DÉTERMINANTS

Exercice 1. [○]
Démontrer, sans aucun calcul, que

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 9 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 30 b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.

Indication : 299, 468 et 741 sont divisibles par 13.

Exercice 2. [○]
Calculer les déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \cos b & \sin a \sin b \\ -\sin a & \cos a \cos b & \cos a \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. [○] (Dérivation d'un déterminant)

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quatre fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$
Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$
2. Généraliser à un déterminant 3×3. Calculer, pour $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, le déterminant
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$
3. Généraliser à un déterminant $n \times n$.

Exercice 4. [○]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\{-1;1\})$. Démontrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice 5. [⋆]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note B la matrice telle que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la i-ème colonne est la somme des colonnes de A d'indices différents de i. Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 6. [○]
Calculer le déterminant suivant (où les blancs désignent des 0) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)}.$$

Exercice 7. [$\star$] (Déterminant de Hürwitz)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n nombres réels et a et b deux autres nombres réels tels que $a \neq b$. On pose

$$J_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & a & \\ & & \ddots & \\ & b & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & & & \\ & \lambda_2 + X & a + X & \\ & & \ddots & \\ & b + X & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n + X \end{vmatrix}.$$

Démontrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et déterminer P. En déduire la valeur de J_n.

Exercice 8. [$\bigstar$] (Déterminant de Cauchy)

Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de scalaires telles que $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_i + b_j \neq 0$. Calculer le déterminant D_n de la matrice de Cauchy $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\forall i, j \in [\![1; n]\!]\,,\ a_{i,j} = (a_i + b_j)^{-1}$.

Exercice 9. [$\star$]

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$. On veut démontrer que A et B sont en fait semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^{-1}BQ$.

On note $R = \Re\mathrm{e}(P)$ la matrice des parties réelles des éléments de P et $J = \Im\mathrm{m}(P)$ la matrice des parties imaginaires des éléments de P.

1. Justifier que $RA = BR$ et $JA = BJ$. Est-il a priori possible de prendre $Q = R$ ou $Q = J$?
2. Démontrer que l'application $\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \det(R + \lambda J)$ est une fonction polynomiale non nulle. En déduire l'existence d'un nombre réel λ_0 tel que $R + \lambda_0 J \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 10. [$\star$] (Déterminant circulant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice circulante

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0, \ldots, n-1$, on pose $\omega_k = \mathrm{e}^{(2ik\pi)/n}$ et l'on note

$$Z_n = \begin{pmatrix} {\omega_0}^0 & {\omega_1}^0 & {\omega_2}^0 & \cdots & {\omega_{n-1}}^0 \\ {\omega_0}^1 & {\omega_1}^1 & {\omega_2}^1 & \cdots & {\omega_{n-1}}^1 \\ {\omega_0}^2 & {\omega_1}^2 & {\omega_2}^2 & \cdots & {\omega_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\omega_0}^{n-1} & {\omega_1}^{n-1} & {\omega_2}^{n-1} & \cdots & {\omega_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que $\det Z_n \neq 0$.
2. Déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C_n\, Z_n = Z_n\, D$. En déduire $\det C_n$.

   On exprimera les coefficients de D à l'aide du polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.

Exercice 11. [$\star$]

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\det(M) = \det(A + iB)\det(A - iB)$ et en déduire que $\det M \geqslant 0$.
2. On suppose que A et B commutent. Démontrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
   Chercher A et B ne commutant pas telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$.

Exercice 12. [$\star$]

Soient $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que ${}^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Com}({}^tA)$.
   Que dire si A est symétrique ?
2. a) On suppose que A et B sont inversibles. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB)$.
   b) [$\bigstar$] Démontrer le même résultat sans supposer que A et B sont inversibles.
   Indication : On utilisera des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont inversibles.
3. On suppose que A et B commutent. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent.
4. On suppose A inversible. Exprimer $\mathrm{Com}(A^{-1})$ en fonction de $\mathrm{Com}(A)$.
5. Démontrer que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ le sont aussi.

Exercice 13. [$\circ$]

On souhaite résoudre le système non linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - xz = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

On considère (x, y, z) une solution de (S) et l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

Déterminer la transposée de la comatrice de M. En déduire que x, y et z satisfont un système linéaire de deux équations et résoudre (S).

Exercice 14. [$\star$] (Inverse d'une matrice à coefficients entiers)

Soit A une matrice à coefficients entiers, c'est-à-dire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que

$$\big(A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})\big) \quad \Longleftrightarrow \quad (\det A = \pm 1).$$

Exercice 15. [$\bigstar$] (Rang de la comatrice)

Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Que vaut le rang de $\mathrm{Com}(A)$ lorsque A est de rang n. Préciser $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$ dans ce cas.
2. Préciser $\mathrm{Com}(A)$ et son rang lorsque le rang de A est inférieur ou égal à $n - 2$.
3. On suppose que A est de rang $n - 1$. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1. *Indication : On utilisera les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et ${}^t\mathrm{Com}(A)$.*

Exercice 16. [$\bigstar$]

Soit $\mathrm{d} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non constante telle que $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B)$ pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\big(\mathrm{d}(A) = 0\big) \Longleftrightarrow \big(\det A = 0\big)$.

Exercice 17. [$\star$]

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont impairs et que les autres coefficients sont pairs. Démontrer que A est inversible.

Exercice 18. [$\star$]

Soient $A, B \in K[X]$ tels que $A = a_0 + \cdots + a_n X^n$ et $B = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$ où $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. À ces deux polynômes, on associe son *résultant* $R(A, B)$ défini par

$$\operatorname{Res}(A,B) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & & a_0 & \vdots & & b_2 \\ & & a_1 & b_m & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_n & & & b_m \end{vmatrix}_{(m+n)}$$

où les blancs désignent des 0 (il y a m colonnes avec les a_i et n colonnes avec les b_i).

1. Soit l'application $\varphi : K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X] \longrightarrow K[X]$ définie par $\varphi\big((P, Q)\big) = AP + BQ$ pour tout $(P, Q) \in K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X]$.

   Démontrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, φ est injective.
2. En déduire que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $\operatorname{Res}(A, B) \neq 0$.
3. Application : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in K$ pour que X^3+pX+q ait une racine multiple.

Exercice 19. [$\star$]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$. On considère u un endomorphisme de E et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Démontrer que

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), x_2, ..., x_n\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, u(x_2), ..., x_n\big) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, x_2, ..., u(x_n)\big) = \operatorname{Tr}(f) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n).$$

Exercice 20. [$\circ$]

Déterminer le déterminant de

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right.$$