Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 11 h 30

LIMITE D'UNE SUITE

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

MPSI – Lycée Henri IV – Sébastien Kerner

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- la droite réelle ;
- les suites.

Dans tout ce chapitre, à l'exception de la section G., les suites considérées sont réelles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Limites

A.1. Convergence et divergences

La définition suivante introduit les comportements asymptotiques possibles dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une suite.

Définition 1

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ lorsque, étant donné un voisinage quelconque de ℓ, on peut assurer que u_n est dans ce voisinage à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\forall W_\ell \in \mathscr{V}_\ell, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad u_n \in W_\ell$$

où $\mathscr{V}_\ell$ désigne l'ensemble de tous les voisinages de ℓ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit,

- si $\ell \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,;$$

- si $\ell = +\infty$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant N, \qquad u_n \geqslant A\,;$$

- si $\ell = -\infty$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $-\infty$ lorsque $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant N, \qquad u_n \leqslant A.$$

Le nombre ℓ est alors unique et s'appelle la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ce que l'on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et vers $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$. D'après le lemme de séparation des voisinages vu dans le cours sur la droite réelle, on peut trouver un voisinage W_{ℓ_1} de ℓ_1 et un voisinage de W_{ℓ_2} de ℓ_2 tels que $W_{\ell_1} \cap W_{\ell_2} = \varnothing$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ_1 et ℓ_2, on sait qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1,\ u_n \in W_{\ell_1}$ et $\forall n \geqslant N_2,\ u_n \in W_{\ell_2}$. Mézalors, pour $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, le terme u_n est à la fois dans W_{ℓ_1} et dans W_{ℓ_2}, c'est-à-dire dans $W_{\ell_1} \cap W_{\ell_2} = \varnothing$. C'est absurde ! Donc $\ell_1 = \ell_2$, ce qui assure l'unicité de la limite, en cas d'existence. ■

Dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, c'est dire que quelle que soit la marge d'erreur $\varepsilon > 0$ que l'on s'impose, il existe un rang au delà duquel tous les termes de la suite approchent ℓ à ε près.

Dire que (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), c'est dire que quel que soit l'altitude (la profondeur) que l'on s'impose, il existe un rang au delà duquel, tous les termes de la suite sont au dessus (respectivement en dessous) de cette altitude (respectivement de cette profondeur).

L'intérieur d'un voisinage étant encore un voisinage, le sens de la définition précédente n'est pas modifié lorsque l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. De même, pour la limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$), cela ne change rien lorsqu'on remplace « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \in \mathbb{R}_+$ » (respectivement « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \in \mathbb{R}_-$ »).

Par ailleurs, la notion de limite n'exige le contrôle des termes de la suite qu'à partir d'un certain rang. Du coup, le comportement d'une suite lorsque n tend vers $+\infty$ ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite : cela traduit le caractère asymptotique de la notion de limite.

La limite d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un nombre indépendant de n. Ainsi l'écriture $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{n}$ n'a aucun sens !!

On remarque que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $(u_n - \ell)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Nous reviendrons sur cette remarque, qui peut être très utile en pratique.

La définition suivante précise le vocabulaire de la convergence et des divergences.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

Lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite finie ℓ, on dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ (ou qu'elle est convergente vers ℓ).

Lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite infinie $\pm\infty$, on dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $\pm\infty$ (ou qu'elle est divergente vers $\pm\infty$). Une telle divergence est dite de première espèce.

Enfin, lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de limite (ni finie ni infinie), on dit encore que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge (ou qu'elle est divergente). Une telle divergence est dite de seconde espèce ou sévère.

Certains auteurs (de livres ou de cours glanés sur internet) utilisent l'expression « converger vers $\pm\infty$ », au sens de la convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$. Cela permet en particulier d'interpréter la divergence de seconde espèce comme une divergence plus « sévère » que celle de première espèce, puisqu'elle concerne les suites qui divergent aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Toutefois, du point de vue du vocabulaire, cela contribue à entretenir dans certains énoncés un flou sur la notion de convergence (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\overline{\mathbb{R}}$???). Pour cette raison, nous resterons strict sur le vocabulaire : dire qu'une suite converge, cela signifie qu'elle admet une limite finie. Dans les autres cas, on dit que la suite diverge, en précisant si besoin l'espèce de divergence.

Il est utile de garder à l'esprit qu'il existe a priori trois comportements asymptotiques : la convergence (tendre vers une limite finie), la divergence de première espèce (tendre vers un infini) et la divergence de seconde espèce (qui correspond généralement à une divergence plus sévère associée à des oscillations, parfois régulières, parfois erratiques).

Il est en effet classique de démontrer que l'on est dans l'une de ces trois situations non pas en démontrant que cette situation a lieu mais en excluant les deux autres. Ainsi, pour démontrer qu'une suite converge, il est parfois plus simple de rejeter les deux formes de divergence.

Lorsqu'on étudie une suite, il convient de ne pas parler de sa limite sans avoir au préalable vérifier qu'elle existe ! En particulier, le symbole « lim », qui apparaît parfois dès le début de votre étude, a le défaut de présupposer l'existence de la limite. Pour éviter toute ambiguïté, on travaille sur le terme général de la suite et on ne passe à la limite qu'une fois l'existence de la limite acquise. Dans bien des cas, le symbole « lim » n'apparaît donc que dans la conclusion du calcul.

Exemples :

- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite qui stationne à la valeur $a \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers a.
- La suite $(n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

  Plus généralement, une suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = u_0 + rn$ tend vers $+\infty$ lorsque $r > 0$ et vers $-\infty$ lorsque $r < 0$.
- La suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Démontrons le.

  Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité $|1/n - 0| \leqslant \varepsilon$ est équivalente à $n \geqslant 1/\varepsilon$. Par conséquent, on pose $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $0 \leqslant 1/n \leqslant 1/N \leqslant \varepsilon$, d'où $|1/n - 0| \leqslant \varepsilon$.
- La suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ de raison $-1 < q < 1$ converge vers 0. Démontrons le.

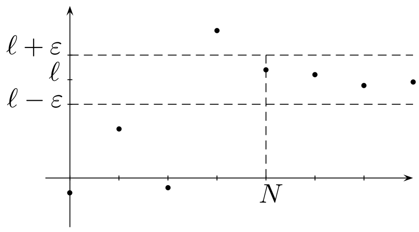
  Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité $|q^n - 0| \leqslant \varepsilon$ équivaut à $n \geqslant (\ln \varepsilon)/(\ln |q|)$. Par conséquent, on pose $N = \lfloor (\ln \varepsilon)/(\ln |q|) \rfloor + 1$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $0 \leqslant |q^n - 0| = |q|^n \leqslant |q|^N \leqslant \varepsilon$.
- La suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ de raison $q > 1$ diverge vers $+\infty$. Démontrons le.

  Soit $A > 0$. L'inégalité $q^n \geqslant A$ est équivalente à $n \geqslant (\ln A)/(\ln q)$. Par conséquent, on pose $N = \lfloor (\ln A)/(\ln q) \rfloor + 1$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $q^n \geqslant q^N \geqslant A$.
- Une suite d'entiers relatifs qui converge stationne.

  En effet, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs $\mathbb{Z}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, on choisit $\varepsilon = 1/3$ dans la définition de la convergence pour avoir $u_n \in [\ell - 1/3 ; \ell + 1/3]$ à partir d'un certain rang N. Comme $[\ell - 1/3 ; \ell + 1/3]$ ne contient qu'un entier, on a $\forall n \geqslant N,\ u_n = u_N \in \mathbb{Z}$.

A.2. Encadrement d'une suite convergente

La définition de la convergence signifie graphiquement que toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y = \ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Le lemme suivant, quelquefois appelé lemme du tunnel, généralise ce résultat au cas d'une bande horizontale quelconque (i.e. non nécessairement centrée en ℓ).



Lemme 1

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et a, b deux nombres réels. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel ℓ tel que $a < \ell < b$, alors il existe un rang $N \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in]a; b[$.

■ Posons $\varepsilon = \min\{b-\ell; \ell-a\}$ de sorte que $]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[\subset]a; b[$. La définition de la convergence vers ℓ appliquée avec cet ε fournit l'existence d'un rang N tel qu'à partir de ce rang, les termes de la suite appartiennent à $]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[$ et donc aussi à $]a; b[$. ■

Il est crucial que le tunnel dans lequel vous enfermez la limite n'admette pas cette limite pour extrémité ! En effet, lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, elle peut certes le faire par « au dessus » (auquel cas $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant \ell$) ou par « en dessous » (auquel cas $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \ell$) mais elle peut aussi le faire en oscillant autour de cette limite (on parle d'oscillation amortie par analogie avec la physique) et vous ne pourrez pas, dans ce cas, trouvé un tunnel de la forme $]a; \ell[$ ou $]\ell; b[$ qui convienne.

L'exemple ci-dessous est une application typique de ce lemme.

Exemples :

- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite strictement positive ℓ, alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang. Il suffit de prendre $a = \ell/2$ dans le lemme précédent pour s'en convaincre.

On peut aussi utiliser le lemme du tunnel pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

■ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. D'après le lemme 1, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$. Alors, $\min\{u_0, u_1, \ldots, u_N, \ell-1\}$ est un minorant et $\max\{u_0, u_1, \ldots, u_N, \ell+1\}$ est un majorant de la suite. La suite est donc bien bornée. ■

La réciproque de cette proposition est fausse. Nous verrons par exemple que $\big((-1)^n\big)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas alors qu'elle est bien évidemment bornée.

B. Théorèmes généraux sur les limites

On regroupe ici les théorèmes généraux qui permettent de déterminer la limite d'une suite qui est la composée, la somme, le produit ou le quotient de suites qui possèdent des limites finies ou infinies.

B.1. Composition des limites

Dans ce sous-paragraphe, nous présentons par avance un résultat du cours sur les fonctions. Nous utilisons la notion de limite d'une fonction telle qu'elle a été vue en Terminale.

Théorème 1

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

■ Voir le cours sur les limites de fonctions. ■

La « réciproque » de ce théorème est fausse en général. Si $(\tan u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$, vous ne pouvez pas en déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\pi/2$ en utilisant l'argument que tan tend vers $+\infty$ en $\pi/2$. Tout simplement parce que tan tend vers $+\infty$ en différents endroits.

Exemples :

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/2)^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(1/2)^n} = 1$.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1/n) = -\infty$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers π, alors la suite $({u_n}^2)_{n\geqslant 0}$ converge vers π^2.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors, en composant par la fonction valeur absolue, on obtient que $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ tend vers $|\ell|$.

  On peut en fait démontrer ce résultat « à la main ». Traitons le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dès lors, pour tout $n \geqslant N$, on a $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire renversée. Cela démontre bien que $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ tend vers $|\ell|$.

  Notons que la réciproque est fausse puisque la divergence de la suite $\big((-n)^n\big)$ est de seconde espèce (nous le verrons) alors que sa valeur absolue diverge vers $+\infty$.

  Cependant, la réciproque est vraie dans le cas où $\ell = 0$. En effet, la convergence de $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ vers 0 implique bien celle de u_n vers 0. C'est la définition de la convergence qui le dit ! 1 h 15

B.2. Opérations sur les limites

Le théorème suivant rassemble les résultats opératoires (addition, multiplication et quotient) sur les limites. Avant d'en prendre connaissance, il peut être utilise de relire la partie du cours sur la droite réelle concernant les opérations algébriques dans $\overline{\mathbb{R}}$, en particulier pour avoir en tête les opérations qui correspondent à des formes indéterminées.

Théorème 2

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites qui tendent respectivement vers $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

(i) pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$;

(ii) si $\ell_1\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la suite $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell_1\ell_2$;

(iii) si ℓ_1/ℓ_2 n'est pas une forme indéterminée et si la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ est définie (au moins à partir d'un certain rang), alors $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ_1/ℓ_2.

■ Nous faisons la démonstration dans le cas où $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Le cas des limites infinies est laissé en exercice.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. On écrit que, pour tout $n \geqslant 0$, $(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2) = \lambda(u_n - \ell_1) + \mu(v_n - \ell_2)$ et l'on note que les suites $(u_n - \ell_1)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n - \ell_2)_{n\geqslant 0}$ tendent vers 0. Par suite, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1$, $|\lambda(u_n - \ell_1)| \leqslant \varepsilon/2$ et $\forall n \geqslant N_2$, $|\mu(v_n - \ell_2)| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a alors $\forall n \geqslant N$, $|\lambda(u_n - \ell_1) + \mu(v_n - \ell_2)| \leqslant |\lambda(u_n - \ell_1)| + |\mu(v_n - \ell_2)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n v_n - \ell_1\ell_2 = (u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)$. Comme $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, la suite $(|v_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée, disons par $M > 0$. Par ailleurs, les suites $(u_n - \ell_1)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n - \ell_2)_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0 donc il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1$, $|M(u_n - \ell_1)| \leqslant \varepsilon/2$ et $\forall n \geqslant N_2$, $|\ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. On peut alors écrire que, pour tout $n \geqslant N$, $|(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant |(u_n - \ell_1)v_n| + |\ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant |M(u_n - \ell_1)| + |\ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc $\lim(u_n v_n) = \ell_1\ell_2$.

(iii) On traite le cas $\ell_2 \neq 0$ en laissant le cas $\ell_2 = 0$ en exercice. La convergence de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ_2 donne l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $|v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon|\ell_2|^2/2$. Cette même convergence, associée au lemme du tunnel, dit qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|v_n| \geqslant |\ell_2|/2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $\left|\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\ell_2}\right| = \dfrac{|\ell_2 - v_n|}{|v_n|\,|\ell_2|} \leqslant \dfrac{\varepsilon|\ell_2|^2/2}{(|\ell_2|/2)\,|\ell_2|} = \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim(1/v_n)_{n\geqslant 0} = 1/\ell_2$. Alors, d'après (ii), $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0} = (u_n)_{n\geqslant 0} \times (1/v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell_1 \times (1/\ell_2) = \ell_1/\ell_2$. ■

En particulier, on peut retenir qu'une somme de suites convergentes est convergente et sa limite est la somme des limites ; qu'un produit de suites convergentes est convergent et sa limite est le produit des limites et qu'un quotient de suites convergentes, la limite du dénominateur étant non nulle, est convergent et sa limite est le quotient des limites.

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. Autrement dit, lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ diverge. Pour le démontrer, raisonnons par l'absurde en supposant que $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Par soustraction, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0} = (u_n + v_n)_{n\geqslant 0} - (u_n)_{n\geqslant 0}$ est alors convergente, ce qui est absurde.

Par contre, on ne peut rien dire a priori de la somme de deux suites divergentes. Par exemple, les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de termes généraux $u_n = 1 + (-1)^n$ et $v_n = 1 - (-1)^n$ divergent (cela découle de la divergence de $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ que nous verrons) pourtant leur somme converge (c'est la suite constante égale à 2) et leur produit converge aussi (c'est la suite nulle).

Pour résumer, on peut retenir les règles suivantes :

CV+CV=CV **CV+DV=DV** **DV+DV=??**

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, tous les comportements asymptotiques sont possibles. Ainsi, dans le cas de la forme indéterminée $+\infty - \infty$, on peut obtenir une limite finie lorsque, par exemple, $u_n = n$ et $v_n = 3 - n$; une limite infinie lorsque, par exemple, $u_n = n$ et $v_n = \sqrt{n} - n$; pas de limite lorsque, par exemple, $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$. L'encadré suivant vous explique la démarche générale à adopter face à une forme indéterminée.

Forme indéterminée = Forme à déterminer

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, il faut lever cette indétermination en transformant l'expression du terme général de la suite pour faire disparaître, par simplification, le problème.

Un conseil qui peut parfois servir : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, il peut être plus judicieux de démontrer que $(u_n - \ell)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Exemples :

- Étudions le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = (n+1/n)^2 - n^2$. Telle quelle, l'expression de la suite conduit, selon les règles opératoires du théorème 2, à une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. Par contre, le développement du carré : $u_n = n^2 + 2 + 1/n^2 - n^2 = 2 + 1/n^2$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
- Avec la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on a la forme indéterminée $+\infty - \infty$. On utilise alors la technique de la quantité conjuguée, c'est-à-dire que l'on multiplie haut et bas par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, de sorte que
$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
- L'étude du quotient de deux polynômes conduit à une forme indéterminée du type $\pm\infty/\pm\infty$. Pour lever l'indétermination, il suffit de factoriser les monômes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur et d'effectuer les simplications qui s'imposent. On retiendra que le comportement asymptotique d'un quotient de polynômes est le même que celui du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
Ainsi la limite de la suite de terme général $\dfrac{2n^2+n-1}{-n^2+2}$ est la même que celle de $\dfrac{2n^2}{-n^2} = -2$, c'est-à-dire -2. Avec le langage des équivalents que nous verrons bientôt, on simplifiera la rédaction en se contentant d'écrire que $\dfrac{2n^2+n-1}{-n^2+2} \sim \dfrac{2n^2}{-n^2} \sim -2$.

Dernier conseil au sujet des formes indéterminées : je vous encourage à respecter scrupuleusement la recommandation de l'encadré suivant.

Puissance séquentielle nécessite l'exponentielle !

Lorsqu'une suite est définie par une écriture du type ${a_n}^{b_n}$, il faut réécrire la suite sous la forme $\exp\{b_n \ln a_n\}$. Si vous ne respectez pas ce conseil, vous risquez de ne pas reconnaître une forme indéterminée et d'en déduire n'importe quoi !

Exemples :

- La suite $((1+1/n)^n)_{n\geqslant 1}$ conduit à une forme indéterminée car $n\ln(1+1/n)$ en est une. Ainsi, $1^{+\infty}$ est une forme indéterminée, mais il est inutile de le retenir puisque l'écriture exponentielle permet de se ramener à une forme indéterminée multiplicative classique.

On termine ce paragraphe avec le théorème de Cesàro.

Théorème 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, dont le terme général est défini, pour tout $n \geqslant 0$, par

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tend aussi vers ℓ.

■ Nous traitons le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Le cas où $\ell = \pm\infty$ sera vu en exercice.

Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$v_n - \ell = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} - \frac{\ell + \ell + \cdots + \ell}{n+1} = \frac{(u_0 - \ell) + (u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n+1},$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_0 - \ell| + |u_1 - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

La convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité n'étant vraie qu'à partir du rang N, on découpe la somme en deux, ce qui donne, pour tout $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &\leqslant \frac{|u_0 - \ell| + |u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n+1} + \frac{|u_N - \ell| + |u_{N+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1} \\
&\leqslant \frac{N \times M}{n+1} + \frac{(n - N + 1) \times \varepsilon}{n+1} \qquad \text{où } M = \max\{|u_0 - \ell|; |u_1 - \ell|; \ldots; |u_{N-1} - \ell|\} \\
&\leqslant \frac{NM}{n+1} + \varepsilon \qquad \text{car } n - N + 1 \leqslant n + 1.
\end{aligned}$$

Comme $NM/(n+1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{NM}{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N'' = \max\{N; N'\}$. Alors, pour tout $n \geqslant N''$, on peut combiner les inégalités ci-dessus, ce qui donne

$$|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ahlala ! Groß katastroff, on voulait ε et on a 2ε. Pas bien grave en fait, on revient en arrière et on met des $\varepsilon/2$ à la place des ε.

On a donc prouvé que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N'' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N'',\ |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ. ■

B.3. Limites et sous-suites

Rappelons qu'une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où φ est une extraction, c'est-à-dire une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Lemme 2

Soit φ une extraction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geqslant n$.

■ Procédons par récurrence sur l'assertion définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\mathscr{P}(n) : \varphi(n) \geqslant n$.

Initialisation : Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geqslant 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, ce qui implique, d'après l'hypothèse de récurrence, que $\varphi(n+1) > n$, c'est-à-dire $\varphi(n) \geqslant n+1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Si tous les termes d'une suite « vont » vers une limite, il semble logique qu'une partie de ces termes continuent à « se rapprocher » de la limite. C'est le résultat du théorème ci-dessous.

Théorème 4

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend également vers ℓ.

■ Soit W_ℓ un voisinage de ℓ. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in W_\ell$. Comme φ est une extraction, le lemme 2 assure que $\forall n \geqslant N,\ \varphi(n) \geqslant N$, ce qui implique que $u_{\varphi(n)} \in W_\ell$. On a ainsi prouvé que $\forall W_\ell \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_{\varphi(n)} \in W_\ell$, c'est-à-dire $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ. ■

Autrement dit, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Exemples :

- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(u_{n+1})_{n\geqslant 0} = (u_n)_{n\geqslant 1}$ tend également vers ℓ.

La réciproque du théorème ci-dessus est fausse : le fait qu'une suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ possède une limite ℓ ne signifie pas que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers ℓ, ni même qu'elle possède une limite. On peut tout de même dire que ℓ devient la « seule limite possible » de $(u_n)_{n\geqslant 0}$!

Par contre, si deux suites extraites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ont des limites différentes, on est certain que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite. Cette remarque est exploitée dans l'encadré suivant.

Comment établir une divergence de seconde espèce . . .

Pour montrer qu'une suite admet une divergence de seconde espèce, il suffit d'en extraire deux suites dont les comportements asymptotiques diffèrent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemples :

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ admet une divergence de seconde espèce puisque la sous-suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 1 et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tend vers -1.
- Pour des raisons similaires, la suite $((-n)^n)_{n\geqslant 0}$ admet une divergence de seconde espèce. Cela illustre le fait qu'une suite puisse ne pas être bornée sans toutefois tendre vers $\pm\infty$.
- Lorsque $q < -1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ admet une divergence de seconde espèce. En effet, les sous-suites $(q^{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(q^{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tendent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, le théorème 4 nous dit que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent également vers ℓ. La proposition suivante établit la réciproque de ce résultat.

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.

■ Soit W_ℓ un voisinage de ℓ. Comme $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tendent vers ℓ, cela assure l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1,\ u_{2n} \in W_\ell$ et $\forall n \geqslant N_2,\ u_{2n+1} \in W_\ell$. Posons $N = \max\{2N_1, 2N_2+1\}$. Alors, pour tout entier $p \geqslant N$, on a $u_p \in W_\ell$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend donc vers ℓ. ■

De la même façon, si $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ.

Plus généralement, le résultat de cette proposition se généralise de la façon suivante : Si $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ désigne une partition de $\mathbb{N}$ en un nombre fini de sous-ensembles infinis, alors, sous les hypothèses $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in A_1}} u_n = \cdots = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in A_p}} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

B.4. Les théorèmes bidons

L'encadré suivant insiste sur le fait que les théorèmes généraux vus précédemment sont des conditions suffisantes de convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais pas des conditions nécessaires.

Les théorèmes bidons, c'est pas bon !

Il est tout à fait possible d'additionner, de multiplier ou de quotienter des suites sans limite, ou même de composer des suites et des fonctions sans limite ou encore d'extraire une sous-suite d'une suite sans limite, et d'aboutir à une suite qui admet une limite !!

Autrement dit, s'il existe bien des théorèmes généraux sur les limites, il n'existe par contre aucun théorème général sur les « non limites » !

Exemples :

- On a vu que DV+DV= ??
- La suite $(n\pi)$ tend vers $+\infty$ et $x \longmapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ mais la suite $\big(\sin(n\pi)\big)$ n'est pas divergente puisque c'est la suite nulle.
- Une suite extraite d'une suite qui admet une divergence de seconde espèce peut avoir tous les comportements possibles. Ainsi, la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ diverge et la suite extraite constituée des termes d'indices pairs est convergente (c'est la suite constante égale à 1).

C. Limites et relation d'ordre

La plupart des théorèmes de cette section exploitent la relation d'ordre $\leqslant$ de $\mathbb{R}$. Nous verrons qu'il ne peuvent donc pas être généralisés dans $\mathbb{C}$.

C.1. Passage à la limite

On commence par un théorème très simple dont on pourrait taire l'énoncé tant il est évident. Ce résultat est cependant bien utile en pratique : c'est le passage à la limite dans une égalité.

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites qui admettent chacune une limite (finie ou non). Si l'on sait que $\forall n \geqslant 0,\ u_n = v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

■ AQT ■

Le principe du passage à la limite dans une égalité est particulièrement utile pour l'étude des suites définies par récurrence. Nous donnons un exemple ci-dessous et nous y reviendrons au paragraphe E.

Exemples :

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1/(1-u_n)$ ne peut pas converger dans $\mathbb{R}$. En effet, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, un passage à la limite dans la relation de récurrence donnerait $\ell = 1/(1-\ell)$, c'est-à-dire $\ell^2 - \ell + 1 = 0$, ce qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On dispose également d'un théorème de passage à la limite dans les inégalités.

Théorème 5

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites qui admettent chacune une limite (finie ou non). Si $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim u_n > \lim v_n$. On en déduit que $\lim(u_n - v_n) > 0$, ce qui implique que la suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive à partir d'un certain rang. Absurde ! ■

Il est important de bien remarquer que l'existence des limites fait partie des hypothèses. Ainsi, ce théorème fournit la position relative des deux limites mais en aucun cas leur existence !

Même si l'on sait que $\forall n \geqslant 0,\ u_n < v_n$, on ne peut pas en déduire que $\lim u_n < \lim v_n$ mais seulement que $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. On dit que le passage à la limite élargit les inégalités.

Ainsi, les suites de termes généraux $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$ vérifient $\forall n \geqslant 0,\ u_n < v_n$ mais pas $\lim u_n < \lim v_n$ puisqu'elles convergent toutes les deux vers la même limite (à savoir 0).

Le théorème 5 est souvent utilisé lorsqu'une des deux suites est constante. On obtient le résultat décrit par le premier exemple ci-dessous.

Exemples :

- Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle convergente et λ un nombre réel tels que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \lambda$ (respectivement $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant \lambda$). Alors $\lim u_n \leqslant \lambda$ (respectivement $\lim u_n \geqslant \lambda$).
- La limite d'une suite convergente positive ou nulle est positive ou nulle.

3 h 30

C.2. Théorèmes des gendarmes

Le théorème suivant est couramment appelé théorème des gendarmes puisque si deux gendarmes u et w encadrent un prisonier v et vont tous les deux jusqu'à la prison, alors le prisonnier les accompagne nécessairement à la prison.

Théorème 6

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(g_n)_{n\geqslant 0}$ et $(G_n)_{n\geqslant 0}$ trois suites telles que $\forall n \geqslant 0,\ g_n \leqslant u_n \leqslant G_n$. Si $(g_n)_{n\geqslant 0}$ et $(G_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et sa limite est ℓ.

■ Soit $\varepsilon > 0$. Les convergences de $(g_n)_{n\geqslant 0}$ et $(G_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ assurent qu'il existe un entier N_1 tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ell - \varepsilon \leqslant g_n$ et un entier N_2 tel que $\forall n \geqslant N_2,\ G_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ de sorte que $\forall n \geqslant N,\ \ell - \varepsilon \leqslant g_n \leqslant u_n \leqslant G_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. ■

On notera, qu'au contraire du théorème 5, le théorème des gendarmes fournit à la fois la convergence d'une suite et la valeur de sa limite. C'est donc un théorème « puissant ».

Lorsque les deux gendarmes n'ont pas la même limite, on ne peut rien conclure. Par exemple, on a $\forall n \geqslant 1,\ \ -1 - \mathrm{e}^{-n} \leqslant \sin n \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-n}$ mais l'on ne peut en déduire ni la convergence ni la valeur de la limite (et pour cause, $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite !).

Exemples :

- Si $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \varepsilon_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
- Si $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 puisque l'inégalité sur la valeur absolue se traduit par l'encadrement $\forall n \geqslant 0, -\varepsilon_n \leqslant u_n \leqslant \varepsilon_n$.
- Pour $n \geqslant 1$, posons
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$
On encadre S_n en minorant chacun de ses n termes par le plus petit d'entre eux et en majorant ces mêmes termes par le plus grand d'entre eux, ce qui donne
$$\forall n \geqslant 1, \qquad n\frac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n\frac{n}{n^2+1}.$$
Or
$$n\frac{n}{n^2+n} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1 \qquad \text{et} \qquad n\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1,$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

Le théorème des gendarmes implique le résultat suivant, très utile en pratique.

Corollaire 1

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et si $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, alors $(u_n\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend aussi vers 0.

■ La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant bornée, il existe $K \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K$. En multipliant par $|\varepsilon_n|$, on obtient $\forall n \geqslant 0,\ |u_n\varepsilon_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant |u_n\varepsilon_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$. Comme $\lim K|\varepsilon_n| = 0$, le théorème des gendarmes nous dit que $(|u_n\varepsilon_n|)_{n\geqslant 0}$ et donc $(u_n\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. ■

Exemples :

- La suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 puisque $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

On peut étendre le théorème des gendarmes aux cas des suites dont la divergence est de première espèce. On obtient le théorème du gendarme.

Théorème 7

Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites telles que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant v_n$. Alors

(i) si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \geqslant 0}$ diverge également vers $+\infty$;

(ii) si $(v_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \geqslant 0}$ diverge également vers $-\infty$.

■ Démontrons (i). Soit $A \in \mathbb{R}$. La divergence de $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vers $+\infty$ assure l'existence de $N \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$. *A fortiori*, on a $\forall n \geqslant N,\ v_n \geqslant A$, ce qui traduit la divergence de $(v_n)_{n \geqslant 0}$ vers $+\infty$.

(ii) découle de (i) en considérant $(-u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(-v_n)_{n \geqslant 0}$. ■

On constate que ce théorème ne nécessite plus qu'un seul gendarme : pour tendre vers $-\infty$, il faut un gendarme qui vous « appuie sur la tête » et pour tendre vers $+\infty$, il faut un gendarme qui vous « pousse au cul ».

Exemples :

- Pour $n \geqslant 1$, posons
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
En minorant S_n par n fois son plus petit terme, on obtient
$$\forall n \geqslant 1, \qquad S_n \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$
Comme $\lim \sqrt{n} = +\infty$, on a
$$\lim S_n = +\infty.$$

C.3. Théorème de la limite monotone

Le résultat suivant est communément appelé théorème de la limite monotone puisqu'il caractérise le comportement asymptotique des suites croissantes ou décroissantes.

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante. Alors

(i) si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, elle converge vers $\sup\{u_n : n \geqslant 0\}$;

(ii) si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante. Alors

(j) si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée, elle converge vers $\inf\{u_n : n \geqslant 0\}$;

(jj) si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

■ (i) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant majorée, l'ensemble $\{u_n : n \geqslant 0\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de $\ell = \sup\{u_n : n \geqslant 0\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on sait qu'il existe $N \geqslant 0$ tel que $\ell-\varepsilon \leqslant u_N \leqslant \ell$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par ℓ, on en déduit que $\forall n \geqslant N,\ \ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$. On a donc démontré, a fortiori, que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N,\ |u_n-\ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui établit la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée, il existe $N \geqslant 0$ tel que $u_N \geqslant A$. Or $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, d'où $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant u_N \geqslant A$. On a donc démontré que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$, ce qui prouve la divergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers $+\infty$.

(j) On applique (i) en considérant $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ à la place de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

(jj) On applique (ii) en considérant $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ à la place de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. ■

On retiendra généralement les propriétés (i) et (j) sous la forme « toute suite croissante majorée converge » et « toute suite décroissante minorée converge ». En pratique, savoir que la convergence s'effectue vers un supremum n'est pas très utile car on ignore généralement la valeur de celui-ci.

Les propriétés (i), (ii), (j) et (jj) impliquent que toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui est $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ou $\inf_{\overline{\mathbb{R}}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. La monotonie permet donc, à coup sûr, d'éviter la divergence de seconde espèce.

On constate donc que le théorème de la limite monotone apparaît comme un théorème d'existence de limite. Par contre, il ne donne pas la valeur de la limite. En particulier, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par M, on pourra conclure qu'elle converge mais on se gardera bien de dire qu'elle tend vers M !! On pourra juste préciser que $\lim u_n \leqslant M$ grâce au théorème de passage à la limite dans une inégalité.

On comprend, avec ce théorème, que l'étude du comportement asymptotique d'une suite passe souvent par celle de sa monotonie. Pour les fois où vous serez bloqués dans l'étude d'une suite, retenez donc ce conseil :

$\boxed{\text{Penser à étudier la monotonie !}}$

En pratique, les propriétés (i) et (j) s'utilisent telles qu'elles sont énoncées, c'est-à-dire que pour démontrer qu'une suite croissante majorée est convergente, on démontre successivement que la suite est croissante et majorée.

Au contraire, les propriétés (ii) et (jj) s'utilisent indirectement. Autrement dit, pour démontrer qu'une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$, on commence classiquement par démontrer que la suite est croissante. Par contre, il est souvent difficile de démontrer qu'une suite n'est pas majorée. On préfère donc, en général, raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée. La propriété (i) permet alors de dire que la suite est convergente et on peut utiliser l'existence de cette limite pour aboutir à une absurdité.

Les exemples qui suivent illustrent les propos précédents.

Exemples :

- Considérons la suite de terme général
$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
C'est clairement une suite croissante puisque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un nombre strictement positif. De plus, pour tout $k \geqslant 1$, on a
$$k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \geqslant \underbrace{2 \times 2 \times \cdots 2}_{k-1 \text{ fois}} = 2^{k-1},$$
donc
$$E_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$
On en déduit que la suite $(E_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite qui est inférieure à 3. En fait, cette limite est égale à e (le nombre de Néper, qui est la base des exponentielles).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}.$$
Là encore, on a clairement affaire à une suite croissante. Le théorème de la limite monotone nous dit alors que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge ou qu'elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$
où l'on a obtenu la minoration en minorant chacun des n termes par le plus petit terme de la somme. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient
$$0 \geqslant \frac{1}{2},$$
ce qui est absurde ! Donc
$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

C.4. Suites adjacentes

Définition 3

On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes lorsque :

(i) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante ;

(ii) la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Dans ce cas, on a nécessairement

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n \leqslant v_n.$$

■ Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croît et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Comme, par ailleurs, cette suite tend vers 0, on en déduit qu'elle est positive ou nulle, ce qui fournit $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant v_n$. ■

On peut alors énoncer le théorème des suites adjacentes.

Théorème 9

Deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ adjacentes sont convergentes et ont la même limite. De plus, si ℓ désigne cette limite, on a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

■ La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croît et est majorée par v_0. Elle converge donc, d'après le théorème 8, vers une limite ℓ_1 telle que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \ell_1\ (*)$. De même, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et est minorée par u_0. Elle converge donc, d'après le théorème 8, vers une limite ℓ_2 telle que $\forall n \geqslant 0,\ v_n \geqslant \ell_2\ (**)$. Comme $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, on en déduit que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$. On note ℓ cette valeur commune. Reste à dire que, d'après $(*)$ et $(**)$, on a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. ■

Tout comme le théorème de la limite monotone (dont il découle), le théorème des suites adjacentes n'est qu'un théorème d'existence de limite qui ne fournit pas la valeur d'icelle. L'encadrement $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ permet toutefois de donner des valeurs approchées de cette limite.

Exemples :

- Pour tout $n \geqslant 1$, posons
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n}.$$
Démontrons que les sous-suites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes. On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{2n} > A_{2n+1}$ puisque l'on passe de A_{2n} à A_{2n+1} en ajoutant un terme strictement négatif. On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_{2n+2} - A_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$
et
$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0,$$
ce qui prouve que (A_{2n}) est décroissante et (A_{2n+1}) est croissante. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$A_{2n} - A_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Cela prouve bien que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.
On en déduit que ces deux sous-suites convergent vers la même limite, ce qui suffit pour affirmer que la suite (A_n) est convergente (d'après la proposition 2).
On peut démontrer que la limite est égale à $-\ln 2$ mais c'est une autre histoire...

D. Comparaison des suites

Nous introduisons ici les différentes notions de comparaison entre suites ainsi que les notations de Landau ($\mathcal{O}$, o et $\sim$) qui leur sont associées.

Dans cette section, les suites considérées ne s'annulent pas, au moins à partir d'un certain rang. C'est le cas des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ qui interviennent dans les différents énoncés de cette section.

D.1. Comparaison des suites de référence

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique relatif des suites logarithmiques, des suites puissances, des suites géométriques et de la suite factorielle :

$$\big((\ln n)^\beta\big), \qquad (n^\alpha), \qquad (a^n) \qquad \text{et} \qquad (n!).$$

Définition 4

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ au voisinage de $+\infty$ lorsque le quotient u_n/v_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors $u_n \lll_{+\infty} v_n$.

La négligeabilité permet de donner un sens mathématique précis à la comparaison asymptotique des « infiniments petits » et des « infiniment grands ». Ainsi, lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tendent toutes les deux vers 0, écrire que $u_n \lll_{+\infty} v_n$ revient à dire que u_n tend vers 0 infiniment plus vite que v_n et lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tendent toutes les deux vers $+\infty$, écrire que $u_n \lll_{+\infty} v_n$ revient à dire que v_n tend vers $+\infty$ infiniment plus vite que u_n.

Nous verrons que la relation de négligeabilité $u_n \lll_{+\infty} v_n$ est aussi notée $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$.

Le premier énoncé est élémentaire. On y compare les suites puissances entre elles et les suites géométriques entre-elles.

Proposition 4

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$, on a

$$n^\alpha \quad \lll_{+\infty} \quad n^\beta.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, on a

$$a^n \quad \lll_{+\infty} \quad b^n.$$

■ Comme $\alpha < \beta$, on a $\alpha - \beta < 0$, d'où $n^\alpha/n^\beta = n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $n^\alpha \lll_{+\infty} n^\beta$.

Comme $0 < a < b$, on a $0 < a/b < 1$, d'où $a^n/b^n = (a/b)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $a^n \lll_{+\infty} b^n$. ■

En $+\infty$, une suite puissance est donc d'autant plus « grande » que sa puissance est grande.

Lorsque $1 < a < b$, la comparaison $a^n \lll_{+\infty} b^n$ signifie que b^n tend vers $+\infty$ plus vite que a^n lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsque $0 < a < b < 1$, la comparaison $a^n \lll_{+\infty} b^n$ signifie que a^n tend vers 0 plus vite que b^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemples :

- Lorsque n tend vers $+\infty$, le comportement asymptotique d'une suite polynômiale est dicté par son monôme de plus haut degré.

L'énoncé suivant est souvent appelé le théorème des croissances comparées.

Théorème 10

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$. On a l'échelle suivante de croissance vers $+\infty$ des suites de référence :

$$(\ln n)^\beta \quad \lll_{+\infty} \quad n^\alpha \quad \lll_{+\infty} \quad a^n \quad \lll_{+\infty} \quad n!$$

On dit que « la factorielle l'emporte sur les suites géométriques qui l'emportent sur les puissances qui l'emportent elles-mêmes sur les logarithmes ».

■ L'échelle $(\ln n)^\beta \lll n^\alpha \lll a^n$ découle du théorème des croissances comparées des fonctions et du théorème 1. Ces deux résultats seront démontrés plus tard (dans le chapitre sur les limites de fonctions).

Il est toutefois possible de démontrer $n^\alpha \lll a^n$ à la main. Posons $u_n = n^\alpha/a^n$. La suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $1/a$ qui est strictement inférieur à 1. Soit q tel que $1/a < q < 1$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1}/u_n < q$. Il s'ensuit, par récurrence, que $\forall n \geqslant N,\ 0 < u_n < q^{n-N}u_N$. Le théorème des gendarmes implique alors que $\lim u_n = 0$.

Pour démontrer que $a^n \lll n!$ nous introduisons la suite $v_n = a^n/n!$ On a $v_{n+1}/v_n = a/(n+1)$ donc la suite (v_{n+1}/v_n) converge vers 0. Il existe alors un rang N tel que $\forall n \geqslant N,\ v_{n+1}/v_n < 1/2$. On démontre alors par récurrence que $\forall n \geqslant N,\ 0 < v_n < (1/2)^{n-N}v_N$. Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\lim v_n = 0$. ■

En passant aux inverses, on obtient évidemment une échelle comparable pour les suites de référence tendant vers 0 :

$$\frac{1}{n!} \quad \lll_{+\infty} \quad a^{-n} \quad \lll_{+\infty} \quad n^{-\alpha} \quad \lll_{+\infty} \quad (\ln n)^{-\beta}.$$

En particulier, si $b \in \left]-1;1\right[$, alors la suite (b^n) tend vers 0 plus vite que (n^α) tend vers $+\infty$, c'est-à-dire $b^n n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemples :

- La suite $\big((\ln n)/n\big)$ tend vers 0.
- Si P est un polynôme, la suite $P(n)/\,\mathrm{e}^n$ tend vers 0.
- Si $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{\ln n}}/n^2$, on ne peut pas utiliser les croissances comparées en disant que $\mathrm{e}^{\sqrt{\ln n}}$ l'emporte sur n^2 car la variable de l'exponentielle n'est pas n. Pour déterminer la limite de u_n, on écrit que $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{\ln n} - 2\ln n}$ et comme $\ln n$ l'emporte sur $\sqrt{\ln n}$ en l'infini, on a $\lim \sqrt{\ln n} - 2\ln n = -\infty$, ce qui donne $\lim u_n = 0$. 6 h 00

$\mathcal{D}$.2. Suites dominées

Définition 5

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant K|v_n|.$$

On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et l'on prononce « u_n est un grand $\mathcal{O}$ de v_n » pour dire que l'ordre de grandeur de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est plus grand que celui de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, à une constante multiplicative près.

Vous rencontrerez également la notation $u_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n)$. Pourquoi indiquer que $n \to +\infty$ alors que, dans la définition ci-dessus, n ne tend pas vers $+\infty$? Tout simplement parce qu'il suffit que la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée à partir d'un certain rang (c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$) pour être bornée tout court. Pour les fonctions, la précision « $x \to +\infty$ » sera nécessaire car une fonction bornée au voisinage de $+\infty$ n'est pas nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour écrire que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, on peut utiliser le symbole de Vinogradov $\ll$ et écrire que $u_n \ll v_n$. C'est très pratique mais, malheureusement, assez peu utilisé.

Exemples :

- Il revient au même d'écrire que $u_n = \mathcal{O}(1)$ ou de dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

La proposition suivante dit que la relation de domination est réflexive et transitive.

Proposition 5

La relation $\mathcal{O}$ est un préordre :

(i)	$u_n = \mathcal{O}(u_n)$	(réflexivité) ;
(ii)	si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$	(transitivité).

■ (i) est évidente. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors la suite $(u_n/w_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée en tant que produit des deux suites bornées $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n/w_n)_{n\geqslant 0}$, donc $u_n = \mathcal{O}(w_n)$, ce qui établit (ii). ■

Il manque l'antisymétrie pour que $\mathcal{O}$ soit un ordre. Lorsque $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, on peut seulement dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire $\exists k, K > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ k|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant K|v_n|$. On note alors $u_n \asymp v_n$.

Dans la comparaison des ordres de grandeur par $\mathcal{O}$, tout se joue toujours « à une constante multiplicative près ». La proposition suivante formalise l'indifférence des $\mathcal{O}$ vis-à-vis des constantes.

Proposition 6

Les $\mathcal{O}$ absorbent tout ce qui est de l'ordre d'une constante, au sens où :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les égalités $u_n = \lambda\,\mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n = \mathcal{O}(\lambda v_n)$ peuvent être remplacées par $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

(ii) si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée, les égalités $u_n = a_n\,\mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n = \mathcal{O}(a_n v_n)$ impliquent que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

■ AQT ■

Exemples :

- $-\mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(v_n)$.
- $n \sin n = \mathcal{O}(n)$ et $(-1)^n \ln n = \mathcal{O}(\ln n)$.

La proposition suivante établit la compatibilité de $\mathcal{O}$ avec $+$ et $\times$.

Proposition 7

On a

(i) si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$;

(ii) si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathcal{O}(w_n t_n)$;
en particulier, si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n v_n = \mathcal{O}(w_n v_n)$;

(iii) si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors ${u_n}^\alpha = \mathcal{O}({v_n}^\alpha)$ pour $\alpha > 0$ (lorsque ces suites existent).

■ (i) Si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $\big((u_n + v_n)/w_n\big)_{n \geqslant 0}$ est bornée en tant que somme des deux suites bornées $(u_n/w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n/w_n)_{n\geqslant 0}$, donc $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(t_n)$, alors $\big((u_n v_n)/(w_n t_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est bornée en tant que produit des deux suites bornées $(u_n/w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n/t_n)_{n\geqslant 0}$, donc $u_n v_n = \mathcal{O}(w_n t_n)$.

(iii) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors il existe $K > 0$ tel que $\forall n \geqslant 0, |u_n| \leqslant K|v_n|$. En élevant à la puissance $\alpha > 0$, on obtient $\forall n \geqslant 0, |{u_n}^\alpha| \leqslant K^\alpha |{v_n}^\alpha|$, d'où ${u_n}^\alpha = \mathcal{O}({v_n}^\alpha)$. ■

La propriété (i) se retient en disant qu'une somme (finie) de $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$. Plus généralement, les $\mathcal{O}$ étant indifférents aux constantes, une combinaisons linéaires de $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda\, \mathcal{O}(w_n) + \mu\, \mathcal{O}(w_n) = \mathcal{O}(w_n).$$

En particulier, une soustraction de $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$. Autrement dit, on a $\mathcal{O}(w_n) - \mathcal{O}(w_n) = \mathcal{O}(w_n)$ et pas l'affreuseté que vous avez peut-être en tête et que j'ose à peine écrire $\mathcal{O}(w_n) - \mathcal{O}(w_n) = 0$.

D.3. Suites négligeables

Définition 6

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On note alors $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$ et l'on prononce « u_n est un petit o de v_n » pour dire que l'ordre de grandeur de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est infiniment plus grand que celui de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour les suites, il n'y a pas d'ambiguïté sur le comportement de la variable n (elle ne peut que tendre vers $+\infty$). Par conséquent, on note généralement $u_n = o(v_n)$ à la place de $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$. Pour les fonctions, nous verrons qu'il convient toujours de préciser vers quoi tend la variable.

À la place de $u_n = o(v_n)$, on peut utiliser la notation de Vinogradov $\lll$ et écrire que $u_n \lll v_n$. Là encore, c'est très pratique mais c'est encore moins utilisé que $\ll$.

Exemples :

- Il revient au même d'écrire que $u_n = o(1)$ ou de dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Des caractéristiques d'une relation d'ordre, la négligeabilité ne conserve que la transitivité.

Proposition 8

La relation o est transitive, c'est-à-dire que si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

■ Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times 0 = 0$, donc $u_n = o(w_n)$. ■

Un o d'un o est donc un o. Ainsi, dans un calcul, on remplacera $o\big(o(v_n)\big)$ par $o(v_n)$.

Tout comme la domination, la négligeabilité est indifférente aux constantes.

Proposition 9

Les o absorbent tout ce qui est de l'ordre d'une constante, au sens où :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les égalités $u_n = \lambda\, o(v_n)$ ou $u_n = o(\lambda v_n)$ peuvent être remplacées par $u_n = o(v_n)$.

(ii) si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée, les égalités $u_n = a_n\, o(v_n)$ et $u_n = o(a_n v_n)$ impliquent que $u_n = o(v_n)$.

■ AQT ■

Exemples :

- $-\,o(v_n) = o(v_n)$.
- $(-1)^n \times o(v_n) = o(v_n)$.
- On peut reformuler les croissances comparées avec des o.
  Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.
  Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 < a < b$, alors $a^n = o(b^n)$.
  Par ailleurs, pour tous $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, on a

$$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha), \qquad n^\alpha = o(a^n) \qquad \text{et} \qquad a^n = o(n!).$$

La proposition suivante établit la compatibilité de $\mathcal{o}$ avec $+$ et $\times$.

Proposition 10

On a

(i) si $u_n = \mathcal{o}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{o}(w_n)$;

(ii) si $u_n = \mathcal{o}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{o}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathcal{o}(w_n t_n)$;
en particulier, si $u_n = \mathcal{o}(w_n)$, alors $u_n v_n = \mathcal{o}(w_n v_n)$;

(iii) si $u_n = \mathcal{o}(v_n)$, alors ${u_n}^\alpha = \mathcal{o}({v_n}^\alpha)$ pour $\alpha > 0$ (lorsque ces suites existent) ;

(iv) si $u_n = \mathcal{o}(v_n)$ et si φ est une extraction, alors $u_{\varphi(n)} = \mathcal{o}(v_{\varphi(n)})$.

■ (i) Si $u_n = \mathcal{o}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{o}(w_n)$, alors $\dfrac{u_n + v_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{w_n} + \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0 = 0$, donc $u_n + v_n = \mathcal{o}(w_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathcal{o}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{o}(w_n)$, alors $\dfrac{u_n v_n}{w_n t_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0 = 0$, donc $u_n v_n = \mathcal{o}(w_n t_n)$.

(iii) Si $u_n = \mathcal{o}(v_n)$, alors $\dfrac{{u_n}^\alpha}{{v_n}^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^\alpha = 0$, d'où ${u_n}^\alpha = \mathcal{o}({v_n}^\alpha)$.

(iv) Supposons que $u_n = \mathcal{o}(v_n)$. Comme $(u_{\varphi(n)}/v_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0, on sait que $(u_{\varphi(n)}/v_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Donc $u_{\varphi(n)} = O(v_{\varphi(n)})$. ■

Nous utiliserons abondamment les $\mathcal{o}$, en particulier pour les calculs de développements limités. L'encadré suivant rassemble les règles qui nous seront nécessaires pour mener à bien ces calculs.

Calculer avec des $\mathcal{o}$

- Un $\mathcal{o}(v_n)$ ne représente pas une suite mais toutes les suites négligeables devant v_n. Autrement dit, $\mathcal{o}(v_n)$ est un ensemble de suites et $u_n = \mathcal{o}(v_n)$ signifie $u_n \in \mathcal{o}(v_n)$. Ainsi, lorsque vous rencontrez plusieurs $\mathcal{o}(v_n)$ dans un même calcul, il est très probable qu'ils ne représentent pas la même suite. Par exemple, on a $n = \mathcal{o}(n^3)$ et $n^2 = \mathcal{o}(n^3)$ mais cela ne veut évidemment pas dire que les suites $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(n^2)_{n\geqslant 0}$ sont égales ! C'est pour cette raison que les $\mathcal{o}$ ne se simplifient pas : qu'on les additionne ou qu'on les soustrait, des $\mathcal{o}$ donnent un $\mathcal{o}$!
- La présence d'un $\mathcal{o}(v_n)$ dans une formule implique, d'une part, que la formule est une approximation (certains termes sont cachés dans le $\mathcal{o}(v_n)$) et, d'autre part, que la précision de cette approximation est l'ordre de grandeur de v_n. Cela a deux conséquences :
  - Il faut toujours conserver un seul $\mathcal{o}$ dans une égalité. S'il y en a plusieurs, on détermine celui d'ordre de grandeur maximal et on ne conserve que celui-là.
  - Ensuite, si certains termes sont négligeables par rapport à l'ordre de grandeur du $\mathcal{o}$, on les fait disparaître ! Le $\mathcal{o}$ semble ainsi « avaler » les termes négligeables.

  Ces deux remarques relèvent d'un principe général lorsqu'on fait des approximations : dans un calcul, c'est toujours le terme le moins précis qui décide de l'ordre de précision du calcul. C'est ce que l'on appelle, en langage courant, le principe de la bassine(†).
- Pour le reste, les $\mathcal{o}$ s'additionnent et se multiplient classiquement. En particulier, les $\mathcal{o}$ sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif.

(†) Autrefois, les bassines étaient fabriquées à partir de vieux tonneaux, coupés en deux. Elles étaient donc faites de lattes de bois verticales cerclées. La contenance maximale de ce type de bassine était par conséquent dictée par la latte la moins haute !

Exemples :

- On a $\left(2n^7 - 5n^4 \cancel{+n^2} + \cancel{\mathcal{o}(n^2)}\right) + \left(n^4 + n^3 + \mathcal{o}(n^3)\right) = 2n^7 - 4n^4 + n^3 + \mathcal{o}(n^3)$;
- On a $\left(2n^7 - 5n^4 + n^2 + \mathcal{o}(n^2)\right) \times \left(n^4 + n^3 + \mathcal{o}(n^3)\right) = 2n^{11} + 2n^{10} + \mathcal{o}(n^{10})$. Tous les autres termes ont été « avalés » par le $\mathcal{o}(n^{10})$.

La proposition suivante rassemble les propriétés mêlant la domination et la négligeabilité.

Proposition 11

On a

(i) si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$;

(ii) si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;
si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;

(iii) si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$;
si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.

■ AQT ■

Le (i) de cette proposition signifie que la condition o est plus forte que la condition $\mathcal{O}$. Si vous retenez simplement cela, vous devriez pouvoir retrouver les autres propriétés sans avoir à les apprendre.

D.4. Suites équivalentes

Définition 7

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et l'on prononce « u_n est équivalent à v_n » pour dire que l'ordre de grandeur de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est exactement le même que celui de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour abrégé, on note généralement $u_n \sim v_n$ à la place de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Si ℓ est un nombre réel non nul, il revient au même d'écrire que $u_n \sim \ell$ ou de dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ. Dans le cas où $\ell = 0$, on retiendra qu'

$$\boxed{\text{il faut bannir l'écriture } u_n \sim 0}$$

La proposition suivante dit que la relation d'équivalence est une relation d'équivalence :-)

Proposition 12

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence :

(i)	$u_n \sim u_n$	(réflexivité) ;
(ii)	si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$	(symétrie) ;
(iii)	si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$	(transitivité).

■ (i), (ii) : OK. (iii) : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\times 1 = 1$, donc $u_n \sim w_n$. ■

C'est la propriété de symétrie qui justifie que l'on puisse dire indifféremment que « u_n est équivalente à v_n », que « v_n est équivalente à u_n » ou que « u_n et v_n sont équivalentes entre-elles ».

En pratique, l'équivalence $\sim$ sert à « simplifier » une suite, au sens de la définition ci-dessous.

Définition 8

On dit qu'une suite est un équivalent simple lorsque son terme général s'écrit comme le produit ou le quotient de suites de référence. Haro sur les sommes !

Ainsi, $\sqrt{n}\sin(n)$, $n^2\ln^2(n)$ et $\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$ sont des équivalents simples mais pas $\sqrt{n+1}$.

Exemples :

- Si $P(n) = a_d n^d + \cdots + a_1 n + a_0$ (avec $a_d \neq 0$), alors $P(n) \sim a_d n^d$, autrement dit, tout polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré.
- Les limites de référence sur les fonctions usuelles (que nous démontrerons plus tard) permettent de donner une liste d'équivalents de référence à connaître par ♡.

  Si $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 (on parle d'un infiniment petit), on a

  $$\boxed{\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n} \qquad \boxed{\tan(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n} \qquad \boxed{1-\cos(\varepsilon_n) \sim {\varepsilon_n}^2/2}$$

  $$\boxed{\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{\varepsilon_n}-1 \sim \varepsilon_n} \qquad \boxed{(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon_n}$$

La proposition suivante énonce la stabilité par $\sim$ du comportement asymptotique.

Proposition 13

Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique. Autrement dit, si l'une converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, l'autre aussi ; si l'une diverge vers $\pm\infty$, l'autre aussi et si l'une admet une divergence de seconde espèce, l'autre aussi.

■ Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites équivalentes.

Supposons que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ admette une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut écrire $\forall n \geqslant 0$, $u_n = v_n \times (u_n/v_n)$. Comme $\lim v_n$ existe et $\lim(u_n/v_n) = 1$, on sait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite et que $\lim u_n = \lim v_n$.

La contraposée de ce résultat nous dit que la divergence de seconde espèce d'une des deux suites entraîne la divergence de seconde espèce de l'autre suite. ■

La réciproque de cette proposition est fausse : deux suites peuvent avoir le même comportement asymptotique sans être équivalentes. Pour être plus précis, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ tendent vers la même limite finie non nulle et non infinie, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont équivalentes. Par contre, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers 0 ou divergent toutes les deux vers $\pm\infty$ ou encore si elles admettent toutes les deux une divergence de seconde espèce, on ne peut rien dire.

Autrement dit, l'équivalence permet de cataloguer les différentes vitesses de convergence vers 0, les différentes vitesses de divergence vers $\pm\infty$ et les différentes façons de diverger sévèrement. Par contre, l'équivalence ne distingue pas une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers $\pi/17$ d'une autre suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers $\pi/17$. Pour comparer la convergence de ces deux suites vers $\pi/17$, il convient de rechercher des équivalents de $u_n - \pi/17$ et de $v_n - \pi/17$, qui, eux, tendent vers 0.

Si le comportement asymptotique se propage par $\sim$, il n'en va pas de même de toutes les propriétés. Ainsi, la monotonie ne se transmet pas nécessairement. Par exemple, $(n + 2\sin n)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$ sont équivalentes en $+\infty$ mais seule la seconde est monotone. Par contre, on peut montrer que la stricte positivité (à partir d'un certain rang) est conservée par équivalence (y réfléchir !).

Les règles de calcul avec $\sim$ sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 14

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

(i) si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n v_n \sim w_n t_n$;

(ii) si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$;

(iii) si $u_n \sim v_n$, alors $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$ (lorsque ces suites existent) ;

(iv) si $u_n \sim v_n$ et si φ est une extraction, alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

■ (i) Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $\dfrac{u_n v_n}{w_n t_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{v_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 1 = 1$, donc $u_n v_n \sim w_n t_n$.

(ii) Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $\dfrac{u_n/v_n}{w_n/t_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \div \dfrac{v_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \div 1 = 1$, donc $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{{u_n}^\alpha}{{w_n}^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$, donc $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$.

(iv) Supposons que $u_n \sim v_n$. Comme $(u_{\varphi(n)}/v_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 1, on sait que $(u_{\varphi(n)}/v_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers 1. Donc $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$. ■

Le (i) de cette proposition nous dit, en particulier, qu'au contraire des relations de domination et de négligeabilité, l'équivalence $\sim$ n'est pas du tout indifférente aux constantes.

Les résultats glanés jusqu'ici (de la transitivité de $\sim$ aux propositions 13 et 14) permettent d'utiliser $\sim$ pour calculer des limites : partant d'une suite présentant une forme indéterminée, on utilise les règles opératoires de $\sim$ pour déterminer (en une ou plusieurs étapes) un équivalent simple de la suite. Il est alors généralement facile de conclure, soit parce que la forme indéterminée s'est simplifiée en cours de route, soit parce qu'on peut utiliser les croissances comparées.

Il faut savoir discriminer les opérations compatibles avec $\sim$ de celles qui ne le sont pas. L'encadré ci-dessous vous résume tout cela.

Opérations licites avec les équivalents

Dans un calcul de limite, on peut systématiquement remplacer une suite par l'un de ses équivalents dans un produit, un quotient, une élévation à une puissance constante ou lorsqu'on extrait une sous-suite.

Par contre, pour additionner ou soustraire des équivalents ou encore pour composer un équivalent à gauche par une fonction, il n'existe pas de résultat général. Par prudence, on ne pratique donc pas ces opérations avec des équivalents (même si elles sont parfois justes).

Notons que l'élévation à une puissance constante α est une exception : cette composition à gauche par la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est tout à fait autorisée ! Ainsi, on peut sans problème prendre la racine carrée dans un équivalent (c'est une élévation à la puissance $1/2$).

Mais attention, élever un équivalent à une puissance n'est autorisé que pour les puissances constantes. Lorsque la suite est de la forme ${u_n}^{v_n}$, il convient de passer à la forme exponentielle et d'être alors extrêmement prudent afin d'éviter les compositions abusives (avec ln ou exp).

Voici quelques exemples de ce que l'on peut faire avec des équivalents.

Exemples :

- Dans un quotient de polynômes, nous avons déjà rappelé que le comportement asymptotique est le même que celui du quotient des monômes de plus haut degré. L'utilisation des équivalents rend la rédaction très simple. Par exemple, on a

$$\frac{2n^2+5n+1}{(n-1)(3-n)} \sim \frac{2n^2}{n\times(-n)} \sim -2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2.$$

- Déterminons la limite de $\big(n\sin(1/n)\big)_{n\geqslant 1}$. On a une forme indéterminée du type $+\infty\times 0$. Les équivalents de référence nous disent que

$$n\sin(1/n) \sim n\times(1/n) \sim 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Et maintenant, quelques exemples de ce qu'il ne faut pas faire.

Exemples :

- Une addition avec des équivalents peut vous faire écrire n'importe quoi.

  Par exemple, si l'on prend l'équivalent $1-n \sim -n$ et qu'on lui ajoute n, on obtient que 1 est équivalent à 0 :-(
- Une addition avec des équivalents peut aussi vous faire perdre en précision !

  Par exemple, réécrire l'équivalent de référence $\mathrm{e}^{\varepsilon_n}-1 \sim \varepsilon_n$ sous la forme $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} \sim 1+\varepsilon_n$ (en ajoutant 1 des deux côtés) n'est pas faux mais cela revient à écrire que $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} \sim 1$, ce qui est moins précis que l'équivalent de départ.
- Une composition à gauche d'un équivalent par une fonction est tout aussi dangereuse.

  Ainsi, on a $n^2+n \sim n^2$ mais e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2} (le quotient diverge).

  De même, on a $1+\mathrm{e}^{-n} \sim 1$ mais $\ln(1+\mathrm{e}^{-n})$ n'est pas équivalente à $\ln 1 = 0$ puisque cela n'a pas de sens.
- Enfin, élever un équivalent à une puissance qui dépend de n n'est pas non plus autorisée.

  Par exemple, on a $1+1/n \sim 1$ mais $(1+1/n)^n$ n'est pas équivalente à 1 puisque $(1+1/n)^n$ tend vers e. Pour ne pas faire d'erreur dans ce dernier cas, il faut scrupuleusement respecter la consigne de passer à la forme exponentielle lorsque la suite est de la forme ${u_n}^{v_n}$.

On donne ci-dessous des techniques pour contourner le problème des sommes d'équivalents.

Notons tout d'abord que, comme l'illustre le premier exemple précédent, le problème des sommes d'équivalents ne vient pas vraiment des sommes mais des différences ! Autrement dit, lorsqu'on additionne deux équivalents, si les termes dominants disparaissent par soustraction (en particulier si l'on obtient un équivalent nul en sommant deux équivalents simples), on est coincé !

A contrario, dans le cas où les équivalents additionnés ne sont pas du même ordre de grandeur, on peut conclure, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 15

Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$ et $w_n = o(t_n)$, alors $u_n + v_n \sim t_n$.

■ On a $\dfrac{u_n + v_n}{t_n} = \dfrac{u_n}{t_n} + \dfrac{v_n}{t_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{w_n}{t_n} + \dfrac{v_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 + 1 = 1$, donc $u_n + v_n \sim t_n$. ■

Exemples :

- Trouvons un équivalent de $\sin(1/n) + \sqrt{\tan(1/n)}$. Les équivalents de référence donnent $\sin(1/n) \sim 1/n$ et $\sqrt{\tan(1/n)} \sim 1/\sqrt{n}$. De plus, on sait que $1/n = o(1/\sqrt{n})$, donc $\sin(1/n) + \sqrt{\tan(1/n)} \sim 1/\sqrt{n}$.

Si les équivalents sont du même ordre de grandeur, la plus grande prudence s'impose. Mieux vaut alors se ramener à des égalités. La proposition suivante explique comment

Proposition 16

On a

$$(u_n \sim v_n) \iff (u_n = v_n + o(v_n)).$$

La relation $u_n = v_n + o(v_n)$ s'appelle un développement asymptotique de u_n.

■ On a

$$\begin{aligned}
(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n) &\iff \big(\lim(u_n/v_n) = 1\big)\\
&\iff \big(\lim(u_n/v_n - 1) = 0\big)\\
&\iff \big(\lim\left((u_n - v_n)/v_n\right) = 0\big)\\
&\iff \big(u_n - v_n = o_{n\to+\infty}(v_n)\big)\\
&\iff \big(u_n = v_n + o_{n\to+\infty}(v_n)\big)
\end{aligned}$$ ■

Il est ainsi équivalent de dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ ou d'écrire que $u_n = \ell + o(1)$.

Exemples :

- Déterminons un équivalent de $\sin(2/n) - \sin(1/n)$. Comme les ordres de grandeur de $\sin(2/n) \sim 2/n$ et $\sin(1/n) \sim 1/n$ sont les mêmes, il faut être prudent. On revient alors aux égalités $\sin(2/n) = 2/n + o(1/n)$ et $\sin(1/n) = 1/n + o(1/n)$, ce qui donne $\sin(2/n) - \sin(1/n) = 1/n + o(1/n)$. Cela signifie que $\sin(2/n) - \sin(1/n) \sim 1/n$.
- Cherchons un équivalent de $\ln(1 - 1/n) + e^{1/n} - 1$. Les équivalents de référence nous disent que $\ln(1-1/n) \sim -1/n$ et $e^{1/n} - 1 \sim -1/n$. Cette fois, les équivalents sont opposés. Par conséquent, lorsqu'on écrit que $\ln(1 - 1/n) = -1/n + o(1/n)$ et $e^{1/n} - 1 = 1/n + o(1/n)$, on obtient que $\ln(1 - 1/n) + e^{1/n} - 1 = o(1/n)$, ce qui ne donne rien !

Ce dernier exemple illustre le fait que, parfois, la connaissance d'un équivalent ne suffit pas. Il faut alors rechercher des développements asymptotiques plus précis que celui donné par l'équivalent. Nous verrons que les développements limités sont un outil privilégié pour cela.

La proposition suivante mêle l'équivalence avec la domination ou la négligeabilité.

Proposition 17

On a

(i) si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$;

(ii) si $u_n \sim v_n$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$;
si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$;

(iii) si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;
si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$.

■ AQT ■

Tous ces résultats sont intuitifs et n'ont pas à être appris par cœur.

Pour terminer, nous donnons l'équivalent de référence pour la suite factorielle.

Lemme 3

On a la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

■ Nous démontrerons la formule de Stirling en exercice (ce n'est pas immédiat ...). ■

Exemples :

- La formule de Stirling implique que

$$n! = o(n^n).$$

En fait, on peut démontrer ce résultat sans utiliser la formule de Stirling. Il suffit pour cela d'introduire $\varepsilon_n = n!/n^n$ et de constater que la suite $(\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n)$ converge vers e^{-1}. Il existe donc un rang N tel que $\forall n \geqslant N,\ \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n \leqslant 2/\mathrm{e}$. On démontre alors par récurrence que $\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant (2/\mathrm{e})^{n-N}\varepsilon_N$. Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\lim \varepsilon_n = 0$, c'est-à-dire $n! \lll_{+\infty} n^n$.

C'est la troisième fois que nous rencontrons une situation où l'on montre qu'une suite tend vers 0 en effectuant le quotient des termes de rangs n et $n+1$. C'est une méthode classique d'étude du comportement des suites par comparaison avec les suites géométriques. Nous y reviendrons en exercice. 8 h 30

$\mathcal{E}$. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans ce chapitre, nous décrivons le plan d'étude d'une suite récurrente définie par la donnée de u_0 et d'une relation itérative du type $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction réelle de la variable réelle.

Les suites arithmétiques, géométriques et, plus généralement, arithmético-géométriques sont des exemples de suites de ce type.

Première étape : Étude de la fonction f

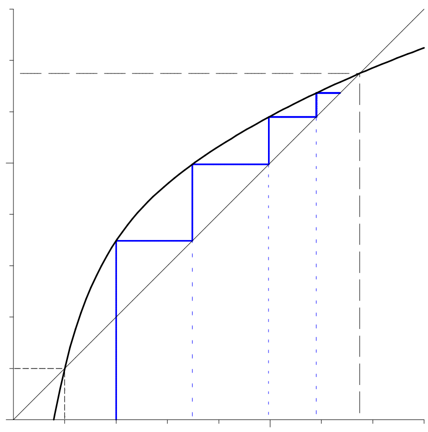
Avant tout, il convient d'étudier proprement la fonction f. On s'intéresse d'abord à son ensemble de définition. À l'aide de sa dérivée, on dresse son tableau de variation. Enfin, on représente proprement son graphe.

On complète ce graphe en représentant la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$), ce qui conduit à préciser (lorsque c'est possible) les abscisses des points d'intersection du graphe de f et de cette première bissectrice. Ces points vérifient la relation $f(x) = x$ et s'appelle, à ce titre, les points fixes de f (lorsque $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$, on peut également considérer que $\pm\infty$ sont des points fixes).

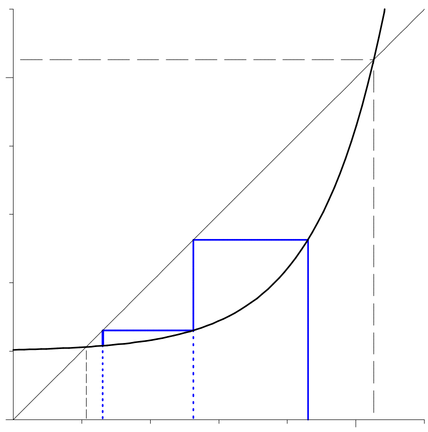
Deuxième étape : Dynamisme de la suite

Selon les variations de f et la position de u_0, le comportement de la suite (u_n) peut fortement varier. Il convient donc d'utiliser le graphe de f pour se faire une idée de ce comportement.

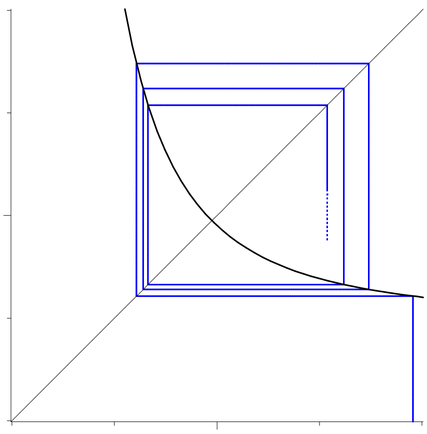
Pour cela, on représente les termes de la suite en effectuant une suite de ricochets de la courbe vers la première bissectrice. La ligne brisée obtenue s'appelle le dynamisme de la suite. Nous rencontrerons principalement trois types de dynamisme :



Un escalier qui monte . . .



Un escalier qui descend . . .



Un escargot . . .

Troisième étape : Conjecture sur le comportement de la suite et démonstration d'icelle

La dynamique de la suite (u_n) permet, d'une part, de trouver une partie stable de f dans laquelle « vit la suite » (ce qui permet de justifier l'existence de la suite).

La dynamique de la suite permet, d'autre part, de conjecturer le comportement asymptotique de la suite. En particulier, on s'intéresse à la monotonie et au caractère borné ou non de la suite. Il reste alors à démontrer cette conjecture (en général par récurrence en utilisant la monotonie de la suite ou à l'aide d'une comparaison de la fonction f avec l'identité).

Quatrième étape : Conclusion

Une fois que l'on a établi la convergence de la suite (si c'est le cas), on effectue un passage à la limite dans la relation $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$ afin d'obtenir le maximum de renseignements sur la valeur de la limite.

Comment bien étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$?

S'il ne faut retenir qu'une chose du plan d'étude décrit ci-dessus, c'est l'importance de la représentation graphique du dynamisme de la suite.

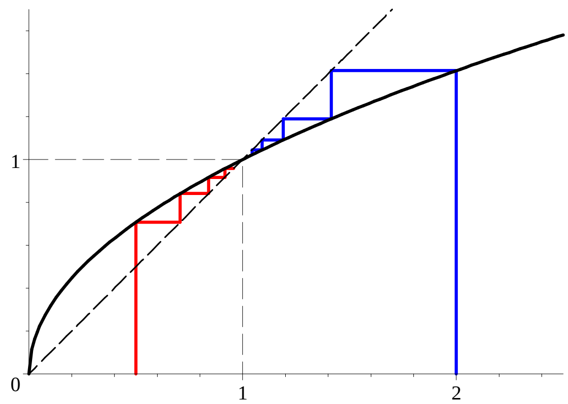
Bref, à vos crayons !!

Exercice 1.

Étudier, selon la position de $u_0 \in \mathbb{R}_+$, le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la formule de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

◊ Lorsque $u_0 = 0$, la suite est nulle et lorsque $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.

La représentation des différents dynamismes en fonction de la valeur de u_0 donne



Premier cas : $0 < u_0 < 1$

On conjecture que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

La propriété est vraie au rang 0 car $\forall x \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ ce qui donne $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ lorsque on pose $x = u_0$. Si l'on fixe $n \in \mathbb{N}$ et que l'on suppose la propriété au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, la croissance de f sur $[0;1]$ permet d'affirmer que $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante et majorée par 1, ce qui permet d'affirmer qu'elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. Notons ℓ la limite.

En passant à la limite dans $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, on obtient $\ell = \sqrt{\ell}$, c'est-à-dire $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $u_0 > 0$ et comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, la seule possibilité est $\ell = 1$.

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 1 en croissant.

Second cas : $u_0 > 1$

On conjecture cette fois que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Cela se démontre par récurrence (en procédant *mutatis mutandis* comme dans le premier cas).

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante et minorée, ce qui démontre à nouveau qu'elle converge.

En passant à la limite comme dans le premier cas, on démontre que la limite vaut encore 1 et donc que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 1, cette fois en décroissant. ◊

F. Suites et topologie

F.1. Théorème de Bolzano-Weierstrass

On se propose de démontrer de deux manières le théorème de Bolzano–Weierstrass. Pour l'une comme pour l'autre de ces démonstrations, on a besoin d'un résultat préliminaire. Les deux résultats sont énoncés dans les lemmes qui suivent.

On débute avec une version topologique du théorème des suites adjacentes : le lemme des segments emboités.

Lemme 4

Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de segments emboités, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} \subset S_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les extrémités de S_n (avec $a_n \leqslant b_n$), c'est-à-dire $S_n = [a_n ; b_n]$, et on suppose que la suite $(b_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ des amplitudes de ces segments tend vers 0. Alors, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est un singleton.

■ Notons S l'intersection de tous les S_n.

Les hypothèses impliquent que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune ℓ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$. Par suite, on a $\ell \in S$, c'est-à-dire $\{\ell\} \subset S$.

Soit $\ell' \in S$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell' \leqslant b_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - \ell'| \leqslant b_n - a_n$. En passant à la limite, on a $\ell = \ell'$. Donc $S \subset \{\ell\}$.

En conclusion, on a bien $S = \{\ell\}$, ce qui signifie que S est un singleton. ■

On énonce ensuite le très joli lemme des pics (dû à Erdős).

Lemme 5

De toute suite réelle, on peut extraire une suite monotone.

■ Une démonstration bucolique ! Imaginons un paysage fait de pics alignés d'Ouest en Est, avec au loin la mer, l'horizon et le soleil levant. De deux choses l'une, ou bien une infinité de pics sont éclairés par le soleil levant (au sommet de ces pics, on aperçoit la mer), ou bien seulement un nombre fini de pics sont sous la lumière rasante.

Formalisons un peu (désolé mais la poésie de la démonstration va quelque peu disparaître). Introduisons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et considérons les assertions

$$\mathscr{P} :\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ \forall p > n,\ u_p < u_n \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathscr{P}} :\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \exists p > n,\ u_p \geqslant u_n$$

Deux cas se présentent :

- ▷ Premier cas : $\mathscr{P}$ est vraie (une infinité de pics sont éclairés)
  En appliquant $\mathscr{P}$ avec $N = 0$, on obtient l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (1) : $\forall p > n_0,\ u_p < u_{n_0}$. Posons $\varphi(0) = n_0$. On applique ensuite $\mathscr{P}$ avec $N = n_0 + 1$, ce qui donne l'existence de $n_1 > \varphi(0)$ tel que (2) : $\forall p > n_1,\ u_p < u_{n_1}$. Posons $\varphi(1) = n_1$ de sorte que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et, d'après (1), $u_{\varphi(1)} < u_{\varphi(0)}$. On poursuit ainsi (par récurrence) la construction d'une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui est décroissante.
- ▷ Second cas : $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie (un nombre fini de pics sont éclairés)
  D'après $\overline{\mathscr{P}}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(*)$: $\forall n \geqslant N_0,\ \exists p > n,\ u_p \geqslant u_n$. Posons $\varphi(0) = N_0$. D'après $(*)$ appliquée avec $n = N_0$, il existe $p_1 > N_0$ tel que $u_{p_1} \geqslant u_{N_0}$. Posons $\varphi(1) = p_1$ de sorte que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \geqslant u_{\varphi(0)}$. On réïtère le procédé en appliquant $(*)$ avec $n = p_1$, ce qui donne l'existence de $p_2 > p_1$ tel que $u_{p_2} \geqslant u_{p_1}$. Cela permet de poser $\varphi(2) = p_2$ de sorte que $\varphi(2) > \varphi(1)$ et $u_{\varphi(2)} \geqslant u_{\varphi(1)}$. On poursuit ainsi (par récurrence) la construction d'une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui est croissante. ■

On notera bien que le résultat du lemme des pics ne nécessite aucune hypothèse sur la suite.

Le théorème de Bolzano–Weierstass, énoncé ci-dessous, est un résultat qui possède des conséquences théoriques importantes.

Théorème 11

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

■ Deux démonstrations pour le prix d'une !

▷ Première démonstration : utilisation du procédé de dichotomie.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.
Posons $S_0 = [m; M]$. Coupons ce segment en son milieu en deux sous-segments $[m; (m+M)/2]$ et $[(m+M)/2; M]$. Parmi ces deux sous-segments, l'un au moins contient une infinité de termes de la suite. Appelons-le S_1. Coupons alors S_1 en son milieu en deux sous-segments. Parmi ces deux sous-segments, l'un au moins contient une infinité de termes de la suite. Appelons-le S_2. Etc. L'itération de cette opération fournit une suite de segments emboîtés $(S_n)_{n\geqslant 0}$, dont la suite des amplitudes $((M-m)/2^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, qui est telle que chaque segment S_n contient une infinité de termes de la suite. D'après le lemme des segments emboîtés, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{\ell\}$.
Posons $\varphi(0) = 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, le segment S_n contient une infinité de termes de la suite, ce qui permet d'en choisir un, noté $u_{\varphi(n)}$, tel que son indice $\varphi(n)$ soit strictement supérieur à l'indice $\varphi(n-1)$ du terme choisi dans l'intervalle précédent S_{n-1}. On construit ainsi par récurrence une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant (M-m)/2^n$. Le théorème des gendarmes nous dit donc que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

▷ Seconde démonstration : utilisation du lemme des pics
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée. Le lemme des pics permet d'en extraire une suite monotone. Celle-ci étant bornée (comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$), elle converge d'après le théorème de la limite monotone. ■

Le théorème de Bolzano–Weierstrass ne dit pas comment extraire une sous-suite convergente, il dit simplement qu'elle existe.

Nous allons voir que le théorème de Bolzano–Weierstrass peut être reformulé en termes plus topologiques.

Définition 9

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsqu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers λ. Avec des quantificateurs, cela revient à dire que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$.

La différence entre la notion de « limite » et la notion de « valeur d'adhérence » est simple : une limite est un nombre réel vers lequel tous les termes de la suite tendent alors qu'une valeur d'adhérence est un nombre réel près duquel une infinité de termes (mais pas forcément tous) s'accumulent. Autrement dit, une suite se rapproche infiniment souvent d'une valeur d'adhérence mais peut aussi s'en éloigner infiniment souvent ! Par conséquent, rien n'interdit à une suite d'avoir plusieurs valeurs d'adhérence...

Exemples :

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ admet 1 et -1 comme valeurs d'adhérence (la première est la limite de la sous-suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et la seconde celle de la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$).
- En vertu du théorème 4, une suite convergente n'admet qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.

  Le même théorème dit qu'une suite qui admet une divergence de première espèce n'admet pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. En fait, une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) admet une seule valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

  Et pour les curieux qui se demandent si la réciproque est vraie, je réponds : oui ! Une suite qui admet une seule valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ tend vers cette valeur.

  Bref, seules les suites qui divergent sévèrement peuvent avoir plusieurs valeurs d'adhérence.

La notion de valeur d'adhérence permet de donner un énoncé plus topologique du théorème de Bolzano–Weierstrass.

Corollaire 2

Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

■ AQT ■

Ce théorème explique donc qu'une suite qui reste « enfermée » dans un segment doit nécessairement se rapprocher infiniment souvent d'au moins une des valeurs de ce segment.

Vous verrez, l'an prochain, que les parties de $\mathbb{R}$ (mais aussi d'autres espaces topologiques) dont les suites admettent systématiquement des valeurs d'adhérence s'appellent des compacts. Le théorème de Bolzano–Weierstrass signifie donc que tous les segments sont compacts. Plus généralement, vous verrez que les compacts de $\mathbb{R}$ sont toutes les parties fermées et bornées (en particulier les segments).

F.2. Caractérisations séquentielles

Nous avons déjà rencontré l'adjectif « séquentielle » dans le slogan « puissance séquentielle nécessite l'exponentielle ». Né d'un anglicisme (en anglais, « suite » se dit « *sequence* »), l'adjectif « séquentielle » qualifie, en mathématiques, toutes les propriétés concernant des suites. Ce n'est pas très joli mais c'est parfait pour la rime avec « exponentielle » !

Les résultats de ce paragraphe sont tous liés à la caractérisation séquentielle des fermés donnée ci-dessous.

Proposition 18

Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, toute suite, à valeurs dans F, qui converge dans $\mathbb{R}$ converge en fait dans F.

■ On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que F est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Considérons une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeur dans F qui converge vers ℓ dans $\mathbb{R}$. Démontrons que $\ell \in F$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\ell \notin F$, c'est-à-dire $\ell \in \mathbb{R} \setminus F$. Comme F est un fermé, $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert. C'est donc aussi un voisinage de ℓ (puisqu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points). Dès lors, d'après la définition de la convergence, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $\mathbb{R} \setminus F$. C'est absurde puisque tous les termes de la suite sont dans F. Donc $\ell \in F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons réciproquement que toute suite, à valeurs dans F, qui converge dans $\mathbb{R}$ converge en fait dans F. Démontrons que F est une partie fermée, c'est-à-dire que $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. On veut démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset \mathbb{R} \setminus F$. Pour cela, raisonnons à nouveau par l'absurde en supposant que $\forall \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap F \neq \varnothing$. Pour $\varepsilon = 1$, on prend $u_1 \in]x - 1; x + 1[\cap F$. Pour $\varepsilon = 1/2$, on prend $u_2 \in]x - 1/2; x + 1/2[\cap F$. Pour $\varepsilon = 1/3$, on prend $u_3 \in]x - 1/3; x + 1/3[\cap F$. Etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans F telle que $\forall n \geqslant 1,\ |u_n - x| \leqslant 1/n$. Cette dernière égalité, associée au théorème des gendarmes, nous dit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers x. Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite à valeurs dans F et que F contient les limites de toutes ses suites, on en déduit que $x \in F$. C'est absurde ! ■

Une partie fermée est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient les limites de ses suites. Ce résultat est très utile pour démontrer qu'une partie est fermée (ou qu'elle ne l'est pas).

Exemples :

- L'ensemble $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas un fermé puisque la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$ appartient à H (pardi !), converge dans $\mathbb{R}$ mais sa limite 0 n'est pas dans H.

Complétons cette caractérisation des fermés par celle de l'adhérence d'une partie.

Proposition 19

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le nombre b appartient à l'adhérence de A si, et seulement si, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers b.

■ On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $b \in \operatorname{Adh} A$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]b - \varepsilon; b + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$. Pour $\varepsilon = 1$, on prend $a_1 \in]x - 1; x + 1[\cap A$. Pour $\varepsilon = 1/2$, on prend $a_2 \in]x - 1/2; x + 1/2[\cap A$. Pour $\varepsilon = 1/3$, on prend $a_3 \in]x - 1/3; x + 1/3[\cap A$. Etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans A telle que $\forall n \geqslant 1,\ |a_n - b| \leqslant 1/n$. Cette dernière égalité, associée au théorème des gendarmes, nous dit que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers b. On a donc bien trouvé une suite de A qui converge vers b.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons réciproquement qu'il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers b. Cette suite est aussi à valeurs dans $\operatorname{Adh} A$ puisque $A \subset \operatorname{Adh} A$. Or $\operatorname{Adh} A$ est un fermé, donc, d'après la proposition 18, on a $b \in \operatorname{Adh} A$. ■

L'adhérence d'une partie est donc l'ensemble de toutes les limites des suites de cette partie. Ce résultat est, lui aussi, très utile pour travailler sur l'adhérence d'une partie.

En cas d'existence, la borne supérieure (ou inférieure) d'une partie appartient à l'adhérence de cette partie. La caractérisation de l'adhérence permet donc, en corollaire, de caractériser la borne supérieure (ou inférieure).

Proposition 20

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

(i) M est la borne supérieure de A si, et seulement si, M est à la fois un majorant de A et la limite d'une suite à valeurs dans A ;

(ii) A est non majorée si, et seulement si, il existe une suite, à valeurs dans A, qui tend vers $+\infty$.

Ces deux résultats s'adaptent *mutatis mutandis* au cas des bornes inférieures.

■ (i) Supposons que M est la borne supérieure de A. Alors M est un majorant de A (par définition) et c'est la limite d'une suite d'éléments de A d'après la proposition 19 puisque $\sup A \in \operatorname{Adh} A$.

Réciproquement, supposons que M est à la fois un majorant de A et la limite d'une suite à valeurs dans A et démontrons que $M = \sup A$. Remarquons tout d'abord que, puisque A est non vide et majorée par M, la propriété de la borne supérieure nous dit que $\sup A$ existe bel et bien et vérifie $\sup A \leqslant M$. Notons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de A qui tend vers M. Comme $\sup A$ est un majorant de A, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \sup A$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $M \leqslant \sup A$. Donc $M = \sup A$.

(ii) Supposons que A n'est pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $a_n \in A$ tel que $a_n \geqslant n$. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans A telle que $\forall n \geqslant 1,\ a_n \geqslant n$. Cette suite est non majorée et à valeurs dans A, comme voulu.

Supposons réciproquement qu'il existe une suite dans A qui tend vers $+\infty$. Alors, par définition, A n'est pas majorée. ■

Exemples :

- Soit $A = \{(n-m)/(n+m) : n, m \in \mathbb{N}^*\}$. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $|n-m| \leqslant n+m$ donc $-1 \leqslant (n-m)/(n+m) \leqslant 1$, ce qui prouve que A est bornée entre -1 et 1. Or, à m fixé (par exemple $m = 1975$), on a $(n-m)/(n+m) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et, à n fixé, on a $(n-m)/(n+m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} -1$. Donc $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque son adhérence est égale à $\mathbb{R}$. Caractériser séquentiellement l'adhérence permet donc de caractériser séquentiellement les ensembles denses.

Proposition 21

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite à valeurs dans D.

■ C'est une conséquence immédiate de la proposition 19 et du fait que D est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\operatorname{Adh} D = \mathbb{R}$. ■

Exemples :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons $d_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et $D_n = 10^{-n}\lceil 10^n x\rceil$, les approximations décimales de x à 10^{-n} près, respectivement par défaut et par excès.

  Pour tout $n \geqslant 0$, on a $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x$ et $10^n x \leqslant \lceil 10^n x\rceil < 10^n x + 1$, donc $x - 10^{-n} < d_n \leqslant x$ et $x \leqslant D_n < x + 10^{-n}$. Le théorème des gendarmes nous dit donc que $(d_n)_{n\geqslant 0}$ et $(D_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers x. On peut même démontrer (y réfléchir) que ces deux suites sont adjacentes.

  Comme tous les termes de ces suites appartiennent à l'ensemble $\mathbb{D} = \{a/10^n : a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ des nombres décimaux, la caractérisation séquentielle de la densité permet d'en déduire que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

G. Suites complexes

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ (pas de suite croissante, décroissante, majorée, minorée, ...). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue sont étendues en la remplaçant par le module.

On peut ainsi généraliser la notion de convergence.

Définition 10

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ (ou qu'elle est convergente vers ℓ) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans le plan complexe, ce résultat signifie que tout disque de rayon non nul centré au point d'affixe ℓ contient, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite.

La limite d'une suite complexe convergente est unique.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

■ La démonstration de l'unicité de la limite est une adaption immédiate du cas réel. Seule différence : les voisinages utilisés ne sont plus des intervalles mais des disques du plan complexe. ■

Dans le cas des suites complexes, on ne distingue pas plusieurs types de divergence puisque $+\infty$ et $-\infty$ n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$.

Exemples :

- Lorsque $q \in \mathbb{C}$ est tel que $|q| < 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
  La démonstration est la même que dans $\mathbb{R}$ à ceci près que les $|\cdot|$ sont des modules.
- L'inégalité triangulaire inversée permet d'affirmer que si une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers $|\ell|$.

Les résultats suivants restent valables.

Théorème 12

Comme dans le cas des suites réelles, on a

(i) une suite complexe convergente est bornée ;

(ii) une somme de suites complexes convergentes est convergente et sa limite est la somme des limites ;

(iii) un produit de suites complexes convergentes est convergent et sa limite est le produit des limites ;

(iv) un quotient de suites complexes convergentes, la limite du dénominateur étant non nulle, est convergent et sa limite est le quotient des limites ;

(v) le théorème de Cesàro ;

(vi) une suite extraite d'une suite complexe convergente est convergente, de même limite.

■ On adapte les démonstrations du cas réel. ■

Il reste une forme indéterminée possible dans le cas des quotients : « 0/0 ».

Une suite complexe de la forme $({u_n}^n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas être écrit sous forme exponentielle puisque nous ne connaissons pas le logarithme complexe. On s'en sort en général en écrivant u_n sous forme exponentielle.

Le théorème suivant est fondamental. Il établit que la convergence d'une suite complexe revient à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Théorème 13

Une suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si, les suites réelles $\big(\Re\mathrm{e}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers $\Re\mathrm{e}(\ell)$ et $\Im\mathrm{m}(\ell)$.

■ On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que les suites $\big(\Re\mathrm{e}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers a et b. La somme $(z_n)_{n\geqslant 0} = \big(\Re\mathrm{e}(z_n) + i\Im\mathrm{m}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge alors vers $a+ib$, d'après le théorème 12.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons réciproquement que la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell = a+ib$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\big|\Re\mathrm{e}(z_n) - a\big| \leqslant |z_n - \ell|$ et $\big|\Im\mathrm{m}(z_n) - b\big| \leqslant |z_n - \ell|$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\big(\Re\mathrm{e}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\Im\mathrm{m}(z_n)\big)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers a et b. ■

On en déduit le théorème de Bolzano–Weierstraß complexe. On rappelle qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée lorsqu'il existe $K \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K$.

Théorème 14

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.

■ Soit $(z_n = x_n + iy_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de $\mathbb{C}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n| \leqslant |z_n|$ et $|y_n| \leqslant |z_n|$, les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées. Le théorème de Bolzano–Weierstraß réel permet alors d'extraire de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. La suite $(y_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ étant bornée, on peut en extraire une suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $b \in \mathbb{R}$. La suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geqslant 0}$ étant extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$, elle converge vers a. En définitive, la suite $(z_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geqslant 0} = (x_{\varphi\circ\psi(n)} + iy_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $a+ib \in \mathbb{C}$. ■ 11 h 30