LA DROITE RÉELLE

✠ ***Exercice 1.*** [$\circ$]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^{\uparrow}(x) = \sup\{f(t) : t \leqslant x\}.$$

Justifier l'existence de $f^{\uparrow}$ et étudier sa monotonie. Que dire de $f^{\uparrow}$ si f est croissante ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est majorée, l'ensemble $\{f(t) : t \leqslant x\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de sa borne supérieure (en vertu de la propriété de la borne supérieure). Donc $f^{\uparrow}(x)$ existe. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } f^{\uparrow} \text{ existe bel et bien.}}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors clairement $\{f(t) : t \leqslant x\} \subset \{f(t) : t \leqslant y\}$, ce qui donne $\sup\{f(t) : t \leqslant x\} \leqslant \sup\{f(t) : t \leqslant y\}$, c'est-à-dire $f^{\uparrow}(x) \leqslant f^{\uparrow}(y)$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } f^{\uparrow} \text{ est croissante.}}$$

Lorsque f est croissante, on a clairement $f^{\uparrow}(x) = \sup\{f(t) : t \leqslant x\} = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{lorsque } f \text{ est croissante, } f \text{ et } f^{\uparrow} \text{ sont une seule et même fonction.}}$$

✠ ***Exercice 2.*** [$\star$]
Démontrer que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Adh}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{a \in A} \left]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right[$$

et en déduire que tout fermé de $\mathbb{R}$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On procède par double-inclusion.

- $\subset$ Soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. On sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $]x - 1/n; x + 1/n[\cap A \neq \varnothing$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a \in A$ tel que $a \in]x - 1/n; x + 1/n[$ ou, ce qui revient au même, tel que $x \in]a - 1/n; a + 1/n[$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \bigcup_{a \in A}]a - 1/n; a + 1/n[$. Autrement dit, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{a \in A}]a - 1/n; a + 1/n[$.
- $\supset$ Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{a \in A}]a - 1/n; a + 1/n[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \bigcup_{a \in A}]a - 1/n; a + 1/n[$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a \in A$ tel que $x \in]a - 1/n; a + 1/n[$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 < \varepsilon$. Pour ce n_0, notre hypothèse dit qu'il existe $a \in A$ tel que $x \in]a - 1/n_0; a + 1/n_0[$. Comme $1/n_0 < \varepsilon$, on en déduit que $x \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. On a donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$, ce qui signifie que $x \in \mathrm{Adh}(A)$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Adh}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{a \in A} \left]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right[\cdot}$$

Une réunion d'ouverts étant un ouvert, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{a \in A}]a - 1/n; a + 1/n[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\mathrm{Adh}(A)$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Comme un fermé est égal à son adhérence, on en déduit que

$$\boxed{\text{tout fermé de } \mathbb{R} \text{ est une intersection dénombrable d'ouverts de } \mathbb{R}.}$$

✠ ***Exercice 3.*** [$\star$]

Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ et $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
2. Démontrer que $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$ et $\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.
   Donner dans chacun des deux cas un exemple où l'égalité n'est pas vraie.

1. Pour démontrer $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$, on procède par double inclusion.

   $\subset$ Soit $x \in \mathrm{Adh}(A \cup B)$. On veut démontrer que $x \in \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ou $x \in \mathrm{Adh}(B)$. Par l'absurde, on suppose que $x \notin \mathrm{Adh}(A)$ et $x \notin \mathrm{Adh}(B)$. Il existe alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_1; x + \varepsilon_1[\cap A = \varnothing$ et $]x - \varepsilon_2; x + \varepsilon_2[\cap B = \varnothing$. Posons $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. On a $]x - \varepsilon_0; x + \varepsilon_0[\cap (A \cup B) = \varnothing$, ce qui contredit le fait que $x \in \mathrm{Adh}(A \cup B)$. Absurde ! Donc $\mathrm{Adh}(A \cup B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$.

   $\supset$ Soit $x \in \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ de sorte que $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ou $x \in \mathrm{Adh}(B)$. Par exemple, supposons que $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A = \varnothing$, donc $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap (A \cup B) = \varnothing$. Cela démontre que $x \in \mathrm{Adh}(A \cup B)$. Donc $\mathrm{Adh}(A \cup B) \supset \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$. *On aurait aussi pu utiliser le fait que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ associé à la croissance (pour $\subset$) de* Adh.

   En conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B).}$$

   Pour démontrer $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$, on utilise le passage au complémentaire. On a
$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Int}(A \cap B) & = & \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}\big(\mathbb{R} \setminus (A \cap B)\big) & \text{formule du cours} \\
& = & \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}\big((\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B)\big) & \\
& = & \mathbb{R} \setminus \big(\mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) \cup \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus B)\big) & \text{formule ci-dessus} \\
& = & \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus A)\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus B)\big) & \\
& = & \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) & \text{formule du cours,}
\end{array}$$

   donc
$$\boxed{\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B).}$$

2. Démontrons que $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$. Soit $x \in \mathrm{Adh}(A \cap B)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap (A \cap B) = \varnothing$. Cela implique que $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap A = \varnothing$ et $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap B = \varnothing$. Donc $x \in \mathrm{Adh}(A)$ et $x \in \mathrm{Adh}(B)$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$. Par conséquent, on a
$$\boxed{\mathrm{Adh}(A \cap B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B).}$$

   On a
$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) & = & \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus A)\big) \cup \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus B)\big) & \text{formule du cours} \\
& = & \mathbb{R} \setminus \big(\mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus A) \cap \mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus B)\big) & \\
& \subset & \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}\big((\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)\big) & \text{formule ci-dessus} \\
& = & \mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}\big(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)\big) & \\
& = & \mathrm{Int}(A \cup B) & \text{formule du cours,}
\end{array}$$

   donc
$$\boxed{\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B).}$$

   Si $A =]0; 1[$ et $B = \{1\}$, on a $\mathrm{Adh}(A \cap B) = \mathrm{Adh}(\varnothing) = \varnothing$ et $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B) = [0; 1] \cap \{1\} = \{1\}$, donc $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subsetneq \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$.

   Si $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, donc $\mathrm{Int}(A \cup B) \supsetneq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

   Par conséquent,
$$\boxed{\text{les inclusions ci-dessus sont généralement strictes.}}$$

✠ ***Exercice 4.*** [○]

Soient U, F deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que U est ouvert si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(U) \cap U = \varnothing$.
2. Démontrer que F est fermé si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(F) \subset F$.

Il FAUT que les deux résultats de cet exercice vous paraissent intuitifs ! Ce qui ne vous dédouane pas de les démontrer...

1. On a

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Fr}(U) \cap U = \varnothing\big) &\iff \big(\mathrm{Adh}(U) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathrm{Int}(U)) \cap U = \varnothing\big)\\
&\iff \big(\mathrm{Adh}(U) \cap U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathrm{Int}(U)) = \varnothing\big)\\
&\iff \big(U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathrm{Int}(U)) = \varnothing\big) \qquad \text{car } \mathrm{Adh}(U) \cap U = U\\
&\iff \big(U \setminus \mathrm{Int}(U) = \varnothing\big)\\
&\iff \big(U = \mathrm{Int}(U)\big) \qquad \text{car } \mathrm{Int}(U) \subset U\\
&\iff \big(U \text{ est ouvert}\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{U \text{ est ouvert si, et seulement si, } \mathrm{Fr}(U) \cap U = \varnothing.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Fr}(F) \subset F\big) &\iff \big(\mathrm{Adh}(F) \setminus \mathrm{Int}(F) \subset F\big)\\
&\iff \big(\mathrm{Adh}(F) \subset F\big) \qquad \text{car } \mathrm{Int}(F) \subset F\\
&\iff \big(\mathrm{Adh}(F) = F\big) \qquad \text{car } \mathrm{Adh}(F) \supset F\\
&\iff \big(F \text{ est fermé}\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F \text{ est fermé si, et seulement si, } \mathrm{Fr}(F) \subset F.}$$

✠ ***Exercice 5.*** [★]

Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$.

▷ <u>Analyse :</u> Regardons les positions relatives des intervalles $]nx; ny[$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$. On sent bien que lorsque n devient grand, ces intervalles sont suffisamment longs pour se chevaucher. Précisément, pour un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n+1)x < ny$, l'intervalle $]nx; ny[$ se termine après que l'intervalle $](n+1)x; (n+1)y[$ a commencé et l'on a bien la situation escomptée. Cela revient à choisir n tel que $n > x/(y-x)$. Voilà, on a tout compris ! À partir d'un tel entier n, les intervalles $]nx; ny[$ vont se réunir en une demi-droite (lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$) dans laquelle on trouvera nécessairement un élément de A. En divisant par un entier bien choisi, on aura alors notre élément de B compris entre x et y.

▷ <u>Synthèse :</u> Introduisons l'entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ défini par

$$n_0 = \left\lfloor \frac{x}{y-x} \right\rfloor + 1\cdot$$

Comme A n'est pas bornée, il existe $a \in A$ tel que

$$a \geqslant (n_0 + 1)x.$$

Considérons alors l'entier $n \geqslant n_0$ tel que

$$nx < a \leqslant (n+1)x,$$

ce qui revient à poser $n = \lceil a/x \rceil - 1$.
Comme $n \geqslant n_0$, on a $n > \dfrac{x}{y-x}$, c'est-à-dire

$$(n+1)x < ny.$$

En combinant ces inégalités, on obtient

$$nx < a < ny,$$

c'est-à-dire

$$x < \frac{a}{n} < y.$$

En conclusion,

$$\boxed{B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}A \text{ est dense dans } \mathbb{R}_+.}$$

✠ ***Exercice 6.*** (Ensemble dérivé)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \cap (]x-\varepsilon; x[\cup]x; x+\varepsilon[) \neq \varnothing$. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté A' et s'appelle l'*ensemble dérivé* de A.

1. Reformuler la définition d'un point d'accumulation à l'aide de la notion d'adhérence.
2. a) Donner un exemple d'ensemble infini D tel que $D' = \varnothing$.
   b) On pose $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Démontrer que $0 \in H'$.
3. Démontrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si,et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\varepsilon; x[\cup]x; x+\varepsilon[)$ est infini.
4. Démontrer que A' est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. a) Démontrer que $\mathrm{Adh}(A) = A \cup A'$.
   b) Démontrer que A est un fermé de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A' \subset A$.
6. On considère la suite d'ensembles $(A^{(k)})_{k\geqslant 1}$ définie par récurrence par

$$A^{(1)} = A', \qquad A^{(2)} = (A')' \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ A^{(k+1)} = (A^{(k)})'.$$

Démontrer que la suite $(A^{(k)})_{k\geqslant 1}$ est décroissante (dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ordonné par l'inclusion $\subset$).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \cap (]x-\varepsilon; x[\cup]x; x+\varepsilon[) \neq \varnothing$. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté A' et s'appelle l'ensemble dérivé de A.

1. *Reformuler la définition d'un point d'accumulation à l'aide de la notion d'adhérence.*

   On peut reformuler la définition de point d'acumulation de la façon suivante :

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \text{ est un point d'accumulation de } A \text{ lorsque } x \in \mathrm{Adh}(A \setminus \{x\}).}$$

2. a) *Donner un exemple d'ensemble infini D tel que $D' = \varnothing$.*

   Nous allons démontrer que $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Si $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z} \cap (]x-1; x[\cup]x; x+1[) = \varnothing$, ce qui démontre que l'assertion $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{Z} \cap (]x-\varepsilon; x[\cup]x; x+\varepsilon[) \neq \varnothing$ est fausse (puisqu'elle admet $\varepsilon = 1$ comme contre-exemple). Donc x n'est pas un point d'accumulation.

   Si $x \notin \mathbb{Z}$, on pose $\varepsilon_0 = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\}$ de sorte que $\mathbb{Z} \cap (]x-\varepsilon_0; x[\cup]x; x+\varepsilon_0[) = \varnothing$. L'assertion $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{Z} \cap (]x-\varepsilon; x[\cup]x; x+\varepsilon[) \neq \varnothing$ est donc à nouveau fausse (cette fois, c'est $\varepsilon = \varepsilon_0$ qui donne un contre-exemple). Donc x n'est pas un point d'accumulation.

   On constate ainsi qu'aucun nombre réel n'est un point d'accumulation de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{Z}' = \varnothing.}$$

   b) *On pose $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Démontrer que $0 \in H'$.*

   Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$H \cap (]-\varepsilon; 0[\cup]0; \varepsilon[) = \{1/n : n \geqslant 1/\varepsilon\} \neq \varnothing,$$

   donc

$$\boxed{0 \in H'.}$$

3. *Démontrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si,et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est infini.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $\Leftarrow$ Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est infini. A fortiori, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est non vide. Donc x est un point d'accumulation.

   $\Rightarrow$ Supposons réciproquement que x est un point d'accumulation, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\alpha;x[\cup]x;x+\alpha[)$ est non vide.

   Soit $\varepsilon > 0$. On souhaite démontrer que $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est infini.

   L'hypothèse (avec $\alpha = \varepsilon$) nous dit que $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est non vide, donc il existe $x_0 \in A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$.

   On pose alors $\varepsilon_1 = |x_0 - x|$ de sorte que $\varepsilon_1 > 0$ (car $x_0 \neq x$) et $x_0 \notin (]x-\varepsilon_1;x[\cup]x;x+\varepsilon_1[)$.
   L'hypothèse (avec $\alpha = \varepsilon_1$) nous dit que $A \cap (]x-\varepsilon_1;x[\cup]x;x+\varepsilon_1[)$ est non vide, donc il existe $x_1 \in A \cap (]x-\varepsilon_1;x[\cup]x;x+\varepsilon_1[)$. On a nécessairement $x_1 \neq x_0$.

   On pose alors $\varepsilon_2 = |x_1 - x|$ de sorte que $\varepsilon_2 > 0$ (car $x_1 \neq x$) et $x_0, x_1 \notin (]x-\varepsilon_2;x[\cup]x;x+\varepsilon_2[)$.
   L'hypothèse (avec $\alpha = \varepsilon_2$) nous dit que $A \cap (]x-\varepsilon_2;x[\cup]x;x+\varepsilon_2[)$ est non vide, donc il existe $x_2 \in A \cap (]x-\varepsilon_2;x[\cup]x;x+\varepsilon_2[)$. On a nécessairement $x_2 \neq x_0$ et $x_2 \neq x_1$.
   Etc.

   On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments distincts qui appartiennent tous à $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$.
   Donc $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est infini.

   En conclusion,

   $$\boxed{\text{$x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si,et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[)$ est infini.}}$$

4. *Démontrer que A' est un fermé de $\mathbb{R}$.*

   Démontrons que $\mathbb{R} \setminus A'$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus A'$.
   Comme x n'est pas un point d'accumulation, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A \cap (]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[) = \varnothing$.
   Nous allons démontrer que $]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[$ est inclus dans $\mathbb{R} \setminus A'$.
   Soit $t \in]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[$. Comme $]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (c'est l'union de deux intervalles ouverts), il existe $r > 0$ tel que $]t-r;t+r[\subset]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[$. Mézalors, comme $A \cap (]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[) = \varnothing$, on a aussi $A \cap]t-r;t+r[= \varnothing$. A fortiori, on en déduit que $A \cap (]t-r;t[\cup]t;t+r[) = \varnothing$. Cela démontre que t n'est pas un point d'accumulation de A, c'est-à-dire $t \in \mathbb{R} \setminus A'$.
   On a donc bien démontré que $]x-\varepsilon_0;x[\cup]x;x+\varepsilon_0[$ est inclus dans $\mathbb{R} \setminus A'$.
   Comme on savait déjà que $x \in \mathbb{R} \setminus A'$, on en déduit que $]x-\varepsilon_0;x+\varepsilon_0[$ est inclus dans $\mathbb{R} \setminus A'$.
   En résumé, on a démontré que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A'$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $]x-\varepsilon_0;x+\varepsilon_0[\subset \mathbb{R} \setminus A'$, ce qui signifie que $\mathbb{R} \setminus A'$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Par conséquent,

   $$\boxed{\text{A' est un fermé de $\mathbb{R}$.}}$$

5. a) *Démontrer que* $\mathrm{Adh}(A) = A \cup A'$.

   On procède par double inclusion.

   $\subset$ Soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. On veut démontrer que $x \in A \cup A'$, c'est-à-dire que $x \in A$ ou $x \in A'$.
   On suppose donc que $x \notin A$ et on va démontrer que $x \in A'$.
   Comme $x \in \mathrm{Adh}(A)$, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \varnothing$.
   Or $x \notin A$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \cap (]x-\varepsilon;x[\cup]x;x+\varepsilon[) \neq \varnothing$.
   Cela signifie que $x \in A'$.
   Donc $\mathrm{Adh}(A) \subset A \cup A'$.

   $\supset$ Soit $x \in A \cup A'$. On veut démontrer que $x \in \mathrm{Adh}(A)$.
   Comme $x \in A \cup A'$, on a $x \in A$ ou $x \in A'$.
   Si $x \in A$, on a immédiatement $x \in \mathrm{Adh}(A)$ puisque l'on sait que $A \subset \mathrm{Adh}(A)$.
   Si $x \in A'$, on a $x \in \mathrm{Adh}(A \setminus \{x\})$. Or $A \setminus \{x\} \subset A$ donc $\mathrm{Adh}(A \setminus \{x\}) \subset \mathrm{Adh}(A)$. Cela implique que $x \in \mathrm{Adh}(A)$.
   On a ainsi démontré que $A \cup A' \subset \mathrm{Adh}(A)$.

En définitive, on a

$$\boxed{\mathrm{Adh}(A) = A \cup A'.}$$

b) *Démontrer que A est un fermé de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A' \subset A$.*

On a

$$\begin{aligned}
(A \text{ est un fermé de } \mathbb{R}) &\iff \big(A = \mathrm{Adh}(A)\big) \qquad &&\text{c'est du cours}\\
&\iff \big(A = A \cup A'\big) &&\text{d'après a)}\\
&\iff (A' \subset A).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{A \text{ est un fermé de } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } A' \subset A.}$$

6. *On considère la suite d'ensembles $(A^{(k)})_{k \geqslant 1}$ définie par récurrence par $A^{(1)} = A'$, $A^{(2)} = (A')'$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{(k+1)} = (A^{(k)})'$. Démontrer que la suite $(A^{(k)})_{k \geqslant 1}$ est décroissante (dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ordonné par l'inclusion $\subset$).*

Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $A^{(k)}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ d'après la question 4. Dès lors, la question 5. b) nous dit que $\big(A^{(k)}\big)' \subset A^{(k)}$, c'est-à-dire $A^{(k+1)} \subset A^{(k)}$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{la suite } (A^{(k)})_{k \geqslant 1} \text{ est décroissante (dans } \mathscr{P}(\mathbb{R}) \text{ ordonné par l'inclusion } \subset).}$$