Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Corrigé du DM n^o 20

Exercice 1

1. Comme le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable, alors chaque application $x \longmapsto (x \mid f(e_i)) \cdot e_i$ est bien linéaire.
2. La formule à montrer est linéaire en les variables x et y. Il suffit de démontrer cette formule lorsque x et y parcourent une base, par exemple la base $\mathscr{B}$.
   On prend $x = e_i$ et $y = e_j$, avec i et j deux entiers entre 1 et n.
   Par définition de f^*, on en déduit :
   $$(f^*(e_i) \mid e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} (e_i \mid f(e_k)) \cdot e_k \mid e_j \right) = (e_i \mid f(e_j)),$$
   ce qui donne le résultat attendu.
3. Soit $g : E \longrightarrow E$ une fonction vérifiant l'hypothèse.
   Soit x dans E. Alors, pour tout y dans E, on peut écrire :
   $$(g(x) - f^*(x) \mid y) = (g(x) \mid y) - (f^*(x) \mid y) = (x \mid f(y)) - (x \mid f(y)) = 0.$$
   Le vecteur $g(x) - f^*(x)$ est orthogonal à tout vecteur, donc est le vecteur nul : $g = f^*$.
4. On montre que $(f^*)^* = f$. En effet, la fonction $h = (f^*)^*$ vérifie pour tous vecteurs x et y dans E :
   $$(h(x) \mid y) = (x \mid f^*(y)) = (f(x) \mid y).$$
   Par la question précédente, on a ce qu'il faut.
   On montre que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. En effet, pour tous vecteurs x et y dans E :
   $$\begin{array}{rcl} (g^* \circ f^*(x) \mid y) & = & (g^*(f^*(x)) \mid y) \\ & = & (f^*(x) \mid g(y)) \\ & = & (x \mid f(g(y))) \\ & = & (x \mid f \circ g(y)) \\ & = & ((f \circ g)^*(x) \mid y). \end{array}$$
   Par la question précédente, on a ce qu'il faut.
   On montre que $(\lambda \cdot f + g)^* = \lambda \cdot f^* + g^*$. En effet, pour tous vecteurs x et y dans E :
   $$\begin{array}{rcl} ((\lambda \cdot f^* + g^*)(x) \mid y) & = & \lambda\ (f^*(x) \mid y) + (g^*(x) \mid y) \\ & = & \lambda\ (x \mid f(y)) + (x \mid g(y)) \\ & = & (x \mid (\lambda \cdot f + g)(y)). \end{array}$$
   Par la question précédente, on a ce qu'il faut.

5. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une b.o.n.

   On pose la fonction $F^* : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (x \mid f(\varepsilon_i)) \cdot \varepsilon_i$.

   On en déduit que pour tous entiers i et j entre 1 et n :

$$(\varepsilon_i \mid F^*(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_j \mid f(\varepsilon_i)) = (\varepsilon_i \mid f^*(\varepsilon_j)).$$

   On sait alors que $F^* = f^*$.

6. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une b.o.n. de E.
   On pose $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(f)$ et $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(f^*)$.
   On fixe deux entiers i et j entre 1 et n, ce qui donne :

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= (f^*(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i) \qquad \text{, car } f^*(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} \cdot \varepsilon_k \\ &= (\varepsilon_j \mid f(\varepsilon_i)) \\ &= \left(\varepsilon_j \mid \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \cdot \varepsilon_i\right) \\ &= A_{j,i}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $B = A^T$.

7. Soit x un vecteur dans $\mathrm{Ker}(f^*)$. Soit y dans $\mathrm{Im}(f)$. On écrit :

$$y = f(u).$$

   Alors,

$$(x \mid y) = (x \mid f(u)) = (f^*(x) \mid u) = (0 \mid u) = 0_{\mathbb{R}}.$$

   On a l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^*) \subset (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.
   Soit x dans $\mathrm{Im}(f^*)$. On écrit $x = f^*(v)$. Soit y dans $\mathrm{Ker}(f)$. Alors :

$$(x \mid y) = (f^*(v) \mid y) = (v \mid f(y)) = (v \mid 0) = 0_{\mathbb{R}}.$$

   On a l'inclusion $\mathrm{Im}(f^*) \subset (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.
   Or, par le théorème du rang, on peut écrire :

$$\left(\dim\left((\mathrm{Im}(f))^{\perp}\right) - \dim(\mathrm{Ker}(f^*))\right) + \left(\dim\left((\mathrm{Ker}(f))^{\perp}\right) - \dim(\mathrm{Im}(f^*))\right) =$$

$$(n - \mathrm{Rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(f^*))) + (n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) - \dim(\mathrm{Im}(f^*))) = 0.$$

   La somme $\left(\dim\left((\mathrm{Im}(f))^{\perp}\right) - \dim(\mathrm{Ker}(f^*))\right) + \left(\dim\left((\mathrm{Ker}(f))^{\perp}\right) - \dim(\mathrm{Im}(f^*))\right)$ est composée de deux termes positifs qui sont en fait nuls et les inclusions précédentes sont des égalités.

8. • On suppose que $p^* = p$.
   Alors,

$$\mathrm{Im}(p) = (\mathrm{Ker}(p^*))^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)^{\perp},$$

   donc p est un projecteur orthogonal.
   • On suppose que p est un projecteur orthogonal. Soient x et y dans E. On pose $\mathrm{Im}(p) = F$ de sorte que $K = \mathrm{Ker}(p) = F^{\perp}$. On pose :

$$x = x_F + x_K \text{ et } y = y_F + y_K.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(p(x) \mid y) &= (x_F \mid y_F + y_K)\\ &= (x_F \mid y_F)\\ &= (x_F \mid p(y))\\ &= (x_F + x_K \mid p(y))\\ &= (x \mid p(y)).\end{aligned}$$

On sait alors que $p^* = p$.

Exercice 2

On remarque qu'il ne peut jamais y avoir égalité entre les deux joueurs, car les numéros des faces de deux dés différents forment des ensembles disjoints.

1. L'événement « Ying gagne » est le même événement que « Yang fait un 2 », ce qui a une probabilité d'arriver égale à $\frac{2}{3}$.
2. Supposons que Ying prenne le dé C et Yang le dé D.
   Déjà, dès que Ying fait un 5, il gagne, ce qui a une chance sur deux d'arriver.
   En faisant un, Ying peut encore gagner. La probabilité que Ying gagne est bien strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.
   Le plus simple est de différencier toutes les faces y compris les faces qui comportent le même numéro. On est alors dans une situation d'équiprobabilité avec 36 combinaisons possibles.
   En comptant les cas favorables, on trouve $3 \times 6 + 3 \times 2 = 24$ possibilités. La probabilité que Ying gagne vaut $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ encore.
3. Lorsque Ying prend le dé D et Yang prend le dé A, la probabilité que Ying a de gagner vaut $\frac{2}{3}$, puisque cet événement est le même que : « faire un 4 avec le dé D ».
4. On répertorie dans un tableau les probabilités que Ying a de gagner, selon les dés sélectionnés.

Ying \ Yang	A	B	C	D
A		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
D	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	

Il devient clair que quel que soit le dé pris par Ying, il existe un dé différent que prendra Yang de façon à ce que Ying ait une probabilité de gagner égale à $\frac{1}{3}$, car chaque ligne du tableau contient $\frac{1}{3}$ qui est d'ailleurs la valeur minimale sur chaque ligne.
Conclusion, il vaut mieux laisser Ying choisir et être à la place de Yang, qui choisira le bon dé. Avec cette stratégie, Yang aura toujours deux fois plus de chances de gagner que Ying.

5. On note X la variable comptant le gain algébrique de Yang.
On note $\mathscr{A}$ l'événement : « Yang gagne ».
D'après la stratégie de Yang, stratégie au demeurant tout à fait déterministe, on sait que :

$$\mathbb{P}(\mathscr{A}) = \frac{2}{3}.$$

On remarque par les règles du jeu que :

$$X = 1 \cdot \mathbf{1}_{\mathscr{A}} - \alpha \cdot \mathbf{1}_{\overline{\mathscr{A}}}.$$

L'espérance du gain algébrique de Yang vaut donc :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(\mathscr{A}) - \alpha \left(1 - \mathbb{P}(\mathscr{A})\right) = \frac{2-\alpha}{3}.$$

Conclusion, les valeurs de α pour que Yang ait intérêt à jouer à ce jeu forment les valeurs α pour lesquelles :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant 0,$$

car alors le gain moyen de Yang sera positif (jeu parfaitement équitable lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$), et l'ensemble de ces valeurs α forme l'ensemble $\boxed{[0,2]}$, avec un jeu parfaitement équitable lorsque $\alpha = 2$ euros.