

TRIGONOMÉTRIE

♦ ***Exercice 1.*** [○]
Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des nombres réels $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.

- ○ On sait que $\cos^2(\theta/2) = \{1+\cos\theta\}/2$ donc $\cos^2(\pi/12) = \{1+\cos(\pi/6)\}/2 = (2+\sqrt{3})/4$, d'où
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
puisque $\cos(\pi/12) > 0$ du fait que $\pi/12 \in \,]0;\pi/2[$. Or $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ donc $\sin(\pi/6) = 2\sin(\pi/12)\cos(\pi/12)$, ce qui donne $\sin(\pi/12) = 1/\{4\cos(\pi/12)\}$ et par conséquent
$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$
Il s'ensuit que
$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$
○ On peut aussi remarquer que $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, ce qui donne
$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$
Il s'ensuit que
$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$
○ Pour les inquiets qui se disent : « ben tiens, on trouve pas la même chose ! », je répondrai ceci :
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}+6}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
et pareil (ou presque) pour les autres.
- En notant que $7\pi/12 = \pi/2 + \pi/12$, on obtient alors
$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\\ \cos\frac{7\pi}{12} &= -\sin\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\\ \tan\frac{7\pi}{12} &= -\operatorname{cotan}\frac{\pi}{12} = -2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

- En notant que $5\pi/12 = \pi - 7\pi/12$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\\
\cos\frac{5\pi}{12} &= -\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\\
\tan\frac{5\pi}{12} &= -\tan\frac{7\pi}{12} = 2+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

♦ ***Exercice 2.*** [◦]
On pose

$$c = \cos\frac{2\pi}{5}, \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}, \qquad a = \omega + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad b = \omega^2 + \omega^3.$$

Calculer $a+b$ et ab et en déduire les valeurs de a et b puis celle de c.

On a

$$a + b = (\omega + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^3) = (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) - 1 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = \frac{1-1}{\omega - 1} - 1 = -1$$

et

$$ab = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1,$$

donc a et b sont les racines du trinôme

$$X^2 + X - 1,$$

ce qui donne

$$\boxed{a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Or

$$c = \frac{\mathrm{e}^{i2\pi/5} + \mathrm{e}^{-i2\pi/5}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{i2\pi/5} + \mathrm{e}^{i8\pi/5}}{2} = \frac{\omega + \omega^4}{2} = \frac{a}{2},$$

donc

$$\boxed{c = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [◦]
Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$\cos^2(3x) - \sin^2 x, \qquad \tan(2x) - \tan x \qquad \text{et} \qquad 1 + \cos(2x) + 2\cos x.$$

On a

$$\begin{aligned}
\cos^2(3x) - \sin^2 x &= \frac{1+\cos(6x)}{2} - \frac{1-\cos(2x)}{2}\\
&= \frac{\cos(6x) + \cos(2x)}{2}\\
&= \frac{2\cos(4x)\cos(2x)}{2}\\
&= \cos(4x)\cos(2x)
\end{aligned}$$

ou encore (mais c'est plus compliqué)

$$\begin{aligned}
\cos^2(3x) - \sin^2 x &= \big(\cos(3x) + \sin x\big)\big(\cos(3x) - \sin x\big)\\
&= \left(\cos(3x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\left(\cos(3x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \times (-2)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \times 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos(2x)\cos(4x).
\end{aligned}$$

L'expression $\tan(2x) - \tan x$ existe si, et seulement si, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \ell\dfrac{\pi}{2}$ ($\ell \in \mathbb{Z}$). Pour ces valeurs de x, on a

$$\begin{aligned}\tan(2x) - \tan x &= \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x}\\ &= \frac{\tan x}{\cos(2x)}\end{aligned}$$

si l'on connaît la formule $\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$. Sinon, on peut écrire

$$\begin{aligned}\tan(2x) - \tan x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x\\ &= (\tan x)\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}\\ &= (\tan x)\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\\ &= (\tan x)\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\\ &= \frac{\tan x}{\cos(2x)}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}1 + \cos(2x) + 2\cos x &= 1 + (2\cos^2 x - 1) + 2\cos x\\ &= 2\cos x(\cos x + 1)\\ &= 2\cos x \times 2\cos^2\frac{x}{2}\\ &= 4\cos x \cos^2\frac{x}{2}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}1 + \cos(2x) + 2\cos x &= \Re\mathrm{e}(1 + \mathrm{e}^{2ix} + 2\,\mathrm{e}^{ix})\\ &= \Re\mathrm{e}\big((1+\mathrm{e}^{ix})^2\big)\\ &= \Re\mathrm{e}\big(4\,\mathrm{e}^{ix}\cos^2(x/2)\big)\\ &= 4\cos x\cos^2\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

♦ ***Exercice 4.*** [$\star$]

Soient α, β, γ trois nombres réels. Factoriser au maximum l'expression

$$E = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$$

et en déduire que cette quantité est nulle lorsque α, β et γ sont les mesures des trois angles d'un triangle.

On pose

$$P(x) = x^2 + 2(\cos\alpha\cos\beta)x + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta &= (2\cos\alpha\cos\beta)^2 - 4\times 1\times(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1)\\ &= 4(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta)\\ &= 4\big(1 - \cos^2\alpha - (\cos^2\beta)(1-\cos^2\alpha)\big)\\ &= 4(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)\\ &= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Les deux solutions de $P(x) = 0$ sont donc

$$x_1 = \frac{2(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{2} = -\cos(\alpha+\beta) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2(-\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{2} = -\cos(\alpha-\beta),$$

où l'on a utilisé $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ et $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$.

Or, on sait qu'un trinôme du second degré ax^2+bx+c dont les deux racines sont x_1 et x_2 se factorise sous la forme $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Donc

$$P(x) = 1\big(x+\cos(\alpha+\beta)\big)\big(x+\cos(\alpha-\beta)\big).$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} E &= P(\cos\gamma) \\ &= \big(\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\big)\big(\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\big) \\ &= 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé deux fois la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Donc

$$\boxed{E = 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right).}$$

Dans un triangle, la somme $\alpha+\beta+\gamma$ des valeurs des trois angles est égale à π, donc

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ce qui donne, en vertu de la relation précédente,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ sont les mesures des trois angles d'un triangle,}\\ \text{on a } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0.\end{array}}$$

♦ ***Exercice 5.*** [$\star$]

Dans cet exercice, on notera que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\cos t = \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{it})$ et $\sin t = \Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{it})$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Factoriser $S = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x)$.
2. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Factoriser $T_n = \sin a + \sin(2a) + \cdots + \sin(na)$.

1. Si $x\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $S=4$. Si $\forall k\in\mathbb{Z},\ x\neq 2k\pi$, alors

$$\begin{aligned} S &= \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{4ix}) \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\frac{\mathrm{e}^{5ix}-\mathrm{e}^{ix}}{\mathrm{e}^{ix}-1}\Big) && \text{somme géométrique de raison } \mathrm{e}^{ix}\neq 1 \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\frac{\mathrm{e}^{i3x}}{\mathrm{e}^{ix/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-2ix}}{\mathrm{e}^{ix/2}-\mathrm{e}^{-ix/2}}\Big) && \text{angle moyen} \\ &= \Re\mathrm{e}\Big(\mathrm{e}^{5ix/2}\,\frac{2i\sin(2x)}{2i\sin(x/2)}\Big) && \text{formules d'Euler} \\ &= \frac{\sin(2x)}{\sin(x/2)}\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{5ix/2}) && \text{on sort de } \Re\mathrm{e} \text{ ce qui est réel} \end{aligned}$$

donc

$$S = \frac{\sin(2x)\cos(5x/2)}{\sin(x/2)}.$$

2. On a

$$
\begin{array}{rcll}
S_n & = & \Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{i2a} + \cdots + \mathrm{e}^{ina}) & \\
& = & \Im\mathrm{m}\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)a} - \mathrm{e}^{ia}}{\mathrm{e}^{ia} - 1}\Big) & \text{somme géométrique} \\
& & & \text{de raison } \mathrm{e}^{ia} \neq 1 \\
& = & \Im\mathrm{m}\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+2)a/2}}{\mathrm{e}^{ia/2}}\,\dfrac{\mathrm{e}^{ina/2} - \mathrm{e}^{-ina/2}}{\mathrm{e}^{ia/2} - \mathrm{e}^{-ina/2}}\Big) & \text{angle moyen} \\
& = & \Im\mathrm{m}\Big(\mathrm{e}^{i(n+1)a/2}\,\dfrac{2i\sin(na/2)}{2i\sin(a/2)}\Big) & \text{formules d'Euler} \\
& = & \dfrac{\sin(na/2)}{\sin(a/2)}\Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{i(n+1)a/2}) & \text{on sort de } \Im\mathrm{m} \\
& & & \text{ce qui est réel} \\
& = & \dfrac{\sin(na/2)\sin\big((n+1)a/2\big)}{\sin(a/2)}. &
\end{array}
$$

♦ ***Exercice 6.*** [○]

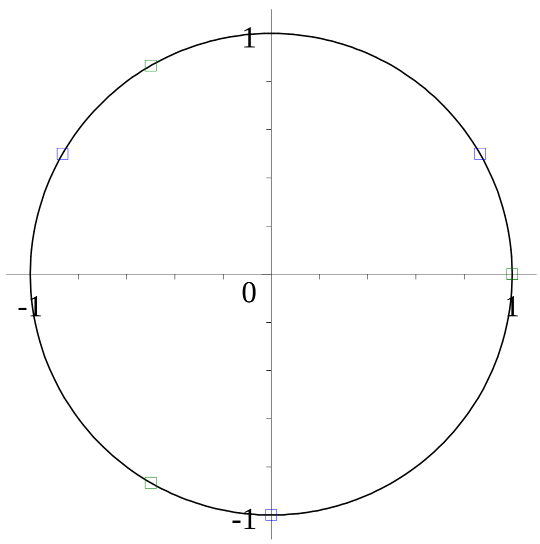
Résoudre, en $x \in \mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes et placer (si possible) les solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $\cos(3x - \pi/4) = \sin(\pi/4)$,
2. $\sin(2x - \pi/4) = \cos(x + \pi/6)$,
3. $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$,
4. $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$,
5. $2\tan^2 x = 1/\cos^2 x$.

1. On a

$$
\begin{array}{rcl}
\cos(3x - \pi/4) = \sin(\pi/4) & \iff & \cos(3x - \pi/4) = \cos(\pi/4) \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} 3x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x - \pi/4 = -\pi/4 + 2\ell\pi \end{array}\right. \quad k, \ell \in \mathbb{Z} \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} x = \pi/6 + 2k\pi/3 \\ \text{ou} \\ x = 2\ell\pi/3 \end{array}\right. \quad k, \ell \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

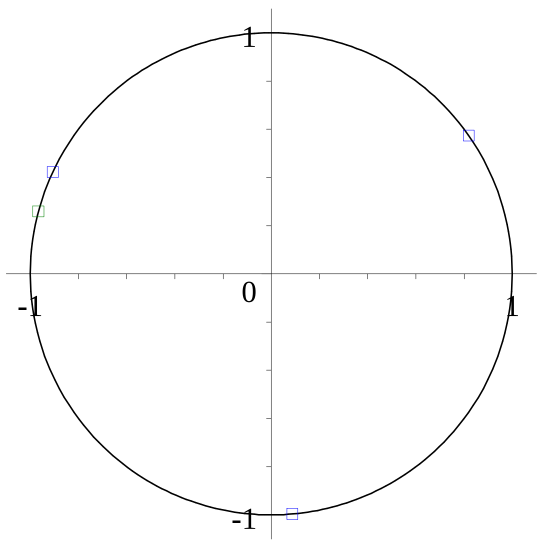
c'est-à-dire



2. On a

$$\begin{aligned}
\sin(2x-\pi/4)=\cos(x+\pi/6) &\iff \cos\big(\pi/2-(2x-\pi/4)\big)=\cos(x+\pi/6)\\
&\iff \cos(3\pi/4-2x)=\cos(x+\pi/6)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 3\pi/4-2x=x+\pi/6+2k\pi\\ \text{ou}\\ 3\pi/4-2x=-x-\pi/6+2\ell\pi\end{array}\right. \qquad k,\ell\in\mathbb{Z}\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} -3x=-7\pi/12+2k\pi\\ \text{ou}\\ -x=-11\pi/12+2\ell\pi\end{array}\right. \qquad k,\ell\in\mathbb{Z}\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=7\pi/36-2k\pi/3\\ \text{ou}\\ x=11\pi/12-2\ell\pi\end{array}\right. \qquad k,\ell\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

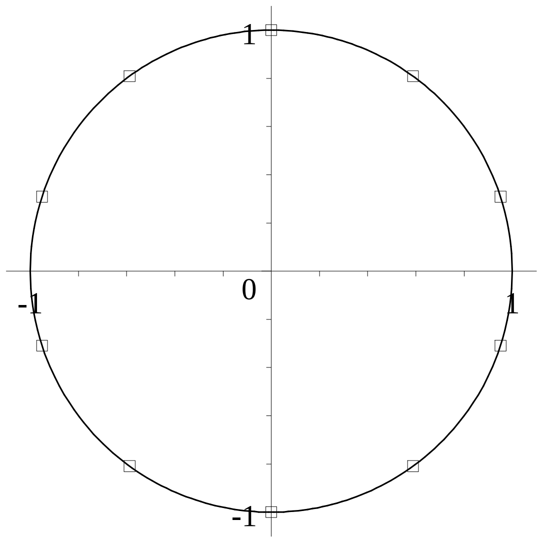
c'est-à-dire



3. L'équation est équivalente à $3\cos(5x)=2\cos(5x)\cos(7x)$ et donc à $\cos(5x)=0$ puisque $\cos(7x)\neq 3/2$. On trouve donc $x\equiv\pi/10 \pmod{\pi/5}$.
On a

$$\begin{aligned}
3\cos(5x)=\cos(2x)+\cos(12x) &\iff 3\cos(5x)=2\cos(7x)\cos(5x)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \cos(5x)=0\\ \text{ou}\\ 3=2\cos(7x)\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \cos(5x)=0\\ \text{ou}\\ \cos(7x)=3/2\end{array}\right.\\
&\iff \cos(5x)=0 \qquad \text{car } 3/2>1\\
&\iff 5x=\pi/2+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}\\
&\iff x=\pi/10+k\pi/5 \qquad k\in\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire



4. Ensemble de définition
   L'équation est définie si, et seulement si,

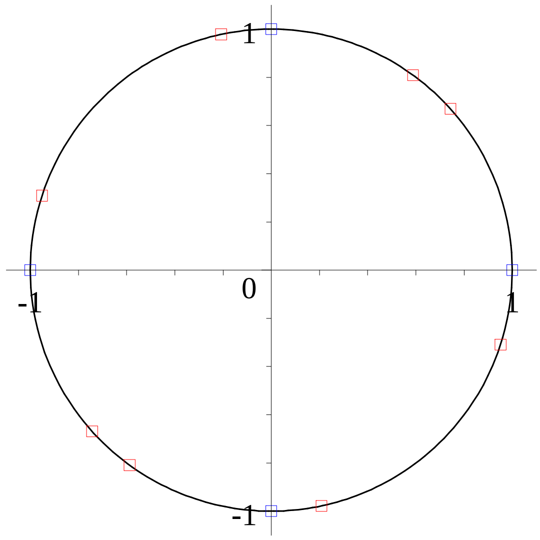
$$\left\{\begin{array}{l} 3x - \pi/5 \neq \pi/2 + k\pi \\ \text{et} \\ x + 4\pi/5 \neq \pi/2 + \ell\pi \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x \neq 7\pi/30 + k\pi/3 \\ \text{et} \\ x \neq 13\pi/10 + \ell\pi \end{array}\right.$$

   Résolution
   On a

$$\begin{aligned} \tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5) \quad &\Longleftrightarrow \quad 3x - \pi/5 = x + 4\pi/5 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x = \pi + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = m\pi/2 \quad m \in \mathbb{Z} \qquad (\text{où } m = k+1) \end{aligned}$$

ce qui donne (les points interdits sont en rouge et les solutions sont en bleu) :



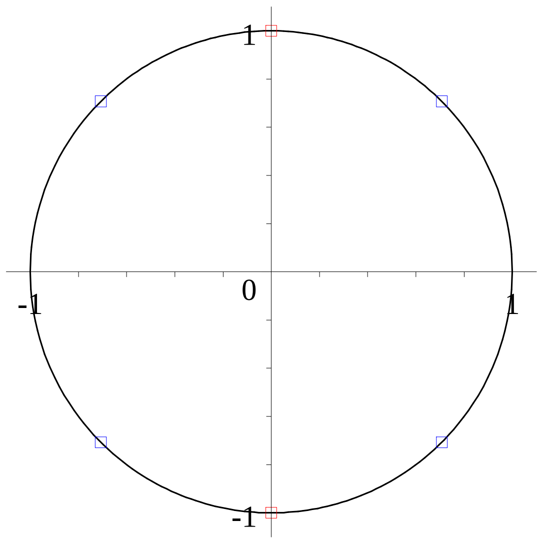
5. Ensemble de définition
   L'équation est définie si, et seulement si,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Résolution
On a

$$\begin{aligned}
2\tan^2 x = 1/\cos^2 x \quad & \iff \quad 2\tan^2 x = 1 + \tan^2 x \\
& \iff \quad \tan^2 x = 1 \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \text{ou} \\ \tan x = -1 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \pi/4 + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi/4 + \ell\pi \end{array} \right. \qquad k, \ell \in \mathbb{Z} \\
& \iff \quad x = \pi/4 + m\pi/2 \quad m \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire (les points interdits sont en rouge et les solutions sont en bleu) :



♦ ***Exercice 7.*** [$\circ$]
Résoudre les équations $-\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1$ et $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = -\sqrt{2}$.

On a

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1 \\
\iff\quad & 2\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\Big) = 1 \\
\iff\quad & \cos\frac{3\pi}{4}\cos x + \sin\frac{3\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\iff\quad & \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\
\iff\quad & \left\{\begin{array}{l} x - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\ell\pi \end{array}\right. \qquad (k,\ell \in \mathbb{Z}) \\
\iff\quad & \left\{\begin{array}{l} x = (2k+1)\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\ell\pi \end{array}\right. \qquad (k,\ell \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = -\sqrt{2} \\
\iff\quad & 2\Big(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\Big) = -\sqrt{2} \\
\iff\quad & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos 2x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\iff\quad & \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \\
\iff\quad & \left\{\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\ell\pi \end{array}\right. \qquad (k,\ell \in \mathbb{Z}) \\
\iff\quad & \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = -\dfrac{13\pi}{24} + \ell\pi \end{array}\right. \qquad (k,\ell \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

♦ ***Exercice 8.*** [$\star$]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

L'ensemble de définition de cette équation (E) est $\mathscr{D} = [-1;1]$.
On peut donc poser $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0;\pi]$. Cela donne

$$\begin{array}{rcll}
(E) & \iff & \sqrt{1-\cos(\theta)} = 2\cos^2(\theta) - 1 + 2\cos(\theta)\sqrt{1-\cos^2(\theta)} & \\
& \iff & \sqrt{2\sin^2(\theta/2)} = 2\cos^2(\theta) - 1 + 2\cos(\theta)\sqrt{\sin^2(\theta)} & \\
& \iff & \sqrt{2}\sin(\theta/2) = 2\cos^2(\theta) - 1 + 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \text{car } \sin(\theta/2) \text{ et } \sin(\theta) \text{ sont positifs} \\
& \iff & \sqrt{2}\sin(\theta/2) = \cos(2\theta) + \sin(2\theta) & \\
& \iff & \sqrt{2}\sin(\theta/2) = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\theta)\Big) & \\
& \iff & \sin(\theta/2) = \cos(2\theta - \pi/4) & \\
& \iff & \cos(\pi/2 - \theta/2) = \cos(2\theta - \pi/4) & \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} \pi/2 - \theta/2 = 2\theta - \pi/4 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi/2 - \theta/2 = -2\theta + \pi/4 + 2\ell\pi \end{array}\right. \quad k, \ell \in \mathbb{Z} & \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} 5\theta/2 = 3\pi/4 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3\theta/2 = -\pi/4 + 2\ell\pi \end{array}\right. \quad k, \ell \in \mathbb{Z} & \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} \theta = 3\pi/10 + 4k\pi/5 \\ \text{ou} \\ \theta = 7\pi/6 + 4\ell\pi/3 \end{array}\right. \quad k, \ell \in \mathbb{Z} & \\
& \iff & \theta \in \{3\pi/10\}, &
\end{array}$$

donc

$$\boxed{\text{la seule solution est } \cos(3\pi/10).}$$

Remarque : On a $\cos(3\pi/10) = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}/4 = 0,58779$

♦ ***Exercice 9.*** [$\circ$]
Résoudre, dans $[-\pi;\pi]$, l'inéquation $2\sin x - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$.

<u>Ensemble de définition :</u>
Cette équation est définie si, et seulement si,

$$\begin{array}{rl}
& 1 - 4\cos^2 x \geqslant 0 \\
\iff & \cos^2 x \leqslant \frac{1}{4} \\
\iff & -\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2} \\
\iff & x \in \Big[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\Big] \cup \Big[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\Big]
\end{array}$$

donc l'ensemble de définition de l'inéquation est

$$\mathscr{D} = \Big[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\Big] \cup \Big[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\Big].$$

<u>Résolution :</u>
Nous distinguons deux cas selon le signe de $2\sin x - 1$.

- Lorsque $2\sin x - 1 < 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in \Big[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\Big]$, l'inéquation est clairement vérifiée puisqu'un nombre strictement négatif est toujours strictement inférieur à une racine carrée (qui est toujours positive ou nulle).
- Lorsque $2\sin x - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in \Big[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\Big]$, on utilise le fait que deux nombres positifs ou nuls sont rangés dans le même ordre que leurs carrés (car $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$) pour

écrire que

$$\begin{aligned} & 2\sin x - 1 < \sqrt{1-4\cos^2 x} \\ \iff & (2\sin x - 1)^2 < 1 - 4\cos^2 x \\ \iff & 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 < 1 - 4\cos^2 x \\ \iff & 4\sin^2 x + 4\cos^2 x < 4\sin x \\ \iff & \sin x > 1. \end{aligned}$$

Cette dernière inéquation n'admet pas de solution.

- Donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \Big[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\Big].}$$

♦ ***Exercice 10.*** [○]
Linéariser $\cos^4 x$ et en déduire la valeur de $S = \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^4 \\ &= \frac{1}{16}(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}) \\ &= \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{\cos(\pi/2) + 4\cos(\pi/4) + 3}{8} + \frac{\cos(3\pi/2) + 4\cos(3\pi/4) + 3}{8} \\ &\quad + \frac{\cos(5\pi/2) + 4\cos(5\pi/4) + 3}{8} + \frac{\cos(7\pi/2) + 4\cos(7\pi/4) + 3}{8} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+3}{8} + \frac{-2\sqrt{2}+3}{8} + \frac{-2\sqrt{2}+3}{8} + \frac{2\sqrt{2}+3}{8} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

♦ ***Exercice 11.*** [○]
Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \,\mathrm{d}t.$$

On sait que

$$\sin^3 t = \Big(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\Big)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{3it}) = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3t - 6i\sin t) = -\frac{1}{4}(\sin 3t - 3\sin t),$$

donc

$$\int^x \cos^3 t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int^x (\sin 3t - 3\sin t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\Big[-\frac{\cos 3t}{3} + 3\cos t\Big]^x = \frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x).$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{12}(\cos\frac{3\pi}{2} - 9\cos\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.}$$

♦ **Exercice 12.** [◦]

1. Résoudre l'équation $\sin(4x) = \sin x$ pour $x \in]0;\pi[$.
2. À l'aide d'une antilinéarisation, démontrer que

$$\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \iff 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0.$$

3. Déterminer les solutions de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$ (on pourra s'aider d'une solution « évidente » donnée par la question 1) et en déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$.

1. *Résoudre l'équation* $\sin(4x) = \sin x$ *pour* $x \in]0;\pi[$.

   On a

$$\begin{aligned}
\sin(4x) = \sin x \quad & \iff \quad \begin{cases} 4x = x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 4x = \pi - x + 2\ell\pi \quad (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} 3x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 5x = (2\ell + 1)\pi \quad (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{(2\ell+1)\pi}{5} \quad (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}
\end{aligned}$$

   Comme on ne s'intéresse qu'aux solutions qui appartiennent à $]0;\pi[$, le nombre k ne peut prendre que la valeur 1 et le nombre ℓ ne peut valoir que 1 ou 2. Par conséquent,

$$\boxed{\text{les solutions de } \sin(4x) = \sin x \text{ sur }]0;\pi[\text{ sont } \frac{\pi}{5};\ \frac{3\pi}{5} \text{ et } \frac{2\pi}{3}.}$$

2. *Démontrer que* $\big(\sin(4x) = \sin x \text{ et } \sin x \neq 0\big) \iff 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$ *à l'aide d'une antilinéarisation.*

   Antilinéarisons $\sin(4x)$. Cela donne

$$\begin{aligned}
\sin(4x) &= \Im\mathrm{m}(\mathrm{e}^{i4x}) \\
&= \Im\mathrm{m}\big((\cos x + i\sin x)^4\big) \\
&= \Im\mathrm{m}\big(\cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i\cos x \sin^3 x + \sin^4 x\big) \\
&= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x \\
&= (\sin x)(4\cos^3 x - 4\cos x \sin^2 x) \\
&= (\sin x)\big(4\cos^3 x - 4\cos x(1 - \cos^2 x)\big) \\
&= (\sin x)(8\cos^3 x - 4\cos x).
\end{aligned}$$

   Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \quad & \iff \quad \begin{cases} (\sin x)(8\cos^3 x - 4\cos x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} 8\cos^3 x - 4\cos x = 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0 \\ \sin x \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

   Or les solutions de $\sin x = 0$, c'est-à-dire les $k\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$, correspondent à $\cos x = \pm 1$ et ne sont donc pas solutions de $8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$. Il s'ensuit que la condition $\sin x \neq 0$ est inutile dans le dernier système, ce qui permet d'écrire que

$$\boxed{\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \iff 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0.}$$

3. *Déterminer les solutions de l'équation* $8X^3 - 4X - 1 = 0$ *(on pourra s'aider d'une solution évidente donnée par la question 1) et en déduire la valeur de* $\cos(\pi/5)$.

Les solutions de $\sin(4x) = \sin x$ dans $]0;\pi[$, que l'on a déterminées à la question 1, sont des solutions du système $\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$. Par suite, les nombres $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont des solutions de l'équation $8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$, ce qui revient à dire que $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{3}$ sont des solutions de $8X^3 - 4X - 1 = 0$. Comme $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, on sait donc que $-\frac{1}{2}$ est une solution de $8X^3 - 4X - 1$, ce qui permet de factoriser $X + \frac{1}{2}$ dans le polynôme $8X^3 - 4X - 1$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 8X^3 - 4X - 1 &= 8\Big(X + \frac{1}{2}\Big)\Big(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\Big) \\ &= (2X+1)(4X^2 - 2X - 1). \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $4X^2 - 2X - 1$ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$, donc ses racines sont

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } 8X^3 - 4X - 1 = 0 \text{ sont } -\frac{1}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{4}.}$$

L'ensemble des solutions de $8X^3 - 4X - 1 = 0$ est donc d'une part constitué des trois cosinus $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{3}$ et d'autre part des trois nombres $-\frac{1}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, ce qui donne l'égalité ensembliste

$$\Big\{\cos\frac{\pi}{5}; \cos\frac{3\pi}{5}; \cos\frac{2\pi}{3}\Big\} = \Big\{-\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big\}.$$

Reste à identifier qui est qui ! On sait déjà que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Par ailleurs, comme $\frac{\pi}{5} \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big[$ et $\frac{3\pi}{5} \in \Big]\frac{\pi}{2}; \pi\Big]$, on a $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{3\pi}{5} < 0$, ce qui laisse comme seule possibilité d'association :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$