DÉNOMBREMENT CORRECTION

Exercice 1

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note S_n^p le nombre de surjections de E sur F, où E et F sont deux ensembles donnés de cardinaux respectifs n et p.

1. a) *Que vaut S_n^p lorsque $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $p > n$?*

Si $p > n$, le cours nous dit qu'il n'y a pas de surjections de E sur F, donc

$$\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad (p > n) \Rightarrow (S_n^p = 0).}$$

b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur de S_n^1 et S_n^n.*

Si $p = 1$, F est un singleton $\{x_0\}$ et la seule application de E vers F est la fonction constante égale à x_0. Comme elle est surjective, on a

$$\boxed{S_n^1 = 1.}$$

Si $p = n$, une application de E vers F est surjective si, et seulement si, elle est bijective, d'après le cours. Il suffit donc de dénombrer le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un autre ensemble à n éléments. Le cours nous dit qu'il y en a $n!$ Donc

$$\boxed{S_n^n = n!}$$

2. *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et E, F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des surjections de E sur F. On fixe un élément a de E. On note $\mathscr{S}_1$ l'ensemble des surjections de E sur F, dont la restriction à $E \setminus \{a\}$ est une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F. On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des surjections de E sur F, dont la restriction à $E\setminus\{a\}$ est une surjection de $E\setminus\{a\}$ sur $F\setminus\{f(a)\}$.*

a) *Démontrer que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$.*

Si $f \in \mathscr{S}_1$, on a $f(E \setminus \{a\}) = F$ et si $f \in \mathscr{S}_2$, on a $f(E \setminus \{a\}) = F \setminus \{f(a)\}$. Ces deux égalités étant incompatibles, on a nécessairement

$$\boxed{\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing.}$$

Pour démontrer $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$, on procède par double inclusion.

Tout d'abord, l'inclusion $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}$ est évidente.

Démontrons maintenant que $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$.
Soit $f \in \mathscr{S}$.
On sait que f est une surjection de E sur F. Nous allons distinguer deux cas selon que $f(a)$ possède plusieurs antécédents ou un seul.

▷ Premier cas : Supposons qu'il existe $b \in E \setminus \{a\}$ tel que $f(b) = f(a)$
Démontrons que la restriction de f de $E \setminus \{a\}$ vers F est une surjection.
Considérons pour cela $y \in F$ et cherchons lui un antécédent par f dans $E \setminus \{a\}$.
Si $y \neq f(a)$, la surjectivité de f de E sur F assure qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) = y \neq f(a)$, on a nécessairement $x \neq a$. On a donc bien trouvé un antécédent de y dans $E \setminus \{a\}$.
Si $y = f(a)$, l'hypothèse nous dit que $b \in E \setminus \{a\}$ est un antécédent de y.
Ainsi, f est bien une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, c'est-à-dire $f \in \mathscr{S}_1$.

- ▷ Second cas : Supposons que, pour tout $b \in E \setminus \{a\}$, on a $f(b) \neq f(a)$
  La restriction de f de $E \setminus \{a\}$ vers $F \setminus \{f(a)\}$ est alors bien définie. Démontrons que c'est une surjection.
  Considérons pour cela $y \in F \setminus \{f(a)\}$ et cherchons lui un antécédent par f dans $E \setminus \{a\}$.
  La surjectivité de f de E sur F assure qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $x \neq a$ sinon on aurait $y = f(x) = f(a)$, ce qui est impossible puisque $y \in F \setminus \{f(a)\}$. On a donc bien trouvé un antécédent de y dans $E \setminus \{a\}$.
  La restriction de f à $E \setminus \{a\}$ est donc bien une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur $F \setminus \{f(a)\}$, c'est-à-dire $f \in \mathscr{S}_2$.

On constate donc que $f \in \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$, ce qui démontre que $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}.}$$

b) *En déduire que* $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.

Comme $\mathscr{S}_1 \sqcup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$, on a

$$\operatorname{card} \mathscr{S} = \operatorname{card} \mathscr{S}_1 + \operatorname{card} \mathscr{S}_2.$$

- ▷ Démontrons que $\operatorname{card} \mathscr{S}_1 = pS_{n-1}^p$.
  Une surjection f de l'ensemble $\mathscr{S}_1$ est caractérisée par :

  $\boxed{\text{et}}$
  - ∗ la restriction surjective de f à $E \setminus \{a\}$ dans F, ce qui laisse S_{n-1}^p possibilités,
  - ∗ le choix de $f(a)$ qui doit se faire dans F, ce qui offre p choix possibles.

  Donc $\operatorname{card} \mathscr{S}_1 = pS_{n-1}^p$.
- ▷ Démontrons que $\operatorname{card} \mathscr{S}_2 = pS_{n-1}^{p-1}$.
  Une surjection f de l'ensemble $\mathscr{S}_2$ est caractérisée par :

  $\boxed{\text{et}}$
  - ∗ la restriction surjective de f à $E \setminus \{a\}$ dans $F \setminus \{f(a)\}$, ce qui laisse S_{n-1}^{p-1} possibilités,
  - ∗ le choix de $f(a)$ qui doit se faire dans F, ce qui offre p choix possibles.

  Donc $\operatorname{card} \mathscr{S}_2 = pS_{n-1}^{p-1}$.

En conclusion,

$$\boxed{S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p).}$$

c) *Construire une table des* S_n^p *pour* $1 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$.

On a

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0
5	1	30	150	240	120	0
6	1	62	540	1560	1800	720

3. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n.$$

<u>Initialisation :</u> Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k) &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p \binom{p-1}{k} \qquad \text{car } \binom{p}{k} = \frac{p}{p-k} \binom{p-1}{k} \\
&= p(-1+1)^{p-1} \qquad \text{binôme} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \geqslant 2 \end{cases} \\
&= S_1^p
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^p &= p(S_n^{p-1} + S_n^p) \\
&= \underbrace{p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} (p-1-k)^n}_{\text{on pose } \ell = k+1} + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n \\
&= -p \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^\ell \binom{p-1}{\ell-1} (p-\ell)^n + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n \\
&= -p \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^\ell \binom{p-1}{\ell-1} (p-\ell)^n + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n \qquad \text{car } \binom{p-1}{0-1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k p \left\{ \binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1} \right\} (p-k)^n \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k p \binom{p-1}{k} (p-k)^n \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^{n+1} \qquad \text{car } p\binom{p-1}{k} = (p-k)\binom{p}{k},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence permet de conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n.}$$

4. *Quel est le nombre de façons de distribuer un jeu de* 32 *cartes à quatre joueurs ? Les joueurs ne reçoivent pas nécessairement le même nombre de cartes mais en reçoivent au moins une.*

C'est

$$S_{32}^4 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{32},$$

ce qui donne

$$\boxed{S_{32}^4 = 18\,439\,332\,018\,723\,948\,024.}$$

Récréation mathématique

Pour ouvrir la porte de mon immeuble, j'utilise un code de cinq chiffres. Si les chiffres sont identifiables grâce aux traces de doigt, l'ordre dans lequel il faut les presser est évidemment indevinable. Combien de codes un cambrioleur doit-il essayer au plus pour ouvrir ma porte ?

On pense naturellement que connaissant les cinq chiffres composant le code de l'immeuble, cet exercice n'est pas bien difficile. Mais que nenni ! Car, il faut penser au cas où plusieurs chiffres du code sont égaux et donc aux différentes situations où l'on voit cinq, quatre, trois, deux ou même une seule trace de doigt.

Premier cas : cinq traces de doigt

Dans ce cas, les cinq chiffres distincts composant le code de l'immeuble sont connus. Le cambrioleur doit donc permuter ces cinq chiffres, ce qui donne $5! = \boxed{120 \text{ codes}}$ à essayer (au plus).

Deuxième cas : quatre traces de doigt

Dans le cas où l'on ne voit que quatre traces de doigt, on connait les 4 chiffres nécessaires à la constitution du code mais on ne sait pas celui qu'il faut répéter deux fois. Pour constituer un tel code, il faut successivement :

- ▶ choisir le chiffre à répéter deux fois : 4 choix ;
- ▶ choisir les 2 positions du chiffre répété parmi les 5 positions possibles : $\binom{5}{2} = 10$ choix ;
- ▶ permuter les 3 chiffres restant aux 3 positions restantes : $3! = 6$ choix.

On obtient donc $4 \times 10 \times 6 = \boxed{240 \text{ codes}}$ à essayer (au maximum) dans ce cas.

Troisième cas : trois traces de doigt

Dans le cas où l'on voit trois traces de doigt, on doit distinguer deux sous-cas : celui où un chiffre est répété trois fois (et les deux autres ne sont pas répétés) et celui où deux chiffres sont répétés chacun deux fois (et le dernier n'est pas répété).

▷ Pour constituer un code avec trois chiffres dont l'un est répété trois fois, il faut successivement :

- ▶ choisir le chiffre à répéter trois fois : 3 choix ;
- ▶ choisir les 3 positions de ce chiffre parmi les 5 positions possibles : $\binom{5}{3} = 10$ choix ;
- ▶ permuter les 2 chiffres restant aux 2 positions restantes : $2! = 2$ choix.

On obtient donc $3 \times 10 \times 2 = 60$ codes à essayer dans ce cas.

▷ Pour constituer un code avec trois chiffres dont deux sont répétés deux fois, il faut successivement :

- ▶ choisir les deux chiffres à répéter deux fois : $\binom{3}{2} = 3$ choix ;
- ▶ choisir les 2 positions du premier chiffre répété parmi les 5 positions possibles : $\binom{5}{2} = 10$ choix ;
- ▶ choisir les 2 positions du second chiffre répété parmi les 3 positions restantes : $\binom{3}{2} = 3$ choix ;
- ▶ placer le dernier chiffre sur la position restante : 1 choix.

On obtient donc $3 \times 10 \times 3 \times 1 = 90$ codes à essayer dans ce cas.

En définitive, lorsqu'on voit trois traces de doigt, il faut essayer au maximum $60 + 90 = \boxed{150 \text{ codes}}$.

Quatrième cas : deux traces de doigt

Dans le cas où l'on voit deux traces de doigt, on doit distinguer deux sous-cas : celui où un chiffre est répété quatre fois (et l'autre n'est pas répété) et celui où l'un des deux chiffres est répété deux fois et l'autre est répété trois fois.

▷ Pour constituer un code avec deux chiffres dont l'un est répété quatre fois, il faut successivement :

- ▶ choisir le chiffre à répéter quatre fois : 2 choix ;
- ▶ choisir les 4 positions de ce chiffre parmi les 5 positions possibles : $\binom{5}{4} = 5$ choix ;
- ▶ placer le second chiffre sur la position restante : 1 choix.

On obtient donc $2 \times 5 \times 1 = 10$ codes à essayer dans ce cas.

▷ Pour constituer un code avec deux chiffres dont l'un est répété trois fois, il faut successivement :

- ▶ choisir le chiffre à répéter trois fois : 2 choix ;
- ▶ choisir les 3 positions de ce chiffre parmi les 5 positions possibles : $\binom{5}{3} = 10$ choix ;
- ▶ placer le second chiffre sur les deux positions restantes : 1 choix.

On obtient donc $2 \times 10 \times 1 = 20$ codes à essayer dans ce cas.

En définitive, lorsqu'on voit deux traces de doigt, il faut essayer au maximum $10 + 20 = \boxed{30 \text{ codes}}$.

<u>Cinquième cas : une trace de doigt</u>

Bon, là, c'est pas bien difficile : il n'y a bien sûr qu' $\boxed{\text{un seul code possible}}$!

<u>Bilan :</u>

$$\boxed{\text{Un cambrioleur devra essayer au plus 240 codes pour forcer la porte de mon immeuble.}}$$