LES NOMBRES

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- le langage mathématique ;
- les relations.

Il n'est pas inutile de savoir déjà (au moins vaguement) à quoi ressemble un nombre (si ! si !).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Les entiers naturels

A.1. Description de $\mathbb{N}$

Définition 1

L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

L'existence des entiers naturels va de soi pour le commun des mortels. Il n'en est rien pour le mathématicien, toujours soucieux de bien définir les objets qu'il manipule.

Dans le cadre de l'axiomatique des ensembles de Zermelo–Fraenkel, il est possible de construire l'ensemble $\mathbb{N}$. Ainsi, la méthode de von Neumann (les curieux iront voir à quoi cela ressemble sur Wikipédia) permet de justifier l'existence d'un « unique » ensemble $\mathbb{N}$ satisfaisant les propriétés de Péano[(†)] : $\mathbb{N}$ contient un élément appelé zéro (noté 0) ; tout entier naturel n admet un unique successeur noté $n+1$; aucun entier naturel n'admet 0 pour successeur ; deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux et, finalement, si un ensemble A d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors $A = \mathbb{N}$.

En particulier, cette dernière propriété permet de démontrer le résultat fondamental satisfait par les entiers naturels : le principe de récurrence. Il est donné ci-dessous.

Théorème 1

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété mathématique dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ On applique la dernière propriété de Péano à l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : \mathscr{P}(n) \text{ vraie}\}$. ■

Il est alors possible, à l'aide du principe de récurrence, de « construire » sur $\mathbb{N}$ l'addition $+$, le produit $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$ avec toutes leurs propriétés classiques :

(1) $+$ est interne dans $\mathbb{N}$: $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m + n \in \mathbb{N}$;

(2) $+$ est associative : $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ (m+n)+p = m+(n+p)$;

(3) $+$ est commutative : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m+n = n+m$;

(4) $+$ est munie d'un élément neutre 0 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n+0 = 0+n = n$;

(5) $\times$ est interne : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \times n \in \mathbb{N}$;

(6) $\times$ est associative : $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ (m \times n) \times p = m \times (n \times p)$;

(7) $\times$ est commutative : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \times n = n \times m$;

(8) $\times$ est munie d'un élément neutre 1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \times 1 = 1 \times n = n$;

(9) $\times$ est munie d'un élément absorbant 0 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \times 0 = 0 \times n = 0$;

(10) $\times$ est intègre : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \times n = 0 \Longrightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0$;

(11) $\times$ est distributive sur $+$: $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ m \times (n+p) = m \times n + m \times p$;

(12) $\leqslant$ est réflexive : $\forall m \in \mathbb{N},\ m \leqslant m$;

(13) $\leqslant$ est antisymétrique : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n \text{ et } n \leqslant m) \Longrightarrow (m = n)$;

(14) $\leqslant$ est transitive : $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n \text{ et } n \leqslant p) \Longrightarrow (m \leqslant p)$;

(15) $\leqslant$ est totale : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n \text{ ou } n \leqslant m)$;

(16) $\leqslant$ est compatible avec $+$: $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n) \Longrightarrow (m+p \leqslant n+p)$;

(17) $\leqslant$ est compatible avec $\times$: $\forall m, n, p \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n) \Longrightarrow (m \times p \leqslant n \times p)$.

Les propriétés de Péano sont souvent appelées à tort les « axiomes de Péano » alors que, dans le cadre de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, ce sont des énoncés démontrables !

Nous verrons que toutes ces propriétés restent vraies dans d'autres ensembles de nombres que nous introduirons par la suite (comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). Il serait donc vain de rechercher ci-avant une propriété qui distingue nettement $\mathbb{N}$ de ces autres ensembles de nombres. Cette propriété existe néanmoins et est énoncée ci-dessous sous le numéro (i).

Proposition 1

L'ensemble $\mathbb{N}$ possède les trois propriétés suivantes :

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

(iii) $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

La propriété (i) étant vérifiée, on dit que $\leqslant$ est un bon ordre sur $\mathbb{N}$ ou encore que $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est bien ordonné.

■ (i) Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une partie A non vide de $\mathbb{N}$ n'admettant pas de plus petit élément.

Considérons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathscr{P}(n) : \forall a \in A,\ n \leqslant a$.

Initialisation : L'assertion $\forall a \in A,\ 0 \leqslant a$ découle de la construction de la relation $\leqslant$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. D'après $\mathscr{P}(n)$, n est un minorant de A. Comme A ne possède pas de plus petit élément, n ne peut appartenir à A, donc $\forall a \in A,\ n < a$. Cette dernière affirmation est équivalente à $\forall a \in A,\ n+1 \leqslant a$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or ceci est impossible : il suffit de prendre a dans l'ensemble non vide A et $n = a+1$ pour avoir $a+1 \leqslant a$, ce qui est absurde !

(ii) Soit A une partie non vide majorée. L'ensemble A^+ de ses majorants est donc non vide. D'après (i), A^+ admet donc un plus petit élément M. Si $M = 0$, alors nécessairement $A = \{0\}$ et 0 est le plus grand élément de A. Si $M > 0$, alors $M-1$ n'appartient pas à A^+ (puisque M est le plus petit élément de A^+), donc $M-1$ ne majore pas A. Il existe donc un élément $a \in A$ tel que $M-1 < a \leqslant M$. Dans les entiers, cela force l'égalité $a = M$. Ainsi M majore A et M appartient à A, donc M est bien le plus grand élément de A.

(iii) Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence du plus grand élément M de $\mathbb{N}$. Alors $M+1$ est un élément de $\mathbb{N}$ plus grand que le plus grand élément : absurde ! ■

On verra que $\mathbb{Z}$ ne possède pas la propriété de bon ordre puisque $\mathbb{Z}$, lui-même, n'a pas de plus petit élément.

A.2. Le raisonnement par récurrence

Nous allons nous attarder un peu plus sur le principe de récurrence (que j'appelle le « principe de la casserole (bien récurrée) »... mais il faut avouer que j'adore les jeux de mots bien pourris !).

a) La récurrence classique

La démonstration par récurrence classique repose sur le théorème 1 du paragraphe précédent.

Récurrence (simple)

Pour démontrer par récurrence une propriété du type $\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)$, on effectue les trois étapes suivantes :

- ▷ Initialisation : On démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ▷ Hérédité : On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on mène un raisonnement (utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$) afin de démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ▷ Conclusion : On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ C'est le théorème 1. ■

Parfois, la propriété que l'on doit démontrée n'est définie (ou valable) qu'à partir d'un rang n_0. On effectue alors une récurrence décalée : l'initialisation consiste alors à démontrer $\mathscr{P}(n_0)$.

On notera bien que l'assertion $\mathscr{P}(n)$ ne contient jamais la quantification « $\forall n$ ».

Exemples :

- On veut démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \underbrace{0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}_{\mathscr{P}(n)}.$$

Initialisation : La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $0 = 0(0+1)/2$.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$0+1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On veut comparer les quantités n^2 et 2^n.
On constate à la main que $0^2 \leqslant 2^0$, $1^2 \leqslant 2^1$, $2^2 \leqslant 2^2$, $3^2 \geqslant 2^3$, $4^2 = 2^4$, $5^2 \leqslant 2^5$, $6^2 \leqslant 2^6$, ... ce qui nous conduit à la conjecture :

$$\forall n \geqslant 4, \qquad \underbrace{n^2 \leqslant 2^n}_{\mathscr{Q}(n)}.$$

Initialisation : On a déjà signalé que $\mathscr{Q}(4)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \geqslant 4$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{Q}(n+1)$. On a

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \leqslant n^2+2n+2n = n^2+4n \leqslant n^2+n\times n = 2n^2 \leqslant 2^{n+1},$$

où la dernière inégalité découle de l'hypothèse de récurrence. Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$.
En définitive, on a $n^2 \leqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$ sauf pour $n = 3$.

b) *La récurrence double*

Dans certains cas, il peut être nécessaire de regrouper dans l'hypothèse de récurrence deux niveaux successifs de la propriété $\mathscr{P}$.

Récurrence double

Pour démontrer par récurrence double une propriété du type $\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)$, on effectue les trois étapes suivantes :

- ▷ <u>Initialisation :</u> On démontre que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- ▷ <u>Hérédité :</u> On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et on mène un raisonnement (utilisant les hypothèses de récurrence $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$) afin de démontrer que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- ▷ <u>Conclusion :</u> On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Il suffit d'appliquer le théorème 1 au prédicat $\big(\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)\big)$. ■

On peut évidemment généraliser le principe de récurrence double au cas de récurrences triples, quadruples, . . .

Comme dans le cas de la récurrence simple, il arrive que la propriété $\mathscr{P}(n)$ ne soit définie qu'à partir d'un rang n_0. Il convient alors d'adapter l'étape d'initialisation.

<u>Exemples :</u>

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On veut démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \underbrace{u_n = 2^n + 3^n}_{\mathscr{P}(n)}.$$

<u>Initialisation :</u> On a $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \qquad \text{par hyp. de réc.} \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+2)$.
<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence double permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Dans cet exemple, la démonstration par récurrence repose sur l'existence d'une relation de récurrence entre les termes de la suite. Cette situation étant très classique, vous rencontrerez de nombreux exercices où l'on vous demande d'établir, en préambule, une relation de récurrence. Je vous conseille donc de retenir qu'

une relation de récurence ne se démontre pas par récurrence

mais qu'une relation de récurence peut servir à faire une démonstration par récurrence.

c) *La récurrence forte*

Il s'agit cette fois du cas où l'on doit regrouper dans l'hypothèse de récurrence tous les niveaux du prédicat $\mathscr{P}$ jusqu'à n.

Récurrence forte

Pour démontrer par récurrence forte une propriété du type $\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)$, on effectue les trois étapes suivantes :

- ▷ Initialisation : On démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ▷ Hérédité : On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(0),\ \mathscr{P}(1),\ \ldots,\ \mathscr{P}(n)$ sont vraies et on mène un raisonnement (utilisant les hypothèses de récurrence de $\mathscr{P}(0)$ à $\mathscr{P}(n)$) afin de démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ▷ Conclusion : On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Il suffit d'appliquer le théorème 1 au prédicat $\big(\forall k \leqslant n,\ \mathscr{P}(k)\big)$. ■

Exemples :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels ne prenant jamais deux fois la même valeur telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n$. Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \underbrace{u_n = n}_{\mathscr{P}(n)}.$$

Initialisation : Les hypothèses nous disent que u_0 est un entier naturel tel que $u_0 \leqslant 0$. Donc $u_0 = 0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. D'une part, on sait que u_{n+1} est différent de $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n$ ce qui signifie, d'après les hypothèses de récurrence, que $u_{n+1} \notin \{0, 1, \ldots, n\}$. Par ailleurs, on sait que u_{n+1} est un entier naturel tel que $u_{n+1} \leqslant n+1$. La seule possibilité est donc $u_{n+1} = n+1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence forte permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.

$\mathcal{A}$.3. La division euclidienne

Théorème 2

Pour tous entiers naturels a et b (avec $b \neq 0$), il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b.$$

Les nombres a, b, q et r sont respectivement appelés le dividende, le diviseur, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

■ ▷ <u>Existence :</u> L'ensemble $E = \{bk : k \in \mathbb{N} \text{ et } bk \leqslant a\}$ des multiples de b inférieurs ou égaux à a est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ($0 \in E$) et majorée par a. Elle admet donc un plus grand élément d'après la proposition 1. Notons bq ce plus grand élément et posons $r = a - bq$. Comme $bq \leqslant a$, on a $r \geqslant 0$. De plus, $b(q+1)$ est un multiple de b supérieur à bq, donc $b(q+1) > a$, c'est-à-dire $r < b$.

▷ <u>Unicité :</u> Supposons que l'on a, d'une part, $a = bq_1 + r_1$ avec $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r_1 < b$ et, d'autre part, $a = bq_2 + r_2$ avec $q_2, r_2 \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r_2 < b$. En soustrayant les deux égalités, on obtient $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$, ce qui démontre que $r_2 - r_1$ est un multiple de b. Comme $r_2 - r_1$ est strictement compris entre $-b$ et b, il ne peut être que nul. Donc $r_1 = r_2$ et par conséquent $q_1 = q_2$. ■

Exemples :

- On veut effectuer la division euclidienne de $a = 1557$ par $b = 30$.
  On place à gauche et à droite d'une « potence » le dividende a et le diviseur b :

$$\begin{array}{r|l} 1557 & 30 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

  On trouve le premier chiffre du quotient q (placé sous la barre de potence) en effectuant de tête une division euclidienne par b du dividende partiel α obtenu en prenant suffisamment de chiffres dans a pour avoir un nombre supérieur ou égal à b. Dans notre exemple, on prend ainsi les trois premiers chiffres de 1557, c'est-à-dire $\alpha = 155$, et l'on se pose mentalement la question « en 155, combien de fois 30 ? ». La réponse est 5. Ce chiffre est le premier de notre quotient. En pratique, cela donne :

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{155}\,7 & 30 \\ \cline{2-2} & 5 \\ & \end{array}$$

  On détermine alors le produit du chiffre trouvé par le diviseur b et on inscrit le résultat sous le dividende pour le soustraire à α. Cela nous donne le premier reste partiel de notre division, que l'on inscrit dans la colonne du dividende. Dans notre cas, on obtient :

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{155}\,7 & 30 \\ \cline{2-2} -\ 150 & 5 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

  On rajoute alors un chiffre à ce reste partiel en « abaissant » un chiffre du dividende pour obtenir un nouveau dividende partiel β auquel on fait subir le même procédé. Cela donne un nouveau chiffre du quotient et un nouveau reste partiel.
  Ainsi de suite, en poursuivant jusqu'à épuisement de tous les chiffres du dividende :

$$\begin{array}{r|l} 1557 & 30 \\ \cline{2-2} 57 & 51 \\ 27 & \end{array}$$

  Le quotient vaut donc 51 et le reste est 27, c'est-à-dire $1557 = 51 \times 30 + 27$.

B. Les entiers relatifs

L'histoire des nombres est intimement liée à la mesure des longueurs en géométrie ainsi qu'à la résolution des équations polynomiales. À l'origine, les longueurs sont des entiers naturels. Pour tenir compte de l'orientation, on introduit la notion d'entiers pourvus d'un signe : ce sont les entiers relatifs. On obtient au passage la possibilité de résoudre les équations du type $x+a=0$ où $a \in \mathbb{N}$.

Définition 2

L'ensemble des entiers relatifs est est le sur-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}.$$

On note $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_- = (-\mathbb{N})$ et $\mathbb{Z}_-^* = (-\mathbb{N}^*)$.

Cette définition est intuitive puisque nous n'avons pas construit $\mathbb{Z}$. Signalons que cette construction consiste à symétriser la loi d'addition de $\mathbb{N}$, pour que chaque élément de $\mathbb{Z}$ possède un opposé. L'ensemble $\mathbb{Z}$ hérite donc par construction d'une loi d'addition $+$ qui prolonge celle de $\mathbb{N}$. On peut ensuite étendre le produit $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$ à $\mathbb{Z}$ de sorte que :

(1) $+$ est interne dans $\mathbb{Z}$: $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ m+n \in \mathbb{N}$;
(2) $+$ est associative : $\forall m,n,p \in \mathbb{Z},\ (m+n)+p = m+(n+p)$;
(3) $+$ est commutative : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ m+n = n+m$;
(4) $+$ est munie d'un élément neutre 0 : $\forall n \in \mathbb{Z},\ n+0 = 0+n = n$;
(5) existence de l'opposé : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists(-n) \in \mathbb{Z},\ n+(-n) = 0$;
(6) $\times$ est interne : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ mn \in \mathbb{Z}$;
(7) $\times$ est associative : $\forall m,n,p \in \mathbb{Z},\ (m\times n)\times p = m\times(n\times p)$;
(8) $\times$ est commutative : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ mn = nm$;
(9) $\times$ est munie d'un élément neutre 1 : $\forall n \in \mathbb{Z},\ n\times 1 = 1\times n = n$;
(10) $\times$ est munie d'un élément absorbant 0 : $\forall n \in \mathbb{Z},\ n\times 0 = 0\times n = 0$;
(11) $\times$ est intègre : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ m\times n = 0 \Longrightarrow m = 0$ ou $n = 0$;
(12) $\times$ est distributive sur $+$: $\forall m,n,p \in \mathbb{Z},\ m\times(n+p) = mn+mp$;
(13) $\leqslant$ est réflexive : $\forall m \in \mathbb{Z},\ m \leqslant m$;
(14) $\leqslant$ est antisymétrique : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ (m \leqslant n \text{ et } n \leqslant m) \Longrightarrow (m = n)$;
(15) $\leqslant$ est transitive : $\forall m,n,p \in \mathbb{Z},\ (m \leqslant n \text{ et } n \leqslant p) \Longrightarrow (m \leqslant p)$;
(16) $\leqslant$ est totale : $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ (m \leqslant n \text{ ou } n \leqslant m)$;
(17) $\leqslant$ est compatible avec $+$: $\forall m,n,p \in \mathbb{Z},\ (m \leqslant n) \Longrightarrow (m+p \leqslant n+p)$;
(18) $\leqslant$ est positivement compatible avec $\times$: $\forall m,n \in \mathbb{Z},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n) \Longrightarrow (mp \leqslant np)$.

La propriété (5), assurant l'existence d'un opposé, enrichie fortement la structure de $\mathbb{Z}$: on dit que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe. En contrepartie, au contraire de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ n'est pas bien ordonné : il existe des parties non vides de $\mathbb{Z}$ qui n'ont pas de plus petit élément ($\mathbb{Z}$ lui-même). On peut cependant donner l'énoncé ci-dessous. Nous verrons que nous perdrons les propriétés (i) et (ii) dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Proposition 2

L'ensemble $\mathbb{Z}$ possède les trois propriétés suivantes :

(i) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
(iii) $\mathbb{Z}$ n'a ni un plus petit ni un plus grand élément.

■ Cela découle de la construction de $\mathbb{Z}$ et de la proposition 1 ■

La suite de ce paragraphe va nous permettre d'introduire quelques notions élémentaires de l'arithmétique. Nous reviendrons plus tard sur tout cela (et bien plus) dans un chapitre consacré entièrement à l'arithmétique.

Définition 3

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que b divise a et l'on note $b \mid a$ s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$. On dit alors que b est un diviseur de a et que a est un multiple de b.

Notons que b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de $|a|$ par $|b|$ est nul.

Exemples :

- 2 divise un nombre n lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 5 divise un nombre n lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
- 3 divise un nombre n lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- 9 divise un nombre n lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- 11 divise un nombre n lorsque la somme alternée (c'est-à-dire avec un signe $+$ et un signe $-$ en alternance) de ses chiffres est divisible par 11. Ainsi, 14526325 est divisible par 11.

L'énoncé suivant rassemble les propriétés les plus élémentaires de la divisibilité.

Proposition 3

Soient a, b et c trois nombres entiers relatifs. On a :

(i) si $b \mid a$ alors $b \mid ac$;

(ii) si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $c \mid a \pm b$;

(iii) si $c \mid b$ et $b \mid a$ alors $c \mid a$.

■ (i) Si b divise a, alors $a = qb$ pour $q \in \mathbb{Z}$ d'où $ac = (qc)b$, ce qui démontre que b divise ac.

(ii) Si c divise a et b, il existe $q, s \in \mathbb{Z}$ tels que $a = qc$ et $b = sc$. Alors $a \pm b = (q \pm s)c$, ce qui démontre que $a \pm b$ est divisible par c.

(iii) Si c divise b et b divise a, alors il existe $q, s \in \mathbb{Z}$ tels que $b = qc$ et $a = sb$. Alors $a = (sq)c$, ce qui démontre que a est divisible par c. ■

Terminons ce paragraphe en introduisant les notions de pgcd et ppcm.

Définition 4

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.
Le pgcd de a et b, noté $a \wedge b$, est le plus grand des diviseurs communs à a et b.
Le ppcm de a et b, noté $a \vee b$, est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b.

Notons que cette définition est ambiguë : elle ne dit pas si le pgcd est le plus grand diviseur au sens de la relation d'ordre $\leqslant$ ou au sens de la relation $|$. Nous verrons qu'avec une condition de positivité, il n'y a en fait pas de différence à considérer $\leqslant$ ou $|$, on obtient le même pgcd.

Le pgcd de deux entiers a et b est le plus grand entier naturel par lequel on doit diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction a/b pour obtenir une fraction irréductible.
Le ppcm de deux entiers a et b est le plus petit entier naturel qui sert de dénominateur commun à une somme de deux fractions du type $\ldots/a$ et $\ldots/b$.

C. Les nombres rationnels

L'introduction des nombres rationnels a été motivée par le besoin de mesurer des portions de longueurs entières et par la nécessité de résoudre les équations du type $ax + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.

Définition 5

L'ensemble des nombres rationnels est le sur-ensemble de $\mathbb{Z}$ défini par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont donc représentés par des fractions satisfaisant à la règle d'égalité suivante (dite règle du produit en croix) :

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right) \iff (ad = bc).$$

Parmi les différentes fractions qui représentent un même rationnel r, on appelle écriture irréductible de r la fraction p/q où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

On note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}_+ = \{a/b : a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}^*\}$, etc.

La construction de $\mathbb{Q}$ (qui est hors-programme) consiste à symétriser la multiplication de $\mathbb{Z}$, pour que chaque élément de $\mathbb{Q}^*$ possède un inverse. L'ensemble $\mathbb{Q}$ hérite ainsi par construction, d'une addition $+$ (qui s'effectue par mise au même dénominateur), d'une multiplication $\times$ et d'une relation d'ordre $\leqslant$ définies, pour tous $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ (avec $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$), par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \iff ad \leqslant bc.$$

Ces opérations et cette relation prolongent celles de $\mathbb{Z}$ et l'on retrouve les propriétés classiques :

(1) $+$ est une loi interne dans $\mathbb{Q}$: $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ r + s \in \mathbb{Q}$;
(2) $+$ est associative : $\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ (r + s) + t = r + (s + t)$;
(3) $+$ est commutative : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ r + s = s + r$;
(4) $+$ est munie d'un élément neutre 0 : $\forall r \in \mathbb{Q},\ r + 0 = 0 + r = r$;
(5) existence de l'opposé : $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists(-r) \in \mathbb{Q},\ r + (-r) = 0$;
(6) $\times$ est interne : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ rs \in \mathbb{Q}$;
(7) $\times$ est associative : $\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ (rs)t = r(st)$;
(8) $\times$ est commutative : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ rs = sr$;
(9) $\times$ est munie d'un élément neutre 1 : $\forall r \in \mathbb{Q},\ r \times 1 = 1 \times r = r$;
(10) $\times$ est munie d'un élément absorbant 0 : $\forall r \in \mathbb{Q},\ r \times 0 = 0 \times r = 0$;
(11) $\times$ est intègre : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ r \times s = 0 \Longrightarrow r = 0$ ou $s = 0$;
(12) $\times$ est distributive sur $+$: $\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ r(s + t) = rs + rt$;
(13) existence de l'inverse : $\forall r \in \mathbb{Q}^*,\ \exists 1/r \in \mathbb{Q},\ r \times (1/r) = 1$;
(14) $\leqslant$ est réflexive : $\forall r \in \mathbb{Q},\ r \leqslant r$;
(15) $\leqslant$ est antisymétrique : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant s$ et $s \leqslant r) \Longrightarrow (r = s)$;
(16) $\leqslant$ est transitive : $\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant s$ et $s \leqslant t) \Longrightarrow (r \leqslant t)$;
(17) $\leqslant$ est totale : $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant s$ ou $s \leqslant r)$;
(18) $\leqslant$ est compatible avec $+$: $\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant s) \Longrightarrow (r + t \leqslant s + t)$;
(19) $\leqslant$ est positivement compatible avec $\times$: $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ \forall t \in \mathbb{Q}_+,\ (r \leqslant s) \Longrightarrow (rt \leqslant st)$.

Les éléments de $\mathbb{Q}$ possèdent donc tous un opposé et tous (sauf 0) un inverse. On obtient ainsi la structure algébrique la plus riche pour un ensemble de nombres : celle de corps.

Les rationnels, initialement représentés par des fractions d'entiers, peuvent aussi s'écrire sous forme décimale.

Définition 6

Pour obtenir une écriture décimale d'un rationnel $r = a/b$, on effectue la division euclidienne de a par b en poursuivant le calcul, après utilisation du dernier chiffre de a, par abaissements successifs d'un 0. Dans le quotient, les chiffres ainsi obtenus sont disposés après la virgule. On obtient une écriture du type :

$$r = q_0\,,\,\overline{q_1 q_2 \dots q_n \dots},$$

où $q_0 \in \mathbb{Z}$ et $\overline{q_1 q_2 \dots q_n \dots}$ désigne la juxtaposition des chiffres $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ (qui sont respectivement les chiffres des dixièmes ; des centièmes ; des millièmes ...).

La proposition suivante énonce un résultat important concernant les rationnels : ils sont caractérisés par une écriture décimale périodique.

Proposition 4

Une écriture décimale $r = q_0\,,\,\overline{q_1 q_2 \dots q_n \dots}$ d'un rationnel r est toujours périodique, c'est-à-dire qu'il existe dans la suite des décimales une séquence finie de chiffres $\overline{q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}}$, appelée période, qui se répète infiniment. Autrement dit, une écriture décimale d'un rationnel est toujours de la forme

$$r = q_0\,,\,\overline{q_1 q_2 \dots q_{i_0-1}\,\underbrace{q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}}_{\text{une période}}\,\underbrace{q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}}_{\text{une deuxième}} \cdots\cdots \underbrace{q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}}_{\text{une autre}} \cdots\cdots}$$

Réciproquement, toute écriture décimale périodique est celle d'un rationnel.

■ $\Rightarrow$ Soit $r = a/b$ un rationnel. Lorsqu'on détermine l'écriture décimale du rationnel a/b, on obtient, à chaque étape de la division euclidienne, un reste partiel compris entre 0 et $b-1$. Il s'ensuit, d'après le principe des tiroirs[†], que l'on va nécessairement finir par retrouver un reste déjà rencontré. À partir de là, on aura répétition de la séquence des décimales et donc apparition de la période.

$\Leftarrow$ Soit $r = q_0\,,\,\overline{q_1 \dots q_{i_0-1}\, q_{i_0} \dots q_{j_0}\, q_{i_0} \dots q_{j_0} \cdots\cdots q_{i_0} \dots q_{j_0} \cdots\cdots}$ une écriture décimale périodique. En multipliant r successivement par 10^{j_0} puis 10^{i_0-1}, on obtient

$$\begin{aligned} 10^{j_0}\, r &= \overline{q_0 q_1 q_2 \dots q_{i_0-1} q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}}\,,\,\overline{q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0} q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0} \cdots\cdots q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0} \cdots\cdots} \\ 10^{i_0-1}\, r &= \overline{q_0 q_1 \dots q_{i_0-1}}\,,\,\overline{q_{i_0} \dots q_{j_0}\, q_{i_0} \dots q_{j_0} \cdots\cdots q_{i_0} \dots q_{j_0} \cdots\cdots} \end{aligned}$$

ce qui donne, après soustraction,

$$(10^{j_0} - 10^{i_0-1}) r = \overline{q_0 q_1 q_2 \dots q_{i_0-1} q_{i_0} q_{i_0+1} \dots q_{j_0}} - \overline{q_0 q_1 \dots q_{i_0-1}}.$$

En divisant par $10^{j_0} - 10^{i_0-1}$, on voit que r est le quotient de deux entiers, c'est-à-dire $r \in \mathbb{Q}$. ■

Exemples :

- $\frac{1}{4} = 0,25000000000\dots$ donc une période de $\frac{1}{4}$ est 0.
- $\frac{2}{3} = 0,66666666666\dots$ donc une période de $\frac{2}{3}$ est 6.
- $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\dots$ donc une période de $\frac{1}{7}$ est 142857.
- $\frac{5}{6} = 0,83333333333$ donc une période de $\frac{5}{6}$ est 3 et commence au chiffre des dixièmes.

† C'est le principe qui veut que pour ranger strictement plus de n chaussettes dans n tiroirs, il est nécessaire que l'un des tiroirs contienne au moins deux chaussettes.

Les premiers rationnels que vous avez rencontrés n'avaient qu'un nombre fini de chiffres après la virgule. Nous allons de nouveau les rencontrer en informatique.

Définition 7

Le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ constitué des rationnels dont l'écriture décimale s'arrête (*i.e.* dont une période est 0) s'appelle l'ensemble des nombres décimaux et est noté $\mathbb{D}$. Dans l'écriture décimale de ces nombres, on omet les 0 qui se répètent.

Les entiers relatifs sont tous des décimaux. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Un logiciel de calcul numérique ne connait pas les rationnels (et encore moins les nombres réels). Il ne manipule que les nombres décimaux (et encore pas tous, puisqu'il faut tenir compte du nombre limité de décimales qu'il sait traiter et afficher ...). En informatique, ces nombres sont appelés des flottants.

Exemples :

- $1/4 \in \mathbb{D}$.
- $2/3$ et $1/7$ ne sont pas des décimaux.
- On a $0,9999999999\cdots = 1$.
  En effet, si on note $x = 0,9999999999\ldots$, on a $10x = 9,9999999999\ldots$ donc par soustraction il vient $9x = 9$, c'est-à-dire $x = 1$.
  Cet exemple illustre le fait que les décimaux ont tous deux écritures décimales : l'une de période 0 (dite écriture décimale propre) et l'autre de période 9 (dite écriture décimale impropre). Dans la pratique, on ne se sert pas de l'écriture décimale impropre. Elle est d'ailleurs quelquefois bien enquiquinante, par exemple parce qu'elle interdit de dire que l'écriture décimale est unique !

Malgré le caractère très riche de la structure de corps, on peut constater que $\mathbb{Q}$ est « incomplet », ce que Dedekind signale dans Continuité et nombres irrationnels (1872) en disant que « la comparaison entre le domaine $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et une droite induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. »

On peut observer cette insuffisance des rationnels de différentes manières.

Algébriquement, on peut d'abord constater qu'il n'existe pas de rationnel dont le carré vaut 2.

Analytiquement, la fonction polynomiale $f(x) = x^2 - 2$ définie pour $x \in \mathbb{Q}$ prend des valeurs strictement positives et strictement négatives mais ne s'annule pas, ce qui met en défaut le principe naturel des valeurs intermédiaires.

En terme de la relation d'ordre $\leqslant$, on constate une perte par rapport à $\mathbb{Z}$. Alors que, dans l'ensemble des entiers relatifs, toute partie non vide majorée possède un plus grand élément ; dans l'ensemble des nombres rationnels, cette propreté n'est même plus vraie pour la borne supérieure ! Par exemple, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$!

Géométriquement, les nombres rationnels ne permettent pas de mesurer toutes les distances ! Par exemple, le côté d'un carré n'est pas commensurable avec sa diagonale (parmi la longueur du côté et celle de la diagonale, il y en a forcément une des deux qui n'est pas rationnelle).

Enfin, l'écriture décimale permet également de constater qu'il « manque » des nombres dans $\mathbb{Q}$ puisque $\mathbb{Q}$ oublie tous les nombres dont l'écriture décimale n'est pas périodique !

Toutes ces raisons vont nous conduire à introduire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. 2 h 20

D. Les nombres réels

Les mathématiciens de l'école pythagoricienne ont été les premiers à constater l'insuffisance des nombres rationnels en découvrant que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut pas s'exprimer comme le quotient de deux entiers.

D.1. Description de $\mathbb{R}$

Nous nous contenterons d'une définition intuitive de $\mathbb{R}$ fondée sur la notion de développement décimal. On peut d'ailleurs formaliser correctement cette construction.

Définition 8

L'ensemble des nombres réels est le sur-ensemble de $\mathbb{Q}$, noté $\mathbb{R}$, obtenu en considérant tous les nombres dont le développement décimal est périodique ou non.

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Les rationnels sont les nombres réels dont le développement décimal est périodique.
Les réels qui ne sont pas rationnels, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sont dits irrationnels.

Par construction (croyez moi !), l'addition $+$, le produit $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$ se prolongent de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ avec toutes leurs propriétés classiques :

(1) $+$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \in \mathbb{R}$;
(2) $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
(3) $+$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$;
(4) $+$ est munie d'un élément neutre 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$;
(5) existence de l'opposé : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists(-x) \in \mathbb{R},\ x + (-x) = 0$;
(6) $\times$ est interne : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy \in \mathbb{R}$;
(7) $\times$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xy)z = x(yz)$;
(8) $\times$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$;
(9) $\times$ est munie d'un élément neutre 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = 1 \times x = x$;
(10) $\times$ est munie d'un élément absorbant 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 0 = 0 \times x = 0$;
(11) $\times$ est intègre : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \times y = 0 \Longrightarrow r = 0$ ou $s = 0$;
(12) $\times$ est distributive sur l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y + z) = xy + xz$;
(13) existence de l'inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists 1/x \in \mathbb{R},\ x \times (1/x) = 1$;
(14) $\leqslant$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$;
(15) $\leqslant$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Longrightarrow (x = y)$;
(16) $\leqslant$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Longrightarrow (x \leqslant z)$;
(17) $\leqslant$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y$ ou $y \leqslant x)$;
(18) $\leqslant$ est compatible avec $+$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y) \Longrightarrow (x + z \leqslant y + z)$;
(19) $\leqslant$ est positivement compatible avec $\times$: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \geqslant 0,\ (x \leqslant y) \Longrightarrow (xz \leqslant yz)$.

Algébriquement, on retrouve la structure de corps, déjà rencontrée pour $\mathbb{Q}$. Nous verrons au paragraphe D. 4. que la différence entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est à rechercher du côté de la relation d'ordre.

On prendra garde aux signes lorsqu'on manipule des inégalités : la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif inverse l'ordre de l'inégalité. De même, lorsqu'on passe aux inverses dans une inégalité, celle-ci change de sens. Pour ces raisons, on retiendra qu'

il est interdit de soustraire ou de diviser entre elles des inégalités.

D.2. Valeur absolue

Définition 9

Pour tout nombre réel, on appelle valeur absolue de x et l'on note $|x|$ le nombre réel positif ou nul défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire $|x| = \max\{-x; x\}$.

La quantité $|x-y|$ est égale à la distance séparant x et y sur la droite réelle.

Exemples :

- La valeur absolue permet d'exprimer le maximum et le minimum de deux réels a et b. Pour obtenir $\min(a, b)$, l'idée consiste à se placer au milieu de a et b, c'est-à-dire en $(a+b)/2$, puis à se déplacer vers la gauche d'une longueur égale à la moitié de la distance séparant a et b, c'est-à-dire $|a-b|/2$. Pour $\max(a, b)$, on fait de même en se déplaçant vers la droite. On obtient par conséquent

$$\min(a, b) = \frac{(a+b) - |a-b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \max(a, b) = \frac{(a+b) + |a-b|}{2}.$$

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 5

Soient x, y deux nombres réels (avec $y \neq 0$ si nécessaire). On a

(i) $|x| \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $x = 0$;

(ii) $|xy| = |x||y|$ (la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues) ;

(iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (la valeur absolue d'un quotient est le quotient des valeurs absolues) ;

(iii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;

(iv) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|$ (inégalité triangulaire renversée).

■ (i) AQT

(ii) On étudie les quatre cas : ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$), ($x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$), ($x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$) et ($x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$).

(iii) Idem.

(iv) On a $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$, d'où le résultat (deux nombres positifs ou nuls sont rangés dans le même ordre que leurs carrés).

(v) L'astuce de Binet couplée à l'inégalité triangulaire nous dit que $|x| = |(x+y) - y| \leqslant |x+y| + |-y|$, ce qui donne $|x| - |y| \leqslant |x+y|$. En échangeant x et y, on obtient $|y| - |x| \leqslant |y+x|$. Le résultat découle de la combinaison de ces deux inégalités. ■

La propriété (ii) se généralise (par récurrence) à un plus grand nombre de réels : « la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues ».

En particulier, « la valeur absolue d'une puissance est la puissance de la valeur absolue », c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ (avec $x \neq 0$ lorsque $n < 0$), on a

$$|x^n| = |x|^n.$$

L'inégalité triangulaire se généralise aussi (par récurrence) à un plus grand nombre de réels.

D.3. Intervalles

Ce paragraphe définit la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$. Nous reviendrons plus longuement sur ce sujet dans un prochain cours (introduisant l'analyse) consacré à la topologie de la droite réelle.

Définition 10

Les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

(i) $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$;
(ii) $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$;
(iii) $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$;
(iv) $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
(v) $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$;
(vi) $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
(vii) $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$;
(viii) $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
(ix) $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$,

où a et b désignent deux nombres réels. En particulier, l'ensemble vide est un intervalle puisque $\varnothing =]a;a[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Les intervalles de la forme $\varnothing$, $]-\infty,b]$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $\mathbb{R}$ sont dits fermés ; ceux de la forme $\varnothing$, $]-\infty,b[$, $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $\mathbb{R}$ sont dits ouverts et ceux de la forme $]a,b]$, $[a,b[$ sont dits semi-ouverts (ou semi-fermés). Du coup, $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ et $\varnothing$ sont des intervalles à la fois ouverts et fermés.

Les intervalles de la forme $[a,b]$ sont appelés segments d'extrémités a et b et ceux de la forme $]-\infty,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$ sont des demi-droites.

Philosophiquement, on peut retenir qu'un intervalle est une partie continue de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'on peut la dessiner sur la droite réelle sans lever le crayon. Nous justifierons cela plus tard.

On note $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le segment $[a;a]$ se réduit au singleton $\{a\}$. Avec l'ensemble vide, les singletons sont les seuls intervalles qui contiennent un nombre fini de points. Pour résumer, un intervalle possède 0, 1 ou une infinité d'éléments.

Les intervalles bornés sont ceux de la forme $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$. Les segments sont donc les intervalles fermés bornés.

Exemples :

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(|x-a| \leqslant \varepsilon) \iff (a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon) \iff (x \in [a-\varepsilon;a+\varepsilon]).$$

  Autrement dit, dire que x est éloigné de a d'une distance au plus égale à ε revient à affirmer que x est dans l'intervalle délimité par $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$.
  Ce résultat, aussi simple soit-il, est très utile en analyse où il permet de traduire, à l'aide d'un intervalle, une condition de proximité.

On termine ce paragraphe en étendant la notion d'intervalle aux entiers.

Définition 11

Soient $m,n \in \mathbb{Z}$. On pose $[\![m;n]\!] = \varnothing$ lorsque $n < m$ et $[\![m;n]\!] = \{m;m+1;m+2;\dots;n\}$ lorsque $n \geqslant m$.

Exemples :

- $[\![1;6]\!] = \{1;2;3;4;5;6\}$ est l'ensemble des résultats possibles pour un lancer de dé.

D.4. Propriété de la borne supérieure

L'ensemble $\mathbb{R}$ étant muni de la relation d'ordre total $\leqslant$, on peut y considérer les notions de majorant, de minorant, de plus grand et de plus petit élément ainsi que de borne supérieure et inférieure.

Par exemple, si $A = [0; \pi[$, alors d'une part $\min A = \inf A = 0$ et d'autre part $\max A$ n'existe pas et $\sup A = \pi$.

Le théorème suivant, généralement appelé propriété de la borne supérieure, énonce l'une des propriétés qui permet de comprendre la différence de structure qui existe entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 3

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

■ Admis. La démonstration de ce théorème dépend intimement de la façon dont $\mathbb{R}$ est construit. Comme nous avons passé sous silence cette construction, il n'est pas possible de justifier cet énoncé. Pas grave, c'est enquiquinant à souhait . . . ■

Pour avoir une borne supérieure, une partie doit être non vide et posséder des majorants, ce qui exclut de fait toutes les parties non majorées. Les seules parties pouvant avoir une borne supérieure sont donc celles qui sont non vides et majorées. L'énoncé précédent nous dit que c'est le cas de toutes ces parties. En ce sens, la propriété de la borne supérieure est donc un énoncé optimal !

Au contraire de $\mathbb{R}$, la propriété de la borne supérieure n'est pas satisfaite dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la partie $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (ce qui revient à dire que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel). Pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, on a donc rajouté toutes les bornes supérieures de toutes les parties non vides et majorées (c'est en fait l'une des manières de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$). En ce sens, la propriété de la borne supérieure signifie donc que $\mathbb{R}$ est « complet ».

Nous verrons qu'à travers cette « complétude », la propriété de la borne supérieure est à la base de la plupart des théorèmes de l'analyse réelle : théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des accroissements finis, . . .

Nous allons aussi nous en servir pour introduire ci-après les racines n-èmes et la partie entière.

Pour l'instant, on se contente de démontrer, dans le lemme qui suit, que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété d'Archimède.

Lemme 1

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que l'on a $\forall \varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ n_0\varepsilon > a$.

■ Soit $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\varepsilon \leqslant a$. L'ensemble $E = \{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}^*\}$ est alors une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par a, ce qui implique que E admet une borne supérieure s dans $\mathbb{R}$. Mézalors, comme $s - \varepsilon < s$, le nombre $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E dans $\mathbb{R}$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1\varepsilon > s - \varepsilon$, c'est-à-dire $(n_1 + 1)\varepsilon > s$, ce qui contredit la définition de s. Absurde ! ■

D.5. Exposants et racines

a) Exposants entiers

Ce paragraphe est une révision sur les exposants entiers.

Définition 12

Pour tout nombre réel x, on pose

$$x^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

Lorsque $x \neq 0$, on pose

$$\forall m \in \mathbb{Z}_-, \qquad x^m = \frac{1}{x^{-m}}.$$

Avec cette définition, on a $0^0 = 1$, ce qui peut parfois poser problème... On restera donc attentif, à chaque occasion où cela se présente, à la valeur qu'il convient de donner à 0^0 (par convention) pour que tout roule !

À ce stade du cours, on connait donc le sens de x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, indépendamment du fait que x soit positif ou négatif. Nous généraliserons plus tard la notation x^α pour un exposant α parcourant $\mathbb{R}$ mais ce sera au prix de la restriction des valeurs de x à $\mathbb{R}_+^*$.

Il est nécessaire de maîtriser parfaitement les propriétés suivantes.

Proposition 6

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (avec x ou y non nuls si besoin) et tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

(i) $(xy)^n = x^n y^n$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$;

(ii) $x^n x^m = x^{n+m}$ et $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$;

(iii) $(x^n)^m = x^{nm}$.

■ AQT ■

b) Racines n-émes

Définition 13

Soit n un entier naturel non nul.

Si n est pair, alors, pour tout nombre réel positif ou nul a, il existe un unique nombre réel positif ou nul, noté $\sqrt[n]{a}$, tel que

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Ce nombre est appelé la racine n-ème de a.

Si n est impair, on a le même résultat sans aucune condition de positivité. Plus précisément, pour $n = 3, 5, 7, \dots$ tout nombre réel a admet une unique racine n-ème $\sqrt[n]{a}$ dont le signe est le même que celui de a.

Dans le cas $n = 2$, on note $\sqrt{a}$ pour $\sqrt[2]{a}$ et on parle de racine carrée (la racine carrée servant à déterminer le côté d'un carré dont on connaît l'aire). Pour $n = 3$, on parle de racine cubique (la racine cubique sert à trouver le côté d'un cube dont on connaît le volume).

■ On traite le cas $n = 2$. Les autres cas sont laissés à la sagacité du lecteur besogneux.
On suppose $a \geqslant 1$. Le cas $0 < a \leqslant 1$ en découle en prenant $1/a$ à la place de a. Le cas $a = 0$ est simple.

- ▷ Existence :
  Considérons l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant a\}$. Cet ensemble n'est pas vide (puisqu'il contient 1) et il est majoré par a (sinon il existerait $x \in E$ tel que $x > a$, ce qui impliquerait que $x^2 > a^2 \geqslant a$). D'après la propriété de la borne supérieure, l'ensemble E admet une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$ (avec $b \geqslant 1$ puique $1 \in E$). Démontrons que $b^2 = a$ en démontrant successivement que $b^2 \leqslant a$ puis $b^2 \geqslant a$.
  Raisonnons par l'absurde en supposant que $b^2 > a$. Comme il existe un écart entre a et b^2, on imagine aisément que l'on doit pouvoir un peu diminuer b de sorte que son carré reste strictement supérieur à a, autrement dit qu'il existe $\varepsilon \in]0; b[$ tel que $(b-\varepsilon)^2 > a$. Cette condition est équivalente à $2\varepsilon b - \varepsilon^2 < b^2 - a$. Elle est donc impliquée par la condition $2\varepsilon b \leqslant (b^2 - a)$ qui correspond elle-même à $\varepsilon \leqslant (b^2 - a)/2b$. Il suffit par conséquent de choisir $0 < \varepsilon < \min\{b; (b^2-a)/2b\}$ pour avoir $(b-\varepsilon)^2 > a$.
  Mézalors, pour tout $x \in E$, on a $x^2 \leqslant a < (b-\varepsilon)^2$, ce qui donne $x < b - \varepsilon$. Le nombre $b - \varepsilon$ est alors un majorant de E, ce qui est absurde ! Donc $b^2 \leqslant a$.
  Un raisonnement similaire donne $b^2 \geqslant a$.
  Donc $b^2 = a$ et b est une racine carrée de a.
- • Unicité : Supposons que a admet une autre racine carrée c positive ou nulle. On a alors $b^2 = c^2$, ce qui donne $0 = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$. On en conclut que $b = c$ puisque $b + c > 0$. ■

Lorsque n est pair, le nombre a^n est positif ou nul pour tout $a \in \mathbb{R}$. Il est donc possible de calculer sa racine n-ème $\sqrt[n]{a^n}$. Mais attention ! On a alors $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. En particulier,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{a^2} = |a|.}$$

L'oubli des valeurs absolues est une faute très courante. Je vous conseille de faire explicitement figurer ces valeurs absolues même si elles portent sur une expression positive (en les otant ensuite).

La proposition suivante rassemble les propriétés élémentaires du symbole radical $\sqrt[n]{\cdot}$

Proposition 7

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

(i) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ et $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$;

(ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.

■ AQT ■

Lorsque x ou y n'est pas strictement positif, il faut manipuler ces formules avec la plus extrème vigilence !! En effet, par compensation des signes, $\sqrt{(-2)(-8)}$ existe (et vaut d'ailleurs 4) alors que ni $\sqrt{-2}$ ni $\sqrt{-8}$ n'ont de sens dans les réels.

D.6. Partie entière et approximation d'un nombre réel

a) Partie entière

Définition 14

On appelle partie entière d'un nombre réel x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$. Cette partie entière est caractérisée par les deux conditions

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

■ Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer l'existence de la partie entière de x revient à démontrer que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ possède un plus grand élément. Comme E est une partie de $\mathbb{Z}$, il suffit, pour arriver à nos fins, de justifier que E est non vide et majorée.

Pour cela, démontrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > |x|$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant |x|$. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure s (propriété de la borne supérieure). Mézalors, comme $s - 1 < s$, le nombre $s - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1 > s - 1$, c'est-à-dire $n_1 + 1 > s$, ce qui contredit la définition de s. Absurde ! On peut donc bien affirmer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > |x|$.

Les plus attentifs auront noté que nous avons redémontré un cas particulier de la propriété d'Archimède.

Dès lors, l'ensemble E contient $-n_0$ et est majoré par n_0. Il contient donc un plus grand élément. ■

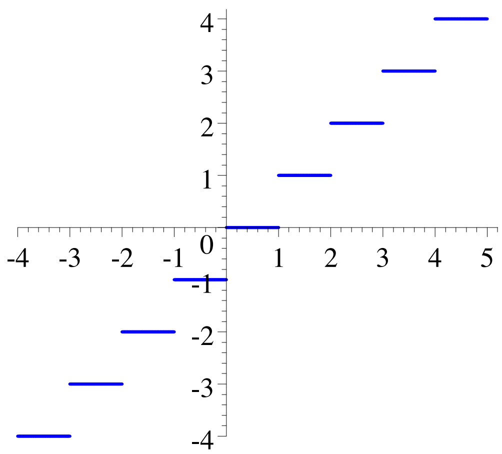
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le plus petit entier supérieur ou égal x est évidemment noté $\lceil x \rceil$ et s'appelle la partie entière supérieure de x. On a $\forall m \in \mathbb{Z},\ \lceil m \rceil = \lfloor m \rfloor$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

La partie fractionnaire d'un réel x est le nombre, noté $\{x\}$, défini par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Pour un nombre positif ou nul, $\{x\}$ est le nombre de $[0; 1[$ obtenu en ne gardant, dans x, que les chiffres après la virgule.

Exemples :

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor n \rfloor = n$;
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\{\pi\} = 0,14159265358979323846264338327950288419716939937 51\ldots$;
- $\lfloor -5,12 \rfloor = -6$.

Lorsqu'on représente la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, on obtient une fonction en escalier :



b) Approximation

Définition 15

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On dit que le réel α est :

- une valeur approchée de x à ε près lorsqu'on a l'encadrement $\alpha - \varepsilon \leqslant x \leqslant \alpha + \varepsilon$;
- une valeur approchée de x à ε près par défaut lorsqu'on a l'encadrement $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + \varepsilon$;
- une valeur approchée de x à ε près par excès lorsqu'on a l'encadrement $\alpha - \varepsilon \leqslant x \leqslant \alpha$.

L'erreur d'approximation ε est souvent de la forme 10^{-n} (où $n \in \mathbb{N}^*$). Dans ce cas, on appelle valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut (respectivement par excès) l'unique nombre décimal $\alpha_n \in \mathbb{D}$ avec n chiffres après la virgule tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + 10^{-n}$ (respectivement $\alpha - 10^{-n} < x \leqslant \alpha$).

Notons que l'encadrement $\alpha - \varepsilon \leqslant x \leqslant \alpha + \varepsilon$ est équivalent à l'inégalité $|x - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

Attention aux approximations lorsqu'on fait des opérations sur des valeurs approchées. En particulier, la somme de deux valeurs approchées à ε près donne une valeur approchée à 2ε près.

Exemples :

- Le nombre $3,1$ est une valeur approchée de π à 10^{-1} près par défaut. Autrement dit, on a $3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$.
- Donnons une valeur approchée à 10^{-3} près (par défaut) du nombre $\mathrm{e} \approx 2,71828183\ldots$ Pour cela, on commence par le multiplier par 10^3, ce qui déplace la virgule de trois rangs vers la droite : $10^3\,\mathrm{e} \approx 2718,28183\ldots$ On utilise ensuite la partie entière, ce qui fait disparaître les chiffres derrière la virgule : $\lfloor 10^3\,\mathrm{e} \rfloor = 2718$. Enfin, on redéplace la virgule de trois rangs vers la gauche en multipliant par 10^{-3}, ce qui donne l'approximation suivante $10^{-3}\lfloor 10^3\,\mathrm{e} \rfloor = 2,718$.
Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}$, tout nombre réel x peut être encadré à 10^{-p} près par deux nombres décimaux :
$$\underbrace{\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}}_{\substack{\text{approximation décimale de } x \\ \text{à } 10^{-p} \text{ près par défaut}}} \leqslant x < \underbrace{\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}}_{\substack{\text{approximation décimale de } x \\ \text{à } 10^{-p} \text{ près par excès}}}$$

On peut donc approcher n'importe quel nombre réel d'aussi près que l'on veut par des nombres décimaux (on dit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Ce résultat est utilisé en informatique : un logiciel de calcul ne connaissant que les nombres décimaux, il calcule avec des valeurs approchées.

D.7. Calculs dans $\mathbb{R}$

a) Identités remarquables

Identités remarquables

Les formules suivantes sont à savoir par $\heartsuit$:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Nous reverrons et généraliserons ces formules dans le chapitre sur les sommes et produits.

Il existe aussi une factorisation de $a^2 + b^2$ mais elle utilise les nombres complexes. Cela donne :

$$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib).$$

Nous verrons que cette identité est à la base de la définition du module.

Exemples :

- Démontrons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2},$$
ce qui signifie que la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \iff x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0 \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$
et comme l'inégalité de droite est clairement vraie, celle de gauche l'est aussi.
- Démontrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$x(1-x) \leqslant 1/4 \iff 4x - 4x^2 \leqslant 1 \iff 4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0 \iff (2x-1)^2 \geqslant 0$$
et comme l'inégalité de droite est clairement vraie, celle de gauche l'est aussi.

b) *Equations et inéquations*

Définition 16

Une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables. Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre la (ou les) variables pour rendre l'égalité vraie. Les variables sont aussi appelées inconnues. Les valeurs des variables pour lesquelles l'égalité est vérifiée sont appelées des solutions.

À la différence d'une identité, une équation est une égalité qui n'est pas nécessairement vraie pour toutes les valeurs possibles que peut prendre la (ou les) variable(s).

Conseils pour résoudre une équation

La résolution d'une équation comporte deux grandes étapes.

- Ensemble de définition

  On commence toujours par préciser pour quelles valeurs de(s) inconnue(s) l'équation possède un sens.

- Résolution

  Pour résoudre une équation, on essaye, autant que possible, de raisonner par équivalence jusqu'à obtenir l'ensemble des solutions. Pour cela, on utilise couramment les techniques suivantes :

  - on multiplie ou simplifie les deux membres de l'équation par un facteur non nul (en particulier, on a $(ab = ac) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = c)$) ;
  - on élève au carré les membres de l'équation à condition qu'ils soient tous les deux de même signe ;
  - on factorise au maximum pour se ramener à un produit d'expressions qui est nul puis on utilise la bonne vieille règle : « un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul ».

  Si l'on est obligé de raisonner par implication, les valeurs obtenues à la fin du raisonnement ne sont que des solutions possibles. Il convient de les essayer une par une dans l'équation de départ pour savoir s'il s'agit ou non de solutions.

Exemples :

- Équations du premier degré Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation $ax + b = 0$ admet une solution unique $-b/a$ lorsque $a \neq 0$, pas de solution lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$ et tous les nombres réels comme solutions lorsque $a = b = 0$.
- Équations du second degré Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :
  - ⋆ deux solutions réelles distinctes $x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ lorsque $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et dans ce cas, on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
  - ⋆ une solution (dite double) $x_0 = -b/(2a)$ lorsque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ et dans ce cas, on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$;
  - ⋆ aucune solution réelle lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
- Disons que l'on veuille déterminer les nombres réelles qui sont égaux à leur racine carrée. Cela revient à résoudre l'équation $x = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
  L'ensemble de définition de cette équation est clairement $\mathbb{R}_+$.
  Dès lors, les deux membres étant positifs ou nuls, on peut passer au carré, ce qui donne

  $$x = \sqrt{x} \iff x^2 = x \iff x = 0 \text{ ou } x = 1,$$

  donc les nombres réels qui sont égaux à leur racine carrée sont 0 et 1.

Passons au cas des inéquations.

Définition 17

Une inéquation est une inégalité contenant une ou plusieurs variables. Résoudre l'inéquation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre la (ou les) variables pour rendre l'inégalité vraie. Les variables sont aussi appelées inconnues. Les valeurs des variables pour lesquelles l'inégalité est vérifiée sont appelées des solutions.

Conseils pour résoudre une inéquation

On retrouve les deux étapes de la résolution d'une équation.

- ▶ Ensemble de définition

  On commence par préciser pour quelles valeurs de(s) inconnue(s) l'inéquation possède un sens.

- ▶ Résolution

  Pour résoudre une inéquation, on essaye, comme pour les équations, de raisonner par équivalence jusqu'à obtenir l'ensemble des solutions. Pour cela, on utilise couramment les techniques suivantes :

  - ▷ on multiplie ou on simplifie les deux membres de l'inéquation par un facteur non nul et on tient compte du signe de ce facteur pour savoir s'il faut ou non inverser le sens de l'inégalité ;
  - ▷ on élève au carré les deux membres de l'équation à condition qu'ils soient tous les deux positifs ou nuls (quand on était petits, on disait que « deux nombres positifs sont rangés dans le même sens que leurs carrés ») ;
  - ▷ on factorise au maximum pour se ramener à un produit d'expressions qui est positif puis on fait un bon vieux tableau de signes.

On a déjà signalé qu'il est interdit de soustraire ou de diviser entre-elles des inégalités. On peut par contre à loisir les additionner. On peut aussi les multiplier entre-elles lorsqu'elles ne concernent que des quantités positives.

Exemples :

- Inéquations du premier degré Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$, l'inéquation $ax + b \geqslant 0$ est équivalente à $x \in [-b/a; +\infty[$ lorsque $a > 0$ et $x \in]-\infty; -b/a]$ lorsque $a < 0$.
- Inéquations du second degré Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Si $a \neq 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a en dehors des racines et du signe contraire de a entre les racines. En particulier, si le trinôme n'a pas de solution (ou une solution double), le trinôme est toujours du signe de a. 4 h 40

E. Les nombres complexes

L'introduction des nombres complexes est motivée par le besoin de déterminer toutes les solutions d'une équation polynomiale.

E.1. Description de $\mathbb{C}$

a) Représentation algébrique

L'écriture classique d'un nombre complexe sous la forme $a+ib$ présuppose l'existence d'un ensemble muni d'une loi d'addition et de multiplication dans lequel -1 est un carré. On peut définir formellement $\mathbb{C}$ à partir de l'ensemble des couples de nombres réels et munir cet ensemble des lois d'addition et de multiplication qui prolongent naturellement celles de l'ensemble des nombres réels.

Sur $\mathbb{R}^2$, nous définissons l'addition par $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ et la multiplication par $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$. On pose $i=(0,1)$ et l'on vérifie que pour tout couple (a,b), on a $(a,b)=(a,0)+i(b,0)$. Cela nous incite à poser $a=(a,0)$, c'est-à-dire à identifier l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ au sous-ensemble $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. On peut alors écrire que $(a,b)=a+ib$. L'ensemble de tous les éléments $a+ib$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ ainsi fabriqué est appelé l'ensemble des nombres complexes. On peut donc donner la définition suivante.

Définition 18

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z=a+ib$, où a et b sont des nombres réels, muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) \quad \text{et} \quad (a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

En particulier, on a

$$i^2=-1.$$

Si $z=a+ib$, les nombres réels a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z. On les note $a=\Re\mathrm{e}(z)$ et $b=\Im\mathrm{m}(z)$. L'écriture $z=a+ib$ d'un nombre complexe avec a et b réels est appelée la forme cartésienne (ou algébrique) de z.

L'ensemble des nombres complexes de la forme $a+i0$ est naturellement identifié à $\mathbb{R}$. Un nombre réel est donc aussi un nombre complexe.

Les nombres complexes de la forme $0+ib=ib$ sont appelés imaginaires purs. Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$.

■ On a $i^2=(0+i.1)(0+i.1)=(0.0-1.1)+i(0.1+1.0)=-1$. ■

La partie imaginaire d'un nombre complexe porte mal son nom : c'est un nombre réel !

La forme cartésienne est particulièrement adaptée aux problèmes additifs. Nous introduirons plus loin la forme exponentielle qui, elle, est adaptée aux multiplications et aux quotients.

On peut alors énoncer le principe d'identification des parties réelle et imaginaire.

Proposition 8

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

■ $a+ib$ et $c+id$ sont deux formes cartésiennes d'un même nombre complexe si, et seulement si, les couples (a,b) et (c,d) sont égaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $a=c$ et $b=d$. ■

L'égalité de deux nombres complexes est équivalente à un système de deux égalités dans les nombres réels (égalité des parties réelles et égalité des parties imaginaires). C'est pour cette raison que l'on dit souvent qu'une équation complexe transporte deux informations...

Il n'est pas difficile de vérifier que toutes les règles opératoires concernant $+$ et $\times$ que l'on avait rencontrées sur $\mathbb{R}$ restent valables sur $\mathbb{C}$:

(1) $+$ est une loi interne dans $\mathbb{C}$: $\forall z, w \in \mathbb{C},\ z+w \in \mathbb{C}$;

(2) $+$ est associative : $\forall z, w, \xi \in \mathbb{C},\ (z+w)+\xi = z+(w+\xi)$;

(3) $+$ est commutative : $\forall z, w \in \mathbb{C},\ z+w = w+z$;

(4) $+$ est munie d'un élément neutre 0 : $\forall z \in \mathbb{C},\ z+0 = 0+z = z$;

(5) existence de l'opposé : $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists(-z) \in \mathbb{C},\ z+(-z) = 0$;

(6) $\times$ est interne : $\forall z, w \in \mathbb{C},\ zw \in \mathbb{C}$;

(7) $\times$ est associative : $\forall z, w, \xi \in \mathbb{C},\ (zw)\xi = z(w\xi)$;

(8) $\times$ est commutative : $\forall z, w \in \mathbb{C},\ zw = wz$;

(9) $\times$ est munie d'un élément neutre 1 : $\forall z \in \mathbb{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z$;

(10) $\times$ est munie d'un élément absorbant 0 : $\forall z \in \mathbb{C},\ z \times 0 = 0 \times z = 0$;

(11) $\times$ est intègre : $\forall z, w \in \mathbb{R},\ z \times w = 0 \Longrightarrow z = 0$ ou $w = 0$;

(12) $\times$ est distributive sur l'addition : $\forall z, w, \xi \in \mathbb{C},\ z(w+\xi) = zw + z\xi$;

(13) existence de l'inverse : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \exists 1/z \in \mathbb{C},\ z \times (1/z) = 1$.

On peut donc retenir que les calculs dans $\mathbb{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbb{R}$ en remplaçant chaque i^2 par -1. La structure de $\mathbb{C}$ est ainsi également une structure de corps.

En particulier, les identités remarquables, vues dans $\mathbb{R}$, sont également valables dans $\mathbb{C}$.

Exemples :

- $1/i = i/i^2 = -i$.
- $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = [1+2i+i^2]^4 = [2i]^4 = 2^4 i^4 = 16$.

Pas de $\leqslant$ dans $\mathbb{C}$!

Il faut retenir qu'il est impossible d'établir un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui prolonge celui de $\mathbb{R}$ et qui obéisse aux règles classiques (qui sont $(z < z',\ w < w') \Longrightarrow (z+w < z'+w')$ et $(z < z',\ w > 0) \Longrightarrow (wz < wz')$). Il ne faut donc JAMAIS écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

■ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel ordre total sur $\mathbb{C}$. Deux possibilités : ou bien $i \geqslant 0$, ou bien $i \leqslant 0$. Dans le premier cas, on élève au carré ce qui donne $-1 \geqslant 0$. Dans le second cas, on ajoute $-i$ aux deux membres de l'inégalité pour avoir $0 \leqslant -i$ puis on élève au carré, ce qui donne à nouveau l'inégalité $0 \leqslant -1$. Dans les deux cas, c'est facheux ! ■

Terminons ce paragraphe avec les propriétés de linéarité des parties réelles et imaginaires.

Proposition 9

Soient $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\Re\mathrm{e}(z_1+z_2) = \Re\mathrm{e}(z_1) + \Re\mathrm{e}(z_2)$ et $\Re\mathrm{e}(\lambda z) = \lambda \Re\mathrm{e}(z)$

(ii) $\Im\mathrm{m}(z_1+z_2) = \Im\mathrm{m}(z_1) + \Im\mathrm{m}(z_2)$ et $\Im\mathrm{m}(\lambda z) = \lambda \Im\mathrm{m}(z)$.

■ Écrivons $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ et $z = u+iv$. Alors

$$\Re\mathrm{e}(z_1+z_2) = \Re\mathrm{e}\big((a+ib)+(c+id)\big) = \Re\mathrm{e}\big((a+c)+i(b+d)\big) = a+c = \Re\mathrm{e}(z_1) + \Re\mathrm{e}(z_2)$$

et

$$\Re\mathrm{e}(\lambda z) = \Re\mathrm{e}\big(\lambda(u+iv)\big) = \Re\mathrm{e}(\lambda u + i\lambda v) = \lambda u = \lambda \Re\mathrm{e}(z).$$

On fait de même avec la partie imaginaire. ■

b) Représentation géométrique

L'interprétation géométrique de $\mathbb{C}$ est due à Wallis, Argand et Gauß qui, dans une lettre de 1811, explique que « de même qu'on peut se représenter le domaine des nombres réels au moyen d'une ligne droite [...], on peut se figurer les réels et les imaginaires au moyen d'un plan où chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b représente en même temps la quantité $a+ib$. ».

Cette représentation de $\mathbb{C}$ guide souvent l'intuition face à un exercice sur les complexes. Réciproquement, les complexes se révèlent un outil puissant dans certaines situations géométriques.

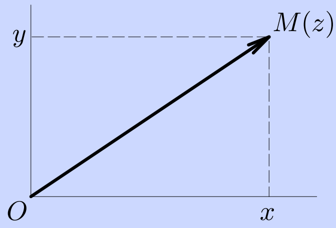
On considère le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Définition 19

On associe au nombre $z = x + iy$ le point M de coordonnées (x, y). On dit que z est l'affixe de M, que M est l'image de z et l'on note $M(z)$.

L'axe (Ox) est l'axe des réels et l'axe (Oy) est celui des imaginaires purs.

Le nombre complexe z est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, ce que l'on note $\overrightarrow{OM}(z)$. On dit alors que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z. On a $\overrightarrow{e_1}(1)$ et $\overrightarrow{e_2}(i)$.

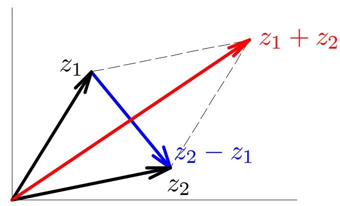


Nous appelons plan complexe cette double représentation (ponctuelle et vectorielle) du plan euclidien par les nombres complexes.

Interprétation géométrique de la somme et de la différence de deux nombres complexes

Il est facile de donner une interprétation géométrique de l'addition et de la soustraction de deux nombres complexes, à l'aide d'un parallèlogramme.

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont deux nombres complexes d'images respectives M_1 et M_2, la somme z_1+z_2 est l'affixe du point P de coordonnées $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, ce qui donne la relation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Par suite, la somme de deux nombres complexes z_1 et z_2 est représentée par la diagonale principale (en rouge) du parallélogramme porté par les vecteurs d'affixe z_1 et z_2.

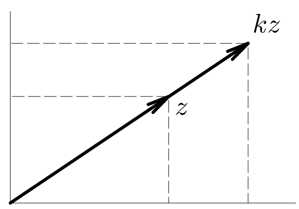


De même, on constate que la différence $z_2 - z_1$ est l'affixe du vecteur de composante $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Cela signifie que la différence de deux nombres complexes z_1 et z_2 est représentée par la diagonale secondaire (en bleu) du parallélogramme porté par les vecteurs d'affixe z_1 et z_2.

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel

On peut facilement interpréter la multiplication d'un complexe z par un réel k à l'aide d'une homothétie.

Si M désigne le point d'affixe z, le point M' d'affixe kz est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.



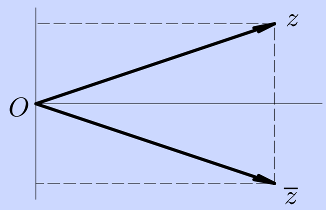
5 h 00

E.2. Conjugué

Définition 20

On appelle conjugué de $z = a + ib$ le nombre complexe défini par
$$\overline{z} = a - ib,$$
c'est-à-dire $\Re\mathrm{e}(\overline{z}) = \Re\mathrm{e}(z)$ et $\Im\mathrm{m}(\overline{z}) = -\Im\mathrm{m}(z)$.

Dans le plan complexe, l'image de $\overline{z}$ est donc le symétrique par rapport à l'axe réel de l'image de z.



Exemples :

- On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ Alors
$$j^2 = \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\jmath}.$$

Les propriétés fondamentales de la conjugaison sont données dans la proposition suivante.

Proposition 10

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 (avec $z_2 \neq 0$ si nécessaire), on a

(i) $\overline{\overline{z}} = z$ (z et $\overline{z}$ sont des complexes conjugués) ;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués) ;

(iii) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ (le conjugué d'un produit est le produit des conjugués) ;

(iv) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués).

■ On pose $z = \alpha + i\beta$, $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$.

(i) On a
$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{\alpha + i\beta}} = \overline{\alpha - i\beta} = \alpha + i\beta = z.$$

(ii) On a
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+ib) + (c+id)} = \overline{(a+c) + i(b+d)} = (a+c) - i(b+d)$$
et
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - ib) + (c - id) = (a+c) - i(b+d)$$
d'où l'égalité.

(iii) On a
$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac - bd) + i(ad + cb)} = (ac - bd) - i(ad + cb)$$
et
$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + cb)$$
d'où l'égalité.

(iv) D'après (iii), on a
$$\overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_2 \times \left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1},$$
ce qui donne le résultat en divisant par $\overline{z_2}$. ■

Les propriétés (ii) et (iii) se généralisent (par récurrence) à un plus grand nombre de complexes.

On peut exprimer les parties réelles et imaginaires à l'aide du conjugué.

Proposition 11

Pour tout nombre complexe z, on a

$$\Re\mathrm{e}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \Im\mathrm{m}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}\cdot$$

Par conséquent, les réels et les imaginaires purs sont caractérisés par les propriétés suivantes :

$$(z \in \mathbb{R}) \iff (\overline{z} = z) \qquad \text{et} \qquad (z \in i\mathbb{R}) \iff (\overline{z} = -z).$$

■ AQT ■

La propriété (i) de cette proposition est exploitée dans l'exemple suivant (très classique).

Exemples :

- Déterminons les nombres complexes z tels que $\dfrac{z}{z-i}$ soit réel.

  On a $z \neq i$ et

  $$\frac{z}{z-i} \in \mathbb{R} \iff \frac{z}{z-i} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}+i} \iff z\overline{z} + iz = z\overline{z} - i\overline{z} \iff z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}.$$

  donc les points $M(z)$ parcourent la droite des imaginaires purs privée du point d'affixe i.

E.3. Module

Définition 21

Le module du nombre complexe $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$, est le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le module de z est donc la distance entre l'origine O et le point $M(z)$. C'est aussi la norme du vecteur d'affixe z.

Si $z = a$ est un nombre réel, la notation $|z|$ est cohérente avec celle utilisée jusqu'à présent pour désigner la valeur absolue puisque $|z| = \sqrt{a^2}$ est bien égal à la valeur absolue de a.

Exemples :

- On a $|j| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ donc j est de module 1.

Écriture cartésienne d'un quotient

La formule $z\overline{z} = |z|^2$ permet, entre autre chose, d'exprimer l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ sous sa forme cartésienne :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Cette écriture peut être utilisée pour déterminer la forme cartésienne du quotient de deux nombres complexes.

Exemples :

- On a $\dfrac{2 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2i} = \dfrac{(2 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + 2i)}{(\sqrt{3} - 2i)(\sqrt{3} + 2i)} = \dfrac{2\sqrt{3} + 4i + 3i - 2\sqrt{3}}{3 + 4} = \dfrac{7i}{7} = i.$
- On a $\dfrac{1}{j} = \dfrac{\overline{\jmath}}{|j|^2} = \dfrac{\overline{\jmath}}{1^2} = \overline{\jmath}$ donc $\overline{\jmath}$ est à la fois le conjugué, le carré et l'inverse de j.

Dans le plan complexe, le module permet de calculer des distances.

Proposition 12

Le module de $z_1 - z_2$, à savoir $|z_1 - z_2|$ ou $|z_2 - z_1|$, est la distance entre $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

■ Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, on a $|z_1 - z_2| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = M_1M_2$. ■

Exemples :

- Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| = r\}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
  En particulier, l'ensemble
  $$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
  des complexes de module 1 représente le cercle unité (ou cercle trigonométrique).
- Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| \leqslant r\}$ est l'ensemble des affixes des points du disque de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.

La proposition suivante rassemble les principales propriétés du module.

Proposition 13

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 (avec $z_2 \neq 0$ si nécessaire), on a

(i) $|z| \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $z = 0$;

(ii) $|\overline{z}| = |z|$ (un nombre et son conjugué ont même module) ;

(iii) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ (le module d'un produit est le produit des modules) ;

(iv) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (le module d'un quotient est le quotient des modules) ;

(v) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)
avec égalité si, et seulement si, $z_2 = 0$ ou $z_1/z_2 \in \mathbb{R}_+$;

(vi) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2|$ (inégalité triangulaire renversée).

■ (i) On a $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \geqslant 0$.
On a $(|z| = 0) \iff (\sqrt{z\,\overline{z}} = 0) \iff (z\,\overline{z} = 0) \iff (z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0) \iff (z = 0)$.

(ii) On a $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}\,z} = |z|$.

(iii) On a $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1| \times |z_2|$.

(iv) Par (iii), on a $|z_2| \times \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_2 \times \dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|$ d'où le résultat en divisant par $|z_2|$.

(v) <u>Démonstration géométrique :</u>
C'est la traduction en terme de nombres complexes de l'inégalité triangulaire géométrique : la norme d'une somme de deux vecteurs est inférieure à la somme des normes de ces deux vecteurs, avec égalité si, et seulement si, les vecteurs sont colinéaires et de même sens.
<u>Démonstration algébrique :</u>
Cette démonstration repose sur l'inégalité suivante, dite inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})| \leqslant |z_1||z_2|.$$

Pour démontrer cette inégalité, on écrit que

$$|z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| = \sqrt{\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})^2 + \Im\mathrm{m}(z_1\overline{z_2})^2} \geqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})^2} = |\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})|$$

où l'inégalité découle de l'oubli (volontaire) d'un terme positif.
On notera qu'il y a égalité dans cette inégalité de Cauchy–Schwarz si, et seulement si, $\Im\mathrm{m}(z_1\overline{z_2}) = 0$.
On peut alors écrire que

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} = |z_1|^2+2\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2.$$

Or $\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})| \leqslant |z_1||z_2|$, où la première inégalité est évidente et la deuxième est celle de Cauchy–Schwarz. Donc

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\,,$$

ce qui donne le résultat (deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés).
Pour avoir égalité, il faut et suffit que $\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2}) = |\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})|$ et qu'il y ait égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz, c'est-à-dire $\Im\mathrm{m}(z_1\overline{z_2}) = 0$. Cela revient à dire que $z_1\overline{z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans le cas où $z_2 = 0$, cette condition est clairement satisfaite. Sinon, on a $z_1\overline{z_2} = |z_2|^2 z_1/z_2$ ce qui prouve que $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $z_1/z_2 \in \mathbb{R}_+$.

(vi) L'astuce de Binet couplée à l'inégalité triangulaire nous dit que $|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|-z_2|$, ce qui donne $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$. En échangeant z_1 et z_2, on obtient $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 + z_1|$. Le résultat découle de la combinaison de ces deux inégalités. ■

La propriété (iii) se généralise (par récurrence) à un plus grand nombre de complexes, ce qui justifie complètement la phrase « le module d'un produit est le produit des modules ».

En particulier, « le module d'une puissance est la puissance du module », c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ (avec $z \neq 0$ lorsque $n < 0$), on a

$$|z^n| = |z|^n$$

L'inégalité triangulaire se généralise aussi (par récurrence) à plus de deux nombres complexes.

E.4. Argument, forme trigonométrique et exponentielle

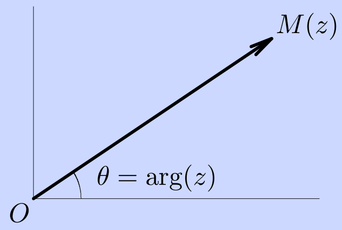
a) Argument et forme trigonométrique

La multiplication de deux nombres complexes peut également être décrite géométriquement. Mais il est nécessaire pour cela d'introduire les coordonnées polaires d'un nombre complexe.

Définition 22

Soit z un complexe non nul. On appelle argument de z, et l'on note $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z dans le plan complexe.

Un argument est donc défini modulo 2π.



On ne peut pas attribuer d'argument à 0 car il est impossible de définir l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0})$.

Le module $|z|$ et un argument $\arg(z)$ d'un nombre complexe z forment un couple de coordonnées polaires du point d'affixe z. La proposition suivante fait le lien entre z et ses coordonnées polaires.

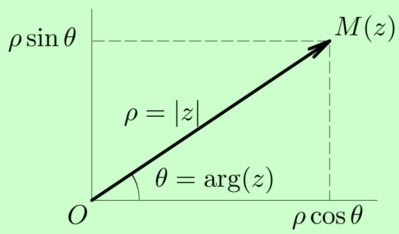
Proposition 14

Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π. On a

$$\rho = |z| \qquad \text{et} \qquad \theta = \arg(z).$$



Cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

■ L'existence vient d'être établie car $z = |z|\big(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\big)$. Pour l'unicité, on suppose que l'on a $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ avec $\rho_1, \rho_2 > 0$. Alors $|z| = |\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)| = \rho_1$ et $|z| = |\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)| = \rho_2$ d'où $\rho_1 = \rho_2$. On a alors $\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ c'est-à-dire $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ ce qui implique bien que $\theta_1 = \theta_2$ $[2\pi]$. On sait donc que z s'écrit de manière unique sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho > 0$ et que l'on a $z = |z|\big(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\big)$. Cela implique nécessairement que $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$. ■

Notons que le lien entre la forme cartésienne $z = a + ib$ d'un nombre complexe non nul et sa forme trigonométrique $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est donné par les formules

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemples :

- Soit $z = 1 - i$. On a $|z|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$ donc $|z| = \sqrt{2}$. Notons $\theta = \arg(z)$. On a $z/|z| = 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2} = \cos\theta + i\sin\theta$ donc $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ et $\sin\theta = -1/\sqrt{2}$. On en déduit que $\arg(z) = \theta = -\pi/4$ $[2\pi]$.

b) *Exponentielle complexe de module* 1

Définition 23

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Exemples :

- On a
$$\mathrm{e}^{i0} = 1, \qquad \mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j.$$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{i2k\pi} = 1$. Réciproquement, si $\mathrm{e}^{i\theta} = 1$, alors $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{i(\theta+2k\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta}$. Réciproquement, si $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi}$, alors θ et φ sont congrus modulo 2π.

La proposition suivante donne les propriétés de $\mathrm{e}^{i\theta}$. Rappelons que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle unité.

Proposition 15

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

(i) $|\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,| = 1$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{i\alpha} \in \mathbb{U}$;

(ii) $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{i\alpha} \times \mathrm{e}^{i\beta}$ (l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles) ;

(iii) $\overline{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \mathrm{e}^{-i\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha}}$.

■ (i) On a $|\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1} = 1$.

(ii) On a
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\alpha} \times \mathrm{e}^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ &= \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\overline{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \overline{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \mathrm{e}^{-i\alpha}$. Par ailleurs, d'après (ii), on a $\mathrm{e}^{-i\alpha}\,\mathrm{e}^{i\alpha} = \mathrm{e}^{i0} = 1$, donc $\mathrm{e}^{-i\alpha} = 1/\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. ■

La formule (ii) se généralise très simplement par récurrence : $\mathrm{e}^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)} = \mathrm{e}^{i\theta_1} \times \cdots \times \mathrm{e}^{i\theta_n}$. En particulier, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$\boxed{\mathrm{e}^{in\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^n}$$
ce qui donne la formule de de Moivre :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

L'énoncé suivant donne les formules d'Euler.

Proposition 16

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les formules d'Euler
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

7 h 00

■ AQT ■

c) *Forme exponentielle*

Proposition 17

Tout nombre complexe z non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π. On a $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$. Cette écriture est appelée forme exponentielle du nombre complexe z.

■ C'est la traduction de la proposition 14. ■

On peut alors énoncer le principe d'identification du module et de l'argument.

Proposition 18

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument modulo 2π.

■ AQT ■

La forme exponentielle est particulièrement adaptée aux problèmes multiplicatifs. Toutefois, pour additionner (ou soustraire) deux exponentielles complexes, on dispose de la technique suivante.

Technique de l'angle moyen

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour factoriser $\mathrm{e}^{i\alpha} \pm \mathrm{e}^{i\beta}$, on met artificiellement en facteur $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}$, c'est-à-dire l'exponentielle complexe de l'angle moyen $(\alpha+\beta)/2$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\alpha} \pm \mathrm{e}^{i\beta} &= \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{i(\alpha-\beta)/2} \pm \mathrm{e}^{-i(\alpha-\beta)/2}\right) \\ &= \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2} & \text{si } \pm = + \\ 2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2} & \text{si } \pm = - \end{cases} \end{aligned}$$

Exemples :

- Appliquons la technique de l'angle moyen pour simplifier le quotient $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}+1}$. Cela donne

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}+1} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{i0}}{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i0}} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta/2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{i\theta/2}-\mathrm{e}^{-i\theta/2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2}+\mathrm{e}^{-i\theta/2}} = \frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = i\tan(\theta/2).$$

- Déterminons le module et un argument de $\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}$. La technique de l'angle moyen dit que

$$\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2},$$

  donc

  ▷ si $\cos\big((\alpha-\beta)/2\big) > 0$, on a

$$|z| = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \arg z = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad [2\pi]\,;$$

  ▷ si $\cos\big((\alpha-\beta)/2\big) < 0$, on a

$$|z| = -\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \arg z = \frac{\alpha+\beta}{2} + \pi \quad [2\pi].$$

d) *Propriétés de l'argument*

On peut traduire les propriétés de la proposition 15 à l'aide de l'argument. On constate alors le caractère « logarithmique » de l'argument : un argument d'un produit est la somme des arguments.

Corollaire 1

Pour tous nombres complexes non nuls z, z_1 et z_2, on a

(i) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$.

(ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

Plus généralement, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.

(iii) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.

(iv) $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$ si, et seulement si, $z_1/z_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

■ C'est immédiat à l'aide de la proposition 15. ■

La propriété (i) se généralise (par récurrence) à un plus grand nombre de complexes. En particulier, l'argument d'une puissance n-ème vaut n fois l'argument :

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

où $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$.

Interprétation géométrique du produit de deux complexes

Le produit de deux complexes se fait par multiplication des modules et addition des arguments. Multiplier par un nombre complexe correspond donc géométriquement à la composition d'une homothétie (dilatation des modules) et d'une rotation (ajout d'un angle à l'argument).

Exemples :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs d'affixes respectives u et v, les propriétés de l'argument (associées à celles de la conjugaison) permettent de donner la caractérisation suivante de la colinéarité et de l'orthogonalité :

$$\overrightarrow{u} \,/\!/\, \overrightarrow{v} \iff \arg u = \arg v\ [\pi] \iff \frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff \frac{u}{v} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \iff \Im\mathrm{m}(u\overline{v}) = 0$$

et

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \arg u = \arg v + \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff \frac{u}{v} = -\frac{\overline{u}}{\overline{v}} \iff \Re\mathrm{e}(u\overline{v}) = 0.$$

e) L'exponentielle complexe

Définition 24

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle exponentielle de z le nombre complexe, noté e^z ou $\exp(z)$, défini par $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$.

La fonction exp : $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ et s'accorde avec la notation e^{ix} introduite précédemment.

Vous apprendrez l'an prochain à définir directement l'exponentielle sur $\mathbb{C}$. Dans ce contexte, vous verrez que l'exponentielle réelle et la notation $\mathrm{e}^{i\theta}$ ne servent pas à définir l'exponentielle complexe ; elles n'en sont que des cas particuliers (les restrictions à $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ pour être précis).

Exemples :

- Les valeurs classiques à la fois de l'exponentielle réelle et de $\mathrm{e}^{i\theta}$ se retrouvent dans l'exponentielle complexe. Par exemple, on a
$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{1+i\pi} = -\,\mathrm{e}$$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{z+2ik\pi} = \mathrm{e}^z$ (faire le calcul !), ce qui démontre que l'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique. La dernière propriété de la proposition suivante précise ce résultat.

Les propriétés de la fonction exponentielle complexe sont résumées dans l'énoncé suivant.

Proposition 19

Soient z, z_1, z_2 trois nombres complexes. On a

(i) $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$ (l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles) ;
En particulier, e^{-z} est l'inverse de e^z ;

(ii) $|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) = \Im\mathrm{m}(z)\ [2\pi]$;
En particulier, $(\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}) \iff$ (il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + 2ik\pi$).

■ On pose $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ où $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(i) On a
$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{x_1+x_2}\,\mathrm{e}^{i(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{x_1}\,\mathrm{e}^{x_2}\,\mathrm{e}^{iy_1}\,\mathrm{e}^{iy_2} = \mathrm{e}^{x_1}\,\mathrm{e}^{iy_1}\,\mathrm{e}^{x_2}\,\mathrm{e}^{iy_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}\,.$$
En prenant $z_1 = z$ et $z_2 = -z$ dans cette formule, on obtient $\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{-z}$, c'est-à-dire $1 = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{-z}$ ce qui démontre bien que e^{-z} est l'inverse de e^z.

(ii) On a
$$|\,\mathrm{e}^z\,| = |\,\mathrm{e}^x\,|\,|\,\mathrm{e}^{iy}\,| = \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(z)}\,.$$
Par suite, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = |\,\mathrm{e}^z\,|\,\mathrm{e}^{iy}$, ce qui démontre que
$$\arg(\mathrm{e}^z) = y = \Im\mathrm{m}(z)\ [2\pi].$$
On a
$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}) &\iff \big(|\,\mathrm{e}^{z_1}\,| = |\,\mathrm{e}^{z_2}\,| \text{ et } \arg(\mathrm{e}^{z_1}) = \arg(\mathrm{e}^{z_2})\ [2\pi]\big)\\
&\iff \big(\mathrm{e}^{x_1} = \mathrm{e}^{x_2} \text{ et } y_1 = y_2\ [2\pi]\big)\\
&\iff \big(x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2\ [2\pi]\big)\\
&\iff \big(z_1 = z_2\ [2i\pi]\big),
\end{aligned}$$
ce démontre le résultat. ■

L'encadré suivant vous explique comment déterminer les antécédents par exp d'un nombre complexe donné. Rien n'est à apprendre par cœur, tout est à savoir refaire...

Résolution de $\mathrm{e}^z = \omega$

Pour un nombre complexe ω fixé, on considère l'équation (E), d'inconnue $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, définie par

$$(E) \qquad \mathrm{e}^z = \omega.$$

- Si $\omega = 0$, l'équation (E) n'a pas de solution. En effet, l'équation (E) se réécrit

$$(E) \qquad \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{iy} = 0.$$

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et le nombre complexe e^{iy} étant de module 1, cette équation n'a pas de solution.

- Si $\omega \neq 0$, on écrit ω sous sa forme exponentielle : $\omega = |\omega| \, \mathrm{e}^{i \arg(\omega)}$, ce qui permet de réécrire (E) sous la forme

$$(E) \qquad \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{iy} = |\omega| \, \mathrm{e}^{i \arg(\omega)}.$$

L'identification des modules et arguments nous dit alors que (E) est équivalente aux deux égalités

$$\mathrm{e}^x = |\omega| \qquad \text{et} \qquad y = \arg(\omega) \ [2\pi],$$

donc les solutions de (E) sont tous les nombres z de la forme

$$z = \ln|\omega| + i\big(\arg(\omega) + 2k\pi\big) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Que l'on soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, l'exponentielle ne s'annule pas ! Par contre, elle atteint toutes les autres valeurs une infinité de fois. Cela signifie que exp réalise une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas du tout injective. Ce défaut d'injectivité est à la source de multiples désagréments lorsque l'on souhaite introduire un logarithme complexe. Plus tard ceci tu étudieras, jeune padawan.

Exemples :

- Résolvons l'équation (E) : $\mathrm{e}^z = -3\sqrt{3} - 3i$.
  En posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{x+iy} = 6\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big) \\
&\iff \quad \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{iy} = 6 \, \mathrm{e}^{7i\pi/6} \\
&\iff \quad \mathrm{e}^x = 6 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\
&\iff \quad x = \ln(6) \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi
\end{aligned}$$

  donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est

$$\mathscr{S} = \Big\{ \ln(6) + i\Big(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\Big) : k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

E.5. Equations du second degré

a) Racines carrées

Définition 25

Soit Δ un nombre complexe (par exemple le discriminant d'une équation du second degré). On appelle racine carrée de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Dans $\mathbb{R}$, un nombre possède ou bien une unique racine carrée (lorsqu'il est positif ou nul) ou bien aucune racine carrée (lorsqu'il est strictement négatif). Au contraire, dans $\mathbb{C}$, nous allons voir que tout nombre complexe $\Delta \neq 0$ possède exactement deux racines carrées de signes opposés.

Ainsi, -11 n'a pas de racine carrée réelle mais en a deux dans $\mathbb{C}$ qui sont $i\sqrt{11}$ et $-i\sqrt{11}$. De même, 9 admet une racine carrée (qui est 3) en tant que nombre réel et deux racines carrées (qui sont 3 et -3) en tant que nombre complexe.

L'encadré ci-dessous fait le point sur les différentes méthodes pour déterminer les deux racines carrées d'un nombre complexe $\Delta \neq 0$.

Détermination des racines carrées d'un complexe

Tout nombre complexe non nul Δ possède deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ qui sont opposées. Pour les déterminer, on utilise l'une des méthodes suivantes :

- *1er cas : Δ est un nombre réel positif ou nul*

  Les racines carrées complexes de Δ sont $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$.

- *2ème cas : Δ est un nombre réel strictement négatif*

  Les racines carrées complexes de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$.

- *3ème cas : Δ est sous forme exponentielle : $\Delta = \rho\, e^{i\alpha}$*

  On recherche les racines carrées sous la forme $\delta = r\, e^{i\theta}$. L'équation $\delta^2 = \Delta$ devient alors $r^2\, e^{2i\theta} = \rho\, e^{i\alpha}$, ce qui est équivalent aux conditions $r^2 = \rho$ et $2\theta = \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $r = \sqrt{\rho}$ et $\theta = \alpha/2 + k\pi$. On obtient toutes les valeurs de θ modulo 2π en prenant $k = 0$ et $k = 1$. On en conclut que les deux racines carrées δ_1 et δ_2 de Δ sont
  $$\delta_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\alpha/2} \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = \sqrt{\rho}\, e^{i(\alpha/2+\pi)} = -\sqrt{\rho}\, e^{i\alpha/2}.$$

- *4ème cas : Δ est sous forme cartésienne : $\Delta = a + ib$*

  On recherche les racines carrées sous la forme $\delta = \alpha + i\beta$. L'équation $\delta^2 = \Delta$ donne
  $$(\alpha + i\beta)^2 = a + ib \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a & (1), \\ 2\alpha\beta = b & (2). \end{cases}$$

  Pour éviter de résoudre directement ce système (les calculs seraient compliqués), on peut lui adjoindre une troisième équation en passant au module dans l'équation $\delta^2 = \Delta$. Cette astuce fournit la relation supplémetaire $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire
  $$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3).$$

  En ajoutant les équations (1) et (3), on obtient alors la valeur de α^2, ce qui fournit deux valeurs possibles pour α. À chacune de ces valeurs, on peut alors faire correspondre une valeur de β à l'aide de l'équation (2). On obtient ainsi les deux racines carrées de Δ.

Exemples :

- Recherchons les racines carrées de $\Delta = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
  On a $\Delta = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$ donc les racines carrées de Δ sont $\delta = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}$ et $-\delta = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}$.
- Déterminons les racines carrées de $\Delta = -3 - 4i$.
  Soit $\delta = a + ib$ une racine carrée de Δ où $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors $\delta^2 = (a^2 - b^2) + 2iab = -3 - 4i$ d'où (1) : $a^2 - b^2 = -3$ et (2) : $ab = -2$. De plus, $|\delta|^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$, c'est-à-dire (3) : $a^2 + b^2 = 5$. En ajoutant (1) et (3), on a $2a^2 = 2$, c'est-à-dire $a = \pm 1$. D'après (2), on en déduit que (a, b) vaut $(1, -2)$ ou $(-1, 2)$. Les racines carrées de Δ sont donc $\delta = 1 - 2i$ et $-\delta = -1 + 2i$.

Il ne faut jamais utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un nombre complexe z qui n'est pas un réel positif ou nul sinon vous risquez d'écrire des bêtises du type :

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}^{\,2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

b) Racines d'un trinôme

Proposition 20

Considérons une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe z, les coefficients a, b, c étant complexes avec a non nul.

Cette équation admet deux solutions, qui sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$ est nul, on dit que l'équation admet une solution double (qui est $z = -b/(2a)$).

■ On commence par mettre le trinôme sous forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\Big(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\Big) = a\Big\{\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big\}.$$

Comme $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est donc équivalente à

$$\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

En notant δ et $-\delta$ les deux racines carrées complexes de Δ (qui sont éventuellement confondues si $\Delta = 0$), l'équation devient

$$\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{\delta}{2a}\Big)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Big(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\Big)\Big(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\Big) = 0.$$

On a donc

$$z + \frac{b-\delta}{2a} = 0 \qquad \text{ou} \qquad z + \frac{b+\delta}{2a} = 0$$

ce qui donne

$$z = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

C'est le résultat attendu. ■

Dans le cas où Δ est positif ou nul, on retrouve les formules bien connues :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De même, lorsque Δ est strictement négatif, on retrouve les formules apprises en terminale :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

En particulier, lorsque a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, on retrouve le fait que les solutions sont conjuguées l'une de l'autre.

Exemples :

- Résolvons $z^2 - (1+i)z + i = 0$.
  On a $\Delta = (1+i)^2 - 4 \times 1 \times i = -2i = 2\,\mathrm{e}^{-i\pi/2}$ donc les racines carrées de Δ sont

  $$\delta = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) = 1 - i \qquad \text{et} \qquad -\delta = -1 + i.$$

  Les solutions de l'équation sont donc

  $$z_1 = \frac{1+i+1-i}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1+i-1+i}{2} = i.$$

Le théorème précédent permet de déterminer les relations coefficients-racines dans le cas d'une équation du second degré.

Corollaire 2

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré d'inconnue complexe z, les coefficients a, b, c étant complexes avec a non nul. Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation (lorsque la racine est double, on la prend en compte deux fois), on a

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}\cdot$$

■ C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. ■

Exemples :

- Retrouvons les solutions de l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$.
  On constate que 1 est une solution évidente. Comme le produit des racines vaut i, l'autre racine est i.

Terminons ce paragraphe en résolvant les systèmes somme/produit.

Proposition 21

Soient S et P deux nombres complexes. Les nombres complexes z_1 et z_2 sont des solutions du système somme/produit défini par

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

si, et seulement si, ils sont les racines de l'équation du second degré

$$Z^2 - SZ + P = 0.$$

■ Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $Z^2 - SZ + P = 0$, alors $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$ d'après le corollaire précédent.

Réciproquement, si $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$ alors ${z_1}^2 - Sz_1 + P = {z_1}^2 - (z_1 + z_2)z_1 + z_1 z_2 = 0$ et ${z_2}^2 - Sz_2 + P = {z_2}^2 - (z_1 + z_2)z_2 + z_1 z_2 = 0$, ce qui justifie que z_1 et z_2 sont bien les racines de l'équation $Z^2 - SZ + P = 0$. ■

Exemples :

- Trouvons deux nombres dont la somme est -1 et le produit est 1.
  Le résultat ci-dessus dit que les deux nombres sont solutions de l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$.
  On a $\Delta = -3$ donc les solutions de cette équation du second degré sont

$$Z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j \qquad \text{et} \qquad Z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{\jmath} = j^2.$$

  Par conséquent, les deux nombres sont j et j^2.

$\mathcal{E}$.6. Racines n-émes

a) Racines n-émes de l'unité

Définition 26

Soit n un entier strictement positif. Les racines n-èmes de l'unité sont les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble de ces solutions est noté $\mathbb{U}_n$.

Détermination des racines n-èmes de l'unité

Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_n$ revient à chercher les nombres complexe $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ qui vérifient

$$\begin{aligned} z^n = 1 \quad & \iff \quad (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n = 1\,\mathrm{e}^{i0} \\ & \iff \quad r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} = 1\,\mathrm{e}^{i0} \\ & \iff \quad \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ & \iff \quad z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on obtient n angles distincts de $[0; 2\pi[$ et donc aussi n valeurs de z distinctes. Par ailleurs, si $k \equiv \ell\ [n]$, on a $\mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \mathrm{e}^{2i\ell\pi/n}$, donc pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus [\![0; n-1]\!]$, on retrouve des solutions déjà déterminées. On a donc

$$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n} : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

Faisons quelques remarques à propos de ces racines n-èmes (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

- ▷ 1 est toujours une racine n-ème de l'unité.
- ▷ -1 est une racine n-ème de l'unité si, et seulement si, n est pair.
- ▷ Il y a toujours n racines n-èmes de l'unité.

  On ne peut donc pas utiliser la notation $\sqrt[n]{\cdot}$ puisqu'on ne saurait pas quelle racine n-ème cela désigne.
- ▷ Les racines n-èmes de l'unité sont toutes de module 1, c'est-à-dire $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

  Plus précisément, les images des éléments de $\mathbb{U}_n$ dessinent un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.
- ▷ Pour $n \geqslant 2$, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle (nous le verrons en exercice). Cela signifie que la moyenne de ces n racines n-èmes de l'unité est nulle (géométriquement, le centre de gravité des sommets du polygone est à l'origine).
- ▷ Le produit des racines n-èmes de l'unité est égal à $(-1)^{n-1}$ (nous le verrons en exercice).
- ▷ Les racines n-èmes de l'unité sont les racines du polynôme $X^n - 1$.

  Comme $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$, les racines du polynôme $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$ forment l'ensemble $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
- ▷ Les racines carrées de 1 sont 1 et -1 (c'était déjà le cas dans $\mathbb{R}$).

  Les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2 où, rappelons-le, j est, par définition, donné par $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$. On peut donc retenir, à propos de ce nombre j, que :

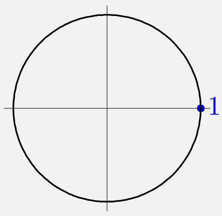
  $$j^3 = 1, \qquad \bar{j} = j^2 = 1/j \qquad \text{et} \qquad 1 + j + j^2 = 0.$$

  Les racines quatrièmes de 1 sont bien connues : ce sont 1, i, -1 et $-i$.

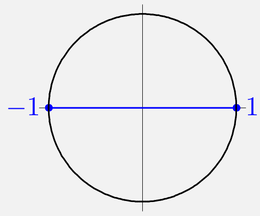
Les exemples ci-dessous illustrent graphiquement les ensembles $\mathbb{U}_n$ pour n petit.

Exemples :

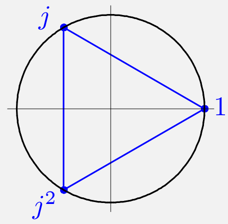
$\mathbb{U}_1 = \{1\}$



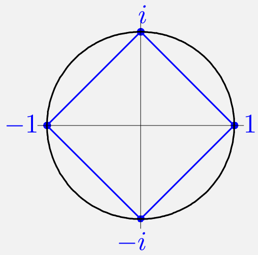
$\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$



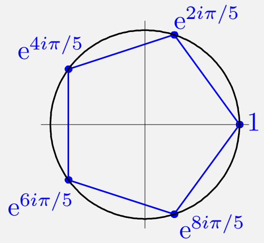
$\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$



$\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$



$\mathbb{U}_5 = \{1, \mathrm{e}^{2i\pi/5}, \mathrm{e}^{4i\pi/5}, \mathrm{e}^{6i\pi/5}, \mathrm{e}^{8i\pi/5}\}$



Pour $n = 6$, on a

$$\mathbb{U}_6 = \{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\}$$

et ces six points dessinent un hexagone régulier dans le cercle unité. À vos crayons !

b) Racines n-émes d'un nombre complexe quelconque

Nous décrivons deux méthodes pour déterminer les racines n-èmes d'un nombre complexe. La première est la généralisation de la méthode vue au paragraphe précédent pour les racines n-èmes de l'unité. La seconde s'applique lorsqu'on connait déjà l'une des racines n-èmes.

Détermination directe des racines n-èmes de $a \in \mathbb{C}^*$

Pour déterminer l'ensemble des racines n-èmes d'un nombre complexe a non nul, on commence par écrire a sous forme exponentielle : $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Le problème revient alors à chercher les nombres complexe $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ qui vérifient

$$z^n = a \iff (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha} \iff r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,.$$

Les couples (r, θ) qui sont solutions de cette dernière équation doivent donc vérifier

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Comme dans le cas des racines n-èmes de l'unité, on obtient ainsi n valeurs possibles (définies à 2π près) pour l'angle θ, correspondant aux choix $k = 0$, $k = 1$, …, $k = n - 1$. Cela fournit n racines n-èmes de a, données par

$$\omega_0 = \sqrt[n]{\rho}\exp\frac{i\alpha}{n} \qquad \omega_1 = \sqrt[n]{\rho}\exp\frac{i(\alpha+2\pi)}{n} \qquad \cdots \qquad \omega_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}\exp\frac{i\big(\alpha+2(n-1)\pi\big)}{n}.$$

On notera que, géométriquement, les images des racines n-èmes d'un nombre complexe a dessinent, dans le plan complexe, un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|a|^{1/n}$ et dont l'un des sommets est le point de coordonnées polaires $\big(|a|^{1/n}, \arg(a)/n\big)$.

Détermination des racines n-èmes de $a \in \mathbb{C}^*$
lorsqu'on connait une solution particulière

Lorsqu'on connait une solution particulière z_0 de l'équation $z^n = a$, on peut écrire

$$z^n = a \iff z^n = {z_0}^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n.$$

ce qui implique que les valeurs de z recherchées s'obtiennent en multipliant z_0 par chacune des racines n-èmes de l'unité.

On retiendra que, pour déterminer les racines n-èmes d'un nombre complexe, il suffit d'abord d'en trouver une puis de multiplier celle-ci par les racines n-èmes de l'unité pour les avoir toutes.

Exemples :

- Déterminons les racines cubiques de $-(1+2i)^3$.

  On veut résoudre $z^3 = -(1+2i)^3$. Il est manifeste que $z = -1-2i$ est une solution. Les racines cubiques de l'unité sont classiquement données par 1, j et j^2 où $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Les racines cubiques de $-(1+2i)^3$ sont donc $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$. 9 h 30

F. Géométrie des nombres complexes

F.1. Distances et angles

Commençons par voir comment utiliser les complexes pour mesurer des distances et des angles.

Proposition 22

Soient A, B, C trois points distincts, d'affixes respectives a, b et c.

(i) La distance AB est donnée par $AB = |b - a|$.

(ii) L'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ est donné par $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg \dfrac{b-c}{a-c}\ [2\pi]$.

■ (i) Déjà vu !

(ii) Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement $a - c$ et $b - c$ donc $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg(a-c)\ [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg(b-c)\ [2\pi]$. On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CB}\right) - \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg(b-c) - \arg(a-c) = \arg \frac{b-c}{a-c}\ [2\pi],$$

ce qui démontre le résultat. ■

Cette proposition permet en particulier de caractériser l'alignement et l'orthogonalité. Ces résultats ne sont pas à connaître mais à savoir retrouver (il suffit de raisonner en terme d'angle).

Corollaire 3

Soient A, B et C trois points distincts, d'affixes respectives a, b et c.

(i) Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$.

(ii) Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si, et seulement si, $\dfrac{b-c}{a-c} \in i\mathbb{R}$.

■ (i) D'après la proposition 22, A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\arg\big((b-c)/(a-c)\big) = 0\ [\pi]$, ce qui revient bien à dire que $(b-c)/(a-c)$ est un nombre réel.

(ii) Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales (c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux) si, et seulement si, $\arg\big((b-c)/(a-c)\big) = \pi/2\ [\pi]$, ce qui revient bien à dire que $(b-c)/(a-c)$ est un imaginaire pur. ■

Rappelons que pour traduire l'appartenance à $\mathbb{R}$ (resp. à $i\mathbb{R}$), on peut utiliser la conjugaison : Z est réel (resp. imaginaire pur) si, et seulement si, $\overline{Z} = Z$ (resp. $\overline{Z} = -Z$).

<u>Exemples :</u>

- À quoi peut bien ressembler une équation de droite dans le plan complexe ? Pour le savoir, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b (avec $a \neq b$) et on écrit :

$$\begin{aligned}
M(z) \in (AB) \quad &\iff \quad A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\
&\iff \quad \frac{z-b}{a-b} \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \frac{z-b}{a-b} = \overline{\left(\frac{z-b}{a-b}\right)} \\
&\iff \quad \frac{z-b}{a-b} = \frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}} \\
&\iff \quad (z-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (\overline{z}-\overline{b})(a-b) \\
&\iff \quad (\overline{a}-\overline{b})z - (a-b)\overline{z} = \overline{a}b - a\overline{b}.
\end{aligned}$$

Voici donc à quoi ressemble l'équation de droite attendue. C'est moche !

F.2. Quelques transformations du plan complexe

Une transformation du plan complexe est une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe un autre complexe $Z = f(z)$. Il lui correspond une application du plan vers le plan qui à tout point M d'affixe z associe un point N d'affixe $f(z)$.

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier quelques transformations complexes simples avant de s'attarder un peu plus sur les similitudes.

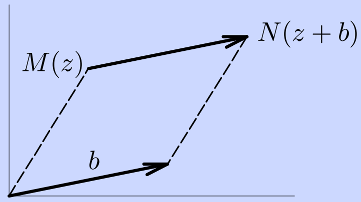
Dans tout ce paragraphe, on confond à loisir les points (ou les vecteurs) avec leurs affixes.

a) Transformations élémentaires

On commence avec les translations.

Définition 27

Soit $b \in \mathbb{C}$. La transformation t_b du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $z + b$ est appelée la translation de vecteur b.



Intuitivement, une translation correspond à l'idée de « glissement » d'un objet, sans rotation, sans retournement et sans déformation de cet objet.

En particulier, une translation est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les distances : si $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont deux points du plan d'images respectives $N_1(Z_1)$ et $N_2(Z_2)$ par une translation (peu importe son vecteur), alors $N_1N_2 = M_1M_2$, c'est-à-dire $|Z_2 - Z_1| = |z_2 - z_1|$.

Sur un écran tactile, lorsque vous déplacer une image (avec toute la force de votre gros doigt), vous effectuez une translation.

Exemples :

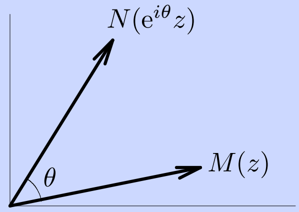
- Lorsque $b = 0$, la translation ne fait rien ! On dit que c'est l'identité et on écrit $t_0 = \mathrm{Id}$.

  C'est la seule translation qui ait des points fixes (d'ailleurs tout point est fixe !). Toutes les autres translations sont sans point fixe.
- La translation t_b agit sur les points en les faisant glisser selon le vecteur b. Du coup, la translation t_{-b} fait exactement le contraire. Si l'on fait agir successivement ces deux applications, c'est comme si l'on avait rien fait. On dit que t_b et t_{-b} sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

On poursuit avec les rotations.

Définition 28

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La transformation r_θ du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta} z$ est appelée la rotation de centre 0 et d'angle θ.



Intuitivement, une rotation est une transformation qui fait tourner les figures autour d'un point et d'un certain angle, sans déformation ni agrandissement de la figure.

Les rotations sont donc des isométries : comme les translations, elles conservent les distances.

Sur un écran tactile, lorsque vous faites pivoter une image (en tournant deux doigts maintenus à distance constante), vous effectuez une rotation.

On peut aussi considérer des rotations dont le centre z_0 n'est pas à l'origine : tout se passe alors comme avec une rotation de centre 0 pour laquelle on aurait translaté le repère d'un vecteur z_0. Dans ce cas, la rotation associe à $M(z)$ le point $N(Z)$ tel que $Z = z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$.

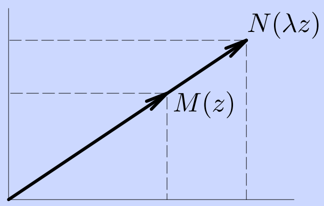
Exemples :

- Lorsque $\theta = 0$ $[2\pi]$, la rotation r_0 ne fait rien ! On retrouve l'identité (*i.e.* $r_0 = \mathrm{Id}$).
  C'est la seule rotation qui admette plusieurs points fixes (tous les points sont fixes !). Toutes les autres rotations n'ont qu'un seul point fixe : leur centre.
- Lorsque $\theta = \pm\pi/2$ $[2\pi]$, on dit que la rotation est un quart de tour.
- Lorsque $\theta = \pi$ $[2\pi]$, la rotation r_π associe à tout complexe z son opposé $-z$. On dit que c'est un demi-tour ou encore une symétrie centrale.
- La rotation r_θ agit sur les points en les faisant tourner d'un angle θ. Du coup, la rotation $r_{-\theta}$ fait exactement le contraire. Si l'on fait agir successivement ces deux applications, c'est comme si l'on avait rien fait. Autrement dit, r_θ et $r_{-\theta}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Passons aux homothéties.

Définition 29

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La transformation h_λ du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe λz est appelée l'homothétie de centre 0 et de rapport λ.



Intuitivement, une homothétie correspond à l'idée de « dilatation » d'un objet : les distances sont toutes agrandies (si $|\lambda| > 1$) ou réduites (si $|\lambda| < 1$) mais les proportions et les angles sont conservés (sauf si $\lambda = 0$). Si $\lambda > 0$, l'objet reste du même côté de 0 que l'objet initial alors que, pour $\lambda < 0$, il change de côté. Attention, dans tous les cas, la figure n'est pas retournée (y réfléchir !).

Sur un écran tactile, lorsque vous zoomez (ou dézoomez) sur une partie d'une image (en écartant ou rapprochant deux doigts), vous effectuez une homothétie.

Rien n'interdit de considérer des homothéties dont le centre z_0 n'est pas à l'origine : tout se passe alors comme avec une homothétie de centre 0 pour laquelle on aurait translaté le repère d'un vecteur z_0. Dans ce cas, l'homothétie associe à $M(z)$ le point $N(Z)$ tel que $Z = z_0 + \lambda(z - z_0)$.

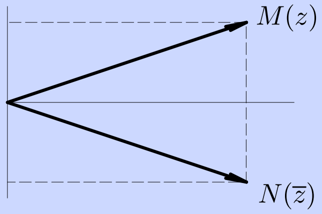
Exemples :

- Lorsque $\lambda = 0$, l'homothétie envoie tout sur son centre. C'est pas top !
- Lorsque $\lambda = 1$, l'homothétie ne fait rien ! C'est encore l'identité : $h_1 = \mathrm{Id}$.
  C'est la seule homothétie qui admette plusieurs points fixes (tous les points sont fixes !). Toutes les autres homothéties n'ont qu'un seul point fixe : leur centre.
- L'homothétie h_{-1} est un demi-tour, c'est-à-dire $h_{-1} = r_\pi$.
- Si $\lambda \neq 0$, les homothéties h_λ et $h_{1/\lambda}$ agissent à l'inverse l'une de l'autre. Par conséquent, si l'on utilise successivement ces deux applications, cela revient à ne rien faire. Autrement dit, h_λ et $h_{1/\lambda}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

On termine avec la conjugaison, qui est l'archétype des réflexions.

Définition 30

La transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $\overline{z}$ est évidemment appelée la conjugaison. C'est aussi une réflexion par rapport à l'axe des réels (ou encore une symétrie orthogonale d'axe (Ox)).



Intuitivement, une réflexion est une transformation géométrique qui associe à un objet son image dans un miroir. Les distances donc conservées (c'est une isométrie) et les angles changent de signe. La figure est donc retournée.

On peut considérer des réflexions dont l'axe n'est pas la droite réelle : tout se passe alors comme avec la conjugaison pour laquelle on aurait fait tourner le repère.

Exemples :

- L'ensemble des points fixes de la conjugaison est l'axe réel.

  Plus généralement, l'ensemble des points fixes d'une réflexion est son axe.
- La transformation p du plan complexe qui associe à tout point M d'affixe z le point N d'affixe $(z + \overline{z})/2$ est la projection orthogonale sur l'axe réel. C'est une transformation qui ne conserve ni les distances, ni les angles. Par contre, d'après le théorème de Thalès, elle conserve les proportions.
- Si l'on fait agir successivement deux fois une réflexion, on revient au point de départ. Autrement dit, une réflexion est une bijection qui est sa propre réciproque (on parle d'involution).

b) Similitudes

Le paragraphe précédent rassemble des transformations qui à $M(z)$ associe $N(Z)$ où Z est de la forme $Z = az + b$ ou $Z = a\overline{z} + b$. Intéressons-nous plus généralement à ces transformations.

Définition 31

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

La transformation s^+ du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $az + b$ est appelée la similitude directe de paramètres a et b.

La transformation s^- du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $a\overline{z} + b$ est appelée la similitude indirecte de paramètres a et b.

Exemples :

- La translation de vecteur b est la similitude directe de paramètres 1 et b.
- La rotation de centre 0 et d'angle θ est la similitude directe de paramètres $e^{i\theta}$ et 0.
- L'homothétie de centre 0 et de rapport λ est la similitude directe de paramètres λ et 0.
- La conjugaison est la similitude indirecte de paramètres 1 et 0.

Le programme de MPSI ne propose pas l'étude des similitudes indirectes (sauf la conjugaison). L'encadré suivant se limite donc à la description de la méthode d'étude des similitudes directes.

Étude d'une similitude directe

Voyons comment trouver les caractéristiques géométriques d'une similitude directe de paramètres a et b (où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$), c'est-à-dire de la transformation s^+ qui à tout point $M(z)$ associe le point $N(Z)$ avec

$$Z = az + b.$$

- Premier cas : $a = 1$

  La similitude est la translation de vecteur b.

- Second cas : $a \neq 1$

  On commence par déterminer le point fixe de la similitude, c'est-à-dire le complexe z_0 tel que $az_0 + b = z_0$, ce qui donne $z_0 = b/(1-a)$. Il existe bel et bien puisque $a \neq 1$.

  On effectue alors la soustraction suivante :

$$\begin{array}{cccccc} & Z & = & az & + & b \\ \ominus & z_0 & = & az_0 & + & b \\ \hline & Z - z_0 & = & a(z - z_0) & & \end{array}$$

  En posant $a = \lambda e^{i\theta}$, on voit donc que

$$Z - z_0 = \lambda e^{i\theta}(z - z_0),$$

  ce qui signifie que Z est obtenu à partir de z en effectuant successivement et dans l'ordre qui vous plaît le plus :

  - une rotation de centre z_0 et d'angle θ,
  - une homothétie de centre z_0 et de rapport λ.

  On dit alors que z_0 est le centre de s^+, que λ est son rapport et que θ est son angle.

Exemples :

- Déterminons les caractéristiques géométriques de la similitude directe s^+ qui à tout point $M(z)$ associe le point $N(Z)$ avec

$$Z = -2jz + \sqrt{3}.$$

Comme $-2j \neq 1$, ce n'est pas une translation.
On recherche donc son point fixe z_0 caractérisé par la relation

$$z_0 = -2jz_0 + \sqrt{3},$$

ce qui donne

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{1+2j} = \frac{\sqrt{3}}{1+(-1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{i} = -i.$$

On effectue alors la soustraction

$$\begin{array}{ccccc} & Z & = & -2jz & + \sqrt{3} \\ \ominus & z_0 & = & -2jz_0 & + \sqrt{3} \\ \hline & Z - z_0 & = & -2j(z - z_0) & \end{array}$$

ce qui donne

$$Z + i = 2\,\mathrm{e}^{-i\pi/3}(z+i)$$

donc

s^+ est la similitude de centre $-i$, de rapport 2 et d'angle $-\pi/3$. 11 h 00