# DM n° 8 : Intégration

**Exercice 1 – (Formule de Plouffe, 1995)**
Nous démontrons ici une formule remarquablement simple permettant de calculer assez rapidement et de façon indépendante les chiffres de $\pi$ en base 2.

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

1. Soit $a \in ]0,1[$, et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,a[$, et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\left|\frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{\ell=0}^{n} t^{8\ell+k}\right| \leqslant \frac{a^{8(n+1)+k}}{1-a^8}.$$
2. En déduire que
$$\int_0^a \frac{t^k}{1-t^8}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{8n+k+1}}{(8n+k+1)},$$
puis que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = -16\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x$$
3. Quelles sont les racines de $16 - X^8$ ? Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ ce polynôme et remarquer que certains des facteurs apparaissant dans cette décomposition divisent aussi $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$.
4. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{16-x^8}\,\mathrm{d}x$ en utilisant une décomposition en éléments simples de la fraction (ne pas oublier de mettre un numérateur de degré 1 lorsque le dénominateur est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ de degré 2). Conclure.

**Exercice 2 –**

1. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer $I_0$ et $I_1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.
   (c) En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$,
   $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
   (d) Étudier le sens de variation de $I_n$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$.
   (e) En déduire la limite de $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la formule de Wallis :
   $$\lim_{p\to+\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$
2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.
   (a) Soit $u_n = S_n - S_{n-1}$. Montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
   (On pourra utiliser un développement limité du logarithme)

(b) En déduire que $S_n$ admet une limite finie $S$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En calculant de deux manières la limite de $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de $S$.

(d) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.

**Exercice 3 – (Transcendance de** e)

*Soit* e *la base des logarithmes népériens. Le but de l'exercice est de montrer que* e *est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme $P$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, non nul, tel que $P(\mathrm{e}) = 0$.*

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale $f$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré $m$, on a :

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u)\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des entiers tels que $a_0 + a_1\mathrm{e} + a_2\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\mathrm{e}^n = 0$, et $a_0 \neq 0$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f_p(x) = x^{p-1}\prod_{i=1}^{n}(x-i)^p, \qquad I_p(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-u} f_p(u)\ \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad J_p = \sum_{k=0}^{n} a_k I_p(k)$$

(a) Montrer que $J_p$ est entier

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $f_p^{(j)}(k)$ est divisible par $p!$.

*(c) Montrer que si $p$ est un nombre premier suffisamment grand, $J_p$ est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $p!$.

(d) Montrer que

$$|J_p| \leqslant C((n)^{n+1})^p \qquad \text{où} \qquad C = n\mathrm{e}^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

3. En considérant la limite de $\dfrac{C(n^{n+1})^p}{(p-1)!}$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$, trouver une contradiction et conclure.

**Problème 1 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

*On note pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.*

*On pourra utiliser, sans les justifier, les trois résultats suivants :*

- *une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ ;*
- *une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$, telle que $f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ admet un prolongement par continuité en $a$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ ;*
- *au voisinage de 0, $\sin(t) - t \sim -\dfrac{t^3}{6}$.*

*On rappelle par ailleurs que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, telles que $|f| \leqslant g$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $\displaystyle\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ (c'est-à-dire si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge), il en est de même de $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.*

1. **Étude de $I(x)$**

(a) Montrer que $I(x)$ est bien définie pour toute valeur de $x$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$, montrer que $I(x)$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$, qu'on note

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

2. **Valeur de $I$ (première méthode)**

(a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t$.

i. Justifier que $I_n$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.

iii. En déduire $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $J_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(c) En considérant la fonction $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$, en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

3. **Valeur de $I$ (deuxième méthode)**

*On admet dans cette question le théorème de Fubini pour les intégrales : Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout $(a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$ :*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y.$$

(a) Montrer que pour tout $u > 0$, et tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y = \frac{\sin(x)}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu})$.

(b) En déduire que pour tout $u > 0$, on a :

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu})\ \mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1 - \mathrm{e}^{-yu}(\cos(u) + y\sin(u))}{1 + y^2}\ \mathrm{d}y.$$

(c) À l'aide d'un passage à la limite dont on justifiera soigneusement toutes les étapes, en déduire la valeur de $I$ (on pourra procéder par majorations).

4. **Estimation du reste**

Montrer que, au voisinage de $+\infty$ :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$