Problème n$^{\text{o}}$ 22 : Calculs de probabilité

Problème 1 –
Étude d'un combat à trois.

On considère un combat entre trois tireurs A, B et C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- *Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire vaut $\frac{2}{3}$.*
- *Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire vaut $\frac{1}{2}$.*
- *Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire vaut $\frac{1}{3}$.*
- *Lorsqu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.*
- *À chacune des épreuves, les tireurs non éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés. Ainsi, à la première épreuve, A vise B, tandis que B et C visent A.*

Lors d'une épreuve donnée, les tirs des adversaires restants sont mutuellement indépendants.

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :
ABC_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés »
AB_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés »
A_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, seul A n'est pas encore éliminé »
$\varnothing_n$: « à l'issue de la n-ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés »
On définit de manière similaire les événements BC_n et AC_n, ainsi que B_n et C_n.
Enfin, l'événement ABC_0 est l'événement certain, tandis que AB_0, AC_0, BC_0, A_0, B_0, C_0 et $\varnothing_0$ sont égaux à l'événement impossible

1. **Calcul de probabilités**
   (a) Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $P(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $P(U)$, $P(V)$ et $P(U \cap V)$.
   (b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B et C, l'événement suivant se produise :

   « *(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir)* ».

   (c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B et C, l'événement suivant se produise :

   « *(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir)* ».

2. **Détermination de probabilités conditionnelles**
   (a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout entier naturel n.

   Dans la suite, on ne considérera donc que les événements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, $\varnothing_n$.

   (b) Expliciter la probabilité conditionnelle $P(ABC_{n+1} \mid ABC_n)$.
   (c) Expliciter $P(BC_{n+1} \mid ABC_n)$, puis donner $P(AC_{n+1} \mid ABC_n)$
   (d) Expliciter $P(A_{n+1} \mid ABC_n)$, $P(B_{n+1} \mid ABC_n)$ et $P(C_{n+1} \mid ABC_n)$.
   (e) Expliciter $P(A_{n+1} \mid AC_n)$, $P(B_{n+1} \mid BC_n)$, $P(C_{n+1} \mid AC_n)$ et $P(C_{n+1} \mid BC_n)$.
   (f) Expliciter $P(\varnothing_{n+1} \mid ABC_n)$, $P(\varnothing_{n+1} \mid AC_n)$ et $P(\varnothing_{n+1} \mid BC_n)$.

3. **Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles le combat s'achève**

   On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse la combat, c'est-à-dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

   (a) Quelle est la probabilité de l'événement $[T = 1]$?

   (b) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant : $ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n$.

   (c) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements R_k suivants, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

   $$R_k = ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots AC_n.$$

   (Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $AC_1 \cap AC_2 \cap \cdots \cap AC_n$.)

   (d) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements S_k suivants, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

   $$S_k = ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots BC_n.$$

   (Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \cdots \cap BC_n$.)

   (e) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la n-ième épreuve, et en déduire la probabilité $P(T = n)$.
   (On vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question (a).)

   (f) Vérifier que la somme de la série de terme général $P(T = n)$ pour tous les indices $n \geqslant 1$ vaut 1.

   (g) Déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

4. **Probabilités pour que A, B et C respectivement remportent le combat**

   (a) Montrer que l'événement « *A remporte le combat à l'issue de la n-ième épreuve* » est impossible si $n = 1$, et montrer qu'il est égal à la réunion des événements U_k suivants ($k \in [\![0, n-2]\!]$) si $n \geqslant 2$:

   $$U_k = ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots AC_{n-1} \cap A_n.$$

   (Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $AC_1 \cap AC_2 \cap \cdots \cap AC_{n-1} \cap A_n$)

   (b) Calculer la probabilité pour que A remporte le combat à l'issue de la n-ième épreuve ($n \geqslant 2$).

   (c) En déduire la probabilité pour que A remporte le combat (c'est-à-dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).

   (d) Déterminer de même la probabilité pour que B remporte le combat ?

   (e) Déterminer de même la probabilité pour que C remporte le combat.

   (f) Vaut-il mieux savoir tirer ou pas ?

   (g) Déterminer la probabilité que le combat ne s'arrête pas.

   (h) Déterminer la probabilité que le combat s'arrête sans vainqueur.