Renseignements généraux

- *Concours* : X
- *Matière* : Maths
- *NOM Prénom* : LESBATS Rémi

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = 1$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f$, pour $x \geq 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, que ces intégrales soient finies ou non.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel m tel que $\displaystyle\int_0^m f = \frac{1}{2}$
3. Mêmes hypothèses. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g \geq m$. (Indication : tracer le graphe de g, puis placer les points m et $2m$)

Remarques sur l'oral

Examinateur assez perturbant, qui ne connaissait pas le mot de passe de la tablette donc m'a dit que l'on commencerait avec 10min de retard. Pendant les 15 premières minutes de l'oral il faisait des petits bruits de satisfaction ou de mécontentement, mais ils ne m'étaient pas destinés (il parlait à la tablette), ce qui était déconcentrant. Pour en revenir à l'exo on remarque que $g'(x) = -f(x)$, donc on fait une IPP. Le crochet est positif donc on sait que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ vaut $+\infty$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ aussi. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est finie. On montre par l'absurde que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ est finie aussi. Il reste à montrer que si elles sont toutes les deux finies alors elles sont égales. L'examinateur me fait considérer la série des $g(n)$. Il me demande un dessin pour montrer l'inégalité classique avec les rectangles. Cela permet de dire que si la série converge alors l'intégrale aussi. Reste à montrer que la série converge, ce qui se fait en écrivant $\displaystyle\int_n^{n+1} xf(x)\mathrm{d}x \geq n\int_n^{n+1} f$ et en utilisant la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ (par hypothèse). La 2e question est immédiate, avec le TVI et l'hypothèse de décroissance. Enfin pour la 3e, l'examinateur me dit qu'elle est dure et décide donc de m'aider (donc finalement elle est pas dure, vu qu'il révèle l'astuce). Il me demande de tracer g, je trace donc une fonction convexe ($g' = -f$ est croissante). Il me fait placer m et $2m$. On remarque que $\displaystyle\int_0^m f = \int_m^{+\infty} f = g(m)$. Je mets un peu de temps à trouver un argument simple convaincant : en traçant la tangente à g en m, on a une droite qui passe par le centre du rectangle de sommets $(0,0),(0,1),(2m,1),(2m,0)$, donc l'aire sous cette droite vaut m. Comme c'est une tangente à une fonction convexe, elle est toujours sous la courbe, donc l'intégrale de 0 à $2m$ de g est plus grande que l'aire sous cette droite, d'où le résultat (g est positive car f l'est). L'examinteur ne s'attendait visiblement pas à une preuve aussi géométrique, il m'a fait refaire le dessin en plus grand pour lui expliquer la preuve, et a mis un certain temps à comprendre, ce qui a marqué la fin de l'oral.