ARITHMÉTIQUE CORRECTION

Exercice 1

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. a) *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n \wedge F_{n-1} = 1$.*

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \quad F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n.$$

Initialisation : On a $F_2F_0 - F_1^2 = 1 \times 0 - 1^2 = -1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - {F_{n+1}}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - {F_{n+1}}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + {F_n}^2 \\ &= -(F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n.}$$

On a $[(-1)^n F_{n+1}]F_{n-1} + [(-1)^{n+1}F_n]F_n = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, donc d'après le théorème de Bézout,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad F_n \wedge F_{n-1} = 1.}$$

2. a) *Démontrer que pour tout $m \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$, on a $F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$.*

Pour tout $m \geqslant 1$, on pose

$$\mathscr{Q}(m) : \quad \forall n \geqslant 1,\ F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n.$$

Initialisation : $\mathscr{Q}(1)$ revient à démontrer que $\forall n \geqslant 1,\ F_{n+1} = F_1F_{n+1} + F_0F_n$, ce qui est clair puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Hérédité : Fixons $m \geqslant 1$ tel que $\mathscr{P}(m)$ est vraie. On a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n &= (F_m + F_{m-1})F_{n+1} + F_mF_n && \text{par déf. de } F \\ &= F_m(F_{n+1} + F_n) + F_{m-1}F_{n+1} \\ &= F_mF_{n+2} + F_{m-1}F_{n+1} && \text{par déf. de } F \\ &= F_{n+1+m} && \text{d'après } \mathscr{P}(m), \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{P}(m+1)$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure que

$$\boxed{\forall m \geqslant 1, \quad \forall n \geqslant 1, \qquad F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n.}$$

b) *Soient $m \geqslant 1$, $0 \leqslant r < m$ et $k \geqslant 1$. Démontrer que $F_{km+r} \wedge F_m = F_{(k-1)m+r} \wedge F_m$.*

On a $F_{km+r} = F_m F_{(k-1)m+r+1} + F_{m-1} F_{(k-1)m+r}$ d'après la relation de la question précédente. On voit ainsi que $F_{(k-1)m+r} \wedge F_m$ divise F_{km+r} et donc que $F_{(k-1)m+r} \wedge F_m$ divise $F_m \wedge F_{km+r}$.

De même, on voit que $F_{km+r} \wedge F_m$ divise $F_{m-1}F_{(k-1)m+r}$. Or F_m et F_{m-1} sont premiers entre eux, d'après la question 1, donc $F_{km+r} \wedge F_m$ et F_{m-1} sont également premiers entre eux. Le lemme de Gauß implique alors que $F_{km+r} \wedge F_m$ divise $F_{(k-1)m+r}$ et donc aussi que $F_{km+r} \wedge F_m$ divise $F_{(k-1)m+r} \wedge F_m$.

Finalement, on a bien

$$\boxed{F_{km+r} \wedge F_m = F_{(k-1)m+r} \wedge F_m.}$$

c) *Soit m, n deux entiers naturels. Démontrer que $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$. En déduire, que F_n et F_m sont premiers entre-eux si, et seulement si, $n \wedge m$ est égal à 1 ou 2.*

On note k le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par m de sorte que $n = km+r$ avec $k \geqslant 0$ et $0 \leqslant r < m$. En itérant le résultat de la question précédente, on a

$$F_n \wedge F_m = F_{km+r} \wedge F_m = F_{(k-1)m+r} \wedge F_m = \cdots = F_r \wedge F_m.$$

En itérant cette formule, on voit que $F_m \wedge F_n = F_{r_1} \wedge F_m = F_{r_2} \wedge F_{r_1} = \cdots$ où les r_i désignent les restes successifs qui apparaissent dans l'algorithme d'Euclide. En fin de procédé, on a donc

$$F_m \wedge F_n = F_{m \wedge n} \wedge F_0 = F_{m \wedge n} \wedge 0 = F_{m \wedge n}.$$

Donc

$$\boxed{\forall m \geqslant 1, \quad \forall n \geqslant 1, \qquad F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}.}$$

Les deux seuls termes de la suite de Fibonacci qui sont égaux à 1 sont F_1 et F_2, donc

$$\boxed{F_n \text{ et } F_m \text{ sont premiers entre-eux si, et seulement si, } m \wedge n \text{ est égal à 1 ou 2.}}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\binom{2n}{1} \wedge \binom{2n}{3} \wedge \cdots \wedge \binom{2n}{2n-1}$.

Notons δ le pgcd recherché.

On a

$$\delta \;\Big|\; \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}.$$

Posons

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k},$$

de sorte que

$$P_n + I_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} \qquad \text{et} \qquad P_n - I_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k = (1-1)^{2n} = 0,$$

ce qui donne

$$P_n = I_n = 2^{2n-1}.$$

On a donc

$$\delta \,|\, 2^{2n-1},$$

ce qui signifie que

$$\delta \text{ est une puissance de } 2.$$

Or δ divise $\binom{2n}{1} = 2n$, donc

$$\delta \,|\, 2^{1+v_2(n)}.$$

Enfin, pour tout $k \in [\![0;2n]\!]$ impair, on a

$$k\binom{2n}{k} = 2n\binom{2n-1}{k-1}$$

donc

$$2^{1+v_2(n)} \;\Big|\; k\binom{2n}{k}$$

et comme $2^{1+v_2(n)}$ et k sont premiers entre eux puisque k est impair, on en déduit que

$$2^{1+v_2(n)} \;\Big|\; \binom{2n}{k}.$$

Il s'ensuit que

$$2^{1+v_2(n)} \mid \delta.$$

Donc

$$\boxed{\bigwedge_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{1+v_2(n)}.}$$