DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 1. [$\circ$]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f admet un développement limité en a, alors f est définie en a.
2. Si f admet un développement limité en a, alors f admet une limite finie en a.
3. On peut déterminer un développement limité de $x \longmapsto \ln x$ en 0.
4. On peut utiliser un développement limité pour démontrer une inégalité.

Exercice 2. [$\circ$]

Déterminer le

a) $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f(x) = (\sin x)^2$,

b) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \ln(1 + x\cos x)$,

c) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x} - \sqrt{1+x}$,

d) $\mathrm{DL}_3(1)$ de $f(x) = 3^x$,

e) $\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,

f) $\mathrm{DL}_2(\pi/4)$ de $f(x) = (\sin x)/\sqrt{x}$,

g) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = x^2/(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 3. [$\circ$]

En relativité restreinte, l'énergie totale d'une particule de masse m et de vitesse v est donnée par l'expression $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Déterminer un développement limité de E à l'ordre 2 au voisinage de $v = 0$. Les termes obtenus vous sont-ils familiers ?

Exercice 4. [$\circ$]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

   En déduire que f se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note encore f le prolongement ainsi obtenu. Préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. Soit $n \geqslant 0$. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction f. Deux fonctions ayant le même DL à tout ordre en 0 sont-elles nécessairement égales ?

Exercice 5. [$\circ$]

1. Soient f, g deux fonctions impaires de classe $\mathscr{C}^7$ au voisinage de 0 telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 1$. Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $g \circ f - f \circ g$ en fonction des coefficients des développements limités à l'ordre 7 en 0 de f et de g.
2. Donner le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $x \longmapsto \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

Exercice 6. [$\star$]

Déterminer un $\mathrm{DL}_{100}(0)$ de la fonction $f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 7. [○]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x + \arctan x - 1$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f^{-1} après avoir justifié l'existence de f^{-1} et de son $\mathrm{DL}_2(0)$.

Exercice 8. [○]

Déterminer un équivalent simple de

$$f(x) = 1 - \frac{(\sin x)^x}{x^x} \text{ en } 0 \qquad \text{et} \qquad u_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \text{ en } +\infty.$$

Exercice 9. [○]

Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}, \qquad \lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n.$$

Exercice 10. [○]

Étudier l'existence d'une tangente en $x = 1$ et la position de la courbe par rapport à celle-ci pour les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{\sin(x-1)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x-1}.$$

Exercice 11. [○]

Étudier l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci pour les fonctions

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^4 + x^6}}{1 + x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 \arctan \frac{3x - 1}{3(x^2 + x + 1)}.$$

Exercice 12. [⋆]

Étudier la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x},$$

en précisant, à l'aide d'un développement limité, le comportement asymptotique de f en $\pm\infty$.

Donnée numérique : $\sqrt[3]{4}/3 \approx 0,53$.

Exercice 13. [○]

En moins d'une minute, calculer $\arctan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. [○]

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dans laquelle on fait tendre a vers 0^+ tout en maintenant fixes $b > 0$ et c.

1. Démontrer que l'une des deux racines $x_1(a)$ tend vers une valeur finie et admet un développement limité dont on donnera les deux premiers termes.
2. Démontrer que l'autre racine $x_2(a)$ tend vers $-\infty$ et en donner un développement asymptotique à trois premiers termes.

Exercice 15. [○]

Pour $x \in [0; 1]$, établir une relation entre $\arcsin(x-1)$ et $\arcsin\sqrt{x/2}$. En déduire les premiers termes du développement asymptotique de arcsin en -1.

Exercice 16. [⋆]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une et une seule solution, notée x_n, dans $]n\pi - \pi/2; n\pi + \pi/2[$.
2. Déterminer un développement asymptotique de x_n, lorsque n tend vers $+\infty$, à la précision $o(1/n^2)$. *Indication : On commencera par rechercher un équivalent de x_n puis on étudiera la différence entre x_n et cet équivalent. On pourra s'aider de la fonction* arctan.