

Feuille d'exercices n° 17 : corrigés

Exercice 1

On donne directement les réponses. Les primitives ci-après sont données à une constante.

- Une primitive $t \mapsto t \ln t$ sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4}$.
- Une primitive de \arcsin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $t \mapsto t \arcsin(t) + \sqrt{1-t^2}$.

Une primitive de \arccos sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $t \mapsto t \arccos(t) - \sqrt{1-t^2}$.

- Une primitive de $t \mapsto t \arctan t$ sur l'intervalle \mathbb{R} est $t \mapsto \frac{t^2}{2} \arctan(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \arctan t$.
- Une primitive de $t \mapsto t^2 \sin t$ sur l'intervalle \mathbb{R} est $t \mapsto -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t$.
- Une primitive de $t \mapsto \cos^3 t$ sur l'intervalle \mathbb{R} est en linéarisant (passer en exponentielle complexe) $t \mapsto \frac{1}{12} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin t$.

Exercice 2

- Après plusieurs IPP, on trouve :

$$I = \int_0^\pi t^4 \sin t \, dt = \pi^4 - 12\pi^2 + 48.$$

On peut utiliser les règles de Bioche on détecte une primitive directe. La règle de Bioche invite à poser $u = \cos x$, ce qui donne :

$$J = - \int_1^{-1} \frac{du}{2+u} = \left[\ln |2+u| \right]_{-1}^1 = \ln 3.$$

- On effectue la DES. On trouve :

$$K = \int_2^3 \left(\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \right) dx,$$

avec $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ et $c = \frac{2}{3}$.

Ensuite, pour trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2-x+1}$, on bricole avec la dérivée du dénominateur qui est $2x-1$. Ainsi,

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Pour trouver une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1}$, on passe sous forme canonique et on va avoir du arctan à l'aide d'un changement de variable :

$$g(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Une primitive de g sur $[2, 3]$ par exemple est :

$$G : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Conclusion, l'intégrale vaut :

$$K = \frac{1}{3} \ln \frac{28}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{3} \right).$$

Les règles de Bioche invitent à poser $x = \tan u$, ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$L = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \left[x - \frac{1}{x} \right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3

- Après une DES, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3} dx = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

- On voit du arcsin. On trouve que la deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2}{3} \right).$$

- On développe et on reconnaît une primitive connue (on peut aussi utiliser la règle de Bioche en posant $u = \tan x$. L'intégrale vaut alors :

$$\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{u^2 + 1} du = \int_0^1 \left(1 + \frac{2u}{u^2 + 1} \right) = 1 + \ln 2.$$

- On simplifie l'intégrande. On remarque que l'intégrande n'est pas continue sur l'intervalle considéré, car en fait non défini en $\sqrt{3}$. On continue quand même (programme de deuxième année pour la formalisation). On obtient :

$$M = \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx.$$

Pour le premier terme, on reconnaît une primitive en argch et pour le deuxième, on reconnaît une primitive en argsh. Ainsi, en posant $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$:

$$M = \int_1^{2/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) du = \left[\operatorname{argch}(u) + \operatorname{argsh}(u) \right]_1^{2/\sqrt{3}}.$$

On utilise $\operatorname{argch}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$ et $\operatorname{argsh}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$, d'où après simplifications :

$$M = \ln(2 + \sqrt{7}) - \ln(1 + \sqrt{2}).$$

- L'intégrande est paire, intégrée entre -1 et 1 . On obtient :

$$2 \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x + \sqrt{2}} - \frac{1}{x^2 + 2} \right) dx.$$

On trouve maintenant l'intégrale valant :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

- Faire la DES ne sert pas à grand chose : elle est déjà faite. On calque l'exemple du cours.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} - \int_0^1 t(t^2 + 1)^{-1} \times t \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(\left[\frac{1}{2} \frac{(t^2 + 1)^{-1}}{-1} \times t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{2(t^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- On fait le changement de variable $u = \sqrt{2t + 1}$, ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} e^{u \ln 3} u \, du.$$

Par une IPP, on trouve :

$$\frac{3\sqrt{5}}{\ln 3} \sqrt{5} - \frac{3\sqrt{3}}{\ln 3} \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{\ln^2 3} + \frac{3\sqrt{3}}{\ln^2 3}.$$

- Pour la dernière intégrale, il faut déjà étudier l'intégrande pour savoir qui est le minimum. On pose $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto x^2 + 3x - 2$, de sorte que :

$$f - g : x \mapsto 3(1 - x).$$

Sur $[0, 1]$, le minimum vaut $g(x)$ et sur $[1, 2]$, le minimum vaut $f(x)$. L'intégrale vaut :

$$\int_0^1 g + \int_1^2 f = \frac{19}{6}.$$

Exercice 5

On déroule les calculs comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) \, dx &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x + \sin x) \, dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \, dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 \times \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

car par le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos u) \, du.$$

Exercice 8

La fonction

$$\Phi : \theta \longmapsto \int_a^\theta f \times \int_\theta^b g$$

est un produit de deux fonctions de classe C^1 . De plus,

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0.$$

Le théorème de Rolle s'applique ce qui donne l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que :

$$\Phi'(c) = 0.$$

Or,

$$\Phi' : \theta \longmapsto f(\theta) \times \int_\theta^b g + \int_a^\theta f \times (-g(\theta)),$$

ce qui donne ce qu'il faut.

Exercice 9

1. Soit F une primitive de la fonction f . La fonction $G : x \longmapsto \int_x^{x+T} f$ est donc égale à :

$$G : x \longmapsto F(x+T) - F(x).$$

La fonction G est donc dérivable et de dérivée :

$$G' : x \longmapsto f(x+T) - f(x) = 0,$$

sur l'intervalle \mathbb{R} . La fonction G est constante.

2. On pressent que la limite est la valeur moyenne $m = \frac{1}{T} \int_0^T f$.

On pose la fonction $g = f - m$, de sorte que la fonction g est continue, T périodique et de plus :

$$\int_0^T g = \int_0^T f - m T = 0.$$

On en déduit que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^x g$ est T -périodique car par la question précédente, la valeur de la constante :

$$\int_x^{x+T} g$$

vaut $\int_0^T g = 0$. Ainsi,

$$\Phi(x+T) - \Phi(x) = \int_x^{x+T} g = 0.$$

Cette fonction Φ est donc bornée sur le segment $[0, T]$, donc bornée sur \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Phi(x) = 0.$$

Or,

$$\Phi(x) = \int_0^x f - m x.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{x} \Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f - m.$$

La limite à calculer vaut bien la valeur moyenne m de la fonction f sur une période.

Exercice 10

Montrons pour l'instant que si $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int} dt = 0.$$

Soit $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, de subdivision adaptée

$$\sigma = (x_0 = a < \dots < x_s = b).$$

On note c_k la constante prise par la fonction ρ sur l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.

On en déduit par Chasles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int} dt &= \sum_{k=0}^{s-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k e^{int} dt \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} c_k \left[\frac{e^{int}}{in} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{s-1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue par morceaux, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ sur $[0, 1]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

On obtient ces deux fonctions en utilisant l'uniforme continuité des fonctions g_k définies sur les segments $[x_k, x_{k+1}]$.

Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int} dt \right| \leq \varepsilon.$$

Soit finalement un entier $n \geq n_0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t) \cdot e^{int} dt \right| &\leq \left| \int_0^1 (f(t) - \varphi(t)) \cdot e^{int} dt \right| + \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int} dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)| dt + \varepsilon \\
&\leq \int_0^1 \varepsilon dt + \varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On obtient bien la convergence vers 0, en remplaçant chaque ε par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 12

L'exercice n'est pas si facile...

On pose le complexe :

$$Z = \int_0^1 f(t) dt.$$

Si $Z = 0$, alors $\int_0^1 |f(t)| dt = 0$ par hypothèse. Le théorème aux quatre hypothèses s'applique et la fonction f est nulle. La fonction nulle g et θ n'importe quel réel conviennent.

Si $Z \neq 0$, on pose $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |Z| > 0$, de sorte qu'en posant la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, telle que :

$$g : t \mapsto f(t) \cdot e^{-i\theta},$$

alors la fonction g vérifie :

$$\int_0^1 g(t) dt = \rho = \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 |g(t)| dt.$$

On va montrer que la fonction g prend des valeurs réelles positives.
 On pose pour tout $t \in [0, 1]$, $x(t) = \Re(g(t))$ et $y(t) = \Im(g(t))$.
 On obtient ainsi :

$$\int_0^1 x(t) dt + i \int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} dt.$$

En prenant la partie réelle, on peut écrire :

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} - x(t) \right) dt = 0.$$

On peut appliquer le théorème aux quatre hypothèses ($0 < 1$, intégrande continue, positive et d'intégrale nulle). L'intégrande est nulle ce qui montre que pour tout $t \in [0, 1]$, $x(t) \geq 0$ et $y(t) = 0$. Ainsi, $g(t)$ est toujours dans $[0, +\infty[$ et on obtient ce qu'il faut car :

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = g(t) \cdot e^{i\theta}.$$

Exercice 13

- La première quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{3n} \frac{3}{1 + 9 \left(\frac{k}{3n} \right)^2}$$

de limite :

$$3 \int_0^1 \frac{dt}{1 + 9t^2} = \int_0^3 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan 3.$$

- La deuxième quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{4}{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{k}{4n} \right)^2}},$$

de limite :

$$\int_0^1 \frac{4 dt}{\sqrt{1 + 16t^2}} = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \operatorname{argsh}(4) = \ln(4 + \sqrt{17}).$$

- Pour le troisième point, la quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} 8 \frac{k}{2n} e^{1+6\left(\frac{k}{2n}\right)}$$

de limite :

$$\int_0^1 8t e^{1+6t} dt = 8e \int_0^1 t e^{6t} dt = \frac{10}{9} e^7 + \frac{2e}{9}.$$

- Le dernier point ne ressemble pas du tout à une somme de Riemann, a priori. On prend le \ln ce qui donne :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln k - \ln n \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}.$$

On aurait envie d'utiliser une somme de Riemann. Problème de taille : la fonction \ln n'est pas continue sur le segment $[0, 1]$, car en fait pas définie sur ce segment. Il faut donc contourner la difficulté.

On revient à la démonstration de l'approximation de l'intégrale par des rectangles...

Si $n \geq 1$ est un entier, alors :

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) - \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t \, dt = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\ln \left(\frac{k}{n} \right) - \ln t \right) dt \geq 0.$$

Ensuite,

$$0 \leq A_n \leq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\ln \left(\frac{k}{n} \right) - \ln \left(\frac{k-1}{n} \right) \right) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(\ln \left(\frac{k}{n} \right) - \ln \left(\frac{k-1}{n} \right) \right) = \frac{\ln n}{n},$$

de limite nulle.

Or, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=2}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t \, dt = \int_{1/n}^1 \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_{1/n}^1 = -1 + o(1),$$

en utilisant $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$.

Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}.$$

On aurait pu utiliser aussi la formule de Stirling, en manipulant plutôt une égalité plutôt que l'équivalent en lui-même...

Exercice 24

Exercice très classique sur les intégrales de Wallis : à retenir !!

1. Si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) (\cos t - 1) \, dt,$$

et il apparaît que l'intégrande est négative : $W_{n+1} \leq W_n$.

On peut même appliquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir : $W_{n+1} < W_n$.

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 car l'intégrande pour W_n est toujours positive : la suite converge vers $\ell \geq 0$.

On montre par les ε par exemple que la limite de W_n est nulle.

On fixe $\varepsilon \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

On partage l'intégrale en deux par Chasles :

$$0 \leq W_n = \int_0^\varepsilon \cos^n t \, dt + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n t \, dt \leq \varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n \varepsilon \, dt \leq \varepsilon + (\cos^n \varepsilon) \frac{\pi}{2}.$$

Cette dernière quantité tend vers ε car $|\cos \varepsilon| < 1$ - lorsque n tend vers $+\infty$: on en déduit l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq W_n \leq 2\varepsilon.$$

On obtient classiquement ce qu'il faut : la limite est nulle.

2. On va faire une IPP. Allons-y, mais il ne faut pas intégrer ou dériver n'importe quelle quantité!!

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times (1 - \sin^2 t) \, dt \\
&= W_n - \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t \times \cos^n t) \, dt \\
&= W_n - \left[\sin t \frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \times \frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \\
&= W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}.
\end{aligned}$$

On obtient rapidement l'égalité voulue.

3. On en déduit que l'on peut exprimer W_{2n} en fonction de $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et que l'on peut exprimer W_{2n+1} en fonction de $W_1 = 1$.

Voici les détails :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^{2n} k \text{ pair} \right)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} W_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\prod_{k=1}^{2n} k \text{ pair} \right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

4. Il suffit de remarquer par décroissance que :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n,$$

donc :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes fait le reste.

D'autre part, au vu des formules obtenues pour W_{2n} et W_{2n+1} , on peut écrire :

$$W_{2n+1} \times W_{2n} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2},$$

pratiquement directement.

5. On en déduit comme $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n+1}$ qu'en posant :

$$\xi_n = W_n \times \sqrt{n},$$

alors :

$$\xi_{2n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} (2n),$$

de limite $\frac{\pi}{2}$ et de même :

$$\xi_{2n+1}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} (2n),$$

encore de limite $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion, la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque : on peut aussi remarquer que la suite $\left((2n+1)W_n W_{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 14

On prend le logarithme de l'expression u_n proposée. On obtient en posant $v_n = \ln(u_n)$:

$$\begin{aligned} v_n &= -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right), \end{aligned}$$

de limite :

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = \int_1^2 \ln u du = \left[u \ln u - u \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{e}.$$

Exercice 15

Les sommes de Riemann nous indiquent que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = I.$$

On doit donc lever une forme indéterminée du typ « $\infty \times 0$ ».

On va utiliser le caractère C^2 de la fonction f .

On fixe un entier $n \geq 1$. Alors, en utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right) \left(t - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(c_{k,n})}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2,$$

pour avoir l'existence d'un $c_{k,n}$ dans les lignes suivantes, puis en utilisant le fait que la fonction continue f'' est continue donc bornée sur le segment $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k}{n} - t \right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f''(c_{k,n})}{2} \left(\frac{k}{n} - t \right)^2 dt \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f'\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

où la fonction g est $g : t \mapsto f'(t)$.

On en déduit que :

$$A_n = n \cdot I - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

quantité de limite :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t) dt = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Exercice 25

1. On révise le cours sur les séries !!

On trouve :

$$\int_n^{n+1} f \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f.$$

2. Si $\alpha \leq 0$, la suite est plus grande que $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ divergente vers $+\infty$.

On se place dans le cas $\alpha > 0$. La suite est croissante quoiqu'il arrive.

Si $\alpha > 1$, alors en prenant $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ continue et décroissante :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{n-1}^n f = 1 + \int_1^n t^{-\alpha} dt = 1 + \frac{1 - n^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

et la suite croissante est majorée donc convergente.

Si $\alpha \leq 1$, alors en notant S_n la somme partielle étudiée :

$$S_n \geq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

entraînant que tout diverge vers $+\infty$.

3. La première suite diverge vers $+\infty$ car la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ continue décroissante sur $[2, +\infty[$ est telle que :

$$\int_2^n f = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

de limite $+\infty$.

La seconde suite converge car la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$ continue décroissante sur $[2, +\infty[$ est telle que :

$$\int_2^n f = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^n \leq \frac{1}{\ln 2}$$

et donc la suite croissante est majorée par :

$$\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Elle converge.

Exercice 16

1. Si la fonction f garde un signe constant sur $]0, \pi[$ par continuité, la fonction f garde un signe constant sur $[0, \pi]$, par exemple positif. Ainsi, la fonction $f \times \sin$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $[0, \pi]$, avec $0 < \pi$, ce qui entraîne par le théorème aux quatre hypothèses que la fonction $f \times \sin$ est nulle sur $[0, \pi]$. Cela impose à la fonction f d'être nulle sur $]0, \pi[$.

Si la fonction f change une fois de signe sur $]0, \pi[$, par exemple au point a , quitte à considérer $-f$ plutôt que f , qui vérifie les mêmes hypothèses, on peut supposer par exemple que f est négative sur $]0, a[$ et positive sur $]a, \pi[$.

Or, la fonction $h : t \mapsto \sin(t - a) = \cos a \sin t - \sin a \cos t$ appartient à $\text{Vect}(\cos, \sin)$. Par linéarité de l'intégrale et compte tenu des hypothèses, alors :

$$\int_0^\pi f \times h = 0.$$

Or, la fonction $f \times h$ garde un signe constant sur $[0, \pi]$ car les fonctions f et h changent de signe au même moment. Le théorème aux quatre hypothèses montre que la fonction $f \times h$ est nulle sur $[0, \pi]$, donc la fonction f est nulle sur $[0, \pi] \setminus \{a\}$.

Quoiqu'il arrive (f garde un signe constant, f change une fois de signe ou f change au moins deux fois de signe), la fonction f s'annule au moins deux fois sur $]0, \pi[$.

2. On essaie une fonction f sous la forme $f : t \mapsto \cos(nt)$ par exemple.

Avec les formules trigonométriques, on obtient :

$$\int_0^\pi \cos(nt) \sin t \, dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)t - \sin(n-1)t}{2} \, dt = \left[\frac{-\cos(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)t}{2(n-1)} \right]_0^\pi,$$

et :

$$\int_0^\pi \cos(nt) \cos t \, dt = \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t}{2} \, dt = \left[\frac{\sin(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)t}{2(n-1)} \right]_0^\pi.$$

En prenant $n = 3$, on obtient que les deux intégrales précédentes sont nulles et la fonction $t \mapsto \cos(3t)$ convient.

Exercice 18

1. On obtient graphiquement (tracer un quart de cercle ou par le changement de variable $t = \cos(u)$ par exemple) :

$$a_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On obtient directement :

$$a_1 = \int_0^1 t \cdot (1 - t^2)^{1/2} \, dt = \left[-\frac{1}{3}(1 - t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n (t-1) \sqrt{1-t^2} dt,$$

qui est l'intégrale d'une fonction négative sur $[0, 1]$: $a_{n+1} - a_n \leq 0$. On peut même évoquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir $a_{n+1} < a_n$.

Il est clair que chaque a_n est positif.

Enfin, si $n \geq 0$ est un entier,

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

et le théorème des gendarmes montre que a_n tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On effectue une IPP :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 t^{n+1} \left(t \sqrt{1-t^2} \right) dt \\ &= \left[-t^{n+1} \frac{1}{3} (1-t^2)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1) t^n \frac{1}{3} (1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \frac{n+1}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{n+1}{3} (a_n - a_{n+2}). \end{aligned}$$

On obtient alors rapidement ce qu'il faut.

4. **Question un peu difficile, tout du moins astucieuse.**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot (n+1)(n+2)(n+3).$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot (n+2)(n+3)(n+4) \\ &= a_{n+1} \cdot (n+2)(n+3) \cdot (n+4) a_{n+2} = b_n. \end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $b_0 = \frac{\pi}{2}$.

De plus, par décroissance,

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

donc : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, ce qui montre que :

$$a_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n.$$

Conclusion,

$$\frac{\pi}{2} = b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n^2 \times n^3,$$

et :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Exercice 17

1. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!
2. On pose la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, qui est une fonction strictement croissante, bijective de $[0, 1]$ vers $[0, I]$, bijection de classe C^1 .

On voit alors que la seule subdivision qui marche est la subdivision σ_n telle que, par la relation de Chasles :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^{a_{n,k}} f = \frac{k}{n} I.$$

On doit alors nécessairement prendre :

$$a_{k,l} = F^{-1} \left(\frac{k}{n} I \right),$$

et par stricte croissance de F , donc de F^{-1} , on a bien que les $a_{k,n}$ ainsi définis conviennent. On a bien ainsi l'existence et l'unicité par la bijectivité de l'application F .

3. On interprète cette somme comme une somme de Riemann. Voyons cela. En notant A_n la quantité proposée, on écrit :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ F^{-1} \left(\frac{k}{n} I \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \left(\frac{k}{n} I \right), \text{ avec } g = f \circ F^{-1} : [0, I] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{aligned}$$

Cette somme de Riemann converge vers :

$$J = \frac{1}{I} \int_0^I g = \frac{1}{I} \int_0^I f(F^{-1}(t)) dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = F^{-1}(t)$, alors $t = F(u)$, puis $dt = F'(u) du = f(u) du$ et donc la limite à calculer vaut :

$$\frac{\int_0^1 f^2(u) du}{\int_0^1 f(u) du}.$$

Exercice 22

Le point commun aux trois questions est que l'on va calculer la limite d'une intégrale, lorsque les bornes tendent vers la même chose notée a et lorsque la fonction intégrée diverge en a . On utilisera alors un développement asymptotique de la fonction f en a , puis on intégrera ce développement.

1. Il ne faut pas espérer calculer l'intégrale, seulement la limite.

Au voisinage de 0 :

$$\frac{\cos(t^2)}{\sin t} = \frac{1}{t} + o(1),$$

donc :

$$\int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t} dt = \int_x^{3x} \frac{dt}{t} + o(x) = \ln 3 + o(x),$$

de limite $\ln 3$.

2. Si $0 < \varepsilon < M$ sont fixés, avec $0 < \varepsilon < 2\varepsilon < M < 2M$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-2x}}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{2\varepsilon}^{2M} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{changement } u = 2x] \\ &= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_M^{2M} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad [\text{utiliser Chasles}] \quad \star \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \left(\frac{1}{x} + \mathcal{O}(1) \right) dx = \ln 2 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

de limite $\ln 2$, lorsque ε tend vers 0^+

D'autre part,

$$0 \leq \int_M^{2M} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \int_M^{2M} \frac{e^{-M}}{M} dx = e^{-M},$$

de limite nulle lorsque M tend vers $+\infty$.

Conclusion, la limite à calculer vaut $\ln 2$.

Cette intégrale porte un nom : une intégrale télescopique, en le voyant par la simplification au point marqué \star .

3. La fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0, +\infty[\setminus \{0\}$ car si $x \geq 0$, on a un problème de définition de $\ln t$, pour t entre x et x^2 . Si $x > 0$ et $x \neq 1$, alors le segment d'extrémités x et x^2 est inclus dans $]0, 1[$ ou dans $]1, +\infty[$ et la fonction intégrée est bien continue entre x et x^2 .

On note F une primitive de $\frac{1}{\ln}$, primitive que l'on ne tente même pas de calculer, cette primitive étant définie tantôt sur $]0, 1[$ tantôt sur $]1, +\infty[$.

Alors, sur $]0, 1[$,

$$f(x) = F(x^2) - F(x)$$

et de même sur $]1, +\infty[$. La fonction f est C^1 sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ et :

$$f' : x \longmapsto 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Il est clair que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$f'(x) > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (remarquer que l'on ne travaille séparément que sur des intervalles...).

On calcule les limites de f en 0^+ , en 1 et en $+\infty$.

- En 0,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \circ(1) \, dt = \circ(1),$$

de limite nulle.

- En $+\infty$,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t} \right]_x^{x^2} = 2x - 2\sqrt{x},$$

de limite $+\infty$.

- En 1^- ou en 1^+ , les limites de f existent et ne sont pas forcément les mêmes a priori.

On va établir un développement asymptotique de $\frac{1}{\ln t}$ en 1. Lorsque x est au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{du}{\ln(1+u)} \text{ [changement } u = t-1] \\ &= \int_{x-1}^{x^2-1} \left(\frac{1}{u} + \mathcal{O}(1) \right) du \\ &= \ln \frac{x^2-1}{x-1} + \circ(1) \\ &= \ln(x+1) + \circ(1) \\ &= \ln(2) + \circ(1) \end{aligned}$$

de limite $\ln 2$.

On remarque que la fonction f est prolongeable par continuité au point 1, en posant $f(1) = \ln 2$. On remarque aussi que le théorème du prolongement de la dérivée montre, puisque :

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 1,$$

lorsque x tend vers 1 que la fonction prolongée est encore C^1 au voisinage de 1 et $f'(1) = 1$.

Pour être tout à fait complet, on peut étudier la branche infinie en $+\infty$.

On calcule $\frac{f(x)}{x}$: pour x assez grand, $\ln t \leq t^{1/3}$, donc

$$\frac{f(x)}{x} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^{1/3}} = \frac{1}{x} \left[\frac{3}{2} t^{2/3} \right]_x^{x^2} = \frac{3}{2} x^{1/3} - \frac{3}{2} x^{-1/3},$$

quantité tendant vers $+\infty$.

La courbe $y = f(x)$ admet une direction asymptotique de pente $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. Précisons qu'en 0^+ , comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, alors la courbe admettra une demi-tangente horizontale si l'on prolonge la fonction f en 0.

Exercice 20

1. On fixe deux entiers k et n naturels.

On remarque que 0 est une racine de multiplicité n dans $P_n(X)$.

Par la dérivation de Leibniz, on obtient :

$$P_n(X)^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{k}{\ell} (X^n)^{(\ell)} ((a - bX)^n)^{(n-\ell)}.$$

Lorsque l'on évalue le tout en 0, alors si $k < n$, chaque $(X^n)^{(\ell)}(0)$ sera nul car $\ell < n$. Si $k \geq n$, le seul terme non nul après évaluation se produira lorsque $\ell = n$ et ce terme est $(X^n)^{(n)}(0) = n!$. Le polynôme $(a - bX)^n$ est à coefficients entiers, ainsi que toutes les dérivées de ce polynôme, d'évaluation entière en 0 et le $n!$ qui vient d'apparaître détruit $\frac{1}{n!}$. Le tout est un entier.

Les choses sont un peu similaires pour $P_n^{(k)}(\pi)$ car en évaluant la somme du binôme en $\pi = \frac{a}{b}$, la seule évaluation non nulle pour $((a - bX)^n)^{(n-\ell)}(\pi)$ est lorsque $\ell = 0$ et cette évaluation vaut alors :

$$(-b)^n n!.$$

Le terme $n!$ se simplifie avec l'autre factorielle au dénominateur et tous les autres termes après simplifications donnent des entiers, que ce soit pour les coefficients binomiaux ou pour X^n évalué en $\frac{a}{b}$, car alors le dénominateur b^n se simplifie avec le terme $(-b)^n$ initialement présent. Bref, on n'a que des sommes d'entiers, après simplification.

2. On peut utiliser plusieurs IPP en dérivant systématiquement le polynôme. Le polynôme $P_n(X)$ est de degré $2n$. Au bout de k IPP, on obtient un crochet de la forme $\left[P_n^{(k)} \times f \right]_0^\pi$ et une nouvelle intégrale, au signe près de la forme $\int_0^\pi P_n^{(k)}(t) g(t) dt$, où les fonctions f et $g = f'$ sont dans $\{\pm \sin, \pm \cos\}$. Comme $f(0)$ et $f(\pi)$ sont toujours des entiers et qu'en prenant $k = 2n + 1$, la dernière intégrale obtenue est nulle, par la question Q1, chaque crochet donne un entier. L'intégrale I_n donne donc un entier.
3. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!

4. La fonction $t \mapsto t(a - bt)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc y est bornée par une constante $\xi > 0$. On en déduit :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^\pi \frac{\xi^n}{n!} \sin(t) dt \leq \frac{\pi \xi^n}{n!}.$$

5. Par les croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\xi^n}{n!} = 0$ (il peut être intéressant de revoir la démonstration faite en cours il y a longtemps...). Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Cependant, chaque I_n est un entier strictement positif, donc :

$$1 \leq I_n.$$

Il est donc impossible que I_n tende vers 0. On a une contradiction. On a montré que π était irrationnel.

Exercice 23

Exercice à mettre en annexe. Un des rares exercices où on va calculer une intégrale grâce aux sommes de Riemann, et non l'inverse.

1. On obtient la factorisation :

$$X^2 - 2 \cos t X + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it}).$$

2. (a) Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, la quantité $z = \theta - e^{it}$ n'est pas nulle, car θ est un nombre réel de module différent de 1. Par conséquent,

$$1 - 2\theta \cos t + \theta^2 = \left| \theta - e^{it} \right|^2 = |z|^2 > 0.$$

Par composition de fonctions continues de référence, la fonction f est alors clairement continue.

- (b) On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|^2 \\ &= 2 \ln \left| \prod_{k=0}^{n-1} \left(\theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \right| \\ &= 2 \ln \left| \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\theta - \omega) \right| \\ &= 2 \ln |\theta^n - 1|. \end{aligned}$$

(c) On peut calculer cette intégrale via la limite de la somme de Riemann :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{n} \ln |\theta^n - 1|.$$

On distingue deux cas :

- si $|\theta| < 1$, alors $\ln |\theta^n - 1|$ tend vers 0 et l'intégrale de Poisson est nulle ;
- si $|\theta| > 1$, alors $|\theta^{-1}| < 1$ et :

$$\frac{4\pi}{n} \ln |\theta^n - 1| = \frac{4\pi}{n} (\ln |\theta|^n + \ln |1 - \theta^{-n}|) = 4\pi \ln |\theta| + o(1).$$

L'intégrale vaut $4\pi \ln |\theta|$ dans ce cas.

Exercice 26

1. On trouve $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = 1$. Le fait que chaque a_n soit strictement positif provient directement du théorème aux quatre hypothèses (hypothèses à rappeler quoiqu'il arrive à l'écrit comme à l'oral).
2. On obtient via une IPP :

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n,$$

comme dans l'exercice 24.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème aux quatre hypothèses fournit directement $0 < b_n$.
On connaît l'encadrement hyper-classique :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t.$$

On en déduit :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t.$$

On en déduit par intégration :

$$b_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4} (a_{2n} - a_{2n+2}).$$

4. Il suffit de montrer que $a_{2n} - a_{2n+2} = o(a_{2n})$, pour avoir ce qu'il faut.
Or, $a_{2n} - a_{2n+2} = a_{2n} \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = o(a_{2n})$, d'où le résultat – en utilisant le théorème des gendarmes pour l'encadrement de $\frac{b_n}{a_{2n}}$.
5. • On effectue une IPP dans l'intégrale de droite, en intégrant $\sin t \cos^{2n+1} t$. On obtient directement ce qu'il faut.

- Par la formule que l'on vient de montrer, on obtient par une nouvelle IPP :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+2}}{n+1} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt \\
&= \left[t^2 \sin t \cos^{2n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(\cos t \cos^{2n+1} t - \sin^2 t (2n+1) \cos^{2n} t \right) dt \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(\cos^{2n+2} t - (2n+1) \cos^{2n} t + (2n+1) \cos^{2n+2} t \right) dt \\
&= (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}.
\end{aligned}$$

- On écrit par le point précédent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)^2} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+1)b_n}{(2n+2) a_{2n+2}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \\
&= \frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}.
\end{aligned}$$

6. On a finalement pu interpréter la série de Riemann comme une somme télescopique !!

La série télescopique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right)$ est convergente si et seulement si la suite

$\left(\frac{b_n}{a_{2n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ce qui est le cas puisque la suite est de limite nulle.

Pour le calcul de la somme, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right) \\
&= 2 \left(\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_N}{a_{2N}} \right) \\
&= 2 \frac{b_0}{a_0} + o(1).
\end{aligned}$$

Or :

$$b_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \, dt = \frac{\pi^3}{24} \text{ et } a_0 = \frac{\pi}{2},$$

donc :

$$2 \frac{b_0}{a_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il s'agit de la somme de la série convergente $\zeta(2)$.

Exercice 27

On peut y voir de la dualité, ou des polynômes de Lagrange, sachant que les deux visions des choses sont « duales » l'une de l'autre !!! Je choisis la dualité.

Les nombres $\text{sh}(k)$, lorsque k décrit l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$ sont tous différents. En posant pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la forme linéaire non nulle :

$$\varphi_k : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto P(\text{sh}(k)) \end{array} \right.$$

alors la famille $\mathcal{F} = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ forme une famille libre, en évaluant dans une combinaison linéaire nulle en les polynômes de Lagrange $L_0(X), \dots, L_n(X)$ associés aux nombres différents $\text{sh}(0), \dots, \text{sh}(n)$.

La famille \mathcal{F} forme donc une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$, espace de dimension $(n+1)$.

On note maintenant la forme linéaire :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto \int_1^3 P(\sin t) e^{-t^3} dt \end{array} \right. .$$

Les scalaires λ_k qui apparaissent sont exactement les coordonnées de la forme linéaire ψ dans la base $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$. Si on osait, on pourrait passer dans le bi-dual et donc conclure l'exercice en disant que les seuls scalaires λ_k qui marchent valent :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = (\varphi_k)^*(\psi).$$