SOMMES ET PRODUITS

✠ ***Exercice 1.*** [○]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big(ka + (n-k)b\big).$$

On a

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big(ka + (n-k)b\big) \\
&= \mathfrak{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i[ka+(n-k)b]} \right\} \\
&= \mathfrak{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ia})^k (\mathrm{e}^{ib})^{n-k} \right\} \\
&= \mathfrak{Re}\left\{ (\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib})^n \right\} && \text{formule du binôme} \\
&= \mathfrak{Re}\left\{ \mathrm{e}^{in(a+b)/2} (\mathrm{e}^{i(a-b)/2} + \mathrm{e}^{-i(a-b)/2})^n \right\} && \text{technique de l'angle moyen} \\
&= \mathfrak{Re}\left\{ \mathrm{e}^{in(a+b)/2} \left(2\cos\frac{a-b}{2}\right)^n \right\} && \text{formule d'Euler} \\
&= 2^n \cos\left(n\frac{a+b}{2}\right) \cos^n\left(\frac{a-b}{2}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = 2^n \cos\left(n\frac{a+b}{2}\right) \cos^n\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot}$$

✠ ***Exercice 2.*** [⋆]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor \cdot$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor &= \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 0\ [3]}}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor + \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 1\ [3]}}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor + \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 2\ [3]}}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor\\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\left\lfloor\frac{2(3\ell)}{3}\right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\left\lfloor\frac{2(3\ell+1)}{3}\right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\left\lfloor\frac{2(3\ell+2)}{3}\right\rfloor\\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\lfloor 2\ell\rfloor + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\left\lfloor 2\ell+\frac{2}{3}\right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\left\lfloor 2\ell+\frac{4}{3}\right\rfloor\\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/3\rfloor}2\ell + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}2\ell + \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}(2\ell+1)\\
&= \lfloor n/3\rfloor\left(\lfloor n/3\rfloor+1\right) + \lfloor (n-1)/3\rfloor\left(\lfloor (n-1)/3\rfloor+1\right) + \left(\lfloor (n-2)/3\rfloor+1\right)^2\\
&= \begin{cases} m(m+1)+(m-1)m+m^2 & \text{si } n=3m\\ m(m+1)+m(m+1)+m^2 & \text{si } n=3m+1\\ m(m+1)+m(m+1)+(m+1)^2 & \text{si } n=3m+2\end{cases}\\
&= \begin{cases} 3m^2 & \text{si } n=3m\\ 3m^2+2m & \text{si } n=3m+1\\ 3m^2+4m+1 & \text{si } n=3m+2\end{cases}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor &= \begin{cases} \left\lfloor 3m^2\right\rfloor & \text{si } n=3m\\ \left\lfloor 3m^2+2m+\frac{1}{3}\right\rfloor & \text{si } n=3m+1\\ \left\lfloor 3m^2+4m+\frac{4}{3}\right\rfloor & \text{si } n=3m+2\end{cases}\\
&= \begin{cases} 3m^2 & \text{si } n=3m\\ 3m^2+2m & \text{si } n=3m+1\\ 3m^2+4m+1 & \text{si } n=3m+2\end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor.}$$

✠ ***Exercice 3.*** [★]
Soient $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ et ω une racine n-ème de l'unité telle que $\omega\neq 1$. Calculer $\left|\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\right|$.

On a

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\Big|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\times\overline{\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{\ell^2}}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\times\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{-\ell^2}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2-\ell^2}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\sum_{k=0}^{\ell-1}\omega^{k^2-\ell^2}+\sum_{k=\ell}^{n-1}\omega^{k^2-\ell^2}\Big) && \text{en séparant les termes d'exposants négatifs de ceux d'exposants positifs}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\sum_{m=n}^{n+\ell-1}\omega^{(m-n)^2-\ell^2}+\sum_{k=\ell}^{n-1}\omega^{k^2-\ell^2}\Big) && \text{en posant } m=k+n \text{ dans la première somme}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\sum_{m=n}^{n+\ell-1}\omega^{m^2-\ell^2}+\sum_{k=\ell}^{n-1}\omega^{k^2-\ell^2}\Big) && \text{car } \omega^{(m-n)^2}=\omega^{m^2}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=\ell}^{n+\ell-1}\omega^{k^2-\ell^2} && \text{les sommes se regroupent en une seule}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{(\ell+j)^2-\ell^2} && \text{en posant } j=k-\ell \text{ dans la somme intérieure}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j^2+2\ell j}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j^2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{2\ell j} && \text{par Fubini}
\end{aligned}
$$

Or

$$
\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{2\ell j}=\begin{cases} n & \text{si } \omega^{2j}=1\\ \dfrac{\omega^{2nj}-1}{\omega^{2j}-1}=0 & \text{si } \omega^{2j}\neq 1\end{cases}
$$

On distingue alors deux cas :

- Premier cas : n impair
  La seule valeur de $j\in[\![0;n-1]\!]$ pour laquelle on a $\omega^{2j}=1$ est $j=0$, donc
  $$\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j^2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{2\ell j}=\omega^{0^2}\times n+\sum_{j=1}^{n-1}\omega^{j^2}\times 0=n,$$
  c'est-à-dire
  $$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\Big|^2=n.$$
- Second cas : n pair
  Les deux seules valeurs de $j\in[\![0;n-1]\!]$ pour laquelle on a $\omega^{2j}=1$ sont $j=0$ et $j=n/2$, donc
  $$\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j^2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{2\ell j}=\omega^{0^2}\times n+\omega^{n^2/4}\times n+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n/2}}^{n-1}\omega^{j^2}\times 0=n+(-1)^{n/2}n,$$
  c'est-à-dire
  $$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\Big|^2=n\big(1+(-1)^{n/2}\big).$$
- Bilan :
  On a
  $$\boxed{\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\Big|^2=\begin{cases}\sqrt{n} & \text{si } n \text{ est impair}\\ \sqrt{2n} & \text{si } n\equiv 0\ [4]\\ 0 & \text{si } n\equiv 2\ [4]\end{cases}}$$

✠ ***Exercice 4.*** [⋆]

Soient un entier $n \geqslant 2$ et une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de nombres complexes. Pour tout $\ell \in \{0,\dots,n-1\}$, on pose

$$b_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \mathrm{e}^{2ik\ell\pi/n}\,.$$

Démontrer que, pour tout $p \in \{0,\dots,n-1\}$, on a

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell\, \mathrm{e}^{-2ip\ell\pi/n}\,.$$

Soit $p \in \{0,\dots,n-1\}$. On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell\, \mathrm{e}^{-2ip\ell\pi/n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \mathrm{e}^{2ik\ell\pi/n}\,\mathrm{e}^{-2ip\ell\pi/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2i(k-p)\ell\pi/n}\,.$$

La somme intérieure $S_{k,p} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2i(k-p)\ell\pi/n}$ est celle d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{2i(k-p)\pi/n}$. Par suite :

- Si $k = p$, cette raison est égale à 1 et l'on a $S_{k,p} = n$.
- Si $k \neq p$, la raison est différente de 1 et $S_{k,p} = (\mathrm{e}^{2i(k-p)\ell\pi} - 1)/(\mathrm{e}^{2i(k-p)\ell\pi/n} - 1) = 0$.

En définitive,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2i(k-p)\ell\pi/n} = a_p$$

ce qui démontre que

$$\boxed{a_p = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell\, \mathrm{e}^{-2ip\ell\pi/n}\,.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [⋆]

Soient $a_1,\dots,a_n$ des nombres réels tels que $a_1+\cdots+a_n = 0$. Démontrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\Big)^2 &= \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}|a_i||a_j| \\
&= \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 + \sum_{i=1}^{n}\Big(|a_i|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_j|\Big) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 + \sum_{i=1}^{n}\Big(|a_i|\Big|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_j\Big|\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 + \sum_{i=1}^{n}|a_i||-a_i| \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|a_k|.}$$

✠ ***Exercice 6.*** [$\circ$]

Soit $\theta \in]0,\pi[$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) = \frac{\sin\theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}.$$

2. En déduire, si elle existe, la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right)_{n\geqslant 1}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant n fois la formule de trigonométrie $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right) \times \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right) \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n-2} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right) \times \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n-2} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right) \times \frac{1}{2^2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{\sin\theta}{2^n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) = \frac{\sin\theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}.}$$

2. On a $\lim_{n\to+\infty} \theta/2^n = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}(\sin\varepsilon)/\varepsilon = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}(\sin\theta)/\{2^n\sin(\theta/2^n)\} = 1$ ce qui montre que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) = 1.}$$