

## Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Math Cachan Rennes
- *NOM Prénom* : RAKOVSKY Martin

## Enoncé des exercices

Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose  $f_T : x \mapsto f(x - T)$  si  $T \in \mathbb{R}$ .

Si  $\varepsilon > 0$ , on dit  $T$  est une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$  si  $\|f - f_T\|_\infty < \varepsilon$ .

On dit que  $f$  est presque périodique si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$  tel que tout segment de longueur  $R$  contient une  $\varepsilon$ -presque période.

- 1) Donner des exemples de fonction presque périodiques.
- 2) Si  $f$  est presque périodique, montrer qu'elle est bornée.
- 3) Si  $f$  est presque périodique, montrer qu'elle est uniformément continue.
- 4) Si  $f$  est presque périodique, montrer que pour toute suite  $(t_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ , il existe une extractrice  $(t_{\phi(n)})$  telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \|f_{t_{\phi(p)}} - f_{t_{\phi(q)}}\| < \varepsilon$$

- 5) La réciproque est-elle vraie ? (Si la propriété est satisfaite pour toute suite  $(t_n)$  et que  $f$  est continue, est-ce que  $f$  est presque périodique ?)

## Remarques sur l'oral

Trop de notations et d'objets pour que j'y comprenne vraiment quelque chose. Les questions demandent de faire marcher les définitions, mais en sortant de la salle, je n'avais toujours pas compris avec quel type de fonction je jouais.

L'examineur est gentil, il m'aide à entrer dans l'exercice. Du coup je ne prend pas beaucoup d'initiatives pendant cet oral (à part faire des dessins de qualité discutable) mais j'essaie d'être réactif et de rebondir sur ce qu'il me dit. Je sens qu'au début il doute de ma bonne compréhension des choses et me demande d'écrire formellement. Je le fais pour la 2), il est plus souple par la suite.

Pour la question 4), l'examineur propose de commencer par trouver une extractrice pour un  $\varepsilon$  quelconque. On le fait et je propose une extraction diagonale des extractrices associées à  $\frac{1}{n}$  pour obtenir une extraction qui marche pour tout  $\varepsilon$ . Il ne me demande pas beaucoup d'explications, si ce n'est d'expliquer ce qu'est l'extraction diagonale. On discute un peu pour la réciproque, il faut trouver la bonne suite, je propose des idées et explique après pourquoi elles sont dures à mettre en oeuvre, l'oral s'arrête là.