

Corr. 1 Ondes sphériques (exo de cours !)

1. L'équation de propagation des ondes à trois dimensions est

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est vérifiée dans le vide par \vec{E} et par \vec{B} (voir le cours pour la démonstration...).

2.a. En posant $F(r,t) = r\psi(r,t)$, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

d'où $F(r,t) = f(t-r/c) + g(t+r/c)$

$$\text{soit } \psi(r,t) = \frac{f(t-r/c)}{r} + \frac{g(t+r/c)}{r}$$

2.b. Le terme $f(t-r/c)/r$ représente une **onde sphérique** se propageant dans le sens des r croissants radialement (valeur uniforme sur une sphère $r = C^{\text{t}}$ et les surfaces équi-retard sont des sphères); elle est dite **divergente**.

Le terme $g(t+r/c)/r$ représente une **onde sphérique** se propageant dans le sens des r décroissants radialement; celle-ci est dite **convergente**.

Si le point O est une source lumineuse, le point O est le point de départ d'une **onde sphérique divergente** uniquement (principe de causalité).

2.c. L'amplitude est en $1/r$ et donc les surfaces équi-amplitude sont des **sphères** dont la surface croît comme le carré de $r = OM$. Or, les grandeurs énergétiques liées à l'onde sont reliées à son amplitude de façon **quadratique** (exemple

du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{B}/\mu_0$). Elles vont donc décroître comme $1/r^2$, ce qui a pour effet de permettre la conservation de l'énergie véhiculée par l'onde sur des surfaces qui augmentent comme r^2 .

Par exemple, la puissance électromagnétique traversant une sphère dans le vide

$$\mathcal{P} = \oint_{\text{sphère}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

est indépendante du rayon de la sphère.

Remarque : en s'inspirant de cet exercice, on peut faire une démonstration avec les mains des formules des potentiels retardés... Je vous laisse y réfléchir.

Corr. 2 Polarisation circulaire

Soit une onde plane progressive polarisée circulairement (gauche si $\epsilon = 1$ ou droite si $\epsilon = -1$) :

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \epsilon \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} -\epsilon \sin(\omega t - kz) \\ \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z$$

On constate que le vecteur de Poynting est constant, ce qui est logique puisque les modules des champs sont constants !

Corr. 3 Puissance d'un laser

Do it yourself ! Juste pour vérifier vos résultats, on trouve numériquement un champ électrique de 87 V.mm^{-1} et un champ magnétique de $290 \mu\text{T}$.

Corr. 4 Superposition de deux oepm

1. Puisqu'il s'agit d'une **oepm dans le vide**, on a le droit d'affirmer que

$$k_1 = \frac{\omega}{c}$$

et on peut utiliser, pour calculer le champ magnétique, la relation de structure

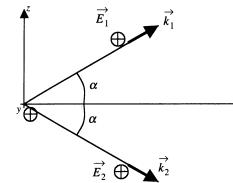
$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$$

En posant $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$

de polarisation parallèle à (Oy), on trouve

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} (-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z) \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$$

2. La figure suivante précise la superposition des ondes réalisée :



On a $\vec{k}_2 = \frac{\omega}{c} (\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z)$

par symétrie de \vec{k}_1 . On en déduit le champ électrique

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$$

et la relation de structure pour cette **oepm dans le vide** donne

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z) \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$$

Remarque : L'opération $\alpha \rightarrow -\alpha$ permettait d'obtenir \vec{E}_2 et \vec{B}_2 plus vite...

La linéarité des équations de Maxwell permet de superposer les champs et on tire (avec un peu de trigonométrie)

$$\vec{E} = 2E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} z \sin \alpha\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \cos \alpha\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \left[-\sin\left(\frac{\omega}{c} z \sin \alpha\right) \sin \alpha \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \cos \alpha\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{\omega}{c} z \sin \alpha\right) \cos \alpha \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \cos \alpha\right) \vec{e}_z \right]$$

3. La phase est $\omega t - \frac{\omega}{c} x \cos \alpha$ donc il y a propagation de l'onde totale suivant (Ox). De plus, l'amplitude dépendant de

z à x fixé (c'est-à-dire dans un plan d'onde), l'**onde n'est pas plane** : attention, ce point rend caduque l'utilisation de la relation de structure pour l'onde totale ! Vérifiez effectivement que

$$\vec{B} \neq \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

L'**onde est stationnaire suivant (Oz)** d'après les termes faisant intervenir $\frac{\omega}{c} z \sin \alpha$.

D'après la phase écrite précédemment pour l'onde, la vitesse de phase est

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \alpha}$$

Le fait que v_ϕ soit supérieure à c n'est pas gênant car la vitesse de phase ne représente pas la vitesse de propagation de l'énergie (d'ailleurs, l'onde étudiée a une énergie totale associée infinie...). On ne contredit pas ici le principe de relativité d'Einstein (ouf!).

4. La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde totale est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin \alpha\right) \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\text{soit } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z \sin \alpha\right) \right] \cos \alpha \vec{e}_x$$

On peut vérifier que $\vec{\Pi} \neq \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2$ car $\vec{\Pi}$ n'est pas défini à partir des champs par une opération linéaire... (c'est ce qui rend par ailleurs l'utilisation des complexes très dangereuse avec le vecteur de Poynting!).

On voit aussi que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle \neq \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos \alpha \vec{e}_x$$

Cela signifie que l'intensité lumineuse (proportionnelle au vecteur de Poynting moyen) est telle que

$$I_{\text{totale}} \neq I_1 + I_2$$

On dit qu'il y a des interférences entre les ondes dans ce cas ! On peut tout à fait faire naître de l'obscurité en un point où l'on superpose deux lumières incidentes !

Remarque : Pour les 5/2, on voit ici sur un écran de coordonnée $x = C^{\text{t}}$ des franges d'interférence parallèles à (Oz) avec l'interfrange $i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \dots$

5. La puissance surfacique moyenne demandée est

$$\langle \langle \Pi \rangle \rangle_z = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos \alpha$$

6. La densité volumique d'énergie associée au champ électromagnétique de l'onde est

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

donc $\langle \langle u_{em} \rangle \rangle_z = \epsilon_0 E_0^2$

avec les champs déjà calculés. On en déduit la vitesse v_e de propagation de l'énergie (moyenne) associée à l'onde comme suit (bilan d'énergie, as usual...) : pendant dt , l'énergie moyenne qui traverse une section S suivant \vec{e}_x est

$$\underbrace{(v_e dt S)}_{\text{vol. de l'nrj inc.}} \langle \langle u_{em} \rangle \rangle_z$$

Or, cette énergie est aussi (par le flux du vecteur de Poynting moyen pendant dt) :

$$\langle \langle \Pi \rangle \rangle_z S dt$$

En identifiant ces deux expressions, on trouve

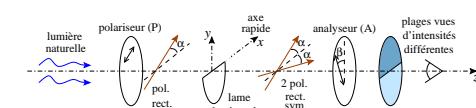
$$v_e = \frac{\langle \langle \Pi \rangle \rangle_z}{\langle \langle u_{em} \rangle \rangle_z} = c \cos \alpha$$

On vérifie que $v_e < c$, ce qui est rassurant vis-à-vis du principe de relativité d'Einstein.

Remarque : Les 5/2 peuvent montrer que v_e correspond à la vitesse de groupe... Au fait, les 5/2 ont-ils vu qu'il s'agit d'un mode possible de propagation dans un guide d'onde plan-plan ?

Corr. 5 Analyseur à pénombre

Une figure s'impose :



Les angles sont en fait orientés en accord avec l'axe (Oz).

1. En utilisant la figure précédente, mais vue de face (axe (Oz) vers soi), pour le demi-faisceau supérieur, on a avec la loi de Malus l'intensité obtenue en sortie

$$I_1 = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right) = I_0 \sin^2(\alpha - \beta)$$

où I_0 est l'intensité après le polariseur (P). Pour la plage inférieure, en tenant compte du changement de polarisation imposé par la lame-demi-ondre, on obtient

$$I_2 = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta + \alpha\right) = I_0 \sin^2(\alpha + \beta)$$

Finalement, le rapport des intensités est

$$r = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)}$$

2. On a $r = 1$ lorsque les angles vérifient

$$\alpha - \beta = \pm(\alpha + \beta) [\pi]$$

L'angle β étant fixé, les seules solutions possibles (à 180° près) sont

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ et } \alpha_2 = 90^\circ$$

Le cas $\alpha_1 = 0^\circ$ correspond à $I_1 = I_2 = I_0 \sin^2 \beta \ll I_0$. C'est donc la position d'équipénombre.

Le cas $\alpha_2 = 90^\circ$ correspond à $I_1 = I_2 = I_0 \cos^2 \beta \simeq I_0$: les deux plages sont très lumineuses.

Pour une même erreur de positionnement $\delta\alpha$, soit $\alpha = \alpha_i \pm \delta\alpha$, l'écart d'intensité $|I_1 - I_2|$ est le même pour les deux cas $i \in \{1;2\}$. Cependant, le **contraste**

$$\Gamma = \left| \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right|$$

est bien meilleur à l'équipénombre : cela explique pourquoi on utilise l'analyseur à pénombre en recherchant la position $\alpha = 0^\circ$. L'œil est bien plus sensible aux variations d'intensité autour de cette position et la mesure est ainsi plus précise !

Corr. 6 Création d'un champ électromagnétique

L'invariance du problème parallèlement au plan (xOy) montre que **les composantes des champs électrique et magnétique ne dépendent que de z et de t** .

Tout plan parallèle à (xOz) est de symétrie positive pour \vec{j}_s donc

$$\vec{B} = B(z, t) \vec{e}_y$$

Tout plan parallèle à (yOz) est de symétrie négative pour \vec{j}_s donc

$$\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x$$

Les courants surfaciques sont sources d'ondes dont les champs ne dépendent que de z et t donc elles sont forcément planes et ainsi se propagent perpendiculairement à (xOy) ! Or, ces ondes sont solutions de l'équation de d'Alembert et donc sont une superposition d'**oep**s et, en vertu du principe de causalité, elles ne peuvent que s'éloigner du plan (xOy) ! Ainsi,

$$\vec{E}(z > 0, t) = f(t - z/c) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}(z < 0, t) = f(t + z/c) \vec{e}_x$$

Il est important de noter que la fonction f est la même par raison de symétrie positive par (xOy).

Ensuite, puisqu'on a des oep dans le vide, on a le droit d'utiliser la relation de structure $\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$, d'où

$$\vec{B}(z > 0, t) = \frac{1}{c} f(t - z/c) \vec{e}_y$$

$$\text{et} \quad \vec{B}(z < 0, t) = -\frac{1}{c} f(t + z/c) \vec{e}_y$$

ce qui respecte encore les symétries...

Il reste à écrire les relations de passage. Ici, la relation utile est celle sur le champ magnétique tangentiel (puisque on donne \vec{j}_s). On en déduit que

$$\frac{2}{c} f(t) \vec{e}_y = \mu_0 j_s \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

$$\text{donc} \quad f(t) = -\frac{\mu_0 c j_s}{2} = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos \omega t$$

En conclusion, le champ électromagnétique solution est

$$\boxed{\vec{E}(z > 0, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos[\omega(t - z/c)] \vec{e}_x}$$

$$\boxed{\vec{E}(z < 0, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos[\omega(t + z/c)] \vec{e}_x}$$

$$\boxed{\vec{B}(z > 0, t) = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \cos[\omega(t - z/c)] \vec{e}_y}$$

$$\boxed{\vec{B}(z < 0, t) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \cos[\omega(t + z/c)] \vec{e}_y}$$

Remarque: La relation de passage sur le champ électrique normal donne $\sigma = 0$. Il est possible d'avoir $\sigma = 0$ et $\vec{j}_s \neq \vec{0}$ si le \vec{j}_s résulte par exemple du mouvement de familles de porteurs de charges contraires mais de vitesses différentes...

Corr. 7 Étude d'un faisceau laser

Do it yourself !