

DM n° 5 : Réels

Correction du problème 1 – (Premier pas vers la transcendance de e)

1. Irrationnalité de e.

(a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq q + 1$. Pour tout $i \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket$, $i \leq i + n - 1 - q$, donc

$$(q+1)! \leq (n-q)(n+1-q)\cdots n = \frac{n!}{(n-1-q)!}$$

Ainsi,

$$\frac{(q+1)!}{n!} \leq \frac{1}{(n-1-q)!}.$$

On en déduit que pour tout $N \geq q + 1$

$$\sum_{n=q+1}^N \frac{(q+1)!}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^N \frac{1}{(n-1-q)!} = \sum_{n=0}^{N-q-1} \frac{1}{n!}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (les convergences étant admises dans l'énoncé), il vient :

$$(q+1)! \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

soit :

$$\boxed{\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{e}{(q+1)!}}.$$

(b) Supposons que $e = \frac{p}{q}$, où p et q sont entiers, avec $q+1 > e$.

Puisque la somme exponentielle de paramètre 1 est à termes strictement positifs, ses sommes partielles sont strictement inférieures à sa somme totale, d'où la première inégalité :

$$\boxed{\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < e = \frac{p}{q}}$$

Par ailleurs :

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

et on déduit alors de la question 1 que :

$$\frac{p}{q} \leq \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{e}{(q+1)!}.$$

L'hypothèse $q+1 > e$ permet de conclure :

$$\boxed{\frac{p}{q} < \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{1}{q!}}.$$

- (c) Notons $A = q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$. Comme pour tout $n \leq q$, $n!$ divise $q!$, on peut affirmer que A est entier. Par ailleurs, en multipliant l'encadrement de la question précédente par $q!$, il vient :

$$A < p(q-1)! < A + 1.$$

Ainsi, $p(q-1)!$ est un entier, strictement encadré par deux entiers consécutifs. Ceci est une contradiction.
on en déduit que e ne peut pas être rationnel.

2. Indépendance sur \mathbb{Q} de 1, e et e^2

- (a) Par hypothèse, il existe des rationnels tels que $p + qe + re^2 = 0$. Pour de tels rationnels, on a alors

$$q = -re - pe^{-1}.$$

En multipliant par le ppcm des 3 dénominateurs de q , r et p , on obtient alors 3 entiers a , b et c non tous nuls tels que

$$c = ae + be^{-1}.$$

Par ailleurs, si a est nul, on a nécessairement b et c non nuls (la nullité de l'un entraînerait alors la nullité de l'autre). On en déduit que $e = \frac{b}{c}$, ce qui contredit l'irrationnalité de e . Ainsi, $a \neq 0$. On montre de même que $b \neq 0$.

- (b) On a

$$c = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = a \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + b \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + d_n,$$

où

$$d_n = a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + b \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On a donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|d_n| \leq (|a| + |b|) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

On conclut alors à l'aide de la question 1(a) :

$$|d_n| \leq \frac{(|a| + |b|)e}{(n+1)!}.$$

- (c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq n!|d_n| \leq \frac{(|a| + |b|)e}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $(n!|d_n|)$ admet une limite, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n!|d_n| = 0 \quad \text{soit:} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n!d_n = 0}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(c \cdot n! - n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right) = 0.$$

Or, cette expression est entière. Une suite d'entiers ne peut converger que si elle est stationnaire égale à sa limite à partir d'un certain rang (car, à partir d'un certain rang, elle doit s'approcher de cette limite à moins de $\frac{1}{2}$, ce qui ne laisse pas de choix, puisqu'il n'y a qu'un entier au plus dans l'intervalle $[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$).

On en déduit que pour n assez grand :

$$c \cdot n! - n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) = 0 \quad \text{donc:} \quad \boxed{c = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$

(d) Pour tout n assez grand (c'est-à-dire supérieur à un certain N), on a donc

$$c = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

et en faisant la différence des deux expressions :

$$0 = a \cdot \frac{1}{n!} + b \cdot \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \text{soit: } \boxed{a \cdot \frac{1}{n!} = b \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n!}}.$$

(e) Ceci est vrai pour tout n assez grand, en particulier pour des valeurs pairs, et pour des valeurs impaires de n . On en déduit que a et b sont de même signe, et de signe opposé, ce qui n'est possible que si l'un est nul. Cela contredit une des affirmations précédentes.

Ainsi, e n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

Correction du problème 2 – Développements d'un réel comme limite de fractions égyptiennes

Partie I – Décomposition d'un rationnel comme fraction égyptienne

1. L'ensemble $E = \{a \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{a} \leqslant x\}$ est non vide ; En effet, $\frac{1}{a} \rightarrow 0$ et $x > 0$, donc $\frac{1}{a} \leqslant x$ pour a assez grand.

Ainsi, E est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , donc admet un plus petit élément a_0 .

De plus, $\frac{1}{a_0} \leqslant x < 1$, donc $a_0 > 1$, et comme a_0 est entier, on en déduit que $a_0 \geqslant 2$.

On peut aussi plus simplement remarquer que si $x = \frac{p}{q}$, alors $\frac{1}{q} \in E$.

2. Comme a_0 est dans E , $\frac{1}{a_0} \leqslant x = \frac{p}{q}$, donc $q \leqslant a_0 p$ (puisque $a_0 > 0$, donc $0 \leqslant a_0 p - q$).

Par ailleurs, par minimalité, $a_0 - 1 \notin E$ et $a_0 - 1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $\frac{1}{a_0 - 1} > \frac{p}{q}$, d'où on tire $a_0 p - q < p$.

Les deux inégalités montrent bien l'encadrement

$$\boxed{0 \leqslant pa_0 - q < p}.$$

3. On fait une récurrence forte. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(p)$ la propriété suivante : pour tout $q > p$, $\mathcal{P}\left(\frac{p}{q}\right)$ est vraie.

- Initialisation : soit $p = 1$. On a alors $x = \frac{1}{p}$, qui se décompose en fraction égyptienne constituée d'un unique terme.
- Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(p')$ soit vraie pour tout $p' < p$. Soit $q > p$. On considère a_0 comme dans la question 1. On a alors

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 p - q}{qa_0}.$$

Or, $0 \leqslant a_0 p - q < p$.

* Si $a_0 p - q = 0$, alors on dispose d'une décomposition en fraction égyptienne avec un unique terme.

* Sinon, on peut appliquer $\mathcal{P}(a_0 p - q)$, qui nous donne des entiers $a_1 < \dots < a_n$ tels que

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{a_0} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

Pour terminer de prouver le résultat, il suffit de montrer que $a_0 < a_1$. Cela provient du fait que

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} \leqslant x < \frac{1}{a_0 - 1}.$$

En ne considérant que les termes extrémaux, et en multipliant par $a_1 a_0 (a_0 - 1)$, il vient

$$a_1(a_0 - 1) + a_0(a_0 - 1) < a_1 a_0, \quad \text{soit: } a_0(a_0 - 1) < a_1$$

puisque $a_0 - 1 \geqslant 1$, on obtient bien $a_0 < a_1$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Cela prouve bien que tout rationnel de $]0, 1[$ se décompose en fraction égyptienne.

4. • On a par exemple $\boxed{\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{6}}.$

• On a $\boxed{\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}.$

Partie II – Développement d'un irrationnel par les fractions égyptiennes

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que a_n est bien définie. Par commodité, on note E_n l'ensemble dont on prend le minimum dans la définition de a_n .

- Puisque $x > 0$, et par limite de $\frac{1}{n}$ en $+\infty$, il existe $a \geq 1$ tel que $\frac{1}{a} < x$. Donc E_0 est non vide, et c'est un sous-ensemble de \mathbb{N} . Il admet donc un minimum.

Là aussi, l'argument alternatif donné dans la partie I peut s'adapter, en utilisant la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} : on trouve un rationnel $\frac{p}{q}$ entre 0 et x , puis on considère $\frac{1}{q}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons a_0, \dots, a_{n-1} construits par la méthode précédente. Montrons qu'on peut alors bien construire aussi a_n . Par définition de a_{n-1} , on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} \leq x.$$

Cette inégalité est nécessairement stricte, sinon x s'écrirait comme somme finie de rationnels et serait donc lui-même rationnel. Soit alors

$$= x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} > 0.$$

Toujours par limite de $\frac{1}{n}$, il existe a tel que $\frac{1}{a} \leq \varepsilon$, donc E_n est non vide. Comme c'est un sous-ensemble de \mathbb{N} , il admet un minimum. Cela justifie que a_n est bien défini.

- Par principe de récurrence, la suite infinie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, donc la construction est infinie.

2. • L'inégalité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x$ provient de la définition de a_n , le caractère stricte venant du fait que x est irrationnel (comme dans la question précédente).

- Par minimalité de a_n dans E_n , on en déduit que $a_n - 1 \notin E_n$. Remarquez que $a_n - 1$ est dans \mathbb{N}^* . En effet, puisque $x < 1$, $a_n \geq 2$.

Ainsi, puisque $a_n - 1 \notin E_n$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - 1} > x}.$$

3. L'inégalité $a_n \geq 2$ a été justifiée ci-dessus.

On a alors

$$\frac{1}{a_n - 1} - \frac{2}{a_n} = \frac{a_n - 2(a_n - 1)}{a_n(a_n - 1)} = \frac{2 - a_n}{a_n(a_n - 1)} \leq 0.$$

Donc $\frac{2}{a_n} \geq \frac{1}{a_n - 1}$

4. On a donc, d'après les deux questions précédentes,

$$x < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n - 1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{2}{a_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n}.$$

Comme de plus,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < x,$$

on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n},$$

d'où

$$\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} \quad \text{soit:} \quad [a_{n+1} > a_n].$$

Comme il d'agit d'une suite d'entiers, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n + 1$. Une récurrence immédiate amène $a_n \geq n$, donc $\lim a_n = +\infty$.

5. De l'encadrement

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n},$$

on déduit :

$$x - \frac{1}{a_n} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} < x.$$

Puisque $a_n \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement montre que la somme converge lorsque $n \rightarrow +\infty$, et que sa limite vaut x , c'est-à-dire :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

Partie III – Développement infini d'un rationnel

1. Soit $a \geq 2$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k} = \frac{1/a}{1 - 1/a} = \frac{1}{a-1}.$$

Ainsi, tout $\frac{1}{a-1}$, pour $a \geq 2$, admet un développement infini en fractions égyptiennes. En effectuant un changement de variable, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{N}$ admet un développement infini en fractions égyptiennes. On obtient même un peu plus que demandé ($N = 1$ en plus, mais cela sort un peu de notre domaine d'étude qui est $]0, 1[$).

2. Considérons un développement fini de x , terminant par $\frac{1}{a_n}$ (il en existe un par la partie I). On remplace alors $\frac{1}{a_n}$ par $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(a_n+1)^k}$. Les entiers considérés dans cette somme sont bien dans l'ordre strictement croissant, et plus grands que les a_k , $k \leq n$, car plus grands que a_n qui était le plus grand d'entre eux. Donc il s'agit bien d'un développement infini en fractions égyptiennes.

3. La preuve de la partie II aurait pu s'adapter en considérant une inégalité stricte à la place d'une inégalité large dans l'ensemble à partir duquel on définit a_n . Ainsi, l'égalité n'est obtenue à aucune étape, et la construction ne s'arrête pas, mais converge tout de même par la même démonstration que dans II (il faut juste mettre des inégalités larges à droite cette fois).

On pourrait montrer plus généralement que tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet un développement en fractions égyptiennes. Cela découle de la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, qui nous assure que n'importe quel réel pourra être franchie comme somme d'inverses d'entiers distincts. On trouve d'abord N maximal tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} < x$, puis la construction se déroule comme dans la partie II.

Correction du problème 3 –

1. Convergence de la série définissant c

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}$.

(a) On peut faire la comparaison de deux manières, soit en rajoutant des termes $10^{-\ell}$ manquant entre les termes présents, soit en majorant chacun des termes $10^{-k!}$ par 10^{-k} . On obtient alors (en prenant la deuxième méthode) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n 10^{-k!} \leq \sum_{k=0}^n 10^{-k} = \frac{1 - 10^{-n+1}}{1 - 10^{-1}} \leq \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{10}{9}.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Elle est aussi croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = 10^{-(n+1)!} \geq 0.$$

Ainsi, étant croissante et majorée, (S_n) est convergente, donc $c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ est bien défini.

2. Irrationalité de c

(a) On utilise ici plutôt la première des majorations suggérées dans la première question. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $N > n$.

On a alors :

$$\sum_{k=n+1}^N 10^{-k!} \leq \sum_{\ell=(n+1)!}^{(N+1)!} 10^{-\ell} = 10^{-(n+1)!} \frac{1 - 10^{-(N+1)!+(n+1)!-1}}{1 - 10^{-1}} \leq 10^{-(n+1)!} \cdot \frac{10}{9},$$

d'où finalement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.$$

(b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. On a

$$\frac{p}{q} 10^{n!} = c 10^{n!} = S_n 10^{n!} + 10^{n!} \sum_{k=n+1}^N 10^{-k!},$$

donc

$$q S_n 10^{n!} < p 10^{n!} \leq q S_n 10^{n!} + \frac{10^{n!} q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}} = q S_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-n!-1}} = q S_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}}.$$

Comme $\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow 0$, on en déduit qu'il existe une valeur de n telle que

$$\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} < 1,$$

et donc

$$q S_n 10^{n!} < p 10^{n!} < q S_n 10^{n!} + 1.$$

Ainsi, l'entier $p 10^{n!}$ est strictement encadré entre deux entiers consécutifs ($S_n 10^{n!}$ étant entier comme somme des entiers $10^{n!-k!}$, avec $n! - k! \geq 0$). Ceci est impossible.

On en déduit que c est irrationnel.

3. Inégalité des accroissements finis

On peut soit utiliser l'inégalité triangulaire intégrale, soit (si vous ne la connaissez pas) revenir à un encadrement de f' : pour tout $x \in [a, b]$,

$$-M \leq f'(x) \leq M,$$

et par croissance de l'intégrale,

$$-\int_a^b M \, dx \leq \int_a^b f'(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx, \quad \text{soit:} \quad -(b-a)M \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)M.$$

On a bien obtenu

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a) \quad \text{soit:} \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|,$$

puisque $b-a > 0$. Si $b < a$, on obtient la même chose (il suffit d'inverser le rôle de a et b , et de remarquer que du fait des valeurs absolues, l'expression est symétrique en a et b), et pour $a=b$, le résultat est trivial.

4. Théorème de Liouville (approximation diophantienne)

Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geq 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, on ait : $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}$.

Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.

On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée.

- (a) Soit $E = \{\deg P \mid P \in \mathbb{Z}[X], P \neq 0, P(\alpha) = 0\}$. C'est un sous-ensemble non vide (car α est algébrique) de \mathbb{N} . D'après la propriété fondamentale de \mathbb{N} , E admet un minimum d . Comme $d \in E$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$, de degré minimal, tel que $d = \deg(P)$.
- (b) Le polynôme P ne peut pas être constant non nul, donc $d \neq 0$. Si $d = 1$, il existe a et b des entiers tels que $a\alpha + b = 0$, donc $\alpha = -\frac{b}{a}$, ce qui contredit le fait que α n'est pas rationnel. Ainsi, $d \geq 2$.
- (c) Si P admet une racine rationnelle q , on peut factoriser P :

$$P = (X - q)Q = (X - q)(a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0),$$

et en notant $P = b_dX^d + \cdots + b_1X + b_0$, les b_i étant entiers, on obtient :

$$a_{d-1} = b_d \quad \forall k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket, \quad a_{k-1} - a_kq = b_k \quad \dots \quad - a_0q = b_0.$$

L'équation $a_{d-1} = b_d$ nous assure que a_{d-1} est rationnel, puis $a_{d-2} = b_{d-1} + qa_{d-1}$ est aussi rationnel, puis également $a_{d-3} = b_{d-2} + qa_{d-2}$ etc. Ainsi, le polynôme Q est à coefficients rationnels. Par ailleurs, puisque $P(\alpha) = 0$ et $(\alpha - q) \neq 0$, il vient $Q(\alpha) = 0$. Ainsi, α est racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré $d - 1$. Quitte à multiplier par le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q , on obtient donc un polynôme à coefficients entiers de degré $d - 1$ dont α est racine, ce qui contredit la minimalité du degré de P .

Ainsi, P ne peut pas admettre de racine rationnelle.

- (d) En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^d q^d b_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \sum_{k=0}^d b_k p^k q^{d-k}.$$

Tous les exposants étant positifs, les termes de cette somme sont tous entiers, donc $q^d P\left(\frac{p}{q}\right)$ est un entier. Par ailleurs, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*$, donc $|q^d P\left(\frac{p}{q}\right)| \geq 1$.

- (e) La fonction P' est continue sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ (en tant que fonction polynomiale), donc elle est bornée sur cet intervalle d'après le résultat admis. Soit M un majorant de $|P'|$ sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. Soit alors $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors M est aussi un majorant de P' entre α et $\frac{p}{q}$, et P est dérivable de dérivée continue entre ces bornes. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left| P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Puisque $P(\alpha) = 0$, et d'après la question précédente, il vient

$$\frac{1}{q^d} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, on obtient :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^d}.$$

Remarquez la nécessité de choisir M avant α (pour qu'il ne dépende pas de α), et donc de devoir travailler dans un premier temps dans un intervalle fermé borné $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ de longueur fixe. On récupère le cas de \mathbb{R} tout entier dans la question suivante.

- (f) Posons $A = \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
- Si $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, alors $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^d} \geq \frac{1}{Aq^d}$.
 - Sinon, $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^d} \geq \frac{1}{Aq^d}$, puisque $A \leq 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer le théorème de Liouville.

5. Transcendance de c

On appelle *nombre de Liouville* un réel irrationnel x tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}), \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^n}.$$

(a) Supposons que x est algébrique (et non rationnel d'après l'hypothèse). Il existe alors d'après le théorème de Liouville un entier d et un réel $A > 0$, qu'on se donne, tels que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}$.

On se donne également une suite (p_n, q_n) telle que dans la définition d'un nombre de Liouville. On a alors, pour tout $n \geq d$,

$$\frac{A}{(q_n)^d} \leq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^n} = \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{(q_n)^{n-d}} \leq \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{2^{n-d}},$$

et en gardant que les termes extrêmes, il vient :

$$\forall n \geq d, \quad A \leq \frac{1}{2^{n-d}}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $A \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse $A > 0$.

Ainsi, un nombre de Liouville est transcendant.

(b) Montrons que c est un nombre de Liouville. On a déjà montré dans la question 2 qu'il est irrationnel.

Par ailleurs, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement obtenu au cours de cette question s'écrivait :

$$S_n \leq c \leq S_n + 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9}.$$

Comme $10^{n!} S_n$ est entier, on peut écrire $S_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $p_n \in \mathbb{Z}$, et $q_n = 10^{n!} \geq 2$. On a alors

$$0 \leq c - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{n!(n+1)-1}} = \frac{1}{q_n^n} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{n!-1}} \leq \frac{1}{q_n^n}.$$

Ainsi, c est un nombre de Liouville, donc c est transcendant.