

COURS DE PHYSIQUE

OUTILS & METHODES POUR LA PHYSIQUE

JIMMY ROUSSEL

2025

Cours sur les outils et méthodes scientifiques – femto-physique.fr
JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2025 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».*

Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Ce document est réalisé avec l'aide de **KOMA-Script** et **L^AT_EX** en utilisant la classe **kaobook**.

1^{re}édition – Janv. 2011

Version en ligne – femto-physique.fr/omp

Préface

La physique est une science qui repose essentiellement sur la mesure et la modélisation. Le bagage du physicien doit donc contenir les outils et les méthodes qui lui permettent :

1. de tirer une information rationnelle à partir de ses mesures;
2. d'approcher le comportement d'un système modèle à l'aide d'une analyse mathématique.

C'est pourquoi ce cours est découpé en deux parties : une première autour de la mesure, une autre autour des concepts mathématiques utiles au physicien.

Ce cours s'adresse à un public relativement large car il aborde différents outils mobilisés aussi bien en Lycée que dans l'Enseignement Supérieur.

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
AUTOUR DE LA MESURE	1
1 UNITÉS ET DIMENSIONS	3
1.1 Dimension d'une grandeur	3
1.2 Le SI	5
1.3 Analyse dimensionnelle	7
2 MESURES ET INCERTITUDES	11
2.1 Mesurer c'est évaluer	11
2.2 Estimation d'une incertitude	13
2.3 Propagation des erreurs	18
3 VALIDER UN MODÈLE	21
3.1 Modélisation	21
3.2 Comparer deux valeurs	24
3.3 Valider une loi	26
OUTILS MATHÉMATIQUES	29
4 CALCUL VECTORIEL EN PHYSIQUE	31
4.1 Grandes vectorielles	31
4.2 Produit scalaire	35
4.3 Produit vectoriel	37
5 LES CONIQUES	43
5.1 Introduction	43
5.2 L'ellipse	43
5.3 La parabole	45
5.4 L'hyperbole	46
6 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE	49
6.1 EDO	49
6.2 EDO linéaire	50
6.3 Équation à variables séparables	53
7 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES	55
7.1 Dérivée partielle	55
7.2 Différentielle	57
8 OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS	65
8.1 L'opérateur gradient	65
8.2 L'opérateur divergence	66
8.3 L'opérateur rotationnel	68

8.4	L'opérateur laplacien	69
9	SÉRIE DE FOURIER	71
9.1	Séries de Fourier	71
9.2	Applications	76
9.3	Conclusion	80
10	TRANSFORMÉE DE FOURIER	81
10.1	Transformation de Fourier	81
10.2	Impulsion de Dirac	85
10.3	La TF en sciences-physiques	89
	Pour en savoir plus	95
	Grandeurs physiques et symboles mathématiques	97

Table des figures

1.1	Définition de l'angle plan.	4
1.2	Le SI et ses 7 unités fondamentales liées aux 7 constantes universelles.	5
2.1	Distribution gaussienne	14
2.2	Propagation des incertitudes dans le cas d'une relation affine	18
3.1	Bilan des forces	22
3.2	A et B sont significativement différents contrairement à B et C.	24
3.3	Représentation graphique des résultats.	25
3.4	Ajustement d'une courbe modèle à un nuage de points expérimentaux.	26
3.5	copies d'écran de la boite de dialogue Option.	27
3.6	Entrée des données au clavier.	27
3.7	Onglet variables. Le logiciel effectue le calcul dans le Système international d'unités si les unités sont fournies. Ici, on a indiqué les unités de L en cm de sorte que, lors du calcul de x , L est converti en mètre.	28
3.8	Résultat de l'ajustement sous Régessi	28
4.2	Deux vecteurs identiques.	31
4.1	Représentation d'une grandeur vectorielle.	31
4.3	Somme de deux vecteurs.	32
4.5	Décomposition d'un vecteur dans une base.	32
4.4	Multiplication par une constante.	32
4.6	Base cartésienne.	32
4.7	Exemple de repère cartésien.	33
4.8	Droite parallèle à une direction et contenant le point A.	33
4.9	Trois masses en équilibre.	34
4.10	Corps soumis à une action.	34
4.11	Angle formé par deux vecteurs.	35
4.12	Trois masses en équilibre.	36
4.13	Composition des vitesses.	36
4.14	Projection.	36
4.15	Base polaire.	37
4.16	Règle de la main droite.	37
4.17	Interprétation géométrique du produit vectoriel.	38
4.18	Interprétation géométrique du produit mixte.	39
4.19	Transformation d'un vecteur polaire.	40
4.20	Transformation d'un produit vectoriel de deux vecteurs polaires.	41
5.1	L'ellipse	43
5.2	La parabole	45
5.3	Hyperbole d'excentricité $e = 1,6$.	46
7.1	Interprétation géométrique de la notion de dérivée partielle. Les vecteurs sont des vecteurs tangents aux deux courbes se coupant en M.	56
7.2	Exemple de point col.	63
9.1	Caractéristiques d'un signal périodique.	71

9.2	Note Do ₃ jouée au violon	72
9.3	Passage de l'espace réel (temporel) à l'espace de Fourier (fréquentiel).	73
9.4	Signal triangulaire	73
9.5	Spectre du signal triangulaire	74
9.6	Approximation du signal triangulaire	74
9.7	Spectre de $u(t)$	76
9.9	Quadripôle électronique	76
9.8	Filtre	76
9.10	Filtre RLC	77
9.11	Types de filtre souvent rencontrés.	77
9.12	Courbe de réponse du circuit RLC.	78
9.13	Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique	78
10.2	Spectre en puissance d'une fonction porte de largeur temporelle τ	82
10.1	Fonction porte.	82
10.3	Effet d'une modulation dans l'espace de Fourier.	84
10.4	Fonction porte et son spectre en puissance.	85
10.5	Représentation d'une impulsion de Dirac.	86
10.6	Représentation de $f(t)$ et $\hat{f}(\nu)$ pour les fonctions circulaires.	87
10.7	Relation entre série de Fourier et transformée de Fourier.	88
10.8	La transformée de Fourier d'un signal périodique	88
10.9	Peigne de Dirac de pas T_0	89
10.10	Champ électrique rayonné lors d'une émission atomique.	90
10.11	Courbe de Lorentz.	91
10.12	Profil d'une raie atomique.	91
10.13	Forme d'un train d'ondes quasi-harmoniques	91
10.14	Schéma d'une chaîne de mesure RMN.	92
10.15	Principe de l'interféromètre de Michelson.	92
10.16	Relation de dualité entre spectre et interférogramme.	92
10.17	Schéma d'un spectrophotomètre	93
10.18	Paramétrage du problème de diffraction en champ lointain.	93
10.19	Pupille diffractante et tache de diffraction associée	94

Liste des tableaux

1.1	Symboles donné aux dimensions des grandeurs de base.	4
1.2	Les sept unités de base du Système international d'unités.	5
1.3	Quelques unités dérivées.	6
1.4	Préfixes multiplicateurs.	7
2.1	Coefficients de Student pour un intervalle de confiance de 68%	15
3.1	Mesure de la période du pendule simple pour deux longueurs différentes.	24
3.2	Résultats expérimentaux.	25
8.1	Expressions de l'opérateur gradient dans différents systèmes de coordonnées.	65
8.2	Expressions de la divergence dans différents systèmes de coordonnées.	67
8.3	Expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées	68

8.4 Expressions du laplacien dans différents systèmes de coordonnées.	69
-------------------------------------------------------------------------------	----

AUTOUR DE LA MESURE

UNITÉS ET DIMENSIONS

« Dis-moi comment l'on te cherche, je te dirai qui tu es » (Bachelard)

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/grandeurs-physiques.php>

1.1 Dimension d'une grandeurs physique

Grandeurs physiques

Une grandeur physique est une quantité qui se rapporte à une propriété et qui peut se mesurer. Or, **mesurer, c'est comparer**. C'est comparer à l'aide d'un instrument, une grandeur physique inconnue avec une grandeur de même nature – on dira de **même dimension** – prise comme référence que l'on appelle **étauon**.

Par exemple, le poids de Miss Univers peut être comparé à celui d'un étauon (1 kg par exemple) à l'aide d'une balance : le poids de Miss Univers est une grandeur physique. En revanche, sa beauté est une propriété subjective qui ne peut être mesurée compte tenu qu'il n'existe pas d'étauon de beauté. En d'autres termes, la beauté se rapporte à l'aspect physique mais ne relève pas de la Physique; il ne s'agit pas d'une grandeur physique.

Lors du processus de mesure (mesurage) on effectue donc une comparaison entre un étauon (l'unité) et la grandeur à mesurer puis l'on traduit le résultat par un chiffre (la mesure) assortie d'un intervalle définissant un certain niveau de confiance (l'incertitude) ainsi que l'unité¹

$$X = x_m \pm \Delta x \text{ unité}$$

La détermination de la mesure et de l'incertitude fait l'objet d'un autre chapitre. Ici on s'intéresse au contenu dimensionnel des grandeurs physiques et du choix de l'unité.

Notion de dimension

En général, le résultat d'une mesure dépend de l'étauon utilisé. Par exemple, si l'on compare la longueur ℓ d'une règle de 1 m avec un décimètre, on obtient $\ell = 10$ dm. Si l'on choisit un double décimètre comme étauon de mesure, on trouve $\ell = 5$ ddm (double décimètre). La mesure est donc différente ($5 \neq 10$) : on dit que la longueur possède une dimension.

1.1 Dimension d'une grandeurs physique	3
Grandeurs physiques	3
Notion de dimension	3
Équation aux dimensions	4
1.2 Le Système international d'unités	5
Les unités de base	5
Les unités dérivées	6
Préfixes SI	7
1.3 Analyse dimensionnelle	7
Vérifier une formule	7
Conversion d'unités	8
Modéliser	8

1 : L'unité est indispensable! Exprimer le résultat d'un calcul ou d'une mesure sans préciser l'unité n'a aucun sens.

Dimension d'une grandeur

Par définition, une grandeur physique G a une dimension si sa mesure dépend du choix de l'échelle de mesure. Sa dimension est notée $[G]$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec l'unité qui est purement conventionnelle alors que la dimension est une propriété indépendante de tout système d'unités.

Deux grandeurs ont même dimension si on peut les comparer. C'est pourquoi le rayon d'un cercle et son périmètre ont même dimension, car je peux en faire la mesure avec le même échelle (par exemple un fil souple d'une certaine longueur). Ici il s'agit de la dimension [longueur].

Il existe également des grandeurs physiques sans dimension (on dit aussi adimensionnelles). Dans ce cas la dimension est noté $[G] = 1$. Par exemple, l'angle θ d'un secteur AOB est une grandeur que l'on peut mesurer comme suit : traçons un cercle de centre O et de rayon r . Les droites (OA) et (OB) coupent le cercle en deux points A' et B' . L'angle se mesure en faisant le rapport de la longueur d'arc $\widehat{A'B'}$ et du rayon du cercle.

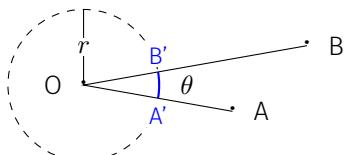


FIG. 1.1 : Définition de l'angle plan.

TAB. 1.1 : Symbole donné aux dimensions des grandeurs de base.

Dimension	Symbol
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N

On constate donc que si l'on double le rayon du cercle, la longueur d'arc double également de sorte que l'angle ne dépend pas de la taille du cercle. Il est alors assez évident que si l'on décide de mesurer les distances en centimètre, en pouce, ou dans n'importe quel système d'unités, le résultat de l'angle θ ne changera pas. **L'angle est donc sans dimension.** De la même manière, une grandeur définie comme le rapport de deux grandeurs de même dimension, ne présente pas de dimension.

Enfin, par commodité, on a donné un nom spécifique à certaines dimensions (cf. TAB. 1.1).

Équation aux dimensions

Une loi physique affirme l'égalité de deux grandeurs qui sont nécessairement de même nature. Une loi physique est donc aussi une relation entre différentes dimensions : on parle d'**équation aux dimensions**. Voyons comment obtenir ces équations aux dimensions sur quelques exemples.

La vitesse : d'après la définition $v_x \stackrel{\text{def}}{=} dx/dt$, on déduit

$$[v] = LT^{-1}$$

L'accélération : la définition $a_x \stackrel{\text{def}}{=} dv_x/dt$ donne

$$[a] = \frac{[v]}{T} = LT^{-2}$$

La force : en vertu de la deuxième loi de Newton $F = ma$ on a

$$[F] = MLT^{-2}$$

La constante des gaz parfaits : on peut obtenir sa dimension à partir de la loi du gaz parfait $pV = nRT$.

$$[R] = \frac{[p][V]}{[n][T]} = \frac{[F]}{L^2} \times \frac{L^3}{N\Theta} = ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$$

Le champ magnétique : par définition du champ magnétique, une particule de charge électrique q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} subit une force $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{MLT^{-2}}{IT \times LT^{-1}} = MT^{-2}I^{-1}$$

1.2 Le Système international d'unités

Comme on l'a déjà dit, mesurer c'est comparer une grandeur physique avec un étalon qui définit l'**unité de mesure**. Celle-ci relevant d'un choix arbitraire il faut bien **convenir** d'un système d'unités pour pouvoir communiquer (transactions commerciales, rapports scientifiques, etc.). La bonne idée consiste alors à choisir des étalons dont la définition est indépendante du lieu et du temps et avec lesquels on peut construire toutes les unités. C'est l'ambition du Système international d'unités (SI) adopté par quasiment tous les pays². Né officiellement en 1960, il s'agit d'une extension de l'ancien système MKSA.

2 : Trois pays n'ont pas encore adopté officiellement le système métrique : le Libéria, la Birmanie et... les Etats-Unis.

Les unités de base

Le (SI) forme un système cohérent reposant sur **sept unités de base** (cf. TAB. 1.2) indépendants du point de vue dimensionnel. Depuis le 20

Dimension	Symbole	Unité SI	Symbol
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

mai 2019, les unités du SI sont définies à partir de sept constantes de la nature auxquelles on donne une valeur fixe. Les sept constantes sur lesquelles repose le Système international d'unités sont

- la fréquence de la transition hyperfine du césum 133 $\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770$ Hz qui permet de définir la seconde;

TAB. 1.2 : Les sept unités de base du Système internationale d'unités.

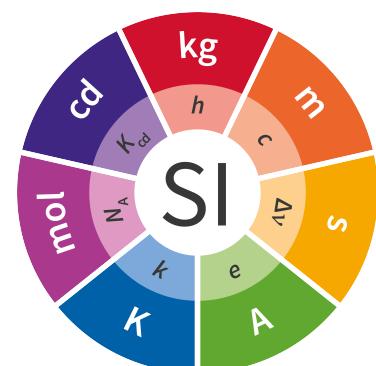


FIG. 1.2 : Le SI et ses 7 unités fondamentales liées aux 7 constantes universelles.

- ▶ la vitesse de la lumière dans le vide $c = 299\ 792\ 458\ \text{m.s}^{-1}$ qui permet de relier le mètre à la seconde;
- ▶ la constante de Planck $h = 6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}\ \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ qui définit indirectement le kilogramme;
- ▶ la charge élémentaire $e = 1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$ qui fixe l'ampère puisque $1\ \text{C} = 1\ \text{A.s}$;
- ▶ la constante de Boltzmann $k_B = 1,380\ 649 \cdot 10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}$ qui relie le kelvin aux unités mécaniques;
- ▶ la constante d'Avogadro $N_A = 6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ qui donne le nombre exact d'entités élémentaires (atomes, molécules, ions, etc.) formant une mole;
- ▶ Enfin, l'efficacité lumineuse $K_{cd} = 683\ \text{lumen.W}^{-1}$ pour un rayonnement monochromatique de longueur d'onde³ $\lambda = 555\ \text{nm}$. Cette constante relie les grandeurs sensorielles (intensité en candela, éclairement en lux, flux lumineux en lumen) aux grandeurs énergétiques de la lumière (intensité en watt par stéradian, éclairement en watt par mètre carré, flux en watt).

3 : Cette longueur d'onde correspond au maximum de sensibilité de l'œil humain.

Notez que ces constantes sont des grandeurs physiques sans incertitude. En revanche, certaines grandeurs auparavant fixées (avant mai 2019) retrouvent leur statut de grandeur expérimentale. Par exemple, une mole de carbone 12 pesait auparavant 12 g par définition; dorénavant sa valeur n'est plus connue exactement. Elle présente donc une incertitude.

Les unités dérivées

Les sept unités de base du système international sont les «unités fondamentales» à partir desquelles sont obtenues par combinaison toutes les autres unités, dites **unités dérivées**. Certaines d'entre-elles se sont vues attribuer un nom qui rappelle une personnalité scientifique : newton, pascal, joule, volt, tesla, henry etc. Il peut donc y avoir

TAB. 1.3 : Quelques unités dérivées.

Grandeur	Unité SI	Grandeur	Unité SI
aire	m^2	énergies	J (joule)
volume	m^3	pression	Pa (pascal)
masse molaire	kg.mol^{-1}	tension	V (volt)
masse volumique	kg.m^{-3}	charge électrique	C (coulomb)
fréquence	Hz (hertz)	résistance électrique	Ω (ohm)
vitesse (scalaire)	m.s^{-1}	champ électrique	V.m^{-1}
vitesse angulaire, pulsation	rad.s^{-1}	conductance électrique	S (siemens)
accélération (scalaire)	m.s^{-2}	capacité électrique	F (farad)
force d'interaction	N (newton)	inductance	H (henry)
puissance mécanique	W (watt)	champ magnétique	T (tesla)

différentes façons d'exprimer la même unité.

Exemple : unités de la pression

La pression s'exprime en pascal (Pa) dans le système international. Etant donné que la pression représente une force par unité de surface on peut aussi l'exprimer en N/m^2 . Par ailleurs, on sait d'après l'équation aux dimensions $F = MLT^{-2}$, que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg.m.s}^{-2}$ d'où l'on déduit

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N.m}^{-2} = 1\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

Il existe une dernière classe d'unités qu'on appelle unités supplémentaires. Cette classe contient deux unités sans dimension : le radian (rad), unité de l'angle plan, et le stéradian (sr), unité d'angle solide.

Préfixes SI

Enfin, on utilise parfois des préfixes multiplicateurs pour remplacer les puissances de 10 :

Valeur	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfixe	atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci
Symbol	a	f	p	n	μ	m	c	d
Valeur	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
Préfixe	déca	hecto	kilo	Mega	Giga	Tera	Peta	Exa
Symbol	da	h	k	M	G	T	P	E

TAB. 1.4 : Préfixes multiplicateurs.

1.3 Analyse dimensionnelle

Analyser le contenu dimensionnel d'une relation permet de rendre bien des services. En voici un petit tour d'horizon ...

Vérifier une formule

Une loi physique impose une contrainte qui n'existe pas en mathématique ; elle doit être **homogène**, c'est-à-dire constituée de termes de même dimension. Sommer deux grandeurs de dimension différente n'a aucun sens en physique. Ainsi pour vérifier une loi physique, la première chose à faire est de vérifier l'homogénéité !

Vérifier une formule

Toute formule non homogène est nécessairement fausse. On retiendra quelques règles :

- ▶ dans $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$ et $\log x$ la grandeur x doit être sans dimension ;
- ▶ dans $1 + x$, la grandeur x doit être sans dimension ;
- ▶ dans $1 + x/y$, les grandeurs x et y sont de même dimension.

Exercice – La période d'oscillation d'un pendule simple dépend de sa longueur ℓ , du champ de pesanteur g et de l'amplitude angulaire θ_{\max} des oscillations. On propose plusieurs formules ; préciser celles qui ne sont pas homogènes :

$$\square \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell + \theta_{\max}}{g - \theta_{\max}}}$$

$$\square \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g\theta_{\max}}}$$

$$\square \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right)$$

$$\square \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{\max}}{\ell} \right)$$

Bien entendu, cela ne signifie pas qu'une formule homogène soit forcément exacte, mais cela permet déjà de trier ce qui n'a aucun sens physique de ce qui peut en avoir. De manière générale, l'analyse dimensionnelle est un outil de réfutation, pas de validation.

Il faut prendre garde à certaines formules qui mélangeant expressions numériques et littérales. Par exemple, le pH d'une solution acido-basique diluée est souvent défini par

$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$$

Or la concentration n'est pas sans dimension ce qui suggère que cette formule est non-homogène. En réalité cette formule n'obéit pas à la règle élémentaire qui veut que toute relation soit indépendante du système d'unités. En effet, dans la formule qui donne le pH, il est sous entendu qu'il faut exprimer $[\text{H}_3\text{O}^+]$ en mol.L^{-1} . Si l'on veut donner la relation qui donne le pH quel que soit le système d'unités on écrira plutôt

$$\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ}$$

où c° désigne la concentration standard. Dans le SI, $c^\circ = 1000 \text{ mol.m}^{-3}$ mais si l'on décide d'exprimer les concentrations en mol.L^{-1} , on a $c^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ et dans ce cas la tentation est grande de faire disparaître cette constante par commodité. Mais cela ne doit pas nous faire oublier sa présence.

Conversion d'unités

L'équation aux dimensions étant indépendante du système d'unités, elle est très utile quand il faut convertir une unité d'un système vers celle d'un autre système.

Exemple : la dyne

Dans le Système International, la force s'exprime en newton alors qu'elle s'exprime en dyne dans le Système CGS (cm, gramme, seconde). Combien de newton vaut 1 dyne ?

L'équation aux dimensions $[\text{Force}] = \text{MLT}^{-2}$ doit être vérifiée dans tout système d'unités. On a donc

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad 1 \text{ dyne} = 1 \text{ g.cm.s}^{-2}$$

Ainsi on en déduit la conversion :

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dynes}$$

Modéliser

L'analyse dimensionnelle permet de prévoir la forme d'une loi si l'on sait quels sont les paramètres pertinents du problème.

Supposons par exemple que nous cherchions à exprimer une grandeur G en fonction de 2 paramètres pertinents indépendants p_1 et p_2 . La méthode consiste alors à trouver comment multiplier p_1 et p_2 pour former une grandeur de même dimension que G . On écrit donc

$$G = C^{\text{te}} p_1^\alpha p_2^\beta$$

où α et β sont des facteurs que l'on détermine grâce à l'équation aux dimensions. Une fois ces constantes déterminées, on peut proposer la forme générale de la loi recherchée.

Exemple : période d'oscillation T d'un pendule simple

On suppose que la période T dépend de la masse m , du champ de pesanteur g et de la longueur ℓ du pendule : $T = f(m, g, \ell)$. On écrit alors

$$T = C^{\text{te}} m^\alpha g^\beta \ell^\gamma$$

où C^{te} est un facteur adimensionné. Cela nous donne l'équation aux dimensions

$$T = M^\alpha L^\gamma T^{-2\beta}$$

La loi devant être homogène on doit poser $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 1/2$. La forme générale est donc

$$T = C^{\text{te}} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Attention, ce n'est pas parce que l'on trouve une loi qu'elle est juste ! L'analyse dimensionnelle nous dit simplement que la loi est correcte en termes de dimension. C'est à l'expérience de confirmer ou d'infirmer l'analyse. Par exemple, dans le cas du pendule, supposer comme nous l'avons fait, que la période du pendule ne dépend pas de l'amplitude des oscillations est en contradiction avec les faits^a. Il faut alors introduire l'amplitude θ_0 des oscillations dans l'analyse dimensionnelle :

$$T = f(m, g, \ell, \theta_0) \implies T = C^{\text{te}} m^\alpha g^\beta \ell^\gamma \theta_0^\delta$$

d'où l'équation aux dimensions

$$T = M^\alpha L^\gamma T^{-2\beta}$$

identique à la précédente. On trouve donc les mêmes résultats ($\alpha = 0$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 1/2$) et δ peut prendre des valeurs quelconques. En d'autres termes on peut écrire la période ainsi

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} (a_0 + a_1 \theta_0 + a_2 \theta_0^2 + \dots + a_p \theta_0^p + \dots)$$

où les exposants peuvent être quelconques de sorte que la forme la plus générale est

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} f(\theta_0)$$

^a On peut montrer que cette propriété n'est correcte que si les angles sont petits.

Notez que l'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer complètement la loi recherchée. Dans le meilleur des cas, une constante adimensionnée est à déterminer de façon empirique.

MESURES ET INCERTITUDES

«La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant» (Edgar Morin)

Accéder à une valeur objective de la réalité sans erreur est tout simplement impossible. L'erreur fait parti de l'opération de mesure. Une des forces de la science est d'avoir mis au point des outils qui permettent d'**estimer** cette erreur.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/mesures-et-incertitudes.php>

2.1 Mesurer c'est évaluer

Notion d'erreur et d'incertitude

Expérience

Mesurons, à l'aide d'un chronomètre, la durée t correspondant à 2,5 périodes d'oscillation d'un pendule simple (5 passages à la verticale). En faisant faire cette même mesure par différents élèves on trouve

mesure \circ	1	2	3	4
durée t	3,62 s	3,47 s	3,44 s	3,30 s

L'expérience précédente montre que les résultats sont différents ce qui traduit l'existence **d'erreurs de mesure**. L'erreur faite lors de la mesure d'une grandeur x est l'écart entre la valeur mesurée (x_i) et sa valeur vraie (x_{vraie}), laquelle est unique mais inaccessible. Elle présente deux composantes.

Erreur aléatoire L'erreur aléatoire ϵ_a provient des variations temporelles et spatiales **non prévisibles** de grandeurs d'influence¹. Elle est définie par

$$\epsilon_a = x_i - \bar{x}$$

où \bar{x} est la moyenne des mesures obtenue en répétant N fois la même expérience avec $N \rightarrow \infty$.

Erreur systématique L'erreur systématique² ϵ_s est un **décalage constant** dont l'origine peut être d'ordre théorique ou expérimentale³. Par définition,

$$\epsilon_s = \bar{x} - x_{\text{vraie}}$$

Ainsi, l'erreur sur une mesure est la somme d'un biais et d'une quantité aléatoire :

$$\epsilon = x_i - x_{\text{vraie}} = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_{\text{vraie}}) = \epsilon_a + \epsilon_s$$

2.1 Mesurer c'est évaluer	11
Erreur et incertitude	11
Écriture scientifique	12
2.2 Comment estimer une incertitude?	13
Généralités	14
Estimation de type A	14
Estimation de type B	16
Incertitude composée	16
Incertitude élargie	17
2.3 Propagation des erreurs	18
Cas d'une loi affine	18
Cas d'une loi puissance	18
Méthode générale	19
Données sans incertitude	20

1 : Par exemple, le soin avec lequel sont effectuées les mesures, la température de la pièce, la fidélité de l'appareil de mesure, etc.

2 : On dit aussi *biais*.

3 : Exemple de biais : influence du mode opératoire, problème de calibrage d'un appareil, modélisation incomplète, etc.

Exemple

Dans l'expérience précédente on peut lister les différentes sources d'erreur :

Erreur aléatoire	Erreur systématique (biais)
réflexe humain	défaut de parallaxe
fidélité limitée du chronomètre	chronomètre mal calibrés
erreur de lecture	verticale mal positionnée

Correction d'un biais

Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire faite sur une mesure, elle peut être réduite en augmentant le nombre d'observations comme nous allons le voir. En revanche, l'erreur systématique d'un résultat de mesure ne peut être réduite en augmentant le nombre d'observations, mais par l'application d'une **correction**.

Le résultat final est exprimé sous la forme d'un **intervalle de valeurs probables**

$$x = x_m \pm \Delta x$$

où x_m est la mesure, c'est-à-dire la meilleure estimation de la valeur vraie et Δx l'**incertitude sur la mesure** que l'on cherche à évaluer. Plus précisément l'intervalle $[x_m - \Delta x, x_m + \Delta x]$ est défini comme un intervalle de confiance associé à une probabilité de contenir la valeur vraie x_{vraie} . Cette probabilité est appelé **niveau de confiance**.

Exemple

La masse de l'électron vaut (CODATA 2010)

$$m_e = (9,10938291 \pm 0,00000040) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

avec un niveau de confiance de 68%.

Insistons sur le fait que sans incertitude il nous est impossible de comparer deux résultats ou de réfuter une loi. Pour qu'un résultat ait une valeur scientifique il faut pouvoir prouver que les éventuels écarts entre la théorie et l'expérience sont non significatifs c'est-à-dire liés aux erreurs de mesure ce qui rend nécessaire l'estimation des incertitudes.

Écriture scientifique

Avant de voir comment estimer les incertitudes, faisons une petite mise au point sur les conventions d'écriture scientifique.

Dans une valeur numérique, le premier chiffre non-nul de gauche désigne le chiffre le plus significatif et le dernier chiffre de droite le chiffre le moins significatif. Les nombres 1230, 1,230 et 0,001230 ont ainsi tous quatre chiffres significatifs. Le nombre de chiffres significatifs rend compte de la précision du résultat et permet donc de se

faire une idée de l'incertitude, même quand cette dernière n'est pas indiquée. Par exemple, écrire

$$c = (3,00278 \pm 0,04) \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

n'a aucun sens, puisque l'incertitude indique que nous n'avons pas d'information au delà de la deuxième décimale. Il faut donc arrondir le résultat au centième.

Comment arrondir ?

Pour les arrondis on adopte la méthode qui consiste à arrondir au plus près : cela consiste à repérer le dernier chiffre à arrondir (en fonction de la précision) puis à l'augmenter d'une unité si le chiffre suivant est au moins égal à 5 ou à le conserver sinon. Par exemple,

- ▶ arrondir 1,645 à l'unité donne 2;
- ▶ arrondir 1,645 au dixième donne 1,6;
- ▶ arrondir 1,645 au centième donne 1,65.

Si l'on reprend l'exemple précédent, on écrira plutôt

$$c = (3,00 \pm 0,04) \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Par ailleurs, l'incertitude étant elle-même entachée d'une incertitude assez importante, on ne garde qu'un seul chiffre significatif, éventuellement deux si l'on estime faire une erreur d'arrondi trop importante avec un seul chiffre. Par exemple

$$175,652 \pm 6,922 \rightarrow 176 \pm 7 \quad \text{et} \quad 175,652 \pm 1,394 \rightarrow 175,7 \pm 1,4$$

En résumé

Une fois l'incertitude estimée, on l'arrondit à un ou deux chiffres. On ajuste la valeur de la mesure x_m de manière à ce que son **dernier chiffre significatif soit à la même position que celui de l'incertitude** en arrondissant au plus près. Le résultat se met sous la forme

$$x = (x_m \pm \Delta x) \cdot 10^n \quad \text{unité}$$

2.2 Comment estimer une incertitude ?

Décrivons les différentes méthodes qui nous permettent d'évaluer les erreurs aléatoires. Notez que l'on suppose les erreurs systématiques négligeables et que ça n'est qu'à la fin, lorsque l'on confronte théorie et expérience, que l'on peut invoquer l'existence de biais pour expliquer un désaccord.

Généralités

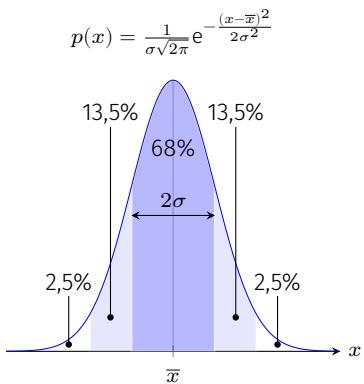


FIG. 2.1 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne. On a 68% de chance de trouver x dans l'intervalle $\bar{x} \pm \sigma$ et 95% dans l'intervalle $\bar{x} \pm 2\sigma$.

⁴ : On dit *espérance* en mathématique.

Finalement, mesurer c'est accéder à une grandeur aléatoire. Cette variable aléatoire présente une distribution qui a souvent l'allure d'une gaussienne dont la figure FIG. 2.1 en donne une représentation.

Pour caractériser la dispersion des résultats autour de la moyenne on définit l'**écart-type** σ :

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}$$

où \bar{x} désigne la moyenne⁴ et $\overline{(x - \bar{x})^2}$ la moyenne des écarts quadratiques. On montre qu'il existe une probabilité de 68% pour qu'une mesure soit compris dans l'intervalle $\bar{x} \pm \sigma$. On dit alors que l'intervalle $\bar{x} \pm \sigma$ représente un niveau de confiance de 68%. Le problème que l'on se pose est, comment, à partir de mesures, évaluer les valeurs \bar{x} et σ ?

Pour cela, il existe deux types d'estimations :

Type A – On répète n fois la même expérience puis on effectue une analyse statistique.

Type B – À partir d'une seule mesure on estime \bar{x} et σ à l'aide de différentes informations (notices techniques) et d'hypothèses probabilistes.

Estimation de type A

Supposons que l'on collecte n mesures en répétant n fois la même expérience. On cherche à accéder aux paramètres \bar{x} et σ à partir des n mesures x_1, x_2, \dots, x_n . Si $n \rightarrow \infty$ on pourrait reconstruire la loi de probabilité relative à la variable x et par conséquent calculer \bar{x} . Hélas, n est fini; il faut donc chercher la meilleure façon d'estimer les paramètres \bar{x} et σ à partir d'un ensemble discret de mesures.

Nous distinguerons deux situations :

- ▶ le cas où l'échantillon de mesures est grand, disons $n \geq 10$;
- ▶ le cas où l'échantillon est petit, c'est-à-dire $n < 10$.

Cas où $n \geq 10$

La théorie des probabilités permet de montrer que la meilleure estimation de \bar{x} est la **moyenne arithmétique**.

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \simeq \bar{x} \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

On montre également que la meilleure estimation de σ est l'**écart-type non biaisé** (noté σ_{n-1} sur les calculatrices)

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n - 1}} \simeq \sigma \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Notez que dans cette formule, la somme des écarts quadratiques est divisé par $n - 1$ et non par n comme on pourrait s'y attendre. Une façon de retenir ce facteur $n - 1$ est de réaliser que pour estimer un écart-type il faut au moins deux mesures ce qui implique $n > 1$.

Cas où $n \leq 10$

Si l'échantillon est petit (disons $n \leq 10$) il y a une correction à apporter. On montre alors que la meilleure estimation de l'écart-type vaut $t \times s$ où t est le coefficient de Student donnée dans la TAB. 2.1.

Exemple

Dans l'expérience précédente, on peut estimer l'incertitude-type associé à la mesure de la durée t . On trouve

$$m = \frac{3,62 + 3,47 + 3,44 + 3,30}{4} = 3,4575 \text{ s}$$

et puisque l'échantillon contient $n = 4$ mesures,

$$\sigma_t = 1,2 \times \sqrt{\frac{(0,1625)^2 + (0,0125)^2 + (-0,0175)^2 + (-0,1575)^2}{3}} \simeq 0,1575 \text{ s}$$

Ainsi, chaque mesure présente une incertitude-type de l'ordre de 0,16 s.

TAB. 2.1 : Coefficients de Student pour un intervalle de confiance de 68%

Nombre de mesures n	Coefficient t
2	1,84
3	1,32
4	1,20
5	1,14
6	1,11
7	1,09
8	1,08
9	1,07
10	1,06

Incertitude sur la moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est la meilleure estimation de la valeur vraie, pour autant elle n'en est pas moins entachée d'une certaine erreur. En effet, si l'on répète une autre série de n mesures on trouve une autre valeur de m . Il faut donc chercher à calculer l'écart-type de la moyenne σ_m . Il est alors assez facile de montrer que

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \frac{t s}{\sqrt{n}}$$

En d'autres termes, par rapport à une mesure isolée, on réduit l'incertitude d'un facteur \sqrt{n} en procédant à n mesures⁵. Finalement, le résultat se met sous la forme

$$x = m \pm \frac{t s}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum x_i \\ s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - m)^2} \end{array} \right. \quad \heartsuit$$

(2.3)

Exemple

Dans l'expérience qui nous sert de fil rouge, on peut accéder à une valeur précise de t en calculant sa moyenne arithmétique m et son incertitude-type :

$$m = 3,4575 \quad \text{et} \quad \sigma_m = \frac{0,1575}{\sqrt{4}} = 0,0787$$

5: On pourrait croire qu'il suffit de procéder à un très grand nombre de mesures pour accéder à la valeur vraie de façon très précise mais ce serait oublier la présence d'erreurs systématiques qui ne s'effacent pas avec le nombre d'observations. À partir d'un certain nombre n l'erreur systématique l'emporte sur l'erreur aléatoire. Toute la difficulté réside alors dans la détermination puis la correction des différents biais, comme nous le rappelle la très médiatique affaire des neutrinos supraluminiques.

Après avoir arrondi à un chiffre l'incertitude-type on peut finalement écrire le résultats de nos observations :

$$t = 3,46 \pm 0,08 \text{ s} \quad \text{niveau de confiance : 68\%}$$

Estimation de type B

Lorsque l'on procède à une unique mesure on ne peut plus estimer l'incertitude-type de façon statistique. On procède alors de la manière suivante.

1. On détermine la plage d'erreur $\Delta = x_{\max} - x_{\min}$ dans laquelle il est raisonnable de penser que se trouve la valeur vraie. Cette plage d'erreur peut être fournie par la notice technique d'un appareil de mesure, ou déterminée de façon empirique en fonction des conditions de l'expérience. Il ne faut pas oublier qu'une estimation à un chiffre significatif suffit.
2. On fait ensuite l'hypothèse que la probabilité de trouver la valeur vraie dans cet intervalle est uniforme. Il est alors facile de montrer grâce aux probabilités que

$$\bar{x} \simeq \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \quad \text{et} \quad \sigma \simeq \frac{\Delta}{\sqrt{12}} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

Exemple

1. On souhaite déterminer par autocollimation la focale d'une lentille convergente. La plage de distance qui permet d'obtenir l'image nette de l'objet par le miroir est $9,8 \text{ cm} \leftrightarrow 11,2 \text{ cm}$. Comme valeur vraie, on prendra le centre de la plage :

$$f' = \frac{11,2 + 9,8}{2} = 10,5 \text{ cm}$$

Pour calculer l'incertitude, on effectue

$$\sigma_{f'} = \frac{11,2 - 9,8}{\sqrt{12}} = 0,4 \text{ cm}$$

2. On mesure une tension de $4,32 \text{ V}$ avec un voltmètre sur le calibre 20 V , la résolution est de 10 mV . La notice technique indique une précision de $\pm(0,5\% \text{ valeur lue} + 1 \text{ digit})$. La plage d'erreur vaut donc

$$\Delta = 2 \times [(0,5 \times 4,32)/100 + 0,01] = 0,0632 \text{ V}$$

et l'incertitude-type

$$\sigma = \frac{0,0632}{\sqrt{12}} \simeq 0,02 \text{ V}$$

Incertitude composée

La plupart du temps, l'erreur expérimentale présente de nombreuses composantes dont on peut estimer l'incertitude-type (notée σ_i). Pour

obtenir l'incertitude globale il faut alors **composer les incertitudes-type**. Si l'on suppose ces différentes composantes indépendantes, alors en vertu de la loi de composition des variances, on a :

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

On notera que puisque l'on arrondit l'incertitude à un chiffre significatif, il est possible de négliger σ_i si ce dernier est au moins trois fois plus petit que le terme le plus important.

Exemple

Reprendons notre expérience. On a estimé l'incertitude-type associée notamment au réflexe humain par la méthode de type A et on a trouvé $\sigma_A = 0,0787$ s. En revanche, le chronomètre présente une erreur de justesse qui n'est pas évaluée par la méthode de type A. Si l'on suppose une précision du chronomètre égale au 1/100^e s, on prendra

$$\sigma_B = \frac{0,01}{\sqrt{12}} = 3 \text{ ms}$$

On constate que l'erreur liée au manipulateur est prépondérante et qu'il est légitime de négliger l'erreur liée à l'instrument : $\sigma_{\text{total}} = \sigma_A$.

Incertitude élargie

Pour finir, il est d'usage de donner les incertitudes avec un niveau de confiance de 95%. On notera Δx cette incertitude dite **élargie** :

$$\Delta x = k\sigma \quad \text{avec} \quad k = 2 \quad \text{à 95% de niveau de confiance} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

Si rien n'est précisé, le résultat d'une mesure est à donner avec un niveau de confiance de 95%, ce qui correspond à un bon niveau de confiance.

On définit aussi *l'incertitude relative* par $\frac{\Delta x}{x}$ exprimé en %. Plus elle est petite, plus la mesure est précise.

Expérience

Finalement, la durée correspondant à 2,5 périodes d'oscillations du pendule simple peut s'écrire

$$t = 3,46 \pm 0,16 \text{ s} \quad \text{niveau de confiance : 95\%}$$

ce qui signifie que la période des oscillations vaut

$$T = 1,38 \pm 0,06 \text{ s} \quad \text{niveau de confiance : 95\%}$$

L'incertitude est donc de 4% en valeur relative.

2.3 Propagation des erreurs

Supposons que l'on mesure n grandeurs différentes x_1, x_2, \dots, x_n et que l'on calcule, à partir d'une loi physique ou d'une définition, une nouvelle grandeur $G = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Connaissant les incertitudes $\Delta x_{i=1\dots n}$ associées aux n mesures, il est alors légitime de se demander quelle est l'incertitude de G suite à la propagation des erreurs dans le calcul de G .

Cas d'une loi affine

Commençons par un cas simple, celui d'une relation affine à une seule variable :

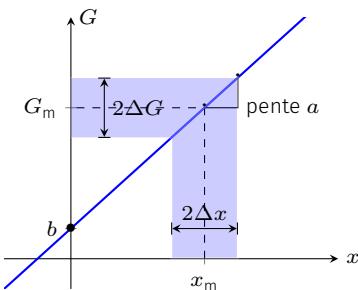


FIG. 2.2 : Propagation des incertitudes dans le cas d'une relation affine

Dans ce cas, il est facile de voir sur un graphique qu'une incertitude Δx produit une incertitude $\Delta G = |a|\Delta x$ de sorte que le calcul donne

$$G = G_m \pm \Delta G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_m &= ax_m + b \\ \Delta G &= |a|\Delta x \end{cases} \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

Exercice – L'indice de réfraction de l'air à 20°C varie avec la pression selon la loi de Gladstone : $n = 1 + kP$ avec $k = (27 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$ et où P est exprimé en bar. Que vaut l'indice de l'air à 20°C et à la pression $P = 2 \text{ bar}$?

Solution : $n = 1,00054 \pm 0,00002$.

Cas d'une loi puissance

Supposons maintenant que la grandeur G dépend d'une variable x via une loi de puissance :

$$G = G_0 x^n$$

et cherchons à estimer l'incertitude de G liée à la propagation de l'incertitude de x . Pour cela nous allons supposer que les incertitudes sont petites en valeur relative. Cela signifie qu'entre x et $x + \Delta x$, G varie si peu qu'on peut approcher la courbe par un segment de coefficient directeur

$$a = \frac{dG}{dx} = n G_0 x^{n-1}$$

Si l'on applique le résultat du paragraphe précédent, on trouve donc $\Delta G = |a| \Delta x = |n G_0 x^{n-1}| \Delta x$. En divisant par G_m on trouve la règle simple suivante.

$$\left| \frac{\Delta G}{G_m} \right| = \left| n \frac{\Delta x}{x} \right| \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

Dans le cas d'une loi de puissance, l'incertitude relative est multipliée par la puissance.

Exemple : volume d'une bille

On cherche à déterminer le volume d'une bille d'acier de rayon $r = (2,778 \pm 0,005)$ mm. Sachant que le volume d'une sphère s'écrit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ on trouve

$$V_m = 89,80 \text{ mm}^3 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta r}{r} = 0,54\% \implies \Delta V = 0,5 \text{ mm}^3$$

On écrira donc $V = (89,8 \pm 0,5) \text{ mm}^3$.

Méthode générale

G ne dépend que d'une variable – En physique, il arrive souvent que le calcul d'une grandeur G implique plusieurs variables. Cependant, il également assez courant qu'une des variables soit moins précise que les autres de sorte que l'on peut considérer les autres variables comme des paramètres constants. On peut alors considérer que

$$G = f(x) \quad \text{avec} \quad x = x_m \pm \Delta x$$

Dans ce cas, et à condition de G varie peu entre x_m et $x_m \pm \Delta x$, on écrira

$$G = G_m \pm \Delta G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_m &= f(x_m) \\ \Delta G &= |f'(x_m)| \Delta x \end{cases} \quad \heartsuit \quad (2.9)$$

G dépend de n variables – Considérons maintenant le cas général

$$G = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{avec} \quad x_i = x_{m,i} \pm \Delta x_i$$

Si les grandeurs x_i sont indépendantes, on utilise la formule suivante :

$$\Delta G = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2 + \dots + (a_n \Delta x_n)^2} \quad \text{avec} \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \quad \heartsuit \quad (2.10)$$

Calcul d'une puissance électrique

Un dipôle électrique est soumis à la tension $U = (2,6 \pm 0,3)$ V ce qui produit un courant d'intensité $I = (0,89 \pm 0,06)$ A. Calculons la puissance électrique $P = U \cdot I$ fournie à ce dipôle.

Tout d'abord, la valeur numérique de la puissance vaut

$$P_m = U_m I_m = 2,6 \times 0,89 = 2,314 \text{ W}$$

Ensuite, calculons les dérivées par rapport à U et I :

$$\frac{\partial P}{\partial U} = I \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial I} = U \implies dP = I dU + U dI$$

On en déduit l'incertitude sur le calcul de G :

$$\Delta P = \sqrt{(0,89 \times 0,3)^2 + (2,6 \times 0,06)^2} = 0,31 \text{ W}$$

On écrira donc :

$$P = 2,3 \pm 0,3 \text{ W}$$

Cas où les données sont fournies sans incertitude

Il arrive fréquemment, notamment dans les sujets de concours, que l'on ait à faire un calcul à partir de données dont les incertitudes sont absentes. Dans ce cas c'est le nombre de chiffres significatifs qui indique la précision. On admet alors que le dernier chiffre significatif est connu à $\pm 0,5$. Par exemple,

$$v = 55 \text{ km h}^{-1} \text{ signifie } v = (55,0 \pm 0,5) \text{ km h}^{-1}$$

Donc, rigoureusement, pour savoir comment arrondir le résultat d'un calcul il faut faire une estimation de l'incertitude liée au calcul. Cependant, si l'on veut s'épargner ce calcul fastidieux, on peut appliquer la méthode simplifiée suivante.

Règles de calcul

- ▶ Cas d'une somme : c'est la donnée qui présente le moins de décimales qui impose son nombre de décimales au résultat.
- ▶ Cas d'un produit ou d'un quotient : la donnée qui présente le plus faible nombre de chiffres significatifs impose son nombre de chiffres significatif au résultat.
- ▶ Cas d'une fonction $f(x)$: le résultat est arrondi avec le même nombre de chiffres significatifs que x .

Exemples

- ▶ $25,2 \text{ cm} + 8,3 \text{ mm} = (25,2 + 0,83) \text{ cm} = 26,0 \text{ cm}$. Le résultat doit être arrondi au dixième de centimètre. Attention à ne pas oublier d'écrire les grandeurs avec la même unité!
- ▶ $\frac{0,600}{0,9 + 0,300} = 0,50$. En effet, la somme $0,9 + 0,300$ vaut 1,2 (arrondi au dixième) et possède deux chiffres significatifs. Le résultat doit présenter deux chiffres significatifs.
- ▶ $\frac{0,300 \times 4,180 \times (15 - 7,0)}{0,069} = 145,39 \dots \simeq 1.10^3$, car $15 - 7,0 = 8$ est arrondi à l'unité près et ne présente donc qu'un seul chiffre significatif.

3

VALIDER UN MODELE

«En sciences il n'y a pas de résultats irréfutables, il n'y a que des résultats réfutés.»

La modélisation présente deux fonctions principales : expliquer et prévoir. Cependant toute modélisation repose sur des hypothèses qu'il s'agit de valider. Nous proposons une illustration de l'opération de modélisation et de sa validation scientifique à partir de l'expérience réalisée dans le chapitre précédent sur les oscillations d'un pendule simple.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/valider-un-modele.php>

3.1 Modélisation

Modéliser c'est simplifier

Tout d'abord, insistons sur les points suivants.

1. Toute modélisation repose sur des approximations dès le départ.
2. Ces approximations peuvent concerner le cadre de l'étude. Le fait d'utiliser le cadre de la mécanique newtonienne pour traiter un problème et non la relativité restreinte en est un exemple.
3. Elles peuvent concerner les phénomènes mis en jeu. Négliger la rotation de la Terre dans l'étude de la chute libre en est une illustration.

Bien entendu les approximations ne sont pas faites au hasard. En général, des considérations expérimentales et/ou théoriques permettent de justifier ces approximations.

Une fois les hypothèses posées, le physicien cherche à déterminer un modèle (mathématique/numérique) afin de faire des prévisions sur le phénomène. Différentes méthodes s'offrent à lui suivant le point de vue adopté mais dans tous les cas, il est important de comprendre que toute modélisation produit une erreur : c'est le biais théorique.

Exemple du mouvement d'un pendule simple

Poursuivons notre étude du mouvement d'un pendule simple en proposant un modèle théorique qui permet d'accéder à l'expression de la période T des oscillations en fonction des caractéristiques du pendule. Par la suite, ce modèle sera soumis à l'épreuve des faits.

3.1 Modélisation	21
Modéliser c'est simplifier	21
Exemple du pendule . . .	21
3.2 Comparer deux valeurs .	24
Généralités	24
Exemple	25
3.3 Valider une loi	26
Méthode des moindres carrés	26
Utilisation de Régessi	27

Cadre théorique – Plaçons nous dans le cadre de la mécanique classique puisqu'il s'agit de décrire le mouvement d'un corps macroscopique animé d'une vitesse faible devant celle de la lumière.

Les hypothèses – Simplifions ! Considérons un pendule simple formé d'une bille quasi-ponctuelle de masse m , attachée à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ . Le fil, quant à lui, est fixé en un point O . Écartons le pendule de sa position d'équilibre puis lâchons le. La masse descend et acquiert une énergie cinétique qui la fait remonter. Il est assez clair que l'action du fil et la pesanteur jouent un rôle prépondérant. Cependant, le pendule est soumis à d'autres types d'action. On pourrait citer les frottements de l'air, les effets de la rotation terrestre, les effets électromagnétiques dus au champ magnétique terrestre etc. Négligeons donc ces phénomènes en première hypothèse et nous verrons bien si la précision des mesures permet de réfuter ce modèle. On considère donc un pendule simple soumis uniquement au champ de pesanteur dans un référentiel terrestre galiléen.

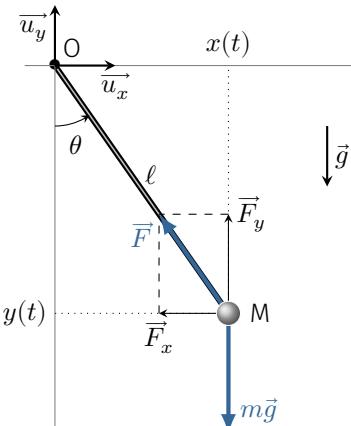


FIG. 3.1 : Bilan des forces

Détermination de l'équation du mouvement – Établissons l'équation du mouvement en projetant les forces et en utilisant la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. La masse est soumise à la pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ ainsi qu'à la tension \vec{F} du fil. Exprimons ces vecteurs dans la base cartésienne :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

D'après les relations de Thales on a

$$\frac{F_x}{F} = -\frac{x}{\ell} \quad \text{et} \quad \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{\ell}$$

où F désigne l'intensité de la tension du fil. Projetons la seconde loi de newton suivant les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg + F_y = -mg - \frac{F}{\ell}y \\ m\ddot{x} = 0 + F_x = -\frac{F}{\ell}x \end{cases}$$

Par ailleurs, supposons l'angle d'oscillation suffisamment petit de sorte que $\cos \theta \simeq 1$. En pratique, cela correspond à des angles inférieurs à 10° si la précision recherchée est de l'ordre de 1%. Cela implique

$$y = -\ell \cos \theta \simeq -\ell \quad \text{d'où} \quad \ddot{y} \simeq 0$$

Les équations du mouvement aboutissent à

$$\begin{cases} F = mg \\ m\ddot{x} = -\frac{mg}{\ell}x \end{cases}$$

Finalement, le mouvement horizontal est décrit par l'équation

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0 \tag{3.1}$$

Cette équation à pour inconnue **une fonction** : elle relie une fonction à ses dérivées. Ici l'ordre maximum des dérivées vaut 2; on dit qu'il s'agit d'une **équation différentielle d'ordre 2**. Par ailleurs, on a des contraintes imposées par les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

Le nombre de conditions initiales doit toujours être égal à l'ordre de l'équation différentielle (ici 2). Il existe des méthodes analytiques et/ou numériques pour résoudre ce type d'équation différentielle. Ici, on va se servir de notre intuition pour trouver le résultat sachant que la solution est unique. Autrement dit, si l'on trouve une solution alors c'est *la solution*. Compte tenu des oscillations observées, il est légitime de proposer une solution de la forme $x(t) = a \cos(bt)$ avec a et b des paramètres à déterminer. En premier lieu, la condition initiale $x(0) = x_0$ impose $a = x_0$. Il nous reste à déterminer b . Pour cela, remplaçons la fonction proposée dans l'équation (3.1) : si la forme proposée est la bonne, on devrait trouver l'unique valeur de b qui convient.

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 \cos bt) + \frac{g}{\ell} x_0 \cos bt = 0 \quad \text{d'où} \quad x_0 \cos(bt) \left[-b^2 + \frac{g}{\ell} \right] = 0$$

équation qui n'est vérifiée que si $b = \sqrt{g/\ell}$. L'unique solution de notre équation est donc

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

Il nous reste à déterminer la période T des oscillations. Le pendule passe à la verticale quand $x(t) = 0$ soit

$$\cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{\ell}} t_k = \pi/2 + k\pi$$

Par conséquent, la période des oscillations vaut

$$T = 2(t_1 - t_0) = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.2)$$

Analyse du résultat – Notons que l'on trouve une relation qui a la forme prévue par l'analyse dimensionnelle effectuée au [Chapitre 1](#). Elle est donc nécessairement homogène.

Il est bon, lorsque l'on obtient un résultat théorique, d'en analyser le contenu. Ici, la formule (3.2) nous «dit» que la période augmente avec ℓ . C'est effectivement ce que l'on observe. Par ailleurs, elle affirme que plus le champ de pesanteur est grand plus la période diminue ce qui semble logique puisque plus le champ de pesanteur est grand et plus la bille tombe vite. En revanche, la masse n'intervient pas dans la formule comme nous l'avions prévu dans l'analyse dimensionnelle. Rien d'étonnant si l'on se souvient que la chute libre est indépendante de la masse.

Enfin, n'oublions pas que le modèle est une simplification, ce qui signifie que le résultat a un domaine de validité restreint :

1. la masse ne doit pas être trop grande sinon le fil s'allonge périodiquement et ℓ n'est alors plus constant;
2. la masse ne doit pas être trop petite sinon celle du fil n'est plus négligeable;
3. la longueur ne doit pas être trop petite sinon la vitesse est grande d'où des frottements qui peuvent devenir non négligeables;
4. l'angle initial doit rester petit.

3.2 Comparer deux valeurs

Toute prédition théorique doit être mise à l'épreuve des faits avant d'être validé. Illustrons cette étape sur les oscillations du pendule simple dont une modélisation aboutit au résultat théorique

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

et confrontons celui-ci aux mesures que donne une série d'expériences (cf. TAB. 3.1). Ici, les deux mesures indépendantes doivent fournir deux valeurs compatibles de g .

Généralités

Comparer deux valeurs expérimentales c'est se poser la question suivante : l'écart entre ces deux valeurs est-il **significatif**? En d'autres termes, on se demande si l'écart est lié aux erreurs aléatoires de mesure auquel cas l'écart est non significatif. Sinon l'écart est significatif et traduit une **différence objective**. La difficulté réside dans le fait que

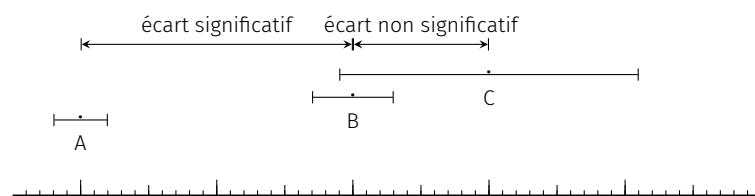


FIG. 3.2 : A et B sont *significativement* différents contrairement à B et C.

nous ne connaissons pas les valeurs vraies des quantités que l'on mesure mais simplement des intervalles de confiance. En pratique, considérant qu'un niveau de confiance de 95% est suffisant, on regarde si les deux intervalles de confiance se chevauchent : si oui, il n'y a pas de désaccord significatif.

Par ailleurs, on peut être amené à comparer une valeur expérimentale avec une valeur tabulée (intensité de la pesanteur, chaleur latente de fusion de l'eau, charge de l'électron, etc.). En général, ces valeurs ne sont pas exactes¹ puisqu'elles sont entachées d'une incertitude. Néanmoins, ces valeurs sont beaucoup plus précises que celles obtenues dans le cadre des Travaux Pratiques, c'est pourquoi on considère les valeurs tabulées comme des valeurs exactes.

¹ Il existe toutefois quelques grandeurs dont on connaît les valeurs exactes de par les définitions des unités. Par exemple la célérité de la lumière dans le vide c , le nombre d'Avogadro et la constante de Planck ont des valeurs exactes dans le nouveau Système international d'unités.

A retenir

- ▶ Deux résultats sont significativement différents si leur marge d'erreur à 95% de niveau de confiance ne se recouvrent pas.
- ▶ Un résultat expérimental est différent d'une valeur tabulée si cette dernière est située en dehors de la marge d'erreur à 95%.

Que faire s'il y a un désaccord significatif?

Un désaccord significatif impose d'en chercher l'origine. Cet exercice peut s'avérer délicat, comme nous le rappelle la célèbre affaire des neutrinos supraluminiques. En général, il faut explorer trois pistes.

L'erreur de calcul – On n'est jamais à l'abris d'erreur de saisie sur la calculatrice ou le tableur. De plus, on peut aussi avoir mal calculé les incertitudes.

La présence de biais expérimentaux – Il se peut qu'une erreur systématique non détectée soit responsable de ce désaccord. Par exemple, un chronomètre décalibré, un étalonnage mal fait etc.

Remettre en cause le modèle – Comme on l'a vu, tout modèle repose sur des hypothèses simplificatrices. Il se peut que les effets de ces simplifications ne soient pas négligeables compte tenu de la précision des mesures. Il faut alors raffiner le modèle pour décrire plus fidèlement la réalité.

Exemple

Reprendons l'expérience des oscillations d'un pendule simple. On a établi un résultat théorique qui montre que la mesure de la période du pendule permet de mesurer le champ de pesanteur. Commençons donc par calculer les valeurs de g à partir des deux mesures. On a la relation

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}$$

ce qui permet d'exprimer l'incertitude Δg à partir des incertitudes sur la longueur et la période du pendule simple.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \ell} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\ \frac{\partial g}{\partial T} &= -\frac{8\pi^2 \ell}{T^3} \end{aligned} \implies dg = 4\pi^2 T^{-2} d\ell - 8\pi^2 \ell T^{-3} dT$$

de sorte que l'incertitude sur g vaut

$$\Delta g = \sqrt{(4\pi^2 T^{-2} \Delta \ell)^2 + (8\pi^2 \ell T^{-3} \Delta T)^2}$$

Consignons nos résultats dans la TAB. 3.2.

Quant aux tables, elle donnent le champ de pesanteur à Rennes : $g_{\text{tab}} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Nos mesures sont donc non seulement compatibles entre elles, mais également avec la valeur tabulée.

TAB. 3.2 : Résultats expérimentaux.

$\ell [\text{cm}]$	$70,0 \pm 0,1$	$48,0 \pm 0,1$
$T [\text{s}]$	$1,67 \pm 0,03$	$1,38 \pm 0,06$
$g [\text{m.s}^{-2}]$	$9,9 \pm 0,4$	$10,0 \pm 0,9$

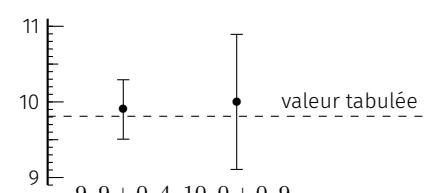


FIG. 3.3 : Représentation graphique des résultats.

3.3 Valider une loi

Décrivons la démarche habituellement employée pour valider une loi à partir de données expérimentales.

Régression par la méthode des moindres carrés

Supposons que l'on cherche à vérifier une loi du type $y = f(x)$ prévue par un modèle théorique à partir de n mesures (y_i, x_i) . Tester la validité de la loi $y = f(x)$ c'est répondre à deux questions :

1. Si l'on suppose la loi valide, quelle est la courbe d'ajustement (courbe de régression) qui s'ajuste au plus près des données expérimentales ?
2. Une fois l'ajustement effectué, peut-on dire si les écarts entre la courbe de régression et les points sont significatifs ? S'ils sont imputables aux erreurs de mesure, alors rien ne permet de réfuter la loi. En revanche, si le désaccord est significatif, il faut en chercher l'origine (problème de calcul, biais expérimental, hypothèses du modèle à réfuter, etc.).

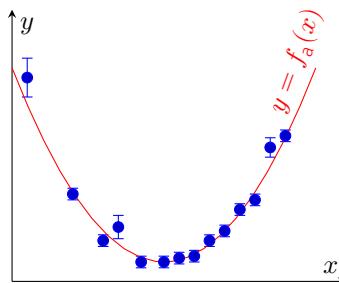


FIG. 3.4 : Ajustement d'une courbe modèle à un nuage de points expérimentaux.

On commence donc par collecter un ensemble de n mesures (x_i, y_i) avec $i = 1, \dots, n$ puis l'on porte les valeurs y_i en fonction de x_i . On obtient alors un nuage de points. Si on a accès aux incertitudes de mesures, on ajoute alors les **barres d'erreur**.

Il faut ensuite choisir un **modèle d'ajustement** $y = f_a(x)$ qui va dépendre d'un petit jeu de paramètres a_i à déterminer de façon à s'ajuster le mieux possible aux données. Insistons sur un point : le choix du modèle est dicté par la loi théorique que l'on cherche à vérifier.

Exemple

On cherche à vérifier la loi du pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. On collecte donc des mesures de la période pour différentes valeurs de ℓ .

- Si l'on porte $y = T$ en fonction de $x = \ell$ on s'attend à trouver une loi du type

$$y = a_1\sqrt{x} \quad \text{modèle racine carré}$$
- On peut aussi porter $y = T$ en fonction de $x = \sqrt{\ell}$. On s'attend à trouver une loi du type

$$y = a_1 x \quad \text{modèle linéaire}$$

Lorsque – comme c'est le cas dans les exemples précédents – la fonction à ajuster $f_a(x)$ est de la forme

$$f_a(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots$$

On dit alors que l'on fait une **régression linéaire**.

Comment trouver les paramètres d'ajustement ? – Cette étape est en général effectuée automatiquement par le logiciel de traitement des données (**Regressi**, **Igor**, **Plot.ly**, etc.) et repose sur la **méthode des moindres carrés** (*least squares fitting* en anglais). Cela consiste

à rechercher la valeur des paramètres qui minimise la somme des écarts quadratiques entre les mesures y_i et les valeurs attendues $f_a(x_i)$. Si les incertitudes sont fournies, on pondère les écarts de façon à ce que les points les plus précis aient plus d'importance dans la somme à minimiser. On définit alors

$$\chi^2(a_i) = \sum_i \frac{(y_i - f_a(x_i))^2}{\Delta y_i^2}$$

Cette somme dépend des paramètres a_i . Le logiciel calcule les valeurs des paramètres qui rend χ^2 minimum. Une fois ces paramètres calculés, on peut tracer la courbe modèle et vérifier si elle passe par les barres d'erreur.

Utilisation de Regressi

Illustrons le principe de la régression avec notre expérience sur les oscillations du pendule simple. Cherchons à vérifier la loi $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ à l'aide du logiciel **Regressi**.

Une fois le logiciel **Regressi** lancé, commençons par modifier les options. Notamment, précisons que les incertitudes sont calculés avec les variances puis que l'on utilise la méthode du χ^2 pour l'ajustement. Quant aux graphiques, décidons d'afficher les barres d'erreur avec un niveau de confiance de 95%.

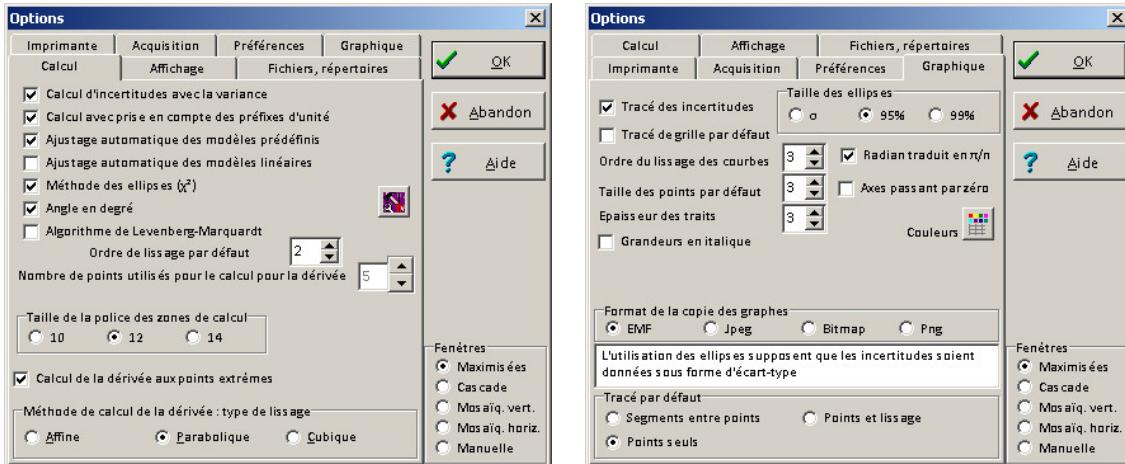


FIG. 3.5 : copies d'écran de la boîte de dialogue Option.

Sélectionnons **Fichier** ► **Nouveau** ► **clavier**. Le logiciel demande les noms et facultativement les unités ainsi que les intervalles de variation des grandeurs à saisir. Rentrerons T pour la période et L pour la longueur.

Une fois les grandeurs définies, un tableau nous est proposé (onglet **Variables**). Le remplissage du tableau ne pose pas de difficulté particulière. Pour saisir les incertitudes, il suffit de cliquer sur l'icône σ . Créons la grandeur $x = \sqrt{\ell}$ en cliquant sur l'icône Y_+ . Cochons **Grandeur calc.** puis rentrons la formule `x=sqrt(L)`.



FIG. 3.6 : Entrée des données au clavier.

I	T	σT	L	σL	x	σx
s	s		cm	cm		
0	1,670	0,0150	70,00	0,1000	0,8367	0,0005976
1	1,380	0,0300	48,00	0,1000	0,6928	0,0007217

FIG. 3.7: Onglet variables. Le logiciel effectue le calcul dans le Système international d'unités si les unités sont fournies. Ici, on a indiqué les unités de L en cm de sorte que, lors du calcul de x, L est converti en mètre.

Ouvrons la fenêtre graphique en sélectionnant l'onglet Graphe. Pour spécifier les variables en abscisse et en ordonnées il suffit de sélectionner Coordonnées après un clic-droit sur le graphe. Une boîte de dialogue permet alors de régler les coordonnées, l'échelle, le lissage, le type de tracé etc. Pour afficher les barres d'erreur, choisir Incertitudes dans l'option d'affichage des points. On porte T en fonction de x.

On cherche à tester la loi $y = ax$. Pour cela, ouvrons l'espace dédié aux ajustements en cliquant sur modélisation ► modèles puis choisissons un modèle linéaire. Terminons en cliquant sur Ajuster : le logiciel recherche le meilleur ajustement en fonction des données. Comme l'indique la figure 3.8, La droite d'ajustement passe à travers les barres d'erreur. Autrement dit, les écarts à la loi sont non significatifs mais liés aux erreurs de mesure et la loi est validée.

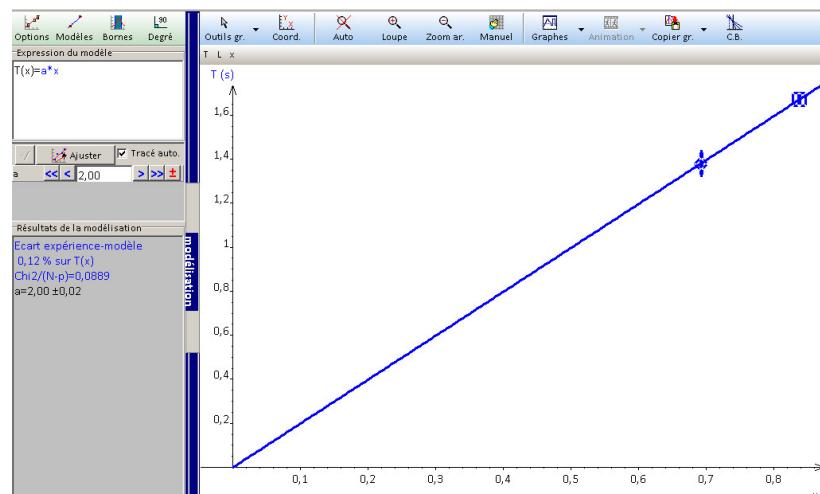


FIG. 3.8 : Résultat de l'ajustement sous Regressi

En prime, on accède au coefficient directeur de la droite avec son incertitude (à 95% de niveau de confiance) :

$$a = 2,00 \pm 0,02 \text{ s.m}^{-1/2}$$

Or, la théorie prévoit $a = 2\pi/\sqrt{g}$ ce qui permet d'obtenir une nouvelle valeur de g :

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} = 9,87 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta a}{a} = 2\%$$

Ainsi, nos mesures valident notre modèle et aboutissent à une détermination de g :

$$g = 9,9 \pm 0,2 \text{ m.s}^{-2}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

CALCUL VECTORIEL EN PHYSIQUE

4

En physique de nombreuses grandeurs peuvent être décrites par un *scalaire*, c'est-à-dire un nombre réel. On peut penser à la température indiquée par un thermomètre, la pression d'un gaz, la masse de Jupiter ou la charge de l'électron, etc. Cependant, d'autres grandeurs –on peut penser à la vitesse du vent, au champ de gravitation terrestre ou au courant électrique– présentent non seulement une valeur mais aussi une direction et un sens. On utilise alors le concept de *vecteur* pour les modéliser.

Version en ligne

https://femto-physique.fr/omp/calcul_vectoriel.php

4.1	Grandeurs vectorielles	31
	Définition	31
	Propriétés	31
	Base vectorielle	32
	Équation vectorielle	33
	Vecteur lié	34
4.2	Produit scalaire	35
	Définition et propriétés .	35
	Applications	36
4.3	Produit vectoriel	37
	Définition et propriétés .	37
	Produit mixte	38
	Vecteurs axiaux	40

4.1 Grandeurs vectorielles

Définition

Une grandeur vectorielle, que nous noterons \vec{A} , est caractérisée de manière unique par :

- ▶ une norme **positive**, notée $\|\vec{A}\|$;
- ▶ une direction;
- ▶ un sens.

On la représente par un segment orienté (une flèche) dont la longueur est proportionnelle à $\|\vec{A}\|$. En physique, la norme représente la valeur de la grandeur¹. Par exemple, la norme d'un vecteur force est son intensité en newton, celle du vecteur vitesse est sa valeur en mètre par seconde, celle d'un vecteur déplacement s'exprime en mètre, etc.

Un vecteur de norme nulle, ne présente ni sens ni direction. On l'appelle *vecteur nulle* et le note $\vec{0}$.

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme. Autrement dit on est libre de déplacer un vecteur tant qu'on ne change ni son orientation ni sa norme.

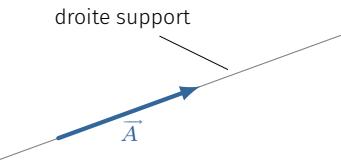


FIG. 4.1 : Représentation d'une grandeur vectorielle.

1 : C'est pourquoi, en physique la norme est souvent notée A .

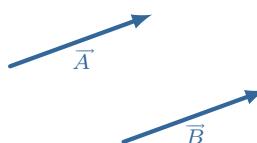


FIG. 4.2 : Deux vecteurs identiques.

Propriétés

La somme de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est un vecteur (notons le \vec{C}). Il s'obtient en mettant bout à bout les flèches associées à \vec{A} et \vec{B} , puis en joignant les extrémités. Insistons sur le fait qu'en physique on ne peut sommer que deux grandeurs vectorielles de même dimension : ajouter un vecteur force et un vecteur vitesse n'a strictement aucun sens.

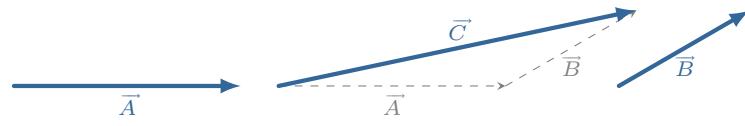


FIG. 4.3 : Somme de deux vecteurs.

On peut vérifier géométriquement que l'addition vectorielle est associative, commutative, et admet un élément neutre et un opposé :

$$\begin{aligned} (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} &= \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) && \text{(associativité)} \\ \vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A} && \text{(commutativité)} \\ \vec{A} + \vec{0} &= \vec{A} && \text{(élément neutre)} \\ \vec{A} + (-\vec{A}) &= \vec{0} && \text{(opposé)} \end{aligned}$$

Il est assez évident également qu'en général $\|\vec{A} + \vec{B}\| \neq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$.

Si λ est un réel et \vec{A} un vecteur, alors $\lambda \vec{A}$ est un vecteur **colinéaire** à \vec{A} : leur droite support sont parallèles. Si $\lambda > 0$, $\lambda \vec{A}$ présente le même sens que \vec{A} , si $\lambda < 0$, $\lambda \vec{A}$ est de sens opposé. Concernant les normes on a la relation suivante :

$$\|\lambda \vec{A}\| = |\lambda| \|\vec{A}\|$$

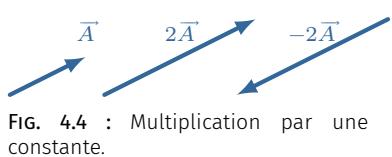


FIG. 4.4 : Multiplication par une constante.

Base vectorielle

Généralités – On dit que deux vecteurs (\vec{u}_1, \vec{u}_2) forment une base \mathcal{B} du plan, si tout vecteur du plan peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base :

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

A_1 et A_2 désignent les **composantes** du vecteur \vec{A} dans la base \mathcal{B} .

Dans l'exemple de la FIG. 4.5, on peut écrire le résultat ainsi :

$$\vec{A} = 3 \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, les composantes s'ajoutent. Cette propriété se généralise :

$$\text{soient } \vec{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \implies \vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \end{pmatrix}$$

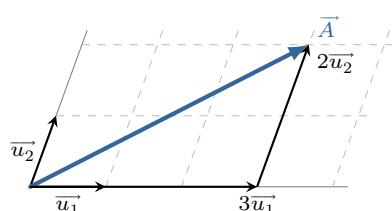


FIG. 4.5 : Décomposition d'un vecteur dans une base.

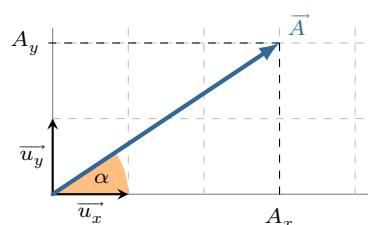


FIG. 4.6 : Base cartésienne.

Base cartésienne – Il s'agit d'une *base orthonormée* : les vecteurs de base ont pour norme 1 et sont perpendiculaires entre eux. Dans un espace à deux dimensions, la base cartésienne est formée de deux vecteurs :

$$(\vec{u}_x, \vec{u}_y) \quad \text{avec} \quad \|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_x \perp \vec{u}_y$$

Dans le plan, il est aisément d'exprimer les composantes cartésiennes d'un vecteur en fonction de sa norme et de l'angle que forme le vecteur

avec un des axes cartésiens : $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x = A \cos \alpha \\ A_y = A \sin \alpha \end{pmatrix}$

Repère d'espace – Un repère d'espace est constitué d'un point O , appelé *origine*, et d'une base de deux vecteurs (\vec{u}_1, \vec{u}_2) si on se place dans le plan euclidien, ou de trois vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans l'espace euclidien à trois dimensions. Les **coordonnées** $(x ; y ; z)$ d'un point P dans un repère tridimensionnel sont les composantes du vecteur \overrightarrow{OP} :

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{u}_1 + y \vec{u}_2 + z \vec{u}_3$$

Considérons deux points, P_1 et P_2 , de coordonnées $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ s'écrit

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

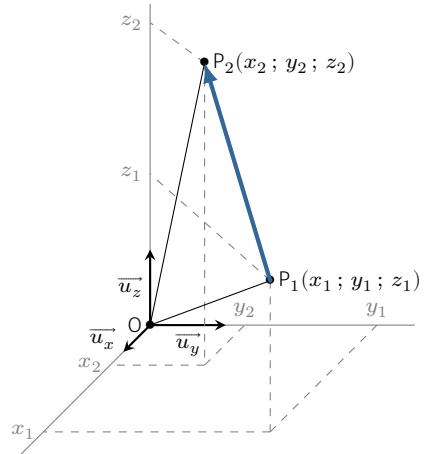


FIG. 4.7 : Exemple de repère cartésien.

Exemple 1 – Détermination de l'équation d'une droite

Considérons $A(-1; -2)$ un point du plan muni d'un repère cartésien et un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Cherchons l'équation de la droite \mathcal{D} parallèle à \vec{u} et passant par A . Pour cela, appelons $M(x ; y)$ un point quelconque situé sur la droite. Par hypothèse, le vecteur \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{u} . On a donc $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ où λ est un réel quelconque. On a

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs composantes sont égales. Aussi peut-on écrire deux relations scalaires :

$$x + 1 = 2\lambda \quad \text{et} \quad y + 2 = 3\lambda$$

En faisant le rapport des deux équations afin d'éliminer λ , on obtient la relation recherchée :

$$\frac{x + 1}{y + 2} = \frac{2}{3} \quad \text{soit} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

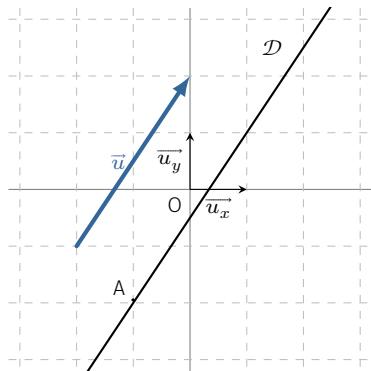


FIG. 4.8 : Droite parallèle à une direction et contenant le point A .

Généralisation – Ces notions se généralisent à tout espace vectoriel de dimension n . Dans un tel espace on peut toujours trouver n vecteurs indépendants² $\vec{u}_{i=(1,\dots,n)}$ et chaque vecteur peut s'exprimer comme une **combinaison linéaire** de ces n vecteurs de base :

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^n A_i \vec{u}_i$$

2 : Aucun de ces vecteurs ne peut s'exprimer en fonction des autres. On dit qu'ils forment une famille libre.

Équation vectorielle

Il arrive souvent en physique que l'on doive résoudre une équation vectorielle du type $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$. Le plus simple consiste souvent à exprimer ces deux vecteurs dans une base arbitraire puis à écrire

l'égalité pour chaque composante : on dit que l'on projette la relation vectorielle sur les différents axes :

$$\vec{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \vec{B} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ A_2 + B_2 = 0 \\ A_3 + B_3 = 0 \end{cases}$$

Exemple 2 – Équilibre de trois masses

Trois masses sont mises en équilibre à l'aide du dispositif ci-contre. D'après les lois de la mécanique, la résultante des forces de tension est nulle, d'où l'équation vectorielle

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$$

On suppose que chaque tension est proportionnelle à la masse de suspension :

$$T_1 = \alpha m' ; \quad T_2 = \alpha m' \quad \text{et} \quad T_3 = \alpha m$$

et l'on cherche la relation entre l'angle θ et les masses m et m' .

Les trois forces étant coplanaires, représentons-les dans un repère cartésien $(0; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, puis déterminons leurs composantes :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 & \left(\begin{matrix} -T_1 \sin \theta/2 \\ T_1 \cos \theta/2 \end{matrix} \right) & \vec{T}_2 & \left(\begin{matrix} T_2 \sin \theta/2 \\ T_2 \cos \theta/2 \end{matrix} \right) \\ \vec{T}_3 & \left(\begin{matrix} 0 \\ -T_3 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

La condition d'équilibre mécanique se traduit par un système de deux équations

$$\begin{aligned} -m' \sin \frac{\theta}{2} + m' \sin \frac{\theta}{2} &= 0 \\ m' \cos \frac{\theta}{2} + m' \cos \frac{\theta}{2} - m &= 0 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{m}{2m'}$$

On notera que si $m > 2m'$, l'équilibre est impossible, car la valeur d'un cosinus ne peut pas dépasser un : la masse m chute alors verticalement.

Vecteur lié

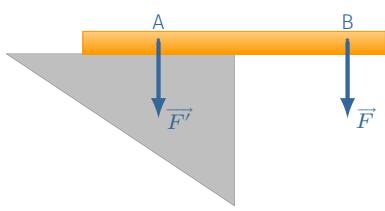


FIG. 4.10 : Corps soumis à une action.

En physique, certaines grandeurs ont les attributs d'un vecteur (une norme, une direction et un sens) tout en présentant une caractéristique supplémentaire : un point d'application. C'est le cas de la force, objet fondamental de la mécanique. Par exemple, sur la FIG. 4.10, suivant que la force s'exerce en A ou en B, les conséquences sont différentes. De ce point de vue, les actions \vec{F} et \vec{F}' sont différentes, bien que ces deux vecteurs soient identiques.

On modélise ce type de grandeur à l'aide du concept de *vecteur lié*, ou *pointeur*. Un vecteur lié est un couple formé par un vecteur \vec{v} et un point A; on le note (A, \vec{v}) .

4.2 Produit scalaire

Définition et propriétés

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$, est le nombre réel (ou scalaire, d'où son nom) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos(\theta) \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs. Notez qu'il n'est pas nécessaire d'orienter les angles pour calculer un produit scalaire.

Le produit scalaire est positif quand l'angle est aiguë, négatif quand il est obtus.

Propriétés –

- ▶ Le produit scalaire est commutatif : $\vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{B}$.
- ▶ Le produit scalaire est distributif : $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.
- ▶ le carré scalaire donne le carré de la norme puisque $\vec{A}^2 = \|\vec{A}\|^2$.
- ▶ si $\vec{A} \perp \vec{B}$, alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$;

Exercice – À quelle condition a-t-on $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$?

Solution : si \vec{A} et \vec{B} sont de même direction et de même sens.

Dans une base cartésienne, le produit scalaire s'exprime simplement en fonction des composantes. En effet,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y) \cdot (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y) \\ &= A_x B_x \vec{u}_x^2 + A_y B_y \vec{u}_y^2 + A_x B_y \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y + A_y B_x \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x \end{aligned}$$

soit, puisque $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = 1$ et $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = A_x B_x + A_y B_y$$

Cette propriété se généralise dans un repère cartésien à trois dimensions :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

En conséquence, la norme $\|\vec{A}\|$ d'un vecteur exprimé dans une base orthonormée est donnée par la relation

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \text{soit} \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \heartsuit \quad (4.3)$$

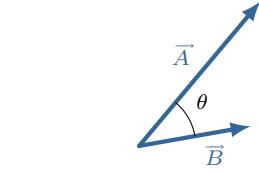


FIG. 4.11 : Angle formé par deux vecteurs.

On peut retrouver ce résultat à l'aide du Théorème de Pythagore.

Applications

Le produit scalaire fait partie des outils indispensables en physique. Il permet de calculer un angle, une norme, ou une composante suivant un axe. Illustrons par quelques exemples.

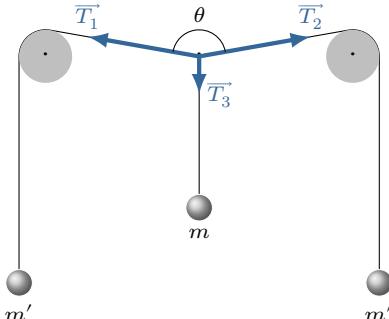


FIG. 4.12 : Trois masses en équilibre.

Exemple 3 – Calcul d'un angle

Reprendons le problème de mécanique de l'exemple 2. On peut calculer l'angle θ directement à l'aide d'un produit scalaire. En effet, on a

$$\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = T_1 T_2 \cos \theta$$

Mais puisque $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$, on a également

$$\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = \vec{T}_1 \cdot (-\vec{T}_1 - \vec{T}_3) = -T_1^2 - T_1 T_3 \cos(\pi - \theta/2)$$

Comme $T_1 = T_2 = \alpha m'$ et $T_3 = \alpha m$, on en déduit la relation

$$m'^2 \cos \theta = -m'^2 + mm' \cos \frac{\theta}{2}$$

À l'aide de l'identité trigonométrique $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$, on retrouve le résultat $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{m}{2m'}$.

On peut aussi calculer la norme d'un vecteur en prenant son carré scalaire.

Exemple 4 – Vitesse d'un avion par rapport au sol

Supposons que les instruments de bord d'un avion A indique une vitesse de 500 km/h dans la direction Est, et que le vent souffle à une vitesse de 60 km/h dans la direction Nord-Ouest. Comment calculer la vitesse de l'avion par rapport au sol ? La vitesse au sol s'obtient à l'aide de la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{A/\text{sol}} = \vec{v}_{A/\text{air}} + \vec{v}_{\text{air/sol}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_{A/\text{air}} &= 500 \text{ km.h}^{-1} \\ v_{\text{air/sol}} &= 60 \text{ km.h}^{-1} \end{cases}$$

La vitesse de l'avion par rapport au sol a pour valeur

$$\begin{aligned} v_{A/\text{sol}} &= \sqrt{\vec{v}_{A/\text{sol}} \cdot \vec{v}_{A/\text{sol}}} \\ &= \sqrt{v_{A/\text{air}}^2 + v_{\text{air/sol}}^2 + 2\vec{v}_{A/\text{air}} \cdot \vec{v}_{\text{air/sol}}} \\ v_{A/\text{sol}} &= \sqrt{v_{A/\text{air}}^2 + v_{\text{air/sol}}^2 + 2v_{A/\text{air}} v_{\text{air/sol}} \cos \alpha} \end{aligned}$$

avec $\alpha = 3\pi/4$. Numériquement, on trouve $v_{A/\text{sol}} = 460 \text{ km.h}^{-1}$.

Enfin, le produit scalaire permet d'obtenir la projection orthogonale d'un vecteur suivant un axe orienté. En effet, imaginons que l'on souhaite projeter le vecteur \vec{A} sur un axe orienté par le vecteur \vec{B} . On peut toujours écrire

$$\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$$

où \vec{A}_{\parallel} est colinéaire à \vec{B} et \vec{A}_{\perp} orthogonal à \vec{B} . Notons \vec{u} le vecteur unitaire orienté suivant \vec{B} et posons $\vec{A}_{\parallel} = \lambda \vec{u}$. Le réel λ représente la projection de \vec{A} sur \vec{B} . On l'obtient en calculant le produit scalaire

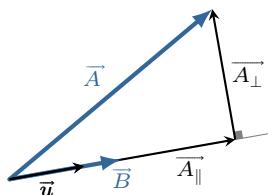


FIG. 4.14 : Projection.

de \vec{A} et \vec{u} :

$$\vec{A} \cdot \vec{u} = (\vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}) \cdot \vec{u} = \vec{A}_{\parallel} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda$$

Exemple 5 – Expression de la base polaire dans la base cartésienne

Considérons la base polaire $(M; \vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$. Exprimons les deux vecteurs polaires dans la base cartésienne.

Commençons par \vec{u}_r : $\vec{u}_r = \lambda_x \vec{u}_x + \lambda_y \vec{u}_y$ avec λ_x la projection de \vec{u}_r sur l'axe (Ox) , et λ_y la projection de \vec{u}_r sur l'axe (Oy) . On a donc

$$\lambda_x = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \cos \theta \quad \text{et} \quad \lambda_y = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

Ainsi $\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$.

Pour \vec{u}_{θ} , on peut procéder de la même manière ; on peut aussi remarquer que le vecteur \vec{u}_{θ} est l'image de \vec{u}_r par une rotation dans le sens direct d'un angle égal à $\pi/2$. Autrement dit,

$$\vec{u}_{\theta} = \vec{u}_r(\theta + \pi/2) = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_x + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_y = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

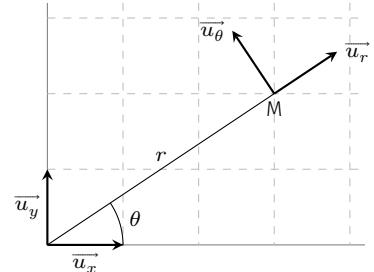


FIG. 4.15 : Base polaire.

4.3 Produit vectoriel

Définition et propriétés

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{A} et \vec{B} , noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$, est un **vecteur** aux caractéristiques suivantes :

- ▶ sa direction est perpendiculaire au plan formé par \vec{A} et \vec{B} ;
- ▶ son sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite ;
- ▶ sa norme vaut $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |\sin(\theta)|$ où θ est l'angle formé par \vec{A} et \vec{B} .

Propriétés – Le produit vectoriel est un produit distributif, anticommutatif :

- ▶ $\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- ▶ $(\lambda \vec{A}) \wedge \vec{B} = \lambda(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \wedge (\lambda \vec{B})$;
- ▶ $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ (distributivité);
- ▶ Si \vec{A} et \vec{B} sont colinéaires, $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Expression analytique du produit vectoriel – En physique on travaille souvent avec des bases orthonormées directes construites à partir de deux vecteurs unitaires orthogonaux :

$$(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$$

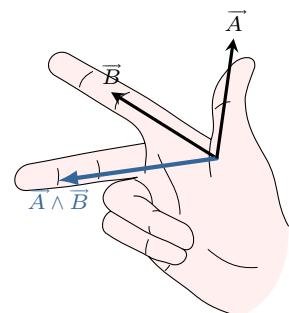


FIG. 4.16 : Règle de la main droite.

C'est le cas des bases cartésienne, cylindrique et sphérique. Dans une telle base, il est facile de vérifier que

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \quad \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad (4.4)$$

Ces propriétés permettent d'exprimer simplement les composantes de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ à partir de celles de \vec{A} et \vec{B} .

Expression du produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs exprimés dans la même base orthonormée directe s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

Soit $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{u}_i$ et $\vec{B} = \sum_{j=1}^3 B_j \vec{u}_j$. Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 A_i \vec{u}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 B_j \vec{u}_j \right) &= A_1 B_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_1 + A_1 B_2 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + A_1 B_3 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 \\ &\quad + A_2 B_1 \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 + A_2 B_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_2 + A_2 B_3 \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \\ &\quad + A_3 B_1 \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 + A_3 B_2 \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_2 + A_3 B_3 \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Utilisons $\vec{u}_i \wedge \vec{u}_i = \vec{0}$, ainsi que la propriété d'anticommutativité :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= A_1 B_2 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 - A_1 B_3 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 - A_2 B_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + A_2 B_3 \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \\ &\quad + A_3 B_1 \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 - A_3 B_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \end{aligned}$$

En utilisant les relations (4.4) on aboutit à

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= A_1 B_2 \vec{u}_3 - A_1 B_3 \vec{u}_2 - A_2 B_1 \vec{u}_3 + A_2 B_3 \vec{u}_1 + A_3 B_1 \vec{u}_2 - A_3 B_2 \vec{u}_1 \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{u}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{u}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Interprétation géométrique – la norme du produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} représente l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs. En effet

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \sin \theta = \|\vec{B}\| \times h \quad (\text{base} \times \text{hauteur})$$

En divisant par 2 ce résultat on obtient l'aire du triangle formé par les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

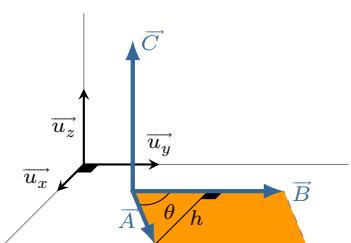


FIG. 4.17 : Interprétation géométrique du produit vectoriel.

Produit mixte

Le produit mixte de 3 vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} est le nombre réel, noté $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$ qui vaut :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Propriétés -

- Si \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} sont trois vecteurs coplanaires, alors $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = 0$. En effet, dans ce cas, \vec{A} est une combinaison linéaire de \vec{B} et \vec{C} , et par conséquent est parallèle à tout plan généré par \vec{B} et \vec{C} . Comme $\vec{B} \wedge \vec{C}$ est orthogonal à ce plan, le produit scalaire entre \vec{A} et $\vec{B} \wedge \vec{C}$ est nécessairement nul.
- Le produit mixte est invariant vis à vis de toute permutation circulaire des trois vecteurs :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = [\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}] = [\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}]$$

- Le produit mixte change de signe lorsque l'on permute deux vecteurs :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = -[\vec{B}, \vec{A}, \vec{C}] = [\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}]$$

Base directe ou indirecte – Une base est orthonormée directe lorsque les trois vecteurs unitaires forment un trièdre orthogonal et qu'ils respectent la règle de la main droite : autrement dit, $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. Pour une base orthonormée indirecte on aura $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. Le signe du produit mixte permet de savoir si la base est directe. En effet, on vérifie aisément que :

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{cases} +1 & \text{si base orthonormée directe} \\ -1 & \text{si base orthonormée indirecte} \end{cases}$$

Relation avec le déterminant – Soient 3 vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} , exprimés dans une base orthonormée directe. Le produit mixte représente le déterminant de la matrice formée par les trois vecteurs colonnes. En effet

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_2 C_3 - B_3 C_2 \\ B_3 C_1 - B_1 C_3 \\ B_1 C_2 - B_2 C_1 \end{pmatrix} = \\ A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_3 \\ A_3 & B_3 & C_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exercice – Donner l'équation cartésienne du plan qui passe par les points de coordonnées $(a ; 0 ; 0)$, $(0 ; b ; 0)$ et $(0 ; 0 ; c)$.

Solution : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Interprétation géométrique – Le produit mixte représente le volume du parallélépipède formé à partir d'un trièdre direct. En effet, le volume d'un parallélépipède formé à partir de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} orienté selon la règle de la main droite vaut

$$\mathcal{V} = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| \times \|C\| \cos \beta = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$$

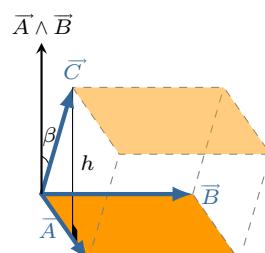


FIG. 4.18 : Interprétation géométrique du produit mixte.

Vecteurs polaires - Vecteurs axiaux

En physique certaines grandeurs vectorielles dépendent de l'orientation de l'espace. On décide d'appeler :

- ▶ **vecteur polaire** toute grandeur vectorielle indépendante de l'orientation de l'espace;
- ▶ **vecteur axial, ou pseudovecteur**, toute grandeur vectorielle qui dépend de l'orientation de l'espace;

Cette distinction revêt une importance en physique, car deux grandeurs vectorielles que l'on ajoute, en plus d'être de même dimension, doivent avoir le même caractère polaire ou axial.

Pour distinguer ces vecteurs il suffit de se demander comment se transforme un vecteur après une opération de symétrie par rapport à un plan :

- ▶ si le vecteur se transforme comme dans un miroir, il est polaire;
- ▶ sinon, il est axial.

Pour illustrer notre propos, imaginons un vecteur géométrique \vec{v} formé par le bipoint (A,B). Transformons l'espace par une « opération miroir ». L'espace orienté à droite se transforme en un espace orienté à gauche. A et B se transforment en A' et B'. Ces derniers ayant les mêmes coordonnées dans la base image (\vec{u}'_x ; \vec{u}'_y ; \vec{u}'_z), le vecteur \vec{v}' aura aussi les mêmes coordonnées dans la base image. En d'autres termes, comme on peut le voir sur la FIG. 4.19, \vec{v} se transforme comme dans un miroir : il s'agit d'un vecteur polaire.

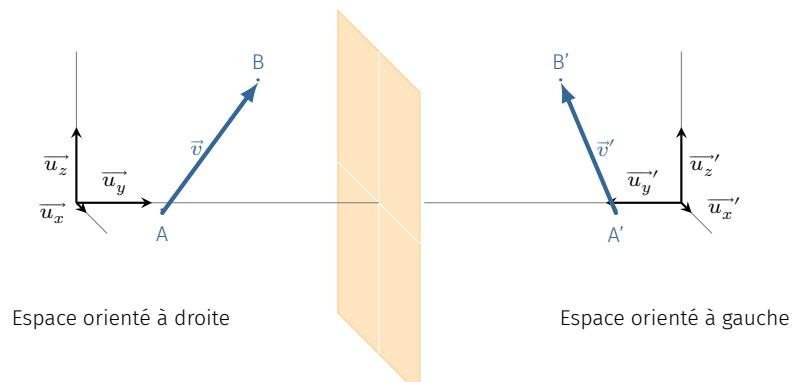


FIG. 4.19 : Transformation d'un vecteur polaire.

la masse et la charge électrique sont bien sûr indépendantes de l'orientation de l'espace.

Tous les vecteurs géométriques construits sur des bipoints sont polaires. Tel est le cas du vecteur déplacement ($\overrightarrow{M_1 M_2}$) rencontré en mécanique, et par conséquent des vecteurs vitesse et accélération puisque la durée est indépendante de l'orientation de l'espace. En vertu du principe fondamental de la dynamique ($\vec{f} = m\vec{a}$), il découle que le vecteur force est un vecteur polaire, comme le champ de gravitation ($\vec{f} = m\vec{g}$) et le champ électrique ($\vec{f} = q\vec{E}$).

Imaginons maintenant deux vecteurs polaires \vec{v} et \vec{w} qui se transforment donc comme dans un miroir lorsque l'on change l'orientation de l'espace. Que peut-on dire du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$? On constate sur la FIG. 4.20 que ce dernier ne se transforme pas comme dans un miroir mais présente une orientation opposée à celle attendue. Il s'agit

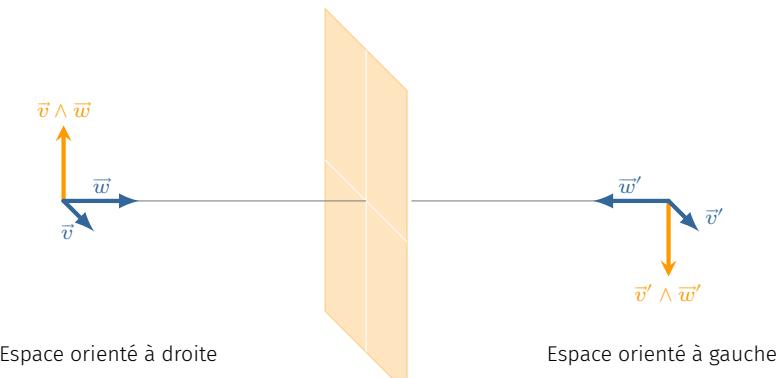


FIG. 4.20 : Transformation d'un produit vectoriel de deux vecteurs polaires.

d'un vecteur axial. On peut aisément vérifier que

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\text{polaire}} \wedge \overrightarrow{\text{polaire}} & = & \overrightarrow{\text{axial}} \\ \overrightarrow{\text{polaire}} \wedge \overrightarrow{\text{axial}} & = & \overrightarrow{\text{polaire}} \\ \overrightarrow{\text{axial}} \wedge \overrightarrow{\text{axial}} & = & \overrightarrow{\text{axial}} \end{array}$$

Le moment d'une force³, le moment cinétique⁴, le champ magnétique⁵ sont des exemples de grandeurs physiques axiales.

Exercice – Sur Terre, le mouvement des masses nuageuses s'explique par l'action de la force de Coriolis donnée par la formule

$$\vec{f}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

où m est la masse d'une portion d'atmosphère, \vec{v} sa vitesse et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre. Le vecteur rotation est-il polaire ou axial ?

Solution : Axial.

3 : $\mathcal{M}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$

4 : $\mathcal{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

5 : La force électromagnétique s'écrit
 $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/coniques.php>

5.1 Introduction

Par définition, les coniques sont les sections d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par son sommet. Il existe trois formes différentes : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Une conique possède au moins un foyer F et un axe de symétrie passant par F. L'équation polaire d'une conique avec origine au foyer s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) \pm 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p > 0 \\ e \geq 0 \end{cases}$$

p est appelé **paramètre** et e **excentricité** de la conique. Étant donné que la transformation $\theta - \theta_0 \mapsto \theta_0 - \theta$ laisse invariante la conique, celle-ci présente donc toujours un axe de symétrie, ici l'axe $\theta = \theta_0$. Par commodité, nous prendrons l'axe Fx comme axe de symétrie de sorte que $\theta_0 = 0$.

5.2 L'ellipse

Propriétés de l'ellipse

Par définition, l'ellipse est une conique d'excentricité $e < 1$. Son équation polaire s'écrit donc :

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta) + 1} \quad \text{avec} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq e < 1 \quad (5.1)$$

On remarque immédiatement que lorsque $e = 0$, l'ellipse se confond avec le cercle de centre F et de rayon p . Dans le cas où $e \neq 0$, l'ellipse présente les propriétés suivantes.

1. La courbe est bornée puisque r est fini pour toute valeur de θ .
2. La fonction $r(\theta)$ étant 2π -périodique, il s'agit donc d'une courbe qui se referme après une révolution.
3. Le point le plus rapproché de l'origine F est appelé **péricentre** et correspond à $\theta = 0$. Il se situe à $r_p = p/(1+e)$ du foyer.
4. Le point le plus éloigné de l'origine est appelé **apocentre** et correspond à $\theta = \pi$. Il se situe à la distance $r_a = p/(1-e)$ du foyer.

5.1 Introduction	43
5.2 L'ellipse	43
Propriétés de l'ellipse . . .	43
Équation cartésienne . . .	44
5.3 La parabole	45
Propriétés	45
Équation cartésienne . . .	45
5.4 L'hyperbole	46
Propriétés	46
Équation cartésienne . . .	47

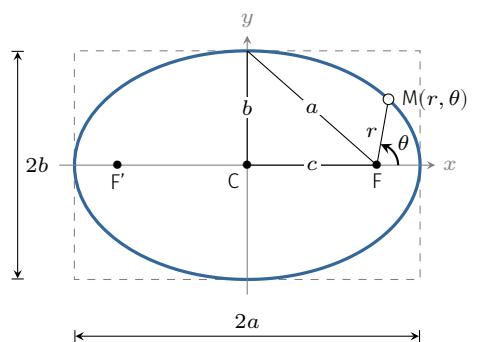


FIG. 5.1 : L'ellipse

5. Par définition, la distance $2a$ qui sépare le péricentre de l'apo-centre est le **grand-axe** de l'ellipse. on a

$$2a = r_a + r_p = \frac{2p}{1 - e^2}$$

6. Posons le point C sur l'axe de symétrie à gauche de F de sorte que $CF = c = ae$ et définissons F' l'image de F par la symétrie centrale de centre C. Calculons la distance $FM + F'M$.

D'après la relation d'Al-Kashi on a

$$FM = r \quad \text{et} \quad F'M = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \theta}$$

Or, on a $c = ea$ et $r = a(1 - e^2)/(e \cos \theta + 1)$ d'où

$$\begin{aligned} 4c^2 + 4rc \cos \theta &= 4e^2 a^2 + 4re a \cos \theta \\ &= 4a^2 + 4a^2(e^2 - 1) + \frac{4a^2(1 - e^2)e \cos \theta}{e \cos \theta + 1} \\ &= 4a^2 - \frac{4a^2(1 - e^2)}{e \cos \theta + 1} \\ 4c^2 + 4rc \cos \theta &= 4a^2 - 4ar \end{aligned}$$

Finalement $F'M = \sqrt{r^2 + 4a^2 - 4ar} = 2a - r$ de sorte que l'on trouve

$$FM + F'M = 2a \quad (5.2)$$

Il s'agit de la définition bifocale de l'ellipse.

7. Cette dernière propriété implique une symétrie par rapport aux axes (Cy) et (Cx) et donc une symétrie centrale de centre C. Il existe donc deux positions de M sur l'axe Cy , séparées de la distance $2b$ appelé **petit-axe**. Dans ce cas, compte tenu de la relation (5.2), on a

$$FM = F'M = a \quad \text{et} \quad FM = \sqrt{c^2 + b^2}$$

Ainsi, petit et grand-axe sont liés à la distance focale c par la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (5.3)$$

Équation cartésienne

L'équation cartésienne est relativement simple si l'origine du repère est placée au centre de l'ellipse. En effet, écrivons l'équation (5.1) sous la forme $r = p - re \cos \theta$ et substituons les coordonnées cartésiennes $x = r \cos \theta + c$ et $y = r \sin \theta$:

$$r = p - e(x - c) \implies r^2 = (x - c)^2 + y^2 = p^2 + e^2(x - c)^2 - 2ep(x - c)$$

Développons en plaçant les termes quadratiques à gauche :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = p^2 + e^2c^2 + 2epc - c^2 + x(2c - 2ce^2 - 2pe)$$

Sachant que $p = a(1 - e^2)$ et $c = ea$, la relation devient

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)^2 + e^4a^2 + 2a^2e^2(1 - e^2) - e^2a^2 + x(2ea - 2ae^3 - 2ae(1 - e^2))$$

soit, après simplification :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2) \quad (5.4)$$

Le terme de droite représente $a^2 - c^2 = b^2$ de sorte que l'équation cartésienne d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b s'écrit

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (5.5)$$

5.3 La parabole

Propriétés

Par définition, la parabole est une conique d'excentricité $e = 1$. Son équation polaire avec origine au foyer est donc

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta} \quad (5.6)$$

On est toujours en présence de la symétrie d'axe Ox . Le péricentre est obtenu lorsque $\theta = 0$ et se situe à la distance $p/2$ du foyer, appelée distance focale. Par ailleurs, lorsque $\theta \rightarrow \pm\pi$, la distance FM tend vers l'infini.

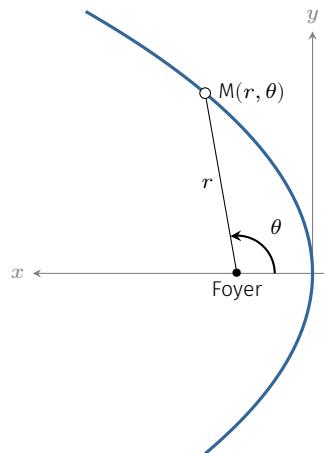


FIG. 5.2 : La parabole

Équation cartésienne

Plaçons l'origine d'un repère cartésien au péricentre¹ en orientant l'axe Ox vers la gauche. Écrivons l'équation polaire (5.6) sous la forme $r = p - r \cos \theta$ et substituons les coordonnées cartésiennes $x = p/2 - r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$\sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2} = p + (x - \frac{p}{2})$$

Élevons au carré :

$$y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 = p^2 + (x - \frac{p}{2})^2 + 2p(x - \frac{p}{2})$$

Après simplification, on trouve que l'équation cartésienne d'une parabole de paramètre p s'écrit

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad (5.7)$$

Si l'on transforme $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow -x$, cela revient à tourner la parabole de $-\pi/2$. On obtient dans ce cas l'équation usuelle d'une parabole : $y = \frac{1}{2p}x^2$.

5.4 L'hyperbole

Propriétés

Par définition, l'hyperbole est une conique d'excentricité $e > 1$ et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos \theta \pm 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p > 0 \\ e > 1 \end{cases}$$

ce qui décrit deux branches d'hyperbole dont les asymptotes se coupent en un point O.

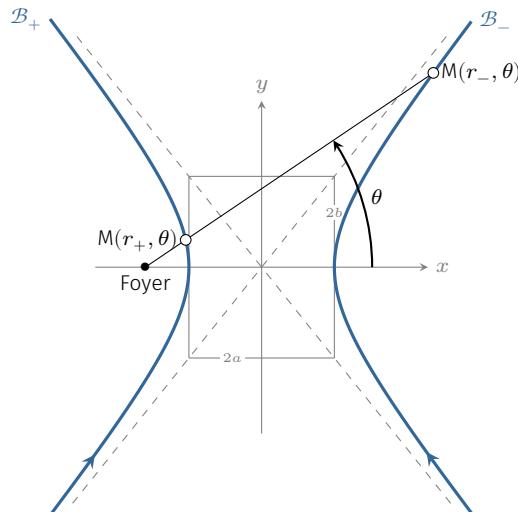


FIG. 5.3 : Hyperbole d'excentricité $e = 1,6$.

L'équation $r_-(\theta) = p/(e \cos \theta - 1)$ décrit une branche \mathcal{B}_- dont les asymptotes font un angle $\pm\theta_1$ avec l'axe des abscisses. En effet, r diverge quand $\cos \theta_1 = 1/e$ ce qui donne la pente des asymptotes :

$$\tan \theta_1 = \pm \sqrt{e^2 - 1}$$

De la même façon, l'équation $r_+(\theta) = p/(e \cos \theta + 1)$ décrit une deuxième branche \mathcal{B}_+ d'hyperbole dont les asymptotes font un angle $\pm\theta_2$ donné par $\cos \theta_2 = -1/e$. Ainsi,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

et les asymptotes présentent une symétrie d'axe Oy . Finalement les asymptotes admettent une symétrie centrale de centre O, propriété partagée par les branches d'hyperbole.

Soit le rectangle tangent à l'hyperbole en $\theta = 0$ et dont les sommets sont sur les asymptotes. Par définition, les dimensions de ce rectangle sont appelées **grand-axe** et **petit-axe** de l'hyperbole et notées respectivement $2a$ et $2b$. La distance focale c est ici la distance qui sépare O du foyer (comme pour l'ellipse). Une simple lecture des distances donne :

$$\begin{cases} \frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} = 2a \\ \frac{p}{e-1} = c+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = a(e^2 - 1) \\ e = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Par ailleurs, la pente des asymptotes vaut aussi $\pm b/a$ de sorte que $b/a = \sqrt{e^2 - 1}$ c'est-à-dire

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (5.8)$$

Équation cartésienne

Reprenons la démarche employée dans le cas de l'ellipse sans oublier de procéder aux modifications suivantes :

1. l'origine étant à droite du foyer, il faut poser $x = r \cos \theta - c$;
2. le paramètre p est relié à l'excentricité et au demi grand-axe par $p = a(e^2 - 1)$.

On retrouve alors l'équation (5.4) valable donc aussi bien pour une ellipse que pour une hyperbole :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

Ici, le terme $a^2(1 - e^2)$ vaut $a^2 - c^2 = -b^2$ de sorte que l'équation cartésienne d'une hyperbole demi-grand axe a et de demi-petit axe b s'écrit

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (5.9)$$

RÉSoudre une équation différentielle

6

En physique, et particulièrement en mécanique, la modélisation d'un phénomène aboutit souvent à une ou des équations différentielles. Nous abordons ici différentes approches analytiques utilisées dans le cadre de leur résolution.

Version en ligne

[https://femto-physique.fr/omp/
equations-differentielles.php](https://femto-physique.fr/omp/equations-differentielles.php)

6.1 Équation différentielle ordinaire

Généralités

Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation de la fonction inconnue : Ainsi, une équation différentielle d'ordre 1 est une relation où interviennent une fonction et sa dérivée première. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation sur un intervalle donné.

D'un point de vue plus formel, appelons y une grandeur physique temporelle définie par

$$y : \begin{cases} [0, T] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto y(t) \end{cases}$$

et notons \dot{y} , \ddot{y} et $y^{(p)}$, les dérivées temporelles première, seconde et d'ordre p . Dans ce cas, toute relation de la forme

$$F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(p)}(t)) = 0 \quad (6.1)$$

est une **équation différentielle ordinaire** d'ordre p . En général la fonction recherchée y obéit à des contraintes sous la forme de p conditions initiales :

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ddot{y}(0) = y_2, \dots, y^{p-1}(0) = y_{p-1}$$

La donnée de l'équation différentielle du type (6.1) et des p conditions initiales s'appelle un *problème de Cauchy*.

La plupart du temps, un système d'équations différentielles scalaires peut se ramener à une équation différentielle **vectorielle d'ordre 1** de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= f(t, \mathbf{y}(t)), \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

6.1 Équation différentielle ordinaire	49
Généralités	49
Exemple	50
6.2 Équation différentielle linéaire	50
Définitions	50
Propriétés générales	51
EDO linéaire à coefs constants	52
6.3 Équation à variables séparables	53
Définition	53
Exemple	53

[1] : ROUSSEL (2011), *Introduction à l'analyse numérique*

1 : Plus précisément, la fonction f doit obéir aux conditions de Cauchy-Lipschitz : pour tout $t \in [0, T]$, x et y au voisinage de y_0 , s'il existe un réel K tel que $\|f(t, x) - f(t, y)\| < K\|x - y\|$ alors il existe une unique solution.

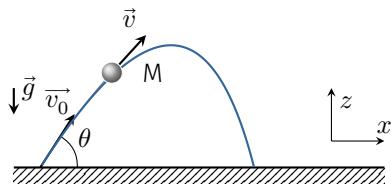
où \mathbf{y} est un vecteur de dimension d et f une fonction régulière. Cette représentation se prête bien à la résolution numérique[1].

On peut montrer que si la fonction f est suffisamment régulière¹, le problème de Cauchy admet une *unique solution*. On admettra par la suite ces conditions de régularité réunies. Il nous reste alors à déterminer la solution de façon analytique.

Exemple

Pour illustrer notre propos, supposons que l'on s'intéresse à la chute d'un corps dans un fluide.

On lance un point matériel M avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans un fluide visqueux exerçant une force de frottement quadratique en vitesse $\vec{F}_t = -\beta v \vec{v}$. Si l'on tient compte uniquement du poids et de la force de frottement, l'équation du mouvement issue de la seconde loi de Newton donne :



$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\vec{g} - \beta v \vec{v}$$

qui, après projection dans le plan (x, z) se décompose en deux équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g - \frac{\beta}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \\ \ddot{x} = -\frac{\beta}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles d'ordre deux, non linéaires couplées.

Dans l'exemple précédent, on peut transformer le système d'équations en une équation du type (6.2) à condition de poser

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{\beta}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \\ -g - \frac{\beta}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{bmatrix}$$

Le nombre d'équations différentielles que l'on sait résoudre analytiquement est très réduit. Nous allons étudier les plus utiles en physique.

6.2 Équation différentielle linéaire

Définitions

Supposons qu'une grandeur physique y obéisse à une équation différentielle de la forme

$$\mathcal{L}(y) = f(t) \tag{6.3}$$

où \mathcal{L} désigne un *opérateur différentiel*, c'est-à-dire un opérateur construit à partir des dérivées et de l'identité. Si l'opérateur vérifie la propriété

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On dit que l'équation différentielle est linéaire.

L'équation différentielle (6.3) se compose de deux termes :

1. le terme de gauche est une combinaison de fonctions de y et de ses dérivées. Ce terme est en général étroitement lié aux propriétés intrinsèques du système physique étudié.
2. le second membre $f(t)$ de l'équation est en général lié à l'action de l'extérieur sur le système physique. On parle du terme d'excitation.

Propriétés générales

Intéressons nous d'abord à l'équation, dite *équation homogène*, $\mathcal{L}(y) = 0$. Il est facile de voir que si l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de cette équation, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution quelles que soient les réels α et β .

Appelons y_h une solution de l'équation homogène $\mathcal{L}(y) = 0$ et y_p une solution particulière de l'équation (6.3). Dans ce cas, la linéarité implique

$$\mathcal{L}(\alpha y_h + y_p) = \alpha \mathcal{L}(y_h) + \mathcal{L}(y_p) = 0 + f(t)$$

Autrement dit, $\alpha y_h + y_p$ est solution de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(t)$. On en déduit la méthode de résolution suivante :

Méthodologie

Pour résoudre une équation différentielle, avec conditions initiales, de la forme $\mathcal{L}(y) = f(t)$ où \mathcal{L} est un *opérateur différentiel linéaire* d'ordre p , on procédera en trois étapes :

1. On déterminera toutes les solutions de l'**équation homogène** $\mathcal{L}(y) = 0$. Ces solutions, notées y_h , feront intervenir p constantes d'intégration.
2. On recherchera une **solution particulière**, notée y_p , de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(t)$.
3. La solution s'écrivant $y = y_h + y_p$, on déterminera les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales sur y et ses $p-1$ dérivées.

Enfin, tout système physique régi par une équation différentielle linéaire obéit au *principe de superposition*. En effet, supposons que l'on connaisse la solution y_1 de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_1(t)$ ainsi que la solution y_2 de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_2(t)$. Dans ce cas, $y_1 + y_2$ sera solution de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_1(t) + f_2(t)$. Cela signifie que si l'on excite un système linéaire de manière compliquée, mais que l'on peut décomposer cette excitation en une somme de termes simples, alors il suffit de connaître la réponse du système vis à vis de ces termes

pour déterminer la réponse complète par une simple sommation. Cela traduit finalement le fait que des causes produites simultanément, engendrent un effet qui est le résultat de la somme des effets produits par chacune des causes appliquées seules. C'est cette propriété importante qui permet par exemple de connaître la réponse d'un oscillateur linéaire soumis à une force quelconque, à partir de la réponse de cet oscillateur vis-à-vis d'une force sinusoïdale, car on sait décomposer une force quelconque en une somme de termes sinusoïdaux (analyse de Fourier).

Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans de nombreux cas, les problèmes physiques simples mènent à une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui s'écrit de la façon suivante :

$$a_p y^{(p)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t) \quad (6.4)$$

où les constantes a_k ainsi que la fonction $f(t)$ sont connues. Il est facile de voir que l'opérateur différentiel est bien linéaire. Cette équation est dite linéaire à coefficients constants avec second membre. Pour résoudre cette équation il suffit donc de trouver les solutions de l'équation homogène ainsi qu'une solution particulière de l'équation (6.4). On admettra les résultats suivants.

Solution particulière – Il existe une méthode générale pour trouver la solution particulière mais dans la plupart des cas, il suffit de chercher une solution ayant la *même forme que le second membre $f(t)$* . On retiendra notamment que :

- ▶ si $f(t) = b$, avec b une constante, on cherchera une solution particulière de la forme $y_p = C^{\text{te}}$. En remplaçant y par cette constante dans l'équation différentielle, on trouve immédiatement $y_p = b/a_0$.
- ▶ si $f(t)$ est un polynôme de degré q , on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré q : $y_p(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_q t^q$. On obtient les coefficients β_k par identification en remplaçant dans l'équation différentielle (6.4) $y(t)$ par $y_p(t)$.
- ▶ si $f(t)$ est sinusoïdal de pulsation ω , on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. On obtiendra A et B également par identification.

Lors de la recherche de la solution particulière, il arrive que les méthodes citées plus haut échouent. Citons deux exemples.

1. Dans le cas où le second membre est un polynôme de degré q , il peut arriver qu'il n'y ait pas de solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré q . Dans ce cas, on envisagera un polynôme de degré supérieur.
2. Dans le cas où le second membre est sinusoïdal de pulsation ω , la méthode proposée plus haut échouera si l'équation caractéristique admet comme racine $i\omega$ ou $-i\omega$. Dans ce cas il faut chercher une solution particulière de la forme $t[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$.

Solutions de l'équation homogène – La solution de l'équation sans second membre est de la forme Ae^{rt} où r est un nombre réel ou complexe solution de l'équation caractéristique

$$a_p r^p + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Si les p racines sont distinctes, la solution est

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{k=p} A_k e^{r_k t}$$

où les constantes A_k désignent les constantes d'intégration.

La solution générale s'écrit donc

$$y(t) = \sum_{k=1}^{k=p} A_k e^{r_k t} + y_p(t)$$

Lors de la résolution de l'équation caractéristique, il peut arriver que l'on obtienne des racines multiples. Dans ce cas, on admettra qu'il faut remplacer la solution $A_k e^{r_k t}$ par $P(t)e^{r_k t}$ où $P(t)$ est un polynôme de degré 1 si r_k est racine double, 2 si elle est triple, etc. On vérifiera que le nombre de constantes d'intégration est égal à p .

L'équation caractéristique peut admettre des racines complexes $r_k = a_k + ib_k$, ce qui produit des solutions du type $Ce^{a_k t}e^{ib_k t}$ avec $C = \alpha + i\beta$ une constante d'intégration complexe. Cependant, cherchant des solutions réelles, la partie imaginaire sera nécessairement nulle et il ne faut alors conserver que la partie réelle, à savoir $e^{a_k t}[(\alpha \cos(b_k t) - \beta \sin(b_k t))]$.

6.3 Équation à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est du type

$$\dot{y}g(y) = f(t) \quad (6.5)$$

Si G et F sont des primitives de g et f , l'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\frac{dG(y(t))}{dt} = \frac{dF(t)}{dt} \implies G(y) = F(t) + C^{\text{te}} \quad (6.6)$$

où la constante est imposée par la condition initiale : $C^{\text{te}} = G(y_0) - F(0)$.

Exemple : Chute libre avec frottement quadratique

Lâchons un corps de masse m dans un fluide et supposons que le frottement fluide est bien modélisé par une loi quadratique $F_t = \beta v^2$. Le mouvement est rectiligne de vitesse $v(t)$ qu'il s'agit de déterminer.

Si l'on note g le champ de pesanteur, la relation fondamentale, appliquée dans le référentiel terrestre considéré galiléen, donne

$$m\dot{v} + \beta v^2 = mg \quad \text{avec} \quad v(0) = 0$$

L'équation est non linéaire du fait de la présence du terme quadratique. En revanche, il est possible de séparer les variables :

$$\dot{v} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{mg} v^2} = g$$

Or

$$\int \frac{dx}{1 - (x/a)^2} = \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

Ainsi, la solution (6.6) s'écrit

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \ln \frac{\sqrt{mg/\beta} + v}{\sqrt{mg/\beta} - v} = gt + C^{\text{te}}$$

La condition initiale impose la nullité de la constante ce qui donne finalement

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{g\beta}}$$

La vitesse croît (au début comme gt) puis atteint une limite asymptotique $v_\infty = \sqrt{mg/\beta}$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

7

Ce cours, sans prétention sur le plan de la rigueur mathématique, se concentre avant tout sur la manipulation des fonctions de plusieurs variables. Pour une première approche des notions de dérivée partielle et différentielle, on se restreint aux fonctions de deux variables.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/fonctions-N-variables.php>

7.1 Dérivée partielle	55
Définition	55
Interprétation géométrique	56
Théorème de Schwarz . .	56
7.2 Différentielle	57
Définition mathématique	57
Point de vue du physicien	58
Fonctions implicites . . .	59
Forme différentielle . . .	60
Différentiel d'ordre deux .	61
Points stationnaires . . .	62

7.1 Dérivée partielle

Définition

Considérons $f = f(x, y)$, une fonction de deux variables indépendantes x et y . On appelle **dérivée partielle**, la dérivée de f par rapport à une variable, les autres étant maintenues constantes. Ici, il y a deux dérivées partielles du premier ordre que l'on note

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_x$$

où l'on précise quelle variable est maintenue constante en la signifiant en indice.

Exemple

Calculons les deux dérivées partielles de la fonction $f(x, y) = x^2 \sin(y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_y = 2x \sin(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_x = x^2 \cos(y)$$

Ici, les deux dérivées existent et sont continues : on dit que la fonction est de classe C^1 .

Pour alléger la notation, on omet souvent de faire figurer les variables maintenues constantes en indice quand le contexte est assez clair.

Toutefois, cette notation a son intérêt en physique, notamment en Thermodynamique : imaginons une grandeur physique G fonction de deux variables (x, y) que l'on souhaite exprimer en fonction d'un nouveau jeu de variables (u, v) . Alors que le mathématicien préfère appeler cette nouvelle fonction différemment, le physicien, quant à lui préfère conserver le même nom ($G(x, y)$ ou $G(u, v)$) car associé à une même grandeur physique. Dans ce cas, il est impératif lors d'un calcul de dérivée partielle de savoir quelles sont les variables utilisées.

Exemple

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h s'écrit $V(h, r) = \pi r^2 h$, et l'aire de sa surface latérale $S(h, r) = 2\pi r h$. Y-a-t-il une différence entre $\frac{\partial V}{\partial h}|_r$ et $\frac{\partial V}{\partial h}|_S$?

La première dérivée suppose d'utiliser la fonction $V(h, r)$:

$$\frac{\partial V}{\partial h}|_r = \left. \frac{\partial(\pi r^2 h)}{\partial h} \right|_r = \pi r^2$$

Quant à $\frac{\partial V}{\partial h}|_S$, il faut d'abord exprimer V en fonction de h et S . Sachant que $r = S/(2\pi h)$, on trouve

$$V(h, S) = \frac{S^2}{4\pi h} \quad \text{d'où} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial h} \right|_S = -\frac{S^2}{4\pi h^2} = -\pi r^2$$

On obtient donc un résultat différent (opposé ici). En effet, augmenter h en fixant le rayon du cylindre revient à augmenter le volume ($\partial V/\partial h|_r > 0$), alors qu'augmenter h en maintenant S impose de diminuer r , cette dernière variation entraînant une diminution du volume plus importante que celle induite par l'augmentation de h (d'où $\partial V/\partial h|_S < 0$)

Interprétation géométrique

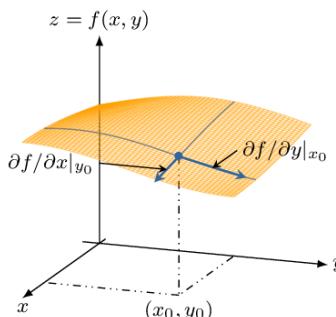


FIG. 7.1: Interprétation géométrique de la notion de dérivée partielle. Les vecteurs sont des vecteurs tangents aux deux courbes se coupant en M.

Si l'on trace dans un espace à trois dimensions l'ensemble des points d'équation cartésienne $z = f(x, y)$, on obtient une surface comme sur la figure ci-contre.

L'intersection de celle-ci avec un plan d'équation $x = x_0$ décrit une courbe \mathcal{C}_{x_0} , alors que l'intersection avec le plan d'équation $y = y_0$ donne une autre courbe \mathcal{C}_{y_0} . Évidemment ces deux courbes se coupent en $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

La dérivée partielle $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y (x_0, y_0)$ représente la pente de la tangente à la courbe \mathcal{C}_{y_0} , au point M comme indiqué sur la FIG. 7.1.

De la même façon, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x (x_0, y_0)$ représente la pente de la tangente en $M \in \mathcal{C}_{x_0}$.

Théorème de Schwarz

Les dérivées partielles d'ordre un étant fonctions de (x, y) , on peut à nouveau les dériver. On introduit alors quatre nouvelles dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \right) \Big|_y = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_y \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \right) \Big|_x = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \right) \Big|_y = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_y \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \right) \Big|_x = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_x$$

Exemple

Reprendons l'expression du volume $V(h, r)$ d'un cylindre et calculons les quatre dérivées d'ordre deux :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} \Big|_r &= \frac{\partial(\pi r^2)}{\partial h} \Big|_r = 0 & \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_h &= \frac{\partial(2\pi rh)}{\partial r} \Big|_h = 2\pi h \\ \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r} \Big|_r &= \frac{\partial(2\pi rh)}{\partial h} \Big|_r = 2\pi r & \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h} \Big|_h &= \frac{\partial(\pi r^2)}{\partial r} \Big|_h = 2\pi r\end{aligned}$$

Ici, les dérivées d'ordre deux existent et sont continues : on dit que $V(h, r)$ est de classe C^2 .

Comme on le voit sur l'exemple précédent, l'ordre dans lequel on calcule les dérivées croisées ne semble pas avoir d'importance. C'est en fait une propriété très générale dès lors que la fonction est suffisamment régulière.

Théorème de Schwarz

Pour une fonction de classe C^2 , on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Et plus généralement, le résultat du calcul d'une dérivée partielle d'ordre quelconque d'une fonction suffisamment régulière, ne dépend pas de l'ordre des dérivations.

7.2 Différentielle

Définition mathématique

Considérons une fonction $f = f(x, y)$ dérivable en (x, y) . On appelle différentielle de f , l'application linéaire qui associe aux réels h et k , le nombre réel df tel que

$$df = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y h + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x k$$

Propriétés de la différentielle

Fonction	Différentielle
$f + g$	$df + dg$
fg	$gdf + f dg$
$\ln(f)$	df/f
$f(x, y) = C^{\text{te}}$	$df = 0$

Si l'on note dx la différentielle de la fonction $f(x, y) = x$, on obtient $dx = h$. De même la différentielle de la fonction $g(x, y) = y$, notée

dy vaut k . C'est pourquoi, on écrit la différentielle sous la forme suivante

$$df = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x dy \quad \heartsuit \quad (7.1)$$

Notez que le mathématicien ne suppose nullement que les quantités dx , dy et df soient infiniment petites.

Une propriété importante à retenir est le **caractère invariant de la différentielle** vis à vis du changement de variable. Autrement dit, dans l'expression (7.1), x peut désigner indifféremment la variable originelle ou bien une fonction d'une autre variable.

Exemple

Reprenons le volume du cylindre et supposons que son aire soit maintenue constante :

$$V(h, r) = \pi r^2 h \quad \text{et} \quad S(h, r) = 2\pi r h = S_0$$

La contrainte sur S revient à dire que h est implicitement fonction de r et qu'il n'y a qu'une variable indépendante. Ici on peut même exprimer une telle relation puisque $h = S_0/(2\pi r)$. Si l'on injecte cette relation dans V , on obtient

$$V(r) = \frac{r}{2} S_0 \quad \text{soit} \quad dV = V'(r) dr = \frac{S_0}{2} dr$$

On aurait pu aussi exprimer les différentielles des fonctions $V(h, r)$ et $S(r, h)$:

$$dV(r, h) = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh \quad \text{et} \quad dS(r, h) = 0 = 2\pi(h dr + r dh)$$

pour en déduire $dh = -h/r dr$. En réinjectant dans l'expression de dV , on aboutit à

$$dV = \pi r h dr = \frac{S_0}{2} dr$$

Point de vue du physicien

Contrairement au mathématicien, le physicien réserve la notation dx et dy à des accroissements infiniment petits des variables x et y . La différentielle df s'interprète alors comme une variation infinitésimale de la grandeur f suite aux variations dx et dy .

Ce point de vue provient du théorème de Taylor-Young :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y h + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x k + \|(h, k)\| \epsilon(h, k)$$

avec $\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \epsilon(h, k) = 0$. Ainsi la différentielle peut être vue comme une approximation linéaire (à l'ordre un) d'une variation

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \simeq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \Delta y$$

Expression qui produit une erreur d'autant plus faible que Δx et Δy sont petits. À ce titre, le calcul différentiel est souvent utilisé en physique pour approcher la variation d'une grandeur.

Exemple

Un cylindre voit son rayon r augmenter de 1% et sa hauteur h diminuer de 1%. Déterminons la variation relative de son volume. Pour cela, commençons par différentier le volume $V(r, h) = \pi r^2 h$:

$$dV = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh$$

On en déduit une valeur approchée de la variation de volume :

$$\Delta V \simeq 2\pi rh \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

ce qui donne en valeur relative $\Delta V/V \simeq 2\Delta r/r + \Delta h/h = 1\%$. Le volume augmente donc de 1%.

Fonctions implicites

Il arrive fréquemment, notamment en Thermodynamique, que certaines variables, appelons-les x, y et z , ne soient pas indépendantes, mais liées par une relation de la forme $g(x, y, z) = 0$. Dans ce cas, chaque variable est définie implicitement en fonction des deux autres, et on peut écrire

$$x = x(y, z) \quad y = y(x, z) \quad \text{et} \quad z = z(x, y)$$

Même si l'on ne sait pas expliciter ces fonctions, il est possible de mettre en relation leurs dérivées partielles. En effet, considérons la fonction $x = x(y, z)$ et écrivons sa différentielle :

$$dx = \left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z dy + \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_y dz$$

On en déduit par exemple dy :

$$dy = \frac{1}{(\partial x / \partial y)_z} dx - \frac{(\partial x / \partial z)_y}{(\partial x / \partial y)_z} dz$$

Identifions cette relation avec l'expression de la différentielle de $y(x, z)$:

$$dy = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z dx + \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x dz$$

On en déduit

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z = \frac{1}{\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z} \quad \heartsuit \quad (7.2)$$

et $\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x = -\frac{(\partial x / \partial z)_y}{(\partial x / \partial y)_z}$ soit

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z \times \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x \times \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y = -1 \quad \heartsuit \quad (7.3)$$

appelée *relation triangulaire*. Notez au passage que le fait que ce produit vaut -1 et non +1 montre que l'on ne peut pas traiter une dérivée partielle comme une fraction.

Exemple

L'équation d'état d'un gaz de van der Waals est donnée par

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

où a , b et R sont trois constantes positives. On désire calculer le coefficient de dilation thermique isobare de ce gaz défini par

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

Le premier réflexe consiste à chercher l'expression $V(T, p)$. Cependant, un examen rapide de l'équation nous annonce des calculs pénibles puisque V s'obtient en résolvant une équation du troisième degré. Il est alors beaucoup plus astucieux d'utiliser la relation (7.3) :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \times \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V \times \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T = -1$$

En effet, les dérivées $\partial T / \partial p|_V$ et $\partial p / \partial V|_T$ se calculent aisément :

$$\begin{aligned} T &= \frac{p(V-b)}{R} + \frac{a(V-b)}{RV^2} & \text{d'où} & \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V = \frac{V-b}{R} \\ p &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} & \text{et donc} & \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \end{aligned}$$

Ainsi, la relation triangulaire permet d'obtenir

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \frac{(V-b)V^3}{TV^3 - \frac{2a}{R}(V-b)^2}$$

ce qui donne

$$\alpha_{\text{vdW}} = \frac{(V-b)V^2}{TV^3 - \frac{2a}{R}(V-b)^2}$$

Forme différentielle

Considérons la forme différentielle suivante :

$$\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

S'il existe une fonction $f(x, y)$ tel que $\omega = df$, on dit qu'il s'agit une **différentielle totale exacte**. Quand c'est le cas, les fonctions $a(x, y)$ et $b(x, y)$ sont contraintes par le théorème de Schwarz

Théorème de Schwarz

$a(x, y)$ et $b(x, y)$ ont des dérivées d'ordre un continues.

Soit $a(x, y) dx + b(x, y) dy$ une forme différentielle de classe C^1 . Si cette forme est une différentielle totale exacte, alors on doit avoir

$$\left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_y \quad (7.4)$$

[2] : ROUSSEL (2024), *Conséquences mathématiques des principes*

Cette propriété est largement utilisée en thermodynamique[2].

Exemple

Considérons le bilan d'énergie d'une mole de gaz parfait subissant une évolution réversible :

$$dU(T) = \delta Q^{\text{rev}} - p dV = C_v(T) dT$$

où p , V et T désignent la pression, le volume et la température du gaz. $C_v(T)$ est la capacité thermique du gaz et δQ^{rev} est le transfert d'énergie thermique reçu. La pression du gaz est reliée à T et V via $pV = RT$ de sorte que

$$\delta Q^{\text{rev}} = \frac{RT}{V} dV + C_v(T) dT$$

Il s'agit d'une forme différentielle. Vérifions l'égalité (7.4) :

$$\left. \frac{\partial(RT/V)}{\partial T} \right|_V = \frac{R}{V} \quad \text{alors que} \quad \left. \frac{\partial C_v(T)}{\partial V} \right|_T = 0$$

ce qui suffit pour conclure que δQ^{rev} n'est pas¹ une différentielle totale exacte, contrairement à $dU(T)$, $dp(V, T)$ etc.

Ce qui distingue essentiellement une forme différentielle d'une différentielle totale exacte c'est son intégration : elle nécessite de connaître le chemin d'intégration dans le premier cas, alors que pour une différentielle totale exacte on a

$$\int_A^B df(x, y) = f(B) - f(A)$$

résultat qui ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

1 : C'est ce qui explique qu'on note cette grandeur infinitésimale avec un δ et non avec un d . Certains auteurs utilisent la notation dQ^{rev} .

Différentiel d'ordre deux

Considérons une fonction $f = f(x, y)$ de classe C^2 . Au voisinage de $P(x_0, y_0)$, les variations de f sont régies par le développement de Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x, y) = df + \frac{1}{2!} d^2 f + (h^2 + k^2) \epsilon(h, k)$$

où $d^2 f$ est la **différentielle d'ordre 2**. Pour une fonction de deux variables, on obtient

$$d^2 f = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_y dx^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{xy} dx dy + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_x dy^2$$

Pour une fonction de classe C^n , on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f + \|(h+k)^n\| \epsilon(h, k)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} d^2f &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y h + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_x k\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y\right) h + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_x\right) k \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_y h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} kh + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_x k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk \\ d^2f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_y h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial xy} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_x k^2 \end{aligned}$$

Dans le cas où l'approximation à l'ordre un donne un résultat nul, alors il faut prolonger le développement à l'ordre deux pour estimer une petite variation de la grandeur étudiée.

Exemple

Un cylindre voit son rayon r augmenter de 1% et sa hauteur h diminuer de 2%. Déterminons la variation relative de son volume. Une approximation linéaire nous a donné

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

ce qui donne zéro ici. Il faut donc prolonger le développement à l'ordre deux. Sachant que $dV = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh$, on obtient

$$d^2V = (2\pi h dr + 2\pi r dh) dr + (2\pi r dr) dh$$

d'où

$$d^2V = 2\pi h dr^2 + 4\pi r dr dh$$

On en tire l'approximation

$$\Delta V \simeq \frac{1}{2} (2\pi h \Delta r^2 + 4\pi r \Delta r \Delta h)$$

et en valeur relative :

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta r}{r}\right) \left(\frac{\Delta h}{h}\right) = -0,03\%$$

Le volume diminue de 0,03 %.

Points stationnaires

Si en un point $P(x_0, y_0)$, la différentielle d'ordre un de f est nulle, on dit que P est un point **stationnaire** ou **critique** de f . Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y (x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_x (x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P \text{ est stationnaire}$$

Dans ce cas, au voisinage de P , les variations de f sont régies par

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} d^2f + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

Du point de vue géométrique, la nature du point P dépend du signe de d^2f :

- ▶ si au voisinage du point P , d^2f est positif quelle que soit la direction dans laquelle on se déplace depuis le point P , alors P correspond à un minimum local;

- si d^2f est négatif quelle que soit la direction dans laquelle on se déplace depuis le point P, alors P correspond à un maximum local;
- si le signe de d^2f dépend de la direction dans laquelle on se déplace, on parle de **point col** ou **point selle**;
- enfin, si $d^2f = 0$ quelle que soit la direction choisie, alors il faut étudier le signe de la différentielle d'ordre 3 pour statuer.

Pour une fonction de deux variables, la différentielle d'ordre deux se met sous la forme

$$d^2f = a \, dx^2 + 2b \, dxdy + c \, dy^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a &= \partial^2 f / \partial x^2|_y \\ b &= \partial^2 f / \partial x \partial y \\ c &= \partial^2 f / \partial y^2|_x \end{cases}$$

dont le signe est déterminée par celui de a et celui du discriminant réduit $b^2 - ac$. On a

$$P \text{ est un } \begin{cases} \text{minimum si} & b^2 - ac < 0 \text{ et } a > 0 \\ \text{maximum si} & b^2 - ac < 0 \text{ et } a < 0 \\ \text{point col si} & b^2 - ac > 0 \end{cases}$$

Exemple

Un industriel nous demande de concevoir une boîte rectangulaire sans couvercle, de volume $V = 4 \text{ m}^3$ sans préciser sa hauteur z ni les dimensions x et y de la base rectangulaire. Pour économiser de la matière nous allons déterminer quelles valeurs il faut donner à (x, y, z) afin de minimiser l'aire de la boîte.

La volume et la surface de la boîte s'écrivent

$$xyz = 4 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = 2xz + 2yz + xy$$

Seules deux variables sont indépendantes. Choisissons les variables (x, y) . On peut substituer z par $4/(xy)$ dans l'expression de l'aire :

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{8}{y} + \frac{8}{x} + xy$$

Déterminons les dérivées partielles de la fonction $\mathcal{A}(x, y)$:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \Big|_y = -\frac{8}{x^2} + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \Big|_x = -\frac{8}{y^2} + x$$

Le point stationnaire s'obtient en annulant ces dérivées. On aboutit à deux équations

$$x^2y = 8 \quad \text{et} \quad xy^2 = 8 \quad \text{d'où} \quad x = y = 2$$

S'agit-il d'un minimum ? Pour cela calculons les dérivées secondes au point P(2, 2) :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \Big|_y = \frac{16}{x^3} = 2 \quad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x \partial y} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} \Big|_x = \frac{16}{y^3} = 2$$

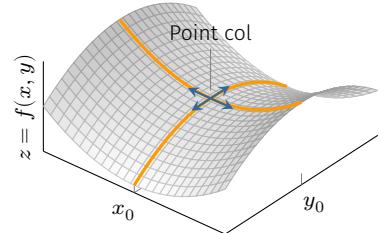


FIG. 7.2 : Exemple de point col.

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum puisque

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \Big|_y \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} \Big|_x < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \Big|_y > 0$$

Finalement on produira une boîte de base carrée ($2 \times 2 \text{ m}^2$) et de hauteur 1 m.

8

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Ce cours résume l'essentiel des propriétés des opérateurs différentiels utilisées en physique.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/operatorus-differentiels.php>

8.1 L'opérateur gradient	65
Définition	65
Propriétés	66
8.2 L'opérateur divergence	66
Définition	66
Propriétés	67
8.3 L'opérateur rotationnel	68
Définition	68
Propriétés	68
8.4 L'opérateur laplacien	69
Le laplacien scalaire	69
Le laplacien vectoriel	70

8.1 L'opérateur gradient

Définition

L'opérateur gradient est un *opérateur différentiel* qui s'applique à un **champ scalaire** (fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps) et le transforme en un **champ vectoriel** (vecteur dépendant de l'espace et du temps). Il se lit «gradient» ou «nabla» et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\mathbf{M}, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} f(\mathbf{M}, t)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes le gradient s'exprime ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z, t) = \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \vec{u}_z \quad \heartsuit$$
(8.1)

La TAB. 8.1 donne les différentes expressions du gradient dans les systèmes de coordonnées utilisés couramment en physique.

Exercice – Calculer le gradient des champs suivants : $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ et $g(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r}$.

Solution : $\vec{\nabla} f = (x, y, z) = \vec{OM}$ et $\vec{\nabla} g = \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$.

Système	$f(\mathbf{M}, t)$	Expression de $\text{grad} f$
Cartésien	$f(x, y, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
Cylindriques	$f(r, \theta, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
Sphériques	$f(r, \theta, \varphi, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r d\theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{r \sin \theta d\varphi} \vec{u}_\varphi$

TAB. 8.1 : Expressions de l'opérateur gradient dans différents systèmes de coordonnées.

Propriétés

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\vec{\nabla}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{\nabla}f + \beta \vec{\nabla}g \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Le gradient d'un produit de champs scalaires vaut

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = f \vec{\nabla}g + g \vec{\nabla}f$$

où f et g sont deux fonctions de l'espace et du temps.

Lien avec la différentielle – On peut définir le gradient à partir de sa relation avec la différentielle. Soit M un point de l'espace et M' un point infiniment voisin, la différentielle df représente la variation du champ scalaire f lorsque l'on se déplace de M à M' à t fixé :

$$df \stackrel{\text{def}}{=} f(M', t) - f(M, t) = \vec{\nabla}f(M, t) \cdot \vec{d\ell} \quad \text{avec } \vec{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$$

En conséquence,

- ▶ Le vecteur $\vec{\nabla}f(M, t)$ est perpendiculaire à la surface de niveau¹ de f passant par M à l'instant t .
- ▶ Le vecteur gradient est orienté vers les valeurs croissantes de f et sa norme mesure le taux de variation spatiale dans la direction de plus grande pente

$$\|\vec{\nabla}f\| = \frac{df}{d\ell}$$

Exercice – Considérons le champ scalaire de l'espace bi-dimensionnel, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Représenter les courbes de niveau puis calculer $\vec{\nabla}f$. Tracer quelques vecteurs gradients.

Solution : Les courbes de niveau sont des cercles de centre O. On a $\vec{\nabla}f = (2x, 2y) = 2\vec{OM}$. Les vecteur gradients sont effectivement perpendiculaires aux cercles.

8.2 L'opérateur divergence

Définition

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un **champ vectoriel** et qui renvoie un **champ scalaire**. Il se lit « divergence » et se note :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{y,z} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Big|_{x,z} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Big|_{x,y} \quad \heartsuit$$

(8.2)

La TAB. 8.2 donne les différentes expressions de la divergence d'un champ vectoriel exprimé dans différents systèmes de coordonnées.

Système	Expression de $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$
cartésien	$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Big _{y,z} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Big _{x,z} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Big _{x,y}$
cylindriques	$\frac{\partial(rA_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

TAB. 8.2 : Expressions de la divergence dans différents systèmes de coordonnées.

Exercice – Considérons le champ vectoriel $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$. Calculer la divergence de ce champ en tout point M autre que O.

Solution : On trouve $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. On dit que \vec{A} est un champ à flux conservatif (sauf en O).

Propriétés

L'opérateur divergence est un **opérateur linéaire** et vérifie donc

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \operatorname{div} \vec{A} + \beta \operatorname{div} \vec{B} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La divergence d'un produit vaut

$$\operatorname{div}(f \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f = f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\operatorname{grad}} f$$

La divergence d'un champ est reliée au calcul du flux.

Théorème de Green-Ostrogradsky ou théorème de la divergence

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale sur le volume V limité par (S) de la divergence du champ vectoriel.

$$\iint_{M \in (S)} \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{dS}^{\text{ext}} = \iiint_{M \in V} \operatorname{div} \vec{A}(M) \, d\tau \quad \text{avec } \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Sens physique – La divergence prend un sens bien précis en mécanique des fluides[3]. Considérons une portion de fluide en mouvement dans un fluide décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$. Au cours du mouvement, le volume \mathcal{V} de cette portion varie suite aux déformations engendrées par l'écoulement. La divergence de la vitesse est

[3] : ROUSSEL (2010), *Fluide en écoulement*

liée au taux de dilatation de la portion fluide par la relation

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt}$$

8.3 L'opérateur rotationnel

Définition

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui transforme un **champ vectoriel** en un autre **champ vectoriel**. Il se lit «rotationnel» et se note

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{pmatrix} \quad \heartsuit \quad (8.3)$$

La TAB. 8.3 donne les différentes expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées.

Propriétés

L'opérateur rotationnel étant linéaire, on a

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + \beta \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Le rotationnel d'un gradient est nul.

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle.

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

Le rotationnel d'un produit vaut

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} f \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \wedge \vec{A} + f \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$$

TAB. 8.3 : Expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées

Système	$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
cartésien	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$
cylindrique	$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$
sphérique	$\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$

Relation avec la circulation :

Théorème de Stokes

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour \mathcal{C} fermé et orienté est égal au flux du rotationnel de ce champ à travers une surface \mathcal{S} délimité par \mathcal{C} .

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{A}(M) \cdot d\ell = \iint_{M \in \mathcal{S}} \text{rot} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orienté à partir du sens de parcours de \mathcal{C} et de la règle du tire-bouchon.

Sens physique – En mécanique des fluides[4], le rotationnel du champ de vitesse d'un fluide en écoulement est lié à la vitesse de rotation Ω des particules de fluide au cours de leur mouvement.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$$

[4] : ROUSSEL (2013), *Dynamique des fluides parfaits*

8.4 L'opérateur laplacien

Le laplacien scalaire

L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note $\Delta f(M, t)$.

$$\Delta f(M, t) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \heartsuit \quad (8.4)$$

La TAB. 8.4 donne les expressions du laplacien scalaire dans différents systèmes de coordonnées.

Système	Expression de Δf
cartésien	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

TAB. 8.4 : Expressions du laplacien dans différents systèmes de coordonnées.

Le laplacien vectoriel

Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un autre champ vectoriel et se note

$$\Delta \vec{A}$$

Par définition, le laplacien vectoriel s'obtient à l'aide de l'identité

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires étant fixes, le laplacien vectoriel d'un champ \vec{A} est tout simplement, un vecteur dont les composantes sont les laplaciens scalaires des composantes de \vec{A} :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

SÉRIE DE FOURIER

En 1822, Joseph Fourier publie *Théorie analytique de la chaleur*, ouvrage dans lequel il utilise une technique qui consiste à décomposer une fonction périodique par une somme infinie de sinus et de cosinus. Bien que suscitant quelques réserves de la part de nombreux mathématiciens de l'époque, l'analyse de Fourier est de nos jours solidement structurée et bien comprise.

Ce chapitre explique cette décomposition spectrale et l'illustre dans le domaine de l'électronique et de la physique ondulatoire.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/serie-de-fourier.php>

9.1 Décomposition en séries de Fourier	71
Signaux périodiques	71
Théorème de Fourier	72
Illustration sur un exemple	73
Notation complexe	75
Relation de Parseval	75
9.2 Applications	76
Filtrage analogique	76
La corde vibrante	78
9.3 Conclusion	80

9.1 Décomposition en séries de Fourier

Signaux périodiques

De nombreux phénomènes se caractérisent par des signaux de différentes natures présentant une allure périodique. On peut penser au cycle des taches solaires, aux observables biologiques du corps humain (pression aortique, électrocardiogramme...), aux signaux électriques, aux sons complexes produits par les instruments de musique, etc. Nous notons $f(t)$ ce signal, et t une variable réelle. Pour fixer les idées, on peut imaginer que t soit la variable temporelle bien que ce ne soit pas nécessaire; t peut aussi bien être une variable spatiale. Le signal admet T comme **période**¹ lorsque l'on peut écrire

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad T > 0 \quad (9.1)$$

Toute l'information utile du signal se retrouve donc dans un motif de durée T . Le nombre ν de motifs que l'on trouve dans un intervalle d'une seconde s'appelle **la fréquence** et s'exprime en hertz (Hz). Vu que le motif s'étend sur une durée T , on a

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \heartsuit \quad (9.2)$$

Le motif présente des caractéristiques que l'on peut facilement mesurer dès lors que le signal est converti en un signal électrique :

- ▶ La composante continue représente la valeur moyenne² du signal :

$$f_{cc} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (9.3)$$

1 : Notez que tout multiple de T est également une période; c'est pourquoi par convention la période est la plus petite valeur possible de T qui vérifie (9.1).

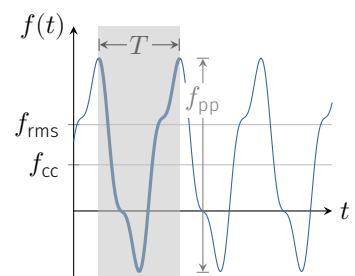


FIG. 9.1 : Caractéristiques d'un signal périodique.

2 : La moyenne d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$ s'obtient par l'intégrale

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x) dx$$

- ▶ La valeur crête-à-crête correspond à l'écart entre le maximum et le minimum de f :

$$f_{\text{pp}} \stackrel{\text{def}}{=} \max(f) - \min(f) \quad (9.4)$$

- ▶ Les signaux rencontrés en physique présentent une moyenne quadratique finie. En effet, la puissance d'un signal est proportionnelle à $f^2(t)$ de sorte que sa moyenne doit être finie³. La valeur efficace⁴ est liée à la moyenne quadratique via la relation

$$f_{\text{rms}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\bar{f}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (9.5)$$

Exemple

En électricité, la puissance électrique reçue par un conducteur ohmique de résistance R vaut $\mathcal{P}(t) = R i^2(t)$ de sorte que la puissance moyenne reçue vaut

$$\bar{\mathcal{P}} = R \bar{i}^2 = R i_{\text{rms}}^2$$

A priori, la fréquence et la valeur efficace d'un signal ne permettent pas de décrire complètement le signal périodique. En revanche, un sinus est complètement décrit par sa fréquence et sa valeur efficace; il serait donc intéressant de pouvoir décomposer un signal périodique en sinus et cosinus.

Théorème de Fourier

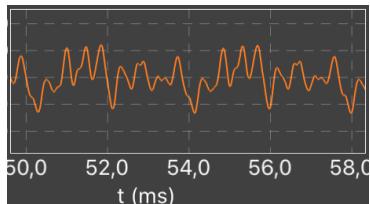


FIG. 9.2 : Note Do₃ jouée au violon.

Nous savons tous qu'une même note jouée sur un violon ou sur un piano sonne différemment bien que leurs fréquences sont identiques. En effet, l'oreille humaine, à l'instar d'un prisme avec la lumière, décompose les sons complexes en un spectre de sons purs que le cerveau est capable de comparer et d'interpréter. C'est l'idée de base de l'analyse de Fourier : décomposer un signal périodique de fréquence ν en une somme de sinus de fréquences **multiples de ν** .

Théorème de Fourier

Sous certaines conditions mathématiques assez peu restrictives pour les grandeurs physiques, on montre qu'un signal périodique $f(t)$ est développable en série de Fourier, comme suit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n 2\pi\nu t) + b_n \sin(n 2\pi\nu t) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (9.6)$$

Le terme $a_n \cos(n 2\pi\nu t) + b_n \sin(n 2\pi\nu t)$ représente l'**harmonique de rang n** . L'harmonique de rang $n = 1$ est aussi appelée **le fondamental** de f .

NB : La série de Fourier converge point à point en $f(t)$ si le signal est continu et d'énergie finie sur une période.

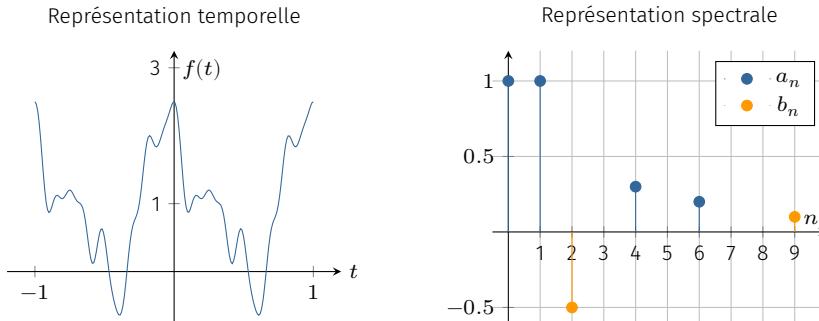


FIG. 9.3 : Passage de l'espace réel (temporel) à l'espace de Fourier (fréquentiel).

L'ensemble des coefficients de Fourier (a_n, b_n) détermine complètement la forme du motif périodique. C'est pourquoi, une autre façon de représenter un signal est de fournir l'histogramme des coefficients de Fourier : on obtient ce que l'on appelle la **représentation spectrale** ou le **spectre de Fourier** de f . Par exemple, deux notes de même hauteur⁵ jouées par deux instruments de musique différents présentent deux spectres constitués des mêmes harmoniques mais dont les poids relatifs diffèrent. Ces notes sont de hauteur identique mais de **timbre** distinct.

Si la fonction $f(t)$ est connue, on peut déterminer les coefficients de Fourier par intégration. Par exemple, si l'on prend la moyenne de la série de Fourier on trouve a_0 . Le premier coefficient de Fourier représente donc la composante continue de f :

$$a_0 = f_{cc} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \heartsuit \quad (9.7)$$

Quand on multiplie le développement de Fourier par $\cos(n 2\pi\nu t)$ puis que l'on calcule la moyenne, tous les termes s'annulent sauf le terme $a_n \cos^2(n 2\pi\nu t)$ qui vaut $a_n/2$. On en déduit⁶

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n 2\pi\nu t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n 2\pi\nu t) dt \quad (9.8)$$

5 : La hauteur est reliée à sa fréquence, par exemple un La_{440} correspond à un signal acoustique de fréquence 440 Hz

On rappelle que les fonctions circulaires (sinus et cosinus) sont de moyenne nulle et de valeur efficace $1/\sqrt{2}$. Plus généralement pour tout couple (m, n) d'entiers non nuls, on a

$$\overline{\sin(mx) \sin(nx)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$\overline{\sin(mx) \cos(nx)} = 0$
6 : Pour déterminer b_n il suffit de multiplier la série de Fourier par $\sin(n 2\pi\nu t)$ puis de prendre la moyenne temporelle.
♡

Illustration sur un exemple

Voyons par exemple comment un signal triangulaire se décompose en série de Fourier. Pour simplifier, prenons un signal triangulaire d'amplitude A et de période $T = 1$ s. Sa fréquence fondamentale est donc $\nu = 1$ Hz. En vertu du théorème de Fourier, le signal se développe comme suit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)$$

Tout d'abord, le signal présente une composante continue nulle. Par conséquent $a_0 = 0$. Ensuite, l'origine des temps est placé de telle sorte que la fonction est paire ; par conséquent le développement ne

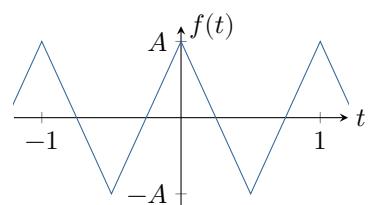


FIG. 9.4 : Signal triangulaire.

peut contenir que des harmoniques paires. C'est pourquoi les coefficients b_n sont tous nuls. Il ne nous reste plus qu'à déterminer les coefficients a_n donnés par

Rappelons que si f est paire,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2} &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \cos(2\pi n t) dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} f(t) \cos(2\pi n t) dt \\ \frac{a_n}{2} &= 2 \int_0^{1/2} (A - 4At) \cos(2\pi n t) dt\end{aligned}$$

où $f(t)$ a été remplacée par la portion de droite d'équation $A - 4At$ entre $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$. On poursuit le calcul en intégrant par partie :

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2} &= 2 \left[(A - 4At) \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^{1/2} + 2 \int_0^{1/2} \frac{4A \sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt \\ &= 0 + 2 \left[-\frac{4A \cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} \right]_0^{1/2} \\ \frac{a_n}{2} &= \frac{2A}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(\pi n))\end{aligned}$$

Sachant que $\cos(\pi n) = (-1)^n$, on trouve finalement

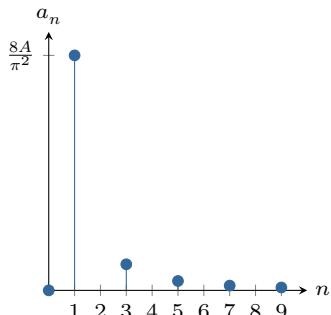


FIG. 9.5 : Spectre du signal triangulaire

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad \text{et } b_n = 0 \quad (9.9)$$

Autrement dit, le signal triangulaire est exclusivement constitué d'harmoniques de fréquences multiples impaires de la fréquence fondamentale et dont les amplitudes décroissent assez rapidement. La huitième composante par exemple correspond à $n = 15$ et présente une amplitude 225 fois plus faible que celle du fondamental.

On comprend dès lors que la convergence de la série de Fourier est ici assez rapide comme le montre la figure ci-dessus.

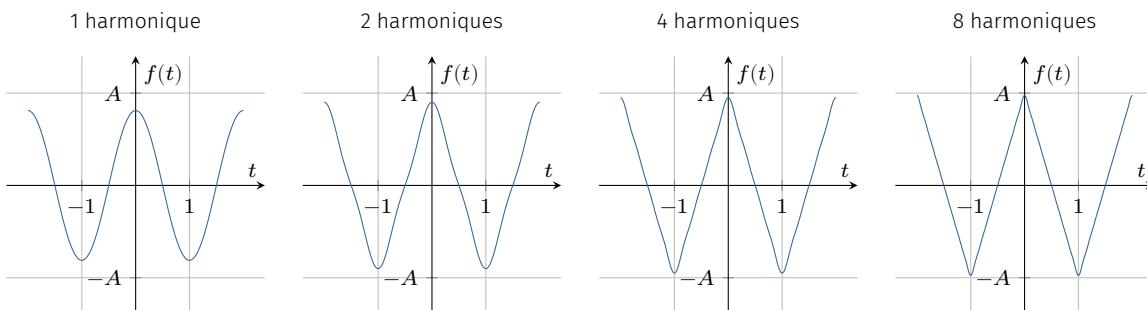


FIG. 9.6 : Approximation du signal triangulaire en tronquant la série de Fourier à $n = 1, 3, 7$ et 15 .

Notation complexe

On peut reformuler le développement de Fourier en notation complexe. À partir de (9.6) et des relations d'Euler, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in2\pi\nu t} + e^{-in2\pi\nu t}}{2} + b_n \frac{e^{in2\pi\nu t} - e^{-in2\pi\nu t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in2\pi\nu t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in2\pi\nu t} \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi\nu t} \end{aligned}$$

Attention, la somme s'étend sur \mathbb{Z} !

où c_n est le **coefficent de Fourier complexe** donné par

$$\underline{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{si } n > 0 \\ \underline{c}_{-n}^* & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad c_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0$$

Si l'on reprend les relations (9.8), on s'aperçoit que le coefficient de Fourier complexe se calcule via la formule

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in2\pi\nu t} dt \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad \heartsuit \quad (9.10)$$

L'ensemble des modules des c_n constitue le spectre de f en *amplitude*, alors que l'ensemble des arguments des c_n donne le spectre en phase. Pour un signal réel on a $\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^*$, soit $|\underline{c}_{-n}| = |\underline{c}_n|$ et $\arg(\underline{c}_{-n}) = -\arg(\underline{c}_n)$. Autrement dit, le spectre en amplitude est symétrique par rapport à l'axe $n = 0$, le spectre en phase anti-symétrique. Pour ces raisons, on se contente souvent de représenter les spectres pour les valeurs positives de n .

Relation de Parseval

La puissance moyenne du signal $f(t)$ est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation de Parseval exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différentes harmoniques, ce qui en terme de valeurs efficace se traduit⁷ par la relation

$$\overline{f^2} \stackrel{\text{def}}{=} f_{\text{rms}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad \heartsuit \quad (9.11)$$

7: On rappelle qu'un signal sinusoïdal d'amplitude a présente une valeur efficace égale à $a/\sqrt{2}$. Quant au signal constant d'amplitude a sa valeur efficace vaut également a .

La relation (9.11) prend une forme particulièrement simple lorsque l'on fait intervenir les coefficients de Fourier complexes. En effet, sachant que $c_{n>0} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_{n<0}^*$ et $c_0 = a_0$, on obtient

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \heartsuit \quad (9.12)$$

Démonstration du théorème de Parseval

Le développement de Fourier (9.6) peut aussi s'écrire :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n 2\pi\nu t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad A_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}$$

où A_n représente l'amplitude de l'harmonique de rang n . Élevons au carré le signal :

$$\begin{aligned} f^2(t) &= a_0^2 + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n 2\pi\nu t + \varphi_n) \\ &\quad + \sum_{n,m} A_n A_m \cos(n 2\pi\nu t + \varphi_n) \cos(m 2\pi\nu t + \varphi_m) \end{aligned}$$

Calculons maintenant la moyenne de $f^2(t)$ sur une période. Compte tenu des propriétés des fonctions trigonométriques, on obtient

$$\bar{f}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

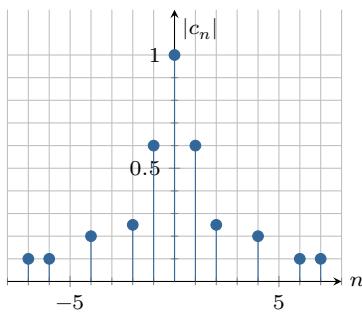


FIG. 9.7 : Spectre de $u(t)$

Exercice – On enregistre à l'oscilloscope une tension électrique $u(t)$ dont on donne le spectre en amplitude. On envoie cette tension aux bornes d'un voltmètre en mode AC. Quelle valeur affiche-t-il sachant que sa résolution est de 10 mV?

Solution : Le voltmètre affiche 0,98 V.

9.2 Applications

Filtrage analogique

Considérons un système qui transforme un signal d'entrée $e(t)$ en un signal de sortie $s(t)$. On appelle **filtre** un tel système si :



FIG. 9.8 : Filtre

- ▶ ses caractéristiques sont invariantes dans le temps;
- ▶ son comportement respecte le principe de superposition.

Un filtre est caractérisé par sa **fonction de transfert**

$$\underline{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(t)}{e(t)}$$

qui donne la réponse en régime sinusoïdal.

En électronique, dans une chaîne d'analyse et de traitement du signal électrique, on rencontre couramment des filtres sous la forme de quadripôles, c'est-à-dire d'éléments possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Les grandeurs d'entrée et de sortie sont les tensions ou les courants. La fonction de transfert correspond en général à la *réponse en tension en boucle ouverte*⁸ :

$$\underline{H}(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{u_s(t)}{u_e(t)} \right|_{i_s=0} \quad (9.13)$$

On adopte la notation complexe : $\underline{e}(t) = \underline{E} e^{i 2\pi\nu t}$ et $\underline{s}(t) = \underline{S} e^{i 2\pi\nu t}$.

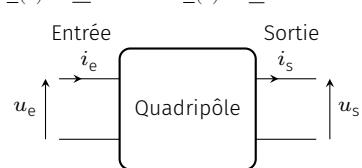


FIG. 9.9 : Quadripôle électrique

8 : C'est-à-dire lorsque la sortie ne débite aucun courant, comme c'est le cas lorsqu'on y branche un voltmètre ou un oscilloscope dont les impédances d'entrée sont suffisamment grandes pour être considérées infinies.

\underline{H} est une grandeur complexe qui varie avec la fréquence, ou la **pulsation**⁹ $\omega = 2\pi\nu$ selon les préférences. Le module de la fonction de transfert renseigne sur le gain en amplitude G alors que l'argument donne le déphasage sortie/entrée ϕ :

$$G \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{H}| = \frac{S_{\text{rms}}}{E_{\text{rms}}} \quad \text{et} \quad \phi = \arg \underline{H} \quad (9.14)$$

Exemple : filtre RLC

Étudions le filtre formé par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance R , d'un condensateur de capacité C et d'une bobine de self-inductance L . Le signal d'entrée sera la tension aux bornes de l'ensemble et le signal de sortie la tension aux bornes du conducteur ohmique. Nous reconnaissons un diviseur de tension, de sorte qu'en régime sinusoïdal on peut écrire^a

$$\underline{s}(t) = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \underline{e}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_R = R \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

On en déduit la fonction de transfert de ce filtre

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 + j(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})} \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi\nu$$

^a Rappelons qu'en électricité on convient de remplacer le nombre complexe i par j pour éviter les confusions avec l'intensité électrique.

9 : La pulsation s'exprime en rad/s.

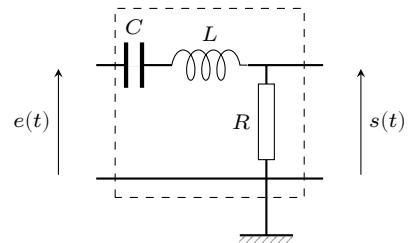


FIG. 9.10 : Filtre RLC

Souvent, le filtre présente un gain significatif pour un certain intervalle de fréquences alors qu'il est quasiment nul pour les autres fréquences. Le filtre élimine alors certaines harmoniques du signal. Suivant l'allure du gain avec la fréquence on distingue différents types de filtre :

- ▶ Le **filtre passe-bas** laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences;
- ▶ Le **filtre passe-haut** laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences;
- ▶ Le **filtre passe-bande** laisse passer les harmoniques situées dans une certaine bande de fréquences;
- ▶ Le **filtre réjecteur de bande** coupe les harmoniques dans une certaine bande de fréquences.

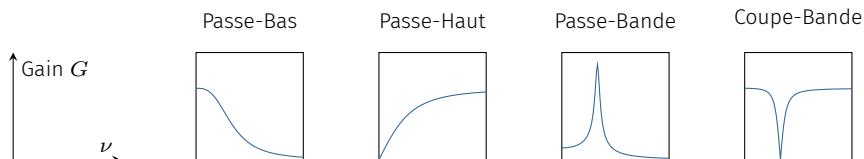


FIG. 9.11 : Types de filtre souvent rencontrés.

Lorsque l'on injecte en entrée d'un filtre un signal périodique, chaque harmonique de rang n est atténuée d'une quantité $G_n = G(n\nu)$ et déphasée de $\phi_n = \phi(n\nu)$. En vertu du principe de superposition, on reconstitue le signal de sortie en sommant chaque harmonique une fois transformée par le filtre. Formellement, si a_n et b_n sont les coeffi-

cients de Fourier du signal d'entrée, alors le signal de sortie s'écrit

$$s(t) = G_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n a_n \cos [n 2\pi\nu t + \phi_n] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n b_n \sin [n 2\pi\nu t + \phi_n]$$

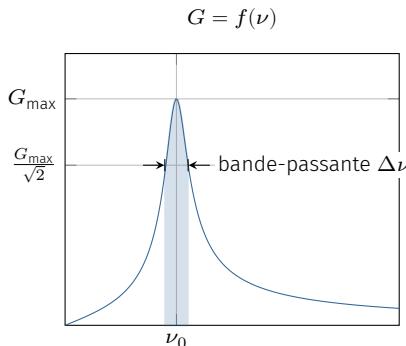


FIG. 9.12 : Courbe de réponse du circuit RLC.

Pour illustrer notre propos considérons le filtre RLC de l'exemple précédent dont la réponse en tension vaut

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} \quad \text{avec } \omega = 2\pi\nu$$

La FIG. 9.12 montre qu'il s'agit d'un filtre passe bande. La valeur des composants permet de régler la position et la largeur de la bande passante puisque l'on a

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \Delta\nu = \frac{R}{2\pi L}$$

Ce type de filtre peut servir à sélectionner l'harmonique d'un signal. Par exemple, imaginons que l'on injecte en entrée un signal en forme de rampe de fréquence 100 Hz. Réglons les composants de façon à centrer la bande passante sur 200 Hz avec une largeur $\Delta\nu = 4$ Hz. Le filtre est alors très sélectif : il élimine toutes les harmoniques sauf l'harmonique de rang $n = 2$. On peut constater sur la FIG. 9.13 qu'il s'agit d'un sinus déphasé de π : autrement dit, $a_2 = 0$ et $b_2 < 0$.

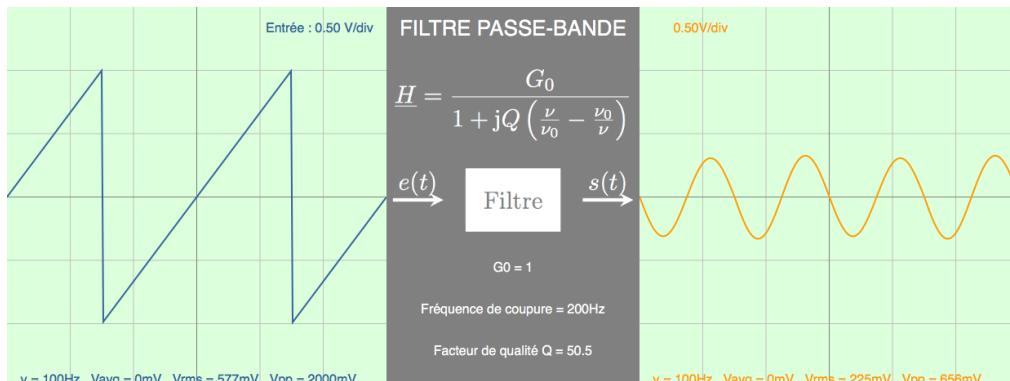


FIG. 9.13 : Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique à l'aide d'un filtre passe-bande (simulation ©J.Roussel).

Physique de la corde vibrante

10 : Dans l'idéal, la corde doit être sans raideur et sans flexion. Par ailleurs on suppose ici l'absence totale de dissipation d'énergie.

11 : La vitesse de propagation des ondes vaut $c = \sqrt{T/\mu}$ avec T la tension du fil et μ sa masse par unité de longueur.

Considérons une corde que l'on tend entre deux points fixes A et B. Lorsque l'on pince ou frappe cette corde, celle-ci se met à vibrer en entretenant certaines ondes stationnaires.

On montre que le déplacement de la corde¹⁰ $y(x, t)$ obéit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

où c est la célérité¹¹ des ondes transversales qui peuvent se propager. On sait que les solutions s'écrivent comme combinaison de deux

ondes progressives :

$$y(x, t) = \psi_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (9.15)$$

Les points A et B imposent des conditions aux limites puisque les deux extrémités de la corde sont fixes. Nous avons

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 & \rightarrow \psi_1(t) + \psi_2(t) = 0 \quad \forall t \\ y(L, t) = 0 & \rightarrow \psi_1\left(t - \frac{L}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{L}{c}\right) = 0 \quad \forall t \end{cases} \quad (9.16)$$

La première condition impose $\psi_1 = -\psi_2$ et la deuxième relation devient

$$\psi_1\left(t - \frac{L}{c}\right) = \psi_1\left(t + \frac{L}{c}\right) \quad \forall t$$

Autrement dit, ψ_1 est une fonction périodique de période $T = 2L/c$ et donc de fréquence $\nu_0 = c/2L$. Ainsi, d'après le théorème de Fourier, ψ_1 peut se décomposer en série de Fourier comme suit :

$$\psi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n \nu_0 t) + b_n \sin(2\pi n \nu_0 t)$$

En injectant cette relation dans (9.15), on obtient

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(2\pi n \nu_0 t) + \beta_n \sin(2\pi n \nu_0 t)] \times \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.17)$$

L'onde est *stationnaire* et la vibration est constituée d'harmoniques de fréquences

$$\nu_n = n\nu_0 = n\frac{c}{2L}$$

Par ailleurs, la forme initiale de la corde impose une autre contrainte qui permet d'avoir accès aux coefficients de Fourier α_n et β_n . En effet, supposons que l'on déforme la corde à $t = 0$, puis qu'on la lâche sans imprimer de vitesse initiale. Si l'on note $y_0(x)$ la forme initiale de la corde, les conditions aux imites temporelles s'écrivent

$$\begin{cases} y(x, 0) = y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \dot{y}(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n \nu_0 \beta_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

La deuxième relation implique $\beta_n = 0$. La première relation permet d'interpréter $y_0(x)$ comme une série de Fourier d'un signal périodique de période $T_x = 2L$. Les relations (9.8) permettent d'obtenir les coefficients α_n :

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Par exemple, si l'on pince une corde de guitare en son milieu de façon à ce que la corde adopte un profil triangulaire, puis qu'on lâche la corde, on trouve

$$\alpha_n = 0 \text{ si } n \text{ pair} \quad \text{et} \quad a_n \propto \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ impair}$$

Attention, il s'agit ici d'une fonction spatiale!

Autrement dit, la vibration ne contient aucune harmonique paire. La deuxième harmonique est 9 fois plus faible que la fondamentale etc. Comme tout guitariste le sait, le timbre du son émis dépend –entre autres– de l'endroit où l'on pince la corde.

9.3 Conclusion

Nous aurions pu illustrer l'exemple historique de l'équation de la chaleur ou encore de nombreux problèmes ondulatoires telle la propagation des phonons dans un cristal ou l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, etc. Ce vaste champ d'application est sans aucun doute la raison du succès de ce « couteau suisse » qu'est l'analyse de Fourier. Et l'histoire ne s'arrête pas là, comme nous allons le voir au chapitre suivant.

Jusqu'à maintenant nous n'avons envisagé que des signaux périodiques dont nous avons mis en évidence la décomposition en série de Fourier, et où le poids de chaque harmonique se distribue selon un histogramme que l'on appelle spectre du signal.

Hélas, certains signaux *ne sont pas* périodiques. On peut penser aux impulsions lumineuses, au potentiel d'action d'une fibre nerveuse, au signal acoustique du langage etc. Les notions d'harmoniques et de spectre ont-ils encore un sens? Ce chapitre répond à cette question et montre le rôle unificateur que joue la transformée de Fourier dans différents domaines de la physique.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/omp/transformee-de-fourier.php>

10.1 Transformation de Fourier	81
Du discret au continu	81
Quelques propriétés	83
Théorème de modulation	84
Relation temps-fréquence	85
10.2 Impulsion de Dirac	85
Définition	85
Spectre d'un sinus	86
Lien avec les séries de Fourier	87
10.3 La transformée de Fourier en sciences-physiques	89
Réponse d'un filtre	89
Profil spectral d'une raie	90
RMN	91
Spectroscopie	92
Phénomène de diffraction	93

10.1 Transformation de Fourier

Du discret au continu

Nous avons établi dans le chapitre précédent que tout signal périodique physique peut s'écrire en notation complexe

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in 2\pi \nu t} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{1}{T}$$

où \underline{c}_n est un ensemble **discret** de coefficients complexes donnés par

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in 2\pi \nu t} dt \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Considérons dorénavant un signal $f(t)$ **non périodique**. On peut toujours considérer que le signal représente un unique motif d'un signal périodique dont la période tendrait vers l'infini. En d'autres termes, on peut considérer que le signal est de fréquence $\nu \rightarrow 0$ et que les harmoniques balayent tout l'espace des réels; le spectre discret devenant alors continu. Voyons comment cela se traduit mathématiquement. D'après les relations précédentes, un signal périodique peut s'écrire

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\nu \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-in 2\pi \nu t'} dt' \right] e^{in 2\pi \nu t}$$

Faisons tendre $T \rightarrow \infty$ c'est-à-dire $\nu \rightarrow 0$:

$$f(t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{in 2\pi \nu t} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-in 2\pi \nu t'} dt' \right] \nu$$

1 : Rappelons qu'une intégrale peut être vue comme une somme de rectangles sous la courbe avec un espace-ment tendant vers 0. Mathématiquement on a l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) d\nu = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\nu)\nu$$

On reconnaît ici une intégrale au sens de Riemann¹. Ainsi, un signal non périodique peut formellement s'écrire

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i2\pi\nu t'} dt' \right] d\nu$$

Le terme entre crochets est appelé **transformée de Fourier**.

Intégrale de Fourier

Tout signal physique^a peut se décomposer en une intégrale de Fourier, de la forme

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (10.1)$$

où $\hat{f}(\nu)$ désigne la transformée de Fourier du signal. $\hat{f}(\nu)$ est une fonction continue à valeurs complexes, définie par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (10.2)$$

^a Précisément, on restreint l'étude à tous les signaux de carré sommable pour lesquelles $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ est finie, c'est-à-dire des signaux qui transportent une énergie finie.

La transformée de Fourier $\hat{f}(\nu)$ est une fonction continue de la fréquence et joue le même rôle que les coefficients de Fourier du signal périodique. La relation (10.1) peut s'interpréter comme une somme continue d'harmoniques complexes, la fonction $\hat{f}(\nu)$ traduisant le «poids relatif» des diverses fréquences.

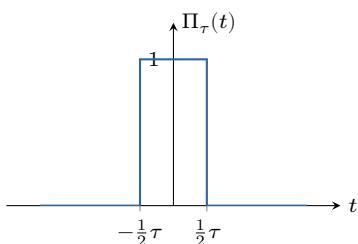


FIG. 10.1 : Fonction porte.

Exercice – Calculer la transformée de Fourier d'une fonction porte de largeur temporelle τ définie par :

$$\Pi_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2}\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rép. – $\hat{\Pi}_{\tau}(\nu) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\nu\tau)$

Le graphe de $|\hat{f}|$ en fonction de la fréquence est appelé *spectre d'amplitude* du signal, alors que le graphe de $|\hat{f}|^2$ est son *spectre en énergie*. Par exemple, la densité spectrale de puissance d'une fonction porte à la forme d'un sinus cardinal au carré (cf. FIG. 10.2). On voit notamment qu'un tel signal contient des harmoniques dont les valeurs s'étendent jusqu'à l'infini. Toutefois, l'essentiel des harmoniques se situe dans un bande de fréquence définie par

$$|\nu| < \frac{1}{\tau}$$

En d'autres termes, plus brève est l'impulsion, plus vaste est le domaine des harmoniques qui constitue le signal. De façon équivalente, plus courte est la résolution temporelle avec laquelle on veut analyser un signal plus large sera la bande passante de l'analyseur employée pour traiter le signal.

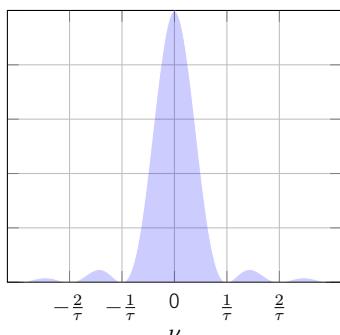


FIG. 10.2 : Spectre en puissance d'une fonction porte de largeur temporelle τ .

La relation de Parseval $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$ rencontrée dans le [Chapitre 9](#) prend également une forme intégrale lors du passage au continu. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu \quad \heartsuit \quad (10.3)$$

Autrement dit, l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

Exercice – Vérifier la relation (10.3) sur l'exemple de la fonction porte sachant que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$$

Certains préfèrent une décomposition spectrale en pulsation (ω) plutôt qu'en fréquence (ν). Dans ce cas les transformations de Fourier s'écrivent

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier

On dit que $f(t)$ et $\hat{f}(\nu)$ forment une paire de transformées de Fourier. On passe de l'une à l'autre par une transformation de Fourier (TF) ou transformation de Fourier inverse (TF⁻¹) :

$$f(t) \underset{\substack{\text{TF} \\ \text{TF}^{-1}}}{\iff} \hat{f}(\nu)$$

Énonçons² quelques propriétés de la transformée de Fourier des signaux réels :

2 : On donne ici des résultats faciles à démontrer à partir des relations (10.1) et (10.2).

Linéarité – En vertu de la linéarité de l'intégration, la transformation de Fourier est aussi une opération linéaire :

$$a f(t) + b g(t) \iff a \hat{f}(\nu) + b \hat{g}(\nu)$$

Parité – Si $f(t)$ est une fonction paire alors $\hat{f}(\nu)$ est réelle et paire. si $f(t)$ est une fonction impaire alors $\hat{f}(\nu)$ est imaginaire et impaire. Dans tous les cas, $|\hat{f}(\nu)|$ est une fonction paire, c'est pourquoi, on restreint parfois sa représentation sur \mathbb{R}^+ .

Translation – Translater un signal dans le temps revient à déphaser la transformée de Fourier :

$$f(t - \tau) \iff e^{-2\pi i \nu \tau} \hat{f}(\nu)$$

Dilatation – Toute dilatation de l'échelle des temps conduit à une contraction inverse de l'échelle des fréquences et réciproquement. Mathématiquement, on a

$$f(t/a) \iff a \hat{f}(a \nu)$$

Dualité - Cette propriété permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de Fourier à partir de paires déjà connues. En effet,

$$\text{si } f(t) \Leftrightarrow \hat{f}(\nu) \text{ alors } \hat{f}(-t) \Leftrightarrow f(\nu)$$

Théorème de modulation

Pour capturer ou transmettre un signal utile $f(t)$, on procède parfois à une modulation d'amplitude. Cela consiste à utiliser le signal $f(t)$ comme facteur modulant l'amplitude d'un signal sinusoïdal de haute fréquence ν_0 . Le signal ainsi constitué s'écrit

$$s(t) = f(t) \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$$

Le signal $s(t)$ est appelé **signal modulé** et l'harmonique est la **porteuse**.

Exemple

Les premières émissions radiophoniques furent transmises par modulation d'amplitude d'une onde électromagnétique (la porteuse) de fréquence située dans la bande [150 kHz – 281 kHz].

Cherchons quelle est l'allure du spectre d'un tel signal modulé. Appelons $\hat{f}(\nu)$ la transformée de Fourier du signal utile puis calculons celle de $s(t)$ en utilisant l'identité $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$:

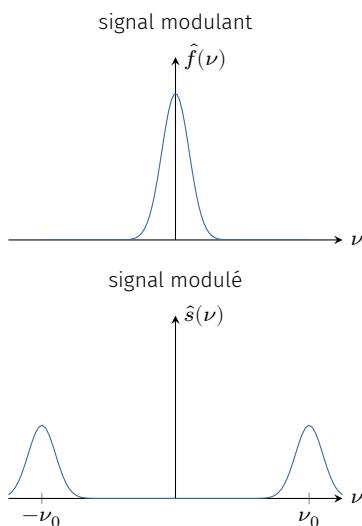


FIG. 10.3 : Effet d'une modulation dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned}\hat{s}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} f(t) (e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-i2\pi\nu_0 t}) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi(\nu+\nu_0)t} dt \\ \hat{s}(\nu) &= \frac{1}{2} [\hat{f}(\nu - \nu_0) + \hat{f}(\nu + \nu_0)]\end{aligned}$$

Théorème de modulation

Après modulation d'une porteuse de fréquence ν_0 , le spectre est simplement translaté de $\pm\nu_0$ (au facteur 1/2 près).

Cette translation dans l'espace des fréquences peut présenter plusieurs intérêts :

- ▶ faciliter la transmission du signal. On peut penser au transport à travers une fibre optique dans laquelle la transparence est maximale dans le domaine des infrarouges, d'où l'intérêt de transporter le signal utile via une modulation d'un faisceau infra-rouge.
- ▶ se protéger des signaux bruités. En général tout dispositif de traitement du signal produit du bruit surtout à basse fréquence. Moduler un signal utile permet de le déplacer dans un domaine

fréquentiel épargné par le bruit; il suffit alors d'opérer un filtre passe-haut pour récupérer le signal modulé exempt de bruit puis de procéder à une démodulation.

Relation temps-fréquence

Comme on l'a vu, toute dilatation de l'échelle des temps conduit à une contraction inverse de l'échelle des fréquences et réciproquement. Mathématiquement, on a³

$$f(t/a) \Leftrightarrow a\hat{f}(a\nu)$$

Illustrons cette propriété sur l'exemple de la fonction « porte ». Il est naturel de définir la largeur temporelle d'une fonction porte par $\Delta t = \tau$. De même, on peut introduire une largeur spectrale du spectre via $\Delta\nu = 2/\tau$. Ainsi les largeurs spectrale et temporelle sont liées via

$$\Delta\nu \times \Delta t = 2$$

Autrement dit, augmenter la durée du signal d'un facteur a entraîne une contraction du même facteur de la largeur spectrale. Cette propriété est généralisable. Le produit de l'extension temporelle Δt d'un signal par l'extension en fréquence $\Delta\nu$ est de l'ordre de l'unité

$$\Delta\nu \times \Delta t \sim 1 \quad \heartsuit \quad (10.4)$$

où le symbole ~ 1 signifie que le produit donne une constante de l'ordre de l'unité qui dépend de la façon dont sont définies les extensions temporelle et spectrale.

Donnons un exemple concret : la transmission analogique d'une émission de télévision dans le standard PAL nécessite d'émettre 25 fois par seconde 625×720 (lignes × pixels) signaux individuels. Ainsi, la durée de chaque signal qui règle la teinte d'un point de l'écran à un instant donné ne peut dépasser

$$\Delta t = \frac{1}{25 \times 625 \times 720} = \frac{1}{11,25 \cdot 10^6} \text{ s}$$

Dans ces conditions, (10.4) montre que le signal occupe dans l'espace de Fourier une bande de largeur $\Delta\nu \sim 10 \text{ MHz}$. Les signaux de télévision étant véhiculés par des ondes hertziennes (autour de 200 MHz), on comprend pourquoi on ne peut recevoir qu'un nombre relativement limité de canaux.

³ : Le facteur multiplicatif a figurant devant \hat{f} est sans importance puisqu'il ne change pas le poids relatif des diverses composantes spectrales. Il faut le voir comme une constante de normalisation permettant de respecter la relation de Parseval.

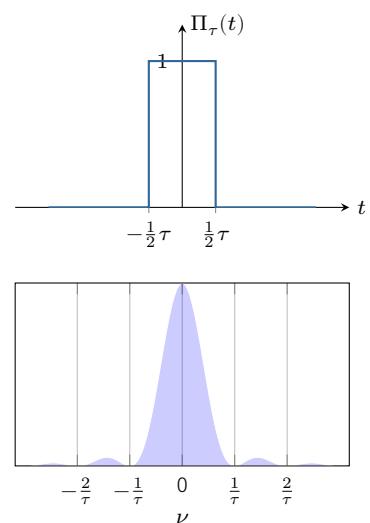


FIG. 10.4 : Fonction porte et son spectre en puissance.

10.2 Impulsion de Dirac

Définition

L'impulsion de Dirac a été inventée pour étendre le concept de transformée de Fourier aux fonctions périodiques. Mathématiquement, l'impulsion de Dirac relève de la théorie des distributions qui sort large-

ment du cadre de ce cours. On se contentera donc d'une approche heuristique.

On appelle **impulsion de Dirac**, un «signal», noté $\delta(t)$, qui est nul partout sauf en $t = 0$ avec la condition

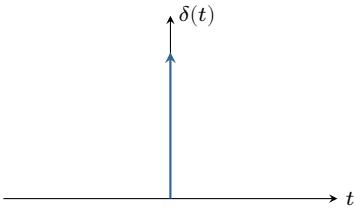


FIG. 10.5 : Représentation d'une impulsion de Dirac.

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

On peut interpréter l'impulsion de Dirac comme une fonction porte dont on fait tendre la largeur vers 0 tout en maintenant une aire sous la courbe égale à 1 :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi_{\tau}(t)$$

On la représente par une flèche située en $t = 0$.

Nous avons déjà calculé la transformée de Fourier d'une porte. En faisant tendre $\tau \rightarrow 0$ on obtient la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac :

$$\text{TF}[\delta(t)] = \frac{1}{\tau} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \text{sinc}(\pi\nu\tau) = 1$$

En vertu de la propriété de dualité, on en déduit donc

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \Leftrightarrow \delta(\nu)$$

L'impulsion est donc constituée d'une infinité d'harmoniques de même poids. Inversement, la fonction constante a pour transformée de Fourier un «Dirac» centré en $\nu = 0$.

La fonction de Dirac joue un rôle intéressant lorsqu'elle intervient dans une intégration. En effet, puisque $\delta(t)$ est nulle partout sauf en $t = 0$, on peut écrire $f(t) \times \delta(t) = f(0) \times \delta(t)$. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

♡ (10.5)

Exercice – Calculer la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac à l'aide de la définition (10.5).

Spectre d'un sinus

Une fois définie l'impulsion de Dirac, on obtient aisément la transformée de Fourier des fonctions circulaires. Pour cela il suffit d'utiliser le théorème de modulation :

$$\begin{aligned} f(t) \cos(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\hat{f}(\nu - \nu_0) + \hat{f}(\nu + \nu_0)] \\ f(t) \sin(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\hat{f}(\nu - \nu_0) - \hat{f}(\nu + \nu_0)] \end{aligned}$$

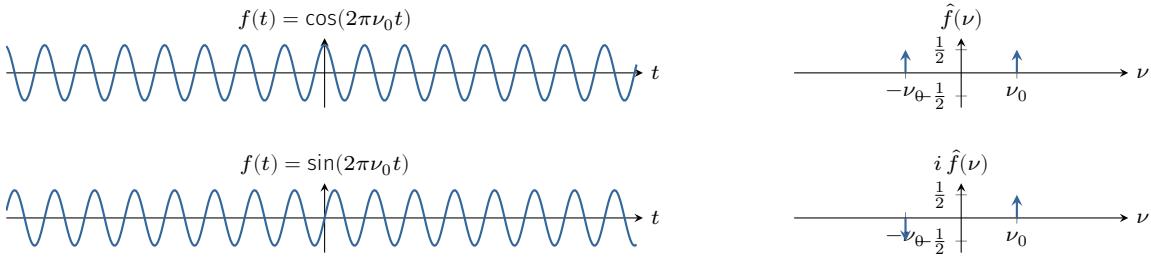


FIG. 10.6 : Représentation de $f(t)$ et $\hat{f}(\nu)$ pour les fonctions circulaires.

En choisissant $f(t) = 1$ on en déduit

$$\begin{aligned}\cos(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \\ \sin(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)]\end{aligned}\quad \heartsuit \quad (10.6)$$

Relation entre série de Fourier et transformée de Fourier

Considérons tout d'abord un signal périodique $f(t)$ de période T_0 qui peut se décomposer en série de Fourier. On a donc

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n 2\pi\nu_0 t) + b_n \sin(n 2\pi\nu_0 t)$$

Ce signal n'est pas de carré sommable⁴ et ne présente pas de transformée de Fourier au sens classique du terme. Cependant, on peut définir une transformée de Fourier d'un tel signal au sens des distributions. En effet, nous venons de rencontrer les paires de transformées suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \\ \sin(2\pi\nu_0 t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)]\end{aligned}$$

4 : En effet $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \infty$.

On peut donc écrire par linéarité

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= a_0 \delta(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} [\delta(\nu - n\nu_0) + \delta(\nu + n\nu_0)] + \frac{b_n}{2i} [\delta(\nu - n\nu_0) - \delta(\nu + n\nu_0)] \\ &= a_0 \delta(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} \delta(\nu - n\nu_0) + \frac{a_n + ib_n}{2} \delta(\nu + n\nu_0) \\ \hat{f}(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\nu - n\nu_0)\end{aligned}$$

On obtient ainsi un ensemble d'impulsions de Dirac situées tous les multiples de ν_0 et dont le poids est le coefficient de Fourier associé à la fréquence $n\nu_0$.

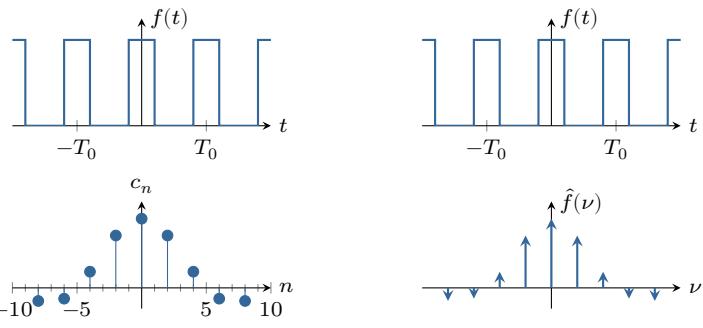


FIG. 10.7 : Relation entre série de Fourier et transformée de Fourier.

Transformée de Fourier d'un signal périodique

Au sens des distributions, la transformée de Fourier d'un signal périodique de fréquence ν_0 est un peigne de Dirac de pas ν_0 , modulé par les coefficients de Fourier.

Autrement dit, la périodicité d'un signal se traduit dans l'espace de Fourier par l'existence d'un peigne de Dirac dont la modulation est intimement liée à la forme du motif de base; précisément à sa transformée de Fourier comme nous allons le voir. En effet, si l'on note $m(t)$ le motif de base défini par

$$m(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, T_0[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut écrire le signal $f(t)$ sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(t - nT_0)$$

Il s'agit bien d'un signal périodique de période T_0 . En vertu du théorème de Fourier, on peut décomposer $f(t)$ en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{i n 2\pi \nu_0 t} \quad \text{avec} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-i n 2\pi \nu_0 t} dt$$

Or, dans l'intervalle $[0, T_0]$, on peut remplacer $f(t)$ par $m(t)$. Et comme $m(t)$ est nulle en dehors cet intervalle, on a

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{\mathbb{R}} m(t) e^{-i n 2\pi \nu_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \widehat{m}(n\nu_0)$$

Finalement, la transformée de Fourier d'un signal périodique de pé-

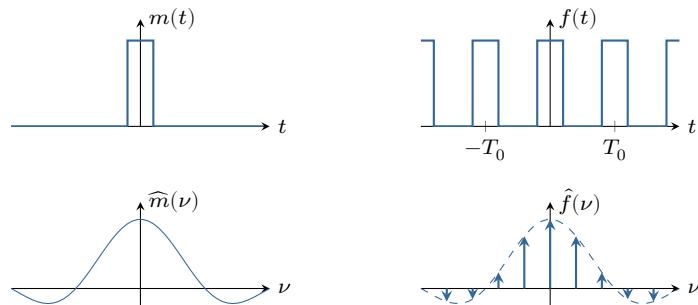


FIG. 10.8 : La transformée de Fourier d'un signal périodique de période T_0 est un peigne de Dirac de pas ν_0 , modulé par la transformée de Fourier du motif de base, ici un sinus cardinal.

riode T_0 est un peigne de Dirac de pas $1/T_0$, modulé par la transformée de Fourier du motif de base.

Exercice – Montrer qu'un peigne de Dirac de pas T_0 s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi n t}{T_0}}$$

En déduire la TF d'un peigne de Dirac de pas T_0 .

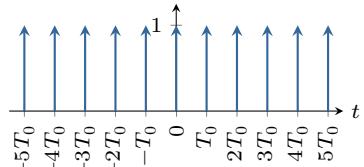


FIG. 10.9 : Peigne de Dirac de pas T_0 .

10.3 La transformée de Fourier en sciences-physiques

L'analyse spectrale est un outil dont le champ d'application est très large. Voici quelques exemples tirés des sciences-physiques.

Réponse d'un filtre

Revenons aux filtres analogiques étudiés dans le chapitre précédent. La relation entre la sortie et l'entrée est modélisée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\alpha_0 e(t) + \alpha_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Prenons maintenant la TF de cette équation en utilisant la propriété

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow i2\pi\nu \hat{f}(\nu) = i\omega \hat{f}(\nu)$$

On obtient

$$[\alpha_0 + i\omega\alpha_1 + \dots + (i\omega)^n \alpha_n] \hat{e}(\nu) = [\beta_0 + i\omega\beta_1 + \dots + (i\omega)^m \beta_m] \hat{s}(\nu)$$

Si l'on pose la fonction de transfert comme le rapport

$$\underline{H}(\nu) = \frac{\alpha_0 + j\omega\alpha_1 + \dots + (j\omega)^n \alpha_n}{\beta_0 + j\omega\beta_1 + \dots + (j\omega)^m \beta_m} \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi\nu$$

on trouve que dans l'espace de Fourier, l'action d'un filtre se résume à une simple multiplication :

$$\hat{s}(\nu) = \underline{H}(\nu) \times \hat{e}(\nu)$$

Comme on l'a déjà vu pour les signaux périodiques, chaque composante spectrale du signal d'entrée est multipliée par la fonction de transfert. On retrouve alors le signal de sortie temporel par une simple transformée de Fourier inverse :

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} [\underline{H}(\nu) \hat{e}(\nu)] e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

Imaginons maintenant que l'on excite un filtre à l'aide d'une impulsion de très courte durée assimilable à une impulsion de Dirac : $e(t) =$

$K\delta(t)$. Le signal de sortie est alors appelé réponse *impulsionnelle*. Puisque $\hat{e}(\nu) = K$, la réponse impulsionnelle s'écrit

$$s(t) = K \int_{\mathbb{R}} \underline{H}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

5 : Ces algorithmes sont appelés FFT pour *Fast Fourier Transform* et sont couramment implémentés dans de nombreux dispositifs (logiciels, oscilloscopes numériques, RADAR, etc.).

Autrement dit, \underline{H} est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. On peut donc caractériser complètement un filtre en analysant sa réponse impulsionnelle. En pratique, on échantillonne la réponse impulsionnelle puis on utilise un algorithme de calcul rapide de transformée de Fourier⁵.

Profil spectral d'une raie

Dans une lampe à décharge ou un tube fluorescent, la lumière est produite par une décharge électrique dans une ampoule contenant un gaz. Un système dispersif, tel un prisme ou un réseau de diffraction, permet d'effectuer une analyse spectrale de la lumière émise par une telle source. Le spectre ainsi obtenu est constitué de raies caractéristiques du gaz et représente son *spectre d'émission*.

À l'échelle microscopique, la décharge électrique excite les électrons périphériques des atomes constitutifs du gaz en les portant à des niveaux d'énergie instables. C'est lors de la désexcitation qu'une émission d'onde électromagnétique se produit. Dans une approche classique de l'interaction entre matière et rayonnement on peut montrer que le champ électrique rayonné prend la forme d'un oscillateur amorti :

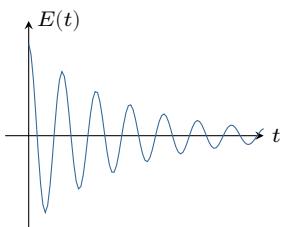


FIG. 10.10 : Champ électrique rayonné lors d'une émission atomique.

$$E(t) = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \cdot g(t) \quad \text{avec} \quad g(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.7)$$

où λ est un coefficient d'amortissement lié à la durée de vie de l'état excité, et ν_0 la fréquence de la transition observée.

L'intensité du rayonnement est proportionnelle à $E^2(t)$, et d'après le théorème de Parseval on a

$$\int_{\mathbb{R}} E^2(t) dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{E}(\nu)|^2 d\nu$$

où $|\widehat{E}(\nu)|^2$ représente la densité spectrale d'énergie du signal. C'est précisément ce que l'on mesure lors d'une analyse spectroscopique, à une constante multiplicative près⁶. Cherchons donc quelle est l'allure de la raie spectrale associée à une telle émission en déterminant la transformé de Fourier de $E(t)$. Pour cela, commençons d'abord par

6 : Un détecteur optique est sensible au flux énergétique ϕ_e (en watts) qui vaut, pour une onde plane monochromatique, $\phi_e = \frac{2S}{\mu_0 c} |\widehat{E}(\nu)|^2$, où S est l'aire du détecteur.

déterminer la TF de $g(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i2\pi\nu t - \lambda t}}{\lambda + i2\pi\nu} \right]_0^{\infty} \\ \hat{g}(\nu) &= \frac{1}{\lambda + i2\pi\nu}\end{aligned}$$

Le spectre en énergie de $g(t)$ s'écrit $|\hat{g}(\nu)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$. Son graphe a la forme d'une courbe en cloche appelée courbe de Lorentz ou *lorentzienne*.

Utilisons maintenant le théorème de modulation :

$$E(t) = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \times g(t) \Rightarrow \frac{1}{2} E_0 [\hat{g}(\nu - \nu_0) + \hat{g}(\nu + \nu_0)]$$

Si l'on se restreint aux fréquences positives, le profil spectral est une lorentzienne centrée sur la fréquence ν_0 .

$$|\hat{E}(\nu)|^2 = \frac{E_0^2/4}{\lambda^2 + [2\pi(\nu - \nu_0)]^2}$$

Sa largeur spectrale est liée au temps de vie de l'état excité $\tau = 1/\lambda$ via la relation

$$\Delta\nu_{1/2} \times \tau = \frac{1}{\pi} \quad (10.8)$$

On retrouve la dualité temps-fréquence déjà discutée. D'ailleurs en multipliant la relation précédente par la constante de Planck h , on obtient la relation d'indétermination d'Heisenberg

$$\Delta E \times \tau \sim \hbar$$

En réalité, une source est constituée d'un grand nombre d'atomes

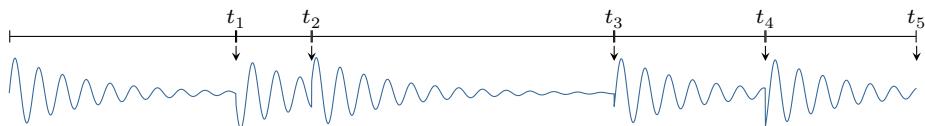


FIG. 10.13 : Forme d'un train d'ondes quasi-harmoniques. Les flèches indiquent les instants de désexcitations aléatoires.

se désexcitant de façon imprévisible. Par ailleurs, les collisions interatomiques ont pour effet de provoquer des désexcitations supplémentaires et de réduire la durée de vie du niveau excité. Le rayonnement produit a l'allure d'un train d'ondes dont le spectre reste lorentzien, mais s'élargit⁷ du fait des collisions.

RMN

La résonance magnétique nucléaire (RMN) est une technique d'analyse moléculaire qui consiste à plonger un échantillon dans un champ

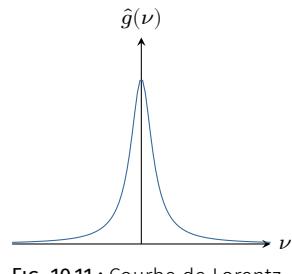


FIG. 10.11 : Courbe de Lorentz.

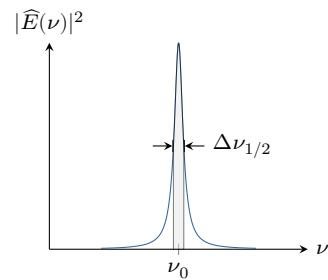


FIG. 10.12 : Profil d'une raie atomique.

⁷ : Le temps caractéristique τ est tel que $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{\text{coll}}}$ où τ_0 est la durée de vie du niveau excité et τ_{coll} le temps moyen entre deux collisions.

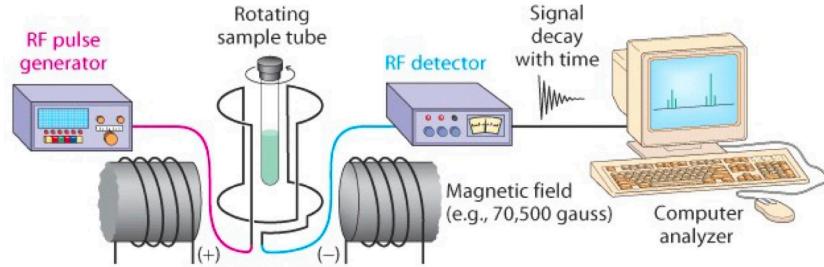


FIG. 10.14 : Schéma d'une chaîne de mesure RMN.

8 : Puisqu'une impulsion idéale (de Dirac) présente un spectre plat sur \mathbb{R} .

magnétique \vec{B}_0 intense. Dans ce cas, certains noyaux atomiques se comportent comme des oscillateurs dont la fréquence dépend du champ B_0 et de l'environnement électronique du noyau.

En envoyant un pulse électromagnétique sur l'échantillon, on excite tous ces oscillateurs⁸. En calculant la TF de la réponse de l'échantillon on accède au spectre RMN qui contient autant de pics qu'il y a d'oscillateurs différents.

Spectroscopie par transformée de Fourier

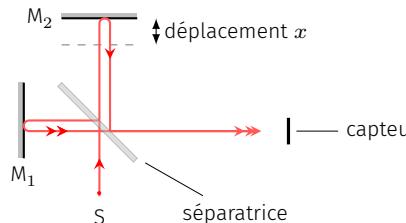


FIG. 10.15 : Principe de l'interféromètre de Michelson.

La spectroscopie par transformée de Fourier est une importante technique qui permet d'accéder au *spectre d'émission* d'une source ou au *spectre d'absorption* d'un échantillon. Le principe repose sur l'utilisation d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Il s'agit de mesurer le signal d'interférence en fonction du décalage optique introduit par le déplacement du miroir mobile de l'interféromètre. On accède alors à un signal – dit interférogramme – $I(\tau)$ où τ est un temps qui correspond au retard optique $\tau = 2x/c$ introduit par le déplacement du miroir. Ce signal permet de remonter au spectre de la source par le calcul d'une transformée de Fourier.

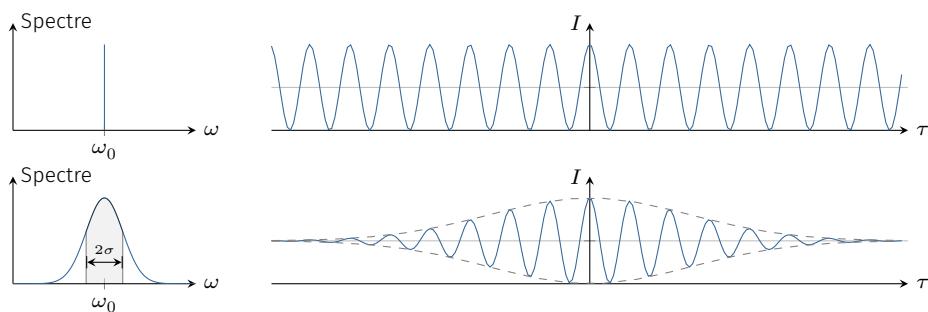


FIG. 10.16 : Relation de dualité entre spectre et interférogramme.

9 : On parle alors de FTIR acronyme anglais pour *Fourier Transform Infrared Spectroscopy*.

Cette technique est implémentée dans de nombreux spectrophotomètres notamment InfraRouge⁹, car elle offre une meilleure résolution que les spectromètres à réseau.

Techniquement, on montre que l'interférogramme s'écrit

$$I(\tau) = 2I_0 \left[1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu}_{\text{terme d'interférence } f(\tau)} \right] \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\nu) d\nu = 1$$

où $\hat{s}(\nu)$ est le spectre normalisé de la source. Comme $\hat{s}(\nu)$ est une quantité réelle, le terme d'interférence est la transformée de Fourier inverse du spectre; réciproquement le spectre est la transformée de Fourier du terme d'interférence :

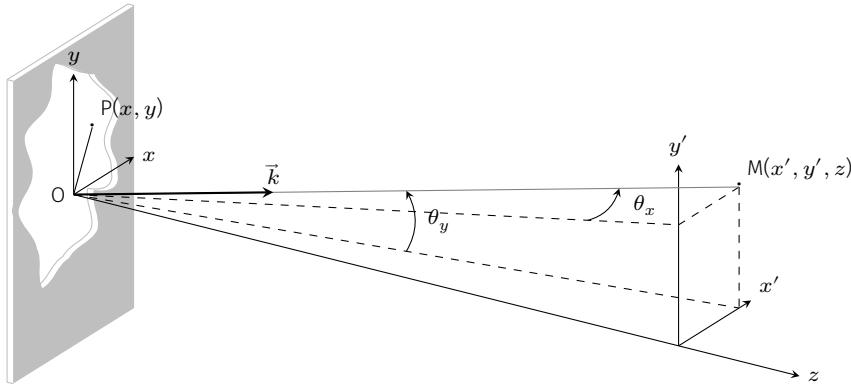
$$f(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad \Leftrightarrow \quad \hat{s}(\nu) = \int f(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

La diffraction, une transformée de Fourier naturelle

Éclairons une pupille diffractante par une onde plane lumineuse en incidence normale, puis observons la lumière diffractée sur un capteur placé à grande distance¹⁰. On montre que l'onde diffractée dans la direction donnée par le vecteur d'onde \vec{k} s'écrit

$$\underline{\psi}(\vec{k}) \propto \iint_{(S)} \underline{t}(x, y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.9)$$

où $\vec{r} = (x, y)$ repère un point P de la pupille et $\underline{t}(x, y)$ désigne la transparence de la pupille diffractante au point P. On peut exprimer



\vec{k} en fonction des angles de diffraction θ_x et θ_y :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_x \vec{u}_x + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$$

de sorte que le terme de phase s'écrit

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y) = 2\pi (x \nu_x + y \nu_y)$$

où l'on fait intervenir les variables duales (ν_x, ν_y) conjuguées¹¹ à (x, y) . ν_x et ν_y sont appelées *fréquences spatiales*. Finalement, l'onde diffractée dans la direction \vec{k} s'écrit

$$\underline{\psi}(\vec{k}) \propto \iint_{(S)} \underline{t}(x, y) e^{i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)} dx dy = \text{TF}_{2d}[t(x, y)] \quad (10.10)$$

où TF_{2d} est la généralisation de la transformée de Fourier à deux dimensions.

Par exemple, prenons comme pupille diffractante un écran percé par une ouverture rectangulaire de longueur $2a$ et de largeur $2b$. Sa fonction de transparence est nulle en dehors du trou et vaut 1 pour tout

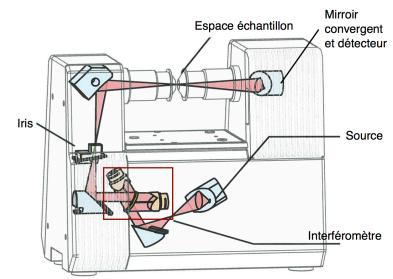


FIG. 10.17 : Schéma d'un spectrophotomètre

10 : Idéalement à l'infini ou, ce qui revient au même, au foyer d'une lentille.

FIG. 10.18 : Paramétrage du problème de diffraction en champ lointain.

11 : De la même façon, pour les signaux temporels, la fréquence ν est conjuguée à la variable t .

point situé dans le trou; en d'autres termes elle s'écrit comme un produit de deux fonctions portes :

$$t(x, y) = \Pi_{2a}(x) \times \Pi_{2b}(y)$$

Le calcul de la TF_{2d} est grandement simplifié car le domaine d'inté-

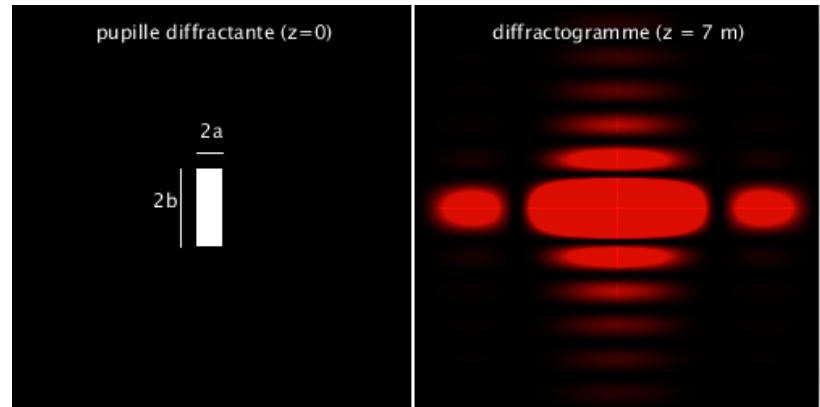


FIG. 10.19 : Pupille diffractante (à gauche) et tache de diffraction (à droite). Simulation réalisée pour $\lambda = 700 \text{ nm}$, $a = 0,56 \text{ mm}$, $b = 3a$ et $z = 7 \text{ m}$.

gration est un rectangle :

$$\underline{\psi}(\vec{k}) \propto \text{TF}[\Pi_{2a}(x)] \times \text{TF}[\Pi_{2b}(y)] = (4ab)\text{sinc}(2\pi a\nu_x) \times \text{sinc}(2\pi b\nu_y)$$

L'intensité lumineuse détectée étant proportionnelle au carré de l'amplitude diffractée, on trouve finalement

$$I(\vec{k}) = I_{\max} [\text{sinc}(2\pi a\nu_x) \times \text{sinc}(2\pi b\nu_y)]^2$$

La répartition de l'intensité est représenté FIG. 10.19. On retrouve la propriété de dualité selon laquelle une petite dimension spatiale entraîne un étalement dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire un élargissement des taches de diffraction. Notez que la symétrie de l'obstacle se retrouve dans la tache de diffraction.

De la même manière, on peut obtenir des informations sur la structure des cristaux en observant la diffraction des rayons X¹² par ces cristaux. On montre que les rayons X sont essentiellement diffusés par les électrons de sorte que la fonction de transparence d'un échantillon cristallin est proportionnelle à la densité électronique ρ . Le cliché obtenu après diffraction des rayons X par un cristal est donnée par $|\text{TF}_{3d}[\rho(x, y, z)]|^2$.

12 : Onde électromagnétique dont la longueur d'onde est de l'ordre de la distance inter-atomique dans les cristaux.

Pour en savoir plus

- [1] J. ROUSSEL. *Introduction à l'analyse numérique*. Jan. 2011. URL : <https://femto-physique.fr/analyse-numerique/index.php> (cf. p. 50).
- [2] J. ROUSSEL. *Conséquences mathématiques des principes*. Avr. 2024. URL : <https://femto-physique.fr/thermodynamique/consequences-mathematiques.php> (cf. p. 60).
- [3] J. ROUSSEL. *Fluide en écoulement*. Mars 2010. URL : https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php (cf. p. 67).
- [4] J. ROUSSEL. *Dynamique des fluides parfaits*. Fév. 2013. URL : https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-parfaits.php (cf. p. 69).
- [5] H. MOREAU. *Le système métrique*. Chiron, 1975.
- [6] P GIACOMO. « Du Système métrique décimal au SI ». In : *Bulletin du Bureau national de métrologie* 100 (1995), p. 5-9.
- [7] J-R TAYLOR, L REYNAUD et P REYNAUD. *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques : avec exercices corrigés*. Dunod, 1999.
- [8] François-Xavier BALLY et Jean-Marc BERROIR. « Incertitudes expérimentales ». In : *ENS, Université Paris 6.7* (2010).
- [9] J.P. LECARDONNEL. « A propos de sons périodiques sans fondamental ». In : *Bull. Un. Phys* 767 (oct. 1994).
- [10] Ronald BRACEWELL. « L'analyse de Fourier ». In : *Pour la science* 142 (août 1989), p. 74-80.
- [11] J. ROUSSEL. *Diffraction de Fraunhofer*. Nov. 2018. URL : <https://femto-physique.fr/optique/>.

Grandeurs physiques et symboles mathématiques

Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

h	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
c	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du ^{133}Cs	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
e	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-9} \text{ C}$
k_B	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
N_A	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_B N_A$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
K_{cd}	Efficacité lumineuse	683 lm W^{-1}

Autres constantes physiques

G	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
ϵ_0	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
m_e	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_p	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
m_n	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Grandeurs physiques

\mathcal{A}	Aire (m^2)
ν	Fréquence (Hz)
ω	Vitesse angulaire, pulsation (rad.s^{-1})
ρ	Masse volumique (kg.m^{-3})
a	Accélération (m.s^{-2})
f	force (N)
m	Masse (kg)
P	poids (N)
q	Charge électrique (C)
T	Période (s)

t	Temps (s)
V	Volume (m^3)
v	Vitesse (m.s^{-1})

Symboles mathématiques

$\stackrel{\text{def}}{=}$	Relation de définition
\sim	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	A très grand devant B
$A \ll B$	A très petit devant B
\bar{f}	Moyenne d'ensemble
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$(\frac{\partial S}{\partial V})_{U,X}$	Dérivée partielle de S par rapport V , les variables U et X étant maintenues constantes
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de \vec{A} le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel \vec{A}
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume



The background features a repeating pattern of concentric hexagons in white and light orange. A central hexagon is filled with a light orange color and contains the year "2025" in a dark orange font.

2025