

SUITES

Exercice 1. [o]

Étudier la monotonie des suites définies, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, \quad v_n = \frac{5^n}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(n) + \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. [★]

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall n \geq 0, u_n \leq cv_n$.

Exercice 3. [o]

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique.

Exercice 4. [★]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la pyramide suivante constituée des entiers impairs (les nombres A_n et B_n désignent respectivement le premier et le dernier entier de la n -ème ligne) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 3 & & 5 & & \\ & & & 7 & & 9 & & 11 & \\ & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ A_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{array}$$

- Déterminer, en fonction de n , le nombre N_n d'entiers impairs dans cette pyramide.
- Déterminer B_n et A_n en fonction de n .
- Déterminer la somme des nombres de la n -ème ligne.
- Retrouver ainsi l'expression de la troisième somme d'Euler $E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Exercice 5. [o]

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique.

Exercice 6. [o]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 7. [o]

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 8. [o] (La « vraie » suite logistique)

La croissance d'une population est proportionnelle à la taille de celle-ci. Toutefois, lorsque cette population évolue dans un milieu fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant contenir une population supérieure à P individus, cette croissance est freinée, et d'autant plus freinée que l'effectif des individus est proche de la limite P .

Soit u_n l'effectif de la population à la génération $n \in \mathbb{N}$. On admet que les mécanismes de régulation interviennent après l'apparition de la génération $n + 1$, de sorte que l'accroissement de la population est proportionnel à la différence $P - u_{n+1}$. La dynamique de la population est ainsi régie par une relation de récurrence logistique du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = ku_n(P - u_{n+1})$$

où $k > 0$ désigne une constante.

On suppose que $0 < u_0 \leq P$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
2. En utilisant la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 1/u_n$, déterminer l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n , en fonction n , k , P et u_0 . Préciser le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 9. [o]

Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n.$$

Exercice 10. [★]

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite récurrente double définie par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence $\forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$.

En cours, nous avons donné l'expression explicite du terme général de la suite en fonction du nombre de racines de l'équation caractéristique $q^2 = aq + b$ et nous avons justifié que ces formules sont exactes à l'aide de récurrences doubles.

Cet exercice vous propose de retrouver ces formules sans utiliser de récurrence double.

On note q_1 et q_2 les deux racines de l'équation caractéristique $q^2 = aq + b$, avec $q_1 = q_2$ si la solution est double. Comme $b \neq 0$, on a $q_1 \neq 0$ (et $q_2 \neq 0$), ce qui permet d'introduire la suite auxiliaire $(v_n)_{n \geq 0}$ dont le terme général est donné, pour tout $n \geq 0$, par

$$v_n = \frac{u_n}{q_1^n}.$$

Démontrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique de raison géométrique q_2/q_1 et conclure.

Exercice 11. [★]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et la relation de récurrence multiplicative d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement positive.
2. Pour tout $n \geq 0$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 12. [★] (Suites définies par une relation de récurrence affine d'ordre 2)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une suite (u_n) définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence affine d'ordre 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c.$$

1. On suppose que $a + b \neq 1$.
 - a) En vous inspirant des suites arithmético-géométriques, donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n .
 - b) Le faire dans le cas où $a = -1$, $b = 6$, $c = 4$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.
2. On suppose que $a + b = 1$.
 - a) En introduisant la suite auxiliaire $(u_{n+1} - u_n)$, donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n .
 - b) Le faire dans le cas où $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.

Exercice 13. [★]

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 8$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 - 11.$$

1. Déterminer la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ dont le terme général est $v_n = an^2 + bn + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui satisfait la relation de récurrence ci-dessus. *On ne demande pas que $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.*
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. [○]

Déterminer une expression explicite du terme général de la suite récurrente triple $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 6$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 15. [○]

Déterminer, en fonction de n , l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

En déduire la valeur de

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Exercice 16. [★]

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}.$$

Déterminer les valeurs de $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $(u_n)_{n \geq 0}$ existe et démontrer qu'alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est périodique.