

SUITES

CORRECTION

Exercice 1

Nous avons tous deux parents, quatre grands-parents, huit arrière-grands-parents, etc. Si l'on ne tient pas compte des mariages entre cousins plus ou moins éloignés, remonter une génération fait doubler le nombre d'ancêtres. Il est donc facile de calculer le nombre d'ascendants : à la n -ème génération, nous en avons 2^n . Le problème se complique chez les abeilles. En effet, si chaque femelle a toujours un père une mère, les mâles, en revanche, n'ont qu'un seul parent : une mère. Le but de cet exercice est d'étudier le nombre d'ascendants d'une abeille à chaque génération.

On considère Willy un faux-bourdon (une abeille mâle) et Maya une butineuse (une abeille femelle) et l'on note m_n le nombre d'ascendants mâles à la n -ème génération de Willy ; f_n le nombre d'ascendants femelles à la n -ème génération de Willy ; $a_n = m_n + f_n$ le nombre d'ascendants à la n -ème génération de Willy et b_n le nombre d'ascendants à la n -ème génération de Maya. On suppose que la génération 1 est celle de Willy. On a donc $a_1 = 1$ (Willy lui-même).

1. Que valent a_2 et a_3 ?

Willy a une mère qui a elle-même un père et une mère, donc

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad a_3 = 2$$

2. Soit $n \geq 1$. Justifier que $f_{n+1} = a_n$ et $m_{n+1} = f_n$ et en déduire que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Chaque abeille a une mère et seules les abeilles femelles ont un père, donc

$$f_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad m_{n+1} = f_n.$$

Il s'ensuit que

$$a_{n+2} = f_{n+2} + m_{n+2} = a_{n+1} + f_{n+1} = a_{n+1} + a_n$$

donc

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, déterminer l'expression de a_n en fonction de n . On notera $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ le nombre d'or et on remarquera que $(1 - \sqrt{5})/2 = -1/\varphi$.

D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente double, dont l'équation caractéristique est $q^2 - q - 1 = 0$. Les racines de cette équation sont φ et $-1/\varphi$. On sait alors, d'après le cours, qu'il existe des constantes réelles A et B telles que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$$

En prolongeant la suite pour $n = 0$, on a $a_0 = a_2 - a_1 = 0$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient alors

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \varphi A - \frac{1}{\varphi}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} \\ B = -\frac{\varphi}{1 + \varphi^2} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right).$$

4. *Que vaut le nombre b_n ?*

On peut évidemment refaire un raisonnement analogue au précédent mais il y a beaucoup plus astucieux... Il suffit d'imaginer que Maya est la mère de Willy !! On en déduit alors que les ascendants de Maya à la n -ème génération sont les ascendants de Willy à la $n + 1$ -ème génération. D'où

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = a_{n+1}.$$

5. *Déterminer si elles existent les limites des rapports a_{n+1}/a_n et b_{n+1}/b_n et interpréter ces résultats.*

En utilisant le résultat de la question 3, on voit que $a_n \sim \varphi^n / \sqrt{5}$, ce qui implique que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \varphi.$$

Comme $b_n = a_{n+1}$ pour tout n , on a aussi

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \sim \varphi.$$

Donc

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \varphi.$$

Ce résultat nous dit que

lorsque n est assez grand, les générations d'abeilles s'accroissent comme si toutes les abeilles avaient environ $\varphi = 1,618\dots$ parents.

6. *Déterminer le nombre d'ascendants à la 13-ème génération de Willy.*

Pour calculer a_{13} , mieux vaut utiliser la relation de récurrence $\forall n \geq 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ car cela ne nécessite pas l'utilisation de la calculatrice ! On trouve $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34, a_{10} = 55, a_{11} = 89, a_{12} = 144, a_{13} = 233$ et finalement

$$a_{14} = 377.$$

7. *Exprimer, pour tout $n \geq 1$, la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ en fonction de a_{n+2} . En déduire le nombre d'ascendants de Willy sur 11 générations.*

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (a_{k+2} - a_{k+1}) \\ &= \text{téléscopage} \\ &= a_{n+2} - a_2, \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1.$$

Le nombre d'ascendants de Willy sur 12 générations vaut $a_1 + a_2 + \dots + a_{12}$, c'est-à-dire $a_{14} - 1$. Donc, d'après la question précédente,

le nombre d'ascendants de Willy sur 12 générations vaut 376.