Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 25/01/2019

DM n° 11 : Suites, approximations

Problème 1 – Formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.
2. En déduire une expression explicite de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1}$.
4. En déduire la formule de Wallis :
$$\lim_{p \to +\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Partie II – Formule de Stirling.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. On admettra que pour toute suite (u_n) de limite nulle,

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^4).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α non nul qu'on déterminera tel que $S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^2}$
2. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.
3. En déduire que (S_n) admet une limite finie S dans $\mathbb{R}$.
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En considérant $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S.
5. En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.

Problème 2 – Formule de Stirling améliorée

Le but de ce court problème est de déterminer le second terme du développement asymptotique de $n!$, autrement dit, un équivalent de $n! - s_n$, où s_n est l'équivalent donné par la formule de Stirling, supposée connue.
On rappelle, ou on admet, que pour tout x au voisinage de 0 :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Partie I – Sommation d'équivalents et de o

1. Soit $\sum b_n$ une série à termes positifs convergente et (a_n) une suite telle que $a_n = o(b_n)$.
   (a) Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, et tout $p \geqslant n$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} b_k.$$

(b) En déduire que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Soit $\sum b_n$ une série à termes positifs convergente, et (a_n) une suite telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie II – Équivalent et développement de certaines séries de Riemann

1. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que si $\alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
2. Soit pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
3. En étudiant la convergence de $\sum(v_n - v_{n-1})$, en déduire l'existence d'une constante γ telle que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
4. En recherchant un équivalent du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_n - v_{n-1})$ de la série de terme général $v_n - v_{n-1}$, montrer que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Partie III – Développement asymptotique de la factorielle

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. Sans justifier autant qu'en II-1, montrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - n\ln(n)$. Montrer que
$$u_n - u_{n-1} = -1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
3. En déduire qu'il existe une constante ℓ telle que
$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) - \ell + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

‘

4. En déduire enfin que
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{12n}\right)\right).$$

Problème 3 – Estimation de la complexité d'algorithmes de type diviser pour régner

Un algorithme de type « diviser pour régner » est un algorithme récursif ramenant la résolution d'un problème de taille n à la résolution d'un ou plusieurs problèmes de taille $\frac{n}{b}$ (à ± 1 près pour avoir un entier). Ainsi, la complexité d'un tel algorithme vérifiera une relation du type :

$$\forall n \geqslant 2, \quad T(n) = \alpha T\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + \beta T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + u_n, \tag{1}$$

initialisée par la donnée de $T(0)$ et $T(1)$. Dans cette expression, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière (par défaut) de x, et $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière par excès de x, b est un certain entier supérieur ou égal à 2, et α et β sont des entiers naturels tels que $\alpha + \beta \geqslant 1$.

Le but du problème est d'étudier le comportement asymptotique de suites vérifiant la relation de récurrence (1). Ce comportement dépendra fortement de l'ordre de grandeur de u_n.

On note dans tout le problème $a = \alpha + \beta$ et $\gamma = \log_b(a)$. Ainsi, $b^\gamma = a$. Par ailleurs, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell(n) = \lfloor \log_b(n) \rfloor$ et $\ell'(n) = \lceil \log_b(n) \rceil$.

Enfin, on suppose que $T(0) > 0$ et $T(1) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

Question préliminaire

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(n) > 0$.

Partie I – Cas où $u_n = \Theta(n^\gamma)$

Nous supposons dans cette partie que $u_n = \Theta(n^\gamma)$. Nous rappelons que ceci signifie que $u_n = O(n^\gamma)$ et $n^\gamma = O(u_n)$, donc qu'il existe des réels m et M strictement positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad mn^\gamma \leqslant u_n \leqslant Mn^\gamma.$$

Les inégalités peuvent être prises pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, car les deux suites ne s'annulent pas. Nous nous donnons deux tels réels m et M.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b(n) - \ell(n)}{\ell(n)} = 0$.
   En déduire que $\ell(n) \underset{+\infty}{\sim} \log_b(n)$.
   On admettra qu'on a de même $\ell'(n) \underset{+\infty}{\sim} \log_b(n)$.
2. Montrer que $\ell\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) = \ell(n) - 1$ et $\ell'\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) = \ell'(n) - 1$
3. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$P(k) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{b-1}{b^i}\right).$$
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln(P(k)) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{b-1}{b^i}$, et en déduire que $P(k)$ est majorée.
4. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = P(\ell'(n) - 1)$.
   Montrer que pour tout $n > b$, $\left(1 + \dfrac{b-1}{n}\right) Q_{\lceil \frac{n}{b} \rceil} \leqslant Q_n$.
5. On définit $K = \displaystyle\max_{n \in [\![1, b-1]\!]} \left(\frac{T(n)}{n^\gamma Q_n^\gamma} - M(\ell'(n) - 1)\right)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{T(n)}{n^\gamma} \leqslant Q_n^\gamma \left(K + M(\ell'(n) - 1)\right)$$
6. En déduire que $T(n) = O(n^\gamma \log_b(n))$ puis $T(n) = O(n^\gamma \ln(n))$.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que $T(n) = \Omega(n^\gamma \ln(n))$.
   Ainsi, on a obtenu $T(n) = \Theta(n^\gamma \ln(n))$.
8. L'algorithme d'exponentiation rapide étudié en cours d'informatique a une complexité vérifiant la relation
   $$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + u_n,$$
   où $u_n = \Theta(1)$. Déterminer le comportement asymptotique de T
9. L'algorithme de tri fusion a une complexité vérifiant la relation
   $$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + u_n,$$
   où $u_n = \Theta(n)$. Montrer que le tri fusion a un coût en $\Theta(n \ln(n))$.

Partie II – Le cas $u_n = O(n^{\gamma - \varepsilon})$.

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_n = O(n^{\gamma-\varepsilon})$.

1. La suite Q_n étant définie comme dans la partie 1, montrer qu'il existe K tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{T(n)}{n^{\gamma-\varepsilon}} \leqslant n^{\varepsilon} Q_n^{\gamma} \left(K + M \sum_{i=0}^{\ell'(n)-1} \frac{1}{b^{\varepsilon i}} \right).$$

2. En déduire que $T(n) = O(n^{\gamma})$.
3. Démontrer de même que $T(n) = \Omega(n^{\gamma})$.
4. En considérant que l'addition se fait en temps linéaire, l'algorithme de Karatsuba étudié en TP a une complexité vérifiant :

$$T(n) = 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + u_n,$$

où $u_n = \Theta(n)$. Quel est le comportement asymptotique de cette complexité ?

Il existe aussi une règle dans le cas où $u_n = \Omega(n^{\gamma+\varepsilon})$. Dans ce cas, c'est la fonction u_n qui détermine la complexité : avec certaines hypothèses supplémentaires sur u_n, on peut montrer que $T(n) = \theta(u_n)$.