MATRICES

Dans cette feuille d'exercices, les lettres $n, m, q, r, \ldots$ désignent des entiers naturels non nuls.

Exercice 1. [∘]

Expliciter $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans les cas suivants :

a) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = \max\{i, j\}\,;$

b) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = |i - j|\,;$

c) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = 1$ si $i \leqslant j$ et $a_{ij} = 0$ sinon ;

d) $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{ij} = \left\lfloor \dfrac{i+j}{n} \right\rfloor.$

Exercice 2. [∘]

Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. [∘]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ qui commutent. Démontrer que A et B^{-1} commutent puis que A^{-1} et B^{-1} commutent.

Exercice 4. [∘]

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   b) Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$. À l'aide de la relation obtenue, retrouver A^{-1}.
2. a) La matrice B est-elle inversible ?
   b) Calculer B^3 et redémontrer par l'absurde que B n'est pas inversible.

Exercice 5. [∘]

À l'aide de votre calculatrice, inverser les matrices suivantes puis commenter

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H^{\approx} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,33 \\ 0,50 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. [∘]

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.
2. Calculer $R(0)$. En déduire que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et préciser son inverse.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le déterminant.

Exercice 7. [$\circ$]

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que ${}^tAA = I_n$. Démontrer que $A{}^tA = I_n$.
2. On suppose cette fois que $A{}^tAA = I_n$. Démontrer que $A^3 = I_n$.

Exercice 8. [$\circ$]

Soit $A \in \mathscr{M}_2(K)$. Démontrer que

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I_2 = 0_2$$

et en déduire qu'il existe deux suites $(\alpha_n), (\beta_n) \in K^{\mathbb{N}}$ définies par récurrence telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2.$$

Application : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$.

Exercice 9. [$\star$]

1. Soient $C \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ une matrice colonne et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(K)$ une matrice ligne.
   On pose $\lambda = LC$. Que dire de λ ?
   On pose $M = CL$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer M^p en fonction de p, λ et M.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. [$\circ$]

1. Soit $M, P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible. On pose $D = P^{-1}MP$. Démontrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$.
2. Soient
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   a) Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
   b) Calculer D^k puis M^k pour tout $k \geqslant 0$.

Exercice 11. [$\star$]

Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. [$\star$]

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 13. [$\circ$]

Soient $M \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $N \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Démontrer que $\operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$.

Exercice 14. [$\circ$]

Démontrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 15. [$\circ$]

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^tA) = 0$?

Exercice 16. [$\circ$]

Résoudre l'équation (E), d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donnée par

$$(E) \qquad X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. [$\star$]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Résoudre l'équation $X + (\mathrm{Tr}\, X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(K)$.

Exercice 18. [$\circ$]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices symétriques. Démontrer que AB est symétrique si, et seulement si, A et B commutent. Énoncer deux autres résultats analogues.

Exercice 19. [$\circ$]

Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Démontrer que $M + N$ et MN sont nilpotentes.

Exercice 20. [$\circ$]

Soit $N \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente. Démontrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 21. [$\star$]

Pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotente, on pose

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k.$$

1. Pourquoi cette définition a-t-elle un sens ?
2. Soit N_3 la matrice 3×3 strictement triangulaire supérieure dont tous les coefficients au dessus de la diagonale valent 1. Calculer $\exp(N_3)$.
3. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(K)$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Démontrer que
$$\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N).$$
4. Soit $N \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente. Démontrer que $\exp(N)$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 22. [$\star$] (Matrices élémentaires ♡)

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,j}$ le *symbole de Kronecker* défini par $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

Pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, on considère la *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices i, j qui vaut 1.

1. a) Soient $i, j, k, \ell \in [\![1; n]\!]$. Démontrer que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{k\ell})$.
   b) Soient $i, j, k, \ell \in [\![1; n]\!]$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(K)$. Calculer $E_{i,j}M$, $ME_{k,\ell}$ et $E_{i,j}ME_{k,\ell}$. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(E_{i,j}M)$.
2. a) Trouver les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$.
   b) Trouver les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{GL}_n(K)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que, pour toute matrice $C \in \mathscr{M}_n(K)$, on ait $\mathrm{Tr}(AC) = \mathrm{Tr}(BC)$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 23. [$\star$]

Une matrice carrée réelle est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Démontrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un monoïde multiplicatif.

Exercice 24. [$\star$] (Quaternions)

1. On pose
$$\mathscr{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Démontrer que $\mathscr{R}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$.
2. On pose
$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
3. On pose
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & \omega \\ -\overline{\omega} & \overline{z} \end{pmatrix} : z, \omega \in \mathbb{C} \right\}.$$
   a) Démontrer que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif. C'est le corps des *quaternions* d'Hamilton.

   ► On pose
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   b) Établir la table de multiplication de $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$. En déduire que $G = \{\pm\mathbf{1}; \pm\mathbf{i}; \pm\mathbf{j}; \pm\mathbf{k}\}$ est un groupe, appelé *groupe quaternionique*.

   c) Démontrer que tout quaternion $q \in \mathbb{H}$ s'écrit, d'une manière unique, sous la forme $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   d) À tout quaternion $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, on associe son conjugué $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

      α] Pour tout $q \in \mathbb{H}$, calculer $q\overline{q}$.

      β] Pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, démontrer que $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \times \overline{q_1}$.

      γ] Démontrer que l'ensemble des nombres entiers qui sont somme de quatre entiers est stable par multiplication.

      Remarque : Ce résultat est l'une des étapes de la démonstration du théorème des quatre carrés de Lagrange : Tout entier naturel est la somme de quatre carrés.

Exercice 25. [$\star$]

Soit la suite de Fibonaci $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
On pose
$$X_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.

   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ {f_{n+1}}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$.

   C'est l'identité de Cassini. Lewis Caroll a imaginé un paradoxe géométrique fameux à partir de cette relation : un puzzle rectangulaire de côtés f_n et f_{n+2} forme presque un carré de côté f_{n+1}. Ainsi, pour $n = 5$, on obtient $5 \times 13 = 8^2$, c'est-à-dire $65 = 64$!!

   Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5{f_n}^2 + 4(-1)^n}}{2}.$$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{-n} en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
3. a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer f_{n+p+1} en fonction de f_n, f_{n+1}, f_p et f_{p+1}.

   b) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de f_{2n+1} et de f_{2n} en fonction de f_n et f_{n+1}.
   Écrire un algorithme de calcul de f_n nécessitant $\mathscr{O}(\ln n)$ additions et multiplications.