Lycée Henri IV
MPSI

Cours
Durée : 3 h 15

LIMITE D'UNE FONCTION

Les énoncés et parties suivis du symbole [✠] ne seront pas traités en cours.

Prérequis

Revoir les chapitres sur :

- les fonctions ;
- les suites ;
- la droite réelle ;
- les limites de suites.

Dans tout ce chapitre, à l'exception de la section E., les fonctions considérées sont réelles.

Les trois lettres AQT signifient « Âne Qui Trotte » et sont utilisées pour désigner une démonstration facile laissée au lecteur.

A. Limites

A.1. Comportement local ou asymptotique

Rappelons que :

- ▷ une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $]a-r; a+r[\subset W$;
- ▷ une partie W de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsqu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\subset W$ (respectivement $]-\infty; A[\subset W$).

Rappelons en outre qu'un nombre réel a est adhérent à une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ lorsque tout voisinage W_a de a rencontre $\mathscr{D}$ (c'est-à-dire $W_a \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$).

Pour les besoins de ce cours, nous étendons la notion d'adhérence à $+\infty$ en conservant la même définition : on dit que $+\infty$ est adhérent à une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ lorsque tout voisinage $W_{+\infty}$ de $+\infty$ rencontre $\mathscr{D}$ (c'est-à-dire $W_{+\infty} \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$). Il n'est pas difficile de voir que cela revient à dire que $\mathscr{D}$ n'est pas majorée. On fait évidemment de même pour $-\infty$, *mutatis mutandis*.

Ces notions vont nous être utiles pour décrire les propriétés d'une fonction à proximité d'un point, que la fonction existe ou pas en ce point !

Définition 1

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f vérifie une certaine propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de a lorsque a est adhérent à $\mathscr{D}$ et qu'il existe un voisinage W_a de a tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $W_a \cap \mathscr{D}$.

Lorsqu'on énonce une propriété satisfaite par une fonction f au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que l'on précise le comportement local de la fonction f en a (lorsque $a \in \mathbb{R}$) ou que l'on précise le comportement asymptotique de f en $\pm\infty$ (lorsque $a = \pm\infty$).

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on notera la subtile différence qui existe entre « vérifier $\mathscr{P}$ sur un voisinage de a » et « vérifier $\mathscr{P}$ au voisinage de a ». Dans le premier cas, la fonction doit vérifier $\mathscr{P}$ sur tout le voisinage (y compris en a) alors que dans le second cas, on demande seulement à la fonction de satisfaire $\mathscr{P}$ sur une partie de $\mathbb{R}$ qui « touche » a, sans exiger que la fonction satisfasse la propriété en a (mais sans l'interdire non plus).

En général, la partie $\mathscr{D}$ est une réunion finie d'intervalles non triviaux (c'est-à-dire non vides et non réduits à un point). Dans ce cas :

- ▷ Dire que f est vérifie $\mathscr{P}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ revient à dire qu'il existe $r > 0$ tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $]a; a+r[$ (c'est-à-dire à la droite immédiate de a) ou sur $]a-r; a[$ (c'est-à-dire à la gauche immédiate de a). Cela n'exclut pas la possibilité que f vérifie $\mathscr{P}$ à la fois à gauche et à droite de a (c'est-à-dire sur $]a; a+r[\cup]a-r; a[$ avec $r > 0$), ni même que f vérifie $\mathscr{P}$ en a (c'est-à-dire sur $[a; a+r[$ ou sur $]a-r; a]$ ou sur $]a-r; a+r[$ avec $r > 0$).
- ▷ Dire que f vérifie $\mathscr{P}$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) revient à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $]A; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; A[$).

<u>Exemples :</u>

- La fonction $h : x \longmapsto 1/x$ est définie au voisinage de 0 puisque 0 est adhérent à $\mathbb{R}^*$.
- La fonction ln est définie au voisinage de 0 puisque 0 est adhérent à $]0; +\infty[$.
- La fonction sin est croissante au voisinage de 0 puisqu'elle l'est sur $]-\pi/2; \pi/2[$.
- La fonction $x \longmapsto \sin(x)/x$ est strictement positive au voisinage de 0 puisqu'elle l'est sur $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$.

A.2. Convergence et divergences

La définition suivante introduit les comportements locaux et asymptotiques possibles d'une fonction au voisinage d'un point.

Définition 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers ℓ en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a) lorsque, étant donné un voisinage quelconque de ℓ, on peut assurer que $f(x)$ est dans ce voisinage dès que x est un voisinage assez petit de a, c'est-à-dire

$$\forall W_\ell \in \mathscr{V}_\ell, \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a, \quad f(\mathscr{D} \cap V_a) \subset W_\ell,$$

où $\mathscr{V}_\ell$ (resp. $\mathscr{V}_a$) désigne l'ensemble des voisinages de ℓ (resp. de a) dans $\mathbb{R}$. Autrement dit,

- si $\ell \in \mathbb{R}$, alors :
  - si $a \in \mathbb{R}$,
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]a-\eta; a+\eta[, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
  - si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),
  $$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]B; +\infty[, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \big(\text{resp.}\quad &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]-\infty; B[, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big) \end{aligned}$$
- si $\ell = +\infty$, alors :
  - si $a \in \mathbb{R}$,
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]a-\eta; a+\eta[, \qquad f(x) \geqslant A$$
  - si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),
  $$\begin{aligned} &\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]B; +\infty[, \qquad f(x) \geqslant A \\ \big(\text{resp.}\quad &\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]-\infty; B[, \qquad f(x) \geqslant A\big) \end{aligned}$$
- si $\ell = -\infty$, alors :
  - si $a \in \mathbb{R}$,
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]a-\eta; a+\eta[, \qquad f(x) \leqslant A$$
  - si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),
  $$\begin{aligned} &\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]B; +\infty[, \qquad f(x) \leqslant A \\ \big(\text{resp.}\quad &\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]-\infty; B[, \qquad f(x) \leqslant A\big). \end{aligned}$$

Le nombre ℓ est alors unique et s'appelle la limite de la fonction f en a, ce que l'on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que f admet deux limites en a, notées vers $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$. D'après le lemme de séparation des voisinages vu dans le cours sur la droite réelle, on peut trouver un voisinage W_{ℓ_1} de ℓ_1 et un voisinage de W_{ℓ_2} de ℓ_2 tels que $W_{\ell_1} \cap W_{\ell_2} = \varnothing$. Comme f tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 en a, on sait qu'il existe deux voisinages V_a et V_a' de a tels que $f(\mathscr{D} \cap V_a) \subset W_{\ell_1}$ et $f(\mathscr{D} \cap V_a') \subset W_{\ell_2}$. Mézalors, pour $x \in \mathscr{D} \cap V_a \cap V_a'$, $f(x)$ est à la fois dans W_{ℓ_1} et dans W_{ℓ_2}, c'est-à-dire dans $W_{\ell_1} \cap W_{\ell_2} = \varnothing$. C'est absurde ! Donc $\ell_1 = \ell_2$, ce qui assure l'unicité de la limite, si elle existe. ■

Dans le cas où $\mathscr{D} = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on retrouve la définition de la limite pour les suites.

L'intérieur d'un voisinage étant encore un voisinage, le sens de la définition précédente n'est pas modifié lorsque l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

La notion de limite n'exige le contrôle des valeurs de la fonction que dans un voisinage de a. Du coup, le comportement d'une fonction en a ne change pas si l'on modifie la fonction en dehors d'un voisinage de a : cela traduit le caractère local (si $a \in \mathbb{R}$) ou asymptotique (si $a = \pm\infty$) de la notion de limite.

La limite d'une fonction est indépendante de x. Ainsi l'écriture $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{x}$ n'a aucun sens !

On remarque que la fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, $f - \ell$ tend vers 0 en a. De même, pour $a \in \mathbb{R}$, on vérifie immédiatement que $f(x)$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a si, et seulement si, $f(a+h)$ tend vers ℓ lorsque h tend vers 0. Cette remarque permet de se ramener au cas d'une limite en 0. Nous verrons, plus loin dans ce cours, en quelles occasions il est important d'utiliser ces remarques.

La définition suivante précise le vocabulaire de la convergence et des divergences. En fait, la terminologie de « convergence » et « divergence » est traditionnellement réservée au langage des suites. Nous l'utiliserons tout de même pour les fonctions parce que j'en ai envie ! Na !

Définition 3

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de a.
Lorsque f admet une limite finie ℓ en a, on dit que f converge vers ℓ en a (ou qu'elle est convergente vers ℓ en a).
Lorsque f admet une limite infinie $\pm\infty$ en a, on dit que f diverge vers $\pm\infty$ en a (ou qu'elle est divergente vers $\pm\infty$ en a). Une telle divergence est dite de première espèce.
Enfin, lorsque f n'admet pas de limite (ni finie ni infinie) en a, on dit encore que f diverge en a (ou qu'elle est divergente en a). Une telle divergence est dite de seconde espèce ou sévère.

Il est utile de garder à l'esprit qu'il existe a priori trois comportements : la convergence (tendre vers une limite finie), la divergence de première espèce (tendre vers un infini) et la divergence de seconde espèce (qui correspond généralement à une divergence plus sévère associée à des oscillations, parfois régulières, parfois erratiques).
Il est en effet classique de démontrer que l'on est dans l'une de ces trois situations non pas en démontrant que cette situation a lieu mais en excluant les deux autres. Ainsi, pour démontrer qu'une fonction converge, il est parfois plus simple de rejeter les deux formes de divergences.

Lorsqu'on étudie une fonction, il convient de ne pas parler de sa limite sans avoir au préalable vérifier qu'elle existe ! En particulier, le symbole « lim », qui apparaît parfois dès le début de votre étude, a le défaut de présupposer l'existence de la limite. Pour éviter toute ambiguïté, on travaille sur l'expression de la fonction et on ne passe à la limite qu'une fois l'existence de la limite acquise. Dans bien des cas, le symbole « lim » ne devra donc apparaître que dans la conclusion du calcul.

Exemples :

- Si f est une fonction constante égale à c, alors f tend vers c en tout point.
- La fonction $\sqrt{\cdot}$ tend vers 0 en 0. En effet, pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^2$ pour avoir $\forall x \in [0;\eta[\,,\ |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leqslant \varepsilon$.
- La fonction sin tend vers 0 en 0. En effet, pour $\varepsilon \in]0;\pi/2[$ donné, on prend $\eta = \varepsilon$, d'où $\forall x \in]-\eta;\eta[\,,\ |\sin x| \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$, où la première inégalité vient du cours sur les fonctions.
- La fonction harmonique $x \longmapsto 1/x$ tend vers 0 en $\pm\infty$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on prend $B = 1/\varepsilon$ de sorte que $\forall x \geqslant B,\ |1/x - 0| \leqslant \varepsilon$.
- La partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En effet, pour tout $A > 0$, on prend $B = \lfloor A \rfloor + 1$ de sorte que $\forall x \geqslant B,\ \lfloor x \rfloor \geqslant A$.
- Nous verrons que $x \longmapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

L'énoncé suivant précise ce qui se passe lorsqu'on étudie la limite d'une fonction en un point a où la fonction est définie.

Proposition 1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est définie en a (c'est-à-dire $a \in \mathscr{D}$) et si f admet une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.

■ Notons ℓ la limite de f en a. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \neq f(a)$. D'après le lemme de séparation des voisinages vu dans le cours sur la droite réelle, on peut trouver un voisinage W_ℓ de ℓ et un voisinage de $W_{f(a)}$ de $f(a)$ tels que $W_\ell \cap W_{f(a)} = \varnothing$. Comme f tend vers ℓ en a, on sait qu'il existe un voisinages V_a de a tels que $f(\mathscr{D} \cap V_a) \subset W_\ell$. Mézalors, comme $a \in \mathscr{D} \cap V_a$, on a $f(a) \in W_\ell$, ce qui donne $f(a) \in W_\ell \cap W_{f(a)} = \varnothing$. C'est absurde ! Donc $\ell = f(a)$. ■

Ce résultat signifie que lorsqu'on étudie la limite d'une fonction f en un point a en lequel f est définie, la valeur de f en a est primordiale puisqu'elle est la seule limite possible.

Nous introduirons plus tard les notions de limites à gauche et à droite en a pour lesquelles la valeur de f en a (lorsqu'elle existe) n'a pas d'importance.

Exemples :

- Toutes les fonctions de référence (sauf la partie entière) ont une limite finie en chaque point de leur ensemble de définition. Autrement dit, pour toute fonction de référence (sauf $\lfloor \cdot \rfloor$) et pour tout point a de l'ensemble de définition de f, on a $\lim_a f = f(a)$ (on dit que ces fonctions sont continues sur leur ensemble de définition). Nous allons le démontrer pour la fonction sin dans un exemple à suivre. Pour les autres fonctions de référence, nous l'admettrons. Le lecteur consciencieux pourra le vérifier pour certaines (comme le cos ou la tan par exemple) mais devra attendre l'an prochain pour d'autres, comme ln et exp, puisque cela découle de la construction de ces fonctions, que nous avons passée sous silence cette année.

A.3. Encadrement local d'une fonction convergente

Comme dans le cas des suites, la convergence en a d'une fonction vers une limite finie permet d'énoncer un lemme du tunnel.

Lemme 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de a et α, β deux nombres réels. Si f tend vers une limite finie ℓ en a tel que $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, on a $f(x) \in \,]\alpha; \beta[$.

■ Posons $\varepsilon = \min\{\beta - \ell; \ell - \alpha\}$ de sorte que $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\subset]\alpha; \beta[$. La définition de la convergence vers ℓ de f en a, appliquée avec cet ε, fournit l'existence d'un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a,\ f(x) \in \,]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ et donc aussi $\forall x \in V_a,\ f(x) \in \,]\alpha; \beta[$. ■

Graphiquement, ce résultat signifie qu'étant donnée une bande horizontale ouverte (c'est-à-dire sans bord) contenant les points d'ordonnées ℓ, il existe un voisinage de a dont l'image par f est inclus dans cette bande.

Exemples :

- Si f tend vers une limite ℓ strictement positive en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est strictement positive au voisinage de a. Il suffit de prendre $\alpha = \ell/2$ dans le lemme précédent pour s'en convaincre.

On peut aussi utiliser ce lemme pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de a. Si f tend vers une limite finie ℓ en a, alors f est bornée au voisinage de a.

■ D'après le lemme 1 avec $\alpha = \ell - 1$ et $\beta = \ell + 1$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap \mathscr{D}$, on a $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. La fonction f est donc bien bornée au voisinage de a. ■

La réciproque de cette proposition est fausse. Nous verrons par exemple que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ alors qu'elle est bien évidemment bornée.

A.4. Limite à droite, limite à gauche

Définition 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage (bilatéral) de a. On dit que f admet une limite à droite (resp. une limite à gauche) en a lorsque la restriction de f à $]a;+\infty[\cap \mathscr{D}$ (resp. $]-\infty;a[\cap \mathscr{D}$) admet une limite (finie ou infinie) en a. Si cette limite à droite (resp. à gauche) existe, elle est unique et on la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$).

■ Une limite à droite ou à gauche est une limite (d'une restriction) donc elle est unique. ■

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto 1/(x-1)$ tend vers $-\infty$ en 1^- et vers $+\infty$ en 1^+.
- En $m \in \mathbb{Z}$, la partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ tend à gauche vers $m-1$ et à droite vers m.
- On a $\lim_{x\to 0^-}(|x|/x) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+}(|x|/x) = +1$.

Remarquer que, dans la définition précédente, les intervalles $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$ sont ouverts en a, c'est-à-dire que la valeur de f en a n'intervient pas. Autrement dit, lorsque f admet une limite latérale en a, rien ne dit que cette limite vaut $f(a)$. C'est une des différences subtiles qui existent entre la notion « avoir une limite en a » et la notion « avoir une limite à gauche (ou à droite) en a ».

La proposition suivante fait le lien entre la limite et les limites latérales.

Proposition 3

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage (bilatéral) de a.

- ▶ Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors f tend à droite et à gauche vers ℓ en a.
- ▶ Pour la réciproque, on distingue deux cas selon que f est définie ou non en a :
  - ▷ <u>Premier cas : $a \notin \mathscr{D}$:</u> Si f admet une limite ℓ à droite en a et la même limite ℓ à gauche en a, alors f tend vers ℓ en a.
  - ▷ <u>Second cas : $a \in \mathscr{D}$:</u> Si f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$, alors f tend vers $f(a)$ en a.

■ ▶ Supposons que f tende vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a. Soit W_ℓ un voisinage de ℓ. Il existe alors un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap \mathscr{D}) \subset W_\ell$. Comme $V_a \cap \mathscr{D} \cap]a;+\infty[\subset V_a \cap \mathscr{D}$, on a $f(V_a \cap \mathscr{D} \cap]a;+\infty[) \subset W_\ell$. On a ainsi démontré que la restriction de f à $]a;+\infty[\cap \mathscr{D}$ tend vers ℓ en a, autrement dit que f tend vers ℓ à droite de a. On fait de même pour la limite à gauche.

▶ Supposons que f tende vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite et à gauche de a. Soit W_ℓ un voisinage de ℓ. Il existe alors un voisinage V'_a de a tel que $f(V'_a \cap \mathscr{D} \cap]a;+\infty[) \subset W_\ell$ et un voisinage V''_a de a tel que $f(V''_a \cap \mathscr{D} \cap]-\infty;a[) \subset W_\ell$. Posons $V_a = V'_a \cap V''_a$ qui est bien un voisinage de a. On a alors $f\big(V_a \cap \mathscr{D} \cap (]-\infty;a[\cup]a;+\infty[)\big) \subset W_\ell$. Que l'on soit dans le cas où $a \notin \mathscr{D}$ ou dans le cas où $a \in \mathscr{D}$ et $f(a) = \ell$, on en déduit que $f(V_a \cap \mathscr{D}) \subset W_\ell$. Cela prouve que f tend vers ℓ en a. ■

Cette proposition est souvent utilisée par contraposition : si les quantités $\lim_{a^-} f$ et $\lim_{a^+} f$ (et $f(a)$ si elle existe) ne sont pas égales, alors f n'admet pas de limite en a.

Exemples :

- La partie entière n'a pas de limite en chaque entier relatif puisque la limite à gauche y est différente de la limite à droite (qui est la valeur au point).
- Étudions $f : x \longmapsto \lfloor -|x| \rfloor$ au voisinage de 0. Pour $x \in]-1;0[$, on a $f(x) = -1$ donc $\lim_{0^-} f = -1$. Pour $x \in]0;1[$, on a $f(x) = -1$ donc $\lim_{0^+} f = -1$. Enfin, on a $f(0) = 0$. Donc f n'a pas de limite en 0. Par contre, sa restriction à $\mathbb{R}^*$ tend vers -1 en 0.

Dans la suite, la plupart des résultats (en particulier, les résultats généraux sur les limites) se généralisent *mutantis mutandis* aux limites à droite et à gauche.

B. Théorèmes généraux sur les limites

On regroupe ici les résultats, dits théorèmes généraux, qui permettent de déterminer la limite d'une fonction qui est la composée, la somme, le produit ou le quotient de fonctions qui possèdent des limites finies ou infinies.

B.1. Composition des limites

a) Composition de deux fonctions

Théorème 1

Soient $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et u sont composables (c'est-à-dire $u(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}'$) de sorte que la fonction $f \circ u$ est définie au voisinage de a. On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{a} u = b \\ \lim\limits_{b} f = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{a}(f \circ u) = \ell.$$

■ Supposons que $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tende vers b en a et que $f : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ tende vers ℓ en b. Soit W_ℓ un voisinage de ℓ. Il existe un voisinage U_b de b tel que $f(U_b \cap \mathscr{D}') \subset W_\ell$. Il existe ensuite un voisinage V_a de a tel que $u(V_a \cap \mathscr{D}) \subset U_b \cap \mathscr{D}'$. Dès lors, on a $(f \circ u)(V_a \cap \mathscr{D}) = f\big(u(V_a \cap \mathscr{D})\big) \subset f(U_b \cap \mathscr{D}') \subset W_\ell$. Donc $f \circ u$ tend vers ℓ en a. ■

Exemples :

- Les constructions de ln et de exp (que nous n'avons pas faites) permettent de démontrer les limites de référence suivantes :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1}$$

En fait, la deuxième de ces limites peut être déduite de la première (et vice-versa). En effet, comme $\lim\limits_{x \to 0}(\mathrm{e}^x - 1) = 0$, le théorème de composition des limites donne

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\big(1 + (\mathrm{e}^x - 1)\big)}{\mathrm{e}^x - 1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1.$$

Après composition avec la fonction $y \longmapsto 1/y$, on obtient le résultat attendu.

b) Composition d'une fonction et d'une suite - Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante présente et précise la situation du paragraphe précédent dans le cas où l'on compose une fonction et une suite. C'est la caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de a. La fonction f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{D}$ convergeant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

■ Le sens direct n'est rien d'autre que le théorème du paragraphe précédent dans le cas particulier où la fonction u est une suite (c'est-à-dire $\mathscr{D} = \mathbb{N}$).

Pour la réciproque, effectuons un raisonnement par contraposition en supposant que f n'admet pas ℓ pour limite en a. Il existe alors un voisinage W_ℓ^0 de ℓ tel que, pour tout voisinage V_a de a, on ait $f(V_a \cap \mathscr{D}) \not\subset W_\ell^0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend ou bien $V_a^n =]a - 1/n; a + 1/n[$ si $a \in \mathbb{R}$, ou bien $V_{+\infty}^n =]n; +\infty[$ si $a = +\infty$ ou bien encore $V_{-\infty}^n =]-\infty; -n[$ si $a = -\infty$. Comme $f(V_a^n \cap \mathscr{D}) \not\subset W_\ell^0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de $u_n \in V_a^n \cap \mathscr{D}$ et $f(u_n) \notin W_\ell^0$. On voit alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite est une suite de $\mathscr{D}$ qui vérifie $\lim u_n = a$ et $\lim f(u_n) \neq \ell$. ■

Nous avions déjà énoncé le sens direct de ce théorème dans le théorème de composition des limites du cours sur les suites.

Le sens réciproque de ce théorème peut être utilisé pour démontrer des résultats sur les limites de fonctions à partir des résultats sur les limites de suites (voir plus loin). On peut aussi s'en servir pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné, comme l'explique l'encadré suivant.

Comment démontrer qu'une fonction diverge . . .

Pour montrer qu'une fonction admet une divergence de seconde espèce en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a telles que les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas le même comportement asymptotique.

Exemples :

- Le sinus n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, la suite $\big(\sin(n\pi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (puisqu'elle est nulle) et la suite $\big(\sin(n\pi + \pi/2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 (puisqu'elle est constante égale à 1).
- La fonction $f : x \longmapsto x^x / \lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}$ ne converge pas en $+\infty$. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = 1$ donc $\lim f(n) = 1$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(n+1/2)^{n+1/2}}{n^n} \geqslant \frac{n^{n+1/2}}{n^n} = \sqrt{n},$$

donc $\lim f(n + 1/2) = +\infty$.

$\mathscr{B}$.2. Opérations sur les limites

Théorème 3

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies au voisinage de a qui tendent respectivement vers $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ en a. Alors

(i) pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la fonction $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$ en a ;

(ii) si $\ell_1\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la fonction fg tend vers $\ell_1\ell_2$ en a ;

(iii) si ℓ_1/ℓ_2 n'est pas une forme indéterminée et si la fonction f/g est définie au voisinage de a, alors f/g tend vers ℓ_1/ℓ_2 en a.

■ Nous présentons deux démonstrations : la première utilise la caractérisation séquentielle des limites pour déduire les résultats sur les fonctions à partir des résultats similaires sur les suites ; la seconde revient aux définitions pour vous faire travailler le tranchage d'ε en petites rondelles.

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui tend vers a. Comme f et g sont deux fonctions qui tendent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 en a, les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(g(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ tendent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. D'après les théorèmes généraux sur les suites, on en déduit que
  - si $\lambda\ell_1+\mu\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la suite $\big(\lambda f(u_n)+\mu g(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\lambda\ell_1+\mu\ell_2$;
  - si $\ell_1\ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, la suite $\big(f(u_n)g(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell_1\ell_2$;
  - si ℓ_1/ℓ_2 n'est pas une forme indéterminée et si la fonction f/g est définie au voisinage de a, la suite $\big(f(u_n)/g(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ_1/ℓ_2.

  La caractérisation séquentielle des limites nous permet d'en déduire les propriétés (i), (ii) et (iii).
- Nous refaisons « à la main » les démonstrations dans le cas où $a, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Les 78 autres cas sont laissés en exercice ;-)

  (i) Soit $\varepsilon > 0$. On écrit que $(\lambda f+\mu g)-(\lambda\ell_1+\mu\ell_2) = \lambda(f-\ell_1)+\mu(g-\ell_2)$. Comme $f-\ell_1$ et $g-\ell_2$ tendent vers 0 en a, il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathscr{D}$, $(|x-a| \leqslant \eta_1) \Rightarrow \big(\big|\lambda\big(f(x)-\ell_1\big)\big| \leqslant \varepsilon/2\big)$ et $\forall x \in \mathscr{D}$, $(|x-a| \leqslant \eta_2) \Rightarrow \big(\big|\mu\big(g(x)-\ell_2\big)\big| \leqslant \varepsilon/2\big)$. Posons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Alors pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $(|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow |\lambda(f-\ell_1)+\mu(g-\ell_2)| \leqslant |\lambda(f-\ell_1)|+|\mu(g-\ell_2)| \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_a(\lambda f+\mu g) = \lambda\ell_1+\mu\ell_2$.

  (ii) On a $fg-\ell_1\ell_2 = (f-\ell_1)g+\ell_1(g-\ell_2)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g admet une limite finie en a, la fonction $|g|$ est majorée au voisinage de a, disons par $M > 0$. Comme $f-\ell_1$ tend vers 0 en a, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}$, $(|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(|f(x)-\ell_1| \leqslant \varepsilon/M\big)$, ce qui implique que $\forall x \in \mathscr{D}$, $(|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(\big|\big(f(x)-\ell_1\big)g(x)\big| \leqslant \varepsilon\big)$. Donc $(f-\ell_1)g$ tend vers 0 en a. Par ailleurs, la fonction $g-\ell_2$ tend vers 0 en a, donc, d'après (i), $(f-\ell_1)g+\ell_1(g-\ell_2)$ tend vers 0 en a. Par conséquent, fg tend vers $\ell_1\ell_2$ en a.

  (iii) On traite le cas $\ell_2 \neq 0$ (le cas $\ell_2 = 0$ est laissé en exercice). Comme $\lim_a g = \ell_2$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}$, $(|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(|g(x)-\ell_2| \leqslant \varepsilon|\ell_2|^2/2$ et $|g(x)| \geqslant |\ell_2|/2\big)$. Alors; pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $(|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \left(\left|\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{\ell_2}\right| = \dfrac{|\ell_2-g(x)|}{|g(x)|\,|\ell_2|} \leqslant \dfrac{\varepsilon|\ell_2|^2/2}{(|\ell_2|/2)\,|\ell_2|} = \varepsilon\right)$, ce qui prouve que $\lim_a 1/g = 1/\ell_2$. Alors, par (ii), $f/g = f \times (1/g)$ tend vers $\ell_1 \times (1/\ell_2) = \ell_1/\ell_2$ en a. ■

En particulier, on peut donc retenir qu'une somme de fonctions convergentes est convergente et sa limite est la somme des limites ; qu'un produit de fonctions convergentes est convergent et sa limite est le produit des limites ; qu'un quotient de fonctions convergentes, la limite du dénominateur étant non nulle, est convergent et sa limite est le quotient des limites.

La somme d'une fonction f convergente en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et d'une fonction g divergente en a est une fonction divergente en a. En effet, si $f+g$ ne divergeait pas en a, alors la fonction $g = (f+g)-f$ serait convergente en a comme différence de fonctions convergentes, ce qui est absurde !

Par contre, on ne peut rien dire a priori de la somme de deux fonctions divergentes (y réfléchir).

Pour résumer, on peut retenir les règles suivantes :

CV+CV=CV   CV+DV=DV   DV+DV= ??   1 h 00

L'encadré suivant vous explique ce qu'il faut faire avec une forme indéterminée.

Forme indéterminée = Forme à déterminer

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, il faut lever cette indétermination en transformant l'expression de la fonction pour faire disparaître, par simplification, le problème.

Pour lever une indétermination, voici deux conseils. L'un est impératif (vous devez le suivre), l'autre est souvent utile.

- Si l'on vous demande d'étudier la limite de f en a où $a \in \mathbb{R}^*$, vous devez vous ramener en 0 en posant $x = a + h$ où $h \longrightarrow 0$. En effet, les équivalents de référence et les développements limités que nous allons apprendre seront valables en 0 et pas ailleurs. Si vous ne vous ramenez pas en 0, vous ne pourrez pas utiliser ces outils très puissants.
- Si vous voulez démontrer qu'une fonction f tend vers ℓ en a, il peut être beaucoup plus pratique de démontrer que $f - \ell$ tend vers 0 en a.

Exemples :

- Lorsqu'on étudie la limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$, on tombe sur une forme indéterminée du type $\pm\infty / \pm\infty$. En fait, le comportement d'un tel quotient est le même que celui du quotient des monômes de plus haut degré. On peut le voir en factorisant les monômes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur puis en effectuant les simplifications qui s'imposent. On peut aussi utiliser le langage des équivalents. Par exemple,

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^2} \underset{\pm\infty}{\sim} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

- Attention, si la limite d'une fonction rationnelle n'est pas calculée en $\pm\infty$, il ne faut surtout pas recourir aux monômes de plus haut degré ! Pour la limite en -1 de $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, on pose $x = -1 + h$ avec $h \longrightarrow 0$, ce qui donne

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(-1+h)^3+1}{(-1+h)^2-1} = \frac{h^3-3h^2+3h}{h^2-2h} = \frac{h^2-3h+3}{h-2} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{3}{2}.$$

- Démontrons que $f(x) = \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Pour cela, on calcule la différence entre f et sa limite et on montre que cette différence tend vers 0. Cela donne

$$f(x) - 1 = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} - 1 = \frac{\ln(\sin x) - \ln(x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\big((\sin x)/x\big)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

où l'on a utilisé la limite de référence $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ que nous admettons provisoirement.

Ci-dessous, un dernier conseil au sujet des formes indéterminées.

Puissance fonctionnelle nécessite l'exponentielle !

Lorsqu'une fonction est définie par une écriture du type $f(x)^{g(x)}$, il faut réécrire la fonction sous la forme $\exp\{g(x)\ln f(x)\}$. Si vous ne respectez pas ce conseil, vous risquez de ne pas reconnaître une forme indéterminée et d'en déduire n'importe quoi !

Exemples :

- Pour étudier $x \longmapsto x^x$ en 0, vous devez écrire que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ afin de constater qu'il y a bien une forme indéterminée, de type $0 \times (-\infty)$, à l'intérieur de l'exponentielle.

Dans la liste d'exemples ci-dessous, on établit des limites de référence en utilisant les opérations sur les limites.

Exemples :

- Nous avons vu au début de ce cours que sin tend vers 0 en 0. On peut en déduire que sin tend vers $\sin(a)$ en a pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(a+h) &= \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) \\ &= \sin(a)\big(1 - 2\sin^2(h/2)\big) + \cos(a)\sin(h) \end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre h vers 0, on a

$$\lim_{h\to 0} \sin(a+h) = \sin(a)\big(1 - 2\times 0^2\big) + \cos(a)\times 0 = \sin(a).$$

- À l'aide de la limite de référence :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

que nous avons admis provisoirement, déduisons les limites en 0 de $x \longmapsto (\tan x)/x$ et $x \longmapsto (1-\cos x)/x^2$.
On a

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}$$

donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.}$$

On a

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2,$$

donc, par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

- Déterminons la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
On a

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \times \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{y} - 1}{y} \times \frac{\ln(1+x)}{x}$$

avec

$$y = \alpha\ln(1+x).$$

Or $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \alpha\ln(1+x) = 0$, donc on peut utiliser les limites de référence :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y} - 1}{y} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

pour en déduire que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1.}$$

B.3. Les théorèmes bidons

L'encadré suivant insiste sur le fait que les théorèmes généraux vus précédemment sont des conditions suffisantes de convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais pas des conditions nécessaires.

Les théorèmes bidons, c'est pas bon !

Il est tout à fait possible de composer, d'additionner, de multiplier ou de quotienter des fonctions n'ayant pas de limite et d'obtenir une fonction qui en admet une !!

Autrement dit, s'il existe bien des théorèmes généraux sur les limites, il n'existe par contre aucun théorème général sur les « non limites » !

<u>Exemples :</u>

- On a vu que DV+DV= ??
- La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $x \longmapsto \tan(\pi x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ mais la fonction $x \longmapsto \tan(\pi \lfloor x \rfloor)$ n'est pas divergente puisque c'est la fonction nulle.

C. Limites et relation d'ordre

La plupart des théorèmes de cette section exploitent la relation d'ordre $\leqslant$ de $\mathbb{R}$. Nous verrons qu'ils ne peuvent donc pas être généralisés dans $\mathbb{C}$.

C.1. Passage à la limite

On commence par un théorème très simple dont on pourrait taire l'énoncé tant il est évident. Ce résultat est cependant bien utile en pratique : c'est le passage à la limite dans une égalité.

Proposition 4

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies au voisinage de a qui admettent chacune une limite (finie ou non) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si l'on sait que, dans un voisinage de a, on a $f = g$, alors $\lim_a f = \lim_a g$.

■ AQT ■

Le principe du passage à la limite dans une égalité est particulièrement utile pour l'étude des équations fonctionnelles. On donne un exemple ci-dessous.

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite en 0 telle que $\forall x > 0,\ f(x) = f(1/x)$.
Quelle est le comportement asymptotique de f en $+\infty$?
En passant à la limite dans $\forall x > 0,\ f(x) = f(1/x)$, on obtient $\lim_{+\infty} f = \lim_0 f = f(0)$.

On dispose également d'un théorème de passage à la limite dans les inégalités.

Théorème 4

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies au voisinage de a qui admettent chacune une limite (finie ou non) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si l'on sait que, dans un voisinage de a, on a $f \leqslant g$, alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.

■ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_a f > \lim_a g$. On en déduit que $\lim_a (f - g) > 0$, ce qui implique que la fonction $f - g$ est strictement positive dans un voisinage de a. Absurde ! ■

Il est important de bien remarquer que la convergence (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des fonctions fait partie des hypothèses. Ainsi, ce résultat fournit la position relative des deux limites mais en aucun cas leur existence !

Même si l'on sait qu'au voisinage de a, on a $f < g$, on ne peut pas en déduire que $\lim_a f < \lim_a g$ mais seulement que $\lim_a f \leqslant \lim_a g$. On dit que le passage à la limite élargit les inégalités.
Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto 1/x$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$ mais on n'a pas $\lim_{+\infty} f > 0$ puisque f tend vers 0 en $+\infty$.

Le théorème 4 est souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante. On obtient le résultat décrit par le premier exemple ci-dessous.

Exemples :

- Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle, admettant une limite en a tels que, dans un voisinage de a, $f \leqslant \lambda$ (resp. $f \geqslant \lambda$). Alors $\lim_a f \leqslant \lambda$ (resp. $\lim_a f \geqslant \lambda$).
- La limite d'une fonction positive ou nulle qui admet une limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est positive ou nulle.

C.2. Théorèmes des gendarmes

Le théorème suivant est couramment appelé théorème des gendarmes puisque si deux gendarmes encadrent un prisonier et vont tous les deux jusqu'à la prison, alors le prisonnier les accompagne nécessairement à la prison.

Théorème 5

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, u, v : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions réelles définies au voisinages de a telles que $u \leqslant f \leqslant v$. Si u et v admettent la même limite finie ℓ en a, alors f tend vers ℓ en a.

Le théorème reste vrai si l'encadrement $u \leqslant f \leqslant v$ est seulement vérifié dans un voisinage de a.

■ Soit $\varepsilon > 0$. Comme u et v tendent vers ℓ en a, il existe deux voisinages V_a' et V_a'' de a tels que $\forall x \in V_a' \cap \mathscr{D},\ \ell - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ et $\forall x \in V_a'' \cap \mathscr{D},\ \ell - \varepsilon \leqslant v(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Posons $V_a = V_a' \cap V_a''$, qui est un voisinage de a, de sorte que $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D},\ \ell - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ et $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D},\ \ell - \varepsilon \leqslant v(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Comme $u \leqslant f \leqslant v$, on en déduit que $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D},\ \ell - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D},\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que la fonction f tend vers ℓ en a. ■

On notera, qu'au contraire du théorème 4, le théorème des gendarmes fournit à la fois la convergence et la valeur de la limite. C'est donc un théorème « puissant ».

Lorsque les deux gendarmes n'ont pas la même limite, on ne peut rien conclure. On ne peut même pas en déduire un encadrement de la limite puisqu'on ne sait pas si celle-ci existe !

Exemples :

- Nous avons vu dans le cours sur les fonctions que, pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, on a

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|,$$

ce qui donne, pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[\setminus \{0\}$,

$$|\cos x| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1.$$

Le théorème des gendarmes dit alors que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

où les valeurs absolues ont été otées puisque $(\sin x)/x$ est positif au voisinage de 0.

Le théorème des gendarmes implique le résultat suivant, très utile en pratique.

Corollaire 1

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Le produit d'une fonction bornée au voisinage de a et d'une fonction tendant vers 0 en a est une fonction tendant vers 0 en a.

■ Soient f tendant vers 0 en a et g telle que $|g| \leqslant M$ au voisinage de a. On a alors $0 \leqslant |fg| \leqslant M|f|$ au voisinage de a et le théorème des gendarmes implique que $|fg|$, et donc aussi fg, tendent vers 0. ■

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et sin est bornée.

On peut étendre le théorème des gendarmes aux cas des fonctions dont la divergence est de première espèce. On obtient le théorème du gendarme.

Théorème 6

Soient f, g deux fonctions réelles définies au voisinages de a telles que $f \leqslant g$. Alors

(i) si f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend également vers $+\infty$ en a ;

(ii) si g tend vers $-\infty$ en a, alors f tend également vers $-\infty$ en a.

Le théorème reste vrai si l'inégalité $f \leqslant g$ est seulement vérifiée dans un voisinage de a.

■ (i) Soit $A \in \mathbb{R}$. La divergence de f vers $+\infty$ en a assure l'existence d'un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant A$. Comme $g \geqslant f$, on a $\forall x \in V_a \cap \mathscr{D}$, $g(x) \geqslant A$, ce qui traduit la divergence de g vers $+\infty$ en a. On ainsi démontré (i).

(ii) La propriété (ii) découle de (i) en considérant $-f$ et $-g$. ■

On constate que ce théorème ne nécessite plus qu'un seul gendarme : pour tendre vers $-\infty$, il faut un gendarme qui vous « appuie sur la tête » et pour tendre vers $+\infty$, il faut un gendarme qui vous « pousse au cul ».

Exemples :

- Étudions le comportement asymptotique en $+\infty$ de $x \longmapsto x + \cos x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \cos x \geqslant x - 1$. Or $x - 1$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc, d'après le théorème du gendarme, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.

C.3. Théorème de la limite monotone

Théorème 7

Soit f une fonction réelle croissante sur l'intervalle $]a;b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

(i) si f est majorée, elle admet une limite finie en b ;

(ii) si f n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$ en b.

Soit f une fonction réelle décroissante sur l'intervalle $]a;b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

(j) si f est minorée, elle admet une limite finie en b ;

(jj) si f n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$ en b.

■ (i) La fonction f étant majorée, l'ensemble $\{f(x) : x \in]a;b[\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de $\ell = \sup\{f(x) : x \in]a;b[\}$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f, il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant \ell$. Comme la fonction f est croissante et majorée par ℓ, on en déduit que $\forall x \in]x_0;\varepsilon[,\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell$. On a donc démontré, en particulier, que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in]a;b[,\ \forall x \in]x_0;\varepsilon[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que f tend vers ℓ en b.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, le nombre A n'est pas un majorant de f, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que $f(x_0) \geqslant A$. Comme f est croissante, on en déduit que $\forall x \geqslant x_0,\ f(x) \geqslant A$. On a donc démontré que $\forall A > 0,\ \exists x_0 \in]a;b[,\ \forall x \geqslant x_0,\ f(x) \geqslant A$, ce qui démontre la divergence de f vers $+\infty$ quand x tend vers b.

(j) On applique (i) en considérant $-f$ à la place de f.

(jj) On applique (ii) en considérant $-f$ à la place de f. ■

On retiendra généralement les propriétés (i) et (j) sous la forme « toute fonction croissante majorée converge » et « toute fonction décroissante minorée converge ». En pratique, savoir que la convergence s'effectue vers un supremum n'est pas très utile car on ignore généralement la valeur de celui-ci.

Ce théorème montre que toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à droite et une limite à gauche, finies ou infinies, en tout point de l'intervalle (une limite à gauche en $+\infty$ et une limite à droite en $-\infty$). La monotonie permet donc, à coup sûr, d'éviter la divergence de seconde espèce.

Le théorème de la limite monotone est un théorème d'existence de limite. Par contre, il ne donne par la valeur de la limite. En particulier, si $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par M, on pourra conclure que f tend vers une limite finie en b mais on se gardera bien de dire qu'elle tend vers M !! On pourra juste préciser que $\lim_b f \leqslant M$ grâce au théorème de passage à la limite dans une inégalité.

En particulier, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur l'intervalle I et $a \in \mathrm{Int}(I)$, alors $\lim_{a^-} f$ et $\lim_{a^+} f$ existent, sont finies et vérifient $\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f$.

On comprend, avec ce théorème, que l'étude du comportement asymptotique d'une fonction passe souvent par celle de sa monotonie. Pour les fois où vous serez bloqués dans l'étude locale ou asymptotique d'une fonction, retenez donc ce conseil :

Penser à étudier la monotonie !

En pratique, les propriétés (i) et (j) s'utilisent telles qu'elles sont énoncées, c'est-à-dire que pour démontrer qu'une fonction croissante majorée est convergente, on démontre successivement que la fonction est croissante et majorée.

Au contraire, les propriétés (ii) et (jj) s'utilisent indirectement. Autrement dit, pour démontrer qu'une fonction croissante et non majorée diverge vers $+\infty$, on commence classiquement par démontrer que la fonction est croissante. Par contre, il est souvent difficile de démontrer qu'une fonction n'est pas majorée. On préfère donc, en général, raisonner par l'absurde en supposant que la fonction est majorée. La propriété (i) permet alors de dire que la fonction est convergente et on peut utiliser l'existence de cette limite pour aboutir à une absurdité.

D. Comparaison des fonctions

Nous introduisons ici les différentes notions de comparaison entre fonctions ainsi que les notations de Landau ($\mathscr{O}$, $\mathscr{o}$ et $\sim$) qui leur sont associées.

Dans cette section, les fonctions considérées ne s'annulent pas, au moins dans un voisinage du point d'étude. Ainsi, les fonctions $f, g, h, u, v : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui interviennent dans les différents énoncés de cette section sont définies au voisinage de a, où $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et ne s'y annulent pas.

D.1. Comparaison des fonctions de référence

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique relatif du logarithme, des fonctions puissances et des exponentielles :

$$x \longmapsto (\ln x)^{\beta}, \qquad x \longmapsto x^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto a^{x}.$$

Définition 5

On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a lorsque le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On note alors $f(x) \lll_a g(x)$.

La négligeabilité permet de donner un sens précis à la comparaison des « infiniment petits » et des « infiniment grands ». Ainsi, lorsque f et g tendent vers 0 en a, écrire que $f \lll_a g$ revient à dire que f tend vers 0 en a infiniment plus vite que g et lorsque f et g tendent vers $+\infty$ en a, écrire que $f \lll_a g$ revient à dire que g tend vers $+\infty$ en a infiniment plus vite que f.

Nous verrons que la relation de négligeabilité $f(x) \lll_a g(x)$ est aussi notée $f(x) = \mathscr{o}_{x\to a}\big(g(x)\big)$.

Le premier énoncé est élémentaire. On y compare les fonctions puissances entre elles et les exponentielles entre-elles.

Proposition 5

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$, on a

$$x^{\alpha} \quad \lll_{+\infty} \quad x^{\beta} \qquad \text{et} \qquad x^{\beta} \quad \lll_{0} \quad x^{\alpha}.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, on a

$$a^{x} \quad \lll_{+\infty} \quad b^{x}.$$

■ On a $\alpha - \beta < 0$ donc $x^{\alpha}/x^{\beta} = x^{\alpha-\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x^{\beta}/x^{\alpha} = x^{\beta-\alpha} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ i.e. $x^{\alpha} \lll_{+\infty} x^{\beta}$ et $x^{\beta} \lll_{0} x^{\alpha}$.
Comme $0 < a/b < 1$, d'où $a^{x}/b^{x} = (a/b)^{x} = \mathrm{e}^{x\ln(a/b)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $a^{x} \lll_{+\infty} b^{x}$. ■

En $+\infty$, une fonction puissance est d'autant plus « grande » que sa puissance est grande. En 0, c'est l'inverse : une fonction puissance est d'autant plus « grande » qu'elle a une petite puissance.

Lorsque $1 < a < b$, la comparaison $a^{x} \lll_{+\infty} b^{x}$ signifie que b^{x} tend vers $+\infty$ plus vite que a^{x} lorsque x tend vers $+\infty$. Lorsque $0 < a < b < 1$, la comparaison $a^{x} \lll_{+\infty} b^{x}$ signifie que a^{x} tend vers 0 plus vite que b^{x} lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemples :

- Lorsque x tend vers $\pm\infty$, le comportement asymptotique d'un polynôme est dicté par son monôme de plus haut degré. Lorsque x tend vers 0, le comportement local d'un polynôme est dicté par son monôme de plus petit degré.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 < a < b$, on a $b^{x} \lll_{-\infty} a^{x}$.

L'énoncé suivant est souvent appelé le théorème des croissances comparées.

Théorème 8

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$. On a l'échelle suivante de croissance vers $+\infty$ des fonctions de référence :

$$(\ln x)^\beta \quad \lll_{+\infty} \quad x^\alpha \quad \lll_{+\infty} \quad a^x.$$

On dit qu'en $+\infty$ « les exponentielles l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme ».

■ ▷ Démontrons que $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x$. C'est clair sur $]0;1]$ puisque $\forall x \in]0;1],\ \ln x \leqslant 0 < x$. On montre ensuite par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[e^n; e^{n+1}\right],\ \ln x \leqslant x$. C'est vrai pour $n = 0$ car $\forall x \in [1; e],\ \ln x \leqslant \ln e = 1 \leqslant x$. Si l'on suppose le résultat vrai au rang n, on peut écrire que $\forall x \in \left[e^{n+1}; e^{n+2}\right],\ \ln x = 1 + \ln(x/e) \leqslant 1 + x/e \leqslant x$ où la première inégalité découle du fait que $x/e \in \left[e^n; e^{n+1}\right]$ et de l'hypothèse de récurrence et la seconde inégalité provient du fait que $\forall x \geqslant 1,582\ldots,\ 1 + x/e \leqslant x$. Le principe de récurrence permet de conclure.

Prouvons que $(\ln x)^\beta \lll_{+\infty} x^\alpha$. Choisissons $\gamma > 0$ tel que $0 < \gamma < \alpha/\beta$. Alors, $\forall x > 0,\ \ln x^\gamma \leqslant x^\gamma$, c'est-à-dire $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x^\gamma/\gamma$. Dès lors,

$$\forall x > 1, \qquad 0 < \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \leqslant \frac{x^{\gamma\beta}}{\gamma^\beta x^\alpha} = \frac{1}{\gamma^\beta} x^{\gamma\beta - \alpha},$$

ce qui implique que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^\beta / x^\alpha = 0$, d'après le théorème des gendarmes.

▷ Démontrons que $x^\alpha \lll_{+\infty} a^x$. On a

$$\forall x > 1, \qquad \frac{x^\alpha}{a^x} = \exp\{\alpha \ln x - x \ln a\} = \exp\left\{x\left(\alpha \frac{\ln x}{x} - \ln a\right)\right\}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)/x = 0$ (on vient de le démontrer), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(\alpha(\ln x)/x - \ln a\big) = -\ln a$. Par suite, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\big(\alpha(\ln x)/x - \ln a\big) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^\alpha / a^x) = 0$. ■

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto (\ln x)/x$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Si P est un polynôme, la fonction $x \longmapsto P(x)/e^x$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Pour $\alpha > 0$ et $a > 1$, les croissances comparées (où l'on change x en $-x$) impliquent

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = 0,$$

ce qui signifie que

en $-\infty$, la convergence vers 0 des exponentielles l'emporte sur la divergence vers l'infini des fonctions puissances.

- Pour $\alpha > 0$, les croissances comparées (où l'on change x en $1/x$) impliquent

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0,$$

ce qui signifie que

en 0, la convergence vers 0 des fonctions puissances l'emporte sur la divergence vers l'infini du logarithme.

- Si $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}/x^2$, on ne peut pas utiliser les croissances comparées en $+\infty$ en disant que $e^{\sqrt{\ln x}}$ l'emporte sur x^2 car la variable de l'exponentielle n'est pas x. Pour déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$, on écrit que $f(x) = e^{\sqrt{\ln x} - 2\ln x}$ et comme $\ln x$ l'emporte sur $\sqrt{\ln x}$ en $+\infty$, on a $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{\ln x} - 2\ln x) = -\infty$, ce qui donne $\lim_{+\infty} f = 0$.

D.2. Fonctions dominées

Définition 6

On dit que la fonction f est dominée par la fonction g en a lorsque la fonction f/g est bornée au voisinage de a, c'est-à-dire

$$\exists K>0, \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a, \quad \forall x \in V_a, \qquad |f(x)| \leqslant K|g(x)|.$$

On note alors $f = \mathscr{O}_a(g)$ et l'on prononce « f est un grand $\mathscr{O}$ de g en a » pour dire que, au voisinage de a, l'ordre de grandeur de g est plus grand que celui de f, à une constante multiplicative près.

Vous rencontrerez également la notation $f = \mathscr{O}(g)$ pour dire que la majoration est valable sur $\mathscr{D}$ tout entier, c'est-à-dire $\exists K>0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leqslant K|g(x)|$.

Pour écrire que $f = \mathscr{O}_a(g)$, on peut utiliser le symbole de Vinogradov $\ll_a$ et écrire que $f \ll_a g$. C'est très pratique mais, malheureusement, assez peu utilisé.

La proposition suivante dit que la relation de domination est réflexive et transitive.

Proposition 6

La relation $\mathscr{O}_a$ est un préordre :

(i) $f = \mathscr{O}_a(f)$ (réflexivité) ;

(ii) si $f = \mathscr{O}_a(g)$ et $g = \mathscr{O}_a(h)$, alors $f = \mathscr{O}_a(h)$ (transitivité).

■ (i) est évidente. Si $f = \mathscr{O}_a(g)$ et $g = \mathscr{O}_a(h)$, alors la fonction f/g est bornée en tant que produit des deux fonctions bornées f/g et g/h, donc $f = \mathscr{O}_a(h)$, ce qui établit (ii). ■

Il manque l'antisymétrie pour que $\mathscr{O}_a$ soit un ordre. Lorsque $f = \mathscr{O}_a(g)$ et $g = \mathscr{O}_a(h)$, on ne peut effectivement pas en déduire que $f = g$ mais seulement que f et g sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire $\exists k, K > 0,\ \exists V_a \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in V_a,\ k|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant K|g(x)|$. On note alors $f \asymp_a g$.

Dans la comparaison des ordres de grandeur par $\mathscr{O}_a$, tout se joue toujours « à une constante multiplicative près ». La proposition suivante formalise l'indifférence des $\mathscr{O}_a$ vis-à-vis des constantes.

Proposition 7

Les $\mathscr{O}_a$ absorbent tout ce qui est de l'ordre d'une constante, au sens où :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les égalités $g = \lambda\, \mathscr{O}_a(g)$ ou $f = \mathscr{O}_a(\lambda g)$ peuvent être remplacées par $f = \mathscr{O}_a(g)$.

(ii) si h est une fonction bornée au voisinage de a, les égalités $f = h \times \mathscr{O}_a(g)$ ou $f = \mathscr{O}_a(hg)$ impliquent que $f = \mathscr{O}_a(g)$.

■ AQT ■

Exemples :

- Il revient au même d'écrire que $f = \mathscr{O}_a(1)$ ou de dire que la fonction f est bornée au voisinage de a.
- $-\mathscr{O}_a(g) = \mathscr{O}_a(g)$.
- $x \sin x = \mathscr{O}(x)$.

La proposition suivante établit la compatibilité de $\mathcal{O}_a$ avec $+$ et $\times$.

Proposition 8

Soit $\alpha > 0$. Alors

(i) si $f = \mathcal{O}_a(h)$ et $g = \mathcal{O}_a(h)$, alors $f + g = \mathcal{O}_a(h)$;

(ii) si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$, alors $fg = \mathcal{O}_a(uv)$; en particulier, si $f = \mathcal{O}_a(g)$, alors $fh = \mathcal{O}_a(gh)$;

(iii) si $f = \mathcal{O}_a(g)$, alors $f^\alpha = \mathcal{O}_a(g^\alpha)$ (lorsque ces fonctions existent).

■ (i) Si $f = \mathcal{O}_a(h)$ et $g = \mathcal{O}_a(h)$, alors $(f+g)/h$ est bornée en tant que somme des deux fonctions bornées f/h et g/h, donc $f + g = \mathcal{O}_a(h)$.

(ii) Si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$, alors $(fg)/(uv)$ est bornée en tant que produit des deux fonctions bornées f/u et g/v, donc $fg = \mathcal{O}_a(uv)$.

(iii) Si $f = \mathcal{O}_a(g)$, alors il existe $K > 0$ et $V_a \in \mathscr{V}_a$ tel que $\forall x \in V_a, |f(x)| \leqslant K|f(x)|$. En élevant à la puissance $\alpha > 0$, on obtient $\forall x \in V_a, |f(x)^\alpha| \leqslant K|f(x)^\alpha|$, d'où $f^\alpha = \mathcal{O}_a(g^\alpha)$. ■

La propriété (i) se retient en disant qu'une somme (finie) de $\mathcal{O}_a$ est un $\mathcal{O}_a$. Plus généralement, les $\mathcal{O}_a$ étant indifférents aux constantes, une combinaison linéaire de $\mathcal{O}_a$ est un $\mathcal{O}_a$, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda\,\mathcal{O}_a(h) + \mu\,\mathcal{O}_a(h) = \mathcal{O}_a(h).$$

En particulier, une soustraction de $\mathcal{O}_a$ est un $\mathcal{O}_a$. Autrement dit, on a $\mathcal{O}_a(h) - \mathcal{O}_a(h) = \mathcal{O}_a(h)$ et pas l'affreuseté que vous avez peut-être en tête...

D.3. Fonctions négligeables

Définition 7

On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en a lorsque

$$\lim_a \frac{f}{g} = 0.$$

On note alors $f = \mathcal{o}_a(g)$ et l'on prononce « f est un petit $\mathcal{o}$ de g en a » pour dire que, au voisinage de a, l'ordre de grandeur de g est infiniment plus grand que celui de f.

Lorsqu'on note $f = \mathcal{o}(g)$ sans préciser la valeur de a, on considère, par convention, que $a = 0$, c'est-à-dire que $f = \mathcal{o}_0(g)$.

À la place de $f = \mathcal{o}_a(g)$, on peut utiliser la notation de Vinogradov $\lll_a$ et écrire que $f \lll_a g$. Là encore, c'est très pratique mais c'est encore moins utilisé que $\ll_a$.

Des caractéristiques d'une relation d'ordre, la négligeabilité ne conserve que la transitivité.

Proposition 9

La relation $\mathcal{o}_a$ est transitive, c'est-à-dire que si $f = \mathcal{o}_a(g)$ et $g = \mathcal{o}_a(h)$, alors $f = \mathcal{o}_a(h)$.

■ Si $f = \mathcal{o}_a(g)$ et $g = \mathcal{o}_a(h)$, alors $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h} \xrightarrow[n \to +a]{} 0 \times 0 = 0$, donc $f = \mathcal{o}_a(h)$. ■

Un $\mathcal{o}_a$ d'un $\mathcal{o}_a$ est donc un $\mathcal{o}_a$. Ainsi, dans un calcul, on remplacera $\mathcal{o}_a\big(\mathcal{o}_a(g)\big)$ par $\mathcal{o}_a(g)$.

Tout comme la domination, la négligeabilité est indifférente aux constantes.

Proposition 10

Les $\mathcal{o}_a$ absorbent tout ce qui est de l'ordre d'une constante, au sens où :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les égalités $f = \lambda\, \mathcal{o}_a(g)$ ou $f = \mathcal{o}_a(\lambda g)$ peuvent être remplacées par $f = \mathcal{o}_a(g)$.

(ii) si h est une fonction bornée au voisinage de a, les égalités $f = h \times \mathcal{o}_a(g)$ ou $f = \mathcal{o}_a(h \times g)$ impliquent que $f = \mathcal{o}_a(g)$.

■ AQT ■

Exemples :

- Il revient au même d'écrire que $f = \mathcal{o}_a(1)$ ou de dire que la fonction f tend vers 0 en a.
- $-\,\mathcal{o}_a(g) = \mathcal{o}_a(g)$.
- $\sin \times \mathcal{o}_a(g) = \mathcal{o}_a(g)$.
- On peut reformuler les croissances comparées avec des $\mathcal{o}$.
  Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \mathcal{o}_{+\infty}(x^\beta)$ et $x^\beta = \mathcal{o}_0(x^\alpha)$.
  Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 < a < b$, alors $a^x = \mathcal{o}_{+\infty}(b^x)$.
  Par ailleurs, pour tous $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, on a

$$(\ln x)^\beta = \mathcal{o}_{+\infty}(x^\alpha) \qquad \text{et} \qquad x^\alpha = \mathcal{o}_{+\infty}(a^x).$$

La proposition suivante établit la compatibilité de o_a avec $+$ et $\times$.

Proposition 11

Soit $\alpha > 0$. Alors

(i) si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$, alors $f + g = o_a(h)$;

(ii) si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(v)$, alors $fg = o_a(uv)$;
en particulier, si $u = o_a(g)$, alors $uh = o_a(gh)$;

(iii) si $f = o_a(g)$, alors $f^\alpha = o_a(g^\alpha)$ (lorsque ces fonctions existent).

■ (i) Si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$, alors $\dfrac{f+g}{h} = \dfrac{f}{h} + \dfrac{g}{h} \xrightarrow[x\to+a]{} 0 + 0 = 0$, donc $f + g = o_a(h)$.

(ii) Si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$, alors $\dfrac{fg}{uv} = \dfrac{f}{u} \times \dfrac{g}{v} \xrightarrow[x\to+a]{} 0 + 0 = 0$, donc $fg = o_a(uv)$.

(iii) Si $f = o_a(g)$, alors $\dfrac{f^\alpha}{g^\alpha} = \left(\dfrac{f}{g}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to+a]{} 0^\alpha = 0$, d'où $f^\alpha = o_a(g^\alpha)$. ■

Nous utiliserons abondamment les o, en particulier pour les calculs de développements limités. L'encadré suivant rassemble les règles qui nous seront nécessaires pour mener à bien ces calculs.

Calculer avec des o

- Un $o_a(g)$ ne représente pas une fonction mais toutes les fonctions négligeables devant g. Autrement dit, $o_a(g)$ est un ensemble de fonctions et $f = o_a(g)$ signifie $f \in o_a(g)$. Ainsi, lorsque vous rencontrez plusieurs $o_a(g)$ dans un même calcul, il est très probable qu'ils ne représentent pas la même fonction. Par exemple, on a $x = o_{+\infty}(x^3)$ et $x^2 = o_{+\infty}(x^3)$ mais cela ne veut évidemment pas dire que les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sont égales !
  C'est pour cette raison que les o_a ne se simplifient pas : qu'on les additionne ou qu'on les soustrait, des o_a donnent un o_a !
- La présence d'un $o_a(g)$ dans une formule implique, d'une part, que la formule est une approximation (certains termes sont cachés dans le $o_a(g)$) et, d'autre part, que la précision de cette approximation est l'ordre de grandeur de g. Cela a deux conséquences :
  - Il faut toujours conserver un seul o_a dans une égalité. S'il y en a plusieurs, on détermine celui d'ordre de grandeur maximal et on ne conserve que celui-là.
  - Ensuite, si certains termes sont négligeables par rapport à l'ordre de grandeur du o_a, on les fait disparaître ! Le o_a semble ainsi « avaler » les termes négligeables.

  Ces deux remarques relèvent d'un principe général lorsqu'on fait des approximations : dans un calcul, c'est toujours le terme le moins précis qui décide de l'ordre de précision du calcul. C'est ce que l'on appelle, en langage courant, le principe de la bassine(†).
- Pour le reste, les o_a s'additionnent et se multiplient classiquement. En particulier, les o_a sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif.

(†) Autrefois, les bassines étaient fabriquées à partir de vieux tonneaux, coupés en deux. Elles étaient donc faites de lattes de bois verticales cerclées. La contenance maximale de ce type de bassine était par conséquent dictée par la latte la moins haute !

Exemples :

- On a $\left(2 - 5x + x^2 + o_0(x^2)\right) + \left(x \cancel{+ x^3} + \cancel{o_0(x^3)}\right) = 2 - 4x + x^2 + o_0(x^2)$;
- On a $\left(2x^7 - 5x^4 + x^2 + o_{+\infty}(x^2)\right) \times \left(x^4 + x^3 + o_{+\infty}(x^3)\right) = 2x^{11} + 2x^{10} + o_{+\infty}(x^{10})$. Tous les autres termes ont été « avalés » par le $o_{+\infty}(x^{10})$.

La proposition suivante rassemble les propriétés mêlant la domination et la négligeabilité.

Proposition 12

On a

(i) si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$;

(ii) si $f = o_a(g)$ et $g = O_a(h)$, alors $f = o_a(h)$;
si $f = O_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$;

(iii) si $f = o_a(h)$ et $g = O_a(h)$, alors $f + g = O_a(h)$;
si $f = o_a(u)$ et $g = O_a(v)$, alors $fg = o_a(uv)$.

■ AQT ■

Le (i) de cette proposition signifie que la condition o_a est plus forte que la condition O_a. Si vous retenez simplement cela, vous devriez pouvoir retrouver les autres propriétés sans avoir à les apprendre.

D.4. Fonctions équivalentes

Définition 8

On dit que la fonction f est équivalente à g en a lorsque

$$\lim_a \frac{f}{g} = 1.$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ et l'on prononce « f est équivalente à g en a » pour dire que, au voisinage de a, l'ordre de grandeur de g est exactement le même que celui de f.

Lorsqu'on note $f \sim g$ sans préciser la valeur de a, on considère, par convention, que $a = 0$, c'est-à-dire que $f \underset{0}{\sim} g$.

Si ℓ est un nombre réel non nul, il revient au même d'écrire que $f \underset{a}{\sim} \ell$ ou de dire que f tend vers ℓ en a. Dans le cas où $\ell = 0$, on retiendra qu'

il faut bannir l'écriture $f \underset{a}{\sim} 0$.

Proposition 13

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence :

(i)	$f \underset{a}{\sim} f$	(réflexivité) ;
(ii)	si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$	(symétrie) ;
(iii)	si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$	(transitivité).

■ (i), (ii) : OK. (iii) : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $\frac{f}{h} = \frac{f}{g}\frac{g}{h} \xrightarrow[a]{} 1 \times 1 = 1$, donc $f \underset{a}{\sim} h$. ■

C'est la symétrie qui justifie que l'on puisse dire indifféremment que « f est équivalente à g en a », que « g est équivalente à f en a » ou que « f et g sont équivalentes entre-elles en a ».

En pratique, l'équivalence $\sim$ sert à « simplifier » une fonction, au sens de la définition suivante.

Définition 9

Lorsque $a = 0$ ou $a \pm \infty$, on dit qu'une fonction est un équivalent simple en a lorsqu'elle s'écrit comme le produit ou le quotient de fonctions de référence. Haro sur les sommes !

Ainsi, $x^2 \, \mathrm{e}^x$ est un équivalent simple et $\ln(x^2 + x)$ n'en est pas un.

Exemples :

- Si $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ (avec $a_d \neq 0$), alors $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_d x^d$, autrement dit, tout polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré.
- Au cours de ce chapitre, nous avons démontré (presque tous) les équivalents de référence suivants, qu'il faut connaître par ♡.

$$\boxed{\sin(x) \underset{0}{\sim} x} \qquad \boxed{1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}} \qquad \boxed{\tan(x) \underset{0}{\sim} x}$$

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x} \qquad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x}$$

La proposition suivante énonce la stabilité par $\sim$ du comportement local ou asymptotique.

Proposition 14

Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement local ou asymptotique en a. Autrement dit, si l'une tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a, l'autre aussi ; si l'une tend vers $\pm\infty$ en a, l'autre aussi et si l'une n'a pas de limite en a, l'autre aussi.

■ Soient f, g deux fonctions équivalentes en a.

Supposons que g admette une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut écrire $\forall n \geqslant 0,\ f = g \times (f/g)$. Comme $\lim_a g$ existe et $\lim_a (f/g) = 1$, on a $\lim_a f = \lim_a g$. Autrement dit, l'existence d'une limite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'une des deux fonctions entraîne l'existence d'une limite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'autre fonction, vers la même limite.

La contraposée de ce résultat nous dit que divergence de seconde espèce d'une des deux fonctions entraîne la divergence de seconde espèce de l'autre fonction. ■

La réciproque de cette proposition est fausse : deux fonctions peuvent avoir le même comportement en a sans être équivalentes en a. Pour être plus précis, si f et g tendent en a vers la même limite finie non nulle et non infinie, alors f et g sont équivalentes en a. Par contre, si f et g tendent toutes les deux vers 0 en a ou divergent toutes les deux vers $\pm\infty$ en a ou encore si elles admettent toutes les deux une divergence de seconde espèce en a, on ne peut rien dire.

Autrement dit, l'équivalence permet de cataloguer les différentes vitesses de convergence vers 0, les différentes vitesses de divergence vers $\pm\infty$ et les différentes façons de diverger sévèrement. Par contre, l'équivalence ne distingue pas une fonction f qui tend vers $\pi/17$ en a d'une autre fonction g qui tend vers $\pi/17$ en a. Pour comparer la convergence en a de ces deux fonctions vers $\pi/17$, il convient de rechercher des équivalents de $f - \pi/17$ et de $g - \pi/17$, qui, elles, tendent vers 0 en a.

Si le comportement local ou asymptotique se propage par équivalence, il n'en va pas de même de toutes les propriétés. Ainsi, la monotonie ne se transmet pas. Par exemple, $x \longmapsto x + 2\sin x$ et $x \longmapsto x$ sont équivalentes en $+\infty$ mais seule la seconde est monotone. Par contre, on peut montrer que la stricte positivité est conservée au voisinage de a par équivalence (y réfléchir !).

Les règles de calcul avec $\sim$ sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 15

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

(i) si $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$, alors $fg \underset{a}{\sim} uv$;

(ii) si $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{u}{v}$;

(iii) si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (lorsque ces fonctions existent) ;

(v) si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_b h = a$, alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

■ (i) Si $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$, alors $\dfrac{fg}{uv} = \dfrac{f}{u} \times \dfrac{g}{v} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \times 1 = 1$, donc $fg \underset{a}{\sim} uv$.

(ii) Si $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$, alors $\dfrac{f/g}{u/v} = \dfrac{f}{u} \div \dfrac{g}{v} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \div 1 = 1$, donc $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{u}{v}$.

(iii) Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha / g^\alpha = (f/g)^\alpha \xrightarrow[x \to a]{} 1^\alpha = 1$, donc $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

(iv) Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\dfrac{f \circ h}{g \circ h} = \left(\dfrac{f}{g}\right) \circ h \xrightarrow[x \to b]{} 1$ par composition des limites. Donc $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$. ■

Le (i) de cette proposition nous dit, en particulier, qu'au contraire des relations de domination et de négligeabilité, l'équivalence $\sim$ n'est pas du tout indifférente aux constantes.

Les résultats glanés jusqu'ici (de la transitivité de $\sim$ aux propositions 14 et 15) permettent d'utiliser $\sim$ pour calculer des limites : partant d'une fonction présentant une forme indéterminée, on utilise les règles opératoires de $\sim$ pour déterminer (en une ou plusieurs étapes) un équivalent simple de la fonction. Il est alors généralement facile de conclure, soit parce que la forme indéterminée s'est simplifiée en cours de route, soit parce qu'on peut utiliser les croissances comparées.

Il faut savoir discriminer les opérations compatibles avec $\sim$ de celles qui ne le sont pas. L'encadré ci-dessous vous résume tout cela.

Opérations licites avec les équivalents

Dans un calcul de limite, on peut systématiquement remplacer une fonction par l'un de ses équivalents dans un produit, un quotient ou une élévation à la puissance constante.

Par contre, pour additionner ou soustraire des équivalents, il n'existe pas de résultat général. Par prudence, on ne pratique donc pas ces opérations avec des équivalents (même si elles sont parfois justes).

Pour la composition, on retiendra que si l'on connait un équivalent de g, on peut en déduire un équivalent de $g \circ f$ mais que la connaissance d'un équivalent de f ne permet pas, en général, d'obtenir un équivalent de $g \circ f$. Autrement dit, on ne s'autorisera pas l'utilisation d'un équivalent « à l'intérieur » d'une fonction.

Notons que l'élévation à une puissance constante α est une exception : cette composition à gauche par la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est tout à fait autorisée ! Ainsi, on peut sans problème prendre la racine carrée dans un équivalent (c'est une élévation à la puissance $1/2$).

Mais attention, élever un équivalent à une puissance n'est autorisé que pour les puissances constantes. Lorsque la fonction est de la forme $f(x)^{g(x)}$, il convient de passer à la forme exponentielle et d'être alors extrêmement prudent afin d'éviter les compositions abusives (avec ln ou exp).

Voici un exemple de ce que l'on peut faire avec des équivalents.

Exemples :

- Dans un quotient de polynômes, nous avons déjà rappelé que le comportement en $\pm\infty$ est le même que celui du quotient des monômes de plus haut degré. L'utilisation des équivalents rend la rédaction très simple. Par exemple, on a

$$\frac{2x^2+5x+1}{(x-1)(3-x)} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x\times(-x)} \underset{\pm\infty}{\sim} -2 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -2.$$

Et maintenant, quelques exemples de ce qu'il ne faut pas faire.

Exemples :

- Une addition avec des équivalents peut vous faire écrire n'importe quoi.

  Par exemple, si l'on prend l'équivalent $1-x \underset{\pm\infty}{\sim} -x$ et qu'on lui ajoute x, on obtient que 1 est équivalent à 0 en $+\infty$. :-(
- Une addition avec des équivalents peut aussi vous faire perdre en précision !

  Par exemple, réécrire l'équivalent de référence $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ sous la forme $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1+x$ (en ajoutant 1 des deux côtés) n'est pas faux mais cela revient à écrire que $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$, ce qui est moins précis que l'équivalent de départ.
- Une composition à gauche d'un équivalent par une fonction est tout aussi dangereuse.

  Ainsi, on a $x^2+x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2} en $+\infty$ (le quotient diverge).

  De même, on a $1+\mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{\sim} 1$ mais $\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ n'est pas équivalente à $\ln 1 = 0$ en $+\infty$ puisque cela n'a pas de sens.
- Enfin, élever un équivalent à une puissance qui dépend de x n'est pas non plus autorisée.

  Par exemple, on a $1+1/x \underset{+\infty}{\sim} 1$ mais $(1+1/x)^x$ n'est pas équivalente à $1^x = 1$ puisque $(1+1/x)^x$ tend vers e en $+\infty$. Pour ne pas faire d'erreur dans ce dernier cas, il faut scrupuleusement respecter la consigne de passer à la forme exponentielle lorsque la fonction est de la forme $f(x)^{g(x)}$.

On donne ci-dessous des techniques pour contourner le problème des sommes d'équivalents.

Notons tout d'abord que, comme l'illustre le premier exemple précédent, le problème des sommes d'équivalents ne vient pas vraiment des sommes mais des différences ! Autrement dit, lorsqu'on additionne deux équivalents, si les termes dominants disparaissent par soustraction (en particulier si l'on obtient un équivalent nul en sommant deux équivalents simples), on est coincé !

A contrario, dans le cas où les équivalents additionnés ne sont pas du même ordre de grandeur, on peut conclure, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 16

Si $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$ et $u = o_a(v)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} v$.

■ On a $\dfrac{f+g}{v} = \dfrac{f}{v} + \dfrac{g}{v} = \dfrac{f}{u} \times \dfrac{u}{v} + \dfrac{g}{v} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \times 0 + 1 = 1$, donc $f + g \underset{a}{\sim} v$. ■

Exemples :

- Trouvons un équivalent de $\sin x + \sqrt{\tan x}$ en 0. Les équivalents de référence donnent $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\sqrt{\tan x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$. De plus, on sait que $x = o_0(\sqrt{x})$, donc $\sin x + \sqrt{\tan x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$.

Si les équivalents sont du même ordre de grandeur, la plus grande prudence s'impose. Mieux vaut alors se ramener à des égalités. La proposition suivante explique comment

Proposition 17

On a

$$\left(f \underset{a}{\sim} g\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(f = g + o_a(g)\big).$$

La relation $f = g + o_a(g)$ constitue un développement local (si $a \in \mathbb{R}$) ou asymptotique (si $a = \pm\infty$) de f en a.

■ On a

$$\begin{aligned} \left(f \underset{a}{\sim} g\right) &\Longleftrightarrow \big(\lim_a (f/g) = 1\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\lim_a (f/g - 1) = 0\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\lim_a \left((f-g)/g\right) = 0\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(f - g = o_a(g)\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(f = g + o_a(g)\big) \end{aligned}$$

■

Il est ainsi équivalent de dire que f tend vers ℓ en a ou d'écrire que $f = \ell + o_a(1)$.

Exemples :

- Déterminons un équivalent de $\sin(2x) - \sin(x)$ en 0. Comme les ordres de grandeur de $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ sont les mêmes, il faut être prudent. On revient alors aux égalités $\sin(2x) = 2x + o_0(x)$ et $\sin(x) = x + o_0(x)$, ce qui donne $\sin(2x) - \sin(x) = x + o_0(x)$. Cela signifie que $\sin(2x) - \sin(x) \underset{0}{\sim} x$.
- Recherchons un équivalent de $\ln(1-x) + \mathrm{e}^x - 1$. Les équivalents de référence nous disent que $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} -x$. Cette fois, les deux équivalents sont opposés. Par conséquent, lorsqu'on écrit que $\ln(1-x) = -x + o_0(x)$ et $\mathrm{e}^x - 1 = x + o_0(x)$, on obtient que $\ln(1-x) + \mathrm{e}^x - 1 = o_0(x)$, ce qui ne donne rien !

Ce dernier exemple illustre le fait que, parfois, la connaissance d'un équivalent ne suffit pas. Il faut alors rechercher des estimations plus précises que celles données par l'équivalent. Nous verrons que les développements limités sont un outil privilégié pour cela.

La proposition suivante mêle l'équivalence avec la domination ou la négligeabilité.

Proposition 18

On a

(i) si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f = \mathcal{O}_a(g)$;

(ii) si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g = \mathcal{O}_a(h)$, alors $f = \mathcal{O}_a(h)$;
si $f = \mathcal{O}_a(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f = \mathcal{O}_a(h)$;

(iii) si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$;
si $f = o_a(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f = o_a(h)$.

■ AQT ■

Tous ces résultats sont intuitifs et n'ont pas à être appris par cœur.

$\mathcal{E}$. Fonctions complexes

On peut étendre aux fonctions complexes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas appel à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ (pas de fonction monotone, majorée, minorée,...). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue sont étendues en la remplaçant par le module.

Définition 10

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe définie au voisinage de a. On dit que f tend vers ℓ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a, \quad \forall x \in V_a, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Dans le plan complexe, ce résultat signifie que tout disque de rayon non nul centré au point d'affixe ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ à condition de prendre x assez proche de a.

Autrement dit,

- si $a \in \mathbb{R}$, f tend vers ℓ en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

- si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$), f tend vers ℓ en a lorsque :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad (x \geqslant B) \Longrightarrow (|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon). \\ \Big(\text{resp.} \quad &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad (x \leqslant B) \Longrightarrow (|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).\Big) \end{aligned}$$

Lorsquelle existe, la limite en a d'une fonction complexe est unique.

■ La démonstration de l'unicité de la limite est une adaption immédiate du cas réel. Seule différence : les voisinages utilisés ne sont plus des intervalles ouverts mais des disques ouverts du plan complexe. ■

Pas de limite infinie pour les fonctions complexes puisque $\pm\infty$ n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.

Exemples :

- Lorsque $a \in \mathbb{C}$ est tel que $|a| < 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ tend vers 0 en $+\infty$.

Les résultats suivants restent valables.

Théorème 9

Comme dans le cas des fonctions réelles, on a

(i) une fonction complexe qui tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a est bornée au voisinage de a ;

(ii) si $u : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ admet une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et si $f : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en b, alors $f \circ u$ tend vers ℓ en a ;

(iii) la caractérisation séquentielle des limites ;

(iv) une somme de fonctions complexes ayant des limites finies en a admet une limite finie en a égale à la somme des limites ;

(v) un produit de fonctions complexes ayant des limites finies en a admet une limite finie en a égale au produit des limites ;

(vi) un quotient de fonctions complexes ayant des limites finies en a (non nulle pour celle du dénominateur) admet une limite finie en a qui est le quotient des limites.

■ On adapte les démonstrations du cas réel. ■

Il reste une forme indéterminée possible dans le cas des quotients : « 0/0 ».

Le théorème suivant est fondamental. Il établit que la convergence d'une fonction complexe revient à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Théorème 10

Une fonction complexe f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, les fonctions réelles $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ tendent respectivement vers $\Re\mathrm{e}(\ell)$ et $\Im\mathrm{m}(\ell)$ en a.

■ On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ Si les fonctions $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ tendent respectivement vers x et y en a, la somme $f = \Re\mathrm{e}(f)+i\Im\mathrm{m}(f)$ tend vers $x+iy$ en a, d'après la proposition 9.

$\Leftarrow$ Supposons réciproquement que f tende vers $\ell = x+iy$ en a. Soit $\varepsilon > 0$. Le fait que f tende vers ℓ en a assure l'existence d'un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a,\ |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\forall x \in V_a,\ \left|\big(\Re\mathrm{e}(f)(x)-x\big)+i\big(\Im\mathrm{m}(f)(x)-y\big)\right| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in V_a$, on a

$$\left|\Re\mathrm{e}(f)-x\right| \leqslant \left|\big(\Re\mathrm{e}(f)-x\big)+i\big(\Im\mathrm{m}(f)-y\big)\right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\left|\Im\mathrm{m}(f)-y\right| \leqslant \left|\big(\Re\mathrm{e}(f)-x\big)+i\big(\Im\mathrm{m}(f)-y\big)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ tendent respectivement vers x et y en a. ■

3 h 15