DEVOIR SURVEILLÉ 5

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Fonctions Cesàro-continues

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On dit que f est *semi-continue supérieurement* (en abrégé s.c.s.) en x_0 lorsque
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \left]x_0 - \eta; x_0 + \eta\right[, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$
   On dit que f est *semi-continue inférieurement* (en abrégé s.c.i.) en x_0 lorsque
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \left]x_0 - \eta; x_0 + \eta\right[, \qquad f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon.$$
   Démontrer que f est continue en x_0 si, et seulement si, f est s.c.s. et s.c.i. en x_0.
2. On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *Cesàro-continue* en $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on a
   $$\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0\right) \implies \left(\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)\right).$$
   On souhaite déterminer les fonctions qui sont Cesàro-continues en tout point de $\mathbb{R}$.
   a) Démontrer que les fonctions affines sont Cesàro-continues en tout point de $\mathbb{R}$.
   b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est s.c.s. et s.c.i. en x_0 et en déduire que f est continue en x_0.
   c) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en tout point de $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
   $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$
   d) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
      α] Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
      β] Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.
   e) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en tout point de $\mathbb{R}$. Démontrer que f est une application affine. Conclure.

EXERCICE 2

Matrices de Leontief

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *positive* (respectivement *strictement positive*) lorsque tous les coefficients de A sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). On note alors $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$).

Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *productive* lorsque, d'une part, $M \geqslant 0$ et, d'autre part, il existe une matrice colonne P de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P \geqslant 0$ et $P - MP > 0$.

A. Caractérisation des matrices positives

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer $A \geqslant 0$ si, et seulement si, pour toute matrice colonne X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$, on a $AX \geqslant 0$.

B. Caractérisation des matrices productives

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive. On considère P une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P \geqslant 0$ et $P - MP > 0$. On note $m_{i,j}$ (où $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les coefficients de M et p_i (où $1 \leqslant i \leqslant n$) ceux de P.
   a) Démontrer que $P > 0$.
   b) Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X - MX \geqslant 0$.
      α] Soit $k \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_k/p_k = \min\{x_i/p_i : i \in [\![1; n]\!]\}$, démontrer que
      $$\frac{x_k}{p_k}(p_k - m_{k,1}p_1 - \cdots - m_{k,n}p_n) \geqslant 0.$$
      β] En déduire que $X \geqslant 0$.
   c) Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X - MX = 0_{n,1}$. Démontrer que $X = 0_{n,1}$. En déduire que $I_n - M$ est inversible.
   d) À l'aide de la question A, démontrer que $(I_n - M)^{-1} \geqslant 0$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$. Démontrer que A est une matrice productive. *Indication : On pourra utiliser le vecteur colonne d'Attila.*
3. Quelle caractérisation des matrices productives a-t-on ainsi obtenue ?

C. Applications

1. La matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle productive ? Fournir un exemple de matrice 2×2 productive non nulle.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive. Démontrer que ${}^tM$ est productive.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \geqslant 0$ et $2M^2 = M$. En calculant $(I_n - M)(I_n + 2M)$, démontrer que M est productive.

EXERCICE 3

Déjà fait !

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{d}(x; A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$.

Démontrer que l'application $\mathrm{d}_A : x \longmapsto \mathrm{d}(x; A)$ est 1-lipschitzienne.

EXERCICE 4

Théorème de Block–Thielmann
Centrale MP 2014

Une famille $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes à coefficients complexes est dite commutante lorsque

$$\forall n \geqslant 1,\quad \deg(P_n) = n \qquad \text{et} \qquad \forall n, m \geqslant 1,\quad P_n \circ P_m = P_m \circ P_n.$$

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Block–Thielmann (1951) qui décrit toutes les familles commutantes de $\mathbb{C}[X]$.

A. Deux exemples de familles commutantes

1. Donner un exemple vraiment très simple de famille commutante.
2. On considère la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par

$$T_1 = X, \qquad T_2 = X^2 - 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad T_{n+2} = XT_{n+1} - T_n.$$

   a) Calculer T_3.
   b) Établir que, pour tout $n \geqslant 1$, T_n est de degré n.
   c) α] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.
      β] Pour tout $n \geqslant 1$, démontrer que T_n est le seul polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que l'on ait $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.
   d) Démontrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille commutante de $\mathbb{C}[X]$.

B. Commutant de X^2 et $X^2 - 2$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose

$$\mathscr{C}_\alpha = \{Q \in \mathbb{C}[X] : (X^2+\alpha)\circ Q = Q \circ (X^2+\alpha) \text{ et } \deg(Q) \geqslant 1\}.$$

Autrement dit, l'ensemble $\mathscr{C}_\alpha$, appelé commutant de $X^2+\alpha$, est constitué des polynômes Q non constants qui vérifient la relation $Q^2 + \alpha = Q(X^2+\alpha)$.

1. a) Démontrer que tout élément de $\mathscr{C}_\alpha$ est unitaire.
   b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}_\alpha$ contient au plus un polynôme de degré n.
   Indication : Considérer $Q_1, Q_2 \in \mathscr{C}_\alpha$ de même degré et étudier le degré de $R = Q_1 - Q_2$.
2. Justifier que $\mathscr{C}_0 = \{X^n : n \geqslant 1\}$ et $\mathscr{C}_{-2} = \{T_n : n \geqslant 1\}$.
3. Démontrer que $\mathscr{C}_\alpha$ contient un polynôme de degré 3 si, et seulement si, $\alpha \in \{-2; 0\}$.

C. Le théorème de Block–Thielmann

Soit G l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré 1, c'est-à-dire

$$G = \{P \in \mathbb{C}[X] : \deg(P) = 1\}.$$

1. Démontrer que $(G, \circ)$ est un groupe. L'inverse d'un élément U de G sera noté U^{-1}.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Déterminer $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ (en fonction de a, b, c) tels que $X^2 + \alpha = U \circ (aX^2 + bX + c) \circ U^{-1}$.
3. Démontrer que les seules familles commutantes de $\mathbb{C}[X]$ sont les suites $(U^{-1} \circ X^n \circ U)_{n\geqslant 1}$ et $(U^{-1} \circ T_n \circ U)_{n\geqslant 1}$ où U décrit G.

CORRECTION DU DS 5

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

1. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en x_0 si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en x_0 si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. Démontrer que f est continue en x_0 si, et seulement si, f est s.c.s. et s.c.i. en x_0.*

   On raisonne par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que la fonction f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, ce qui revient à écrire que l'on a $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Cette assertion implique que l'on a les deux assertions $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ et $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. Par conséquent, f est s.c.s. et s.c.i. en x_0.

   $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que f est s.c.s. et s.c.i. en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est s.c.s. en x_0, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in \,]x_0 - \eta_1; x_0 + \eta_1[\,,\ f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Comme f est s.c.i. en x_0, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in \,]x_0 - \eta_2; x_0 + \eta_2[\,,\ f(x) \geqslant f(x_0) + \varepsilon$. Posons alors $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Comme $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ est contenu dans $]x_0 - \eta_1; x_0 + \eta_1[$ et $]x_0 - \eta_2; x_0 + \eta_2[$, on en déduit que $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$, ce que l'on peut encore écrire sous la forme $\forall x \in \,]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\,,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, f est continue en x_0.

   En conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \text{ si, et seulement si, } f \text{ est s.c.s. et s.c.i. en } x_0.}$$

2. *On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est Cesàro-continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque, pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$, on a $\big((u_1 + \cdots + u_n)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0\big) \Longrightarrow \big((f(u_1) + \cdots + f(u_n))/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)\big)$. L'objet de cette question est déterminer les fonctions qui sont Cesàro-continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

   a) *Démontrer que les fonctions affines sont Cesàro-continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

   Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\big((u_1 + \cdots + u_n)/n\big)_{n \geqslant 1}$ converge vers x_0. Alors

   $$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} = \frac{(au_1 + b) + \cdots + (au_n + b)}{n} = a\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + b,$$

   ce qui donne

   $$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ax_0 + b = f(x_0).$$

   Donc f est Cesàro-continues en x_0.
   On en conclut que

   $$\boxed{\text{les fonctions affines sont Cesàro-continues en tout point de } \mathbb{R}.}$$

b) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est s.c.s. et s.c.i. en x_0 et en déduire que f est continue en x_0.*

Démontrons que f est s.c.s. en x_0. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas s.c.s. en x_0. On sait alors qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \quad \exists x_\eta \in \left]x_0 - \eta; x_0 + \eta\right[, \qquad f(x_\eta) > f(x_0) + \varepsilon_0.$$

En prenant successivement $\eta = 1$, $\eta = 1/2$, ..., $\eta = 1/n$, ..., on obtient l'existence d'une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad f(u_n) > f(x_0) + \varepsilon_0.$$

Le théorème des gendarmes nous dit alors que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers x_0. Il s'ensuit, d'après le théorème de Cesàro, que $\big((u_1 + \cdots + u_n)/n\big)_{n \geqslant 1}$ converge aussi vers x_0. Dès lors, la Cesàro-continuité de f en x_0 dit que

$$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0).$$

Par ailleurs, comme $\forall n \geqslant 1, \; f(u_n) > f(x_0) + \varepsilon_0$, on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} > f(x_0) + \varepsilon_0,$$

Ces deux derniers résultats sont clairement contradictoires : absurde ! En conclusion, f est s.c.s. en x_0.

En raisonnant de même, on démontre que f est s.c.i. en x_0.

D'après la résultat de la question 1, on en déduit que f est continue en x_0.

Ainsi,

$$\boxed{\text{la Cesàro-continuité implique la continuité.}}$$

c) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Cesàro-continue en tout point de $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f((x+y)/2) = (f(x) + f(y))/2$.*

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Considérons la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} = x$ et $u_{2n-1} = y$. On a alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2mm] \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

ce qui permet de constater que

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x+y}{2}.$$

La Cesàro-continuité implique alors que

$$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} = \begin{cases} \dfrac{f(x) + f(y)}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2mm] \dfrac{f(x) + f(y)}{2} + \dfrac{f(y)}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

donc

$$\frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.}$$

d) *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application Cesàro-continue en tout point de* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 0$.

α] *Démontrer que, pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a* $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En posant $x = z$ et $y = 0$ dans la relation de la question précédente, on a

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad f\Big(\frac{z}{2}\Big) = \frac{f(z)}{2}.$$

En remplaçant z par $x + y$, il vient

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x+y)}{2}.$$

En rapprochant ce résultat de celui de la question précédente, il vient

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{f(x+y)}{2},$$

c'est-à-dire

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).}$$

β] *Démontrer qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f(x) = ax$.

Posons $a = f(1)$ et démontrons que $f = a \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$. Nous l'avons déjà fait en cours.
Comme $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, on a $f(0) = 0$.
Par ailleurs, une récurrence immédiate permet de justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = an$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$, ce qui démontre que f est impaire sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = am$.
Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on écrit $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ d'où

$$f(r) = \frac{q}{q} f(r) = \frac{1}{q} f(qr) = \frac{1}{q} f(p) = \frac{1}{q} ap = ar,$$

ce qui démontre que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La caractérisation séquentielle de la densité nous permet d'introduire une suite $(r_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui tend vers x. Comme f et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ coïncident sur $\mathbb{Q}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = ar_n$. Comme f est continue en x (puisqu'elle est Cesàro-continue en x), un passage à la limite ($n \to +\infty$) dans cette égalité implique que $f(x) = ax$.
En conclusion,

$$\boxed{f = a \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

e) *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application Cesàro-continue en tout point de* $\mathbb{R}$. *Démontrer que* f *est une application affine. Conclure.*

Posons $g = f - f(0)$ de sorte que $g(0) = 0$.
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\big((u_1 + \cdots + u_n)/n\big)_{n \geqslant 1}$ converge vers x_0. Alors

$$\frac{g(u_1) + \cdots + g(u_n)}{n} = \frac{f(u_1) - f(0) + \cdots + f(u_n) - f(0)}{n} = \frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} - f(0)$$

ce qui implique, puisque f est Cesàro-continue en x_0, que

$$\frac{g(u_1) + \cdots + g(u_n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0) - f(0) = g(x_0).$$

Cela démontre que g est Cesàro-continue en x_0.
Ainsi, g est une fonction Cesàro-continue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$. Le résultat de la question précédente nous dit alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g = a \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$. Cela donne $f = a \operatorname{Id}_{\mathbb{R}} + f(0)$, ce qui signifie que

$$\boxed{f \text{ est une application affine.}}$$

En réunissant les résultats des questions a) et e), on en conclut que

$$\boxed{\text{les applications de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R} \text{ qui sont Cesàro-continues sont exactement les applications affines.}}$$

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous les coefficients de A sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). On note alors $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$). Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive lorsque, d'une part, $M \geqslant 0$ et, d'autre part, il existe une matrice colonne P de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P \geqslant 0$ et $P - MP > 0$.

A. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer $A \geqslant 0$ si, et seulement si, pour toute matrice colonne X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$, on a $AX \geqslant 0$.*

On procède par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que $A \geqslant 0$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \geqslant 0$. On note $a_{i,j}$ (où $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les coefficients de A, x_j (où $1 \leqslant j \leqslant n$) ceux de X et $(ax)_i$ (où $1 \leqslant i \leqslant n$) ceux de AX. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a $(ax)_i = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$. Comme tous les $a_{i,j}$ et tous les x_j sont positifs ou nuls, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $(ax)_i \geqslant 0$. Donc $AX \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que pour toute matrice colonne X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$, on a $AX \geqslant 0$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. On choisit pour X la matrice colonne élémentaire C_j dont tous les coefficients sont nuls sauf le j-ème qui vaut 1. On a bien $C_j \geqslant 0$. L'hypothèse nous dit que $AC_j \geqslant 0$. Or AC_j est la j-ème colonne de A, donc tous les coefficients de la j-ème colonne de A sont positifs ou nuls. Comme j est quelconque dans $[\![1; n]\!]$, on en déduit bien que $A \geqslant 0$.

En conclusion,

$$\boxed{A \geqslant 0 \text{ si, et seulement si, pour tout } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } X \geqslant 0, \text{ on a } AX \geqslant 0.}$$

B. 1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive. On considère P une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P \geqslant 0$ et $P - MP > 0$. On note $m_{i,j}$ (où $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les coefficients de M et p_i (où $1 \leqslant i \leqslant n$) ceux de P.*

a) *Démontrer que $P > 0$.*

Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Les coefficients de la matrice $P - MP$ étant strictement positifs, on sait que $p_i - (m_{i,1}p_1 + \cdots + m_{i,n}p_n) > 0$, c'est-à-dire $p_i > m_{i,1}p_1 + \cdots + m_{i,n}p_n$. Comme tous les $m_{i,j}$ et tous les p_j sont positifs ou nuls, on a $m_{i,1}p_1 + \cdots + m_{i,n}p_n \geqslant 0$. Il s'ensuit que $p_i > 0$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{P > 0.}$$

b) *Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X - MX \geqslant 0$.*

α] *On considère $k \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_k/p_k = \min\{x_i/p_i : i \in [\![1; n]\!]\}$, démontrer l'inégalité $(x_k/p_k)(p_k - m_{k,1}p_1 - \cdots - m_{k,n}p_n) \geqslant 0$.*

Les coefficients de $X - MX$ étant positifs ou nuls, on sait que $x_i - (m_{i,1}x_1 + \cdots + m_{i,n}x_n) \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. Pour i valant k, on obtient $x_k - (m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n) \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$x_k \geqslant m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n.$$

Comme $x_k/p_k \leqslant x_i/p_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et comme les $m_{i,j}$ et les p_i sont positifs ou nuls, on a

$$m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n \geqslant m_{k,1}\frac{p_1}{p_k}x_k + \cdots + m_{k,n}\frac{p_n}{p_k}x_k = \frac{x_k}{p_k}(m_{k,1}p_1 + \cdots + m_{k,n}p_n),$$

donc

$$x_k \geqslant \frac{x_k}{p_k}(m_{k,1}p_1 + \cdots + m_{k,n}p_n),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{x_k}{p_k}(p_k - m_{k,1}p_1 - \cdots - m_{k,n}p_n) \geqslant 0.}$$

β] *En déduire que $X \geqslant 0$.*

Les coefficients de $P - MP$ étant strictement positifs, on a

$$p_k - (m_{k,1}p_1 + \cdots + m_{k,n}p_n) > 0,$$

donc, d'après la question précédente et le fait que $p_k > 0$, on a

$$x_k \geqslant 0.$$

Comme x_k/p_k est la valeur minimale des x_i/p_i et comme les p_i sont positifs, on en déduit que $\forall i \in [\![1;n]\!]\,,\ x_i \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$X \geqslant 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{si } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ est tel que } X - MX \geqslant 0, \text{ on a } X \geqslant 0.}$$

c) *Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X - MX = 0_{n,1}$. Démontrer que $X = 0_{n,1}$. En déduire que $I_n - M$ est inversible.*

L'hypothèse $X - MX = 0_{n,1}$ nous dit que $X - MX \geqslant 0$ et $(-X) - M(-X) \geqslant 0$. La question précédente implique alors que $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$. On a donc $X = 0_{n,1}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ est tel que } X - MX = 0_{n,1}, \text{ alors } X = 0_{n,1}.}$$

Ce résultat signifie que le système linéaire $(I_n - M)X = 0_{n,1}$ admet une unique solution $0_{n,1}$ (celle-ci convient). Par conséquent, c'est un système de Cramer. Dès lors, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $(I_n - M)X = Y$ est également de Cramer (on garde les mêmes pivots !). D'après le cours, cela signifie que

$$\boxed{I_n - M \text{ est inversible.}}$$

d) *À l'aide de la question A, démontrer que $(I_n - M)^{-1} \geqslant 0$.*

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \geqslant 0$. Posons $Y = (I_n - M)^{-1}X$. On a $(I_n - M)Y = X$, c'est-à-dire $Y - MY = X$. Comme $X \geqslant 0$, on a $Y - MY \geqslant 0$. La question b) nous dit alors que $Y \geqslant 0$. On a donc $(I_n - M)^{-1}X \geqslant 0$. On a ainsi démontré que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$, on a $(I_n - M)^{-1}X \geqslant 0$. D'après la question A, cela implique que

$$\boxed{(I_n - M)^{-1} \geqslant 0.}$$

2. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$. Démontrer que A est une matrice productive.*

Notons U le vecteur colonne d'Attila, c'est-à-dire la matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Posons $P = (I_n - A)^{-1}U$. Comme $U \geqslant 0$ et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$, la question A nous dit que $P \geqslant 0$.
Par ailleurs, on a $P - AP = (I_n - A)(I_n - A)^{-1}U = U > 0$.
Cela démontre que

$$\boxed{A \text{ est une matrice productive.}}$$

3. *Quelle caractérisation des matrices productives a-t-on ainsi obtenue ?*

On a démontré que

$$\boxed{M \text{ est une matrice productive si, et seulement si, } \begin{cases} M \geqslant 0, \\ I_n - M \text{ est inversible,} \\ (I_n - M)^{-1} \geqslant 0. \end{cases}}$$

C. 1. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est-elle productive ? Fournir un exemple de matrice 2×2 productive (non nulle).*

La matrice A est positive. De plus la matrice $I_2 - A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (son déterminant vaut $-1/3$) et son inverse vaut $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas positive. Par conséquent, d'après B. 3.,

$$\boxed{A \text{ n'est pas productive.}}$$

La matrice diagonale $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est positive. La matrice $I_2 - B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (ses coefficients diagonaux sont non nuls) et son inverse vaut $(I_2 - B)^{-1} = \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est positive. Par conséquent, d'après B. 3.,

$$\boxed{B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est productive.}}$$

2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive. Démontrer que ${}^tM$ est productive.*

Comme M est positive, ${}^tM$ l'est aussi. Par ailleurs, comme $I_n - M$ est inversible, sa transposée $I_n - {}^tM$ l'est aussi. Enfin, on a $(I_n - {}^tM)^{-1} = {}^t\big((I_n - M)^{-1}\big)$ donc $(I_n - {}^tM)^{-1}$ est positive puisque $(I_n - M)^{-1}$ l'est. D'après le résultat de B. 3., on en conclut que ${}^tM$ est productive. En conclusion,

$$\boxed{\text{la transposée d'une matrice productive est productive.}}$$

3. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \geqslant 0$ et $2M^2 = M$. En calculant $(I_n - M)(I_n + 2M)$, démontrer que M est productive.*

Comme $2M^2 = M$, on a $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + M - 2M^2 = I_n$. Cela démontre que $I_n - M$ est inversible d'inverse $I_n + 2M$. Comme M est positive, il en est de même de $I_n + 2M$ et donc de $(I_n - M)^{-1}$. Le résultat de B. 3. nous dit alors que M est productive. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est telle que } M \geqslant 0 \text{ et } 2M^2 = M, \text{ alors } M \text{ est productive.}}$$

EXERCICE 3

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{d}(x; A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Démontrer que l'application $\mathrm{d}_A : x \longmapsto \mathrm{d}(x; A)$ est 1-lipschitzienne.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x - a| : a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car A ne l'est pas) minorée par 0, donc $\inf\{|x - a| : a \in A\}$ existe d'après la propriété de la borne inférieure. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est bien définie.}}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$|x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

Comme $\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - a|$ (évidemment), on a

$$\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

En passant à la borne inférieure sur $a \in A$ dans cette inégalité, il vient alors

$$\mathrm{d}_A(x) \leqslant |x - y| + \mathrm{d}_A(y),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y) \leqslant |x - y|.$$

En échangeant le rôle de x et de y, on obtient

$$\mathrm{d}_A(y) - \mathrm{d}_A(x) \leqslant |y - x|.$$

En combinant ces résultats, on a

$$|\mathrm{d}_A(x) - \mathrm{d}_A(y)| \leqslant |x - y|.$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{d}_A \text{ est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

EXERCICE 4

Une famille $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ est dite commutante lorsque $\forall n \geqslant 1,\ \deg(P_n) = n$ et $\forall n, m \geqslant 1,\ P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

A. *On donne ici deux exemples de familles commutantes.*

1. *Donner un exemple vraiment très simple de famille commutante.*

   Pour tous $n, m \geqslant 1$, on a $\deg(X^n) = n$ et $X^n \circ X^m = X^{mn} = X^{nm} = X^m \circ X^n$, donc

   $$\boxed{\text{la famille } (X^n)_{n\geqslant 1} \text{ est commutante.}}$$

2. *Sot la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes définie par $T_1 = X$, $T_2 = X^2 - 2$ et $\forall n \geqslant 1,\ T_{n+2} = XT_{n+1} - T_n$.*

   a) *Calculer T_3.*

   On a $T_3 = XT_2 - T_1 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$, donc

   $$\boxed{T_3 = X^3 - 3X.}$$

   b) *Établir que, pour tout $n \geqslant 1$, T_n est de degré n.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'assertion $\mathscr{P}(n)$: « T_n est de degré n ».

   Initialisation : Les polynômes $T_1 = X$ et $T_2 = X^2 - 2$ sont de degrés respectifs 1 et 2. Donc, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$. Comme $\deg(T_{n+1}) = n+1$, on a $\deg(XT_{n+1}) = n+2$ d'après la règle sur le degré d'un produit. Comme $\deg(T_n) = n$, $2XT_{n+1}$ et T_n sont alors de degrés distincts et le cas d'égalité de la règle sur le degré d'une somme dit que $\deg(XT_{n+1} - T_n) = \max\{\deg(XT_{n+1})\,;\deg(T_n)\} = n+2$. Donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence double, on peut affirmer que

   $$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$$

   c) α] *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.*

   Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{Q}(n)$: $T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.

   Initialisation : On a $T_1(2\cos\theta) = 2\cos\theta = 2\cos(1\times\theta)$ donc $\mathscr{Q}(1)$ est vraie. Par ailleurs, on a $T_2(2\cos\theta) = (2\cos\theta)^2 - 2 = 2(2\cos^2\theta - 1) = 2\cos(2\times\theta)$ donc $\mathscr{Q}(2)$ est vraie.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ et $\mathscr{Q}(n+1)$ sont vraies et prouvons $\mathscr{Q}(n+2)$. On a

   $$\begin{aligned} T_{n+2}(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) \qquad \text{par définition de } (T_n) \\ &= 4\cos\theta\cos(n+1)\theta - 2\cos n\theta \qquad \text{par hyp. de réc.} \\ &= 2\cos(n+2)\theta + 2\cos n\theta - 2\cos n\theta \\ &= 2\cos(n+2)\theta, \end{aligned}$$

   où l'on a utilisé la formule $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Donc $\mathscr{Q}(n+2)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence double, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, c'est-à-dire

   $$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.}$$

   β] *Pour $n \geqslant 1$, prouver que T_n est le seul polynôme P tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.*

   Soit $n \geqslant 1$. Considérons $S_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_n(\cos\theta) = 2\cos n\theta$ et posons $R_n = T_n - S_n$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

   $$R_n(2\cos\theta) = T_n(2\cos\theta) - S_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta - 2\cos n\theta = 0,$$

   où l'on a utilisé le résultat de la question précédente et la définition de S_n. Par conséquent, R_n admet $2\cos\theta$ comme racine pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Or, lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, $2\cos\theta$ parcourt le segment $[-2;2]$ donc R_n admet une infinité de racines. Cela implique que $R_n = 0$, c'est-à-dire $S_n = T_n$. En conclusion,

   $$\boxed{T_n \text{ est le seul polynôme } P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } \forall \theta \in \mathbb{R},\ P(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.}$$

d) *Démontrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille commutante de $\mathbb{C}[X]$.*

On a déjà vu, à la question A. 2. a), que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \deg(T_n) = n.$$

Soient $n, m \geqslant 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$(T_n \circ T_m)(2\cos\theta) = T_n\big(T_m(2\cos\theta)\big) = T_n\big(2\cos m\theta\big) = 2\cos(nm\theta),$$

ce qui démontre, d'après l'unicité démontrée à la question précédente, que

$$T_n \circ T_m = T_{nm}.$$

En renversant les rôles de n et m, on obtient

$$T_m \circ T_n = T_{mn}.$$

Comme $nm = mn$ (pardi !), on a

$$T_n \circ T_m = T_m \circ T_n.$$

En conclusion,

$$\boxed{(T_n)_{n\geqslant 1} \text{ est une famille commutante de } \mathbb{C}[X].}$$

B. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $\mathscr{C}_\alpha = \{Q \in \mathbb{C}[X] : (X^2+\alpha)\circ Q = Q \circ (X^2+\alpha)$ et $\deg(Q) \geqslant 1\}$.*

1. a) *Démontrer que tout élément de $\mathscr{C}_\alpha$ est unitaire.*

Soit $Q \in \mathscr{C}_\alpha$. Notons $a \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de Q et n son degré, de sorte que $Q = aX^n + R$ où $\deg(R) < n$. L'égalité $Q^2 + \alpha = Q(X^2+\alpha)$ se réécrit alors sous la forme $\big(aX^n + R\big)^2 + \alpha = a(X^2+\alpha)^n + R(X^2+\alpha)$, c'est-à-dire

$$a^2X^{2n} + \underbrace{2aX^nR + R^2 + \alpha}_{\text{de degré } \leqslant 2n-1} = aX^{2n} + \underbrace{a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^{2k}\alpha^{n-k} + R(X^2+\alpha)}_{\text{de degré } \leqslant 2n-1}.$$

En identifiant les coefficients dominants, on obtient $a^2 = a$, ce qui donne $a = 1$ puisque $a \neq 0$. Donc

$$\boxed{\text{tout élément de } \mathscr{C}_\alpha \text{ est unitaire.}}$$

b) *En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble $\mathscr{C}_\alpha$ contient au plus un polynôme de degré n.*

Soit $n \geqslant 1$. Considérons Q_1 et Q_2 deux éléments de C_α de degré n et posons $R = Q_1 - Q_2$. Comme Q_1 et Q_2 sont tous les deux de degré n et unitaires (d'après la question précédente), les monômes dominants de Q_1 et Q_2 s'annulent lorsqu'on calcule $R = Q_1 - Q_2$. Donc

$$\deg(R) \leqslant n-1.$$

Par ailleurs, comme Q_1 et Q_2 appartiennent à $\mathscr{C}_\alpha$, on a

$${Q_1}^2 + \alpha = Q_1(X^2+\alpha) \qquad \text{et} \qquad {Q_2}^2 + \alpha = Q_2(X^2+\alpha),$$

ce qui donne par soustraction

$${Q_1}^2 - {Q_2}^2 = Q_1(X^2+\alpha) - Q_2(X^2+\alpha),$$

c'est-à-dire

$$(Q_1+Q_2)\times R = R(X^2+\alpha).$$

En utilisant les règles sur le degré d'un produit et d'une composée, on obtient

$$\deg(Q_1+Q_2) + \deg(R) = \deg(R)\times 2.$$

Or Q_1 et Q_2 sont tous les deux de degré n et unitaires, donc $\deg(Q_1+Q_2) = n$, ce qui donne

$$n + \deg(R) = 2\deg(R).$$

Cela implique que

$$\deg(R) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \deg(R) = n.$$

Comme la seconde possibilité est interdite (on a dit un peu plus haut que $\deg(R) \leqslant n-1$), on en déduit que $\deg(R) = -\infty$, c'est-à-dire $R = 0$ ou encore $Q_1 = Q_2$. En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \text{ l'ensemble } \mathscr{C}_\alpha \text{ contient au plus un polynôme de degré } n.}$$

2. *Déterminer* $\mathscr{C}_0$ *et* $\mathscr{C}_{-2}$.

L'ensemble $\mathscr{C}_0$ contient tous les X^n pour n décrivant $\mathbb{N}^*$ puisque on a déjà vu que $(X^n)_{n\geqslant 1}$ est une famille commutante. Pour un entier n fixé, le résultat de la question précédente nous dit qu'il ne peut y avoir d'autre polynôme de degré n dans $\mathscr{C}_0$ que X^n. Donc

$$\boxed{\mathscr{C}_0 = \{X^n : n \geqslant 1\}.}$$

Remarquons que $X^2 - 2 = T_2$. Comme on a déjà vu que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille commutante, on en déduit que $\mathscr{C}_{-2}$ contient tous les T_n pour n décrivant $\mathbb{N}^*$. Pour un entier n fixé, le résultat de la question précédente nous dit qu'il ne peut y avoir d'autre polynôme de degré n dans $\mathscr{C}_{-2}$ que T_n. Donc

$$\boxed{\mathscr{C}_{-2} = \{T_n : n \geqslant 1\}.}$$

3. *Démontrer que* $\mathscr{C}_\alpha$ *contient un polynôme de degré* 3 *si, et seulement si,* $\alpha \in \{-2; 0\}$.

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathscr{C}_\alpha$ contienne un polynôme Q de degré 3. Alors Q est unitaire (d'après 1. a)), ce qui permet de l'écrire sous la forme $Q = X^3 + aX^2 + bX + c$. L'égalité $Q^2 + \alpha = Q(X^2 + \alpha)$ se traduit par

$$(X^3 + aX^2 + bX + c)^2 + \alpha = (X^2 + \alpha)^3 + a(X^2 + \alpha)^2 + b(X^2 + \alpha) + c$$

Le second membre ne contient que des monômes de degré pair, donc les coefficients de X, X^3 et X^5 sont nuls dans le premier membre. Cela donne

$$a = c = 0.$$

L'égalité devient alors $(X^3 + bX)^2 + \alpha = (X^2 + \alpha)^3 + b(X^2 + \alpha)$, ce qui donne les conditions suivantes

$$(1) : \ 3\alpha = 2b \qquad (2) : \ 3\alpha^2 + b = b^2 \qquad (3) : \ \alpha^3 + b\alpha = \alpha.$$

En reportant (1) dans (2), on obtient $4b^2 + 3b = 3b^2$, c'est-à-dire $b^2 + 3b = 0$ ou encore

$$b = 0 \qquad \text{ou} \qquad b = -3.$$

Dans le cas où $b = 0$, la relation (1) nous dit que $\alpha = 0$ et la relation (3) est satisfaite. Dans le cas où $b = -3$, la relation (1) nous dit que $\alpha = -2$ et la relation (3) est satisfaite. Donc

$$(\alpha = 0 \quad \text{et} \quad Q = X^3) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = -2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 3X).$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, on sait, d'une part, que X^3 commutent (pour la loi $\circ$) avec X^2 donc $X^3 \in \mathscr{C}_0$ et, d'autre part, que $T_3 = X^3 - 3X$ commutent (pour la loi $\circ$) avec $T_2 = X^2 - 2$ donc $T_3 \in \mathscr{C}_{-2}$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}_\alpha \text{ contient un polynôme de degré 3 si, et seulement si, } \alpha \in \{-2; 0\}.}$$

C. *Soit* $G = \{P \in \mathbb{C}[X] : \deg(P) = 1\}$.

1. *Démontrer que* $(G, \circ)$ *est un groupe. L'inverse d'un élément* U *de* G *sera noté* U^{-1}.

Pour tous $U, V \in G$, on a $\deg(V \circ U) = \deg(V) \times \deg(U) = 1 \times 1 = 1$ d'après la règle sur le degré d'une composée. Donc $\circ$ est une loi interne sur G.

Le cours nous dit que la loi $\circ$ est associative sur $\mathbb{C}[X]$, donc aussi sur G.

On sait que X est élément neutre de $\circ$ dans $\mathbb{C}[X]$. Or $X \in G$ donc X est élément neutre de $\circ$ dans G.

Soit $U = mX + p \in G$ où $m, p \in \mathbb{C}$ avec $m \neq 0$. On pose $V = \dfrac{1}{m}(X - p)$ et l'on constate que $V \in G$ et $U \circ V = V \circ U = X$, donc U est inversible dans G d'inverse V.

Tout ceci démontre que

$$\boxed{(G, \circ) \text{ est un groupe.}}$$

2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Déterminer $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $X^2+\alpha = U\circ(aX^2+bX+c)\circ U^{-1}$. On exprimera U et α en fonction de a, b, c.*

Soit $U \in G$ tel que $U = mX + p$ où $m, p \in \mathbb{C}$ avec $m \neq 0$. On a $U^{-1} = \dfrac{1}{m}(X-p)$. Alors

$$\begin{aligned}
& X^2+\alpha = U\circ(aX^2+bX+c)\circ U^{-1} \\
\iff \quad & X^2+\alpha = m\Big(\frac{a}{m^2}(X-p)^2 + \frac{b}{m}(X-p)+c\Big)+p \\
\iff \quad & mX^2+m\alpha = aX^2+(-2ap+bm)X+(ap^2-bmp+cm^2+mp) \\
\iff \quad & \begin{cases} m = a \\ 0 = -2ap+bm \\ m\alpha = ap^2-bmp+cm^2+mp \end{cases} \\
\iff \quad & \begin{cases} m = a \\ p = \dfrac{b}{2} \\ \alpha = \dfrac{2b-b^2+4ac}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{pour } \alpha = \frac{2b-b^2+4ac}{4} \in \mathbb{C} \text{ et } U = aX+\frac{b}{2} \in G \text{ on a } X^2+\alpha = U\circ(aX^2+bX+c)\circ U^{-1}.}$$

3. *Démontrer le théorème de Block–Thielmann : les seules familles commutantes de $\mathbb{C}[X]$ sont les suites $(U\circ X^n\circ U^{-1})_{n\geqslant 1}$ et $(U\circ T_n\circ U^{-1})_{n\geqslant 1}$ où U décrit G.*

▷ Analyse :

Soit $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une famille commutante.

Comme $\deg(P_2) = 2$, le résultat de la question précédente nous dit qu'il existe $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $X^2+\alpha = U\circ P_2\circ U^{-1}$.

On sait que P_3 commute avec P_2 (c'est-à-dire $P_3\circ P_2 = P_2\circ P_3$). Par conséquent, si on pose $Q_3 = U\circ P_3\circ U^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}
Q_3\circ(X^2+\alpha) &= U\circ P_3\circ U^{-1}\circ U\circ P_2\circ U^{-1} \\
&= U\circ P_3\circ P_2\circ U^{-1} \\
&= U\circ P_2\circ P_3\circ U^{-1} \\
&= U\circ P_2\circ U^{-1}\circ U\circ P_3\circ U^{-1} \\
&= (X^2+\alpha)\circ Q_3,
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $Q_3 \in \mathscr{C}_\alpha$.

Or

$$\deg(Q_3) = \deg(U)\times\deg(P_3)\times\deg(U^{-1}) = 1\times 3\times 1 = 3$$

et l'on sait que $\mathscr{C}_\alpha$ contient un polynôme de degré 3 si, et seulement si, $\alpha \in \{-2; 0\}$. Donc

$$\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -2.$$

Dans le cas $\alpha = 0$, on a $X^2 = U\circ P_2\circ U^{-1}$. Soit $n \geqslant 1$. Les mêmes calculs que ci-dessus nous disent que $U\circ P_n\circ U^{-1}$ est un polynôme de degré n qui commute avec X^2. Or, d'après le résultat de la question B. 2., on sait que X^n est le seul polynôme de degré n qui commute avec X^2, donc $U\circ P_n\circ U^{-1} = X^n$, c'est-à-dire $P_n = U^{-1}\circ X^n\circ U$.

Dans le cas $\alpha = -2$, on a $X^2-2 = U\circ P_2\circ U^{-1}$, c'est-à-dire $T_2 = U\circ P_2\circ U^{-1}$. Soit $n \geqslant 1$. Les mêmes calculs que ci-dessus nous disent que $U\circ P_n\circ U^{-1}$ est un polynôme de degré n qui commute avec T_2. Or, d'après le résultat de la question B. 2., on sait que T_n est le seul polynôme de degré n qui commute avec T_2, donc $U\circ P_n\circ U^{-1} = T_n$, c'est-à-dire $P_n = U^{-1}\circ T_n\circ U$.

▷ Synthèse :

En reprenant les calculs ci-dessus, il est très simple de vérifier que, pour tout $U \in G$, les familles $(U^{-1}\circ X^n\circ U)_{n\geqslant 1}$ et $(U^{-1}\circ T_n\circ U)_{n\geqslant 1}$ sont toutes les deux commutantes.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les seules familles commutantes de } \mathbb{C}[X] \text{ sont les suites} \\ (U^{-1}\circ X^n\circ U)_{n\geqslant 1} \text{ et } (U^{-1}\circ T_n\circ U)_{n\geqslant 1} \text{ où } U \text{ décrit } G.\end{array}}$$