

Oral ENS - Mathématiques Lyon

Garrigou Romain

3 juillet 2019

Exercice

Soit G groupe d'ordre n . Construire un morphisme injectif de G dans S_n .
CNS pour que ce morphisme soit à valeurs dans A_n .

Corrections

On identifie $S(G)$ à S_n et on prend $f : g \in G \mapsto (h \mapsto gh) \in S(G)$. Les cycles de la décomposition de $f(g)$ sont tous de la forme $(h, gh, \dots, g^{w(g)-1}h)$, comprenant exactement $w(g)$ éléments. Ils sont au nombre de $\frac{n}{w(g)}$.

Ainsi, $\epsilon(f(g)) = (-1)^{(w(g)-1)\frac{n}{w(g)}}$. On écrit $n = 2^\alpha\beta$ avec β impair.

- Si il existe $g \in G$ tel que $w(g) = 2^\alpha q$, alors $w(g^q) = 2^\alpha$ et par la formule précédente $\epsilon(f(g^q)) = -1$.
- Sinon, on a pour $g \in G$, $w(g) = 2^\gamma q$ avec $\gamma \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket$ et par la formule $\epsilon(f(g)) = 1$ (car $\frac{n}{w(g)}$ est alors pair).

Ainsi, f est à valeurs dans A_n ssi il n'existe pas de $g \in G$ d'ordre $2^\alpha q$.