Problème n° 3 : Réels

Problème 1 – (Inégalités classiques)

Le but du problème est de montrer comment un certain nombre d'inégalités classiques en analyse peuvent être obtenues grâce à un outil commun, à savoir l'étude de la convexité de certaines fonctions. On s'intéresse notamment à la comparaison des moyennes, à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'inégalité de Hölder qui en est une généralisation. Les parties I et II introduisent la notion de fonctions convexes et étudient des exemples de fonctions convexes qui seront utilisées dans la suite du problème. On pourra admettre les résultats de cette partie pour aborder les parties suivantes.

On admettra que si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue en $x \in I$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I convergeant vers x, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

On admettra également la formule de dérivation des fonctions composées : si f est une fonction dérivable d'un intervalle I dans un intervalle J, et g est une fonction dérivable de J dans un intervalle K, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

On s'efforcera à écrire toutes les sommes avec le signe $\sum$, de sorte à éviter autant que faire se peut les « $\cdots$ ».

Partie I – Convexité

Dans cette partie, on étudie certaines propriétés des fonctions convexes. Aucun prérequis sur ces fonctions n'est requis.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Cette inégalité sera appelée « inégalité de convexité ».
On dit que la fonction f est concave si $-f$ est convexe. On n'utilisera lors du devoir aucune caractérisation des fonctions convexes autre que cette inégalité. En particulier, tout argument utilisant une caractérisation par la dérivée ou la dérivée seconde sera refusé.

1. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Montrer que $z \in]x, y[$ si et seulement s'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.
2. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. En écrivant, pour $n \geqslant 3$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ sous la forme $\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)y$, pour un certain y défini en fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et des λ_i, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0, 1[^n$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

3. Nous présentons dans cette question quelques règles permettant de construire des fonctions convexes ou concaves.
   (a) Soit f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I. Montrer que $f + g$ est convexe sur I. Donner un énoncé similaire pour les fonctions concaves.
   (b) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, à valeurs dans J, et g une fonction convexe croissante sur J. Montrer que $g \circ f$ est convexe sur I.

4. Dans cette question, on montre qu'une version affaiblie de l'inégalité de convexité suffit à caractériser la convexité d'une fonction. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $(x,y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$. Le but de cette question est de montrer que f est convexe.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1,\ldots,x_{2^n}) \in I^{2^n}$, on a :
$$f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k).$$

   (b) Montrer que pour tout $(x,y) \in I^2$, et tout $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < 2^n$,
$$f\left(\frac{px+(2^n-p)y}{2^n}\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + \frac{2^n-p}{2^n}f(y).$$

   (c) Montrer que l'ensemble E défini par $E = \left\{\frac{p}{2^n} \mid (p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ et } p < 2^n\right\}$ est dense dans $]0,1[$.

   (d) Montrer que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, dont la limite est λ.

   (e) En déduire que f est convexe sur I.

Partie II – Exemples de fonctions convexes ou concaves

1. Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$). Montrer que f est concave et convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Dans cette question, on prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_p(x) = x^p$ est convexe. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{k}$, en discutant suivant la parité de p.

   (b) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et tout $k \in [\![0,p]\!]$, on a :
$$x^k y^{p-k} + x^{p-k}y^k \leqslant x^p + y^p.$$

   (c) À l'aide de la formule du binôme, en déduire que
$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p+y^p)$$

   (d) En déduire que f_p est convexe.

   On admettra que plus généralement, f_p est convexe pour tout p réel supérieur ou égal à 1
3. Dans cette question, on prouve que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. On fixe x et y deux réels strictement positifs tels que $x < y$. On considère la fonction f de la variable t définie pour tout $t \in [0,1]$ par :
$$f(t) = \ln(tx+(1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).$$

   (a) Montrer que f' s'annule au plus une fois sur $[0,1]$ (attention, c'est par rapport à t qu'on dérive !)

   (b) Déterminer le signe de f sur $[0,1]$ et conclure.

Partie III – Inégalités classiques

1. **Comparaison des moyennes**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que :
$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

(b) En déduire que pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k}}.$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder**

(a) En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, montrer, pour tout $n \geqslant 2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas particulier suivant :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \forall (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

Indication : on pourra utiliser la question I-2 avec la famille $\left(\frac{x_k}{y_k}\right)$ et des λ_k bien choisis.

(b) Comment en déduire la validité de l'inégalité lorsque certains x_i et y_i peuvent être nul ? Lorsqu'on n'a plus d'hypothèse de positivité ?

(c) Soit p un réel tel que $p > 1$. On pose q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Démontrer de même que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(inégalité de Hölder).

(d) En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(inégalité de Minkowski, à rapprocher d'une inégalité triangulaire)

Indication : majorer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1}$.

Partie IV – Inégalité maîtresse

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ concave. On définit la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = y\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

(a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$,

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \leqslant f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \leqslant f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

2. Quelle inégalité retrouve-t-on en appliquant ce résultat pour $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$?

3. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Quelle formule retrouve-t-on en appliquant la question 1 à la fonction $x \mapsto (x^{\frac{1}{p}} + 1)^p$? (on ne demande pas de justifier la concavité de cette fonction).

Partie V – Applications combinatoires

Dans cette partie, on étudie une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à un problème de combinatoire énumérative.

1. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ une famille de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \leqslant \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}}$$

2. Considérons $M_1, \dots, M_n$ des points distincts du plan et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$ des droites 2 à 2 distinctes du plan. Définissons I, le nombre d'incidences, comme étant égal au nombre de couples (k, ℓ) d'indices tels que $M_k \in \mathcal{D}_\ell$.

   (a) Justifier que pour tous $j \neq k$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_j}\mathbb{1}_{M_i\in\mathcal{D}_k} \leqslant 1$$

   (b) En déduire que $I \leqslant \sqrt{nm^2 + mn^2}$.