INTÉGRATION
CORRECTION

Exercice 1

Soit la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son premier terme $P_1(x) = -x^2/4 + x/2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(x) = \int_0^x tP_n(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$, où, dans ces deux formules, x désigne un nombre réel quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $m_n = \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur moyenne du polynôme P_n sur $[0;1]$.

1. *Calculer m_1 et m_2.*

   On a
   $$m_1 = \int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2\Big]_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - 0,$$
   donc
   $$\boxed{m_1 = \frac{1}{6}.}$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} P_2(x) &= \int_0^x tP_1(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P_1(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2 m_1 \\ &= \int_0^x \Big(-\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{2}t^2\Big)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x \Big(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\Big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12}x^2 \\ &= \Big[-\frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{6}t^3\Big]_0^x - x\Big[-\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2\Big]_0^x + \frac{1}{12}x^2 \\ &= -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x\Big(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Big) + \frac{1}{12}x^2 \\ &= \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{12}x^2 \end{aligned}$$
   donc
   $$m_2 = \int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{48}t^4 - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{12}t^2\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{240}t^5 - \frac{1}{48}t^4 + \frac{1}{36}t^3\Big]_0^1 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{36},$$
   donc
   $$\boxed{m_2 = \frac{1}{90}.}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer P'_{n+1} et P''_{n+1}. Que valent $P'_{n+1}(0)$ et $P'_{n+1}(1)$?*

   On note F_n une primitive de la fonction $x \longmapsto P_n(x)$ et G_n une primitive de la fonction $x \longmapsto xP_n(x)$. On a clairement
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = G_n(x) - G_n(0) - x\big(F_n(x) - F_n(0)\big) + \frac{m_n}{2}x^2.$$
   Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= G'_n(x) - 0 - \big(F_n(x) - F_n(0)\big) - x\Big(F'_n(x) - 0\Big) + m_n x \\ &= xP_n(x) - \big(F_n(x) - F_n(0)\big) - xP_n(x) + m_n x \\ &= -\big(F_n(x) - F_n(0)\big) + m_n x, \end{aligned}$$
   donc
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'_{n+1}(x) = m_n x - \int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

En redérivant, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P''_{n+1}(x) = -F'_n(x) + 0 + m_n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P''_{n+1}(x) = m_n - P_n(x).}$$

Par suite, on a

$$P'_{n+1}(0) = m_n.0 - \int_0^0 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad P'_{n+1}(1) = m_n.1 - \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = m_n - m_n = 0,$$

donc

$$\boxed{P'_{n+1}(0) = P'_{n+1}(1) = 0.}$$

3. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $\left(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique et exprimer son terme général.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de deux intégrations par parties successives, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_{n+1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \left[P_{n+1}(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 P'_{n+1}(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int_0^1 P'_{n+1}(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sin(k\pi) = \sin(0) = 0 \\
&= -\left[P'_{n+1}(t)\Big(-\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\Big)\right]_0^1 + \int_0^1 P''_{n+1}(t)\Big(-\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P''_{n+1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } P'_{n+1}(0) = P'_{n+1}(1) = 0 \\
&= -\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 \big(m_n - P_n(t)\big)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après 2.} \\
&= -\frac{m_n}{(k\pi)^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{m_n}{(k\pi)^2}\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sin(k\pi) = \sin(0) = 0,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{(k\pi)^2}.}$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_0^\pi t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t = 0 - \left[-\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 t\sin(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{k\pi}\left[t\frac{-\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{k}\int_0^1 \frac{-\cos(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2} - \frac{2}{(k\pi)^2}\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 \\
&= \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \Big(-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t\Big)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}\frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\\
&= -\frac{1}{2(k\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\left(\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{(k\pi)^2}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \Big(\frac{1}{(k\pi)^2}\Big)^{n-1}\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big(\frac{1}{(k\pi)^2}\Big)^{n-1}\times\Big(-\frac{1}{2(k\pi)^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}.}$$

4. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$.*
   a) *Justifier l'existence d'une fonction polynômiale Q_n tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ P_n(t)=tQ_n(t)$.*

   Si $n=1$, on a

$$P_1(0)=-\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

   et si $n\geqslant 2$, on a

$$P_n(0)=\int_0^0 tP_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t-0\int_0^0 P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}0^2.\int_0^1 P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

   La fonction polynomiale P_n admettant 0 comme racine, il est possible d'y factoriser $t-0$, donc

$$\boxed{\text{il existe une fonction polynômiale } Q_n \text{ tel que } \forall t\in\mathbb{R},\ P_n(t)=tQ_n(t).}$$

   b) *Démontrer que, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}}=-\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^{N}2t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$.*

   Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} &= \sum_{k=1}^{N}\Big(-2\pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\Big) && \text{d'après 3.}\\
&= -\pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\sum_{k=1}^{N}2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= -\pi^{2n}\int_0^1 tQ_n(t)\sum_{k=1}^{N}2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 4. a),}
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}}=-\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^{N}2t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t.}$$

5. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $t\in\,]0;1]$, on pose $f(t)=t/\sin(\pi t/2)$.*
   a) *Démontrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu. On précisera $f(0)$ et $f'(0)$.*

   D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $]0;1]$. On a

$$f(t)=\frac{t}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t}{\dfrac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

donc

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \frac{2}{\pi},$$

ce qui démontre que f se prolonge par continuité en 0 en posant

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\cdot$$

Pour tout $t \in]0;1]$, on a

$$f'(t) = \frac{1.\sin\dfrac{\pi t}{2} - t.\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi t}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi t}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{\pi t}{2}\cos\dfrac{\pi t}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}\cdot$$

Or

$$\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} = \left\{\frac{\pi t}{2} - \frac{(\pi t)^3}{48} + o(t^3)\right\} - \frac{\pi t}{2}\left\{1 - \frac{(\pi t)^2}{8} + o(t^3)\right\} = \frac{(\pi t)^3}{24} + o(t^3),$$

donc

$$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\dfrac{(\pi t)^3}{24}}{\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)^2} = \frac{\pi t}{3} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Le théorème de la limite de la dérivée nous dit alors que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0;1] \text{ avec } f(0) = \frac{2}{\pi} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

b) *Prouver que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0;1]$, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\cdot$ *Justifier que cette relation reste valable en $t = 0$.*

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0;1]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) &= 2t\sum_{k=1}^{N} \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{ik\pi t}) \\
&= 2t.\Re\mathrm{e}\Big(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{e}^{i\pi t})^k\Big) \\
&= 2t.\Re\mathrm{e}\Big(\frac{\mathrm{e}^{i(N+1)\pi t} - \mathrm{e}^{i\pi t}}{\mathrm{e}^{i\pi t} - 1}\Big) && \text{somme d'une suite géométrique avec } \mathrm{e}^{i\pi t} \neq 1 \text{ car } x \in]0;1] \\
&= 2t.\Re\mathrm{e}\Big(\frac{\mathrm{e}^{i(N+2)\pi t/2}}{\mathrm{e}^{i\pi t/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{iN\pi t/2} - \mathrm{e}^{-iN\pi t/2}}{\mathrm{e}^{i\pi t/2} - \mathrm{e}^{-i\pi t/2}}\Big) && \text{technique de l'angle moyen} \\
&= 2t.\Re\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i(N+1)\pi t/2}\,\frac{2i\sin\dfrac{N\pi t}{2}}{2i\sin\dfrac{\pi t}{2}}\right) && \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= 2t\frac{\sin\dfrac{N\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{i(N+1)\pi t/2}) && \text{car } \frac{\sin\dfrac{N\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}} \in \mathbb{R} \\
&= 2t\frac{\sin\dfrac{N\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}\cos\frac{(N+1)\pi t}{2} \\
&= \frac{2t}{\sin\dfrac{\pi t}{2}} \times \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2} - \sin\frac{\pi t}{2}\Big) && \text{formule de trigonométrie} \\
&= \frac{t}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2} - t,
\end{aligned}$$

donc
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]0;1], \qquad \sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\cdot$$
Pour $t = 0$, la relation est équivalente à l'égalité triviale $0 = 0$, donc la relation reste vraie lorsque $t = 0$, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;1], \qquad \sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\cdot}$$

c) *En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = m_n\,\pi^{2n} - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t.$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} &= -\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^{N}2t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 5. b)}\\
&= -\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\Big(-t + f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 6. b)}\\
&= \pi^{2n}\int_0^1 tQ_n(t)\,\mathrm{d}t - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t && \text{car } P_n(t) = tQ_n(t),
\end{aligned}$$
donc, d'après la définition de m_n,
$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = m_n\,\pi^{2n} - \pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)f(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t.}$$

6. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Démontrer que* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = 0.$

Les fonctions sous le signe $\int$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, il est licite d'effectuer une intégration par parties dans l'intégrale, ce qui donne
$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(t)\sin\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t &= \Big[\varphi(t)\Big(-\frac{2}{(2N+1)\pi}\cos\frac{(2N+1)\pi t}{2}\Big)\Big]_a^b\\
&\quad - \int_a^b \varphi'(t)\Big(-\frac{2}{(2N+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{(2N+1)\pi}\Big(\varphi(a)\cos\frac{(2N+1)\pi a}{2} - \varphi(b)\cos\frac{(2N+1)\pi b}{2}\Big)\\
&\quad + \frac{2}{(2N+1)\pi}\int_a^b \varphi'(t)\cos\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
Le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée tendant vers 0, on a
$$\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{(2N+1)\pi}\Big(\varphi(a)\cos\frac{(2N+1)\pi a}{2} - \varphi(b)\cos\frac{(2N+1)\pi b}{2}\Big) = 0.$$
Par ailleurs, comme φ' est continue sur $[a;b]$ (car φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$), le « théorème des bornes » dit que φ' est bornée sur $[a;b]$. Notons $M = \sup\{|\varphi'(t)| : t \in [a;b]\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{(2N+1)\pi}\int_a^b \varphi'(t)\cos\frac{(2N+1)\pi t}{2}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{2}{(2N+1)\pi}\int_a^b |\varphi'(t)|.\left|\cos\frac{(2N+1)\pi t}{2}\right|\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{2}{(2N+1)\pi}\int_a^b M\times 1\,\mathrm{d}t && \begin{array}{l}\text{car } |\varphi'(t)| \leqslant M\\ \text{et } \Big|\cos(\dots)\Big| \leqslant 1\end{array}\\
&\leqslant \frac{2M(b-a)}{(2N+1)\pi},
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{2}{(2N+1)\pi} \int_a^b \varphi'(t) \cos \frac{(2N+1)\pi t}{2} \, \mathrm{d}t = 0.$$

En définitive,

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin \frac{(2N+1)\pi t}{2} \, \mathrm{d}t = 0.}$$

7. *Démontrer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = m_n \pi^{2n}$. *En déduire les valeurs de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

On sait, depuis la question 6. a) γ] que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Par suite, la fonction φ définie par $\varphi(t) = Q_n(t)f(t)$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ d'après les théorèmes généraux (car Q_n est une fonction polynomiale). Le lemme de Riemann–Lebesgue (pour $a = 0$ et $b = 1$) permet alors d'affirmer que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 Q_n(t) f(t) \sin \frac{(2N+1)\pi t}{2} \, \mathrm{d}t = 0,$$

et donc, d'après le résultat de la question 6, que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = m_n \pi^{2n}.}$$

Sachant que $m_1 = \dfrac{1}{6}$ et $m_2 = \dfrac{1}{90}$, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$