DM n$^{\text{o}}$ 19 : Matrices

Problème 1 – Trigonalisation, matrices de Hessenberg et tridiagonalisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous montrons dans ce problème que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable (ou triangularisable), c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure. Nous montrons ensuite que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute matrice est semblable à une matrice de Hessenberg, c'est-à-dire une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $m_{i,j} = 0$ dès lors que $i > j+1$. Ainsi, une matrice M est une matrice de Hessenberg si et seulement si tous ses coefficients situés strictement sous sa diagonale sont nuls, à l'exception eventuelle des coefficients situés sur la première sous-diagonale. Pour terminer nous étudions le cas particulier des matrices symétriques S : dans ce cas, la classe de similitude de S contient au moins une matrice tridiagonale $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, c'est-à-dire telle que $m_{i,j} = 0$ dès lors que $|i-j| > 1$.

Question préliminaire

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Justifier que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice triangulaire supérieure.

Partie I – Autour du polynôme minimal

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Justifier l'existence d'un polynôme Q non nul annulateur de u, c'est-à-dire tel que $Q(u) = 0$.
2. Justifier l'existence d'un unique polynôme unitaire P divisant tout polynôme annulateur de u. Ce polynôme P est appelé polynôme minimal de u.
3. Soit P le polynôme minimal de u.
   (a) Justifier que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de P, alors $u - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas un automorphisme.
   (b) En déduire que λ est racine de P si et seulement s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. On dit dans ce cas que λ est une valeur propre de u, et que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
4. On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et on considère P_0 un facteur irréductible de degré 2 de P.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(P_0(u))$ est non réduit à $\{0\}$, et est stable par u.
   (b) En considérant la famille $(x, u(x))$, pour un vecteur x bien choisi, montrer qu'il existe un plan P de E, stable par u.

Partie II – Trigonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer qu'il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E relativement à laquelle la matrice de u n'a que des coefficients nuls sur sa première colonne, à l'exception éventuelle du coefficient en position $(1,1)$.
   (b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) Soit $\mathcal{B}$ une base relativement à laquelle la matrice M de u soit triangulaire. En étudiant le noyau de $M-\lambda I_n$, montrer que les coefficients diagonaux de M sont des valeurs propres de u (notion définie en partie 1), donc des racines du polynôme minimal.

2. On recherche maintenant une forme plus spécifique de matrice triangulaire représentant u.

(a) (Lemme des noyaux)
Soit A et B deux polynômes **premiers entre eux**. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A(u) \circ B(u)) = \mathrm{Ker}(A(u)) \oplus \mathrm{Ker}(B(u)).$$

(b) En considérant une décomposition en facteurs irréductibles du polynôme minimal de u, en déduire qu'il existe une décomposition

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$$

de E en somme directe de k sous-espaces E_i, $i \in [\![1,k]\!]$, telle que :

(i) chaque E_i est stable par u

(ii) pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'endomorphisme u_i de E_i induit par u admet une unique valeur propre λ_i (notion définie en partie 1)

(iii) Les λ_i, $i \in [\![1,k]\!]$ sont deux à deux distincts.

3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice triangulaire supérieure à diagonale constante, deux blocs différents ayant des coefficients diagonaux différents.

4. On dit qu'une matrice M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.
Montrer qu'une matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si son polynôme minimal est à racines simples.

Partie III – Matrices de Hessenberg

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définies en début de problème.

1. (a) Montrer que $\mathcal{H}_n$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? Est-ce une sous-algèbre ?

(b) Soit $M \in \mathcal{H}_n$ et T une matrice triangulaire supérieure. Montrer que MT et TM appartiennent à $\mathcal{H}_n$.

2. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. En adaptant la preuve de II-1, montrer qu'il existe une base relativement à laquelle la matrice de u est triangulaire par blocs, les blocs diagonaux étant des blocs carrés 1×1 ou 2×2.

(b) En déduire que toute matrice réelle est sembable à une matrice de Hessenberg.

3. Dans cette question, on redémontre le même résultat par une méthode purement algorithmique. Cet algorithme donne une façon effective de trouver une matrice de Hessenberg semblable à une matrice M donnée. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients de PMP^{-1} en position $(i,1)$ pour $i \geqslant 3$ soient tous nuls.

(b) Conclure une nouvelle fois que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Hessenberg.

(c) On suppose définies en Python les 4 fonctions suivantes :

- `echange_lignes(A,i,j)`,
- `echange_colonnes(A,i,j)`,
- `combine_lignes(A,i,j,a)`,
- `combine_colonnes(A,i,j,a)`

retournant une matrice obtenue de A, respectivement par l'échange des lignes i et j, par l'échange des colonnes i et j, par l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, et par l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i + aC_j$.
Écrire une fonction `hessenberg(A)` retournant une matrice de Hessenberg équivalente à la matrice A.

Partie IV – Méthode de Householder

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle.
   (a) Montrer que ${}^tXX$ est un réel strictement positif.
   La norme de X est définie par $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.
   (b) Vérifier que la matrice $S_X = I_k - \dfrac{2}{\|X\|^2} X\,{}^tX$ est une matrice de symétrie, ainsi que la matrice T_X définie par blocs :
   $$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ \hline 0_{k,n-k} & S_X \end{array}\right),$$
   où $0_{i,j}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{i,j}$
2. Soit E_1 la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non colinéaire à E_1 et $X = Y + \|Y\|E_1$.
   Montrer que la matrice S_XY est colinéaire à E_1.
3. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, il existe une matrice P_r obtenue comme produit de matrices de symétrie telle que $P_rMP_r^{-1}$ soit de la forme par blocs
   $$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{H_r} & A_r \\ \hline 0_{n-r,r-1} & \multicolumn{1}{|c|}{Y} & B_r \end{array}\right),$$
   avec $H_r \in \mathcal{H}_r$, $A_r \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $B_r \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Retrouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Hessenberg.
4. Montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice tridiagonale.