Lycée Henri IV | **Cours**
MPSI | Durée : 4 h

SOMMES ET PRODUITS

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir le chapitre sur :

- les nombres.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Sommes

A.1. Le symbole $\sum$

Définition 1

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille finie de nombres complexes (I est donc un ensemble fini d'indices). On note $\displaystyle\sum_{k\in I} u_k$ la somme des éléments de la famille $(u_k)_{k\in I}$, avec la convention que cette somme est nulle lorsque l'ensemble I est vide (on parle alors de « somme vide »).

Dans le cas (très courant) où I est un intervalle d'entiers de la forme $[\![m;n]\!]$ où m, n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$, la somme de la famille $(u_k)_{m\leqslant k\leqslant n}$ entre m et n s'écrit aussi sous la forme

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n.$$

Si $m > n$, l'intervalle d'entiers $[\![m;n]\!]$ est vide donc $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ est une somme vide et vaut 0.

On notera que, pour tout $p \in [\![m;n-1]\!]$, on a la relation de récurrence :

$$\sum_{k=m}^{p+1} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + u_{p+1}$$

L'indice k est un indice muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{\ell=m}^{n} u_\ell \quad \text{OK} \qquad\qquad \sum_{k=m}^{n} u_k = \cancel{\sum_{n=m}^{n}} u_n$$

En particulier, dans $\mathbb{C}$, on prendra garde à ne pas utiliser la lettre i comme indice.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a$ est la somme de $n+1$ fois la constante a. On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ est la somme des n premiers entiers naturels. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (récurrence).
- La somme des n premiers carrés est donnée par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (récurrence).
- La somme $\displaystyle\sum_{\pi\leqslant k\leqslant\sqrt{99}} u_k$ est égale à $u_4 + \cdots + u_9$. On constate ainsi que la notation $\displaystyle\sum_{m\leqslant k\leqslant n} u_k$ est plus souple puisqu'elle permet de faire varier l'indice entre deux quantités qui ne sont pas des entiers.
- Il arrive également que l'on précise sous le symbole $\sum$ une qualité de l'indice de sommation. Par exemple, $\displaystyle\sum_{\substack{k=11\\ k \text{ pair}}}^{18} u_k = u_{12} + u_{14} + u_{16} + u_{18}$ est la somme des termes dont l'indice est pair et compris entre 11 et 18.

A.2. Régles de calcul

Une somme $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ étant donnée, il est possible d'utiliser les propriétés opératoires de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour la transformer. Au mieux, on peut ainsi obtenir une expression ramassée de la somme en fonction de m et n. On dit alors que l'on referme la somme.

Les principales règles de calcul avec le symbole $\sum$ sont présentées dans ce paragraphe. La liste de ces propriétés est loin d'être exhaustive.

a) Linéarité

La commutativité de l'addition dans $\mathbb{C}$ et la propriété de factorisation (qui découle des propriétés de distributivité de la multiplication sur l'addition) permettent d'établir les deux règles opératoires du symbole $\sum$ les plus utilisées.

Utilisation de la linéarité

Soient $(u_k)_{k\in[\![m;n]\!]}$ et $(v_k)_{k\in[\![m;n]\!]}$ deux familles de nombres complexes et λ un nombre complexe. La linéarité du symbole $\sum$ est la conjonction des deux propriétés

$$\sum_{k=m}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=m}^{n}u_k+\sum_{k=m}^{n}v_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n}(\lambda u_k)=\lambda\sum_{k=m}^{n}u_k.$$

Les deux propriétés ci-dessus sont en fait équivalente à la seule égalité :

$$\sum_{k=m}^{n}(\lambda u_k+v_k)=\lambda\sum_{k=m}^{n}u_k+\sum_{k=m}^{n}v_k,$$

qui résume, à elle-seule, la linéarité du symbole $\sum$.

On utilise souvent la première des deux propriétés en invoquant le « découpage » d'une somme en deux autres sommes et la seconde règle en disant que l'on peut « sortir » (multiplicativement) du symbole $\sum$ tout ce qui ne dépend pas de l'indice.

Ces deux raccourcis permettent de rendre mécanique la manipulation du symbole $\sum$. Il est toutefois nécessaire de garder à l'esprit les propriétés mathématiques qu'ils traduisent.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$

b) Changement d'indice

Un changement d'indice et une renumérotation les termes de la somme afin de simplifier son expression. La plupart du temps, on fait des décalages d'indice ou des inversions d'indice (ce sont les deux transformations présentées ci-dessous). On peut toutefois envisager des transformations d'indice plus compliquées, à la condition impérative de ne pas rajouter ou enlever de termes dans la somme (autrement dit, le changement d'indice doit être une bijection).

Décalage d'indice

Il arrive que l'on ait besoin de décaler l'indice d'une somme, c'est-à-dire de translater l'indice d'un entier fixé. Les décalages d'indice les plus utilisés sont des translations d'une unité où l'on pose $\ell = k-1$ ou $\ell = k+1$.

Exemples :

- Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$. On veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Pour cela, on calcule $qS_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$ en effectuant le décalage d'indice $\ell = k+1$, ce qui donne

$$qS_n = \sum_{\ell=1}^{n+1} q^\ell = S_n - 1 + q^{n+1},$$

d'où

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Inversion de l'ordre de sommation

Il peut être utile d'inverser l'ordre de sommation des termes de la suite, c'est-à-dire de transformer $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$ en $u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{m+1} + u_m$. Si l'indice k varie entre m et n, cela revient à effectuer le changement d'indice $\ell = n+m-k$, ce qui donne

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{\ell=m}^{n} u_{n+m-\ell}.$$

Attention !! Il faut conserver l'ordre de m et n sinon on obtient une somme vide.

Exemples :

- Retrouvons l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$ en utilisant l'inversion d'indice $\ell = n-k$. Il vient

$$S_n = \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} n - \sum_{\ell=0}^{n} \ell = (n+1)n - S_n, \qquad \text{d'où} \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Démontrons que la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k(n-k)}$ est nulle pour tout entier n impair.

  Considérons donc un entier n impair et posons $\ell = n-k$ dans la somme. On obtient

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-\ell}}{(n-\ell)\ell} = (-1)^n \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(-1)^\ell}{(n-\ell)\ell} = -S_n,$$

  ce qui prouve que S_n est nul.

c) *Téléscopage*

Téléscopage

Il arrive que l'expression à sommer soit de la forme $(u_{k+1} - u_k)$. Il se produit alors un « téléscopage », c'est-à-dire une succession de simplifications, que l'on peut facilement observer en écrivant les termes les uns en dessous des autres, comme on le voit dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \quad u_{n+1} - \cancel{u_n} \\
&\quad + \cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \cancel{u_{m+2}} - \cancel{u_{m+1}} \\
&\quad + \cancel{u_{m+1}} - u_m \\
&= \quad u_{n+1} - u_m.
\end{aligned}$$

Je vous conseille de retenir deux choses. D'une part, les téléscopages se produisent généralement lorsque l'expression de u_k contient une soustraction. D'autre part, les simplifications s'observent d'autant mieux que l'on revient à l'éciture de la somme avec des points de suspension en écrivant les termes les uns en dessous des autres.

Il est aussi possible de voir le téléscopage comme une linéarité suivie d'un décalage d'indice : $\sum\limits_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} u_{k+1} - \sum\limits_{k=m}^{n} u_k = \sum\limits_{k=m+1}^{n+1} u_\ell - \sum\limits_{k=m}^{n} u_k = u_{n+1} - u_m$ mais c'est moins fun !

<u>Exemples :</u>

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \qquad \text{Méga-astuce ;-)} \\
&= \quad \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} \\
&\quad + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

- En faisant apparaître un téléscopage, on peut calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k.k!$ En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k.k! = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1)k! = \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = \text{ téléscopage } = (n+1)! - 1.$$

1 h 00

d) Séparation des indices pairs et impairs

Séparation des indices pairs et impairs

Dans certaines sommes (en particulier celles qui contiennent un $(-1)^k$), il peut être utile de séparer les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs. On écrit alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \underbrace{\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}} u_k}_{\text{on pose } k=2p} + \underbrace{\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}} u_k}_{\text{on pose } k=2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} u_{2p+1}.\end{aligned}$$

Exemples :

- Calculons $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$ en séparant les termes d'indices pairs et impairs. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k \\ &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p}(2p) + \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p+1}(2p+1) \\ &= 2\sum_{p=0}^{n} p - \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1) \\ &= \underbrace{2\sum_{p=0}^{n} p - 2\sum_{p=0}^{n-1} p}_{\text{seul un terme subsiste}} - \sum_{p=0}^{n-1} 1 \\ &= 2n - n \\ &= n.\end{aligned}$$

e) Fonction génératrice

Définition 2

Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes et m, n deux entiers naturels. La fonction génératrice f_n associée à la somme $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ est la fonction

$$f_n \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k\, x^k \end{array} \right.$$

L'encadré suivant vous donne la marche à suivre pour calculer une somme à l'aide de la fonction génératrice associée.

Fonction génératrice et calcul de somme

Pour calculer $S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} u_k$, on peut utiliser sa fonction génératrice. Pour cela :

- On introduit la fonction génératrice f_n associée à S_n.
- On calcule f_n. Pour cela, on peut par exemple :
  - ⋆ dériver f_n et refermer la somme égale à f_n' avant de primitiver le résultat obtenu pour déterminer f_n ;
  - ⋆ déterminer une primitive F_n de f_n et refermer la somme égale à F_n avant de dériver le résultat obtenu pour obtenir f_n.
- On évalue f_n en 1 pour déterminer S_n puisque $S_n = f_n(1)$.

Il est quelquefois nécessaire d'adapter cette méthode au cas particulier traité.

Exemples :

- Calculons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

en considérant la fonction génératrice

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}.$$

Une primitive de cette fonction est

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (\text{si } x \neq 1)$$

En dérivant, on obtient

$$f_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Alors

$$S_n = 2f_n(2) = 2\frac{-(n+1)2^n(1-2)+(1-2^{n+1})}{(1-2)^2} = 2(1-2^{n+1}+(n+1)2^n).$$

A.3. Sommes de références

a) Sommes arithmétiques

La suite arithmétique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de premier terme $a \in \mathbb{C}$ et de raison $r \in \mathbb{C}$ est définie par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k + r.$$

Un simple raisonnement par récurrence permet d'établir que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = a + kr$.

Proposition 1

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a la formule absconse :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2} \times (n - m + 1),$$

mais le taupin malin préférera retenir que la somme des termes d'une suite arithmétique est égale à la :

« moyenne des termes extrêmes fois le nombre de termes ».

■ Soit S la somme à calculer. On écrit $S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$ dans un sens et $S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_m$ dans l'autre sens. Puis on ajoute, ce qui donne $2S = (u_n + u_m) + (u_{n+1} + u_{m-1}) + \cdots + (u_m + u_n)$. On constate alors que tous les termes de cette somme sont égaux à $u_m + u_n$ puisque, pour tout k, on a $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + kr + u_n - kr = u_m + u_n$. Par conséquent, on a $2S = (n - m + 1)(u_m + u_n)$. Reste à diviser par 2 pour obtenir le résultat. ■

Exemples :

- Des entiers consécutifs formant une suite arithmétique de raison 1, on a

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}.$$

  En particulier, on retrouve ainsi que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- On a

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2,$$

  ce qui signifie que la somme des n premiers nombres impairs est égal à n^2.

b) Sommes géométriques

La suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de premier terme $a \in \mathbb{C}$ et de raison $q \in \mathbb{C}$ est définie par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\quad u_{k+1} = qu_k$$

Un simple raisonnement par récurrence permet d'établir que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = aq^k$.

Proposition 2

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. On a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_{n+1} - u_m}{q-1},$$

mais la prudence devant l'effort recommande de savoir réciter par cœur le petit texte ci-dessous plutôt que l'horrible formule qui l'a engendré. La somme des termes d'une suite géométrique est égale au :

« terme suivant le dernier moins premier terme sur raison moins 1 ».

■ On note $S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$ la somme à calculer. On multiplie S par la raison q, ce qui donne $qS = qu_m + qu_{m+1} + \cdots + qu_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{n+1}$. En soustrayant qS et S, on obtient alors $(q-1)S = u_{n+1} - u_m$. Reste à diviser par $q-1$ pour obtenir le résultat. C'est licite puisque $q \neq 1$. ■

Lorsque la raison q est égale à 1, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante donc $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m$.

Exemples :

- On retrouve que, pour tout $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et tout $n \geqslant 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

- Pour $n \geqslant 2$, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle puisque

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \frac{\mathrm{e}^{2in\pi/n} - \mathrm{e}^{2i0\pi/n}}{\mathrm{e}^{2i\pi/n} - 1} = \frac{1-1}{\mathrm{e}^{2i\pi/n} - 1} = 0$$

  où l'on a bien $\mathrm{e}^{2i\pi/n} \neq 1$ (car $n \neq 1$).

- Le premier jour du mois, je gagnais deux centimes. Le deuxième jour du mois, je gagnais quatre centimes. Le troisième jour du mois, je gagnais huit centimes. Ainsi de suite, en doublant de jour en jour. À la fin du mois, j'avais gagné à peu près un milliard de centimes ! C'était au début de ce siècle, en quelle année était-ce ?
  Si le mois contient n jours, la somme gagnée vaut $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ centimes. Or $2^{n+1} - 1$ n'est proche d'un milliard que pour $n = 29$ (on trouve alors $1\,073\,741\,823$ centimes). On a donc affaire au mois de février d'une année bissextile. Au début de ce siècle, l'année bissextile est 2004 (et surtout pas 2000 qui appartient au siècle précédent !!).

c) *Formule de Bernoulli*

Les produits remarquables $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, ainsi que le calcul

$$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$

montrent qu'il est raisonnable d'espérer pouvoir factoriser $a-b$ dans l'expression $a^{n+1}-b^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce sens, on a le résultat suivant.

Proposition 3

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a la formule de Bernoulli

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n),$$

c'est-à-dire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

■ On a

$$\begin{array}{rcl}
(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a^{n+1-k}b^k - a^{n-k}b^{k+1}) \\
& = & \quad a^{n+1} - \cancel{a^n b} \\
& & + \ \cancel{a^n b} - \cancel{a^{n-1}b^2} \\
& & + \ \cancel{a^{n-1}b^2} - \cancel{a^{n-2}b^3} \\
& & + \ \cdots\cdots \\
& & + \ \cancel{a^2b^{n-1}} - \cancel{ab^n} \\
& & + \ \cancel{ab^n} - b^{n+1} \\
& = & a^{n+1} - b^{n+1}
\end{array}$$

ce qui correspond bien au résultat attendu. ■

On notera que dans la somme $a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$, la puissance de a décroît de n vers 0 alors que, parallèlement, celle de b croît de 0 à n. On observe ainsi un phénomène de vases communiquants (la somme des puissances de a et b valant constamment n).

Lorsque $n+1$ est impair, on peut écrire $a^{n+1}+b^{n+1} = a^{n+1}-(-b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k$.

En pratique, la formule de Bernoulli est essentiellement utilisée pour de petites valeurs de n.

Exemples :

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$, on retrouve la formule d'une somme géométrique : $1 - b^n = (1-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k$.
- Un nombre premier de Mersenne est une nombre premier de la forme $2^p - 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrons qu'un tel nombre ne peut être premier que si p est lui-même premier.
  Pour cela, raisonnons par contraposition en supposant que p est non premier, c'est-à-dire de la forme $p = ab$ où $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Le nombre $2^p - 1 = 2^{ab} - 1$ est alors divisible par $2^a - 1$ (d'après la formule de Bernoulli), ce qui démontre qu'il n'est pas premier.

d) *Formule du binôme de Newton*

Définition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $0! = 1$ et $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. C'est factorielle n.

Notons au passage que la suite $n \longmapsto n!$ est une suite qui grandit très vite.

Définition 4

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui se lit « p parmi n », est défini par

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0. \end{cases}$$

Exemples :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{1} = n$

Les principales propriétés des coefficients binomiaux sont données dans l'énoncé suivant.

Proposition 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \text{(formule de symétrie)},$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \qquad \text{(formule du pion}, \ n, p \neq 0),$$

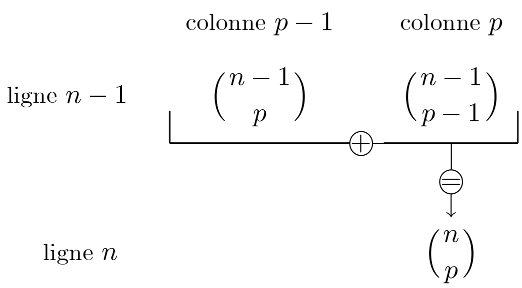
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \qquad \text{(relation de Pascal}, \ n \neq 0).$$

La formule du pion est dénommée ainsi parce qu'elle correspond, aux échecs, à la prise du pion (mouvement de la case (n, p) vers la case $(n-1, p-1)$). On l'appelle aussi la formule d'absorption-extraction.

■ AQT ■

La relation de Pascal permet de calculer par récurrence les coefficients binomiaux en les disposant en pyramide. C'est le triangle de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱



On remarquera que les coefficients binomiaux sont des entiers (ce qui n'a rien d'évident !). Pour le démontrer, on procède par récurrence sur le numéro de la ligne du triangle de Pascal.

Les coefficients binomiaux interviennent dans le développement de $(a+b)^n$.

Théorème 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

■ Initialisation : Le résultat est évident pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} && \text{en posant } \ell = k+1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} && \text{car } \binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\} a^k b^{n+1-k} && \text{l'indice de sommation est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{d'après la relation de Pascal}
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat au rang $n+1$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure. ■

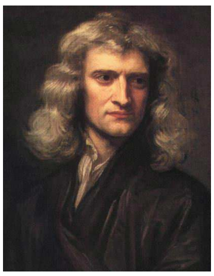
Comme pour la formule de Bernoulli, on observe un phénomène de vases communiquants entre les puissances de a et de b.

Exemples :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ et $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
- En faisant $a = b = 1$ dans la formule du binôme, on obtient la somme des coefficients binomiaux de la ligne numéro n :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

NEWTON Isaac, anglais, 1642-1727

Mathématicien, physicien, astronome et penseur. En mathématiques, Newton est considéré comme le co-inventeur (avec Leibniz) du calcul infinitésimal, appelé par lui méthode des fluxions. Mais son oeuvre majeure est le Philosophiae naturalis principia mathematica paru en 1687, dans lequel il applique les mathématiques à la mécanique classique : égalité de l'action et de la réaction, principe d'inertie, et surtout loi de gravitation universelle. Newton a aussi perfectionné le télescope et étudié la décomposition de la lumière par le prisme. Enfin, il a écrit des ouvrages théologiques et a effectué des travaux d'alchimie.



e) Sommes d'Euler

Les sommes d'Euler sont les sommes de la forme $E_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ où $k \in \mathbb{N}$. Dans la pratique, nous aurons besoin de l'expression de ces sommes lorsque $k = 1, 2, 3$ pour certains calculs en probabilité. Il est donc de bon ton de les connaître par cœur, d'autant plus que deux d'entre-elles ne sont pas simples à déterminer si l'on ne connait pas par avance le résultat.

Trois sommes à connaître par ♡

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{E_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},}$$

$$\boxed{E_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

et

$$\boxed{E_3(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = E_1(n)^2.}$$

Nous verrons, en exercice, comment on peut déterminer par récurrence l'expression de toutes les sommes d'Euler. 3 h 00

A.4. Sommes doubles

a) Sommes indexées par un rectangle

Définition 5

Considérons une suite à deux indices $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ et m,n,p,q quatre entiers naturels. On définit la somme double sur le rectangle $[\![m;n]\!]\times[\![p;q]\!]$ comme la somme des coefficients du tableau rectangulaire à $(n-m+1)(q-p+1)$ éléments :

$k \backslash \ell$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	q
m	$u_{m,p}$	$u_{m,p+1}$	$u_{m,p+2}$	$\cdots$	$u_{m,q}$
$m+1$	$u_{m+1,p}$	$u_{m+1,p+1}$	$u_{m+1,p+2}$	$\cdots$	$u_{m+1,q}$
$m+2$	$u_{m+2,p}$	$u_{m+2,p+1}$	$u_{m+2,p+2}$	$\cdots$	$u_{m+2,q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$u_{n,p}$	$u_{n,p+1}$	$u_{n,p+2}$	$\cdots$	$u_{n,q}$

c'est-à-dire

$$\sum_{\substack{m\leqslant k\leqslant n\\ p\leqslant \ell\leqslant q}} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=p}^{q} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=p}^{q}\sum_{k=m}^{n} u_{k,\ell}.$$

■ L'échange des deux symboles $\sum$ est justifié par la commutativité de l'addition. ■

Une somme double sur un rectangle n'est donc rien d'autre que la somme d'une suite dont les termes sont eux-mêmes des sommes. On peut donc utiliser les propriétés et les techniques de calcul rencontrées pour les sommes simples pour simplifier ou calculer une telle somme double.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{q}(k+\ell) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{q}k + \sum_{\ell=1}^{q}\ell\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(kq + \frac{q(q+1)}{2}\right) = q\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{q(q+1)}{2}.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{q}k\ell = \sum_{k=0}^{n}\left(k\sum_{\ell=0}^{q}\ell\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q}\ell\right) = \frac{n(n+1)q(q+1)}{4}.$

Ce dernier exemple nous inspire la remarque suivante.

Cas où les indices sont séparables

Lorsque l'on peut séparer les indices k et ℓ dans le terme général $u_{k,\ell}$, c'est-à-dire lorsque l'on peut s'écrire $u_{k,\ell} = v_k \times w_\ell$, la somme double est le produit de deux sommes simples :

$$\sum_{\substack{m\leqslant k\leqslant n\\ p\leqslant \ell\leqslant q}} v_k w_\ell = \left(\sum_{k=m}^{n} v_k\right)\left(\sum_{\ell=p}^{q} w_\ell\right).$$

■ On a $\displaystyle\sum_{\substack{m\leqslant k\leqslant n\\ p\leqslant \ell\leqslant q}} v_k w_\ell = \sum_{k=m}^{n}\left(\sum_{\ell=p}^{q} v_k w_\ell\right) = \sum_{k=m}^{n}\Bigg(v_k \underbrace{\sum_{\ell=p}^{q} w_\ell}_{\text{indépendant de } k}\Bigg) = \left(\sum_{\ell=p}^{q} w_\ell\right)\left(\sum_{k=m}^{n} v_k\right).$ ■

b) *Sommes indexées par un triangle*

Définition 6

Considérons une suite à deux indices $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ et m, n deux entiers naturels. On définit la somme double sur le triangle $\{(k,\ell) : m \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n\}$ comme la somme des coefficients du tableau triangulaire à $(n-m+1)(n-m+2)/2$ éléments :

$k \backslash \ell$	m	$m+1$	$m+2$	$\cdots$	n
m	$u_{m,m}$	$u_{m,m+1}$	$u_{m,m+2}$	$\cdots$	$u_{m,n}$
$m+1$		$u_{m+1,m+1}$	$u_{m+1,m+2}$	$\cdots$	$u_{m+1,n}$
$m+2$			$u_{m+2,m+2}$	$\cdots$	$u_{m+2,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$
n					$u_{n,n}$

c'est-à-dire

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=m}^{n}\sum_{k=m}^{\ell} u_{k,\ell} \qquad \text{(relation de Fubini).}$$

■ Là encore, l'échange des deux symboles $\sum$ est justifié par la commutativité de l'addition. ■

Dans une somme double sur un triangle, les indices des deux symboles de sommation sont liés. Il faut donc faire attention lorsque l'on veut échanger l'ordre des symboles $\sum$ et expliquer clairement cette étape du calcul (par exemple, en faisant référence à la relation de Fubini...).

Dans la pratique, le calcul d'une somme double sur un triangle se fait en utilisant l'une des deux expressions ci-dessus contenant deux symboles $\sum$. Le choix du bon ordre de sommation (sommation en k d'abord et en ℓ ensuite ou l'inverse) est une étape importante du calcul : elle permet de simplifier (voire de rendre possible) le calcul !!

Il arrive qu'une somme double soit indexée par un triangle privé de sa diagonale, ce qui revient à considérer la quantité

$$\sum_{m\leqslant k<\ell\leqslant n} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=k+1}^{m} u_{k,\ell}$$
$$= \sum_{\ell=m}^{n}\sum_{k=m}^{\ell-1} u_{k,\ell}$$

qui correspond à la somme des termes du tableau triangulaire supérieur ci-contre.

$k \backslash \ell$	m	$m+1$	$m+2$	$\cdots$	$n-1$	n
m		$u_{m,m+1}$	$u_{m,m+2}$	$\cdots$	$u_{m,n-1}$	$u_{m,n}$
$m+1$			$u_{m+1,m+2}$	$\cdots$	$\cdots$	$u_{m+1,n}$
$m+2$				$\ddots$		$u_{m+2,n}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
$n-1$						$u_{n-1,n}$
n						

Exemples :

- On a

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} k\ell &= \sum_{k=0}^{n} k\sum_{\ell=k}^{n}\ell = \sum_{k=m}^{n} k\frac{(n+k)(n-k+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\Big(n(n+1)\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}k^2-\sum_{k=0}^{n}k^3\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}\Big)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.\end{aligned}$$

- Calculons la somme double $\displaystyle\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{k}{\ell}$. Le choix de l'ordre de sommation est ici crucial. En effet, si l'on écrit

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{k}{\ell} = \sum_{k=1}^{n} k\sum_{\ell=k+1}^{n}\frac{1}{\ell},$$

on est amené à refermer la somme $\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{n}\frac{1}{\ell}$ dont on ne connait pas d'expression ramassée. Par contre, l'autre ordre de sommation permet d'aboutir très simplement :

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{k}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell-1}k = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\frac{(\ell-1)\ell}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}(\ell-1) = \frac{(n-1)n}{4}.$$

- On a

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}u_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n}u_k\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{n}u_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}u_ku_\ell = \sum_{k=1}^{n}{u_k}^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}u_iu_j,$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{le carré d'une somme est égal à la somme des carrés et des doubles produits.}}$$

Par exemple, si $n=3$, on a

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

B. Produits

De la même façon que pour les sommes, on peut introduire un symbole désignant le produit et étudier les propriétés de celui-ci. Notre étude sera cependant moins poussée, d'une part, parce qu'il serait fastidieux de répéter certaines méthodes alors qu'il est très simple de les adapter au cas des produits, d'autre part, parce que nous rencontrerons cette année beaucoup moins de produits que de sommes.

B.1. Le symbole $\prod$

Définition 7

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille finie de nombres complexes (I est donc un ensemble fini d'indices). On note $\prod\limits_{k\in I} u_k$ le produit des éléments de la famille $(u_k)_{k\in I}$, avec la convention que ce produit vaut 1 lorsque l'ensemble I est vide (on parle alors de « produit vide »).

Dans le cas (très courant) où I est un intervalle d'entiers de la forme $[\![m;n]\!]$ où m, n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$, le produit de la famille $(u_k)_{m\leqslant k\leqslant n}$ entre m et n s'écrit aussi sous la forme

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \cdots \times u_n.$$

Si $m > n$, l'intervalle d'entiers $[\![m;n]\!]$ est vide donc $\prod\limits_{k=m}^{n} u_k$ est un produit vide et vaut 1.

On notera que, pour tout $p \in [\![m;n-1]\!]$, on a la relation de récurrence :

$$\prod_{k=m}^{p+1} u_k = \left(\prod_{k=m}^{p} u_k\right) \times u_{p+1}$$

L'indice k est un indice muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs.

Notons que de très nombreux produits s'expriment à l'aide d'une ou plusieurs factorielles.

Lorsque les éléments de la famille $(u_k)_{k\in[\![m;n]\!]}$ sont strictement positifs, on a

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = \exp\left\{\sum_{k=m}^{n} \ln(u_k)\right\},$$

ce qui permet de faire le lien entre les sommes et les produits.

Exemples :

- $\prod\limits_{k=0}^{n} a$ est le produit de $n+1$ fois le nombre a. On a donc $\prod\limits_{k=0}^{n} a = a^{n+1}$.
- $\prod\limits_{k=1}^{n} k$ est le produit des n premiers entiers naturels. Il vaut, par définition, $n!$ (avec $0! = 1$).
- On a $\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^k = 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times (n+1)^{n+1}$.

B.2. Régles de calcul

Comme dans le cas des sommes, il est possible d'utiliser les propriétés opératoires des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour transformer une somme donnée en vue d'obtenir une expression synthétique. On dit encore que l'on referme le produit.

Ce paragraphe donne un bref aperçu des méthodes permettant de simplifier un produit. L'accent est porté sur la propriété de multiplicativité (qui correspond à la linéarité pour les sommes). Pour le reste, on illustre sur des exemples des techniques de changement d'indice, de téléscopage, etc qui s'inspire directement de celles vues sur les sommes.

a) Multiplicativité

Comme dans le cas des sommes, ce sont les propriétés de distributivité et de commutativité qui permettent d'établir les principales propriétés du symbole $\prod$. La différence vient bien sûr du fait que l'opération concerné ici est la multiplication. On peut ainsi établir la multiplicativité du symbole $\prod$.

Utilisation de la multiplicativité

Soient $(u_k)_{k\in[\![m;n]\!]}$ et $(v_k)_{k\in[\![m;n]\!]}$ deux familles de nombres complexes. La multiplicativité du symbole $\prod$ est la conjonction des deux propriétés

$$\prod_{k=m}^{n} u_k v_k = \prod_{k=m}^{n} u_k \times \prod_{k=m}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} {u_k}^{\alpha} = \Big(\prod_{k=m}^{n} u_k\Big)^{\alpha},$$

où l'on attribue à α que des valeurs compatibles avec la nature des facteurs du produit.

Ainsi, si les termes sont complexes, on ne s'autorisera *a priori* pour α que des entiers relatifs (et encore seulement des entiers naturels si l'un des termes est nul ...). Par contre, si les suites sont réelles positives, on pourra considérer des puissances fractionnaires (qui permettent de travailler avec des racines carrées, par exemple ...).

On utilise souvent la première des deux identités ci-dessus en invoquant le « découpage » d'un produit en deux autres produits.

On notera avec attention que l'on peut pas « sortir » d'un symbole $\prod$ un facteur ne dépendant pas de l'indice sans tenir compte du nombre de termes !! Autrement dit, on fera attention à la puissance du nombre λ dans la formule suivante :

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} u_k.$$

Exemples :

- On a

$$\prod_{k=1}^{n} 2k^2(k+1) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k^2 \times \prod_{k=1}^{n}(k+1) = 2^n\Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big)^2 (n+1)! = 2^n n!^2 (n+1)!$$

b) Miscellaneous

Comme pour les sommes, on peut effectuer des changements d'indice dans les produits. La plupart du temps, on fait des décalages d'indice ou des inversions d'indice. On peut toutefois envisager des transformations d'indice plus compliquées, à la condition impérative de ne pas rajouter ou enlever des termes dans le produit.

Exemples :

- Calculons $\prod_{k=1}^{n}(k+3)$ en effectuant le changement d'indice $\ell = k+3$. On obtient
$$\prod_{k=1}^{n}(k+3) = \prod_{\ell=4}^{n+3}\ell = \frac{(n+3)!}{3!}.$$
- On a
$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\neq n}}(-1)^k(n-k) &= \prod_{0\leqslant k<n}(-1)^k(n-k)\times\underbrace{\prod_{n+1\leqslant k\leqslant 2n}(-1)^k(n-k)}_{\text{on pose }\ell=2n-k}\\
&= \prod_{0\leqslant k<n}(-1)^k(n-k)\times\prod_{0\leqslant \ell<n}(-1)^{2n-\ell}(\ell-n)\\
&= \prod_{0\leqslant k<n}(-1)^k(n-k)\times\prod_{0\leqslant \ell<n}\big(-(-1)^{\ell}(n-\ell)\big)\\
&= (-1)^n\Big(\prod_{0\leqslant k<n}(-1)^k(n-k)\Big)^2\\
&= (-1)^n\prod_{0\leqslant k<n}(n-k)^2\\
&= (-1)^n n!^2
\end{aligned}$$

Nous rencontrerons également des produits téléscopiques, lorsque l'expression de u_k contient une division. Un conseil pour ce genre de produit : revenir à son expression avec des points de suspension, en écrivant trois termes au début et trois termes à la fin. Au contraire des sommes, il n'est pas utile d'écrire les termes les uns en dessous des autres ; il suffit de les écrire sur une ligne pour constater les destructions.

Exemples :

- On a
$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{n} = \frac{1}{n}.$$

Nous terminons cette liste d'exemples par une application de la très sainte astuce de Binet.

Exemples :

- Exprimons, à l'aide de factorielles, le produit W_n des n premiers nombres impairs. Comme il manque les nombres pairs, on utilise Binet pour les faire apparaître :
$$W_n = \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\times\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

4 h 00