Renseignements généraux

— *Concours* : ENS
— *Matière* : Maths CR
— *NOM Prénom* : CORREIA Corentin

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^p$ et $C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0\}$.

1. Montrer que C est un cône, c'est-à-dire montrer que :
   — C est convexe
   — $\forall t \geq 0, x \in C, tx \in C$
2. On suppose que la famille $(b_1, \ldots, b_n)$ est libre. Montrer que C est fermé.
3. Dans le cas général, montrer que C est fermé.

Exercice 2 :

Calculer $\int_0^1 x^x dx$.

Exercice 3 :

Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est régulière. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on note $C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, C) \leq \varepsilon\}$. Exprimer le périmètre de C_ε en fonction du périmètre de C.

Remarques sur l'oral

Exo 1 La difficulté apparaît à la question 3, l'examinateur m'aide en me demandant de montrer que C est l'union de cônes du même genre mais associés à une sous-famille libre de $(b_1, , b_n)$. En fait, il s'agit de faire un peu comme dans la preuve du théorème de Carathéodory (dans celle-ci, on a besoin de $(\mu_i)_i$ tel que $\sum \mu_i = 0$ et $\sum \mu_i b_i = 0$; dans l'exo, il suffit d'avoir $\sum \mu_i b_i = 0$ et on soustrait à $x \in C$ avec le bon coefficient).

Exo 2 J'ai proposé une permutation $\sum / \int$, ça a marché. L'examinateur n'a pas demandé de calculer la série obtenue.

Exo 3 J'ai eu le temps de le faire pour C un polygône et d'indiquer que dans le cas général l'hypothèse de régularité de la frontière permet d'approcher le périmètre d'un tel convexe en approchant celui-ci par un polygône. L'examinateur m'a demandé comment on pouvait définir le périmètre. J'ai proposé la borne inférieure de $\sum |\gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i)|$, borne inférieure sur l'ensemble des subdivisions $(x_1, \ldots, x_n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) de $[0, 1]$, γ chemin qui paramètre la frontière. L'oral s'est arrêté là.