

**Devoir Surveillé n° 2 (4h)**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.*

**Problème – sup-irréductibles, familles sup-génératrices, et théorème de représentation de Birkhoff**

Dans tout le problème, les ensembles considérés sont toujours **finis**, même si cela n'est pas précisé à chaque fois.

*Le but du problème est de trouver des parties  $G$  d'un ensemble ordonné  $E$  engendrant cet espace  $E$  au sens des bornes supérieures (dans le sens où tout élément de  $E$  est borne supérieure d'une partie de  $G$ ). On montre en particulier le rôle important des éléments sup-irréductibles dans cette étude, c'est-à-dire les éléments qui ne sont borne supérieure d'aucune partie dont ils ne sont pas éléments (partie I).*

*Nous utilisons ces résultats pour montrer certains théorèmes de représentations (consistant à se ramener à des ensembles ordonnés de référence) : un premier résultat élémentaire (partie II) affirme que tout ensemble est « isomorphe » à un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties (c'est-à-dire qu'il peut lui être identifié).*

*Nous montrons ensuite que dans le cas où l'ordre sur  $E$  vérifie des conditions particulières (notion de treillis distributif étudié en partie III),  $E$  est isomorphe à l'ensemble des sections commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles, ces notions étant introduites et étudiées dans les parties IV et V. Ce théorème est dû à Birkhoff (partie VI). On en déduit en particulier que lorsque  $E$  est un treillis, l'ensemble ordonné de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble ordonné de ses inf-irréductibles.*

*Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $E$ , on écrit plus simplement  $\sup(x_1, \dots, x_n)$  au lieu de  $\sup(\{x_1, \dots, x_n\})$ .*

**Questions préliminaires**

*Soit  $E$  un ensemble ordonné et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $E$  admettant tous une borne supérieure.*

1. Montrer que  $\bigcup_{i \in I} A_i$  et  $\{\sup(A_i), i \in I\}$  ont mêmes majorants.

2. En déduire que si l'une des bornes supérieures de  $\bigcup_{i \in I} A_i$  ou de  $\{\sup(A_i), i \in I\}$  existe, l'autre aussi, et dans ce cas

$$\sup \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sup \{ \sup(A_i), i \in I \}.$$

Cette dernière borne supérieure sera notée plus simplement  $\sup_{i \in I} \sup(A_i)$ .

3. On suppose que pour tous  $x, y$  de  $E$ ,  $\sup(x, y)$  existe. Montrer que si  $x, y$  et  $z$  sont dans  $E$ , la borne supérieure ci-dessous existe et :

$$\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z)) = \sup(\sup(x, y), z).$$

On admettra sans preuve les propriétés similaires pour les bornes inférieures.

## Partie I – Éléments sup-irréductibles

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné fini (on le désignera simplement par  $E$  dans la suite). Un élément  $x$  est dit sup-irréductible s'il n'est la borne supérieure d'aucun sous-ensemble  $X$  de  $E$  ne le contenant pas, donc si

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad (x = \sup(X) \implies x \in X).$$

Pour  $x \in E$ , on note  $E^-x$  l'ensemble des éléments de  $E$  couverts par  $x$ , c'est-à-dire les éléments  $y \in E$  tels que  $y < x$  et tels qu'il n'existe pas  $z \in E$  vérifiant  $y < z < x$ .

1. Montrer que les éléments de  $E^-x$  sont deux à deux non comparables (i.e. il s'agit d'une cochaîne).
2. Soit  $x \in E$  un élément sup-irréductible tel que  $E^-x \neq \emptyset$ , et que  $E^-x$  admette une borne supérieure  $s$ .
  - (a) Montrer que  $x > s$ .
  - (b) En déduire que  $|E^-x| = 1$ .
3. Montrer que si  $|E^-x| = 1$  et si  $y$  est l'unique élément de  $E^-x$ , pour tout  $z$  tel que  $z < x$ , on a  $z \leq y$ .
4. On suppose que  $|E^-x| \geq 2$  et que  $E^-x$  n'admet pas de borne supérieure.
  - (a) Montrer que  $x$  est un élément minimal de l'ensemble des majorants de  $E^-x$ .
  - (b) Montrer qu'il existe un majorant  $y$  de  $E^-x$  non comparable avec  $x$ .
5. Montrer que  $x \in E$  est sup-irréductible si et seulement si l'une des trois conditions exclusives suivantes est satisfaite :
  - (i)  $x$  est un élément minimal de  $E$ , mais non minimum. Que dire de  $E^-x$  dans ce cas ?
  - (ii)  $|E^-x| = 1$
  - (iii)  $|E^-x| \geq 2$  et  $E^-x$  n'admet pas de borne supérieure.

On note désormais  $S(E)$  l'ensemble des éléments sup-irréductibles de  $E$ .

Une partie  $G$  de  $E$  est dite sup-génératrice si tout élément de  $E$  est borne supérieure d'un sous-ensemble de  $G$ , donc si pour tout  $x \in E$ , il existe  $X \subset G$  tel que

$$x = \sup(X).$$

Pour  $x \in E$ , on définit la hauteur  $h(x)$  de  $E$  comme étant la longueur maximale d'une chaîne  $x_1 < x_2 < \dots < x_k = x$ .

6. (a) Soit  $x \in E$ . Montrer que si  $x$  n'est pas sup-irréductible, il existe  $X \subset E$  tel que  $\sup(X) = x$  et tel que pour tout  $y \in X$ ,  $h(y) < h(x)$ .
- (b) Montrer que l'ensemble  $S(E)$  formé des éléments sup-irréductibles de  $E$  est une partie sup-génératrice de  $E$ .

Pour  $x \in E$ , on désigne par  $S_x(E)$  l'ensemble des sup-irréductibles majorés par  $x$  :

$$S_x(E) = \{s \in S(E) \mid s \leq x\}.$$

7. Montrer que  $\sup(S_x(E)) = x$
8. Soit  $G$  une partie sup-génératrice de  $E$ . Montrer que  $S(E) \subset G$ .
9. En déduire que  $G$  est une partie sup-génératrice de  $E$  si et seulement si  $S(E) \subset G$ .

Ainsi, l'ensemble  $S(E)$  des éléments sup-irréductibles est minimale parmi l'ensemble des familles sup-génératrices de  $E$ .

## Partie II – Applications croissantes et codages

Soit  $(E, \leq_E)$  et  $(F, \leq_F)$  deux ensembles ordonnés. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement  $\leq$  aussi bien pour  $\leq_E$  que pour  $\leq_F$ .

On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est :

- croissante si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$  ;
- strictement croissante si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x < y \implies f(x) < f(y)$  ;
- un codage si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ .
- un isomorphisme si c'est un codage bijectif.

1. Montrer qu'une application strictement croissante est croissante.
2. Montrer que si  $f$  est croissante et injective, alors  $f$  est strictement croissante.
3. Une application strictement croissante est-elle nécessairement injective ?
4. Montrer que si  $f$  est un codage alors  $f$  est injective.
5. Montrer que si  $f$  est un codage, alors  $f$  est strictement croissante.
6. Que dire de la composée de deux codages ? de deux isomorphismes ?
7. Avec les notations de la partie I, montrer que  $x \mapsto S_x(E)$  est un codage de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Ainsi, tout ensemble ordonné peut être identifié à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble de ses parties.

8. Montrer plus généralement que si  $G$  est une partie sup-génératrice de  $E$ , alors  $x \mapsto G_x$  est un codage de  $E$  dans  $\mathcal{P}(G)$ ,  $G_x$  désignant l'ensemble des éléments de  $G$  majorés par  $x$ .

Dans la suite du problème, on affine ce résultat en montrant que sous quelques hypothèses supplémentaires sur  $E$  (se résumant en disant que  $E$  est un treillis distributif), l'application  $x \mapsto S_x$  se corestreint un isomorphisme entre le treillis  $E$  et le treillis des sections commençantes de  $S(E)$ , que nous définissons plus loin.

### Partie III – Treillis distributif

Un treillis est un ensemble ordonné non vide  $(T, \leq)$  dans lequel toute partie  $X \subset T$  admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1. Montrer qu'un treillis  $T$  possède un maximum et un minimum.
2. Montrer que  $T$  est un treillis si et seulement si  $T$  est non vide, et toute paire  $\{x, y\} \subset T$  admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour simplifier les notations, on note  $x \vee y = \sup(x, y)$  et  $x \wedge y = \inf(x, y)$ . On dit qu'un treillis  $T$  est distributif si pour tout  $(x, y, z) \in T^3$ ,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

3. Soit  $T$  un treillis distributif. Montrer que pour tout élément  $s$  sup-irréductible de  $T$ , et tout  $X \subset T$ ,  $s \leq \sup X$  implique  $s \leq x$  pour au moins un élément  $x$  de  $X$ .

Indication : on pourra considérer  $s \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n)$  où les  $x_i$  sont les éléments de  $X$ .

4. Montrer que pour tout  $(x, y) \in T^2$ ,  $S_{x \vee y}(T) = S_x(T) \cup S_y(T)$ .
5. Donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un exemple de treillis distributif de cardinal  $2^n$ .

### Partie IV – Le treillis des sections commençantes

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné (pas nécessairement un treillis). Une partie  $C \subset E$  est dite commençante si pour tout  $y \in C$  et tout  $t \in E$  tel que  $t \leq y$ , on a  $t \in C$ . Soit pour tout  $x \in E$ ,  $E_x = \{y \in E \mid y \leq x\}$  l'ensemble des minorants de  $x$ .

1. Montrer que si  $(C_i)_{i \in I}$  est une famille de parties commençantes, alors  $\bigcup_{i \in I} C_i$  et  $\bigcap_{i \in I} C_i$  sont des parties commençantes
2. Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $E_x$  est une partie commençante.
3. Montrer que toute partie commençante  $C$  peut s'écrire sous la forme  $C = \bigcup_{x \in C} E_x$ .
4. Soit  $\mathcal{C}(E)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  constitué des sections commençantes de  $E$ , qu'on munit de l'inclusion. Montrer que  $\mathcal{C}(E)$  est un treillis distributif.
5. Montrer que  $C \in \mathcal{C}(E)$  est un sup-irréductible de  $\mathcal{C}(E)$  si et seulement s'il existe  $x \in E$  tel que  $C = E_x$ .

Indication : pour le sens direct, on pourra se servir de la partie I.

6. En déduire que tout ensemble ordonné  $E$  est isomorphe à l'ensemble ordonné des sup-irréductibles d'un treillis distributif (c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre les 2).

## Partie V – Comparaison des sup- et des inf-irréductibles du treillis des sections commençantes

On définit la notion d'élément inf-irréductible de façon similaire à celle de sup-irréductible, par symétrie : un élément  $i$  est inf-irréductible si et seulement s'il n'est la borne inférieure d'aucun sous-ensemble de  $E$  ne le contenant pas. On admettra que toutes les propriétés obtenues pour les sup-irréductibles ont leur analogue pour les inf-irréductibles, qu'on pourra utiliser sans justification. On note  $I(E)$  l'ensemble des éléments inf-irréductibles de  $E$ .

Soit  $E$  un ensemble ordonné, et  $\mathcal{C}(E)$  le treillis de ses parties commençantes. On note, pour  $x$  dans  $E$ ,  $E^x = \{y \in E \mid y \geq x\}$ , et  $i(x) = E \setminus E^x$ .

1. Montrer que  $i(x)$  est un élément de  $\mathcal{C}(E)$ .
2. Montrer que  $i(x)$  est un inf-irréductible de  $\mathcal{C}(E)$ .
3. Soit  $C$  une partie commençante de  $X$ .
  - (a) Montrer que  $C = \bigcap_{x \notin C} i(x)$ .
  - (b) En déduire que tout inf-irréductible de  $\mathcal{C}(E)$  est de la forme  $i(x)$ .
4. Justifier l'existence d'un isomorphisme (c'est-à-dire un codage bijectif) entre l'ensemble  $S(\mathcal{C}(E))$  des sup-irréductibles de  $\mathcal{C}(E)$  et l'ensemble  $I(\mathcal{C}(E))$  des inf-irréductibles de  $\mathcal{C}(E)$ .

## Partie VI – Théorème de représentation de Birkhoff

Soit  $T$  un treillis distributif. L'ensemble  $S(T)$  désigne toujours l'ensemble des éléments sup-irréductibles de  $T$ . On note conformément à la partie I,  $S_x(T) = \{s \in S(T) \mid s \leq x\}$ .

On définit  $c : T \mapsto \mathcal{C}(S(T))$  l'application qui à  $x$  associe  $S_x(T)$ .

1. Montrer que  $c$  est bien définie, c'est-à-dire que  $S_x(T)$  est une section commençante de  $S(T)$ .
2. Montrer que  $c$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Ce résultat affirme donc que tout treillis distributif est isomorphe au treillis des parties commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles (théorème de représentation de Birkhoff)

3. Soit  $T$  un treillis distributif. Montrer que l'ensemble  $S(T)$  de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble  $I(T)$  de ses inf-irréductibles.