Planche de colle

Question de cours

- principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : énoncé et méthode pratique

Exercice de colle

Soient p et q deux entiers strictement positifs, puis A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^T A = B^T B.$$

1. Comparer $\mathrm{Ker}(A)$ à $\mathrm{Ker}(B)$.
2. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire habituel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que pour tous vecteurs X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
   $$(AX \mid AY) = (BX \mid BY).$$
3. Soient E un espace euclidien, puis $(e_1, \cdots, e_r)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ deux bases de E telles que :
   $$\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2,\ (e_i \mid e_j) = (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j).$$
   Montrer qu'il existe $h \in O(E)$ tel que :
   $$\forall i \in [\![1, r]\!],\ h(e_i) = \varepsilon_i.$$
4. Montrer qu'il existe $U \in O_p(\mathbb{R})$ tel que :
   $$A = UB.$$