Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 7 h 00

DÉTERMINANTS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les espaces vectoriels ;
- les applications linéaires ;
- la dimension finie ;
- le groupe symétrique.

Dans tout ce chapitre, K désigne un corps commutatif.

Dans tout ce chapitre, les lettres $n, m, p, q, r, i, j, k, \ell$ désignent des entiers naturels (dont on suppose parfois implicitement qu'ils sont non nuls).

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

a. Déterminants

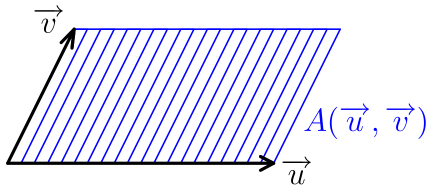
À ce stade du cours d'algèbre linéaire, nous n'avons pas encore parlé d'orthogonalité. Nous le ferons prochainement dans le cours sur les espaces euclidiens. Nous y introduirons la notion de produit scalaire et nous caractériserons les couples de vecteurs orthogonaux par la nullité de leur produit scalaire.

Par analogie avec le produit scalaire, on peut alors se demander s'il existe un outil numérique qui caractérise la colinéarité de deux vecteurs, la coplanéarité de trois vecteurs, la cospacialité de quatre vecteurs, etc.

Dans ce cours, nous allons définir et étudier un tel outil : le déterminant.

Pour comprendre comment introduire cet objet, étudions la situation dans le cas d'un K-espace vectoriel E de dimension 2. Dans ce contexte, on recherche une application de E^2 dans K qui prend la valeur 0 sur un couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

En fait, on connaît déjà, au moins de manière approximative, un tel objet : l'aire du parallèlogramme porté par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. En effet, si on note $A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ cette aire, on constate que celle-ci est nulle si, et seulement si, le parallèlogramme porté par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est plat, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

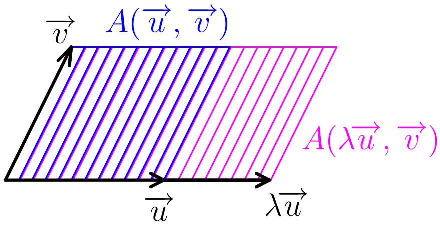


De manière analogue, en dimension 3, le volume $V(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ du parallélépipède porté par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ permet de caractériser la coplanéarité : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $V(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

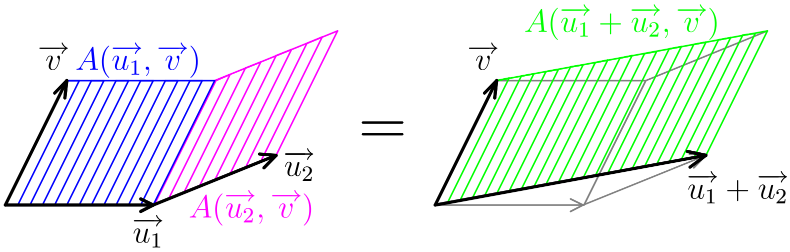
Pour comprendre comment cet outil se généralise en dimension supérieure, il convient alors de déterminer quelles sont ses propriétés caractéristiques.

Commençons par dire que l'on recherche une application de E^n vers K qui est nulle sur toutes les familles liées de E.

Remarquons ensuite qu'en dimension 2, l'aire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une application linéaire par rapport à chacune de ses variables (l'autre étant laissée constante). Pour s'en convaincre, des dessins valent mieux qu'un long discours :



$$A(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$



$$A(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + A(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = A(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})$$

Nous sommes maintenant prêts pour définir et étudier le déterminant.

A.1. Formes multilinéaires alternées

a) Formes multilinéaires

L'étude des applications multilinéaires est un pan entier de l'algèbre linéaire qui n'est pas au programme de première année. Ce paragraphe n'aborde donc que les notions indispensables à la mise en place du déterminant.

Définition 1

Soit E un K-espace vectoriel. Une application $f : E^p \longrightarrow K$ est appelée une forme p-linéaire sur E lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire lorsque pour toute famille $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et pour tout entier $i \in [\![1; p]\!]$, l'application partielle

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{array}\right.$$

est une forme linéaire sur E.

Le K-espace vectoriel des formes p-linéaires sur E est noté $\mathscr{L}_p(E, K)$.

■ Il est clair que $\mathscr{L}_p(E, K)$ contient l'application nulle de E^p vers K et qu'une combinaison linéaire de formes p-linéaires sur E est une forme p-linéaire sur E. L'ensemble $\mathscr{L}_p(E, K)$ est donc un sous-espace vectoriel de $K^{(E^p)}$. ■

On parle de forme bilinéaire lorsque $p = 2$, de forme trilinéaire lorsque $p = 3$, etc.

La p-linéarité d'une forme $f : E^p \longrightarrow K$ se traduit par une formule indigeste. Si, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $(x_{i_k,k})_{i_k \in I_k}$ désigne une famille de vecteurs de E indexée par l'ensemble d'indices I_k et si, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $(\lambda_{i_k,k})_{i_k \in I_k}$ désigne une famille de scalaires de K indexée par l'ensemble d'indices I_k, alors

$$f\Big(\sum_{i_1 \in I_1} \lambda_{i_1,1} x_{i_1,1}, \ldots, \sum_{i_p \in I_p} \lambda_{i_p,p} x_{i_p,p}\Big) = \sum_{i_1 \in I_1, \ldots, i_p \in I_p} \lambda_{i_1,1} \ldots \lambda_{i_p,p} f(x_{i_1,1}, \ldots x_{i_p,p}).$$

En particulier, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^p$, on a

$$f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_p x_p) = \lambda_1 \cdots \lambda_p \, f(x_1, \ldots, x_p).$$

On retiendra aussi que si $f : E^p \longrightarrow K$ est une forme p-linéaire et que l'un des x_i de la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ est nul, alors $f(x_1, \ldots, x_p)$ est le scalaire nul. Autrement dit, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, on a

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0_E, x_{i+1}, \ldots, x_p) = 0_K.$$

Exemples :

- Comme nous l'avons déjà dit, l'application nulle de E^p vers K est une forme p-linéaire, appelée forme p-linéaire nulle (évidemment !).
- Les formes 1-linéaires sont les formes linéaires, c'est-à-dire $\mathscr{L}_1(E, K) = E^*$.
- La multiplication de p nombres réels (c'est-à-dire l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto x_1 \cdots x_p$ est une forme p-linéaire sur $\mathbb{R}$.

  De même, la multiplication de p nombres complexes est une forme p-linéaire sur $\mathbb{C}$.
- Pour l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace affine euclidien, le produit scalaire est une forme bilinéaire.
- Si $\ell_1, \ldots, \ell_p$ sont p formes linéaires sur E, le produit tensoriel de $\ell_1, \ldots, \ell_p$, c'est-à-dire l'application $\ell_1 \otimes \cdots \otimes \ell_p : E^p \longrightarrow K$ définie par $(\ell_1 \otimes \cdots \otimes \ell_p)(x_1, \ldots, x_p) = \ell_1(x_1) \cdots \ell_p(x_p)$, est une forme p-linéaire sur E.

b) Formes multilinéaires alternées

Définition 2

Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}_p(E, K)$. On dit que f est alternée lorsqu'elle s'annule sur toutes les familles liées de E, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E^p, \qquad \big((x_1, \ldots, x_p) \text{ liée}\big) \Longrightarrow \big(f(x_1, \ldots, x_p) = 0_K\big).$$

L'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E est noté $\mathscr{A}_p(E, K)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_p(E, K)$.

■ Il est clair que $\mathscr{A}_p(E, K)$ contient la forme p-linéaire nulle sur E et qu'une combinaison linéaire de formes p-linéaires alternées sur E est une forme p-linéaire alternée sur E. L'ensemble $\mathscr{A}_p(E, K)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_p(E, K)$. ■

Attention, l'implication $\Longleftarrow$ ne fait pas partie de la définition : une forme linéaire alternée peut très bien s'annuler sur une famille non liée. Il suffit, pour s'en convaincre, de penser à la forme p-linéaire nulle (qui est alternée et qui s'annule sur toutes les familles, y compris les libres).

Exemples :

- $\mathscr{A}_1(E, K) = \mathscr{L}_1(E, K) = E^*$. Autrement dit, toute forme linéaire est alternée.
- Si E est de dimension finie n et si $p > n$, alors $\mathscr{A}_p(E, K)$ est réduit à la forme p-linéaire nulle. En effet, comme $p > \dim E$, toute famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée et donc $f(x_1, \ldots, x_p) = 0_K$.

En pratique, on dispose de deux critères pour vérifier qu'une forme p-linéaire est alternée.

Proposition 1

Dans cet énoncé, on suppose que la caractéristique de K est différente de 2. Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}_p(E, K)$. On a équivalence entre les trois énoncés suivants :

(i) f est alternée ;

(ii) f s'annule en cas de redondance :

$\forall x_1, \ldots, x_p \in E,\ \forall i, j \in [\![1; p]\!],\ (i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow \big(f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = 0_K\big)$;

(iii) f est antisymétrique :

$\forall x_1, \ldots, x_p \in E,\ \forall i, j \in [\![1; p]\!],\ (i \neq j) \Rightarrow \big(f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)\big).$

■ On descend (i)⇒(ii)⇒(iii) puis on remonte (iii)⇒(ii)⇒(i).

(i)⇒(ii) Supposons que f est alternée. Soient $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que au moins deux des x_k soient égaux. Alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée donc $f(x_1, \ldots, x_p) = 0_K$. Donc f s'annule en cas de redondance.

(ii)⇒(iii) Supposons que f s'annule en cas de redondance. Soient $x_1, \ldots, x_p \in E$. Calculons de deux manières $f(\ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots)$ où le vecteur $x_i + x_j$ apparaît en position i et en position j. Comme f s'annule en cas de redondance, on a bien sûr

$$f(\ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots) = 0_K.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & f(\ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots) \\ = \ & f(\ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots) + f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) + f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) + f(\ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots) \\ = \ & 0_K + f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) + f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) + 0_K. \end{aligned}$$

En rapprochant ces deux résultats, on a

$$f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots),$$

ce qui démontre que f est antisymétrique.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Supposons que f est antisymétrique. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que au moins deux des x_k soient égaux, disons $x_i = x_j$ avec $i < j$. Alors

$$f(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots),$$

où la seconde égalité découle de l'antisymétrie. Cela donne

$$2f(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = 0_K.$$

Comme $2 \neq 0_K$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la caractéristique de K), on a

$$f(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = 0_K,$$

ce qui signifie que f s'annule en cas de redondance.

(ii)$\Rightarrow$(i) Supposons que f s'annule en cas de redondance. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille liée de vecteurs de E. Il existe alors un entier i tel que x_i soit une combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p \in K$ tels que $x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_p x_p$. On a donc

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_p) &= f\Big(x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} \lambda_k x_k, x_{i+1}, \dots, x_p\Big) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} \lambda_k f\Big(x_1, \dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots, x_p\Big) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} \lambda_k 0_K \qquad \text{car } (x_1, \dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots, x_p) \text{ contient deux vecteurs égaux} \\
&= 0_K.
\end{aligned}$$

Cela démontre que f est alternée. ■

L'hypothèse « K n'est pas de caractéristique 2 » n'est utile que pour l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii).

Ainsi, pour un corps quelconque, il y a équivalence entre « s'annuler sur les familles liées » et « s'annuler sur les familles redondantes ». Vous pouvez donc utiliser l'une ou l'autre de ces propriétés comme définition du caractère alterné.

Lorsque la caractéristique de K est différente de 2, on dispose même d'une troisième définition du caractère alterné : l'antisymétrie. En revanche, lorsque la caractéristique de K vaut 2, « être alterné » implique toujours « être antisymétrique » mais la réciproque n'est plus vraie.

Voici les propriétés des formes p-linéaires alternées.

Proposition 2

Soient E un K-espace vectoriel, $f \in \mathscr{A}_p(E, K)$ et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Alors

(i) on ne modifie pas $f(x_1, \dots, x_p)$ en ajoutant à l'un des x_i une combinaison linéaire des <u>autres</u> ;

(ii) pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on a $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$.

■ (i) Soient $i \in [\![1; p]\!]$ et u un vecteur de E qui se décompose sur $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ (c'est-à-dire sur tous les vecteurs x_k sauf x_i). Alors

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + u, x_{i+1}, \dots, x_p) &= f(x_1, \dots, x_p) + f(\underbrace{x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_p}_{\text{famille liée}}) \\
&= f(x_1, \dots, x_p) + 0_K \\
&= f(x_1, \dots, x_p),
\end{aligned}$$

donc $f(x_1, \dots, x_p)$ n'a pas été modifié par l'ajout à x_i d'une combinaison des autres x_k.

(ii) Comme f est alternée, on sait que f est antisymétrique, ce que l'on peut exprimer par la formule $f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = \varepsilon(\tau) f(x_1, \dots, x_p)$ pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_p$. Comme $\mathfrak{S}_p$ est engendré par les transpositions et comme la signature est un morphisme, on en déduit que la formule attendue est exacte pour toutes les permutations. ■

On termine l'étude des formes linéaires alternées en s'intéressant, dans un cas très particulier, à la dimension de $\mathscr{A}_p(E,K)$ lorsque E est de dimension finie n.

Dans le cas général (non traité ici), on peut démontrer que $\mathscr{A}_p(E,K)$ est de dimension $\binom{n}{p}$. Le théorème ci-dessous traite le cas où $p=n$.

Théorème 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. L'espace vectoriel $\mathscr{A}_n(E,K)$ des formes n-linéaires alternées est de dimension 1. Plus précisément, si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $\mathscr{A}_n(E,K)$ est la droite vectorielle de $\mathscr{L}_n(E,K)$ dirigée par la forme n-linéaire alternée non nulle :

$$\varphi_0 : \left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1,1}e_{k_1},\dots,\sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n,n}e_{k_n}\right) \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}.$$

■ Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. Nous pouvons décomposer $x_1,\dots,x_n$ dans la base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E : il existe des familles de scalaires $(a_{k_1,1})_{1\leqslant k_1\leqslant n},\dots,(a_{k_n,n})_{1\leqslant k_n\leqslant n}$ telles que

$$x_1=\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1,1}e_{k_1},\qquad \dots\qquad x_n=\sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n,n}e_{k_n}.$$

Nous souhaitons démontrer que $\mathscr{A}_n(E,K)=\mathrm{Vect}(\varphi_0)$ et que $\varphi_0\neq\widetilde{0}$.

$\boxed{\subset}$ Soit $f\in\mathscr{A}_n(E,K)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1,1}e_{k_1},\dots,\sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n,n}e_{k_n}\right)\\ &= \sum_{1\leqslant k_1,k_2,\dots,k_n\leqslant n} a_{k_1,1}a_{k_2,2}\dots a_{k_n,n}f(e_{k_1},e_{k_2},\dots,e_{k_n}). \end{aligned}$$

Comme la forme f est alternée, chaque terme $f(e_{k_1},\dots,e_{k_n})$ est nul dès que $k_1,\dots,k_n$ ne sont pas deux à deux distincts. Il ne reste donc dans la somme que les termes correspondant au cas où $(1,\dots,n)\longmapsto(k_1,\dots,k_n)$ est une permutation de $[\![1;n]\!]$. D'où

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)}).$$

Or

$$f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(e_1,e_2,\dots,e_n)$$

d'après la proposition 2, donc

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}f(e_1,e_2,\dots,e_n).$$

Cela signifie que

$$f=f(e_1,e_2,\dots,e_n)\varphi_0.$$

Ainsi, toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0, i.e. $\mathscr{A}_n(E,K)\subset\mathrm{Vect}(\varphi_0)$.

$\boxed{\supset}$ Pour avoir $\mathrm{Vect}(\varphi_0)\subset\mathscr{A}_n(E,K)$, il suffit de prouver que φ_0 est une forme n-linéaire alternée.

∗ Démontrons que φ_0 est une forme n-linéaire. Pour cela, on fixe $i\in[\![1;n]\!]$ et on démontre la linéarité de φ_0 par rapport à la variable x_i. On introduit y_i de coordonnées $(b_{1,i},\dots,b_{n,i})$ dans la base $\mathscr{B}$ ainsi que deux scalaires $\lambda,\mu\in K$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x_i+\mu y_i,x_{i+1},\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots(\lambda a_{\sigma(i),i}+\mu b_{\sigma(i),i})\dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n}\\ &\qquad +\mu\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots b_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \lambda\varphi_0(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\\ &\qquad +\mu\varphi_0(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n), \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la linéarité de φ_0 par rapport à la variable x_i.

* Pour le caractère alterné, on introduit $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que au moins deux des x_k soient égaux, disons $x_i = x_j$ avec $i < j$. On considère également $\tau = (i, j)$ la transposition de $\mathfrak{S}_n$ qui échange i et j. On peut partitionner $\mathfrak{S}_n$ en l'ensemble $\mathfrak{A}_n$ des permutations paires et l'ensemble $\mathfrak{A}_n\tau = \{\sigma\tau : \sigma \in \mathfrak{A}_n\}$ des permutations impaires. On peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n\tau} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} + \sum_{\rho \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\rho\tau) \prod_{k=1}^{n} a_{\rho\tau(k),k} \qquad \text{en posant } \sigma = \rho\tau \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - \sum_{\rho \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\rho) \prod_{k=1}^{n} a_{\rho\tau(k),k}.
\end{aligned}$$

Comme τ est la permutation (i, j) et comme $x_i = x_j$, on a, pour toute permutation $\rho \in \mathfrak{A}_n$,

$$a_{\rho\tau(i),i} = a_{\rho(j),i} = a_{\sigma(j),j} \qquad\qquad a_{\rho\tau(j),j} = a_{\rho(i),j} = a_{\rho(i),i}$$

et

$$\forall k \notin \{i; j\}, \qquad a_{\rho\tau(k),k} = a_{\rho(k),k}$$

donc

$$\forall \rho \in \mathfrak{A}_n, \qquad \prod_{k=1}^{n} a_{\rho\tau(k),k} = \prod_{k=1}^{n} a_{\rho(k),k}.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - \sum_{\rho \in \mathfrak{A}_n} \varepsilon(\rho) \prod_{k=1}^{n} a_{\rho(k),k} = 0_K,$$

ce qui démontre que φ_0 est alternée.

▷ Enfin, pour voir que φ_0 est non nulle, il suffit de constater que $\varphi_0(e_1, \dots, e_n) = 1$. ■

Nous recherchions une application de E^n dans K qui soit linéaire par rapport à chacune de ses variables et qui s'annule sur les familles liées. Le théorème ci-dessus nous dit, en substance qu'il n'y en a qu'une seule (une fois que l'on a fixé une base de E). La suite de ce cours va donc naturellement s'intéresser à cette application, appelée déterminant. 1 h 45

A. 2. Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle déterminant de la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ le scalaire, noté $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, défini par rapport aux coordonnées $(a_{1,1}, \ldots, a_{n,1})$, $(a_{1,2}, \ldots, a_{n,2})$, ..., $(a_{1,n}, \ldots, a_{n,n})$ respectives de x_1, x_2, ..., x_n dans la base $\mathscr{B}$, par la formule

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}.$$

Autrement dit, $\det_{\mathscr{B}} : E^n \longrightarrow K$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1_K.$$

La formule qui définit le déterminant est compliquée (c'est une somme de $n!$ termes dont chacun est un produit de $n+1$ facteurs). Pour cette raison, nous verrons qu'elle n'est quasiment jamais utilisée pour calculer concrètement un déterminant. A contrario, cette formule est parfois utile dans des situations théoriques. Il faut donc la connaître !

Exemples :

- Soit E un K-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. Soient x_1, x_2 deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans $\mathscr{B}$. Avec les notations de la définition ci-dessus, on a donc $a_{1,1} = a$, $a_{2,1} = b$, $a_{1,2} = c$ et $a_{2,2} = d$. Comme $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ où $\tau = (1, 2)$, la formule du déterminant nous dit que

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) &= \varepsilon(\mathrm{Id}) a_{\mathrm{Id}(1),1} a_{\mathrm{Id}(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \\ &= +a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) = ad - bc.$$

Il découle du théorème 1 que toute forme n-linéaire alternée sur E est proprotionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$. Plus précisément, si $f \in \mathscr{A}_n(E, K)$, alors

$$f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}.$$

En particulier, lorsqu'on considère les déterminants dans deux bases différentes, on obtient deux formes n-linéaires alternées qui sont nécessairement proportionnelles. Cette remarque nous permet d'énoncer ci-dessous la première propriété du déterminant.

Proposition 3

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On a la formule de changement de base du déterminant :

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}).$$

■ Il suffit d'appliquer la formule $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$ avec $f = \det_{\mathscr{B}'}$. ■

On notera l'analogie entre la formule de changement de base et la relation de Chasles.

Nous avons introduit le déterminant pour qu'il s'annule sur les familles liées de n vecteurs de E. Comme E est de dimension n, cela signifie (théorème Bonux) que le déterminant s'annule sur les familles de n vecteurs qui ne sont pas des bases de E. Le théorème qui suit nous dit (miracle !) que le déterminant ne s'annule que dans ce cas, autrement dit que le déterminant détecte les bases.

Théorème 2

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$(\mathscr{F} \text{ est une base de } E) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0\big).$$

De plus, dans le cas où $\mathscr{F} = \mathscr{B}'$ est une base de E, on a

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1.$$

■ $\Rightarrow$ Supposons que $\mathscr{F}$ est une base de E et notons $\mathscr{F} = \mathscr{B}'$ dans ce cas. La formule de changement de base nous dit que $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$, c'est-à-dire $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$. On en déduit bien sûr que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$. Comme $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée, cela signifie que $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle possède n vecteurs, le théorème Bonux nous dit que c'est une base. ■

A.3. Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E choisie. On l'appelle le déterminant de u et on le note $\det(u)$.

■ Il convient de justifier l'indépendance de $\det(u)$ vis-à-vis de la base $\mathscr{B}$.
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Considérons l'application de E^n dans K définie par $f : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$. C'est clairement une forme n-linéaire alternée sur E. D'après la formule $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$, on a, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) = \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \qquad (*).$$

Pour $(x_1, \dots, x_n) = (e'_1, \dots, e'_n)$, il vient

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(e'_1), \dots, u(e'_n)\big) = \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

Or $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})^{-1}$, donc

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}\big(u(e'_1), \dots, u(e'_n)\big) = \det_{\mathscr{B}'}\big(u(e'_1), \dots, u(e'_n)\big),$$

où la dernière égalité découle de la formule de changement de base.

Cela prouve que le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ et donc que l'on peut définir intrinséquement le déterminant d'un endomorphisme. ■

Le déterminant de u est donné, dans n'importe quelle base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, par la formule $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$. Mais, au contraire de ce que pourrait laisser penser cette dernière écriture, le scalaire $\det(u)$ est indépendant de la base dans laquelle on le calcule ! Autrement dit, le déterminant de u est un invariant de similitude : il n'est pas modifié lorsqu'on effectue un changement de base.

Exemples :

- $\det(\widetilde{0}) = 0$.
- $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
- Soit s la symétrie par rapport à F parallélement à G (avec $F \oplus G = E$). Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G, alors $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et
$$\det(s) = \det_{\mathscr{B}}\big(s(\mathscr{B})\big) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_p, -e_{p+1}, \dots, -e_n) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}.$$
- Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, l'endomorphisme u_σ de E défini par $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ a pour déterminant $\det(u_\sigma) = \det_{\mathscr{B}}\big(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)$.

La n-linéarité du déterminant implique la propriété suivante.

Proposition 4

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Pour tout $\lambda \in K$, on a
$$\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u).$$

■ On a $\det(\lambda u) = \det_{\mathscr{B}}\big(\lambda u(\mathscr{B})\big) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big) = \lambda^n \det(u)$, où la seconde égalité découle de la n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$. ■

Le déterminant det n'est donc pas une application linéaire : $\det(\lambda u + \mu v) \cancel{=} \lambda \det(u) + \mu \det(v)$.

Exemples :

- $\det(\lambda\,\mathrm{Id}_E) = \lambda^n$.

Le théorème suivant donne les propriétés multiplicatives du déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$. On considère u, v deux endomorphismes de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors

(i) $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{F})\big) = \det(u)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$;

(ii) $\det(vu) = \det(v)\det(u)$;

(iii) $\big(u \in \mathscr{GL}(E)\big) \Longleftrightarrow \big(\det(u) \neq 0\big)$ et dans ce cas $\det(u^{-1}) = \big(\det(u)\big)^{-1}$.

■ (i) La formule $(*)$ établie au cours de la démonstration précédente nous dit que

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{F})\big) = \det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}).$$

(ii) On a

$$\begin{aligned} \det(v \circ u) &= \det_{\mathscr{B}}\big(v(u(\mathscr{B}))\big) \\ &= \det(v)\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big) \qquad \text{d'après (i)} \\ &= \det(v)\det(u). \end{aligned}$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} \big(u \in \mathscr{GL}(E)\big) &\Longleftrightarrow \big(u(\mathscr{B}) \text{ est une base de } E\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \neq 0\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\det(u) \neq 0\big). \end{aligned}$$

Si $u \in \mathscr{GL}(E)$, alors

$$\det(u)\det(u^{-1}) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1,$$

d'où

$$\det(u^{-1}) = \big(\det(u)\big)^{-1},$$

ce qui donne le résultat attendu. ■

La propriété (i) est en fait caractéristique du déterminant d'un endomorphisme : si $\lambda \in K$ vérifie $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{F})\big) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ pour toute famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs de E, alors nécessairement $\lambda = \det(u)$. Il suffit de choisir $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ pour s'en convaincre.

La propriété (ii) implique en particulier que $\det(vu) = \det(uv)$ puisque ces deux nombres sont égaux à $\det(v)\det(u)$.

La propriété (ii) implique également que $\forall p \in \mathbb{N},\ \det(u^p) = \big(\det(u)\big)^p$. Lorsque u est un automorphisme, (iii) dit que cette formule est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

- Si p est une projecteur de E distinct de Id_E, alors $\det(p) = 0$.

Les propriétés (ii) et (iii) nous disent que det induit un morphisme de groupes entre $\big(\mathscr{GL}(E), \circ\big)$ et $(K^*, \times)$. La définition suivante est là pour insister sur le noyau de ce morphisme.

Définition 5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. L'ensemble $\mathscr{SL}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E) : \det(u) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$ appelé groupe spécial linéaire de E.

■ $\mathscr{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$ puisque c'est le noyau d'un morphisme de groupes. ■

A.4. Déterminant d'une matrice carrée

a) Définition et premiers exemples

Définition 6

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice <u>carrée</u> d'ordre n à coefficients dans K. On appelle déterminant de A l'élément de K défini par

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

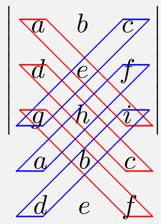
On le note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

Avec cette définition, on peut calculer des déterminants simples : les déterminants de petites tailles et les déterminants de matrices diagonales ou triangulaires.

<u>Exemples :</u>

- On a
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$
- Un calcul similaire (mais plus pénible) nous donne
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$



On retient en général ce résultat grâce au schéma placé à droite du calcul. C'est la règle de Sarrus. Celle-ci n'est définitivement valable que pour les matrices 3×3 ! Toute tentative de votre part pour généraliser ce moyen mnémotechnique à une matrice $n\times n$ où $n \geqslant 4$ aboutira irrémédiablement à une ânerie !
- Considérons la matrice triangulaire supérieure :
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sigma(i) \leqslant i$. On a $\sigma(1) \leqslant 1$ donc $\sigma(1) = 1$. Puis $\sigma(2) \leqslant 2$ et $\sigma(2) \neq \sigma(1) = 1$ donc $\sigma(2) = 2$, etc. Donc $\sigma = \mathrm{Id}$. Par conséquent, dans la formule donnant $\det(A)$, tous les termes $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}$ où $\sigma \neq \mathrm{Id}$ ont un facteur $a_{i,\sigma(i)}$ tel que $\sigma(i) > i$, c'est-à-dire un facteur nul. Il ne reste donc que le terme $a_{1,1}\dots a_{n,n}$, c'est-à-dire
$$\det(A) = a_{1,1}\dots a_{n,n}.$$
On retient que

> le déterminant d'une matrice triangulaire (a fortiori diagonale) vaut le produit des coefficients diagonaux.

b) Propriétés liées à la n-linéarité

Proposition 5

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Le déterminant de A est une forme n-linéaire de ses colonnes. Ainsi :

(i) det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice, c'est-à-dire que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$ et tous $\lambda, \mu \in K$,
$$\det(\dots, \lambda C_j + \mu C_j', \dots) = \lambda \det(\dots, C_j, \dots) + \mu \det(\dots, C_j', \dots)\,;$$

(ii) si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$;

(iii) si on multiplie une colonne de A par $\lambda \in K$, alors $\det(A)$ est multiplié par λ ;

(iv) pour tout $\lambda \in K$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

■ Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. On a $\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, ..., C_n)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ (identifié à K^n), donc $A \longmapsto \det(A)$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes de A. Les propriétés ci-dessus découlent de la n-linéarité. ■

La propriété (iv) illustre définitivement le fait que le déterminant n'est pas une application linéaire :
$$\det(\lambda A + \mu B) \cancel{=} \lambda \det(A) + \mu \det(B).$$

Exemples :

- Dans le cas d'une matrice diagonale, on a
$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n,$$
où l'on a utilisé la linéarité par rapport à chaque colonne. On retrouve ainsi le fait que le déterminant d'une matrice diagonale vaut le produit des coefficients diagonaux.

c) *Propriétés liées au caractère alterné*

Proposition 6

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Le déterminant de A est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes. Ainsi :

(i) si les colonnes de A sont liées, alors $\det(A) = 0$;

(ii) si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$;

(iii) si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A, alors $\det(A)$ est inchangé.

(iii) si on échange deux colonnes de A, alors $\det(A)$ change de signe ;

(iv) si on applique la permutation σ sur les numéros des colonnes de A, alors $\det(A)$ est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.

■ On reprend la démonstration de la proposition 5 en utilisant cette fois le caractère alterné. ■

Exemples :

- On peut utiliser les propriétés ci-dessus pour retrouver le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire vaut le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} & & \vdots \\ & & a_{3,3} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
= & \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & 0 & a_{2,3} & & \vdots \\ & & a_{3,3} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \text{ car les deux premières} \\ \text{colonnes sont liées}}} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} & & \vdots \\ & & a_{3,3} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
= & \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & 0 & & \vdots \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} & & \vdots \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & 0 & & \vdots \\ & & a_{3,3} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
= & \cdots \\
= & \begin{vmatrix} a_{1,1} & & & & \\ & a_{2,2} & & & \\ & & a_{3,3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
= & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\cdots a_{n,n}.
\end{aligned}$$

d) Liens entre les déterminants

La proposition suivante fait le lien entre les différents déterminants.

Proposition 7

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors

(i) si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E dont A est la matrice des composantes dans une base $\mathscr{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$;

(ii) si u est un endomorphisme de E dont A est la matrice dans une base donnée $\mathscr{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.

■ AQT ■

Le déterminant d'une matrice est donc le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique ou encore le déterminant de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé.

En particulier, les déterminants de deux matrices semblables (des sœurs) sont nécessairement égaux puisqu'ils valent le déterminant de l'endomorphisme qu'elles représentent (leur père). Nous verrons ci-dessous comment on peut expliquer, de manière plus concrète, l'invariance du déterminant par similitude.

Les propriétés multiplicatives du déterminant d'un endomorphisme, que nous avons démontrées dans le théorème 3, se transposent au déterminant d'une matrice carrée.

Théorème 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(ii) $\big(A \in \mathscr{GL}_n(K)\big) \iff \big(\det(A) \neq 0\big)$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$.

■ AQT ■

La propriété (i) implique en particulier que $\det(AB) = \det(BA)$ puisque ces deux nombres sont égaux à $\det(A)\det(B)$.

En particulier, si A et B sont deux matrices semblables, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(K)$ tel que $A = PBP^{-1}$, alors $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(BP^{-1}P) = \det(B)$. On constate ainsi que le déterminant est un invariant de similitude parcequ'il est possible de faire commuter les matrices à l'« intérieur » du déterminant. C'est également cette propriété qui nous avait permis de justifier que la trace est un invariant de similitude.

La propriété (i) implique également que $\forall p \in \mathbb{N},\ \det(A^p) = \big(\det(A)\big)^p$. Lorsque A est inversible, (ii) dit que cette formule est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

La conjonction de (i) et (ii) nous dit que det induit un morphisme de groupes entre $\big(\mathscr{GL}_n(K), \times\big)$ et $(K^*, \times)$. L'importance de son noyau justifie la définition suivante.

Définition 7

L'ensemble $\mathscr{SL}_n(K) = \{A \in \mathscr{M}_n(K) : \det(A) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(K)$ appelé groupe spécial linéaire d'indice n.

■ $\mathscr{SL}_n(K)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(K)$ puisque c'est le noyau d'un morphisme de groupes. ■

e) *Déterminant de la transposée*

La présentation matricielle du déterminant permet d'accéder à la propriété fondamentale donnée dans l'énoncé suivant : une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Proposition 8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors
$$\det({}^tA) = \det(A).$$

■ Deux démonstrations pour le prix d'une.

▷ Démontrons tout d'abord le résultat en procédant à des manipulations algébriques. On a

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\ell=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(\ell),\ell} && \text{en posant } \ell = \sigma(k) \text{ dans le produit (c'est licite car } \sigma \text{ est une permutation de } [\![1;n]\!]) \\
&= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho^{-1}) \prod_{\ell=1}^{n} a_{\rho(\ell),\ell} && \text{en posant } \rho = \sigma^{-1} \text{ dans la somme (ce qui est licite car } \sigma \longmapsto \sigma^{-1} \text{ est une involution de } \mathfrak{S}_n) \\
&= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho) \prod_{\ell=1}^{n} a_{\rho(\ell),\ell} && \text{car } \varepsilon(\rho^{-1}) = \varepsilon(\rho) \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

▷ Donnons ensuite une démonstration plus théorique.
On commence par remarquer que le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses lignes. En effet, dans tous les termes de la formule $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ on trouve un unique élément de chaque ligne, donc det est bien une forme n-linéaire de ses lignes. De plus, si les lignes sont liées, la matrice n'est pas inversible, ce qui implique que son déterminant est nul. Cela prouve le caractère alterné du déterminant vu comme forme n-linéaire de ses lignes.
Dès lors, les applications

$$(C_1, \ldots, C_n) \longmapsto \det(C_1, \ldots, C_n) \qquad \text{et} \qquad (C_1, \ldots, C_n) \longmapsto \det \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$$

sont n-linéaires alternées sur l'espace vectoriel des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. Elles sont donc proportionnelles, ce qui prouve l'existence d'un scalaire λ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(K),\ \det(A) = \lambda \det({}^tA)$.
En prenant $A = I_n$, on en déduit que $\lambda = 1$ et donc le résultat. ■

Retenons l'une des choses affirmées par le résultat de cette proposition (et que nous avons d'ailleurs vu au cours de la démonstration) : le déterminant d'une matrice carrée est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.

Ce résultat signifie en particulier, que toutes les propriétés du déterminant que nous avons énoncées jusqu'ici à propos des colonnes sont également valables pour les lignes.

Plus concrètement, la proposition précédente dit également que l'on a indifféremment

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \qquad \text{ou} \qquad \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)}.$$

Dorénavant, vous pouvez donc faire porter la permutation sur les numéros de ligne ou sur les numéros de colonne.

f) *Propriétés polynomiales du déterminant*

Les polynômes à plusieurs indéterminées n'étant pas au programme de MPSI, la propriété décrite dans l'encadré ci-dessous est énoncée de façon moins rigoureuse qu'à l'habitude.

Polynomialité du déterminant

Le déterminant est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice. Autrement dit, la formule donnant $\det(A)$ est certes affreuse, mais elle ne contient que des sommes et des produits.

Les applications de cette polynomialité sont nombreuses. Nous en verrons une (plus loin dans ce cours) pour le calcul du déterminant de Vandermonde. Nous pouvons déjà donner les exemples suivants.

Exemples :

- Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $\det(A)$ appartient à $\mathbb{Z}$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficient sont les conjugués des coefficients de A. On a
$$\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}.$$

4 h 00

B. Calculs de déterminants

Nous avons vu dans la section A. 4. que le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ou d'un endomorphisme revient au calcul de celui d'une matrice. Nous consacrons donc cette section aux méthodes de calcul du déterminant d'une matrice.

B.1. Déterminants triangulaires par blocs

Proposition 9

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathscr{M}_{n+p}(K)$ qui est triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ \hline \mathbb{O} & \mathrm{C} \end{array}\right),$$

où $B \in \mathscr{M}_n(K)$, $C \in \mathscr{M}_p(K)$ et $D \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$. Alors

$$\det(A) = \det(B) \times \det(C).$$

Le résultat vaut également pour une matrice triangulaire inférieure par blocs.

■ On traite le cas où A est triangulaire supérieure par blocs (le cas trangulaire inférieure par blocs est similaire). Écrivons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+p}$ de sorte que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n+p),n+p}$$

▷ Première étape : $B = I_n$

Dans ce cas, on a $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\forall i \in [\![1;n+p]\!]$, $(i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$. Il s'ensuit que, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}$, le produit $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n+p),n+p}$ est nul dès qu'il existe $j \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$.
Pour obtenir un produit non nul, on doit donc avoir $\sigma(1) \leqslant 1$, c'est-à-dire $\sigma(1) = 1$ puis $\sigma(2) \leqslant 2$ d'où $\sigma(2) = 2$ (car $\sigma(2) \neq \sigma(1)$), ... Pour résumer, le produit $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n+p),n+p}$ est non nul si, et seulement si, la restriction de σ à $[\![1;n]\!]$ est égal à l'identité.
L'ensemble des permutations de $[\![1;n+p]\!]$ laissant fixe $1, 2, \dots, n$ est l'ensemble des bijections de $[\![n+1, n+p]\!]$ dans lui-même. On peut donc le mettre en bijection avec $\mathfrak{S}_p$. En effet, à toute permutation σ de $[\![1;n+p]\!]$ laissant fixe $1, \dots, n$, on associe canoniquement la permutation σ' de $[\![1;p]\!]$ donnée par

$$\sigma' \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1;p]\!] & \longrightarrow & [\![1;p]\!] \\ k & \longmapsto & \sigma(n+k) - n \end{array} \right.$$

On notera alors que $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)$ puisque σ et σ' ont le même nombre d'inversions.
On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma') \underbrace{a_{1,1}}_{=1} \underbrace{a_{2,2}}_{=1} \dots \underbrace{a_{n,n}}_{=1} a_{n+\sigma'(1),n+1} a_{n+\sigma'(2),n+2} \dots a_{n+\sigma'(p),n+p} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma') a_{n+\sigma'(1),n+1} a_{n+\sigma'(2),n+2} \dots a_{n+\sigma'(p),n+p} \\ &= \det(C), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat dans ce cas puisque $\det(B) = 1$.

- Deuxième étape : $C = I_p$

  On procède de même.

- Troisième étape : Cas général

  On écrit que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \mathrm{D} \\ \hline \mathbb{O} & \mathrm{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & I_p \end{array}\right)$$

et l'on utilise la multiplicativité du déterminant et les résultats des deux premières étapes. ■

Le résultat se généralise par récurrence au cas où la diagonale possède plus de deux blocs.

Corollaire 1

On a

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & & * \\ & \boxed{B_2} & & & \\ & & \boxed{B_3} & & \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix} = \det(B_1)\times\det(B_2)\times\cdots\times\det(B_k).$$

■ AQT ■

Les matrices triangulaires supérieures étant des cas particuliers de matrices triangulaires supérieures par blocs, on retrouve le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des coefficients diagonaux. De même avec les matrices triangulaires inférieures.

Exemples :

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 12$
- $\begin{vmatrix} -3 & -7 & 54 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-9) = -18.$

B.2. Opérations élémentaires sur les rangées - Méthode du pivot

L'encadré ci-dessous résume les propriétés (glanées jusqu'ici) qui concernent l'action sur le déterminant des opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice.

Opérations sur les rangées

Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K.

- L'échange de deux lignes (respectivement colonnes) change le signe du déterminant. Plus généralement, une permutation des lignes (respectivement colonnes) de A multiplie le déterminant par la signature de cette permutation.
- La multiplication d'une ligne (respectivement colonne) par un scalaire λ multiplie le déterminant par λ.
- L'addition dans une ligne (respectivement colonne) d'une autre ligne (respectivement colonne) ou, plus généralement, d'une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes) ne modifie pas le déterminant.

La méthode du pivot exploite ces opérations pour ramener le calcul d'un déterminant à celui d'une matrice triangulaire supérieure.

La multiplicativité du déterminant permet d'interpréter ces opérations à l'aide des matrices des opérations élémentaires. Il suffit pour cela de constater qu'une matrice de transposition est de déterminant -1, qu'une matrice de dilatation de rapport λ est de déterminant λ et qu'une matrice de transvection est de déterminant 1.

Exemples :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{-1} & -2 \\ -3 & 0 & -2 & -6 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -10 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

On veut calculer Δ.
On choisit un pivot.

$$= \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{-1} & -2 \\ 7 & 8 & 0 & \boxed{2} \\ -7 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

On effectue la méthode du pivot et on divise par le pivot au carré car on modifie deux lignes.

$$= \frac{1}{2^1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{-1} & -2 \\ 7 & 8 & 0 & \boxed{2} \\ 5 & \boxed{5} & 0 & 0 \\ -87 & -92 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On poursuit ainsi.

$$= \frac{1}{2 \times 5^1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{-1} & -2 \\ 7 & 8 & 0 & \boxed{2} \\ 5 & \boxed{5} & 0 & 0 \\ \boxed{25} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon\big((1,4,2,3)\big)}{10} \begin{vmatrix} \boxed{-1} & -2 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 8 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{25} \end{vmatrix}$$

On se ramène, par permutation des colonnes, à un déterminant triangulaire supérieur et on multiplie par la signature de la permutation.

$$= -\frac{-1 \times 2 \times 5 \times 25}{10}$$

$$= 25.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Pour $n \geqslant 2$, on retranche la première ligne à chacune des suivantes, ce qui donne

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après la formule du calcul par blocs,

$$\Delta_n = \Delta_{n-1}.$$

Comme $\Delta_1 = 1$, il s'ensuit que

$$\Delta_n = 1.$$

$\mathscr{B}.3.$ Développement d'un déterminant

Dans cette partie du cours, on suppose $n \geqslant 2$.

L'objet de ce paragraphe est de mettre en place un outil de calcul des déterminants qui ramène le calcul d'un déterminant de taille n, à celui de n déterminants de taille $n-1$.

Définition 8

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_n(K)$. Pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, on appelle cofacteur du coefficient $a_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j}$ défini par

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A :

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

Le déterminant $\Delta_{i,j}$ est appelé le mineur de A de coordonnées (i, j).

Le coefficient $(-1)^{i+j}$ qui intervient dans l'expression du cofacteur de coordonnées (i, j) s'obtient en examinant le « damier » suivant :

En particulier, chaque cofacteur de la diagonale est égal à son mineur associé.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemples :

- Pour

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

on calcule ci-dessous les cofacteurs associés aux coefficients de la première colonne :

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} \cancel{11} & \cancel{12} & \cancel{13} \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = 22 \times 33 - 32 \times 23 = -10$$

$$A_{2,1} = -\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ \cancel{21} & \cancel{22} & \cancel{23} \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = -(12 \times 33 - 32 \times 13) = 20$$

$$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ \cancel{31} & \cancel{32} & \cancel{33} \end{vmatrix} = 12 \times 23 - 22 \times 13 = -10$$

- Les cofacteurs de I_n sont tous nuls sauf ceux associés aux coefficients diagonaux qui valent 1.
- Les cofacteurs de la matrice d'Attila sont tous nuls !

L'intérêt des cofacteurs est justifié par l'énoncé suivant où sont énoncées les formules de Laplace.

Proposition 10

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_n(K)$.

(i) Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on peut développer $\det(A)$ par rapport à la j-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}.$$

(ii) Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on peut développer $\det(A)$ par rapport à la i-ème ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}.$$

■ (i) Soit $j \in [\![1;n]\!]$. La linéarité du déterminant par rapport à la j-ème colonne nous dit que

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \widetilde{A_{i,j}} \qquad (*)$$

où

$$\widetilde{A_{i,j}} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En effectuant le cycle $c = (1, 2, \ldots, j)$ sur les colonnes puis $(1, 2, \ldots, i)$ sur les lignes de ce déterminant, on obtient

$$\widetilde{A_{i,j}} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ | & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ | & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ | & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ | & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

ce qui donne

$$\widetilde{A_{i,j}} = A_{i,j}$$

puisque ce dernier déterminant est triangulaire supérieure par blocs. En reportant dans $(*)$, on obtient le résultat.

(ii) La propriété (ii) s'obtient à partir de (i) en transposant. ■

Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport à une rangée lorsque cette rangée comporte plusieurs termes nuls.

Exemples :

- En développant par rapport à dernière colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1437.$$

Numériquement, la méthode de développement par rapport à une rangée n'est pas la plus rapide. Elle est plus généralement utilisée pour établir une relation entre un déterminant d'ordre n et certains de ses mineurs (d'ordre $n-1$). Cela sert en particulier à établir certaines relations de récurrence.

Exemples :

- Établissons une relation de récurrence entre les différents termes de la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ où Δ_n est le déterminant tridiagonal suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{vmatrix}_{(n)}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - c\begin{vmatrix} b & 0 & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

puis en développant par rapport à la première ligne, il vient

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}.$$

On reconnaît une suite récurrente double.

B.4. Déterminant de Vandermonde

Proposition 11

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$. On note $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde[†], c'est-à-dire le déterminant d'ordre $n+1$ défini par

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_0}^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

On a

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

En particulier, le déterminant de Vandermonde $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est non nul si, et seulement si, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

(†) Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796) est un mathématicien français qui s'est interessé aux déterminants, aux polynômes, aux équations diophantiennes... et à la métallurgie. C'est l'un des fondateurs du Conservatoire National des Arts et Métiers en 1794.

■ ▷ Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant de Vandermonde possède deux colonnes identiques. Il est donc nul. La formule attendue est donc bien vérifiée dans ce cas.

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « pour tous $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$ distincts, on a $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ ».

Initialisation : $V(x_0) = 1 = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 0} (x_j - x_i)$ car un produit vide vaut 1. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n)$. Soient $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ des scalaires distincts. Nous allons exploiter le fait que le déterminant d'une matrice est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice. Considérons pour cela le déterminant $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ obtenu en remplaçant x_n par une indéterminée X :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & X \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & X^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_0}^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & X^n \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la dernière colonne permet de voir que $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de degré égal à n dont le monôme de plus haut degré est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})X^n$ (on sait que $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ d'après $\mathscr{P}(n)$). Or ce polynôme s'annule lorsque X est substitué par x_0, x_1, $\dots$, x_{n-1} (puisqu'alors deux colonnes du déterminant sont nulles), ce qui donne $n-1$ racines. Comme le polynôme est de degré $n-1$, on a trouvé toutes les racines et l'on a

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (X - x_i).$$

En substituant x_n à X et en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ■

5 h 45

C. Comatrice et formule d'inversion

Définition 9

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$. On appelle comatrice de A, et l'on note $\operatorname{Com} A$, la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A, c'est-à-dire

$$\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'intérêt de la comatrice apparaît dans la proposition suivante.

Proposition 12

Soit A de $\mathscr{M}_n(K)$. On a

$$A({}^t\operatorname{Com} A) = ({}^t\operatorname{Com} A)A = \det(A)\, I_n.$$

En particulier, si $\det(A) \neq 0$, on obtient la formule d'inversion suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\operatorname{Com} A.$$

■ ▷ Posons $A({}^t\operatorname{Com} A) = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de sorte que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{j,k}$.

- ∗ Si $i = j$, on reconnait le développement de $\det A$ par rapport à la i-ème ligne, d'où $c_{i,i} = \det(A)$.
- ∗ Si $i \neq j$, on reconnait le développement par rapport à la j-ème ligne du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant cette j-ème ligne par la i-ème. Ce déterminant ayant deux lignes identiques, il est nul, d'où $c_{i,j} = 0$.

On obtient donc que $A({}^t\operatorname{Com} A) = \det(A)\, I_n$.

▷ Avec des développements en colonne, on obtient de même que $({}^t\operatorname{Com} A)A = \det(A)\, I_n$.

▷ Si A est inversible, la relation $A({}^t\operatorname{Com} A) = \det(A) I_n$ dit que $A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1}\, {}^t\operatorname{Com} A$. ■

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^t\operatorname{Com} A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

La formule d'inversion est inutilisable en pratique dès que $n \geqslant 4$. En effet, elle nécessite le calcul d'un déterminant d'ordre n et de n^2 déterminants d'ordre $n-1$, c'est-à-dire de l'ordre de $n^2 n!$ opérations. En comparaison, la méthode de Gauss nécessite environ $4n^3/3$ opérations. Ainsi, pour un ordinateur exécutant un million d'opérations par seconde, il faut 10 ms pour inverser une matrice 20×20 par la méthode de Gauss et 30 millions d'années avec la formule d'inversion !!

En revanche, cette formule est un outil théorique qui peut se révéler intéressant (par exemple pour éudier A^{-1} lorsque A dépend d'un paramètre).

La formule d'inversion peut être utilisée pour résoudre (théoriquement) un système linéaire.

Proposition 13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On considère le système $n \times n$ d'équations linéaires qui s'écrit

$$AX = Y$$

où $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ sont les vecteurs colonnes de composantes respectives $x_1, \ldots x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$.

On sait que ce système admet une solution unique si, et seulement si, A est inversible, c'est-à-dire si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. La solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ de ce système est alors donnée par les formules de Cramer :

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \qquad x_j = \frac{\begin{array}{c} \text{j-ème colonne} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}},$$

c'est-à-dire que la j-ème coordonnée de X est égale au quotient par $\det(A)$ du déterminant obtenu à partir de celui de A en remplaçant la j-ème colonne par la colonne Y.

■ On sait que l'unique solution de ce système de Cramer est donnée par

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{\det(A)}({}^t\mathrm{Com}\, A)Y,$$

ce qui donne

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \qquad x_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} y_k.$$

On en déduit que x_j est bien le développement suivant la j-ème colonne du déterminant obtenu de A en remplaçant la j-ème colonne par la colonne Y. ■

Exemples :

- Les formules de Cramer n'ont un intérêt pratique que pour $n = 2$ où l'on peut retenir que la solution du système

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \qquad ad - bc \neq 0$$

est donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Pour $n \geqslant 3$, ces formules peuvent être utiles théoriquement.

D. Déterminant et orientation

Attention, dans tout ce qui suit, le corps de base est $\mathbb{R}$.

Définition 10

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On dit que $\mathscr{B}'$ est de même orientation que $\mathscr{B}$ lorsque $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) > 0$.

Il est bien sûr interdit de parler de l'orientation des bases d'un espace vectoriel complexe.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. La relation « avoir même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.

■ AQT ■

Cette relation d'équivalence permet de définir l'orientation d'un espace vectoriel.

Définition 11

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. La relation « avoir même orientation » induit deux classes d'équivalence sur l'ensemble des bases. Orienter l'espace E, c'est choisir l'une de ces classes dont les éléments sont appelés bases directes, tandis que les éléments de l'autre classe sont appelés des bases indirectes (ou rétrogrades$^{(\dagger)}$).

(†) Les rétrogrades, ce sont toujours les autres !

■ Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases d'orientations différentes, c'est-à-dire si $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) < 0$, alors, pour toute base $\mathscr{B}$, on aura soit $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}) > 0$, soit $\det_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)\det_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}) > 0$, c'est-à-dire que $\mathscr{B}$ a soit l'orientation de $\mathscr{B}_1$, soit l'orientation de $\mathscr{B}_2$. Il existe donc bien deux classes d'équivalence. ■

Il y a donc toujours deux orientations possibles sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le choix de l'une ou l'autre de ces classes d'orientation comme classe directe est arbitraire. Toutefois, dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels où l'on dispose d'une base canonique, on décrètera toujours que les bases directes sont celles qui ont la même orientation que la base canonique.

L'orientation permet de distinguer deux types d'endomorphismes.

Définition 12

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un automorphisme de E. On dit que u conserve l'orientation lorsque $\det(u) > 0$ et qu'il change l'orientation lorsque $\det(u) < 0$.

L'intérêt de cette définition se trouve dans la proposition suivante.

Proposition 15

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté de dimension finie, u un automorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors

(i) si u conserve l'orientation, $u(\mathscr{B})$ est une base de E de même orientation que $\mathscr{B}$;

(ii) si u change l'orientation, $u(\mathscr{B})$ est une base de E d'orientation contraire à $\mathscr{B}$.

7 h 00

■ Soit $\mathscr{B}_0$ une base directe. Le résultat découle de la formule $\det_{\mathscr{B}_0}\big(u(\mathscr{B})\big) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$. ■