Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 17/10/2018
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 5 : Relations, réels

Correction du problème 1 – Treillis et algèbres de Boole

Partie I – Treillis

1. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $(x, y) \in E^2$. Comme E est totalement ordonné, on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. Ainsi, dans les deux cas, le sous-ensemble $\{x, y\}$ admet un minimum et un maximum, donc une borne supérieure et une borne inférieure. Ainsi, $(E, \leqslant)$ est un treillis.

2. (i) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^*$. Alors un entier z de $\mathbb{N}^*$ minore x et y si et seulement si $z \mid x$ et $z \mid y$; le plus grand des minorants existe, et est par définition le pgcd de x et y (le « plus grand » est ici à prendre au sens de la divisibilité et non de la relation usuelle sur $\mathbb{N}^*$, mais cela revient au même ici, tous les diviseurs commun de x et y divisant le pgcd). Ainsi, $\{x, y\}$ admet une borne inférieure, et $\boxed{x \frown y = \operatorname{pgcd}(x, y)}$.

   Un raisonnement similaire amène l'existence de la borne supérieure, et $\boxed{x \smile y = \operatorname{ppcm}(x, y)}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{N}^* \text{ muni de la relation de divisibilité est un treillis}}$.

   (ii) Soit $(Y, Z) \in \mathcal{P}(X)$. Alors les minorants U de Y et Z sont les ensembles tels que $U \subset Y$ et $U \subset Z$. Ils vérifient tous $U \subset Y \cap Z$, et $Y \cap Z$ vérifie bien $Y \cap Z \subset Y$ et $Y \cap Z \subset Z$. Ainsi, $Y \cap Z$ est le plus grand des minorants de Y et Z. On en déduit que la borne supérieure de Y et Z existe, et $\boxed{Y \frown Z = Y \cap Z}$.

   On montre par le même raisonnement que Y et Z admettent une borne supérieure, et $\boxed{Y \smile Z = Y \cup Z}$.

   Ainsi, $\boxed{(\mathcal{P}(x), \subset) \text{ est un treillis}}$.

3. • Puisque $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$, et pour tout $Y \in \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \subset Y$, $\varnothing$ est le minimum de $\mathcal{P}(X)$.
   Puisque $E \in \mathcal{P}(X)$ et pour tout $Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \subset E$, E est le maximum de $\mathcal{P}(X)$.
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(X) \text{ est borné}}$, et en utilisant les notations introduites, $0 = \varnothing$, et $1 = E$.

   • Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$, et définissons $Y^c = \complement_X Y$. On a alors

   $$Y \frown Y^c = Y \cap Y^c = \varnothing = 0 \qquad \text{et} \qquad Y \smile Y^c = Y \cup Y^c = E = 1.$$

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(X) \text{ est complémenté}}$.

   • D'après le cours, l'intersection est distributive sur l'union et vice-versa, donc $\boxed{\mathcal{P}(X) \text{ est distributif}}$.

4. Soit $(E, \leqslant)$ un treillis borné, complémenté et distributif.

   (a) • Soit $x \in E$. Comme 0 est le minimum de E, le seul minorant de 0 est 0, et c'est aussi un minorant de x. Ainsi, l'ensemble des minorants de 0 est $\{0\}$, qui admet un plus grand élément, à savoir 0. Ainsi, $\boxed{x \frown 0 = 0}$

   • De même, les majorants de x et 0 sont tous supérieurs à x et x lui-même est un majorant de x et 0. Ainsi, il s'agit du plus petit. Donc $\boxed{x \smile 0 = 0}$.

   • De même, les minorants de x et 1 sont tous inférieurs à x et x lui-même est un minorant de x et 1 (puisque 1 est le maximum). Ainsi, il s'agit du plus grand. Donc $\boxed{x \frown 1 = x}$.

   • Enfin, le seul majorant de 1 est 1 lui-même, qui est aussi majorant de x, donc $\boxed{x \smile 1 = 1}$.

   (b) Soit $(x, y, z) \in E^3$ et $m = \inf(\inf(x, y), z)$, $m' = \inf(x, \inf(y, z))$.

   • On a $m \leqslant \inf(x, y)$ et $m \leqslant z$, et comme $\inf(x, y) \leqslant x$ et $\inf(x, y) \leqslant y$, on a $m \leqslant x$, $m \leqslant y$ et $m \leqslant y$. Des deux dernières inégalités, on tire que m est un minorant de $\{y, z\}$, donc, par définition, $m \leqslant \inf(y, z)$. Cette inégalité, associée à $m \leqslant x$ montre que m est un minorant de $\{x, \inf(y, z)\}$, donc, par définition, $m \leqslant m'$.

- Le même raisonnement montre que $m' \leqslant m$.

Ainsi, $\boxed{\inf(\inf(x,y),z) = \inf(x, \inf(y,z))}$, soit $\boxed{(x \frown y) \frown z = x \frown (y \frown z)}$.

(c) Soit x' et x'' deux complémentaires de x, et soit $y = (x \frown x') \smile x''$.
- Par définition d'un complémentaire, on a $y = 0 \smile x'' = x''$.
- Par ailleurs, par distributivité,

$$y = (x \smile x'') \frown (x' \smile x'') = 1 \frown (x' \smile x'') = x' \smile x''.$$

- Ainsi, $x'' = x' \smile x''$, donc x'' est un majorant de x' et x''. En particulier, $x'' \geqslant x'$.
- En intervertissant les rôles de x' et x'', il vient $x' \geqslant x''$.
- L'antisymétrie de la relation d'ordre amène alors $x' = x''$

On en déduit que $\boxed{\text{le complémentaire } x^c \text{ est unique}}$.

(d)
- Pour la première identité, il suffit de montrer que $x^c \smile y^c$ est LE complémentaire de $x \frown y$. Pour cela on a deux vérifications à faire, en utilisant l'associativité des bornes supérieures (de même type), la commutativité, et la distributivité :
  - $*$ $(x \frown y) \frown (x^c \smile y^c) = (x \frown y \frown x^c) \smile (x \frown y \frown y^c) = (0 \frown y) \smile (x \frown 0) = 0 \smile 0 = 0$.
  - $*$ $(x \frown y) \smile (x^c \smile y^c) = (x \smile x^c \smile y^c) \frown (y \smile x^c \smile y^c) = (1 \smile y^c) \frown (1 \smile x^c) = 1 \frown 1 = 1$.

  on en déduit que $\boxed{(x \frown y)^c = x^c \smile y^c}$
- Par unicité du complémentaire, on voit immédiatement que x est le complémentaire de x^c, donc $(x^c)^c = 0$. Cela nous dispense de refaire tout l'argument pour obtenir la deuxième loi de De Morgan ; on peut la retrouver à partir de la première :

$$(x \smile y)^c = ((x^c)^c \smile (y^c)^c)^c = ((x^c \frown y^c)^c)^c = (x^c \frown y^c).$$

  On a bien obtenu : $\boxed{(x \smile y)^c = x^c \frown y^c}$

5. (a) Soit $x \in E$.
- $x + 0 = (x \frown 0^c) \smile (x^c \frown 0) = (x \frown 1) \smile 0 = x$, donc $\boxed{x + 0 = x}$.
- $x \times 1 = x \frown 1 = x$ donc $\boxed{x \times 1 = x}$
- $x^2 = x \frown x = x$, donc $\boxed{x^2 = x}$
- $x + x = (x \frown x^c) \smile (x^c \frown x) = 0 \smile 0 = 0$, soit : $\boxed{x + x = 0}$.

(b)
- Les opérations $\smile$ et $\frown$ (correspondant aux bornes inférieures et supérieures) sont commutatives. On en déduit facilement la $\boxed{\text{commutativité de } +}$.
- Soit $(x, y, z) \in E$. On a

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= ((x \frown y^c) \smile (x^c \frown y)) + z \\ &= (((x \frown y^c) \smile (x^c \frown y)) \frown z^c) \smile (((x \frown y^c) \smile (x^c \frown y))^c \frown z \\ &= (x \frown y^c \frown z^c) \smile (x^c \frown y \frown z^c) \smile ((x^c \smile y) \frown (x \smile y^c)) \frown z \\ &= (x \frown y^c \frown z^c) \smile (x^c \frown y \frown z^c) \smile (x^c \frown y^c \frown z) \smile (x \frown y \frown z).\end{aligned}$$

  Cette expression étant symétrique en x, y et z, on obtient la même chose en intervertissant l'ordre initial des variables, donc, en utilisant la commutativité déjà justifiée,

$$(x + y) + z = (y + z) + x = x + (y + z).$$

  Ainsi, $\boxed{+ \text{ est associative}}$.
- L'$\boxed{\text{associativité de } \times}$ n'est rien d'autre que l'associativité des bornes inférieures qu'on a déjà utilisé dans l'argument précédent.
- Soit $(x, y, z) \in E^3$. On a alors :

$$x \times (y + z) = x \frown ((y \frown z^c) \smile (y^c \frown z)) = (x \frown y \frown z^c) \smile (x \frown y^c \frown z)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
x \times y + x \times z &= ((x \frown y) \frown (x \frown z)^c) \smile ((x \frown y)^c \frown (x \frown z)) \\
&= (x \frown y \frown x^c) \smile (x \frown y \frown z^c) \smile (x^c \frown x \frown z) \smile (y^c \frown x \frown z) \\
&= 0 \smile (x \frown y \frown z^c) \smile 0 \smile (x \frown y^c \frown z) \\
&= (x \frown y \frown z^c) \smile (x \frown y^c \frown z)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien la distributivité $\boxed{x \times (y+z) = x \times y + x \times z}$.

Partie II – Algèbres de Boole

1. Cela provient de la partie précédente, $\mathcal{P}(X)$ étant un treillis borné complémenté et distributif. Le complément correspondant à la complémentation usuelle dans $\mathcal{P}(X)$, on se rend compte que l'addition correspond à la différence symétrique. La dernière question de la partie I permet alors d'affirmer que $\boxed{\mathcal{P}(X) \text{ muni de } \triangle \text{ et } \cap \text{ est une algèbre de Boole}}$.
   On a déjà dit que $0 = \varnothing$ et $1 = E$.
2. (a) On a :
   $$x + y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y,$$
   d'où $\boxed{0 = xy + yx}$.

   (b) i. En particulier, pour $y = 1$, on obtient $x + x = 0$, donc $\boxed{x = -x}$

   ii. En combinant les deux derniers résultats, pour tout $(x, y) \in A^2$, $xy = -yx = yx$, donc $\boxed{\times \text{ est commutative}}$.
3. On définit sur A une relation par :
   $$\forall (x, y) \in A, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow xy = x.$$
   (a)
   - Soit $x \in A$, on a $x^2 = x$, donc $x \leqslant x$. Ainsi, $\leqslant$ est reflexive.
   - Soit $(x, y) \in A^2$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. Alors $xy = x$ et $yx = y$. Comme $xy = yx$, on en déduit que $x = y$. Ainsi, $\leqslant$ est antisymétrique.
   - Soit $(x, y, z) \in A^3$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$. On a alors $xy = x$ et $yz = y$, d'où $xz = (xy)z = x(yz) = xy = x$. Ainsi, $x \leqslant z$. Donc $\leqslant$ est transitive.

   Il s'agit donc d'une relation reflexive, antisymétrique et transitive, donc d'une $\boxed{\text{relation d'ordre sur } A}$.

   (b) Pour tout $x \in A$:
   - $0 \times x = (0 + 0) \times x = (0 \times x) + (0 \times x) = 0$, d'après 2(b)(i). Donc $0 \leqslant x$.
     On en déduit que $\boxed{0 \text{ est le minimum de } A}$.
   - $x \times 1 = x$ par définition, donc $x \leqslant 1$. Ainsi, $\boxed{1 \text{ est le maximum de } A}$.

   (c)
   - On a $(xy)x = yx^2 = yx = (xy)$, donc $xy \leqslant x$;
   - De même $xy \leqslant y$. Ainsi, xy est un minorant de x et de y.
   - Soit $z \leqslant x$ et $z \leqslant y$. Alors $zx = z$ et $zy = z$, d'où $zxy = zy = z$, donc $z \leqslant xy$.
   - On en déduit que xy est le plus grand des minorants de x et y, donc la borne inférieure (ce qui montre son existence) : $\boxed{xy = x \frown y}$.

   (d) On raisonne de même :
   - $x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + xy + xy = x$, donc $x \leqslant x + y + xy$.
   - De même $y \leqslant x + y + xy$, donc $x + y + xy$ est un majorant de x et y.
   - Soit z tel que $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$. Alors $xz = x$ et $yz = y$. On a alors :
     $$(x + y + xy)z = xz + yz + xyz = x + y + xy.$$
     On a donc $x + y + xy \leqslant z$.
   - Ainsi, $x + y + xy$ est le plus petit des majorants, donc la borne supérieure (qui existe donc) : $x \smile y = x + y + xy$.

(e) • La commutativité et l'associativité de $\frown$ découlent immédiatement de l'associativité et de la commutativité du produit de A (hypothèse et question 2(b)).
• L'expression de la loi $\smile$ et la commutativité de $\times$ et $+$ amène de façon immédiate la commutativité de $\smile$.
• Soit $(x, y, z) \in A^3$. On a :

$$x \smile (y \smile z) = x \smile (y + z + yz) = x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) = x + y + z + yz + xz + xy + xyz.$$

En développant de même $(x \smile y) \smile z$, on obtient la même expression d'où l'associativité.
• Soit $(x, y, z) \in A^3$. On a
  * $x \smile (y \frown z) = x + yz + xyz$,
  * $(x \smile y) \frown (x \smile z) = (x + y + xy)(x + z + xz) = x^2 + xz + x^2z + yx + yz + xyz + x^2y + xyz + x^2yz = x + yz + xyz$,

d'après les relations $x^2 = x$ et $x + x = 0$. Ainsi, on obtient la même chose, donc $\smile$ est distributive sur $\frown$.
• Soit $(x, y, z) \in A^3$. On a
  * $x \frown (y \smile z) = x(y + z + yz) = xy + xz + xyz$,
  * $(x \frown y) \smile (x \frown z) = xy + xz + xyxz = xy + xz + xyz$.

On en déduit que $\frown$ est distributif sur $\smile$.

(f) Soit $x \in A$. On recherche y tel que $xy = 0$ et $x + y + xy = 1$, donc $xy = 0$ et $x + y = 1$, ce qui incite à définir $y = 1 - x = 1 + x$. Montrons que ce choix convient :
• $x \frown (1 + x) = x(1 + x) = x + x^2 = x + x = 0$;
• $x \smile (1 + x) = x + (1 + x) + x(1 + x) = 1 + x + x = 1$.

Ainsi, $1 + x$ est bien le complémentaire de x : $\boxed{x^c = 1 + x}$.

Ainsi, toute algèbre de Boole peut être muni d'une relation d'ordre qui en fait un treillis borné complémenté distributif. La réciproque avait été établie dans la partie I.

Partie III – Description des algèbres de Boole finies

Soit A une algèbre de Boole finie.

1. Soit $x \in A$ non nul. Si x est un atome, x est minoré par lui-même.

   Supposons que x n'est pas un atome et soit $m(x)$ l'ensemble des minorants stricts de x. L'ensemble $m(x) \setminus \{0\}$ est non vide puisque a n'est pas un atome. Il admet un élément minimal, car sinon, partant d'un élément $b_1 \in m(x) \setminus \{0\}$, n'étant pas minimal, on pourrait trouver $b_2 \in m(x) \setminus \{0\}$ tel que $b_2 < b_1$, puis de la même manière $b_3 < b2$, et ainsi, construire une suite infinie $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n > \ldots$ d'éléments deux à deux distints, ce qui contredirait le fait que A est fini.

   Ainsi, $m(x) - \{0\}$ admet au moins un élément minimal a. Son seul minorant strict dans $m(z)$ est donc 0 (qui est minorant de tout élément). Ainsi, a est un atome. Comme il est dans $m(x)$, il minore a.

   $\boxed{\text{Tout élément } x \text{ non nul de } A \text{ est donc minoré par un atome}}$.

2. (a) Soit $(x, y) \in A^2$, et a un atome de A. Supposons que $a \leqslant x \smile y$ et $a \nleqslant x$. De la dernière propriété, on tire $a \neq a \frown x$. Mais comme $a \frown x \leqslant a$, et que les seuls minorants de a sont a et 0, on en déduit que $a \frown x = 0$. Ainsi, de la première inégalité et de la distributivité, on tire :

   $$a = a \frown (x \smile y) = (a \frown x) \smile (a \frown y) = 0 \smile (a \frown y) = a \frown y.$$

   Cette égalité implique que $\boxed{a \leqslant y}$.

   Commet pourrait-on appeler ce résultat ? Lemme d'Euclide par exemple ?

   (b) Récurrence immédiate ! Le cas $n = 1$ est trivial, le cas $n = 2$ (utilisé explicitement dans la preuve de l'hérédité) découle de la question précédente, et l'hérédité est immédiate.

3. Soit E l'ensemble des atomes de A, et $h : A \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall x \in A, \quad h(x) = \{a \in E \mid a \leqslant x\}.$$

(a) Nous rappelons que $\frown$ est l'intersection dans $\mathcal{P}(E)$, et X^c représente $\complement_E X$. Nous avons donc à vérifier que pour tout $(x,y) \in A^2$, $h(x \frown y) = h(x) \cap h(y)$, et $h(x^c) = \complement_E h(x)$.

- On a :

$$h(x \frown y) = \{a \in E \mid a \leqslant x \frown y\} = \{a \in E \mid a \leqslant x \text{ et } a \leqslant y\} = \{a \in E \mid a \leqslant x\} \cap \{a \in E \mid a \leqslant y\} = h(x) \cap h(y).$$

- * Par ailleurs étant donné $a \in h(x^c)$, on a $a \leqslant x^c$. Si on avait aussi $x \leqslant x$, on aurait $a \leqslant x \frown x^c = 0$, donc $a \leqslant 0$, puis $a = 0$ (0 étant l'éménet minimum). Cela contredit le fait qu'un atome est non nul. Ainsi, $a \nleqslant x$, donc $a \notin h(x)$, donc $a \in \complement_A h(x)$. On en déduit une première inclusion $h(x^c) \subset \complement_E h(x)$.
  * Réciproquement, soit $a \in \complement_E h(x)$. Alors $a \nleqslant x$. Mais comme $a \leqslant x \smile x^c = 1$, on déduit de la question précédente que $a \leqslant x^c$, d'où $a \in h(x^c)$. On a donc la seconde inclusion $\complement_E h(x) \subset h(x^c)$.
  * Des deux inclusions, il vient l'égalité $h(x^c) = \complement_E h(x)$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est un homomorphisme d'algèbres de Boole}}$

(b) Soit $X = \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathcal{P}(E)$, et $x = a_1 \smile \cdots \smile a_k \in A$.

- Soit $a \in h(x)$. On a donc $a \leqslant a_1 \smile \cdots \smile a_k$, et comme a est un atome, on déduit de la question 2(b) qu'il existe $i \in [\![1,k]\!]$ tel que $a \leqslant a_i$. Comme a_i est un atome, $a = a_i$ ou $a = 0$, ce dernier étant impossible puisque a est un atome. Ainsi, $a = a_i$, donc $a \in X$. On a donc $h(x) \subset X$.
- Réciproquement, tout élément a_i de X vérifie $a_i \leqslant x$, car a_i est un des termes de la série de bornes supérieures définissant x. Ainsi, comme les a_i sont des atomes, $a_i \in h(x)$. On en déduit que $X \subset h(x)$.
- Des deux inclusions, il vient l'égalité : $\boxed{h(x) \subset X}$
- Tout sous-ensemble (non vide, et nécessairement fini puisque A l'est) X de $\mathcal{P}(E)$ admet un antécédent x par h ; c'est le cas aussi de $X = \varnothing$, dont un antécédent est 0 (seul élément de A n'étant pas minoré par un atome). Ainsi, $\boxed{h \text{ est surjective}}$.

(c) C'est un peu plus délicat. Soit $(x,y) \in A^2$ tels que $x \neq y$. Alors $x \frown y \neq x$ ou $x \frown y \neq y$ (sinon, on aurait à la fois $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, donc $x = y$) On peut supposer sans perte de généralité que $x \frown y \neq x$. Considérons alors :

$$x = x \frown 1 = x \frown (y \smile y^c) = (x \frown y) \smile (x \frown y^c).$$

Puisque $x \frown y \neq x$, on ne pet pas avoir $x \frown y^c = 0$. Ainsi, d'après la question 1, il existe un atome a minorant $x \frown y^c$. On a alors $a \in h(x)$ et $a \in h(y^c) = \complement_E h(y)$, donc $a \notin h(y)$. On a donc démontré que $h(x) \neq h(y)$.

Puisque pour tout $(x,y) \in A^2$, $x \neq y$ entraîne $f(x) \neq f(y)$, $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Ainsi, h est un homomorphisme injectif et surjectif, donc $\boxed{h \text{ est un isomorphisme d'algèbres de Boole.}}$

Toute algèbre de Boole finie est donc isomorphe à l'algèbre des parties de l'ensemble de ses atomes.

Correction du problème 2 –

1. **Convergence de la série définissant** c

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$.

(a) On peut faire la comparaison de deux manières, soit en rajoutant des termes $10^{-\ell}$ manquant entre les termes présents, soit en majorant chacun des termes $10^{-k!}$ par 10^{-k}. On obtient alors (en prenant la deuxième méthode) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} = \frac{1 - 10^{-n+1}}{1 - 10^{-1}} \leqslant \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{10}{9}.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

(b) Elle est aussi croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = 10^{-(n+1)!} \geqslant 0.$$

Ainsi, étant croissante et majorée, (S_n) est convergente, donc $\boxed{c = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!} \text{ est bien défini}}$.

2. **Irrationnalité de c**

   (a) On utilise ici plutôt la première des majorations suggérées dans la première question. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $N > n$. On a alors :

   $$\sum_{k=n+1}^{N} 10^{-k!} \leqslant \sum_{\ell=(n+1)!}^{(N+1)!} 10^{-\ell} = 10^{-(n+1)!} \frac{1 - 10^{-(N+1)!+(n+1)!-1}}{1 - 10^{-1}} \leqslant 10^{-(n+1)!} \cdot \frac{10}{9},$$

   d'où finalement,

   $$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}}.}$$

   (b) Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$. On a

   $$\frac{p}{q} 10^{n!} = c10^{n!} = S_n 10^{n!} + 10^{n!} \sum_{k=n+1}^{N} 10^{-k!},$$

   donc

   $$qS_n 10^{n!} < p10^{n!} \leqslant qS_n 10^{n!} + \frac{10^{n!}q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-1}} = qS_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{(n+1)!-n!-1}} = qS_n 10^{n!} + \frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}}.$$

   Comme $\dfrac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} \to 0$ lorsque $n \to 0$, on en déduit qu'il existe une valeur de n telle que

   $$\frac{q}{9 \cdot 10^{n \cdot n!-1}} < 1,$$

   et donc

   $$qS_n 10^{n!} < p10^{n!} < qS_n 10^{n!} + 1.$$

   Ainsi, l'entier $p10^{n!}$ est strictement encadré entre deux entiers consécutifs ($S_n 10^{n!}$ étant entier comme somme des entiers $10^{n!-k!}$, avec $n! - k! \geqslant 0$). Ceci est impossible.

   On en déduit que $\boxed{c \text{ est irrationnel}}$.

3. **Inégalité des accroissements finis**

   On peut soit utiliser l'inégalité triangulaire intégrale, soit (si vous ne la connaissez pas) revenir à un encadrement de f' : pour tout $x \in [a, b]$,

   $$-M \leqslant f'(x) \leqslant M,$$

   et par croissance de l'intégrale,

   $$-\int_a^b M \, dx \leqslant \int_a^b f'(x) \, dx \leqslant \int_a^b M \, dx, \qquad \text{soit:} \qquad -(b-a)M \leqslant f(b) - f(a) \leqslant (b-a)M.$$

   On a bien obtenu

   $$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|},$$

   puisque $b - a > 0$. Si $b < a$, on obtient la même chose (il suffit d'inverser le rôle de a et b, et de remarquer que du fait des valeurs absolues, l'expression est symétrique en a et b), et pour $a = b$, le résultat est trivial.

4. **Théorème de Liouville (approximation diophantienne)**

   Le but de cette question est de démontrer le théorème de Liouville, s'énonçant ainsi :

   Théorème de Liouville. Soit α un nombre algébrique non rationnel. Alors il existe un réel $A > 0$ et un entier $d \geqslant 2$, tels que pour tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$, ($(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$), on ait : $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{A}{q^d}$.

   Soit α un nombre algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers vérifiant $P(\alpha) = 0$. On suppose de plus que α n'est pas rationnel.

   On admettra dans cette question qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

(a) Soit $E = \{\deg P \mid P \in \mathbb{Z}[X], P \neq 0, P(\alpha) = 0\}$. C'est un sous-ensemble non vide (car α et algébrique) de $\mathbb{N}$. D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, E admet un minimum d. Comme $d \in E$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$, de degré minimal, tel que $d = \deg(P)$.

(b) Le polynôme P ne peut pas être constant non nul, donc $d \neq 0$. Si $d = 1$, il existe a et b des entiers tels que $a\alpha + b = 0$, donc $\alpha = -\frac{b}{a}$, ce qui contredit le fait que α n'est pas rationnel. Ainsi, $\boxed{d \geqslant 2}$.

(c) Si P admet une racine rationnelle q, on peut factoriser P :

$$P = (X - q)Q = (X - q)(a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0),$$

et en notant $P = b_d X^d + \cdots + b_1 X + b_0$, les b_i étant entiers, on obtient :

$$a_{d-1} = b_d \qquad \forall k \in [\![1, d-1]\!],\ a_{k-1} - a_k q = b_k \qquad -a_0 q = b_0.$$

L'équation $a_{d-1} = b_d$ nous assure que a_{d-1} est rationnel, puis $a_{d-2} = b_{d-1} + qa_{d-1}$ est aussi rationnel, puis également $a_{d-3} = b_{d-2} + qa_{d-2}$ etc. Ainsi, le polynôme Q est à coefficients rationnels. Par ailleurs, puisque $P(\alpha) = 0$ et $(\alpha - q) \neq 0$, il vient $Q(\alpha) = 0$. Ainsi, α est racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré $d - 1$. Quitte à multiplier par le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q, on obtient donc un polynôme à coefficients entiers de degré $d - 1$ dont α est racine, ce qui contredit la minimalité du degré de P.

Ainsi, $\boxed{P \text{ ne peut pas admettre de racine rationnelle}}$.

(d) En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{d} q^d b_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \sum_{k=0}^{d} b_k p^k q^{d-k}.$$

Tous les exposants étant positifs, les termes de cette somme sont tous entiers, donc $q^d P\left(\frac{p}{q}\right)$ est un entier. Par ailleurs, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*$, donc $\boxed{\left|q^d P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1}$.

(e) La fonction P' est continue sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ (en tant que fonction polynomiale), donc elle est bornée sur cet intervalle d'après le résultat admis. Soit M un majorant de $|P'|$ sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$.

Soit alors $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors M est aussi un majorant de P' entre α et $\frac{p}{q}$, et P est dérivable de derivée continue entre ces bornes. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Puisque $P(\alpha) = 0$, et d'après la question précédente, il vient

$$\frac{1}{q^d} \leqslant \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, on obtient :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^d}.$$

Remarquez la nécessité de choisir M avant α (pour qu'il ne dépende pas de α), et donc de devoir travailler dans un premier temps dans un intervalle fermé borné $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ de longueur fixe. On récupère le cas de $\mathbb{R}$ tout entier dans la question suivante.

(f) Posons $A = \min\left(1, \dfrac{1}{M}\right)$. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

- Si $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, alors $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{1}{Mq^d} \geqslant \dfrac{1}{Aq^d}$.
- Sinon, $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \dfrac{1}{q^d} \geqslant \dfrac{1}{Aq^d}$, puisque $A \leqslant 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer le $\boxed{\text{théorème de Liouville.}}$

5. **Transcendance de c**

On appelle nombre de Liouville un réel irrationnel x tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}), \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n}.$$

(a) Supposons que x est algébrique (et non rationnel d'après léhypothèse). Il existe alors d'après le théorème de Liouville un entier d et un réel $A > 0$, qu'on se donne, tels que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times NN^*$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^d}$.
On se donne également une suite (p_n, q_n) telle que dans la définition d'un nombre de Liouville. On a alors, pour tout $n \geqslant d$,

$$\frac{A}{(q_n)^d} \leqslant \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{(q_n)^n} = \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{(q_n)^{n-q}} \leqslant \frac{1}{(q_n)^d} \cdot \frac{1}{2^{n-d}},$$

et en ne gardant que les termes extrêmes, il vient :

$$\forall n \geqslant d, \quad A \leqslant \frac{1}{2^{n-d}}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $A \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse $A > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{un nombre de Liouville est transcendant}}$.

(b) Montrons que c est un nombre de Liouville. On a déjà montré dans la question 2 qu'il est irrationnel.
Par ailleurs, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement obtenu au cours de cette question s'écrivait :

$$S_n \leqslant c \leqslant S_n + 10^{-(n+1)!} \frac{10}{9}.$$

Comme $10^{n!} S_n$ est entier, on peut écrire $S_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $p_n \in \mathbb{Z}$, et $q_n = 10^{n!} \geqslant 2$. On a alors

$$0 \leqslant c - \frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{n!(n+1)-1}} = \frac{1}{q_n^n} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{n!-1}} \leqslant \frac{1}{q_n^n}.$$

Ainsi, c est un nombre de Liouville, donc $\boxed{c \text{ est transcendant}}$.