Exercice 1

Soit N une norme sur $\mathbb{C}^n$. On définit :

$$\tilde{N} : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathbb{R} \\ A & \mapsto \underset{X \neq 0}{sup} \frac{N(AX)}{N(X)} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\tilde{N}$ est une norme, et qu'elle est sous-multiplicative.
2. Soit T une matrice triangulaire supérieure. Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $Q = diag(1, \mu, ..., \mu^{n-1})$. Calculer $\underset{\mu \to +\infty}{lim} \tilde{N}(QTQ^{-1})$.
3. Montrer que, $\forall \epsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\tilde{N}(T) \leqslant \underset{\lambda \in S_p(T)}{max} |\lambda| + \epsilon$.
4. Même question avec T une matrice quelconque.

Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : x \mapsto d(x, \mathcal{C})$, où d est une distance euclidienne.

1. Montrer que f est bien définie, et lipschitzienne.
2. On suppose $\mathcal{C}$ convexe. Montrer que $\exists! z \in \mathcal{C}$ tel que $f(x) = d(x, z)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\exists! z \in \mathcal{C}$ tel que $f(x) = d(x, z)$. Montrer que f est différenciable en x.

Commentaires

Bien que la première question soit archi-classique, j'ai pris grand soin de la faire de façon très détaillée, ce qui a fait sourire l'examinateur. Pour la deuxième question, j'ai pû déterminer la limite, mais l'examinateur m'a dit que j'avais implicitement utilisé la continuité de la norme $\tilde{N}$, et m'a demandé de démontré ce résultat. J'ai pris plus de temps que nécessaire pour me souvenir d'utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.
la question 3 découle naturellement de la précédente, et la question 4 se résoud en trigonalisant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour l'exercice 2, j'ai mis du temps et eu besoin de quelques indications avant de trouver les bonnes inégalités triangulaires à utiliser pour montrer la lipschitziannité de f. Pour la deuxième question, j'ai démontré que si on dispose de z et z' deux points de $\mathcal{C}$ tels que la distance est atteinte, alors elle est également atteinte pour tout point de $[z, z']$. L'examinateur a eu l'air convaincu de ma solution et m'a fait passé à la question suivante, alors que j'étais pérsuadé de ne pas avoir encore répondu à la question. Mais j'ai saisi l'opportunité de paraître intelligent et je suis passé à la suite. Il ne restait de toute façon presque plus de temps pour terminer l'exercice. J'ai juste pû conjecturer la différentielle de f pour la dernière question.