Problème n° 20 : Algèbre linéaire matricielle

Attention à ne pas confondre la notion de co-diagonalisabilité développée dans ce problème avec la notion de codiagonalisabilité usuelle (diagonalisabilité en base commune). Remarquez la subtile nuance orthographique.

Problème 1 – Co-diagonalisation (Mines 2001)

Dans tout ce problème, l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geqslant 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel E dans lui-même. Une application u de E dans lui-même est semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple (x, y) de vecteurs de l'espace vectoriel E, la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Partie I –

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. **Premières propriétés.**

   Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

   (a) Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

   (b) Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.

   (c) Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u de E, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:

   $$E_\mu = \{x \in E \mid u(x) = \mu x\}.$$

   Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

   (d) Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

2. **Matrice associée à une application semi-linéaire**

   Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x, de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ est associée une matrice colonne X d'éléments $x_1, \dots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

   (a) Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $\mathcal{B}$ une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

   $$Y = A\overline{X}.$$

   La matrice colonne $\overline{X}$ est la matrice conjuguée (coefficient par coefficient) de la matrice colonne X.

(b) Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, ($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A\overline{X} = \mu X.$$

On rappelle également que $Y \neq 0$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ de A si la relation suivante est vérifiée :

$$AY = \lambda Y.$$

Dans la suite, toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

3. **Exemples**

(a) Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

(b) Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$.**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

(a) Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

(b) Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geqslant 0$) de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur co-propre associé :

$$A\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A, en envisageant les deux cas suivants :

(i) les vecteurs $A\overline{X}$ et X sont liés ;

(ii) les vecteurs $A\overline{X}$ et X sont indépendants.

(c) En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit une valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit qur le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure**

Dans cette question, la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls)

(a) Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

(b) Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit une valeur propre de la matrice A.

(c) Soit A la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser $X = \begin{pmatrix} a + i\,b \\ c + i\,d \end{pmatrix}$.

6. **Une caractérisation des valeurs co-propres**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + \mathrm{i}\, C.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, défini par blocs par la relation suivante :

$$D = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C & -B \end{array} \right).$$

Partie II –

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible ($S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) telle que la relation

$$B = SA\overline{S}^{-1}$$

soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. La matrice $\overline{S}$ est la matrice conjuguée (coefficient par coefficient) de S.

Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

1. **Une relation d'équivalence**

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \iff \exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad B = SA\overline{S}^{-1}.$$

Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

2. **Indépendance des vecteurs co-propres**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, soient $X_1, \ldots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \ldots, \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p, $p = 1, 2, \ldots, k$, ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Longrightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$), la famille $(X_1, \ldots, X_k)$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p, $p = 1, 2, \ldots, n$, positives ou nulles, ($\lambda_p \geqslant 0$), distinctes les unes des autres ($p \neq q \Longrightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$), la matrice A est co-diagonalisable.

3. **Quelques propriétés**

(a) Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ($S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) ; soit A la matrice définie par la relation

$$A = S\overline{S}^{-1}.$$

Calculer la matrice produit $A\overline{A}$.

(b) Soit A une matrice carrée complexes d'ordre n telle que

$$A\overline{A} = I_n.$$

Démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation ci-dessous

$$S(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} A + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} I_n,$$

soit inversible. Calculer, en donnant au réel θ une telle valeur, la matrice $A\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.

4. **Une condition nécessaire**

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}A\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A\overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles, et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A\overline{A}$.

5. **Une condition suffisante**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) la matrice $A\overline{A}$ est diagonalisable

(ii) les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$ sont positives ou nulles

(iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A\overline{A}$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon qu'elles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ont respectivement les multiplicités $n_1, \dots, n_k$ (la multiplicité d'une valeur propre est la dimension du sous-espace propre associé). Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ, semblable à la matrice $A\overline{A}$, s'écrit par blocs, avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, il existe une matrice S inversible telle que

$$A\overline{A} = S\Lambda S^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = S^{-1}A\overline{S}.$$

(a) Démontrer les relations :

$$B\overline{B} = \overline{B}B; \qquad B\Lambda = \Lambda B.$$

(b) Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression, chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_k \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = P\Delta\overline{P}^{-1}.$$

En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) est co-diagonalisable.

6. **Exemples**

(a) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

(On pourra admettre le résultat suivant : toute matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

(b) Soient A, B, C et D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?