Devoir Surveillé n° 2 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Problème 1 – Propriété de Sperner et théorème de Dilworth

Étant donné un ensemble ordonné A, on appelle chaîne de A un sous-ensemble $X \subset A$ totalement ordonné, et antichaîne de A un sous-ensemble $X \subset A$ dont les éléments sont deux à deux incomparables. Le but de ce problème est l'étude des antichaînes de cardinal maximal (ou antichaînes maximales). On montre notamment que ce cardinal maximal est aussi le nombre minimal de parts dans une partition en chaînes de A. On donne une condition pour qu'un « niveau » du graphe de couverture de cardinal maximal soit une antichaîne maximale.

Partie I – Théorème de Sperner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n. On considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, muni de la relation d'ordre définie par l'inclusion.

1. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué de sous-ensembles de E ayant tous même cardinal. Montrer que $\mathcal{A}$ est une antichaîne de $(\mathcal{P}(E), \subset)$
2. En déduire qu'il existe une antichaîne de $\mathcal{P}(E)$ constituée de $\dbinom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ éléments
3. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1]\!]$, $\dbinom{n}{k} \leqslant \dbinom{n}{k+1}$ et pour tout $k \in [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]$, $\dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{k+1}$

   (b) Montrer que $\dbinom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} \dbinom{n}{k}$.

Ainsi, on ne peut pas espérer trouver une antichaîne plus grande constituée d'éléments de même cardinaux. Cela reste vrai même en enlevant la contrainte sur l'uniformité des cardinaux.
Le théorème de Sperner affirme en effet que $\dbinom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ est la taille maximale d'une antichaîne de $\mathcal{P}(E)$. Le but de la fin de la partie est de démontrer ce théorème.
On appelle chaîne maximale de $\mathcal{P}(E)$ une chaîne $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $|E_i| = i$. En particulier, $E_0 = \varnothing$ et $E_n = E$. Soit B un sous-ensemble de E. On dit qu'une chaîne maximale passe par B si l'un de ses éléments est égal à B.

4. Montrer que deux éléments distincts d'une antichaîne ne peuvent pas appartenir à une même chaîne (qu'elle soit maximale ou non).
5. Montrer que le nombre de chaînes maximales de $\mathcal{P}(E)$ est $n!$.

   Indication : On pourra considérer la succession des éléments de E qu'on ajoute pour passer de E_i à E_{i+1}, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.
6. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, et B un sous-ensemble de E de cardinal k. Montrer que le nombre de chaînes maximales de $\mathcal{P}(E)$ passant par B est égal à $k!(n-k)!$
7. Soit $\mathcal{A}$ une antichaîne de $\mathcal{P}(E)$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, m_k le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de cardinal k. Justifier que le nombre de chaînes maximales passant par l'un des éléments de l'antichaîne $\mathcal{A}$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!$.
8. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1 \qquad \text{puis:} \qquad |\mathcal{A}| \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Ainsi, toute antichaîne de $\mathcal{P}(E)$ est constituée d'au plus $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et on en a trouvé une de cette taille. Cela prouve le théorème de Sperner.

Partie II – Partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes

On chercher à construire une partition $\{A_1, \dots, A_k\}$ de $\mathcal{P}(E)$ dont les parts sont toutes des chaînes de $\mathcal{P}(E)$, et qui soit constituée d'un nombre minimal de parts.

1. Soit $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_k\}$ une partition en chaînes de $\mathcal{P}(E)$, constituée de k parts. Montrer que $k \geqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Le but de cette partie est de montrer l'existence d'une partition en chaînes de $\mathcal{P}(E)$ constituée d'exactement $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ainsi, cette valeur sera le minimum du nombre de parts d'une partition en chaînes de $\mathcal{P}(E)$.

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle chaîne symétrique couvrante de $\mathcal{P}(E)$ une chaîne constituée des ensembles E_i, $i \in [\![k, n-k]\!]$, pour un certain $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, et vérifiant $E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_{n-k}$, et pour tout $i \in [\![k, n-k]\!]$, $|E_i| = i$. Ainsi, il s'agit d'une tranche du milieu d'une chaîne maximale.

On cherche maintenant à construire une partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes symétriques couvrantes.

2. (a) Donner le diagramme de couverture de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$, pour $n = 1, 2, 3$.
   (b) Dans chacun de ces trois cas, déterminer une partition de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ en chaînes symétriques couvrantes.
3. Soit E un ensemble de cardinal n et $e \in E$. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E \setminus \{e\})$ une chaîne symétrique couvrante de $\mathcal{P}(E \setminus \{e\})$, dont les éléments sont $E_k \subset \cdots \subset E_{n-1-k}$. Montrer que $\{E_k, \dots, E_{n-1-k}, E_{n-1-k} \cup \{e\}\}$ et $\{E_k \cup \{e\}, \dots, E_{n-2-k} \cup \{e\}$ sont des chaînes symétriques couvrantes de $\mathcal{P}(E)$ (si elles sont non vides).
4. En déduire, pour tout ensemble E de cardinal fini, l'existence d'une partition de $\mathcal{P}(E)$ en chaînes symétriques couvrantes.
5. En remarquant que toute chaîne symétrique couvrante contient un sous-ensemble de E de cardinal $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, montrer qu'il existe une partition en chaînes de $\mathcal{P}(E)$ constituée de $\left(\begin{matrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{matrix} \right)$ parts.
6. Expliquer en quoi cet argument fournit une preuve du théorème de Sperner indépendante de la preuve de la partie I.

Partie III – Théorème de Dilworth

Nous avons montré dans les deux parties précédentes que dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, le cardinal maximal d'une antichaîne est égal au nombre minimal de parts d'une partition en chaînes. Ce résultat est en fait valable pour tout ensemble ordonné fini. Il s'agit du théorème de Dilworth.

Remarquez que nous avons déjà prouvé une version duale en TD, affirmant que le cardinal maximal d'une chaîne est égal au nombre minimal de parts d'une partition en antichaînes. Attention à ne pas confondre ces deux résultats analogues mais distincts.

Dans cette partie, on se donne F un ensemble de cardinal n, muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$.

Soit α le cardinal maximal d'une antichaîne de F.

On a déjà prouvé dans le cadre de $\mathcal{P}(E)$, et la preuve est la même en général, que toute partition en chaînes a un nombre de parts au moins égal à α. Il nous reste donc à montrer que réciproquement on peut construire une partition en chaînes en exactement α parts.

1. Montrer que le théorème de Dilworth est vrai lorsque $|F| = 1$.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose désormais le théorème de Dilworth vrai pour tout ensemble ordonné F' tel que $|F'| < n$ et on se donne un ensemble ordonné F de cardinal n, et on note α le cardinal maximal d'une antichaîne de F.

2. Justifier l'existence d'une chaîne C d'éléments de F, maximale pour l'inclusion. On se donne une telle chaîne maximale.
3. Si C rencontre toutes les antichaînes de cardinal α de F, quel est le cardinal maximal d'une antichaîne de $F \setminus C$? En déduire que dans ce cas, le théorème de Dilworth est vrai pour F.
4. On suppose désormais qu'il existe une antichaîne A de cardinal α, disjointe de C, et on définit :

$$A_+ = \{x \in F \mid \exists a \in A,\ a \leqslant x\} \qquad \text{et} \qquad A_- = \{x \in F \mid \exists a \in A,\ a \geqslant x.\}$$

   Montrer que $A_+ \cup A_- = F$ et $A_+ \cap A_- = A$

   Indication : par l'absurde, en cherchant à contredire soit la propriété d'antichaîne, soit la maximalité de A.
5. En considérant $\min(C)$ et $\max(C)$, montrer que $A_+ \neq F$ et $A_- \neq F$.

6. En déduire que le théorème de Dilworth est vrai pour F, et conclure.

Partie IV – Ensembles de Sperner bipartis

Dans la partie I, nous nous sommes rendu compte que l'antichaîne maximale était un « niveau » du graphe de couverture, si on range dans ce graphe les sous-ensembles par niveau selon leur cardinal. Nous voyons maintenant comment formaliser ce rangement des éléments par niveau dans le graphe de couverture, et nous étudions des conditions pour que l'antichaine maximale soit donnée par un niveau du graphe.
Un rang sur un ensemble ordonné fini $(E, \leqslant)$ est une application $r : E \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(x, y) \in E$, si y couvre x (c'est-à-dire $x < y$, et il n'existe pas $t \in E$ tel que $x < t < y$), on a $r(y) = r(x) + 1$.
On dit que E est rangé s'il est muni d'un rang r.
Le rang r est normé s'il existe $x \in E$ tel que $r(x) = 0$. Dans ce cas, on dit que E est rangé normé.

1. Tout ensemble ordonné fini peut-il être muni d'un rang ?
2. Soit E un ensemble ordonné fini tel qu'il existe un rang r sur E. On suppose que pour tout x et y de E, il existe une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, x_i et x_{i+1} soient comparables. Montrer qu'il existe un unique rang normé s sur E.

   Indication : On pourra commencer par montrer que si $x < y$, il existe une chaîne $x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = y$ telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, x_{i+1} couvre x_i ; Comment repérer une telle chaîne parmi l'ensemble de toutes les chaînes reliant x à y ?

Ainsi, si le graphe de couverture est connexe (c'est-à-dire en un morceau), le rang, s'il existe, est unique.
Soit E un ensemble ordonné rangé normé fini, de rang r Soit h la valeur maximale de r. On note, pour tout $i \in [\![0, h]\!]$, $N_i = r^{-1}(\{i\})$. L'ensemble N_i est appelé i-ième niveau de E. Graphiquement, cela signifie qu'on peut organiser le graphe de couverture en représentant les éléments sur les différents niveaux N_i (les éléments de N_i sont représentés à la même hauteur)
Un ensemble ordonné rangé normé fini est dit

- *de Sperner si son (ou ses) niveau(x) de cardinal maximal est une antichaine maximale*
- *biparti s'il est constitué uniquement de deux niveaux non vides N_0 et N_1.*

3. Donner un exemple d'ensemble rangé normé fini qui ne soit pas de Sperner.
4. Le but de cette question est de démontrer le théorème des mariages de Hall :

   Théorème : Soit $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble E. Il existe des éléments 2 à 2 distincts $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$ si et seulement si pour tout $J \subset [\![1, n]\!]$,
   $$|A(J)| \geqslant |J|, \quad \text{où } A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$
   Un tel n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est alors appelé système de représentants distincts des ensembles $A_1, \dots, A_n$.

   (a) Montrer que la condition de Hall « $\forall J \subset [\![1, n]\!],\ |A(J)| \geqslant |J|$ » est une condition nécessaire.

   *(b) Montrer qu'elle est suffisante.

   Indication : on raisonnera par récurrence. Supposant la condition de Hall vérifiée, on dit que J est critique si $|A(J)| = |J|$. On distinguera alors 2 cas suivant que les seuls sous-ensembles J critiques sont $\varnothing$ et éventuellement $[\![1, n]\!]$, ou qu'il en existe un autre. Dans le premier cas, on regardera ce qui se passe en enlevant un point. Dans le second, on justifiera que si J est critique, $A(J)$ est un système de représentants distincts de $(A_j)_{j \in J}$, puis on ôtera ces points aux différents A_i restants.

5. Soit E un sous-ensemble ordonné rangé normé biparti, tel que $|N_0| \leqslant |N_1|$. Montrer que E est de Sperner si et seulement si pour tout sous-ensemble X de N_0, le nombre d'éléments y de N_1 tels qu'il existe $x \in X$ vérifiant $y \geqslant x$ est au moins égal à $|X|$.

   Une propriété symétrique est valable aussi lorsque $|N_0| \geqslant |N_1|$, déduite de celle prouvée ici en considérant l'ordre opposé.
6. Montrer que si la condition de la question précédente est satisfaite, en notant $x_1, \dots, x_\ell$ les éléments de N_0, on peut trouver $y_1, \dots, y_\ell$ deux à deux distincts dans N_1 tels que pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, $x_i \leqslant y_i$.

Partie V – Une condition suffisante pour être de Sperner

Dans cette partie, on décrit une condition suffisante simple pour qu'un ensemble ordonné rangé normé fini soit de Sperner. Soit E un ensemble ordonné rangé normé fini, et $N_0, \dots, N_h$ ses niveaux. On définit pour tout $k \in [\![0, h-1]\!]$, $P_k = N_k \sqcup N_{k+1}$, muni de l'ordre restreint de celui de E. En considérant $r_k = r - k$, P_k est un ensemble ordonné rangé normé biparti.
On dit que :

- *E est de Sperner par niveau si pour tout $k \in [\![0, h-1]\!]$, l'ensemble biparti P_k est de Sperner ;*
- *E est unimodal s'il existe $k_0 \in [\![0, h]\!]$ tel que $(|N_k|)_{0 \leqslant k \leqslant k_0}$ soit croissante, et $(|N_k|)_{k_0 \leqslant k \leqslant h}$ soit décroissante.*

*1. Soit E de Sperner par niveau, et unimodal. Montrer que E est de Sperner.

Indication : on pourra construire une partition de E en se servant de la question IV-6.

On dit que E est régulier si tous les éléments d'un niveau donné sont couverts par le même nombre non nul d'éléments du niveau d'au-dessus, et inversement tous les éléments d'un niveau donné couvrent le même nombre non nul d'éléments du niveau inférieur.

*2. Montrer que si E est régulier et unimodal, alors E est de Sperner.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ ordonné par inclusion, rangé par le cardinal, est régulier et unimodal, comme on s'en assure facilement. On retrouve donc ainsi le fait qu'une antichaîne maximale peut être formée à l'aide des éléments d'un même niveau, donc formée de sous-ensembles de même cardinal.