Problème n° 5 : Une fonction continue partout et dérivable nulle part

Problème 1 – Une fonction continue partout dérivable nulle part

L'objet de ce problème est de construire une fonction définie sur $[0,1]$ qui soit continue sur $[0,1]$ et dérivable en aucun point de $[0,1]$. On construit f comme la limite d'une suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$. On définit f_n par récurrence :

- *f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$;*
- *f_1 est la fonction affine par morceau dont le graphe est constitué des segments reliant les points : $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$;*
- *plus généralement, supposons f_n construite, et affine par morceau sur chaque intervalle $\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right]$. La fonction f_{n+1} est obtenu subdivisant ces intervalles en trois et en itérant la construction de f_1 : sur l'intervalle $\left]\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right[$, f_{n+1} est la fonction affine par morceaux dont le graphe est constitué des segments de droite reliant les points $\left(\frac{3m}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m}{3^{n+1}}\right)\right)$, $\left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+2}{3^{n+1}}\right)\right)$, $\left(\frac{3m+2}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}\right)\right)$ et $\left(\frac{3m+3}{3^{n+1}}, f_n\left(\frac{3m+3}{3^{n+1}}\right)\right)$.*

Partie I – Préliminaires

1. Tracer dans un même repère les graphes de f_0, f_1, f_2, et f_3 (un conseil : faites grand, sur une feuille à part)
2. *Le graphe de f_0 est constitué d'un segment de droite. On note $p_{0,1}$ sa pente. Le graphe de f_1 est constitué de trois segments de droite. On note $p_{1,1}$, $p_{1,2}$ et $p_{1,3}$ leurs pente. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est constitué de α_n segments de droite, et on note $p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n}$ leurs pentes.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut α_n ?
   (b) Déterminer $p_{n,i}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$, pour tout i pour lesquels cela a un sens.
   (c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(p_{n+1,i})_{1 \leqslant i \leqslant \alpha_{n+1}}$ en fonction de la famille $(p_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant \alpha_n}$.
   (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$ et $\max(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$
   (e) Quel est le signe de $p_{n,i}$?
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, 3^n - 1]\!]$. On note $I_{n,k} = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $m \geqslant n$, $f_m(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$.
   (b) On suppose que $p_{n,k+1} \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n+1,3k}$, et tout entier $m \geqslant n$, $f_m(x) \geqslant f_n(x)$. (S'aider d'un dessin !)
   (c) On suppose que $p_{n,k+1} \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n,k}$, et tout entier $m \geqslant n$,
   $$f_m(x) - f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) \geqslant \left(x - \frac{k}{3^n}\right)\frac{p_{n,k+1}}{3}.$$
   (Là encore, s'aider d'un dessin).
   (d) Modifier les énoncés des deux questions précédentes dans le cas où $p_{n,k+1}$ est négatif.

Partie II – Étude de la fonction limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Existence de la fonction limite f.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   Indication : discuter suivant l'appartenance de x aux intervalles $I_{n+1,3k}$, $I_{n+1,3k+1}$ et $I_{n+1,3k+2}$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on admettra que si une série $\sum |a_n|$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge également).

On note $f(x)$ sa limite. Cela définit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(c) Que valent $f\left(\frac{k}{3}\right)$, pour $k \in [\![0,3]\!]$? $f\left(\frac{k}{9}\right)$, pour $k \in [\![0,9]\!]$? Plus généralement, exprimer $f\left(\frac{k}{3^n}\right)$ en fonction de f_n.

2. Continuité de f

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$. Désormais, dans la suite de cette partie, n désigne un tel entier.

(b) Soit $x_0 \in [0,1[$, et $\alpha = \lfloor 3^n x_0 \rfloor$. Justifier que $x_0 \in \left[\dfrac{\alpha}{3^n}, \dfrac{\alpha+1}{3^n}\right[= I_{n,\alpha}$.

(c) Montrer que pour tout $m \geqslant n$, et pour tout $y \in I_{n,\alpha}$, $|f_m(x_0) - f(y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (On pourra considérer $f_m(I_{n,\alpha})$, pour $m \geqslant n$).

(d) En déduire que f est continue en x_0.

(e) Que dire de la continuité de f en 1 ?

3. Étude de la monotonie de f.

Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $I \subset [0,1]$ sur lequel f est monotone. Autrement dit, f n'est nulle part monotone.

4. Étude de la dérivabilité de f.

Soit $x \in]0,1]$, et pour tout n, $\beta_n = \lceil 3^n x \rceil - 1$, c'est-à-dire l'unique entier tel que $\beta_n < 3^n x \leqslant x$. Soit $I_n(x) = I_{n,\beta_n}$. On note $p_n(x) = p_{n,\beta_n+1}$ la pente sur $I_n(x)$ de la fonction f_n, affine sur cet intervalle.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ sont de même signe, alors $p_{n+1}(x) = 2p_n(x)$.

(b) Premier cas : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\lim \left| \frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x} \right| = +\infty.$$

(c) Deuxième cas : supposons qu'il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x)$, $n \geqslant n_0$, soient tous de même signe. Montrer que

$$\frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x}$$

n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

Partie III – Résolution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $k_n = \frac{3^n-1}{2}$. Déterminer $f\left(\frac{k_n-1}{3^n}\right)$ et $f\left(\frac{k_n}{3^n}\right)$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une infinité de solutions. Pouvez-vous en donner une ?