

Familles sommables

17 janvier 2019

1 Produit de Cauchy de deux séries

1.1

Donner un exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.

1.2 Cesaro

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries convergentes. On pose $c = a * b$. Montrer *énoncé double* que $C = AB$ en vérifiant que $\sum C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$.

1.3 Cauchy-Mertens

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques convergentes, la première étant absolument convergente. On se propose de montrer que leur série produit de Cauchy $c = a * b$ converge vers le produit AB de leurs sommes respectives.

- Montrer que l'on peut supposer $B = 0$.
- Vérifier que $\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n a_k B_{n-k}$ et montrer que cette suite tend vers 0. Conclure.

1.4 Pringsheim

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles décroissant vers 0, et $w = u * v$. Montrer que $\sum (-1)^{n-1} w_n$ converge ssi la suite w tend vers 0.

2 Sommabilité

2.1

Etudier la famille Sommabilité des familles $(\frac{1}{(m+n)^\alpha})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$, $\alpha > 0$; $(\frac{1}{(m^2 - mn + n^2)^\alpha})$.

2.2

Soit z_n une suite de nombres complexes non nuls telle que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$ on ait $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que, pour $\alpha > 2$, la série $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.



2.3

équivalence des normes + estimer le cardinal de $A \cap U^n$

On se donne une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbf{R}^n , étudier la sommabilité de la famille $(\frac{1}{\|\alpha\|})$ selon $\alpha > 0$.
 $\alpha \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ $\sim d > n$

3 Identités obtenues par développement

On reverra avec profit la dernière partie du devoir : séries de Dirichlet.

3.1

La fonction *zeta* est celle de Riemann. Calculer $\sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) - 1$.

3.2

La fonction ϕ est l'indicatrice d'Euler. Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{2^n - 1}$.

3.3

On désigne par γ la constante d'Euler.

- Montrer que l'on a : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$.
- La famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)$, $n \geq 1$, $k \geq 2$ est-elle sommable ? Et si l'on se restreint à $n \geq 2$?
- Montrer que $\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)$.

4 Ensembles de mesure nulle

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbf{R}$ est *de mesure nulle* lorsque :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ intervalles ouverts de \mathbf{R} , $\left(A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right)$ et $\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} l(I_\lambda) \leq \varepsilon \right)$

- Montrer que \mathbf{Q} est de mesure nulle.
- Montrer que si $(A_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est de mesure nulle, alors $\bigcup A_p$ aussi.
- Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Montrer que $[a, b]$ n'est pas de mesure nulle.
- Montrer que l'ensemble des réels 3-approchables est de mesure nulle.