Renseignements généraux

— *Concours* : ENS CR
— *Matière* : Maths CR
— *NOM Prénom* : ABOU YASSIN Jad

Énoncé des exercices

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Si $0 < \alpha < 1$, on pose :

$$H_\alpha(f) = \sup\left\{\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha},\ (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \neq x_2\right\}$$

1) Montrer que si $0 < \beta < \alpha$ et $H_\alpha(f) < +\infty$, alors $H_\beta(f) < +\infty$

2) Soit maintenant $f : I \times J \to \mathbb{R}$. On définit alors :

$$H_\alpha(f) = \sup\left\{\frac{|f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)|}{\max(|x_1 - x_2|^\alpha, |u_1 - u_2|^\alpha)},\ \begin{pmatrix} (x_1, x_2, u_1, u_2) \in I^2 \times J^2 \\ x_1 \neq x_2 \\ u_1 \neq u_2 \end{pmatrix}\right\}$$

Si

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,u) & \longmapsto & |x-u| \end{array}$$

Calculer $H_1(f)$.

3) On pose, si $i \in \{1, 2\}$:

$$f_{u_i} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, u_i) \end{array}$$

Calculer $H_1(f_{u_1} - f_{u_2})$

4) Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ telle que $H_\beta(f) < +\infty$, où $0 < \beta < 1$.
Montrer que, si $0 < \alpha < \beta$, alors

$$\sup\left\{\frac{H_\alpha(f_{u_1} - f_{u_2})}{|u_1 - u_2|^{\beta-\alpha}},\ (u_1, u_2) \in J^2\right\} < +\infty$$

Remarques sur l'oral

Examinatrice sympathique qui n'hésite pas à donner des conseils lorsque je suis bloqué. C'était par exemple le cas pour la question 3), où elle m'a demandé de représenter sur un graphique la fonction $f_{u_1} - f_{u_2}$ puis tout était plus clair ensuite.

Il s'agit d'un exercice où il faut faire très attention aux notations, H_α ne désignant pas la même chose pour une fonction à une ou deux variables, ce qui m'a un peu embrouillé par moments. L'oral s'est globalement bien déroulé.