Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

**Quatrième Devoir Confiné - DS 9 (4h)**

**Correction de l'exercice 1 –**

1. D'après la formule des probabilités totales appliqué au SCE $(A_i)_{i\in I}$, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(X = k \mid A_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\in X(\Omega)} \sum_{i\in I} k\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(X = k \mid A_i) \\ &= \sum_{i\in I} \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(X = k \mid A_i) \quad \text{(interversion de sommes finies)} \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X \mid A_i)\end{aligned}$$

(définition de l'espérance conditionnelle)

2. (a) Soit $Y$ suivant une loi binomiale de paramètres $(n, p)$. D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = np}$, $\boxed{\mathbb{V}(Y) = np(1-p)}$ et par conséquent, d'après la formule de Kônig-Huygens,

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 = np(1-p) + n^2p^2 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\mathbb{E}(Y^2) = np + n(n-1)p^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a alors

$$\boxed{\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) = n(n-1)p^2.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$ (car on n'a pas défini $X_0$).
Sachant que $[X_{n-1} = k]$ est réalisé, $X_n$ correspond au nombre de succès lors d'une répétition de $k$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$. Ainsi, $\boxed{X_n \overset{\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(k,p).}$
Par conséquent, d'après la question 1, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid X_{n-1} = k) = kp} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbb{E}(X_n(X_n-1) \mid X_n = k) = k(k-1)p^2}.$$

(c) • D'après la formule de l'espérance totale, utilisée avec le système complet d'événements $[X_{n-1} = k]$, $k \in [\![0, N]\!]$ (toutes les sommes étant absolument convergentes car finies, puisque à la fois $X_n(\Omega)$ et le système complet utilisé sont finis), $X_n$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_n \mid X_{n-1} = k)\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} kp\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\ &= p\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k).\end{aligned}$$

Ainsi, par définition de l'espérance, $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1})}$

• De même,

$$\mathbb{E}(X_n(X_n-1)) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_n(X_n-1) \mid X_{n-1} = k)\mathbb{P}(X_{n-1} = k) = p^2\sum_{k=0}^{N} k(k-1)\mathbb{P}(X_n = k),$$

et donc, d'après le théorème de transfert, $\boxed{\mathbb{E}(X_n(X_n-1)) = p^2\mathbb{E}(X_{n-1}(X_{n-1}-1)).}$

- La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison $p$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(X_n) = p^{n-1}\mathbb{E}(X_1).$$
Puisque $X_1$ suit une loi binomiale de paramètre $N$, $\mathbb{E}(X_1) = Np$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = Np^n}$
- De même, $(\mathbb{E}(X_n(X_n-1)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit une loi géométrique de raison $p^2$, donc
$$\mathbb{E}(X_n(X_n-1)) = p^{2(n-1)}\mathbb{E}(X_1(X_1-1)),$$
et, d'après la question 1, $\mathbb{E}(X_1(X_1-1)) = N(N-1)p^2$, d'où :
$$\boxed{\mathbb{E}(X_n(X_n-1)) = p^{2n}N(N-1)}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} Np^i = N\sum_{i=1}^{n} p^i$$
La série de terme générale $p^i$ est une série géométrique de raison $p \in ]0,1[$, donc elle est convergente, et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = N\sum_{i=1}^{+\infty} p^i = \frac{Np}{1-p}.}$$

4. (a) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $m > n+1$. On commence par déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k)$ et $\mathbb{E}(X_{m-1} \mid X_n = k)$, en s'inspirant de la question 2. Le raisonnement est le même qu'avant : le fait d'imposer la condition $[X_n = k]$ revient à commencer l'expérience au rang $n+1$ en remplaçant le nombre initial de tirages $N$ par l'entier $k$. Ainsi :
    - Si $[X_n = k]$, les seules valeurs possibles de $X_{m-1}$ ($m-1$ étant supérieur à $k$) sont les entiers de $[\![0,k]\!]$, et comme dans la question 2, toutes ces valeurs sont possibles, et de probabilité non nulle (l'événement décrit dans la question 2 n'étant pas quasi-impossible). Ainsi, $([X_{m-1} = \ell])_{\ell\in[\![0,k]\!]}$ est un système quasi-complet d'événements pour la mesur de probabilité $\mathbb{P}_{[X_n=k]}$ (mais il ne s'agit pas d'un système complet, puisque dans l'absolu, sans condition sur $X_n$, les événements $[X_{m-1} = \ell]$, pour $\ell \in [\![k+1, N]\!]$ ne sont pas impossibles)
    - Pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, sachant que $[X_n = k]$ et $[X_{m-1} = \ell]$ sont réalisés, $X_m$ correspond au nombre de succès lors d'une répétition de $\ell$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$. Ainsi, la loi de $X_m$ conditionnellement à l'événément $[X_n = k] \cap [X_{m-1} = \ell]$ est une loi binomiale de paramètre $(\ell, p)$
    - On en déduit l' espérance conditionnelle
    $$\mathbb{E}(X_m \mid [X_n = k] \cap [X_{m-1} = \ell]) = \ell p$$
    - Ainsi, d'après la formule de l'espérance totale avec le système quasi-complet d'événements (pour la mesure $\mathbb{P}_{[X_n=k]}$ ) $(X_{m-1} = \ell)_{\ell\in[\![0,k]\!]}$ (toutes les convergences étant assurées puisque les sommes sont finies)
    $$\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{E}(X_m \mid [X_n = k] \cap [X_{m-1} = \ell])\mathbb{P}_{X_n=k}(X_{m-1} = \ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \ell p\mathbb{P}_{X_n=k}(X_{m-1} = \ell).$$
    Ainsi, par définition de l'espérance conditionnelle,
    $$\boxed{\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k) = p\mathbb{E}(X_{m-1} \mid X_n = k)}.$$
  - Ainsi, la suite $(\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k))_{m\geqslant n+1}$ est géométrique de raison $p$, donc pour tout $m \geqslant n+1$
  $$\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k) = p^{m-n-1}\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) = p^{m-n-1}pk,$$
  d'après la question 3. Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(X_m \mid X_n = k) = p^{m-n}k}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m > n$. On a :

$\mathbb{E}(X_n X_m \mid X_n = k) = \mathbb{E}(k X_m \mid X_n = k) = k\mathbb{E}(X_n \mid X_n = k)$ donc: $\boxed{\mathbb{E}(X_n X_m \mid X_n = k) = k^2 p^{m-n}}$.

Toujours d'après la formule de l'espérance totale,

$$\mathbb{E}(X_n X_m) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_n X_m \mid X_n = k)\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{N} k^2 p^{m-n}\mathbb{P}(X_n = k),$$

et d'après le théorème de transfert, $\boxed{\mathbb{E}(X_n X_m) = p^{m-n}\mathbb{E}(X_n^2)}$

(b) • On peut alors exprimer la covariance, pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m > n$ :

$$\mathrm{cov}(X_n, X_m) = \mathbb{E}(X_n X_m) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_m) = p^{m-n}\mathbb{E}(X_n^2) - p^n p^m N^2,$$

d'après les questions 4(b) et 6(c). De plus,

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) + \mathbb{E}(X_n) = p^{2n}N(N-1) + p^n N = N^2 p^{2n} + Np^n(1 - p^n).$$

Par conséquent :

$\mathrm{cov}(X_n, X_m) = N^2 p^{2n+m-n} + Np^{m-n+n}(1-p^n) - N^2 p^{m+n}$ donc: $\boxed{\mathrm{cov}(X_n, X_m) = Np^m(1 - p^n)}$

Cette expression reste encore vraie si $n = m$ (vérification immédiate par la formule de König-Huyghens).

- La variance de la somme s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) \\
&= N\left(\sum_{i=1}^{n} p^i(1-p^i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} p^j(1-p^i)\right) \\
&= N\left(\sum_{i=0}^{n} p^i(1-p^i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(1-p^i)\frac{p^{i+1} - p^{n+1}}{1-p}\right) \\
&= N\left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} - \frac{1-p^{2(n+1)}}{1-p^2} + \frac{2}{1-p}\sum_{i=0}^{n-1}(p^{i+1} - p^{2i+1} - p^{n+1} + p^{n+i+1})\right) \\
&= N\left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} - \frac{1-p^{2(n+1)}}{1-p^2} + \frac{2}{1-p}\left(\frac{p-p^{n+1}}{1-p} - \frac{p-p^{2n+1}}{1-p^2} - np^{n+1} + \frac{p^{n+1}-p^{2n+1}}{1-p}\right)\right)
\end{aligned}$$

Après mise sur le même dénomiateur, développement et simplification, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = N\,\frac{p(p+1) - (2n+1)p^{n+1}(1-p^2) - p^{2n+2}(1+p)}{(1-p)^2(1+p)},$$

puis, en simplifiant par $1 + p$ :

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = N\,\frac{p - (2n+1)p^{n+1}(1-p) - p^{2n+2}}{(1-p)^2}}.$$

Vous remarquez qu'en prenant $n = 1$ dans cette expression, vous obtenez

$$\mathbb{V}(X_1) = N\,\frac{p - 3p^2 + 3p^3 - p^4}{(1-p)^2} = \frac{Np(1-p)^3}{(1-p)^2} = Np(1-p),$$

ce qui correspond bien à la variance d'une loi binomiale de paramètre $(N, p)$. Cette petite vérification n'est pas inutile après ce calcul

Puisque $p < 1$, $p^n \longrightarrow 0$ et $(2n+1)p^{n+1} \longrightarrow 0$ (croissances comparées), donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{Np}{(1-p)^2}}.$$

5. (a) • Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n]\!]$. D'après le théorème de transfert (toutes les sommes étant finies),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((1-p^i)^{X_n} \mid X_{n-1} = k) &= \sum_{\ell=0}^{N} (1-p^i)^\ell P(X_n = \ell \mid X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} (1-p^i)^\ell \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell} && \text{(les autres termes étant nuls)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} \binom{k}{\ell} (p(1-p^i))^\ell (1-p)^{k-\ell} \\ &= (p(1-p^i) + (1-p))^k && \text{(d'après la formule du binôme)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}((1-p^i)^{X_n} \mid X_{n-1} = k) = (1-p^{i+1})^k}$.

• D'après la formule de l'espérance totale (les sommes sont toujours finies), on obtient alors

$$\mathbb{E}((1-p^i)^{X_n}) = \sum_{k=0}^{N} (1-p^{i+1})^k P(X_{n-1} = k),$$

et d'après le théorème de transfert,

$$\boxed{\mathbb{E}((1-p^i)^{X_n}) = \mathbb{E}((1-p^{i+1})^{X_{n-1}}).}$$

• Une itération simple amène alors

$$\mathbb{E}((1-p)^{X_n}) = \mathbb{E}((1-p^2)^{X_{n-1}}) = \mathbb{E}((1-p^3)^{X_{n-2}}) = \cdots = \mathbb{E}((1-p^n)^{X_1}).$$

On utilise alors une nouvelle fois le théorème de transfert suivit de la formule du binôme (la variable $X_1$ suivant une loi binomiale de paramètre $(N, p)$) :

$$\mathbb{E}((1-p^n)^{X_1}) = \sum_{k=0}^{N} (1-p^n)^k \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} (1-p^n)^k p^k (1-p)^{N-k} = ((1-p^n)p + (1-p))^N = (1-p^{n+1})^N.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}((1-p)^{X_n}) = (1-p^{n+1})^N.}$

(b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $[X_{n-1} = k]_{k \in [\![0,N]\!]}$ :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{N} (1-p)^k \mathbb{P}(X_{n-1} = k),$$

puisque la loi conditionnelle de $X_n$ sachant $X_{n-1} = k$ est une loi binomiale. Ainsi, en utilisant le théorème de transfert puis la question précédente, il vient :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) = E((1-p)^{X_{n-1}}) = (1-p^n)^N.}$$

(c) L'expérience s'arrête si et seulement si lors d'une série de tirages, le joueur n'obtient aucun Pile : dans ce cas, il n'effectue plus de lancers, et toutes les variables suivantes prennent la valeur 0. Par conséquent, l'expérience s'arrête si et seulement si d'un des $X_n$ prend la valeur 0. Ainsi, en notant $A$ l'événement « le jeu s'arrête », on a :

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X_n = 0].$$

Si l'un des $X_i$ prend la valeur 0, les suivants également, donc la suite $([X_n = 0])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1.$$

Ainsi, $A$ est presque sûrement réalisé, donc $\boxed{\text{l'expérience s'arrête presque sûrement.}}$

**Correction du problème 1 –**

**Partie I – Un lemme de finitude**

1. Soit $\omega \in \Omega$. La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum Y_n(\omega)$ est croissante. Celle-ci tend vers $+\infty$ lorsqu'elle n'est pas majorée. Ainsi :

$$\omega \in A \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)\Big)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas majorée} \Longleftrightarrow \forall M \geqslant 1,\ \exists N \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{N} Y_k(\omega) \geqslant M.$$

On a bien démontré $A = \bigcap_{M\geqslant 1}\bigcup_{N\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{N} Y_k \geqslant M\right)$, soit $\boxed{A = \bigcap_{M\geqslant 1}\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}.}$

2. Soit $N, M \geqslant 1$. La variable $Y_1 + \cdots + Y_N$ est positive et possède une espérance comme somme de telles variables. Si cette espérance est nulle, $Y_1 + \cdots + Y_N$ est nulle presque sûrement (car positive), donc $A_{N,M}$ est quasi-impossible. L'inégalité est dans ce cas triviale. Sinon, par l'inégalité de Markov, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_N)}{M} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(Y_k) \leqslant \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}(Y_k),$$

par linéarité de l'espérance, et par positivité des espérances.

On a bien $\boxed{\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}}$.

3. (a) Soit $M_1 \leqslant M_2$ et $N \geqslant 1$. En notant $S_N$ la somme partielle des $Y_k$, si $S_N \geqslant M_2$, on a aussi $S_N \geqslant M_1$, donc $A_{N,M_2} \subset A_{N,M_1}$. Ainsi, cette inclusion etant vérifiée terme à terme, elle l'est aussi sur l'union : $\boxed{\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big)_{M\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

   (b) D'après de théorème de continuité monotone, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big).$$

D'autre part, pour $M \geqslant 1$ fixé, la suite $(A_{N,M})_{N\geqslant 1}$ est croissante (car $(S_N)$ est croissante), de sorte que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(A_{N,M}).$$

Ceci permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(A_{N,M}).$$

Remarquons que le théorème de limite monotone assure au passage l'existence de ces limites.
Or, puisque pour tous $N, M \geqslant 1$, $\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}$, en passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient :

$$0 \leqslant \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}.$$

Par théorème d'encadrement, pour $M \to +\infty$, on obtient donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0.}$
Ainsi, le complémentaire de $A$ vérifie $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$. Or, par définition de $A$, pour tout $\omega \in \overline{A}$ $\sum Y_n$ converge.
Par définition d'une propriété presque sûre, on en déduit que $\boxed{\sum Y_n \text{ converge presque sûrement.}}$

**Partie II – Loi forte des grands nombres dans le cas $\mathcal{L}^4$**

1. Si le résultat est vérifié lorsque $m = 0$, on s'y ramène en utilisant la suite de variables $\boxed{(X_n - m)_{n\geqslant 1}}$ qui sont encore indépendantes, de même loi, possèdant toujours un moment d'ordre 4 et centrées. On peut donc supposer que $\boxed{m = 0}$.

2. (a) On applique la formule du multinôme et on utilise la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)^4) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{n!}{i_1! \cdots i_n!} \mathbb{E}(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n})$$

Par ailleurs, les $X_i$ étant mutuellement indépendantes, on a $\mathbb{E}(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) = \mathbb{E}(X_1^{i_1}) \cdots \mathbb{E}(X_n^{i_n})$. On a donc bien :

$$\mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)^4) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{n!}{i_1! \cdots i_n!} \mathbb{E}(X_1^{i_1}) \cdots \mathbb{E}(X_n^{i_n}).$$

(b) Les $X_i$ suivant toutes la même loi, $\mathbb{E}(X_j^{i_j}) = m_{i_j}$, le moment d'ordre $i_j$. Un facteur $\mathbb{E}(X_1^{i_1}) \cdots \mathbb{E}(X_n^{i_n})$ est donc égal à $m_{i_1} \cdots m_{i_n}$, où $m_0 = 1$, et $m_1 = 0$ (car les variables sont centrées).

Or, les $n$-uplets $(i_1, \dots, i_n)$ d'entiers naturels tels que $i_1 + \cdots + i_n = 4$ se rangent en cinq catégories. On trouve, à permutation des coordonnées près (le nombre de permutations possibles donnant le nombre de termes de ce type dans la somme) :

- $(4, 0, \dots, 0)$, ce qui en fait $n$ de ce type ;
- $(3, 1, 0, \dots, 0)$, ce qui en fait $n(n-1)$ ;
- $(2, 2, 0, \dots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)}{2}$ ;
- $(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ ;
- $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Par ailleurs, comme $m_1 = 0$, les termes correspondant à une séquence d'indices contenant un 1 sont nuls. Il ne reste dans la somme que des termes indexés par des suites du premier et du troisième type. et comme $X_1, \dots, X_n$ sont toutes centrées par hypothèse, si l'un des exposants vaut 1, l'espérance précédente est nulle. Ainsi, puisque les moments $m_i$ sont ceux de $X_1$,

$$\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \mathbb{E}(X_1^2)^2,$$

soit :

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2}.$$

3. Par linéarité de l'espérance et la question précédente, il vient :

$$\mathbb{E}(Y_n^4) = \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = \frac{\mathbb{E}(X_1^4)}{n^3} + \frac{3(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2}{n^3} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

ce qui, par comparaison de séries à termes positifs, montre que $\boxed{\text{la série } \sum \mathbb{E}(Y_n^4) \text{ converge,}}$ la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente (de paramètre $2 > 1$).

4. La première partie assure alors que, presque sûrement, la série $\sum Y_n^4$ converge. En particulier, presque sûrement, $Y_n^4 \to 0$, donc $Y_n \to 0$. Cela démontre très précisément la $\boxed{\text{loi forte des grands nombres.}}$

## Partie III – Inégalité de Kolmogorov

1. (a) L'événement $A$ est réalisé si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|S_k| \geqslant \alpha$. Soit $\omega \in A$. En considérant $k$ minimal vérifiant $|S_k(\omega)| \geqslant \alpha$, on a alors $\omega \in A_k$. Ainsi, $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. La réciproque est évidente. Ainsi

$$\boxed{A = A_1 \cup \cdots \cup A_n}.$$

(b) Par définition, les $A_k$ sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A.$$

Puisque $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on en déduit

$$\boxed{\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \leqslant 1}.$$

2. (a) Comme $X_1, \dots, X_n$ sont centrées, par linéarité, on obtient :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = 0.$$

Ainsi $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2)$. Par ce qui précède, on a $S_n^2 \geqslant S_n^2(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n})$, ce qui, par linéarité et croissance de l'espérance, donne :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}).}.$$

(b) On a, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2 = S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \geqslant S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k).$$

Ainsi, par croissance et linéarité de l'espérance et la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(S_k \mathbb{1}_{A_k}(S_n - S_k)\big).}$$

Fixons $k \in [\![1, n]\!]$. La variable $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ est une fonction de $X_1, \dots, X_k$ uniquement, tandis que $S_n - S_k$ est une fonction de $X_{k+1}, \dots, X_n$. Les variables $X_i$ étant indépendantes, on en déduit que

$$\mathbb{E}\big(S_k \mathbb{1}_{A_k}(S_n - S_k)\big) = \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{A_k})\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0,$$

puisque $S_n - S_k$ est centrée comme somme de variables centrées. On obtient bien :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})}.$$

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a, par définition de $A_k$, $S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \alpha^2 \mathbb{1}_{A_k}$ (car lorsque $A_k$ est réalisé, $S_k^2 \leqslant \alpha^2$). Par croissance de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\alpha^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \alpha^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}) = \alpha^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \alpha^2 \mathbb{P}(A),$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}.}$$

**Partie IV – Un résultat de convergence**

1. Une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n, p \geqslant N,\ |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n, p \geqslant N,\ |u_n - u_p| \leqslant \frac{1}{2^i}.$$

En effet, dans le sens direct, c'est évident, dans le sens réciproque, cela provient du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^i} \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, la suite $(S_n)$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $C_{i,N}$ est réalisé, ou encore, si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}$ est réalisé, c'est à dire $\bigcap_{i \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{C = \bigcap_{i \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}}.$$

2. Si $C$ est de probabilité 1, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy presque sûrement, donc convergente presque sûrement, donc la série $\sum X_n$ converge presque sûrement. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$. Or, pour $N$ fixé, la suite $(C_{i,N})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc l'union sur $N$ également. Ainsi, d'après le théorème de limite monotone,

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{N\geqslant 1} C_{i,N}\right) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(C_i)$$

Il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{i\to+\infty} \mathbb{P}(C_i) = 1$, et pour cela, $\boxed{\text{il suffit de montrer que pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(C_i) = 1.}$ C'est d'ailleurs aussi une condition nécessaire, puisque $(\mathbb{P}(C_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et doit converger vers 1.

3. Par définition de la borne supérieure, si $B_N$ est réalisé, il existe $n \geqslant N$ tel que $|S_n - S_N| > 2^{-(i+1)}$ et alors $B_{N,n}$ est réalisé. Ceci traduit exactement l'inclusion demandée :

$$\boxed{B_N \subset \bigcup_{M\geqslant N} B_{N,M}.}$$

4. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(B_N) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{M\geqslant N} B_{N,M}\Big).$$

Or $(B_{N,M})_{M\geqslant N}$ est une suite croissante d'événements, de sorte que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{M\geqslant N} B_{N,M}\Big) = \lim_{M\to+\infty} \mathbb{P}(B_{N,M}).$$

La partie précédente montre que, pour tout $M \geqslant N$ fixé, on a :

$$\mathbb{P}(B_{N,M}) \leqslant \lambda \mathbb{V}(S_M - S_N) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{(2^{-(i+1)})^2}.$$

Par indépendance de $(X_n)_{n\geqslant 1}$, il vient :

$$\mathbb{V}(S_M - S_N) = \mathbb{V}(X_M + \cdots + X_{N+1}) = \mathbb{V}(X_M) + \cdots + \mathbb{V}(X_{N+1}).$$

Comme la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge, on en déduit que :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(B_N) \leqslant \lim_{M\to+\infty} \mathbb{P}(B_{N,M}) \leqslant \lambda \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$$

et ainsi, par théorème d'encadrement, le reste de la série convergente $\sum \mathbb{V}(X_n)$ tendant vers 0, on obtient $\boxed{\mathbb{P}(B_N) \to 0}$.

5. Soit $N \geqslant 1$, on a :

$$\overline{B_N} = [\sup_{n\geqslant N} |S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}] = \bigcap_{n\geqslant N} [|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}].$$

Or, si $\overline{B_N}$ est réalisé, alors pour tout $n, p \geqslant N$, les événements $|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}$ et $|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}$ sont réalisés, donc, par inégalité triangulaire, $|S_n - S_p| \leqslant \frac{1}{2^i}$, ce qui amène la réalisation de $C_{i,n}$.
Ainsi, $\overline{B_N} \subset C_{i,N}$, donc $\mathbb{P}(\overline{B_N}) \leqslant \mathbb{P}(C_{i,N}) \leqslant 1$. Par théorème d'encadrement, et par passage au complémentaire dans le résultat de la question précédente, il vient $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1}$.

6. La suite $(C_{i,N})_{N\geqslant 1}$ est une suite croissante d'événements, de sorte que :

$$\mathbb{P}(C_i) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1.$$

Ceci étant valable pour tout $i \geqslant 1$, on conclut par la qeustion 2 : $\boxed{\text{la série } \sum X_n \text{ converge presque sûrement.}}$

**Partie V – Application aux séries harmoniques de signe aléatoire**

1. (a) Il s'agit d'une tranformation d'Abel. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\varepsilon_k = T_k - T_{k-1}$, de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{k+1},$$

et sachant que $T_0 = 0$, on conclut :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k(k+1)} + \frac{T_n}{n}}$$

(b) On applique les résultats de la deuxième partie à la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$. Ces variables sont bien indépendantes, possèdent la même loi, et possèdent un moment à tout ordre puisqu'elles sont à valeurs dans un ensemble fini, donc *a fortiori* un moment d'ordre 4. On en déduit qu'il existe un événement $A$ de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, on ait :

$$\frac{T_n(\omega)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m,$$

avec $m = \mathbb{E}(X_1) = (-1)(1-p) + p = 2p - 1 \neq 0$ puisque $p \neq \frac{1}{2}$. On en déduit que, $T_n(\omega) \underset{+\infty}{\sim} mn$, d'où :

$$\frac{T_n(\omega)}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{m}{n}.$$

Le terme de droite étant de signe constant, celui de gauche aussi, à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{T_k(\omega)}{k(k+1)}$ diverge, alors que $\left(\frac{T_n(\omega)}{n}\right)$ admet une limite finie $m$. Ainsi, pour tout $\omega \in A$, $\sum \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n}$ diverge.

On a montré que $\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n} \text{ diverge presque sûrement.}}$

2. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, pour tout $n \geqslant 1$, la variable $\varepsilon_n$ est centrée réduite (calcul direct facile, ou remarquer que $\varepsilon_n = 2X - 1$, où $X$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$).

On pose alors $X_n = \frac{\varepsilon_n}{n}$. On obtient une suite de variables indépendantes, et centrées, admettant un moment d'ordre 2 (car finies), et telles que

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\varepsilon_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, $\sum \mathbb{V}(X_n)$ est convergente. On est en situation d'appliquer les résultats de la partie IV, nous assurant la convergence presque sûre de $\sum X_n$.

Ainsi, $\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge presque sûrement.}}$