FEUILLE D'EXERCICES N° 18

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Produits scalaires et normes euclidiennes

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires et orthonormaliser la base canonique

- $(x \mid y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ sur $\mathbb{R}^3$
- $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^2 P(t) \cdot Q(t) \cdot t \, dt$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

—— ○ ——

Exercice 2

1. Soient F et G deux sous-espaces de E euclidien. Montrer que $(F+G)^\perp = (F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
3. La formule précédente est-elle encore vraie si l'espace E n'est plus de dimension fine ?

—— ○ ——

Exercice 3

1. Montrer que sur $\mathbb{R}^n$:
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
2. Montrer que si $f : [0,1] \longrightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, alors $\displaystyle\int_0^1 f \times \int_0^1 1/f \geqslant 1$.

—— ○ ——

Exercice 4

Soient $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien, puis $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que
$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)^2.$$
Montrer que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

—— ○ ——

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, puis $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs.

1. Déterminer une CNS sur la famille $\mathscr{F}$ pour que la famille $\mathscr{F}$ soit une famille orthonormale pour un certain produit scalaire sur E.
2. Lorsque E est de dimension deux et $\mathscr{F} = \big((1,1),(0,2)\big)$, tracer alors la boule euclidienne unité.

—— ○ ——

Exercice 6

On dit que deux bases de $\mathbb{R}^n$ sont de même signe si le déterminant de la matrice de passage de l'une à l'autre est strictement positif.
Soient $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ habituel, de même signe. On pose $(w_i = u_i + 2v_i)$.

1. Montrer que (w_i) est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que (w_i) est de même signe que (u_i) et (v_i).

—— ○ ——

Exercice 7

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que l'application Φ : $\left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ \vec{a} & \longmapsto & \big(\varphi_a : \vec{x} \longmapsto (\vec{a} \mid \vec{x})\big) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un seul vecteur $\vec{u} \in E$ tel que : $\varphi = (\vec{u} \mid \cdot)$.
3. Déterminer ce vecteur $\vec{u}$ dans les cas suivants :
   (a) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ habituel et $\varphi = \mathrm{Tr}$
   (b) $E = \mathbb{R}^3$ habituel et $\varphi : \vec{x} \longmapsto \det_{\mathscr{B}_{can}}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})$, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont fixés dans E.

—— ○ ——

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall Q \in Q_n[X], \quad \int_2^7 \frac{Q(t)}{1 + \ln^2 t} \, dt = \int_0^\pi P(t) \cdot Q(t) \cdot \sin t \, dt.$$

—— ○ ——

Exercice 9

On pose : $(P \mid Q) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^1 P(t) \cdot Q(t) \, dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], (\ \mid\ ))$ est un espace euclidien.
2. Établir l'existence d'une base orthonormale $(L_0, \cdots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$, $\deg(L_i(X)) = i$.
3. Montrer que chaque polynôme $L_i(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1, 1[$.
4. Montrer que : $L_i(X) = \dfrac{\sqrt{2i+1}}{2^i \cdot i!} \cdot \Big[\big(X^2 - 1\big)^i\Big]^{(i)}$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^n$ habituel, soient $e_1, \cdots, e_{n+1}$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall i \neq j$, $(e_i \mid e_j) = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Calculer α et $e_1 + \cdots + e_{n+1}$.
2. Dans une molécule de méthane CH_4, quel est l'angle entre deux liaisons $C - H$?

Exercice 11

Soient E un espace euclidien, puis $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et enfin une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ de vecteurs unitaires tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid u_k) \geqslant n - \frac{1}{2}.$$

Montrer que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 12

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire habituel.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(AA^T) = \mathrm{Im}(A)$.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'application

$$\Phi : (P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) \cdot Q^{(k)}(0)$$

définit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que l'ensemble $F = \{P(X) \in E \mid P(0) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa dimension, puis la distance $d(1, F)$.

Exercice 14

Soient $a < b$ deux réels.

1. Montrer que la norme $P \longmapsto \displaystyle\int_a^b |P(t)|\, dt$ n'est pas une norme euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$.
2. La norme $P \longmapsto \displaystyle\sup_{t \in [a,b]} |P(t)|$ est-elle une norme euclidienne ?

Projections orthogonales, symétries orthogonales

Exercice 15

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ habituel défini par : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. Calculer la distance de $u = (1, 2, 3, 4)$ à F.

Exercice 16

1. Déterminer la matrice selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ habituel de la réflexion par rapport à $x + y + 2z = 0$.
2. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$. Expliciter en fonction de $\vec{u}$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Exercice 17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est un projecteur. Montrer que A est un projecteur orthogonal si et seulement si la matrice A est symétrique.
2. On suppose que A est une symétrie. Montrer que A est une symétrie orthogonale si et seulement si la matrice A est symétrique.

Exercice 18

On considère $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur.

1. On suppose que p est un projecteur orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ habituel.
Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. On suppose que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$.
   (a) Développer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|p(x + \lambda y)\|^2$ et $\|x + \lambda y\|^2$.
   (b) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 19

1. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.
2. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_1^2 e^x \cdot (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Exercice 20

Soient $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n, puis $(x_1, \cdots, x_p)$, p vecteurs de E. On note $G(x_1, \cdots, x_p) = \Big((x_i \mid x_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ [matrice de Gram]

1. Montrer que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1, \cdots, x_p) = 0$.
2. On suppose que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$. Montrer que pour x dans E :

$$(d(x, F))^2 = \frac{\det G(x, x_1, \cdots, x_p)}{\det G(x_1, \cdots, x_p)}.$$

Exercice 21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \cdots, A_p$ des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\sum_{k=1}^{p} A_k = I_n$ et pour tous $i \neq j$, $A_i^T\ A_j = 0$.

1. Montrer que chaque A_i est un projecteur orthogonal.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Rg}(A_k) = n$.

Exercice 22

Soient $a_0, \cdots, a_n$ des réels.

1. Déterminer une CNS sur ces réels pour que l'application $(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition réalisée.
2. Déterminer l'orthogonal de l'espace vectoriel $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
3. Calculer $d(X^n, F)$.

Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

Exercice 23

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice dans $O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right| \leqslant n$.

Exercice 24

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne habituelle.

1. Montrer que si f est une rotation alors sur $\mathbb{R}^3$: $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.
2. On suppose que sur $\mathbb{R}^3$: $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.
   (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux, calculer $x \wedge (x \wedge y)$.
   (c) Montrer que $f \in O(\mathbb{R}^3)$, puis que f est une rotation.

Exercice 25

Soit A une matrice dans $O_d(\mathbb{R})$, avec $d \in \{2, 3\}$. Étudier la suite $\left(\dfrac{I_3 + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 26

Déterminer les isométries vectorielles (et leur nombre) laissant invariant l'hypercube $[-1, 1]^n$.

Exercice 27

Soit A une matrice dans $GL_n(\mathbb{R})$.

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{C} = (A(e_1), \cdots, A(e_n))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On orthonormalise la base $\mathscr{C}$ en une base orthonormale $\mathscr{D}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$, puis Q la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$
2. Que peut-on dire de la matrice P ? Que peut-on dire de la matrice Q ?
3. Montrer qu'il existe une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $A = O\ T$.
4. Montrer que la décomposition « $O\ T$ » précédente est unique.
5. Calculer cette décomposition lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}^2 \right)}.$$

Thèmes variés

Exercice 28

1. Montrer que l'application

$$(P \mid Q) \longmapsto \int_0^{\pi} P(\cos(\theta)) \cdot Q(\cos(\theta))\ d\theta$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Rappeler la définition des polynômes de Tchebytchev $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire envisagé.

Exercice 29

1. Montrer que $(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^T \times B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique ?
2. Montrer que sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{Tr} A| \leqslant \sqrt{n} \cdot \|A\|$.
3. Calculer $\mathscr{S}^{\perp}$ avec $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques.
4. En déduire pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la valeur de la borne inférieure : $\inf_{M \in \mathscr{S}} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

5. Montrer que sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

——— ○ ———

Exercice 30

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t)\, dt = 0\right\}$.

1. Calculer $\dim(H)$.
2. Expliciter la projection sur $\mathbb{R}_0[X]$ parallèlement à H.
3. Donner un produit scalaire pour laquelle la projection précédente est une projection orthogonale.

——— ○ ———

Exercice 31

Montrer que la matrice $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice inversible. On pourra considérer le produit $X^T AX$, où X est un vecteur colonne.

——— ○ ———

Exercice 32

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A).$$

Montrer que la matrice $A + A^T$ est inversible.

——— ○ ———

Un peu plus difficile

Exercice 33

Soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On pose $q(x) = \varphi(x, x)$.

1. Montrer que q présente sur $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ un minimum atteint en un point dont les coordonnées sont premières entre elles dans leur ensemble.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}^n$ dont les coordonnées sont premières entre elles dans leur ensemble. Montrer qu'il existe $M \in SL_n(\mathbb{Z})$ dont x soit sa première colonne.

——— ○ ———

Exercice 34

Soient E un espace euclidien, $\lambda < 1$ et $\mathscr{A}$ une partie de la sphère unité de E telle que : pour $u \neq v$ dans $\mathscr{A}$: $(u \mid v) \leqslant \lambda$.

Montrer que la partie $\mathscr{A}$ est finie.

——— ○ ———

Exercice 35

Soit un entier $d \geqslant 1$. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^d$, on note $\|\cdot\|$, la norme euclidienne habituelle.

Montrer que pour tout vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^d$ et tout nombre $\rho > 0$, il existe un point $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et un nombre $t \geqslant 0$ tels que :

$$\|x - t \cdot u\| \leqslant \rho.$$

——— ○ ———

Exercice 36

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soient $x \in E$ un vecteur non nul, puis $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet non nul.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dont les coordonnées de x selon $\mathscr{B}$ soient exactement les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
2. On se donne maintenant un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E.

   Déterminer une CNS sur $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ pour qu'il existe une b.o.n. $\mathscr{B}$ dont les coordonnées de x selon $\mathscr{B}$ soient exactement les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

——— ○ ———

Exercice 37

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour toutes matrices colonnes X et Y,

$$X^T AY = 0 \Longrightarrow Y^T AX = 0.$$

Montrer que la matrice A est symétrique ou anti-symétrique.

——— ○ ———