SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. [∘]
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \left(\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b} \right).$$

Exercice 2. [⋆]
Donner un exemple d'une série réelle convergente $\sum a_n$ telle que la série $\sum {a_n}^3$ diverge.

Exercice 3. [⋆]
Soit (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}\cdot$$

Démontrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 4. [★]
Soit $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ une série positive convergente. Démontrer que $\sum_{n \geqslant 1} {u_n}^{1-1/n}$ converge.

Exercice 5.
Soit $\alpha < 1$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right]^{-1}.$$

Exercice 6. [⋆]
Déterminer, en fonction de $a > 0$, la nature et la somme (lorsque c'est possible) de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} a^{\lfloor \log n \rfloor},$$

où log désigne le logarithme en base 10.

Exercice 7. [∘] (Série lacunaire)
Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n},$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Indication : On commencera par rechercher les valeurs de n pour lesquelles u_n n'est pas nul.

Exercice 8. [∘]

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\arctan \dfrac{2}{n^2} = \arctan \dfrac{1}{n-1} - \arctan \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. En déduire la nature et la somme de la série de terme général $\arctan \dfrac{2}{n^2}\cdot$

Exercice 9. [$\circ$]

Soit $a \in]0;1[$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = a$ et

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2.$$

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} {u_n}^2$ converge et donner la valeur de sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n/u_{n+1})$ et en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.