FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

♦ ***Exercice 1.*** [∘]
Calculer

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right),\qquad \arctan(-1),\qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$$

On a

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4},\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4},\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6},\qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3},$$

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3},\qquad \arctan(-1)=-\frac{\pi}{4},\qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6},\qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot$$

♦ ***Exercice 2.*** [∘]
Calculer

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right),\qquad \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right),\qquad \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right),\qquad \arctan\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)\cdot$$

On a

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\qquad \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3},\qquad \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4},\qquad \arctan\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}\cdot$$

♦ ***Exercice 3.*** [⋆]
Démontrer la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\cdot$$

On va en fait démontrer que

$$\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}=4\arctan\frac{1}{5}\cdot$$

En utilisant la formule

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},$$

on a

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}\right)=\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}}=\frac{240}{238}=\frac{120}{119}$$

et

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{2\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(2\arctan\frac{1}{5}\right)}=\frac{2\times\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}}{1-\left(\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right)^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}=\frac{120}{119},$$

donc $\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{1}{239}$ et $4\arctan\dfrac{1}{5}$ ont la même tangente, ce qui démontre qu'ils diffèrent d'un multiple de π.

Or $0<\dfrac{1}{239}<1$, donc $0<\arctan\dfrac{1}{239}<\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ en vertu de la croissance de la fonction arctan. Donc

$$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}<\frac{\pi}{2}.$$

De plus, $0<\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0<\arctan\dfrac{1}{5}<\dfrac{\pi}{6}$. Donc

$$0<4\arctan\frac{1}{5}<\frac{2\pi}{3}.$$

Il s'ensuit que

$$-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{5}<\frac{\pi}{4}.$$

Comme le seul multiple de π qui soit entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ est 0, on a bien

$$\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}=4\arctan\frac{1}{5}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.}$$

À l'aide de cette formule et du développement $\forall x\in[-1;1],\ \arctan(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, *John Machin calcula les* 100 *premières décimales de* π *en 1706.*

♦ **Exercice 4.** [○]
En remarquant que $\arccos x \underset{x\to1}{\sim} \sin(\arccos x)$, donner un équivalent de $\arccos x$ en 1.

Comme $\arccos x$ tend vers 0 quand x tend vers 1 et comme $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$, on a bien

$$\arccos x \underset{x\to1}{\sim} \sin(\arccos x).$$

Pour $\theta\in[0;\pi]$, on a $\sin\theta=+\sqrt{1-\cos^2\theta}$, donc, comme $\forall x\in[-1;1],\ \arccos x\in[0;\pi]$, on a, pour tout $x\in[-1;1]$,

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}.$$

Donc

$$\arccos x \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{1-x^2}$$

Or, si l'on pose $x=1-h$ avec $h\longrightarrow0$, on a

$$\sqrt{1-(1-h)^2}=\sqrt{2h-h^2}\underset{h\to0}{\sim}\sqrt{2h},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1-x^2}\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{2(1-x)}.$$

Donc

$$\boxed{\arccos x \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}.}$$

♦ ***Exercice 5.*** [○]

Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité, ainsi que la dérivée, des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x} - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})$$

1. On a

$$f(x) \text{ défini} \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \in [-1;1] \end{cases} \iff x \in [0;1],$$

donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = [0;1].}$$

D'après les théorèmes généraux de continuité, on peut affirmer que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0;1].}$$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, on sait que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0;1[.}$$

En 0 et en 1, on a une incertitude de dérivabilité
Pour tout $x \in]0;1[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} + \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On constate que

$$f'(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

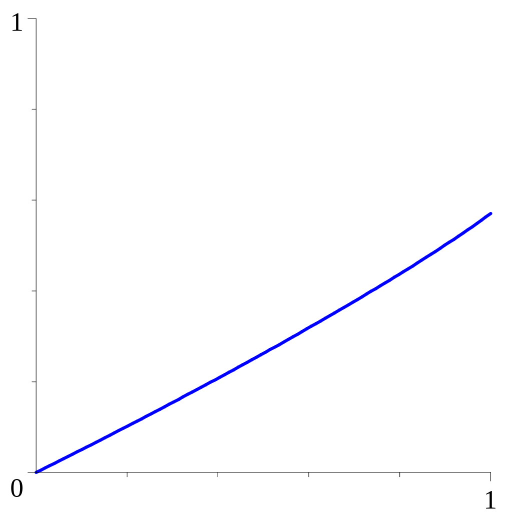
et

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{\arcsin 1}{2} = \frac{\pi}{4},$$

donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0;1] \text{ et } \forall x \in [0;1],\ f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0;1], \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$

Graphiquement, on obtient



2. On a clairement

$$\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}_+.}$$

D'après les théorèmes généraux de continuité, on sait que

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

et, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité, on peut affirmer que

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

En 0, il y a un point d'incertitude.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+x)}\cdot}$$

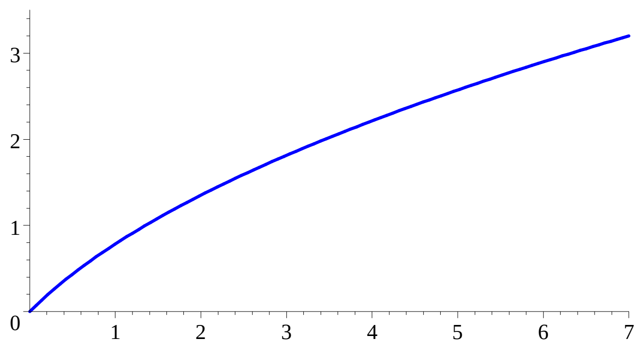
Par ailleurs, on a

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})-0}{x-0} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$

donc

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 1.}$$

Graphiquement, on obtient



♦ ***Exercice 6.*** [○]
Étudier la fonction

$$f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\cdot$$

Le nombre $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x \geqslant 0$ et

$$-1 \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1 \iff -1-x \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 1+x \iff \begin{cases} x+2\sqrt{x}+1 \geqslant 0 \\ x-2\sqrt{x}+1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2 \geqslant 0 \\ (\sqrt{x}-1)^2 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}_+,$$

donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+.}$$

Les théorèmes généraux de continuité nous permettent d'affirmer que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f est dérivable lorsque $x > 0$ et

$$-1 < \frac{2\sqrt{x}}{1+x} < 1 \iff -1 - x < 2\sqrt{x} < 1 + x \iff \begin{cases} x + 2\sqrt{x} + 1 > 0 \\ x - 2\sqrt{x} + 1 > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2 > 0 \\ (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \end{cases} \iff x \in \,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[\,,$$

donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[.}$$

Notons que les théorèmes généraux ne disent rien de ce qui se passe en 0 et 1.

Pour tout $x \in \,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{(1/\sqrt{x})(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)^2}},$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[\,, \qquad f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|}\cdot}$$

On en déduit que $\forall x \in \,]0;1[\,,\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in \,]1;+\infty[\,,\ f'(x) < 0$ donc que

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;1[\text{ et strictement décroissante sur }]1;+\infty[.}$$

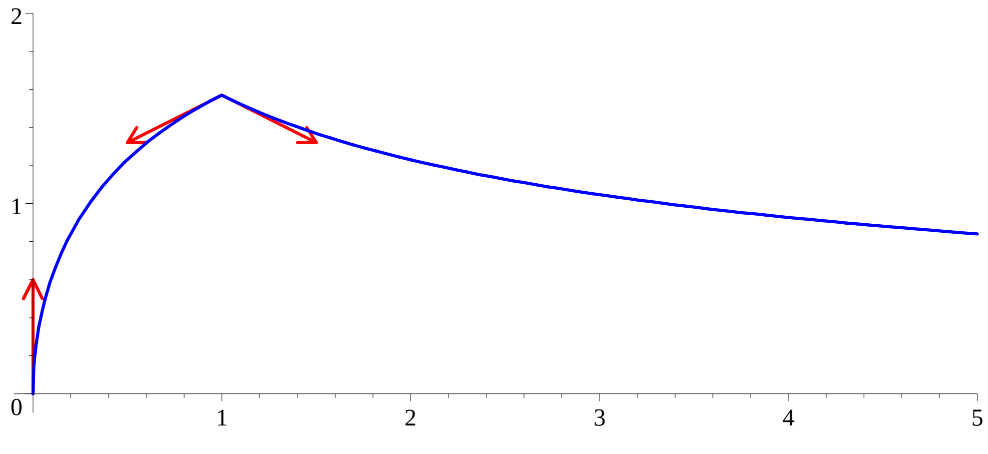
Par ailleurs, on constate que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot$$

Donc

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

Graphiquement, on obtient



♦ ***Exercice 7.*** [∘]
En vous aidant des « deux » dérivées de la fonction tan, démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

1. On sait que

$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}\cdot}$$

Pour tout $\theta \in]-\pi/2;\pi/2[$, on a donc

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)},$$

c'est-à-dire

$$\cos(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}\cdot$$

Comme $\forall \theta \in]-\pi/2;\pi/2[\,,\ \cos\theta \geqslant 0$, on en déduit que

$$\boxed{\forall \theta \in]-\pi/2;\pi/2[\,, \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}\cdot}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x) \in]-\pi/2;\pi/2[$, il est légitime d'utiliser la formule de la question précédente avec $\theta = \arctan(x)$. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\big(\arctan(x)\big)}}\cdot$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan\big(\arctan(x)\big) = x$, il s'ensuit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \tan\big(\arctan(x)\big) \times \cos\big(\arctan(x)\big),$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot}$$

Remarque : On peut aussi démontrer cette formule directement en utilisant une fonction. Pour cela, on pose

$$\varphi(x) = \sin\big(\arctan(x)\big) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

La fonction φ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\cos\big(\arctan(x)\big) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - x\frac{-\frac{1}{2}\times 2x}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \qquad \text{d'après a) } \beta] \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\varphi(0) = \sin\big(\arctan(0)\big) - \frac{0}{\sqrt{1+0^2}} = \sin(0) - 0 = 0,$$

on peut préciser que φ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot}$$

♦ ***Exercice 8.*** [○]
Démontrer la relation suivante sur un intervalle que l'on précisera

$$\arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Considérons la fonction

$$f(x) = \arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x).$$

Il est clair que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2 \geqslant 1$, $y \longmapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z \longmapsto \arctan z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + 2\Big(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1\Big)\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2(x-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}\big(1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2\big)} \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2(x-\sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{1+x^2}\big(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\big)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}\Big(1 + \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cela prouve que f est constante sur $\mathbb{R}$. Or

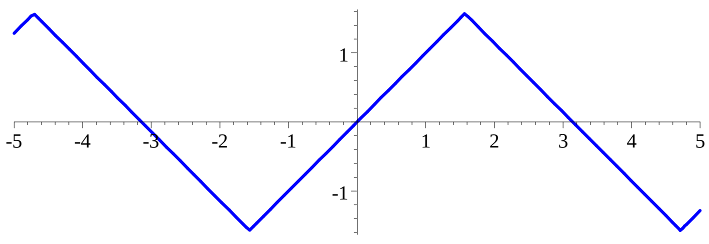
$$f(0) = \arctan 0 + 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Donc

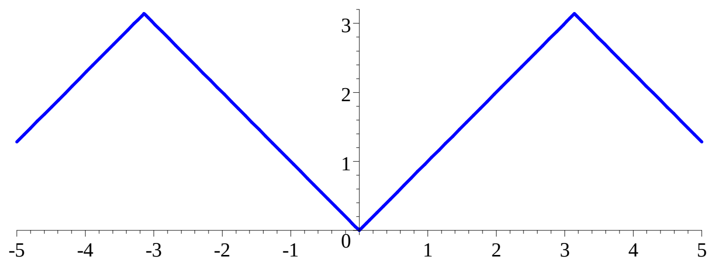
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

♦ ***Exercice 9.*** [○]
Tracer les graphes de $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$, $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ et $x \longmapsto \arctan(\tan x)$.

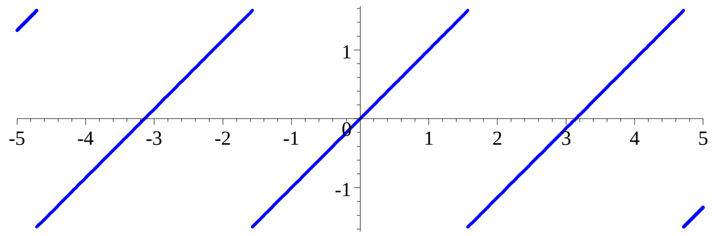
La fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ est 2π-périodique et impaire. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0;\pi]$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x)$ est l'angle compris entre $[-\pi/2;\pi/2]$ qui a le même sinus que x. Donc $\forall x \in [0;\pi/2]$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\forall x \in [\pi/2;\pi]$, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Graphiquement, on obtient



La fonction $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ est 2π-périodique et paire. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0;\pi]$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arccos(\cos x)$ est l'angle compris entre $[0;\pi]$ qui a le même cosinus que x. Donc $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$. Graphiquement, on obtient



La fonction $x \longmapsto \arctan(\tan x)$ est π-périodique et impaire sur $\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0; \pi/2[$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tan x)$ est l'angle compris entre $]-\pi/2; \pi/2[$ qui a la même tangente que x. Donc $\forall x \in [0; \pi/2[\,,\ \ \arctan(\tan x) = x$. Graphiquement, on obtient



♦ ***Exercice 10.*** [$\circ$]
Résoudre l'équation

$$\arccos x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{6}\cdot$$

L'ensemble de définition de l'équation est

$$\mathscr{D} = [-1/2; 1/2]\,.$$

Pour $x \in [-1/2; 1/2]$, on a

$$\begin{array}{lll}
& \arccos x + \arcsin 2x = \dfrac{\pi}{6} & \\
\Longrightarrow & \sin(\arccos x + \arcsin 2x) = \sin \dfrac{\pi}{6} & \\
\Longleftrightarrow & \sin(\arccos x)\cos(\arcsin 2x) + \cos(\arccos x)\sin(\arcsin 2x) = \dfrac{1}{2} & \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} + x(2x) = \dfrac{1}{2} & \\
\Longleftrightarrow & 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = 1 - 4x^2 & \\
\Longleftrightarrow & 4(1-x^2)(1-4x^2) = (1-4x^2)^2 & \begin{array}{l}\text{on a } 1-4x^2 \geqslant 0 \\ \text{puisque } x \in [-1/2; 1/2]\end{array} \\
\Longleftrightarrow & 4 - 20x^2 + 16x^4 = 1 - 8x^2 + 16x^4 & \\
\Longleftrightarrow & x^2 = 1/4 & \\
\Longleftrightarrow & x = \pm 1/2, &
\end{array}$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\text{les solutions possibles de l'équation } \arccos x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{6} \text{ sont } -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2}\cdot}$$

Or

$$\arccos\frac{1}{2}+\arcsin 1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}\neq\frac{\pi}{6}$$

et

$$\arccos\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\arcsin(-1)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

donc

$$\boxed{\text{la seule solution de l'équation } \arccos x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{6} \text{ est } x=-\frac{1}{2}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆] (Polynômes de Tchebychev de première espèce)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère

$$t_n : x\longmapsto\cos(n\arccos x).$$

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$, quel est lien entre la fonction t_n et l'antilinéarisation de $\cos(n\theta)$?
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction t_n ?
3. Calculer t_0, t_1 et démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[-1;1],\qquad t_{n+2}(x)=2xt_{n+1}(x)-t_n(x).$$

   En déduire l'antilinéarisation de $\cos(4\theta)$ (où $\theta\in\mathbb{R}$).
4. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, t_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

   Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n\in\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale coïncide avec la fonction t_n sur $[-1;1]$.
5. Chercher les zéros de la fonction t_n et en déduire la factorisation sur $\mathbb{R}$ de T_n.

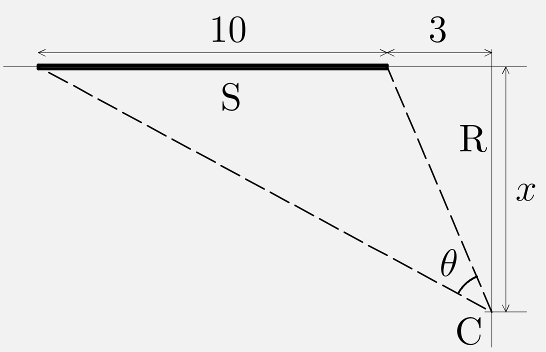
   Application : Donner la valeur du produit

$$\pi_n=\prod_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big).$$

A faire.

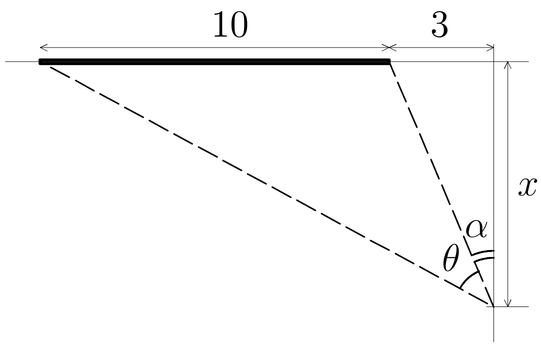
♦ ***Exercice 12.*** [⋆] (Angle optimal)

La caméra C peut se déplacer sur un rail fixe R. On désire filmer une scène S. Les données sont portés sur le dessin ci-dessous :



Calculer l'angle θ sous lequel est vue la scène et en déduire la valeur de x pour laquelle θ est maximum.

On considère l'angle α désigné ci-dessous



La formule donnant la tangente comme le quotient du côté opposé sur le côté adjacent nous dit que

$$\tan \alpha = \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad \tan(\alpha + \theta) = \frac{13}{x}\cdot$$

On en déduit que

$$\alpha = \arctan \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad \alpha + \theta = \arctan \frac{13}{x},$$

donc

$$\theta = \arctan \frac{13}{x} - \arctan \frac{3}{x}\cdot$$

La fonction $\theta : x \longmapsto \arctan \frac{13}{x} - \arctan \frac{3}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= -\frac{13}{x^2}\frac{1}{1+(13/x)^2} + \frac{3}{x^2}\frac{1}{1+(3/x)^2} \\ &= -\frac{13}{x^2+169} + \frac{3}{x^2+9} \\ &= \frac{10(39-x^2)}{(x^2+169)(x^2+9)} \end{aligned}$$

donc

x	0		$\sqrt{39}$		$+\infty$
$\theta'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$\theta(x)$	$\|$ 0	$\nearrow$	$\theta(\sqrt{39})$	$\searrow$	0

En conclusion,

$$\boxed{\theta \text{ est maximum lorsque } x = \sqrt{39}\,\text{m}.}$$