ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2017 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On utilise la notation allégée pour l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\int f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Si f est une fonction de deux variables réelles t, x, on note $\partial_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_{xx} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ les dérivées partielles de f (sous réserve de leur existence).
Si n est un entier naturel, on note $\mathscr{C}_b^n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et dont toutes les dérivées f, f', ..., $f^{(n)}$, jusqu'à l'ordre n, sont bornées.

On dit qu'une fonction $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une mesure si elle est continue, positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\int m(x)dx = 1.$$

On considère la fonction $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(0) = 0$ et pour $x > 0$,

$$h(x) = x \ln(x).$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une entropie relativement à une mesure m si f est continue et $h(f^2)m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De même, on dit que f admet une variance relativement à m si f est continue et $f^2 m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On admet que la fonction μ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

est une mesure.

Ce problème étudie certaines inégalités fonctionnelles. Dans les parties I et II, on étudie un opérateur différentiel lié à la mesure μ et on démontre une inégalité pour cette mesure. Dans la partie III, on voit comment une telle inégalité en entraine une seconde, et on étudie une forme de réciproque. La partie IV est indépendante des autres, et s'intéresse à une inégalité pour les fonctions caractéristiques.

Préliminaires

Soit m une mesure.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une variance relativement à m. Montrer que fm est intégrable. En conséquence, le réel

$$\mathrm{Var}_m(f) = \int f(x)^2 m(x)dx - \left(\int f(x)m(x)dx\right)^2$$

est bien défini. Montrer que $\mathrm{Var}_m(f) \geqslant 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une entropie relativement à m.

2a. Montrer que $f^2 m$ est intégrable. En conséquence, le réel

$$\mathrm{Ent}_m(f) = \int h(f(x)^2)m(x)dx - h\left(\int f(x)^2 m(x)dx\right)$$

est bien défini.

2b. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) \geqslant (x-a)h'(a) + h(a),$$

avec inégalité stricte si $x \neq a$.

2c. Montrer que $\mathrm{Ent}_m(f) \geqslant 0$.
On pourra utiliser la question précédente avec $a = \int f(x)^2 m(x)dx$.

2d. On suppose ici que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) > 0$. Caractériser les fonctions f telles que $\mathrm{Ent}_m(f) = 0$.

Partie I

On note L l'opérateur qui à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, associe la fonction Lf définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Lf(x) = \frac{1}{2}f''(x) - xf'(x).$$

On étend également cette définition aux fonctions $f(t,x)$ de deux variables, en posant

$$Lf(t,x) = \frac{1}{2}\partial_{xx}f(t,x) - x\partial_x f(t,x),$$

sous réserve que ces quantités soient définies au point $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que la mesure μ a été définie dans l'introduction.

3a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $Lf = \dfrac{1}{2\mu}\left(\mu f'\right)'$.

3b. Soient h_1, h_2 deux fonctions de $\mathscr{C}_b^2$. Montrer que

$$\int h_1(x)(Lh_2)(x)\mu(x)dx = -\frac{1}{2}\int h_1'(x)h_2'(x)\mu(x)dx,$$

après avoir justifié l'existence de chacun des termes de la formule.

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}_b^0$. On définit pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi_f(t,x) = \int f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)dy.$$

4. Montrer que la fonction $\Phi_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et continue.

5. On suppose que $f \in \mathscr{C}_b^2$.

5a. Montrer que, sur $\mathbb{R}^2$, Φ_f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\partial_{xx}\Phi_f$ est bien définie, continue et bornée.

5b. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une relation entre $\partial_x\Phi_f(t,x)$ et $\Phi_{f'}(t,x)$.

5c. Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on a $\partial_t\Phi_f(t,x)\cos t = L\Phi_f(t,x)\sin t$.

5d. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int \Phi_f(t,x)\mu(x)dx = \int f(x)\mu(x)dx$.
On admet pour la suite du problème que cette égalité reste vraie pour tout $f \in \mathscr{C}_b^0$.

Partie II

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de $\mathscr{C}_b^0$ positive. On définit pour $t \in \mathbb{R}$

$$J(t) = \int h(\Phi_f(t,x))\mu(x)dx.$$

6. Montrer que $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer $J(0)$ et $J\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. On suppose dans toute cette question que $f \in \mathscr{C}_b^2$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant \delta.$$

7a. Montrer que J est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J'(t)\cos t = -\frac{\sin t}{2}\int \frac{(\partial_x\Phi_f(t,x))^2}{\Phi_f(t,x)}\mu(x)dx.$$

On note $g = (f')^2/f$.

7b. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\Phi_{f'}(t,x)^2 \leqslant \Phi_f(t,x)\Phi_g(t,x).$$

7c. Conclure que

$$\int h(f(x))\mu(x)dx - h\left(\int f(y)\mu(y)dy\right) \leqslant \frac{1}{4}\int g(x)\mu(x)dx.$$

8. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}_b^2$, f admet une entropie relativement à μ et que

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leqslant \int |f'(x)|^2\mu(x)dx.$$

On pourra considérer la famille de fonctions définies par $f_\delta = \delta + f^2$ *pour* $\delta > 0$.

Partie III

Soit m une mesure. On suppose dans cette partie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée f' bornée, alors f admet une entropie relativement à m et

$$\mathrm{Ent}_m(f) \leqslant C\int |f'(x)|^2 m(x)dx. \tag{1}$$

9. Montrer que $\displaystyle\int (1+|x|+x^2)m(x)dx < +\infty$.

10. Soit $f \in \mathscr{C}_b^1$. On souhaite montrer que f admet une variance relativement à m et que

$$\mathrm{Var}_m(f) \leqslant \frac{C}{2}\int |f'(x)|^2 m(x)dx. \tag{2}$$

10a. Montrer que fm et f^2m sont intégrables, et qu'il suffit de montrer (2) dans le cas où on a de plus $\displaystyle\int f(x)m(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int f(x)^2 m(x)dx = 1$.

10b. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer (2).
On pourra appliquer (1) *à la famille de fonctions* $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon f$ *pour* $\varepsilon > 0$.

11. Soit f une fonction de $\mathscr{C}_b^1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x)| \leqslant 1$. On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$H(\lambda) = \int e^{\lambda f(x)} m(x)dx.$$

On admet que H est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on obtient une expression de $H'(\lambda)$ en dérivant sous le signe intégral de manière usuelle (on pourrait le démontrer comme précédemment).

11a. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \ln H(\lambda) \leqslant \frac{C\lambda^2}{4} H(\lambda).$$

11b. En déduire que pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\int e^{\lambda f(x)} m(x)dx \leqslant \exp\left(\lambda \int f(x)m(x)dx + \frac{C\lambda^2}{4}\right). \tag{3}$$

On pourra étudier la fonction $\lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda} \ln H(\lambda)$.

12. Montrer que l'inégalité (3) s'applique à la fonction définie par $f(x) = x$.

On pourra utiliser la suite de fonctions définies par $f_n(x) = n \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

13a. Soient $M = \displaystyle\int x m(x)dx$ et $a \geqslant M$. Montrer que

$$\int_a^{+\infty} m(x)dx \leqslant \exp\left(-\frac{(a-M)^2}{C}\right).$$

13b. Conclure que pour tout $\alpha < \dfrac{1}{C}$, la fonction $x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

14. Soient $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ trois fonctions continues, à valeurs strictement positives et intégrables sur $\mathbb{R}$.

14a. Montrer qu'il existe une fonction $u :]0,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ bijective telle que

$$\forall t \in]0,1[, \quad u'(t)p(u(t)) = \int p(x)dx.$$

De même, il existe une fonction analogue $v :]0,1[\to \mathbb{R}$ pour q.

14b. On suppose que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad p(x)q(y) \leqslant \left(r\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2. \tag{4}$$

Montrer que

$$\left(\int p(x)dx\right)\left(\int q(x)dx\right) \leqslant \left(\int r(x)dx\right)^2. \tag{5}$$

On pourra utiliser, après avoir justifié son caractère licite, le changement de variable défini par $x = \dfrac{u(t)+v(t)}{2}$ *dans le membre de droite de l'inégalité* (5).

On admet pour la suite du problème que l'inégalité (5) reste vraie en supposant uniquement que $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions à valeurs positives, continues par morceaux, intégrables sur $\mathbb{R}$, et qui vérifient (4).

Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$. On note $d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ la distance de $x \in \mathbb{R}$ à A.
On note Int le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathrm{Int}$, alors $\mathbb{1}_A$ est continue par morceaux, et on définit le réel

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A(x)\mu(x)dx \in [0, 1].$$

15. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

15a. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(\frac{1}{2}d(x, A)^2 - x^2\right) \mathbb{1}_A(y) \exp\left(-y^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{(x + y)^2}{2}\right).$$

15b. On suppose que $A \in \mathrm{Int}$ et que $\mu(A) > 0$. En déduire que

$$\int \exp\left(\frac{1}{2}d(x, A)^2\right) \mu(x)dx \leqslant \frac{1}{\mu(A)}.$$

16. Soit $A \in \mathrm{Int}$. Pour $t \geqslant 0$, on définit l'ensemble $A_t = \{x \in \mathbb{R} : d(x, A) \leqslant t\}$.

16a. Montrer que $A_t \in \mathrm{Int}$ pour tout $t \geqslant 0$.

16b. On suppose de plus que $\mu(A) > 0$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$1 - \mu(A_t) \leqslant \frac{e^{-t^2/2}}{\mu(A)}.$$

* *
*