DM 19 : Théorème de d'Alembert et localisation des racines d'un polynôme

Dans tout ce problème, On fixe un polynôme $S \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $n \geq 1$.

On notera $S = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On pose $R = |a_n|X^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|X^k$. Ainsi, $R \in \mathbb{R}[X]$.

1 Théorème de d'Alembert-Gauss

1°) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|S(z)| \geq R(|z|)$.

2°) Montrer que l'on peut définir $m = \inf\{|S(z)| \ / \ z \in \mathbb{C}\}$.

3°) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq A$, $|S(z)| \geq m + 1$.

4°) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|S(\alpha)| = m$.

On souhaite montrer que $S(\alpha) = 0$, ce qui prouvera le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 1 possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $S(\alpha) \neq 0$.

5°) On pose $P(X) = \dfrac{S(X+\alpha)}{S(\alpha)}$.
Montrer qu'il existe $q \in \{1, \ldots, n\}$ et $b_q, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que
$P(X) = 1 + \sum_{k=q}^{n} b_k X^k$ avec $b_q \neq 0$ et $b_n \neq 0$.

On pose $b_q = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

6°) Soit $r \in]0, (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}[$. Lorsque $z = re^{i\frac{\pi-\theta}{q}}$, montrer que $|P(z)| \leq 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{n} |b_k| r^k$.

7°) Conclure.

2 Disque de Gerschgorin

2.1 Un exemple

On note $a_0 = 6-2i$, $a_1 = -3-5i$ et $a_2 = -2+3i$. On pose $P(X) = X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$.

8°) Montrer que P possède une racine réelle.

9°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

10°) Vérifier que les racines de P appartiennent au disque fermé de centre 0 et de rayon $A = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2.2 Cas général

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que S est unitaire, c'est-à-dire que $a_n = 1$.
On suppose également qu'il existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_i \neq 0$.

11°) En étudiant l'application $x \longmapsto \dfrac{R(x)}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que R possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera r.

On pose $A = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

12°) Montrer que $R(A) \geq 0$ et en déduire que $r \leq A$.

13°) Montrer que toutes les racines de S sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon A.

14°) Montrer que, si l'on suppose de plus que $a_{n-1} \neq 0$, alors S possède au plus une racine complexe de module r.
Montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque $a_{n-1} = 0$.

3 Le théorème d'Eneström-Kakeya (1893 et 1913)

15°) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \geq 1$.
On suppose que $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$.
En appliquant les résultats précédents au polynôme $S = \dfrac{1}{\alpha_n}(X-1)P$, montrer que, pour toute racine complexe z de P, $|z| \leq 1$.
Montrer que, si l'on suppose de plus que $\alpha_{n-1} < \alpha_n$, alors pour toute racine complexe z de P, $|z| < 1$.

16°) Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $b_k > 0$.
On pose $\beta = \min_{1 \leq i \leq n} \dfrac{b_{i-1}}{b_i}$ et $\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \dfrac{b_{i-1}}{b_i}$.

Montrer que pour toute racine complexe z de Q, $\beta \leq |z| \leq \gamma$. (*on pourra appliquer les résultats de la question précédente aux polynômes* $Q(\gamma X)$ *et* $x \longmapsto x^n Q(\frac{\beta}{x})$).

4 Le théorème de Cohn (1922)

Jusqu'à la fin du problème, on fixe $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $n \geq 1$, $\alpha_n \neq 0$ et il existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

17°) Montrer que l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| x^k = |\alpha_n| x^n$ en l'inconnue x possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera $\rho(P)$.
Montrer que pour toute racine ζ de P, $|\zeta| \leq \rho(P)$.

18°) À partir du théorème de d'Alembert, montrer qu'il existe $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $P = \alpha_n \prod_{i=1}^{n} (X - \zeta_i)$, avec $0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \cdots \leq |\zeta_n|$.

On admet les formules suivantes, appelées relations de Viète, que l'on démontrera plus tard en cours : pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(-1)^k \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_k}.$$

19°) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$.

20°) Montrer que $\rho(P)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(P)^k |\zeta_n|^{n-k}$.

21°) En déduire que $(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(P) \leq |\zeta_n|$ (Résultat dû à Cohn en 1922, amélioré par Berwald en 1934).

22°) On suppose que 0 n'est pas racine de P et on pose $Q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^{n-k}$.

Montrer que $\frac{1}{\rho(Q)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(Q)}$.

23°) En reprenant le polynôme P de la question 8, déterminer avec une calculatrice une valeur approchée de $\rho(P)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 17 et 21.

5 Un dernier résultat

On suppose maintenant que $n \geq 2$ et qu'il existe $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

On pose $P_1 = \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k X^k$.

24°) Montrer que $\rho(P_1) \leq \rho(P)$.

25°) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine de P telle que $|\zeta| > \rho(P_1)$.

Montrer que $|\alpha_{n-1} + \alpha_n \zeta| \leq \dfrac{1}{\rho(P_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \rho(P_1)^k$.

26°) En déduire que les racines de P sont toutes dans la réunion des deux disques fermés de rayon $\rho(P_1)$ et de centres 0 et $-\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$.

27°) Vérifier ce résultat pour le polynôme P de la question 8.