

Devoir Surveillé n° 2 (4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Problème – sup-irréductibles, familles sup-génératrices, et théorème de représentation de Birkhoff

Dans tout le problème, les ensembles considérés sont toujours **finis**, même si cela n'est pas précisé à chaque fois.

Le but du problème est de trouver des parties G d'un ensemble ordonné E engendrant cet espace E au sens des bornes supérieures (dans le sens où tout élément de E est borne supérieure d'une partie de G). On montre en particulier le rôle important des éléments sup-irréductibles dans cette étude, c'est-à-dire les éléments qui ne sont borne supérieure d'aucune partie dont ils ne sont pas éléments (partie I).

Nous utilisons ces résultats pour montrer certains théorèmes de représentations (consistant à se ramener à des ensembles ordonnés de référence) : un premier résultat élémentaire (partie II) affirme que tout ensemble est « isomorphe » à un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties (c'est-à-dire qu'il peut lui être identifié).

Nous montrons ensuite que dans le cas où l'ordre sur E vérifie des conditions particulières (notion de treillis distributif étudié en partie III), E est isomorphe à l'ensemble des sections commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles, ces notions étant introduites et étudiées dans les parties IV et V. Ce théorème est dû à Birkhoff (partie VI). On en déduit en particulier que lorsque E est un treillis, l'ensemble ordonné de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble ordonné de ses inf-irréductibles.

Si x_1, \dots, x_n sont des éléments de E , on écrit plus simplement $\sup(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $\sup(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Questions préliminaires

Soit E un ensemble ordonné et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E admettant tous une borne supérieure.

1. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\{\sup(A_i), i \in I\}$ ont mêmes majorants.
2. En déduire que si l'une des bornes supérieures de $\bigcup_{i \in I} A_i$ ou de $\{\sup(A_i), i \in I\}$ existe, l'autre aussi, et dans ce cas

$$\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup\{\sup(A_i), i \in I\}.$$

Cette dernière borne supérieure sera notée plus simplement $\sup_{i \in I} \sup(A_i)$.

3. On suppose que pour tous x, y de E , $\sup(x, y)$ existe. Montrer que si x, y et z sont dans E , la borne supérieure ci-dessous existe et :

$$\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z)) = \sup(\sup(x, y), z).$$

On admettra sans preuve les propriétés similaires pour les bornes inférieures.

Partie I – Éléments sup-irréductibles

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné fini (on le désignera simplement par E dans la suite). Un élément x est dit sup-irréductible si il n'est la borne supérieure d'aucun sous-ensemble X de E ne le contenant pas, donc si

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad (x = \sup(X) \implies x \in X).$$

Pour $x \in E$, on note E^-x l'ensemble des éléments de E couverts par x , c'est-à-dire les éléments $y \in E$ tels que $y < x$ et tels qu'il n'existe pas $z \in E$ vérifiant $y < z < x$.

1. Montrer que les éléments de E^-x sont deux à deux non comparables (i.e. il s'agit d'une cochaîne).
2. Soit $x \in E$ un élément sup-irréductible tel que $E^-x \neq \emptyset$, et que E^-x admette une borne supérieure s .
 - (a) Montrer que $x > s$.
 - (b) En déduire que $|E^-x| = 1$.
3. Montrer que si $|E^-x| = 1$ et si y est l'unique élément de E^-x , pour tout z tel que $z < x$, on a $z \leq y$.
4. On suppose que $|E^-x| \geq 2$ et que E^-x n'admet pas de borne supérieure.
 - (a) Montrer que x est un élément minimal de l'ensemble des majorants de E^-x .
 - (b) Montrer qu'il existe un majorant y de E^-x non comparable avec x .
5. Montrer que $x \in E$ est sup-irréductible si et seulement si l'une des trois conditions exclusives suivantes est satisfaite :
 - (i) x est un élément minimal de E , mais non minimum. Que dire de E^-x dans ce cas ?
 - (ii) $|E^-x| = 1$
 - (iii) $|E^-x| \geq 2$ et E^-x n'admet pas de borne supérieure.

On note désormais $S(E)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de E .

Une partie G de E est dite sup-génératrice si tout élément de E est borne supérieure d'un sous-ensemble de G , donc si pour tout $x \in E$, il existe $X \subset G$ tel que

$$x = \sup(X).$$

Pour $x \in E$, on définit la hauteur $h(x)$ de E comme étant la longueur maximale d'une chaîne $x_1 < x_2 < \dots < x_k = x$.

6. (a) Soit $x \in E$. Montrer que si x n'est pas sup-irréductible, il existe $X \subset E$ tel que $\sup(X) = x$ et tel que pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x)$.
- (b) Montrer que l'ensemble $S(E)$ formé des éléments sup-irréductibles de E est une partie sup-génératrice de E .

Pour $x \in E$, on désigne par $S_x(E)$ l'ensemble des sup-irréductibles majorés par x :

$$S_x(E) = \{s \in S(E) \mid s \leq x\}.$$

7. Montrer que $\sup(S_x(E)) = x$
8. Soit G une partie sup-génératrice de E . Montrer que $S(E) \subset G$.
9. En déduire que G est une partie sup-génératrice de E si et seulement si $S(E) \subset G$.

Ainsi, l'ensemble $S(E)$ des éléments sup-irréductibles est minimale parmi l'ensemble des familles sup-génératrices de E .

Partie II – Applications croissantes et codages

Soit (E, \leq_E) et (F, \leq_F) deux ensembles ordonnés. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement \leq aussi bien pour \leq_E que pour \leq_F .

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est :

- croissante si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$;
- strictement croissante si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x < y \implies f(x) < f(y)$;
- un codage si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.
- un isomorphisme si c'est un codage bijectif.

1. Montrer qu'une application strictement croissante est croissante.
2. Montrer que si f est croissante et injective, alors f est strictement croissante.
3. Une application strictement croissante est-elle nécessairement injective ?
4. Montrer que si f est un codage alors f est injective.
5. Montrer que si f est un codage, alors f est strictement croissante.
6. Que dire de la composée de deux codages ? de deux isomorphismes ?
7. Avec les notations de la partie I, montrer que $x \mapsto S_x(E)$ est un codage de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, tout ensemble ordonné peut être identifié à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble de ses parties.

8. Montrer plus généralement que si G est une partie sup-génératrice de E , alors $x \mapsto G_x$ est un codage de E dans $\mathcal{P}(G)$, G_x désignant l'ensemble des éléments de G majorés par x .

Dans la suite du problème, on affine ce résultat en montrant que sous quelques hypothèses supplémentaires sur E (se résumant en disant que E est un treillis distributif), l'application $x \mapsto S_x$ se coresteint un isomorphisme entre le treillis E et le treillis des sections commençantes de $S(E)$, que nous définissons plus loin.

Partie III – Treillis distributif

Un treillis est un ensemble ordonné non vide (T, \leq) dans lequel toute partie $X \subset T$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1. Montrer qu'un treillis T possède un maximum et un minimum.
2. Montrer que T est un treillis si et seulement si T est non vide, et toute paire $\{x, y\} \subset T$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour simplifier les notations, on note $x \vee y = \sup(x, y)$ et $x \wedge y = \inf(x, y)$. On dit qu'un treillis T est distributif si pour tout $(x, y, z) \in T^3$,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

3. Soit T un treillis distributif. Montrer que pour tout élément s sup-irréductible de T , et tout $X \subset T$, $s \leq \sup X$ implique $s \leq x$ pour au moins un élément x de X .

Indication : on pourra considérer $s \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n)$ où les x_i sont les éléments de X .

4. Montrer que pour tout $(x, y) \in T^2$, $S_{x \vee y}(T) = S_x(T) \cup S_y(T)$.
5. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un exemple de treillis distributif de cardinal 2^n .

Partie IV – Le treillis des sections commençantes

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné (pas nécessairement un treillis). Une partie $C \subset E$ est dite commençante si pour tout $y \in C$ et tout $t \in E$ tel que $t \leq y$, on a $t \in C$. Soit pour tout $x \in E$, $E_x = \{y \in E \mid y \leq x\}$ l'ensemble des minorants de x .

1. Montrer que si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties commençantes, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ et $\bigcap_{i \in I} C_i$ sont des parties commençantes
2. Montrer que pour tout $x \in E$, E_x est une partie commençante.
3. Montrer que toute partie commençante C peut s'écrire sous la forme $C = \bigcup_{x \in C} E_x$.
4. Soit $\mathcal{C}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des sections commençantes de E , qu'on munit de l'inclusion. Montrer que $\mathcal{C}(E)$ est un treillis distributif.
5. Montrer que $C \in \mathcal{C}(E)$ est un sup-irréductible de $\mathcal{C}(E)$ si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $C = E_x$.
Indication : pour le sens direct, on pourra se servir de la partie I.
6. En déduire que tout ensemble ordonné E est isomorphe à l'ensemble ordonné des sup-irréductibles d'un treillis distributif (c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre les 2).

Partie V – Comparaison des sup- et des inf-irréductibles du treillis des sections commençantes

On définit la notion d'élément inf-irréductible de façon similaire à celle de sup-irréductible, par symétrie : un élément i est inf-irréductible si et seulement s'il n'est la borne inférieure d'aucun sous-ensemble de E ne le contenant pas. On admettra que toutes les propriétés obtenues pour les sup-irréductibles ont leur analogue pour les inf-irréductibles, qu'on pourra utiliser sans justification. On note $I(E)$ l'ensemble des éléments inf-irréductibles de E .

Soit E un ensemble ordonné, et $\mathcal{C}(E)$ le treillis de ses parties commençantes. On note, pour x dans E , $E^x = \{y \in E \mid y \geq x\}$, et $i(x) = E \setminus E^x$.

1. Montrer que $i(x)$ est un élément de $\mathcal{C}(E)$.
2. Montrer que $i(x)$ est un inf-irréductible de $\mathcal{C}(E)$.
3. Soit C une partie commençante de X .
 - (a) Montrer que $C = \bigcap_{x \notin C} i(x)$.
 - (b) En déduire que tout inf-irréductible de $\mathcal{C}(E)$ est de la forme $i(x)$.
4. Justifier l'existence d'un isomorphisme (c'est-à-dire un codage bijectif) entre l'ensemble $S(\mathcal{C}(E))$ des sup-irréductibles de $\mathcal{C}(E)$ et l'ensemble $I(\mathcal{C}(E))$ des inf-irréductibles de $\mathcal{C}(E)$.

Partie VI – Théorème de représentation de Birkhoff

Soit T un treillis distributif. L'ensemble $S(T)$ désigne toujours l'ensemble des éléments sup-irréductibles de T . On note conformément à la partie I, $S_x(T) = \{s \in S(T) \mid s \leq x\}$.

On définit $c : T \mapsto \mathcal{C}(S(T))$ l'application qui à x associe $S_x(T)$.

1. Montrer que c est bien définie, c'est-à-dire que $S_x(T)$ est une section commençante de $S(T)$.
2. Montrer que c est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Ce résultat affirme donc que tout treillis distributif est isomorphe au treillis des parties commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles (théorème de représentation de Birkhoff)

3. Soit T un treillis distributif. Montrer que l'ensemble $S(T)$ de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble $I(T)$ de ses inf-irréductibles.