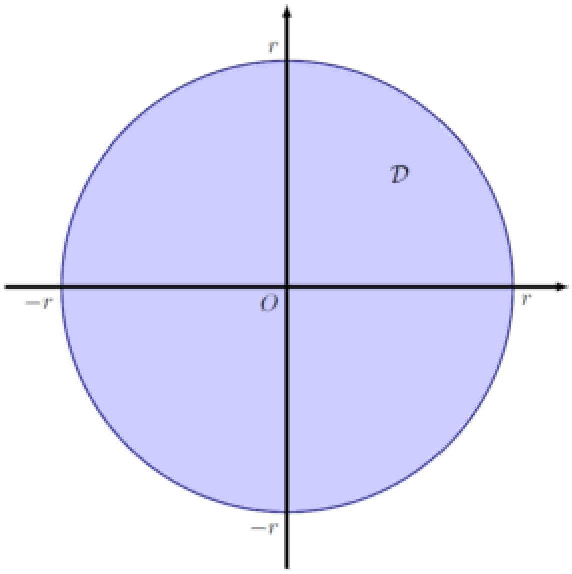
Pourquoi L'aire D'un Disque Est Égale À πr^2 ?

Stéphane Pasquet (https://www.mathweb.fr/euclide/author/evariste_galois1973/) - 18 mai 2019 - Mathématiques (https://www.mathweb.fr/euclide/category/mathematiques/) - 4 commentaires (https://www.mathweb.fr/euclide/2019/05/18/pourquoi-laire-dun-disque-est-egale-a-pi-r2/#comments)

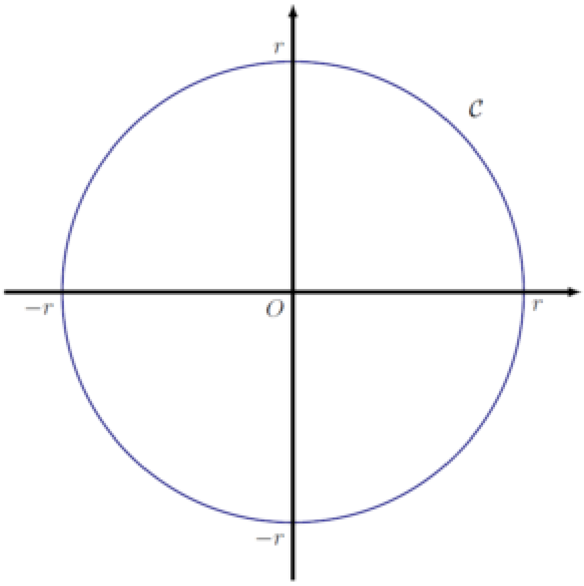
Considérons un disque de rayon r. Nous allons rapporté le plan à un repère orthonormé d'origine O, et nous allons centrer notre disque en O.



(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire01.png)

Disque de centre O et de rayon r

Afin de déterminer l'aire du disque, considérons uniquement son enveloppe : le cercle de centre *O* et de rayon *r* :

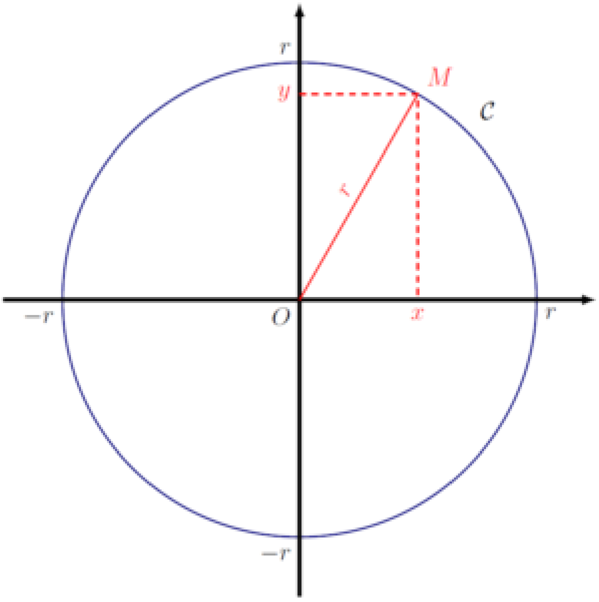


(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire02.png)

Cercle de centre O et de rayon r

Maintenant, considérons un point *M* sur ce cercle d'abscisse $x > 0$ et d'ordonnée $y > 0$. Alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire03.png)

Le point M est sur le cercle

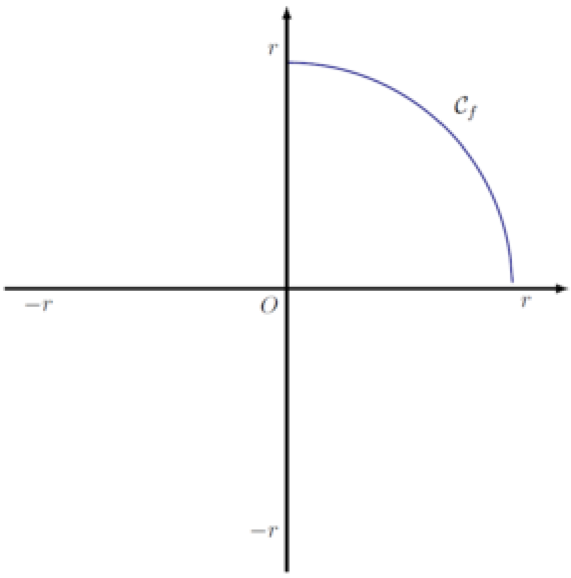
Ainsi,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

On peut donc considérer le quart de cercle supérieur droit comme la représentation graphique de la fonction f définie par:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

sur [0;*r*].



(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire04.png)

Pour connaître l’aire du domaine délimité par l’axe des abscisses et la courbe représentative de f sur [0;*r*], il existe un outil mathématique : l’intégration. L’aire cherchée est:

$$I = \int_0^r f(x)\mathrm{d}x = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer une intégrale, il suffit de connaître une primitive de la fonction, mais en terminale, nous ne connaissons pas de primitive à la fonction *f*. On va donc utiliser une méthode pour arriver à nos fins (qui n'est pas au programme de Terminale, rassurez-vous).
Nous allons d'abord écrire *f*(*x*) autrement:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

On peut ainsi écrire:

$$I = r\int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Considérons alors une variable *u* telle que:

$$u = \frac{x}{r}.$$

Si *x* varie de 0 à *r* alors *u* varie de 0 à 1. De plus, si on considère *u* comme une fonction de *x* alors sa dérivée par rapport à *x* est:

$$u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{r}.$$

On peut alors écrire:

$$\mathrm{d}x = r\mathrm{d}u.$$

Ainsi, si nous voulons exprimer l'intégrale *I* en fonction de *u*, on écrit:

$$I = r\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}r\mathrm{d}u = r^2\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\mathrm{d}u.$$

Maintenant, la variable d'intégration est *u*, et varie de 0 à 1. On peut donc dire que c'est un sinus (par exemple). Posons alors:

$$u = \sin(t).$$

Alors,

$$\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, si *u* varie de 0 à 1 alors *t* varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, d'où:

$$I = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t.$$

En effet, $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$ donc $1-\sin^2(t)=\cos^2(t)$; et comme *t* varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif donc $\sqrt{\cos^2(t)})\cos(t)$ dans notre intégrale.
Il ne reste plus qu'à trouver une primitive de $\cos^2(t)$. Pour cela, il faut se souvenir que:

$$\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$$

et donc que:

$$\cos^2(t)=\frac{1}{2}(\cos(2t)+1).$$

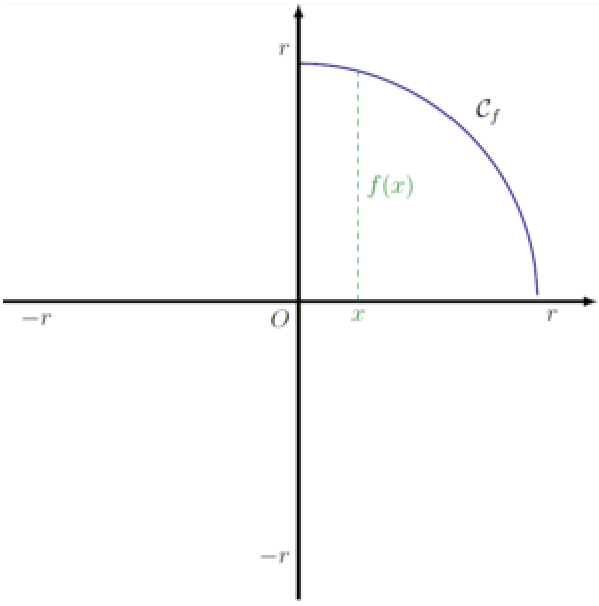
Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2t)+1)\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{r^2}{2}\times\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

L'aire du disque étant égale au quadruple de l'aire trouvée, on obtient finalement que l'aire du disque est égale à :

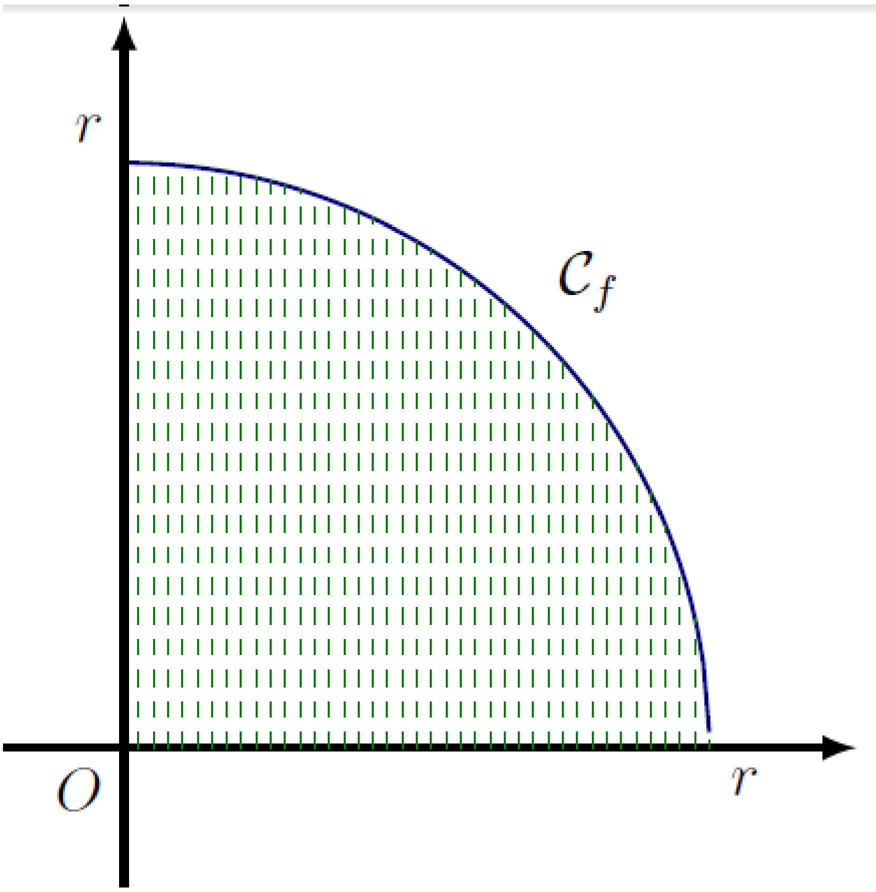
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}=4I=\pi r^2.$$

Une Précision Sur L'outil D'intégration



(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire05.png)

Pour un réel *x* quelconque de l'intervalle [0;*r*], le segment tracé a une longueur égale à *f*(*x*). Trouver l'aire du quart de cercle revient à "additionner" la longueur de tous les segments obtenus en faisant varier *x* de 0 à *r*. Mais *x* est un nombre réel donc il existe une infinité de valeurs. On ne peut donc pas additionner "une à une" toutes ces longueurs. On dit que la somme n'est pas *discrète* (une somme discrète est une somme où l'on peut compter un à un tous ses termes, même s'il y en a une infinité, comme 1+2+3+…). La somme est qualifiée de *continue*. Et donc l'intégrale représente une somme continue.



(https://www.mathweb.fr/euclide/wp-content/uploads/2019/05/aire06.png)

Représentation schématique d'une somme continue des longueurs d segments sur [0 ; r]

Sur le schéma ci-dessus, il faut imaginer que l'on rapproche de plus en plus les segments jusqu'à ce qu'ils soient tous "collés". Ils couvrent alors toute la surface. Ainsi, la somme de leurs longueurs sera égale à l'aire.

Avec cela, nous pouvons continuer et nous demander pourquoi le volume d'une boule est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$: c'est l'objet de l'article suivant (https://www.mathweb.fr/euclide/2020/10/10/pourquoi-le-volume-dune-sphere-est-egal-a-frac43pi-r3-explications-avec-les-integrales/).

Articles relatifs:

Pourquoi la hauteur des casseroles est égale à leur rayon ?

Trouver une aire

Trouver une aire

cos sin exp : pourquoi écrit-on cos(x)+isin(x)=exp(ix) ?

Pourquoi le volume d'une sphère est égal à…

TAGS: AIRE (HTTPS://WWW.MATHWEB.FR/EUCLIDE/TAG/AIRE/), INTÉGRALES (HTTPS://WWW.MATHWEB.FR/EUCLIDE/TAG/INTEGRALES/)

Article précédent

Aire entre trois cercles tangents (https://www.mathweb.fr/euclide/2018/09/06/aire-entre-trois-cercles-tangents/)

Article suivant

Distance moyenne entre deux points aléatoires d'un carré (https://www.mathweb.fr/euclide/2020/02/08/distance-moyenne-entre-deux-points-aleatoires-dun-carre/)

VOUS DEVRIEZ ÉGALEMENT AIMER

Zéro exposant zéro (https://www.mathweb.fr/euclide/2018/09/06/zero-exposant-zero/)

6 septembre 2018

Introduction aux équations différentielles (https://www.mathweb.fr/euclide/2018/12/27/introduction-aux-equations-differentielles/)

27 décembre 2018

(https://www.mathweb.fr/euclide/2021/04/09/probabilites-et-python-au-lycee-loi-binomiale-et-variables-aleatoires/)

Probabilités et Python au lycée: loi binomiale et variables aléatoires (https://www.mathweb.fr/euclide/2021/04/09/probabilites-et-python-au-lycee-loi-binomiale-et-variables-aleatoires/)

9 avril 2021

CET ARTICLE A 4 COMMENTAIRES

Kerluen

20 SEP 2021 RÉPONDRE

Bonjour et merci pour cette claire démonstration
Juste un point « u varie de 0 à 1.on peut donc dire que c'est un sinus(par exemple) » pouvez vous développer cela , c'est à dire justifier l'emploi de ce sinus (ou autre) c'est à dire quelle doit être le profil de la fonction qu'on substitue a u pour intégrer? Merci d'avance.

(https://www.mathweb.fr/euclide/2019/05/18/pourquoi-laire-dun-disque-est-egale-a-pi-r2/evariste_galois1973/)

20 SEP 2021 RÉPONDRE

Bonjour. Il n'y a pas de "profil" à proprement parlé.Si une variable d'intégration varie entre 0 et 1, on peut toujours la voir comme un sinus ou un cosinus (si cela arrange et facilite le calcul, ce qui est le cas ici). Si vous avez $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$, vous pouvez faire de même, mais cela ne facilite pas le calcul.

Nicolas Patrois

23 SEP 2021 RÉPONDRE

« Pour calculer une intégrale, il faut connaître une primitive de la fonction »
Non, il ne « faut » pas, il « suffit » de connaître une primitive mais il existe d'autres méthodes (par exemple si la fonction est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à 0, ou des techniques plus élabor´ qui passent par les nombres complexes, les séries entières ou l'introductior d'une fonction à plusieurs variables).

En collège, on 'a pas le calcul intégral mais on peut illustrer le pourquoi du comment avec des quartiers d'orange. L'idée viendrait d'Archimède : https://desmosfr.ca/wp-content/uploads/2021/02/formule_aire_disque.png (https://desmosfr.ca/wp-content/uploads/2021/02/formule_aire_disque.png)

(https://www.mathweb.fr/euclide/2019/05/18/pourquoi-laire-dun-disque-est-egale-a-pi-r2/evariste_galois1973/)

23 SEP 2021 RÉPONDRE

Oui, il y a abus de langage ici de ma part. Il faut rectifier cela en effet.

Laisser un commentaire

Votre commentaire ici...

Nom (nécessaire)

E-mail (nécessaire)

Site web

PUBLIER LE COMMENTAIRE