POLYNÔMES

Exercice 1. [$\circ$]

La valuation d'un polynôme P, notée $\mathrm{val}(P)$, est le degré du monôme (non nul) de plus petit degré dans P (avec la convention $\mathrm{val}(0) = +\infty$). Par exemple $\mathrm{val}(X^{1975} - X^{17}) = 17$.

Démontrer que, pour tous P, Q dans $K[X]$, on a

$$\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min\{\mathrm{val}(P)\,;\,\mathrm{val}(Q)\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q).$$

Exercice 2. [$\circ$]

Soit K un corps dans lequel $2 \neq 0$.

1. Soit A un polynôme à coefficients dans K tel que $A(-X) = A(X)$. Démontrer que tous les monômes de A sont de degré pair.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans K. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $\widehat{P}$ tel que $\widehat{P}(X^2) = P(X)P(-X)$. Que vaut le degré de $\widehat{P}$ par rapport au degré de P ?
3. Soient $P, Q \in K[X]$. Établir que $\widehat{PQ} = \widehat{P}\widehat{Q}$.

Exercice 3. [$\circ$]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

1. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
2. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 4. [$\circ$]

Soient $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$. Écrire le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$ comme combinaison linéaire des polynômes $(X-\alpha)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. [$\star$]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose

$$P_n(X) = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}\cdot$$

Démontrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, ${P_n}^{(\ell)}(0)$ est un entier relatif.

Exercice 6. [$\circ$]

Soit $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 + 1$. Démontrer que A et B sont premiers entre eux et trouver l'ensemble des couples $(U, V) \in K[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 7. [$\circ$]

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   a) Déterminer, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$, le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$.
   b) Déterminer, en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$, le reste de la division de P par $(X-a)^2$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$. Qu'en déduire ?

Exercice 8. [$\star$]

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A si et seulement si $B(X^p)$ divise $A(X^p)$.

Exercice 9. [$\star$] (Algorithme de Hörner)

On veut calculer la valeur du polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$ en $\alpha \in K$. L'algorithme de Hörner consiste à effectuer ce calcul de la façon suivante :

$$P(\alpha) = a_0 + (a_1 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n\alpha)\alpha)\alpha\cdots)\alpha)\alpha.$$

Pour cela, on écrit les coefficients du polynôme dans la première ligne d'un tableau à 2 lignes et $n+1$ colonnes, en partant du coefficient dominant pour aller vers le coefficient constant. La première case de la seconde ligne contient le même nombre que celle qui est juste au dessus d'elle, à savoir a_n. Ainsi pour le polynôme $P = -X^3 + 3X + 1$ et la valeur $\alpha = 4$, on part du tableau :

-1	0	3	1
-1			

On remplit alors les cases de la seconde ligne de proche en proche de la gauche vers la droite. Pour remplir la case C, on multiplie par α le nombre inscrit dans la case à gauche de C et on ajoute à ce résultat la valeur du coefficient situé au dessus de C ; on inscrit alors le nombre obtenu dans C. Dans notre exemple, on obtient

-1	0	3	1
-1	-4	-13	-51

Le dernier résultat de la seconde ligne est la valeur de $P(\alpha)$. Ici $P(4) = -51$.

1. Dénombrer les multiplications effectuées par l'algorithme naïf calculant toutes les puissances de α avant de les combiner linéairement. Faire de même avec l'algorithme de Hörner.
2. Expliquer comment on peut utiliser l'algorithme de Hörner pour effectuer la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

   Vérifier que 2 est une racine de $P = 3X^4 - 2X^3 - 9X^2 + 5X - 6$ et factoriser P par $X - 2$.

Exercice 10. [$\circ$]

Soient $A, B \in K[X]$. Démontrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A+B$ et AB le sont.

Exercice 11. [$\star$]

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ est $X^{n\wedge m} - 1$. *Indication : On pourra effectuer la division euclidienne de n par m.*
2. On suppose que $n \wedge m = 1$. Démontrer que $(X^n - 1)(X^m - 1)$ divise $(X - 1)(X^{nm} - 1)$.

Exercice 12. [$\circ$] (Un polynôme symétrique)

Soit $P = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2$. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) est équivalente à l'équation $P(z)/z^2 = 0$. En déduire les racines de P à l'aide du changement de variable $Z = z + 1/z$.

Exercice 13. [$\circ$] (Racines évidentes)

Soit $P = n_dX^d + \cdots + n_1X + n_0$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$ à coefficients entiers.

1. Démontrer que si P admet un nombre entier a comme racine, alors nécessairement a divise n_0. Une telle racine est appelée racine évidente du polynôme P.

   Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines évidentes ?
2. Généraliser le résultat précédent en indiquant ce que l'on peut dire des entiers a et b (avec $b \neq 0$ et $a \wedge b = 1$) lorsque P admet le nombre rationnel a/b comme racine.

Exercice 14. [$\circ$] (Racine commune)

1. Démontrer que si deux polynômes A et B ont une racine en commun, celle-ci est aussi racine du reste de la division euclidienne de A par B.
2. Trouver une racine commune de $A = X^4 + (-1+i)\,X^3 + (-3+i)\,X^2 + (-5-i)\,X + 10 + 25i$ et $B = X^3 + 2X^2 + (2-i)\,X - 1 - 7i$.

Exercice 15. [$\circ$]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} X^k$ n'a que des racines simples.

Exercice 16. [$\star$]

1. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'admet que des racines simples dans K.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si $K = \mathbb{C}$ mais fausse si $K = \mathbb{R}$.

Exercice 17. [$\circ$]

Démontrer que $P = X^3 - 3X + 1$ admet trois racines réelles.

Exercice 18. [$\star$]

Déterminer les polynômes complexes dont l'application polynomiale associée est surjective puis ceux dont l'application polynomiale associée est injective.

Exercice 19. [$\circ$]

Soient $P, Q \in \mathbb{C}_3[X]$ tels que $P(0) = Q(0)$, $P'(0) = Q'(0)$, $P''(0) = Q''(0)$ et $P'''(0) = Q'''(0)$. Démontrer que $P = Q$ de deux manières.

Exercice 20. [$\star$]

Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$.

Exercice 21. [$\circ$]

Démontrer qu'un corps fini n'est pas algébriquement clos.

Exercice 22. [$\circ$]

Déterminer la factorisation, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

$$A = X^6 + 1, \qquad B = X^{10} + X^5 + 1 \qquad \text{et} \qquad C = X^{2n} - 2(\cos\alpha)X^n + 1.$$

Exercice 23. [$\circ$]

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice 24. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ et en déduire la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$.

Exercice 25. [$\circ$]

Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré 2 ou 3. Démontrer que P est irréductible si, et seulement si, il n'a pas de racine dans K. Est-ce encore vrai pour des polynômes de degré plus élevé ?

Exercice 26. [$\star$]

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = |Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $Q = uP$.

Exercice 27. [$\star$]

Déterminer les nombres réels a, b, c pour qu'ils soient racines de $P(X) = X^3 + aX^2 + bX - c$.

Exercice 28. [$\star$] (Discriminant)

Soient $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients complexes de degré n (c'est-à-dire $a_n \neq 0$) et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines (éventuellement égales) de P dans $\mathbb{C}$. On appelle *discriminant de* P le nombre complexe Δ défini par

$$\Delta = {a_n}^{2n-2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

1. Quel résultat liant le discriminant et les racines multiples peut-on énoncer ?
2. Calculer Δ dans le cas du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.
3. Démontrer que $\Delta = (-1)^{n(n-1)/2}{a_n}^{n-2} \prod\limits_{\ell=1}^{n} P'(\alpha_\ell)$.
4. Calculer Δ dans le cas du polynôme $P = X^3 + pX + q$.

Exercice 29. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer de deux manières l'unique polynôme $L \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, pour lequel $L(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
2. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

Exercice 30. [$\circ$]

Soient K un corps fini et $f : K \longrightarrow K$ une application. Démontrer que f est polynomiale.

Exercice 31. [$\circ$]

Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m = P(n)$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, m divise $P(n + km)$.

En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Exercice 32. [$\circ$]

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Prouver que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 33. [$\bigstar$]

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ deux polynômes irréductibles non associés. Démontrer qu'ils n'ont pas de racine complexe en commun.
2. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que P n'a pas de racine complexe multiple.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. *Indication : factoriser.*

Exercice 34. [$\star$] (Polynôme conjugué)

Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ à coefficients complexes, on définit le polynôme conjugué de P, noté $\overline{P}$, par la formule

$$\overline{P} = \overline{a_0} + \overline{a_1}X + \cdots + \overline{a_n}X^n.$$

1. Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$. Démontrer que P est à coefficients réels.
3. Soit P un polynôme à coefficients complexes.

   On pose $R = P\overline{P}$. Démontrer que le polynôme R est à coefficients réels.

   En déduire qu'il est équivalent de dire que « tout polynôme à coefficients complexes non constant admet une racine complexe » (théorème de d'Alembert Gauß) et de dire que « tout polynôme à coefficients réels non constant admet une racine complexe ».

POLYNÔMES

Exercice 1. [∘]

La valuation d'un polynôme P, notée $\mathrm{val}(P)$, est le degré du monôme (non nul) de plus petit degré dans P (avec la convention $\mathrm{val}(0) = +\infty$). Par exemple $\mathrm{val}(X^{1975} - X^{17}) = 17$.

Démontrer que, pour tous P, Q dans $K[X]$, on a

$$\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min\{\mathrm{val}(P)\,;\,\mathrm{val}(Q)\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q).$$

Exercice 2. [∘]

Soit K un corps dans lequel $2 \neq 0$.

1. Soit A un polynôme à coefficients dans K tel que $A(-X) = A(X)$. Démontrer que tous les monômes de A sont de degré pair.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans K. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $\widehat{P}$ tel que $\widehat{P}(X^2) = P(X)P(-X)$. Que vaut le degré de $\widehat{P}$ par rapport au degré de P ?
3. Soient $P, Q \in K[X]$. Établir que $\widehat{PQ} = \widehat{P}\widehat{Q}$.

Exercice 3. [∘]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

1. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
2. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 4. [∘]

Soient $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$. Écrire le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$ comme combinaison linéaire des polynômes $(X-\alpha)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. [⋆]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose

$$P_n(X) = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}\cdot$$

Démontrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, ${P_n}^{(\ell)}(0)$ est un entier relatif.

Exercice 6. [∘]

Soit $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 + 1$. Démontrer que A et B sont premiers entre eux et trouver l'ensemble des couples $(U, V) \in K[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 7. [∘]

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   a) Déterminer, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$, le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$.
   b) Déterminer, en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$, le reste de la division de P par $(X-a)^2$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$. Qu'en déduire ?

Exercice 8. [⋆]

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A si et seulement si $B(X^p)$ divise $A(X^p)$.

Exercice 9. [$\star$] (Algorithme de Hörner)

On veut calculer la valeur du polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$ en $\alpha \in K$. L'algorithme de Hörner consiste à effectuer ce calcul de la façon suivante :

$$P(\alpha) = a_0 + (a_1 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n\alpha)\alpha)\alpha \cdots)\alpha)\alpha.$$

Pour cela, on écrit les coefficients du polynôme dans la première ligne d'un tableau à 2 lignes et $n+1$ colonnes, en partant du coefficient dominant pour aller vers le coefficient constant. La première case de la seconde ligne contient le même nombre que celle qui est juste au dessus d'elle, à savoir a_n. Ainsi pour le polynôme $P = -X^3 + 3X + 1$ et la valeur $\alpha = 4$, on part du tableau :

-1	0	3	1
-1			

On remplit alors les cases de la seconde ligne de proche en proche de la gauche vers la droite. Pour remplir la case C, on multiplie par α le nombre inscrit dans la case à gauche de C et on ajoute à ce résultat la valeur du coefficient situé au dessus de C ; on inscrit alors le nombre obtenu dans C. Dans notre exemple, on obtient

-1	0	3	1
-1	-4	-13	-51

Le dernier résultat de la seconde ligne est la valeur de $P(\alpha)$. Ici $P(4) = -51$.

1. Dénombrer les multiplications effectuées par l'algorithme naïf calculant toutes les puissances de α avant de les combiner linéairement. Faire de même avec l'algorithme de Hörner.
2. Expliquer comment on peut utiliser l'algorithme de Hörner pour effectuer la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

   Vérifier que 2 est une racine de $P = 3X^4 - 2X^3 - 9X^2 + 5X - 6$ et factoriser P par $X - 2$.

Exercice 10. [$\circ$]

Soient $A, B \in K[X]$. Démontrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A+B$ et AB le sont.

Exercice 11. [$\star$]

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ est $X^{n\wedge m} - 1$. *Indication : On pourra effectuer la division euclidienne de n par m.*
2. On suppose que $n \wedge m = 1$. Démontrer que $(X^n - 1)(X^m - 1)$ divise $(X - 1)(X^{nm} - 1)$.

Exercice 12. [$\circ$] (Un polynôme symétrique)

Soit $P = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2$. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) est équivalente à l'équation $P(z)/z^2 = 0$. En déduire les racines de P à l'aide du changement de variable $Z = z + 1/z$.

Exercice 13. [$\circ$] (Racines évidentes)

Soit $P = n_dX^d + \cdots + n_1X + n_0$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$ à coefficients entiers.

1. Démontrer que si P admet un nombre entier a comme racine, alors nécessairement a divise n_0. Une telle racine est appelée racine évidente du polynôme P.

   Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines évidentes ?
2. Généraliser le résultat précédent en indiquant ce que l'on peut dire des entiers a et b (avec $b \neq 0$ et $a \wedge b = 1$) lorsque P admet le nombre rationnel a/b comme racine.

Exercice 14. [$\circ$] (Racine commune)

1. Démontrer que si deux polynômes A et B ont une racine en commun, celle-ci est aussi racine du reste de la division euclidienne de A par B.
2. Trouver une racine commune de $A = X^4 + (-1+i)\,X^3 + (-3+i)\,X^2 + (-5-i)\,X + 10 + 25i$ et $B = X^3 + 2X^2 + (2-i)\,X - 1 - 7i$.

Exercice 15. [$\circ$]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ n'a que des racines simples.

Exercice 16. [$\star$]

1. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'admet que des racines simples dans K.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si $K = \mathbb{C}$ mais fausse si $K = \mathbb{R}$.

Exercice 17. [$\circ$]

Démontrer que $P = X^3 - 3X + 1$ admet trois racines réelles.

Exercice 18. [$\star$]

Déterminer les polynômes complexes dont l'application polynomiale associée est surjective puis ceux dont l'application polynomiale associée est injective.

Exercice 19. [$\circ$]

Soient $P, Q \in \mathbb{C}_3[X]$ tels que $P(0) = Q(0)$, $P'(0) = Q'(0)$, $P''(0) = Q''(0)$ et $P'''(0) = Q'''(0)$. Démontrer que $P = Q$ de deux manières.

Exercice 20. [$\star$]

Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$.

Exercice 21. [$\circ$]

Démontrer qu'un corps fini n'est pas algébriquement clos.

Exercice 22. [$\circ$]

Déterminer la factorisation, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

$$A = X^6 + 1, \qquad B = X^{10} + X^5 + 1 \qquad \text{et} \qquad C = X^{2n} - 2(\cos\alpha)X^n + 1.$$

Exercice 23. [$\circ$]

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice 24. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$.

Exercice 25. [$\circ$]

Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré 2 ou 3. Démontrer que P est irréductible si, et seulement si, il n'a pas de racine dans K. Est-ce encore vrai pour des polynômes de degré plus élevé ?

Exercice 26. [$\star$]

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = |Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $Q = uP$.

Exercice 27. [$\star$]

Déterminer les nombres réels a, b, c pour qu'ils soient racines de $P(X) = X^3 + aX^2 + bX - c$.

Exercice 28. [$\star$] (Discriminant)

Soient $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients complexes de degré n (c'est-à-dire $a_n \neq 0$) et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines (éventuellement égales) de P dans $\mathbb{C}$. On appelle *discriminant de* P le nombre complexe Δ défini par

$$\Delta = {a_n}^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

1. Quel résultat liant le discriminant et les racines multiples peut-on énoncer ?
2. Calculer Δ dans le cas du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.
3. Démontrer que $\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} {a_n}^{n-2} \prod_{\ell=1}^{n} P'(\alpha_\ell)$.
4. Calculer Δ dans le cas du polynôme $P = X^3 + pX + q$.

Exercice 29. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer de deux manières l'unique polynôme $L \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, pour lequel $L(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
2. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Exercice 30. [$\circ$]

Soient K un corps fini et $f : K \longrightarrow K$ une application. Démontrer que f est polynomiale.

Exercice 31. [$\circ$]

Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m = P(n)$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, m divise $P(n + km)$.

En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Exercice 32. [$\circ$]

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Prouver que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 33. [$\bigstar$]

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ deux polynômes irréductibles non associés. Démontrer qu'ils n'ont pas de racine complexe en commun.
2. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que P n'a pas de racine complexe multiple.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. *Indication : factoriser.*

Exercice 34. [$\star$] (Polynôme conjugué)

Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ à coefficients complexes, on définit le polynôme conjugué de P, noté $\overline{P}$, par la formule

$$\overline{P} = \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \cdots + \overline{a_n} X^n.$$

1. Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$. Démontrer que P est à coefficients réels.
3. Soit P un polynôme à coefficients complexes.

   On pose $R = P\overline{P}$. Démontrer que le polynôme R est à coefficients réels.

   En déduire qu'il est équivalent de dire que « tout polynôme à coefficients complexes non constant admet une racine complexe » (théorème de d'Alembert Gauß) et de dire que « tout polynôme à coefficients réels non constant admet une racine complexe ».