DEVOIR SURVEILLÉ 5

(durée : 4 h 00)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou* <u>*soulignée*</u>*. Laissez une marge au correcteur.*

Le sujet est constitué d'un unique problème. On pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

PROBLEME

Fractions continues

Dans tout ce problème, on travaille dans $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ avec les conventions habituelles : $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

On note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière et $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire. On convient que $\lfloor +\infty \rfloor = +\infty$ et $\{+\infty\} = 0$, ce qui revient à considérer que $+\infty$ est un entier naturel.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On note $(x_n)_{n \geqslant 0}$ la suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ définie par

$$x_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{\{x_n\}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'élément de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$a_n = \lfloor x_n \rfloor .$$

Si $s_0, s_1, \ldots, s_n$ désignent des éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$, on pose

$$[s_0] = s_0, \qquad [s_0, s_1] = s_0 + \frac{1}{s_1}, \qquad [s_0, s_1, s_2] = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2}}$$

et plus généralement

$$[s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n] = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}}}.$$

A. <u>Préliminaire</u>

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n].$$

B. <u>Fraction continue d'un rationnel</u>

1. On suppose que x est un nombre rationnel positif ou nul. On note $x = u/v$ avec $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$. On écrit les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$\begin{aligned} \underset{r_{-1}}{u} &= q_0 \times v + r_1 \\ \underset{r_0}{v} &= q_1 \times r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2 \times r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{d-2} &= q_{d-1} \times r_{d-1} + \underset{r_d}{1} \\ r_{d-1} &= q_d \times 1 + \underset{r_{d+1}}{0} \end{aligned}$$

a) Qu'est-ce qui justifie l'existence du rang $d \in \mathbb{N}$ tel que $r_d = 1$ et $r_{d+1} = 0$?

b) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;d]\!]$, on a

$$x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k} \qquad \text{et} \qquad a_k = q_k.$$

Que dire de x_k et a_k lorsque $k \geqslant d+1$?

c) En déduire que $x = [q_0, q_1, \ldots, q_{d-1}, q_d]$.

► Cette écriture s'appelle le *développement en fraction continue* du rationnel x.

d) Décomposer 355/113 en fraction continue.

2. Réciproquement, on suppose que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : a_n = +\infty\}$ est non vide. Démontrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d]$ avec $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{N}$. En déduire que $x \in \mathbb{Q}_+$.

C. <u>Fraction continue d'un irrationnel</u>

On suppose que x est un nombre irrationnel positif. Les résultats de la question B nous disent alors qu'aucun a_n ne vaut $+\infty$, autrement dit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'entiers naturels. On peut alors introduire les deux suites $(p_n)_{n\geqslant -1}$ et $(q_n)_{n\geqslant -1}$ d'entiers naturels définies par

$$p_{-1} = 1, \qquad q_{-1} = 0, \qquad p_0 = a_0, \qquad q_0 = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

Remarque : La suite $(q_n)_{n\geqslant -1}$ n'a pas de lien avec les quotients rencontrés à la question B. 1.

1. Démontrer que $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

2. a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, t] = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{t}}.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En déduire (sans utiliser de démonstration par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Que peut-on dire à propos de la fraction p_n/q_n ?

► La fraction p_n/q_n s'appelle la *réduite* d'ordre n de x.

3. a) Démontrer que les suites $(p_{2n}/q_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(p_{2n-1}/q_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leqslant x \leqslant \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$$
   et en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

   ► L'écriture illimitée $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$ s'appelle le *développement en fraction continue* de l'irrationnel x.

   c) Décomposer $\sqrt{2}$ en fraction continue.

D. Approximation rationnelle

1. a) Dans cette question, on suppose que x est un nombre rationnel positif ou nul.
   Soit p/q un nombre rationnel positif ou nul distinct de x (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). Démontrer l'existence d'un nombre réel $A > 0$ ne dépendant que x tel que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q}\cdot$$
   En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}\cdot$$

   b) Dans cette question, on suppose que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{{q_n}^2}\cdot$$
   En déduire qu'il existe une infinité de rationnels p/q (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}\cdot$$

2. Dans cette question, on suppose à nouveau que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C.

   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|} = \frac{q_{n-1}}{q_n x_{n+1}}$$
   et en déduire que la suite $\left(\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right|\right)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

   b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p/q un nombre rationnel positif (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $q < q_n$. Démontrer que p/q ne peut pas être compris entre p_n/q_n et p_{n-1}/q_{n-1} au sens large. En déduire que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|\cdot$$

E. Fraction continue de e

1. On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_0(t) = 1 \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_1(t) = 1 + t$$
   et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+2}(t) = f_{n+1}(t) + \frac{t^2 f_n(t)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot$$

   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients positifs.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t) = f'_{n+1}(t) + \frac{t f_n(t)}{2n+1}$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t) = \mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^t}{2n+1} \int_0^t u f_n(u)\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u.$$

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$$

et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^t .$$

2. Dans cette question, on suppose que $a_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{3n+1} = 1, \qquad a_{3n+2} = 2n, \qquad a_{3n+3} = 1.$$

On reprend les notations de la partie C.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{3n+7} = (4n+6)p_{3n+4} + p_{3n+1} \qquad \text{et} \qquad q_{3n+7} = (4n+6)q_{3n+4} + q_{3n+1}.$$

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{3n+1} = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(\frac{1}{2}\Big) \qquad \text{et} \qquad q_{3n+1} = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(-\frac{1}{2}\Big).$$

c) En conclure que

$$\mathrm{e} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots, 1, 2n, 1, 1, 2n+2, 1, \ldots].$$

F. Théorème de Lagrange

On suppose que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] = \{\alpha + \beta\sqrt{d} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ est un corps.
2. Dans cette question, on fait l'hypothèse que le développement en fraction continue de x est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = [a_0, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, \ldots]$.

   a) On pose $y = [a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, \ldots]$. Démontrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.

   b) En déduire que $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.
3. Réciproquement, on suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$. On souhaite démontrer que le développement en fraction continue de x est périodique à partir d'un certain rang.

   a) Justifier l'existence de $A, B, C \in \mathbb{Z}$ avec $A \neq 0$ tels que $Ax^2 + Bx + C = 0$.

   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n {x_{n+1}}^2 + B_n x_{n+1} + C_n = 0$ où A_n, B_n, C_n désignent trois entiers relatifs définis par

$$\begin{cases} A_n = A{p_n}^2 + Bp_nq_n + C{q_n}^2, \\ B_n = 2Ap_np_{n-1} + B(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2Cq_nq_{n-1}, \\ C_n = A_{n-1}. \end{cases}$$

   c) Démontrer que les suites $(A_n)_{n\geqslant 0}$ et $(C_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées. *Indication : Utiliser D. 1. b)*

   d) Démontrer, avec courage, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ${B_n}^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC$.
   En déduire que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

   e) Conclure.

CORRECTION DU DS 5

(durée : 4 h 00)

PROBLEME

Dans cet exercice, on travaille dans $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *avec les conventions habituelles :* $1/0 = +\infty$ *et* $1/+\infty = 0$. *On note* $\lfloor\cdot\rfloor$ *la partie entière et* $\{\cdot\}$ *la partie fractionnaire. On convient que* $\lfloor+\infty\rfloor = +\infty$ *et* $\{+\infty\} = 0$, *ce qui revient à considérer que* $+\infty$ *est un entier naturel. Soit* $x \in \mathbb{R}_+$. *On note* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *définie par* $x_0 = x$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 1/\{x_n\}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* a_n *l'élément de* $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *défini par* $a_n = \lfloor x_n\rfloor$. *Si* $s_0, s_1, \ldots, s_n$ *désignent des éléments de* $\overline{\mathbb{R}_+}$, *on pose*
$$[s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n] = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}}}.$$

A. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété $\mathscr{P}(n) : x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n]$.

<u>Initialisation :</u> On a $[x_0] = x_0 = x$, ce qui démontre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \lfloor x_n\rfloor + \{x_n\}] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n] \\ &= x \qquad \text{par H.R.} \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n].}$$

B. <u>*Fraction continue d'un rationnel*</u>

1. *On suppose que* $x \in \mathbb{Q}_+$. *On note* $x = u/v$ *avec* $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}^*$ *et* $u \wedge v = 1$. *On pose* $r_{-1} = u$, $r_0 = v$, $r_d = 1$, $r_{d+1} = 0$ *et on écrit les divisions euclidiennes successives suivantes :* $u = q_0 \times v + r_1$, $v = q_1 \times r_1 + r_2$, $r_1 = q_2 \times r_2 + r_3$, $\ldots$, $r_{d-2} = q_{d-1} \times r_{d-1} + 1$ *et* $r_{d-1} = q_d \times 1 + 0$.

   a) *Qu'est-ce qui justifie l'existence du rang* $d \in \mathbb{N}$ *tel que* $r_d = 1$ *et* $r_{d+1} = 0$ *?*

   Les divisions euclidiennes effectuées correspondent à l'application de l'algorithme d'Euclide. Comme $u \wedge v = 1$, on sait que cet algorithme se termine par un reste égal à 1 suivi d'un reste nul. Ainsi,

   $$\boxed{\text{l'algorithme d'Euclide justifie l'existence de } d \in \mathbb{N} \text{ tel que } r_d = 1 \text{ et } r_{d+1} = 0.}$$

b) *Démontrer que, pour tout $k \in [\![0;d]\!]$, on a $x_k = r_{k-1}/r_k$ et $a_k = q_k$. Que dire de x_k et a_k lorsque $k \geqslant d+1$?*

Pour tout $k \in [\![0;d]\!]$, on note $\mathscr{Q}(k)$ la propriété

$$\mathscr{Q}(k): \quad x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$$

Initialisation : On a

$$\frac{r_{0-1}}{r_0} = \frac{u}{v} = x = x_0.$$

Donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $k \in [\![0;d-1]\!]$ tel que $\mathscr{Q}(k)$ est vraie et démontrons $\mathscr{Q}(k+1)$. On a

$$\frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} = q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

avec

$$0 \leqslant \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$$

puisque dans la division euclidienne $r_{k-1} = q_k \times r_k + r_{k+1}$, on a $0 \leqslant r_{k+1} < r_k$. Cela signifie que

$$\left\{\frac{r_{k-1}}{r_k}\right\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

Par hypothèse de récurrence, cela donne

$$\{x_k\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

et donc

$$x_{k+1} = \frac{1}{\{x_k\}} = \frac{r_k}{r_{k+1}}.$$

Donc $\mathscr{Q}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0;d]\!]$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in [\![0;d]\!], \qquad x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}.}$$

Pour tout $k \in [\![0;d]\!]$, on a

$$a_k = \lfloor x_k \rfloor = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = q_k$$

puisque $0 \leqslant r_{k+1}/r_k < 1$. Donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0;d]\!], \qquad a_k = q_k.}$$

On constate alors que

$$x_{d+1} = \frac{1}{\{x_d\}} = \frac{1}{\left\{\frac{r_{d-1}}{r_d}\right\}} = \frac{1}{\{r_{d-1}\}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

ce qui permet de démontrer (à l'aide d'une récurrence immédiate) que

$$\boxed{\forall k \geqslant d+1, \qquad x_k = a_k = +\infty.}$$

c) *En déduire que $x = [q_0, q_1, \ldots, q_{d-1}, q_d]$. L'écriture $x = [q_0, q_1, \ldots, q_{d-1}, q_d]$ s'appelle le développement en fraction continue du rationnel x.*

D'après la question A, on a

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_d, x_{d+1}].$$

En tenant compte des résultats établis à la question précédente, il vient

$$x = [q_0, q_1, \ldots, q_d, +\infty],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x = [q_0, q_1, \ldots, q_{d-1}, q_d].}$$

d) *Décomposer* 355/113 *en fraction continue.*

On a

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}},$$

donc

$$\boxed{\frac{355}{113} = [3, 7, 16].}$$

2. *Réciproquement, on suppose que l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N} : a_n = +\infty\}$ *est non vide. Démontrer qu'il existe* $d \in \mathbb{N}$ *tel que* $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$ *avec* $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{N}$*. En déduire que* $x \in \mathbb{Q}_+$*.*

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : a_n = +\infty\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. À ce titre, elle admet un plus petit élément. Comme $a_0 \neq +\infty$, on sait que ce plus petit élément est supérieur ou égal à 1. Cela nous permet de l'écrire $d + 1$ où $d \in \mathbb{N}$. On a donc $\forall k \in [\![0; d]\!],\ a_k \in \mathbb{N}$ et $a_{d+1} = +\infty$. Il s'ensuit que $x_{d+1} = +\infty$. D'après la question A, on a donc

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_d, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_d].$$

Donc

$$\boxed{x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d] \text{ avec } a_0, \dots, a_d \in \mathbb{N}.}$$

Dès lors, x s'écrit à l'aide d'un nombre fini de fractions d'entiers empilées, donc

$$\boxed{x \in \mathbb{Q}_+.}$$

Remarque culturelle :

On a ainsi démontré que les rationnels sont exactement les réels dont le développement en fraction continue est fini.

On pourrait alors se poser la question suivante : le développement en fraction continue d'un rationnel est-il unique ? La réponse est négative ! En fait, si x est un entier, il admet deux développements : $x = [x]$ et $x = [x - 1, 1]$. Et si x est un rationnel non entier, il possède également deux développements : celui qui est donné par l'algorithme d'Euclide : $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$ mais aussi le développement $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d - 1, 1]$. Pour assurer l'unicité du développement, on convient habituellement de ne garder que le développement $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$ avec $a_d \neq 1$ (sauf pour 1 que l'on écrit $1 = [1]$).

Christian Huygens a utilisé les fractions continues pour construire un automate planétaire donnant les positions relatives des planètes du système solaire.

C. <u>*Fraction continue d'un irrationnel*</u>

On suppose que x *est un nombre irrationnel positif. Les résultats de la question précédente nous disent alors qu'aucun* a_n *ne vaut* $+\infty$*, autrement dit que* $(a_n)_{n \geqslant 0}$ *est une suite d'entiers naturels. On peut alors introduire les deux suites* $(p_n)_{n \geqslant -1}$ *et* $(q_n)_{n \geqslant -1}$ *d'entiers naturels définies par* $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$*.*
Remarque : La suite $(q_n)_{n \geqslant -1}$ *n'a pas de lien avec les quotients rencontrés à la question B. 1.*

1. *Démontrer que* $(q_n)_{n \geqslant 1}$ *est strictement croissante et préciser sa limite.*

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \in \,]0; 1[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n > 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geqslant 1$. Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geqslant q_n + q_{n-1}$. Comme $q_0 = 1$, on en déduit immédiatement que $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geqslant 1$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{n+1} > q_n$. En conclusion

$$\boxed{(q_n)_{n \geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$$

Comme les q_n sont des entiers naturels, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geqslant n - 1$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} q_n = +\infty.}$$

2. a) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $[a_0, \dots, a_n, t] = (p_n + p_{n-1}/t)/(q_n + q_{n-1}/t)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a_0, \dots, a_n] = p_n/q_n$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{R}(n) : \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \ [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, t] = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{t}}.$$

<u>Initialisation :</u> Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, on a

$$[a_0, t] = a_0 + \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad \frac{p_0 + \dfrac{p_{-1}}{t}}{q_0 + \dfrac{q_{-1}}{t}} = \frac{a_0 + \dfrac{1}{t}}{1 + \dfrac{0}{t}} = a_0 + \frac{1}{t}$$

ce qui démontre que $\mathscr{R}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{R}(n)$ est vraie et prouvons $\mathscr{R}(n+1)$. Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, on a

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{t}\right] \\
&= \frac{\left(a_{n+1} + \frac{1}{t}\right)p_n + p_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \frac{1}{t}\right)q_n + q_{n-1}} \qquad \text{par H.R.} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1} + \dfrac{p_n}{t}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1} + \dfrac{q_n}{t}} \\
&= \frac{p_{n+1} + \dfrac{p_n}{t}}{q_{n+1} + \dfrac{q_n}{t}},
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\mathscr{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \qquad [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, t] = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{t}}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on applique cette formule pour $t = +\infty$, ce qui donne

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, +\infty] = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{+\infty}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{+\infty}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Donc, comme $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.}$$

b) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$. Que peut-on dire à propos de la fraction p_n/q_n ? La fraction p_n/q_n s'appelle la réduite d'ordre n de x.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1}p_n + p_{n-1} & a_{n+1}q_n + q_{n-1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

En prenant les déterminants, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{vmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1) \times (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}).$$

La suite $(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})_{n \geqslant 0}$ est donc géométrique de raison -1, ce qui permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n (p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1}).$$

Comme $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \times 0 - 1 \times 1 = -1$, on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}.}$$

Cette relation est une relation de Bézout. D'après le théorème de Bézout, on en déduit que p_{n-1} et q_{n-1} sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fraction } \frac{p_n}{q_n} \text{ est irréductible (pour tout } n \geqslant -1).}$$

3. a) *Démontrer que les suites $(p_{2n}/q_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(p_{2n-1}/q_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.*

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n-1}q_{2n} - q_{2n-1}p_{2n}}{q_{2n-1}q_{2n}} = \frac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n-1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}},$$

où la troisième égalité découle du résultat de la question précédente. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right) = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{(a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_n - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)p_n}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n)}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(-1)^n}{q_{n+2}q_n} \qquad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < 0$$

ce qui démontre que

$$\begin{cases} (p_{2n}/q_{2n})_{n \geqslant 1} \text{ est strictement croissante} \\ (p_{2n-1}/q_{2n-1})_{n \geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$$

En conclusion

$$\boxed{\text{les suites } \left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geqslant 1} \text{ et } \left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les suites } \left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geqslant 1} \text{ et } \left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geqslant 1} \text{ convergent vers une limite commune.}}$$

b) *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $p_{2n}/q_{2n} \leqslant x \leqslant p_{2n-1}/q_{2n-1}$ *et en déduire que* $\lim p_n/q_n = x$. *L'écriture illimitée* $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$ *s'appelle le développement en fraction continue de l'irrationnel* x.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, t]$ est décroissante (car t est en dessous d'un nombre impair de traits de fraction). Il s'ensuit que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] \geqslant [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty].$$

Or, d'après A,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] = x$$

et

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}] = \frac{p_{2n}}{q_{2n}},$$

donc

$$x \geqslant \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\cdot$$

La fonction $t \longmapsto [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, t]$ est croissante (car t est en dessous d'un nombre pair de traits de fraction). Il s'ensuit que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, x_{2n}] \leqslant [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, +\infty].$$

Or, d'après A,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, x_{2n}] = x$$

et

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, +\infty] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}] = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},$$

donc

$$x \leqslant \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\cdot$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leqslant x \leqslant \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\cdot}$$

Comme $(p_{2n}/q_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(p_{2n-1}/q_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite α, un passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus nous dit que

$$\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,$$

ce qui démontre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = x.$$

Le cours nous dit alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.}$$

Remarque culturelle :

On a ainsi démontré que tous les nombres réels ont un développement en fraction continue (infini lorsque le nombre réel est irrationnel).

Comme dans le cas des rationnels, on peut se poser la question suivante : le développement en fraction continue d'un irrationnel est-il unique ? La réponse est cette fois positive ! Y réfléchir . . .

Déjà utilisées chez les mathématiciens indiens au Moyen Âge, les fractions continues sont étudiées en Europe dès le XVII-ème siècle et constituent encore aujourd'hui un vaste sujet de recherche : près de 3 000 articles ont été publiés sur ce sujet au XX-ème siècle.

c) *Décomposer $\sqrt{2}$ en fraction continue.*

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+(\sqrt{2}-1)\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\\
&= 1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}\\
&= \cdots\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

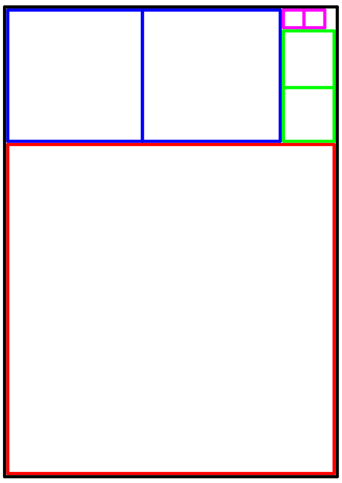
donc

$$\boxed{\sqrt{2}=[1,2,2,2,\underline{\qquad},2,\underline{\qquad}\cdots].}$$

Remarque culturelle :

Une feuille de papier A4 est au format $21\times 29,7$. Pourquoi ? Tout simplement parce qu'on souhaite garder les mêmes proportions en découpant une telle feuille en deux parties égales ! Autrement dit, une feuille de longueur L et de largeur ℓ doit donner deux feuilles (de format A5) de longueur ℓ et de largeur $L/2$ telles que $\ell/(L/2)=L/\ell$, c'est-à-dire $L/\ell=\sqrt{2}$. C'est pour cette raison que les feuilles de papier ont un rapport longueur/largeur égale à $\sqrt{2}$. Une feuille A1 est ainsi une feuille d'un mètre-carré dont les dimensions sont $59,4\times 84,1$; une feuille A2 est un rectangle d'un demi mètre-carré dont les dimensions sont $42\times 59,5$, une feuille A3 mesure un quart de mètre-carré dans les proportions $29,7\times 42$, une feuille A4 est un huitième de mètre-carré au format $21\times 29,7$, etc. Mais quel rapport avec le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue, me direz-vous ? Je vous réponds en vous proposant un joli puzzle !

Essayons de fabriquer avec une feuille A4 un carré le plus grand possible. Celui-ci est clairement de format 21×21 et l'on ne peut en fabriquer qu'un seul. Il nous reste alors une bande de papier de format $8,7\times 21$. Dans cette bande de papier, on recommence le processus en fabriquant des carrés de taille maximale, c'est-à-dire de format $8,7\times 8,7$. Cette fois, on en fabrique deux et il reste une bande de format $3,6\times 8,7$. Cette bande est semblable à la précédente (c'est-à-dire que son rapport longueur/largeur est égal à $1+\sqrt{2}$, comme pour la bande $8,7\times 21$). On peut donc reprendre le processus indéfiniment en construisant à chaque étape deux carrés dans la bande obtenue comme chute à l'étape précédente. On obtient le joli découpage suivant :



On a ainsi fabriqué 1 carré, puis 2 carrés, puis encore 2 carrés, puis encore 2 carrés, etc. On retrouve le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue.

Saurez-vous expliquer pourquoi ?

D. *Approximation rationnelle*

1. a) *Dans cette question, on suppose que x est un nombre rationnel positif ou nul. Soit p/q un nombre rationnel positif ou nul distinct de x (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). Démontrer l'existence d'un nombre réel $A > 0$ ne dépendant que de x tel que $|x - p/q| \geqslant A/q$. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels p/q (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tels que $|x - p/q| \leqslant 1/q^2$.*

On écrit x sous la forme $x = u/v$ avec $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{u}{v} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|uq - pv|}{vq}\cdot$$

Or $uq - pv$ est un entier relatif non nul. En effet, si on avait $uq - pv = 0$, on aurait $x = p/q$ ce qui est absurde ! Donc

$$|uq - pv| \geqslant 1,$$

ce qui implique que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{vq}\cdot$$

En posant $A = 1/v$, on constate que

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ telle que } \left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q}\cdot}$$

Considérons un rationnel p/q distinct de x tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}\cdot$$

On constate deux choses :

- On a
$$\frac{A}{q} \leqslant \frac{1}{q^2},$$
c'est-à-dire
$$q \leqslant \frac{1}{A},$$
ce qui signifie que q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.
- D'après l'inégalité triangulaire inversée, on a
$$\frac{|p|}{q} - |x| \leqslant \left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$
ce qui signifie que
$$|p| \leqslant q|x| + \frac{1}{q}\cdot$$
On a alors
$$|p| \leqslant \frac{|x|}{A} + 1,$$
ce qui implique que p ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Il s'ensuit que la fraction p/q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } x \in \mathbb{Q}, \text{ il n'existe qu'un nombre fini de rationnels } \frac{p}{q} \text{ tels que } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}\cdot}$$

b) *On suppose que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x - p_n/q_n| \leqslant 1/{q_n}^2$. En déduire qu'il existe un nombre infini de nombres rationnels distincts p/q (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tels que $|x - p/q| \leqslant 1/q^2$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(p_{2k}/q_{2k})_{k\geqslant 1}$ et $(p_{2k-1}/q_{2k-1})_{k\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes qui convergent vers x, on a

$$\frac{p_n}{q_n} \leqslant x \leqslant \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{p_n}{q_n},$$

selon que n est pair ou impair. Dans les deux cas, cela implique que la distance entre x et p_n/q_n est inférieure ou égale à la distance entre p_{n+1}/q_{n+1} et p_n/q_n, c'est-à-dire

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Or

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{|p_{n+1}q_n-q_{n+1}p_n|}{q_{n+1}q_n}=\frac{1}{q_{n+1}q_n}\leqslant\frac{1}{{q_n}^2}$$

où l'on a utilisé le résultat de la question C. 2. b) et le fait que $q_{n+1}\geqslant q_n$. Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{{q_n}^2}\cdot}$$

La suite des réduites $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ prenant une infinité de valeurs distinctes (puisque $(p_{2k}/q_{2k})_{k\geqslant 1}$ est strictement croissante), on en déduit que

$$\boxed{\text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \text{ il existe une infinité de rationnels distincts } \frac{p}{q} \text{ tels que } \left|x-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}\cdot}$$

Remarque culturelle :

Nous venons de démontrer le critère d'irrationnalité de Dirichlet : un nombre réel x est irrationnel si, et seulement si, il existe une infinité de nombres rationnels p/q tels que $|x-p/q|\leqslant 1/q^2$. Ce résultat signifie qu'un irrationnel est caractérisé par le fait qu'il s'approche « mieux » qu'un rationnel par une approximation rationnelle !

Le théorème d'Hurwirtz améliore celui de Dirichlet : un nombre réel x est irrationnel si, et seulement si, il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|x-p/q|<1/(\sqrt{5}q^2)$. La constante $\sqrt{5}$ est optimale : pour x égal par exemple au nombre d'or, si l'on remplace, dans la formule ci-dessus, $\sqrt{5}$ par n'importe quel nombre strictement plus grand, l'inégalité (même large) n'est vérifiée que par un ensemble fini de rationnels p/q. En ce sens, le nombre d'or est «l'»irrationnel le plus mal approché par des fractions. C'est pourquoi on dit que le nombre d'or est « le » plus irrationnel de tous les irrationnels !

---

2. *Dans cette question, on suppose à nouveau que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C.*

   a) *Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $|x-p_n/q_n|/|x-p_{n-1}/q_{n-1}|=q_{n-1}/(q_nx_{n+1})$ et en déduire que la suite $(|x-p_n/q_n|)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.*

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\left|x-\dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|x-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|} &= \frac{\left|[a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,x_{n+1}]-\dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|[a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,x_{n+1}]-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|} && \text{d'après A}\\
&= \frac{\left|\dfrac{p_n+\dfrac{p_{n-1}}{x_{n+1}}}{q_n+\dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}}}-\dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|\dfrac{p_n+\dfrac{p_{n-1}}{x_{n+1}}}{q_n+\dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}}}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|} && \text{d'après C. 2. a)}\\
&= \frac{\left|\dfrac{q_np_{n-1}-p_nq_{n-1}}{(x_{n+1}q_n+q_{n-1})q_n}\right|}{\left|\dfrac{(p_nq_{n-1}-q_np_{n-1})x_{n+1}}{(x_{n+1}q_n+q_{n-1})q_{n-1}}\right|}\\
&= \frac{\left|\dfrac{-(-1)^{n+1}}{(x_{n+1}q_n+q_{n-1})q_n}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x_{n+1}}{(x_{n+1}q_n+q_{n-1})q_{n-1}}\right|} && \text{d'après C. 2. b)}\\
&= \frac{q_{n-1}}{q_nx_{n+1}}\cdot
\end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\left|x-\dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|x-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|}=\frac{q_{n-1}}{q_nx_{n+1}}\cdot}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_{n-1} \leqslant q_n$ (puisque la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante d'après C. 1. et $q_1 = a_0 \geqslant q_0$) et $x_{n+1} > 1$ (puisque $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$ où $\{x_n\} \in]0;1[$), donc

$$\frac{\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right|}{\left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|} = \frac{q_{n-1}}{q_n x_{n+1}} < 1,$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|\right)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$$

b) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p/q un nombre rationnel positif (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $q < q_n$. Démontrer que p/q ne peut pas être compris entre p_n/q_n et p_{n-1}/q_{n-1} au sens large. En déduire que $|x - p/q| > |x - p_n/q_n|$.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que p/q est compris entre p_n/q_n et p_{n-1}/q_{n-1} au sens large. La distance entre p/q et p_n/q_n est alors inférieure ou égale à celle entre p_{n-1}/q_{n-1} et p_n/q_n, c'est-à-dire

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

Or

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|p_n q - q_n p|}{q p_{n-1}}$$

et

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{|p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}|}{q_n p_{n-1}} = \frac{1}{q_n p_{n-1}}$$

où l'on a utilisé le résultat de la question C. 2. b). Donc

$$\frac{|p_n q - q_n p|}{q p_{n-1}} \leqslant \frac{1}{q_n p_{n-1}},$$

c'est-à-dire

$$|p_n q - q_n p| \leqslant \frac{q}{q_n} < 1.$$

Comme $p_n q - q_n p$ est un entier, on en déduit que

$$p_n q - q_n p = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}.$$

C'est absurde ! En conclusion,

$$\boxed{\frac{p}{q} \text{ ne peut pas être compris entre } \frac{p_n}{q_n} \text{ et } \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ au sens large.}}$$

Pour résumer, on sait que p/q n'est pas entre p_n/q_n et p_{n-1}/q_{n-1} (au sens large), que x est entre p_n/q_n et p_{n-1}/q_{n-1} (au sens strict) et que x est plus proche de p_n/q_n que de p_{n-1}/q_{n-1}. On en déduit que la distance entre x et p/q est strictement supérieure à la distance entre x et p_n/q_n. En conclusion,

$$\boxed{\left|x - \frac{p}{q}\right| > \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|.}$$

Remarque culturelle :

Les réduites sont donc les meilleures approximations possibles d'un irrationnel par des rationnels « à petits dénominateurs ».

E. *Fraction continue de* e

Dans cette question, on suppose que $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{3n} = 1$, $a_{3n+1} = 1$ et $a_{3n+2} = 2n$. On reprend les notations de la partie C.

1. *On définit une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_0(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R},\ f_1(t) = 1 + t$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+2}(t) = f_{n+1}(t) + t^2 f_n(t)/[(2n+1)(2n+3)]$.*

   a) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients positifs.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}(n)$ la propriété

$$\mathscr{H}(n): \quad \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

   Initialisation : On a $\forall t \in \mathbb{R},\ f_0(t) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f_1(t) = 1 + t$ donc $\mathscr{H}(0)$ et $\mathscr{H}(1)$ sont vraies.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{H}(n+2)$. Il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ avec $a_n \neq 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ et il existe $b_0, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ avec $b_n \neq 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n+1} t^{n+1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
& f_{n+2}(t) \\
= \quad & f_{n+1}(t) + \frac{t^2}{(2n+1)(2n+3)} f_n(t) \\
= \quad & b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n+1} t^{n+1} + \frac{t^2}{(2n+1)(2n+3)} (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\
= \quad & b_0 + b_1 t + \Big(b_2 + \frac{a_0}{(2n+1)(2n+3)}\Big) t^2 + \cdots + \Big(b_{n+1} + \frac{a_{n-1}}{(2n+1)(2n+3)}\Big) t^{n+1} + \frac{a_n}{(2n+1)(2n+3)} t^{n+2}
\end{aligned}$$

   ce qui démontre que f_{n+2} est une fonction polynomiale de degré $n+2$ (car $a_n \neq 0$) à coefficients positifs. Donc $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence double, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ à coefficients positifs.}}$$

   b) *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(t) = f'_{n+1}(t) + t f_n(t)/(2n+1)$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(t) = \mathrm{e}^t - \dfrac{\mathrm{e}^t}{2n+1} \displaystyle\int_0^t u f_n(u)\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$.*

   Youpi ! Encore une récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{T}(n)$ la propriété

$$\mathscr{T}(n): \quad \forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(t) = f'_{n+1}(t) + \frac{t f_n(t)}{2n+1}$$

   Initialisation : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'_1(t) + \frac{t}{2 \times 0 + 1} f_0(t) = 1 + \frac{t \times 1}{2 \times 0 + 1} = 1 + t = f_1(t)$$

   et, comme $\forall t \in \mathbb{R},\ f_2(t) = 1 + t + t^2/3$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'_2(t) + \frac{t}{2 \times 1 + 1} f_1(t) = 1 + \frac{2}{3} t + \frac{t}{3}(1 + t) = 1 + t + \frac{t^2}{3} = f_2(t).$$

   Cela démontre que $\mathscr{T}(0)$ et $\mathscr{T}(1)$ sont vraies.

   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{T}(n-1)$ et $\mathscr{T}(n)$ sont vraies et démontrons $\mathscr{T}(n+1)$. En dérivant les deux membres de l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+2}(t) = f_{n+1}(t) + \frac{t^2 f_n(t)}{(2n+1)(2n+3)},$$

   on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t) = f'_{n+1}(t) + \frac{2t f_n(t) + t^2 f'_n(t)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

En soustrayant ces deux dernières relations, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t)-f_{n+2}(t) = f'_{n+1}(t)-f_{n+1}(t)+\frac{2tf_n(t)}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{t^2}{(2n+1)(2n+3)}\big(f'_n(t)-f_n(t)\big)\cdot$$

Avec les hypothèses de récurrence, il vient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t)-f_{n+2}(t) = -\frac{tf_n(t)}{2n+1}+\frac{2tf_n(t)}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{t^2}{(2n+1)(2n+3)}\,\frac{tf_{n-1}(t)}{2n-1},$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t) - f_{n+2}(t) = -\frac{(2n+1)tf_n(t)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{t^3 f_{n-1}(t)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t) - f_{n+2}(t) = -\frac{t}{2n+3}\Big(f_n(t) + \frac{t^2 f_{n-1}(t)}{(2n-1)(2n+1)}\Big)\cdot$$

Dans les parenthèses, on reconnait $f_{n+1}(t)$, ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+2}(t) - f_{n+2}(t) = -\frac{t}{2n+3}f_{n+1}(t).$$

Donc $\mathscr{T}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, $\mathscr{T}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t) = f'_{n+1}(t) + \frac{tf_n(t)}{2n+1}\cdot}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant les deux membres de cette égalité par e^{-t}, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+1}(t)\,\mathrm{e}^{-t} - f_{n+1}(t)\,\mathrm{e}^{-t} = -\frac{tf_n(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{2n+1}\cdot$$

Le membre de gauche est la dérivée de $t \longmapsto f_{n+1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. En intégrant cette égalité entre 0 et t, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \big[f_{n+1}(u)\,\mathrm{e}^{-u}\big]_0^t = -\int_0^t \frac{uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}}{2n+1}\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t)\,\mathrm{e}^{-t} - f_{n+1}(0) = -\frac{1}{2n+1}\int_0^t uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \qquad (*).$$

En évaluant en $t = 0$ la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_{k+2}(t) = f_{k+1}(t) + \frac{t^2 f_k(t)}{(2k+1)(2k+3)},$$

on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_{k+2}(0) = f_{k+1}(0),$$

ce qui démontre que la suite $\big(f_k(0)\big)_{k\geqslant 0}$ est constante. Comme $f_0(0) = 1$, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_k(0) = 1.$$

En reportant cette information dans $(*)$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t)\,\mathrm{e}^{-t} = 1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^t uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

En définitive, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(t) = \mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\int_0^t uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.}$$

c) *Prouver que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$. *En déduire que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^t$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On traite deux cas.

- Cas particulier : $t \geqslant 0$

  On a $\forall u \in [0;t]$, $f_n(u) \geqslant 0$ puisque f_n est une fonction polynomiale à coefficients positifs. Donc $\forall u \in [0;t]$, $uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$\frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\int_0^t uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u \geqslant 0.$$

  Cela implique que

$$0 \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^t\,.$$

- Cas général : $t \in \mathbb{R}$

  Comme f_{n+1} est une fonction polynomiale à coefficients positifs, on peut écrire

$$f_{n+1}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n+1}t^{n+1}$$

  où $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$|f_{n+1}(t)| = |a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n+1}t^{n+1}| \leqslant a_0 + a_1|t| + \cdots + a_{n+1}|t|^{n+1} = f_{n+1}(|t|).$$

  d'après l'inégalité triangulaire. Or, d'après le premier cas, on a $f_{n+1}(|t|) \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$, donc

$$|f_{n+1}(t)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}\,.$$

L'inégalité $\forall t \in \mathbb{R},\ |f_0(t)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$ étant évidente, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}.}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_{n+1}(t) - \mathrm{e}^t\,| = \frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\left|\int_0^t uf_n(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\left|\int_0^t u|f_n(u)|\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\left|\int_0^t u\,\mathrm{e}^{|u|}\,\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u\right|.$$

où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire pour les intégrales. Or

$$\frac{\mathrm{e}^t}{2n+1}\left|\int_0^t u\,\mathrm{e}^{|u|}\,\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^t.}$$

2. *Dans cette question, on suppose que* $a_0 = 2$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n+1} = 1$, $a_{3n+2} = 2n$ *et* $a_{3n+3} = 1$. *On reprend les notations de la partie C.*

a) *Prouver que, pour* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $p_{3n+7} = (4n+6)p_{3n+4} + p_{3n+1}$ *et* $q_{3n+7} = (4n+6)q_{3n+4} + q_{3n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
p_{3n+7} &= a_{3n+7}p_{3n+6} + p_{3n+5}\\
&= p_{3n+6} + p_{3n+5} \qquad \text{car } a_{3n+7} = 1\\
&= (a_{3n+6}p_{3n+5} + p_{3n+4}) + p_{3n+5}\\
&= 2p_{3n+5} + p_{3n+4} \qquad \text{car } a_{3n+6} = 1\\
&= 2(a_{3n+5}p_{3n+4} + p_{3n+3}) + p_{3n+4}\\
&= (4n+5)p_{3n+4} + 2p_{3n+3} \qquad \text{car } a_{3n+5} = 2n+2\\
&= (4n+6)p_{3n+4} - p_{3n+4} + 2p_{3n+3} \qquad \text{Binet !}\\
&= (4n+6)p_{3n+4} - (a_{3n+4}p_{3n+3} + p_{3n+2}) + 2p_{3n+3}\\
&= (4n+6)p_{3n+4} + p_{3n+3} - p_{3n+2} \qquad \text{car } a_{3n+4} = 1\\
&= (4n+6)p_{3n+4} + (a_{3n+3}p_{3n+2} + p_{3n+1}) - p_{3n+2}\\
&= (4n+6)p_{3n+4} + p_{3n+1} \qquad \text{car } a_{3n+3} = 1.
\end{aligned}$$

Comme $(q_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait la même relation de récurrence, on prouve de même que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_{3n+7} = (4n+6)q_{3n+4} + q_{3n+1}.$$

Cela signifie que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } p_{3n+7} = (4n+6)p_{3n+4} + p_{3n+1} \text{ et } q_{3n+7} = (4n+6)q_{3n+4} + q_{3n+1}.}$$

b) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{3n+1} = (2n)!f_n(1/2)/n!$ et $q_{3n+1} = (2n)!f_n(-1/2)/n!$.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

Pour démontrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ coïncide avec la suite $(p_{3n+1})_{n\geqslant 0}$, nous allons démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la même relation de récurrence double que $(p_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et que $(p_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ont les mêmes deux premiers termes.

- On a

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = 1.2 + 1 = 3$$

et

$$p_4 = a_4p_3+p_2 = a_4(a_3p_2+p_1)+p_2 = (a_4a_3+1)(a_2p_1+p_0)+a_4p_1 = (1.1+1)(2.3+2)+1.3 = 19.$$

Par ailleurs, on a

$$v_1 = \frac{2!}{1!} f_1\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(1+\frac{1}{2}\Big) = 3$$

et

$$v_2 = \frac{4!}{2!} f_2\Big(\frac{1}{2}\Big) = 12\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\Big) = 19.$$

Donc $(p_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ont les mêmes deux premiers termes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+2} &= \frac{(2n+4)!}{(n+2)!} f_{n+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&= 2\frac{(2n+3)!}{(n+1)!}\left[f_{n+1}\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 f_n\Big(\frac{1}{2}\Big)}{(2n+1)(2n+3)}\right]\\
&= 2\frac{(2n+3)!}{(n+1)!} f_{n+1}\Big(\frac{1}{2}\Big) + 2\frac{(2n+3)!}{(n+1)!}\frac{f_n\Big(\frac{1}{2}\Big)}{4(2n+1)(2n+3)}\\
&= (4n+6)\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} f_{n+1}\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&= (4n+6)v_{n+1} + v_n
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $(p_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ satisfont la même relation de récurrence double.

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{3n+1} = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(\frac{1}{2}\Big).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(-\frac{1}{2}\Big).$$

On procède comme ci-dessus.

- On a

$$q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = 1.1 + 0 = 1$$

et

$$q_4 = (a_4a_3+1)(a_2q_1+q_0) + a_4q_1 = (1.1+1)(2.1+1) + 1.1 = 7.$$

Par ailleurs, on a

$$w_1 = \frac{2!}{1!} f_1\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = 1$$

et

$$w_2 = \frac{4!}{2!} f_2\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 12\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\Big) = 7.$$

Donc $(q_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ ont les mêmes deux premiers termes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un calcul similaire à celui effectué ci-dessus donne

$$w_{n+2} = (4n+6)w_{n+1} + w_n$$

ce qui démontre que $(q_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ satisfont la même relation de récurrence double.

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_{3n+1} = \frac{(2n)!}{n!} f_n\Big(-\frac{1}{2}\Big).}$$

c) *En conclure que* $\mathrm{e} = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\dots,1,2n,1,1,2n+2,1,\dots]$.

La question C. 3. b) nous dit que

$$[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\dots,1,2n,1,1,2n+2,1,\dots] = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}}$$

car $(p_{3n+1}/q_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite de $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$.

Or

$$\frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}} = \frac{\dfrac{(2n)!}{n!} f_n\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\dfrac{(2n)!}{n!} f_n\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)} = \frac{f_n\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{f_n\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)}$$

et, d'après la question E. 1. c), on a

$$\frac{f_n\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{f_n\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{\mathrm{e}^{-1/2}} = \mathrm{e},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}} = \mathrm{e}\,.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\mathrm{e} = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\dots,1,2n,1,1,2n+2,1,\dots].}$$

Remarque culturelle :

C'est Euler qui a découvert le développement en fraction continue de e. Plus précisément, il a démontré que

$$\mathrm{e}^{1/s} = [1, s-1, 1, 1, 3s-1, 1, 1, 5s-1, 1, 1, 7s-1, 1, \dots].$$

Notons que le développement de e est infini, ce qui redémontre que e est irrationnel.

Le développement de π, quant à lui, n'est pas connu ! Il débute par $\pi = [3,7,15,1,\dots]$. La réduite $[3,7,15,1] = 355/113$ donne déjà une approximation de π à 10^{-6} près !

F. <u>*Théorème de Lagrange*</u>

On suppose que x est un nombre irrationnel positif. On reprend les notations de la partie C. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] = \{\alpha + \beta\sqrt{d} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

1. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ est un corps.*

On a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] \subset \mathbb{R}$, ce qui nous incite à démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

On a

$$1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,].$$

Soient $\alpha + \beta\sqrt{d}, \alpha' + \beta'\sqrt{d}$ deux éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ (avec $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Q}$). On a

$$(\alpha + \beta\sqrt{d}) - (\alpha' + \beta'\sqrt{d}) = \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$$

et, si $\alpha' + \beta'\sqrt{d} \neq 0$, on a

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{d}}{\alpha' + \beta'\sqrt{d}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{d})(\alpha' - \beta'\sqrt{d})}{\alpha'^2 - db'^2} = \underbrace{\frac{aa' - dbb'}{\alpha'^2 - db'^2}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{\alpha'\beta - ab'}{\alpha'^2 - db'^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] \text{ est un sous-corps de } \mathbb{R}.}$$

2. *Dans cette question, on suppose que le développement en fraction continue du nombre irrationnel x est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}^*$ tels que l'on ait $x = [a_0, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, \ldots]$.*

   a) *On pose $y = [a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, \ldots]$. Démontrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.*

   On constate que
$$y = [a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+t-1}, y].$$
   Le résultat de la question C. 2. a) nous dit alors qu'il existe des entiers $p, p', q, q' \in \mathbb{N}$ tels que
$$y = \frac{p + \dfrac{p'}{y}}{q + \dfrac{q'}{y}},$$
   c'est-à-dire
$$qy^2 + (q' - p)y - p' = 0.$$
   Si l'on note d le discriminant de cette équation du second degré, c'est-à-dire
$$d = (q' - p)^2 + 4qp' \in \mathbb{N},$$
   on a alors
$$y = \frac{p - q' + \sqrt{d}}{2q} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{p - q' - \sqrt{d}}{2q},$$
   ce qui permet de conclure qu'
$$\boxed{\text{il existe } d \in \mathbb{N} \text{ tel que } y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,].}$$

   b) *En déduire que $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.*

   On constate que
$$\begin{aligned} x &= [a_0, \ldots, a_{n_0-1}, y] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n_0-1} + \cfrac{1}{y}}}}. \end{aligned}$$
   Le nombre x est donc obtenu en effectuant des sommes et des quotients d'éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ (puisque les a_k et y sont dans $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$). Comme $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ est un corps, cela implique que
$$\boxed{x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,].}$$

3. *Réciproquement, on suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$. On souhaite démontrer que le développement en fraction continue de x est périodique à partir d'un certain rang.*

   a) *Justifier l'existence de $A, B, C \in \mathbb{Z}$ avec $A \neq 0$ tels que $Ax^2 + Bx + C = 0$.*

   Comme $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ il existe deux rationnels α et β tels que $x = \alpha + \beta\sqrt{d}$. On constate alors que
$$\begin{aligned} x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 d &= (\alpha + \beta\sqrt{d})^2 - 2\alpha(\alpha + \beta\sqrt{d}) + \alpha^2 - \beta^2 d \\ &= \alpha^2 + \beta^2 d + 2\alpha\beta\sqrt{d} - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta\sqrt{d} + \alpha^2 - \beta^2 d \\ &= 0. \end{aligned}$$
   En multipliant cette relation par le carré du produit des dénominateurs des rationnels α et β (qui est non nul), on conclut qu'
$$\boxed{\text{il existe } A, B, C \in \mathbb{Z} \text{ avec } A \neq 0 \text{ tels que } Ax^2 + Bx + C = 0.}$$

b) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n {x_{n+1}}^2 + B_n x_{n+1} + C_n = 0$ où A_n, B_n, C_n désignent les entiers $A_n = A{p_n}^2 + Bp_n q_n + C{q_n}^2$, $B_n = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1}$ et $C_n = A_{n-1}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après A et C. 2. a), on a

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}] = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{x_{n+1}}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}}} = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}\cdot$$

En reportant dans la relation $Ax^2 + Bx + C = 0$, il vient

$$A\Big(\frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}\Big)^2 + B\Big(\frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}\Big) + C = 0,$$

c'est-à-dire

$$A(p_n x_{n+1} + p_{n-1})^2 + B(p_n x_{n+1} + p_{n-1})(q_n x_{n+1} + q_{n-1}) + C(q_n x_{n+1} + q_{n-1}) = 0.$$

En développant, on obtient

$$\begin{array}{c}(A{p_n}^2 + Bp_n q_n + C{q_n}^2){x_{n+1}}^2 + \big(2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1}\big)x_{n+1} \\ +(A{p_{n-1}}^2 + Bp_{n-1} q_{n-1} + C{q_{n-1}}^2) = 0.\end{array}$$

On en conclut que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } A_n {x_{n+1}}^2 + B_n x_{n+1} + C_n = 0.}$$

c) *Démontrer que les suites $(A_n)_{n \geqslant 0}$* et *$(C_n)_{n \geqslant 0}$ sont bornées. Indication : Utiliser D. 1. b)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. La question D. 1. b) nous dit que

$$\Big| x - \frac{p_n}{q_n} \Big| \leqslant \frac{1}{{q_n}^2},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{p_n}{q_n} = x + \frac{\theta_n}{{q_n}^2} \qquad \text{où} \qquad |\theta_n| \leqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$p_n = q_n x + \frac{\theta_n}{q_n}\cdot$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & A{p_n}^2 + Bp_n q_n + C{q_n}^2 \\ & = & A\Big(q_n x + \dfrac{\theta_n}{q_n}\Big)^2 + B\Big(q_n x + \dfrac{\theta_n}{q_n}\Big)q_n + C{q_n}^2 \\ & = & A{q_n}^2 x^2 + 2A\theta_n x + A\dfrac{{\theta_n}^2}{{q_n}^2} + B{q_n}^2 x + B\theta_n + C{q_n}^2 \\ & = & (\underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{=0}){q_n}^2 + 2Ax + A\dfrac{{\theta_n}^2}{{q_n}^2} + B\theta_n \end{array}$$

donc

$$|A_n| = \Big| 2Ax + A\frac{{\theta_n}^2}{{q_n}^2} + B\theta_n \Big| \leqslant 2|A|x + |A|\frac{{\theta_n}^2}{{q_n}^2} + |B\theta_n| \leqslant 2|A|x + |A| + |B|.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n \geqslant 0} \text{ est bornée.}}$$

Comme $(C_n)_{n \geqslant 0} = (A_{n+1})_{n \geqslant 0}$ et comme $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (C_n)_{n \geqslant 0} \text{ est bornée.}}$$

d) *Démontrer, avec courage, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ${B_n}^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC$. En déduire que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
& {B_n}^2 - 4A_nC_n \\
= \; & \big(2Ap_np_{n-1} + B(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2Cq_nq_{n-1}\big)^2 \\
& \quad -4(A{p_n}^2 + Bp_nq_n + C{q_n}^2)(A{p_{n-1}}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + C{q_{n-1}}^2) \\
= \; & \text{ calculs} \\
= \; & B^2\big((p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n)^2 - 4p_nq_{n-1}p_{n-1}q_n\big) - 4AC({p_n}^2{q_{n-1}}^2 + {p_{n-1}}^2{q_n}^2 - 2p_nq_{n-1}p_{n-1}q_n) \\
= \; & (B^2 - 4AC)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)^2 \\
= \; & B^2 - 4AC \qquad \text{car } p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1} \text{ d'après C. 2. b)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad {B_n}^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC.}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n| = \sqrt{B^2 - 4AC + 4A_nC_n} \leqslant \sqrt{B^2 - 4AC + 4\sup(|A_n|)\sup(|C_n|)},$$

donc

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée.}}$$

e) *Conclure.*

Comme $(A_n)_{n\geqslant 0}$, $(B_n)_{n\geqslant 0}$ et $(C_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites bornées à valeurs entières, l'ensemble $\{(A_n, B_n, C_n) : n \geqslant 0\}$ est fini. D'après le principe des tiroirs, il existe donc au moins trois indices i, j, k distincts deux à deux tels que $(A_i, B_i, C_i) = (A_j, B_j, C_j) = (A_k, B_k, C_k)$ (en fait, il existe même une infinité de tels indices).
Alors x_{i+1}, x_{j+1} et x_{k+1} sont les solutions d'une même équation du second degré (car les A_k sont non nuls puisque $A \neq 0$).
Cela implique que deux des trois nombres x_{i+1}, x_{j+1} et x_{k+1} sont égaux. Autrement dit, il existe deux entiers $p < q$ tels que $x_p = x_q$.
Comme $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 1/\{x_n\}$, on en déduit que les termes qui suivent x_p se reproduisent à partir de x_q, c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est $(q-p)$-périodique à partir du rang p.
Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lfloor x_n \rfloor$, on en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est également périodique à partir d'un certain rang.
En conclusion,

$$\boxed{\text{le développement en fraction continue de } x \text{ est périodique à partir d'un certain rang.}}$$

Remarque culturelle :

Nous venons de démontrer le théorème de Lagrange : Un irrationnel est quadratique (c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{d}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ et $d \in \mathbb{N}$) si, et seulement si, son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.