T.D. EM_7 : Électromagnétisme et actions mécaniques – Induction

Exercice 1 Traversée d'un anneau

Un anneau circulaire de fil, de centre O et de rayon R, d'axe (Oz), porte la charge $Q > 0$ uniformément répartie sur sa périphérie. En un point M de l'axe (Oz), on place une particule de masse m, de charge $q > 0$, à laquelle on donne une vitesse initiale v_0 colinéaire à (Oz) et dirigée vers O. On néglige toute autre force qu'électrostatique.

À quelle condition portant sur la valeur de v_0 la particule traversera-t-elle l'anneau ?

Exercice 2 Pression magnétostatique

Un cylindre infini creux, d'axe (Oz), de rayon intérieur a et d'épaisseur e, est parcouru par le courant volumique uniforme $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{e_z}$.

1. Déterminer le champ magnétique engendré par cette distribution de courant.
2. Quelle est la force volumique subie par le cylindre ?
3. L'épaisseur du cylindre est très faible ($e \ll a$). Montrer que les efforts précédents peuvent être ramenés à une pression magnétostatique P que l'on exprimera en fonction de la densité de courant surfacique $\overrightarrow{j_s}$.

Exercice 3 Interaction entre deux spires

Deux spires circulaires (de rayons R_1 et R_2), parcourues par les courants I et i, ont même axe (Oz). Cet axe oriente les courants par la règle du tire-bouchon de MAXWELL. La seconde spire a un rayon R_2 tel que $R_2 \ll R_1$ et $R_2 \ll d$ où d est la distance entre les deux circuits.

Évaluer la force d'interaction exercée par une spire sur l'autre par plusieurs méthodes :

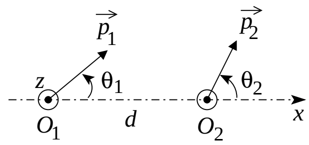
1. en évaluant le champ magnétique puis la force de LAPLACE créée par la grande spire sur la petite (un point de la petite spire est au voisinage de l'axe (Oz)) ;
2. en considérant la petite spire comme un dipôle magnétique subissant l'action du champ magnétique créé par la grande ;
3. en utilisant le champ magnétique créé par la petite spire en un point de la grande ;

Exercice 4 Énergie et moment d'interaction

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre une charge ponctuelle q en A et un dipôle rigide $\overrightarrow{p}$ en B.
2. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre deux dipôles rigides en A et B de moments dipolaires $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$.
3. Exprimer le moment résultant en B des forces exercées par $\overrightarrow{p_1}$ sur $\overrightarrow{p_2}$. Est-il égal au moment en A des forces exercées par $\overrightarrow{p_2}$ sur $\overrightarrow{p_1}$?

Exercice 5 Positions d'équilibre

Deux dipôles rigides identiques (module p) distants de d, placés en O_1 et O_2, peuvent tourner sans frottement autour des axes fixes $(O_1, \overrightarrow{e_z})$ et $(O_2, \overrightarrow{e_z})$, leurs moments dipolaires $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$ restant orthogonaux aux axes de rotation (voir figure). Le moment d'inertie d'un dipôle par rapport à son axe de rotation est noté J.

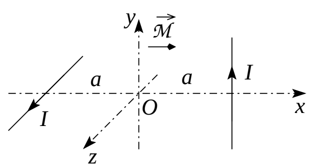


1. Déterminer les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité.
2. Pour la seule position d'équilibre stable, déterminer les modes propres des oscillations de faible amplitude.

Exercice 6 Équilibres d'un dipôle magnétique

Dans le repère $Oxyz$, deux fils F_1 et F_2 rectilignes illimités sont confondus avec les droites d'équations $x = -a, y = 0$ pour F_1 et $x = a, z = 0$ pour F_2 et sont parcourus par des courants d'intensité I dans les sens positifs des axes Oz et Oy (voir figure). Un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \mathscr{M}\,\overrightarrow{e_x}$ constant se déplace sans frottement dans le plan yOz. Les forces de pesanteur n'interviennent pas.

Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité.



Exercice 7 Écartement des armatures d'un condensateur plan

Un condensateur plan, de capacité $C_0 = 2\ \mu F$, est chargé sous une différence de potentiel $U_0 = 1$ kV.

1. On l'isole électriquement. Calculer le travail minimal qu'un opérateur doit fournir à ce condensateur pour écarter ses armatures de $e_0 = 1$ mm à 2 mm. Commenter physiquement le résultat.
2. On maintient la différence de potentiel constante. Calculer la variation d'énergie du condensateur et le travail minimal qu'un opérateur doit fournir au condensateur pour écarter ses armatures de $e_0 = 1$ mm à 2 mm. Commenter physiquement le résultat.

Exercice 8 Pression moyenne dans une colonne de plasma

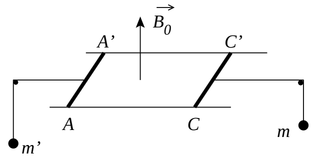
Une colonne cylindrique de plasma neutre globalement et conducteur ohmique d'axe (Oz) et de section droite circulaire de rayon a est siège du courant de densité $\overrightarrow{j} = j(r)\,\overrightarrow{e_z}$ (r distance à (Oz)). La pression extérieure est nulle (vide).

1. En régime stationnaire, montrer qu'il y a neutralité locale.
2. À l'équilibre, établir l'équation différentielle entre la pression $p(r)$ et le champ magnétique $B(r)$.

3. En déduire la valeur moyenne P de la pression sur une section droite du cylindre en fonction de la densité d'énergie à la périphérie.

Exercice 9 Barres sur des rails

Les deux barres AA' et CC' (longueur a) se déplacent, sans frottement, sur deux rails infiniment conducteurs, horizontaux et parallèles dans un champ magnétique vertical uniforme $\overrightarrow{B}_0$. Les fils et les deux poulies (non représentées) sont sans masse, ainsi que les barres, lesquelles possèdent une même résistance R.

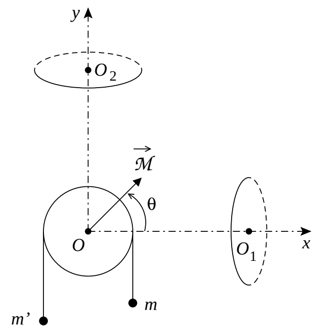


Déterminer les vitesses des deux barres sachant qu'à l'instant initial, elles sont nulles. Faire une représentation graphique pour $m'/m = 2$. Commenter.

On pourra poser $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{B_0{}^2 a^2}{2R}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)$.

Exercice 10 Machine d'ATWOOD avec dipôle magnétique

Un moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ est solidaire d'une poulie de rayon a (il est contenu dans le « plan » de la poulie). On appelle J le moment d'inertie du système $\{$poulie$+\overrightarrow{\mathscr{M}}\}$ par rapport à l'axe de rotation Oz (pivot parfait). Le fil ne glisse pas dans la gorge de la poulie.

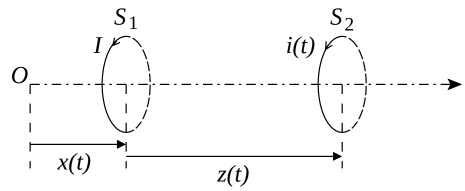


Les deux spires (S_1) et (S_2) ont même résistance R. On négligera les phénomènes d'auto-inductance, ainsi que les interactions mutuelles entre (S_1) et (S_2). On notera S la surface de chaque spire. On a $OO_1 = OO_2 = h \gg r$ (rayon des deux spires). Enfin, $m' > m$.

Trouver la loi d'évolution de la vitesse angulaire $\dfrac{d\theta}{dt}$.

Exercice 11 Deux spires coulissant sur un axe

Deux spires circulaires identiques S_1 et S_2 peuvent coulisser sans frottement le long de leur axe commun. Elles sont caractérisées par un même rayon r et une même résistance R. Leur inductance propre est négligeable.



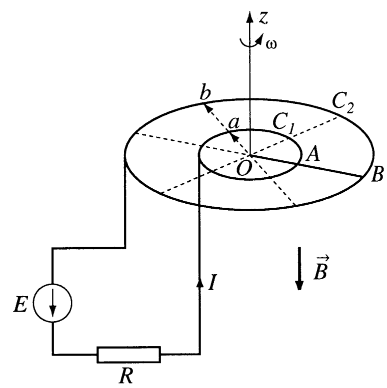
S_1 est reliée à une source qui maintient une intensité I constante. S_2 ne contient pas de source et l'intensité $i(t)$ qui la parcourt est initialement nulle.

Les spires sont initialement immobiles et distantes de $z_0 \gg r$. On déplace S_1 d'une distance h dans la direction de S_2 (on suppose que la distance de S_1 et S_2 reste toujours grande devant r). On observe que S_2 se met transitoirement en mouvement, puis s'arrête.

Interpréter qualitativement le phénomène puis calculer de quelle distance S_2 s'est déplacée quand elle est à nouveau immobile.

Exercice 12 Principe du moteur continu

Le rotor d'un moteur tournant à la vitesse ω autour de l'axe Oz est constitué de p tiges homogènes infiniment conductrices du type OB, toutes identiques, de masse m et de longueur l, régulièrement réparties et rigidement liées les unes aux autres.



Elles tournent dans le plan perpendiculaire à Oz en s'appuyant sur deux conducteurs circulaires C_1 et C_2 de rayons respectifs a et b aux bornes desquels est branché un générateur de tension constante E. La résistance ohmique du circuit est équivalente à une résistance unique R.

Le stator (non représenté sur la figure) est constitué d'un aimant permanent (dit inducteur) qui, dans l'espace où se trouve l'équipage mobile, établit un champ magnétique constant et pris uniforme $\overrightarrow{B} = -B_0\,\overrightarrow{e_z}$.

1. Étude d'une tige seule.

   Supposons pour l'instant que le rotor soit constitué d'une seule tige OB, le courant I parcourant la tige entre les points de contact A et B dans le sens de A vers B qui est celui de $\overrightarrow{e_r}$.

   a. Calculer en fonction de B_0, a, b et ω, la force électromotrice e_{AB} en négligeant le champ magnétique propre.
   b. Calculer en fonction de B_0, a, b et I, le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}$ des forces magnétiques exercées sur la tige.
   c. Quelle relation permet de vérifier la cohérence des deux résultats précédents ?

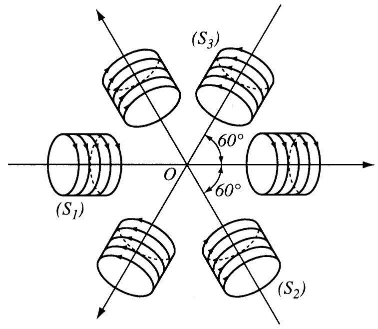
2. Mouvement du rotor complet.

   On revient au système à p tiges décrit dans l'introduction, parcouru par un courant total I.

   a. Comment, d'un point de vue purement électrocinétique, sont disposés ces p conducteurs entre C_1 et C_2 ? Que devient-alors la différence de potentiel $V_A - V_B$ issue de la question 1.a et comment s'obtient le moment des forces sur l'ensemble du rotor en fonction du résultat de la question 1.b ? Quel intérêt y a-t-il à prendre p tiges ?
   b. Écrire les équations électrique et mécanique du système donnant $I(t)$ et $\omega(t)$ sachant que :
      — $J = ml^2/3$ est le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe Oz ;
      — on impose au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple de moment égal à Γ_e constant ;
      — le phénomène d'auto-induction du circuit est négligé.
   c. En déduire l'équation différentielle relative à l'évolution de la vitesse angulaire ω. Intégrer cette équation sachant qu'à l'instant initial le rotor est au repos, en introduisant un temps caractérisitique τ et une valeur limite ω_l.
   d. Montrer que le couple Γ_e fourni par le moteur à l'extérieur ne peut pas dépasser une valeur maximale Γ_{em} à déterminer.

Exercice 13 Production d'un champ magnétique tournant

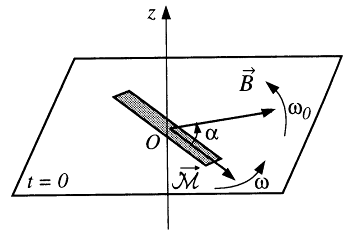
On considère des solénoïdes identiques. Chacun comporte N spires circulaires de rayon r et a une longueur $\mathscr{L}$. Ils sont montés comme l'indique la figure, les faces en regard étant distantes de $2l$.



1. Ces solénoïdes sont alimentés en série, en respectant les sens indiqués sur la figure, par un courant sinusoïdal de valeur efficace I et de pulsation ω. Que vaut alors le champ magnétique en O, centre du système ?
2. À présent, les trois paires de solénoïdes (S_1), (S_2) et (S_3) sont alimentées (en triphasé) respectivement par trois courants alternatifs mais déphasés les uns par rapport aux autres d'une quantité $2\pi/3$: pour le système (S_i), (avec $i = 1$, 2 ou 3) $I_i(t) = I\sqrt{2}\cos[\omega t - 2\pi(i-1)/3]$. Caractériser le champ magnétique produit en O.
3. Dans quels domaines sont utilisés les champs tournants ?

Exercice 14 Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, d'amplitude B_0, qui tourne dans un plan xOy autour d'un axe Oz avec la pulsation ω_0 constante.



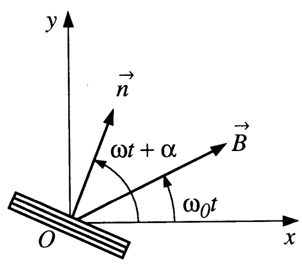
D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent $\overrightarrow{\mathscr{M}}$, orthogonal à Oz, tourne dans le plan xOy avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω.

La valeur de l'angle $(\overrightarrow{\mathscr{M}}, \overrightarrow{B})$ à l'instant initial est notée α comme indiqué sur la figure.

1. Calculer la valeur instantanée du couple magnétique $\overrightarrow{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps.
2. Pour quelles valeurs de ω et α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Quelle est dans ce cas la puissance maximale $\mathscr{P}_M$ qu'il peut fournir ?
3. Un régime permanent de fonctionnement du moteur est dit stable si, lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit lui fait perdre cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire. À partir du graphe de $\langle\Gamma\rangle$ fonction de α, déterminer le domaine de α correspondant à un régime stable lorsque le moteur lui fournit un couple utile Γ_u.

Exercice 15 Moteur alternatif asynchrone

Dans un domaine d'espace autour de O, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ produit est un champ tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω_0 et de module B_0. C'est l'inducteur, les circuits à la source du champ $\overrightarrow{B}$ constituant le stator.



Le rotor ou induit, une petite bobine plate, fermée sur elle-même, de résistance R et d'inductance propre L, est constituée de N spires planes, circulaires, chacune de surface S, leur axe étant dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ également dans le plan xOy. Cette bobine peut tourner à la vitesse ω autour d'un de ses diamètres porté par l'axe Oz de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ et qui constitue l'arbre du moteur.

L'étude est effectuée en régime permanent de rotation, la bobine tournant à une vitesse angulaire constante ω. À l'origine du temps ($t = 0$), le champ $\overrightarrow{B}(0)$ est porté par l'axe Ox et l'angle $(\overrightarrow{B}(0), \overrightarrow{n}(0))$ est égal à α.

1. Commenter qualitativement comment ce dispositif peut fonctionner en moteur.
2. Déterminer le flux magnétique envoyé par le champ $\overrightarrow{B}$ à travers la bobine plate en notant $\Phi_0 = NB_0S$. En déduire la f.é.m. induite, puis déterminer le courant $i(t)$ circulant dans la bobine sous la forme $i(t) = I_0 \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi]$ en donnant les expressions de I_0 et $\tan\psi$.
3. Après avoir assimilé la bobine à un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{\mathscr{M}}$, calculer la composante Γ_z suivant l'axe Oz du couple $\overrightarrow{\Gamma}$ exercé par le champ sur la bobine. En déduire sa valeur moyenne $\langle\Gamma_z\rangle$. Pour quelles valeurs de α et ω ce système fonctionne-t-il en moteur ?
4. Tracer la courbe représentative des variations de $\langle\Gamma_z\rangle$ en fonction de $\omega_0 - \omega$. Sachant que $B_0 = 10^{-2}$ T, $N = 100$, $S = 10$ cm^2, $\omega_0 = 50$ tours/s, $R = 2\ \Omega$, $L = 80$ mH, calculer la valeur numérique de l'extremum Γ_M (exprimé en fonction de Φ_0 et L) et la valeur correspondante de ω_M en tours par seconde.
5. Déterminer la puissance moyenne $\langle\mathscr{P}\rangle$ fournie par le moteur en fonction de ω et tracer sa courbe représentative. Expliquer la valeur prise pour $\omega = \omega_0$ et distinguer plusieurs domaines de ω. Quelle est la source d'énergie lorsque le dispositif fonctionne en moteur ?
6. À présent, un couple résistant Γ_r est appliqué à l'arbre du moteur. Discuter suivant les valeurs de Γ_r les possibilités de démarrage spontané du moteur.
7. Le fonctionnement du moteur est dit stable si, lors d'une augmentation (resp. diminution) éventuelle de sa vitesse de rotation, la somme des couples qu'il subit tend à s'opposer à celle-ci. Discuter la stabilité des régimes de fonctionnement à l'aide du graphe de $\langle\Gamma_z\rangle$. À quelle plage de pulsations (en tours par seconde) correspond la stabilité ?
8. Quelle est la puissance électromagnétique $\mathscr{P}_{em}$ totale apportée en moyenne au moteur ? En déduire le rendement η du moteur en fonction de ω et ω_0. Commentaire ?

Quelques indications ou solutions…

Exercice 1
La force électrostatique est conservative donc le théorème de l'énergie cinétique est sûrement d'une grande utilité ! Le résultat à obtenir est $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{q\mathrm{Q}}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}}\right)}$.

Exercice 2
Pas d'indication.

Exercice 3
Le meilleur moyen de savoir que l'on fait juste est de trouver à chaque fois le même résultat…

Exercice 4
Pour obtenir l'énergie potentielle d'interaction d'un système, évaluer l'énergie qu'un opérateur fournit réversiblement pour constituer ce système en amenant ses diverses parties depuis l'infini.

Exercice 5
On calcule l'énergie potentielle d'interaction que l'on trouve de la forme $\mathscr{E}_p = \mathrm{A}\left[\sin\theta_1\,\sin\theta_2 - 2\cos\theta_1\,\cos\theta_2\right]$… *Il n'y a que* 4 *positions d'équilibre vraiment différentes possibles et une seule d'elles est stable (celle* $\rightarrow\rightarrow$*).*

Exercice 6
Utiliser une méthode énergétique. Il y a quatre positions d'équilibre situées sur un carré et une seule est stable…

Exercice 7
No indication is good indication :)

Exercice 8
$\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{B}^2(a)}{2\,\mu_0}$.

Exercice 9
$v_{\mathrm{CC}'}(t) = \dfrac{1}{m+m'}\left[(m-m')\,g\,t + 2m'\,g\,\tau\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\right]$ *et* $v_{\mathrm{AA}'}(t) = \dfrac{1}{m+m'}\left[(m-m')\,g\,t - 2m\,g\,\tau\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\right]$.

Exercice 10
$\dfrac{d\theta}{dt} = (m'-m)\,g\,a\,\mathrm{R}\left(\dfrac{2\pi\,h^3}{\mu_0\,\mathscr{M}\,\mathrm{S}}\right)^2\left[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]$.

Exercice 11
Déplacement de la distance h.

Exercice 12
Pas d'indication.

Exercice 13
2. On pose $k = \dfrac{\mu_0\,\mathrm{N}}{\mathscr{L}}\left(\dfrac{\mathscr{L}+l}{\sqrt{(\mathscr{L}+l)^2+r^2}} - \dfrac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}\right)$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{B}}(t) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\,k\,\mathrm{I}\left[\cos\omega t\,\overrightarrow{e_x} + \sin\omega t\,\overrightarrow{e_y}\right]$.

Exercice 14
$\langle\overrightarrow{\Gamma}\rangle = \delta_{\omega,\omega_0}\,\mathscr{M}\,\mathrm{B}_0\,\sin\alpha\,\overrightarrow{e_z}$; $\mathscr{P}_\mathrm{M} = \mathscr{M}\,\mathrm{B}_0\,\omega_0$; $\alpha \in]0;\pi/2[$.

Exercice 15
$\langle\Gamma_z\rangle = \dfrac{{\Phi_0}^2}{2}\,\dfrac{\mathrm{R}\,(\omega_0-\omega)}{\mathrm{R}^2+\mathrm{L}^2\,(\omega-\omega_0)^2}$; $\langle\mathscr{P}\rangle = \langle\Gamma_z\rangle\,\omega$.