

Planche de colle

Question de cours

- soit $a > 0$; étudier la nature de la série :

$$\sum_n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt{1+n^a}} \right).$$

Exercice de colle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{A}_n l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne comportant pas deux entiers consécutifs, puis a_n le nombre d'éléments dans l'ensemble \mathcal{A}_n .

1. Vérifier que $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et que $a_3 = 5$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

On note \mathcal{S} l'ensemble de tous les entiers $k \in \mathbb{N}^*$ dont l'écriture binaire ne comporte jamais deux chiffres 1 côte à côte.

3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$:

$$\text{la série } \sum_{k \in \mathcal{S}} \frac{1}{k^\alpha} \text{ est convergente} \iff \alpha > \lambda.$$