DEVOIR SURVEILLÉ 7

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\text{encadrée}}$ *ou souligné. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Fonction moyenne

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose

$$m_{a,b}(t) = \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{1/t}.$$

En particulier, $m_{a,b}(1)$ est la *moyenne arithmétique* de a et b et $m_{a,b}(-1)$ est la *moyenne harmonique* de a et b.

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction $m_{a,b}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $m_{a,b}$. Quelle est la classe de régularité de $m_{a,b}$ sur cet ensemble ?
2. Démontrer que $m_{a,b}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 1 que l'on précisera. Que peut-on déduire de ce développement limité ? Quel nom peut-on donner à $m_{a,b}(0)$?
3. Déterminer les limites de $m_{a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
4. a) Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t_1 < t_2$. À l'aide d'un argument de convexité, démontrer que $m_{a,b}(t_1) \leqslant m_{a,b}(t_2)$. On a ainsi démontré que $m_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, exprimer $m_{a,b}(-t)$ en fonction de $m_{a^{-1},b^{-1}}(t)$. En déduire que $m_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
   c) Que peut-on conclure concernant la monotonie de $m_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$?
5. Représenter le graphe de $m_{1,4}$. *Unité graphique :* 2 cm

EXERCICE 2

Nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $ax + by = n$

Soient a, b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Soit n un entier naturel.

L'objet de cet exercice est de donner deux expressions du nombre s_n de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation diophantienne $(E_n) : ax + by = n$, c'est-à-dire

$$s_n = \mathrm{card}\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : ax + by = n\}.$$

A. Notations

- ▶ On pose

$$P = (X^a - 1)(X^b - 1) \qquad \text{et} \qquad F = \frac{1}{X^{n+1}P}.$$

- ▶ On fixe un entier naturel m tel que $ma \geqslant n$ et $mb \geqslant n$. On pose

$$A = 1 + X^a + X^{2a} + \cdots + X^{ma} \qquad \text{et} \qquad B = 1 + X^b + X^{2b} + \cdots + X^{mb}.$$

- ▶ Pour tout polynôme $M \in \mathbb{R}[X]$, on appelle *troncature* de M à l'ordre n le reste de la division euclidienne de M par X^{n+1}.
- ▶ Enfin, on note R_n la troncature de AB à l'ordre n, c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de AB par X^{n+1}.

1. Expliquer l'appellation « troncature de M à l'ordre n » donnée au reste de la division euclidienne de M par X^{n+1}.
2. Démontrer que le coefficient de X^n dans R_n est s_n.
3. Démontrer que la troncature à l'ordre n de ABP est 1. En déduire l'existence d'un polynôme $D_n \in \mathbb{R}_{a+b-1}[X]$ tel que
$$F = \frac{R_n}{X^{n+1}} + \frac{D_n}{P}.$$
4. Démontrer l'existence de deux nombres complexes ω_1, ω_2 et de deux familles de nombres complexes $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}}$ et $(v_\beta)_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}}$ tels que
$$F = \frac{R_n}{X^{n+1}} + \frac{\omega_1}{X-1} + \frac{\omega_2}{(X-1)^2} + \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{u_\alpha}{X - \alpha} + \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{v_\beta}{X - \beta}.$$
5. a) Calculer u_α et v_β (pour $\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}$) en fonction de n, α, β, a et b.

   b) On introduit le polynôme $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$F = \frac{1}{(X-1)^2 S}.$$
   Démontrer que
$$F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2} = -\frac{1}{(X-1)S} \sum_{k \geqslant 1} \frac{S^{(k)}(1)}{k!\, S(1)} (X-1)^{k-1}$$
   et en déduire que
$$\omega_1 = -\frac{S'(1)}{S(1)^2}.$$
   Donner alors l'expression de ω_1 en fonction de n, a et b.

   c) En déduire que
$$s_n = \frac{2n + a + b}{2ab} + \frac{1}{a} \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{1}{\alpha^n (1 - \alpha^b)} + \frac{1}{b} \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{1}{\beta^n (1 - \beta^a)}.$$

B. Cette question est complètement indépendante des résultats de la question A.
On note $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ un couple de coefficients de Bézout pour a et b, de sorte que $au + bv = 1$.
Résoudre l'équation (E_n) sur $\mathbb{Z}^2$ et en déduire la *formule de Popoviciu*:

$$s_n = \frac{n}{ab} - \left\{\frac{nv}{a}\right\} - \left\{\frac{nu}{b}\right\} + 1,$$

où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire.
On pourra utiliser le fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on a* $\lfloor t \rfloor = t - \{t\}$ *et* $\lceil -t \rceil = -t + \{t\}$.

EXERCICE 3

Étude d'une équation de Ricatti

Sur $[0; 1]$, on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = \frac{1}{2}(t^2 + y^2)$$

où $y : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction inconnue dérivable.

On se propose de démontrer l'existence et l'unicité puis d'approcher numériquement une solution y de (E) telle que

$$y(0) = 0.$$

1. Existence : méthode de Picard
Sur $[0; 1]$, on considère une suite de fonctions polynomiales $(y_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$\forall t \in [0; 1], \qquad y_0(t) = 0$$

et

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall t \in [0; 1], \qquad y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u.$$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0; 1],\ 0 \leqslant y_n(t) \leqslant 1$.
b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0; 1],\ 0 \leqslant y_{n+1}(t) - y_n(t) \leqslant t^n$.
c) Soit $t \in [0; 1]$. Démontrer que la suite $\big(y_n(t)\big)_{n \geqslant 0}$ converge. On note $y(t)$ la limite de cette suite.
► On définit ainsi une fonction $y : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans toute la suite de cet exercice, la notation y désigne cette fonction.
d) Démontrer que $y(0) = 0$.
e) Démontrer que y est lipschitzienne sur $[0; 1]$.
f) Soit $t \in [0; 1[$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall u \in [0; t], \qquad 0 \leqslant y(u) - y_n(u) \leqslant \frac{t^n}{1 - t}$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y(u)^2\right) \mathrm{d}u - y_{n+1}(t) \leqslant \frac{t^{n+1}}{1 - t}.$$

En conclure que

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y(u)^2\right) \mathrm{d}u.$$

g) Démontrer que y est une solution de (E) sur $[0; 1]$.

2. Unicité : lemme de Grönwall

   On suppose que (E) admet deux solutions y_1 et y_2 sur $[0;1]$.

   On considère la fonction $\delta : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

   $$\forall t \in [0;1], \qquad \delta(t) = |y_1(t) - y_2(t)|.$$

   a) Démontrer que

   $$\forall t \in [0;1], \qquad 0 \leqslant \delta(t) \leqslant M \int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}u$$

   où

   $$M = \frac{1}{2}\sup\{|y_1(t)| + |y_2(t)| : t \in [0;1]\}.$$

   b) Démontrer que δ est la fonction nulle sur $[0;1]$ et conclure.

3. Approximation : méthode d'Euler

   Soit N un entier naturel non nul fixé. On pose

   $$\forall k \in [\![0;N]\!], \qquad t_k = \frac{k}{N}.$$

   On définit alors les nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_N$ par

   $$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0;N-1]\!], \quad u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2N}({t_k}^2 + {u_k}^2).$$

   Enfin, on considère les erreurs $e_0, e_1, \ldots, e_N$ données par

   $$\forall k \in [\![0;N]\!], \qquad e_k = y(t_k) - u_k.$$

   On souhaite démontrer que, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, le nombre u_k fournit une bonne approximation de $y(t_k)$ lorsque N est grand. Pour cela, on va majorer l'erreur e_k pour tout $k \in [\![0;N]\!]$.

   a) Soit $k \in [\![0;N-1]\!]$. Démontrer que

   $$e_{k+1} = e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t.$$

   b) Démontrer que

   $$\forall k \in [\![0;N]\!], \qquad e_k \geqslant 0$$

   et en déduire que

   $$\forall k \in [\![0;N]\!], \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant 1.$$

   c) Soit $k \in [\![0;N-1]\!]$. Démontrer que

   $$\forall t \in [t_k;t_{k+1}], \qquad t^2 + y(t)^2 \leqslant {t_k}^2 + y(t_k)^2 + 4(t - t_k)$$

   et en déduire que

   $$e_{k+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)e_k + \frac{1}{N^2}.$$

   d) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, on a

   $$e_k \leqslant \frac{1}{N}\left[\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N - 1\right]$$

   et en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on précisera) telle que, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$,

   $$e_k \leqslant \frac{C}{N}.$$

CORRECTION DU DS 7

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose $m_{a,b}(t) = \big((a^t + b^t)/2\big)^{1/t}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de $m_{a,b}$. Quelle est la classe de régularité de $m_{a,b}$ sur cet ensemble ?*

   Il est clair que la seule condition portant sur t est $t \neq 0$, donc
   $$\boxed{\mathscr{D}_{m_{a,b}} = \mathbb{R}^*.}$$
   D'après les théorèmes généraux,
   $$\boxed{m_{a,b} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

2. *Démontrer que la fonction $m_{a,b}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 1 que l'on précisera. Que peut-on déduire de ce développement limité ? Quel nom peut-on donner à $m_{a,b}(0)$?*

   Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a
   $$m_{a,b}(t) = \exp\left\{\frac{1}{t}\ln\frac{a^t + b^t}{2}\right\}.$$
   Or
   $$\begin{aligned} \frac{a^t + b^t}{2} &= \frac{\mathrm{e}^{t\ln a} + \mathrm{e}^{t\ln b}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 + t\ln a + \frac{(\ln a)^2}{2}t^2 + o(t^2) + 1 + t\ln b + \frac{(\ln b)^2}{2}t^2 + o(t^2)\Big) \\ &= 1 + \frac{\ln ab}{2}t + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4}t^2 + o(t^2), \end{aligned}$$
   où l'on a utilisé deux fois le développement $\mathrm{e}^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$.
   Par suite, on a
   $$\begin{aligned} \ln\frac{a^t + b^t}{2} &= \ln\Big(1 + \frac{\ln ab}{2}t + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4}t^2 + o(t^2)\Big) \\ &= \frac{\ln ab}{2}t + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4}t^2 - \frac{(\ln ab)^2}{8}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{\ln ab}{2}t + \frac{2(\ln a)^2 + 2(\ln b)^2 - (\ln a + \ln b)^2}{8}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{\ln ab}{2}t + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2 - 2(\ln a)(\ln b)}{8}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{\ln ab}{2}t + \frac{(\ln a - \ln b)^2}{8}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{\ln ab}{2}t + \frac{\big(\ln(a/b)\big)^2}{8}t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$
   où la seconde égalité découle de la relation $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$.

Donc

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{1}{t}\ln\frac{a^t+b^t}{2}\right\} &= \exp\left\{\frac{\ln ab}{2}+\frac{\big(\ln(a/b)\big)^2}{8}t+o(t)\right\}\\ &= \sqrt{ab}\exp\left\{\frac{\big(\ln(a/b)\big)^2}{8}t+o(t)\right\}\\ &= \sqrt{ab}\Big(1+\frac{\big(\ln(a/b)\big)^2}{8}t+o(t)\Big),\end{aligned}$$

d'après le développement $\mathrm{e}^u = 1+u+o(u)$. Donc

$$\boxed{m_{a,b}(t)=\sqrt{ab}+\frac{1}{8}\sqrt{ab}\Big(\ln\frac{a}{b}\Big)^2 t+o(t)}$$

Ce développement limité nous dit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{on peut prolonger } m_{a,b} \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } m_{a,b}(0)=\sqrt{ab} \text{ et}\\ \text{le prolongement est dérivable en } 0 \text{ avec } m'_{a,b}(0)=\dfrac{1}{8}\sqrt{ab}\Big(\ln\dfrac{a}{b}\Big)^2.\end{array}}$$

On constate que

$$\boxed{m_{a,b}(0) \text{ est la moyenne géométrique de } a \text{ et } b.}$$

3. *Déterminer les limites de $m_{a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$.*

Puisque b^t domine a^t lorsque t tend vers $+\infty$, on met b^t en facteur dans l'expression entre parenthèses de $m_{a,b}(t)$, ce qui donne

$$m_{a,b}(t)=b\Big(\frac{(a/b)^t+1}{2}\Big)^{1/t}=b\exp\left\{\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{(a/b)^t+1}{2}\Big)\right\}.$$

Or

$$\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{(a/b)^t+1}{2}\Big)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0\times\ln\frac{1}{2}=0,$$

ce qui donne

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}m_{a,b}(t)=b.}$$

En procédant *mutatis mutandis*, on obtient

$$m_{a,b}(t)=a\Big(\frac{1+(b/a)^t}{2}\Big)^{1/t}=a\exp\left\{\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{1+(b/a)^t}{2}\Big)\right\}$$

avec

$$\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{1+(b/a)^t}{2}\Big)\xrightarrow[t\to-\infty]{}0\times\ln\frac{1}{2}=0,$$

d'où

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty}m_{a,b}(t)=a.}$$

4. a) *Soient $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ tels que $0<t_1<t_2$. À l'aide d'un argument de convexité, démontrer que l'on a $m_{a,b}(t_1)\leqslant m_{a,b}(t_2)$. On a ainsi démontré que $m_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Soient $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ tels que $0<t_1<t_2$. La fonction

$$f: x\longmapsto x^{t_1/t_2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et l'on a

$$f''(x)=\underbrace{\frac{t_1}{t_2}}_{\geqslant 0}\ \underbrace{\Big(\frac{t_1}{t_2}-1\Big)}_{\leqslant 0 \text{ car } t_1<t_2}\ \underbrace{x^{t_1/t_2-2}}_{\geqslant 0}\leqslant 0,$$

donc

$$f: x\longmapsto x^{t_1/t_2} \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.$$

En utilisant l'inégalité de concavité entre a^{t_2} et b^{t_2} avec les poids $1/2$ et $1/2$, on obtient

$$\frac{f(a^{t_2})+f(b^{t_2})}{2}\leqslant f\Big(\frac{a^{t_2}+b^{t_2}}{2}\Big),$$

c'est-à-dire
$$\frac{(a^{t_2})^{t_1/t_2}+(b^{t_2})^{t_1/t_2}}{2}\leqslant\left(\frac{a^{t_2}+b^{t_2}}{2}\right)^{t_1/t_2},$$
ou encore
$$\frac{a^{t_1}+b^{t_1}}{2}\leqslant\left(\frac{a^{t_2}+b^{t_2}}{2}\right)^{t_1/t_2}.$$
En élevant cette inégalité à la puissance $1/t_1$, on obtient
$$m_{a,b}(t_1)\leqslant m_{a,b}(t_2).$$
Ceci étant démontré pour tous $0<t_1<t_2$, on peut affirmer que
$$\boxed{m_{a,b}\text{ est croissante sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

b) *Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, exprimer $m_{a,b}(-t)$ en fonction de $m_{a^{-1},b^{-1}}(t)$. En déduire que $m_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.*

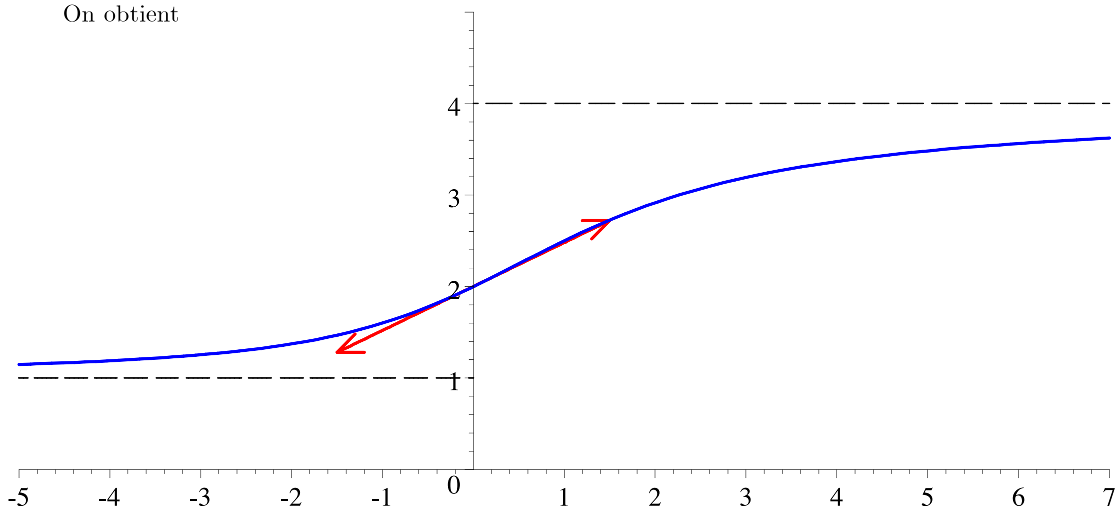
Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, on a
$$m_{a,b}(-t)=\left(\frac{a^{-t}+b^{-t}}{2}\right)^{-1/t}=\frac{1}{\left(\frac{(a^{-1})^t+(b^{-1})^t}{2}\right)^{1/t}}=\frac{1}{m_{a^{-1},b^{-1}}(t)},$$
donc
$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}^*,\qquad m_{a,b}(-t)=\frac{1}{m_{a^{-1},b^{-1}}(t)}.}$$
Soient $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ tels que $t_1<t_2<0$. Comme la fonction $m_{a^{-1},b^{-1}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question précédente) et que l'on a $0<-t_2<-t_1$, on a
$$m_{a^{-1},b^{-1}}(-t_2)\leqslant m_{a^{-1},b^{-1}}(-t_1).$$
En passant à l'inverse, il vient
$$\frac{1}{m_{a^{-1},b^{-1}}(-t_2)}\geqslant\frac{1}{m_{a^{-1},b^{-1}}(-t_1)},$$
c'est-à-dire
$$m_{a,b}(t_2)\geqslant m_{a,b}(t_1).$$
Donc
$$\boxed{m_{a,b}\text{ est croissante sur }\mathbb{R}_-^*.}$$

c) *Que peut-on conclure concernant la monotonie de $m_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$?*

Comme $m_{a,b}$ est continue en 0, la croissance de $m_{a,b}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'étend sur $\mathbb{R}_+$. De même, on démontre que $m_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Comme $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ ont un point en commun, on en déduit que
$$\boxed{m_{a,b}\text{ est croissante sur }\mathbb{R}.}$$

5. *Représenter le graphe de $m_{1,4}$.*

On obtient



EXERCICE 2

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $n \in \mathbb{N}$. L'objet de cet exercice est de donner deux expressions du nombre s_n de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation diophantienne $(E_n) : ax + by = n$.

A. *On pose $P = (X^a - 1)(X^b - 1)$ et $F = 1/(X^{n+1}P)$. On fixe un entier naturel m tel que $ma \geqslant n$ et $mb \geqslant n$. On pose $A = 1 + X^a + X^{2a} + \cdots + X^{ma}$ et $B = 1 + X^b + X^{2b} + \cdots + X^{mb}$. Pour tout polynôme $M \in \mathbb{R}[X]$, on appelle troncature de M à l'ordre n le reste de la division euclidienne de M par X^{n+1}. Enfin, on note R_n la troncature de AB à l'ordre n.*

1. *Expliquer l'appellation « troncature de M à l'ordre n » donnée au reste de la division de M par X^{n+1}.*

   Notons $(m_k)_{k\geqslant 0}$ la suite presque nulle des coefficients de M, c'est-à-dire $M = \sum_{k\geqslant 0} m_k X^k$. La division euclidienne de M par X^{n+1} s'écrit alors :

$$M = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} m_k X^k}_{\text{reste}} + X^{n+1} \underbrace{\sum_{k\geqslant n+1} m_k X^{k-(n+1)}}_{\text{quotient}},$$

   ce qui montre que le reste de cette division euclidienne est obtenu en retirant à M tous les monômes de degré strictement supérieur à n. On constate ainsi que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la troncature de } M \text{ à l'ordre } n \text{ est obtenue en tronquant}\\ \text{les monômes de } M \text{ de degré strictement supérieur à } n.\end{array}}$$

2. *Démontrer que le coefficient de X^n dans R_n est s_n.*

   Comme R_n est la troncature d'ordre n de AB, le coefficient de X^n dans R_n est aussi le coefficient c_n de X^n dans AB. Or, d'après la formule du produit de Cauchy (vue en cours pour le calcul des coefficients d'un produit de deux polynômes), on a

$$c_n = \sum_{\substack{0\leqslant k,\ell\leqslant m\\ ka+\ell b=n}} 1 \times 1,$$

   c'est-à-dire

$$c_n = \operatorname{card}\{(k, \ell) \in [\![0; m]\!]^2 : ka + \ell b = n\}.$$

   Or, comme $ma > n$ et $mb > n$, l'équation $(E_n) : ax + by = n$ n'a pas de solution $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ en dehors de l'ensemble $[\![0; m]\!]^2$. Autrement dit, on a

$$s_n = \operatorname{card}\{(x, y) \in [\![0; m]\!]^2 : ax + by = n\}.$$

   Il s'ensuit que

$$c_n = s_n,$$

   autrement dit que

$$\boxed{\text{le coefficient de } X^n \text{ dans } R_n \text{ est } s_n.}$$

3. *Démontrer que la troncature à l'ordre n de ABP est 1 et en déduire l'existence d'un polynôme $D_n \in R_{a+b-1}[X]$ tel que $F = \dfrac{R_n}{X^{n+1}} + \dfrac{D_n}{P}$.*

   On a

$$ABP = (1 + X^a + X^{2a} + \cdots + X^{ma})(1 + X^b + X^{2b} + \cdots + X^{mb})(X^a - 1)(X^b - 1).$$

   La formule de Bernoulli (appliquée deux fois) nous dit alors que

$$ABP = \big(X^{(m+1)a} - 1\big)\big(X^{(m+1)b} - 1\big),$$

   c'est-à-dire

$$ABP = 1 - X^{(m+1)a} - X^{(m+1)b} + X^{(m+1)(a+b)}.$$

   Comme $ma > n$ et $mb > n$, les trois monômes $X^{(m+1)a}$, $X^{(m+1)b}$ et $X^{(m+1)(a+b)}$ sont de degré strictement supérieur à n, donc

$$\boxed{\text{la troncature à l'ordre } n \text{ de } ABP \text{ est } 1.}$$

Comme R_n est la troncature d'ordre n de AB, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$AB = R_n + X^{n+1}Q_n.$$

En multipliant par P, il vient

$$ABP = R_nP + X^{n+1}PQ_n.$$

Comme 1 est la troncature d'ordre n de ABP, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$ABP = 1 + X^{n+1}T_n.$$

En combinant ces relations, il vient

$$1 + X^{n+1}T_n = R_nP + X^{n+1}PQ_n,$$

c'est-à-dire

$$1 = R_nP + X^{n+1}(PQ_n - T_n).$$

En divisant cette relation par $X^{n+1}P$, il vient

$$\frac{1}{X^{n+1}P} = \frac{R_n}{X^{n+1}} + \frac{D_n}{P} \qquad \text{où} \qquad D_n = PQ_n - T_n$$

D'après la règle sur le degré d'une somme de fractions rationnelles, on a

$$\deg\left(\frac{D_n}{P}\right) \leqslant \max\left\{\deg\left(\frac{1}{X^{n+1}P}\right), \deg\left(\frac{R_n}{X^{n+1}}\right)\right\}$$

donc

$$\deg\left(\frac{D_n}{P}\right) < 0.$$

Comme $\deg(P) = a + b$, on en déduit que

$$\deg(D_n) < a + b.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } D_n \in \mathbb{R}_{a+b-1}[X] \text{ tel que } F = \frac{R_n}{X^{n+1}} + \frac{D_n}{P}.}$$

4. *Démontrer l'existence de deux complexes ω_1, ω_2 et de deux familles de complexes $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}}$ et $(v_\beta)_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}}$ tels que $F = \dfrac{R_n}{X^{n+1}} + \dfrac{\omega_1}{X-1} + \dfrac{\omega_2}{(X-1)^2} + \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{u_\alpha}{X-\alpha} + \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{v_\beta}{X-\beta}$.*

On nous demande de décomposer en éléments simples la fraction rationnelle D_n/P.
Cette fraction rationnelle est de degré strictement négatif.
Factorisons $P = (X^a - 1)(X^b - 1)$. On a

$$P = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_a} (X - \alpha) \prod_{\beta \in \mathbb{U}_b} (X - \beta).$$

Or on a

$$\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b} = \mathbb{U}_1 = \{1\}.$$

En effet, l'inclusion $\supset$ est évidente. Pour l'inclusion $\subset$, on considère $\omega \in \mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b$. On écrit une relation de Bézout pour a et b, c'est-à-dire $ua + vb = 1$. Alors $\omega^1 = \omega^{ua+vb} = (\omega^a)^u \times (\omega^b)^v = 1^u \times 1^v = 1$.
Par conséquent, on a

$$P = (X-1)^2 \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} (X - \alpha) \prod_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} (X - \beta)$$

où les $\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}$ et les $\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}$ sont deux à deux distincts.
Il s'ensuit que la décomposition de D_n/P, est de la forme

$$\frac{D_n}{P} = \frac{\omega_1}{X-1} + \frac{\omega_2}{(X-1)^2} + \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{u_\alpha}{X-\alpha} + \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{v_\beta}{X-\beta}$$

où ω_1, ω_2 sont deux complexes et $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}}$, $(v_\beta)_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}}$ sont deux familles de complexes.
En reportant cette égalité dans le résultat de la question précédente, on obtient finalement qu'

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe deux nombres complexes } \omega_1, \omega_2 \text{ et de deux familles de nombres complexes } (u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \\ \text{et } (v_\beta)_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \text{ tels que } F = \dfrac{R_n}{X^{n+1}} + \dfrac{\omega_1}{X-1} + \dfrac{\omega_2}{(X-1)^2} + \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{u_\alpha}{X-\alpha} + \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{v_\beta}{X-\beta}.\end{array}}$$

5. a) *Calculer u_α et v_β (pour $\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}$) en fonction de n, α, β, a et b.*

Soit $\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}$. Le cours nous dit que

$$u_\alpha = \frac{1}{(X^{n+1}P)'(\alpha)}.$$

Or

$$\begin{aligned}(X^{n+1}P)' &= \left(X^{n+1}(X^a-1)(X^b-1)\right)' \\ &= (n+1)X^n(X^a-1)(X^b-1) + X^{n+1}aX^{a-1}(X^b-1) + X^{n+1}(X^a-1)bX^{b-1}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(X^{n+1}P)'(\alpha) &= \underbrace{(n+1)\alpha^n(\alpha^a-1)(\alpha^b-1)}_{=0} + \alpha^{n+1}a\underbrace{\alpha^{a-1}}_{=1/\alpha}(\alpha^b-1) + \underbrace{\alpha^{n+1}(\alpha^a-1)b\alpha^{b-1}}_{=0} \\ &= a\alpha^n(\alpha^b-1),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$u_\alpha = \frac{1}{a\alpha^n(\alpha^b-1)}.$$

De même, pour tout $\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}$, on obtient

$$v_\beta = \frac{1}{b\beta^n(\beta^a-1)}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\},\ u_\alpha = \frac{1}{a\alpha^n(\alpha^b-1)} \qquad \text{et} \qquad \forall \beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\},\ v_\beta = \frac{1}{b\beta^n(\beta^a-1)}.}$$

b) *On considère le polynôme $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $F = 1/\left((X-1)^2S\right)$. Démontrer la formule $F - \dfrac{\omega_2}{(X-1)^2} = -\dfrac{1}{(X-1)S}\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{S^{(k)}(1)}{k!\,S(1)}(X-1)^{k-1}$ et en déduire que $\omega_1 = -S'(1)/S(1)^2$. Donner alors l'expression de ω_1 en fonction de n, a et b.*

L'existence du polynôme S est justifiée par le fait que $X^{n+1}P$ admet 1 comme racine double. La technique de la « main qui cache »™ dit que

$$\omega_2 = [(X-1)^2F](1) = \frac{1}{S(1)}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2S} - \frac{1}{S(1)(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{S(1)(X-1)^2S}\left(S(1)-S\right) \\ &= \frac{1}{S(1)(X-1)^2S}\left(S(1) - \sum_{k\geqslant 0}\frac{S^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k\right) \qquad \text{par Taylor} \\ &= -\frac{1}{S(1)(X-1)^2S}\sum_{k\geqslant 1}\frac{S^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \\ &= -\frac{1}{(X-1)S}\sum_{k\geqslant 1}\frac{S^{(k)}(1)}{k!\,S(1)}(X-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2} = -\frac{1}{(X-1)S}\sum_{k\geqslant 1}\frac{S^{(k)}(1)}{k!\,S(1)}(X-1)^{k-1}.}$$

La décomposition en éléments simples de $F - \dfrac{\omega_2}{(X-1)^2}$ est donnée par

$$F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2} = \frac{R_n}{X^{n+1}} + \frac{\omega_1}{X-1} + \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_a \setminus \{1\}} \frac{u_\alpha}{X-\omega} + \sum_{\beta \in \mathbb{U}_b \setminus \{1\}} \frac{v_\beta}{X-\omega},$$

ce qui montre que 1 est un pole simple de $F - \dfrac{\omega_2}{(X-1)^2}$. Par conséquent, la technique de la « main qui cache »$^{\text{TM}}$ dit que

$$\omega_1 = \Big[(X-1)\Big(F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2}\Big)\Big](1).$$

Or la formule démontrée ci-dessus nous dit que

$$(X-1)\Big(F - \frac{\omega_2}{(X-1)^2}\Big) = -\frac{1}{S} \sum_{k \geqslant 1} \frac{S^{(k)}(1)}{k!\,S(1)}(X-1)^{k-1},$$

donc

$$\omega_1 = -\frac{1}{S(1)} \underbrace{\sum_{k \geqslant 1} \frac{S^{(k)}(1)}{k!\,S(1)}(1-1)^{k-1}}_{\substack{\text{tous les termes sont nuls} \\ \text{sauf celui d'indice } k=1}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{S'(1)}{S(1)^2}\cdot}$$

On a

$$\begin{aligned} S &= \frac{X^{n+1}(X^a-1)(X^b-1)}{(X-1)^2} \\ &= X^{n+1}(1+X+X^2+\cdots+X^{a-1})(1+X+X^2+\cdots+X^{b-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S' = {} & (n+1)X^n(1+X+X^2+\cdots+X^{a-1})(1+X+X^2+\cdots+X^{b-1}) \\ & +X^{n+1}(1+2X+3X^2+\cdots+(a-1)X^{a-2})(1+X+X^2+\cdots+X^{b-1}) \\ & +X^{n+1}(1+X+X^2+\cdots+X^{a-1})(1+2X+3X^2+\cdots+(b-1)X^{b-2}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S(1) &= 1^{n+1}(1+1+1^2+\cdots+1^{a-1})(1+1+1^2+\cdots+1^{b-1}) \\ &= ab \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S'(1) &= (n+1)1^n(1+1+1^2+\cdots+1^{a-1})(1+1+1^2+\cdots+1^{b-1}) \\ &\quad +1^{n+1}(1+2.1+3.1^2+\cdots+(a-1).1^{a-2})(1+1+1^2+\cdots+1^{b-1}) \\ &\quad +1^{n+1}(1+1+1^2+\cdots+1^{a-1})(1+2.1+3.1^2+\cdots+(b-1).1^{b-2}) \\ &= (n+1)ab + \frac{(a-1)a}{2}b + a\frac{(b-1)b}{2} \\ &= ab\frac{2n+a+b}{2}\cdot \end{aligned}$$

Cela donne

$$\omega_1 = -\frac{ab\dfrac{2n+a+b}{2}}{(ab)^2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{2n+a+b}{2ab}\cdot}$$

c) *En déduire que* $s_n = \dfrac{2n+a+b}{2ab} + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{U}_a\setminus\{1\}} \dfrac{1}{\alpha^n(1-\alpha^b)} + \dfrac{1}{b}\sum_{\beta\in\mathbb{U}_b\setminus\{1\}} \dfrac{1}{\beta^n(1-\beta^a)}$.

Multiplions par X la décomposition en éléments simples de F. Cela donne

$$\frac{1}{X^nP} = \frac{R_n}{X^n} + \frac{\omega_1 X}{X-1} + \frac{\omega_2 X}{(X-1)^2} + \sum_{\alpha\in\mathbb{U}_a\setminus\{1\}} \frac{u_\alpha X}{X-\alpha} + \sum_{\beta\in\mathbb{U}_b\setminus\{1\}} \frac{v_\beta X}{X-\beta}.$$

En évaluant cette relation en ∞ (c'est-à-dire en composant par $1/X$ et en évaluant en 0) et en tenant compte du fait que le coefficient de X^n dans R_n est s_n, on obtient

$$0 = s_n + \omega_1 + 0 + \sum_{\alpha\in\mathbb{U}_a\setminus\{1\}} u_\alpha + \sum_{\beta\in\mathbb{U}_b\setminus\{1\}} v_\beta,$$

c'est-à-dire

$$s_n = -\omega_1 - \sum_{\alpha\in\mathbb{U}_a\setminus\{1\}} u_\alpha - \sum_{\beta\in\mathbb{U}_b\setminus\{1\}} v_\beta$$

ou encore

$$\boxed{s_n = \frac{2n+a+b}{2ab} + \frac{1}{a}\sum_{\alpha\in\mathbb{U}_a\setminus\{1\}} \frac{1}{\alpha^n(1-\alpha^b)} + \frac{1}{b}\sum_{\beta\in\mathbb{U}_b\setminus\{1\}} \frac{1}{\beta^n(1-\beta^a)}.}$$

B. *Cette question est complètement indépendante des résultats de la partie A. On note* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *un couple de coefficients de Bézout pour* a *et* b*, de sorte que* $au+bv=1$*. Résoudre l'équation* (E_n) *sur* $\mathbb{Z}^2$ *et en déduire la formule de Popoviciu :* $s_n = n/(ab) - \{nv/a\} - \{nu/b\} + 1$*, où* $\{\cdot\}$ *désigne la partie fractionnaire.*

Appliquons la technique, vue en cours, pour résoudre l'équation diophantienne $(E_n) : ax+by=n$ dans $\mathbb{Z}^2$.
En multipliant la relation de Bézout $au+bv=1$ par n, on obtient $anu+bnv=n$, ce qui nous dit que le couple (nu,nv) est une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E_n).
Dès lors, l'équation (E_n) donne $a(x-nu)+b(y-nv)=0$, c'est-à-dire $a(x-nu)=-b(y-nv)$. Comme a et b sont premiers entre eux, on en déduit (à l'aide du lemme de Gauss) que b divise $x-nu$, autrement dit qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=nu+kb$. En reportant dans (E_n), il vient $y=nv-ka$. On a donc $(x,y)=(nu+kb,nv-ka)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Réciproquement, il est simple de vérifier que les couples $(x,y)=(nu+kb,nv-ka)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont bien solutions de (E_n).
Donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_n) \text{ sur } \mathbb{Z}^2 \text{ est } \{(nu+kb,nv-ka) : k\in\mathbb{Z}\}.}$$

Dès lors, s_n est le nombre d'entiers $k\in\mathbb{Z}$ tels que le couple $(nu+kb,nv-ka)$ appartienne à $\mathbb{N}^2$. Or, pour que cette condition soit vérifiée, il faut et il suffit que $nu+kb\geqslant 0$ et $nv-ka\geqslant 0$, c'est-à-dire $-nu/b\leqslant k\leqslant nv/a$. Donc

$$s_n = \operatorname{card}\left\{k\in\mathbb{Z} : -\frac{nu}{b}\leqslant k\leqslant \frac{nv}{a}\right\}$$

ou encore

$$s_n = \left\lfloor \frac{nv}{a}\right\rfloor - \left\lceil -\frac{nu}{b}\right\rceil + 1.$$

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\lfloor t\rfloor = t - \{t\} \qquad \text{et} \qquad \lceil -t\rceil = -t + \{t\},$$

donc

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{nv}{a} - \left\{\frac{nv}{a}\right\} - \left(-\frac{nu}{b} + \left\{\frac{nu}{b}\right\}\right) + 1 \\ &= \frac{nv}{a} + \frac{nu}{b} - \left\{\frac{nv}{a}\right\} - \left\{\frac{nu}{b}\right\} + 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{nv}{a} + \frac{nu}{b} = \frac{n(bv+au)}{ab} = \frac{n}{ab},$$

on obtient finalement

$$\boxed{s_n = \frac{n}{ab} - \left\{\frac{nv}{a}\right\} - \left\{\frac{nu}{b}\right\} + 1.}$$

EXERCICE 3

Sur $[0;1]$, on considère l'équation différentielle (E) $y' = (t^2+y^2)/2$ où $y : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction inconnue dérivable. On se propose de démontrer l'existence et l'unicité puis d'approcher numériquement une solution y de (E) telle que $y(0)=0$.

1. *Sur $[0;1]$, on considère une suite de fonctions polynomiales $(y_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall t \in [0;1]\,,\ y_0(t)=0$ et $\forall n \geqslant 0,\ \forall t \in [0;1]\,,\ y_{n+1}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u$.*

   a) *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant y_n(t) \leqslant 1$.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n) : \forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant y_n(t) \leqslant 1$.

   Initialisation : Comme $y_0 = \widetilde{0}$, on $\forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant y_0(t) \leqslant 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $t \in [0;1]$. Comme $\forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y_n(u) \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence, la croissance de l'intégrale nous donne
$$\frac{1}{2}\int_0^t 0\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_n(u)^2\right)\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(1^2+1^2\right)\mathrm{d}u,$$
   c'est-à-dire
$$0 \leqslant y_{n+1}(t) \leqslant t.$$
   A fortiori, on a
$$0 \leqslant y_{n+1}(t) \leqslant 1.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant y_n(t) \leqslant 1.}$$

   b) *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant y_{n+1}(t) - y_n(t) \leqslant t^n$.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n) : \forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant y_{n+1}(t) - y_n(t) \leqslant t^n$.

   Initialisation : Soit $t \in [0;1]$. On a
$$y_1(t) - y_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_0(u)^2\right)\mathrm{d}u - y_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^t u^2\,\mathrm{d}u = \frac{t^3}{6},$$
   donc
$$0 \leqslant y_1(t) - y_0(t) \leqslant t^0.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $t \in [0;1]$. On a
$$\begin{aligned}
y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_{n+1}(u)^2\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_n(u)^2\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left(y_{n+1}(u)^2 - y_n(u)^2\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \big(y_{n+1}(u) + y_n(u)\big)\big(y_{n+1}(u) - y_n(u)\big)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$
   D'une part, on sait que $\forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y_{n+1}(u) \leqslant 1$ et $\forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y_n(u) \leqslant 1$ d'après la question précédente. D'autre part, on sait que $\forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y_{n+1}(u) - y_n(u) \leqslant u^n$ par H.R. Donc, par croissance de l'intégrale, on a
$$\frac{1}{2}\int_0^t 0\,\mathrm{d}u \leqslant y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t (1+1)u^n\,\mathrm{d}u,$$
   c'est-à-dire
$$0 \leqslant y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t) \leqslant \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
   A fortiori, on a
$$0 \leqslant y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t) \leqslant t^{n+1}.$$
   Cela démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant y_{n+1}(t) - y_n(t) \leqslant t^n.}$$

c) *Soit $t \in [0;1]$. Démontrer que la suite $\big(y_n(t)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite notée $y(t)$. On définit ainsi une fonction $y : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

La question 1. a) nous dit que la suite $\big(y_n(t)\big)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 1. La question 1. b) nous dit que la suite $\big(y_n(t)\big)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, on sait que

$$\boxed{\text{la suite } \big(y_n(t)\big)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}$$

d) *Démontrer que $y(0) = 0$.*

Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$y_{n+1}(0) = \frac{1}{2}\int_0^0 \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u = 0,$$

donc la suite $\big(y_n(0)\big)_{n\geqslant 1}$ est nulle, ce qui démontre que sa limite est nulle, c'est-à-dire

$$\boxed{y(0) = 0.}$$

e) *Démontrer que y est lipschitzienne sur $[0;1]$.*

Soient $t_1, t_2 \in [0;1]$. On suppose que $t_1 < t_2$ (l'autre cas est similaire). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(t_2) - y_{n+1}(t_1)| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^{t_2} \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u\right| \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(u^2 + y_n(u)^2\right) \mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(1^2 + 1^2\right) \mathrm{d}u \qquad \text{car } y_n \leqslant 1 \\
&= t_2 - t_1 \\
&= |t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

En passant à la limite ($n \longrightarrow +\infty$) dans cette inégalité, il vient

$$|y(t_2) - y(t_1)| \leqslant |t_2 - t_1|.$$

Par conséquent,

$$\boxed{y \text{ est 1-lipschitzienne sur } [0;1].}$$

f) *Soit $t \in [0;1[$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y(u) - y_n(u) \leqslant t^n/(1-t)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y(u)^2\right) \mathrm{d}u - y_{n+1}(t) \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}$ puis que $y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y(u)^2\right) \mathrm{d}u$.*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0;t]$. La croissance de la suite $\big(y_m(t)\big)_{m\geqslant 0}$ dit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$y_{n+p}(u) - y_n(u) \geqslant 0.$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
y_{n+p}(u) - y_n(u) &= \sum_{k=0}^{p-1} y_{n+k+1}(u) - y_{n+k}(u) \qquad \text{par téléscopage} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} u^{n+k} \qquad \text{d'après 1. b)} \\
&= \frac{u^n - u^{n+p}}{1-u} \qquad \text{somme géométrique} \\
&\leqslant \frac{u^n}{1-u} \qquad \text{on « oublie » } -u^{n+p} \\
&\leqslant \frac{t^n}{1-t} \qquad \text{car } u \leqslant t \text{ et } 1-u \geqslant 1-t.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant y_{n+p}(u) - y_n(u) \leqslant \frac{t^n}{1-t}.$$

En passant à la limite ($p \longrightarrow +\infty$) dans cette inégalité, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0;t]\,, \qquad 0 \leqslant y(u) - y_n(u) \leqslant \frac{t^n}{1-t}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u - y_{n+1}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y_n(u)^2\big)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \big(y(u)^2-y_n(u)^2\big)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \big(y(u)+y_n(u)\big)\big(y(u)-y_n(u)\big)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

D'après la question 1. a), on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y_n(u) \leqslant 1$. En passant à la limite ($n \longrightarrow +\infty$) dans cette inégalité, il vient $\forall u \in [0;t]\,,\ 0 \leqslant y(u) \leqslant 1$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0;t]\,, \qquad 0 \leqslant y(u)+y_n(u) \leqslant 2.$$

En combinant cet encadrement avec le résultat obtenu au début de cette question, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0;t]\,, \qquad 0 \leqslant \big(y(u)+y_n(u)\big)\big(y(u)-y_n(u)\big) \leqslant \frac{2t^n}{1-t}.$$

Avec la croissance de l'intégrale, cela donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2}\int_0^t 0\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \big(y(u)+y_n(u)\big)\big(y(u)-y_n(u)\big)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2t^n}{1-t}\,\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0;t]\,, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u - y_{n+1}(t) \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}.}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} t^{n+1}/(1-t) = 0$, le théorème des gendarmes nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u.}$$

g) *Démontrer que y est une solution de (E) sur $[0;1]$.*

La fonction y est continue sur $[0;1]$ puisqu'elle y est 1-lipschitzienne.
Par ailleurs, la fonction

$$\varphi : t \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^t \big(u^2+y(u)^2\big)\,\mathrm{d}u$$

est également continue sur $[0;1]$ puisqu'elle y est dérivable en tant que primitive de la fonction continue $t \longmapsto \big(t^2+y(t)^2\big)/2$.
Comme y et φ coïncident sur $[0;1[$ d'après la question précédente, on déduit de leurs continuités qu'elles coïncident sur $[0;1]$ tout entier.
Comme φ est dérivable sur $[0;1]$, on en déduit que y est dérivable sur $[0;1]$.
De plus, pour tout $t \in [0;1]$, on a $y'(t) = \varphi'(t)$, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0;1]\,, \qquad y'(t) = \frac{1}{2}\big(t^2+y(t)^2\big).$$

On constate donc bien que

$$\boxed{y \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } [0;1].}$$

Remarque culturelle :

Nous venons de démontrer l'existence d'une solution d'une équation différentielle non linéaire à l'aide d'une méthode itérative d'approximation, appelée méthode de Picard.
Cette méthode peut être généralisée afin de démontrer, à l'aide du théorème de point fixe de Banach, l'existence de solutions d'une classe importante d'équations différentielles. On obtient le théorème de Cauchy-Lipschitz : l'équation différentielle $y' = f(t,y)$, où f est une fonction de deux variables définie et continue sur $I \times \mathbb{R}$ avec I qui est un intervalle ouvert, admet des solutions sur I dès que f est lipschitzienne vis à vis de sa seconde variable.

2. *On suppose que (E) admet deux solutions y_1 et y_2 sur $[0;1]$. On considère la fonction $\delta : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0;1]\,,\ \delta(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$.*

   a) *Démontrer que $\forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leqslant \delta(t) \leqslant M \displaystyle\int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}u$ où $M = \dfrac{1}{2}\sup\{|y_1(t)|+|y_2(t)| : t \in [0;1]\}$.*

   Soit $t \in [0;1]$. Il est clair que $\delta(t) = |y_1(t) - y_2(t)| \geqslant 0$. Pour la majoration, on remarque tout d'abord que M est bien défini en vertu du théorème des bornes (puisque la fonction $|y_1| + |y_2|$ est continue sur le segment $[0;1]$). On peut alors écrire que

$$
\begin{aligned}
\delta(t) &= |y_1(t) - y_2(t)| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_1(u)^2\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^t \left(u^2 + y_2(u)^2\right)\mathrm{d}u\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^t \left(y_1(u)^2 - y_2(u)^2\right)\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left|y_1(u)^2 - y_2(u)^2\right|\mathrm{d}u \qquad \text{inégalité triangulaire} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left|y_1(u) + y_2(u)\right| \times \left|y_1(u) - y_2(u)\right|\mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(|y_1(u)| + |y_2(u)|\right) \times \delta(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t 2M\,\delta(u)\,\mathrm{d}u \\
&= M\int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

   Donc

$$
\boxed{\forall t \in [0;1]\,, \qquad 0 \leqslant \delta(t) \leqslant M\int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}u.}
$$

   b) *Démontrer que δ est la fonction nulle sur $[0;1]$ et conclure.*

   Notons Δ la primitive de δ sur $[0;1]$ qui s'annule en 0. La question précédente nous dit que

$$
\forall t \in [0;1]\,, \qquad 0 \leqslant \Delta'(t) \leqslant M\Delta(t).
$$

   Nous avons vu en TD comment procéder avec ce genre d'inéquation différentielle : on résout l'équation homogène associée puis on procède par variation de la constante.
   Les solutions de l'équation différentielle homogène $\Delta' = M\Delta$ sont, d'après le cours, toutes les fonctions de la forme $\Delta : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{Mt}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On procède alors par variation de la constante, c'est-à-dire que l'on considère la fonction λ définie par $\forall t \in [0;1]\,,\ \lambda(t) = \Delta(t)\,\mathrm{e}^{-Mt}$ de sorte que l'on ait $\forall t \in [0;1]\,,\ \Delta(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{Mt}$ avec $\lambda : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable. En reportant dans l'inéquation différentielle $\Delta' \leqslant M\Delta$, on obtient $\forall t \in [0;1]\,,\ \lambda'(t)\,\mathrm{e}^{Mt} + \lambda(t)M\,\mathrm{e}^{Mt} \leqslant M\lambda(t)\,\mathrm{e}^{Mt}$. On a donc $\forall t \in [0;1]\,,\ \lambda'(t) \leqslant 0$, ce qui démontre que la fonction λ est décroissante. Il s'ensuit que $\forall t \in [0;1]\,,\ \lambda(t) \leqslant \lambda(0)$. Or $\lambda(0) = \Delta(0)\,\mathrm{e}^{-M.0} = 0$ donc $\forall t \in [0;1]\,,\ \lambda(t) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\Delta(t) \leqslant 0$.
   Comme $\forall t \in [0;1]\,,\ \Delta(t) \geqslant 0$, on en déduit que Δ est la fonction nulle.
   En dérivant, on en déduit que

$$
\boxed{\delta \text{ est la fonction nulle sur } [0;1]}
$$

   Il s'ensuit immédiatement que $y_1 = y_2$, c'est-à-dire

$$
\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'admet qu'une seule solution } y \text{ telle que } y(0) = 0.}
$$

Remarque culturelle :

Nous avons démontré l'unicité de la solution de (E) en appliquant les techniques d'inéquations différentielles que nous avions vues en TD pour établir le lemme de Grönwall. On peut adapter ce raisonnement dans un cadre plus général afin d'établir l'unicité de la solution donnée par le théorème de Cauchy–Lipschitz lorsqu'on impose à celle-ci une condition de Cauchy.

---

3. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $t_k = k/N$. On définit alors les nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_N$ par $u_0 = 0$ et $\forall k \in [\![0; N-1]\!]$, $u_{k+1} = u_k + ({t_k}^2 + {u_k}^2)/(2N)$. On considère les erreurs $e_0, e_1, \ldots, e_N$ données par $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $e_k = y(t_k) - u_k$. On souhaite démontrer que, pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, le nombre u_k est une bonne approximation de $y(t_k)$ lorsque N est grand.*

   a) *Soit $k \in [\![0; N-1]\!]$. Démontrer que $e_{k+1} = e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t$.*

   On a

$$e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t = e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 + y(t)^2\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} ({t_k}^2 + {u_k}^2)\,\mathrm{d}t.$$

   Or

$$e_k = y(t_k) - u_k,$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 + y(t)^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{0}^{t_{k+1}} \left(t^2 + y(t)^2\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{0}^{t_k} \left(t^2 + y(t)^2\right) \mathrm{d}t = y(t_{k+1}) - y(t_k)$$

   et

$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} ({t_k}^2 + {u_k}^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}({t_k}^2 + {u_k}^2)(t_{k+1} - t_k) = \frac{1}{2N}({t_k}^2 + {u_k}^2),$$

   donc

$$\begin{aligned} e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t &= y(t_k) - u_k + y(t_{k+1}) - y(t_k) + \frac{1}{2N}({t_k}^2 + {u_k}^2) \\ &= y(t_{k+1}) - u_k + \frac{1}{2N}({t_k}^2 + {u_k}^2) \\ &= y(t_{k+1}) - u_{k+1} \\ &= e_{k+1}. \end{aligned}$$

   Cela donne

$$\boxed{e_{k+1} = e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t.}$$

   b) *Démontrer que $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $e_k \geqslant 0$ et en déduire que $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.*

   Pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, on note $\mathscr{P}(k) : e_k \geqslant 0$.

   Initialisation : On a $e_0 = y(0) - u_0 = 0 - 0 = 0$, ce qui démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $k \in [\![0; N-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. D'après la question précédente, on a

$$e_{k+1} = e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t.$$

   Or, pour tout $t \in [t_k; t_{k+1}]$, on a

$$t^2 - {t_k}^2 \geqslant 0$$

   et, comme y est croissante puisque sa dérivée $t \longmapsto \left(t^2 + y(t)^2\right)/2$ est positive, on a

$$y(t)^2 - {u_k}^2 \geqslant y(t_k)^2 - {u_k}^2 = \big(y(t_k) + u_k\big)\big(y(t_k) - u_k\big) = \big(y(t_k) + u_k\big)e_k \geqslant 0$$

   par hypothèse de récurrence. Cela implique, par positivité de l'intégrale, que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\right) \mathrm{d}t \geqslant 0$$

   et donc que

$$e_{k+1} \geqslant e_k.$$

   Comme $e_k \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence, on a

$$e_{k+1} \geqslant 0.$$

   Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in [\![0; N]\!], \qquad e_k \geqslant 0.}$$

Pour tout $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2N}({t_k}^2 + {u_k}^2),$$

ce qui démontre que la suite $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est croissante. Comme $u_0 = 0$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0; N]\!], \qquad u_k \geqslant 0.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, on a $e_k \geqslant 0$, c'est-à-dire $y(t_k) - u_k \geqslant 0$ ou encore

$$u_k \leqslant y(t_k).$$

Comme $y(t_k) \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0; N]\!], \qquad u_k \leqslant 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0; N]\!], \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant 1.}$$

c) *Soit $k \in [\![0; N-1]\!]$. Démontrer que $\forall t \in [t_k; t_{k+1}]$, $t^2 + y(t)^2 \leqslant {t_k}^2 + y(t_k)^2 + 4(t - t_k)$ et en déduire que $e_{k+1} \leqslant (1 + 1/N)e_k + 1/N^2$.*

Soit $t \in [t_k; t_{k+1}]$. La fonction $\psi : s \longmapsto s^2 + y(s)^2$ est continue sur $[t_k; t_{k+1}]$ et dérivable sur $]t_k; t_{k+1}[$. De plus, pour tout $s \in]t_k; t_{k+1}[$, on a

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= 2s + 2y'(s)y(s) \\ &= 2s + \big(s^2 + y(s)^2\big)y(s) \end{aligned}$$

donc

$$\psi'(s) \leqslant 2 \times 1 + (1^2 + 1^2) \times 1 = 4.$$

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquées à la fonction ψ entre les points t_k et t, on a

$$\psi(t) - \psi(t_k) \leqslant 4(t - t_k),$$

c'est-à-dire

$$t^2 + y(t)^2 - {t_k}^2 - y(t_k)^2 \leqslant 4(t - t_k).$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\forall t \in [t_k; t_{k+1}], \qquad t^2 + y(t)^2 \leqslant {t_k}^2 + y(t_k)^2 + 4(t - t_k).}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \big(t^2 - {t_k}^2 + y(t)^2 - {u_k}^2\big)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \big(y(t_k)^2 + 4(t - t_k) - {u_k}^2\big)\,\mathrm{d}t && \text{inégalité ci-dessus} \\ &= e_k + \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \big(y(t_k)^2 - {u_k}^2\big)\,\mathrm{d}t + 2\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)\,\mathrm{d}t \\ &= e_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\big(y(t_k)^2 - {u_k}^2\big) + 2\left[\frac{(t - t_k)^2}{2}\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\ &= e_k + \frac{1}{2N}\big(y(t_k) + u_k\big)\big(y(t_k) - u_k\big) + \frac{1}{N^2} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2N}\big(y(t_k) + u_k\big)\right]e_k + \frac{1}{N^2} \\ &\leqslant \left[1 + \frac{1}{2N}(1 + 1)\right]e_k + \frac{1}{N^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{e_{k+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)e_k + \frac{1}{N^2}.}$$

d) *Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, on a $e_k \leqslant (1/N)[(1+1/N)^N - 1]$ et en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on précisera) telle que, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, $e_k \leqslant C/N$.*

La relation

$$\forall k \in [\![0;N-1]\!]\,, \qquad e_{k+1} \leqslant \Big(1+\frac{1}{N}\Big)e_k + \frac{1}{N^2}$$

nous dit que la suite $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ est sous-arithmético-géométrique. Par conséquent, une récurrence immédiate nous dit que

$$\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad e_k \leqslant \widehat{e_k}$$

où $(\widehat{e_k})_{0\leqslant k\leqslant N}$ est la suite arithmético-géométrique définie par

$$\widehat{e_0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0;N-1]\!]\,,\ \widehat{e_{k+1}} = \Big(1+\frac{1}{N}\Big)\widehat{e_k} + \frac{1}{N^2}\cdot$$

Le point fixe ℓ de la suite $(\widehat{e_k})_{0\leqslant k\leqslant N}$ est donnée par

$$\ell = \Big(1+\frac{1}{N}\Big)\ell + \frac{1}{N^2}$$

et vaut donc

$$\ell = -\frac{1}{N}\cdot$$

En soustrayant le relation de récurrence définissant $(\widehat{e_k})_{0\leqslant k\leqslant N}$ et la relation du point fixe, on obtient

$$\forall k \in [\![0;N-1]\!]\,, \qquad \widehat{e_{k+1}} - \ell = \Big(1+\frac{1}{N}\Big)(\widehat{e_k} - \ell)$$

ce qui donne

$$\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad \widehat{e_k} - \ell = \Big(1+\frac{1}{N}\Big)^k(\widehat{e_0} - \ell)$$

ou encore

$$\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad \widehat{e_k} = \frac{1}{N}\Big[\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^k - 1\Big].$$

Par conséquent, on a

$$\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad e_k \leqslant \frac{1}{N}\Big[\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^k - 1\Big].$$

A fortiori, on a

$$\boxed{\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad e_k \leqslant \frac{1}{N}\Big[\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^N - 1\Big].}$$

En utilisant l'inégalité de convexité $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leqslant \mathrm{e}^x$, on a

$$\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^N \leqslant (\mathrm{e}^{1/N})^N = \mathrm{e},$$

donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0;N]\!]\,, \qquad e_k \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{N}\cdot}$$