MP*1

Réduction des endomorphismes (III)

1 Coréduction, crochet de Lie

1. (**) *Lemme de Schur*[1]

   a) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il n'existe aucun sous-espace non trivial de E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent à tous les éléments de $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dont tout élément non nul est inversible.

   b) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il n'existe aucun sous-espace non trivial de E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que les seuls éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent à tous ceux de $\mathcal{A}$ sont les homothéties.

   c) Donner un exemple prouvant que ce résultat est faux si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

2. (**) *Codiagonalisation*

   Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer qu'il existe une base propre commune aux u_i si et seulement si les u_i sont diagonalisables et commutent deux à deux.

3. *Somme et produit de deux matrices diagonalisables qui commutent*

   Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B sont diagonalisables et commutent. Montrer que $A+B$ et AB sont diagonalisables. Donner un contre-exemple si A et B ne commutent pas.

4. (**) *Plongement d'un groupe linéaire dans un autre*

   a) Quel est le cardinal maximal d'une famille commutative de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont des symétries ?

   b) A quelle condition existe-t-il un morphisme injectif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?

5. Reprendre l'exercice précédent en remplaçant $\mathbb{C}$ par un corps quelconque.

6. (***) *Sous-groupes commutatifs compacts du groupe linéaire*

   Soit G un sous-groupe commutatif compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{U}^n, \times)$.

7. (*) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que $f \mapsto u\circ f + f\circ v$ est diagonalisable.

8. (**) Soient E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et :

$$\mathrm{ad}_u \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & u\circ f - f\circ u \end{array}.$$

[1] Fondamental en théorie des représentations.

a) Montrer que si u est diagonalisable, ad_u est diagonalisable.

b) Montrer que si u est nilpotente, ad_u est nilpotente.

c) Montrer que si ad_u est diagonalisable, u est diagonalisable.

d) Calculer le polynôme caractéristique de ad_u en fonction de celui de u.

9. (***) *Sous-algèbres de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formées d'endomorphismes diagonalisables*

   Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments diagonalisables.

   a) En considérant, si $A \in \mathcal{A}$, la restriction à $\mathcal{A}$ de ad_A, montrer que $\mathcal{A}$ est commutative.

   b) En déduire que $\mathcal{A}$ est conjuguée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une sous-algèbre de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

10. Montrer que le résultat de l'exercice précédent s'étend à un corps de caractéristique nulle quelconque.

11. (**) *Cotrigonalisation pour une famille commutative*

    Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'endomorphismes trigonalisables du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise tous les u_i.

12. (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Calculer $u_n \circ \dots \circ u_1$.

13. Soient u et v deux endomorphismes nilpotents d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Calculer $u^i \circ v^{n-i}$ pour $0 \leq i \leq n$.

14. (**) Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $u \circ v = 0$. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise u et v.

15. Soient u et v deux endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace de dimension finie E tels que u n'ait pas de valeur propre de module 1 et que :

$$uv = vu^2.$$

    Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise u et v.

16. (***) Soient u, v et w trois endomorphismes trigonalisables du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v - v \circ u = w$, $u \circ w = w \circ u$ et $v \circ w = w \circ v$.

    a) Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise simultanément u, v et w.

    b) En déduire que w est nilpotent.

17. (**) *Plans stables par crochet de Lie*

    Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables du $\mathbb{K}$-espace de dimension finie E tels que : $u \circ v - v \circ u \in \mathrm{Vect}\,(u, v)$. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise u et v.

    Indication. Se ramener au cas où $u \circ v - v \circ u$ est égal à u. Démontrer dans ce cas que u est nilpotent et considérer le noyau de u.

18. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $f \circ g - g \circ f = f$.

    a) Montrer que f est nilpotent.

    b) Si dim Ker $f = 1$, montrer que g est diagonalisable.

19. *Endomorphismes stabilisant les mêmes sous-espaces*
    Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ admettant les mêmes sous-espaces stables.

    a) Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

    b) Les endomorphismes u et v commutent-ils ?

20. Décrire l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on peut écrire sous la forme $A+B$ où A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et vérifient $A^2 = A$, $B^2 = 2B$, $AB = BA = 0$.

21. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $ABA = B, BAB = A$

    a) Montrer que : $A^2 = B^2 = BABA$.

    b) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe p, q, r dans $\mathbb{N}$ avec $p+q+2r = n$, U dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, V dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ diagonales à termes diagonaux égaux à ± 1 et P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de sorte que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iI_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iI_r \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iI_r \\ 0 & 0 & -iI_r & 0 \end{pmatrix}.$$

    c) Donner un énoncé général sans supposer A inversible.

22. *Représentations de degré* 2 *de* $sl_2(\mathbb{C})$
    a) Soient

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Calculer $[E, F]$, $[E, G]$ et $F, G]$.

    b) Soient u, v et w trois endomorphismes non nuls d'un plan vectoriel complexe E tels que $[u, v] = 2v$, $[u, w] = -2w$ et $[v, w] = u$. Prouver l'existence d'une base de E telle que les matrices de u, v et w dans cette base soient respectivement E, F et G.

23. *Paires de Weyl*
    On appelle *paire de Weyl* sur le $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie $n \geq 1$ tout couple (f, g) d'endomorphismes de E tel que $fg - gf = id_E$.

    a) On suppose qu'il existe une paire de Weyl d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est un nombre premier p divisant la dimension de E.

    b) Classer les paires de Weyl (f, g) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. telles que les seuls sous-espaces de E stables par f et g soient $\{0\}$ et E.

24. (***) *Représentations fidèles de $SL_2(\mathbb{F}_p)$*

Soient p un nombre premier, ρ un morphisme injectif de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\rho(A)$ est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{U}_p$.

b) Pour x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, soit $D(x)$ la matrice diagonale Diag $(x, 1/x)$. Calculer $D(x)AD(x)^{-1}$ et en déduire

$$n \geq \frac{p-1}{2}.$$

25. *Un problème de coréduction et son application aux automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

a) Soient A, B, A', B' des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$A^n = B^n = A'^n = B'^n = I_n, \quad AB = \varepsilon BA \qquad A'B' = \varepsilon B'A'.$$

Montrer qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A' = PAP^{-1} \quad B' = PBP^{-1}.$$

b) En déduire que, si φ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \varphi(M) = PMP^{-1}.$$ [2]

26. Soit S une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments commutent deux à deux. On suppose que les éléments de S ont un vecteur propre commun. Soit $S' = \{{}^tM,\ M \in S\}$. Montrer que les éléments de S' ont un vecteur propre commun.

Indication. Raisonner par récurrence sur n et distinguer le cas où tous les éléments de S ont leur polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.

27. (**) *Théorème de Laffey (1977)*

Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que rg $(u \circ v - v \circ u) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise u et v.

Indication. Soient y un vecteur directeur de Im $(u \circ v - v \circ u)$ et $\lambda \in$ Sp v. Si $\ker(v - \lambda Id)$ n'est pas stable par u, montrer que y est dans Im$(v - \lambda Id)$, puis que Im$(v - \lambda Id)$ est stable par u.

28. *Deux propriétés caractéristiques des matrices nilpotentes*

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On suppose qu'il existe B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et α dans $\mathbb{C}^*$ tels que :

$$AB - BA = \alpha A.$$

2. Ce résultat est en fait vrai pour tout corps.

Montrer que A est nilpotente.

b) Montrer que le noyau et l'image de ad_A sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique associée à la trace.

c) En déduire que si A est nilpotente et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, il existe B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB - BA = \alpha A$.

d) Si (A, B) est comme en c), montrer que $A \exp(B) = \exp(\alpha) \exp(B) A$. En déduire que A est semblable à βA pour tout β dans $\mathbb{C}^*$.

e) On suppose qu'il existe β dans $\mathbb{C}$ non racine de 1 tel que A et βA soient semblables. Montrer que A est nilpotente.

29. *Théorème de Klarès*

Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D (resp. N) sa partie diagonalisable (resp. nilpotente).

a) Montrer que N est dans l'intersection du noyau et de l'image de ad_M.

Indication. Pour l'image, se ramener à montrer que N est dans l'image de ad_N ; utiliser alors l'exercice 10.

b) En déduire que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) M est diagonalisable,

ii) ad_M est diagonalisable,

iii) $\ker(ad_M) = \ker(ad_M)^2$.

Indication. Utiliser a) pour l'implication iii) $\Rightarrow$ i).

30. Soient u et v deux endomorphismes qui commutent d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. Montrer que les noyaux de u et v sont d'intersection nulle si et seulement s'il existe t dans $\mathbb{C}$ tel que $u + tv$ soit inversible.

31. Soient u et v deux endomorphismes qui commutent d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. Montrer que

$$\ker\, u \cap \ker\, v = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = E.$$

32. (**) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{A}$ un sous-espace de dimension n de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition. Montrer qu'il existe un sous-espace non trivial de E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

33. (***) *Familles anti-commutatives de $GL_n(\mathbb{C})$*

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *anticommutative* si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad i \neq j \;\Rightarrow\; A_i A_j = -A_j A_i.$$

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une famille anti-commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant au moins deux éléments formée de matrices inversibles,

ii) n est pair.

b) Trouver le cardinal maximal d'une famille anticommutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de symétries.

c) Trouver le cardinal maximal d'une famille anticommutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices inversibles.

34. *Forme possible de la dimension du commutant*
Soient f un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $C(f)$ le commutant de f.
a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^{*r}$ tels que :

$$\begin{cases} m_1 + \cdots + m_r = n \\ {m_1}^2 + \cdots + {m_r}^2 = \text{ dim } (C(f)) \end{cases}$$

Indication. Raisonner par récurrence sur n en considérant $f|_{\text{Im }(f-\lambda I)}$ où $\lambda \in \sigma(f)$.

b) En déduire que $\text{Codim}_{\mathcal{L}(E)} C(f)$ est paire.

c) Montrer la réciproque de a) :

si $m_1, \ldots, m_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$ et si $m_1 + \cdots + m_r = n$, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que la dimension de $C(f)$ soit ${m_1}^2 + \cdots + {m_r}^2$.

d) Étendre le résultat à un corps quelconque.

35. (***) *Sous-algèbres nilpotentes commutatives de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}$ un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition, dont tous les éléments sont nilpotents et dont deux éléments quelconques commutent.

Soient $I = \text{Vect } \{a(x),\ a \in \mathcal{A} \text{ et } x \in E\}$, S un supplémentaire de I dans E et :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{L}(S, I) \\ a & \mapsto & a|_S \end{array}.$$

a) Montrer que φ est injective.

b) Montrer que $\dim \mathcal{A} \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

c) Cette inégalité est-elle optimale ?

36. *Dimension maximale d'une sous-algèbre commutative de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

a) On suppose que $\mathcal{A}$ agit indécomposablement sur E, ce qui signifie qu'il n'existe aucun sous-espace (différent de E et $\{0\}$) de E stable par $\mathcal{A}$ et admettant un supplémentaire stable par $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de $\mathcal{A}$.

i) Montrer que si $f \in \mathcal{A}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{N}$ tels que $f = \lambda I + g$.

ii) En utilisant l'exercice précédent, montrer :

$$\text{dim } \mathcal{A} \ \leq \ \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1.$$

b) Dans le cas général, montrer que l'on a encore

$$\text{dim } \mathcal{A} \ \leq \ \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1,$$

et que cette inégalité est optimale [3].

c) Étendre le résultat à un corps quelconque.

3. Théorème de Schur, 1905.

37. *Sous-algèbres nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}$ un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et tel que :

$$\exists r \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{A}^r, \qquad a_r \circ \cdots \circ a_1 = 0.$$

a) Montrer que A est cotrigonalisable.

b) Montrer que : $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$, $a_n \circ \cdots \circ a_1 = 0$.

c) Montrer que $\dim \mathcal{A} \leq n(n-1)/2$.

d) Cette inégalité est-elle optimale ?

38. *Sous-algèbres de Lie nilpotentes*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$[[\cdots [[u, v], v] \cdots], v] = 0$$

où r est le nombre d'intervention de v dans le commutateur. Montrer que les sous-espaces caractéristiques de v sont stables par u.

b) Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$ tous stables par $\mathcal{A}$ et tels que, si $1 \leq i \leq p$ et $f \in A$, $f|_{E_i}$ n'ait qu'une valeur propre,

ii) si $(f, g) \in \mathcal{A}^2$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$[[\cdots [[f, g], g] \cdots], g] = 0 \qquad (r \text{ crochets}).$$

39. *Théorème d'Engel*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit F une famille d'endomorphismes de E,

$$V = \bigcap_{f \in F} \operatorname{Ker} f,$$

et g dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que V n'est pas stable par g. Montrer qu'il existe $f \in F$ tel que : $[f, g] \notin F$.

b) Soient $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'éléments nilpotents, $\mathcal{F}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ telle que

$$V = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Ker} f,$$

soit de dimension strictement positive minimale ; justifier cette définition, et montrer que si $g \in \mathcal{G}$, on a :

$$g(V) \subset V \iff g \in \mathcal{F}.$$

c) On suppose $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas cotrigonalisable.

Indication. Partant de $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, on construira une suite $(h_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{ad}_{h_i} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{h_1}(g) \notin \mathcal{F}.$$

On en déduira le résultat.

d) Montrer qu'une sous algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'éléments nilpotents est cotrigonalisable (théorème d'Engel). Traduire matriciellement ce résultat.

e) Soit $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est cotrigonalisable si et seulement si pour tout $(u, v) \in \mathcal{G}^2$, $[u, v]$ est nilpotent.

40. *Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

a) Soit A un anneau ne contenant aucun élément nilpotent non nul (on dit que A est *réduit*). Montrer que si $e \in A$ vérifie $e^2 = e$ (i.e, si e est idempotent), alors e commute à tous les éléments de A.

Indication. Considérer, si $x \in A$, $ex(1 - e)$.

b) Soit A une sous-algèbre réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est conjuguée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une sous-algèbre de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

41. *Nilpotents d'une sous-algèbre*

Soient $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{I}$ l'espace des M de $\mathcal{A}$ tels que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mathrm{Tr}\,(AM) = 0.$$

a) Montrer que les éléments de $\mathcal{I}$ sont nilpotents.

b) Si $\mathcal{A}$ est commutative, montrer que les éléments nilpotents de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathcal{I}$.

42. (***) *Sous-groupes connexes résolubles de $GL_n(\mathbb{C})$* [4]

a) Si G est un groupe, on appelle *groupe dérivé* de G, et on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ où $(a, b) \in G^2$. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.

Un groupe G est dit *résoluble* si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $D^k(G) = \{e\}$, où e est le neutre de G est $D^k(G)$ est défini par :

$$D^k = D\underbrace{(\cdots(D(G))\cdots)}_{k \text{ fois}}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ connexe et résoluble, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G.

b) Dans cette question, G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que tous les éléments de $D(G)$ se trigonalisent dans une même base de $\mathbb{C}^n$. On suppose de plus que G agit irréductiblement sur $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de G sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$.

i) Vérifier que le sous-espace V de $\mathbb{C}^n$ engendré par les vecteurs propres communs à tous les éléments de $D(G)$ est stable par tous les éléments de

4. Le résultat de cet exercice est dû à Kolchin ver s 1950. Il a beaucoup d'applications.

G. En déduire que les éléments de $D(G)$ se diagonalisent dans une même base.

ii) Si $h \in D(G)$, soit $S(h) = \{ghg^{-1},\ g \in G\}$. Démontrer que $S(h)$ est connexe et fini. En déduire que $D(G)$ est contenu dans le centre de G.

iii) Montrer que les éléments de $D(G)$ sont des homothéties. En déduire que $D(G)$ est fini.

iv) Prouver finalement que $D(G) = \{I_n\}$, i.e que G est abélien.

c) Démontrer le résultat voulu.

43. *Application de la coréduction aux caractères d'un groupe abélien fini*
Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini de cardinal n. Si $f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ et $g \in G$, on note $T_g(f)$ l'élément de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ défini par :

$$\forall x \in G, \qquad T_g(f)(x) = f(x + g).$$

a) Montrer que les $(T_g)_{g \in G}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ commutant deux à deux et diagonalisables.

b) Montrer que l'on peut trouver n morphismes de $(G, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ notés $\chi_1, \ldots, \chi_n$ formant une base de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ diagonalisant tous les T_g pour $g \in G$.

c) Montrer que les χ_i pour $1 \leq i \leq n$ sont les seuls morphismes de $(G, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On a ainsi prouvé que l'ensemble des *caractères* de G (i.e. des morphismes de $(G, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$) a le même cardinal que G.

44. *Théorème de Fischer*
Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer qu'il existe p dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et n applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de G dans $\mathbb{C}^*$ telles que :

$$\forall g \in G, \qquad g = p \begin{pmatrix} \lambda_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(g) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n(g) \end{pmatrix} p^{-1}.$$

b) Soit :

$$\Gamma = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \forall g \in G,\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(g)^{\alpha_i} = 1 \right\}.$$

Montrer que Γ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^n, +)$ isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.
Indication. Démontrer préalablement que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ d'indice fini est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.
c) On fait agir G naturellement sur $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$. Soit :

$$\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)^G = \{F \in \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n) \mid \forall g \in G,\ F \circ g = F\}.$$

Montrer qu'il existe $T_1, \ldots, T_n$ dans $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ algébriquement indépendants tels que :

$$\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)^G = \mathbb{C}(T_1, \ldots, T_n).$$

2 Réduction de Jordan

45. (**) *Réduction de Jordan : preuve de Ptak*[5]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme nilpotent de E, m l'indice de nilpotence de E, x un élément de E tel que $u^{m-1}(x) \neq 0$.

a) Justifier que l'on peut compléter $(x, u(x), \dots, u^{m-1}(x))$ en une base $e_0, \dots, e_{n-1}$ de E.

b) On note $(e_0^*, \dots, e_{n-1}^*)$ la duale de la base précédente. Montrer que les formes linéaires $(e_{m-1}^* \circ u^i)_{0 \leq i \leq m-1}$ forment une famille libre de E^*.

c) Montrer que

$$\bigcap_{i=0}^{m-1} \mathrm{Ker}(e_{m-1}^* \circ u^i)$$

est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{m-1}(x))$ dans E stable par u.

d) Démontrer que tout endomorphisme nilpotent de E admet une base de Jordan.

46. (**) *Réduction de Jordan : preuve par récurrence à partir de l'induit de u sur son image*[6]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme nilpotent de u. On suppose qu'il existe $y_1, \dots, y_r$ dans $\mathrm{Im}(u)$ et $n_1, \dots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que la famille

$$(u^i(y_j))_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq i \leq n_j - 1}}$$

forme une base de $\mathrm{Im}(u)$ et que

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \qquad u^{n_j}(y_j) = 0.$$

Pour j dans $\{1, \dots, r\}$, soit x_j un antécédent de y_j par u.

a) Montrer que la famille

$$(u^i(x_j))_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq i \leq n_j}}$$

est libre.

b) Les vecteurs $u^{n_j}(x_j)$, $1 \leq j \leq r$ forment donc une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$. On complète cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$ par adjonction de la famille $x_{r+1}, \dots, x_{r+m}$. On pose $n_j = 0$ si $r + 1 \leq j \leq r + m$. Montrer que

$$(u^i(x_j))_{\substack{1 \leq j \leq r+m \\ 0 \leq i \leq n_j}}$$

est une base de E. En déduire le théorème de Jordan.

5. La meilleure démonstration est basée sur l'exploitation de la suite des noyaux itérés $\mathrm{Ker}(u^k)$ et des « tableaux de Youns » ; elle s'expose mieux qu'elle ne s'écrit.
6. Cette preuve se voit bien sur les tableaux de Young.

47. *Réduction de Jordan : un argument de Tao*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme nilpotent de u. On suppose que $x_1, \ldots, x_r$ sont des vecteurs de E tels que E soit la somme des $\mathbb{K}[u](x_i)$, $1 \leq i \leq r$ et que cette somme n'est pas directe. Pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, soit n_i dans $\mathbb{N}*$ tel que

$$u^{n_i}(x_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad u^{n_i - 1}(x_i) \neq 0.$$

Montrer qu'existe i_0 dans $\{1, \ldots, r\}$ tel que

$$x_{i_0} \in \mathrm{Ker}(u^{n_{i_0}-1}) + \left(\sum_{i \in \{1,\ldots,r\} \setminus \{i_0\}} \mathbb{K}[u](x_i) \right).$$

En déduire qu'il existe x'_{i_0} dans $\mathrm{Ker}(u^{n_{i_0}-1})$ tel que E soit la somme des $K[u](x_i)$, $1 \leq i \leq r, i \neq i_0$ et de $K[u](x'_{i_0})$. En déduire le théorème de Jordan.

48. *Une preuve algorithmique de la réduction de Jordan*
Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.

a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} J_p & A \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

b) Montrer, en utilisant des opérations élémentaires préservant la similitude, que M est semblable à une matrice M' de la forme

$$\begin{pmatrix} J_p & A' \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

où A' a toutes ses lignes nulles sauf éventuellement la dernière.

c) En utilisant la définition de p, montrer que A' est nulle. d) Démontrer le théorème de réduction de Jordan.

49. (**) *Unicité dans la réduction de Jordan*
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont J_1 (répétée n_1 fois), ..., J_n (répétée n fois).

a) Calculer le rang de M^k en fonction des n_i.

b) En déduire une expression de n_i en fonction des rangs des matrices M^k.

50. *Théorème de Weyr*
Soient $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si, pour tout λ valeur propre de A et tout k de $\{0, \ldots, n\}$, les matrices $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ ont même rang.

51. *Fibres de l'application polynôme caractéristique*
Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. Montrer, si P est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$, que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique égal à P est une réunion finie de classes de similitude.

52. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. L'ensemble E des M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $P(M) = 0$ est clairement stable par similitude. Montrer que E est une réunion finie de classes de similitude.
53. *Similitude de M et ${}^tM$*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est semblable à ${}^tA$.
54. (**) Soit λ un nombre complexe qui n'est pas racine de l'unité. Montrer que les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à λM sont les matrices nilpotentes.
55. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la classe de similitude de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient une matrice symétrique.
56. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est produit de deux matrices symétriques.
57. *Produits de symétries*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit sous la forme BC où $B^2 = C^2 = I_n$ si et seulement si A est inversible et semblable à A^{-1}.
58. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $E(M)$ l'ensemble des A qui commutent à M et sont semblables à M. Quelles sont les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $E(M)$ soit fini ?
59. Trouver l'image de
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^2 \end{array},$$
en utilisant la réduction de Jordan.
60. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables à leur carré ?
61. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est, pour tout tout $j \in \mathbb{N}^*$, semblable à M^j.

    a) Si M est inversible, montrer que M est de la forme $I + N$ où N est nilpotente.

    b) Montrer que si M est de la forme $I + N$ avec N nilpotente, alors M est, pour tout j dans $\mathbb{N}^*$, semblable à N^j.
62. *Une caractérisation des matrices nilpotentes*
Soit X une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe M et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
$$[M, X] = 2X, \qquad [M, Y] = -2Y \quad \text{et} \quad [X, Y] = M.$$[7]
63. *Commutant et Jordan*
Déterminer le commutant d'une matrice sous forme de Jordan et calculer sa dimension.
64. *Théorème du bicommutant.*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $C^2(f)$ l'espace des g de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent à tous les endomorphismes de $C(f)$. Montrer que $C^2(f) = \mathbb{C}[f]$.
65. (****) *Adhérence d'une classe de similitude*
Décrire l'adhérence de la classe de similitude de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Indication. On commencera par traiter le cas où M est nilpotente.

7. Rappelons qu'inversement la relation $[M, X] = 2X$ implique la nilpotence de X.

3 Endomorphismes cycliques

66. (**) *Polynôme minimal ponctuel*

    Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E \setminus \{0\}$ et $I_{f,x} = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x) = 0\}$.

    a) Montrer que $I_{f,x}$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\Pi_{f,x}$ un générateur unitaire. Vérifier que $\Pi_{f,x} \mid \Pi_f$.

    b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{f,x} = \Pi_f$.

    Indication. On pourra décomposer Π_f en facteurs irréductibles, afin de se ramener au cas où Π_f est puissance d'un polynôme irréductible.

67. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Π_f et χ_f ont même facteurs irréductibles.

68. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que pour tout x de E, $\{x, f(x), \cdots, f^{d-1}(x)\}$ est liée. Montrer que $\{\mathrm{Id}, f, \cdots, f^{d-1}\}$ est liée.

69. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est cyclique si et seulement si :

$$\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n)^2 & \to & \mathbb{K}^n \\ (X,Y) & \mapsto & \left({}^tXY, {}^tXAY, \cdots, {}^tXA^{n-1}Y\right) \end{array}$$

    est surjective.

70. (**) *Commutant d'un endomorphisme cyclique*

    Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Montrer que $C(f) = \mathbb{K}[f]$, donc que $C(f)$ est de dimension n.

    Indication. Si $(x, f(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$ est une base de E, montrer qu'un élément de $C(f)$ est déterminé par son action sur x.

71. (*) *Cyclique et diagonalisable ?*

    Quels sont les endomorphismes cycliques et diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ?

72. (***) *Caractérisation des cycliques si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos*

    On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est cyclique si et seulement si ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

73. (***) *Cycliques et topologie*

    a) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

    b) En quels points de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application qui à une matrice associe son polynôme minimal est-elle continue ?

    Les cinq exercices suivants étudient des questions liées à la stabilité de sous-espaces.

74. (***) *Cyclicité d'un induit, sous-espaces stables d'un cyclique*

    Soient f un endomorphisme cyclique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, et F un sous-espace de E stable par f.

    a) Montrer que $f|_F$ est cyclique.

    b) Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini et calculer son cardinal.

75. (***) *Endomorphismes n'admettant qu'un nombre fini de sous-espaces stables*

    Soient $\mathbb{K}$ un corps infini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces stables. Montrer que f est cyclique. [8]

76. *Endomorphismes irréductibles*

    Soient E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les seuls sous-espaces stables de f sont E et $\{0\}$ si et seulement si f est cyclique et Π_f irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

77. Quels sont les endomorphismes f de E dont tous les sous-espaces stables sont de la forme $\mathrm{Ker}(P(f))$ avec P dans $\mathbb{K}[X]$?

78. *Endomorphismes indécomposables*

    Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

    i) l'endomorphisme f est cyclique et Π_f est puissance d'un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$,

    ii) il n'existe pas de couple (E_1, E_2) de sous-espaces non nuls de E stables par f et tels que $E = E_1 \oplus E_2$.

79. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\mathbb{K}[f] = C(f)$, montrer que f est cyclique.

80. Montrer que, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, $C(f)$ est commutatif si et seulement si f est cyclique.

81. *Dimension des sous-espaces stables par un endomorphisme*

    Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

    i) il existe un sous-espace de E de dimension k stable par u,

    ii) il existe un diviseur de P_u dans $\mathbb{K}[X]$ de degré k.

82. *Couples de matrices presque codiagonalisables et théorème de Gerstenhaber*

    Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et (u, v) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, on dit que (u, v) est presque codiagonalisable s'il existe une suite (u_k, v_k) de $\mathcal{L}(E)$ convergeant vers (u, v) et telle que u_k et v_k soient codigonalisables.

    a) Montrer que, si (u, v) est presque codiagonalisable, alors u et v commutent.

    Dans les questions b) à e), u et v sont deux endomorphismes qui commutent du $\mathbb{C}$-espace de dimension finie E.

    b) On suppose l'endomorphisme u cyclique. Montrer que (u, v) est presque codiagonalisable [9].

    c) On suppose l'endomorphisme u non cyclique. Montrer l'existence d'un endomorphisme cyclique u' commutant à v. Montrer que l'ensemble des λ de $[0, 1]$ tels que $\lambda u + (1 - \lambda)u'$ ne soit pas cyclique est fini.

8. On rappelle que E n'est pas réunion finie de sous-espaces stricts.
9. Se rappeler que le commutant de u est $\mathbb{C}[u]$.

d) Montrer que (u, v) est presque codiagonalisable.

e) Démontrer que, si $\mathbb{C}[u, v]$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u et v, alors la dimension de $\mathbb{C}[u, v]$ est majorée par n[10].

10. Théorème de Gerstenhaber, 1961.