Quelques oraux X-ens RMS 2016

Guide

11. Intéressant, exercice assez typique de dénombrement. Ne pas chercher mieux qu'une expression du résultat sous forme d'une somme.
12. Très intéressant, mais difficile. Se contenter du modulo p (non pas modulo p^2) pour le dernier résultat. La première question est à savoir faire.
22. A méditer...Question très inattendue !
26. Bel exercice de révision sur les idéaux, où la principale compétence évaluée est la connaissance du cours, et le recul qui doit aller avec lors d'un oral ens, pour l'utiliser dans un contexte un peu inhabituel.
45. Un classique recommandable.
49. Très intéressant,pas facile, instructif.
53. Recommandable, bonne mise au point sur des secteurs du cours qui ne sont pas les plus parcourus.
59. Un très mauvais exercice, favorisant les connaissances hors-programme. Inutile de le chercher, on peut quand même s'intéresser à la solution pour le théorème de Caratheodory, beau théorème « géométrique ».
62. Un grand classique à voir (se trouve dans les feuilles d'exercices de l'année).
69. Intéressant. Un certain classicisme.
74, 97. Deux exercices intéressants utilisant le même théorème, les chercher pour voir si on a l'idée, justement, d'utiliser ce résultat.
103. Encore le même théorème. Un contexte plus déroutant. Il vaut donc mieux s'occuper des deux exercices précédents.
107. Chercher, savoir faire. Une compétence assez « basique » : un énoncé pas trop simple sur les rayons de convergence se traite d'habitude en utilisant... ?

111. Bof. Après s'être donné une ou deux minutes pour avoir une chance de trouver, lire la solution (une petite ligne !) de la deuxième question, stupide mais amusante (quand on a cherché la première, on n'est pas préparé à un tel dénouement…).
116. Première question : très intéressante, à faire, il faut aussi travailler ses compétences techniques à l'oral. Deuxième question : ?
120. Excellent exercice de révision, pas si facile, très instructif.
124. Intéressant, voir si on pense à la bonne manière de partir.
133. Exercice très intéressant, pas facile, qui montre qu'aux ens on compte bien exploiter l'apparition des tribus dans le programme. A part la définition des tribus, c'est un exercice de topologie, pas de probabilités.
134. A regarder pour se faire (un peu) peur.
138. Un peu d'entropie. Une évaluation asymptotique intéressante.
139. Très, très intéressant. A chercher. Une question facile, les autres le sont nettement moins, mais il y a des solutions instructives et pas si dures à comprendre.
145. A regarder : exercice sur la base des probabilités, on risque de ne pas voir la solution qui est toute simple…
203. Un classique. Les polynômes sont sources de beaucoup d'exercices d'oral, qui ne sont pas en général ceux qui valorisent le plus la connaissance du cours. Celui-ci n'est pas le pire.
204. D'une famille de classiques. Il peut donc être intéressant de le regarder, la méthode n'est pas intuitive quand on la voit fonctionner pour la première fois.
205. Intéressant, car il rajoute une épaisseur assez simple à une base du type précédent.
206. Encore les polynômes ! intéressant, mais difficile. Mais intéressant. Une méthode analogue à un exercice figurant sur les feuilles.
207. Agaçant. Parfois posé à l'oral, pas très dur mais astucieux. Ce qui rachète un peu l'énoncé, c'est la deuxième question, une fois passée l'astuce de la première.
208. A savoir faire !!!
209. Un classique aussi, pas très sympathique : voir la solution (le résultat est visuellement complètement évident).

222. Exercice prioritaire. Beaucoup trop long, mais instructif de bout en bout.
219. A regarder...après le 222 !
220. Très facile, à savoir faire.
221. Exercice pas évident, mais très instructif et recommandable.
238. Très intéressant, et met en jeu une des méthodes les plus souvent rencontrées dans les exercices d'oral.
239. Même méthode, mais un peu manipulatoire.
251. A la mode ces dernières années, intéressant, à chercher.
252. Préliminaire au précédent...
250. A faire après le 251 (contrairement au 252 qui est à faire avant, bref ce n'est pas numéroté raisonnablement !).
249. Anecdotique mais sympathique. Il faudrait savoir penser à la connexité par arcs et/ou à la compacité dans ce genre d'exercice.
263. Intéressant, voire très intéressant.
264. Un classique pas très intuitif. Voir le corrigé pour se donner l'idée.
280. Un exercice d'oral technique, comme on en rencontre beaucoup. Il faut savoir progresser dans ce genre de problème.
302. Bon exercice, standard, à savoir traiter.
303. Idem.
307. Savoir faire la première question est utile pour X/ens. La seconde est un degré au-dessus.
312. Dernière question mystérieuse.
313, 314. Infaisables.
316. A chercher pour voir si on est capable d'analyser la situation. La mise au point technique n'est pas facile, à voir avec le corrigé.
326. Intéressant, un peu astucieux.
331. A voir, car il faut absolument penser à « la bonne méthode », qui intervient dans d'autres exercices.
332. Bon exercice de probabilités, pas facile, mais pas invraisemblable non plus.
336. Idem !
337. A voir pour l'idée de départ. Plus méchant que le 331.

338. Les deux premières questions sont très intéressantes. Les suivantes me semblent hors-programme (mais l'examinateur a le droit de vous dire « on admet qu'on peut permuter deux intégrales »).
342. Première question intéressante. La seconde est extrêmement technique et difficile.

(11-Paris-Lyon-Cachan-Rennes) (195-X) Calculer le nombre d'involutions du groupe $\mathcal{S}_n$

Une permutation s'écrit comme « produit » (en fait, composée) de cycles de supports deux à deux disjoints, qui commutent donc. Il en résulte assez aisément qu'une telle permutation est involutive si et seulement si chacun des cycles l'est (chaque cycle ne concerne que son support). Or un cycle est involutif si et seulement si il est une transposition. Les involutions sont donc les produits de transpositions à supports disjoints. On peut les classer, pour les dénombrer, par nombre de transpositions impliquées. Il y a par exemple $\binom{n}{2}$ transpositions...Mais peut-être est-ce plus simple de faire une récurrence : si x_n est le nombre cherché, pour chercher x_{n+1} on dénombre les involutions qui ne concernent pas $n+1$, il y en a x_n, celles qui échangent $n+1$ et k avec $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1} \tag{1}$$

avec $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$...Une idée est d'introduire des séries génératrices, mais si les a_n sont trop « factoriels » on risque des rayons de convergence nuls, il est peut-être prudent d'introduire $b_n = a_n/n!$, là au moins on sait que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ sera au moins 1. Appelons S la somme de cette série entiière. On posera $a_0 = 1$ pour que la relation (1) soit valable dès l'indice 1. On la divise par $n!$ et on obtient

$$\forall n \geq 1 \qquad (n+1)b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$$

qu'on a envie de multiplier par x^n, avant de « sommer » de $n = 1$ à...

$$S'(x) - b_1 = S(x) - b_0 + xS(x)$$

c'est-à-dire

$$S'(x) - (1+x)S(x) = 0$$

d'où $S(x) = \exp(x + x^2/2)$. Ce qui permet, par produit de Cauchy, d'obtenir une formule sommatoire pas spécialement jolie.

(12-Paris-Lyon-Cachan-Rennes) Soit p un nombre premier.

1. **Montrer, pour $x \in \mathbf{Z}$: $(1+x)^p \equiv 1 + x^p\ [p]$.**
2. **Soit m et n deux entiers naturels. On écrit m et n en base p : $m = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p^i$. Montrer**
$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{+\infty} \binom{a_i}{b_i} \quad [p]\ .$$
3. **Avec les notations précédentes, montrer $\binom{pm}{pn} \equiv \binom{m}{n}\ [p^2]$.**

La première question est un grand classique qu'il faut savoir très bien faire. On développe par la formule du binôme. Il s'agit ensuite de montrer que chaque $\binom{p}{k}$, $1 \leq k \leq p-1$, est divisible par p. L'expression $p!/(k!(p-k)!)$ est utilisable, mais le mieux est d'écrire le (hors-programme mais classique)
$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$
et d'enlever les quotients (on fait de l'arithmétique, on travaille avec des entiers) pour écrire
$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$
et il n'y a plus qu'à appliquer le théorème de Gauss.
La première question est mal posée (suffisamment d'ailleurs pour qu'on considère plutôt que c'est le compte-rendu qui n'est pas bon). En effet, on peut aussi dire que $x^p \equiv x[p]$ (conséquence du petit théorème de Fermat), mais ça ne permet pas de continuer. Ce qu'il faut dire, c'est que dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$, $(1+X)^p = 1+X^p$ (mais en revanche, ce n'est pas X, deux polynômes sur un corps fini qui ont la même fonction polynôme associée ne sont pas nécessairement égaux). Ou alors, pour éviter les polynômes sur un corps fini, écrire avec des notations évidentes :
$$(1+X)^p \equiv 1 + X^p\ [p]$$

(deux polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ seront dits congrus modulo p lorsque leurs coefficients le sont. Il est assez clair que cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication des polynômes). L'idée la plus bête pour la deuxième question marche…mais ce n'est pas évident a priori ! Il faut donc savoir se lancer. Disons donc que $\binom{m}{n}$ est le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^m$. Or

$$(1+X)^m = (1+X)^{a_0}(1+X)^{pa_1}\dots(1+X)^{p^d a_d}$$

(on pose que si $i > d$, $a_i = 0$). Or, par une récurrence simple à partir de la première question,

$$\forall k \geq 0 \qquad (1+X)^{p^k} \equiv 1 + X^{p^k} \ [p]$$

Donc

$$(1+X)^m = (1+X)^{a_0}(1+X)^{pa_1}\dots(1+X)^{p^d a_d}$$

Et donc

$$(1+X)^m \equiv (1+X)^{a_0}(1+X^p)^{a_1}\dots(1+X^{p^d})^{a_d}$$

Il ne reste plus qu'à développer le second membre, et à identifier les coefficients de degré n à gauche et à droite.
La troisième question en résulte immédiatement…modulo p seulement ! Modulo p^2, c'est nettement moins évident.

(22-Paris) Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Surprenant ! Mais cela peut arriver à un oral ENS. Même si ce ne sera pas forcément le premier exercice. Ne pas hésiter à être humble...Qu'est-ce qu'un espace de dimension finie ? un espace admettant une base formée d'un nombre fini de vecteurs...en fait, le mieux, c'est « admettant une partie génératrice finie« . Mais bon, on peut commencer par :
dans un espace vectoriel, s'il y a une famille génératrice à n éléments, une famille libre ne peut en avoir plus que n. Facile pour $n = 1$; si c'est vrai pour n, soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre d'un espace engendré par $(e_1, \ldots, e_{n+1})$. Si elle est déjà dans l'espace engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $p \leq n$. Sinon, on peut supposer quitte à réindexer que $f_p = a_1e_1 + \ldots + a_{n+1}e_{n+1}$ avec $a_{n+1} \neq 0$. On peut alors trouver $b_1, \ldots, b_{p-1}$ tels que les $f_i - b_if_p$ $(1 \leq i \leq p-1)$ soient dans $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Or c'est une famille libre (vérification simple), donc $p - 1 \leq n$. Bien entendu, on avait le droit de supposer la famille libre finie, si elle était infinie on pouvait en extraire une famille ayant autant d'éléments qu'on le voulait, et libre...Bref, si F est un sous-espace d'un espace E, ce dernier ayant une famille génératrice à n vecteurs, les familles libres d'éléments de F ont au plus n vecteurs. n peut donc considérer une famille libre maximale, elle est facilement génératrice (si on rajoute un vecteur, on obtient une famille liée, on en déduit que ce vecteur rajouté est combinaison linéaire des vecteurs de la famille), et on conclut.

(26-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soient A l'anneau $\mathbf{C}[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}]$ et $M = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ dans $\mathcal{M}_2(A)$. On pose $M^2 = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$, $T = \mathbf{Tr}(M)$, $D = \mathbf{det}(M)$. Soit I l'idéal de A engendré par les $P_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$.

1. **Montrer que I est contenu dans l'idéal engendré par T et D.**
2. **Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}_*$ tel que T^k et D^k sont dans I.**

Il faut bien connaître la définition d'un idéal. Les polynômes à plus d'une indéterminée ne sont pas au programme, mais il n'est pas bien difficile de deviner que $\mathbf{C}[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}]$ est l'ensemble des comninaisons linéaires des $X_{1,1}^{\alpha}X_{1,2}^{\beta}X_{2,1}^{\gamma}X_{2,2}^{\delta}$. Ne reste plus qu'à faire de l'algèbre linéaire assez élémentaire...mais en l'interprétant un peu formellement !
Le théorème de Cayley-Hamilton :

$$M^2 = TM - DI_2$$

donne par exemple $P_{1,1} = X_{1,1}T - D$, idem pour les autres $P_{i,j}$, et la première question est résolue !
Ensuite, disons que $D^2 = \det(M^2) = P_{1,1}P_{2,2} - P_{1,2}P_{2,1}$, il ne reste plus qu'à s'occuper de T^k, on peut continuer à bricoler : en prenant les traces dans Cayley-Hamilton,

$$\mathrm{Tr}(M^2) = T^2 - 2D$$

En multipliant le théorème de Cayley-Hamilton par M, et en prenant la trace,

$$\mathrm{tr}(M^3) = T^3 - 3TD$$

et donc, grâce à ces relations,

$$3T\mathrm{Tr}(M^2) - 2\mathrm{tr}(M^3) = T^3$$

or le membre de gauche est bien dans I.

(45-Paris, Lyon, Cachan, Rennes)

1. **Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A est nilpotente.**
2. **Même question en remplaçant R par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ où p est un nombre premier et en supposant $p > n$**

L'idée d'utiliser la trace est assez naturelle. Puis, en multipliant par A à gauche et à droite et en ajoutant, on obtient

$$A^2B - BA^2 = 2A^2$$

ce qui donne $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$. Ensuite, avec une récurrence assez simple,

$$A^kB - BA^k = kA^k$$

pour $k \in \mathbf{N}$, et on en déduit encore $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. En écrivant le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit (on prend la trace) que le coefficient constant dudit polynôme est nul. Et donc 0 est valeur propre de A. En considérant l'endomorphisme canoniquement associé à A, en commençant une base de $\mathbf{R}^n$ par un vecteur non nul du noyau de A (on vient de voir qu'il en existait), on montre qu'il y a une matrice semblable à A de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ (0) & B \end{pmatrix}$$

où L est une ligne, et B une matrice carrée telle que les traces de toutes les puissances de B sont nulles ; en effet, A^k est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & L_k \\ (0) & B^k \end{pmatrix}$$

Si on prend pour hypothèse « Toute matrice B de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ telle que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad \mathrm{Tr}(B^k) = 0$ est nilpotente » on obtient une conclusion facile par récurrence (en effet, A^{n-1} sera semblable à $\begin{pmatrix} 0 & L_{n-1} \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ donc A^n semblable à la matrice nulle).

Pour la deuxième question, le fait de supposer $p > n$ permet de ne pas avoir de problème. En effet, la première faille dans le raisonnement précédent peut être le passage de $k\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ à $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. En effet, il faut faire attention, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, à ne pas passer tout droit de

$$kx = 0$$

à

$$x = 0$$

C'est un peu délicat, car la « caractéristique » d'un corps n'est plus au programme. Rappelons d'abord que kx indique une addition ($x + \ldots + x$, avec k termes), mais que les propriétés des lois sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ permettent de transformer cette addition en multiplication :

$$kx = \overline{k}x$$

On en déduit bien simplement que si p divise k, kx est toujours nul, mais si p ne divise pas k, peut bien conclure de $\overline{k}x = \overline{0}$ l'égalité $x = \overline{0}$.
Deuxième faille possible : lorsqu'on écrit le théorème de Cayley-Hamilton, lorsqu'on prend la trace, on obtient

$$na_0 = 0$$

où a_0 est le coefficient constant. En effet, n est la trace de I_n. Grâce au fait que p ne peut diviser n, on en déduit bien $a_0 = 0$. Et finalement, le raisonnement précédent fonctionne encore.

(49-Cachan, Rennes)
On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Les « normes d'opérateurs » ne sont plus au programme. . .mais dans un oral en direct, on peut sans problème redonner la définition que de toute façon le candidat aura bien rencontré pendant son année. . .Bref, notant $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$ la norme associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on a

$$N(A) = \sup_{X\neq(0)} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

ou encore $N(A)$ est le plus petit k tel que, pour tout X,

$$\|AX\| \leq k\|X\|$$

on peut aussi dire que

$$N(A) = \sup_{\|X\|=1} (\|AX\|)$$

Déjà, les éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ sont sur la sphère unité, à plus forte raison dans la boule unité fermée. Celle-ci étant convexe, l'enveloppe convexe est bien incluse dans la boule unité fermée. L'inclusion réciproque est évidemment plus délicate, il faut bien travailler un peu ! Remarquons une chose : $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ étant un groupe, si M s'écrit comme combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$,

$$M = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_p Q_p$$

avec les Q_j dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, les α_j positifs et de somme 1, alors, pour tout $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, QM et MQ sont aussi combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, en vertu par exemple de l'égalité

$$QM = \alpha_1(QQ_1) + \cdots + \alpha_p(QQ_p)$$

Ce qui fait penser aux deux décompositions classiques : QR et QS. Ces deux décompositions sont hors-programme, mais bien comprendre ce qui y mène est intéressant pour l'oral. Ici, les matrices triangulaires ne m'intéressant pas trop, je vais plutôt passer par QS. Mais avant même d'en parler, on va voir quelques matrices qui sont dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. D'abord, toutes les matrices diagonales avec des 1 et des -1 sur la diagonale. Donc toutes les matrices diagonales ayant un coefficient $(1,1)$ dans $[-1,1]$ et leurs autres coefficients égaux à -1 et à 1, car une telle matrice s'écrit

$$\alpha \mathrm{diag}(-1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) + (1-\alpha)\mathrm{diag}(1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$$

les ϵ_j étant égaux à ± 1, et $\alpha \in [0,1]$. En recommençant, on voit qu'il y a dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ toutes les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont dans $[-1,1]$. Donc toutes les matrices PDP^T où D est une telle matrice diagonale et P une matrice orthogonale. Donc par théorème spectral toutes les matrices symétriques dont les valeurs propres sont dans $[-1,1]$. Comme il est facile de voir que, si Q est orthogonale et S symétrique,

$$N(QS) = N(S)$$

et comme une matrice symétrique est dans la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si ses valeurs propres sont toutes dans $[-1,1]$, on pourra conclure si on dispose du théorème suivant : toute matrice A s'écrit $A = QS$ avec Q orthogonale, S symétrique positive. Une partie de l'oral se passera alors à reconstituer cet exercice classique. Dont on rappelle les bases : si $A = QS$, on peut astucieusement faire disparaître Q en effectuant

$$A^T\, A = S^2$$

Or il est facile d'établir que $A^T\, A$ est symétrique à valeurs propres positives, elle admet donc une « racine carrée » symétrique positive, notée S. Si S n'est pas inversible, on est bloqué, on supposer donc dans un premier temps A inversible, on définit S, on vérifie que $Q = AS^{-1}$ est orthogonale, c'est fini. Pour une matrice non inversible, le moins compliqué est de passer par la densité des matrices inversibles (classique et facile) et la compacité du groupe orthogonal (classique)...

(53-Paris) Donner un exemple de forme linéaire non continue

(nnn-Mines) On considère le sous-espace $F = \{f \in E\ ;\ f(0) = 0\}$ de l'espace $E = C([0,1], \mathbf{R})$.

1. **Montrer que si on munit E de $\|.\|_\infty$, F est fermé.**
2. **Montrer que si on munit E de $\|.\|_1$, F est dense.**
3. **Montrer que si on munit E d'une norme quelconque, F est fermé ou dense.**

En dimension finie, toute forme linéaire est continue, tout sous-espace vectoriel est fermé. Plus généralement, tout sous-espace de dimension finie d'un espace qui, lui, peut ne pas l'être, est fermé. On peut aussi rappeler que, si u est une forme linéaire sur E, u est continue si et seulement si il existe une constante k telle que

$$\forall x \in E \qquad |u(x)| \leq k\|x\|$$

ce qui équivaut d'ailleurs à dire que u est k-lipschitzienne...
Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires ; si une forme linéaire est continue, son noyau est fermé. Il se trouve que la réciproque est vraie...encore un exercice classique, pas tout-à-fait évident : on suppose que $\mathrm{Ker}u$ est fermé, on prend un vecteur $x_0 \notin \mathrm{Ker}u$. Si $x \in E$, on décompose de manière unique

$$x = y + \lambda x_0$$

où $y \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = \lambda u(x_0)$. Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$\|x\| = |\lambda|\ \|\frac{1}{\lambda}y + x_0\| \geq |\lambda|\ d(x_0, \mathrm{Ker}(u))$$

Donc

$$|u(x)| \leq \frac{|u(x_0)|}{d(x_0, \mathrm{Ker}u)}\|x\|$$

encore vrai bien sûr si $\lambda = 0$, d'où le résultat (c'est une preuve assez courte, mais un peu manipulatoire, donc pas très « évidente »).

Revenons à nos histoires : si le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan non fermé, alors cette forme linéaire ne peut pas être continue.
L'adhérence d'un espace vectoriel est un espace vectoriel (facile avec la caractérisation de l'adhérence par les suites). Donc l'adhérence d'un hyperplan est soi lui-même, soit l'espace entier. Bref, un hyperplan est dense ou fermé.
L'application $f \mapsto f(0)$ est continue sur $(C([0,1],\mathbf{K}),\|.\|_\infty)$ car elle est 1-lipshitzienne, en vertu de l'inégalité asse évidente

$$|f(0)| \leq \|f\|_\infty$$

En revanche, un petit dessin permet facilement de trouver une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0, et convergeant vers $\widetilde{1}$ pour N_1. Donc...

(59-Lyon) Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé réel, X une partie de E, C_X l'enveloppe convexe de X.

1. **On suppose E de dimension finie et X compact. Montrer que C_X est compact.**
2. **On suppose E de dimension finie et X fermé. Est-il vrai que C_X est fermé ?**
3. **Le résultat de la première question subsiste-t-il en dimension infinie ?**

Si X est borné, il est inclus dans une boule. Une boule est convexe, donc une boule qui contient X contient aussi C_X. Bref, l'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée. En revanche, l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas forcément fermée, il doit y a voir plein d'exemples. . .Si on prend le graphe $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+ \ ; \ xy = 1\}$, c'est un fermé (son enveloppe convexe est l'épigraphe, fermé aussi). $F' = F \cup \{(0, 0)\}$ est aussi un fermé (union finie de fermés), et $C_{F'}$ est le premier quadrant ouvert, union le singleton $\{(0, 0\}$, qui n'est pas un fermé. Le problème de la première question est qu'elle s'aborde mieux quand on connaît le théorème de Caratheodory. Théorème assez évident en dimension 1, moins en dimension supérieure, et qui dit que, si $\dim(E) = n$, les éléments de C_X sont les combinaisons convexes à $n+1$ termes d'éléments de X, c'est -à-dire les

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

avec les x_j dans X, les α_j positifs (ou nuls) et de somme 1. Il est clair que C_X doit contenir ces choses. C'est l'inclusion inverse qui est à montrer. Mais cela revient à montrer le résultat suivant : toute combinaison convexe de p éléments de X, s'écrit comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X. Bien entendu, l'examinateur va poser la question, il y a des chances pour que le candidat ne pense pas à se la poser lui-même. On va montrer : en dimension n, une combinaison convexe de p vecteurs, avec $p \geq n+2$, s'écrit comme combinaison convexe de $p-1$ vecteurs. Soit

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \tag{1}$$

avec les α_i positifs et de somme 1. On suppose les α_i strictement positifs, sinon il n'y a rien à faire. La famille des $x_i - x_1$, $2 \leq i \leq p+2$, est liée, on prend donc des β_i non tous nuls tels que

$$\beta_2(x_1 - x_2) + \ldots + \beta_p(x_1 - x_p) = 0 \tag{2}$$

(pourquoi ce genre de relation ? pour avoir une relation de dépendance linéaire entre les x_i **dont la somme des coefficients soit nulle.** Ce qui, en l'ajoutant μ fois à la relation (1), donnera des coefficients qui resteront de somme 1. En pratique, on ajoute μ fois (2) à (1) :

$$x = (\alpha_1 + \mu(\beta_2 + \cdots + \beta_p))x_1 + (\alpha_2 - \mu\beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_p - \mu\beta_p)x_p$$

Les coefficients sont de somme $1 + \mu \times 0 = 1$. Ils sont strictement positifs pour $\mu = 0$. Augmentons doucement μ : au début, tout va rester > 0, par continuité. Mais ça ne va pas durer : soit l'un des β_i est > 0, auquel cas $\alpha_i - \mu\beta_i$ va finir par devenir négatif, soit les β_i sont tous négatifs, mais alors leur somme est négative et n'est pas nulle, et c'est $\alpha_1 + \mu(\beta_1 + \cdots + \beta_p)$ qui va finir par devenir négatif. On prend pour μ la borne supérieure de l'ensemble des valeurs pour lesquelles tous les coefficients sont positifs. Pour cette valeur, tous les coefficients sont positifs, et au moins l'un d'eux est nul.
Cette preuve n'est pas très facile à trouver quand on ne l'a jamais vue. . .Bref, cela aide à conclure la première question, car C_X apparaît comme l'image par l'application

$$((x_1, \ldots, x_{n+1}), (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$$

assez "évidemment" continue de $X^{n+1} \times K$ avec

$$K = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ ; \ \forall i \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \sum(\alpha_i) = 1\}$$

Mais K est compact, et un produit de compacts est compact. Ce qui conclut.
La dernière question est particulièrement inadaptée, elle favorise des connaissances hors-programme en topologie. En particulier, dans le programme actuel, on n'a pas grand chose sur les compacts en dimension quelconque. On sait surtout qu'être fermé et borné ne suffit pas pour être compact, ce qui

nous avance bien ! Avec le programme précédent, on aurait eu un outil précieux : si dans un evn on a une suite (u_n) convergente, si ℓ est sa limite, alors

$$K = \{u_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$$

est compact. Mais même avec l'ancien programme, la démonstration de ce résultat était assez pénible (c'est une compacité qui se démontre bien avec Borel-Lebesgue, mais pas trop avec Bolzano-Weierstrass). En dimension finie, c'est facile de montrer que K est borné. Et c'est un exercice intéressant et très faisable de montrer que K^c est ouvert. Ce qui conclut. En dimension infinie, on prend une suite (v_n) d'éléments de K. Attention, elle n'est pas du tout extraite de la suite (u_n), en général. Si il existe un p tel que $\{n \in \mathbf{N} \ ; \ v_n = u_p\}$ est infini, on extrait de (v_n) une suite qui converge vers u_p. Si $\{n \in \mathbf{N} \ ; \ v_n = \ell\}$ est infini, on extrait de (v_n) une suite qui converge vers ℓ. Sinon, on montre qu'on peut extraire de (v_n) une suite extraite de (u_n). Et donc qui converge vers ℓ.
Ensuite, il faut exploiter la dimension infinie, puisque le résultat est vrai en dimension finie. Pour cela, l'idée est de prendre une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Au début j'avais pris la base canonique de $\mathbf{K}[X]$, puis j'ai dû pour plus de commodité prendre un espace plus grand : celui des suites réelles bornées, muni de $\|.\|_\infty$, avec e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice n qui vaut 1 (rappelons que la famille (e_n) n'est pas une base de l'espace des suites, elle est très loin d'être génératrice). Alors

$$K = \left\{\frac{1}{n+1}e_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$$

est un compact. Notons $f_n = \dfrac{1}{n+1}e_n$. L'idée est de créer une suite d'éléments de C_K, (x_n), telle que x_n soit combinaison convexe de $e_0, \ldots, e_n$, an prenant toujours les mêmes coefficients pour $e_0, \ldots, e_{n-1}$. Comment est-ce possible ? bien simplement, Achilletlatortuesquement :
$x_0 = f_0$ (là, ça n'a pas encore vraiment commencé).
$x_1 = \dfrac{1}{2}f_0 + \dfrac{1}{2}f_1$.
$x_2 = \dfrac{1}{2}f_0 + \dfrac{1}{4}f_1 + \dfrac{1}{4}f_1$.
$x_3 = \dfrac{1}{2}f_0 + \dfrac{1}{4}f_1 + \dfrac{1}{8}f_2 + \dfrac{1}{8}f_3$.

et ainsi de suite, comme on l'a compris, $x_p = \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{4} f_1 + \cdots + \frac{1}{2^p} f_{p-1} + \frac{1}{2^p} f_p$. Tous ces x_p sont dans C_K, et dans l'espace des suites bornées muni de $\|.\|_\infty$, la suite (x_p converge assez évidemment vers une suite qu'il est simple d'écrire. Cette suite n'est pas dans C_K. Pourquoi ? parce que l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang est un convexe (c'est même un sev) qui contient K, donc il contient C_K.

(62-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé réel de dimension finie, K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K. Cette boule est-elle unique ?

Un grand classique de la compacité...On considère l'ensemble non vide (car K est borné) des rayons des boules fermées contenant K. Il a une borne inférieure ρ. Pour tout n il existe une boule fermée de rayon $r_n \in [\rho, \rho + 1/n]$ et de centre x_n telle que

$$K \subset B'(x_n, r_n)$$

Il est facile de montrer que (x_n) est bornée. On est en dimension finie, on peut donc extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\phi(n)}$. Si x est sa limite, pour tout $y \in K$ on a

$$\forall n \geq 1 \qquad \|y - x_{\phi(n)}\| \leq \; r_{\phi(n)}$$

et donc, en prenant les limites dans cette inégalité large, on obtient bien que $K \subset B'(x, \rho)$. Il n'y a pas unicité en général : prendre par exemple dans $\mathbf{R}^2$ muni de $\|.\|_\infty$ le compact $K = [-1, 1] \times \{0\}$, et dessiner tout plein de boules fermées de rayon 1 qui le contiennent !

En revanche, si la norme est euclidienne, il y a unicité : faire un dessin, et voir que si $B'(x, r)$ et $B'(y, r)$ contiennent K, il y a une boule plus petite contenant K, le démontrer...

(69-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Si E est un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E, x un point de C, on dit que x est un point extrémal de C si $C \setminus \{x\}$ est convexe. On considère ici l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans R. Déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée de E pour la norme de la convergence en moyenne, pour la norme de la convergence en moyenne quadratique et pour la norme de la convergence uniforme.

C'est pour la dernière norme qu'il est probablement le plus facile de répondre. Si une fonction de la boule unité fermée prend en x_0 une valeur qui n'est ni 1 ni -1, par continuité il n'est nullement restrictif de supposer $x_0 \in]-1,1[$. Au voisinage de x_0, toujours par continuité, on reste « loin » de -1 et 1 : il existe un $\delta > 0$ et un $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \qquad |f(x)| \leq 1 - \delta$$

(on peut par exemple trouver un η convenable pour $\delta = (1 - |f(x_0)|)/2$). On définit alors une « toute petite fonction » (ces choses se voient avant de s'écrire, il faut faire un dessin) g, nulle en-dehors de $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, affine sur $[x_0 - \eta, x_0]$ et valant δ en x_0, affine sur $[x_0, x_0 + \eta]$ (le graphe est un petit triangle). On a construit g pour que $f + g$ et $f - g$ soient dans la boule unité fermée. Or

$$f = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}(f-g)$$

et donc f n'est pas extrémal.
Une fonction continue prenant seulement les valeurs 1 et -1 est constante, nécessairement.
Comme il n'est pas dur de montrer que les fonctions constantes égales à 1 et à -1, les deux seuls candidats à l'extrémalité, sont bien extrémales, on a deux points extrémaux.

Ensuite la norme $\|.\|_2$: un dessin en dimension finie est peut-être hasardeux ici (la dimension infinie, c'est autre chose), mais il montre quand même que dans $\mathbf{R}^2$ les boules unité pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ont chacune quatre points extrémaux (les coins), alors que la boule unité pour $\|.\|_2$ a une infinité de points extrémaux (les points de la sphère). Dans un evn quelconque, il est facile de voir qu'un point extrémal est nécessairement sur la sphère (mais il faut être capable de le justifier ! ce n'est pas bien difficile car on peut se contenter de traduire ce que l'on voit sur un dessin). Supposons maintenant $\|f\|_2 = 1$, et imaginons que f ne soit pas extrémal. Il existerait alors g et h dans la boule unité fermée, distincts de f, et tels que $f \in [g, h]$. On peut supposer, quitte à remplacer h par un élément de $[g, h]$ adapté,

$$f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$$

Mais alors, développant le carré de la norme :

$$1 = \frac{1}{4}\|g\|_2^2 + \frac{1}{4}\|h\|_2^2 + \frac{1}{2}(g|h)$$

Les trois termes du membre de droite sont inférieurs ou égaux respectivement à 1/4, 1/4, et 1/2 (Cauchy-Schwarz pour ce dernier point). Donc des infériorités sont des égalités. Et donc, par le cours (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) on parvient à $g = h$, contradiction.

On vient de voir deux résultats très différents, obtenus de manières très différentes ! dans le premier cas, on se penche sur une fonction en regardant son graphe, dans le second cas on travaille dans un espace préhilbertien réel quelconque, on écrit des produits scalaires...Pour la norme en moyenne, quelle est la bonne approche ? pas la deuxième, vu qu'on n'a pas un produit scalaire. On aborde plutôt les choses comme dans le premier cas, et on aboutit cette fois à l'inexistence de points extrémaux.

(74-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe a et b dans $[0,1]$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Montrer qu'il existe P dans $\mathbf{R}[X]$ strictement positif sur $[0,1]$ tel que $\int_0^1 fP = 0$.

Ce genre d'exercice fait penser, quand on a un peu d'expérience, au théorème de Weiertrass ; la possibilité de trouver une solution P non polynomiale au problème semble acquise, et on pourra trouver une suite de fonctions polynômes tendant vers ladite solution. Mais si une suite de fonctions convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction strictement positive l'est au moins à partir d'un certain rang, en revanche une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction d'intégrale nulle n'est pas forcément d'intégrale nulle. Raffinons un peu l'idée : on va montrer qu'il existe une fonction h continue sur $[0,1]$, > 0 sur ce segment, et telle que

$$\int_0^1 fh > 0$$

On doit être capable de faire un dessin, mais aussi d'écrire des choses suffisamment convaincantes. Il n'est pas restrictif de supposer $0 < a < b < 1$. On prend la fonction h_n qui vaut, par exemple, 1 sur $[0, a-1/n]$ et sur $[a+1/n, 1]$, n^2 en a, affine par morceaux continue. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ et $\delta > 0$ tels que sur $[a-\eta, a+\eta]$ on ait $f(x) \geq \delta$. Alors, si n est suffisamment grand pour que l'on ait $1/n \leq \eta$, on aura

$$\int_0^1 h_n f \geq n\delta - \|f\|_\infty$$

et donc, à partir d'un certain rang, on aura $h_n > 0$ et $\displaystyle\int_0^1 h_n f > 0$. Soit n_0 un tel rang. Et soit (ϕ_n) une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers h_{n_0}. A partir d'un certain rang, on aura $\phi_n > 0$ et $\displaystyle\int_0^1 h_n f > 0$. Donc il existe P dans $\mathbf{R}[X]$ strictement positif sur $[0,1]$ tel que $\int_0^1 fP > 0$. De même il existe Q dans $\mathbf{R}[X]$ strictement positif sur $[0,1]$ tel que $\int_0^1 fQ < 0$. Il ne reste qu'à ajuster $\alpha \in [0,1]$ pour que $\alpha P + (1-\alpha)Q$ convienne.

(97-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit E **l'espace des fonctions continues de** $[0,1]$ **dans R,** P **le sous-espace des fonctions polynomiales,** f **dans** E**. Déterminer** $\textbf{sup}\left\{\int_0^1 fp \ ; \ p \in P \ , \int_0^1 |p| \leq 1\right\}$ **et** $\textbf{sup}\left\{\int_0^1 fp \ ; \ p \in P \ , \textbf{max}\{|p(t)|, t \in [0,1]\} \leq 1\right\}$**.**

Le premier sup est assez facilement majoré par $\|f\|_\infty$. Soit x_0 tel que $\|f\|_\infty = f(x_0)$ (on peut enlever les valeurs absolues, car changer f en $-f$ ne modifie en rien le problème). Considérant h_n affine par morceaux continue valant 0 hors de $[x_0 - 1/n, x_0 + 1/n]$ et dont le graphe est un triangle culminant à n en x_0 (si jamais $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, on fait un demi-triangle en montant jusqu'à $2n$), on trouve que $\sup\left\{\int_0^1 fh \ ; \ h \in E \ , \int_0^1 |p| \leq 1\right\} = \|f\|_\infty$ Puis, utilisant le premier théorème de Weiestrass...soit $\epsilon > 0$; fixons un $h \in E$ tel que $\displaystyle\int_0^1 hf \geq \|f\|_\infty - \epsilon/2$. Et soit (ϕ_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers h. La suite $\left(\int_0^1 |\phi_n|\right)$ converge vers 1, on pose alors

$$\psi_n = \frac{1}{\int_0^1 |\phi_n|}\phi_n$$

La suite (ψ_n) converge elle aussi uniformément vers h sur $[0,1]$, et la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \phi_n f\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 hf$. Ce qui conclut : la borne supérieur cherchée est $\|f\|_\infty$.

Le deuxième sup est majoré par $\int_0^1 |f|$. Prenons $h_n \ : \ x \mapsto \dfrac{f(x)}{|f(x)| + 1/n}$, on a $\|h_n\|_\infty \leq 1$, et

$$\int_0^1 fh_n = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{|f(x)| + 1/n}\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 |f|$$

par théorème de convergence dominée, par exemple. Le théorème de Weiestrass permet alors de conclure que la borne supérieure cherchée est $\int_0^1 |f|$, avec les mêmes procédés.

(103-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
$E = \mathbf{Vect}(x \mapsto f(\alpha x+\beta), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)$
(1) : f **n'est pas polynomiale.**
(2) : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, E$ **est dense dans** $C^0([a,b],\mathbb{R})$
pour la norme infinie.
Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

(énoncé donné dans la version posée à Vahagn Hakopian).
Si f est polynomiale, les $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$ et leurs combinaisons linéaires restent dans l'espace des fonctions polynômes de degré au plus le degré de f. Or un espace de dimension finie est, par le cours, fermé. Et un espace fermé ne peut être dense que s'il est l'espace entier.
Dans l'autre sens, un peu de perplexité, c'est un exercice « hostile », qui ne se laisse pas trop faire. J'ai commencé par regarder si l'examen de la fonction sinus (pour f), très loin d'être polynomiale, pouvait être instructif. Echec, rien d'intéressant a priori. Partons donc de deux constatations : d'abord, on connaît le théorème de Weierstrass. Ensuite, ce qui caractérise le fait pour une fonction C^∞ d'être non polynomiale, c'est de n'avoir aucune dérivée constamment nulle. On a donc un fil directeur : montrer que $\overline{E}$ contient les fonctions polynomiales. On prendra $a = 0$, $b = 1$, le problème est invariant par application d'une transformation affine ($x \mapsto kx + \ell$) à la variable, donc ce cas « particulier » doit suffire.
Première étape, simple : $\overline{E}$ contient les constantes. On prend $\alpha = 0$, et on utilise le fait que f n'est pas constamment nulle.
Deuxième étape : $\overline{E}$ contient une fonction polynomiale de degré 1. Ou toutes, cela revient au même puisque $\overline{E}$ est stable par combinaison linéaire et contient les constantes. On examine de près : dans $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$, α sert à « dilater » ou « contracter » (imaginer les graphes de $x \mapsto \sin(100x)$ et de $x \mapsto \sin(x/100)$ peut aider à comprendre), β à translater. On peut donc avoir l'idée suivante : au voisinage d'un point x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$, le graphe de f est proche de sa tangente, cette « proximité » est d'autant plus grande qu'on est proche du point considéré. Pour tout ramener à $[0,1]$, on considère

$$h_n \ : \ x \mapsto n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}x) - f(x_0)\right)$$

(si on oublie de multiplier par n, on va tendre vers la fonction nulle, pas intéressant). La suite (h_n) converge simplement vers $x \mapsto f'(x_0)x$, mais c'est de convergence uniforme dont on a besoin. On essaye donc de majorer uniformément sur $[0,1]$

$$\left| n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}x) - f(x_0) - \frac{x}{n}f'(x_0)\right) \right|$$

ce qui se fait avec l'inégalité de Taylor-Lagrange. Les h_n sont dans $\overline{E}$ (dans E, même, mais peu importe), donc la fonction $x \mapsto xf'(x_0)$ est dans $\overline{E}$, ce qui termine cette deuxième étape.
Pour finir, on prend un point x_1 tel que $f''(x_1) \neq 0$. On considère

$$k_n \ : \ x \mapsto n^2 \left(f(x_1 + \frac{1}{n}x) - f(x_1) - \frac{x}{n}f'(x_1)\right)$$

qui est par ce qui précède dans $\overline{E}$, et qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction polynomiale de degré 2, on termine par récurrence.

(107-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit (a_n) une suite de nombres complexes et (n_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels. On note R, R_1, R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_k x^k$, $\sum a_{n_k} x^{n_k}$, $\sum a_k x^{n_k}$.

1. **Comparer R et R_1.**
2. **Comparer R et R_2.**

Si la suite $(a_k x^k)$ est bornée, la suite $(a_{n_k} x^{n_k})$ qui en est extraite l'est aussi. Réciproque fausse : prenons $n_k = 2k$, $a_n = 0$ si n est pair, $a_n = n!$ si n est impair, par exemple...Donc $R \leq R_1$ inégalité stricte possible.

Si $R \leq 1$, si $|x| < R$, la suite $(a_k x^k)$ est bornée donc a fortiori la suite $(a_k x^{n_k})$ l'est (car si $|x| < 1$, $|x|^{n_k} \leq |x|^k$, vu $n_k \geq k$). Donc $R \leq R_2$, inégalité stricte possible, par exemple $a_k = 2^k$, $n_k = 2k$, $R = 1/2$, $R = 1/\sqrt{2}$. Si $R \geq 1$, si $|x| > R$, la suite $(a_k x^k)$ n'est pas bornée, si l'on suppose en plus $|x| > 1$ alors a fortiori la suite $(a_k x^{n_k})$ ne l'est pas. Donc $R_2 \leq R$. Inégalité stricte possible comme la précédente. Si $R = 1$, on a $R_2 = R = 1$.

Souvent les exercices spécifiquement sur le rayon de convergence ne sont pas bien difficiles car ils mettent seulement en jeu la notion de suite bornée, certains candidats se focalisant à tort sur des convergences de séries.

(111-Paris, Lyon, Cachan, Rennes)

1. **Existe-t-il P dans $\mathbf{R}[X]$ non constant tel que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $P(n)$ soit un nombre premier ?**
2. **Existe-t-il une fonction f non constante, somme d'une série entière de rayon infini telle que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $f(n)$ soit premier ?**

D'abord, en utilisant de l'interpolation de Lagrange, un polynôme de degré d qui prend en un nombre infini de points entiers des valeurs entières est à coefficients rationnels. Il suffit même qu'il prenne en $d+1$ points distincts rationnels $r_0, r_1, \ldots, r_d$ des valeurs rationnelles $a_0, \ldots, a_d$, car alors il s'écrira

$$\sum_{k=0}^{d} a_k L_k(X)$$

avec $L_k = \displaystyle\prod_{j \neq k} \frac{X - r_j}{r_k - r_j}$.

Si $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ prend des valeurs premières en tout entier naturel, $P(0) = a_0$ est un nombre premier. Qui divise $P(ka_0)$ pour une infinité de k (au moins les k multiples du ppcm des dénominateurs des a_i). Or comme P n'est pas constant, ces $P(ka_0)$ ne peuvent pas tous être égaux à a_0. Donc $a_0 = \pm 1$ qui n'est pas un nombre premier. Mais on pourrait quand même accepter 1 comme nombre premier, sinon c'est un peu trop facile. Comme P a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ nécessairement, il existe m tel que $P(m)$ soit un « vrai » nombre premier (autre que 1). Or

$$P(m + kP(m)) = P(m) + \phi(k)$$

où les développements par la formule du binôme montrent que pour une infinité de k, $\phi(k)$ est un multiple de $P(m)$. Qui ne peut pas toujours être égal à $P(m)$ sinon P serait constant. Et donc ne sera pas toujours premier.

La première question n'est pas très intéressante, la seconde l'est encore moins... surtout quand on n'a pas « l'idée » très vite. Mais $x \mapsto \sin(\pi x) + 31$ est un exemple possible !

(116-Paris, Lyon, Cachan, Rennes)
Soient $b \in \mathbf{R}_*^+$ et f une fonction continue définie sur $[1, +\infty[$ telle que $f(r) = O\left(r^{-b-2}\right)$.

1. **Soit u de classe C^2 sur $[1, +\infty[$ bornée telle que $-u'' - \dfrac{u'}{r} + \dfrac{u}{r^2} = f$. Montrer que u tend vers 0 en $+\infty$ et préciser la vitesse de convergence.**
2. **Soit $j > 0$ de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ telle que j' tend vers 1 en $+\infty$ et u de classe C^2 sur $[1, +\infty[$ bornée telle que $-u'' - \dfrac{j'}{j}u' + \dfrac{u}{j^2} = f$. Montrer que u tend vers 0 en $+\infty$**

Au début, j'ai cherché une manipulation plus ou moins astucieuse sur l'équation différentielle. Ce n'est pas forcément une bonne idée : on ne peut me reprocher que faiblement de ne pas voir une astuce, on peut me reprocher plus fortement de ne pas savoir mettre en œuvre les connaissances du programme. Bien entendu, il n'est pas question d'équation caractéristique ici. Car ce n'est pas une équation à coefficients constants. Mais c'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2. Avec les coefficients et le second membre qui sont des fonctions continues, donc les théorèmes du cours (existence et unicité) s'appliquent.
On a la chance d'avoir une solution particulière assez évidente (disons, trouvable) de l'équation homogène : $r \mapsto r$. Cherchons-en une autre sous la forme $u\ :\ r \mapsto rv(r)$. En omettant la variable pour plus de légèreté, $u' = rv' + v$, $u'' = rv'' + 2v'$, donc u vérifie l'équation homogène si et seulement si

$$-rv'' - 2v' - \frac{rv' + v}{r} + \frac{v}{r} = 0$$

(on sait que le terme en v doit s'évanouir, mais il est plus sûr de le vérifier). Ou encore :

$$rv'' + 3v' = 0$$

qu'on divise par r, puis qu'on multiplie par r^3, bref qu'on multiplie par r^2 pour obtenir

$$v'(r) = \frac{C}{r^3}$$

ou
$$v(r) = \frac{C_1}{r^2} + C_2$$
Bref, on a résolu l'équation homogène associée, les solutions sont les
$$r \mapsto \frac{C_1}{r} + C_2 r$$
Ce qui permet de montrer qu'on connaît la méthode de variation de la constante : on cherche une solution de l'équation complète sous la forme
$$u \ : \ r \mapsto \frac{\lambda(r)}{r} + r\mu(r)$$
avec la condition additionnelle
$$\frac{\lambda'(r)}{r} + r\mu'(r) = 0$$
qui donne (toujours en laissant tomber la variable)
$$u' = -\frac{\lambda}{r^2} + \mu$$
et
$$u'' = -\frac{\lambda'}{r^2} + 2\frac{\lambda}{r^3} + \mu'$$
Donc u vérifie l'équation si et seulement si
$$\frac{\lambda'}{r^2} - 2\frac{\lambda}{r^3} - \mu' + \frac{\lambda}{r^3} - \frac{\mu}{r} + \frac{\lambda}{r^3} + \frac{\mu}{r} = f$$
(là aussi, autant écrire tous les termes pour vérifier que ceux qui doivent s'annuler s'annulent). Ce qui s'écrit encore
$$\frac{\lambda'}{r^2} - \mu' = f$$
à rapprocher de
$$\frac{\lambda'}{r} + r\mu' = 0$$
pour résoudre et obtenir :
$$\lambda' = \frac{1}{2}r^2 f \qquad , \qquad \mu' = -\frac{1}{2}f$$

Et, finalement, les solutions de l'équation différentielle complète, qui sont les

$$r \longmapsto \frac{C_1}{r} + C_2 r + \frac{1}{2r}\int_1^r t^2 f(t)\mathrm{d}t - \frac{r}{2}\int_1^r f(t)\mathrm{d}t$$

Mais $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^{-b}\right)$. Si $b > 1$, il y a intégrabilité, et donc

$$\frac{1}{2r}\int_1^r t^2 f(t)\mathrm{d}t \underset{r\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Si $b \leq 1$, on peut utiliser la sommation des relations de comparaison dans le cas de non intégrabilité, on obtient, si $b = 1$,

$$\frac{1}{2r}\int_1^r t^2 f(t)\mathrm{d}t \underset{r\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln r}{r}\right)$$

et, si $b < 1$,

$$\frac{1}{2r}\int_1^r t^2 f(t)\mathrm{d}t \underset{r\to+\infty}{=} O\left(r^{-b}\right)$$

La fonction$f$ étant intégrable, pour que la solution soit bornée il est nécessaire d'avoir

$$C_1 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

la fonction s'écrivant alors

$$r \longmapsto \frac{C_1}{r} + \frac{1}{2r}\int_1^r t^2 f(t)\mathrm{d}t - \frac{r}{2}\int_r^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Et dans le dernier terme de la somme, on peut utiliser la sommation des relations de comparaison dans le cas d'intégrabilité, cette fois, pour obtenir

$$\frac{r}{2}\int_r^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \underset{r\to+\infty}{=} O\left(r^{-b}\right)$$

Puis une idée pourrait être un changement de variable avec j, mais j n'est pas de classe C^2, alors on peut remarquer que $j' \sim 1$ au voisinage de $+\infty$, et on peut intégrer les équivalents (cas de non intégrabilité), donc $j(r) \sim r$ au voisinage de $+\infty$. Ensuite,

$$-u'' - \frac{u'}{r} + \frac{u}{r^2} = f + \left(\frac{j'}{j} - \frac{1}{r}\right)u' + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{j^2}\right)u$$

ce qui, à première vue, n'est pas suffisant pour conclure...Il faut sans doute, faute de classe C^2 pour j, manipuler autrement.

(120-Paris, Lyon, Cachan, Rennes)
Soit $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et de période π. On note E l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$. On note $f : C^2(\mathbf{R}) \to C^2(\mathbf{R})$ l'application qui à ϕ associe $x \to \phi(x+\pi)$.

1. **Montrer que E est un espace vectoriel réel dont on précisera la dimension.**
2. **Montrer que f induit un endomorphisme de E noté $\widetilde{f}$.**
3. **Montrer : $\mathrm{det}(\widetilde{f}) = 1$.**
4. **On suppose $|\mathrm{tr}(\widetilde{f})| < 2$. Montrer que E est constitué de fonctions bornées.**
5. **On suppose $|\mathrm{tr}(\widetilde{f})| > 2$. Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée de E.**
6. **On suppose $|\mathrm{tr}(\widetilde{f})| = 2$. Montrer que E contient une fonction bornée non nulle.**
7. **Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^2, nulle en a et b et strictement positive sur $]a,b[$. On admet que, pour une telle fonction, $\displaystyle\int_a^b \frac{|\phi''(t)|}{\phi(t)}\mathrm{d}t > \frac{4}{b-a}$. Montrer que si q est positive, q n'est pas la fonction nulle et $\displaystyle\int_0^\pi q(t)\mathrm{d}t \leq \frac{4}{\pi}$, alors E ne contient que des fonctions bornées.**

Par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, E est un espace vectoriel réel de dimension 2 (l'hypothèse importante est la continuité de q).
Si

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi''(x) + q(x)\phi(x) = 0$$

alors

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi''(x+\pi) + q(x+\pi)\phi(x+\pi) = 0$$

ce qui, q étant π-périodique, assure que $f(\phi) \in E$. Donc f induit bien un endomorphisme de de E.
Soit (ϕ_0, ψ_0) une base de E. On peut par exemple prendre une base classique, ϕ_0 tel que $\phi_0(0) = 1$ et $\phi_0'(0) = 0$, ψ_0 tel que $\psi_0(0) = 0$ et $\psi_0'(0) = 1$

(l'existence et l'unicité de tels ϕ_0 et ψ_0 dans E est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, et le fait qu'ils forment une base est à peu près évident...). Si on note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base (ϕ_0, ψ_0), on a

$$\phi_0(\pi) = \left[\widetilde{f}(\phi_0)\right](0) = a$$

et, de même, $\phi_0'(\pi) = b$ (en dérivant la relation $\forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_0(x+\pi) = a\phi_0(x) + b\psi_0(x)$ et en appliquant à $x = 0$). Et de même, $c = \psi_0(\pi)$, $d = \psi_0'(\pi)$. On peut d'ailleurs dire que si $h = \alpha\phi_0 + \beta\psi_0$, alors $h(0) = \alpha$ et $h'(0) = \beta$. Bref, $\det\left(\widetilde{f}\right)$ est le wronskien de (ϕ_0, ψ_0) en π. Or en dérivant le wronskien de deux solutions de $y'' + qy = 0$ on trouve 0. Donc le wronskien est constant. Or il vaut 1 en 0, ce qui conclut.

4. Notons dorénavant $\tau = \mathrm{tr}(\widetilde{f})$. Si $|\tau| < 2$, le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ a deux racines complexes conjuguées non réelles $u \pm iv$ (le discriminant est négatif). Soit A la matrice de $\widetilde{f}$ dans une base (n'importe laquelle, on en choisit une, ça n'a pas d'importance) et soit $X_1 + iX_2$ un vecteur propre complexe de A à la valeur propre $u + iv$. On trouve alors $AX_1 = uX_1 - vX_2$, $AX_2 = vX_1 + uX_2$. Il existe donc une base (ϕ_1, ψ_1) de E dans laquelle la matrice de $\widetilde{f}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

avec, vu **3.**, $u^2 + v^2 = 1$. Bref, il existe une base (ϕ_1, ψ_1) de E dans laquelle la matrice de $\widetilde{f}$ est une matrice de rotation, disons d'angle θ. On sait qu'alors la matrice de $(\widetilde{f})^n$ dans cette même base est, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la matrice de rotation d'angle $n\theta$. Et donc,

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{Z} \qquad \phi_1(x + n\pi) = \cos(n\theta)\phi_1(x) + \sin(n\theta)\psi_1(x)$$

On en déduit que ϕ_1 est bornée sur $\mathbf{R}$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |\phi_1(x)| \leq \|\phi_1|_{[0,\pi]}\|_\infty + \|\psi_1|_{[0,\pi]}\|_\infty$$

et de même ψ_1 l'est, donc toute combinaison linéaire de ϕ_1 et ψ_1 l'est.

5. Il y a une base (ϕ_2, ψ_2) de E formée de vecteurs propres de $\widetilde{f}$, associés aux valeurs propres λ et $1/\lambda$ où $|\lambda| > 1$ (il suffit de remarquer que le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, et que le produit de ses deux racines vaut 1). Toute solution de l'équation s'écrit

$$\phi = \alpha\phi_2 + \beta\psi_2$$

et alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\phi(x + n\pi) = \alpha\lambda^n\phi_2(x) + \beta\lambda^{-n}\psi_2(x)$$

Si $\alpha \neq 0$, si x est tel que $\phi_2(x) \neq 0$, alors

$$\phi(x + n\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$$

et si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$,

$$\phi(x + n\pi) \xrightarrow[n \to -\infty]{} \pm\infty$$

d'où le résultat.

6. Ici, 1 ou -1 est valeur propre. Si 1 est valeur propre, un vecteur propre associé est une solution π-périodique de l'équation, donc bornée. Si -1 est valeur propre, un vecteur propre associé est une solution anti-π-périodique de l'équation, donc 2π-périodique, donc bornée. On peut considérer comme évident le fait qu'une fonction continue et périodique est bornée ! Ajoutons enfin qu'un vecteur propre est par définition non nul.

7. Supposons qu'on soit dans le cas **5.** Soit ϕ une solution. Si $\phi > 0$, alors $\phi'' \leq 0$, donc ϕ est concave. Le fait que la courbe représentative de ϕ soit au-dessous de sa tangente au point d'abscisse x_0 l'oblige à s'annuler (on fera un dessin au tableau !), sauf si cette tangente est horizontale. Donc si ϕ ne s'annule jamais, ϕ est constante, ce qui contredit le fait que q n'est pas la fonction nulle.

De plus, les zéros d'une solution non nulle de l'équation sont isolés (exercice classique vu avec les théorèmes de Sturm).

Soit donc, si on est dans le cas **5.**, un vecteur propre de $\widetilde{f}$. Si elle s'annule en a, elle s'annule en $a+\pi$. Quitte à la changer en son opposé, on peut supposer qu'elle s'annule en a et b successivement, avec $a < b \leq a + \pi$, et $\phi > 0$ sur $]a, b[$. Alors

$$\int_a^b q(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{|\phi''(t)|}{\phi(t)}\mathrm{d}t > \frac{4}{b-a} \geq \frac{4}{\pi}$$

d'où une contradiction. Si on est dans le cas **6.**, même contradiction en considérant un vecteur propre. On est donc dans le cas **4.** *Bel exercice !*

(124-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soient A et B deux applications dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

Montrer que le spectre de $A(t)$ est indépendant de t.

Il s'agit certes d'une équation linéaire, mais l'attaquer en tant que telle n'est pas complètement évident. En effet, c'estune équation qui n'est pas sous forme matricielle...contrairement aux apparences : c'est l'équation

$$A' = u(t).A$$

où $u(t)$ est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$M \longmapsto MB(t) - B(t)M$$

Comme u n'est pas constant, on n'a pas de formules...
Le second membre devrait faire penser à la trace. Si on y pense, on obtient, en prenant les traces et en rappelant que, par la propriété de la dérivation appelée « image par une application linéaire », on a

$$\mathrm{Tr}\,(A(t)) = \mathrm{Cte}$$

ce qui va dans le bon sens, continuons donc ! dériver $t \mapsto \det(XI_n - A(t))$ n'est pas très évident. Mais si on multiplie par $A(t)$, à droite et à gauche, et si on ajoute :

$$AA' + A'A = A^2B - BA^2$$

et donc

$$\mathrm{Tr}\left((A(t))^2\right) = \mathrm{Cte}$$

Plus généralement, la dérivée de $t \mapsto A(t)^p$ étant

$$t \mapsto A'(t)A(t)^{p-1} + A(t)A'(t)A(t)^{p-2} + \ldots + A(t)^{p-1}A'(t)$$

La dérivée de $t \mapsto \mathrm{Tr}\,(A(t)^p)$ est donc

$$t \mapsto p\mathrm{Tr}(A'(t)A(t)^{p-1})$$

et on trouve que toutes les $t \mapsto \operatorname{Tr}(A(t)^p)$ sont constantes. Ne reste plus qu'à voir que ces traces caractérisent le spectre. Il y a des relations (dites de Newton) permettant de relier les fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres aux sommes de leurs puissances (rappelons qu'on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, le polynôme caractéristique est donc scindé). Ici, le mieux est peut-être (mais on peut ne pas en avoir l'idée...) de partir du fait que, si les valeurs propres de $A(t)$ sont $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, répétées autant de fois que leurs multiplicités, au voisinage de 0 on a les développements en séries entières :

$$\frac{1}{1-\lambda_i t} = \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_i^p t^p$$

et que si on multiplie ces identités par λ_i, et qu'on les ajoute, on obtient l'opposé de la dérivée de f'/f avec

$$f(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)$$

Donc f est, au voisinage de 0, l'unique solution d'une équation $f' = hf$ vérifiant $f(0) = 1$ où h est connue. Ce qui détermine f de manière unique, donc les λ_i, donc le spectre.
Pour plus de précision sur les relations de Newton, voir l'exercice sur la méthode de Fadeev-Leverrier.

(133-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) On note $E = C^0([0,1], \mathbf{R})$, que l'on munit de la norme infinie. On note A la tribu de E engendrée par les boules fermées. Pour $x \in [0,1]$ et I intervalle de R, on définit $C(x, I) = \{f \in E\ ,\ f(x) \in I\}$, appelé cylindre défini par x et I.

1. **On admet que $\mathcal{A}$ contient toutes les parties fermées de E. Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par les cylindres.**
2. **Montrer que $\mathcal{A}$ contient tous les fermés de E.**

Pour la première question, il s'agit de montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant les cylindres. On veut donc, naturellement, montrer que les cylindres sont dans $\mathcal{A}$. Si on a admis que les parties fermées étaient dans $\mathcal{A}$, il est naturel de se poser la question : les cylindres sont-ils fermés ? Essayons avec les suites : on prend une suite d'éléments de $C(x, I)$, (f_n), qui converge. La limite est-elle dans $C(x, I)$? non, elle est dans $C(x, \overline{I})$ (la convergence uniforme implique la convergence simple), mais pas a priori dans $C(x, I)$. N'empêche, $\mathcal{A}$ contient déjà un certain nombre de cylindres : les $C(x, I)$ pour lesquels I est un intervalle fermé.

On aurait pu commencer l'interrogation par donner la définition d'une tribu (qu'il vaut mieux connaître exactement, bien entendu). Une tribu est stable par réunion et intersection dénombrables. Or tout intervalle est réunion dénombrable d'intervalle fermés (pourquoi ne pas avoir l'idée de dire que tout intervalle est intersection dénombrable d'intervalles fermés ? parce que ce n'est pas raisonnable, une intersection quelconque de fermés est un fermé. On passe du cours de probabilités au cours de topologie, ça commence à ressembler à un exercice d'ens...). Si l'examinateur demande pourquoi, il est plus simple de donner des exemples :

$$]\alpha, +\infty[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} [\alpha + 1/n, +\infty[$$

etc...Or, si $I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$, on a facilement $C(x, I) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C(x, I_n)$ ($f(x) \in I$ est

équivalent à $\forall n \geq 1 \quad f(x) \in I_n$). Et donc on a montré que $\mathcal{A}$ contient les cylindres !
Maintenant, il faut montrer que $\mathcal{A}$ est bien la plus petite tribu contenant les cylindres. En fait, on va plutôt exprimer la situation de manière symétrique : si $\mathcal{A}'$ est la tribu engendrée par les cylindres, essayons de montrer qu'elle contient les boules fermées. On aura alors, par double inclusion, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Considérons $B'(h, r)$ une boule fermée :

$$f \in B'(h,r) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in [0,1]\ h(x) - r \leq f(x) \leq h(x) + r$$

ce qui donne

$$B'(h,r) = \bigcap_{x \in [0,1]} C(x, [h(x) - r, h(x) + r])$$

Mais l'intersection n'est pas dénombrable. Ce qui peut facilement se réparer, là aussi avec un peu de topologie. En effet, si l'inégalité $|f(x) - h(x)| \leq r$ est vraie pour les x rationnels, elle est vraie sur $[0, 1]$ par continuité et densité. Donc

$$B'(h,r) = \bigcap_{x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}} C(x, [h(x) - r, h(x) + r])$$

et on peut donc conclure le **1)**.

Pour le **2.** on peut espérer une aide de l'examinateur. D'abord pour utiliser la stabilité par passage au complémentaire, et s'occuper plutôt des ouverts. Ensuite pour trouver une partie dénombrable dense dans E. On pourra alors penser à différentes choses : d'abord toute boule ouverte est réunion dénombrable de boules fermées (analogue à ce qui a été fait plus haut). Ensuite, par théorème de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients rationnels est un ensemble dense dans E, et dénombrable. On écrit alors tout ouvert comme réunion de boules ouvertes centrées en chacun de ses points. Chaque boule ouverte contient un élément de l'ensemble dense cité plus haut. Et donc on peut se réduire à une réunion dénombrable. Par passage au complémentaire, la question **2** se trouve résolue aussi.

(134-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit I une partie de $\mathbf{N}$. On note $\mathbf{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'entiers naturels indexées par I. Pour X partie de $\mathbf{N}^{(I)}$, on note $A_I(X) = \left\{a \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}\ ;\ \exists x \in X\ \forall i \in I\ a_i = x_i\right\}$, et $\mathcal{A}_I = \left\{A_I(X)\ ;\ X \in \mathcal{P}\left(\mathbf{N}^{(I)}\right)\right\}$.

1. **Montrer que $\mathcal{A}_I$ est une tribu sur $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$.**
2. **Etant donné deux parties I et J de $\mathbf{N}$, montrer que $\mathcal{A}_{I\cap J} = \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J$.**
3. **Etant donné deux parties I et J de $\mathbf{N}$, montrer que $\mathcal{A}_{I\cup J}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_J$.**

Ce type d'exercice peut ne pas plaire : la compréhension de l'énoncé n'est pas immédiate, on a l'impression de ne pas pouvoir chercher. Il faut avant tout ne pas se décourager, et écrire. On peut essayer des cas particuliers pour comprendre les ensembles introduits, ou commencer par des choses simples : montrer que $\emptyset \in \mathcal{A}_I$ par exemple. Si on veut tenter des cas particuliers, on peut prendre pour I les parties de $\mathbf{N}$ avec lesquelles on travaille souvent : $[\![1, n]\!]$, l'ensemble des nombres pairs, etc...
L'interrogateur apprécie, particulièrement sur ce genre d'énoncé, un candidat combatif, qui ne se décourage pas devant un certain hermétisme.

Pour $X = \emptyset$, $A_I(\emptyset) = \emptyset$ (c'est assez formel : ici, il n'existe pas de x dans X).
Stabilité par passage au complémentaire : soit $X \in \mathcal{P}\left(\mathbf{N}^{(I)}\right)$. On cherche $X' \in \mathcal{P}\left(\mathbf{N}^{(I)}\right)$ tel que $A_I(X') = \overline{A_I(X)}$. Deux tactiques sont bonnes : expliciter ce qu'est $\overline{A_I(X)}$, regarder directement si par hasard on n'aurait pas $\overline{A_I(X)} = A_I(\overline{X})$.
Il y a évidemment dans ces notations différents types de complémentaires : des complémentaires dans $\mathcal{P}\left(\mathbf{N}^{(I)}\right)$, des complémentaires dans $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$. Le contexte indique dans quel cas de figure on se trouve. Si on veut le rappeler sur la notation, cela devient trop lourd. Il est aussi possible de noter le complémentaire avec un c en exposant.
Soit $a \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$. Il est très utile de réécrire la définition de $A_I(X)$ pour bien la

comprendre :

$$a \in A_I(X) \ \Leftrightarrow \ (a_i)_{i\in I} \in X$$

(notons que si $a \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$, alors $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{N}^{(I)}$). Il est alors assez simple de voir que

$$a \notin A_I(X) \ \Leftrightarrow \ (a_i)_{i\in I} \in \overline{X}$$

et la conjecture annoncée se trouve avérée.
Reste la stabilité par union dénombrable. Mais

$$\begin{aligned} a \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_I(X_n) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N} \quad a \in A_I(X_n) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N} \quad (a_i)_{i\in I} \in X_n \\ &\Leftrightarrow (a_i)_{i\in I} \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n \end{aligned}$$

et donc

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_I(X_n) = A_I\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n\right)$$

ce qui achève la preuve de la tribalité de $\mathcal{A}_I$.

Dans la question suivante, on évite d'aborder le cas $I \cap J = \emptyset$, qui demande pour être traité une « fonction vide » que l'examinateur donnera aimablement. Supposons donc $I \cap J \neq \emptyset$.
Si $A_I(X) = A_J(X') \in \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J$, cela signifie que, pour $a \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$,

$$(a_i)_{i\in I} \in X \ \Leftrightarrow (a_i)_{i\in J} \in X'$$

L'ensemble des restrictions à $I \cap J$ des éléments de X est donc l'ensemble des restrictions à $I \cap J$ des éléments de X', et c'est une partie de $\mathbf{N}^{(I\cap J)}$ que l'on peut noter Y. On a alors

$$(a_i)_{i\in I} \in X \ \Leftrightarrow (a_i)_{i\in J} \in X' \ \Leftrightarrow (a_i)_{i\in I\cap J} \in Y$$

et donc $A_I(X) = A_J(X') = A_{I\cap J}(Y) \in \mathcal{A}_{I\cap J}$. Réciproquement, si $Y \in \mathcal{P}\left(\mathbf{N}^{(I\cap J)}\right)$, on peut considérer l'ensemble X des éléments de $\mathbf{N}^{(I)}$ dont la restriction est dans Y, X'' l'ensemble des éléments de $\mathbf{N}^{(J)}$ dont la restriction est dans Y, et on a $A_I(X) = A_J(X') = A_{I\cap J}(Y)$.

La dernière question est tout aussi (peu) intéressante, pas plus difficile. Que $\mathcal{A}_I$ et $\mathcal{A}_J$ soient incluses dans $\mathcal{A}_{I\cup J}$ résulte de la question **2.**, on n'a donc plus qu'à montrer que tout élément de $\mathcal{A}_{I\cup J}$ est dans la tribu engendrée par $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_J$, c'est peut-être un peu plus simple de commencer par le cas où I et J sont disjoints.

(138-Cachan, Rennes)

1. **Soient ϕ $I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et $X \ : \ \Omega \to I$ une variable aléatoire finie. Montrer que $\phi(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(\phi(X))$**
2. **Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_*^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $-\sum_{i=1}^{n} x_i \ \ln x_i \ \leq \ln n$ et caractériser l'égalité.**
3. **Soit $x \in]0,1[^{\mathbf{N}}$ une suite telle que la série de terme général nx_n converge. Montrer que la série de terme général $x_n \ln(x_n)$ converge.**

Soit $(x_1, \ldots, x_n) = X(\Omega)$, et, pour chaque k, $p_k = P(X = x_k)$. Comme chaque x_k est dans I et les p_k sont positifs de somme 1, on a $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k \in I$ ce qui autorise à parler de $E(X)$. L'inégalité demandée n'est alors que de la définition de l'espérance et de l'inégalité de convexité généralisée.
La fonction $\phi : x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0, +\infty[$. Si, donc, X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$, le **1** s'écrit

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \phi(x_k)$$

ou encore

$$-\frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \ln x_k$$

qui est bien l'inégalité cherchée.
Pour les cas d'égalité, ce serait bien d'utiliser la stricte convexité, hors programme. En étudiant les variations sur $[0, 1]$ de la fonction

$$t \mapsto tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)$$

on voit que cette fonction, si $f'' > 0$, est certes ≥ 0, mais n'est nulle qu'en 0 et en 1. Il y a donc égalité dans une inégalité de convexité « usuelle » que si et seulement si $x = y$ ou $t \in \{0, 1\}$. On généralise par récurrence et on conclut : il y a égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux (à $1/n$ donc). Plusieurs méthodes sont possibles pour la troisième question, la plus simple étant directe : si x_n est « loin » de 0, alors $x_n \ln x_n$ est « petit » en valeur absolue devant nx_n. Si x_n est proche de 0, on va espérer que x_n « tire » plus fort vers la convergence que $\ln x_n$ vers la divergence. On peut par exemple (mais il y a beaucoup de manières de « bricoler » ici) remarquer que

$$|x_n \ln(x_n)| \leq nx_n \;\Leftrightarrow\; x_n \geq \exp(-n)$$

et, si $x_n \leq \exp(-n)$, par étude des variations de $x \mapsto x \ln x$,

$$|x_n \ln(x_n)| \leq |\exp(-n) \ln\left(\exp(-n)\right)|$$

On a donc en tout état de cause

$$|x_n \ln(x_n)| \leq nx_n + \frac{n}{e^n}$$

Ce qui montre ce qu'on veut. Bien d'autres manières de faire…

(139-Paris) On considère des variables aléatoires réelles discrètes X, Y, Z, et on suppose que $X+Y \sim X+Z$. Peut-on dire que $Y \sim Z$? et si X, Y, Z sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{N}$? et si X, Y, Z sont indépendantes bornées ? et si X, Y, Z sont indépendantes ?

La seule question facile est la seconde, à condition de penser aux fonctions génératrices, qui donnent rapidement un résultat positif. Pour la première, on se doute qu'il faut dire non. . .en choisissant des choses non indépendantes, d'où l'idée de définir Y et Z en fonction de X. Prenons par exemple $Y=0$ et $Z=-2X$. L'hypothèse $X \sim -X$ (X est dite « symétrique », c'est beaucoup plus fort que « centrée ») n'implique pas du tout $-2X \sim 0$.
La dernière question n'est pas honnête, car elle favorise les candidats qui connaissent la fonction génératrice :

$$\phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

qui ne rentre pas dans le cadre du programme (l'espérance des variables aléatoires complexes n'est pas au programme), mais dont l'existence ne pose pas vraiment de difficulté (vue dans l'énoncé 0 des Mines, dans un cadre un peu restreint des variables à valeurs dans $\mathbf{N}$). Reste que dans ce cadre plus général, l'injectivité de $X \mapsto E(e^{itX})$ est un peu plus technique à montrer.
Pour l'avant-dernière question, on peut évidemment dire que la dernière en donne la réponse. Qu'attend-on alors du candidat ? probablement qu'il forge un outil analogue aux fonctons génératrices. Par exemple, le caractère borné permet de définir $E(e^{tX})$ et autre sur $\mathbf{R}$. Et l'effet est le même : on utilise le fait que l'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes est le produit des espérances. Mais, de nouveau, a-t-on l'injectivité de $X \mapsto E(e^{tX})$?
Commençons par l'injectivité de l'application $X \mapsto E(e^{itX})$, plus susceptible de servir dans un autre exercice d'oral. On a

$$E(e^{itX}) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)e^{itx}$$

Comme dans le cas $X(\Omega) = \mathbf{N}$, énoncé des Mines, on utilise une intégrale : si $y \in X(\Omega)$, si $a < b$,

$$\int_a^b e^{-ity} E(e^{itX}) \, \mathrm{d}t$$

est bien définie (la convergence normale de la « série » définissant $E(e^{itX})$ assure la continuité de cette fonction. Bien sûr, cela n'est pas présenté ici comme une série, mais aucun problème : on indexe $X(\Omega) = \{x_n \; ; \; n \in \mathbf{N}\}$ et on est ramené à une série de fonctions de t habituelle). L'interversion « série »-intégrale se justifie encore par convergence normale, on est sur un segment. Pour le calcul de

$$\int_a^b e^{it(x-y)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{i(x-y)} \left(e^{ib(x-y)} - e^{ia(x-y)} \right)$$

(si $x \neq y$) la remarque cruciale est que cela reste borné quand a et b varient, alors que

$$\int_a^b e^{it(x-x)} \, \mathrm{d}t = b - a$$

non. On écarte donc a et b. On prend par exemple $a = -b$, on obtient

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-ity} E(e^{itX}) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[a \to +\infty]{} P(X = y)$$

ce qui donne l'injectivité.

Pour $E(e^{tX})$, si X est bornée on montre que c'est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$ avec le théorème sur les séries de fonctions de classe C^1. Les déricées successives en 0 donnent que, si $E(e^{tX}) + E(e^{tY})$ pour tout t réel, les moments de X et Y sont tous les mêmes. Par linéarité, $E(P(X)) = E(P(Y))$ pour tout polynôme P. Par théorème de Weierstrass appliqué sur un segment dans lequel X et Y prennent leurs valeurs, $E(f(X)) = E(f(Y))$ pour tout fonction continue. On prend alors pour f une fonction valant 1 en a, nulle en-dehors de $[a - 1/n, a + 1/n]$, affine par morceaux continue, un encadrement et la continuité décroisssante donnent que

$$E(f_n(X)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(X = a)$$

d'où l'injectivité.

(145-Paris, Lyon, Cachan, Rennes) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace. Construire un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ et une variable aléatoire X' définie sur cet espace telle que $X \sim X'$ et que X' soit injective.

Prenons $\Omega' = X(\Omega)$, $X' = \mathrm{Id}_{\Omega'}$, et, pour tout $d \in X'$, $P'(\{d\}) = P\,(X = d)$, ce qui définit une probabilité P' sur Ω'. Voilà...Il y aura sans doute un autre exercice...Mais celui-ci sera peut-être aussi prétexte à parler de sommabilité, de définition et de propriétés d'une probabilité sur une tribu...

(203-X) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé sur R.

1. **Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.**
2. **Pour x dans R, quel est le signe de $P(x)P''(x) - P'(x)^2$?**

La première question est ici assez classique, puisqu'il suffit de reprendre la belle application du théorème de Rolle pour un polynôme de $\mathbf{R}[X]$: si P est scindé alors P' est scindé. La deuxième question nous montre le numérateur de la dérivée de P'/P. Et donc le signe est celui de cette dérivée. On écrit la décomposition classique en éléments simples :

$$\frac{P'}{P} = \frac{m_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{m_r}{X - a_r}$$

qui donne une dérivée assez probablement négative. . .Donc c'est négatif, aussi en les zéros de P par continuité.

(204-X) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que P est positif sur $\mathbf{R}^+$ si et seulement si il existe A et B dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

Avec l'encore plus classique « montrer que P est positif sur $\mathbf{R}$ si et seulement si il existe A et B dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$, cet exercice fait partie d'une famille d'exercices pas forcément évidents à aborder. Il ne faut surtout pas essayer de détailler les coefficients d'un polynôme, il vaut mieux penser à le scinder sur $\mathbf{C}$. Et il y a aussi une stabilité par produit intéressante :

$$(A^2 + XB^2)(C^2 + XD^2) = (AC)^2 + (XBD)^2 + X\left((BC)^2 + (AD)^2\right)$$

Remarquons qu'on peut ajouter et retrancher le même double-produit pour faire apparaître un carré ! et obtenir

$$(A^2 + XB^2)(C^2 + XD^2) = (\qquad\qquad\qquad\qquad)^2 + X(\qquad\qquad\qquad\qquad)^2$$

On scinde alors P sur $\mathbf{C}$ (on a oublié de dire qu'on s'occupait du cas intéressant). Les éventuelles racines réelle négatives donnent des $\alpha^2 + X \times 1^2$. Les éventuelles racines réelles positives sont de mutliplicités paires, donc donnent des $A^2 + X \times 0^2$. Les éventuelles racines complexes non réelles sont regroupables avec leurs conjuguées, et donnent donc des $X^2 + |\omega|^2 - 2X\mathrm{Re}(\omega) = (X - |\omega|)^2 + X \times \xi^2$ où ξ est un réel positif, en vertu de $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$. La stabilité par produit fait le reste !

Ce n'est pas un très bon exercice d'oral...

(205-X) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et ϕ_u l'unique forme linéaire sur $\mathbf{R}[X]$ telle que, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $\phi_u(X^k) = u_k$. Montrer l'équivalence entre :

1. $\forall P \in \mathbf{R}[X]\ , P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^+ \implies \phi_u(P) \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbf{N}\ \forall (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\ , \displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} u_{i+j} x_i x_j \geq 0$.

Il s'agit évidemment de voir d'où vient la deuxième condition. Mais

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} u_{i+j} x_i x_j = \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i x_j \phi_u(X^{i+j}) = \phi_u\left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i X^i\right)^2\right)$$

On en déduit assez directement que **1** implique **2**. La réciproque est méchante, car évidemment, le candidat devrait se demander si un polynôme vérifiant $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^+$ est nécessairement un carré. L'exemple de $X^2 + 1$ montre que non. L'examinateur demandera alors à quelle conjecture peut faire penser cet exemple. Si on pense : un tel polynôme s'écrit comme somme de deux carrés, on a gagné ! Reste à montrer que

$$\forall P \in \mathbf{R}[X]\ , P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^+ \implies \exists (A, B) \in \mathbf{R}[X]^2 \qquad P = A^2 + B^2$$

classique que l'on trouve partout, et qui se traite de manière analogue à l'exercice précédent.

(206-X) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbf{R}[X]$ de degré n et scindé sur R. Soit Q un élément de $\mathbf{R}[X]$ scindé sur R et dont les racines n'appartiennent pas à $[0, n]$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k Q(k) X^k$ est scindé sur R.

On n'aime pas ce genre d'exercice. Pas de cours à connaître (et donc à montrer qu'on connaît), énoncé pas franchement passionnant (pourquoi donc se poser cette question ?). Mais il faut faire quelque chose. Donc, évidemment, commencer par un cas particulier (dans la mesure où scinder explicitement P ne mène apparemment à rien) : $Q = X - a$ avec $a \notin [0, n]$. Mais alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k Q(k) X^k = XP'(X) - aP(X) = T(X)$$

Ce polynôme est de degré n (car $a \neq n$), et a pour racine toute racine de P de multiplicité $m \geq 2$, avec la multiplicité $m-1$ ou m si cette racine est nulle. Soit α une racine de P. Si $\alpha \neq 0$ est racine simple de P, alors $T(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} \alpha P'(\alpha)$. Si $\alpha = 0$ est racine simple, on passe : il est possible de ne pas s'occuper du cas où 0 est racine de P, il est alors racine de T de même multiplicité. Si $\alpha \neq 0$ est racine de multiplicité m de P, avec $m \geq 2$, $T(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} xP'(x)$ aussi. Il y a une racine simple de P' entre deux racines consécutives de P (application classique du théorème de Rolle), donc P' change de signe, donc T aussi, sauf si les deux racines consécutives en question sont de signes opposés. Mais au pire on perd une racine, ce qui n'est pas grave, si un polynôme de degré d a au moins $d-1$ racines comptées avec leur multiplicité il est scindé.
Et…c'est fini ! car l'examen de ce cas particulier donne le cas général.

(207-X)

1. **Trouver les $P \in \mathbf{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbf{U}$ de $\mathbf{C}$.**
2. **Trouver les $P \in \mathbf{C}(X)$ stabilisant le cercle unité $\mathbf{U}$ de $\mathbf{C}$.**

Exercice qui se pose à l'oral, alors qu'il n'a aucun intérêt...Mais si on a vu la solution, on a quelques chances de la retrouver.
Il est judicieux d'identifier les $e^{i\phi}X^n$ comme solutions. En fait, ce sont les seules. Pour une fois, détaillons les coefficients :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

et écrivons

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \left(\sum_{k=0}^{d} a_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} e^{-ik\theta}\right) = 1$$

L'astuce est (relativement) simple : on arrange cette égalité pour la rendre polynomiale en $e^{i\theta}$. Pour cela, on multiplie par $e^{id\theta}$. On obtient

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^d$$

où $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^{d-k}$. L'ensemble $\mathbf{U}$ étant infini, cela implique

$$PQ = X^d$$

Donc P divise X^d, la conclusion s'ensuit facilement.
Pour la deuxième question, raffinons, écrivons

$$F = \frac{P}{Q}$$

et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\delta} b_k X^k$. La condition s'écrit

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \frac{\left(\sum_{k=0}^{d} a_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} e^{-ik\theta}\right)}{\left(\sum_{k=0}^{\delta} b_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{\delta} \overline{b_k} e^{-ik\theta}\right)} = 1$$

On multiplie en haut par $e^{id\theta}$, en bas par $e^{i\delta\theta}$ pour obtenir

$$PP_1 = X^{d-\delta} QQ_1$$

Or on peut supposer évidemment $P \wedge Q = 1$, $d \geq \delta$ (F répond à la question si et seulement si $1/F$ répond à la question). On peut également supposer que $P(0) \neq 0$ et $Q(0) \neq 0$, cela revient à diviser ou multiplier la fraction F par une puissance convenable de X et ne modifiera pas non plus le problème. Donc P divise Q_1, Q divise P_1, les degrés sont alors les mêmes (on suppose au départ que d et δ sont les degrés des polynômes P et Q, et l'hypothèse de non nullité en 0 donne les degrés de P et Q égaux aux degrés de P_1 et Q_1), ces polynômes sont donc associés deux à deux : $Q_1 = aP$, $P_1 = aQ$, bref de près ou de loin les fractions cherchées doivent être les trucs de la forme

$$X^k \frac{a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d}{\overline{a_d} + \overline{a_{d-1}} X + \cdots + \overline{a_0} X^d}$$

(k entier, d entier naturel, a_0 et a_d non nuls). Que l'on peut préférer écrire

$$X^{k'} \frac{P(X)}{\overline{P}(1/X)}$$

où P est un polynôme complexe. Finalement, cette deuxième question, une fois l'astuce de la première aimablement (?) donnée par l'examinateur, est plus intéressante.

(208-X) Donner deux modes de description d'un plan de $\mathbf{R}^4$.

Comme intersection de deux hyperplans distincts, i.e. comme ensemble d'équation

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d't &= 0 \end{cases}$$

(je comprends l'énoncé en termes de plan vectoriel, mais si c'est de l'affine on peut mettre des constantes). Ou comme ensemble des vecteurs combinaisons linéaires de deux vecteurs indépendants donnés :

$$\{te+uf \ ; \ (t,u) \in \mathbf{R}^2\}$$

Bien sûr on peut s'attendre à quelques questions sur les hyperplans et leurs intersections, il faudra savoir ce qu'on a vu sur la dualité, sur la relation de Grassmann.

(209-X) Soient $V_1, \ldots, V_p$ des sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ de réunion égale à $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'un des V_i est égal à $\mathbf{R}^n$.

Pour deux sous-espaces, c'est facile…En effet, si ni V_1 ni V_2 n'est l'espace tout entier, soit l'un contient l'autre, et alors la réunion n'est pas l'espace entier, soit l'on peut trouver $u_1 \in V_1 \backslash V_2$ et $u_2 \in V_2 \backslash V_1$, et alors $u_1 + u_2 \notin V_1 \cup V_2$ (par l'absurde). Faut-il faire une récurrence sur p ? sur n ? Remarquons d'abord, pour homogénéiser les choses, qu'il suffit de montrer que l'espace $\mathbf{R}^n$ ne peut pas s'écrire comme réunion finie d'hyperplans. Constatons d'abord qu'il y a une infinité d'hyperplans : ici, dans $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$), on peut par exemple utiliser la structure euclidienne et trouver une infinité de vecteur deux à deux non égaux ni opposés sur la sphère unité. Leurs orthogonaux sont des hyperplans deux à deux distincts. Mais la structure euclidienne est un peu inutile : prendre deux formes linéaires ϕ et ψ linéairement indépendantes, les $\phi + t\psi$ sont deux à deux linéairement indépendantes, donc leurs noyaux sont des hyperplans deux à deux distincts (attention ! ils ne sont pas deux à deux disjoints !).

Si $\mathbf{R}^n = H_1 \cup \ldots \cup H_p$, où les H_i sont des hyperplans, soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ qui n'est aucun des H_i. Alors $H = (H_1 \cap H) \cup \ldots \cup (H_p \cap H)$ où les $H_k \cap H$ sont des hyperplans de H distincts de H (la relation de Grassmann donne une alternative pour l'intersection de deux hyperplans : deux hyperplans sont égaux ou alors leur intersection est de dimension $n-2$). On peut donc raisonner par récurrence sur la dimension, et commencer en disant qu'une droite n'est pas une réunion finie de $\{0\}$…

(222-X) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note

$$\Gamma(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ ; \ AB = BA\}$$

le commutant de A.

1. **Déterminer la dimension de $\Gamma(A)$ si A est une matrice de transposition.**
2. **Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable, déterminer la dimension de $\Gamma(A)$. Retrouver le résultat de la question précédente.**
3. **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente d'indice n. Déterminer la dimension de $\Gamma(A)$.**
4. **Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ n'est pas diagonalisable, montrer que la dimension de $\Gamma(A)$ est $\geq n$.**
5. **On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable. Déterminer la dimension de $\{C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ ; \ \forall B \in \Gamma(A) \ BC = CB\}$**

Toute la réduction se retrouve dans ces petites questions de commutants...Il va de soi que $\Gamma(A)$ est un espace vectoriel. On appelle dans l'énoncé matrice de transposition ce que souvent on appelle matrice de permutation. On peut, pour le calcul du commutant, supposer que c'est la matrice de permutation appelée couramment $P_{1,2}$. Le plus simple est d'écrire directement que $P_{1,2}A = AP_{1,2}$ équivaut aux équations $a_{1,2} = a_{2,1}$, $a_{2,2} = a_{1,1}$, $a_{2,j} = a_{1,j}$ si $3 \leq j \leq n$, $a_{j,2} = a_{j,1}$ si $3 \leq j \leq n$. Ce qui donne une dimension égale à

$$(n-2)^2 + 2(n-2) + 2$$

On aurait pu utiliser les endomorphismes canoniquement associés, car l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice de transposition est assez simple à exprimer (il transpose les deux premiers vecteurs de la base canonique), mais cela ne simplifie pas spécialement les choses. Pour une matrice diagonalisable, c'est un grand classique. Il est d'ailleurs plus commode de raisonner en termes d'endomorphismes canoniquement associés, dans un premier temps. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, g celui canoniquement associé à g.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f (i.e. de A), pour chaque i, on note E_i le sous-espace propre $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$, et n_i la dimension de E_i (qui est aussi la multiplicité de λ_i, f étant diagonalisable).
Si $g \in \Gamma_f$, g commute avec f, donc avec $f - \lambda_i Id$, donc g laisse stable E_i (cours).
Mais la réciproque est vraie : supposons que g laisse stable chaque E_i ; si $x \in E_k$, $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \lambda_k g(x)$ (car $g(x) \in E_k$) ; et $(g \circ f)(x) = g(\lambda_k x) = \lambda_k g(x)$. $g \circ f$ et $f \circ g$ coïncident sur chaque E_k, or $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E$ (car f est diagonalisable), donc $f \circ g = g \circ f$.
On a montré :
Si f est diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec f sont les endomorphismes qui laissent stables les sous-espaces propres de f
Maintenant, il reste à utiliser ceci pour calculer la dimension de Γ_f.
Une première méthode (matricielle) : Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$ (les n_1 premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont une base de E_1, les n_2 suivants une base de E_2, etc...). On vient de voir que g était dans Γ_f si et seulement si g laissait stables tous les E_k, donc si et seulement si la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ était diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

où chaque A_k est carrée d'ordre n_k. Or l'espace F des matrices de cette forme est de dimension $n_1^2 + \ldots + n_p^2$
[on peut en donner une base, ou dire que l'application qui à $(A_1, \ldots, A_p)$ associe la matrice construite ci-dessus est un isomorphisme de
$\mathcal{M}_{n_1}(\mathbf{K}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{n_p}(\mathbf{K})$ dans F, or la dimension de
$\mathcal{M}_{n_1}(\mathbf{K}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{n_p}(\mathbf{K})$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k^2$].
Comme l'application $g \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (et donc préserve la dimension), on conclut :

$$\boxed{\dim(\Gamma_f) = \sum_{k=1}^{p} n_k^2}$$

Une deuxième méthode : Soit G le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes qui laissent stables les E_k ; l'application de G dans $\mathcal{L}(E_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_p)$ qui à $g \in G$ associe $(g_1, \ldots, g_p)$, où g_k désigne l'endomorphisme induit par g sur E_k, est un isomorphisme (la linéarité est simple, il suffit de l'écrire. La bijectivité est un corollaire du résultat sur « la définition d'une application linéaire par ses restrictions aux facteurs d'une somme directe supplémentaire »). Or $\dim\big(\mathcal{L}(E_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_p)\big) = \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathcal{L}(E_k)) = \sum_{k=1}^{p} n_k^2$, ce qui donne la conclusion.

Une matrice de transposition a deux valeurs propres : 1 (multiplicité $n-1$) et -1 (multiplicité 1). Or on a bien

$$(n-1)^2 + 1^2 = (n-2)^2 + 2(n-2) + 2$$

3. Si A est nilpotente d'indice n, en s'aidant d'un X tel que $N^{n-1}X \neq (0)$, on vérifie que $(N^{n-1}X, \ldots, X)$ est libre et donc que N est semblable à une matrice réduite

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

dont il est facile de calculer le commutant par calcul direct (on peut utiliser la stabilité des noyaux des N'^k par toute matrice qui commute avec elle, mais ça ne va pas beaucoup plus vite). On voit que les matrices qui commutent avec N' sont les

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1 & \ddots & & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

D'où, encore, une dimension n. On remarque d'ailleurs que les matrices qui commutent avec N' sont les polynômes de N', et c'est encore une chose intéressante : comparer Γ_A et $\mathbf{K}[A]$ (une inclusion est évidente, elle peut être stricte, la caractérisation de l'égalité fait l'objet d'exercices classiques...).
On oubliait : bien sûr, déterminer les commutants de deux matrices semblables, c'est la même chose. Plus précisément,

$$B(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)B \Leftrightarrow PBP^{-1}A = APBP^{-1}$$

et donc $\Gamma_{P^{-1}AP} = \{PBP^{-1}\ ;\ B \in \Gamma_A\}$ ce qui donne un isomorphisme ($M \mapsto PMP^{-1}$) de Γ_A sur $\Gamma_{P^{-1}AP}$.
4. On peut faire cette question topologiquement (en utilisant un argument de densité), mais cela demande un certain travail, et surtout de bonnes initiatives si on ne veut pas tomber en panne. On écrira donc plus platement que si A n'est pas diagonalisable, on est quand même sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la réduction par blocs avec les sous-espaces caractéristiques permet de se réduire à la détermination du commutant d'une matrice du type $\lambda I_q + N$ où N est triangulaire supérieure stricte. La réduction des matrices nilpotentes quand elles ne sont pas du bon indice n'est pas si facile (voir réduction de type Jordan, hors programme). Bref, il nous suffira de montrer que le commutant d'une matrice triangulaire supérieurs stricte est de dimension $\geq n$. Soit T une telle matrice triangulaire supérieure stricte. Soit A une matrice triangulaire supérieure (pas stricte, elle). TA et AT sont triangulaires supérieures strictes, donc $AT = TA$ se traduit par au plus $n(n-1)/2$ équations linéaires à $n(n+1)/2$ inconnues. L'espace de solutions a donc une dimension $\geq n$ (en utilisant le lemme du cours sur la dimension d'une intersection d'hyperplans, ou en utilisant le théorème du rang). Ce qui est bien ce qu'on cherchait.
5. On reprend le commutant trouvé dans la question 2., et le fait que le commutant de $\mathcal{M}_q(\mathbf{C})$ est l'ensemble des homothéties. On trouve que la dimension cherchée est p, nombre de valeurs propres distinctes de A.

(219-X) Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'espace vectoriel $\Gamma(u)\{v \in \mathcal{L}(E)\ ;\ u \circ v = v \circ u\}$ est de dimension supérieure ou égale à n.

Exercice difficile quand on le compare au **222.** Il vaut mieux l'écrire sous forme matricielle. Et passer par **C**. On commence par montrer, donc, que le commutant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est de dimension $\geq n$. Mais ce commutant est obtenu par les n^2 équations exprimant $AM - MA = (0)$. Le système a un rang donné r, la dimension de l'espace des solutions est donc la même qu'on soit sur **R** ou sur **C** ! ce qui conclut.

(220-X) Soit u un endomorphisme du R-espace vectoriel de dimension finie E. On supposer que $(u - 2id)^2 = 0$. Calculer exp(u).

$$\exp(u) = e^2 \exp(u - 2id) = e^2(Id + (u - 2id)) = e^2(u - Id)$$

C'est tout ? C'est tout.

(221-X) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'équation $\exp(M) = -I_n$.

Comme M commute avec $\exp(M)$, les éventuelles solutions sont à chercher parmi les matrices qui commutent avec $-I_n$...bien sûr c'est une plaisanterie dans cet exercice, mais parfois cette remarque est utile !
On peut avoir un a priori négatif : une exponentielle négative, cela n'arrive pas, dans $\mathbf{R}$. L'équation n'a donc peut-être pas de solution ? oui et non...
Oui d'abord, car si X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ, de $MX = \lambda X$ on déduit $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc (sommes partielles, puis passage à la limite)

$$\exp(M)X = e^{\lambda}X$$

Or il n'existe pas de λ réel tel que $e^{\lambda} = -1$. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) = \emptyset$. L'équation n'a donc effectivement aucune solution dans le cas où n est impair.
Si n est pair, en revanche, aucune impossibilité. On peut avoir quelques réminiscences : l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une matrice de rotation (assez facile), réciproquement toute matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique A (on fait le calcul en séparant la somme en les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs). Donc $-I_2$ est une exponentielle. Ce peut être une piste si on n'a pas d'idée. Sinon, cherchons d'abord les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le raisonnement ci-dessus montre qu'elles ne peuvent avoir pour valeurs propres que des $i\pi + 2ik\pi$.Donc nécessairement

$$M = PTP^{-1}$$

où $P \in GL_n(\mathbf{C})$, et T est triangulaire supérieure avec seulement des $i\pi + 2ik\pi$ sur la diagonale. Mais alors

$$\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$$

(il est bon de savoir dire, rapidement et oralement, d'où cela vient : on écrit les sommes partielles, puis on prend les limites en utilisant la continuité de $U \mapsto PUP^{-1}$, linéaire en dimension finie). Donc

$$\exp(M) = -I_n \iff \exp(T) = -I_n$$

Approfondissons un peu. En utilisant la décomposition classique en sous-espaces caractéristiques (la terminologie n'est pas au programme : bref, en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème des noyaux au polynôme caractéristique de M qui est scindé sur $\mathbf{C}$), on écrit $T = D + N$ avec N nilpotente, commutant avec D, ce qui fait que

$$\exp(D+N) = \exp(D)\ \exp(N) = -\exp(N)$$

(car $\exp(D) = -I_n$, vu les valeurs des coefficients diagonaux de D). Donc

$$\exp(T) = -I_n \iff \exp(N) = I_n$$

Or $\exp(N) = I_n + N(I_n + N')$ où N' est un polynôme de N sans terme « constant », donc N' nilpotente, donc $I_n + N'$ inversible (il y a même une formule pour l'inverse !). Donc $N(I_n + N') = (0) \Leftrightarrow N = (0)$. On a donc trouvé les matrices complexes vérifiant $\exp(M) = -I_n$, ce sont les matrices diagonales avec, sur la diagonale, des coefficients égaux à $i\pi + 2ik\pi$. Pour qu'une matrice réelle soit semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une telle matrice, il faut que chaque coefficient se retrouve sur la diagonale autant de fois que son conjugué (le polynôme caractéristique est réel, une racine complexe non réelle a même multiplicité que la racine conjuguée).
Regroupons alors les coefficients deux par deux. Y-a-t-il, par exemple, une matrice réelle semblable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$) à la matrice

$$\begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} ?$$

Il suffit pour cela que la matrice ait un polynôme caractéristique égal à $X^2 + \pi^2$. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

convient très bien. Reste un exercice classique : deux matrices réelles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (il est bon de savoir le faire). Et on conclut : les matrices cherchées sont les matrices semblables à une matrice diagonale par blocs avec blocs du type

$$\begin{pmatrix} 0 & -\pi - 2k\pi \\ \pi + 2k\pi & 0 \end{pmatrix}$$

où k est un entier.

(238-X) On note S_n^{++} l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\mathbf{R}_*^+$. Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ à spectre imaginaire pur.

Lorsque, dans un exercice d'oral, il y a une produit de deux matrices dont l'une est symétrique à valeurs propres strictement positives, on « symétrise » le produit en introduisant une racine carrée de cette matrice.
Expliquons sur cet exemple : on montre classiquement l'existence de $\Sigma \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $\Sigma^2 = S$. Alors on écrit :

$$SA = \Sigma^2 A = \Sigma\,(\Sigma A \Sigma)\,\Sigma^{-1}$$

Il y a unicité de Σ, si on la veut « définie positive ». Cette unicité ne sert à rien ici. Mais on peut évidemment voir l'examinateur poser la question : que pensez-vous de l'unicité ? rappelons les outils de départ : passer aux endomorphismes canoniquement associés, utiliser le fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par tout endomorphisme qui commute avec lui...

Donc SA est semblable à $\Sigma A \Sigma$, qui est elle-même antisymétrique. Bref, on se retrouve avec le même énoncé débarrassé de S, ce qui ne peut qu'être mieux.
Que les valeurs propres complexes de A soient imaginaires pures peut se montrer en s'inspirant de la preuve vue dans le cours du fait qu'une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles. Ce n'est pas une preuve très naturelle lorsqu'on n'a pas fait d'espaces préhilbertiens complexes. On prend un vecteur propre X associé à une valeur propre λ :

$$AX = \lambda X$$

Pour juger de l'argument de λ, on multiplie par $\overline{X}^T$:

$$\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X$$

Or avec des notations évidentes,

$$\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \in \mathbf{R}_*^+$$

Et, $\overline{X}^T AX$ étant une matrice scalaire, elle est égale à sa transposée. Mais

$$\left(\overline{X}^T AX\right)^T = X^T A^T \ \overline{X} = -X^T A\overline{X} = -\overline{\overline{X}^T AX}$$

et être l'opposé de son conjugué, c'est être imaginaire pur…
On peut éviter cette chose un peu artificielle en voyant que A^2 est symétrique réelle, donc diagonalisable. A valeurs propres négatives, car si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ,

$$X^T A^2 X = \lambda X^T X$$

d'une part,

$$X^T A^2 X = -X^T A^T AX = -Y^T Y \qquad (Y = AX)$$

d'autre part. Donc $\lambda \leq 0$. Le polynôme minimal de A^2 est donc de la forme

$$(X + \omega_1) \ldots (X + \omega_p)$$

où $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_p$. Si $0 < \omega_1$, alors

$$(X + i\omega_1)(X - i\omega_1) \ldots (X + i\omega_p)(X - i\omega_p)$$

annule A et est scindé simple à racines imaginaires pures, ce qui conclut. Si $\omega_1 = 0$,

$$X^2(X + i\omega_2)(X - i\omega_2) \ldots (X + i\omega_p)(X - i\omega_p)$$

annule A. Il est scindé presque simple, on pourra avoir un polynôme annulateur scindé simple si on montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$. Une inclusion est évidente. Et l'autre résulte d'un calcul effectué quelques lignes au-dessus. Donc, avec le théorème des noyaux, on voit que

$$X(X + i\omega_2)(X - i\omega_2) \ldots (X + i\omega_p)(X - i\omega_p)$$

annule A.

(239-X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $(S, H) \in S_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $M = SH$.

Lorsque, dans un exercice d'oral, il y a une produit de deux matrices dont l'une est symétrique à valeurs propres strictement positives, on « symétrise » le produit en introduisant une racine carrée de cette matrice.

Explications dans l'exercice précédent. Autrement dit :

$$SH = SH'^2 = H'^{-1} \left(H'SH'\right) H'$$

ce qui fait que SH est semblable à une matrice symétrique, donc diagonalisable, une implication est donc simple.

Pour l'implication réciproque, un autre réflexe : deux décompositions sont classiques en algèbre bilinéaire, la décomposition QR (orthogonale$\times$triangulaire supérieure, qui résulte de la méthode de Schmidt interprétée matriciellement) et la décomposition QS (orthogonale$\times$ symétrique définie positive). Cette dernière n'est pas si évidente à retrouver sans indication, il vaut donc mieux avoir un point de départ : on peut éliminer Q à l'aide de la relation $Q^T Q = I_n$, d'où l'idée, si $A = QR$, de calculer

$$A^T A = S^T Q^T Q S = S^2$$

On voit venir la méthode : $A^T A$ est une matrice symétrique à spectre strictement positif (on suppose A inversible), donc elle admet une racine carrée symétrique à spectre strictement positif. . . *C'est bien de vérifier qu'on sait faire ça jusqu'au bout.*

Peut-on utliser cela ? Si A est diagonalisable, écrivons banalement

$$A = PDP^{-1}$$

avec P inversible et D diagonale. Ecrire $P = QS$ ne donne pas grand chose, on va plutôt écrire $P^{-1} = QS$. Donc

$$A = S^{-1} Q^T D Q S = S^{-1} M S$$

où M est diagonale. Ce qui termine le bricolage (un peu manipulatoire quand même), car

$$S^{-1}MS = S^{-2}SMS$$

et $SMS = H$ est symétrique. Zut, c'est dans le mauvais sens, la définie positive est devant et la quelconque derrière. Mais pas grave, M est diagonalisable si et seulement si M^T l'est. Ouf !...

(251-X) Décrire les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbf{C})$, de $GL_n(\mathbf{R})$.

Pas facile de se représenter $GL_n(\mathbf{C})$! disons que c'est un gros espace vectoriel auquel il manque des éléments (ceux de déterminant nul). Il n'est pas stupide de se poser la question de la convexité. Non pas que $GL_n(\mathbf{C})$ puisse raisonnablement se prétendre convexe (par exemple, dans le segment $[-I_n, I_n]$, il y a la matrice nulle...), mais on peut se poser la question de savoir quand le segment $[P, Q]$, à extrémités dans $GL_n(\mathbf{C})$, est inclus dedans. Autrement dit, peut-on avoir

$$\forall t \in [0,1] \qquad tP + (1-t)Q \in GL_n(\mathbf{C}) \quad ?$$

cela équivaut à

$$\forall t \in]0,1[\qquad \frac{t}{1-t} I_n + P^{-1}Q \in GL_n(\mathbf{C}) \ .$$

Là se situe la principale idée : faire intervenir des histoires de valeurs propres de matrices. Car on s'aperçoit que si $P^{-1}Q$ n'a pas de valeur propre réelle, cette condition sera bien réalisée (voire même si $P^{-1}Q$ n'a pas de valeur propre réelle négative, mais il n'est pas certain que l'on ait besoin de ce raffinement). Donc, assez souvent, on peut joindre deux matrices de $GL_n(\mathbf{C})$ par un segment.
Mais tournons astucieusement la matrice P, remplaçons-là par la matrice $P_\theta = e^{i\theta}P$. Les valeurs propres de la matrice $P_\theta^{-1}Q$ sont celles de $P^{-1}Q$ multipliées par $e^{-i\theta}$. Comme une matrice ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe θ (il y en a même beaucoup !) tel que l'on puisse joindre Q à P_θ par un segment dans $GL_n(\mathbf{C})$. Or l'application $t \mapsto e^{it\theta}P$ est un arc dans $GL_n(\mathbf{C})$ qui joint P à P_θ, ce qui conclut : $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

En revanche, $GL_n(\mathbf{R})$ ne l'est pas, et c'est bien la seule chose vraiment facile dans cet exercice...à condition de penser au déterminant. Il y a donc au moins deux composantes connexes :

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ ; \ \det(M) > 0\}$$

et $GL_n^-(\mathbf{R})$ défini de même. Bien sûr, si l'un des deux est connexes par arcs, l'autre aussi, car si on prend $A \in GL_n^-(\mathbf{R})$, $M \mapsto AM$ est une bijection continue (ainsi que sa réciproque) de $GL_n^+(\mathbf{R})$ sur $GL_n^-(\mathbf{R})$. Pour montrer que $GL_n^+(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, il y a bien des méthodes. Pour $n = 1$, c'est assez évident (il y a même convexité, mais ça s'arrête là), il n'est pas stupide d'examiner le cas $n = 2$ par de petits bricolages et de tenter une récurrence. Il y a une méthode par « recyclage » de résultats classiques qui est efficace : toute matrice inversible s'écrit sous la forme QR avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure (interprétation de la méthode de Schmidt). La construction de cette décomposition à partir de l'algorithme de Schmidt montre qu'il est possible de supposer les coefficients diagonaux de R strictement positifs. Et alors le déteminant de Q est du même signe que le déterminant de QR, ce qui nous donne une application

$$f \ : \ (Q, R) \mapsto QR$$

de $\mathcal{SO}_(n) \times T_{n,>0}$ (où l'on note $T_{n,>0}$ l'espace des matrices triangulaires supérieures à coefficients > 0) sur $GL_n^+(\mathbf{R})$. Or cette application est continue (restriction du produit matriciel, qui est bilinéaire en dimension finie), $T_{n,>0}$ est convexe, et la connexité par arcs de $\mathcal{SO}(n)$ est une conséquence classique de la réduction des isométries vectorielles (deux idées à comprendre : l'application

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$$

définit un arc joignant I_2 à la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et toute paire de -1 sur la diagonale peut s'interpréter comme un bloc

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$$

A noter : on peut aussi utiliser la décomposition polaire QS, mais c'est un exercice qui quoique classique est plus complexe à mener que la décomposition QR.

(252-X) Décrire les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbf{R})$, de $SO_n(\mathbf{R})$.

On vient d'en parler. Peut-être à cette occasion sera-t-on interrogé sur la réduction des isométries vectorielles, qui est la clé.

(250-X) Montrer que $SL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

Certes on ne sait pas ce qu'est $SL_n(\mathbf{C})$, mais rappelons que c'est un énoncé sans préparation, l'examinateur donne les informations utiles. Encore un recyclage : il suffit de se rappeler que l'on a déduit assez facilement la connexité par arcs de la sphère unité d'un evn à partir de celle de sa boule. Cela dit, ici, c'est nettement plus compliqué, la connexité de $GL_n(\mathbf{C})$ n'étant pas si classique. Elle fait l'objet de l'exercice 251.
On s'occupe donc, en fait, de montrer que $GL_n(\mathbf{C})$ l'est. Puis, si A et B sont dans $SL_n(\mathbf{C})$, si γ est un chemin reliant A à B dans $GL_n(\mathbf{C})$,

$$t \longmapsto \frac{1}{\det(\gamma(t))}\gamma(t)$$

relie A à B dans $SL_n(\mathbf{C})$.

(249-X) Existe-t-il une injection continue de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$?

En général, la réponse est non, en utilisant des outils de connexité par arcs. Soit $a \in [0,1]^2$. L'ensemble $[0,1]^2 \setminus \{a\}$ étant connexe par arcs, son image l'est aussi, et donc est un intervalle. Inclus dans $[0,1]\setminus\{f(a)\}$. Donc f atteint un maximum ou un minimum (global) en a. Et ce pour tout a. Ce qui nuit gravement à l'injectivité de f.

(263-X) Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbf{R}^n$. On pose
$A = \{u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)\ ;\ u(K) \subset K\}$**.**

1. **Montrer que A est compact.**
2. **Montrer que, pour $u \in \mathcal{A}$, $|\mathbf{det}(u)| \leq 1$.**

On sait que $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ est de dimension finie. Il suffit donc de montrer que A est fermée et bornée. Peu importe la norme, elles sont toutes équivalentes. Le problème est que, comme on n'est pas censé connaître les normes subordonnées, on n'a pas de norme naturelle sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. On peut alors éventuellement passer par les matrices. Prenons la base canonique (ou une autre, cela n'a aucune importance) de $\mathbf{R}^n$: $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Comme K est un voisinage de 0, il existe $\delta > 0$ assez petit pour que tous les δe_j soient dans K. Comme K est compact donc borné, il est inclus dans une boule fermée de centre 0 et de rayon R, pour la norme $\|.\|_\infty$ par exemple. On a donc, pour tout j, si $u \in A$,

$$\|u(\delta e_j)\|_\infty \leq R$$

Et donc, munissant $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de $\|.\|_\infty$ elle aussi,

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\|_\infty \leq \frac{R}{\delta}$$

Or $\|\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(.)\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n$, on a donc montré que A était bornée. Soit maintenant (u_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ (la caractérisation des fermés par les suites est la plus couramment utilisée). Soit $x \in K$. L'application $v \mapsto v(x)$ est linéaire en dimension finie, donc continue. Donc

$$u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$$

et comme K est fermé, de $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n(x) \in K$ on déduit $u(x) \in K$. C'est vrai pour tout $x \in K$, donc $u \in A$.

2. Au début, j'ai cherché un peu trop compliqué...avant d'avoir une idée assez simple : si $u \in A$, pour tout p on a $u^p \in A$ (facile : la composée de deux éléments de A est dans A). Or, si $|\det(u)| > 1$, $|\det(u^p)| = |\det u|^p \xrightarrow[p\to+\infty]{}$ $+\infty$. Mais det est continue, et donc bornée sur le compact A.

(264-X) Sot K un compact de $\mathbf{R}^n$ convexe non vide et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ telle que $u(K) \subset K$. Montrer que u admet un point fixe dans K

Souvent la recherche d'un point fixe se fait en utilisant une suite récurrente : $x_{n+1} = u(x_n)$. La stabilité de K par u suffit pour définir une telle suite. Bien sûr, elle a au moins une valeur d'adhérence. Mais on n'arrive pas à montrer qu'une telle valeur d'adhérence soit un point fixe. Et, ce qui est gênant, on n'utilise pas la convexité. On peut avoir l'idée de faire une moyenne : fixant $a \in K$, on considère

$$x_n = \frac{1}{n}\left(a + u(a) + \cdots + u^{n-1}(a)\right)$$

La stabilité de K par u et sa convexité assurent que la suite ainsi définie est bien une suite d'éléments de K. Et on notera que, si on n'a pas $x_{n+1} = u(x_n)$, on a une certaine proximité entre x_n et $u(x_n)$:

$$u(x_n) = \frac{1}{n}\left(u(a) + \ldots + u^n(a)\right)$$

donc

$$u(x_n) - x_n = \frac{1}{n}\left(u^n(a) - a\right)$$

La bornitude de K donne donc :

$$u(x_n) - x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Et la compacité de K fait qu'il existe $c \in K$ et ϕ extractrice telle que

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$$

Mais u est continue (linéaire en dimension finie), on obtient bien $u(c) = c$.

(280-X) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

1. **Montrer que, si $p \geq 1$, $\sum u_n^p$ converge.**
2. **Trouver la limite lorsque $p \to +\infty$ de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p\right)^{1/p}$**

1. doit être résolue sans difficulté...Comme (u_n) converge vers 0, on a $u_n^p = \mathrm{O}(u_n)$ (c'est même un o dès que $p > 1$).
2. Pour une somme finie, la limite vaut le max des u_n, c'est même la raison de l'appellation $\|.\|_\infty$. Mais pour une somme finie, la preuve est facile, car on encadre

$$(\max(u_n))^p \leq \sum_{n=1}^{N} u_n^p \leq N\,(\max(u_n))^p$$

Il ne reste plus alors qu'à prendre la puissance $1/p$ (qui est bien croissante), et à remarquer que $N^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. Cette démonstration ne s'adapte pas vraiment facilement au cas d'une série. On va quand même essayer de s'en inspirer, d'abord en remarquant qu'il y a bien, ici, un $\|u\|_\infty = \max(u_n)$, car de deux choses l'une, ou tous les u_n sont nuls, et il n'y a rien à faire, ou il y a un $u_{n_0} > 0$, et alors il y a un rang n_1 tel que $n > n_1 \Rightarrow u_n < u_{n_0}$, dans ce cas on n'a qu'à s'occuper du $\max\limits_{0\leq n\leq n_1}(u_n)$, qui existe bien. Par homogénéité, la mise en facteur de $\|u\|_\infty$ (si ce nombre est nul, la suite est nulle, il n'y a rien à faire) permet de se ramener au cas $\|u\|_\infty = 1$. Cas où l'intuition dit que les termes strictement inférieurs à 1 vont être « de plus en plus négligables » quand $p \to +\infty$. On définit alors l'ensemble, nécessairement fini,

$$I = \{n \in \mathbf{N}\ ;\ u_n = 1\}$$

Déjà, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p\right)^{1/p} \geq (|I|)^{1/p}$, et on obtient un minorant qui tend vers 1 quand $p \to +\infty$. Ecrivons maintenant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p = |I| + \sum_{n\in\mathbf{N}\setminus I} u_n^p = |I| + s_p$$

Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus I$, $\phi_n(p) = u_n^p$. La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N} \setminus I} \phi_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, et chaque $\phi_n(p)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite, et conclure que $s_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. On en tire assez aisément $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p\right)^{1/p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$, et le résultat dans le cas général, la limite cherchée vaut $\|u\|_\infty$.

(302-X) Soit (a_n) une suite réelle convergeant vers 0 telle que $\sum |a_{k+1} - a_k|$ converge. Montrer que pour tout réel x, $\sum a_k \sin(kx)$ converge. Indiquer des intervalles de convergence uniforme.

Posant $\alpha_k = a_k - a_{k-1}$ (à un décalage près, ce peut être α_{k-1} si on veut), on a évidemment envie de faire apparaître les α_k dans la série qu'on doit étudier. Or, en convenant de $a_{-1} = 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = a_j$$

Donc, si $N \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \sin(kx) = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sin(kx) \right) = \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{k=j}^{N} \alpha_j \sin(kx) \right)$$

Or on sait calculer

$$\sum_{k=j}^{N} \sin(kx) = \mathrm{Im} \left(\sum_{k=j}^{N} e^{ikx} \right)$$

on exclut provisoirement le cas où x est un multiple de π, la somme étant nulle. On peut alors écrire

$$\sum_{k=j}^{N} \sin(kx) = \mathrm{Im} \left(\frac{e^{i(N+1)x} - e^{ijx}}{e^{ix} - 1} \right)$$

Et donc, finalement,

$$\sum_{k=j}^{N} \sin(kx) = \sin\left((N+j)\frac{x}{2} \right) \frac{\sin\left((N-1-j)\frac{x}{2} \right)}{\sin\left(\frac{x}{2} \right)}$$

La majoration

$$\left| \sum_{k=j}^{N} \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2} \right) \right|}$$

permet alors d'affirmer la convergence (absolue, même) de la série $\displaystyle\sum_j \left(\alpha_j \sum_{k=j}^{N} \sin(kx) \right)$. On a donc résolu la première partie de la question. Le majorant trouvé indique aussi la convergence normale de la série $\displaystyle\sum_j \left(\alpha_j \sum_{k=j}^{N} \sin(kx) \right)$ sur tout intervalle $]\delta, 2\pi - \delta[$ $(0 < \delta < \pi)$, donc sa convergence uniforme, donc la convergence uniforme de la série de départ puisque les sommes partielles sont les mêmes. Bien sûr, même chose sur $]\delta + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \delta[$.

(303-X) Soit $\theta \in [0,2\pi]$, $t \in [0,1[$. On pose $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(p\theta)$.

1. **Calculer $S(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t)$.**
2. **En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.**

Quand θ est multiple de π, tout est nul, on exclut donc ce cas dorénavant. Reste à calculer une partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\sum_{p=1}^{n}\left(te^{i\theta}\right)^p\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{te^{i\theta}-t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-te^{i\theta}}\right)\\
&= t\ \operatorname{Im}\left(\frac{\left(e^{i\theta}-t^n e^{i(n+1)\theta}\right)\left(1-te^{-i\theta}\right)}{1-2t\cos\theta+t^2}\right)\\
&= t\frac{\sin\theta - t^n\sin(n+1)\theta + t^{n+1}\sin(n\theta)}{1-2t\cos\theta+t^2}
\end{aligned}$$

On obtient

$$S(t) = \frac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il suffit de majorer par exemple

$$|S_n(t)| \leq \frac{3}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

(le majorant est indépendant de n, intégrable car continu sur $[0,1]$, a fortiori sur $[0,1[$). Donc la valeur cherchée est

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta\ \mathrm{d}t}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

Que l'on calcule en mettant le dénominateur sous forme canonique :

$$1-2t\cos\theta+t^2 = (t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta = \sin^2(\theta)\left(1+\left(\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\right)$$

Ce qui donne une intégration facile avec un Arctangente, il est utile ensuite de se souvenir des formules $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$...Et on trouve $\dfrac{\pi - \theta}{2}$ (à quelque chose près, de tête, ça doit au moins être vrai sur $[0, \pi]$, attention sinon au fait que l'arctangente de la tangente de quelque chose n'est le quelque chose qu'à quelques π près.

(307-X) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence ≥ 1. Pour $x \in]-1,1[$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. **On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x)$ a une limite finie lorsque $x \to 1^-$. La réciproque est-elle vraie ?**
2. **On suppose que $f(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers 1^- et que $a_n = o(1/n)$. Montrer que $\sum a_n$ converge.**

1. Un classique…mais qui demande quand même du savoir-faire. Un ancien rapport de l'X déplorait que les candidats ne sachent pas déduire de la convergence de $\sum a_n$ l'écriture de a_n comme différence de deux termes consécutifs d'une suite qui converge vers 0. Bref, ici, la grande idée, c'est d'écrire $a_n = r_{n-1} - r_n$, où $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Et d'essayer de montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1[$, pour pouvoir appliquer le théorème de la double limite. On peut bien sûr remarquer que si $\sum |a_n|$ converge, il y a convergence normale, le cas général est nettement moins évident.
On peut définir, sur $[0,1[$,

$$R_n \ : \ x \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

et couper en deux (la suite (ρ_n) converge vers 0, elle est donc bornée, le rayon de convergence de $\sum \rho_n x^n$ est donc ≥ 1) : pour tout $x \in [0,1[$,

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\rho_{k-1} - \rho_k)x^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_{k-1}x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \rho_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k \\
&= \rho_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k
\end{aligned}
$$

Soit $\epsilon > 0$. Fixons un rang n_0 tel que

$$(k \geq n_0) \Rightarrow |\rho_k| \leq \epsilon/2$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + |1-x| \frac{\epsilon}{2} \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \epsilon$$

et on a donc bien montré la convergence uniforme. La réciproque est fausse comme le montre le développement en série entière de $x \mapsto 1/(1+x)$.

2. Autant on peut, pour l'avoir pratiquée plusieurs fois, espérer acquérir quelques automatismes avec la transformation d'Abel, autant cette réciproque (qu'on appelle souvent théorème taubérien "faible") n'est pas complètement évidente. Une chose peut aider : se souvenir que, comme dans la transformation d'Abel, on va avoir des $(1-x)$ en facteur. Tout repose sur la factorisation

$$(1-x^n) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

dans laquelle on majore

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} \leq n$$

et c'est ce n qui va motiver l'utilisation de l'hypothèse

$$na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Appelons ℓ la limite en 1^- de f, et essayons de montrer que $\sum a_n$ converge vers la limite ℓ. Pour cela, on essaye de majorer efficacement la différence

$$\delta(x,N)=\left|\sum_{k=0}^{N}a_k-\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k\right|$$

qu'il est naturel de couper en deux ; on utilise l'inégalité triangulaire, pas forcément grossière puisque rien n'empêche tous les termes d'être positifs :

$$\delta(x,N)\leq\sum_{k=0}^{N}|a_k|(1-x^k)+\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k|x^k$$

Et c'est là qu'on utilise la remarque préliminaire :

$$\delta(x,N)\leq(1-x)\sum_{k=0}^{N}k|a_k|+\sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_k|x^k$$

On utilise alors l'hypothèse, $ka_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, renforcée par l'application du théorème de Césaro :

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}k|a_k|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

Soit $\epsilon>0$. On considère donc, car il en existe un, un rang N_0 tel que, si $N\geq N_0$, on ait à la fois :

$$|Na_N|\leq\epsilon\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}k|a_k|\leq\epsilon$$

(le théorème de Césaro est hors-programme. On peut bien sûr en intégrer la démonstration dans ce raisonnement. Mais il me semble que l'admettre est plus clair. On le redémontrera à part, en utilisant un résultat de sommation des relations o). Dans la suite, **on suppose dorénavant que** $N\geq N_0$. On a alors

$$\delta(x,N)\leq(N+1)(1-x)\epsilon+\frac{x^{N+1}\epsilon}{(N+1)(1-x)}$$

Maintenant, c'est facile si on constate deux choses : d'abord, on a les mains libres pour choisir x n'importe où dans $[0,1[$. Ensuite, on veut que $(N+1)(1-x)$ soit petit (à cause du premier terme) et grand (à cause du second).

Ces deux impératifs étant assez contradictoires, il est très naturel de choisir la voie moyenne, c'est-à-dire prendre $(N+1)(1-x) = 1$, ce qui signifie $x = 1-1/(N+1)$, possible (c'est bien dans $[0,1[$) et raisonnable (on s'attend bien à devoir considérer x près de 1). Remarquons que le fait que la valeur appropriée de x dépend de N, ce n'est nullement gênant puisque, comme on l'a dit, on a tout le choix de x. Et notons aussi que si on avait choisi $(N+1)(1-x)$ égal à 2, ou à $1/2$, ça n'aurait rien changé d'essentiel. En tout cas, on aboutit ici à

$$\delta(x, N) \leq 2\epsilon$$

ce qui est concluant.

Remplacer l'hypothèse $a_n = o(1/n)$ par $a_n = O(1/n)$ donne le théorème taubérien fort, démontré par Littlewood, un des grands résultats d'Analyse du début du 20ème siècle. C'est beaucoup plus dur, non seulement techniquement mais aussi conceptuellement.

(312-X) Soit $R > 1$. On note $S(R)$ l'ensemble des fonctions $D(0, R) \to \mathbf{C}$ sommes d'une série entière de rayon de convergence R. Pour $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in S(R)$ et $0 < r < R$ on pose $\|f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$.

1. **Montrer que $S(R)$ est une algèbre stable par dérivation et que $\|.\|_r$ est une norme d'algèbre.**
2. **Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $r \in]1/2, R[$, $\delta \in]0, 1]$, $f \in S(R)$, on ait $\|f'\|_{re^{-\delta}} \leq C\delta^{-2}\|f\|_r$.**
3. **Soient $f_0 \in S(R)$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $f_{n+1} = (f_n')^2$. Montrer que pour tout n, $f_n \in S(R)$ et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\|f_0\|_{\infty, D(0,1)} < \epsilon$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur le disque $D(0, 1/2)$.**

Que $S(R)$ soit une sous-algèbre de, par exemple, $C(D(0, R), \mathbf{C})$, résulte des résultats sur les combinaisons linéaires et produit de Cauchy de séries entières (pour la non vacuité, on peut par exemple considérer $z \mapsto 1/(R - z)$). La stabilité par dérivation vient du théorème sur le rayon de convergence de la série dérivée. Il y a une petite approximation dans l'énoncé initial : il faut donner comme condition le rayon de convergence $\geq R$, pas $= R$. Les propriétés de norme de $\|.\|_r$ ne sont pas compliquées. Il faut vérifier que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_r$$

ce qui se fait, aussi, simplement en utilisant le produit de Cauchy.
De plus, avec les notations proposées,

$$\|f'\|_{re^{-\delta}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| r^{n-1} e^{-(n-1)\delta}$$

L'idéal serait de trouver C telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$nr^{n-1}e^{-(n-1)\delta} \leq C\delta^{-2}r^n$$

(et pas seulement l'idéal, c'est en fait complètement nécessaire puisque si ça marche pour toute fonction ça marche en particulier pour tous les $z \mapsto z^n$). On voudrait donc

$$\forall n \geq 1 \qquad n\delta^2 r^{-1} e^{-(n-1)\delta} \leq C$$

Une telle constante C existe, du fait que, par croissances comparées,

$$n\delta^2 r^{-1} e^{-(n-1)\delta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En fait, j'ai mal lu l'énoncé : il faut que ça marche uniformément pour tous les $r \in]1/2, R[$ et $\delta \in]0,1]$! On commence par majorer, alors,

$$n\delta^2 r^{-1} e^{-(n-1)\delta} \leq 2n\delta^2 e^{-(n-1)\delta} \leq 2n\delta e^{-n\delta} e^{\delta}$$

Pas davantage de problème, vu que la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, continue sur $[0, +\infty[$ et ayant une limite nulle en $+\infty$, est bornée sur $[0, +\infty[$.
Le fait que $S(R)$ soit une algèbre stable par dérivation assure bien l'appartenance des f_n à $S(R)$. De la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) \mathrm{d}t$$

on déduit que $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout n, donc

$$\|f\|_r \leq \frac{\epsilon}{1-r}$$

pour tout r dans $]1/2, 1[$. Ensuite, en utilisant les propriétés de norme d'algèbre,

$$\|f_{n+1}\|_{re^{-\delta}} \leq C^2\delta^{-4} \|f_n\|_r^2$$

Donc $\|f_1\|_{re^{-\delta}} \leq C^2\delta^{-4}\|f_0\|_r^2$, $\|f_2\|_{re^{-2\delta}} \leq C^2\delta^{-4}\left(C^2\delta^{-4}\right)^2 \|f_0\|_r^4$,
$\|f_3\|_{re^{-3\delta}} \leq C^2\delta^{-4}\left(C^2\delta^{-4}\right)^2\left(C^2\delta^{-4}\right)^4 \|f_0\|_r^8$ et, à condition d'avoir $re^{-n\delta} > 1/2$, par récurrence,

$$\|f_n\|_{re^{-n\delta}} \leq \left(C^2\delta^{-4}\right)^{2^n-1} \left(\frac{\epsilon}{1-r}\right)^{2^n}$$

Il suffit maintenant d'ajuster $re^{-n\delta} > 1/2$. En fait, en reprenant les calculs précédents, on voit qu'on peut autoriser, ce qui est commode, $re^{-n\delta} = 1/2$, i.e. $r = e^{n\delta}/2$, avec quand même $r < 1$, ce qui contraint $\delta < (\ln 2)/n$. On a alors

$$\|f_n\|_{1/2} \leq \left(C^2\delta^{-4}\right)^{-1} \left(\frac{\epsilon C^2 \delta^{-4}}{1 - e^{n\delta}/2}\right)^{2^n}$$

Le problème est donc le terme $\delta^4(1 - e^{n\delta}/2)$. Si δ est « petit devant $1/n$ », l'ordre de grandeur est en $n\delta^5$, si on ne veut pas que ça tende vers 0 c'est en contradiction avec les contraintes. Mais c'est vrai que la majoration de $\|f\|_r$ est trop grossière. Car il existe pour tout $R' \in [1, R[$ un $M(f, R')$ tel que

$$\forall n \geq 0 \qquad |a_n| \leq \frac{M(f, R')}{R'^n}$$

mais hélas il n'est pas possible de contrôler ce $M(f, R')$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ sur $D(0, 1)$.

(313-X) Soit r_1, r_2, r_3 et R des nombres réels tels que $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$.

1. **Si f est une fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, justifier l'existence pour $r \in [0, R[$ de $M_f(r) = \max\{|f(z)| \ ; \ |z| = r\}$.**
2. **Montrer qu'il existe C dans $\mathbf{R}_*^+$ et η dans $]0,1[$ tels que, pour toute fonction f développable en série entière sur le disque ouvert $D(0,R)$, on ait**

$$M_{r_2}(f) \leq C M_{r_1}(f)^{\eta} M_{r_3}(f)^{1-\eta} \ .$$

Une fonction développable en série entière est continue sur le disque ouvert de convergence, donc bornée sur tout compact inclus dans ce disque ouvert. En particulier, un cercle $C(0,r)$ est un tel compact.
Si l'inégalité est valable, elle est valable pour tout $z \mapsto z^n$, ce qui oblige à avoir

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \ln(r_2) \leq \ln C + \eta n \ln(r_1) + (1-\eta) n \ln(r_3)$$

d'où (divisant par n et prenant la limite quand $n \to +\infty$)

$$\eta(\ln(r_3) - \ln(r_1)) \leq \ln(r_3) - \ln(r_2)$$

ce qui peut donner l'idée de prendre cette valeur pour η. Après, c'est plus difficile...(il s'agit d'une version faible du théorème des trois cercles d'Hadamard), on sera amené à suivre les indications de l'examinateur. Signalons quand même qu'il est bien de savoir montrer la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(re^{it}) \mathrm{d}t$$

et peut-être même de savoir qu'elle existe (elle n'est pas très compliquée à retrouver).

(314-X) Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout entier naturel k, $(-1)^k f^{(2k)} \geq 0$. Montrer que f est développable en série entière en tout point de $[a,b]$.

Exercice infaisable en l'état (c'est un théorème de Widder, prenant sa source dans les premiers résultats de Bernstein sur la question). On ne peut espérer, bien évidemment, trouver en une petite heure un résultat qui a demandé un certain travail à quelques très bons mathématiciens du début du 20ème siècle. On peut remarquer que dans le stock des fonctions usuelles, on a des exemples de fonctions vérifiant ce type de condition (sin, cos sur des intervalles convenables). L'idée à produire serait sans doute une majoration suffisamment performante des dérivées successives pour arriver à montrer que le reste de Taylor (écrit sous forme intégrale, ou majoré par Taylor-Lagrange) tend vers 0. Mais ce n'est pas simple. Le résultat classique au niveau prépa dans cette famille de problèmes est celui qui dit qu'une fonction ayant toutes ses dérivées positives a des propriétés de développabilité en série entière (voir feuilles d'exercices). Même ce résultat que l'on rencontre partout dans la littérature n'est pas complètement évident.

(316-X) Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^2. On suppose que f admet un maximum global en a avec de plus $f''(a) < 0$. Donner un équivalent quand n tend vers l'infini de $I_n = \displaystyle\int_a^b e^{nf(x)}\mathrm{d}x$.

Première phase

On commence par une étude qualitative. Un dessin (forcément apprécié de l'examinateur) montre que l'on peut avoir $f'(a) = 0$ ou $f'(a) < 0$. Il n'est pas sûr que cela demande à être prouvé, c'est vraiment très simple. On multiplie par n, on prend l'exponentielle : c'est évidemment du côté de a que l'intégrale « pèse » le plus. Ce point, en revanche, peut être précisé : l'hypothèse $f''(a) < 0$ fait que, par continuité, il existe c tel que $a < c \leq b$ et $f'' < 0$ sur $[a,c]$, ce qui implique $f' < 0$ sur $[a,c]$: f est strictement décroissante, et concave, sur un certain $[a,c]$. Il est alors inutile de s'occuper de « ce qui reste » mais non. . .car si la fonction, après c, remonte jusqu'à la valeur $f(a)$ et y stationne un certain temps, on pourra avoir n'importe quoi. L'énoncé est donc incomplet, il faut rajouter « maximum global strict ». Dans ce cas,

$$\int_c^b e^{nf(x)}\mathrm{d}x \leq (b-c)\exp\left(n\sup_{[c,b]}(f)\right)$$

par ailleurs, il existe $c' \in]a,c[$ tel que

$$\inf_{[a,c']}(f) < \sup_{[c,b]}(f)$$

et donc, comme

$$\int_a^{c'} e^{nf(x)}\mathrm{d}x \geq (c'-a)\exp\left(n\inf_{[a,c']}(f)\right)$$

et comme, de plus, si $u < u'$,

$$e^{nu} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{nu'}\right)$$

on a

$$\int_c^b e^{nf(x)}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_a^{c'} e^{nf(x)}\mathrm{d}x\right)$$

et a fortiori
$$\int_c^b e^{nf(x)}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_a^c e^{nf(x)}\mathrm{d}x\right)$$
d'où, finalement,
$$\int_a^b e^{nf(x)}\mathrm{d}x \sim \int_a^c e^{nf(x)}\mathrm{d}x$$
et ceci est valable pour tout $c \in]a,b[$. Pourquoi avoir commencé par cela ? parce que l'hypothèse sur le comportement de f est locale, on veut donc légitimer le fait de concentrer l'étude à ce qui se passe, justement, au voisinage de a.

Deuxième phase

Il y a une idée qui n'est pas évidente et qui fonctionne dans nombre d'études asymptotiques d'intégrales comportant un sinus, un cosinus ou une exponentielle de « quelque chose », c'est de faire un changement de variable en prenant comme nouvelle variable ce quelque chose. Il est bon d'envisager cette possibilité. Est-il possible ici d'envisager le changement de variable $t = nf(x)$? oui, car cela revient à $x = f^{-1}(t/n)$, or sur un intervalle $]a,c[$ suffisamment restreint (et on a compris qu'étudier sur ce genre d'intervalle suffisait), f est à dérivée strictement négative, donc induit une bijection de classe C^1 de $]a,c[$ sur $]f(c),f(a)[$. La bijection réciproque, f^{-1}, définit une bijection de classe C^1 (voir dérivabilité d'une fonction réciproque et formule donnant la dérivée d'une telle fonction réciproque) de $]f(c),f(a)[$ sur $]a,c[$. Cette idée donne des résultats probants au moins dans l'un des deux cas, on verra plus tard.
L'autre idée est d'étudier un exemple simple, mais éclairant (cela dit, éclairant, on ne sait pas toujours à l'avance s'il le sera !). L'idée toute simple est de prendre $f(x) = -x^2$, avec $0 \leq a < b$, les hypothèses de départ étant bien réalisées. On doit alors trouver un équivalent de
$$J_n = \int_a^b e^{-nx^2}\mathrm{d}x$$
et, pour faire sortir le n, on a envie de faire un changement de variable $u = \sqrt{n}x$, $x = u/\sqrt{n}$ (ce qui est parfaitement contradictoire avec ce qu'on vient de dire, on suggérait plutôt $u = -nx^2$, mais en fait les deux marchent bien, et un changement de variable affine pour commencer, c'est plus facile).

On obtient

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}b} e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

et on obtient immédiatement un équivalent si $a = 0$:

$$J_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

En revanche, si $a > 0$, c'est moins évident. Et là, on peut compléter notre changement de variable en revenant à la première idée, i.e. en faisant le changement de variable supplémentaire $v = u^2$, $u = \sqrt{v}$. Donc

$$J_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} \mathrm{d}v$$

et là, ce serait plutôt une intégration par parties qui serait motivante : augmenter le degré du dénominateur pour obtenir une intégrale négligable devant J_n. Donc

$$2\sqrt{n}J_n = \left[-\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} \right]_{na^2}^{nb^2} - \frac{1}{2} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{e^{-v}}{v^{3/2}} \mathrm{d}v$$

Or, en comparant directement,

$$\int_{na^2}^{nb^2} \frac{e^{-v}}{v^{3/2}} \mathrm{d}v \leq \frac{1}{nb^2} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{e^{-v}}{v^{1/2}} \mathrm{d}v$$

d'où l'on déduit

$$\int_{na^2}^{nb^2} \frac{e^{-v}}{v^{3/2}} \mathrm{d}v \underset{n \to +\infty}{=} o \left(2\sqrt{n}J_n \right)$$

Donc

$$2\sqrt{n}J_n \sim \left[-\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} \right]_{na^2}^{nb^2}$$

et, finalement,

$$J_n \sim \frac{e^{-na^2}}{2na}$$

Quelles conclusions tirer de cette laborieuse étude ? qu'il est probable qu'il faudra étudier deux cas : $f'(a) = 0$ et $f'(a) < 0$. Et que, comme toujours dans les études d'intégrales, il faut penser aux deux manières usuelles de transformation d'une intégrale : l'intégration par parties et le changement de variable.

Revenons, donc, au changement de variable : comme on l'a dit, il existe $c \in]a,b]$ tel que f définit une bijection de classe C^1 de $]a,c[$ sur $]f^{-1}(c), f^{-1}(a)[$ (on écrit les bornes dans cet ordre parce que f décroît), la bijection réciproque f^{-1} étant aussi de classe C^1 (on appelle cela un C^1-difféomorphisme, terminologie hors-programme). On supposera $c = b$, l'étude préliminaire montre qu'il n'y a pas d'inconvénient, pour la recherche d'un équivalent, à réduire éventuellement le segment d'intégration. On effectue donc le changement de variable $u = nf(x)$, $x = f^{-1}(u/n)$ pour obtenir

$$I_n = \frac{1}{n} \int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u (f^{-1})'(u/n) \mathrm{d}u$$

ou encore

$$I_n = \frac{1}{n} \int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u \frac{1}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)} \mathrm{d}u$$

Plaçons-nous dans le cas $f'(a) < 0$. On fait alors une intégration par parties comme ci-dessus dans le cas particulier $f(x) = -x^2$, on obtient

$$\int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u \frac{1}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)} \mathrm{d}u = \left[\frac{e^u}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)}\right]_{nf(a)}^{nf(b)} + \frac{1}{n} \int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u \frac{f''\left(f^{-1}(u/n)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(u/n)\right)\right)^3} \mathrm{d}u$$

(Cette intégration par parties n'est pas a priori légitime si $f'(a) = 0$). Mais, les fonctions $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ et $\dfrac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3}$ gardent par hypothèse sur $[f(b), f(a)]$ un signe constant strict et sont continues, on en déduit qu'il existe M tel que

$$\forall u \in [nf(a), nf(b)] \qquad \left|\frac{f''\left(f^{-1}(u/n)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(u/n)\right)\right)^3}\right| \leq M \left|\frac{1}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)}\right|$$

Ce qui permet de conclure successivement

$$\int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u \frac{1}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)} \mathrm{d}u \sim \left[\frac{e^u}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)}\right]_{nf(a)}^{nf(b)}$$

puis

$$\int_{nf(a)}^{nf(b)} e^u \frac{1}{f'\left(f^{-1}(u/n)\right)} \mathrm{d}u \sim -\frac{e^{nf(a)}}{f'(a)}$$

Que faire maintenant dans le cas $f'(a) = 0$? utiliser une **meilleure** tactique, plus cohérente avec nos remarques du début : comme c'est ce qui se passe au voisinage de a qui est important (on peut remplacer pour la recherche de l'équivalent l'intégrale entre a et b par l'intégrale entre a et c quelconque), pourquoi ne pas partir du développement limité donnée par le théorème de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Soit $\alpha = -\frac{1}{2}f''(a) > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe c tel que, sur $[a, c]$,

$$(-\alpha - \epsilon)(x-a)^2 \leq f(x) - f(a) \leq (-\alpha + \epsilon)(x-a)^2$$

Or on a déjà vu, si $\beta > 0$:

$$\int_a^c e^{-n\beta(x-a)^2} \mathrm{d}x = \int_0^{c-a} e^{-n\beta y^2} \mathrm{d}y \sim \frac{1}{\sqrt{n\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

Et, après quelques détails techniques supplémentaires à mettre en place, on aboutit à l'équivalent

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-f''(a)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

(ϵ étant fixé, on choisit d'abord c pour avoir l'inégalité ci-dessus, etc…).

(326-X) Soit q une fonction continue et intégrable de R dans R. Montrer que l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ admet des solutions non bornées.

Une idée peut être que, si y est une solution bornée, qy est intégrable (par comparaison, car $|qy| \leq M|q|$), donc y'' aussi. Mais l'intégrabilité implique l'existence d'une intégrale impropre, donc si y'' est intégrable, y' a des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

Il est facile de voir que, si y' a une limite finie non nulle en $+\infty$, y a une limite infinie en $+\infty$. Donc n'est pas bornée. Donc, si toutes les solutions sont bornées, elles ont toutes une dérivée qui tend vers 0 en $+\infty$. Et donc le wronskien de deux solutions a pour limite 0 en $+\infty$. Mais ce wronskien est constant (calcul simple). C'est donc une contradiction.

(331-X) On lance deux dés à 6 faces, éventuellement pipés. Notons Z la variable aléatoire indiquant la somme des deux résultats. Montrer que Z ne peut pas suivre la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$

La fonction génératrice de Z serait $\frac{1}{11}\left(X^2 + \ldots + X^{12}\right)$ c'est-à-dire

$$\frac{X^2}{11}(1 + X + \ldots + X^{10})$$

Or $(1 + X + \cdots + X^{10}) = (1 - X^{11})/(1 - X)$ n'a pas de racine réelle. Un polynôme de degré impair sur $\mathbf{R}$ a au moins une racine réelle, or les fonctions génératrices des deux dés sont de la forme $X(a_1 + a_2X + \ldots + a_6X^5)$ et $X(b_1 + b_2X + \ldots + b_6X^5)$, on arrive donc à une contradiction.

(332-X) On joue à pile ou face. On note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les n premiers lancés et 0 sinon.

1. **Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$,**

$$P\left(\left|\frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} - \ell\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

2. **Montrer qu'il existe $\ell' \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$,**

$$P\left(\left|\frac{e_1e_2 + \cdots + e_{n-1}e_n}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Bien évidemment, on est censé penser à la loi faible des grands nombres, à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (que l'on désignera par B.T. dorénavant), voire à celle de Markov par quoi tout commence. On dira donc que chaque e_k suit une loi de Bernoulli. De paramètre $1/2$? intuitivement...mais attention à l'intuition en probabilités, parfois bonne, parfois moins. Cela dit, pour e_1, c'est bien clair. Et, également,

$$P(e_{n+1} = 1) = P(e_n = 1)P_{(e_n=1)}(e_{n+1} = 1) + P(e_n = 0)P_{(e_n=0)}(e_{n+1} = 1)$$

Mais les deux probabilités conditionnelles écrites ci-dessus valent $1/2$, on en déduit par récurrence que chaque e_n suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$. On peut aussi, plus savamment peut-être, appeler $X_n = 1$ si le n-ième lancer donne Pile, $X_n = 0$ sinon, remarquer que, si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$e_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{S_n}\right)$$

Ce qui permet un calcul de l'espérance de e_n ; en effet, les $(-1)^{X_k}$ étant deux à deux indépendantes et centrées (symétriques même), on a

$$E\left((-1)^{X_1+\cdots+X_n}\right) = 0$$

Mais les e_k sont-elles mutuellement indépendantes ? Deux à deux, on peut s'en persuader, mais mutuellement, c'est à voir. Et autant savoir l'écrire avec précision. On doit donc montrer (caractérisation du cours) que si $n \geq 1$, si $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

$$P(e_1 = \epsilon_1, \ldots, e_n = \epsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} P(e_i = \epsilon_i) = \frac{1}{2^n}$$

Or la formule des probabilités composées semble plutôt adaptée à ce problème : on a $P(e_1 = \epsilon_1) = 1/2$ (à expliquer oralement), $P_{(e_1=\epsilon_1)}(e_2 = \epsilon_2) = 1/2$,. . ., $P_{(e_1=\epsilon_1,\ldots,e_{n-1}=\epsilon_{n-1})}(e_n = \epsilon_n) = 1/2$ (on remarque d'ailleurs que cette dans cette dernière probabilité seul le dernier conditionnement importe a priori).
Donc les e_n sont mutuellement indépendantes, la première question n'est donc que la loi faible des grands nombres avec $\ell = 1/2$.

Pour la suivante, on aurait peut-être préféré $n - 1$ au dénominateur, mais ce n'est sûrement pas grave. Les $e_k e_{k+1}$ sont encore des variables de Bernoulli. De paramètre $1/4$ vu l'étude ci-dessus. Mais elles ne sont pas indépendantes : sachant $(e_k e_{k+1} = 1)$, l'évènement $(e_{k+1} e_{k+2} = 1)$ se réduit à l'événement $(e_{k+2} = 1)$, la probabilité est $1/2$ alors qu'elle serait $1/4$ en cas d'indépendance. Mais on a quand même le droit d'appliquer Bienaymé-Tchebychev. Pourquoi est-ce potentiellement intéressant ? parce que si les $e_n e_{n+1}$ ne sont pas indépendantes, elles le sont quand même pas mal, le lemme des coalitions indiquant que si $k \geq j + 2$ ou $k \leq i - 2$ alors $e_k e_{k+1}$ et $e_j e_{j+1}$ sont indépendantes. Ce qui permet de calculer la variance de $e_1 e_2 + \cdots + e_{n-1} e_n$ avec un nombre de covariances réduit. Il faut commencer par évaluer $\mathrm{Cov}(e_k e_{k+1}, e_{k+1} e_{k+2})$, ce qui se fait sans trop de problème. On peut alors, en vertu de Bienaymé-Tchebychev, obtenir que

$$P\left(\left|\frac{e_1 e_2 + \cdots + e_{n-1} e_n}{n-1} - 1/4\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Ensuite, est-ce la même chose de dire

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P\left(\left|\frac{Z_n}{n-1} - \ell'\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1}$$

ou

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (2)?$$

(ou du moins, est-ce que (1) implique (2), puisque c'est cela qui nous concerne ?).
Si, pour tout $\epsilon > 0$, on majore $P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon\right)$ par un certain $P\left(\left|\frac{Z_n}{n-1} - \ell'\right| \geq \epsilon'\right)$, c'est bon. Ou encore, si on inclut $\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon\right)$ dans un certain $\left(\left|\frac{Z_n}{n-1} - \ell'\right| \geq \epsilon'\right)$.
Ou encore si on trouve une implication

$$\left|\frac{Z_n(\omega)}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon \implies \left|\frac{Z_n(\omega)}{n-1} - \ell'\right| \geq \epsilon'$$

Mais

$$\begin{aligned}\left|\frac{Z_n(\omega)}{n} - \ell'\right| &= \frac{n-1}{n}\left|\frac{Z_n(\omega)}{n-1} - \frac{n}{n-1}\ell'\right| \\ &\leq \frac{n-1}{n}\left|\frac{Z_n(\omega)}{n-1} - \ell'\right| + \frac{1}{n}\ell'\end{aligned}$$

(inégalité triangulaire) A fortiori, pour simplifier un peu,

$$\left|\frac{Z_n(\omega)}{n} - \ell'\right| \leq \left|\frac{Z_n(\omega)}{n-1} - \ell'\right| + \frac{1}{n}\ell'$$

et donc, au moins à partir d'un certain rang,

$$\left|\frac{Z_n(\omega)}{n} - \ell'\right| \geq \epsilon \implies \left|\frac{Z_n(\omega)}{n-1} - \ell'\right| \geq \epsilon/2$$

ce qui termine l'exercice.

(336-X) Soit $n \in \mathbf{N}_*$. On munit le groupe $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de $\mathcal{S}_n$.

1. **Calculer $P(X_n = n)$.**
2. **Déterminer la loi de X_n.**
3. **Pour $k \in \mathbf{N}$, déterminer la limite de $P(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**
4. **Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X_n = k) - P(X = k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

1 Il n'y a qu'une permutation à n points fixes : l'identité. Comme $|\mathcal{S}_n| = n!$, la probabilité cherchée est $1/n!$.

2. On a aussi, assez simplement, $P(X_n = n-1) = 0$. Et on calcule encore assez facilement $P(X_n = n-2)$. Mais pour le cas général, il faut travailler un peu plus. A noter (pour d'éventuels exercices) qu'il n'est pas du tout nécessaire de connaître la loi X_n pour avoir son espérance, par exemple : il suffit de noter Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est fixe, 0 sinon. Les Y_k sont des variables de Bernoulli, certes non indépendantes, mais pour le calcule de l'espérance, cela n'a aucune importance, et on a

$$E(X_n) = E(Y_1) + \ldots + E(Y_n)$$

et comme l'espérance de Y_k vaut $1/n$...Mais cela nous éloigne du sujet. On remarque que la connaissance de $P(X_n = 0)$ équivaut à la connaissance du nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble à n éléments. On va noter d_n ce nombre. Et si vous le notez comme cela à l'oral, on verra que vous en avez entendu parler (d comme dérangement)...Alors, classant les permutations suivant leur nombre de points fixes pour les dénombrer, on a

$$n! = d_n + \binom{n}{1} d_{n-1} + \binom{n}{2} d_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} d_1 + \binom{n}{n} d_0$$

(on a $d_1 = 0$ et on rajoute $d_0 = 1$ pour que la formule soit belle). Cette formule est vraie pour tout $n \geq 1$, bien sûr, mais aussi pour $n = 0$:

$$\forall n \geq 0 \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k$$

Divisant tout par $n!$, on obtient une forme qui fait penser à un produit de Cauchy :

$$\forall n \geq 0 \qquad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

Or les $d_k/k!$ sont entre 0 et 1, on peut donc interpéter cela à l'aide d'un produit de Cauchy de séries entières :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \frac{1}{1-x} = e^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{k!} x^k \right)$$

Qui se résout en

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{k!} x^k$$

et donc, de nouveau par produit de Cauchy, et unicité du développement en série entière,

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad d_k = k! \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \right)$$

Ce qui nous donne le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes, qui vaut $\binom{n}{k} d_{n-k}$ et donc, finalement,

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

3. La limite est donc $\dfrac{1}{k!\, e}$.
4. Et, si la somme écrite existe,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X_n = k) - P(X = k)| = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \left| \sum_{j=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \right| \right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{e\, k!}$$

Mais le théorème sur les séries alternées permet de majorer

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\left|\sum_{j=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\right|\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k+1)!}$$

Mais on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\left(2^{n+1}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

et on conclut sans difficulté.

(337-X) Soit $n \geq 2$ un entier, X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires Y et Z définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbf{N}$, non presque sûres, indépendantes, telles que $X \sim Y + Z$, si et seulement si n n'est pas premier.

On peut tester les petites valeurs de n, mais il faut surtout **penser aux fonctions génératrices**. Si $n = n_1 n_2$ avec $n_1 > 1$ et $n_2 > 1$, la factorisation

$$\begin{aligned} X + X^2 + \cdots + X^{n_1 n_2} &= X \frac{1 - X^{n_1 n_2}}{1 - X} \\ &= X \frac{1 - X^{n_1}}{1 - X} \left(1 + X^{n_1} + \cdots + X^{n_1(n_2-1)}\right) \\ &= \left(X + \cdots + X^{n_1}\right)\left(1 + X^{n_1} + \cdots + X^{n_1(n_2-1)}\right) \end{aligned}$$

permet d'écrire

$$G_X(t) = \left(\frac{1}{n_1} t + \cdots + \frac{1}{n_1} t^{n_1}\right)\left(\frac{1}{n_2} 1 + \frac{1}{n_2} t^{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_2} t^{n_1(n_2-1)}\right)$$

ce qui exprime la fonction génératrice de X comme produit de deux fonctions génératrices et permet de conclure. Pour la réciproque, on suppose écrit $X + \ldots + X^n$ comme produit de deux polynômes à coefficients positifs :

$$X + \ldots + X^n = P_1 \times P_2$$

Alors P_1 ou P_2 admet zéro pour racine simple, et l'autre n'admet pas zéro pour racine. Bref, on est ramené, en divisant par X, à

$$1 + X + \ldots + X^m = (a_0 + \cdots + a_\delta X^\delta)(b_0 + \cdots + b_d X^d)$$

où tous les a_k et tous les b_k sont positifs. Donc, nécessairement, $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, et on peut évidemment imposer $a_\delta > 0$ et $b_d > 0$. S'il existe $i > 0$ tel que $b_i > b_0$, le coefficient de X^i dans le produit de polynômes au second membre est $> a_0 b_0$, ce qui est absurde (car $a_0 b_0 = 1$). On montre de la même manière que

$$a_0 = a_\delta = \max_k(a_k) \qquad , \qquad b_0 = b_d = \max_k(b_k)$$

Puis, en regardant les coefficients de X^δ et de X^d, et supposant par exemple $d \geq \delta$, on obtient

$$b_1 a_{\delta-1} = b_2 a_{\delta-2} = \ldots = b_\delta a_0 = 0 \tag{1}$$

et

$$a_1 b_{d-1} = a_2 b_{d-2} = \ldots = a_\delta b_{d-\delta} = 0 \tag{2}$$

La deuxième condition interdit d'ailleurs $d = \delta$, on suppose donc $d > \delta$. On obtient déjà $b\delta = b_{d-\delta} = 0$. Puis, de

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = a_{\delta-1} b_d + a_\delta b_{d-1} = a_0 b_0 = a_\delta b_d$$

on déduit deux choses : si $a_1 \neq 0$, alors (par (2)) $b_{d-1} = 0$, et $a_{\delta-1} = a_0 = a_\delta$. Par suite on déduit de (1) que $b_1 = 0$, et donc $a_1 = a_0 = a_{\delta-1} = a_0 = a_\delta$. Si $a_1 = 0$, en revanche, alors $b_1 = b_0 = b_d$, donc $a_{\delta-1} = 0$, et $b_{d-1} = b_1 = b_0 = b_d$. On montre ainsi que les coefficients non nuls de chacun des coefficients sont tous égaux. Ce qui permet de conclure assez simplement...

(338-X) Pour $\lambda > 0$, soient X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et $Z_\lambda = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

1. **Pour $t \in \mathbf{R}$, calculer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de $E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right)$.**
2. **Soit a une fonction continue et intégrable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Justifier l'existence pour $x \in \mathbf{R}$ de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\exp(itx)\mathrm{d}t$. Déterminer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de $E\left(f(Z_\lambda)\right)$.**
3. **On admet que, pour $y \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + ixy\right)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$. En déduire une autre expression de la limite obtenue en 2. (?)**
4. **Généraliser 2. (?)**

Certes l'espérance d'une variable aléatoire complexe non réelle n'est pas au programme, mais ce n'est qu'un détail assez peu encombrant. La variable aléatoire proposée est bornée donc d'espérance finie ; espérance qui vaut par transfert :

$$E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\exp\left(it\left(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

ou encore, en sortant ce qui ne dépend pas de k de la somme :

$$E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right) = e^{-\lambda - it\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\exp\left(it\left(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

On reconnaît alors une exponentielle :

$$E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right) = \exp\left(-\lambda - it\sqrt{\lambda} + \lambda e^{it/\sqrt{\lambda}}\right)$$

Or, si les développements limités de la fonction $v \mapsto e^{iv}$ ne sont pas au programme, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young et obtenir :

$$e^{iv} = 1 + iv - \frac{v^2}{2} + \underset{v\to 0}{o}\left(v^2\right)$$

(une autre manière d'obtenir ce DL serait d'utiliser le développement en série entière, mais c'est plus long). On obtient alors

$$\lambda e^{it/\sqrt{\lambda}} = \lambda + it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2} + \underset{\lambda\to+\infty}{o}(1)$$

La limite cherchée est donc $\exp(-t^2/2)$.

2. De $|a(t)\exp(itx)| = |a(t)|$ on déduit l'intégrabilité de $t \mapsto a(t)\exp(itx)$. Transférons encore (de nouveau, pas de problème d'existence, f est bornée, car

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)| \, \mathrm{d}t$$

donc $f(Z_\lambda)$ est elle aussi d'espérance finie.Et

$$E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp\left(it\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \, \mathrm{d}t \right)$$

Une interversion série-intégrale se fait sans difficulté particulière avec le théorème habituel, le point crucial étant, avec des notations que l'on peut deviner,

$$N_1(\phi_k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)| \, \mathrm{d}t$$

qui est bien le terme général d'une série convergente. Donc

$$E\left(\exp\left(itZ_\lambda\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \exp\left(it\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) \, \mathrm{d}t$$

Pour utiliser la question précédente, on applique la version continue du théorème de convergence dominée. La domination se faisant tout simplement par $|a(t)|$. On trouve donc la limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp(-t^2/2) \, \mathrm{d}t$$

...

qui vaut aussi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2/2 + ity) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire, en imaginant qu'on puisse permuter (théorème de Fubini hors-programme)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2/2)f(y)\mathrm{d}y$$

Généralisation demandée pas très explicite : pour d'autres fonctions, en intervertissant limite et série ?

(342-X) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, il existe n variables aléatoires $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes équidistribuées, à valeurs dans $\mathbf{N}$, telles que $X \sim \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$.

1. **Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans $\mathbf{N}$, N une variable de Poisson indépendante de $(Y_n)_{n\geq 1}$. On pose $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} Y_i$. Montrer que S est infiniment divisible.**

   Dans la suite, on suppose X infiniment divisible.
2. **Montrer que $P(X = 0) > 0$, en déduire qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ sur lequel $\ln(G_X)$ est définie.**
3. **On admet que $\ln(G_X)$ est développable en série entière au voisinage de l'origine. Montrer que les coefficients d'indices ≥ 1 du développement sont dans $\mathbf{R}^+$ et en déduire une réciproque du résultat de a..**

1. Par où commencer ? ce n'est pas évident. On peut se souvenir du fait que, si deux variables aléatoires indépendantes suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, leur somme suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ (le plus court est de le faire à l'aide des fonctions génératrices). Et que donc une somme de n variables i.i.d. (indépendantes et de même loi, indépendantes et identiquement distribuées, abréviation classique) suivant chacune une loi $\mathcal{P}(\lambda/n)$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Ce qui résout d'ailleurs le cas où les Y_i sont constantes. Et à peu près, aussi, le cas général : en effet, il suffit, si λ est le paramètre de N, de prendre des $X_{i,n}$ mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} Y_i$ avec $M \sim \mathcal{P}(\lambda/n)$. La vérification que « ça marche » est là aussi facilitée par les fonctions génératrices. Il est alors utile de savoir montrer que la fonction génératrice de S est $G_N \circ G_Y$, exercice classique et déjà fait, utilisant la sommabilité et la fonction génératrice d'une somme fixe de variables aléatoires (on retrouve le fait qu'à l'oral, il faut connaître ses exercices classiques !). Une autre idée est, explicitement, de prendre $N_1, \dots, N_n$ indépendantes des Y_i et suivant chacune une loi $\mathcal{P}(\lambda/n)$, et de décomposer

$$S = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} Y_i + \cdots + \sum_{i=N_1+\cdots+N_{n-1}+1}^{N_1+\cdots+N_n} Y_i$$

mais il faut justifier l'indépendance mutuelle des variables introduites, c'est un peu plus long. Bref, cette première question est déjà un peu consistante.
2. Si $P(X=0)=0$, alors avec les notations de l'énoncé, pour tout i et pour tout n, $P(X_{i,n}=0)=0$. En effet,

$$(X=0) = (X_{1,n}=0, X_{2,n}=0, \dots, X_{n,n}=0)$$

et, par indépendance et équidistribution,

$$P(X_n=0) = \prod_{i=1}^{n} P(X_{i,n}=0) = P(X_{1,0}=0)^n$$

On en déduit, presque sûrement, $X \geq n$. Et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ce qui est contradictoire. Une autre manière de faire est de raisonner sur les fonctions génératrices.
Comme $G_X(0) > 0$, $\ln(G_X)$ est bien définie sur un voisinage de 0.
3. Pour le coefficient de x, un simple calcul de dérivée en 0 suffit pour conclure. Mais ça ne va plus loin (d'autant qu'on ne voit pas forcément bien comment faire rentrer l'hypothèse d'infinie divisibilité). Celle-ci assure que, pour tout n, $G_X^{1/n} = h_n$ est une fonction génératrice de variable aléatoire. D'où l'idée de s'en servir, en écrivant

$$\ln\left(G_X(t)\right) = n\ln(h_n(t))$$

(tout cela est bien défini sur $[0,1]$, s'agissant de fonctions croissant d'une valeur > 0 en 0 à la valeur 1 en 1, on peut en prendre les logarithmes). Ou encore

$$\ln\left(G_X(t)\right) = n\ln\left(h_n(0)\right) + n\ln\left(1 + \frac{h_n(t)-h_n(0)}{h_n(0)}\right)$$

Quel intérêt ? pas évident, et il y a sans doute besoin d'une indication de l'examinateur à ce moment de l'exercice…Mais remarquons que

$$h_n(0) = \left(G_X(0)\right)^{1/n}$$

ce qui implique que $h_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Or, si $0 \leq t \leq 1$,

$$0 \leq \frac{h_n(t) - h_n(0)}{h_n(0)} \leq \frac{1 - h_n(0)}{h_n(0)}$$

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$n\frac{h_n(t) - h_n(0)}{h_n(0)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(G_X(t)\right) - \ln(G_X(0))$$

et même, compte tenu de la convergence de la suite $(h_n())$ vers 1,

$$n\left(h_n(t) - h_n(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(G_X(t)\right) - \ln(G_X(0))$$

Le terme de gauche a un dse à coefficients tous positifs, de somme $n(h_n(1) - h_n(0) = n(1 - h_n(0)$ qui tend vers une limite réelle strictement positive : $-\ln\left(G_X(0)\right.$. Ce qui permet de conclure en utilisant une technique déjà vue dans le TD sur convergence en loi et convergence ponctuelle des fonctions génératrices…technique, un peu trop ! Ensuite, il n'y a plus qu'à identifier avec la recherche d'une fonction génératrice g et d'un réel strictement positif λ tels que

$$G_X(t) = \exp(\lambda(f(t) - 1)$$

ou encore

$$\ln\left(G_X(t)\right) = \lambda\left(f(t) - 1\right)$$

où λ est la somme des coefficients du dse de $\ln\left(G_X(t)\right)$ à partir du rang 1.