THÉORIE DES APPLICATIONS

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]

Soient E, F deux ensembles. Soient $x \in E$, $y \in F$, $f \in F^E$, $g \in E^F$ et $T \in (F^E)^{F^E}$. Parmi les expressions suivantes, dire lesquelles ont un sens, et lesquelles sont égales. Dire également dans quel ensemble elles vivent.

$\mathscr{A} = \big[\big(T(f)\big)\big](x)$ $\quad \mathscr{B} = g\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$ $\quad \mathscr{C} = \big(T(f)\big)(x)$ $\quad \mathscr{D} = T\big(f(x)\big)$

$\mathscr{E} = \big[g \circ \big(T(f)\big)\big](x)$ $\quad \mathscr{F} = \big[T\big(T(f)\big)\big](x)$ $\quad \mathscr{G} = T\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$ $\quad \mathscr{H} = \big(T(f) \circ g\big)(y)$

$\mathscr{I} = \big((T \circ T)(f)\big)(x)$ $\quad \mathscr{J} = f\big(g(y)\big)$ $\quad \mathscr{K} = g \circ \big(T(f)\big)$ $\quad \mathscr{L} = (g \circ T)(f)$

On a

Expression	Existe ou pas	Vit dans	Est égale à
$\mathscr{A} = \big[\big(T(f)\big)\big](x)$	Non		
$\mathscr{B} = g\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	Oui	E	$\mathscr{E}$
$\mathscr{C} = \big(T(f)\big)(x)$	Oui	F	
$\mathscr{D} = T\big(f(x)\big)$	Non		
$\mathscr{E} = \big[g \circ \big(T(f)\big)\big](x)$	Oui	E	$\mathscr{B}$
$\mathscr{F} = \big[T\big(T(f)\big)\big](x)$	Oui	E	
$\mathscr{G} = T\big[\big(T(f)\big)(x)\big]$	Non		
$\mathscr{H} = \big(T(f) \circ g\big)(y)$	Oui	F	
$\mathscr{I} = \big((T \circ T)(f)\big)(x)$	Oui	F	
$\mathscr{J} = f\big(g(y)\big)$	Oui	F	
$\mathscr{K} = g \circ \big(T(f)\big)$	Oui	E^E	$\mathscr{L}$
$\mathscr{L} = (g \circ T)(f)$	Oui	E^E	$\mathscr{K}$

✠ ***Exercice 2.*** [★]

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. a) Justifier que f est injective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
   b) Justifier que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. Justifier que f est surjective si, et seulement si, $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
3. Justifier que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f\big(E \setminus A\big) = F \setminus f(A)$.

1. a) $\Rightarrow$ Supposons que f est injective. Soit $A \subset E$. On sait que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$ (toujours vrai). Démontrons l'inclusion contraire. Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Alors $f(x) \in f(A)$, ce qui justifie l'existence de $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité, on a $x = a$, ce qui démontre que $x \in A$. Donc $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$. Ainsi, on a bien $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ pour toute partie A de E. Démontrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors

$$\begin{array}{rcll} \{x_1\} & = & f^{-1}\big(f(\{x_1\})\big) & \text{c'est l'hypothèse avec } A = \{x_1\} \\ & = & f^{-1}\big(\{f(x_1)\}\big) & \\ & = & f^{-1}\big(\{f(x_2)\}\big) & \text{car } f(x_1) = f(x_2) \\ & = & f^{-1}\big(f(\{x_2\})\big) & \\ & = & \{x_2\} \quad \text{c'est l'hypothèse avec } A = \{x_2\} & \end{array}$$

ce qui démontre que $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

Donc

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, pour toute partie } A \text{ de } E, \text{ on a } f^{-1}\big(f(A)\big) = A.}$$

b) $\Rightarrow$ Supposons que f est injective. Soit $A, B \subset E$. On sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (toujours vrai). Démontrons l'inclusion contraire. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. D'une part, on a $y \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et, d'autre part, on a $y \in f(B)$ donc il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mézalors, on a $f(a) = f(b)$, ce qui donne, par injectivité, l'égalité $a = b$. Il s'ensuit que $a \in A \cap B$ et donc que $y = f(a) \in f(A \cap B)$. Donc $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$. Ainsi, on a bien $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes parties A, B de E. Démontrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$ est un singleton. A fortiori $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$ en est un également (c'est le même !). L'hypothèse utilisée avec $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$ nous dit que $f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$ est un singleton (toujours le même !) et donc que $\{x_1\} \cap \{x_2\}$ n'est pas vide (puisque $f(\varnothing) = \varnothing$). Il s'ensuit nécessairement que $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

Donc

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, pour toutes parties } A, B \text{ de } E, \text{ on a } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).}$$

2. $\Rightarrow$ Supposons que f est surjective. Soit $B \subset F$. On sait que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ (toujours vrai). Démontrons l'inclusion contraire. Soit $y \in B$. D'après la surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, cela implique que $x \in f^{-1}(B)$ et donc aussi que $f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, c'est-à-dire $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Donc $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B$. Ainsi, on a bien $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour toute partie B de F. Démontrons que f est surjective. Soit $y \in F$. En prenant $B = \{y\}$ dans l'hypothèse, on a $f\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \{y\}$. Par conséquent, on a $y \in f\big(f^{-1}(\{y\})\big)$, ce qui démontre l'existence de $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$. On a bien justifi l'existence d'un antécédent de y. Ainsi, f est surjective.

Donc

$$\boxed{f \text{ est surjective si, et seulement si, pour toute partie } B \text{ de } F, \text{ on a } f\big(f^{-1}(B)\big) = B.}$$

3. $\Rightarrow$ Supposons que f est bijective. Soit $A \subset E$. On sait que $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$ (toujours vrai) et comme f est surjective, on a $f(E) = F$, ce qui donne $f(E \setminus A) \supset F \setminus f(A)$. Démontrons l'inclusion contraire. Soit $y \in f(E \setminus A)$. Il existe alors $x \in E \setminus A$ tel que $y = f(x)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $y \in f(A)$ de sorte qu'il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. On a alors $f(x) = f(a)$, ce qui donne, par injectivité, l'égalité $x = a$. Comme $x \notin A$ et $a \in A$, c'est absurde ! Donc $y \notin f(A)$, c'est-à-dire $y \in F \setminus f(A)$. Cela prouve que $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$. Ainsi, on a bien $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$ pour toute partie A de E. Démontrons que f est injective et surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_1 \neq x_2$. Alors $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ et donc $f(x_2) \in f(E \setminus \{x_1\})$, ce qui donne $f(x_1) \in F \setminus f(\{x_1\})$ puisque à la fois $f(x_1) = f(x_2)$ et $f(E \setminus \{x_1\}) = F \setminus f(\{x_1\})$ en prenant $A = \{x_1\}$ dans l'hypothèse. Comme $f(\{x_1\}) = f(\{x_1\})$, il vient $f(x_1) \in F \setminus \{f(x_1)\}$, ce qui est absurde ! Donc $x_1 = x_2$, ce qui démontre bien que f est injective.

Pour la surjectivité, on prend $A = \varnothing$ dans l'hypothèse, ce qui donne $f(E \setminus \varnothing) = F \setminus f(\varnothing)$, c'est-à-dire $f(E) = F$ puisque $f(\varnothing) = \varnothing$. Ainsi, f est bien surjective.

On en conclut que f est bijective.

Donc

$$\boxed{f \text{ est bijective si, et seulement si, pour toute partie } A \text{ de } E, \text{ on a } f\big(E\setminus A\big) = F\setminus f(A).}$$

✠ ***Exercice 3.*** [$\star$]

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B)\end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $A\cup B = E$.
2. Démontrer que f est surjective si, et seulement si, $A\cap B = \varnothing$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

1. Supposons que f est injective. On a $f(A\cup B) = (A, B)$ et $f(E) = (A, B)$, c'est-à-dire $f(A\cup B) = f(E)$, d'où $A\cup B = E$, par injectivité de f.

   Supposons réciproquement que $A\cup B = E$ et démontrons que f est injective. Soient $(X_1, X_2)\in\mathscr{P}(E)^2$ tel que $(X_1\cap A, X_1\cap B) = (X_2\cap A, X_2\cap B)$, c'est-à-dire $X_1\cap A = X_2\cap A$ et $X_1\cap B = X_2\cap B$. Or
   $$(X_1\cap A)\cup(X_1\cap B) = X_1\cap(A\cup B) = X_1\cap E = X_1$$
   et
   $$(X_2\cap A)\cup(X_2\cap B) = X_2\cap(A\cup B) = X_2\cap E = X_2.$$
   D'où $X_1 = X_2$. Donc f est injective.

   En conclusion,
   $$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } A\cup B = E.}$$

2. Supposons que f est surjective. Il existe alors une partie $X\in\mathscr{P}(E)$ telle que $(X\cap A, X\cap B) = (A, \varnothing)$, c'est-à-dire $X\cap A = A$ et $X\cap B = \varnothing$. Donc $A\subset X$ et X est disjoint de B, ce qui implique que A est disjoint de B.

   Supposons réciproquement que $A\cap B = \varnothing$ et démontrons que f est surjective. Soit $(Y_1, Y_2)\in\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)$. On constate que
   $$(Y_1\cup Y_2)\cap A = (Y_1\cap A)\cup(Y_2\cap A) = Y_1$$
   et
   $$(Y_1\cup Y_2)\cap B = (Y_1\cap B)\cup(Y_2\cap B) = Y_2,$$
   c'est-à-dire $f(Y_1\cup Y_2) = (Y_1, Y_2)$. Donc f est surjective.

   En conclusion,
   $$\boxed{f \text{ est surjective si, et seulement si, } A\cap B = \varnothing.}$$

3. Dans le cas où $A\cup B = E$ et $A\cap B = \varnothing$, on a clairement
   $$\boxed{f^{-1}\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ (U, V) & \longmapsto & U\cup V\end{array}\right.}$$
   car, pour tout $X\subset E$, on a
   $$\begin{array}{rcl} (f^{-1}\circ f)(X) & = & f^{-1}\big(f(X)\big) \\ & = & f^{-1}(X\cap A, X\cap B) \\ & = & (X\cap A)\cup(X\cap B) \\ & = & X\cap(A\cup B) \\ & = & X\cap E \\ & = & X \end{array}$$

et, pour tous $U \subset A$ et $V \subset B$, on a

$$\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(U,V) &= f\big(f^{-1}(U,V)\big) \\
&= f(U \cup V) \\
&= \big((U \cup V) \cap A, (U \cup V) \cap B\big) \\
&= \big((U \cap A) \cup (V \cap A), (U \cap B) \cup (V \cap B)\big) \\
&= (U \cup \varnothing, \varnothing \cup V) \qquad \text{car } U \subset A \text{ et } V \subset B \\
&= (U,V).
\end{aligned}$$

✠ ***Exercice 4.*** [★]
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note δ et ρ les applications

$$\delta \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \rho \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

Démontrer que

$$(f \text{ injective}) \iff (\delta \text{ injective}) \iff (\rho \text{ surjective})$$

et que

$$(f \text{ surjective}) \iff (\delta \text{ surjective}) \iff (\rho \text{ injective}).$$

- Démontrons que $(f \text{ injective}) \iff (\delta \text{ injective})$.

  $\Rightarrow$ Supposons f injective et démontrons que δ l'est aussi. Soient $A_1, A_2 \subset E$ telles que $\delta(A_1) = \delta(A_2)$, c'est-à-dire $f(A_1) = f(A_2)$. Alors $f^{-1}\big(f(A_1)\big) = f^{-1}\big(f(A_2)\big)$ et, comme f est injective, on a $f^{-1}\big(f(A_1)\big) = A_1$ et $f^{-1}\big(f(A_2)\big) = A_2$ (cf exercice 2), ce qui donne $A_1 = A_2$. Par conséquent, δ est bien injective.

  $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que δ est injective et démontrons que f l'est également. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $\{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$ c'est-à-dire $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$ ou encore $\delta(\{x_1\}) = \delta(\{x_2\})$. Comme δ est injective, il s'ensuit que $\{x_1\} = \{x_2\}$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. Ainsi, f est bien injective.

  Donc
  $$\boxed{(f \text{ injective}) \iff (\delta \text{ injective}).}$$

- Démontrons que $(f \text{ injective}) \iff (\rho \text{ surjective})$.

  $\Rightarrow$ Supposons f injective et démontrons que ρ est surjective. Soit $A \subset E$. Posons $B = f(A)$. Comme f est injective, on sait que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ (cf exercice 2), c'est-à-dire $f^{-1}(B) = A$ ou encore $\rho(B) = A$. Ainsi, ρ est bien surjective.

  $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que ρ est surjective et démontrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme ρ est surjective, il existe $B \subset F$ telle que $E \setminus \{x_1\} = f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $x_1 \notin f^{-1}(B)$ ou encore $f(x_1) \notin B$. Comme $f(x_1) = f(x_2)$, on en déduit que $f(x_2) \notin B$, c'est-à-dire $x_2 \notin f^{-1}(B)$ ou encore $x_2 \notin E \setminus \{x_1\}$. Donc $x_1 = x_2$. Ainsi, f est injective.

  Donc
  $$\boxed{(f \text{ injective}) \iff (\rho \text{ surjective}).}$$

- Démontrons que $(f \text{ surjective}) \iff (\delta \text{ surjective})$.

  $\Rightarrow$ Supposons f surjective et démontrons que δ est surjective. Soit $B \subset F$. Posons $A = f^{-1}(B)$. Comme f est surjective, on sait que $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ (cf exercice 2), c'est-à-dire $f(A) = B$ ou encore $\delta(A) = B$. Ainsi, δ est bien surjective.

  $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que δ est surjective et démontrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $\{y\} \subset F$ donc par surjectivité de δ, il existe $A \subset E$ tel que $f(A) = \{y\}$, c'est-à-dire $y \in f(A)$. Il existe alors $x \in A$ tel que $f(x) = y$, ce qui démontre que y admet un antécédent par f. Ainsi, f est bien surjective.

Donc
$$\boxed{(f \text{ surjective}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\delta \text{ surjective}).}$$

- Démontrons que (f surjective) $\iff$ (ρ injective).

  $\Rightarrow$ Supposons f surjective et démontrons que ρ est injective. Soient $B_1, B_2 \subset E$ tels que $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. Alors $f\big(f^{-1}(B_1)\big) = f\big(f^{-1}(B_2)\big)$ et, comme f est surjective, on a $f\big(f^{-1}(B_1)\big) = B_1$ et $f\big(f^{-1}(B_2)\big) = B_2$ (cf exercice 2), ce qui donne $B_1 = B_2$. Par conséquent, ρ est bien injective.

  $\Leftarrow$ Supposons réciproquement que ρ est injective et démontrons que f est surjective. Soit $y \in F$. L'injectivité de ρ nous dit que $f^{-1}(\varnothing)$ et $f^{-1}(\{y\})$ ne sont pas égaux, c'est-à-dire $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$ puisque $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. On constate donc que l'ensemble des antécédents de y n'est pas vide. Ainsi f est surjective.

Donc
$$\boxed{(f \text{ surjective}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\rho \text{ injective}).}$$