Mathématiques ULCR

Aline Cahuzac

Juillet 2019

Exercice 1

Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ continue.

1. f est-elle bornée ?
2. On suppose f uniformément continue. Est-elle bornée ?
3. Montrer que si f est uniformément continue, il existe un unique prolongement de f à $[a,b]$ continu.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas de fonction f continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$.

Déroulé

L'intérêt des énoncés, plus originaux que ceux que j'ai pu avoir jusqu'alors (les questions étaient posées les unes après les autres), ne m'a pas évité de prononcer un nombre humiliant d'absurdités au cours de l'oral. Heureusement mon examinateur était suffisamment expressif pour ne pas me laisser m'enliser dans une erreur, et suffisamment conciliant pour me tendre une main secourable lorsque ma réflexion devenait confuse.

Une fois un contre-exemple trouvé pour la première question, il faut penser à utiliser la question 2) pour utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass sur une suite d'images $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ ([a,b] \cap \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel x de $[a,b]$ (au lieu de redémontrer que la suite est bornée). Enfin pour montrer la continuité du prolongement obtenu, au milieu de ce que j'espérais être une démonstration rigoureuse, j'ai en fait fini par utiliser un dessin pour montrer que le prolongement avait le même module d'uniforme continuité, ce qui rendait le début de mon raisonnement inutile mais a été accepté.

Le deuxième exercice m'a un peu plus déconcertée mais une fois que l'on a intuité que f devait être bijective de $\mathbb{R} + i]-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}^*$, on peut le montrer en utilisant la périodicité de exp. Apparemment, il fallait ensuite considérer l'image de 0, mais je n'ai pas eu le temps de poursuivre.