

Alexis BRÈS | Léo QUENTIN

L'ORAL DE PHYSIQUE AUX CONCOURS DES ENS ET DE POLYTECHNIQUE

ANNALES CORRIGÉES

- 58 problèmes sur les grands thèmes du programme
- Une résolution détaillée, guidée et pédagogique
- 10 recommandations pour aborder l'oral
- Des méthodes d'analyse d'un problème en physique

Préface de Marie-Noëlle Sanz

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier +3

© Dunod, 2019

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-079523-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Léo Quentin fut mon étudiant il y a quelques années en PC* au lycée Saint-Louis. Il a ensuite été pendant plusieurs années interrogateur dans ma classe (« colleur » dans le langage des prépas). C'est avec plaisir que je le vois maintenant, en compagnie d'Alexis Brès, partager son expérience avec un plus large public.

C'est en physiciens qu'ils présentent des sujets d'oral parmi les plus récents posés aux concours d'entrée aux Écoles Normales Supérieures et à l'École Polytechnique, associée à l'E.S.P.C.I pour la filière PC. Ils ont su allier l'analyse physique à un indispensable aspect technique, sans lequel il est impossible de pousser la compréhension des phénomènes étudiés à un niveau satisfaisant .

Un certain nombre de ces exercices a été proposé par Léo Quentin à mes étudiants lors de séances d'oraux blancs ces dernières années. Les conseils qu'il leur a donnés à ce moment-là sur l'attitude à adopter en face d'un problème difficile et d'énoncé parfois succinct ont été précieux.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux meilleurs étudiants de C.P.G.E mais également à tout étudiant intéressé par les Sciences Physiques, ainsi qu'aux candidats à l'Agrégation. La lecture active de ce livre leur donnera sans aucun doute un complément de formation précieux qui les guidera vers la réussite.

Marie-Noëlle Sanz
Professeur de Physique en PC* au lycée Saint-Louis (Paris)

Table des matières

Préface	2
Table des matières	3
Avant-propos	5
Introduction : comment traiter un problème de physique ?	7
1 Mécanique du point	9
1.1 : Le pendule dans tous ses états - X PC	9
1.2 : Une fourmi sur un élastique - X PC	14
1.3 : Cordes de piano couplées - Ulm PC	15
1.4 : Dipôle dans un plan - X MP	20
1.5 : Force centrale et mouvement circulaire excentré - X MP	23
1.6 : Force centrale répulsive - X MP	25
1.7 : Température du Soleil - X MP	27
1.8 : Autour d'une trajectoire circulaire - X MP	29
1.9 : Mouvement brownien et équation de Langevin - Ulm MP	34
2 Mécanique du solide	40
2.1 : Corde sur un plan incliné - X MP	40
2.2 : Cylindre lesté - Lyon/Cachan PC	42
2.3 : Cylindres en contact - X PC	45
2.4 : Comment retenir un bateau - X PC	51
2.5 : Drôle de corde - Ulm PC	54
2.6 : Écoulement d'un milieu granulaire - X MP	56
2.7 : Casse d'une cheminée - X MP	57
2.8 : Rotation synchrone de la Lune - Ulm PC	60
3 Ondes mécaniques	69
3.1 : Corde vibrante verticale - X MP - Lyon/Cachan PC	69
3.2 : Membrane vibrante - X PC	73
3.3 : Cristal diatomique - Ulm MP	76
3.4 : Le claquement du fouet - Ulm PC	80
4 Diffusion	84
4.1 : Taille critique d'un mammifère - Lyon/Cachan MP	84
4.2 : Gel d'un lac - X MP	87
4.3 : Une tente qui chauffe - X MP	90

4.4 : Barre en combustion - Ulm PC	94
4.5 : Caléfaction 1 - X MP	98
4.6 : Conductivité thermique d'un vide imparfait - Ulm MP	102
4.7 : Équation de la diffusion en dimension quelconque - Ulm MP	107
5 Mécanique des fluides	111
5.1 : Écoulement autour d'une sphère - X PC	111
5.2 : Cavitation - Ulm PC	114
5.3 : Le son des bulles - Ulm PC	118
5.4 : Réflexion d'une onde sonore sur un fluide en déplacement - X PC	126
5.5 : Caléfaction 2 - Ulm PC	131
5.6 : Dérive des icebergs - Ulm PC	136
5.7 : Ondes de surface - X PC	140
5.8 : Sillage derrière un bateau - Ulm PC	145
5.9 : Instabilité de Rayleigh-Taylor - Ulm PC	148
5.10 : Convection thermique - X PC	150
6 Thermodynamique	157
6.1 : Étoile à neutrons et statique des fluides - X MP	157
6.2 : Échange entre deux réservoirs - X PC	160
6.3 : Un drôle de frigo... - Ulm PC	164
6.4 : Glaçon sur un plan incliné - Lyon/Cachan MP	167
6.5 : Entendre la température - Ulm PC	170
7 Électromagnétisme	176
7.1 : Piège de Penning - Lyon/Cachan MP	176
7.2 : Condensateur électrolytique - Lyon/Cachan PC	178
7.3 : Diode à vide - Ulm PC	181
7.4 : Sphère chargée dans l'air - X PC	185
7.5 : Potentiel moyen sur une sphère - X PC	187
7.6 : Magnétorésistance - Ulm MP	189
7.7 : Échanges avec le champ électromagnétique - Ulm MP	194
7.8 : Ondes gravitationnelles - Ulm PC/MP	201
7.9 : Ondes émises par un pulsar - X PC	205
8 Optique	208
8.1 : Arc-en-ciel - Lyon/Cachan MP	208
8.2 : Laser autour de la Terre - X PC	210
8.3 : Cavit�� optique - Ulm PC	212
9 M��canique quantique	218
9.1 : Cristal p��riodique �� une dimension - X MP	218
9.2 : Oscillateur harmonique - X MP	220
9.3 : Puits quantique variable - Ulm MP	226
Annexe - R��solution des ��quations diff��rentielles courantes	233

Avant-propos

Cet ouvrage regroupe une sélection d'exercices de physique posés aux oraux des concours d'entrée des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique. Tous les exercices sélectionnés sont compatibles avec le changement de programme de 2013, et reflètent dans la mesure du possible la diversité des thèmes abordés durant ces oraux.

Les motivations qui nous ont amenés à rédiger cet ouvrage sont multiples :

- nous avons d'abord voulu démystifier le déroulement d'un oral aussi sélectif. Très souvent, la rumeur propage des sujets impossibles, souvent minimalistes, résumés en une phrase courte, devant un examinateur qui n'interagit que peu ou pas avec le candidat. Notre but est de montrer qu'un sujet d'oral est au contraire l'occasion d'une discussion réelle entre le candidat et l'examinateur, qui cherche avant tout à éprouver la robustesse des connaissances de celui-ci, mais également à tester son inventivité et sa capacité à réagir face à l'inconnu. Les situations proposées lors de ces oraux sont parfois éloignées de situations de cours « classiques », et l'examinateur attend alors du candidat qu'il fasse preuve de discernement. Savoir quand il doit trouver un chemin original, ou au contraire quand il peut mimer un raisonnement déjà vu. Par ailleurs, le candidat ne devra jamais perdre de vue que, bien que déstabilisants, les sujets ne sont jamais rigoureusement hors de portée : la physique nécessaire à leur résolution est bien celle attendue d'un élève sortant de Maths spé. Si des notions hors programmes doivent servir, elles seront amenées par l'examinateur.
- il y a ensuite la volonté de rendre ces oraux si spécifiques accessibles à tous. En effet, nous regrettons que trop d'élèves de CPGE ne puissent pas bénéficier d'annales accumulées par d'anciens membres de leur lycée. La démocratisation de l'accès à ces sujets nous semble indispensable à l'égalité des chances aux oraux de ces grandes écoles. En proposer des corrigés permet, selon nous, d'exhiber un certain nombre de techniques et de raisonnements, là encore souvent peu popularisés au sein de toutes les classes préparatoires.
- enfin, au-delà de la difficulté conceptuelle de ces exercices, nous pensons que la technicité qu'ils offrent peut permettre à un étudiant de synthétiser les connaissances et réflexes mathématiques qu'il est nécessaire d'acquérir face à un problème de physique. Ce qui fait la force d'un candidat face à un problème, au-delà des connaissances qu'il a pu acquérir, c'est également sa capacité à « tenter des choses » menant à la résolution. Séparer les variables d'espace et de temps, se placer dans un référentiel adapté, faire un bilan sur un sous-système plus simple, utiliser des théorèmes énergétiques... Ces techniques peuvent servir face à tout type de problème, et les exercices originaux présents dans cet ouvrage permettent de se rompre à leur utilisation.

On trouvera en première partie une discussion sur l'attitude et les réflexes à avoir lors de la résolution d'un problème original. Plus qu'un guide de conduite, ces quelques recommandations permettent d'embrasser la physique du problème sans nécessairement se jeter à corps perdu dans la modélisation et les calculs.

Les exercices ont été regroupés selon les grands domaines de la physique au programme des classes préparatoires. Pour certains, une telle catégorisation est illusoire, le lecteur averti s'en rendra bien compte. À chaque fois, à la suite de l'énoncé du problème, nous proposons une courte discussion introductive. Celle-ci est ensuite suivie d'une liste d'indications que le lecteur pourra choisir de suivre ou non, selon son degré de pugnacité face à l'exercice. Un corrigé suivant ces indications est ensuite proposé. Il va sans dire que l'originalité du déroulement des oraux des ENS et de l'X (une heure, sans préparation) incite à une discussion entre candidat et examinateur que notre corrigé ne saurait reproduire. Au maximum, nous avons essayé d'indiquer quand nous supposons qu'à tel ou tel moment, l'examineur interviendrait pour une piste, une formule ou un conseil.

Enfin, nous donnons en annexe un « guide pratique » de résolution d'équations différentielles, qui permet parfois d'aller au-delà des formules données par le cours de mathématiques.

Les auteurs

Introduction : comment traiter un problème de physique ?

Si l'énoncé des problèmes d'oraux des grandes écoles s'est tempéré avec le temps, il n'en reste pas moins qu'un candidat n'est jamais à l'abri d'une tournure peu familière et trop déroutante.

Nous proposons ici quelques grandes lignes devant guider, sinon la résolution, en tout cas l'analyse du problème. Ces dix commandements devront se rappeler à l'esprit du candidat qui souhaite progresser raisonnablement sur l'approche de l'exercice à résoudre.

1. Ne pas paniquer.

C'est bien sûr la condition *sine qua non*. Bloquer à la simple pensée du « je n'y arriverai jamais » est contre-productive. Un problème de physique peut être plus ou moins complexe et demande à être morcelé. Quoi qu'il en soit, un dialogue même partiel doit s'engager avec l'examineur.

2. Ne pas se précipiter dans la résolution.

Il ne sert rien de se jeter à corps perdu dans les équations et les modèles sans avoir réfléchi. Dans cet ouvrage, nous proposons systématiquement après l'énoncé du problème un court paragraphe qui résume la question : « Que se passe-t-il ? ».

3. Raisonner en ordres de grandeurs.

C'est la qualité première du physicien. Lorsqu'on aborde une question de physique, il est bon d'avoir en tête les ordres de grandeur qu'on va manipuler, et ceux auxquels le résultat doit se conformer. Ainsi, comme à l'écrit, il faut toujours être critique vis-à-vis de ses résultats, et être conscient, par exemple, que trouver un diamètre de cheveu en kilomètres n'est pas acceptable.

4. Faire de l'analyse dimensionnelle.

Quand on sèche complètement sur un problème, l'idée la plus simple consiste à faire un peu d'analyse dimensionnelle. Si on demande par exemple de caractériser les ondes sonores se propageant dans un ballon de basket qui rebondit sur le sol, le problème général est très compliqué. Par contre, je peux aisément exhiber une longueur caractéristique $L \sim 10$ cm et utiliser la vitesse du son dans l'air $c \approx 340$ m/s pour obtenir une fréquence $f \approx 3,4$ kHz, donc un son assez aigu qui correspond à peu près à la réalité. Ce n'est qu'une étape, mais c'est déjà ça !

5. Faire des graphes, des schémas.

Après deux ans passés à faire de la physique, cela peut paraître aberrant de rappeler cette règle. Mais notre expérience des écrits de concours nous l'a confirmé : les candidats font encore trop peu usage de schémas et de dessins pour expliciter leur propos. Dans la majorité des

cas, cela résulte en des erreurs de signe, des confusions dans les notations, des problèmes de projection des vecteurs...

Les graphes permettent également de se représenter rapidement le comportement d'une fonction, ce qui permet de trancher sur la direction à prendre dans la suite de la résolution.

6. Rationnaliser la résolution.

On ne demande pas à un élève sortant de Maths spé d'utiliser des outils de fin de Licence ou d'entamer une résolution qui nécessiterait plusieurs heures ! Toujours penser que les exercices ont été conçus de manière à être résolus dans un temps raisonnable, avec les connaissances du programme. Donc, quand on modélise un phénomène, il faut se dire « est-il pensable que je traite cette situation avec ce que je connais/sans y prendre trois heures ? ». C'est à ce moment qu'intervient généralement l'analyse des symétries/invariances du problème, qu'on va la plupart du temps « forcer » pour simplifier la résolution : il est bien plus simple d'établir des équations différentielles quand les fonctions ne dépendent que d'une ou deux coordonnées !

7. Simplifier le modèle, mais pas trop.

C'est le pendant de la remarque précédente. S'il est tentant d'utiliser des hypothèses minimales pour obtenir une résolution relativement simple, on peut assez vite passer à coté de la physique du problème en le simplifiant trop. Par exemple, linéariser à outrance des équations peut faire passer à coté de la richesse de la physique non linéaire. Ou encore, négliger la tension de surface dans des problèmes impliquant des interfaces de fluides...

8. Se rapprocher de ce qui est connu.

On le verra dans cet ouvrage : souvent, il est possible de rapprocher un phénomène invoqué dans un problème d'une situation de cours connue. De ce point de vue, le candidat doit être irréprochable vis-à-vis de sa connaissance et de son exécution des connaissances qu'il a acquies pendant deux ans.

À l'inverse, il est important de ne pas chercher à tout prix à coller un exercice de cours sur une situation nouvelle. Les examinateurs de l'X et de l'ENS (avec lesquels nous avons discuté pendant la rédaction de cet ouvrage) se montrent très intéressés par la capacité des candidats à se rendre compte qu'un raisonnement est nouveau, et à construire eux-mêmes une démarche scientifique de résolution.

9. Refuser la technicité au prix de la physique.

Le but d'un oral de physique n'est pas le calcul d'une intégrale particulièrement compliquée, ni de redémontrer la formule du rotationnel en coordonnées sphériques. Si l'examen d'un point du modèle amène à des développements mathématiques sans fin, c'est probablement qu'on a pris une mauvaise direction.

10. Rester fidèle à la base.

Ce n'est pas parce qu'on passe un oral d'Ulm qu'on ne définit par les référentiels en mécanique, ni parce qu'on est à l'oral de l'X qu'on n'indique pas les systèmes étudiés en thermodynamique. La rigueur acquise dans le cours de Physique doit se retrouver dans votre analyse du problème. L'intérêt est double : gagner la confiance de l'examinateur, qui sait qu'il a affaire à un candidat sérieux ; et en posant clairement les bases d'une résolution de problème, on s'assure de ne pas tomber dans des pièges évidents par la suite (on pensera notamment aux forces qu'on peut facilement éliminer en définissant judicieusement les systèmes en mécanique).

Mécanique du point

Exercice 1.1 : Le pendule dans tous ses états - X PC

On considère un pendule simple, c'est-à-dire une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l et de masse négligeable.

1. Redémontrer rapidement l'équation du mouvement dans le cas d'oscillations autour du point d'accroche.
2. On fait à présent tourner le pendule autour de l'axe vertical avec un angle constant. Discuter de la relation entre la vitesse de rotation et l'angle que fait le pendule avec l'axe.
3. On considère finalement la composition des deux mouvements, c'est-à-dire que le pendule tourne autour de l'axe vertical en oscillant. Trouver deux constantes du mouvement, une énergie potentielle effective, une équation adimensionnée du mouvement, et finalement les positions accessibles.
4. (Complément) Que se passe-t-il autour de la position d'équilibre déterminée en 2 ? Montrer en particulier que le pendule précesse autour de son axe de rotation.

Cet exercice propose l'étude du pendule, système bien connu en CPGE. Nous allons voir qu'en autorisant un nouveau degré de liberté, une dynamique riche apparaît. Afin de fixer les notations, nous considérons un axe vertical z descendant. Le pendule est fixé à un point O , et on se place dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

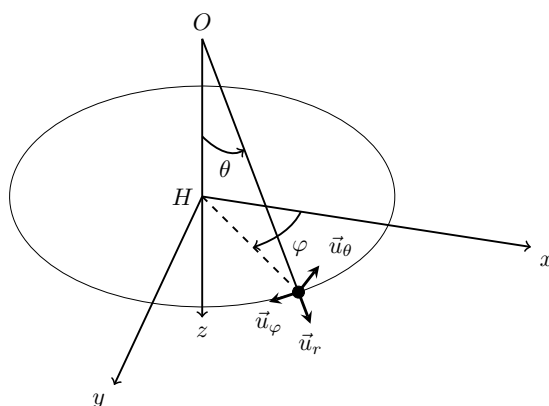


FIGURE 1.1. Pendule tournant. Les angles sont orientés de telle sorte que le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ soit direct.

1. Commençons par le cas du pendule simple, c'est-à-dire que l'on considère φ constant. Une méthode particulièrement efficace pour retrouver l'équation du pendule est d'utiliser un raisonnement énergétique. Les forces qui s'appliquent à la masse sont la tension de

la corde $\vec{T} = T\vec{u}_r$ et le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$. La force de tension étant toujours perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -mgl \cos \theta + \text{cste}$. L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2$, et on en déduit l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (1)$$

Si l'on dérive cette relation par rapport au temps et que l'on simplifie par $\dot{\theta}$, on obtient l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (2)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

2. Considérons à présent la situation où θ est une constante θ_0 , mais où le pendule tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω constante. On parle alors de pendule cylindrique. Notre but ici est de relier Ω et θ_0 . Le plus simple est de se placer dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\Omega\vec{u}_z$. Aux forces précédentes vient s'ajouter la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2\overline{HM}$, où H est le projeté du point M sur l'axe z . La force de Coriolis est nulle car il n'y a pas de mouvement relatif dans le référentiel tournant. La condition d'équilibre dans ce référentiel s'écrit

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + m\Omega^2\overline{HM}, \quad (3)$$

et en projection selon \vec{u}_θ , on obtient

$$mg \sin \theta_0 = m\Omega^2 HM \cos \theta_0 = m\Omega^2 l \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (4)$$

Ainsi on trouve les positions d'équilibre $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$, qui correspondent au cas $\sin \theta_0 = 0$, et θ_0 tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{l\Omega^2}. \quad (5)$$

Cette solution n'est possible que si $\Omega \geq \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Le lecteur intéressé pourra prouver, avec les équations du mouvement détaillées plus loin, que la position $\theta_0 = 0$ est stable pour $\Omega < \Omega_c$, tandis que la position $\theta_0 = \pi$ est toujours instable. Ensuite, pour $\Omega \geq \Omega_c$, la position $\theta_0 = 0$ devient instable, tandis que les positions déterminées par (5) deviennent stables. Physiquement, cela signifie qu'en dessous de cette vitesse angulaire critique, le pendule va rester parfaitement vertical, puis il va se mettre à tourner avec un angle $\theta_0 = \pm \arccos(\frac{g}{\Omega^2 l})$. Parmi les deux positions stables possibles a priori, le système va en choisir une en particulier, on parle alors de brisure spontanée de symétrie. La situation est représentée dans la figure 1.2 suivante. On note finalement que θ_0 tend vers $\pi/2$ quand $\Omega \gg \Omega_c$, ce qui est conforme à l'intuition.

3. Considérons maintenant la situation où les deux mouvements sont présents en même temps, c'est-à-dire que le pendule tourne autour de son axe tout en oscillant. On appelle cette situation le pendule sphérique car tout se passe comme pour le mouvement d'une particule, astreinte à se déplacer sur une sphère de rayon l dans le champ de gravité terrestre. Vu ces conditions, l'usage des coordonnées sphériques semble donc particulièrement justifié. De plus, il serait tentant de se placer dans le « référentiel tournant » comme précédemment. Toutefois, la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe ne peut plus être considérée comme constante, et le calcul des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis est possible mais particulièrement lourd. Ainsi, nous nous plaçons dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

L'usage des coordonnées sphériques, aussi justifié soit il dans ce cas, rend l'écriture de l'accélération de la masse, et donc du principe fondamental de la dynamique fastidieuse. Comme indiqué dans l'énoncé, c'est plutôt vers les quantités conservées que nous allons nous tourner. Les forces en présence sont les mêmes que pour le pendule simple, la tension du fil $\vec{T} = T\vec{u}_r$ et le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$. Ainsi, comme précédemment, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie potentielle de pesanteur est toujours $E_p = -mgl \cos \theta$. Reste à exprimer

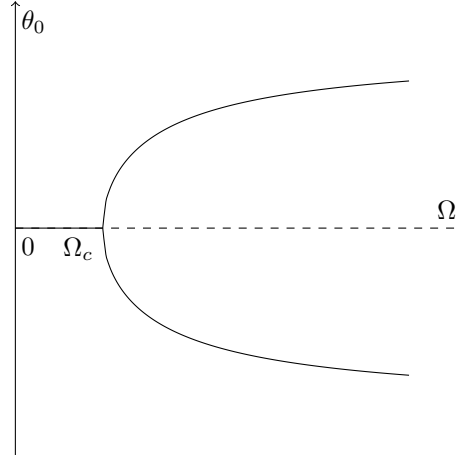


FIGURE 1.2. Ensemble des positions accessibles stables pour le pendule. Pour $\Omega \geq \Omega_c$, deux positions équivalentes sont possibles.

l'énergie cinétique. Une méthode rapide pour retrouver l'expression de la vitesse en sphérique est d'écrire l'expression générale d'un déplacement infinitésimal

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u}_r + r d\theta\overrightarrow{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\overrightarrow{u}_\varphi, \quad (6)$$

ainsi, le vecteur vitesse s'exprime $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$. Dans la situation étudiée, la vitesse est $\overrightarrow{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + l \sin \theta \dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$ et l'énergie cinétique s'exprime $E_c = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta. \quad (7)$$

Concernant la deuxième quantité conservée, il semble naturel de s'intéresser au moment cinétique par rapport au point O . Ce dernier s'exprime

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} = m \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ l \sin \theta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -l^2 \sin \theta \dot{\varphi} \\ l^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Le moment de la force \overrightarrow{T} est nul car cette dernière est dirigée selon \overrightarrow{OM} . En revanche, le moment du poids va avoir une composante non nulle selon $\overrightarrow{u}_\varphi$. Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique, on sait que la composante selon $\overrightarrow{u}_\theta$ de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$ est conservée, ce qui donne $l^2 \sin \theta \dot{\varphi} = \text{cst.}$ Afin d'obtenir une équation scalaire, on peut projeter cette quantité sur \overrightarrow{u}_z , et on obtient alors la conservation du moment cinétique selon z , que l'on note \mathcal{M}_z , sous la forme

$$ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \mathcal{M}_z. \quad (9)$$

Avec ces deux quantités conservées, on peut obtenir une équation du mouvement. Commençons par dériver par rapport au temps la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$ml^2(\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \dot{\varphi}) + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0. \quad (10)$$

Habituellement, les $\dot{\theta}$ se simplifient et on peut obtenir l'équation du mouvement directement. Ici, nous allons dans un premier temps devoir éliminer $\dot{\varphi}$. Pour cela, multiplions l'équation (9)

par $\dot{\varphi}$, et dérivons l'expression. On obtient,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = A\dot{\varphi} &\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \dot{\theta} + 2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \dot{\varphi} = A\ddot{\varphi} = \sin^2 \theta \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \\ &\Rightarrow \sin^2 \theta \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (11)$$

où l'on a noté $A = \frac{\mathcal{M}_z}{ml^2}$. Remplaçant dans l'équation (10), on trouve alors l'équation du mouvement

$$ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - mgl \sin \theta, \quad (12)$$

que l'on peut réécrire sous une forme plus canonique

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2}. \quad (13)$$

Il est aisé de constater que l'on retrouve bien les expressions précédentes si $\dot{\theta} = 0$ ou si $\dot{\varphi} = 0$.

Afin d'étudier l'ensemble des positions accessibles, l'énoncé nous suggère de définir une énergie potentielle effective du mouvement. Pour cela, l'idée est la même que dans les problèmes à force centrale. D'après la conservation de la composante selon z du moment cinétique, on a

$$\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = \frac{\mathcal{M}_z^2}{m^2 l^4 \sin^2 \theta}, \quad (14)$$

donc en remplaçant dans l'expression de l'énergie mécanique, on a

$$Em = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\mathcal{M}_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta, \quad (15)$$

et l'on peut donc définir une énergie potentielle effective (ne dépendant que de θ) sous la forme

$$Ep_{\text{eff}}(\theta) = \frac{\mathcal{M}_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \quad (16)$$

Comme pour un mouvement à force centrale, les positions accessibles seront celles telles que $Ep_{\text{eff}} \leq E_m$. Vu la forme de l'énergie potentielle, représentée dans la figure 1.3, ces positions seront comprises entre deux angles θ_1 et θ_2 . Ainsi, le pendule va osciller entre ces deux angles, tout en tournant autour de son axe. Il est possible d'avoir une trajectoire circulaire à θ_0 qui

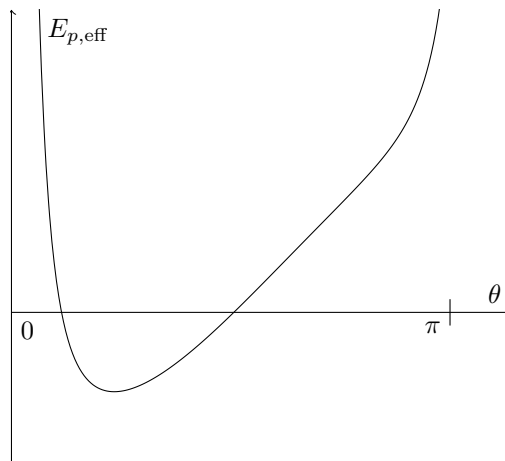


FIGURE 1.3. Énergie potentielle effective.

minimise l'énergie potentielle effective. Dans ce cas, la conservation de la composante selon z du moment cinétique s'écrit $\dot{\varphi} = \mathcal{M}_z / \sin \theta_0 = \Omega$, où Ω est une constante. Un minimum de

l'énergie potentielle annule alors la dérivée de cette dernière, et on retombe sur l'équation de la partie précédente

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{l\Omega^2}. \quad (17)$$

4. Finalement, on peut s'intéresser à ce qu'il se passe si on écarte légèrement le pendule de sa position d'équilibre, en supposant que $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, où $\delta\theta \ll \theta_0$. De la même manière, notons $\dot{\varphi} = \Omega + \delta\dot{\varphi}$. Afin de simplifier les calculs, nous allons utiliser une équation ne comportant que θ , en définissant encore une fois $A = \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ de telle sorte que l'équation du mouvement (13) s'écrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta - A^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0. \quad (18)$$

À l'ordre zéro, l'angle θ_0 vérifie l'équation

$$\omega_0^2 \sin \theta_0 - A^2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} = 0, \quad (19)$$

et l'équation du mouvement, développée à l'ordre un en utilisant $\sin \delta\theta \simeq \delta\theta$ et $\cos \delta\theta \simeq 1$, donne

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\theta} + \omega_0^2 (\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \cos \theta_0 \sin \delta\theta) - A^2 \frac{(\cos \theta_0 \cos \delta\theta - \sin \theta_0 \sin \delta\theta)}{(\sin \theta_0 \cos \delta\theta + \cos \theta_0 \sin \delta\theta)^3} &= 0 \\ \Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \omega_0^2 (\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \delta\theta) - \frac{A^2}{\sin^3 \theta_0} (\cos \theta_0 - \theta_0 \delta\theta) \left(1 - 3 \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \delta\theta \right) &= 0 \\ \Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta_0 + \omega_0^2 \cos \theta_0 \delta\theta - A^2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} - \frac{A^2}{\sin^3 \theta_0} \left(-\sin \theta_0 - \frac{3 \cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} \right) \delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Les termes d'ordre zéro s'annulent alors, et en utilisant $\Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{\cos \theta_0}$ et l'équation à l'ordre zéro pour éliminer A^2 , on obtient

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\theta} + \delta\theta \left(\omega_0^2 \cos \theta_0 + \omega_0^2 \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \left(\sin \theta_0 + \frac{3 \cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0} \right) \right) &= 0, \\ \Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \delta\theta (\Omega^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 + 3 \cos^2 \theta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

et finalement

$$\boxed{\delta\ddot{\theta} + \delta\theta \Omega^2 (1 + 3 \cos^2 \theta_0) = 0}. \quad (22)$$

Ainsi, on peut donner l'évolution au cours du temps de θ sous la forme

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta_0 \cos(\tilde{\Omega}t), \quad (23)$$

où $\tilde{\Omega} = \Omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_0}$, et donc θ à toujours un mouvement d'oscillation harmonique au premier ordre. Il est alors intéressant de regarder ce qu'il se passe pour φ . Lorsque θ passe d'un maximum à un minimum, φ varie environ de

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_0}}, \quad (24)$$

ce qui signifie que la direction où est atteinte le maximum va se décaler entre chaque oscillation pour θ , et on dit que le pendule précesse. Regardons les cas limites. Si θ_0 est proche de 0, alors $\Delta\varphi$ est légèrement plus grand que $\pi/2$, ce qui signifie que le pendule va précesser dans le même sens que la rotation autour de l'axe z . Maintenant si θ_0 est proche de $\pi/2$, alors $\Delta\varphi$ est légèrement inférieur à π , ce qui signifie que la précession est dans le sens opposé à la rotation.

En conclusion, on peut dire énormément de choses sur un système aussi simple que le pendule, même si les calculs peuvent se révéler parfois fastidieux.

Exercice 1.2 : Une fourmi sur un élastique - X PC

Un élastique infiniment extensible, de longueur initiale 1 m, est fixé d'un côté à un support fixe. On tire l'autre extrémité à la vitesse constante de 1 m.s^{-1} . Une fourmi part de l'extrémité fixée de l'élastique, et avance sur l'élastique à la vitesse constante de 1 mm.s^{-1} . La fourmi va-t-elle atteindre le bout de l'élastique ? Si oui, combien de temps va-t-elle mettre ?

Voici un problème qui peut apparaître comme purement mathématique, avec un lien très distant avec le monde physique, un élastique ayant toujours une longueur finie. En conclusion, nous présenterons le lien entre ce problème et un phénomène beaucoup plus physique, l'expansion de l'univers. Au vu de la vitesse de la fourmi comparée à celle de l'extension de l'élastique, il semble impossible que cette dernière puisse atteindre le bout de l'élastique. En fait, nous allons voir que peu importe la vitesse de la fourmi et la vitesse d'extension de l'élastique, si tant est que ces vitesses restent constantes, alors l'insecte atteindra toujours le bord opposé, même si le temps nécessaire peut être colossal.

Essayons d'expliquer qualitativement cette situation *a priori* paradoxale. L'hypothèse cruciale pour obtenir ce résultat est que l'élastique va s'allonger de manière uniforme. Ainsi, lorsque la fourmi a parcouru une certaine portion de l'élastique, l'élongation ne va pas changer la part de l'élastique qui a déjà été parcourue, puisqu'il s'allonge aussi bien devant la fourmi que derrière elle. Ainsi, si l'on raisonne en termes de portion de l'élastique parcouru, la fourmi va toujours pouvoir avancer.

Plus précisément, ce sont en fait les vitesses constantes qui permettent ce résultat. Avant toute mise en équation, on peut facilement se donner une idée de pourquoi la fourmi va pouvoir parcourir n'importe quelle distance. Supposons que le temps soit discret. Alors, la première seconde, la fourmi va parcourir 1 mm sur un élastique de 1 m, soit $1/1000$ de la distance entre les deux bouts de l'élastique, puis la deuxième seconde $1/2000$ de la même manière. Facilement, on voit que la fourmi parcourt $1/(k * 1000)$ de la distance entre les deux extrémités de l'élastique à la seconde k . La proportion de l'élastique parcourue au temps N évolue comme la somme

$$d(k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{1000} \frac{1}{k}, \quad (1)$$

et par divergence de la série harmonique, la fourmi va bien pouvoir atteindre l'autre extrémité. La série harmonique divergeant très « lentement », on voit que le temps nécessaire à la fourmi pour parcourir l'élastique sera très long. Finalement, si la vitesse d'élongation venait à augmenter, alors on ne peut garantir que la fourmi atteigne le bord.

Afin de traiter le cas le plus général possible, nous supposons que l'élastique a initialement une longueur L_0 à $t = 0$, qu'il s'allonge uniformément, et que la vitesse de son extrémité non fixée est v_e , de telle sorte que la longueur totale à l'instant t est $L(t) = L_0 + v_e t$. On suppose de plus que la fourmi se déplace à une vitesse c . Finalement, nous notons $x(t)$ la position de la fourmi dans le référentiel du laboratoire. Nous allons présenter deux méthodes pour arriver au résultat.

Tout d'abord, pour faire écho à l'analyse qualitative du problème, on peut définir des coordonnées X qui mesurent la « part » de l'élastique qui a déjà été parcourue. Il est clair que le début de la corde est en $X = 0$, tandis que le bout sur lequel on tire est en $X = 1$. Dans ces coordonnées, la position de la fourmi est $X(t) = \frac{x(t)}{L_0 + v_e t}$, et sa vitesse par rapport à l'élastique est $V(t) = \frac{c}{L_0 + v_e t}$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la transformation n'est

qu'un changement d'échelle, de la même manière que si l'on fait la transformation $x \rightarrow 2x$ sans changer l'échelle de temps, alors $v \rightarrow 2v$.

Il suffit alors d'intégrer $V(t)$ pour avoir accès à la position dans le nouveau système de coordonnées. On a ainsi

$$X(t) = \int \frac{c}{L_0 + v_e t'} dt' = \frac{c}{v_e} \ln \left(\frac{L_0 + v_e t}{L_1} \right), \quad (2)$$

où L_1 est une constante d'intégration. Avec $X(0) = 0$, on trouve immédiatement que

$$X(t) = \frac{c}{v_e} \ln \left(\frac{L_0 + v_e t}{L_0} \right). \quad (3)$$

La fourmi atteint l'autre bout à T si $X(T) = 1$, ce qui donne facilement

$$T = \frac{L_0}{v_e} \left(\exp \left(\frac{v_e}{c} \right) - 1 \right). \quad (4)$$

Avec $c = 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$, $v_e = 1 \text{ m.s}^{-1}$ et $L_0 = 1 \text{ m}$, on obtient

$$T \simeq \frac{1}{1} (e^{1000} - 1) \simeq 2 \times 10^{434} \text{ s}. \quad (5)$$

Il s'agit d'un temps très élevé, même à l'échelle de l'univers, dont on estime l'âge à $4 \times 10^{17} \text{ s}$.

Une autre approche, plus directe et calculatoire est possible. Lorsque l'on donne la vitesse de la fourmi, il faut comprendre que celle-ci est exprimée par rapport à l'élastique. Ainsi, la vitesse de la fourmi dans le référentiel du laboratoire est la somme de la vitesse de la fourmi c et de celle de l'élastique. Avec une extrémité fixée, la vitesse de l'élastique en un point y est proportionnelle à la vitesse du bord sur lequel on tire, soit $v_e \frac{y}{L_0 + v_e t}$. Ainsi, si on note $x(t)$ la position de la fourmi et $x'(t)$ sa vitesse, toujours dans le référentiel du laboratoire, on a l'équation différentielle

$$x'(t) = c + v_e \frac{x(t)}{L_0 + v_e t}. \quad (6)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants, que l'on peut donc résoudre avec les techniques habituelles (solution de l'équation différentielle homogène puis recherche d'une solution particulière avec la méthode de variation la constante). On trouve alors

$$x(t) = \frac{c}{v_e} (L_0 + v_e t) \ln \left(\frac{L_0 + v_e t}{L_0} \right), \quad (7)$$

ce qui est cohérent avec la méthode précédente.

Si ce problème semble distant de toute considération physique, il est tout de même analogue à un problème en cosmologie. On sait aujourd'hui que l'univers est en expansion, et une image simple est de considérer que l'espace entre deux objets astrophysiques se dilate, à la manière d'un élastique qui se tend. Plus les objets sont éloignés, plus la vitesse d'expansion augmente, à tel point que celle-ci peut dépasser la vitesse de la lumière. Comme le prouve le raisonnement précédent, qui peut parfaitement être adapté à ce cas en considérant que les photons qui composent la lumière jouent le rôle de fourmis qui se déplacent dans l'espace, la lumière finira toujours par atteindre un autre point si la vitesse d'expansion est constante. Toutefois, on sait aussi que l'expansion de l'univers est de plus en plus rapide, ainsi, il n'est pas garanti que la lumière des galaxies les plus lointaines atteignent la Terre, même après un temps infini.

Exercice 1.3 : Cordes de piano couplées - Ulm PC

Les notes émises par un piano impliquent généralement la mise en vibration d'une paire de cordes, couplées par un chevalet. Modéliser la mise en vibration de ce système. On pourra étudier le système constitué par deux pendules de longueurs légèrement différentes, reliés par un ressort de constante de raideur faible.

Cet exercice va nous permettre une étude assez originale en CPGE, celle des oscillateurs harmoniques couplés. Dans un piano, chaque note est produite par un marteau, qui vient frapper une, deux ou trois cordes, selon que la note produite est grave, intermédiaire ou aiguë. Augmenter le nombre de cordes avec la fréquence permet à la fois de maintenir un niveau sonore relativement constant et d'augmenter la complexité du son produit grâce à des couplages entre les cordes, via le chevalet. Avec un modèle très simple, nous allons montrer que l'on peut retrouver certaines propriétés acoustiques intéressantes du son produit par un piano.

**Quelques pistes...**

On modélise le système constitué des deux cordes et du chevalet par deux pendules de longueurs légèrement différentes reliés par un ressort.

1. Dans la limite des petites oscillations, trouver les équations du mouvement. On fera les simplifications nécessaires sur l'allongement du ressort.

2. Sous quelle forme chercher les modes propres du système complet ? Trouver les pulsations propres des deux pendules couplés.

3. En déduire la forme générale de la solution du système d'équations précédent. Considérer une situation simple, et mettre en évidence un phénomène de battements.

4. Par un argument qualitatif, montrer que l'atténuation du son dans un piano se fait en deux phases, avec d'abord une forte dissipation, puis un amortissement beaucoup plus faible, qui permet de soutenir le son.

1. Nous modélisons le système constitué des deux cordes et du chevalet, qui possède une harmonie complexe avec une infinité de modes résonants, par deux pendules de longueurs l_1 et l_2 , de même masse m , dont les accroches sont séparées par une distance d . Dans un piano, les cordes d'une même note sont accordées à des fréquences très proches, et on va donc supposer que $l_1 - l_2 \ll l_1 \simeq l_2$. Les masses sont reliées par un ressort de raideur k , et on suppose que la position de repos est celle où les deux pendules sont verticaux, c'est-à-dire que la longueur à vide du ressort est également d . Nous représentons la situation dans le schéma 1.4.

Commençons par chercher les équations du mouvement pour chacun des pendules $i = 1, 2$. Nous allons utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $O_i y$, mais une étude énergétique est également possible. En supposant que la tige de chaque pendule est de masse nulle, le moment cinétique par rapport à O_i du pendule i est

$$\vec{\mathcal{L}}_i = m l_i \dot{\theta}_i \vec{u}_y. \quad (1)$$

Les différentes actions mécaniques qui s'exercent sur chaque pendule sont :

- le poids, appliqué à la masse, dont le moment par rapport à Oy vaut $-mgl_i \sin \theta_i$;
- la force exercée par la tige sur la masse, dont le moment par rapport à Oy est nul ;
- la force de rappel élastique \vec{F}_{el} , dont nous allons directement calculer une expression simplifiée en supposant le mouvement quasi-horizontale. Dans ce cas, la norme de la

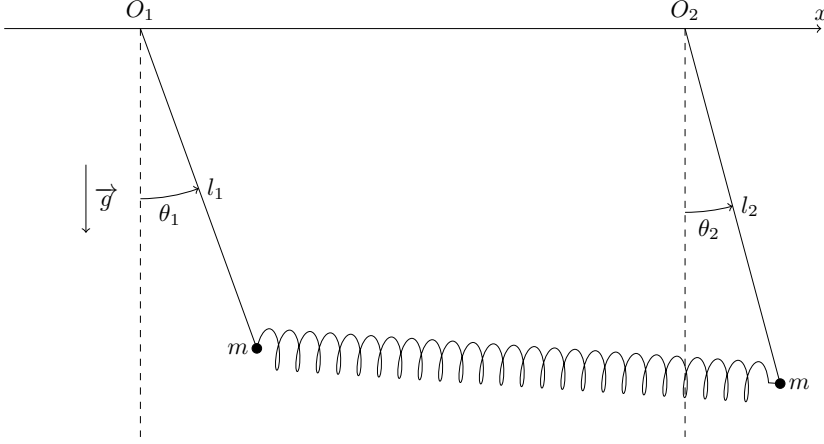


FIGURE 1.4. Pendules couplés par un ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0 = O_1O_2$.

force qui s'applique sur chaque masse est $k(x_2 - x_1) = k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)$, où l'on a noté x_i le déplacement selon x par rapport à la position d'équilibre de la masse i . On peut alors calculer que le moment selon l'axe Oy de la force de rappel sur la masse 1 vaut

$$\mathcal{M}_{0y}(\vec{F}_{\text{el},1}) = +l_1 \cos \theta_1 k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1), \quad (2)$$

et de la même manière le moment selon l'axe Oy de la force de rappel sur la masse 2 vaut

$$\mathcal{M}_{0y}(\vec{F}_{\text{el},2}) = -l_2 \cos \theta_2 k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1). \quad (3)$$

Ainsi, le théorème du moment cinétique appliqué à la première masse donne

$$ml_1^2 \ddot{\theta}_1 = -mgl_1 \sin \theta_1 + l_1 \cos \theta_1 k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1), \quad (4)$$

et pour la seconde masse, on obtient

$$ml_2^2 \ddot{\theta}_2 = -mgl_2 \sin \theta_2 - l_2 \cos \theta_2 k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1). \quad (5)$$

On va bien entendu se placer dans la limite des petites oscillations et on définit $\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l_i}}$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de telle sorte que les deux équations précédentes permettent d'obtenir le système d'équations couplées

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = \Omega^2 (\theta_2 - \theta_1), \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -\Omega^2 (\theta_2 - \theta_1). \end{cases} \quad (6)$$

Remarquons qu'on a fait l'approximation $\frac{l_2}{l_1} \theta_2 \approx \theta_2$. En effet, dans la limite des petits angles, θ_2 est faible, et comme $l_2 - l_1$ est faible devant l_2 , on néglige les infiniment petits d'ordre deux. De même, $\frac{l_1}{l_2} \theta_1 \approx \theta_1$. Dans la limite d'un couplage infiniment faible ($k \rightarrow 0$ donc $\Omega \rightarrow 0$), on retrouve bien les équations du mouvement pour deux pendules simples.

2. Le problème étudié étant linéaire, il est naturel de penser à chercher des solutions oscillantes à la même pulsation, sous forme complexe, c'est-à-dire $\theta_i = \theta_{i,0} e^{i\omega t}$. Dans ce cas, on peut résumer le système précédent à

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_1^2 + \Omega^2) \theta_{1,0} - \Omega^2 \theta_{2,0} = 0, \\ -\Omega^2 \theta_{1,0} + (-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2) \theta_{2,0} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Afin d'obtenir des solutions non triviales, le déterminant de la matrice associée au système précédent doit s'annuler, ce qui permet d'obtenir l'équation

$$(-\omega^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)(-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2) - \Omega^4 = 0. \quad (8)$$

En développant, on obtient une équation bicarrée sur ω , c'est-à-dire que ω^2 vérifie

$$(\omega^2)^2 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\Omega^2) + (\omega_1^2 + \Omega^2)(\omega_2^2 + \Omega^2) - \Omega^4 = 0. \quad (9)$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\Omega^2)^2 - 4((\omega_1^2 + \Omega^2)(\omega_2^2 + \Omega^2) - \Omega^4) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\Omega^4 \geq 0, \quad (10)$$

et finalement, on obtient les solutions

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\Omega^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\Omega^4}}{2}. \quad (11)$$

Revenons brièvement au cas de deux pendules identiques. On a alors $\omega_1 = \omega_2$, et on va noter ω_0 la pulsation commune. Dans ce cas, on a $\omega_+^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$ et $\omega_- = \omega_0$. On peut alors se convaincre que le mode ω_- correspond à des oscillations en phase des deux pendules, où la distance entre les deux masses reste constante et égale à la longueur à vide du ressort. On peut également comprendre que la seconde configuration correspond à des oscillations en opposition de phase des deux pendules. Nous allons confirmer ceci en étudiant les solutions dans le cas général.

3. Réinjectons les valeurs de ω_{\pm} dans le système (7). Les deux équations donnent le même résultat, puisqu'on a supposé que le déterminant du système s'annule. Pour ω_+ , on peut exprimer le rapport entre les deux amplitudes $\theta_{1,0}^+$ et $\theta_{2,0}^+$ d'après la première équation, sous la forme

$$\frac{\theta_{1,0}^+}{\theta_{2,0}^+} = 2\Omega^2 \left((\omega_1^2 - \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\Omega^4} \right)^{-1}. \quad (12)$$

De la même manière pour la solution ω_- , on peut exprimer le rapport entre les amplitudes d'oscillation des deux pendules à partir de la seconde équation. On obtient

$$\frac{\theta_{2,0}^-}{\theta_{1,0}^-} = -2\Omega^2 \left((\omega_1^2 - \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\Omega^4} \right)^{-1}. \quad (13)$$

En définissant le paramètre $r = 2\Omega^2 \left((\omega_1^2 - \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\Omega^4} \right)^{-1}$, qui dépend exclusivement des données du problème, on voit que l'on peut écrire $\theta_{0,1}^+ = r\theta_{2,0}^+$ et $\theta_{2,0}^- = -r\theta_{1,0}^-$. Ainsi, la solution générale du système d'équations précédent va s'écrire

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Dans la limite $\omega_1 = \omega_2$, on obtient $r = 1$ et les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

ce qui permet de confirmer l'intuition précédente : pour deux pendules identiques, le mode $\omega_- = \omega_0$ correspond à des oscillations synchrones des deux pendules, tandis que le mode ω_+ correspond à des oscillations en opposition de phase.

Afin de mettre en évidence les effets de ce couplage sur l'acoustique du piano, cherchons à trouver la solution correspondant à des conditions initiales les plus simples possibles. Nous allons simplement supposer que l'on écarte un des pendules de sa position d'équilibre à $t = 0$, sans toucher à l'autre. Mathématiquement, ceci correspond à $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = 0$, et $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Ce cas n'est pas réaliste dans le cas d'un piano, instrument à cordes frappées, et il aurait mieux valu supposer que l'on donne une impulsion à chaque pendule à

$t = 0$, d'amplitudes très proches. Toutefois, dans ce cas, la mise en évidence de phénomène de battements requiert des manipulations algébriques particulièrement lourdes, que nous évitons dans un souci de pédagogie.

Comme souvent, il sera plus pratique de chercher des solutions sous la forme développée

$$\begin{cases} \theta_1(t) = rA_- \cos \omega_- t + rB_- \sin \omega_- t + A_+ \cos \omega_+ t + B_+ \sin \omega_+ t \\ \theta_2(t) = A_- \cos \omega_- t + B_- \sin \omega_- t - rA_+ \cos \omega_+ t - rB_+ \sin \omega_+ t. \end{cases} \quad (16)$$

À $t = 0$, la condition sur θ_1 et θ_2 donne

$$\begin{cases} rA_- + A_+ = \theta_0, \\ A_- - rA_+ = 0. \end{cases} \quad (17)$$

que l'on résout facilement en $A_- = \frac{r}{r^2+1}\theta_0$ et $A_+ = \frac{\theta_0}{r^2+1}$. De la même manière, la condition sur les dérivées à $t = 0$ donne

$$\begin{cases} rB_- \omega_- + B_+ \omega_+ = 0, \\ B_- \omega_- - rB_+ \omega_+ = 0, \end{cases} \quad (18)$$

dont on déduit que $B_+ = B_- = 0$. On obtient alors

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{r^2 \cos \omega_- t + \cos \omega_+ t}{r^2 + 1} \theta_0 \\ \theta_2(t) = \frac{r(\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t)}{r^2 + 1} \theta_0. \end{cases} \quad (19)$$

On constate ainsi que les deux modes précédents sont excités. Afin de mettre en évidence un phénomène de battements, nous allons faire apparaître la pulsation $\omega_m = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$ et la différence entre les pulsations $\delta\omega = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$. On a alors évidemment $\omega_+ = \omega_m + \delta\omega$ et $\omega_- = \omega_m - \delta\omega$. En remplaçant et en développant les sinus et cosinus dans les expressions de (19), on obtient, après quelques calculs

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{r^2 + 1} ((r^2 + 1) \cos \delta\omega t \cos \omega_m t + (r^2 - 1) \sin \delta\omega t \sin \omega_m t), \\ \theta_2(t) = \frac{2r\theta_0}{r^2 + 1} \sin \delta\omega t \sin \omega_m t. \end{cases} \quad (20)$$

La figure suivante représente l'allure des solutions obtenues, avec $r = 0.4$ et $\omega_m = 20\delta\omega$.

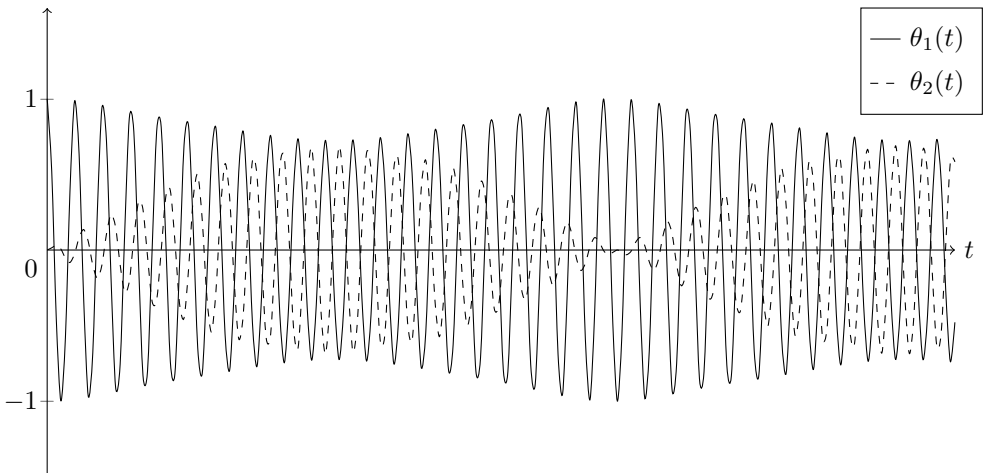


FIGURE 1.5. Battements dus aux couplages entre les deux pendules.

On remarque que le transfert d'énergie entre les deux pendules n'est pas complet, ce qui serait le cas si $r = 1$.

De manière générale, en prenant en compte des conditions initiales quelconques, il est possible de mettre en évidence un tel phénomène de battements. Dans le cas d'un piano, ce phénomène est en général perceptible à l'oreille, et on constate une période de l'enveloppe de l'ordre de quelques secondes. En conclusion, le couplage entre les cordes apporte une plus grande complexité sonore sous forme de nouveaux modes propres, et donne naissance à des phénomènes de battements.

4. Finalement, cette modélisation nous permet de faire quelques commentaires qualitatifs sur l'amortissement du son dans un piano. Notre modélisation n'inclut bien entendu pas de terme de dissipation, et la résolution du problème en ajoutant une force de frottement visqueux devient particulièrement lourde.

Si on écoute attentivement l'intensité sonore lorsque l'on joue une note, on remarque que durant les premières secondes, elle décroît rapidement, puis que la note peut être soutenue durant plusieurs dizaines de secondes. On appelle ce phénomène le double amortissement (*double decay* en anglais), et les instruments qui le présentent sont très rares.

Dans un piano, le chevalet permet de coupler les cordes, mais est aussi relié à la table d'harmonie, qui va diffuser le son. Le mouvement du chevalet va être la somme des amplitudes du mouvement des deux cordes. En première approximation, on s'attend donc à ce que l'amplitude de l'onde acoustique émise par la table d'harmonie soit également proportionnelle à la somme des deux contributions. Lorsqu'un marteau frappe les deux cordes correspondant à une note, elles vibrent dans un premier temps en phase, et donc la somme des deux amplitudes est grande et la dissipation forte. Dans un second temps, puisque les deux fréquences propres obtenues sont légèrement différentes, les solutions pour chaque corde vont progressivement se déphaser dans le cas général. Lorsque les deux cordes arrivent en opposition de phase, les vibrations transmises au chevalet sont très faibles, et donc la dissipation d'énergie également, et le son est soutenu.

En conclusion, la modélisation d'un système complexe nous a permis de mettre en évidence des propriétés acoustiques remarquables d'un piano. De cet exercice, on retiendra l'utilisation de méthodes matricielles pour la recherche des pulsations propres d'un système couplé.

Exercice 1.4 : Dipôle dans un plan - X MP

On considère un dipôle électrostatique \vec{p} de masse m astreint à se déplacer dans un plan sans frottements (la liaison qui le maintient dans ce plan est parfaite). Deux charges $+q$ et $-q$ immobiles se trouvent à équidistance a du plan. Déterminer le mouvement du dipôle.

Encore un problème de mécanique d'apparence surprenant, mais que l'on peut résoudre sans trop de difficultés si l'on pose proprement les différentes étapes du raisonnement. Ici, le mouvement contraint du dipôle dans un plan est a priori complexe. De l'étude du dipôle électrique dans un champ extérieur, on sait qu'il est généralement plus facile de calculer l'énergie potentielle d'interaction du dipôle avec le champ. Ainsi, nous allons présenter une résolution par une méthode énergétique, même si le calcul de la force exercée sur le dipôle se révélera instructif.

La première question à se poser est de savoir quelles forces s'appliquent sur le dipôle. On néglige bien entendu la force de gravitation, et il s'agit donc de calculer la force exercée sur le dipôle, donc le champ électrique créé par les deux charges. Les notations sont définies dans le schéma 1.6 suivant.

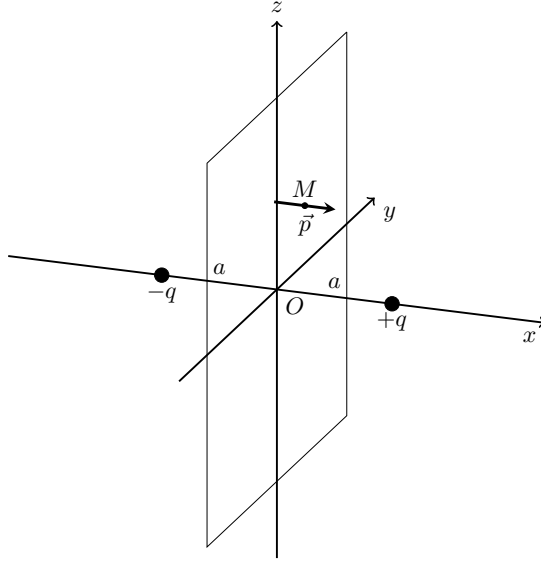


FIGURE 1.6. Dipôle astreint à se déplacer dans un plan, avec deux charges situées à équidistance.

Le potentiel créé par les deux charges s'exprime facilement, et on a

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad (1)$$

et on en déduit aisément le champ électrique dû aux deux charges dans tout l'espace

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x+a)\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{((x+a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{(x-a)\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \quad (2)$$

On rappelle ensuite que l'énergie d'un dipôle dans un champ électrique est $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Ici, avec $\vec{p} = p\vec{u}_x$ en $(0, y, z)$ on obtient facilement

$$E_p = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

et en définissant (r, θ) les coordonnées polaires dans le plan Oyz , on a clairement

$$E_p = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

On peut alors en déduire la force exercée, même si cela ne sera pas nécessaire dans la suite

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{3pqa}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(a^2 + r^2)^{5/2}}. \quad (5)$$

Remarquons qu'on aurait pu calculer cette force directement, cette dernière s'exprimant $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$.

On est donc en présence d'un mouvement à force centrale de centre O , et la suite de l'exercice consiste à adapter le raisonnement habituel à cette nouvelle force. Comme pour tout mouvement à force centrale, le moment cinétique par rapport au point O se conserve, on en déduit donc que

$$mr^2\dot{\theta} = \mathcal{L}, \quad (6)$$

où \mathcal{L} est une constante.

L'autre quantité à étudier est bien entendu l'énergie mécanique, qui se conserve également grâce à la liaison parfaite dans le plan. Elle s'exprime

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{qp}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} + \frac{qp}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}, \end{aligned} \quad (7)$$

où l'on a défini une énergie potentielle effective ne dépendant que de r . Afin de déterminer la nature du mouvement, on peut tracer l'énergie potentielle effective en fonction de r .

Commençons par le cas le plus simple, en supposant qu'il n'y a pas de mouvement angulaire initial, c'est-à-dire que $\dot{\theta}(t=0) = 0$ (et donc $\mathcal{L} = 0$). La situation est représentée dans la figure 1.7. Comme on pouvait s'y attendre, puisque deux dipôles tendent à s'aligner dans des directions opposées, le point central O est un point d'équilibre, stable si $p < 0$, c'est-à-dire que le dipôle \vec{p} et le dipôle formé par les deux charges pointent dans des directions opposées, et instable si $p > 0$, cas où ils pointent dans la même direction.

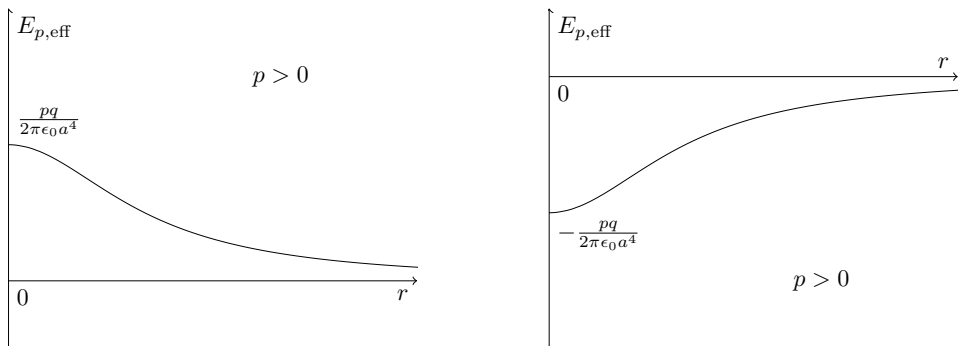


FIGURE 1.7. Énergie potentielle effective sans mouvement angulaire.

Considérons à présent le cas plus général où $\mathcal{L} \neq 0$. Si $p > 0$, on voit aisément que l'énergie potentielle tend vers $+\infty$ en 0, et est strictement décroissante. La force répulsive exercée sur le dipôle ne lui confère donc aucune position d'équilibre stable.

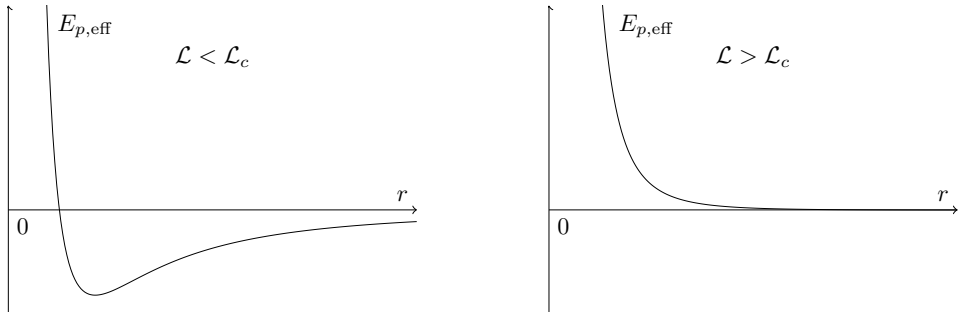
Si $p < 0$, on peut avoir deux cas différents. L'énergie potentielle effective s'écrit alors

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} - \frac{q|p|}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

et on voit que deux effets s'opposent. Le terme en $\frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2}$ a tendance à éloigner le dipôle du centre, tandis que l'autre terme attire le dipôle en O . Ainsi, selon le terme qui prédomine, on va avoir deux comportements différents. Mathématiquement, il va exister un moment cinétique critique \mathcal{L}_c , tel que l'on passe d'une situation où il n'y a pas de position d'équilibre pour $\mathcal{L} > \mathcal{L}_c$, à une situation où il y a une position d'équilibre pour $\mathcal{L} < \mathcal{L}_c$. Ceci est représenté dans la figure 1.8.

On peut supposer que cette analyse qualitative suffirait à finir un oral. À titre de complément, nous allons présenter une manière de trouver \mathcal{L}_c . On cherche une condition sous laquelle la dérivée de l'énergie potentielle effective peut s'annuler. Cette dérivée s'exprime comme

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -\frac{\mathcal{L}^2}{mr^3} + \frac{5}{2} \frac{|p|qa}{\pi\epsilon_0} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{7/2}}, \quad (9)$$


 FIGURE 1.8. Énergie potentielle effective pour $p < 0$ et \mathcal{L} variable.

ainsi, un extremum de l'énergie potentielle effective vérifie

$$\frac{2\mathcal{L}^2\pi\varepsilon_0}{5m|p|qa} = \frac{r^4}{a^2 \left(1 + \left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right)^{7/2}} \Leftrightarrow \frac{X^4}{(1+X^2)^{7/2}} = \frac{2\mathcal{L}^2\pi\varepsilon_0}{5m|p|qa^3}, \quad (10)$$

où l'on a posé $X = \frac{r}{a}$. Afin de déterminer si l'équation possède des solutions, étudions la fonction $f : X \mapsto \frac{X^4}{(1+X^2)^{7/2}}$. On a

$$\frac{df}{dX} = \frac{4X^3}{(1+X^2)^{7/2}} - \frac{7X^5}{(1+X^2)^{9/2}}, \quad (11)$$

et donc pour $X \sim 0$, on a $f(X) \sim 4X^3 > 0$ pour $X \sim 0$ et $f(X) \sim -7X^5 < 0$ pour $X \rightarrow \infty$. La fonction est donc croissante pour X proche de zéro, et décroissante pour X qui tend vers l'infini. Cherchons les zéros de cette fonction. On a

$$\begin{aligned} \frac{df}{dX} = 0 &\Leftrightarrow 0 = X^3 (4(1+X^2) - 7X^2) \\ &\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = \pm 2\sqrt{3}, \end{aligned} \quad (12)$$

et $f(X)$ atteint un maximum en $X = 2\sqrt{3}$, qui vaut $f(2\sqrt{3}) = f_{\max} = \frac{48}{2401}\sqrt{21}$. Ainsi, si $f_{\max} > \frac{2\mathcal{L}^2\pi\varepsilon_0}{5m|p|qa^3}$, on aura au moins un minimum de l'énergie potentielle, et si $f_{\max} < \frac{2\mathcal{L}^2\pi\varepsilon_0}{5m|p|qa^3}$ il n'y aura pas de minimum, et on en déduit le moment cinétique limite

$$L_c = \sqrt{\frac{360}{343\sqrt{11}} \frac{m|p|qa^3}{\pi\varepsilon_0}}. \quad (13)$$

Exercice 1.5 : Force centrale et mouvement circulaire excentré - X MP

On considère un point matériel de masse m sur une orbite circulaire. Il est soumis uniquement à une force centrale dont le centre est situé sur l'orbite. Trouver l'expression de la force.

Si ce problème s'apparente à un exercice classique de mouvement à force centrale, on voit ici que la démarche est en quelque sorte l'inverse de celle présentée habituellement. Ainsi, connaissant la trajectoire, nous allons voir comment trouver l'expression de la force.

Considérons que le mouvement se fait autour d'un point C , sur un cercle de rayon a . Notons O le centre de la force, situé sur l'orbite comme indiqué. Le choix crucial pour la suite est bien entendu celui du système de coordonnées. Puisque l'on a un mouvement à force centrale, il semble naturel de choisir un repère polaire d'origine O . Ayant choisi l'origine, on

peut définir un axe y tangent au cercle en O , et un axe x perpendiculaire à l'axe y passant par O . On peut alors représenter le repère comme dans la figure 1.9.

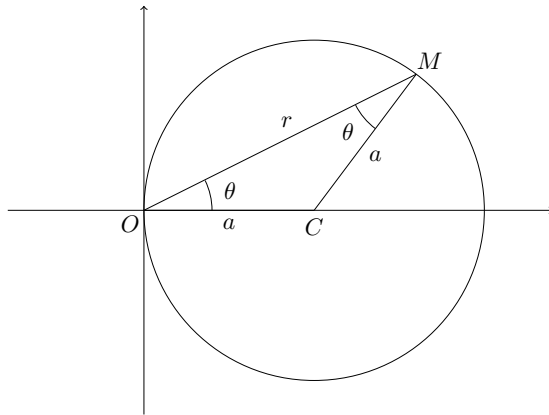


FIGURE 1.9. Le choix d'un repère adapté permet de simplifier l'écriture du problème.

Cette représentation géométrique du problème nous permet très facilement d'écrire l'équation de la trajectoire. On a en effet

$$\begin{aligned} r = \|\vec{OM}\| &= \sqrt{(\vec{OC} + \vec{CM})^2} = \sqrt{(a^2 + 2\vec{OC} \cdot \vec{CM} + a^2)} \\ &= \sqrt{(2a^2 + 2a^2 \cos(2\theta))} = 2a \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} \\ &= 2a \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Connaissant le mouvement de la particule, on cherche la force qui donne cette trajectoire. Il serait tentant d'essayer d'écrire les équations du mouvement grâce à la seconde loi de Newton et d'essayer de trouver la force directement. Toutefois, et comme souvent dans les problèmes impliquant des mouvements à forces centrales, il est bien plus simple d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique pour arriver au résultat.

Comme pour tout mouvement à force centrale, le moment cinétique est conservé, et le mouvement est plan (ce qui était déjà une hypothèse de départ). Ainsi, on peut écrire dans le repère polaire le moment cinétique

$$\mathcal{L} = mr^2\dot{\theta}. \quad (2)$$

À présent, supposons que la force centrale dérive d'une énergie potentielle E_p . On peut alors écrire l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p, \quad (3)$$

quantité bien entendu conservée. L'objectif est donc de réussir à exprimer \dot{r}^2 et $\dot{\theta}^2$ en fonction des paramètres du problème. De manière habituelle, on a facilement

$$r^2\dot{\theta}^2 = r^2 \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} = \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^2}, \quad (4)$$

et on peut calculer

$$\dot{r} = -2a \sin \theta \dot{\theta} \quad (5)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= 4a^2 \sin^2 \theta \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} \\ &= 4a^2 (1 - \cos^2 \theta) \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4} \\ &= \frac{4a^2 \mathcal{L}^2}{m^2 r^4} - \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

On peut alors remplacer dans l'expression de l'énergie mécanique

$$E_p = E_m - \frac{1}{2}m \left(\frac{4a^2 \mathcal{L}^2}{m^2 r^4} - \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^2} \right), \quad (7)$$

et finalement

$$E_p = \frac{K}{r^4} + E_{p,\text{ref}}, \quad (8)$$

où $E_{p,\text{ref}}$ est une constante de référence, et on en déduit donc que la force est de la forme

$$\vec{f} = \frac{K \vec{e}_r}{r^5}. \quad (9)$$

N.B. : Le même raisonnement avec $r = \frac{a}{1+e \cos \theta}$ permet de retrouver une force en $1/r^2$. C'est d'ailleurs de cette manière que Newton est parvenu à obtenir une intuition sur la forme de la loi de gravitation universelle.

Exercice 1.6 : Force centrale répulsive - X MP

On considère un champ de force centrale $\vec{F} = \frac{km}{r^3} \vec{u}_r$ avec k positif. On considère un point matériel de masse m , qui à $t = 0$ se trouve à une distance a du centre de force, et possède une vitesse orthoradiale $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{u}_\theta$. Décrire la trajectoire.

Il va s'agir d'imiter la démarche bien connue pour le potentiel newtonien. Comme toujours, et bien que l'expression de la force soit donnée, écrire le principe fondamental de la dynamique sera une démarche lourde à laquelle on préférera l'utilisation de la conservation de l'énergie et du moment cinétique.

Ainsi, puisqu'il s'agit d'un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\mathcal{L} = mr^2 \dot{\theta}$ est conservé. Le mouvement est plan, donc l'utilisation des coordonnées polaires est appropriée. De plus, ce champ de force dérive d'un potentiel $V(r) = \frac{mk}{2r^2}$, l'énergie mécanique est donc conservée. Cette dernière s'écrit

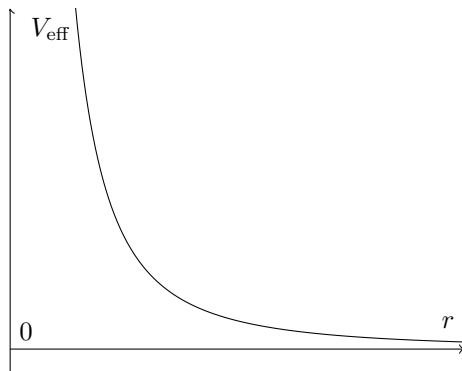
$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \end{aligned} \quad (1)$$

où usage a été fait de la conservation du moment cinétique. On en déduit une énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{L}^2 + km^2}{2mr^2}$ dont l'étude permet de préciser la trajectoire. Toutes les constantes au numérateur étant positives, l'énergie potentielle effective a l'allure donnée dans la figure 1.10.

Le champ de force étant répulsif ($k > 0$), on a exclusivement des états de diffusion, et le point va partir à l'infini.

Nous allons maintenant préciser les équations horaires de la trajectoire. La conservation de l'énergie mécanique entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque donne

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + m \frac{a^2 v_0^2 + k}{2r^2} = m \frac{a^2 v_0^2 + k}{2a^2}, \quad (2)$$


 FIGURE 1.10. Énergie potentielle effective en fonction de r .

où l'on a utilisé que le moment cinétique est conservé et vaut $L = mav_0$. En posant $\alpha = a^2v_0^2 + k$, on obtient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\alpha}{a^2}. \quad (3)$$

On sépare maintenant les variables r et t pour obtenir

$$\sqrt{\alpha}dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}}} = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}}. \quad (4)$$

Cette expression peut être intégrée en

$$\sqrt{\alpha}t = a^2\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} = a\sqrt{r^2 - a^2}, \quad (5)$$

où l'on a choisi la constante d'intégration nulle car $r(t=0) = a$. En inversant cette relation, on obtient finalement

$$r(t) = a\sqrt{1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2}. \quad (6)$$

Cette relation confirme, comme vu précédemment, que $r \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$. On peut à présent chercher la loi horaire. De la conservation du moment cinétique, on peut déduire

$$\dot{\theta} = \frac{\mathcal{L}}{mr^2} = \frac{av_0}{a^2\left(1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2\right)} = \frac{v_0}{a} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2}, \quad (7)$$

dont l'intégration conduit à

$$\theta(t) = \frac{v_0}{a} \frac{a^2}{\sqrt{\alpha}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^2}t\right) = \frac{av_0}{\sqrt{\alpha}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^2}t\right). \quad (8)$$

Des lois $r(t)$ et $\theta(t)$, on peut facilement éliminer le temps pour obtenir l'équation polaire de la trajectoire

$$t = \frac{a^2}{\sqrt{\alpha}} \tan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}\theta\right), \quad (9)$$

d'où finalement

$$r(\theta) = a\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}\theta\right)}. \quad (10)$$

Et avec un soupçon de trigonométrie, on a

$$r(\theta) = \frac{a}{\left| \cos \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0} \theta \right) \right|}. \quad (11)$$

Terminons par quelques remarques.

- On pourrait penser que le cosinus au dénominateur va faire osciller r . En réalité, l'équation 8 assure qu'au bout d'un temps long, θ tend vers $\frac{av_0}{\sqrt{\alpha}} \frac{\pi}{2}$, et ainsi le dénominateur de $r(\theta)$ décroît monotonement de 1 à 0 ;
- par ailleurs, $\frac{av_0}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{a^2 v_0^2}}} < 1$, ce qui prouve que l'angle limite est inférieur à $\frac{\pi}{2}$: le mouvement tout entier est contenu dans le premier quadrant ;
- finalement, on obtient des trajectoires de la forme présentée dans la figure 1.11.

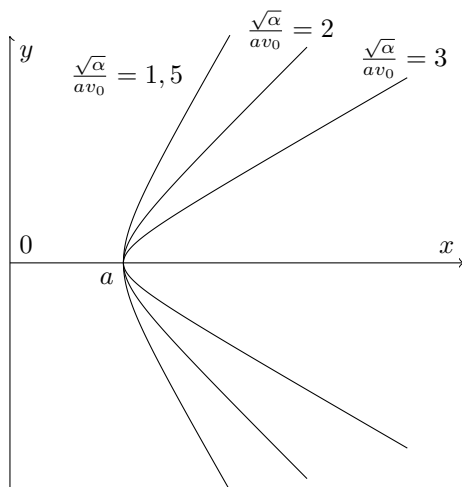


FIGURE 1.11. Quelques trajectoires $r(\theta)$ pour différentes valeurs de $\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}$.

Exercice 1.7 : Température du Soleil - X MP

On se propose de déterminer la température du Soleil par un simple raisonnement de mécanique du point.

1. On considère N particules, qui n'interagissent entre elles que via l'interaction gravitationnelle. On suppose le moment d'inertie du système constant. Démontrer le théorème du viriel : $E_c = -\frac{1}{2}E_p$.
2. On admet que dans le cas du Soleil, ce théorème se généralise sous la forme $\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne temporelle. Comment interpréter $\langle E_p \rangle$? En déduire la température du Soleil.

Cet exercice, très académique, va nous permettre d'introduire le théorème du viriel, qui peut trouver de nombreuses applications, notamment en thermodynamique.

1. Considérons ainsi N particules, de masses m_i , repérées par leurs positions \vec{r}_i . On suppose qu'elles n'interagissent que via la force gravitationnelle, de telle sorte que le principe fondamental de la dynamique pour une masse i s'écrit

$$-Gm_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}. \quad (1)$$

Afin de faire apparaître l'énergie cinétique, on peut s'inspirer de la démonstration du théorème de l'énergie cinétique pour une particule simple, et penser à multiplier l'équation précédente par \vec{r}_i . Pour passer au système complet, on peut sommer les équations obtenues pour chaque i . On obtient alors

$$-G \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} m_i m_j \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}. \quad (2)$$

Le premier terme va s'exprimer grâce à l'énergie potentielle de gravitation. Afin de l'écrire sous une forme plus habituelle, on remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} m_i m_j \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} m_i m_j \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} m_i m_j \frac{\vec{r}_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \end{aligned} \quad (3)$$

où l'on a inversé les indices muets dans la première ligne. L'énergie potentielle dont dérive la force gravitationnelle entre deux masses a pour expression $-G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$, de telle sorte que le terme de gauche de l'équation (2) correspond à $\frac{1}{2} E_p$, où E_p est l'énergie potentielle totale du système.

Pour le terme de droite, on souhaite faire apparaître l'énergie cinétique, donc $\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2$. On peut alors penser à calculer

$$\frac{d^2 \vec{r}_i^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(2\vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = 2 \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 + 2\vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}. \quad (4)$$

Ainsi

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i^2 \right) - \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2. \quad (5)$$

Le second terme du membre de droite correspond à l'énergie cinétique. Dans le premier, on reconnaît la dérivée seconde du moment d'inertie $I = \sum_i m_i \vec{r}_i^2$ système, que l'on suppose nul. Finalement, en réécrivant l'équation (2), on trouve le théorème du viriel $E_c = -\frac{1}{2} E_p$.

2. Voyons à présent comment appliquer ce résultat au cas du Soleil, pour lequel on peut effectivement supposer, aux échelles de temps habituelles, que le moment d'inertie est constant. La valeur moyenne de l'énergie potentielle va correspondre à l'énergie nécessaire pour former le Soleil par accréation de matière depuis l'infini. Nous allons calculer l'énergie potentielle nécessaire pour créer une étoile sphérique en amenant des couches sphériques depuis l'infini. Cette énergie nous donnera accès, via le théorème du viriel, à l'énergie cinétique de l'étoile, puis en écrivant l'équipartition des degrés de liberté, on obtiendra une estimation de la température de l'étoile.

On se place donc dans la situation où une étoile de rayon r et de masse $M(r)$ est déjà formée, et on cherche à amener de l'infini une couche de masse radiale $dm(r) = 4\pi\rho r^2 dr$, où ρ

est la masse volumique moyenne de l'étoile. On peut donc écrire

$$\delta E_p = - \int_{+\infty}^0 - \frac{GM(r)dm(r)}{(r+r')^2} dr', \quad (6)$$

où le premier signe moins traduit le fait que cette énergie est fournie au système. Le calcul de l'intégrale sur r' ne pose pas de problème et donne, en écrivant $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho R_S^3$,

$$\delta E_p = -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2r^4dr. \quad (7)$$

Le signe moins traduit bien que l'opérateur doit fournir de l'énergie pour effectuer cette opération.

On peut maintenant intégrer ce travail élémentaire de $r = 0$ à $r = R_s$,

$$\int_0^{R_s} -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2r^4dr = -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R_S^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM_S^2}{R_S}. \quad (8)$$

On peut finalement écrire le théorème du viriel suivi de l'équipartition de l'énergie, où on suppose que l'étoile est intégralement composée de dihydrogène gazeux de masse M_{H_2} , et ainsi

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{10}\frac{GM_S^2}{R_S} = \frac{5}{2}Nk_B T_S, \quad (9)$$

avec $N = \frac{M_S}{M_{H_2}}$. Finalement, on tire de ceci l'expression de la température de l'étoile,

$$T_S = \frac{3}{25}\frac{GM_S M_{H_2}}{k_B R_S}. \quad (10)$$

L'application numérique donne une température de 5,6 millions de degrés (Kelvin ou Celsius!) pour le Soleil. Ceci représente une moyenne appréciable entre la température de son cœur (environ 15 millions de degrés) et sa périphérie (environ 6000 K).

Exercice 1.8 : Autour d'une trajectoire circulaire - X MP

On considère une masse m soumise à un potentiel gravitationnel central $\varphi(r)$ de centre O . Le mouvement est plan, et on utilise les coordonnées polaires (r, θ) . L'objectif de l'exercice est d'étudier les trajectoires proches de trajectoires circulaires.

1. Pour tout a , existe-t-il toujours une trajectoire circulaire de rayon a ? Dans ce cas, donner la vitesse angulaire Ω , et exprimer la vitesse v .
2. Au lieu de $r = a$ et $\theta = \Omega t$, on considère une perturbation par rapport à la trajectoire circulaire sous la forme

$$\begin{cases} r(t) = a + x(t) \\ \theta(t) = \Omega t + y(t) \end{cases}, \quad (1)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont infiniment petits d'ordre 1 par rapport à a et Ωt . Trouver les équations vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$, et les résoudre. Quand les trajectoires sont-elles stables? Dessiner leur allure.

3. Dessiner en particulier le cas où la pulsation caractéristique ω de $x(t)$ et de $y(t)$ vaut $\omega = 2\Omega$.

4. Pour a et φ quelconques, prouver que l'on peut se ramener au cas $\omega = 2\Omega$ en se plaçant dans un référentiel tournant à Ω_0 par rapport au référentiel initial.

5. Finalement, on considère que $a \mapsto \Omega_0(a)$ est une fonction décroissante. Dans le cas d'étoiles dans une galaxie, quelles sont les trajectoires, et que voit-on apparaître pour la galaxie? Commenter la stabilité de ces structures.

Comme indiqué dans l'énoncé, le but de l'exercice est d'étudier le mouvement d'un corps, par exemple une planète ou une étoile au voisinage d'une trajectoire circulaire uniforme. Ce modèle permet d'obtenir une certaine classe de trajectoires appelées « epicycles ». Historiquement, ces dernières ont été introduites dès l'époque des astronomes grecs afin d'expliquer le mouvement des planètes dans un modèle géocentrique. Nous allons voir que ces trajectoires possèdent toujours des applications, particulièrement pour décrire la dynamique des galaxies.

1. Commençons par le cas d'une trajectoire circulaire simple. La méthode pour en déterminer les caractéristiques est bien connue : on ne peut se contenter d'écrire la conservation de l'énergie mécanique, il va falloir écrire le principe fondamental de la dynamique. On rappelle qu'en coordonnées polaires, la position \vec{r} , la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} s'écrivent

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la vitesse angulaire Ω est constante, et on a la relation $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$. La force de gravitation s'exprime tout simplement par $\vec{F} = -m\text{grad}\varphi = -m\varphi'(r)\vec{u}_r$. Ainsi, dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon a , la projection du principe fondamental sur \vec{u}_r donne

$$-m\frac{v^2}{a} = -m\varphi'(a). \quad (3)$$

Ainsi, on en conclut que $v^2 = a\varphi'(a)$. Un mouvement circulaire uniforme n'est donc possible que si la dérivée du potentiel gravitationnel en a est positive. La vitesse est alors donnée par $\vec{v} = \sqrt{a\varphi'(a)}\vec{u}_\theta$ et la vitesse angulaire est $\Omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{\varphi'(a)}{a}}$.

2. Passons maintenant au calcul du mouvement au voisinage d'une trajectoire circulaire de rayon a et centrée en O . On pose donc $r(t) = a + x(t)$ et $\theta(t) = \Omega t + y(t)$, où Ω prend la valeur trouvée précédemment. On suppose que $x(t)$ et $y(t)$ sont des infiniment petits d'ordre un par rapport à x et Ωt . *A priori*, on ne peut rien dire sur les dérivées de ces quantités. Toutefois, on va supposer que les dérivées de $x(t)$ et de $y(t)$ sont également des quantités d'ordre un.

Pour obtenir les équations sur $x(t)$ et $y(t)$, nous écrivons les équations du mouvement selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ . Au premier ordre, il vient

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \ddot{x} - (a + x)(\Omega^2 + 2\Omega\dot{y} + \dot{y}^2) \\ &= \ddot{x} - a\Omega^2 - 2a\Omega\dot{y} - \Omega^2 x, \end{aligned} \quad (4)$$

et

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 2\dot{x}(\Omega + \dot{y}) + (a + x)\ddot{y} \\ &= 2\Omega\dot{x} + a\ddot{y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Écrivons à présent les équations du mouvement, toujours au premier ordre. La projection sur \vec{u}_r donne

$$\begin{aligned} \ddot{x} - a\Omega^2 - 2a\Omega\dot{y} - \Omega^2 x &= -\varphi'(a + x) \\ &= -\varphi'(a) - \varphi''(a)x, \end{aligned} \quad (6)$$

et en éliminant les termes d'ordre 0 grâce à la relation (3), on obtient

$$\ddot{x} - \Omega^2 x - 2a\Omega\dot{y} = -\varphi''(a)x. \quad (7)$$

La projection selon \vec{u}_θ donne directement

$$2\Omega\dot{x} + a\ddot{y} = 0. \quad (8)$$

Passons à présent à la résolution de ces équations. L'intégration de l'équation (8) est évidente, et on obtient

$$2\Omega x + a\dot{y} = A, \quad (9)$$

où A est une constante. On pourrait penser trouver cette constante grâce aux conditions initiales. Toutefois, nous allons voir que ce n'est pas nécessaire. D'après l'équation précédente, on a facilement $-2a\dot{y} = -2A + 4\Omega x$, et en remplaçant dans l'équation (7), il vient

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\varphi''(a) - \Omega^2)x - 2a\Omega\dot{y} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{x} + (\varphi''(a) - \Omega^2)x - 2A\Omega + 4\Omega^2x &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{x} + (\varphi''(a) + 3\Omega^2)x &= 2A\Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, x vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, avec second membre et coefficients constants, qui correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique avec un second membre constant si $(\varphi''(a) + 3\Omega^2) = \left(\varphi''(a) + 3\frac{\varphi'(a)}{a}\right)$ est positif. Sans plus de précisions sur φ , cette condition peut être remplie ou non. Si elle l'est, alors les trajectoires au voisinage du mouvement circulaire uniforme sont stables, sinon elles divergent exponentiellement.

Si $A \neq 0$, donc si la valeur moyenne de x n'est plus nulle, alors la trajectoire obtenue n'est plus au voisinage de la trajectoire circulaire initiale. Globalement, cela reviendrait à remplacer a par $a + x_{eq}$, on peut donc se contenter du cas $A = 0$. Finalement, si la condition précédente est remplie, on pose $\omega^2 = (\varphi''(a) + 3\Omega^2)$, et x vérifie alors l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (11)$$

La relation (9) devient alors une relation de proportionnalité entre \dot{y} et x .

$$\dot{y} = -\frac{2\Omega}{a}x. \quad (12)$$

On en conclut aisément que y vérifie l'équation

$$\ddot{y} + \omega^2 y = B. \quad (13)$$

où B est une nouvelle constante d'intégration. Avoir $B \neq 0$ revient à changer l'origine des angles, ce qui n'a pas de conséquences physiques. Ainsi, on prend $B = 0$, et finalement x et y vérifient la même équation dont on écrit les solutions

$$\begin{cases} x(t) = x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t, \\ y(t) = y_1 \cos \omega t + y_2 \sin \omega t. \end{cases} \quad (14)$$

À $t = 0$, on suppose que $\theta = 0$ et que $x(0) = b \ll a$. D'après la première condition, on a $y_1 = 0$ et d'après la seconde $x_1 = b$. D'après la relation de proportionnalité (12), $y_1 = 0$ donne $x_2 = 0$, et $y_2 = -2\frac{b}{a}\frac{\Omega}{\omega}$. Finalement

$$\begin{cases} r(t) = a + b \cos \omega t \\ \theta(t) = \Omega t - 2\frac{b}{a}\frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t. \end{cases} \quad (15)$$

On appelle une telle trajectoire un épicycle. En plus des oscillations dans la direction radiale, décrites par

$$x(t) = r(t) - a. \quad (16)$$

on peut réécrire la seconde équation

$$y(t) = a(\theta(t) - a\Omega t) = -2b\frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t. \quad (17)$$

Ainsi, on remarque que la courbe décrite par $(x(t), y(t))$ est une ellipse, de demi-axes b et $b\frac{\Omega}{\omega}$. Le mouvement est dit rétrograde, car dans le sens anti-trigonométrique. Ainsi, la trajectoire de l'astre considéré peut se décomposer en deux contributions : le mouvement sur l'épicycle, qui décrit une ellipse dont le centre a lui-même un mouvement circulaire (appelé déferent) autour du centre de la force. On obtient des trajectoires telles que celles présentées dans la partie gauche de la figure 1.12. Historiquement, les trajectoires trouvées par les grecs

correspondaient au cas où les épicycles étaient des cercles, et dans ce cas, on obtient des trajectoires de la forme présentée dans la partie droite de la figure 1.12.

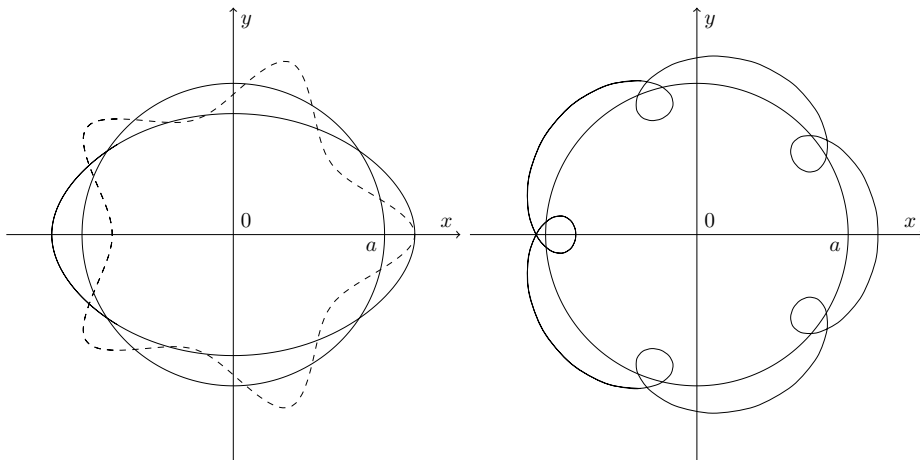


FIGURE 1.12. La figure de gauche présente une trajectoire circulaire (en noir) et les trajectoires épicycliques $r(\theta)$ pour $\omega/\Omega = 2$ (en trait plein) et $\omega/\Omega = 5$ (en pointillé), avec $a/b=5$ dans les deux cas. La figure de droite présente le cas où les épicycles sont des cercles.

3. Plaçons-nous dans un référentiel tournant à Ω_0 autour de l'axe z orthogonal au plan du mouvement initial. Par abus de notation, nous écrirons toujours r et θ les coordonnées du point M dans ce référentiel, bien que ces dernières soient différentes des coordonnées dans le référentiel initial. Afin d'obtenir les équations du mouvement, il nous faut exprimer les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Dans un référentiel en rotation uniforme autour de l'axe Oz , la force d'inertie d'entraînement est

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega_0^2 H \vec{M} = m\Omega_0^2 r \vec{u}_r. \quad (18)$$

où H est le projeté du vecteur \vec{OM} sur l'axe Oz , ici simplement égal à r . La force de Coriolis s'écrit

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} -r\dot{\theta}\Omega_0 \\ \dot{r}\Omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Le mouvement à l'ordre 0 reste un mouvement circulaire uniforme, de rayon a . Écrivons alors les nouvelles équations du mouvement. D'une part pour la projection selon \vec{u}_θ , on obtient

$$a\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \tilde{\Omega} = \text{cste}. \quad (20)$$

D'autre part,

$$-a\dot{\theta}^2 = -\varphi'(a) + 2a\dot{\theta}\Omega_0 + a\Omega_0^2. \quad (21)$$

où l'on a utilisé le fait qu'en mécanique classique, la force est invariante par changement de référentiel. En utilisant l'équation précédente et en réarrangeant les termes, on obtient

$$\tilde{\Omega}^2 + 2\Omega_0\tilde{\Omega} + \Omega_0^2 = (\tilde{\Omega} + \Omega_0)^2 = \frac{\varphi'(a)}{a} = \Omega^2. \quad (22)$$

Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, dans le référentiel tournant tout se passe comme si l'on avait un mouvement circulaire uniforme à une vitesse angulaire constante $\tilde{\Omega} = -\Omega_0 \pm \Omega$, où Ω

est la vitesse angulaire dans le référentiel initial. Il est clair que si $\Omega_0 = \Omega$, alors il n'y a pas de mouvement, et il faut donc choisir le signe négatif. D'où

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \Omega_0. \quad (23)$$

Passons aux équations perturbées. Comme précédemment, on suppose que l'on a

$$\begin{cases} r(t) = a + x(t) \\ \theta(t) = \tilde{\Omega}t + y(t) \end{cases}. \quad (24)$$

de telle sorte que la force d'inertie d'entraînement s'écrit désormais

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega_0^2 (a + x(t)) \vec{u}_r. \quad (25)$$

et la force de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -2m\Omega_0 \begin{pmatrix} -a\tilde{\Omega} - ax(t)\tilde{\Omega} - a\dot{y}(t) \\ \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

L'équation radiale devient donc

$$\ddot{x} - a\tilde{\Omega}^2 - 2a\tilde{\Omega}\dot{y} - \tilde{\Omega}^2 x = -\varphi'(a) - \varphi''(a)x + \Omega_0^2 a + \Omega^2 x(t) + 2a\Omega_0\tilde{\Omega} + 2x(t)\Omega_0\tilde{\Omega} + 2a\Omega_0\dot{y}(t). \quad (27)$$

Après simplification des termes de l'ordre 0, on obtient

$$\ddot{x} - 2a(\tilde{\Omega} + \Omega_0)\dot{y} - (\tilde{\Omega} + \Omega_0)^2 x = -\varphi''(a)x. \quad (28)$$

Pour l'équation orthoradiale, on obtient

$$2\dot{x}(\tilde{\Omega} + \Omega_0) = -a\ddot{y}. \quad (29)$$

On a donc les mêmes équations que précédemment, avec une pulsation $\Omega' = \tilde{\Omega} + \Omega_0 = \Omega$. On aura donc le même mouvement sur l'épicycle, à une pulsation

$$\omega'^2 = \left(\varphi''(a) + 3\Omega'^2 \right). \quad (30)$$

Pour se ramener à la situation $\omega = 2\Omega$, il faut égaliser ω' et $2\tilde{\Omega}$. On obtient l'équation

$$(\varphi''(a) + 3\Omega)^2 = 4(\Omega - \Omega_0)^2. \quad (31)$$

Il s'agit d'une équation du second degré sur Ω_0 , que l'on résout facilement en

$$\Omega_0 = -\frac{\Omega + \varphi''(a)}{2} \quad \text{ou} \quad \Omega_0 = \frac{5\Omega + \varphi''(a)}{2}. \quad (32)$$

On a ainsi prouvé que l'on pouvait se ramener au cas $\omega = 2\Omega$ avec un changement de référentiel adapté.

4. Voyons à présent comment ce résultat s'applique à la dynamique des galaxies. Supposons que $a \mapsto \Omega_0(a)$ est une fonction décroissante, ce qui est possible vu la forme de la fonction trouvée précédemment. Pour chaque a , dans le référentiel tournant à $\Omega_0(a)$, la trajectoire ressemble à une ellipse telle que celle présentée dans la figure 1.12. Considérons une galaxie très aplatie, où les étoiles se déplacent sur des trajectoires quasi-circulaires à $t = 0$. Dans le référentiel non tournant, les trajectoires des étoiles initialement en $a + b$, avec $b \ll a$, vont se faire sur une ellipse comme précédemment, tournant elle-même autour du centre de la galaxie à la vitesse $\Omega_0(a)$.

Puisque $\Omega_0(a)$ est décroissante, alors dans le référentiel non tournant les étoiles les plus proches du centre vont voir leurs ellipses guides tourner plus rapidement autour du centre que les plus extérieures. Cette différence de phase va se traduire par le fait que les trajectoires des étoiles initialement les plus proches du centre vont rattraper celles des plus lointaines. Va ainsi se créer un front où les trajectoires se rapprochent, c'est-à-dire une zone de sur-densité

d'étoiles. On verra ainsi apparaître des bras de part et d'autre du centre de la galaxie. Cette dynamique est présentée dans la figure 1.13.

Dans notre modèle simpliste, ces bras ne sont pas nécessairement stables. En effet, l'avance de phase des trajectoires les plus intérieures à la galaxie par rapport aux plus extérieures va s'agrandir. Ceci provoque un enroulement des bras autour du centre, ce qui va avoir pour effet d'homogénéiser la galaxie, en répartissant les trajectoires plus uniformément.

Dans la réalité, de telles structures (et les galaxies spirales en général) peuvent être stables. Ceci peut s'expliquer par le fait que nous n'avons pas tenu compte des modifications dans la forme du potentiel φ dû à la modification de la forme de la galaxie. C'est donc du côté du champ de gravité créé par les bras eux-mêmes qu'il faut se tourner pour expliquer la stabilité des galaxies spirales.

Exercice 1.9 : Mouvement brownien et équation de Langevin - Ulm MP

Lorsque l'on observe une particule d'une taille de l'ordre du micromètre dans un solvant, on peut remarquer que cette dernière a un mouvement erratique et aléatoire. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier ce mouvement.

1. Comment peut-on détecter une telle molécule, en particulier, comment peut-on faire pour qu'elle émette des photons en continu ? Quelles sont les limites sur la résolution ?

2. Proposer un modèle discret permettant de décrire le mouvement de la molécule à une dimension. Calculer l'espérance et la variance de la position dans ce modèle, et en déduire un coefficient de diffusion.

3. Toujours à une dimension, on modélise cette fois le mouvement de manière continue, en supposant que les particules sont soumises à une force de frottement visqueux $\vec{F}_{\text{visc}} = -\alpha \vec{v}$ et une « force aléatoire » $\vec{\Gamma}$ d'espérance nulle et vérifiant $\langle \Gamma(t) \Gamma(t+t') \rangle = \gamma \delta(t')$, où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac et γ une constante. En calculant $\langle v^2 \rangle$ de deux manières, trouver γ .

4. On suppose que la masse de la molécule est suffisamment faible pour pouvoir négliger le terme d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique. Calculer $\langle x^2 \rangle$ et montrer que l'on est bien en présence d'un phénomène de diffusion. La loi de Stokes donne $\alpha = 6\pi\eta a$, où η est la viscosité du fluide. En déduire une expression du coefficient de diffusion.

Donnée : La fonction δ de Dirac est définie par la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0),$$

pour toute fonction f continue.

Cet exercice, très complet, permet d'aborder en détail la description du mouvement brownien par différentes approches. Ce phénomène fut étudié au XX^e siècle, en se basant sur une hypothèse moléculaire, c'est-à-dire en supposant que le mouvement est dû aux chocs incessants des molécules du solvant sur la particule colloïdale. L'approche expérimentale va être complétée par deux modèles, l'un discret reposant sur l'idée de marche aléatoire, et l'autre continu, où l'on va étudier l'équation de Langevin.

1. Le mouvement brownien fut observé pour la première fois par R. Brown au milieu du XIX^e siècle, dans un article où il décrit le mouvement irrégulier et incessant de grains de pollen dans l'eau. Un microscope de bonne qualité doit donc suffire à observer simplement ce mouvement.

On peut facilement donner une borne sur la taille des particules pour lesquelles on va pouvoir observer un mouvement brownien. D'une part, elles ne doivent pas être trop petites,

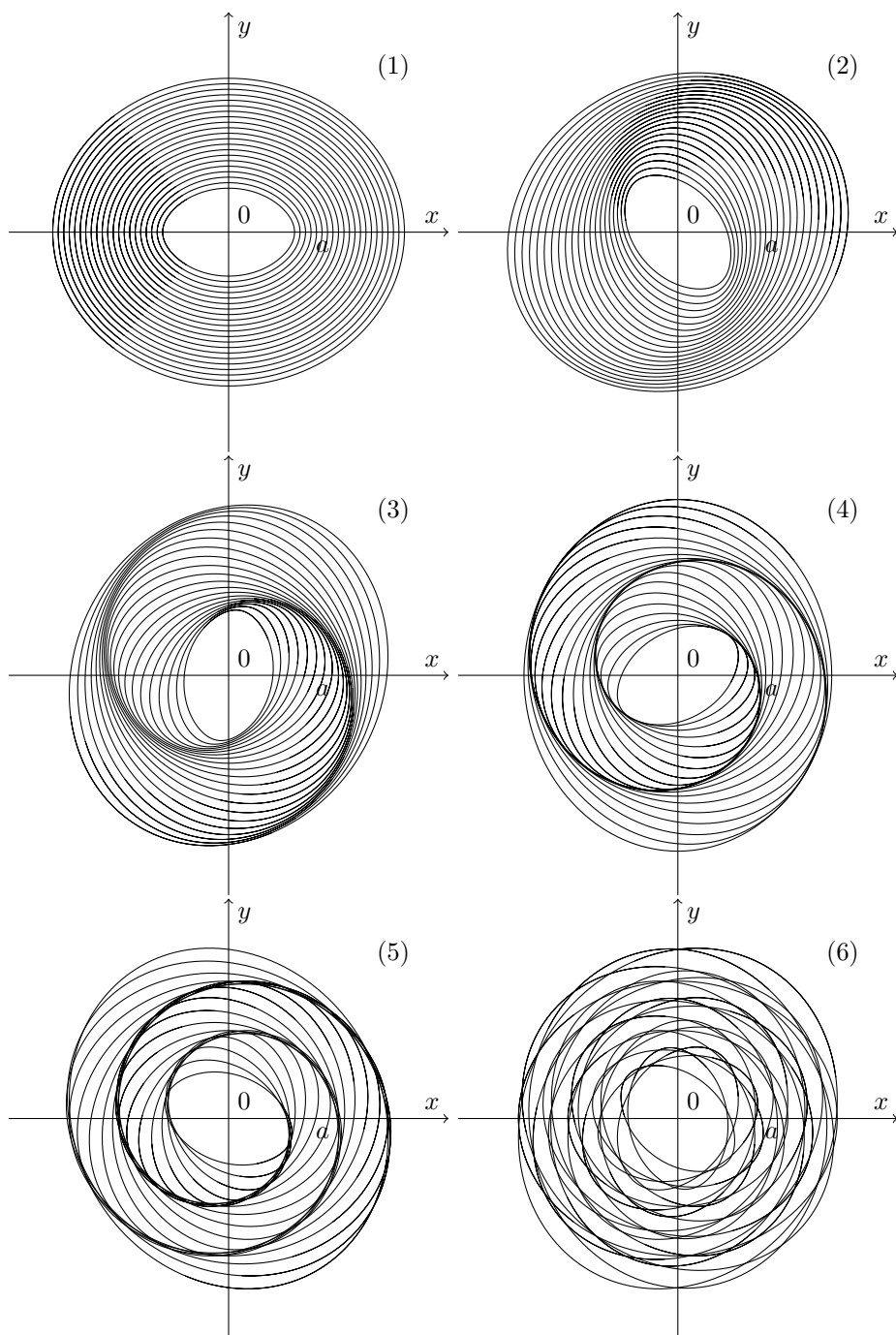


FIGURE 1.13. Dynamique de formation de bras dans une galaxie. On a représenté l'évolution de trajectoires épicycliques avec $\omega = 2\Omega$, dont les grands axes sont initialement confondus. Les figures sont ordonnées par temps croissants. Aux temps longs, les bras disparaissent.

c'est-à-dire d'une taille similaire à celle des molécules du solvant, de l'ordre de $10 \text{ nm} = 10^{-8} \text{ m}$. D'autre part, elles ne doivent pas être trop grosses, sinon l'action du solvant devient négligeable devant la gravité. Pour quantifier ceci, on peut comparer l'énergie d'agitation thermique $k_B T$, avec k_B la constante de Boltzmann et T la température, et l'énergie gravitationnelle, qui est de l'ordre de

$$E_{\text{grav}} = \rho a^3 g a, \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique de la particule, de l'ordre de 10^3 kg.m^{-3} , a sa taille caractéristique et g l'accélération de la pesanteur. Afin d'avoir $E_{\text{grav}} \ll k_B T$, on doit avoir

$$a \ll \left(\frac{k_B T}{\rho g} \right)^{1/4} \simeq 10^{-6} \text{ m}. \quad (2)$$

Afin de pouvoir enregistrer (en vidéo par exemple) le mouvement brownien, on peut utiliser des particules fluorescentes. Lorsqu'elles sont éclairées à une longueur d'onde bien particulière, elles ré-émettent une lumière de longueur d'onde souvent plus élevée. Grâce à un filtre, on peut isoler le signal de fluorescence, et ainsi observer précisément le mouvement de la particule.

Il est toutefois nécessaire d'utiliser un microscope pour observer le mouvement des particules colloïdales. Pour un microscope optique, on peut espérer une résolution de l'ordre de $0,2 \mu\text{m}$. On peut ainsi sans trop de problèmes observer une particule dont la taille est de l'ordre du micromètre. Pour des particules de taille inférieure, la diffraction devient un facteur limitant pour l'observation. Leur concentration ne doit toutefois pas être trop élevée, sous peine de ne pouvoir isoler une seule particule.

2. Le modèle discret le plus simple permettant de décrire le mouvement brownien est celui de marche aléatoire. Afin de simplifier, nous ne considérons que le cas unidimensionnel, mais les résultats sont aisément généralisables à des dimensions plus élevées, comme dans l'exercice 4.7. Dans ce modèle, on suppose que les particules se déplacent sur un réseau de pas a . À chaque pas de temps τ , la particule située au nœud i a une probabilité $\frac{1}{2}$ de sauter vers la droite et la même probabilité de sauter vers la gauche. La position de la particule est alors une variable aléatoire $X(t)$. En supposant que la particule est initialement en 0, cette variable aléatoire au temps $n\tau$ prend des valeurs entre $-na$ et na .

Afin de calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire, on peut avoir l'idée de décomposer le processus. Notons X_i la variable aléatoire donnant le déplacement de la particule au temps $i\tau$. On a clairement $X_i = \pm a$, et par construction X est la somme

$$X(n\tau) = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3)$$

L'espérance $\mathbf{E}[X_i]$ est clairement nulle, et sa variance vaut

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i] &= \mathbf{E}[X_i^2] - \mathbf{E}[X_i]^2 \\ &= \mathbf{E}[X_i^2] = \frac{a^2}{2} + \frac{(-a)^2}{2} = a^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] = 0. \quad (5)$$

De plus, il est clair que l'on peut supposer les variables aléatoires X_i comme indépendantes, c'est-à-dire que la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$ est nulle. Ainsi, on peut également écrire que

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = na^2. \quad (6)$$

L'écart-type du déplacement de la particule est alors

$$\Delta x = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{na} = \sqrt{t} \frac{a}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{Dt}, \quad (7)$$

où l'on a défini un coefficient de diffusion $D = \frac{a^2}{\tau}$. On retrouve une des propriétés des phénomènes de diffusion, qui est que l'échelle caractéristique de distance Δx évolue comme \sqrt{t} . Dans la suite, nous allons voir comment une modélisation continue permet également d'obtenir ce résultat.

3. Comme indiqué dans l'énoncé, nous proposons de modéliser le mouvement brownien en supposant que l'action des molécules de solvant se décompose en une force de frottement $\vec{F}_{\text{visc}} = -\alpha \vec{v}$, et une force aléatoire $\vec{\Gamma}$. En effet, aux temps longs, une particule jetée dans un fluide se retrouve en moyenne au repos, ce qui montre la présence de friction. Aux temps courts, cette force doit toutefois être fluctuante, afin d'expliquer le mouvement aléatoire de la particule. L'hypothèse d'espérance nulle de la force aléatoire signifie que les chocs sur la particule n'ont pas de direction privilégiée, et donc qu'en moyenne, le déplacement dû à cette force doit être nul. La seconde hypothèse peut sembler plus difficile à comprendre. La grandeur $\langle \Gamma(t)\Gamma(t+t') \rangle$ représente les corrélations entre la force Γ à l'instant t et à un instant $t+t'$, et la condition $\langle \Gamma(t)\Gamma(t+t') \rangle = \gamma\delta(t')$ signifie que ces corrélations sont nulles à deux instants différents. Physiquement, cela signifie que les chocs des molécules sur la particule à un instant t n'ont pas d'influence sur ceux à un autre temps.

Avec ces hypothèses, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule donne

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + \Gamma, \quad (8)$$

pour un mouvement à une dimension. Toute la nature « aléatoire » du mouvement est contenue dans cette équation, et en particulier dans la force Γ . Remarquons toutefois qu'il s'agit d'une simple équation différentielle à coefficients constants, que l'on peut intégrer sans difficulté. L'équation homogène associée a des solutions de la forme $v_0(t) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$. Par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $v_1(t) = A(t) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$, et on peut facilement calculer que

$$\frac{dv_1}{dt} = A'(t) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - \frac{\alpha}{m} A(t) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right), \quad (9)$$

de telle sorte que $A(t)$ vérifie l'équation

$$mA'(t) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) = \Gamma(t). \quad (10)$$

On trouve ainsi

$$A(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \exp\left(+\frac{\alpha}{m}t'\right) \Gamma(t') dt'. \quad (11)$$

Finalement, en notant v_0 la vitesse à l'instant initial, on a

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{1}{m} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t-t')\right) \Gamma(t') dt'. \quad (12)$$

Dans la suite, nous allons chercher à étudier des grandeurs statistiques comme $\langle v^2 \rangle$. Dans un système réel, il est en effet impossible de caractériser complètement l'état du système en raison du grand nombre de particules. On considère ainsi un grand nombre \mathcal{N} d'expériences, aussi appelées réalisations, sur lesquelles les moyennes statistiques vont porter. Il ne faut donc pas confondre les moyennes considérées ici avec des moyennes temporelles sur le mouvement

d'une seule particule. La moyenne d'une grandeur X se réalisant au cours de l'expérience i en X_i vaut alors

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} X_i. \quad (13)$$

La linéarité de cette expression signifie que la moyenne statistique commute avec la plupart des opérations, en particulier la dérivation. Par exemple, en prenant la valeur moyenne de l'équation (8), on obtient

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \langle v \rangle, \quad (14)$$

puisque la valeur moyenne de $\Gamma(t)$ est nulle. On obtient alors $\langle v \rangle = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$, ce qui est cohérent avec la valeur moyenne de $v(t)$ trouvée en résolvant cette équation, comme dans l'équation 12. Remarquons qu'aux temps longs, on retrouve bien que la valeur moyenne de v est nulle.

Grâce à la solution trouvée précédemment, on sait que

$$\begin{aligned} v^2(t) &= v_0^2 \exp\left(-2\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{2v_0}{m} \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t-t')\right) \Gamma(t') dt' \\ &\quad + \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t-t')\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t-t'')\right) \Gamma(t') \Gamma(t'') dt' dt''. \end{aligned} \quad (15)$$

En se rappelant que la valeur moyenne de $\Gamma(t)$ est nulle, la valeur moyenne du second terme est nulle. L'hypothèse sur l'absence de corrélation donne $\langle \Gamma(t') \Gamma(t'') \rangle = \gamma \delta(t'' - t')$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= v_0^2 \exp\left(-2\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{\gamma}{m^2} \int_0^t \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(2t-t'-t'')\right) \delta(t'' - t') dt' dt'' \\ &= v_0^2 \exp\left(-2\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{\gamma}{m^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{2\alpha}{m}t\right) dt' \\ &= v_0^2 \exp\left(-2\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{\gamma}{2\alpha m} \left(1 - \exp\left(-2\frac{\alpha}{m}t\right)\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Aux temps longs, la variance $\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ tend donc vers une valeur constante égale à $\frac{\gamma}{2\alpha m}$.

Pour calculer $\langle v^2 \rangle$ d'une autre manière, on peut utiliser un autre grand résultat de la physique statistique, c'est-à-dire le théorème d'équipartition de l'énergie, qui en une dimension donne

$$\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}, \quad (17)$$

Ainsi, on en déduit la relation

$$\frac{\gamma}{2\alpha m} = \frac{k_B T}{m} \Rightarrow \boxed{\gamma = 2\alpha k_B T}, \quad (18)$$

qui relie le coefficient de fluctuation γ et le coefficient de dissipation α , et que l'on nomme relation de fluctuation-dissipation. On comprend ainsi que ces deux phénomènes ont la même origine, c'est-à-dire les collisions avec le fluide.

4. Supposons à présent que la masse de la molécule est suffisamment faible pour négliger le terme $m \frac{dv}{dt}$ dans l'équation de Langevin (8), qui devient alors

$$\alpha \frac{dx}{dt} = \Gamma. \quad (19)$$

On a alors

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{\Gamma(t')}{\alpha} dt', \quad (20)$$

où x_0 est la position initiale de la particule. Afin de simplifier, on prend $x_0 = 0$, de telle sorte que

$$x^2(t) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^t \int_0^t \Gamma(t') \Gamma(t'') dt' dt''. \quad (21)$$

Comme précédemment, on peut calculer la valeur moyenne en utilisant l'hypothèse de non-corrélation, et on obtient

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\gamma}{\alpha^2} \int_0^t dt' = \frac{\gamma}{\alpha^2} t. \quad (22)$$

On retrouve là encore une relation typique d'un phénomène de diffusion, avec un coefficient $D = \frac{\gamma}{2\alpha^2}$. En effet, en dimension d , comme il est possible de le prouver en utilisant les résultats de l'exercice 4.7, on a la relation $\langle x^2 \rangle = 2dDt$. En utilisant la relation de fluctuation-dissipation précédente, on peut finalement exprimer le coefficient de diffusion en fonction d'une grandeur connue $D = \frac{k_B T}{\alpha}$. En supposant la particule sphérique de rayon a , et si la viscosité domine l'écoulement, le coefficient α est donné par la loi de Stokes $\alpha = 6\pi\eta a$, où η est la viscosité dynamique du fluide. On trouve finalement la loi appelée loi de Stokes-Einstein, qui donne le coefficient de diffusion des particules colloïdales dans le fluide

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}. \quad (23)$$

On aurait pu obtenir exactement $\langle x^2 \rangle$ en fonction du temps, en intégrant l'expression 12 de $v(t)$ obtenue en intégrant l'équation de Langevin. Cette approche repose sur la même idée que le calcul de $\langle v^2 \rangle$, et est relativement technique. Nous ne détaillerons pas le calcul ici, mais on obtient tous calculs faits

$$x(t) = \frac{mv_0}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right) + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \Gamma(t'') \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t' - t'')\right), \quad (24)$$

ce qui donne une valeur moyenne

$$\langle x(t) \rangle = \frac{mv_0}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right) \quad (25)$$

Finalement, on peut calculer

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{m^2 v_0^2}{\alpha^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{\alpha^2} \left[t + \frac{m}{2\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\alpha}{m}t\right) \right) - \frac{2m}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Quand $t \rightarrow \infty$, on a $\langle x^2 \rangle \simeq \frac{\gamma}{\alpha^2} t$, ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

En conclusion, l'étude statistique du mouvement brownien nous a permis, d'abord par une approche discrète puis une approche continue, de montrer le lien de ces processus aléatoires avec la diffusion de particules. L'analyse du mouvement d'une particule a été reliée à des quantités macroscopiques, comme un coefficient de diffusion. C'est ce passage du microscopique au macroscopique qui fait toute la force du traitement statistique pour les systèmes à un grand nombre de particules.

Mécanique du solide

Exercice 2.1 : Corde sur un plan incliné - X MP

On considère une corde inextensible de masse M et de longueur L posée sur un dièdre, dont les côtés font un angle θ avec le sol. On note μ le coefficient de frottement entre le dièdre et la corde. Trouver la fraction maximale f de corde suspendue.

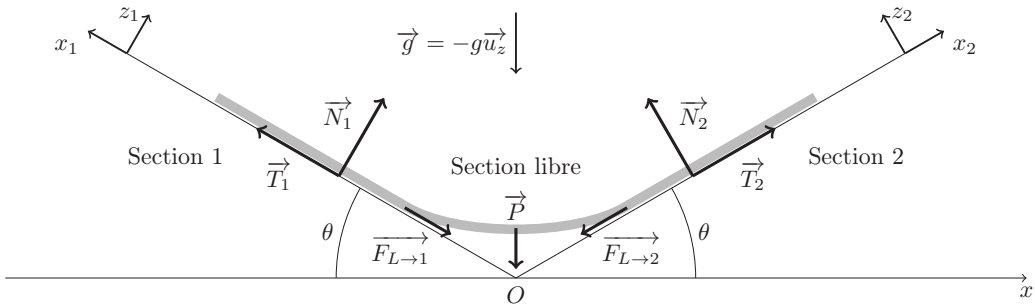


FIGURE 2.1. Corde posée sur un dièdre. On décompose la corde en trois sous-systèmes. Le bilan des forces est représenté pour chacun de ces sous-systèmes.

Cet exercice très académique va encore une fois permettre de montrer qu'avec de la rigueur dans le bilan des forces et l'écriture des théorèmes de la mécanique, on peut arriver au résultat demandé sans trop de difficultés. La première étape d'un tel exercice est bien entendu de faire un bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le système et ses différents sous-systèmes.

Comme sur le schéma 2.1, on définit trois systèmes de coordonnées, adaptés à chaque section de la corde. On note $\vec{u}_x, \vec{u}_{x_1}, \vec{u}_{x_2}$ et $\vec{u}_z, \vec{u}_{z_1}, \vec{u}_{z_2}$ les vecteurs unitaires associés à chaque axe, et f la portion de la corde suspendue.

Sur la section 1 de la corde du schéma, les forces qui s'appliquent sont :

- le poids $\vec{P} = m_1 \vec{g} = -m_1 g (\sin \theta \vec{u}_{x_1} + \cos \theta \vec{u}_{z_1})$, avec m_1 la masse de la section 1, égale à $m_1 = \frac{(1-f)}{2} m$;
- la réaction normale du support $\vec{N}_1 = N_1 \vec{u}_{z_1}$;
- la réaction tangentielle du support $\vec{T}_1 = T_1 \vec{u}_{x_1}$;
- et finalement la force exercée par la portion libre de la corde sur la section 1, que l'on écrit $\vec{F}_{L \rightarrow 1} = -F_{L \rightarrow 1} \vec{u}_{x_1}$.

Par définition du système d'axes pour la section 2, le bilan des forces est le même pour la deuxième section, en substituant l'indice 2 à l'indice 1.

La section libre de la corde, est soumise :

- au poids, qui s'exprime $\vec{P} = -f m g \vec{u}_z$;

- à la force exercée par la section 1, $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow L}} = -\overrightarrow{F_{L \rightarrow 1}} = -F_{L \rightarrow 1} \cos \theta \overrightarrow{u_x} + F_{L \rightarrow 1} \sin \theta \overrightarrow{u_z}$;
- à la force exercée par la section 2, $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow L}} = -\overrightarrow{F_{L \rightarrow 2}} = +F_{L \rightarrow 2} \cos \theta \overrightarrow{u_x} + F_{L \rightarrow 2} \sin \theta \overrightarrow{u_z}$;

Afin de trouver la fraction maximale de corde suspendue, il va falloir étudier les conditions pour qu'il n'y ait pas de mouvement. Ici, l'absence de mouvement se traduit par une condition de non-glissement pour chacune des sections en contact avec le dièdre. En termes des forces précédentes ces conditions s'écrivent $T_i \leq \mu N_i$, où $i = 1, 2$. Il va donc s'agir pour nous d'exprimer les différentes forces, ce que l'on va faire en écrivant le principe fondamental de la dynamique pour chaque portion de corde. Sur la section 1, on obtient

$$\begin{cases} 0 = T_1 - F_{L \rightarrow 1} - m_1 g \sin \theta & \text{sur } x_1, \\ 0 = N_1 - m_1 g \cos \theta & \text{sur } z_1, \end{cases} \quad (1)$$

et sur la section 2, on obtient

$$\begin{cases} 0 = T_2 - F_{L \rightarrow 2} - m_2 g \sin \theta & \text{sur } x_2, \\ 0 = N_2 - m_2 g \cos \theta & \text{sur } z_2. \end{cases} \quad (2)$$

De la même manière, sur la section libre de la corde, on obtient

$$\begin{cases} 0 = -F_{L \rightarrow 1} \cos \theta + F_{L \rightarrow 2} \cos \theta & \text{sur } x, \\ 0 = -fmg + F_{L \rightarrow 1} \sin \theta + F_{L \rightarrow 2} \sin \theta & \text{sur } z. \end{cases} \quad (3)$$

Des projections sur les axes z_1 et z_2 , on tire immédiatement

$$N_1 = N_2 = \frac{(1-f)}{2} mg \cos \theta. \quad (4)$$

De plus, la projection selon l'axe x de l'équation sur la section libre donne également $F_{L \rightarrow 1} = F_{L \rightarrow 2}$. Ces résultats sont prévisibles par symétrie. De la projection sur z , on tire ensuite

$$F_{L \rightarrow 1} = F_{L \rightarrow 2} = \frac{fmg}{2 \sin \theta}. \quad (5)$$

Ainsi, en remplaçant dans les projections des équations de la dynamique sur x_1 et x_2 , on obtient

$$T_1 = T_2 = \left(\frac{1-f}{2} \right) mg \sin \theta + \frac{fmg}{2 \sin \theta}, \quad (6)$$

Dans le cas limite où $\theta = 0$, on a $f = 0$ et donc $T_1 = T_2 = 0$, ce qui est cohérent. Finalement, la condition de non-glissement s'écrit

$$\left(\frac{1-f}{2} \right) mg \sin \theta + \frac{fmg}{2 \sin \theta} \leq \mu \frac{(1-f)}{2} mg \cos \theta, \quad (7)$$

ce qui se simplifie en

$$f \leq \tan \theta \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\mu \sin \theta + \cos \theta} = f_{\max}(\mu, \theta). \quad (8)$$

Finalement, il faut se demander si cette solution a un sens physique. Pour $\theta = 0$, on a $f_{\max} = 0$, ce qui semble cohérent puisque toute la corde repose sur le support. On peut ensuite étudier la fonction, et prouver que f_{\max} est positive au voisinage de 0, donc pour les angles faibles on va pouvoir avoir une certaine portion de la corde suspendue. On peut de plus prouver que cette fonction est décroissante à partir d'un certain θ_{\lim} . Ainsi, il va exister un angle limite à partir duquel on ne pourra plus suspendre la corde entre les deux sections du dièdre. Cet angle se calcule en remarquant que f_{\max} s'annule de manière évidente en

$$\theta_{\lim} = \arctan \mu. \quad (9)$$

Exercice 2.2 : Cylindre lesté - Lyon/Cachan PC

On considère un cylindre sur une planche inclinée. Sur la périphérie du cylindre est ajoutée une masse ponctuelle. Discuter la stabilité du système.

Il s'agit comme souvent en mécanique du solide d'un exercice assez académique, relativement calculatoire. Plus qu'une grande intuition physique, il demande une certaine rigueur et de l'application, notamment dans les calculs. La résolution d'un tel exercice est bien entendu guidée par un bon schéma, qui va permettre de faire tous les raisonnements géométriques nécessaires.

Nous allons chercher à obtenir en toute généralité l'équation du mouvement pour l'angle θ . Nous l'appliquerons ensuite au calcul des positions d'équilibre, puis de leur stabilité. Deux méthodes sont possibles, une par l'énergie, l'autre par les théorèmes de la mécanique. Ces derniers n'étant pas tous rigoureusement au programme, nous privilégions la première méthode.

Notons M la masse du cylindre, m la masse ajoutée, θ l'angle entre la normale au plan incliné et la position de la masse sur l'extérieur du cylindre et α l'angle de pente. Dans tout l'exercice, nous utilisons le repère (\vec{u}_x, \vec{u}_z) tel que dans la figure 2.2.

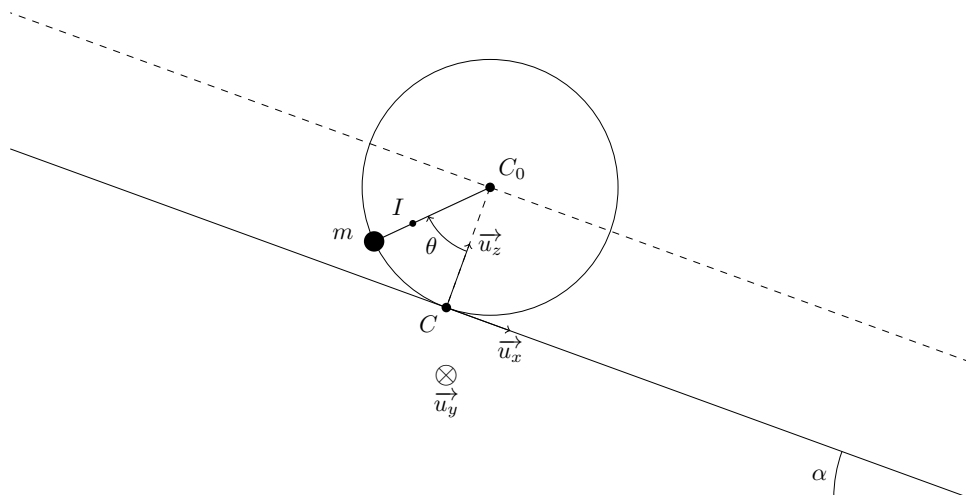


FIGURE 2.2. Géométrie du problème.

Considérons d'abord le cylindre seul roulant sur le plan. Son énergie cinétique est la somme de ses énergies cinétiques de rotation et de translation, soit

$$E_{c,cyl} = \frac{1}{2} J_{C_0} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_{C_0}^2, \quad (1)$$

où J_{C_0} est le moment d'inertie du cylindre autour de son axe, que nous n'avons pas besoin de spécifier ici. On suppose que le cylindre roule sans glisser, et la condition correspondante s'écrit $x_{C_0} = R\theta$, d'où

$$E_{c,cyl} = \frac{1}{2} J_{C_0} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2. \quad (2)$$

L'énergie potentielle de pesanteur du cylindre, que l'on exprime en fonction de θ vaut

$$E_{p,cyl} = Mg(z - z_0) = -MgR(\theta - \theta_0) \sin \alpha, \quad (3)$$

avec θ_0 une référence arbitraire pour le potentiel. Le signe moins vient du fait que l'altitude diminue quand θ augmente.

Passons à la masse lestée. Son énergie cinétique est purement de translation (c'est un point), mais sa vitesse a deux origines : le mouvement du solide et sa rotation. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} E_{c,\text{lest}} &= \frac{1}{2}m(\vec{v}_{\text{tr}} + \vec{v}_{\text{rot}})^2 = \frac{1}{2}m(v_{\text{tr}}^2 + v_{\text{rot}}^2 + 2\vec{v}_{\text{tr}} \cdot \vec{v}_{\text{rot}}) \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta) = mR^2\dot{\theta}^2(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

puisque l'angle entre la vitesse de translation et celle de rotation vaut $\pi - \theta$, et puisque les normes de celles-ci sont égales à $R\dot{\theta}$ grâce à l'hypothèse de roulement sans glissements.

Finalement, pour l'énergie potentielle de pesanteur, le calcul est un peu plus subtil. Elle vaut $mg\Delta z$, mais la variation d'altitude a deux origines : d'une part, la rotation du cylindre qui amène la masse plus haut, et d'autre part, la translation du cylindre qui la fait descendre. Cette dernière donne une contribution identique à l'énergie potentielle du cylindre, soit $-mgR(\theta - \theta_0) \sin \alpha$ (elle diminue quand θ augmente car le cylindre descend). Pour la partie due à la rotation, on évalue, à une constante près que l'on absorbe dans le θ_0 précédent, la quantité

$$\vec{Cm} \cdot \vec{e}_z, \quad (5)$$

où \vec{e}_z est le vecteur unitaire vertical tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, et où l'on a noté m le point géométrique correspondant à la masselotte. Comme $\vec{e}_z = \vec{u}_z \cos \alpha - \vec{u}_x \sin \alpha$, on obtient $\Delta z = R(\cos \alpha - \cos(\theta + \alpha))$. Elle augmente quand θ augmente, ce qui est rassurant. On ignore le premier terme constant du membre de droite, pour finalement obtenir

$$E_{p,\text{lest}} = -mgR(\theta - \theta_0) \sin \alpha - mgR \cos(\theta + \alpha) \quad (6)$$

Finalement, on a donc une énergie totale de

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2(1 - \cos \theta) \\ &\quad - MgR(\theta - \theta_0) \sin \alpha - mgR(\theta - \theta_0) \sin \alpha - mgR \cos(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

On souhaite maintenant appliquer le théorème de l'énergie mécanique. Le point suivant est délicat : le travail des forces non-conservatives est-il bien nul ? La seule de ces forces est la composante tangentielle de la réaction de la table, puisque la composante normale est perpendiculaire au mouvement. En évaluant la puissance de cette force, on trouve

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}_P. \quad (8)$$

Que représente \vec{v}_P ? Il s'agit de la vitesse du point d'application de la réaction tangentielle, qui est le point coïncidant avec le point de contact C . Or, par définition, si la condition de non-glissement est vérifiée, celle-ci est nulle car elle coïncide avec la vitesse de glissement. L'énergie mécanique est donc bien conservée au cours du mouvement.

On peut écrire que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique est nulle

$$\begin{aligned} J_G\dot{\theta}\ddot{\theta} + MR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + mR^2\dot{\theta}^3 \sin \theta \\ - (M + m)gR\dot{\theta} \sin \alpha - mgR\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

En divisant par $\dot{\theta}$ et en réarrangeant les termes, on obtient finalement

$$\boxed{[J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos \theta)] \ddot{\theta} = (M + m)gR \sin \alpha - mgR \sin(\theta + \alpha) - mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta} \quad (10)$$

Afin de trouver les positions d'équilibre pour lesquelles $\theta = \theta_{\text{eq}}$, on peut annuler le membre de gauche de l'équation (10), et le dernier terme du membre de droite, car $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$.

On obtient alors

$$(M + m)gR \sin \alpha = mgR \sin(\theta_{\text{eq}} + \alpha). \quad (11)$$

Si l'on note $\eta = 1 + \frac{M}{m}$, on obtient deux angles d'équilibre

$$\begin{cases} \theta_{\text{eq},1} = \arcsin(\eta \sin \alpha) - \alpha, \\ \theta_{\text{eq},2} = \pi + \alpha - \arcsin(\eta \sin \alpha). \end{cases} \quad (12)$$

Notons que comme $\eta \geq 1$ et \arcsin est une fonction croissante, on aura toujours $\theta_{\text{eq},1} \geq 0$ et $\theta_{\text{eq},2} \leq \pi$.

On donne dans la figure 2.3 le graphe des deux angles de stabilité. On remarque que le domaine de définition de la fonction arcsinus impose un angle de pente maximum tel que $\sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{1}{\eta}$.

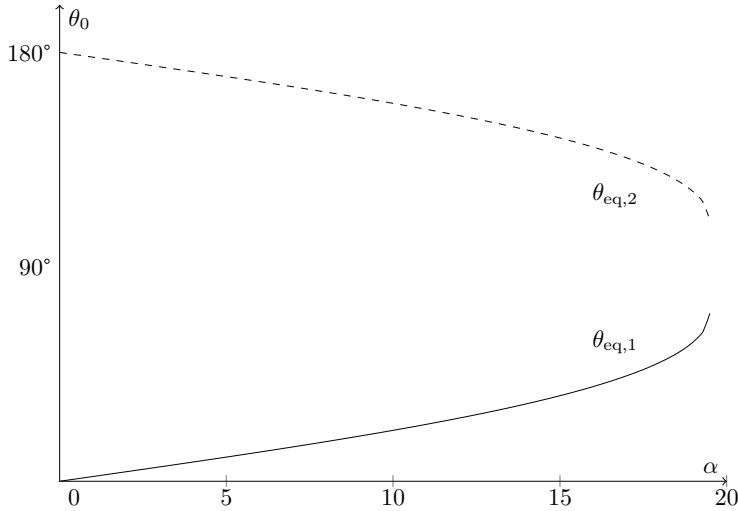


FIGURE 2.3. Angles de stabilité θ_{eq} en fonction de la pente α (en degrés), pour $\eta = 3$

On veut maintenant étudier si ces positions d'équilibre sont stables ou instables. La méthode standard consiste à écrire un développement limité autour de la position d'équilibre (on perturbe légèrement le système), ce qui est censé donner une équation du second ordre de la forme $\ddot{\theta} + \beta\theta = 0$. Le signe de β permet alors de conclure quant à la stabilité de la position d'équilibre.

Commençons par $\theta_{\text{eq},1}$. On reprend l'équation 10 que l'on développe avec $\theta = \theta_{\text{eq},1} + \delta\theta$ au premier ordre en $\delta\theta$

$$[J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos(\theta_{\text{eq},1} + \delta\theta))]\ddot{\theta} = (M + m)gR \sin \alpha - mgR \sin(\theta_{\text{eq},1} + \delta\theta + \alpha). \quad (13)$$

Or au premier ordre, on a

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{\text{eq},1} + \delta\theta) &= \cos \theta_{\text{eq},1} \cos \delta\theta - \sin \theta_{\text{eq},1} \sin \delta\theta \\ &\approx \cos \theta_{\text{eq},1} - \delta\theta \sin \theta_{\text{eq},1}, \end{aligned} \quad (14)$$

et

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{\text{eq},1} + \alpha + \delta\theta) &= \sin(\theta_{\text{eq},1} + \alpha) \cos \delta\theta + \sin \delta\theta \cos(\theta_{\text{eq},1} + \alpha) \\ &\approx \sin(\theta_{\text{eq},1} + \alpha) + \delta\theta \cos(\theta_{\text{eq},1} + \alpha). \end{aligned} \quad (15)$$

Ainsi, comme $\delta\ddot{\theta}$ est déjà du premier ordre, il reste

$$\begin{aligned} & [J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos(\theta_{\text{eq},1}))]\delta\ddot{\theta} \\ &= \underbrace{(M + m)gR \sin \alpha - mgR \sin(\theta_{\text{eq},1} + \alpha)}_{=0 \text{ d'après (11)}} - mgR \delta\theta \cos(\theta_{\text{eq},1} + \alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

On peut donc finalement réécrire l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{\text{eq},1}$

$$\delta\ddot{\theta} + \frac{mgR \cos(\theta_{\text{eq},1} + \alpha)}{J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos \theta_{\text{eq},1})} \delta\theta = 0. \quad (17)$$

Comme $1 - \cos \theta_{\text{eq},1} \geq 0$, le dénominateur est toujours positif, et le signe est donné par $\cos(\theta_{\text{eq},1} + \alpha)$. Or d'après l'équation (12) $\theta_{\text{eq},1} + \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, nécessairement le cosinus est positif. La position d'équilibre est donc stable.

On peut mener une étude strictement similaire pour $\theta_{\text{eq},2}$. L'équation 17 est toujours valable. Cependant, cette fois, $\theta_{\text{eq},2} + \alpha = \pi + 2\alpha - \arcsin(\eta \sin \alpha)$ est compris entre $\pi/2$ et π , donc le cosinus est négatif. Ainsi, le coefficient β est négatif et traduit donc une position instable.

En résumé, on a trouvé deux positions d'équilibre, une stable et une instable. Dans tous les cas, ces positions n'existent que tant que la pente n'est pas trop élevée, inférieure à un angle limite. Ces conclusions semblent conformes à l'intuition physique.

Exercice 2.3 : Cylindres en contact - X PC

L'examinateur prend un cahier sur lequel il pose deux petits cylindres en bois, accolés au niveau de leur surface latérale, puis il soulève un côté du cahier : les cylindres roulent, quel que soit l'angle entre le cahier et la table. Il prend ensuite un de ces deux cylindres en bois, et une craie (cylindre de rayon inférieur à celui du cylindre en bois), et il refait la même expérience (la craie étant en bas, le cylindre en bois en haut). Cette fois, les deux solides ne roulent qu'à partir d'un certain angle entre le cahier et la table.

Expliquer le phénomène, déterminer l'angle critique. *On pourra commencer par étudier le cas de deux cylindres identiques.*

Il s'agit d'un problème de mécanique du solide extrêmement terre à terre. Il n'y a absolument aucune astuce, il faut compter les inconnues, trouver assez d'équations, et les résoudre. Comme toujours, il importe de se poser quelques questions de bon sens sur l'orientation des diverses forces en présence.

Afin de se faire une idée de la méthode exacte, nous allons commencer par le cas des deux cylindres identiques. On note M leur masse, R leur rayon, J leur moment d'inertie. L'angle de la pente est noté α . On définit le cylindre 1 comme le plus haut. Procédons tout d'abord à un bilan des forces s'exerçant sur chaque cylindre i . On a :

- le poids $M\vec{g}$;
- la réaction normale du support \vec{N}_i ;
- la réaction tangentielle du support \vec{T}_i ;
- la réaction normale du contact entre cylindres $\vec{\mathfrak{N}}_i$,
- la réaction tangentielle du contact entre cylindres $\vec{\mathfrak{T}}_i$.

Ainsi, nous sommes en présence de huit forces inconnues, résumées dans le schéma 2.4.

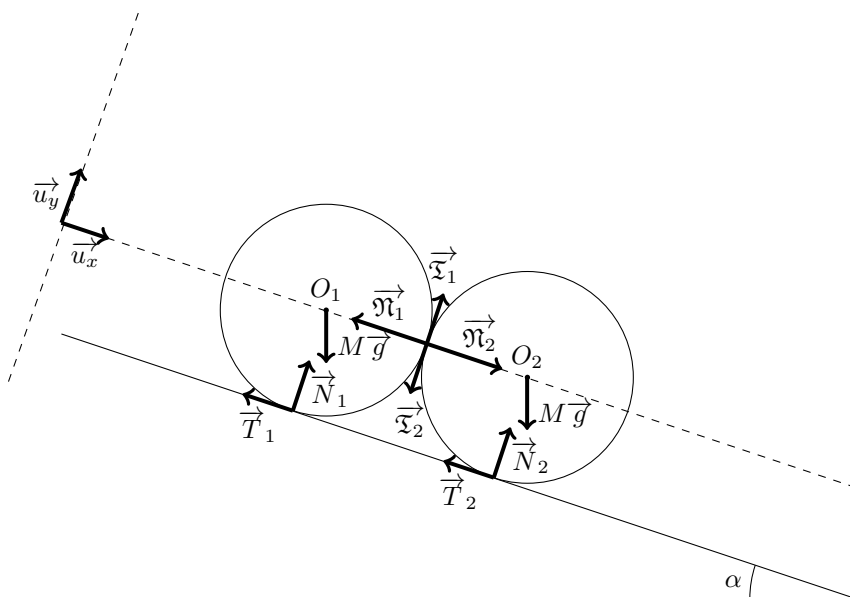


FIGURE 2.4. Géométrie du problème et bilan des actions mécaniques sur les deux cylindres identiques.

Par ailleurs, on a quatre autres inconnues : les vitesses des centres de masse des cylindres, et les angles de rotation des cylindres (pris entre la verticale et un point fixe dans le référentiel des cylindres).

On dénombre donc au total douze inconnues, et il va donc nous falloir trouver douze équations. On peut écrire :

- le principe fondamental de la dynamique appliqué aux centres de masse des cylindres, projetés sur deux axes, ce qui donne quatre équations ;
- le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de symétrie des deux cylindres, ce qui ajoute deux équations ;
- la loi des actions réciproques, indiquant que $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$, soit deux équations ;
- les quatre équations restantes correspondent aux conditions de glissement ou de non-glissement pour les différentes forces de réaction. Une condition de glissement s'écrira comme « $T=fN$ » alors qu'une condition de non-glissement identifiera une vitesse linéaire et une vitesse de rotation « $v=R\dot{\theta}$ ».

Nous allons maintenant écrire explicitement les équations de la mécanique. D'une part, le principe fondamental pour les deux cylindres donne

$$\begin{cases} M \frac{dv_1}{dt} = Mg \sin \alpha - T_1 - \mathfrak{N}_1, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_1 + \mathfrak{T}_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M \frac{dv_2}{dt} = Mg \sin \alpha - T_2 + \mathfrak{N}_2, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_2 - \mathfrak{T}_2. \end{cases} \quad (1)$$

D'autre part, le théorème du moment cinétique pour chaque cylindre donne

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = R(T_1 - \mathfrak{T}_1), \\ J\ddot{\theta}_2 = R(T_2 - \mathfrak{T}_2). \end{cases} \quad (2)$$

Finalement, nous rappelons que les lois des actions réciproques donnent

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2, \\ \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Nous allons par ailleurs supposer qu'il n'y a pas de glissement entre les cylindres et le cahier. Nous pourrions en déduire une relation entre v_1 et θ_1 , v_2 et θ_2 , mais ce ne sera pas nécessaire. En effet, nous allons chercher à quelle condition l'équilibre est maintenu, c'est-à-dire que les vitesses sont nulles et les angles constants, et on a donc

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0. \quad (4)$$

Les seules inconnues restant sont donc les huit forces, pour lesquelles on dispose de huit équations.

Avant de calculer ces différentes forces, il est important de se demander quelles sont les conditions d'équilibre. S'il y a mouvement des deux cylindres, il y a nécessairement glissement au point de contact entre eux. Ainsi, l'absence de glissement entre les deux cylindres est une condition nécessaire d'équilibre. De plus, les conditions de non-glissement entre les cylindres et le sol sont également des conditions d'équilibre. Ainsi, en fonction de la pente, l'équilibre ne sera plus possible dès que la condition la plus faible ne sera plus respectée. On va ainsi chercher l'expression de chaque force, et voir comment se traduisent les conditions de non-glissement.

Les quatre dernières équations nous donnent

$$T_1 = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = T_2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2, \quad (5)$$

Et en utilisant ces égalités pour réécrire les quatre premières équations, on trouve

$$\begin{cases} 0 = Mg \sin \alpha - \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{N}_1, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_1 + \mathfrak{T}_1, \\ 0 = Mg \sin \alpha - \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{N}_1, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_2 - \mathfrak{T}_1. \end{cases} \quad (6)$$

En extrayant les première et troisième équations de (6), on obtient alors facilement

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_1 = Mg \sin \alpha, \\ \mathfrak{N}_1 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

et en remplaçant dans les deuxième et quatrième équations on obtient

$$\begin{cases} N_1 = -Mg \sin \alpha + Mg \cos \alpha, \\ N_2 = Mg \sin \alpha + Mg \cos \alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi, la condition de non-glissement $|\mathfrak{T}_1| \leq f_{c/c} |\mathfrak{N}_1|$, avec $f_{c/c}$ le coefficient de frottement entre les deux cylindres, s'écrit

$$Mg \sin \alpha \leq 0, \quad (9)$$

et elle ne peut être réalisée que pour $\alpha = 0$, cette condition est donc la plus faible. Toutefois, regardons les deux autres conditions de non-glissement. Pour le cylindre du haut, la condition est $|T_1| \leq f_{s/c} |N_1|$, où $f_{s/c}$ est le coefficient de frottement entre le cylindre et le sol, et elle s'écrit

$$Mg \sin \alpha \leq f Mg (\cos \alpha - \sin \alpha), \quad (10)$$

ce qui donne $\alpha \leq \alpha_{c,1} = \arctan \left(\frac{f}{1+f} \right)$. Le même raisonnement pour le second cylindre donne

$$\alpha \leq \alpha_{c,2} = \arctan \left(\frac{f}{1-f} \right). \quad (11)$$

Ainsi, il est clair que la première condition est bien la plus faible. Si on incline légèrement la surface de contact, la condition n'est plus vérifiée et on doit reprendre les calculs avec désormais $\mathfrak{T}_{1/2} = f \mathfrak{N}_{1/2}$, et en rétablissant les vitesses et angle en tant que variables du problème. La

symétrie du problème assure que les deux cylindres posséderont la même accélération, et se déplaceront donc de concert. Nous laissons cette résolution simple au lecteur curieux.

Passons maintenant à la résolution du cas où les deux cylindres sont différents. On note désormais M et m les masses respectives du grand et du petit cylindre, R_1 et R_2 leurs rayons, J_1 et J_2 leurs moments d'inertie. L'angle entre (O_1O_2) et la normale au support est noté β . D'après le schéma 2.5 on voit ainsi facilement que

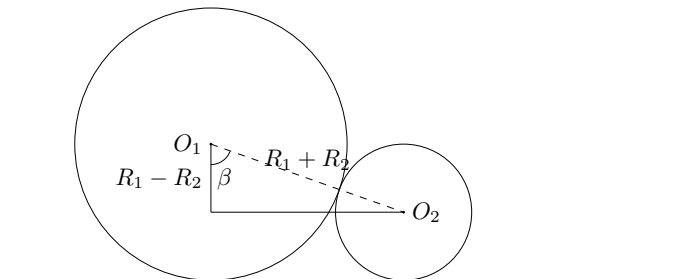


FIGURE 2.5. Calcul de l'angle de contact entre les deux cylindres.

$$\cos \beta = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \quad (12)$$

et le cas précédent correspond à $\beta = \frac{\pi}{2}$. On peut également montrer, cela nous sera utile dans la suite, que

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2}. \quad (13)$$

Le bilan des forces est le même, et peut être résumé par le schéma 2.6. Tout d'abord, les

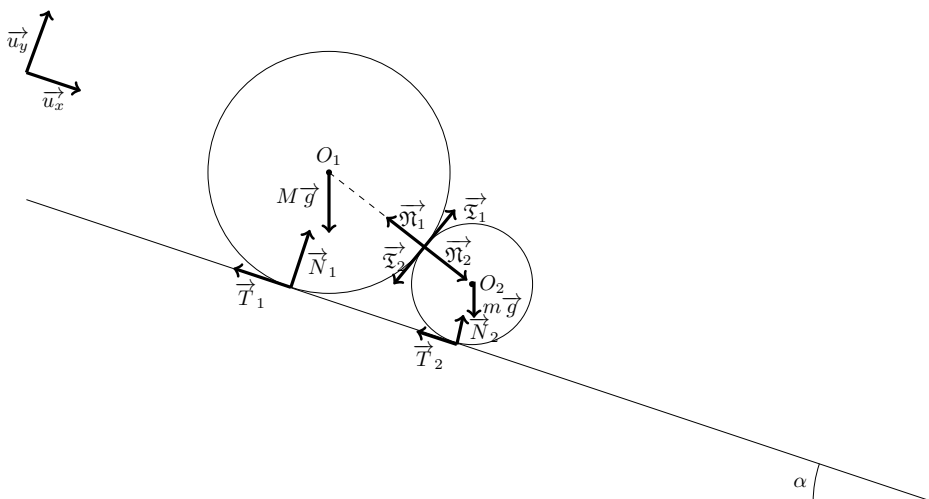


FIGURE 2.6. Géométrie du problème et bilan des actions mécaniques sur les deux cylindres différents.

principes fondamentaux de la dynamique s'écrivent

$$\begin{cases} M \frac{dv_1}{dt} = Mg \sin \alpha - T_1 - \mathfrak{N}_1 \sin \beta + \mathfrak{T}_1 \cos \beta, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_1 + \mathfrak{T}_1 \sin \beta + \mathfrak{N}_1 \cos \beta, \\ m \frac{dv_2}{dt} = mg \sin \alpha - T_2 + \mathfrak{N}_2 \sin \beta - \mathfrak{T}_2 \cos \beta, \\ 0 = -mg \cos \alpha + N_2 - \mathfrak{T}_2 \sin \beta - \mathfrak{N}_2 \cos \beta. \end{cases} \quad (14)$$

D'autre part, le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de symétrie des deux cylindres donne

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = R_1(T_1 - \mathfrak{T}_1), \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = R_2(T_2 - \mathfrak{T}_2), \end{cases} \quad (15)$$

et on a toujours les lois des actions réciproques qui donnent

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2, \\ \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2. \end{cases} \quad (16)$$

Nous cherchons de nouveau une situation d'équilibre où $v_1 = v_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, et on veut extraire les conditions de non-glissement $\mathfrak{T}_1 \leq f_{c/c} \mathfrak{N}_1$ et ainsi que $|T_i| \leq f_{s/c} |N_i|$, avec $i = 1, 2$.

Usant de nouveau du fait que les quatre dernières équations donnent $T_1 = T_2 = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ et $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$, on obtient

$$\begin{cases} 0 = Mg \sin \alpha - \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{N}_1 \sin \beta + \mathfrak{T}_1 \cos \beta, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N_1 + \mathfrak{T}_1 \sin \beta + \mathfrak{N}_1 \cos \beta, \\ 0 = mg \sin \alpha - \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{N}_1 \sin \beta - \mathfrak{T}_1 \cos \beta, \\ 0 = -mg \cos \alpha + N_2 - \mathfrak{T}_1 \sin \beta - \mathfrak{N}_1 \cos \beta. \end{cases} \quad (17)$$

Les première et troisième équations du système précédent permettent alors d'obtenir

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_1 = \frac{M+m}{2} g \sin \alpha, \\ \mathfrak{N}_1 = \frac{M-m}{2} g \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{M+m}{2} g \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}, \end{cases} \quad (18)$$

et l'on retrouve bien les mêmes expressions que précédemment pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $M = m$. Dès lors, la condition de non-glissement entre les deux cylindres s'écrit

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &\leq f_{c/c} \mathfrak{N}_1 \\ \Rightarrow \quad \frac{M+m}{M-m} &\leq \frac{f_{c/c}(1 + \cos \beta)}{\sin \beta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ainsi, l'angle α n'apparaît plus pour $\alpha \neq 0$. Cette condition de non-glissement est donc purement géométrique. Afin d'explicitier les choses, supposons que les deux cylindres sont faits du même matériau de masse volumique ρ , et qu'ils ont la même longueur l . Alors $M = \rho \pi R_1^2 l$ et $m = \rho \pi R_2^2 l$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \frac{M+m}{M-m} &= \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{(R_1 + R_2)^2 - 2R_1 R_2}{(R_1 - R_2)(R_1 + R_2)} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} - \frac{2R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{(R_1 - R_2)(R_1 + R_2)} \\ &= \frac{1}{\cos \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Ainsi, la condition d'équilibre sera respectée si la fonction

$$F : \beta \mapsto \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{\sin^2 \beta}{2} - 1 \right) + f_{c/c} \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta}, \quad (21)$$

est positive. Comme lors d'un oral, examinons rapidement l'allure de cette fonction. Pour β qui tend vers 0, cette fonction tend vers $+\infty$, et pour β qui tend vers $\frac{\pi}{2}$, elle tend vers $-\infty$. On peut donc dire qu'elle sera négative pour β proche de $\pi/2$ et devenir positive lorsque β , donc l'écart entre les rayons des deux cylindres, diminue. Donc pour β faible, la condition de non-glissement est toujours respectée, peu importe α , et inversement pour β proche de $\pi/2$. En réalité, la fonction a l'allure présentée dans la figure 2.7, avec différentes valeurs de $f_{c/c}$.

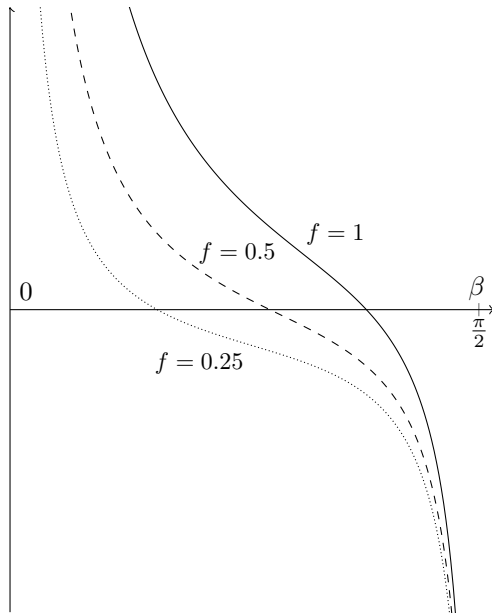


FIGURE 2.7. Allure de la fonction F pour différentes valeurs du coefficient de frottement $f = f_{c/c}$.

Physiquement, un cylindre du bas trop petit va agir comme une cale, qui empêche l'autre cylindre de bouger.

Cette condition ne dépendant pas de l'angle de la pente, nous devons nous tourner vers les autres conditions de non-glissement, c'est-à-dire celles entre chaque cylindre et le sol. On peut poursuivre la résolution du système (17) en remplaçant les expressions de \mathfrak{T}_1 et \mathfrak{N}_1 , pour trouver

$$\begin{aligned} N_1 &= Mg \cos \alpha - \mathfrak{T}_1 \sin \beta - \mathfrak{N}_1 \cos \beta \\ &= Mg \cos \alpha - \frac{g \sin \alpha}{2} \left((M + m) \left(\sin \beta + \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} \right) + (M - m) \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) \\ &= Mg \cos \alpha - \frac{g \sin \alpha}{2 \sin \beta} ((M + m) + (M - m) \cos \beta), \end{aligned} \quad (22)$$

et de la même manière, on trouve

$$N_2 = mg \cos \alpha + \frac{g \sin \alpha}{2 \sin \beta} ((M + m) + (M - m) \cos \beta). \quad (23)$$

Examinons à présent chacune de ces conditions d'équilibre. Pour le cylindre du haut, cette condition correspond à $T_1 = \mathfrak{T}_1 \leq f_{s/c} N_1$. On va supposer que N_1 reste positive, ce qui signifie

que le premier cylindre ne décolle pas. Cette condition est vérifiable mathématiquement, mais les calculs sont quelque peu fastidieux. La condition de non-glissement s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{M+m}{2} g \sin \alpha &\leq f_{s/c} \left(Mg \cos \alpha - \frac{g \sin \alpha}{2 \sin \beta} ((M+m) + (M-m) \cos \beta) \right) \\ \Leftrightarrow \sin \alpha \left(\frac{M+m}{2} + \frac{f_{s/c}}{2 \sin \beta} ((M+m) + (M-m) \cos \beta) \right) &\leq f_{s/c} M \cos \alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

et ainsi, α doit être plus faible qu'un angle critique

$$\alpha \leq \alpha_{c,1} = \arctan \left(\frac{M}{M+m} \frac{2f_{s/c}}{1 + \frac{f_{s/c}}{\sin \beta} \left(1 + \frac{M-m}{M+m} \cos \beta \right)} \right). \quad (25)$$

De la même manière, on prouve que pour que le second cylindre ne glisse pas par rapport au sol, il faut que

$$\alpha \leq \alpha_{c,2} = \arctan \left(\frac{m}{M+m} \frac{2f_{s/c}}{1 - \frac{f_{s/c}}{\sin \beta} \left(1 + \frac{M-m}{M+m} \cos \beta \right)} \right). \quad (26)$$

Ainsi, on a montré l'existence d'un angle critique à partir duquel le mouvement va commencer. Cet angle est le plus faible des deux trouvés précédemment. Un tel raisonnement suffirait probablement à finir un oral. Toutefois, on peut prouver grâce à un calcul plutôt lourd, que l'angle $\alpha_{c,1}$ est le plus faible, ce qui signifie que le cylindre du haut va se mettre à glisser en premier, entraînant le second dans sa chute. Ceci n'est possible que si la condition géométrique précédente est remplie.

Voilà qui prouve qu'un tel exercice, bien que très calculatoire, peut être résolu grâce à beaucoup de rigueur dans la démarche et les calculs.

Exercice 2.4 : Comment retenir un bateau - X PC

Un marin retient un bateau à quai en tirant sur une corde, il exerce la force F_1 pour maintenir le bateau en position. Calculer la nouvelle force F_2 avec laquelle il doit tirer si on enroule N fois la corde autour d'une bitte d'amarrage entre le bateau et lui.

Il est bien connu des marins que l'on peut compenser des forces très importantes, comme celles que subit un navire soumis au vent, grâce à une bitte d'amarrage et avec la simple force des bras. Ceci suggère que lorsqu'on enroule la corde autour d'un cylindre fixe, la tension à une extrémité peut être considérablement réduite par rapport à l'autre bout. Pour expliquer ce phénomène, l'idée à avoir est de prendre en compte les frottements entre la corde et le cylindre, dans une situation d'équilibre.



Quelques pistes...

1. Considérer une portion infinitésimale de corde en contact avec le cylindre. Quelles sont les actions mécaniques subies ?
2. Établir une équation différentielle sur la tension dans la corde au contact du cylindre, et la résoudre. Conclure.

1. Nous modélisons la bitte d'amarrage par un cylindre de rayon R , autour duquel on enroule N fois une corde. Notons T_1 la tension à l'extrémité du côté qui retient la charge, égale à la force exercée par le bateau et T_2 la tension à l'autre extrémité, qui correspond à la

force que doit fournir le marin. On repère la position le long de la corde à partir du point de contact entre la corde et le cylindre à l'extrémité où est attaché le bateau, puis par l'angle θ entre ce point et un point de la corde en contact avec le cylindre. On note θ_{12} l'angle total entre les deux extrémités en contact avec le cylindre. Ce dernier peut être supérieur à 2π si la corde fait plusieurs tours. Ceci est représenté dans le schéma 2.8 suivant.

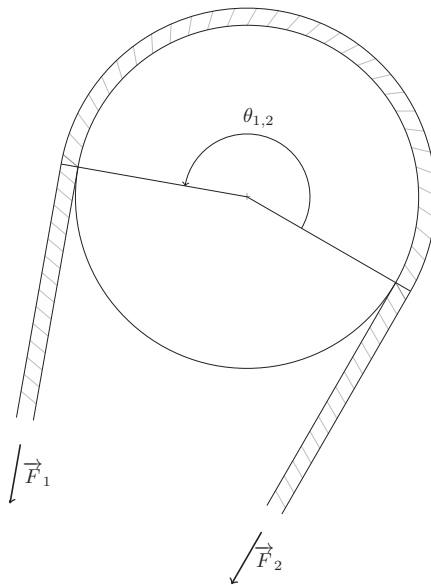


FIGURE 2.8. Enroulement d'une corde autour d'un dispositif d'amarrage. L'angle $\theta_{1,2}$ peut bien entendu être supérieur à 2π .

Afin d'étudier la tension le long de la corde, considérons une petite portion de corde comprise entre θ et $\theta + d\theta$, comme représenté sur la figure 2.9. Pour écrire les théorèmes de la mécanique, on se place dans le repère polaire local en θ . Sur ce système, les forces qui s'exercent sont :

- la tension $\vec{T}(\theta)$ en θ , dirigée tangentiellement à la corde en θ vers l'extérieur ;
- la tension $\vec{T}(\theta + d\theta)$ en $\theta + d\theta$, dirigée de manière similaire ;
- la réaction normale $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_r$ du cylindre, dirigée vers l'extérieur de ce dernier ;
- et finalement la réaction tangentielle $\vec{R}_T = R_T \vec{u}_\theta$ du cylindre, dirigée dans le sens des tensions décroissantes.

Ce bilan permet de rendre compte de l'équilibre entre les forces de frottement et la tension de la corde.

Dans le repère polaire local centré en $\theta + d\theta/2$, un petit peu de géométrie nous permet d'exprimer les tensions qui s'exercent sur la portion de corde. On obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(\theta) = T(\theta) \left(-\sin \frac{d\theta}{2} \vec{u}_r - \cos \frac{d\theta}{2} \vec{u}_\theta \right) \simeq T(\theta) \left(-\frac{d\theta}{2} \vec{u}_r - \vec{u}_\theta \right), \\ \vec{T}(\theta + d\theta) = T(\theta + d\theta) \left(-\sin \frac{d\theta}{2} \vec{u}_r + \cos \frac{d\theta}{2} \vec{u}_\theta \right) \simeq T(\theta + d\theta) \left(-\frac{d\theta}{2} \vec{u}_r + \vec{u}_\theta \right), \end{cases} \quad (1)$$

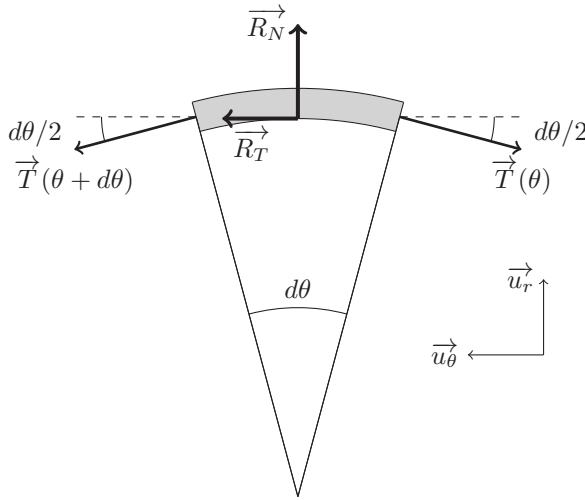


FIGURE 2.9. Bilan des forces sur la portion infinitésimale de corde.

puisqu'on a considéré $d\theta$ infinitésimal.

2. Les équations de Newton projetées sur \vec{u}_r donnent

$$-T(\theta)\frac{d\theta}{2} - T(\theta + d\theta)\frac{d\theta}{2} + R_N = 0, \quad (2)$$

et donc à l'ordre 1 en $d\theta$, on obtient

$$R_N = T(\theta)d\theta. \quad (3)$$

La projection selon \vec{u}_θ donne

$$T(\theta + d\theta) - T(\theta) + R_T = \frac{dT}{d\theta}d\theta + R_T = 0. \quad (4)$$

Les lois de Coulomb du frottement donnent $R_T = fR_N$, avec f le coefficient de frottement statique. En simplifiant les $d\theta$ on a la relation

$$\frac{dT}{d\theta} = -fT(\theta). \quad (5)$$

Cette équation s'intègre facilement entre 1 et 2 et on obtient

$$F_2 = F_1 \exp(-f\theta_{12}). \quad (6)$$

Cette formule explique pourquoi les marins, grâce aux dispositifs d'amarrage, peuvent compenser la force très importante exercée par un navire, avec la simple force des bras. Grâce aux forces de frottement, la tension orthoradiale est convertie en forces radiales, qui s'appliquent sur le cylindre, ce qui permet la décroissance rapide de la norme de la force. Pour cinq tours, un coefficient de frottement de 0.5, on a

$$F_2 = F_1 \times 1.5 \times 10^{-7}, \quad (7)$$

et la force nécessaire pour retenir même un gros navire est drastiquement réduite. Pour se donner un ordre de grandeur, un tel dispositif permettrait en théorie à un humain de retenir le poids de la tour Eiffel, dont la masse est de 7 300 tonnes, simplement en appliquant une force de 10 N. Bien entendu, on est dans ce cas limité par la résistance finie de la corde et de la bitte d'amarrage.

Exercice 2.5 : Drôle de corde - Ulm PC

Je trouve devant moi un câble qui flotte tout seul et qui monte très haut dans le ciel. Où suis-je ? Est-il plus grand que la tour Eiffel ? Trouver le point du câble où la tension est maximale.

Même si l'énoncé est relativement inhabituel, un tel problème peut être abordé en employant les méthodes habituellement utilisées lorsque l'on étudie la dynamique des cordes. En particulier, un bon réflexe à avoir est d'étudier des portions infinitésimales de la corde.

Si la corde flotte en l'air, c'est que son poids est compensé par une autre force. Sur Terre, référentiel non-galiléen, les seules possibilités sont les pseudo-forces d'inertie et de Coriolis. La situation étant statique, la deuxième doit être délaissée.

On cherche donc à quelle condition un équilibre peut se créer entre la force gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement. La première est radiale, alors que la seconde est dirigée vers le projeté orthogonal du point sur l'axe. Une compensation entre les deux forces ne pouvant se produire que si elles sont de même direction, on en conclut que l'on se trouve nécessairement à l'équateur. De plus, on s'attend à ce qu'une telle corde soit très longue, puisque l'extrémité de cette dernière doit nécessairement être plus loin que le point où la force d'inertie d'entraînement devient plus grande en module que la force de gravitation, ce qui se produit à l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Considérons ainsi une corde verticale de masse μ à l'équilibre. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, ω sa fréquence de rotation sur son axe, et G la constante universelle de gravitation. Effectuons un bilan sur un élément de longueur dz situé à l'altitude z . Les forces s'exerçant sont :

- la tension en z , dirigée vers le bas, qui s'écrit $-T(z)\vec{u}_z$;
- la tension en $z + dz$, dirigée vers le haut, qui s'écrit $T(z + dz)\vec{u}_z$;
- l'attraction gravitationnelle, dirigée vers le bas, d'expression $-\frac{GM\mu dz}{(R_T + z)^2}\vec{u}_z$;
- et finalement la force d'inertie, dirigée vers le haut, qui vaut $\mu dz\omega^2(R_T + z)\vec{u}_z$.

L'équilibre s'écrit alors en sommant ces forces, puis en divisant par dz , on trouve

$$\frac{dT}{dz} = \frac{GM\mu}{(R_T + z)^2} - \mu\omega^2(R_T + z). \quad (1)$$

On intègre cette équation entre 0 (où la tension s'annule, l'extrémité inférieure de la corde étant libre) et z . On obtient alors

$$T(z) = \mu \left(GM \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z} \right) - \frac{\omega^2}{2} ((R_T + z)^2 - R_T^2) \right). \quad (2)$$

On cherche maintenant à résoudre $T(l) = 0$, qui impose que l'extrémité supérieure de la corde soit libre, tout en restant en équilibre. Ceci nous donne

$$GM \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + l} \right) - \frac{\omega^2}{2} ((R_T + l)^2 - R_T^2) = 0. \quad (3)$$

On multiplie ensuite cette équation par $(R_T + l)$, et on simplifie pour obtenir

$$l^3 + 3R_T l^2 + \left(2R_T^2 - \frac{2GM}{R_T \omega^2} \right) l = 0, \quad (4)$$

où l'on voit évidemment que $l = 0$ est solution. Pour les autres solutions, on divise par l , ce qui donne un trinôme du second degré, que l'on résout simplement pour obtenir

$$l_{\pm} = \frac{-3R_T \pm \sqrt{9R_T^2 - 8\left(R_T^2 - \frac{GM}{R_T \omega^2}\right)}}{2} = \frac{-3R_T \pm \sqrt{9R_T^2 + \frac{8GM}{R_T \omega^2}}}{2}, \quad (5)$$

La dernière forme permet de s'assurer que le discriminant est bien positif, et donc que les deux solutions sont bien réelles. Les solutions sont de signe opposé, ce que l'on peut vérifier avec les coefficients du trinôme, et on ne garde que la solution physique positive

$$l = \sqrt{\frac{R_T^2}{4} + \frac{2GM}{R_T\omega^2}} - \frac{3}{2}R_T. \quad (6)$$

Avec les valeurs $R_T = 3\,700\text{ km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N.m}^{-2}.\text{kg}^2$, $M = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ et $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ rad/s}$, on trouve

$$l \approx 144\,000\text{ km}.$$

C'est donc une très longue corde. On retrouve naturellement que le paramètre μ n'intervient pas, ce qui est classique dans les problèmes de mécanique où le poids n'intervient pas.

Maximum de tension On peut également chercher où se trouve le maximum de tension, ce qui revient à annuler $\frac{dT}{dz}$. On en déduit que

$$\frac{GM}{(R_T + z_m)^2} = \omega^2(R_T + z_m), \quad (7)$$

ce qui se produit à l'altitude

$$z_m = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} - R_T, \quad (8)$$

et l'application numérique donne $z_m \approx 35\,780\text{ km}$. On retrouve comme prévu la valeur de l'orbite géostationnaire.

En remplaçant cette valeur dans l'équation 2, on obtient la valeur du maximum de la tension. L'application numérique donne alors

$$T_{\max} \approx 4,9 \cdot 10^7 \mu. \quad (9)$$

À ce stade, tout dépend encore de la valeur de la masse linéique du câble. Coupons cette difficulté en écrivant que $\mu = \rho S$ où S est la section du câble et ρ sa masse volumique. On peut ainsi déduire de T_{\max} une pression (aussi appelée contrainte) maximale sous la forme

$$p_{\max} = 4,9 \cdot 10^7 \rho, \quad (10)$$

et donc pour un câble en acier ($\rho \approx 8\,000\text{ kg.m}^{-3}$, on a $p_{\max} \approx 400\text{ GPa}$. À quoi comparer la valeur de cette contrainte? On pourrait penser au module d'Young de l'acier, de l'ordre de 100 GPa, mais en réalité l'acier casse bien avant une telle valeur, autour de 1 GPa, au mieux. Une telle contrainte ne serait donc pas supportable avec des câbles standards.

Une première idée pour pallier ce problème serait d'autoriser une section variable, afin d'avoir une contrainte constante p_0 (et faible). Cet exercice simple peut être fait par le lecteur. On trouve qu'à l'altitude géostationnaire, la section doit être maximale (ce qui est attendu), et elle vaut

$$S = S_0 \exp\left(\frac{p_{\max}}{p_0}\right), \quad (11)$$

et si on demande que p_0 ne dépasse pas le GPa, on obtient alors une augmentation de la section du câble d'un facteur $\exp(400)$, ce qui n'est évidemment pas imaginable.

Pour résoudre le problème, il faudrait miser sur des matériaux plus légers (ρ plus faible donc p_{\max} plus faible) et présentant un module d'Young plus grand (donc une valeur de contrainte de rupture plus grande). Ceci pourrait être rendu possible par la nouvelle génération de nanotubes de carbone, matériau léger et très résistant.

Pour conclure, à quoi servirait un tel câble ? À construire un ascenseur spatial ne nécessitant pas de fusée pour chaque voyage. Le lecteur curieux pourra consulter l'article « l'ascenseur spatial » issu du BUP 994 (mai 2017), dont ce corrigé s'inspire en partie.

Exercice 2.6 : Écoulement d'un milieu granulaire - X MP

On considère un réservoir de fusée cylindrique (rayon R , hauteur H) rempli de poudre. La poudre exerce sur les grains en dessous une force verticale par unité de surface P_V , appelée contrainte normale verticale, et elle exerce une force latérale par unité de surface P_H , appelée contrainte normale horizontale. On suppose que $P_H = KP_V$. Les grains frottent sur la paroi ; pour une surface dS , la force exercée par la paroi sur les grains s'écrit $\vec{dT} + \vec{dN}$ avec $dT = \mu dN$ (K et μ sont des coefficients proches de 1).

1. Déterminer P_V en fonction de la hauteur z , en prenant $z = 0$ en bas du réservoir.
2. Quel est l'avantage d'utiliser de la poudre plutôt qu'un carburant liquide ?

Il s'agit d'un problème plutôt court, posé en fin d'oral, qui illustre la différence entre un milieu granulaire et un fluide. Ici, cette différence s'illustre par la loi reliant les contraintes normales et tangentielles exercées sur les grains, analogues aux lois de Coulomb pour des solides. Toutefois, le raisonnement que nous allons présenter est proche de celui qui permet d'établir les équations de la statique des fluides.

Considérons ainsi une tranche du cylindre située entre z et $z + dz$. Dans la suite, nous noterons la masse volumique apparente des grains ρ . Les forces exercées sur le système sont :

- la gravité qui exerce la force $\rho g \pi R^2 dz \vec{u}_z$;
- la force exercée par les grains au dessus qui est $\pi R^2 P_V(z) \vec{u}_z$;
- la force exercée par les grains en dessous qui est $-\pi R^2 P_V(z + dz) \vec{u}_z$;
- reste la force exercée par la paroi. Nous ne sommes intéressés que par la composante verticale de cette force. Puisqu'il n'y pas de mouvements horizontaux, on a $dN = P_H$ le long de la paroi. Ainsi, la force verticale par unité de surface exercée par la paroi sur les grains est $\vec{\tau} = -\mu P_H \vec{u}_z$, et en utilisant l'hypothèse reliant les contraintes verticales et horizontales, on a $\vec{\tau} = -\mu K P_V \vec{u}_z$. La force verticale totale exercée par la paroi sur le système est donc $\vec{T} = -2\pi R dz \mu K P_V \vec{u}_z$.

Ainsi, l'équilibre des forces sur le système s'écrit

$$\pi R^2 (P_V(z) - P_V(z + dz)) + \rho g \pi R^2 dz - 2\pi R dz \mu K P_V = 0, \quad (1)$$

et en faisant tendre dz vers 0, on obtient l'équation différentielle qui régit le comportement de P_V

$$\begin{aligned} \pi R^2 \frac{dP_V}{dz} + 2\pi R \mu K P_V &= \rho g \pi R^2 \\ \Rightarrow \frac{dP_V}{dz} + \frac{2\mu K}{R} P_V &= \rho g. \end{aligned} \quad (2)$$

On voit apparaître une longueur caractéristique $\delta = \frac{R}{2\mu K}$, qui est du même ordre de grandeur que R . De plus, la résolution de l'équation est immédiate, et on trouve

$$P_V = \rho g \delta \left(1 - \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \right). \quad (3)$$

Il existe ainsi deux comportements bien distincts :

- si $z \ll \delta$, un développement limité nous donne $P_V = \rho g z$, ce qui correspond au résultat hydrostatique pour un fluide classique ;

- en revanche, si $z \gg \delta$, la pression sature et devient constante $P_V = \rho g \delta$. Physiquement, cela signifie qu'une fois que l'on a dépassé la longueur δ , le poids n'est plus transmis à la verticale comme dans un fluide, mais des forces horizontales répartissent cet effort vers les parois, ce qui conduit à une pression verticale constante.

Cette saturation permet de répondre à la question suivante, et est même observable dans la vie courante. En effet, on peut remarquer que la vitesse d'écoulement d'un sablier est constante, au contraire d'une clepsydre où l'écoulement du fluide se fait de manière non-linéaire. Ceci s'explique par le fait que la pression à l'endroit où le matériau granulaire s'écoule ne va pas dépendre de la hauteur de grains au-dessus d'elle, mais plutôt du diamètre du trou lui-même (tant que la hauteur de grains est grande devant ce diamètre). Ainsi, dans le cas de la fusée, ceci permet d'avoir un débit de carburant constant, et donc une poussée elle aussi constante.

Exercice 2.7 : Casse d'une cheminée - X MP

On dynamite la base d'une cheminée d'usine cylindrique. On observe que lors de sa chute, elle peut se casser à un endroit bien particulier. Déterminer le lieu le plus probable de casse.

Données : Moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur l par rapport à une de ses extrémités $J = \frac{ml^2}{3}$.

Il s'agit d'un exercice relativement classique au concours de Polytechnique. Afin d'étudier la rupture d'un matériau, notion qui n'est pas au programme en CPGE, l'idée est de modéliser les efforts intérieurs le long de la cheminée. L'endroit où la casse se produit est celui où les forces ou les moments sont les plus grands. Afin de calculer les actions mécaniques intérieures, la méthode générale consiste à étudier une portion infinitésimale du système considéré, à la manière d'une portion de corde vibrante. On peut également, en un point donné de la cheminée, s'intéresser aux actions mécaniques de la partie supérieure sur la partie inférieure, en étudiant directement la partie inférieure. La première méthode va donner une équation différentielle sur les actions mécaniques intérieures, tandis que la seconde va donner leurs expressions directement. Dans une optique de clarté, nous choisissons cette seconde méthode.



Quelques pistes...

1. Commencer par étudier le mouvement de la cheminée en supposant qu'elle ne casse pas. En déduire l'expression des forces qui s'appliquent à sa base.
2. Considérer alors la portion de la cheminée comprise entre sa base et un point A quelconque. En toute généralité, comment modéliser l'action mécanique de la partie supérieure de la cheminée sur la portion précédente ?
3. Appliquer les théorèmes de la mécanique pour trouver l'expression des forces et du moment de l'action mécanique précédente. En déduire le point de rupture, correspondant au maximum du moment, et le point d'effritement, correspondant au maximum de la force de cisaillement, c'est-à-dire la composante perpendiculaire à la cheminée des forces intérieures.

1. Commençons par étudier le mouvement d'une barre verticale attachée au point O dans le champ de gravité \vec{g} . Nous définissons l'axe z vertical ascendant, et choisissons comme coordonnée l'angle θ entre la barre et cet axe. Nous représentons la situation dans le schéma 2.10.

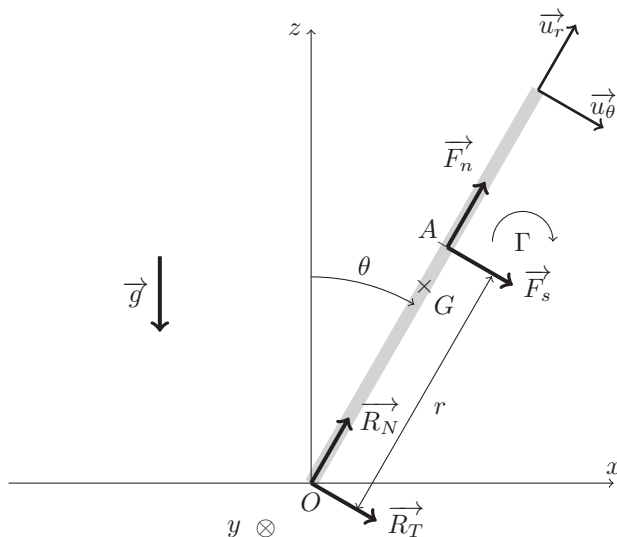


FIGURE 2.10. Barre verticale chutant dans le champ de gravité, et représentation des efforts internes en un point A de la barre.

Afin de trouver une équation du mouvement, le plus simple est d'utiliser le théorème du moment cinétique. La cheminée est soumise à son poids \vec{P} , appliqué au centre de masse G tel que $OG = \frac{l}{2}$, et à la réaction du sol \vec{R} appliquée en O , que l'on décompose en une composante normale \vec{R}_N et une composante tangentielle \vec{R}_T . Le moment en O de la réaction du support est nul, puisque la force s'applique en ce point, et le moment du poids se calcule facilement

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mg \frac{l}{2} \sin \theta \vec{u}_y. \quad (1)$$

Le moment cinétique par rapport à O de la barre est $J\dot{\theta}\vec{u}_y$, de telle sorte que le théorème du moment cinétique par rapport à Oy donne

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - mg \frac{l}{2} \sin \theta = 0. \quad (2)$$

La situation étant instable, on s'attendait bien à retrouver le signe négatif devant le second terme. En simplifiant, on peut obtenir

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta. \quad (3)$$

De plus, on peut intégrer l'équation (2) en la multipliant par $\dot{\theta}$ (et utiliser la condition initiale $\dot{\theta} = 0$ pour $\theta = 0$), pour obtenir

$$\frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mgl}{2} \cos \theta = \frac{mgl}{2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} (1 - \cos \theta). \quad (4)$$

On retrouve alors l'équation de conservation de l'énergie mécanique, ce qui signifie que la réaction du support ne travaille pas. On parle alors de liaison parfaite.

Dans le repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, l'accélération du centre d'inertie de la barre s'exprime

$$\vec{a}_G = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad (5)$$

puisque G a un mouvement circulaire du rayon $\frac{l}{2}$ autour de O . De plus, on décompose $\vec{g} = -g \cos \theta \vec{u}_r + g \sin \theta \vec{u}_\theta$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la barre

donne alors

$$\begin{cases} -m\frac{l}{2}\ddot{\theta}^2 = R_N - mg \cos \theta, \\ m\frac{l}{2}\ddot{\theta} = R_T + mg \sin \theta. \end{cases} \quad (6)$$

En remplaçant avec les valeurs de $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ trouvées précédemment, on trouve

$$\begin{cases} R_N = \frac{5}{2}mg \cos \theta - \frac{3}{2}mg, \\ R_T = -\frac{1}{4}mg \sin \theta. \end{cases} \quad (7)$$

2. Considérons à présent la partie de la cheminée comprise entre un point A quelconque, situé à une distance r (fixe) du centre et le point O . Grâce au raisonnement précédent, on connaît l'expression des forces qui s'appliquent sur le pied de la portion de cheminée étudiée. Reste maintenant à modéliser l'action mécanique de la partie supérieure, située entre A et le sommet de la cheminée, sur la partie inférieure. En toute généralité, cette action mécanique est composée d'une force \vec{F} et d'un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_y$. On décompose la force \vec{F} en une composante $\vec{F}_n = F_n \vec{u}_r$ dans l'axe de la cheminée, appelée contrainte normale, et une composante perpendiculaire $\vec{F}_s = F_s \vec{u}_\theta$, appelée contrainte de cisaillement.

3. Dans la suite, nous allons chercher les expressions des forces grâce aux lois de Newton, et du moment grâce au théorème du moment cinétique. Le système OA , en supposant la barre homogène, a une masse $m_A = \frac{r}{l}m$ et son centre d'inertie est situé en $\frac{r}{2}$. Les forces qui s'appliquent sur cette partie sont $\vec{F} = F_n \vec{u}_r + F_s \vec{u}_s$, la réaction du support $\vec{R} = R_N \vec{u}_r$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cette portion (attention, ici r est fixé) donne

$$\begin{cases} -m_A \frac{r}{2} \ddot{\theta}^2 = R_N - m_{Ag} \cos \theta + F_n, \\ m_A \frac{r}{2} \ddot{\theta} = R_T + m_{Ag} \sin \theta + F_s, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m \frac{r}{l} \frac{r}{2} \ddot{\theta}^2 = R_N - m \frac{r}{l} g \cos \theta + F_n, \\ m \frac{r}{l} \frac{r}{2} \ddot{\theta} = R_T + m \frac{r}{l} g \sin \theta + F_s. \end{cases} \quad (8)$$

En remplaçant par les expressions précédemment trouvées de $\dot{\theta}^2$, $\ddot{\theta}$, R_N et R_T , on trouve

$$\begin{aligned} F_s &= m \frac{r^2}{2l} \frac{3g}{2} \sin \theta + \frac{1}{4}mg \sin \theta - m \frac{r}{l} g \sin \theta \\ &= mg \sin \theta \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{l} + \frac{3}{4} \frac{r^2}{l^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

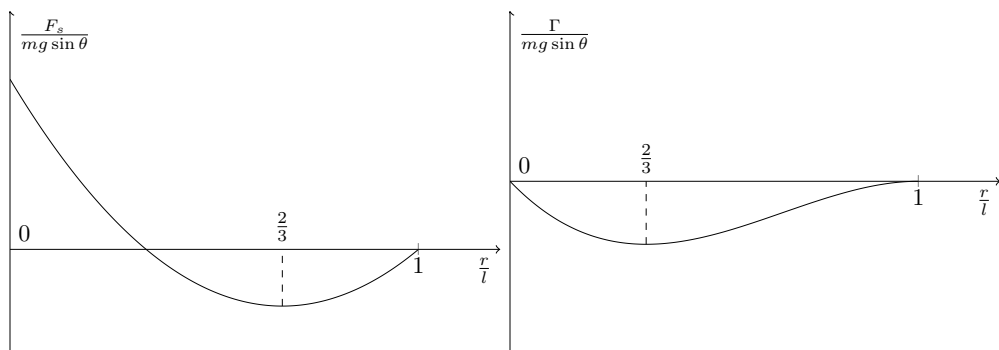
À ce stade, on peut déjà faire un commentaire physique. Si la cheminée s'effrite, c'est au point où F_s est maximale. On peut facilement se convaincre que $F_s(r=0) = \frac{mg \sin \theta}{4}$, $F_s(r=l) = 0$, et que f' s'annule en $r = \frac{2l}{3}$. Le graphe de la fonction F_s est donné dans la figure 2.11. Ainsi, l'effort de cisaillement est le plus important à la base, et c'est donc en ce point qu'un éventuel effritement se produirait.

Passons à présent à l'application du théorème du moment cinétique par rapport à Oy à la portion OA de la barre. Son moment d'inertie est $J_{OA} = \frac{m_A r^2}{3} = m \frac{r^3}{3l}$. Comme précédemment, le moment de la réaction du support est nul en O . Le moment du poids sur l'axe OA se calcule de la même manière que pour la barre complète, et on trouve

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{OA}) = m \frac{r}{l} g \frac{r}{2} \sin \theta \vec{u}_y. \quad (10)$$

Le moment de la force \vec{F} se résume au moment de \vec{F}_s , puisque \vec{F}_n est parallèle à l'axe OA . On a alors facilement

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_s) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_s = r F_s \vec{u}_y. \quad (11)$$

FIGURE 2.11. Allure des fonctions F_s et Γ .

Le théorème du moment cinétique par rapport à Oy donne alors

$$m \frac{r^3}{3l} \ddot{\theta} = mg \frac{r^2}{2l} \sin \theta + r F_s + \Gamma. \quad (12)$$

On peut finalement isoler Γ , et en remplaçant $\ddot{\theta}$ et F_s par leurs expressions, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma &= mg \sin \theta \left(\frac{1}{2} \frac{r^3}{l^2} - \frac{r^2}{2l} - \frac{1}{4} r + \frac{r^2}{l} - \frac{3}{4} \frac{r^3}{l^2} \right) \\ &= -\frac{mg \sin \theta l}{4} \frac{r}{l} \left(1 - \frac{r}{l} \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Afin de trouver le point de rupture, il nous faut donc maximiser la fonction $f : x \mapsto x(1-x)^2$. On a facilement

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad (14)$$

que l'on peut factoriser sous la forme $f'(x) = (3x-1)(x-1)$. Les extrema de f sont en $x = \frac{1}{3}$ et en $x = 1$. On peut facilement prouver que la première solution est un maximum en norme, et donc le couple est maximal en $r = \frac{l}{3}$. L'allure de Γ est donné dans la figure 2.11. En conclusion, la cheminée a donc une probabilité maximale de se casser au tiers de sa hauteur.

De cet exercice, on retiendra la méthode permettant de modéliser les efforts internes dans un solide. Généralement, on ne peut résumer ces efforts à une force ou un couple, mais on doit considérer les deux en même temps. L'utilisation couplée des théorèmes de la mécanique au système global et à une portion de ce système, souvent infinitésimale, permet parfois de déterminer l'expression des grandeurs mécaniques. Les points de rupture sont alors donnés par les maxima de ces forces et couples.

Exercice 2.8 : Rotation synchrone de la Lune - Ulm PC

Pourquoi observe-t-on toujours la même face de la Lune depuis la Terre ?

La réponse naïve (mais vraie) à cette question est que les périodes de révolution de la Lune autour de la Terre et de rotation de la Lune sont égales. En effet, toutes deux valent 27,321582 jours. Vu la précision très grande de cette égalité, il semble clair que ce phénomène n'est pas un heureux hasard. Reste à en comprendre l'origine.

Une piste est fournie par le nom anglais du phénomène : *tidal locking*, littéralement « verrouillage par effet de marée ». Il va donc falloir chercher du côté des phénomènes de marées pour comprendre ce qu'il se passe. On connaît bien l'influence du champ de marée sur la Terre, puisqu'il est la cause du phénomène du même nom sur les océans. Mais si la Lune déforme la Terre, l'inverse doit être également vrai. La Lune présente en effet deux renflements

opposés dans l'axe Terre-Lune, d'une dizaine de mètres environ. C'est en s'intéressant aux forces qui s'appliquent à ces bourrelets que l'on va pouvoir comprendre le mécanisme de stabilisation qui fait que la Lune nous présente toujours la même face.



Quelques pistes...

1. Expliquer qualitativement le phénomène.
2. Calculer l'expression du champ de marée.
3. En supposant que la Lune est entièrement liquide, trouver comment le champ de marée modifie l'équation de la surface libre.
4. Quelle est la dynamique de cette surface dans le champ de marée ? Peut-on calculer un couple résultant ?
5. En déduire un temps typique de synchronisation de la Lune et de la Terre. Commenter et conclure.

1. On sait que les marées résultent d'un effet différentiel : le champ de marée s'écrit localement comme la différence entre le champ de gravitation au point considéré et celui au centre de la planète référentiel. Ces effets produisent un étirement dans le sens de l'axe Terre-Lune et une contraction dans la direction perpendiculaire.

Supposons qu'à un instant, le verrouillage soit réalisé. La Lune présente toujours la même face à la Terre, autrement dit la figure des effets de marées reste, dans le référentiel lunaire, statique. Considérant grossièrement la Lune comme une boule fluide, une légère dénivellation positive va se former le long de l'axe Terre-Lune, alors qu'une dénivellation négative se fera sentir perpendiculairement. Schématiquement, on peut penser qu'on passe d'un cercle de rayon R à une ellipse d'axes $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$, avec bien sûr $\varepsilon \ll R$. Si la situation reste symétrique (pas de mouvement de la dénivellation dans le référentiel lunaire), le couple des forces de marées sur la Lune s'annule, puisque la résultante de ces forces sur chaque renflement est dirigée selon l'axe Terre-Lune. Cette situation correspond à la figure 2.12.

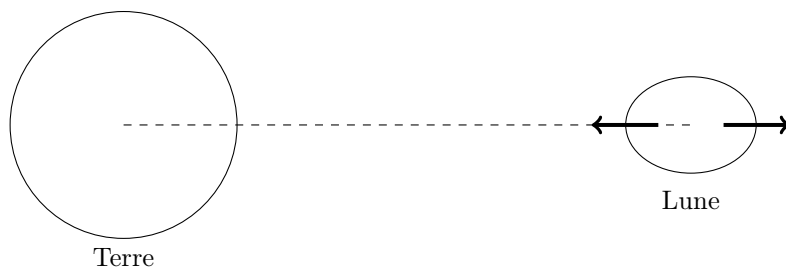


FIGURE 2.12. Cas symétrique par rapport à l'axe Terre-Lune. Le couple résultant des forces de marée est nul.

Cependant, imaginons un instant que la rotation de la Lune soit un peu en avance ou en retard sur la révolution. Dans ce cas, le bourrelet se déplace dans le référentiel lunaire. Capturons un instant t où le bourrelet n'est pas aligné avec l'axe Terre-Lune. On peut se convaincre assez facilement que le couple résultant sera cette fois-ci non nul, même si à ce stade purement qualitatif, rien ne permet de déterminer s'il tendra à diminuer le décalage fréquentiel ou à l'accentuer. Cette situation correspond au schéma 2.13.

2. Calculons à présent le champ de marée. Cette première étape du raisonnement constitue un exercice de cours relativement standard, même si pas directement exigible. Le champ de

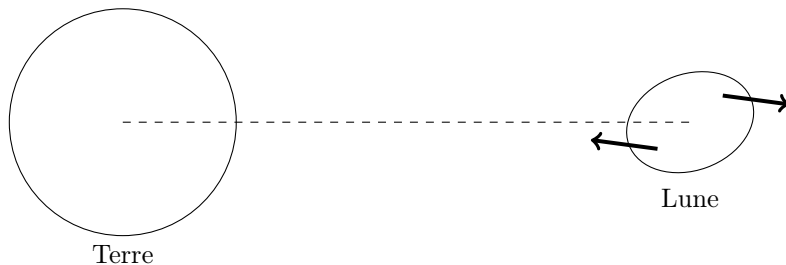


FIGURE 2.13. Cas asymétrique par rapport à l'axe Terre-Lune. Cette fois, le couple résultant des forces de marée est non nul, et il tend à ramener les renflements dans l'axe.

marée, tel que $\vec{F}_{\text{mar}} = m\vec{C}$, est donné par

$$\vec{C}(M) = \vec{G}(M) - \vec{G}(O) \quad (1)$$

où O est le barycentre de la planète où l'on calcule les effets de marées. Calculons ainsi pour un point M à l'intérieur de la Lune

$$\vec{C}(M) = -GM_T \left(\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TL}}{TL^3} \right). \quad (2)$$

Afin d'obtenir une expression exploitable, on développe $\frac{1}{TM^3}$

$$TM^{-3} = ((\vec{TL} + \vec{LM})^2)^{-3/2} = (TL^2 + LM^2 + 2\vec{TL} \cdot \vec{LM})^{-3/2}. \quad (3)$$

En notant $TL = d_L$, on peut effectuer un développement limité au premier ordre en $\frac{LM}{TL}$. Ceci est largement justifié vu l'ordre de grandeur du diamètre de la Lune de l'ordre de 3 500 km comparé à la distance Terre-Lune, de l'ordre de 384 000 km. On obtient

$$TM^{-3} \approx \frac{1}{d_L^3} \left(1 - 3 \frac{\vec{TL} \cdot \vec{LM}}{d_L^2} \right). \quad (4)$$

Et finalement, en écrivant $\vec{TM} = \vec{TL} + \vec{LM}$ et en développant au premier ordre en $\frac{LM}{TL}$, on obtient

$$\vec{C}(M) = \frac{GM_T}{d_L^3} \left(\frac{3(\vec{TL} \cdot \vec{LM})\vec{TL}}{d_L^2} - \vec{LM} \right). \quad (5)$$

Il s'agit d'un résultat intrinsèque qui ne dépend pas du système de coordonnées. On va tout de suite le particulariser à des coordonnées sphériques qui nous seront utiles par la suite. Appelons r la distance LM et φ l'angle (\vec{TL}, \vec{LM}') , où M' est le projeté orthogonal du point M dans le plan perpendiculaire au vecteur rotation de la Lune passant par L . L'angle θ est celui entre l'axe de rotation de la Lune (supposé ici perpendiculaire au plan de révolution pour plus de simplicité) et le vecteur \vec{LM} . On peut alors exprimer les vecteurs utiles dans la base sphérique, sous la forme

$$\vec{LM} = r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{TL} = d_L\vec{u}_x. \quad (6)$$

Il est donc nécessaire d'exprimer \vec{u}_x dans la base sphérique. On peut espérer un peu de bienveillance de l'examineur, ou alors bien connaître ses formules de changement de repère. Quoi qu'il en soit, on a

$$\vec{u}_x = \cos \varphi \sin \theta \vec{u}_r + \cos \varphi \cos \theta \vec{u}_\theta - \sin \varphi \vec{u}_\varphi. \quad (7)$$

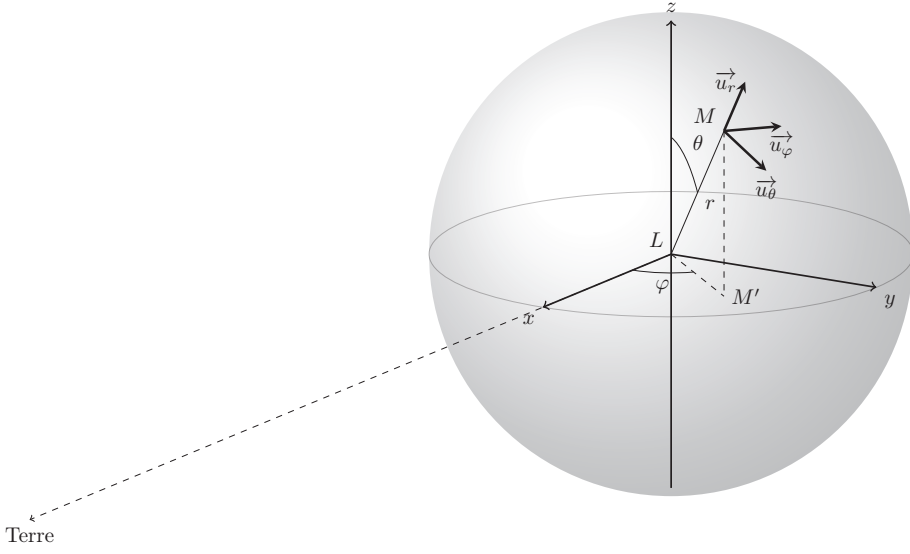


FIGURE 2.14. Coordonnées sphériques utilisées pour décrire les forces de marées et la géométrie de la Lune.

Ainsi, dans la base, on a $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$,

$$\vec{TL} = \begin{pmatrix} d_L \cos \varphi \sin \theta \\ d_L \cos \varphi \cos \theta \\ -d_L \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Effectuant les produits scalaires, on obtient pour le champ de marée

$$\vec{C}(M) = \frac{3GM_T r}{d_L^3} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1 \\ \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ -\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Enfin, on peut associer à la force de marée $\vec{F} = m\vec{C}$ un potentiel V tel que $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. Il est assez simple de vérifier que celui-ci vaut

$$V(r, \theta, \varphi) = -\frac{GMmr^2}{2d_L^3}(3\cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1). \quad (10)$$

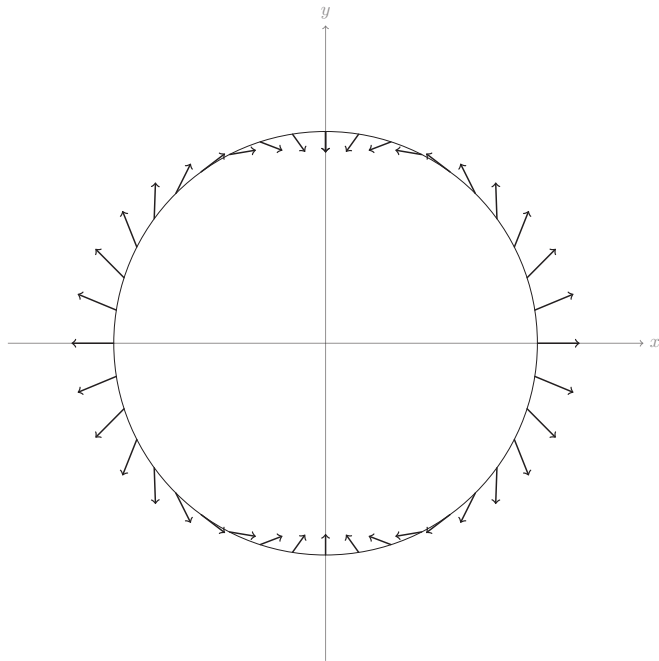
3. On va maintenant établir les déformations subies par la Lune sous l'effet du champ de marée. Afin de simplifier les calculs, on va supposer que la planète est un volume de liquide de masse M_L , considéré comme statique à l'échelle de temps de l'étude. Pour un élément de fluide situé en (r, θ, φ) , le principe fondamental de la statique des fluides conduit à la relation

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{f}_g + \vec{f}_m, \quad (11)$$

où \vec{f}_g, \vec{f}_m sont respectivement les forces volumiques liées à la gravitation et aux marées. Écrivons par ailleurs que ces forces dérivent des potentiels volumiques u_g et u_m , on trouve

$$\vec{\text{grad}}(P + u_g + u_m) = \vec{0}. \quad (12)$$

Cette quantité $P + u_g + u_m$, analogue à la charge du théorème de Bernoulli, est donc constante dans tout le volume de fluide. On va s'en servir pour chercher à déterminer l'équation de la surface libre.

FIGURE 2.15. Champ de marées dans le plan $\varphi = 0$

Il faut tout d'abord déterminer la forme du potentiel gravitationnel. Une erreur à ne pas commettre ici est de se servir de l'expression du potentiel newtonien, qui n'est valable qu'à l'extérieur de la distribution de masse.

On va donc devoir calculer le potentiel gravitationnel à l'intérieur de la distribution de masse. À ce moment, on est contraint d'effectuer un premier niveau d'approximation en supposant que la forme sphérique de la planète à l'équilibre est peu modifiée par la présence du potentiel de marée. On conserve donc la symétrie sphérique (sphère de rayon R_L), et l'analyse habituelle des symétries et invariances permet d'écrire le champ de gravité $\vec{G} = G(r)\vec{u}_r$. Ainsi, écrivons le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r pour un point à une distance r du centre de la planète. On note ρ la masse volumique de la planète. On obtient

$$\iint \mathcal{G}(r) d^3r = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (13)$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r. \quad (14)$$

En écrivant $\rho = \frac{M_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^3}$, on obtient finalement $\mathcal{G}(r) = -\frac{GM_L}{R_L^3}r$. On en déduit le potentiel gravitationnel tel que sous la forme $-\overrightarrow{\text{grad}} u_g = \rho \mathcal{G}(r)$

$$u_g = \frac{\rho GM_L}{2R_L^3} r^2. \quad (15)$$

Ainsi, la quantité conservée s'écrit

$$p(r, \theta, \varphi) + \frac{\rho GM_L}{2R_L^3} r^2 - \frac{\rho GM_T}{2d_L^3} r^2 (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1) = \text{cste} = p(r=0). \quad (16)$$

Supposons qu'on impose en $r = 0$ une pression au centre p_c très grande devant p_0 , pression à la surface. Notons $\Delta p = p_c - p_0$. L'équation de la surface libre s'écrit alors

$$\alpha r^2 - \beta r^2(3 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1) = \Delta p, \quad (17)$$

avec $\alpha = \frac{\rho G M_L}{2 R_L^3}$ et $\beta = \frac{\rho G M_T}{2 d_L^3}$. Notons tout de suite que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{d_L}{R_L} \right)^3 \approx 133\,000$. L'effet en potentiel des marées est donc 133 000 fois plus faible que celui de la gravitation, ce qui va permettre de le considérer comme une petite perturbation.

Nous pouvons écrire l'équation dans une base cartésienne en notant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = x^2$, d'où

$$(\alpha + \beta)(x^2 + y^2 + z^2) - 3\beta x^2 = \Delta p, \quad (18)$$

que l'on réécrit

$$\frac{x^2}{\frac{\Delta p}{\alpha - 2\beta}} + \frac{y^2 + z^2}{\frac{\Delta p}{\alpha + \beta}} = 1. \quad (19)$$

Il s'agit de l'équation d'un ellipsoïde de grand axe $a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\alpha - 2\beta}}$ selon (Ox) et de petits axes $b = c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\alpha + \beta}}$ selon (Oy) et (Oz). Un développement limité nous donne que la différence $a - b$ vaut

$$a - b = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Delta p}{\alpha}} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{2} \sqrt{\Delta p} \frac{M_T}{M_L} \left(\frac{R_L}{d_L} \right)^3 \sqrt{\frac{2 R_L^3}{\rho G M_L}}, \quad (20)$$

qui est une quantité du premier ordre en β/α , donc *a priori* faible, ce qui était prévisible.

Afin d'évaluer Δp , on peut faire l'hypothèse que la pression au centre à la même valeur que celle sans le potentiel de marée (dont l'effet est, rappelons-le, très petit). Dans ce cas, en demandant qu'à la surface la pression soit p_0 , on a

$$p_0 + \frac{\rho G M_L}{2 R_L^3} R_L^2 = p_c \Rightarrow \Delta p = \frac{\rho G M_L}{2 R_L} = \alpha R_L^2. \quad (21)$$

Ainsi en remplaçant dans l'expression précédente, il vient

$$\frac{a - b}{R_L} = \frac{3}{2} \frac{M_T}{M_L} \left(\frac{R_L}{d_L} \right)^3 \approx 1/89000. \quad (22)$$

Le rayon lunaire étant d'environ 1 700 km, on peut donc estimer que dans le cas liquide, la force de marée créerait un différentiel d'environ une dizaine de mètres entre son grand axe et ses petits axes. Ces valeurs sont proches de celles trouvées dans la littérature.

Nous sommes donc en présence d'une ellipsoïde de grand axe $a = R_L + \frac{\beta}{\alpha}$ et de petits axes $b = R_L - \frac{\beta}{2\alpha}$. On peut calculer que le volume de la planète est bien conservé jusqu'à l'ordre 2 en β/α .

4. On peut à présent calculer le couple des forces gravitationnelles de la Terre qui s'exercent sur le bourrelet. Mais auparavant, un léger préambule est nécessaire.

Si tout se passe instantanément, la dénivellation positive restera toujours dans l'axe Terre-Lune (autrement dit, le grand axe de l'ellipsoïde sera toujours l'axe Terre-Lune). Dans notre modèle trop simpliste, le fluide se réorganise « rapidement » et suit donc les variations du potentiel de marée, même s'il n'y a pas synchronisation entre période de rotation et de révolution. En réalité, la roche lunaire va mettre un certain temps à réagir aux forces de marées, en raison de la rigidité de la matière solide.

Nous ne nous proposons pas ici d'évaluer ce temps, mais de prendre pour acquis qu'il faut un certains temps typique τ_R à la matière pour se réorganiser.

Supposons maintenant que la Lune tourne plus vite sur elle-même qu'elle ne tourne autour de la Terre. Appelons $\Delta\omega = \omega_{\text{rot}} - \omega_{\text{rev}} > 0$ cet asynchronisme. Nous supposons que τ_R est

petit devant $1/\Delta\omega$, ce qui signifie qu'à l'échelle de temps du mouvement de la Lune, la matière n'a pas le temps de se réorganiser. Ainsi, au bout d'un temps τ , on voit que dans le référentiel lunaire le grand axe de l'ellipsoïde fait un angle $\varphi = \tau\Delta\omega$ avec l'axe (Ox).

Nous allons garder les axes tels que définis au début du problème. L'ellipsoïde est la courbe d'équation

$$r = \frac{R_L}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - 3\cos^2(\varphi - \varphi_d)\sin^2\theta)}}, \quad (23)$$

où l'on a utilisé la valeur $\Delta p = \alpha R_L^2$ trouvée précédemment. La transformation $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi_d$ permettant de prendre en compte le fait que l'ellipsoïde n'est pas aligné avec l'axe Terre-Lune dû au retard.

Le calcul du couple de marée se fait par rapport à l'axe \vec{u}_z de rotation de la Lune. Il s'écrit

$$\vec{\Gamma}_m = \iiint \vec{LM} \wedge \vec{f}_m d\tau, \quad (24)$$

avec $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. On a alors

$$\vec{LM} = r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{f}_m = \frac{\rho G M_T r}{d_L^3} \begin{pmatrix} 3\cos^2\varphi \sin^2\theta - 1 \\ 3\cos^2\varphi \sin\theta \cos\theta \\ -3\cos\varphi \sin\varphi \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (25)$$

On peut alors facilement calculer

$$\vec{LM} \wedge \vec{f}_m = \frac{\rho G M_T r^2}{d_L^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \sin\varphi \sin\theta \\ 3\cos^2\varphi \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

On va réécrire cette expression en coordonnées cartésiennes, sachant que l'on a le changement de base suivant (on espère encore la bienveillance de l'examineur!)

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}. \quad (27)$$

ce qui permet de réécrire, dans la $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,

$$\vec{LM} \wedge \vec{f}_m = \frac{\rho G M_T r^2}{d_L^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta + 3\cos^3\varphi \sin\theta \cos\theta \\ -3\cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Après intégration, la partie selon \vec{u}_y est nulle, puisque les intégrales, en particulier celle sur φ , se font sur des fonctions impaires. Nous commenterons cette assertion dans les remarques finales. Attachons-nous donc à démontrer que la contribution selon \vec{u}_z ne l'est pas.

$$\Gamma_{m,z} = -\frac{3\rho G M_T}{d_L^3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=r(\theta,\varphi)} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta dr d\theta d\varphi. \quad (29)$$

La première intégrale, selon r , ne pose pas de souci, et on trouve

$$\Gamma_{m,z} = -\frac{3\rho G M_T R_L^5}{5d_L^3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - 3\sin^2\theta \cos^2(\varphi - \varphi_d))\right)^{5/2}} d\theta d\varphi. \quad (30)$$

Il est bien entendu hors de question de calculer cette intégrale bien trop complexe. On tire parti du fait que $\frac{\beta}{\alpha}$ est petit pour développer le dénominateur. On obtient

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - 3\sin^2\theta \cos^2(\varphi - \varphi_d))\right)^{-5/2} = 1 - \frac{5}{2}\frac{\beta}{\alpha}(1 - 3\sin^2\theta \cos^2(\varphi - \varphi_d)). \quad (31)$$

De cette expression, on peut oublier les termes constants. En effet, le numérateur de l'intégrale précédente contient une expression impaire en φ qui donnera une contribution nulle après intégration. Il reste donc

$$\Gamma_{m,z} = -\frac{9\rho G M_T R_L^5}{2d_L^3} \frac{\beta}{\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos \varphi \sin \varphi \cos^2(\varphi - \varphi_d) \sin^5 \theta d\theta d\varphi. \quad (32)$$

L'intégrale sur θ peut être linéarisée et donne un facteur proche de l'unité¹, $\frac{16}{15}$. L'intégrale sur φ requiert quelques manipulations de trigonométrie,

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin \varphi \cos^2(\varphi - \varphi_d) &= \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \frac{1 + \cos(2(\varphi - \varphi_d))}{2} \\ &= \frac{\sin(2\varphi)}{4} + \frac{\sin(4\varphi - 2\varphi_d)}{8} + \frac{\sin(2\varphi_d)}{8}. \end{aligned} \quad (33)$$

Le premier terme est impair et donne une contribution nulle après intégration, de même pour le second qui s'annule par imparité et périodicité de la fonction sinus. Le dernier terme est une contribution constante qui s'intègre en $\frac{\pi}{4} \sin(2\varphi_d)$. Le résultat final est donc, après expression de toutes les grandeurs,

$$\Gamma_{m,z} = -\frac{6\pi}{5} \frac{\rho G M_T^2 R_L^8}{M_L d_L^6} \sin(2\varphi_d), \quad (34)$$

que l'on peut légèrement réarranger (via $\frac{4}{3}\pi\rho R_L^3 = M_L$) pour obtenir

$$\Gamma_{m,z} = -\frac{9}{10} \frac{G M_T^2 R_L^5}{d_L^6} \sin(2\varphi_d). \quad (35)$$

Remarquons tout d'abord que le signe est le bon : si φ_d est positif, l'avance de la rotation de la Lune sur sa révolution entraînera le bourrelet dans le sens trigonométrique (dans le référentiel lunaire), ce qui est combattu par le couple qui tend à ramener le bourrelet dans l'autre sens en ralentissant la rotation. Par imparité du sinus, c'est l'opposé qui se passe si φ_d est négatif : dans ce cas, le couple tend à accélérer la rotation lunaire. Et enfin, lorsque la rotation est synchrone, le couple s'annule ! Physiquement, cette dépendance en $\sin(2\varphi_d)$ est donc cohérente.

On peut vérifier tout de suite que l'intégration sur θ du moment selon \vec{u}_y s'annule bien, car seulement des fonctions impaires y sont présentes. Le seul effet des forces de marées est donc bel et bien un moment selon \vec{u}_z .

5. Enfin, on peut extraire un temps typique pour que la synchronisation se fasse. En effet, l'écriture du théorème du moment cinétique appliqué à la Lune (de moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) $J_L = \frac{2}{5} M_L R_L^2$) s'écrit

$$J_L \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{m,z}, \quad (36)$$

On peut extraire un temps typique

$$\tau \approx \frac{J\omega}{\Gamma}, \quad (37)$$

et après simplification, on obtient

$$\tau = \frac{J\omega d_L^6}{G M_T^2 R_L^5}. \quad (38)$$

On peut le calculer avec des paramètres actuels, et en faisant l'hypothèse que la Lune tournait bien plus vite autrefois (allant jusqu'à un jour de rotation, soit environ 10^{-5} rad/s. On

1. cette remarque indiquant que le jour J, même si l'examinateur ne la donne pas, on peut négliger d'évaluer une intégrale trop complexe si l'on estime que son influence sur le résultat est sans importance, comme c'est le cas ici.

trouve un temps typique de 10^9 s, soit une trentaine d'années. Ce chiffre n'est bien sûr pas à prendre au pied de la lettre (la dépendance en d_L^6 prouvant notamment qu'une méconnaissance telle que la nôtre de cette distance, qui a grandement évolué, peut se répercuter fortement sur le temps de synchronisation), mais il montre que sur une période de temps « correcte », il était raisonnable de parier que la Terre et la Lune se synchroniseraient.

Afin d'expliquer cette différence et de rendre notre modèle plus réaliste, il aurait fallu tenir compte du temps de réorganisation de la matière, qui tend à diminuer l'angle entre l'axe Terre-Lune et le grand axe de l'ellipsoïde précédent. Ceci a pour effet de diminuer le couple précédemment calculé, et donc augmenter le temps de synchronisation. La modélisation d'un tel phénomène est très complexe, et nous nous contenterons d'admettre qu'en tenir compte a pour effet de multiplier τ d'un facteur numérique, de l'ordre de 1 000 dans le cas de la Lune. On obtient un temps de synchronisation de l'ordre de 10^4 à 10^5 ans, ce qui semble plus raisonnable.

Finalement, l'application d'un calcul analogue au système Terre-Soleil donne un temps typique bien plus long, de l'ordre de la centaine de milliard d'années, encore une fois certainement sous-estimé. La Terre n'est donc pas près de se synchroniser avec le Soleil, ce qui est heureux pour le maintien des alternances du jour et de la nuit, des saisons, et donc de la vie.

Ondes mécaniques

Exercice 3.1 : Corde vibrante verticale - X MP - Lyon/Cachan PC

On considère une corde verticale de longueur l et de masse m , attachée à l'origine. À son extrémité libre, on attache une masse $M \gg m$. La corde est non rigide, et on suppose que la tension exercée sur la masse est constante en norme. On bouge légèrement la masse horizontalement. Calculer les fréquences des modes propres de la corde.

Complément (Oral Lyon Cachan PC) : on considère une corde de longueur L et de masse m dans le champ de pesanteur terrestre. Il n'y a plus de masse à l'extrémité inférieure.

1. Déterminer le temps nécessaire pour qu'une perturbation se propage du haut au bas de la corde.
2. Trouver l'équivalent du vecteur de Poynting, et en déduire comment varie l'amplitude d'une impulsion triangulaire envoyée depuis le haut de la corde.

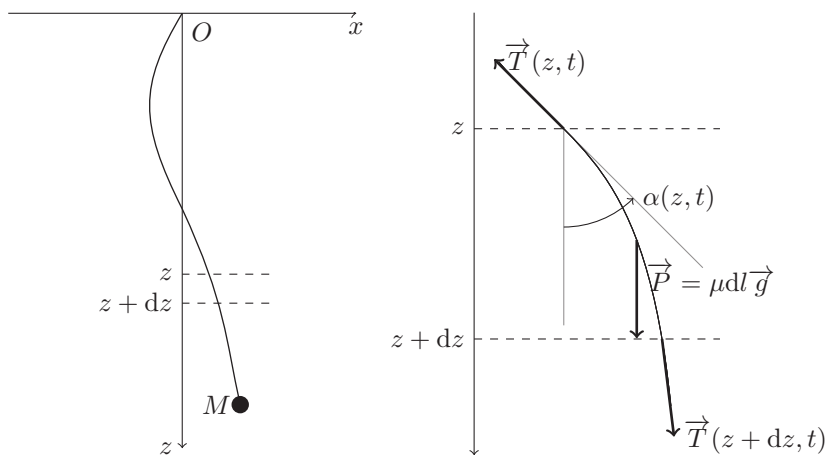


FIGURE 3.1. Corde vibrante verticale dans le champ de pesanteur, et zoom sur la section de la corde étudiée dans la suite.

Cet exercice est l'occasion de présenter les méthodes habituelles concernant l'équation des cordes vibrantes. Nous allons commencer par redémontrer l'équation de leur dynamique dans ce cas particulier, lorsque l'on tient compte de la gravité.

Supposons que, au repos, la corde occupe un segment le long de l'axe z , et que l'on bouge la masse dans la direction x . Ainsi la corde se déplace de $x(z, t)$ à l'altitude z au temps t . Écrivons le principe fondamental de la dynamique sur une portion de corde entre z et $z + dz$. Appelons $\alpha(z, t)$ l'angle entre l'axe Oz et la corde, que l'on suppose faible.

Les forces qui s'appliquent à la section de corde sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la tension $-\vec{T}(z, t)$ à l'extrémité supérieure de la section et la tension $\vec{T}(z + dz, t)$ à l'extrémité inférieure. En fonction de l'angle $\alpha(x, t)$, cette tension s'écrit

$$\vec{T} = T \sin \alpha \vec{u}_x + T \cos \alpha \vec{u}_z. \quad (1)$$

Puisque l'angle α est faible, on a $\cos \alpha \simeq 1$. De plus, on a

$$\sin \alpha \simeq \tan \alpha \simeq \frac{\partial x}{\partial z}, \quad (2)$$

de telle sorte que la longueur dl de l'élément de corde est

$$dl \simeq \frac{dz}{\cos \alpha} \simeq dz. \quad (3)$$

Ainsi, les équations de Newton s'écrivent, avec μ la masse linéique de la corde,

$$\begin{cases} \mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z, t) = \left(T(z + dz) \frac{\partial x}{\partial z}(z + dz, t) - T(z) \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) \right), \\ 0 = (T(z + dz) - T(z)) + \mu g dz. \end{cases} \quad (4)$$

où l'on a supposé que le mouvement vertical était négligeable. En procédant aux développements limités usuels, on obtient les équations du mouvement

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial x}{\partial z} \right), \\ 0 = \frac{dT}{dz} + \mu g. \end{cases} \quad (5)$$

Ainsi, sous l'effet de la gravité la tension dépend maintenant de z . L'intégration de la relation donnant T est évidente, et on obtient

$$T(z) = -\mu g z + K. \quad (6)$$

Au repos, la tension sur la masse vaut Mg . Cette dernière étant supposée être constante, même lorsque le mouvement de la masse est perturbé, on a l'égalité

$$T(L) = -\mu g L + K = Mg, \quad (7)$$

d'où

$$T(z) = \mu g (L - z) + Mg. \quad (8)$$

L'équation sur x devient alors

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = (\mu g (L - z) + Mg) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \mu g \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (9)$$

La résolution de cette équation est ardue, même en séparant les variables. Toutefois, l'hypothèse $M \gg m = \mu L$ va nous permettre en première approximation de simplifier l'équation en

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{Mg}{\mu} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (10)$$

Afin de chercher les fréquences propres d'oscillation de la corde, nous allons chercher une solution sous forme d'onde stationnaire $x(z, t) = f(z)h(t)$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient facilement

$$f(z)h''(t) = \frac{Mg}{\mu} f''(z)h(t) - g f'(z)h(t), \quad (11)$$

et ainsi

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\frac{Mg}{\mu} f''(z) - g f'(z)}{f(z)} = K, \quad (12)$$

où K est une constante, car on a égalité de deux fonctions de deux variables différentes. On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} h''(t) - Kh(t) = 0, \\ \frac{Mg}{\mu} f''(z) - gf'(z) - Kf(z) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

L'équation concernant la fonction h se résout facilement. Cette dernière ne peut pas diverger, on en déduit que la solution doit être sinusoïdale, c'est-à-dire que $K < 0$. On a alors

$$h(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad (14)$$

où $\omega = \sqrt{|K|}$ est bien entendu la fréquence d'oscillation du système, et A_1 est une constante. On peut alors réécrire la seconde équation

$$\frac{Mg}{\mu} f''(z) - gf'(z) + \omega^2 f(z) = 0. \quad (15)$$

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée est

$$\Delta = g^2 - 4\omega^2 \frac{gM}{\mu} = g^2 \left(1 - \omega^2 \frac{4M}{g\mu} \right) = g^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right), \quad (16)$$

où l'on a défini $\omega_c = \sqrt{\frac{g\mu}{4M}}$. Ainsi, si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $\omega < \omega_c$, on a

$$f(z) = B_1 e^{\frac{\mu}{2M} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right) z} + C_1 e^{\frac{\mu}{2M} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right) z}. \quad (17)$$

Pour tout t , le déplacement en $z = 0$ où la corde est attachée est nul, et donc on a $B_2 = -C_2$. Ainsi, en rassemblant les constantes, on a

$$f(z) = A e^{\frac{\mu}{2M} z} \sinh \left(\frac{\mu z}{2M} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right). \quad (18)$$

Cette solution ne correspond pas à une onde stationnaire, et il n'y a donc pas de fréquences propres pour $\omega < \omega_c$.

Si $\omega > \omega_c$, le discriminant est négatif et nous avons des solutions oscillantes, sous la forme

$$f(z) = B_2 e^{\frac{\mu}{2M} z} \cos \left(\frac{\mu z}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \right) + C_2 e^{\frac{\mu}{2M} z} \sin \left(\frac{\mu z}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \right). \quad (19)$$

Pour tout t , le déplacement en $z = 0$ où la corde est attachée est nul, et on a donc $B_2 = 0$. Ainsi, en rassemblant les constantes, le déplacement s'écrit

$$x(z, t) = A e^{\frac{\mu}{2M} z} \sin \left(\frac{\mu z}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \right) \cos(\omega t + \varphi). \quad (20)$$

Finalement, pour trouver les modes propres, on va écrire les conditions aux limites en $z = L$. Ici, la seule relation que l'on peut facilement exploiter est le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse. Le déplacement étant continu, la position de la masse $X(t)$ est égale au déplacement de la corde $x(L, t)$. De plus, le poids ne possédant pas de composante selon x , seule la tension va jouer dans cette direction, et on a

$$M\ddot{X} = -T_x = -Mg \frac{\partial x}{\partial z}(L, t), \quad (21)$$

où on a utilisé le même raisonnement sur la tension que lorsque l'on a établi l'équation d'onde. Après simplification, on obtient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(L, t) = -g \frac{\partial x}{\partial z}(L, t), \quad (22)$$

ce que l'on peut écrire explicitement

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \cos\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right) A e^{\frac{\mu L}{2M}} \cos(\omega t + \varphi) \\
 & = -\frac{\mu g}{2M} \left(\sin\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right) + \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \cos\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right) \right) A e^{\frac{\mu L}{2M}} \cos(\omega t + \varphi),
 \end{aligned} \tag{23}$$

que l'on simplifie en

$$\frac{2\omega_c^2 - \omega^2}{2\omega_c^2} \sin\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right) = -\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \cos\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right). \tag{24}$$

Ainsi, les fréquences propres sont définies par l'équation

$$1 - \frac{\omega^2}{2\omega_c^2} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \cotan\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right), \tag{25}$$

et finalement

$$\frac{1 - \frac{\omega^2}{2\omega_c^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}} = -\cotan\left(\frac{\mu L}{2M} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\right). \tag{26}$$

Une telle équation ne peut bien entendu pas être résolue de manière analytique, et on préférera une résolution graphique comme représentée dans la figure 3.2.

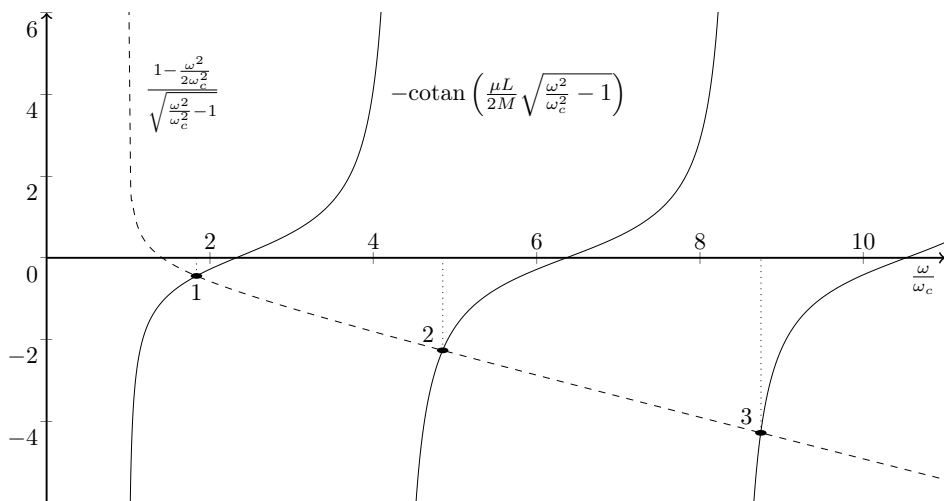


FIGURE 3.2. Résolution graphique de l'équation (26).

Complément

1. Considérons donc le cas où il n'y a plus de masse suspendue au bout de la corde. Les équations (5) restent valables, et seule l'intégration de l'équation sur T change pour donner

$$T(z) = \mu g(L - z), \tag{27}$$

puisque la tension s'annule à l'extrémité libre. L'équation de propagation devient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gL \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z}, \tag{28}$$

et ainsi, localement, l'onde se propage à la vitesse $c(z) = \sqrt{gL(1 - \frac{z}{L})}$. Pendant une durée dt , l'onde se propage sur $dz = dt c(z)$, et ainsi le temps de propagation de l'onde est donné par

$$T = \int_0^L \frac{dz}{g(L-x)} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (29)$$

Notons que ce temps est supérieur à celui d'une chute libre sur une longueur L d'un facteur $\sqrt{2}$.

2. Afin de trouver un équivalent du vecteur de Poynting, il faut réaliser un bilan énergétique sur la corde. La puissance de la force de tension est donnée par

$$P(z, t) = \vec{T} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \vec{u}_x = T(z) \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (30)$$

Cette puissance représente la quantité d'énergie traversant la corde dans le sens des z croissants par unité de temps. Considérons une onde plane progressive de la forme $\underline{x} = \underline{x}_0 \exp(i(\omega t - kx))$. Alors on peut calculer la puissance moyenne traversant la corde en x

$$\langle P(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(T(z) \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x^*}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \omega a^2 T(z) \text{Re}(k^*), \quad (31)$$

où A^* est le conjugué de la quantité A , et où $\text{Re}(A)$ est sa partie réelle.

Puisque $T(z)$ est décroissante, la puissance moyenne reçue par l'élément de corde situé entre z et $z + dz$ est positive. On en déduit que l'amplitude du déplacement augmente lorsqu'une impulsion descend le long de la corde.

La démarche présentée ici s'adapte à quasiment tous les autres problèmes impliquant des cordes vibrantes, voire une membrane vibrante comme dans l'exercice 3.2. Une fois l'équation d'onde trouvée grâce aux théorèmes de la mécanique, on peut souvent conclure en cherchant des solutions sous forme d'ondes stationnaires ou progressives.

Exercice 3.2 : Membrane vibrante - X PC

On considère une membrane rectangulaire de longueur b et de largeur a , de masse surfacique σ . Déterminer les pulsations propres de la membrane. Pourquoi le son d'un tambour n'est-il pas « pur » ?



Quelques pistes...

1. À quel système bien connu à une dimension ce problème est-il analogue ? Définir ensuite la tension dans la membrane.
2. Établir alors l'équation d'onde au sein de la membrane.
3. Afin de trouver les modes propres, chercher des solutions sous forme d'ondes stationnaires. Conclure.

1. La recherche des modes propres de la membrane nous suggère d'étudier les ondes susceptibles de se propager dans ce milieu. L'idée de cet exercice sera de raisonner par analogie avec la corde vibrante, et donc d'adapter la méthode permettant d'établir l'équation d'onde à un problème à deux dimensions.

Nous allons ainsi étudier les oscillations transverses de la membrane. Comme dans le cas de la corde, on néglige les effets de la pesanteur et la raideur de la membrane.

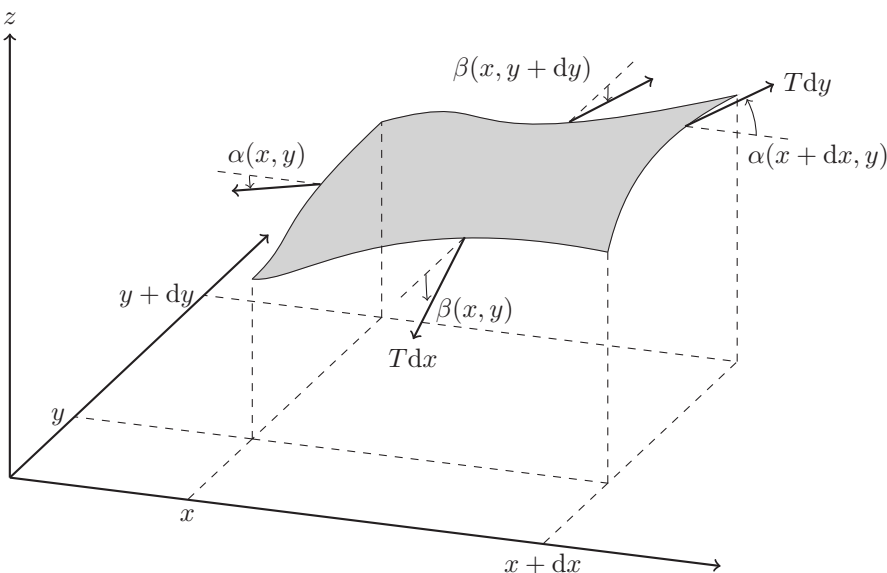


FIGURE 3.3. Portion infinitésimale de la membrane, soumise aux forces de tension.

Lorsqu'on étudie la corde vibrante verticale, la propagation d'une onde se fait par l'intermédiaire de la force de tension, définie comme l'action d'une portion de la corde sur l'autre. Pour un problème en deux dimensions, cette définition s'étend naturellement et on suppose que la tension est la force par unité de longueur exercée sur une partie de la membrane par le reste du milieu. Autrement dit, pour un élément de longueur dl en un point $M = (x, y, z)$ de la membrane dont la normale est dirigée par un vecteur unitaire \vec{n} , le reste de la membrane exerce une force $d\vec{F} = T(M)\vec{n}$. On suppose que la tension ne dépend que du point sur la membrane et donc pas directement du temps.

2. Afin d'établir l'équation d'onde, considérons une portion infinitésimale de membrane, située entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, comme représenté dans le schéma 3.3. On note $z(x, y, t)$ le déplacement induit par la propagation de l'onde. On définit également les angles $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ entre la composante T_x (respectivement T_y) de la tension selon l'axe x (resp. y) et les axes x et y , comme représenté sur le schéma précédent.

Comme dans le cas de la corde, on va supposer que les angles α et β sont petits, de telle sorte qu'au premier ordre, on a

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \simeq \alpha, \\ \cos \alpha \simeq 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin \beta = \frac{\partial z}{\partial y} \simeq \beta, \\ \cos \beta \simeq 1. \end{cases} \quad (1)$$

En s'appuyant sur le schéma précédent, on voit que la résultante des forces de tension selon l'axe x est donnée par

$$\begin{aligned} dF_x &= T(x + dx, y) \cos \alpha(x + dx, y) dy - T(x, y) \cos \alpha(x, y) dy \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x} (T(x, y) \cos \alpha(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans l'approximation des petits angles et puisqu'il n'y a que des mouvements verticaux, le théorème de la résultante cinétique donne

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

et donc la norme de la tension ne dépend pas de x . Le même raisonnement reste bien entendu valide pour la direction y , et donc T ne dépend pas non plus de y . Ainsi, au premier ordre, la norme de la tension est constante dans toute la membrane et nous notons sa valeur T_0 .

Étudions à présent ce qui se passe dans la direction verticale. La résultante des forces de tension s'écrit

$$\begin{aligned} dF_z &= T_0 dy \sin \alpha(x + dx, y) - T_0 dy \sin \alpha(x, y) \\ &\quad + T_0 dx \sin \beta(x, y + dy) - T_0 dx \sin \beta(x, y) \\ &= T_0 \left(\frac{\partial \sin \alpha}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \sin \beta}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\ &= T_0 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Ainsi, le principe fondamental de la dynamique dans la direction z , pour la portion de membrane de masse $\sigma dx dy$ donne

$$\sigma dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy, \quad (5)$$

et on obtient finalement l'équation d'onde dans la membrane

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. On retrouve bien une équation de d'Alembert similaire à celle de la corde vibrante.

3. Afin de chercher les modes propres de vibration de la membrane rectangulaire étudiée, nous allons chercher comme pour la corde une solution sous la forme

$$z(x, y, t) = f(x)g(y)h(t). \quad (7)$$

En remplaçant dans l'équation (6), on obtient facilement

$$\begin{aligned} h''(t)f(x)g(y) &= c^2 h(t) (f''(x)g(y) + f(x)g''(y)) \\ \Rightarrow \frac{h''(t)}{h(t)} &= c^2 \frac{(f''(x)g(y) + f(x)g''(y))}{f(x)g(y)}. \end{aligned} \quad (8)$$

On a ainsi égalité de deux fonctions de variables différentes, qui doivent donc être constantes. Afin d'obtenir une solution physique, cette constante doit être négative, et on écrit

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = -\omega^2. \quad (9)$$

En effet, ce choix pour la constante est le seul qui permet d'obtenir une solution oscillante, comme celle que l'on cherche. On a alors $h(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$. De la même manière, on peut prouver que

$$-\frac{g''(y)}{g(y)} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{f''(x)}{f(x)}. \quad (10)$$

L'argument précédent permet également d'affirmer que ces deux fonctions doivent être constantes. En excluant les solutions exponentielles et linéaires, on obtient là encore des solutions harmoniques, sous la forme

$$\begin{cases} f(x) = A \cos(k_x x + \varphi_x), \\ g(y) = B \cos(k_y y + \varphi_y). \end{cases} \quad (11)$$

En rassemblant toutes les constantes et en fixant l'origine des temps pour éliminer la phase φ , on obtient

$$z(x, y, t) = z_0 \cos(\omega t) \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y). \quad (12)$$

Utilisons les conditions aux limites pour trouver les modes propres de vibration. On suppose la membrane fixe en $x = 0$ et $x = a$, ainsi qu'en $y = 0$ et $y = b$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} z(0, y, t) = 0 & \Rightarrow \cos \varphi_x = 0 \\ z(x, 0, t) = 0 & \Rightarrow \cos \varphi_y = 0 \end{cases} \quad (13)$$

et donc on peut écrire $z(x, y, t) = z_1 \cos(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$. Finalement, la condition $z(a, y, t) = 0$ donne

$$\sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

De la même manière, la condition $z(x, b, t) = 0$ donne

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \text{ avec } m \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

En utilisant la relation de dispersion $\omega^2 = k^2 c^2 = (k_x^2 + k_y^2) c^2$, on trouve que les modes propres de vibration de la membrane sont décrits par un ensemble d'entiers $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, et que les fréquences propres sont données par

$$\omega_{n,m} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (16)$$

Ainsi, la recherche de modes propres nous conduit à une relation non-linéaire entre les différentes fréquences résonantes. Les harmoniques ne sont plus des multiples du fondamental, comme c'est le cas pour la corde. Ceci explique pourquoi un tambour ne produit pas un son harmonique comme une corde vibrante, mais possède un spectre plus complexe.

Exercice 3.3 : Cristal diatomique - Ulm MP

On considère une barre métallique, composée d'un cristal diatomique. Quand on excite une des extrémités avec des chocs périodiques, on constate qu'à certaines fréquences, on reçoit un signal à l'autre extrémité de la barre, et pour d'autres non. Pourquoi ?

Un exercice là encore laconique, mais dont l'énoncé nous suggère fortement d'étendre le modèle de la chaîne atomique unidimensionnelle au cas de deux atomes différents. Nous allons ainsi rappeler les méthodes habituelles d'étude des chaînes unidimensionnelles, qui peuvent s'étendre à de nombreux problèmes.



Quelques pistes...

1. Modéliser la barre métallique par un cristal unidimensionnel, composé alternativement d'atomes de masse m et M , séparés par une distance a au repos. Comment modéliser les interactions entre ces atomes ? Trouver les équations du mouvement.

2. Chercher des solutions sous forme d'une onde monochromatique progressive discrète de pulsation ω et de nombre d'onde K , et déduire des équations précédentes la relation de dispersion $\omega(K)$.

3. La résoudre, et étudier les deux solutions pour ω^2 . Montrer qu'il existe un « trou » entre les deux branches où il n'existe pas de solution ondulatoire.

1. Nous modélisons la barre métallique par un cristal composé d'atomes de masse m et M , espacés de a au repos. Au site n , on regroupe un atome de masse m puis un atome de masse M . En présence d'une perturbation, on note u_n et v_n le déplacement des atomes de masse m , respectivement M au site n par rapport à leurs positions d'équilibre. Nous allons de plus

supposer que chaque atome interagit avec ses proches voisins par une force élastique, que l'on peut modéliser par des ressorts de raideur k et de longueur à vide a . Ceci peut être résumé par le schéma 3.4.

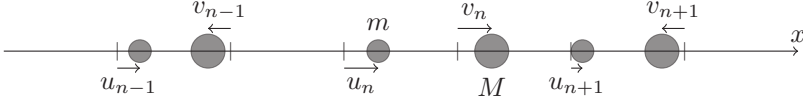


FIGURE 3.4. Modélisation du cristal diatomique par une chaîne unidimensionnelle alternée. On note u_n et v_n les déplacements des atomes de masse m et M par rapport à leurs positions d'équilibre.

Considérons un atome de masse m au site n . Ses deux plus proches voisins sont des atomes de masse M . De la part de l'atome de masse M au site n , il subit la force

$$F_{M(n) \rightarrow m(n)} = k(v_n - u_n), \quad (1)$$

et de la part de l'atome de masse M au site $n-1$, il subit la force

$$F_{M(n-1) \rightarrow m(n)} = -k(u_n - v_{n-1}). \quad (2)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette masse, on obtient donc

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(v_n + v_{n-1} - 2u_n). \quad (3)$$

En faisant le même raisonnement pour une masse M située à un site n , on obtient

$$M \frac{d^2 v_n}{dt^2} = k(u_{n+1} + u_n - 2v_n). \quad (4)$$

Dans le cas de la chaîne uni-atomique, il est habituel de faire ensuite tendre la distance entre deux atomes vers 0 pour obtenir une équation d'onde de type d'Alembert. Il est également possible de conserver les formes discrètes des équations du mouvement, ce qui permet de garder toute l'information sur le système. Toutefois, puisque l'on s'attend à avoir un comportement ondulatoire, on va chercher des solutions aux équations sous forme d'une onde plane progressive discrète de pulsation ω et de nombre d'onde K , c'est-à-dire de la forme

$$\begin{cases} u_n = u_0 \exp i(Kan - \omega t), \\ v_n = v_0 \exp i(Kan - \omega t), \end{cases} \quad (5)$$

qui est de la même forme qu'une progressive simple, dont on prend la phase seulement en $x = na$.

En remplaçant dans l'équation (3) et en simplifiant les $\exp i(Kan - \omega t)$, on obtient

$$-m\omega^2 u_0 = kv_0(1 + \exp(-iKa)) - 2ku_0, \quad (6)$$

et en procédant de même dans l'équation (4), on obtient

$$-M\omega^2 v_0 = ku_0(\exp(iKa) + 1) - 2kv_0. \quad (7)$$

Nous sommes donc en présence d'un système de deux équations à deux inconnues (u_0, v_0) , que l'on peut résumer sous la forme

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)u_0 - k(1 + \exp(-iKa))v_0 = 0, \\ -k(1 + \exp(iKa))u_0 + (2k - M\omega^2)v_0 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ce système ne possède de solution que si son déterminant s'annule, c'est-à-dire si

$$(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2) - k^2(1 + \exp(-iKa))(1 + \exp(iKa)) = 0, \quad (9)$$

que l'on peut réécrire en développant et en passant sous forme trigonométrique sous la forme

$$mM\omega^4 - 2k(m+M)\omega^2 + 2k^2(1 - \cos(Ka)) = 0. \quad (10)$$

Il s'agit d'une équation bicarrée en ω , c'est-à-dire que l'on peut résoudre en posant $\Omega = \omega^2$, qui vérifie

$$mM\Omega^2 - 2k(m+M)\Omega + 2k^2(1 - \cos(Ka)) = 0. \quad (11)$$

Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned} \Delta &= 4k^2(m+M)^2 - 8mMk^2(1 - \cos(Ka)) \\ &= 4k^2(m+M)^2 - 16mMk^2 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{2k(m+M) \pm \sqrt{4k^2(m+M)^2 - 16mMk^2 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}}{2mM} \\ &= k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm k\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)} \end{aligned} \quad (13)$$

c'est-à-dire la relation de dispersion entre ω et K , qui n'est bien entendu pas linéaire. Afin de trouver quelles solutions peuvent se propager dans la barre métallique, il nous faut analyser le comportement d'une onde pour chacune des solutions ω_{\pm} . La représentation de ces deux solutions donne ce que l'on appelle des « branches », correspondant aux signes positifs ou négatifs dans la relation précédente.

La solution avec un signe négatif ω_- est appelée branche acoustique. Afin de justifier cette appellation, considérons le cas où K est très petit devant $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire pour les grandes longueurs d'onde. On a alors

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &= k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 mM} \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}\right) \\ &\simeq k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \left(1 - \left(1 - \frac{K^2 a^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 mM}\right)^{1/2}\right) \\ &\simeq \frac{k}{2} \frac{K^2 a^2}{m+M}. \end{aligned} \quad (14)$$

Dans ce régime, on retrouve la relation de dispersion acoustique linéaire habituelle, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\omega}{k} = c_s = \frac{ka^2}{m+M}. \quad (15)$$

En conséquence, un paquet d'onde composé de modes de grande longueur d'onde peut être transmis sans être déformé. Physiquement, cela correspond au fait qu'une longueur d'onde grande devant a ne « voit » pas les détails microscopiques du réseau. On peut finalement remarquer que dans cette limite le système (8) s'écrit

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)u_0 - 2kv_0 = 0, \\ -2ku_0 + (2k - M\omega^2)v_0 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

dont les deux équations équivalentes pour $\omega = 0$ donnent

$$u_0 = v_0. \quad (17)$$

Ainsi, à l'ordre le plus bas, les atomes vibrent ensemble comme dans les vibrations acoustiques de grande longueur d'onde, ce qui justifie encore une fois le nom de « branche acoustique ».

L'autre limite à considérer est de prendre $K \rightarrow \frac{\pi}{a}$. En effet, par π -périodicité de la fonction \sin^2 , on retrouve le même comportement pour $K \in [\frac{-\pi}{a} : \frac{\pi}{a}]$, et pour tout $K \in [\frac{-\pi}{a} + \frac{n\pi}{a} : \frac{\pi}{a} + \frac{n\pi}{a}]$, où $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que $m < M$, alors pour $K \rightarrow \frac{\pi}{a}$, on a

$$\begin{aligned}\omega_-^2\left(\frac{\pi}{a}\right) &= k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) - k\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}} \\ &= k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) - k\sqrt{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)^2} = \frac{2k}{M},\end{aligned}\quad (18)$$

puisque $m < M$ donne $|\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)| = \frac{1}{m} - \frac{1}{M}$. En remarquant que $\omega_-(K)$ doit être strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{a}]$, on peut tracer son allure comme dans la figure 3.5.

Considérons à présent la solution ω_+ . Pour $K \rightarrow 0$, c'est-à-dire dans la limite des grandes longueurs d'ondes, on a

$$\omega_+^2 \rightarrow 2k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right). \quad (19)$$

En remplaçant cette valeur dans le système (8), on obtient facilement

$$\frac{u_0}{v_0} = -\frac{M}{m}. \quad (20)$$

Ainsi, les masses vont osciller en opposition de phase. On appelle cette branche « optique », car pour les cristaux ioniques comme le chlorure de sodium, ils sont excités par des radiations infrarouges.

De plus, pour $K \rightarrow \frac{\pi}{a}$, c'est-à-dire pour une longueur d'onde qui tend vers $\frac{a}{2}$, on a de la même manière que précédemment

$$\omega_+^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = \frac{2k}{m}. \quad (21)$$

En remarquant que ω_- doit être strictement décroissante, on peut également représenter l'allure de cette branche pour $K \in [0, \frac{\pi}{a}]$ comme dans la figure 3.5.

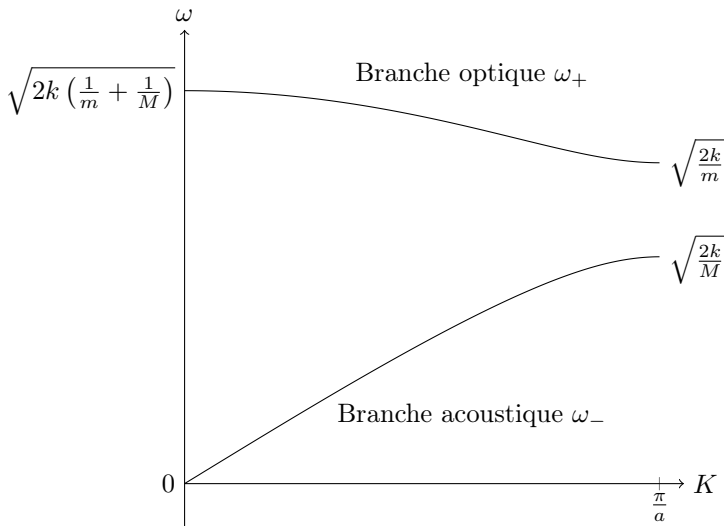


FIGURE 3.5. Allure des branches acoustiques et optiques. On note la présence d'une « bande interdite » entre les deux.

On constate d'une part la présence d'une fréquence de coupure $\omega_c = \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)}$, au-dessus de laquelle les ondes ne se propagent plus, mais aussi la présence d'un « trou », appelé bande interdite entre les deux branches, pour des fréquences

$$\sqrt{\frac{2k}{M}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (22)$$

Les solutions de cette zone ont un vecteur d'onde complexe d'après la relation de dispersion, ce qui donnera lieu à des ondes évanescentes. Ceci permet d'expliquer pourquoi on ne reçoit pas toujours de signal de l'autre côté de la barre.

Exercice 3.4 : Le claquement du fouet - Ulm PC

Expliquez le son du fouet qui claque.

Il n'est pas rare d'entendre dans certains films d'aventure ou westerns le claquement d'un fouet, produisant un son bref et intense. Le but de ce problème est de modéliser l'origine de ce bruit caractéristique. Afin de se donner une intuition du problème, imaginons tout d'abord qu'un opérateur produise par un mouvement de bras une impulsion dans le fouet, qui va se propager jusqu'à l'extrémité libre. Il est intéressant de remarquer que ce n'est que lorsque l'impulsion initiale atteint cette extrémité du fouet que l'on entend le claquement. Ceci semble suggérer que c'est le mouvement du bout du fouet qui provoque le « bang » entendu, tandis que l'impulsion qui se propage dans la corde ne donne pas un son audible. On retrouve un son similaire lorsqu'un coup de feu est tiré ou au passage d'un avion supersonique. Ainsi, l'idée couramment reçue pour expliquer le claquement du fouet est le dépassement de la vitesse du son par son extrémité libre.



Quelques pistes...

1. Est-il possible d'obtenir un mouvement supersonique avec une simple corde ? Quelle est la caractéristique d'un fouet qui permet d'expliquer une vitesse variable le long de la corde ?
2. Modéliser le fouet par une corde de section variable, et trouver l'équation des ondes dans le fouet.
3. Quelle forme particulière pour la section peut-on proposer ? On pourra penser à une forme particulière simplifiant le terme $\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx}$.
4. En déduire l'évolution d'un paquet d'ondes se propageant le long du fouet, et montrer que l'extrémité peut atteindre une vitesse aussi grande que voulue.

1. La modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer pour un fouet est une barre rigide, qui aurait un mouvement circulaire dicté par celui du bras de l'opérateur. Considérons ainsi un fouet de longueur $L \simeq 2$ m, mis en mouvement par un bras d'environ 20 cm. On peut considérer que pour passer d'une position verticale à une position horizontale, le bras de l'opérateur met environ 1 s, ce qui donne une vitesse angulaire de l'ordre de $\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1\text{s}} \simeq 1,5 \text{ rad.s}^{-1}$. La vitesse du bout du fouet est alors de l'ordre de

$$v_{\text{bout}} \simeq L\omega \simeq 30 \text{ m.s}^{-1} \ll c_{\text{air}}, \quad (1)$$

où c_{air} est la vitesse du son dans l'air. Ainsi, il apparaît que ce n'est pas le mouvement global du fouet transmis par l'opérateur qui expliquerait la vitesse supersonique de son bout.

Affinons à présent ce modèle grossier, en considérant le fouet comme une simple corde. On connaît bien l'équation de propagation d'une perturbation verticale z dans la direction x , qui est donnée par l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Cette équation n'est bien entendu pas dispersive, ce qui signifie qu'un paquet d'ondes se propagera sans se déformer. Ainsi, comme en général $c_0 < c_{son}$, il n'y a pas d'espoir de communiquer un mouvement supersonique à l'extrémité du fouet en se contentant de propager une onde dans une corde de section constante.

Lorsque l'on observe un fouet, il apparaît une caractéristique essentielle que ne possède pas une simple corde : la section du fouet diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de son extrémité. On peut alors se donner une première idée de la raison pour laquelle le bout du fouet peut franchir le mur du son. On peut raisonnablement considérer qu'il n'y a pas de pertes d'énergie dans la propagation d'une onde le long du fouet. Ainsi, schématiquement, la quantité d'énergie cinétique par unité de longueur est

$$u_{ec}(x, t) = \rho S(x) v(x, t), \quad (3)$$

où $S(x)$ est la section du fouet au point x , ρ sa densité et $v(x, t)$ la vitesse de la portion considérée, va être une quantité conservée. Ainsi, lorsqu'un paquet d'ondes passe d'une portion de la corde avec une section S_0 plus grande que celle S_1 du bout de la corde, sa vitesse va augmenter. Elle peut devenir arbitrairement grande si $S \rightarrow 0$, et donc dépasser la vitesse du son. En pratique, cette vitesse est bien entendu limitée, notamment à cause de la rigidité de la corde ou de la viscosité de l'air, qui vont venir dissiper de l'énergie. De plus, le fouet possédant une résistance mécanique finie, une vitesse infinie provoquerait sa casse.

2. Nous allons donc considérer que le fouet est une corde vibrante de section variable, et chercher l'équation d'onde correspondante. Nous allons bien entendu raisonner par analogie avec la corde vibrante simple. Considérons une portion de corde comprise entre x et $x + dx$. On suppose que le déplacement de la corde se fait purement verticalement et est repéré par $z(x, t)$, et on note $\alpha(x, t)$ l'angle entre l'horizontale et la tangente à la corde au point x , comme sur le schéma 3.6 suivant. On note $S(x)$ la section de la corde au point x , et ρ sa densité volumique.

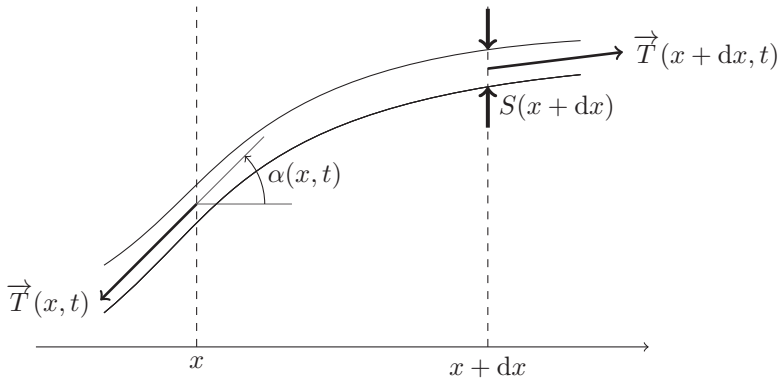


FIGURE 3.6. Corde vibrante de section variable

Comme dans le cas d'une corde simple, on va considérer une petite perturbation, c'est-à-dire que $\frac{\partial z}{\partial x} \simeq \sin \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t)$, et $\cos \alpha(x, t) \simeq 1$. Ainsi, la longueur de l'élément de fouet est

$$dl = \frac{dx}{\cos \alpha} \simeq dx, \quad (4)$$

et sa masse est

$$dm = \rho S(x)dl \simeq \rho S(x)dx. \quad (5)$$

Les forces qui s'appliquent sur la portion de corde sont les forces de tension \vec{T} , à chaque extrémité de la portion considérée, dirigées de manière tangente à la corde, et le poids \vec{P} , que l'on suppose négligeable devant les forces de tension. On peut projeter ces dernières, et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(x, t) = -T(x, t) (\cos \alpha(x, t) \vec{e}_x + \sin \alpha(x, t) \vec{e}_z), \\ \vec{T}(x + dx, t) = T(x + dx, t) (\cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z). \end{cases} \quad (6)$$

Afin de rendre compte le plus simplement possible de la variation de la section, on peut supposer que la norme de la tension est proportionnelle à la section au point x , c'est-à-dire de la forme

$$T(x, t) = t_0 S(x). \quad (7)$$

On peut alors écrire le principe fondamental de la dynamique projeté dans la direction z , et on obtient

$$\rho S(x) dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - T(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x, t), \quad (8)$$

et en faisant les développements limités habituels, on obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{t_0}{\rho} \frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial z}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Si S est constant, on retrouve bien l'équation de d'Alembert, et on pose donc $c_s = \sqrt{\frac{t_0}{\rho}}$, de telle sorte que l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S(x)} \frac{\partial z}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Les plus observateurs et observatrices auront reconnu l'équation du pavillon acoustique.

3. Pour pouvoir manipuler l'équation, il faut préciser une forme pour la section. On peut tout d'abord développer l'équation (10), et on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad (11)$$

Dans le but d'avoir une équation linéaire à coefficients constants, on peut demander que

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial S}{\partial x} = \text{cste}. \quad (12)$$

Ce qui donne un profil exponentiel pour S . Ainsi, afin de respecter la géométrie du fouet, on choisit

$$S(x) = S_0 \exp(-\alpha x). \quad (13)$$

Avec ce choix, on peut réécrire l'équation d'onde sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad (14)$$

4. Dans la suite, nous allons étudier l'évolution d'un paquet d'onde le long du fouet. Pour cela, nous allons commencer par chercher la relation de dispersion pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, sous la forme $z(x, t) = z_0 \exp(i(\omega t - kx))$. En remplaçant dans l'équation (14), on obtient

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - c_0^2 \alpha i k, \quad (15)$$

et donc le milieu est dispersif. Ensuite, il est naturel de s'intéresser aux vitesses de groupe et de phase, et il va donc nous falloir exprimer $k(\omega)$. Le plus simple est de séparer les parties réelles

et imaginaires du vecteur d'onde, que l'on écrit sous la forme $k = k' + ik''$. En remplaçant dans la relation de dispersion, on obtient alors

$$k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' - \alpha(ik' - k'') - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0. \quad (16)$$

Puisque ω , k' et k'' sont réels, on peut séparer les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, et obtenir

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 + \alpha k'' - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0, \\ k'(2k'' - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

De la seconde équation, on tire facilement $k'' = \frac{\alpha}{2}$. On peut ensuite remplacer dans la première, pour obtenir

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow k' = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4}}. \quad (18)$$

Afin de ne conserver que la solution qui se propage dans le sens des x croissants, on choisit la solution avec un signe positif, et finalement on obtient

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4}} + i\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} + i\frac{\alpha^2}{2}. \quad (19)$$

où l'on a fait apparaître une pulsation de coupure $\omega_c = \frac{\alpha}{2}$. L'amplitude d'une onde monochromatique va augmenter le long du fouet : en effet, supposons qu'un opérateur impose une telle onde en $x = 0$, avec une amplitude z_0 , alors le mouvement en $x = L$ sera donné par

$$z(L, t) = z_0 \cos \left(\omega t - \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} L \right) \exp \left(\frac{\alpha}{2} L \right), \quad (20)$$

et donc la vitesse de l'extrémité est donnée par

$$v(L, t) = \frac{\partial z}{\partial t}(L, t) = -z_0 \omega \sin \left(\omega t - \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} L \right) \exp \left(\frac{\alpha}{2} L \right). \quad (21)$$

Ainsi, en choisissant correctement α à L donné, il est possible d'obtenir une vitesse dépassant le mur du son. Cherchons à estimer la variation de section entre le début et la fin du fouet nécessaire au claquement du fouet. Comme ordre de grandeur, on peut supposer que la vitesse du bras qui actionne le fouet est de l'ordre de $v_0 \simeq 15 \text{ m.s}^{-1}$. Pour que le bout du fouet atteigne une vitesse de l'ordre de $c \simeq 340 \text{ m.s}^{-1}$, il est nécessaire que

$$v_0 \exp \left(\frac{\alpha L}{2} \right) = c, \quad (22)$$

ce qui donne une valeur $\alpha \simeq 3.5 \text{ m}^{-1}$. On peut alors supposer que le diamètre du fouet à l'extrémité que l'on tient est de l'ordre de $d_0 = 5 \text{ cm}$. Dans ce cas et en notant $r_0 = \frac{d_0}{2}$, la section au bout de la corde est de l'ordre de

$$S(L) = \pi r_0^2 \exp(-\alpha L) = 1.7 \text{ mm}^2, \quad (23)$$

ce qui correspond à un diamètre de l'ordre de $d(L) \simeq 1.5 \text{ mm}$, ce qui semble être un ordre de grandeur raisonnable.

En conclusion, un simple modèle de corde vibrante à section variable nous permet de rendre compte de la croissance de la vitesse verticale le long du fouet, jusqu'à potentiellement dépasser la vitesse du son et provoquer le claquement caractéristique du fouet. Un tel modèle pourrait être largement complexifié. D'une part, il est clair qu'un opérateur n'envoie pas une onde monochromatique, mais plutôt un paquet d'ondes dont on pourrait étudier l'évolution. Finalement, un modèle plus complet pourrait prendre en compte des modifications structurelles plus complexes de la forme du fouet, par exemple en considérant des enroulements.

Diffusion

Exercice 4.1 : Taille critique d'un mammifère - Lyon/Cachan MP

Dans cet exercice, on se propose de s'intéresser à la régulation de la température chez les mammifères.

1. Expliquer qualitativement pourquoi il existe des tailles maximales et minimales pour les animaux à sang chaud.

On modélise un mammifère par une sphère de rayon R , qui produit une puissance volumique P en son sein. Le fluide qui l'entoure est soit de l'air, de conductivité thermique $\lambda_{\text{air}} \simeq 10 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, soit de l'eau, de conductivité $\lambda_{\text{eau}} \simeq 500 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Ces deux valeurs incluent la convection. La température très loin du mammifère est $T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$.

2. Quelle doit être la puissance volumique pour maintenir une température de surface égale à $T_{\text{corps}} = 30^{\circ}\text{C}$? Expliquer alors pourquoi il n'existe pas de petits mammifères marins.

3. On considère à présent que le mammifère possède une épaisse couche de graisse, de conductivité thermique $\lambda_{\text{gras}} = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, qui entoure son corps. Quelle est la nouvelle puissance nécessaire pour maintenir le corps à la température T_{corps} ? Cette stratégie est-elle avantageuse pour l'animal?

Cet exercice, posé assez régulièrement aux concours de CPGE, est pour nous l'occasion de rappeler la démarche couramment utilisée pour aborder les problèmes de diffusion. Après une discussion qualitative plus originale sur les effets d'échelle sur la régulation de la température chez les mammifères, nous allons en effet commencer par établir l'équation de la diffusion dans le cas particulier étudié, puis la résoudre en régime permanent, avant d'explorer les propriétés de la solution trouvée et ses conséquences physiques.

1. Lorsqu'on observe le règne animal, il est intéressant de remarquer que certains types d'animaux voient leurs tailles maximales et minimales limitées. Par exemple, les arthropodes comme les insectes et les araignées dépassent rarement une dizaine de centimètre, tandis qu'il n'existe pas de mammifère de quelques millimètres, ou de reptiles de la taille d'un éléphant. Ceci est en partie dû à la régulation de la température propre à chaque espèce.

Le cas des animaux à sang chaud est particulièrement intéressant, et peut se comprendre par de simples arguments dimensionnels. La puissance thermique dégagée par un animal provient de ses efforts musculaires, et donc la puissance totale est proportionnelle au volume de l'animal. En notant L la « taille » caractéristique de l'animal, la puissance thermique dégagée sera $P \propto L^3$. Elle l'est par l'intermédiaire de la peau de l'animal, et on va donc avoir des pertes thermiques $\Phi \propto L^2$. En conséquence, plus un animal à sang chaud est gros, plus il est difficile pour lui d'évacuer la chaleur qu'il produit. Ceci explique par exemple pourquoi les éléphants ont des oreilles de grande taille, qui leur permettent d'augmenter la surface de contact entre l'air et leur corps. De plus, les grands mammifères ont tous un métabolisme assez lent, ce qui leur permet de réduire l'énergie thermique à dissiper. À l'opposé, les petits mammifères évacuent trop d'énergie thermique à travers leur peau, et ont donc un métabolisme beaucoup plus rapide pour développer une puissance thermique suffisante pour les maintenir à leur

température de fonctionnement. Puisqu'il n'est pas possible de maintenir un métabolisme aussi lent ou rapide que possible, il existe une taille minimale et maximale pour les animaux à sang chaud.

2. Considérons à présent un mammifère marin, modélisé par une sphère de rayon R . Afin d'étudier la dissipation de chaleur par l'animal, il est naturel de s'intéresser aux transferts thermiques par diffusion. Établissons à présent l'équation de la diffusion en coordonnées sphériques, respectant les symétries du problème. On note (r, θ, φ) les coordonnées choisies, centrées sur le cœur de l'animal. L'invariance par rotation autour du centre impose que le champ de température s'écrive $T(r)$. D'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique est donc dirigé radialement, et on le note $\vec{j}(r, t) = j(r, t)\vec{u}_r$. Considérons une pellicule sphérique de fluide de conductivité λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique c comprise entre r et $r + dr$. L'enthalpie du système à l'instant T est donnée par $4\pi r^2 dr \rho c T(r, t)$ à une constante prêt. Ainsi, on écrit le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$ sous la forme

$$4\pi r^2 dr \rho c T(r, t + dt) = 4\pi r^2 dr \rho c T(r, t) + (\Phi(r, t) - \Phi(r + dr, t))dt, \quad (1)$$

où l'on a noté $\Phi(r, t)$ le flux thermique par unité de temps entrant dans la sphère de rayon r . En fonction du vecteur densité de courant d'énergie thermique, ce flux s'exprime $\Phi(r, t) = 4\pi r^2 j(r, t)$. Au premier ordre, l'équation précédente s'écrit

$$4\pi r^2 \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dr dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -4\pi \frac{\partial r^2 j}{\partial r} dr dt. \quad (2)$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho c r^2} \frac{\partial r^2 j}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

et en utilisant la loi de Fourier $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$, il vient finalement

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Dans le cas étudié, il est ensuite naturel de se placer en régime permanent. L'équation précédente s'intègre alors facilement sous la forme

$$T(r) = \frac{A}{r} + B, \quad (5)$$

avec A et B des constantes d'intégration. En faisant tendre r vers $+\infty$, il vient naturellement $B = T_\infty$, et en utilisant la condition $T(R) = T_{\text{corps}}$, on trouve $A = R(T_{\text{corps}} - T_\infty)$. Finalement, la température dans le fluide extérieur s'écrit

$$T(r) = (T_{\text{corps}} - T_\infty) \frac{R}{r} + T_\infty. \quad (6)$$

Afin de trouver la puissance thermique nécessaire au mammifère pour maintenir sa température, on remarque que dans notre modèle, cette puissance est transportée dans le fluide par le vecteur densité de courant d'énergie thermique \vec{j} . Toujours en régime permanent, en considérant une sphère de rayon $r > R$, centrée sur le mammifère, la conservation de l'énergie thermique s'écrit

$$4\pi r^2 j = \frac{4\pi}{3} R^3 P. \quad (7)$$

D'après la loi de Fourier, on calcule

$$\vec{j} = \lambda (T_{\text{corps}} - T_\infty) \frac{R}{r^2} \vec{u}_r, \quad (8)$$

qui est bien dirigé vers l'extérieur. Ainsi, on trouve la puissance nécessaire pour maintenir la surface du mammifère à la température T_{corps} , sous la forme

$$P = \frac{3\lambda(T_{\text{corps}} - T_{\infty})}{R^2}. \quad (9)$$

On remarque alors que cette puissance volumique est d'autant plus grande que la taille de l'animal est faible, et que la conductivité thermique de milieu est grande. En particulier, si l'on compare le cas de l'air et de l'eau, la conductivité thermique de l'air est environ vingt fois plus faible que celle de l'eau, ce qui explique pourquoi il n'existe pas de mammifères marins de petite taille, ni de mammifères terrestres de la taille d'une baleine.

Numériquement, évaluons l'énergie totale que doit fournir un mammifère marin de rayon $R = 10$ cm pour se maintenir à $T_{\text{corps}} = 30^\circ\text{C}$ dans une eau à $T_{\infty} = 20^\circ\text{C}$ pendant une journée. On obtient

$$E_{\text{eau}} = P_{\text{eau}} \frac{4\pi}{3} R^3 T \simeq 5 \times 10^8 \text{ J} \simeq 130\,000 \text{ kcal}, \quad (10)$$

avec T le nombre de secondes dans une journée. En comparaison, dans l'air, cette puissance est « seulement » de

$$E_{\text{air}} \simeq 2\,500 \text{ kcal}. \quad (11)$$

On peut comparer cette dissipation thermique à l'apport calorique du poisson, que l'on peut prendre en moyenne égal à $2\,000 \text{ kcal.kg}^{-1}$. Un mammifère de masse volumique moyenne de l'ordre de $1\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ a une masse de l'ordre de 5 kg . Ainsi, un petit mammifère marin devrait manger au moins dix fois sa masse en poisson tous les jours pour survivre, ce qui semble improbable. Ce problème est largement atténué pour les petits mammifères terrestres, ce qui explique leur existence.

3. Pour atténuer ce problème, les mammifères marins des mers froides sont souvent entourés d'une épaisse couche de graisse, qui les isole de l'extérieur. On modélise donc désormais le mammifère par un corps sphérique de rayon R_1 , qui produit toujours une puissance volumique P , entouré d'une couche de graisse sphérique située entre R_1 et R_2 . On se place à nouveau en régime permanent, de telle sorte que le profil de température dans la graisse s'écrit toujours $T_{\text{graisse}} = \frac{A}{r} + B$. On va supposer que le mammifère cherche à maintenir la température T_{corps} en R_1 et T_{∞} en R_2 . On obtient alors facilement les constantes A et B , de telle sorte que la température dans la graisse s'écrit

$$T(r) = \frac{T_{\text{corps}} - T_{\infty}}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)r} + \frac{T_{\text{corps}}R_1 - T_{\infty}R_2}{R_1 - R_2}. \quad (12)$$

En procédant comme précédemment, on égalise le flux d'énergie thermique total dans la graisse et la puissance produite par l'animal, pour obtenir

$$P = \frac{3\lambda_{\text{gras}}(T_{\text{corps}} - T_{\infty})}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1^2}. \quad (13)$$

En prenant $R_1 = 10$ cm comme précédemment et $R_2 = 15$ cm, on obtient l'énergie totale dissipée pendant une journée

$$E = \frac{3\lambda_{\text{gras}}(T_{\text{corps}} - T_{\infty})}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1^2} \frac{4\pi}{3} R_1^3 T \simeq 3.3 \times 10^7 \text{ J} \simeq 8000 \text{ kcal}. \quad (14)$$

Dans ce cas, le mammifère ne doit plus manger qu'une seule fois son poids en poisson par jour, ce qui semble beaucoup plus raisonnable. Cette modélisation semble indiquer qu'à condition que la couche de graisse soit suffisamment épaisse, cette stratégie évolutive est viable pour les mammifères marins. Toutefois, une telle modélisation devrait tenir compte d'un flux conducto-convectif représentant des échanges supplémentaires entre la surface de la couche de graisse et le fluide.

Exercice 4.2 : Gel d'un lac - X MP

On se propose d'étudier le gel et le dégel d'une étendue d'eau, tel un lac. Nous allons nous placer au-delà du cercle polaire, ce qui permet de considérer des saisons de météo constante.

1. On considère tout d'abord la nuit polaire, durant laquelle la température extérieure T_0 est supposée constante et inférieure à la température de solidification de l'eau. On suppose que l'épaisseur de la glace est initialement nulle. Au bout de combien de temps peut-on marcher sur le lac ?

2. Durant l'été polaire où le soleil est toujours levé, la glace fond, bien que la température ne dépasse pas 0°C . Expliquer le mécanisme permettant la fonte de la glace, et montrer en particulier que la fonte s'auto-entretient.

On donne $c_G = 2.1 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de la glace, $\lambda_G = 2.2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ sa conductivité thermique, $L_s = 3.3 \times 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$ l'enthalpie de fusion de la glace et $\mu_G = 915 \text{ kg.m}^{-3}$. Au-dessus du cercle polaire, on prendra un flux radiatif de $L_s \simeq 150 \text{ W.m}^{-2}$ de la part du Soleil. L'albédo (fraction de lumière réfléchi) de la glace est de l'ordre de 0,80, tandis qu'il n'est que de 0,05 pour la surface d'un lac.

Cet exercice, extrêmement classique, a été l'objet de nombreux problèmes d'oraux et est abordé de manière détaillée dans le sujet *physique 2* de l'X, posé en 2003 pour la filière MP. Il est pour nous l'occasion de présenter certaines techniques habituelles propres aux problèmes de diffusion.

1. Commençons ainsi par considérer la situation d'une nuit polaire, durant laquelle une épaisseur de glace $z(t)$ se forme au dessus de l'eau liquide, puisque la masse volumique de l'eau solide est plus faible que celle de l'eau liquide. La différence de température entre l'eau, en-dessous de la glace, et l'air au-dessus va créer un flux d'énergie thermique, permettant la croissance de la couche de glace. La situation est représentée dans le schéma 4.1.

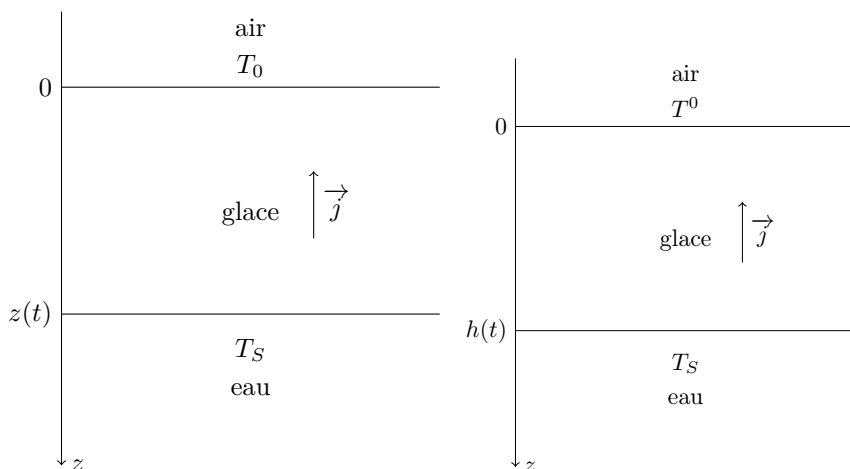


FIGURE 4.1. Schématisation du gel d'un lac, sous l'influence d'un gradient de température.

Partant de ce constat, on peut avoir l'idée d'utiliser l'équation de la chaleur afin de quantifier ces échanges. Nous allons supposer le milieu unidimensionnel dans la direction z , de

telle sorte que l'équation de la chaleur dans la glace s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_G}{\mu_G c_G} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Le coefficient de diffusion ainsi obtenu vaut alors $D_G = \frac{\lambda_G}{\mu_G c_G} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Comme souvent dans les problèmes de diffusion, nous allons chercher à obtenir un temps caractéristique de diffusion, c'est-à-dire la durée typique d'établissement d'un régime permanent dans la glace, que l'on va comparer avec le temps caractéristique de formation de la glace, que l'on peut supposer de l'ordre d'un mois pour une épaisseur d'un mètre (on pourra le vérifier après coup). Pour une épaisseur de glace de $L^* = 1 \text{ m}$, on peut former le temps caractéristique

$$t^* = \frac{L^{*2}}{D_G} \simeq 10 \text{ jours}. \quad (2)$$

Ceci implique que le régime de diffusion s'établisse beaucoup plus rapidement que la glace ne se forme, et nous pouvons donc faire l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire. On peut alors intégrer l'équation de la diffusion (1) avec $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, et en tenant compte des conditions $T(0, t) = T_0$ et $T(h(t), t) = T_S = 0^\circ \text{C}$ on obtient

$$T(z, t) = \frac{T_S - T_0}{h(t)} z + T_0. \quad (3)$$

Cette solution permet de constater la non-stationnarité du régime, puisqu'elle dépend du temps à travers l'épaisseur de glace $h(t)$. Ayant obtenu la température, on peut calculer le flux thermique dans la glace grâce à la loi de Fourier. Sur une surface S , entre t et $t + dt$, ce flux est

$$\Phi = -\lambda_G \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{u_z} S dt = -\lambda_G \frac{T_S - T_0}{h(t)} S dt. \quad (4)$$

On peut remarquer que ce flux est positif vers l'extérieur, ce qui est cohérent avec le fait que la solidification de la glace soit source d'énergie pour l'extérieur.

Procédons alors à un bilan d'enthalpie sur un cylindre vertical de section S durant un instant dt . Sous la couche de glace, la solidification d'une épaisseur dh supplémentaire va dégager une énergie

$$dH_{\text{fus}} = -\mu_G S dh L_s. \quad (5)$$

Cette énergie est notamment transmise sous forme de flux thermique. Dans l'eau, on peut supposer la température uniforme, ce qui empêche les échanges thermiques. Le flux thermique dans la glace a été calculé précédemment. En toute rigueur, il est nécessaire de prendre en compte la mise en mouvement de l'eau sous la couche de glace. En effet, le volume massique de la glace étant plus grand que celui de l'eau, la solidification va repousser le liquide vers le fond. Ceci provoque une variation d'énergie cinétique

$$dE_c = \frac{\mu_G S dh}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2. \quad (6)$$

Nous allons supposer que ce terme est négligeable dans le bilan d'énergie (notamment parce qu'on a supposé $\tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{gel}}$), qui va donc s'écrire

$$-\mu_G S dh L_s = -\lambda \frac{T_S - T_0}{h(t)} S dt. \quad (7)$$

Ainsi, l'épaisseur de glace va vérifier l'équation

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\lambda_G (T_S - T_0)}{\mu_G L_s} \frac{1}{h(t)} = \frac{D}{h(t)}. \quad (8)$$

Par séparation des variables, on obtient

$$h(t) dh = D dt, \quad (9)$$

et en supposant que l'épaisseur de glace soit nulle à l'instant initial, on obtient

$$h(t) = \sqrt{2Dt}. \quad (10)$$

Comme souvent dans un problème de diffusion, on retrouve une solution en \sqrt{t} , avec un coefficient qui s'apparente à un coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda_G(T_S - T_0)}{\mu_G L_S}$. Pour $T_S = -20^\circ\text{C}$, on obtient $D \simeq 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, le temps nécessaire pour obtenir une épaisseur de 15 cm, sur laquelle on va pouvoir marcher sera de l'ordre de

$$t_{15 \text{ cm}} = 1 \text{ jour}. \quad (11)$$

De plus, à la fin de la nuit polaire, que nous allons supposer durer six mois, la glace a une épaisseur de l'ordre de $h_N \simeq 2 \text{ m}$.

2. Considérons à présent un été polaire, durant lequel les radiations solaires vont venir réchauffer la glace. Ce rayonnement va provoquer la fonte de la glace s'il compense le flux thermique dû au gradient de température à l'intérieur de la glace. En reprenant l'expression trouvée précédemment, on peut estimer le flux thermique diffusif par unité de surface au début de la saison à

$$\varphi_{\text{th}} = -\lambda_G \frac{T_S - T_0}{h_N}. \quad (12)$$

Nous allons supposer que la température à l'extérieur n'est plus que de -10°C , ce qui permet de calculer que

$$|\varphi_{\text{th}}| \simeq 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (13)$$

Pour trouver la puissance reçue de la part du Soleil, il convient de tenir compte de la portion des rayons réfléchis par la glace. Ce phénomène est décrit par l'albédo de la glace, que nous notons a_G , qui rend compte de la portion du flux radiatif du Soleil φ_s réfléchi par la glace. Ceci signifie que le flux thermique effectivement reçu par la glace est

$$\varphi_g = (1 - a_G)\varphi_s \simeq 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (14)$$

Ainsi l'énergie apportée par le Soleil sera suffisante pour compenser l'effet du gradient de température entre l'eau à 0°C et l'air extérieur, même s'il est à une température inférieure à celle de la fusion de l'eau.

Toutefois, on constate que si l'on avait considéré une épaisseur de glace inférieure, par exemple de l'ordre de 50 cm, alors le flux thermique dans la glace aurait largement pu compenser l'apport d'énergie du Soleil. En réalité, une partie de la glace va néanmoins fondre en surface, ce qui va provoquer l'apparition d'une couche d'eau liquide au-dessus de la glace. Or, il se trouve que l'albédo a_E de l'eau est beaucoup plus faible que celui de la glace, de l'ordre de 0,05. Ceci signifie que le flux d'énergie reçu par l'eau, puis la glace, va être de l'ordre de

$$\varphi_{g+e} = (1 - a_E)\varphi_s \simeq 140 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (15)$$

Ainsi, la création d'une faible couche d'eau au-dessus de la glace va accélérer la fonte de l'épaisseur totale de glace. De manière plus qualitative, une telle couche d'eau va également agir comme une lentille optique naturelle, qui va provoquer une fonte localement plus importante de la glace. Finalement, malgré la température négative à l'extérieur, la glace va fondre sous l'effet du flux thermique solaire. Ce phénomène est particulièrement important dans la compréhension du changement climatique, notamment dans le rôle de régulation du climat par les pôles.

Exercice 4.3 : Une tente qui chauffe - X MP

Un campeur est allongé dans sa tente canadienne. Le soleil se lève, et il éclaire une des faces de la tente, mais pas l'autre. Pour se refroidir, est-ce une bonne idée pour le campeur de se mettre en position assise ?

Voilà un problème assez original illustrant comment, de manière générale, on peut établir l'équation de la chaleur dans une géométrie particulière. Nous allons ensuite voir comment la résoudre grâce à une méthode de séparation des variables.

**Quelques pistes...**

1. Comment peut-on modéliser le problème ? Établir l'équation de la diffusion dans la tente, que l'on supposera très longue.
2. Justifier que l'on peut se placer en régime stationnaire. Chercher une solution à variables séparées. Pour la partie radiale, on pourra chercher une solution sous la forme r^n .
3. En supposant que les rayons du Soleil apportent un flux thermique sur la face exposée, répondre à la question posée.

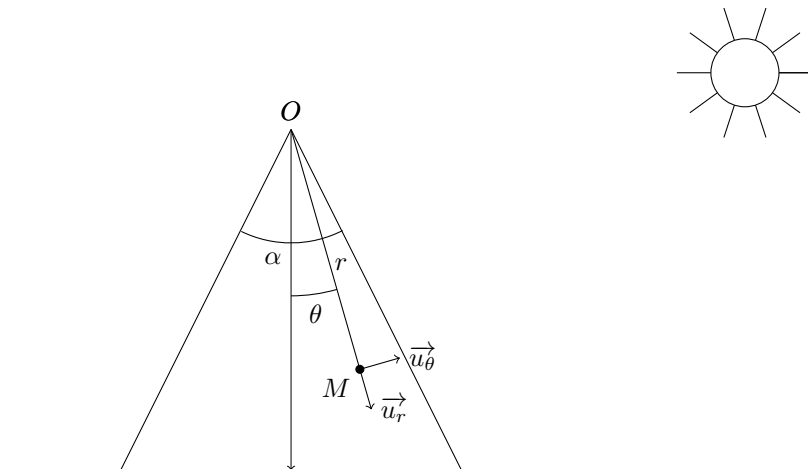


FIGURE 4.2. Système de coordonnées polaires à l'intérieur de la tente.

1. Les rayons du Soleil qui frappent sur une des faces vont imposer un profil de température plus élevé que sur la face non exposée. Ainsi, dans la tente, la répartition de température ne va pas être uniforme. Pour savoir si l'on a plus ou moins chaud, à la tête par exemple, il faut évaluer l'ordre de grandeur des transferts thermiques en fonction la distance au toit de la tente. En effet, on aura peu de peine à se convaincre que nous sommes sensibles au flux d'énergie thermique et non pas à la température : par exemple, on constate que deux objets de conductivités différentes à la même température ne donnent pas la même impression de « chaud » ou « froid ».

Nous allons donc chercher le profil de température dans toute la tente. Pour simplifier, nous considérons que la longueur de la tente est très grande devant les autres longueurs

caractéristiques, de telle sorte que la température ne dépend pas de la position dans le sens de la longueur. Il est clair, vu les conditions aux limites, que celle-ci va à la fois dépendre de la distance r au sommet de la tente, et de l'angle θ formé entre la verticale et la position. Ainsi, le vecteur densité de courant thermique aura deux composantes, selon \vec{u}_r et selon \vec{u}_θ . Il va donc s'agir pour nous de trouver ces composantes, et nous allons supposer que les transferts thermiques sont purement diffusifs.

Commençons donc par établir l'équation de la chaleur dans cette géométrie particulière. Notons μ la masse volumique de l'air, c sa capacité thermique massique, et λ sa conductivité thermique. Dans sa forme générale, cette équation s'écrit

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}, \quad (1)$$

où $\vec{j} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta$ est le vecteur densité de courant thermique et T est la température. Si l'on se donne l'expression de la divergence de la géométrie étudiée, cylindrique ici, on peut écrire l'équation directement. Toutefois, il est préférable de savoir rétablir l'expression de la divergence en raisonnant sur un volume infinitésimal.

Considérons ainsi un volume infinitésimal autour du point M en (r, θ, z) de longueur dr dans la direction de \vec{u}_r , de longueur $r d\theta$ dans la direction de \vec{u}_θ et de longueur h dans la direction de \vec{u}_z , comme dans la figure 4.3.

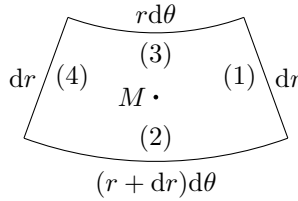


FIGURE 4.3. Élément infinitésimal en coordonnées cylindriques autour de M .

Le premier principe entre t et $t + dt$ appliqué à cet élément infinitésimal donne

$$\mu c T(r, \theta, t + dt)(r dr d\theta h) = \mu c T(r, \theta, t)(r dr d\theta h) + dt(\Phi_\theta(1) - \Phi_\theta(4) + \Phi_r(3) - \Phi_r(2)), \quad (2)$$

où $\Phi_\theta(1)$ (resp. $\Phi_\theta(4)$) est le flux thermique de j_θ à travers la surface (1) (resp. (4)), et de même pour $\Phi_r(3)$ et $\Phi_r(2)$. On voit facilement que

$$\begin{cases} \Phi_\theta(r, \theta, t) = j_\theta(r, \theta, t) l dr, \\ \Phi_r(r, \theta, t) = j_r(r, \theta, t) l r d\theta, \end{cases} \quad (3)$$

de telle sorte que l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \mu c T(r, \theta, t + dt)(r dr d\theta h) &= \mu c T(r, \theta, t)(r dr d\theta h) \\ &+ r j_r(r, \theta, t) dt l d\theta - (r + dr) j_r(r + dr, \theta, t) dt l d\theta \\ &+ j_\theta(r, \theta, t) dt l dr - j_\theta(r, \theta + d\theta, t) dt l dr. \end{aligned} \quad (4)$$

En faisant les développements limités de chaque terme, et en simplifiant les éléments infinitésimaux, on obtient

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta. \quad (5)$$

Cette expression est exactement l'expression générale du début, et nous avons donc retrouvé l'expression de la divergence en cylindrique. On peut ensuite utiliser la loi de Fourier

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad } T, \quad (6)$$

qui donne

$$j_r = \frac{\partial T}{\partial r} \text{ et } j_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}. \quad (7)$$

On en déduit l'équation de la diffusion

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right)}, \quad (8)$$

où l'on a posé comme d'habitude $D = \frac{\lambda}{\mu c}$.

2. Cette équation n'est bien entendu pas soluble en l'état, et il va nous falloir faire des hypothèses supplémentaires. La plus raisonnable est de supposer que l'on est en régime permanent, en effet, le temps caractéristique τ^* de diffusion dans une tente de taille caractéristique $L^* \sim 1$ m, dans l'air de coefficient de diffusion $D \sim 2.10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ est de l'ordre de

$$\tau^* \sim \frac{L^2}{D} \sim 10^5 \text{ s}. \quad (9)$$

Ainsi, aux échelles de temps étudiées, de l'ordre de la minute, on peut considérer que le régime est stationnaire, et donc l'équation à résoudre s'écrit désormais

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (10)$$

Comme souvent dans ce type d'exercices, nous allons chercher une solution particulière à variables séparées. On prend ainsi

$$T(r, \theta) = f(r)g(\theta), \quad (11)$$

et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient

$$r^2 f''(r)g(\theta) + rf'(r)g(\theta) = -f(r)g''(\theta). \quad (12)$$

Supposons que f et g ne s'annulent pas au voisinage d'un certain point (r, θ) , alors on peut écrire

$$\frac{rf'(r) + r^2 f''(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = K, \quad (13)$$

où K est une constante. En effet, nous avons égalité de deux fonctions de variables indépendantes, et ces fonctions doivent donc être des constantes. Ainsi, f et g vérifient les équations

$$\begin{cases} g''(\theta) + Kg(\theta) = 0, \\ r^2 f''(r) + rf'(r) - Kf(r) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

et il va donc falloir distinguer les cas selon que K est négatif ou positif. Dans les deux cas, l'équation sur g se résout immédiatement, et on obtient

$$\begin{cases} g(\theta) = A_1 \cos(\sqrt{K}\theta) + B_1 \sin(\sqrt{K}\theta) & \text{si } K > 0, \\ g(\theta) = A_1 \exp(\sqrt{K}\theta) + B_1 \exp(-\sqrt{K}\theta) & \text{si } K < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Pour l'équation sur f , il n'y a pas de méthode de résolution générale. En revanche, il est habituel dans ce genre de problèmes de chercher une solution sous la forme $f(r) = r^n$. En remplaçant dans l'équation différentielle vérifiée par f , on obtient

$$(n(n-1) + n - K)r^n = 0 \Rightarrow (K - n^2) = 0, \quad (16)$$

et donc si $K > 0$, $n = \pm\sqrt{K}$ et si $K < 0$, on a $n = \pm i\sqrt{|K|}$, et en utilisant que $r^{i\sqrt{K}} = \exp(i\sqrt{K} \ln r)$, on peut écrire les solutions sous la forme

$$\begin{cases} f(r) = A_2 \cos(\sqrt{|K|} \ln(r)) + B_2 \sin(\sqrt{|K|} \ln(r)) & \text{si } K < 0, \\ f(r) = A_2 r^{\sqrt{K}} + B_2 r^{-\sqrt{K}} & \text{si } K > 0. \end{cases} \quad (17)$$

La température doit rester finie quand $r \rightarrow 0$, donc on peut directement exclure la solution $K < 0$, puis affirmer que $B_2 = 0$. On absorbe ensuite A_2 dans les constantes A_1 et B_1 . Il nous reste ainsi trois inconnues à déterminer, A , B et K , et T est de la forme

$$T(r, \theta) = \left(A \cos(\sqrt{K}\theta) + B \sin(\sqrt{K}\theta) \right) r^{\sqrt{K}}. \quad (18)$$

3. Afin de répondre à la question posée, nous allons nous intéresser aux conditions aux limites. On peut soit fixer un profil de température, soit imposer un flux d'énergie thermique sur les parois. Vue la forme du profil de température à l'intérieur de la tente, nous choisissons de nous intéresser au flux d'énergie thermique. De plus, c'est à ce dernier que le ressenti de froid ou chaud est dû.

Afin de respecter la géométrie du problème, nous allons supposer que le flux thermique sur les parois leur est perpendiculaire, c'est-à-dire purement orthoradial dirigé selon \vec{u}_θ . On va de plus supposer que ce flux rentre par la face éclairée par le Soleil, et ressort par l'autre face.

Pour simplifier les calculs, nous écrivons la température sous la forme

$$T(r, \theta) = A \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi) r^{\sqrt{K}}. \quad (19)$$

D'après la loi de Fourier, le flux thermique $\vec{j} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta$ s'exprime

$$\vec{j}(r, \theta) = A\lambda\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi) r^{\sqrt{K}-1} \vec{u}_r - A\lambda\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}\theta + \varphi) r^{\sqrt{K}-1} \vec{u}_\theta, \quad (20)$$

où on a noté λ la conductivité thermique. Puisque l'on suppose le flux purement orthoradial sur les parois, on a $j_r(r, \pm \frac{\alpha}{2}) = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi) = 0, \\ \cos(-\sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \\ -\sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (21)$$

où $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On peut immédiatement résoudre ces équations, et on trouve

$$\begin{cases} \varphi = (n+m+1)\frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{K} = \frac{\pi(n-m)}{\alpha}. \end{cases} \quad (22)$$

De manière générale, on a alors

$$\begin{cases} \sin\left(\sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \\ \sin\left(-\sqrt{K}\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^m \end{cases}. \quad (23)$$

Afin que le flux thermique du Soleil entre par une face et ressorte par l'autre, il faut nécessairement que les deux soient de signes opposés. Ainsi n et m sont de même parité, et $(n+m+1)$ est nécessairement impair. On en conclut que φ est de la forme $k\pi$, et donc que la température est proportionnelle à $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(n-m)\theta\right)$. Il semble physiquement irréaliste que la valeur de T oscille à l'intérieur de la tente. Ainsi $(n-m) \in \{-1, 0, 1\}$, et on a donc soit $\sqrt{K} = \pm \frac{\pi}{\alpha}$, soit $\sqrt{K} = 0$. À ce stade, la température s'écrit donc comme une superposition

$$T(r, \theta) = T_0 + T_1 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}} + T_2 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) r^{-\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (24)$$

La température ne pouvant diverger en $r = 0$, on a nécessairement $T_2 = 0$. Toujours d'après la loi de Fourier, on calcule alors les deux composantes vecteur densité de courant d'énergie

thermique

$$\begin{cases} j_\theta = T_1 \frac{\pi\lambda}{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \\ j_r = -T_1 \frac{\pi\lambda}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \end{cases} \quad (25)$$

Pour que le flux soit entrant par la face en $\frac{\alpha}{2}$, il faut que $T_1 < 0$. Ainsi $j_r = -T_1 \frac{\pi\lambda}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ en $\theta = 0$, et donc j_r est une fonction croissante de r . Le corps humain étant sensible au flux d'énergie thermique, pour se refroidir, on a intérêt à s'asseoir.

Exercice 4.4 : Barre en combustion - Ulm PC

On considère une barre solide pouvant entrer en combustion. On démarre la combustion d'un côté de la barre. Modéliser l'avancée du front de combustion.



Quelques pistes...

1. Quelle est la nature des transferts thermiques dans le bois ? Expliquer l'avancement du front de combustion.
2. Modéliser le problème en supposant que le front de combustion est localisé. Écrire les équations régissant les transferts thermiques dans la barre. Peut-on supposer qu'on est en régime permanent ?
3. On cherche une solution se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c . Quel changement de variable peut-on proposer ? Résoudre alors les équations obtenues.
4. Quelles sont les conditions aux limites ? On considérera que la combustion commence lorsque la température dépasse une certaine température T_i .
5. En éliminant la position relative des frontières entre les différentes zones, trouver une équation vérifiée par c .

Données numériques :

- (a) Diffusivité thermique du charbon $0,15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
- (b) Diffusivité thermique du bois $\simeq 0,10 - 0,20 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Aucune connaissance sur les combustions, encore moins sur leur dynamique n'étant au programme de classe préparatoire, il s'agit bien entendu d'utiliser les seules connaissances que nous avons sur les transferts thermiques. Les transferts dans un matériau solide comme le bois peuvent être supposés de nature purement diffusive, la convection dans un solide n'étant possible que dans certaines conditions extrêmes. De plus, dans un milieu opaque comme le bois, on peut supposer que le transfert radiatif n'est pas important. Dans un modèle plus complet, il serait nécessaire de prendre en compte les pertes latérales. Néanmoins, dans un souci de simplicité, nous les supposons négligeables.

Ainsi, considérons une barre solide unidimensionnelle dans la direction x , en combustion. Lorsqu'on allume une telle barre à un de ses bouts, on voit un front de combustion avancer au cours du temps. On distingue ainsi trois zones dans la barre, une zone ayant déjà brûlé, une zone en cours de combustion, et une zone intacte. En l'absence de transfert conducto-convectif avec l'extérieur, la zone ayant déjà brûlé va rester à une température constante. Dans la zone en combustion, la température va augmenter au cours du temps, et la diffusion thermique va également faire augmenter la température dans la zone intacte, jusqu'à ce qu'elle dépasse la

température de combustion du bois T_b . Dans notre modèle, c'est ce mécanisme qui provoque l'avancée du front de combustion dans le solide.

2. Afin de simplifier le problème, nous allons supposer que la barre est infinie dans chaque direction. Notons $x_1(t)$ la position de la frontière entre la zone déjà brûlée et la zone en combustion, et $x_2(t)$ la frontière entre la zone en combustion et la zone intacte.

Nous allons supposer que les diffusivités thermiques des trois zones sont les mêmes, ce qui se justifie par les valeurs relativement proches des diffusivités thermiques dans le bois et le charbon, matière à laquelle la zone brûlée peut être assimilée. Notons D cette valeur commune. On peut alors écrire les équations régissant le transfert thermique dans chacune des zones

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{pour } x < x_1, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S & \text{pour } x_1 < x < x_2, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{pour } x > x_2, \end{cases} \quad (1)$$

où S représente un terme source, dû à la combustion. Si l'on procède à un bilan d'enthalpie sur un élément infinitésimal de longueur, on voit qu'on peut l'exprimer en fonction de la puissance de combustion P_{comb} , c'est-à-dire l'enthalpie de réaction de combustion par unité de masse par unité de temps et de la capacité thermique massique c_p par $S = P_{\text{comb}}/c_p$.

Il serait tentant de se placer en régime permanent et d'oublier les dérivées temporelles. On peut évaluer le temps caractéristique τ_{diff}^* de diffusion sur une distance de l'ordre du centimètre L^* par $\tau_{\text{diff}}^* \simeq \frac{L^{*2}}{D} \simeq \frac{10^{-4} \text{ m}^2}{10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} \simeq 10^3 \text{ s}$. D'un autre côté, la durée de combustion d'un centimètre de bois peut être évaluée entre environ une seconde et une minute. Le temps caractéristique de diffusion étant très grand devant celui de combustion, on ne va pas pouvoir négliger les dérivées temporelles.

3. L'équation de la diffusion non-stationnaire est en général difficile à résoudre analytiquement, même dans les cas les plus simples. Pour s'en sortir, on va ici remarquer que l'on cherche une solution sous forme d'une onde qui se propage, et donc poser une fonction annexe θ , telle que

$$T(x, t) = \theta(x - ct). \quad (2)$$

D'après nos connaissances sur les fonctions de plusieurs variables, on a alors

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x - ct) = -c\theta'(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x - ct) = \theta''(x - ct). \quad (3)$$

Ainsi, en posant $u = x - ct$, u_1 la frontière entre la zone ayant brûlé et la zone en combustion, u_2 la frontière entre la zone en combustion et la zone intacte, on a le système d'équations

$$\begin{cases} -c\theta'(u) = D\theta''(u) & \text{pour } u < u_1, \\ -c\theta'(u) = D\theta''(u) + S & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ -c\theta'(u) = D\theta''(u) & \text{pour } u > u_2. \end{cases} \quad (4)$$

L'intégration de ces équations donne alors

$$\begin{cases} \theta(u) = a_1 e^{-\frac{c}{D}u} + b_1 & \text{pour } u < u_1, \\ \theta(u) = a_2 e^{-\frac{c}{D}u} + b_2 - \frac{S}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ \theta(u) = a_3 e^{-\frac{c}{D}u} + b_3 & \text{pour } u > u_2. \end{cases} \quad (5)$$

4. Maintenant que nous connaissons la forme de la solution, reste à trouver les constantes d'intégration ainsi que les grandeurs que nous avons fait apparaître. Il s'agit de trouver les

a_i , les b_i , u_1 et u_2 et finalement c . La résolution est technique mais peut être instructive. Vu le grand nombre d'équations à manipuler, il n'est pas déraisonnable de penser qu'une telle résolution aurait pu être guidée par l'examineur.

Pour trouver ces différentes constantes d'intégration, il faut bien entendu utiliser les conditions aux limites du problème, c'est-à-dire la continuité de la température et celle du flux thermique.

Les conditions les plus simples à exploiter sont celles qui correspondent à $u = \pm\infty$. Loin devant le front de combustion, on peut supposer que la température est la température ambiante T_0 , ainsi en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve $b_3 = T_0$. Ensuite, en $u = -\infty$, la température ne peut pas diverger, donc $a_1 = 0$. Finalement, en l'absence de dissipation thermique (ou en faisant l'hypothèse réaliste que la thermalisation du bois brûlé se fait sur un temps caractéristique long devant la propagation de l'onde thermique), on va supposer que le bois brûlé reste à une température $T_b > T_0$. On a donc

$$\begin{cases} \theta(u) = \theta_1(u) = T_b & \text{pour } u < u_1, \\ \theta(u) = \theta_2(u) = a_2 e^{-\frac{c}{D}u} + b_2 - \frac{S}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ \theta(u) = \theta_3(u) = a_3 e^{-\frac{c}{D}u} + T_0 & \text{pour } u > u_2. \end{cases} \quad (6)$$

L'allure de la solution est donnée dans la figure 4.4.

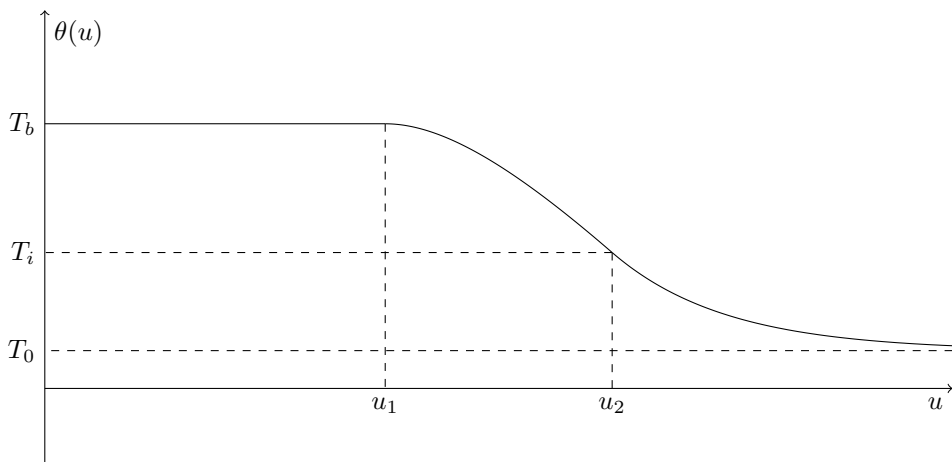


FIGURE 4.4. Allure du profil de température dans le bois en combustion, à t fixé.

Ensuite, nous allons écrire les conditions de raccordement entre les différentes frontières. On suppose que la combustion démarre au-dessus d'une certaine température T_i . Ainsi, la frontière en u_2 est telle que $\theta_2(u_2) = \theta_3(u_2) = T_i$. Cette équation permet donc de définir u_2 . Détaillons à présent les différentes équations de continuité, en rappelant que le flux thermique est proportionnel à $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \theta'(u)$. La continuité de la température en u_1 s'écrit

$$a_2 e^{-\frac{c}{D}u_1} + b_2 - \frac{S}{c}u_1 = T_b. \quad (7)$$

La continuité du flux thermique en u_1 s'écrit (en supposant l'égalité des conductivités thermiques du bois et du charbon)

$$-a_2 \frac{c}{D} e^{-\frac{c}{D}u_1} - \frac{S}{c} = 0. \quad (8)$$

En utilisant l'expression de la température pour $u_1 < u < u_2$, la continuité de la température en u_2 , avec la condition précédente sur la température en u_2 s'écrit

$$a_2 e^{-\frac{c}{D} u_2} + b_2 - \frac{S}{c} u_2 = T_i. \quad (9)$$

De la même manière, en utilisant l'expression pour $u > u_2$, on obtient

$$a_3 e^{-\frac{c}{D} u_2} + T_0 = T_i. \quad (10)$$

Finalement la continuité du flux thermique en u_2 s'écrit

$$-a_2 \frac{c}{D} e^{-\frac{c}{D} u_2} - \frac{S}{c} = -\frac{c}{D} a_3 e^{-\frac{c}{D} u_2}. \quad (11)$$

À ce stade, il nous reste donc au moins six inconnues, a_2 , b_2 , a_3 , u_1 , u_2 et c . Toutefois, nous n'avons que cinq équations. Nous allons voir comment il est toutefois possible d'exprimer c , en essayant de se débarrasser au mieux d'une des inconnues, par exemple u_1 .

Une méthode pour obtenir c est d'abord d'exprimer T_b en fonction des données du problème. On ose espérer qu'une telle indication aurait été donnée le jour d'un oral. D'après l'équation (7), on isole T_b , et on a

$$T_b = a_2 e^{-\frac{c}{D} u_1} + b_2 - \frac{S}{c} u_1. \quad (12)$$

Pour éliminer u_1 de cette équation, on utilise l'équation (8), et on obtient

$$a_2 e^{-\frac{c}{D} u_1} = -\frac{SD}{c^2} \text{ et } u_1 = -\frac{D}{c} \ln \left(-\frac{SD}{a_2 c^2} \right). \quad (13)$$

Finalement, on peut exprimer T_b sans u_1 , sous la forme

$$T_b = -\frac{SD}{c^2} + b_2 + \frac{SD}{c^2} \ln \left(-\frac{SD}{a_2 c^2} \right). \quad (14)$$

Reste donc à exprimer a_2 et b_2 . Il n'est pas aisé de savoir en fonction de quelles grandeurs il faut les exprimer, ni quelles grandeurs éliminer. Nous allons ici les exprimer en fonction de u_2 , et une indication aurait encore une fois été la bienvenue. Grâce à l'équation (10), on a facilement $a_3 e^{-\frac{c}{D} u_2} = T_i - T_0$. En combinant (10) et (11), on obtient alors

$$a_2 = e^{\frac{c}{D} u_2 (T_i - T_0 - \frac{SD}{c^2})}, \quad (15)$$

et en remplaçant dans (9), il vient

$$b_2 = T_0 + \frac{S}{c} u_2 + \frac{SD}{c^2}. \quad (16)$$

En remplaçant ces expressions dans (14), il vient

$$\begin{aligned} T_b &= -\frac{SD}{c^2} + T_0 + \frac{S}{c} u_2 + \frac{SD}{c^2} - \frac{SD}{c^2} \ln \left(\frac{c^2}{SD} e^{\frac{c}{D} u_2} \left(T_0 - T_i + \frac{SD}{c^2} \right) \right) \\ &= T_0 - \frac{SD}{c^2} \ln \left(\frac{c^2}{SD} (T_0 - T_i) + 1 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

et les u_2 se sont finalement éliminés. On a ainsi obtenu une équation sur c , en fonction des paramètres pertinents du problème. En l'état, cette équation n'est pas aisément soluble. Sans utiliser de méthodes numériques, une option possible est de supposer que $\frac{c^2}{SD} (T_0 - T_i) \ll 1$. On peut ainsi faire un développement limité de l'équation précédente, et on obtient

$$T_0 - T_b = \frac{SD}{c^2} \left(\frac{c^2}{SD} (T_0 - T_i) - \frac{1}{2} \frac{c^4}{S^2 D^2} (T_0 - T_i)^2 \right). \quad (18)$$

On trouve alors facilement

$$c = \frac{\sqrt{2SD(T_b - T_i)}}{T_0 - T_i}. \quad (19)$$

Passons à l'application numérique. On prend $D \sim 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, on suppose que le bois loin de la flamme est à $T_0 = 25^\circ\text{C}$, que la température d'inflammation du bois est de $T_i = 250^\circ\text{C}$. Lorsque du bois brûle, il est en général rouge. On peut alors estimer sa température à 500°C . Reste à estimer $S = \frac{P_{\text{comb}}}{c_p}$. Le pouvoir calorifique du bois, c'est-à-dire l'enthalpie massique de combustion, est de l'ordre de $4 \text{ kWh}.\text{kg}^{-1}$, et donc $P_{\text{comb}} = 4 \times 10^3 \text{ W}.\text{kg}^{-1}$. Pour le bois $c_p = 2 \times 10^3 \text{ J}.\text{kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et donc $S \simeq 2 \text{ K}.\text{s}^{-1}$. On trouve alors

$$c \simeq 4 \times 10^{-5} \text{ m}.\text{s}^{-1}. \quad (20)$$

Une résolution numérique de l'équation (17) donne

$$c \simeq 2.7 \times 10^{-5} \text{ m}.\text{s}^{-1}, \quad (21)$$

ce qui est assez proche de la solution obtenue par développement limité. Dans le cas d'une bûche de 20 cm, on obtient un temps de combustion de l'ordre de l'heure, ce qui est un ordre de grandeur raisonnable.

Un tel exercice est intéressant, d'avantage par la démarche de modélisation proposée que par sa résolution technique. De fait, une analyse dimensionnelle n'aurait pas permis de trouver cette valeur, puisqu'il apparaît naturellement deux échelles de température ($T_b - T_i$) et ($T_0 - T_i$).

Exercice 4.5 : Caléfaction 1 - X MP

On constate que lorsque l'on fait tomber des gouttes d'eau sur une poêle pas « trop chaude », ces dernières forment une sorte de cylindre avant de s'évaporer. Plus on chauffe, plus ce temps d'évaporation diminue, mais passée une certaine température, de l'ordre de 500 K, les gouttes se déplacent sur la poêle, et le temps nécessaire à l'évaporation complète de la goutte augmente significativement.

1. Expliquer qualitativement le phénomène, en particulier la formation d'un coussin de vapeur aux hautes températures, qui maintient la goutte au-dessus de la poêle.
2. On assimile les gouttes à des cylindres. L'énergie de surface de la goutte est donnée par $E_S = \gamma S$, où S est la surface de la goutte en contact avec le milieu extérieur, et γ est un coefficient constant appelé tension de surface. En supposant que l'on est dans la situation où la goutte est en mouvement, trouver le rayon de la goutte.
3. On suppose que le coussin de vapeur a une hauteur l constante. Sachant que l'on connaît le temps τ nécessaire à l'évaporation des gouttes, trouver l .
4. Expliquer pourquoi ce phénomène pose problème lors des incendies.

Remarque : L'étude de la caléfaction, aussi appelée effet de Leidenfrost, est un problème posé sous de nombreuses formes aux concours de Polytechnique et de l'ENS. Nous proposons deux énoncés, ainsi que deux approches de résolution différentes, l'une accessible sans connaissances en mécanique des fluides, l'autre complétant la résolution mais plutôt réservée aux classes PC et PSI. Pour plus de détails, nous recommandons le sujet de Physique B, filière PC, de l'École Polytechnique de 2013.

1. La caléfaction est un phénomène qui se produit lorsque l'environnement direct de la goutte est à une température très grande devant la température d'ébullition du liquide considéré. Considérons le cas où la température est proche de la température d'ébullition. Dans ce cas, la goutte est simplement en contact avec le métal, qui agit comme une source de

chaleur et provoque l'ébullition de la goutte. Plus le solide est à une température élevée, plus le transfert thermique est grand, et plus la durée nécessaire à l'évaporation complète de la goutte est faible.

En revanche, si la température est très grande devant la température d'ébullition du liquide, une partie de la goutte va s'évaporer immédiatement au contact du métal, ce qui forme une mince couche de vapeur. Cette dernière aura pour effet d'isoler thermiquement la goutte, ou plus précisément de limiter le flux d'énergie thermique reçu par la goutte, retardant son inéluctable évaporation. Dans le cas de l'eau, l'effet Leidenfrost apparaît lorsque la température dépasse environ 160 °C, et la durée de vie des gouttes, de l'ordre de quelques secondes juste en-dessous de cette limite, peut alors passer à plusieurs dizaines de secondes.

2. La forme de la goutte est dictée par la compétition entre deux effets, d'une part la gravité, qui tend à aplatir la goutte, et d'autre part la tension de surface, qui tend à minimiser sa surface, afin de minimiser l'énergie de surface $E_S = \gamma S$. C'est cet effet qui explique qu'en l'absence de gravité, les gouttes prennent une forme sphérique, qui minimise la surface à volume constant.

Supposons comme indiqué que la goutte prend une forme cylindrique, de rayon R et de hauteur h . On suppose que le volume $V = \pi R^2 h$ est fixé. Une goutte de forme cylindrique n'est possible que si elle est très aplatie. On va ainsi supposer que $h \ll R$. Pour trouver les dimensions de la goutte, nous allons minimiser son énergie totale.

Commençons par écrire la contribution de l'énergie de surface. Les bases supérieure et inférieure du cylindre ont chacune une surface qui vaut πR^2 , tandis que la face latérale a une surface $2\pi R h$. Ainsi, l'énergie de surface s'écrit

$$E_S = \gamma (2\pi R^2 + 2\pi R h) \simeq 2\gamma \pi R^2 = \frac{2\gamma V}{h}, \quad (1)$$

où l'hypothèse $h \ll R$ nous a permis de négliger la contribution de la surface latérale. Nous exprimons cette énergie en fonction de h car le calcul final est plus simple avec cette grandeur.

L'énergie potentielle de pesanteur se calcule facilement, puisque la géométrie cylindrique permet d'affirmer que le centre de gravité du système est en $h/2$. Ainsi l'énergie potentielle de pesanteur s'exprime

$$E_p = \rho_l V g \frac{h}{2}, \quad (2)$$

où ρ_l est la masse volumique de l'eau liquide. L'énergie totale est donc

$$E_{\text{tot}} = \frac{\rho_l g V h}{2} + \frac{2\gamma V}{h}, \quad (3)$$

qui ne dépend ici que de h à V fixé. La hauteur d'équilibre h_e qui minimise l'énergie totale vérifie donc l'équation

$$E'_{\text{tot}}(h_e) = \frac{\rho_l g V}{2} - \frac{2\gamma V}{h_e^2} = 0, \quad (4)$$

ce qui permet immédiatement d'obtenir

$$h_e = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l g}}. \quad (5)$$

La grandeur $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l g}}$ est bien homogène à une longueur. Elle représente la taille caractéristique autour de laquelle les effets de tension de surface deviennent importants face à la gravité. Pour l'eau, de tension superficielle $\gamma_{\text{eau}} \simeq 70 \text{ mN.m}^{-1}$, on obtient $h_e \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ m} \simeq 5 \text{ mm}$. Pour une goutte de $V = 1 \text{ cm}^3$, on trouve alors

$$R_e = \frac{V}{\pi h_e} \simeq 8 \text{ mm}. \quad (6)$$

Ainsi, l'hypothèse de négliger la surface latérale ne semble pas complètement justifiée. Toutefois, un calcul numérique effectué en tenant compte de cette dernière donne $h_e \simeq 4,5 \text{ mm}$ et $R_e \simeq 8,4 \text{ mm}$, toujours pour un volume de 1 cm^3 . L'approximation faite donne donc des résultats relativement bons.

3. Cherchons à présent à évaluer la hauteur de la couche de vapeur sur laquelle repose la goutte en caléfaction, sachant que l'on connaît la durée de vie de la goutte. Pour cela, l'idée la plus naturelle est d'essayer de quantifier les échanges thermiques permettant l'évaporation de la goutte, et donc de trouver une équation régissant ces échanges dans la couche de vapeur. Afin de simplifier le modèle au maximum, nous ne prenons en compte que des effets diffusifs.

Afin de nous adapter au mieux à la géométrie du problème, nous supposons que la goutte reste cylindrique tout au long de son évaporation, et nous plaçons donc dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe z vertical étant orienté vers le haut. La température T au sein de la couche de vapeur dépend *a priori* des trois coordonnées. Par invariance par rotation autour de l'axe z , on peut d'ores et déjà affirmer que la température ne dépend pas de θ .

De plus, la longueur caractéristique de variation de T selon la direction z est l , et R selon r . L'expérience prouve que l'on peut faire l'hypothèse $l \ll h$ et $l \ll R$. On peut alors comparer les dérivées de T dans chaque direction en calculant

$$\left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right| \sim \frac{l}{R} \ll 1, \quad (7)$$

et on conclut ainsi que T ne dépend spatialement que de z .

Considérons à présent une tranche de la couche de vapeur entre z et $z + dz$, de surface S . Notons ρ_v la masse volumique de la vapeur d'eau, c_v sa capacité thermique massique et λ_v sa conductivité thermique. Notons \vec{j}_{th} le vecteur densité de courant d'énergie thermique. D'après la loi de Fourier, on sait qu'il est dirigé selon z uniquement, et on écrit donc $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}} \vec{u}_z$. Entre t et $t + dt$, le système considéré reçoit un flux thermique $j_{\text{th}}(z) S dt$ par la face inférieure, perd un flux thermique $j_{\text{th}}(z + dz) S dt$ par la face supérieure. Son énergie interne à t s'écrit $\rho_v S dz c_v T(t, z)$, de telle sorte que le premier principe donne

$$\rho_v S dz c_v T(t + dt, z) = \rho_v S dz c_v T(t, z) + j_{\text{th}}(z) S dt - j_{\text{th}}(z + dz) S dt. \quad (8)$$

D'après les développements limités usuels et la simplification des éléments différents, on retrouve l'équation habituelle de la chaleur

$$\rho_v c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial z}. \quad (9)$$

Finalement, la loi de Fourier donne $j_{\text{th}} = -\lambda_v \frac{\partial T}{\partial z}$, de telle sorte que l'équation s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_v c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (10)$$

où $D = \frac{\lambda}{\rho_v c_v}$ est la diffusivité de la vapeur d'eau.

Comme toujours, cette équation est difficile à résoudre en l'état. Un bon réflexe à avoir est de se demander si on peut se placer en régime permanent, en comparant le temps caractéristique du problème, ici le temps nécessaire à l'évaporation complète de la goutte, et le temps caractéristique de la diffusion. En raisonnant en ordre de grandeur dans l'équation de diffusion, ce dernier vaut

$$\tau \sim \frac{l^2}{D} \simeq \frac{(10^{-4})^2}{10^{-5}} \simeq 10^{-3} \text{ s}, \quad (11)$$

où l'on a pris $D \simeq 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, ordre de grandeur habituel du coefficient de diffusion des gaz, et $l \simeq 0.1 \text{ mm}$. Ainsi, le temps caractéristique de diffusion est très faible devant le temps

caractéristique du problème, et on peut donc supposer qu'un régime permanent s'établit très rapidement. L'équation de la chaleur dans la couche de vapeur s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (12)$$

que l'on résout immédiatement en $T(z) = az + b$. Avec les conditions aux limites, on obtient

$$T = -\frac{\Delta T}{l}z + T_p, \quad (13)$$

avec $\Delta T = T_p - T_g$ où T_p est la température de la poêle et T_g est la température de la goutte.

L'étape suivante est alors de réaliser un bilan d'énergie sur la goutte. D'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant d'énergie thermique est

$$\vec{j}_{th} = \lambda \frac{\Delta T}{l} \vec{u}_z, \quad (14)$$

de telle sorte que le flux de chaleur reçu entre t et $t + dt$ par la goutte est

$$\Phi_{th} = \frac{\lambda \Delta T}{l} \pi R^2 dt. \quad (15)$$

On suppose que ce flux provoque l'évaporation d'une quantité dm de matière. En notant L_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau, le bilan d'énergie entre t et $t + dt$ sur la goutte s'écrit

$$L_v dm = \frac{\lambda \Delta T}{l} \pi R^2 dt, \quad (16)$$

et on en déduit finalement l'équation régissant la perte de masse de la goutte

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{L_v l} \pi R^2}. \quad (17)$$

Lorsque l'on intègre cette relation entre l'instant initial, où la goutte a une masse m_0 , et l'instant où elle finit de s'évaporer, on obtient

$$m_0 = \frac{\lambda \Delta T}{L_v l} \pi R^2 \tau, \quad (18)$$

et finalement la relation entre τ et l peut s'écrire

$$\boxed{l = \frac{\pi \lambda \Delta T R^2}{L_v m_0} \tau}. \quad (19)$$

Pour finir, calculons le l obtenu pour une goutte centimétrique, avec $m_0 \simeq 1$ g. La goutte étant à ébullition, sa température est de $T = 100^\circ\text{C}$. On va donc prendre $\Delta T \simeq 200^\circ\text{C}$. D'après les résultats précédents, on prend $R \simeq 8$ mm, et en supposant que la durée de vie de ces gouttes peut atteindre plusieurs minutes, on prend $\tau \simeq 200$ s. Finalement, on peut trouver dans la littérature que $\lambda = 25 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et que $L_v = 2,3 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$. On obtient alors $l \simeq 10^{-4} \text{ m} = 100 \mu\text{m}$, ce qui est assez proche des valeurs couramment admises, ainsi que physiquement réalistes.

Ainsi, ce modèle donne des résultats relativement probants, même s'il ne prend pas en compte les transferts thermiques convectifs et radiatifs, qu'il serait possible d'ajouter au prix d'une plus grande complexité des équations.

4. Lors d'un incendie, ce phénomène pose problème car la couche de vapeur se formant autour des gouttes d'eau les empêchent de se vaporiser rapidement, ce qui ne permet donc pas de maîtriser la température de l'incendie, et donc de limiter la propagation des flammes.

Exercice 4.6 : Conductivité thermique d'un vide imparfait - Ulm MP

Dans cet exercice, nous allons étudier un vase Dewar, c'est-à-dire un récipient cylindrique constitué de deux parois métalliques séparées par une couche de vide. Pour un tel vase, trouver la puissance thermique dégagée par les parois latérales en fonction de la qualité du vide.

Complément : Notons κ la diffusivité thermique d'un métal et σ sa conductivité. Montrer que $\frac{\kappa}{\sigma T}$ est une constante, avec T la température.

Cet exercice, assez original, va nous permettre de discuter de l'origine microscopique de la diffusion thermique. En complément, nous discuterons des lois empiriques en général. Afin de trouver la puissance dégagée par les parois latérales, le plus naturel est de trouver le flux thermique traversant les parois en fonction de la différence de température entre l'intérieur du thermos et l'extérieur, grâce à l'équation de la chaleur. Cette démarche ne fait pas apparaître explicitement la qualité du vide, c'est-à-dire la pression. Il est clair qu'un vide de meilleur qualité va moins bien « conduire la chaleur », c'est-à-dire avoir une conductivité thermique plus faible. Dans un premier temps, nous allons donc discuter de la valeur de la conductivité en fonction de la pression.

**Quelques pistes...**

1. Établir la loi de Fourier grâce à un modèle microscopique. On pourra s'intéresser au flux d'énergie thermique transmis par les chocs entre les molécules dans un modèle monodimensionnel simple. En déduire la conductivité thermique en fonction du libre parcours moyen, de la vitesse quadratique moyenne et de la capacité calorifique du gaz.
2. Exprimer ces différentes quantités en fonction de la pression et de la température. On pourra avoir recours à un modèle microscopique pour exprimer le libre parcours moyen en fonction de la pression.
3. Dans la limite des faibles pressions, par quoi est limité le libre parcours moyen ? En déduire que dans cette limite, la conductivité thermique est proportionnelle à la pression.
4. En déduire la puissance thermique dégagée par les parois latérales en fonction de la pression.

1. Commençons par établir la loi de Fourier grâce à un modèle microscopique, dans l'esprit de la théorie cinétique des gaz. Cette loi traduit un phénomène de transport qui tend à homogénéiser la température, via un flux thermique dû aux porteurs d'énergie thermique du matériau. Dans ce problème, nous allons décrire les échanges thermiques portés par les molécules de gaz restantes dans le vide imparfait entre les parois.

Plaçons-nous dans le cadre du modèle de Drude. Nous allons supposer que les chocs entre les molécules vont les thermaliser à la température de la dernière collision. Ainsi, les molécules qui quittent les régions où la température est élevée vont avoir une énergie supérieure à celle des molécules des régions aux températures faibles. Nous supposons que les molécules de gaz ont un libre parcours moyen l et une vitesse moyenne v . On peut alors définir τ le temps moyen entre deux collisions par $\tau = \frac{l}{v}$. Finalement, nous supposons que l'énergie thermique d'une particule de gaz à la température T est $\mathcal{E}(T)$ et qu'il y a n particules par unité de volume.

Afin de simplifier au maximum, considérons un cas monodimensionnel et calculons l'énergie thermique en un point x sur une surface S quelconque. Entre deux chocs, c'est-à-dire pendant

une durée τ , les molécules provenant de la gauche vont apporter une énergie $\mathcal{E}(T(x - v\tau))$. En prenant en compte que seule la moitié de ces molécules va vers les x positifs, l'énergie thermique provenant de la gauche est $\frac{nSv\tau}{2}\mathcal{E}(T(x - v\tau))$. De la même manière, en prenant garde à l'algèbrisation de la vitesse, l'énergie thermique provenant de la droite est $\frac{Sn(-v)d\tau}{2}\mathcal{E}(T(x + v\tau))$. Ainsi, l'énergie thermique qui arrive sur le système entre t et $t + \tau$ est

$$d\mathcal{E} = \frac{nS\tau}{2} (v\mathcal{E}(T(x - v\tau)) + (-v)\mathcal{E}(T(x + v\tau))) \tau \quad (1)$$

On en déduit le vecteur densité de courant d'énergie thermique dû au déséquilibre de température au point x

$$\begin{aligned} j &= \frac{nv}{2} (\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau))) = \frac{nv}{2} 2v\tau \frac{d\mathcal{E}}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right) \\ &= -nv^2\tau \frac{d\mathcal{E}}{dT} \frac{dT}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Finalement, reste à reconnaître que $n \frac{d\mathcal{E}}{dT}$ est la capacité thermique volumique c_V du gaz, et on obtient

$$j = -u^2\tau c_V \frac{dT}{dx}, \quad (3)$$

où nous avons remplacé v^2 par $u^2 = \langle v^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne pour souligner que v est la vitesse moyenne dans le gaz. Notons que ce raisonnement ne tient pas compte de la dépendance de la vitesse à la température. Le calcul montre qu'en tenir compte donne des corrections d'ordre deux, ce que nous ne ferons pas ici. Ensuite, ce résultat s'étend sans problème à trois dimensions, en se rappelant que $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$, et on obtient alors

$$\vec{j} = -\frac{u^2\tau c_V}{3} \vec{\text{grad}} T. \quad (4)$$

Par identification, la conductivité thermique est donc

$$\lambda = \frac{u^2\tau c_V}{3} = \frac{ulc_V}{3}. \quad (5)$$

2. Exprimons les différentes quantités qui apparaissent dans cette expression en fonction de la pression. Tout d'abord, comme on l'a vu, la capacité thermique volumique peut s'exprimer en fonction de la densité de particules n et la capacité volumique par particule, qui vaut $\frac{dE}{dT} = \frac{5}{2}k_B T$ dans le cas d'un gaz parfait diatomique comme l'air.

Le temps moyen entre deux chocs est une quantité difficile à calculer, et il est préférable de faire apparaître le libre parcours moyen $l = \tau u$. À ce stade, la capacité thermique s'exprime

$$\lambda = \frac{5ulnk_B}{6}. \quad (6)$$

Afin d'exprimer la vitesse quadratique moyenne, on égalise l'énergie d'agitation thermique $\frac{5}{2}k_B T$ et l'énergie cinétique moyenne de chaque particule $\frac{1}{2}mu^2$, avec m sa masse. On trouve alors

$$u = \sqrt{\frac{5k_B T}{m}} \quad (7)$$

Finalement, exprimons le libre parcours moyen en fonction des grandeurs thermodynamiques habituelles. Pour cela, nous allons encore une fois recourir à un modèle microscopique. Considérons ainsi une molécule de gaz, se déplaçant à la vitesse moyenne u . Dans un premier temps, nous allons supposer que les autres molécules sont fixes afin de simplifier le raisonnement.

Afin de modéliser les chocs entre les molécules, nous allons les représenter par des sphères dures de diamètre d . Une telle sphère se déplaçant vers une molécule cible de même diamètre

va la rencontrer si elle se trouve dans le cylindre de rayon d . La situation est représentée dans le schéma 4.5. Ainsi, la surface effective de collision entre les deux molécules est $A = \pi d^2$.

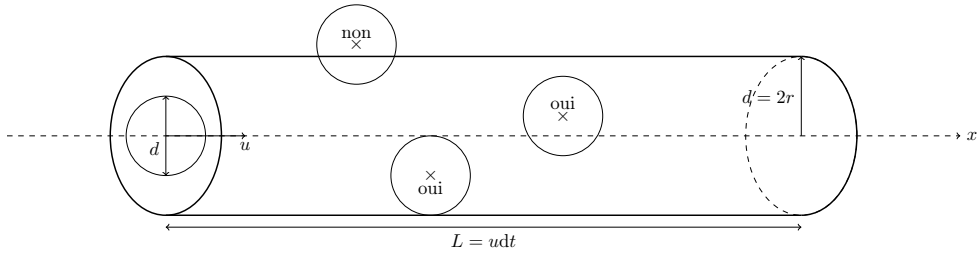


FIGURE 4.5. Lorsque la molécule étudiée se déplace, elle rencontre les molécules situées dans le cylindre généré par son déplacement, de rayon $r = d$. Sur le schéma, seules les sphères marquées d'un « oui » sont susceptibles de rencontrer la sphère en mouvement.

Entre deux instants t et $t + dt$, pour une molécule se déplaçant à la vitesse moyenne u , le volume d'interaction, c'est-à-dire le volume balayé par la surface A est donc $V = \pi d^2 u dt$. Avec n molécules par unité de volume, le nombre moyen de collisions pendant dt est alors

$$dN_{\text{coll}} = \pi d^2 u dt n. \quad (8)$$

Pendant cette durée, la molécule a bien entendu parcouru une distance $dl = u dt$. Le libre parcours moyen, donc la distance moyenne entre deux collisions, vaut alors

$$l = \frac{dl}{dN_{\text{coll}}} = \frac{u dt}{\pi d^2 u dt n} = \frac{1}{\pi d^2 n}. \quad (9)$$

Toutefois, nous avons fait l'hypothèse extrêmement simplificatrice que les molécules cibles étaient fixes, ce qui n'est bien entendu pas le cas dans un gaz. Afin de nous ramener au cas précédent, le plus simple est de considérer le mouvement relatif des deux molécules. On définit la vitesse relative par $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, où l'indice 1 se réfère à la molécule étudiée et 2 à la cible. On peut alors facilement calculer que

$$\begin{aligned} v_{\text{rel}}^2 &= (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ &= v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2, \end{aligned} \quad (10)$$

et donc que

$$\begin{aligned} \langle v_{\text{rel}}^2 \rangle &= \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle - 2 \langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle \\ &= 2u^2 - 0. \end{aligned} \quad (11)$$

En effet, par hypothèse, on a $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = u^2$, et puisque les distributions des vitesses sont aléatoires, on a $\langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle = 0$. Ainsi, la vitesse relative moyenne entre deux molécules quelconques du gaz est $v_{\text{rel}} = \sqrt{2}u$, de telle sorte que le libre parcours moyen est donné par

$$l = \frac{u}{v_{\text{rel}} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (12)$$

Revenons à présent à l'expression de la conductivité thermique. En remplaçant les valeurs que l'on vient de trouver de u et l dans l'équation (6), on obtient

$$\lambda = \frac{5\sqrt{10}}{12\pi} \sqrt{\frac{k_B^3 T}{d^4 m}} = \lambda_{\text{lim}}(T). \quad (13)$$

Le préfacteur numérique n'a que peu d'importance ici : il est fortement lié à nos hypothèses sur les collisions et à l'hypothèse de gaz parfait diatomique. Cette expression peut apparaître

comme extrêmement surprenante, puisque la conductivité thermique ne semble pas dépendre de la pression. Pourtant, il est clair que dans la limite des très faibles pressions, cette conductivité doit tendre vers celle du vide, qui est très faible.

3. Dans notre raisonnement, nous avons fait l'hypothèse que le libre parcours moyen était déterminé par les collisions avec les autres molécules, ce qui a donné l'expression $l \propto \frac{1}{p}$. Dans la limite des très faibles pressions, on voit que la distance moyenne entre deux chocs tend vers l'infini. Dans notre système, ceci est bien entendu impossible, puisque le gaz est contenu dans un récipient de taille finie. Ainsi, lorsque le vide est d'une qualité suffisante, le libre parcours moyen sera limité par la taille du récipient, qui est ici de l'ordre de la différence de rayon entre les cylindres extérieurs et intérieurs. Notons l^* cette valeur. Alors dans cette limite, en reprenant l'expression (6), la conductivité thermique est donnée par

$$\lambda = \frac{5\sqrt{5}}{6} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} l^* \frac{p}{k_B T} k_B = \frac{5\sqrt{5}}{6} \sqrt{\frac{k_B}{mT}} l^* p, \quad (14)$$

où nous avons utilisé la loi des gaz parfaits pour écrire $n = \frac{p}{k_B T}$. Dans ce régime, on constate que la conductivité thermique est une fonction linéaire de la pression, et peut donc être rendue aussi faible que voulu.

La pression critique p_{crit} de changement de régime est celle pour laquelle le libre parcours moyen devient de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique $L \simeq 1$ cm du récipient. D'après la formule (12), ceci correspond à

$$p_{\text{crit}} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 L}. \quad (15)$$

Considérons par exemple le cas où l'on souhaite stocker de l'azote liquide à $T = 77$ K. Le diamètre apparent des molécules d'air est de l'ordre de 10^{-10} m, ce qui correspond à 2,5 fois la taille d'un atome d'oxygène. Finalement, on prend $L \simeq 1$ cm, de telle sorte que

$$p_{\text{crit}} \simeq 1 \text{ Pa}. \quad (16)$$

Une telle pression correspond à un vide aisément réalisable. En conclusion, l'allure de la conductivité en fonction de la pression est donnée dans la figure 4.6.

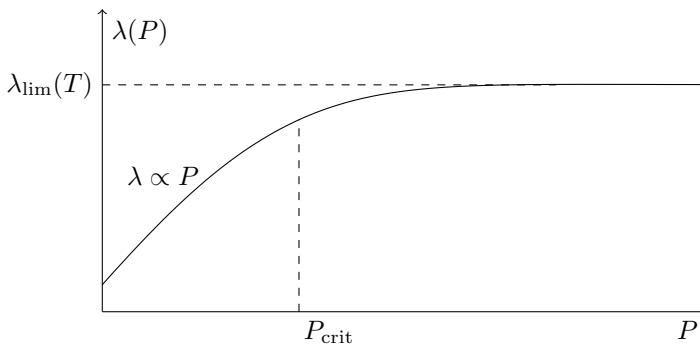


FIGURE 4.6. Conductivité thermique en fonction de la pression pour un gaz dans un récipient de taille finie.

4. Grâce à ces différents éléments, nous pouvons répondre à la question initiale. Nous allons nous placer en régime stationnaire, supposer que la température de la paroi extérieure

est T_{ext} et que celle de la paroi intérieure est T_{int} , qui correspond à la température du liquide stocké. On peut très rapidement montrer que l'équation de la diffusion dans le gaz s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (17)$$

où l'on a supposé que le champ de température respectait la symétrie cylindrique et pouvait donc se mettre sous la forme $T(r, t)$, et où l'on a noté D le coefficient de diffusion. En régime permanent, on obtient l'équation $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$, et on peut calculer que le champ de température s'écrit

$$T(r) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{\ln \left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}} \right)} \ln \frac{r}{R_0}, \quad (18)$$

avec $R_0 = R_{\text{ext}} / e^{\frac{T_{\text{ext}} \ln(R_{\text{ext}} - R_{\text{int}})}{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}}$. On peut alors obtenir le flux thermique grâce à la loi de Fourier

$$\vec{j} = -\frac{\lambda(P, T)}{r} \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{\ln \left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}} \right)}, \quad (19)$$

où l'on a noté $\lambda(P, T)$ pour souligner la dépendance de la conductivité thermique à la pression et la température. En raison des chocs incessants des molécules avec les deux parois, on peut supposer que la conductivité thermique prend la valeur de la température moyenne entre la température extérieure et intérieure. Le flux total à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h est bien entendu conservé, et on obtient la puissance totale perdue

$$P = S \lambda(P, T) \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{\ln \left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}} \right)}, \quad (20)$$

où l'on a noté S la surface des parois latérales.

Complément : le raisonnement précédent va nous permettre de démontrer un résultat intéressant, liant la diffusivité thermique et la conductivité électrique dans un métal, et plus généralement de discuter des lois de diffusion. Le présent complément est extrait d'un oral de Lyon-Cachan.

De manière générale, les lois empiriques comme la loi de Fourier et la loi d'Ohm traduisent des phénomènes de transport : de charges pour la loi d'Ohm et d'énergie thermique pour la loi de Fourier. Ce transport a lieu sous l'influence de l'inhomogénéité d'un paramètre intensif, le potentiel pour la première et la température pour la seconde. Mathématiquement, ces lois peuvent s'écrire sous la forme

$$\vec{j} = -\alpha \overrightarrow{\text{grad}} Q, \quad (21)$$

où \vec{j} est le flux de grandeur physique transportée, Q le paramètre intensif considéré et α un coefficient qui va traduire la capacité du milieu à s'homogénéiser, autrement dit la facilité qu'ont les porteurs à se déplacer. Le même commentaire pourrait être fait pour la loi de Fick, qui traduit un transport de particules sous l'influence d'un gradient de concentration. Dans un métal, les électrons vont être à la fois les porteurs de charge et ceux d'énergie thermique, et nous allons voir qu'il en découle une relation entre la diffusivité thermique et la conductivité électrique.

Nous venons d'établir la loi de Fourier à partir d'un modèle microscopique, et nous avons pu établir que la diffusivité thermique était donnée par

$$\kappa = \frac{u^2 \tau c_v}{3}. \quad (22)$$

Afin de calculer la conductivité électrique du métal, nous allons nous placer dans le cadre du modèle de Drude. Considérons un électron, soumis à un champ électrique \vec{E} et une force de

frottement $\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$, qui modélise les collisions avec les atomes fixes du réseau. En régime permanent, les équations du mouvement s'écrivent

$$\vec{0} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}. \quad (23)$$

On en déduit alors que $\vec{v} = \frac{-e\tau\vec{E}}{m}$, et donc que le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = -en\vec{v} = -\frac{e^2n\tau}{m}\vec{\text{grad}} V. \quad (24)$$

Ainsi, la conductivité électrique, s'exprime $\sigma = \frac{e^2n\tau}{m}$, et on voit apparaître le même type de loi de transport que pour la diffusion thermique.

On peut ainsi calculer le rapport entre les deux coefficients précédents, obtenus grâce à des modèles microscopiques. On obtient

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{m}{e^2} u^2 \frac{c_v}{n}. \quad (25)$$

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie, l'énergie totale par unité de volume est $E = n\frac{3}{2}k_B T$, de telle sorte que la capacité thermique par unité de volume est $c_v = n\frac{3}{2}k_B$. Afin de calculer u^2 , on égalise l'énergie thermique moyenne par particule et son énergie cinétique, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$. Ainsi, on a $u^2 = 3\frac{k_B T}{m}$, et donc

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{T} \right)^2. \quad (26)$$

Cette expression est remarquable car elle ne fait intervenir que des constantes fondamentales, et ne dépend donc pas précisément du métal étudié. Une modélisation plus complexe et les expériences donnent en réalité le même résultat multiplié par un facteur deux, ce qui constitue la loi de Wiedemann-Franz.

Exercice 4.7 : Équation de la diffusion en dimension quelconque - Ulm MP

Dans ce problème, nous allons étudier certaines propriétés de l'équation de la diffusion en dimension quelconque.

1. Rappeler le mouvement d'une particule dans un liquide ou dans un gaz en deux dimensions par exemple.
2. On se place en dimension n quelconque. Considérons une particule en mouvement dans cet espace. On note $P(\vec{r}, t)$ la densité de probabilité que la particule soit au point \vec{r} à t . Grâce à un modèle de type « marche aléatoire », trouver une équation différentielle vérifiée par P .
3. On cherche alors $P(\vec{r}, t) = t^\beta f\left(\frac{r^\alpha}{t}\right)$, où r est la distance au centre. Trouver α , β et f .
4. Trouver alors le nombre moyen de visites par site en fonction de la dimension. Données : Le laplacien en coordonnées sphériques en dimension n pour une fonction f ne dépendant que de r est donné par

$$\Delta f = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (1)$$

L'exercice proposé, très mathématique, va nous permettre d'établir une solution générale de l'équation de la diffusion en dimension quelconque. Il présente une approche complémentaire à celle de l'exercice 1.9.

1. Une « grosse » particule placée dans un liquide ou dans un gaz a un mouvement aléatoire, dû aux chocs avec les molécules du fluide. Ce mouvement, très irrégulier, permet de décrire

dans une certaine limite les phénomènes de diffusion, comme nous allons le voir dans la suite. En particulier, on peut modéliser l'équation de la diffusion comme limite d'un processus de marche aléatoire, où une particule « saute » de site en site. La figure 4.7 présente une approximation d'un mouvement brownien par une marche aléatoire de 10 000 pas sur un réseau, où pour chaque direction x_i , la particule peut faire un saut d'une unité de longueur dans le sens des x_i négatifs ou positifs.

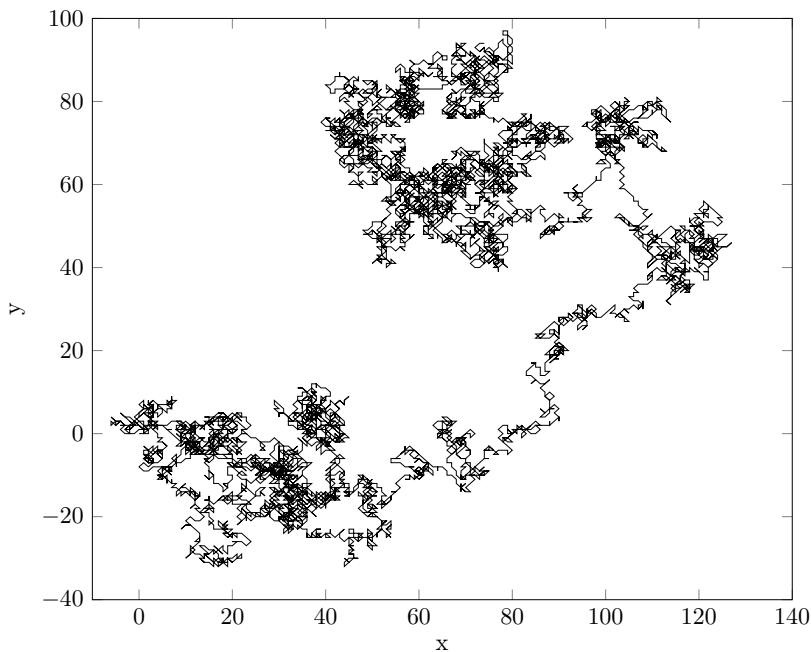


FIGURE 4.7. Exemple de simulation du mouvement brownien obtenu à partir d'une marche aléatoire en dimension 2. Initialement, la particule est en $(0, 0)$.

2. Notons $P(\vec{r}, t)$ la densité de probabilité que la particule soit au point \vec{r} à t . Afin d'établir une équation vérifiée par P , nous allons généraliser la marche aléatoire en une dimension à une dimension quelconque. Considérons ainsi que la particule se déplace sur un réseau \mathbb{Z}^n ; soit l la distance entre deux points consécutifs du réseau. À chaque pas de temps de durée τ , on suppose que la particule en (x_1, x_2, \dots, x_n) peut « sauter » vers un des sites voisins, avec une probabilité équivalente pour tous les sites. En dimension 1, chaque point a deux plus proches voisins, en dimension 2, il en a 4, et on voit aisément qu'en dimension n , chaque site a $2n$ plus proches voisins. Ainsi, la probabilité de sauter vers n'importe quel site voisin est $1/2n$. On peut alors écrire l'équation qui gouverne l'évolution de la densité de probabilité de présence de la particule au point $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sous la forme

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_2, \dots, x_n, t + \tau) &= P(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
 &+ \frac{1}{2n} (P(x_1 - l, x_2, \dots, x_n, t) + P(x_1 + l, x_2, \dots, x_n, t) - 2P(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
 &+ P(x_1, x_2 - l, \dots, x_n, t) + P(x_1, x_2 + l, \dots, x_n, t) - 2P(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
 &+ \dots \\
 &+ P(x_1, x_2, \dots, x_n - l, t) + P(x_1, x_2, \dots, x_n + l, t) - 2P(x_1, x_2, \dots, x_n, t)),
 \end{aligned} \tag{2}$$

où les termes où les probabilités sont comptées de manière positive reflètent la possibilité que la particule saute sur le point M , et où les termes où les probabilités qui sont comptées de manière négative reflètent la possibilité que la particule parte du point M .

Dans la limite où $\frac{\tau}{t} \ll 1$ et $\frac{l}{|\vec{r}|} \ll 1$, on peut faire les développements limités

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x_1, x_2, \dots, x_n, t + \tau) - P(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \simeq \tau \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{1}{2} (P(x_1, x_2, \dots, x_i - l, \dots, x_n, t) + P(x_1, x_2, \dots, x_i + l, \dots, x_n, t) \\ - 2P(x_1, x_2, \dots, x_i, t)) \simeq l^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Ainsi, en combinant les développements limités de chaque terme de l'équation (2), on obtient dans la limite continue

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\tau} \Delta P}, \quad (4)$$

soit exactement l'équation de la diffusion en dimension d , avec un coefficient de diffusion $D = \frac{l^2}{2\tau}$.

3. On cherche à présent $P(\vec{r}, t)$ sous la forme $t^\beta f\left(\frac{r^\alpha}{t}\right)$, c'est-à-dire qu'on suppose que la distribution de probabilité a une symétrie sphérique. Pour cela, on utilise l'expression donnée du laplacien en dimension quelconque, et on calcule

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \beta t^{\beta-1} f\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) - t^{\beta-2} r^\alpha f'\left(\frac{r^\alpha}{t}\right), \quad (5)$$

et

$$\Delta P = \alpha (r^{\alpha-2} t^{\beta-1} \alpha + (n-2) r^{\alpha-2} t^{\beta-1}) f'\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) + \alpha^2 r^{2\alpha-2} t^{\beta-2} f''\left(\frac{r^\alpha}{t}\right). \quad (6)$$

Ainsi, l'équation de la diffusion s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} t^{\beta-1} \beta f\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) + (-t^{\beta-2} r^\alpha - D\alpha(\alpha r^{\alpha-2} t^{\beta-1} + (n-2) r^{\alpha-2} t^{\beta-1})) f'\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) \\ - D r^{2\alpha-2} t^{\beta-2} f''\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) \alpha^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

que l'on peut simplifier en

$$\beta f\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) + \left(D\alpha r^{\alpha-2} (2 - n - \alpha) - \frac{r^\alpha}{t}\right) f'\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) - D\alpha^2 \frac{r^{2\alpha-2}}{t} f''\left(\frac{r^\alpha}{t}\right) = 0. \quad (8)$$

À partir de là, on souhaite faire le changement de variable $u = \frac{r^\alpha}{t}$, afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée par f . Pour cela, un premier choix dans les paramètres α et β est nécessaire. On voit en effet que r^α apparaît dans trois expressions différentes, et la seule façon de ne faire apparaître que la variable u est de choisir $\alpha = 2$. L'équation précédente s'écrit alors

$$\beta f\left(\frac{r^2}{t}\right) - \left(2Dn - \frac{r^2}{t}\right) f'\left(\frac{r^2}{t}\right) - 4D \frac{r^2}{t} f''\left(\frac{r^2}{t}\right) = 0, \quad (9)$$

soit en termes de la variable u

$$\beta f(u) - (u + 2Dn) f'(u) - 4Du f''(u) = 0. \quad (10)$$

Nous voici donc confrontés à une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients non constants, pour laquelle on ne connaît pas la solution en général. On peut toutefois essayer une solution de la forme $f : u \mapsto e^{-\delta u}$. Si l'on remplace dans l'équation précédente, on obtient

$$\forall u \quad e^{-\delta u} ((4D\delta^2 - \delta)u - 2D\delta n - \beta) = 0. \quad (11)$$

Ainsi, la fonction f définie précédemment est solution si $\delta = \frac{1}{4D}$ et $\beta = -\frac{n}{2}$. Ainsi, toute fonction proportionnelle à

$$\tilde{f}(\vec{r}, t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{\sum_i x_i^2}{4Dt}}, \quad (12)$$

est solution de l'équation de la diffusion. Finalement, pour trouver la distribution de probabilité, on impose la condition de normalisation

$$\forall t \quad \int_{\mathbb{R}^n} P(\vec{r}, t) = 1. \quad (13)$$

On pose donc $P(\vec{r}, t) = \frac{A}{t^{n/2}} e^{-\frac{\sum_i x_i^2}{4Dt}}$, et on calcule

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(\vec{r}, t) = \frac{A}{t^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_i^2}{4Dt}} dx_i \right)^n = \frac{A}{t^{n/2}} \sqrt{4\pi Dt}^n \quad (14)$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini et la valeur $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Ainsi, $A = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}^n}$. Finalement, une densité de probabilité solution de l'équation de la diffusion en dimension n est donnée par

$$\boxed{P_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}^n} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)}. \quad (15)$$

4. Le nombre moyen de passages $N(\vec{r}, n)$ par un site est défini par

$$N(\vec{r}, n) = \int_{t=\tau}^{\infty} P_n(\vec{r}, t) dt, \quad (16)$$

où l'on a exclu la valeur $t = 0$ pour laquelle la densité de probabilité est mal définie. Pour $t \rightarrow \infty$, on a

$$P_n(\vec{r}, t) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi D}^n} t^{-n/2}, \quad (17)$$

et par comparaison aux intégrales de Riemann, on en déduit que le nombre moyen de passages par un site est infini si $n \leq 2$, cas dans lequel l'intégrale ne converge pas, et fini si $n \geq 3$.

Concluons donc sur une note un peu plus légère : tous les chemins mènent effectivement à Rome, mais seulement dans des espaces de dimension inférieure ou égale à deux.

Mécanique des fluides

Exercice 5.1 : Écoulement autour d'une sphère - X PC

Dans un fluide infini, immobile « au loin », une balle sphérique de rayon R se déplace avec une vitesse constante. L'écoulement est supposé parfait, irrotationnel et incompressible.

1. Montrer que le champ des vitesses du fluide est donné par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$, où l'on a noté $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, avec O le centre de la balle, M est un point quelconque dans le fluide et \vec{A} est un vecteur constant, dont on précisera l'expression.

2. Complément : déterminer l'équation des lignes de courant.

3. Déterminer l'énergie cinétique totale du système (fluide et balle).

Données : Le laplacien d'une fonction scalaire f en coordonnées sphériques s'exprime

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (1)$$

1. Cet exercice, très académique, peut se révéler utile par les méthodes qu'il présente, qui s'adaptent aisément à un certain nombre de cas similaires à celui-ci. L'idée, toujours la même, est fondée sur la résolution de l'équation de Laplace avec des conditions aux limites particulières. En effet, les trois hypothèses sur la nature de l'écoulement nous permettent de dire que le champ des vitesses :

(a) dérive d'un potentiel, car l'écoulement est irrotationnel ce qui se traduit par $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, et donc il existe un potentiel φ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi; \quad (2)$$

(b) l'écoulement est incompressible, donc $\text{div} \vec{v} = 0$, donc

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3)$$

Ainsi, le problème se résume à chercher une solution de l'équation de Laplace, respectant les conditions aux limites à l'infini et la non-pénétration du fluide dans la sphère. Cette démarche peut être adaptée avec n'importe quel problème de ce type, par exemple avec un cylindre, ou encore un dièdre.

Passons maintenant à la résolution dans ce cas particulier. Notons \vec{V} la vitesse de la sphère. Il est courant de se placer dans le référentiel lié à la sphère, de telle sorte que l'écoulement soit stationnaire. À l'infini, le fluide a dans ce référentiel une vitesse $-\vec{V} = -V\vec{u}_z$, ce qui permet de définir le vecteur \vec{u}_z . Vu la symétrie du problème, on va bien entendu utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) , centrées en O , et on note \vec{r} le vecteur position, comme représenté sur la figure 5.1.

Le problème étant invariant par rotation autour de l'axe z , le potentiel des vitesses ne dépend que de r et de θ . Résoudre l'équation de Laplace directement n'est pas possible, et nous allons donc chercher une solution sous une forme particulière. Pour cela, regardons la

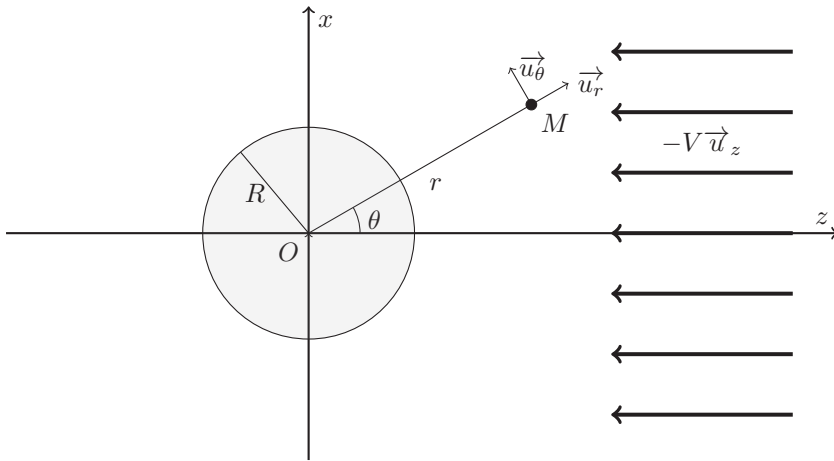


FIGURE 5.1. Schéma de l'écoulement autour de la sphère dans son référentiel.

forme du potentiel à l'infini. En notant $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$, on voit que pour r grand on a

$$v_r = -V \cos \theta \text{ et } v_\theta = V \sin \theta. \quad (4)$$

Avec $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ et $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, on voit immédiatement que

$$\varphi(r \rightarrow \infty, \theta) \sim -Vr \cos \theta. \quad (5)$$

On a alors l'idée de chercher φ sous la forme $\varphi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$, où f est une fonction suffisamment régulière et qui ne dépend que de r . Avec l'expression du laplacien donnée, on peut calculer

$$\Delta \varphi = \frac{\cos \theta}{r^2} \left(r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f \right), \quad (6)$$

et comme on le souhaite, la dépendance en θ se factorise. On a donc maintenant une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants à résoudre, ce qui dans le cas général est tout sauf aisé. Toutefois, on peut là encore chercher une solution sous une forme particulière habituelle, avec $f(r) = \alpha r^n$, où α est une constante. On injecte cette forme particulière dans l'équation précédente, et on a alors

$$r^{-2+n} \cos \theta (n^2 + n - 2) = 0, \quad (7)$$

et on est ramenés à la résolution d'une équation polynomiale de degré 2. Cette équation se résout facilement, et on trouve $n = 1$ ou $n = -2$. Ainsi, le potentiel des vitesses s'écrit

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (8)$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Très loin de la sphère, on a d'après l'équation (5)

$$Ar = -rV, \quad (9)$$

ce qui détermine $A = -V$. La non-pénétration du fluide dans la sphère s'écrit $v_r(R) = 0$, condition équivalente à

$$\forall \theta \quad \left(-V - \frac{2B}{R^3} \right) \cos \theta = 0 \Rightarrow \left(-V - \frac{2B}{R^3} \right) = 0, \quad (10)$$

ce qui permet de trouver $B = -\frac{R^3 V}{2}$. Finalement, on a

$$\varphi = \left(-\frac{VR^3}{2r^2} - rV \right) \cos \theta = -V \left(\frac{R^3}{2r^3} + 1 \right) r \cos \theta. \quad (11)$$

Si l'on revient dans le référentiel initial, c'est-à-dire que l'on retire la composante $-V\vec{u}_x$ de l'écoulement, qui dérive d'un potentiel $-Vr \cos \theta$, alors on a

$$\varphi = -\frac{VR^3}{2r^2} \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (12)$$

avec $\vec{A} = -\frac{VR^3}{2}\vec{u}_z$, et aisément $\vec{v} = \text{grad} \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3}$ comme demandé. On obtient finalement

$$\vec{v} = \frac{VR^3}{r^3} \cos \theta \vec{u}_r + \frac{VR^3}{2r^3} \sin \theta \vec{u}_\theta. \quad (13)$$

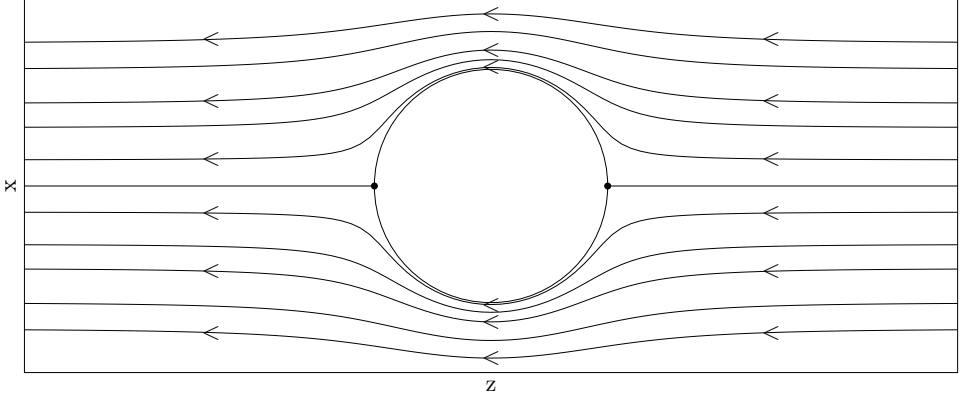


FIGURE 5.2. Lignes de courant de l'écoulement dans le référentiel où la sphère est fixe. On observe des points d'arrêts pour les lignes de courant passant par l'axe de la sphère parallèle aux lignes de courants loin de l'objet.

2. À titre de complément, voyons comment on peut trouver les lignes de courant de l'écoulement dans le référentiel où la balle est statique. Les lignes de courant sont définies par

$$d\vec{l} \wedge \vec{v} = \vec{0}, \quad (14)$$

où $d\vec{l}$ représente un déplacement infinitésimal le long de la ligne de courant. On se place dans le plan $\varphi = 0$, de telle sorte que $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$. On a alors l'équation

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta}, \quad (15)$$

avec

$$v_r = V \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) r \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta = V \left(\frac{R^3}{2r^3} + 1 \right) r \sin \theta. \quad (16)$$

En séparant les variables, on obtient

$$\frac{\left(\frac{R^3}{2r^3} + 1 \right)}{\left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right)} \frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta. \quad (17)$$

Une telle intégrale est calculable par des méthodes habituelles, mais le calcul peut se révéler ardu. Le jour d'un oral, elle aurait bien entendu été donnée, et on obtient

$$\frac{1}{2} (\ln r - \ln(R^2 + Rr + r^2) - \ln(R - r)) = \ln(\sin \theta) + \tilde{K}, \quad (18)$$

où \tilde{K} est une constante d'intégration. On peut alors simplifier cette équation en

$$\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) r^2 \sin^2 \theta = K, \quad (19)$$

où K est une nouvelle constante d'intégration. Cette équation définit l'ensemble des lignes de courant lorsque K varie. On peut la réécrire en fonction de x et z , sous la forme

$$\left(\frac{R^3}{(x^2 + z^2)^{3/2}} - 1\right) x^2 = K, \quad (20)$$

ce qui permet de décrire implicitement les lignes de courant, ou de résoudre numériquement l'équation qui donne x en fonction de z . C'est par cette méthode que les lignes de courant de la figure 5.2 ont été tracées.

3. On peut finalement calculer l'énergie cinétique du fluide dans le référentiel où la sphère avance. La densité volumique d'énergie cinétique est $e_c = \frac{1}{2}\rho v^2$, avec ρ la masse volumique du fluide. On peut calculer

$$v^2 = \frac{V^2 R^6}{r^6} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right), \quad (21)$$

de telle sorte que l'énergie cinétique totale est

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \rho V^2 R^6 \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^6} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 R^6 2\pi \frac{1}{3R^3} \int_0^\pi \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

L'objectif n'étant pas de calculer des intégrales trigonométriques, on peut supposer que les valeurs des intégrales avec les cosinus et les sinus sont données. Ces dernières valent

$$\int_0^\pi \cos^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \text{ et } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}. \quad (23)$$

Finalement, on a

$$E_c = \frac{1}{3} \pi \rho R^3 V^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) \frac{V^2}{2}, \quad (24)$$

ce qui correspond à la moitié de l'énergie cinétique d'une masse d'eau correspondant au volume déplacé par la sphère, et qui aurait une vitesse V . L'énergie cinétique totale du système est donc supérieure à celle qu'aurait la sphère si elle se déplaçait dans le vide à une vitesse V , puisqu'elle met en mouvement le fluide également.

Exercice 5.2 : Cavitation - Ulm PC

On crée une bulle de vide dans l'eau. Quelle est sa durée de vie ?

Cet exercice est un grand classique posé à de nombreux concours, qui présente toutefois quelques difficultés techniques. Une bulle de « vide » peut se créer dans l'eau lorsque la pression dans le liquide devient inférieure à la pression de vapeur saturante. Ce phénomène, nommé cavitation, apparaît par exemple derrière les hélices des navires, qui produisent de fortes dépressions dans leur sillage, et l'explosion de ces bulles est responsable d'une érosion des hélices.



Quelques pistes...

1. Quels sont les paramètres pertinents du problème ? En déduire un ou plusieurs temps d'implosion par analyse dimensionnelle.
2. Peut-on dire que l'écoulement est irrotationnel ? Incompressible ? Quelle est sa géométrie ?
3. Écrire ensuite la relation de Bernoulli entre deux points bien choisis, pour obtenir une équation sur l'évolution du rayon $a(t)$ de la bulle.
4. On peut ensuite multiplier cette relation par $2a^2\dot{a}$ pour obtenir une équation du premier ordre sur a , et conclure.

1. Pour ce genre de problème, il est toujours intéressant de se demander quels sont les paramètres pertinents, et d'essayer d'obtenir une première estimation de la quantité cherchée par analyse dimensionnelle. Supposons ainsi qu'à $t = 0$, une bulle de rayon a_0 se forme dans l'eau, de masse volumique ρ . On va négliger la pression à l'intérieur de la bulle, puisque la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante est de l'ordre de 2 kPa, ce qui peut être considéré comme négligeable devant la pression dans l'eau au repos, si tant est que celle-ci soit en contact avec l'atmosphère. Le paramètre de pression à introduire est donc la pression loin de la perturbation p_0 . Pour la bulle, on peut prendre une taille caractéristique de l'ordre du millimètre.

Se pose alors la question de savoir si l'on peut négliger l'influence des forces de viscosité. La façon la plus simple de répondre à cette question est d'évaluer le nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{\rho V^* a_0}{\mu}$, où μ est la viscosité dynamique du liquide, de l'ordre de 10^{-3} Pa.s pour l'eau, et V^* la vitesse caractéristique de l'écoulement. Ne connaissant par encore l'ordre de grandeur du temps caractéristique de l'implosion, nous allons estimer une borne inférieure de ce temps pour que le nombre de Reynolds soit faible. On prend $V^* \simeq \frac{a_0}{\tau}$, et on a alors

$$\text{Re} = \frac{\rho a_0^2}{\mu \tau}. \quad (1)$$

Ainsi, pour que $\text{Re} \simeq 1$, il faut que $\tau \simeq \frac{10^3 10^{-6}}{10^{-3} 10^0} \simeq 1$ s. Ce temps semble très grand par rapport au temps d'implosion d'une telle bulle, hypothèse que nous pourrions confirmer *a posteriori*.

À partir de ρ , a_0 , et P_0 , on peut alors former un temps caractéristique, de l'ordre de

$$\tau_p = a_0 \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \simeq 10^{-4} \text{ s}, \quad (2)$$

ce qui confirme l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds.

La tension superficielle est également à prendre *a priori* en compte dans l'implosion de la bulle, cette dernière agissant comme une « force élastique » qui fait rétrécir la bulle. Soit γ le coefficient de tension superficielle, de l'ordre de 70 mN.m^{-1} pour l'eau. On peut alors former un autre temps caractéristique

$$\tau_\gamma = a_0^{3/2} \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \simeq 10^{-9/2} \sqrt{\frac{10^3}{70 \times 10^{-3}}} \simeq 10^{-3} \text{ s}. \quad (3)$$

Ainsi, l'effet dû à la tension superficielle est bel et bien à prendre en compte. Toutefois, nous allons voir qu'il est possible de résoudre le problème en étudiant uniquement l'écoulement en dehors de la bulle, et ainsi de « cacher » l'effet de la tension superficielle.

2. Comme nous venons de le dire, l'étude de la dynamique de la bulle peut se ramener à l'étude de l'écoulement en dehors de celle-ci. Implicitement, nous avons supposé que l'écoulement était homogène, hypothèse que nous conserverons jusqu'à la fin de cet exercice. La discussion précédente concernant le nombre de Reynolds nous permet de supposer l'écoulement parfait. Finalement, on peut calculer une vitesse caractéristique de l'écoulement $v^* \simeq a_0/\tau_p \simeq 10 \text{ m.s}^{-1} \ll c_{\text{eau}}$, où c_{eau} est la célérité du son dans l'eau. Ainsi, le nombre de Mach va être très petit devant 1, ce qui permet de considérer l'écoulement incompressible.

D'après les symétries du problème, on va chercher un champ des vitesses sous la forme $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{u}_r$, c'est-à-dire un champ purement radial, qui dépend uniquement de la distance au centre de la bulle. Un tel écoulement est également irrotationnel, et la condition d'incompressibilité $\text{div } \vec{v} = 0$ ainsi que la définition du laplacien vectoriel nous donnent alors

$$\Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}. \quad (4)$$

Il n'était donc même pas nécessaire de supposer le nombre de Reynolds faible pour pouvoir éliminer le terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes !

Écrivons à présent la conservation du débit entre la surface de la sphère de centre O et de rayon $a(t)$ et la sphère de rayon r , également de centre O , on obtient

$$4\pi r^2 v(r, t) = 4\pi a^2(t) v(a(t), t). \quad (5)$$

Par continuité de la composante normale à la surface de la bulle, on a $v(a(t), t) = \dot{a}(t)$, et on obtient donc l'expression du champ des vitesses

$$\vec{v}(M, t) = \frac{a^2(t)\dot{a}(t)}{r^2} \vec{u}_r. \quad (6)$$

3. Les différentes hypothèses sur l'écoulement (homogène, parfait, incompressible et irrotationnel) nous incitent très fortement à utiliser la relation de Bernoulli. Dans le cadre d'un écoulement non-stationnaire, cette relation prend la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = f(t), \quad (7)$$

où Φ est un potentiel des vitesses, c'est-à-dire un champ scalaire tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$, que l'on prend ici égal à

$$\Phi(M, t) = -\frac{a^2(t)\dot{a}(t)}{r}. \quad (8)$$

En écrivant la relation de Bernoulli entre $r = \infty$ et un r quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{a^2(t)\dot{a}(t)}{r} \right) + \frac{a^4(t)\dot{a}^2(t)}{2r^4} + \frac{P(r, t)}{\rho} &= \frac{P_0}{\rho} \\ \Rightarrow -\frac{a^2\ddot{a} + 2a\dot{a}^2}{r} + \frac{a^4\dot{a}^2}{2r^4} + \frac{P(r, t)}{\rho} &= \frac{P_0}{\rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

Si l'on néglige l'influence de la tension superficielle, la pression est continue et on a $P(a(t), t) = 0$. En revanche, si l'on en tient compte, il faut utiliser la relation de Laplace. Hors-programme, elle aurait été donnée par l'examinateur, et s'écrit

$$P_g - P(a(t), t) = \frac{2\gamma}{a(t)}, \quad (10)$$

où P_g est la pression à l'intérieur de la bulle. Ainsi, en écrivant la relation (9) pour $r = a(t)$, on obtient

$$\frac{P_0 - P_g}{\rho} = -\frac{2\gamma}{\rho} \frac{1}{a} - a\ddot{a} - \frac{3}{2}\dot{a}^2. \quad (11)$$

4. La suite est relativement astucieuse, et on peut espérer qu'un examinateur bienveillant indique que l'on peut multiplier l'équation précédente par $2a^2\dot{a}$ pour avoir

$$-\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right) 2a^2\dot{a} - \frac{2\gamma}{\rho} a\dot{a} = 2a^3\ddot{a} + 3a^2\dot{a}^3 = \frac{d}{dt}(a^3\dot{a}^2), \quad (12)$$

qui s'intègre en

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right) a^3 - \frac{\gamma}{\rho} a^2 + C = a^3\dot{a}^2, \quad (13)$$

où C est une constante d'intégration. À $t = 0$, on a $a(t = 0) = a_0$ et $\dot{a}(t = 0) = 0$, on en déduit aisément que

$$C = \frac{\gamma}{\rho} a_0^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right) a_0^3, \quad (14)$$

et finalement, on peut obtenir une équation différentielle du premier ordre vérifiée par a , sous la forme

$$a^3\dot{a}^2 = -\frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right)(a^3 - a_0^3) - \frac{\gamma}{\rho}(a^2 - a_0^2). \quad (15)$$

L'objectif est alors d'isoler $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, afin d'obtenir une équation à variables séparées, que l'on peut intégrer pour obtenir le temps d'implosion. De l'équation précédente, et puisque $\dot{a} < 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right)\left(\frac{a_0^3}{a^3} - 1\right) + \frac{\gamma}{\rho}\frac{1}{a}\left(\frac{a_0^2}{a^2} - 1\right)}}, \quad (16)$$

et on a alors

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right)\left(\frac{a_0^3}{a^3} - 1\right) + \frac{\gamma}{\rho}\frac{1}{a}\left(\frac{a_0^2}{a^2} - 1\right)}} \\ &= \int_0^1 \frac{a_0 dX}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{P_0 - P_g}{\rho}\right)\left(\frac{1}{X^3} - 1\right) + \frac{\gamma}{\rho a_0}\frac{1}{X}\left(\frac{1}{X^2} - 1\right)}}, \end{aligned} \quad (17)$$

où l'on a fait le changement de variable $X = a/a_0$. Dans la limite où la tension superficielle est négligeable, on obtient

$$\tau = a_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2(P_0 - P_g)}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{\frac{1}{X^3} - 1}} = I a_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2(P_0 - P_g)}}, \quad (18)$$

où I désigne l'intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer ici. Cette intégrale converge, et on retrouve bien le résultat obtenu par analyse dimensionnelle. Finalement, il est possible d'estimer τ grâce à un logiciel de calcul, et on obtient avec les valeurs du début

$$\tau \simeq 9,14 \times 10^{-5} \text{ s}. \quad (19)$$

Ceci est très proche de l'estimation par analyse dimensionnelle. Finalement, si l'on tient compte de la tension superficielle, et que l'on calcule numériquement l'intégrale de (17), on obtient

$$\tau \simeq 9,15 \times 10^{-5} \text{ s}. \quad (20)$$

Ainsi, on voit que la tension superficielle n'a qu'une influence faible sur le résultat.

Exercice 5.3 : Le son des bulles - Ulm PC

Lorsqu'on injecte de l'air dans un récipient rempli d'eau au moyen d'une paille, on forme un train de bulles qui émettent un son. Expliquer l'origine du son émis par les bulles.

Lors de cet oral, l'examineur a montré une vidéo de bulles qui remontent à la surface d'un récipient contenant de l'eau. On cherche à déterminer la fréquence du son entendu. Si l'on écoute le son produit, on peut percevoir deux fréquences distinctes. L'une due à l'éclatement des bulles, dont la fréquence est de l'ordre de 100 Hz, et une autre beaucoup plus aiguë, à laquelle on s'intéresse ici. On peut alors deviner que ce sont les oscillations des bulles qui vont produire ce son.

Cet exercice, à travers la simplicité du système étudié, va se montrer très riche et sera une occasion pour nous de montrer qu'il n'existe pas une « bonne solution » pour aborder un problème, mais que l'on peut proposer plusieurs approches. La première est un grand classique des concours de CPGE, mais ne donne toutefois qu'une des fréquences d'oscillation. La seconde est plus générale, mais plus technique. Finalement, nous proposons en guise de complément l'étude de l'amortissement des oscillations de la bulle. Pour aller plus loin, nous recommandons le sujet *Oscillations d'une bulle* de l'épreuve de physique A de Polytechnique, filière PC, en 2012, ainsi que l'article *The Minnaert bubble : a new approach*¹ de Martin Devaud, Thierry Hocquet, Jean-Claude Bacri, Valentin Leroy, dont la seconde partie de ce corrigé s'inspire.

**Quelques pistes...**

1. On considère tout d'abord une approche thermodynamique.
 - a. Quelles hypothèses peut-on faire sur l'évolution du gaz dans la bulle ? Trouver une équation thermodynamique reliant la surpression dans la bulle et la variation de son rayon.
 - b. Que peut-on supposer sur le champ des vitesses dans le fluide à l'extérieur de la bulle ? Par un bilan approprié, calculer celui-ci.
 - c. Utiliser alors les équations de la mécanique des fluides pour en déduire le champ de pression à l'extérieur de la bulle.
 - d. Déduire des deux expressions de la pression l'évolution du rayon de la bulle.
2. On considère ensuite une approche acoustique, tenant compte de la compressibilité du fluide.
 - a. Écrire les équations de l'acoustique dans les différents fluides. Sous quelle forme peut-on chercher les champs de pression et de vitesse ?
 - b. Quelles sont les conditions aux limites ? Que se passe-t-il en $r = 0$? Montrer que l'on obtient des ondes stationnaires à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle.
 - c. Finalement, écrire les équations de continuité à la surface de la bulle pour exprimer la pression à l'intérieur de la bulle en fonction de l'amplitude de l'onde de pression extérieure. En déduire une condition de résonance.
 - d. Montrer par un développement limité que l'on retrouve la fréquence de résonance trouvée dans la première partie.

1. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145867>.

Complément : Afin d'étudier l'amortissement, reprendre l'étude de la première partie en tenant compte de la compressibilité de l'eau. Montrer alors que l'on obtient une équation d'oscillateur amorti.

1. Commençons par une approche thermodynamique, où l'on ne s'intéresse pas au caractère ondulatoire du mouvement de l'eau à l'extérieur de la bulle. Nous allons chercher une fréquence qui correspond à celle, relativement aiguë, que l'on entend.

a. Considérons ainsi une bulle d'air de rayon R_0 dans un volume infini d'eau. À l'équilibre, celle-ci est parfaitement sphérique, de rayon R_0 . Afin de simplifier l'étude, nous n'allons considérer que les modes radiaux d'oscillation de la bulle. Notons P_0 la pression à l'équilibre, ρ_a et ρ_e les masses volumiques de l'air et de l'eau, milieux que l'on suppose immobiles à l'équilibre.

En présence d'une perturbation, on suppose que le rayon de la bulle peut s'écrire $R(t) = R_0 + r_1(t)$, avec $r_1(t) \ll R_0$. On sait que la fréquence f des oscillations correspond à celle d'un son aigu. On peut ainsi supposer que $f \simeq 3$ kHz. Avec une vitesse du son dans l'eau de l'ordre de $1\,500\text{ m.s}^{-1}$, une onde avec une telle fréquence a une longueur d'onde de l'ordre de

$$\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{1500}{3000} \simeq 0.5\text{ m}, \quad (1)$$

ce qui est très grand devant la taille de bulle. Même dans l'hypothèse où le son est très aigu, avec une fréquence de l'ordre de 20 kHz, on obtient $\lambda \simeq 7.5\text{ cm}$, ce qui est toujours très grand devant la taille d'une bulle. Ainsi, on va pouvoir considérer que la pression est uniforme au sein de la bulle, et on note $P(t) = P_0 + p_1(t)$, avec $p_1(t) \ll P_0$. Nous avons donc deux inconnues, $p_1(t)$ et $r_1(t)$.

Afin de décrire l'évolution de la bulle, on peut chercher une quantité conservée, et nous allons nous tourner du côté de la thermodynamique. Regardons l'échelle de distance des transferts thermiques pendant une durée $T_0 = \frac{1}{f}$. Le coefficient de diffusion thermique de l'eau est $D_{\text{eau}} \simeq 1,4 \times 10^{-7}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Un argument habituel sur les phénomènes diffusifs donne une échelle de longueur de l'ordre de

$$L_{\text{th}} \simeq 6,6\text{ }\mu\text{m}, \quad (2)$$

pour une fréquence de l'ordre de 3 kHz. Pour des fréquences plus élevées, cette distance caractéristique est encore plus faible. Dans tous les cas, cette dernière est très faible devant la taille de la bulle, et nous allons donc pouvoir négliger la diffusion thermique.

On peut supposer que l'évolution est adiabatique réversible. Dans ce cas, en notant $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ le coefficient isentropique de l'air, on peut écrire la relation de Laplace, qui donne $PV^\gamma = \text{cste}$, où $V \propto R^3$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P_0 R_0^{3\gamma} &= (R_0 + r_1)^{3\gamma} (P_0 + p_1) \\ &= R_0^{3\gamma} \left(1 + 3\gamma \frac{r_1}{R_0} \right) (P_0 + p_1) \\ &= P_0 R_0^{3\gamma} + 3\gamma r_1 R_0^{3\gamma-1} P_0 + R_0^{3\gamma} p_1, \end{aligned} \quad (3)$$

et ainsi, on obtient au premier ordre

$$p_1(t) = -3\gamma P_0 \frac{r_1}{R_0}. \quad (4)$$

b. Afin de trouver une seconde équation, intéressons-nous à l'écoulement créé par le mouvement de l'eau à l'extérieur de la bulle. Par symétrie sphérique, le champ des vitesses en un point M repéré par des coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans un repère local $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ s'écrit

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi, t) = v(r, t) \vec{u}_r. \quad (5)$$

Supposons alors l'écoulement incompressible, ce qui revient à négliger les effets acoustiques et donc les pertes par radiation d'ondes sonores dans l'eau. Nous traiterons dans la partie suivante le cas contraire. Puisque l'écoulement est incompressible, on peut écrire la conservation du débit $D_v(r)$ entre une sphère de rayon $r > R$, et la surface de la bulle. Vu la symétrie sphérique, on a

$$D_v(r) = 4\pi r^2 v(r, t). \quad (6)$$

Pour $r = R$, on a $v(R, t) = \frac{dr_1}{dt}$ par continuité de la composante normale de la vitesse. Ainsi la conservation du débit entre la surface de la bulle et une sphère de rayon r s'écrit

$$4\pi r^2 v(r, t) = 4\pi R^2(t) \frac{dr_1}{dt}, \quad (7)$$

et on en déduit, comme pour le problème sur la cavitation 5.2 que

$$v(r, t) = \frac{R_0^2}{r^2} \frac{dr_1}{dt}. \quad (8)$$

c. On peut à présent écrire l'équation régissant l'écoulement à l'extérieur de la bulle. On pourrait, comme dans l'exercice sur la cavitation, raisonner sur un potentiel des vitesses. Afin de présenter les deux méthodes, nous travaillerons directement sur le champ des vitesses. Par hypothèse, on néglige le terme de viscosité $\eta \Delta \vec{v}$ de l'équation de Navier-Stokes. On peut également remarquer que pour \vec{v} de la forme (8), on a $\text{div } \vec{v} = 0$ et $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, et donc $\Delta \vec{v} = \vec{0}$. En négligeant la gravité, l'équation d'Euler s'écrit alors

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P. \quad (9)$$

On calcule aisément, au premier ordre, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{R_0^2}{r^2} \frac{d^2 r_1}{dt^2}$ et $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v(r, t) \frac{\partial v}{\partial r}(r, t) = -\frac{2R_0^4}{r^5} \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2$, ce qui est un terme d'ordre 2 en $\frac{r_1}{R_0}$. Ainsi, l'équation d'Euler se simplifie en

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{R_0^2}{r^2} \frac{d^2 r_1}{dt^2}, \quad (10)$$

et s'intègre en

$$P(r) = P_\infty + \frac{\rho R_0^2}{r} \frac{d^2 r_1}{dt^2}, \quad (11)$$

où P_∞ est la pression loin de la bulle. S'il n'y a pas de mouvement, puisque l'on a négligé la tension de surface, on a $P(r = R_0) = P_0$, et donc $P_\infty = P_0$.

d. On a ainsi obtenu une expression de la pression à l'intérieur par un raisonnement thermodynamique, et une expression de la pression à l'extérieur en étudiant la dynamique de l'écoulement. Toujours puisque l'on néglige la tension superficielle, on peut écrire la continuité de la pression à l'interface, on a alors

$$-3\gamma P_0 \frac{r_1}{R_0} = \rho R_0 \frac{d^2 r_1}{dt^2} \quad (12)$$

ce que l'on réécrit sous la forme

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \omega_0^2 r_1(t) = 0, \quad (13)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho R_0^2}}$ qui est appelée la pulsation de Minnaert. Avec toutes nos hypothèses, les oscillations de la bulle sont donc harmoniques. Avec $P_0 = 1$ bar, $R_0 = 1$ mm, $\rho = 1000$ kg.m⁻³ et $\gamma = 1,4$ pour un gaz parfait, on obtient une fréquence d'oscillation

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 3,3 \text{ kHz}, \quad (14)$$

ce qui correspond bien à une fréquence assez aiguë, comme on peut l'entendre au voisinage d'une cascade.

Reste à voir si toutes nos hypothèses sont bien justifiées, en particulier celle consistant à négliger l'influence de la compressibilité de l'eau. Les oscillations de la bulle provoquent l'émission d'un son, et on se doute que l'on ne va pas pouvoir négliger les ondes acoustiques dans l'eau. Une fréquence f_0 correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 \simeq 0.45$ m. L'énergie acoustique va donc être transportée sur une distance largement supérieure à la taille de la bulle.

Ainsi, on ne peut pas négliger la dissipation d'énergie par radiation acoustique. La partie suivante va nous permettre, grâce à une approche ondulatoire, de prendre en compte l'amortissement. De plus, nous n'avons trouvé qu'une seule fréquence d'oscillation, celle de Minnaert. Pour la plupart des systèmes oscillants, on s'attend toutefois à trouver une infinité de pulsations résonantes. Là encore l'approche ondulatoire prenant en compte la compressibilité de l'eau va nous permettre de trouver les différents modes d'oscillation radiaux de la bulle.

2. Passons à l'approche acoustique tenant compte de la compressibilité du liquide. Considérons la même bulle d'air dans un volume infini d'eau. À l'équilibre, cette dernière est parfaitement sphérique de rayon R_0 . On ne considère toujours que les modes radiaux d'oscillation de la bulle. On néglige encore une fois la viscosité, la gravité et la tension superficielle. Notons P_0 la pression à l'équilibre, ρ_a et ρ_e les masses volumiques de l'air et de l'eau, milieux que l'on suppose immobiles à l'équilibre. Les grandeurs et équations indicées $X_{a,e}$ se réfèrent à l'air et l'eau respectivement.

a. Les oscillations de la bulle provoquent une surpression et mettent le fluide en mouvement, et on écrit

$$\begin{cases} p(r, t) = P_0 + p_1(r, t), \\ \rho_{a,e}(r, t) = \rho_{a,e} + \rho_{a,e,1}(r, t), \\ \vec{v}(r, t) = v_1(r, t) \vec{u}_r. \end{cases} \quad (15)$$

Les grandeurs p_1 , $\rho_{a,e,1}$ et v_1 sont supposées être des infiniment petits d'ordre 1, tout comme leurs dérivées spatiales et temporelles. Ainsi, au contraire de la méthode précédente, nous n'avons rien supposé sur la pression à l'intérieur de la bulle. On rappelle alors les équations linéarisées de l'acoustique

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{a,e,1}}{\partial t} = -\rho_{a,e} \operatorname{div} \vec{v}_1 & \text{la conservation de la masse,} \\ \rho_{a,e} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\operatorname{grad} p_1 & \text{l'équation d'Euler,} \\ \rho_{a,e,1}(t) = \rho_{a,e} p_1 \chi_{a,e} & \text{l'hypothèse thermodynamique.} \end{cases} \quad (16)$$

On peut alors établir l'équation de d'Alembert acoustique

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c_{a,e}^2 \Delta p, \quad (17)$$

où $c_{a,e} = \sqrt{\rho_{a,e} \chi_{a,e}}$ est la vitesse du son dans chaque milieu. Bien entendu $\rho_{a,e,1}$ et v_1 vérifient la même équation. En coordonnées sphériques, on peut aisément montrer que les solutions radiales de l'équation de d'Alembert sont de la forme

$$p(r, t) = \frac{1}{r} \psi \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \varphi \left(t + \frac{r}{c} \right), \quad (18)$$

c'est-à-dire que $rp(r, t)$ vérifie une équation de d'Alembert cartésienne à une dimension. Dans notre cas, nous allons chercher des solutions en ondes sphériques complexes, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{aligned} p_1(r, t) &= \tilde{p}(r) e^{i\omega t}, \\ v_1(r, t) &= \tilde{v}(r) e^{i\omega t} \vec{u}_r, \end{aligned} \quad (19)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{p}(r) &= \frac{A}{r}e^{ik_a r} + \frac{B}{r}e^{-ik_a r} \quad \text{pour } r \leq R_0, \\ \tilde{p}(r) &= \frac{C}{r}e^{ik_e r} + \frac{D}{r}e^{-ik_e r} \quad \text{pour } r \geq R_0.\end{aligned}\tag{20}$$

Nous avons implicitement supposé que la pulsation ne changeait pas lors du passage de l'interface de la bulle. En l'absence de phénomènes non linéaires, ce qui est le cas avec les hypothèses de l'acoustique au premier ordre, cette approximation est justifiée. Ainsi, on peut déterminer $k_{a,e} = \omega/c_{a,e}$.

b. Considérons à présent les conditions aux limites, afin de simplifier les expressions précédentes. Dans la bulle, au voisinage de $r = 0$, le champ de pression s'écrit

$$\tilde{p}(r) = \frac{A+B}{r} + ik_a(A-B),\tag{21}$$

ainsi, pour que la pression ne diverge pas en $r = 0$, il faut que $A = -B$, c'est-à-dire qu'il se forme une onde stationnaire à l'intérieur. On a alors en notations réelles

$$p_1(r, t) = \frac{P_a \sin(k_a r)}{r} \cos(\omega t + \varphi_a) \quad \text{pour } r \leq R_0.\tag{22}$$

À l'extérieur de la bulle, on a également une onde stationnaire car faute de dissipation, l'amplitude de l'onde incidente doit être égale à l'amplitude de l'onde réfléchie sur la bulle. En effet, en régime stationnaire, l'énergie transmise par l'onde extérieure à la bulle, qui a une extension finie, est nécessairement égale à l'énergie que la bulle renvoie à l'extérieur, sans quoi l'énergie s'accumulerait dans la bulle. On a alors $|C| = |D|$, et en notations réelles, on peut ainsi écrire

$$\tilde{p}(r) = \frac{\tilde{B}}{r} \sin(k_e r + \varphi_e) \quad \text{pour } r \geq R_0,\tag{23}$$

de telle sorte que

$$p_1(r, t) = \frac{P_e \sin(k_e r + \psi)}{r} \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \text{pour } r \geq R_0.\tag{24}$$

c. On va chercher les pulsations ω pour lesquelles il y a résonance de la bulle. On connaît déjà k_a et k_e . On peut de plus considérer que l'on se donne P_e , amplitude d'une perturbation extérieure, et que l'on cherche alors P_a . Nous n'avons donc que deux inconnues, P_a et ψ , l'éventuelle déphasage au passage de l'interface. Les deux équations que nous allons écrire sont bien entendu la continuité de la pression et de la vitesse à l'interface. Ces relations devant être vérifiées pour tout t , on a nécessairement $\varphi_a = \varphi_e$, et l'on choisit $\varphi_a = 0$ par un décalage de l'origine des temps. La continuité à l'ordre 1 de la pression en R_0 , s'écrit

$$P_a \sin(k_a R_0) = P_e \sin(k_e R_0 + \psi).\tag{25}$$

Pour calculer la vitesse, on utilise l'équation d'Euler linéarisée, et en supposant \vec{v}_1 de la même forme que p_1 , on obtient

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{P_a}{\rho_a \omega r^2} (k_a r \cos k_a r - \sin k_a r) & \text{pour } r \leq R_0, \\ v_1 = -\frac{P_e}{\rho_e \omega r^2} (k_e r \cos(k_e r + \psi) - \sin(k_e r + \psi)) & \text{pour } r \geq R_0, \end{cases}\tag{26}$$

Ainsi, la continuité de la vitesse au premier ordre en R_0 s'écrit

$$\frac{P_a}{\rho_a} (k_a R_0 \cos k_a R_0 - \sin k_a R_0) = \frac{P_e}{\rho_e} (k_e R_0 \cos(k_e R_0 + \psi) - \sin(k_e R_0 + \psi)).\tag{27}$$

On a donc un système composé de deux équations, (25) et (27), pour deux inconnues P_a et ψ . On peut réécrire (25) sous la forme

$$P_a = P_e \frac{\sin(k_e R_0 + \psi)}{\sin(k_a R_0)}, \quad (28)$$

ce qui permet d'exprimer P_a en fonction de ψ . Ensuite, on peut réinjecter cette forme de P_a dans l'équation (27), ce qui donne la condition

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_e} \sin(k_a R_0) (k_e R_0 \cos(k_e R_0 + \psi) - \sin(k_e R_0 + \psi)) \\ & - \frac{1}{\rho_a} \sin(k_e R_0 + \psi) (k_a R_0 \cos k_a R_0 - \sin k_a R_0) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Cette équation peut se réécrire, avec quelques manipulations trigonométriques

$$\cotan(k_a R_0 + \psi) = \frac{1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (k_a R_0 \cotan k_a R_0 - 1)}{k_e R_0}. \quad (30)$$

On peut revenir aux équations de départ, et en supposant P_e donné, on a

$$P_a = P_e \frac{\sin(k_e R_0 + \psi)}{\sin k_a R_0}. \quad (31)$$

Reste donc finalement à calculer $\sin(k_e R_0 + \psi)$. On a pour tout x ,

$$\cotan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} - 1. \quad (32)$$

Ainsi, on peut calculer que

$$\sin(k_e R_0 + \psi) = \left(1 + \left(\frac{1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (k_a R_0 \cotan k_a R_0 - 1)}{k_e R_0} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (33)$$

On a résonance lorsque P_a est maximal, et donc lorsque $\sin(k_e R_0 + \psi)$ est maximal. Ceci correspond à

$$1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (k_a R_0 \cotan k_a R_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan k_a R_0 = \frac{k_a R_0}{1 - \frac{\rho_a}{\rho_e}}}. \quad (34)$$

On peut alors résoudre cette équation par une méthode graphique habituelle, comme présenté dans la figure 5.3.

d. On peut faire plusieurs remarques. Tout d'abord, il existe une solution « atypique » proche de zéro. En effet, lorsque $k_a R_0$ devient grand, les solutions de l'équation précédente se rapprochent de $k_a R_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, où $n \in \mathbb{N}$. La première intersection entre les deux courbes ne correspond pas à ce cas, et existe uniquement si la pente de la droite est légèrement supérieure à 1.

Montrons que cette solution correspond à la résonance de Minnaert trouvée précédemment. La situation $k_a R_0 \ll 1$ revient à considérer que la longueur d'onde est très grande devant la taille de la bulle, comme dans la première partie. Le développement limité de la fonction tangente donne

$$\tan k_a R_0 = k_a R_0 + \frac{(k_a R_0)^3}{3} + \mathcal{O}((k_a R_0)^5), \quad (35)$$

de telle sorte qu'à l'ordre 3, l'équation précédente s'écrit

$$k_a R_0 \left(1 + \frac{(k_a R_0)^2}{3} \right) = \frac{k_a R_0}{1 - \frac{\rho_a}{\rho_e}}. \quad (36)$$

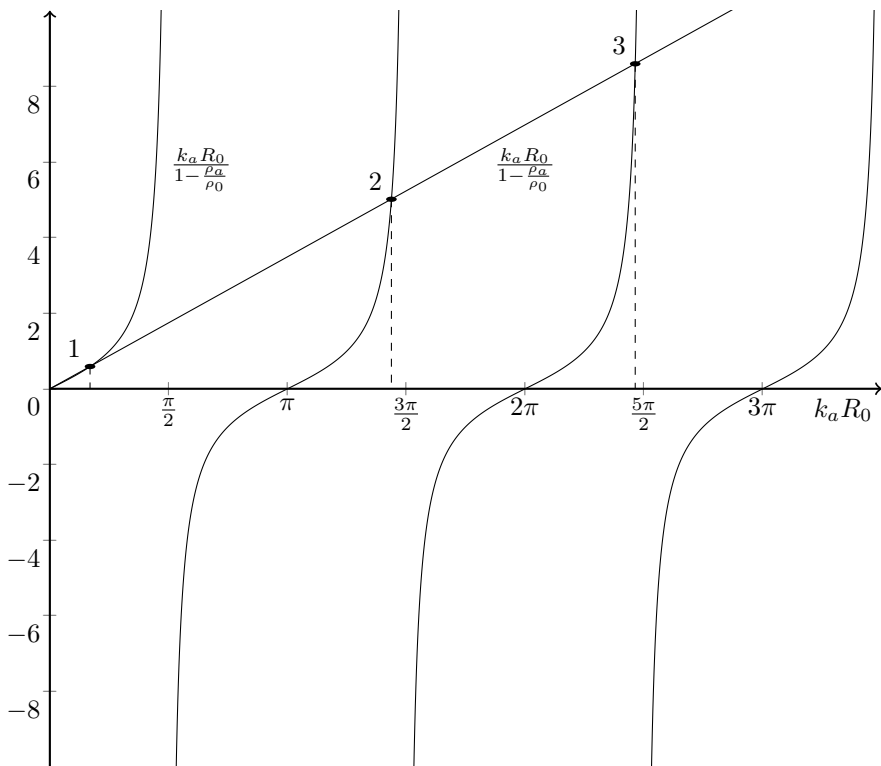


FIGURE 5.3. Résolution graphique de l'équation définissant k_a . La solution proche pour $k_a R_0$ proche de zéro existe grâce à la pente de la droite, légèrement supérieure à 1. Sur cette courbe, on a choisi $\frac{\rho_a}{\rho_e} = \frac{1}{10}$ afin d'améliorer la lisibilité du graphe. En réalité, $\frac{\rho_a}{\rho_e} \simeq \frac{1}{1000}$, et la solution 1 est beaucoup plus proche de 0.

Cette équation se résout facilement, et on obtient

$$k_a R_0 = \frac{\sqrt{3 \frac{\rho_a}{\rho_e}}}{\sqrt{1 - \frac{\rho_a}{\rho_e}}} \simeq \sqrt{3 \frac{\rho_a}{\rho_e}}. \quad (37)$$

Notons $\omega_M = k_a c_a$ la pulsation associée à ce nombre d'onde, où c_a est la vitesse du son dans l'air. On a alors

$$\omega_M = \frac{c_a}{R_0} \sqrt{3 \frac{\rho_a}{\rho_e}}, \quad (38)$$

et finalement, en se rappelant ou en redémontrant que $c_a = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_a}}$, où γ est comme précédemment le coefficient isentropique de l'air, on trouve

$$\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e R_0^2}}, \quad (39)$$

ce qui est bien la pulsation de Minnaert.

Lorsque l'on réalise l'expérience, ce mode domine très largement. Dans la figure 5.4, on présente les résultats d'une expérience standard d'oscillation de bulle. Dans un réservoir d'eau, on injecte à l'aide d'une seringue des bulles de diamètre millimétrique. À l'aide d'un micro

omnidirectionnel et d'un oscilloscope, on peut observer le train d'onde acoustique émis par la bulle lorsqu'elle se décroche de la seringue, ce qui correspond à un forçage des oscillations.

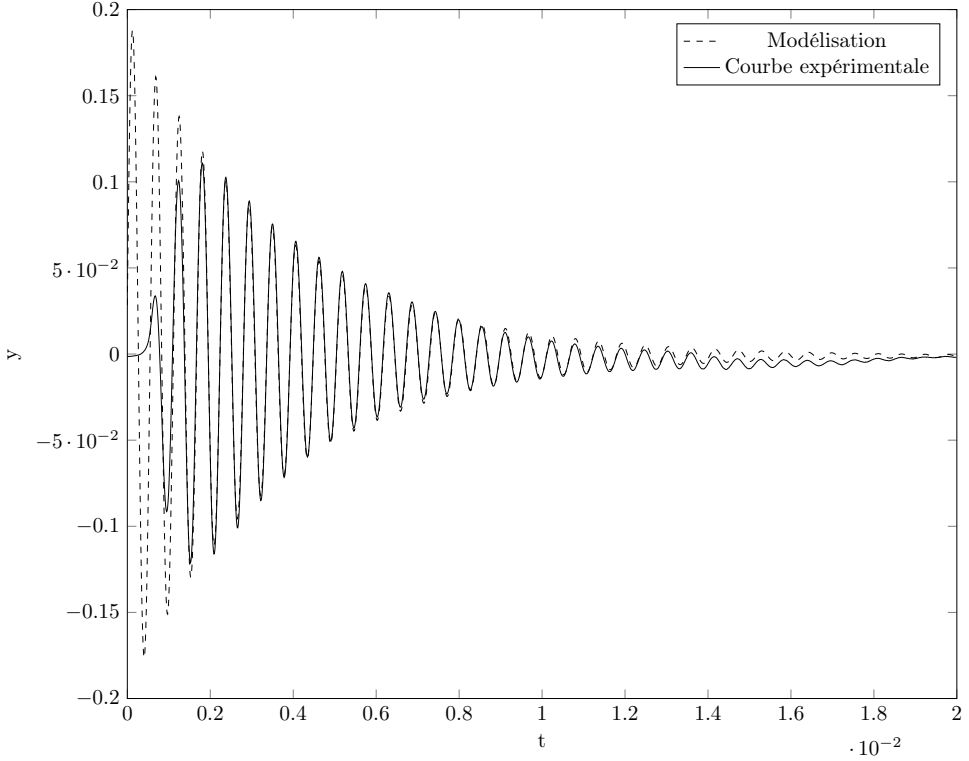


FIGURE 5.4. Étude expérimentale des oscillations d'une bulle.

Complément : Étude de l'amortissement.

La figure 5.4 nous permet de constater que l'amortissement des oscillations du premier mode est loin d'être négligeable.

Afin de modéliser l'amortissement, il est nécessaire de tenir compte de la compressibilité de l'eau, et donc des ondes émises par les oscillations de la bulle. À la différence de l'étude précédente des pulsations de résonance, on peut supposer qu'il n'y a pas d'onde convergente vers la bulle. Ainsi, le champ de surpression va s'écrire sous la forme

$$p_1(r, t) = \frac{1}{r} \psi \left(t - \frac{r}{c_e} \right). \quad (40)$$

Comme dans la seconde partie, l'équation d'Euler linéarisée dans l'eau s'écrit

$$\rho_e \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (41)$$

où v_1 est toujours le champ des vitesses. Par continuité de la vitesse en $r = R_0$, on a $v_1(R_0, t) = \frac{dr_1}{dt}$, où r_1 est la variation de rayon de la bulle due aux oscillations. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \rho_e \frac{d^2 r_1}{dt^2} &= - \left. \frac{\partial p_1}{\partial r} \right|_{r=R_0} = - \left(- \frac{1}{r^2} \psi \left(t - \frac{r}{c_e} \right) - \frac{1}{cr} \psi' \left(t - \frac{r}{c_e} \right) \right)_{r=R_0} \\ &= \frac{1}{R_0^2} \psi \left(t - \frac{R_0}{c_e} \right) + \frac{1}{cR_0} \psi' \left(t - \frac{R_0}{c_e} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Pour obtenir une équation sur r_1 uniquement, reste à relier la pression à l'interface au rayon. C'est exactement ce qui a été fait dans l'équation (4). En combinant cette équation à la continuité de la pression à l'interface, on obtient

$$p_1(R_0, t) = \frac{1}{R_0} \psi \left(t - \frac{R_0}{c_e} \right) = -\omega_M^2 \rho_e R_0 r_1(t). \quad (43)$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \frac{1}{R_0^2} \psi \left(t - \frac{R_0}{c_e} \right) = -\omega_M^2 \rho_e r_1(t), \\ \frac{1}{c R_0} \psi' \left(t - \frac{R_0}{c_e} \right) = -\frac{\omega_M^2 \rho_e R_0}{c_e} \frac{dr_1}{dt}, \end{cases} \quad (44)$$

de telle sorte que l'équation donnant l'évolution de r_1 s'écrit

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{\omega_M^2 R_0}{c_e} \frac{dr_1}{dt} + \omega_M^2 r_1(t) = 0. \quad (45)$$

On obtient l'équation d'un oscillateur amorti, que l'on peut écrire sous forme canonique $\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{\omega_M}{Q} \frac{dr_1}{dt} + \omega_M^2 r_1(t) = 0$, avec $Q = \frac{c_e}{\omega_M R_0}$. Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme

$$r_1(t) = \tilde{r}_1 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \cos(\omega_M t + \varphi), \quad (46)$$

où $\tau = \frac{2Q}{\omega_M} = \frac{2c_e}{\omega_M^2 R_0}$ est un temps caractéristique d'amortissement. Avec $c_e \simeq 1450 \text{ m.s}^{-1}$, $\omega_M \simeq 3,3 \text{ kHz}$ pour $R_0 = 1 \text{ mm}$, on obtient

$$\tau \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad (47)$$

ce qui semble cohérent avec la courbe expérimentale 5.4, pour laquelle on relève graphiquement $\tau \simeq 3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$. L'ordre de grandeur est le bon, et la différence est due au rayon de la bulle, qui n'est probablement pas exactement égal à 1 mm. Finalement, une autre source d'erreur peut provenir du fait que l'excitation qui génère la bulle n'est pas une impulsion infiniment courte, ce qui peut être constaté sur la courbe expérimentale 5.4 précédente.

Exercice 5.4 : Réflexion d'une onde sonore sur un fluide en déplacement - X PC

On considère deux fluides de mêmes propriétés, séparés par une interface en $x = 0$. Le fluide 1 est immobile dans le référentiel de l'étude, supposé galiléen, tandis que le fluide 2 est en mouvement à une vitesse $\vec{V} = V_0 \vec{u}_y$. On envoie une onde sonore sous la forme d'une onde plane progressive de pulsation ω depuis le fluide 1 sur l'interface, avec un angle d'incidence θ_i . Trouver les pulsations des ondes réfléchies et transmises, ainsi que leurs amplitudes et directions de propagation.



Quelques pistes...

1. Établir l'équation d'onde dans le milieu en mouvement. On pourra procéder soit (a) en linéarisant les équations habituelles avec une vitesse d'ensemble non nulle, soit (b) en procédant à un changement de référentiel.
2. Écrire les équations des champs de pression et de vitesse dans chaque zone pour une onde plane. Quelles sont les quantités conservées et les conditions aux limites ?
3. En déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission à l'interface.

1. Si le calcul des coefficients de transmission et de réflexion à l'interface entre deux milieux différents est habituel, il faut ici tenir compte du mouvement du fluide qui va changer l'équation des ondes sonores dans le milieu. Afin d'obtenir cette équation d'onde, nous présentons deux méthodes, la première où l'on retrouve les équations habituelles dans l'approximation acoustique, en tenant compte de la présence d'un terme d'ordre zéro pour la vitesse, et la seconde où l'on procède simplement à un changement de référentiel.

a. Ainsi, considérons un fluide de masse volumique ρ_0 , pression P_0 et de vitesse $\vec{V} = V_0 \vec{u}_y$. Nous allons commencer par le cas unidirectionnel, la généralisation étant ensuite immédiate. Comme dans la démonstration habituelle de l'équation acoustique, notons $\rho = \rho_0 + \rho_1$ la masse volumique, $P = P_0 + P_1$ la pression et $V = V_0 + v_1$ la vitesse du fluide, où les grandeurs d'indice 1 sont supposées être d'ordre 1 par rapport aux grandeurs au repos. De plus, ces grandeurs ne dépendent que de y et de t . Développée à l'ordre 1, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} (\vec{v}_1) + \vec{V}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + V_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation d'Euler projetée sur \vec{u}_y donne

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) \vec{v} \right) \cdot \vec{u}_y &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot \vec{u}_y \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Et finalement, la définition du coefficient de compressibilité isentropique χ_S donne

$$\rho_1 = \chi_S \rho_0 p_1. \quad (3)$$

Si l'on remplace ρ_1 par l'expression précédente dans l'équation de conservation de la masse, et que l'on dérive cette équation par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \chi_S V_0 \frac{\partial p_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial y} + \chi_S V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Dérivons alors l'équation d'Euler par rapport à y pour obtenir

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial y} + V_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Ensuite, on prend la différence de ces deux équations, ce qui donne

$$\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - V_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \chi_S V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Reste alors à exprimer $\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}$, ce qui est possible en dérivant l'équation de conservation de la masse par rapport à y , on obtient

$$\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \chi_S V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

et on arrive finalement à l'équation acoustique dans un milieu en mouvement en combinant ces deux dernières équations, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} + V_0^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} &= \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} &= (c^2 - V_0^2) \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

La généralisation dans le cas étudié avec une dépendance en x est immédiate, et l'on obtient

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial y} = c^2 \Delta p_1 - V_0^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}. \quad (9)$$

b. Comme on peut le constater, cette méthode est fastidieuse. Une autre méthode, plus astucieuse, est possible pour trouver cette équation. Dans le référentiel \mathcal{R}' lié au fluide en mouvement, de coordonnées (t', x', y') l'équation de propagation des ondes acoustiques s'écrit bien entendu comme pour un fluide au repos, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t'^2} = c^2 \Delta_{x', y'} p_1, \quad (10)$$

La transformation entre les coordonnées du référentiel \mathcal{R}' et celles du référentiel d'origine est

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y - V_0 t \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y'}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x'}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t'} - V_0 \frac{\partial p}{\partial y'}. \end{cases} \quad (12)$$

On en déduit aisément que $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial y}$. Par composition, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (13)$$

et donc l'équation acoustique, exprimée dans le référentiel d'origine s'écrit

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = c^2 \Delta p_1, \quad (14)$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

2. On peut à présent calculer l'expression des ondes transmises et réfléchies.

En toute généralité, on note ω_i , ω_r et ω_t les pulsations des ondes incidentes, transmises et réfléchies, et de la même manière on définit les vecteurs d'ondes \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t , qui s'expriment

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= k_i (\cos \theta_i \vec{u}_x + \sin \theta_i \vec{u}_y), \\ \vec{k}_r &= k_r (-\cos \theta_r \vec{u}_x + \sin \theta_r \vec{u}_y), \\ \vec{k}_t &= k_t (\cos \theta_t \vec{u}_x + \sin \theta_t \vec{u}_y). \end{aligned} \quad (15)$$

où les angles θ_i , θ_r et θ_t sont ceux définis par le schéma précédent.

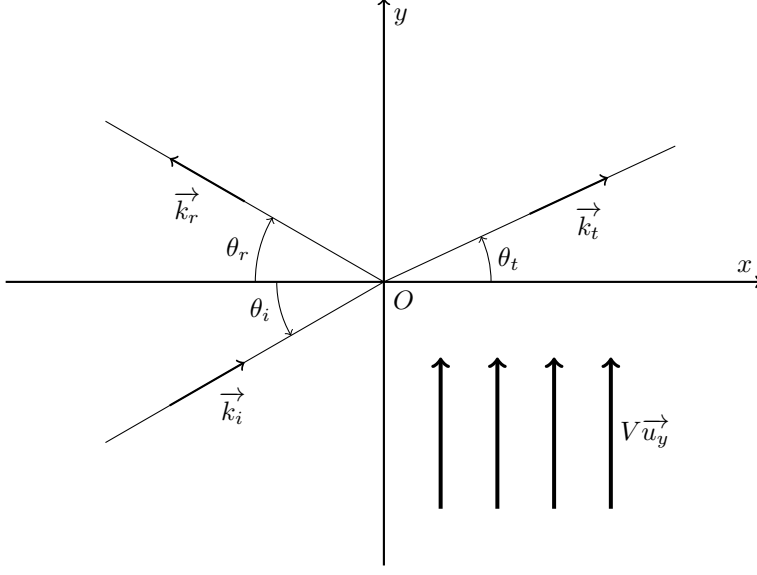


FIGURE 5.5. Orientation des vecteurs d'onde et angles de réflexion.

Avec ces notations, les champs de pression et de vitesse s'écrivent

$$\begin{cases} P_i = P_0 e^{i(\omega_i t + k_i (\cos \theta_i x + \sin \theta_i y))}, \\ P_r = R P_0 e^{i(\omega_r t + k_r (-\cos \theta_r x + \sin \theta_r y))}, \\ P_t = T P_0 e^{i(\omega_t t + k_t (\cos \theta_t x + \sin \theta_t y))}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_{0,i} e^{i(\omega_i t + k_i (\cos \theta_i x + \sin \theta_i y))}, \\ \vec{v}_r = \vec{v}_{0,r} e^{i(\omega_r t + k_r (-\cos \theta_r x + \sin \theta_r y))}, \\ \vec{v}_t = \vec{v}_{0,t} e^{i(\omega_t t + k_t (\cos \theta_t x + \sin \theta_t y))}. \end{cases} \quad (16)$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (17)$$

Ainsi, dans le milieu sans vitesse, on a

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{k}_i}{\rho_0 \omega} P_i \quad \text{et} \quad \vec{v}_r = \frac{\vec{k}_r}{\rho_0 \omega} P_r, \quad (18)$$

tandis que dans le milieu en mouvement,

$$\vec{v}_t = \frac{\vec{k}_t}{\rho_0 (\omega - V_0 k_t \sin \theta_t)} P_t. \quad (19)$$

Afin de calculer les différentes quantités qui nous intéressent, nous allons utiliser les conditions aux limites. Ici, il s'agit de la continuité de la pression et de la continuité de la composante normale de la vitesse.

Écrivons tout d'abord la continuité de la pression en $x = 0$, on obtient pour tout y ,

$$P_0 e^{i(\omega_i t + k_i \sin \theta_i y)} + R P_0 e^{i(\omega_r t + k_r \sin \theta_r y)} = T P_0 e^{i(\omega_t t + k_t \sin \theta_t y)}. \quad (20)$$

En particulier, en $y = 0$, on a

$$P_0 e^{i\omega_i t} + R P_0 e^{i\omega_r t} = T P_0 e^{i\omega_t t}, \quad (21)$$

et puisque la famille des exponentielles complexes $e^{i\omega t}$ est une famille libre, on en déduit que soit P_0 est nul, soit les trois pulsations sont égales. Ainsi

$$\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t} \quad (22)$$

ce qui est parfaitement attendu pour un milieu dont les équations ont été linéarisées.

Dans le milieu 1, les deux ondes incidente et réfléchie vérifient la même équation d'onde. Ainsi, on sait que $\vec{k}_i^2 = \vec{k}_r^2$, c'est-à-dire avec nos notations que $k_i = k_r$.

Grâce au même argument que précédemment en faisant varier y dans l'équation (20), on obtient que

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t, \quad (23)$$

et en particulier $\sin \theta_i = \sin \theta_r$. Toujours d'après relation de dispersion, on en déduit que $\cos \theta_i = \cos \theta_r$, et finalement

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}. \quad (24)$$

Remarquons que la forme exacte de ce résultat est le fruit de l'orientation des angles choisie au départ, mais le contenu physique est toujours le même, l'angle d'incidence est l'angle avec lequel l'onde réfléchie part de l'interface.

L'autre égalité $k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$ nous donne une première information sur l'angle de transmission. D'après la relation de dispersion dans le milieu en mouvement, on a

$$\begin{aligned} \omega^2 + 2V_0 \omega k_t \sin \theta_t + (V_0^2 \sin^2 \theta_t - c^2) k_t^2 &= 0 \\ \Rightarrow \omega + V_0 k_t \sin \theta_t &= \pm c k_t \\ \Rightarrow \omega &= k_t (\pm c - V_0 \sin \theta_t). \end{aligned} \quad (25)$$

La solution $\omega = -k_t(c + V_0 \sin \theta_t)$ n'ayant pas de réalité physique, on a donc

$$\boxed{k_t = \frac{\omega}{c - V_0 \sin \theta_t}}, \quad (26)$$

ce qui implique que $V_0 < c$, hypothèse raisonnable pour un fluide en mouvement (sur Terre!). On en déduit ainsi les vitesses de groupe et de phase, toutes deux égales à une valeur commune

$$c' = \frac{\omega}{k_t} = c - V_0 \sin \theta_t. \quad (27)$$

De l'égalité des composantes selon y des vecteurs d'ondes, on tire

$$\frac{\sin \theta_t}{c - V_0 \sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_i}{c} \Rightarrow \sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{1 + \frac{V_0}{c} \sin \theta_i}. \quad (28)$$

3. Cherchons à présent à déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Les équations de continuité s'écrivent

$$1 + R = T \quad (29)$$

et

$$\frac{k_i \cos \theta_i}{\omega} (1 - R) = \frac{k_t \cos \theta_t}{\omega - V_0 k_t \sin \theta_t} T \quad (30)$$

que l'on peut réécrire de manière plus compacte

$$\frac{\cos \theta_i}{c} (1 - R) = \frac{\cos \theta_t}{c'} T. \quad (31)$$

À partir de ce moment, la résolution est habituelle, et on trouve

$$R = \frac{1 - Z}{1 + Z} \text{ et } T = \frac{2}{1 + Z}, \quad (32)$$

où l'on a posé

$$\boxed{Z = \frac{\rho_0 c \cos \theta_t}{\rho_0 c' \cos \theta_i}}. \quad (33)$$

Dans le cas où $V_0 = 0$, on retrouve bien les résultats habituels en changeant éventuellement les masses volumiques des deux fluides.

Exercice 5.5 : Caléfaction 2 - Ulm PC

On dépose une grosse goutte d'azote sur une table. Combien de temps survit-elle ?

Lorsque l'on projette de l'azote sur une table à température ambiante, on observe que les gouttes, au lieu de s'aplatir et de s'évaporer au contact de la table, se mettent en mouvement et peuvent mettre jusqu'à plusieurs minutes à s'évaporer. Il s'agit du phénomène dit de caléfaction, ou Leidenfrost. Ce phénomène se produit lorsque l'environnement direct, la table, est à une température très grande devant la température d'ébullition du diazote (-196°C).

Une partie de la goutte s'évapore immédiatement au contact de la table et forme entre les deux une mince couche de vapeur. Dans un premier exercice (voir 4.5) nous avons traité ce problème en quantifiant les échanges de chaleur à travers la couche de vapeur grâce à une approche diffusive. Dans ce qui suit, nous proposons de compléter cette approche en étudiant l'écoulement dans la couche de vapeur.

**Quelques pistes...**

1. Afin de simplifier, nous considérons une goutte cylindrique. Trouver la géométrie de cette dernière en supposant qu'elle est très aplatie.
2. Quel est le flux thermique reçu par la goutte ? Comment est-il relié au profil de température dans la couche de vapeur ?
3. En réalisant un bilan d'énergie sur la goutte, trouver la variation de la masse de cette dernière.
4. Étudier ensuite l'écoulement sous la goutte. On pourra commencer par trouver géométriquement la forme de l'écoulement, puis évaluer les ordres de grandeur des différents termes de l'équation de Navier-Stokes.
5. En déduire l'expression du champ des vitesses, puis à l'aide d'un bilan de matière, trouver la pression.
6. En cherchant une autre expression de la pression dans la goutte, trouver l'expression de l'épaisseur du film de vapeur.

Comme nous l'avons évoqué en introduction, la formation d'une couche de vapeur permet de retarder l'inéluctable : le transfert thermique entre le corps chaud (la table) et le corps froid (la goutte) est limité, mais aboutit toujours à l'évaporation complète de la goutte.

Afin de quantifier ce transfert thermique, il semble naturel d'étudier le champ de température dans la couche gazeuse, ce qui permet d'obtenir le flux thermique grâce à la loi de Fourier. Afin de relier ce flux thermique à la variation de masse, on réalise alors un bilan d'énergie sur la goutte. Ceci permet d'extraire une équation différentielle sur l'évolution de la masse de la goutte, et donc un temps caractéristique.

L'étude de l'écoulement sous la goutte va nous permettre d'obtenir le débit de vapeur d'eau sortant de la couche de vapeur. En reliant ce débit à la variation de masse de la goutte, on peut finalement remonter à l'épaisseur de la couche.

1. L'énoncé nous suggère d'étudier une « grosse » goutte, que l'on se représente comme aplatie, en opposition à une petite goutte, que l'on se représente comme plus sphérique. La forme d'une goutte est en effet dictée par deux effets contradictoires : la gravité, qui tend à l'aplatir, et la tension de surface, qui tend à minimiser la surface de la goutte, et donc à la rendre sphérique.

Supposons ainsi que nous avons une « grosse » goutte, donc aplatie et quasiment cylindrique. Ceci signifie que la hauteur h du cylindre est très faible devant son rayon. Pour traduire la

compétition entre les deux effets, on cherche à minimiser l'énergie de la goutte. Tout d'abord, l'énergie potentielle de pesanteur s'exprime $E_p = \rho_l V g \frac{h}{2}$, avec ρ_l la masse volumique du liquide, V le volume de la goutte et g la constante de gravitation. Ensuite, l'énergie de surface vaut environ $E_S = \gamma 2\pi R^2$, où γ est la tension de surface, et où l'on a négligé les contributions des faces latérales. L'énergie totale s'exprime donc

$$E_{\text{tot}} = \frac{\rho_l g V h}{2} + \frac{2\gamma V}{h}. \quad (1)$$

On trouve alors immédiatement la hauteur d'équilibre h_e qui minimise l'énergie totale

$$h_e = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l g}} = 2l_c. \quad (2)$$

La longueur $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l g}}$ est appelée longueur capillaire, elle représente la taille caractéristique en dessous de laquelle les effets de tension de surface prennent le dessus sur les effets dus à la gravité. Pour l'azote liquide, on a $\gamma \simeq 10 \text{ mN.m}^{-1}$, $\rho_l \simeq 810 \text{ kg.m}^{-3}$ et on en déduit que $l_c \simeq 1 \text{ mm}$, et donc $h_e \simeq 2 \text{ mm}$. Pour une goutte de volume $V = \pi R^2 h = 1 \text{ cm}^{-3}$, ceci donne un rayon $R \simeq 1 \text{ cm}$, ce qui valide l'approximation précédente.

2. Connaissant la géométrie de la goutte, nous pouvons à présent quantifier les échanges thermiques entre cette dernière et la plaque. Pour cela, l'approche la plus simple est de considérer des transferts purement diffusifs dans la couche de vapeur. On suppose que cette dernière a une épaisseur constante l , et l'observation suggère que $l \ll R$ et $l \ll h$, et on retient généralement un ordre de grandeur de $l \simeq 100 \mu\text{m}$.

Vu la géométrie du problème, le plus naturel est de se placer en coordonnées cylindriques. *A priori*, T est une fonction de (r, θ, z) et t . Par invariance par rotation autour de l'axe z , on sait que T ne dépend pas de θ . De plus, l'échelle caractéristique de variation de T selon r est R et selon z est l . Ainsi, on peut calculer le rapport

$$\left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| \sim \frac{l}{R} \ll 1, \quad (3)$$

et on peut ainsi considérer que T ne dépend spatialement que de z . Finalement, on peut chercher à voir si l'on peut considérer que le régime stationnaire est atteint. Notons D la diffusivité de l'azote. D'après l'équation de la chaleur, la durée caractéristique τ d'établissement du régime diffusif est

$$\tau \sim \frac{l^2}{D} \sim \frac{(10^{-4})^2}{10^{-5}} \sim 10^{-3} \text{ s}, \quad (4)$$

où l'on a pris la valeur habituelle de la diffusivité pour un gaz $D \simeq 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Ce temps est très inférieur à la durée de vie de la goutte d'azote, et nous allons donc supposer qu'un régime permanent s'établit très rapidement.

Avec toutes ces remarques, l'équation de la chaleur et sa solution s'écrivent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\Delta T}{l} z + T_t, \quad (5)$$

où l'on a défini $\Delta T = T_t - T_g$, avec T_t la température de la table, et T_g la température de la goutte.

3. D'après la loi de Fourier

4. Loi de Fourier, on en déduit le vecteur densité de courant d'énergie thermique

$$\vec{j}_{\text{th}} = \lambda \frac{\Delta T}{l} \vec{u}_z. \quad (6)$$

Ainsi, le flux d'énergie thermique reçu par la goutte entre t et $t + dt$ est

$$\Phi_{th} = \frac{\lambda \Delta T}{l} \pi R^2 dt. \quad (7)$$

En supposant que seul ce flux contribue à l'évaporation de la goutte, un bilan d'énergie sur cette dernière donne

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{L_v l} \pi R^2, \quad (8)$$

où l'on a noté L_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'azote. Cette première équation permet ainsi d'estimer le temps complet d'évaporation de la goutte, mais à condition de connaître la hauteur de la couche de vapeur. Afin de trouver une autre équation nous permettant d'obtenir l , nous allons à présent étudier l'écoulement de la vapeur sous la goutte.

5. L'écoulement de la vapeur sous la goutte est dû à la différence de pression entre le centre de la goutte et sa périphérie, provoquée par le poids de la goutte. Comme souvent, la première chose à faire avant d'écrire les équations qui régissent l'écoulement est d'en étudier les propriétés géométriques, grâce à des hypothèses simplificatrices et à une analyse des symétries du problème.

Comme précédemment, supposons que la couche de vapeur a une épaisseur uniforme ℓ . Afin de simplifier, nous supposons que la goutte est maintenue immobile. Nous nous plaçons toujours en coordonnées cylindriques. Ayant supposé la goutte cylindrique, le problème est invariant par rotation autour de l'axe z , et donc le champ des vitesses tout comme le champ de pression ne dépendent pas de l'angle θ . De plus, tout plan comprenant l'axe Oz est un plan de symétrie du problème. Par symétrie, le champ de vitesse ne possède pas de composante selon \vec{u}_θ . Le champ des vitesses s'écrit donc *a priori*

$$\vec{v} = v_r(r, z, t) \vec{u}_r + v_z(r, z, t) \vec{u}_z. \quad (9)$$

Afin de continuer les simplifications, il est très souvent intéressant de regarder si l'on peut supposer l'écoulement incompressible. C'est le cas si la vitesse de l'écoulement est très faible devant la vitesse du son. Essayons d'estimer une vitesse caractéristique de l'écoulement pour une goutte centimétrique. Avec une masse volumique d'environ 800 kg.m^{-3} , la masse m_0 d'une telle goutte est d'environ 1 g. On estime sa durée de vie τ à plusieurs minutes, et nous retiendrons une valeur de 200 s. Ainsi, la variation de masse de la goutte est de l'ordre de

$$\dot{m} \simeq \frac{m_0}{\tau} \simeq \frac{1 \text{ g}}{200 \text{ s}} \simeq 5 \text{ mg.s}^{-1}. \quad (10)$$

Cette masse perdue s'échappe à la frontière entre le film de vapeur et l'extérieur, de surface $S = 2\pi R\ell$. Ainsi, le débit massique de vapeur sortante est de l'ordre de $D \sim 2\pi R\ell\rho_v V^*$, où V^* est une vitesse caractéristique de l'écoulement et ρ_v est la masse volumique de la vapeur. Par conservation de la masse, on obtient alors

$$V^* \simeq \frac{\dot{m}}{\rho_v 2\pi R\ell} \simeq 2 \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}, \quad (11)$$

où l'on a pris une masse volumique d'environ 4 g.L^{-1} pour l'azote gazeux à -195°C , et $\ell \simeq 100 \mu\text{m}$.

Ainsi, on peut supposer que l'écoulement est incompressible. Mathématiquement, cette condition s'écrit $\text{div } \vec{v} = 0$. La distance caractéristique de variation du champ des vitesses selon r est R , et selon z est l . Ainsi, en ordre de grandeur, la condition de non divergence s'écrit

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow \left| \frac{v_r}{R} \right| \sim \left| \frac{v_z}{l} \right| \Rightarrow \frac{v_z}{v_r} \sim \frac{\ell}{R} \ll 1, \quad (12)$$

et on peut donc considérer que la composante selon z du champ des vitesses est négligeable, et le champ est radial. On a finalement $\vec{v} = v_r(r, z, t) \vec{u}_r$.

Finalement, la vitesse caractéristique obtenue précédemment donne sur une longueur $R \simeq 1$ cm un temps caractéristique $\tau \simeq 5 \times 10^{-2}$ s. Là encore, ce temps est très inférieur au temps de caléfaction, et on peut donc considérer que le régime est permanent.

Avec toutes ces simplifications, on peut passer à l'écriture des équations de la mécanique des fluides. Nous écrivons l'équation de Navier-Stokes pour un fluide en écoulement stationnaire sous la forme

$$\rho_v(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}) = \rho_v \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}, \quad (13)$$

où η est la viscosité dynamique. L'étape suivante est bien entendu de simplifier cette équation par une évaluation du nombre de Reynolds. Celui-ci permet d'évaluer le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. En ordre de grandeur, on a

$$\left\| \rho_v(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}) \right\| = \rho_v v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \sim \rho_v \frac{V^{*2}}{R}, \quad (14)$$

et

$$\|\eta \Delta \vec{v}\| = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \sim \eta V^* \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\ell^2} \right) \sim \frac{\eta V}{\ell^2}, \quad (15)$$

et on définit ainsi le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\left\| \rho_v(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}) \right\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \sim \frac{\rho_v V^{*12}}{\eta R} \simeq 10^{-1}, \quad (16)$$

où l'on a pris $\eta = 8 \times 10^{-6}$ Pa.s, d'après la valeur trouvée dans la littérature pour l'azote gazeux à -195°C . Ainsi, les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses, et on se trouve en régime laminaire. En conclusion, l'équation de Navier-Stokes s'est considérablement simplifiée en

$$\boxed{\vec{0} = \rho_v \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}}, \quad (17)$$

et le problème est maintenant d'étudier un écoulement de type Poiseuille dans une géométrie particulière.

6. En projection sur l'axe r , on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}, \quad (18)$$

que l'on intègre immédiatement en

$$\eta v_r = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{z^2}{2} + f(r)z + g(r), \quad (19)$$

où $f(r)$ et $g(r)$ sont des fonctions à déterminer grâce aux conditions aux limites. Puisque le fluide est visqueux, on sait que $v_r = 0$ en $z = 0$ et en $z = \ell$. De la première condition, on déduit que $g(r) = 0$ pour tout r , et la seconde donne

$$\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\ell^2}{2} + f(r)\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = -\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\ell}{2}. \quad (20)$$

Finalement, on a

$$\boxed{v_r = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{z}{2} (z - \ell)}. \quad (21)$$

L'équation de Navier-Stokes projetée sur \vec{u}_z donne simplement l'équation de l'hydrostatique

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_v g. \quad (22)$$

Ainsi, en considérant que ρ_v est constante, on a une variation de $\rho_v g \ell \simeq 5 \times 10^{-3}$ Pa entre le bas et le haut de la couche de vapeur à r fixé. On va donc supposer que p ne dépend que de r .

Afin de relier v_r à la variation de masse du problème, on peut avoir la même idée que pour évaluer l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement, c'est-à-dire procéder à un bilan de masse. À une distance r du centre de la goutte, le débit volumique de vapeur à travers le cylindre de rayon r et de hauteur l est

$$\begin{aligned} Q(r) &= \iint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi r \int_0^\ell \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dr} \frac{z}{2} (z - \ell) dz \\ &= -\frac{\pi r}{6\eta} \frac{dP}{dr} \ell^3. \end{aligned} \quad (23)$$

La matière qui traverse cette surface provient de l'évaporation de la goutte. On suppose que l'évaporation a lieu exclusivement sous cette dernière, et que le débit volumique de vapeur produit sous la goutte par unité de surface et par unité de temps j_v est homogène. Ainsi, on a par définition

$$\pi R^2 \rho_v j_v = -\dot{m} \Rightarrow j_v = -\frac{\dot{m}}{\rho_v \pi R^2}, \quad (24)$$

où le signe négatif provient du fait que m décroît et que l'on compte positivement j_v . Considérons à présent le cylindre d'axe z compris entre $z = 0$ et $z = \ell$ selon z et de rayon r . Le débit entrant dans ce volume est

$$D_e = j_v 2\pi r, \quad (25)$$

et le débit sortant est simplement $D_s = Q(r)$. Ainsi, la conservation du débit s'écrit

$$\begin{aligned} D_e = -D_s &\Rightarrow -\frac{\dot{m} \pi r^2}{\rho_v \pi R^2} = \frac{\pi r}{6\eta} \frac{dP}{dr} \ell^3 \\ \Rightarrow \frac{dP}{dr} &= -\frac{6\dot{m}\eta}{\pi \rho_v R^2 \ell^3} r. \end{aligned} \quad (26)$$

Cette équation s'intègre immédiatement, et en notant p_a la pression atmosphérique, atteinte en $r = R$, on trouve

$$p(r) = p_a + \frac{3\eta\dot{m}}{\pi \rho_v \ell^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (27)$$

Ainsi, la pression en $r = 0$ est

$$p(r = 0) = p_a + \frac{3\eta\dot{m}}{\rho_v \pi \ell^3}. \quad (28)$$

7. Il ne reste plus qu'à calculer $p(r = 0)$ d'une autre manière. En supposant que la répartition de pression dans la goutte est hydrostatique, c'est-à-dire en négligeant les mouvements de l'azote à l'intérieur de la goutte, on trouve que

$$p(r = 0) = p_a + \rho_a g h_e = p_a + \rho_a g 2\ell_e, \quad (29)$$

où $h_e = 2\ell_e$ est la hauteur de la goutte trouvée précédemment. En combinant ces deux équations, on trouve

$$\frac{3\eta\dot{m}}{\pi \rho_v \ell^3} = 2\rho_a g \ell_e, \quad (30)$$

et en rappelant que $\dot{m} = \frac{\lambda \Delta T}{L_v} \pi R^2$, on trouve que

$$\ell = \left(\frac{3}{2} \frac{\eta \lambda \Delta T R^2}{\rho_v \rho_a g \ell_e L_v} \right)^{1/4}. \quad (31)$$

Pour finir, on peut réaliser l'application numérique. D'après les valeurs trouvées dans la littérature pour l'azote gazeux à -195°C , la viscosité dynamique η vaut $8,0 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, la conductivité thermique vaut $\lambda = 1,5 \times 10^{-3} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et la masse volumique $\rho_v = 4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Pour l'azote liquide, on prend $\rho_a = 810 \text{ kg.m}^{-3}$ et $L_v = 199 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}$. On prend $R = 1 \text{ cm}$, $\ell_e = 1 \text{ mm}$, et finalement $\Delta T = 200 \text{ K}$. On obtient alors

$$\ell = 150 \mu\text{m}, \quad (32)$$

ce qui est tout à fait l'ordre de grandeur accepté pour la couche de vapeur, et qui confirme nos hypothèses.

On peut finalement en déduire le temps nécessaire à la goutte pour s'évaporer complètement. En intégrant l'équation (8), on obtient un temps

$$\tau = \frac{m_0 L_v \ell}{\pi \lambda \Delta T R^2} \simeq 160 \text{ s}, \quad (33)$$

ce qui est là encore un ordre de grandeur parfaitement acceptable.

En conclusion, pointons quelques limites du modèle. D'une part, l'approximation la plus grossière semble être celle du profil de température dans la couche de vapeur, qui est certainement plus complexe que dans nos hypothèses. D'autre part, supposer que l'étalement de la goutte est grand devant sa hauteur suppose que l'échelle de longueur de la goutte est grande devant la longueur capillaire. Au fur et à mesure de l'évaporation de la goutte, la forme de cette dernière va se rapprocher d'une goutte sphérique. On pourrait reprendre l'étude précédente avec une goutte sphérique, mais les calculs risquent d'être beaucoup plus lourds. Toutefois, les résultats précédents sont très proches des études expérimentales.

Exercice 5.6 : Dérive des icebergs - Ulm PC

On s'intéresse à la dérive d'objets flottants tels les icebergs sous l'action du vent. Modéliser ce phénomène et montrer que la direction de dérive diffère de celle du vent.

Cet exercice, très complet, combine un grand nombre de raisonnements habituels de mécanique des fluides : analyse géométrique, ordres de grandeurs et résolution des équations de Navier-Stokes avec un terme « inhabituel ».

On pourrait naïvement penser qu'un iceberg, une fois qu'il s'est détaché de la banquise, se déplace au gré du vent, simplement « poussé » par ce dernier. Pourtant dans la réalité, on observe que la direction dans laquelle se déplacent les icebergs diffère de celle du vent. De manière tout aussi étonnante, cette direction ne dépend ni de la taille ni de la forme de l'iceberg. De ces différentes remarques, on peut en conclure que ce n'est pas l'action du vent qui provoque le mouvement de l'iceberg, mais que celui-ci se meut grâce aux courants océaniques, et qu'il existe une source de dissymétrie, qui va faire dévier la direction du courant par rapport à celle du vent.



Quelques pistes...

1. Quel phénomène peut être responsable de cette déviation ?
2. Que peut-on supposer sur la géométrie du champ des vitesses ? En analysant les longueurs caractéristiques de l'écoulement, montrer que l'écoulement est plan et qu'il ne dépend que d'une seule coordonnée.
3. Peut-on dire que l'écoulement est irrotationnel ? Incompressible ? Permanent ? Montrer qu'avec la géométrie trouvée précédemment, les équations de Navier-Stokes s'écrivent facilement, sous forme d'équations couplées.
4. Les résoudre grâce à un changement de variable complexe du type $\xi = X + iY$.

5. En résumant l'action du vent par une simple contrainte tangentielle à la surface, résoudre l'équation et conclure.

1. Parmi les différentes actions que subit le fluide, une seule est susceptible de provoquer une telle asymétrie, et il s'agit bien entendu de la force de Coriolis. La déviation du courant peut par exemple nous rappeler la déviation vers l'est, phénomène bien connu et étudié en classe préparatoire. Pour se mettre sur la voie, on aurait pu préciser que cette direction de déviation change lorsque l'on passe d'un hémisphère à l'autre, ce qui est typique de la force de Coriolis. Dans la suite, nous allons donc présenter un modèle simple de courant permettant de rendre compte de cette asymétrie. L'action du vent correspondant à une condition aux limites, nous allons d'abord commencer par étudier les équations du champs des vitesses dans l'océan.

2. Afin de simplifier au maximum le problème, nous allons modéliser l'océan comme un milieu homogène et infini. On note la masse volumique ρ . Les échelles de longueur horizontales étant bien supérieures aux profondeurs des océans, nous allons supposer que l'écoulement est bidimensionnel, dans les directions x et y . Ainsi, les différentes quantités ne dépendront que de z , la profondeur dans l'océan. Finalement, nous allons supposer que l'écoulement est stationnaire, ce qui semble raisonnable aux échelles de temps considérées. Ainsi, le champ des vitesses s'écrit

$$\vec{v}(M) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y, \quad (1)$$

et le champ de pression s'écrit $P(z)$. Notons que ce champ des vitesses vérifie $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$.

Afin d'étudier l'influence de la force de Coriolis, nous nous plaçons bien entendu dans le référentiel terrestre, tel que schématisé dans la figure 5.6.

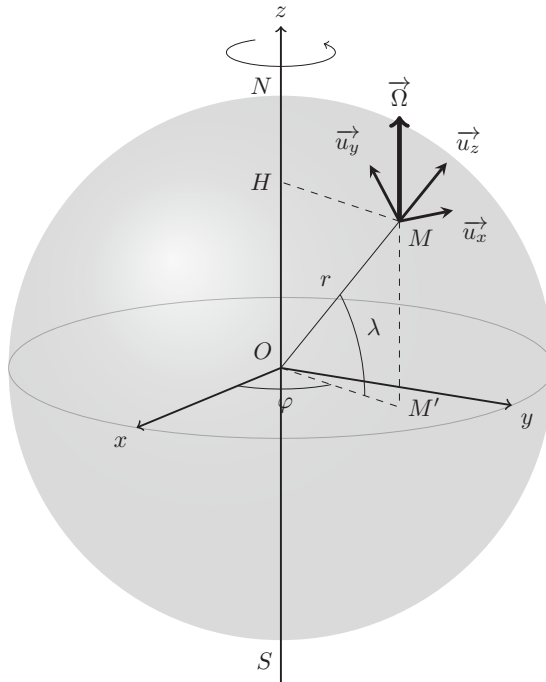


FIGURE 5.6. Référentiel terrestre.

On note le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$, de telle sorte que la force volumique de Coriolis s'écrit

$$\vec{f}_{ic} = -\rho 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}. \quad (2)$$

On rappelle que le vecteur gravité \vec{g} inclut la force d'inertie d'entraînement. Ainsi, puisque l'écoulement est stationnaire, et puisque le terme convectif s'annule ici, l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}, \quad (3)$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide. Dans le référentiel terrestre, le vecteur $\vec{\Omega}$ s'écrit en fonction de la latitude λ sous la forme

$$\vec{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix}, \quad (4)$$

et on peut ainsi calculer

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\Omega \sin \lambda v_y \vec{u}_x + \Omega \sin \lambda v_x \vec{u}_y. \quad (5)$$

Ainsi, en projetant l'équation de Navier-Stokes selon les trois directions, on obtient

$$\begin{cases} 0 = \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} + 2\Omega \sin \lambda v_y, \\ 0 = \nu \frac{d^2 v_y}{dz^2} - 2\Omega \sin \lambda v_x, \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g. \end{cases} \quad (6)$$

L'équation selon z est simplement une équation hydrostatique, qui nous importe peu. Le problème revient donc à résoudre le système couplé composé des deux premières équations.

3. On peut le découpler en dérivant deux fois une des équations puis en remplaçant dans l'autre, ce qui donne une équation de degré 4. Nous allons préférer une autre méthode, plus astucieuse mais souvent connue en classe préparatoire. Posons la quantité complexe $\underline{v} = v_x + i v_y$. Alors en multipliant la deuxième équation par i et en additionnant les deux équations ainsi obtenues, on trouve

$$\nu \frac{d^2}{dz^2} (v_x + i v_y) + 2\Omega \sin \lambda (v_y - i v_x) = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{v}}{dz^2} - i \frac{2\Omega \sin \lambda}{\nu} \underline{v} = 0. \quad (8)$$

Il s'agit d'une simple équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique s'écrit

$$r^2 - \frac{2\Omega \sin \lambda}{\nu} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (9)$$

dont les racines sont

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\Omega \sin \lambda}{\nu}} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{2\Omega \sin \lambda}{\nu}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = \pm d(1 + i), \quad (10)$$

où l'on définit $\delta = \sqrt{\frac{\Omega \sin \lambda}{\nu}}$. On a alors

$$\underline{v} = \underline{A} \exp\left((1 + i) \frac{z}{d}\right) + \underline{B} \exp\left(-(1 + i) \frac{z}{d}\right). \quad (11)$$

La solution ne peut pas diverger en $z = -\infty$, donc $\underline{B} = 0$. Reste à déterminer \underline{A} , que l'on sépare en sa partie réelle et sa partie imaginaire $\underline{A} = A' + iA''$, grâce aux conditions aux limites. Pour cela, exprimons v_x et v_y , en calculant

$$\begin{aligned}\underline{v} &= e^{\frac{z}{d}} \left((A' + iA'') \left(\cos\left(\frac{z}{d}\right) + i \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right) \right) \\ &= e^{\frac{z}{d}} \left(A' \cos\left(\frac{z}{d}\right) - A'' \sin\left(\frac{z}{d}\right) + i \left(A'' \cos\left(\frac{z}{d}\right) + A' \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right) \right),\end{aligned}\quad (12)$$

et on peut revenir aux différentes composantes du champ de vitesse en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{v} , sous la forme

$$\begin{cases} v_x = \text{Re}(\underline{v}) = e^{\frac{z}{d}} \left(A' \cos\left(\frac{z}{d}\right) - A'' \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right), \\ v_y = \text{Im}(\underline{v}) = e^{\frac{z}{d}} \left(A'' \cos\left(\frac{z}{d}\right) + A' \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right). \end{cases}\quad (13)$$

4. Entre l'atmosphère et l'océan, la condition aux limites à utiliser est bien entendu la continuité des contraintes tangentielles à la frontière entre l'océan et l'atmosphère. Il est complexe d'écrire la forme de la contrainte $\vec{\tau}$ due au vent exactement, et son expression est en fait peu importante pour la suite. Afin de simplifier, nous supposons que cette dernière est simplement dans la direction \vec{u}_x , c'est-à-dire que $\vec{\tau} = \tau_x \vec{u}_x$. Dans le fluide, la contrainte tangentielle s'écrit $\eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \rho \nu \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$, où η est la viscosité dynamique du fluide. On calcule aisément

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} v_x = \frac{1}{d} e^{\frac{z}{d}} \left(A' \cos\left(\frac{z}{d}\right) - A'' \sin\left(\frac{z}{d}\right) - A' \sin\left(\frac{z}{d}\right) - A'' \cos\left(\frac{z}{d}\right) \right), \\ \frac{d}{dz} v_y = \frac{1}{d} e^{\frac{z}{d}} \left(A'' \cos\left(\frac{z}{d}\right) + A' \sin\left(\frac{z}{d}\right) - A'' \sin\left(\frac{z}{d}\right) + A' \cos\left(\frac{z}{d}\right) \right). \end{cases}\quad (14)$$

Ainsi, l'égalité des contraintes tangentielles en $z = 0$ donne

$$\begin{cases} \frac{\rho \nu}{d} (A' - A'') = \tau_x \\ \frac{\rho \nu}{d} (A' + A'') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \frac{d}{2\rho \nu} \tau_x \\ A'' = -\frac{d}{2\rho \nu} \tau_x \end{cases}.\quad (15)$$

Ainsi, on a finalement

$$\begin{cases} v_x = \frac{d\tau_x}{2\rho \nu} e^{\frac{z}{d}} \left(\cos\left(\frac{z}{d}\right) + \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right) = \frac{d\tau_x}{\sqrt{2}\rho \nu} \cos\left(\frac{z}{d} + \frac{\pi}{4}\right), \\ v_y = \frac{d\tau_x}{2\rho \nu} e^{\frac{z}{d}} \left(-\cos\left(\frac{z}{d}\right) + \sin\left(\frac{z}{d}\right) \right) = \frac{d\tau_x}{\sqrt{2}\rho \nu} \sin\left(\frac{z}{d} + \frac{\pi}{4}\right), \end{cases}\quad (16)$$

et nous avons obtenu la forme du champ des vitesses dans l'océan en présence d'une force de Coriolis.

Il convient à présent d'interpréter cette solution. Nous avons d'une part un profil exponentiel décroissant à mesure que z diminue, et d'autre part une sinusoïde qui donne une forme de spirale tournant vers la droite du courant. Ce résultat peut s'interpréter facilement : le vent met en mouvement le fluide dans la direction x , et la force de Coriolis est dirigée à 90° de cette dernière. La somme des deux actions va donc résulter en un courant décalé par rapport à la direction du vent. D'après le résultat précédent, le courant est décalé de 45° dans le sens horaire dans l'hémisphère Nord. Dans l'hémisphère Sud, ce décalage sera de 45° dans le sens trigonométrique. Le même mécanisme se produit à mesure que la profondeur augmente, décalant de plus en plus dans le sens horaire dans l'hémisphère Nord, jusqu'à créer une spirale, nommée spirale d'Ekman. Cette dernière est représentée dans la figure 5.7.

En pratique, cette spirale est très difficilement observable, notamment à cause de l'influence des vagues qui provoquent une mise en mouvement beaucoup plus importante. On peut

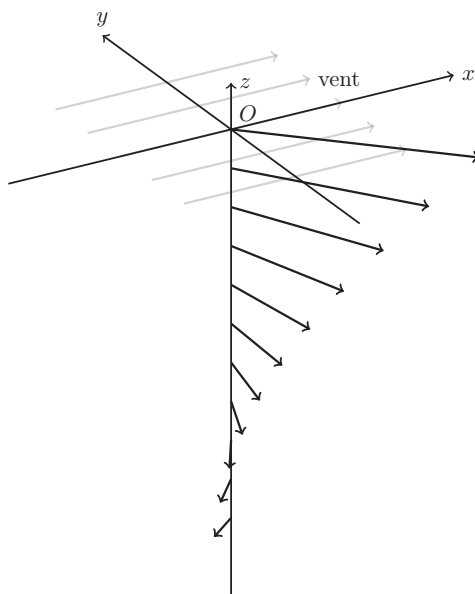


FIGURE 5.7. Représentation de la spirale d'Ekman. À une profondeur d , son amplitude a été réduite d'un facteur $e^{-1} \simeq 0.36$ et a tourné de $\pi/2$.

finale-ment estimer la longueur caractéristique d , avec $\Omega \simeq 2\pi/24 \times 3600 \simeq 7,2 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, $\lambda = 45^\circ$ et $\nu = 1,31 \times 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

$$d = \sqrt{\frac{\Omega \sin \lambda}{\nu}} \sim \sqrt{\frac{7,2 \times 10^{-5} \times 0,7}{1,3 \times 10^{-6}}} \sim 6 \text{ m.} \quad (17)$$

Finissons par une note historique plus légère. Ce phénomène fut utilisé au cours l'expédition « Fram » de l'explorateur norvégien Fridtjof Nansen, qui a voulu rejoindre le pôle Nord en laissant dériver son navire, pris dans la glace. La direction de dérive dépendant du sens du vent, il n'atteignit jamais son but.

Exercice 5.7 : Ondes de surface - X PC

On considère deux fluides de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 de part et d'autre d'un plan horizontal. On suppose le milieu supérieur infini, et le milieu inférieur de profondeur H . Décrire les ondes de faible amplitude se propageant à l'interface entre les deux fluides.

Cet exercice très classique sera pour nous l'occasion d'introduire les équations décrivant les ondes de surface linéaires, c'est-à-dire les ondes existant à l'interface entre deux fluides.



Quelques pistes...

1. Quels sont les phénomènes (deux principalement) responsables de la propagation d'ondes à l'interface entre les fluides ? Que signifie « de faible amplitude » ? Quel type d'onde peut-on considérer pour décrire la surface ?

2. Comment peut-on décrire l'écoulement le plus simplement possible ? Montrer qu'il peut être considéré comme incompressible et irrotationnel.
3. Écrire alors les équations permettant de décrire les écoulements dans les fluides, et les résoudre en utilisant les conditions aux limites.
4. Grâce aux relations de passage à l'interface, trouver la relation de dispersion.

L'idée générale est d'étudier l'écoulement dans chaque fluide, en supposant qu'il est incompressible et irrotationnel. Ceci nous permet d'écrire une équation de Laplace, et en supposant une forme particulière pour le potentiel des vitesses, de résoudre et donc de décrire complètement les écoulements. Les conditions de continuité à l'interface vont alors permettre de trouver une relation de dispersion.

1. Ces ondes se propagent grâce à l'action de la gravité et de la tension superficielle, qui agissent toutes deux comme des forces de rappel. On voit d'emblée que l'étude générale des ondes de surface, par exemple les vagues en mer, va être très complexe, et la non-linéarité des équations de la mécanique des fluides joue un rôle important pour expliquer certains phénomènes, par exemple le déferlement. Ici, on va se placer dans le cas d'ondes de faible amplitude, où le déplacement maximal η_0 est petit devant la longueur d'onde λ , ce qui va permettre d'obtenir des équations linéaires.

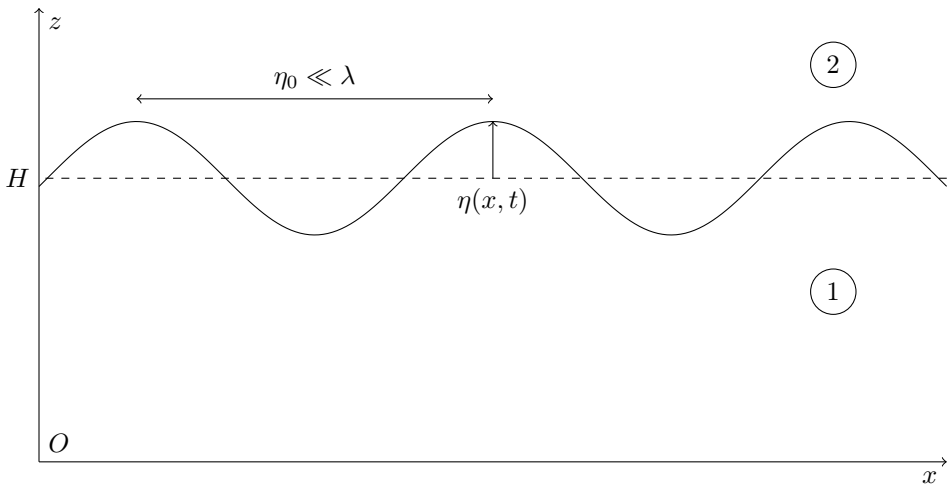


FIGURE 5.8. Interface entre deux fluides avec une déformation sinusoïdale.

Supposons ainsi que nous ayons deux fluides, le fluide 1 en dessous de l'interface et le fluide 2 au dessus. Comme toute déformation périodique peut se décomposer en série de Fourier, nous allons nous concentrer sur les ondes planes monochromatiques, la déformation de l'interface s'écrivant

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(kx - \omega t). \quad (1)$$

La condition « suffisamment faible » signifie alors que $\eta_0 k \ll 1$.

2. Outre l'évolution de la surface, l'étude de ces ondes implique d'étudier l'écoulement dans les deux fluides. Comme d'habitude en mécanique des fluides, on va chercher à avoir les hypothèses les plus simples possible sur la nature de l'écoulement, afin de faciliter les calculs. En première approximation, on considère les deux écoulements comme parfaits. De plus, la vitesse de propagation des ondes de surface étant très inférieure à la vitesse du son, on suppose que le nombre de Mach est très faible, donc que l'écoulement peut être considéré

comme incompressible. Finalement, on va supposer que l'écoulement est irrotationnel. En effet, si l'on considère que le fluide est immobile, donc irrotationnel, avant l'arrivée des vagues, alors en l'absence de viscosité et sur le court terme l'écoulement va rester irrotationnel.

Avec toutes ces hypothèses, on sait que les champs des vitesses \vec{v}_i vérifient $\text{rot } \vec{v}_i = \vec{0}$. On en déduit l'existence des potentiels des vitesses $\vec{v}_i = \text{grad } \varphi_i$. Puisque l'écoulement est incompressible, ces deux potentiels vérifient $\text{div } \vec{v}_i = \Delta \varphi_i = 0$. Ainsi, les deux potentiels sont solutions de l'équation de Laplace. Vu la géométrie du problème, on va chercher $\varphi_i = f_i(z) \exp i(kx - \omega t)$. En remplaçant dans l'équation de Laplace, on obtient

$$\Delta \varphi_i = f_i''(z) - k^2 f_i = 0. \quad (2)$$

et donc

$$f_i = A_i \exp(kz) + B_i \exp(-kz). \quad (3)$$

On suppose que le milieu 1 est fini et qu'il s'étend entre $z = -H$ et $z = \eta(x, t)$, et que le milieu 2 est infini entre $z = \eta(x, t)$ et $z = +\infty$. La non-divergence en $z = +\infty$ donne directement $A_2 = 0$. La seconde condition aux limites à utiliser est la non-pénétration en $z = -H$, c'est-à-dire que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(-H) = 0$, ce qui donne

$$A_1 \exp(-kH) - B_1 \exp(kH) = 0. \quad (4)$$

Ensuite, on peut écrire la continuité de la vitesse normale à l'interface. Puisque l'on a supposé l'amplitude de la déformation faible, cette condition s'écrit

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=\eta(x,t)} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=\eta(x,t)} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (5)$$

et toujours dans l'hypothèse des petites déformations $z = \eta(x, t) \simeq 0$. Ces conditions aux limites cinématiques s'écrivent alors

$$\begin{cases} A_1 k - B_1 k = -i\omega \eta_0, \\ -k B_2 = -i\omega \eta_0. \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, on trouve directement que

$$\boxed{\varphi_2 = i \frac{\omega}{k} \eta_0 \exp(-kz) \exp i(kx - \omega t)}. \quad (7)$$

Pour φ_1 , on a désormais deux équations sur A_1 et B_1 , sous la forme

$$\begin{cases} A_1 \exp(-kH) - B_1 \exp(kH) = 0, \\ A_1 - B_1 = -i \frac{\omega \eta_0}{k}, \end{cases} \quad (8)$$

que l'on résout facilement, par exemple grâce aux formules de Kramer, en

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\exp(kH) \\ -i \frac{\omega}{k} \eta_0 & -1 \end{vmatrix}}{-\exp(-kH) + \exp kH} = \frac{-i \frac{\omega}{k} \eta_0 \exp(kH)}{\exp(kH) - \exp(-kH)}, \\ B_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \exp(-kH) & 0 \\ 1 & -i \frac{\omega}{k} \eta_0 \end{vmatrix}}{-\exp(-kH) + \exp kH} = \frac{-i \frac{\omega}{k} \eta_0 \exp(-kH)}{\exp(kH) - \exp(-kH)}. \end{aligned} \quad (9)$$

On trouve finalement

$$\boxed{\varphi_1 = -i \frac{\omega}{k} \frac{\eta_0}{\exp(kH) - \exp(-kH)} (\exp(k(H+z)) + \exp(-k(H+z))) \exp i(kx + \omega t)}. \quad (10)$$

3. Afin de trouver la relation de dispersion, il sera nécessaire d'exploiter de nouvelles relations. Comme nous l'avons expliqué au début, les ondes de surface se propagent sous

l'action de la tension de surface et de la gravité. La première équation que l'on peut écrire faisant intervenir la gravité est bien entendu l'équation d'Euler. Dans chaque fluide, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \vec{\text{grad}} p_i + \vec{g}, \quad (11)$$

où p_i est la pression dans le fluide i . Notre but étant d'étudier les équations linéarisées, nous allons négliger le terme convectif. En effet, en ordre de grandeur, nous avons $v_i \sim \eta_0 \omega$ et donc $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \sim \eta_0 \omega^2$ et $(\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i \sim \eta_0^2 \omega^2 k$. On a ainsi

$$\frac{(\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i}{\left| \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \right|} \sim \frac{\eta_0^2 \omega^2 k}{\eta_0 \omega^2} \sim \eta_0 k \ll 1, \quad (12)$$

d'après nos hypothèses de départ. L'équation d'Euler peut être linéarisée, et on peut directement la réécrire sous la forme

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz \right) = \vec{0}, \quad (13)$$

et on retrouve une relation de Bernoulli

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz = C_i, \quad (14)$$

où C_i est une constante qui ne dépend que du fluide. Cette relation doit toujours être vérifiée, même lorsqu'il n'y a pas de déformation. Ainsi, on en conclut que $C_i = \frac{P_{\text{interface}}}{\rho_i}$, où $P_{\text{interface}}$ est une pression de référence à l'interface. Ainsi, on peut écrire l'égalité à l'interface

$$\rho_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right|_{\eta(x,t)} + p_1(z = \eta(x,t)) + \rho_1 g \eta(x,t) = \rho_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right|_{\eta(x,t)} + p_2(z = \eta(x,t)) + \rho_2 g \eta(x,t). \quad (15)$$

Reste finalement à tenir compte de la tension superficielle. Si l'on peut négliger cette dernière, alors on a tout simplement continuité de la pression à l'interface, et donc

$$p_1(z = \eta(x,t)) - p_2(z = \eta(x,t)) = 0, \quad (16)$$

soit avec l'équation précédente (15),

$$\rho_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right|_{\eta(x,t)} - \rho_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right|_{\eta(x,t)} - (\rho_1 - \rho_2) g \eta(x,t) = 0, \quad (17)$$

et en remplaçant par les expressions trouvées précédemment, on trouve

$$\rho_2 \left(-\frac{\omega^2}{k} \right) \eta_0 - \rho_1 \left(-\frac{\omega^2}{k} \right) \frac{1}{\tanh(kH)} \eta_0 - (\rho_1 - \rho_2) g \eta_0 = 0. \quad (18)$$

Finalement, la relation de dispersion des ondes dites « de gravité » s'écrit

$$\omega^2 = \tanh(kH) \frac{(\rho_1 - \rho_2) g k}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(kH)}. \quad (19)$$

Si l'on souhaite tenir compte de l'influence de la tension de surface γ , il est nécessaire de se donner la loi (hors programme en CPGE) donnant la différence de pression à une interface. En notant R_1 et R_2 les rayons de courbure à l'interface comptés positivement lorsque le centre de courbure se trouve du côté intérieur, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de l'interface est

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (20)$$

Dans notre cas, le rayon de courbure selon y est infini, puisque l'on étudie des ondes planes selon cette direction, et cette courbure est donnée en première approximation par $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$. Ainsi, la loi de Laplace s'écrit ici

$$p_1(z = \eta(x, t)) - p_2(z = \eta(x, t)) = -\gamma k^2 \eta_0 \exp i(kx - \omega t). \quad (21)$$

On peut alors reprendre le calcul précédent, et on obtient

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \tanh(kH) \left(\frac{(\rho_1 - \rho_2)gk}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(kH)} + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(kH)} k^3 \right) \\ &= \tanh(kH) \frac{(\rho_1 - \rho_2)gk}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(kH)} \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

où $k_c = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\gamma}}$ est appelé le nombre d'onde capillaire. Nous avons également supposé que $\rho_1 > \rho_2$, le cas opposé faisant l'objet d'un exercice à part entière (voir 5.9). Pour les petites longueurs d'onde, donc les grands k , c'est le terme en $(k/k_c)^3$ qui prend le dessus, c'est-à-dire que les effets dus à la tension superficielle dominent. On parle de régime des ondes capillaires. Pour les grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire pour les petits k , le terme précédent devient négligeable. On parle alors de domaine des ondes de gravité. La relation de dispersion n'est absolument pas linéaire, et les ondes de surface sont donc dispersives. Nous allons voir une conséquence de ce fait dans l'exercice 5.8.

La méthode présentée ici est très générale, et peut être largement simplifiée en considérant des cas plus simples, par exemple en considérant le milieu 1 comme infini, ou en négligeant la tension superficielle. Comme nous allons le voir dans les exercices suivants, la relation de dispersion précédente permet d'expliquer un certain nombre de phénomènes, et trouve des applications variées.

Finalement, ce problème peut s'étendre à d'autres géométries, l'étude des ondes de gravité à la surface d'une planète sphérique ayant déjà été posé au concours de l'X. On peut également généraliser au cas où un des deux fluides possède une vitesse d'ensemble non nulle, et on parle alors d'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Exercice 5.8 : Sillage derrière un bateau - Ulm PC

Expliquer la forme du sillage se formant derrière un bateau en mouvement.

Un exercice extrêmement classique, posé dans de nombreux concours avec plus ou moins de questions et d'indications. Sa résolution repose sur la relation de dispersion démontrée à l'exercice 5.7.

Le lecteur observateur aura peut-être déjà remarqué que le sillage créé par le déplacement d'un objet dans l'eau a toujours une forme de « V » caractéristique. En regardant encore plus attentivement, on peut observer que l'angle entre la direction de déplacement de l'objet et le cône formé par le sillage ne dépend ni de l'objet, ni de sa vitesse, du moment que cette dernière est suffisante pour avoir l'apparition d'ondes de surface et que l'eau est suffisamment profonde. Ainsi, un canard, un cygne ou un bateau vont produire un sillage avec la même géométrie. Cet exercice propose d'étudier les propriétés de ce sillage.

Pour cela, nous allons procéder à un raisonnement analogue à celui du cône de Mach. Celui-ci désigne le cône formé par les ondes sonores lors du déplacement supersonique d'un objet, par exemple un avion. Le cas des ondes sonores est plus simple que celui des ondes de surface, car le milieu peut être considéré en première approximation comme non-dispersif, ce qui signifie que les ondes vont se propager à la même vitesse quelle que soit leur longueur d'onde.

**Quelques pistes...**

1. Comment se définit le sillage d'un objet ?
2. Par un raisonnement géométrique, trouver l'angle d'ouverture du sillage des ondes sonores émises par un avion supersonique.
3. Pour un canard dans une rivière, ou un bateau en mer, que peut on supposer sur la longueur d'onde par rapport à la profondeur du milieu ? Au-dessus de quelle longueur d'onde peut-on négliger l'influence de la tension superficielle ? Retrouver alors la relation de dispersion des ondes de gravité en eau profonde, soit par analyse dimensionnelle, soit avec un raisonnement analogue à celui de l'exercice 5.7.
4. Construire un analogue du cône de Mach pour les ondes de surface, en prenant en compte le caractère dispersif du milieu. En étudiant la position du maximum d'énergie transportée en fonction du vecteur d'onde, montrer que le sillage est défini par un angle universel.

1. Avant d'en déterminer la forme, il convient tout d'abord de préciser ce que l'on entend exactement par sillage. De manière très générale, on appelle sillage d'un objet en mouvement la région où se propage à un certain instant les ondes émises. Dans le cas d'un avion supersonique, il s'agit d'un cône, de telle sorte que le son ne peut être entendu que si l'on se trouve derrière l'avion, dans son sillage. Par définition, ce dernier sera délimité par le front d'onde émis par l'avion.

2. Commençons ainsi par considérer le cas d'un avion supersonique, se déplaçant à une vitesse v . Aux conditions de température et de pression habituelles, l'air n'est pas un milieu dispersif pour les ondes acoustiques.

On considère que l'avion se trouve au point O_1 à un instant t_1 , auquel il a émis des ondes sphériques qui se déplacent toutes à c . À un temps $t_2 = t_1 + \Delta t$, ces ondes ont atteint une distance $c\Delta t$ du point O_1 . De son côté, l'avion est arrivé au point O_2 , situé à $v\Delta t$ de O_1 . On

voit ainsi se dessiner un cône, d'angle au sommet θ , tel que

$$\sin \theta = \frac{O_1 H}{O_1 O_2} = \frac{c}{v}. \quad (1)$$

Cette construction est détaillée dans la figure 5.9.

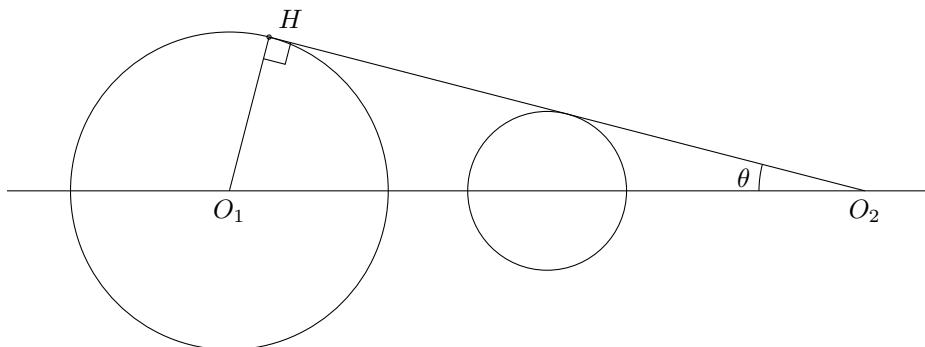


FIGURE 5.9. Construction du cône de Mach.

L'apparition de ce cône n'est donc possible que pour des mouvements supersoniques. L'onde de choc, c'est-à-dire le bang caractéristique du passage d'un avion de chasse, correspond donc à une accumulation des ondes de pression sur le cône.

3. Passons à présent à la construction de l'analogie du cône de Mach pour les ondes de surface entre l'eau et l'air. Comme nous l'avons évoqué précédemment, la principale différence avec la construction précédente provient de nature dispersive des ondes de surfaces. On rappelle la relation de dispersion pour une onde monochromatique de pulsation ω et de nombre d'onde k , trouvée dans l'exercice 5.7, sous la forme

$$\omega^2 = \tanh(kH) \frac{(\rho_e - \rho_a)gk}{\rho_e + \rho_a \tanh(kH)} \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2}\right), \quad (2)$$

où H est la profondeur du bassin, ρ_e est la masse volumique de l'eau, ρ_a celle de l'air, g l'accélération de la pesanteur et $k_c = \sqrt{\frac{(\rho_e - \rho_a)g}{\gamma}}$ est appelé le nombre d'onde capillaire. Dans le cas de l'interface entre l'air et l'eau $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \simeq 2$ cm. Nous n'allons considérer que des longueurs d'onde bien supérieures à la longueur d'onde capillaire, ce qui permet de négliger le second terme. De plus, dans le cas de l'eau et de l'air, on a bien entendu $\rho_e \ll \rho_a$. Finalement, on va supposer que l'on est en eaux profondes, de telle sorte que $kH \ll 1$. Ceci correspond aussi bien au cas d'un canard sur une rivière, qu'à celui d'un grand navire sur la mer. On parle alors de régime d'ondes de gravité en eaux profondes, et la relation (2) devient alors simplement

$$\boxed{\omega^2 = gk}. \quad (3)$$

Remarquons qu'au lieu de démontrer la relation de dispersion dans le cas très général, on peut directement se placer dans le cas des eaux profondes, sans tension de surface et en négligeant la masse volumique de l'air devant celle de l'eau, ce qui simplifie considérablement les calculs. Une autre approche possible consiste à simplement raisonner par analyse dimensionnelle, en supposant que les seuls paramètres pertinents pour décrire les ondes de gravité en eaux profondes sont g , k et ω .

On peut alors calculer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g , par les formules habituelles

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{v_\varphi}{2}. \quad (4)$$

Le cas des ondes de gravité en eaux profondes est ainsi très particulier puisque le front d'onde d'un paquet d'onde se propage à une vitesse deux fois supérieure à celle du maximum d'énergie d'un paquet d'onde.

4. On peut reprendre une construction du sillage comme celle du cône de Mach. Nous considérons ainsi que le mouvement d'un objet à une vitesse v dans l'eau crée un paquet d'onde, comprenant un grand nombre de longueurs d'onde. On isole l'influence de chaque mode en ne considérant pour l'instant qu'un seul nombre d'onde k . Cette fois, la forme du sillage n'est pas déterminée par les fronts d'onde, qui se propagent à une vitesse $v_\varphi(k)$, mais par l'énergie transportée, qui se déplace à une vitesse $v_g(k) = \frac{v_\varphi(k)}{2}$. Supposons qu'à un instant t_1 , l'objet soit en un point O_1 . Entre t et $t + \Delta t$ l'énergie de l'onde parcourt $v_g(k)\Delta t$ et arrive en H' , tandis que le front d'onde arrive en H avec $O_1H' = O_1H/2$. Pendant ce temps, l'objet parcourt une distance v et arrive en O_2 . Ceci est résumé dans la figure 5.10.

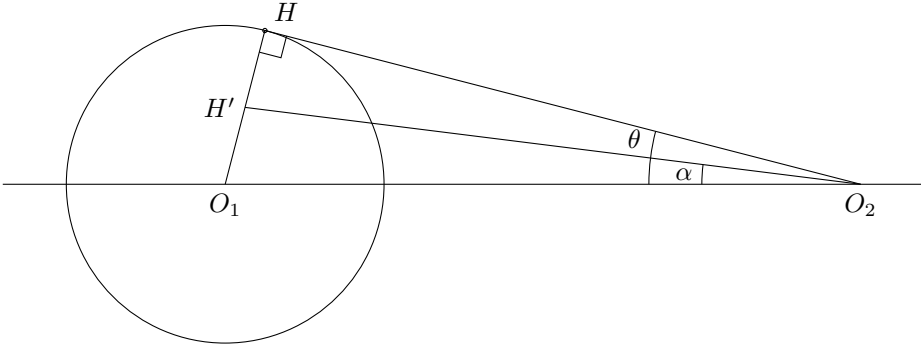


FIGURE 5.10. Construction du sillage de Kelvin.

Par le même raisonnement que pour le cône de Mach, le demi-angle au sommet $\theta(k)$ du cône formé par l'avancement du front d'onde pour la longueur d'onde k vérifie

$$\tan \theta(k) = \frac{O_1H}{O_2H}. \quad (5)$$

Définissons de la même manière le demi-angle au sommet $\alpha(k)$ du cône formé par l'énergie émise par l'objet. Comme précédemment, un peu de trigonométrie dans le triangle rectangle $H'HO_2$ donne,

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{H'H}{O_2H} = \frac{1}{2} \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{\tan \theta}{2}, \quad (6)$$

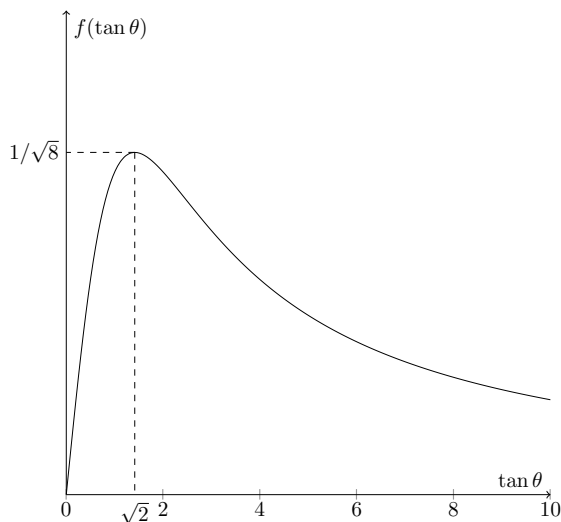
où l'on a omis les k pour plus de lisibilité. En se rappelant du développement

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}, \quad (7)$$

on peut facilement isoler $\tan \alpha$, et on obtient

$$\boxed{\tan \alpha(k) = \frac{\tan \theta(k)}{2 + \tan^2 \theta}}. \quad (8)$$

De plus, comme dans le cas du cône de Mach, on a la relation $\sin \theta(k) = \frac{v_\varphi(k)}{v}$, où v est la vitesse de l'objet. Ainsi, lorsque k varie sur une plage raisonnable, θ varie entre 0 et $\pi/2$. Étudions alors la fonction $\tan \alpha = f(\tan \theta)$. Son allure est représentée dans la figure 5.11.

FIGURE 5.11. Allure de la fonction $\tan \alpha = f(\tan \theta)$.

On remarque en particulier que la fonction possède un maximum. On peut aisément calculer que ce maximum a lieu pour $\theta = \sqrt{2}$, et qu'on a alors $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Ceci correspond à un angle

$$\alpha_0 \simeq 19,5^\circ. \quad (9)$$

Pour tous les angles α supérieurs à α_0 , aucune onde n'a eu le temps d'arriver. En dessous de cette valeur, pour chaque α , on a deux θ , et donc deux longueurs d'onde différentes. Ainsi pour un angle différent de l'angle α_0 , on ne peut avoir d'interférences constructives. Le cône d'angle α_0 est le lieu où les ondes sont majoritairement visibles, et représente le maximum de transport d'énergie par les ondes émises par l'objet.

Exercice 5.9 : Instabilité de Rayleigh-Taylor - Ulm PC

On remplit un tube à essais d'eau et d'huile à parts égales. L'huile, moins dense, occupe la partie supérieure du tube. On retourne brusquement le tube. Que se passe-t-il ?

Là encore, un exercice dont la résolution est fondée sur l'utilisation de la relation de dispersion générale des ondes à la surface entre deux fluides. Nous recommandons ainsi fortement de regarder l'exercice 5.7 en guise de préparation.



Quelques pistes...

1. La situation est-elle stable ? Quels sont les deux phénomènes qui tendent à stabiliser ou déstabiliser l'interface ?
2. Dans le cas d'une perturbation sinusoïdale, s'inspirer du raisonnement pour les ondes de surface pour trouver la relation de dispersion de l'instabilité.
3. Dans quels cas y a-t-il instabilité ? Montrer l'existence d'une longueur d'onde de coupure, et calculer le mode qui croît le plus rapidement. L'évolution temporelle pourra être modélisée par une croissance exponentielle, de la forme $\exp(\sigma t)$.

1. Lorsque l'on superpose deux fluides, la situation d'équilibre est bien connue. Sous l'effet de la gravité, le fluide le plus dense se trouve en-dessous du fluide le moins dense. Ainsi, dans le cas de l'huile et l'eau dans un tube à essai, l'huile va occuper la partie supérieure. Lorsque l'on retourne brusquement le tube, la situation devient instable. Supposons qu'à l'instant initial, les deux phases soient séparées par une interface parfaitement horizontale, avec l'eau au dessus. Sous l'action de la gravité, toute perturbation tend à être amplifiée, puisque le fluide le plus lourd veut rejoindre la partie inférieure du tube, ce qui résulte en une instabilité. Cette instabilité se manifeste pour les perturbations de « grandes » longueurs caractéristiques. En effet, ce phénomène tend à augmenter la surface de l'interface entre les deux fluides, et est donc atténué par la tension de surfac. Aux longueurs caractéristiques faibles, la tension superficielle domine, et on s'attend donc à ce que les perturbations soient stables. C'est par exemple pour cela que l'on peut avoir des gouttelettes d'eau qui s'accumulent sur l'envers des feuilles avec la rosé du matin.

2. Cherchons à présent la relation de dispersion de l'instabilité. Notons 2 la phase supérieure, de masse volumique ρ_2 , plus dense que la phase 1, de masse volumique $\rho_1 < \rho_2$. Pour rendre compte de la dynamique de l'interface, et donc de la compétition entre la gravité et la tension superficielle, la méthode est exactement la même que dans l'exercice 5.7. Donnons rapidement le raisonnement.

L'idée est d'étudier l'écoulement dans chaque phase $i = 1, 2$, en le supposant irrotationnel, incompressible. On écrit alors que le champ des vitesses dérive d'un potentiel φ_i , que l'on suppose de la forme $\varphi_i = f_i(z) \exp i(kx - \omega t)$. La résolution de l'équation de Laplace donne une forme exponentielle à $f_i(z)$. En écrivant les conditions aux limites, c'est-à-dire la continuité de la composante normale de la vitesse à l'interface, on peut trouver φ_i en fonction de la déformation de l'interface. On écrit ensuite la relation de Bernoulli dans chaque milieu, puis la condition de passage pour la pression à l'interface, c'est-à-dire la loi de Laplace. En supposant le milieu infini, pour une interface de la forme $\eta(x, t) = \eta_0 \exp i(kx - \omega t)$ on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} gk \left(1 - \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right), \quad (1)$$

où l'on a fait apparaître $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \mathcal{A}$ appelé nombre d'Atwood.

De plus, on a défini $k_c = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\gamma}}$ le nombre d'onde capillaire. Dans le cas de l'huile, de masse volumique $\rho \simeq 900 \text{ kg.m}^{-3}$ et l'eau, de masse volumique $\rho \simeq 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, avec $\gamma_{\text{eau-huile}} \simeq 50 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$, la longueur d'onde $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$ associée vaut environ $\lambda_c = 4.5 \text{ cm}$. De plus, l'allure de la figure $\omega^2 = f\left(\frac{k}{k_c}\right)$ est la suivante.

3. La situation peut être instable si ω est complexe, donc si ω^2 est négatif, ce qui correspond à une amplification ou atténuation exponentielle au cours du temps. Si $\omega^2 > 0$ la situation est stable et on se ramène au cas des ondes de surface simples. On aura peu de peine à se convaincre que $\omega^2 < 0$ si et seulement si $k < k_c$, c'est-à-dire pour les grandes longueurs d'onde. Ainsi, la tension de surface va avoir pour effet de « couper » les petites longueurs d'onde.

Dans ce cas, on peut définir un taux de croissance σ tel que

$$\sigma_{\pm} = i\omega_{\mp} = \pm \sqrt{\mathcal{A} gk \left(1 - \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right)}, \quad (2)$$

de telle sorte que la forme de l'interface s'écrit

$$\eta = \eta_0 \exp(\sigma_{\pm} t) \cos(kx). \quad (3)$$

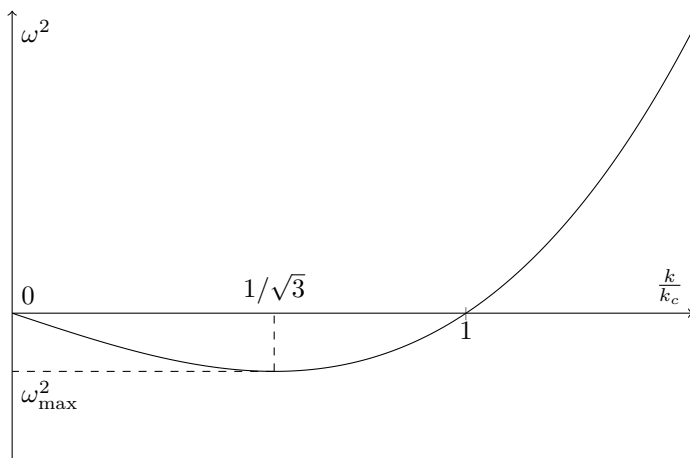


FIGURE 5.12. Relation entre ω^2 et $\frac{k}{k_c}$. Pour $k \leq k_c$, $\omega^2 \leq 0$ et la situation est instable. Le mode le « plus instable » correspond à $k = \frac{k_c}{\sqrt{3}}$.

Le mode σ_+ va être amplifié exponentiellement, il correspond au mode instable à $k < k_c$ donné, tandis que le mode σ_- est stable.

Supposons que l'on parte d'une perturbation contenant un grand nombre de longueurs d'onde, et cherchons laquelle sera la plus amplifiée. Celle-ci correspond au maximum de la fonction $f : X \mapsto X(1 - X^2)$, où $X = \frac{k}{k_c}$. On a

$$f'(X) = (1 - X^2) - 2X^2, \quad (4)$$

qui s'annule bien entendu en $X = \frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire $k_{\max} = \frac{k_c}{\sqrt{3}}$. Ainsi, la longueur d'onde la plus instable, qui va dominer les autres aux temps longs est

$$\ell_{\max} = \sqrt{3}\ell_c. \quad (5)$$

Dans le cas de l'huile et de l'eau, on obtient $\ell_{\max} \simeq 7.7$ cm. On peut finalement calculer le temps de croissance τ_c caractéristique de l'instabilité, en prenant celui du mode le plus instable, et on obtient

$$\tau_c = \frac{1}{\sigma_{+, \max}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\mathcal{A}gk_c}} \simeq 0.2 \text{ s}. \quad (6)$$

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est un des exemples les plus simples des nombreux phénomènes que l'on appelle instabilités hydrodynamiques. La démonstration de la relation de dispersion (1) repose sur la notion d'analyse linéaire, que l'on peut sans problème adapter à d'autres cas. On citera notamment l'instabilité de convection de Rayleigh-Bénard, étudiée dans l'exercice 5.10 qui permet d'expliquer l'apparition de rouleaux de convection dans un liquide en présence d'une source de chaleur.

Numériquement, on peut obtenir l'évolution au-delà du régime des faibles perturbations, ce qui nécessite la prise en compte des termes non-linéaires (qui empêchent que les perturbations divergent effectivement!). On observe ainsi que la situation est bien instable, le fluide le plus lourd (en clair) s'écoulant vers le bas. De plus, on observe la formation de « polypes », sortes de champignons, comme présenté dans la figure 5.13.

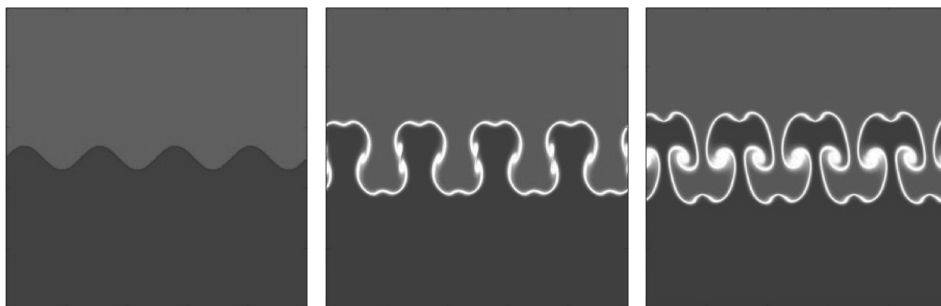


FIGURE 5.13. Simulation numérique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, avec une interface initialement perturbée par une sinusoïde. Les conditions aux limites sont périodiques, et les images ordonnées par temps croissant.

Exercice 5.10 : Convection thermique - X PC

Un liquide est placé entre deux plaques horizontales. Le liquide est soumis à un gradient de température de même sens que la gravité (plaque du haut à la température T_1 , celle du bas à $T_2 > T_1$). On suppose que la masse volumique du fluide est une fonction affine de la température.

1. Déterminer l'état d'équilibre (masse volumique, température, pression).
2. On perturbe légèrement le système. Déterminer les conditions de stabilité de l'état d'équilibre.

Cet exercice traite de la convection thermique forcée. Il est inhabituel dans sa conception car il demande d'être innovant, les problèmes de stabilité étant plutôt marginaux dans le programme de CPGE. Cependant, en raisonnant par analogie avec les systèmes électriques, et en étant très rigoureux sur l'application des principes de la mécanique des fluides, on peut se frayer un chemin assez naturel dans la résolution.



Quelques pistes...

1. Que peut-on dire du champ des vitesses pour l'état d'équilibre ? Résoudre alors l'équation de la chaleur et la relation de la statique des fluides à l'équilibre.
2. Écrire l'équation de Navier-Stokes dans le cas étudié. Établir l'équation de la chaleur en tenant compte du transport de matière.
3. Par analogie avec l'équation acoustique, supposer des perturbations à l'ordre un, et établir un système d'équations vérifié par les perturbations de température θ et de vitesse V . On supposera que la relation de proportionnalité entre la masse volumique et la température s'étend aux variables d'ordre un.
4. Déterminer une condition pour que cette perturbation soit instable, c'est-à-dire amplifiée avec le temps. On supposera, en le justifiant, qu'on peut prendre la forme

$$\begin{cases} V(x, z, t) = V_0 e^{\sigma t} \cos\left(\frac{\pi}{d}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right), \\ \theta(x, z, t) = \theta_0 e^{\sigma t} \cos\left(\frac{\pi}{d}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right). \end{cases} \quad (1)$$

pour les perturbations.

1. Commençons par étudier l'état d'équilibre, pour lequel le champ des vitesses est naturellement nul, $\vec{v} = \vec{0}$. L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T, \quad (2)$$

avec κ la diffusivité thermique. Comme on est à l'équilibre, la dérivée temporelle est nulle, donc la température est une fonction affine de la position verticale z . Avec les conditions aux limites $T(0) = T_2$ et $T(d) = T_1$, on en déduit

$$T(z) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{z}{d}. \quad (3)$$

L'énoncé précise que la masse volumique dépend linéairement de la température. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho(T_1)(1 + \alpha(T(z) - T_1)) = \rho_0 \left(1 + \alpha(T_2 - T_1) + \alpha(T_1 - T_2) \frac{z}{d} \right) \\ &= \rho_0 \left(1 + \alpha(T_2 - T_1) \left(1 - \frac{z}{d} \right) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

où on a noté $\rho_0 = \rho(T_1)$. La masse volumique diminue donc avec l'altitude, ce qui est cohérent avec la diminution de température.

Enfin, le champ de pression résulte d'une simple écriture de la relation fondamentale de la statique des fluides

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g}, \quad (5)$$

d'où on déduit simplement

$$p(z) = p_0 - \rho(1 + \alpha(T_2 - T_1))gz + \frac{\rho\alpha(T_2 - T_1)gz^2}{2d}. \quad (6)$$

2. À présent, nous allons étudier la stabilité de cet état d'équilibre. C'est un problème auquel on a peu l'habitude de s'intéresser en mécanique des fluides, mais qui est tout aussi naturel que la stabilité d'un système mécanique ou électrique.

Essayons d'abord de capturer la physique du phénomène par un raisonnement qualitatif. Considérons une particule de fluide dans la situation d'équilibre précédente. Cherchons à la déplacer verticalement d'un déplacement faible. Contre elle travaille le poids qui tend à ramener la particule vers le bas. Avec elle travaille la poussée d'Archimède qui tend à augmenter avec l'altitude car la masse volumique augmente également. On peut tenir le même raisonnement pour une particule qu'on tirerait vers le bas. L'équilibre entre ces deux forces détermine donc ce qui va se passer pour la particule de fluide.

On va commencer par établir l'équation du mouvement gouvernant la vitesse. Il s'agit simplement de l'équation de Navier-Stokes, qui s'écrit ici

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad (7)$$

La partie moins habituelle consiste à écrire une équation pour l'énergie. On peut généraliser l'équation de la chaleur pour un fluide en mouvement à l'aide d'un simple bilan à une dimension. On s'appuie pour cela sur le schéma 5.14 suivant.

Considérons le volume de contrôle V inclus entre les sections AA' et BB' à l'instant t , puis entre les sections CC' et DD' à l'instant $t + dt$. Ici, l'écoulement étant incompressible, le volume reste le même.

- la variation d'énergie s'écrit $\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} dx dS dt$, où e est l'énergie volumique du fluide ;
- en x , la diffusion thermique fournit un transfert $\delta Q(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x) dx dS dt$;
- en $x + dx$, la diffusion thermique fournit un transfert $\delta Q(x + dx) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx) dx dS dt$;

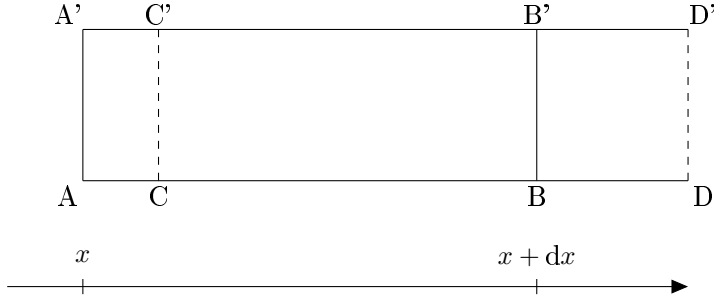


FIGURE 5.14. Système pour le bilan d'énergie thermique.

- le déplacement de AA' en CC' génère une perte d'énergie de $e(x, t)v(x, t)dSdt$;
- le déplacement de BB' en CC' génère un gain d'énergie de $e(x+dx, t)v(x+dx, t)dSdt$.

En utilisant pour une phase condensée l'équation d'état $e = \rho cT$, et en écrivant que la variation d'énergie est égale aux différents termes de gains et de pertes, et en faisant les développements limités usuels, on obtient l'équation de conservation de l'énergie à une dimension

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(vT)}{\partial x}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t). \quad (8)$$

On en déduit la généralisation à trois dimensions

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})T = \kappa \Delta T. \quad (9)$$

Remarquons la « logique » de cette équation : il ne s'agit que de l'équation de la chaleur à laquelle on a ajouté un terme convectif (par analogie avec l'équation de Navier-Stokes) qui traduit le transfert d'énergie thermique dû au mouvement du fluide.

Nous avons fait intervenir dans le bilan de quantité de mouvement la force de viscosité. Cependant, celle-ci n'a pas été prise en compte dans le bilan d'énergie. Le calcul de la puissance dissipée par les forces de viscosité étant largement hors-programme, on supposera que cette approximation est légitime (ce qui aurait sûrement été précisé pendant l'oral).

3. Perturbons à présent ces équations, en écrivant les variables du problème sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{v} &= U(x, z, t)\vec{e}_x + V(x, z, t)\vec{e}_z, \\ p &= p_0 - \rho g(z - d) + P(x, z, t), \\ T &= T_2 + \frac{\Delta T}{d}z + \theta(x, z, t), \\ \rho_1 &= \rho + \delta\rho = \rho_0 - \rho_0\alpha(T - T_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Ici, les quantités U , V , P , θ et $\delta\rho$ sont des infiniment petits d'ordre un. Cette présentation du développement intègre le choix d'un écoulement bidimensionnel (légitimé par la symétrie du problème). On a par ailleurs au premier ordre $\delta\rho = -\rho_0\alpha\theta$, en faisant la différence entre les deux dernières équations.

En insérant ces développements dans les deux équations précédentes, et en ne gardant que les termes du premier ordre comme dans l'approximation acoustique, on trouve le système d'équation

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \Delta U, \\ \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \delta\rho g + \eta \Delta V, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\Delta T}{d}V + \kappa \Delta T. \end{cases} \quad (11)$$

On constate que l'équation sur U est découplée des autres : la vitesse horizontale est « spectatrice » du problème.

On ne s'intéresse donc par la suite qu'aux deux dernières équations. Divisons alors le système par ρ_0 , et on obtient finalement

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \alpha g \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \Delta V, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\Delta T}{d} V + \kappa \Delta T. \end{cases} \quad (12)$$

4. Cherchons à présent à quelle condition cette perturbation est stable. À ce stade de la discussion, il est nécessaire de faire remarquer que les équations disent déjà beaucoup : en effet, le système précédent peut s'écrire sous la forme

$$\dot{X} = \alpha Y + M \quad \text{et} \quad \dot{Y} = \beta X + N. \quad (13)$$

En dérivant la première équation, on aboutit à

$$\ddot{X} = \alpha \beta X + \dot{M} + N. \quad (14)$$

α et β étant positifs, le début du membre de droite nous dit qu'on a affaire à une solution qui va diverger en temps, cette divergence étant pilotée (et peut être stoppée ?) par les termes supplémentaires M et N .

Physiquement ici, les coefficients qui causent la divergence des perturbations sont la pesanteur et le gradient thermique. S'y opposent les phénomènes de diffusion thermique et de diffusion de quantité de mouvement (matérialisés par les coefficients de diffusion) qui tendent à atténuer les gradients, ainsi que la force de pression. Une analyse plus mathématique des rapports entre ces forces va nous permettre de dégager un critère plus quantitatif.

On ne peut cependant aller plus loin sans donner une forme plus explicite à V et θ . Il faut pour cela puiser dans l'expérience commune : lors d'un phénomène de convection, on voit apparaître des rouleaux. C'est ce à quoi on s'attend après l'analyse qualitative initiale : la particule qui part du bas monte, allégée par la poussée d'Archimède, puis se refroidit en haut au contact de la plaque avant de redescendre...

On cherche donc une solution qui puisse être périodique et qui s'annule aux parois : en effet, les conditions aux limites fixent la température et la vitesse (fluide visqueux) aux extrémités, ce qui impose que les perturbations y soient nulles.

Enfin, il faut rendre compte de l'aspect « instabilité ». Par analogie avec l'électricité, on peut demander que la dépendance temporelle soit exponentielle, et chercher à quelle condition elle sera divergente.

Fort de ces quelques idées simples, on peut proposer le développement suivant

$$\begin{cases} V(x, z, t) = V_0 e^{\sigma t} \cos\left(\frac{\pi}{d} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right), \\ \theta(x, z, t) = \theta_0 e^{\sigma t} \cos\left(\frac{\pi}{d} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right). \end{cases} \quad (15)$$

Ce mode, on s'en convaincra facilement, correspond à un mouvement du liquide dans le sens trigonométrique. Introduisant ce développement dans les équations aux dérivées partielles, on trouve

$$\begin{cases} (\sigma + \nu \frac{2\pi^2}{d^2}) V_0 - \alpha g \theta_0 &= 0, \\ -\frac{\Delta T}{d} V_0 + (\sigma + \kappa \frac{2\pi^2}{d^2}) \theta_0 &= 0. \end{cases} \quad (16)$$

Afin d'obtenir des solutions non-triviales, il est nécessaire que le déterminant de ce système s'annule. La condition s'écrit

$$(\sigma + \nu \frac{2\pi^2}{d^2})(\sigma + \kappa \frac{2\pi^2}{d^2}) - \frac{\alpha g \Delta T}{d} = 0. \quad (17)$$

Cette équation, du second ordre en σ , peut être résolue pour obtenir

$$\sigma_{\pm} = \frac{(\nu + \kappa)\pi^2}{d^2} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{d^4}{(\nu + \kappa)^2 \pi^4} \left(\frac{4\nu\kappa\pi^4}{d^4} - \frac{\alpha g \Delta T}{d} \right)} - 1 \right). \quad (18)$$

On s'intéresse à la partie réelle de ces solutions. Celle de σ_- sera toujours négative, donnant un mode qui s'atténue avec le temps. Qu'en est-il de σ_+ ? Elle est positive si

$$\frac{\alpha g \Delta T}{d} \geq \frac{4\nu\kappa\pi^4}{d^4} \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha g \Delta T d^3}{\kappa\nu} > 4\pi^4}. \quad (19)$$

Nous avons donc obtenu un critère de démarrage de l'instabilité. La figure 5.15 représente les rouleaux de convection, obtenus par simulation numérique.

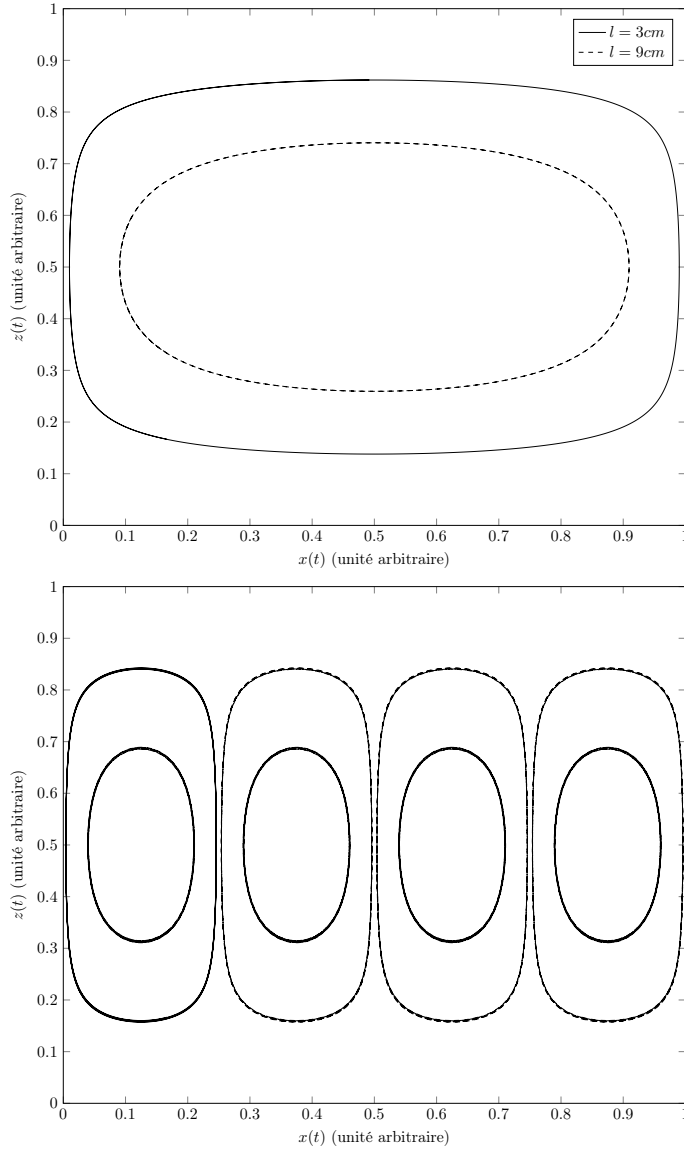


FIGURE 5.15. Cellule de convection à un/quatre rouleau(x) dans une boîte carrée.

Terminons par quelques remarques. Cette solution en exponentielle croissante laisse penser que l'amplitude va diverger. En réalité, il n'en est rien. En effet, les termes d'ordres supérieurs qu'on a négligés en les supposant petits vont devenir importants au fur et à mesure de la croissance de l'instabilité. Ce sont eux qui vont limiter l'amplitude de la perturbation à une valeur finie. L'étude de l'impact des non-linéarités sur l'amplitude d'une instabilité est un sujet, bien que passionnant, totalement hors de portée d'un tel exercice.

Finalement, on aurait pu penser à des solutions plus générales pour le mode de convection. Pourquoi se limiter à un seul rouleau de convection ? On aurait pu imaginer avoir n rouleaux en parallèle, ce qui aurait donné une contribution en $\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$. Celle-ci aurait donné dans la condition de stabilité un $\frac{(n+1)\pi^2}{d^2}$ au lieu de $\frac{2\pi^2}{d^2}$, qui aurait transformé la condition finale en

$$\frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa} > (n+1)^2 \pi^4. \quad (20)$$

Cette condition est manifestement plus faible que celle pour un unique rouleau de convection. Le vrai seuil est donc déterminé par la solution à un rouleau. On appelle nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}$. Sa valeur critique de déclenchement des instabilités est déterminée à $4\pi^4$. En réalité, on a effectué ici quelques approximations. La valeur généralement retenue est de $\frac{27}{4}\pi^4$, valeur dont notre analyse « naïve » n'est finalement pas si éloignée.

De cet exercice, on retiendra principalement la méthode d'étude de stabilité d'un système dynamique complexe, par analogie avec l'approximation acoustique.

Thermodynamique

Exercice 6.1 : Étoile à neutrons et statique des fluides - X MP

On considère une étoile à neutrons supposée sphérique. Elle vérifie localement l'équation d'état $P = \frac{1}{2}k\rho^2$, où k est une constante universelle.

1. Cette étoile est-elle plus facile ou plus difficile à comprimer que si elle vérifiait l'équation des gaz parfaits ?
2. Trouver le profil de pression au sein de l'étoile, et donner son rayon.
3. Si l'étoile vérifiait l'équation d'état des gaz parfaits, le rayon augmenterait-il ou diminuerait-il avec la masse de l'étoile ?

Cet exercice est l'occasion d'illustrer la méthode de résolution des équations de la statique des fluides pour un fluide compressible dans un cas plus complexe que ceux rencontrés habituellement, par exemple l'atmosphère isotherme.

Une forme de matière vérifiant ce type d'équation d'état, qui ne dépend que de deux paramètres, la masse volumique ρ et la pression P , reliées l'une à l'autre par une relation de la forme $P = k\rho^\gamma$, est appelée polytropique. Nous allons ici étudier certaines de ses propriétés.

1. Afin de voir si de la matière vérifiant cette équation d'état est plus compressible qu'un gaz parfait, on pense calculer la compressibilité isotherme, définie par

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (1)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation $PV = nRT$, donne pour T constant

$$dV = -\frac{V}{P}dP, \quad (2)$$

et ainsi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{V}{P} \Rightarrow \chi_{T,GP} = \frac{1}{P}. \quad (3)$$

Pour une étoile à neutrons, on peut dériver l'équation d'état par rapport à P , à T constant, et on obtient

$$1 = k\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \chi_{T,neut} = \frac{1}{2P}. \quad (4)$$

Ainsi, on a $\chi_{T,neut} < \chi_{T,GP}$ à P égal, et le gaz parfait est donc plus facile à comprimer.

2. Afin de trouver le profil de pression, nous allons supposer que l'étoile est à l'équilibre hydrostatique. On peut donc écrire l'équation correspondante

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g}, \quad (5)$$

où \vec{g} est le champ de gravitation local. Nous nous plaçons en coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont l'origine est placée au centre de l'étoile. Par le théorème de Gauss, on sait que

$$\vec{g} = -\frac{GM(r)}{r^2} \vec{u}_r, \quad (6)$$

où G est la constante de gravitation, \vec{u}_r est un vecteur unitaire radial, et $M(r)$ la masse à l'intérieur de la sphère de rayon r centrée sur l'origine. Cette dernière est donnée par

$$M(r) = \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u) du. \quad (7)$$

D'après l'équation d'état, on a

$$\frac{\partial P}{\partial r} = k\rho \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad (8)$$

de telle sorte que l'équation hydrostatique s'écrit

$$k\rho \frac{d\rho}{dr} = -\rho g(r), \quad (9)$$

et on obtient une équation vérifiée par ρ ,

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\pi G}{kr^2} \left(\int_0^r u^2 \rho(u) du \right). \quad (10)$$

Ainsi, ρ vérifie une équation intégral-différentielle, que l'on ne sait pas résoudre de manière générale. L'idée la plus simple que l'on peut avoir pour progresser est d'isoler la partie intégrale et de la dériver. On obtient alors

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{k} r^2 \rho(r), \quad (11)$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = \Delta \rho = -\frac{4\pi G}{k} \rho(r), \quad (12)$$

où l'on a remarqué que $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right)$ est l'expression du laplacien scalaire d'une fonction radiale en coordonnées sphériques.

Cette équation n'est, là encore, pas soluble en l'état. On peut penser à une résolution par série entière, ce qui est possible mais complexe. On peut également penser (ou être incité) à faire le changement de variable $\rho(r) = \frac{h(r)}{r}$. En effet, lorsqu'on étudie les ondes sphériques, ce changement de variable permet de se ramener à une équation d'onde en coordonnées cartésiennes. On peut facilement montrer que

$$\Delta \left(\frac{h(r)}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dh(r)/r}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 h}{dr^2}. \quad (13)$$

Ainsi $h(r)$ vérifie l'équation de

$$\frac{d^2 h}{dr^2} = -\frac{4\pi G}{k} h(r), \quad (14)$$

qu'on résout facilement en

$$h(r) = A \sin \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right), \quad (15)$$

où A et B sont des constantes d'intégration. Finalement ρ s'écrit

$$\rho(r) = A \frac{\sin \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right)}{r} + B \frac{\cos \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right)}{r}. \quad (16)$$

Il est clair que ρ ne peut diverger en $r = 0$, ce qui impose $B = 0$. Finalement, en notant ρ_c et P_c la masse volumique et la pression au centre, on obtient

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\sin \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right)}{r} \quad \text{et} \quad P(r) = P_c \frac{\sin^2 \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{k}} r \right)}{r^2}. \quad (17)$$

La surface de l'étoile est définie par $\rho(R) = 0$, ce qui donne

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k\pi}{G}}. \quad (18)$$

Ce rayon peut *a priori* sembler indépendant de la masse de l'étoile ce qui serait surprenant. Toutefois, à la manière d'un gaz parfait, la constante k va dépendre des autres paramètres, notamment de la masse.

3. Savoir si le rayon de l'étoile augmente ou diminue lorsque la masse d'une étoile de gaz parfait augmente n'est pas aussi évident qu'il peut y paraître. En effet, ajouter de la matière peut sembler faire augmenter le volume, donc le rayon de l'étoile. Toutefois, sans plus d'informations sur la répartition de la masse, on ne sait pas si la masse ajoutée va plutôt se répartir vers la surface, ou vers le centre, ce qui a pour effet d'augmenter l'attraction gravitationnelle et donc de faire diminuer le rayon.

Pour voir l'effet d'un ajout de masse, on peut repartir des équations précédentes

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \\ M(r) = \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u) du. \end{cases} \quad (19)$$

Écrivons alors l'équation des gaz parfaits sous la forme $P = \rho k_B T / m$, où k_B est la constante de Boltzmann et m la masse d'une molécule. On suppose la température T constante. Comme précédemment, on peut combiner ces équations pour obtenir

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{mG}{k_B T r^2} \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u) du. \quad (20)$$

Comme précédemment, on isole l'intégrale et on dérive par rapport à r pour obtenir

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{k_B T} r^2 \rho(r). \quad (21)$$

Là encore, une équation que l'on ne sait pas résoudre directement. On peut chercher une solution sous la forme $\rho(r) = Ar^n$, où A est une constante. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient

$$n = -A \frac{Gm}{k_B T} r^{2+n}, \quad (22)$$

qui n'admet une solution que si $n = -2$. On trouve alors facilement $A = \frac{2k_B T}{Gm}$, et donc

$$\rho(r) = \frac{2k_B T}{Gm r^2}. \quad (23)$$

Cette solution peut sembler étonnante, car la masse volumique diverge en $r = 0$. Toutefois, il ne s'agit pas de la seule solution, mais une des seules trouvables facilement. En reprenant l'expression précédente pour ρ , on obtient

$$M(r) = \int_0^r 4\pi u^2 \frac{2k_B T}{Gm u^2} du = \frac{8\pi k_B T}{Gm} r. \quad (24)$$

Ainsi, pour une étoile de masse M et de rayon R , on a la relation

$$\boxed{M = \frac{8\pi k_B T}{Gm} R}, \quad (25)$$

et donc le rayon augmente quand la masse augmente.

Exercice 6.2 : Échange entre deux réservoirs - X PC

Dans cet exercice, on se propose d'étudier du point de vue de la théorie cinétique des gaz l'échange de particules entre deux réservoirs.

1. Déterminer dans un cas simple, une colonne d'air par exemple, la répartition de densité moléculaire. Expliciter et expliquer le principe du facteur de Boltzmann.

On donne la loi de répartition $f(v) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$ des vitesses des particules dans un gaz à la température T , avec $A^2 = \frac{m}{2\pi k_B T}$. Dans ce cadre $f(v)dv$ représente la probabilité pour une particule d'avoir une vitesse comprise entre v et $v + dv$.

2. Trouver une relation entre pression et température grâce à la fonction de répartition précédente.

On considère finalement deux réservoirs de volume V reliés par un tuyau de très faible section, et on note P_i la pression et T_i la température dans chaque réservoir. On suppose que P_1 est plus grand que P_2 .

3. Déterminer le rapport P_1/P_2 en fonction de T_1 et T_2 .

4. Dans le cas d'un tuyau à large section, déterminer la température et la pression finales.

Cet exercice, assez original, va nous permettre d'introduire la notion de facteur de Boltzmann et de montrer une application poussée de la théorie cinétique des gaz.

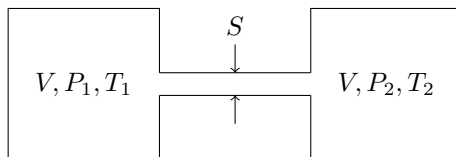


FIGURE 6.1. Schéma du dispositif.

1. Comme indiqué, commençons par considérer le cas de l'atmosphère isotherme, c'est-à-dire l'équilibre d'une colonne d'air considéré comme un gaz parfait de molécules de masse m , en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ constant, à une température T . L'équation d'équilibre hydrostatique s'écrit

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \rho g, \quad (1)$$

où $P(z)$ est la pression et ρ la masse volumique du gaz. L'hypothèse de gaz parfait permet d'écrire

$$P = \rho \frac{k_B T}{m}, \quad (2)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. L'équation hydrostatique se réécrit alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{mg}{k_B T} \rho = 0, \quad (3)$$

que l'on intègre facilement, pour obtenir

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right). \quad (4)$$

et la densité $n(z)$ vérifie une relation du même type $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$. On voit ainsi apparaître une dépendance exponentielle, ayant comme argument l'opposé du rapport entre

l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgz$ et une énergie $k_B T$, qui mesure l'énergie cinétique d'agitation thermique. On appelle la grandeur $\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right)$ le facteur de Boltzmann. Il traduit la compétition entre la pesanteur, qui a tendance à amener les particules vers le sol, c'est-à-dire vers le minimum d'énergie potentielle, et l'agitation thermique. Plus généralement, il s'interprète comme la traduction statistique d'un équilibre thermodynamique entre une action extérieure au système et l'agitation thermique. Pour un système dont l'énergie peut prendre plusieurs valeurs E_i dans un état i quelconque, on suppose ainsi qu'à l'équilibre thermique à la température T , la probabilité p_i de trouver le système dans l'état i est proportionnelle à

$$p_i \propto \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right). \quad (5)$$

2. Dans le problème étudié, la forme de la loi de répartition des vitesses revient à considérer que la probabilité de trouver une molécule du gaz avec une vitesse entre v et $v + dv$ est donnée par un facteur de Boltzmann, prenant en compte exclusivement l'énergie cinétique. On a ainsi une infinité d'états d'énergie possible, puisque la vitesse peut prendre n'importe quelle valeur réelle. De plus, ne considérer que la contribution de l'énergie cinétique revient à négliger les interactions des molécules entre elles, c'est-à-dire supposer le gaz parfait. Montrons que l'on peut retrouver la loi des gaz parfaits avec cette fonction de répartition.

D'abord, vu la forme de la loi de répartition, et surtout de la constante A , on peut affirmer que le problème est à une dimension. En effet, la densité de probabilité doit être normalisée à 1, et pour des vitesses exclusivement selon un axe x , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = 1. \quad (6)$$

En se rappelant de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, on retrouve bien $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$. En trois dimensions, on a $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, et le calcul de la condition de normalisation d'une densité de probabilité de la forme $f_3 = A_3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$ permet d'obtenir un facteur de proportionnalité $A_3 = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$.

Afin d'obtenir une expression de la pression, on peut adapter la démonstration de la pression cinétique des gaz à notre cas. Une particule de vitesse v peut entrer en contact avec une paroi de surface S du récipient entre t et $t + dt$ si elle se trouve dans le cylindre de base S et de hauteur $v dt$. Durant ce laps de temps, le nombre de particules $dN(v)$ de vitesses comprises entre v et $v + dv$ qui entrent en contact avec la paroi est donc

$$dN(v) = n_0 S v dt f(v) dv, \quad (7)$$

où n_0 est la densité de particule, supposée uniforme dans le volume. Au cours du choc, ces particules voient leur quantité de mouvement varier de $\Delta p(v) = -2mv$, donc la force $df = -\Delta p(v) dt$ qui s'exerce sur la surface est

$$df(v) = n_0 (S v) 2m v f(v) dv. \quad (8)$$

On en déduit la contribution à la pression $df(v)/S$ de ce groupe de particule

$$dP(v) = 2n_0 m v^2 f(v) dv. \quad (9)$$

Finalement, puisque seules les particules ayant une vitesse positive contribuent, la pression totale s'écrit

$$P = \int_0^{\infty} dp(v) = 2n_0 m \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = n_0 m \bar{v}^2, \quad (10)$$

où $\bar{u}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v) dv$ est la vitesse quadratique moyenne, que l'on peut calculer

$$\bar{u}^2 = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv. \quad (11)$$

On peut supposer qu'un examinateur bienveillant aurait donné la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (12)$$

que l'on peut autrement calculer par une intégration par partie. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} v$, on obtient

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2k_B T}{m} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2) du = \frac{k_B T}{m}. \quad (13)$$

En remplaçant dans l'expression de P , on obtient

$$P = n_0 k_B T, \quad (14)$$

ce qui est exactement l'équation des gaz parfaits. Pour s'en convaincre, on peut multiplier par un volume V , pour obtenir

$$PV = N k_B T, \quad (15)$$

où N est le nombre de particules dans le volume V .

3. Voyons comment on peut utiliser ce résultat pour deux récipients qui communiquent par un tuyau de faible section. Implicitement, on suppose que les températures et pressions dans chacun des compartiments sont constantes. Afin de trouver une relation entre ces grandeurs, il va nous falloir quantifier les échanges par le tuyau.

En régime stationnaire, cas dans lequel on se place ici, on a un équilibre entre les particules qui traversent le tuyau du réservoir de droite vers celui de gauche et celles qui ont un comportement inverse. Il nous faut ainsi trouver le nombre de particules par unité de temps susceptibles de passer d'un réservoir à l'autre, ce que nous allons faire avec un raisonnement analogue à l'obtention de la pression cinétique des gaz parfaits. Entre t et $t + dt$, une particule de vitesse v ne peut atteindre le tuyau qu'à condition d'être dans le cylindre de volume $Svdt$ ayant l'entrée du tuyau comme base. Ainsi, le nombre de particules de vitesse comprises entre v et $v + dv$ qui s'échappent est

$$dn_{1 \rightarrow 2}(v) = n_1 f(v) dv (Svdt), \quad (16)$$

où n_1 est la densité de particules dans le récipient 1. Puisque seules les particules ayant une vitesse dirigée selon $+\vec{u}_x$ peuvent s'échapper, le nombre total de particules du réservoir 1 qui s'échappent est

$$dN_{1 \rightarrow 2} = n_1 S dt \int_0^{\infty} v f(v) dv = n_1 S dt \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi m}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2u \exp(-u^2) du, \quad (17)$$

où l'on a fait le même changement de variable $u = \sqrt{\frac{m}{2k_B T_1}} v$. La dernière intégrale se calcule facilement, et on obtient

$$\int_0^{\infty} 2u \exp(-u^2) du = [-\exp(-x^2)]_0^{\infty} = 1, \quad (18)$$

de telle sorte que

$$dN_{1 \rightarrow 2} = n_1 S \sqrt{\frac{k_B T_1}{2\pi m}} dT. \quad (19)$$

En notant N_1 le nombre total de particules du récipient 1, on peut donc exprimer le nombre de particules qui passent vers le récipient 2 par unité de temps, sous la forme

$$\frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt} = S \sqrt{\frac{k_B}{2\pi m}} \frac{N_1 \sqrt{T_1}}{V_1}. \quad (20)$$

De manière symétrique, le nombre de particules qui passent du récipient 2 au récipient 1 par unité de temps vaut

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} = S \sqrt{\frac{k_B}{2\pi m}} \frac{N_2 \sqrt{T_2}}{V_2}. \quad (21)$$

À l'équilibre, ces deux quantités sont égales, de telle sorte que

$$\frac{N_1 \sqrt{T_1}}{V_1} = \frac{N_2 \sqrt{T_2}}{V_2}. \quad (22)$$

On peut alors utiliser l'équation des gaz parfaits (15) pour obtenir

$$\frac{N_i \sqrt{T_i}}{V_i} = \frac{P_i}{\sqrt{T_i}}, \quad (23)$$

et finalement, on obtient

$$\boxed{\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}}. \quad (24)$$

4. À présent, examinons ce qui se passe pour un tuyau de grande section. Dans ce cas, les échanges sont tels qu'on ne peut rester à l'équilibre. On peut alors supposer que les échanges entre les deux réservoirs conduisent à une homogénéisation de la pression vers une pression finale P_f et de la température vers une température finale T_f dans le système total. Nous avons ainsi deux inconnues, et il va nous falloir trouver deux équations. On peut tout d'abord penser à la conservation de la quantité de matière, c'est-à-dire qu'en notant N le nombre de particules total et N_i le nombre de particules initialement présentes dans chacun des réservoirs, on a

$$N = N_1 + N_2. \quad (25)$$

En utilisant la loi des gaz parfaits pour chaque sous-système, on obtient alors

$$\frac{2P_f V}{k_B T_f} = \frac{P_1 V}{k_B T_1} + \frac{P_2 V}{k_B T_2}, \quad (26)$$

qui se simplifie évidemment en

$$\frac{2P_f}{T_f} = \frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2}. \quad (27)$$

Pour trouver une autre équation, tournons-nous du côté du premier principe de la thermodynamique. Considérons le système composé du gaz présent dans les deux réservoirs. Puisque nous sommes en présence de gaz parfaits, la variation d'énergie interne entre l'état initial et l'état final est

$$\Delta U = \frac{N}{N_a} c_m T_f - \frac{N_1}{N_a} c_m T_1 - \frac{N_2}{N_a} c_m T_2, \quad (28)$$

où N_a est le nombre d'Avogadro et c_m la capacité calorifique molaire. Il est raisonnable de supposer les récipients calorifugés, et puisque l'on considère l'intégralité du gaz, il n'y a pas de travail des forces extérieures. Ainsi, on a $\Delta U = 0$, c'est-à-dire $NT_f = N_1 T_1 + N_2 T_2$. On peut donc obtenir la température finale

$$T_f = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}. \quad (29)$$

En remplaçant dans l'équation (27), on obtient alors

$$P_f = \frac{T_f}{2} \left(\frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2} \right). \quad (30)$$

Exercice 6.3 : Un drôle de frigo... - Ulm PC

Peut-on créer un réfrigérateur avec des élastiques ?

L'étude des machines frigorifiques intervient en utilisant les outils de la thermodynamique, et on comprend donc que ce problème est en réalité relativement classique, puisqu'il s'agit d'étudier la thermodynamique d'un fil élastique. La plupart des énoncés concernant cette étude postulent généralement la forme de l'identité thermodynamique pour un élastique. Nous allons ici proposer une modélisation statistique possible pour son comportement, ce qui permettra d'accéder aux propriétés thermodynamiques d'un tel système.



Quelques pistes...

1. Quelles sont les grandeurs d'état pertinentes pour décrire la thermodynamique d'un élastique ? On pourra faire une analogie avec le gaz parfait.
2. Modéliser l'élastique par une chaîne de maillons, dont la longueur vaut soit a soit b . Pour obtenir une chaîne de longueur L , combien a-t-on de configurations de l'ensemble des maillons possibles ?
3. En déduire une expression de l'entropie de configuration de la chaîne. *On pourra utiliser la formule de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$.*
4. Appliquer les principes de la thermodynamique à une elongation infinitésimale sous l'action d'une force f pour trouver une équation d'état décrivant l'élastique.
5. Dans le cas particulier où $b = -a$, trouver la variation de température produite par un allongement de $L_0 = 1 \text{ m}$ à $L_1 = 2 \text{ m}$.

1. Afin de connaître les propriétés thermodynamiques d'un système, le plus simple est de réussir à exprimer son entropie, l'identité thermodynamique permettant alors de remonter aux autres quantités macroscopiques du système. La façon la plus simple de calculer l'entropie pour ce genre de problèmes est d'utiliser la formule de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$, c'est-à-dire un raisonnement microscopique, où l'on compte le nombre Ω d'états du système. Précisons donc notre modèle. On considère un fil élastique attaché d'un côté à un mur, que l'on soumet à une force f à l'autre bout, de telle sorte que la longueur L est maintenue constante. À la manière d'un gaz parfait, caractérisé par sa pression P , son volume V et sa température T , notre fil sera caractérisé par la force de traction f , la longueur L et la température T .

2. Un fil élastique est le plus souvent composé de caoutchouc, c'est-à-dire un polymère. Ainsi, nous allons supposer que le fil élastique est composé d'une chaîne polymère, que l'on décompose en N monomères, les motifs élémentaires qui se répètent le long de la chaîne. Afin de simplifier au maximum, on suppose que chaque monomère est susceptible d'être dans deux états, l'un de longueur a , l'autre de longueur $b < a$, ce qui permet de rendre compte de l'étirement ou de la contraction de la chaîne.

Afin de pouvoir appliquer la formule de Boltzmann, on souhaite donc connaître le nombre de configurations permettant d'obtenir une chaîne de longueur L . Si l'on note n_a le nombre de

monomères dans l'état a et n_b le nombre de monomères dans l'état b , alors on a bien entendu

$$N = n_a + n_b \quad (1)$$

et

$$\begin{aligned} L &= an_a + bn_b \\ &= an_a + b(N - n_a). \end{aligned} \quad (2)$$

On peut par exemple réécrire L en fonction de $L_{\max} = Na$ et $L_{\min} = Nb$, sous la forme

$$L = \frac{n_a}{N} L_{\max} + \left(1 - \frac{n_a}{N}\right) L_{\min}. \quad (3)$$

Ainsi, la longueur de la chaîne est déterminée exclusivement par le nombre de monomères dans l'état a (ou b de manière symétrique), et l'on peut inverser cette relation,

$$n_a = \frac{L - L_{\min}}{a - b}. \quad (4)$$

Pour avoir une chaîne de longueur L , il suffit ainsi de choisir n_a monomères de longueur a parmi les N . Le nombre de configurations permettant d'avoir une chaîne de longueur L est donc

$$\Omega = \binom{N}{n_a} = \frac{N!}{n_a!(N - n_a)!}. \quad (5)$$

3. Afin d'exprimer l'entropie d'un tel système, décrit par l'ensemble de ses états microscopiques, on utilise la loi de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$. En développant directement les factorielles grâce à la formule de Stirling $\ln n! \sim n \ln n - n$, on obtient

$$S = k_b \ln \Omega = k_b (N \ln N - n_a \ln n_a - (N - n_a) \ln(N - n_a)). \quad (6)$$

et on peut donc exprimer l'entropie en fonction de L et N

$$S(L, N) = k_b \left(N \ln N - \frac{L - L_{\min}}{a - b} \ln \frac{L - L_{\min}}{a - b} - \left(N - \frac{L - L_{\min}}{a - b} \right) \ln \left(N - \frac{L - L_{\min}}{a - b} \right) \right). \quad (7)$$

4. Comme on l'a dit précédemment, la connaissance de l'entropie permet, grâce à l'identité thermodynamique, d'obtenir les autres quantités macroscopiques du système. Considérons ainsi une transformation infinitésimale et réversible. D'après le second principe pour une transformation réversible, on a $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$, où δQ_{rev} est le transfert de chaleur avec l'extérieur. De son côté, le premier principe s'écrit $dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W$, où δW est le travail de la force f , qui pour un passage de L à $L + dL$ s'exprime comme $\delta W = f dL$. Ainsi, on a

$$dU = \delta Q + \delta W = T dS + f dL, \quad (8)$$

ce qui permet d'écrire l'identité thermodynamique

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU}{T} - \frac{f}{T} dL \\ &= \left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{L, N} dU + \left. \frac{\partial S}{\partial L} \right|_{U, N} dL, \end{aligned} \quad (9)$$

et par identification, on trouve

$$\frac{f}{T} = - \left. \frac{\partial S}{\partial L} \right|_{U, N}. \quad (10)$$

Lors du raisonnement microscopique précédent, nous avons implicitement fait l'hypothèse que les deux configurations ont la même énergie, donc que S ne dépend que de L . Pour être plus général, il aurait fallu considérer d'autres degrés de liberté, comme ceux de mouvement de la

chaîne, que nous ne prenons pas en compte ici. Ainsi, $\frac{f}{T} = -\frac{\partial S}{\partial L}\bigg|_N$, et on en déduit par le changement de variable $L(n_a)$ que

$$\begin{aligned} f &= -\frac{T}{a-b} \frac{\partial S}{\partial n_a}\bigg|_N = \frac{k_b T}{a-b} \left(\ln n_a + \frac{n_a}{n_a} - \ln(N - n_a) - \frac{N - n_a}{N - n_a} \right) \\ &= \frac{k_b T}{a-b} \ln \frac{n_a}{N - n_a} = \boxed{\frac{k_b T}{a-b} \ln \frac{L - L_{\min}}{L_{\max} - L}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ainsi, à la manière de la relation $PV = nRT$ pour un gaz parfait, nous avons obtenu une relation liant les trois grandeurs macroscopiques qui nous intéressent f , L et T , c'est-à-dire que nous avons trouvé la fonction d'état du système.

5. On peut à présent chercher à quantifier la variation de température lorsque l'on tend ou contracte un élastique, et donc voir l'utilité potentielle d'un tel système thermodynamique.

La première question à se poser est de savoir s'il est possible de définir une capacité thermique pour le système. Comme nous l'avons dit précédemment, toute l'étude suppose que les deux configurations possibles pour chaque maillon ont la même énergie. Ainsi, l'entropie obtenue ne dépendait que de la longueur, donc de la configuration spatiale de la chaîne, et on parle d'entropie de configuration. Toutefois, il existe d'autres degrés de liberté qui contribuent à l'entropie avec une dépendance en énergie interne U , mais pas en L . Ainsi l'entropie totale peut s'écrire

$$S_{\text{tot}} = S(L, N) + S'(U, N), \quad (12)$$

où $S(L, N)$ est l'entropie de configuration calculée précédemment. Dans la suite, nous allons omettre la dépendance en N , que nous supposons constante. La seconde contribution à l'entropie provient de la dépendance en énergie. Puisque les deux types de maillon ont la même énergie, l'énergie interne ne dépend que de la température, et on postule donc l'existence d'une capacité thermique c , telle que $dU = cdT$.

Considérons finalement que l'on fasse rapidement passer la longueur d'un élastique de L_0 à L_f . On peut alors se demander quelle est la variation de température de T_0 à T_f . L'hypothèse d'une rapide transformation nous suggère de considérer la transformation comme isentropique. On a alors

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{f(L, T)}{T} dL = 0, \quad (13)$$

et avec $dU = cdT$, on peut calculer la variation de température en utilisant l'expression (11) par une simple intégration. Le résultat est calculable avec l'expression précédente pour $f(L, T)$, mais la présence du logarithme rend l'exploitation difficile. Afin de simplifier, nous allons nous placer dans un cas couramment étudié, où l'on suppose que les maillons peuvent être soit « vers la gauche » avec une longueur $-a$ soit « vers la droite » avec une longueur a . Ceci revient à faire $b = -a$ dans les équations précédentes. On a alors

$$\begin{aligned} f(T, L) &= \frac{k_b T}{2a} \ln \frac{L + Na}{Na - L} \\ &= \frac{k_b T}{2a} \ln \left(\frac{Na \left(1 + \frac{L}{Na}\right)}{Na \left(1 - \frac{L}{Na}\right)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

On peut alors supposer que $L \ll Na$, c'est-à-dire que la chaîne est loin de sa configuration la plus étendue, de telle sorte que

$$f(T, L) \simeq \frac{k_b T L}{Na^2}. \quad (15)$$

On peut alors calculer la variation de température pour la transformation précédente, et on a

$$c \frac{dT}{T} = \frac{1}{T} \frac{k_b T L}{Na^2} dL \quad (16)$$

et par intégration

$$T_f = T_0 \exp \left(\frac{k_b}{2cNa^2} (L_f^2 - L_0^2) \right). \quad (17)$$

Le même calcul est bien entendu réalisable dans le cas général (11), mais le résultat est difficilement manipulable. Finalement, on peut réaliser une application numérique. Le plus compliqué est d'estimer une valeur de Na^2 . Pour cela, on peut par exemple utiliser l'équation d'état 15. Pour un élastique de $L = 1$ m, à une température $T = 293$ K, on peut raisonnablement estimer la force à $f = 1$ N. On obtient alors

$$Na^2 = \frac{k_b TL}{f} \simeq 8 \times 10^{-21} \text{ m}^2. \quad (18)$$

La capacité calorifique massique du caoutchouc est de l'ordre de $c_m \simeq 1200 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. On peut estimer la masse d'un élastique de 1 cm à quelques grammes, de telle sorte que $c \simeq 1200 * 5 \times 10^{-3} \simeq 5 \text{ J.K}^{-1}$. Pour un élastique passant de $L_0 = 1$ m à $L_f = 2$ m à 293 K, on trouve

$$T_f = 294 \text{ K}, \quad (19)$$

soit une augmentation de température de 1°C .

On peut finalement répondre à la question initiale : il est effectivement possible de créer un réfrigérateur avec des élastiques, en utilisant leur contraction comme source froide, et leur dilatation comme source chaude. Une telle machine a déjà été réalisée, et on peut voir une démonstration de son fonctionnement dans la vidéo « A refrigerator that works by stretching rubber bands » de la chaîne Youtube « Applied Science ».

Exercice 6.4 : Glaçon sur un plan incliné - Lyon/Cachan MP

On lance un glaçon sur un plan incliné, que se passe-t-il ?

Il est clair que l'enjeu de cet exercice n'est pas d'étudier le simple glissement d'un point matériel sur un plan incliné. Physiquement, on sait que le glaçon va fondre à cause des frottements, ce qui va induire une variation de quantité de mouvement et donc une accélération supplémentaire. Ainsi, il va s'agir d'étudier le glissement d'un système de masse variable sur un plan incliné. Pour cela, nous allons trouver deux équations, une mécanique et une thermodynamique.



Quelques pistes...

1. Établir le système d'équations sur la vitesse du glaçon et sa masse par des raisonnements mécaniques et thermodynamiques. Découpler les équations pour trouver celle déterminant l'évolution de la vitesse.
2. Étudier le cas d'un plan horizontal par un raisonnement qualitatif. Montrer en particulier que le glaçon s'arrête, et trouver la masse de glace perdue. Finalement, commenter ce qui se passe sur un plan incliné.

1. Commençons par établir une équation mécanique pour le glaçon. Il subit la force de gravitation, avec $\vec{g} = g \sin(\alpha) \vec{e}_{x_1} - g \cos(\alpha) \vec{e}_{z_1}$, ainsi que les actions de contact \vec{T} et \vec{N} représentées sur la figure 6.2. Il y a bien entendu glissement, donc d'après les lois de Coulomb pour le frottement $T = fN$, et comme le glaçon reste en contact avec le plan, la projection du

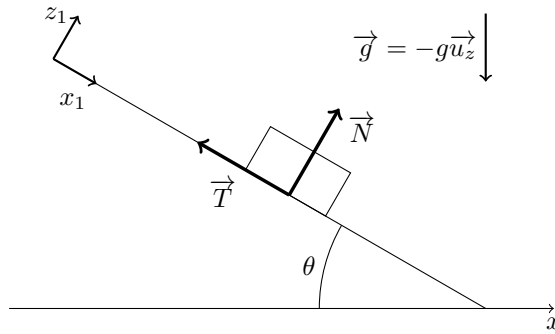


FIGURE 6.2. Un glaçon glisse en fondant sur un plan incliné.

principe fondamental de la dynamique sur l'axe perpendiculaire à la pente donne $N = mg \cos \alpha$. Ainsi

$$T = mgf \cos \alpha . \quad (1)$$

La fonte du glaçon va produire une variation de quantité de mouvement, due à la variation de la masse. On peut faire un simple bilan de quantité de mouvement, pour obtenir

$$\boxed{\frac{d(m(t)v(t))}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = mg(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))} . \quad (2)$$

Afin d'établir une équation thermodynamique, il va s'agir de procéder à un bilan d'énergie, sur un système bien choisi. Pour simplifier au maximum le problème, on peut faire l'hypothèse que la table, l'air extérieur ainsi que le glaçon sont à 0°C . Si on venait à étudier le glaçon seul comme précédemment, il faudrait considérer les transferts thermiques avec la table, ainsi que les frottements. Ainsi, il est préférable de considérer le système constitué de la table et du glaçon.

Entre deux instants t et $t + dt$, les sources de variation d'énergie pour ce système sont :

- la variation d'énergie cinétique $dE_c = \frac{1}{2}d(m(t)v^2(t))$;
- la variation d'énergie potentielle de pesanteur
 $dE_p = -m(t)g \sin(\alpha) \frac{dx}{dt} - m(t)g \sin(\alpha)v(t)dt$;
- et finalement, la variation d'enthalpie due à la fonte d'une masse $|dm|$ du glaçon.
 Puisque cette variation de masse est négative, la variation d'enthalpie est $dH = -dmL_F$, où L_F est l'enthalpie de fusion massique de l'eau.

Ainsi, puisqu'on ne considère pas de transfert thermique avec l'extérieur, et qu'il n'y a pas de travail de force non-conservative, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$dH + dE_c + dE_p = \frac{1}{2} \frac{dm(t)v^2(t)}{dt} - mg \sin(\alpha)v(t)dt - L_F \frac{dm}{dt} = 0, \quad (3)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} m(t)v(t) \frac{dv}{dt} + \frac{v^2(t)}{2} \frac{dm}{dt} - L_F \frac{dm}{dt} - mg \sin(\alpha)v(t) &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt} \left(\frac{v^2(t)}{2} - L_F \right) + v(t) \left(\frac{dv}{dt} - g \sin(\alpha) \right)} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Afin de découpler les équations (2) et (4), on peut diviser la première par $m(t)$, puis isoler $\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt}$ dans la seconde, et par substitution on obtient

$$\frac{dv}{dt} = gf \cos \alpha \frac{v^2 - 2L_F}{v^2 + 2L_F} + g \sin \alpha. \quad (5)$$

On pourrait penser résoudre cette équation par séparation des variables. Toutefois, l'intégration est ardue et la solution difficilement exploitable. Ainsi, nous allons nous contenter des commentaires qualitatifs. Finalement, en remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par l'expression précédente dans l'équation (2), on peut trouver une équation donnant l'évolution de la masse, sous la forme

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -2gf \cos \alpha \frac{v}{v^2 + 2L_F}. \quad (6)$$

2. Étudions à présent qualitativement le comportement du glaçon lorsqu'il est lancé sur un plan horizontal. L'équation sur la vitesse devient alors

$$\frac{dv}{dt} = fg \frac{v^2 - 2L_F}{v^2 + 2L_F}. \quad (7)$$

On voit directement qu'il va exister trois comportements distincts, selon le signe de $v^2 - 2L_F$. En particulier, pour des faibles vitesses, le glaçon va décélérer. La chaleur latente massique de fusion de la glace à 0 °C vaut 330 kJ.mol⁻¹. Ainsi, la vitesse critique à partir de laquelle l'effet de la fonte de la glace sera de faire accélérer le glaçon est de $v_{\text{lim}} = \sqrt{2L_F} \simeq 800 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui n'est bien entendu pas accessible à un glaçon lancé sur une table. En pratique, on aura même $v^2 \ll 2L_F$, de telle sorte que l'on a quasiment une décélération constante, égale à $-gf$. Le glaçon va donc finir par s'arrêter, au bout d'un temps $t \simeq \frac{v_0}{gf}$.

Afin d'estimer la masse perdue, on peut intégrer directement le bilan thermodynamique (3) entre l'instant initial, où le glaçon possède une vitesse v_0 et une masse m_0 , et l'instant final où il s'arrête et où sa masse a varié de Δm . On obtient alors

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = L_F \Delta m \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{m_0 v_0^2}{2L_F}. \quad (8)$$

On peut alors calculer la variation relative de masse $\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{L_F}{v_0^2}$. Pour un glaçon de 10 g lancé initialement à 1 m.s⁻¹, on obtient $\frac{\Delta m}{m_0} \simeq 1,5 \times 10^{-5} \%$. C'est l'importance de la valeur de l'enthalpie massique de fusion de l'eau relativement aux échelles de vitesse « habituelles » qui donne cette faible valeur. En conclusion, lancer des glaçons sur une table n'est pas la méthode la plus efficace pour faire fondre de la glace.

Finalement, pour un glaçon lancé sur un plan incliné, on peut faire le même commentaire que précédemment sur la comparaison entre v^2 et L_F . L'équation donnant l'évolution de v est alors de la forme.

$$\frac{dv}{dt} = gf (\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (9)$$

Si le glaçon est initialement posé et qu'il glisse, alors c'est nécessairement qu'il respecte la condition du cône de frottement, à savoir $\tan \alpha \geq f$. Il va ainsi subir une accélération quasi-constante. S'il est lancé, alors on peut reprendre la discussion précédente et étudier le signe de $\sin \alpha - f \cos \alpha$.

De cet exercice, on retiendra surtout qu'un choix judicieux de système thermodynamique permet de s'affranchir du calcul des transferts thermiques et du travail de certaines forces, et ainsi simplifier considérablement le raisonnement. On voit aussi que la rapide complexité des équations nous a contraint à un choix minimal d'hypothèses : par exemple, on serait tenté de dire que le coefficient de frottement f n'est pas constant sur la durée du glissement (à

juste titre!). Mais l'ajout d'un tel ingrédient dans un oral court n'aurait que peu d'intérêt et compliquerait inutilement la discussion.

Exercice 6.5 : Entendre la température - Ulm PC

Dans cet exercice, nous allons nous demander s'il est possible « d'entendre la température ». Nous essayons le mieux possible de retranscrire le déroulé relativement atypique de l'oral dont est issu ce problème.

1. On suppose tout d'abord que l'on colle une éprouvette de 50 mL contre son oreille. Peut-on dans ce cas entendre la température?
2. Supposons maintenant que l'on soit complètement isolé, par exemple dans une chambre insonorisée. Quelle est la température minimale qu'il est possible « d'entendre » ? On donne la courbe du seuil d'audibilité en fonction de la fréquence.

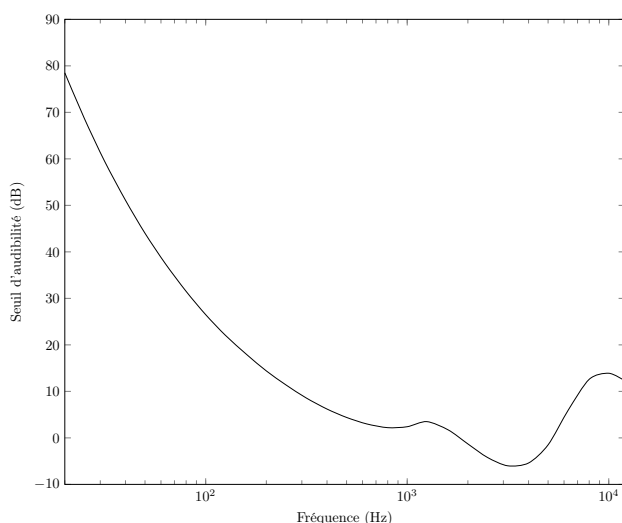


FIGURE 6.3. Le seuil d'audibilité est la valeur minimum de l'intensité sonore que l'oreille humaine peut détecter.

Cet exercice, très original, va nous permettre d'examiner en détail le lien entre thermodynamique et acoustique. Afin d'« entendre la température », il va nous falloir trouver une relation entre ce que perçoit l'oreille humaine, par exemple la longueur d'onde ou l'intensité sonore, et la température. Nous allons étudier ce lien dans différentes situations.



Quelques pistes...

1. Dans une première partie, on s'intéresse aux fréquences de résonance d'une cavité.
 - a. Quelles sont les modes propres d'un tuyau de longueur L et de volume V fermé à une de ses extrémités ? Donner également les modes propres d'un tuyau fermé à ses deux extrémités.
 - b. Montrer par un raisonnement thermodynamique qu'il existe une autre fréquence de résonance plus grave, correspondant à des oscillations de l'air dans l'éprouvette.

2. À quoi est due la pression exercée sur l'oreille en l'absence de son ? Relier alors l'intensité sonore, c'est-à-dire la puissance par unité de surface de l'onde sonore, à la température.

1. Considérons le cas simple où l'on colle une éprouvette contre son oreille. Cette dernière va agir comme une cavité résonante qui amplifie les bruits extérieurs aux longueurs d'ondes qui correspondent à ses modes propres. C'est le même phénomène qui explique le son entendu lorsque l'on colle un coquillage contre son oreille, ressemblant au son de l'océan.

a. Commençons donc par déterminer les fréquences propres d'un cylindre de longueur L fermé à une de ses extrémités. Pour une éprouvette, le rayon r du tuyau est suffisamment faible devant la longueur d'onde pour considérer que le problème est unidimensionnel selon un axe x . On suppose que l'extrémité fermée, qui correspond à un nœud de vitesse, est en $x = 0$ et que l'extrémité ouverte, qui correspond à un nœud de surpression, est en $x = L$.

On note $p_1(x, t)$ et $v_1(x, t)$ les champs de surpression et de vitesse de l'onde sonore. On rappelle que, dans l'approximation acoustique, ces deux grandeurs sont liées par

$$\begin{cases} \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air dans l'éprouvette et χ_S est le coefficient de compressibilité isotherme. En découplant ces deux équations, on trouve facilement

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \quad (2)$$

et la même équation pour v_1 . On pose alors $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ la vitesse du son. Dans le cas d'un gaz parfait en évolution isentropique, on obtient facilement que

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (3)$$

où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ est le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants, R la constante des gaz parfaits, T la température et M la masse molaire du fluide.

Revenons à présent à la recherche des modes propres de l'éprouvette. On va chercher une solution sous forme d'une onde stationnaire

$$p_1 = p_{1,0} \cos \omega t (A \cos kx + B \sin kx). \quad (4)$$

En utilisant l'équation (1), on en déduit la forme du champ de vitesse

$$v_1 = v_{1,0} \sin \omega t (A \sin kx - B \cos kx). \quad (5)$$

où $v_{1,0} = \frac{p_{1,0}}{\rho_0 c}$ (avec $\omega = kc$ car la propagation est non-dispersive). Par hypothèse, on a un nœud de vitesse en $x = 0$, c'est-à-dire que

$$v_1(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \quad v_{1,0} B \sin \omega t = 0, \quad (6)$$

et donc $B = 0$. Ensuite, puisqu'on a un nœud de pression en $x = L$, on a

$$\cos kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = \frac{(2n+1)\pi}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

En utilisant la relation de dispersion $\omega = kc$, on obtient les fréquences des modes propres du tuyau mixte

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2L} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Ainsi, il apparaît que les fréquences des modes propres de l'éprouvette modélisée comme un tuyau mixte sont proportionnelles à la racine de la température. En particulier, on peut écrire la fréquence du fondamental sous la forme

$$f_0 = \frac{c}{4L} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (9)$$

et donc mesurer la fréquence du fondamental d'un tuyau mixte nous permet « d'entendre la température ».

On peut aisément reproduire ce raisonnement pour trouver les modes propres d'un tuyau avec deux extrémités ouvertes ou fermées, et on trouve que la fréquence du fondamental est

$$f'_0 = \frac{c}{2L}, \quad (10)$$

et on retrouve le même type de dépendance à la température.

La figure 6.4 donne le diagramme de Bode en gain d'une cavité cylindrique, de longueur $L = 30$ cm, de diamètre $d = 6$ cm, qui a été munie d'un embout de longueur l variable, de section $s = 2$ cm, comme dans la figure 6.5. Pour un tel cylindre, la fréquence du fondamental est $f_0 = 570$ Hz, ce qui indique qu'on est en présence d'un tuyau fermé à ses deux extrémités. Dans le diagramme donné, on constate la présence d'harmoniques à $2f_0$ et $4f_0$, régulièrement espacées sur l'échelle logarithmique.

Toutefois, en plus des résonances précédemment décrites, il est clair qu'il existe une résonance à une fréquence plus faible, dont la fréquence dépend de la longueur l de l'embout placé sur le cylindre. Voyons à quoi peut être due cette résonance.

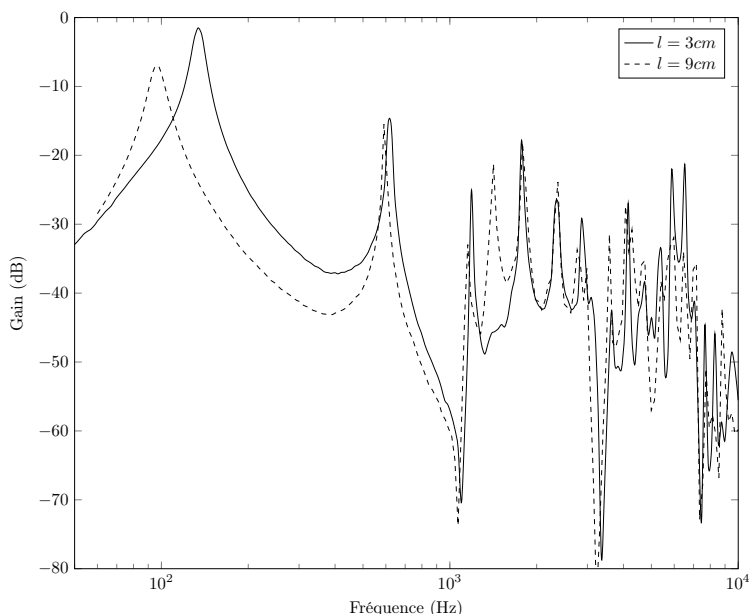


FIGURE 6.4. Diagramme de Bode d'une cavité cylindrique, munie d'un embout de longueur l variable.

b. Une expérience aisément réalisable peut nous permettre d'appréhender l'origine de cette résonance. Si l'on souffle sur le goulot d'une bouteille, on peut entendre un son assez pur, d'une fréquence qui dépend du volume de la bouteille. La nature de cette résonance semble donc différente de celle des modes propres précédents, qui en première approximation

ne dépendaient que de la longueur de l'éprouvette. Physiquement, souffler sur l'ouverture de la bouteille revient à mettre en mouvement l'air contenu dans le goulot, qui va à son tour mettre en mouvement le gaz à l'intérieur de la bouteille. Nous allons dans la suite prouver que le mouvement de l'air correspond à des oscillations et trouver la fréquence de résonance correspondante.

Dans le cas d'une éprouvette que l'on colle contre son oreille, on peut supposer que la colonne d'air se trouve dans le conduit auditif, de section A , et que l'air est mis en mouvement dans l'éprouvette de volume V . Cette situation est représentée dans le schéma 6.5.

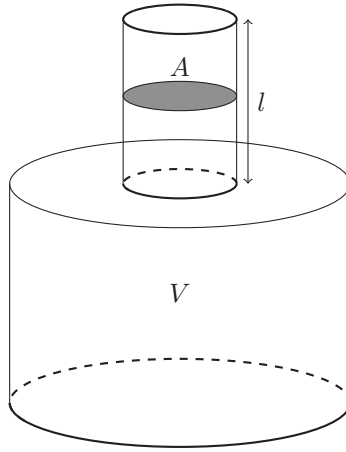


FIGURE 6.5. Résonateur de Helmholtz simplifié.

Sous l'effet de perturbations extérieures, l'air dans le tube va être mis en mouvement. En notant z le déplacement de la colonne d'air, le volume déplacé dans l'éprouvette est alors

$$dv = Az. \quad (11)$$

Afin d'obtenir la force exercée par l'air contenu dans la bouteille sur la colonne, nous allons calculer la variation de pression due à cette variation de volume. Afin de relier ces deux grandeurs, les hypothèses les plus simples que l'on peut faire ici sont de supposer que le gaz est parfait et que l'évolution est isentropique, ce qui revient à considérer qu'aux échelles de temps acoustiques, les échanges thermiques sont négligeables. En différentiant la relation de Laplace $PV^\gamma = \text{constante}$, on obtient

$$dp = -\frac{\gamma dv}{V}, \quad (12)$$

où γ est le même que précédemment et p la pression à l'intérieur de l'éprouvette, ici égale à la pression atmosphérique P_0 . Ainsi, la force exercée par l'air contenu dans l'éprouvette sur la colonne d'air est une force de rappel, qu'on écrit

$$F = Adp = -\frac{\gamma p A^2}{V} z, \quad (13)$$

De telle sorte qu'en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la colonne d'air, de masse $m = \rho AL$ avec ρ la masse volumique de l'air, on obtient

$$\rho Al \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma p A^2}{V} z = 0. \quad (14)$$

On reconnaît bien évidemment l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega_H = \sqrt{\frac{\gamma P_0 A}{\rho V l}} = \sqrt{\frac{A}{V l}} \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}, \quad (15)$$

où l'on a utilisé la loi des gaz parfaits pour écrire $\frac{P_0}{\rho} = \frac{R T}{M}$. On reconnaît bien entendu l'expression de la vitesse du son (3), et ainsi la fréquence de résonance de l'air dans l'éprouvette, dite de Helmholtz, est

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V l}}. \quad (16)$$

Là encore, la dépendance explicite de la vitesse du son en \sqrt{T} nous montre que si l'on mesure la fréquence de résonance de l'éprouvette, il est possible « d'entendre la température ». Reprenons l'expérience qui a permis d'obtenir la figure 6.4, dans laquelle la section de l'embout vaut $A = \frac{\pi d_e^2}{4}$ avec $d_e = 2$ cm, $V = \frac{\pi d_c^2}{4} h$, avec $d_c = 6$ cm et $h = 30$ cm. Pour $l = 9$ cm, on a $f_H = 110$ Hz, et pour $l = 3$ cm, on obtient $f_H = 190$ Hz, ce qui semble cohérent avec les valeurs de la figure.

De manière générale, une cavité contenant de l'air va exhiber, outre ses modes propres, une résonance telle que celle que l'on vient d'étudier. Un phénomène analogue est étudié lorsque l'on étudie les oscillations d'une bulle, comme dans l'exercice 5. En présence de perturbations extérieures, la cavité va amplifier les sons correspondant à ces longueurs d'ondes, ce qui nous permet d'entendre la température.

2. Supposons à présent que l'on se trouve dans une région sans bruit parasite, de telle sorte qu'une cavité comme celle considérée précédemment ne pourra amplifier certaines fréquences particulières. Néanmoins, il va toujours exister un bruit résiduel, dû à l'agitation thermique et donc aux chocs des molécules de l'air sur les tympans. La température intervient alors dans la vitesse des particules, et donc dans la pression ressentie par l'oreille. Plus la température sera élevée, plus l'énergie transmise au tympan par l'agitation thermique sera grande, et donc plus l'intensité sonore sera élevée.

D'après la courbe donnant le seuil d'audibilité, nous pouvons connaître l'intensité sonore minimum que peut percevoir l'oreille humaine. On rappelle que l'intensité sonore est définie par

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_{\text{ref}}}, \quad (17)$$

avec I la puissance par unité de surface transportée par l'onde et $I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$. Sur la courbe, on peut lire que le minimum d'intensité vaut environ -5 dB, pour une fréquence de l'ordre de 3500 Hz. Ainsi, l'intensité sonore minimum perceptible est de l'ordre de

$$I_{\text{min}} = I_0 10^{-\frac{5}{10}} \simeq 3.10^{-13} \text{ W.m}^{-2}. \quad (18)$$

Nous allons donc chercher l'intensité sonore due à l'agitation thermique. Supposons que l'on puisse associer une fréquence f aux chocs sur le tympan dus à l'agitation thermique, dont elle représente le nombre par unité de temps. À la température T , dans un cas à une dimension comme dans le pavillon de l'oreille, chacune des molécules possède une énergie moyenne $\frac{1}{2} k_B T$. Ainsi, l'énergie transmise lors d'un choc va être $k_B T$. Puisque f représente le nombre de chocs par unité de temps, on peut aisément en déduire la puissance par unité de surface sur le tympan

$$I = \frac{k_B T f}{s}, \quad (19)$$

où l'on a noté s la surface du tympan, que l'on peut estimer à 60 mm^2 .

La température minimale qu'il est possible « d'entendre » va alors être donnée par

$$T_{\min} = \frac{I_{\min} s}{k_B f} \simeq 400 \text{ K}, \quad (20)$$

avec les valeurs précédentes. En particulier, ceci explique pourquoi même les meilleures oreilles ne peuvent percevoir le bruit de fond généré par l'agitation thermique. À température ambiante, on peut calculer que ce bruit a une intensité de l'ordre de -15 dB , qui n'est pas non plus perceptible.

Électromagnétisme

Exercice 7.1 : Piège de Penning - Lyon/Cachan MP

On cherche à piéger une particule de masse m et de charge q dans un potentiel de la forme $V(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$. On se place dans le vide.

1. Grâce aux équations de l'électrostatique, et en supposant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz , simplifier V .
2. Montrer qu'une particule dans ce potentiel n'a pas de position d'équilibre stable.
3. On ajoute alors un champ \vec{B} uniforme et parallèle à Oz . Prouver que ceci permet de former un piège.

Un exercice relativement classique et peu déstabilisant, ce qui peut sembler assez étonnant pour les ENS. Il va toutefois nous permettre une introduction à l'électrostatique fondée sur l'équation de Poisson, et de rappeler les conditions d'équilibre d'un point matériel dans un potentiel à trois dimensions. La suite utilise une méthode habituelle de résolution d'équations couplées obtenues à partir d'un produit vectoriel avec un champ constant.

1. Comme semble l'indiquer l'énoncé, la première étape sera pour nous de simplifier la forme très générale du potentiel $V(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$. En premier lieu, on peut utiliser l'équation de Poisson dans le vide, qui donne une première relation entre les différents paramètres, sous la forme

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 0. \quad (1)$$

En supposant que le potentiel a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz , on peut affirmer qu'il ne doit dépendre que de z et de la distance r à Oz . Ceci revient à se placer en coordonnées cylindriques et à poser $r^2 = x^2 + y^2$. Pour que V ne dépende que de r et z , il est clair que l'on doit avoir

$$\alpha = \beta. \quad (2)$$

Avec ces deux conditions, le potentiel s'écrit

$$V(x, y, z) = V_0 (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (3)$$

2. Considérons une particule de masse m et de charge q dans ce potentiel. À une dimension, une particule soumise à une force dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$ possède une position d'équilibre en x_0 si $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$. De plus, cette position est stable si et seulement si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) > 0$. De manière analogue, à trois dimensions, une position d'équilibre est caractérisée par $\vec{\text{grad}} E_p = \vec{0}$. En revanche, la stabilité doit être étudiée dans chaque direction $x_i = x, y, z$, et une position stable est caractérisée par $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i^2} > 0$.

Dans notre cas, avec $E_p = qV(x, y, z)$, on peut facilement calculer que

$$\vec{\text{grad}} E_p = qV_0 (2x\vec{u}_x + 2y\vec{u}_y - 4z\vec{u}_z). \quad (4)$$

On ne peut avoir $\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \overrightarrow{0}$ que si $x = y = z = 0$. De plus, on a

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} = 2qV_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} = -4qV_0, \quad (5)$$

et donc peu importe le signe de qV_0 , au moins une des dérivées secondes est négative, donc il existe au moins une direction instable.

Remarque : de manière plus générale, pour un potentiel $V(x, y, z)$ quelconque, l'équation de Poisson dans le vide donne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Pour avoir cette égalité, soit les trois dérivées secondes sont nulles, soit au moins l'une d'entre elles est négative. Dans tous les cas, une position d'équilibre est toujours instable dans au moins une direction.

3. Supposons à présent que l'on ajoute un champ magnétique statique $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_z$. Le champ électrique est

$$\overrightarrow{E} = 2V_0(2z\overrightarrow{u}_z - x\overrightarrow{u}_x - y\overrightarrow{u}_y), \quad (7)$$

et on a facilement

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \dot{y}B_0\overrightarrow{u}_x - \dot{x}B_0\overrightarrow{u}_y. \quad (8)$$

On en déduit alors les équations du mouvement

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2qV_0x + qB_0\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -2qV_0y - qB_0\dot{x}, \\ m\ddot{z} = 4qV_0z. \end{cases} \quad (9)$$

L'équation sur z est la plus facile à résoudre, et elle se réécrit

$$\ddot{z} - \frac{4qV_0}{m}z = 0. \quad (10)$$

Afin d'avoir une situation stable, il est donc nécessaire que qV_0 soit négatif. Dans ce cas, on pose $\omega_z = \sqrt{\left|\frac{4qV_0}{m}\right|}$, de telle sorte que l'on a

$$z = z_0 \cos(\omega_z t + \varphi_z). \quad (11)$$

En notant $\omega_S = \frac{qB_0}{m}$ la grandeur appelée pulsation cyclotron, on peut réécrire les équations sur x et y sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_S \dot{y} - \frac{\omega_z^2}{2}x = 0, \\ \ddot{y} + \omega_S \dot{x} - \frac{\omega_z^2}{2}y = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Afin de résoudre ces équations couplées, on introduit comme souvent une grandeur complexe $w = x + iy$. On peut facilement combiner les deux équations précédentes, pour obtenir

$$\ddot{w} + i\omega_S \dot{w} - \frac{\omega_z^2}{2}w = 0. \quad (13)$$

Afin de résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants, on calcule le discriminant de son polynôme associé

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2. \quad (14)$$

Afin que la solution soit stable, il est nécessaire que $\Delta < 0$, sans quoi on aurait des solutions exponentiellement divergentes. Ainsi, on doit nécessairement avoir $\omega_z < \frac{\omega_c}{2}$. En pratique, on a

souvent $\omega_c \gg \omega_z$, ce qui garantit la stabilité. Finalement, pour $\Delta < 0$, les deux racines du polynôme caractéristique de l'équation précédente sont

$$r_{\pm} = \frac{-i\omega_c \pm i\sqrt{\omega_c - 2\omega_z}}{2} = i\Omega_{\pm}, \quad (15)$$

et donc, puisque les deux r_{\pm} sont imaginaires pures, x et y sont de la forme

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\Omega_+ t + \varphi_{x,1}) + B_x \cos(\Omega_- t + \varphi_{x,2}), \\ y = A_y \cos(\Omega_+ t + \varphi_{y,1}) + B_y \cos(\Omega_- t + \varphi_{y,2}). \end{cases} \quad (16)$$

En conclusion, il est possible de fabriquer un piège pour une particule de charge q avec ce dispositif. En effet, si on écarte la particule de sa position d'équilibre, sa trajectoire va rester bornée et elle va osciller autour du centre du piège, à condition que qV_0 soit négatif et que $\frac{8|qV_0|}{m} \leq \frac{q^2 B_0^2}{m^2}$. Finalement, dans un modèle plus complet, on pourrait chercher à rendre compte de l'amortissement de ce mouvement, dû au rayonnement de la charge accélérée.

Exercice 7.2 : Condensateur électrolytique - Lyon/Cachan PC

On considère un électrolyte d'ions positifs et négatifs, de charge $q_+ = q$ et $q_- = -q$, entre les armatures d'un condensateur entre lesquelles on impose une différence de potentiel U . On suppose l'équilibre thermique établi, et que le potentiel V à l'intérieur de la solution vérifie $qV \ll k_B T$. Dans la solution, on admet que tout se passe comme si la permittivité du vide ε_0 était remplacée par $\varepsilon\varepsilon_0$, où ε est la constante diélectrique du milieu.

Définir et calculer la capacité différentielle du condensateur ainsi formé.

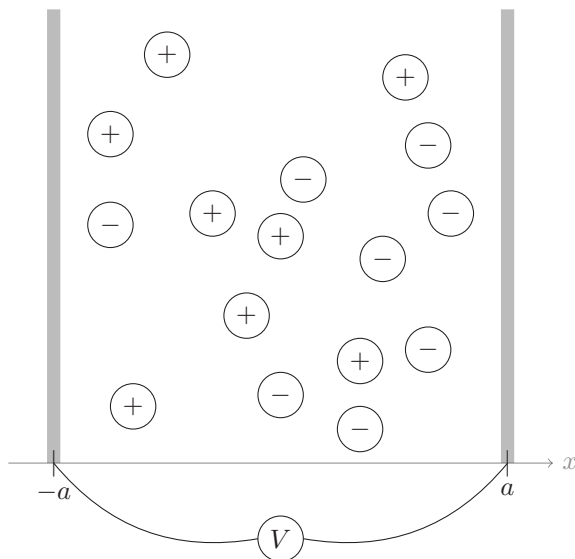


FIGURE 7.1. Électrolyte entre les deux armatures d'un condensateur.

Il s'agit d'un exercice relativement classique, dont la résolution repose sur l'utilisation de l'équation de Poisson. L'énoncé déroule quasiment le plan d'attaque de l'exercice. L'équilibre thermique signifie que la densité de chaque type d'ion sera donnée par un facteur de Boltzmann.

On va ensuite chercher une équation vérifiée par le potentiel électrostatique dans la solution. Ensuite, par analogie avec le condensateur simple, on définira une capacité grâce au potentiel.

La géométrie du problème nous incite à supposer que toutes les quantités ne dépendent que de x , coordonnée dans la direction orthogonale aux armatures. Ainsi, dans la solution, l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (1)$$

où $V(x)$ est le potentiel électrostatique et $\rho(x)$ est la densité de charges. Notons alors $n_+(x)$ et $n_-(x)$ les densités de cations et d'anions. À l'équilibre thermique, l'idée à avoir est d'introduire un facteur de Boltzmann. Plus de détails sur cette notion peuvent être trouvés dans l'exercice 6.2. Ainsi, on a $n_+(x) \propto \exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right)$ et $n_-(x) \propto \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right)$. En l'absence de champ, le milieu doit être neutre, de telle sorte que $n_+ = n_- = n_0$. Ainsi, les concentrations sont de la forme

$$\begin{cases} n_+(x) = n_0 \exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right), \\ n_-(x) = n_0 \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right). \end{cases} \quad (2)$$

La densité de charge s'écrit alors

$$\begin{aligned} \rho(x) &= q(n_+(x) - n_-(x)) \\ &= qn_0 \left[\exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

En remplaçant dans l'équation de Poisson, on obtient

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{qn_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \left[\exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \right]. \quad (4)$$

Cette équation, appelée équation de Boltzmann-Poisson, est une équation différentielle non-linéaire d'ordre deux, pour laquelle trouver une solution directement n'est pas garanti. Comme indiqué dans l'énoncé, considérons le cas où $\frac{qV(x)}{k_B T} \ll 1$, de telle sorte que

$$\exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \simeq \left(1 - \frac{qV(x)}{k_B T}\right) - \left(1 + \frac{qV(x)}{k_B T}\right) = -\frac{2qV(x)}{k_B T}. \quad (5)$$

L'équation de Poisson devient alors

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{2q^2n_0}{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T} V(x) = K^2 V(x), \quad (6)$$

en définissant $K = \sqrt{\frac{2q^2n_0}{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}}$, qui est l'inverse d'une longueur caractéristique $l_D = \frac{1}{K}$ appelée longueur de Debye. Afin de simplifier la résolution de l'équation, on suppose que les deux armatures sont en $x = \pm a$, et que l'on a $V(\pm a) = \pm \frac{U}{2}$. Les solutions de (6) sont de la forme

$$V(x) = A \sinh(Kx) + B \cosh(Kx). \quad (7)$$

On préfère les solutions hyperboliques plutôt qu'exponentielles, car elles permettent de mieux prendre en compte les conditions aux limites symétriques ou antisymétriques. Avec notre choix de conditions aux limites, $V(x)$ doit nécessairement être impaire, c'est-à-dire que $B = 0$. On a alors facilement $A = \frac{U}{2 \sinh(Ka)}$, de telle sorte que

$$V(x) = \frac{U \sinh(Kx)}{2 \sinh(Ka)}. \quad (8)$$

Afin de représenter le potentiel, et donc la densité de charge, on peut chercher à évaluer l'ordre de grandeur de la longueur de Debye par rapport à a . Pour une concentration de l'ordre de $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, ce qui correspond à $n_0 \simeq 10^{-23} \text{ m}^{-3}$, dans un milieu de constante diélectrique de l'ordre de 10 (rappelons que $\varepsilon_{\text{eau}} \approx 80$), à température ambiante, on trouve une longueur de Debye

$$l_D \simeq 10 \text{ nm}. \quad (9)$$

Pour un condensateur avec une distance a de l'ordre du micromètre entre les armatures, cette distance est très faible. Ainsi, le potentiel dans le condensateur va être négligeable dans la majorité du milieu, et ne prendre des valeurs significatives qu'au voisinage des armatures, sur une longueur caractéristique de l'ordre de la longueur de Debye. Physiquement, cela signifie qu'au voisinage des électrodes, l'accumulation d'ions de charges opposées à celles de l'armature provoque un phénomène d'écrantage, c'est-à-dire que la présence de charges mobiles réduit l'intensité du champ électrique.

Dans le cas d'un condensateur simple, on définit la capacité par le rapport entre la charge Q portée par les armatures et la différence de potentiel entre les bornes du condensateur. Ici, vu l'allure de la densité de charge

$$\rho(x) = -\frac{2q^2 n_0}{k_B T} V(x), \quad (10)$$

donnée dans la figure 7.2, on peut approximer la charge du condensateur à la charge présente dans l'épaisseur l_D au voisinage des armatures, c'est-à-dire

$$Q = \frac{U q^2 n_0}{k_B T} l_d S, \quad (11)$$

où l'on a noté S la surface du condensateur.

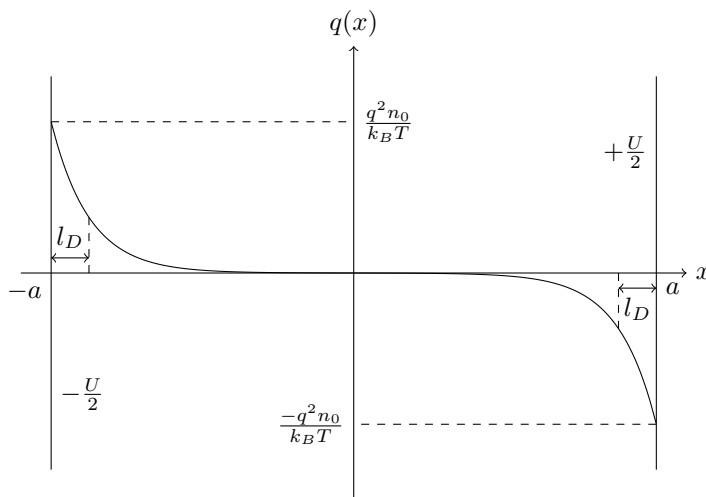


FIGURE 7.2. Allure de q_x . Les charges se concentrent au voisinage de l'armature dans une zone de taille proche de l_D . Ici, le rapport a/l_D a été diminué pour rendre la figure plus lisible.

Par analogie avec la relation $C = \frac{Q}{V}$ pour les condensateurs simples, on peut définir une capacité dynamique

$$C = \frac{\partial Q}{\partial U} = \frac{q^2 n_0}{k_B T} l_d S = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 q^2 n_0}{k_B T}} S. \quad (12)$$

Finalement, on peut réécrire la capacité par unité de surface

$$C_S = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{l_D}. \quad (13)$$

Cette formule peut être comparée avec celle donnant la capacité surfacique d'un condensateur plan simple

$$C_{S,\text{simple}} = \frac{\varepsilon_0}{d}, \quad (14)$$

où d est la distance entre les deux armatures, supposées séparées par du vide. Ainsi, on peut obtenir avec un condensateur électrolytique la même valeur de capacité qu'avec un condensateur simple dont les armatures sont séparées de la longueur de Debye. Cette solution est donc avantageuse, puisqu'il n'est pas forcément aisé d'obtenir des armatures séparées de quelques dizaines de nanomètres. Ceci est permis par la formation d'une couche d'ions au voisinage des armatures, qui en provoquant un phénomène d'écrantage diminue l'intensité du champ électrique dans le condensateur.

Exercice 7.3 : Diode à vide - Ulm PC

On se propose d'étudier un ancêtre des diodes modernes, le tube à vide. Cette forme de diode est composée d'une cathode maintenue à potentiel nul, qui émet des électrons par effet thermoélectrique. Ces électrons sont alors attirés par une anode, maintenue à un potentiel V_A . Les deux électrodes sont dans une enceinte dans laquelle on a fait le vide. On donne dans la figure 7.3 la caractéristique reliant l'intensité du courant qui parcourt la diode et la différence de potentiel entre la cathode et l'anode.

Expliquer les deux régimes constatés.

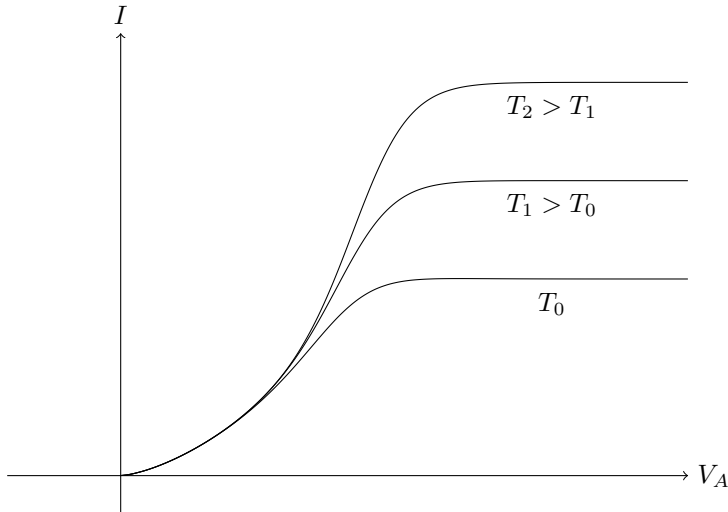


FIGURE 7.3. Caractéristique typique d'une diode à vide.

Cet exercice va nous permettre d'obtenir une modélisation du comportement d'une diode, avec les outils simples de l'électromagnétisme. La clé pour aborder ce type d'exercice est de dénombrer rigoureusement les quantités physiques *a priori* indépendantes, puis de trouver les équations qui vont les relier. L'oral dont est issu cet exercice a également été un prétexte pour

discuter des effets thermoélectriques, photoélectriques ou encore du rayonnement thermique, en mettant en évidence les différences entre ces phénomènes.



Quelques pistes...

1. On va commencer par étudier la première partie de la caractéristique.
 - a. Quelles sont les trois quantités physiques indépendantes qui permettent de décrire le système ?
 - b. Écrire alors les équations reliant le champ électrique et la dynamique des électrons, le champ électrique et sa source et une relation sur les charges.
 - c. Découpler alors ces équations pour obtenir le potentiel. Commenter.
2. Comment expliquer la portion « saturée » de la caractéristique ? Comment peut intervenir *a priori* la température ?

1. Tout d'abord, commençons par un commentaire sur l'effet thermoélectrique, qui consiste en l'émission d'électrons par un métal à haute température. Il ne doit pas être confondu avec le rayonnement thermique, comme celui d'un corps noir, où un corps chauffé émet des photons. Lorsque l'on augmente la température d'un métal, les électrons mobiles de conduction se déplacent de plus en plus rapidement, jusqu'à ce que certains aient une énergie suffisante pour « s'évaporer » du métal. Plus la température sera haute, plus le courant d'électrons obtenu sera grand.

a. Analysons plus précisément les phénomènes à l'œuvre au sein de la diode. Les électrons émis par la cathode vont être entraînés par le champ électrique résultant de la différence de potentiel entre les deux électrodes. Puisque la densité de charge entre les deux armatures n'est pas nulle, on ne peut pas modéliser ce champ comme celui à l'intérieur d'un condensateur. Il est donc nécessaire de tenir compte de la dynamique couplée des électrons et du champ électrique.

Vu la géométrie du problème, on va supposer que les différentes grandeurs physiques ne dépendent que de la variable x . De plus, les champs de vecteurs vont également être dirigés selon \vec{u}_x . Finalement, on va supposer que l'on est en régime permanent.

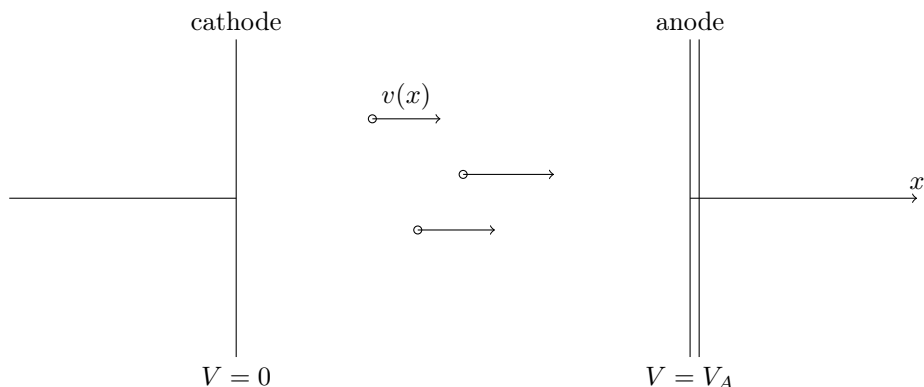


FIGURE 7.4. Schéma d'une diode à vide.

Commençons par dénombrer les quantités physiques d'intérêt. Tout d'abord, la dynamique des électrons va être contrainte par le champ électrique $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ qui règne dans la cavité, ou de manière équivalente le potentiel électrique $V(x)$. Elle sera décrite par leur vitesse $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$. Le mouvement des électrons va donner naissance à un courant électrique $\vec{j} = \rho(x)v(x)\vec{u}_x$, où $\rho(x)$ est la densité de charges. Nous avons donc trois quantités indépendantes à trouver, et il va donc nous falloir écrire trois équations qui les relient.

b. On pourrait d'abord penser à écrire le principe fondamental de la dynamique. Pour un problème unidimensionnel, il est plus aisé d'écrire la conservation de l'énergie. En supposant que les électrons sont émis de la cathode avec une vitesse négligeable, cette relation s'écrit

$$\frac{1}{2}mv^2(x) - eV(x) = \frac{1}{2}mv^2(0) - eV(0) = 0, \quad (1)$$

où l'on a noté m la masse d'un électron et e sa charge. On peut ensuite chercher à relier le champ électrique à sa source, c'est-à-dire la distribution d'électrons. Pour cela, on va bien entendu écrire l'équation de Poisson, sous la forme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}, \quad (2)$$

avec ε_0 la permittivité du vide. Finalement, dans l'optique d'écrire une relation entre le courant et la différence de potentiel, on peut écrire la relation de conservation de la charge. Puisque l'on est en régime permanent, cette relation s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{dj}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad j(x) = \rho(x)v(x) = \frac{I}{S}, \quad (3)$$

où l'on a noté I le courant dans la diode et S la surface des électrodes.

c. Nous avons ainsi obtenu trois relations couplées reliant $\rho(x)$, $v(x)$ et $V(x)$. Pour expliquer la caractéristique de la diode, nous allons chercher une équation sur le potentiel uniquement. À partir de l'équation (1), on peut exprimer

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}. \quad (4)$$

En remplaçant dans (3), on obtient

$$\rho(x) = \frac{1}{v(x)} \frac{I}{S} = \frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}}. \quad (5)$$

Finalement, en remplaçant cette expression dans l'équation de Poisson (2), on obtient une équation vérifiée par $V(x)$, sous la forme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{I}{\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} = \frac{K}{\sqrt{V(x)}}, \quad (6)$$

où l'on définit $K = \frac{I}{\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}}$. Bien qu'il s'agisse d'une équation différentielle non linéaire d'ordre deux, on peut sans trop de difficultés obtenir $V(x)$. On peut en effet avoir l'idée de multiplier cette équation par $2\frac{dV}{dx}$ afin de faire apparaître une dérivée connue. On obtient

$$2\frac{dV}{dx} \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = 2K \frac{dV}{dx} \frac{1}{\sqrt{V(x)}}, \quad (7)$$

que l'on intègre facilement pour obtenir

$$\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = 4K \sqrt{V(x)} + A, \quad (8)$$

où A est une constante d'intégration. En $x = 0$, nous avons supposé que $V = 0$, et en supposant qu'il n'y a pas de charges surfaciques sur la cathode, on a $E(0) = \frac{dV}{dx}(0) = 0$, et finalement

$A = 0$. Cette hypothèse revient à supposer que le champ créé par les électrodes est, au voisinage de la cathode, compensé par le champ créé par les électrons. On a alors la relation

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{K}V^{1/4}, \quad (9)$$

que l'on intègre en séparant les variables, et on obtient

$$\frac{dV}{V^{1/4}} = 2\sqrt{K}dx \Rightarrow \frac{4}{3}V^{3/4}(x) = 2\sqrt{K}x + B, \quad (10)$$

où B est une nouvelle constante d'intégration. Avec $V(0) = 0$, on a $B = 0$. On obtient ainsi

$$V(x) = \left(\frac{9K}{4}\right)^{2/3} x^{4/3} = \left(\frac{9I}{2\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (11)$$

Finalement, en écrivant cette relation pour la position de l'anode, en $x = L$, on obtient une partie de la caractéristique

$$V_A = \left(\frac{9L^2}{2\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} I^{2/3}, \quad (12)$$

où V_A est le potentiel de l'anode. On peut écrire cette relation sous la forme

$$I = PV_A^{3/2}. \quad (13)$$

On note que cette relation n'est valide que pour $V_A > 0$. En effet, afin que le courant se propage, il est nécessaire que les électrons rejoignent l'anode, ce qui n'est possible que si la différence de potentiel entre l'anode et la cathode est positive. Ainsi, le système étudié a bien les caractéristiques d'une diode.

En régime permanent, un nuage d'électrons va ainsi occuper l'espace entre les deux électrodes. Imposer un potentiel plus fort va déformer ce nuage vers l'anode, et autoriser un plus grand courant à traverser la diode.

2. Nous avons réussi à expliquer la première partie de la caractéristique. Toutefois, on constate nettement qu'à partir d'une certaine différence de potentiel, l'intensité dans la diode atteint une valeur limite, qui dépend de la température. Il apparaît ainsi un phénomène de saturation, où le courant susceptible de traverser la diode est limité par la quantité d'électrons émis par effet thermoélectrique. Ce cas correspond donc au régime où la différence de potentiel est telle que le nuage d'électrons entre les électrodes est beaucoup plus proche de l'anode, ce qui laisse un vide près de la cathode, que l'émission thermique ne peut compenser.

Comme dans la plupart des phénomènes où l'agitation thermique intervient, on peut s'attendre à ce que le courant émis par la cathode soit de la forme

$$I \propto \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right), \quad (14)$$

où ΔE est une énergie caractéristique du métal, k_B la constante de Boltzmann et T la température. L'énergie ΔE est celle nécessaire à un électron pour être arraché au métal, de telle sorte que l'effet thermoélectrique ne devient important que si $\Delta E \ll k_B T$. Cette première intuition nous permet donc d'expliquer pourquoi l'intensité seuil est une fonction croissante de la température. En réalité, il est possible de montrer que la densité surfacique de courant émise est de la forme

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right), \quad (15)$$

où A est une constante universelle. Ce résultat ne change néanmoins pas nos conclusions, et nous permet de constater que l'approximation consistant à considérer une vitesse nulle à la sortie n'est raisonnable que si la vitesse à l'arrivée sur l'anode est grande devant $\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

Ce type de diode, bien que rudimentaire, a été largement utilisé durant la première moitié du XX^e siècle, avant d'être remplacé par des diodes à base de semi-conducteurs.

Exercice 7.4 : Sphère chargée dans l'air - X PC

On considère une boule d'un conducteur parfait, chargée d'une charge q à l'instant $t = 0$. Cette boule est dans l'air de conductivité γ .

1. Expliquer le phénomène et donner l'évolution de la charge.
2. Réaliser un bilan de puissance.
3. On considère à présent deux boules identiques, de rayon R , chargées par un fil. On impose une différence de potentiel entre les deux boules, et on mesure l'intensité dans le fil. Montrer qu'avec ces données on peut calculer la conductivité de l'air.

Voici encore un exercice posé régulièrement dans différentes filières au concours de l'X. L'intérêt principal de l'exercice réside dans les différents bilans que nous allons être amenés à faire.

1. Lorsque l'on met un conducteur chargé dans l'air, on peut constater qu'il finit systématiquement par se décharger. Ceci constitue un problème lors de la réalisation d'expériences d'électrostatique. Pour expliquer ce phénomène, nous remarquons que la distribution de charge étudiée va créer un champ électrique \vec{E} dans l'air. Par la loi d'Ohm locale, ce champ va générer à son tour un courant électrique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, et donc la charge du conducteur va diminuer au cours du temps.

Le chemin de la résolution de la première question est donc tout tracé. Notons $Q(t)$ la charge de la boule à l'instant t . Vu la symétrie du problème, nous utilisons un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , d'origine le centre O de la boule. Le champ électrique créé par la boule en $r > R$ vaut

$$\vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \quad (1)$$

où l'on a noté \vec{u}_r le vecteur unitaire radial. D'après la loi d'Ohm, le vecteur densité de courant électrique est donc

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (2)$$

Ainsi, la charge électrique traversant une sphère de rayon $r > R$ centrée en O entre t et $t + dt$ est

$$dQ_{\text{ext}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt = 4\pi r^2 \frac{\gamma Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} dt = \frac{\gamma Q(t)}{\epsilon_0} dt. \quad (3)$$

Par conservation, cette charge est perdue par la boule, ainsi, on a $\frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ_{\text{ext}}}{dt}$, et donc

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t) = 0}. \quad (4)$$

Ainsi, l'équation régissant l'évolution de $Q(t)$ est une équation différentielle du premier ordre, que l'on résout en

$$Q(t) = q \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (5)$$

où $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Dans le cas de l'air, où $\gamma \simeq 5 \times 10^{-15} \text{ S.m}^{-1}$, on trouve $\tau \simeq 2 \times 10^3 \text{ s} \simeq 30 \text{ min}$. Ainsi, au bout d'une heure, une telle distribution aura perdu une part non négligeable de sa charge.

2. Voyons comment on peut retrouver l'équation précédente à partir d'un bilan de puissance. Considérons un volume $d\tau$ à l'extérieur de la sphère. Il est clair que le champ magnétique est ici nul. Ainsi, la densité d'énergie électromagnétique est

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (6)$$

Puisque le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting l'est également. Ainsi, la variation d'énergie électromagnétique sera exclusivement due à la dissipation par effet joule. Le bilan d'énergie électromagnétique dans le volume $d\tau$ s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} \frac{du_{\text{em}}}{dt} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} &= -\gamma \vec{E} \cdot \vec{E} \quad , \\ \Leftrightarrow \varepsilon_0 \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{dQ}{dt} &= -\gamma \left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

et après simplifications, on retrouve bien

$$\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} Q(t) = 0. \quad (8)$$

3. Comme indiqué dans l'énoncé, supposons que l'on relie deux sphères identiques à celle de la première partie par un fil, et que l'on impose une différence de potentiel entre les deux. Le fil est parcouru par un courant I , lié à la différence de potentiel entre les deux sphères. On note les grandeurs précédemment définies avec un indice 1 ou 2 selon que l'on considère la sphère 1 ou la sphère 2. L'idée est d'utiliser le théorème de superposition afin de se ramener à la situation précédente.

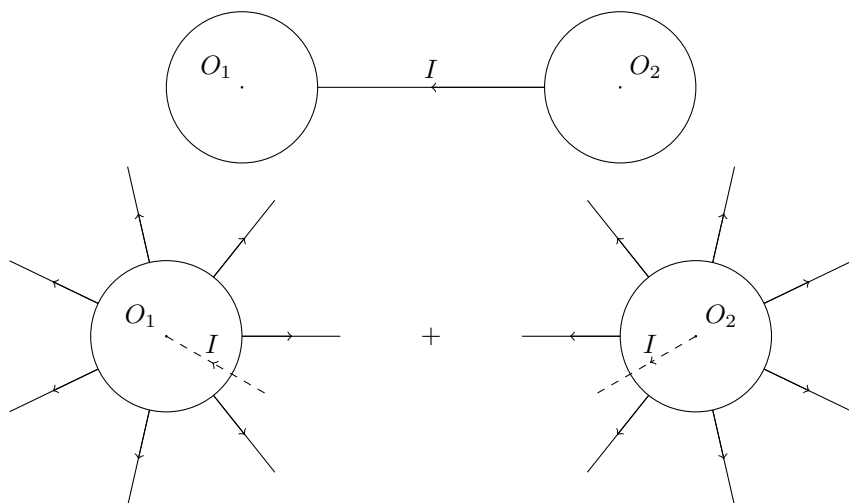


FIGURE 7.5. Problème initial et sa décomposition en deux sous-problèmes.

Ainsi, considérons pour l'instant une situation où seule la sphère 1 est présente, et qu'elle est alimentée par un courant I . Par hypothèse, nous nous plaçons donc en régime stationnaire.

Les pertes de charge dues à la conductivité non nulle de l'air sont compensées par le courant. Considérons comme précédemment une sphère de rayon $r_1 > R$. Vu l'orientation choisie pour I , le bilan précédent s'écrit

$$4\pi r_1^2 j_1(r_1) = I. \quad (9)$$

Par la loi d'Ohm, on a donc

$$\gamma E_1(r_1) = \frac{I}{4\pi r_1^2}. \quad (10)$$

Et on peut ainsi trouver la différence de potentiel créée par la première sphère aux points d'intérêts. On a

$$V_1(A) = \frac{I}{4\pi R\gamma} \quad \text{et} \quad V_1(B) = \frac{I}{4\pi(R+D)\gamma}. \quad (11)$$

On peut faire le même travail dans la situation où l'on ne considère que la deuxième sphère. La différence est que le courant est désormais sortant, et on a donc

$$\gamma E_2(r_2) = \frac{-I}{4\pi r_2^2}, \quad (12)$$

de telle sorte que les potentiels valent

$$V_2(A) = \frac{-I}{4\pi(R+D)\gamma} \quad \text{et} \quad V_2(B) = \frac{-I}{4\pi R\gamma}. \quad (13)$$

Ainsi, pour la superposition des deux situations, on a

$$\begin{aligned} V(B) - V(A) &= (V_1(B) + V_2(B)) - (V_1(A) + V_2(A)) \\ &= \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R+D} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Ainsi, dans la limite où $R \ll D$, on trouve

$$\boxed{\Delta U = V(A) - V(B) = \frac{I}{2\pi\gamma R}}, \quad (15)$$

et on peut donc trouver γ connaissant ΔU et I .

Exercice 7.5 : Potentiel moyen sur une sphère - X PC

On considère une répartition quelconque de charges, constituée de charges ponctuelles ou non, groupées en régions convexes. On imagine une sphère de rayon R qui ne coupe aucune charge. Déterminer le potentiel moyen à la surface de cette sphère.

Là encore un exercice très académique posé en fin d'oral, dont le résultat a pour conséquence intéressante que le potentiel électrostatique ne possède pas de minimum ou de maximum local dans une région vide de charge, seulement des « points-selles ». Nous discuterons cette propriété une fois le résultat obtenu.

D'après le théorème de superposition, il est clair que l'on peut se contenter d'étudier le cas d'une charge ponctuelle à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère, les deux situations étant *a priori* différentes. Deux solutions sont possibles. La première consiste à calculer cette moyenne de manière directe, ce qui est possible ici. Une deuxième, plus astucieuse, ne fait appel qu'au théorème de Gauss et à un peu d'imagination. Commençons par présenter cette deuxième option.

Considérons tout d'abord le cas où la charge est à l'extérieur de la sphère. Pour fixer les notations, on se réfère au schéma suivant.

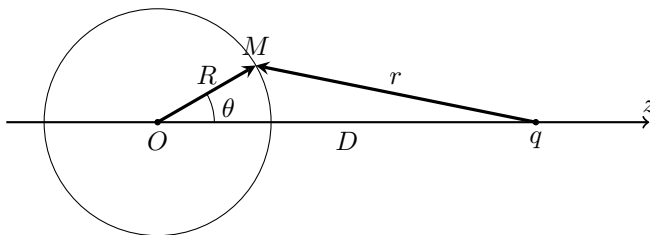


FIGURE 7.6. Sphère avec une charge à l'extérieur.

Le potentiel moyen à la surface de la sphère s'écrit

$$V_{\text{moy}} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint V(r) dS = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{r \in S} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dS, \quad (1)$$

et on remarque que cette intégrale est en réalité aisément calculable, à condition qu'on reconnaisse à quoi elle correspond. En effet, à y regarder de plus près, cette intégrale est le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface avec une densité $\frac{q}{4\pi R^2}$. Ainsi, calculer le potentiel moyen créé par la charge sur la sphère est équivalent à calculer le potentiel créé par la sphère chargée uniformément en q . D'après le théorème de Gauss, on sait que le champ électrique créé par une telle distribution à l'extérieur de la sphère est

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \quad (2)$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial. Ainsi, on en déduit le potentiel à une distance $D > R$ du centre

$$V(D) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}. \quad (3)$$

D'après notre argument sur l'expression du potentiel moyen sur la sphère, on a donc

$$V_{\text{moy}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} = V(0), \quad (4)$$

c'est-à-dire que le potentiel moyen sur la sphère vaut le potentiel au centre. Ce résultat s'étend par superposition à une distribution plus complexe.

On peut en déduire la propriété évoquée en introduction. Supposons que l'on ait une région vide de charge, et un maximum (ou un minimum) à un point M dans cette région. On peut toujours trouver une sphère centrée sur M qui ne contient aucune charge. Le potentiel moyen sur cette sphère doit être égal au potentiel en M . Pourtant, comme M est un maximum, ce potentiel moyen doit être inférieur au potentiel en M . Il y a contradiction, et le point M ne peut être un maximum.

Considérons à présent une charge à l'intérieur de la sphère. Par le même raisonnement que précédemment, le potentiel moyen à la surface de la sphère est le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface. À l'intérieur de cette sphère, on sait d'après le théorème de Gauss que ce potentiel est constant, et qu'il vaut

$$V_{\text{int}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = V_{\text{moy}}, \quad (5)$$

par continuité du potentiel.

Ainsi, pour une distribution quelconque et d'après le théorème de superposition, le potentiel moyen sur une sphère délimitant une charge intérieure Q_{int} et entourée par distribution quelconque créant un potentiel $V_{\text{ext}}(O)$ en O est

$$V_{\text{moy}} = V_{\text{ext}}(O) + \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

On peut également retrouver ce résultat en faisant le calcul directement. Considérons une charge q , à l'extérieur ou à l'intérieur de la sphère indifféremment, le potentiel créé au point M est alors

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos\theta}}, \quad (7)$$

et le potentiel moyen se calcule

$$V_{\text{moy}} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos\theta}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos\theta}}. \quad (8)$$

Pour calculer cette intégrale, on fait alors le changement de variable $x = \cos\theta$, et on reconnaît directement

$$\begin{aligned} V_{\text{moy}} &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos\theta}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{DR} \left[\sqrt{R^2 + D^2 - 2DR\cos\theta} \right]_0^\pi \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{DR} \left[\sqrt{R^2 + D^2 + 2DR} - \sqrt{R^2 + D^2 - 2DR} \right] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{DR} [(D+R) - |D-R|]. \end{aligned} \quad (9)$$

Alors, si la charge est à l'extérieur, on a $D > R$ et $[(D+R) - |D-R|] = 2R$, et

$$V_{\text{moy}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{2R}{DR} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} = V_{\text{ext}}(O), \quad (10)$$

tandis que si la charge se trouve à l'intérieur $[(D+R) - |D-R|] = 2D$ et

$$V_{\text{moy}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{2D}{DR} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (11)$$

Et on retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 7.6 : Magnétorésistance - Ulm MP

Dans cet exercice, on se propose d'étudier l'effet de magnétorésistance, c'est-à-dire les variations de résistance d'un matériau lorsqu'il est soumis à un champ magnétique.

1. Expliquer à quoi est due la conduction dans certains métaux en présence d'un champ électrique \vec{E} . Afin d'expliquer la résistance de ces métaux, on modélise l'action du réseau sur les porteurs de charge par une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Déterminer alors la conductivité γ du métal.

On considère un disque conducteur ayant la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres de même axe, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 et d'épaisseur a . On maintient entre les deux cylindres une différence de potentiel constante $V = V_1 - V_2$ en imposant un champ électrique radial à l'intérieur du disque.

2. Déterminer la résistance R_0 du dispositif.

On applique désormais un champ magnétique constant et uniforme dirigé selon l'axe du disque.

3. Déterminer la nouvelle résistance R_1 du dispositif.

Voici un exercice d'électromagnétisme assez complet, qui va nous permettre de rappeler un certain nombre de propriétés des conducteurs, et de voir la façon dont les modèles usuels sont

modifiés en présence d'un champ magnétique. La première partie, souvent vue en cours, est l'occasion de présenter le modèle de Drude de conduction dans les métaux.

1. La conduction dans les métaux est due au mouvement des porteurs de charge, en l'occurrence des électrons « de conduction », au sein du métal que l'on modélise par un réseau constitué de charges positives fixes. En présence d'un champ électrique \vec{E} , la force électrique va induire une dérive de l'ensemble des électrons par rapport au réseau, c'est-à-dire que le matériau est conducteur. En notant \vec{j} le vecteur densité de courant électrique, la conductivité est définie par la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Les interactions entre les électrons du réseau sont modélisées en leur affectant une masse effective m , différente de celle des électrons dans le vide, et comme indiqué par une force de frottement $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$.

Ainsi, appliquons le principe fondamental de la dynamique à un électron de conduction. On obtient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \alpha \vec{v}, \quad (1)$$

qui se résout aisément en

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 + \frac{e}{\alpha} \vec{E} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{e}{\alpha} \vec{E}. \quad (2)$$

On voit ainsi apparaître un temps caractéristique d'amortissement $\tau = \frac{m}{\alpha}$. Une fois le régime permanent en place, la solution statique est

$$\vec{v} = -\frac{e}{\alpha} \vec{E} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}. \quad (3)$$

En notant n la densité volumique des électrons de conduction, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = -en \vec{v} = \frac{ne^2}{\alpha} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}. \quad (4)$$

On obtient alors l'expression de la conductivité

$$\boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}. \quad (5)$$

On peut en déduire un ordre de grandeur de $\tau = \frac{\gamma m}{ne^2}$, par exemple dans le cuivre. La charge des électrons est $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, et on suppose que leur masse effective est proche de celle dans le vide $m = m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg. On suppose que l'on a un électron de conduction par atome, de telle sorte que

$$n = \frac{\rho \mathcal{N}_A}{M}. \quad (6)$$

Avec $\rho = 9 \times 10^3$ kg.m⁻³ la masse volumique, $M = 63,5$ g.mol⁻¹ la masse molaire et $\mathcal{N}_A = 6 \times 10^{23}$ mol⁻¹ le nombre d'Avogadro, on trouve $n \simeq 10^{29}$ m⁻³. Avec une conductivité du cuivre pur de l'ordre de $\gamma = 6 \times 10^7$ S.m⁻¹, on trouve finalement

$$\tau \simeq 2 \times 10^{-14} \text{ s}. \quad (7)$$

Aux échelles de temps « habituelles », par exemple pour des ondes ayant des fréquences $f \ll 10^{14}$ Hz, on peut donc considérer que l'on est en régime permanent.

2. Considérons le système représenté dans le schéma 7.7.

Afin de déterminer la résistance du système, il va nous falloir trouver une relation entre un courant global I et la différence de potentiel V . Pour cela, on peut utiliser la loi d'Ohm locale que nous venons de démontrer. Remarquons qu'une analyse des symétries et invariances aurait pu nous aiguiller vers un champ électrique radial si cette dernière information n'était pas précisée.

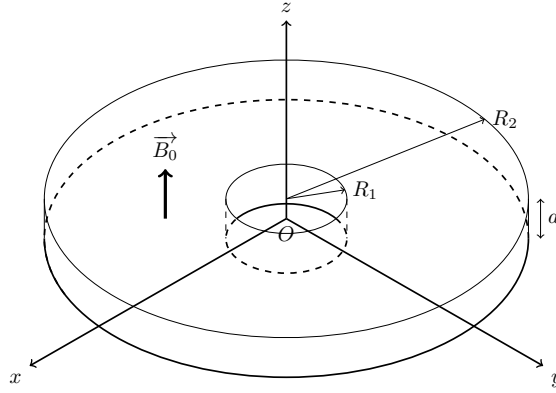


FIGURE 7.7. Schéma du dispositif.

Dans un premier temps, on souhaite définir le courant qui passe dans l'anneau. Un tel courant est bien défini car l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = 0$ dans le conducteur neutre et la loi d'Ohm nous donnent

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (8)$$

Ainsi, le vecteur densité de courant est à flux conservatif. Puisque \vec{E} est radial, $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$, et le courant qui traverse l'anneau Σ d'épaisseur a , à une distance r du centre est

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_{z=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} j(r) r d\theta dz = 2\pi r a j(r). \quad (9)$$

Nous avons donc obtenu que $\vec{j} = \frac{I}{2\pi a r} \vec{u}_r$, et donc

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi a \gamma r} \vec{u}_r. \quad (10)$$

Afin de relier I à la différence de potentiel, sachant que l'on connaît V_1 et V_2 , on va bien entendu utiliser la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$, ce qui donne

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi a \gamma r}. \quad (11)$$

En intégrant cette relation entre R_1 et R_2 , on obtient

$$V_2 - V_1 = -\frac{I}{2\pi a \gamma} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \quad (12)$$

et avec notre définition de U , on obtient

$$U = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi a \gamma} I, \quad (13)$$

et donc la résistance de l'anneau est

$$R_0 = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi a \gamma}. \quad (14)$$

3. Supposons à présent que l'on applique un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. On va supposer que \vec{E} reste radial, ce qui reste *a priori* valable puisque l'on a les mêmes invariances et symétries que précédemment. En revanche, on ne va plus pouvoir affirmer que \vec{j} est radial, et il va nous falloir faire un raisonnement microscopique analogue au précédent pour trouver \vec{j} ,

et en particulier sa composante radiale. Ainsi, écrivons à nouveau le principe fondamental de la dynamique en régime permanent pour un électron de conduction. On obtient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -\alpha \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B} - e \vec{E}. \quad (15)$$

On peut réexprimer cette équation en termes de \vec{j} , et on obtient

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} - \frac{1}{ne} \vec{B} \wedge \vec{j}. \quad (16)$$

Puisque \vec{E} est radial et que $\vec{B} \wedge \vec{j}$ est perpendiculaire à \vec{u}_z , on peut déjà affirmer que \vec{j} n'a pas de composante selon \vec{u}_z . En écrivant j_r et j_θ les composantes du vecteur densité de courant, on a

$$\vec{B} \wedge \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -j_\theta B_0 \vec{u}_r + j_r B_0 \vec{u}_\theta. \quad (17)$$

Ainsi, on peut écrire l'équation vectorielle précédente en fonction des composantes de \vec{j} , sous la forme

$$\begin{cases} E_r = \frac{1}{\gamma} j_r + \frac{B_0}{ne} j_\theta, \\ 0 = \frac{1}{\gamma} j_\theta - \frac{B_0}{ne} j_r. \end{cases} \quad (18)$$

La seconde équation peut facilement se réécrire

$$j_\theta = \frac{B_0 \gamma}{ne} j_r \quad (19)$$

de telle sorte que l'on obtient immédiatement

$$E_r = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2} \right) j_r. \quad (20)$$

On peut alors déterminer la résistance de la même manière qu'en l'absence de champ magnétique. Le courant qui passe à travers la même surface Σ que précédemment est

$$I = 2\pi r a j_r, \quad (21)$$

de telle sorte que

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2} \right) \frac{I}{2\pi r a} \vec{u}_r. \quad (22)$$

En intégrant comme précédemment, on trouve

$$\frac{U}{I} = R = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\gamma a} \left(1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2} \right) = R_0 \left(1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2} \right). \quad (23)$$

Finalement, la résistance a été augmentée d'un facteur $\left(1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2} \right)$. On parle d'effet de magnétorésistance, puisque la résistance électrique du disque dépend du champ magnétique appliqué. On peut ensuite quantifier la variation relative de résistance

$$\Delta R = \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2}. \quad (24)$$

Dans le cas du cuivre, avec $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $\gamma = 6 \times 10^7$, pour un champ magnétique fort $B_0 = 1 \text{ T}$, on trouve

$$\Delta R \simeq 10^{-5}. \quad (25)$$

Dans un métal ordinaire, cet effet est donc négligeable. Dans certains semi-conducteurs, avec une conductance plus faible mais une densité de porteurs de charges beaucoup plus faible, la variation peut être de l'ordre du pourcent.

Finalement, voyons une interprétation moins calculatoire de cet effet. Intuitivement, le champ magnétique va dévier les électrons de leur trajectoire radiale, et pour transporter le courant I , les porteurs de charge vont donc devoir parcourir un plus grand chemin, et donc on va avoir plus de pertes dues aux interactions avec le réseau.

Montrons que l'on peut ainsi retrouver le résultat précédent en raisonnant sur une ligne de courant. Nous avons vu que $j_\theta = \frac{B_0\gamma}{ne} j_r$, et on va pouvoir facilement en déduire l'allure des lignes de courant $l(r, \theta)$. Ces dernières sont définies par $\vec{dl} = k \vec{j}$, où k est une constante. On a ainsi

$$\frac{dr}{j_r} = \frac{rd\theta}{j_\theta} \Rightarrow \frac{j_\theta}{j_r} dr = \frac{B_0\gamma}{ne} dr = rd\theta \quad (26)$$

Cette équation s'intègre facilement, et on obtient

$$\frac{B_0\gamma}{ne} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \theta - \theta_0, \quad (27)$$

où (r_0, θ_0) est un point de référence. Ainsi, les lignes de courant sont définies par l'équation polaire

$$r = r_0 \exp\left(\frac{ne}{B_0\gamma}(\theta - \theta_0)\right), \quad (28)$$

dont l'allure est présentée dans la figure 7.8. Des courbes de cette forme sont appelées spirales logarithmiques.

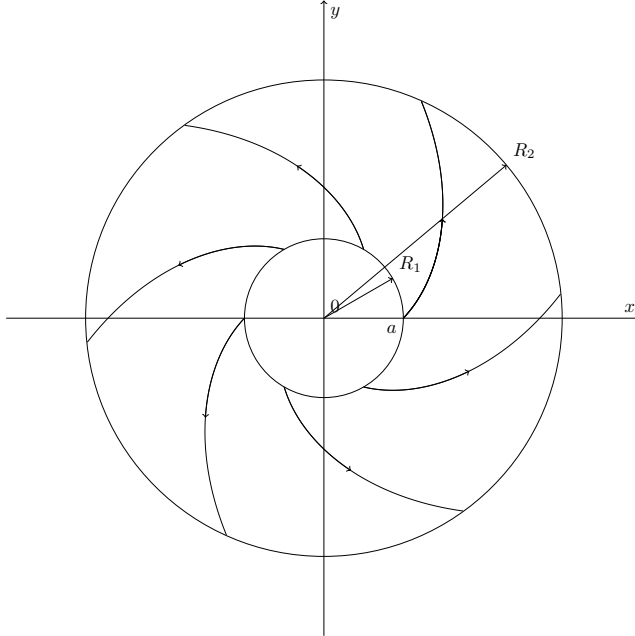


FIGURE 7.8. Allure des lignes de courant.

De plus, la relation entre j_r et j_θ signifie que les lignes de courant font un angle θ_j constant avec le vecteur \vec{u}_r . Cet angle vérifie

$$\tan \theta = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{B_0\gamma}{ne}. \quad (29)$$

Finalement, les électrons se déplacent le long des lignes de courant, et parcourent une distance

$$\begin{aligned} L &= \int dl = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r d\theta}{dr}\right)^2} dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2}} dr = \sqrt{1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2}} (R_2 - R_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Ainsi, les électrons parcourent une distance plus grande d'un facteur $\sqrt{1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2}}$ en présence du champ magnétique. La puissance dissipée par la force de frottement, correspondant ici à l'effet Joule, est proportionnelle à \vec{v}^2 . En présence d'un champ magnétique, cette puissance est ainsi multipliée par $1 + \frac{B_0^2 \gamma^2}{n^2 e^2}$, tout comme la résistance, et on retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 7.7 : Échanges avec le champ électromagnétique - Ulm MP

Dans cet exercice, nous proposons d'étudier deux situations où les lois de conservation des quantités mécaniques ne sont apparemment pas respectées.

1. On considère un condensateur plan carré de côté L formé de deux armatures distantes de $h \ll L$ et on suppose que les charges sont à tout instant fixes sur les armatures, de répartition σ et $-\sigma$. On applique un champ \vec{B} parallèle aux armatures et initialement égal à \vec{B}_0 . On ramène ensuite \vec{B}_0 à $\vec{0}$ pendant une durée transitoire τ .

- Trouver une distribution de courant permettant d'obtenir ce champ magnétique.
- Que fait le condensateur au bout de τ ? Calculer sa variation d'impulsion.
- Comment justifier que le système, pourtant isolé, voit son impulsion varier?
- (Complément) Trouver alors l'expression de la quantité de mouvement de la source donnant son impulsion au condensateur, et faire un bilan de quantité de mouvement.

2. On considère un condensateur cylindre semi-infini de charge Q (resp. $-Q$) sur la surface extérieure (resp. intérieure) et on applique un champ \vec{B} suivant son axe. Initialement \vec{B} est à \vec{B}_0 puis on le fait tendre vers $\vec{0}$.

- Proposer une distribution de courant permettant d'obtenir ce champ magnétique.
- Que se passe-t-il? Comment justifier la variation de moment cinétique alors que le système est isolé?
- (Complément) Procéder à un bilan de moment cinétique.

Voici un exercice relativement conventionnel dans sa résolution, mais dont les conséquences sont rarement abordées en classes préparatoires. Il sera pour nous l'occasion de présenter quelques calculs de champs élémentaires, tout en rappelant les méthodes usuelles qui utilisent les formes intégrées des équations de Maxwell. Nous allons voir deux situations où *a priori*, les quantités de mouvement et moment cinétique de systèmes matériels ne sont pas conservés. Nous allons voir que ce paradoxe est aisément levé lorsque l'on considère le système dans son ensemble.

1. Considérons ainsi un condensateur plan de côté L , dont les armatures sont séparées de $h \ll L$ et chargées en surface avec une densité $\pm\sigma$, comme dans le schéma 7.9 suivant. Négliger l'épaisseur du condensateur devant la longueur de ses côtés revient à considérer un condensateur infini, hypothèse que nous ferons implicitement dans la suite. Supposons que

l'on applique un champ magnétique uniforme \vec{B} parallèle aux armatures, par exemple dans la direction x .

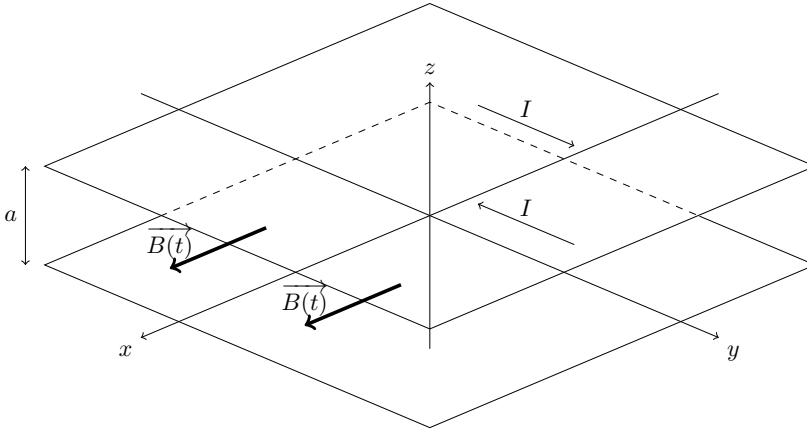


FIGURE 7.9. Condensateur chargé surfaciquement placé dans un champ magnétique variable parallèle aux armatures.

a. Pour obtenir un tel champ, la distribution la plus simple que l'on puisse considérer est probablement d'avoir un courant surfacique uniforme $j_s \vec{u}_y$ dans l'armature du haut, et $-j_s \vec{u}_y$ dans l'armature du bas. Considérons une seule armature, où l'on place l'origine O . Pour tout point M , le plan Myz passant par M et engendré par les vecteur \vec{u}_y et \vec{u}_z est un plan de symétrie de la distribution. Le champ \vec{B} est orthogonal à ce plan, et est donc dirigé selon \vec{u}_x . Par invariance par translation le long des axes x et y , il ne dépend que de z . Ainsi, on a

$$\vec{B} = B_0(z) \vec{u}_x. \quad (1)$$

Considérons alors un contour élémentaire autour d'un point $M(x, y, z)$, sous forme d'une boucle rectangulaire dans le plan Mxz , de longueur dx dans la direction x et dz dans z . La circulation de \vec{B} le long de ce contour est

$$\mathcal{C}_{\vec{B}} = (B(z + dz) - B(z)) dx. \quad (2)$$

D'après le théorème d'Ampère, cette circulation est nulle sauf si le contour coupe la distribution de courants. Ainsi, le champ va être uniforme au-dessus et en dessous de l'armature. Cette dernière étant un plan de symétrie de la distribution, le champ magnétique doit être impair par rapport à z . On obtient ainsi

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{B_0}{2} \vec{u}_x & \text{pour } z < 0, \\ -\frac{B_0}{2} \vec{u}_x & \text{pour } z > 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $\frac{B_0}{2}$ est une constante. En considérant que le courant surfacique a une valeur opposée sur l'autre armature, on obtient bien un champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$ entre les armatures.

b. En faisant varier le courant dans les nappes, on peut obtenir un champ magnétique variable à l'intérieur du condensateur. Par un effet d'induction, ce champ magnétique variable va créer un champ électrique, dont l'action mécanique sur les charges des armatures va mettre le condensateur en mouvement. Voyons à présent comment quantifier cet effet.

Le champ induit \vec{E}_1 a des propriétés de symétrie et d'invariance cohérentes avec celles du champ magnétique qui en est la source, et donc avec la distribution de courant précédemment

considérée. Pour un point M à l'intérieur du condensateur, le plan Mxz est un plan d'antisymétrie de la distribution, auquel \vec{E}_1 doit être orthogonal, donc dirigé selon \vec{u}_y . De plus, par invariance par translation le long des axes Ox et Oy , le champ \vec{E} ne dépend que de z . Ainsi, on a

$$\vec{E}_1 = E_1(z)\vec{u}_y. \quad (4)$$

Afin de trouver \vec{E}_1 , l'idée est d'utiliser la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathcal{C}_{\vec{E}} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}, \quad (5)$$

où $\Phi_{\vec{B}}$ est le flux du champ magnétique à travers un circuit et $\mathcal{C}_{\vec{E}}$ la circulation du champ électrique le long de son contour.

Considérons encore une fois une boucle infinitésimale Γ rectangulaire autour d'un point $M(x, y, z)$ de longueur dx dans la direction x et dz dans la longueur z , orientée dans le sens des x croissants.

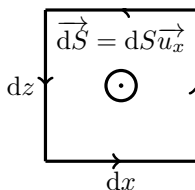


FIGURE 7.10. Boucle infinitésimale Γ .

La circulation de \vec{E}_1 sur Γ vaut

$$\mathcal{C}_{\Gamma} = -E_1(z + dz)dx + E_1(z)dx \quad (6)$$

et le flux de \vec{B} vaut

$$\Phi_{\vec{B}} = B(t)dx dy. \quad (7)$$

Ainsi, la loi de Faraday donne

$$\frac{dE_1}{dz} = \frac{dB}{dt}, \quad (8)$$

et on en déduit facilement que

$$E_1(z) = \frac{dB}{dt}z + C, \quad (9)$$

où C est une constante. Puisque le plan Oxy est un plan d'antisymétrie de la distribution, la fonction $E_1(z)$ doit être impaire, et donc $C = 0$.

La force due à ce champ qui s'applique sur le condensateur est

$$\vec{F}_E = \left(+\sigma S \frac{h}{2} - \sigma S \frac{-h}{2} \right) \frac{dB}{dt} \vec{u}_y = \sigma S h \frac{dB}{dt} \vec{u}_y. \quad (10)$$

La variation de quantité de mouvement entre l'instant initial et l'annulation du champ est finalement

$$\vec{\Delta P} = \int_0^{\tau} \vec{F}_E = \sigma S h (0 - B_0) \vec{u}_y = -\sigma S h B_0 \vec{u}_y. \quad (11)$$

Ainsi, au bout d'un temps τ , le condensateur est mis en mouvement dans la direction orthogonale au champ magnétique et parallèle à ses armatures.

Il nous incombe de faire une remarque. Nous avons choisi d'intégrer directement l'équation précédente, sans considérer la dynamique au cours du temps. En effet, nous avons considéré un champ électrique variable, qui va à son tour créer un champ magnétique variable, et ainsi

de suite. En toute généralité, il faut donc considérer l'infinité des champs créés par induction. Toutefois, l'utilisation d'équation

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (12)$$

afin de calculer l'amplitude du champ induit E_1 va donner un résultat diminué d'un facteur de l'ordre $\frac{\hbar}{\tau c^2}$, et surtout une dérivée temporelle supplémentaire à chaque ordre. Ainsi, puisque les dérivées temporelles de B_0 sont nulles à $t = 0^-$ et à $t = \tau^+$, les contributions d'ordre supérieur ne provoquent pas de changement de quantité de mouvement. Nous allons retrouver ce résultat dans la suite.

c. Il semble assez étonnant qu'un système flottant seul dans l'espace se mette à se mouvoir sans action extérieure apparente. Toutefois, ce système n'est isolé que matériellement, et interagit avec le champ électromagnétique. Tout comme il possède une énergie, le champ électromagnétique possède une quantité de mouvement et un moment cinétique. Ici l'apparent gain d'impulsion dans la direction y du condensateur est compensé par une perte pour le champ électromagnétique.

d. En guise de complément, nous donnons dans la suite une méthode permettant de trouver la densité de quantité de mouvement du champ électromagnétique. Le plus simple est d'utiliser un modèle corpusculaire pour une onde électromagnétique plane. Considérons ainsi une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. On note \vec{u} la direction de propagation du champ, c'est-à-dire tel que $\vec{k} = k \vec{u}$. Dans le vide, on peut facilement démontrer avec les équations de Maxwell que

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}. \quad (13)$$

On peut alors calculer la densité d'énergie électromagnétique

$$\begin{aligned} u_{\text{em}}^o &= \frac{1}{2} \left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{c^2 \mu_0} + \varepsilon_0 E^2 \right) \\ &= \varepsilon_0 E^2, \end{aligned} \quad (14)$$

et le vecteur de Poynting

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{c \mu_0} \\ &= \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = c u_{\text{em}}^o \vec{u}. \end{aligned} \quad (15)$$

Du point de vue corpusculaire, l'énergie d'un photon associé à cette onde est $\hbar \omega$, où \hbar est la constante de Planck réduite. En notant n la densité de photons, la densité d'énergie est

$$u_{\text{em}}^p = n \hbar \omega. \quad (16)$$

De la même manière, la quantité de mouvement d'un photon est $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}$, et donc la densité de quantité de mouvement des photons est

$$\vec{p} = n \hbar \vec{k} = \frac{n \hbar \omega}{c} \vec{u} = \frac{u_{\text{em}}^p}{c} \vec{u}. \quad (17)$$

En identifiant la quantité de mouvement et l'énergie des photons à celles de l'onde, on a

$$\vec{p} = \frac{u_{\text{em}}}{c} \vec{u} = \frac{\Pi}{c^2} \vec{u} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (18)$$

Avec ce résultat, nous pouvons faire un bilan de quantité de mouvement sur le système. Avant de faire varier le champ magnétique, à $t = 0^-$, on est bien en présence d'un champ magnétique B_0 et d'un champ électrique E_0 , créé par les charges sur les armatures. Ce champ se calcule facilement, par exemple par le théorème de Gauss, et on obtient

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z. \quad (19)$$

Ainsi, à $t = 0^-$, la quantité de mouvement électromagnétique contenue entre les armatures du condensateur est

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{em}}(0^-) &= \varepsilon_0 \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 Sh \\ &= SH \sigma \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x \\ &= -Sh \sigma B_0 \vec{u}_y.\end{aligned}\quad (20)$$

Pour $t > \tau$, il n'y a plus de champ magnétique, donc la densité de quantité de mouvement à l'intérieur du condensateur est nulle. En comparant au résultat précédent, on a bien

$$\vec{\Delta p}_{\text{em}} = \vec{\Delta p}_{\text{cond}}. \quad (21)$$

où Δp_{cond} est la variation de quantité de mouvement du condensateur. Le résultat est donc cohérent.

2. Soit à présent un cylindre de charge surfacique σ , de longueur L et de rayon $R \ll L$. Grâce à cette hypothèse, nous allons supposer le cylindre infini. Considérons ainsi que l'on applique un champ magnétique selon l'axe du cylindre. Comme précédemment, ce champ magnétique va provoquer l'apparition d'un champ électrique, qui va mettre en mouvement le cylindre. La figure 7.11 suivante représente le cylindre et le système de coordonnées cylindriques utilisé.

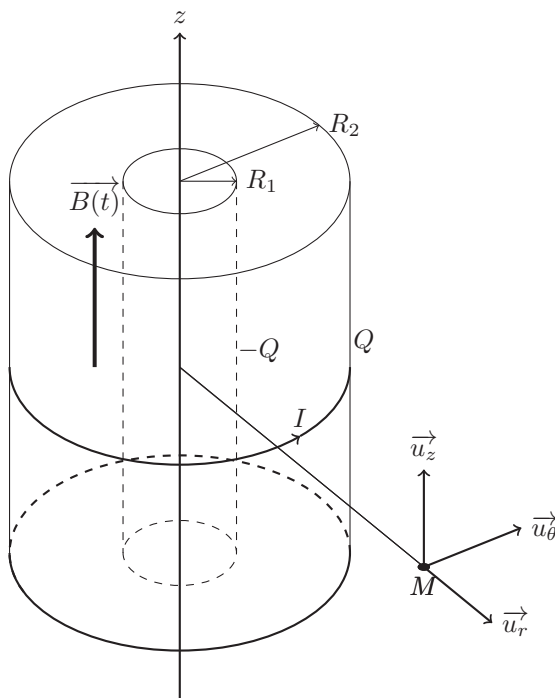


FIGURE 7.11. Condensateur cylindrique placé dans un champ magnétique variable parallèle à l'axe.

a. Afin d'obtenir un champ magnétique uniforme et parallèle à l'axe du condensateur, nous pouvons bien entendu penser au champ créé par un solénoïde infini, c'est-à-dire que l'on considère une distribution surfacique de courant de la forme $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_\theta$, s'enroulant autour du cylindre extérieur. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que le champ créé par une

telle distribution, en admettant qu'il est nul à l'extérieur du condensateur, est de la forme recherchée

$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z. \quad (22)$$

b. Comme dans le cas du condensateur plan, le champ magnétique variable va provoquer l'apparition d'un champ électrique \vec{E}_1 . Ce dernier possède des propriétés de symétrie cohérentes avec celles du champ magnétique qui induit son apparition. Par invariance par translation le long de l'axe, et par rotation autour du même axe, il est clair que le champ électrique ne dépend que de r . Pour un point M quelconque, le plan passant par l'axe Oz contenant M est un plan d'antisymétrie de la distribution, auquel le champ électrique est orthogonal, c'est-à-dire selon \vec{u}_θ . Finalement, le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_1 = E_1(r, t) \vec{u}_\theta. \quad (23)$$

Comme précédemment, nous allons utiliser la loi de Faraday pour trouver l'expression de E_1 . Ici, deux méthodes sont possibles : on peut considérer soit un contour élémentaire, soit un contour global. La deuxième solution est moins calculatoire, donc plus avantageuse en temps limité. Dans un souci de pédagogie, nous présentons les deux méthodes.

Considérons ainsi un contour circulaire de rayon r , centré sur l'axe et dans un plan orthogonal à ce dernier. La circulation de \vec{E}_1 le long du contour vaut

$$\mathcal{C}_{\vec{E}_1} = 2\pi r E_1(r, t), \quad (24)$$

tandis que le flux de \vec{B} à travers le contour vaut

$$\Phi_B(t) = \begin{cases} \pi r^2 B(t) & \text{si } r < R_2, \\ \pi R_2^2 B(t) & \text{si } r > R_2. \end{cases} \quad (25)$$

D'après la loi de Faraday, on a alors

$$E_1(r, t) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} & \text{si } r < R_2, \\ -\frac{R_2^2}{2r} \frac{dB}{dt} & \text{si } r > R_2. \end{cases} \quad (26)$$

Voyons comment on peut retrouver ce résultat, et considérons un contour élémentaire entre r et $r + dr$, et θ et $\theta + d\theta$, orienté de telle sorte que le flux de \vec{B} soit positif, comme représenté dans la figure 7.12.

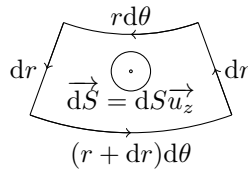


FIGURE 7.12. Contour infinitésimal et son orientation.

La circulation de \vec{E}_1 le long du contour vaut

$$\mathcal{C}_{\vec{E}_1} = -r d\theta E_1(r, t) + (r + dr) d\theta E_1(r + dr, t) = \frac{\partial(r E_1)}{\partial r} dr d\theta, \quad (27)$$

et nous venons de retrouver une partie de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques. Le flux de \vec{B} à travers le contour vaut

$$\Phi_B(t) = \begin{cases} r d\theta dr B(t) & \text{si } r < R_2, \\ 0 & \text{si } r > R_2. \end{cases} \quad (28)$$

D'après la loi de Faraday, on a alors

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_1)}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{dB}{dt} & \text{si } r < R_2, \\ 0 & \text{si } r > R_2, \end{cases} \Rightarrow E_1(r, t) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} + \frac{C_1}{r} & \text{si } r < R_2, \\ \frac{C_2}{r} & \text{si } r > R_2, \end{cases} \quad (29)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. Le champ ne peut diverger en $r = 0$ donc $C_1 = 0$. Puisque nous ne nous intéressons ici qu'au champ créé par une distribution de courant, le champ doit être continu en $r = R_2$. Même en présence de charges surfaciques, on peut démontrer que le champ électrique, ici tangentiel à la surface, doit être continu (mais ce résultat est hors programme). Il vient ainsi

$$C_2 = -\frac{R_2^2}{2} \frac{dB}{dt}, \quad (30)$$

et l'on retrouve bien l'expression du champ trouvée précédemment.

Calculons à présent l'action mécanique due à l'apparition du champ électrique induit \vec{E}_1 . La force qui s'applique sur une surface élémentaire dS du cylindre intérieur en (R_1, θ, z) est

$$\overrightarrow{dF_E}(R_1, \theta, z) = -\left(-\frac{Q}{S}\right) dS \frac{R_1}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta, \quad (31)$$

où l'on a noté S la surface totale du cylindre. Par symétrie, la résultante de la force électrique qui s'applique sur ce cylindre est nulle. Ainsi, il est clair que l'action mécanique du champ électrique va se résumer à un couple. Le moment de la force précédente par rapport à l'axe Oz vaut alors

$$\mathcal{M}_{z_{\vec{F}_E, R_1}} = Q \frac{R_1^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (32)$$

De la même manière, le couple qui va s'exercer sur une portion de hauteur h du cylindre extérieur du condensateur va s'écrire

$$\mathcal{M}_{z_{\vec{F}_E, R_2}} = -Q \frac{R_2^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (33)$$

Ainsi, le couple total qui va s'exercer sur le condensateur est

$$\Gamma(t) = -Q \left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right) \frac{dB}{dt}. \quad (34)$$

Finalement, entre l'instant initial et τ , le condensateur va gagner un moment cinétique

$$\Delta \mathcal{L} = Q \left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right) B_0 \quad (35)$$

par rapport à son axe.

c. De la même manière que le condensateur précédent a vu sa quantité de mouvement varier alors qu'il semblait isolé, ici c'est le moment cinétique qui varie. Cette fois, c'est le moment cinétique du champ électromagnétique qui a été transféré au système matériel. Comme précédemment, on pourrait argumenter que le champ électrique variable \vec{E}_1 va à son tour créer un champ magnétique \vec{B}_1 , et ainsi de suite. De la même manière que pour le condensateur plan, on pourrait montrer que ces champs ne contribuent pas à la variation de moment cinétique.

En conclusion, ces deux expériences font apparaître une situation paradoxale, qui peut aisément être levée si l'on considère que le champ électromagnétique possède en plus d'une énergie, une quantité de mouvement et un moment cinétique. Les systèmes précédents ne sont isolés qu'en apparence, puisqu'ils interagissent avec le champ électromagnétique. Lorsque l'on considère l'ensemble du système, c'est-à-dire le cylindre ou le condensateur et le champ électromagnétique, on peut prouver que la quantité de mouvement et le moment cinétique

sont conservés. Finalement, nous avons vu que la quantité de mouvement \vec{p}_{em} du champ électromagnétique s'exprime

$$\vec{p}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (36)$$

Nous pouvons alors définir une densité de moment cinétique du champ électromagnétique par rapport au point O

$$\vec{\ell}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{\text{em}}, \quad (37)$$

ce qui permet de manière générale de réaliser des bilans de moment cinétique.

Dans le cas étudié, le système possède initialement un champ électrique créé par les charges des deux armatures. On peut aisément le calculer grâce au théorème de Gauss, et on obtient, pour un cylindre de hauteur h ,

$$\vec{E}_0(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr} \vec{e}_r. \quad (38)$$

On en déduit alors la densité de quantité de mouvement du champ dans le condensateur

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{Q}{2\pi hr} \vec{e}_r \wedge B_0 \vec{e}_z = -\frac{QB_0}{2\pi hr} \vec{e}_\theta, \quad (39)$$

puis sa densité de moment cinétique

$$\vec{\ell}_0 = r \vec{e}_r \wedge \left(-\frac{QB_0}{2\pi hr} \right) \vec{e}_\theta = -\frac{QB_0}{2\pi h} \vec{e}_z. \quad (40)$$

On peut finalement en déduire le moment cinétique du champ présent dans le cylindre à l'instant initial en calculant

$$\vec{\mathcal{L}}_0 = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r h \vec{\ell}_0 dr = -QB_0 \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \vec{e}_z. \quad (41)$$

On retrouve bien le moment cinétique gagné par le condensateur lorsque l'on éteint le champ magnétique, et notre raisonnement est donc cohérent.

Exercice 7.8 : Ondes gravitationnelles - Ulm PC/MP

On montre le signal mesuré sur l'interféromètre LIGO correspondant aux ondes gravitationnelles émises par la fusion d'un système binaire de trous noirs. Calculer la masse des trous noirs.

Remarque : à l'époque où il a été posé, ce problème faisait appel à des connaissances de MP/PC. Désormais, l'étude du dipôle rayonnant est réservé à la seule filière MP.

Stricto sensu, c'est une question qui peut sembler complètement inaccessible pour un élève de CPGE. La résolution rigoureuse de cette question passe naturellement par le formalisme de la relativité générale. Cependant, en faisant astucieusement usage d'analogies et d'un peu d'analyse dimensionnelle, on peut parvenir à retrouver le résultat sur lequel s'appuie cet exercice, appelée formule du quadrupôle d'Einstein.

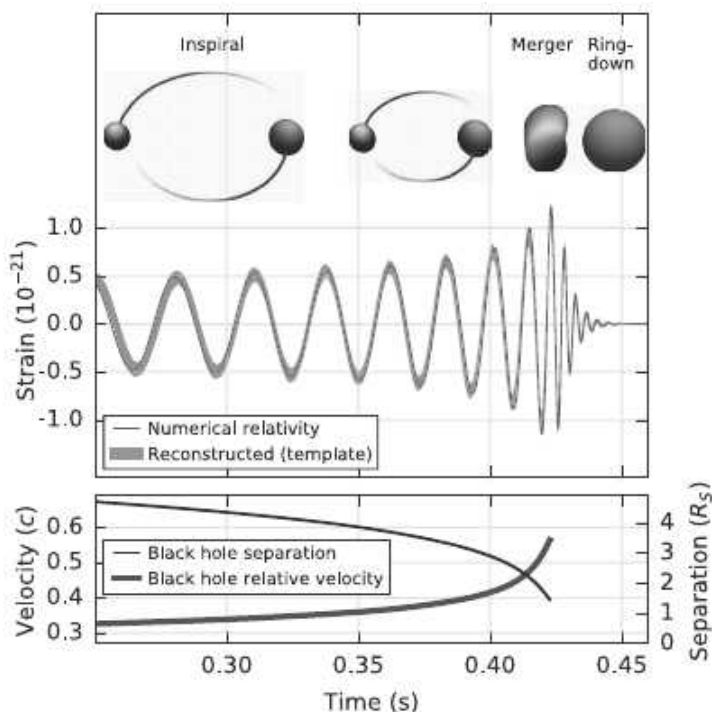


FIGURE 7.13. Signal GW150914 observé par LIGO.



Quelques pistes...

1. On parle parfois de « rayonnement » gravitationnel. Faire une analogie avec un autre système rayonnant connu.
2. Peut-on former un dipôle avec des masses ? Proposer une quantité pertinente pour le remplacer, et sur un exemple simple (deux masses m séparées d'une distance r), calculer le champ de gravitation créé par ce système. En déduire son potentiel gravitationnel.
3. Par analogie, établir le potentiel gravitationnel rayonné à grande distance. En supposant que la déformation des objets est liée à ce potentiel gravitationnel, déduire un lien entre la masse du trou noir et les données de la figure.
4. Conclure en exploitant les données, et en raisonnant sur le rayon des trous noirs (en s'appuyant sur la notion de vitesse de libération).

1. L'idée de départ est de comprendre pourquoi et comment un système gravitationnel peut rayonner de l'énergie (donc des ondes). Le mot-clé ici est *rayonnement*, et le seul système connu en classe préparatoire qui rayonne est le dipôle oscillant.

Or, comme on le sait, l'électromagnétisme et la gravitation ne sont pas exempts d'analogies. On va essayer de les mettre à profit afin d'obtenir une formule reliant la masse des trous noirs émettant les ondes gravitationnelles et l'amplitude du signal mesuré par LIGO. La différence principale entre l'électromagnétisme et la gravitation, l'absence de masses négatives,

signifie que l'on ne va pouvoir avoir une structure dipolaire. Ainsi, il va falloir pousser le développement plus loin, ce qui va permettre de retrouver le champ quadrupolaire.

Commençons par nous rappeler que le champ électrique du dipôle rayonnant à une distance $r \ll a$ est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \sin \theta \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}_\theta, \quad (1)$$

où l'on s'est placé dans un repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec z l'axe passant par les deux charges. On reconnaît l'aspect important du rayonnement dipolaire : l'existence d'une dérivée seconde du moment dipolaire, et la dépendance en $1/r$. C'est cette dernière qui permet d'avoir un vecteur de Poynting en $1/r^2$ qui donne une énergie constante sur une sphère de rayon r .

Pour ce qui est de la gravitation, l'analogue du champ électrique est le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$, tel que la force gravitationnelle sur une particule de masse m s'écrit $\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}$. Toutefois, il est souvent plus simple de s'intéresser au potentiel gravitationnel U dont dérive ce champ, c'est-à-dire tel que $\vec{\mathcal{G}} = -\vec{\nabla}U$.

À ce point, on pense que l'examineur précisera que dans la limite des champs faibles, on peut confondre le potentiel gravitationnel et la « métrique », qui est la quantité pertinente mesurée par LIGO. Une première discussion pourrait ainsi consister à discuter de ce que LIGO mesure, car un tel signal a peu de chance d'être complètement évident pour un élève de CPGE. La métrique, en relativité générale, décrit la géométrie de l'espace-temps, et elle permet en particulier de quantifier la distance entre deux points de l'espace-temps. Ainsi, dans le cas des ondes gravitationnelles, la métrique h décrit les variations relatives de distances provoquées par les déformations de l'espace-temps. Notons que cette dernière est une quantité sans dimension.

2. On le sait, en électromagnétisme, il n'y a pas de champ rayonné s'il n'y a pas de dérivée seconde du moment dipolaire. Mais en gravitation, il n'existe pas de moment dipolaire, car les masses sont toutes positives. On est donc obligés de passer à l'ordre suivant et de considérer un moment quadrupolaire. L'exemple typique est constitué par deux masses m séparées par une distance R (qui est le cas qui nous occupe ici). Dans ce cas, le moment quadrupolaire peut être obtenu en développant le potentiel gravitationnel à l'ordre $\mathcal{O}(1/r^3)$ (calcul semblable au dipôle électrostatique) dans un repère polaire (r, θ) , comme présenté sur la figure 7.14.

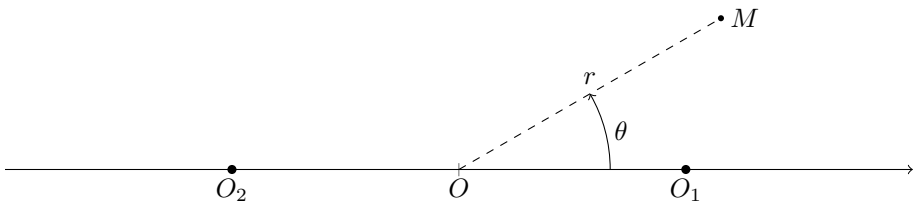


FIGURE 7.14. Repère polaire utilisé pour le développement quadrupolaire.

On a

$$U(r, \theta) = -Gm \left(\frac{1}{O_1 M} + \frac{1}{O_2 M} \right), \quad (2)$$

avec

$$\frac{1}{O_1 M} = (\overrightarrow{O_1 M})^{-1/2} = (\overrightarrow{O_1 O}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{O_1 O} \cdot \overrightarrow{OM})^{-1/2} = (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{-1/2}. \quad (3)$$

Ainsi, à l'ordre 2, on obtient

$$\frac{1}{O_1 M} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R \cos \theta}{r} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3R^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right). \quad (4)$$

Le même calcul donne pour la seconde masse

$$\frac{1}{O_2 M} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{R \cos \theta}{r} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3R^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right), \quad (5)$$

si bien que

$$U(r, \theta) = -\frac{2Gm}{r} + \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)GmR^2}{r^3}. \quad (6)$$

Le premier terme est le potentiel newtonien standard en $1/r$. Comme prévu, les termes en R/r (dipôle) sont nuls. Enfin, le deuxième terme correspond à la contribution quadrupolaire. On constate que le moment quadrupolaire est de l'ordre de

$$Q \sim mR^2. \quad (7)$$

3. En portant plus loin l'analogie entre électromagnétisme et gravité, c'est-à-dire entre potentiel électrique et métrique, on s'attend à ce qu'en régime dynamique (à une pulsation ω), la métrique se comporte comme

$$h \approx \frac{K}{r} \frac{d^2 Q}{dt^2} \approx \frac{K}{r} m \omega^2 R^2, \quad (8)$$

avec K un coefficient permettant d'adimensionner la métrique. Dans la dernière égalité, on a supposé un mouvement périodique à la pulsation ω , c'est-à-dire des oscillations des masses autour de l'axe. On a ici fait en sorte de faire apparaître les deux grandes caractéristiques d'un champ rayonné : décroissance en $1/r$ et dérivée seconde en le moment quadrupolaire.

Dans le cas de l'électromagnétisme, l'expression de \vec{E} contient $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$. On sait que l'analogie électrostatique-gravitation s'écrit $G \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. On peut donc tenter de construire une quantité sans dimensions à partir de G et c , les deux constantes phares de la relativité générale. On sait que

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2} \quad \text{et} \quad [c] = LT^{-1}. \quad (9)$$

De plus $\left[\frac{m\omega^2 R^2}{r} \right] = MLT^{-2}$. Ainsi, on trouve facilement que pour que h soit adimensionné, il faut que $K \sim \frac{G}{c^4}$. On a donc finalement

$$h \sim \frac{G}{rc^4} m \omega^2 R^2, \quad (10)$$

qui constitue, à un facteur 2 près, la formule du quadrupôle d'Einstein dérivée en 1916. En inversant, on obtient donc

$$m = \frac{hrc^4}{\omega^2 R^2 G}. \quad (11)$$

On peut maintenant faire usage des données de LIGO données dans la figure 7.13 de l'énoncé.

4. Comme ordre de grandeur pour les différents paramètres, on peut prendre les valeurs suivantes.

- La valeur absolue de la variation de métrique, appelée « strain », vaut d'après les données $h \sim 10^{-21}$.
- Pour la pulsation ω , on a environ deux oscillations pour 0,05 s au début du signal, et donc $\omega \sim 2\pi \times 40 \approx 250 \text{ rad/s}$.
- Pour la distance entre la Terre et le système binaire r , on espère que l'examineur aura précisé que le système se trouve à un milliard d'années-lumières, soit $r \approx 10^{25} m$.

Reste finalement à se demander ce que représente R_S . Pour que les deux trous noirs fusionnent, cette distance doit être de l'ordre du rayon d'un trou noir. En fait, il s'agit du rayon de Schwarzschild effectif correspondant à la somme des deux masses. Pour un trou noir de masse M , ce rayon peut être défini, en première approximation, comme le rayon d'une sphère de masse M telle que la vitesse de libération à la surface est égale à la vitesse de la lumière. En dessous de ce rayon, la lumière ne peut plus s'échapper, ce qui donne le nom de « trou noir ».

Rappelons rapidement le calcul de la vitesse de libération v_l pour une sphère de rayon R . Elle est égale à la vitesse minimale nécessaire à un objet matériel partant de la surface pour atteindre l'infini. À l'infini, l'objet a une vitesse nulle puisque l'on cherche la vitesse minimale. Ainsi, la conservation de l'énergie, en présence uniquement du champ gravitationnel dérivant du potentiel $U(r) = -\frac{GM}{r}$, s'écrit

$$-\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}v_l^2 = 0, \quad (12)$$

d'où

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (13)$$

Ainsi, en écrivant $R = R_S$ pour $v_L = c$, on obtient l'expression du rayon de Schwarzschild

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (14)$$

Dans le cas de notre système, on a défini R_S comme le rayon d'un trou noir dont la masse est la somme des masses des deux trous noirs. Ainsi

$$R_S = \frac{4Gm}{c^2}. \quad (15)$$

Afin de trouver la masse des trous noirs, le plus simple est d'écrire qu'ils sont séparés de αR_S , où $\alpha = 4$ d'après les données de LIGO. On a alors

$$m = \frac{hrc^4}{\omega^2 G} \frac{c^4}{16\alpha^2 G^2 m^2}, \quad (16)$$

et on peut isoler m , pour trouver

$$m = \left(\frac{hrc^8}{16\alpha^2 \omega^2 G^3} \right)^{1/3} \simeq 5 \times 10^{31} \text{ kg}. \quad (17)$$

Finalement, on convertit cette estimation numérique en unités de masse solaires $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, et on a

$$m \simeq 25 M_\odot. \quad (18)$$

Ce résultat est assez proche de la réalité, où les trous noirs avaient des masses de $35_{-3}^{+5} M_\odot$ et $30_{-4}^{+3} M_\odot$. On voit ainsi que les raisonnements par analogies peuvent être fructueux, même dans des cas qui semblent hors de portée avec de simples connaissances de mécanique newtonienne. Notre raisonnement n'explique que le début de la courbe présentée. Afin d'aller plus loin on pourrait envisager d'expliquer la forme de la courbe lorsque l'on se rapproche de la coalescence des trous noirs. Pour cela, c'est à la puissance rayonnée, et donc à l'énergie perdue par le système binaire, qu'il faut s'intéresser.

Exercice 7.9 : Ondes émises par un pulsar - X PC

On considère un pulsar (étoile émettant des impulsions électromagnétiques) dont les ondes émises se propagent dans le plasma interstellaire de densité $n = 3 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$ avant d'atteindre la Terre. On constate qu'une onde de fréquence 400 MHz met 700 ms de plus qu'une onde de 1,4 GHz pour atteindre la Terre. Calculer la distance Terre-pulsar.

Un exercice plutôt classique et sans difficulté majeure. On va commencer par redémontrer la relation de dispersion des ondes dans un plasma.

Un plasma est un milieu où les charges ne sont plus liées au noyau. Elles sont libres de se déplacer, et la faible densité du milieu permet de négliger tout terme d'amortissement. On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron de masse m et de charge $-e$, ce qui donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}. \quad (1)$$

On a négligé la contribution magnétique de la force de Lorentz, hypothèse valide tant que $\|\vec{v}\| \ll c$.

Par ailleurs, dans le plasma neutre, la densité volumique de charges est nulle. On peut alors écrire les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)$$

Démontrons l'équation des ondes. D'après l'équation $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, on a d'une part

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \quad (3)$$

D'après les équations sur $\operatorname{rot} \vec{E}$ et $\operatorname{rot} \vec{B}$, on a d'autre part

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Finalement, la densité de courant dans le plasma s'écrit $\vec{j} = -ne\vec{v}$, et donc $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$ d'après l'équation (1). On peut alors obtenir l'équation des ondes

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \mu_0 \frac{ne^2}{m} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}, \quad (5)$$

où l'on a noté $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ la pulsation plasma au carré.

Introduisons une solution en onde plane progressive monochromatique, sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, où l'on souligne \vec{k} pour sous-entendre qu'il peut s'agir d'un complexe. En remplaçant dans l'équation d'onde, on obtient la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un plasma

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (6)$$

De ceci, on déduit vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}, \quad (7)$$

et vitesse de groupe v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}}. \quad (8)$$

Tant que $\omega \geq \omega_p$, on a donc $v_g < c < v_\varphi$. On ne retient donc que la vitesse de groupe, qui est la seule ayant une signification physique dans ce cas. Passons à présent à la résolution du problème.

Soit L la distance Terre-pulsar. Le temps de retard entre la réception de deux signaux de fréquences f_1 et f_2 vaut alors

$$\tau = \left| \frac{L}{v_g(f_1)} - \frac{L}{v_g(f_2)} \right| \Rightarrow L = \frac{\tau}{\frac{1}{v_g(f_1)} - \frac{1}{v_g(f_2)}} = \frac{c\tau}{\sqrt{1 + \frac{f_p^2}{f_1^2 - f_p^2}} - \sqrt{1 + \frac{f_p^2}{f_2^2 - f_p^2}}}. \quad (9)$$

Or ici, $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3.10^4 \times (1.6.10^{-19})^2}{9.10^{-31} \times 8,85.10^{-12}}} = 1563 \text{ Hz} < f_1, f_2$. On peut donc légitimement faire un développement limité

$$\sqrt{1 + \frac{f_p^2}{f_1^2 - f_p^2}} \approx \sqrt{1 + \frac{f_p^2}{f_1^2}} \approx 1 + \frac{f_p^2}{2f_1^2}. \quad (10)$$

Finalement, on obtient

$$L = \frac{2c\tau}{f_p^2} \frac{1}{\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}}. \quad (11)$$

Et l'application numérique donne

$$L = 3,00 \times 10^{19} \text{ m} = 3170 \text{ années-lumière}, \quad (12)$$

ce qui semble cohérent à l'échelle des distances astrophysiques.

Optique

Exercice 8.1 : Arc-en-ciel - Lyon/Cachan MP

Par temps pluvieux, lorsqu'un observateur a le Soleil dans le dos, il peut parfois observer un ou plusieurs arcs-en-ciel. Modéliser qualitativement l'apparition de l'arc le plus lumineux, et donner ses principales caractéristiques, c'est-à-dire son rayon angulaire et l'ordre des couleurs. Expliquer ensuite qualitativement la présence d'arcs supplémentaires, et donner l'ordre des couleurs au sein du deuxième arc.

Données : l'indice de réfraction de l'eau pour le bleu vaut 1,346, tandis que pour le rouge il vaut 1,331.

Cet exercice va nous permettre d'illustrer quelques principes de l'optique géométrique, domaine très peu abordé aux oraux de l'X et des ENS. Pour un traitement plus complet du problème, nous recommandons le sujet de physique de la filière MP, posé en 2008 au concours de l'École polytechnique.

L'apparition d'un arc-en-ciel est due aux phénomènes de réfraction des rayons du Soleil au sein des gouttes d'eau. Puisque l'indice optique de l'eau dépend de la longueur d'onde, les différentes composantes de la lumière blanche du Soleil vont subir des réfractions et des réflexions légèrement différentes. Ceci n'est pas sans nous rappeler le prisme, étudié en travaux pratiques. Après une phase de modélisation du trajet d'un rayon lumineux dans une goutte, nous allons donc chercher à reproduire les raisonnements connus pour le prisme.



Quelques pistes...

1. Modéliser le passage d'un rayon qui va former l'arc primaire à travers une goutte. Définir et trouver l'angle de déviation pour ce rayon.
2. Où vont se concentrer les rayons ? Trouver l'angle de déviation critique.
3. Pour l'observateur, où se trouve le centre de l'arc ? En déduire son rayon angulaire. Trouver la largeur angulaire de l'arc et l'ordre des couleurs.
4. Comment est formé l'arc secondaire ? Quel est l'ordre des couleurs en son sein ?

1. Comme indiqué dans l'énoncé, on observe surtout les arcs-en-ciel avec le Soleil dans le dos. Ceci signifie que leur apparition est conditionnée au fait d'avoir au moins une réflexion au sein de la goutte. Ce sont les réflexions multiples qui vont provoquer l'apparition d'arcs supplémentaires.

Dans le schéma 8.1 suivant, on a représenté le trajet d'un rayon subissant une seule réflexion interne à la goutte. Afin d'expliquer ce que voit l'observateur, on peut définir un angle de déviation pour les rayons. Il correspond à l'angle que fait le rayon qui vient toucher l'œil de l'observateur et le rayon initial, c'est-à-dire α sur le schéma.

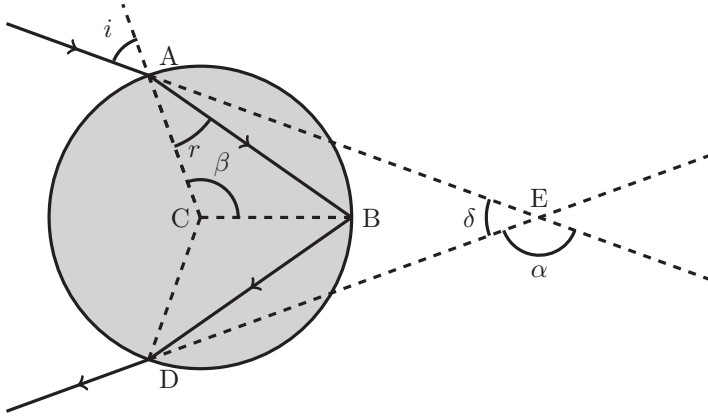


FIGURE 8.1. Trajet d'un rayon subissant une réflexion au sein de la goutte. Par symétrie, l'angle de sortie de la goutte est égal à l'angle d'entrée.

Commençons donc par un raisonnement géométrique simple, en se référant au schéma précédent, afin d'exprimer l'angle de déviation en fonction de l'angle incident i et de l'angle réfracté r . Dans le triangle ABC , on a la relation $2r + \beta = \pi$. Dans le triangle ACE , on a la relation $\frac{\delta}{2} + i + \beta = \pi$. Finalement, on a la relation $\alpha + \delta = \pi$. En combinant ces relations, on obtient une première équation géométrique

$$\alpha = \pi + 2i - 4r, \quad (1)$$

où i et r sont liés par la loi de Descartes $\sin i = n \sin r$.

2. Lorsque la goutte est éclairée par le Soleil, une infinité de rayons va donner une infinité d'angles de déviation différents. Afin de former un arc par couleur, les rayons vont devoir s'accumuler autour d'un angle critique. Par analogie avec le prisme, cet angle va correspondre à un extremum de déviation. Afin de trouver cet angle critique α_c , commençons par dériver l'équation (1) par rapport à i , on obtient

$$\left. \frac{d\alpha}{di} \right|_{\alpha_c} = 0 = 2 - 4 \left. \frac{dr}{di} \right|_{\alpha_c} \Rightarrow \left. \frac{dr}{di} \right|_{\alpha_c} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Afin d'utiliser cette relation, on peut penser à dériver la loi de Descartes, pour obtenir

$$\cos i_c = n \left. \frac{dr}{di} \right|_{\alpha_c} \cos r_c = \frac{n}{2} \cos r_c, \quad (3)$$

où l'on a noté i_c et r_c les angles d'incidence et de réfraction correspondant à l'angle critique. Afin de résoudre le système d'équations composé de l'équation précédente et de la loi de Descartes, on peut penser à mettre ces deux équations au carré, puis utiliser l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. En éliminant d'abord i_c , on obtient

$$n^2 \left(\frac{\cos^2 r_c}{4} + \sin^2 r_c \right) = 1 \quad (4)$$

ce qui permet d'obtenir

$$r_c = \arccos \left(\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \right). \quad (5)$$

En procédant de la même manière, on peut trouver

$$i_c = \arccos \left(\frac{n^2 - 1}{3} \right). \quad (6)$$

On obtient ainsi l'angle de déviation critique

$$\alpha_c = \pi + 2i_c - 4r_c = \pi + 2 \arccos\left(\frac{n^2 - 1}{3}\right) - 4 \arccos\left(\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}\right), \quad (7)$$

autour duquel les rayons d'une couleur vont s'accumuler.

3. Le centre de l'arc se trouve à l'infini dans le prolongement des rayons provenant du Soleil et passant par l'œil de l'observateur. En effet, c'est ce qui aurait été perçu si les rayons n'avaient pas été déviés. Par construction, le rayon angulaire de l'arc est donc l'angle $\delta(n)$ défini précédemment. Pour le bleu, une brève application numérique donne $\delta_{\text{bleu}} = 40,2^\circ$, tandis que pour le rouge on a $\delta_{\text{rouge}} = 42,4^\circ$. Ainsi, on peut calculer toutes les caractéristiques du premier arc : son rayon angulaire vaut environ 41° , il a une largeur angulaire d'environ $2,2^\circ$, et le bleu sera le plus à l'intérieur de l'arc.

4. Dans certaines conditions, on peut observer un arc secondaire, situé à l'extérieur du premier. Il se forme grâce aux rayons subissant deux réflexions dans les gouttes. La seconde réflexion va inverser l'ordre des couleurs au sein de l'arc, et ainsi le rouge sera à l'intérieur de l'arc. À cause des pertes à chaque réflexion, l'intensité lumineuse du second arc est beaucoup plus faible que celle du premier. Il est quasiment impossible d'observer un arc tertiaire, qui serait formé par des rayons subissant trois réflexions au sein des gouttes.

On aurait pu sans difficultés reprendre le raisonnement précédent pour obtenir l'angle de déviation critique pour l'arc secondaire, mais il conduit à des calculs fastidieux, sans grand intérêt pour un oral.

Finalement, notons que ce modèle ne prend pas en compte la taille des gouttes. Elle varie de quelques dixièmes de millimètres à quelques millimètres. En pratique, ceci signifie qu'un modèle plus complet devrait tenir compte d'effets de diffraction au sein des gouttes. De fait, dans certaines conditions, on peut observer sous l'arc primaire des arcs dits surnuméraires, dont on ne peut expliquer la présence grâce au modèle précédent.

Exercice 8.2 : Laser autour de la Terre - X PC

À la surface de la Terre, l'indice optique de l'air est de 1,0003. Considérons une planète identique, de même masse et rayon. Quelle valeur devrait prendre l'indice optique à sa surface pour qu'un rayon laser tiré à l'équateur tangentiellement à la surface de la planète en fasse le tour et revienne à son point de départ ?

Pourquoi un rayon tiré à la surface de la Terre aurait-il une trajectoire courbée ? La seule raison valable pour cela est que l'indice varie avec l'altitude. Il va donc falloir modéliser la variation de l'indice optique, puis voir en quoi sa valeur à l'altitude zéro peut permettre à la lumière d'adopter une trajectoire parfaitement circulaire. Un grand principe de l'optique, que l'examineur aurait sûrement introduit avec un tel exercice, est le principe de Fermat : le chemin suivi par la lumière est celui qui rend extrémal le chemin optique. Il permet de redériver de nombreux résultats d'optique géométrique, mais n'est évidemment pas au programme. Une utilisation très simple de ce principe est faite dans cette correction.



Quelques pistes...

1. Quelle relation simple peut-il y avoir entre l'indice optique et la masse volumique de l'air ? Comment varie cette dernière avec l'altitude (dans un modèle simple) ?

2. Supposons que la lumière cherche à minimiser son chemin optique. Qu'est-ce que cela implique pour une trajectoire circulaire autour de la Terre ?

3. En déduire un lien entre $n(0)$ et $\frac{dn}{dr}(0)$. Conclure.

1. Quelle relation simple peut-on imaginer entre indice optique et masse volumique ? *A priori*, dans le vide il vaut 1, et on cherche à faire un modèle simple, donc on souhaite un profil linéaire. On postule donc une loi de la forme

$$n - 1 = K\rho, \quad (1)$$

où K est une constante. Cette loi, empirique, porte le nom de loi de Gladstone. Ensuite, le modèle de l'atmosphère isotherme permet de donner la variation de la masse volumique avec l'altitude. Rappelons rapidement les résultats de ce modèle : on suppose que l'atmosphère est un fluide de masse molaire M en équilibre thermodynamique à la température T . La relation fondamentale de la statique des fluides projetée selon un axe vertical donne

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \frac{Mg}{RT}p \Rightarrow p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad (2)$$

où on a utilisé la loi des gaz parfaits sous la forme $PM = \rho RT$, et on a posé $H = \frac{RT}{Mg}$ la hauteur caractéristique de l'atmosphère, qui vaut environ 8,7 km. En repassant à la masse volumique, on obtient donc la loi de variation de l'indice optique

$$n(z) = 1 + (n(0) - 1) \exp\left(-\frac{z}{H}\right). \quad (3)$$

2. On suppose qu'à ce stade de l'oral, l'examinateur aura donné au candidat l'énoncé du principe de Fermat : la lumière suit les chemins qui rendent son chemin optique extrémal.

Dès lors, considérons une répartition à symétrie sphérique de l'indice (comme précédemment, on remplace alors l'altitude z par le rayon r). Une trajectoire à rayon fixe r aura un chemin optique valant

$$L_0 = 2\pi r n(r), \quad (4)$$

où R_T est le rayon de la Terre. Dès lors, afin que ce trajet soit celui réellement suivi, il doit être extrémal, donc sa différentielle en $r = R_T$ est nulle.

$$dL_0 = 0 = 2\pi(n(r)dr + rn'(r)dr), \quad (5)$$

cette relation étant évaluée en $r = R_T$ dans notre cas.

3. On obtient finalement la relation

$$\frac{n(R_T)}{R_T} = -\frac{dn}{dr}(R_T). \quad (6)$$

En faisant le pont avec la loi d'évolution de l'indice optique, on obtient (attention, $z = 0$ et $r = R_T$ sont identiques)

$$\frac{n(0)}{R_T} = \frac{n(0) - 1}{H} \Rightarrow n(0) = \frac{1}{1 - \frac{H}{R_T}} \approx 1 + \frac{H}{R_T}, \quad (7)$$

où dans la dernière égalité on a utilisé un développement limité, licite car $H \ll R_T$. Finalement, une application numérique rapide donne $n(0) = 1,0014$.

Exercice 8.3 : Cavité optique - Ulm PC

On se propose d tudier une cavité optique servant à former un laser. Elle est composée de deux miroirs partiellement réfléchissants séparés d'une distance L .

1. On considère tout d'abord que l'indice n_0 est constant. Calculer et tracer le facteur de transmission de la cavité en fonction de sa longueur. Quelle est la largeur de la bande passante ?
2. Ensuite, des effets non-linéaires nous conduisent à considérer que l'indice de la cavité dépend de l'intensité qui y règne, sous la forme $n(I_{\text{cav}}) = n_0 + n_1 I_{\text{cav}}$. Montrer qu'il existe trois modes pour la cavité, c'est-à-dire trois intensités possibles, et étudier leur stabilité. On consid rera que l'indice n'est sensible qu'à l'intensité moyenne dans la cavité.

Ce problème, où l'on considère en premier lieu une cavité de Fabry-Pérot, aborde les interférences à une infinité d'ondes. Lorsque l'intensité lumineuse dans la cavité devient forte, comme c'est le cas dans certains lasers, il devient nécessaire de prendre en compte la dépendance de l'indice à l'intensité de la cavité. Ceci va nous permettre de mettre en évidence des phénomènes non linéaires, et de présenter sommairement l'étude des systèmes dynamiques.

**Quelques pistes...**

1. On considère tout d'abord le cas où l'indice est constant n_0 . On suppose qu'une onde arrive de manière normale sur le premier miroir.
 - a. Combien d'ondes interfèrent et où ? Décrire les réflexions et transmissions multiples que subit un rayon entrant de la cavité.
 - b. Calculer le champ, somme de toutes les ondes réfléchies dans la cavité, et en déduire l'intensité transmise par la cavité.
 - c. Afin de trouver la largeur de la bande passante, on pourra se placer au voisinage d'une résonance et calculer la largeur à mi-hauteur.
2. On considère ensuite le cas d'une cavité non-linéaire.
 - a. Trouver deux équations reliant le facteur de transmission de la cavité et une phase φ .
 - b. Proposer alors une méthode permettant de trouver les différents modes de fonctionnement de la cavité. Montrer que des variations d'intensité à l'entrée de la cavité donnent lieu à des phénomènes d'hystérésis.
 - c. Discuter de la stabilité des trois modes possibles.

1.a. Commençons donc par étudier le cas où l'indice de la cavité ne dépend pas de l'intensité. Afin de simplifier le problème, on va supposer que les deux miroirs sont identiques, avec des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et t . On va étudier une onde lumineuse qui arrive de manière normale sur le premier miroir. Après avoir été en partie transmise, l'onde va subir de multiples réflexions dans la cavité, et ainsi le champ transmis va être composé de la superposition des ondes ayant effectué un nombre arbitraire d'aller-retours dans la cavité. Une infinité d'ondes va alors interférer en sortie de la cavité. Dans la suite, il va donc nous falloir trouver l'amplitude de chacune de ces ondes, et les déphasages entre les ondes dus aux réflexions dans la cavité.

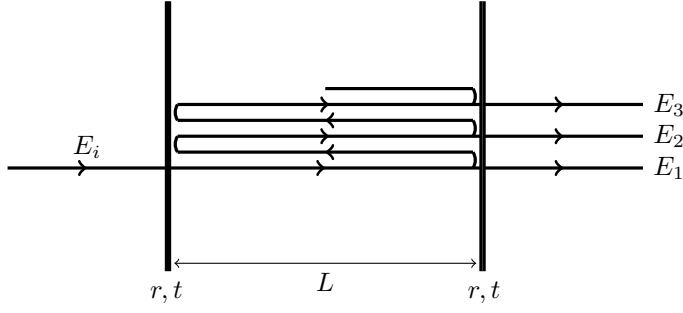


FIGURE 8.2. À la sortie de la cavité, une infinité de rayons interfère.

b. En se référant au schéma 8.2, la première onde à sortir de la cavité n'y fait qu'un aller, et subit donc deux transmissions. En notant E_i l'amplitude de l'onde incidente, celle de la première onde est

$$E_1 = t^2 E_i. \quad (1)$$

Ensuite, la seconde onde fait un aller-retour supplémentaire dans la cavité et subit donc deux réflexions supplémentaires. Son amplitude en sortie est donc

$$E_2 = t^2 r^2 E_i. \quad (2)$$

Puisque chaque onde k fait un aller-retour supplémentaire par rapport à la précédente, les amplitudes à la sortie vérifient $E_{k+1} = r^2 E_k$. On se convainc alors facilement que l'amplitude de l'onde k est donnée par

$$E_k = t^2 r^{2(k-1)} E_i. \quad (3)$$

Toutes ces ondes interférant à la sortie de la cavité, le déphasage entre les ondes k et $k+1$ est simplement dû à l'aller-retour supplémentaire effectué. Ce déphasage s'exprime donc

$$\Delta\varphi_{k,k+1} = \frac{2\pi n_0}{\lambda} 2L. \quad (4)$$

Ainsi, le déphasage entre le premier rayon, que nous choisissons comme référence, et le rayon k est

$$\Delta\varphi_{k,1} = (k-1) \frac{2\pi n_0}{\lambda} 2L. \quad (5)$$

Les différents rayons étant cohérents temporellement, on obtient l'expression de la vibration lumineuse complexe résultante à la sortie de la cavité

$$\begin{aligned} \underline{s} &= E_i t^2 e^{i\varphi_1} \sum_{i=1}^{\infty} r^{2(k-1)} e^{i(k-1) \frac{2\pi n_0}{\lambda} 2L} \\ &= \underline{s}_1 \sum_{i=0}^{\infty} \left(r^2 e^{i \frac{2\pi n_0}{\lambda} 2L} \right)^k, \end{aligned} \quad (6)$$

où on a noté φ_1 la phase de référence correspondant à la première onde sortante et $\underline{s}_1 = E_i t^2 e^{i\varphi_1}$, et procédé à un changement d'indice dans la somme. On reconnaît une somme géométrique de raison $r^2 e^{i \frac{2\pi n_0}{\lambda} 2L}$, convergente puisque $r^2 < 1$. On calcule alors facilement

$$\underline{s} = \frac{\underline{s}_1}{1 - r^2 \exp\left(i \frac{4\pi n_0 L}{\lambda}\right)}. \quad (7)$$

On peut alors calculer l'intensité à la sortie $I_s \propto |\underline{ss}^*|$, que l'on écrit sous la forme

$$I_s = \frac{I_0 t^4}{(1 - r^2 \exp(i \frac{4\pi n_0 L}{\lambda})) (1 - r^2 \exp(-i \frac{4\pi n_0 L}{\lambda}))} \quad (8)$$

$$= \frac{I_0 t^4}{1 + r^4 - r^2 (\exp(i \frac{4\pi n_0 L}{\lambda}) + \exp(-i \frac{4\pi n_0 L}{\lambda}))} = \frac{I_0 t^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2 \frac{2\pi n_0 L}{\lambda})},$$

avec $I_0 = E_i^2$. En utilisant l'identité $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$, on peut écrire l'intensité

$$I_s = \frac{I_0 t^4}{1 + r^4 - 2r^2 + 4r^2 \sin^2(\frac{2\pi n_0 L}{\lambda})} = \frac{I_0 (1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2(\frac{2\pi n_0 L}{\lambda})}. \quad (9)$$

Finalement, on met l'intensité à la sortie sous la forme

$$I_s = \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \frac{2\pi n_0 L}{\lambda}}, \quad (10)$$

avec $F = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2}$, qu'on appelle la finesse de la cavité, et où I_0 est bien entendu l'intensité incidente. L'allure de l'intensité de sortie est donnée dans la figure 8.3. La formule précédente s'interprète facilement. Pour des valeurs de r proche de 1, c'est-à-dire pour des miroirs de bonne qualité, F prend des valeurs très grandes devant 1. Dans ce cas, $\frac{I}{I_1}$ va prendre des valeurs non négligeables seulement au voisinage de résonances qui correspondent à l'annulation de $\sin^2 \frac{2\pi n_0 L}{\lambda}$, c'est-à-dire pour

$$\varphi_k = \frac{2\pi n_0 L_k}{\lambda} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad L_k = \frac{k\lambda}{2n_0} \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Physiquement, cette condition revient à dire que le chemin optique parcouru par les ondes réfléchies entre les différents aller-retours est un multiple de la longueur d'onde, de telle sorte que toutes les ondes sont en phase à la sortie de la cavité.

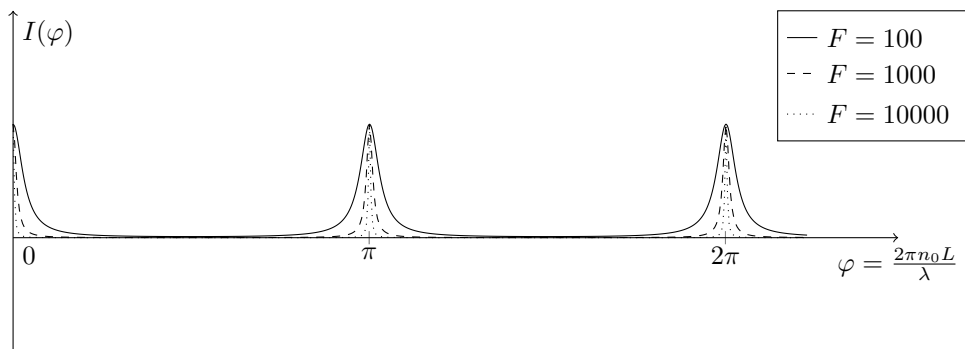


FIGURE 8.3. Intensité en sortie de la cavité optique en fonction de la longueur de la cavité pour différentes valeurs du paramètre F .

La finesse de la cavité reflète sa qualité. En effet, plus cette dernière est grande plus la largeur de la bande passante est faible, et meilleure est la sélection de la longueur d'onde.

c. Pour obtenir la largeur de la bande passante, on peut se placer au voisinage d'une résonance $\varphi_k = k\pi$. On a alors

$$I_s(\varphi) = \frac{I_0}{1 + F(\varphi - \varphi_k)^2}, \quad (12)$$

où $\varphi = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda}$. La courbe décrite est appelée une lorentzienne. Cette forme va nous permettre de trouver la bande passante, que l'on peut par exemple définir comme la largeur à mi-hauteur. On calcule alors facilement qu'au voisinage d'une résonance φ_k , les deux phases φ_{\pm} qui vérifient

$$I_s(\varphi_{\pm}) = \frac{I_s(\varphi_k)}{2} = \frac{I_0}{2}, \quad (13)$$

sont données par

$$\varphi_{\pm} = \varphi_k \pm \frac{1}{\sqrt{F}}. \quad (14)$$

Ainsi, la largeur à mi-hauteur du pic de résonance va être donné, en première approximation, par

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\sqrt{F}}. \quad (15)$$

En résumé, plus la finesse est grande, plus la cavité est efficace pour sélectionner les longueurs d'onde résonantes.

2.a. Considérons à présent la cavité non-linéaire, dont l'indice dépend de l'intensité à l'intérieur de la cavité, sous la forme $n(I_{\text{cav}}) = n_0 + n_1 I_{\text{cav}}$. Nous pouvons alors essayer de voir ce que cette nouvelle dépendance change au raisonnement précédent. Il est clair que changer l'indice sans lui ajouter de partie complexe ne va pas modifier l'amplitude des différents rayons qui interfèrent à la sortie. En revanche, la différence de phase entre deux rayons sera modifiée, et on va avoir un déphasage supplémentaire

$$\Delta\varphi_{k,1} = (k-1) \frac{4\pi n_0 L}{\lambda} + (k-1) \frac{4\pi n_1 L I_{\text{cav}}}{\lambda}. \quad (16)$$

En notant $\varphi_L = \frac{4\pi n_0 L}{\lambda}$ et $\varphi_{\text{NL}} = \frac{4\pi n_1 L}{\lambda} I_{\text{cav}} = \psi_{\text{NL}} I_{\text{cav}}$ les contributions linéaires et non-linéaires à la différence de phase, on voit qu'en transposant le raisonnement donnant l'intensité de sortie de la cavité linéaire, on va obtenir la nouvelle intensité à la sortie

$$I_s(I_{\text{cav}}) = \frac{I_0}{1 + F \sin^2(\varphi_L + \psi_{\text{NL}} I_{\text{cav}})}. \quad (17)$$

On peut ainsi écrire le facteur de transmission de la cavité

$$\mathcal{T} = \frac{I_s}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\varphi)} \quad (18)$$

avec $\varphi = \varphi_L + \psi_{\text{NL}} I_{\text{cav}}$. Une forte intensité dans la cavité va ainsi provoquer un déphasage supplémentaire, qui peut par exemple éloigner la cavité d'une résonance. Mais les non-linéarités vont avoir une influence plus importante. En effet, l'équation précédente relie l'intensité à la sortie et celle dans la cavité (au travers de la forme de l'indice), mais les deux sont également liées puisque les rayons qui sortent de la cavité contribuent à l'intensité transmise. On va alors chercher une autre équation reliant le facteur de transmission à la phase.

Puisqu'ils n'interfèrent pas avec les rayons qui se propagent dans le sens opposé, l'intensité à la sortie I_s est reliée à l'intensité dans la cavité I_{cav} par

$$I_s = \frac{t^2 I_{\text{cav}}}{2} = T I_{\text{cav}}, \quad (19)$$

où l'on a noté T le facteur de transmission des miroirs en intensité. En utilisant la définition du facteur de transmission de la cavité \mathcal{T} , on obtient alors facilement $I_{\text{cav}} = \frac{I_0 \mathcal{T}}{T}$, de telle sorte l'on peut ré-écrire la phase sous la forme $\varphi = \varphi_L + \psi_{\text{NL}} \frac{I_0 \mathcal{T}}{T}$. En inversant cette relation, on obtient finalement

$$\mathcal{T} = \frac{(\varphi - \varphi_L) T}{I_0}. \quad (20)$$

b. Ainsi, le facteur de transmission est défini par les deux équations (18) et (20). La première correspond simplement à la figure 8.3, tandis que la seconde est une droite, dont

l'abscisse à l'origine vaut φ_L et dont la pente est inversement proportionnelle à l'intensité entrante. Afin de déterminer les modes de fonctionnement de la cavité, on va donc procéder à une résolution graphique, comme présenté dans la figure 8.4.

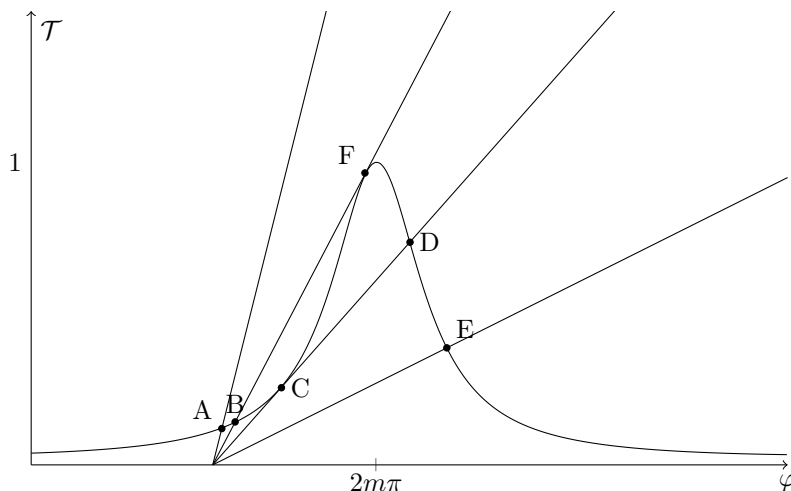


FIGURE 8.4. Construction graphique permettant de déterminer les modes de fonctionnement de la cavité au voisinage d'une résonance. La pente des droites est d'autant plus faible que l'intensité entrant dans la cavité est grande.

Voyons à présent l'effet d'une augmentation de l'intensité dans la cavité sur le facteur de transmission. Lorsqu'elle est faible, la pente de la droite de l'équation (20) est très importante, et il n'existe qu'une seule intersection (A) entre les deux courbes. Ceci signifie qu'il existe un seul mode pour la cavité. Lorsque l'on augmente l'intensité, la pente de la droite va diminuer, et on va voir apparaître deux ou trois intersections entre les courbes, c'est-à-dire deux ou trois modes pour la cavité. Par continuité, lorsque l'intensité augmente, le point de fonctionnement de la cavité va passer de (A) à (B), puis de (B) à (C). En revanche, à partir du point (C), il n'existe plus de solution par continuité, et l'intensité en sortie va « sauter » vers le point D. Si l'on continue à augmenter l'intensité, on va alors simplement parcourir la partie droite de la courbe.

En partant d'une intensité élevée, on va parcourir la même branche, jusqu'à arriver au point (F). De la même manière que précédemment, la cavité va alors « sauter » vers le mode (B). On voit ainsi apparaître un phénomène d'hystérésis, qui explique le nom de « bistable optique » donné à ce type de montage.

c. Dans le raisonnement précédent, nous nous sommes focalisés sur deux modes de fonctionnement de la cavité. Néanmoins, on peut se convaincre par le raisonnement graphique précédent qu'il existe un troisième mode pour la cavité, qui n'est jamais atteint par le cycle d'hystérésis décrit. On peut alors anticiper que ce mode sera instable.

Dans le cas étudié, la stabilité d'un mode signifie qu'une fluctuation de l'intensité de sortie sera compensée par un phénomène qui tend à la ramener vers la solution étudiée. Dans la cavité, on peut en effet avoir compétition entre la condition de résonance et l'augmentation de l'intensité d'entrée. Si une augmentation de l'intensité de sortie éloigne la cavité de sa condition de résonance, alors la situation sera stable. Autrement, on va assister à un phénomène d'emballement, c'est-à-dire que l'augmentation de l'intensité de sortie va provoquer une augmentation de l'intensité dans la cavité, qui va rapprocher la cavité de sa condition de résonance, et donc augmenter à nouveau l'intensité de sortie. Cette augmentation va se poursuivre jusqu'à atteindre la condition de résonance.

Par le raisonnement précédent, on peut aisément se convaincre graphiquement que la solution correspondant à la branche décroissante (par exemple le point (E)) de la courbe est stable, tandis que les deux autres sont instables. En pratique, les points décrits dans la partie précédente sont métastables, ce qui permet de qualifier effectivement ce montage de bistable.

Mécanique quantique

Exercice 9.1 : Cristal périodique à une dimension - X MP

On modélise un cristal par la répétition périodique d'une marche de potentiel dans une direction x . On note b la longueur de la marche, V_0 sa hauteur et a la période du motif, de telle sorte que $d = a - b$ représente la longueur de la zone de potentiel nul d'un motif. La situation est représentée dans la figure 9.1. On considère un électron d'énergie $E < V_0$.

1. On s'intéresse tout d'abord à un unique motif. Écrire la fonction d'onde dans chaque zone de potentiel.
2. Par un argument de symétrie, étendre la fonction d'onde à l'ensemble du cristal. Trouver alors quatre équations sur les coefficients de la fonction d'onde.
3. On note $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$, et θ la différence de phase entre deux motifs. Le système précédent permet d'obtenir la condition

$$\cos \theta = \cos k_1 d \cos k_2 b - \frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 d \sin k_2 b. \quad (1)$$

On suppose que $b \rightarrow 0$ tandis que $V_0 \rightarrow +\infty$, en maintenant $V_0 b$ constant, égal à F . Commenter physiquement cette hypothèse, et montrer qu'une structure de bande apparaît.

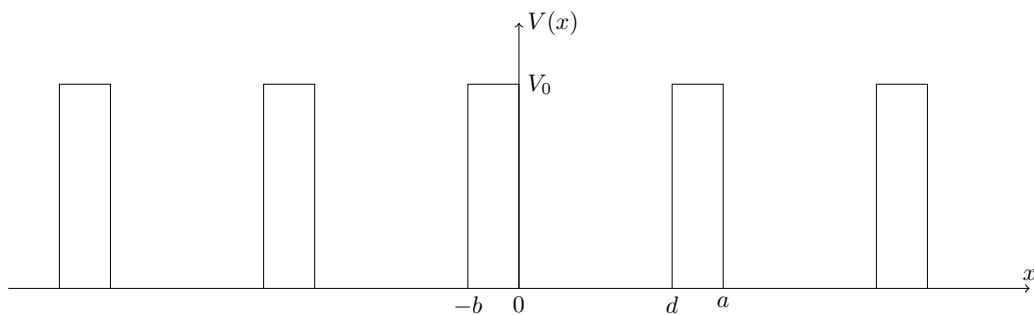


FIGURE 9.1. Potentiel asymétrique périodique et constant par morceaux. On suppose que la particule a une énergie $E < V_0$.

Cet exercice présente une modélisation simple d'un cristal périodique dans sa version quantique. Relativement technique si l'on souhaite faire l'intégralité des calculs, il permet de mettre en évidence une structure de bande dans un cristal, et constitue donc une première introduction à la théorie des solides.

1. Commençons par déterminer la fonction d'onde $\varphi(x, t)$ d'un électron sur un seul motif. Afin de simplifier les calculs, il est plus simple de considérer le motif entre $x = -b$ et $x = d$. Nous allons bien entendu chercher une solution en onde stationnaire, sous la forme

$\varphi(x, t) = \varphi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$, où E est l'énergie de l'électron. Dans ce cas, l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la zone de potentiel nul s'écrit

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + E\varphi(x) = 0, \quad (2)$$

et en supposant que E est positif, on obtient facilement

$$\varphi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \text{ pour } 0 < x < d, \quad (3)$$

avec $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, et A et B deux constantes d'intégration.

Sur la marche de potentiel, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + (E - V_0)\varphi(x) = 0. \quad (4)$$

Avec $E - V_0 < 0$, cette équation se résout sous la forme

$$\varphi(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \text{ pour } -b < x < 0, \quad (5)$$

où on a défini $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$, et où C et D sont deux nouvelles constantes d'intégration. On voit immédiatement que les deux conditions de continuité en $x = 0$ (continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée, car le saut de potentiel est fini) ne vont pas nous permettre de déterminer toutes les constantes d'intégration, il va donc nous falloir considérer le cristal dans son intégralité.

2. On pourrait penser à définir des coefficients pour chaque motif, puis écrire les conditions aux limites pour chaque changement de valeur du potentiel. Néanmoins, un tel raisonnement ne prend pas véritablement en compte les symétries du problème. En effet, d'après le principe de Curie, la périodicité du cristal doit se retrouver dans les quantités physiques mesurables. Dans notre cas, il s'agit de la densité de probabilité de présence de l'électron, c'est-à-dire que l'on doit avoir la condition

$$|\varphi(x + a)|^2 = |\varphi(x)|^2. \quad (6)$$

Ainsi, la fonction d'onde entre deux points séparés d'une période va différer d'une phase. Attention, il serait faux de considérer que la fonction d'onde est périodique, puisqu'elle n'est pas une quantité physique directement mesurable. On a ainsi

$$\varphi(x + a) = e^{i\theta} \varphi(x). \quad (7)$$

Ce résultat peut être démontré de manière plus générale, et constitue le théorème de Bloch.

Nous disposons de quatre équations avec quatre constantes d'intégration. En premier lieu, la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} A + B = C + D, \\ ik_1(A - B) = k_2(C - D). \end{cases} \quad (8)$$

De la même manière, en $x = a$, on obtient $\varphi(d) = e^{i\theta} \varphi(-b)$ et $\varphi'(d) = e^{i\theta} \varphi'(-b)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d} = e^{i\theta} (Ce^{-bk_2} + De^{bk_2}), \\ ik_1(Ae^{ik_1d} - Be^{-ik_1d}) = k_2e^{i\theta} (Ce^{-bk_2} - De^{bk_2}). \end{cases} \quad (9)$$

Ainsi, nous avons un système de quatre équations linéaires sur A, B, C et D , dont le second membre est nul.

3. Afin d'obtenir une solution non triviale, le déterminant de ce système doit être nul, ce qui permet d'obtenir la condition

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ ik_1 & -ik_1 & -k_2 & k_2 \\ e^{ik_1 d} & e^{-ik_1 d} & -e^{i\theta} e^{-bk_2} & -e^{i\theta} e^{bk_2} \\ ik_1 e^{ik_1 d} & -ik_1 e^{-ik_1 d} & -k_2 e^{i\theta} e^{-bk_2} & k_2 e^{i\theta} e^{bk_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Le développement de ce déterminant est possible, mais le calcul est fastidieux. On peut montrer, et le résultat fut donné lors de l'oral, que la condition précédente s'écrit

$$\cos \theta = \cos k_1 d \cos k_2 b - \frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 d \sin k_2 b. \quad (11)$$

Ce résultat est peu exploitable en l'état, et on se propose donc de considérer la limite $b \rightarrow 0$ et $V_0 \rightarrow \infty$, avec $bV_0 = F$. Cette condition correspond à des marches infiniment hautes mais infiniment fines. Dans cette limite, on a $d = a - b \simeq a$, $k_2 \sim \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \rightarrow \infty$, et ainsi $k_2 b \sim b \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = \sqrt{b} \sqrt{\frac{2mF}{\hbar^2}} \rightarrow 0$. On peut ainsi conclure que $\cos k_2 b \rightarrow 1$. Ensuite, puisque k_1 reste fixé, on a $-\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sim \frac{k_2^2}{2k_1}$. Avec ces éléments, on a

$$-\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 d \sin k_2 b \simeq \frac{\sin k_1 a}{k_1 a} k_2^2 ab \sim \frac{2maF}{\hbar^2} \frac{\sin k_1 a}{k_1 a}. \quad (12)$$

Finalement, en notant $P = \frac{2maF}{\hbar^2} = \frac{2maV_0 b}{\hbar^2}$, on obtient la limite de l'équation (11)

$$\boxed{\cos \theta = \cos k_1 a + P \frac{\sin k_1 a}{k_1 a}}. \quad (13)$$

La structure de bandes apparaît alors en remarquant que $\cos \theta$ est compris entre -1 et 1 , ce qui implique que certains modes k_1 vont être interdits (et donc certaines valeurs de l'énergie). Ces modes correspondent à

$$\left| \cos k_1 a + P \frac{\sin k_1 a}{k_1 a} \right| > 1. \quad (14)$$

La figure 9.2 donne la fonction $f : k_1 a \mapsto \cos k_1 a + P \frac{\sin k_1 a}{k_1 a}$ avec $P = 5$.

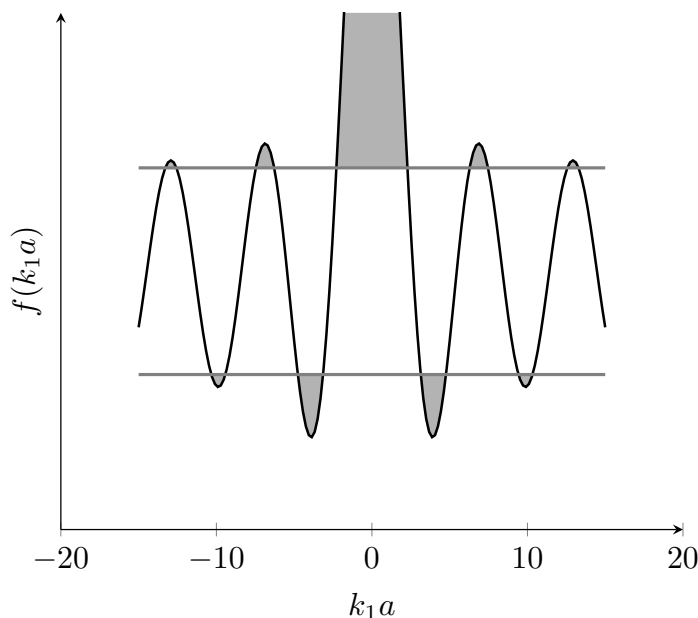


FIGURE 9.2. La structure de bande dans un cristal périodique apparaît, pour les valeurs interdites en gris.

Exercice 9.2 : Oscillateur harmonique - X MP

Une particule de masse m est placée dans un potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}qx^2$.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger, ainsi que l'énergie associée. On pourra chercher une solution sous la forme $\varphi(x) = \exp(\beta x^\alpha)$.

2. Montrer que cette solution correspond au niveau d'énergie fondamental. On admettra que $\Delta p \Delta x$ est croissant avec le niveau d'énergie dans le cas étudié.

3. On note $\varphi(x)$ la partie spatiale d'une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, associée à une énergie E_φ . Montrer qu'il existe A et E_ρ tel que $\rho(x) = Ax\varphi(x) - \varphi'(x)$ soit solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps avec une énergie E_ρ . En déduire que les énergies des solutions stationnaires sont quantifiées et que $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

4. On considère à présent un cristal, dont on souhaite trouver la capacité thermique. Soit un atome de masse m de ce cristal, dont on modélise l'interaction avec le cristal par trois ressorts indépendants. Quelle est l'énergie moyenne de l'atome ?

5. En déduire la capacité thermique du cristal, et en étudier les limites quand T tend vers 0 ou $+\infty$.

L'étude de l'oscillateur harmonique quantique est un exercice relativement récurrent, sous des formes variées, tant ce système constitue un passage obligé de l'étude de la physique quantique, et par les nombreuses applications qu'il possède. Même si son étude n'est pas au programme de CPGE (la résolution complète recouvrant des notions très largement hors-programme), sa connaissance permet souvent d'aider l'avancement de certains problèmes, notamment aux ENS.

1. On suppose que la solution est de la forme $\varphi(x) = \exp(\beta x^\alpha)$. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{1}{2}qx^2\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (1)$$

On calcule les dérivées successives de φ , et on obtient

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \beta\alpha x^{\alpha-1} \exp(\beta x^\alpha), \\ \varphi''(x) = (\beta^2\alpha^2 x^{2\alpha-2} + \beta\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) \exp(\beta x^\alpha). \end{cases} \quad (2)$$

L'équation de Schrödinger devient alors

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\beta^2\alpha^2 x^{2\alpha-2} + \beta\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) + \frac{1}{2}qx^2 = E. \quad (3)$$

Il s'agit d'une équation polynomiale en x . Pour pouvoir annuler le terme $\frac{1}{2}qx^2$, il faut que l'un des deux termes en $x^{2\alpha-2}$ ou en $x^{\alpha-2}$ ait la même puissance. Ceci n'est possible que si $\alpha = 2$. Dans ce cas, en identifiant les différents coefficients du polynôme, on obtient

$$\begin{cases} -\frac{2\hbar^2}{m}\beta^2 + \frac{1}{2}q = 0, \\ -\frac{\hbar^2\beta}{m} = E. \end{cases} \quad (4)$$

La première équation permet d'obtenir $\beta = \pm \frac{1}{2\hbar}\sqrt{qm} = \pm \frac{m\omega}{2\hbar}$, où on définit $\omega = \sqrt{\frac{q}{m}}$. Afin que φ soit normalisable, il est nécessaire de choisir la solution négative. On en déduit alors que

$$E = \left(-\frac{\hbar^2}{m}\right)\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right) = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (5)$$

Finalement, on peut chercher une solution $\psi(x) = A\varphi(x)$ respectant la condition de normalisation $\int |\psi|^2 dx = 1$. En se rappelant de la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ pour $\alpha > 0$, on trouve immédiatement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad (6)$$

et on en déduit finalement une solution normalisée de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\boxed{\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)}. \quad (7)$$

2. Afin de montrer que cette solution correspond au niveau d'énergie fondamental, nous allons montrer que la fonction d'onde trouvée précédemment vérifie le cas d'égalité de l'inégalité de Heisenberg spatiale. Avec l'indication donnée, nous serons sûrs qu'il n'existe pas de niveau d'énergie inférieur.

L'incertitude sur la position est définie par $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, où $\langle A \rangle$ désigne la valeur moyenne de la quantité A , relativement à la densité de probabilité $|\psi|^2$. On voit directement que

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) dx = 0, \quad (8)$$

car la fonction à intégrer est impaire. Ensuite, on peut calculer

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \rangle &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) dx = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} xx \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) dx \\
 &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\hbar}{2m\omega} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) \right) dx + \left[-\frac{\hbar x}{m\omega} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{2m\omega} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) dx = \frac{\hbar}{2m\omega},
 \end{aligned} \tag{9}$$

où l'on a procédé par intégration par partie. On a ainsi $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$.

Pour calculer Δp , on remarque d'abord que par analogie avec la mécanique classique $\langle p \rangle = 0$. On peut ensuite écrire la valeur moyenne de la conservation de l'énergie

$$E_0 = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega \langle x^2 \rangle, \tag{10}$$

et en remplaçant avec les valeurs trouvées précédemment, on trouve

$$\langle p^2 \rangle = 2m \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \right) = \frac{\hbar m\omega}{2}. \tag{11}$$

D'où $\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$. On aurait également pu raisonner par une analogie avec l'oscillateur harmonique classique, où $\Delta p = m\omega\Delta x$, ce qui donne le même résultat.

Finalement, on peut calculer que

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}, \tag{12}$$

et ainsi la fonction d'onde trouvée correspond au cas d'égalité de l'inégalité spatiale de Heisenberg (on parle de *saturation* de l'inégalité), et est donc associée au niveau d'énergie fondamental.

3. Considérons de nouveau $\varphi(x)$ la partie spatiale d'une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, associée à une énergie E_φ . Posons une fonction d'onde $\rho(x) = Ax\varphi(x) - \varphi'(x)$, elle aussi supposée solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps avec une énergie E_ρ . Ainsi, on a

$$E_\rho \rho(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \rho''(x) + \frac{1}{2}qx^2 \rho(x). \tag{13}$$

Calculons les dérivées successives de ρ , on a

$$\begin{cases} \rho(x) = Ax\varphi(x) - \varphi'(x), \\ \rho'(x) = A(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \varphi''(x), \\ \rho''(x) = A(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) - \varphi'''(x). \end{cases} \tag{14}$$

Par ailleurs, l'équation de Schrödinger pour φ s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' = \left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2 \right) \varphi, \tag{15}$$

que l'on peut dériver pour obtenir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'''(x) = \left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2 \right) \varphi'(x) - qx\varphi(x). \tag{16}$$

On peut ainsi exprimer l'équation de Schrödinger pour ρ (13) en fonction de φ et de ses dérivées. On obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(A(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) - \varphi'''(x)) = \left(E_\rho - \frac{1}{2}qx^2\right)(Ax\varphi(x) - \varphi'(x)), \quad (17)$$

que l'on peut réécrire en fonction de φ et de φ' exclusivement, sous la forme

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{m}A\varphi'(x) + Ax\left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2\right)\varphi(x) - \left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2\right)\varphi'(x) + qx\varphi(x) \\ = \left(E_\rho - \frac{1}{2}qx^2\right)(Ax\varphi(x) - \varphi'(x)). \end{aligned} \quad (18)$$

et en regroupant les différentes dérivées de φ , on obtient

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{m}A - \left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2\right) + \left(E_\rho - \frac{1}{2}qx^2\right)\right)\varphi'(x) \\ + \left(Ax\left(E_\varphi - \frac{1}{2}qx^2\right) + qx - Ax\left(E_\rho - \frac{1}{2}qx^2\right)\right)\varphi(x) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

qui se simplifie en

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m}A - E_\varphi + E_\rho\right)\varphi'(x) + (A(E_\varphi - E_\rho) + q)x\varphi(x) = 0. \quad (20)$$

Afin que cette équation soit vérifiée, il suffit que les coefficients devant $\varphi'(x)$ et $x\varphi(x)$ s'annulent. On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} E_\rho - E_\varphi = \frac{q}{A} \\ E_\rho - E_\varphi = \frac{\hbar^2 A}{m} \end{cases} \quad (21)$$

On égalise les deux équations pour en déduire que $A = \frac{\sqrt{qm}}{\hbar} = \frac{m\omega}{\hbar}$, et finalement

$$\boxed{E_\rho = E_\varphi + \hbar\omega}. \quad (22)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger sont donc espacées en énergie de $\hbar\omega$. Avec le fondamental d'énergie à $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, et en supposant que les niveaux d'énergie sont non dégénérés, on obtient donc l'énergie du n -ième niveau

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (23)$$

Cette méthode, bien que calculatoire, permet donc de trouver les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique en raisonnant simplement sur les fonctions d'ondes associées aux différents niveaux d'énergie, sans avoir recours à des notions plus poussées de mécanique quantique.

4. Comme indiqué dans l'énoncé, on cherche à présent à calculer la capacité calorifique d'un cristal, dont chaque atome est modélisé par un oscillateur harmonique tridimensionnel. Comme en mécanique classique, nous allons supposer que cet oscillateur harmonique tridimensionnel est constitué de trois oscillateurs harmoniques unidimensionnels indépendants. L'énergie moyenne à trois dimensions sera alors trois fois l'énergie moyenne d'un oscillateur à une dimension.

Avec le résultat précédent, cette énergie moyenne se calcule en supposant que la probabilité p_n que l'atome soit dans un état d'énergie E_n suit une répartition de Boltzmann, c'est-à-dire de la forme

$$p_n = Ae^{-\frac{E_n}{k_B T}}, \quad (24)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et A est une constante qui ne dépend pas de n . Afin de calculer cette constante, on utilise la condition de normalisation des probabilités, que l'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Cette somme s'exprime

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(\frac{1}{2}+n)\hbar\omega}{k_B T}} = A e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = A \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}, \quad (25)$$

où l'on a reconnu une somme géométrique. Finalement, la condition de normalisation donne

$$A = \left(\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \right)^{-1}. \quad (26)$$

De manière conventionnelle, nous allons à présent utiliser $Z = \frac{1}{A}$ dans nos équations. L'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique à une dimension s'exprime alors

$$\begin{aligned} \langle E_{1D} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n = \frac{1}{Z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n \right) \hbar\omega e^{-\frac{(\frac{1}{2}+n)\hbar\omega}{k_B T}} \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Reste alors à calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}$, si cette dernière n'est pas donnée lors de l'oral. Une méthode rapide pour la calculer est d'introduire la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega x}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega x}{k_B T}}}, \quad (28)$$

définie pour tout $x > 0$. On se convainc que cette fonction est dérivable, et que l'on peut intervertir dérivée et sommation par les théorèmes de domination habituels en mathématiques. On a ainsi

$$f' : x \mapsto -\frac{\hbar\omega}{k_B T} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega x}{k_B T}} = -\frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{e^{-\frac{\hbar\omega x}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega x}{k_B T}}\right)^2}, \quad (29)$$

et finalement en évaluant cette équation en $x = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^2}. \quad (30)$$

On a ainsi l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique à une dimension

$$\langle E_{1D} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (31)$$

Les différents oscillateurs harmoniques qui modélisent l'atome étant supposés indépendants, l'énergie moyenne de l'atome est donnée par

$$\boxed{\langle E_{3D} \rangle = 3 \langle E_{1D} \rangle = \frac{3\hbar\omega}{2} + \frac{3\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}}. \quad (32)$$

5. Le calcul de la capacité thermique C d'un système thermodynamique quelconque se fait en général en dérivant l'énergie interne du système par rapport à la température, à volume

constant. L'énergie moyenne du cristal, constitué de N atomes, est $E_{\text{tot}} = N \langle E_{3D} \rangle$. Ainsi, puisque cette quantité ne dépend pas du volume, on a

$$C(T) = \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial T} = 3N\hbar\omega \left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T^2} \right) \left(-\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \right) = \frac{3N\hbar^2\omega^2}{k_B T^2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2}. \quad (33)$$

Examinons à présent les cas limites à haute et basse température. Posons $X = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$, ce qui permet de réécrire la capacité thermique

$$C(X) = 3Nk_B X^2 \frac{e^X}{(e^X - 1)^2}. \quad (34)$$

À haute température, c'est-à-dire pour $k_B T \gg \hbar\omega$, on a $X \rightarrow 0$, de telle sorte que $e^X - 1 \sim X$.

$$\lim_{X \rightarrow 0} C(X) = \lim_{X \rightarrow 0} 3Nk_B \frac{X^2}{X^2} e^X = 3Nk_B. \quad (35)$$

Cette limite constitue la loi de Dulong et Petit, obtenue pour la première fois expérimentalement en 1819. La particularité remarquable de cette loi est que la capacité thermique d'un solide à haute température ne dépend ni du matériau, ni de la température. Cette loi peut s'exprimer encore plus facilement sous forme intensive en introduisant la capacité thermique molaire, qui vaut alors $c_m = 3R \simeq 25 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. C'est cette valeur que l'on retrouve lorsque l'on traite le problème de manière classique. À température ambiante, la plupart des éléments vérifient approximativement cette loi.

Toutefois, lorsque la température diminue, la capacité thermique commence à décroître passée une température caractéristique appelée température de Debye. Aux très basses températures, elle tend vers 0. Historiquement, on doit à Einstein le modèle décrit précédemment. Il fut le premier à prendre en compte la nature quantique des interactions entre les atomes qui composent le cristal, ce qui permet de rendre compte de la décroissance vers 0 de la capacité thermique.

Pour $X \rightarrow \infty$, on a

$$C(X) = 3Nk_B X^2 \frac{e^X}{e^{2X} (1 - e^{-X})} \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} 3Nk_B X^2 e^{-X}, \quad (36)$$

qui tend bien vers 0 pour $X \rightarrow \infty$, par croissance comparée. On obtient ainsi la bonne limite pour la capacité thermique à basse température.

Bien que meilleur que le modèle classique, le modèle d'Einstein ne rend pas complètement compte de l'expérience. En effet, il a été mesuré que la capacité thermique décroît comme T^3 aux basses températures, alors que le modèle d'Einstein prédit une décroissance exponentielle. On peut assez facilement comprendre pourquoi ce modèle ne peut décrire complètement la réalité. On a supposé que le solide était composé de $3N$ oscillateurs harmoniques indépendants et de même pulsation. Toutefois, on sait assez bien, par exemple grâce aux modèles d'interactions entre proches voisins pour décrire la propagation du son dans les solides, que le mouvement d'un atome va entraîner celui des autres. Il est donc nécessaire de tenir compte des interactions entre les atomes pour obtenir une description plus fidèle. Une solution de ce type, rendant compte de la décroissance en T^3 , fut proposée par Debye en 1912. Les capacités thermiques dans les deux modèles sont données dans la figure 9.3.

Finalement, remarquons qu'une telle description ne tient pas compte de la contribution des électrons, dont il faut tenir compte à très basse température.

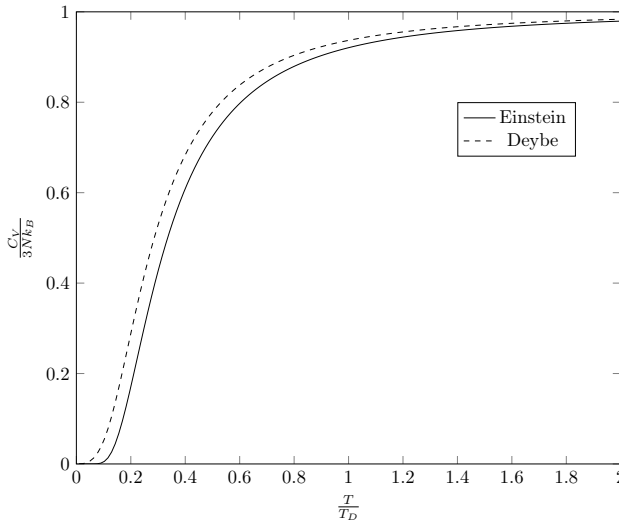


FIGURE 9.3. Comparaisons entre les modèles d'Einstein et de Debye. T_D est la température de Debye, intrinsèque à chaque solide.

Exercice 9.3 : Puits quantique variable - Ulm MP

Une particule quantique libre est confinée dans un puits unidimensionnel de largeur L . Décrire la dynamique de la particule quand L varie de L_0 à $2L_0$: 1) très lentement 2) très rapidement.

Cet exercice, assez original, constitue un cas relativement simple de particule quantique dans un potentiel variable. Ici, nous allons nous extraire de la dépendance temporelle en considérant des cas limites. Comme très souvent, le cas général, qui consisterait à résoudre l'équation de Schrödinger dépendant du temps, est inaccessible au calcul exact.



Quelques pistes...

1. Retrouver les niveaux d'énergie ainsi que les fonctions d'onde d'une particule dans un puits unidimensionnel de largeur L .

2. Que signifie « lentement » et « rapidement » dans un contexte quantique ? Par un raisonnement dimensionnel, associer un temps caractéristique à l'évolution.

3. Pour une évolution lente, que va-t-il se passer ? Décrire l'évolution d'une particule initialement dans le mode fondamental.

4. Pour une évolution rapide, la fonction d'onde aura-t-elle le temps de s'adapter ? Pour une particule initialement dans le mode fondamental, calculer la probabilité de passer dans un état excité du nouveau système.

5. *Complément* : calculer la valeur moyenne de l'énergie avant et après la transformation pour une particule initialement dans l'état fondamental. Que peut-on en conclure ?

On donne la valeur des sommes

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{((2k+1)^2 - 4)^2} = -\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{64} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1)^2}{((2k+1)^2 - 4)^2} = -\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{16}. \quad (1)$$

1. Commençons tout d'abord par rappeler le cas classique du puits de potentiel unidimensionnel. Celui-ci permet d'établir un lien fructueux entre confinement et quantification de l'énergie. On considère ainsi une particule de masse m confinée dans un puits de potentiel infini de largeur finie L , c'est-à-dire qu'on a

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L], \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Le potentiel étant infini à l'extérieur du puits, la particule ne peut pas s'y trouver, donc $\psi(x) = 0$ pour $x \notin [0, L]$. La probabilité de présence devant être continue, la fonction d'onde l'est également, et on a donc comme conditions aux limites $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

On peut à présent utiliser l'équation de Schrödinger dans le domaine $[0, L]$. Comme pour l'instant on ne s'intéresse qu'au problème stationnaire, on peut se restreindre à l'équation indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Leftrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (3)$$

Montrons rapidement que l'énergie doit être positive : si elle est négative, la solution de l'équation de Schrödinger est une combinaison linéaire d'exponentielles réelles, sous la forme $\psi(x) = Ae^{\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}x} + Be^{-\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}x}$. Cette combinaison devant s'annuler en deux points de l'espace, on voit que nécessairement $A = B = 0$, ce qui est sans intérêt.

On se place donc dans le cas où $E \geq 0$. Les solutions sont alors de la forme

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (4)$$

avec $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. On peut alors utiliser les conditions aux limites

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (5)$$

et

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}. \quad (6)$$

Tout ceci n'est pas sans nous rappeler la corde de Melde dont les modes de vibrations sont également quantifiés de la sorte. On obtient donc

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} n^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2, \quad (7)$$

et on retrouve bien la quantification de l'énergie. Les fonctions d'ondes propres associées sont

$$\psi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (8)$$

On peut ensuite les normaliser sur l'intervalle $[0, L]$

$$\int_0^L |\psi^2(x)| dx = 1 \Rightarrow B^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = B^2 \left[\frac{X}{2} - \frac{L}{4n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi X}{L}\right) \right]_0^L = 1 \quad (9)$$

Soit finalement

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (10)$$

On note au passage que ψ a pour dimension l'inverse d'une racine carrée de longueur, comme il se doit pour les fonctions d'onde en dimension 1.

2. La question est à présent la suivante : dans quelle mesure peut-on continuer d'appliquer ce résultat quand la longueur devient variable ? Bien sûr, en toute rigueur, on se devrait de résoudre l'équation de Schrödinger instationnaire

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad (11)$$

mais ceci est peu aisé, d'abord parce que résoudre une équation aux dérivées partielles est rarement simple, en plus ici parce que les conditions aux limites sont mobiles.

On a donc envie de comparer le temps typique de variation de la longueur du puits à un temps associé au processus quantique de la particule. L'équation de Schrödinger instationnaire est d'ordre 1 en temps, et d'ordre 2 en position, ce qui rappelle fortement l'équation de diffusion. Faisant fi de l'unité imaginaire et du signe (qu'on peut réabsorber en définissant un « temps complexe » $\tau = it$, mais nul besoin d'aller si loin), on voit qu'un coefficient de diffusion émerge sous la forme

$$D = \frac{\hbar}{2m}, \quad (12)$$

par exemple en vérifiant rapidement que $[\hbar/m] = \text{J.s.kg}^{-1} = \text{m}^2.\text{s}^{-1}$. On sait par ailleurs que sur une distance L , les phénomènes de diffusion se propagent en un temps τ donné par

$$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{2mL^2}{\hbar}. \quad (13)$$

On peut proposer une application numérique : pour un électron de masse $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ dans un puits micrométrique, on trouve un temps de diffusion quantique d'environ 3 ns.

3. Ainsi, si le temps de variation caractéristique de la largeur du puits est grande devant τ , la particule a « tout le temps » de suivre les évolutions de son environnement : on peut donc choisir pour ψ la fonction d'onde stationnaire et faire dépendre $L(t)$.

Imaginons l'évolution d'une particule initialement dans l'état fondamental. Au cours du temps, la fonction d'onde du nouveau mode fondamental sera donnée par

$$\psi_1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{\pi x}{L(t)}\right), \quad (14)$$

avec des niveaux d'énergie donnés par

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL(t)^2}. \quad (15)$$

L'énergie du fondamental est donc une fonction décroissante de longueur du puits. Ainsi, la particule va pouvoir rester dans le mode fondamental en émettant des photons infiniment peu énergétiques à chaque instant, et donc pouvoir « suivre » l'évolution du puits, en restant dans son mode fondamental.

On ne pourra se passer d'une remarque : on a en fait soumis une particule quantique à ce qu'on appelle en électronique la wobulation. Celle-ci permet d'observer les réponses d'un circuit électrique à un signal de pulsation variable. Tant que le temps de réponse du circuit est inférieur au temps typique de variation de la fréquence, on observe la réponse quasi-instantanée du circuit à une pulsation donnée. Ceci permet à l'écran d'un oscilloscope d'observer en direct le diagramme de Bode en gain). Ici, le processus est similaire, sauf que la longueur du puits de potentiel remplace la pulsation excitatrice.

4. Supposons à présent que le puits double de taille très rapidement par rapport à l'échelle de temps τ au temps $t = 0$. Il est tentant de se dire que la particule n'aura « pas le temps de réagir », mais il est nécessaire de donner un sens précis à cette intuition. En mécanique quantique, le comportement d'une particule est régi par sa fonction d'onde. Ainsi, malgré le changement brusque, la fonction d'onde ne va pas être modifiée à $t = 0$.

Il semble toutefois clair qu'un tel changement va avoir un effet sur la dynamique de la particule. Le changement de la taille du puits va modifier les niveaux d'énergie, qui deviennent

$$E_{n,2L} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} n^2, \quad (16)$$

ainsi que les fonctions d'onde propres associées

$$\psi_{n,2L}(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right). \quad (17)$$

Ainsi, l'effet de l'agrandissement est de changer les niveaux d'énergie, et donc la base naturelle dans laquelle exprimer les fonctions d'onde. Même si la fonction d'onde ne change pas, elle va être projetée dans une nouvelle base, et donc des changements d'énergie vont être possibles.

Considérons alors une particule dans l'état fondamental du puits de largeur L à $t < 0$. Sa fonction d'onde s'écrit alors

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{iE_{1,L}t}{\hbar}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{pour } L \leq x \leq 2L. \end{cases} \quad (18)$$

avec $E_{1,L} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ comme précédemment. De manière générale, on va pouvoir l'exprimer dans la nouvelle base, sous la forme

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_{n,2L}(x) \exp\left(-\frac{iE_{n,2L}t}{\hbar}\right). \quad (19)$$

Dans ce cas, les coefficients $|a_n|^2$ vont représenter la probabilité pour la particule d'être dans l'état n . Afin de les trouver, l'idée est d'utiliser l'orthonormalité des bases de fonction d'onde. Cette relation se traduit par

$$\int_0^{2L} \psi_{n,2L}(x) \psi_{m,2L}(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) dx = \delta_{n,m}, \quad (20)$$

avec $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. On peut aisément le vérifier par le calcul. Ainsi, on a

$$a_m = \int_0^{2L} \varphi(x, 0) \psi_{m,2L}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) dx, \quad (21)$$

et en faisant le changement de variable $u = \frac{\pi x}{L}$, on obtient

$$a_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin u \sin \frac{mu}{2} du. \quad (22)$$

Afin d'évaluer cette intégrale, on peut transformer le produit des deux sinus en une somme, et on obtient

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\cos u \left(1 - \frac{m}{2}\right) - \cos u \left(1 + \frac{m}{2}\right) \right) du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(-\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m-2} + \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m+2} \right) = -\frac{4\sqrt{2} \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi(m^2 - 4)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Le cas $m = 2$ est à traiter à part, et on obtient aisément

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (24)$$

On peut alors évaluer numériquement les premiers coefficients, ainsi que les probabilités associées. On trouve alors les valeurs données dans le tableau 1.

TABLEAU 1. Coefficients a_n et probabilités associées.

n	1	2	3
a_n	$\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \simeq 0.60$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.70$	$\frac{4\sqrt{2}}{5\pi} \simeq 0.36$
$ a_n ^2$	0.36	0.5	0.12

Ainsi, après élargissement du puits, une particule initialement dans l'état fondamental a une probabilité non nulle d'être trouvée dans un état excité. Ceci correspond au fait que la fonction d'onde du fondamental n'est plus un mode propre du nouveau puits. Cet état initial est compressé dans une zone plus petite que ce qui est autorisé pour les fonctions propres du nouveau puits. Cet état possède donc une énergie cinétique plus grande que le mode fondamental, et a donc la possibilité de passer dans un état excité.

5. Un tel raisonnement aurait probablement été suffisant pour conclure un oral. En guise de complément, on peut s'intéresser aux propriétés de la nouvelle expression de la fonction d'onde. Une première question à se poser est de savoir si les $|a_n|^2$ peuvent bien s'interpréter comme une probabilité, en particulier si leur somme est bien égale à 1. Il va donc s'agir d'essayer d'évaluer la somme $\sum_{n \geq 1} |a_n|^2$. Ayant déjà traité les cas $n = 1$ et $n = 2$ à part, nous allons nous contenter de calculer $\sum_{n \geq 3} |a_n|^2$. Pour cela, on remarque que

$$|a_m|^2 = \begin{cases} \frac{32}{\pi^2} \frac{1}{(m^2 - 4)^2} & \text{si } m \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (25)$$

Ainsi, nous cherchons à calculer

$$\sum_{n \geq 3} |a_n|^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{32}{\pi^2} \frac{1}{((2k+1)^2 - 4)^2}. \quad (26)$$

Cette somme peut par exemple se calculer grâce à des séries entières habituelles, mais ce n'est pas l'objectif, et nous nous contenterons d'accepter sa valeur

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{((2k+1)^2 - 4)^2} = -\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{64}, \quad (27)$$

de telle sorte que

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|^2 = \frac{32}{9\pi^2} + \frac{1}{2} + \frac{32}{\pi^2} \left(-\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{64} \right) = 1. \quad (28)$$

Ainsi, les $|a_n|^2$ semblent bien pouvoir s'interpréter comme des probabilités de se trouver dans l'état n après le changement de taille du puits.

Ces résultats impliquent que si l'on mesure l'énergie du système après la transformation, on va avoir une probabilité non nulle de le trouver dans un état d'énergie différent de l'état initial, ce qui peut sembler ne pas respecter la conservation de l'énergie. Toutefois, la nature probabiliste du phénomène étudié signifie que l'on doit s'intéresser à l'espérance de l'énergie. Avant la transformation, nous avons supposé la particule dans son état fondamental, et donc sa valeur moyenne est simplement donnée par la valeur de l'énergie du fondamental du puits de taille L , c'est-à-dire

$$\langle E \rangle (t < 0) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (29)$$

Après avoir doublé la taille du puits, la moyenne s'exprime

$$\begin{aligned} \langle E \rangle (t > 0) &= \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 E_{n,2L} \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} \left(\frac{32}{9\pi^2} 1^2 + \frac{2^2}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{32}{\pi^2} \frac{(2k+1)^2}{((2k+1)^2 - 4)^2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

où l'on a utilisé la même décomposition que précédemment. On se donne là encore la valeur de la somme $\sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2 - 4} = -\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{16}$, de telle sorte que

$$\langle E \rangle (t > 0) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} \left(\frac{32}{9\pi^2} + 2 + \frac{32}{\pi^2} \left(-\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{16} \right) \right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (31)$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'énergie du système est conservée. Ce résultat n'est pas évident puisque le système subit à $t = 0$ une discontinuité.

En conclusion, dès que l'on considère une approche dynamique, un système quantique aussi simple que le puits infini exhibe un comportement non intuitif et complexe. Bien entendu, pour une situation intermédiaire, on serait bien en peine d'appliquer un tel raisonnement. Si la largeur du puits varie sur des temps de l'ordre de grandeur de τ , il faudrait rigoureusement résoudre l'équation de Schrödinger. Comme c'est chose peu aisée, on aura en général recours à des simulations.

Annexe - Résolution des équations différentielles courantes

Dans cette annexe, nous présentons des méthodes de résolution d'un certain nombre d'équations différentielles rencontrées en physique. En plus des cas linéaires simples, dont la résolution doit être parfaitement maîtrisée, nous présentons des méthodes plus rarement employées, mais qu'il est toujours bon de conserver en tête lors d'un oral.

Équations différentielles linéaires

Équations linéaires d'ordre un

Le type d'équation différentielle le plus simple, et habituellement le plus souvent rencontré est celui des équations linéaires d'ordre un, que nous noterons

$$\forall x \quad a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y(x) = c(x), \quad (32)$$

avec a, b et c des fonctions suffisamment régulières, souvent au moins continues. La méthode de résolution est bien connue : on commence par trouver les solutions générales de l'équation homogène associée $a \frac{dy_h}{dx} + by = 0$, puis on cherche une solution particulière. Sur un intervalle où a ne s'annule pas, les solutions de l'équation homogène sont données par

$$\forall x \quad y_h(x) = A \exp \left(- \int_0^x \frac{b(u)}{a(u)} du \right), \quad (33)$$

où A est une constante d'intégration. Dans le cas où a et b sont des constantes, on retrouve bien entendu la solution $y : x \mapsto A \exp \left(-\frac{b}{a}x \right)$.

La recherche d'une solution particulière à l'équation (32) peut se faire de plusieurs manières. Par ordre de difficulté calculatoire, on peut citer les méthodes suivantes :

- chercher une solution évidente ;
- chercher une solution qui « ressemble » au second membre, par exemple sous forme de polynôme si le second membre est polynomial, sinusoïdale si le second membre l'est, etc ;
- chercher une solution par la méthode de variation de la constante. Cette méthode, très générale, est assez peu utilisée en physique. Elle consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$\forall x \quad y_p(x) = A(x) \exp \left(- \int_0^x \frac{b(u)}{a(u)} du \right), \quad (34)$$

avec A une nouvelle fonction inconnue. De manière générale, il est possible de montrer que cette solution va s'écrire

$$y_p(x) = \exp \left(- \int_0^x \frac{b(u)}{a(u)} du \right) \left(B + \int_0^x \frac{c(u)}{a(u)} \exp \left(\int_0^s \frac{b(s)}{a(s)} ds \right) du \right). \quad (35)$$

Cette solution complexe ne doit pas être utilisée telle quelle, et on privilégiera la méthode consistant à refaire le raisonnement dans le cas considéré. On trouvera un exemple de cette méthode dans l'exercice 1.9.

Équations linéaires d'ordre deux à coefficients constants Le cas des équations linéaires d'ordre deux à coefficients constants doit être également parfaitement maîtrisé. Une telle équation s'écrit de manière générale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by(x) = c, \quad (36)$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $y : x \mapsto A \exp rx$ avec A et b deux constantes. En remplaçant dans l'équation homogène, on trouve que r vérifie une équation polynomiale

$$r^2 + ar + b = 0. \quad (37)$$

Pour un discriminant non nul et réel, on obtient soit deux solutions réelles s'il est positif, soit deux solutions complexes s'il est négatif. Notons de manière générale r_{\pm} ces solutions, alors les solutions de l'équation différentielle homogène associée à l'équation (36) sont données par

$$\forall x \quad y_h(x) = \lambda e^{r_+x} + \mu e^{r_-x}, \quad (38)$$

avec λ et μ deux constantes d'intégration. Si le discriminant est nul, on trouve des solutions sous la forme

$$\forall x \quad y_h(x) = (\lambda t + \mu) e^{rx}, \quad (39)$$

où r est la racine double du polynôme précédent.

Cette méthode s'étend sans difficultés aux équations à coefficient complexes. On trouvera un exemple non-trivial dans l'exercice 5.6.

La recherche d'une solution particulière se fait généralement en cherchant une solution qui « ressemble » au second terme. Ce type d'équation est très rarement rencontré en physique, sauf dans le cas d'un forçage sinusoïdal, où l'on procède généralement par passage dans l'espace complexe.

Cas particulier des équations sans membre central

Le cas des équations homogènes sans membre central, du type

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay(x) = 0, \quad (40)$$

doit être immédiatement reconnu. Le cas $a > 0$ correspond à un oscillateur harmonique, dont les solutions sont données par

$$\forall x \quad y_h = \lambda \cos \sqrt{a}x + \mu \sin \sqrt{a}x. \quad (41)$$

Le cas $a < 0$ est généralement moins bien maîtrisé. Les solutions sont en général données par

$$\forall x \quad y_h = \lambda e^{\sqrt{-a}x} + \mu e^{-\sqrt{-a}x}. \quad (42)$$

Ce type de solution peut se réécrire sous une forme plus commode pour les problèmes aux propriétés de parité remarquables

$$\forall x \quad y_h = \lambda \cosh \sqrt{-a}x + \mu \sinh \sqrt{-a}x. \quad (43)$$

On trouvera un exemple de résolution d'une telle équation dans l'exercice 7.2.

Équations linéaires à coefficients non-constants d'ordre deux

De manière générale, il n'existe pas de méthode permettant la résolution d'équations d'ordre deux à coefficients non-constants. Là encore, il existe un certain nombre de méthodes qui permettent de trouver des solutions dans des cas particuliers.

Cas particulier des équations de type « Laplace » Les équations obtenues à partir d'un laplacien sont particulièrement courantes dans l'étude des phénomènes de diffusion et en électromagnétisme. En coordonnées cartésiennes, le laplacien a une expression simple, et on obtient généralement des équations linéaires à coefficient constants. En revanche, dans les systèmes de coordonnées sphériques et cylindriques, l'expression du laplacien fait souvent intervenir des coefficients non constants. Un bon réflexe à avoir est alors de chercher une solution sous forme

$$f(x) = ax^\alpha. \quad (44)$$

À titre d'exemple, essayons de résoudre l'équation $\Delta f = 0$, en cylindrique, pour une fonction purement radiale. Le laplacien d'une telle fonction s'écrit $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$. Ainsi, en cherchant une solution sous la forme ax^α , on obtient

$$(\alpha(\alpha - 1) + \alpha)r^{\alpha-2} = 0, \quad (45)$$

ce qui permet d'obtenir que $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$. On trouvera un exemple d'utilisation d'une telle méthode dans les exercices 5.1 et 4.3.

Recherche de solutions en séries entières

De manière plus anecdotique en physique, il est également possible de chercher des solutions sous forme de séries entières. Cette méthode est particulièrement lourde, mais permet souvent d'obtenir des solutions exactes à des problèmes faiblement perturbés.

Équations linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur

La méthode de résolution exposée précédemment pour les équations à coefficients constants s'étend sans difficultés aux équations différentielles à coefficients constants d'ordre supérieur. Considérons une telle équation d'ordre n sous la forme

$$\forall x \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y(x) = b. \quad (46)$$

La recherche de solutions de l'équation homogène se fait comme pour l'ordre 2, et on cherche $y : x \mapsto A \exp rx$. On obtient alors l'équation polynomiale

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (47)$$

Résoudre cette équation, quand c'est possible permet d'obtenir une base des solutions de l'équation homogène associée à (47).

Systèmes d'équations différentielles linéaires

Nous ne traiterons pas le cas général, qui n'est quasiment jamais vu en physique. En revanche, ce type d'équation apparaît régulièrement dans les problèmes faisant intervenir un produit vectoriel avec un vecteur constant. On obtient alors un système de deux équations différentielles couplées sur deux variables x et y , que l'on peut découpler aisément en posant une nouvelle variable complexe $\xi = x + iy$, où i est l'unité imaginaire. Après résolution, on peut revenir aux variables initiales en prenant les parties réelles et imaginaires de ξ . On trouvera un exemple de cette méthode dans l'exercice 5.6.

Équations différentielles non-linéaires

De manière générale, il n'existe pas de méthode de résolution d'une équation différentielle non-linéaire quelconque. Toutefois, un certain nombre de méthodes permettent d'obtenir des solutions pour certaines formes particulières d'équations.

Équations d'ordre un, méthode séparation des variables

La méthode de séparation des variables est la plus utilisée, mais elle se limite aux équations du premier ordre. Considérons une telle équation, que nous écrivons sous la forme

$$\forall x \quad \frac{dy}{dx} = f(y, x), \quad (48)$$

où f est une fonction suffisamment régulière. Dans les cas qui nous intéressent, la fonction est à variables séparables, c'est-à-dire que l'on peut écrire $f(y, x) = g(y)h(x)$. De manière schématique, on va alors écrire

$$\forall x \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx \quad (49)$$

en supposant que g ne s'annule pas sur l'intervalle considéré. En notant G une primitive $\frac{1}{g}$, on obtient

$$G(y) = \int_{x_0}^x h(x)dx. \quad (50)$$

Il est alors souvent possible d'obtenir une forme de $y(x)$ en inversant cette relation. Toutefois, cette méthode nécessite de pouvoir calculer la primitive de h , ce qui n'est pas toujours possible.

À titre d'exemple, considérons le cas d'une chute libre avec des frottements proportionnels au carré de la vitesse, avec une vitesse initiale nulle. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\alpha}{m}v^2, \quad (51)$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2} = gdt, \quad (52)$$

où l'on a posé $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$ la vitesse limite. En faisant les changements de variables $u = \frac{v}{v_\infty}$, et $\tau = \frac{t}{t_0}$ avec $t_0 = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$, on obtient l'équation

$$\frac{du}{1 - u^2} = -d\tau \quad (53)$$

que l'on peut intégrer sous la forme

$$\operatorname{arctanh}(u) = -\tau, \quad (54)$$

où l'on a directement pris en compte que $v(t=0) = 0$. En revenant aux variables initiales, on peut écrire la vitesse

$$v(t) = -v_0 \tanh\left(\frac{t}{t_0}\right). \quad (55)$$

Équations non-linéaires d'ordre deux

La résolution générale d'équations non-linéaires d'ordre deux n'est pas non plus possible, et la méthode précédente ne saurait être appliquée à ce cas. Quelques méthodes peuvent néanmoins être tentées pour trouver une ou plusieurs solutions.

Avec un changement de variable

Il est parfois possible de ramener une équation non-linéaire d'ordre deux à une équation linéaire par un changement de variable. À moins qu'il ne soit absolument évident, un tel changement de variable sera donné lors d'un oral.

Équations sans termes du premier ordre

Certaines équations, après transformation, peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y), \quad (56)$$

avec $g(y)$ une fonction suffisamment régulière, et où le terme $\frac{dy}{dx}$ n'apparaît pas. Il est alors souvent utile de multiplier cette équation par $2\frac{dy}{dx}$, de telle sorte que l'on obtient

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2 \frac{dy}{dx} g(y) = 2 \frac{d}{dx} G(y), \quad (57)$$

où l'on note G une primitive de g . Cette équation s'intègre facilement, et on obtient

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2G(y) + A, \quad (58)$$

où A est une nouvelle constante d'intégration. Si le membre de droite de cette équation est positif, il est alors possible de prendre sa racine, et donc se ramener à une équation non-linéaire du premier ordre, que l'on intégrera en séparant les variables. Là encore, cette méthode a le défaut de nécessiter le calcul de primitives, ce qui n'est pas toujours explicitement possible.

Un exemple de résolution utilisant cette méthode est donné dans l'exercice 7.3.

Les équations aux dérivées partielles

Le cas des équations aux dérivées partielles est encore plus délicat. Certains cas se ramènent à des équations différentielles simples, par exemple lorsque seules les dérivées par rapport à une variable apparaissent. Dans ces cas, on n'oubliera pas que les « constantes » d'intégration obtenues sont en réalité des fonctions des autres variables.

Il est parfois également possible de se ramener au cas d'équations différentielles simples grâce à des changements de variables, comme nous le montrons dans l'exercice 4.4.

Néanmoins, la méthode la plus souvent utilisée consiste à chercher des solutions à variables séparées. Par exemple pour une équation de la forme $G(f)(x, y) = 0$, avec G un opérateur comprenant des dérivées sur x et y . Dans ce cas, on va chercher f sous la forme $f(x, y) = g(x)h(y)$. Une telle méthode est utilisée dans l'exercice 4.3.

Index

- Acoustique, 121, 127, 170
- Agitation thermique, 161, 174, 184
- Atmosphère isotherme, 160, 211

- Battements, 19
- Bilan
 - d'énergie, 73, 88, 95, 101, 131, 152, 168
 - de masse, 135
 - de puissance, 186
 - de quantité de mouvement, 168, 194
- Bulle, 114, 118

- Capacité
 - d'un condensateur, 178
 - thermique, 166, 221
- Changement d'état, 87, 167
- Changement de référentiel, 127
- Chemin optique, 214
- Cinématique, 14
- Coefficient
 - de diffusion, 106
 - de compressibilité isotherme, 157
 - de diffusion, 39
 - de réflexion, 126
 - de transmission, 126
- Condensateur, 178, 194
- Condition de glissement, 41, 46, 167
- Conductivité
 - électrique, 106, 190
 - thermique, 102
- Cône de Mach, 146
- Configurations microscopiques, 164
- Conservation
 - de l'énergie, 183
 - de la charge, 183
 - de la quantité de mouvement, 197
 - du moment cinétique, 200
- Contrainte tangentielle, 139
- Convection, 151
- Coordonnées
 - cylindriques, 91, 132
 - polaires, 21, 23, 25, 29
 - sphériques, 11, 62, 85, 111, 121, 157

- Cristal, 218, 221
- Cylindre, 42, 45, 51

- Densité
 - de probabilité, 107, 161, 219
 - de quantité de mouvement du champ électromagnétique, 197
- Dipôle
 - rayonnant, 203
 - simple, 20

- Écoulement compressible, 125
- Élément infinitésimal, 51, 54, 69, 74, 91, 196, 199
- Énergie
 - de constitution, 28
 - électromagnétique, 186
 - potentielle effective, 12, 22
- Entropie statistique, 164
- Équation
 - d'Euler, 120, 121, 127, 143
 - de d'Alembert, 75, 82, 121
 - de la chaleur, 85, 87, 91, 95, 100, 152
 - de Laplace, 111, 141
 - de Navier-Stokes, 120, 134, 138
 - de Poisson, 176, 178, 183
 - de Schrödinger, 219, 221, 228
 - intégréo-différentielle, 158
- Équations
 - de Maxwell, 194, 206
- Équilibre
 - hydrostatique, 157, 160
 - mécanique, 47
 - thermique, 178
- Évaporation, 135

- Facteur de Boltzmann, 160, 178, 224
- Fonction d'onde, 218, 222, 227
- Force
 - d'inertie d'entraînement, 54
 - centrale, 21, 23, 29
 - de contact, 59
 - de Coriolis, 137
 - de frottements, 56

- surfacique, 56
- Forces internes, 58
- Formule de Boltzmann, 164
- Frottements solides, 40
- Gaz parfait, 157, 160
- Identité thermodynamique, 165
- Indice optique, 210
- Induction, 195
- Inégalité de Heisenberg, 222
- Instabilité hydrodynamique, 149, 151
- Intensité
 - optique, 214
 - sonore, 174
- Interférences, 212
- Lignes de courant, 113, 193
- Loi
 - d'Ohm locale, 185, 190
 - de Descartes, 209
 - de Faraday, 200
 - de Laplace, 144
 - de répartition, 160
- Lois de Coulomb, 53, 167
- Machine thermique, 164
- Marche aléatoire, 36, 108
- Marée, 60
- Méthode énergétique, 10, 42
- Milieu granulaire, 56
- Modèle de Drude, 102, 190
- Modes propres, 171
- Moment quadrupolaire, 203
- Mouvement brownien, 34, 107
- Niveau d'énergie, 221
- Nœud, 171
- Nombre
 - de Mach, 141
 - de Reynolds, 115
- Notation complexe, 17, 77, 121, 129, 142, 206, 213
- Ondes
 - acoustiques, 121, 126, 145
 - dans un plasma, 206
 - de surface, 140, 145
- Optique
 - géométrique, 208
 - ondulatoire, 212
- Oscillateur amorti, 126
- Oscillateur harmonique quantique, 221
- Pendule
 - couplé, 16
 - simple, 9
- Perturbation, 30, 44, 121, 127, 150, 153
- Physique statistique, 164
- Plasma, 205
- Position d'équilibre, 43
- Potentiel
 - de marée, 64
 - des vitesses, 111
 - électrostatique, 176, 178, 183, 187
- Premier principe, 163
- Pression cinétique, 161
- Principe
 - de Curie, 219
 - de Fermat, 210
- Puits quantique, 227
- Référentiel
 - non-galinéen, 54
 - terrestre, 137
 - tournant, 10, 29
- Régime stationnaire, 90, 111, 122, 162, 186
- Relation
 - de Bernoulli, 115, 143
 - de dispersion, 141
 - de Laplace, 116, 173
 - de Laplace (thermodynamique), 119
- Résolution graphique, 72, 123, 216
- Rupture, 57
- Second principe, 165
- Sillage, 145
- Somme géométrique, 213
- Stabilité, 176
- Statique des fluides, 63, 152
- Tension
 - mécanique, 54, 70, 74
 - superficielle, 115, 131, 141, 149
- Théorème
 - d'Ampère, 195
 - de Gauss, 64, 157
 - de superposition, 186, 187
 - du moment cinétique, 16, 46, 58
- Transformation isentropique, 166, 173
- Variable
 - aléatoire, 36
 - complexe, 136
- Variation de la constante, 37
- Vitesse
 - de groupe, 146, 206
 - de phase, 146, 206