ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. [$\circ$]

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par la donnée de $u_1 = 2$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_{n+1} = u_n + \delta_n.10^n \qquad \text{où} \qquad \delta_n = \begin{cases} 2 & \text{si } 2^{n+1} \mid u_n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, 2^n divise u_n.
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, 2^n possède un multiple dont l'écriture décimale ne comporte que des 1 et des 2.

Exercice 2. [$\bigstar$]

Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que l'entier n admet un multiple de la forme $1 \cdots 10 \cdots 0$.

Exercice 3. [$\star$]

Soient $n \in \mathbb{Z}$, $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$. En effectuant un algorithme de type Euclide, déterminer selon les valeurs de n le pgcd de a et b.

Exercice 4. [$\circ$]

1. Résoudre dans $\mathbb{F}_{23}$ l'équation $5x = 2$.
2. Résoudre l'équation $15x \equiv 6$ [69] d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
3. Résoudre l'équation $42x \equiv 84$ [121] d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
4. Résoudre l'équation $3x \equiv 8$ [12] d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5. [$\star$]

1. Résoudre le système de congruences $(S_1) \begin{cases} x \equiv 2\ [23] \\ x \equiv 8\ [15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
2. Résoudre le système de congruences $(S_2) \begin{cases} x \equiv 11\ [12] \\ x \equiv 8\ [15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. [$\circ$]

Déterminer le nombre de manières de payer 641 euro en utilisant seulement des pièces de 2 euro et des billets de 5 euro.

Exercice 7. [$\star$]

Soient $n, a, b \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $(n^a - 1) \wedge (n^b - 1) = n^{a\wedge b} - 1$.

Exercice 8. [$\circ$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n! + 1$ et $(n + 1)! + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 9. [$\circ$]

Résoudre l'équation $(x \vee y) - (x \wedge y) = 9$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}^*$ avec $x \geqslant y$.

Exercice 10. [$\star$]

1. Soient $s, d \in \mathbb{N}^*$. Expliquer comment résoudre le système $\begin{cases} x + y = s \\ x \wedge y = d \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$. Traiter le cas $s = 360$ et $d = 10$.
2. Soient $p, d \in \mathbb{N}^*$. Expliquer comment résoudre le système $\begin{cases} xy = p \\ x \wedge y = d \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$. Traiter le cas $d = 48$ et $d = 2$.

Exercice 11. [$\star$]

Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ tels que $ab - 1 \in \mathbb{P}$. Résoudre l'équation $(x \wedge y) + (x \vee y) = ax + by$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. [$\circ$]

Démontrer que si un nombre réel x est tel que ax et bx sont entiers, avec a et b entiers premiers entre eux, alors x est entier.

Exercice 13. [$\circ$]

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$.

Exercice 14. [$\circ$]

Soient $p < q$ deux nombres premiers. Démontrer que p et q sont jumeaux (c'est-à-dire $q = p+2$) si, et seulement si, $pq + 1$ est un carré.

L'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux est un célèbre problème ouvert.

Exercice 15. [$\star$] (Nombres de Mersenne et de Fermat)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le n-ème nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si M_k est premier, alors k est premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le n-ème nombre de Fermat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $2^k + 1$ est premier, alors $2^k + 1$ est un nombre de Fermat.
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = F_n - 2$ et en déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

Exercice 16. [$\circ$]

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Démontrer que si b^2 divise a^2 alors b divise a et a^2/b^2 est un carré.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, m est un carré.

Exercice 17. [$\circ$]

Par combien de 0 se termine le nombre 100! ?

Exercice 18. [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. On décompose n en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ où les p_j sont des nombres premiers distincts deux à deux et $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer en fonction des α_j le nombre $\tau(n)$ de diviseurs de n.

   Quel sont les nombres inférieurs ou égaux à 100 qui admettent le plus grand nombre de diviseurs. Quelle remarque cela vous inspire ?
2. Déterminer en fonction des α_j et des p_j la somme $\sigma(n)$ de tous les diviseurs de n.
3. Vérifier que si $m \wedge n = 1$, on a $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ et $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$. On dit que τ et σ sont des fonctions arithmétiques *multiplicatives*.

Exercice 19. [$\star$]

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Déterminer une série de n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Exercice 20. [$\star$]

Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet énonce que si a et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo n. Le théorème d'Euclide traite le cas $n = 2$. L'objectif de cet exercice est de traiter le cas $n = 4$. La démonstration du théorème dans son cas général est très difficile.

1. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4. *Indication :* $N = 4p_1 \dots p_n - 1$
2. a) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier impair tel que p divise $a^2 + 1$. Démontrer que p est congru à 1 modulo 4. *Indication : Utiliser le petit théorème de Fermat.*
   b) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 21. [$\circ$]

Déterminer le plus petit entier naturel n dont le reste dans la division par 2 est 1, le reste dans la division par 3 est 2, le reste dans la division par 4 est 3, ..., le reste dans la division par 9 est 8.

Exercice 22. [$\star$]

Que vaut la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444} ?

Exercice 23. [$\star$]

Quel est le dernier chiffre du nombre $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Exercice 24. [$\star$]

1. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \wedge 10 = 1$. Démontrer que $a^4 \equiv 1$ $[10]$ et en déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a^{8\times 10^k} \equiv 1$ $[10^{k+1}]$.
2. Déterminer un entier dont l'écriture décimale du cube se termine par 123456789.

Exercice 25. [$\circ$]

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 7 si, et seulement si, a et b le sont.

Exercice 26. [$\star$]

On considère 1975 entiers dont la somme est nulle. Démontrer que la somme de leurs puissances 37-èmes est un multiple de 399.

Exercice 27. [$\circ$]

Résoudre l'équation $x^2 - 2y^2 = 3$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$. *Indication :* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 28. [$\star$]

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a \wedge b = 1$. On suppose que ab est la puissance k-ème d'un entier. Démontrer que a et b sont eux-mêmes des puissances k-èmes d'entiers.
2. Résoudre l'équation $x^2 + x = y^k$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $p \in \mathbb{P}$. Résoudre l'équation $x^2 + px = y^2$ d'inconnue $x, y \in \mathbb{N}$. *Indication : Distinguer le cas où p divise x du cas contraire.*