LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

Exercice 1. [$\star$]

Une axiomatique est dite contradictoire si à partir de ses axiomes et des règles de la logique on parvient à démontrer qu'il existe une assertion $\mathscr{P}$ qui est à la fois vraie et fausse. Démontrer que dans une axiomatique contradictoire toute assertion est alors vraie et fausse.

Dans une telle axiomatique, on perd donc toute notion de vérité. On ne sait pas si notre théorie des mathématiques est ou non contradictoire ! Pire encore : le second théorème d'incomplétude de Gödel dit en gros qu'on ne peut pas le savoir...

Exercice 2. [$\bigstar$]

La barre de Scheffer | est le connecteur logique « est incompatible avec » défini, pour toutes assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, par $(\mathscr{P} \mid \mathscr{Q}) \Longleftrightarrow (\overline{\mathscr{P}} \text{ ou } \overline{\mathscr{Q}})$.

Exprimer la négation, le $\boxed{\text{et}}$, le $\boxed{\text{ou}}$ et l'implication en utilisant uniquement la barre de Scheffer.

Exercice 3. [$\bigstar$]

Pour toute assertion $\mathscr{P}$, on pose $v(\mathscr{P}) = 1$ si $\mathscr{P}$ est vraie et $v(\mathscr{P}) = 0$ sinon. Pour toutes assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, exprimer, en fonction de $v(\mathscr{P})$ et $v(\mathscr{Q})$, les quantités :

$$v(\overline{\mathscr{P}}), \qquad v(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}), \qquad v(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}), \qquad v(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \qquad \text{et} \qquad v(\mathscr{P} \text{ ou bien } \mathscr{Q})$$

Exercice 4. [$\circ$]

Nier les affirmations suivantes :

1. Chaque été, il pleut au moins un jour.
2. Cet été, il a plu tous les jours.
3. Tous les professeurs du lycée Henri IV qui ont les yeux bleus et de l'embonpoint gagneront à l'Euromillion et prendront leur retraite avant 50 ans.
4. Dans la vie de tout homme, il y a un jour où tout ce que l'on essaye échoue et un jour où tout ce que l'on essaye réussit.
5. Dans tout devoir surveillé, il y a toujours une question qu'aucun élève ne sait faire.
6. L'an dernier, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths.
7. Il y a des élèves qui n'aiment ni la physique, ni les mathématiques !

Exercice 5. [$\star$]

Sébastien, voulant dérober le cœur de la jolie et innocente Isabelle, lui dit : « Je te propose le jeu suivant : je vais affirmer quelque chose concernant ton futur. Si ce que je dis est vrai, tu devras me donner ta photo et si ce que je dis est faux, tu devras ne pas me la donner ». Isabelle accepte. Sébastien lui dit alors : « Tu ne me donneras pas ta photo et tu ne m'épouseras pas ! ».

Que s'est-il en conséquence passé le 19 juin 2004 ?

Exercice 6. [$\star$]

Vous devez choisir entre deux boites dont l'une contient un lingot et l'autre une invitation pour la Star Academy. Les deux trésors sont gardés par deux hommes dont l'un ment systématiquement et l'autre dit toujours la vérité. Vous n'avez le droit de poser qu'une seule question à l'un des deux. Quelle question posez-vous pour savoir ce que contiennent les boites ?

Exercice 7. [★]

Cet exercice donne un aperçu de la démonstration d'un des théorèmes d'incomplétude de Gödel : « Dans toute théorie mathématique, il existe une assertion vraie indémontrable ». Pour conserver la simplicité de l'argument, nous éludons certaines difficultés (en particulier, nous ne traitons que le cas particulier où les assertions de la théorie sont numérotables ...).

Supposons que l'on a numéroté toutes les assertions : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Supposons par ailleurs que l'on a numéroté certaines parties de $\mathbb{N}^*$, appelées *parties répertoriées* et notées $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_n, \ldots$ On dit que n est *remarquable* lorsque $n \in \mathscr{P}_n$. Si m est le numéro de l'assertion « n est remarquable », on dit que m est le *conjugué* de n. On suppose de plus que les parties répertoriées ont été choisies de sorte que :

(i) Les numéros des assertions démontrables forment une partie répertoriée.

(ii) Les numéros des assertions réfutables forment une partie répertoriée.

(iii) Le complémentaire dans $\mathbb{N}^*$ d'une partie répertoriée est une partie répertoriée.

(iv) Pour toute partie répertoriée X, il existe une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X.

Considérons alors la partie X constituée des numéros des assertions non démontrables. C'est une partie répertoriée d'après (i) et (iii). On peut donc lui associer, d'après (iv), une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X. On note n le numéro de Y (de sorte que $Y = \mathscr{P}_n$) et l'on désigne par m le conjugué de n (de sorte que A_m : « n est remarquable »).

1. Démontrer que n est remarquable. *On pourra raisonner par l'absurde et démontrer, sous l'hypothèse que n n'est pas remarquable, que A_m est à la fois fausse et démontrable !*
2. En déduire que A_m est une assertion vraie non démontrable.

Exercice 8. [◦]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

1. Soit C une partie de E. Démontrer que $(A \subset B) \Longrightarrow \big((A \cup C) \subset (B \cup C)\big)$.
2. a) On suppose que $\exists C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C)$. A-t-on $A \subset B$?
   b) On suppose que $\forall C \subset E,\ (A \cup C) \subset (B \cup C)$. Démontrer que $A \subset B$.

Exercice 9. [⋆]

Soient E un ensemble et $(A_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m}$ des parties de E. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i,j} \qquad \text{et} \qquad V = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}.$$

1. Déterminer une inclusion liant U et V. Démontrer qu'en général cette inclusion est stricte.
2. On suppose que $\forall i_1, i_2 \in [\![1;n]\!],\ \forall j_1, j_2 \in [\![1;m]\!],\ (i_1 \neq i_2) \Longrightarrow (A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \varnothing)$. Démontrer que $U = V$.

Exercice 10. [⋆]

Soient E, F, G, H quatre ensembles.

1. Démontrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.
2. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 11. [⋆]

Si $E = \{a\}$, déterminer $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E)\big)$.

Exercice 12. [$\star$]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Résoudre, pour l'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$, les équations suivantes :

1. $X \cup A = B$;
2. $X \setminus A = B$;
3. $X \cap A = B$;
4. $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing$.

Exercice 13. [$\circ$]

Deux ensembles disjoints sont-ils nécessairement distincts ?

Exercice 14. [$\bigstar$]

On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

Exercice 15. [$\circ$]

Sachant que $\sqrt{6}$ est un irrationnel, démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en est également un.

Exercice 16. [$\bigstar$]

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.