Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DS n^o 10

Problème : la fonction $\zeta(\cdot)$ de Riemann

—— ○ ——

Partie I : premières propriétés

1. Soit $x \in I$. La série définissant $\zeta(x)$ est une série à termes positifs, donc est croissante. De plus, en posant la fonction $\lambda : t \longmapsto \dfrac{1}{t^x} = t^{-x}$, alors la fonction $\lambda(\cdot)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et décroissante. On peut mettre en place un encadrement série / intégrale, de sorte que :
$$\forall n \geqslant 2,\ f_n(x) = \lambda(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \lambda(t)\ dt.$$
On en déduit pour tout entier $N \geqslant 2$:
$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = 1 + \sum_{n=2}^{N} f_n(x) \leqslant 1 + \int_{1}^{N} \lambda(t)\ dt.$$
Or,
$$\int_{1}^{N} \lambda(t)\ dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^N \leqslant \frac{1}{x-1}.$$
En conclusion, la série définissant $\zeta(x)$ est croissante et majorée par $1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1}$, donc est convergente.
2. Soient $x < y$ dans I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que :
$$f_n(y) \leqslant f_n(x).$$
Il suffit d'effectuer la sommation de cette inégalité lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$, ce qui donne :
$$\zeta(y) \leqslant \zeta(x).$$
La fonction ζ est bien décroissante sur I.
3. Fixons un réel x dans I. Alors,
$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$
On effectue une majoration à l'aide d'intégrales de la quantité :
$$R(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=4}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} t^{-x}\ dt = \int_{3}^{+\infty} t^{-x}\ dt = \frac{1}{x-1}\ \frac{1}{3^{x-1}} = \circ\left(\frac{1}{3^x}\right).$$

On obtient ce qu'il faut car :

$$\frac{1}{3^x} + \circ\left(\frac{1}{3^x}\right) = \mathscr{O}\left(\frac{1}{3^x}\right).$$

4. (a) La série harmonique diverge vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Pour n_0 assez grand, la somme partielle dépasse $M+1$ strictement.

(b) La fonction $S_{n_0} : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n_0} f_k(x)$ est une somme finie de fonctions continues donc est continue. De plus, $S_{n_0}(1) > M+1$. En prenant $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]1, 1+\eta],\ |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(1)| \leqslant 1,$$

donc :

$$S_{n_0}(x) \geqslant S_{n_0}(1) - 1 > M.$$

(c) En reprenant la démarche précédente, pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall x \in]1, 1+\eta[,\ \zeta(x) \geqslant S_{n_0}(x) > M.$$

Par les quantificateurs et la définition, on a ce qu'il faut.

5. Supposons que la fonction $\zeta(\cdot)$ soit une fraction rationnelle. Il existerait deux polynômes premiers entre eux $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in I,\ \zeta(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

La fonction $\psi : x \longmapsto \zeta(x) - 1$ reste une fraction rationnelle et la fonction ψ tend vers 0 en $+\infty$.

Par conséquent, en notant $r = \deg(P-Q)$ et $s = \deg(Q)$, alors :

$$\forall x \in I,\ \psi(x) = \frac{P(x) - Q(x)}{Q(x)},$$

et $r < s$.

En notant $a\,x^r$ et $b\,x^s$ les termes dominants dans $P(x) - Q(x)$ et de $Q(x)$ respectivement, on obtient :

$$\psi(x) \sim \frac{a}{b\,x^{s-r}}.$$

On en déduit :

$$\frac{a}{b\,x^{s-r}} \sim \frac{1}{2^x},$$

donc :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^{s-r}} = \frac{b}{a}.$$

Cependant, par les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^{s-r}} = +\infty.$$

On obtient une contradiction. La fonction $\zeta(\cdot)$ n'est pas une fraction rationnelle sur I.

Partie II : dérivation d'une série de fonctions

6. Soit $t \in S$. Comme $h_n(t) = \mathcal{O}(u_n)$ et que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente (en fait, $|u_n| = u_n$ ici), alors la série $\sum_n h_n(t)$ est convergente ce qui signifie que la suite des sommes partielles $H_N(t)$ converge.

7. (a) Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que :

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que pour tout $t \in S$,

$$|K(t) - H_{N_0}(t)| = \left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} h_n(t) \right| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |h_n(t)| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

(b) En reprenant les notations déjà mises en place, soit $\alpha \in S$.
Soit $\varepsilon > 0$. On trouve N_0 comme dans la question 7.(a).
La fonction H_{N_0} est continue car il s'agit d'une somme finie de fonctions continues.
Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in S,\ |t - \alpha| \leqslant \eta \Longrightarrow |H_{N_0}(t) - H_{N_0}(\alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que pour tout $t \in S$ tel que $|t - \alpha| \leqslant \eta$:

$$|K(t) - K(\alpha)| \leqslant |K(t) - H_{N_0}(t)| + |H_{N_0}(t) - H_{N_0}(\alpha)| + |H_{N_0}(\alpha) - K(\alpha)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction K est continue en α, pour tout $\alpha \in S$, donc est continue sur S.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_0,\ \forall t \in S,\ |K(t) - H_N(t)| \leqslant \varepsilon,$$

en réitérant le raisonnement de la question 7.(a).
Il suffit maintenant d'intégrer cette inégalité et d'utiliser l'inégalité triangulaire. Pour tout entier $N \geqslant N_0$, on obtient :

$$\left| \int_a^b H_N(t)\ dt - \int_a^b K(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |K(t) - H_N(t)|\ dt \leqslant \int_a^b \varepsilon\ dt = (b-a)\ \varepsilon.$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, on a ce qu'il faut.

8. (a) Soit $t \in S$. On applique la question 7. avec $h_n = g_n'$ et le segment S d'extrémités t_0 et t.
On obtient alors :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \int_{t_0}^t H_N(u)\ du = \int_{t_0}^t \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(u)\ du.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t} H_N(u)\ du = \sum_{n=0}^{N} \int_{t_0}^{t} g_n'(u)\ du = \sum_{n=0}^{N} g_n(t) - \sum_{n=0}^{N} g_n(t_0).$$

La quantité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} g_n(t_0)$ admet par hypothèse une limite finie $G(t_0)$ lorsque N tend vers $+\infty$. La quantité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} g_n(t)$ admet donc une limite finie $G(t)$, lorsque N tend vers $+\infty$.

(b) De plus,

$$G(t) - G(t_0) = \int_{t_0}^{t} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(u)\ du.$$

La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n'$ est continue par la question 7.(b) et la fonction G apparaît comme une primitive de cette fonction continue. On obtient alors exactement ce qu'il faut.

9. On effectue l'application numérique avec $g_n = f_n$, donc :

$$g_n' = f_n' : x \longmapsto -\frac{\ln n}{n^x}.$$

Prenons un réel α strictement entre 1 et a. Alors,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{a-\alpha}} = 0,$$

par les croissances comparées.

On peut donc appliquer la question 8. avec $u_n = \dfrac{C}{n^\alpha}$ – pour une constante C suffisamment grande – de série convergente et de façon à avoir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [a,b],\ |g_n'(t)| \leqslant u_n,$$

et $t_0 = a$ par exemple car on sait que la série $\displaystyle\sum_n f_n(t_0)$ converge puisque $t_0 > 1$.

La fonction G définie en 8.(a) n'est autre que la fonction $\zeta(\cdot)$.

10. On effectue une récurrence sur l'entier p pour montrer que la fonction $\zeta(\cdot)$ est de classe C^p sur le segment $S = [a,b]$ et que l'on peut dériver terme à terme p fois dans la série définissant $\zeta(\cdot)$.

• On sait que $\zeta(\cdot)$ est de classe C^1 sur S et que :

$$\zeta' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'.$$

• Supposons que la fonction $\zeta(\cdot)$ soit de classe C^p sur S et que :

$$\zeta^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(p)}.$$

• Or,
$$f_n^{(p)} : x \longmapsto (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$
On va appliquer la question 8. à $g_n = f_n^{(p)}$. Chaque g_n est de classe C^1 et comme par les croissances comparées, en prenant $\alpha \in]1, a[$:
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^{p+1} n}{n^{a-\alpha}} = 0,$$
alors il existe une constante $C > 0$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [a, b], \ |g_n'(t)| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}.$$
On peut appliquer le 8. pour avoir la classe C^1 de la fonction $\zeta^{(p)}$: la fonction ζ est bien de classe C^{p+1} et on peut encore dériver terme à terme la série $\zeta^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(p)}$ pour avoir :
$$\zeta^{(p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(p+1)}.$$
On a ce qu'il faut au rang suivant.

11. « Être de classe C^∞ » est une notion locale. Si $t_0 > 1$. il existe $\eta > 0$ tel que le segment $S = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ soit inclus dans $]1, +\infty[$. La fonction ζ est C^∞ sur S, donc localement autour de t_0 et ceci pour tout $t_0 \in I$: la fonction ζ est bien de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

—— ○ ——

Partie III : irrationnalité de $\zeta(2)$

12. La fonction ρ_n est polynomiale de degré $2n$ et de valuation égale à n. De plus, le polynôme $X^n(1-X)^n$ est à coefficients entiers comme on peut s'en rendre compte par le binôme de Newton dans $\mathbb{R}[X]$ commutatif.

13. Soient n et k deux entiers.
Si $k < n$, comme 0 est racine de multiplicité n dans ρ_n, alors $\rho_n^{(k)}(0) = 0$.
Si $k > 2n$, comme ρ_n est de degré $2n$, alors $\rho_n^{(k)}$ est la fonction polynomiale nulle et on a ce qu'il faut.
Si k est entre n et $2n$, alors en dérivant k fois la somme $\sum_{i=n}^{2n} c_i \, t^i$ puis en évaluant en 0, le seul terme non nul vaut :
$$c_k \ (t^k)^{(k)} = k! \cdot c_k.$$
Ainsi,
$$\rho_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \ k! \ c_k,$$
qui est un entier car le quotient $\dfrac{k!}{n!}$ est un entier et que la quantité c_k est entière.

14. On fixe deux entiers naturels n et k.
On remarque que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \rho_n(1-t) = \rho_n(t).$$
En dérivant k fois cette relation, on obtient :
$$(-1)^k\ \rho_n^{(k)}(1-t) = \rho_n^{(k)}(t).$$
Ainsi,
$$\rho_n^{(k)}(1) = (-1)^k\ \rho_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}.$$
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout entier k entre 0 et n, π^{2n-2k} est un rationnel de la forme $\dfrac{u^{n-k}}{v^{n-k}}$. La quantité $v^n\ (-1)^k\ \pi^{2n-2k}$ est donc entière, ainsi que $\rho_n^{(2k)}(0)$ ou $\rho_n^{(2k)}(1)$.
On obtient ce qu'il faut.
16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, en dérivant la fonction φ_n, on obtient déjà :
$$\varphi_n'(t) = \sin(\pi\ t)\ \Big(F_n''(t) + \pi^2\ F_n(t)\Big).$$
En dérivant deux fois F_n, on obtient :
$$F_n''(t) = v^n\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ \pi^{2n-2k}\ \rho_n^{(2k+2)}(t).$$
Ainsi,
$$F_n''(t) + \pi^2\ F_n(t) =$$
$$v^n\ \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}\ \rho_n^{(2(k+1))}(t) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2(k-1)}\ \rho_n^{(2k)}(t)\right)\ \sin(\pi\ t).$$
On voit une somme télescopique, qui se simplifie pour avoir :
$$F_n''(t) + \pi^2\ F_n(t) = v^n\ \pi^{2n+2}\rho_n(t) + (-1)^n\ \pi^0\ f^{(2n+2)}(t) = \pi^2\ u^n\rho_n(t).$$
On obtient ce qu'il faut.
17. La quantité A_n vaut :
$$A_n = \frac{1}{\pi}\ \int_0^1 \varphi_n'(t)\ dt = \frac{\varphi_n(1) - \varphi_n(0)}{\pi}.$$
Par conséquent,
$$A_n = F_n(1) + F_n(0),$$
qui est bien un entier.
18. Il s'agit ici de détailler le fait que :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \omega_n = 0.$$
En effet, chaque ω_n est strictement positif.
On pose $\lambda_n = \dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \dfrac{u}{n+1}$, de limite nulle.

Il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$0 < \lambda_n < \frac{1}{2}.$$

Par récurrence facile, on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 < \omega_n \leqslant \omega_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \omega_n = 0$$

et en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$ par exemple, on trouve n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$0 < \omega_n \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

19. Soit $t \in [0,1]$. Alors, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant 1$, donc $t^n(1-t)^n \in [0,1]$ et en divisant le tout par $n!$, on obtient l'encadrement voulu.
20. Choisissons $n = n_0$ dans la question 18. On obtient que l'intégrande dans A_{n_0} est positive et donc :
$$0 \leqslant A_{n_0} \leqslant \pi\ \frac{u^{n_0}}{n_0!} \int_0^1 \sin(\pi\ t)\ dt = 2\omega_{n_0} < 1.$$
D'autre part, le théorème aux quatre hypothèses appliquée à l'intégrale A_{n_0} nous donne la stricte positivité de A_{n_0}.
La quantité A_{n_0} est censée être un entier dans $]0,1[$: impossible !
Résultat des courses, le nombre π^2 est irrationnel ainsi que la valeur bien connue :
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$
21. Comme π^2 est irrationnel, il est impossible que le nombre π soit rationnel, car l'ensemble des rationnels est stable par passage au carré.
S'il existe $p \neq q$ deux entiers naturels tels que $\sin p = \sin q$, alors :
$$p \equiv q\ [2\pi] \text{ ou } p \equiv \pi - q\ [2\pi].$$
Il existe donc un entier k tel que :
$$p - q = 2k\pi \text{ ou } p + q = (2k+1)\pi.$$
Ceci amènerait à l'une des deux expressions suivantes :
$$\pi = \frac{p-q}{2k} \text{ ou } \pi = \frac{p+q}{2k+1},$$
conduisant irrémédiablement à la rationnalité du nombre π, ce qui est faux.
Conclusion, dès que p et q sont deux entiers naturels différents, alors $\sin p$ et $\sin q$ sont également différents.
On « sait » que cette suite est en fait dense dans $[-1,1]$, ce qui n'était pas demandé...