Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Devoir surveillé n^o 11

– durée 4 heures ; calculatrices interdites –

Ce devoir est à rendre, scanné en un seul fichier d'extension *pdf* à l'adresse suivante :
833duparc@gmail.com
une fois que vous avez terminé votre composition.
En plus de la pièce jointe, votre message aura pour « Objet » un intitulé de la forme « NOM/Prénom/DS11 ».

Exercice

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Problème 1 : différents types de convergence

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble non vide qui est l'univers et $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité.
On considère une suite $\Big(X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre variable aléatoire.
On dira que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge presque sûrement vers la variable** X si :

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n = X\Big) = 1.$$

Dans ce cas, on notera $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.
On dira que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité vers la variable** X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Dans ce cas, on notera $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
On dira que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi vers la variable** X si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Dans ce cas, on notera $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Partie I : premières propriétés

On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires finies (i.e. prenant un nombre fini de valeurs) toutes définies de Ω vers $\mathbb{R}$, puis X et Y encore deux variables aléatoires définies de Ω vers $\mathbb{R}$. Soit λ un nombre réel.

1. Montrer que si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} Y$, alors :
$$X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X + Y.$$
2. Montrer que si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$$\lambda \cdot X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \lambda \cdot X.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\Big\{|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant 2\varepsilon\Big\} \subset \Big\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\Big\} \cup \Big\{|Y_n - Y| \geqslant \varepsilon\Big\}.$$
4. En déduire que si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors :
$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y.$$
5. Montrer que si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$$\lambda \cdot X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda \cdot X.$$
6. Montrer que si toutes les variables X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi que X, en posant $m = \mathbb{E}(X)$, alors :
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m.$$
[indication : on distinguera les cas $\sigma^2 = V(X) = 0$ ou $\sigma^2 > 0$.]

Partie II : la convergence en probabilité implique la convergence presque sûre

On suppose dans cette partie que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.
On pose pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble :
$$\Omega_\varepsilon = \Big\{\omega \in \Omega \mid \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant k_0,\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\Big\}.$$
On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel k,
$$A_{k,\varepsilon} = \Big\{\omega \in \Omega \mid \forall n \geqslant k,\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\Big\}.$$

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la suite d'événements $(A_{k,\varepsilon})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
8. Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,\varepsilon}$ est de probabilité égale à 1.

9. Montrer que :

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_{k,\varepsilon}) = 1.$$

[indication : on utilisera la σ-additivité de la probabilité $\mathbb{P}$ et on posera $B_0 = A_{0,\varepsilon}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_{n,\varepsilon} \setminus A_{n-1,\varepsilon}$.]

10. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

11. On suppose ici que les variables X_n sont toutes mutuellement indépendantes et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

   (a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.

   (b) Déterminer pour tout $\varepsilon > 0$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$.

   (c) En utilisant un lemme de Borel-Cantelli, montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers la variable aléatoire X.

Partie III : la convergence en loi

12. On suppose que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et que les variables X_n et X prennent toutes leurs valeurs dans un ensemble fini F inclus dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) - \mathbb{P}(X = x, X_n \neq x).$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = x, X \neq x) = 0.$$

   (c) En déduire que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

   (d) Expliciter un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires finies qui convergent en probabilité vers une variable finie X, mais pour laquelle la convergence en loi n'a pas lieu.

13. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0, 1]$.

   (a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   (b) On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire finie X indépendante des X_n si et seulement si $\ell \in \{0, 1\}$.

Problème 2 : construction de v.a.i.id

Soient $s \geqslant 2$ un entier, puis $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ des nombres réels positifs et de somme 1 et enfin $x_1, \cdots, x_s$ des nombres réels tous différents.
On pose la probabilité :

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot \delta_{x_i},$$

où δ_{x_i} est la mesure de Dirac concentrée au point x_i. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On veut déjà expliciter une famille $(X_1, \cdots, X_n)$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes définies du même univers Ω et à valeurs dans $\{x_1, \cdots, x_s\}$ telles que chaque variable X_k suive la loi $\mathscr{L}$.

1. Expliciter pour toute partie A de $\mathbb{R}$, une expression de $\mathscr{L}(A)$ sous forme d'une somme.
2. On pose l'ensemble $\Omega = \{x_1, \cdots, x_s\}^n$. Montrer qu'il existe une seule probabilité $\mathbb{P}$: $\mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :

$$\forall (i_1, \cdots, i_n) \in [\![1, s]\!]^n,\ \mathbb{P}\Big(\Big\{(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})\Big\}\Big) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_{i_j}.$$

3. Pour tout entier k entre 1 et n, on pose la variable :

$$X_k : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{x_1, \cdots, x_s\} \\ \omega = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) & \longmapsto & x_{i_k} \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que les variables X_k suivent toutes la loi égale à $\mathscr{L}$.

   (b) Montrer que les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

4. On se donne maintenant un réel $p \in]0,1[$ et $n \geqslant 3$ un entier naturel. On construit n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ telle que chaque variable X_k suive la loi de Bernoulli de paramètre p. On posera $q = 1 - p$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'une seule variable prenne la valeur 0 parmi les n variables $X_1, \cdots, X_n$?

   (b) On note pour tout entier k entre 2 et n, l'événement D_k : « le plus petit indice i tel que $X_i = X_{i-1} = 1$ est l'indice $i = k$ ». On note $d_k = \mathbb{P}(D_k)$. Établir une relation liant d_{k+2}, d_{k+1} et d_k.