Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 11/10/2018

DM n° 4 : Relations

Correction du problème 1 – Saturation d'un sous-ensemble pour une relation d'équivalence

1. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Puisque $\sim$ est une relation d'équivalence, elle est reflexive, donc pour tout $x \in A$, $x \sim x$, donc, en prenant $y = x$, il existe bien $y \in A$ tel que $x \sim y$. Ainsi, $x \in A^s$.
   On peut conclure que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\boxed{A \subset A^s}$.
   (b)
   - Si $A = \varnothing$, il ne peut exister de y dans A tel que $x \sim y$, pour aucun $x \in E$. Ainsi, $\boxed{\varnothing^s = \varnothing}$.
   - Puisque $E \subset E^s$ d'après 1, et que par définition, $E^s \subset E$, on obtient $\boxed{E^s = E}$.

   (c)
   - D'après la question 1, $A^s \subset (A^s)^s$.
   - Soit $x \in (A^s)^s$. Il existe alors $y \in A^s$, qu'on se donne, tel que $x \sim y$. Comme $y \in A^s$, il existe $z \in A$ tel que $y \sim z$. Par transitivité, on en déduit que $x \sim z$, donc que $x \in A^s$. Ainsi, $(A^s)^s \subset A^s$.
   - Des deux inclusions, on déduit l'égalité $\boxed{(A^s)^s = A^s.}$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Soit $y \in E$. Dire que $y \in A^s$ équivaut à dire qu'il existe $x \in A$ tel que $y \sim x$, c'est-à-dire $y \in \overline{x}$. Ceci équivaut bien à dire que $y \in \bigcup_{x \in A} \overline{x}$.
   Ces équivalences montrent que $\boxed{A^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x}}$.
   (b) A^s est une partie saturée (question 1c) contenant A (question 1a). Donc A^s est un des termes de l'intersection du membre de droite. On en déduit que
   $$\bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B \subset A^s.$$
   Réciproquement, soit B une partie saturée contenant A. On utilise le fait évident que $A \subset B$ implique $A^s \subset B^s$. Ainsi, B étant saturé, $A^s \subset B$. Par conséquent, A^s est inclus dans tout ensemble saturé contenant A, donc :
   $$A^s \subset \bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B.$$
   Les deux inclusions amènent l'égalité : $\boxed{A^s = \bigcap_{B \in \mathcal{S}(E), A \subset B} B}$.
   Cette égalité affirme que A^s est la plus petite partie saturée contenant A.

3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
   (a) On a
   $$A^s \cup B^s = \bigcup_{x \in A} \overline{x} \cup \bigcup_{x \in B} \overline{x} = \bigcup_{x \in A \cup B} \overline{x} = (A \cup B)^s.$$
   Ainsi, $\boxed{A^s \cup B^s = (A \cup B)^s}$.
   (b) Soit $x \in (A \cap B)^s$. Il existe donc $y \in A \cap B$ tel que $x \sim y$. Puisque $y \in A$, $x \in A^s$. Puisque $y \in B$, $x \in A^s$. Ainsi $x \in A^s \cap B^s$. On a donc toujours l'inclusion $\boxed{(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s}$
   En revanche, l'inclusion réciproque est fausse en générale. Le problème provient du fait qu'une même classe peut à la fois avoir un représentant dans A, un représentant dans B, mais aucun dans $A \cap B$. Alors cette classe est incluse dans $A^s \cap B^s$, mais pas dans $(A \cap B)^s$. Un tout simple est le cas de l'ensemble $E = \{1, 2\}$, et la relation complète, dont le graphe est $E \times E$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, et l'unique classe est E. Prenant $A = \{1\}$ et $B = \{1\}$, on a alors $A^s = B^s = E$, donc $A^s \cap B^s = E$. En revanche, $A \cap B = \varnothing$, donc $(A \cap B)^s = \varnothing$.

4. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E,
$$(A^s)^c = \bigcup_{x\in E \mid \overline{x}\cap A=\varnothing} \overline{x}.$$
En effet, une classe est présente dans l'union définissant A^s si et seulement si un de ses représentants est dans A, donc si $\overline{x}\cap A \neq \varnothing$. Or,
$$\{x \in E \mid \overline{x}\cap A = \varnothing\} \subset A^c,$$
puisque $x \in \overline{x}$. Ainsi,
$$(A^s)^c \subset \bigcup_{x\in A^c} \overline{x} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{(A^s)^c \subset (A^c)^s}.$$
On a alors l'égalité dès lors que la première inclusion ci-dessus est une égalité, donc dès lors que la classe de tout élément de A^c est disjointe de A, donc que les classes d'éléments de A sont toutes incluses dans A (elles ne doivent pas déborder). En réécrivant A^s comme union des classes, il vient alors la CNS suivante : $A = A^s$, c'est-à-dire $\boxed{A \text{ saturé}}$.
On peut aussi s'y prendre ainsi : puisque $A \subset A^s$, on a $(A^s)^c \subset A^c \subset (A^c)^s$. On ne peut avoir l'égalité que si les deux inclusions sont des égalités, ce qui impose en particulier $A = A^s$. Réciproquement si $A = A^s$, pour tout $x \in A$, il n'existe aucun $y \in A$ tel que $x \sim y$ (sinon on aurait $y \in A^s$). Ainsi, aucun x de A n'est dans $(A^c)^s$, donc $(A^c)^s \subset A^c$, puis, $(A^c)^s = A^c$. La chaîne d'inclusions ci-dessus est alors constituée de 2 égalités, d'où $(A^s)^c = (A^c)^s$.
Ainsi, $\boxed{(A^s)^c = (A^c)^s \text{ si et seulement si } A \text{ est saturé}}$.
5. Soit $x \in E$. On a $x \in A^s$ si et seulement si il existe $y \in A$ tel que $(x, y) \in G$, si et seulement si l'ensemble $p_2^{-1}(A) \cap G$ contient un élément dont la première coordonnée est x, si et seulement si $x \in p_1(p_2^{-1}(A) \cap G)$.
On a bien obtenu : $\boxed{A^s = p_2(p_1^{-1}(A) \cap G).}$
6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x \in A, \quad \exists y \in B, \quad x \sim y).$$
   (a)
   - Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A\mathcal{R}A$, car si $A \neq \varnothing$, il suffit de prendre $y = x$ (par reflexivité de $\sim$), et si $A = \varnothing$, la propriété est vraie par défaut, l'hypothèse de l'implication n'étant jamais vérifiée. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est reflexive}}$.
   - Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^2$, tels que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Si A est vide, on a de même qu'avant $A\mathcal{R}C$ par défaut. Sinon, soit x quelconque dans A. Il existe y dans B tel que $x \sim y$. Mais comme $B \sim C$, il existe $z \in C$ tel que $y \sim z$. Par transitivité, pour un tel z, on a alors $x \sim z$. Comme on peut trouver un tel z pour tout x de A, on a bien $A \sim C$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive}}$
   - En général, $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas une relation d'équivalence}}$ car elle n'est pas symétrique. Plus précisément, si $E \neq \varnothing$, $\varnothing\mathcal{R}E$, mais en revanche, on ne peut pas avoir $E\mathcal{R}\varnothing$. Le cas $E = \varnothing$ est le seul cas où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b)
   - Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$, alors pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$. Ainsi
$$A^s = \bigcup_{x\in A} \overline{x} \subset \bigcup_{y\in B} \overline{y} = B^s.$$
L'inclusion réciproque se montre de même. Ainsi, $A^s = B^s$.
   - Réciproquement, si $A^s = B^s$, puisque $A \subset A^s$, tout x de A est aussi dans B^s. Donc il existe $y \in B$ tel que $x \sim y$. Cela prouve que $A\mathcal{R}B$. L'autre relation se prouve de même.
   - Ainsi, $\boxed{A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A \text{ si et seulement si } A^s = B^s}$.
   - L'égalité $A^s = B^s$ n'équivaut pas à $A = B$, par exemple si une des classes d'équivalence est constituée de 2 éléments x et y, et $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, on a $A^s = B^s$, mais $A \neq B$. Ainsi, en général $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ n'équivaut pas à $A = B$. La relation n'est donc $\boxed{\text{pas une relation d'ordre en général}}$.

   (c) La reflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{S}$ sont immédiates. $\boxed{\mathcal{S} \text{ est une relation d'équivalence.}}$

   (d) Soient (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, et $A\mathcal{R}B$. D'après la question 6b et la dfinition de $\mathcal{S}$, on a $A\mathcal{R}A'$, $A'\mathcal{R}A$, $B\mathcal{R}B'$, $B'\mathcal{R}B$ et $A\mathcal{R}B$. Selectionnons 3 de ces relations : $A'\mathcal{R}A$, $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}B'$. Par transitivité de $\mathcal{R}$, on obtient alors $A'\mathcal{R}B'$.
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} \text{ respecte } \mathcal{R}}$.

(e) On définit $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E):\mathcal{S}$ par $C\overline{\mathcal{R}}D$ si et seulement s'il existe des représentants A et B des classes C et D tels que $A\mathcal{R}B$. Par conséquent, par définition même,

$$\boxed{A\mathcal{R}B \Longrightarrow \overline{A}\,\overline{\mathcal{R}}\,\overline{B}}.$$

Si A' et B' sont deux autres représentants de C et D, d'après la question précédente, on aura aussi $A'\mathcal{R}B'$. Ainsi, on obtient bien

$$\boxed{\overline{A}\,\overline{\mathcal{R}}\,\overline{B} \Longrightarrow A\mathcal{R}B}.$$

(f)
- Soit C une classe dans $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentée par un élément $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors $A\mathcal{R}A$, par reflexivité de $\mathcal{R}$. Par conséquent, $C\overline{\mathcal{R}}C$, d'où la reflexivité de $\overline{\mathcal{R}}$.
- Soient C, D deux éléments de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$, représentés par A et B. Supposons $C\overline{\mathcal{R}}D$ et $D\overline{\mathcal{R}}C$. On a alors $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ donc $A^s = B^s$, c'est-à-dire $A\mathcal{S}B$, ou encore $C = D$. Ainsi, $\overline{\mathcal{R}}$ est antisymétrique.
- La transitivité de $\overline{\mathcal{R}}$ découle de celle de $\mathcal{R}$, de la même manière que la reflexivité.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre sur } \mathcal{P}(E)/\mathcal{S}.}$

Correction du problème 2 – (Vers l'infini et au-delà)

Partie I – Ensembles bien ordonnés et récurrences transfinies

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire antireflexive et transitive sur un ensemble E. Supposons alors qu'il existe x et y tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Par transitivité, il vient $x\mathcal{R}x$, ce qui contredit l'antireflexivité. Ainsi, l'hypothèse $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)$ n'étant jamais satisfaite, l'implication

$$(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$$

est vrai par défaut, pour tout x et tout y dans E. Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.

2. (a) Soit $x \in E$, non égal au minimum de E ;
   - Pour tout $y \in S_x$, et tout $z < y$, on a $z < y$ et $y < x$, donc $z < x$, puis $z \in S_x$. Ainsi, S_x est bien un segment initial.
   - Puisque la relation $<$ est antireflexive, $x \notin S_x$, d'où $S_x \neq E$.
   - Puisque x n'est pas le minimum de E, il existe $y \in E$ tel que l'on n'ait pas $x \leqslant y$, et comme l'ordre est total, on en déduit que $y < x$. Ainsi, $y \in S_x$. Par conséquent, $S_x \neq \varnothing$.

   On déduit de ces trois points que $\boxed{S_x \text{ est un segment initial propre}}$.

   (b) Soit Y et Z deux segments initiaux de E. Supposons que $Y \not\subset Z$. Il existe donc $y \in Y$ tel que $y \notin Z$. Par conséquent, pour tout $z \in Z$, on a $z < y$ (sinon, par définition, on aurait $y \in Z$). Comme Y est un segment initial, on en déduit que $z \in Y$. Ainsi, $Z \subset Y$.

   On a donc $\boxed{\text{soit } Y \subset Z \text{ soit } Z \subset Y}$.

3. Soit Y un segment initial de E, non égal à X. Montrons qu'alors, il existe $x \in X$ tel que $Y = S_x$.
   - L'hypothèse $Y \neq X$ permet d'affirmer que l'ensemble $X \setminus Y$ n'est pas vide. Par définition d'un bon ordre, il admet donc un minimum x. Montrons que $Y = S_x$.
   - Soit $y \in Y$. Alors $y < x$. En effet, si ce n'est pas le cas, $y \geqslant x$ et par définition d'un segment initial, $x \in Y$, ce qui contredit l'appartenance de x à $Y \setminus X$. Ainsi, $y \in S_x$. On en déduit l'inclusion $Y \subset S_x$.
   - Soit $y \in S_x$. On a alors $y < x$. Comme x est le minimum de $Y \setminus X$, on en déduit que $y \notin Y \setminus X$, donc $y \in Y$. D'où l'inclusion $S_x \subset Y$.
   - Des deux inclusions, on déduit $S_x = Y$.

   Ainsi, $\boxed{\text{tout segment initial non égal à } X \text{ est égal à } S_x \text{ pour un } x \text{ convenable de } X.}$

4. On considère F le sous-ensemble de E constitué des éléments x pour lesquels la propriété $\mathcal{P}(x)$ est fausse. Si F est non vide, il admet un minimum x_0, pour lequel la propriété est fausse aussi. L'initialisation (le fait que $\mathcal{P}$ soit vraie pour m) permet d'affirmer que $x_0 > m$. De plus, la minimalité de x_0 permet d'affirmer que pour tout $x < x_0$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie. De ces deux points, et de la propriété d'hérédité satisfaite par $\mathcal{P}$, on en déduit que $\mathcal{P}(x_0)$ est satisfaite aussi, d'où une contradiction. Ainsi, $F = \varnothing$, donc $\boxed{\mathcal{P}(x) \text{ est vraie pour tout } x \text{ de } E.}$

   Pour l'ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$, on retrouve de la sorte le $\boxed{\text{principe de récurrence forte.}}$

Partie II – Comparaison de deux ensembles bien ordonnés

On montre dans cette partie qu'étant donnés deux ensembles bien ordonnés, l'un peut être considéré comme un segment initial de l'autre. plus précisément, si X et Y sont deux ensembles bien ordonnés, l'une au moins des deux premières propriétés ci-dessous est vérifiée :

(i) il existe un segment initial Y_1 de Y et une bijection strictement croissante $f : X \to Y_1$; de plus, Y_1 et f sont alors uniques ;

(ii) il existe un segment initial X_1 de X et une bijection strictement croissante $g : Y \to X_1$; de plus, X_1 et g sont alors uniques.

(iii) Par ailleurs, si ces deux propriétés sont satisfaites simultanément, alors $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ et f et g sont réciproques l'une de l'autre.

On se donne donc deux ensembles bien ordonnés X et Y.

1. Donnons-nous Y_1, Y_2, f_1 et f_2 comme dans l'énoncé. On considère alors $Z = \{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$. Supposons que Z est non vide. Alors, Z admet un minimum x_0. On a donc $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, et pour tout $x < x_0$, $f_1(x) = f_2(x)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $f_1(x_0) < f_2(x_0)$ (l'ordre étant total, quitte à échanger f_1 et f_2). On a alors :
   - $\forall x < x_0$, $f_2(x) = f_1(x) < f_1(x_0)$ (par croissance de f_1, cette croissance étant nécessairement stricte, par injectivité de f (puisque l'ordre est total).
   - $\forall x \geqslant x_0$, $f_2(x) \geqslant f_2(x_0) > f_1(x_0)$.

   Ainsi, $f_1(x_0)$ n'est pas dans l'image de f_2, et comme f_2 est surjective sur Y_2, on en déduit que $f_1(x_0) \notin Y_1$. Mais d'un autre coté, $f_1(x_0) < f_2(x_0)$, et $f_2(x_0) \in Y_1$. cela contredit donc le fait que Y_2 est un segment initial de X.

   On en déduit que l'hypothèse $Z \neq \varnothing$ est fausse, donc $Z = \varnothing$, ce qui se traduit par $\boxed{f_1 = f_2}$, et *a fortiori* $\boxed{Y_1 = Y_2}$.

   On montre évidemment de même l'unicité dans le cas (ii).

2. (a) Soit f une bijection croissante de X sur Y_1, où Y_1 est un segment initial de X. Soit X_1 un segment initial de X. Si $X_1 = \varnothing$, $f(X_1)$ aussi, et c'est bien un segment initial de Y. Supposons X_1 (et donc $f(X_1)$) non vide et soit $y_1 \in f(X_1)$, et $y_2 < y_1$. Il existe $x_1 \in X_1$ tel que $f(x_1) = y_1$. De plus, y_1 étant dans $f(X) = Y_1$ qui est un segment initial, $y_2 \in Y_1$ aussi, et par conséquent, $y_2 \in f(X)$. Il existe donc $x_2 \in X$ tel que $f(x_2) = y_2$. Par croissance de f, si on avait $x_2 \geqslant x_1$, on aurait $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, donc $y_2 \geqslant y_1$, d'où une contradiction. L'ordre étant total, on en déduit que $x_2 < x_1$. Il en découle que $x_2 \in X_1$ (car X_1 est un segment initial et $x_1 \in X_1$), puis que $y_2 \in f(X_1)$.

   Ainsi, pour tout $y_1 \in f(X_1)$, et tout $y_2 < y_1$, on a $y_2 \in f(X_1)$.

   Par conséquent, $\boxed{f(X_1) \text{ est un segment initial de } Y}$.

   (b) La composée de deux fonctions croissantes est croissante. La composée de deux injections est une injection. Ainsi, la composée $g \circ f$ est injective, et croissante. La corestriction de $g \circ f$ à son image $X_2 = g \circ f(X)$ est donc une bijection croissante. En appliquant deux fois la question précédente, d'abord à f puis à g, on montre que X_2 est un segment initial de X. Ainsi, $g \circ f$ est une bijection croissante de X sur un segment initial de X.

   La fonction identité est aussi un bijection croissante de X sur un segment initial de X (à savoir X lui-même). L'unicité prouvée dans la question 1 justifie alors que $X_2 = X$ et $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_X}$.

   La surjectivité de la fonction id_X nous assure alors aussi la surjectivité de g (en tant qu'application de Y dans X tout entier). Comme elle est aussi injective (bijective sur une partie de X), on en déduit que $\boxed{g \text{ est une bijection (croissante) de } Y \text{ sur } X}$. En composant à gauche par g^{-1}, il vient alors $\boxed{f = g^{-1}}$, ce qui nous assure au passage la $\boxed{\text{bijectivité de } f}$. Cela prouve bien le point (iii).

3. On pose $Y = \bigcup_{y<x} S_y$. Soit $z \in Y$ et $t < z$. Il existe un élément $y < x$ tel que $z \in S_y$. Comme S_y est un segment initial, on obtient $t \in S_y$, donc $t \in Y$. Ainsi, $\boxed{Y \text{ est un segment initial de } X}$.

D'après les résultats de la partie I, cet ensemble peut donc s'écrire

$$\bigcup_{y<x} S_y = S_{y_0},$$

pour un certain y_0 de X.

4. On a clairement $S_{y_0} \subset S_x$ (donc aussi $S_{y_0} \cup \{y_0\}$), d'après la description sous forme d'une union. Montrons l'implication réciproque en distinguant deux cas.
   - Supposons $y_0 \in S_x$. Considérons $z \in S_x$. Si $z = y_0$, $z \in S_{y_0} \cup \{y_0\}$. Sinon, on ne peut pas avoir $z > y_0$, car dans ce cas, on obtiendrait $y_0 \in S_z$, et comme $z < x$,

     $$y_0 \in \bigcup_{y<x} S_y = S_{y_0}.$$

     Ceci est impossible par antireflexivité de la relation d'ordre strict. Ainsi, on a $z < y_0$, donc $z \in S_{y_0}$. On a bien obtenu dans ce cas l'inclusion $S_x \subset S_{y_0} \cup \{y_0\}$.
     L'inclusion réciproque ayant déjà été prouvée, on peut conlcure que dans ce cas, $S_x = S_{y_0} \cup \{y_0\}$
   - Supposons $y_0 \notin S_x$, et soit $y \in S_x$. En particulier, $y \neq y_0$. On ne peut pas avoir $y > y_0$ non plus, car sinon, $y_0 \in S_y$, puis, comme $y < x$, et par définition de y_0, on obtient $y_0 \in S_{y_0}$, ce qui est impossible. Ainsi, l'ordre étant total, $y < y_0$, et donc $y \in S_{y_0}$. On a montré que dans ce cas-là, $S_x \subset S_{y_0}$, et l'inclusion réciproque étant aquise, il vient $\boxed{S_x = S_{y_0}}$.

   Montrer que soit $S_x = S_{y_0}$, soit $S_x = S_{y_0} \cup \{y_0\}$.

5. Ainsi, deux éléments x et y de $X \cup \{X\}$ vérifient $x < y$ soit s'ils sont tous deux éléments de X et vérifiaient cette inégalité dans X, soit si $x \in X$ et $y = X$.

   Montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre strict :
   - Pour tout $x \in X \cup \{X\}$, si $x \in X$, on n'a pas $x < x$ car la relation de départ sur X est stricte. Par ailleurs, par définition du prolongement de l'ordre à $X \cup \{X\}$, on n'a pas non plus $X < X$. Ainsi, la relation est antireflexive.
   - Pour tout $(x, y, z) \in (X \cup \{X\})^3$ tels que $x < y$, et $y < z$, si x, y et z sont éléments de X, alors la transitivité de $<$ sur X permet de conclure que $x < z$. Si l'un au moins de ces trois éléments est X, ce ne peut pas être x, ni y (car par définition, aucun élément ne peut être strictement supérieur à X). Ainsi, $z = X$, et $x \in X$, donc par définition du prolongement de l'ordre, $x < z$.
     Ainsi, la relation est transitive sur $X \cup \{X\}$.

   Il s'agit d'un ordre total. En effet, deux éléments distincts sont toujours comparables, pouisqu'ils le sont si aucun des deux n'est égal à X (car l'ordre sur X est total), ainsi que si l'un d'eux est égal à X (et donc pas l'autre), par définition du prolongement.

   Montrons enfin qu'il s'agit d'un bon ordre. Pour cela, considérons un sous-ensemble Y non vide de $X \cup \{X\}$. Si $Y = \{X\}$, alors X est le minimum de Y. Sinon $Y \cap X$ est non vide, et admet donc un minimum m, l'ordre initial sur X étant un bon ordre. Ce minimum m étant inférieur à tout élément de $Y \cap X$ ainsi qu'à X, on en déduit que c'est aussi le minimum de Y.

   Ainsi, $\boxed{\text{le prolongement de l'ordre à } X \cup \{X\} \text{ est un bon ordre.}}$

6. Soit pour tout $x \in X \cup \{X\}$ la propriété $\mathcal{P}(x)$ définie dans l'énoncé.
   - Soit m le minimum de $X \cup \{X\}$. Le segment initial S_m est alors vide. En posant $Y_x = \varnothing$ (qui est bien un segment initial de Y), on a une bijection triviale de Y_x dans S_m, qui est aussi strictement croissante par défaut. D'où la propriété $\mathcal{P}(m)$.
   - Soit $x > m$ dans $X \cup \{X\}$. On suppose que pour tout $y < x$, $\mathcal{P}(y)$ est vérifié. On remarque d'abord que si pour au moins l'un des $y < x$, on a l'existence d'un $z \leqslant y$ et d'une bijection strictement strictement croissante de Y sur S_z, cela reste trivialement vrai pour x (le même z convient, puisque $z \leqslant y < x$).
     On peut donc supposer que pour tout $y < x$, on est dans l'autre situation, à savoir celle donnant l'existence d'un segment initial Y_y de Y et d'une bijection strictement croissante de S_x sur Y_y.
     On considère alors

     $$S_{y_0} = \bigcup_{y<x} S_x,$$

comme précédemment. On peut dans un premier temps remarquer que si $y_1 < x$ et $y_2 < x$, et disons $y_1 < y_2$, si f_1 et f_2 sont deux bijections strictement croissantes associées, alors la restiction de f_2 à S_{y_1} (qui est inclus dans S_{y_2}) est égale à f_1, par l'unicité montrée en question 1. Ainsi, on peut définir f sur S_{y_0} de facon non ambiguë de la manière suivante : étant donné $x \in S_{x_0}$, il existe $y < x$ tel que $x \in S_y$. Notant f_y l'(unique) bijection associée (l'existence étant donnée par hypothèse de récurrence), on définit $f(x) = f_y(x)$. La remarque précédente permet de justifier que cette construction ne dépend pas du choix de y, et la fonction f est donc bien définie.

Montrons que f est strictement croissante. Soit $y_1 < y_2$ dans S_{y_0} il existe y_1' et y_2' tels que $y_1 \in S_{y_1'}$ et $y_2 = S_{y_2'}$. Comme l'un de ces deux segments initiaux est inclus dans l'autre, en gardant le plus grand des deux, on a l'existence de y tel que y_1 et y_2 soient tous deux éléments de S_y. La fonction f coïncide avec f_y sur S_y, et cette fonction étant strictement croissante, on obtient $f(y_1) < f(y_2)$. En particulier, il s'agit d'une bijection croissante sur son image $f(S_{y_0})$.

Montrons maintenant que $f(S_{y_0})$ est un segment initial de Y. Soit $z \in f(S_{x_0})$. Soit $t < z$. Il existe $y' \in S_{x_0}$ tel que $z = f(y)$. Par définition de y_0, il existe $y < x$ tel que $y' \in S_y$. Or, $f(S_y) = f_y(S_y)$ est un segment initial, et $z \in f(S_y)$, donc $t \in f(S_y) \subset f(S_{x_0})$.

Ainsi, $f(S_{y_0})$ est un segment initial de Y. On a donc construit une bijection strictement croissante de S_{y_0} sur un segment initial de Y.

Si $S_x = S_{y_0}$, cela prouve $\mathcal{P}(x)$. Sinon, on a $S_x = S_{y_O} \cup \{y_0\}$. Il reste donc à prolonger f sur l'élément y_0. Deux situations peuvent se produire :

* Soit $f(S_{y_0}) = Y$, et dans ce cas, la réciproque f^{-1} est une bijection croissante de Y sur S_{y_0} où $y_0 < x$ (sinon on n'aurait pas l'inclusion stricte des segments initiaux associés). Cela prouve $\mathcal{P}(x)$.
* Soit $Y \setminus f(S_{y_0})$ est non vide. Considérons alors m son minimum (existant par propriété d'un bon ordre). On prolonge f à S_x en posant $f(y_0) = m$. Comme $f(S_{y_0})$ est un segment initial, m est strictement supérieur à tout élément de Y, ce qui assure que f est encore croissante sur S_x. La construction de f et le fait que $m \notin f(S_{y_0})$ assure que f est bijective de S_x sur $f(S_{y_0}) \cup \{m\}$. Enfin, le fait que m soit le minimum de $Y \setminus f(S_{y_0})$ assure que $f(S_{y_0}) \cup \{m\}$ est un segment initial de Y. Cela prouve bien $\mathcal{P}(x)$.

On a donc obtenu $\mathcal{P}(x)$ dans tous les cas possibles. Ainsi, par principe de récurrence transfinie, on en déduit que $\boxed{\text{la propriété } \mathcal{P}(x) \text{ est vraie pour tout } x \in X \cup \{X\}.}$

7. En particulier pour $x = X$, on a $S_X = X$, et l'énoncé obtenu est exactement l'existence de (i) ou (ii).
   Ainsi, puisque l'unicité est déjà acquise, $\boxed{\text{(i) ou (ii) est démontré}}$.
   Le point (iii) avait déjà été démontré.

Partie III – Ordinaux

1.
   * $\varnothing$ est transitif par défaut, puisqu'il ne contient aucun élément. La relation d'appartenance sur $\varnothing$ est la relation triviale (vide), qui est une relation d'ordre totale (par défaut). Il s'agit d'un bon ordre, puisque le seul sous-ensemble de $\varnothing$ est $\varnothing$. Ainsi, $\boxed{\varnothing \text{ est un ordinal}}$.
   * $\{\varnothing\}$ est transitif, puisque sont seul élément $\varnothing$ vérifie bien $\varnothing \subset \{\varnothing\}$. De plus, la relation d'appartenance est ici aussi vide, et définit donc un ordre total (puisqu'il n'y a pas deux éléments distincts) et un bon ordre (c'est toujours le cas d'un ensemble fini totalement ordonné). Donc $\boxed{\{\varnothing\} \text{ est un ordinal}}$.
   * La transitivité de $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ est sans difficulté (on étudie le cas de chacun des deux éléments), et a été vue en exercices. En notant $x_1 = \varnothing$ et $x_2 = \{\varnothing\}$, la relation d'appartenance se traduit par l'unique inégalité $x_1 < x_2$. Cela définit bien une relation d'ordre stricte totale (puisqu'il n'y a que deux éléments !). Il s'agit d'un bon ordre par la remarque précédente concernant les ensembles totalement ordonnés finis. Ainsi, $\boxed{\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \text{ est un ordinal.}}$
2. Soit α un ordinal, et $\beta \in \alpha$. Comme α est transitif, $\beta \subset \alpha$. La relation d'appartenance sur les éléments de β coïncide donc avec la relation d'appartenance sur α : il s'agit de la relation restreinte de celle de α. La restriction d'une relation d'ordre totale étant une relation d'ordre totale, l'appartenance définit donc une relation d'ordre totale sur β. Il reste à montrer que c'est un bon ordre. Pour cela, on considère un sous-ensemble X non vide de β. C'est aussi un sous-ensemble non vide de α, qui est bien ordonné. Ainsi, X admet un minimum. Cela prouve que la relation d'appartenance sur β est un bon ordre.

Montrons enfin que β est transitif. Soit $x \in \beta$. Soit $y \in x$. Par transitivité de α, $x \in \alpha$, puis $y \in \alpha$. On peut alors utiliser la transitivité de la relation $\in$ sur α (valide puisque c'est une relation d'ordre, par définition d'un ordinal). On en déduit que $y \in \beta$. Ainsi, pour tout $y \in x$, on a $y \in \beta$, donc $x \subset \beta$. Cela prouve la transitivité de β.

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } \beta \in \alpha,\ \beta \text{ est aussi un ordinal.}}$

3. Par hypothèse, X est transitif. Il suffit donc de vérifier que la relation d'appartenance est une relation de bon ordre. La seconde hypothèse donnée nous assure déjà que si c'est une relation d'ordre, celle-ci est totale. On peut donc se contenter de montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre, et que tout sous-ensemble non vide admet un minimum.
   - Une remarque donnée dans l'introduction de la partie affirme que pour tout $\alpha \in E$, $\alpha \notin \alpha$, ce qui assure l'antireflexivité.
   - Soit α, β et γ dans X tels que $\alpha \in \beta$, et $\beta \in \gamma$. Comme γ est un ordinal (donc transitif), on en déduit que $\alpha \in \gamma$. La relation d'appartenance est bien transitive. On peut dès lors conclure que la relation d'appartenance est une relation d'ordre sur X.
   - Soit $A \subset X$ non vide, et soit $\alpha \in A$. Considérons alors $B = \{\beta \in A \mid \beta \in \alpha\}$.
     * Si l'ensemble B est vide, alors α est le minimum de A. En effet, pour tout $\beta \in X$, on n'a pas $\beta \in \alpha$, et l'ordre étant total, on a soit $\alpha \in \beta$, soit $\alpha = \beta$.
     * Si l'ensemble B est non vide, c'est un sous-ensemble de α, sur lequel l'ordre d'appartenance est un bon ordre (c'est un ordinal !). Ainsi B admet un minimum β. Montrons qu'il s'agit aussi du minimum de A. En effet, par définition de B, $\beta \in A$. De plus, pour tout $x \in A$, on ne peut pas avoir $x \in \beta$, sinon, par transitivité de la relation d'appartenance sur X, et puisque $\beta \in \alpha$, on obtiendrait $x \in \alpha$ puis $x \in B$. Cette appartenance, couplée avec l'appartenance $x \in \beta$, contredit la minimalité de β dans B.

4. (a) Soit α un ordinal. Ses éléments sont des ordinaux aussi (question 2). Ainsi, $X = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ensemble dont les éléments sont tous des ordinaux. Par ailleurs, pour tout x, y dans X distincts, soit ils sont tous deux dans α et l'ordre sur α étant total, on a $x \in y$ ou $y \in x$, soit l'un d'eux (et un seul) est égal à α (disons que c'est y), l'autre (c'est alors x) étant alors un élément de α. On a bien $x \in y$.

   Ainsi, on est dans la situation de la question précédente, et on peut donc affirmer que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal.

   (b) Soit α un ordinal, et β un segment initial de α. Comme les éléments de α sont des ordinaux, il en est de même des éléments de β. De plus, la relation d'appartenance étant totale sur α, sa restriction est aussi totale sur β. On peut encore une fois appliquer la question 3, et en déduire que $\boxed{\beta \text{ est ordinal}}$.

   Supposons maintenant que $\beta \neq \alpha$. Soit γ le minimum de l'ensemble non vide $\alpha \setminus \beta$. On a alors

$$\beta = \{x \in \alpha \mid x < \gamma\} = \{x \in \alpha \mid x \in \gamma\},$$

   par définition de la relation d'ordre. Cette dernière égalité affirme très précisément que $\beta = \gamma$, donc $\beta \in \alpha$.

5. Soit α et β deux ordinaux, et f une bijection croissante de α sur β. Soit $X = \{x \in \alpha \mid f(x) \neq x\}$.

   Si X est non vide il admet un minimum x_0, par propriété d'un bon ordre. On a donc $f(x_0) \neq x_0$ et $\forall x \in x_0$, $f(x) = x$. Attention, ici, il convient de bien distinguer $f(x_0)$ (image de l'élément x_0) de $\widehat{f}(x_0)$ (ensembles des images des éléments de x_0, qui eux même sont dans α). Puisque $f(x_0) \neq x_0$, l'ordre sur β étant total, $f(x_0) \in x_0$ ou $x_0 \in f(x_0)$.
   - Supposons $f(x_0) \in x_0$, notons $x_1 = f(x_0)$. Or, pour tout $x \in x_0$, par minimalité de x_0, on peut affirmer que $f(x) = x$. En particulier, $f(x_1) = x_1$. On a donc $f(x_0) = f(x_1)$ avec $x_1 \in x_0$ (donc $x_1 \neq x_0$). Cela contredit l'injectivité de f.
   - Supposons $x_0 \in f(x_0)$. Par transitivité de β, et puisque $f(x_0) \in \beta$, on a aussi $x_0 \in \beta$. Or, pour tout $x < x_0$ (il s'agit ici de la relation d'appartenance), on a $f(x) = x < x_0$, et par croissance de f, pour tout $x \geqslant x_0$, on a $f(x) \geqslant f(x_0) > x_0$. Ainsi, l'ordre étant total on peut conclure que x_0 n'est pas dans l'image de f, donc que f n'est pas surjective sur β, d'où une contradiction.

   Donc X est vide, on a pour tout $x \in \alpha$, $x = f(x) \in \beta$, donc $\alpha \subset \beta$. On a de plus, $f(\alpha) = \alpha$, et comme f est surjective, $\boxed{\alpha = \beta, \text{ et } f = \mathrm{id}_\alpha}$.

6. Soit α et β deux ordinaux. D'après la partie II, α et β étant bien ordonnés pour la relation d'appartenance, il existe une bijection croissante de α sur un segment initial de β, ou réciproquement.

- Dans le premier cas, si γ est un segment initial de β et f une bijection croissance de α sur γ, alors γ est un ordinal d'après la question 4(b). D'après la question 5, $\alpha = \gamma$. Ainsi, α est un segment initial de β. Deux cas peuvent se produire. Soit $\alpha = \beta$, et on a ce qu'on veut, soit $\alpha \neq \beta$, et toujours d'après 4(b), on a alors $\alpha \in \beta$.
- Dans le second cas, on obtient de même soit $\alpha = \beta$, soit $\beta \in \alpha$.

Ainsi, on a toujours $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha}$.

L'antireflexivité de $\in$ (remarque en début de partie) montre que $\beta = \alpha$ est incompatible avec chacune des deux autres possibilités. De plus, on ne peut pas avoir simultanément $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \alpha$, car la transitivité de α amènerait alors $\alpha \in \alpha$, ce qui est impossible.

Donc $\boxed{\text{les trois éventualités sont exclusives.}}$

7. Remarquez qu'ici, on parle de « relation » sur une classe, et non sur un ensemble, ce qui sort du cadre de la théorie des ensembles. Dans certains ouvrages on parle dans ce cas de meta-relation.
   - L'impossibilité d'avoir $\alpha \in \alpha$ montre l'antireflexivité de la relation d'appartenance.
   - Étant donnés trois ordinaux α, β et γ tels que $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma$, la transitivité de γ permet de conclure que $\alpha \in \gamma$, d'où la transitivité de l'appartenance. On peut dès lors conclure que l'appartenance est une (meta)-relation d'ordre strict sur la classe des ordinaux.
   - La question 6 permet d'affirmer que cette relation est totale.
   - Enfin, étant donnée une classe C non vide d'ordinaux, et α un élément de cette classe, considérons $E = \{\beta \leqslant \alpha \mid \beta \in C\}$. C'est un sous-ensemble non vide de α^+ (il contient α) qui est bien ordonné, donc il admet un minimum m. On montre sans difficulté que ce minimum est aussi minimum de C.

   Ainsi, $\boxed{\text{la meta-relation d'appartenance est une meta-relation de bon ordre sur la classe des cardinaux.}}$

   Il faut être conscient qu'en fait, on passe sous silence dans cette preuve certaines difficultés logiques, en particulier la validité de toutes les manipulations et objets considérés sur les classes, ainsi que le fait que E soit bien un ensemble (il y a une définition par compréhension dessous, mais une justification rigoureuse nécessiterait une formalisation précise de l'axiomatique de la théorie des ensembles).
8. Supposons que la classe X des ordinaux soit un ensemble. Alors, la question précédente permet d'affirmer que la relation d'appartenance munit X d'un bon ordre. De plus, X est transitif : étant donné $\alpha \in X$ et $\beta \in \alpha$, la question 2 affirme $\beta \in X$. Ainsi, X est un ordinal. On en déduit que $X \in X$, d'où une contradiction.

   Ainsi, $\boxed{\text{la classe des ordinaux n'est pas un ensemble}}$.
9. On montre dans cette question que tout ensemble bien ordonné peut être mis en bijection croissante avec un ordinal.

   (a) Soit X un ensemble bien ordonné. Supposons que X ne peut pas être mis en bijection croissante avec un ordinal. Pour tout ordinal α, on a alors, d'après la partie II, l'existence d'un segment initial X_α de X et d'une bijection croissante de α sur X_α, ou l'existence d'un segment initial β de α et d'une bijection croissante de X sur β. Mais ce dernier cas est impossible, car on sait que β est aussi un ordinal (question 4(b)), et qu'on a supposé qu'il n'existe pas de bijection croissante de X sur un ordinal.

   On a donc $\boxed{\text{l'existence d'un segment initial } X_\alpha \text{ (distinct de } X\text{) et d'une bijection croissante de } \alpha \text{ sur } X_\alpha}$

   Cette bijection est de plus unique, donc on pourra considérer, pour tout ordinal α, l'unique segment initial X_α associé, et ceci sans avoir recours à l'axiome du choix.

   (b) Soit E l'ensemble des segments initiaux de X. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$. C'est donc bien un ensemble (puisque $\mathcal{P}(X)$ lui-même est un ensemble et qu'on peut définir E par compréhension à partir de $\mathcal{P}(X)$). On considère maintenant le sous-ensemble F de E constitué des segments initiaux de la forme X_α pour au moins un α. On va commencer par justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors $X_\alpha \neq X_\beta$. En effet, sinon, on pourra construire par composition $\alpha \longrightarrow X_\alpha = X_\beta \longrightarrow \beta$ une bijection strictement croissante entre α et β, ce qui contredit la question 5.

   Ainsi, la correspondance associant à chaque ordinal α l'ensemble X_α est une correspondance 1 à 1 entre les éléments de la classe des ordinaux et les éléments de l'ensemble F. D'après le point admis, on en déduit que la classe des ordinaux est un ensemble, ce qui contredit la question 8.

Partie IV – Ordinaux finis

1. Il s'agit essentiellement de la définition de l'ordre, puisque trivialement, $\boxed{\omega = \{\alpha, \alpha \in \omega\}}$!

2. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que λ_n est un ordinal, de cardinal n (au sens intuitif). C'est trivialement vrai pour $\lambda_0 = \varnothing$, et l'hérédité est assurée par la question 4(a), et par le fait qu'on passe de λ_n à λ_{n+1} en lui ajoutant un élément qui n'y était pas déjà, donc on augmente son cardinal de 1.

   Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\lambda_n \text{ est un ordinal de cardinal } n}$.

   Cela ne suffit pas, au sens strict, pour prouver que c'est un ordinal fini. Comme toujours, il ne faut pas se fier à la terminologie. C'est le retour à la définition qui compte. Il faut donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n < \omega$. Prouvons le par récurrence sur $\mathbb{N}$

   Pour $n = 0$, on remarque que $\varnothing$ est dans tout ordinal non vide α. En effet, soit m le minimum de α (existe cas on a un bon ordre). Si $m \neq \varnothing$, il existe $x \in m$. Par transitivité, $x \in \alpha$ (car $m \subset \alpha$). On a donc trouvé x dans α tel que $x < m$, ce qui contredit la définition de m. Ainsi, $m = \varnothing$. On en déduit que $\lambda_0 \in \omega$, donc $\lambda_0 < \omega$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\lambda_n < \omega$. On a alors $\lambda_{n+1} = \lambda_n^+ \neq \omega$, opar définition de ω. Ainsi, $\lambda_{n+1} < \omega$ ou $\omega < \lambda_{n+1}$. Supposons $\omega < \lambda_{n+1}$. Ainsi, $\omega \in \lambda_{n+1} = \lambda_n \cup \{\lambda_n\}$. On en déduit que $\omega = \lambda_n$, ce qui est impossible pour la même raison que λ_{n+1} (ou du fait que $\omega \neq \varnothing$ si $n = 0$), ou que $\omega \in \lambda_n$, ce qui est exclu par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\lambda_{n+1} < \omega$.

   D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n est un ordinal fini.

3. Soit $X = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\lambda_n \subset X$. On aura bien alors pour tout $x \in X$ (nécessairement de la forme λ_n), $x \subset X$, ce qui correspond à la transitivité.

   C'est clairement vrai pour $\lambda_0 = \varnothing$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\lambda_n \subset X$. Comme $\lambda_n \in X$, on a aussi $\{\lambda_n\} \subset X$, puis $\lambda_n \cup \{\lambda_n\} \subset X$, soit $\lambda_{n+1} \subset X$.

   Par principe de récurrence, et la remarque initial, on en déduit que $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

4. Tout d'abord, d'après la question précédente, la question III-3 et le fait que l'appartenance définit un bon ordre sur les ordinaux (ce qui est préservé par restriction à un ensemble d'ordinaux), X est un ordinal. S'il est le successeur d'un ordinal λ, c'est-à-dire $X = \lambda \cup \{\lambda\}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \lambda_n$ (c'est la forme générique des éléments de X). On a alors $X = \lambda_n^+ = \lambda_{n+1}$. Or, $\lambda_{n+1} \in \lambda_{n+2}$, d'après la construction, et par antisymétrique, on a donc $\lambda_{n+2} \notin \lambda_{n+1} = X$. Cela contredit la définition de X.

   Ainsi, X n'est le successeur d'aucun ordinal, et est non vide. Cela permet au passage de justifier l'existence de ω (la classe des ordinaux non successeurs d'un autre étant non vide), ainsi que l'inégalité $\omega \leqslant X$, soit $\omega \in X$ ou $\omega = X$. Comme X est un ordinal, par transitivité, on obtient $\boxed{\omega \subset X}$.

   L'inclusion réciproque provient du fait que tout λ_n est un ordinal fini (prouvé en 2), donc que $\lambda_n < \omega$, c'est-à-dire $\lambda_n \in \omega$.

   Le deux inclusions permettent d'affirmer que $\boxed{X = \omega}$.

5. L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \omega = X$ définie par $f(n) = \lambda_n$ est clairement bijective, donc $\boxed{\omega \text{ et } \mathbb{N} \text{ sont équipotents}}$.

Partie V – Équipotence de $\lambda \times \lambda$ et λ, lorsque λ est un ordinal infini.

1. On montre qu'il s'agit d'une relation d'ordre strict. Soit $(x, y) \in E \times E$. Aucune des trois possibilités définissant $<$ sur $E \times E$ n'est alors possible lorsqu'on considère $(x', y') = (x, y)$, donc la relation est antireflexive.

   Soit $(x, y) < (x', y')$ et $(x', y') < (x'', y'')$. On a alors $\max(x, y) \leqslant \max(x', y') \leqslant \max(x'', y'')$. Si l'une de ces inégalités est stricte, alors $\max(x, y) < \max(x'', y'')$ donc $(x, y) < (x'', y'')$. Sinon, on obtient $\max(x, y) = \max(x'', y'')$, et on a alors $x \leqslant x' \leqslant x''$, et encore une fois, si l'une de ces inégalités est stricte, $x < x''$, d'où $(x, y) < (x'', y'')$. Sinon, on a $x = x''$ et $y < y' < y''$, donc une dernière fois $(x, y) < (x'', y'')$.

   Ainsi, la relation est antiréflexive et transitive, il s'agit donc d'une $\boxed{\text{relation d'ordre stricte}}$.

2. C'est une relation relation de bon ordre :
   - Il s'agit d'un ordre total. En effet, soit (x, y) et (x', y') deux éléments distincts de $E \times E$. Supposons que les deux premiers critères ne suffisent pas à classer ces deux éléments entre eux. On a alors $\max(x, y) = \max(x', y')$, et $x = x'$. D'autre part, puisque $(x, y) \neq (x', y')$, $y \neq y'$, donc, l'ordre sur E étant total, il vient $y < y'$ ou $y' < y$. On obtient alors respectivement $(x, y) < (x', y')$, ou $(x', y') < (x, y)$. Cela prouve bien que deux éléments distincts sont toujours comparables, donc que la relation d'ordre est totale.

- Soit A un sous-ensemble non vide de $E \times E$. Montrons que A admet un plus petit élément. On considère $B = \bigcup_{(x,y)\in A} \{x, y\}$. Il s'agit donc de l'ensemble de tous les éléments de E apparaissant en première ou seconde coordonnée d'éléments de A. Il s'agit d'un sous-ensemble non vide de E. Il admet donc un élément minimum z_0. Considérons alors $B_1 = \{(x, y) \in A \mid x = z_0\}$ et $B_1 = \{(x, y) \in A \mid y = z_0\}$. Au moins l'un des deux ensembles B_1 et B_2 est non vide. Soit $B = B_1 \cup B_2$. Cet ensemble est donc non vide.
  Soit $B' = \{x \in A \mid \exists y \in A, (x, y) \in B\}$. Il s'agit donc du projeté de B sur la première coordonnée. Ainsi, B' est un sous-ensemble non vide de A et admet donc un minimum. Considérons x_0 son minimum. Il existe au moins un y tel que $(x_0, y) \in B$. Ainsi, l'ensemble $B'' = \{y \in A \mid (x_0, y) \in B$ est un sous-ensemble non vide de A. Soit y_0 son minimum. Montrons que (x_0, y_0) est le minimum de A. Pour cela, considérons $(x, y) \in A$. Par définition de l'ensemble B, et puisque $(x_0, y_0) \in B$ par construction, on a nécessairement $\max(x, y) \geqslant \max(x_0, y_0)$. Si l'inégalité est stricte, on obtient $(x, y) > (x_0, y_0)$. Sinon, cela signifie que $(x, y) \in B$. Ainsi, $x \in B'$, donc par définition de x_0, $x \geqslant x_0$. Si l'inégalité est stricte, encore une fois, on peut conclure que $(x, y) > (x_0, y_0)$, et sinon, $y \in B''$. On a alors $y \geqslant y_0$, de quoi on peut conclure que $(x, y) \geqslant (x_0, y_0)$. Ainsi, (x_0, y_0) est bien le minimum de A.
- On en déduit que $\boxed{\text{la relation } < \text{ sur } E \times E \text{ est une relation de bon ordre.}}$

3. - Supposons E et F équipotents. Il existe donc une bijection $f : E \to F$. Soit une telle bijection. On définit alors $\Phi : E \times E \to F \times F$ par :

   $$\forall (x, y) \in E \times E,\ \Phi(x, y) = (f(x), f(y)).$$

   Montrons que Φ est une bijection.
   - Soit (x', y') dans $F \times F$. On a alors, par surjectivité de f, l'existence d'un antécédent x de x' et d'un antécédent y de y' par f. Ainsi, $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$. On en déduit que $\Phi(x, y) = (x', y')$. Ainsi, Φ est surjective.
   - Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $E\times E$ tels que $\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_2, y_2)$. On a alors $f(x_1) = f(x_2)$ et $f(y_1) = f(y_2)$. On en déduit, par injéctivité de f, que $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, donc que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. D'où l'injectivité de Φ.

   Ainsi, Φ est bijective, de quoi on déduit que $\boxed{E \times E \text{ et } F \times F \text{ sont équipotents.}}$
4. Soit λ un ordinal infini. On suppose que pour tout ordinal infini $\mu < \lambda$, μ est équipotent à $\mu \times \mu$.
   (a) Supposons qu'il existe $\mu < \lambda$ tel que μ soit équipotent à λ. Alors $\mu \times \mu$ est équipotent à $\lambda \times \lambda$. Par ailleurs, l'hypothèse initiale nous permet d'affirmer que $\mu \times \mu$ est équipotent à μ. La transitivité de la relation d'équipotence (qui ne traduit que le fait que la composée de deux bijections est une bijection) permet de conclure que $\boxed{\lambda \text{ est équipotent à } \lambda \times \lambda}$.
   (b) On peut donc supposer que pour tout ordinal $\mu < \lambda$, μ est strictement subpotent à λ. On munit $\lambda \times \lambda$ du bon ordre défini en début de partie, à partir du bon ordre de λ. On considère alors α un ordinal et $f : \alpha \to \lambda \times \lambda$ une bijection croissante, l'existence de α et f étant assurée par le résultat de la question III-9. Nous allons prouver que $\alpha \leqslant \lambda$. En supposant le contraire, par définition de la relation d'ordre sur les ordinaux, on a $\lambda \in \alpha$. On note alors $(x_0, y_0) = f(\lambda)$, et $\beta = \max(x_0, y_0)$.
      i. Comme f est à valeurs dans $\lambda \times \lambda$, x_0 et y_0 sont des éléments de l'ordinal λ. Ainsi, $\boxed{\beta \in \lambda}$. La question III-2 permet alors d'affirmer que $\boxed{\beta \text{ est un ordinal}}$. De plus, par transitivité de l'ensemble λ, on obtient $\beta \subset \lambda$, donc β est subpotent à λ, et $\beta < \lambda$. Par hypothèse, on a supposé que tout ordinal $\mu < \lambda$ est strictement subpotent à λ, donc $\boxed{\beta \text{ est strictement subpotent à } \lambda}$.
      ii. Par définition de β, pour tout $\gamma < \lambda$, en notant $(x, y) = f(\gamma)$, la croissance de f amène : $x \leqslant \beta$ et $y \leqslant \beta$, donc $x \in \beta$ ou $x = \beta$, et $y \in \beta$ ou $y = \beta$. On en déduit que f_λ est à valeurs dans $\beta^+ \times \beta^+$, et est injective. On définit ainsi une application injective $f_1 : \lambda \to \beta^+ \times \beta^+$, assurant que $\boxed{\lambda \text{ est subpotent à } \beta^+ \times \beta^+}$.
      iii. Puisque λ est infini, il en est de même de $\beta^+ \times \beta^+$, donc de β^+, donc de β. Ainsi, en particulier, $\omega \leqslant \beta$ $\omega = \beta$ ou $\omega \in \beta$, ce qui implique, dans les deux cas, $\omega \subset \beta$. Or, $\omega = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On peut alors

construire une bijection φ de β^+ sur β par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \beta \text{ et } x \notin \omega \\ \lambda_{n+1} & \text{si } x = \lambda_n \\ \lambda_0 & \text{si } x = \beta \end{cases}$$

La vérification du fait qu'il s'agit d'une bijection est immédiate. Ainsi, β et β^+ sont équipotents, donc aussi $\beta \times \beta$ et $\beta^+ \times \beta^+$. Par composition d'injections, on en déduit que λ est subpotent à $\beta \times \beta$.

Par ailleurs, $\beta \in \lambda$, donc $\beta < \lambda$. On en déduit que β est strictement subpotent à λ, et donc, par hypothèse, β et $\beta \times \beta$ sont équipotents.

Ainsi, λ est subpotent à $\beta \times \beta$ lui-même équipotent à β lui-même strictement subpotent à λ, donc λ est strictement subpotent à λ ce qui est une $\boxed{\text{contradiction}}$.

On en déduit que sous les conditions de la question, $\boxed{\alpha \leqslant \lambda}$.

(c) En particulier, $\alpha \in \lambda$ ou $\alpha = \lambda$, donc $\alpha \subset \lambda$, donc α est subpotent à λ. Par ailleurs, par définition de α, il est équipotent à $\lambda \times \lambda$. On a donc montré que $\lambda \times \lambda$ est subpotent à λ.

Intuitivement, on a fait le plus dur, l'autre sens paraissant plus naturel. En effet, on peut injecter λ dans $\lambda\times\lambda$, par exemple en considérant la diagonale, donc en posant, pour $x \in \lambda$, $f(x) = (x, x)$, qui est trivialement injective. Ainsi, λ est subpotent à $\lambda \times \lambda$.

Le théorème de Cantor-Bernstein permet alors de conclure que λ et $\lambda \times \lambda$ sont équipotents.

5. On fait une récurrence transfinie sur la classe des ordinaux. L'initialisation est faite pour le plus petit ensemble infini, à savoir ω, équipotent à $\mathbb{N}$. On utilise le point qu'on nous autorise à utiliser sans démonstration (équipotence de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$). L'hérédité transfinie a été prouvée dans la question 4. Le principe de récurrence transfinie permet de conclure que pour tout ordinal infini λ, $\boxed{\lambda \text{ et } \lambda \times \lambda \text{ sont équipotents}}$.

Partie VI – Extension du résultat à tout ensemble

On rappelle qu'on admet ici la validité de l'axiome du choix. On montre sous cette hypothèse que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre (théorème de Zermelo), ce qui va nous permettre d'étendre le résultat de la partie précédente à tous les ensembles.
Soit E un ensemble. On définit X l'ensemble des couples $(F, <_F)$ formés d'un sous-ensemble F de E et d'un bon ordre $<_F$ sur F. On définit sur X une relation $\leqslant$ par :
$(F, <_F) \leqslant (G, <_G)$ si et seulement si $F \subset G$, $<_F$ est la restriction sur F de $<_G$ et F est segment initial de G.

1. • X est bien un ensemble. On peut en effet constater que c'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E \times E)$ défini par compréhension : (F, G) tel que $\forall (x, y) \in G$, $x \in F$ et $y \in F$ (pour que cela définisse une relation sur F, et vérifiant les propriétés d'un bon ordre, ce qui peut aussi se traduire par des formules mathématiques. Ainsi, d'après le schéma d'axiomes de remplacement, X est bien un ensemble.
Soit $(F, <_F)$ un élément de X. On a F segment initial de F et $\leqslant_F$ est égale à elle-même restreinte à l'ensemble total F ! Ainsi, $(F, <_F) \leqslant (F, <_F)$, d'où la transitivité.
   • Soit $(F, <_F)$ et $(G, <_G)$ tels que $(F, <_F) \leqslant (G, <_G)$ et $(G, <_G) \subset (F, <_F)$. On a alors F segment initial de G et G segment initial de F, donc en particulier, $F \subset G$ et $G \subset F$, d'où $F = G$. Dire que la restriction de $<_G$ à $F = G$ est égale à $<_F$ revient alors à dire que les deux relations l'ordre sont égales. Ainsi, $(F, <_F) = (G, <_G)$. Cela prouve l'antisymétrie.
   • Soit $(F, <_F)$, $(G, <_G)$ et $(H, <_H)$ tels que $(F, <_F) \leqslant (G, <_G)$ et $(G, <_G) \leqslant (H, <_H)$. Alors F est segment initial de G, et G est segment initial de H. Soit alors $x \in F$ et $z \in G$ tel que $z < x$. Comme $F \subset G$, et comme G est segment initial de H, onen déduit que $z \in G$ puis comme F est segment initial de G, $z \in F$. Cela prouve que F est segment initial de H.
De plus, pour tout $(x, y) \in F \times F$, $x <_F y \Longleftrightarrow x <_G y$ (car la restriction de $<_G$ à F coïncide avec $<_F$), et de même $x <_G y \Longleftrightarrow x <_H y$. Par transitivité de l'implication, on peut donc en déduire que la restriction de $<_H$ à F coïncide avec $<_F$. Ainsi, $(F, <_F) \leqslant (H, <_H)$.

On en déduit que $\boxed{\leqslant \text{ est une relation d'ordre sur } X.}$

2. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de X, c'est-à-dire un sous-ensemble totalement ordonné. On définit

$$A = \bigcup_{(F, \leqslant_F) \in \mathcal{C}} F.$$

Ainsi, pour tout (x, y) de $A \times A$, il existe $(F, <_F)$ et $(G, <_G)$ dans $\mathcal{C}$ tels que $x \in F$ et $y \in G$. Comme $\mathcal{C}$ est totalement ordonné, on peut supposer $(F, <_F) \geqslant (G, <_G)$, le cas opposé étant similaire. On a alors x et y éléments de F. Ainsi, pour tout $(x, y) \in A$, il existe un élément $(F, <_F)$ de $\mathcal{C}$ tel que x et y soient tous deux éléments de F.

On définit alors une relation d'ordre sur A en posant $x <_A y$ si et seulement si $x <_F y$ dans un ensemble ordonné $(F, <_F)$ de $\mathcal{C}$ contenant simultanément x et y. On remarque que cette définition ne dépend par du choix de F, puisque si on considère un autre ensemble $(F', <_{F'})$, l'un est plus petit que l'autre, et les deux ordres sont identiques sur le plus petit des deux. Il n'est pas difficile de s'assurer que c'est bien une relatin d'ordre (strict).

Montrons que $<_A$ est un bon ordre sur A. Deux éléments sont toujours comparables, car ils le sont dans un F contenant simultanément x et y, l'ordre $<_F$ étant total.

Soit B un sous-ensemble non vide de A, et x un élément de B. Soit $(F, <_F)$ un élément de $\mathcal{C}$ tel que $x \in F$. L'ensemble $B \cap F$ est alors un sous-ensemble non vide de F, qui est bien ordonné. Donc $B \cap F$ admet un minimum m pour $<_F$. Montrons que ce minimum est aussi un minimum de B. Soit $y \in B$. Si $y \geqslant x$, alors puisque $x \geqslant m$ par définition de m, on obtient $y \geqslant m$ (la relation considérée étant ici la relation d'ordre large associée à $<_A$). Sinon, on a $y < x$ (car l'ordre est total). Si $y \notin F$, il existe $(G, <_G)$ dans $\mathcal{C}$ tel que $y \in G$. Puisque $\mathcal{C}$ est totalement ordonné, et que $G \not\subset F$ (à cause de y), on en déduit que F est segment initial de G. Mais les conditions $x \in F$ et $y < x$ amènent alors $y \in F$, d'où une contradiction. On en déduit que nécessairement, $y \in F$, et donc $y \in B \cap F$. Par définition de m on peut conclure que $m \leqslant y$. Ainsi, m est le minimum de B.

Ainsi, $(A, <_A)$ est bien ordonné.

Montrons que $(A, <_A)$ est un majorant de $\mathcal{C}$. Soit $(F, <_F)$ un élément de $\mathcal{C}$. On a $F \subset A$, et par définition, l'ordre sur F est la restriction de l'ordre sur A. On le notera donc sans indexation. Montrons que F est un segment initial de A. Cela découle d'un argument similaire à celui qu'on vient de faire : soit $x \in F$, et $y \in A$ tel que $y < x$. Alors il existe $(G, <_G)$ dans $\mathcal{C}$ tel que $y \in G$. Si on suppose que $y \notin F$, on n'a pas $G \subset F$. Comme l'ordre est total sur $\mathcal{C}$, F est segment initial de G et l'inégalité $y < x$ amène $y \in F$, d'où une contradiction. Ainsi, $y \in F$. Il en résulte que F est segment initial de A, puis que $(F, <_F) \leqslant (A, <_A)$.

Ainsi, $(A, <_A)$ est un majorant de $\mathcal{C}$.

On en déduit que $\boxed{X \text{ est inductif.}}$

3. Le lemme de Zorn nous assure alors l'existence d'un élément maximal $(M, <_M)$ dans X. Soit un tel élément maximal. On va montrer que M est nécessairement égal à E. Si ce n'est pas le cas, il existe $x \in E \setminus M$. On définit alors $M' = M \cup \{x\}$, et on définit un ordre sur M', coïncidant avec celui de M lorsque (y, z) est dans M^2 et tel que tout élément de M soit strictement inférieur à x. L'ordre ainsi obtenu est bien total, et tout sous-ensemble B non vide de M' admet un élément minimum, égal au minimum de $B \cap M$ si cet ensemble est non vide et à x sinon (car dans ce dernier cas, on a $B = \{x\}$). Ainsi M' est un ensemble bien ordonné prolongeant M, d'où une contradiction à la maximalité de M. On en déduit que $M = E$.

   Ainsi, on vient de contruire un bon ordre sur E.

   On peut donc affirmer que $\boxed{\text{tout ensemble } E \text{ peut être muni d'un bon ordre}}$.

4. Soit E un ensemble. Munissons-le d'un bon ordre. La question III-9 permet d'affirmer que E est équipotent à un ordinal λ. Or, d'après V-5, λ est équipotent à $\lambda \times \lambda$. La question V-3 permet aussi d'affirmer que $\lambda \times \lambda$ et $E \times E$ sont équipotents. Ainsi, $\boxed{E \text{ et } E \times E \text{ sont équipotents}}$.