

## Renseignements généraux

- *Concours* : Écoles Normales Supérieures
- *Matière* : Mathématiques Paris
- *NOM Prénom* : D'ANELLO Yohann

## Énoncé

Soit  $s > 0$  et  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = s$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{n}$ . Discuter de la convergence de  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

## Remarques sur l'oral

En entrant dans la salle, l'examinateur (dont la tête me semblait connue) me propose un chocolat ainsi que de l'eau. Il m'annonce ensuite comment va se passer l'oral : il me donne un exercice très difficile dont le but n'est pas de le résoudre, mais de s'en servir comme prétexte pour avoir une discussion mathématique autour. Il me laisse tout d'abord réfléchir seul pendant 5 à 10 minutes avant de commencer l'entretien.

Mon premier réflexe est de linéariser la relation de récurrence, en posant  $v_n = \ln u_n$ , après avoir justifié préalablement que ce changement de variable est possible. On reconnaît alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2 perturbée par un terme en  $\ln n$ . Je montre dans un premier temps que  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge si et seulement si  $\left( \sum_{k=1}^n v_k - \ln n! \right)_{n \geq 1}$  converge, c'est-à-dire s'il existe un réel  $C$  tel que  $\sum_{k=1}^n v_k = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + C + o(1) \right)$ , mais bien entendu je dis tout de suite que c'est un peu trop compliqué pour être exploitable. Je commence à prendre la parole à ce moment-là.

L'examinateur me demande tout d'abord qualitativement comment va se comporter la suite selon la valeur de  $s$ . Je commence par considérer  $s < 1$  et justifie à l'oral que  $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  pour tout  $\alpha > 0$ , ce qu'il valide. Alors que je regarde les premiers termes pour  $s = 2$ , il me demande de plutôt calculer les premiers termes pour  $s$  quelconque. Je conjecture  $u_n = \frac{s^{F_n}}{F_n}$ , où  $(F_n)_{n \geq 1}$  est la suite de Fibonacci décalée définie par  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  si  $n \geq 1$  et  $(k_n)_{n \geq 1}$  vérifie  $k_1 = k_2 = 1$  et  $k_{n+2} = nk_n k_{n+1}$ .

Entre temps, il m'a posé une question plus générale sur les suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2, en me demandant la forme générale des solutions. Je les donne sans problème (en séparant le cas où le polynôme caractéristique a une racine double), mais peine à le démontrer. J'affirme que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et qu'on dispose d'une famille libre de 2 éléments de cet espace, mais je n'arrive pas à le justifier, alors qu'il suffisait de dire qu'une telle suite n'est déterminée que par ses deux premiers termes. La preuve n'est alors pas élégante car les solutions étaient parachutées, mais l'examinateur s'en est contenté.

Pour revenir à  $(k_n)_{n \geq 1}$ , je calcule à nouveau les premiers termes pour établir

une conjecture (immédiate à démontrer), qui est que  $k_n = \prod_{l=2}^{n-2} l^{F_{n-l-1}}$ . J'indique alors que je souhaite estimer  $k_n$  pour conclure, c'est-à-dire estimer  $\ln k_n$  à la précision  $o(1)$  (avec du recul,  $O(1)$  suffit pour avoir la convergence en exponentiant).

Après avoir écrit ce que valait  $\ln k_n$  en remplaçant  $F_n$  par sa valeur, il me donne un sous-exercice : donner une condition pour que si  $a_n \sim b_n$  avec  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites positives, alors  $\ln a_n \sim \ln b_n$ . Initialement persuadé que c'était toujours le cas (sans que la réciproque soit vraie bien sûr), je montre qu'il ne faut pas que  $a_n$  et  $b_n$  soient trop proches de 0, et je suggère alors  $(b_n)_{n \geq 1}$  minorée par une constante non nulle (c'est suffisant mais bien sûr non nécessaire). Il me demande alors de donner un contre-exemple. Me voyant avoir du mal, il me propose de procéder par analyse-synthèse en posant  $a_n = (1 + \varepsilon_n)b_n$  et en cherchant une condition sur  $\varepsilon_n$  et  $a_n$ . Je propose alors  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$  et  $b_n = \frac{1}{n}$ .

On revient ensuite à l'exercice initial et m'incite à négliger le terme en  $\bar{\Phi}^{n-l-1}$ , qui ne compte peu. Finalement, je justifie à l'oral que la somme  $\sum_{l=2}^{n-2} \frac{\ln l}{\Phi^{l+1}}$  converge, et que donc  $\ln k_n$  se comporte comme une constante fois  $\Phi^n$ . L'oral se termine ici, je n'ai pas le temps de conclure.

En sortant, l'examinateur me propose à nouveau un chocolat et de l'eau. L'échange était très intéressant à mener, même si je pense que ma prestation reste perfectible. J'aurais notamment du être bien plus réactif lorsqu'il s'agissait de justifier la forme des solutions d'une équation linéaire homogène, ainsi que pour estimer la somme finale.