Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 03/12/2020

MPSI 4 – Mathématiques

A. Troesch

DM n° 7 : Complexes, dérivation

Ce devoir est à m'envoyer scanné au format pdf, via l'assistant Tigroesch sur Discord ou par mail à l'adresse suivante : `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`. Merci de respecter la consigne suivante pour le nom du fichier : `dm08-nom.pdf` (par exemple `dm08-troesch.pdf` si c'est ma copie), sans accent, sans tréma, sans espace.

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : en plus des problème ci-dessous obligatoires, je vous invite, si vous en avez le temps, à voir le problème 5 de la sélection de problèmes sur ma page web (exemple de fonction continue partout, dérivable nulle part), et le DS 4 de l'année dernière.

Correction de l'exercice 1 – (Birapport)

1. • Si a, b, c et d sont alignés, les rapports $\dfrac{c-a}{d-a}$ et $\dfrac{d-b}{c-b}$ sont réels (cela traduit le fait que les points a, c et d sont alignés, ainsi que b, c et d). Ainsi, le birapport $[a,b,c,d]$ est réel.
   • Réciproquement, si le birapport $[a,b,c,d]$ est réel, alors, puisque $\dfrac{c-a}{c-b}$ est réel (du fait de l'hypothèse d'alignement de a, b et c) et non nul, $\dfrac{d-b}{d-a}$ l'est aussi. Ainsi, a, b et d sont alignés. Donc d est sur la droite passant par a et b, ainsi que c. Donc a, b, c et d sont alignés.

   On en déduit que si a, b et c sont alignés, $\boxed{a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ sont alignés si et seulement si } [a,b,c,d] \text{ est réel.}}$

2. On suppose que $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$ (certains auront reconnu le déterminant, et la caractérisation des systèmes de Cramer par le déterminant, mais pour l'instant, on laisse cet argument de côté, et on procède par une preuve purement élémentaire).
   • Si le système admet une solution (x,y), cette solution vérifie aussi les équations
   $$\begin{cases}\alpha\alpha' x+\beta\alpha' y=\gamma\alpha'\\ \alpha'\alpha x+\beta'\alpha y=\gamma'\alpha\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\begin{cases}\alpha\beta' x+\beta\beta' y=\gamma\beta'\\ \alpha'\beta x+\beta'\beta y=\gamma'\beta\end{cases}$$
   Ainsi, en soustrayant les égalités dans chacun de ces deux systèmes, on obtient :
   $$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)y=\gamma'\alpha-\gamma\alpha'\qquad\text{et}\qquad(\alpha\beta'-\alpha'\beta)x=\gamma\beta'-\gamma'\beta.$$
   Comme $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$, on peut diviser par cette quantité, et on trouve :
   $$x=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\qquad\text{et}\qquad y=\frac{\gamma'\alpha-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}.$$
   Ce sont les formules de Cramer, qu'on généralisera plus tard dans l'année, pour des systèmes $n\times n$, à l'aide de déterminants.
   On a donc trouvé une écriture unique de x et y. Ainsi, si le système admet une solution, elle est $\boxed{\text{unique}}$.
   • Réciproquement, un calcul sans difficulté montre que les expressions trouvées sont bien solutions du système. Ainsi, $\boxed{\text{il existe une solution au système}}$.

   Remarquez que le fait de multiplier les équations par α, β etc, qui peuvent être nuls, ne me permet pas de considérer que le raisonnement de la première phase se fait sous forme d'équivalences.

   Ainsi, $\boxed{\text{3 points distincts non alignés sont cocycliques.}}$

3. Soit α, β, γ des réels, et z un complexe. On suppose que $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont distincts.

On a :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, z] &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha})(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta})}{(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta})} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha+\gamma}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\beta+\gamma}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \frac{(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta})(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha})}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}|^2} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}|^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \frac{1 - \overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta} - z\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)}}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}|^2}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}(1 - \overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta} - z\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)}) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} - \overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha+\beta}{2}} - z\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha+\beta}{2}} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) - 2\mathrm{Re}\left(z\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Im}([\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, z]) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}|^2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}|^2}.}$$

Par conséquent, $[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, z]$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle et comme α, β et γ sont distincts modulo 2π, leur demi-différence est non congrue à 0 modulo π, donc les sinus intervenant dans l'expression de la partie imaginaire de $[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, z]$ sont tous non nuls.

Ainsi, $\boxed{[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, z] \text{ est réel si et seulement si } |z|^2 = 1, \text{ c'est-à-dire } z \in \mathbb{U}.}$

4. Soit a, b, c, d distincts, et λ, μ des complexes, $\lambda \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu] &= \frac{(\lambda c + \mu - \lambda a - \mu)(\lambda d + \mu - \lambda b - \mu)}{(\lambda d + \mu - \lambda a - \mu)(\lambda c + \mu - \lambda b - \mu)} \\
&= \frac{\lambda^2(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu] = [a, b, c, d].}$

Remarquez le bien fondé du calcul précédent, du fait que $\lambda a + \mu$, $\lambda b + \mu$, $\lambda c + \mu$, $\lambda d + \mu$ sont deux à deux distincts, car $z \mapsto \lambda z + \mu$ est bijective (puisque $\lambda \neq 0$).

5. - Si a, b, c sont alignés, on a déjà établi l'équivalence.
   - Si a, b et c ne sont pas alignés, ils sont cocycliques. Appelons $\mathcal{C}$ un cercle les contenant. Soit ω le centre du cercle $\mathcal{C}$ et r son rayon. Une translation de vecteur $-\omega$ suivi d'une homothétie de rapport $\frac{1}{r}$ transforme $\mathcal{C}$ en $\mathbb{U}$. Il s'agit donc d'une similitude affine s, s'écrivant sous la forme $z \mapsto \lambda z + \mu$. Notons a', b', c' et d' les images de a, b, c et d par s. Les points a, b, c et d sont cocycliques si et seulement si a', b', c' et d' le sont (car s envoie bijectivement $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{U}$), et comme a', b', c' sont suyr $\mathbb{U}$, la question 4 permet d'affirmer que ceci est le cas si et seulement si $[a', b', c', d']$ est réel, donc si et seulement si $[a, b, c, d]$ est réel (d'après la question 5, les a', b', c' et d' s'écrivant $\lambda a + \mu$ etc.).

   Ainsi, $\boxed{a, b, c \text{ et } d \text{ sont cocycliques ou alignés si et seulement si } [a, b, c, d] \text{ est réel.}}$

6. (Formule des six birapports). On calcule courageusement, en remarquant que tout se simplifie (comptez les signes dans les simplifications, il y en a un nombre pair) :

$$\begin{aligned}
&[a, c, b, d] \times [c', a', d', b'] \times [a', b, a, b'] \times [b, c', c, b'] \times [c, d', c', d] \times [d', a, a', d] \\
&\quad = \frac{(b-a)(d-c)(d'-c')(b'-a')(a-a')(b'-b)(c-b)(b'-c')(c'-c)(d-d')(a'-d')(d-a)}{(d-a)(b-c)(b'-c')(d'-a')(b'-a')(a-b)(b'-b)(c-c')(d-c)(c'-d')(d-d')(a'-a)} \\
&\quad = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{[a, c, b, d] \times [c', a', d', b'] \times [a', b, a, b'] \times [b, c', c, b'] \times [c, d', c', d] \times [d', a, a', d] = 1}.$

7. Les points a, a', b, b', sont cocycliques (ils sont sur C_2), ainsi que les points b, b', c, c', les points c, c', d, d', et les points d, d', a, a'. Ainsi, les quatre derniers birapports de la formule des 6 birapports sont réels. On en déduit que $[a, c, b, d][c', a', d', b']$ est réel. Ainsi, si a, b, c et d sont alignés ou cocycliques, $[a, c, b, d]$ étant alors réel (et non nul), il en est de même de $[c', a', d', b']$.
   Ainsi, $\boxed{a,\ b,\ c,\ d \text{ sont alignés ou cocycliques ssi } a',\ b',\ c',\ d' \text{ le sont.}}$

Correction de l'exercice 2 – (Étude d'une fonction)

On définit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. La fonction f est définie sur $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$. Les fonctions $y \mapsto |y|$ et $y \mapsto \sqrt{y}$ étant dérivables (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement), ainsi que l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}}$.
   On a donc la continuité sur ce domaine. Les fonctions valeur absolue et racine étant aussi continues en 0, on récupère aussi la continuité en -2. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$
   Montrons que f n'est pas dérivable en -2. Pour cela, formons le taux d'accroissement. Pour tout $h \in]-1, 1[$ non nul, on a :
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \mathrm{e}^{\frac{1}{h-2}}\frac{\sqrt{|h-2|}}{\sqrt{|h|}} \times \operatorname{sgn}(h),$$
   où $\operatorname{sgn}(h)$ est le signe de h égal à 1 ou -1. Cette expression n'admet pas de limite lorsque h tend vers 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en -2. Le $\boxed{\text{domaine de dérivabilité de } f \text{ est donc } \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}}$.
   Par ailleurs, le taux d'accroissement ci-dessus admet des limites infinies à gauche et à droite :
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = +\infty$$
   Donc $\boxed{f \text{ n'est dérivable ni à droite ni à gauche en } -2}$. On peut également dire qu'on a des demi-tangentes verticales à gauche et à droite en -2 (toutes les deux étant dirigées vers le haut).

2. On exploite l'indication, nous incitant à considérer la dérivée logarithmique. La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}$. On peut donc la composer par ln, et f étant de plus dérivable sur ce domaine, il en est de même de $\ln \circ f$. On a alors, en dérivant $\ln \circ f$ (et en sortant au préalable la racine sous forme d'un coefficient $\frac{1}{2}$) :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x(x+2)}$$
   Remarquez que les valeurs absolues ne nous gênent plus dans ce calcul, puisque $x \mapsto \ln|x|$ se dérive sur tout son domaine en $x \mapsto \frac{1}{x}$; il reste alors seulement à composer par $x \mapsto x(x+2)$.
   Une mise sur le même dénominateur amène :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}, \quad \boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2(x+2)}f(x)}.$$
   On obtient alors le tableau de variations suivant, complété des limites obtenues dans la question suivantes.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2-2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$0 \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. - En $-\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 1$, donc la limite est donnée par la racine, et on obtient $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   - De la même façon, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Lorsque $x \to 0^-$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- Lorsque $x \to 0^+$, par croissances comparées $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} \to +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- La seule demi-tangente possible aux bornes du domaine est à gauche en 0. L'expression de la dérivée et l'utilisation des croissances comparées nous assure de la même manière que $f'(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, on a une $\boxed{\text{demi-tangente horizontale à gauche en } 0}$.
  On peut préciser ce résultat au regard de la question 8 : après prolongement par continuité à gauche en 0, f est dérivable à gauche de dérivée à gauche nulle en 0.
- On a déjà montré qu'on a des $\boxed{\text{demi-tangentes verticale vers le haut en } -2}$.

4. - Étude d'une asymptote en $+\infty$.
     On calcule dans un premier temps une limite de $\frac{f(x)}{x}$:
     $$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
     On a alors, pour $x > 0$:
     $$\begin{aligned} f(x) - x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} - x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{x(x+2)} - x\right) + x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1), \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2x}{\sqrt{x(x+2)} + x} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} + 1 = 2. \end{aligned}$$
     Ainsi, $\boxed{\text{il existe une asymptote } (D) \text{ en } +\infty, \text{ d'équation } y = x+2.}$
     Lorsque nous disposerons d'outils plus efficaces (DL), ce calcul semblera plus naturel. Pour le moment, l'idée est de se ramener à des limites remarquables, quitte à contraindre un peu notre expression en lui ajoutant et retranchant des termes.
   - Étude d'une asymptote en $-\infty$.
     On refait un peu la même chose. La limite de $\frac{f(x)}{x}$ se fait de même, à part qu'il ressort un signe $-$ du quotient $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.
     On a alors, pour tout $x < -2$:
     $$\begin{aligned} f(x) + x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} + x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{x(x+2)} + x\right) - x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1), \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{2x}{\sqrt{x(x+2)} - x} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-2}{1+1} - 1 = -2, \end{aligned}$$
     la dernière égalité provenant de la simplification par $-x = |x| = \sqrt{x^2}$.
     Ainsi, $\boxed{\text{la droite } (D') :\ y = -x-2 \text{ est asymptote à la courbe en } -\infty.}$

5. On calcule le signe de $f(x) - (x+2)$, en utilisant l'inégalité de convexité classique pour l'exponentielle :
   $$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f(x) - (x+2) &= \sqrt{x+2} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x} - \sqrt{x+2}\right) \\ &\geqslant \sqrt{x+2} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} - \sqrt{x+2}\right) = \sqrt{x+2} \cdot \frac{x+1-\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$
   Or, $(x+1)^2 - x(x+2) = 1 > 0$, donc
   $$\forall x > 0, \quad f(x) - (x+2) > 0.$$
   La courbe est donc $\boxed{\text{au-dessus de son asymptote sur }]0, +\infty[.}$

6. De même :

$$\begin{aligned}\forall x < -2, \quad f(x) + (x+2) &= \sqrt{-(x+2)}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{-x} + \sqrt{-(x+2)}\right)\\ &\geqslant \sqrt{-(x+2)}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{-x} - \sqrt{-(x+2)}\right)\\ &= \sqrt{-(x+2)}\cdot\frac{x+1-\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{-x}} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, f est aussi au-dessus de son asymptote en $-\infty$ sur $]-\infty,-2[$.

7. On étudie la concavité de f en calculant la dérivée seconde :

$$\forall x \neq -2, 0, \quad f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2(x+2)}\right)^2 f(x) + \frac{2x^3(x+2) - (3x^2+4x)(x^2-2)}{(x^2(x+2))^2} f(x).$$

Après simplifications, on trouve :

$$\forall x \neq -2, 0, \quad f''(x) = \frac{2(x^2+4x+2)f(x)}{x^4(1+x)^2}.$$

Ainsi, le signe de $f''(x)$ est donné par celui de x^2+4x+2, strictement négatif sur $]-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}[\backslash\{-2\}$, et positif ou nul ailleurs.

Ainsi, f est :

- convexe sur $]-\infty,-2-\sqrt{2}[$,
- concave sur $]-2-\sqrt{2},-2[$
- convexe sur $]-2,-2+\sqrt{2}[$,
- concave sur $]-2+\sqrt{2},0[$
- concave sur $]0,+\infty[$.

On a deux points d'inflexion, en $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$. Les pentes des tangentes en ces points ont une expression assez peu intéressante, et toute personne saine d'esprit passe ce calcul...

8. On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle R_n (donc un quotient de deux polynômes) tel que pour tout $x \neq -2, 0$, on ait :

$$f^{(n)}(x) = R_n(x)f(x).$$

L'initialisation est évidente pour $n=0$, et les calculs précédents montrent que notre conjecture est vraie pour $n=1$ (ce qu'on utilisera dans le calcul suivant) et $n=2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que pour tout $x \neq 0,-2$, on a $f^{(n)}(x) = R_n(x)f(x)$. Alors,

$$f^{(n+1)}(x) = R_n'(x)f(x) + R_n(x)f'(x) = (R_n'(x) + R_n(x)R_1(x))f(x).$$

En posant $R_{n+1} = R_n' + R_nR_1$, on obtient bien ce qu'on veut (il s'agit bien d'une fraction rationnelle).

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = R_nf$, sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$.

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable à gauche en 0 et $f_g^{(n)}(0) = 0$.

Pour $n=0$, cela provient de la définition du prolongement.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est n fois dérivable à gauche en 0 et que $f_g^{(n)}(0) = 0$. On forme alors le taux d'accroissement (à gauche en 0) de la dérivée n-ième à gauche (égale à la dérivée n-ième lorsque $x \neq 0$). Ainsi, pour $-2 < h < 0$:

$$\frac{f_g^{(n)}(h) - f_g^{(n)}(0)}{h} = \frac{R_n(h)}{h}\sqrt{|h(h+2)|}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}.$$

Comme dans les calculs de limite précédents, le comportement de l'exponentielle est plus fort que celui de la fraction rationnelle (en particulier du pôle 0), donc ce taux d'accroissement tend vers 0 lorsque h tend vers 0^-.

Ainsi, f est $n+1$ fois dérivable à gauche, et $f_g^{(n+1)}(0) = 0$

On a bien montré que f est infiniment fois dérivable à gauche en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_g^{(n)}(0) = 0$.

9. Sans le tracé des tangentes et points d'inflexion, on obtient la courbe de la figure **??**.

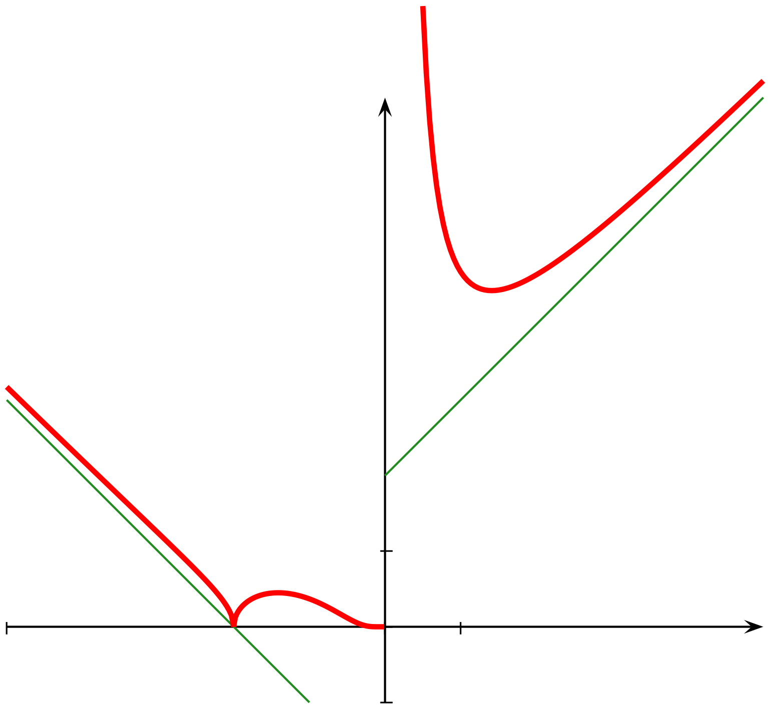

Figure 1 – Graphe de Φ

Correction du problème 1 – Discontinuités des fonctions réglées

Partie I – Une fonction réglée n'est pas trop discontinue

1. La fonction $f_{|I}$ admettant des limites à gauche et à droite en tout point, elle n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $f(a) \neq f(a^-)$, donc si et seulement si $|f(a) - f(a^-)| > 0$, ce qui equivaut à dire, du fait de la convergence vers 0 de $\frac{1}{n}$, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(a) - f(a^-)| > \dfrac{1}{n}$, donc que $f \in D_{\frac{1}{n}}$.

   Ainsi, f n'est pas continue à gauche en a si et seulement si $\boxed{a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}.}$

2. Puisque D_ε est infini, on peut trouver une suite (a_n) d'éléments distincts, qu'on peut construire par exemple par récurrence (si $a_0, \dots, a_n$ sont construits convenablement, on n'est pas arrivé à épuisement des termes de D_ε et on pourra choisir a_{n+1} distinct des précédents).

   Puisque les a_n sont supposés dans un premier temps être dans un intervalle fermé borné I, quitte à en extraire une suite convergente à l'aide du théoèrme de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer que $\boxed{(a_n) \text{ converge}}$. Soit a sa limite.

3. La suite (a_n) possède au plus un terme égal à a (car ses éléments sont deux à deux distincts). Ainsi, tous ses autres termes (en nombre infini) vérifient $a_n < a$ ou $a_n > a$.

   Il y a donc nécessairement une $\boxed{\text{infinité de termes vérifiant la même inégalité}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n \in D_\varepsilon$, donc $|f(a_n) - f(a_n^-)| \geqslant \varepsilon$. Par définition de la limite à gauche, il existe $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, par inégalité triangulaire :

   $$\boxed{|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant |f(a_n) - f(a_n^-)| - |f(b_n) - f(a_n^-)| = \frac{\varepsilon}{2}}.$$

   (b) Lorsque n tend vers $+\infty$, $a_n \to a$, et par théorème d'encadrement, on a aussi $b_n \to a$. Ces deux convergences se font par valeurs supérieures, donc $f(a_n) \to f(a^+)$ et $f(b_n) \to f(a^+)$. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue dans la question précédente, il vient donc :

   $$0 = |f(a^+) - f(a^+)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où une $\boxed{\text{contradiction}}$. Ainsi, cette situation est impossible.

5. Supposons maintenant qu'il existe une infinité de termes a_n tels que $a_n < a$. Comme ci-dessus, quitte à extraire, on peut supposer que cette inégalité est satisfaite pour tous les termes de la suite. On construit comme ci-dessus une suite (b_n), vérifiant cette fois $a_n - (a - a_n) \leqslant b_n \leqslant a_n$ et telle que $|f(b_n) - f(a_n^-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (cette inégalité impose de laisser les b_n à gauche des a_n, ce qui complique un peu les choses ici).

   La suite du raisonnement est la même : dans un premier temps, l'inégalité triangulaire amène
$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   De plus, puisque $a_n \to a$, le théorème d'encadrement assure que $b_n \to a$, et comme ci-dessus, on obtient une contradiction en passant l'inégalité précédente à la limite (on obtient cette fois à gauche $|f(a^-) - f(a^-)|$). Ainsi, ce cas est aussi $\boxed{\text{contradictoire}}$.

6. Les deux seuls cas possibles amenant des contradictions, en en déduit que $\boxed{D_\varepsilon \text{ est fini}}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}$ est au plus dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles finis, donc l'ensemble des points de discontinuité à gauche est au plus dénombrable d'après la question 1.

   On fait de même pour l'ensemble des points de discontinuité à droite. L'ensemble des points de discontinuité de f est alors l'union des deux, donc encore au plus dénombrable.

   On se débarrasse ensuite de la contrainte sur I en remarquant que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée f sur $\mathbb{R}$, est l'union des ensembles de points de discontinuité sur $[-n, n]$. Ainsi, il s'agit encore d'une union dénombrables d'ensembles au plus dénombrables.

   Donc $\boxed{f \text{ admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités}}$.

Partie II – Une fonction réglée d'ensemble de discontinuité au plus dénombrable imposé

1. Si A est fini, il suffit de prendre $\mathbb{1}_A$, dont les limites à gauche et à droite en tous points sont nulles (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe ε tel que $B(x, \varepsilon)$ ne contienne aucun point de A, sauf éventuellement x lui-même, du fait que A est fini ; il suffit de prendre $\varepsilon = \min_{a\in A\setminus\{x\}}(|x - a|)$) De plus on a clairement la continuité en tout $x \notin A$, et une discontinuité en $x \in A$,

   Ainsi, il s'agit d'une $\boxed{\text{fonction réglée dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement } A}$.

2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{]a_n,+\infty[}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les termes $f_n(x)$ sont tous positifs ou nuls, et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
   Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on déduit du TCSTP que $\boxed{\sum f_n(x) \text{ converge}}$.

   (b) Les fonctions f_n sont toutes croissantes de façon évidente. Soit alors $x \leqslant y$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n(x) \leqslant f_n(y).$$
   Ainsi, en sommant entre 0 et $+\infty$, la convergence étant assurée par la question précédente, il vient
$$f(x) \leqslant f(y),$$
   donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$.

   (c) Soit $x < y$.
$$f(y) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)).$$
   Or, par définition, $f_n(y) - f_n(x) = 0$ si $a_n \leqslant x < y$ (les deux termes sont nuls), ou si $x < y < a_n$ (les deux termes sont égaux à 1), et vaut $\frac{1}{2^n}$ sinon, c'est-à-dire si $x < a_n \leqslant y$.

   Ainsi, on a bien
$$\boxed{f(y) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n(y) - f_n(x)) = \sum_{n\mid x<a_n\leqslant y} \frac{1}{2^n}}.$$

(d)
- Soit $a \in A$, et n_0 tel que $a_{n_0} = a$. On a alors, pour tout $x < a$,

$$f(a) - f(x) = \sum_{n | x < a_n \leqslant a} \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^{n_0}},$$

  Cela contredit l'existence d'une limite à gauche en a (en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0+1}}$). Ainsi, f est discontinue en A.
- Soit $a \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

  Comme $\{a_n, n < N\}$ est un ensemble fini ne contenant pas a, il existe η tel que $B(a, \eta)$ ne contienne aucun a_n, $n < N$. Soit alors $x \in]a - \eta, a[$. On a alors (en utilisant la croissance pour la minoration) :

$$0 \leqslant f(a) - f(x) = \sum_{n | x < a_n \leqslant a} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

  De même, pour $x \in]a, a + \eta[$,

$$0 \leqslant f(x) - f(a) = \sum_{n | a < a_n \leqslant x} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f en a.
- Ainsi, $\boxed{\text{les points de discontinuité de } f \text{ forment exactement l'ensemble } A}$.
  De plus, $\boxed{f \text{ est une fonction réglée, car monotone}}$.
  On a bien montré que tout sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée.