CONTINUITÉ

✠ ***Exercice 1.*** [$\star$] (Lemme de l'escalier, version fonctionnelle)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   a) Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que
   $$\forall x \geqslant A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\varepsilon.$$
   b) En déduire qu'il existe un nombre réel M, dépendant de ε, tel que
   $$\forall x \geqslant A, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x} + \varepsilon.$$
   c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$.
2. Que se passe-t-il si $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$ admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$?

1. a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|f(x+1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Dès lors, pour tout $x \geqslant A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} & |f(x+n) - f(x)| \\ = \;& |f(x+n) - f(x+n-1) + f(x+n-1) - f(x+n-2) + \cdots + f(x+1) - f(x)| \\ \leqslant \;& |f(x+n) - f(x+n-1)| + |f(x+n-1) - f(x+n-2)| + \cdots + |f(x+1) - f(x)| \\ \leqslant \;& \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon}_{n \text{ fois}} \qquad \text{car } x, x+1, \ldots, x+n-1 \text{ sont supérieurs ou égaux à } A \\ = \;& n\varepsilon. \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall x \geqslant A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f(x+n) - f(x)| < n\varepsilon.}$$

b) Prenons $n = \lfloor x - A \rfloor$ de sorte que $x - n \in [A; A+1[$. Pour tout $x \geqslant A$, on a
$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(x)}{x}\right| \\ = \;& \left|\frac{f(x-n+n) - f(x-n)}{x} + \frac{f(x-n)}{x}\right| \qquad \text{Binet !} \\ \leqslant \;& \frac{|f(x-n+n) - f(x-n)|}{x} + \frac{|f(x-n)|}{x} \qquad \text{inégalité triangulaire} \\ \leqslant \;& \frac{n\varepsilon}{x} + \frac{\sup\{|f(t)| : t \in [A; A+1]\}}{x} \\ \leqslant \;& \varepsilon + \frac{\sup\{|f(t)| : t \in [A; A+1]\}}{x} \qquad \text{car } n \leqslant x. \end{aligned}$$
Ainsi, en posant $M = \sup\{|f(t)| : t \in [A; A+1]\}$ (c'est un nombre réel par le théorème des bornes), on a
$$\boxed{\text{il existe } M, \text{ dépendant de } \varepsilon, \text{ tel que } \forall x \geqslant A,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x} + \varepsilon.}$$

c) Comme $\lim_{x\to+\infty} M/x$, il existe $B > 0$ tel que $\forall x \geqslant B,\ M/x \leqslant \varepsilon$. Dès lors, pour tout $x \geqslant \max\{A; B\}$, on a $|f(x)/x| \leqslant 2\varepsilon$ (Zut ! Il eut fallu utiliser $\varepsilon/2\ldots$). En conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x) - \ell x$. Dès lors, on constate que

$$\lim_{x\to+\infty} \big(g(x+1) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x) - \ell\big) = 0,$$

ce qui permet d'appliquer la première question pour affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \ell\right) = 0$$

ou encore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Donc

$$\boxed{\text{si } \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.}$$

✠ ***Exercice 2.*** [★]

Soient $f, g : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

La fonction f admet des points fixes car l'application continue $x \longmapsto f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1. Notons E l'ensemble des points fixes de f.

Comme $f \circ g = g \circ f$, l'ensemble E est stable par g. En effet, si $x \in E$, alors $f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x)$, ce qui démontre que $g(x) \in E$.

Posons $a = \inf(E)$ et $b = \sup(E)$, qui existe car E est non vide et borné. La caractérisation séquentielle des bornes inférieures et supérieures nous dit qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de E qui tendent respectivement vers a et b. En passant à la limite dans les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) = a_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f(b_n) = b_n$ et en tenant compte de la continuité de f, on obtient $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Autrement dit, on a $a, b \in E$.

Comme $g(a), g(b) \in E$, on a $g(a) \geqslant a$ et $g(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \geqslant f(a)$ et $g(b) \leqslant f(b)$. Autrement dit, la fonction $f - g$ a des signes opposés en $\inf(E)$ et $^{(}E)$.

Comme $f - g$ est continue, le TVI implique que $f - g$ s'annule.

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } x \in [0; 1] \text{ tel que } f(x) = g(x).}$$

✠ ***Exercice 3.*** [⋆]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Démontrer que soit f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ soit f tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant B,\ |f(x)| \geqslant A$. En particulier, on a $f(B) \geqslant A$ ou $f(B) \leqslant -A$.

Supposons tout d'abord que $f(B) \geqslant A$ et déduisons en que $\forall x \geqslant B,\ f(x) \geqslant A$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_0 > B$ tel que $f(x_0) < A$. Comme $|f(x_0)| > A$, on a $f(x_0) \leqslant -A$. Mézalors, par le TVI, la fonction f s'annule entre B et x_0, ce qui est absurde puisque sur $[B; x_0]$, la valeur absolue de f reste supérieure à une quantité strictement positive. Donc $\forall x \geqslant B,\ f(x) \geqslant A$. On a ainsi démontré que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Si on suppose que $f(B) \leqslant -A$, on démontre de même que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{ou bien } f \text{ tend vers } +\infty \text{ en } +\infty, \text{ ou bien } f \text{ tend vers } -\infty \text{ en } +\infty.}$$

✠ ***Exercice 4.*** [⋆]

Pour tout entier naturel n, on note $I_n =]2n\pi\,;\,2n\pi + \pi/2[$ et l'on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\sin x.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'existence d'un unique nombre réel u_n appartenant à l'intervalle I_n tel que $f(u_n) = 1$.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u_n - 2n\pi$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f(u_n + 2\pi)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un nombre réel ℓ appartenant à $[0; x_0[$.
3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f(x_n) + 2\pi n \sin x_n$ et en déduire que $\sin x_n = \big(1 - f(x_n)\big)/2\pi n$.
   b) En déduire la valeur de ℓ.
   c) Déterminer un équivalent de la suite $(nx_n)_{n\geqslant 0}$.

1. La fonction f est continue sur I_n comme produit de fonctions continues.
   De plus, la fonction sin étant 2π-périodique, son comportement est identique sur I_n et sur l'intervalle $]0; \pi/2[$, donc sin est strictement croissante sur I_n. Comme $x \longmapsto x$ est également strictement croissante sur I_n, la fonction f est strictement croissante sur I_n comme produit de fonctions positives strictement croissantes sur cet intervalle.
   Continuité et stricte monotonie sont réunies pour appliquer à f le théorème de la bijection sur l'intervalle I_n. Il en résulte que f est bijective de I_n sur $f(I_n)$.
   Or $f(2n\pi) = 2n\pi \sin(2n\pi) = 0$ et $f(\pi/2 + 2n\pi) = (\pi/2 + 2n\pi)\sin(\pi/2 + 2n\pi) = \pi/2 + 2n\pi$ donc $f(I_n) = [0; \pi/2 + 2n\pi]$. On remarque que $\pi/2 + 2n\pi > 1$ car $\pi/2 > 1$ donc $1 \in f(I_n)$.
   Il s'ensuit que 1 possède un unique antécédent $u_n \in I_n$. Donc

   $$\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } u_n \text{ appartenant à l'intervalle } I_n \text{ tel que } f(u_n) = 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$f(u_n + 2\pi) = (u_n + 2\pi)\sin(u_n + 2\pi) = u_n \sin u_n + 2\pi \sin u_n = f(u_n) + 2\pi \sin u_n,$$

   et comme $f(u_n) = 1$, on a

   $$\boxed{f(u_n + 2\pi) = 1 + 2\pi \sin u_n.}$$

   On sait que la fonction sin se comporte sur I_n comme sur $]0; \pi/2[$, donc qu'elle est strictement positive sur I_n. Il s'ensuit que $\sin u_n > 0$ et, par conséquent, que $1 + 2\pi \sin u_n > 1$, c'est-à-dire $f(u_n + 2\pi) > 1$. D'après la question 1, on a $f(u_{n+1}) = 1$, donc $f(u_n + 2\pi) > f(u_{n+1})$. Les nombres réels $u_n + 2\pi$ et u_{n+1} étant des éléments de I_{n+1} et la fonction f étant strictement croissante sur I_{n+1}, on en déduit que $u_n + 2\pi > u_{n+1}$. En retranchant $2(n+1)\pi$ de part et d'autre de cette inégalité, on en déduit que $u_n - 2n\pi > u_{n+1} - 2(n+1)\pi$, c'est-à-dire $x_n > x_{n+1}$. Par conséquent,

   $$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 0} \text{ est strictement décroissante.}}$$

   On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n\pi < u_n < 2n\pi + \pi/2$, c'est-à-dire $0 < u_n - 2n\pi < \pi/2$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in I_0$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une suite strictement décroissante minorée par 0, ce qui implique, d'après le cours, que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un nombre réel ℓ telle que $0 \leqslant \ell < x_0$. Donc

   $$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers un nombre réel } \ell \in [0; x_0[.}$$

3. a) On a

   $$\begin{aligned} f(x_n) + 2\pi n \sin x_n &= f(u_n - 2n\pi) + 2\pi n \sin(u_n - 2n\pi) \\ &= (u_n - 2n\pi)\sin(u_n - 2n\pi) + 2\pi n \sin(u_n - 2n\pi) \\ &= u_n \sin u_n \\ &= f(u_n) \\ &= 1, \end{aligned}$$

   donc

   $$\boxed{f(x_n) + 2\pi n \sin x_n = 1.}$$

Par suite,

$$\boxed{\sin x_n = \frac{1 - f(x_n)}{2\pi n}\cdot}$$

b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim \big(1 - f(x_n)\big) = 1 - f(\ell)$, d'où, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $\sin \ell = 0$. De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in]0;\pi/2[$ donc, en passant à la limite, on a $\ell \in [0;\pi/2]$. Le seul point d'annulation de la fonction sin sur $[0;\pi/2]$ étant 0, on en déduit finalement que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

c) Reprenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité de la question $\alpha]$ et réécrivons la sous la forme

$$(\blacklozenge) \qquad n \sin x_n = \frac{1 - f(x_n)}{2\pi}\cdot$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $f(0) = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - f(x_n)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(\blacktriangle) \qquad \frac{1 - f(x_n)}{2\pi} \sim \frac{1}{2\pi}\cdot$$

Par ailleurs, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers 0, on a $\sin x_n \sim x_n$ et donc

$$(\blacktriangledown) \qquad n \sin x_n \sim n x_n.$$

En réunissant $(\blacklozenge)$, $(\blacktriangle)$ et $(\blacktriangledown)$, on obtient que

$$\boxed{n x_n \sim \frac{1}{2\pi}\cdot}$$

✠ ***Exercice 5.*** [★]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que l'image de tout segment est un segment et telle que l'image réciproque de tout singleton est un fermé de $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le segment $K_n = [a - 1/n; a + 1/n]$. L'hypothèse nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(K_n)$ est un segment, que l'on peut noter $[m_n; M_n]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_n \subset K_{n+1}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(K_n) \subset f(K_{n+1})$, ce qui démontre que la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ croît et que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Comme $(m_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par M_1 et $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par m_1, on en déduit que $(m_n)_{n\geqslant 1}$ et $(M_n)_{n\geqslant 1}$ convergent respectivement vers m et M. Par conséquent, l'intersection $I = \bigcap_{n\geqslant 1} f(K_n)$ est le segment $[m; M]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(a) \in f(K_n)$, on a $f(a) \in I$.

Démontrons que I est en fait réduit à $f(a)$. Soit $y \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in K_n$ tel que $f(a_n) = y$. Le théorème des gendarmes nous dit que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers a. Par ailleurs, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in f^{-1}(\{y\})$ donc, puisque la partie $f^{-1}(\{y\})$ est fermée, elle contient les limites de ses suites, donc $a \in f^{-1}(\{y\})$, c'est-à-dire $f(a) = y$. On a bien $I = \{f(a)\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[m_N; M_N] \subset [f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon]$. Posons $\eta = 1/N$. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$, on a $x \in K_N$ et donc $f(x) \in [m_N; M_N]$, ce qui donne $f(x) \in [f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon]$ ou encore $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en a.

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [⋆]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme f tend vers ℓ en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon/4$. Par conséquent, pour tous $x, y \geqslant A$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$.

D'après le théorème de Heine, la fonction f, qui est continue sur le segment $[0; A]$, est uniformément continue sur $[0; A]$. Cela donne l'existence de $\alpha > 0$ tel que les relations $(0 \leqslant x \leqslant A,\ 0 \leqslant y \leqslant A,\ |x-y| \leqslant \alpha)$ impliquent $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$.

Dès lors, si x et y sont tels que $|x-y| \leqslant \alpha$, alors si $x, y \geqslant A$ on a $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2$; si $0 \leqslant x, y \leqslant A$, on a $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2$ et si $0 \leqslant x \leqslant A \leqslant y$ (le cas où l'on échange x et y est similaire), on a $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(A)| + |(A)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$.

On a ainsi démontré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \geqslant 0,\ (|y-x| \leqslant \alpha) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\big)$, ce qui signifie que

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

✠ *Exercice 7.* [⋆]

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.

1. Donner un exemple de fonction f non constante vérifiant cette relation.
2. Soit f une fonction continue vérifiant cette relation. Démontrer que f est constante. (Une fois choisi un nombre réel $x > 0$, on pourra considérer la suite $x^{1/2^n}$).

1. Il suffit de prendre la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 0$ et $f(0) = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_n = x^{1/2^n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(u_{n+1}) = f(x^{1/2^{n+1}}) = f\big((x^{1/2^{n+1}})^2\big) = f(x^{2/2^{n+1}}) = f(x^{1/2^n}) = f(u_n),$$

ce qui montre que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f(u_0) = f(x)$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a $u_n \longrightarrow 1$, donc $f(1) = f(x)$, puisque f est continue en 1.
Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $x^2 \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $f(x) = f(x^2) = f(1)$.
En définitive, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(1)$. En faisant tendre x vers 1 et en tenant compte de la continuité de f en 0, il vient $f(0) = f(1)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1)$, ce qui signifie que

$$\boxed{f \text{ est une fonction constante.}}$$