DS 9

L'usage de la calculatrice est interdit.

Notations

Si V est un espace vectoriel réel, l'espace vectoriel des endomorphismes sur V est désigné par $L(V)$.
Lorsque $f \in L(V)$, on convient que $f^0 = Id_V$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$, on note $D(Q) = Q'$. Ainsi $D \in L(\mathbf{R}[X])$ (on ne demande pas de le démontrer).
Si $n \in \mathbf{N}$, pour tout $Q \in \mathbf{R}_n[X]$, on note $D_n(Q) = Q'$. Ainsi $D_n \in L(\mathbf{R}_n[X])$ (on ne demande pas de le démontrer).

L'objet du problème est de déterminer les réels λ et les entiers n pour lesquels il existe $g \in L(\mathbf{R}_n[X])$ tel que $\lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n = g^2$.

Préliminaires

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1°) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

2°) Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$. Montrer que pour tout entier $k \geq p$, $\ker f^k = \ker f^p$.
En déduire que si V est de dimension finie égale à n, alors il existe $p \leq n$ tel que la suite $(\dim(\ker f^k))_{k \geq p}$ est constante.

3°) On suppose encore que V est de dimension finie égale à n. Soit $u \in L(V)$ un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire pour lequel il existe $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^q = 0$. Montrer que $u^n = 0$.

Partie I

4°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ de dimension finie égale à $n+1$, où $n \in \mathbf{N}$.
On suppose que F est stable par D, c'est-à-dire que $D(F) \subset F$.
Montrer que la restriction de D à F est un endomorphisme nilpotent. En déduire que $F = \mathbf{R}_n[X]$.
Déterminer l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}[X]$ qui sont stables par D.

5°) Soit λ un réel donné.
Soit $n, p \in \mathbf{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$. On suppose qu''il existe $g \in L(\mathbf{R}_n[X])$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$.
Montrer que g et D_n commutent, c'est-à-dire que $g \circ D_n = D_n \circ g$.
Montrer que $\mathbf{R}_p[X]$ est stable par g.

6°) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On suppose qu''il existe $g \in L(\mathbf{R}[X])$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}[X]} + D$.
Démontrer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ est stable par g si et seulement si il est stable par D.

7°)
a) À quelle condition sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_0[X]$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_0[X]} + D_0$?

b) Soit λ un réel strictement négatif.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que : $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$.
Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbf{R}[X]$ tel que : $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}[X]} + D$.

8°) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et λ un réel.
On note A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont les coefficients réels $a_{i,j}$ sont définis par les relations :

$$a_{i,i} = \lambda, \quad a_{i,\,i+1} = 1, \quad a_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$.
Démontrer qu'il existe un vecteur $y \in V$ tel que la famille $B = \left(f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y\right)$ soit une base de V.
Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b) En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$ dans cette base B_n ?

9°) Dans cette question l'entier n est égal à 2.
a) Démontrer qu'un endomorphisme h de $\mathbf{R}_2[X]$ commute avec D_2 si et seulement si il existe $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $h = a\ Id_{\mathbf{R}_2[X]} + b\ D_2 + c\ \left(D_2\right)^2$.

b) En déduire qu'il existe des endomorphismes g de $\mathbf{R}_2[X]$ tels que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_2[X]} + D_2$.

c) Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 telles que $G^2 = A_1$.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie au cas où $\lambda = 0$.
Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

10°)
a) Montrer que, s'il existe $g \in L(\mathbf{R}_n[X])$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim(\ker(g^2)) \geq 2$.

b) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

11°) Soit m un entier supérieur ou égal à 1 et k un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $g \in L(\mathbf{R}[X])$ tel que $g^k = D^m$.

a) Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b) Montrer que, pour tout $q \in \{0, \dots, k\}$, $\ker(g^q)$ est de dimension finie.

c) Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $2 \leq p \leq k$.
Montrer qu'on peut définir une application linéaire Φ de $\ker(g^p)$ dans $\ker(g^{p-1})$ par la relation : $\Phi(P) = g(P)$.
Quel est le noyau de Φ ? Démontrer que Φ est surjective.
En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels $\ker(g^p)$ et $\ker(g^{p-1})$.
Quelle est la dimension de $\ker(g^p)$ en fonction de p et de la dimension de $\ker(g)$?

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ tel que $g^k = D^m$.
Retrouver le résultat de la question 10.c.

Partie III

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question 8.b. La matrice associée à l'application $Id_{\mathbf{R}_n[X]}$ est la matrice I_{n+1}.
La matrice associée à l'endomorphisme D_n est désignée par le même symbole D_n.

On note $M_{n+1}(\mathbf{R})$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$.
Étant donné un réel λ supposé strictement positif, soit L_n l'application de $\mathbf{R}$ dans $M_{n+1}(\mathbf{R})$ qui associe au réel t la matrice $L_n(t)$ définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k .$$

12°)
a) Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + tD_n$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme suivante : $(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,(D_n)^k$. On déterminera les fonctions a_k.

b) Démontrer que l'application $t \longrightarrow (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est dérivable.
Exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$et D_n.

c) Démontrer que, pour tout réel t, $(L_n(t))^{n+1} = 0$.

d) Calculer la dérivée de la fonction $t \longrightarrow L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.
Soit $k \in \mathbf{N}$. Calculer la dérivée de la fonction $t \longrightarrow (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.

13°) Pour tous réels u et t, on note $\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} (L_n(t))^k$.

a) Montrer que, pour tous $u, v, t \in \mathbf{R}$, le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à $\varphi_{u+v}(t)$.

b) Démontrer que la fonction $t \longrightarrow \varphi_u(t)$ est dérivable et que $\varphi'_u(t) = u\,(I_{n+1} + tD_n)^{-1} .D_n.\varphi_u(t)$.

c) Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que pour tout réel t, $\varphi''_1(t) = 0$.
En déduire que $\varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n$.

14°)
a) Soit λ un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $M \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n$.
En déduire l'existence d'un endomorphisme g de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$.

b) Retrouver les matrices obtenues à la question 9.c.

Partie IV

15°) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par la relation : $h(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que h admet au voisinage de 0 un développement limité de la forme
$h(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$, avec pour tout $k \geq 1$, $b_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}} \dbinom{2k-1}{k}$.

b) Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k b_{m-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 1 \\ 0 & \text{si } m \geq 2 \end{cases}$.

16°) Soit λ un réel strictement positif.

a) Pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$, on pose $T(Q) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(Q)$.

Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

b) Calculer pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.
En déduire l'existence de $g \in L(\mathbf{R}[X])$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}[X]} + D$.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence de $g_n \in L(\mathbf{R}_n[X])$ tel que $(g_n)^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$.
Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n.
Retrouver les matrices obtenues à la question 9.c