Planche de colle

Exercice de colle

Soient E un espace euclidien, puis $\mathscr{A}$ une partie de E.
On pose :

$$\mathscr{B} = \Big\{(a \mid b) \; ; (a, b) \in \mathscr{A}^2\Big\}.$$

Montrer l'équivalence :

$$\text{l'ensemble } \mathscr{A} \text{ est fini} \iff \text{l'ensemble } \mathscr{B} \text{ est fini} .$$

[indication : on pourra faire une récurrence sur l'entier $n = \dim(E)$.]

Si l'ensemble $\mathscr{A}$ est fini, il en est de même de l'ensemble $\mathscr{A}^2$ et on voit que l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A}^2 & \longrightarrow & \mathscr{B} \\ (a, b) & \longmapsto & (a \mid b) \end{array} \right.$$

est surjective, conduisant au fait que l'ensemble $\mathscr{B}$ est fini.

On va montrer l'autre sens par récurrence sur la dimension n de l'espace euclidien E.
• Si $n = 1$, on trouve une base orthonormée (e) de E.
On suppose l'ensemble $\mathscr{A}$ infini. Alors, si a est non nul dans $\mathscr{A}$, l'application $f : b \longmapsto (a \mid b) = e^*(a) \times e^*(b)$ est injective de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$, car un vecteur de $\mathscr{A}$ est uniquement déterminé par son image par la forme linéaire coordonnée $e^*(\cdot)$. L'ensemble $\mathscr{B}$ est infini.
• Supposons le résultat acquis en dimension n.
• On se place dans un espace euclidien E de dimension $n + 1$.
On suppose la partie $\mathscr{B}$ finie et la partie $\mathscr{A}$ infinie, avec $\mathscr{A}$ incluse dans E et $\mathscr{B}$ définie comme dans l'énoncé.
On note $\mathscr{B} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ l'ensemble fini $\mathscr{B}$.
Soit a_1 un vecteur non nul dans $\mathscr{A}$.
On pose pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, l'ensemble :

$$\mathscr{H}_i = \Big\{x \in E \mid (a_1 \mid x) = \lambda_i\Big\}.$$

L'ensemble $\mathscr{H}_i$ est un hyperplan affine dirigé par $\mathrm{Vect}(a_1)^{\perp}$.
Il y a un nombre fini de tels hyperplans affines $\mathscr{H}_i$, car i varie seulement entre 1 et r.
Ensuite, si c est un élément de $\mathscr{A}$, alors $(a_1 \mid c) \in \mathscr{B}$, donc le point c appartient à l'un des hyperplans affines $\mathscr{H}_i$.

La réunion des hyperplans affines $\mathscr{H}_i$ contient l'ensemble infini $\mathscr{A}$: l'un au moins des hyperplans affines est infini. Mettons que ce soit l'hyperplan $\mathscr{H}_j$.
On note p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a_1)^{\perp}$ de sorte que pour tout vecteur x dans E, on peut écrire :

$$p(x) = x - \frac{(a_1 \mid x)}{(a_1 \mid a_1)} \cdot a_1.$$

L'espace euclidien $F = \mathrm{Vect}(a_1)^{\perp}$ est de dimension n.
Pour tout $x \in \mathscr{H}_i$, on a :

$$p(x) = x - \frac{\lambda_i}{\|a_1\|^2} \cdot a_1.$$

L'ensemble $\mathscr{C} = p(\mathscr{H}_i)$ est donc le translaté de la partie infinie $\mathscr{H}_i$ par le vecteur $-\dfrac{\lambda_i}{\|a_1\|^2} \cdot a_1$.
L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc encore un ensemble infini.
On examine l'ensemble :

$$\mathscr{D} = \Big\{(x \mid y) \ ; \ (x, y) \in \mathscr{C}^2\Big\}.$$

Soient x et y dans $\mathscr{C}$. On écrit :

$$u = x + \frac{\lambda_i}{\|a_1\|^2} \cdot a_1 \text{ et } v = y + \frac{\lambda_i}{\|a_1\|^2} \cdot a_1,$$

de sorte que les points u et v appartiennent à $\mathscr{H}_i$.
Ainsi, les vecteurs u et v sont dans $\mathscr{A}$ et :

$$(u \mid a_1) = (v \mid a_1) = \lambda_i.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(x \mid y) &= (u \mid v) - \frac{\lambda_i}{\|a_1\|^2}((u \mid a_1) + (v \mid a_1)) + \left(\frac{\lambda_i}{\|a_1\|^2}\right)^2 (a_1 \mid a_1) \\
&= (u \mid v) - \frac{\lambda_i^2}{\|a_1\|^2}.
\end{aligned}$$

La quantité $(u \mid v)$ appartient à l'ensemble fini $\mathscr{B}$, donc l'ensemble $\mathscr{D}$ est inclus dans le translaté de l'ensemble $\mathscr{B}$ de vecteur (qui est dans $\mathbb{R}$) égal à $-\dfrac{\lambda_i^2}{\|a_1\|^2}$.
L'ensemble $\mathscr{C}$ est infini alors que l'ensemble $\mathscr{D}$ est fini. Cela contredit notre hypothèse de récurrence au rang n.
On obtient alors ce qu'il faut au rang $(n+1)$.