Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Test de contrôle : corrigés

- durée 3 heures / calculatrices interdites -

Compléter les cases en validant par ou en invalidant par les affirmations suivantes.

Sur les probabilités et les variables aléatoires ...

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies égales presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ et $V(X)=V(Y)$, mais la réciproque est fausse.	✓
Si $A_1,\cdots,A_r$ sont r événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right)=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}(A_i)$, alors les événements $A_1,\cdots,A_r$ sont deux à deux incompatibles.	✗
L'ensemble des événements presque sûrs est stable par intersection.	✓
Deux événements incompatibles ne sont jamais indépendants.	✗
Si on lance une pièce de monnaie une infinité de fois, la probabilité de ne jamais avoir la séquence « $PPPPPFPFPFPPFPFPFPPPPFF$ » consécutivement est nulle.	✓
Dans un jeu de 52 cartes, si on pioche 20 cartes simultanément, la probabilité de piocher les quatre rois vaut $\dfrac{\binom{48}{16}}{\binom{52}{20}}$.	✓
Si N est très grand, si on liste les N premières décimales de $\dfrac{1}{7}$, la probabilité de tomber sur le chiffre 4 vaut environ $\dfrac{1}{6}$.	✓
Il existe une seule probabilité d'univers associé $\Omega=[\![1,1000]\!]$ telle que pour tout $k\in[\![1,1000]\!]$, $\mathbb{P}([\![1,k]\!])=\ln\left(\dfrac{k+1000}{2000}\right)$.	✓

Sur les variables et les vecteurs aléatoires

Si $X_1, \cdots, X_s$ sont s variables mutuellement indépendantes définies de Ω vers $\{0,1\}$, alors la somme $\sum_{i=1}^{s} X_i$ suit une loi binomiale.	✗
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors la variable X suit une loi de Bernoulli si et seulement si : $\mathbb{P}(X \in \{0,1\}) = 1$.	✓
Si X suit une loi de Rademacher, alors la variable $1 - X$ aussi.	✗
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies de Ω vers $\{0,1\}$, alors les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si : $\mathbb{P}(X = Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$.	✓
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies d'un univers fini Ω vers $\mathbb{R}$, alors ces deux variables ont la même loi si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$, on a : $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.	✓
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi binomiale, alors la somme $X + Y$ peut ne pas suivre une loi binomiale.	✓
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, si $\max(X(\Omega)) = \mathbb{E}(X)$, alors la variable X est une fonction constante.	✗
Si $X_1, \cdots, X_r$ sont des variables aléatoires finies, alors ces variables sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$	✓
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, l'ensemble E des variables aléatoires $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ indépendantes avec X forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.	✓

Un pot pourri ...

Une suite d'entiers est bornée si et seulement si elle admet une sous-suite constante.	✓
Si λ est un réel, puis A, B et C sont trois points non alignés, l'ensemble des points M du plan affine euclidien tels que $\lambda\, MA^2 + (1-\lambda)\, MB^2 = MC^2$ est une droite affine.	✓
Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$.	✗
Si u_n est le nombre de chiffres en base 10 de l'entier 2^n, alors $\exists \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.	✓
Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$ est bien définie sur $]-1, 1[$ et est une fraction rationnelle.	✓
Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est continue et décroissante, la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.	✗
Si Ω est fini, si $A_1, \cdots, A_r$ sont des événements et si pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathbb{P}(B \cap A_i)$, alors la famille $(A_1, \cdots, A_r)$ est un SCE.	✗
Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.	✓
L'ensemble des matrices triangulaires inversibles complexes forme un groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ pour $\times$.	✗
La série $\sum\limits_{n} \left(\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ ne vérifie pas le CSSA puisqu'elle est divergente.	✓
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ n'est pas à coefficients tous entiers, la matrice A ne peut pas être semblable à une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.	✗

Encore des probabilités ...

Si $\left(X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de va.i.id, si $\varepsilon > 0$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\left\lvert\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} - 1\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) = 0$, alors chaque X_k vérifie $\mathbb{E}(X_k) = 1$.	✗
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie, la fonction $f : t \longmapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$ est une fonction croissante et toujours continue à droite.	✓
Il est possible de construire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \alpha$ vérifie $\mathbb{P}(X = \alpha) > 0$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \geqslant \mathbb{P}(X = \alpha)$.	✓
Si $X \sim \mathscr{B}(n, \lambda)$, alors l'espérance $\mathbb{E}(\exp(X))$ est une formule polynomiale en la variable λ.	✓
Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire finie et si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(X \in A) = 0$, alors la loi de X peut ne pas être entièrement déterminée par la donnée des quantités $\mathbb{P}(X = x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R} \setminus A$.	✗
Si X et Y suivent deux lois de Bernoulli, avec $V(X) = V(Y)$, alors $X = Y$ presque sûrement ou $X = 1 - Y$ presque sûrement.	✗
Il existe une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\mathbb{P}(X = k)$ soit proportionnelle à $\dfrac{2+\sin k}{1+\sqrt{k}}$.	✗
Si X, Y, Z et T sont quatre va.i.id, alors les variables $X+Y$ et $Z+T$ suivant la même loi et sont indépendantes.	✓