

Compte-rendu d'oral de Mathématiques ENS

[SR]

Alexandre SHADID

02 juillet 2019

Exercice 1 Soient $a < b$ deux réels et f une fonction \mathcal{C}^1 convexe strictement croissante sur $[a; b]$. On suppose de plus $f(a) \leq 0 < f(b)$.

$$\text{On pose } F : \begin{cases}]a; b[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que $\exists! \alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
3. Soit $x_0 \in]a; b[$, on pose $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = F(x_n)$. Montrer la bonne définition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 5 scindé à racines simples sur \mathbb{R} . Montrer que $\forall x > \alpha, 0 < P'(x)$ et $0 < P''(x)$.
5. Soit α une racine de P de module maximal. Trouver une majoration de $|\alpha|$ en fonction des coefficients de P .
6. Trouver un protocole pour approcher α .
7. Quelle est la vitesse de convergence? *Cette question a été posée à un camarade de MP*2 qui passait en même temps que moi, mais mon examinateur a préféré changer de thématique.*

Exercice 2 Soit \mathcal{C} un compact de \mathbb{R}^n . On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto d(x, \mathcal{C}) \end{cases}$ où $d(x, \mathcal{C})$ est la distance de x à \mathcal{C} au sens de la norme 2.

Questions de cours : Comment définit-on la norme 2 dans \mathbb{R}^n ?
Comment définit-on la distance à un compact?

1. Montrer que f est lipschitzienne.
Indication : étudier $\|x - z\|_2$ où $d(y, z) = d(y, \mathcal{C})$.
2. On suppose que \mathcal{C} est convexe. Montrer que pour tout x , le point réalisant la distance de x à \mathcal{C} est unique.

Commentaires sur l'oral

Je passe en fin d'après-midi dans la même salle que plusieurs grands pontes avant moi (Magloire, Chan et autres Teuscher) et en même temps qu'un camarade de MP^*2 . L'examineur est très gentil pendant l'oral et approuve régulièrement de la tête ce que je dis. Il me laisse par ailleurs très souvent démontrer mes arguments oralement, et m'épargne une démonstration utilisant le théorème de Rolle au profit d'un dessin (en couleur!) que je fais au tableau.