APPLICATIONS LINÉAIRES

♦ ***Exercice 1.*** [$\circ$]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.
2. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre alors $(e_i)_{i\in I}$ est libre.
3. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de F.
4. Si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
5. Si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ alors $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.
6. Si $u^2 = \mathrm{Id}_E$, alors $u = \pm \mathrm{Id}_E$.
7. Si $u^2 = \mathrm{Id}_E$, alors il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \pm x$.

1. Faux (sauf si f est injective).
2. Vrai (la contraposée est clairement vraie).
3. Faux (sauf si f est surjective).
4. Vrai.
5. Faux (sauf si f est injective).
6. C'est faux : toutes les symétrie vérifient $u^2 = \mathrm{Id}_E$.
7. Vrai. Comme u est une symétrie, on a $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E$ donc il existe au moins un vecteur invariant ou anti-invariant.

♦ ***Exercice 2.*** [$\circ$]

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,1,1)$.

1. Qu'est-ce qui justifie l'existence et l'unicité de f ?
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f(x, y)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

1. Pour caractériser de manière unique une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base. Comme $\big((1,2),(2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, l'application f existe et est unique. Bref,

   $$\boxed{\text{l'application } f \text{ existe et est unique car on connait son action sur une base de } \mathbb{R}^2.}$$

2. On sait qu'il existe $a, b, \alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (ax + by, \alpha x + \beta y, Ax, By).$$

   Dès lors, on a

   $$\left\{\begin{array}{l} f(1,2) = (1,1,0) \\ f(2,1) = (0,1,1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a + 2b = 1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \\ A + 2B = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 2A + B = 1 \end{array}\right. \iff \begin{array}{c}\text{résolution de trois}\\ \text{systèmes } 2\times 2\end{array} \iff \left\{\begin{array}{l} a = -1/3 \\ b = 2/3 \\ \alpha = 1/3 \\ \beta = 1/3 \\ A = 2/3 \\ B = -1/3 \end{array}\right.$$

   donc

   $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \frac{1}{3}\,(-x + 2y, x + y, 2x - y).}$$

3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y)=(0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -\ x & + & 2y & = & 0 \\ \boxed{x} & + & y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \boxed{3y} & = & 0 \\ \boxed{x} & + & y & = & 0 \\ & - & 3y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \boxed{3y} & = & 0 \\ \boxed{x} & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}.}$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\,(-x+2y, x+y, 2x-y) = \frac{x}{3}(-1,1,2) + \frac{y}{3}(2,1,-1)$$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((-1,1,2),(2,1,-1)\big)$. Comme $(-1,1,2)$ et $(2,1,-1)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est le plan vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ porté par } (-1,1,2) \text{ et } (2,1,-1).}$$

♦ ***Exercice 3.*** [⋆]

On note E l'espace vectoriel des suites complexes périodiques et E_0 le sous ensemble de E constitué des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $u_0+u_1+\cdots+u_{T-1}=0$ où T est une période de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Enfin, on considère l'application $\Delta : E \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall u \in E,\ \Delta(u) = (u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Démontrer que E_0 est bien défini et que c'est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) \oplus E_0$.
3. Démontrer que Δ réalise un endomorphisme de E et préciser son noyau et son image.

1. Pour justifier que E_0 est bien défini, il convient de prouver que si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E vérifie $u_0+u_1+\cdots+u_{T-1}=0$ où T est une période de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors on a aussi $u_0+u_1+\cdots+u_{T'-1}=0$ où T' est une autre période de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Posons $A = \{p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p}=u_n\}$. On voit aisément que $A \cup (-A)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ distinct de $\{0\}$. Ce sous-groupe est donc de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{N}^*$. Dès lors, T et T' sont des multiples de a, c'est-à-dire $T = ma$ et $T' = m'a$ avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$. On a $0 = u_0+u_1+\cdots+u_{T-1} = m(u_0+u_1+\cdots+u_{a-1})$ d'où $u_0+u_1+\cdots+u_{a-1}=0$. Par suite, on a $u_0+u_1+\cdots+u_{T'-1} = m'(u_0+u_1+\cdots+u_{a-1}) = 0$. Cela démontre que

$$\boxed{E_0 \text{ est bien défini.}}$$

Démontrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de E. Il est clair que $E_0 \subset E$ et que la suite nulle appartient à E_0. Si u et v sont deux éléments de E_0 de périodes respectives T_u et T_v, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u + \mu v$ est périodique de période $T = T_uT_v$ et l'on a

$$\sum_{k=0}^{T_uT_v-1} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{T_uT_v-1} u_k}_{\substack{=0 \\ \text{car } T_uT_v \text{ est une} \\ \text{période de } u}} + \mu \underbrace{\sum_{k=0}^{T_uT_v-1} v_k}_{\substack{=0 \\ \text{car } T_uT_v \text{ est une} \\ \text{période de } v}} = 0,$$

donc $\lambda u + \mu v$ est un élément de E_0. Par suite,

$$\boxed{E_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

2. Pour démontrer que $E = \mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) \oplus E_0$, on procède par analyse/synthèse :
   - ▷ Analyse : Soit $u \in E$ une suite périodique de période T. Supposons que l'on ait trouvé une suite constante égale à $a \in \mathbb{C}$ et une suite $v \in E_0$ telles que $u = a + v$. Alors
$$\sum_{k=0}^{T-1} u_k = \sum_{k=0}^{T-1} (a + v_k) = Ta + \underbrace{\sum_{k=0}^{T-1} v_k}_{=0} = Ta,$$
ce qui prouve que l'on a nécessairement
$$a = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} u_k$$
et
$$v = u - a.$$
On constate que le couple (a, v) est unique (sous réserve d'existence). Donc $\mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big)$ et E_0 sont en somme directe.
   - ▷ Synthèse : Soit $u \in E$ une suite périodique de période T. Posons
$$a = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} u_k \qquad \text{et} \qquad v = u - a$$
de sorte que
$$a \in \mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big)$$
$$u = a + v.$$
De plus, T est une période de v et
$$\sum_{k=0}^{T-1} v_k = \sum_{k=0}^{T-1} (u_k - a) = \sum_{k=0}^{T-1} u_k - \sum_{k=0}^{T-1} a = \sum_{k=0}^{T-1} u_k - Ta = 0,$$
donc
$$v \in E_0.$$
On a donc $\mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) + E_0 = E$.
   - ▷ Bilan : En conclusion,
$$\boxed{E = \mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big) \oplus E_0.}$$

3. Soient $u, v \in E_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{aligned} \Delta\big((\lambda u_n + \mu v_n)_{n\geqslant 0}\big) &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} - \lambda u_n + \mu v_n)_{n\geqslant 0} \\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0} + \mu(v_{n+1} - v_n)_{n\geqslant 0} \\ &= \lambda\Delta\big((u_n)_{n\geqslant 0}\big) + \mu\Delta\big((v_n)_{n\geqslant 0}\big), \end{aligned}$$
donc Δ est linéaire.

De plus, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique alors $(u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ l'est aussi et donc $\Delta\big((u_n)_{n\geqslant 0}\big) = (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique.

Ainsi,
$$\boxed{\Delta \text{ réalise un endomorphisme de } E.}$$
Par définition, u est une suite constante si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 0$, c'est-à-dire $\Delta(u) = 0$. Donc
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\Delta = \mathrm{Vect}\big((1)_{n\geqslant 0}\big).}$$
Nous allons démontrer que $\mathrm{Im}\,\Delta = E_0$.
   - $\subset$ Soit $U \in \mathrm{Im}\,\Delta$. Il existe $u \in E$ tel que $U = \Delta(u)$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = u_{n+1} - u_n$. Notons T une période de u. C'est aussi une période de U. Alors
$$\sum_{k=0}^{T-1} U_k = \sum_{k=0}^{T-1} (u_{k+1} - u_k) = u_T - u_0 = 0,$$
car u est T-périodique. Donc $\Delta(u) \in E_0$. Cela prouve que $\mathrm{Im}\,\Delta \subset E_0$.

$\supset$ Soit $U \in E_0$. On note T une période de U. Considérons la suite u définie par

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+T} = \sum_{k=0}^{n+T-1} U_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k + \underbrace{\sum_{k=n}^{n+T-1} U_k}_{=0 \text{ car } U \in E_0} = u_n,$$

donc

$$u \in E.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta(u) = \Big(\sum_{k=0}^{n} U_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k \Big)_{n \geqslant 0} = (U_n)_{n \geqslant 0} = U.$$

Donc $U \in \operatorname{Im} \Delta$. Cela démontre que $E_0 \subset \operatorname{Im} \Delta$.

En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im} \Delta = E_0.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. a) Rappeler l'inclusion naturelle entre $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Ker} f$.
   b) Démontrer que $\big(\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f\big) \iff (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\})$.
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour avoir $\operatorname{Ker}(g \circ u) = \operatorname{Ker} u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
2. a) Rappeler l'inclusion naturelle entre $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g$.
   b) Démontrer que $\big(\operatorname{Im}(g \circ f) \supset \operatorname{Im} g\big) \iff (\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F)$.
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour avoir $\operatorname{Im}(v \circ f) = \operatorname{Im} v$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. a) On a toujours

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g \circ f) \supset \operatorname{Ker} f.}$$

b) $\Rightarrow$ Supposons que $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. Alors $g(y) = 0_G$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $g\big(f(x)\big) = 0_G$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Par suite, on a $x \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(x) = 0_F$, c'est-à-dire $y = 0_F$. Donc $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Alors $g\big(f(x)\big) = 0_G$, c'est-à-dire $f(x) \in \operatorname{Ker} g$. Comme $f(x) \in \operatorname{Im} f$ par définition, on a $f(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, d'où $f(x) = 0_F$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} f$, d'où $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Donc

$$\boxed{\big(\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f\big) \iff (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}).}$$

c) Si $E = \{0\}$, alors $\operatorname{Ker}(g \circ u) = \{0\} = \operatorname{Ker} u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$ sans condition sur g.

Supposons dorénavant que $E \neq \{0\}$.

<u>Analyse :</u>

Supposons que $\operatorname{Ker}(g \circ u) = \operatorname{Ker} u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La question précédente nous dit que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u = \{0_F\}$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Par l'absurde, supposons que $\operatorname{Ker} g \neq \{0_F\}$. Il existe alors $y \in \operatorname{Ker} g$ tel que $y \neq 0_F$. Comme $E \neq \{0\}$, il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $y \in \operatorname{Im} u$ (il suffit de prendre une base (nécessairement non vide) de E et d'envoyer l'un des vecteurs de cette base sur y et les autres sur n'importe quoi). Mézalors, $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u$ ce qui contredit la condition $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u = \{0_F\}$. Absurde !

Donc $\operatorname{Ker} g = \{0_F\}$, ce qui démontre que g est nécessairement injective.

<u>Synthèse :</u>

Si g est injective, on a $\operatorname{Ker} g = \{0_F\}$ donc $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u = \{0_F\}$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, ce qui démontre que $\operatorname{Ker}(g \circ u) = \operatorname{Ker} u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, d'après la question précédente.

Conclusion :

$$\boxed{\text{si } E \neq \{0\}, \text{ alors } \operatorname{Ker}(g \circ u) = \operatorname{Ker} u \text{ pour tout } u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ si, et seulement si, } g \text{ est injective.}}$$

2. a) On a toujours

$$\boxed{\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g.}$$

b) $\Rightarrow$ Supposons que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$. Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in \operatorname{Im} f$, d'où $g(y) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g\big(f(x)\big)$ de sorte que $g\big(y - f(x)\big) = 0_G$. Alors $y = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{y - f(x)}_{\in \operatorname{Ker} g}$, d'où $y \in \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$. Soit $z \in \operatorname{Im} g$. Il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$, il existe $y_1 \in \operatorname{Ker} g$ et $y_2 \in \operatorname{Im} f$ tels que $y = y_1 + y_2$. Il existe $x \in E$ tel que $y_2 = f(x)$. Alors $g(y) = g(y_1) + g(y_2) = 0_G + g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. D'où $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Donc

$$\boxed{\big(\operatorname{Im}(g \circ f) \supset \operatorname{Im} g\big) \iff (\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F).}$$

c) Si $G = \{0\}$, alors $\operatorname{Im}(v \circ f) = \{0\} = \operatorname{Im} v$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F,G)$ sans condition sur f.
Supposons dorénavant que $G \neq \{0\}$.

Analyse :
Supposons que $\operatorname{Im}(v \circ f) = \operatorname{Im} v$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
La question précédente nous dit que $\operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} f = F$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Cela nous laisse penser qu'il est nécessaire que $\operatorname{Im} f = F$. Vérifions le.
Par l'absurde, supposons que $\operatorname{Im} f \neq F$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F. On a $S \neq \{0_F\}$. On considère $v \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $v|_{\operatorname{Im} f} = \widetilde{0}$ et $v|_S \neq \widetilde{0}$ (il suffit d'envoyer l'un des vecteurs d'une base de S sur un vecteur non nul de G, qui existe puisque $G \neq \{0\}$). Alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} v$, ce qui donne $v \circ f = \widetilde{0}$ et donc $\operatorname{Im}(v \circ f) = \{0_G\}$. En revanche, on a $\operatorname{Im}(v) \neq \{0_G\}$. Absurde !
Donc $\operatorname{Im} f = F$, ce qui démontre que f est nécessairement surjective.

Synthèse :
Si f est surjective, on a $\operatorname{Im} f = F$ donc $\operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} f = F$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F,G)$, ce qui démontre que $\operatorname{Im}(v \circ f) = \operatorname{Im} v$ pour tout $v \in \mathscr{L}(F,G)$, d'après la question précédente.

Conclusion :

$$\boxed{\text{si } G \neq \{0\}, \text{ alors } \operatorname{Im}(v \circ f) = \operatorname{Im} v \text{ pour tout } v \in \mathscr{L}(F,G) \text{ si, et seulement si, } f \text{ est surjective.}}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\circ$]
Soient E un K-espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $vuv = v$ et $uvu = u$.

1. Démontrer que $v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} v$.
2. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.

1. On sait que $v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} v$. Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $w \in \operatorname{Im} v$, alors il existe $x \in E$ tel que $w = v(x)$. Alors $w = v\big((uv)(x)\big)$ et donc $w \in v(\operatorname{Im} u)$. Donc

$$\boxed{v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} v.}$$

2. On procède par analyse/synthèse.
   - ▷ Analyse : Soit $x \in E$. On suppose que $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in \operatorname{Im} v$. Il existe $w \in E$ tel que $z = v(w)$. Mézalors $u(x) = u(z) = (uv)(w)$ et donc $(vu)(x) = (vuv)(w) = v(w) = z$. Il s'ensuit que $y = x - (vu)(x)$. On a ainsi démontré qu'en cas d'existence le couple (y,z) est unique. Cela démontre que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe.
   - ▷ Synthèse : Soit $x \in E$. On pose $y = x - (vu)(x)$ et $z = (vu)(x)$. On a alors $x = y + z$ avec $z \in \operatorname{Im} v$ et $y \in \operatorname{Ker} u$ puisque $u(y) = u\big(x - (vu)(x)\big) = u(x) - (uvu)(x) = u(x) - u(x) = 0_E$. Cela démontre que $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im}\, v$.

En conclusion,

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im}\, v.}$$

♦ ***Exercice 6.*** [∘]

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On dit que $E \xrightarrow{\ f\ } F \xrightarrow{\ g\ } G$ est une *suite exacte* lorsque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

1. Que peut-on dire alors de $g \circ f$?
2. Que signifie le fait que $\{0\} \xrightarrow{\ f\ } F \xrightarrow{\ g\ } G$ soit une suite exacte ?
3. Que signifie le fait que $E \xrightarrow{\ f\ } F \xrightarrow{\ g\ } \{0\}$ soit une suite exacte ?

1. Si $x \in E$, on a $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, donc $g\big(f(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = 0$. Donc
$$\boxed{g \circ f = 0.}$$
2. Dans le cas où $E = \{0\}$, on a $\operatorname{Im} f = \{0\}$, donc $\operatorname{Ker} g = \{0\}$, ce qui signifie que
$$\boxed{g \text{ est injective.}}$$
3. Dans le cas où $G = \{0\}$, on a $\operatorname{Ker} g = F$, d'où $\operatorname{Im}\, f = F$ ce qui signifie que
$$\boxed{f \text{ est surjective.}}$$

♦ ***Exercice 7.*** [∘]

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace de E. Justifier que tous les supplémentaires de F dans E sont isomorphes.

Soient F' et F'' deux supplémentaires de F dans E. La projection sur F' dans la direction de F induit, d'après le théorème géométrique du rang, un isomorphisme entre F'' et F'. Donc F' et F'' sont isomorphes. En conclusion,

$$\boxed{\text{tous les supplémentaires de } F \text{ dans } E \text{ sont isomorphes.}}$$

♦ ***Exercice 8.*** [⋆]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire non nulle de E vers F.

1. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E. Démontrer que $f\big(\sum_{i\in I} E_i\big) = \sum_{i\in I} f(E_i)$.
2. Démontrer que f est injective si, et seulement si, pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de E en somme directe, la somme $\sum_{i\in I} f(E_i)$ est également directe. Dans ce cas, on peut noter que le résultat de la question 1 se réécrit sous la forme $f\big(\bigoplus_{i\in I} E_i\big) = \bigoplus_{i\in I} f(E_i)$.

   On a ainsi démontré que les applications linéaires non nulles qui conservent les sommes directes sont exactement les applications linéaires injectives.

1. On a
$$\begin{aligned} f\big(\textstyle\sum_{i\in I} E_i\big) &= f\big(\big\{\textstyle\sum_{i\in I} e_i : \forall i \in I,\ (e_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} E_i\big\}\big) \\ &= \big\{\textstyle\sum_{i\in I} f(e_i) : (e_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} E_i\big\} \\ &= \textstyle\sum_{i\in I} f(E_i), \end{aligned}$$
   donc
$$\boxed{f\big(\textstyle\sum_{i\in I} E_i\big) = \sum_{i\in I} f(E_i).}$$
2. $\Rightarrow$ Supposons f injective.
   Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E en somme directe.
   Soit $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in(I)} f(E_i)$ telle que $\sum_{i\in I} y_i = 0_F$.
   Pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in E_i$ tel que $y_i = f(x_i)$. Lorsque $y_i = 0_F$, on prend $x_i = 0_E$ de sorte que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est presque nulle.
   Dès lors, on a $\sum_{i\in I} f(x_i) = 0_F$, c'est-à-dire $f\big(\sum_{i\in I} x_i\big) = 0_F$. Comme f est injective, on en déduit que $\sum_{i\in I} x_i = 0_E$.
   Or la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, donc $\forall i \in I,\ x_i = 0_E$.
   Par suite, on a $\forall i \in I,\ y_i = f(0_E) = 0_F$, ce qui démontre que la somme $\sum_{i\in I} f(E_i)$ est directe.

$\Leftarrow$ Supposons que pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de E en somme directe, la somme $\sum_{i\in I} f(E_i)$ est également directe. Démontrons que f est injective. On propose deux méthodes.

- $\triangleright$ Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. La somme $\sum_{i\in I} \operatorname{Vect}(e_i)$ est alors directe. Il s'ensuit que la somme $\sum_{i\in I} f\big(\operatorname{Vect}(e_i)\big)$ est directe, autrement dit que la somme $\sum_{i\in I} \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)$ est directe. Cela signifie que la famille $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre. D'après le théorème de l'image d'une base, cela implique que f est injective.
- $\triangleright$ Par l'absurde : supposons que f n'est pas injective. Il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = 0$. On peut en outre choisir y tel que $f(y) \neq 0$ puisque $f \neq \widetilde{0}$. Alors (x, y) est libre (en effet, si $\lambda x + \mu y = 0$, alors $\lambda f(x) + \mu f(y) = 0$, d'où $\mu f(y) = 0$ ce qui force $\mu = 0$ puisque $f(y) \neq 0$ puis $\lambda = 0$). Posons $z = x + y$, $U = \operatorname{Vect}(y)$ et $V = \operatorname{Vect}(z)$. Ces deux sous-espaces sont en somme directe (car (x, y) est libre) et leurs images directes $f(U)$ et $f(V)$ sont deux droites vectorielles égales (car $f(y) = f(z)$). On a ainsi démontré qu'il existe deux sous-espaces vectoriels U et V en somme directe tels que $f(U)$ et $f(V)$ ne sont pas en somme directe. C'est absurde !

Donc f est injective.

En conclusion,

$$\boxed{\text{f est injective si, et seulement si, pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de E en somme directe, la somme $\sum_{i\in I} f(E_i)$ est également directe.}}$$

♦ ***Exercice 9.*** [★] (Deux théorèmes de factorisation)
Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels.

1. Soient $w \in \mathscr{L}(E, G)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Démontrer que
$$\big(\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists u \in \mathscr{L}(E, F), \quad w = v \circ u\big).$$
2. Soient $f \in \mathscr{L}(E, G)$ et $g \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que
$$\big(\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists h \in \mathscr{L}(F, G), \quad f = h \circ g\big).$$

1. $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $w = v \circ u$. Soit $y \in \operatorname{Im} w$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = w(x)$. Mézalors, $y = (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big) \in \operatorname{Im} v$. Donc $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

   $\Rightarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.
   Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on a $w(e_i) \in \operatorname{Im} w$. Or $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$ donc, pour tout $i \in I$, il existe $f_i \in F$ tel que $w(e_i) = v(f_i)$.
   Notons u l'application linéaire de E vers F telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. L'application u existe bien puisque on la définit en donnant l'image d'une base.
   On a alors $v \circ u = w$ puisque ces deux applications coïncident sur la base $(e_i)_{i\in I}$ de E.

Donc
$$\boxed{\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v \iff \exists u \in \mathscr{L}(E, F), \quad w = v \circ u.}$$

2. $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F, G)$ tel que $f = h \circ g$. Soit $x \in \operatorname{Ker} g$. On a $g(x) = 0$ donc $h\big(g(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $(h \circ g)(x) = 0$ ou encore $f(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$ et l'on a bien démontré que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

   $\Rightarrow$ Supposons réciproquement que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.
   Soit $(e_i)_{i\in J}$ une base de $\operatorname{Ker} g$. Avec le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base $(e_i)_{i\in I}$ de E (avec $I \supset J$). On sait alors que $S = \operatorname{Vect}\big((e_i)_{i\in I\setminus J}\big)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} g$ dans E et donc que la restriction de g à S au départ et à $\operatorname{Im} g$ à l'arrivée est un isomorphisme. Cela démontre que $\big(g(e_i)\big)_{i\in I\setminus J}$ est une base de $\operatorname{Im} g$.
   Notons T un supplémentaire de $\operatorname{Im} g$ dans F et considérons l'application linéaire h de F vers G telle que $\forall i \in I \setminus J,\ h\big(g(e_i)\big) = f(e_i)$ et $\forall t \in T,\ h(t) = 0_G$. L'application h existe bien puisque on la définit en donnant ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires dans E.
   Vérifions alors que $f = h \circ g$ en démontrant que ces deux applications coïncident sur la base $(e_i)_{i\in I}$ de E. Si $i \in J$, on a $f(e_i) = 0_G$ (puisque $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$) et $(h \circ g)(e_i) = h\big(g(e_i)\big) = h(0_F) = 0_G$ donc $f(e_i) = h\big(g(e_i)\big)$. Si $i \in I \setminus J$, on a $f(e_i) = h\big(g(e_i)\big)$ par construction de h. On a donc bien $f = h \circ g$.

Donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \iff \exists h \in \mathscr{L}(F,G), \quad f = h \circ g.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [⋆] ♡

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. Démontrer que u est une homothétie.

Pour tout $x \in E$, il existe, par hypothèse, un nombre réel λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.
Notre objectif est de démontrer que l'application $x \in E \setminus \{0_E\} \longmapsto \lambda_x$ est constante.
Pour cela, considérons deux éléments non nuls x et y de E.
Si la famille (x, y) est libre, alors l'égalité

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

implique que

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Si, au contraire, la famille (x, y) est liée alors il existe $\mu \in K$ tel que $x = \mu y$ et l'on a

$$\lambda_x x = u(x) = u(\mu y) = \mu f(y) = \mu\lambda_y y = \lambda_y x$$

d'où

$$\lambda_x = \lambda_y.$$

Donc

$$\boxed{u \text{ est une homothétie.}}$$

♦ ***Exercice 11.*** [⋆]

Soit E un K-espace vectoriel. On note $\mathscr{C}(E)$ le commutant de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E. Démontrer que $\mathscr{C}(E)$ est l'ensemble des homothéries vectorielles de E. *Indication : Pour un vecteur $x \in E$ donné, on pourra considérer une projection sur* $\operatorname{Vect}(x)$ *et utiliser le résultat de l'exercice 10.*

$\supset$ Il est clair qu'une homothétie commute avec tous les endomorphismes de E.

$\subset$ Réciproquement, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall v \in \mathscr{L}(E),\ uv = vu$.
Soit $x \in E$. On note H un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ dans E (nous avons dit dans le cours qu'il en existe toujours) et l'on considère p la projection sur la droite $\operatorname{Vect}(x)$ dans la direction de H. On a $pu = up$. Alors $p\big(u(x)\big) = (pu)(x) = (up)(x) = u\big(p(x)\big) = u(x)$ car $p(x) = x$. Ainsi, le vecteur $u(x)$ est invariant par p, ce qui signifie que $u(x)$ est proportionnel à x. On a ainsi démontré que , pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires.
L'exercice 10 nous permet d'en déduire que u est une homothétie vectorielle.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}(E) \text{ est l'ensemble des homothéries vectorielles de } E.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [∘]

Soient E un K-espace vectoriel, p un projecteur de E et F un sous-espace de E. Démontrer que

$$p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p \qquad \text{et} \qquad p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p.$$

1. On procède par double inclusion.
   - $\subset$ Soit $y \in p(F)$.
     Il est clair que $y \in \operatorname{Im} p$.
     Reste à démontrer que $y \in F + \operatorname{Ker} p$. Comme $y \in p(F)$, on sait qu'il existe $f \in E$ tel que $y = p(f)$. Mézalors, comme y est invariant (c'est un élément de $\operatorname{Im} p$), on a $p(y) = p(f)$ c'est-à-dire $p(y - f) = 0_E$, ce qui signifie que $y - f \in \operatorname{Ker} p$ ou encore que $y \in F + \operatorname{Ker} p$.
     Donc $y \in (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$.

$\supset$ Soit $y \in (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$.

Comme $y \in F + \operatorname{Ker} p$, on sait qu'il existe $f \in F$ et $k \in \operatorname{Ker} p$ tels que $y = f + k$. Dès lors, on a $p(y) = p(f)$. Or y est invariant par p (puisque $y \in \operatorname{Im} p$), donc $y = p(f)$. Cela démontre que $y \in p(F)$.

En conclusion,

$$\boxed{p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p.}$$

2. Comme p est un projecteur, on sait que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont en somme directe. Dès lors, il est clair que $F \cap \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont également en somme directe.

Il reste donc à démontrer que $p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$. Là encore, on procède par double inclusion.

$\subset$ Soit $x \in p^{-1}(F)$.

On sait, d'après le cours, que la décomposition de x sur $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ est $x = p(x) + (x - p(x))$. Pour démontrer que $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$, il suffit donc de justifier que $p(x) \in F \cap \operatorname{Im} p$. Or on constate que c'est évident car $p(x)$ appartient toujours à $\operatorname{Im} p$ et il appartient ici à F puisque $x \in p^{-1}(F)$. On a donc bien $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$

$\supset$ Soit $x \in (F \cap \operatorname{Im} p) + \operatorname{Ker} p$.

Il existe $f \in F \cap \operatorname{Im} p$ et $k \in \operatorname{Ker} p$ tel que $x = f + k$. Dès lors, on a $p(x) = p(f)$. Or f est invariant par p (car $f \in \operatorname{Im} p$) donc $p(x) = f$. Comme $f \in F$, cela nous dit que $p(x) \in F$, c'est-à-dire $x \in p^{-1}(F)$.

En conclusion,

$$\boxed{p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [$\star$]

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Démontrer que $g \circ f$ est une projection de E et préciser ses éléments caractéristiques.

On a $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$, donc

$$\boxed{g \circ f \text{ est un projecteur de } E.}$$

Il est clair que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, alors $(g \circ f)(x) = 0_E$, d'où $(f \circ g \circ f)(x) = 0_F$ c'est-à-dire $f(x) = 0_F$ ou encore $x \in \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f.}$$

Il est clair que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$, ce qui donne $y = (g \circ f \circ g)(x)$ et donc $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g.}$$

En conclusion,

$$\boxed{g \circ f \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} g \text{ dans la direction de } \operatorname{Ker} f.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [$\star$]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q des projections telles que $pq = \widetilde{0}$. On pose $r = p + q - qp$.

1. Démontrer que r est une projection.
2. Démontrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
3. Démontrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

1. On a
$$\begin{array}{rcl} r^2 & = & (p+q-qp)(p+q-qp) \\ & = & p^2+pq-pqp+qp+q^2-q^2p-qp^2-qpq+qpqp \\ & = & p+\widetilde{0}-\widetilde{0}p+qp+q-qp-qp-\widetilde{0}+\widetilde{0} \\ & = & p+q-qp \\ & = & r, \end{array}$$
donc
$$\boxed{r \text{ est une projection.}}$$

2. On procède par double-inclusion.
   - $\subset$ Soit $x \in \operatorname{Ker} r$. On a $r(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x) + q(x) - pq(x) = 0_E$. En appliquant p, on obtient $p^2(x) + pq(x) - p^2q(x) = 0_E$, c'est-à-dire $p(x) = 0_E$ puisque $p^2 = p$ et $pq = \widetilde{0}$, donc $x \in \operatorname{Ker} p$. En reportant l'information $p(x) = 0_E$ dans $p(x) + q(x) - pq(x) = 0_E$, il vient $q(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} q$. En résumé, on a $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, ce qui démontre que $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
   - $\supset$ Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Alors $p(x) = q(x) = 0_E$, d'où $r(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} r$. Donc $\operatorname{Ker} r \supset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

   En conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.}$$

3. On procède par double-inclusion.
   - $\supset$ Soit $y \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Il existe alors $y_1 \in \operatorname{Im} p$ et $y_2 \in \operatorname{Im} q$ tel que $y = y_1 + y_2$. On a $p(y_1) = y_1$, $q(y_2) = y_2$ et $p(y_2) = 0_E$ puisque $pq = \widetilde{0}$. Alors
$$\begin{array}{rcl} r(y) & = & r(y_1) + r(y_2) \\ & = & p(y_1) + q(y_1) - qp(y_1) + p(y_2) + q(y_2) - qp(y_2) \\ & = & y_1 + q(y_1) - q(y_1) + p(y_2) + y_2 - 0_E \\ & = & y_1 + y_2 \\ & = & y, \end{array}$$
     ce qui démontre que $y \in \operatorname{Im} r$. Donc
$$\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r.$$
   - $\subset$ Pour démontrer que $\operatorname{Im} r \supset \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$, on raisonne classiquement par analyse/synthèse. Mais ici, on peut faire plus simple !
     - On démontre que $\operatorname{Im} r \supset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

       Soit $y \in \operatorname{Im} r$. Il existe $x \in E$ tel que $y = r(x)$, c'est-à-dire $y = p(x) + q(x) - qp(x) = p(x) + q(x - p(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Par conséquent, on a bien $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
     - On démontre ensuite que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe.

       Soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Il existe alors $a, b \in E$ tels que $w = p(a) = q(b)$. Il s'ensuit que $y = p(a) = p^2(a) = pq(b) = 0_E$. Donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$, ce qui justifie que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe.

   En conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.}$$

♦ ***Exercice 15.*** [$\star$]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Démontrer que $pu = up$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

$\Rightarrow$ Supposons que $pu = up$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors $p(x) = 0_E$ et $p\big(u(x)\big) = u\big(p(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$. Ainsi $\operatorname{Ker} p$ est stable par u.
Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Alors $u(y) = u\big(p(x)\big) = p\big(u(x)\big)$ donc $u(y) \in \operatorname{Im} p$. Ainsi $\operatorname{Im} p$ est stable par u.

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.
Soit $x \in E$. Alors $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p$ car $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$. Donc $up(x) = u\big(p(y) + p(z)\big) = u(0 + z) = u(z)$. Or $\operatorname{Im} p$ est stable par u donc $u(z) \in \operatorname{Im} p$ et, par conséquent, $p\big(u(z)\big) = u(z)$. De plus, $\operatorname{Ker} p$ est stable par u donc $u(y) \in \operatorname{Ker} p$, c'est-à-dire $p\big(u(y)\big) = 0_E$. Il s'ensuit que

$$up(x) = u(z) = p\big(u(z)\big) = p\big(u(z)\big) + p\big(u(y)\big) = p\big(u(z) + u(y)\big) = p\big(u(z + y)\big) = pu(x),$$

ce qui démontre que p et u commutent.

Ainsi,

$$\boxed{pu = up \text{ si, et seulement si, } \operatorname{Im} p \text{ et } \operatorname{Ker} p \text{ sont stables par } u.}$$

♦ ***Exercice 16.*** [$\star$]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux scalaires α et β distincts tels que

$$(u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}.$$

1. Démontrer que $\operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
2. Démontrer que $(u - \beta \operatorname{Id}_E)(u - \alpha \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}$ et en déduire que $\operatorname{Im}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E) = E$.
4. On note p la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ et q la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
   a) Que dire de pq, de qp et de $p + q$?
   b) Démontrer que $u = \alpha p + \beta q$.
   c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
   d) On suppose $\alpha\beta \neq 0$. Démontrer que u est bijective et calculer u^m pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $y \in \operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = (u - \beta \operatorname{Id}_E)(x)$. Comme $(u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}$, on a $\big((u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E)\big)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $(u - \alpha \operatorname{Id}_E)\big((u - \beta \operatorname{Id}_E)(x)\big) = 0_E$ ou encore $(u - \alpha \operatorname{Id}_E)(y) = 0_E$. Donc $y \in \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$. On en conclut que

$$\boxed{\operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E).}$$

2. On a $(u - \beta \operatorname{Id}_E)(u - \alpha \operatorname{Id}_E) = u^2 - \alpha f - \beta f + \alpha\beta \operatorname{Id}_E = (u - \alpha \operatorname{Id}_E)(u - \beta \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}$, donc

$$\boxed{(u - \beta \operatorname{Id}_E)(u - \alpha \operatorname{Id}_E) = \widetilde{0}.}$$

En procédant comme dans la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Im}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E).}$$

3. On procède par analyse/synthèse.

▷ Analyse : Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $a \in \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$ et $b \in \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ tels que $x = a + b$. On a alors $u(x) = u(a) + u(b) = \alpha a + \beta b$. Dès lors, en résolvant le système constitué des égalités $a + b = x$ et $\alpha a + \beta b = u(x)$, on voit que l'on a nécessairement

$$a = \frac{u(x) - \beta x}{\alpha - \beta} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{u(x) - \alpha x}{\alpha - \beta}.$$

L'unicité du couple (a, b) sous réserve d'existence nous dit que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E)$ sont en somme directe.

▷ Synthèse : Soit $x \in E$. On pose

$$a = \frac{u(x) - \beta x}{\alpha - \beta} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\alpha x - u(x)}{\alpha - \beta}.$$

On vérifie alors sans mal que

$$a \in \operatorname{Im}(u - \beta \operatorname{Id}_E), \qquad b \in \operatorname{Im}(u - \alpha \operatorname{Id}_E)$$

et

$$x = a + b.$$

Donc $\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E) = E$.

Finalement, on a

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E) = E.}$$

4. a) Par définition de p et q, on a

$$\boxed{pq = qp = \widetilde{0} \qquad \text{et} \qquad p + q = \operatorname{Id}_E.}$$

b) Soit $x \in E$. D'après la question précédente, on peut écrire x sous la forme $x = a + b$ avec

$$a \in \operatorname{Ker}(u - \alpha \operatorname{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad b \in \operatorname{Ker}(u - \beta \operatorname{Id}_E).$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\alpha p + \beta q)(x) &= \alpha p(a + b) + \beta q(a + b) \\
&= \alpha a + \beta b \\
&= u(a) + u(b) \\
&= u(a + b) \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u = \alpha p + \beta q.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $pq = \widetilde{0} = qp$, l'application de la formule du binôme donne

$$u^n = (\alpha p + \beta q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} p^k q^{n-k} = \alpha^n p + \beta^n q,$$

car tous les termes où p et q coexistent sont nuls. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u^n = \alpha^n p + \beta^n q.}$$

d) D'après la question précédente, le candidat naturel pour être l'inverse de $u^n = \alpha^n p + \beta^n q$ est $\alpha^{-n} p + \beta^{-n} q$, qui existe puisque $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Or

$$(\alpha^n p + \beta^n q)(\alpha^{-n} p + \beta^{-n} q) = p^2 + \alpha^n \beta^{-n} pq + \alpha^{-n} \beta^n qp + q^2 = p + q = \operatorname{Id}_E,$$

car $pq = qp = 0$ et $p + q = \operatorname{Id}_E$. De même, on démontre que

$$(\alpha^{-n} p + \beta^{-n} q)(\alpha^n p + \beta^n q) = \operatorname{Id}_E.$$

Donc

$$\boxed{u \text{ est inversible et } \forall m \in \mathbb{Z},\ u^m = \alpha^m p + \beta^m q.}$$

♦ ***Exercice 17.*** [∘]

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Démontrer que $\varphi : P \longmapsto P - AP''$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner ses éléments caractéristiques.

L'application φ est bien linéaire car la dérivation est linéaire. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors P'' est une constante, donc $\deg(P - AP'') \leqslant \max\{\deg P; \deg AP''\} = \max\{\deg P; \deg A\} \leqslant 2$, ce qui démontre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi)(P) &= \varphi\big(\varphi(P)\big) \\ &= \varphi(P) - A\varphi(P)'' \\ &= P - AP'' - A(P - AP'')'' \\ &= P - AP'' - A(P'' - \underbrace{A''}_{=2} P'' \underbrace{-2A'P''' - AP''''}_{=0}) \\ &= P,\end{aligned}$$

donc φ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminons $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(P) = P &\iff P - AP'' = P \\ &\iff AP'' = 0 \\ &\iff P'' = 0 \qquad \text{car } A \neq 0 \text{ et } \mathbb{R}[X] \text{ intègre} \\ &\iff P \in \mathbb{R}_1[X],\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathbb{R}_1[X].$$

Déterminons $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(P) = -P &\iff P - AP'' = -P \\ &\iff AP'' = 2P \\ &\iff A.2a = 2P \qquad \text{où } P = aX^2 + bX + c \\ &\iff P = aA \text{ où } a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathrm{Vect}(A).$$

En conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est la symétrie par rapport } \mathbb{R}_1[X] \text{ dans la direction de } \mathrm{Vect}(A).}$$

♦ ***Exercice 18.*** [∘]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant une symétrie.

L'opérateur de transposition T est un endomorhisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $T^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. C'est donc une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dès lors, le sous-espace de ses vecteurs invariants et le sous-espaces de ses vecteurs antiinvariants sotn supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Or $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

♦ ***Exercice 19.*** [∘]

$\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Par l'absurde, supposons que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il existe alors une fonction $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\exists g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f = g + \lambda h$. Mézalors, toutes les fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ont les mêmes points de continuité non dérivable. C'est évidemment absurde ! Donc

$$\boxed{\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ n'est pas un hyperplan de } \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

◆ ***Exercice 20.*** [$\circ$]
Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, déterminer un supplémentaire du sous-espace

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

On remarque que F est le noyau de la forme linéaire $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f$, donc F est un hyperplan de E.
Par suite, toute droite vectorielle non incluse dans F est un supplémentaire de F dans E.
Par exemple, comme $\widetilde{1} \notin F$, on en déduit que

$$\boxed{\text{le sous-espace des fonctions constantes est un supplémentaire de } F \text{ dans } E.}$$

◆ ***Exercice 21.*** [$\star$]
Soient E un K-espace vectoriel, H un hyperplan de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in H,\ u(x) = x$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\forall x \in E,\ u(x) - \lambda x \in H$.

Soit $a \in E \setminus H$ de sorte que $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
Décomposons $u(a)$ sur $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Il existe $h \in H$ et $\lambda \in K$ tel que $u(a) = h + \lambda a$.
Démontrons que $\forall x \in E,\ u(x) - \lambda x \in H$.
Soit $x \in E$. Il existe $h_x \in H$ et $\lambda_x \in K$ tels que $x = h_x + \lambda_x a$. Alors

$$\begin{array}{rcl} u(x) - \lambda x & = & u(h_x) + \lambda_x u(a) - \lambda(h_x + \lambda_x a) \\ & = & h_x + \lambda_x(h + \lambda a) - \lambda h_x - \lambda\lambda_x a \\ & = & h_x + \lambda_x h - \lambda h_x \\ & \in & H \end{array}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in K \text{ tel que } \forall x \in E,\ f(x) - \lambda x \in H.}$$

◆ ***Exercice 22.*** [$\circ$]
Soient E un K-espace vectoriel et x, y deux vecteurs distincts de E. Démontrer qu'il existe une forme linéaire ℓ sur E telle que $\ell(x) \neq \ell(y)$.

▷ Analyse :
Supposons qu'il existe $\ell \in E^*$ tel que $\ell(x) \neq \ell(y)$. Alors $\ell(x-y) \neq 0_K$ ce qui signifie que $x-y$ n'appartient pas à l'hyperplan qui est le noyau de ℓ et donc que $D = \mathrm{Vect}(x-y)$ est un supplémentaire de cet hyperplan.

▷ Synthèse :
On a $x - y \neq 0_E$ donc $D = \mathrm{Vect}(x-y)$ est une droite vectorielle. Considérons H un supplémentaire de D dans E, de sorte que H est un hyperplan de E. Notons $\ell \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\ell$. Alors $\ell(x-y) \neq 0$ sinon $x - y$ serait dans H. Donc $\ell(x) \neq \ell(y)$.

▷ Conclusion :

$$\boxed{\text{si } x \text{ et } y \text{ sont deux vecteurs disitncts de } E, \text{ il existe une forme linéaire } \ell \text{ sur } E \text{ telle que } \ell(x) \neq \ell(y).}$$

♦ ***Exercice 23.*** [$\star$]

Soient E un K-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $k \in I$, on note e_k^* la k-ème *forme coordonnée* définie par

$$e_k^* \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i & \longmapsto & \lambda_k \end{array} \right.$$

où $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ désigne l'unique décomposition de x sur la base $(e_i)_{i\in I}$ (avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$).

1. Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est libre.
2. a) On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille finie (on dit alors que E est de dimension finie). Démontrer que la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est une base de E^*, appelée *base duale* de $(e_i)_{i\in I}$.

   b) Lorsque $(e_i)_{i\in I}$ est une famille infinie, démontrer que $(e_i^*)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.

1. Supposons l'existence de $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i^* = \widetilde{0}$. Soit $k \in I$. En évaluant en e_k, on obtient $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i^*(e_k) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_k = 0$. Ainsi

$$\boxed{(e_i^*)_{i\in I} \text{ est libre.}}$$

2. a) Soit $\ell \in E^*$. Si $(e_i)_{i\in I}$ est fini, on pose

$$m = \sum_{i\in I} \ell(e_i) e_i^*.$$

On constate alors que, pour tout $k \in I$, on a

$$m(e_k) = \sum_{i\in I} \ell(e_i) e_i^*(e_k) = \ell(e_k).$$

Cela signifie que m et ℓ coïncident sur une base de E et donc que $\ell = m$. Par conséquent, on a

$$\ell = \sum_{i\in I} \ell(e_i) e_i^* \in \mathrm{Vect}\left((e_i^*)_{i\in I}\right),$$

ce qui démontre que $(e_i^*)_{i\in I}$ est génératrice. Comme on sait déjà que $(e_i^*)_{i\in I}$ est libre, on en déduit que

$$\boxed{\text{si } E \text{ est de dimension finie, alors } (e_i^*)_{i\in I} \text{ est une base de } E^*.}$$

   b) Si $(e_i)_{i\in I}$ est infinie, on considère la forme linéaire ℓ_1 telle que $\forall i \in I,\ \ell_1(e_i) = 1$ (qui existe et est unique puisqu'elle est définie par action sur une base). Alors ℓ_1 n'est pas une combinaison linéaire des e_i^* car la somme $\sum_{i\in I} e_i^*$ n'est pas à support fini. Donc

$$\boxed{\text{si } E \text{ est de dimension infinie, alors } (e_i^*)_{i\in I} \text{ n'est pas une base de } E^*.}$$