SOMMES ET PRODUITS

♦ ***Exercice 1.*** [∘]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + n + 3), \qquad T = \sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + n + 3) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} (n+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)(n+3),$$

$$\sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6} = \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{k=8}^{21} k}_{\substack{\text{somme}\\ \text{arithmétique}}} - \sum_{k=8}^{21} \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times 14 \times \frac{8+21}{2} - 14 \times \frac{5}{6} = 56$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 &= 4 \sum_{i=1}^{n} i^3 - 12 \sum_{i=1}^{n} i^2 + 6 \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n^3(n+1)^3 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\ &= n^2 \left(n^4 + 3n^3 + 3n^2 - 3n - 3\right). \end{aligned}$$

♦ ***Exercice 2.*** [⋆]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant l'astuce de Binet : $1 = (k+p+1) - k - p$, calculer la somme

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!}.$$

On a

$$\begin{aligned} S(n,p) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!} \left((k+p+1) - k - p\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!}(k+p+1) - \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!} k - p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p)!}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p+1)!}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+p)!}{(k-1)!} - pS(n,p) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+p+1)!}{k!} - \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(\ell+p+1)!}{\ell!} - pS(n,p) \qquad \text{en posant } \ell = k-1 \\ &= \frac{(n+p)!}{(n-1)!} - pS(n,p), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S(n,p) = \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)}.}$$

♦ ***Exercice 3.*** [○]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'identitié $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \\
&\quad + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \\
&\quad + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \qquad \text{télescopage} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{2\,(n+1)\,(n+2)}.}$$

♦ ***Exercice 4.*** [○]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k^2 \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} k^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} 4\ell^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 \qquad \text{en posant } k = 2\ell \text{ et } k = 2p+1 \\
&= 4\sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 - 4\sum_{\ell=0}^{n-1} p^2 - 4\sum_{\ell=0}^{n-1} p - \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \\
&= 4n^2 - 2(n-1)n - n \\
&= 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

♦ ***Exercice 5.*** [○]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $b \neq 0$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} a^k\, 2^{3k}\, b^{-k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}.$$

En vertu de la formule de sommation des termes d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k\, 2^{3k}\, b^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{8a}{b}\right)^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } 8a = b, \\ \dfrac{(8a/b)^{n+1}-1}{8a/b-1} & \text{si } 8a \neq b. \end{cases}$$

De même, on a

$$\sum_{k=2}^{n^2} (2-a^2)^{2k+1} = \begin{cases} n^2-1 & \text{si } a = \pm 1, \\ \dfrac{(2-a^2)^{2(n^2+1)+1}-(2-a^2)^5}{(2-a^2)^2-1} & \text{si } 8a \neq b. \end{cases}$$

♦ ***Exercice 6.*** [◦]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S = \sum_{i=0}^{23} \binom{23}{i} (-1)^i 2^{23-i}, \qquad T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i}.$$

On a

$$S = \sum_{i=0}^{23} \binom{23}{i} (-1)^i 2^{23-i} = (-1+2)^{23} = 1,$$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = (-1+1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

et

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i}}_{=(-1+1)^{n+1}=0} -1-(-1)^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -2 & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$$

♦ ***Exercice 7.*** [◦]
Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_p(n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Interpréter $S_p(n)$ sur le triangle de Pascal et calculer cette somme en lui ajoutant astucieusement 0.

C'est la somme des termes, jusqu'au rang n, de la colonne p du triangle de Pascal. Du coup, on voit qu'il est intéressant de lui ajouter $\binom{p}{p+1}$, qui vaut 0, pour profiter de la formule de Pascal. Cela donne

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \binom{p}{p+1} + \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \\ &= \binom{p+1}{p+1} + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \\ &= \binom{p+2}{p+1} + \sum_{k=p+2}^{n} \binom{k}{p} \\ &= \cdots \\ &= \binom{n}{p+1} + \sum_{k=n}^{n} \binom{k}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.}$$

♦ ***Exercice 8.*** [∘]

Soit $n \geqslant 1$. On pose

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. En déduire P_n et I_n.

On a

$$P_n + I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad P_n + I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0,$$

donc

$$\boxed{P_n = I_n = 2^{n-1}.}$$

♦ ***Exercice 9.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du changement d'indice $\ell = 2n+1-k$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}.$$

En posant $\ell = 2n+1-k$, on a

$$S_n = \sum_{\ell=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-\ell},$$

ce qui donne, en vertu de la formule de symétrie,

$$\boxed{S_n = \sum_{\ell=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{\ell}.}$$

On a

$$\begin{aligned} S_n + S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^k 1^{2n+1-k} \\ &= (1+1)^{2n+1} \\ &= 2^{2n+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{S_n = 2^{2n}.}$$

♦ ***Exercice 10.*** [⋆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p \binom{n}{k}$$

1. Calculer $S_0(n)$.
2. Calculer $S_1(n)$ de deux manières : avec la formule du pion puis avec une fonction génératrice.
3. Même question avec $S_2(n)$. *Indication : $k^2 = k(k-1) + k$ (c'est du Binet !)*

1. On a

$$\begin{aligned} S_0(n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n \qquad \text{formule du binôme} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S_0(n) = 2^n.}$$

2. <u>Avec la formule du pion :</u>
On a

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{formule du pion} \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \qquad \text{en posant } \ell = k-1 \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^{\ell} 1^{n-1-\ell} \\ &= n(1+1)^{n-1} \qquad \text{formule du binôme} \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

<u>Avec une fonction génératrice :</u>
On a

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)^n\big)\Bigg|_{x=1} \\ &= \big(n(1+x)^{n-1}\big)\Big|_{x=1} \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

<u>Bilan :</u>

$$\boxed{S_1(n) = n2^{n-1}.}$$

3. On a

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n} \big(k(k-1)+k\big)\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + S_1(n) \end{aligned}$$

<u>Avec la formule du pion :</u>

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=\cancel{0}\,2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} && \text{formule du pion } (2\times) \\
&= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell} && \text{en posant } \ell = k-2 \\
&= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}1^{\ell}1^{n-2-\ell} \\
&= n(n-1)(1+1)^{n-2} && \text{formule du binôme} \\
&= n(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Avec une fonction génératrice :
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big)\Big|_{x=1} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big((1+x)^n\big)\Big|_{x=1} \\
&= \big(n(n-1)(1+x)^{n-2}\big)\Big|_{x=1} \\
&= n(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Bilan :
On a

$$S_2(n) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{S_2(n) = n(n+1)2^{n-2}.}$$

♦ ***Exercice 11.*** [○]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$. Démontrer que $a^n - b^n \geqslant nb^{n-1}$.
2. En déduire que si $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est une solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, alors $x \geqslant n$ et $y \geqslant n$. *En réalité, cette équation n'a pas de solution dans* $(\mathbb{N}^*)^3$ *dès que* $n \geqslant 3$ *mais c'est un tantinet plus difficile à démontrer* ;-)

1. La formule de Bernoulli dit que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

D'une part, comme a et b sont des entiers tels que $a > b$, on a

$$a - b \geqslant 1.$$

D'autre part, comme $a > b > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} = nb^{n-1}.$$

Donc

$$\boxed{a^n - b^n \geqslant nb^{n-1}.}$$

2. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ une solution de l'équation de Fermat. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $x \leqslant y$. Par ailleurs, la relation $x^n + y^n = z^n$ nous dit que $z > y$. On a donc $x \leqslant y < z$. Alors

$$\begin{aligned} x^n &= z^n - y^n \\ &\geqslant ny^{n-1} && \text{d'après 1.} \\ &\geqslant nx^{n-1} && \text{car } x \leqslant y. \end{aligned}$$

En simplifiant par x^{n-1} qui est strictement positif, on obtient

$$x \geqslant n.$$

Comme $y \geqslant x$, on a aussi

$$y \geqslant n.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{si } (x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \text{ est une solution de l'équation de Fermat } x^n + y^n = z^n \text{, alors } x \geqslant n \text{ et } y \geqslant n.}$$

♦ ***Exercice 12.*** [⋆]
Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} [(k+1)^5 - k^5].$$

déterminer l'expression de la quatrième somme d'Euler : $E_4(n) = 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.
Proposer une démarche pour déterminer $E_p(n) = 0^p + 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La somme S_n est téléscopique :

$$S_n = (\cancel{1^5} - 0^5) + (\cancel{2^5} - \cancel{1^5}) + (\cancel{3^5} - \cancel{2^5}) + \cdots + \left((n+1)^5 - \cancel{n^5}\right),$$

donc

$$\boxed{S_n = (n+1)^5.}$$

La formule du binôme de Newton nous donne $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$, donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} [5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{S_n = 5E_4(n) + 10E_3(n) + 10E_2(n) + 5E_1(n) + (n+1).}$$

En combinant ces deux résultats, il vient

$$\begin{aligned} 5E_4(n) &= S_n - 10E_3(n) - 10E_2(n) - 5E_1(n) - (n+1) \\ &= (n+1)^5 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1)\left[(n+1)^4 - \frac{5n^2(n+1)}{2} - \frac{10n(2n+1)}{6} - \frac{5n}{2} - 1\right] \\ &= (n+1)\left(n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n\right) \\ &= n(n+1)\frac{6n^3 + 9n^2 + n - 1}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.}$$

Pour calculer $E_p(n)$, on calcule de deux manières, comme on vient de le faire, la somme

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}].$$

On trouve

$$\boxed{E_p(n) = \frac{1}{p+1}\left\{(n+1)^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i}E_i(n)\right\}.}$$

♦ ***Exercice 13.*** [⋆]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

1. En utilisant les nombres complexes, calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx).$$

2. Nous démontrerons dans l'exercice 22 que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(z-1)^2}.$$

À l'aide de ce résultat, calculer

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} k\cos(2kx) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} k\sin(2kx).$$

1. On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i2kx}$$

et l'on reconnait une somme géométrique de raison e^{i2x}. Comme $n \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, alors $\mathrm{e}^{i2x} \neq 1$ et l'on peut utiliser la formule d'une somme géométrique pour écrire que

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x/2}\big(\mathrm{e}^{i(n+1)x/2} - \mathrm{e}^{-i(n+1)x/2}\big)}{\mathrm{e}^{ix/2}\big(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2}\big)} && \text{technique de l'angle moyen} \\
&= \mathrm{e}^{inx/2}\,\frac{2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}} && \text{formules d'Euler} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{e}^{inx/2} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
c_n + is_n &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{i2kx} \\
&= \frac{n\,\mathrm{e}^{i2(n+2)x} - (n+1)\,\mathrm{e}^{i2(n+1)x} + \mathrm{e}^{i2x}}{(\mathrm{e}^{i2x} - 1)^2} && \text{d'après l'énoncé car } \mathrm{e}^{i2x} \neq 1 \\
&= \frac{n\,\mathrm{e}^{i2(n+2)x} - (n+1)\,\mathrm{e}^{i2(n+1)x} + \mathrm{e}^{i2x}}{\mathrm{e}^{i2x}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^2} && \text{technique de l'angle moyen} \\
&= \frac{n\,\mathrm{e}^{i2(n+1)x} - (n+1)\,\mathrm{e}^{i2nx} + 1}{\big(2i\sin(x)\big)^2},
\end{aligned}$$

donc, en prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{c_n = -\frac{n\cos\big((n+1)x\big) - (n+1)\cos(nx) + 1}{4\sin^2(x)} \qquad \text{et} \qquad s_n = \frac{n\sin\big((n+1)x\big) - (n+1)\sin(nx)}{4\sin^2(x)}.}$$

♦ ***Exercice 14.*** [○]
Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, donner une expression factorisée de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+2kb).$$

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{a+2kb} + \mathrm{e}^{-a-2kb}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a}}{2} \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{2b})^k + \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2} \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{-2b})^k \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a}}{2} \frac{\mathrm{e}^{2(n+1)b} - 1}{\mathrm{e}^{2b} - 1} + \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2} \frac{\mathrm{e}^{-2(n+1)b} - 1}{\mathrm{e}^{-2b} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a}}{2} \frac{\mathrm{e}^{(n+1)b}}{\mathrm{e}^{b}} \frac{\mathrm{e}^{(n+1)b} - \mathrm{e}^{-(n+1)b}}{\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b}} + \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)b}}{\mathrm{e}^{-b}} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)b} - \mathrm{e}^{(n+1)b}}{\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+nb}}{2} \frac{2\operatorname{sh}\big((n+1)b\big)}{2\operatorname{sh}(b)} + \frac{\mathrm{e}^{-a-nb/2}}{2} \frac{-2\operatorname{sh}\big((n+1)b\big)}{-2\operatorname{sh}(b)} \\
&= \frac{\operatorname{sh}\big((n+1)b\big)}{\operatorname{sh}(b)} \Big(\frac{\mathrm{e}^{a+nb}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-a-nb/2}}{2} \Big) \\
&= \frac{\operatorname{sh}\big((n+1)b\big)}{\operatorname{sh}(b)} \operatorname{ch}(a+nb)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{\operatorname{sh}\big((n+1)b\big)\operatorname{ch}(a+nb)}{\operatorname{sh}(b)}.}$$

♦ ***Exercice 15.*** [⋆]
Soients $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer
$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
2. Calculer
$$\mathfrak{C}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \sin(kx).$$

1. On a

$$\begin{aligned}
\gamma_n + i\sigma_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(\cos(kx) + i\sin(kx)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx} \\
&= (1+\mathrm{e}^{ix})^n \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \mathrm{e}^{inx/2} (\mathrm{e}^{ix/2} + \mathrm{e}^{-ix/2})^n \\
&= \mathrm{e}^{inx/2} \big(2\cos(x/2)\big)^n \\
&= 2^n \cos^n \frac{x}{2} \Big(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2} \Big)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\gamma_n = 2^n \cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = 2^n \sin\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}\cdot}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_n + i\mathfrak{S}_n &= \\ &= \\ &= n2^{n-1}\cos^{n-1}(x/2)\,\mathrm{e}^{i(n+1)x/2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathfrak{C}_n = n2^{n-1}\cos\frac{(n+1)x}{2}\cos^{n-1}\frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_n = n2^{n-1}\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos^{n-1}\frac{x}{2}\cdot}$$

◆ ***Exercice 16.*** [∘]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{2n}\cdot$$

On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{2n} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\frac{(n-\ell)\pi}{2n} \qquad \text{en posant } \ell = n-k \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2\frac{\ell\pi}{2n} \qquad \text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta, \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\left(1 - \cos^2\frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} 1 - \sum_{\ell=0}^{n}\cos^2\frac{\ell\pi}{2n} \\ &= (n+1) - S, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S = \frac{n+1}{2}\cdot}$$

◆ ***Exercice 17.*** [⋆]
En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, on a $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}\cdot$$

Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)k},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\cdot$$

En sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right),$$

ce qui donne, après téléscopage,
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 1-\frac{1}{n}\cdot$$
En ajoutant 1 aux trois membres de cet encadrement, on obtient
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}\cdot}$$

Remarque : Cet encadrement justifie, d'une part, que la suite croissante $\left(\sum_{k=1}^{n}1/k^2\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée par 2, ce qui démontre qu'elle converge vers une limite* ℓ *et, d'autre part, que* $3/2\leqslant\ell\leqslant 2$. *Nous verrons qu'en fait, on a* $\ell=\pi^2/6$.

♦ **Exercice 18.** [$\star$]
Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot$$
Indication : On utilisera la dérivée d'une fonction génératrice, que l'on primitivera à l'aide d'un changement de variable.

La somme
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
est la valeur en -1 de la fonction génératrice
$$f(x)=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k}\cdot$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}\\ &= -\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k\\ &= -\frac{1}{x}\big((x+1)^n-1\big)\qquad\text{binôme}\end{aligned}$$
donc
$$f(x)=\int^x\frac{1-(t+1)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$
En effectuant le changement de variable $u=t+1$, on obtient, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{x+1}\frac{1-u^n}{u-1}\,\mathrm{d}u\\ &= -\int^{x+1}(1+u+u^2+\cdots+u^{n-1})\,\mathrm{d}u\\ &= -\Big[u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^n}{n}\Big]^{x+1}\\ &= -(x+1)-\frac{(x+1)^2}{2}-\cdots-\frac{(x+1)^n}{n}+C.\end{aligned}$$
Comme $f(0)=0$, on en déduit que
$$C=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$
donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$f(x)=1-(x+1)+\frac{1-(x+1)^2}{2}+\cdots+\frac{1-(x+1)^n}{n}\cdot$$

En évaluant en -1, on obtient directement que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

♦ ***Exercice 19.*** [★]
Soient $x\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{q-1}\left\lfloor x+\frac{k}{q}\right\rfloor=\lfloor qx\rfloor\,.$$

Lorsque k décrit $[\![0;q-1]\!]$, les nombres réels $x+k/q$ croissent à partir de x jusqu'à $x+1-1/q$. Or il existe au plus un entier entre x et $x+1-1/q$ donc la suite finie d'entiers $(\lfloor x+k/q\rfloor)_{k\in[\![0;q-1]\!]}$ changent au plus une fois de valeur en passant de $\lfloor x\rfloor$ à $\lfloor x\rfloor+1$. D'où l'idée d'introduire l'entier $k_0\in[\![0;q]\!]$ tel que

$$x+\frac{k_0}{q}<\lfloor x\rfloor+1\leqslant x+\frac{k_0+1}{q}\qquad(*).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{q-1}\left\lfloor x+\frac{k}{q}\right\rfloor &= \sum_{k=0}^{k_0}\left\lfloor x+\frac{k}{q}\right\rfloor+\sum_{k=k_0+1}^{q-1}\left\lfloor x+\frac{k}{q}\right\rfloor\\ &= \sum_{k=0}^{k_0}\lfloor x\rfloor+\sum_{k=k_0+1}^{q-1}(\lfloor x\rfloor+1)\\ &= \sum_{k=0}^{q-1}\lfloor x\rfloor+\sum_{k=k_0+1}^{q-1}1\\ &= q\lfloor x\rfloor+q-(k_0+1).\end{aligned}$$

Or, d'après $(*)$, on a

$$qx-1<q\lfloor x\rfloor+q-(k_0+1)\leqslant qx,$$

donc

$$q\lfloor x\rfloor+q-(k_0+1)=\lfloor qx\rfloor\,.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{q-1}\left\lfloor x+\frac{k}{q}\right\rfloor=\lfloor qx\rfloor.}$$

♦ ***Exercice 20.*** [⋆]
Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{\ell+1},\qquad \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\1\leqslant q\leqslant m}}p(q^2+1)\qquad\text{et}\qquad\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\j\leqslant i\leqslant j+p}}(i-j)^2.$$

On a

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{\ell+1}=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{k}{\ell+1}=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell+1}\sum_{k=0}^{\ell}k=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell+1}\frac{\ell(\ell+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n}\ell=\frac{n(n+1)}{4},$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\1\leqslant q\leqslant m}}p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=1}^{m}p(q^2+1)=\sum_{p=0}^{n}p\Big(\sum_{q=1}^{m}q^2+\sum_{q=1}^{m}1\Big)=\Big(\sum_{q=1}^{m}q^2+\sum_{q=1}^{m}1\Big)\sum_{p=0}^{n}p\\ &= \Big(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+m\Big)\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\j\leqslant i\leqslant j+p}}(i-j)^2=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{j+p}(i-j)^2=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}k^2=(n+1)\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

♦ ***Exercice 21.*** [$\circ$]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0\leqslant \ell\leqslant m}} \binom{n}{k} \ell^k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0\leqslant \ell\leqslant m}} \binom{n}{k} \ell^k &= \sum_{\ell=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \ell^k \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \left((\ell+1)^n - \ell^n \right) \qquad \text{binôme} \\
&= \text{téléscopage} \\
&= (m+1)^n - 0^n,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0\leqslant \ell\leqslant m}} \binom{n}{k} \ell^k = (m+1)^n.}$$

♦ ***Exercice 22.*** [$\star$]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. En utilisant l'identité $k = \sum_{\ell=1}^{k} 1$, démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k z^k = \frac{n z^{n+2} - (n+1) z^{n+1} + z}{(z-1)^2}.$$

Retrouver ce résultat en calculant $(z-1) \sum_{k=1}^{n} k z^k$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k z^k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} 1 \right) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} z^k \right) \\
&= \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} z^k \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=\ell}^{n} z^k \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{z^{n+1} - z^\ell}{z-1} \qquad \text{formule de sommation d'une suite géométrique (avec } z \neq 1) \\
&= \frac{z^{n+1}}{z-1} \sum_{\ell=1}^{n} 1 - \frac{1}{z-1} \sum_{\ell=1}^{n} z^\ell \\
&= \frac{n z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1} \frac{z^{n+1} - z}{z-1} \qquad \text{formule de sommation d'une suite géométrique (avec } z \neq 1),
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k z^k = \frac{n z^{n+2} - (n+1) z^{n+1} + z}{(z-1)^2}.}$$

On peut aussi écrire que

$$
\begin{aligned}
(z-1)\sum_{k=1}^{n} kz^k &= \sum_{k=1}^{n}(kz^{k+1}-kz^k)\\
&= \quad 1.z^2-1.z^1\\
&\quad +2.z^3-2.z^2\\
&\quad +3.z^4-3.z^3\\
&\quad +\cdots\\
&\quad +n.z^{n+1}-n.z^n\\
&= -z-z^2-\cdots-z^n+nz^{n+1}\\
&= -\frac{z^{n+1}-z}{z-1}+nz^{n+1}\\
&= \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{z-1},
\end{aligned}
$$

ce qui redonne, après division par $z-1$,

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{(z-1)^2}.}
$$

♦ ***Exercice 23.*** [○]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max\{i;j\}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min\{i;j\}$.

On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max\{i;j\} &= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{j=1}^{n} j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min\{i;j\} &= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{i=1}^{n} i(n-i)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + 2n\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

♦ ***Exercice 24.*** [⋆]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

1. Démontrer l'identité de Lagrange :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\Big).$$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2}.$$

1. On a

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2{b_k}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} a_k b_k a_\ell b_\ell + \sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} ({a_k}^2{b_\ell}^2 + {a_\ell}^2{b_k}^2 - 2a_k b_\ell a_\ell b_k) \\
= \;& \underbrace{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2{b_k}^2}_{\text{sur la diagonale}} + \underbrace{\sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} {a_k}^2{b_\ell}^2}_{\text{sous la diagonale}} + \underbrace{\sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} {a_\ell}^2{b_k}^2}_{\text{au dessus de la diagonale}} \\
= \;& \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant} {a_k}^2{b_\ell}^2 \\
= \;& \Big(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\Big).}$$

2. Il découle de la question précédente que

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\Big),$$

ce qui donne, après prise de racine carrée,

$$\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2}.}$$

♦ ***Exercice 25.*** [⋆]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} (a_\ell - a_k)(b_\ell - b_k) = n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big).$$

2. En déduire que, si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, on a l'inégalité de Tchebychev :

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Autrement dit, si deux séries de n nombres sont rangées par ordre croissant, le produit de leurs moyennes est inférieur ou égal à la moyenne de leurs produits.

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}(a_\ell-a_k)(b_\ell-b_k) &= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\ell}(a_\ell-a_k)(b_\ell-b_k)\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\ell}(a_\ell b_\ell-a_\ell b_k-a_k b_\ell+a_k b_k)\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}a_\ell b_\ell-\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}a_\ell b_k-\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}a_k b_\ell+\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}a_k b_k\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\ell a_\ell b_\ell-\underbrace{\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}a_\ell b_k+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}a_\ell b_\ell\right)}_{\substack{\text{somme sur le rectangle}\\ \text{avec deux fois la diagonale}}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}a_k b_k\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\ell a_\ell b_\ell-\left(\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}a_\ell b_k+\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell b_\ell\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}a_k b_k\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\ell a_\ell b_\ell-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\right)-\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell b_\ell+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k b_k\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}na_\ell b_\ell-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}(a_\ell-a_k)(b_\ell-b_k)=n\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell b_\ell-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\right)}$$

2. Il découle de la question précédente que

$$n\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell b_\ell-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\right)\geqslant 0$$

puisque, pour tout $1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n$,

$$a_\ell-a_k\geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad b_\ell-b_k\geqslant 0.$$

En divisant par n^2, on obtient

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k b_k.}$$

♦ ***Exercice 26.*** [○]
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right\}\\
&= \ln\left\{\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{4}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{n}{n\cancel{-}1}\right\},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n).}$$

◆ ***Exercice 27.*** [$\star$]

Soit $n \geqslant 2$. En remarquant que $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$, simplifier $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

On a

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \end{aligned}$$

Or, par téléscopage, on a

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Par ailleurs, comme $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$, on a

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1},$$

ce qui permet d'abserver un nouveau téléscopage :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{3^2-3+1}{2^2-2+1} \times \frac{4^2-4+1}{3^2-3+1} \times \cdots \times \frac{n^2-n+1}{(n-1)^2-(n-1)+1} \times \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}, \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\boxed{P_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}.}$$

◆ ***Exercice 28.*** [$\circ$]

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$ à l'aide de factorielles. Que reconnait-on ?

On a

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \binom{n}{p}.$$

◆ ***Exercice 29.*** [$\star$]

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

Le plus simple pour ne pas se tromper consiste à revenir à une somme double en utilisant le logarithme.

Cela donne

$$\begin{aligned}
\ln P_n &= \ln\Big(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij\Big)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln(ij)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\ln i+\ln j)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n}\ln i\Big)+\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j-1}\ln j\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-i)\ln i+\sum_{j=1}^{n}(j-1)\ln j\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-i)\ln i+\sum_{i=1}^{n}(i-1)\ln i \qquad \text{car } j \text{ est muette}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-i+i-1)\ln i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-1)\ln i\\
&= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\ln i\\
&= (n-1)\ln\Big(\prod_{i=1}^{n} i\Big)\\
&= (n-1)\ln(n!)\\
&= \ln\big((n!)^{n-1}\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P_n=(n!)^{n-1}.}$$