

Test de contrôle : corrigés

- durée 3 heures / calculatrices interdites -

Compléter les cases en validant par ou en invalidant par les affirmations suivantes.

Sur les intégrales ...

Si une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bornée, alors elle n'est pas continue par morceaux.	
Si la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ est continue par morceaux et d'intégrale $\int_0^1 f$ nulle, alors f est la fonction nulle.	
La règle de Bioche nous dit de poser le changement de variable $u = \cos t$ dans l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(3t)}{1 + \sin^4(2t)} dt$.	
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la seule primitive de la fonction $g : x \mapsto -f(e^x)$ s'annulant en 0 est $G : x \mapsto \int_{e^x}^0 f(t) dt$.	
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et 1-périodique, alors il existe une primitive de la fonction f qui soit bornée sur \mathbb{R} .	
Si $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) = \int_0^2 f(t) dt$.	
Il existe une constante réelle a telle que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ admette pour primitive la fonction $t \mapsto \lambda \cdot \arccos t$.	
Si $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ existe dans \mathbb{R} , alors la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.	

Sur les séries ...

<p>Si une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, alors la série $\sum_n u_n$ est divergente.</p>	✗
<p>Si $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ vérifie $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n (u_n + o(u_n))$ converge aussi.</p>	✓
<p>Si $0 \leq u_n \leq v_n$, $u_n = o(v_n)$ et la série $\sum_n u_n$ diverge, alors :</p> $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$	✓
<p>Si $u_n = o\left(\frac{(-1)^n}{n \ln n}\right)$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.</p>	✗
<p>La série $\sum_n (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente car elle vérifie le CSSA.</p>	✓
<p>La série $\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.</p>	✓
<p>La série $\sum_n \mathcal{O}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est convergente.</p>	✓
<p>Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors la série $\sum_n u_{2n}$ converge.</p>	✗
<p>Si les u_n sont tous positifs, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ sont toujours de même nature.</p>	✓
<p>Si $\sum_n u_n$ est ACV, il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.</p>	✗
<p>Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n u_n^2$ converge aussi.</p>	✗

Sur les permutations/déterminants ...

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie $\sigma^2 = \text{id}$, alors σ est un produit de transpositions à supports disjoints.	✓
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose selon $\sigma = c_1 \circ c_2 = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s$ avec respectivement la décomposition en cycles à supports disjoints et la décomposition en transpositions, alors chaque support de τ_i est inclus dans l'un des supports de c_k .	✗
Si $n \geq 3$ et $\Phi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes pour les lois \circ et \times respectivement et si $\Phi((1, 3)) = -1$, alors Φ est la signature.	✓
Le déterminant d'un produit de matrices carrées de mêmes formats est le produit des déterminants de ces matrices.	✓
La seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant « <i>pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A + M) = \det(M)$</i> » est la matrice nulle.	✓
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme sur un \mathbb{C} -espace E , il n'existe qu'un nombre fini de scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f - \lambda \text{id}_E$ soit non inversible.	✗
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il n'existe qu'un nombre fini de scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I_n$ soit non inversible.	✓
Si la comatrice $\text{Com}(A)$ n'est pas inversible, alors la matrice A n'est pas inversible.	✓
Si A, B, C et D sont quatre matrices carrées et si $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(D)$, alors l'un des deux blocs B ou C est nul.	✗
Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 , alors l'application $\Phi : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}, u(\vec{y}))$ est une forme multilinéaire alternée.	✗
Modifier une matrice carrée A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par l'opération $C_k \leftarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot C_j$ ne modifie pas le déterminant de la matrice.	✗

Sur un peu de tout ...

Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie que pour tout entier $p \geq 2$, la sous-suite $(u_{pn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la suite u converge.	X
Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ est triangulaire, alors la comatrice $\text{Com}(A)$ est triangulaire.	✓
Si $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 1, alors f admet un $DL_1(1)$, mais la réciproque est fausse.	X
Si a et b sont dans \mathbb{N}^* , pour tout nombre premier p , $\nu_p(a + b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$ avec égalité si $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$.	✓
Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λ est racine de $P(X)$ si et seulement si $\bar{\lambda}$ est racine de $P(X)$.	X
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ vérifie $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.	✓
Il existe une seule application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 4) = (6, 2)$ et $f(5, 2) = (-1, 9)$.	X
L'application $\Delta : P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même est surjective, mais pas injective.	✓
Si z_0, \dots, z_n sont des complexes différents et $L_0(X), \dots, L_n(X)$ sont les polynômes de Lagrange associés, alors le polynôme $L_0(X) + \dots + L_n(X)$ est constant.	✓
Si \mathfrak{P} est un polygone régulier à n côtés, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que les solutions de l'équation $z^n = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ forment exactement \mathfrak{P} .	X
Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, l'application $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(k) x^k$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et est une fraction rationnelle en la variable x .	✓
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, si $F \oplus G = E$, si \mathcal{B}_F est une base de F complétée en une base \mathcal{C} de E , alors la famille $\mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_F$ est une base de G .	X