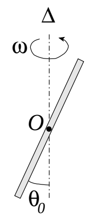
T.D. M$_3$: Mécanique du solide (et des systèmes) – frottements solides

Exercice 1 Moment cinétique d'une barre tournant autour d'un axe

Une barre homogène (masse m, longueur l, section négligeable) tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe (Δ) vertical, fixe par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ qui passe par son centre O. La barre et l'axe forment à tout instant un angle constant θ_0 dans un plan vertical.



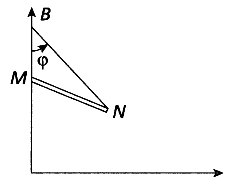
1. Calculer directement, en fonction de θ_0 et de ω, le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ dans la *base* liée à la barre.
2. Les deux vecteurs $\overrightarrow{L_O}$ et $\overrightarrow{\omega}$ sont-ils colinéaires pour θ_0 quelconque ? Pour quelles valeurs de θ_0 le sont-ils ?

Exercice 2 Promenades sur support mobile

1. Un homme, de masse m, se trouve sur un radeau de masse M qui repose sur la surface d'un lac. La résistance de l'eau est négligée. Trouver la relation entre le déplacement $\overrightarrow{\Delta r_h}$ de l'homme sur le radeau et le déplacement $\overrightarrow{\Delta r_r}$ du radeau par rapport à la rive. Commenter.
2. Le même homme se déplace cette fois-ci sur le bord d'un disque circulaire, de rayon R et de masse M, avec une vitesse v'_h par rapport au disque. Ce dernier peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution vertical. Initialement, l'ensemble est au repos. Établir la relation entre la vitesse de déplacement de l'homme sur le disque et la vitesse de rotation du disque. En déduire l'angle dont a tourné le plateau, en fonction du rapport des masses, lorsque l'homme a parcouru un demi-tour.

Exercice 3 Équilibre sans frottement d'une barre

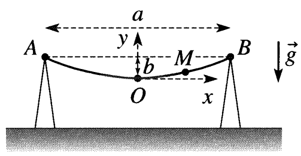
Une barre MN homogène, de longueur $l = 1{,}00$ m et de poids $P = 100$ N glisse sans frottement sur le mur vertical BC. La barre est retenue en N par un fil BN de masse négligeable, inextensible, de longueur $a = 1{,}50$ m. On pose $\overline{BM} = x$ et $(BM, BN) = \varphi$.

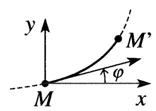


1. Déterminer la position d'équilibre de la barre (x et φ).
2. Calculer la tension du fil et la réaction du mur sur la barre.

Exercice 4 Équilibre d'un câble pesant non tendu

Un câble électrique, inextensible, parfaitement souple, homogène, de masse linéique μ, de longueur L, est suspendu à deux pylônes, entre deux points A et B, situés sur la même horizontale et distants de $AB = a$. Le câble n'étant pas tendu, la distance a est inférieure à la longueur L.



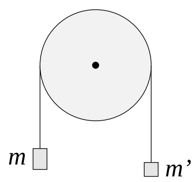


1. Trouver une relation entre la tension T du câble en un point M, l'inclinaison φ du câble en M avec l'horizontale et la tension T_0 du câble au point O le plus bas.
2. Obtenir l'équation cartésienne $y(x)$ du câble dans le repère (Oxy) centré en O. On posera $x_0 = \frac{T_0}{\mu g}$ de dimension à préciser.
3. On pose $\Delta L = L - a$. En supposant $\Delta L \ll L$, calculer la flèche b du câble en O en fonction de ΔL et a.
4. Calculer ΔL, les deux pylônes étant séparés de $a = 100$ m et pour une flèche de $b = 3$ m. Comparer la tension du câble et son poids. Est-il envisageable de ramener la flèche à 30 cm ?

Exercice 5 Machine d'ATWOOD

Une machine d'ATWOOD est constituée d'une poulie de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe. Cette poulie tourne sans frottement.

Un fil inextensible et sans masse passe dans la gorge de la poulie. Aux deux extrémités du fil sont suspendues deux masses m et m'. Le système est abandonné sans vitesse initiale.

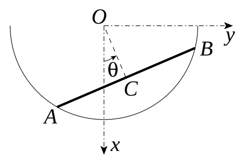


1. Calculer l'accélération du système en supposant que la corde ne glisse pas sur la poulie sans utiliser un théorème énergétique. Commentaire ?
2. Faire de même en utilisant un théorème énergétique.

Exercice 6 Oscillations d'une tige sur un demi-cercle

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur $2l$, de moment d'inertie $J = ml^2/3$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = 2l/\sqrt{3}$. Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen. Le théorème de HUYGENS indique que $J_{Oz} = J_{Cz} + m OC^2$.

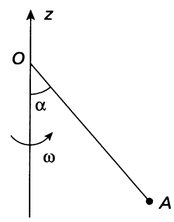
Calculer la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.



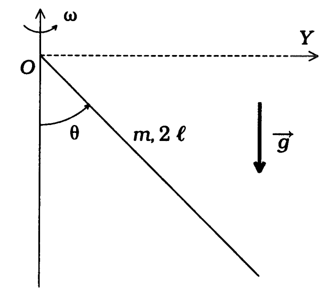
Exercice 7 Point d'application des forces d'inertie : un exemple

Une tige mince homogène OA de masse m et de longueur l est soudée à un axe vertical Oz avec lequel elle fait l'angle α constant. L'axe tourne à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.

Montrer que l'ensemble des forces d'inertie s'exerçant sur la tige dans son référentiel « tournant » est équivalent à une force unique appliquée à un point que l'on précisera.



Exercice 8 Tige en référentiel non galiléen

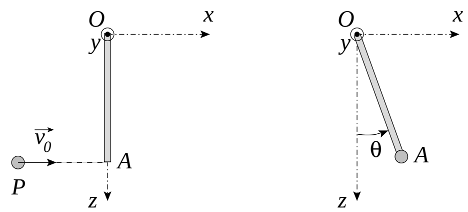


Une tige OA, de masse m et de longueur $2l$, est contenue dans le plan tournant $y\mathrm{O}z$. Dans ce plan, elle peut tourner librement par rapport à l'axe Ox. On impose au plan $y\mathrm{O}z$ une vitesse angulaire de rotation ω autour de l'axe vertical ascendant Oz.

On note $\omega = \eta\,\omega_0$ et $\omega_0{}^2 = \frac{3g}{4l}$. On rappelle que le moment d'inertie d'une barre OA, de masse m et de longueur L, par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire à une extrémité est $\mathrm{I} = m\mathrm{L}^2/3$.

1. Montrer, en se plaçant en référentiel tournant, que l'équation du mouvement en $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme $\frac{2}{3}ml^2\,\dot{\theta}^2 + \mathscr{E}_p(\theta) = \mathscr{E}_0 = \mathrm{C^{te}}$. On donnera l'expression de $\mathscr{E}_p(\theta)$ en fonction de θ, mgl et η.
2. Étudier les différents cas possibles selon les valeurs du paramètre η. On envisagera les cas $\eta < 1$, $\eta = 1$ et $\eta > 1$ et on pourra donner une représentation du portrait de phase (dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$).

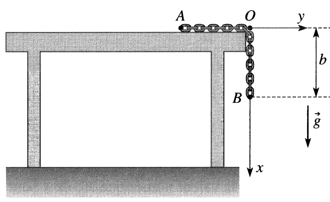
Exercice 9 Choc d'une particule sur une tige en rotation autour d'un axe



Une tige homogène OA (masse M, longueur a, centre G, moment d'inertie $\mathrm{J} = \mathrm{M}a^2/3$ par rapport à un axe passant par O et perpendiculaire à la tige) peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal (Oy) dans le plan vertical (Oxz). Elle n'est soumise qu'à son poids et à l'action du support. La tige est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{\mathrm{OA}})$. La tige est initialement immobile et verticale (OA suivant l'axe (Oz) descendant). Une particule ponctuelle P de masse m, de vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$ vient s'écraser sur la tige en A.

1. Déterminer la vitesse de rotation ω_0 acquise par la tige juste après le choc.
2. Calculer la variation d'énergie cinétique du système {tige+particule} au cours du choc. Commenter le résultat obtenu.
3. Déterminer le mouvement ultérieur de la tige (sans chercher à trouver l'expression de $\theta(t)$). Discuter suivant les valeurs de ω_0.

Exercice 10 Mouvement d'une chaîne sur une table



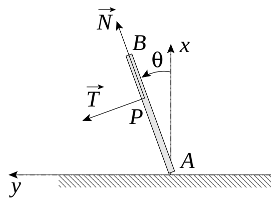
Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une chaîne AB homogène, sans raideur, de longueur d et de masse m, est posée sur le bord d'une table horizontale, sans vitesse initiale, son extrémité B se trouvant à une distance b du bord de la table.

On néglige tout frottement interne à la chaîne d'une part, et entre la table et la chaîne d'autre part.

On étudie la chute de la chaîne avant que son extrémité B n'atteigne le sol.

1. Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de l'extrémité B de la chaîne sur l'axe vertical (Ox) à un instant t (on supposera $x < d$).
2. En déduire la loi $x(t)$.
3. Déterminer à un instant t la force $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ qu'exerce la table sur la chaîne.

Exercice 11 Rupture d'une tige qui tombe sur le sol

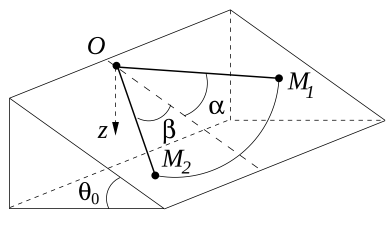


Une tige AB, homogène, de masse m, de longueur b, posée sur le sol en A, tombe à partir de la position verticale. Nous supposons que, pendant la chute, le point A reste fixe et la tige reste dans le plan vertical (Axy) fixe. Le sol exerce sur la tige en A une action mécanique réductible à une force appliquée en A (mais il n'y a pas de moment en A). Pendant la chute, la portion de tige AP exerce sur la portion PB des actions mécaniques qui se traduisent par une résultante $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{N}}$ (voir figure) appliqué en P, mais aussi d'un notés $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{P}}$.

Le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur b par rapport à un axe passant par une de ses extrémités et perpendiculaire à la tige est $\mathrm{J} = mb^2/3$.

1. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{P}}$ en fonction de l'angle θ et de la longueur $a = \mathrm{AP}$.
2. On pose $\mathrm{T}_0 = ||\overrightarrow{\mathrm{T}}||$ et $\mathscr{M}_{\mathrm{P0}} = ||\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{P}}||$; tracer l'allure de T_0 et de $\mathscr{M}_{\mathrm{P0}}$ en fonction de a, pour une valeur de θ donnée.
3. En général, une cheminée d'usine que l'on abat se brise avant de toucher le sol. En admettant la validité du modèle précédent, préciser en quel point on peut prévoir cette cassure.

Exercice 12 Pendule avec frottements



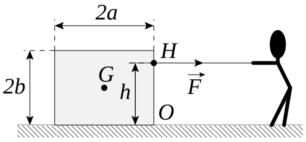
Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) oscille en glissant avec frottement sur un plan incliné d'angle θ_0 constant avec l'horizontale.

Lâchée en un point M_1 tel que OM_1 fasse un angle absolu α avec la ligne de plus grande pente, la masse remonte après avoir glissé sur le plan, jusqu'en un point M_2. En ce point, le fil fait un angle absolu β avec la ligne de plus grande pente.

Exprimer le coefficient de frottement f entre la masse et le plan incliné en fonction de θ_0, α et β.

Exercice 13 Équilibre d'un solide sur le sol

Un solide homogène, de masse m, de centre d'inertie G, en forme de parallélépipède, de côtés $2a$ et $2b$ repose sur le sol horizontal. Une personne souhaite déplacer le solide en tirant sur celui-ci à l'aide d'une corde (fixée en un point H du solide se trouvant dans le plan médiateur passant par G et tel que $\mathrm{OH} = h$) en exerçant une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ horizontale. Le contact sol-solide est caractérisé par un coefficient de frottement f.



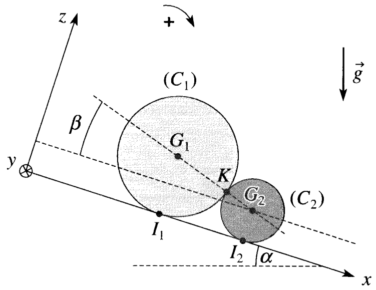
1. La personne ne tire pas assez fort et le solide reste désespérément immobile. On suppose que les actions mécaniques de contact entre le sol et le solide se réduisent en une force $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ s'appliquant en un point I (du plan médiateur) situé sur la surface de contact sol-solide. Trouver $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ et I.
2. Quelle(s) condition(s) doit(vent) alors vérifier l'intensité F de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ pour que le solide reste effectivement immobile sur le sol ?

Exercice 14 Équilibre de deux cylindres sur un plan incliné

On pose deux cylindres (C_1) et (C_2), homogènes, de même masse m, de rayons respectifs R_1 et $\mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_1$, de centres respectifs G_1 et G_2, sans vitesses initiales sur un plan (P) incliné d'un angle $\alpha \in]0;\pi/6[$ sur l'horizontale. (C_1) est placé derrière (C_2), en contact avec (C_2) au point K. On désigne par β l'angle entre la droite $(\mathrm{O}x)$ et celle qui joint les centres G_1 et G_2 et on suppose $0 < \beta < \alpha$.

Les coefficients de frottement de glissement sont identiques pour chaque contact et égaux à $f < 1$.

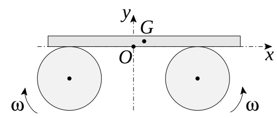
On se propose de rechercher les conditions d'équilibre du système.



1. Calculer les différents modules T_i et N_i des composantes tangentielles et normales des différentes forces de contact en I_1, I_2 et K.
2. En déduire une condition entre les paramètres β et f pour que le système reste en équilibre.
3. Que pensez-vous de cette condition ? Que devient celle-ci lorsque R_1 tend vers R_2 ?

Exercice 15 Un oscillateur curieux

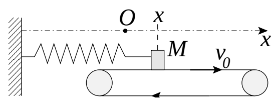
Une planche mince homogène repose horizontalement sur deux cylindres tournant en sens inverses (machine de TIMOCHENKO). Les axes de ces deux cylindres sont distants de $2l$ et on désigne par f le coefficient de frottement de la planche sur les cylindres. À l'instant initial, la planche est abandonnée sans vitesse, son centre de masse G n'étant pas sur l'axe $(\mathrm{O}y)$.



1. Déterminer les composantes verticales des réactions des deux cylindres en fonction de l'abscisse x de G.
2. On suppose que les cylindres tournent assez vite pour que la planche glisse sans cesse sur les deux rouleaux. Montrer que cette planche effectue alors des oscillations dont on donnera la période.
3. Comment est modifiée la période si on ne néglige pas l'épaisseur $2e$ de la planche ?

Exercice 16 Mouvement d'un solide sur un tapis roulant

Un solide M, de masse m, repose sur un tapis roulant horizontal animé d'une vitesse uniforme v_0 $(v_0 > 0)$ par rapport au référentiel terrestre $(\mathscr{R})$ supposé galiléen. Le contact entre le tapis et la masse M se fait avec un frottement solide caractérisé par un coefficient statique f_0 et un coefficient dynamique $f < f_0$. Le solide M est relié à un support fixe par un ressort de raideur k. On repère la position de M par son abscisse le long d'un axe horizontal $(\mathrm{O}x)$; lorsque le ressort a sa longueur à vide, le point M est en O. On pose :

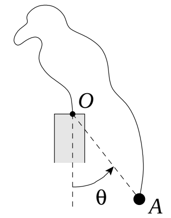


$$a = \frac{fmg}{k}, \qquad a_0 = \frac{f_0 mg}{k}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = \frac{v_0}{\omega_0(a_0 - a)} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

On donne $m = 0,5$ kg, $k = 50$ N.m^{-1}, $v_0 = 0,5$ m.s^{-1}, $f_0 = 0,15$, $f = 0,1$ et $g = 10$ m.s^{-2}.

1. La masse M est posée sans vitesse relative par rapport au tapis roulant au point O, d'abscisse nulle, à la date $t = 0$. Déterminer l'instant t_1 à partir duquel la masse M se met à glisser. Quelle est alors l'abscisse x_1 de la masse M ?
2. Déterminer le mouvement ultérieur de la masse M, pendant la phase de glissement. Montrer que cette phase cesse à un instant t_2. Déterminer t_2 (on exprimera t_2 en fonction de φ et de ω_0) et l'abscisse x_2 correspondante.
3. Montrer qu'après l'instant t_1, le mouvement de M se compose de deux phases, l'une avec glissement sur le tapis roulant, l'autre sans glissement, et que ce mouvement est périodique. Représenter la courbe $x(t)$. Calculer l'amplitude b du mouvement. Calculer la durée de chacune des phases, et la période T. Faire les applications numériques.
4. On étudie le portrait de phase du mobile (diagramme où la variable x est portée en abscisse et $y = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en ordonnée). Tracer ce portrait de phase. Préciser les points correspondants aux instants caractéristiques t_1, t_2, ...
5. Quelle est l'énergie mécanique dissipée par les forces de frottement pendant une période T ? Faire l'application numérique.
6. Si on admet que le modèle précédent peut représenter, avec d'autres valeurs numériques, une corde de violon, qui constitue l'oscillateur (m,k) et un archet qui constitue le tapis roulant, le son rendu par le violon comportera-t-il des harmoniques ?

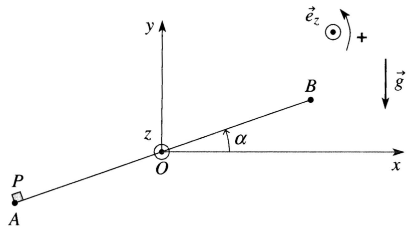
Exercice 17 Oscillations d'un solide sur son support



Sur un fil rigide OA, de masse négligeable, on soude en A une masselotte (assimilable à un point) de masse m. Ce solide est posé en O sur une surface horizontale fixe. On pose $\mathrm{OA} = b$.

1. On incline le solide OA d'un angle θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$) et on le lâche sans vitesse initiale. Quelle doit être la valeur minimale du coefficient de frottement de glissement f entre le solide et son support pour que OA puisse effectuer des oscillations dans un plan vertical, sans glisser sur son support ?
2. Les conditions précédentes étant remplies, calculer la période T_0 des petites oscillations du système.

Exercice 18 Point matériel sur une barre en rotation

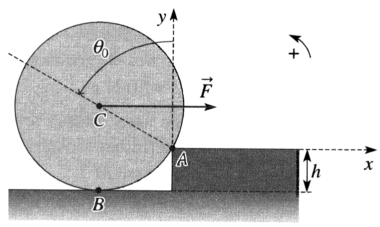


Le repère $(\mathrm{O}xyz)$ est associé à un référentiel galiléen. Une barre homogène AOB, de masse M et de longueur $2a$, est mobile sans frottements autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ horizontal. Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$ vaut $\mathrm{J} = \frac{1}{3}\,\mathrm{M}a^2$.

On pose sur la barre, en son extrémité A, un point matériel P de masse m. Le contact entre P et la barre se fait avec un coefficient de frottement de glissement f. On libère l'ensemble { barre + point matériel } sans vitesse initiale dans la position horizontale $\alpha = 0$.

À quelles conditions P reste-t-il sur la barre ?

Exercice 19 Un cylindre contre un trottoir



On considère un cylindre homogène, de centre C, de masse m, rayon a, de moment d'inertie $\mathrm{J} = ma^2/2$ par rapport à son axe Δ. Le théorème de HUYGENS stipule que le moment d'inertie par rapport à un axe Δ_d parallèle à Δ et à une disance d de Δ est égale à $\mathrm{J}_{\Delta_d} = \mathrm{J} + md^2$. Le cylindre repose sur la chaussée horizontale en étant bloqué contre le trottoir de sommet A et de hauteur h.

1. Calculer l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{\mathrm{A}y}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$, $(\mathrm{A}y)$ désignant l'axe vertical ascendant, en fonction de a et h.
2. On cherche à faire monter le cylindre sur le trottoir en exerçant en C une force horizontale et constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$. On suppose que le coefficient de frottement de glissement f en A est suffisamment important pour éviter tout glissement en A pendant la phase de montée.
   a. Déterminer la valeur minimale F_0 de la norme F de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ pour que le cylindre puisse décoller de la chaussée en B. On exprimera F_0 en fonction de m, g et θ_0.
   b. Montrer que, en maintenant F à une valeur constante supérieure à F_0, le cylindre continue de monter sur le trottoir.
   c. On suppose $\mathrm{F} = 2\,\mathrm{F}_0$. Calculer la valeur minimale f_0 de f pour que le cylindre ne glisse pas en A au démarrage. On exprimera f_0 en fonction de θ_0.
   d. Toujours pour $\mathrm{F} = 2\,\mathrm{F}_0$, calculer la vitesse $\overrightarrow{v}(\mathrm{C})$ du centre C du cylindre lorsque C se trouve à la verticale du point A. On exprimera la norme $v(\mathrm{C})$ de la vitesse en fonction de g, a et θ_0.

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1

Attention, ne pas confondre base et référentiel ! Le référentiel d'étude est bien $\mathscr{R}$. Cet exercice a pour objectif de voir un cas où le moment cinétique n'est pas colinéaire au vecteur rotation.

Exercice 2

Pas d'indication.

Exercice 3

$x = 0{,}65$ *m et* $\varphi = 30{,}6°$. *Réaction* $\mathrm{R} = 59{,}2$ *N et tension* $\mathrm{T} = 116{,}2$ *N.*

Exercice 4

$\mathrm{T}\cos\varphi = \mathrm{T}_0$. *On obtient l'équation d'une chaînette* $y(x) = x_0\,[\mathrm{ch}(x/x_0) - 1]$. $b \simeq \sqrt{3\,a\,\Delta\mathrm{L}/8}$. $\Delta\mathrm{L} = 0{,}24$ *m.*

Exercice 5

On trouve une accélération verticale de la forme $\ddot{x} = \dfrac{m - m'}{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{R}^2} + m + m'}\,g$.

Exercice 6

Période $\mathrm{T} = 2\pi\,\sqrt{\mathrm{R}/g}$.

Exercice 7

Les actions de CORIOLIS *sont nulles… Intégrer seulement les actions d'inertie d'entraînement. On obtient une force appliquée en* P *sur la tige tel que* $\mathrm{OP} = 2l/3$. *La résultante associée est* $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\,m\,l\,\omega^2\,\sin\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}$ *(coordonnées cylindriques).*

Exercice 8

$\mathscr{E}_p(\theta) = -m\,g\,l\,[\cos\theta + \frac{1}{2}\,\eta\,\sin^2\theta]$. *La notion de portrait de phase a été vue en MPSI…*

Exercice 9

$\omega_0 = \frac{m\,v_0}{(\mathrm{M}/3+m)\,a}$; $\Delta\mathscr{E}_c = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+3m}\,v_0{}^2$; *le mouvement ultérieur est soit révolutif, soit oscillatoire pendulaire.*

Exercice 10

$\ddot{x} = \frac{g}{d}\,x$; $x(t) = b\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{d}}t$. *Ne pas s'étonner si l'on trouve une réaction avec une composante horizontale non nulle ! D'ailleurs, pourquoi ne faut-il pas être étonné ?*

Exercice 11

Bien faire attention aux actions extérieures ou intérieures... On obtient $\mathrm{T} = \dfrac{(3a-b)(b-a)}{4b^2}\,mg\,\sin\theta$ *et* $\mathscr{M}_\mathrm{P} = \dfrac{a(b-a)^2}{4b^2}\,mg\,\sin\theta$.

Exercice 12

D'après les lois du frottement solide de NEWTON *(cours de Spé), le bout du pendule qui glisse sur le plan incliné est freiné par une réaction tangentielle opposée au mouvement, de module* $\mathrm{R_T}$ *vérifiant* $\mathrm{R_T} = f\,\mathrm{R_N}$ *où* $\mathrm{R_N}$ *est le module de la réaction normale au plan incliné. Le résultat est* $f = \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha+\beta}\,\tan\theta_0$.

Exercice 13

Pas d'indication.

Exercice 14

Condition $\tan\beta \geqslant 1/f$ *(impossible à réaliser pour des cylindres de tailles voisines).*

Exercice 15

Période des oscillations $\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{fg}}$.

Exercice 16

$t_1 = a_0/v_0$; $x_1 = a_0$; $t_2 = t_1 + \dfrac{\pi+2\varphi}{\omega_0}$; $x_2 = 2a - a_0$; $t_3 = t_2 + \dfrac{2(a_0-a)}{v_0}$; $x_3 = a_0$. *La période est* $\mathrm{T} = 0{,}63$ s *et l'amplitude* $b = 5$ cm. *L'énergie mécanique dissipée est de* $0{,}16$ J.

Exercice 17

On trouve $f \leqslant \tan\theta_0$ *et* $\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{b/g}$.

Exercice 18

$g > a\,\omega^2$ où $\omega^2 = \frac{3mg}{a(\mathrm{M}+3m)}$ *et* $\tan\alpha < \frac{f\mathrm{M}}{\mathrm{M}+9m}$.

Exercice 19

$h = 2a\sin^2(\theta_0/2)$; $\mathrm{F}_0 = mg\tan\theta_0$; $f_0 = \frac{\cos\theta_0\,\sin\theta_0}{3(1+\sin^2\theta_0)}$; $\vec{v}(\mathrm{C}) = \sqrt{\frac{4ga}{3}\,\frac{1+\sin^2\theta_0-\cos\theta_0}{\cos\theta_0}}\,\vec{e_x}$.