LA DROITE RÉELLE

Exercice 1. [$\circ$]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^{\uparrow}(x) = \sup\{f(t) : t \leqslant x\}.$$

Justifier l'existence de $f^{\uparrow}$ et étudier sa monotonie. Que dire de $f^{\uparrow}$ si f est croissante ?

Exercice 2. [$\star$]

Démontrer que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Adh}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{a\in A} \left]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right[$$

et en déduire que tout fermé de $\mathbb{R}$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. [$\star$]

Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ et $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
2. Démontrer que $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$ et $\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.
   Donner dans chacun des deux cas un exemple où l'égalité n'est pas vraie.

Exercice 4. [$\circ$]

Soient U, F deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que U est ouvert si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(U) \cap U = \varnothing$.
2. Démontrer que F est fermé si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(F) \subset F$.

Exercice 5. [$\bigstar$]

Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. (Ensemble dérivé)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \cap (]x - \varepsilon; x[\cup]x; x + \varepsilon[) \neq \varnothing$. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté A' et s'appelle l'*ensemble dérivé* de A.

1. Reformuler la définition d'un point d'accumulation à l'aide de la notion d'adhérence.
2. a) Donner un exemple d'ensemble infini D tel que $D' = \varnothing$.
   b) On pose $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Démontrer que $0 \in H'$.
3. Démontrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si,et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x - \varepsilon; x[\cup]x; x + \varepsilon[)$ est infini.
4. Démontrer que A' est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. a) Démontrer que $\mathrm{Adh}(A) = A \cup A'$.
   b) Démontrer que A est un fermé de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A' \subset A$.
6. Soit $(A^{(k)})_{k\geqslant 1}$ la suite d'ensembles définie par récurrence par $A^{(1)} = A'$, $A^{(2)} = (A')'$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{(k+1)} = (A^{(k)})'$. Démontrer que la suite $(A^{(k)})_{k\geqslant 1}$ est décroissante (pour $\subset$).