DM n° 3 : Ensembles, applications, sommes

Problème 1 – Généralisation des notions d'injectivité et de surjectivité à des relations quelconques

Soit E et F deux ensembles. Une relation de E vers F est la donnée d'un sous-ensemble G de $E \times F$, et on dit que $x \in E$ et $y \in F$ sont en relation si $(x, y) \in G$. On note dans ce cas $x\mathcal{R}y$. L'ensemble G est appelé graphe de la relation. Par exemple, les applications sont des relations vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in E$, il existe un unique y de F (l'image de x) tel que $x\mathcal{R}y$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation de E vers F. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $L \in \mathcal{P}(F)$, on définit :

$$\mathcal{R}^+(A) = \{y \in F,\ \exists a \in A,\ a\mathcal{R}y\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}^-(L) = \{x \in E,\ \exists \ell \in L,\ x\mathcal{R}\ell\}$$

Ainsi, $\mathcal{R}^+(A)$ est le sous-ensemble de F constitué des éléments qui sont en relation avec un élément de A, alors que $\mathcal{R}^-(F)$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont en relation avec un élément de L. Il s'agit donc d'une généralisation aux relations de la notion d'image directe et d'image réciproque

1. Prouver que pour tous sous-ensembles A et B de E, et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E :
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)$;
   (b) $\mathcal{R}^+\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)$;
   (c) $\mathcal{R}^+\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}^+(A_i)$.
   (d) Trouver un exemple pour lequel l'inclusion précédente est stricte.
2. Prouver que pour tous sous-ensembles L et M de F et toute famille $(L_j)_{j\in J}$ de sous-ensembles de F :
   (a) $L \subset M \Longrightarrow \mathcal{R}^-(L) \subset \mathcal{R}^-(M)$;
   (b) $\mathcal{R}^-\left(\bigcup_{j\in J} L_j\right) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{R}^-(L_j)$;
   (c) , $\mathcal{R}^-\left(\bigcap_{j\in J} L_j\right) \subset \bigcap_{j\in J} \mathcal{R}^-(L_j)$.
   (d) Trouver un exemple pour lequel l'inclusion précédente est stricte.
3. *On définit quatre types particuliers de relations de E vers F :*
   - *On dit que $\mathcal{R}$ est de type 1 si tout élément de E est en relation par $\mathcal{R}$ avec au plus un élément de F.*
   - *On dit que $\mathcal{R}$ est de type 2 si tout élément de E est en relation par $\mathcal{R}$ avec au moins un élément de F.*
   - *On dit que $\mathcal{R}$ est de type 3 si tout élément de F est en relation par $\mathcal{R}$ avec au plus un élément de E.*
   - *On dit que $\mathcal{R}$ est de type 4 si tout élément de F est en relation par $\mathcal{R}$ avec au moins un élément de E.*

   On définit de plus la composée de deux relations $\mathcal{R}$ de E vers F et $\mathcal{S}$ de F vers H comme étant la relation $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de E vers H définie par :

   $$\forall x \in E,\ \forall z \in H,\quad (x\mathcal{T}z \Longleftrightarrow (\exists y \in F,\ (x\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{S}z))).$$

   (a) Que pouvez-vous dire d'une relation qui soit à la fois de type 1 et de type 2 ?
   (b) On suppose que $\mathcal{R}$ est une relation définissant une application $f : E \longrightarrow F$. Que pouvez-vous dire de f si $\mathcal{R}$ est de type 3 ? de type 4 ?
   (c) Justifier que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définissent deux applications f et g, alors la composée $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est la relation associée à l'application $g \circ f$.

(d) Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations de même type i, $i \in [\![1,4]\!]$. Montrer que la composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est encore de même type.

4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathcal{R}$ est du type 3
   (ii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ \mathcal{R}^+(A \cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$
   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$
   (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+(A))$.

   Donner de même une liste de propriétés équivalentes à : $\mathcal{R}$ est du type 1.
   (On pourra considérer $\mathcal{R}^{-1}$, où $\mathcal{R}^{-1}$ est définie entre F et E par $y\mathcal{R}^{-1}x$ ssi $x\mathcal{R}y$).

5. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathcal{R}$ est du type 4
   (ii) $\mathcal{R}^+(E) = F$
   (iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$
   (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \complement_F(\mathcal{R}^+(A)) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E(A)\right)$.

   Donner de même une liste de propriétés équivalentes à : $\mathcal{R}$ est du type 2.

6. *Soit $\widehat{E}$ l'ensemble des relations de E vers E. On munit $\widehat{E}$ d'une relation $\leqslant$ définie par :*

$$\forall \mathcal{R}, \mathcal{S} \in \widehat{E}, \quad \mathcal{R} \leqslant \mathcal{S} \Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y)).$$

   (a) Vérifier que $\leqslant$ est un ordre sur $\widehat{E}$, c'est-à-dire vérifie les 3 propriétés suivantes : pour toutes relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$:
      (i) $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{R}$ (reflexivité)
      (ii) si $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{R}$ alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ (antisymétrie)
      (iii) si $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{T}$ alors $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{T}$ (transitivité)
   (b) On note Id_E l'application identique de E dans E. Montrer que $\mathcal{R}$ est du type 1 si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E$.
   (c) Caractériser de façon analogue les trois autres types.
   (d) Montrer que $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est une application bijective.

Problème 2 – Saturation

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On définit, pour tout sous-ensemble A de E :

$$A^s = \{y \in E \mid \exists x \in A,\ x \sim y\}.$$

On dit que A^s est la saturation de A pour la relation $\sim$. On dit que l'ensemble A est saturé si $A = A^s$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des parties saturées de E.

Par ailleurs, on note, pour toute partie A de E, A^c le complémentaire de A dans E. Enfin, pour tout $x \in A$, on note $\overline{x}$ sa classe d'équivalence, c'est-à-dire le sous-ensemble de E constitué des éléments y tels que $y \sim x$.

1. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A^s$.
   (b) Déterminer $\varnothing^s$ et E^s.
   (c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $(A^s)^s = A^s$ (on dit que l'application de saturation est « idempotente »)
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que $A^s = \displaystyle\bigcup_{x \in A} \overline{x}$.
   (b) Montrer que $A^s = \displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{S}(E) \text{ tq } A \subset B} B$
3. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

(a) Montrer que $(A \cup B)^s = A^s \cup B^s$

(b) Montrer que des deux inclusions $(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s$ et $A^s \cap B^s \subset (A \cap B)^s$, une seule est toujours vraie, et donner un contre-exemple pour l'autre.

4. Établir une inclusion entre $(A^s)^c$ et $(A^c)^s$. À quelle condition a-t-on l'égalité ?

5. Soient p_1 et p_2 définies de $E \times E$ dans E par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$A^s = p_2(p_1^{-1}(A) \cap G),$$

où $G \subset E \times E$ est le graphe de la relation $\sim$.

6. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff (\forall x \in A, \quad \exists y \in B, \quad x \sim y).$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est reflexive et transitive. La relation $\mathcal{R}$ est-elle en général une relation d'équivalence ?

(b) Montrer que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ si et seulement si $A^s = B^s$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

(c) On définit la relation $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A\mathcal{S}B$ si et seulement $A^s = B^s$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

(d) Montrer que $\mathcal{S}$ respecte la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire : pour tout (A, B, A', B') tels que $A\mathcal{S}A'$ et $B\mathcal{S}B'$, si $A\mathcal{R}B$ alors $A'\mathcal{R}B'$.

(e) En déduire l'existence d'une relation $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$\overline{A\mathcal{R}B} \iff \overline{A}\ \overline{\mathcal{R}}\ \overline{B}.$$

La barre désigne ici la classe d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{R}$.

(f) Montrer que $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$