

LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

Les énoncés et parties suivis du symbole [X] ne seront pas traités en cours.

A. Notions de logique mathématique	3
A. 1. Assertion	3
A. 2. Négation	4
A. 3. Connecteurs logiques	5
A. 4. Implication	7
A. 5. Équivalence	9
B. Ensembles et quantificateurs	10
B. 1. Ensemble et éléments	10
B. 2. Parties et inclusion	11
B. 3. Opérations sur les parties d'un ensemble	13
B. 4. Produit cartésien	15
B. 5. Quantificateurs	16
a) Quantificateur universel	16
b) Quantificateur existentiel	17
c) Unicité	18
d) Et avec plusieurs quantificateurs...	19
e) Négation d'une assertion quantifiée	20
C. De l'art de la démonstration	21
C. 1. Démonstration d'une implication	21
a) Raisonnement direct	21
b) Raisonnement par contraposée	22
c) Raisonnement par l'absurde	23
d) Démonstration d'une équivalence	24
C. 2. Démonstration par déduction	25
C. 3. Démonstration par équivalence	26
C. 4. Démonstration par disjonction de cas	27
C. 5. Démonstration en analyse-synthèse	28
D. De l'art de la rédaction et de la présentation	30



Prérequis

Rebranchez vos neurones, c'est la rentrée !!

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Notions de logique mathématique

A.1. Assertion

Une **propriété** (ou un **énoncé**) mathématique est une notion première. Intuitivement, c'est un assemblage de mots et de symboles dont la construction obéit à la syntaxe mathématique.

Définition 1

Une **assertion** est une propriété mathématique à laquelle on peut attribuer sans ambiguïté une valeur **booléenne**, c'est-à-dire une valeur de vérité (Vrai ou Faux). La **table de vérité** de l'assertion \mathcal{P} consigne ces deux possibilités (avec V pour vrai et F pour faux) :

\mathcal{P}
V
F

Pour faire des mathématiques, on commence par admettre une liste d'assertions : les **axiomes** (il n'y a ainsi pas de vérité absolue en maths !). On cherche ensuite à énoncer et justifier des assertions vraies (et intéressantes) qui en découlent. On utilise pour cela les règles de la logique (que nous allons décrire ci-après). Les résultats ainsi obtenus sont généralement appelés **théorème** (la Rolls des maths), **proposition** (résultat moins important qu'un théorème), **corollaire** (résultat découlant immédiatement d'un autre) ou **lemme** (résultats préliminaires à la justification d'un autre). On rencontrera également des **conjectures** (résultats non encore démontrés mais que l'on croit vrais) et aussi des **paradoxes** (résultats vrais mais contre-intuitifs).

Dans toute théorie mathématique, un résultat (surprenant) de Paul Cohen énonce qu'il existe des assertions dont on ne peut démontrer si elles sont vraies ou fausses : elles sont dites **indécidables**.

À l'opposé, certaines axiomatiques, dites **contradictaires**, conduisent à des assertions à la fois vraies et fausses. On suppose donc toujours que l'on n'est pas dans une telle situation (qui n'a guère d'intérêt). En particulier, on s'impose la règle suivante : une assertion ne doit pas donner la valeur de vérité d'elle-même ou d'une autre assertion ! Sans cette précaution, on est menacé par l'énoncé \mathcal{P} : « \mathcal{P} est fausse » (si \mathcal{P} est vraie, elle est fausse et si elle est fausse, elle est vraie), souvent illustré dans le langage commun par le paradoxe du menteur (si je dis que je suis un menteur, alors ce que je dis est faux, donc je ne suis pas un menteur donc ce que je dis est vrai).

Exemples :

- Le théorème de Pythagore est une assertion mathématique vraie.

Définition 2

Un **prédicat** est une propriété mathématique qui dépend d'un ou plusieurs paramètres. Pour chaque valeur du (ou des) paramètre(s), on obtient une assertion.

Les paramètres d'un prédicat doivent être définies dans un **contexte** (ou **référentiel**) qui indique le type de valeurs qu'elles peuvent prendre. Ce sont alors des **variables libres** au sens où l'on peut leur attribuer une valeur dans ce contexte. Ces variables libres s'opposent aux **variables muettes** auxquelles on ne peut attribuer de valeur (par exemple, la variable d'intégration sous le signe \int).

Exemples :

- $\mathcal{P}(x) : x > 3$ est un prédicat. L'assertion $\mathcal{P}(4)$ est vraie et $\mathcal{P}(3)$ ne l'est pas.
- Le prédicat $\mathcal{P}(x, y) : x = y$ est la relation d'égalité.

A.2. Négation

Comme toute quantité booléenne, une assertion mathématique \mathcal{P} peut être niée, c'est-à-dire qu'on peut lui associer une nouvelle assertion qui exprime son contraire.

Définition 3

La **négation** d'une propriété \mathcal{P} est l'assertion, notée $\overline{\mathcal{P}}$ (ou non \mathcal{P}), qui est vraie lorsque \mathcal{P} est fausse et fausse lorsque \mathcal{P} est vraie. Ainsi, $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ est définie par la table de vérité ci-dessous :

\mathcal{P}	$\overline{\mathcal{P}}$
V	F
F	V

Notons que $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ a la même valeur de vérité que \mathcal{P} . On considère que ce sont les mêmes propriétés.

Nous verrons plus tard comment nier une propriété mathématique. Cela n'est pas toujours facile.

Exemples :

- La négation de $(3 > 1)$ est $(3 \leq 1)$.
- La négation de $(f \text{ est une fonction croissante})$ est $(f \text{ n'est pas une fonction croissante})$ et non pas $(f \text{ est une fonction décroissante})$. En effet, il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes (c'est même le cas de la majorité d'entre-elles).
- La négation de l'assertion « Je fais des maths et cela m'amuse » n'est pas « Je ne fais pas de maths et cela m'amuse » ni même « Je ne fais pas de maths et cela ne m'amuse pas » mais bien « Je fais des maths et cela ne m'amuse pas ». Les règles de logique que nous allons rencontrer ci-après vont nous permettre de systématiser l'opération de négation.

A.3. Connecteurs logiques

Définition 4

La **conjonction** de deux assertions \mathcal{P} , \mathcal{Q} est l'assertion, notée $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$, qui est vraie si, et seulement si, \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont simultanément vraies.

La **disjonction** de deux assertions \mathcal{P} , \mathcal{Q} est l'assertion, notée $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$, qui est vraie si, et seulement si, l'une au moins des assertions \mathcal{P} et \mathcal{Q} est vraie.

On définit ainsi les **connecteurs logiques** $\boxed{\text{et}}$ et $\boxed{\text{ou}}$ par les tables de vérité ci-dessous

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F



Le $\boxed{\text{ou}}$ mathématique n'est pas exclusif, contrairement à son usage courant dans la langue française. On peut retenir qu'un matheux auquel on propose « fromage ou dessert » pense qu'il peut prendre les deux !

Exemples :

- L'assertion $(\mathcal{P} \text{ ou } \overline{\mathcal{P}})$ est toujours vraie.
On dit que c'est une **tautologie** (i.e. une assertion composée qui est vraie indépendamment des valeurs logiques des assertions qui la construisent).
Cette tautologie exprime le principe du **tiers-exclus** : toute assertion est ou bien vraie ou bien fausse, sans valeur intermédiaire possible. Ainsi, si un ami matheux vient de devenir papa et qu'on lui demande : « Fille ou garçon ? », il y a fort à parier qu'il répondra : « Vrai ! »
- J'offre une botte de radis à qui pourra m'expliquer ce que peut bien vouloir dire la phrase : « Mangez cinq fruits et légumes par jour ! ».

La proposition suivante explique comment nier les connecteurs logiques $\boxed{\text{et}}$ et $\boxed{\text{ou}}$.

Proposition 1

Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux assertions.

- La négation de $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ est $(\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}})$.
- La négation de $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ est $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}})$.

- Démontrons la propriété (i). Il suffit pour cela d'établir la table de vérité suivante :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

La propriété (ii) découle de (i). ■

On retiendra que le contraire d'un $\boxed{\text{et}}$ est le $\boxed{\text{ou}}$ des contraires et vice-versa.

Exemples :

- La consigne : « L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. » (déjà vue sur certains sujets de concours) revient à dire que « L'usage des calculatrices est interdit ou l'usage des téléphones portables est interdit ». Cela ne vous interdit donc pas d'utiliser une calculatrice ou un téléphone portable tant que vous n'utilisez pas les deux ! (Bon, je ne vous conseille tout de même pas d'essayer...)

La proposition suivante rassemble les principales propriétés des connecteurs logiques **et** et **ou**.

Proposition 2

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} trois assertions.

- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) ou d'avoir (\mathcal{Q} et \mathcal{P}).
C'est la commutativité du **et**.
- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) ou d'avoir (\mathcal{Q} ou \mathcal{P}).
C'est la commutativité du **ou**.
- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} et (\mathcal{Q} et \mathcal{R})) ou d'avoir ((\mathcal{P} et \mathcal{Q}) et \mathcal{R}).
C'est l'associativité du **et**.
- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} ou (\mathcal{Q} ou \mathcal{R})) ou d'avoir ((\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) ou \mathcal{R}).
C'est l'associativité du **ou**.
- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} et (\mathcal{Q} ou \mathcal{R})) ou d'avoir ((\mathcal{P} et \mathcal{Q}) ou (\mathcal{P} et \mathcal{R})).
C'est la distributivité du **et** sur le **ou**.
- Il revient au même d'énoncer (\mathcal{P} ou (\mathcal{Q} et \mathcal{R})) ou d'avoir ((\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) et (\mathcal{P} ou \mathcal{R})).
C'est la distributivité du **ou** sur le **et**.

■ Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes.

Le (iii) et le (v) se démontrent à l'aide de tables de vérité. Le (iii) est laissé en exercice. Voici ce que donne la table de vérité qui démontre (v) :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	\mathcal{Q} ou \mathcal{R}	\mathcal{P} et (\mathcal{Q} ou \mathcal{R})	\mathcal{P} et \mathcal{Q}	\mathcal{P} et \mathcal{R}	(\mathcal{P} et \mathcal{Q}) ou (\mathcal{P} et \mathcal{R})
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Pour démontrer (iv) et (vi), on utilise les négations de (iii) et (v) dans lesquelles on remplace \mathcal{P} par $\overline{\mathcal{P}}$ et \mathcal{Q} par \mathcal{Q} . ■

Exemples :

- Si l'on vous propose (fromage et dessert avec, pour le dessert, crème brûlée ou île flottante), cela revient à ((fromage et crème brûlée) ou (fromage et île flottante)).

A.4. Implication

L'implication logique est une notion intuitive simple. Elle exprime que sous condition de réalisation d'une cause, une conséquence se produit. Malheureusement, du point de vue mathématique, définir l'implication n'est pas si simple. En fait, pour bien comprendre l'implication, il convient d'abord de s'interroger sur son contraire : la non-implication.

Par exemple, la phrase « si je te mets une paire de claques, tu auras mal » exprime l'implication entre les claques et la douleur. Si vous décidez de jouer les « gros bras » en disant qu'une claquonnette ne peut pas vous faire grand mal, que devez-vous dire?... Après un temps de réflexion, on voit qu'il faut fièrement déclarer : « Vas-y, mets moi une claque, tu verras que je n'aurai pas mal ! ».

On constate ainsi, sur cet exemple, que la non-implication entre une assertion \mathcal{P} et une assertion \mathcal{Q} revient à exprimer que la cause \mathcal{P} se produit sans que la conséquence \mathcal{Q} n'ait lieu. Autrement dit, la non-implication de \mathcal{P} et \mathcal{Q} est exprimée par l'assertion $(\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}})$.

Pour revenir à l'implication elle-même, un passage au contraire nous dit que le lien logique « \mathcal{P} implique \mathcal{Q} » doit être défini par l'assertion $(\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \mathcal{Q})$, ce qui donne la définition suivante.

Définition 5

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} deux assertions. L'assertion \mathcal{P} implique \mathcal{Q} , que l'on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, est l'assertion $(\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \mathcal{Q})$ et sa table de vérité est donnée par :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Autrement dit, l'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie lorsque :

- ou bien l'hypothèse \mathcal{P} est fausse ;
- ou bien l'hypothèse \mathcal{P} et la conclusion \mathcal{Q} sont toutes les deux vraies.

On dit alors que \mathcal{P} est une **condition suffisante** pour que \mathcal{Q} soit vraie ou que \mathcal{Q} est une **condition nécessaire** pour que \mathcal{P} soit vraie.

On notera bien que dire que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ne signifie pas que \mathcal{Q} est vraie. Il est en effet tout à fait possible que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et que \mathcal{Q} soit fausse (cela peut arriver lorsque \mathcal{P} est fausse).

Plus généralement, on notera que si l'hypothèse \mathcal{P} est fausse, l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie indépendamment de la conclusion \mathcal{Q} . Cela signifie que tout raisonnement qui s'appuie sur des hypothèses fausses est nécessairement exact !!

Par exemple, si l'on suppose que $2 = 3$, alors, en multipliant par 0 les deux membres, on obtient $0 = 0$. Cela illustre bien le fait que, partant d'hypothèses bidons et raisonnant correctement, on peut arriver à une solution exacte (mais on aurait aussi bien pu trouver un résultat faux).

On retiendra que **le faux implique tout** et n'importe quoi (et surtout n'importe quoi) !

Il est ainsi tout à fait exact de dire que « si je suis le Pape, tu es la reine d'Angleterre ». Cela reste même vrai si c'est Elisabeth qui lit cette phrase. Par contre, cela deviendra faux si je suis nommé Pape et que tu n'es pas Elisabeth !

Exemples :

- Dans \mathbb{R} , une inégalité stricte implique une inégalité large. Ainsi, on a $(\pi > 3) \Rightarrow (\pi \geq 3)$.
- Dans \mathbb{N} , c'est mieux ! Une inégalité stricte entraîne une inégalité large avec le successeur. Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $(n > 0) \Rightarrow (n \geq 1)$.
- Pour tous nombres réels x et y , on a $(xy \geq 0 \text{ et } x \leq 0) \Rightarrow (\sqrt{xy} = \sqrt{-x}\sqrt{-y})$.

La proposition ci-dessous découle immédiatement de la définition de l'implication.

Proposition 3

Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux assertions. La négation de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est $(\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}})$.

■ AQT ■

En langage courant, cela signifie que l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse lorsque l'hypothèse \mathcal{P} est vraie sans que la conclusion \mathcal{Q} le soit.

On notera en particulier que la négation d'une implication n'est pas une implication !

Terminons ce paragraphe en énonçant le [syllogisme](#).

Proposition 4

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} trois assertions. Si $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$ alors $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$.

Cette propriété qui exprime la [transitivité](#) de \Rightarrow est aussi parfois appelé le [syllogisme](#).

■ Le résultat est justifié par la table de vérité suivante :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	$((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

■

Exemples :

- « Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel. » est le syllogisme le plus connu.
- Un sophisme est un raisonnement absurde qui prend la forme d'un syllogisme : « Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat. » ou encore « Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous. Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère. *Ergo* plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère. »

A.5. Équivalence

Définition 6

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} deux assertions. On dit que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont **équivalentes**, et on note $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$, lorsque \mathcal{P} implique \mathcal{Q} et \mathcal{Q} implique \mathcal{P} (c'est-à-dire $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$).

On dit alors que \mathcal{P} est une **condition nécessaire et suffisante** pour \mathcal{Q} ou que \mathcal{P} est vraie **si, et seulement si**, \mathcal{Q} l'est.

Les deux implications $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ sont dites **réiproques** l'une de l'autre.

Deux assertions sont équivalentes lorsqu'elles sont vraies simultanément et fausses simultanément. Il revient donc au même de démontrer l'une ou l'autre.

Exemples :

- Pour tout entier naturel n , on a $(n^2 = 9) \iff (n = 3)$.
- Pour tout entier relatif m , on a $(m^2 = 9) \iff (m = 3 \text{ ou } m = -3)$.



Il faut manier l'équivalence logique avec précaution !! Il est classique de confondre une implication (où il peut y avoir perte d'information entre l'hypothèse et la conclusion) et une équivalence (où toute l'information de la propriété de gauche se retrouve dans celle de droite et vice-versa).

1 h 15

B. Ensembles et quantificateurs

B.1. Ensemble et éléments

Nous nous contentons d'une définition intuitive de la notion d'ensemble. Les plus curieux d'entre-vous se renseigneront, dans un livre ou sur internet, à propos de l'axiomatique de Zermelo–Fraenkel.^(†)

Définition 7

Un **ensemble** est une collection d'objets à laquelle peut appartenir ou non un objet donné. On note $x \in E$ lorsque x appartient à l'ensemble E et on dit alors que x est un **élément** de E . On note $x \notin E$ si x n'appartient pas à E .

On note \emptyset l'**ensemble vide**, qui ne contient aucun élément. Un ensemble contenant un seul élément (respectivement deux éléments distincts) est un **singleton** (respectivement une **paire**).

Un même objet mathématique peut, selon les circonstances, être vu comme un ensemble, ou comme un élément d'un ensemble. Par exemple, l'intervalle $[0; 1]$ est un ensemble de nombres réels, mais c'est également un élément de l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} .

Il existe plusieurs méthodes pour définir un ensemble :

- **Définition axiomatique** : Certains ensembles en mathématiques sont définis axiomatiquement, c'est-à-dire par une liste de règles (admisses ou non) que doivent vérifier leurs éléments.
 - C'est par exemple le cas de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels (propriétés de Péano).
 - C'est aussi le cas du plan et de l'espace en géométrie euclidienne (axiomes d'Euclide).
- **Définition par construction** : Certains ensembles sont construits à partir d'ensembles déjà connus.
 - C'est le cas des ensembles de nombres \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} , qui sont construits à partir de \mathbb{N} et d'opérations convenables.
- **Définition en extension** : Dans les cas les plus simples, un ensemble est défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. Pour cela, il suffit d'énumérer un par un les éléments de l'ensemble en les disposant entre accolades. Dans ce cas, les éléments cités sont supposés distincts (on peut éliminer les doublons s'il y en a) et l'ordre dans lequel ils sont donnés n'a aucune importance.
 - L'ensemble $E = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ rassemble les quatre couleurs d'un paquet de cartes.
 - Si l'ensemble est grand, on peut utiliser des points de suspension : $E = \{1, 2, \dots, 13\}$.
- **Définition en compréhension** : Disposant d'un ensemble de référence R et d'un prédicat $\mathcal{P}(x)$ où x appartient à R , on peut définir E en compréhension : $E = \{x \in R : \mathcal{P}(x)\}$ signifiant que $(x \in E) \iff (\mathcal{P}(x) \text{ vraie})$. Notons que la variable x est alors muette.
 - L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n\}$, qui s'écrit aussi $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$, est l'ensemble des nombres pairs. On le note $2\mathbb{N}$.

[†] Cette axiomatique échappe aux paradoxes d'une théorie trop naïve des ensembles, comme le paradoxe de Russell : un barbier, qui décide de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là, doit-il se raser lui-même ?

B.2. Parties et inclusion

Définition 8

Étant donné deux ensembles A et E , on dit que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E ou encore que A est **inclus** dans E , ce qui se note $A \subset E$, si tout élément de A est un élément de E . On note $A \not\subset E$ la négation de $A \subset E$.

Il ne faut pas confondre \in et \subset . Ainsi est-il incorrect d'écrire $2 \subset \{1; 2\}$. En revanche, on peut écrire $2 \in \{1; 2\}$ ou $\{2\} \subset \{1; 2\}$.

La non-inclusion n'est pas une relation si simple que cela. En particulier, lorsqu'on écrit $A \not\subset E$, cela ne veut pas dire que A et E n'ont aucun élément en commun mais plutôt qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à E .

Démonstration d'une inclusion

Pour démontrer que $A \subset B$, il faut introduire un élément générique de A et démontrer qu'il est dans B . La rédaction prend donc la tournure suivante :

Soit $x \in A$.

} À écrire sans réfléchir

On démontre que $x \in B$.

} Nécessite de réfléchir !

Exemples :

- Posons $A = \{k(k+1)/2 : k \in \mathbb{N}\}$ et démontrons que $A \subset \mathbb{N}$.
Soit $n \in A$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k(k+1)/2$. Comme k et $k+1$ sont consécutifs, l'un est pair et l'autre est impair. Donc $k(k+1)$ est pair, ce qui prouve que $n \in \mathbb{N}$. Donc $A \subset \mathbb{N}$.

La proposition suivante rassemble les propriétés élémentaires de l'inclusion.

Proposition 5

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E . On a

- (i) $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$;
- (ii) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies (A \subset C)$;
- (iii) $(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

■ AQT

■

Aussi élémentaire soit-elle, la propriété (iii) est très utile en pratique pour démontrer l'égalité de deux ensembles. C'est ce que résume l'encadré ci-dessous.

Comment démontrer l'égalité de deux ensembles

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en général par **double-inclusion**, c'est-à-dire que l'on démontre successivement que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

Dans certains cas assez simples, nous verrons que l'on peut aussi utiliser le raisonnement par équivalence pour démontrer l'égalité de deux ensembles.

En probabilité, nous manipulerons abondamment les événements, qui sont des parties d'un ensemble Ω , appelé univers. Nous introduirons alors l'ensemble de tous ces événements. Pour cela, nous aurons besoin de l'ensemble qui contient toutes les parties de l'univers.

Définition 9

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemples :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- Si $E = \{a\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- Si $E = \{a, b\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$.

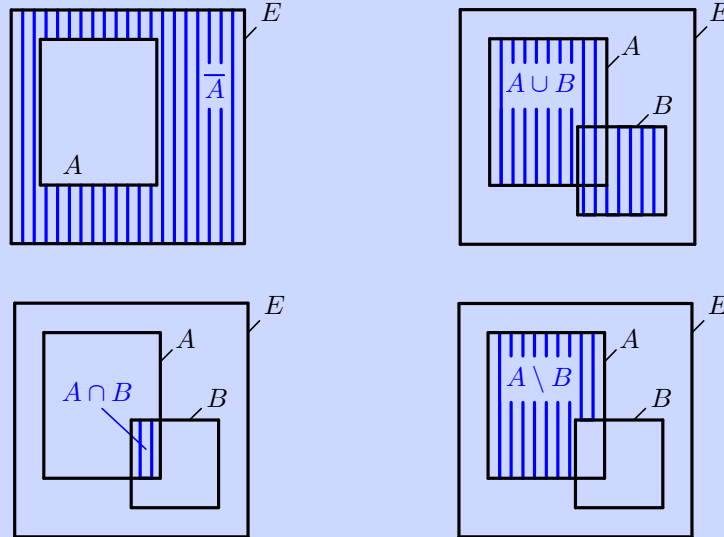
B.3. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 10

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

On définit les parties suivantes de E :

- $\bar{A} = \{x \in E : x \notin A\}$, le **complémentaire** de A dans E ;
- $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$, la **réunion** de A et B ;
- $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$, l'**intersection** de A et B ;
- $A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$, la **différence** A privé de B .



À propos du complémentaire, signalons qu'il est aussi parfois noté $\complement_E(A)$ (qu'est-ce que c'est moche!) et que l'on a $\bar{A} = E \setminus A$.

On peut généraliser les notions de réunion et d'intersection au cas de plus de deux ensembles.

La proposition suivante rassemble les propriétés des opérations sur les parties d'un ensemble.

Proposition 6

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . On a

- $\overline{\bar{A}} = A$;
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité de \cup);
 $A \cap B = B \cap A$ (commutativité de \cap);
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (associativité de \cup);
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (associativité de \cap);
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de \cap sur \cup);
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de \cup sur \cap).

■ C'est une conséquence des propriétés sur la négation, le et et le ou. ■

On peut alors donner la définition de la disjonction.

Définition 11

Soit E un ensemble.

Deux parties A et B de E sont dites **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Plus généralement, les parties A_1, \dots, A_n de E sont dites deux à deux disjointes lorsque $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$.

On peut également définir la « disjonction dans leur ensemble » : les parties A_1, \dots, A_n de E sont dites disjointes dans leur ensemble lorsque $A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$. C'est une disjonction moins exigeante que la disjonction deux à deux. En pratique, on s'en sert peu.

Exemples :

- L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs sont deux parties disjointes de \mathbb{N} .
- Dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le sous-ensemble des fonctions paires et le sous-ensemble des fonctions impaires ne sont pas disjoints puisque la fonction nulle appartient aux deux.

On termine ce paragraphe en définissant la notion de partition.

Définition 12

Soit E un ensemble.

Deux parties non vides A et B de E forment une **partition** de E lorsque $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Plus généralement, les parties A_1, \dots, A_n de E forment une partition de E lorsque les A_i sont non vides, deux-à-deux disjointes et que leur réunion est égale à E .

Il est possible de généraliser la notion de partition au cas d'une infinité de parties.

En probabilités, nous utiliserons abondamment les « systèmes complets d'événements » qui sont des partitions de l'univers, à ceci près que l'on n'exige pas la non-vacuité des différentes parties.

Exemples :

- $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ admet pour partition $\{\{a, c\}, \{d, e, f\}, \{b\}\}$.
- \mathbb{N} peut être partitionné entre nombres pairs et nombres impairs.

B.4. Produit cartésien

Nous commençons par traiter le cas de deux ensembles.

Définition 13

Soient E et F deux ensembles.

On appelle **couple** (x, y) la donnée des deux éléments $x \in E$ et $y \in F$ dans cet ordre : x d'abord et y ensuite. La propriété fondamentale satisfaite par les couples est le principe d'identification : pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$, on a $((x, y) = (x', y')) \iff (x = x' \text{ et } y = y')$.

L'ensemble constitué de tous les couples (x, y) formés d'un élément $x \in E$ puis d'un élément $y \in F$ est appelé le **produit cartésien** de E et F (dans cet ordre) et est noté $E \times F$. On a donc

$$((x, y) \in E \times F) \iff (x \in E \text{ et } y \in F).$$

■ Pour que la définition ci-dessus soit valide, il convient de donner une définition rigoureuse de la notion de couple. Si $x \in E$ et $y \in F$, on pose $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Dès lors, si $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$, l'égalité $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ entraîne $\{x\} = \{x'\}$ et $\{x, y\} = \{x', y'\}$, d'où $x = x'$ puis $y = y'$. ■

On note $E^2 = E \times E$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in E$.

Le produit cartésien $E \times F$ n'est pas une notion compliquée. Ce n'est qu'une notation pour désigner l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F . Ainsi, l'écriture $(x, y) \in E \times F$ permet simplement de piocher un x dans E et un y dans F de façon simultanée et donc d'associer x et y de sorte qu'ils constituent un unique objet mathématique : le couple (x, y) . Nous verrons que c'est particulièrement utile pour exprimer l'unicité conjointe de x et y dans un problème.

Exemples :

- \mathbb{R}^2 est l'ensemble des couples de nombres réels. On peut donc l'assimiler à un plan muni d'un repère cartésien en confondant chaque couple (x, y) avec le point de coordonnées (x, y) .
- L'ensemble $\{A, B, AB, O\} \times \{+, -\}$ est l'ensemble des facteurs sanguins (en tous cas, les principaux). Chaque élément de cet ensemble est un couple constitué d'un groupe sanguin et d'un rhésus.

Soient E, F et G trois ensembles, $x \in E, y \in F$ et $z \in G$. On appelle **triplet** (x, y, z) la donnée des trois éléments x, y, z dans cet ordre : x d'abord, y ensuite et enfin z .

Plus généralement, on peut définir la notion de n -uplet.

Définition 14

Soient E_1, \dots, E_n des ensembles (où $n \geq 2$).

On appelle **n -uplet** (x_1, \dots, x_n) la donnée de $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ dans cet ordre. Là aussi, les n -uplets satisfont le principe d'identification.

L'ensemble constitué de tous les n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) formés d'un élément $x_1 \in E_1$, puis d'un élément $x_2 \in E_2, \dots$, puis d'un élément $x_n \in E_n$ est appelé le **produit cartésien** de E_1, E_2, \dots, E_n (dans cet ordre) et est noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. On a donc

$$((x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \iff (x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n).$$

Pour $n \geq 1$, on note $E^n = E \times E \times \dots \times E$ (produit de n fois le facteur E). Les éléments de cet ensemble sont des n -uplets formés d'éléments appartenant tous à E : on dit que ce sont des **n -listes** de E .

B.5. Quantificateurs

a) Quantificateur universel

Définition 15

Pour écrire qu'un prédicat $\mathcal{P}(x)$, dépendant d'un paramètre x , est vrai pour tout x appartenant à l'ensemble E , on peut utiliser le **quantificateur universel** \forall , qui se lit « pour tout » ou « quel que soit », de la façon suivante :

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

ce qui signifie que $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} = E$, ou encore que

pour tout élément x dans E , l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Le symbole \forall est un A renversé pour *alle* en Allemand. La notation est due à Dedekind (qui était teuton...).

Notons que la variable qui suit le symbole \forall est muette. On peut donc la remplacer par n'importe quelle autre lettre (n'ayant pas déjà une signification).

Une propriété commençant par « $\forall x \in \emptyset$ » est toujours vraie (car l'égalité $\{x \in \emptyset : \mathcal{P}(x)\} = \emptyset$ est clairement vraie).

L'encadré suivant fait le point sur les bonnes habitudes à prendre lorsque l'on souhaite démontrer une assertion quantifiée universellement.

Comment démontrer une propriété universelle

La démonstration d'une propriété du type $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ doit nécessairement commencer par l'introduction d'un exemplaire générique de la variable x choisi dans l'ensemble E , avant de se poursuivre par la démonstration de l'assertion $\mathcal{P}(x)$.

La rédaction d'une telle démonstration doit donc prendre la forme suivante :

Soit $x \in E$. Démontrons $\mathcal{P}(x)$.	} On écrit ceci sans réfléchir
On démontre $\mathcal{P}(x)$.	} Là, on rebranche les neurones



Plus généralement, il faut retenir qu'en mathématiques, il est absolument nécessaire d'introduire les objets que l'on veut manipuler.

En français, lorsque vous dites « Il lui a tout appris » sans préciser qui est « Il », qui est « lui » et qu'est ce que « tout », personne ne vous comprend. En mathématiques, c'est la même chose, vous devez présenter tout ce dont vous parlez.

Ainsi, par exemple, un calcul de dérivée ne doit jamais ressembler à « $f'(x) = \dots$ » mais se présenter avec un x parfaitement introduit : « pour tout $x \in \dots$, on a $f'(x) = \dots$ »

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$. Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f(x/2)^2 \geq 0$.
En conclusion, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

b) Quantificateur existentiel

Définition 16

Pour écrire qu'un prédicat $\mathcal{P}(x)$, dépendant d'un paramètre x , est vrai pour au moins un x appartenant à l'ensemble E , on peut utiliser le **quantificateur existentiel** \exists , qui se lit « il existe », de la façon suivante :

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

ce qui signifie que $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} \neq \emptyset$, ou encore qu'

il existe au moins un élément x dans E tel que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ soit vraie.

Le symbole \exists est un E renversé pour *existieren*.

La variable qui suit le symbole \exists est muette.

De façon très intuitive, toute propriété commençant par « $\exists x \in \emptyset$ » est nécessairement fausse (car l'égalité $\{x \in \emptyset : \mathcal{P}(x)\} \neq \emptyset$ n'est jamais vérifiée).

L'encadré suivant vous propose une méthode pour démontrer une assertion quantifiée existentiellement.

Comment démontrer une propriété existentielle

Pour démontrer une propriété du type $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, on peut essayer de trouver un élément $x_0 \in E$ pour lequel l'assertion $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie, ce qui revient à adopter la démarche suivante :

On cherche un x_0 qui convienne } Ça cogite !

puis, en cas de succès, on passe à la rédaction :

Posons $x_0 = \dots$ } On introduit x_0 sans réfléchir

On vérifie $\mathcal{P}(x_0)$. } Là, il faut réfléchir un peu...

Il existe de nombreuses situations où la recherche de l'élément x_0 est vaine. Dans ce cas, il faut se rabattre sur des théorèmes qui justifient l'existence de x_0 sans en donner une forme explicite.

Exemples :

- Justifions qu'entre deux rationnels r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$), il existe toujours un rationnel. Posons $r_0 = (r_1 + r_2)/2$. Alors, d'une part, r_0 est bien un rationnel (puisque la moyenne entre deux fractions d'entiers est une fraction d'entiers) et, d'autre part, on a $r_1 < r_0 < r_2$ (le milieu, il est au milieu!). Glop !

c) *Unicité*

Définition 17

Pour écrire qu'un prédicat $\mathcal{P}(x)$, dépendant d'un paramètre x , est vrai pour au plus un x appartenant à l'ensemble E , on écrit :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad (\mathcal{P}(x_1) \text{ et } \mathcal{P}(x_2) \text{ vraies}) \implies (x_1 = x_2).$$

On notera bien que l'assertion ci-dessus exprime une unicité sous réserve d'existence. Autrement dit, cette phrase quantifiée ne justifie pas l'existence d'un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ; elle dit seulement qu'un cas d'existence, cet élément est unique.

L'encadré suivant vous explique comment démontrer une propriété d'unicité.

Comment démontrer une unicité (sans condition d'existence)

Pour démontrer qu'il existe au plus un élément $x \in E$ vérifiant l'assertion $\mathcal{P}(x)$, on introduit deux exemplaires génériques x_1 et x_2 de la variable tels que $\mathcal{P}(x_1)$ et $\mathcal{P}(x_2)$ sont vraies et on démontre que $x_1 = x_2$.

La rédaction d'une telle démonstration doit donc prendre la forme suivante :

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $\mathcal{P}(x_1)$ et $\mathcal{P}(x_2)$ sont vraies.	} Sans réfléchir ! } On réfléchit
On démontre que $x_1 = x_2$.	

Exemples :

- La racine carrée d'un nombre réel positif ou nul x est, par définition, l'unique nombre réel positif ou nul \sqrt{x} tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.
Si l'existence de la racine carrée n'est pas chose facile, on peut facilement démontrer son unicité sous réserve d'existence.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Considérons a et b dans \mathbb{R}_+ tel que $a^2 = x$ et $b^2 = x$. Alors $a^2 = b^2$, ce qui implique que $a = b$ ou $a = -b$. Comme a et b sont tous les deux positifs ou nuls, seule la possibilité $a = b$ perdure. D'où l'unicité espérée.

Il existe un pseudo-quantificateur qui associe l'unicité et l'existence.

Définition 18

Pour écrire qu'un prédicat $\mathcal{P}(x)$, dépendant d'un paramètre x , est vrai pour exactement un x appartenant à l'ensemble E , on peut utiliser le **pseudo-quantificateur $\exists!$** , qui se lit « il existe un unique », de la façon suivante :

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

ce qui signifie que $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\}$ est un singleton, ou encore qu'

il existe un unique élément x dans E tel que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ soit vraie.

Le quantificateur $\exists!$ n'est pas un nouveau quantificateur puisqu'on peut l'exprimer à l'aide de \exists et de \forall . En effet, l'assertion $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ est équivalente à la conjonction de l'assertion d'existence (sans condition d'unicité) : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ et de l'assertion d'unicité (sous réserve d'existence) : $\forall x_1, x_2 \in E, (\mathcal{P}(x_1) \text{ et } \mathcal{P}(x_2) \text{ vraies}) \implies (x_1 = x_2)$.

d) Et avec plusieurs quantificateurs...

Lorsqu'une assertion contient plusieurs quantificateurs, l'ordre dans lequel ils apparaissent a généralement une grande importance.

Interversion de deux quantificateurs

On peut toujours échanger l'ordre de deux \forall ou de deux \exists qui se suivent :

$$\begin{aligned}(\forall x \in E, \forall y \in F, \dots) &\iff (\forall y \in F, \forall x \in E, \dots) \iff (\forall (x, y) \in E \times F, \dots) \\(\exists x \in E, \exists y \in F, \dots) &\iff (\exists y \in F, \exists x \in E, \dots) \iff (\exists (x, y) \in E \times F, \dots)\end{aligned}$$

En revanche, s'il est exact que

$$(\exists x \in E, \forall y \in F, \dots) \implies (\forall y \in F, \exists x \in E, \dots),$$

la réciproque est généralement fausse, autrement dit

la permutation non réfléchie d'un \forall et d'un \exists peut être sanglante!!

Les (rares) fois où l'on arrive à démontrer que $(\forall y \in F, \exists x \in E, \dots)$ et $(\exists x \in E, \forall y \in F, \dots)$ sont toutes les deux vraies, on dit que l'on uniformise la propriété de gauche en démontrant celle de droite.

Exemples :

- Il ne revient pas au même de dire que tous les élèves de MPSI ont un cerveau ou de dire qu'il existe un cerveau qui appartienne à tous les élèves de MPSI!
- La statistique dit que « dans un casino, un individu gagne toutes les trente secondes ». Si vous pensez naïvement qu'il est bien chanceux celui-là, c'est que vous avez transformé la phrase « Quelle que soit la période de trente secondes considérée, il existe un individu qui gagne » en « Il existe un individu qui, quelle que soit la période de trente secondes considérée, gagne ».
- L'ensemble des nombres rationnels est caractérisé par $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{N}^*, qr \in \mathbb{Z}$ (ce qui signifie que q est le dénominateur d'une fraction représentant r). En échangeant les quantificateurs, on obtient l'assertion $\exists q \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{Q}, qr \in \mathbb{Z}^*$ qui est absurde, puisqu'elle exprime l'existence d'un dénominateur commun à toutes les fractions... Dans le premier cas, q dépend de r , ce qui est impossible dans le second cas puisque q est défini avant r .

L'importance de l'ordre des quantificateurs doit clairement apparaître dans la rédaction de vos démonstrations.

Ordre des quantificateurs

Pour établir une proposition contenant plusieurs quantificateurs, il faut que, dans la démonstration, les variables apparaissent dans le même ordre que dans l'assertion.

Exemples :

- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = x + 1$. Alors $y > x$.
On a ainsi démontré notre phrase quantifiée.

e) *Négation d'une assertion quantifiée*

Proposition 7

Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

- (i) La négation de $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\exists x \in E, \overline{\mathcal{P}(x)})$.
- (ii) La négation de $(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\forall x \in E, \overline{\mathcal{P}(x)})$.

■ On écrit que

$$\begin{aligned}
 \overline{\forall x \in E, \mathcal{P}(x)} &\iff \overline{\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} = E} \\
 &\iff \{x \in E : \mathcal{P}(x)\} \neq E \\
 &\iff \overline{\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} \neq E} \\
 &\iff \{x \in E, \overline{\mathcal{P}(x)}\} \neq \emptyset \\
 &\iff \exists x \in E, \overline{\mathcal{P}(x)}.
 \end{aligned}$$

Le deuxième résultat découle du premier. ■

Cette proposition permet de déterminer la négation d'une propriété exprimée à l'aide de quantificateurs. Il suffit pour cela d'appliquer la règle suivante : on transforme tous les \exists en \forall et tous les \forall en \exists puis on nie le prédicat final.

Exemples :

- Dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. La négation de cette propriété s'écrit $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
- Dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire sur \mathbb{R} s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. La négation de cette propriété s'écrit $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$. Autrement dit, pour démontrer qu'une fonction n'est pas paire, il ne faut pas démontrer que $f(-x) \neq f(x)$ (puisque, par défaut de quantificateur, on comprendrait que cette non-égalité est vraie sur \mathbb{R} tout entier, alors qu'elle est fausse en 0) mais démontrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_0) \neq f(x_0)$.
- Dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur \mathbb{R} s'écrit

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$$

et son contraire est

$$\forall(m, M) \in \mathbb{R}^2, \exists x \in \mathbb{R}, (f(x) < m \text{ ou } M < f(x)).$$

Le deuxième exemple est un cas représentatif des démonstrations où l'on veut établir qu'une propriété quantifiée universellement est fausse.

Utilisation d'un contre-exemple

Pour démontrer que la propriété $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ est fausse, il suffit de déterminer une valeur de $x \in E$ pour laquelle l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est fausse. On parle de **contre-exemple**.

Exemples :

- L'assertion « Tous les nombres réels sont rationnels » est fausse. Il suffit d'exhiber un contre-exemple pour le démontrer et l'on verra que $\sqrt{2}$ en est un.
- La fonction \exp n'est pas paire puisque $e^{-1} \neq e^1$.

C. De l'art de la démonstration

Dans cette section, on dresse la liste des principaux modes de raisonnement qui permettent d'établir des résultats mathématiques.

On n'y trouvera cependant pas le raisonnement par récurrence. Il sera traité plus tard dans la partie du cours consacrée aux entiers naturels.

C.1. Démonstration d'une implication

a) Raisonnement direct

Commençons par donner le principe de démonstration d'une disjonction.

Démonstration d'un OU

Pour démontrer que l'assertion (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) est vraie, on peut supposer que \mathcal{P} est fausse et en déduire que \mathcal{Q} est vraie, ou vice-versa.

Comme l'assertion ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) signifie ($\overline{\mathcal{P}}$ ou \mathcal{Q}), on en déduit le principe suivant pour démontrer une implication.

Démonstration d'une implication

Pour démontrer que l'assertion ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) est vraie, on suppose que \mathcal{P} est vraie et on en déduit que \mathcal{Q} l'est aussi.

Exemples :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour démontrer que l'on a $(9 \mid 10^n + 1) \implies (9 \mid 10^{n+1} + 1)$, on commence par supposer que 9 divise $10^n + 1$, c'est-à-dire $10^n + 1 = 9k$ (où $k \in \mathbb{N}$), puis l'on écrit que

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10^{n+1} + 10 - 10 + 1 && \text{astuce de Binet}^{(\dagger)} \\ &= 10(10^n + 1) - 9 \\ &= 10 \times 9k - 9 \\ &= 9(10k - 1), \end{aligned}$$

ce qui démontre que 9 divise $10^{n+1} + 1$. Ainsi, on a bien $(9 \mid 10^n + 1) \implies (9 \mid 10^{n+1} + 1)$. Chose amusante : l'assertion $(9 \mid 10^n + 1)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y réfléchir !).

[†] L'astuce de Binet est l'astuce qui consiste à rajouter $a - a$ ou à multiplier par a/a . C'est bête comme chou mais c'est très largement l'astuce que nous utiliserons le plus !

ℓ) Raisonnement par contraposée

Pour démontrer $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$, on peut également utiliser le principe de [contraposition](#), c'est-à-dire le fait que les implications $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et $(\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}})$ sont équivalentes (il revient au même de dire « si tu manges ta soupe, tu seras grand(e) » et « si tu n'es pas grand(e), c'est que tu n'as pas mangé ta soupe »). Ce principe est justifié par la table de vérité ci-dessous :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On peut aussi le démontrer en utilisant la définition de l'implication, de la façon suivante :

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \mathcal{Q}) \iff (\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\overline{\mathcal{Q}}}) \iff (\overline{\overline{\mathcal{Q}}} \text{ ou } \overline{\mathcal{P}}) \iff (\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}}).$$

Démonstration par contraposition

Pour démontrer $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$, il revient au même d'établir $(\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}})$.

Exemples :

- Pour démontrer que, pour tout entier n , on a $(n^2 \text{ est pair}) \implies (n \text{ est pair})$, on peut raisonner par contraposition en démontrant que $(n \text{ est impair}) \implies (n^2 \text{ est impair})$.
En effet, si n est impair, on peut l'écrire $n = 2p + 1$, d'où $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, ce qui démontre que n^2 est impair.

c) *Raisonnement par l'absurde*

La démonstration par l'absurde consiste à prêter le faux pour savoir le vrai. Ce n'est en fait qu'une variante de la contraposition.

Démonstration par l'absurde

Pour démontrer $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$, on peut raisonner par l'absurde. Pour cela, on suppose que \mathcal{P} est vraie et \mathcal{Q} est fausse. On démontre alors que c'est impossible.

Exemples :

- Démontrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire comme quotient de deux nombres entiers.

Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ choisis de sorte que la fraction p/q soit irréductible (quitte à la simplifier au préalable). En élevant au carré, on a alors $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p^2 est pair et, par conséquent, que p l'est aussi (on vient de le voir). On peut alors l'écrire sous la forme $p = 2p'$ avec p' entier. En reportant cette information dans l'égalité $p^2 = 2q^2$, on obtient $2p'^2 = q^2$, ce qui implique, cette fois, que q^2 est pair et, par conséquent, que q l'est aussi. On peut lui-aussi l'écrire sous la forme $q = 2q'$ avec q' entier. On a alors $p/q = (2p')/(2q')$, ce qui signifie que la fraction p/q n'est pas irréductible. Absurde !

d) *Démonstration d'une équivalence*

Démonstration d'une équivalence

Pour démontrer $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q})$, on raisonne en général par double-implication c'est-à-dire que l'on démontre d'abord l'implication directe $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ avant de démontrer l'implication réciproque $(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$.

Notons que l'on peut utiliser le principe de contraposition pour traiter l'une des deux implications. Ainsi, en démontrant $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et $(\overline{\mathcal{P}} \implies \overline{\mathcal{Q}})$, on démontre bien que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes.

Dans le cas où l'on doit démontrer une série d'équivalences : $\mathcal{P}_1 \iff \mathcal{P}_2 \iff \dots \iff \mathcal{P}_n$, on raisonne parfois en boucle, c'est-à-dire que l'on prouve successivement les implications $\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2$, puis $\mathcal{P}_2 \implies \mathcal{P}_3, \dots$, puis $\mathcal{P}_{n-1} \implies \mathcal{P}_n$ avant de refermer la boucle en démontrant $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_1$.

Exemples :

- Démontrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(\forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon) \iff (x = 0)$.

L'implication \Leftarrow est évidente.

Pour l'implication réciproque \Rightarrow , on raisonne par contraposition, c'est-à-dire que l'on démontre que $(x \neq 0) \implies (\exists \varepsilon > 0, \varepsilon < x)$. Pour cela, on suppose que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On prend alors $\varepsilon = x/2$ de sorte que $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < x$. Cela prouve qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < x$. L'implication \Rightarrow est donc établie.

4 h 45

C.2. Démonstration par déduction

La propriété de l'implication $\boxed{\implies}$ qui permet d'articuler les étapes d'une démonstration « basique » est le **principe d'inférence** : $(\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})) \implies \mathcal{Q}$. Ce principe est justifié par la table de vérité ci-dessous :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$	$(\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})) \implies \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Démonstration par déduction

Une démonstration par déduction consiste à partir des hypothèses pour arriver à la conclusion en effectuant une succession d'affirmations liées par des **inférences** : on affirme que \mathcal{P} est vraie ; on sait (par une hypothèse, un théorème ou parce qu'on l'a démontré) que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$; on en déduit que \mathcal{Q} est vraie.

On constate donc qu'une démonstration est un polymère dont le monomère est la déduction.

En terme de rédaction, une déduction se rédige à l'aide d'un « donc », d'un « d'où », d'un « par conséquent », d'un « il en découle », ... et l'argument qui justifie cette déduction est donné par un « car », un « puisque », un « or », un « comme on sait que », ... Par exemple, on peut écrire : « On a \mathcal{P} donc on a \mathcal{Q} puisque l'on sait bien que \mathcal{P} implique \mathcal{Q} ».

Dans la rédaction d'une déduction, vous êtes priés de ne **jamais utiliser le symbole \implies à la place de « donc »**.

Première raison : le mélange du français et des symboles mathématiques n'est pas très agréable (je suis un être humain et je préfère que l'on s'adresse à moi en faisant des phrases).

Par ailleurs, confondre « donc » et « \implies » relève d'une vraie erreur de concepts : alors que « \implies » se contente d'être une simple implication logique, le « donc » indique une implication déductive. Par exemple, la phrase « le ciel est bleu donc le sang est rouge » est fausse car il n'y a pas de cause à effet entre les assertions « le ciel est bleu » et « le sang est rouge », par contre l'implication « (le ciel est bleu) \implies (le sang est rouge) » est parfaitement exacte puisque les deux assertions qu'elle relie le sont.

Exemples :

- L'identité de Diophante $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, qui est facile à vérifier, nous dit que le produit de deux entiers qui sont chacun une somme de deux carrés d'entiers est la somme de deux carrés d'entiers. Or $5^2 = 3^2 + 4^2$ et $13^2 = 5^2 + 12^2$, donc $5^2 \times 13^2$ est la somme de deux carrés d'entiers (plus précisément, on a $65^2 = 63^2 + 16^2$).

C.3. Démonstration par équivalence

Démonstration par équivalence

Dans certains cas simples, on peut démontrer ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$) en raisonnant par une succession d'équivalences qui transforment petit à petit \mathcal{P} en \mathcal{Q} .

Pour la résolution d'une (plusieurs) équation(s) ou inéquation(s), c'est ce raisonnement qu'il faut, si possible, privilégier.

Exemples :

- Pour déterminer les entiers naturels non nuls dont le produit est égal à la somme, on introduit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et l'on résout :

$$\begin{aligned}
 nm = n + m & \iff n(m-1) - m = 0 \\
 & \iff n(m-1) - (m-1) - 1 = 0 && \text{astuce de Binet} \\
 & \iff (m-1)(n-1) = 1 \\
 & \iff (m-1 = 1 \text{ et } n-1 = 1) && \text{le seul entier naturel} \\
 & && \text{divisant 1 est 1} \\
 & \iff (n = m = 2).
 \end{aligned}$$

- Pour démontrer l'égalité de deux ensembles, on peut parfois remplacer avantageusement un raisonnement par double inclusion par un raisonnement par équivalence.

Ainsi, si A, B désignent deux parties de E , on peut démontrer que $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$ en écrivant que, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus B & \iff x \in A \text{ et } x \notin B \\
 & \iff x \notin \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \\
 & \iff x \in \overline{B} \setminus \overline{A}.
 \end{aligned}$$

C.4. Démonstration par disjonction de cas

Démonstration par cas

Pour démontrer certaines assertions dépendant d'un ou plusieurs paramètres, il est nécessaire d'envisager plusieurs cas en fonction des valeurs de ce(s) paramètre(s). On travaille alors avec soin pour séparer la discussion en plusieurs cas disjoints et complémentaires. Certains cas peuvent eux-mêmes être subdivisés en différents sous-cas.

La discussion peut (doit) se terminer par un bilan.

Exemples :

- Résolvons le système

$$(S) \begin{cases} x + (4 - a)y = 0 \\ (1 - a)x - 2y = b \end{cases}$$

en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.

En reportant l'information sur x donnée par la première équation dans la seconde (méthode par substitution), on obtient

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x = (a - 4)y \\ (1 - a)(a - 4)y - 2y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = (a - 4)y \\ (-a^2 + 5a - 6)y = b \end{cases} \end{aligned}$$

Or $-a^2 + 5a - 6$ s'annule pour $a = 2$ ou $a = 3$, ce qui nous conduit à envisager deux cas :

- Premier cas : $a \neq 2$ et $a \neq 3$

La seconde équation du système nous donne la valeur de y . En reportant dans la première équation, on trouve celle de x . Le système possède alors une unique solution donnée par

$$\begin{cases} x = \frac{b(a - 4)}{-a^2 + 5a - 6} \\ y = \frac{b}{-a^2 + 5a - 6} \end{cases}$$

- Second cas : $a = 2$ ou $a = 3$

On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x = (a - 4)y \\ 0 = b \end{cases}$$

On envisage alors deux sous-cas :

- ▷ Premier sous-cas : $b \neq 0$

L'équation $0 = b$ est clairement contradictoire donc le système n'a pas de solution.

- ▷ Second sous-cas : $b = 0$

On obtient alors

$$(S) \iff x = (a - 4)y,$$

ce qui démontre que les solutions de (S) sont les points d'une droite : lorsque $a = 2$, les solutions sont les points (x, y) de la droite $x + 2y = 0$ et lorsque $a = 3$, les solutions sont les points (x, y) de la droite $x + y = 0$.

C.5. Démonstration en analyse-synthèse

Vous utilisez le raisonnement par analyse-synthèse depuis longtemps sans même le savoir. Pour bien comprendre de quoi on parle, intéressons nous à l'exercice suivant (classe de Première).

La vache Marguerite broute son pré carré. Elle a remarqué que lorsqu'elle ajoute l'aire de son pré (en km^2) à la longueur du côté de celui-ci (en km, et tant pis pour l'homogénéité!), elle obtient 6. Quelles est la longueur de ce côté?

Si x désigne cette longueur, les cogitations de Marguerite nous disent que $x^2 + x = 6$. Les solutions de cette équation sont 2 et -3 . Comme une longueur ne peut être négative, on en déduit que $x = 2$. Le pré de Marguerite est donc un carré de 2 km de côté.

Que dire des mastications mathématiques de Marguerite? Et bien, on peut constater que le problème est résolu par conditions nécessaires (x doit satisfaire l'équation $x^2 + x = 6$). Les valeurs de x que l'on en déduit ne sont, par conséquent, que des valeurs possibles! L'étape finale (qui consiste à écarter la solution négative -3) permet ainsi de contrôler quelle valeur de x satisfait des hypothèses suffisantes pour être une solution du problème de Marguerite.

Le principe de ce type de raisonnement, dit par analyse-synthèse, est décrit ci-dessous.

Démonstration en analyse-synthèse

Un raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux étapes :

- l'analyse : on raisonne sur une hypothétique solution du problème et on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution ;
- la synthèse : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats possibles à être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

Il arrive souvent que la phase d'analyse produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un seul candidat qui les vérifie. Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution (sous réserve d'existence).

La phase de synthèse permet alors ou bien de montrer l'existence d'une solution (si le candidat répond au problème), ou bien de constater qu'il n'y a aucune solution.

L'analyse-synthèse est donc particulièrement adaptée pour démontrer des propriétés d'existence et d'unicité du type $\exists!x \in E, \mathcal{P}(x)$. Dans ce cas, l'analyse prouve l'unicité sous réserve d'existence et fournit une expression de la solution recherchée. La synthèse (qui se contente de reprendre le candidat déterminé par l'analyse) justifie l'existence.

Exemples :

- Démontrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est, de manière unique, la somme d'une fonction constante et d'une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(0) + h(1) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Analyse : On suppose l'existence de $c \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $h(0) + h(1) = 0$ telles que $f = c + h$. En évaluant en 0 et 1, on obtient $f(0) = c + h(0)$ et $f(1) = c + h(1)$. Après addition de ces deux égalités, il vient $f(0) + f(1) = 2c$ car $h(0) + h(1) = 0$. Cela prouve que l'on a nécessairement $c = (f(0) + f(1))/2$ et $h = f - c$. On sait donc que la décomposition recherchée, si elle existe, est unique.

Synthèse : Prenons $c = (f(0) + f(1))/2$ et $h = f - c$. On a bien sûr $f = c + h$ (on a tout fait pour cela) et on a également

$$h(0) + h(1) = f(0) - \frac{f(0) + f(1)}{2} + f(1) - \frac{f(0) + f(1)}{2} = 0.$$

Cela justifie l'existence de la décomposition. L'unicité étant déjà acquise, on a répondu à notre question.

- Démontrons que, pour tout nombre réel x , il existe un unique couple (x^+, x^-) de nombres réels positifs ou nuls tel que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. Le nombre x^+ s'appelle la **partie positive** de x et x^- est sa **partie négative**.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

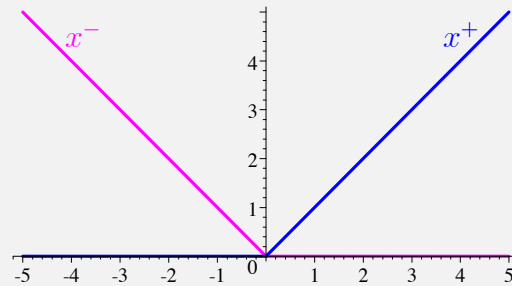
Analyse : On suppose l'existence de $(x^+, x^-) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. En additionnant et soustrayant ces égalités, on voit que nécessairement

$$x^+ = \frac{x + |x|}{2} = \max\{0; x\} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2} = \max\{0; -x\}.$$

On sait donc que la décomposition recherchée, si elle existe, est unique.

Synthèse : Prenons $x^+ = \max\{0; x\}$ et $x^- = \max\{0; -x\}$. On voit alors clairement que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. Cela justifie l'existence de la décomposition. Glop !

En bonus, voici les graphes des deux fonctions $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$:



D. De l'art de la rédaction et de la présentation

Bien que les correcteurs soient parfois relativement indulgents (surtout avec les bonnes copies. . .), il y a un minimum de règles à respecter :

- Écrivez à l'encre noire ou bleue.
- Laissez une marge.
- N'utilisez pas l'effaceur ou le correcteur blanc sur de trop grande surface.
- Faites figurer clairement les références des questions traitées.
- Terminer chaque question par une conclusion soulignée ou encadrée.
- Sauter une ligne entre deux questions.
- Ne commencez jamais une question (surtout lorsqu'elle est calculatoire) en bas d'une page.
- Sauter une page (voire changez de feuille) entre deux exercices.
- Respectez les notations de l'énoncé même si ce ne sont pas celles auxquelles vous êtes habitué. N'hésitez pas, en revanche, à introduire des notations supplémentaires.
- N'hésitez pas à faire figurer de nombreux dessins, même s'ils ne sont pas demandés.
- Au cours des calculs, vous devez veiller à écrire très lisiblement. Lorsque le calcul est terminé, simplifiez au maximum le résultat obtenu.
- Dans vos démonstrations, on doit pouvoir distinguer du premier coup d'œil :
 - un résultat connu auquel vous faites référence, qui doit être introduit par un « or », un « d'après », etc ;
 - un résultat déduit de vos raisonnements, qui doit être précédé d'un « donc », d'un « d'où », d'un « par conséquent », d'un « il s'ensuit que », etc ;
 - un résultat que vous allez démontrer, qui doit être annoncé par un « Démontrons que », un « Il faut établir que », etc.
- Il faut justifier chaque étape d'un raisonnement :
 - en utilisant une hypothèse de l'énoncé ;
 - en citant un résultat obtenu dans les questions précédentes (même si l'on a pas réussi à le démontrer) ;
 - en faisant explicitement référence à un résultat du cours dont il faut alors vérifier soigneusement toutes les hypothèses.
- Lorsque vous venez de trouver une solution, mais qu'elle vous paraît très compliquée, perdez encore une ou deux minutes à essayer de simplifier la solution trouvée.

6 h 15