_n = \{u_{n+p},\, p \in \mathbb{N}\}$. Si $\Lambda(u) = \varnothing$, alors $\left(E \backslash \overline{V_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert, donc $\exists J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{N})$, $\bigcap_{j \in J} \overline{V}_j = \varnothing$. En déduire que $\exists n \in \mathbb{N}$, $V_n = \varnothing$ (en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \supset V_{n+1}$). Absurde. $\square$

Corollaire 14.41. *On suppose que* (E, d) *est compact. Si* $(\Gamma_i)_{i \in I}$ *est une famille de fermés de* (E, d) *t.q.* $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i = \varnothing$, *alors il existe* $J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I)$ *t.q.*

$$\bigcap_{j \in J} \Gamma_j = \varnothing.$$

Chapitre 15

Topologie d'un Espace Normé

Notation 15.1. *Dans tout le chapitre,* $(E, \|\cdot\|_E)$*,* $(F, \|\cdot\|_F)$ *et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés, avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

I Applications linéaires continues

I.1 Généralités

Notation 15.2. *On notera :*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F).$$

Proposition 15.3. $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E, F)$*.*

Proposition 15.4. $f \in \mathcal{L}(E, F)$*. S'équivalent :*

(i) f *est continue.*

(ii) f *est continue en* 0*.*

(iii) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant A \|x\|_E$.

(iv) *Il existe* $\mathcal{U}$ *ouvert non vide de* E *tel que* $f(\mathcal{U})$ *est borné.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Si f est continue en 0, alors il existe $\eta > 0$ t.q. $\forall x \in E, \|x\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant 1$. En déduire que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant \frac{1}{\eta} \|x\|_E$. (iii) $\Rightarrow$ (i) f est A-lipschitzienne donc continue. (iii) $\Rightarrow$ (iv) Clair. (iv) $\Rightarrow$ (iii) Par contraposée : on suppose $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in E, \|f(x)\|_F > A \|x\|_E$. Soit alors $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de E. Soit $\omega \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, 2r) \subset \mathcal{U}$. Pour $M \in \mathbb{R}_+$, soit $A = \frac{M + \|f(\omega)\|_F}{r}$, soit $u \in E$ t.q. $\|f(u)\|_F > A \|u\|_E$. Montrer alors que $\|f(x)\|_F \geqslant M$, avec $x = \omega + r \frac{u}{\|u\|_E} \in \mathcal{U}$. Donc $f(\mathcal{U})$ n'est pas borné. $\square$

I.2 Norme d'opérateur

Définition 15.5 ($|||\cdot|||$)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$, on pose :*

$$|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Lemme 15.6.

$$\forall f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F),\ |||f||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F\,.$$

Proposition 15.7. $|||\cdot|||$ *est une norme sur $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$, dite* norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Proposition 15.8. *$f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant |||f||| \cdot \|x\|_E\,.$$

Lemme 15.9. *$f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant A\,\|x\|_E$. Alors $|||f||| \leqslant A$.*

Proposition 15.10. *$f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(F,G)$. Alors $(g \circ f) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,G)$ et :*

$$|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \cdot |||f|||\,.$$

I.3 Exemples

Exemple 15.11. *On pose $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum u_n \text{ converge absolument}\right\}$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ u \text{ est bornée}\right\}$. On munit $\ell^1(\mathbb{N})$ de $\|\cdot\|_1$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on pose :*

$$\varphi_a : u \in \ell^1(\mathbb{N}) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \in \mathbb{C}.$$

Alors l'application $a \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \longmapsto \varphi_a \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\left(\ell^1(\mathbb{N}), \mathbb{C}\right)$ est linéaire, bijective et continue et $\forall a \in \ell^\infty(\mathbb{N}),\ \|a\|_\infty = |||\varphi_a|||$.

Exemple 15.12. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_1$. Pour $g \in E$, on pose :*

$$\psi_g : f \in E \longmapsto \int_0^1 fg \in \mathbb{R}.$$

Alors l'application $g \in E \longmapsto \psi_g \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, \mathbb{R})$ est linéaire, injective et continue (avec E muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,\mathbb{R})$ muni de la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|$) et $\forall g \in E,\ \|g\|_\infty = |||\psi_g|||$.

II Comparaison de normes

Notation 15.13. $\mathfrak{N}$ *une norme sur* E*. On notera :*

(i) $\mathfrak{B}(E,\mathfrak{N}) = \{X \subset E,\ X \text{ est bornée au sens de } (E,\mathfrak{N})\}$.

(ii) $\mathfrak{CV}_0(E,\mathfrak{N}) = \left\{u \in E^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ au sens de } (E,\mathfrak{N})\right\}$.

(iii) $\mathfrak{CV}(E,\mathfrak{N}) = \left\{(u,\ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ au sens de } (E,\mathfrak{N})\right\}$.

(iv) $\mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}) = \{\Omega \subset E,\ \Omega \text{ est un ouvert de } (E,\mathfrak{N})\}$.

Proposition 15.14. $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *deux normes sur* E*. S'équivalent :*

(i) $\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \mathfrak{N}_2(x) \leqslant A\mathfrak{N}_1(x)$.

(ii) $\mathfrak{B}(E,\mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{B}(E,\mathfrak{N}_2)$.

(iii) $\mathfrak{CV}_0(E,\mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{CV}_0(E,\mathfrak{N}_2)$.

(iv) $\mathfrak{CV}(E,\mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{CV}(E,\mathfrak{N}_2)$.

(v) $\mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_2) \subset \mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_1)$.

On dit alors que $\mathfrak{N}_1$ *est plus fine que* $\mathfrak{N}_2$*.*

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (v) Raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_2) \subset \mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_1) &\iff id_E : (E,\mathfrak{N}_1) \to (E,\mathfrak{N}_2) \text{ est continue} \\ &\iff \exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \mathfrak{N}_2(x) \leqslant A\mathfrak{N}_1(x).\end{aligned}$$

□

Exemple 15.15. *On se place dans* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$*. Alors* $\|\cdot\|_\infty$ *est plus fine que* $\|\cdot\|_2$*, qui est plus fine que* $\|\cdot\|_1$*.*

Vocabulaire 15.16 (Normes équivalentes)**.** *Deux normes* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *sur* E *sont dites* équivalentes *lorsque chacune est plus fine que l'autre. On note alors* $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$*.*

Proposition 15.17. E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *deux normes sur* E*. S'équivalent :*

(i) $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$.

(ii) $\exists (A,B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall x \in E,\ A\mathfrak{N}_1(x) \leqslant \mathfrak{N}_2(x) \leqslant B\mathfrak{N}_1(x)$.

(iii) $\mathfrak{B}(E,\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{B}(E,\mathfrak{N}_2)$.

(iv) $\mathfrak{CV}_0(E,\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{CV}_0(E,\mathfrak{N}_2)$.

(v) $\mathfrak{CV}(E,\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{CV}(E,\mathfrak{N}_2)$.

(vi) $\mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_2) = \mathfrak{T}(E,\mathfrak{N}_1)$.

III Équivalence des normes en dimension finie

III.1 Théorème d'équivalence des normes en dimension finie

Proposition 15.18. $\sim$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur* E.

Lemme 15.19. *Soit* $\mathfrak{N}$ *une norme sur* $\mathbb{K}^d$*, soit* $N_\infty : x \in \mathbb{K}^d \longmapsto \max_{1\leqslant i\leqslant d}|x_i|$. *Alors :*

$$\mathfrak{N} \sim N_\infty.$$

Démonstration. *Première étape.* N_∞ est plus fine que $\mathfrak{N}$. Soit en effet $(e_1,\dots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{K}^d,\ \mathfrak{N}(x) = \mathfrak{N}\left(\sum_{i=1}^d x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^d |x_i|\,\mathfrak{N}(e_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^d \mathfrak{N}(e_i)\right) N_\infty(x).$$

Deuxième étape. $\mathfrak{N}$ est plus fine que N_∞. Pour le montrer, on voudrait trouver un $B \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall x \in \mathbb{K}^d,\ N_\infty(x) \leqslant B\mathfrak{N}(x)$; il suffit en fait d'avoir $\forall x \in S,\ N_\infty(x) \leqslant B\mathfrak{N}(x)$, avec $S = \left\{x \in \mathbb{K}^d,\ N_\infty(x) = 1\right\}$. Or, en vertu du théorème 14.18, S est un compact de $\left(\mathbb{K}^d, N_\infty\right)$. Mais l'application $\mathfrak{N} : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}_+$ est continue au sens de $\left(\mathbb{K}^d, N_\infty\right)$ car elle est lipschitzienne d'après la première étape. Ainsi, $\mathfrak{N}_{|S}$ admet un minimum (d'après le théorème 14.22). Soit $x_0 \in S$ t.q. $\mathfrak{N}(x_0) = \min_{x\in S}\mathfrak{N}(x)$. On a $x_0 \neq 0$ (car $x_0 \in S$) donc $\mathfrak{N}(x_0) > 0$. On a alors $\forall x \in S,\ N_\infty(x) \leqslant \frac{1}{\mathfrak{N}(x_0)}\mathfrak{N}(x)$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{K}^d,\ N_\infty(x) \leqslant \frac{1}{\mathfrak{N}(x_0)}\mathfrak{N}(x).$$

Conclusion. $\mathfrak{N} \sim N_\infty$. ☐

Lemme 15.20. *Soit* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *deux normes sur* $\mathbb{K}^d$. *Alors :*

$$\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2.$$

Théorème 15.21 (Théorème d'équivalence des normes en dimension finie)**.** *On suppose que* E *est de dimension finie. Soit* $\mathfrak{N}_1$ *et* $\mathfrak{N}_2$ *deux normes sur* E. *Alors :*

$$\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2.$$

Démonstration. On note $d = \dim E$. Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Phi : \mathbb{K}^d \to E$. Alors $\mathfrak{N}_1 \circ \Phi$ et $\mathfrak{N}_2 \circ \Phi$ sont des normes sur $\mathbb{K}^d$, donc selon le lemme 15.20, $\mathfrak{N}_1 \circ \Phi \sim \mathfrak{N}_2 \circ \Phi$. Donc il existe $(A, B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ t.q.

$$\forall y \in \mathbb{K}^d,\ A\left(\mathfrak{N}_1 \circ \Phi\right)(y) \leqslant \left(\mathfrak{N}_2 \circ \Phi\right)(y) \leqslant B\left(\mathfrak{N}_1 \circ \Phi\right)(y).$$

Par bijectivité de Φ : $\forall x \in E,\ A\mathfrak{N}_1(x) \leqslant \mathfrak{N}_2(x) \leqslant B\mathfrak{N}_1(x)$. ☐

Remarque 15.22. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut ne pas préciser la norme utilisée, car toutes les normes sont équivalentes.*

III.2 Applications générales

Théorème 15.23. $(E, \mathfrak{N}_E)$ *et* $(F, \mathfrak{N}_F)$ *deux espaces normés. On suppose que* E *est de dimension finie. Alors :*

$$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose :

$$\nu : x \in E \longmapsto \mathfrak{N}_E(x) + \mathfrak{N}_F(f(x)).$$

Alors ν est une norme sur E, qui est de dimension finie, donc d'après le théorème 15.21, $\nu \sim \mathfrak{N}_E$. En particulier, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ (et on peut supposer $A > 1$) t.q. $\forall x \in E,\ \nu(x) \leqslant A\mathfrak{N}_E(x)$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \mathfrak{N}_F(f(x)) \leqslant (A-1)\mathfrak{N}_E(x).$$

Donc $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$. □

Corollaire 15.24. $(E, \mathfrak{N}_E)$ *et* $(F, \mathfrak{N}_F)$ *deux espaces normés de dimension finie. Si* $\varphi : E \to F$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors* φ *est un homéomorphisme.*

Théorème 15.25. $(E, \mathfrak{N})$ *un espace normé de dimension finie. Alors les compacts de* $(E, \mathfrak{N})$ *sont les fermés bornés de* $(E, \mathfrak{N})$*.*

Démonstration. Se transporter dans $\left(\mathbb{K}^d, \mathfrak{N} \circ \Phi\right)$, où $d = \dim E$, et $\Phi : \mathbb{K}^d \to E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Utiliser alors le théorème 14.18 et le théorème 15.21. □

Corollaire 15.26. $(E, \mathfrak{N})$ *un espace normé de dimension finie. Alors toute suite bornée à valeurs dans* E *admet une valeur d'adhérence au sens de* $(E, \mathfrak{N})$*.*

III.3 Espaces complets

Définition 15.27 (Suite de Cauchy)**.** (E, d) *un espace métrique.* $u \in E^{\mathbb{N}}$*. On dit que* u *est* de Cauchy *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 15.28. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 15.29 (Espace complet)**.** *On dit qu'un espace métrique* (E, d) *est* complet *lorsque toute suite de Cauchy de* (E, d) *converge au sens de* (E, d)*.*

Vocabulaire 15.30 (Espace de Banach)**.** *Un espace normé complet est dit* de Banach*.*

Théorème 15.31. *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

Démonstration. Soit $(E, \mathfrak{N})$ un espace normé de dimension finie, soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que u est de Cauchy. Montrer d'abord que u est bornée. Il existe donc $R > 0$ t.q. $u \in K^{\mathbb{N}}$, où $K = \mathcal{B}_f(0, R)$. Or, d'après le théorème 15.25, K est compact. Donc $\Lambda(u) \neq \varnothing$. Montrer que $\Lambda(u)$ est un singleton et en déduire avec le théorème 14.31 que u converge. □

III.4 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 15.32. $(E, \mathfrak{N})$ *un espace normé. F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F est un fermé de $(E, \mathfrak{N})$.*

Démonstration. Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in E$. On se place dans $\left(F, \mathfrak{N}_{|F}\right)$. Alors u est bornée, donc d'après le corollaire 15.26, il existe φ extraction et $\omega \in F$ t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$ au sens de $\left(F, \mathfrak{N}_{|F}\right)$, donc au sens de $(E, \mathfrak{N})$. Or $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, donc $\ell = \omega \in F$. □

Proposition 15.33. $(E, \mathfrak{N})$ *un espace normé. F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors pour tout $a \in E$, la distance $d(a, F)$ est réalisée.*

Démonstration. Soit $a \in E$. Poser $x \in F^{(\mathbb{N}^*)}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(a, F) \leqslant \mathfrak{N}\left(a - x_n\right) \leqslant d(a, F) + \frac{1}{n}$. Montrer que x est bornée, et en déduire avec le corollaire 15.26 qu'il existe φ extraction et $\omega \in F$ t.q. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$. Montrer alors que $\mathfrak{N}\left(a - \omega\right) = d(a, F)$. □

IV Représentations analytiques

Proposition 15.34. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right)$ la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$. Alors en identifiant $\mathbb{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right)$ à $\mathbb{K}^n$, l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ est un homéomorphisme.*

Définition 15.35 (Représentation analytique)**.** *E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. $f : \Omega \subset E \to F$. On note $\widetilde{\Omega} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}\left(\Omega\right) \subset \mathbb{K}^p$. On appelle* représentation analytique *de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la fonction*

$$\widetilde{f} : x \in \widetilde{\Omega} \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}\left(f\left(\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}\right)^{-1}(x)\right)\right) \in \mathbb{K}^n.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\quad f \quad} & F \\ {\scriptstyle \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}} \\ \widetilde{\Omega} & \xrightarrow[\quad \widetilde{f} \quad]{} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Définition 15.36 (Fonction polynomiale $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$)**.** *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est* polynomiale *lorsque chacune de ses coordonnées est polynomiale.*

Définition 15.37 (Fonction polynomiale $E \to F$)**.** *E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. $f : \Omega \subset E \to F$. S'équivalent :*

(i) *f possède une représentation analytique polynomiale.*

(ii) *Toutes les représentations analytiques de f sont polynomiales.*

Si tel est le cas, on dit que f est polynomiale.

Proposition 15.38. *E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Toute fonction polynomiale $f : \Omega \subset E \to F$ est continue.*

Corollaire 15.39. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors la fonction* $\det : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ *est polynomiale donc continue.*

Corollaire 15.40. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ (au sens de l'unique topologie d'espace normé de $\mathcal{L}(E)$).*

Définition 15.41 (Variété algébrique)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $V \subset E$. On dit que V est une* variété algébrique *de E lorsqu'il existe $P : E \to \mathbb{K}^n$ polynomiale t.q.*

$$V = P^{-1}(\{0\}).$$

V Exemples

Exemple 15.42. *On se place dans $\mathbb{R}[X]$. On pose, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\mathfrak{N}_r : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \sup_{|x| \leqslant r} |P(x)|.$$

Alors $(\mathfrak{N}_r)_{r \in \mathbb{R}_+^*}$ est une famille non dénombrable de normes deux à deux non équivalentes.

Démonstration. On fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $\delta_a : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P(a) \in \mathbb{R}$. Montrer que δ_a est continue au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_r)$ ssi $|a| \leqslant r$. Ainsi, si $0 < r < r'$, $\delta_{r'}$ est continue au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_{r'})$ mais pas au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_r)$. Donc $\mathfrak{N}_r \not\sim \mathfrak{N}_{r'}$. $\square$

Exemple 15.43. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ *t.q.*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-1) = 1$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Alors $\deg P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. On suppose par l'absurde que $\deg P_n$ ne tend pas vers $+\infty$. Alors il existe φ extraction t.q. $\left(\deg P_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $d \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = P_{\varphi(n)}$. Alors $Q \in \mathbb{R}_d[X]^{\mathbb{N}}$. On munit $\mathbb{R}_d[X]$ de la norme

$$\mathfrak{N} : H \in \mathbb{R}_d[X] \longmapsto \sup_{[0,1]} |H| .$$

On a alors $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or l'application $\delta : P \in \mathbb{R}_d[X] \longmapsto P(-1)$ est linéaire donc d'après le théorème 15.23, comme $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, elle est continue au sens de $(\mathbb{R}_d[X], \mathfrak{N})$. En particulier $1 = Q_n(-1) = \delta(Q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta(0) = 0$. C'est absurde. ☐

Exemple 15.44. *On pose :*

$$\Omega = \left\{P \in \mathbb{R}_d[X] \backslash \mathbb{R}_{d-1}[X],\ P \textit{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}\right\}.$$

Alors Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}_d[X]$ *(au sens de l'unique topologie d'espace normé de* $\mathbb{R}_d[X]$*).*

Démonstration. Soit $P = a\prod_{i=1}^{d}(X - u_i) \in \Omega$, avec $u_1 < \cdots < u_d$. Construire $(T_0, \ldots, T_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ t.q. $T_0 < u_0 < T_1 < u_1 < \cdots < u_d < T_d$. Poser $\mathcal{V} = \{Q \in \mathbb{R}_d[X],\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ Q(T_{i-1})\,Q(T_i) < 0\}$. Montrer que $P \in \mathcal{V} \subset \Omega$, et que $\mathcal{V}$ est un ouvert. Ainsi Ω est un voisinage de P ; donc Ω est un ouvert. ☐

VI Séries dans un espace normé

VI.1 Généralités

Notation 15.45. *Dans la suite du chapitre,* $(E, \|\cdot\|)$*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé, avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition 15.46 (Série). $u \in E^{\mathbb{N}}$. *On appelle* série *de terme général* u_n*, notée* $\sum u_n$*, la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, avec* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. S_n *est appelée* somme partielle *au rang* n *de la série* $\sum u_n$. *On dit que* $\sum u_n$ converge *lorsque* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Dans ce cas, on pose :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Proposition 15.47. *$u \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Vocabulaire 15.48. *$u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$* diverge grossièrement.

Proposition 15.49. *$(u, v) \in \left(E^{\mathbb{N}}\right)^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ converge, et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Définition 15.50 (Absolue convergence)**.** *$u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ est* absolument convergente *lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.*

Proposition 15.51. *S'équivalent :*

(i) *E est de Banach, i.e. toute suite de Cauchy de E converge.*

(ii) *Toute série absolument convergente de E est convergente.*

Corollaire 15.52. *On suppose E de dimension finie. Alors toute série absolument convergente de E est convergente.*

Démonstration. Tout espace normé de dimension finie est de Banach d'après le théorème 15.31. ☐

VI.2 Théorème des approximations successives de Picard

Théorème 15.53 (Théorème des approximations successives de Picard)**.** *On suppose E de dimension finie. Soit X un fermé non vide de E. Soit $f : X \to X$ une fonction contractante de rapport $\rho \in [0, 1[$. Pour $a \in X$, on note $\hat{a} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite f-récurrente t.q. $\hat{a}_0 = a$. Alors :*

(i) *f admet un unique point fixe ω sur X.*

(ii) *$\forall a \in X$, $\hat{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$.*

(iii) *$\forall a \in X$, $\|\hat{a}_n - \omega\| = \mathcal{O}(\rho^n)$.*

(iv) *$\forall a \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| \leqslant \frac{\rho}{1-\rho} \|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\|$.*

Démonstration. (i) et (ii) Soit $a \in X$ (car $X \neq \varnothing$). On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\| = \|f(\hat{a}_n) - f(\hat{a}_{n-1})\| \leqslant \rho \|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\|$ donc par récurrence immédiate :

$$\|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\| = \mathcal{O}(\rho^n).$$

Donc $\sum \|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\|$ converge, donc par le corollaire 15.52, $\sum (\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n)$ converge, donc $\hat{a}$ converge vers $\omega \in X$ (car X fermé). Montrer que $f(\omega) = \omega$

(par continuité de f) puis que ω est l'unique point fixe de f (car f est contractante). (iii) Soit $a \in X$. Écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| = \|f(\hat{a}_{n-1}) - f(\omega)\| \leqslant \rho\,\|\hat{a}_{n-1} - \omega\|$, et en déduire par récurrence $\|\hat{a}_n - \omega\| = \mathcal{O}(\rho^n)$. (iv) Soit $a \in X$. Écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| \leqslant \rho\,\|\hat{a}_{n-1} - \omega\| \leqslant \rho\,\|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\| + \rho\,\|\hat{a}_n - \omega\|$. □

VII Théorème de Riesz

Théorème 15.54 (Théorème de Riesz)**.** *S'équivalent :*

(i) *E est de dimension finie.*

(ii) *$\mathcal{B}_f(0,1)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii) Voir théorème 15.25. (ii) ⇒ (i) On suppose que $\mathcal{B}_f(0,1)$ est un compact. Alors d'après le lemme 14.37, il existe $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathcal{B}_f(0,1))^s$ t.q.

$$\mathcal{B}_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_f\left(\omega_i, \frac{1}{2}\right).$$

On pose alors $F = \mathrm{Vect}\,(\omega_1, \ldots, \omega_s)$. Montrons $E = F$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\mathcal{H}(n)\ :\ \forall x \in E,\ \exists z \in F,\ \|x - z\| \leqslant \frac{1}{2^n}\,\|x\|.$$

Montrer d'abord $\mathcal{H}(1)$ en normalisant $x \in E$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\mathcal{H}(n)$ vraie. Soit $x \in E$. Par $\mathcal{H}(n)$, soit $z_1 \in F$ t.q. $\|x - z_1\| \leqslant \frac{1}{2^n}\,\|x\|$, puis par $\mathcal{H}(1)$, soit $z_2 \in F$ t.q. $\|(x - z_1) - z_2\| \leqslant \frac{1}{2}\,\|x - z_1\|$. Avec $z = z_1 + z_2 \in F$, on a bien alors $\|x - z\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\,\|x\|$, donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. En déduire :

$$E \subset \overline{F}.$$

Or, d'après la proposition 15.32, $\overline{F} = F$. Il vient $E = F$, donc E est de dimension finie. □

Définition 15.55 (Espace métrique localement compact)**.** $(X, \mathfrak{d})$ *un espace métrique. S'équivalent :*

(i) $\forall \omega \in X$, $\exists V \in \mathcal{V}(\omega)$, *$V$ est un compact de $(X, \mathfrak{d})$.*

(ii) $\forall \omega \in X$, $\exists r > 0$, *$\mathcal{B}_f(\omega, r)$ est un compact de $(X, \mathfrak{d})$.*

Si tel est le cas, on dit que $(X, \mathfrak{d})$ est localement compact*.*

Théorème 15.56. *S'équivalent :*

(i) *E est de dimension finie.*

(ii) *E est localement compact.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 15.54 et du fait que $\forall \omega \in E$, $\forall r > 0$, $\mathcal{B}_f(\omega, r) \sim \mathcal{B}_f(0,1)$. □

Chapitre 16

Connexité

Notation 16.1. *Dans tout le chapitre,* (E, d) *est un espace métrique, et* $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ *est un espace normé.*

I Connexité par arcs

I.1 Généralités

Définition 16.2 (Chemin)**.** $(a, b) \in E^2$. *On appelle* chemin joignant a à b dans E *toute application* $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], E)$ *t.q.* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$.

Définition 16.3 (Espace métrique connexe par arcs)**.** *On dit que* (E, d) *est* connexe par arcs *lorsque, pour tout* $(a, b) \in E^2$*, il existe un chemin joignant* a *à* b *dans* E.

Définition 16.4 (Partie connexe par arcs d'un espace métrique)**.** $X \subset E$. *On dit que* X *est* connexe par arcs *lorsque* $\left(X, d_{|X^2}\right)$ *est un espace métrique connexe par arcs.*

Proposition 16.5. *Les parties connexes par arcs de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Proposition 16.6. *L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.*

Proposition 16.7. *Dans un espace normé, tout convexe est connexe par arcs.*

I.2 Composantes connexes par arcs

Définition 16.8 (Être connectés)**.** *On définit une relation* $\mathcal{R}$ *sur* E *par* $x\mathcal{R}y$ ssi *il existe un chemin joignant* x *à* y *dans* E. *On dit que* x *et* y *sont* connectés *dans* E *lorsque* $x\mathcal{R}y$.

Proposition 16.9. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.*

Définition 16.10 (Composantes connexes par arcs)**.** *Les* composantes connexes par arcs *de E sont les classes d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$.*

Proposition 16.11. *E est connexe par arcs* ssi *E a une seule composante connexe par arcs.*

Proposition 16.12. *Dans un espace normé, les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des ouverts.*

II Connexité par arcs dans un espace normé

Proposition 16.13. *On suppose que $2 \leqslant \dim \mathfrak{V} \leqslant +\infty$. Soit D une partie dénombrable de $\mathfrak{V}$. Alors $\mathfrak{V} \backslash D$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $(a, b) \in (\mathfrak{V} \backslash D)^2$, $a \neq b$. Soit $\omega \in]a, b[$, soit $\zeta \in \mathfrak{V} \backslash \operatorname{Vect}(a-b)$ (car $\dim \mathfrak{V} \geqslant 2$). Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_s : [0,1] \to \mathfrak{V}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, avec :

$$\gamma_s(0) = a, \qquad \gamma_s\left(\frac{1}{2}\right) = \omega + s\zeta, \qquad \gamma_s(1) = b.$$

γ_s est un chemin joignant a à b dans $\mathfrak{V}$. Vérifier alors que :

$$\forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2,\ s_1 \neq s_2 \Longrightarrow \gamma_{s_1}(]0,1[) \cap \gamma_{s_2}(]0,1[) = \varnothing.$$

On suppose par l'absurde que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\gamma_s(]0,1[) \cap D \neq \varnothing$. Alors on peut construire une injection $\varphi : \mathbb{R} \to D$ définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \varphi(s) \in \gamma_s(]0,1[) \cap D.$$

Donc $\mathbb{R} \hookrightarrow D$, ce qui est absurde. Donc il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\gamma_{s_0}([0,1]) \subset \mathfrak{V} \backslash D$, donc a et b sont connectés dans $\mathfrak{V} \backslash D$. □

Proposition 16.14. *On suppose que $2 \leqslant \dim \mathfrak{V} \leqslant +\infty$. Soit $(\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\mathcal{S}(\omega, r)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Montrer d'abord que : $\forall (\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{S}(\omega, r) \sim \mathcal{S}(0,1)$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{S}(0,1)$ est connexe par arcs. Soit $(a, b) \in (\mathcal{S}(0,1))^2$, $a \neq b$. Si $a \neq -b$, poser :

$$\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|} \in \mathcal{S}(0,1).$$

Alors γ est un chemin joignant a à b dans $\mathcal{S}(0,1)$. Si $a = -b$, soit $c \in \mathcal{S}(0,1) \backslash \{a, -a\}$. Alors, d'après l'étape précédente, a est connecté à c, et c est connecté à b, donc a est connecté à b. □

Proposition 16.15. *On suppose que* $2 \leqslant \dim \mathfrak{V} \leqslant +\infty$. *Soit* $(\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*$. *Alors* $\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(\omega, r)$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$ est connexe par arcs. Soit $(a, b) \in (\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1))^2$, $a \neq b$. On pose $c = \frac{\|b\|}{\|a\|} a$. Alors $[a, c] \subset \mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$ donc a est connecté à c dans $\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$. De plus $c \in \mathcal{S}(0, \|b\|)$. Or $\mathcal{S}(0, \|b\|)$ est connexe par arcs d'après la proposition 16.14, et $\mathcal{S}(0, \|b\|) \subset \mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$, donc c est connecté à b dans $\mathcal{S}(0, \|b\|)$, donc dans $\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$. Ainsi, a est connecté à b dans $\mathfrak{V} \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$. $\square$

III Connexité

Définition 16.16 (Espace métrique connexe)**.** *S'équivalent :*

(i) *Il n'existe pas de couple* $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in (\mathcal{P}(E) \backslash \{\varnothing\})^2$ *d'ouverts disjoints non vides de* (E, d) *tel que* $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V} = E$.

(ii) *Il n'existe pas de couple* $(F, G) \in (\mathcal{P}(E) \backslash \{\varnothing\})^2$ *de fermés disjoints non vides de* (E, d) *tel que* $F \sqcup G = E$.

(iii) *Les seuls ouverts fermés de* (E, d) *sont* $\varnothing$ *et* E.

(iv) $\forall Y \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\varnothing, E\}, \ \mathrm{Fr}(Y) \neq \varnothing$.

(v) *Toute application* $\varphi \in \mathcal{C}^0(E, \{0,1\})$ *est constante (*$\{0,1\}$ *étant muni de la distance usuelle).*

Si tel est le cas, on dit que (E, d) *est* connexe.

Définition 16.17 (Partie connexe d'un espace métrique)**.** $X \subset E$. *On dit que* X *est* connexe *lorsque* $\left(X, d_{|X^2}\right)$ *est un espace métrique connexe.*

Proposition 16.18. *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Proposition 16.19. *Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.*

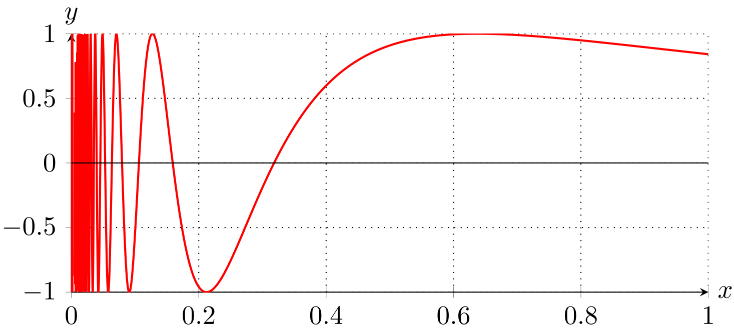
Corollaire 16.20. *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Proposition 16.21. *Il existe des espaces métriques connexes mais pas connexes par arcs.*

Démonstration. Considérer l'espace

$$\mathcal{A} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), \ x \in]0,1] \right\}.$$

Connexité. Montrer que, s'il existait un couple $(F, G) \in (\mathcal{P}(\mathcal{A}) \backslash \{\varnothing\})^2$ de fermés disjoints non vides de $\mathcal{A}$ tel que $F \sqcup G = \mathcal{A}$, alors $F = \{0\} \times [-1,1]$ et $G = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \ x \in]0,1] \right\}$, donc G n'est pas fermé car $(0,0) \in \overline{G} \backslash G$. C'est absurde, donc $\mathcal{A}$ est connexe. *Connexité par arcs.* Supposer par l'absurde qu'il existe un chemin γ joignant $(0,0)$ à $(1,\sin 1)$ dans $\mathcal{A}$. Pour $t \in [0,1]$, notons $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{A}$. Comme γ est continue, α et β sont continues. Considérer $t_0 = \sup\left(\alpha^{-1}(\{0\})\right) = \max\left(\alpha^{-1}(\{0\})\right) < 1$. Poser $w_n = t_0 + \frac{1}{n_0+n}$, avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_0 + \frac{1}{n_0} < 1$. Alors $\alpha(w_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha(t_0) = 0$ et $\beta(w_n) = \sin\left(\frac{1}{\alpha(w_n)}\right)$ (car $\gamma(w_n) \in \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\, x \in]0,1]\right\}$ comme $w_n > t_0$), donc $(\beta(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. C'est absurde, donc $\mathcal{A}$ n'est pas connexe par arcs. $\square$



Un espace métrique connexe mais pas connexe par arcs

Proposition 16.22. *Soit $K \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties connexes, compactes et non vides de (E,d). Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est connexe, compact et non vide.*

Démonstration. *Non vide.* En se plaçant dans l'espace $\left(K_0, d_{|K_0^2}\right)$, on applique le théorème 14.35, et on obtient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$. *Compact.* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un fermé (comme intersection de fermés) inclus dans K_0, qui est compact, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact. *Connexe.* On suppose par l'absurde qu'il existe un couple $(F,G) \in \left(\mathcal{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) \setminus \{\varnothing\}\right)^2$ de fermés disjoints non vides de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ tel que $F \sqcup G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. F et G sont des compacts ; on pose :

$$\rho = \inf_{(x,y)\in F\times G} d(x,y) = \min_{(x,y)\in F\times G} d(x,y) > 0.$$

On considère alors :

$$\mathcal{U} = \left\{x \in E,\ d(x,F) < \frac{\rho}{3}\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \left\{x \in E,\ d(x,G) < \frac{\rho}{3}\right\}.$$

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des ouverts disjoints non vides de E et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{K}_n = K_n \cap (E \backslash (\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}))\,.$$

Alors $\widetilde{K}$ est une suite décroissante de parties compactes, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{K}_n = \varnothing$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{K}_{n_0} = \varnothing$, autrement dit $K_{n_0} \subset \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. Comme K_{n_0} est connexe et $K_{n_0} \cap \mathcal{U}$ et $K_{n_0} \cap \mathcal{V}$ sont des ouverts disjoints de K_{n_0} tels que $(K_{n_0} \cap \mathcal{U}) \sqcup (K_{n_0} \cap \mathcal{V}) = K_{n_0}$, l'un des deux est vide ; par exemple : $K_{n_0} \cap \mathcal{V} = \varnothing$. Donc :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset K_{n_0} \subset \mathcal{U}.$$

Il vient $G = \varnothing$. C'est absurde. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est connexe. □

Proposition 16.23. *On suppose (E, d) compact. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$d(u_n, u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors $\Lambda(u)$ est connexe.

IV Applications

Théorème 16.24. *On suppose (E, d) connexe. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E t.q.*

$$\forall x \in X,\ \exists V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in V,\ x\mathcal{R}y.$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On a $\forall y \in \mathrm{Cl}(x)$, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) \in \mathcal{V}(y)$, donc $\mathrm{Cl}(x)$ est un ouvert. Or :

$$\mathrm{Cl}(x) = E \backslash \bigcup_{y \in E\backslash \mathrm{Cl}(x)} \mathrm{Cl}(y),$$

donc $\mathrm{Cl}(x)$ est un fermé. Or E est connexe, donc $\mathrm{Cl}(x) = \varnothing$ ou $\mathrm{Cl}(x) = E$. Mais $x \in \mathrm{Cl}(x)$ donc $\mathrm{Cl}(x) = E$. □

Lemme 16.25. $(P, Q) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$. *On suppose qu'il existe $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{U},\ P(x) = Q(x).$$

Alors $P = Q$.

Proposition 16.26. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ localement polynomiale, i.e.*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \exists V \in \mathcal{V}(\omega),\ \exists P \in \mathbb{R}\left[X_1, \ldots, X_n\right],\ \forall x \in V,\ f(x) = P(x).$$

Alors f est polynomiale.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. D'après le lemme 16.25, on peut définir sans ambiguïté $P_\omega \in \mathbb{R}\left[X_1, \ldots, X_n\right]$ t.q. $\exists V \in \mathcal{V}(\omega),\ \forall x \in V \cap \Omega,\ f(x) = P_\omega(x)$. On définit alors une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Ω, par :

$$x \mathcal{R} y \iff P_x = P_y.$$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{Cl}(\omega)$ est un ouvert de Ω. Donc d'après le théorème 16.24 : $\mathrm{Cl}(\omega) = \Omega$. D'où $\forall x \in \Omega,\ f(x) = P_\omega(x)$. □

Proposition 16.27. *On suppose (E, d) compact et connexe, non réduit à un point. Alors E est équipotent à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. *Première étape.* Soit $(a, b) \in E^2$, $a \neq b$. On pose $R = d(a, b)$. Pour $r \in [0, R]$, choisir $\varphi(r) \in \mathcal{S}\left(a, r\right)$ (ce qui est possible par connexité de E). Montrer que l'application $\varphi : [0, R] \to E$ ainsi définie est une injection, donc $\mathbb{R} \hookrightarrow [0, R] \hookrightarrow E$. *Deuxième étape.* D'après le corollaire 14.38, (E, d) est séparable ; soit donc D dénombrable et dense dans E. Soit $u : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Poser alors :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega \longmapsto \left(d\left(\omega, u_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right. .$$

Montrer que φ est une injection, et en déduire $E \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. *Troisième étape.* $E \hookrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \hookrightarrow E$, donc d'après le théorème 6.5, $E \sim \mathbb{R}$. □

Proposition 16.28. *Soit Ω un ouvert connexe par arcs de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$. Alors Ω est connexe par arcs polygonaux, i.e.*

$$\forall (a, b) \in \Omega^2,\ \exists s \in \mathbb{N},\ \exists \left(m_0, \ldots, m_s\right) \in \Omega^{s+1},$$
$$m_0 = a \text{ et } m_s = b \text{ et } \forall i \in [\![1, s]\!],\ [m_{i-1}, m_i] \subset \Omega.$$

Démonstration. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Ω par :

$$a \mathcal{R} b \iff \exists s \in \mathbb{N},\ \exists \left(m_0, \ldots, m_s\right) \in \Omega^{s+1},$$
$$m_0 = a \text{ et } m_s = b \text{ et } \forall i \in [\![1, s]\!],\ [m_{i-1}, m_i] \subset \Omega.$$

Soit $a \in \Omega$. Soit $b \in \mathrm{Cl}(a)$ et $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(b, r) \subset \Omega$. Alors $\mathcal{B}_o\left(b, r\right) \subset \mathrm{Cl}(b) = \mathrm{Cl}(a)$, donc $\mathrm{Cl}(a)$ est un ouvert de Ω. Donc, d'après le théorème 16.24, $\mathrm{Cl}(a) = \Omega$. □

V Connexité des groupes linéaires

Notation 16.29. *On notera* $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$*,* $GL_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$*,* $GL_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}\left(\mathbb{R}_-^*\right)$ *et* $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$*.*

Lemme 16.30. $SL_n(\mathbb{R})$ *est engendré par :*

$$\left\{I_n + \lambda E_{k\ell},\ \lambda \in \mathbb{R},\ (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq \ell\right\}.$$

Proposition 16.31. $SL_n(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. On écrit, en vertu du lemme précédent, $A = (I_n + \lambda_1 E_{k_1\ell_1}) \cdots (I_n + \lambda_s E_{k_s\ell_s})$. On pose alors :

$$\gamma : t \in [0,1] \longmapsto (I_n + t\lambda_1 E_{k_1\ell_1}) \cdots (I_n + t\lambda_s E_{k_s\ell_s}) \in SL_n(\mathbb{R}).$$

Alors $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], SL_n(\mathbb{R}))$, avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Donc toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est connectée à I_n, donc $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. □

Proposition 16.32. $GL_n^+(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $B \in GL_n^+(\mathbb{R})$. On pose :

$$\varphi : t \in [0,1] \longmapsto (I_n + (\beta(t) - 1)\, E_{11})\, B \in GL_n^+(\mathbb{R}),$$

avec $\beta : t \in [0,1] \longmapsto (1-t) + \frac{t}{\det B} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1], GL_n^+(\mathbb{R}))$, avec $\varphi(0) = B$ et $\varphi(1) \in SL_n(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, en déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. □

Proposition 16.33. $GL_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes par arcs :* $GL_n^-(\mathbb{R})$ *et* $GL_n^+(\mathbb{R})$*.*

Chapitre 17

Suites et Séries de Fonctions

Notation 17.1. *Dans tout le chapitre, $(F, \|\cdot\|)$ est un espace normé, et X est un ensemble non vide.*

I Convergence simple

Définition 17.2 (Convergence simple)**.** *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. On dit que f* converge simplement *vers ℓ, et on note*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell,$$

lorsque

$$\forall x \in X,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(x).$$

Proposition 17.3. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $(\ell_1, \ell_2) \in \left(F^X\right)^2$. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell_1$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$. On dit alors que ℓ_1 est la* limite simple *de la suite f.*

Remarque 17.4. *On suppose $F \neq \{0\}$.*

(i) *Si X est fini, alors la convergence simple correspond à une convergence dans un espace normé.*

(ii) *Si X est infini et dénombrable, alors la convergence simple correspond à une convergence dans un espace métrique, mais pas dans un espace normé.*

(iii) *Si X est non dénombrable, alors la convergence simple ne correspond pas à une convergence dans un espace métrique.*

Proposition 17.5. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. On suppose $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$.*

(i) Monotonie. *$X \subset \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow$, alors $\ell \nearrow$.*

(ii) Convexité. *X une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $F = \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe, alors ℓ est convexe.*

(iii) Linéarité. *X et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}(X, F)$, alors $\ell \in \mathcal{L}(X, F)$.*

Exemple 17.6. *Propriétés ne passant pas à la limite simple.*

(i) Borne supérieure. *Pour $n \geqslant 2$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1\right)$, avec $f(0) = f\left(\frac{2}{n}\right) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. On a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} 0$, et $\forall n \geqslant 2$, $\sup_{[0,1]} f_n = 1$, mais $\sup_{[0,1]} 0 = 0$.*

(ii) Continuité. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$. On a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \mathbb{1}_{\{1\}}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, mais $\mathbb{1}_{\{1\}} \notin \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.*

(iii) Intégrale. *Pour $n \geqslant 2$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1\right)$, avec $f(0) = f\left(\frac{2}{n}\right) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$. On a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} 0$, et $\forall n \geqslant 2$, $\int_0^1 f_n = 1$, mais $\int_0^1 0 = 0$.*

II Convergence uniforme

II.1 Généralités

Définition 17.7 (Convergence uniforme)**.** *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. On dit que f* converge uniformément *vers ℓ, et on note*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell,$$

lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in X, \|f_n(x) - \ell(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 17.8. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. Alors :*

$$\left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell\right) \Longrightarrow \left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell\right).$$

Proposition 17.9. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée, et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$, alors ℓ est bornée, et :*

$$\sup_X f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_X \ell.$$

Proposition 17.10. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$, $\omega \in X$. On munit X d'une distance d. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en ω et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$, alors ℓ est continue en ω.*

Corollaire 17.11. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. On munit X d'une distance d. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(X, F)$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$, alors $\ell \in \mathcal{C}^0(X, F)$.*

Exemple 17.12. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$. Alors f_n converge simplement, mais pas uniformément, vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$.*

II.2 Nouveau point de vue

Notation 17.13. *On note :*

$$\mathfrak{B}(X, F) = \left\{f \in F^X,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant A\right\}.$$

On définit de plus :

$$\|\cdot\|_\infty : f \in \mathfrak{B}(X, F) \longmapsto \sup_X \|f\|.$$

Proposition 17.14. *$(\mathfrak{B}(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.*

Proposition 17.15. *$f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. Alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$* ssi *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $(f_n - \ell) \in \mathfrak{B}(X, F)$,

(ii) $\|f_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 17.16. *On munit X d'une distance d. Alors $\mathcal{C}^0(X, F) \cap \mathfrak{B}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathfrak{B}(X, F), \|\cdot\|_\infty)$.*

III Théorème de Weierstrass

Notation 17.17 (Polynômes de Bernstein)**.** *Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

$B_n(f)$ est dit polynôme de Bernstein *à l'ordre n de f.*

Théorème 17.18 (Théorème de Weierstrass)**.**

$$\forall f \in \mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right),\ \exists P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}},\ P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Montrons que $B_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$.
Première étape. Soit $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_n^{(x)}$ une variable aléatoire t.q. $S_n^{(x)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$. Montrer :

$$\left(B_n(f)\right)(x) = E\left(f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right).$$

Deuxième étape. Soit $\varepsilon > 0$. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$, donc $\mathcal{UC}^0$. Soit donc $\eta > 0$ t.q.

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On majore alors $r_n(x) = \left|f(x) - \left(B_n(f)\right)(x)\right|$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \left|f(x) - E\left(f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right)\right| = \left|E\left(f(x) - f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqslant E\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right|\right) = \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}\left(S_n^{(x)} = k\right) \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\eta}}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}\left(S_n^{(x)} = k\right) \\
&\qquad + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\eta}}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathbb{P}\left(S_n^{(x)} = k\right) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|S_n^{(x)} - nx\right| > n\eta\right) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\left\|f\right\|_\infty \frac{V\left(S_n^{(x)}\right)}{n^2\eta^2} = \frac{\varepsilon}{2} + 2\left\|f\right\|_\infty \frac{nx(1-x)}{n^2\eta^2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\eta^2}.
\end{aligned}$$

En choisissant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{\|f\|_\infty}{2n_0\eta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0,1],\ \left|f(x) - \left(B_n(f)\right)(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $B_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$. $\square$

Corollaire 17.19. $\forall f \in \mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}\right),\ \exists P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}},\ P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f.$

IV Critère uniforme de Cauchy

Définition 17.20 (Critère uniforme de Cauchy)**.** $f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. *On dit que* f *vérifie le* critère uniforme de Cauchy *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ \forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 17.21. $f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. *On suppose* F *de dimension finie. S'équivalent :*

(i) f *vérifie le critère uniforme de Cauchy.*

(ii) f *converge uniformément.*

V Convergence uniforme sur tout compact

Vocabulaire 17.22. $f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. $Y \subset X$. *On dit que* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ *sur* Y *lorsque* $f_{n|Y} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell_{|Y}$.

Lemme 17.23. $\ell \in F^X$. *On munit* X *d'une distance* d. *S'équivalent :*

(i) ℓ *est continue.*

(ii) *La restriction de* ℓ *à n'importe quel compact de* (X,d) *est continue.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\omega \in X$. Soit $u \in X^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$. Montrer (par exemple en utilisant le théorème 14.40) que $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega\}$ est un compact de (X,d). Donc $\ell_{|K}$ est continue, d'où $\ell\left(u_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(\omega)$, donc ℓ est continue en ω. □

Proposition 17.24. $f \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^X$. *On munit* X *d'une distance* d. *On suppose :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ *sur tout compact de* (X,d),

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0(X,F)$.

Alors $\ell \in \mathcal{C}^0(X,F)$.

VI Théorème d'interversion des limites

Théorème 17.25 (Théorème d'interversion des limites)**.** $\Omega \subset X$, $\omega \in \overline{\Omega}$. $f \in \left(F^{\Omega}\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^{\Omega}$. *On munit* X *d'une distance* d. *On suppose :*

(i) F *est de dimension finie,*

(ii) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ *sur* Ω,

(iii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *admet une limite en* ω.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\omega} f_n(x)$ *et* $\lim_{x\to\omega} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *existent, et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\omega} f_n(x) = \lim_{x\to\omega} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Démonstration. Si $\omega \in \Omega$, il suffit d'utiliser la proposition 17.10. Si $\omega \notin \Omega$, poser $\widetilde{f_n}$ le prolongement par continuité de f_n en ω, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(\widetilde{f_n}(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge (par le théorème 15.31). Poser :

$$\widetilde{\ell} : x \in \Omega \cup \{\omega\} \longmapsto \begin{cases} \ell(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \lim_{n\to+\infty} \widetilde{f_n}(\omega) & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}.$$

Remarquer que $\widetilde{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \widetilde{\ell}$ sur Ω et $\widetilde{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \widetilde{\ell}$ sur $\{\omega\}$, donc :

$$\widetilde{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \widetilde{\ell}.$$

Ainsi, par la proposition 17.10, $\widetilde{\ell}$ est continue. En déduire le résultat. □

Corollaire 17.26. Ω *une partie non majorée de* $\mathbb{R}$. $f \in \left(F^\Omega\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in F^\Omega$. *On suppose :*

(i) F *est de dimension finie,*

(ii) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ *sur* Ω,

(iii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *admet une limite en* $+\infty$.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

VII Généralités sur les séries de fonctions

Définition 17.27 (Série de fonctions)**.** $u \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. *On appelle* série *de terme général* u_n, *notée* $\sum u_n$, *la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec* $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n *est appelée* somme partielle *au rang* n *de la série* $\sum u_n$.

(i) *On dit que* $\sum u_n$ converge simplement *lorsque* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement.*

(ii) *On dit que* $\sum u_n$ converge uniformément *lorsque* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément.*

Proposition 17.28. $u \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. *S'équivalent :*

(i) $\sum u_n$ *converge uniformément.*

(ii) $\sum u_n$ *converge simplement et :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X,\ \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 17.29. *$u \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$, $\omega \in X$. On munit X d'une distance d. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en ω et $\sum u_n$ converge uniformément, alors $x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est continue en ω.*

Application 17.30. *Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante et dont l'ensemble des points de continuité est $\mathbb{R} \backslash D$.*

Démonstration. Traiter d'abord le cas où D est fini. En supposant D infini, soit $\delta : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Poser, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[\delta_n, +\infty[}.$$

Montrer d'abord que $\sum u_n$ converge simplement et poser :

$$S : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Montrer que S convient. □

VIII Convergence normale

Définition 17.31 (Convergence normale)**.** *$u \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$* converge normalement *lorsque :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n *est bornée,*

(ii) $\sum \|u_n\|_\infty$ *converge.*

Proposition 17.32. *$u \in \left(F^X\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que F est de dimension finie. Alors :*

$$\sum u_n \text{ converge normalement} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge uniformément.}$$

IX Quelques théorèmes qualifiant la convergence simple en convergence uniforme

Théorème 17.33 (Théorème de Dini)**.** *(K, d) un espace métrique compact non vide. $f \in \left(\mathbb{R}^K\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. On suppose :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$,

(iii) $\ell \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$,

(iv) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} \leqslant f_n$.

Alors :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell.$$

Démonstration (Première méthode)**.** Poser d'abord $g_n = f_n - \ell$. On a $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant g_{n+1} \leqslant g_n$ et $g_n \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. Supposer par l'absurde que la convergence n'est pas uniforme. Comme la suite $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc minorée par un certain $r > 0$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose de $\omega_n \in K$ t.q. $|g_n(\omega_n)| = \|g_n\|_\infty$ (en vertu du théorème 14.22). Extraire de ω une sous-suite convergente et en déduire une contradiction. $\square$

Démonstration (Deuxième méthode)**.** On pose encore $g_n = f_n - \ell$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in K,\ g_n(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Alors, à ε fixé, $(K_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés d'intersection vide. D'après le théorème 14.35, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $K_{n_0}(\varepsilon) = \varnothing$, d'où $\forall n \geqslant n_0,\ K_n(\varepsilon) = \varnothing$. Ceci montre que la convergence est uniforme. $\square$

Théorème 17.34. *I segment de $\mathbb{R}$. $f \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}^I$. On suppose :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \nearrow$,

(iii) $\ell \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Alors :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell.$$

Corollaire 17.35. *I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. $f \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}^I$. On suppose :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est convexe.*

Alors ℓ est convexe, et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ sur tout segment de I.

Démonstration. Montrer la convexité de ℓ. Avec la proposition 1.22, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $\ell \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Soit alors $[a,b]$ un segment de I, avec $a < b$. Soit $\omega \in I$ t.q. $\omega < a$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n la fonction pente de f_n en ω, puis on note q la fonction pente de ℓ en ω. Avec le théorème 17.34, montrer que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} q$, puis en déduire que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$. □

Théorème 17.36. (K,d) *un espace métrique compact non vide.* $f \in \left(\mathbb{R}^K\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. *On suppose :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$,

(ii) *Il existe $\rho > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est ρ-lipschitzienne.*

Alors ℓ est ρ-lipschitzienne et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$.

Démonstration. Utiliser le lemme 14.37. □

Chapitre 18

Intégrales de Fonctions Réglées sur un Segment

Notation 18.1. *Dans tout le chapitre, $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés non nuls de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

I Intégrales de fonctions en escaliers

Définition 18.2 (Subdivision)**.** *On appelle* subdivision *de I tout $\sigma \in I^{n+1}$ t.q.*

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b.$$

On note $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions de I.

Vocabulaire 18.3. *$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$, $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_m) \in \mathcal{S}(I)$. On dit que σ est* plus fine *que τ lorsque $\{\sigma_i,\ i \in [\![0, n]\!]\} \supset \{\tau_i,\ i \in [\![0, m]\!]\}$.*

Définition 18.4 (Fonction en escaliers)**.** *Une fonction $f : I \to F$ est dite* en escaliers *lorsqu'il existe $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ t.q.*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_{|]\sigma_{i-1},\sigma_i[} \text{ est constante.}$$

On dit alors que la subdivision σ est adaptée *à f. On notera* $\mathrm{Esc}(I, F)$ *l'ensemble des fonctions en escaliers $I \to F$.*

Proposition 18.5. *$f \in \mathrm{Esc}(I, F)$, $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ adaptée à f. Alors :*

$$f = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\sigma_i\}} f(\sigma_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]\sigma_{i-1},\sigma_i[} f\left(\frac{\sigma_{i-1} + \sigma_i}{2}\right).$$

Notation 18.6. *$f \in \mathrm{Esc}(I,F)$, $\sigma = (\sigma_0,\dots,\sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ adaptée à f. On note alors :*

$$\mu_F^{(\sigma)}(f) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \sigma_{i-1})\, f\left(\frac{\sigma_{i-1}+\sigma_i}{2}\right).$$

Proposition 18.7. *$f \in \mathrm{Esc}(I,F)$. $(\sigma,\tau) \in \mathcal{S}(I)^2$ adaptées à f. Alors :*

$$\mu_F^{(\sigma)}(f) = \mu_F^{(\tau)}(f).$$

Démonstration. Montrer que $\mu_F^{(\sigma)}(f) = \mu_F^{(\sigma\cup\tau)}(f) = \mu_F^{(\tau)}(f)$. □

Définition 18.8 (Intégrale d'une fonction en escaliers)**.** *Pour $f \in \mathrm{Esc}(I,F)$, on pose :*

$$\mu_F(f) = \mu_F^{(\sigma)}(f),$$

où $\sigma \in \mathcal{S}(I)$ est une subdivision adaptée à f quelconque.

Notation 18.9. *On se place dans $(\mathfrak{B}(I,F), \|\cdot\|_\infty)$.*

Proposition 18.10.

(i) $\mathrm{Esc}(I,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{B}(I,F)$.

(ii) $\mu_F \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{Esc}(I,F),F\right)$.

(iii) $|||\mu_F||| = b-a$.

Proposition 18.11. *Si $f \in \mathrm{Esc}(I,F)$ et $\psi \in G^F$, alors $(\psi \circ f) \in \mathrm{Esc}(I,G)$.*

Proposition 18.12. *Si $f \in \mathrm{Esc}(I,F)$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(F,G)$, alors :*

$$(\Lambda \circ \mu_F)(f) = \mu_G(\Lambda \circ f).$$

Proposition 18.13 (Inégalité triangulaire)**.** *Si $f \in \mathrm{Esc}(I,F)$, alors $\|f\|_F \in \mathrm{Esc}(I,\mathbb{R})$ et :*

$$\|\mu_F(f)\|_F \leqslant \mu_{\mathbb{R}}\left(\|f\|_F\right).$$

II Fonctions continues par morceaux

Définition 18.14 (Fonction continue par morceaux)**.** *Une fonction $f : I \to F$ est dite* continue par morceaux *lorsqu'il existe $(\sigma_0,\dots,\sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ et $(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in F^{[\sigma_0,\sigma_1]} \times \dots \times F^{[\sigma_{n-1},\sigma_n]}$ t.q. :*

(i) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{C}^0\left([\sigma_{i-1},\sigma_i],F\right)$,

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f_{|]\sigma_{i-1},\sigma_i[} = \varphi_{i|]\sigma_{i-1},\sigma_i[}$.

On notera $\mathcal{C}^0_{pm}(I,F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $I \to F$.

Proposition 18.15. *$f \in F^I$. Alors $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,F)$* ssi *il existe $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ t.q.*

(i) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_{|]\sigma_{i-1},\sigma_i[} \in \mathcal{C}^0\left(]\sigma_{i-1}, \sigma_i[, F\right)$,

(ii) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, *$f$ admet une limite à gauche en σ_i,*

(iii) $\forall i \in [\![0, n[\![$, *$f$ admet une limite à droite en σ_i.*

Proposition 18.16.

$$\mathcal{C}^0_{pm}(I,F) = \mathrm{Esc}(I,F) + \mathcal{C}^0(I,F).$$

En particulier, $\mathcal{C}^0_{pm}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{B}(I,F)$.

Proposition 18.17. $\mathcal{C}^0_{pm}(I,F) \subsetneq \overline{\mathrm{Esc}(I,F)}$.

III Fonctions réglées

Définition 18.18 (Fonction réglée)**.** *On note :*

$$\mathcal{R}(I,F) = \overline{\mathrm{Esc}(I,F)}.$$

Les éléments de $\mathcal{R}(I,F)$ sont dits fonctions réglées*.*

Proposition 18.19. *$f \in F^I$. S'équivalent :*

(i) *$f \in \mathcal{R}(I,F)$.*

(ii) *f admet une limite à gauche en tout point de $]a,b]$ et une limite à droite en tout point de $[a,b[$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Pour $x_0 \in]a,b]$, appliquer le théorème d'interversion des limites (théorème 17.25) à $f_{|[a,x_0[}$. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$\mathcal{A} = \left\{c \in]a,b],\ \exists v \in \mathrm{Esc}\left([a,c], F\right),\ \left\|v - f_{|[a,c]}\right\|_\infty \leqslant \varepsilon\right\}.$$

On veut montrer que $b \in \mathcal{A}$. *Première étape* : $\mathcal{A} \neq \varnothing$. En effet, $\lim_{a^+} f$ existe ; soit donc $c \in]a,b]$ t.q. $\forall t \in]a,c]$, $\|f(t) - \lim_{a^+} f\|_F \leqslant \varepsilon$. Poser alors :

$$v : t \in [a,c] \longmapsto \begin{cases} f(a) & \text{si } t = a \\ \lim_{a^+} f & \text{sinon} \end{cases},$$

et montrer que $v \in \mathrm{Esc}\left([a,c], F\right)$ et que $\left\|v - f_{|[a,c]}\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $c \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \varnothing$. *Deuxième étape* : $\mathcal{A}$ admet un maximum. Comme $\mathcal{A}$ est non vide et majoré, soit $m = \sup \mathcal{A}$. Supposons par l'absurde $m \notin \mathcal{A}$. Comme $\lim_{m^-} f$ existe, soit $d \in [a,m[$ t.q. $\forall t \in [d,m[$, $\|f(t) - \lim_{m^-} f\|_F \leqslant \varepsilon$. Comme $m =$

$\sup \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, soit $x \in [d, m[\cap \mathcal{A}$, et soit $u \in \operatorname{Esc}([a,x], F)$ t.q. $\left\| u - f_{|[a,x]} \right\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Poser alors :

$$v : t \in [a,m] \longmapsto \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [a,x] \\ \lim_{m^-} f & \text{si } t \in]x,m[\\ f(m) & \text{si } t = m \end{cases},$$

et montrer que $v \in \operatorname{Esc}([a,m], F)$ et que $\left\| v - f_{|[a,m]} \right\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $m \in \mathcal{A}$; c'est absurde. *Troisième étape* : $\max \mathcal{A} = b$. Pour cela, supposer par l'absurde $m = \max \mathcal{A} < b$, utiliser le fait que $\lim_{m^+} f$ existe, et raisonner comme précédemment. *Conclusion* : $b \in \mathcal{A}$. ☐

Corollaire 18.20. *Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est réglée.*

Proposition 18.21. *Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ réglée possède un nombre dénombrable de points de discontinuité.*

IV Intégrales de fonctions réglées

Lemme 18.22. $u \in \operatorname{Esc}(I,F)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{R}(I,F)$. *On suppose que*

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f.$$

Alors la suite $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Montrer que $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, puis utiliser le théorème 15.31. ☐

Lemme 18.23. $(u,v) \in \left(\operatorname{Esc}(I,F)^{\mathbb{N}}\right)^2$, $f \in \mathcal{R}(I,F)$. *On suppose que*

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f \qquad \text{et} \qquad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f.$$

Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_F(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu_F(v_n).$$

Démonstration. Poser $w \in \operatorname{Esc}(I,F)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{si } 2 \mid n \\ v_{(n-1)/2} & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}.$$

Alors $w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f$, donc $\ell = \lim_{n \to +\infty} \mu_F(w_n)$ existe. Or $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_F(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous-suites de $(\mu_F(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$, d'où $\lim_{n \to +\infty} \mu_F(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu_F(v_n) = \ell$. ☐

Définition 18.24 (Intégrale d'une fonction réglée)**.** *Pour $f \in \mathcal{R}(I, F)$, on pose :*

$$\widetilde{\mu}_F(f) = \lim_{n \to +\infty} \mu_F(u_n),$$

où $u \in \mathrm{Esc}(I, F)^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f.

Proposition 18.25. $\forall f \in \mathrm{Esc}(I, F)$, $\widetilde{\mu}_F(f) = \mu_F(f)$.

Notation 18.26. *Pour $f \in \mathcal{R}(I, F)$, on notera :*

$$\int_a^b f = \widetilde{\mu}_F(f).$$

Proposition 18.27.

(i) $\widetilde{\mu}_F \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}(I, F), F)$.

(ii) $|||\widetilde{\mu}_F||| = b - a$.

Corollaire 18.28. $f \in \mathcal{R}(I, F)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{R}(I, F)$. *Si $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} \ell$, alors :*

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b \ell.$$

Corollaire 18.29. $u \in \mathcal{R}(I, F)^{\mathbb{N}}$. *Si $\sum u_n$ converge uniformément, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Proposition 18.30 (Inégalité triangulaire)**.** *Si $f \in \mathcal{R}(I, F)$, alors $\|f\|_F \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ et :*

$$\left\| \int_a^b f \right\|_F \leqslant \int_a^b \|f\|_F.$$

Proposition 18.31. *Si $f \in \mathcal{R}(I, F)$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $(\Lambda \circ f) \in \mathcal{R}(I, G)$ et :*

$$\Lambda \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b (\Lambda \circ f).$$

Corollaire 18.32. $f \in F^I$. *$(e_1, \ldots, e_d)$ base de F, $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ base duale. Alors $f \in \mathcal{R}(I, F)$* ssi *$\forall i \in [\![1, d]\!]$, $(e_i^* \circ f) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. Si tel est le cas :*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{d} \left(\int_a^b (e_i^* \circ f) \right) e_i.$$

Proposition 18.33 (Relation de Chasles)**.** $f \in \mathcal{R}(I,F)$. $c \in \mathring{I}$. *Alors* $f \in \mathcal{R}(I,F)$ ssi $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c],F)$ et $f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b],F)$. *Si tel est le cas :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Notation 18.34. *On notera* $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

V Sommes de Riemann

Définition 18.35 (Subdivision pointée)**.** *On appelle* subdivision pointée *de* I *tout* $\sigma^* = ((x_0,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in I^{n+1} \times I^n$ *t.q.*

(i) $a = x_0 < \cdots < x_n = b$,

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i$.

On définit alors le pas *de* σ^* *:*

$$|\sigma^*| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

On note $\mathcal{S}^*(I)$ *l'ensemble des subdivisions pointées de* I.

Définition 18.36 (Somme de Riemann)**.** $\sigma^* = ((x_0,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in \mathcal{S}^*(I)$. $f \in \mathcal{R}(I,F)$. *On pose :*

$$\Sigma_{\sigma^*}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

Lemme 18.37. $\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)$. *Alors :*

(i) $\Sigma_{\sigma^*} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}(I,F),F)$.

(ii) $|||\Sigma_{\sigma^*}||| = b - a$.

Lemme 18.38. $\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\left|\sigma_p^*\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. *On pose :*

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in \mathcal{R}(I,F),\ \Sigma_{\sigma_p^*}(f) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_a^b f \right\}.$$

Alors :

(i) $\mathcal{V}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{R}(I,F)$.

(ii) $\mathcal{V}$ *est un fermé de* $\mathcal{R}(I,F)$ *(au sens de* $\|\cdot\|_\infty$*).*

(iii) $\mathcal{V} \supset \mathrm{Esc}(I,F)$.

Démonstration. (iii) Montrer que, pour tout $(u,v) \in I^2$ et pour tout $\omega \in F$:

$$\mathbb{1}_{[u,v]}\omega \in \mathcal{V}.$$

Conclure avec le (i) et la proposition 18.5. $\square$

Théorème 18.39. *$\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\left|\sigma_p^*\right| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{R}(I,F),\ \Sigma_{\sigma_p^*}(f) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_a^b f.$$

Chapitre 19

Dérivation

Notation 19.1. *Dans tout le chapitre, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés non nuls de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

I Dérivée

Définition 19.2 (Dérivée)**.** *$f \in F^I$, $\omega \in I$. On dit que f est* dérivable *en ω lorsque $t \in I\backslash\{\omega\} \longmapsto \frac{f(t)-f(\omega)}{t-\omega}$ admet une limite en ω. On définit alors :*

$$f'(\omega) = \lim_{\substack{t \to \omega \\ t \neq \omega}} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega}.$$

Proposition 19.3. *$f \in F^I$, $\omega \in I$. Si f est dérivable en ω et $\Lambda \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(F, G)$, alors $(\Lambda \circ f)$ est dérivable en ω et :*

$$(\Lambda \circ f)' (\omega) = \Lambda \left(f'(\omega)\right).$$

Corollaire 19.4. *$f \in F^I$, $\omega \in I$. $(e_1, \ldots, e_d)$ base de F, $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ base duale. Alors f est dérivable en ω* ssi *$\forall i \in [\![1, d]\!]$, $(e_i^* \circ f)$ est dérivable en ω. Si tel est le cas :*

$$f'(\omega) = \sum_{i=1}^{d} (e_i^* \circ f)' (\omega) \cdot e_i.$$

II Inégalité des accroissements finis et conséquences

Théorème 19.5 (Inégalité des accroissements finis). *$f \in F^{[a,b]}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, avec $a < b$. On suppose :*

(i) *f et φ sont continues sur $[a, b]$,*

(ii) *f et φ sont dérivables en tout point de $]a, b[$,*

(iii) *$\forall t \in]a, b[$, $\|f'(t)\|_F \leqslant \varphi'(t)$.*

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on pose :

$$g : t \in [a, b] \longmapsto \|f(t) - f(a)\|_F - (\varphi(t) - \varphi(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon),$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \{t \in [a, b],\ g(t) \leqslant 0\}.$$

Il suffit de montrer : $\forall\varepsilon > 0$, $b \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. On fixe donc $\varepsilon > 0$. *Première étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon) \cap]a, b] \neq \varnothing$. En effet, $g(a) = -\varepsilon < 0$, et g est continue, donc il existe $u \in]a, b]$ t.q. $g(u) \leqslant 0$. *Deuxième étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est fermé. En effet, $\mathcal{A}(\varepsilon) = g^{-1}(\mathbb{R}_-)$. *Troisième étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon)$ admet un plus grand élément. En effet, $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est non vide et majoré donc admet une borne supérieure, qui est un maximum car $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est fermé. *Quatrième étape* : $\max \mathcal{A}(\varepsilon) = b$. On suppose par l'absurde que $c = \max \mathcal{A}(\varepsilon) < b$. D'après la première étape, on a $c \in]a, b[$. Donc f et φ sont dérivables en c : soit $(d_1, d_2) \in]c, b]^2$ t.q.

$$\forall t \in]c, d_1],\ \left\|\frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'(c)\right\|_F \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall t \in]c, d_2],\ \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c} - \varphi'(c)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $d = \min(d_1, d_2)$. Montrons que $d \in \mathcal{A}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\|f(d) - f(a)\|_F &\leqslant \|f(d) - f(c)\|_F + \|f(c) - f(a)\|_F \\
&\leqslant \|f(d) - f(c) - (d-c)f'(c)\|_F + \|(d-c)f'(c)\|_F + \varphi(c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(d-c) + (d-c)\,\|f'(c)\|_F + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(d-c) + (d-c)\varphi'(c) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&= (d-c)\left(\varphi'(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leqslant (d-c)\cdot\left(\frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c} + \varepsilon\right) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&= \varphi(d) - \varphi(a) + \varepsilon(d-a) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $d \in \mathcal{A}(\varepsilon)$, et $d > c$. C'est absurde. *Conclusion* : $b \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. □

Proposition 19.6. *$f \in F^I$ dérivable en tout point de I. $\rho \in \mathbb{R}_+$. S'équivalent :*

(i) *f est ρ-lipschitzienne.*

(ii) $\forall t \in I$, $\|f'(t)\|_F \leqslant \rho$.

Corollaire 19.7. *$f \in F^I$ dérivable en tout point de I. S'équivalent :*

(i) *f est constante.*

(ii) $f' = 0$.

III Relation intégrales-primitives

Définition 19.8 (Primitive)**.** *$g \in F^I$. On appelle* primitive *de g toute application $\Gamma \in F^I$ dérivable en tout point de I et telle que $\Gamma' = g$.*

Proposition 19.9. *$g \in F^I$. Si $\Gamma \in F^I$ est une primitive de g, alors les primitives de g sont les $\Gamma + u$, où $u \in F$.*

Définition 19.10 (Fonction réglée sur un intervalle)**.** *$g \in F^I$. S'équivalent :*

(i) *La restriction de g à tout segment est réglée.*

(ii) *g admet une limite à gauche en tout point de $I \setminus \{\inf I\}$ et une limite à droite en tout point de $I \setminus \{\sup I\}$.*

On dit alors que g est réglée*. Et on note $\mathcal{R}(I, F)$ l'ensemble des fonctions réglées $I \to F$.*

Proposition 19.11. *Si $g \in \mathcal{C}^0(I, F)$, alors g possède une primitive.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Poser :

$$\Gamma : x \in I \longmapsto \int_a^x g.$$

Montrer que la restriction de Γ à tout segment est lipschitzienne donc continue. Montrer ensuite, pour tout $\omega \in I$:

$$\Gamma'_g(\omega) = \lim_{\omega^-} g \qquad \text{et} \qquad \Gamma'_d(\omega) = \lim_{\omega^+} g.$$

En déduire que Γ est dérivable et que $\Gamma' = g$. □

Théorème 19.12 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. *Alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'.$$

Définition 19.13 (Fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux)**.** *Une fonction $f : [a,b] \to F$ est dite $\mathcal{C}^1$* par morceaux *lorsqu'il existe $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in F^{[\sigma_0,\sigma_1]} \times \cdots \times F^{[\sigma_{n-1},\sigma_n]}$ t.q. :*

(i) $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \varphi_i \in \mathcal{C}^1\left([\sigma_{i-1}, \sigma_i], F\right)$,

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!],\ f_{|]\sigma_{i-1},\sigma_i[} = \varphi_{i|]\sigma_{i-1},\sigma_i[}$.

On notera $\mathcal{C}^1_{pm}\left([a,b], F\right)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux $[a,b] \to F$.

Proposition 19.14. $f \in \mathcal{C}^1_{pm}\left([a,b], F\right) \cap \mathcal{C}^0\left([a,b], F\right)$. *On pose :*

$$\widetilde{f'} : t \in [a,b] \longmapsto \begin{cases} f'(t) & \text{si } f \text{ est dérivable en } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\widetilde{f'} \in \mathcal{C}^0_{pm}\left([a,b], F\right)$ et :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \widetilde{f'}.$$

IV Dérivation d'une limite

Théorème 19.15. $f \in \left(F^I\right)^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in F^I$. *On suppose :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$,

(ii) $\exists a \in I,\ \left(f_n(a)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge,*

(iii) $f'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} \varphi$ *sur tout intervalle borné de I.*

Alors il existe $\Phi \in F^I$ t.q.

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \Phi$,

(ii) $\Phi \in \mathcal{C}^1(I,F)$ *et* $\Phi' = \varphi$,

(iii) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \Phi$ *sur tout intervalle borné de* I.

Démonstration. Montrer d'abord que $\varphi \in \mathcal{C}^0(I,F)$. Soit $a \in I$ tel que $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in F$. Poser :

$$\Phi : x \in I \longmapsto \ell + \int_a^x \varphi \in F.$$

(ii) est une conséquence du théorème fondamental de l'analyse (théorème 19.12). On va montrer (iii), et on en déduira aisément (i). Soit J un intervalle borné de I. Quitte à agrandir J, on peut supposer $a \in J$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, on a :

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - \Phi(x)\|_F &= \left\| f_n(a) + \int_a^x f_n' - \ell - \int_a^x \varphi \right\|_F \\ &\leqslant \|f_n(a) - \ell\|_F + \left\| \int_a^x (f_n' - \varphi) \right\|_F \\ &\leqslant \|f_n(a) - \ell\|_F + \delta(J) \cdot \|f_n' - \varphi\|_J^\infty ,\end{aligned}$$

où $\delta(J) = \sup J - \inf J$. Donc :

$$\|f_n - \Phi\|_J^\infty \leqslant \|f_n(a) - \ell\|_F + \delta(J) \cdot \|f_n' - \varphi\|_J^\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Remarque 19.16. *Le théorème précédent reste valable avec les modifications suivantes :*

(i) *On peut remplacer “sur tout intervalle borné de I” par “sur tout segment de I”.*

(ii) *On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par dérivable.*

Exemple 19.17. *La fonction suivante est dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$:*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.$$

Proposition 19.18. $f \in \left(F^I\right)^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in F^I$. *On suppose :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^p(I,F)$,

(ii) $\forall k \in [\![0, p[\![,\ \exists a_k \in I,\ \left(f_n^{(k)}(a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge,*

(iii) $f_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \varphi$ *sur tout intervalle borné de* I*.*

Alors il existe $\Phi \in F^I$ *t.q.*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \Phi$,

(ii) $\Phi \in \mathcal{C}^p(I, F)$,

(iii) $\forall k \in [\![0, p]\!],\ f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \Phi^{(k)}$ *sur tout intervalle borné de* I*.*

V Dérivation sous le signe somme

Théorème 19.19. $u \in \left(F^I\right)^{\mathbb{N}}$*. On suppose :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$,

(ii) $\exists a \in I,\ \sum u_n(a)$ *converge,*

(iii) $\sum u_n'$ *converge uniformément sur tout intervalle borné de* I*.*

Alors :

(i) $\sum u_n$ *converge simplement, et on pose :*

$$S : x \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

(ii) $S \in \mathcal{C}^1(I, F)$ *et :*

$$\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x),$$

(iii) $\sum u_n$ *converge uniformément sur tout intervalle borné de* I*.*

Proposition 19.20. $u \in \left(F^I\right)^{\mathbb{N}}$*. On suppose :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{C}^p(I, F)$,

(ii) $\forall k \in [\![0, p[\![,\ \exists a_k \in I,\ \sum u_n^{(k)}(a_k)$ *converge,*

(iii) $\sum u_n^{(p)}$ *converge uniformément sur tout intervalle borné de* I*.*

Alors :

(i) $\sum u_n$ *converge simplement, et on pose :*

$$S : x \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

(ii) $S \in \mathcal{C}^p(I, F)$ *et :*

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(x),$$

(iii) $\sum u_n$ *converge uniformément sur tout intervalle borné de* I.

Chapitre 20

Séries Entières

I Généralités

Définition 20.1 (Série entière)**.** *On appelle* série entière *toute série de fonctions* $\sum f_n$*, t.q. il existe* $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *t.q. pour* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$f_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

La série entière $\sum f_n$ *sera notée (abusivement)* $\sum a_n z^n$*.*

Lemme 20.2 (Lemme d'Abel)**.** $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z_0 \in \mathbb{C}$.

(i) *Si la suite* $(a_n Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, alors* $\forall \rho \in \left]0, |Z_0|\right[$, $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur* $\mathcal{B}_f(0, \rho)$*.*

(ii) *Si la suite* $(a_n Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée, alors* $\forall Z \in \mathbb{C}$, $|Z| \geqslant |Z_0| \Longrightarrow \sum a_n Z^n$ *diverge.*

Proposition 20.3. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. On pose :*

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Alors I *est un intervalle de* $\mathbb{R}_+$ *contenant* 0*. Et on notera :*

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 20.4. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z \in \mathbb{C}$*.*

(i) *Si* $|Z| < \rho\left(\sum a_n z^n\right)$*, alors* $\sum a_n Z^n$ *converge absolument.*

(ii) *Si* $|Z| > \rho\left(\sum a_n z^n\right)$*, alors* $\sum a_n Z^n$ *diverge.*

Notation 20.5. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On notera :*

$$\mathcal{D}\left(\sum a_n z^n\right) = \left\{Z \in \mathbb{C},\ \sum a_n Z^n \text{ converge}\right\}.$$

Proposition 20.6. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On note* $D = \mathcal{D}\left(\sum a_n z^n\right)$ *et* $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(i) *Si* $R = 0$, *alors* $D = \{0\}$.

(ii) *Si* $R \in \mathbb{R}_+^*$, *alors :*

$$\mathcal{B}_o(0, R) \subset D \subset \mathcal{B}_f(0, R).$$

(iii) *Si* $R = +\infty$, *alors* $D = \mathbb{C}$.

Proposition 20.7. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On note* $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ *et on suppose que* $R \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

(i) *Pour tout* $Z \in \mathcal{B}_o(0, R)$, *la série* $\sum a_n Z^n$ *converge de façon géométrique.*

(ii) *La série entière* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur tout compact inclus dans* $\mathcal{B}_o(0, R)$.

II Détermination du rayon de convergence

II.1 Observation des suites $(a_n Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 20.8. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z \in \mathbb{C}$.

(i) *Si* $\sum a_n Z^n$ *converge, alors* $|Z| \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. *Sinon,* $|Z| \geqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(ii) *Si* $a_n Z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *alors* $|Z| \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. *Sinon,* $|Z| \geqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(iii) *Si* $(a_n Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, alors* $|Z| \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. *Sinon,* $|Z| \geqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

II.2 Plasticité des a_n

Proposition 20.9. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Alors :*

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum |a_n|\, z^n\right).$$

Proposition 20.10. $(a, b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *Alors :*

$$a_n = \mathcal{O}\left(b_n\right) \Longrightarrow \rho\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant \rho\left(\sum b_n z^n\right).$$

Démonstration. Si $\rho\left(\sum b_n z^n\right) = 0$, l'inégalité est bien vérifiée. Sinon, soit $r \in [0, \rho\left(\sum b_n z^n\right)[$. Alors $\sum b_n r^n$ converge absolument, et $a_n r^n = \mathcal{O}\left(b_n r^n\right)$, donc $\sum a_n r^n$ converge absolument. Donc $r \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. On a montré :

$$\forall r \in \left[0, \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right[,\ r \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

En faisant tendre $r \to \rho\left(\sum b_n z^n\right)$, il vient $\rho\left(\sum b_n z^n\right) \leqslant \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. □

Corollaire 20.11. $(a, b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *Alors :*

$$a_n = \mathcal{O}\left(b_n\right) \text{ et } b_n = \mathcal{O}\left(a_n\right) \Longrightarrow \rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum b_n z^n\right).$$

Proposition 20.12. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Si* $\varepsilon \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *stationne en* 0, *alors :*

$$\rho\left(\sum \left(a_n + \varepsilon_n\right) z^n\right) = \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

Proposition 20.13. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Alors :*

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum a_{n+1} z^n\right).$$

II.3 Opérations algébriques

Proposition 20.14. $(a, b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *Alors :*

$$\rho\left(\sum \left(a_n + b_n\right) z^n\right) \geqslant \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right],$$

avec égalité dès que $\rho\left(\sum a_n z^n\right) \neq \rho\left(\sum b_n z^n\right)$.

Proposition 20.15. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. *Alors :*

$$\rho\left(\sum a_n \lambda^n z^n\right) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

Notation 20.16 (Séries lacunaires)**.** $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, φ *une extraction. Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :*

$$u_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^{\varphi(n)} \in \mathbb{C}.$$

La série $\sum u_n$ *n'est pas à proprement parler une série entière, cependant on lui associera la série entière* $\sum b_n z^n$, *où* $b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *est définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{\varphi(n)} = a_n \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \backslash \varphi(\mathbb{N}),\ b_n = 0.$$

La série entière $\sum b_n z^n$ *sera notée* $\sum a_n z^{\varphi(n)}$.

Exemple 20.17. $\rho\left(\sum n!z^{n!}\right) = 1.$

Proposition 20.18. *$(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. On note c le produit de Cauchy de a et b :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

Alors :

$$\rho\left(\sum c_n z^n\right) \geqslant \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right].$$

Et :

$$\forall Z \in \mathbb{C},\ |Z| < \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right] \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n\right).$$

II.4 Règle de d'Alembert

Proposition 20.19. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose :*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors :

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \frac{1}{\ell}.$$

III Dérivation complexe

Définition 20.20 (ℂ-dérivation)**.** *Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$. $f \in \mathbb{C}^{\Omega}$, $\omega \in \Omega$. On dit que f est* ℂ-dérivable *en ω lorsque $z \in \Omega\backslash\{\omega\} \longmapsto \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}$ admet une limite en ω. On définit alors :*

$$f'(\omega) = \lim_{\substack{z\to\omega \\ z\neq\omega}} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}.$$

Proposition 20.21. *$P = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors P est ℂ-dérivable en tout point de $\mathbb{C}$, et sa ℂ-dérivée est égale à sa dérivée formelle :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P'(z) = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)\lambda_{k+1} z^k.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{P(z+h)-P(z)}{(z+h)-z} &= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{d}\lambda_k\left[(z+h)^k - z^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{d}\lambda_k\sum_{j=0}^{k-1}(z+h)^j\, z^{k-1-j} \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{k=1}^{d} k\lambda_k z^{k-1}.\end{aligned}$$

□

Proposition 20.22. *Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$. $f \in \mathbb{C}^\Omega$. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω alors f' est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.*

Proposition 20.23. *Ω,$\mathcal{U}$ ouverts non vides de $\mathbb{C}$. $(f,g) \in \left(\mathbb{C}^\Omega\right)^2$, $h \in \mathbb{C}^{\mathcal{U}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\omega \in \Omega$ t.q. $f(\omega) \in \mathcal{U}$.*

(i) *Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en ω, et h est $\mathbb{C}$-dérivable en $f(\omega)$, alors $(h \circ f)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en ω, et :*

$$(h \circ f)'(\omega) = f'(\omega)\cdot h'(f(\omega)).$$

(ii) *Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en ω, alors $(\lambda f + \mu g)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en ω, et :*

$$(\lambda f + \mu g)'(\omega) = \lambda f'(\omega) + \mu g'(\omega).$$

(iii) *Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en ω, alors fg est $\mathbb{C}$-dérivable en ω, et :*

$$(fg)'(\omega) = f'(\omega)g(\omega) + f(\omega)g'(\omega).$$

Théorème 20.24. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on suppose $R \in]0,+\infty]$. On définit :*

$$S : Z \in \mathcal{B}_o(0,R) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{C}.$$

Alors :

(i) $\rho\left(\sum (n+1)a_{n+1}z^n\right) = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(ii) *S est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathcal{B}_o(0,R)$, et :*

$$\forall Z \in \mathcal{B}_o(0,R),\ S'(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}Z^n.$$

Démonstration. (i) Soit $r \in [0, \rho\left(\sum a_n z^n\right)[$. Soit $r' \in]r, \rho\left(\sum a_n z^n\right)[$. Alors :

$$(n+1)\left|a_{n+1}\right| r^n = \frac{n+1}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^n \left|a_{n+1}\right| r'^{n+1} = o\left(\left|a_{n+1}\right| r'^{n+1}\right).$$

Or $\sum a_{n+1} r'^{n+1}$ converge absolument car $r' < \rho\left(\sum a_n z^n\right)$; donc $\sum (n+1) a_{n+1} r^n$ converge absolument, d'où $r \leqslant \rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right)$. Ceci montre que $\rho\left(\sum a_n z^n\right) \leqslant \rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right)$. Montrer l'autre inégalité. (ii) Soit $Z_0 \in \mathcal{B}_o(0, R)$, $h \in \mathbb{C}$ t.q. $(Z_0 + h) \in \mathcal{B}_o(0, R) \setminus \{Z_0\}$. Montrer d'abord :

$$\frac{S\left(Z_0+h\right)-S\left(Z_0\right)}{\left(Z_0+h\right)-Z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1}\left(Z_0+h\right)^j Z_0^{n-1-j}.$$

Soit alors $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f\left(Z_0, r\right) \subset \mathcal{B}_o(0, R)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n : h \in \mathcal{B}_f(0, r) \longmapsto a_n \sum_{j=0}^{n-1}\left(Z_0+h\right)^j Z_0^{n-1-j}.$$

P_n est $\mathcal{C}^0$ (car polynomiale) sur $\mathcal{B}_f(0, r)$. On a vu que $\sum P_n$ converge simplement. Montrons que la convergence est normale :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{B}_f(0, r), \left|P_n(h)\right| &\leqslant \left|a_n\right| \sum_{j=0}^{n-1}\left(\left|Z_0\right|+r\right)^j\left(\left|Z_0\right|+r\right)^{n-1-j} \\ &= n\left|a_n\right|\left(\left|Z_0\right|+r\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left\|P_n\right\|_{\infty} \leqslant n\left|a_n\right|\left(\left|Z_0\right|+r\right)^{n-1}.$$

Or $\left|Z_0\right| + r < R = \rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right)$ d'après le (i), donc $\sum n\left|a_n\right|\left(\left|Z_0\right|+r\right)^{n-1}$ converge, d'où $\sum P_n$ converge normalement. D'après le théorème 17.25, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{S\left(Z_0+h\right)-S\left(Z_0\right)}{\left(Z_0+h\right)-Z_0} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} P_n(h) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \sum_{n=1}^{N} P_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n Z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 21

L'Exponentielle Complexe

I Définition

Proposition 21.1. $\rho\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$.

Définition 21.2 (Exponentielle)**.** *On définit :*

$$\exp : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right. .$$

Proposition 21.3. $\exp \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Proposition 21.4. $\exp$ *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en tout point de* $\mathbb{C}$ *et :*

$$\exp' = \exp.$$

Proposition 21.5.

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Corollaire 21.6. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est un morphisme de groupes de* $(\mathbb{C}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 21.7.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$

Définition 21.8 (Cosinus et sinus)**.** *On définit :*

$$\cos : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \end{array} \right. .$$

Proposition 21.9.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{i}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{ii}$$

Proposition 21.10. $\cos$ *et* $\sin$ *sont* $\mathbb{C}$*-dérivables et :*

$$\cos' = -\sin \qquad \textit{et} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Proposition 21.11. $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$

Définition 21.12 (Cosinus et sinus hyperboliques)**.** *On définit :*

$$\mathrm{ch} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \end{array} \right. \qquad \textit{et} \quad \mathrm{sh} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \end{array} \right. \cdot$$

Proposition 21.13.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{i}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{ii}$$

Proposition 21.14. ch *et* sh *sont* $\mathbb{C}$*-dérivables et :*

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\,.$$

Proposition 21.15.

(i) $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \mathrm{ch}(iz),$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = -i\,\mathrm{sh}(iz).$

II Exponentielle réelle

Définition 21.16 (Logarithme)**.** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est une bijection. On posera* $\ln = \exp^{-1}$*.*

Théorème 21.17.

(i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est un isomorphisme de groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$*.*

(ii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est un homéomorphisme.*

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est un* $\mathcal{C}^\infty$*-difféomorphisme, i.e.* exp *et* $\exp^{-1}$ *sont* $\mathcal{C}^\infty$*.*

Notation 21.18 (e)**.** *On pose* $e = \exp(1)$*.*

Proposition 21.19. $e \notin \mathbb{Q}$*.*

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^q = \frac{n+2}{n!(n+1)^2}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{n+2}{n!(n+1)^2}.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n < p \cdot \frac{n!}{q} \leqslant A_n + \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

En choisissant $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 \geqslant q$ et $\frac{n_0+2}{(n_0+1)^2} < 1$, il vient $A_{n_0} < p \cdot \frac{n_0!}{q} < A_{n_0} + 1$. C'est absurde car $p \cdot \frac{n_0!}{q} \in \mathbb{N}$. □

Notation 21.20. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $z \in \mathbb{C}$*, on pose :*

$$a^z = \exp\left(z \ln(a)\right).$$

Avec cette notation, on a $\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = e^z$*.*

III Exponentielle des imaginaires purs

Notation 21.21. *On pose* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$*.*

Proposition 21.22.

(i) $\mathbb{U}$ *est compact et connexe par arcs (car c'est la sphère unité de* $\mathbb{C}$*).*

(ii) $(\mathbb{U}, \times)$ *est un groupe.*

Proposition 21.23. $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$.

Définition 21.24 (π)**.** *On considère* $\mathcal{A} = \{\theta \in \mathbb{R}_+,\ \cos(\theta) = 0\}$*. Alors* $\mathcal{A}$ *possède un plus petit élément, noté* $\frac{\pi}{2}$*.*

Démonstration. cos est $\mathcal{C}^0$, et $\cos(0) = 1 > 0$. En utilisant la proposition 3.14, montrer que $\cos(2) < 0$. En déduire avec le théorème des valeurs intermédiaires que $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Et $\mathcal{A}$ est minoré par 0 donc $\inf \mathcal{A}$ existe. Or $\mathcal{A}$ est fermé car $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \cap \cos^{-1}(\{0\})$, donc $\min \mathcal{A}$ existe. □

Proposition 21.25.

(i) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$,

(ii) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,

(iii) $e^{i\pi} = -1$,

(iv) $e^{2i\pi} = 1$.

Démonstration. (i) Revenir à la définition de cos et sin. (ii) Par définition de π et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\cos \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or $\sin' = \cos$ donc $\sin \nearrow$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et $\sin(0) = 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$. Or $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, d'où $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. □

Théorème 21.26. *On considère :*

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{array} \right. .$$

Alors φ est un morphisme de groupes surjectif et $\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

IV Autour de l'argument

Lemme 21.27. *L'application*

$$\psi : \left| \begin{array}{r} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (\rho, z) \longmapsto \rho z \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 21.28. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est un morphisme de groupes surjectif et* $\operatorname{Ker}\exp = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Vocabulaire 21.29 (Argument)**.** $z \in \mathbb{C}$. *On appelle* argument *de z tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$.*

Vocabulaire 21.30 (Détermination continue de l'argument)**.** *On appelle* détermination continue de l'argument *tout couple (Ω, α) t.q. Ω est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ avec :*

$$\forall z \in \Omega,\ z = |z|\, e^{i\alpha(z)}.$$

Théorème 21.31 (Théorème du relèvement angulaire)**.** *I intervalle de $\mathbb{R}$.*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U}),\ \exists \vartheta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}),\ \forall t \in I,\ \varphi(t) = e^{i\vartheta(t)}.$$

Chapitre 22

Développements en Séries Entières

Notation 22.1. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

I Généralités

Définition 22.2 (Développement en série entière)**.** $A \subset \mathbb{K},\ \omega \in A,\ f \in \mathbb{C}^A$.

(i) *On dit que* f *est* développable en série entière en ω sur A tout entier *lorsque :*

$$\exists a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall z \in A,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n.$$

(ii) *On dit que* f *est* développable en série entière autour de ω *lorsque :*

$$\exists V \in \mathcal{V}(\omega),\ \exists a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall z \in A \cap V,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n.$$

Vocabulaire 22.3. $A \subset \mathbb{K},\ \omega \in \mathring{A},\ f \in \mathbb{C}^A$. *On appelle* développement en série entière de f autour de ω *toute série entière* $\sum a_n (z-\omega)^n$*, avec* $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, t.q. il existe* $r > 0$ *t.q.* $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset A$ *et :*

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(\omega, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n.$$

Exemple 22.4. *Pour tout* $\omega \in \mathbb{C}$*,* $\exp$ *est développable en série entière en* ω *sur* $\mathbb{C}$ *tout entier, et :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^\omega}{n!}(z-\omega)^n.$$

Proposition 22.5. $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$*. On note* $R_a = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$*,* $R_b = \rho\left(\sum b_n z^n\right)$*. On suppose que :*

$$\exists r \in \left]0, \min\left(R_a, R_b\right)\right],\ \forall x \in \left]-r, r\right[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Alors $a = b$*.*

Démonstration. Poser

$$A : x \in \left]-r, r\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B : x \in \left]-r, r\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Montrer que A et B sont $\mathcal{C}^\infty$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{B^{(n)}(0)}{n!}.$$

En déduire $a = b$. □

Corollaire 22.6. $A \subset \mathbb{K}$*,* $\omega \in \mathring{A}$*,* $f \in \mathbb{C}^A$*. Si* f *admet un développement en série entière autour de* ω*, alors il est unique.*

Proposition 22.7. $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$*. On note* $R_a = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$*,* $R_b = \rho\left(\sum b_n z^n\right)$*. On suppose que :*

$$\exists w \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{\mathbb{N}},\ \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N},\ |w_p| < \min\left(R_a, R_b\right) \\ w_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \\ \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_p^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w_p^n \end{cases}.$$

Alors $a = b$*.*

Proposition 22.8. $A \subset \mathbb{K}$*,* $\omega \in \mathring{A}$*. On pose :*

$$\mathcal{G} = \left\{f \in \mathbb{C}^A,\ f \text{ est développable en série entière en } \omega \text{ sur } A \text{ tout entier}\right\},$$
$$\mathcal{L} = \left\{f \in \mathbb{C}^A,\ f \text{ est développable en série entière autour de } \omega\right\}.$$

Alors :

(i) $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{L}$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{C}^A$*.*

(ii) $\left\{f_{|\mathring{A}},\ f \in \mathcal{G}\right\} \subset \mathcal{C}^0\left(\mathring{A}, \mathbb{C}\right)$.

(iii) $\mathcal{L}$ *est stable par produit.*

II Composition des développements en séries entières

Proposition 22.9. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on pose :*

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0,R) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit $\omega \in \mathcal{B}_o(0,R)$; on note $r = R - |\omega| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors f est développable en série entière autour de ω sur $\mathcal{B}_o(\omega, r)$ tout entier.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{B}_o(0,r)$. Comme $|\omega + h| < R$:

$$f(\omega+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k}\omega^{n-k}h^k.$$

On définit :

$$u : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (n,k) & \longmapsto & \begin{cases} a_n \binom{n}{k}\omega^{n-k}h^k & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \end{array} \right. .$$

On a :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} |u(n,k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|\omega| + |h|\right)^n < +\infty,$$

car $|\omega| + |h| < R$. Donc $\left(u\left(n,k\right)\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Ainsi :

$$f(\omega+h) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} u(n,k) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} u(n,k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n\binom{n}{k}\omega^{n-k}\right)h^k.$$

Donc f est développable en série entière autour de ω. □

Théorème 22.10. *$\Omega, \mathcal{U}$ ouverts de $\mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$, $f \in \mathcal{U}^{\Omega}$, $g \in \mathbb{C}^{\mathcal{U}}$. On suppose :*

(i) *f est développable en série entière autour de ω,*

(ii) *g est développable en série entière autour de $f(\omega)$.*

Alors $(g \circ f)$ est développable en série entière autour de ω.

Démonstration. Par translation, se ramener à $\omega = f(\omega) = (g\circ f)(\omega) = 0$. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$, $(r,R) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ t.q. $\mathcal{B}_o(0,r) \subset \Omega$ et $\mathcal{B}_o(0,R) \subset \mathcal{U}$ et :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0,r),\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \forall Z \in \mathcal{B}_o(0,R),\ g(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z^n.$$

Quitte à diminuer r, on peut supposer $f\left(\mathcal{B}_o(0,r)\right) \subset \mathcal{B}_o(0,R)$ (par continuité de f en 0). Soit $z \in \mathcal{B}_o(0,r)$. Alors :

$$(g \circ f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k \\ i_1 + \cdots + i_n = k}} b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n} z^k.$$

On note $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = \left(b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n} z^k\right)_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\, n \leqslant k \\ i_1 + \cdots + i_n = k}}$. Montrons que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable. Comme $\rho\left(\sum a_n z^n\right) > 0$ et $\rho\left(\sum b_n z^n\right) > 0$, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(A, B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \alpha A^n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant \beta B^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda} |u_\lambda| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k \\ i_1 + \cdots + i_n = k}} |b_n| \cdot |a_{i_1}| \cdots |a_{i_n}| \cdot |z|^k \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \beta B^n \alpha^n \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k \\ i_1 + \cdots + i_n = k}} (A\,|z|)^k \\
&= \beta \sum_{n=1}^{\infty} (B\alpha)^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} (A\,|z|)^j\right)^n \qquad \text{en supposant } |z| < \frac{1}{A} \\
&= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B\alpha A\,|z|}{1 - A\,|z|}\right)^n < +\infty \qquad \text{en supposant } \frac{B\alpha A\,|z|}{1 - A\,|z|} < 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\rho \leqslant \min\left(r, \frac{1}{A}\right)$ t.q. $\forall x \in [0, \rho[,\ \frac{B\alpha A x}{1 - A x} < 1$, alors pour $z \in \mathcal{B}_o(0, \rho)$, la famille $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable. Donc :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, \rho)\,,\ (g \circ f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k \\ i_1 + \cdots + i_n = k}} b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n}\right) z^k.$$

Donc $(g \circ f)$ est développable en série entière autour de 0. $\square$

III Développements en séries entières des fractions rationnelles

Proposition 22.11. *Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère $f_p : z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \longmapsto \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$. Alors f_p est développable en série entière autour de 0, et :*

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0,1),\ \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Démonstration. Noter que $\forall z \in \mathcal{B}_o(0,1)$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. En déduire le résultat, soit en utilisant la $\mathbb{C}$-dérivation, soit par récurrence en utilisant des produits de Cauchy. $\square$

Application 22.12. $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$. *Alors la somme de $\sum P(n)z^n$ est une fraction rationnelle, que l'on peut calculer explicitement.*

Démonstration. Avant tout, $\rho\left(\sum P(n)z^n\right) = 1$. Soit $d \geqslant \deg P$. Remarquer que $((X+k)\cdots(X+1))_{k\in[\![0,d]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. Soit donc $(a_0,\dots,a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ t.q. $P = \sum_{k=0}^{d} a_k\,(X+k)\cdots(X+1)$. On a, pour $z \in \mathcal{B}_o(0,1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k(n+k)\cdots(n+1)\right) z^n\\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)z^n\\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k k! \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k k!}{(1-z)^{k+1}}.\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 22.13. $F \in \mathbb{C}(X)\backslash\mathbb{C}[X]$. *On pose Z l'ensemble des pôles de F et on suppose $0 \notin Z$. On pose :*

$$r = \min_{\omega\in Z} |\omega| > 0.$$

Alors F est développable en série entière en 0 sur $\mathcal{B}_o(0,r)$ tout entier.

Démonstration. Par linéarité des développements en séries entières, il suffit de montrer que tout polynôme et que toute fonction de la forme $z \longmapsto \frac{1}{(z-\omega)^j}$, où $\omega \in Z$ et $j \in \mathbb{N}^*$, sont développables en séries entières en 0 sur $\mathcal{B}_o(0,r)$ tout entier. $\square$

IV Cas des fonctions de la variable réelle

Proposition 22.14. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on pose :*

$$f : x \in \left]-R, R\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors f est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-R, R\right[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

De plus, la convergence est normale sur tout segment inclus dans $\left]-R, R\right[$.

Proposition 22.15. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on pose :*

$$f : x \in \left]-R, R\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors l'application

$$F : x \in \left]-R, R\right[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Exemple 22.16. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction $x \in]-1, 1[\longmapsto (1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 sur $]-1, 1[$ tout entier. Et :*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Démonstration. On pose $\varphi_\alpha : x \in]-1, 1[\longmapsto (1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)\varphi_\alpha'(x) = \alpha \varphi_\alpha(x).$$

Poser $h : x \in]-1, 1[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ et montrer que h est solution de la même équation différentielle que φ_α, et que $h(0) = \varphi_\alpha(0)$, d'où $h = \varphi_\alpha$. $\square$

Exemple 22.17. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on pose :*

$$f : x \in \left]-R, R\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors $(\exp \circ f)$ est développable en série entière autour de 0.

Démonstration. Noter que :

$$(\exp \circ f)' = f' \cdot (\exp \circ f) .$$

On définit $b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $b_0 = (\exp \circ f)(0)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} b_k (n-k+1) a_{n-k+1}.$$

Il faut d'abord montrer que $\rho\left(\sum b_n z^n\right) > 0$. Pour cela, on va utiliser la *méthode des séries majorantes.* Soit d'abord $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \alpha A^n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |b_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} b_k (n-k) a_{n-k} \right| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \frac{n-k}{n} A^{n-k}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{|b_n|}{A^n} \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{A^k} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{A^k}.$$

Définir alors $\gamma \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $\gamma_0 = \frac{|b_0|}{A^0}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = \alpha (1+\alpha)^{n-1} \gamma_0$, et en déduire :

$$\frac{|b_n|}{A^n} \leqslant \gamma_n = \mathcal{O}\left((1+\alpha)^n\right).$$

Donc $|b_n| = \mathcal{O}\left((A(\alpha+1))^n\right)$. Soit alors $\rho = \min\left(R, \frac{1}{A(\alpha+1)}\right)$. On pose :

$$S : x \in \left]-\rho, \rho\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Montrer que S est solution de la même équation différentielle que $(\exp \circ f)$, que $S(0) = (\exp \circ f)(0)$, d'où $(\exp \circ f)_{|]-\rho,\rho[} = S$. □

V Utilisation des formules de Taylor

Proposition 22.18. *I intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $f \in \mathbb{C}^I$. On suppose que f est développable en série entière autour de x_0 : il existe $(a,b) \in I^2$, avec $a < x_0 < b$, et $\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$\forall x \in]a,b[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n .$$

Alors $f_{|]a,b[}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Vocabulaire 22.19 (Série de Taylor)**.** *I intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. On appelle* série de Taylor *de f en x_0 la série de fonctions* $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Proposition 22.20. *I intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. On note $R = \rho\left(\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n\right)$. S'équivalent :*

(i) *f est développable en série entière autour de x_0.*

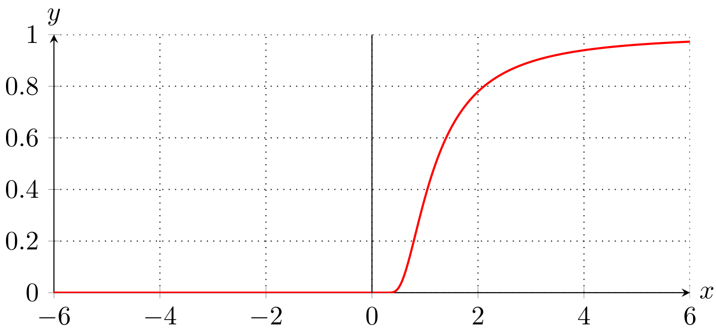
(ii) *$R > 0$ et il existe $r \in]0, R]$ t.q. $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$ et :*

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Exemple 22.21 (Résine $\mathcal{C}^\infty$)**.** *On considère :*

$$\psi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Alors ψ est $\mathcal{C}^\infty$, mais ψ n'est pas développable en série entière autour de 0.



Résine $\mathcal{C}^\infty$

Démonstration. En reprenant la démonstration de l'exemple 2.9, montrer que ψ est $\mathcal{C}^\infty$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi^{(n)}(0) = 0$. En déduire que la série de Taylor de ψ en 0 est identiquement nulle, donc ψ n'est pas développable en série entière autour de 0. □

Exemple 22.22. tan *est développable en série entière en* 0 *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *tout entier.*

Démonstration. On peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ car tan est impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\mathcal{H}(n) \;:\; \exists P_n \in \mathbb{R}_+[X],\, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\, \tan^{(n)}(x) = (P_n \circ \tan)(x).$$

Montrer par récurrence que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$. Écrire alors la formule de Taylor avec reste intégral (proposition 2.14) :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\, \forall n \in \mathbb{N},\, \tan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}_{R_n(x)}.$$

Comme les dérivées de tan sont toutes positives, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\, \forall n \in \mathbb{N},\, R_n(x) \leqslant \tan x.$$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé ; soit $y \in \left]x, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, en utilisant la croissance de $\tan^{(n+1)}$ (car $\tan^{(n+2)} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$), on a :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant R_n(x) &= \int_0^1 \frac{x^n}{n!} (1-u)^n \tan^{(n+1)}(ux) x \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(ux) \,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(uy) \,\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \tan y \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Généraliser cette formule à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en utilisant le fait que tan est impaire. □

VI Théorème de convergence radiale d'Abel

Théorème 22.23 (Théorème de convergence radiale d'Abel). $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $\sum a_n$ *converge. Alors* $\rho\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant 1$*, donc on définit à bon droit :*

$$f : x \in \left]-1, 1\right[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Et on a :

$$\lim_{1^-} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. On commence par effectuer une *transformation d'Abel* :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n+1})\, x^n = r_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(x^n - x^{n-1}\right)}_{\varphi(x)}.$$

Reste à montrer que $\lim_{1^-} \varphi = 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant N,\ |r_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[,\ |\varphi(x)| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} r_n \left(x^n - x^{n-1}\right)\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n-1} - x^n\right)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{n=1}^{N} r_n \left(x^n - x^{n-1}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or $x \longmapsto \sum_{n=1}^{N} r_n \left(x^n - x^{n-1}\right)$ est continue (car polynomiale) et s'annule en 1. Donc il existe $\eta \in]0,1[$ t.q. $\forall x \in \left]1-\eta, 1\right[,\ \left|\sum_{n=1}^{N} r_n \left(x^n - x^{n-1}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall x \in \left]1-\eta, 1\right[,\ |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc $\lim_{1^-} \varphi = 0$ et $\lim_{1^-} f = r_0$. ☐

Corollaire 22.24. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right) \in \mathbb{R}_+^*$ *et on définit :*

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0,R) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ *avec* $|\omega| = R$. *Si* $\sum a_n \omega^n$ *converge, alors :*

$$\lim_{\substack{z \to \omega \\ z \in [0,\omega[}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n.$$

Proposition 22.25. $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. *On note c le produit de Cauchy de a et b :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

On suppose que $\sum a_n$, $\sum b_n$ *et* $\sum c_n$ *sont convergentes. Alors :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Démonstration. Passer par les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ (dont les rayons sont $\geqslant 1$), et utiliser la proposition 20.18 puis le théorème 22.23. $\square$

Vocabulaire 22.26 (Procédé sommatoire)**.** *On appelle* procédé sommatoire *la donnée de :*

(i) *E sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum a_n \text{ converge} \Longrightarrow a \in E,$$

(ii) *$P \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ t.q.*

$$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum a_n \text{ converge} \Longrightarrow P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Exemple 22.27. *Deux exemples de procédés sommatoires :*

(i) Procédé de Cesàro *:*

$$E_C = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge au sens de Cesàro} \right\},$$

$$P_C : a \in E_C \longmapsto \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} a_j.$$

(ii) Procédé d'Abel *:*

$$E_A = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \rho\left(\sum a_n z^n \right) \geqslant 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ existe dans } \mathbb{C} \right\},$$

$$P_A : a \in E_A \longmapsto \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

VII Transmutation des o

Proposition 22.28. *$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose :*

(i) *$\rho\left(\sum b_n z^n\right) = +\infty$,*

(ii) *b ne stationne pas en 0,*

(iii) *$a_n = o(b_n)$.*

Alors $\rho\left(\sum a_n z^n\right) = +\infty$*, donc on définit à bon droit :*

$$A : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \textit{et} \quad B : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Alors :

$$A(x) = o_{+\infty}\left(B(x)\right).$$

Démonstration. Montrer d'abord que $\forall N \in \mathbb{N},\ x^N = o_{+\infty}\left(B(x)\right)$. En déduire le résultat. □

VIII Expression intégrale des coefficients

Proposition 22.29. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. On suppose que* $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right) > 0$ *et on définit :*

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0, R) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \left]0, R\right[,\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\ \mathrm{d}\theta.$$

Démonstration. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \left]0, R\right[$. On considère $g : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}$. Noter que :

$$\forall \theta \in \left[0, 2\pi\right],\ g(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}.$$

Montrer que la convergence est uniforme, donc on peut intégrer sous le signe somme :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\right) \mathrm{d}\theta &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\ \mathrm{d}\theta\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(a_p r^p \cdot 2\pi \delta_{np}\right) = 2\pi r^n a_n.\end{aligned}$$

□

Chapitre 23

Groupes

I Rappels

I.1 Morphismes de groupes

Définition 23.1 (Morphisme de groupes)**.** *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes. On dit que $\phi : G \to H$ est un* morphisme de groupes *lorsque*

$$\forall (x, y) \in G^2,\ \phi(x \cdot y) = \phi(x) \circ \phi(y).$$

Proposition 23.2. *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes. $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes. G' et H' des sous-groupes de G et H respectivement. Alors :*

(i) *$\phi(G')$ est un sous-groupe de H.*

(ii) *$\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.*

Définition 23.3 (Noyau)**.** *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H. $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes. On définit*

$$\operatorname{Ker} \phi = \phi^{-1}(\{e_H\}).$$

D'après la proposition 23.2, $\operatorname{Ker} \phi$ *est un sous-groupe de G.*

Proposition 23.4. *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H. $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes.*

$$\operatorname{Ker} \phi = \{e_G\} \iff \phi \text{ est injective.}$$

Vocabulaire 23.5. *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes. $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes.*

(i) ϕ *est dit* isomorphisme *si* ϕ *est bijectif.*
(ii) ϕ *est dit* endomorphisme *si* $G = H$*.*
(iii) ϕ *est dit* automorphisme *si* ϕ *est un endomorphisme bijectif.*

Vocabulaire 23.6. $(G, \cdot)$ *et* $(H, \circ)$ *deux groupes. On dit que* G *et* H *sont* isomorphes*, et on note* $G \simeq H$*, lorsqu'il existe un isomorphisme* $G \to H$*.*

I.2 Théorème de Lagrange

Théorème 23.7 (Théorème de Lagrange)**.** $(G, \cdot)$ *un groupe fini.* H *un sous-groupe de* G*. Alors le cardinal de* H *divise le cardinal de* G*.*

Démonstration. On définit sur G la relation $\mathcal{R}_H$ par :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x\mathcal{R}_H y \iff xy^{-1} \in H.$$

$\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence. On note $G/\mathcal{R}_H$ l'ensemble des classes d'équivalence. On vérifie que chaque classe d'équivalence est en bijection avec H. Donc :

$$|G| = \sum_{\gamma \in G/\mathcal{R}_H} |\gamma| = \sum_{\gamma \in G/\mathcal{R}_H} |H| = |H| \cdot |G/\mathcal{R}_H|.$$

□

I.3 Groupes engendrés

Définition 23.8 (Groupe engendré par une partie)**.** $(G, \cdot)$ *un groupe.* $A \subset G$*. On appelle* groupe engendré par A*, noté* $\langle A \rangle$*, le plus petit sous-groupe de* G *contenant* A*.*

Proposition 23.9. $(G, \cdot)$ *un groupe.* $A \subset G$*. Alors :*

$$\langle A \rangle = \left\{ a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_s^{\varepsilon_s},\ s \in \mathbb{N},\ (a_1, \ldots, a_s) \in A^s,\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{-1, 1\}^s \right\}.$$

Corollaire 23.10. $(G, \cdot)$ *un groupe.* $A \subset G$*. Si* A *est dénombrable, alors* $\langle A \rangle$ *est dénombrable.*

Proposition 23.11. $(G, \cdot)$ *un groupe.* $A \subset G$*. Si les éléments de* A *commutent deux à deux, alors* $\langle A \rangle$ *est un sous-groupe commutatif de* G*.*

Démonstration. Pour $B \subset G$, on note $\gamma(B) = \{x \in G,\ \forall b \in B,\ xb = bx\}$. Il est clair que, pour tout $B \subset G$, $\gamma(B)$ est un sous-groupe de G. On a ici $A \subset \gamma(A)$, donc $\langle A \rangle \subset \gamma(A)$. Autrement dit, $A \subset \gamma(\langle A \rangle)$. Donc $\langle A \rangle \subset \gamma(\langle A \rangle)$, ce qui signifie que $\langle A \rangle$ est commutatif. □

Vocabulaire 23.12 (Groupe monogène)**.** $(G, \cdot)$ *un groupe. On dit que* G *est* monogène *lorsqu'il existe* $g \in G$ *t.q.* $G = \langle g \rangle$*.* g *est alors dit* générateur *de* G*. On dit de plus que* G *est* cyclique *si* G *est monogène fini.*

II Groupes quotients

Définition 23.13 (Quotient)**.** *$(G, \cdot)$ un groupe commutatif. H un sous-groupe de G. On définit sur G la relation $\mathcal{R}_H$ par :*

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x\mathcal{R}_H y \iff xy^{-1} \in H.$$

$\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in G$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Et on définit :

$$G/H = \{\overline{x},\ x \in G\}.$$

Proposition 23.14. *$(G, \cdot)$ un groupe commutatif. H un sous-groupe de G. Il existe une unique LCI $\hat{\cdot}$ sur G/H t.q.*

(i) *$(G/H, \hat{\cdot})$ est un groupe,*

(ii) *L'application $\left|\begin{array}{l} G \longrightarrow G/H \\ x \longmapsto \overline{x} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes.*

Par la suite, G/H sera muni de $\hat{\cdot}$, que l'on notera simplement $\cdot$.

Proposition 23.15. *$(G, \cdot)$ et $(H, \circ)$ deux groupes. $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. On suppose que G est commutatif. Alors :*

$$\varphi(G) \simeq G/\operatorname{Ker}\varphi.$$

III Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 23.16 (Ordre d'un élément)**.** *$(G, \cdot)$ un groupe, $x \in G$. On définit l'*ordre *de x par :*

$$\omega(x) = |\langle x \rangle| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 23.17. *$(G, \cdot)$ un groupe, $x \in G$. On considère le morphisme de groupes suivant :*

$$\varphi : \left|\begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow G \\ n \longmapsto x^n \end{array}\right..$$

(i) *Si $\omega(x) = +\infty$, alors φ est injectif donc :*

$$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

(ii) *Si $m = \omega(x) < +\infty$, alors $\operatorname{Ker}\varphi = m\mathbb{Z}$ donc :*

$$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Corollaire 23.18. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe monogène.*

(i) *Si G est infini, alors $G \simeq \mathbb{Z}$.*

(ii) *Si $m = |G| \in \mathbb{N}$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Proposition 23.19. *$(G, \cdot)$ un groupe, $x \in G$ d'ordre fini. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (x^n = e \Longleftrightarrow \omega(x) \mid n)\,.$$

Proposition 23.20. *$(G, \cdot)$ un groupe, $(x, y) \in G^2$. On suppose :*

(i) *$xy = yx$,*

(ii) *$\omega(x) < +\infty$ et $\omega(y) < +\infty$.*

Alors $\omega(xy) < +\infty$ et :

$$\omega(xy) \mid (\omega(x) \vee \omega(y))\,.$$

Proposition 23.21. *$(G, \cdot)$ un groupe, $(x, y) \in G^2$. On suppose :*

(i) *$xy = yx$,*

(ii) *$\omega(x) < +\infty$ et $\omega(y) < +\infty$,*

(iii) *$\omega(x) \wedge \omega(y) = 1$.*

Alors $\omega(xy) < +\infty$ et :

$$\omega(xy) = (\omega(x) \vee \omega(y))\,.$$

Proposition 23.22. *Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.*

Proposition 23.23. *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est cyclique* ssi *$m \wedge n = 1$.*

IV Groupe symétrique

IV.1 Universalité de $\mathfrak{S}_n$

Proposition 23.24. *Si X est un ensemble de cardinal n, alors $\mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_n$.*

Proposition 23.25. *$(G, \cdot)$ un groupe de cardinal n. Alors G se plonge dans $\mathfrak{S}_n$, i.e. il existe un morphisme de groupes injectif de G dans $\mathfrak{S}_n$.*

Démonstration. Pour $g \in G$, on pose $\hat{g} : \left|\begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gx \end{array}\right.$. Alors l'application $\left|\begin{array}{l} G \longrightarrow \mathfrak{S}_G \\ g \longmapsto \hat{g} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes injectif de G dans $\mathfrak{S}_G$, ce qui permet de conclure car $\mathfrak{S}_G \simeq \mathfrak{S}_n$. $\square$

IV.2 Cycles et transpositions

Théorème 23.26. *Toute permutation s'écrit de manière unique à l'ordre près comme produit de cycles à supports disjoints.*

Proposition 23.27. *Soit $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de $\mathfrak{S}_n$ de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$. Alors :*

$$\omega\left(c_1 \cdots c_p\right) = \bigvee_{i=1}^{p} \ell_i.$$

Lemme 23.28. *Tout cycle est produit (non unique) de transpositions.*

Théorème 23.29. *Toute permutation est produit (non unique) de transpositions.*

IV.3 Signature

Lemme 23.30. *Le produit d'un nombre impair de transpositions n'est jamais égal à id.*

Proposition 23.31. *Soit $\tau_1, \ldots, \tau_p$, $\tau'_1, \ldots, \tau'_q$ des transpositions de $\mathfrak{S}_n$ t.q. $\tau_1 \cdots \tau_p = \tau'_1 \cdots \tau'_q$. Alors $p \equiv q \quad [2]$.*

Définition 23.32 (Signature)**.** *On définit $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ par, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ où p est un entier tel qu'il existe des transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_p$ t.q. $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_p$.*

Proposition 23.33. *$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes, et ε est surjectif dès que $n \geqslant 2$.*

Définition 23.34 (Groupe alterné)**.** *On définit :*

$$\mathfrak{A}_n = \operatorname{Ker} \varepsilon = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon\left(\sigma\right) = 1\right\}.$$

$\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, dit groupe alterné*, et :*

$$\forall n \geqslant 2,\ |\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}.$$

Proposition 23.35. *Les seuls morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ sont 1 et ε.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme. *Première étape* : toutes les transpositions ont la même image. Soit τ et τ' deux transpositions. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$. En déduire $\varphi\left(\tau'\right) = \varphi(\tau)$. *Deuxième étape* : l'image d'une transposition est -1 ou 1. Soit τ une transposition. On a $\varphi(\tau)^2 = 1$ donc $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$. *Conclusion* : si l'image des transpositions est -1, alors $\varphi = \varepsilon$, sinon $\varphi = 1$. □

V Conjugaison dans un groupe

V.1 Généralités

Définition 23.36 (Conjugaison)**.** *$(G, \cdot)$ un groupe, $(a, b) \in G^2$. On dit que a et b sont* conjugués *dans G lorsque :*

$$\exists g \in G,\ a = gbg^{-1}.$$

"Être conjugués" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées classes de conjugaison*.*

Notation 23.37. *Si $(G, \cdot)$ est un groupe, on note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G (muni de $\circ$).*

Proposition 23.38. *$(G, \cdot)$ un groupe. Pour $g \in G$, on pose :*

$$\varphi_g : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gxg^{-1} \end{array} \right. .$$

φ_g est un automorphisme de G, dit automorphisme intérieur*. Et on définit :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g \longmapsto \varphi_g \end{array} \right. .$$

Alors Φ est un morphisme de groupes, avec $\mathrm{Ker}\,\Phi = Z(G)$. On note de plus $\mathrm{Int}(G) = \Phi(G)$.

V.2 Conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$

Lemme 23.39. *$\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_s)$ un cycle de $\mathfrak{S}_n$. Alors :*

$$\sigma \circ (a_1\, a_2\, \cdots\, a_s) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_s)).$$

Définition 23.40 (Type d'une permutation)**.** *$\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de $\mathfrak{S}_n$ de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$ avec $\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_p$ et t.q. $\sigma = c_1 \cdots c_p$. Le* type *de σ est alors le p-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$.*

Proposition 23.41. *Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées* ssi *elles ont le même type.*

Lemme 23.42. *Si $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ avec $n \neq 6$, alors l'image de toute transposition par ψ est une transposition.*

Démonstration. On remarque d'abord que l'image d'une classe de conjugaison par ψ est une classe de conjugaison. De plus, ψ conserve l'ordre : $\forall\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \omega\left(\psi(\sigma)\right) = \omega(\sigma)$. Pour $i \in \left[\!\left[1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$, on note :

$$\mathcal{C}_i = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \text{ est produit de } i \text{ transpositions à supports disjoints}\right\}.$$

Les $\mathcal{C}_i$ sont les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ contenant les permutations d'ordre 2. Donc il existe $j \in \left[\!\left[1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$ t.q. $\psi\left(\mathcal{C}_1\right) = \mathcal{C}_j$. On a alors $\mathfrak{S}_n = \psi\left(\mathfrak{S}_n\right) = \psi\left(\langle \mathcal{C}_1 \rangle\right) = \langle \psi\left(\mathcal{C}_1\right) \rangle = \langle \mathcal{C}_j \rangle$, donc j est impair (sinon on aurait $\mathfrak{S}_n = \langle \mathcal{C}_j \rangle \subset \mathfrak{A}_n$). Or, on a :

$$\forall i \in \left[\!\left[1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right],\ |\mathcal{C}_i| = \frac{n!}{2^i (n-2i)! i!}.$$

Ici on a $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_j|$, donc :

$$2^{j-1} = \frac{(n-2)!}{(n-2j)!j!} = \binom{n-j}{j}(n-2)\cdots(n-j+1).$$

On suppose par l'absurde $j > 1$. Dans ce cas, $j \geqslant 3$ (car j est impair), donc $n \geqslant 6$ (car $j \leqslant \frac{n}{2}$), d'où $n \geqslant 7$ (car $n \neq 6$). Alors $(n-2)\cdots(n-j+1) \mid 2^{j-1}$, donc $(n-2)$ est une puissance de 2 supérieure à 4. Si $j \geqslant 4$, alors $(n-3)$ est aussi une puissance de 2, ce qui est impossible. Donc $j = 3$, d'où $24 = (n-2)\cdots(n-5)$. C'est impossible pour $n \neq 6$. Ainsi, $j = 1$ et $\psi\left(\mathcal{C}_1\right) = \mathcal{C}_1$: l'image de toute transposition est une transposition. □

Lemme 23.43. *$(a, b, c, d) \in [\![1, n]\!]^4$, avec $a \neq b$ et $c \neq d$. Alors les transpositions $(a\,b)$ et $(c\,d)$ commutent* ssi *$\{a, b\} \cap \{c, d\}$ n'est pas un singleton.*

Proposition 23.44. *Si $n \neq 6$,* $\mathrm{Aut}\left(\mathfrak{S}_n\right) = \mathrm{Int}\left(\mathfrak{S}_n\right)$.

Démonstration. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on notera $\varphi_\tau : \sigma \in \mathfrak{S}_n \longmapsto \tau\sigma\tau^{-1} \in \mathfrak{S}_n$. On peut de plus supposer $n \geqslant 3$. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}\left(\mathfrak{S}_n\right)$. On sait que l'image de toute transposition par ψ est une transposition. Comme $(1\,2)$ et $(1\,3)$ ne commutent pas, leurs images par ψ ne commutent pas et on peut poser $(a\,b) = \psi\left((1\,2)\right)$ et $(a\,c) = \psi\left((1\,3)\right)$, avec $b \neq c$. Soit $s \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ et $s(c) = 3$. Quitte à remplacer ψ par $\varphi_s \circ \psi$, on peut supposer :

$$\psi\left((1\,2)\right) = (1\,2) \qquad \text{et} \qquad \psi\left((1\,3)\right) = (1\,3).$$

Si $n = 3$, on a $\psi = id \in \mathrm{Int}\left(\mathfrak{S}_n\right)$. On suppose donc $n \geqslant 4$. Soit $i \in [\![4, n]\!]$. $(1\,i)$ ne commute pas avec $(1\,2)$ donc $\psi\left((1\,i)\right)$ est de la forme $(1\,j)$ ou $(2\,j)$, pour $j \in [\![4, n]\!]$. De même, $(1\,i)$ ne commute pas avec $(1\,3)$ donc $\psi\left((1\,i)\right)$ est de la forme $(1\,j)$ ou $(3\,j)$. En déduire que $\psi\left((1\,i)\right) = (1\,j)$, pour $j \in [\![4, n]\!]$. Soit alors $\varrho \in \mathfrak{S}_n$ t.q.

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ \psi\left((1\,i)\right) = \left(1\,\varrho(i)\right).$$

Ainsi, ψ et φ_ϱ coïncident sur $\left\{(1\,i),\ i \in [\![2, n]\!]\right\}$ qui engendre $\mathfrak{S}_n$, donc $\psi = \varphi_\varrho \in \mathrm{Int}\left(\mathfrak{S}_n\right)$. □

Chapitre 24

Anneaux

I Généralités

Définition 24.1 (Anneau)**.** *Soit $\mathbb{A}$ un ensemble, $+$ et $\times$ deux LCI sur $\mathbb{A}$. On dit que $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un* anneau *lorsque :*

(i) $(\mathbb{A}, +)$ *est un groupe commutatif de neutre noté $0_{\mathbb{A}}$.*

(ii) $\times$ *est associative et distributive par rapport à $+$.*

(iii) $\times$ *admet un neutre noté $1_{\mathbb{A}}$ dans $\mathbb{A}$.*

Si de plus $\times$ est commutative, $\mathbb{A}$ est dit anneau commutatif*. Si $1_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}}$, alors $\mathbb{A} = \{0_{\mathbb{A}}\}$ et on dit que $\mathbb{A}$ est l'*anneau nul*.*

Proposition 24.2 (Formule du multinôme)**.** *$(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau, $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{A}^p$. On suppose que $x_1, \ldots, x_p$ commutent deux à deux. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_p!} x_1^{k_1} \times \cdots \times x_p^{k_p}.$$

Notation 24.3. *$(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. On pose :*

$$\mathbb{A}^* = \{a \in \mathbb{A},\ \exists b \in \mathbb{A},\ a \times b = b \times a = 1_{\mathbb{A}}\}.$$

Proposition 24.4. *$(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. Alors $(\mathbb{A}^*, \times)$ est un groupe.*

Définition 24.5 (Anneau intègre)**.** *$(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit que $\mathbb{A}$ est* intègre *lorsque :*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2,\ a \times b = 0_{\mathbb{A}} \Longrightarrow a = 0_{\mathbb{A}} \text{ ou } b = 0_{\mathbb{A}}.$$

Définition 24.6 (Corps)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un ensemble, $+$ et $\times$ deux LCI sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un* corps *lorsque :*

(i) $(\mathbb{K},+,\times)$ *est un anneau commutatif non nul.*

(ii) $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Proposition 24.7. *Tout corps est intègre.*

Définition 24.8 (Sous-anneau)**.** $(\mathbb{A},+,\times)$ *un anneau. On appelle* sous-anneau *de $(\mathbb{A},+,\times)$ tout $B \subset A$ t.q. :*

(i) *B est un sous-groupe de $(\mathbb{A},+)$,*

(ii) *B est stable par $\times$,*

(iii) $1_{\mathbb{A}} \in B$.

Proposition 24.9. $(\mathbb{A},+,\times)$ *un anneau. Si B est un sous-anneau de $(\mathbb{A},+,\times)$, alors $\left(B, +_{|B^2}, \times_{|B^2}\right)$ est un anneau (mais la réciproque est fausse).*

Exemple 24.10. *On considère $B = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $(B,+,\times)$ est un anneau, mais B n'est pas un sous-anneau de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.*

Proposition 24.11. $(\mathbb{A},+,\times)$ *un anneau. Si B est un sous-anneau de $(\mathbb{A},+,\times)$, alors :*

$$B^* \subset \mathbb{A}^* \cap B.$$

Définition 24.12 (Morphisme d'anneaux ou de corps)**.** $(\mathbb{A},+,\times)$ *et* $(\mathbb{B},+,\times)$ *deux anneaux (ou corps). On dit que $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est un* morphisme d'anneaux *(ou de corps) lorsque :*

(i) $\forall (a,b) \in \mathbb{A}^2,\ \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b),$

(ii) $\forall (a,b) \in \mathbb{A}^2,\ \phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$

(iii) $\phi(1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{B}}$.

Proposition 24.13. $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps,* $(\mathbb{A},+,\times)$ *un anneau non nul. Si $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{A}$ est un morphisme d'anneaux, alors ϕ est injectif.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Alors $\phi(x)\phi\left(x^{-1}\right) = 1_{\mathbb{A}}$, donc $\phi(x) \neq 0$, donc $x \notin \operatorname{Ker}\phi$. Ainsi, $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$. □

II L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 24.14 (Multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.** *On a construit le groupe commutatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ comme groupe quotient. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de $\times$ définie par :*

$$\times : \left| \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\overline{x},\overline{y}) & \longmapsto & \overline{xy} \end{array} \right. .$$

Alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau et l'application* $\left|\begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \longmapsto \overline{x} \end{array}\right.$ *est un morphisme d'anneaux.*

Proposition 24.15. $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau. L'ensemble* $\mathbb{A}_0 = \langle 1_{\mathbb{A}} \rangle$ *(le sous-groupe engendré par* $1_{\mathbb{A}}$ *dans* $(\mathbb{A}, +)$*) est un sous-anneau de* $(\mathbb{A}, +, \times)$*, dit* anneau premier *de* $\mathbb{A}$*.*

(i) *Si* $\mathbb{A}_0$ *est infini, alors* $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{Z}$ *(en tant qu'anneau).*

(ii) *Si* $|\mathbb{A}_0| = n$*, alors* $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(en tant qu'anneau).*

Proposition 24.16. $n \in \mathbb{N}^*$*,* $m \in \mathbb{Z}$*. S'équivalent :*

(i) $m \wedge n = 1$.

(ii) $\overline{m}$ *engendre* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(iii) $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Corollaire 24.17. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un corps* ssi n *est premier.*

Définition 24.18 (Indicatrice d'Euler)**.** *On définit :*

$$\varphi : \left|\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto |\{m \in [\![1, n]\!],\, m \wedge n = 1\}| \end{array}\right. .$$

Proposition 24.19. $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right| = \varphi(n)$.

(ii) *Si* $(G, \cdot)$ *est un groupe cyclique de cardinal* n*, alors* G *admet* $\varphi(n)$ *générateurs.*

Vocabulaire 24.20 (Fonctions multiplicatives)**.** $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}^*$.

(i) *On dit que* ψ *est* multiplicative *lorsque :*

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\, m \wedge n = 1 \Longrightarrow \psi(mn) = \psi(m)\psi(n).$$

(ii) *On dit que* ψ *est* totalement multiplicative *lorsque :*

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\, \psi(mn) = \psi(m)\psi(n).$$

Lemme 24.21. $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$*. On note* $s_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *et* $s_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *les surjections canoniques. Si* $m \mid n$*, alors il existe une unique application* $s_{n,m} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *t.q.*

$$s_m = s_{n,m} \circ s_n.$$

De plus, $s_{n,m}$ *est un morphisme surjectif d'anneaux.*

Théorème 24.22 (Théorème des restes chinois). $(n_1, \ldots, n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. *Si $n_1, \ldots, n_s$ sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\mathbb{Z}/\left(n_1 \cdots n_s\right)\mathbb{Z} \simeq \left(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\right) \times \cdots \times \left(\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}\right).$$

Plus précisément, en notant $N = n_1 \cdots n_s$, on pose :

$$T : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}) \\ \gamma & \longmapsto & (s_{N,n_1}(\gamma), \ldots, s_{N,n_s}(\gamma)) \end{array}\right.$$

Alors T est un morphisme d'anneaux, et T est un isomorphisme ssi *$n_1, \ldots, n_s$ sont premiers entre eux deux à deux.*

Corollaire 24.23. *φ est multiplicative.*

Démonstration. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \wedge n = 1$. Alors $\varphi(mn) = \left|(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*\right| = \left|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right| = \left|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*\right| \cdot \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right| = \varphi(m)\varphi(n)$. □

Corollaire 24.24.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = n \prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Démonstration. Montrer que $\forall p \in \mathbb{P},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(p^\alpha\right) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, puis conclure en utilisant le fait que φ est multiplicative. □

Proposition 24.25.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

Démonstration. Poser $A = \left\{\frac{k}{n},\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$ et, pour $d \mid n$:

$$A_d = \left\{x \in A,\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ q \wedge d = 1 \text{ et } x = \frac{q}{d}\right\}.$$

Montrer que $A = \bigsqcup_{d \mid n} A_d$ et en déduire le résultat. □

Proposition 24.26. $(G, \cdot)$ *un groupe. On suppose que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, G a au plus un sous-groupe de cardinal d. Alors G est cyclique.*

Démonstration. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on pose $B(d) = \{x \in G,\ \omega(x) = d\}$. On a $\forall d \in \mathbb{N}^*,\ |B(d)| \in \{0, \varphi(d)\}$. Donc :

$$n = |G| = \left|\bigsqcup_{d \mid n} B(d)\right| = \sum_{\substack{d \mid n \\ B(d) \neq \varnothing}} \varphi(d) \leqslant \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Par conséquent $\sum_{\substack{d \mid n \\ B(d) \neq \varnothing}} \varphi(d) = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$. Donc, pour tout $d \mid n$, $B(d) \neq \varnothing$. En particulier $B(n) \neq \varnothing$ donc G est cyclique. □

Proposition 24.27. $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps. Alors tout sous-groupe fini de* $(\mathbb{K}^*,\times)$ *est cyclique.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*,\times)$. On note $n=|G|$. Tout élément de G est racine du polynôme X^n-1, qui a au plus n racines, donc :

$$X^n-1=\prod_{\omega\in G}(X-\omega)\,.$$

Ceci montre que, pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, $(\mathbb{K}^*,\times)$ admet au plus un sous-groupe de cardinal d (ce sous-groupe étant l'ensemble des racines de X^d-1). Ainsi, pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, G admet au plus un sous-groupe de cardinal d. D'après la proposition 24.26, G est cyclique. □

Corollaire 24.28. $p\in\mathbb{P}$.

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\simeq\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

III Caractéristique d'un corps

Définition 24.29 (Caractéristique)**.** $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps. On considère* $1_{\mathbb{K}}$ *comme élément du groupe* $(\mathbb{K},+)$*.*

(i) *Si* $1_{\mathbb{K}}$ *est d'ordre infini, on dit que* $\mathbb{K}$ *est de* caractéristique nulle.

(ii) *Si* $1_{\mathbb{K}}$ *est d'ordre fini, alors* $\omega(1_{\mathbb{K}})$ *est un nombre premier appelé* caractéristique *de* $\mathbb{K}$ *et noté* $\operatorname{car}\mathbb{K}$*.*

Définition 24.30 (Corps premier)**.** $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps. On appelle* corps premier *de* $\mathbb{K}$*, noté* $\mathbb{K}_0$*, le plus petit sous-corps de* $\mathbb{K}$ *(au sens de l'inclusion).*

Proposition 24.31. $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps.*

(i) *Si* $\operatorname{car}\mathbb{K}=0$*, alors* $\mathbb{K}_0\simeq\mathbb{Q}$*.*

(ii) *Si* $\operatorname{car}\mathbb{K}=p$*, alors* $\mathbb{K}_0\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*.*

Vocabulaire 24.32 (Nombre primaire)**.** *On dit que* $n\in\mathbb{N}^*$ *est un* nombre primaire *lorsqu'il existe* $p\in\mathbb{P}$ *et* $\nu\in\mathbb{N}^*$ *t.q.* $n=p^\nu$*.*

Proposition 24.33. *Le cardinal d'un corps fini est un nombre primaire.*

Démonstration. Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps fini. Munir $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel par restriction de $\times$ à $\mathbb{K}_0\times\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est fini, il est de caractéristique finie, et de dimension finie en tant que $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel. En notant $p=\operatorname{car}\mathbb{K}$ et $d=\dim\mathbb{K}$, on a alors $|\mathbb{K}|=p^d$. □

Proposition 24.34. *Si* q *est un nombre primaire, alors il existe un unique corps de cardinal* q *(à isomorphisme près), et ce corps est noté* $\mathbb{F}_q$*.*

IV Idéaux

Définition 24.35 (Idéal)**.** $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau commutatif. On appelle* idéal *de* $\mathbb{A}$ *tout* $\mathfrak{I} \subset \mathbb{A}$ *t.q.*

(i) $\mathfrak{I}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{A}, +)$*,*

(ii) $\mathfrak{I}$ *est absorbant, i.e.* $\forall (a, x) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{I},\ ax \in \mathfrak{I}$*.*

Proposition 24.36. $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau commutatif.* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* $\mathbb{A}$*. S'équivalent :*

(i) $\mathfrak{I} = \mathbb{A}$*,*

(ii) $1_{\mathbb{A}} \in \mathfrak{I}$*,*

(iii) $\mathfrak{I} \cap \mathbb{A}^* \neq \varnothing$*.*

Proposition 24.37. *Toute intersection d'idéaux est un idéal.*

Définition 24.38 (Idéal engendré par une partie)**.** $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau commutatif,* $\Omega \subset \mathbb{A}$*. On notera* $\langle \Omega \rangle$ *le plus petit idéal de* $\mathbb{A}$ *contenant* Ω*.*

Proposition 24.39. $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau commutatif.*

(i) $\forall \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ \langle \Omega \rangle = \{a_1\omega_1 + \cdots + a_s\omega_s,\ s \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{A}^s,\ \omega \in \Omega^s\}$.

(ii) $\forall (g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{A}^r,\ \langle g_1, \ldots, g_r \rangle = g_1\mathbb{A} + \cdots + g_r\mathbb{A}$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{A},\ \langle x \rangle = x\mathbb{A}$.

Définition 24.40 (Idéal principal)**.** $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau commutatif. On dit que l'idéal* $\mathfrak{I} \subset \mathbb{A}$ *est* principal *lorsque :*

$$\exists x \in \mathbb{A},\ \mathfrak{I} = \langle x \rangle .$$

Définition 24.41 (Anneau principal)**.** *On dit que l'anneau intègre* $(\mathbb{A}, +, \times)$ *est* principal *lorsque tout idéal de* $\mathbb{A}$ *est principal.*

V Corps des fractions d'un anneau intègre

Notation 24.42. $(\mathbb{K}, +, \times)$ *un corps. Pour* $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$*, on note* $\frac{x}{y} = xy^{-1}$*.*

Définition 24.43 (Corps des fractions)**.** $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anneau intègre. On munit* $\mathbb{A} \times (\mathbb{A}\backslash\{0\})$ *d'une relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par :*

$$\forall \left((a, b), (c, d)\right) \in \left(\mathbb{A} \times (\mathbb{A}\backslash\{0\})\right)^2,\ (a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; on note $\mathbb{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $s : \mathbb{A} \times (\mathbb{A}\backslash\{0\}) \to \mathbb{K}$ la surjection canonique. Alors on peut munir $\mathbb{K}$ de $+$ et $\times$ t.q.

$$\forall\left((a,b),(c,d)\right) \in \left(\mathbb{A} \times (\mathbb{A}\backslash\{0\})\right)^2, \begin{cases} s(a,b) + s(c,d) = s(ad+bc, bd) \\ s(a,b) \times s(c,d) = s(ac, bd) \end{cases}.$$

$(\mathbb{K}, +, \times)$ *est alors un corps, dit* corps des fractions *de $\mathbb{A}$. Et l'application*

$$j : \left| \begin{array}{l} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K} \\ a \longmapsto s(a, 1_{\mathbb{A}}) \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif d'anneaux, ce qui permet d'identifier $a \in \mathbb{A}$ à $j(a)$ et de considérer que $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$.

Chapitre 25

Polynômes

I Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif

Notation 25.1. *Dans toute cette section,* $(\mathbb{A}, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Définition 25.2 (Polynômes)**.** *On définit :*

$$\mathbb{A}[X] = \left\{a \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}},\ a \text{ stationne en } 0\right\}.$$

On munit $\mathbb{A}[X]$ *de* $+$ *et* $\times$ *définies par :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{A}[X]^2,\ \begin{cases} a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ a \times b = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}.$$

Alors $(\mathbb{A}[X], +, \times)$ *est un anneau. Et l'application*

$$j : \left| \begin{array}{l} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}[X] \\ a \longmapsto (\delta_{n0} \cdot a)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif d'anneaux, ce qui permet d'identifier $a \in \mathbb{A}$ *à* $j(a)$ *et de considérer que* $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}[X]$*.*

Notation 25.3. *On pose* $X = (\delta_{n1} \cdot 1)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Proposition 25.4. $P \in \mathbb{A}[X]\backslash\{0\}$*. Alors il existe* $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{A}^{d+1}$*, avec* $a_d \neq 0$*, t.q.*

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

De plus, cette écriture est unique.

Définition 25.5 (Degré)**.** *$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{A}[X] \backslash \{0\}$ avec $a_d \neq 0$. On note* $\deg P = d$*. On définit de plus* $\deg 0 = -\infty$*. Et on pose, pour $m \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{A}_m[X] = \{P \in \mathbb{A}[X],\ \deg P \leqslant m\}.$$

Proposition 25.6. *Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{A}[X]^2,\ \deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

Corollaire 25.7. *Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors $\mathbb{A}[X]$ est intègre.*

Définition 25.8 (Racines d'un polynôme)**.** *$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{A}[X]$, $\omega \in \mathbb{A}$. On définit :*

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{d} a_k \omega^k \in \mathbb{A}.$$

On dit que ω est une racine *de P lorsque $P(\omega) = 0$.*

Proposition 25.9. *$P \in \mathbb{A}[X]$, $\omega \in \mathbb{A}$. Alors :*

$$P(\omega) = 0 \Longleftrightarrow (X - \omega) \mid P.$$

Proposition 25.10. *$P \in \mathbb{A}[X] \backslash \{0\}$. Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors P a au plus* $\deg P$ *racines.*

II Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Notation 25.11. *Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.*

Proposition 25.12. $\mathbb{K}[X]$ *est principal, et tout idéal non nul de* $\mathbb{K}[X]$ *possède un unique générateur unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à* 1*).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. Soit $P \in \mathfrak{I} \backslash \{0\}$ unitaire tel que :

$$\deg P = \min_{Q \in \mathfrak{I} \backslash \{0\}} \deg Q.$$

Montrons que $\mathfrak{I} = \langle P \rangle$. ($\supset$) Clair. ($\subset$) Soit $A \in \mathfrak{I}$. On effectue la division euclidienne de A par P :

$$A = BP + R, \qquad (B, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{\deg P - 1}[X].$$

On a $R = A - BP \in \mathfrak{I}$, or $\deg R < \deg P$, donc par définition de P, $R = 0$. Ainsi, $A = BP \in \langle P \rangle$. $\square$

Définition 25.13 (PGCD)**.** $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$. *Si* $\exists i \in [\![1, s]\!]$, $A_i \neq 0$, *alors on appelle* PGCD *de* $A_1, \dots, A_s$, *noté* $A_1 \wedge \cdots \wedge A_s$, *l'unique générateur unitaire de* $\langle A_1, \dots, A_s \rangle$. *Si* $A_1 = \cdots = A_s = 0$, *alors on pose* $A_1 \wedge \cdots \wedge A_s = 0$.

Proposition 25.14. $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $D \in \mathbb{K}[X]$. *Alors :*

$$D = \bigwedge_{i=1}^{s} A_i \iff [\forall M \in \mathbb{K}[X], (\forall i \in [\![1, s]\!], M \mid A_i) \Leftrightarrow M \mid D].$$

Proposition 25.15 (Égalité de Bézout)**.** $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$. *Alors il existe* $(U_1, \dots, U_s) \in \mathbb{K}[X]^s$ *t.q.*

$$\sum_{i=1}^{s} U_i A_i = \bigwedge_{i=1}^{s} A_i.$$

Définition 25.16 (Polynômes premiers entre eux)**.** $(P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{K}[X]^s$.

(i) *S'équivalent :*

(a) $\langle P_1, \dots, P_s \rangle = \mathbb{K}[X]$.

(b) $\bigwedge_{i=1}^{s} P_i = 1$.

(c) $\exists (U_1, \dots, U_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $\sum_{i=1}^{s} U_i P_i = 1$.

(d) $\bigcap_{i=1}^{s} \{Q \in \mathbb{K}[X], Q \mid P_i\} = \mathbb{K}^*$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que $P_1, \dots, P_s$ *sont* premiers entre eux dans leur ensemble*.*

(ii) *On dit que* $P_1, \dots, P_s$ *sont* premiers entre eux deux à deux *lorsque :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, s]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow P_i \wedge P_j = 1.$$

Proposition 25.17. $(P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $s \geqslant 2$. *Si* $P_1, \dots, P_s$ *sont premiers entre eux deux à deux, alors* $P_1, \dots, P_s$ *sont premiers entre eux dans leur ensemble.*

Lemme 25.18 (Lemme de Gauss)**.** $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$.

(i) *Si* $A \mid BC$ *et* $A \wedge B = 1$*, alors* $A \mid C$.

(ii) *Si* $A \wedge B = 1$, $A \mid C$ *et* $B \mid C$*, alors* $AB \mid C$.

(iii) *Si* $A \wedge B = 1$ *et* $A \wedge C = 1$*, alors* $A \wedge BC = 1$.

Démonstration. (i) Soit $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $AU + BV = 1$, soit $M \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $BC = MA$. Alors $C = A(UC + VM)$, donc $A \mid C$. (ii) et (iii) Idem. □

III Polynômes irréductibles

Définition 25.19 (Polynôme irréductible)**.** $P \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est* irréductible *lorsque :*

(i) $\deg P \geqslant 1$,

(ii) $\forall (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P = QR \Longrightarrow Q \in \mathbb{K}_0[X]$ ou $R \in \mathbb{K}_0[X]$.

Proposition 25.20. *Tout polynôme non constant s'écrit comme produit de polynômes irréductibles.*

Proposition 25.21. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. *Si* P *est irréductible, alors* $P \mid Q$ *ou* $P \wedge Q = 1$.

Corollaire 25.22. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. *Si* P *et* Q *sont irréductibles et distincts, alors* $P \wedge Q = 1$.

Théorème 25.23. *Tout polynôme non constant s'écrit de manière unique comme produit d'une constante et de polynômes irréductibles unitaires.*

Proposition 25.24. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. *S'équivalent :*

(i) $P \wedge Q = 1$.

(ii) $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2,\ PU + QV = 1$.

(iii) P *et* Q *n'ont aucun diviseur irréductible en commun.*

IV Corps algébriquement clos

Définition 25.25 (Polynôme scindé)**.** $P \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est* scindé *lorsque* P *est produit d'une constante non nulle et de polynômes du premier degré.*

Définition 25.26 (Corps algébriquement clos)**.** *S'équivalent :*

(i) *Tout polynôme de* $\mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$ *est scindé.*

(ii) *Tout polynôme de* $\mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_0[X]$ *possède une racine.*

(iii) *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_0[X]$, $P(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

(iv) *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{K}[X]$ *sont exactement les polynômes de degré* 1.

Si tel est le cas, on dit que $\mathbb{K}$ *est* algébriquement clos.

Théorème 25.27 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}_0[X]$. On suppose par l'absurde que P ne s'annule pas. *Première étape.* Soit $R \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R \implies |P(z)| \geqslant |P(0)|$. Comme $\mathcal{B}_f(0, R)$ est un compact, soit $\omega \in \mathcal{B}_f(0, R)$ t.q. $|P(\omega)| = \min_{z \in \mathcal{B}_f(0,R)} |P(z)|$ (d'après le théorème 14.22). Alors :

$$|P(\omega)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0.$$

Deuxième étape. On pose $Q = \frac{P(X+\omega)}{P(\omega)}$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \geqslant 1 = Q(0)$. On pose ensuite :

$$f : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{1}{Q(z)} \in \mathbb{C}.$$

D'après le théorème 22.10, f est développable en série entière autour de 0 : il existe $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit $\rho \in]0, r[$. D'après la proposition 22.29, on a :

$$\begin{aligned} 1 = f(0) = a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re\left(f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right) \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0)| \mathrm{d}\theta = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans ce qui précède, toutes les inégalités sont des égalités, d'où on déduit :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r),\ f(z) = 1.$$

Donc $\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r)$, $Q(z) = 1$, d'où $Q = 1$. C'est absurde, car Q est non constant. □

Proposition 25.28. *$P = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}_1[X]$ unitaire. On pose :*

$$R = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| X^k.$$

Alors :

(i) *R possède une unique racine r dans $\mathbb{R}_+^*$.*

(ii) *Si z est une racine de P dans $\mathbb{C}$, alors $|z| \leqslant r$.*

Démonstration. On pose :

$$\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{x^{d-1-k}} \in \mathbb{R}.$$

(i) $\varphi \nearrow\nearrow$, et $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$, $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$, donc $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection et s'annule en un unique point r. Le résultat est alors immédiat car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ R(x) = x^{d-1}\varphi(x)$. (ii) Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$. On peut supposer $z \neq 0$. On a alors :

$$|z| = \left| \frac{1}{z^{d-1}} \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{|z|^{d-1-k}}.$$

Donc $\varphi(|z|) \leqslant 0 = \varphi(r)$. Comme $\varphi \nearrow\nearrow$, $|z| \leqslant r$. □

V Radiographie des polynômes

Notation 25.29. *Dans cette section, $\mathbb{L}$ est un surcorps de $\mathbb{K}$.*

Proposition 25.30. $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_0[X]$. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1, \dots, P_s$ des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ t.q.*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{s} P_i.$$

Pour $i \in [\![1, s]\!]$, soit $\Pi_{i,1}, \dots, \Pi_{i,\nu_i}$ des irréductibles de $\mathbb{L}[X]$ t.q.

$$P_i = \prod_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{i,j}.$$

Alors l'écriture

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{i,j}$$

est la décomposition en polynômes irréductibles de P sur $\mathbb{L}[X]$.

Proposition 25.31. *Les irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont les $(X - \omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$.*

Lemme 25.32. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. *Alors :*

$$(\exists M \in \mathbb{L}[X],\ Q = PM) \Longrightarrow \left(\exists \widetilde{M} \in \mathbb{K}[X],\ Q = P\widetilde{M}\right).$$

Autrement dit, si $P \mid Q$ au sens de $\mathbb{L}[X]$, alors $P \mid Q$ au sens de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 25.33. *Les irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sont :*

(i) *Les $(X - a)$, $a \in \mathbb{R}$,*

(ii) *Les $\left(X^2 - 2bX + c\right)$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, $b^2 < c$.*

Démonstration. Il est clair que ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit P un irréductible unitaire de $\mathbb{R}[X]$. On peut supposer $\deg P \geqslant 2$. Ainsi, P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Soit ω une racine de P dans $\mathbb{C}$ (d'après le théorème 25.27). Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\overline{\omega}) = \overline{P(\omega)} = 0$, donc $\overline{\omega}$ est aussi racine de P. Ainsi, $(X-\omega) \mid P$ et $(X-\overline{\omega}) \mid P$. Or $\omega \notin \mathbb{R}$ donc $(X-\omega) \wedge (X-\overline{\omega}) = 1$, d'où $\left(X^2 - 2X\Re(\omega) + |\omega|^2\right) = (X-\omega)(X-\overline{\omega}) \mid P$ au sens de $\mathbb{C}[X]$ donc au sens de $\mathbb{R}[X]$ (d'après le lemme 25.32). Or P est irréductible et unitaire, donc :

$$P = X^2 - 2X\Re(\omega) + |\omega|^2 .$$

□

VI Polynômes à coefficients rationnels

VI.1 Polynômes cyclotomiques

Définition 25.34 (Polynômes cyclotomiques)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième* polynôme cyclotomique *par :*

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Proposition 25.35. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.

Proposition 25.36. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Par récurrence forte sur n, en utilisant la division euclidienne de $(X^n - 1)$ par $\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d$ dans $\mathbb{Z}[X]$. □

VI.2 Polynômes à coefficients entiers

Notation 25.37. *On définit la* réduction modulo p *: pour $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on pose $\overline{A} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k \in \mathbb{F}_p[X]$, où $\overline{a_k}$ est la classe d'équivalence de a_k dans $\mathbb{F}_p$.*

Proposition 25.38. *L'application* $\left|\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[X] \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}\right.$ *est un morphisme d'anneaux.*

Définition 25.39 (Contenu)**.** *Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] \backslash \{0\}$. On définit le* contenu *de P par :*

$$\mathcal{C}(P) = \bigwedge_{k=0}^n a_k.$$

Vocabulaire 25.40 (Polynômes primitifs)**.** *$P \in \mathbb{Z}[X]$. Si $\mathcal{C}(P) = 1$, P est dit* primitif*.*

Lemme 25.41. *$\forall (P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$, $\mathcal{C}(PQ) = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)$.*

Démonstration. Écrire $P = \mathcal{C}(P)\widetilde{P}$, $Q = \mathcal{C}(Q)\widetilde{Q}$, où $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont des polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$. On a alors $PQ = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)\widetilde{P}\widetilde{Q}$. Supposer alors par l'absurde $\widetilde{P}\widetilde{Q}$ non primitif. Dans ce cas, il existe $p \in \mathbb{P}$ t.q. $p \mid \mathcal{C}\left(\widetilde{P}\widetilde{Q}\right)$. Alors $\overline{\widetilde{P}} \times \overline{\widetilde{Q}} = \overline{\widetilde{P}\widetilde{Q}} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$. Or $\mathbb{F}_p$ est un corps donc $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre d'où $\overline{\widetilde{P}} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$ ou $\overline{\widetilde{Q}} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$. C'est une contradiction car $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont primitifs. Ainsi $\widetilde{P}\widetilde{Q}$ est primitif et $\mathcal{C}(PQ) = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)$. □

Proposition 25.42. *$P \in \mathbb{Z}[X] \backslash \mathbb{Z}_0[X]$. Soit $(Q_1, \ldots, Q_s) \in \mathbb{Q}[X]^s$ t.q.*

$$P = Q_1 \cdots Q_s.$$

Alors il existe $(m_1, \ldots, m_s) \in (\mathbb{Q}^*)^s$ t.q.

$$P = (m_1 Q_1) \cdots (m_s Q_s) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, s]\!],\ (m_i Q_i) \in \mathbb{Z}[X].$$

Démonstration. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, soit d_i un dénominateur commun à tous les coefficients de Q_i : $d_i Q_i \in \mathbb{Z}[X]$. On note alors $n_i = \mathcal{C}(d_i Q_i)$, et $\hat{Q}_i = \frac{d_i}{n_i} Q_i$ (donc $\mathcal{C}\left(\hat{Q}_i\right) = 1$). On a ainsi :

$$P = \frac{n_1 \cdots n_s}{d_1 \cdots d_s} \hat{Q}_1 \cdots \hat{Q}_s.$$

Or, avec le lemme 25.41, on obtient $\frac{n_1 \cdots n_s}{d_1 \cdots d_s} = \mathcal{C}(P)$. Donc :

$$P = \mathcal{C}(P)\hat{Q}_1 \cdots \hat{Q}_s \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, s]\!],\ \hat{Q}_i \in \mathbb{Z}[X].$$

□

VII Dérivation formelle

VII.1 Généralités

Définition 25.43 (Dérivation formelle)**.** *On définit :*

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k \end{array} \right. .$$

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on notera $P' = D(P)$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} = D^k(P)$.

Proposition 25.44.

(i) $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.

(ii) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ D(PQ) = P \cdot D(Q) + Q \cdot D(P)$.

Proposition 25.45.

(i) *Si* $\operatorname{car} \mathbb{K} = 0$*, alors* $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}_0[X]$.

(ii) *Si* $\operatorname{car} \mathbb{K} = p \in \mathbb{P}$*, alors* $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Vect}(X^{np},\ n \in \mathbb{N})$.

Proposition 25.46 (Formule de Taylor formelle)**.** $P \in \mathbb{K}_d[X]$*,* $a \in \mathbb{K}$*. On suppose* $\operatorname{car} \mathbb{K} = 0$*. Alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

VII.2 Multiplicité des racines

Définition 25.47 (Multiplicité d'une racine)**.** $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$*,* $a \in \mathbb{K}$*,* $\omega \in \mathbb{N}$*.*

(i) *On dit que* a *est* racine d'ordre ω *de* P *lorsque :*

$$(X - a)^\omega \mid P \text{ et } (X - a)^{\omega+1} \nmid P.$$

(ii) *On dit que* a *est* racine d'ordre au moins ω *de* P *lorsque* $(X - a)^\omega \mid P$.

(iii) *On dit que* a *est* racine multiple *de* P *lorsque* a *est racine d'ordre au moins* 2 *de* P.

Proposition 25.48. $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$*,* $a \in \mathbb{K}$*,* $\omega \in \mathbb{N}$*. Alors* a *est racine d'ordre* ω *de* P ssi

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(\omega)}(a) = 0 \neq P^{(\omega+1)}(a).$$

Définition 25.49 (Polynôme scindé)**.** $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$.

(i) *On dit que* P *est* scindé *lorsque* P *est produit d'une constante non nulle et de polynômes du premier degré.*

(ii) *On dit que* P *est* simplement scindé *lorsque* P *est scindé et que toutes les racines de* P *sont simples (i.e. d'ordre* 1*).*

Proposition 25.50. $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$*. On suppose que* $\mathbb{K}$ *est algébriquement clos. Alors* P *est simplement scindé* ssi $P \wedge P' = 1$.

Proposition 25.51. $Q \in \mathbb{Q}[X] \backslash \mathbb{Q}_0[X]$ *unitaire. D'après le théorème 25.27,* Q *est scindé sur* $\mathbb{C}$ *: il existe* $(z_1, \ldots, z_s) \in \mathbb{C}^s$ *deux à deux distincts,* $(m_1, \ldots, m_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *t.q.*

$$Q = \prod_{i=1}^{s} (X - z_i)^{m_i}.$$

Alors :

$$\prod_{i=1}^{s} (X - z_i) \in \mathbb{Q}[X].$$

Démonstration. Montrer que $Q \wedge Q' = \prod_{i=1}^{s} (X - z_i)^{m_i - 1}$. Or $Q \wedge Q' \in \mathbb{Q}[X]$. Donc $\prod_{i=1}^{s} (X - z_i) = \frac{Q}{Q \wedge Q'} \in \mathbb{Q}[X]$. $\square$

Corollaire 25.52. *$P \in \mathbb{Q}[X]$. Si P est irréductible sur $\mathbb{Q}$, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.*

Chapitre 26

Espaces Vectoriels

Notation 26.1. *Dans ce chapitre,* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un corps.*

I Généralités

Définition 26.2 (Espace vectoriel)**.** *E un ensemble, $+$ une LCI sur E, $\cdot$ une LCE $\mathbb{K} \times E \to E$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel *lorsque :*

(i) *$(E, +)$ est un groupe commutatif.*

(ii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x, y) \in E^2,\ \begin{cases} \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \end{cases}.$

(iii) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Les éléments de E sont dits vecteurs*, les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits* scalaires*.*

Définition 26.3 (Combinaison linéaire)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in E^I$. On appelle* combinaison linéaire *des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur $x \in E$ t.q.*

$$\exists J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I),\ \exists \lambda \in \mathbb{K}^J,\ x = \sum_{j \in J} \lambda_j u_j.$$

Définition 26.4 (Espace engendré)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in E^I$. L'ensemble des combinaisons linéaires des $(u_i)_{i\in I}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les $(u_i)_{i\in I}$. Il est appelé* espace engendré *par les $(u_i)_{i\in I}$ et noté* $\operatorname{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right)$.

Définition 26.5 (Famille libre ou génératrice)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in E^I$.*

(i) *On dit que* $(u_i)_{i\in I}$ *est* libre *lorsque :*

$$\forall J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^J,\ \left(\sum_{j\in J} \lambda_j u_j = 0 \Longrightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = 0\right).$$

(ii) *On dit que* $(u_i)_{i\in I}$ *est* génératrice *lorsque :*

$$E = \mathrm{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right).$$

Définition 26.6 (Espace engendré par une partie, partie libre ou génératrice)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{A} \subset E$.*

(i) *On note* $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{Vect}\left((a)_{a\in\mathcal{A}}\right)$.

(ii) *On dit que $\mathcal{A}$ est* libre *(resp.* génératrice*) lorsque* $(a)_{a\in\mathcal{A}}$ *est libre (resp. génératrice).*

Remarque 26.7. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in E^I$. On note $U = \{u_i,\ i \in I\}$.*

(i) $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice* ssi U *est génératrice.*

(ii) $(u_i)_{i\in I}$ *est libre* ssi U *est libre et l'application* $i \in I \longmapsto u_i \in U$ *est injective.*

Définition 26.8 (Base)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B} \subset E$, $\epsilon \in E^I$. On dit que $\mathcal{B}$ (resp. $(\epsilon_i)_{i\in I}$) est une* base *de E lorsque $\mathcal{B}$ (resp. $(\epsilon_i)_{i\in I}$) est libre et génératrice.*

Théorème 26.9. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une partie génératrice finie. Alors E possède une base finie ; de plus, toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé* dimension *de E, et noté* $\dim E$.

Théorème 26.10. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors, en admettant l'axiome du choix, E possède une base ; de plus, toutes les bases de E sont équipotentes.*

Théorème 26.11. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d. Alors :*

$$E \simeq \mathbb{K}^d.$$

Théorème 26.12 (Théorème de la base incomplète)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\mathfrak{L}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}(E)^2$. On suppose que $\mathfrak{L}$ est libre et $\mathcal{G}$ est génératrice. Alors il existe $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ t.q. $\mathfrak{L} \sqcup \mathcal{G}_0$ est une base de E.*

II Applications linaires

Théorème 26.13 (Théorème du rang)**.** *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors :*

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u.$$

De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* E *t.q.* $(e_1, \ldots, e_s)$ *est une base de* $\operatorname{Ker} u$*, alors* $(u(e_{s+1}), \ldots, u(e_n))$ *est une base de* $\operatorname{Im} u$*.*

Remarque 26.14. *On a un résultat analogue pour les groupes. Soit* G, H *deux groupes,* $\varphi : G \to H$ *un morphisme de groupes. Si* G *est fini, alors :*

$$|G| = |\operatorname{Ker} \varphi| \cdot |\varphi(G)| .$$

Proposition 26.15. E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* F, G *deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de* E*. Alors :*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Appliquer le théorème 26.13 à l'application linéaire

$$s : \left| \begin{array}{l} F \times G \longrightarrow F + G \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{array} \right. .$$

□

Proposition 26.16. E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. On suppose que* E *est de dimension finie* d *et on pose* $(e_1, \ldots, e_d)$ *une base de* E*. Alors :*

$$\forall (u_1, \ldots, u_d) \in F^d,\ \exists! f \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall i \in [\![1, d]\!],\ f(e_i) = u_i.$$

En particulier :

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq F^{\dim E}.$$

Proposition 26.17. E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie.* $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$*,* $\psi \in \mathcal{L}(E, G)$*. S'équivalent :*

(i) $\exists \delta \in G^F,\ \psi = \delta \circ \varphi$.

(ii) $\exists d \in \mathcal{L}(F, G),\ \psi = d \circ \varphi$.

(iii) $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \psi$.

Proposition 26.18. E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie.* $f \in \mathcal{L}(E, G)$*,* $g \in \mathcal{L}(F, G)$*. S'équivalent :*

(i) $\exists \tau \in \mathcal{L}(E, F),\ f = g \circ \tau$.

(ii) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

Proposition 26.19. E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie.* $u \in E^s$*,* $v \in F^s$*. On pose :*

$$\Lambda_u = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i = 0 \right\},$$

$$M_v = \left\{ (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{K}^s,\ \sum_{i=1}^{s} \mu_i v_i = 0 \right\}.$$

S'équivalent :

(i) $\exists \chi \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall i \in [\![1,s]\!],\ \chi(u_i) = v_i$.

(ii) $\Lambda_u \subset M_v$.

III Sommes directes

III.1 Sous-espaces supplémentaires

Définition 26.20 (Somme directe). *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. S'équivalent :*

(i) $F \cap G = \{0\}$.

(ii) $\forall x \in (F+G),\ \exists!\,(f,g) \in F \times G,\ x = f + g$.

(iii) *L'application linéaire* $\left|\begin{array}{l} F \times G \longrightarrow F+G \\ (f,g) \longmapsto f+g \end{array}\right.$ *est un isomorphisme.*

On dit alors que F et G sont en somme directe, et l'espace $F+G$ est noté $F \oplus G$.

Vocabulaire 26.21 (Sous-espaces supplémentaires). *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $E = F \oplus G$, alors on dit que F et G sont* supplémentaires*, ou que G est un supplémentaire de F.*

Proposition 26.22. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :*

(i) $F + G = E$.

(ii) $F \cap G = \{0\}$.

(iii) $\dim F + \dim G = \dim E$.

Si ces conditions sont satisfaites, alors $E = F \oplus G$.

Proposition 26.23. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.*

III.2 Projections et projecteurs

Définition 26.24 (Projecteur). *$p \in \mathcal{L}(E)$ est dit* projecteur *de E lorsque $p \circ p = p$.*

Définition 26.25 (Projection). *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. On a alors $\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$. On appelle* projection *sur F parallèlement à G l'application*

$$\pi_{F,G} : \left|\begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto x_F \end{array}\right. .$$

Proposition 26.26. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors :*

(i) $\pi_{F,G} \in \mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{L}(E)$,

(ii) $\operatorname{Ker} \pi_{F,G} = G$ *et* $\operatorname{Im} \pi_{F,G} = F$,

(iii) $\pi_{F,G}$ *est un projecteur.*

Proposition 26.27. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors :*

(i) $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$,

(ii) $p = \pi_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}$.

Proposition 26.28. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G, G' trois sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$F \oplus G = F \oplus G' \Longrightarrow G \simeq G'.$$

Démonstration. Se placer dans $F \oplus G$ et poser $p = \pi_{G',F}{}_{|G} \in \mathcal{L}(G, G')$ et $p' = \pi_{G,F}{}_{|G'} \in \mathcal{L}(G', G)$. Montrer que $p \circ p' = id_{G'}$ et $p' \circ p = id_G$. Donc p et p' sont des isomorphismes. □

III.3 Sommes directes d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels

Définition 26.29 (Somme directe de n sous-espaces vectoriels)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en* somme directe *lorsque :*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} F_i,\ \exists!\,(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

L'espace $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est alors noté $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 26.30. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E. Si $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, alors :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow F_i \cap F_j = \{0\}.$$

Proposition 26.31. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe* ssi

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Proposition 26.32. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \ldots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Alors :*

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(E_i, F\right).$$

Proposition 26.33. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de F t.q. $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i$. Alors :*

$$\mathcal{L}(E, F) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(E, F_i\right).$$

Définition 26.34 (Somme directe quelconque)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que les $(F_i)_{i\in I}$ sont en* somme directe *lorsque toute sous-famille finie de $(F_i)_{i\in I}$ est en somme directe. On note alors :*

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigcup_{J\in\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I)} \bigoplus_{j\in J} E_j.$$

Chapitre 27

Matrices

I Calcul matriciel

Notation 27.1. *Dans toute cette section,* $(\mathbb{A},+,\times)$ *est un anneau.*

Définition 27.2 (Matrice)**.** $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*. On définit :*

$$\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Les éléments de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$ *sont appelés* matrices $n \times p$*. Soit* $M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$*.*

(i) *Pour* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$*, on note* $M_{ij} = M(i,j)$*. On note alors :*

$$M = (M_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{np} \end{pmatrix}.$$

(ii) *Pour* $j \in [\![1,p]\!]$*, on note* $\mathfrak{C}_j(M) = \begin{pmatrix} M_{1j} \\ \vdots \\ M_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{A})$*. On note alors :*

$$M = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}_1(M) & \cdots & \mathfrak{C}_p(M) \end{bmatrix}.$$

(iii) *Pour* $i \in [\![1,n]\!]$*, on note* $\mathfrak{L}_i(M) = \begin{pmatrix} M_{i1} & \cdots & M_{ip} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{1,p}(\mathbb{A})$*. On note alors :*

$$M = \begin{bmatrix} \mathfrak{L}_1(M) \\ \vdots \\ \mathfrak{L}_n(M) \end{bmatrix}.$$

On définit de plus $\mathbb{M}_n(\mathbb{A}) = \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{A})$.

Définition 27.3 (Produit matriciel)**.** $M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$, $N \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{A})$. *On définit :*

$$MN = \left(\sum_{k=1}^{p} M_{ik}N_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathbb{M}_{n,q}(\mathbb{A}).$$

Définition 27.4 (Matrices élémentaires)**.** $(u,v) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. *On définit :*

$$E^{uv} = (\delta_{iu}\delta_{jv})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}).$$

Proposition 27.5. *On se place dans* $\mathbb{M}_n(\mathbb{A})$. *Alors :*

$$\forall (a,b,\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^4,\ E^{ab}E^{\alpha\beta} = \delta_{b\alpha}E^{a\beta}.$$

Application 27.6. *Si* $\mathbb{A}$ *est commutatif, alors :*

$$Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{A})) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{A}\}.$$

Démonstration. $(\supset)$ Clair. $(\subset)$ Soit $M \in Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{A}))$. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ ME^{ij} = E^{ij}M.$$

En particulier :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow M_{ij} = \left(ME^{j1}\right)_{i1} = \left(E^{j1}M\right)_{i1} = 0.$$

De même :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ M_{ii} = \left(ME^{i1}\right)_{i1} = \left(E^{i1}M\right)_{i1} = M_{11}.$$

Donc $M = M_{11}I_n$. □

Proposition 27.7.

$$\forall M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}),\ M = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} M_{ij}E^{ij}.$$

II Représentations en tous genres

Notation 27.8. *Dans ce chapitre,* $(\mathbb{K},+,\times)$ *est un corps.*

Définition 27.9 (Matrice d'un vecteur)**.** E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E. *Pour* $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in E$, *on définit :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Remarque 27.10. *On identifiera* $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *à* $\mathbb{K}^n$.

Proposition 27.11. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Définition 27.12 (Matrice d'une application linéaire)**.** *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_\beta(f(e_1)) & \cdots & \mathcal{M}_\beta(f(e_p)) \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Proposition 27.13. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, $\mathcal{B}$ une base de E, β une base de F.*

(i) *L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

(ii) $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall x \in E$, $\mathcal{M}_\beta(f(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Proposition 27.14. *E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall g \in \mathcal{L}(F, G),\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Notation 27.15. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*

Proposition 27.16. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

Application 27.17. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :*

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{\lambda id_E,\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

III Changement de base

Définition 27.18 (Matrice de passage)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. On pose :*

$$P = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1) & \cdots & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\beta,\mathcal{B}}(id_E) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

P est dite matrice de passage *de $\mathcal{B}$ à β. On dit que $\mathcal{B}$ est l'*ancienne base *et β la* nouvelle base.

Proposition 27.19. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}, \beta$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à β. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P\mathcal{M}_{\beta}(x).$$

Proposition 27.20. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, β, β' deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Π la matrice de passage de β à β'. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\beta'}(f) = \Pi^{-1} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f) \times P.$$

IV Rangs

Définition 27.21 (Rang d'une application linéaire, d'un système de vecteurs)**.** *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.*

(i) *Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit* $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

(ii) *Pour $(v_1, \ldots, v_s) \in E^s$, on définit* $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_s) = \dim \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$.

Proposition 27.22. *E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.*

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \min(\operatorname{rg}\psi, \operatorname{rg}\varphi).$$

Proposition 27.23. *E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.*

(i) *Si φ est surjective, alors* $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rg}\psi$.

(ii) *Si ψ est injective, alors* $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rg}\varphi$.

Définition 27.24 (Rang d'une matrice)**.** *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit :*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(\mathfrak{C}_1(A), \ldots, \mathfrak{C}_p(A)).$$

Proposition 27.25. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}, \beta$. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f)).$$

Proposition 27.26. *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\operatorname{rg} A = r \iff \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}),\ A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Définition 27.27 (Matrices équivalentes)**.** *$(A, B) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. S'équivalent :*

(i) $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}),\ A = PBQ$.

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Si tel est le cas, on dit que A et B sont équivalentes.

Corollaire 27.28. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors :*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA.$$

Corollaire 27.29. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors :*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(\mathfrak{C}_1(A), \ldots, \mathfrak{C}_p(A)\right) = \operatorname{rg}\left(\mathfrak{L}_1(A), \ldots, \mathfrak{L}_n(A)\right).$$

Proposition 27.30. $\mathbb{L}$ *un surcorps de* $\mathbb{K}$. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors :*

$$\operatorname{rg}_{\mathbb{L}}(A) = \operatorname{rg}_{\mathbb{K}}(A),$$

où $\operatorname{rg}_{\mathbb{L}}(A)$ *(resp.* $\operatorname{rg}_{\mathbb{K}}(A)$*) désigne le rang de A comme élément de* $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{L})$ *(resp.* $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*).*

Corollaire 27.31. $\mathbb{L}$ *un surcorps de* $\mathbb{K}$. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *On pose :*

$$\mathscr{S}_{\mathbb{K}} = \left\{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = B\right\},$$
$$\mathscr{S}_{\mathbb{L}} = \left\{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{L}),\ AX = B\right\}.$$

Alors $\mathscr{S}_{\mathbb{K}} \neq \varnothing$ ssi $\mathscr{S}_{\mathbb{L}} \neq \varnothing$.

V Déterminants

V.1 Applications n-linéaires

Définition 27.32 (Application bilinéaire alternée ou antisymétrique)**.** *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $f : E^2 \to F$ une forme bilinéaire.*

(i) *f est dite* alternée *lorsque*

$$\forall x \in E,\ f(x, x) = 0.$$

(ii) *f est dite* antisymétrique *lorsque*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = -f(y, x).$$

Proposition 27.33. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $f : E^2 \to F$ une forme bilinéaire.*

(i) *f est alternée $\Longrightarrow$ f est antisymétrique.*

(ii) *Si* $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$*, alors f est alternée $\Longleftrightarrow$ f est antisymétrique.*

Définition 27.34 (Application n-linéaire alternée)**.** *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $f : E^n \to F$ une forme n-linéaire. On dit que f est* alternée *lorsque :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \big(\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \text{ et } x_i = x_j\big) \implies f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Proposition 27.35. *E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $f : E^n \to F$ une forme n-linéaire alternée. Alors :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

Notation 27.36. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On pose :*

$$\Lambda(E) = \left\{ f : E^n \to \mathbb{K},\ f \text{ est } n\text{-linéaire et alternée} \right\}.$$

Proposition 27.37. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\Lambda(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 27.38. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $f \in \Lambda(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors :*

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \right) f\left(e_1, \ldots, e_n\right).$$

Corollaire 27.39. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}$ une base de E. On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \Lambda(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(\mathcal{B}) \end{array} \right. .$$

Alors Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

V.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 27.40 (Déterminant d'une famille de vecteurs)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B}$ une base de E. On définit $\det_{\mathcal{B}} \in \Lambda(E)$ comme l'unique forme n-linéaire alternée sur E t.q. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.*

Proposition 27.41. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors :*

$$\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition 27.42. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :*

(i) $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \det_{\mathcal{B}'}$.

(ii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = (\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))^{-1}$.

Proposition 27.43. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B}$ une base de E. $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre* ssi

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0.$$

Proposition 27.44. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application* $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ *est polynomiale.*

Corollaire 27.45. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On pose :*

$$V = \{(u_1, \dots, u_n) \in E^n,\ (u_1, \dots, u_n) \text{ est liée}\}.$$

Alors V est une variété algébrique de E.

Proposition 27.46. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :*

$$\det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}'} f(\mathcal{B}').$$

V.3 Déterminant d'une application linéaire

Définition 27.47 (Déterminant d'une application linéaire)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}$ une base de E. On définit :*

$$\det : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) \end{array} \right. .$$

det *ne dépend pas de $\mathcal{B}$.*

Proposition 27.48. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :*

(i) $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$.

(ii) $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

(iii) $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det f \neq 0 \iff f \in GL(E)$.

Proposition 27.49. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors* $\det : GL(E) \to \mathbb{K}^*$ *est un morphisme de groupes.*

Définition 27.50 ($SL(E)$)**.** *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On définit :*

$$SL(E) = \operatorname{Ker} \det = \{f \in GL(E),\ \det f = 1\}.$$

$SL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

V.4 Déterminant d'une matrice

Définition 27.51 (Déterminant d'une matrice)**.** *Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :*

$$\det A = \det_{\mathcal{C}}\left(\mathfrak{C}_1(A), \ldots, \mathfrak{C}_n(A)\right),$$

où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 27.52.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(j)j}.$$

Proposition 27.53. *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \det f = \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f).$$

VI Mineurs

Définition 27.54 (Mineurs)**.** *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$, avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant n$. On définit :*

$$A_{IJ} = (A_{i_k j_\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant s}} \in \mathbb{M}_{r,s}(\mathbb{K}).$$

Si $|I| = |J| = k$, on note de plus $\mu_{IJ}(A) = \det A_{IJ}$. On dit que $\mu_{IJ}(A)$ est un mineur *d'ordre k de A.*

Lemme 27.55. *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $r \in [\![1, \min(n,p)[\![$. Si tous les mineurs d'ordre r de A sont nuls, alors tous les mineurs d'ordre $(r+1)$ de A sont nuls.*

Théorème 27.56 (Théorème des mineurs)**.** *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :*

$$R(A) = \max\left\{k \in [\![0, \min(n,p)]\!],\ A \textit{ possède un mineur non nul d'ordre } k\right\},$$

en considérant que tout déterminant d'ordre 0 est égal à 1. Alors :

$$\operatorname{rg} A = R(A).$$

Application 27.57. *Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$\Omega(r) = \left\{M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \operatorname{rg} M \geqslant r\right\}.$$

Alors $\Omega(r)$ est un ouvert de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

VII Produit par blocs

Notation 27.58 (Matrices blocs)**.** *Pour* $(i,j) \in [\![1,a]\!] \times [\![1,b]\!]$*, soit* $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$*. On note alors*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \cdots & A_{ab} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{np}(\mathbb{K}),$$

où $n = \sum_{i=1}^{a} n_i$*,* $p = \sum_{j=1}^{b} p_j$*.*

Proposition 27.59. *Soit* $A = (A_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (B_{ij}) \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *deux matrices écrites sous forme de blocs.*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \cdots & A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{b1} & \cdots & B_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{b} A_{1k}B_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{b} A_{1k}B_{kc} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{b} A_{ak}B_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{b} A_{ak}B_{kc} \end{bmatrix}.$$

Proposition 27.60. *Soit* $A = (A_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire par blocs :*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{t-1,t} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{t} \det A_{ii}.$$

VIII Décomposition LU des matrices carrées inversibles

Notation 27.61. *On définit :*

$$\Lambda_n(\mathbb{K}) = \left\{ L \in GL_n(\mathbb{K}),\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n1} & \cdots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\Upsilon_n(\mathbb{K}) = \left\{ U \in GL_n(\mathbb{K}),\ U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & U_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposition 27.62. $\Lambda_n(\mathbb{K})$ *et* $\Upsilon_n(\mathbb{K})$ *sont des sous-groupes de* $GL_n(\mathbb{K})$*.*

Vocabulaire 27.63 (Décomposition LU)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. On dit que* A *possède une* décomposition LU *lorsque :*

$$\exists (L, U) \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \times \Upsilon_n(\mathbb{K}),\ A = LU.$$

Définition 27.64 (Mineurs principaux)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Pour* $i \in [\![1, n]\!]$*, on définit* $\mu_i(A) = \mu_{[\![1,i]\!],[\![1,i]\!]}(A)$*.* $\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A)$ *sont appelés* mineurs principaux *de* A*.*

Lemme 27.65. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Si* A *possède une décomposition LU, alors elle est unique.*

Lemme 27.66. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Si* A *possède une décomposition LU, alors les mineurs principaux de* A *sont tous non nuls.*

Théorème 27.67. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Si les mineurs principaux de* A *sont tous non nuls, alors :*

(i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$*.*

(ii) *A possède une unique décomposition LU.*

Démonstration. (i) Appliquer le théorème 27.56. (ii) Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le acquis pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons le pour $(n+1)$. Soit donc $A \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ t.q. les mineurs principaux de A sont tous non nuls. On pose $A' = A_{[\![1,n]\!],[\![1,n]\!]}$. Les mineurs principaux de A' sont tous non nuls, donc il existe $(L', U') \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \times \Upsilon_n(\mathbb{K})$ t.q. $A' = L'U'$. Soit $B \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $w \in \mathbb{K}$ t.q. $A = \begin{bmatrix} A' & C \\ B & w \end{bmatrix}$. Montrer alors que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & C \\ B & w \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} L' & 0 \\ BU'^{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} U' & L'^{-1}C \\ 0 & z \end{bmatrix}}_{U},$$

avec $z = w - BU'^{-1}L'^{-1}C$. Reste à prouver que $w \neq 0$. En effet, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $L \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$, donc $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $w \neq 0$. Ainsi, $U \in \Upsilon_n(\mathbb{K})$, et la récurrence se propage. $\square$

Chapitre 28

Dualité

Notation 28.1. *Dans tout le chapitre,* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un corps et* $(E, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

I Hyperplans

I.1 Notion de codimension

Proposition 28.2. F, G, G' *trois sous-espaces vectoriels de* E*. Alors :*

$$F \oplus G = F \oplus G' \Longrightarrow G \simeq G'.$$

Démonstration. Voir la proposition 26.28. □

Corollaire 28.3. F *un sous-espace vectoriel de* E*. Si* F *admet un supplémentaire de dimension finie* δ *dans* E*, alors tous les supplémentaires de* F *sont de dimension finie* δ*.*

Définition 28.4 (Codimension)**.** F *un sous-espace vectoriel de* E*. Si* F *admet un supplémentaire* G *de dimension finie, on appelle* codimension *de* F*, notée* $\operatorname{codim} F$*, la dimension de* G*.*

Proposition 28.5. F *un sous-espace vectoriel de* E*. Si* E *est de dimension finie, alors :*

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F.$$

I.2 Hyperplans

Notation 28.6. *On note* $\mathcal{G}(E)$ *l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* E*.*

Définition 28.7 (Hyperplan)**.** *H un sous-espace vectoriel de E. S'équivalent :*

(i) $\operatorname{codim} H = 1$.

(ii) $\exists u \in E\backslash\{0\},\ E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.

(iii) *H est un élément maximal de l'espace ordonné* $(\mathcal{G}(E)\backslash\{E\}, \subset)$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que H est un hyperplan *de E.*

Proposition 28.8. *H un hyperplan de E. Alors :*

$$\forall u \in E\backslash H,\ E = H \oplus \operatorname{Vect}(u).$$

Lemme 28.9. *H un hyperplan de E, F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \subset H$* ou *$F \cap H$ est un hyperplan de F.*

Lemme 28.10. *H un hyperplan de E, F un sous-espace vectoriel de E de codimension finie. Alors $F \subset H$* ou $\operatorname{codim}(F \cap H) = 1 + \operatorname{codim} F$.

Proposition 28.11. *$H_1, \ldots, H_s$ s hyperplans de E. Alors :*

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{s} H_i\right) \leqslant s.$$

Démonstration. Par récurrence sur s en utilisant le lemme 28.10. □

Proposition 28.12. *F un sous-espace vectoriel de E de codimension s. Alors il existe s hyperplans $H_1, \ldots, H_s$ t.q.*

$$F = \bigcap_{i=1}^{s} H_i.$$

II Formes linéaires

Définition 28.13 (Formes linéaires)**.** *On note :*

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$$

Les éléments de E^* sont appelés formes linéaires*.*

Proposition 28.14. *On suppose que E est de dimension finie n, et on pose $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B},1} : E^* \to \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.*

Corollaire 28.15. *Si E est de dimension finie, alors :*

$$\dim E^* = \dim E.$$

Proposition 28.16. *H un sous-espace vectoriel de E. S'équivalent :*

(i) *H est un hyperplan de E.*

(ii) *$\exists \varphi \in E^* \backslash \{0\}$, $H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

Corollaire 28.17. *$\varphi \in E^* \backslash \{0\}$, $a \in \mathbb{K}$. Alors $\varphi^{-1}(\{a\})$ est un hyperplan affine de direction $\operatorname{Ker} \varphi$.*

Lemme 28.18. *$\varphi \in E^* \backslash \{0\}$. Alors :*

$$\{\psi \in E^*,\ \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi\} = \{\lambda \varphi,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$

Démonstration. ($\supset$) Clair. ($\subset$) Soit $\psi \in E^*$ t.q. $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$. Soit $u \in E \backslash \operatorname{Ker} \varphi$. Montrer que $\psi = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \varphi$. □

Notation 28.19. *On note $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des hyperplans de E et $\mathscr{D}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E.*

Proposition 28.20. *L'application* $\left| \begin{array}{rcl} \mathscr{H}(E) & \longrightarrow & \mathscr{D}(E^*) \\ H & \longmapsto & \{\psi \in E^*,\ \operatorname{Ker} \psi \supset H\} \end{array} \right.$ *est une bijection.*

Théorème 28.21 (Théorème fondamental de la dualité)**.** *$(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (E^*)^{p+1}$. S'équivalent :*

(i) *$\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.*

(ii) *$\operatorname{Ker} \psi \supset \bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} \varphi_i$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Récurrence sur p. $\mathcal{H}(p)$: Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et pour tout $(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (E^*)^{p+1}$, $\operatorname{Ker} \psi \supset \bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} \varphi_i \Longrightarrow \psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. $\mathcal{H}(1)$ est vraie d'après le lemme 28.18. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\mathcal{H}(p)$ soit vraie. Soit $(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1}) \in (E^*)^{p+2}$ t.q. $\operatorname{Ker} \psi \supset \bigcap_{i=1}^{p+1} \operatorname{Ker} \varphi_i$. On pose $H = \operatorname{Ker} \varphi_{p+1}$. Pour $\vartheta \in E^*$, on notera $\hat{\vartheta} = \vartheta_{|H} \in H^*$. On a alors :

$$\operatorname{Ker} \hat{\psi} \supset \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \hat{\varphi}_i.$$

D'après $\mathcal{H}(p)$, on dispose de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ t.q. $\hat{\psi} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{\varphi}_i$. On note $\delta = \psi - \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$. On a $\operatorname{Ker} \delta \supset H = \operatorname{Ker} \varphi_{p+1}$. D'après $\mathcal{H}(1)$, il existe $\lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ t.q. $\delta = \lambda_{p+1} \varphi_{p+1}$, d'où $\psi = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1})$. Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie et la récurrence se propage. □

Théorème 28.22. *$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (E^*)^p$. Alors :*

$$\operatorname{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} \varphi_i \right).$$

Démonstration. Soit F un supplémentaire de $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i$ dans E (F existe car $\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i\right) \leqslant p$ d'après la proposition 28.11). En notant $\Phi = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, poser :

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} \Phi \longrightarrow F^* \\ \psi \longmapsto \psi_{|F} \end{array} \right. .$$

Montrer que α est un isomorphisme et en déduire $\operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \dim \Phi = \dim F^* = \dim F = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \varphi_i\right)$. □

III Bases duales et préduales

Proposition 28.23. *Si E est de dimension finie, alors :*

$$\dim E^* = \dim E.$$

Notation 28.24. *On note $E^{**} = (E^*)^*$.*

Proposition 28.25. *On suppose que E est de dimension finie. On considère :*

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \left| \begin{array}{l} E^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 28.26 (Base duale)**.** *On suppose que E est de dimension d. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E. On pose $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*) \in (E^*)^d$ t.q.*

$$\forall (i,j) \in [\![1, d]\!]^2,\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Alors $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*, dite base duale *de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. $\operatorname{rg}(e_1^*, \dots, e_d^*) = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker} e_i^*\right) = d$. □

Proposition 28.27. *On suppose que E est de dimension d. On considère $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E.*

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{d} e_i^*(x) \cdot e_i. \tag{i}$$

$$\forall \varphi \in E^*,\ \varphi = \sum_{i=1}^{d} \varphi(e_i) \cdot e_i^*. \tag{ii}$$

Définition 28.28 (Base préduale)**.** *On suppose que E est de dimension finie. On considère β une base de E^*. Alors il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E t.q. $\mathcal{B}^* = \beta$. La base $\mathcal{B}$ est dite* base préduale *de β.*

Proposition 28.29. *On suppose que E est de dimension finie. On considère $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

$$\forall \varphi \in E^*,\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B},1}(\varphi)).$$

IV Systèmes de formes linéaires

Proposition 28.30. *On suppose que E est de dimension finie d. On considère $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (E^*)^p$, et on pose :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)) \end{array} \right. .$$

On a $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^p)$. Et :

(i) *$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre $\Longleftrightarrow$ Φ est surjectif.*

(ii) *$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est génératrice $\Longleftrightarrow$ Φ est injectif.*

Remarque 28.31. *On reprend les hypothèses de la proposition 28.30. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On a alors :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_1(e_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_p(e_1) & \cdots & \varphi_p(e_d) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i\right) &= \operatorname{codim} \operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{rg} \Phi = \operatorname{rg} \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi) \\ &= \operatorname{rg} {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi)) = \operatorname{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p). \end{aligned}$$

Ceci fournit ainsi une autre démonstration du théorème 28.22, en ajoutant l'hypothèse que E est de dimension finie.

V Systèmes linéaires

Notation 28.32. *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on note $\Sigma_{A,B}$ le système linéaire $AX = B$ et :*

$$\mathscr{S}_{A,B} = \{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = B\}.$$

Vocabulaire 28.33 (Rang d'un système linéaire)**.** *Pour* $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on appelle* rang *du système linéaire* $\Sigma_{A,B}$ *le rang de* A*.*

Lemme 28.34. *Pour* $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* $\mathscr{S}_{A,0}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$*, et :*

$$\operatorname{codim} \mathscr{S}_{A,0} = \operatorname{rg} A.$$

Proposition 28.35. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*. Alors* $\mathscr{S}_{A,B} = \varnothing$ ou $\mathscr{S}_{A,B}$ *est un espace affine de direction* $\mathscr{S}_{A,0}$ *et de dimension* $(p - \operatorname{rg} A)$*.*

Chapitre 29

Algèbres

Notation 29.1. *Dans ce chapitre,* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un corps.*

I Généralités

Définition 29.2 (Algèbre)**.** *$\mathcal{A}$ un ensemble, $+$ et $\times$ deux LCI sur $\mathcal{A}$, $\cdot$ une LCE $\mathbb{K} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. On dit que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une* $\mathbb{K}$-algèbre *lorsque :*

(i) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,*

(ii) $(\mathcal{A}, +, \times)$ *est un anneau,*

(iii) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}$, $(\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$.

Si de plus $\times$ est commutative, $\mathcal{A}$ est dite algèbre commutative.

Exemple 29.3.

(i) $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

(ii) $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre, pour E $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(iii) $(\mathbb{M}_d(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre, pour $d \in \mathbb{N}^*$.*

(iv) $(\mathbb{L}, +, \times, \times)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre, pour $\mathbb{L}$ surcorps de $\mathbb{K}$.*

Définition 29.4 (Sous-algèbre)**.** *$(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. On appelle* sous-algèbre *de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ tout $B \subset \mathcal{A}$ t.q.*

(i) *B est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, \cdot)$,*

(ii) *B est un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$.*

Lemme 29.5. *$(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une intersection quelconque de sous-algèbres de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$.*

Définition 29.6 (Sous-algèbre engendrée par une partie)**.** $(\mathcal{A},+,\cdot,\times)$ *une* $\mathbb{K}$-*algèbre.* $\mathcal{U}\subset\mathcal{A}$. *Alors l'ensemble des sous-algèbres de* $(\mathcal{A},+,\cdot,\times)$ *contenant* $\mathcal{U}$ *possède un plus petit élément, noté* $\langle\mathcal{U}\rangle$.

Proposition 29.7. $(\mathcal{A},+,\cdot,\times)$ *une* $\mathbb{K}$-*algèbre.* $\mathcal{U}\subset\mathcal{A}$. *Alors :*

$$\langle\mathcal{U}\rangle=\mathrm{Vect}\left(\{x_1\cdots x_n,\ n\in\mathbb{N},\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{U}^n\}\right).$$

Définition 29.8 (Morphisme d'algèbres)**.** $(\mathcal{A},+,\cdot,\times)$, $(\mathcal{B},+,\cdot,\times)$ *deux* $\mathbb{K}$-*algèbres. On appelle* morphisme d'algèbres *toute application* $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ *t.q.*

(i) φ *est linéaire,*

(ii) φ *est un morphisme d'anneaux.*

Proposition 29.9. *L'image directe (resp. réciproque) d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre.*

II Polynômes et algèbres

Notation 29.10. *Dans la suite du chapitre,* $(\mathcal{A},+,\cdot,\times)$ *est une* $\mathbb{K}$-*algèbre.*

Lemme 29.11. $a\in\mathcal{A}$. *Alors il existe un unique morphisme de* $\mathbb{K}$-*algèbres* $\varphi_a:\mathbb{K}[X]\to\mathcal{A}$ *t.q.*

$$\varphi_a(X)=a.$$

On a alors :

$$\forall\,(p_0,\dots,p_n)\in\mathbb{K}^{n+1},\ \varphi_a\left(\sum_{k=0}^{n}p_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{n}p_ka^k.$$

Notation 29.12.

(i) *Pour* $P\in\mathbb{K}[X]$ *et* $a\in\mathcal{A}$, *on pose* $P(a)=\varphi_a(P)$.

(ii) *Pour* $a\in\mathcal{A}$, *on pose :*

$$\mathbb{K}[a]=\mathrm{Im}\,\varphi_a=\{P(a),\ P\in\mathbb{K}[X]\}.$$

Proposition 29.13. $a\in\mathcal{A}$.

(i) $\mathbb{K}[a]=\langle a\rangle$.

(ii) *L'algèbre* $\mathbb{K}[a]$ *est commutative.*

III Polynôme minimal

Définition 29.14 (Idéal annulateur)**.** *Pour $a \in \mathcal{A}$, on pose :*

$$\mathfrak{I}_a = \operatorname{Ker} \varphi_a = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(a) = 0\}.$$

$\mathfrak{I}_a$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur *de a.*

Définition 29.15 (Polynôme minimal)**.** *$a \in \mathcal{A}$. Si $\mathfrak{I}_a \neq \{0\}$, on note $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$, dit* polynôme minimal *de a, l'unique générateur unitaire de $\mathfrak{I}_a$.*

Proposition 29.16. *$a \in \mathcal{A}$.*

(i) *Si $\mathfrak{I}_a = \{0\}$, alors $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[a]$ est un isomorphisme. Ainsi, en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{A}$ est de dimension infinie.*

(ii) *Si $\mathfrak{I}_a \neq \{0\}$, alors en notant $d = \deg \mu_a$, on a $\dim \mathbb{K}[a] = d$, et $\left(1, a, \ldots, a^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.*

IV Algébriques et transcendants

Notation 29.17. *Dans cette section, $\mathbb{L}$ est un surcorps de $\mathbb{K}$.*

Définition 29.18 (Algébriques et transcendants)**.** *$a \in \mathbb{L}$. On considère $\mathfrak{I}_a = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(a) = 0\}$.*

(i) *Si $\mathfrak{I}_a = \{0\}$, on dit que a est* transcendant *sur $\mathbb{K}$.*

(ii) *Si $\mathfrak{I}_a \neq \{0\}$, on dit que a est* algébrique *sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 29.19. *$a \in \mathbb{L}$. S'équivalent :*

(i) *a est transcendant sur $\mathbb{K}$.*

(ii) *$(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$.*

(iii) *$\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\},\ P(a) \neq 0$.*

Proposition 29.20. *Il existe des réels transcendants sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Montrer que l'ensemble des algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (voir proposition 6.22). □

Proposition 29.21. *$a \in \mathbb{L}$. Si a est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors μ_a est un irréductible de $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 29.22. *$a \in \mathbb{L}$. S'équivalent :*

(i) *a est algébrique sur $\mathbb{K}$.*

(ii) *$(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille liée du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$.*

(iii) *$\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie (comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel).*

(iv) $\mathbb{K}[a]$ *est un sous-corps de* $\mathbb{L}$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Conséquence de la proposition 29.16. (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\mathbb{K}[a]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$, il suffit donc de montrer que $\mathbb{K}[a]^* = \mathbb{K}[a] \backslash \{0\}$. Soit $b \in \mathbb{K}[a] \backslash \{0\}$. On considère :

$$\theta_b : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[a] & \longrightarrow & \mathbb{K}[a] \\ x & \longmapsto & bx \end{array} \right. .$$

θ_b est $\mathbb{K}$-linéaire et injective. Or $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie, donc θ_b est un isomorphisme. En particulier, $\exists x \in \mathbb{K}[a]$, $bx = 1$. Donc $b \in \mathbb{K}[a]^*$. (iv) $\Rightarrow$ (i) Si $a = 0$, alors a est bien algébrique. Sinon, comme $\mathbb{K}[a]$ est un corps, $a^{-1} \in \mathbb{K}[a]$. Soit donc $P \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $P(a) = a^{-1}$. Vérifier alors que $(XP - 1)(a) = 0$, avec $(XP - 1) \neq 0$. Donc a est algébrique. $\square$

Lemme 29.23. *Soit E un $\mathbb{L}$-espace vectoriel. Alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cdot \dim_{\mathbb{L}} E,$$

y compris si les dimensions sont infinies, avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

Théorème 29.24. *On considère :*

$$\mathfrak{A} = \{a \in \mathbb{L},\ a \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}.$$

Alors $\mathfrak{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathfrak{A}^2$. Montrer que $(\mathbb{K}[a])[b]$ est de dimension finie comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Or :

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[a + b] \subset (\mathbb{K}[a])[b] \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[a \times b] \subset (\mathbb{K}[a])[b].$$

Donc $\mathbb{K}[a + b]$ et $\mathbb{K}[a \times b]$ sont de dimension finie, donc $(a + b)$ et $(a \times b)$ sont algébriques. Ainsi, $\mathfrak{A}$ est stable par $+$ et $\times$. De plus, $\mathfrak{A}$ est stable par passage à l'inverse et contient 1. C'est donc un corps. $\square$

Proposition 29.25. *On note $\mathfrak{A} = \{a \in \mathbb{C},\ a \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$. Alors :*

(i) $\mathfrak{A}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{C}$.

(ii) $\mathfrak{A}$ *est dénombrable.*

(iii) $\mathfrak{A}$ *est algébriquement clos.*

Démonstration. (iii) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathfrak{A}[X] \backslash \mathfrak{A}_0[X]$. On pose $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, puis, pour $n \in [\![0, d]\!]$:

$$\mathbb{K}_{n+1} = \mathbb{K}_n [a_n].$$

Par récurrence sur n, on montre que $\mathbb{K}_n$ est un corps et qu'il est de dimension finie comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On considère alors $\omega \in \mathbb{C}$ une racine de P (d'après le théorème 25.27). ω est algébrique sur $\mathbb{K}_{d+1}$ (car $P(\omega) = 0$ et $P \in (\mathbb{K}_{d+1})[X]$). Donc :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\omega] \leqslant \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_{d+1}[\omega] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_{d+1} \cdot \dim_{\mathbb{K}_{d+1}} \mathbb{K}_{d+1}[\omega] < +\infty.$$

Donc $\omega \in \mathfrak{A}$. Ainsi, P admet une racine dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{A}$ est algébriquement clos. □

V Adjonction de racines

Vocabulaire 29.26 (Corps de rupture, corps de décomposition)**.**

(i) $P \in \mathbb{K}[X]$ *irréductible. On appelle* corps de rupture *de P tout surcorps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tel que P possède une racine sur $\mathbb{L}$.*

(ii) $P \in \mathbb{K}[X]$. *On appelle* corps de décomposition *de P tout surcorps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tel que P est scindé dans $\mathbb{L}[X]$.*

Proposition 29.27. *$P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Alors P admet un corps de rupture.*

Démonstration. Poser $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/\langle P\rangle$, où $\langle P\rangle$ est l'idéal engendré par P dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $\mathbb{L}$ est un surcorps de $\mathbb{K}$ et que $P\left(\overline{X}\right) = \overline{0}$ dans $\mathbb{L}$. □

Proposition 29.28. *$P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P admet un corps de décomposition.*

Démonstration. Par récurrence sur le degré. □

Chapitre 30

Polynômes d'Endomorphismes

Notation 30.1. *Dans tout le chapitre,* $(\mathbb{K},+,\times)$ *est un corps et* $(E,+,\cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

I Lemme des noyaux

Lemme 30.2 (Lemme des noyaux)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $(P_1,P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$. *Si* $P_1 \wedge P_2 = 1$*, alors :*

$$\operatorname{Ker}\left(P_1P_2\right)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f).$$

(ii) $(P_1,\dots,P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$. *Si* $P_1,\dots,P_n$ *sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\operatorname{Ker}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(f)\right] = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} P_i(f).$$

Démonstration. (i) En appliquant l'égalité de Bézout, obtenir l'existence de $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $UP_1 + VP_2 = 1$. En déduire :

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2)(f),\ \underbrace{\left[U(f)\circ P_1(f)\right](x)}_{x_1} + \underbrace{\left[V(f)\circ P_2(f)\right](x)}_{x_2} = x.$$

Montrer que $x_1 \in \operatorname{Ker} P_2(f)$, $x_2 \in \operatorname{Ker} P_1(f)$ et en déduire que $\operatorname{Ker}\left(P_1P_2\right)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) + \operatorname{Ker} P_2(f)$. Montrer ensuite que $\operatorname{Ker} P_1(f) \cap \operatorname{Ker} P_2(f) = \{0\}$. (ii) Par récurrence. $\square$

II Valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 30.3 (Éléments propres d'un endomorphisme)**.** *$f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :*

$$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_E).$$

(i) *Si $E_\lambda(f) \neq \{0\}$, on dit que λ est une* valeur propre *de f.*

(ii) *Si $x \in E_\lambda(f) \backslash \{0\}$, on dit que x est un* vecteur propre *de f associé à la valeur propre λ.*

(iii) *$E_\lambda(f)$ est le* sous-espace propre *de f associé à λ.*

On note de plus $\operatorname{Sp}(f)$ *l'ensemble des valeurs propres de f.*

Proposition 30.4. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les $(E_\lambda(f))_{\lambda \in \mathbb{K}}$ sont en somme directe.*

Corollaire 30.5. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors f a au plus* $(\dim E)$ *valeurs propres distinctes.*

Proposition 30.6. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Si $(u_1, \ldots, u_s) \in (E \backslash \{0\})^s$ est un système de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes, alors $(u_1, \ldots, u_s)$ est libre.*

III Suites à récurrence linéaire

Vocabulaire 30.7 (Suite à récurrence linéaire)**.** *$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une* suite à récurrence linéaire *lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\beta_0, \ldots, \beta_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ t.q.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+d} = \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u_{n+k}.$$

Proposition 30.8. *$(\beta_0, \ldots, \beta_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$. On pose :*

$$\mathscr{E} = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+d} = \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u_{n+k} \right\}.$$

Alors l'application $\left| \begin{array}{l} \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{K}^d \\ u \longmapsto (u_0, \ldots, u_{d-1}) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme. Ainsi :*

$$\dim \mathscr{E} = d.$$

Notation 30.9.

(i) *Pour $P = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, on pose :*

$$\mathcal{E}(P) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} p_k u_{n+k} = 0 \right\}.$$

(ii) *On pose* $\sigma : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$.

Proposition 30.10. $\sigma \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)$ *et* σ *est surjectif. De plus :*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \mathcal{E}(P) = \operatorname{Ker} P(\sigma).$$

Lemme 30.11. $P \in \mathbb{K}[X]$. *Si* $P_1, \dots, P_s$ *sont des irréductibles de* $\mathbb{K}[X]$ *deux à deux distincts, et* $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *t.q.* $P = P_1^{\alpha_1} \cdots P_s^{\alpha_s}$, *alors :*

$$\mathcal{E}(P) = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{E}\left(P_i^{\alpha_i}\right).$$

Lemme 30.12. $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *On suppose* $\operatorname{car}\mathbb{K} = 0$.

(i) *Si* $\lambda = 0$, *alors :*

$$\mathcal{E}\left(X^\alpha\right) = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ u \text{ stationne en } 0 \text{ à partir du rang } \alpha\right\}.$$

(ii) *Si* $\lambda \neq 0$, *alors :*

$$\mathcal{E}\left((X-\lambda)^\alpha\right) = \left\{\left(R(n)\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ R \in \mathbb{K}_{\alpha-1}[X]\right\}.$$

Théorème 30.13. $P \in \mathbb{K}[X]$. *On suppose* $\operatorname{car}\mathbb{K} = 0$. *Soit* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *des éléments de* $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ *deux à deux distincts,* $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *t.q.*

$$P = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}.$$

Alors, pour $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *:*

$$u \in \mathcal{E}(P) \Longleftrightarrow \exists\,(Q_1, \dots, Q_s) \in \mathbb{K}_{\alpha_1-1}[X] \times \cdots \times \mathbb{K}_{\alpha_s-1}[X], \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n)\lambda_i^n.$$

Autrement dit, $\left(\left(n^j\lambda_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\0\leqslant j<\alpha_i}}$ *est une base de* $\mathcal{E}(P)$.

IV Matrices semblables

Notation 30.14. *Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que* E *est de dimension finie.*

Définition 30.15 (Matrices semblables)**.** $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. *On dit que* B *est* semblable *à* A *lorsque :*

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}.$$

On note alors $A \approx B$. *Et* $\approx$ *est une relation d'équivalence.*

Proposition 30.16. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. *Si A et B sont semblables, alors A et B sont équivalentes.*

Proposition 30.17. *On définit :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K})) \\ P & \longmapsto & \varphi_P : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

où $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ *est le groupe des automorphismes d'algèbres de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Pour* $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, *on a* $A \approx B \Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = \varphi_P(B)$.

(ii) Φ *est un morphisme de groupes.*

(iii) $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Proposition 30.18. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, *avec* $n = \dim E$. *Alors* $A \approx B$ ssi *il existe* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *bases de* E *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *t.q.* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ *et* $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 30.19. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\Pi \in \mathbb{K}[X]$. *Alors :*

$$A \approx B \Longrightarrow \Pi(A) \approx \Pi(B).$$

V Trace

Définition 30.20 (Trace d'une matrice). *On définit :*

$$\mathrm{tr} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ii} \end{array} \right. .$$

Proposition 30.21.

(i) $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(iii) $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ A \approx B \Longrightarrow \mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,B$.

Proposition 30.22. *On définit :*

$$T : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & \tau_B : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(AB) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors T est un isomorphisme.

Définition 30.23 (Trace d'un endomorphisme)**.** *$\mathcal{B}$ une base de E. On définit :*

$$\mathrm{tr} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \mathrm{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right) \end{array} \right. .$$

tr *ne dépend pas de $\mathcal{B}$.*

Proposition 30.24.

(i) $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(E), \mathbb{K}\right)$.

(ii) $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}\,(f \circ g) = \mathrm{tr}\,(g \circ f)$.

Proposition 30.25. *On définit :*

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(E), \mathbb{K}\right) \\ g & \longmapsto & \psi_g : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(f \circ g) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un isomorphisme.

VI Valeurs propres d'une matrice

Définition 30.26 (Éléments propres d'une matrice)**.** *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(i) *Si $\exists X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $AX = \lambda X$, on dit que λ est une* valeur propre *de A.*

(ii) *Si $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ avec $AX = \lambda X$, on dit que X est un* vecteur propre *de A associé à la valeur propre λ.*

On note de plus $\mathrm{Sp}(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de A.*

Proposition 30.27. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\Pi \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est valeur propre de A, alors $\Pi(\lambda)$ est valeur propre de $\Pi(A)$.*

Proposition 30.28. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors les valeurs propres de f sont les valeurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. De plus, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ envoie les vecteurs propres de f sur les vecteurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.*

Corollaire 30.29. *$(A,B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A \approx B$, alors A et B ont les mêmes valeurs propres.*

Proposition 30.30. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A a au plus n valeurs propres.*

VII Polynôme caractéristique

Définition 30.31 (Polynôme caractéristique d'une matrice)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *On pose :*

$$\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X],$$

où $(A - XI_n)$ *est vu comme élément de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}(X))$. χ_A *est appelé* polynôme caractéristique *de* A.

Proposition 30.32. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\deg \chi_A = n$, *et on connaît certains coefficients de* χ_A *:*

$$\chi_A = (-1)^n \left[X^n - (\operatorname{tr} A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\det A)\right].$$

Proposition 30.33. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \approx B \Longrightarrow \chi_A = \chi_B.$$

Définition 30.34 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)**.** $\mathcal{B}$ *une base de* E. *Pour* $f \in \mathcal{L}(E)$, *on définit :*

$$\chi_f = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)}.$$

χ_f *ne dépend pas de* $\mathcal{B}$.

Proposition 30.35. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

$$\lambda \textit{ est valeur propre de } f \Longleftrightarrow \lambda \textit{ est racine de } \chi_f.$$

Corollaire 30.36. $f \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* f *a au plus* $(\dim E)$ *valeurs propres distinctes.*

VIII Endomorphismes cycliques

Notation 30.37. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. *On note :*

$$\mathbb{K}[f] \cdot u = \{\varphi(u),\ \varphi \in \mathbb{K}[f]\} = \{(P(f))(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Proposition 30.38. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. *Alors :*

(i) $\mathbb{K}[f] \cdot u = \operatorname{Vect}\left(f^k(u),\ k \in \mathbb{N}\right)$.

(ii) $\mathbb{K}[f] \cdot u$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* u *et stable par* f.

Notation 30.39. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. *On note :*

$$\mathfrak{I}_{f,u} = \{P \in \mathbb{K}[X],\ (P(f))(u) = 0\}.$$

$\mathfrak{I}_{f,u}$ *est un idéal non nul de* $\mathbb{K}[X]$. *Son unique générateur unitaire est noté* $\mu_{f,u}$.

Proposition 30.40. *$f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$.*

(i) $\mu_{f,u} \mid \mu_f$.

(ii) $\big(u, f(u), \ldots, f^{\delta-1}(u)\big)$ *est une base de* $\mathbb{K}[f] \cdot u$*, où* $\delta = \deg \mu_{f,u}$.

(iii) $\dim\left(\mathbb{K}[f] \cdot u\right) = \deg \mu_{f,u}$.

Définition 30.41 (Endomorphisme cyclique)**.** *$f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(i) $\exists u \in E,\ E = \mathbb{K}[f] \cdot u$.

(ii) $\exists u \in E,\ \big(u, f(u), \ldots, f^{d-1}(u)\big)$ *est libre, où* $d = \dim E$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que (E, f) *est* cyclique.

Lemme 30.42. *On considère :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right),$$

avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$*.* M *est dite* matrice de Frobenius*. Et on a :*

$$\chi_M = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).$$

Lemme 30.43. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Si (E, f) est cyclique, alors :*

$$\chi_f(f) = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in E$ t.q. $\mathcal{B} = \big(u, f(u), \ldots, f^{d-1}(u)\big)$ est une base de E, où $d = \dim E$. On pose $(a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ t.q.

$$f^d(u) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k f^k(u) = 0.$$

Montrer alors que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice de Frobenius, et en déduire avec le lemme 30.42 que :

$$\chi_f = (-1)^d \left(X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k\right).$$

On a ainsi $\left(\chi_f(f)\right)(u) = 0$. Soit alors $v \in E$. Comme $E = \mathbb{K}[f] \cdot u$, il existe $\Pi \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = \left(\Pi(f)\right)(u)$. En déduire alors que $\left(\chi_f(f)\right)(v) = 0$, puis que $\chi_f(f) = 0$. □

IX Théorème de Cayley-Hamilton

Lemme 30.44. $f \in \mathcal{L}(E)$. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On note $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F. Alors :*

$$\chi_{\widetilde{f}} \mid \chi_f.$$

Démonstration. Soit G un supplémentaire de F dans E. Soit β_F et β_G des bases respectives de F et G. En notant $\beta = \beta_F \cup \beta_G$, on a :

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\beta_F}\left(\widetilde{f}\right) & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\chi_f = \chi_{\widetilde{f}} \cdot \chi_B$. □

Théorème 30.45 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*

$$\chi_f(f) = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in E \backslash \{0\}$. On pose $F = \mathbb{K}[f] \cdot u$. F est stable par f ; on pose donc $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F. Alors $\left(F, \widetilde{f}\right)$ est cyclique, donc d'après le lemme 30.43, on a $\chi_{\widetilde{f}}\left(\widetilde{f}\right) = 0$. Or d'après le lemme 30.44, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\chi_f = R\chi_{\widetilde{f}}$. Ainsi

$$\left(\chi_f(f)\right)(u) = \left(R\left(\widetilde{f}\right) \circ \chi_{\widetilde{f}}\left(\widetilde{f}\right)\right)(u) = 0.$$

Donc $\forall u \in E,\ \left(\chi_f(f)\right)(u) = 0$. □

Corollaire 30.46. $f \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*

$$\mu_f \mid \chi_f.$$

En particulier, $\deg \mu_f \leqslant \dim E$.

Corollaire 30.47. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors :*

(i) $\chi_A(A) = 0$.

(ii) $\mu_A \mid \chi_A$.

(iii) $\deg \mu_A \leqslant n$.

Application 30.48. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que f est nilpotent et on note $\nu = \min\left\{k \in \mathbb{N},\ f^k = 0\right\}$. Alors $\nu \leqslant \dim E$.*

Démonstration. Remarquer que $\mu_f = X^\nu$, et appliquer le fait que $\deg \mu_f \leqslant \dim E$. □

Chapitre 31

Réduction des Endomorphismes

Notation 31.1. *Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps et $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.*

I Matrices diagonales

Définition 31.2 (Matrices diagonales)**.** *Pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on note :*

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

On note de plus :

$$\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})=\{\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}.$$

Les éléments de $\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ sont dits matrices diagonales.

Proposition 31.3.

(i) *$\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

(ii) *Pour $i\in[\![1,n]\!]$, l'application $\left|\begin{array}{rcl}\mathfrak{D}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ D & \longmapsto & D_{ii}\end{array}\right.$ est un morphisme d'algèbres.*

(iii) *Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $P\in\mathbb{K}[X]$, on a :*

$$P(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=\operatorname{diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n)).$$

(iv) *Pour tout* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, *on a :*

$$\chi_{\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X).$$

II Diagonalisation

II.1 Diagonalisation des endomorphismes

Définition 31.4 (Endomorphisme diagonalisable)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) *Il existe une base de* E *constituée de vecteurs propres de* f.

(ii) *Il existe* β *base de* E *t.q.* $\mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$.

(iii) *Si* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *sont les valeurs propres distinctes de* f, *alors :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}(f).$$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f *est* diagonalisable.

Proposition 31.5. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* f *est diagonalisable et on note* β *une base de* E *t.q.* $\mathcal{M}_\beta(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, *où* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. *Alors :*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X).$$

En particulier, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* f.

Proposition 31.6. $f \in \mathcal{L}(E)$.

(i) f *diagonalisable* $\Longrightarrow \chi_f$ *scindé.*

(ii) f *diagonalisable* $\Longleftarrow \chi_f$ *simplement scindé.*

Proposition 31.7. $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) f *est diagonalisable.*

(ii) *Il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *deux à deux distincts,* $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *tels que* $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ *et* $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\dim E_{\lambda_i}(f) \geqslant \omega_i$.

(iii) *Il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *deux à deux distincts,* $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *tels que* $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ *et* $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\dim E_{\lambda_i}(f) = \omega_i$.

(iv) *Il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *deux à deux distincts,* $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ *tels que* $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ *et* $\bigcirc_{i=1}^{s} (f - \lambda_i id) = 0$.

(v) f *annule un polynôme simplement scindé.*

(vi) μ_f *est simplement scindé.*

Proposition 31.8. *$f \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace vectoriel de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Alors :*

(i) *L'induit de f sur F est diagonalisable.*

(ii) *F possède un supplémentaire stable par f.*

Démonstration. (i) Comme f est diagonalisable, soit P un polynôme simplement scindé annulant f. En notant $\widetilde{f}$ l'induit de f sur F, montrer que $P\left(\widetilde{f}\right) = 0$, donc $\widetilde{f}$ est diagonalisable. (ii) Soit $\beta_F = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ une base de F. Soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres de f (car f est diagonalisable). On complète β_F en une base $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E avec des vecteurs de $\mathcal{B}$. On considère alors :

$$G = \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_{s+1}, \ldots, \varepsilon_n\right).$$

Alors $E = F \oplus G$ et G est stable par f. □

II.2 Diagonalisation des matrices

Définition 31.9 (Matrice diagonalisable)**.** *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable lorsque A est semblable à une matrice diagonale.*

Proposition 31.10. *$f \in \mathcal{L}(E)$. $\mathcal{B}$ base de E. Alors f est diagonalisable* ssi *$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.*

Proposition 31.11. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

(i) *A diagonalisable $\Longrightarrow \chi_A$ scindé.*

(ii) *A diagonalisable $\Longleftarrow \chi_A$ simplement scindé.*

Proposition 31.12. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. S'équivalent :*

(i) *A est diagonalisable.*

(ii) *Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\operatorname{rg}(A - \omega_i I_n) \leqslant n - \omega_i$.*

(iii) *Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\operatorname{rg}(A - \omega_i I_n) = n - \omega_i$.*

(iv) *Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\prod_{i=1}^s (A - \lambda_i I_n) = 0$.*

(v) *A annule un polynôme simplement scindé.*

(vi) *μ_A est simplement scindé.*

III Applications de la diagonalisation

Proposition 31.13. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable, et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on pose p_i la projection sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} E_{\lambda_j}(f)$. Alors :*

(i) $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[f]$.

(ii) $\mathbb{K}[f] = \operatorname{Vect}(p_1, \ldots, p_s)$.

Démonstration. (i) Soit $i \in [\![1, s]\!]$. Poser $\Pi_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, et montrer que $p_i = \Pi_i(f)$. (ii) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i.$$

□

Lemme 31.14. $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. *Si $f \circ g = g \circ f$, alors chaque sous-espace propre de f est stable par g.*

Définition 31.15 (Commutant d'un endomorphisme)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :*

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}.$$

Proposition 31.16. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

(i) $\mathbb{K}[f] \subset \Gamma(f)$,

(ii) *$\Gamma(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.*

Lemme 31.17. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable, et on pose $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que :*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i}.$$

Alors :

$$\dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^{s} \omega_i^2.$$

Démonstration. Montrer :

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)\} \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)).$$

Donc $\dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^{s} \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{s} (\dim E_{\lambda_i}(f))^2 = \sum_{i=1}^{s} \omega_i^2$.

□

Proposition 31.18. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* f *est diagonalisable. S'équivalent :*

(i) χ_f *est simplement scindé.*

(ii) $\chi_f = \mu_f$.

(iii) $\dim \mathbb{K}[f] = \dim E$.

(iv) $\dim \Gamma(f) = \dim E$.

(v) $\mathbb{K}[f] = \Gamma(f)$.

Proposition 31.19. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi \in \mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_0[X]$. *On suppose que* χ_f *est simplement scindé, et on écrit :*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont deux à deux distincts. Alors :*

$$|\{\varphi \in \mathcal{L}(E),\, \Pi(\varphi) = f\}| = \prod_{i=1}^{n} \left|\Pi^{-1}(\{\lambda_i\})\right|.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E diagonalisant f (car χ_f est simplement scindé). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\Pi(\varphi) = f$. Alors φ commute avec f, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ commute avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$. Donc $\varphi = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, avec $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$. Et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i \in \Pi^{-1}(\{\lambda_i\})$. L'inclusion réciproque étant claire, on a :

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\{\varphi \in \mathcal{L}(E),\, \Pi(\varphi) = f\})\\ &\quad = \left\{\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n),\, (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \Pi^{-1}(\{\lambda_1\}) \times \cdots \times \Pi^{-1}(\{\lambda_n\})\right\}.\end{aligned}$$

□

Proposition 31.20. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* f *est diagonalisable, et on note* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *les valeurs propres distinctes de* f. *Alors les sous-espaces vectoriels de* E *stables par* f *sont les* $\bigoplus_{i=1}^{s} G_i$, *où* G_i *est un sous-espace vectoriel de* $E_{\lambda_i}(f)$, *pour* $i \in [\![1, s]\!]$.

IV Matrices triangulaires

Définition 31.21 (Matrice triangulaire)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *$A$ est dite* triangulaire supérieure *(resp. inférieure) lorsque* $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i > j \Longrightarrow A_{ij} = 0$ *(resp.* $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow A_{ij} = 0$*). On note* $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$ *(resp.* $\mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K})$*) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).*

Proposition 31.22.

(i) $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

(ii) $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}\left(E^{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\right)$.

(iii) $\dim \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

(iv) $\forall A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K}),\ A^{-1} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$.

Proposition 31.23. *On pose :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \quad et \quad \Phi_P : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. .$$

Alors Φ_P est un isomorphisme d'algèbres.

V Trigonalisation

V.1 Généralités

Définition 31.24 (Endomorphisme trigonalisable)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) *Il existe β^+ base de E t.q.* $\mathcal{M}_{\beta^+}(f) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$.

(ii) *Il existe β^- base de E t.q.* $\mathcal{M}_{\beta^-}(f) \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K})$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est trigonalisable*.*

Définition 31.25 (Matrice trigonalisable)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *S'équivalent :*

(i) *A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

(ii) *A est semblable à une matrice triangulaire inférieure.*

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que A est trigonalisable*.*

Proposition 31.26. $f \in \mathcal{L}(E)$. *$\mathcal{B}$ base de E. Alors f est trigonalisable* ssi *$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est trigonalisable.*

V.2 Drapeaux

Définition 31.27 (Drapeau)**.** *On appelle* drapeau *de E toute suite $\mathscr{F} = (E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E t.q.*

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E.$$

Proposition 31.28. *$\mathscr{F} = (E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un drapeau de E. Alors :*

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \dim E_i = i.$$

Proposition 31.29. *$\mathscr{F} = (E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\mathscr{F}$ est un drapeau de E* ssi *il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E t.q.*

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ E_i = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i).$$

Si tel est le cas, on dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée *à $\mathscr{F}$.*

Vocabulaire 31.30 (Drapeau stable par un endomorphisme)**.** *$\mathscr{F} = (E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un drapeau de E. $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\mathscr{F}$ est* stable *par f lorsque :*

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ f(E_i) \subset E_i.$$

Proposition 31.31. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable* ssi *il existe un drapeau de E stable par f.*

VI Polynômes scindés et trigonalisation

VI.1 Endomorphismes transposés

Définition 31.32 (Endomorphisme transposé)**.** *$f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :*

$${}^t f : \left| \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} \right. .$$

On a ${}^t f \in \mathcal{L}(E^*)$.

Proposition 31.33. *$f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base de E, dont on note $\mathcal{B}^*$ la base duale. Alors :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}\left({}^t f\right) = {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)).$$

Lemme 31.34. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f annule un polynôme scindé. Alors il existe un hyperplan de E stable par f.*

Démonstration. Soit $\Pi \in \mathbb{K}[X]$ scindé annulant f. Pour $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\operatorname{Ker} \varphi) \subset \operatorname{Ker} \varphi &\iff \operatorname{Ker}(\varphi \circ f) \supset \operatorname{Ker} \varphi \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi \circ f = \lambda \varphi \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ {}^t f(\varphi) = \lambda \varphi \\ &\iff \varphi \text{ est un vecteur propre de } {}^t f. \end{aligned}$$

Montrer que $\Pi\left({}^t f\right) = {}^t(\Pi(f)) = 0$. En déduire que ${}^t f$ admet un vecteur propre $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ (pour cela, écrire $\Pi = \prod_{i=1}^{s}(X - \zeta_i)$ et montrer qu'il existe $i \in [\![1, s]\!]$ t.q. $({}^t f - \zeta_i id) \notin GL(E^*)$). Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan stable par f. $\square$

VI.2 Endomorphismes trigonalisables et polynômes scindés

Lemme 31.35. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est trigonalisable, alors f annule un polynôme scindé.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E t.q.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}).$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $E_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$. Et on considère :

$$\Pi = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = (-1)^n \chi_f.$$

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(f - \lambda_i id)\,(E_i) \subset E_{i-1}$, en déduire que $\Pi(f) = 0$. $\square$

Remarque 31.36. *La démonstration du lemme 31.35 redémontre le théorème de Cayley-Hamilton (théorème 30.45) dans le cas particulier des endomorphismes trigonalisables.*

Théorème 31.37. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable* ssi *f annule un polynôme scindé.*

Démonstration (Première méthode)**.** ($\Rightarrow$) Voir lemme 31.35. ($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $\dim E$. Le résultat est vrai lorsque $\dim E = 1$. Soit $n \geqslant 2$ t.q. le résultat est vrai dans tout espace de dimension $(n-1)$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ annulant un polynôme scindé $\Pi = \prod_{i=1}^{s} (X - \zeta_i) \in \mathbb{K}[X]$. *Première étape.* Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ t.q. $(f - \zeta_i id) \notin GL(E)$ et en déduire que ζ_i est une valeur propre de f. Soit e_1 un vecteur propre associé à ζ_i. *Deuxième étape.* On complète (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de E. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \zeta_i & Y \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

où $Y \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\Pi(A) = 0$. Ainsi, selon la version matricielle de l'hypothèse de récurrence, A est trigonalisable. Soit donc $P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathfrak{T}_{n-1}^s(\mathbb{K})$ t.q. $A = PTP^{-1}$. Alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}}_{\widetilde{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_i & Y \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}}_{\widetilde{P}} = \begin{bmatrix} \zeta_i & YP \\ 0 & T \end{bmatrix} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}).$$

Donc f est trigonalisable et la récurrence se propage. □

Démonstration (Deuxième méthode)**.** Par récurrence sur $\dim E$ avec le lemme 31.34. □

Corollaire 31.38. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*

Corollaire 31.39. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de μ_A (qui existe d'après la proposition 29.28). Alors μ_A est scindé sur $\mathbb{L}$ et $\mu_A(A) = 0$. Donc en considérant A comme élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$, A est trigonalisable. Or, d'après la remarque 31.36, le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour les matrices trigonalisables. Donc $\chi_A(A) = 0$ (dans $\mathbb{L}$, donc dans $\mathbb{K}$). □

Corollaire 31.40. *$f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(i) *f est trigonalisable.*

(ii) *χ_f est scindé.*

(iii) *μ_f est scindé.*

Corollaire 31.41. *$f \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace vectoriel de E stable par f. Si f est trigonalisable, alors l'induit de f sur F est trigonalisable.*

Chapitre 32

Compléments sur la Réduction

Notation 32.1. *Dans tout le chapitre,* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un corps et* $(E, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*.*

I $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Lemme 32.2. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$*. S'équivalent :*

(i) $A \approx B$ *au sens de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, i.e.* $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = PBP^{-1}$*.*

(ii) $A \approx B$ *au sens de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*, i.e.* $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = PBP^{-1}$*.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair (car $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$). (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $A = PBP^{-1}$. Soit $(Q, R) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$ t.q. $P = Q + iR$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(Q + tR) = (Q + tR)B.$$

On pose $\Pi = \det(Q + XR) \in \mathbb{R}[X]$. On a $\Pi(i) \neq 0$ donc $\Pi \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$. Soit donc $t_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\Pi(t_0) \neq 0$. Alors $(Q + t_0R) \in GL_n(\mathbb{R})$ et :

$$A = (Q + t_0R)\,B\,(Q + t_0R)^{-1}.$$

□

Application 32.3. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *t.q.* $A^2 + I_n = 0$*. Alors :*

(i) *A n'a pas de valeur propre réelle.*

(ii) n *est pair.*

(iii) $A \approx \widetilde{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}$, *où* $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. (i) On a $\mu_A \mid \left(X^2+1\right)$ donc toute valeur propre de A est racine de $\left(X^2+1\right)$, qui n'a pas de racine réelle. (ii) χ_A n'a pas de racine réelle donc $n = \deg \chi_A$ est pair. (iii) A annule $(X+i)(X-i)$ donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable, de valeurs propres i et $-i$. Donc il existe $s \in [\![0,n]\!]$ t.q.

$$A \approx D_s = \begin{bmatrix} iI_s & 0 \\ 0 & -iI_{n-s} \end{bmatrix}.$$

On a $i(2s-n) = \operatorname{tr} D_s = \operatorname{tr} A \in \mathbb{R}$ donc $s = \frac{n}{2}$ et $A \approx D_{n/2}$. Or $\widetilde{R} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{R}^2 + I_n = 0$, donc selon le raisonnement précédent, $\widetilde{R} \approx D_{n/2}$. Donc $A \approx \widetilde{R}$ au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ donc au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (d'après le lemme 32.2). □

Proposition 32.4. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f et de dimension* 1 *ou* 2.

Démonstration. On cherche $x \in E\backslash\{0\}$ t.q. $f^2(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x))$. Autrement dit, on cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ t.q. $\operatorname{Ker} P(f) \neq \{0\}$. Or, on a $\deg \mu_f \geqslant 1$. Soit donc P un facteur irréductible de μ_f : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\mu_f = PQ$. Si $P(f)$ était inversible, Q annulerait f avec $0 \leqslant \deg Q < \deg \mu_f$: c'est impossible. Donc $\operatorname{Ker} P(f) \neq \{0\}$ et $\deg P \in \{1,2\}$ car P est un irréductible de $\mathbb{R}[X]$. □

II Codiagonalisation

Définition 32.5 (Endomorphismes codiagonalisables)**.** $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$. *On dit que les éléments de $\mathcal{A}$ sont* codiagonalisables *lorsqu'il existe β base de E t.q.*

$$\forall f \in \mathcal{A},\ \mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K}).$$

Théorème 32.6. $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$. *Alors les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables* ssi *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\forall f \in \mathcal{A}$, *$f$ est diagonalisable,*

(ii) $\forall (f,g) \in \mathcal{A}^2$, $f \circ g = g \circ f$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Clair (deux matrices diagonales commutent). ($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $\dim E$. Le résultat est vrai lorsque $\dim E = 1$. Soit

$n \geqslant 2$ t.q. le résultat est vrai dans tout espace de dimension $< n$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant (i) et (ii). *Premier cas* : $\mathcal{A} \subset \mathrm{Vect}\,(id)$. Alors toute base convient. *Second cas* : $\mathcal{A} \not\subset \mathrm{Vect}\,(id)$. Soit alors $h \in \mathcal{A} \setminus \mathrm{Vect}\,(id)$. h est diagonalisable ; soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ses valeurs propres distinctes. Pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $g \in \mathcal{A}$, $E_{\lambda_i}(h)$ est stable par g car $g \circ h = h \circ g$; on note donc g_i l'induit de g sur $E_{\lambda_i}(h)$. On pose de plus :

$$\mathcal{A}_i = \{g_i,\ g \in \mathcal{A}\}\,.$$

On a $\dim E_{\lambda_i}(h) < \dim E$ (car $h \notin \mathrm{Vect}\,(id)$), donc par hypothèse de récurrence, il existe β_i base de $E_{\lambda_i}(h)$ codiagonalisant les éléments de $\mathcal{A}_i$. Poser alors $\beta = \beta_1 \cup \cdots \cup \beta_s$ et montrer que β codiagonalise les éléments de $\mathcal{A}$. □

Application 32.7. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\mu_A \wedge \mu_C = 1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On suppose que $\mu_A \wedge \mu_C = 1$. Pour $P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on considère $M(P) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_p \end{bmatrix}$. On a $M(P) \in GL_{n+p}(\mathbb{K})$ et $M(P)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_p \end{bmatrix}$. Et :

$$M(P) \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} M(P)^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ PA - CP + B & C \end{bmatrix}.$$

Il suffit donc de trouver $P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ t.q. $PA - CP = -B$. On considère donc l'endomorphisme :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & PA - CP \end{array} \right. .$$

On va montrer que Φ est un isomorphisme. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$. Alors $PA = CP$. On en déduit alors $\forall \Pi \in \mathbb{K}[X]$, $P\Pi(A) = \Pi(C)P$. En particulier, $P\mu_C(A) = 0$. Or $\mu_A \wedge \mu_C = 1$ donc il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $U\mu_A + V\mu_C = 1$. Donc $V(A)\mu_C(A) = I_n$, d'où $\mu_C(A) \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $P = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ donc Φ est injective donc bijective, donc $\exists P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})\,,\ PA - CP = -B$. □

III Sous-espaces caractéristiques

Définition 32.8 (Sous-espaces caractéristiques). *$f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note :*

$$\begin{aligned} F_\lambda(f) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathrm{Ker}\left((f - \lambda id)^k\right) \\ &= \mathrm{Ker}\left((f - \lambda id)^{\dim E}\right) \\ &= \mathrm{Ker}\left((f - \lambda id)^{\omega}\right), \end{aligned}$$

où ω est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_f. On dit que $F_\lambda(f)$ est le sous-espace caractéristique *de f associé à λ.*

Proposition 32.9. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable. Alors :*

(i) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} F_\lambda(f)$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\{0\} \subsetneq E_\lambda(f) \subset F_\lambda(f)$,

(iii) *f est diagonalisable* $\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$.

Proposition 32.10. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Alors $F_\lambda(f)$ est stable par f, et l'induit $\widetilde{f}$ de f sur $F_\lambda(f)$ est de la forme :*

$$\widetilde{f} = \lambda id + \nu,$$

où $\nu \in \mathcal{L}\left(F_\lambda(f)\right)$ est un endomorphisme nilpotent.

Proposition 32.11. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable :*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{s} \left(\lambda_i - X\right)^{\omega_i},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^s$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, s]\!],\ \dim F_{\lambda_i}(f) = \omega_i.$$

Démonstration. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, l'induit f_i de f sur $F_{\lambda_i}(f)$ est de la forme $f_i = \lambda_i id + \nu_i$, où $\nu_i \in \mathcal{L}\left(F_{\lambda_i}(f)\right)$ est nilpotent (selon la proposition 32.10). Donc $\chi_{\nu_i} = (-X)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}$, d'où $\chi_{f_i} = \left(\lambda_i - X\right)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}$. Ainsi :

$$\prod_{i=1}^{s} \left(\lambda_i - X\right)^{\omega_i} = \chi_f = \prod_{i=1}^{s} \chi_{f_i} = \prod_{i=1}^{s} \left(\lambda_i - X\right)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}.$$

Il vient $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\dim F_{\lambda_i}(f) = \omega_i$. □

Proposition 32.12. *$f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on note p_i la projection sur $F_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_{\lambda_j}(f)$. Alors :*

$$\forall i \in [\![1, s]\!],\ p_i \in \mathbb{K}[f].$$

Démonstration. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} \left(\lambda_i - X\right)^{\omega_i}$, avec $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^s$. Soit $i \in [\![1, s]\!]$. Soit $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$U\left(X - \lambda_i\right)^{\omega_i} + V \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left(X - \lambda_j\right)^{\omega_j} = 1.$$

Poser $\Pi_i = 1 - U\left(X - \lambda_i\right)^{\omega_i}$ et montrer que $p_i = \Pi_i(f)$. □

Proposition 32.13. *$f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. S'équivalent :*

(i) *$E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$.*

(ii) *$E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire stable par f.*

(iii) *L'ordre de multiplicité de λ comme racine de μ_f est égal à 1.*

Démonstration. (iii) $\Rightarrow$ (ii) Si λ est racine simple de μ_f, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\mu_f = (X - \lambda)\, Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. D'après le lemme des noyaux, on a :

$$E = \operatorname{Ker} \mu_f(f) = \operatorname{Ker}\left((X - \lambda)\,(f)\right) \oplus \operatorname{Ker} Q(f) = E_\lambda(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f).$$

Donc $\operatorname{Ker} Q(f)$ est un supplémentaire de $E_\lambda(f)$ stable par f. (ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que $E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire G stable par f. Comme $E_\lambda(f) \subset F_\lambda(f)$, il suffit de prouver que $F_\lambda(f) \subset E_\lambda(f)$. Soit donc $x \in F_\lambda(f)$. Il existe $(y, z) \in E_\lambda(f) \times G$ t.q. $x = y + z$. De plus, en notant $n = \dim E$, on a :

$$0 = (f - \lambda id)^n\,(x) = (f - \lambda id)^n\,(y) + (f - \lambda id)^n\,(z) = (f - \lambda id)^n\,(z).$$

Or λ n'est pas valeur propre de l'induit f_G de f sur G car $G \cap E_\lambda(f) = \{0\}$. Ainsi, $z = 0$, donc $x = y \in E_\lambda(f)$. (i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que $E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$. Soit $\omega \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\chi_f = (X - \lambda)^\omega\, H$ avec $H(\lambda) \neq 0$. Selon le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$\begin{aligned} E = \operatorname{Ker} \chi_f(f) &= \operatorname{Ker}\left((X - \lambda)^\omega\,(f)\right) \oplus \operatorname{Ker} H(f) \\ &= F_\lambda(f) \oplus \operatorname{Ker} H(f) = E_\lambda(f) \oplus \operatorname{Ker} H(f). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} H(f)$ est un supplémentaire de $E_\lambda(f)$ stable par f. (ii) $\Rightarrow$ (iii) On suppose que $E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire G stable par f. En notant $\widetilde{f}$ et f_G les induits respectifs de f sur $E_\lambda(f)$ et G, on a $G \cap E_\lambda(f) = \{0\}$ donc λ n'est pas valeur propre de f_G donc pas racine de μ_{f_G}. Or :

$$\mu_f \mid \mu_{\widetilde{f}}\mu_{f_G} = (X - \lambda)\,\mu_{f_G}.$$

Donc λ est racine simple de μ_f. $\square$

IV Réduction en dimension 2 dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Proposition 32.14. *$A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Alors A est semblable à une et une seule des matrices suivantes :*

(i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$,

(ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

(iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposition 32.15. $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. *Alors A est semblable à une et une seule des matrices suivantes :*

(i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \neq \mu$,

(ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iv) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

V Topologie de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

V.1 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ et applications

Proposition 32.16. *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(A)$ est fini, soit donc $t \in (\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(A))^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. Alors $A - t_p I_n \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A - t_p I_n) \in GL_n(\mathbb{K})$. □

Lemme 32.17. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \approx BA$. En particulier, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

Proposition 32.18. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. *Alors :*

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Démonstration. *Première étape* : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, le lemme 32.17, et la continuité de la fonction :

$$\Xi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right. .$$

Deuxième étape : $\mathbb{K}$ est infini. On pose $(\delta_0, \ldots, \delta_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})^{n+1}$ t.q.

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(P) X^k.$$

Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on pose ensuite $d_p = \delta_p \circ \Xi$, puis :

$$\gamma_p : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto d_p\left((A - tI_n) B\right) - d_p\left(B (A - tI_n)\right) \end{array} \right. .$$

La fonction γ_p est polynomiale car d_p est polynomiale. Et, d'après le lemme 32.17, on a $\forall t \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(A)$, $= \gamma_p(t) = 0$. Puisque $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(A)$ est infini, il vient $\gamma_p = 0$. D'où $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\gamma_p(0) = 0$, donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. *Troisième étape* : $\mathbb{K}$ est fini. On plonge $\mathbb{K}$ dans un surcorps $\mathbb{L}$ infini (par exemple : $\mathbb{L} = \mathbb{K}(X)$), et on calcule les polynômes caractéristiques dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$. □

V.2 Topologie des classes de similitude

Notation 32.19. *Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on note :*

$$\Omega(A) = \left\{PAP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{C})\right\}.$$

Lemme 32.20. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :*

$$\overline{\Omega(A)} \cap \mathfrak{D}_n(\mathbb{C}) \neq \varnothing.$$

Démonstration. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable (c.f. corollaire 31.38) ; soit donc $T \in \Omega(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{C})$. On pose :

$$D = \mathrm{diag}\,(1, 2, \ldots, n) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer :

$$D^p T D^{-p} = \left(\mathbb{1}_{[\![1,j]\!]}(i) \left(\frac{i}{j}\right)^p T_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 32.21. *$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :*

$$\Omega(A) \textit{ est fermé} \Longleftrightarrow A \textit{ est diagonalisable.}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Conséquence du lemme 32.20. ($\Leftarrow$) On suppose A diagonalisable et on écrit :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Soit alors $B \in \Omega(A)^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\chi_L = \lim_{p\to+\infty} \chi_{B_p} = \chi_A.$$

De plus, en notant $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$, on a :

$$\Pi(L) = \lim_{p\to+\infty} \Pi(B_p) = 0.$$

Ainsi, L est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Donc $L \in \Omega(A)$. □

Proposition 32.22. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors :*

$$\Omega(A) \text{ est borné} \iff A \in \operatorname{Vect}(I_n).$$

VI Systèmes dynamiques de matrices ou d'endomorphismes

Proposition 32.23. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose* $\operatorname{car}\mathbb{K} = 0$ *et on note* $\Pi = X^\delta + \sum_{k=0}^{\delta-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *un polynôme annulateur de A. Alors, pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, *la suite* $\left((A^p)_{ij}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *est à récurrence linéaire :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \left(A^{p+\delta}\right)_{ij} + \sum_{k=0}^{\delta-1} \alpha_k \left(A^{p+k}\right)_{ij} = 0.$$

Le théorème 30.13 fournit donc la forme de l'expression de $(A^p)_{ij}$ en fonction de p.

Proposition 32.24. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors :*

(i) $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ A^p X \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$

(ii) $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge* $\iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ (A^p X)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge.*

(iii) $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est bornée* $\iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ (A^p X)_{p\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Proposition 32.25. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors :*

$$A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \iff \operatorname{Sp}(A) \subset \mathcal{B}_o(0,1).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, soit $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Alors :

$$\lambda^p X = A^p X \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

En déduire (par exemple en choisissant $i \in [\![1, n]\!]$ t.q. $X_i \neq 0$) que $\lambda^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. Donc $\lambda \in \mathcal{B}_o(0,1)$. ($\Leftarrow$) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, on écrit :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{\omega_i},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont deux à deux distincts et $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. En utilisant la proposition 32.10, montrer que :

$$\forall x \in F_{\lambda_i}(f),\ f^p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0.$$

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{\lambda_i}(f)$, il vient $\forall x \in E,\ f^p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. En déduire que $f^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$, i.e. $A^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. □

Proposition 32.26. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. S'équivalent :*

(i) $(f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *est bornée.*

(ii) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathcal{B}_f(0,1)$ *et* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \cap \mathbb{U},\ F_\lambda(f) = E_\lambda(f)$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On vérifie aisément que $|\lambda| \leqslant 1$. Si $\lambda \in \mathbb{U}$, soit f_λ l'induit de f sur $F_\lambda(f)$. On sait qu'il existe $\nu_\lambda \in \mathcal{L}(F_\lambda)$ nilpotent t.q.

$$f_\lambda = \lambda id + \nu_\lambda.$$

On suppose par l'absurde que $E_\lambda(f) \subsetneq F_\lambda(f)$. Autrement dit, $\nu_\lambda \neq 0$, d'où :

$$\mathrm{Ker}\, \nu_\lambda \subsetneq \mathrm{Ker}\, \nu_\lambda^2.$$

Or :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{Ker}\, \nu_\lambda^2 \setminus \mathrm{Ker}\, \nu_\lambda,\ \|f_\lambda^p(x)\| &= \|\lambda x + p\nu_\lambda(x)\| \\ &\geqslant p\, \|\nu_\lambda(x)\| - \|x\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty,\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $F_\lambda(f)$. C'est absurde. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit β une base de E adaptée à la somme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} F_\lambda(f)$. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_s \end{bmatrix},$$

où $M_i = \lambda_i I_{\omega_i} + N_i$, avec $\omega_i \in \mathbb{N}^*$ et $N_i \in \mathbb{M}_{\omega_i}(\mathbb{C})$ nilpotente. On a de plus :

$$\forall i \in [\![1, s]\!],\ \lambda_i \in \mathbb{U} \Longrightarrow M_i = \lambda_i I_{\omega_i}.$$

En déduire avec la proposition 32.25 que $((\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, i.e. $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Proposition 32.27. $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* E *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel. S'équivalent :*

(i) $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge.*

(ii) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathcal{B}_o(0,1) \cup \{1\}$ *et* $F_1(f) = E_1(f)$.

VII Commutant d'une matrice

Définition 32.28 (Commutant d'une matrice)**.** *Pour* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, *on note :*

$$\Gamma(A) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$

Proposition 32.29. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors :*

(i) $\mathbb{K}[A] \subset \Gamma(A)$,

(ii) $\Gamma(A)$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 32.30. $\forall A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$, $\dim \Gamma(A) \geqslant n$.

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\Gamma(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Ker} \varphi_{ij}, \quad \text{où } \varphi_{ij} : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & (AM)_{ij} - (MA)_{ij} \end{array} \right. .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim \Gamma(A) \geqslant \dim\left(\Gamma(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})\right) &= \dim \left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Ker} \varphi_{ij} \right) \\ &= \dim \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) - \operatorname{rg}(\varphi_{ij},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n) \\ &\geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n. \end{aligned}$$

□

Lemme 32.31. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, A *trigonalisable* $\Longrightarrow \dim \Gamma(A) \geqslant n$.

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. $PAP^{-1} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. On considère l'automorphisme d'algèbres :

$$\Phi_P : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. .$$

On a :

$$\dim \Gamma(A) = \dim \Phi_P(\Gamma(A)) = \dim \Gamma(\Phi_P(A)) \geqslant n,$$

d'après le lemme 32.30 car $\Phi_P(A) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. □

Proposition 32.32.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \dim \Gamma(A) \geqslant n.$$

Démonstration. Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de μ_A (qui existe d'après la proposition 29.28). Alors μ_A est scindé sur $\mathbb{L}$ et $\mu_A(A) = 0$. Donc en considérant A comme élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$, A est trigonalisable. D'après le lemme 32.31, $\dim \Gamma_{\mathbb{L}}(A) \geqslant n$. Montrer alors que $\Gamma_{\mathbb{K}}(A)$ et $\Gamma_{\mathbb{L}}(A)$ sont les espaces de solutions d'un même système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n^2 équations et n^2 inconnues. Le rang de ce système linéaire est invariant par changement du corps de base, d'où $\dim \Gamma_{\mathbb{K}}(A) = \dim \Gamma_{\mathbb{L}}(A) \geqslant n$. □

VIII Décomposition de Dunford

Théorème 32.33 (Décomposition de Dunford)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que f est trigonalisable. Alors il existe un unique couple $(d, \nu) \in \mathcal{L}(E)^2$ t.q.*

(i) $f = d + \nu$,

(ii) *d est diagonalisable,*

(iii) *ν est nilpotent,*

(iv) $d \circ \nu = \nu \circ d$.

Une telle décomposition est appelée décomposition de Dunford.

Démonstration. *Existence.* On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on note p_i la projection sur $F_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_{\lambda_j}(f)$. On pose alors :

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \qquad \text{et} \qquad \nu = f - d.$$

D'après la proposition 32.12, on a $(d, \nu) \in \mathbb{K}[f]^2$, donc $d \circ \nu = \nu \circ d$. d est bien diagonalisable (car $\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}(d) = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{\lambda_i}(f) = E$). Et ν induit un nilpotent sur chaque $F_{\lambda_i}(f)$, donc ν est nilpotent. *Unicité.* Soit $(d', \nu') \in \mathcal{L}(E)^2$

une décomposition de Dunford de f (on note toujours (d, ν) la décomposition de Dunford donnée dans la preuve de l'existence). On a :

$$d - d' = \nu' - \nu.$$

Or, d' commute avec f, donc avec tout polynôme en f, donc avec d. Ainsi, d'après le théorème 32.6, d et d' sont codiagonalisables. Donc $(d - d')$ est diagonalisable. De plus, ν' commute avec ν (même argument que précédemment). Ainsi, en notant $(\omega, \omega') \in (\mathbb{N}^*)^2$ t.q. $\nu^\omega = \nu'^{\omega'} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(\nu - \nu')^{\omega+\omega'} &= \sum_{k=0}^{\omega} \binom{\omega+\omega'}{k} \nu^k \underbrace{(-\nu')^{\omega'+\omega-k}}_{0} \\ &\quad + \sum_{k=\omega+1}^{\omega+\omega'} \binom{\omega+\omega'}{k} \underbrace{\nu^k}_{0} (-\nu')^{\omega'+\omega-k} = 0.\end{aligned}$$

Donc $d - d' = \nu' - \nu$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul. □

IX Matrices nilpotentes

Notation 32.34. *On note :*

$$\mathscr{N}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ A \text{ est nilpotente}\}.$$

Proposition 32.35. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *S'équivalent :*

(i) $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

(ii) $\chi_A = (-X)^n$.

(iii) $\exists \nu \in \mathbb{N}^*,\ \mu_A = X^\nu$.

Remarque 32.36. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. *Si* $\mathbb{K}$ *est algébriquement clos, alors* $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Proposition 32.37. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. *Si* $A \approx B$, *alors* $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \iff B \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

Notation 32.38. *Pour* $\nu \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$J_\nu = (\delta_{i+1,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant \nu \\ 1 \leqslant j \leqslant \nu}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{N}_\nu(\mathbb{K}).$$

Proposition 32.39. $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. *S'équivalent :*

(i) $A \approx J_n$.

(ii) $A^{n-1} \neq 0$.

(iii) $\operatorname{rg} A = n-1$.

Lemme 32.40. $\forall (\nu, k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \operatorname{rg} J_\nu^k = \max(\nu - k, 0)$.

Théorème 32.41 (Théorème de classification des matrices nilpotentes)**.** $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. *Alors il existe une unique suite* $\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_s \geqslant 1$ *t.q.*

$$A \approx \begin{bmatrix} J_{\nu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\nu_s} \end{bmatrix}.$$

Chapitre 33

Exponentielle et Systèmes Différentiels Linéaires

Notation 33.1. *Dans tout le chapitre,* $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre de dimension* n*, avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

I Normes d'algèbre

Définition 33.2 (Norme d'algèbre)**.** *Soit* ν *une norme sur* $\mathcal{A}$*. On dit que* ν *est une* norme d'algèbre *lorsque :*

(i) $\nu(1) = 1$,

(ii) $\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2,\ \nu(ab) \leqslant \nu(a)\nu(b)$.

Théorème 33.3. *Il existe des normes d'algèbre sur* $\mathcal{A}$*.*

Démonstration. Pour $a \in \mathcal{A}$, on considère :

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ x \longmapsto ax \end{array} \right. .$$

On a $\forall a \in \mathcal{A}$, $\varphi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$. Soit alors $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathcal{A}$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ subordonnée à $\|\cdot\|$, et on pose :

$$\nu : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ a \longmapsto |||\varphi_a||| \end{array} \right. .$$

Montrer que ν est une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$. $\square$

Proposition 33.4. *Soit ν une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$. Alors :*

$$\mathcal{B}_o(1,1) \subset \mathcal{A}^*,$$

où $\mathcal{A}^*$ est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{B}_o(0,1)$. Montrer que la série $\sum h^p$ converge absolument et que :

$$(1-h)\sum_{p=0}^{\infty} h^p = 1.$$

Donc $(1-h) \in \mathcal{A}^*$. □

II Exponentielle sur une algèbre de dimension finie

Définition 33.5 (Exponentielle)**.** *On définit :*

$$\exp : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ a \longmapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{p!} \end{array} \right. .$$

Démonstration. Soit ν une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$. Pour $a \in \mathcal{A}$, montrer que la série $\sum \frac{a^p}{p!}$ converge absolument donc converge. □

Proposition 33.6. $\exp \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Proposition 33.7. *Si $(\mathcal{B}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie et $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme d'algèbres, alors :*

$$\phi \circ \exp_{\mathcal{A}} = \exp_{\mathcal{B}} \circ \phi.$$

Exemple 33.8.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Considérer le morphisme d'algèbres :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ z \longmapsto \begin{pmatrix} \Re(z) & -\Im(z) \\ \Im(z) & \Re(z) \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

D'après la proposition 33.7, on a :

$$\exp(\Phi(a+ib)) = \Phi(\exp(a+ib)) = e^a \Phi(\cos b + i \sin b).$$

□

Proposition 33.9.

$$\forall (a,b) \in \mathcal{A}^2,\ ab = ba \Longrightarrow \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathcal{A}^2$ t.q. $ab = ba$. Pour $N \in \mathbb{N}$, poser :

$$S_N(a,b) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{b^k}{k!}\right) = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant N} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!}\right),$$

$$T_N(a,b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q \leqslant N}} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!}\right).$$

Soit alors ν une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$. Montrer :

$$\begin{aligned}
\nu\left(S_N(a,b) - T_N(a,b)\right) &= \nu\left(\sum_{\substack{0 \leqslant p,q \leqslant N \\ p+q > N}} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!}\right)\right) \\
&\leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant p,q \leqslant N \\ p+q > N}} \left(\frac{\nu(a)^p}{p!} \cdot \frac{\nu(b)^q}{q!}\right) \\
&= S_N\left(\nu(a), \nu(b)\right) - T_N\left(\nu(a), \nu(b)\right) \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{\nu(a)} e^{\nu(b)} - e^{\nu(a)+\nu(b)} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\exp(a)\exp(b) - \exp(a+b) = \lim_{N\to+\infty} \left(S_N(a,b) - T_N(a,b)\right) = 0.$ □

Corollaire 33.10. $\exp(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$.

Proposition 33.11. *Soit $a \in \mathcal{A}$. On considère :*

$$\psi_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}^* \\ t \longmapsto \exp(ta) \end{array} \right. .$$

Alors :

(i) *ψ_a est un morphisme de groupes.*

(ii) *ψ_a est $\mathcal{C}^0$.*

(iii) *ψ_a est dérivable, et $\psi_a' = a\psi_a = \psi_a a$.*

(iv) *$\psi_a(\mathbb{R}) \subset \mathbb{K}[a]$.*

Démonstration. (iv) $\mathbb{K}[a]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$, qui est de dimension finie, donc $\mathbb{K}[a]$ est fermé (c.f. proposition 15.32). Et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_a(t) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(ta)^k}{k!} \in \overline{\mathbb{K}[a]} = \mathbb{K}[a]$. □

Proposition 33.12. *Soit $a \in \mathcal{A}$ annulant un polynôme simplement scindé $\Pi = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i) \in \mathbb{K}[X]$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts. Soit $P \in \mathbb{K}_{s-1}[X]$ t.q.*

$$\forall i \in [\![1, s]\!],\ P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}.$$

Alors :

$$\exp(a) = P(a).$$

Démonstration. On considère :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \\ b \longmapsto \varphi_b : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ x \longmapsto bx \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Φ est un morphisme injectif d'algèbres. Donc $\Pi(\Phi(a)) = \Phi(\Pi(a)) = 0$. Ainsi, $\Phi(a)$ annule un polynôme simplement scindé, donc $\Phi(a)$ est diagonalisable. Soit donc β une base de $\mathcal{A}$ t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(\Phi(a)) = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

avec $\{\mu_i,\ i \in [\![1, n]\!]\} \subset \{\lambda_i,\ i \in [\![1, s]\!]\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\beta(\Phi(\exp(a))) &= \exp(\mathcal{M}_\beta(\Phi(a))) = \exp(\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)) \\ &= \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) = \operatorname{diag}(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)) \\ &= P(\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)) = P(\mathcal{M}_\beta(\Phi(a))) \\ &= \mathcal{M}_\beta(\Phi(P(a))). \end{aligned}$$

Ainsi $\exp(a) = P(a)$. □

III Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

Notation 33.13. *Dans la suite du chapitre, $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Proposition 33.14. *$\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(\exp(f)) = \exp(\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)).$$

Proposition 33.15. *$(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A = PBP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors :*

$$\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}.$$

Proposition 33.16. *Soit* $T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$*. Alors :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\exp(T))_{ii} = e^{T_{ii}}.$$

Proposition 33.17. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(\exp(A)) > 0.$

Démonstration. $(\det \circ \exp) : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est une application continue, et $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc $(\det \circ \exp)(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$. Comme $(\det \circ \exp)(I_n) = 1$, $(\det \circ \exp)(\mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}_+^*$. □

Proposition 33.18. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors :*

$$\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Démonstration. Dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable. Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{C})$ t.q. $A = PTP^{-1}$. Montrer alors :

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = e^{\operatorname{tr} T} = e^{\operatorname{tr} A}.$$

□

Proposition 33.19. $f \in \mathcal{L}(E)$*. Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* f*. On note* f_F *l'induit de* f *sur* F*. Alors* F *est stable par* $\exp(f)$ *et :*

$$\forall x \in F,\ \exp_{\mathcal{L}(E)}(f) \cdot x = \exp_{\mathcal{L}(F)}(f_F) \cdot x.$$

Proposition 33.20. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \exp({}^tA) = {}^t(\exp(A)).$

IV Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

IV.1 Rappels sur la dérivée

Proposition 33.21. *E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. $f : \mathbb{R} \to E$, $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en t_0, alors $\Lambda \circ f$ est dérivable en t_0, et :*

$$(\Lambda \circ f)'(t_0) = \Lambda(f'(t_0)).$$

Proposition 33.22. *E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. $f : \mathbb{R} \to E$, $g : \mathbb{R} \to F$, $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $t_0 \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en t_0, alors la fonction $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto B(f(t), g(t)) \in G$ est dérivable en t_0, et :*

$$p'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

IV.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Notation 33.23. *Dans la suite du chapitre,* $(E, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n*, avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Vocabulaire 33.24 (Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$*. On note* $\mathscr{E}_f$ *l'équation* $x' = f \circ x$*, d'inconnue* $x \in E^{\mathbb{R}}$ *dérivable. On note :*

$$\mathscr{S}_f = \left\{x \in E^{\mathbb{R}} \text{ dérivable}, \forall t \in \mathbb{R},\, x'(t) = f\left(x\left(t\right)\right)\right\}.$$

Proposition 33.25. $f \in \mathcal{L}(E)$*. Alors* $\mathscr{S}_f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}, E\right)$*.*

Vocabulaire 33.26 (Problème de Cauchy)**.** $f \in \mathcal{L}(E)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $x_0 \in E$*. On appelle* problème de Cauchy *le système :*

$$\mathscr{C}_{f,t_0,x_0} : \begin{cases} x' = f \circ x \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases},$$

d'inconnue $x \in E^{\mathbb{R}}$ *dérivable.*

Théorème 33.27. $f \in \mathcal{L}(E)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $x_0 \in E$*. Alors le problème de Cauchy* $\mathscr{C}_{f,t_0,x_0}$ *admet une unique solution donnée par :*

$$x : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow E \\ t \longmapsto \exp\left(\left(t - t_0\right) f\right) \cdot x_0 \end{array}\right. .$$

Proposition 33.28. $f \in \mathcal{L}(E)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*. Alors l'application*

$$\Psi : \left|\begin{array}{l} \mathscr{S}_f \longrightarrow E \\ x \longmapsto x\left(t_0\right) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :

$$\mathscr{S}_f \simeq E.$$

Proposition 33.29. $A \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $X_0 \in \mathbb{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right)$*. Alors le problème de Cauchy* $\mathscr{C}_{A,t_0,X_0}$ *(en identifiant* $\mathbb{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right)$ *à* $\mathbb{K}^n$ *et* $\mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ *à* $\mathcal{L}\left(\mathbb{K}^n\right)$*) admet une unique solution donnée par :*

$$X : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right) \\ t \longmapsto \exp\left(\left(t - t_0\right) A\right) X_0 \end{array}\right. .$$

Proposition 33.30. $(A, R) \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right)^2$*. On suppose que* $A = PRP^{-1}$*, avec* $P \in GL_n(\mathbb{K})$*. Alors :*

$$\mathscr{S}_A = P\mathscr{S}_R.$$

IV.3 Systèmes dynamiques

Proposition 33.31. $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) $\forall x \in \mathscr{S}_f,\ x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \Re(\lambda) < 0$.

Si ces propriétés sont vérifiées, alors pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E :

$$\forall x \in \mathscr{S}_f,\ \forall r \in \left]0, -\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \Re(\lambda)\right[,\ \|x(t)\| = o_{+\infty}\left(e^{-rt}\right). \tag{$*$}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, soit $u \in E_\lambda(f) \backslash \{0\}$. On pose :

$$x : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow E \\ t \longmapsto e^{t\lambda} u \end{array} \right. .$$

Alors $x \in \mathscr{S}_f$. Donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Ainsi $e^{t\Re(\lambda)} = \left|e^{t\lambda}\right| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Donc $\Re(\lambda) < 0$. (ii) $\Rightarrow$ (i) On note $R = -\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \Re(\lambda) > 0$. On pose $F_1, \ldots, F_s$ les sous-espaces caractéristiques de f. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on munit F_i d'une norme $\|\cdot\|_i$, on note f_i l'induit de f sur F_i et on pose $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\nu_i \in \mathcal{L}(F_i)$ nilpotent t.q. $f_i = \lambda_i id + \nu_i$. On définit de plus $\|\cdot\|_\infty$ sur E par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_s) \in F_1 \times \cdots \times F_s,\ \left\| \sum_{i=1}^{s} x_i \right\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \|x_i\|_i .$$

Soit alors $x \in \mathscr{S}_f$. En notant $x_0 = x(0)$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \exp(tf) \cdot x_0.$$

On pose $(x_1, \ldots, x_s) \in F_1 \times \cdots \times F_s$ t.q. $x_0 = \sum_{i=1}^{s} x_i$. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \|\exp(tf_i) \cdot x_i\|_i &= \|\exp(t\lambda_i id + t\nu_i) \cdot x_i\|_i = \left|e^{t\lambda_i}\right| \cdot \|\exp(t\nu_i) \cdot x_i\|_i \\ &= e^{t\Re(\lambda_i)} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \nu_i^k(x_i)}{k!} \right\|_i \leqslant e^{-Rt} \sum_{k=0}^{n} t^k \frac{\left\|\nu_i^k(x_i)\right\|_i}{k!} \\ &= \mathcal{O}_{+\infty}\left(e^{-Rt} t^n\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|x(t)\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{s} \exp(tf_i) \cdot x_i \right\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\exp(tf_i) \cdot x_i\|_i = \mathcal{O}_{+\infty}\left(e^{-Rt} t^n\right).$$

Donc $\forall r \in]0, R[,\ \|x(t)\|_\infty = o_{+\infty}\left(e^{-rt}\right)$ (on obtient $(*)$ par équivalence des normes). $\square$

Chapitre 34

Intégrales sur un Intervalle Quelconque

Notation 34.1. *Dans ce chapitre, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

I Intégrales convergentes

Définition 34.2 (Intégrale impropre)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{K})$. *On dit que l'*intégrale impropre $\int_a^\omega f$ converge *lorsque* $x \longmapsto \int_a^x f$ *a une limite dans* $\mathbb{K}$ *quand* $x \to \omega$. *On pose alors :*

$$\int_a^\omega f = \lim_{\substack{x \to \omega \\ x \in [a, \omega[}} \int_a^x f.$$

Proposition 34.3. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. *On pose :*

$$\mathfrak{E}([a, \omega[\,, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{K}),\ \int_a^\omega f \text{ converge} \right\}.$$

Alors :

(i) $\mathfrak{E}([a, \omega[\,, \mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{K})$.

(ii) *L'application* $\int_a^\omega : \mathfrak{E}([a, \omega[\,, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire positive.*

Proposition 34.4 (Principe de localisation)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$, $b \in [a, \omega[$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{K})$. *Alors* $\int_a^\omega f$ *converge* ssi $\int_b^\omega f$ *converge. Si tel est le cas, on a :*

$$\int_a^\omega f = \int_a^b f + \int_b^\omega f.$$

Notation 34.5. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}\left([a,\omega[\,,\mathbb{K}\right)$. Si $\int_a^\omega f$ converge, on définit :*

$$\int_\omega^a f = -\int_a^\omega f.$$

Proposition 34.6. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0\left([a,\omega[\,,\mathbb{R}_+\right)$. Si $\int_a^\omega f = 0$, alors $f = 0$.*

Définition 34.7 (Intégrale doublement impropre)**.** *$(u,v) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $u \neq v$, $a \in]u,v[$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}\left(]u,v[\,,\mathbb{K}\right)$. On dit que l'*intégrale doublement impropre *$\int_u^v f$* converge *lorsque les intégrales impropres $\int_u^a f$ et $\int_a^v f$ convergent. Dans ce cas, on définit :*

$$\int_u^v f = \int_u^a f + \int_a^v f.$$

Exemple 34.8. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} t^\alpha \,\mathrm{d}t$ diverge.*

Définition 34.9 (Intégrale sur un intervalle quelconque)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}\left(I,\mathbb{K}\right)$. On dit que $\int_I f$ converge lorsque I est un segment* ou *l'intégrale impropre correspondant à $\int_I f$ converge.*

Proposition 34.10. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On pose :*

$$\mathfrak{E}\left(I,\mathbb{K}\right) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0_{pm}\left(I,\mathbb{K}\right),\ \int_I f \text{ converge} \right\}.$$

Alors :

(i) *$\mathfrak{E}\left(I,\mathbb{K}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{pm}\left(I,\mathbb{K}\right)$.*

(ii) *L'application $\int_I : \mathfrak{E}\left(I,\mathbb{K}\right) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire positive.*

II Intégrales de fonctions positives

Proposition 34.11. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0\left([a,\omega[\,,\mathbb{R}_+\right)$. S'équivalent :*

(i) *$\int_a^\omega f$ converge.*

(ii) *$\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in [a,\omega[\,$, $\int_a^x f \leqslant M$.*

Remarque 34.12. *En vertu du principe de localisation, la proposition 34.11 reste vraie en supposant seulement que $f \in \mathcal{C}^0\left([a,\omega[\,,\mathbb{R}\right)$ et $f \geqslant 0$ au voisinage de ω.*

Proposition 34.13. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $(f,g) \in \mathcal{C}^0_{pm}\left([a,\omega[\,,\mathbb{R}\right)^2$. On suppose que :*

(i) $\exists b \in [a, \omega[\,,\ f_{|[b,\omega[} \geqslant 0$ et $g_{|[b,\omega[} \geqslant 0$.

(ii) $f(x) = \mathcal{O}_{\omega^-}(g(x))$.

Alors $\int_a^\omega g$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^\omega f$ *converge.*

Corollaire 34.14. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $(f, g) \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{R})^2$. On suppose que :*

(i) $\exists b \in [a, \omega[\,,\ f_{|[b,\omega[} \geqslant 0$ et $g_{|[b,\omega[} \geqslant 0$.

(ii) $f(x) \underset{\omega^-}{\sim} g(x)$.

Alors $\int_a^\omega f$ *et* $\int_a^\omega g$ *sont de même nature.*

Notation 34.15. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[\,, \mathbb{R}_+)$. Comme la fonction $x \longmapsto \int_a^x f$ croît, il existe $L \in \overline{\mathbb{R}}$ t.q. $\int_a^x f \xrightarrow[x \to \omega^-]{} L$. On notera $\int_a^\omega f = L$.*

Proposition 34.16 (Intégrales de Bertrand)**.** *$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t} \text{ converge} \iff (\alpha, \beta) > (1, 1).$$

Définition 34.17 (Fonction gamma)**.** *On définit :*

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 34.18.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(iii) Γ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(iv) $\Gamma \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

III Intégrales absolument convergentes

Définition 34.19 (Intégrale absolument convergente)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. On dit que $\int_I f$ est* absolument convergente *lorsque $\int_I |f|$ converge.*

Proposition 34.20. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I f$ converge absolument, alors $\int_I f$ converge.*

Démonstration. On se place dans le cas où $I = [a, \omega[$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$. Il suffit de prouver que :

$$\forall u \in [a, \omega[^{\mathbb{N}}, \left(u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega\right) \Longrightarrow \left(\int_a^{u_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Il suffit donc de prouver que :

$$\forall u \in [a, \omega[^{\mathbb{N}}, \left[\left(u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega\right) \text{ et } u \nearrow\right] \Longrightarrow \left(\int_a^{u_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Soit donc $u \in [a, \omega[^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \omega$ et $u \nearrow$. On peut supposer $u_0 = a$, et on a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^{u_n} f = \sum_{k=1}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} f$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \left| \int_{u_{k-1}}^{u_k} f \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} |f| \leqslant \int_a^{\omega} |f|.$$

Donc $\sum \int_{u_{n-1}}^{u_n} f$ converge absolument donc converge, d'où $\left(\int_a^{u_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Vocabulaire 34.21 (Intégrale semi-convergente)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I f$ est convergente mais pas absolument convergente, on dit que $\int_I f$ est* semi-convergente*.*

Proposition 34.22. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. S'équivalent :*

(i) *$\int_I f$ converge absolument.*

(ii) *$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b |f| \leqslant M$.*

IV Intégration des relations de Landau

Proposition 34.23. *$a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, \omega[, \mathbb{R})$. On suppose que $g \geqslant 0$ au voisinage de ω et $f(x) = o_{\omega^-}(g(x))$.*

(i) *Si $\int_a^{\omega} g$ converge, alors $\int_a^{\omega} f$ converge et :*

$$\int_x^{\omega} f = o_{\omega^-}\left(\int_x^{\omega} g\right).$$

(ii) *Si $\int_a^{\omega} g$ diverge, alors :*

$$\int_a^{x} f = o_{\omega^-}\left(\int_a^{x} g\right).$$

Remarque 34.24. *La proposition 34.23 reste valable en remplaçant o par $\mathcal{O}$ ou $\sim$.*

Application 34.25.

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Démonstration. On pose $f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-t^2} \in \mathbb{R}$. f est $\mathcal{C}^0$ et $f(t) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} f$ converge. Et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}\left(e^{-t^2}\right)\\ &= \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{4t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{4t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\frac{e^{-t^2}}{4t^2} = o_{+\infty}\left(e^{-t^2}\right)$ et $e^{-t^2} \geqslant 0$ donc $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{4t^2}\,\mathrm{d}t = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$, d'où le résultat. ☐

V Espace des fonctions intégrables

Définition 34.26 (Fonction intégrable)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. On dit que f est* intégrable *lorsque $\int_I f$ converge absolument.*

Définition 34.27. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On définit :*

(i) $\mathfrak{E}(I,\mathbb{K}) = \left\{f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K}),\ \int_I f \text{ converge}\right\}$,

(ii) $\Lambda^1(I,\mathbb{K}) = \left\{f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K}),\ f \text{ est intégrable}\right\}$,

(iii) $L^1(I,\mathbb{K}) = \Lambda^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.

Proposition 34.28. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.*

(i) $L^1(I,\mathbb{K}) \subset \Lambda^1(I,\mathbb{K}) \subset \mathfrak{E}(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$.

(ii) $\mathfrak{E}(I,\mathbb{K})$, $\Lambda^1(I,\mathbb{K})$ *et* $L^1(I,\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$.

(iii) *L'application* $\int_I : \mathfrak{E}(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire positive.*

Définition 34.29 (Norme de la convergence en moyenne)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On définit :*

$$\|\cdot\|_1 : \left| \begin{array}{rcl} L^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I |f| \end{array} \right. .$$

$\|\cdot\|_1$ *est une norme sur $L^1(I,\mathbb{K})$, dite* norme de la convergence en moyenne.

Exemple 34.30. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $\omega \in I$. On définit :*

$$\delta_\omega : \left| \begin{array}{rcl} L_1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(\omega) \end{array} \right. .$$

Alors δ_ω est linéaire, mais pas continue (au sens de $\|\cdot\|_1$).

Exemple 34.31. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $f \in L^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in L^1(I,\mathbb{K})$. Alors :*

$$\left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell \right) \not\Longrightarrow \left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} \ell \right).$$

Exemple 34.32. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$ bornée. On définit :*

$$\Phi_g : \left| \begin{array}{rcl} L^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I fg \end{array} \right. .$$

Alors Φ_g est linéaire et continue (au sens de $\|\cdot\|_1$).

Vocabulaire 34.33 (Fonction à support compact)**.** *$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$. On dit que f est* à support compact *lorsque :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant M \Longrightarrow f(x) = 0.$$

Proposition 34.34. *On note $\mathfrak{A}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Alors $\mathfrak{A}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (au sens de $\|\cdot\|_1$).*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$g_n : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant n \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant n+1 \\ n+1-|x| & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{K})$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(fg_n) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et que

$$\|f - fg_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Application 34.35. *$f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :*

$$\varphi_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto f\left(t + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{K}.$$

Alors $\|\varphi_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

VI Rappels sur les espaces préhilbertiens

Définition 34.36 (Produit scalaire)**.** *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle* produit scalaire *sur E toute application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ t.q.*

(i) *φ est symétrique,*

(ii) *φ est bilinéaire,*

(iii) $\forall x \in E\backslash\{0\},\ \varphi(x,x) > 0$.

On dit alors que (E,φ) est un espace préhilbertien*. Si de plus E est de dimension finie, on dit que (E,φ) est un* espace euclidien*.*

Notation 34.37. *Si $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien, on définit :*

$$\|\cdot\| : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \end{array} \right. .$$

Proposition 34.38 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *$(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors :*

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ |\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Démonstration (Première méthode)**.** Soit $(x,y) \in E^2$. On peut supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On considère alors :

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \|tx+y\|^2 = t^2\,\|x\|^2 + 2t\,\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2\,.$$

f est une fonction polynomiale de degré 2, et $f \geqslant 0$. Ainsi, en notant Δ le discriminant de f, on a $\Delta \leqslant 0$. Or :

$$\Delta = 4\,\langle x \mid y\rangle^2 - 4\,\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leqslant 0.$$

$\square$

Démonstration (Deuxième méthode)**.** En se plaçant dans $\mathrm{Vect}\,(x,y)$, on se ramène au cas où E est de dimension 2. $\square$

Corollaire 34.39. *$(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot \mid \cdot\rangle}$ est une norme.*

Proposition 34.40. *$(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors :*

(i) $\forall\,(x,y) \in E^2,\ |\langle x \mid y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff$ *x et y sont liés.*

(ii) $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \langle x \mid y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \iff$ *x et y sont positivement liés.*

VII Espace des fonctions à carré intégrable

Définition 34.41. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On définit :*

(i) $L^p(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}),\ f^p \text{ est intégrable} \right\}$, *pour* $p \in [1,+\infty[$.

(ii) $L^\infty(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}),\ f \text{ est bornée} \right\}$.

En particulier, $L^2(I,\mathbb{K})$ est l'espace des fonctions à carré intégrable.

Proposition 34.42. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) *Pour $p \in [1,+\infty[$, $L^p(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.*

(ii) *$L^\infty(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.*

Proposition 34.43. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Si I est borné, alors :*

$$L^\infty(I,\mathbb{K}) \subset L^2(I,\mathbb{K}) \subset L^1(I,\mathbb{K}).$$

Notation 34.44. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On munit $L^2(I,\mathbb{R})$ d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par :*

$$\forall (f,g) \in L^2(I,\mathbb{R})^2,\ \langle f \mid g \rangle = \int_I fg.$$

Définition 34.45 (Norme de la convergence en moyenne quadratique)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On définit :*

$$\|\cdot\|_2 : \left| \begin{array}{rcl} L^2(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I |f|^2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle} \end{array} \right. .$$

$\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L^2(I,\mathbb{R})$, dite norme de la convergence en moyenne quadratique*.*

Proposition 34.46 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et généralisations)**.** *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) $\forall (f,g) \in L^2(I,\mathbb{R})^2,\ \left|\int_I fg\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2} \cdot \sqrt{\int_I g^2}$.

(ii) $\forall (f,g) \in C^0_{pm}(I,\mathbb{R})^2,\ f^2, g^2$ *intégrables* $\Longrightarrow \left|\int_I fg\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2} \cdot \sqrt{\int_I g^2}$.

(iii) *Soit $w \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{R})$. On pose :*

$$\mathfrak{W}(I,\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}),\ wf^2 \text{ est intégrable} \right\}.$$

Alors $\mathfrak{W}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et :

$$\forall (f,g) \in \mathfrak{W}(I,\mathbb{R})^2,\ \left|\int_I wfg\right| \leqslant \sqrt{\int_I wf^2} \cdot \sqrt{\int_I wg^2}.$$

Chapitre 35

Intégrales : Suites, Séries et Paramètres

Notation 35.1. *Dans ce chapitre, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

I Théorème de convergence dominée

Proposition 35.2. $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. *On suppose que :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} \ell$ *sur tout compact,*

(ii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant M(t)$.

Alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$ *et* $\ell \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,

(ii) $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell$,

(iii) $\int_I |f_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. (i) Cela vient du fait que M est intégrable et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant M(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in I,\ |\ell(t)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(t)| \leqslant M(t).$$

Cette démonstration de (i) reste valable en supposant seulement $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$.
(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Soit S un segment inclus dans I t.q. $\int_I M - \varepsilon \leqslant \int_S M \leqslant \int_I M$.

On note $\delta(S) = \sup S - \inf S$. On a $\|f_n - \ell\|_S^\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; soit donc $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant N$, $\|f_n - \ell\|_S^\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\delta(S)}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant N, \left|\int_I f_n - \int_I \ell\right| &\leqslant \int_{I\setminus S} |f_n| + \int_{I\setminus S} |\ell| + \int_S |f_n - \ell| \\ &\leqslant 2\int_{I\setminus S} M + \delta(S)\,\|f_n - \ell\|_S^\infty \\ &\leqslant 2\varepsilon + \delta(S)\cdot\frac{\varepsilon}{1+\delta(S)} \leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant f_n par $|f_n - \ell|$, ℓ par 0 et M par $2M$. □

Théorème 35.3 (Théorème de convergence dominée)**.** *$f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :*

(i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell$,

(ii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant M(t)$.

L'hypothèse (ii) *est appelée* hypothèse de domination*. Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$ *et* $\ell \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,

(ii) $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell$,

(iii) $\int_I |f_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple 35.4. *Le théorème est faux sans l'hypothèse de domination : on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1\right)$ t.q. $f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$. Alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} 0$ mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n = 1$.*

Application 35.5.

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n : t \in [0,1[\longmapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$, et $\varphi : t \in [0,1[\longmapsto \frac{1}{1+t}$. On a :

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_{[0,1[} \varphi.$$

Or $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \varphi$; φ et chaque S_n sont $\mathcal{C}^0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1[$, $|S_n(t)| \leqslant 1$ (d'après le critère spécifique des séries alternées, c.f. proposition 3.14). Comme

1 est intégrable sur $[0,1[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\ln 2 = \int_{[0,1[} \varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1[} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

□

Application 35.6. *La fonction gamma est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t. \tag{i}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{ii}$$

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{1}_{[0,n]}(t) \cdot t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t^{x-1}e^{-t} \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \varphi$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leqslant \varphi$. Avec le théorème de convergence dominée, on a :

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $I_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\ \mathrm{d}u$. Montrer d'abord que $\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t = n^x I_n(x)$. En intégrant par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1),$$

et en déduire le résultat. □

II Théorème d'interversion sommes-intégrales

Théorème 35.7 (Théorème d'interversion sommes-intégrales)**.** $u \in \mathcal{C}_{pm}^0(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $S \in \mathcal{C}_{pm}^0(I,\mathbb{K})$. *On suppose que :*

(i) $\forall t \in I,\ S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \Lambda^1(I,\mathbb{K})$,

(iii) $\sum \int_I |u_n|$ *converge.*

Alors :

(i) $S \in \Lambda^1(I,\mathbb{K})$,

(ii) $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$,

(iii) $\int_I |S| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n|$.

Application 35.8. *On définit :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\ \mathrm{d}t.$$

Alors f est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration. Justifier d'abord la définition de f. On fixe ensuite $x \in \mathbb{R}$ et on définit $u_n : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}$. On a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Chaque u_n est intégrable, et la fonction $S : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ est continue. De plus :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ \mathrm{d}t \right) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{ch}(xt)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc $\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ \mathrm{d}t \right)$ converge. D'après le théorème d'interversion sommes-intégrales, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\ \mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \right) x^{2n}. \end{aligned}$$

□

Théorème 35.9 (Théorème de convergence monotone)**.** *$f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$. On suppose que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} \geqslant f_n$,

(iii) $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s} \ell$.

Alors, au sens de $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell.$$

Démonstration. La suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croît donc $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrons que $\mu = \int_I \ell$. ($\leqslant$) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I f_n \leqslant \int_I \ell$ donc $\mu \leqslant \int_I \ell$. ($\geqslant$) Soit $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$. On a $f_{n|[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{s} \ell_{|[a,b]}$, les $f_{n|[a,b]}$ sont $\mathcal{C}^0_{pm}$ et ℓ est $\mathcal{C}^0_{pm}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_{n|[a,b]} \leqslant \ell_{|[a,b]}$, et $\ell_{|[a,b]}$ est intégrable. Par convergence dominée :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \ell.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f_n \leqslant \mu$, donc $\int_a^b \ell \leqslant \mu$. Ainsi :

$$\int_I \ell = \sup_{\substack{(a,b)\in I^2 \\ a<b}} \int_a^b \ell \leqslant \mu.$$

$\square$

III Continuité d'une intégrale à paramètre

Notation 35.10. *Dans la suite,* (Λ, d) *est un espace métrique.*

Notation 35.11. $K : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$.

(i) *Pour* $\lambda \in \Lambda$, *on définit* $K(\lambda,\cdot) : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto K(\lambda,t) \end{array} \right.$.

(ii) *Pour* $t \in I$, *on définit* $K(\cdot,t) : \left| \begin{array}{l} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto K(\lambda,t) \end{array} \right.$.

Proposition 35.12. $K : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$. *On suppose :*

(i) $\forall \lambda \in \Lambda,\ K(\lambda,\cdot) \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$,

(ii) $\forall t \in I,\ K(\cdot,t) \in \mathcal{C}^0(\Lambda,\mathbb{K})$,

(iii) $\exists M \in \Lambda^1(I,\mathbb{R}_+),\ \forall (\lambda,t) \in \Lambda \times I,\ |K(\lambda,t)| \leqslant M(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_I K(\lambda,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right..$$

Alors :

$$\Phi \in \mathcal{C}^0(\Lambda,\mathbb{K}).$$

Démonstration. Justifier d'abord $\forall \lambda \in \Lambda,\ K(\lambda, \cdot) \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$. Montrons maintenant la continuité de Φ. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ t.q. $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = K(\mu_n, \cdot)$; soit de plus $w = K(\lambda_0, \cdot)$. Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} w$, les v_n et w sont $\mathcal{C}^0_{pm}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |v_n(t)| \leqslant M(t)$. Ainsi, par convergence dominée :

$$\Phi(\mu_n) = \int_I v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I w = \Phi(\lambda_0).$$

□

Application 35.13. $\Gamma \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Démonstration. Soit $0 < a < b < +\infty$. On va montrer que $\Gamma_{|[a,b]}$ est continue. Pour cela, on définit :

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [a,b] \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array} \right. .$$

Montrer que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*,\ |\gamma(x,t)| \leqslant e^{-t}\left(t^{a-1} + t^{b-1}\right).$$

En déduire la continuité de $\Gamma_{|[a,b]}$ à l'aide de la proposition 35.12. Ainsi, la restriction de Γ à tout segment est continue, donc Γ est continue. □

IV Dérivation d'une intégrale à paramètre

Notation 35.14. *Dans la suite, Λ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.*

Notation 35.15. $K : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$. *Pour $(\lambda, t) \in \Lambda \times I$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $K(\cdot, t)$ est p fois dérivable en λ, on pose :*

$$\frac{\partial^p K}{\partial \lambda^p}(\lambda, t) = (K(\cdot, t))^{(p)}(\lambda).$$

Proposition 35.16. $K : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$. *On suppose :*

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, *l'intégrale* $\int_I K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente,*

(ii) *L'application* $\frac{\partial K}{\partial \lambda} : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$ *est bien définie et continue,*

(iii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+),\ \forall (\lambda, t) \in \Lambda \times I,\ \left|\frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda, t)\right| \leqslant M(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_I K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \Phi'(\lambda) = \int_I \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda, t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. On définit :

$$\psi : \left| \begin{array}{l} \Lambda \times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda, t) \longmapsto \begin{cases} \frac{K(\lambda,t)-K(\lambda_0,t)}{\lambda-\lambda_0} & \text{si } \lambda \neq \lambda_0 \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

On définit de plus $\Psi : \left| \begin{array}{l} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_I \psi(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$. Alors, pour $\lambda \in \Lambda$, $\psi(\lambda, \cdot)$ est $\mathcal{C}^0$, pour $t \in I$, $\psi(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^0$. Soit $(\lambda, t) \in \Lambda \times I$. Si $\lambda \neq \lambda_0$, on a :

$$\psi(\lambda, t) = \frac{\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\mu, t)\ \mathrm{d}\mu \right|}{|\lambda - \lambda_0|} \leqslant M(t).$$

Et $|\psi(\lambda_0, t)| = \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) \right| \leqslant M(t)$. Ainsi, d'après la proposition 35.12, Ψ est $\mathcal{C}^0$. En particulier :

$$\lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \Psi(\lambda) = \Psi(\lambda_0) = \int_I \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t)\ \mathrm{d}t.$$

□

Proposition 35.17. $K : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}$. *On suppose :*

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, *l'intégrale* $\int_I K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente,*

(ii) $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j} : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$ *est bien définie et continue,*

(iii) $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\exists M_j \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall (\lambda, t) \in \Lambda \times I$, $\left| \frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j}(\lambda, t) \right| \leqslant M_j(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\int_I K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^p$ et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \Phi^{(j)}(\lambda) = \int_I \frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j}(\lambda, t)\ \mathrm{d}t.$$

Application 35.18. $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *et :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p\, t^{x-1} e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Chapitre 36

Équations Différentielles Linéaires

Notation 36.1. *Dans ce chapitre, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$.*

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

I.1 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Vocabulaire 36.2 (Problème de Cauchy)**.** *$A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. On appelle* problème de Cauchy *le système :*

$$\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0} : \begin{cases} Y' = A(t) \cdot Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases},$$

d'inconnue $Y \in E^I$ dérivable. Ainsi, $Y \in E^I$ est solution de $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ ssi *les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *Y est dérivable,*

(ii) *$\forall t \in I$, $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t) + B(t)$,*

(iii) *$Y(t_0) = Y_0$.*

Lemme 36.3. *$A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Soit $Y \in E^I$. S'équivalent :*

(i) *Y est solution de $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$.*

(ii) *$Y \in \mathcal{C}^0(I,E)$ et :*

$$\forall t \in I,\ Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)\cdot Y(u) + B(u))\,\mathrm{d}u.$$

Lemme 36.4. *$A \in \mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I,E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ admet au moins une solution.*

Démonstration. On pose :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0(I,E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I,E) \\ Y & \longmapsto & \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto Y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(u)\cdot Y(u) + B(u))\,\mathrm{d}u \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Il suffit de montrer que Φ admet un point fixe. On définit une suite $Z \in \mathcal{C}^0(I,E)^{\mathbb{N}}$ par :

$$Z_0 : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto Y_0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \Phi(Z_n).$$

Première étape : $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Soit en effet K un compact de I. On pose $a = \min(K \cup \{t_0\})$ et $b = \max(K \cup \{t_0\})$. Comme $K \subset [a,b]$, il suffit de montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$. On munit $\mathcal{C}^0([a,b],E)$ de $\|\cdot\|_{\infty}^{[a,b]}$. On note $M = \sup_{t\in[a,b]} |||A(t)|||$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\hat{Z}_n = Z_{n|[a,b]}$. Puis on définit $U \in \mathcal{C}^0([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ par $U_0 = \hat{Z}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \hat{Z}_n - \hat{Z}_{n-1}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \hat{Z}_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

On cherche à établir la convergence normale de $\sum U_n$. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in I,\ \|U_n(t)\|_E \leqslant \|U_1\|_{\infty}^{[a,b]} M^{n-1} \cdot \frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leqslant \|U_1\|_{\infty}^{[a,b]} M^{n-1} \cdot \frac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$. Donc $\sum U_n$ converge normalement donc uniformément. Donc $\left(\hat{Z}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Ainsi, en notant $Y : t \in I \longmapsto \lim_{n\to+\infty} Z_n(t) \in E$, on a :

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} Y \text{ sur tout compact.}$$

Deuxième étape : Y est solution de $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. En effet, $Y \in \mathcal{C}^0(I,E)$. Reste à montrer que $\Phi(Y) = Y$. Soit $t \in I$. On a :

$$\begin{aligned}\left\|(\Phi(Y))(t) - (\Phi(Z_n))(t)\right\|_E &= \left\|\int_{t_0}^t A(u)\cdot(Y(u) - Z_n(u))\,\mathrm{d}u\right\|_E \\ &\leqslant |t-t_0| \cdot \left(\sup_{u\in[t_0,t]} |||A(u)|||\right)\cdot \left\|Y - Z_n\right\|_{[t_0,t]}^{\infty} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in I,\ (\Phi(Y))(t) = \lim_{n\to+\infty} (\Phi(Z_n))(t) = \lim_{n\to+\infty} Z_{n+1}(t) = Y(t).$$

Donc $Y = \Phi(Y)$ et Y est solution de $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. □

Proposition 36.5. *$A \in \mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I,E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ admet une unique solution.*

Démonstration. *Existence.* Voir lemme 36.4. *Unicité.* Soit Y, Z deux solutions de $\mathscr{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. On pose $D = Y - Z$. On a :

$$\forall t \in I,\ D(t) = \int_{t_0}^t A(u)\cdot D(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $t \in I$. On note $M = \sup_{u\in[t_0,t]} |||A(u)|||$. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in [t_0,t],\ \|D(u)\|_E \leqslant \|D\|_{[t_0,t]}^{\infty} M^n \cdot \frac{|u-t_0|^n}{n!}.$$

En déduire que $D = 0$. □

I.2 Autre point de vue : espace des solutions sans condition initiale

Notation 36.6. *$A \in \mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I,E)$. On note $\mathscr{E}_{A,B}$ l'équation $Y' = A(t)\cdot Y + B(t)$, d'inconnue $Y \in E^I$ dérivable. On note $\mathscr{S}_{A,B}$ l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}_{A,B}$.*

Proposition 36.7. *$A \in \mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I,E)$.*

(i) *$\mathscr{S}_{A,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,E)$.*

(ii) *$\mathscr{S}_{A,0} \simeq E$.*

(iii) *$\mathscr{S}_{A,B}$ est un espace affine de direction $\mathscr{S}_{A,0}$.*

II Équations différentielles linéaires d'ordre n

Notation 36.8. $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))^n$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. *On note $\mathscr{E}_{A_0,\ldots,A_{n-1},B}$ l'équation :*

$$Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) \cdot Y^{(k)} + B(t),$$

d'inconnue $Y \in E^I$ n fois dérivable. On note $\mathscr{S}_{A_0,\ldots,A_{n-1},B}$ l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}_{A_0,\ldots,A_{n-1},B}$.

Théorème 36.9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))^n$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. *Alors :*

$$\forall (t_0, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \in I \times E^n,\ \exists! Y \in \mathscr{S}_{A_0,\ldots,A_{n-1},B},\quad \forall k \in [\![0, n[\![,\ Y^{(k)}(t_0) = Y_k.$$

Démonstration. On va se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre dans E^n. On définit :

$$\mathcal{A} : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{L}(E^n) \\ t \longmapsto \left| \begin{array}{c} E^n \longrightarrow E^n \\ (Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \longmapsto \left(Z_1, \ldots, Z_{n-1}, \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) \cdot Z_k \right) \right) \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

et $\mathcal{B} : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow E^n \\ t \longmapsto (0, \ldots, 0, B(t)) \end{array} \right.$. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des solutions de l'équation $Z' = \mathcal{A}(t) \cdot Z + \mathcal{B}(t)$ dans E^n. Alors l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{S}_{A_0,\ldots,A_{n-1},B} \longrightarrow \mathscr{R} \\ \qquad Y \longmapsto \left(Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)} \right) \end{array} \right.$$

est une bijection, ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 36.5. □

Remarque 36.10. *Si $E = \mathbb{K}$, alors la fonction $\mathcal{A}$ de la démonstration ci-dessus correspond à une matrice de Frobenius :*

$$\forall t \in I,\ \forall Z \in \mathbb{K}^n,\ \mathcal{A}(t) \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{n-2}(t) & A_{n-1}(t) \end{pmatrix} Z.$$

III Résolution des équations d'ordre 1

Notation 36.11. *Dans toute la suite, on notera* $n = \dim E$. *On munit de plus* E *d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

III.1 Wronskien

Vocabulaire 36.12 (Système fondamental de solutions)**.** $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. *On appelle* système fondamental de solutions *de l'équation* $\mathscr{E}_{A,0}$ *toute base de* $\mathscr{S}_{A,0}$.

Définition 36.13 (Wronskien)**.** $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathscr{S}_{A,0}^n$. *On appelle* wronskien *de* $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *la fonction :*

$$w : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \ldots, Y_n(t)) \end{array} \right. .$$

Proposition 36.14. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathscr{S}_{A,0}^n$. *On note* w *le wronskien de* $(Y_1, \ldots, Y_n)$. *S'équivalent :*

(i) $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *est un système fondamental de solutions de* $\mathscr{E}_{A,0}$.

(ii) $\forall t \in I,\ w(t) \neq 0$.

(iii) $\exists t \in I,\ w(t) \neq 0$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que, pour tout $t \in I$, l'application $\psi_t : \left| \begin{array}{l} \mathscr{S}_{A,0} \longrightarrow E \\ \quad Y \longmapsto Y(t) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. □

Lemme 36.15. $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \ldots, e_n) = \operatorname{tr} f.$$

Proposition 36.16. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathscr{S}_{A,0}^n$. *On note* w *le wronskien de* $(Y_1, \ldots, Y_n)$. *Alors* w *est dérivable et :*

$$\forall t \in I,\ w'(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot w(t).$$

III.2 Méthode de variation des constantes

Proposition 36.17. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *un système fondamental de solutions de* $\mathscr{E}_{A,0}$. $Z \in \mathcal{C}^1(I, E)$. *Alors il existe un unique* n*-uplet* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^n$ *t.q.*

$$\forall t \in I,\ Z(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) Y_i(t).$$

Démonstration. *Existence.* Pour $t \in I$, $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de E, donc il existe $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $Z(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y_i(t)$. Reste à montrer que les fonctions $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \left(E^I\right)^n$ ainsi définies sont bien $\mathcal{C}^1$. On pose $M : t \in I \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(Y_1(t), \dots, Y_n(t)\right) \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$. Alors :

$$\forall t \in I,\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(Z(t)\right) = M(t) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Or $\forall t \in I$, $\det M(t) = w(t) \neq 0$, en notant w le wronskien de $(Y_1, \dots, Y_n)$. Donc :

$$\forall t \in I,\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(t)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(Z(t)\right).$$

En déduire que les λ_i sont $\mathcal{C}^1$ (en utilisant $M(t)^{-1} = \frac{1}{\det M(t)} {}^t\!(\mathrm{Com}\, M(t))$).
Unicité. Pour tout $t \in I$, $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de E, donc le n-uplet $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ est défini de manière unique. $\square$

Méthode 36.18 (Variation des constantes)**.** *$A \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}(E)\right)$, $B \in \mathcal{C}^0\left(I, E\right)$. $(Y_1, \dots, Y_n)$ un système fondamental de solutions de $\mathscr{E}_{A,0}$. La* méthode de variation des constantes *consiste à chercher les solutions de $\mathscr{E}_{A,B}$ sous la forme $Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathbb{K}\right)^n$. En notant $M : t \in I \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(Y_1(t), \dots, Y_n(t)\right) \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$, on a :*

$$Z \in \mathscr{S}_{A,B} \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i' Y_i = B \iff \forall t \in I,\ \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(B(t)\right).$$

Cela permet de déterminer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ puis Z.

Remarque 36.19. *$M \in \mathcal{L}(E)$, $B \in \mathcal{C}^0\left(I, E\right)$. Alors on peut chercher une solution particulière de $\mathscr{E}_{M,B}$ sous la forme :*

$$Z : t \in I \longmapsto \exp\left(tM\right) \cdot \Lambda(t),$$

avec $\Lambda \in \mathcal{C}^1\left(I, E\right)$.

Proposition 36.20 (Principe de superposition des solutions)**.** *$A \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}(E)\right)$, $(B_1, \dots, B_s) \in \mathcal{C}^0\left(I, E\right)^s$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$. On note $B = \sum_{i=1}^s \lambda_i B_i$. Alors :*

$$\forall\left(Y_1, \dots, Y_s\right) \in \mathscr{S}_{A,B_1} \times \dots \times \mathscr{S}_{A,B_s},\ \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i Y_i\right) \in \mathscr{S}_{A,B}.$$

IV Résolution des équations scalaires d'ordre 2

IV.1 Généralités

Remarque 36.21. $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^3$. *On étudie l'équation :*

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \qquad (\mathscr{E}_{-b,-a,c})$$

On lui associe l'équation du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition 36.22. $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^3$.

(i) $\mathscr{S}_{-b,-a,0}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^2 (I, \mathbb{K})$.

(ii) $\mathscr{S}_{-b,-a,0} \simeq \mathbb{K}^2$.

(iii) $\mathscr{S}_{-b,-a,c}$ *est un espace affine de direction* $\mathscr{S}_{-b,-a,0}$.

Proposition 36.23. $(a, b) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^2$. *Pour* $t \in I$, *on pose :*

$$L_t : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{S}_{-b,-a,0} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & y(t) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad M_t : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{S}_{-b,-a,0} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & y'(t) \end{array} \right. .$$

Alors (L_t, M_t) *est une base de* $\mathcal{L} (\mathscr{S}_{-b,-a,0}, \mathbb{K})$.

IV.2 Wronskien

Vocabulaire 36.24 (Système fondamental de solutions)**.** $(a, b) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^2$. *On appelle* système fondamental de solutions *de l'équation* $\mathscr{E}_{-b,-a,0}$ *toute base de* $\mathscr{S}_{-b,-a,0}$.

Définition 36.25 (Wronskien)**.** $(a, b) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^2$. $(y, z) \in \mathscr{S}^2_{-b,-a,0}$. *On appelle* wronskien *de* (y, z) *la fonction :*

$$w : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \end{array} \right. .$$

Proposition 36.26. $(a, b) \in \mathcal{C}^0 (I, \mathbb{K})^2$. $(y, z) \in \mathscr{S}^2_{-b,-a,0}$. *On note* w *le wronskien de* (y, z). *S'équivalent :*

(i) (y, z) *est un système fondamental de solutions de* $\mathscr{E}_{-b,-a,0}$.

(ii) $\forall t \in I,\ w(t) \neq 0.$

(iii) $\exists t \in I,\ w(t) \neq 0.$

Proposition 36.27. $(a,b) \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})^2$. $(y,z) \in \mathscr{S}^2_{-b,-a,0}$. *On note w le wronskien de (y,z). Alors w est dérivable et :*

$$\forall t \in I,\ w'(t) + a(t)\cdot w(t) = 0.$$

IV.3 Méthode de variation des constantes

Méthode 36.28 (Variation des constantes)**.** $(a,b,c) \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})^3$. (φ,ψ) *un système fondamental de solutions de $\mathscr{E}_{-b,-a,0}$. La* méthode de variation des constantes *consiste à chercher les solutions ζ de $\mathscr{E}_{-b,-a,c}$ t.q.*

$$\forall t \in I,\ \begin{pmatrix}\zeta(t)\\ \zeta'(t)\end{pmatrix} = \lambda(t)\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix}\psi(t)\\ \psi'(t)\end{pmatrix},$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})^2$. Cela est possible d'après la proposition 36.17, car $\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}\right)$ est un système fondamental de solutions de l'équation $\mathscr{E}_{A,0}$, où $A : t \in I \longmapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ -b(t) & -a(t)\end{pmatrix}$. Il vient :

(i) $\zeta = \lambda\varphi + \mu\psi,$

(ii) $\zeta' = \lambda\varphi' + \mu\psi'.$

En calculant ζ' à l'aide de (i) *puis en comparant avec* (ii)*, il vient :*

(iii) $0 = \lambda'\varphi + \mu'\psi.$

En supposant que $c = \zeta'' + a\zeta' + b\zeta$, et en exprimant ζ, ζ' et ζ'' en fonction de φ et ψ, on obtient :

(iv) $c = \lambda'\varphi' + \mu'\psi'.$

D'après (iii) *et* (iv)*, on a :*

$$\forall t \in I,\ \begin{pmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c(t)\end{pmatrix}.$$

Donc, en notant w le wronskien de (φ,ψ) :

$$\forall t \in I,\ \begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{w(t)}\begin{pmatrix}\psi'(t) & -\psi(t)\\ -\varphi'(t) & \varphi(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ c(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\psi(t)c(t)}{w(t)}\\ \frac{\varphi(t)c(t)}{w(t)}\end{pmatrix}.$$

Cela permet de déterminer λ et μ puis ζ.

V Résolution des équations scalaires à coefficients constants

Remarque 36.29. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. *On étudie l'équation :*

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b(t). \qquad (\mathscr{E}_{-a_0,\ldots,-a_{n-1},b})$$

On lui associe l'équation du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition 36.30. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. *On introduit :*

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X].$$

On suppose que P est scindé :

$$P = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\omega_i},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ deux à deux distincts, et $(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Alors

$$\left(t \in I \longmapsto t^j e^{\lambda_i t}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ 0 \leqslant j < \omega_i}}$$

est un système fondamental de solutions de $\mathscr{E}_{-a_0,\ldots,-a_{n-1},0}$ (i.e. une base de $\mathscr{S}_{-a_0,\ldots,-a_{n-1},0}$).

Exemple 36.31. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. *On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\forall t \in I,\ b(t) = t^m e^{\lambda t}.$$

Alors l'équation $\mathscr{E}_{-a_0,\ldots,-a_{n-1},b}$ admet une solution particulière de la forme :

$$y : t \in I \longmapsto Q(t) e^{\lambda t},$$

avec $Q \in \mathbb{K}_{m+\omega}[X]$, où ω est l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

VI Inégalité de Grönwall et applications

Proposition 36.32 (Inégalité de Grönwall)**.** *$T \in \mathbb{R}_+^*$, $(A,B) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $u \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}_+)$. On suppose que :*

$$\forall t \in [0,T],\ u(t) \leqslant A + B\int_0^t u(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Alors :

$$\forall t \in [0,T],\ u(t) \leqslant Ae^{Bt}.$$

Démonstration. On considère :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \quad t \longmapsto e^{-Bt}\left(A + B\displaystyle\int_0^t u(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right) \end{array} \right. .$$

Montrer que $\forall t \in [0,T],\ \Phi'(t) \leqslant 0$. Ainsi, $\Phi \searrow$. Donc :

$$\forall t \in [0,T],\ u(t) \leqslant A + B\int_0^t u(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \Phi(t)e^{Bt} \leqslant \Phi(0)e^{Bt} = Ae^{Bt}.$$

□

Corollaire 36.33. *$A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, E)$, $Y_0 \in E$. Soit Y une solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\mathscr{C}_{A,B,0,Y_0} : \begin{cases} Y' = A(t) \cdot Y + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} .$$

On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |||A(t)||| \leqslant C$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \|Y(t)\|_E \leqslant \|Y_0\|_E\, e^{Ct}.$$

Proposition 36.34. *$T \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0([0,T], E)$. Pour $U \in E$, on note Y_U l'unique solution du problème de Cauchy $\mathscr{C}_{A,B,0,U}$. On pose :*

$$F : \left| \begin{array}{l} E \times [0,T] \longrightarrow E \\ \quad (U,t) \longmapsto Y_U(t) \end{array} \right. .$$

Alors :

(i) $\forall U \in E,\ F(U,\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,T], E)$.

(ii) $\forall t \in [0,T],\ F(\cdot,t) \in \mathcal{C}^0(E,E)$.

(iii) $F \in \mathcal{C}^0(E \times [0,T], E)$.

Démonstration. (i) Clair. (ii) On note $C = \sup_{t\in[0,T]} \|\!|A(t)|\!\|$. On fixe $t \in [0,T]$. D'après le corollaire 36.33, on a :

$$\forall\,(U,V) \in E^2,\ \|F(U,t) - F(V,t)\|_E = \|(Y_U - Y_V)\,(t)\|_E \leqslant \|U - V\|_E\, e^{Ct}.$$

Cela montre que $F\,(\cdot,t)$ est lipschitzienne donc continue. (iii) Soit $(U_0,t_0) \in E \times [0,T]$. Soit $(V,\tau) \in E^{\mathbb{N}} \times [0,T]^{\mathbb{N}}$ t.q. $(V_n,\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (U_0,t_0)$. Alors :

$$\begin{aligned}\|F\,(V_n,\tau_n) - F\,(U_0,t_0)\|_E &\leqslant \|F\,(V_n,\tau_n) - F\,(U_0,\tau_n)\|_E \\ &\qquad\qquad + \|F\,(U_0,\tau_n) - F\,(U_0,t_0)\|_E \\ &\leqslant \|V_n - U_0\|_E\, e^{C\tau_n} + \|F\,(U_0,\tau_n) - F\,(U_0,t_0)\|_E \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

VII Zéros des solutions d'une équation différentielle

Notation 36.35. *Pour $f \in \mathbb{R}^I$, on notera $\mathcal{V}(f) = \{t \in I,\ f(t) = 0\}$.*

Proposition 36.36. $(p,q) \in \mathcal{C}^0\,(I,\mathbb{R})^2$. *Soit $\varphi \in \mathscr{S}_{-q,-p,0}\backslash\{0\}$:*

$$\forall t \in I,\ \varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0.$$

Alors :

(i) *Pour tout $(A,B) \in I^2$, $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A,B]$ est fini.*

(ii) *Si I est un segment, alors $\mathcal{V}(\varphi)$ est fini.*

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{V}(\varphi),\ \exists \eta > 0,\ ]\omega - \eta, \omega + \eta[\, \cap\, \mathcal{V}(\varphi) = \{\omega\}$.

(iv) *Soit $a \in \mathcal{V}(\varphi)$. On suppose que $\mathcal{V}(\varphi) \cap\,]a,+\infty[\ \neq \varnothing$. Alors il existe $b \in \mathcal{V}(\varphi) \cap\,]a,+\infty[$ t.q. $\mathcal{V}(\varphi) \cap\,]a,b[\ = \varnothing$.*

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde que $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A,B]$ est infini. Soit alors $z \in (\mathcal{V}(\varphi) \cap [A,B])^{\mathbb{N}}$ une injection. Comme $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A,B]$ est un compact, soit j une extractrice et $\omega \in \mathcal{V}(\varphi) \cap [A,B]$ t.q. $z_{j(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$. On peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{j(n)} \neq \omega$. Alors :

$$\varphi'(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi\left(z_{j(n)}\right) - \varphi(\omega)}{z_{j(n)} - \omega} = 0.$$

Donc $\varphi(\omega) = \varphi'(\omega) = 0$. Ainsi, φ a les mêmes conditions initiales en ω que la fonction nulle, et est solution de la même équation différentielle, donc $\varphi = 0$.

C'est absurde. (iii) Soit $\omega \in \mathcal{V}(\varphi)$. Comme $\varphi(\omega) = 0$ et $\varphi \neq 0$, on a $\varphi'(\omega) \neq 0$. Donc :

$$\varphi(x) \underset{\omega}{\sim} (x - \omega)\, \varphi'(\omega).$$

Or $x \longmapsto (x - \omega)\, \varphi'(\omega)$ ne s'annule qu'en ω. D'où le résultat. $\square$

Proposition 36.37. $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. *Soit* $\varphi \in \mathscr{S}_{-q,0,0} \backslash \{0\}$ *:*

$$\forall t \in I,\ \varphi''(t) + q(t)\varphi(t) = 0.$$

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ q(t) \geqslant a$. *Alors :*

(i) $\mathcal{V}(\varphi)$ *est infini (et non majoré).*

(ii) *Il existe une suite* $\omega \in \mathcal{V}(\varphi)^{\mathbb{N}}$ *strictement croissante et surjective.*

(iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \omega_{n+1} - \omega_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde que $\mathcal{V}(\varphi)$ est majoré : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\mathcal{V}(\varphi) \cap [M, +\infty[= \varnothing$. Alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi_{|[M,+\infty[}$ garde un signe constant : on peut supposer $\varphi_{|[M,+\infty[} > 0$. Alors :

$$\forall t \in [M, +\infty[\,,\ \varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leqslant 0.$$

Donc φ est concave. S'il existait $t_0 \in [M, +\infty[$ t.q. $\varphi'(t_0) < 0$, alors on aurait $\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0) + (t - t_0)\, \varphi'(t_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$, ce qui est absurde car $\varphi_{|[M,+\infty[} > 0$. Donc $\varphi'_{|[M,+\infty[} \geqslant 0$, d'où $\varphi_{|[M,+\infty[} \nearrow$. D'où $\forall t \in [M, +\infty[\,,\ \varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leqslant -a\varphi(M)$. En intégrant, on obtient $\varphi'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$: c'est absurde car $\varphi'_{|[M,+\infty[} \geqslant 0$. (ii) D'après la proposition 36.36, on définit à bon droit :

$$N : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{V}(\varphi) & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ x & \longmapsto & |\mathcal{V}(\varphi) \cap [0, x]| \end{array} \right. .$$

Montrer que N est strictement croissante et surjective, puis poser $\omega = N^{-1}$. (iii) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose :

$$\psi : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sin\left(\sqrt{a}\,(t - \omega_n)\right).$$

On suppose par l'absurde que $\omega_{n+1} > \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}$. On peut alors supposer que $\varphi_{|\left]\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right]} > 0$. On définit un *trans-wronskien* :

$$w : t \in \left[\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right] \longmapsto \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t).$$

On a :

$$\forall t \in \left[\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right],\ w'(t) = (q(t) - a)\, \psi(t)\varphi(t) \geqslant 0.$$

Ainsi, $w \nearrow$. Et on a $w(\omega_n) = 0$ et $w\left(\omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right) = -\sqrt{a}\varphi\left(\omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right) < 0$. C'est absurde. $\square$

Proposition 36.38. $(p, q) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2$. *Soit* (φ, ψ) *un système fondamental de solutions de* $\mathscr{E}_{-q,-p,0}$. *Alors :*

$$\forall (a, b) \in \mathcal{V}(\varphi)^2,\ a < b \Longrightarrow \mathcal{V}(\psi) \cap]a, b[\neq \varnothing.$$

Démonstration. *Première étape.* Soit $(a, b) \in \mathcal{V}(\varphi)^2$, avec $a < b$. On a $\varphi_{|[a,b]} \neq 0$ (sinon on aurait $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, d'où $\varphi = 0$). Soit donc $\omega \in [a, b]$ t.q. $\varphi(\omega) \neq 0$. On pose $a_0 = \max(\mathcal{V}(\varphi) \cap [a, \omega])$ et $b_0 = \min(\mathcal{V}(\varphi) \cap [\omega, b])$. On a $a_0 < b_0$, $\varphi(a_0) = \varphi(b_0) = 0$ et $\forall x \in]a_0, b_0[\,,\ \varphi(x) \neq 0$. On peut supposer que $\varphi_{|]a_0,b_0[} > 0$. *Deuxième étape.* Comme $\varphi(a_0) = 0 \neq \varphi'(a_0)$, et $w(a_0) = \varphi(a_0)\psi'(a_0) - \varphi'(a_0)\psi(a_0) \neq 0$ (où w est le wronskien de (φ, ψ)), on a $\psi(a_0) \neq 0$. De même, $\psi(b_0) \neq 0$. *Troisième étape.* On a :

$$w(a_0) = -\varphi'(a_0)\psi(a_0) \qquad \text{et} \qquad w(b_0) = -\varphi'(b_0)\psi(b_0).$$

Or, comme $\varphi_{|]a_0,b_0[} > 0$, on montre aisément que $\varphi'(a_0) > 0$ et $\varphi'(b_0) < 0$. Et w ne s'annule pas sur $[a_0, b_0]$, donc garde un signe constant : $w(a_0)$ est du même signe que $w(b_0)$. Donc $\psi(a_0)$ n'est pas du même signe que $\psi(b_0)$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, ψ s'annule en au moins un point de $]a_0, b_0[$. $\square$

Chapitre 37

La Différentielle

Notation 37.1. *Dans ce chapitre,* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *et* $(G, \|\cdot\|_G)$ *sont trois* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et* Ω *est un ouvert de* E*.*

I Définition

Définition 37.2 (Fonction différentiable en un point)**.** $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. *On dit que* f *est* différentiable en ω *lorsqu'il existe* $L \in \mathcal{L}(E, F)$ *t.q.*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in (-\omega + \Omega) \setminus \{0\}}} \frac{f(\omega + h) - f(\omega) - L(h)}{\|h\|_E} = 0. \tag{$*$}$$

Proposition 37.3. $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. *Si* f *est différentiable en* ω*, alors il existe un unique* $L \in \mathcal{L}(E, F)$ *vérifiant* $(*)$ *: on le notera* $\mathrm{d}f(\omega)$*.*

Démonstration. Soit $(L, M) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ vérifiant $(*)$. Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \Omega$. Alors on a :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathcal{B}_o(0, r) \setminus \{0\}}} (L - M) \left(\frac{h}{\|h\|_E} \right) = 0.$$

Soit $u \in E$. Si $u = 0$, on a bien $(L - M)(u) = 0$. Si $u \neq 0$, on note $J = \left] 0, \frac{r}{\|u\|_E} \right[$, et on a :

$$(L - M)(u) = \|u\|_E \cdot \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in J}} (L - M) \left(\frac{tu}{\|tu\|_E} \right) = 0.$$

Donc $L = M$. $\square$

Vocabulaire 37.4 (Fonction différentiable sur un ouvert)**.** *$f : \Omega \to F$. Si f est différentiable en tout point de Ω, on dit que f est* différentiable sur Ω*. On a alors une application* $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 37.5. *I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. $f : I \to F$, $\omega \in I$. S'équivalent :*

(i) *f est différentiable en ω.*

(ii) *f est dérivable en ω.*

Si ces conditions sont vérifiées :

$$\forall \omega \in I,\ \mathrm{d}f(\omega) : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ h \longmapsto hf'(\omega) \end{array} \right. .$$

Proposition 37.6. *$f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. S'équivalent :*

(i) *f est différentiable en ω.*

(ii) *Il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\varepsilon \in F^{(-\omega+\Omega)}$ t.q.*

$$\forall h \in (-\omega + \Omega)\,,\ f(\omega + h) = f(\omega) + L(h) + \|h\|_E\, \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Corollaire 37.7. *$f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω, alors f est continue en ω.*

Proposition 37.8. *$f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. $\mathcal{W}$ ouvert de E t.q. $\omega \in \mathcal{W} \subset \Omega$. S'équivalent :*

(i) *f est différentiable en ω.*

(ii) *$f_{|\mathcal{W}}$ est différentiable en ω.*

Si ces conditions sont vérifiées, alors $\mathrm{d}f_{|\mathcal{W}}(\omega) = \mathrm{d}f(\omega)$.

Proposition 37.9. *$f : E \to F$, $\omega \in E$. E_0 sous-espace vectoriel de E t.q. $\omega \in E_0 \subset E$. Si f est différentiable en ω, alors $f_{|E_0}$ est différentiable en ω et $\mathrm{d}f_{|E_0}(\omega) = \mathrm{d}f(\omega)_{|E_0}$.*

Proposition 37.10. *$f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. On suppose que $F = F_1 \times \cdots \times F_s$ (où $F_1, \ldots, F_s$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle), et on note $(f_1, \ldots, f_s) \in F_1^\Omega \times \cdots \times F_s^\Omega$ t.q. $\forall x \in \Omega,\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$. S'équivalent :*

(i) *f est différentiable en ω.*

(ii) *$\forall i \in [\![1, s]\!]$, f_i est différentiable en ω.*

Si ces conditions sont vérifiées, alors :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) \cdot h = (\mathrm{d}f_1(\omega) \cdot h, \ldots, \mathrm{d}f_s(\omega) \cdot h)\,.$$

Notation 37.11. *$f : \Omega \to F$. On suppose que f est différentiable sur Ω. On dispose donc d'une fonction $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$. $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On peut donc, sous réserve d'existence, définir par récurrence $\mathrm{d}^n f$, par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{d}^n f = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{n-1} f\big).$$

Vocabulaire 37.12 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)**.** *$f : \Omega \to F$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsque $\mathrm{d}^n f$ est définie sur Ω et continue.*

Définition 37.13 (Jacobien et divergence)**.** *$f : \Omega \to E$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en ω.*

(i) *On définit le* jacobien *de f en ω par :*

$$(\operatorname{jac} f)(\omega) = \det\left(\mathrm{d}f(\omega)\right).$$

(ii) *On définit la* divergence *de f en ω par :*

$$(\operatorname{div} f)(\omega) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{d}f(\omega)\right).$$

Lemme 37.14. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. On considère :*

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ u \longmapsto \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u \mid x \rangle \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 37.15 (Gradient)**.** *$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. On suppose que f est différentiable en ω. Alors l'unique vecteur $u \in E$ t.q. $\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) \cdot h = \langle u \mid h \rangle$ est appelé* gradient *de f en ω et noté $\nabla f(\omega)$. Ainsi :*

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) \cdot h = \langle \nabla f(\omega) \mid h \rangle.$$

II Exemples

Exemple 37.16.

(i) *$f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est différentiable sur E et :*

$$\forall \omega \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) = f.$$

(ii) *$f : E \to F$ affine. On note $\vec{f} \in \mathcal{L}(E,F)$ la direction de f. Alors f est différentiable sur E et :*

$$\forall \omega \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) = \vec{f}.$$

(iii) $B : E \times F \to G$ *bilinéaire. Alors* B *est différentiable sur* $E \times F$ *et :*

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in E \times F, \forall (h_1, h_2) \in E \times F,$$
$$[\mathrm{d}B(\omega_1, \omega_2)](h_1, h_2) = B(h_1, \omega_2) + B(\omega_1, h_2).$$

Exemple 37.17. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right) > 0$*. On définit à bon droit :*

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{B}_o(0,R) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{array} \right. .$$

$\mathbb{C}$ *est ici considéré comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2*. Alors* f *est différentiable sur* $\mathcal{B}_o(0,R)$ *et :*

$$\forall \omega \in \mathcal{B}_o(0,R),\ \forall h \in \mathbb{C},\ \mathrm{d}f(\omega)\cdot h = f'(\omega)h.$$

Exemple 37.18. *On définit :*

$$\Phi_p : \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \quad f \longmapsto f^p \end{array} \right. .$$

Alors Φ_p *est différentiable sur* $\mathcal{L}(E)$ *et :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall h \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{d}\Phi_p(f)\cdot h = \sum_{k=0}^{p-1} \left(f^k \circ h \circ f^{p-1-k}\right).$$

Exemple 37.19. *La fonction* $\exp : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ *est différentiable en* 0 *et :*

$$\mathrm{d}(\exp)(0) = id_{\mathcal{L}(E)}.$$

Lemme 37.20. *On munit* $\mathcal{L}(E)$ *de la norme d'opérateur* $|||\cdot|||$ *subordonnée à* $\|\cdot\|_E$*. Alors :*

$$\mathcal{B}_o(id_E, 1) \subset GL(E).$$

Démonstration. Voir proposition 33.4. □

Exemple 37.21. *On définit :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} GL(E) \longrightarrow GL(E) \\ \quad u \longmapsto u^{-1} \end{array} \right. .$$

Alors Φ *est différentiable sur* $GL(E)$ *et :*

$$\forall u \in GL(E),\ \forall h \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{d}\Phi(u)\cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Exemple 37.22. *$\nu : E \to \mathbb{R}_+$ une norme. Alors ν n'est pas différentiable en 0.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que ν est différentiable en 0 et notons $L = \mathrm{d}\nu(0)$. Soit $u \in E\backslash\{0\}$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\nu(tu) - \nu(0) - L(tu)}{\nu(tu)} = \begin{cases} \frac{\nu(u) - L(u)}{\nu(u)} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\nu(u) + L(u)}{\nu(u)} & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Or $\frac{\nu(tu) - \nu(0) - L(tu)}{\nu(tu)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Il vient $\nu(u) - L(u) = \nu(u) + L(u) = 0$. C'est absurde car $u \neq 0$. □

Exemple 37.23. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\mathfrak{N} : E \to \mathbb{R}_+$ la norme euclidienne associée. Alors $\mathfrak{N}$ est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et :*

$$\forall u \in E\backslash\{0\},\ \forall h \in E,\ \mathrm{d}\mathfrak{N}(u) \cdot h = \frac{\langle u \mid h \rangle}{\mathfrak{N}(u)}.$$

Autrement dit :

$$\forall u \in E\backslash\{0\},\ \nabla\mathfrak{N}(u) = \frac{u}{\mathfrak{N}(u)}.$$

III Composition de fonctions différentiables

Proposition 37.24. *$\mathcal{U}$ ouvert de E, $\mathcal{V}$ ouvert de F. $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \to G$, $\omega \in \mathcal{U}$. On suppose que f est différentiable en ω et que g est différentiable en $f(\omega)$. Alors $(g \circ f)$ est différentiable en ω et :*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(\omega) = \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \circ \mathrm{d}f(\omega).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in F^{(-\omega + \mathcal{U})}$ et $\eta \in G^{(-f(\omega) + \mathcal{V})}$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ et $\lim_0 \eta = 0$ t.q.

$$\begin{gathered} \forall h \in (-\omega + \mathcal{U}),\ f(\omega + h) = f(\omega) + \mathrm{d}f(\omega) \cdot h + \|h\|_E\, \varepsilon(h), \\ \forall \ell \in (-f(\omega) + \mathcal{V}),\ g\left(f(\omega) + \ell\right) = g\left(f(\omega)\right) + \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \cdot \ell + \|\ell\|_F\, \eta(\ell). \end{gathered}$$

Ainsi, pour tout $h \in (-\omega + \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\omega + h) &= g\left(f(\omega) + [f(\omega + h) - f(\omega)]\right) \\ &= (g \circ f)(\omega) + \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \cdot [f(\omega + h) - f(\omega)] \\ &\qquad\qquad + \|f(\omega + h) - f(\omega)\|_F\, \eta\,[f(\omega + h) - f(\omega)] \\ &= (g \circ f)(\omega) + \left(\mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \circ \mathrm{d}f(\omega)\right) \cdot h + \|h\|_E\, \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \cdot \varepsilon(h) \\ &\qquad + \|\mathrm{d}f(\omega) \cdot h + \|h\|_E\, \varepsilon(h)\|_F\, \eta\,[f(\omega + h) - f(\omega)]\,. \end{aligned}$$

En déduire le résultat. □

Corollaire 37.25. *$\mathcal{U}$ ouvert de E, $\mathcal{V}$ ouvert de F. $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \to G$. On suppose que f et g sont $\mathcal{C}^1$. Alors $(g \circ f)$ est $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. D'après la proposition 37.24, $(g \circ f)$ est différentiable et :

$$\forall \omega \in \mathcal{U},\ \mathrm{d}(g \circ f)(\omega) = \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \circ \mathrm{d}f(\omega).$$

Or $\omega \in \mathcal{U} \longmapsto \mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \circ \mathrm{d}f(\omega) \in \mathcal{L}(E, G)$ est $\mathcal{C}^0$ car les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^0$:

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \\ \omega \longmapsto \left(\mathrm{d}g\left(f(\omega)\right), \mathrm{d}f(\omega)\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{c} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \\ (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \circ \psi \end{array}\right. .$$

□

Corollaire 37.26. *$\mathcal{U}$ ouvert de E, $\mathcal{V}$ ouvert de F. $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \to G$. On suppose que f et g sont $\mathcal{C}^p$. Alors $(g \circ f)$ est $\mathcal{C}^p$.*

Proposition 37.27. *$f, g : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. Si f et g sont différentiables en ω alors $(f + g)$ est différentiable en ω et :*

$$\mathrm{d}(f+g)(\omega) = \mathrm{d}f(\omega) + \mathrm{d}g(\omega).$$

Proposition 37.28. *$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. Si f et g sont différentiables en ω alors (fg) est différentiable en ω et :*

$$\mathrm{d}(fg)(\omega) = f(\omega)\,\mathrm{d}g(\omega) + g(\omega)\,\mathrm{d}f(\omega).$$

Proposition 37.29 (Articulation dérivée-différentielle)**.** *I intervalle de $\mathbb{R}$. $\gamma : I \to \Omega$, $f : \Omega \to F$, $t \in I$. On suppose que γ est dérivable en t et que f est différentiable en $\gamma(t)$. Alors $(f \circ \gamma)$ est dérivable en t et :*

$$\left(f \circ \gamma\right)'(t) = \mathrm{d}f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t).$$

IV Représentations analytiques

Lemme 37.30. *$\mathcal{B}_E$ une base de E. On note $n = \dim E$. Alors en identifiant $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E} : E \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}^{-1}$ sont $\mathcal{C}^1$.*

Proposition 37.31. *$f : \Omega \to F$. $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On note $\widetilde{\Omega} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(\Omega) \subset \mathbb{R}^p$. On pose :*

$$\widetilde{f} : x \in \widetilde{\Omega} \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}\left(f\left(\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}\right)^{-1}(x)\right)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}"'] & F \arrow[d, "\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}"] \\ \widetilde{\Omega} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Et, pour $\omega \in \Omega$, f est différentiable en ω ssi $\widetilde{f}$ *est différentiable en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(\omega)$.*

Exemple 37.32. *On considère* $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. $\det$ *est différentiable sur* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *et :*

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A) \cdot H = \operatorname{tr}\left({}^t(\operatorname{Com} A)H\right).$$

Ainsi, si on munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$, alors :

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \nabla \det(A) = \operatorname{Com} A.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application $\det_{\mathcal{C}} : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est n-linéaire. Donc $\det_{\mathcal{C}}$ est différentiable et :

$$\begin{aligned}&\forall (u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \forall (h_1, \ldots, h_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\\ &\mathrm{d}\Big(\det_{\mathcal{C}}\Big)(u_1, \ldots, u_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}(u_1, \ldots, u_{j-1}, h_j, u_{j+1}, \ldots, u_n).\end{aligned}$$

On considère alors $\Psi : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^n \\ A & \longmapsto & (\mathfrak{C}_1(A), \ldots, \mathfrak{C}_n(A)) \end{array}\right.$. Ψ est linéaire donc différentiable et $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\Psi(A) = \Psi$. Or $\det = \det_{\mathcal{C}} \circ \Psi$, donc $\det$ est différentiable et, pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\det)(A) \cdot H &= \mathrm{d}\Big(\det_{\mathcal{C}} \circ \Psi\Big)(A) \cdot H = \mathrm{d}\Big(\det_{\mathcal{C}}\Big)(\Psi(A)) \circ \mathrm{d}\Psi(A) \cdot H \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}_1(A), \ldots, \mathfrak{C}_{j-1}(A), \mathfrak{C}_j(H), \mathfrak{C}_{j+1}(A), \ldots, \mathfrak{C}_n(A)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} H_{ij} \mu_{ij}(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} H_{ij} (\operatorname{Com} A)_{ij} \\ &= \operatorname{tr}\left({}^t(\operatorname{Com} A)H\right),\end{aligned}$$

où $\mu_{ij}(A)$ est le mineur de A obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. $\square$

V Inégalité des accroissements finis

Proposition 37.33. *$\mathcal{U}$ ouvert connexe par arcs de E. $f : \mathcal{U} \to F$. S'équivalent :*

(i) *f est constante.*

(ii) *f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $\forall \omega \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(\omega) = 0$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Montrons que f est *localement constante*, i.e. $\forall \omega \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{V}(\omega)$, $f_{|V \cap \mathcal{U}}$ est constante. Soit donc $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \mathcal{U}$. On va montrer que $f_{|\mathcal{B}_o(\omega,r)}$ est constante. Soit $m \in \mathcal{B}_o(\omega, r)$. On pose :

$$p : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f\left((1-t)\omega + tm\right) \end{array} \right. .$$

Selon l'articulation dérivée-différentielle (c.f. proposition 37.29), p est dérivable et :

$$\forall t \in [0,1],\ p'(t) = \mathrm{d}f\left((1-t)\omega + tm\right) \cdot (m - \omega) = 0.$$

Donc $p' = 0$, donc p est constante. En particulier, $f(m) = f(\omega)$. Donc $f_{|\mathcal{B}_o(\omega,r)}$ est constante, et f est localement constante. D'après le théorème 16.24, comme $\mathcal{U}$ est connexe par arcs, f est constante. □

Théorème 37.34 (Inégalité des accroissements finis)**.** *$f : \Omega \to F$. $(a, b) \in \Omega^2$ t.q. $[a, b] \subset \Omega$. On suppose que :*

(i) *f est différentiable en tout point de $[a, b]$,*

(ii) *Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q.*

$$\forall \omega \in [a,b],\ \left\|\mathrm{d}f(\omega) \cdot (b-a)\right\|_F \leqslant M \left\|b-a\right\|_E .$$

Alors :

$$\left\|f(b) - f(a)\right\|_F \leqslant M \left\|b-a\right\|_E .$$

Démonstration. On considère :

$$p : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f\left((1-t)a + tb\right) \end{array} \right. .$$

Alors, selon l'articulation dérivée-différentielle, p est dérivable et :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \left\|p'(t)\right\|_F = \left\|\mathrm{d}f\left((1-t)a + tb\right) \cdot (b-a)\right\|_F \leqslant M \left\|b-a\right\|_E .$$

Selon le théorème 19.5, il vient :

$$\left\|f(b) - f(a)\right\|_F = \left\|p(1) - p(0)\right\|_F \leqslant M \left\|b-a\right\|_E .$$

□

Corollaire 37.35. *$f : \Omega \to F$. $(a,b) \in \Omega^2$ t.q. $[a,b] \subset \Omega$. On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ et on note :*

$$M = \max_{c\in[a,b]} \left\lVert\left\lvert \mathrm{d}f(c) \right\rvert\right\rVert,$$

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E,F)$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Alors :

$$\|f(b)-f(a)\|_F \leqslant M\,\|b-a\|_E\,.$$

Application 37.36. *$\mathcal{U}$ ouvert convexe de E. $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable sur $\mathcal{U}$. $\rho \in \mathbb{R}_+$. S'équivalent :*

(i) *f est ρ-lipschitzienne.*

(ii) *$\forall \omega \in \mathcal{U}$, $|||\mathrm{d}f(\omega)||| \leqslant \rho$,*

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E,F)$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Appliquer le corollaire 37.35. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon \in F^{(-\omega+\mathcal{U})}$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ t.q.

$$\forall h \in (-\omega+\mathcal{U})\,,\; f(\omega+h) = f(\omega) + \mathrm{d}f(\omega)\cdot h + \|h\|_E\,\varepsilon(h).$$

Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f(\omega,r) \subset \mathcal{U}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall h \in \mathcal{B}_f(0,r),\; \|\mathrm{d}f(\omega)\cdot h\|_F &\leqslant \|f(\omega+h)-f(\omega)\|_F + \|h\|_E \cdot \|\varepsilon(h)\|_F \\ &\leqslant \|h\|_E\,(\rho + \|\varepsilon\,(h)\|_F)\,.\end{aligned}$$

En déduire que $|||\mathrm{d}f(\omega)||| \leqslant \rho$. □

Chapitre 38

Dérivées Partielles

Notation 38.1. *Dans ce chapitre,* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *sont deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et* Ω *est un ouvert de* E*.*

I Dérivée selon un vecteur

Définition 38.2 (Fonction dérivable selon un vecteur)**.** $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$, $u \in E$. *On dit que* f *possède en* ω *une* dérivée selon le vecteur u *lorsque la fonction* $t \longmapsto \frac{f(\omega+tu)-f(\omega)}{t}$ *admet une limite en* 0*. On pose alors :*

$$D_u f(\omega) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(\omega+tu)-f(\omega)}{t}.$$

Proposition 38.3. $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si* f *possède en* ω *une dérivée selon* u*, alors* f *possède en* ω *une dérivée selon* (λu) *et :*

$$D_{\lambda u} f(\omega) = \lambda D_u f(\omega).$$

Proposition 38.4. $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. *Si* f *est différentiable en* ω*, alors* f *possède en* ω *une dérivée selon tout vecteur et :*

$$\forall u \in E,\ D_u f(\omega) = \mathrm{d}f(\omega) \cdot u.$$

Corollaire 38.5. $f : \Omega \to F$, $\omega \in \Omega$. *On munit* E *d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$*. Si* f *est différentiable en* ω*, alors* f *possède une dérivée en* ω *selon chaque* e_i *et :*

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(\omega) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(h) D_{e_i} f(\omega).$$

Exemple 38.6. *On pose :*

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \end{array} \right. .$$

Alors :

(i) f *est* $\mathcal{C}^0$.

(ii) f *est dérivable en* 0 *selon tout vecteur.*

(iii) f *n'est pas différentiable en* 0.

Vocabulaire 38.7 (Dérivées partielles)**.** $f : \Omega \to F$. *On munit* E *d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. *Sous réserve d'existence, les applications* $D_{e_1} f, \dots, D_{e_n} f$ *sont appelées les* dérivées partielles *de* f *relatives à* $e_1, \dots, e_n$.

Théorème 38.8. $f : \Omega \to F$. *On munit* E *d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. *S'équivalent :*

(i) f *est de classe* $\mathcal{C}^1$.

(ii) $D_{e_1} f, \dots, D_{e_n} f$ *sont définies et* $\mathcal{C}^0$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\omega \in \Omega$. Montrons que f est différentiable en ω. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\forall x \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |e_i^*(x)|$. Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f(\omega, r) \subset \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta \in \,]0, r]$ t.q.

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathcal{B}_f\left(\omega, \eta\right),\ \|D_{e_i} f(x) - D_{e_i} f(\omega)\|_F \leqslant \frac{\varepsilon}{n}.$$

On définit $L = \sum_{i=1}^n \left(D_{e_i} f(\omega) \cdot e_i^*\right) \in \mathcal{L}(E, F)$, et on a, pour $h \in \mathcal{B}_f\left(0, \eta\right)$:

$$\begin{aligned}
&\|f(\omega+h) - f(\omega) - L(h)\|_F \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n \left[f\left(\omega + \sum_{k=1}^i e_k^*(h) e_k\right) - f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h) e_k\right) - e_i^*(h) D_{e_i} f(\omega) \right] \right\|_F \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left\| f\left(\omega + \sum_{k=1}^i e_k^*(h) e_k\right) - f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h) e_k\right) - e_i^*(h) D_{e_i} f(\omega) \right\|_F \\
&= \sum_{i=1}^n \left\| \int_0^{e_i^*(h)} \left[D_{e_i} f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h) e_k + \tau e_i\right) - D_{e_i} f(\omega) \right] \mathrm{d}\tau \right\|_F \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{e_i^*(h)} \left\| D_{e_i} f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h) e_k + \tau e_i\right) - D_{e_i} f(\omega) \right\|_F \mathrm{d}\tau \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{e_i^*(h)} \frac{\varepsilon}{n}\, \mathrm{d}\tau \right| \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty .
\end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en ω et $\mathrm{d}f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left(D_{e_i} f(\omega) \cdot e_i^*\right)$. En déduire que $\mathrm{d}f$ est $\mathcal{C}^0$. □

II Dérivées partielles standards

Notation 38.9. *Dans la suite, on suppose que $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.*

Notation 38.10. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Si f possède en ω une dérivée selon le vecteur e_j, on notera :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega) = D_{e_j} f(\omega).$$

Remarque 38.11. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega)$ est la dérivée de $t \longmapsto f(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, t, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_p)$ en ω_j.*

Proposition 38.12. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω, alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\omega), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\omega)$ sont bien définies et :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^p,\ \mathrm{d}f(\omega) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega).$$

Proposition 38.13. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, si $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega)$ est définie, alors $\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\omega), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\omega)$ sont définies et :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\omega), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\omega)\right).$$

Proposition 38.14. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Si f est différentiable en ω, alors :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(\mathrm{d}f(\omega)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Cette matrice est appelée matrice jacobienne *de f en ω.*

Corollaire 38.15. *$f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Si f est différentiable en ω, alors :*

$$(\mathrm{jac}\, f)(\omega) = \det(\mathrm{d}f(\omega)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(\omega) \end{vmatrix}, \tag{i}$$

$$(\operatorname{div} f)(\omega) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}f(\omega)) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\omega). \tag{ii}$$

Corollaire 38.16. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Si f est différentiable en ω, alors :*

$$\nabla f(\omega) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\omega), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\omega)\right).$$

Proposition 38.17. *$\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{V}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{U}$. On suppose que f est différentiable en ω et que g est différentiable en $f(\omega)$. Alors, selon la proposition 37.24, $(g \circ f)$ est différentiable en ω. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Alors on a :*

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\omega)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega)\right),$$

où les $\frac{\partial}{\partial x_j}$ représentent les dérivées partielles dans la base $\mathcal{B}_p$ et les $\frac{\partial}{\partial y_i}$ représentent les dérivées partielles dans la base $\mathcal{B}_n$.

Démonstration. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(\omega) &= \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p,1}\left[\mathrm{d}(g \circ f)(\omega)\right]\right)_{1j} = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p,1}\left[\mathrm{d}g\left(f(\omega)\right) \circ \mathrm{d}f(\omega)\right]\right)_{1j} \\
&= \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n,1}\left[\mathrm{d}g\left(f(\omega)\right)\right] \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}\left[\mathrm{d}f(\omega)\right]\right)_{1j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n,1}\left[\mathrm{d}g\left(f(\omega)\right)\right]\right)_{1i} \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}\left[\mathrm{d}f(\omega)\right]\right)_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\omega)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega)\right).
\end{aligned}$$

□

III Intégrales et différentiabilité

Lemme 38.18. *(Λ, d) espace métrique. $K \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit :*

$$A : \left| \begin{array}{l} \Lambda \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) \longmapsto \displaystyle\int_x^y K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right..$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A(\cdot, x, y) \in \mathcal{C}^0(\Lambda, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ t.q. $\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_0$. On pose :

$$J = (\{\lambda_0\} \cup \{\mu_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \times [x, y] .$$

J est un compact. On pose donc $M = \sup_{(\nu,t) \in J} |K(\nu, t)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n : t \in [x, y] \longmapsto K(\mu_n, t)$ et $\psi : t \in [x, y] \longmapsto K(\lambda_0, t)$. Alors ψ et les φ_n sont $\mathcal{C}^0$, $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s} \psi$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [x, y]\,,\ |\varphi_n(t)| \leqslant M$. Par convergence dominée (théorème 35.3) :

$$A(\mu_n, x, y) = \int_x^y \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_x^y \psi(t)\ \mathrm{d}t = A(\lambda_0, x, y) .$$

Donc $A(\cdot, x, y)$ est $\mathcal{C}^0$ en λ_0. □

Proposition 38.19. (Λ, d) *espace métrique.* $K \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On définit :*

$$A : \left| \begin{array}{rcl} \Lambda \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) & \longmapsto & \displaystyle\int_x^y K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Alors $A \in \mathcal{C}^0\left(\Lambda \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

Démonstration. On définit :

$$L : \left| \begin{array}{rcl} \Lambda \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y, r) & \longmapsto & (y - x) K(\lambda, x + r(y - x)) \end{array} \right. .$$

On a $L \in \mathcal{C}^0\left(\Lambda \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. Et :

$$\forall (\lambda, x, y) \in \Lambda \times \mathbb{R}^2,\ A(\lambda, x, y) = \int_x^y K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 L(\lambda, x, y, r)\ \mathrm{d}r.$$

En appliquant le lemme 38.18 à L (en remplaçant Λ par $\Lambda \times \mathbb{R}^2$), on en déduit la continuité de A. □

Proposition 38.20. $K \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. *On définit :*

$$A : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) & \longmapsto & \displaystyle\int_x^y K(\lambda, t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Alors $A \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$.

Démonstration. Il est clair que $\frac{\partial A}{\partial x}$ et $\frac{\partial A}{\partial y}$ sont $\mathcal{C}^0$. Utiliser la proposition 35.16 et la proposition 38.19 pour montrer que $\frac{\partial A}{\partial \lambda}$ est $\mathcal{C}^0$. D'après le théorème 38.8, A est $\mathcal{C}^1$. □

IV Dérivées partielles successives

Notation 38.21. $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Pour* $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1, p]\!]^k$, *on définit par récurrence, sous réserve d'existence :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right).$$

Proposition 38.22. $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *S'équivalent :*

(i) f *est de classe* $\mathcal{C}^k$.

(ii) *Toutes les dérivées partielles de* f *jusqu'à l'ordre* k *sont définies et continues.*

Théorème 38.23 (Théorème de Fubini)**.** $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ *et* $c < d$. $f \in \mathcal{C}^0 ([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$. *Alors :*

(i) *La fonction* $x \in [a, b] \longmapsto \int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y$ *est* $\mathcal{C}^0$.

(ii) *La fonction* $y \in [c, d] \longmapsto \int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x$ *est* $\mathcal{C}^0$.

(iii) *On a :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Démonstration. (i) et (ii) Utiliser l'uniforme continuité de f (car $[a, b] \times [c, d]$ est un compact). (iii) On pose :

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

On définit de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\iota_n = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} f\left(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)} \right),$$

avec $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$ et $y_\ell^{(n)} = c + \frac{\ell}{n}(d-c)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. f étant $\mathcal{UC}^0$ sur $[a, b] \times [c, d]$, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall (x, x', y, y') \in [a, b]^2 \times [c, d]^2,\ \|(x, y) - (x', y')\|_\infty \leqslant \eta \\ \Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{b-a}{N} \leqslant \eta$ et $\frac{d-c}{N} \leqslant \eta$. Alors, pour $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned}
&|I - \iota_n| \\
&= \left| \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \left[\int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} \left(\int_{y_{\ell-1}^{(n)}}^{y_\ell^{(n)}} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f\left(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)}\right) \right] \right| \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} \left(\int_{y_{\ell-1}^{(n)}}^{y_\ell^{(n)}} \left| f(x,y) - f\left(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)}\right) \right| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&\leqslant (b-a)(d-c)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Il vient $\iota_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} I$. De même, $\iota_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} J$. Donc $I = J$. □

Lemme 38.24. *$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ et $c < d$. $\varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(u,v) \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(u,v) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v.$$

Démonstration. Appliquer le théorème fondamental de l'analyse deux fois. □

Lemme 38.25. *$(a,c) \in \mathbb{R}^2$. $\beta \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Alors :*

$$\beta(a,c) = \lim_{n \to +\infty} \left[n^2 \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} \beta(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right].$$

Lemme 38.26. *$f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.*

Théorème 38.27 (Théorème de Schwarz)**.** *$f \in \mathcal{C}^k\left(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\right)$. $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1,p]\!]^k$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Alors :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

V Exemple : expression du laplacien en polaire

Définition 38.28 (Laplacien)**.** *$f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. On définit le* laplacien *de f par :*

$$\Delta f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right. .$$

Proposition 38.29. $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. *On pose :*

$$g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right. .$$

Alors g est $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

VI Extrema

Notation 38.30. *Dans la suite, on considère à nouveau $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et Ω un ouvert de E.*

Définition 38.31 (Extremum)**.** *X un ensemble non vide, $f : X \to \mathbb{R}$, $\omega \in X$.*

(i) *On dit que f présente un* maximum *en ω lorsque $\forall x \in X$, $f(x) \leqslant f(\omega)$.*

(ii) *On dit que f présente un* minimum *en ω lorsque $\forall x \in X$, $f(x) \geqslant f(\omega)$.*

Proposition 38.32. *X un ensemble non vide, $f : X \to \mathbb{R}$. Si $f(X)$ est fini, alors f présente un maximum et un minimum.*

Proposition 38.33. *(Λ, d) espace métrique, $f : \Lambda \to \mathbb{R}$. Si Λ est compact et f est continue, alors f présente un maximum et un minimum.*

Exemple 38.34. *Soit $\mathfrak{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension n. Alors :*

(i) *$\mathfrak{V}$ admet une base $\beta = (P_1, \dots, P_n)$ t.q. $\deg P_1 < \cdots < \deg P_n$.*

(ii) *$\mathfrak{V}$ admet une base $\gamma = (Q_1, \dots, Q_n)$ t.q. $\deg Q_1 = \cdots = \deg Q_n$.*

Démonstration. On note $\mathcal{B}(\mathfrak{V})$ l'ensemble des bases de $\mathfrak{V}$ et on pose :

$$w : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathfrak{V}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (H_1, \dots, H_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \deg H_i \end{array} \right. .$$

Montrer qu'il suffit de choisir $(\beta, \gamma) \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})^2$ t.q. $w(\beta) = \min_{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})} w(B)$ et $w(\gamma) = \max_{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})} w(B)$. $\square$

Définition 38.35 (Extremum local)**.** *(Λ, d) espace métrique, $f : \Lambda \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda$.*

(i) *On dit que f présente un* maximum local *en ω lorsque $\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \forall x \in V$, $f(x) \leqslant f(\omega)$.*

(ii) *On dit que f présente un* minimum local *en ω lorsque $\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(\omega)$.*

Proposition 38.36. *I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $\omega \in I$. On suppose que :*

(i) *f présente un extremum local en ω,*

(ii) *f est dérivable en ω,*

(iii) *$\omega \in \mathring{I}$.*

Alors $f'(\omega) = 0$.

Proposition 38.37. *Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f présente un extremum local en ω. Soit $u \in E$ t.q. f possède en ω une dérivée selon u. Alors :*

$$D_u f(\omega) = 0.$$

Corollaire 38.38. *Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f présente un extremum local en ω. Si f est différentiable en ω, alors :*

$$\mathrm{d}f(\omega) = 0.$$

Exemple 38.39. $(a_1, \ldots, a_s) \in E^s$. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On pose :*

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \|u - a_i\| \end{array} \right. .$$

On note $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ et $\mathfrak{C}^- = \{u \in E,\ \varphi(u) = \min_{x\in E} \varphi(x)\}$. Alors :

(i) *φ est convexe.*

(ii) *φ est différentiable en tout point de $E \backslash A$ et :*

$$\forall u \in E \backslash A,\ \nabla\varphi(u) = \sum_{i=1}^{s} \frac{u - a_i}{\|u - a_i\|}.$$

(iii) *$\mathfrak{C}^-$ est un compact convexe non vide de E.*

(iv) *On a :*

$$\left\{ u \in E \backslash A,\ \sum_{i=1}^{s} \frac{u - a_i}{\|u - a_i\|} = 0 \right\} \subset \mathfrak{C}^-.$$

Démonstration. (ii) Voir exemple 37.23. (iii) Voir proposition 38.44. (iv) Voir corollaire 38.47. □

VII Convexité

Définition 38.40 (Partie convexe d'un espace normé)**.** *$C \subset E$. S'équivalent :*

(i) $\forall (a,b) \in C^2,\ [a,b] \subset C$.

(ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in C^s,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in (\mathbb{R}_+)^s,\ \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^s \lambda_i \omega_i \in C$.

On dit alors que C est convexe.

Définition 38.41 (Fonction convexe)**.** *C une partie convexe de E, $f : C \to \mathbb{R}$. S'équivalent :*

(i) $\forall (a,b) \in C^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$.

(ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in C^s,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in (\mathbb{R}_+)^s,\ \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i \omega_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^s \lambda_i f(\omega_i)$.

On dit alors que f est convexe.

Remarque 38.42. *On peut montrer que si Ω est un ouvert convexe de E, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.*

Proposition 38.43. *C une partie convexe de E, $f : C \to \mathbb{R}$. S'équivalent :*

(i) *f est convexe.*

(ii) *$\forall \mathcal{D}$ droite affine de E, $f_{|C \cap \mathcal{D}}$ est convexe.*

(iii) *$\forall (a,b) \in C^2$, $f_{|[a,b]}$ est convexe.*

Proposition 38.44. *C une partie convexe de E, $f : C \to \mathbb{R}$ convexe. On pose :*

$$\mathfrak{E}^- = \{\omega \in C,\ \forall m \in C,\ f(\omega) \leqslant f(m)\}.$$

Alors $\mathfrak{E}^-$ est convexe.

Lemme 38.45. *C une partie convexe de E, $f : C \to \mathbb{R}$ convexe, $(a,b) \in C^2$. On pose :*

$$p : \left| \begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f((1-t)a + tb) \end{aligned} \right. .$$

Alors p est convexe.

Proposition 38.46. *Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in \Omega$. On suppose que pour tout $u \in E$, f possède une dérivée en ω selon u et $D_u f(\omega) = 0$. Alors f présente un minimum global en ω.*

Démonstration. Soit $m \in \Omega \backslash \{\omega\}$. On pose :

$$p : \left| \begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f((1-t)\omega + tm) \end{aligned} \right. .$$

Alors p est dérivable et convexe (selon le lemme 38.45). Et, selon l'inégalité des pentes (c.f. proposition 1.19), on a :

$$\forall s \in \left]0,1\right], \ \frac{p(s)-p(0)}{s-0} \leqslant \frac{p(1)-p(0)}{1-0} = f(m)-f(\omega).$$

En faisant tendre $s \to 0$, il vient $f(m)-f(\omega) \geqslant p'(0) = D_{m-\omega}f(\omega) = 0$. On a donc montré : $\forall m \in \Omega \backslash \{\omega\}, \ f(\omega) \leqslant f(m)$. □

Corollaire 38.47. *Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en ω et que $\mathrm{d}f(\omega) = 0$. Alors f présente un minimum global en ω.*

Proposition 38.48. *Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. S'équivalent :*

(i) *f est convexe.*

(ii) *$\forall (x,y) \in \Omega^2, \ f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)$.*

(iii) *$\forall (x,y) \in \Omega^2, \ \mathrm{d}f(y) \cdot (y-x) \geqslant \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)$.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii) Soit $(x,y) \in \Omega^2$. On pose :

$$p : t \in [0,1] \longmapsto f\left((1-t)x+ty\right) - f(x) - t\,\mathrm{d}f(x)\cdot(y-x).$$

Alors p est convexe (selon le lemme 38.45) et dérivable, donc $p' \nearrow$. Or $p'(0) = 0$, donc $\forall t \in [0,1], \ p'(t) \geqslant p'(0) = 0$. Donc $p \nearrow$, d'où :

$$f(y) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x) = p(1) \geqslant p(0) = 0.$$

(ii) ⇒ (iii) Soit $(x,y) \in \Omega^2$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x) &\leqslant f(y)-f(x) = -\left(f(x)-f(y)\right) \\ &\leqslant -\mathrm{d}f(y)\cdot(x-y) = \mathrm{d}f(y)\cdot(y-x). \end{aligned}$$

(iii) ⇒ (i) Soit $(a,b) \in \Omega^2$. On pose :

$$p : t \in [0,1] \longmapsto f\left((1-t)a+tb\right).$$

p est dérivable et :

$$\forall t \in [0,1], \ p'(t) = \mathrm{d}f\left((1-t)a+tb\right)\cdot(b-a).$$

Soit alors $(s,t) \in [0,1]^2$ avec $s<t$. On a :

$$\begin{aligned} p'(s) &= \frac{1}{t-s}\cdot \mathrm{d}f\left((1-s)a+sb\right)\cdot\left((t-s)(b-a)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{t-s}\cdot \mathrm{d}f\left((1-t)a+tb\right)\cdot\left((t-s)(b-a)\right) = p'(t). \end{aligned}$$

Donc $p' \nearrow$, donc p est convexe. En particulier, pour $\lambda \in [0,1]$:

$$f\left((1-\lambda)a+\lambda b\right) = p(\lambda) \leqslant (1-\lambda)p(0) + \lambda p(1) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Donc f est convexe. □

Chapitre 39

Espaces Euclidiens

Notation 39.1. *Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n.*

I Espaces euclidiens

I.1 Généralités

Proposition 39.2. *On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ u \longmapsto \langle u \mid \cdot \rangle \end{array} \right. .$$

Alors Φ est un isomorphisme.

Remarque 39.3. *La proposition 39.2 est fausse lorsque E est de dimension infinie. Par contre, l'application $\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \langle u \mid \cdot \rangle \end{array} \right.$ est injective et conserve la norme. Et Φ est surjective* ssi *E est de Banach.*

Définition 39.4 (Vecteurs orthogonaux)**.** $(x, y) \in E^2$. *S'équivalent :*

(i) $\langle x \mid y \rangle = 0$.

(ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

On dit alors que x et y sont orthogonaux*, et on note $x \perp y$.*

Définition 39.5 (Orthogonal d'une partie)**.** $A \subset E$. *On pose :*

$$A^{\perp} = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ x \perp a\} = \{x \in E,\ \mathrm{Ker}\,(\langle x \mid \cdot \rangle) \supset A\}\,.$$

Proposition 39.6. *$A \subset E$.*

(i) *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

(ii) *$A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.*

(iii) *$\left(A^\perp\right)^\perp \supset \mathrm{Vect}(A)$.*

I.2 Orthogonalité et sommes directes

Proposition 39.7. *F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) *$E = F \oplus F^\perp$.*

(ii) *$\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

Définition 39.8 (Projection orthogonale)**.** *F un sous-espace vectoriel de E. On appelle* projection orthogonale *sur F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition 39.9. *F un sous-espace vectoriel de E, $x \in E$. Alors :*

$$\|x - p_F(x)\| = d(x, F).$$

Plus précisément : $\forall f \in F \setminus \{p_F(x)\}, \ \|x - p_F(x)\| < \|x - f\|$.

Proposition 39.10. *$p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (i.e. $p \circ p = p$). Alors p est une projection orthogonale* ssi *$|||p||| \leqslant 1$ (où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$).*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, donc $|||p||| \leqslant 1$. ($\Leftarrow$) On suppose que $|||p||| \leqslant 1$. On note $F = \operatorname{Im} p$, $G = \operatorname{Ker} p$. On a donc $E = F \oplus G$, et p est la projection sur F parallèlement à G. Il suffit donc de montrer que $G = F^\perp$. Soit $(f, g) \in F \times G$. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|f\| = \|p\,(f + \lambda g)\| \leqslant \|f + \lambda g\|.$$

On considère donc :

$$\vartheta : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|f + \lambda g\|^2 - \|f\|^2 = \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda \langle f \mid g \rangle.$$

On a $\vartheta \geqslant 0$ et $\vartheta(0) = 0$. Il vient $\vartheta'(0) = 0$, i.e. $\langle f \mid g \rangle = 0$. Donc $f \perp g$. On a montré que F et G sont orthogonaux. On en déduit que $G = F^\perp$. □

Proposition 39.11. *$F_1, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F_1, \ldots, F_p$ sont deux à deux orthogonaux :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \ i \neq j \Longrightarrow (\forall\,(f_1, f_2) \in F_1 \times F_2, \ f_1 \perp f_2).$$

Alors $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe. Et leur somme est alors notée :

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p}} F_i.$$

I.3 Bases orthonormales

Vocabulaire 39.12 (Famille orthogonale, orthonormale)**.** $u \in E^I$.

(i) *On dit que la famille* $(u_i)_{i \in I}$ *est* orthogonale *lorsque :*

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j.$$

(ii) *On dit que la famille* $(u_i)_{i \in I}$ *est* orthonormale *lorsqu'elle est orthogonale et que* $\forall i \in I,\ \|u_i\| = 1$.

Proposition 39.13. *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Théorème 39.14. *E possède une base orthonormale.*

Démonstration. Par récurrence sur $\dim E$. Vrai pour $\dim E = 0$. Supposons le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $(d-1)$. Soit alors E un espace de dimension d. Soit $e_1 \in E \backslash \{0\}$ t.q. $\|e_1\| = 1$. On note $H = \operatorname{Ker}(\langle e_1 \mid \cdot \rangle)$. H est un hyperplan de E, donc $\dim H = d-1$, donc par hypothèse de récurrence, H admet une base orthonormale $(e_2 \ldots, e_d)$. Ainsi, $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base orthonormale de E, et la récurrence se propage. □

Corollaire 39.15. *Tout système orthonormal de vecteurs de E peut être complété en une base orthonormale de E.*

Définition 39.16 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)**.** *On munit $\mathbb{R}^n$ du* produit scalaire canonique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *défini par :*

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right. .$$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Proposition 39.17. *$(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On considère :*

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow E \\ \quad x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un isomorphisme, et Ψ conserve le produit scalaire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle x \mid y \rangle = \langle \Psi(x) \mid \Psi(y) \rangle .$$

II Endomorphismes orthogonaux

II.1 Structure de $O(E)$

Définition 39.18 (Endomorphismes orthogonaux)**.** *$f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(i) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

(ii) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

On dit alors que f est un endomorphisme orthogonal*. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.*

Proposition 39.19. *$O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.*

Remarque 39.20. *Si $f \in E^E$ est tel que $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$, alors on peut montrer que $f \in O(E)$.*

Proposition 39.21. *$O(E)$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. *Première étape* : $O(E)$ est borné. En effet :

$$\forall f \in O(E),\ |||f||| = 1.$$

Deuxième étape : $O(E)$ est fermé. En effet, pour $(x,y) \in E^2$, on pose $A_{x,y} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \langle f(x) \mid f(y) \rangle - \langle x \mid y \rangle = 0\}$. Alors les $A_{x,y}$ sont des fermés (comme image réciproque d'un fermé par une application continue) et :

$$O(E) = \bigcap_{(x,y) \in E^2} A_{x,y}.$$

Donc $O(E)$ est un fermé. *Conclusion* : $O(E)$ est un fermé borné de $\mathcal{L}(E)$, qui est de dimension finie, donc $O(E)$ est un compact. □

Définition 39.22 (Symétrie orthogonale)**.** *F un sous-espace vectoriel de E. On appelle* symétrie orthogonale *de base F, et on note σ_F, la symétrie de base F parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition 39.23. *F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) $\sigma_F \in O(E)$,

(ii) $\det \sigma_F = (-1)^{\operatorname{codim} F}$.

Remarque 39.24. *F, G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors la symétrie $s_{F,G}$ de base F parallèlement à G est orthogonale* ssi *$G = F^\perp$.*

Proposition 39.25. $\det(O(E)) \subset \{-1, 1\}$ *(avec égalité dès que* $\dim E \geqslant 1$*).*

Démonstration. Notons que $\det : GL(E) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme continu de groupes. Et $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$, donc $\det(O(E))$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}^*$. En déduire que $\det(O(E)) \subset \{-1, 1\}$. De plus, lorsque $\dim E \geqslant 1$, si H est un hyperplan de E, alors $\det \sigma_H = -1$ et $\sigma_H \in O(E)$, d'où $\det(O(E)) = \{-1, 1\}$. □

Notation 39.26. *On définit :*

(i) $SO(E) = \{f \in O(E), \det f = 1\}$,

(ii) $O^-(E) = \{f \in O(E), \det f = -1\}$.

Proposition 39.27.

(i) *$SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.*

(ii) *Pour $s \in O^-(E)$, l'application $\Phi_s : \left| \begin{array}{rcl} O(E) & \longrightarrow & O(E) \\ f & \longmapsto & s \circ f \end{array} \right.$ est une bijection et on a $O^-(E) = \Phi_s(SO(E))$ et $SO(E) = \Phi_s(O^-(E))$.*

II.2 Endomorphismes orthogonaux et stabilité

Proposition 39.28. *F un sous-espace vectoriel de E, $u \in O(E)$. Si $u(F) \subset F$, alors :*

$$u(F) = F \qquad \text{et} \qquad u\left(F^\perp\right) = F^\perp.$$

Proposition 39.29. *F un sous-espace vectoriel de E, $u \in O(E)$. On suppose que $u(F) \subset F$ et on note u_F et $u_{F^\perp}$ les induits respectifs de u sur F et $F^\perp$. Alors :*

$$u_F \in O(F) \qquad \text{et} \qquad u_{F^\perp} \in O\left(F^\perp\right).$$

Proposition 39.30. *$F_1, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de E t.q.*

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p}} F_i.$$

On pose :

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} \displaystyle\prod_{i=1}^{p} O(F_i) & \longrightarrow & O(E) \\ (f_1, \ldots, f_p) & \longmapsto & \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} f_i \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un morphisme injectif de groupes, et :

$$\Psi\left(\prod_{i=1}^{p} O(F_i)\right) = \{f \in O(E), \forall i \in [\![1, p]\!], f(F_i) \subset F_i\}.$$

III Matrices orthogonales

Proposition 39.31. *$u \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(i) *$u \in O(E)$.*

(ii) *u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale.*

(iii) *u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale.*

Proposition 39.32. *$u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. S'équivalent :*

(i) *$u \in O(E)$.*

(ii) *${}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = I_n$.*

Définition 39.33 (Matrices orthogonales)**.** *On définit :*

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I_n\right\}.$$

Les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ sont appelées matrices orthogonales*.*

Proposition 39.34. *$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.*

Proposition 39.35. *$O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. *Première étape* : $O_n(\mathbb{R})$ est borné. En effet, $\forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty \leqslant 1$. *Deuxième étape* : $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. En effet, l'application $\theta : M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tMM \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et $O_n(\mathbb{R}) = \theta^{-1}(\{I_n\})$. *Conclusion* : $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc $O_n(\mathbb{R})$ est un compact. □

Proposition 39.36. *$M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. S'équivalent :*

(i) *$M \in O_n(\mathbb{R})$.*

(ii) *${}^tMM = I_n$.*

(iii) *$(\mathfrak{C}_1(M), \dots, \mathfrak{C}_n(M))$ est un système orthonormal de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique).*

(iv) *$(\mathfrak{L}_1(M), \dots, \mathfrak{L}_n(M))$ est un système orthonormal de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique).*

(v) *$M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^tM$.*

Proposition 39.37. $\det(O_n(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$ *(avec égalité dès que $n \geqslant 1$).*

Démonstration. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $1 = \det(I_n) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2$, donc $\det M \in \{-1, 1\}$. □

Notation 39.38. *On définit :*

(i) *$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$,*

(ii) *$O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det M = -1\}$.*

IV Actions de groupes

Définition 39.39 (Action de groupe)**.** *G un groupe, X un ensemble. On appelle* action de G sur X *toute application* $\mathfrak{A} : \left|\begin{array}{rcl} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}\right.$ *vérifiant :*

(i) $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$ *(e étant le neutre de G),*

(ii) $\forall (g_1, g_2) \in G^2,\ \forall x \in X,\ g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x.$

Proposition 39.40. *G un groupe, X un ensemble. Alors une application* $\mathfrak{A} : G \times X \to X$ *est une action de groupe* ssi $\sigma : \left|\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X \\ g & \longmapsto & \mathfrak{A}(g, \cdot) \end{array}\right.$ *est un morphisme de groupes.*

Définition 39.41 (Orbites)**.** *G un groupe, X un ensemble,* $\mathfrak{A} : G \times X \to X$ *une action. On définit sur X la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *par :*

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \exists g \in G,\ g \cdot x = y.$$

L'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ *sera noté* E/G*. Les classes d'équivalence sont appelées* orbites*.*

Définition 39.42 (Espace affine)**.** $\left(\vec{F}, +, \cdot\right)$ *un espace vectoriel. On dit que* $(F, \mathfrak{A})$ *est un* espace affine *sur* $\vec{F}$ *lorsque :*

(i) F *est un ensemble non vide,*

(ii) $\mathfrak{A} : \left|\begin{array}{rcl} \vec{F} \times F & \longrightarrow & F \\ (\vec{u}, A) & \longmapsto & A + \vec{u} \end{array}\right.$ *est une action de* $\left(\vec{F}, +\right)$ *sur* F*,*

(iii) *Pour tout* $(A, B) \in F^2$*, il existe un unique vecteur* $\vec{u} \in \vec{F}$*, qui sera noté* $\overrightarrow{AB}$*, t.q.* $B = A + \vec{u}$*.*

V Orientation

Notation 39.43. *On note* $\mathbb{B}(E)$ *l'ensemble des bases orthonormales de* E *(considérées comme n-uplets).*

Proposition 39.44. $O(E)$ *agit naturellement sur* $\mathbb{B}(E)$*, avec :*

$$\forall f \in O(E),\ \forall \left(e_1, \dots, e_n\right) \in \mathbb{B}(E),\ f \cdot \left(e_1, \dots, e_n\right) = \left(f\left(e_1\right), \dots, f\left(e_n\right)\right).$$

Proposition 39.45. $\forall \left(\beta, \beta'\right) \in \mathbb{B}(E)^2,\ \exists! f \in O(E),\ f \cdot \beta = \beta'.$

Proposition 39.46. *On note $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence associée à l'action de $SO(E)$ sur $\mathbb{B}(E)$ (obtenue par restriction à partir de l'action de $O(E)$ sur $\mathbb{B}(E)$). Soit $(\beta,\beta') \in \mathbb{B}(E)^2$. S'équivalent :*

(i) $\beta \mathcal{R} \beta'$.

(ii) $\exists f \in SO(E),\ f \cdot \beta = \beta'$.

(iii) $\det_\beta(\beta') = 1$.

On en déduit que $\mathbb{B}(E)/SO(E)$ a exactement deux classes d'équivalence.

Définition 39.47 (Orientation d'un espace euclidien)**.** Orienter *l'espace euclidien E, c'est choisir l'une des deux classes d'équivalence de $\mathbb{B}(E)/SO(E)$, qu'on note $\mathbb{B}^+(E)$. On note de plus $\mathbb{B}^-(E) = \mathbb{B}(E)\backslash\mathbb{B}^+(E)$. Les bases orthonormales de $\mathbb{B}^+(E)$ sont dites* directes, *celles de $\mathbb{B}^-(E)$ sont dites* indirectes.

Proposition 39.48. *On suppose que E est orienté. Alors :*

(i) *Les éléments de $SO(E)$ envoie $\mathbb{B}^+(E)$ sur $\mathbb{B}^+(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$ sur $\mathbb{B}^-(E)$.*

(ii) *Les éléments de $O^-(E)$ envoie $\mathbb{B}^+(E)$ sur $\mathbb{B}^-(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$ sur $\mathbb{B}^+(E)$.*

Proposition 39.49. *On suppose que E est orienté. Soit β, β' deux bases orthonormales directes de E. Alors :*

$$\det_\beta = \det_{\beta'}.$$

Définition 39.50 (Produit mixte)**.** *On suppose que E est orienté. On définit le* produit mixte *de n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E par*

$$[v_1, \ldots, v_n] = \det_\beta (v_1, \ldots, v_n),$$

où β est n'importe quelle base orthonormale directe de E.

Définition 39.51 (Produit vectoriel)**.** *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Pour $(u,v) \in E^2$, on a $[u,v,\cdot] \in E^*$; ainsi, d'après la proposition 39.2, il existe un unique $w \in E$ t.q. $\forall x \in E,\ [u,v,x] = \langle w \mid x\rangle$. Ce vecteur w sera noté $u \wedge v$. On a donc :*

$$\forall (u,v,x) \in E^3,\ [u,v,x] = \langle (u \wedge v) \mid x \rangle.$$

Proposition 39.52. *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Soit β une base orthonormale directe de E. Soit $(u,v) \in E^2$. On note :*

$$\mathcal{M}_\beta(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathcal{M}_\beta(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathcal{M}_\beta(u \wedge v) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

VI Groupe orthogonal en dimension 2

Proposition 39.53. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note :*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}).$$

Alors $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Corollaire 39.54. *On a les isomorphismes de groupes suivants :*

$$SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}.$$

Corollaire 39.55. *$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

Lemme 39.56. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E)$. Alors :*

$$\forall\,(\beta,\beta') \in \mathbb{B}^+(E)^2,\ \mathcal{M}_\beta(f) = \mathcal{M}_{\beta'}(f).$$

Proposition 39.57. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E)$. Alors il existe un unique $\overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) = R(\theta)$. On dit que f est la* rotation d'angle θ *et on note $f = \rho_\theta$.*

Proposition 39.58.

$$O_2^-(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition 39.59. *On suppose que $\dim E = 2$. Alors $O^-(E)$ est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport à des droites :*

$$O^-(E) = \{\sigma_D,\ D \text{ droite vectorielle de } E\}.$$

Proposition 39.60. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Pour $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ et D, D' deux droites vectorielles de E, on a :*

(i) $\rho_{\theta'} \circ \rho_\theta = \rho_{\theta'+\theta}$.

(ii) $\rho_\theta \circ \sigma_D = \sigma_{\rho_{\theta/2}(D)}$.

(iii) $\sigma_D \circ \rho_\theta = \sigma_{\rho_{-\theta/2}(D)}$.

(iv) $\sigma_{D'} \circ \sigma_D = \rho_{2\varphi}$, *où* $\varphi = (\widehat{D, D'})$.

VII Réduction des endomorphismes orthogonaux

VII.1 Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux

Lemme 39.61. *$f \in O(E)$.*

(i) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.

(ii) *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $f(F) = F$, $f\left(F^{\perp}\right) = F^{\perp}$, et les induits respectifs f_F et $f_{F^{\perp}}$ de f sur F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.*

(iii) *Si $E \neq \{0\}$, alors f admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.*

Démonstration. Voir propositions 39.28, 39.29 et 32.4. □

Théorème 39.62 (Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux)**.** *$f \in O(E)$. Alors il existe β base orthonormale de E, $(p, q, s) \in \mathbb{N}^3$, $0 < \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_s < \pi$ t.q.*

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_s) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_p & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -I_q \end{bmatrix}.$$

$p, q, s, \theta_1, \ldots, \theta_s$ ainsi définis sont uniques (mais pas β).

VII.2 Applications

Lemme 39.63. *$SO(E)$ est connexe par arcs.*

Proposition 39.64. *$O(E)$ a exactement deux composantes connexes par arcs : $SO(E)$ et $O^-(E)$.*

Corollaire 39.65. *$\mathbb{B}(E)$ (muni de la topologie induite de E^n) a exactement deux composantes connexes par arcs : $\mathbb{B}^+(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$.*

Proposition 39.66. *$O(E)$ est engendré par l'ensemble des symétries hyperplanes.*

Proposition 39.67. *On note :*

$$O_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \cap O_n(\mathbb{R}).$$

Alors $O_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour $U \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}$, on note $s_U = \sigma_{\mathrm{Vect}(U)^\perp} \in O\left(\mathbb{R}^n\right)$ (i.e. la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(U)^\perp$). Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_U\right) = I_n - 2\frac{U{}^tU}{{}^tUU} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Cette écriture montre que, si $U \in \mathbb{Q}^n \backslash\{0\}$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_U\right) \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{Q}\right)$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_U\right) \in O_n(\mathbb{Q})$. Soit alors $A \in O_n(\mathbb{R})$. Selon la proposition 39.66, il existe $H_1, \ldots, H_p$ hyperplans de $\mathbb{R}^n$ t.q.

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\sigma_{H_1}\right) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\sigma_{H_p}\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_{U_1}\right) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_{U_p}\right),$$

avec $(U_1, \ldots, U_p) \in (\mathbb{R}^n \backslash\{0\})^p$. Or $\mathbb{Q}^n \backslash\{0\}$ est dense dans $\mathbb{R}^n \backslash\{0\}$, donc pour $i \in [\![1, p]\!]$, il existe une suite $V^{(i)} \in \left(\mathbb{Q}^n \backslash\{0\}\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $V_N^{(i)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} U_i$. Poser alors, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$B_N = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_{V_N^{(1)}}\right) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(s_{V_N^{(p)}}\right) \in O_n(\mathbb{Q}).$$

Ainsi, $B_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} A$. □

Corollaire 39.68. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :*

$$S_n = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\right\}.$$

Alors $S_n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$ est dense dans S_n.

Démonstration. Soit $x \in S_n$. On complète x en une base orthonormale $\beta = (x, x_2, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ (muni de sa structure euclidienne canonique). On note $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $P = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\beta\right) \in O_{n+1}\left(\mathbb{R}\right)$. On a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x) = P\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(e_1\right)$. Comme $P \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_{n+1}\left(\mathbb{Q}\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $Q_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} P$ (selon la proposition 39.67). Ainsi :

$$Q_N\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(e_1\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} P\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(e_1\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x),$$

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $Q_N\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(e_1\right) \in S_n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$. □

Proposition 39.69. *$f \in O(E)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $m_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f^k$. Alors :*

$$m_N(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{} p_{E_1(f)},$$

où $p_{E_1(f)}$ est le projecteur orthogonal sur $E_1(f) = \mathrm{Ker}\left(f - id_E\right)$.

VIII Réduction orientée des endomorphismes orthogonaux directs en dimension 3

Proposition 39.70. *On suppose que* $\dim E = 3$ *et que* E *est orienté. Soit* $f \in SO(E) \setminus \{id_E\}$*. Alors il existe* $\beta = (u, v, w)$ *base orthonormale directe de* E *et* $\theta \in]0, 2\pi[$ *t.q.*

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

On dit alors que f *est la* rotation d'angle θ autour de u*, et on note* $f = \rho_{u,\theta}$*.*

Proposition 39.71. *On suppose que* $\dim E = 3$ *et que* E *est orienté. Soit* $u \in E$*,* $\theta \in [0, 2\pi[$*. Alors :*

$$|||\rho_{u,\theta} - id_E||| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Méthode 39.72. *On suppose que* $\dim E = 3$ *et que* E *est orienté. Soit* $f \in SO(E) \setminus \{id_E\}$*. On sait qu'il existe* $u \in E$ *et* $\theta \in]0, 2\pi[$ *t.q.* $f = \rho_{u,\theta}$*.*

(i) *Déterminer* u *revient à trouver les vecteurs propres de* f *associés à la valeur propre* 1*, i.e. résoudre le système linéaire* $f(x) = x$*.*

(ii) *Pour déterminer* θ*, on peut remarquer que :*

$$\operatorname{tr} f = 1 + 2\cos\theta.$$

Ceci permet de déterminer θ *au signe près. Et on a de plus :*

$$\forall x \in E \setminus \operatorname{Vect}(u),\ [u, x, f(x)] \text{ a le signe de } \sin\theta.$$

IX Procédé de Gram-Schmidt

IX.1 Point de vue vectoriel

Théorème 39.73 (Procédé de Gram-Schmidt)**.** $(u_1, \ldots, u_p)$ *une famille libre de* E*. Alors il existe une unique famille orthogonale* $(v_1, \ldots, v_p)$ *t.q*

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (v_i - u_i) \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{i-1}).$$

On dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ *est l'*orthogonalisé de Gram-Schmidt *de* $(u_1, \ldots, u_p)$*.*

Démonstration. Pour $i \in [\![0, p]\!]$, on notera $F_i = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_i)$. *Existence.* On pose, pour $i \in [\![1, p]\!]$:

$$v_i = p_{F_{i-1}^\perp}(u_i) = u_i - p_{F_{i-1}}(u_i).$$

Vérifier que $(v_1, \dots, v_p)$ convient. *Unicité.* Soit $(w_1, \dots, w_p)$ ayant les mêmes qualités que $(v_1, \dots, v_p)$. Montrer que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}\,(w_1, \dots, w_i)$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On a donc $w_i \in F_{i-1}^{\perp}$. Et $u_i = (u_i - w_i) + w_i$; comme $(u_i - w_i) \in F_{i-1}$, il vient $w_i = p_{F_{i-1}^{\perp}}(u_i) = v_i$. □

Remarque 39.74. *On définit L_p l'ensemble des familles libres de p vecteurs de E, Ω_p l'ensemble des familles libres orthogonales de p vecteurs de E. Alors le procédé de Gram-Schmidt définit une application $\Gamma : L_p \to \Omega_p$. Comme l'orthogonalisé de Gram-Schmidt s'obtient à l'aide d'opérations de corps exclusivement, Γ est une fraction rationnelle. En particulier, Γ est continue.*

Vocabulaire 39.75 (Orthonormalisé de Gram-Schmidt)**.** *$(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E, dont on note $(v_1, \dots, v_p)$ l'orthogonalisé de Gram-Schmidt. On dit alors que le système $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_p}{\|v_p\|}\right)$ est l'*orthonormalisé de Gram-Schmidt *de $(u_1, \dots, u_p)$.*

Proposition 39.76. *$(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $(u_1, \dots, u_p)$ est l'unique famille $(w_1, \dots, w_p) \in E^p$ t.q.*

(i) *$(w_1, \dots, w_p)$ est un système orthonormal,*

(ii) *$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $w_i \in \left(\mathbb{R}_+^*\right) u_i + \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_{i-1})$.*

Autrement dit, dans l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de passage de la base $(u_1, \dots, u_p)$ à la base $(w_1, \dots, w_p)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Application 39.77. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est trigonalisable, alors il existe une base orthonormale β de E t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R})$.*

Proposition 39.78 (Inégalité de Hadamard)**.** *On suppose que E est orienté. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors :*

$$|[u_1, \dots, u_n]| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|.$$

Démonstration. L'inégalité est clairement vérifiée si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée. On suppose donc que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et on note $(v_1, \dots, v_n)$ son orthogonalisé de Gram-Schmidt. Soit β une base orthonormale directe de E :

$$\begin{aligned} |[u_1, \dots, u_n]| &= \left|\det_\beta(u)\right| = \left|\det_\beta(v)\right| \cdot \left|\det_v(u)\right| = \left|\det_\beta(v)\right| \\ &= \|v_1\| \cdots \|v_n\| \cdot \left|\det_\beta\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)\right| = \|v_1\| \cdots \|v_n\| \\ &\leqslant \|u_1\| \cdots \|u_n\|, \end{aligned}$$

car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|v_i\| = \left\|p_{\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1})^\perp}(u_i)\right\| \leqslant \|u_i\|$. □

IX.2 Point de vue matriciel

Notation 39.79. *On note :*

$$\mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R}) = \{T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ T_{ii} \in \mathbb{R}_+\}$$
$$\mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}) = \left\{T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ T_{ii} \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Proposition 39.80 (Procédé de Gram-Schmidt)**.**

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists!\,(\Omega,T) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}),\ A = \Omega T.$$

Proposition 39.81. *On considère :*

$$\Theta : \left| \begin{array}{rcl} O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega,T) & \longmapsto & \Omega T \end{array} \right. .$$

Alors Θ est un homéomorphisme.

Démonstration. Θ est bijective selon la proposition 39.80, et il est clair que Θ est $\mathcal{C}^0$. Montrons que Θ^{-1} est $\mathcal{C}^0$. Soit donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$. On note $(U,T) = \Theta^{-1}(A)$ et $(V_p,S_p) = \Theta^{-1}(B_p)$, pour $p \in \mathbb{N}$. Soit W une valeur d'adhérence de V dans $O_n(\mathbb{R})$ (qui est compact) et j une extraction associée. On a alors :

$$S_{j(p)} = {}^t V_{j(p)} \left(V_{j(p)} S_{j(p)}\right) = {}^t V_{j(p)} B_{j(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} {}^t W U T.$$

On a ${}^tWUT \in GL_n(\mathbb{R})$. Et ${}^tWUT \in \mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R})$ (car $\mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$). Donc ${}^tWUT \in \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R})$. Donc $\Theta({}^tWU, T) = \Theta(I_n, {}^tWUT)$, d'où ${}^tWU = I_n$ et $W = U$. On a montré que U est la seule valeur d'adhérence de V. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un compact, on a $V_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} U$ (c.f. théorème 14.31). On en déduit aisément que $S_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} T$, ce qui prouve que Θ^{-1} est $\mathcal{C}^0$. $\square$

Chapitre 40

Endomorphismes Autoadjoints

Notation 40.1. *Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n.*

I Adjoint d'un endomorphisme

Définition 40.2 (Adjoint d'un endomorphisme)**.** *$u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^*, appelé* adjoint *de u, t.q.*

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle\,.$$

Proposition 40.3. *$u \in \mathcal{L}(E)$. Si β est une base orthonormale de E, alors :*

$$\mathcal{M}_\beta\left(u^*\right) = {}^t(\mathcal{M}_\beta(u)).$$

Proposition 40.4. *On note :*

$$\mathcal{A} : \left| \begin{array}{c} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{array} \right. \qquad et \qquad \mathcal{T} : \left| \begin{array}{c} \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \\ M \longmapsto {}^tM \end{array} \right. .$$

Si β est une base orthonormale, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(E) \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\mathcal{M}_\beta"'] & \mathcal{L}(E) \arrow[d, "\mathcal{M}_\beta"] \\ \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \arrow[r, "\mathcal{T}"'] & \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \end{tikzcd}$$

Corollaire 40.5. *On considère l'application* $\mathcal{A} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \quad u \longmapsto u^* \end{array} \right.$. *On a :*

(i) $\mathcal{A}$ *est linéaire.*

(ii) $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = id_{\mathcal{L}(E)}$.

(iii) $\forall u \in \mathcal{L}(E), \begin{cases} \operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u \\ \operatorname{tr} u^* = \operatorname{tr} u \\ \det u^* = \det u \end{cases}$.

Proposition 40.6. $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*

$$\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}.$$

Proposition 40.7. $u \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) $u \in O(E)$.

(ii) $u^* \circ u = id_E$.

(iii) $u \in GL(E)$ *et* $u^{-1} = u^*$.

Lemme 40.8. $x \in E$.

$$\|x\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \langle x \mid y \rangle .$$

Autrement dit, $|||\langle x \mid \cdot \rangle||| = \|x\|$, *où* $|||\cdot|||$ *est la norme d'opérateur sur* $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *subordonnée à* $\|\cdot\|$ *et* $|\cdot|$.

Proposition 40.9. $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$|||u^*||| = |||u|||,$$

où $|||\cdot|||$ *est la norme d'opérateur sur* $\mathcal{L}(E)$ *subordonnée à* $\|\cdot\|$.

II Endomorphismes autoadjoints

Définition 40.10 (Endomorphisme autoadjoint)**.** *On dit qu'un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est* autoadjoint *lorsque* $u^* = u$. *On notera :*

$$\mathscr{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^* = u\} = \operatorname{Ker}\left(\mathcal{A} - id_{\mathcal{L}(E)}\right),$$

avec $\mathcal{A} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \quad u \longmapsto u^* \end{array} \right.$.

Proposition 40.11. $u \in \mathcal{L}(E)$. *Soit* β *une base orthonormale de* E. *S'équivalent :*

(i) $u \in \mathscr{S}(E)$.
(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle$.
(iii) ${}^t(\mathcal{M}_\beta(u)) = \mathcal{M}_\beta(u)$.

Notation 40.12. *On note :*

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M \right\}.$$

Proposition 40.13. *β une base orthonormale de E. Alors :*
(i) *$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*
(ii) *$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*
(iii) *$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathscr{S}(E))$.*
(iv) *$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Remarque 40.14. *F, G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors la projection $\pi_{F,G}$ sur F parallèlement à G est autoadjointe* ssi *$G = F^\perp$.*

III Théorème spectral

Lemme 40.15. *$u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormale diagonalisant u. Alors $u \in \mathscr{S}(E)$.*

Lemme 40.16. *$u \in \mathscr{S}(E)$.*
(i) *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, et les induits respectifs u_F et $u_{F^\perp}$ de u sur F et $F^\perp$ sont autoadjoints.*
(ii) *Si $E \neq \{0\}$, alors u admet un sous-espace stable de dimension* 1 *ou* 2.

Lemme 40.17. *On suppose que* $\dim E = 2$. *Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors il existe une base orthonormale diagonalisant u.*

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E. On écrit $M = \mathcal{M}_\beta(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Il suffit de trouver $P \in SO_2(\mathbb{R})$ t.q. $PMP^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. Autrement dit, il suffit de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $R(\theta)MR(\theta)^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. Or, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&R(\theta)MR(\theta)^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R}) \\
&\qquad \iff \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R}) \\
&\qquad \iff b\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + (a-c)\cos\theta\sin\theta = 0 \\
&\qquad \iff b\cos(2\theta) + \frac{a-c}{2}\sin(2\theta) = 0 \\
&\qquad \iff \langle r(\theta) \mid y \rangle = 0,
\end{aligned}$$

avec $r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a-c}{2} \end{pmatrix}$. Choisissons donc $\omega \in \mathrm{Vect}(y)^\perp \backslash \{0\}$ (c'est possible car $\dim \mathrm{Vect}(y)^\perp = \mathrm{codim}\, \mathrm{Vect}(y) \geqslant 1$). Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $\frac{\omega}{\|\omega\|} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} = r(\theta)$. Et on a alors $R(\theta) M R(\theta)^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. □

Théorème 40.18 (Théorème spectral)**.** $u \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

(i) $u \in \mathscr{S}(E)$.

(ii) *Il existe une base orthonormale diagonalisant u.*

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Voir lemme 40.15. (i) $\Rightarrow$ (ii) Par récurrence sur $\dim E$ en utilisant les lemmes 40.16 et 40.17. □

Corollaire 40.19. $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* $u \in \mathscr{S}(E)$ ssi

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)}} E_\lambda(u),$$

où $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda id_E)$*, pour* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Application 40.20. $u \in \mathscr{S}(E)$. *Alors :*

$$|||u||| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)} |\lambda|,$$

où $|||\cdot|||$ *est la norme d'opérateur sur* $\mathcal{L}(E)$ *subordonnée à* $\|\cdot\|$*.*

IV Forme matricielle du théorème spectral

Vocabulaire 40.21 (Matrices orthogonalement semblables)**.** *Soit* $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$*. On dit que A et B sont* orthogonalement semblables *lorsque :*

$$\exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}),\ A = {}^t\Omega B \Omega.$$

Théorème 40.22 (Théorème spectral)**.** $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

(i) $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\exists\, (\Omega, D) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^t\Omega D \Omega$.

(iii) *A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.*

Notation 40.23. $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *Dans ce paragraphe, on notera :*

$$\Gamma(A) = \left\{ \Omega A {}^t\Omega,\ \Omega \in O_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

Lemme 40.24. *$f \in \mathscr{S}(E)$. Alors il existe $x \in E$ t.q. $\|x\| = 1$ et :*

$$\langle f(x) \mid x \rangle = \frac{\operatorname{tr} f}{n},$$

où $n = \dim E$.

Démonstration. On peut supposer $\dim E \geqslant 2$. f est autoadjoint donc diagonalisable : soit $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f. On note $\Sigma = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ et :

$$r : x \in \Sigma \longmapsto \langle f(x) \mid x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Σ est connexe par arcs (c.f. proposition 16.14) et r est $\mathcal{C}^0$, donc $r(\Sigma)$ est un intervalle. Or $\lambda_1 \in r(\Sigma)$, $\lambda_n \in r(\Sigma)$, donc :

$$\frac{\operatorname{tr} f}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \in [\lambda_1, \lambda_n] \subset r(\Sigma).$$

□

Proposition 40.25. *$A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :*

(i) *$\Gamma(A)$ est un compact de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

(ii) *$\Gamma(A)$ contient des matrices diagonales.*

(iii) *$\Gamma(A)$ contient des matrices à diagonale constante.*

Démonstration. (iii) Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$ t.q. le résultat est vrai au rang $(n-1)$. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit E un espace euclidien de dimension n, β une base orthonormale de E, et $f \in \mathscr{S}(E)$ t.q. $A = \mathcal{M}_\beta(f)$. Selon le lemme 40.24, il existe $e_n \in E$ avec $\|e_n\| = 1$ t.q. $\langle f(e_n) \mid e_n \rangle = \frac{\operatorname{tr} A}{n}$. On note alors $F = \operatorname{Vect}(e_n)^\perp$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base orthonormale de F, et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \{e_n\}$. Donc :

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{bmatrix} \hat{A} & X \\ {}^tX & \frac{\operatorname{tr} A}{n} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est orthonormale. Donc $\hat{A} \in \mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $\hat{Q} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ t.q. ${}^t\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}$ est à diagonale constante, de termes diagonaux $\frac{1}{n-1} \operatorname{tr}\left({}^t\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}\right) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} \hat{A} = \frac{\operatorname{tr} A}{n}$. On pose alors :

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors ${}^tQ\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)Q$ est à diagonale constante, et la récurrence se propage. □

Proposition 40.26. *$A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On considère :*

$$\alpha : M \in \mathit{\Gamma}(A) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \operatorname{tr} M,$$
$$\beta : M \in \mathit{\Gamma}(A) \longmapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} M_{ij}^2 = \operatorname{tr}\left({}^t M M\right),$$
$$\gamma : M \in \mathit{\Gamma}(A) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} M_{ii}^2.$$

Alors :

(i) $\forall M \in \mathit{\Gamma}(A),\ \alpha(M) = \operatorname{tr} A$,

(ii) $\forall M \in \mathit{\Gamma}(A),\ \beta(M) = \operatorname{tr}({}^t A A)$,

(iii) $\min_{M \in \mathit{\Gamma}(A)} \gamma(M) = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{n}$ *et* $\max_{M \in \mathit{\Gamma}(A)} \gamma(M) = \operatorname{tr}({}^t A A)$.

Chapitre 41

Compléments sur les Endomorphismes Autoadjoints

Notation 41.1. *Dans ce chapitre,* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *est un espace euclidien de dimension* n*.*

I Codiagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Proposition 41.2. $(f, g) \in \mathscr{S}(E)^2$*. Alors :*

$$(g \circ f) \in \mathscr{S}(E) \Longleftrightarrow g \circ f = f \circ g.$$

Théorème 41.3. $\mathcal{A} \subset \mathscr{S}(E)$*. S'équivalent :*

(i) *Les éléments de* $\mathcal{A}$ *commutent deux à deux.*

(ii) *Il existe une base orthonormale diagonalisant tous les éléments de* $\mathcal{A}$*.*

Démonstration. Même principe que le théorème 32.6. □

Corollaire 41.4. $\mathcal{A} \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$*. S'équivalent :*

(i) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ AB = BA.$

(ii) $\exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathcal{A},\ {}^t\Omega A \Omega \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{R}).$

II Quotient de Rayleigh

Définition 41.5 (Quotient de Rayleigh)**.** $f \in \mathscr{S}(E)$. *On définit le* quotient de Rayleigh *de f par :*

$$r : x \in \Sigma \longmapsto \langle f(x) \mid x \rangle \in \mathbb{R},$$

où $\Sigma = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$.

Proposition 41.6. *$f \in \mathscr{S}(E)$. On note r le quotient de Rayleigh de f. Comme Σ est compact et r est $\mathcal{C}^0$, r présente un maximum et un minimum, qui sont tous deux atteints en un vecteur propre de f.*

Démonstration. On suppose que $\dim E \geqslant 2$ (sinon le résultat reste vrai). Soit $u \in \Sigma$ t.q. $r(u) = \max_{x \in \Sigma} r(x)$. Soit $w \in \Sigma$ t.q. $w \perp u$. On pose :

$$v : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos\theta)\, u + (\sin\theta)\, w \in \Sigma \qquad \text{et} \qquad \varrho = r \circ v.$$

ϱ présente un maximum en 0. Or, ϱ est dérivable et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \varrho'(\theta) = \sin(2\theta)\,(r(w) - r(u)) + 2\cos(2\theta)\,\langle w \mid f(u) \rangle .$$

Donc $2\langle w \mid f(u) \rangle = \varrho'(0) = 0$. Donc $w \perp f(u)$. Ceci montre que :

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp},\ f(u) \perp x.$$

Autrement dit, $\mathrm{Vect}(u)^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(f(u))^{\perp}$, d'où $\mathrm{Vect}(f(u)) \subset \mathrm{Vect}(u)$. Donc $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, i.e. u est un vecteur propre de f. Le raisonnement est identique pour le minimum. □

Corollaire 41.7. *$f \in \mathscr{S}(E)$. Alors :*

$$\min_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle = \min \mathrm{Sp}(f) \qquad \textit{et} \qquad \max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle = \max \mathrm{Sp}(f).$$

III Autoadjoints positifs et définis positifs

Définition 41.8 (Autoadjoint positif)**.** $f \in \mathscr{S}(E)$. *S'équivalent :*

(i) $\forall x \in E,\ \langle f(x) \mid x \rangle \geqslant 0$.

(ii) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit alors que f est positif. *On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des autoadjoints positifs de E.*

Proposition 41.9. *$\mathscr{S}^+(E)$ est un convexe fermé de $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 41.10. *$\mathscr{S}^+(E)$ est un cône convexe, i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall f \in \mathscr{S}^+(E),\ (\lambda f) \in \mathscr{S}^+(E).$$

Définition 41.11 (Autoadjoint défini positif)**.** *$f \in \mathscr{S}(E)$. S'équivalent :*

(i) $\forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle f(x) \mid x\rangle > 0$.

(ii) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On dit alors que f est défini positif*. On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des autoadjoints définis positifs de E.*

Proposition 41.12. *$\mathscr{S}^{++}(E) \subset \mathscr{S}^+(E) \subset \mathscr{S}(E)$.*

Proposition 41.13. *$\mathscr{S}^{++}(E)$ est un ouvert convexe de $\mathscr{S}(E)$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathscr{S}^{++}(E)$ est convexe ; montrons que c'est un ouvert de $\mathscr{S}(E)$. Soit $f \in \mathscr{S}^{++}(E)$. On pose :

$$\rho = \min_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x\rangle > 0.$$

On munit $\mathscr{S}(E)$ de $|||\cdot|||$ (restriction de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$). Montrer alors que $\mathcal{B}_o(f,\rho) \subset \mathscr{S}^{++}(E)$. □

Proposition 41.14. *On se place dans $\mathscr{S}(E)$. Alors :*

$$\mathscr{S}^+(E) = \overline{\mathscr{S}^{++}(E)} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S}^{++}(E) = \overbrace{\mathscr{S}^+(E)}^{\circ}.$$

Lemme 41.15. *$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ (f^* \circ f) \in \mathscr{S}^+(E)$.*

Proposition 41.16. *$f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$|||f||| = \sqrt{\max \mathrm{Sp}\,(f^* \circ f)},$$

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

IV Théorème min-max

Notation 41.17. *Pour $d \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathcal{G}_d(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d.*

Notation 41.18. *$f \in \mathscr{S}(E)$. On note $\lambda_1(f) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(f)$ t.q.*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i(f) - X)\,.$$

Théorème 41.19 (Théorème min-max)**.** *$f \in \mathscr{S}(E)$. Alors :*

$$\forall d \in [\![1, n]\!],\ \lambda_d(f) = \min_{F \in \mathcal{G}_d(E)} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle .$$

Démonstration. Soit $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1(f), \ldots, \lambda_n(f)) .$$

($\geqslant$) Soit $d \in [\![1, n]\!]$. On note $F_0 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathcal{G}_d(E)$. On note f_{F_0} l'induit de f sur F_0. On a $f_{F_0} \in \mathscr{S}(F_0)$, donc d'après le corollaire 41.7 :

$$\lambda_d(f) = \max \operatorname{Sp}(f_{F_0}) = \max_{\substack{x \in F_0 \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle \geqslant \inf_{F \in \mathcal{G}_d(E)} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle .$$

($\leqslant$) Soit $F \in \mathcal{G}_d(E)$. On pose $G_0 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_d, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathcal{G}_{n-d+1}(E)$. On a :

$$\dim(F \cap G_0) = \dim F + \dim G_0 - \dim(F + G_0) \geqslant d + (n - d + 1) - n = 1.$$

Soit donc $u \in (F \cap G_0) \setminus \{0\}$ avec $\|u\| = 1$. Ainsi, en notant f_{G_0} l'induit de f sur G_0, on a $f_{G_0} \in \mathscr{S}(G_0)$, donc d'après le corollaire 41.7 :

$$\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) \mid x \rangle \geqslant \langle f(u) \mid u \rangle \geqslant \min_{\substack{y \in G_0 \\ \|y\|=1}} \langle f(y) \mid y \rangle = \min \operatorname{Sp}(f_{G_0}) = \lambda_d(f).$$

Il suffit alors de passer à l'inf sur F. $\square$

Lemme 41.20. *(X, d) un espace métrique, $f \in \left(\mathbb{R}^X\right)^\Lambda$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que :*

(i) *$\forall \lambda \in \Lambda,\ f_\lambda$ est ρ-lipschitzienne,*

(ii) *$\forall x \in X,\ \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) < +\infty$.*

Alors la fonction

$$M : x \in X \longmapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \in \mathbb{R}$$

est ρ-lipschitzienne.

Remarque 41.21. *Le lemme 41.20 reste valable en remplaçant* sup *par* inf*.*

Application 41.22. *Pour $d \in [\![1, n]\!]$, on s'intéresse à la fonction*

$$\lambda_d : \mathscr{S}(E) \to \mathbb{R}$$

(c.f. notation 41.18). On munit $\mathscr{S}(E)$ de $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ (restriction de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$). Alors λ_d est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Appliquer le théorème 41.19, puis appliquer deux fois le lemme 41.20. $\square$

V Matrices symétriques positives et définies positives

Définition 41.23. *On définit :*

(i) $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0\}$,

(ii) $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\ {}^tXAX > 0\}$.

Proposition 41.24. *Si β est une base orthonormale de E, alors :*

$$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta\left(\mathscr{S}^+(E)\right) \qquad et \qquad \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta\left(\mathscr{S}^{++}(E)\right).$$

Corollaire 41.25. *On a :*

(i) $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\}$,

(ii) $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*\right\}$.

Lemme 41.26. *Si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors* $\det A > 0$.

Théorème 41.27. *$A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. S'équivalent :*

(i) $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(ii) *Les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Montrer que toutes les sous-matrices carrées de A correspondant à des mineurs principaux sont symétriques définies positives, et conclure à l'aide du lemme 41.26. (ii) $\Rightarrow$ (i) D'après le théorème 27.67, A possède une décomposition LU :

$$A = LU, \qquad \text{avec} \begin{cases} L \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{R}) \\ U \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}) \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ L_{ii} = 1 \end{cases}.$$

On a alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $U_{11}\cdots U_{ii} = \mu_i(U) = \mu_i(A) > 0$, où $\mu_i(M)$ désigne le mineur principal d'ordre i de la matrice M. On en déduit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ U_{ii} > 0.$$

On pose alors $D = \mathrm{diag}(U_{11}, \dots, U_{nn})$, puis $L' = D^{-1}U$. Ainsi :

$$LU = A = {}^tA = {}^t(LDL') = {}^tL'\left(D\,{}^tL\right).$$

Par unicité de la décomposition LU, il vient $L = {}^tL'$. Donc $A = LD\,{}^tL$. En déduire $\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, ${}^tXAX > 0$. $\square$

Lemme 41.28. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 41.29. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

(i) $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(ii) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tPP$.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Clair. (i) $\Rightarrow$ (ii) D'après le théorème 40.18, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ t.q. $A = \Omega \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, {}^t\Omega$. On pose alors $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$. Ainsi :

$$A = \Omega\left(\Delta^2\right){}^t\Omega = {}^t\!\left(\Omega\Delta{}^t\Omega\right)\left(\Omega\Delta{}^t\Omega\right),$$

d'où le résultat car $(\Omega\Delta{}^t\Omega) \in GL_n(\mathbb{R})$. □

Corollaire 41.30. $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

(i) $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(ii) $\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXAX > 0$.

(iii) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(iv) *Les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.*

(v) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tPP$.

Proposition 41.31. *L'application*

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tAA \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme, où $\mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) = \left\{T \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_{ii} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

Corollaire 41.32.

$$\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \sim \mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \sim \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où $\sim$ désigne la relation d'homéomorphisme.

Remarque 41.33. *On peut montrer que si F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe non vide de F, alors $\mathcal{U} \sim F$. On retrouve ainsi le résultat du corollaire 41.32.*

VI Décomposition polaire

Lemme 41.34. *On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{S}^+(E) & \longrightarrow & \mathscr{S}^+(E) \\ f & \longmapsto & f^2 \end{array} \right. .$$

(i) Φ *est bijective.*

(ii) $\Phi\left(\mathscr{S}^{++}(E)\right) = \mathscr{S}^{++}(E)$.

(iii) Φ *est un homéomorphisme.*

Notation 41.35. *Pour* $g \in \mathscr{S}^{+}(E)$, *on notera* $\sqrt{g}$ *l'unique élément de* $\mathscr{S}^{+}(E)$ *t.q.*

$$g = \left(\sqrt{g}\right)^2.$$

Théorème 41.36 (Décomposition polaire)**.**

$$\forall f \in GL(E),\ \exists!\,(\omega, s) \in O(E) \times \mathscr{S}^{++}(E),\ f = \omega \circ s.$$

Cette écriture est appelée décomposition polaire *de f.*

Démonstration. Soit $f \in GL(E)$. *Unicité.* Soit $(\omega, s) \in O(E) \times \mathscr{S}^{++}(E)$ t.q. $f = \omega \circ s$. Alors :

$$f^* \circ f = (\omega \circ s)^* \circ (\omega \circ s) = s \circ \omega^* \circ \omega \circ s = s^2.$$

Et $(f^* \circ f) \in \mathscr{S}^{++}(E)$, donc $s = \sqrt{f^* \circ f} \in \mathscr{S}^{++}(E)$. On a alors $\omega = f \circ s^{-1}$.
Existence. On pose $s = \sqrt{f^* \circ f} \in \mathscr{S}^{++}(E)$ et $\omega = f \circ s^{-1}$. On a bien $f = \omega \circ s$; reste à prouver que $\omega \in O(E)$. En effet :

$$\omega^* \circ \omega = \left(f \circ s^{-1}\right)^* \circ \left(f \circ s^{-1}\right) = s^{-1} \circ f^* \circ f \circ s^{-1} = s^{-1} \circ s^2 \circ s^{-1} = id_E.$$

□

Proposition 41.37. *On pose :*

$$\mathfrak{P} : \left| \begin{array}{rcl} O(E) \times \mathscr{S}^{++}(E) & \longrightarrow & GL(E) \\ (\omega, s) & \longmapsto & \omega \circ s \end{array} \right. .$$

Alors $\mathfrak{P}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Même principe que la proposition 39.81. □

Corollaire 41.38. *Selon le corollaire 41.32 et la proposition 41.37, on a :*

$$GL_n\left(\mathbb{R}\right) \sim O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sim SO_n\left(\mathbb{R}\right) \times \{0, 1\} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où $\sim$ désigne la relation d'homéomorphisme.

Théorème 41.39 (Décomposition polaire)**.**

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists!\,(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ A = \Omega S.$$

Cette écriture est appelée décomposition polaire *de A.*

Lemme 41.40. *$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Voir proposition 32.16. □

Proposition 41.41.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ A = \Omega S.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Selon le lemme 41.40, il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$. Or, selon le théorème 41.39, pour $p \in \mathbb{N}$, il existe $(U_p, T_p) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ t.q. $B_p = U_p T_p$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, soit alors $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et j une extraction t.q. $U_{j(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \Omega$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^t\Omega A &= \lim_{p\to+\infty} \left({}^tU_{j(p)} B_{j(p)}\right) = \lim_{p\to+\infty} \left({}^tU_{j(p)} U_{j(p)} T_{j(p)}\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty} T_{j(p)} \in \overline{\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})} = \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $(\Omega, {}^t\Omega A) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ convient. □

Application 41.42. *On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. On note :*

$$B = \{f \in \mathcal{L}(E),\ |||f||| \leqslant 1\}.$$

Alors :

$$B = \operatorname{Conv}(O(E)),$$

où $\operatorname{Conv}(O(E))$ *est l'enveloppe convexe de $O(E)$, i.e. le plus petit convexe de $\mathcal{L}(E)$ contenant $O(E)$.*

Démonstration. ($\supset$) $B \supset O(E)$ et B est convexe donc $B \supset \operatorname{Conv}(O(E))$.
($\subset$) Soit $f \in B$. Selon la proposition 41.41, soit $(\omega, s) \in O(E) \times \mathscr{S}^+(E)$ t.q. $f = \omega \circ s$. On a alors :

$$|||s||| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|s(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\omega(s(x))\|}{\|x\|} = |||\omega \circ s||| = |||f||| \leqslant 1.$$

Soit alors β une base orthonormale de E, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $|||s||| \leqslant 1$, on a :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n \subset [-1,1]^n \subset \operatorname{Conv}(\{-1,1\}^n).$$

Donc il existe une fonction $\alpha : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}_+$ t.q.

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \alpha(\varepsilon) \cdot (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \qquad \text{et} \qquad 1 = \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \alpha(\varepsilon).$$

Pour $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, on pose $\delta_\varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(\delta_\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. On a alors $\delta_\varepsilon \in \mathscr{S}(E) \cap O(E)$. Ainsi :

$$f = \omega \circ s = \omega \circ \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \alpha(\varepsilon)\delta_\varepsilon \right) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \alpha(\varepsilon)(\omega \circ \delta_\varepsilon) \in \operatorname{Conv}(O(E)).$$

□

VII Forme ultime du théorème spectral

Théorème 41.43. *$A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(P, \Delta) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q.*

$$A = {}^tPP \qquad \text{et} \qquad B = {}^tP\Delta P.$$

Démonstration. Selon la proposition 41.29, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ t.q. $A = {}^tQQ$. Autrement dit, ${}^tQ^{-1}AQ^{-1} = I_n$. On définit alors :

$$S = {}^tQ^{-1}BQ^{-1} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

Comme $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Pi \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q. $S = {}^t\Pi\Delta\Pi$. Donc :

$$A = {}^tQQ = {}^t(\Pi Q)(\Pi Q) \qquad \text{et} \qquad B = {}^tQSQ = {}^t(\Pi Q)\Delta(\Pi Q).$$

□

Notation 41.44. *On définit $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ par :*

$$\forall (A,B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2,\ A \preccurlyeq B \Longleftrightarrow \left(\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \leqslant {}^tXBX\right).$$

$\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 41.45. *$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ A \succcurlyeq 0\}$.*

Proposition 41.46. *$(A,B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. Alors :*

$$0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B \Longrightarrow 0 \leqslant \det A \leqslant \det B.$$

Démonstration. Supposons $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$. *Premier cas* : $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \backslash \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ t.q. ${}^tXBX = 0$. Alors ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX = 0$, donc $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \backslash \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $0 = \det A = \det B$. *Second cas* : $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors selon le théorème 41.43, il existe $(P, \Delta) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$A = {}^tP\Delta P \qquad \text{et} \qquad B = {}^tPP.$$

En utilisant le fait que $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$, montrer que $0 \preccurlyeq \Delta \preccurlyeq I_n$, puis en déduire que $0 \leqslant \det \Delta \leqslant 1$. Ainsi :

$$0 \leqslant \underbrace{(\det P)^2 \det \Delta}_{\det A} \leqslant \underbrace{(\det P)^2}_{\det B}.$$

□

VIII Matrices antisymétriques

Définition 41.47. *On définit :*

(i) $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}$,

(ii) $\mathscr{A}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f^* = -f\}$.

Proposition 41.48. *β une base orthonormale de E. Alors :*

(i) *$\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

(ii) *$\mathscr{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*

(iii) *$\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathscr{A}(E))$.*

(iv) $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 41.49 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$)**.** *On munit* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *du* produit scalaire canonique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *défini par :*

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left| \begin{array}{rl} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^tAB\right) \end{array} \right. .$$

La base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale de $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Proposition 41.50. *On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$. Si A et B sont orthogonalement semblables, alors :*

$$\|A\| = \|B\|.$$

Proposition 41.51. *On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Alors :*

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 41.52. $\exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Utiliser le théorème 39.62. □

Lemme 41.53. $\forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

Remarque 41.54. *Toute matrice non nulle de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est non diagonalisable. De plus, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est de dimension maximale parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété.*

Lemme 41.55. *$u \in \mathscr{A}(E)$.*

(i) *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, et les induits respectifs u_F et $u_{F^\perp}$ de u sur F et $F^\perp$ sont antisymétriques.*

(ii) *Si $E \neq \{0\}$, alors u admet un sous-espace stable de dimension* 1 *ou* 2.

Notation 41.56. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on note* $K(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$*.*

Théorème 41.57 (Théorème de réduction des endomorphismes antisymétriques)**.** $f \in \mathscr{A}(E)$*. Alors il existe* β *base orthonormale de* E*,* $s \in \mathbb{N}$*,* $0 < \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_s$ *t.q.*

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} K(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & K(\alpha_s) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, $s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *ainsi définis sont uniques.*

IX Déterminant de Gram

Définition 41.58 (Matrice de Gram)**.** *Pour* $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$*, on définit la* matrice de Gram *de* $(u_1, \ldots, u_p)$ *par :*

$$G(u_1, \ldots, u_p) = (\langle u_i \mid u_j \rangle)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R}).$$

On définit de plus le déterminant de Gram *de* $(u_1, \ldots, u_p)$ *par :*

$$\gamma(u_1, \ldots, u_p) = \det G(u_1, \ldots, u_p).$$

Lemme 41.59. $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$*. Alors :*

$$\forall X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^t X G(u_1, \ldots, u_p) X = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i u_i \right\|^2.$$

Proposition 41.60. $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$*.*

(i) $G(u_1, \ldots, u_p) \in \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$*.*

(ii) $G(u_1, \ldots, u_p) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \ldots, u_p)$ *est libre.*

(iii) $\gamma(u_1, \ldots, u_p) \geqslant 0$*, avec égalité* ssi $(u_1, \ldots, u_p)$ *est liée.*

Lemme 41.61. $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$*,* $(v_1, \ldots, v_q) \in E^q$*. On suppose qu'il existe* $P \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\forall j \in [\![1, q]\!]$*,* $v_j = \sum_{i=1}^{p} P_{ij} u_i$*. Alors :*

$$G(v_1, \ldots, v_q) = {}^t P G(u_1, \ldots, u_p) P.$$

Lemme 41.62. $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in E^m$ *un système orthonormal. On note* $F =$ Vect$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$*. Alors :*

$$\forall z \in E,\ d(z, F)^2 = \gamma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, z).$$

Proposition 41.63. *$(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ un système libre. On note $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_m)$. Alors :*

$$\forall z \in E,\ d(z, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x_1, \ldots, x_m, z)}{\gamma(x_1, \ldots, x_m)}}.$$

Chapitre 42

Espaces Préhilbertiens Réels

Notation 42.1. *Dans ce chapitre,* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *est un espace préhilbertien.*

I Généralités

Proposition 42.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Proposition 42.3 (Identité de polarisation)**.**

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Proposition 42.4 (Identité du parallélogramme)**.**

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

II Projection sur un compact convexe

Proposition 42.5. K *un compact convexe non vide de* E. *Alors :*

$$\forall m \in E,\ \exists! k \in K,\ \|m - k\| = d(m, K).$$

Notation 42.6. K *un compact convexe non vide de* E. *On définit* $\pi_K : E \to K$ *t.q.*

$$\forall m \in E,\ \|m - \pi_K(m)\| = d(m, K).$$

Lemme 42.7. *K un compact convexe non vide de E. Alors l'application $m \in E \longmapsto d(m, K) \in \mathbb{R}_+$ est continue car 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Voir proposition 13.24. □

Proposition 42.8. *K un compact convexe non vide de E. Alors :*

$$\pi_K \in \mathcal{C}^0 (E, K).$$

Démonstration. Voir proposition 14.32. □

Remarque 42.9. *Si F est un fermé convexe non vide de E t.q.* $\mathrm{Vect}(F)$ *est de dimension finie, alors les résultats ci-dessus restent valables en remplaçant K par F.*

Proposition 42.10. *K un compact convexe non vide de E. $a \in E$. Alors $\pi_K(a)$ est l'unique élément de K vérifiant :*

$$\forall q \in K,\ \langle a - \pi_K(a) \mid q - \pi_K(a)\rangle \leqslant 0.$$

Proposition 42.11. *K un compact convexe non vide de E. Alors π_K est 1-lipschitzienne.*

III Formes linéaires

Proposition 42.12. *On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \langle u \mid \cdot \rangle \end{array} \right. .$$

Alors Φ est injective et conserve la norme. Et Φ est surjective ssi *E est de Banach.*

Exemple 42.13. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0 ([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 fg$. Alors l'application*

$$\delta : f \in E \longmapsto f(1) \in \mathbb{R}$$

est linéaire mais pas continue.

Exemple 42.14. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0 ([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^1 fg$. Alors l'application*

$$\alpha : f \in E \longmapsto \int_0^1 f \in \mathbb{R}$$

est linéaire et continue, mais :

$$\alpha \notin \{\langle u \mid \cdot \rangle,\ u \in E\}.$$

IV Orthogonalité

Définition 42.15 (Vecteurs orthogonaux)**.** $(x, y) \in E^2$. *S'équivalent :*

(i) $\langle x \mid y \rangle = 0$.

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

On dit alors que x et y sont orthogonaux*, et on note $x \perp y$.*

Définition 42.16 (Orthogonal d'une partie)**.** $A \subset E$. *On pose :*

$$A^\perp = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ x \perp a\} = \{x \in E,\ \mathrm{Ker}\,(\langle x \mid \cdot \rangle) \supset A\}.$$

Proposition 42.17.

(i) *$A \subset E$. Alors $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.*

(ii) *F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp = \overline{F}^\perp$.*

Proposition 42.18. *F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$F \subset \overline{F} \subset \left(F^\perp\right)^\perp.$$

Corollaire 42.19. *F un sous-espace vectoriel de E. Si $F = \left(F^\perp\right)^\perp$, alors F est fermé.*

Proposition 42.20. *F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

Exemple 42.21. *On se place dans $E = \ell^2(\mathbb{N})$ (c.f. définition 4.5), muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u \mid v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $e_p = (\delta_{np})_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Et on pose :*

$$F = \mathrm{Vect}\,(e_p,\ p \in \mathbb{N}) = \{u \in E,\ u \textit{ stationne en } 0\}.$$

Alors :

$$F \subsetneq \overline{F} = E.$$

Exemple 42.22. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$. On note :*

$$F = \left\{f \in E,\ f_{|[-1,0]} = 0\right\}.$$

Alors :

(i) $F^\perp = \left\{f \in E,\ f_{|[0,1]} = 0\right\}$.

(ii) *F et $F^\perp$ sont fermés.*

(iii) $F \oplus F^\perp = \{f \in E,\ f(0) = 0\} \subsetneq E$.

(iv) *$F \oplus F^\perp$ n'est pas fermé.*

V Projections orthogonales

Proposition 42.23. *F un sous-espace vectoriel de E, $x \in F \oplus F^{\perp}$. Soit $(p,q) \in F \times F^{\perp}$ t.q. $x = p + q$. Alors :*

$$\|x - p\| = d(x, F).$$

Plus précisément : $\forall f \in F \setminus \{p\}$, $\|x-p\| < \|x - f\|$.

Proposition 42.24. *F un sous-espace vectoriel de E, $x \in E$. S'équivalent :*

(i) $x \in F \oplus F^{\perp}$.

(ii) $\exists p \in F,\ \forall f \in F,\ \|x-p\| \leqslant \|x - f\|$.

Exemple 42.25. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. On suppose que :*

$$\forall A \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\},\ \mathbb{P}(A) > 0.$$

On note $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant un moment d'ordre 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2$, qu'on munit du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathfrak{M}_2)^2,\ \langle X \mid Y \rangle = E(XY).$$

Alors :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_2,\ V(X) = \|X - E(X)\|^2 = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|X - \lambda\|^2.$$

Proposition 42.26. *F un sous-espace vectoriel de E.*

(i) *Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors F est fermé.*

(ii) *Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors $E = F^{\perp} \oplus \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.*

Proposition 42.27. *F un sous-espace vectoriel de E. Si F est de dimension finie, alors :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Comme F est de dimension finie, montrer avec le corollaire 15.26 que $d(x,F)$ est réalisée puis conclure avec la proposition 42.24. □

Définition 42.28 (Projection orthogonale)**.** *F un sous-espace vectoriel de E t.q. $E = F \oplus F^{\perp}$. On appelle alors* projection orthogonale *sur F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.*

VI Familles orthonormales

Vocabulaire 42.29 (Famille orthogonale, orthonormale)**.** $u \in E^I$.

(i) *On dit que la famille* $(u_i)_{i \in I}$ *est* orthogonale *lorsque :*

$$\forall (i,j) \in I^2,\, i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j.$$

(ii) *On dit que la famille* $(u_i)_{i \in I}$ *est* orthonormale *lorsqu'elle est orthogonale et que* $\forall i \in I,\, \|u_i\| = 1$.

Proposition 42.30. *Si E est de dimension infinie, alors E admet une famille orthonormale* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. E étant de dimension infinie, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\left(\varepsilon_0^{(n)}, \ldots, \varepsilon_n^{(n)}\right)$ l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $(u_0, \ldots, u_n)$ (dans l'espace euclidien $\operatorname{Vect}(u_0, \ldots, u_n)$). Notons que, pour $(k,p,q) \in \mathbb{N}^3$ avec $p \geqslant k$ et $q \geqslant k$, on a $\varepsilon_k^{(p)} = \varepsilon_k^{(q)}$ par unicité dans le procédé de Gram-Schmidt. Ainsi, $\left(\varepsilon_n^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convient. □

Proposition 42.31. *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. On note $F_n = \operatorname{Vect}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. F_n étant de dimension finie, la projection orthogonale p_{F_n} est bien définie, et :*

$$\forall x \in E,\, p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle \varepsilon_k \mid x \rangle \varepsilon_k.$$

Proposition 42.32 (Inégalité de Bessel)**.** *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Alors :*

$$\forall x \in E,\, \forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=0}^{n} \langle \varepsilon_k \mid x \rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Corollaire 42.33. *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Alors :*

$$\forall x \in E,\, \langle \varepsilon_n \mid x \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Proposition 42.34. *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. On note $F_n = \operatorname{Vect}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, et on pose :*

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \operatorname{Vect}(\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{N}).$$

Soit $x \in E$. S'équivalent :

(i) $x \in \overline{G}$.

(ii) $p_{F_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n \mid x\rangle^2$.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Clair. (i) $\Rightarrow$ (ii) Montrons premièrement que $d(x, F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, G)$. Soit en effet $\varepsilon > 0$. Soit $g \in G$ t.q. $d(x, G) \leqslant \|x - g\| \leqslant d(x, G) + \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $g \in F_{n_0}$. Alors $g \in \bigcap_{n\geqslant n_0} F_n$, donc $\forall n \geqslant n_0,\ d(x, F_n) \leqslant \|x - g\| \leqslant d(x, G) + \varepsilon$, d'où :

$$\forall n \geqslant n_0,\ d(x, G) \leqslant d(x, F_n) \leqslant d(x, G) + \varepsilon.$$

Donc $d(x, F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, G)$. Ainsi, comme $x \in \overline{G}$:

$$\|x - p_{F_n}(x)\| = d(x, F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, G) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Clair avec la proposition 42.31. (iii) $\Rightarrow$ (ii) On a :

$$\|x - p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle \varepsilon_k \mid x\rangle^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Proposition 42.35 (Identité de Parseval)**.** *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n \mid x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2,$$

avec égalité ssi $x \in \overline{\mathrm{Vect}(\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N})}$.

Proposition 42.36. *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

(i) *Si $\sum a_n\varepsilon_n$ converge, alors $\sum a_n^2$ converge.*

(ii) *Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \langle \varepsilon_n \mid x\rangle$.*

Exemple 42.37. *On se place dans $E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u \text{ stationne en } 0\right\}$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ défini par $\forall (u, v) \in E^2,\ \langle u \mid v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $e_p = (\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Alors $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge mais $\sum \frac{e_n}{n+1}$ diverge au sens de E.*

VII Espaces séparables et familles totales

Définition 42.38 (Espace séparable)**.** *On dit qu'un espace métrique (X, d) est* séparable *lorsqu'il existe $D \subset X$ dénombrable et dense dans X.*

Proposition 42.39. *Toute partie d'un espace métrique séparable est séparable.*

Proposition 42.40. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie est séparable (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Proposition 42.41. *Soit (F, ν) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). S'équivalent :*

(i) *(F, ν) est séparable.*

(ii) *Il existe une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $F = \overline{\mathrm{Vect}\,(u_n,\ n \in \mathbb{N})}$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) On note Δ une partie dénombrable et dense de $\mathbb{K}$ ($\Delta = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\Delta = \mathbb{Q}[i]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Et on pose :

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\Delta u_0 + \cdots + \Delta u_n\right).$$

Montrer que D est dénombrable et dense dans F. □

Proposition 42.42. *Soit (F, ν) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). S'équivalent :*

(i) *(F, ν) est séparable.*

(ii) *Il existe une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $F = \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n,\ n \in \mathbb{N})}$.*

Proposition 42.43. *On suppose que E est de dimension infinie. S'équivalent :*

(i) *$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est séparable.*

(ii) *Il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $E = \overline{\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N})}$.*

Proposition 42.44. *On suppose que E est séparable et de dimension infinie. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E t.q. $E = \overline{\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N})}$. On considère :*

$$\Phi : \left|\begin{array}{l} E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto \left(\langle \varepsilon_n \mid x \rangle\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$$

(c.f. définition 4.5). Alors Φ est linéaire, injective et conserve le produit scalaire (donc la norme).

Exemple 42.45. *$(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire usuel) est séparable.*

Démonstration. Selon la proposition 12.23, $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ est séparable. En déduire le résultat en utilisant le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme hilbertienne $\|\cdot\|_2$. $\square$

Vocabulaire 42.46 (Famille totale)**.** *On appelle* famille totale *de E toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E t.q.*

$$E = \overline{\mathrm{Vect}\left(u_i,\ i\in I\right)}.$$

Exemple 42.47. *$(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\gamma_n : t\in[a,b]\longmapsto t^n\in\mathbb{R}$. Alors la famille $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ (muni de son produit scalaire usuel).*

Proposition 42.48. *$(u_i)_{i\in I}$ une famille totale de E. On considère :*

$$\Psi : \left|\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^I \\ x \longmapsto \left(\langle u_i \mid x\rangle\right)_{i\in I} \end{array}\right. .$$

Ψ est linéaire et injective.

VIII Polynômes orthogonaux

Notation 42.49. *Dans ce paragraphe, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $w\in\mathcal{C}^0\left(I,\mathbb{R}_+^*\right)$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left(t\in I\longmapsto w(t)t^n\right)$ est intégrable.*

Notation 42.50. *On pose :*

$$E_w = \left\{f\in\mathcal{C}^0\left(I,\mathbb{R}\right),\ wf^2 \text{ est intégrable}\right\}.$$

Proposition 42.51.

(i) *E_w est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0\left(I,\mathbb{R}\right)$.*

(ii) *$E_w\supset\mathbb{R}[X]$ (on identifie $\mathbb{R}[X]$ à $\left\{\left(t\in I\longmapsto P(t)\right),\ P\in\mathbb{R}[X]\right\}$)*

Notation 42.52. *On munit E_w du produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ défini par :*

$$\forall(f,g)\in\left(E_w\right)^2,\ \langle f\mid g\rangle = \int_I wfg.$$

Notation 42.53. *$(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E_w, on note donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son orthogonalisé de Gram-Schmidt.*

Proposition 42.54. *$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n *est unitaire.*

(iii) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n \Longrightarrow P_m \perp P_n$.

Proposition 42.55. *Si $I = \mathbb{R}$ et w est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a la parité de n.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = (-1)^n P_n(-X)$. Utiliser la proposition 42.54 pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = P_n$. □

Proposition 42.56. *Si I est un segment, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.*

Démonstration. Utiliser le théorème 17.18 et le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme hilbertienne. □

Proposition 42.57.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \ P_{n+2} = (X - a_n) P_{n+1} + b_n P_n.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $H = P_{n+2} - XP_{n+1}$. On a $H \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Et :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \langle H \mid Q \rangle = \langle P_{n+2} \mid Q \rangle - \langle XP_{n+1} \mid Q \rangle = -\langle P_{n+1} \mid XQ \rangle = 0,$$

car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$. Ainsi, $H \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}(P_n, P_{n+1})$. □

Proposition 42.58. *$n \in \mathbb{N}$.*

(i) *P_n est simplement scindé.*

(ii) *Les racines de P_n sont dans $\mathring{I}$.*

Démonstration. On note $\inf I < \zeta_1 < \cdots < \zeta_s < \sup I$ les racines distinctes de P_n de multiplicité impaire dans $\mathring{I}$. Il existe donc $T \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$ ne changeant pas de signe sur $\mathring{I}$ t.q.

$$P_n = T \prod_{i=1}^{s} (X - \zeta_i).$$

On note $\Pi = \prod_{i=1}^{s} (X - \zeta_i)$ et on suppose par l'absurde que $P_n \neq \Pi$. Alors $\Pi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Vect}(P_n)^\perp$. Donc :

$$0 = \langle \Pi \mid P_n \rangle = \langle \Pi \mid T\Pi \rangle = \int_I wT\Pi^2.$$

Or $wT\Pi^2$ ne change pas de signe sur I, et est $\mathcal{C}^0$, donc $wT\Pi^2 = 0$. C'est absurde. Donc $P_n = \Pi$. □

IX Séries de Fourier

Notation 42.59. *On se place dans l'espace* $E = \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

(i) *On munit* E *du produit scalaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *défini par :*

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi fg.$$

On note $\|\cdot\|_2$ *la norme hilbertienne associée.*

(ii) *On munit* E *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par :*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)|.$$

Proposition 42.60.

$$\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_\infty$ *est plus fine que* $\|\cdot\|_2$.

Notation 42.61. *On note* $\mathcal{P} = \{(t \in [0,\pi] \longmapsto P(t)),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Proposition 42.62. $\mathcal{P}$ *est dense dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*, donc dans* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Notation 42.63. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on note :*

$$\gamma_n : t \in [0,\pi] \longmapsto \cos(nt) \in \mathbb{R}.$$

Proposition 42.64. $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale de* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$*, et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|\gamma_n\|_2 = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & si\ n > 0 \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$*, on notera* $\varepsilon_n = \frac{\gamma_n}{\|\gamma_n\|_2}$*. Ainsi,* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthonormale de* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Lemme 42.65. *On se place dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(i) $\operatorname{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$ *est une sous-algèbre de* E.

(ii) $\overline{\operatorname{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$ *est une sous-algèbre de* E.

Lemme 42.66. *On se place dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*. On pose :*

$$u : t \in [0,\pi] \longmapsto t \in \mathbb{R}.$$

Alors $u \in \overline{\operatorname{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$.

Démonstration. Notons que arccos est développable en série entière en 0 sur $]-1,1[$ tout entier ; soit donc $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \arccos x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme arccos est $\mathcal{UC}^0$ sur $[-1,1]$, soit $\eta > 0$ t.q.

$$\forall t \in [0,\pi],\ \left|\arccos(\cos t) - \arccos\left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\rho\left(\sum \beta_n z^n\right) \geqslant 1 > \frac{1}{1+\eta}$, soit $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{1+\eta}, \frac{1}{1+\eta}\right],\ \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n |x|^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,\pi],\ &\left|u(t) - \sum_{n=0}^{N} \beta_n \frac{\gamma_1^n(t)}{(1+\eta)^n}\right| \\ &= \left|\arccos(\cos t) - \arccos\left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right)^n\right| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$ est une algèbre, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1^n \in \mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$. Ainsi, $u \in \overline{\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$. □

Proposition 42.67. $\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$ *est dense dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*, donc dans* $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$*.*

Démonstration. On se place dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Avec les notations du lemme 42.66, on a $u \in \overline{\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$, donc comme $\overline{\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$ est une sous-algèbre de E, $\mathcal{P} = \mathbb{R}[u] \subset \overline{\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$. Ainsi $E = \overline{\mathcal{P}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\gamma_n,\ n \in \mathbb{N})}$. □

Corollaire 42.68. $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthonormale totale de* $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$*.*

Application 42.69.

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Démonstration. On pose $u : t \in [0,\pi] \longmapsto t \in \mathbb{R}$. Selon l'identité de Parseval (proposition 42.35), on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n \mid u\rangle^2 = \langle \gamma_0 \mid u\rangle^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \langle \gamma_n \mid u\rangle^2.$$

Cette égalité fournit $\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)^2$. Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

On en déduit le résultat en écrivant $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16}\zeta(4) + \frac{\pi^4}{96}$. □

Proposition 42.70. *$f \in E$. On suppose que $\sum |\langle \varepsilon_n \mid f\rangle|$ converge. Alors :*

$$\sum_{n=0}^{N}\langle \varepsilon_n \mid f\rangle\,\varepsilon_n \xrightarrow[N\to+\infty]{u} f.$$

Démonstration. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\varepsilon_n\|_\infty = \sqrt{2}$, la série $\sum \langle \varepsilon_n \mid f\rangle\,\varepsilon_n$ converge normalement donc uniformément vers $\ell \in E$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_2$, $\sum \langle \varepsilon_n \mid f\rangle\,\varepsilon_n$ converge vers ℓ au sens de $\|\cdot\|_2$. Or $\sum \langle \varepsilon_n \mid f\rangle\,\varepsilon_n$ converge vers f au sens de $\|\cdot\|_2$ car $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale et totale. Donc $\ell = f$. □

X Polynômes de Laguerre

Notation 42.71. *On note $w : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-t} \in \mathbb{R}$. On se place dans l'espace $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\ wf^2 \text{ est intégrable}\right\}$, muni du produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ défini par $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f \mid g\rangle = \int_0^{\infty} wfg$.*

Proposition 42.72. *En identifiant $\mathbb{R}[X]$ à $\{(t \in I \longmapsto P(t)),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$, on a $\mathbb{R}[X] \subset E$.*

Définition 42.73 (Polynômes de Laguerre)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :*

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-X)^k}{k!} \in \mathbb{R}[X].$$

Proposition 42.74.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\left(wX^n\right)^{(n)}(x).$$

Proposition 42.75. *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E.*

Démonstration. Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, $p \leqslant n$. En intégrant par parties p fois, on a :

$$\langle X^p \mid L_n\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} t^p\left(wX^n\right)^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}(-1)^p\int_0^{\infty} p!\left(wX^n\right)^{(n-p)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Si $p < n$, il vient $\langle X^p \mid L_n \rangle = 0$. On en déduit $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, ce qui montre que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Pour $p = n$, on a :

$$\langle X^n \mid L_n \rangle = (-1)^n n!.$$

On en déduit $\|L_n\| = 1$. □

Proposition 42.76. $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}\,(L_n,\ n \in \mathbb{N})$.

Notation 42.77. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :*

$$\varphi_\alpha : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-\alpha t} \in \mathbb{R}.$$

Pour $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on a $\varphi_\alpha \in E$.

Lemme 42.78. $\forall \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[,\ \varphi_\alpha \in \overline{\mathbb{R}[X]}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Selon l'identité de Parseval (proposition 42.35), il suffit de montrer que $\|\varphi_\alpha\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle L_n \mid \varphi_\alpha \rangle^2$. On a $\|\varphi_\alpha\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$. Et, en intégrant par parties n fois :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \langle L_n \mid \varphi_\alpha \rangle &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(w X^n\right)^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!} (-1)^n \int_0^\infty (-\alpha)^n e^{-\alpha t} e^{-t} t^n\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^n.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

Lemme 42.79. *$g \in E$. Si g admet une limite finie en $+\infty$, alors $g \in$* $\overline{\mathrm{Vect}\,(\varphi_n,\ n \in \mathbb{N})}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$h : \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto \begin{cases} g(-\ln s) & \text{si } s \in \left]0,1\right] \\ \lim_{+\infty} g & \text{si } s = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

$h \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ donc il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|h - P\|_{[0,1]}^{\infty} \leqslant \varepsilon$. On pose alors $\psi : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto P\left(e^{-t}\right) \in \mathbb{R}$. On a $\psi \in \mathrm{Vect}\,(\varphi_n,\ n \in \mathbb{N})$. Et :

$$\begin{aligned}
\|g - \psi\|_2^2 &= \int_0^\infty e^{-t} \left(g(t) - \psi(t)\right)^2\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \left(h\left(e^{-t}\right) - P\left(e^{-t}\right)\right)^2\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 42.80. $\overline{\mathbb{R}[X]} \supset \{g \in E,\ g$ *admet une limite finie en* $+\infty\}$.

Chapitre 43

Compléments sur la Différentielle

Notation 43.1. *Dans ce chapitre, E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle.*

I Vecteurs tangents

Définition 43.2 (Vecteur tangent)**.** *$S \subset E$, $\omega \in S$. On appelle* vecteur tangent *à S en ω tout $u \in E$ t.q. il existe $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \to S$ dérivable t.q.*

$$\gamma(0) = \omega \qquad \text{et} \qquad \gamma'(0) = u.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à S en ω est noté $T_S(\omega)$.

Proposition 43.3. *$S \subset E$, $\omega \in S$. Alors :*

(i) $0 \in T_S(\omega)$,

(ii) $\mathbb{R}T_S(\omega) = T_S(\omega)$.

Proposition 43.4. *$S \subset E$, $\omega \in S$. $\mathcal{U}$ ouvert de E contenant S, $\varphi : \mathcal{U} \to F$ différentiable. Alors :*

$$T_{\varphi(S)}\left(\varphi(\omega)\right) \supset \mathrm{d}\varphi(\omega) \cdot T_S(\omega).$$

Démonstration. Soit $u \in T_S(\omega)$. Soit $r > 0$, $\gamma : [-r, +r] \to S$ dérivable t.q. $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = u$. On considère $\delta = \varphi \circ \gamma$. Alors $\delta\left([-r, +r]\right) \subset \varphi\left(S\right)$, δ est dérivable, $\delta(0) = \varphi(\omega)$ et $\delta'(0) = \mathrm{d}\varphi\left(\gamma(0)\right) \cdot \gamma'(0) = \mathrm{d}\varphi(\omega) \cdot u$. Ainsi, $(\mathrm{d}\varphi(\omega) \cdot u) \in T_{\varphi(S)}\left(\varphi(\omega)\right)$. □

Corollaire 43.5. *I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable, $t \in I$. Alors :*

$$T_{f(I)}\left(f\left(t\right)\right) \supset \mathbb{R}f'\left(t\right).$$

Exemple 43.6. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note :*

$$\Sigma = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}.$$

Alors :

$$\forall \omega \in \Sigma,\ T_\Sigma(\omega) = \{\omega\}^\perp.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Sigma$. ($\subset$) Soit $u \in T_\Sigma(\omega)$. Soit $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \to \Sigma$ dérivable t.q. $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = u$. On a :

$$\forall t \in [-r, +r],\ \langle \gamma(t) \mid \gamma(t) \rangle = 1 \quad \text{donc} \quad \forall t \in [-r, +r],\ 2\langle \gamma'(t) \mid \gamma(t) \rangle = 0.$$

En particulier, $\langle u \mid \omega \rangle = \langle \gamma'(0) \mid \gamma(0) \rangle = 0$. ($\supset$) Soit $u \in \{\omega\}^\perp$. On peut supposer $u \neq 0$ et poser $\varepsilon = \frac{u}{\|u\|}$. On considère alors :

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [-1, +1] & \longrightarrow & \Sigma \\ \theta & \longmapsto & (\cos\theta)\,\omega + (\sin\theta)\,\varepsilon \end{array} \right. .$$

Alors γ est dérivable, $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = \varepsilon$. Donc $u = \|u\| \cdot \varepsilon \in T_\Sigma(\omega)$. □

Exemple 43.7. *On se place dans $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\forall P \in O_n(\mathbb{R}),\ T_{O_n(\mathbb{R})}(P) = P\mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. ($\subset$) Soit $U \in T_{O_n(\mathbb{R})}(P)$. Soit $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \to O_n(\mathbb{R})$ dérivable t.q. $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(0) = U$. On a $\forall t \in [-r, +r]$, ${}^t\gamma(t)\gamma(t) = I_n$, donc $\forall t \in [-r, +r]$, ${}^t\gamma'(t)\gamma(t) + {}^t\gamma(t)\gamma'(t) = 0$. En particulier, ${}^tUP + {}^tPU = 0$, i.e. ${}^tPU = -{}^t({}^tPU)$. Donc ${}^tPU \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, d'où $U \in P\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. ($\supset$) Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On considère :

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [-1, +1] & \longrightarrow & O_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & P\exp(tA) \end{array} \right. .$$

γ est bien définie selon la proposition 41.52. Et γ est dérivable, $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(0) = PA$. Donc $PA \in T_{O_n(\mathbb{R})}(P)$. □

II Extrema

Proposition 43.8. *$S \subset E$, $\omega \in S$. $\mathcal{U}$ ouvert de E contenant S, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable. Si $\varphi_{|S}$ présente un maximum local en ω, alors :*

$$\forall u \in T_S(\omega),\ \mathrm{d}\varphi(\omega) \cdot u = 0.$$

Application 43.9. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note $\Sigma = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E contenant Σ, soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable. Σ étant un compact de E, soit $\omega \in \Sigma$ t.q.*

$$\varphi(\omega) = \max_{x \in \Sigma} \varphi(x).$$

Alors :

$$\nabla\varphi(\omega) \in \operatorname{Vect}(\omega).$$

Corollaire 43.10. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note $\Sigma = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\omega \in E$ t.q.*

$$\|f(\omega)\|^2 = \max_{x \in \Sigma} \|f(x)\|^2.$$

Alors $(f^* \circ f)(\omega) \in \operatorname{Vect}(\omega)$, i.e. ω est un vecteur propre de $(f^* \circ f)$.

Exemple 43.11. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *On note :*

$$\Delta_{a,b} = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = a \text{ et } f(1) = b\right\}.$$

Alors

$$\inf_{f \in \Delta_{a,b}} \int_0^1 f'^2$$

est atteint en une unique fonction de $\Delta_{a,b}$, qui est affine.

Démonstration. *Unicité.* Soit $f \in \Delta_{a,b}$ réalisant le minimum (s'il existe). On note $E = \Delta_{0,0}$. On a :

$$\forall g \in E,\ \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 \int_0^1 g'^2 + 2t \int_0^1 f'g' = \int_0^1 (f + tg)'^2 - \int_0^1 f'^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, $\forall g \in E,\ \int_0^1 f'g' = 0$. En intégrant par parties, il vient :

$$\forall g \in E,\ \int_0^1 f''g = 0.$$

On suppose alors par l'absurde que $f'' \neq 0$. Par continuité de f'', on peut supposer qu'il existe $0 < u < v < 1$ t.q. $\forall t \in [u, v],\ f''(t) > 0$. On considère alors :

$$\psi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

ψ est $\mathcal{C}^\infty$ (c.f. exemple 22.21). On pose $g : t \in [0,1] \longmapsto \psi(t-u)\psi(v-t)$. Alors $g \in E$ et $\forall t \in]u, v[,\ g(t) > 0$. Ainsi $0 = \int_0^1 f''g = \int_u^v f''g > 0$. C'est absurde. Donc $f'' = 0$ et f est affine. Donc :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = (1-t)a + tb.$$

Existence. Montrer que f affine convient. □

III Surfaces de niveau

Définition 43.12 (Surface de niveau)**.** *Ω un ouvert de E, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :*

$$S_\alpha(f) = \{\omega \in \Omega,\ f(\omega) = \alpha\}.$$

Proposition 43.13. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soit Ω un ouvert de E, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in S_\alpha(f)$. Alors :*

$$T_{S_\alpha(f)}(\omega) \subset \{\nabla f(\omega)\}^\perp.$$

Exemple 43.14. *On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ t.q.*

$$\forall \omega \in E,\ \|\nabla f(\omega)\| \geqslant 1.$$

Alors :

$$\exists m \in \mathcal{B}_f(0,1),\ f(m) \geqslant f(0) + 1.$$

Démonstration (Première méthode)**.** Si f est $\mathcal{C}^2$, on admet qu'il existe un unique $\gamma : [0,1] \to E$ dérivable t.q.

$$\gamma(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [0,1],\ \gamma'(t) = \frac{\nabla f(\gamma(t))}{\|\nabla f(\gamma(t))\|}.$$

On a alors $\|\gamma(1)\| = \left\| \int_0^1 \gamma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\| \leqslant \int_0^1 \|\gamma'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau = 1$, donc $\gamma(1) \in \mathcal{B}_f(0,1)$. Et on montre que $f(\gamma(1)) \geqslant f(0) + 1$. □

Démonstration (Deuxième méthode)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on définit $(x_0^n, \dots, x_n^n) \in E^n$ par :

$$x_0^n = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{k+1}^n = x_k^n + \frac{1}{n} \cdot \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|}.$$

On montre que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k^n \in \mathcal{B}_f\left(0, \frac{k}{n}\right)$. Ainsi, $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathcal{B}_f(0,1)$, qui est compact. Donc il existe $\ell \in \mathcal{B}_f(0,1)$ et j une extraction t.q. $x_{j(n)}^{j(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Minorons alors $f(x_n^n)$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(x_n^n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}^n) - f(x_k^n) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_0^1 \left\langle \nabla f\left(x_k^n + \frac{t}{n} \cdot \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|} \right) \mid \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|} \right\rangle \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall (u,v) \in \mathcal{B}_f(0,1)^2,\ \|u-v\| \leqslant \eta \Longrightarrow \left\langle \nabla f(v) \mid \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|} \right\rangle \geqslant 1-\varepsilon.$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{N} \leqslant \eta$. Alors :

$$\forall n \geqslant N,\ f\left(x_n^n\right) \geqslant 1-\varepsilon.$$

Donc $f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x_{j(n)}^{j(n)}\right) \geqslant 1$. □

IV Points critiques

Proposition 43.15. *Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ différentiable. Alors :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \operatorname{rg} \mathrm{d}f(\omega) \leqslant \min\left(\dim E, \dim F\right).$$

Définition 43.16 (Point critique)**.** *Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ différentiable. On dit que $\omega \in \Omega$ est un* point critique *de f lorsque :*

$$\operatorname{rg} \mathrm{d}f(\omega) < \min\left(\dim E, \dim F\right).$$

Exemple 43.17.

(i) *Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors $\omega \in \Omega$ est un point critique de f* ssi *$\mathrm{d}f(\omega) = 0$.*

(ii) *I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $g : I \to F$ dérivable. Alors $t \in I$ est un point critique de g* ssi *$g'(t) = 0$.*

Lemme 43.18. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $\forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AH) = 0$. Alors $A = 0$.*

Exemple 43.19. *$p \in \mathbb{N}^*$. On considère :*

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M^p) \end{array} \right. .$$

Alors :

(i) *φ est différentiable sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et :*

$$\forall (M,H) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{d}\varphi(M)\cdot H = p \operatorname{tr}\left(M^{p-1}H\right).$$

(ii) *Les points critiques de φ sont les $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $M^{p-1} = 0$.*

V Théorème d'injectivité locale

Théorème 43.20 (Théorème d'injectivité locale)**.** *Ω un ouvert de E, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$. Soit $\omega \in \Omega$ t.q. $\mathrm{d}f(\omega) \in GL(E)$ (i.e. ω n'est pas un point critique de f). Alors il existe V ouvert de E t.q.*

(i) $\omega \in V \subset \Omega$,

(ii) $f_{|V}$ *est injective.*

Démonstration. *Première étape* : $\mathrm{d}f(\omega) = id_E$. On munit E d'une norme $\|\cdot\|$ et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Soit $\rho > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, \rho) \subset \Omega$. On a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathcal{B}_o(\omega,\rho)^2,\ &\|(f(y)-f(x))-(y-x)\| \\ &= \left\|\int_0^1 [\mathrm{d}f((1-t)x+ty)-id_E]\cdot(y-x)\ \mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant \|y-x\| \int_0^1 |||\mathrm{d}f((1-t)x+ty)-id_E|||\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

f étant $\mathcal{C}^1$, soit $r \in]0, \rho]$ t.q.

$$\forall a \in \mathcal{B}_o(\omega, r),\ |||\mathrm{d}f(a) - id_E||| \leqslant \frac{1}{2}.$$

On note $V = \mathcal{B}_o(\omega, r)$. Alors :

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \|(f(y)-f(x))-(y-x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y-x\|.$$

On en déduit que $\forall (x,y) \in V^2$, $\|f(y)-f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|y-x\|$, donc $f_{|V}$ est injective. *Deuxième étape* : $\mathrm{d}f(\omega) \in GL(E)$. On pose alors :

$$g = (\mathrm{d}f(\omega))^{-1} \circ f.$$

$g \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ et $\mathrm{d}g(\omega) = id_E$. Selon la première étape, il existe V ouvert de E t.q. $\omega \in V \subset \Omega$ et $g_{|V}$ est injective. Ainsi, $f_{|V} = \mathrm{d}f(\omega) \circ g_{|V}$ est injective. □

Exemple 43.21. *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} (x+x^2)\sin\left(\frac{1}{x^{26}}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.$$

Alors :

(i) *f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (mais pas $\mathcal{C}^1$ en 0).*

(ii) *$\forall r > 0$, $f_{|[-r,+r]}$ n'est pas injective.*