Renseignements généraux

— *Concours* : ENS Ulm
— *Matière* : Maths Ulm
— *NOM Prénom* : BULCKAEN Léo

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit G un groupe. Soient $\delta > 0$ et $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in G, \ |f(xy) - f(x)f(y)| \leq \delta$$

1. Montrer que $\exists C > 0, \forall x, y \in G, |f(x)| \leq C$
ou $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout x de G.
2. Soit δ fixé, trouver la constante C optimale.

Exercice 2 :

Exemple de groupe infini non commutatif.

Remarques sur l'oral

Examinateur très agréable, il me dit que son exercice est un prétexte à une discussion mathématique qui durera 55 minutes. L'exercice en lui-même n'est pas particulièrement parlant.
Je suppose que la première propriété n'est pas vérifiée et j'essaie de montrer que la fonction est multiplicative. Pour ce faire, je construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $f(x_n) = n$. A partir de là j'essaie de montrer quelques propriétés sur cette suite de nombre. Quand je n'arrive plus à avancer (au bout d'environ 10 min), je lui présente mon exercice. J'ai le malheur de parler de morphisme de groupe au lieu de simplement dire "fonction multiplicative". Il me pose donc des questions sur les morphismes, et je me rends compte que tout ça est relativement lointain : grosse perte de temps. Il me fait continuer sur ma voie en disant qu'à partir de ma suite (x_n) je peux prendre x et y dans G et montrer la propriété voulue. Je montre dans un premier temps que $f(e) = 1$ puis je trouve une expression pour $f(x)$ sous forme de limite.
A nouveau je bloque et je décide d'abandonner l'idée de la limite. Finalement je réécris ce que je cherche et à coup d'inégalités triangulaires, j'arrive à montrer que $f(xy) - f(x)f(y)$ est aussi proche de 0 qu'on le veut. En fait, c'était faisable sans ces inégalités triangulaires et en utilisant les limites.
La deuxième question nécessite de prouver des inégalités sur la constante C et de montrer que la borne supérieure est atteinte (j'ai eu un peu de chance sur l'intuition). Elle n'est pas très clair. Il faut la comprendre ainsi : on considère f qui vérifie la condition de base mais qui n'est pas multiplicative. Comment borner f au mieux ?
La dernière question m'est posée alors qu'il ne reste plus de temps à l'oral. Je réponds directement que les permutations de $\mathbb{N}$ conviennent. Il me demande de

commenter la dénombrabilité de cette ensemble. Je lui dis que c'est indénombrable et lui explique rapidement comment créer une surjection dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: l'oral s'arrête là.