

Problème n° 6 : Étude d'une fonction réciproque

Correction du problème 1 – Etude d'une fonction réciproque

PARTIE I – Étude de g

1. Variations de g .

- (a) La fonction f est définie sur \mathbb{R} , continue et dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} , puisque c'est une fonction polynomiale. Sa dérivée est :

$$f'(t) = 3t^2 + 1.$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur \mathbb{R} , et y est toujours positive. D'où le tableau de variation de f :

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| t | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | + | |
| $f(t)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Déterminons les points d'inflexion de f . Pour cela, étudions la dérivée seconde : $f''(t) = 6t$. Ainsi, f'' s'annule en 0, est négative pour $t < 0$ et positive pour $t > 0$ (elle change donc de signe en 0).

Ainsi, 0 est un point d'inflexion, et f est concave sur \mathbb{R}_- et convexe sur \mathbb{R}_+ .

- (b) Voir figure 1. La pente de la tangente au point d'inflexion $(0, 0)$ est $f'(0) = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente en ce point d'inflexion est $y = x$.
- (c) Comme f' est strictement positive sur \mathbb{R} , f est continue et strictement croissante. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle image $f(\mathbb{R})$. D'après les valeurs des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, cet intervalle image est $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Elle admet donc une fonction réciproque g , définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Par définition, g vérifie $f \circ g = \text{id}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{g^3(x) + g(x) = x}. \quad (1)$$

- (d) f étant strictement croissante et impaire, sa réciproque g est aussi strictement croissante et impaire.
 Puisque g est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , son image est \mathbb{R} . Comme elle est croissante, elle admet des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Si par exemple en $-\infty$, cette limite est $\ell > -\infty$, on obtient, par croissance, $g(\mathbb{R}) \subset [\ell, +\infty[$, ce qui contredit $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- (e) D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, puisque f est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée ne s'annule pas, sa réciproque g est dérivable en tout point de \mathbb{R} . Puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ , le cours nous assure même que g est de classe \mathcal{C}^∞ également. On obtient alors l'expression de la dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{3g^2(x) + 1}. \quad (2)$$

- g étant croissante et négative sur \mathbb{R}_- , g^2 est décroissante et positive, donc g' est croissante.
- De la même manière, on montre la décroissance de g' sur \mathbb{R}_+ .
- Les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, et la valeur en 0 amènent sans difficulté les valeurs des limites et extrema de g' .

On obtient alors le tableau de variation suivant :

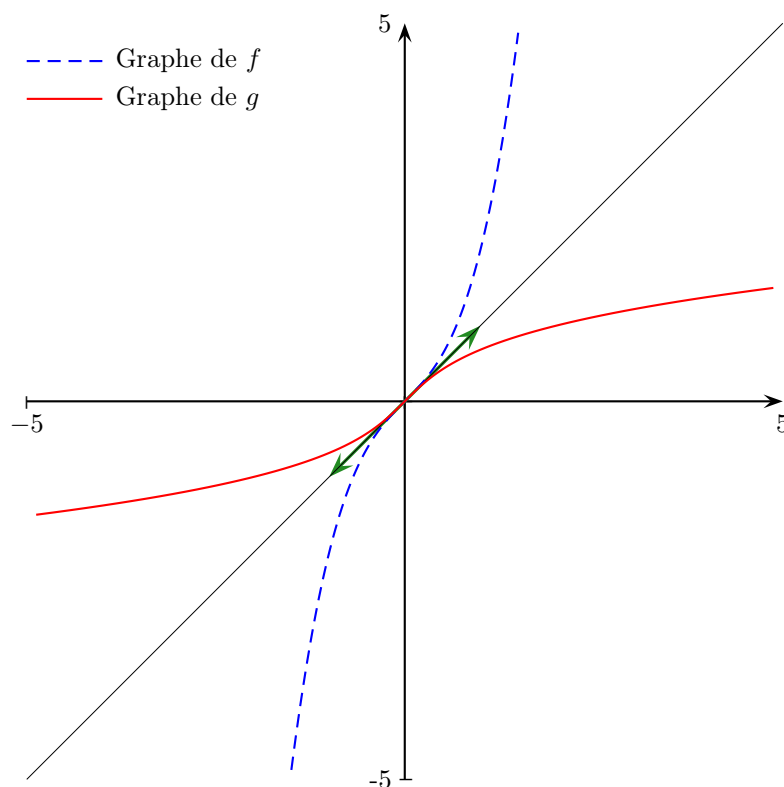


FIGURE 1 – Graphes de f et de g

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $g'(x)$ | 0 | 1 | 0 |

Les variations de g' permettent de conclure que g est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ . En particulier, la courbe admet un unique point d'inflexion en 0 .

(f) On l'a justifié dans la question précédente.

(g) Voir figure 1. On obtient le graphe de g en prenant le symétrique du graphe de f par la droite d'équation $y = x$.

Les résultats précédents sur g (variations, limites, points d'inflexion) se déduisent bien de cette symétrie!

2. **Étude de g'** – Certaines propriétés de g' ne se déduisent pas de f' .

(a) Comme $f^{(3)} = 6$, $f^{(3)}$ ne s'annule pas et par conséquent, f' n'a pas de point d'inflexion.

(b) Le point essentiel est de réussir à se ramener à un intervalle fermé borné afin de pouvoir utiliser le théorème de compacité.

Si α est constante sur $[a, +\infty[$, le résultat est évident (tout point convient).

Sinon, soit $x \in]a, +\infty[$ tel que $\alpha(x) \neq \alpha(c)$ et soit $y = \frac{\alpha(x) + \alpha(c)}{2}$. La valeur y est strictement comprise entre $\alpha(x)$ et $\alpha(c)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction α étant supposée continue, il existe $x_1 \in]c, x[$ et $x_2 \in]x, +\infty[$ tels que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = y$. La fonction α étant continue sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$, elle y admet un maximum et un minimum (théorème de compacité). Puisque $x \in]x_1, x_2[$ et $\alpha(x) \neq y$, soit le maximum, soit le minimum est obtenu en au moins un point de $]x_1, x_2[$, et est donc un extremum local de α sur l'ouvert $]x_1, x_2[$, donc aussi sur $[a, +\infty[$. Attention, ce raisonnement ne serait pas valable pour un extremum sur le bord!

Ainsi, il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que α présente un extremum local en c .

(c) On calcule g'' en dérivant (2) : D'après le théorème de composition des limites, g admettant des limites $-\infty$

et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g''(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-6t}{(3t^2 + 1)^3} = 0, \varepsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} g''(x) = 0 \quad \text{et} \quad g''(0) = 0.$$

En appliquant la question précédente à g'' sur les deux intervalles $] -\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, on trouve $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$ tels que g'' admet un extremum local en c_1 et en c_2 (pour c_1 on utilise la propriété symétrique à celle de la question précédente, en $-\infty$). Ceci équivaut bien à dire que g' admet un point d'inflexion en ces points.

Ainsi, g' admet au moins deux points d'inflexion.

On pouvait aussi répondre à cette question par l'étude des variations de $g'' = h \circ g$, avec $h(t) = \frac{-6t}{(3t^2 + 1)^3}$. Comme g est bijective strictement croissante, cela revient à étudier les variations de h . Or,

$$h'(t) = \frac{-6(3t^2 + 1)^3 + 6t(18t(3t^2 + 1)^2)}{(3t^2 + 1)^6} = \frac{-6(3t^2 + 1) + 108t^2}{(3t^2 + 1)^4} = \frac{90t^2 - 6}{(3t^2 + 1)^4}.$$

Ainsi, $h'(t)$ est du signe de $15t^2 - 1$. h change donc de sens de variation en $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ et en $+\frac{1}{\sqrt{15}}$. On en déduit que g'' change de sens de variation en $g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) < 0$ et en $g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) > 0$. Ces deux valeurs correspondent à des points d'inflexion de g' . On peut même les expliciter puisque $g^{-1} = f$.

3. Étude locale et asymptotique de g

- (a) La relation \sim_a est clairement reflexive et symétrique. Par ailleurs, si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, on considère un voisinage V de a sur lequel aucune des 3 fonctions ne s'annule (en prenant l'intersection de voisinages convenables sparément pour chacune des fonctions). On a alors

$$\forall x \in V, \quad \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow 1.$$

Ainsi, $f \sim_a h$, donc \sim_a est transitive.

Ainsi, \sim_a est une relation d'équivalence.

- (b) On peut utiliser la définition de la dérivée, la fonction g étant dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \longrightarrow g'(0) = 1.$$

On obtient bien, par définition, $g(x) \underset{0}{\sim} x$.

- (c) On peut élever un équivalent à une puissance d'exposant constant (revenir au quotient : le cube d'une expression tendant vers 1 tend encore vers 1 !). Ainsi, $g^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$

En utilisant la relation de la question 1(c), il vient donc :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{g(x) - x}{-x^3} = \frac{g(x)^3}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Ainsi, $g(x) - x \underset{0}{\sim} -x^3$

- (d) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, g est négligeable devant g^3 en $+\infty$:

$$\frac{g(x)}{g^3(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{g(x)^3 + g(x)}{g(x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{soit:} \quad \frac{x}{g(x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{puis:} \quad \frac{x^{\frac{1}{3}}}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}$

- (e) La fonction h est définie par la formule : $h(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1$. Cette formule a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, h est bien définie. De plus, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1, \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}.$$

- (f) D'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x(1+h(x))^3 + x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) = x, \quad \text{soit} \quad x^{\frac{2}{3}}(1+h(x))^3 + 1 + h(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Ainsi, $x^{\frac{2}{3}}((1+h(x))^3 - 1) = -(1+h(x)) \underset{+\infty}{\sim} -1$ puisque $h(x)$ tend vers 0. Par ailleurs, d'après le cours,

$$\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \alpha,$$

donc, puisque $h(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$,

$$(1+h(x))^3 - 1 \underset{+\infty}{\sim} 3h(x)$$

On en déduit, que

$$3x^{\frac{2}{3}}h(x) \underset{+\infty}{\sim} -1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}}h(x) = -\frac{1}{3}}.$$

4. Étude d'une primitive de g

- (a) Tout d'abord, remarquons que G est bien définie, car g est continue. Faisons le changement de variables proposé $u = f(t)$, possible puisque f est de classe \mathcal{C}^1 . Les bornes en u sont $u_1 = 0$ et $u_2 = x$, ainsi, les bornes en t sont

$$t_1 = f^{-1}(u_1) = g(u_1) = g(0) = 0 \quad \text{et} \quad t_2 = f^{-1}(u_2) = g(u_2) = g(x).$$

De plus, la relation entre les différentielles est : $du = f'(t) dt$ Ainsi, pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(u) du = \int_0^{g(x)} g(f(t))f'(t) dt = \int_0^{g(x)} t \cdot f'(t) dt = \int_0^{g(x)} (3t^3 + t) dt = \\ &= \left[\frac{3}{4} \cdot t^4 - \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^{g(x)} = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x). \end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{G = \frac{3}{4}g^4 - \frac{1}{2}g^2}$

- (b) On commence par la parité. La fonction g étant impaire,

$$G(-x) = \frac{3}{4} \cdot g^4(-x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(-x) = \frac{3}{4} \cdot (-g(x))^4 - \frac{1}{2} \cdot (-g(x))^2 = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x) = G(x)$$

Ainsi, $\boxed{G \text{ est pair}}.$

Par définition, la dérivée de G est g , qui est négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, $\boxed{G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+}.$

- (c) La limite de g en 0 est 0. Ainsi, $g^4(x) = o(g^2(x))$ au voisinage de 0. Par conséquent,

$$\boxed{G(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot g^2(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x^2}.$$

La limite de g est $+\infty$ en $+\infty$, ainsi $g^2(x) = o(g^4(x))$ au voisinage de $+\infty$, et par conséquent

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot g^4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}}.$$

PARTIE II – Approximation rationnelle de g

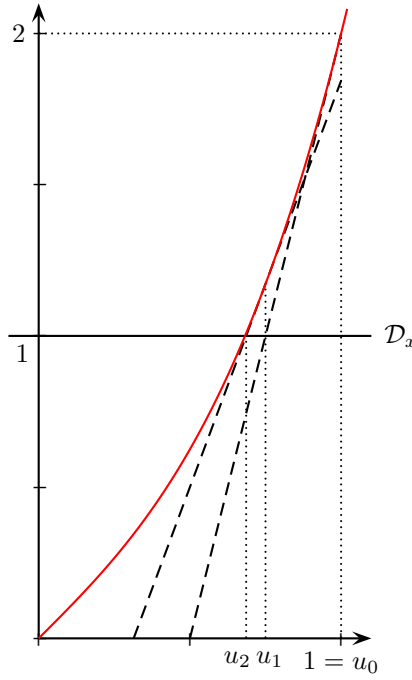


FIGURE 2 – Premières valeurs de $u_n(1)$

1. Construction de l'algorithme d'approximation

- L'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse t est :

$$Y = (X - t)f'(t) + f(t) = (X - t)(3t^2 + 1) + t^3 + t = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3.$$

L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $Y = x$ vérifie donc :

$$x = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3, \quad \text{soit} \quad \boxed{X = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}}.$$

- Par conséquent, par définition de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, cette suite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}}.$$

Cette relation d'ordre 1, et la condition initiale $\boxed{u_0(x) = x}$ déterminent entièrement la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. **Étude graphique d'un exemple.** On note u_n pour $u_n(1)$. Voir figure 2.

3. Étude de l'algorithme

- (a) On calcule $\varphi(g(x))$: $\varphi(g(x)) = \frac{2g^3(x) + x}{3g^2(x) + 1} = g(x) \cdot \frac{2g^3(x) + x}{3g^3(x) + g(x)}$. Or, d'après la relation (1),

$$2g^3(x) + x = 2x - 2g(x) + x = 3x - 2g(x), \quad \text{et de même,} \quad 3g^3(x) + g(x) = 3x - 2g(x).$$

Ainsi, $\boxed{\varphi(g(x)) = g(x)}$.

- (b) $t - \varphi(t) = t - \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1} = \frac{t^3 + t - x}{3t^2 + 1} = \frac{f(t) - x}{3t^2 + 1}$. Ainsi, le signe de $\boxed{t - \varphi(t)}$ est celui de $\boxed{f(t) - x}$.

- (c) La fonction φ , définie sur \mathbb{R}_+ , est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2 + 1) - 6t(2t^3 + x)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t^4 + 6t^2 - 6tx}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t(f(t) - x)}{(3t^2 + 1)^2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{le signe de } \varphi' \text{ est celui de } f(t) - x \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

Tout d'abord, l'intervalle $[g(x), x]$ n'est pas vide, car d'après la partie I, $g(x) \leq x$. Par ailleurs, par définition de g , on a $f(g(x)) = x$, et comme f est croissante, pour tout $t \in [g(x), x]$, $f(t) \geq x$. Comme φ' est du signe de $f(t) - x$, on en déduit que φ' est positive sur $[g(x), x]$, donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [g(x), x]}$.

(d) φ est croissante sur $[g(x), x]$. Ainsi

$$\varphi([g(x), x]) \subset [\varphi(g(x)), \varphi(x)].$$

On a montré plus haut que $\varphi(g(x)) = g(x)$. Par ailleurs,

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 + x}{3x^2 + 1} = x \cdot \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 1} \leq x \cdot \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} = x.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi([g(x), x]) \subset [g(x), x]}$.

(e) Soit $t \in [g(x), x]$. On a déjà montré dans la question 3c que $f(t) - x \geq 0$, donc $t^3 + t - x \geq 0$. De plus $t - x \leq 0$, donc $t^3 + t - x \leq t^3$. Par conséquent, pour tout $t \in [x, g(x)]$:

$$0 \leq \varphi'(t) = \frac{6t(t^3 + t - x)}{(3t^2 + 1)^1} \leq \frac{6t^4}{(3t^2 + 1)^2} \leq \frac{6t^4}{(3t^2)^2} \quad \text{soit:} \quad \boxed{0 \leq \varphi'(t) \leq \frac{2}{3}}.$$

4. Étude de la convergence

- (a) • $u_0(x) \in [g(x), x]$. Comme cet intervalle est stable par φ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$, on en déduit par une récurrence immédiate que $u_n(x) \in [g(x), x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Puisque $u_1(x) \in [g(x), x]$ et $u_0(x) = x$, on a $u_1(x) \leq u_0(x)$. La croissance de φ permet de propager cette inégalité aux rangs suivants par une récurrence immédiate : si $u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$, en appliquant la fonction croissante φ , et d'après la relation satisfaite par les $u_n(x)$, on obtient $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$
- Comme elle est aussi minorée par $g(x)$, elle converge. Puisque φ est continue, sa limite ℓ vérifie $\ell = \varphi(\ell)$, c'est-à-dire :

$$\ell = \frac{2\ell^3 + \ell}{3\ell^2 + 1},$$

ou encore :

$$3\ell^3 + \ell = 2\ell^3 + \ell, \quad \text{d'où} \quad \ell^3 + \ell = x.$$

La fonction $t \mapsto t^3 + t$ étant bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , l'équation $t^3 + t = x$ admet une unique solution. Cette solution est par définition $g(x)$. Ainsi, $\boxed{\ell = g(x)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction φ est continue sur $[g(x), u_n(x)]$, dérivable sur $]g(x), u_n(x)[$, et φ' est compris entre 0 et $\frac{2}{3}$ sur $[g(x), u_n(x)] \subset [g(x), x]$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$0 \leq \varphi(u_n(x)) - \varphi(g(x)) \leq \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x)) \quad \text{soit:} \quad \boxed{0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x))}.$$

(c) Soit $x \in [0, a]$. L'inégalité de la question précédente donne, par une récurrence immédiate :

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0(x) - g(x)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - g(x)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

Ainsi, cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \in [0, a]$, il en résulte que

$$\boxed{\beta_n = \sup_{x \in [0, a]} (u_n(x) - g(x)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a}.$$

(d) On part de la seconde expression :

$$(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \frac{g^3(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{x - g(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{2t^3 + x - (3t^2 + 1)g(x)}{3t^2 + 1},$$

puis enfin : $\boxed{(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \varphi(t) - g(x)}.$

(e) Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = \frac{3t}{3t^2 + 1}$. Son domaine de définition est \mathbb{R} . Elle est impaire : il suffit de l'étudier sur \mathbb{R}_+ . ψ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée :

$$\psi'(t) = \frac{(3t^2 + 1) - 6t(3t)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{3 - 9t^2}{(3t^2 + 1)^2}.$$

On en déduit les variations de ψ sur \mathbb{R}_+ :

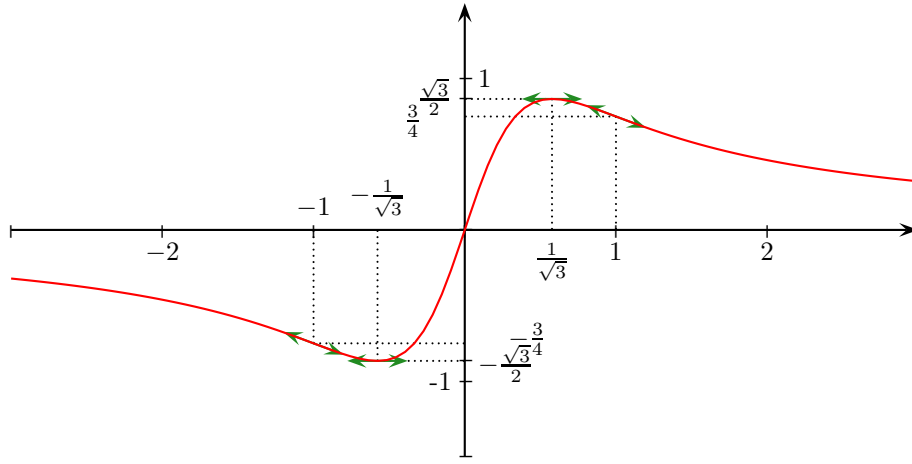


FIGURE 3 – Graphe de ψ

| | | | |
|------------|---|----------------------|-----------|
| x | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
| $\psi'(x)$ | + | 0 | - |
| $\psi(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0 |

Ainsi, g admet un maximum égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et un minimum égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour déterminer ses points d'inflexion et sa convexité, on calcule la dérivée seconde (calculs à votre charge!) :

$$\psi''(t) = \frac{54(t^3 - t)}{(3t^2 + 1)^3}.$$

On en déduit le tableau de signe de φ'' :

| | | | | | |
|-------------|-----------|----|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\psi''(x)$ | - | + | - | + | |

Ainsi, ψ est concave sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, 1]$, et est convexe sur $[-1, 0]$ et sur $[1, +\infty[$. Elle admet trois points d'inflexion en -1, 0 et 1. On en déduit le tracé de la courbe de ψ (figure 3)

Evidemment, cette étude complète est inutile ici, seule la valeur des extrema nous intéresse.

- (f) • Si $t \in [g(x), x] \subset \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq t$, et donc, d'après la question 4d,

$$\varphi(t) - g(x) \leq (t - g(x))^2 \frac{3t}{3t^2 + 1},$$

et comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \frac{3t}{3t^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'après l'étude précédente, on en déduit que pour tout $t \in [g(x), x]$:

$$0 \leq \varphi(t) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(t - g(x))^2.$$

- En particulier, étant donné $n \in \mathbb{N}$, pour $t = u_n(x)$, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2. \quad (3)$$

- On montre maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n - 1} (u_0(x) - g(x))^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n - 1} (x - g(x))^{2^n}. \quad (4)$$

Initialisation : Pour $n = 0$, les deux termes de l'inégalité sont égaux.

Hérédité : Supposons la propriété vérifiée au rang n . Ainsi, la relation (4) est satisfaite pour cette valeur de n . De plus, (3) est satisfaite. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} (u_n(x) - g(x))^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n - 1} (x - g(x))^{2^n} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^{n+1} - 1} (x - g(x))^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n - 1} (x - g(x))^{2^n}.$$

- De plus, d'après la relation (1), $x - g(x) = g^3(x)$; comme $u_n(x) \in [g(x), x]$, on en déduit que $x - g(x) \leq u_n(x)^3$. On obtient donc :

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2^n - 1} u_n(x)^{3 \cdot 2^n}.$$

- (g) L'inégalité précédente ne permet de contrôler la convergence que lorsque $u_n^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. C'est pour cette raison qu'on se limite à l'intervalle $[0, 1]$.

```
import math

def phi(t,x):
    return (2 * t**3 + x) / (3 * t**2 + 1)

def g(x,err):
    u = x
    m = math.sqrt(3) / 2
    majorant = 1
    n = 0
    while majorant * (u ** (3 * 2 ** n)) > err:
        u = phi(u,x)
        n+=1
    return(u)
```

On peut même faire un tracé de la courbe sur $[0, 1]$, en utilisant les fonctions du module `matplotlib` :

```
import matplotlib.pyplot as plt

absc = []
ordo = []
for i in range(101):
    x = i * 0.01
    absc.append(x)
    ordo.append(g(x, 1e-10))
plt.plot(absc, ordo)
plt.grid()
plt.savefig('pb_cnt017.eps')
plt.show()
```


On obtient le tracé suivant :

