T.D. O_4 : Interférences à N ondes

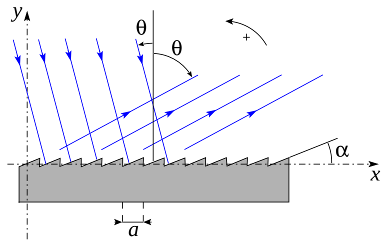
Exercice 1 Réseau sous incidence normale

On éclaire la fente du collimateur d'un spectroscope à réseau avec une lampe à vapeur de Cadmium. Le faisceau de rayons parallèles émergeant du collimateur tombe sous incidence normale sur un réseau par transmission. Une lunette réglée à l'infini permet d'observer les spectres à droite et à gauche de l'axe du collimateur.

L'écart angulaire entre la raie verte ($\lambda = 508{,}6$ nm) d'ordre un et l'axe du collimateur est de $16°15'$.

1. On mesure, dans l'ordre deux, un écart angulaire entre la raie rouge et l'axe du collimateur de $57°5'$ et entre la raie bleue et l'axe du collimateur un écart de $31°52'$. Déterminer les longueurs d'onde de ces deux raies.
2. Le goniomètre permet de mesurer les angles à $1'$ près. Quelle est, en fait, la principale cause d'incertitude ? Comment s'affranchit-on en pratique de cette incertitude pour faire des mesures précises de longueur d'onde ?

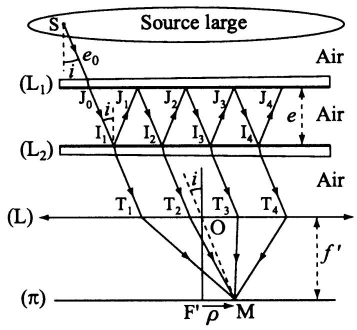
Exercice 2 Réseau en échelettes (ou blazé)



Un réseau constitué de N motifs est gravé sur un métal parfaitement réfléchissant. Il est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ, sous un angle d'incidence θ_0.

1. Montrer, en supposant N infini, qu'on peut choisir l'angle d'incidence pour que l'ordre p coïncide avec la direction de l'optique géométrique. Intérêt ?
2. Un calcul de diffraction permet de déterminer l'intensité diffractée à l'infini dans une direction θ : $\mathrm{I}(\theta) = \mathrm{I}_0 \mathrm{F_I}(\theta)\mathrm{F_D}(\theta)$ avec $\mathrm{F_I}(\theta) = \dfrac{\sin^2(\mathrm{N}\psi/2)}{\sin^2(\psi/2)}$ et $\mathrm{F_D}(\theta) = \mathrm{sinc}^2 u$, où on a utilisé les notations $\psi = \dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta + \sin\theta_0)$ et $u = \dfrac{\pi a}{\lambda\cos\alpha}\left[\sin(\theta-\alpha) + \sin(\theta_0-\alpha)\right]$. Comment choisir l'angle d'incidence pour que l'intensité diffractée dans l'ordre p soit maximale ? Commentaire ?
3. Retrouver le terme d'interférences $\mathrm{I}(\theta) = \mathrm{I}_0\mathrm{F_I}(\theta)$ par le calcul, en supposant que les miroirs sont suffisamment petits pour qu'on puisse considérer qu'ils émettent des ondes sphériques.

Exercice 3 Interféromètre de PÉROT et FABRY ; filtre interférentiel

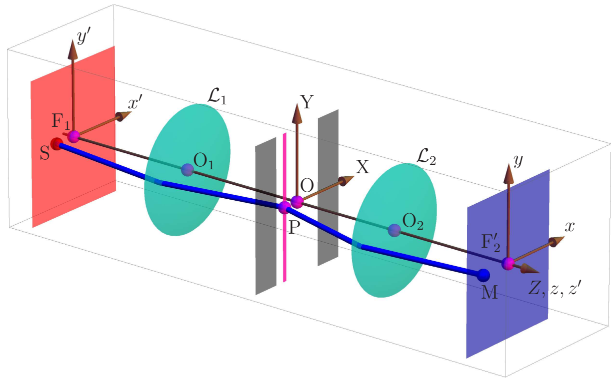


Soit l'interféromètre de PÉROT et FABRY, représenté ci-contre, éclairé dans un premier temps par une source lumineuse S ponctuelle, émettrice d'une radiation de longueur d'onde λ_0 dans le vide et $\lambda = 0{,}5$ μm dans l'air et de grande longueur de cohérence. L'appareil est formé de deux lames de verre (L_1) et (L_2) identiques à faces parallèles, placées dans l'air ; les faces en regard sont distantes de $e = 4$ mm par exemple et traitées. On suppose que seules ces faces traitées réfléchissent la lumière incidente (coefficient de réflexion en amplitude r réel, inférieur à un ; coefficient de transmission t indépendant du sens de propagation). On a $r^2 + t^2 = 1$.

Les rayons I_1T_1, I_1T_2, I_3T_3, …, en nombre infini, issus du rayon SJ_0 incident sous l'angle i sur la lame (L_1) interfèrent à l'infini (observation dans le plan focal image d'une lentille convergente).

1. Calculer la différence de chemin optique $\delta(\mathrm{M})$, le déphasage à l'infini $\Delta\varphi(\mathrm{M})$ et l'ordre d'interférence $p(\mathrm{M}) = \delta(\mathrm{M})/\lambda_0$ entre deux rayons émergents successifs tels que I_qT_q. Conclure.
2. Calculer l'amplitude réelle des rayons successifs I_qT_q en fonction de l'amplitude e_0, choisie réelle, du rayon incident SJ_0. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{E}(\mathrm{M})$ et l'intensité $\mathrm{I}(\mathrm{M})$ résultantes sous la forme de la fonction d'AIRY $\mathrm{I}(\mathrm{M}) = \mathrm{I}_0/(1 + m\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2})$. Calculer I_0 et exprimer m en fonction de r.
3. Étudier et tracer l'intensité $\mathrm{I}(\mathrm{M})$ en fonction de $\Delta\varphi$ pour $\mathrm{R} = r^2 = 0{,}5$ et $0{,}92$. Conclure.
4. Par la suite, on prend $\mathrm{R} = 0{,}99$. Calculer la largeur à mi-hauteur $\delta\varphi$ des pics d'interférence en fonction de m et leur finesse $\mathscr{F} = 2\pi/\delta\varphi$, ainsi que la valeur numérique de $\mathscr{F}$.
5. Montrer que les franges d'interférence dans (π) sont circulaires de centre F'. Expliquer la modification due au remplacement de la source ponctuelle S par une source large (S) incohérente spatialement.
6. Calculer les rayons angulaires et linéaires des anneaux brillants successifs en introduisant l'excédent fractionnaire de l'ordre d'interférence et considérer le cas où ce dernier est nul.
7. Représenter l'intensité en fonction de $\cos i$ pour des radiations de longueur d'onde λ et $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ dans l'air pour le pic d'interférence d'ordre q. En s'inspirant du critère de RAYLEIGH, définir une limite de résolution $\mathrm{d}\lambda_m$ du spectromètre de PÉROT et FABRY et comparer son *pouvoir de résolution* $\mathscr{R} = \lambda/\mathrm{d}\lambda_m$ à celui du réseau plan. On fera une application numérique pour $\mathscr{R}$ au voisinage de F'.
8. Un filtre interférentiel est une lame transparente d'indice n, de très faible épaisseur e : par exemple $ne = 0{,}520$ μm. Les deux faces identiques ont le même coefficient de réflexion en énergie $\mathrm{R} = 0{,}99$. Il se comporte comme un interféromètre de PÉROT et FABRY, la lame d'air étant remplacée par la lame de verre. Il est éclairé en lumière blanche sous incidence normale. Déterminer la longueur d'onde de la lumière transmise et sa largeur spectrale.

Exercice 4 Diffraction à l'infini par une fente



On considère le montage ci-contre où une fente de largeur a (dans la direction X) est éclairée par une source S ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ_0. On suppose que la longueur L (dans la direction Y) de la fente est suffisamment grande devant λ_0 pour que la diffraction soit négligeable dans la direction y, et donc que le point M d'observation est situé sur $(F'_2 x)$. On note θ_0 (θ) l'angle d'incidence (d'émergence) par rapport à la normale au plan contenant la fente.

1. Justifier le titre de l'exercice.
2. On admet que l'amplitude émise par un fil lumineux infinitésimal centrée au point P (en X) et de largeur dX est proportionnelle à sa surface et que les ondes émises par toutes ces fils lumineux infinitésimaux sont cohérentes (car éclairées par une unique source S). En s'inspirant de ce qui a été vu en cours sur les interférences à N ondes et les réseaux, proposer une formule intégrale de l'amplitude complexe totale diffractée dans la direction θ, i.e. observée au point M.
3. Calcul et exprimer l'intensité en fonction de θ et θ_0, puis en fonction de x et x' (coordonnées de M et de S), en supposant les conditions de GAUSS vérifiées, et en notant f'_1 (f'_2) la distance focale de la lentille $\mathcal{L}_1$ ($\mathcal{L}_2$).
4. On considère ici le cas où la fente est éclairée en incidence normale. Représenter $I(\theta)$ en fonction de $\sin\theta$. Retrouve-t-on la formule donnant l'angle dans lequel la lumière diffractée est concentrée, dans le cadre de la diffraction à l'infini ?

Exercice 5 Chaîne d'antennes demi-onde

En coordonnées sphériques d'axe (Oz), le potentiel vecteur et le champ électromagnétique d'une antenne demi-onde (longueur égale à la moitié de la longueur d'onde) placée selon (Oz), dont le milieu est l'origine O et parcourue par un courant d'intensité $i(z,t) = I_0 \cos(\omega z/c)\cos(\omega t)$ sont donnés par

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r \omega}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{B} = \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\wedge\frac{\overrightarrow{e_r}}{c} \qquad \overrightarrow{E} = \overrightarrow{B}\wedge(c\,\overrightarrow{e_r})$$

On répartit à la file N antennes identiques sur l'axe (Oz) pour former une antenne de longueur $N\lambda/2$. On établit dans chaque antenne une distribution de courant identique, en phase et en amplitude, à celle indiquée précédemment.

1. Calculer l'amplitude du champ électrique $\overrightarrow{E}$ rayonné dans la région de l'espace où $r \gg N\lambda/2$.
2. Pour $N = 10$, représenter dans un diagramme polaire l'amplitude de $\overrightarrow{E}$ dans la direction θ quand θ varie de 0 à π.
3. Comparer au diagramme d'une seule antenne et conclure.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Vous devez savoir que $1^\circ = 60'$… *On trouve* $\lambda_{rouge} = 762{,}9$ nm *et* $\lambda_{bleu} = 479{,}8$ nm. *Pour la deuxième question, se poser ces questions : comment pourrait-on repérer l'angle d'incidence sur un réseau ? Et l'angle d'émergence ?*

Exercice 2

No indication is good indication.

Exercice 3

1. $\delta(M) = 2ne\cos i$.
2. $I_0 = e_0{}^2$ *et* $m = 4r^2/(1-r^2)^2$.
3. *On obtient un « peigne » (différent du réseau) avec des pics très fins.*
4. $\mathscr{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

À la fin, le filtre interférentiel transmet une lumière vert bleuâtre dans une bande passante de 9 nm seulement !

Exercice 4

Demerden Sie sich !

Exercice 5

$\overrightarrow{E} = -\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r}\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\,\frac{\sin(N\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}\,\sin[\omega(t-r/c)+(N-1)\frac{\pi}{2}\cos\theta]\,\overrightarrow{e_\theta}$.