

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

♦ **Exercice 1.** [o]

Sous la condition de Cauchy $y(0) = 0$, résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 2, & y' + 2y &= 4e^{2t}, & y' + ty &= t^3, & y' - 3t^2y &= t^2, & y' - 3y &= t e^{2t}, \\ y' + 3y &= (5t + 1)e^{-3t}, & y' + 3t^2y &= t^2 + e^{-t^3}, & y' - y &= \sin t. \end{aligned}$$

AQT

♦ **Exercice 2.** [o]

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} xy' + (1 - 2x)y &= 1, & x^3y' - 4(1 + x^2)y &= 0, & (1 - x^2)y' - 2xy &= 1, \\ (\cos x)y' - (\sin x)y + e^{-x} &= 0, & y' + (\tan x)y &= \sin x + \cos^3 x. \end{aligned}$$

1. A faire.

2. Posons

$$(E) \quad x^3y' - 4(1 + x^2)y = 0.$$

► L'ensemble de définition de cette équation est

$$\mathcal{D}_{(E)} = \mathbb{R}.$$

► L'ensemble des points singuliers de (E) est $\mathcal{S}_{(E)} = \{0\}$. Sur \mathbb{R}^* , on résout l'équation

$$(E^*) \quad y' - 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)y = 0.$$

Sur un intervalle I contenu dans \mathbb{R}^* , les solutions de l'équation homogène (E^*) sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in I, \quad y(x) = \lambda \exp \left\{ 4 \int^x \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \right) dt \right\} = \lambda e^{-2/x^2 + 4 \ln|x|} = \lambda x^4 e^{-2/x^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Par conséquent, les solutions de (E^*) sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_2 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

► Déterminons les solutions de (E) .

Analyse

Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R} . On sait, d'après ce qui précède, que sur \mathbb{R}^* la fonction y est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_2 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

On constate alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y(x) = 0,$$

ce qui démontre que, pour être continue, la fonction y est nécessairement de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Synthèse

On considère la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

La fonction y est continue en tout point de \mathbb{R}^* d'après les théorèmes généraux. Par ailleurs, on constate que $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y(x) = 0 = y(0)$ donc y est continue en 0. Par conséquent, y est continue sur \mathbb{R} .

La fonction y est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* d'après les théorèmes généraux. Pour tout $x > 0$, on a

$$y'(x) = \lambda_1 (4x^3) e^{-2/x^2} + \lambda_1 x^4 \left(\frac{4}{x^3} e^{-2/x^2} \right) = 4\lambda_1 x e^{-2/x^2} (x^2 + 1),$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = 0.$$

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 0.$$

Le théorème de la limite de la dérivée nous dit par conséquent que y est dérivable en 0 avec $y'(0) = 0$.

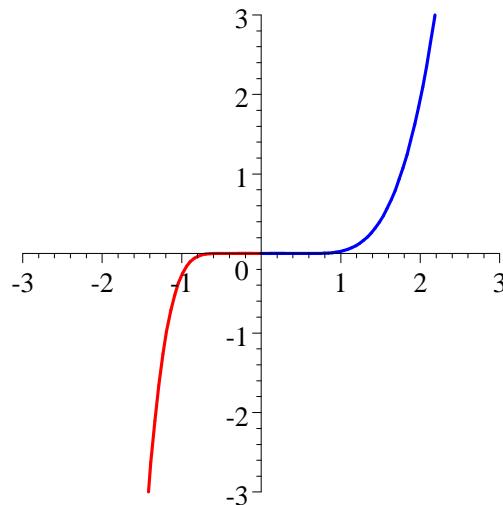
Enfin, d'après les étapes précédentes, on sait que y est solutions de (E) sur \mathbb{R}^* mais aussi en 0 (puisque l'on a bien $0^3 y'(0) - 4(1 + 0^2)y(0) = 0$). Donc y est une solution de (E) sur \mathbb{R} .

Conclusion

les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^4 e^{-2/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Graphiquement, pour $\lambda_1 = 1/5$ et $\lambda_2 = -2$, cela donne



♦ **Exercice 3.** [★] (Solutions périodiques)

Soient $b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + b(x)y = c(x).$$

1. Résoudre (E) à l'aide d'intégrales.
2. On suppose que b et c sont T -périodiques (où $T > 0$).
 - a) Soit y une solution de (E) . À l'aide de la fonction $x \mapsto y(x+T)$, démontrer que y est T -périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
 - b) Prouver que (E) admet une unique solution T -périodique si, et seulement si, $\int_0^T b \neq 0$.

1. Les solutions de l'équation homogène (E_h) : $y' + b(x)y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$y_h = \lambda e^{-B(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

où B est une primitive de b sur \mathbb{R} qui s'annule en 0, par exemple celle qui s'annule en 0, c'est-à-dire

$$B(x) = \int_0^x b.$$

Selon la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p = \lambda(x) e^{-B(x)},$$

où λ est une fonction dérivable. En reportant dans (E) , on obtient

$$\lambda' e^{-B(x)} = c(x),$$

c'est-à-dire

$$\lambda' = c(x) e^{B(x)}$$

ce qui permet de prendre

$$\lambda = \int_0^x c e^B,$$

donc

$$y_p = e^{-B(x)} \int_0^x c e^B.$$

En conclusion,

les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto e^{-B(x)} \left\{ \lambda + \int_0^x c e^B \right\}$$
 où λ décrit \mathbb{R} .

2. a) \Rightarrow Si y est T -périodique alors on a clairement $y(0) = y(T)$.

\Leftarrow Supposons réciproquement que $y(0) = y(T)$. La fonction $\varphi : x \mapsto y(x+T)$ est solution de $y' + b(x+T)y = c(x+T)$, c'est-à-dire de (E) : $y' + b(x)y = c(x)$. Or $\varphi(0) = y(T) = y(0)$ donc y et φ sont deux solutions de (E) qui coïncident en un point, ce qui démontre que $y = \varphi$ (d'après le cours). Cela démontre que y est T -périodique.

En conclusion,

une solution y de (E) est T -périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

- b) On a

$$\begin{aligned}
 & (E) \text{ admet une unique solution } y \text{ qui est } T\text{-périodique} \\
 \iff & \text{ il existe un unique } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^{-B(x)} \left\{ \lambda + \int_0^x c e^B \right\} \text{ vérifie } y(0) = y(T) \\
 \iff & \text{ il existe un unique } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda = e^{-B(T)} \left\{ \lambda + \int_0^T c e^B \right\} \\
 \iff & \text{ il existe un unique } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda(1 - e^{-B(T)}) = e^{-B(T)} \int_0^T c e^B \\
 \iff & 1 - e^{-B(T)} \neq 0 \\
 \iff & B(T) \neq 0,
 \end{aligned}$$

donc

$$(E) \text{ admet une unique solution } T\text{-périodique si, et seulement si, } \int_0^T b \neq 0.$$

♦ **Exercice 4.** [★] (Lemme de Grönwall différentiel)

Soient $u, v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues. On s'intéresse à l'inéquation différentielle sur \mathbb{R}_+ définie par

$$(I) \quad y' \leq u(t)y + v(t).$$

Pour toute solution y de (I) , on souhaite déterminer une sursolution de y , c'est-à-dire une fonction φ telle que $y \leq \varphi$ sur \mathbb{R}_+ .

En général, pour traiter ce type de problème, on commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée puis on applique une méthode de variation de la constante dans l'inéquation différentielle.

1. Démontrer que toute solution y de l'inéquation différentielle (I_H) : $y' \leq u(t)y$ vérifie l'inégalité $\forall t \geq 0, y(t) \leq y(0) e^{U(t)}$ où U désigne la primitive de u qui s'annule en 0.
2. Passer ensuite au cas général de l'inéquation (I) .

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_H) : $y' = u(t)y$ sont toutes les fonctions y_H de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad y_H(t) = \lambda e^{U(t)} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

où U désigne la primitive de u qui s'annule en 0, c'est-à-dire $\forall t \geq 0, U(t) = \int_0^t u$.

Dès lors, si y désigne une solution de (I_H) , on introduit la fonction $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \geq 0, \lambda(t) = y(t) e^{-U(t)}$, de sorte que λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ satisfaisant l'égalité

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \lambda(t) e^{U(t)}.$$

En dérivant, on obtient $\forall t \geq 0, y'(t) = \lambda'(t) e^{U(t)} + \lambda(t) u(t) e^{U(t)}$. En reportant dans (I) , il vient

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) \leq 0$$

ce qui démontre que λ est une fonction décroissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . Dès lors, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) \leq \lambda(0),$$

c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) e^{-U(t)} \leq y(0) e^{-0}$$

ou encore

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t) \leq y(0) e^{U(t)}}.$$

2. Si y désigne cette fois une solution de (I) , on introduit la fonction $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \geq 0, \lambda(t) = y(t) e^{-U(t)}$, de sorte que λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ satisfaisant l'égalité

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \lambda(t) e^{U(t)}.$$

En dérivant, on obtient $\forall t \geq 0, y'(t) = \lambda'(t) e^{U(t)} + \lambda(t) u(t) e^{U(t)}$. En reportant dans (I) , il vient

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda'(t) \leq v(t) e^{-U(t)}$$

ce qui donne, après intégration entre 0 et t ,

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) \leq \lambda(0) + \int_0^t v e^{-U} dt,$$

c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) e^{-U(t)} \leq y(0) e^{-0} + \int_0^t v e^{-U} dt$$

ou encore

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t) \leq y(0) e^{U(t)} + \left(\int_0^t v e^{-U} dt \right) e^{U(t)}}.$$

♦ **Exercice 5.** [o]

Résoudre les équations suivantes :

$$y'' + 2y' - 8y = e^{3t}, \quad y'' - 3y' - 18y = 324t, \quad y'' - 10y' + 41y = \sin t, \quad y'' - 2y' + 2y = (\sin t)e^t.$$

AQT

♦ **Exercice 6.** [o]

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \max\{1, e^x\}$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

A faire

♦ **Exercice 7.** [o]

On souhaite résoudre sur $[0; \pi/2[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad (\cos x)y'' + (\sin x)y' - (\cos^3 x)y = 0.$$

1. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y(x) = \lambda e^{\sin x}$ est une solution de (E) .
2. Résoudre (E) en faisant varier la constante λ . Autrement dit, rechercher les solutions de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{\sin x}$ où λ est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0; \pi/2[$. C'est la méthode de Liouville.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $y : x \mapsto \lambda e^{\sin x}$ est deux fois dérivable sur $[0; \pi/2[$ et l'on a

$$y' = \lambda(\cos x)e^{\sin x} \quad \text{et} \quad y'' = -\lambda(\sin x)e^{\sin x} + \lambda(\cos^2 x)e^{\sin x},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & (\cos x)y'' + (\sin x)y' - (\cos^3 x)y \\ &= (\cos x)(-\lambda(\sin x)e^{\sin x} + \lambda(\cos^2 x)e^{\sin x}) + (\sin x)(\lambda(\cos x)e^{\sin x}) - (\cos^3 x)\lambda e^{\sin x} \\ &= -\lambda(\cos x)(\sin x)e^{\sin x} + \lambda(\cos^3 x)e^{\sin x} + \lambda(\sin x)(\cos x)e^{\sin x} - \lambda(\cos^3 x)\lambda e^{\sin x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y = \lambda e^{\sin x}$ est une solution de (E) .

2. On pose

$$\lambda(x) = \frac{y(x)}{e^{\sin x}}$$

qui est une fonction deux fois dérivable. Dès lors, la fonction

$$y : x \mapsto \lambda(x)e^{\sin x}$$

est deux fois dérivable sur $[0; \pi/2[$ et l'on a

$$y' = \lambda'e^{\sin x} + \lambda(\cos x)e^{\sin x}$$

et

$$y'' = \lambda''e^{\sin x} + 2\lambda'(\cos x)e^{\sin x} + \lambda(-\sin x)e^{\sin x} + \lambda(\cos^2 x)e^{\sin x}.$$

En reportant dans (E) , il vient

$$\begin{aligned} & (\cos x)(\lambda''e^{\sin x} + 2\lambda'(\cos x)e^{\sin x} + \lambda(-\sin x)e^{\sin x} \\ & \quad + \lambda(\cos^2 x)e^{\sin x}) + (\sin x)(\lambda'e^{\sin x} + \lambda(\cos x)e^{\sin x}) \\ & \quad - (\cos^3 x)\lambda e^{\sin x} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\cos x)\lambda'' + (2\cos^2 x + \sin x)\lambda' = 0.$$

La fonction λ' est solution de l'équation $(\cos x)(\lambda')' + (2\cos^2 x + \sin x)(\lambda') = 0$ dont la forme résoluble est

$$(\lambda')' + (2\cos x + \tan x)(\lambda') = 0,$$

puisque \cos ne s'annule pas sur $[0; \pi/2]$. Le cours nous dit que les solutions de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sont toutes les fonctions de la forme

$$\begin{aligned}\lambda' &= c \exp \left\{ - \int^x (2 \cos t + \tan t) dt \right\} \\ &= c \exp \left\{ - 2 \sin x + \ln |\cos x| \right\} \\ &= c(\cos x) e^{-2 \sin x},\end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$. En posant $A = -c/2$, on a alors

$$\lambda = A e^{-2 \sin x} + B \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

En conclusion,

les solutions de (E) sur $[0; \pi/2]$ sont toutes les fonctions de la forme $y = A e^{-\sin x} + B e^{\sin x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

♦ Exercice 8. [o] (Équations d'Euler)

On appelle équation différentielle d'Euler une équation définie sur \mathbb{R}_+^* par une relation du type

$$(E) \quad ax^2 y'' + bxy' + cy = d(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et d est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

Expliquer comment résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en posant $z(t) = y(e^t)$.

Application : Résoudre $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x + 1$.

- Effectuons le changement d'inconnue proposé par l'énoncé. La fonction y désignant l'inconnue de notre équation (c'est donc une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^*), on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)$. Comme y est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* , la fonction z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} par théorèmes généraux.

Nous venons de définir notre nouvelle inconnue z en fonction de l'ancienne y . Pour les calculs, il est nettement plus pratique d'avoir l'expression de l'ancienne inconnue y en fonction de la nouvelle z (retenez cette idée!).

Pour tout $x > 0$, on a

$$y(x) = z(\ln x)$$

et donc

$$y'(x) = x^{-1} z'(\ln x) \quad \text{et} \quad y''(x) = -x^{-2} z'(\ln x) + x^{-2} z''(\ln x).$$

En reportant dans (E) , on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}(E) \iff & ax^2 (-x^{-2} z'(\ln x) + x^{-2} z''(\ln x)) + bx(x^{-1} z'(\ln x)) + cz(\ln x) = d(x) \\ \iff & az''(\ln x) + (b-a)z'(\ln x) + cz(\ln x) = d(x).\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x = e^t$, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(E) \iff az'' + (b-a)z' + cz = d(e^t).$$

On obtient donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant. Il ne reste plus qu'à la résoudre. On obtient ainsi la fonction $t \mapsto z(t)$, ce qui donne la solution $y : x \mapsto z(\ln x)$. Comme on a bien raisonné par équivalence (y réfléchir !), on a ainsi déterminé l'ensemble des solutions de (E) .

- Traitons le cas de l'équation

$$(E) \quad x^2 y'' - 5xy' + 9y = x + 1$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$, ce qui donne (je ne réexplique pas tout)

$$(E) \iff z'' - 6z' + 9z = e^t + 1.$$

Considérons l'équation homogène $z'' - 6z' + 9z = 0$. Son équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$ admet 3 comme racine double. Par conséquent, les solutions homogènes sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_h(t) = (\lambda t + \mu) e^{3t} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Pour déterminer une solution particulière, on peut utiliser le principe de superposition. L'équation $z'' - 6z' + 9z = 1$ admet $z_{p_1} = 1/9$ comme solution évidente. Pour l'équation $z'' - 6z' + 9z = e^t$, on cherche une solution particulière de la forme $\forall t \in \mathbb{R}, z_{p_2} = \alpha e^t$ et on trouve (après calculs) $\forall t \in \mathbb{R}, z_{p_2}(t) = e^t / 4$. Par conséquent, une solution particulière de $z'' - 6z' + 9z = e^t + 1$ est donnée par la fonction z_p définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{9}.$$

On en déduit que les solutions de $z'' - 6z' + 9z = e^t + 1$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (\lambda t + \mu) e^{3t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{9} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

En conclusion,

les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme
 $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (\lambda \ln x + \mu) x^3 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{9} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

◆ **Exercice 9.** [o]

On souhaite résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) : $y''' = y$.

On constate que les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, sont clairement des solutions de (E) .

Résoudre (E) en faisant varier la constante (c'est la *méthode de Liouville*).

Soit y une solution de (E) . On considère la fonction λ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = y(x) e^{-x}$ et l'on constate que c'est une fonction trois fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda(x) e^x.$$

On a

$$y''' = \lambda''' e^x + 3\lambda'' e^x + 3\lambda' e^x + \lambda e^x,$$

donc

$$\begin{aligned} y''' = y &\iff \lambda''' e^x + 3\lambda'' e^x + 3\lambda' e^x + \lambda e^x = \lambda e^x \\ &\iff \lambda''' + 3\lambda'' + 3\lambda' = 0. \end{aligned}$$

C'est une équation linéaire du second ordre en λ' dont les coefficients sont constants. Son équation caractéristique $r^2 + 3r + 3 = 0$ admet comme solutions les nombres complexes conjugués

$$r = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \bar{r} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Par conséquent, les solutions de $\lambda''' + 3\lambda'' + 3\lambda' = 0$ sont toutes les fonctions λ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = e^{-3x/2} \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ce qui implique (après une primitivation formelle) que ce sont toutes les fonctions λ de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = e^{-3x/2} \left[a \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + b \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

On en conclut que

les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-x/2} \left[a \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + b \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] + c e^x \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

♦ **Exercice 10.** [☆] (Phénomène de relaxation)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

1. On suppose que $f + f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. [☒] On suppose que $f + f' + f''$ tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. On suppose que $f + f' + f'' + f'''$ tend vers 0 en $+\infty$. La fonction f tend-elle nécessairement vers 0 en $+\infty$?

1. On peut considérer que f est une solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ où h tend vers 0 en $+\infty$. La résolution de cette équation différentielle donne

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \alpha e^{-t} + e^{-t} \int_0^t h(u) e^u du,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que $e^{-t} \int_0^t h(u) e^u du$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe A tel que $\forall u \geq A, |h(u)| \leq \varepsilon/2$, donc

$$\forall t \geq A, \quad \left| e^{-t} \int_A^t h(u) e^u du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^{-t} \int_A^t e^s ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $e^{-t} \int_0^A h(u) e^u du$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il existe $B \geq A$ tel que

$$\forall t \geq B, \quad \left| e^{-t} \int_0^A h(u) e^u du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant ces deux résultats, on a

$$\forall t \geq B, \quad \left| e^{-t} \int_0^t h(u) e^u du \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit à notre bonheur. Donc

Si la fonction $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$, alors toute solution de l'équation différentielle $y' + y = h(x)$ tend également vers 0 en $+\infty$.

Remarque : c'est un phénomène *transitoire* bien connu en physique.

2. On peut considérer que f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = h$ où h tend vers 0 en $+\infty$. La résolution de cette équation différentielle (c'est hors programme) donne

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad f(t) = & \left(\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du \right) e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ & + \left(\beta + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t h(u) e^{u/2} \cos \frac{\sqrt{3}u}{2} du \right) e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que les fonctions $t \mapsto e^{-t/2} \int_0^t h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du$ et $t \mapsto e^{-t/2} \int_0^t h(u) e^{u/2} \cos \frac{\sqrt{3}u}{2} du$ tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

► Soit $\varepsilon > 0$. Il existe A tel que $\forall u \geq A, |h(u)| \leq \varepsilon/2$, donc

$$\forall t \geq A, \quad \left| e^{-t/2} \int_A^t h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^{-t/2} \int_A^t e^{u/2} du \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $e^{-t/2} \int_0^A h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il existe $B \geq A$ tel que

$$\forall t \geq B, \quad \left| e^{-t/2} \int_0^A h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant ces deux résultats, on a

$$\forall t \geqslant B, \quad \left| e^{-t/2} \int_0^t h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du \right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui suffit pour affirmer que $e^{-t/2} \int_0^t h(u) e^{u/2} \sin \frac{\sqrt{3}u}{2} du$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

- *Mutatis mutandis*, on démontre que $e^{-t/2} \int_0^t h(u) e^{u/2} \cos \frac{\sqrt{3}u}{2} du$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Donc

Si la fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$, alors toute solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = h(x)$ tend également vers 0 en $+\infty$.

3. Nan ! Il suffit de prendre $f = \cos$ pour s'en convaincre.

♦ **Exercice 11.** [○]

Résoudre les équations différentielles suivantes où y est une fonction inconnue de x :

$$(E_1) \quad y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy} \quad (E_2) \quad y' = \frac{1+x^2}{1+y^2} \quad (E_3) \quad y' = e^{x+y}.$$

A faire.

♦ **Exercice 12.** [○]

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme

$$(S) \begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où $\omega > 0$ est la pulsation cyclotron (qui dépend de la masse, de la charge et du champ magnétique).

1. Résoudre (S) en formant une équation différentielle du second ordre satisfaite par x' .
2. Résoudre à nouveau (S) en considérant la fonction complexe $u = x' + iy'$.

A faire.

♦ **Exercice 13.** [★]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$.

On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$.

► Analyse

Soit $f \in \mathcal{E}$. En dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(x - a) = -f(a - (a - x)) = -f(x)$, ce qui démontre que f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La fonction f est donc nécessairement de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A \cos(x) + B \sin(x),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

En reportant cette information dans la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-A \sin(x) + B \cos(x) = A \cos(a - x) + B \sin(a - x),$$

c'est-à-dire

$$-A \sin(x) + B \cos(x) = (A \cos(a) + B \sin(a)) \cos(x) + (A \sin(a) - B \cos(a)) \sin(x).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{cases} B = A \cos(a) + B \sin(a) \\ -A = A \sin(a) - B \cos(a) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \cos(a)A - (1 - \sin(a))B = 0 \\ (1 + \sin(a))A - \cos(a)B = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\cos(a)A = (1 - \sin(a))B.$$

\triangleright Si $\sin(a) = 1$, on a $A = 0$ et B quelconque, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = B \sin(x).$$

\triangleright Si $\sin(a) \neq 1$, on a $B = \frac{\cos(a)}{1 - \sin(a)}A$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A \cos(x) + A \frac{\cos(a)}{1 - \sin(a)} \sin(x) = A \frac{\cos(x) + \sin(x - a)}{1 - \sin(a)}$$

► Synthèse

On en conclut que

$$\boxed{\text{si } a \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi], \text{ alors } \mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = B \sin(x)\}}$$

et

$$\boxed{\text{si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi], \text{ alors } \mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos(x) + A \sin(x - a)\}}$$

♦ **Exercice 14.** [o]

Résoudre l'équation (E) : $y' + y = \int_0^1 y$.

Analyse

Soit y une solution de (E) . En dérivant la relation $y' + y = \int_0^1 y$, on obtient $y'' + y' = 0$, ce qui démontre que $y' = \lambda e^{-x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et donc que $y = -\lambda e^{-x} + \mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Alors

$$\int_0^1 y = \int_0^1 (-\lambda e^{-x} + \mu) dx = [\lambda e^{-x} + \mu x]_0^1 = \lambda(e^{-1} - 1) + \mu,$$

ce qui donne, après report dans (E) ,

$$\mu = \lambda(e^{-1} - 1) + \mu,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = 0.$$

Donc

$$y = \mu.$$

Synthèse

On vérifie sans mal que les fonctions constantes sont bien solutions de (E) .

Conclusion

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E) : y' + y = \int_0^1 y \text{ sont les fonctions constantes.}}$$