THÉORIE DES APPLICATIONS CORRECTION

Exercice 1

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle saturation par f l'application $s : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ définie par $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ s(X) = f^{-1}\big(f(X)\big)$. Pour toute partie X de E, la partie $s(X)$ est appelée la saturée de X par f. On a vu en cours que, pour tout $X \in P(E)$, on a $X \subset s(X)$. Une partie X de E est dite saturée par f lorsqu'elle est égale à sa saturée par f, c'est-à-dire lorsque $X = s(X)$. L'ensemble des parties de E saturées par f est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ noté $\mathscr{S}(E)$. On pourra utiliser, sans les redémontrer, toutes les propriétés des images directes et réciproques énoncées dans le cours. En particulier, on sait que, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $X \subset s(X)$.

1. *Démontrer que $\varnothing$ et E appartiennent à $\mathscr{S}(E)$.*
   On a
   $$s(\varnothing) = f^{-1}\big(f(\varnothing)\big) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$
   Par ailleurs, pour toute partie A de E, on a $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$, ce qui donne
   $$s(E) = f^{-1}\big(f(E)\big) \supset E.$$
   Comme $s(E)$ est une partie de E, cela implique que
   $$s(E) = E.$$
   Par conséquent,
   $$\boxed{\varnothing \text{ et } E \text{ appartiennent à } \mathscr{S}(E).}$$

2. *Démontrer que s est une application croissante ($\mathscr{P}(E)$ est ordonné par l'inclusion).*
   Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ telles que $X \subset Y$. Comme $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(E),\ (A_1 \subset A_2) \Rightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)$, on en déduit que $f(X) \subset f(Y)$. Comme $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{P}(F),\ (B_1 \subset B_2) \Rightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)$, il s'ensuit que $f^{-1}\big(f(X)\big) \subset f^{-1}\big(f(Y)\big)$, c'est-à-dire $s(X) \subset s(Y)$. On a ainsi démontré que
   $$\boxed{s \text{ est une application croissante.}}$$

3. a) *Soit X une partie de E. Démontrer que $s(X)$ appartient à $\mathscr{S}(E)$.*
   Il faut démontrer que $s\big(s(X)\big) = s(X)$.
   On sait que $s\big(s(X)\big) \supset s(X)$ puisque, pour toute partie A de E, on a $A \subset s(A)$.
   Par ailleurs, on sait que, pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$, donc en prenant $B = f(X)$, il vient $f\big(f^{-1}\big(f(X)\big)\big) \subset f(X)$, c'est-à-dire $f\big(s(X)\big) \subset f(X)$. Or, si B_1 et B_2 sont deux parties de F telles que $B_1 \subset B_2$, on sait que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. En appliquant ce résultat avec l'inclusion $f\big(s(X)\big) \subset f(X)$, on obtient $f^{-1}\big[f\big(s(X)\big)\big] \subset f^{-1}\big(f(X)\big)$, c'est-à-dire $s\big(s(X)\big) \subset s(X)$.
   Donc
   $$\boxed{s(X) \in \mathscr{S}(E).}$$

   b) *Que vaut $s \circ s$?*
   On vient de démontrer que $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ s\big(s(X)\big) = s(X)$, c'est-à-dire
   $$\boxed{s \circ s = s.}$$

   Remarque : On dit que s est idempotente.

4. a) *Démontrer que, pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, $s(X \cup Y) = s(X) \cup s(Y)$ et $s(X \cap Y) \subset s(X) \cap s(Y)$.*

Pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, on a

$$\begin{array}{rcl} s(X \cup Y) & = & f^{-1}\big(f(X \cup Y)\big) \\ & = & f^{-1}\big(f(X) \cup f(Y)\big) \\ & & \quad \text{car } \forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(E),\ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \\ & = & f^{-1}\big(f(X)\big) \cup f^{-1}\big(f(Y)\big) \\ & & \quad \text{car } \forall B_1, B_2 \in \mathscr{P}(F),\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\ & = & s(X) \cup s(Y), \end{array}$$

donc

$$\boxed{\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad s(X \cup Y) = s(X) \cup s(Y).}$$

Pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, on a

$$\begin{array}{rcl} s(X \cap Y) & = & f^{-1}\big(f(X \cap Y)\big) \\ & \subset & f^{-1}\big(f(X) \cap f(Y)\big) \\ & & \quad \text{car } \forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(E),\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \\ & & \quad \text{et } \forall B_1, B_2 \in \mathscr{P}(F),\ (B_1 \subset B_2) \Rightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big) \\ & = & f^{-1}\big(f(X)\big) \cap f^{-1}\big(f(Y)\big) \\ & & \quad \text{car } \forall B_1, B_2 \in \mathscr{P}(F),\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ & = & s(X) \cap s(Y), \end{array}$$

donc

$$\boxed{\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad s(X \cap Y) \subset s(X) \cap s(Y).}$$

b) *Démontrer que $\mathscr{S}(E)$ est stable par réunion et par intersection.*

Soient $X, Y \in \mathscr{S}(E)$. D'après a), on a

$$s(X \cup Y) = s(X) \cup s(Y) = X \cup Y,$$

donc $X \cup Y \in \mathscr{S}(E)$. Cela démontre que

$$\boxed{\mathscr{S}(E) \text{ est stable par réunion.}}$$

Soient $X, Y \in \mathscr{S}(E)$. D'après a), on a

$$s(X \cap Y) \subset s(X) \cap s(Y) = X \cap Y.$$

Réciproquement, on a

$$X \cap Y \subset s(X \cap Y)$$

puisque l'inclusion $A \subset s(A)$ est vraie pour toute partie A de E.
On a donc

$$s(X \cap Y) = s(X) \cap s(Y).$$

Cela démontre que

$$\boxed{\mathscr{S}(E) \text{ est stable par intersection.}}$$

5. *Démontrer que $\mathscr{S}(E)$ est stable par passage au complémentaire.*

Soit $X \in \mathscr{S}(E)$.
On a $E \setminus X \subset s(E \setminus X)$ puisque l'inclusion $A \subset s(A)$ est vraie pour toute partie A de E.
Réciproquement, démontrons que $s(E \setminus X) \subset E \setminus X$.
Soit $x \in s(E \setminus X)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}\big(f(E \setminus X)\big)$. On a alors $f(x) \in f(E \setminus X)$. Il existe donc $x' \in E \setminus X$ tel que $f(x) = f(x')$.
Par l'absurde : supposons que $x \in X$.
Comme $f(x') = f(x)$ avec $x \in X$, on en déduit que $f(x') \in f(X)$. Cela signifie que $x' \in f^{-1}\big(f(X)\big)$, c'est-à-dire $x' \in s(X)$.
Comme $s(X) = X$, il vient $x' \in X$. C'est absurde (puisque x' appartient à $E \setminus X$) !
On a donc $x \in E \setminus X$.
Cela démontre que $s(E \setminus X) \subset E \setminus X$.
En définitive, on a $s(E \setminus X) = E \setminus X$, ce qui nous dit que

$$\boxed{\mathscr{S}(E) \text{ est stable par passage au complémentaire.}}$$

6. *Soient X et Y deux parties de E. Démontrer que si X et Y sont disjointes et que X est saturée alors X et $s(Y)$ sont encore disjointes.*

   Supposons que $X \cap Y = \varnothing$ et que X est saturée.
   On a alors $Y \subset E \setminus X$.
   Comme s est croissante, on en déduit que $s(Y) \subset s(E \setminus X)$.
   Comme X est saturée et que $\mathscr{S}(E)$ est stable par passage au complémentaire, on a $s(E \setminus X) = E \setminus X$.
   Cela implique que $s(Y) \subset E \setminus X$.
   Cela signifie que $X \cap s(Y) = \varnothing$.
   En conclusion,

   $$\boxed{\text{si } X \text{ et } Y \text{ sont disjointes et que } X \text{ est saturée alors } X \text{ et } s(Y) \text{ sont encore disjointes.}}$$

7. *Démontrer que l'application $\Phi : \mathscr{S}(E) \longrightarrow \mathscr{P}\big(f(E)\big)$ telle que $\forall X \in \mathscr{S}(E),\ \Phi(X) = f(X)$ est une bijection.*

   Commençons par démontrer que si $Y \in \mathscr{P}\big(f(E)\big)$, alors $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.
   Soit Y une partie de $f(E)$.
   L'inclusion $f\big(f^{-1}(Y)\big) \subset Y$ est vraie puisque, pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
   Réciproquement, prenons y dans Y. Comme Y est une partie de $f(E)$, on sait que $y \in f(E)$, ce qui permet d'affirmer l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in Y$, l'égalité $y = f(x)$ nous dit que $x \in f^{-1}(Y)$. Dès lors, cette même égalité nous dit que $y \in f\big(f^{-1}(Y)\big)$. Donc $Y \subset f\big(f^{-1}(Y)\big)$.
   On a bien $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.
   On a ainsi démontré que

   $$\boxed{\text{si } Y \in \mathscr{P}\big(f(E)\big), \text{ alors } f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y.}$$

   Ce résultat nous permet de voir que si Y est une partie de $f(E)$, alors

   $$s\big(f^{-1}(Y)\big) = f^{-1}\Big(f\big(f^{-1}(Y)\big)\Big) = f^{-1}(Y),$$

   ce qui démontre que $f^{-1}(Y)$ est saturée.
   On peut alors considérer l'application

   $$\Psi \begin{cases} \mathscr{P}\big(f(E)\big) & \longrightarrow & \mathscr{S}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{cases}$$

   Pour tout $Y \in \mathscr{P}\big(f(E)\big)$, on a

   $$(\Phi \circ \Psi)(Y) = \Phi\big(\Psi(Y)\big) = f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y,$$

   ce qui démontre que

   $$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(f(E))}.$$

   Pour tout $X \in \mathscr{S}(E)$, on a

   $$(\Psi \circ \Phi)(X) = \Psi\big(\Phi(X)\big) = f^{-1}\big(f(X)\big) = s(X) = X,$$

   ce qui démontre que

   $$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}(E)}.$$

   On en conclut que

   $$\boxed{\Phi \text{ est une bijection entre } \mathscr{S}(E) \text{ et } \mathscr{P}\big(f(E)\big) \text{ (de réciproque } \Psi).}$$

Récréation mathématique

Super-Concombre pesait ce matin 5 kg et contenait 99 % d'eau. Après un bain de soleil sur les plages de Saint-Trop', il ne contient plus que 98 % d'eau. Calculer le pourcentage de poids perdu par Super-Concombre.

Le pourcentage d'extrait sec de super-Concombre a doublé (passant de 1 % à 2 %). Pourtant la masse d'extrait sec de Super-Concombre n'a pas changé. Cela signifie donc que la masse de Super-Concombre a été divisée par 2. Ainsi

$$\boxed{\text{Super-Concombre a perdu } 50\,\% \text{ de sa masse !}}$$