Planche de colle

Exercice de colle

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation :
$$\ln(x+n) + x = n$$
admet une seule solution u_n.
2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer les deux premiers termes dans un développement asymptotique de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que la courbe $y = F(x)$ contienne tous les points (n, u_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$. On pose la fonction :
$$f_n : \left| \begin{array}{ccc}]-n,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+n)+x \end{array} \right. .$$
La fonction f_n est de classe C^1 et :
$$f_n' : x \longmapsto \frac{1}{x+n} + 1 > 0.$$
La fonction f_n est donc strictement croissante sur son intervalle de définition. De plus, les limites de cette fonction aux bornes de son domaine sont $\pm\infty$. La fonction f_n est donc une bijection et l'équation $f_n(x) = n$ admet une seule solution :
$$u_n = f_n^{-1}(n).$$
2. En utilisant les notations précédentes, on remarque que :
$$f_n(u_n) = n \text{ et } f_{n+1}(u_{n+1}) = n+1.$$
D'autre part, dès que le réel t est strictement supérieur à $\dfrac{1}{e-1} \simeq 0.58$, alors $1 < t(e-1)$, puis $t+1 < e\,t$, et donc :
$$\ln(t+1) < 1 + \ln t.$$
Or, si $n \geqslant 1$ est un entier, alors :
$$f_n(0) = \ln n < n = f_n(u_n),$$

donc par stricte croissance de la fonction f_n,

$$0 < u_n$$

et donc :

$$n + u_n > 1 > \frac{1}{e-1}.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(u_n) & = & \ln(u_n + n + 1) + u_n \\ & < & 1 + \ln(u_n + n) + u_n \\ & = & 1 + n \\ & = & f_{n+1}(u_{n+1}). \end{array}$$

Toujours par stricte croissance de la fonction f_{n+1},

$$u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est strictement croissante à partir du rang 1.
De plus, la suite u ne peut converger car sinon, en notant $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$, le passage à la limite dans :

$$\frac{\ln(n + u_n) + u_n}{n} = 1,$$

donnerait par les croissances comparées :

$$0 = 1.$$

Ainsi, la suite u est divergente vers $+\infty$.

3. On en déduit :

$$n = \ln(u_n + n) + u_n > u_n > -n,$$

donc $u_n = \mathscr{O}(n)$, puis $\ln(u_n + n) = \mathscr{O}(\ln n) = \circ(n)$ amenant déjà le premier terme dans le développement asymptotique :

$$u_n = n + \circ(n).$$

Ensuite,

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & n - \ln(u_n + n) \\ & = & n - \ln(2n + \circ(n)) \\ & = & n - \ln(2n) + \ln(1 + \circ(1)) \\ & = & n - \ln n - \ln 2 + \circ(1). \end{array}$$

On a ainsi obtenu finalement les trois premiers termes dans un développement asymptotique de u_n.

4. La réponse est non.
   En effet, supposons l'existence d'une telle fraction rationnelle $F(X)$.
   On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$F(n) = u_n = n - \ln n - \ln 2 + \circ(1).$$
   La fraction rationnelle $G(X) = F(X) - X = \dfrac{R(X)}{S(X)}$ dans $\mathbb{R}(X)$ vérifie alors :
$$G(n) = -\ln n - \ln 2 + \circ(1)$$
   au voisinage de $+\infty$.
   On en déduit :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} G(n) = -\infty,$$
   imposant l'inégalité sur les degrés :
$$\deg(R) > \deg(S).$$
   On pose aX^r le terme dominant dans $R(X)$ et bX^s le terme dominant dans $S(X)$. On en déduit :
$$G(n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \frac{a}{b}\, n^{r-s}.$$
   Par conséquent,
$$\frac{a}{b}\, n^{r-s} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} -\ln n,$$
   et donc :
$$0 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} -\frac{\ln n}{n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a}{b}\, n^{r-s-1}.$$
   La quantité $\dfrac{a}{b}$ est non nulle, ce qui impose à l'exposant positif $r - s - 1$ d'être nul, mais dans ce cas, la limite est à la fois nulle et égale à $\dfrac{a}{b}$: impossible.
   Il n'y a aucune fraction rationnelle $F(X)$ qui convienne.