

Dénombrabilité et sommabilité

Table des matières

1	Ensembles dénombrables	2
2	Le problème des séries semi-convergentes.	6
3	Familles sommables de réels positifs	6
4	Familles sommables de complexes	11
5	Propriétés des familles sommables	14
5.1	Linéarité	14
5.2	Commutativité	16

1 Ensembles dénombrables

Définition.

Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec \mathbb{N} .

Exemples. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.

Propriété. Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable.

Démonstration.

Soit P une partie infinie de \mathbb{N} . On va montrer qu'il existe une unique bijection strictement croissante de \mathbb{N} sur P .

- *Unicité.* Supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P$ strictement croissante.
 - ◊ Pour tout $p \in P$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = \varphi(k)$. Or $\varphi(k) \geq \varphi(0)$, donc pour tout $p \in P$, $p \geq \varphi(0)$, ce qui prouve que (1) : $\varphi(0) = \min(P)$.
 - ◊ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $p \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = \varphi(k)$. $k \geq n$, donc $\varphi(k) \geq \varphi(n)$, donc pour tout $p \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$, $p \geq \varphi(n)$. De plus $\varphi(n) \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$, donc (2) : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) = \min(P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\})$.

Les relations (1) et (2) définissent par récurrence φ de manière unique.

- *Existence.* Notons φ l'application de \mathbb{N} dans P définie par les relations (1) et (2). φ est correctement définie, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$ est non vide (P est supposé infini), donc il possède un minimum dans \mathbb{N} .

Montrons que φ est une bijection strictement croissante.

- ◊ Soient $p \in P$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p \notin \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$.

Si $n = 0$, $p \neq \varphi(0) = \min(P)$, donc $p > \varphi(0)$.

Si $n > 0$, $p \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$, donc $p \geq \min(P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}) = \varphi(n)$.

Or $p \neq \varphi(n)$, donc $p > \varphi(n)$.

Ainsi, pour tout $p \in P$ et $n \in \mathbb{N}$, (3) : $p \notin \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\} \implies p > \varphi(n)$.

- ◊ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (2), $\varphi(n+1) \notin \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$,

donc d'après (3), $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Ainsi φ est strictement croissante. En particulier, elle est injective.

- ◊ De plus, si $\varphi(n) \geq n$, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. Ainsi, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Soit $p \in P$. $p \leq \varphi(p)$, donc d'après la contraposée de (3) avec $n = p$, $p \in \{\varphi(0), \dots, \varphi(p)\}$.

Ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = \varphi(k)$, ce qui prouve la surjectivité. \square

Exemple. L'ensemble \mathbb{P} des nombres premiers est dénombrable et en notant p_n le n ème nombre premier, on a $\mathbb{P} = \{p_n/n \in \mathbb{N}^*\}$.

Propriété. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Démonstration.

Supposons que I est un ensemble et qu'il existe une partie P de \mathbb{N} et une bijection $\varphi : P \rightarrow I$.

Si P est finie, alors I est fini.

Sinon, d'après la propriété précédente, il existe une bijection de \mathbb{N} dans P , donc par composition, il existe une bijection de \mathbb{N} sur I , ce qui prouve que I est dénombrable.

La réciproque est claire. \square

Lemme technique :

Un ensemble I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I .

Dans ce cas, on dira que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I .

Remarque. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \bigcup_{k=0}^n J_k$ et $I = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$, donc, en un certain sens, que l'on ne tentera pas de formaliser, I est la limite des J_n .

Démonstration.

• Supposons que I est fini ou dénombrable.

◊ Si I est fini, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = I$. La suite (J_n) convient.

◊ Supposons que I est infini. Il existe une bijection f de \mathbb{N} dans I .

Posons $J_n = f([0, n])$. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n]\right) = f(\mathbb{N}) = I$, donc la suite (J_n) convient.

• Supposons qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I .

◊ Posons $K_0 = J_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = J_n \setminus J_{n-1}$.

On vérifie que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ par double inclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset J_n$,

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ et réciproquement, si $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, il existe

$p = \min\{n \in \mathbb{N} / x \in J_n\}$, donc $x \in J_p \setminus J_{p-1} = K_p$ (en convenant que $K_{-1} = \emptyset$).

Si $n > p$, $K_n \cap K_p \subset (J_n \setminus J_{n-1}) \cap J_{n-1} = \emptyset$. Ainsi, les parties K_n sont deux à deux disjointes. Ainsi, $I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$

◊ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons d_n le cardinal de K_n (notamment, $d_n = 0$ lorsque $K_n = \emptyset$).

Il existe une bijection g_n de K_n dans l'intervalle d'entiers $[\sum_{k=0}^{n-1} d_k, \sum_{k=0}^n d_k - 1]$.

On note g l'application de I dans \mathbb{N} dont les restrictions aux K_n coïncident avec g_n .

g est injective, car si $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on montre facilement que $g(i) \neq g(j)$, donc c'est une bijection de I dans une partie de \mathbb{N} .

Ainsi, I est fini ou dénombrable. \square

Remarque. S'il existe une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I , on a encore que I est fini ou dénombrable, car en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$K_n = \bigcup_{k=0}^n J_k$, la suite (K_n) est adaptée à I .

Remarque. Il faut savoir démontrer la partie “ \implies ” de ce lemme technique, ce qui est facile. Par contre la partie “ \impliedby ” ne sera pas utile pour les exercices, car elle se déduit simplement des propriétés qui suivent.

Corollaire. \mathbb{Z} est dénombrable.

Démonstration.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([-n, n] \cap \mathbb{Z}). \quad \square$$

Corollaire. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, n]^2 \cap \mathbb{N}^2). \quad \square$$

Corollaire. \mathbb{Q} est dénombrable.

Démonstration.

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p}{q} / (p, q) \in ([-n, n] \cap \mathbb{Z}) \times ([1, n] \cap \mathbb{N}) \right\}. \quad \square$$

Exercice. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

Résolution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$J_n = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{q_k} X^k / \forall k \in \{0, \dots, n\} \ p_k \in \mathbb{Z} \cap [-n, n] \text{ et } q_k \in \mathbb{N} \cap [1, n] \right\}.$$

On vérifie que J_n est adaptée à $\mathbb{Q}[X]$.

Propriété. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Démonstration.

On suppose que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, où I est fini ou dénombrable et où, pour tout $i \in I$, A_i est fini ou dénombrable.

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ surjective (même si I est fini).

Ainsi, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, où $B_n = A_{\varphi(n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $(J_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à B_n . Ainsi,

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} J_{n,p} = \bigcup_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} J_{n,p}.$$

\mathbb{N}^2 est dénombrable, donc il existe une bijection $\Psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$.

Ainsi $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_{\Psi(n)}$ et d'après la remarque précédente, A est fini ou dénombrable. \square

Propriété. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration.

Soit A_1, \dots, A_p p ensembles dénombrables où $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $A = A_1 \times \dots \times A_p$ et montrons que A est dénombrable.

Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe d'après le lemme technique une suite $(J_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ adaptée à A_k .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $L_n = J_{n,1} \times \dots \times J_{n,p}$.

L_n est un ensemble fini en tant que produit cartésien fini d'ensembles finis

et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$:

En effet, si $a = (a_1, \dots, a_p) \in A$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe n_k tel que $a_k \in J_{n_k,k}$.

Posons alors $n = \sup_{1 \leq k \leq p} n_k$. Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, sachant que la suite $(J_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ est

croissante, $a_k \in J_{n_k,k} \subset J_{n,k}$, donc $a \in L_n$.

Ainsi $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ et l'inclusion réciproque est claire.

Alors, d'après le lemme technique, A est fini ou dénombrable.

De plus A est infini, car l'application f de A_1 dans A définie par : pour tout $a_1 \in A_1$, $f(a_1) = (a_1, e_2, \dots, e_p)$ où e_2, \dots, e_p sont des éléments fixés dans A_2, \dots, A_p , est une injection. \square

Remarque. Notons p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

Notons également $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites presque nulles d'entier, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'entiers telle que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall i \geq N, n_i = 0$.

D'après le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un entier comme produit de nombres premiers, l'application $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\alpha_i}$ est une injection.

Ceci prouve directement que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable.

Propriété. \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration.

Supposons que \mathbb{R} est dénombrable. Alors il existe une bijection φ de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . Pour

tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\varphi(n) = b_{0,n} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,n} 10^{-k}$, où $b_{0,n}$ est la partie entière de $\varphi(n)$ et

où la suite $(b_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est le développement décimal (dans \mathcal{V}) de $\varphi(n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } b_{n,n} \neq 0 \\ 1 & \text{si } b_{n,n} = 0 \end{cases}$.

Notons $x = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}$. x est un réel, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \varphi(n)$. Alors,

d'après l'unicité de la partie entière et du développement décimal d'un réel, $c_n = b_{n,n}$, ce qui est faux. \square

Remarque. Cette technique de démonstration s'appelle un "argument diagonal". Il est repris dans la démonstration suivante.

Corollaire. \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension infinie.

Démonstration.

Sinon, il existerait $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathbb{R} est en bijection avec \mathbb{Q}^n qui est dénombrable, donc \mathbb{R} serait dénombrable. \square

Propriété. Hors programme : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Démonstration.

Sinon, il existe une bijection φ de \mathbb{N} dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Notons $A = \{n \in \mathbb{N} / n \notin \varphi(n)\}$. Il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $A = \varphi(a)$.

Dans ces conditions, $a \in \varphi(a) \iff a \in A \iff a \notin \varphi(a)$, ce qui est impossible. \square

Remarque. En adaptant cette démonstration, on voit que plus généralement, aucun ensemble I n'est en bijection avec $\mathcal{P}(I)$.

2 Le problème des séries semi-convergentes.

Dans le cours sur les séries de vecteurs, page 18, on a vu que, lorsque $\sum a_n$ est une série semi-convergente de réels et σ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge, en général, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$. Ainsi l'addition entre réels n'est plus commutative lorsqu'on l'étend au cas d'une infinité de termes à l'aide de la théorie des séries.

Nous allons voir une seconde manière de définir la somme d'une infinité de termes pour laquelle la propriété de commutativité sera vraie, presque par construction, car cette nouvelle façon de sommer les termes d'une suite ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont donnés les éléments de la suite. Il s'agit de la théorie de la sommabilité.

Cette théorie présente l'avantage d'être généralisable au cas de la sommation des éléments d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble dénombrable.

Cependant, lorsque $I = \mathbb{N}$, il y aura moins de suites sommables que de séries convergentes. Plus précisément, on verra qu'une suite est sommable si et seulement si la série associée est absolument convergente.

3 Familles sommables de réels positifs

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un ensemble I .

On fixe également une famille $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ de réels positifs indexée par I .

Lorsque J est une partie finie de I , $\sum_{i \in J} u_i$ est une somme finie de réels : c'est bien défini. De plus l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i / J \in \mathcal{P}(I) \text{ avec } J \text{ finie} \right\}$ est une partie non vide

de réels positifs, car il contient au moins 0, en tant que somme vide. Ceci justifie la définition suivante :

Définition. On pose $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \in \mathcal{P}(I) \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Remarque. Ainsi, pour une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs, $\sum_{i \in I} u_i$ est toujours définie.

Définition. La famille u est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$,

c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie J de I , $\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

Propriété. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\{i \in I / u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute partie finie J de I , $\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

$\{i \in I / u_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{i \in I / u_i \geq \frac{1}{n}\}$. Posons $J_n = \{i \in I / u_i \geq \frac{1}{n}\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si J est une partie finie de J_n , $M \geq \sum_{i \in J} u_i \geq \sum_{i \in J} \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(J)}{n}$, donc

$\text{card}(J) \leq Mn$. Ceci prouve que J_n est de cardinal fini, donc $\{i \in I / u_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n$

est dénombrable. \square

Remarque. La contraposée de cette propriété affirme que lorsque $\{i \in I / u_i \neq 0\}$ n'est pas dénombrable, $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. Il est donc naturel de se limiter au cas où I est au plus dénombrable, **ce que nous supposerons pour toute la suite.**

Propriété. Soient $v = (v_i)_{i \in I}$ et $w = (w_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$, $v_i \leq w_i$.

Si w est sommable, alors v est également sommable et $\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i$

Démonstration.

Pour toute partie finie J de I , $\sum_{j \in J} v_j \leq \sum_{j \in J} w_j \leq \sum_{i \in I} w_i$, donc v est sommable et

$$\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i \quad \square$$

Propriété. Lorsque $v = (v_i)_{i \in I}$ et $w = (w_i)_{i \in I}$ sont deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$ $v_i \leq w_i$, on peut toujours écrire que,

$$\boxed{\text{dans } [0, +\infty]}, \quad \sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i.$$

Démonstration.

C'est évident lorsque $\sum_{i \in I} w_i = +\infty$ et lorsque $\sum_{i \in I} w_i < +\infty$, c'est la propriété précédente.

\square

Propriété. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à I , c'est-à-dire une suite croissante de parties finies de I dont la réunion est égale à I . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
- La suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- La suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{R}_+ .

De plus, dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i$.

Démonstration.

On remarque que la suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge dans \mathbb{R} si et

seulement si elle est majorée et dans ce cas, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i$. Ainsi, il suffit

d'établir l'équivalence entre les deux premières assertions et de montrer qu'en cas de sommabilité, $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i$.

- Supposons que la suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Soit J une partie finie de I . Pour tout $j \in J$ il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $j \in J_{n_j}$. En posant $N = \max_{j \in J} n_j$, $J \subset J_N$, donc $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J_N} u_i \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i$.

Ceci prouve que la famille (u_i) est sommable et que, dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i$.

- Réciproquement, supposons que la famille (u_i) est sommable.

Soit $n \in \mathbb{N}$. J_n est une partie finie de I , donc $\sum_{i \in J_n} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Ceci prouve que la suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et que, dans ce cas,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i. \quad \square$$

Remarque. Ainsi, les sommes $\sum_{i \in J_n} u_i$ jouent un rôle analogue aux sommes partielles utilisées en théorie des séries.

Exercice. Soit A une partie de \mathbb{N}^* de densité $\alpha \in]0, 1]$, c'est-à-dire telle que si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a(n) = |A \cap \{1, \dots, n\}|$, $\frac{a(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{a}\right)_{a \in A}$ n'est pas sommable.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$,

une suite $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente

et dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = [0, n]$. Ainsi, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties finies de \mathbb{N} dont la réunion est égale à \mathbb{N} . D'après la propriété précédente, (u_n) est sommable si et seulement si la suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^n u_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, c'est-à-dire, dans le cadre des séries à termes positifs, si et seulement si $\sum u_n$ est convergente.

De plus, dans ce cas, $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. \square

Théorème. Supposons que I est dénombrable et soit φ une bijection de \mathbb{N} dans I . La famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est

convergente et dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$. Ainsi, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties finies de I dont la réunion est égale à I . Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la suite $\left(\sum_{i \in J_n} u_i\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, c'est-à-dire, dans le cadre des séries à termes positifs, si et seulement si $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente.

De plus, dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$. \square

Propriété de linéarité : Si $(v_i)_{i \in I}$ et $(w_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $(\alpha v_i + w_i)_{i \in I}$ est sommable.

Dans ce cas, $\sum_{i \in I} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

Démonstration.

Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à I . Par linéarité des sommes finies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i \in J_n} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i \in J_n} v_i + \sum_{i \in J_n} w_i$, donc par linéarité du passage à

la limite, $\sum_{i \in J_n} (\alpha v_i + w_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$. Ainsi, $(\alpha v_i + w_i)_{i \in I}$ est sommable et

$\sum_{i \in I} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$. \square

Convention : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

S'il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = +\infty$, on convient que $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Propriété. Soit $(v_i)_{i \in I}$ et $(w_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, dans tous les cas, $\sum_{i \in I} (v_i + w_i) = \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

Démonstration.

S'il existe $i_0 \in I$ tel que $v_{i_0} = +\infty$ ou $w_{i_0} = +\infty$,

alors $\sum_{i \in I} (v_i + w_i) = +\infty = \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

Sinon, $(v_i)_{i \in I}$ et $(w_i)_{i \in I}$ sont deux familles de réels positifs.

Si $(v_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, comme $v_i + w_i \geq v_i$,

on obtient que $\sum_{i \in I} (v_i + w_i) = +\infty = \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

On raisonne de même lorsque $(w_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Il reste le cas où $(v_i)_{i \in I}$ et $(w_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs. Il correspond à la propriété précédente. \square

Convention : lorsqu'on travaille dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on utilise la convention suivante :

$$0 \times (+\infty) = 0$$

On convient aussi, mais c'est plus universel, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \times (+\infty) = +\infty$.

Propriété. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\alpha \cdot \sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \alpha \cdot a_i$.

Démonstration.

Lorsque $\alpha = 0$, avec la convention précédente, $\alpha \cdot \sum_{i \in I} a_i = 0 = \sum_{i \in I} \alpha \cdot a_i$.

On suppose maintenant que $\alpha > 0$.

S'il existe $i_0 \in I$ tel que $a_{i_0} = +\infty$, alors $\alpha \cdot \sum_{i \in I} a_i = +\infty = \sum_{i \in I} \alpha \cdot a_i$.

On suppose maintenant que $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs.

Si cette famille n'est pas sommable, alors la famille $(\alpha a_i)_{i \in I}$ également n'est pas sommable, donc $\alpha \cdot \sum_{i \in I} a_i = +\infty = \sum_{i \in I} \alpha \cdot a_i$.

Si cette famille est sommable, la propriété a déjà été démontrée. \square

Propriété. Soit $(v_i)_{i \in I}$ et $(w_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors, dans tous les cas, $\sum_{i \in I} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Résolution.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 / p + q \leq n\}$.

$(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties finies de \mathbb{N}^2 dont la réunion est égale à \mathbb{N}^2 , donc la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la suite

$\left(\sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)$ est majorée.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{(k+1)^\alpha},$$

donc la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série

$$\sum \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \text{ converge, or } \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{k^{\alpha-1}}, \text{ donc}$$

la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

4 Familles sommables de complexes

Notation. I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I .

On fixe une famille $u = (u_i)_{i \in I}$ de complexes.

Définition. On dit que

la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Ainsi, $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Remarque. Pour le moment, lorsque $(u_i)_{i \in I}$ est une famille "sommable" de complexes, sa somme n'est pas définie. Heureusement, cet inconfort n'est que passer :

Propriété. Supposons que tous les u_i sont réels.

Pour tout $i \in I$, on pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$.

$u^+ = (u_i^+)_{i \in I}$ et $u^- = (u_i^-)_{i \in I}$ sont deux familles de réels positifs.

On vérifie que, pour tout $i \in I$, $u_i = u_i^+ - u_i^-$ et $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$.

$(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables (selon la définition du paragraphe précédent) et dans ce cas,

$$\text{on pose (1) : } \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Démonstration.

En discutant selon le signe de u_i , on montre que $u_i = u_i^+ - u_i^-$ et $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$.

Si u est sommable, comme $0 \leq u_i^+ \leq |u_i|$ et $0 \leq u_i^- \leq |u_i|$, $u^+ = (u_i^+)_{i \in I}$ et $u^- = (u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

Réciproquement, si u^+ et u^- sont sommables sur I , comme $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$, u est sommable. □

Propriété. Supposons maintenant que u est à valeurs complexes. Alors les familles $\text{Re}(u) = (\text{Re}(u_k))_{k \in I}$ et $\text{Im}(u) = (\text{Im}(u_k))_{k \in I}$ sont à valeurs dans \mathbb{R} .

u est sommable si et seulement si $\text{Re}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont sommables et dans ce cas,

$$\text{On pose (2) : } \sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \text{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \text{Im}(u_k),$$

où les sommes du membre droit de l'égalité sont définies dans la propriété précédente.

Démonstration.

Si u est sommable, comme, pour tout $i \in I$, $0 \leq |\operatorname{Re}(u_i)| \leq |u_i|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(u_i)| \leq |u_i|$, $\operatorname{Re}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont sommables.

Réciproquement, si $\operatorname{Re}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont sommables sur I , comme $|u_i| \leq |\operatorname{Re}(u_i)| + |\operatorname{Im}(u_i)|$, u est sommable. \square

Propriété. Lorsque $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de complexes,

$$\boxed{\sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_n} u_j.}$$

Cependant la réciproque est fautive : la suite $\left(\sum_{j \in J_n} u_j\right)_{n \in \mathbb{N}}$ peut converger sans que

$(u_i)_{i \in I}$ ne soit sommable.

Démonstration.

◇ *Premier cas :* Supposons que $u = (u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j \in J_n} u_j = \sum_{j \in J_n} u_j^+ - \sum_{j \in J_n} u_j^-$, donc d'après une propriété du paragraphe sur les réels positifs, $\sum_{j \in J_n} u_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$, donc d'après la relation (1),

$$\sum_{j \in J_n} u_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} u_i.$$

◇ *Second cas :* Supposons que u est à valeurs dans \mathbb{C} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j \in J_n} u_j = \sum_{j \in J_n} \operatorname{Re}(u_j) + i \sum_{j \in J_n} \operatorname{Im}(u_j)$, donc par application du premier

$$\text{cas, } \sum_{j \in J_n} u_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k).$$

Ainsi, d'après la relation (2), $\sum_{j \in J_n} u_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} u_i$.

◇ Pour montrer que la réciproque est fautive, il suffit de prendre $I = \mathbb{Z}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \in J_n} |u_k| = 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc u n'est pas sommable.

Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=-n}^n u_j = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. \square

Exercice. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme de la suite double $\left(\frac{\cos(p+q)\theta}{p!q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Solution : ◇ *Existence de la somme :* Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\left|\frac{\cos(p+q)\theta}{p!q!}\right| \leq \frac{1}{p!} \frac{1}{q!}$,

donc pour montrer la sommabilité de la famille $\left(\frac{\cos(p+q)\theta}{p!q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, il suffit

d'établir la sommabilité de la famille de réels positifs $\left(\frac{1}{p!} \frac{1}{q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Posons $J_n = \{0, \dots, n\}^2$: la suite (J_n) est adaptée à \mathbb{N}^2 .

Or $\sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^2$, donc $\left(\frac{1}{p!} \frac{1}{q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est bien sommable.

◇ *Calcul de la somme* : Notons S la somme de cette famille.

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n}} \frac{\cos(p+q)\theta}{p!q!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n}} \frac{\operatorname{Re}(e^{i(p+q)\theta})}{p!q!} \\ &= \operatorname{Re} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n}} \frac{e^{i(p+q)\theta}}{p!q!} \right), \end{aligned}$$

car Re est une application continue. Ainsi, $S = \operatorname{Re} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{(e^{i\theta})^p}{p!} \right)^2 \right)$,

or $\sum_{p=0}^n \frac{(e^{i\theta})^p}{p!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(e^{i\theta})^p}{p!} = e^{(e^{i\theta})}$, donc $\left(\sum_{p=0}^n \frac{(e^{i\theta})^p}{p!} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{2e^{i\theta}}$.

Ainsi, $S = \operatorname{Re} \left(e^{2(e^{i\theta})} \right) = \operatorname{Re}(e^{2\cos\theta + 2i\sin\theta})$.

En conclusion, $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{\cos(p+q)\theta}{p!q!} = e^{2\cos\theta} \cos(2\sin\theta)$.

Inégalité triangulaire : si u est sommable, alors $|\sum_{i \in I} u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{i \in J_n} u_i| \leq \sum_{i \in J_n} |u_i|$ et on fait tendre n vers $+\infty$. □

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{Z}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_{-n}$ sont absolument convergentes et dans ce cas

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration.

- Supposons que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{n=0}^N |u_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$,

donc la série $\sum |u_n|$ est convergente. De même, $\sum_{n=0}^N |u_{-n}| = \sum_{n \in [-N, 0] \cap \mathbb{Z}} |u_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$,

donc la série $\sum |u_{-n}|$ est convergente.

- Réciproquement, supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sont absolument convergentes. Soit J une partie finie de \mathbb{Z} .

$$\sum_{i \in J} |u_i| = \sum_{i \in J \cap \mathbb{N}} |u_i| + \sum_{i \in J \cap \mathbb{Z}_-^*} |u_i| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}| + \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \text{ donc la famille } (u_n) \text{ est sommable.}$$

Dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N u_{-n} + \sum_{n=0}^N u_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n \in [-N, N] \cap \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n, \text{ car}$$

$([-N, N] \cap \mathbb{Z})_{N \in \mathbb{N}}$ est adaptée à \mathbb{Z} . \square

Exemple. $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^3} = 0$, et $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n}$ n'est pas définie.

5 Propriétés des familles sommables

Notation.

I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I .

5.1 Linéarité

Propriété de linéarité : soit $a = (a_i)_{i \in I}$ et $b = (b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de complexes et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la famille $\alpha a + b = (\alpha a_i + b_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} (\alpha a_i + b_i) = \alpha \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$.

Démonstration.

Pour tout $i \in I$, $|\alpha a_i + b_i| \leq |\alpha| |a_i| + |b_i|$, or d'après le paragraphe 3, la famille de réels positifs $(|\alpha| |a_i| + |b_i|)_{i \in I}$ est sommable, donc la famille $(|\alpha a_i + b_i|)_{i \in I}$ est également sommable.

Ainsi la famille de complexes $(\alpha a_i + b_i)_{i \in I}$ est aussi sommable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i \in J_n} (\alpha a_i + b_i) = \alpha \sum_{i \in J_n} a_i + \sum_{i \in J_n} b_i$ et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$

pour conclure. \square

Propriété. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On suppose que, pour tout $i \in I$, $|v_i| \leq u_i$.

Si (u_i) est sommable, alors (v_i) est sommable et $|\sum_{i \in I} v_i| \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Démonstration.

On suppose que (u_i) est sommable.

◇ pour tout $i \in I$, $|v_i| \leq u_i$, donc d'après le paragraphe 3, la famille $(|v_i|)$ est sommable. Ainsi, la famille (v_i) est sommable.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{i \in J_n} v_i| \leq \sum_{i \in J_n} |v_i| \leq \sum_{i \in J_n} u_i$.

On conclut en faisant tendre n vers $+\infty$. \square

Notation. \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Notons $l^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des familles bornées $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$.

et pour $p \in [1, +\infty[$, posons $l^p(I, \mathbb{K}) = \left\{ (u_i)_{i \in I} / \sum_{i \in I} |u_i|^p < +\infty \right\}$.

Propriété. $l^1(I, \mathbb{K})$, $l^2(I, \mathbb{K})$ et $l^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^I .

De plus si (a_i) et (b_i) sont dans $l^2(I, \mathbb{K})$, alors $(a_i b_i)$ est un élément de $l^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration.

◇ On vient de montrer que $l^1(I, \mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire. De plus il est non vide, donc c'est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^I .

◇ Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux éléments de $l^2(I, \mathbb{K})$.

Soit $i \in I$. $(|a_i| - |b_i|)^2 \geq 0$, donc $|a_i b_i| \leq \frac{1}{2}(|a_i|^2 + |b_i|^2)$, ce qui prouve que $(a_i b_i)_{i \in I}$ est dans $l^1(I, \mathbb{K})$.

De plus, $(a_i + b_i)^2 = a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i$, donc $(a_i + b_i) \in l^2(I, \mathbb{K})$. On en déduit facilement que $l^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I .

◇ Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles bornées de réels indexées par I et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $i \in I$, $|\alpha a_i + b_i| \leq |\alpha| |a_i| + |b_i| \leq |\alpha| \sup_{j \in I} |a_j| + \sup_{j \in I} |b_j|$,

ainsi $\alpha(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} \in l^\infty(I)$. De plus, $l^\infty(I, \mathbb{K})$ est non vide, donc c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I . \square

Propriété. Pour tout $(u_i), (v_i) \in l^2(I, \mathbb{R})$, on pose $((u_i)|(v_i)) = \sum_{i \in I} u_i v_i$.

$l^2(I, \mathbb{R})$ muni de $(\cdot|\cdot)$ est un espace préhilbertien.

Démonstration.

Ce qui précède montre que $(\cdot|\cdot)$ est correctement défini. De plus, il est clairement bilinéaire, symétrique et positif.

Si $((u_i)|(u_i)) = 0$. Pour tout $j \in I$, $0 \leq u_j^2 \leq ((u_i)|(u_i)) = 0$, donc $(u_i) = 0$. \square

Propriété.

- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} |u_i|$, $(l^\infty(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} |u_i|$, $(l^1(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} |u_i|^2}$, $(l^2(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration.Exercice. \square **5.2 Commutativité****Propriété. Commutativité de la somme d'une famille sommable.**Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de I dans I . Alors $(u_{\varphi(i)})_{i \in I}$ est aussi sommable et $\sum_{i \in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{i \in I} u_i$.**Démonstration.** \diamond Montrons d'abord que $(\varphi(J_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à I .Soit $n \in \mathbb{N}$: J_n est de cardinal fini, donc $\varphi(J_n)$ est aussi finie.De plus $J_n \subset J_{n+1}$, donc $\varphi(J_n) \subset \varphi(J_{n+1})$.Enfin, $I = \varphi(I) = \varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(J_n)$. \diamond Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i \in J_n} |u_{\varphi(i)}| = \sum_{j \in \varphi(J_n)} |u_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in I} |u_j|$, ce qui montre que la famille $(u_{\varphi(i)})_{i \in I}$ est sommable.Alors, $\sum_{i \in I} u_{\varphi(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_{\varphi(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in \varphi(J_n)} u_j = \sum_{i \in I} u_i$. \square **Remarque.** Ainsi le symbole “ $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ” n'est pas commutatif dans le cas des séries semi-convergentes de complexes, mais il le devient dans le cas des séries absolument convergentes. Plus généralement, on voit que la définition d'une somme infinie provenant de la sommabilité est plus sûre et plus robuste que celle provenant des séries.**Propriété. Hors programme :**Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de K dans I . Alors $(u_{\varphi(k)})_{k \in K}$ est aussi sommable et $\sum_{k \in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i \in I} u_i$.**Démonstration.**On adapte la démonstration précédente. K est au plus dénombrable et il faut supposer ici que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à K . \diamond Montrons d'abord que $(\varphi(J_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à I .Soit $n \in \mathbb{N}$: J_n est de cardinal fini, donc $\varphi(J_n)$ est aussi finie.De plus $J_n \subset J_{n+1}$, donc $\varphi(J_n) \subset \varphi(J_{n+1})$.Enfin, $I = \varphi(K) = \varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(J_n)$. \diamond Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \in J_n} |u_{\varphi(k)}| = \sum_{j \in \varphi(J_n)} |u_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in I} |u_j|$, ce qui montre que la famille $(u_{\varphi(k)})_{k \in K}$ est sommable.

Alors, $\sum_{k \in K} u_{\varphi(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in J_n} u_{\varphi(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in \varphi(J_n)} u_j = \sum_{i \in I} u_i$. \square

Remarque. Lorsque $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs, pour toute bijection d'un ensemble K dans I , $\sum_{k \in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i \in I} u_i$.

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de réels positifs.

Soit $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une partition de I (on accepte que certains I_q soient vides).

On suppose que $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$. Alors u est sommable si et seulement si

- ◇ pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable et
- ◇ la suite $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Remarque. En cas de non sommabilité, on a encore : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i = +\infty$.

Ainsi, on peut énoncer le théorème sous une forme plus concise :

si $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une partition de I et si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Démonstration.

• Supposons que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

◇ Soit $q \in \mathbb{N}$. Soit J une partie finie de I_q . J est également une partie finie de I , donc

$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$, ce qui prouve que $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable.

◇ Soit $q \in \mathbb{N}$. $I_q \subset I$ et I est au plus dénombrable, donc I_q est au plus dénombrable. Notons $(J_{q,N})_{N \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à I_q .

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{q=0}^n \left(\sum_{i \in I_q} u_i \right) = \sum_{q=0}^n \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_{q,N}} u_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{q=0}^n \sum_{i \in J_{q,N}} u_i$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{q=0}^n \sum_{i \in J_{q,N}} u_i = \sum_{i \in \bigcup_{0 \leq q \leq n} J_{q,N}} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$, car $\bigcup_{0 \leq q \leq n} J_{q,N}$ est une partie

finie de I . On en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que $\sum_{q=0}^n \left(\sum_{i \in I_q} u_i \right) \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Ceci prouve que $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable et que $\sum_{i \in I} u_i \geq \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

• Supposons que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable et que $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = \bigcup_{q=0}^n J_{q,n}$. On vérifie que la suite (J_n) est adaptée à I .

$$\text{De plus, } \sum_{i \in J_n} u_i = \sum_{q=0}^n \sum_{i \in J_{q,n}} u_i \leq \sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q} u_i \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{j \in I_q} u_j.$$

Ceci prouve que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et que $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$. \square

Exemple. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}, \text{ car}$$

en posant $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 / p+q = n\}$, la famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de \mathbb{N}^2 .

Corollaire. Interversion de sommations pour des suites doubles de réels positifs (Fubini).

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par \mathbb{N}^2 .

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

◇ La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

◇ Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et on dispose des égalités suivantes.

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème de sommation par paquets pour des familles de réels positifs en posant, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $I_q = \mathbb{N} \times \{q\}$, ce qui constitue bien une partition de \mathbb{N}^2 .

Plus précisément, d'après le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p_0 \in \mathbb{N}} \sum_{(p,q) \in \{p_0\} \times \mathbb{N}} u_{p,q}.$$

Soit $p_0 \in \mathbb{N}$. L'application $q \mapsto (p_0, q)$ est une bijection de \mathbb{N} dans $\{p_0\} \times \mathbb{N}$ donc

$$\sum_{(p,q) \in \{p_0\} \times \mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{q \in \mathbb{N}} u_{\varphi(q)} = \sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p_0,q}.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right). \quad \square$$

Remarque. Comme précédemment, si l'on accepte de travailler dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on peut énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Pour tout $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$,
$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Exemple. Calculons $\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i \geq 2, j \geq 2}} i^{-j}$.

Solution : Soit $i \geq 2$. $\sum_{j \geq 2} i^{-j}$ est une série géométrique de raison $i^{-1} \in [0, 1[$, donc

cette série est convergente et $S_i = \sum_{j=2}^{+\infty} i^{-j} = \frac{i^{-2}}{1 - i^{-1}} = \frac{1}{i^2 - i}$.

$S_i \sim \frac{1}{i^2}$, donc la série $\sum_{i \geq 2} S_i$ converge. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite

double $(i^{-j})_{\substack{i \geq 2 \\ j \geq 2}}$ est sommable et
$$\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i \geq 2, j \geq 2}} i^{-j} = \sum_{i=2}^{+\infty} S_i = \sum_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1.$$

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de complexes.

Soit $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une partition de I .

On suppose ici que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de complexes.

Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable, et la suite $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

De plus, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Remarque. Pour appliquer ce théorème, il faut d'abord vérifier que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de complexes, c'est-à-dire que $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs. Souvent, on vérifie ce dernier point à l'aide du "théorème de sommation par paquets pour des familles de réels positifs".

Démonstration.

- Appliquons le théorème de sommation par paquets pour des réels positifs : $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, donc pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(|u_i|)_{i \in I_q}$ est sommable et la suite $\left(\sum_{i \in I_q} |u_i| \right)_{q \in \mathbb{N}}$

est sommable. Or pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{i \in I_q} u_i \right| \leq \sum_{i \in I_q} |u_i|$, donc pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in I_q}$

est sommable et $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(J_{q,N})_{N \in \mathbb{N}}$ adaptée à I_q .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = \bigcup_{q=0}^n J_{q,n}$. La suite (J_n) est constituée de parties finies, elle est croissante et la réunion vaut I ,

donc $\sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i$. Ainsi $\sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q} u_i - \sum_{i \in J_n} u_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i - \sum_{i \in I} u_i$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q} u_i - \sum_{i \in J_n} u_i \right| &= \left| \sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q \setminus J_{q,n}} u_i \right| \\ &\leq \sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q \setminus J_{q,n}} |u_i| \\ &= \sum_{q=0}^n \sum_{i \in I_q} |u_i| - \sum_{i \in J_n} |u_i| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

d'après le théorème de sommation par paquets pour des réels positifs.

L'unicité de la limite permet alors de conclure. \square

Théorème de Fubini.

Interversion de sommations pour des suites doubles de complexes.

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une suite double de complexes que l'on suppose sommable.

Alors pour tout $q_0 \in \mathbb{N}$, la suite (u_{p,q_0}) est sommable, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{p_0,q})$

est sommable, et les suites $\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ sont sommables.

De plus

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Remarque. Pour appliquer ce théorème, il faut d'abord vérifier que $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de complexes, c'est-à-dire que $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de réels positifs. Souvent, on vérifie ce dernier point à l'aide du "théorème d'interversion de sommations pour des suites doubles de réels positifs".

Exemple. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes de complexes. Alors la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right).$$

Démonstration.

En travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, d'après le théorème de Fubini,

$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} |a_p b_q| = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(|a_p| \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q| \right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |b_q| \right) < +\infty$, donc la famille $(a_p b_q)_{p,q \in \mathbb{N}}$ est sommable. Alors, d'après le second théorème de Fubini,

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{q \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p b_q \right) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (T b_q), \text{ où } T = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = T \sum_{q=0}^{+\infty} b_q = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right). \quad \square$$

Exemple. On sait que $\sum \frac{1}{p!}$ converge et a pour somme e . Ainsi, $\left(\frac{2^{-q}}{p!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{2^{-q}}{p!} = e \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2e$.

Définition. Produit de Cauchy de deux séries.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$.
La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Propriété. Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est absolument convergent. De plus, avec les notations de la définition précédente, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Démonstration.

- D'après l'exemple précédent, la suite double $(u_p v_q)$ est sommable

$$\text{et } \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 / p + q \leq n\}$. (J_n) est une suite croissante de parties finies de \mathbb{N}^2 dont la réunion est égale à \mathbb{N}^2 , donc

$$\sum_{(p,q) \in J_n} u_p v_q \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q, \text{ or pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{(p,q) \in J_n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{k=0}^n w_k, \text{ donc } \sum_{k=0}^n w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q.$$

Ceci prouve que la série $\sum w_n$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

• Il reste à montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Or ce qui précède s'applique aussi aux suites $(|u_p|)$ et $(|v_q|)$, donc, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$w'_n = \sum_{p+q=n} |u_p||v_q|$, la série $\sum w'_n$ est convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|w_n| = \left| \sum_{p+q=n} u_p v_q \right| \leq w'_n, \text{ donc la série } \sum w_n \text{ est absolument convergente. } \square$$

Exemple. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et cette série est absolument convergente (par le critère de d'Alembert), donc d'après le théorème précédent, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$,

$$e^x \times e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n, \text{ où } w_n = \sum_{p+q=n} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}.$$

Mais $w_n = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} x^p y^q = \frac{1}{n!} (x+y)^n$, donc on retrouve le fait que $e^x \times e^y = e^{x+y}$.