Fonctions vectorielles

Introduction et notations

Le cours de topologie fournit un cadre assez large pour aborder les questions liées à la continuité. Le cours de calcul différentiel généralisera les résultats concernant la dérivation vus en première année. On le prépare ici par l'étude des *fonctions vectorielles*, c'est-à-dire des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace normé.

On rompt dans cette théorie la symétrie entre source et but, d'où quelques énoncés peu satisfaisants. L'étude est néanmoins utile à plusieurs titres. D'abord, on introduit ainsi certains points de vue fondamentaux en calcul différentiel (développement limité d'ordre 1). Ensuite, les fonctions vectorielles formalisent l'idée géométrique de *courbe* tracée sur un espace normé, fondamentale dans plusieurs questions de calcul différentiel (extrema, passage du local au global). Ces fonctions constituent également le cadre commode pour la théorie des équations différentielles. Enfin, le cas vectoriel permet de revoir un certain nombre de questions de première année relatives aux fonctions à valeurs réelles.

Le programme limite l'étude au cas où le but des applications est de dimension finie. Il est facile d'étendre ce qui concerne la dérivation (resp. l'intégration) aux applications à valeurs dans un espace normé (resp. de Banach). Ce degré de généralité n'a cependant pas beaucoup d'utilité en taupe. Dans tout ce texte, $\mathbb{K}$ est l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne donc, sauf mention contraire, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie d, $e = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On se donne aussi une norme $\| \ \|$ sur E. En raison de l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie, toutes les assertions relatives à la convergence seront indépendantes du choix de $\| \ \|$ [1]. On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, f une fonction de I dans E. On écrit :

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \sum_{j=1}^{d} f_j(t)\, e_j.$$

Les fonctions f_j sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pourrait développer à peu de frais la théorie en se ramenant aux fonctions scalaires f_j et même, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f_j)$ et $\mathrm{Im}(f_j)$. Nous utiliserons parfois ce genre d'argument pour aller vite. Ce point de vue est cependant un peu étriqué et nous préfèrerons en général une approche plus intrinsèque [2].

La notion de continuité est étudiée dans le cours de topologie. Nous aurons simplement besoin ici des notions de limite, limite à gauche ou à droite, continuité, continuité uniforme,... pour des fonctions de I dans E. Les définitions sont calquées sur le cas scalaire (remplacer les valeurs absolues par des normes) et peuvent par ailleurs s'y ramener en raisonnant coordonnée par coordonnée.

1. Il n'en est évidemment pas de même des résultats « quantitatifs » (inégalités)
2. En anglais : « coordinate-free ».

Aucune difficulté ne se présente et nous utiliserons donc ces notions sans plus de commentaire.

Le contenu de ce texte a été vu, pour les fonctions réelles, en MPSI. L'extension au cas vectoriel, souvent immédiate (il s'agit encore le plus souvent de « remplacer les valeurs absolues par des normes »), revêt un caractère assez soporifique. Les seuls énoncés qui ne se transposent pas tels quels sont l'égalité des accroissements finis et sa généralisation (formule de Taylor « avec le c », d'ailleurs hors-programme). Pour réveiller le lecteur, on a inséré un assez grand nombre d'applications, plusieurs compléments et de nombreux exercices.

Pour $\alpha > 0$, l'écriture $o(h^\alpha)$ désigne une fonction à valeurs dans E de la forme :

$$h^\alpha \varepsilon(h), \qquad \text{où} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0_E.$$

Quelques indications historiques [3]

On peut faire remonter l'origine de l'intégration à l'Antiquité grecque : la *méthode d'exhaustion* d'Eudoxe permet le calcul de longueurs, d'aires et de volumes via des encadrements finalement assez proches de l'idée moderne de *somme de Riemann*. En encadrant le périmètre d'un cercle à l'aide de polygones inscrits et circonscrits de 96 côtés, Archimède montre ainsi que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

ce qui donne une valeur approchée de π à 10^{-3} près. En revanche, faute d'une cinématique, les Grecs n'ont pas réellement étudié la différentiation (si ce n'est par le biais de quelques déterminations de tangentes).

Le calcul infinitésimal élémentaire exposé ici est sans doute l'invention mathématique la plus importante de tous les temps. Sa découverte, qui remonte au dix-septième siècle, n'a été possible qu'après l'adoption de notations algébriques efficaces. Indiquons très sommairement quelques-unes de ses origines, sans chercher à préciser l'attribution des résultats, ce qui est souvent difficile.

D'abord à l'aide de la *méthode des coordonnées*, Descartes étudie dans sa « Géométrie » (1637) les courbes d'équation $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme à deux variables ; il pose explicitement le problème de la détermination de la *tangente* à une telle courbe en un point.

La *géométrie* suscite beaucoup d'autres problèmes relevant du calcul infinitésimal : les définitions du *cercle osculateur* et du *rayon de courbure*, l'étude des *enveloppes* par Huygens en sont de bons exemples. Jouent également un rôle central les questions de *longueur*, d'*aire* et de *volume*.

Les *problèmes d'optimisation*, importants en mathématiques comme en physique, montrent également l'efficacité du nouveau calcul. Vers 1640, Fermat est en possession d'une version de la condition nécessaire d'extremum local par l'annulation de la dérivée.

3. Lecture tout à fait facultative.

Enfin, la *mécanique* est un terrain d'application privilégié. On en trouve une première manifestation dans l'étude de la *chute libre* chez Galilée (1602). La preuve, due à Newton, de l'*ellipticité des orbites pour un mouvement à force centrale avec un potentiel en* $1/r$, est sans doute l'exemple le plus spectaculaire dans cette direction. Elle est publié dans les *Principia* en 1687.

Les questions précédentes conduisent à l'édification des formalismes principaux du calcul différentiel et intégral. Barrow, Newton et Leibniz reconnaissent que différentiation et intégration sont deux opérations inverses, Newton et ses continuateurs dégagent la notion de série de Taylor d'une fonction en un point et introduisent (notamment à des fins de calcul numérique) l'utilisation systématique des séries entières.

La mise en place de la théorie est assez lente. À la fin du dix-huitième siècle, Lagrange tente encore de fonder l'analyse sur les développements en série de Taylor. La rigueur est atteinte au dix-neuvième siècle : définition des limites, de la continuité et de la dérivation (Cauchy, vers 1820), notion générale de fonction (Dirichlet, 1829), rôle des propriétés uniformes par Heine et Weierstrass (autour de 1870), clarification de la définition de l'intégrale (Cauchy, puis Riemann et enfin Darboux vers 1870). Certains points qui nous paraissent aujourd'hui très simples demanderont beaucoup de temps. Ainsi, quoique Rolle ait énoncé dès 1691 [4] le théorème qui porte son nom, ce n'est que vers 1880 que l'on disposera de la preuve simple et entièrement correcte de l'énoncé général enseignée aujourd'hui, ainsi que de l'application à l'égalité des accroissements finis (Bonnet, Dini). On peut considérer qu'en 1900, l'analyse d'une variable actuellement enseignée en Sup et Spé est achevée, à ceci près que le langage topologique n'est pas employé. [5]

Parallèlement à cette « arithmétisation » de l'analyse, les notions découvertes au dix-septième siècle ont trouvé de très nombreuses applications. Euler utilise des séries entières comme *fonctions génératrices* et préfigure la *théorie analytique des nombres* dont Dirichlet sera le grand initiateur. L'étude des extrema se prolonge avec Euler et Lagrange dans le *calcul des variations*, dévolu (avec une terminologie moderne) à l'étude des problèmes d'optimisation dans les espaces de fonctions. Les *séries et intégrales de Fourier*, inventées par Fourier vers 1810 pour comprendre la *propagation de la chaleur* trouvent une multitude d'application aussi bien en physique mathématique qu'en analyse et en théorie des nombres. Enfin, Cauchy découvre la théorie des *fonctions holomorphes*, qui, d'une part, met en évidence les différences entre dérivation complexe et dérivation réelle, d'autre part utilise de manière cruciale l'intégration et la dérivation des fonctions complexes d'une variable réelle. Cette théorie sera un des thèmes centraux des mathématiques durant la seconde moitié du dix-neuvième siècle (Riemann, Weierstras, Picard...).

---

4. En fait, uniquement pour les polynômes.

5. Ce langage, qui a la vertu de « géométriser » un certain nombre questions d'analyse et de donner un cadre général simple et efficace aux questions de proximité et de continuité, est une création du vingtième siècle. Ne pas se leurrer, la « topologie générale » (en général métrique) n'aborde pas des problèmes proprement topologiques (déformations continues d'espaces) ; c'est la *topologie algébrique*, autrement profonde, qui étudie ce type de sujet.

I. Dérivation

On met en place les résultats de base relatifs à la dérivation vectorielle. La section **1** *ne contient que des définitions. De la section* **2**, *consacré aux opérations, il faut principalement retenir que les formules sont tout à fait naturelles si on adopte le point de vue du développement limité à l'ordre* 1. *La section* **3** *reprend les résultats de première année sur les fonctions réelles en les accompagnant d'exemples significatifs. La section* **4** *est consacré à diverses constructions illustrant l'efficacité du théorème de classe C^k par prolongement. La section* **5** *contient l'inégalité des « accroissements finis vectoriels », qui est le résultat le moins immédiat de ce chapitre. Dans la section* **6**, *facultative, on démontre les lois de Képler à partir de l'équation différentielle de Newton.*

1 Définitions

1.1 Dérivabilité en un point

Soit t_0 un point de I. On dit que f *est dérivable en* t_0 si la fonction :

$$t \in I \setminus \{t_0\} \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

a une limite dans E en t_0. Cette limite est appelée *dérivée de* f *en* t_0 et notée de trois façons :

$$f'(t_0) = Df(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0).$$

La définition par taux de variation est traditionnelle, mais en fait assez peu commode et complètement inadaptée au « vrai » calcul différentiel (on ne divise pas par des vecteurs). Il est nettement préférable d'utiliser un *développement limité à l'ordre* 1 de f. La dérivabilité de f en t_0 équivaut en effet à la relation :

$$f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + hf'(t_0) + o(h).$$

Ce développement limité décompose $f(t_0 + h)$ en une somme de trois termes au voisinage de t_0 : le terme constant $f(t_0)$, le terme $hf'(t_0)$ linéaire en la perturbation h et le terme sous-linéaire $o(h)$. Il traduit l'idée d'approximation affine locale ; la fonction :

$$t \mapsto f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)$$

est la fonction affine qui « colle » le plus à f au voisinage de t_0.

Notons deux propriétés évidentes.

(i) L'application f est dérivable en t_0 si et seulement si toutes les f_j le sont et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{j=1}^{d} {f_j}'(t_0)\, e_j.$$

(ii) Si f est dérivable en t_0, f est continue en t_0.

Si l'image de f est contenue dans un sous-espace V de E, le vecteur $f'(t_0)$ appartient à V (car V est fermé dans E, entant que sous-espace vectoriel de dimension finie). Plus généralement, si V est un sous-espace affine de E et si l'image de f est contenue dans V, le vecteur $f'(t_0)$ appartient à la direction de V.[6]

Exercice 1. *a) Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans E dérivable en 0. Montrer que si $(s_k)_{k\geq 0}$ et $(t_k)_{k\geq 0}$ sont deux suites réelles convergeant vers 0 et telles que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad s_k < 0 < t_k,$$

alors :

$$\frac{f(t_k)-f(s_k)}{t_k-s_k} \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f'(0).$$

b) On prend α dans $]1,2[$ et on définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = |x|^\alpha \sin(1/x), \qquad f(0) = 0.$$

Vérifier que f est dérivable en 0, calculer $f'(0)$. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad s_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}, \qquad t_k = \frac{1}{2k\pi}.$$

Étudier lorsque k tend vers $+\infty$ le rapport $\dfrac{f(t_k)-f(s_k)}{t_k-s_k}$. Conclusion ?

Exercice 2. *Soient f une fonction de $[0,1]$ dans E dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$, α dans $]0,1[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right), \; v_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right), \; w_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^\alpha}{n}\right).$$

Étudier la convergence des suites $(u_n), (v_n), (w_n)$.

Exercice 3. *Soit f une application dérivable sur le segment S, à valeurs dans E, nulle au point t_0 de S. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que :*

$$\forall t \in S, \qquad \|f(t)\| \leq M|t-t_0|.$$

1.2 Interprétations de la dérivée

En géométrie, le vecteur dérivé donne, s'il est non nul, la tangente à la courbe image de f, c'est-à-dire la partie $f(I)$ de E. Précisons, en supposant donc :

$$f'(t_0) \neq 0$$

et en remarquant que ce qui suit n'a d'intérêt que si la dimension réelle de E est supérieure ou égale à 2. Si t est assez proche de t_0 et distinct de t_0, les points $f(t)$ et $f(t_0)$ sont distincts. La droite passant par $f(t)$ et $f(t_0)$ est dirigée par le vecteur :

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

6. On soupçonne donc que les espaces affines peuvent fournir un meilleur cadre que les vectoriels : exact, mais sans vraie importance.

qui tend vers $f'(t_0)$ lorsque t tend vers t_0. On appelle donc *tangente à l'image de f au paramètre t_0* la droite affine passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$.

Il est pertinent de revoir ici le cas des fonctions réelles. Si g est une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en t_0, l'interprétation géométrique de $g'(t_0)$ concerne le graphe de g, image de la fonction :

$$f \ : t \in I \mapsto (t, g(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction f est dérivable en t_0 de dérivée :

$$f'(t_0) = (1, g'(t_0))$$

et la tangente au graphe de g en t_0 est donc, comme attendu, la droite passant par $(t_0, g(t_0))$ et de pente $g'(t_0)$.

En cinématique, le vecteur dérivé s'interprète comme la *vitesse instantanée*. Si $f(t)$ est la position d'un mobile au temps t, ce mobile se déplace, entre t_0 et t, de $f(t) - f(t_0)$. Il est naturel de diviser cette quantité par l'intervalle de temps $t - t_0$ et de faire tendre t vers t_0 pour définir la vitesse instantanée du mobile en t_0 comme le vecteur $f'(t_0)$.

1.3 Dérivées latérales

On définit de même, si I contient $[t_0, t_0+\alpha]$ (resp. $[t_0-\alpha, t_0]$ pour un certain $\alpha > 0$, la *dérivabilité de f à droite (resp. à gauche) en t_0* par l'existence d'une limite de :

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

lorsque t tend vers t_0^+ (resp. t_0^-). Cette limite est la *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) de f en t_0 et est notée :

$$f'_d(t_0) \quad (\text{resp. } f'_g(t_0)).$$

L'interprétation géométrique (demi-tangente) est évidente.

Exercice 4. *Soit f une fonction de I dans E dérivable en t_0 intérieur à I. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|f\|$ soit dérivable en t_0.*

Exercice 5. *Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en t_0 intérieur à I. La fonction : $t \in I \mapsto \max\{f(t), g(t)\}$ est-elle dérivable à droite en t_0 ? dérivable en t_0 ?*

1.4 Dérivée sur un intervalle, classe C^1

Si f est dérivable en tout point t_0 de I, on dit que *f est dérivable sur I*. On dispose alors d'une application f' définie sur I et à valeurs dans E, que l'on appelle bien entendu dérivée de f. Par exemple, une fonction constante de I dans E est dérivable sur I de dérivée nulle.

On dit que *f est de classe C^1 sur I* si f est dérivable sur I et f' est continue sur I. La notion d'application dérivable est a priori plus naturelle que celle d'application de classe C^1. La seconde notion est cependant nettement plus agréable. On peut en effet munir l'espace des applications de classe C^1 sur un segment S à valeurs dans E de la norme C^1 :

$$f \mapsto \|f\|_{\infty,S} + \|f'\|_{\infty,S}$$

qui en fait un Banach et lui appliquer les méthodes de l'analyse fonctionnelle, alors que rien de tel n'est possible pour les espaces d'applications dérivables. [7]

Voici, sous forme d'exercice, des exemples d'applications dérivables sur $[0,1]$ sans y être de classe C^1.

Exercice 6. *Soient $\alpha > 0$ et f_α l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0 et telle que :*

$$\forall x \in]0,1], \qquad f_\alpha(x) = x^\alpha \sin(1/x).$$

Pour quelles valeurs de α cette application est-elle dérivable sur $[0,1]$? de classe C^1 sur $[0,1]$?

Exercice 7. *Montrer que, si f est une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors, pour tout intervalle I, $f'(I)$ est un intervalle.* [8]

Exercice 8. *Construire une fonction dérivable f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'([0,1]) = \mathbb{R}$.*

1.5 Dérivées d'ordre supérieur à 1, classe C^p

Pour p dans $\mathbb{N}^*$, on définit par récurrence l'assertion : « f est p *fois dérivable sur* I ». On note :

$$f^{(p)}(t_0) = D^{(p)}f(t_0) = \frac{d^p f}{dt^p}(t_0)$$

l'élément de E dérivée p-ième de f en t_0.

Si p est dans $\mathbb{N}$, la fonction f est dite *de classe C^p sur I* si f est p fois dérivable sur I et $f^{(p)}$ est continue sur I. En particulier, f est de classe C^0 sur I si et seulement si f est continue sur I. Si f est de classe C^p pour tout p, ou, de façon équivalente, si f admet sur I des dérivées à tous les ordres, on dit que f est *de classe C^∞ sur I*. Ici encore, la notion de fonction de classe C^p est plus agréable que celle de fonction p fois dérivable. Il est immédiat que f est p fois dérivable sur I (resp. de classe C^p sur I, resp. de classe C^∞ sur I) si et seulement si tel est le cas des fonctions coordonnées f_j.

On définit enfin, pour p dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, la notion de fonction de classe C^p par morceaux. Si I est un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, on dit que f est de classe C^p par morceaux s'il existe une subdivision :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

et, pour tout i de $\{0,\ldots,n-1\}$, une fonction g_i de classe C^p de $[t_i, t_{i+1}]$ dans E coïncidant avec f sur $]t_i, t_{i+1}[$.

7. Dans le même ordre d'idée, on peut dire qu'il est « raisonnable » pour une fonction continue de n'être nulle part dérivable (cf cours sur les séries de fonctions et complément de topologie, théorème de Baire), alors qu'une fonction dérivable qui n'est pas de classe C^1 témoigne d'une pathologie plus forte !

8. Théorème dû à Darboux.

Le théorème de classe C^p par prolongement (vu en cours pour les fonctions réelles et se ramenant facilement à ce cas, cf théorème 5, section 4) montre que tel est le cas si et seulement si f est de classe C^p sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ et si toutes les $f^{(k)}, 0 \leq k \leq p$ admettent des limites à droite en t_i pour $0 \leq i \leq n-1$ et des limites à gauche en t_i pour $1 \leq i \leq n$. La définition ci-dessus est préférable : elle permet en effet de s'appuyer directement sur les propriétés des fonctions continues sur les segments. [9]

Si I est quelconque, on dit que f est de classe C^p par morceaux sur I si, pour tout segment S de I, la restriction de f à S est de classe C^p par morceaux. [10]

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Propriétés immédiates

Les deux propriétés suivantes sont faciles. Nous les énonçons pour la dérivabilité, mais elles subsistent clairement pour la dérivabilité à droite ou à gauche.

(i) Si f et g sont dérivables en t_0 et si α et β sont dans $\mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ est également dérivable en t_0 avec :

$$(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$$

(ii) Si l'application f est dérivable en t_0 et si L est une application linéaire de E dans l'espace normé de dimension finie $(F, \| \ \|)$, alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 de dérivée :

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

Preuve de (ii). Cette propriété découle du lemme suivant, démontré dans le cours de topologie.

Lemme 1. *Soit L une application linéaire d'un espace normé de dimension finie $(E, \| \ \|_E)$ dans un espace normé $(F, \| \ \|_F)$. Il existe alors $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \qquad \|L(x)\|_F \leq C \ \|x\|_E.$$

En effet, on écrit

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \ f'(t_0) + h \ \varepsilon(h),$$

où la fonction ε tend vers 0 en 0. Il vient

$$L(f(t_0 + h)) = L(f(t_0)) + h \ L(f'(t_0)) + hL(\varepsilon(h)).$$

Le lemme assure que

$$L(\varepsilon(h)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Le résultat suit.

9. Elle rend par exemple immédiat le fait qu'une application continue par morceaux sur le segment I y est bornée.

10. Notion simple, mais un peu subtile : la fonction $x \in]0,1] \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, mais aucun de ses prolongements à $[0,1]$ ne l'est.

2.2 Composition ou « chain rule »

Le résultat suivant est important. Le cours de calcul différentiel en donnera une version plus générale restaurant la symétrie de la source et du but. La preuve proposée, peu élégante, met en valeur l'idée essentielle d'approximation au premier ordre et fait apparaître naturellement le résultat.

Proposition 1. *Soient φ une application définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I, s_0 dans J tel que : $\varphi(s_0) = t_0$. Si φ est dérivable en s_0 et f dérivable en t_0, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en s_0 de dérivée :*

$$(f \circ \varphi)'(s_0) = \varphi'(s_0)\ f'(\varphi(s_0)).$$

Preuve. On dispose de deux développements limités que l'on écrit respectivement :

$$\varphi(s_0 + h) = t_0 + h\varphi'(s_0) + h\,\varepsilon_1(h), \quad f(t_0 + u) = f(t_0) + uf'(t_0) + u\,\varepsilon_2(u)$$

où les fonctions ε_1 et ε_2 sont à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et E et tendent vers 0 lorsque h tend vers 0. On en tire :

$$f \circ \varphi(s_0 + h) = f(t_0) + h\varphi'(s_0)f'(t_0) + p(h)$$

où le terme complémentaire :

$$p(h) = h\,\varepsilon_1(h)f'(t_0) + (h\varphi'(s_0) + h\,\varepsilon_1(h))\,\varepsilon_2(h\varphi'(s_0) + h\,\varepsilon_1(h))$$

est $o(h)$ lorsque h tend vers 0, ce qui donne le résultat.

Notons que la relation :

$$(1) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dt}$$

employée dans les cours de physique est une traduction de cette proposition : si s est une fonction de t et f une fonction de s, alors f est une fonction de t et la dérivée de cette fonction (c'est-à-dire de $F = f \circ s$) au point t n'est autre que :

$$F'(t) = s'(t)\ f'(s(t)) = \frac{ds}{dt}(t)\ \frac{df}{ds}(s(t)).$$

Plus que des fonctions définies à l'aide de la syntaxe mathématique ensembliste, les physiciens considèrent des *quantités* dépendant les unes des autres. Ils utilisent donc l'écriture condensée (1) et n'introduisent pas la fonction F. Le caractère suggestif de (1) a contribué à imposer la notation $\dfrac{df}{dt}$ de Leibniz en physique et en géométrie différentielle.

2.3 Produits généralisés

La proposition ci-après donne un cadre général très efficace généralisant la notion de produit de deux fonctions scalaires. [11] Ici encore, on donne une preuve peu esthétique mais soulignant l'idée d'approximation à l'ordre 1.

11. Elle couvre aussi bien ce dernier que le produit scalaire-vecteur, le produit scalaire de deux fonctions à valeurs dans un espace euclidien, le produit de deux fonctions à valeurs matricielles, le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3... Il ne s'agit donc pas ici de généralité gratuite.

Proposition 2. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie. Supposons f et g définie sur I, dérivables en t_0 et à valeurs respectivement dans E et F. Soient une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Alors :*

$$t \mapsto B\left(f(t), g(t)\right)$$

est dérivable en t_0 de dérivée :

$$B\left(f'(t_0), g(t_0)\right) + B\left(f(t_0), g'(t_0)\right).$$

Preuve. Le lemme ci-après, démontré dans le cours de topologie joue un rôle central.

Lemme 2. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de normes toutes notées $\| \ \|$, B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Il existe C dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad \|B\left(x, y\right)\| \leq C\|x\| \, \|y\|.$$

On écrit :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + h\varepsilon_1(h), \qquad g(t_0 + h) = g(t_0) + hg'(t_0) + h\varepsilon_2(h)$$

où ε_1 et ε_2 sont à valeurs dans E et F respectivement et de limites nulles en 0. Le développement de :

$$B\left(f(t_0 + h), g(t_0 + h)\right)$$

par bilinéarité fait apparaître neuf termes. Le terme constant est $B(f(t_0), g(t_0))$. Les termes linéaires en h sont $hB(f'(t_0), g(t_0))$ et $hB(f(t_0), g'(t_0)))$. En utilisant l'existence d'un $C > 0$ comme dans le lemme, on vérifie que les autres termes sont $o(h)$ en 0.

Exercice 9. *Retrouver cette formule en utilisant des bases et des coordonnées.*

Exercice 10. *Soient x une application dérivable de I dans E, u une application dérivable de I dans $\mathcal{L}(E)$. Quelle est la dérivée de $t \longmapsto u(t)\left(x(t)\right)$?*

Exemple. *Carré d'une norme euclidienne.*

Si $(E, \langle \ , \ \rangle)$ est un espace euclidien, u et v deux applications de I dans E dérivables en t_0, l'application $\langle u, v\rangle$ de I dans $\mathbb{R}$ est dérivable en t_0 de dérivée :

$$\langle u'(t_0), v(t_0)\rangle + \langle u(t_0), v'(t_0)\rangle .$$

En particulier, si $\| \ \|$ est la norme provenant de $\langle \ , \ \rangle$ et si u est dérivable en t_0 , la fonction réelle $\|u\|^2$ est dérivable en t_0 de dérivée

$$2\left\langle u(t_0), u'(t_0)\right\rangle .$$

Exercice 11. *Avec les notations précédentes, on suppose : $u(t_0) \neq 0$. Montrer que $\|u\|$ est dérivable en t_0 et en calculer la dérivée.*

Exemple. *Générateur infinitésimal d'un mouvement de rotation.*

On se donne une application dérivable M de I dans le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors, par dérivation de la relation qui exprime l'appartenance de $M(t)$ à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in I, \qquad M(t)^t M'(t) + M'(t)^t M(t) = 0,$$

équation qui montre que, pour tout t de I, la matrice :

$$A(t) = M'(t) M(t)^{-1}$$

est antisymétrique, c'est le *générateur infinitésimal du mouvement* M.

Exercice 12. *Soient n un entier naturel impair, M une application dérivable de I dans le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M'(t)$ n'est inversible pour aucune valeur de t.*

La proposition 2 s'étend aux applications multilinéaires. C'est le résultat suivant, dont la preuve, qui ne se distingue de la précédente que par des complications typographiques, est laissée au lecteur. [12]

Proposition 3. *Soient r un entier ≥ 2, $E_1, \ldots, E_r$ et G des espaces de dimension finie sur $\mathbb{K}$, M une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_r$ dans G. Pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, soit f_i une application de I dans E_i dérivable en t_0. Alors, l'application f définie sur I par :*

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = M\left(f_1(t), \ldots, f_r(t)\right)$$

est dérivable en t_0 de dérivée :

$$\sum_{i=1}^{r} M\left(f_1(t_0), \ldots, f_{i-1}(t_0), f_i'(t_0), f_{i+1}(t_0), \ldots, f_r(t_0)\right).$$

Une conséquence utile est la dérivation d'un déterminant à paramètre. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des applications de I dans E dérivables en t_0. Pour t dans I, soit :

$$\Delta(t) = \det_e\left(c_1(t), \ldots, c_n(t)\right).$$

Alors Δ est dérivable en t_0 de dérivée :

$$\Delta'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \det_e\left(c_1(t_0), \ldots, c_{i-1}(t_0), c_i'(t_0), c_{i+1}(t_0), \ldots, c_n(t_0)\right).$$

Exercice 13. *Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$, M une application de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable en t_0. Montrer que l'application :*

$$P_k : t \mapsto M(t)^k$$

est dérivable en t_0 et calculer sa dérivée en ce point. Idem pour

$$\varphi_k \ : t \mapsto Tr\left(P_k(t)\right).$$

12. Qui énoncera et démontrera un analogue des lemmes 1 et 2.

Les théorèmes précédents permettent de justifier la dérivabilité des fonctions vectorielles construites par des procédés usuels. Le calcul des dérivées peut se faire soit directement soit par le biais de relations satisfaites par les fonctions comme dans l'exemple fondamental ci-après.

Exemple. *Inverse d'une matrice.*

Soient d dans $\mathbb{N}^*$, M une fonction de I dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ dérivable en t_0. La fonction det (M) est dérivable en t_0, les fonctions cofacteurs de M aussi. Il en résulte, grâce à la formule donnant l'inverse d'une matrice, que M^{-1} est dérivable en t_0. Calculons sa dérivée. La fonction :

$$t \mapsto M(t)M^{-1}(t)$$

est constante égale à I_d sur I. Sa dérivée en t_0 est donc nulle, i.e :

$$M'(t_0)M^{-1}(t_0) + M(t_0)(M^{-1})'(t_0) = 0$$

et :

$$(M^{-1})'(t_0) = -M^{-1}(t_0)M'(t_0)M^{-1}(t_0),$$

généralisation non commutative de la dérivation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.

2.4 Dérivées d'ordre supérieur

Les corollaires ci-après, dans lesquels p est un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, résultent de récurrences triviales mais fastidieuses et donc laissées au lecteur.

Corollaire 1. *Avec les notations de la proposition 1, supposons que φ et f soient p fois dérivable (resp. de classe C^p) sur leurs intervalles de définitions respectifs. Alors $f \circ \varphi$ est p fois dérivable (resp. de classe C^p) sur J.*

Corollaire 2. *Avec les notations de la proposition 3, supposons que chaque f_i est p fois dérivable sur I (resp. de classe C^p sur I). Alors, f est p fois dérivable (resp. de classe C^p) sur I.*

On obtient en particulier que l'ensemble $\mathcal{D}^p(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^p(I, E)$ des fonctions p fois dérivables (resp. de classe C^p) de I dans E est un sous-espace de $\mathcal{F}(I, E)$, que $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, les éléments inversibles de ces sous-algèbres étant constitués de celles de leurs fonctions qui ne s'annulent pas sur I. Le lecteur pourra également généraliser la *formule de Leibniz* relative à la dérivée p-ième d'un produit en traitant l'exercice ci-après.

Exercice 14. *Avec les notations de la proposition 2, supposons que f et g sont p fois dérivables sur I. Montrer que $B(f, g)$ est p fois dérivable sur I et calculer sa dérivée p-ième.*

2.5 Fonctions à valeurs dans un espace normé quelconque

Si on suppose que $(E, \| \ \|)$ est un espace normé, sans hypothèse de dimension, toutes les définitions et considérations de **1** gardent un sens, à l'exception, bien entendu, des énoncés faisant intervenir les fonctions coordonnées. Dans **2.1**, il faut supposer la continuité de l'application linéaire L et, dans **2.3**, celles de l'application bilinéaire B et de l'application multilinéaire M.

3 Fonctions réelles

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ joue ici un rôle central.

3.1 La condition d'extrémum local d'ordre 1

En dépit de sa simplicité, le résultat ci-après est fondamental et mérite donc son statut de théorème. L'existence d'une règle simple de détection des extréma a d'ailleurs été un des grands succès du calcul différentiel au dix-septième siècle. Il est recommandé de bien assimiler la preuve et les remarques qui la suivent.

Théorème 1. *Supposons que f soit à valeurs réelles, dérivable en un point t_0 intérieur à I et admette un extremum local en t_0. Alors :*

$$f'(t_0) = 0.$$

Preuve. Supposons, pour fixer les idées, que f admette un maximum local en t_0. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que I contienne $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et que :

$$\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \qquad f(t) \leq f(t_0).$$

Pour $0 < h \leq \alpha$, on a :

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \leq 0,$$

d'où, par passage à la limite :

$$f'(t_0) \leq 0.$$

L'inégalité opposée se démontre en se plaçant à gauche de t_0.

Remarques

1. *Extrema locaux et points critiques*

   Un zéro de f' est, par définition, un *point critique* de f. Un extremum local en un point intérieur est donc un point critique. L'exemple de l'application $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$ en $t_0 = 0$ montre que la réciproque est fausse. Nous reviendrons sur cette question après avoir établi la formule de Taylor-Young.

2. *Si t_0 est une borne de I ?*

   Si t_0 est une borne de I, on obtient seulement une inégalité (prendre l'identité sur $[0, 1]$). Par exemple, si f admet un maximum local en t_0 extrémité gauche de I, on a $f'(t_0) \leq 0$ etc...

3. *Attention à une idée fausse*

   Le fait que f admette un extremum local (même strict) au point x_0 n'implique rien quant à la monotonie de f près de x_0. Pour le voir, imaginer une fonction dont le graphe oscille au voisinage de 0 entre deux paraboles situées dans le demi-plan supérieur et tangentes à Ox en leur sommet commun $(0, 0)$, ou, si on tient absolument à une formule, considérer la fonction f nulle en 0 et telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = x^2(2 + \sin(1/x)).$$

4. *Sur les deux parties d'un « problème d'extremum »*

   La preuve de *l'existence* d'un extremum est un problème *global* que l'on traite en général par des arguments topologiques (compacité et continuité). En revanche, la *caractérisation* des extrema relève le plus souvent d'une étude locale. Le théorème 1 est l'illustration la plus simple de ce principe. La preuve du théorème de d'Alembert donnée dans le cours de topologie en est une autre. Dans des contextes beaucoup plus généraux, l'exploitation du fait qu'une fonction f définie sur une partie X d'un espace normé admet un extremum local en $x_0 \in X$ relève d'ailleurs de méthodes « monodimensionnelles » : on considère les restrictions de f à des courbes tracées sur X et passant par x_0.

Exemples

1. *Réfraction de la lumière.*

   Un des premier succès du calcul différentiel est l'explication suivante de la loi de Snell-Descartes sur la réfraction de la lumière. Supposons que la droite D, que nous prenons comme axe Ox, partage le plan en deux milieux (les demi-plans $y > 0$, $y < 0$) dans lesquels la vitesse de la lumière est respectivement v_1 et v_2. Soient $M_1 = (a_1, b_1)$, $M_2 = (a_2, b_2)$ avec $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ et pour fixer les idées $a_1 < a_2$. On cherche le trajet minimisant le temps de parcours de la lumière de M_1 à M_2, c'est-à-dire le point $M = (x, 0)$ tel que :

   $$T = \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}}{v_2}$$

   soit minimal. Le théorème 1 montre que pour un tel x, on a :

   $$\frac{x-a_1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{x-a_2}{v_2\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} = 0.$$

   Cette égalité montre que x est dans $]a_1, a_2[$ et que, si α_1 et α_2 sont les angles respectifs de (M_1M) et (M_2M) avec la normale à D en M, alors :

   $$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}.$$

   Cette égalité est la loi de Snell-Descartes (1621). L'interprétation variationnelle est due à Fermat (1657).

2. *La condition d'angle obtus.*

   Supposons que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien. Soient C un convexe fermé non vide de E, x un point de $E \setminus C$. Par compacité et continuité, on montre que la distance de x à C est atteinte : il existe c_0 dans C tel que :

   $$d(x, C) = \|x - c_0\|.$$

   Le caractère strict de la norme euclidienne montre que c_0 est unique. Pour caractériser c_0, on travaille au niveau infinitésimal, en se promenant près de c_0 dans C dans toute les directions permises et en utilisant le carré de la norme euclidienne, plus commode que la norme elle-même. Précisément, on prend c dans C et on considère l'application :

$$\varphi_c \ : t \in [0,1] \mapsto \|x - ((1-t)c_0 + tc)\|^2 = \|x - c_0 + t(c_0 - c)\|^2.$$

La définition de c_0 montre que φ_c atteint un minimum (global) en $t = 0$. Il s'ensuit que :

$$-\varphi_c'(0) = 2\,\langle x - c_0, c - c_0\rangle$$

est négatif ou nul, résultat connu comme « condition d'angle obtus », ce qu'un dessin justifie parfaitement.

Exercice 15. *Trouver les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, la fonction*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \prod_{j=1}^{n} f(x_j - t)$$

admette un maximum global en $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$.

Exercice 16. *Montrer que la condition d'angle obtus caractérise c_0.*

Exercice 17. *Soient f une application définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, dérivable sur $\mathbb{R}$, a dans E. On suppose que $|f - a|$ a un extremum local en t_0. Que dire des vecteurs $f'(t_0)$ et $f(t_0) - a$?*

Terminons ce paragraphe par une application un peu plus sophistiquée du théorème 1, qui illustre bien la remarque 4 ci-dessus.

Exercice 18. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$. On note $\mathcal{S}_\lambda$ (resp. $\mathcal{S}_\mu$) l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique :*

$$\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \quad \left(\textit{resp.}\ \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)\right).$$

a) Vérifier que $\mathcal{S}_\lambda \times \mathcal{S}_\mu$ est compact et en déduire que l'application

$$\Phi \ : (S, S') \in \mathcal{S}_\lambda \times \mathcal{S}_\mu \mapsto \mathit{Tr}\ (SS')$$

atteint un maximum en un couple (S_0, S'_0).

b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^{tA} S_0 e^{-tA} \in \mathcal{S}_\lambda.$$

c) On prend A comme en b). Montrer que 0 est point critique de :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathit{Tr}\ (e^{tA} S_0 e^{-tA} S'_0)$$

d) En déduire que S_0 et S'_0 commutent, donc sont codiagonalisables.

e) Conclure en déterminant le maximum de Φ.

3.2 Le théorème de Rolle

Avec le théorème des valeurs intermédiaires, le *théorème de Rolle* ci-après est l'un des résultats les plus utiles pour étudier les zéros d'une fonction réelle de variable réelle.

Théorème 2. *Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, f une application continue sur le segment $S = [a, b]$, à valeurs réelles, dérivable sur $]a, b[$ et telle que :*

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve. La fonction f est continue sur le segment S, donc y est bornée et atteint ses bornes. Si f est constante, f' est identiquement nulle sur S. Sinon, l'égalité de $f(a)$ et $f(b)$ entraîne que l'une des deux bornes de f est atteinte en un point intérieur. Ce point est donc un point critique.

Exercice 19. *Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que $f(t)$ converge vers $f(0)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point critique sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

Exemple. *Dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.*

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré n scindé sur $\mathbb{R}$, $x_1 < \cdots < x_m$ les zéros de P, $n_1, \ldots, n_m$ leurs multiplicités respectives. Pour tout i, x_i est zéro de P' d'ordre $n_i - 1$. D'autre part, si $1 \leq i \leq m-1$, le théorème de Rolle donne un zéro y_i de P' dans $]x_i, x_{i+1}[$. Comme :

$$\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) + m - 1 = n - 1 = \deg\ (P'),$$

on a ainsi tous les zéros (complexes) de P'. Notons en particulier que P' est scindé sur $\mathbb{R}$, que les zéros de P' appartiennent tous à $[x_1, x_m]$ et que les zéros de P' de multiplicité ≥ 2 sont les zéros de P de multiplicité ≥ 3.

Si u est une application de I dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros sur I est fini, notons $N(u)$ le cardinal de cet ensemble. Dans les exemples ci-après, nous utiliserons la conséquence suivante du théorème de Rolle.

Lemme 3. *Si f est une fonction k fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble des zéros de $f^{(k)}$ sur I soit fini, alors :*

$$N(f) \leq N(f^{(k)}) + k.$$

Exemple. *Nombre de zéros d'un polynôme exponentiel.*

Soient r dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ des réels et, pour tout i, P_i un polynôme réel de degré d_i. On se propose de majorer le nombre de zéros de :

$$f\ : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{r} P_i(t)\, e^{\lambda_i t}.$$

Pour $r=1$, on voit aussitôt que f s'annule au plus d_1 fois sur $\mathbb{R}$. Pour raisonner par récurrence, il faut diminuer r. On utilise dans ce but la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(t)e^{-\lambda_r t} = \sum_{i=1}^{r} P_i(t)\, e^{(\lambda_i - \lambda_r)t}.$$

L'avantage de g est que $g^{(d_r+1)}$ est de la même forme que f mais avec $r-1$ termes. D'autre part, on a :

$$N(g) \leq N(g^{(d_r+1)}) + d_r + 1.$$

On en déduit par récurrence que pour toute fonction f de la forme susmentionnée :

$$N(f) \leq r - 1 + \sum_{i=1}^{r} d_i.$$

Exemple. *Erreur dans l'interpolation de Lagrange.*

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, m dans $\mathbb{N}^*$, $x_1 < \cdots < x_m$ des points de $[a, b]$, f une application m fois dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, p l'interpolateur de Lagrange de f en les x_i, x dans $[a, b] \setminus \{x_i,\ 1 \leq i \leq m\}$. On se propose d'estimer $f(x) - p(x)$. On introduit dans ce but q_x, interpolateur de Lagrange de f en les x_i et en x. La fonction $f - q_x$ s'annule donc $m+1$ fois sur $[a, b]$, d'où l'existence de c (dépendant des x_i et de x) tel que $(f - q_x)^{(m)}$ s'annule en c. Mais :

$$q_x = p + (f(x) - p(x)) \prod_{i=1}^{m} \frac{X - x_i}{x - x_i},$$

ce qui montre que :

$$q_x^{(m)} = \frac{m!(f(x) - p(x))}{\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)}.$$

Par conséquent :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m)}(c) \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)}{m!},$$

ce qui donne la majoration :

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(m)}\|_{\infty,[a,b]} |\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)|}{m!}.$$

Exercice 20. *Généraliser le résultat précédent à l'interpolation d'Hermite. En particulier, retrouver la version « avec c » de la formule de Taylor.*

Exercice 21. *a) Soient n un entier ≥ 2, f une application bornée et de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout k de $[2, n]$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.*

b) Calculer les zéros des dérivées de Arctan. En déduire que l'énoncé de a) est optimal.

Exercice 22. *Soient p dans $\mathbb{N}^*$, $\omega_1 > \cdots > \omega_p$ des réels > 0, $\varphi_1, \dots \varphi_p$ des réels, $a_1, \dots, a_p$ des réels > 0, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

a) On suppose : $\sum_{k=1}^{p-1} a_k < a_p$. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule sur tout segment de longueur $2\pi/\omega_p$.

b) En considérant une « primitive itérée » judicieuse de f, montrer qu'existe un réel $\ell > 0$ tel que f s'annule sur tout segment de longueur ℓ.

Exercice 23. *Soient f une fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet n changements de signes sur un intervalle de période s'il existe $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_0 + T$ tels que*

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad f(a_k)\, f(a_{k+1}) < 0$$

et si n est maximal pour cette propriété.

a) Que dire de la parité de n s'il existe une fonction T-périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant n changements de signe ?

b) Montrer que, si une fonction dérivable et T-périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant exactement n changements de signe sur un intervalle de période, alors f' admet au moins n changements de signe sur un intervalle de période.

Exercice 24. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$, $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ des nombres réels tels que $a_n \neq 0$ et, pour t dans $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt + \varphi_k).$$

a) Montrer que f s'annule au plus $2n$ fois sur tout intervalle de la forme $[T, T + 2\pi[$, $T \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que, si $j \in \mathbb{N}$ est assez grand, $f^{(j)}$ s'annule exactement $2n$ fois sur tout intervalle de la forme $[T, T + 2\pi[$, $T \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. *Montrer qu'il existe ε_0 et C dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout réel $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute fonction dérivable g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |g(t) - \sin(t)| < \varepsilon, \quad |g'(t) - \cos(t)| < \varepsilon,$$

l'ensemble des zéros de g puisse être ordonné en une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad |\lambda_n - n\pi| \leq C\varepsilon.$$

3.3 Accroissements finis à but réel, variation des fonctions

Du théorème de Rolle on déduit, par soustraction d'une fonction affine adéquate, l'*égalité des accroissements finis*.

Théorème 3. *Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, f une application continue sur le segment $S = [a, b]$, à valeurs réelles, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

L'interprétation géométrique est claire : la tangente au graphe de f au point d'abscisse c est parallèle à la corde joignant les points d'abscisses a et b du graphe de f. Cependant, on ne sait rien sur c et le théorème permet donc simplement d'encadrer $f(b) - f(a)$ à partir de f'. D'autre part, l'égalité des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions vectorielles, cf section **5**.

Exercice 26. *Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c un nombre réel tel que $f'(c)$ n'est la pente d'aucune corde du graphe de f. Déterminer $f''(c)$.*

L'exercice ci-après est un cas particulier d'un important résultat de géométrie différentielle, le « lemme de Sard ».

Exercice 27. *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose*

$$C(f) = \{x \in [0, 1],\ f'(x) = 0\}\ .$$

L'ensemble $C(f)$ (resp. $f(C(f))$) est appelé ensemble des points critiques (resp. des valeurs critiques) de f.

Montrer, si $\varepsilon > 0$, que l'on peut recouvrir $f(C(f))$ par une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est majorée par ε.

On déduit facilement du théorème 3 les résultats gouvernant les variations des fonctions dérivables.

Théorème 4. *Soit f une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) la fonction f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$,

(ii) la fonction f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$,

(iii) la fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ et $(f')^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

La présentation des théorèmes 1 à 4 ci-dessus est depuis longtemps canonique. L'exercice ci-après propose une démonstration « directe » (i.e. évitant le recours au théorème des accroissements finis) d'une variante du théorème 4, qui fait apparaître plus nettement la remontée de l'infinitésimal au global.

Exercice 28. *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable à droite sur $[a, b[$.*

a) On suppose que la dérivée à droite de f est strictement positive sur $[a, b[$. Montrer que, si u et v sont dans $[a, b]$ avec $u < v$, alors $f(u) \leq f(v)$. On pourra considérer la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda = \{t \in [u, v],\ f(t) \geq f(u)\}\,.$$

b) On suppose que la dérivée à droite de f est positive ou nulle sur $[a, b[$. Montrer que f est croissante.

c) On suppose que la dérivée à droite de f est strictement positive sur $[a, b[$. Montrer que f est strictement croissante.

On déduit de la caractérisation des fonctions constantes et d'une récurrence facile le résultat suivant.

Proposition 4. *Pour k dans $\mathbb{N}^*$, les fonctions k fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ de dérivée nulle sont les fonctions polynomiales de degré au plus $k-1$.*

En guise d'application de la variation des fonctions, nous allons généraliser le fait que la dérivée d'un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$ est scindée sur $\mathbb{R}$. La preuve utilise la dérivée logarithmique d'un polynôme, qui est un outil fondamental de la *géométrie des polynômes*.

Exemple. *Dérivation logarithmique et polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$.

Reprenons les notations de l'exemple relatifs aux zéros de la dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Fixons α dans $\mathbb{R}$ et $Q = P' - \alpha P$. Nous allons montrer que Q est scindé sur $\mathbb{R}$ et placer ses racines par rapport aux x_i. D'abord, x_i est zéro de Q de multiplicité $n_i - 1$. Ensuite, pour x distinct des x_i, on a l'équivalence :

$$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{P'}{P}(x) = \alpha.$$

On considère donc la fraction rationnelle $F = P'/P$. On a classiquement :

$$F = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{X - x_i},$$

ce qui montre par dérivation que la fonction associée à F est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition réel. La limite de F à gauche en x_i est $-\infty$, sa limite à droite est $+\infty$. Si $1 \leq i \leq m-1$, F s'annule donc en un point y_i de $]x_i, x_{i+1}[$. On a récupéré ainsi $n-1$ zéros de Q avec multiplicité. Si $\alpha = 0$, c'est fini. Sinon, plusieurs arguments sont possibles. On peut par exemple utiliser le caractère réel de la somme des racines (fonction symétrique élémentaire). Il est également possible de remarquer que puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, les racines complexes irréelles de Q arrivent par paires conjuguées. On peut enfin remarquer qu'en $+\infty$ et $-\infty$, F tend vers 0, d'où un nouveau zéro de $F - \alpha$, appartenant à $]-\infty, x_1[$ si $\alpha < 0$, à $]x_m + \infty[$ si $\alpha > 0$.

Les deux exercices ci-après donnent deux applications aux polynômes : la description des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants préservant le caractère scindé et les « inégalité de Newton ».

Exercice 29. *Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ non constants et scindés sur $\mathbb{R}$. On écrit*

$$Q = \sum_{i=0}^{d} q_i X^i.$$

Montrer que $R = \sum_{i=0}^{d} q_i P^{(i)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On observera que $R = Q(D)(P)$ où D est l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ et on remarquera que l'on vient de traiter le cas où Q est de degré 1.

Exercice 30. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}$. On fixe un entier naturel $j \leq n-2$. On note $Q = P^{(j)}$, R le polynôme réciproque de Q et S le polynôme $R^{(n-j-2)}$ de degré ≤ 2.Montrer que S est scindé sur $\mathbb{R}$. Quelle inégalité sur les coefficients en déduit-on ?*

Exemple. *Monotonie du passage à l'inverse pour l'ordre de Loewner.*

On munit l'espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'ordre de Loewner : $A \leq B$ si et seulement si $B - A$ est dans $S_n^+(\mathbb{R})$. Si S est une application dérivable de I dans $S_n(\mathbb{R})$, on vérifie facilement que S est croissante pour l'ordre de Loewner si et seulement si S' est à valeurs dans $S_n^+(\mathbb{R})$. En effet, si x est dans $\mathbb{R}^n$ et si $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application

$$t \mapsto \langle S(t)x, x\rangle$$

se dérive en :

$$t \mapsto \langle S'(t)x, x\rangle\,.$$

Déduisons-en que l'application de passage à l'inverse est décroissante pour l'ordre de Loewner sur l'ouvert $S_n^{+*}(\mathbb{R})$, ce que l'on peut évidemment établir plus directement. Soient donc A et B dans $S_n^{+*}(\mathbb{R})$ avec $A \leq B$. Pour t dans $[0,1]$, posons :

$$S(t) = (1-t)A + tB = A + t(B-A).$$

L'application S est à valeurs dans $S_n^{+*}(\mathbb{R})$, de dérivée constante $B - A$. On a :

$$\forall t \in [0,1], \qquad -(S^{-1})'(t) = S^{-1}(t)(B-A)S^{-1}(t),$$

ce qui montre que $(S^{-1})'$ est à valeurs dans $S_n^+(\mathbb{R})$, donc que S^{-1} est décroissante pour l'ordre de Loewner, donc que :

$$A^{-1} \geq B^{-1}.$$

L'exercice ci-après établit un résultat analogue pour la racine carrée sur $S_n^+(\mathbb{R})$. Ici encore, il y a des preuves plus directes.

Exercice 31. *a) Soient A dans $S_n^{+*}(\mathbb{R})$, B dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA$ soit dans $S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que B est dans $S_n^+(\mathbb{R})$.*

b) Montrer que l'application racine carrée est de classe C^1 sur $S_n^{+*}(\mathbb{R})$. On utilisera la caractérisation des C^1-difféomorphismes en dimension > 1.

c) Montrer que l'application racine carrée est croissante sur $S_n^{+*}(\mathbb{R})$, puis sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

3.4 Difféomorphismes

Soient f une application continue définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, J l'intervalle $f(I)$. L'application f réalise une bijection de I sur J si et seulement si elle est injective, c'est-à-dire, d'après un théorème vu en première année, si et seulement si elle est strictement monotone. Si tel est le cas, la réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone de même monotonie que f. Comme les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, le résultat suivant, prouvé en première année, n'est pas très surprenant.

Proposition 5. *Avec les notations précédentes, soient t_0 dans I, $u_0 = f(t_0)$. Alors f^{-1} est dérivable en u_0 si et seulement si f est dérivable en t_0 de dérivée non nulle en ce point. Si tel est le cas :*

$$(f^{-1})'(u_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(u_0)}.$$

Soient p dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, f une fonction de classe C^p de I dans $\mathbb{R}$, J l'intervalle $f(I)$. On dit que f *est un C^p-difféomorphisme de I sur J* si f est une bijection de I sur J (c'est-à-dire, vu la définition de J, si f est injective sur I) et si l'application réciproque f^{-1} est de classe C^p sur J. La proposition précédente permet, via une récurrence facile mais fastidieuse, de caractériser les C^p-difféomorphismes.

Proposition 6. *Soient p dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, f une application de classe C^p de I dans $\mathbb{R}$, J l'intervalle $f(I)$. Les assertion suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application f est un C^p-difféomorphisme de I sur J.

(ii) La fonction f' ne s'annule pas sur I.

Exercice 32. *a) Soit y dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'équation $xe^x = y$ a une unique solution $x = \varphi(y)$ dans $\mathbb{R}^+$. Justifier que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.*

b) Donner un équivalent de $\varphi(x)$ en $+\infty$, puis un développement à deux termes.

c) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(x)$ en 0.

Exercice 33. *Si x est dans $]1, e[$, montrer que l'équation : $x^y = y^x$ admet une unique solution $y = f(x)$ dans $]e, +\infty[$ et que la fonction f est un C^∞-difféomorphisme de $]1, e[$ sur $]e, +\infty[$.*

Soient f et s deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, J l'intervalle image de I par s. Si f et s sont de classe C^k et si s est un C^k-difféomorphisme de I sur J, alors on peut écrire :

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = f \circ s^{-1}(s(t)),$$

expression qui montre que l'on peut voir f comme une fonction de classe C^k de s. Avec la syntaxe fonctionnelle habituelle, ceci s'écrit $f = g \circ s$ où $g = f \circ s^{-1}$ et la dérivée de g est donnée par :

$$\forall t \in I, \qquad g'(s(t))\, s'(t) = f'(t).$$

Avec la notation de Leibniz, on n'introduit pas de fonction g mais on voit f comme une fonction de s dont la dérivée est donnée par :

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\,\frac{dt}{ds}.$$

4 Classe C^k par prolongement

4.1 Le théorème

Le *théorème de classe C^k par prolongement* est un outil commode pour établir que certaines fonctions sont de classe C^k. Nous rappelons d'abord le cas $k = 1$, $E = \mathbb{R}$ qui est un corollaire simple de l'égalité des accroissements finis.

Proposition 7. *Soient t_0 dans I, ℓ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I, à valeurs réelles, que la restriction de f à $I \setminus \{t_0\}$ est de classe C^1. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'application f est de classe C^1 sur I et $f'(t_0) = \ell$,

(ii) l'application f' tend vers ℓ en t_0.

Preuve. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est immédiate. Supposons (ii). Pour établir (i), il suffit de montrer que $f'(t_0)$ existe et vaut ℓ. Or, l'égalité des accroissements finis fournit c_t entre t_0 et t tel que :

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f'(c_t).$$

Puisque c_t tend vers t_0, $f'(c_t)$ tend vers ℓ et le résultat suit.

L'énoncé général est le théorème 5 ci-après.

Théorème 5. *Soient t_0 dans I, p dans $\mathbb{N}^*$, f une application continue de I dans E, de classe C^p sur $I \setminus \{t_0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'application f est de classe C^p sur I,

(ii) pour tout k de $\{1, \dots, p\}$, l'application $f^{(k)}$ a une limite dans E en t_0.

Preuve. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, le résultat se déduit par récurrence de la proposition précédente. Le cas général s'y ramène via l'utilisation des fonctions coordonnées, directement si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en observant que tout espace complexe de dimension finie d est naturellement un espace réel de dimension $2d$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous allons illustrer le théorème par l'exemple, découvert par Cauchy, d'une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, mais dont toutes les dérivées sont nulles en 0.

Exemple. *Fonction de classe C^∞ plate à tout ordre en* 0.

Définissons f comme la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = \exp(-1/x).$$

Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Pour établir que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+. Or, une récurrence simple montre, que pour tout k dans $\mathbb{N}$, il existe P_k dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f^{(k)}(x) = x^{-2k} P_k(x) \exp(-1/x).$$

Posant $y = 1/x$, il vient :

$$f^{(k)}(1/y) = y^{2k} P_k(1/y) \exp(-y).$$

Par croissance comparée :

$$y^{2k} \exp(-y) \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \ ;$$

puisque $P_k(1/y)$ tend vers $P_{\mathbb{K}}(0)$, on en déduit le résultat voulu et les relations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{(k)}(0) = 0.$$

Il existe de nombreuses variations sur ce thème. Prenons par exemple a et b réels tels que $a < b$ et posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = (b - x)(x - a).$$

La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; tel est donc aussi le cas de $\varphi = f \circ g$, fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash]a,b[$ et telle que :

$$\forall x \in]a,b[, \qquad \varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right).$$

On a ainsi établi le :

Lemme 4. *Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, il existe une application φ de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ dont l'ensemble des zéros est $\mathbb{R}\backslash]a,b[$.*[13]

L'exercice suivant construit des « fonctions plateaux de classe C^∞.

Exercice 34. *a) En considérant : $x \mapsto \int_a^x \varphi$, construire une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, a]$, égale à 1 sur $[b, +\infty[$ et strictement croissante sur $[a,b]$.*

b) Construire une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ nulle hors de $]-2,2[$ et égale à 1 sur $[-1,1]$.

Exercice 35. *Soient a et b réels avec $a < b$, f une application de classe C^1 de $]a,b]$ dans E. On suppose que f' a une limite en a. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Ce résultat subsiste-t-il si a n'est pas une borne de l'intervalle ?*

4.2 Complément : un théorème de Whitney

Nous allons établir un résultat simple mais surprenant au premier abord[14]. L'ensemble des zéros d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Réciproquement, si F est un fermé de $\mathbb{R}$, la fonction :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto d(t, F)$$

est 1-lipschitzienne et s'annule exactement sur F. On peut en fait trouver une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule exactement sur F.

Théorème 6. *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, de classe C^∞, dont l'ensemble des zéros est F.*[15]

Preuve. La démonstration est une belle illustration de l'utilisation des séries de fonctions. On suppose $F \neq \mathbb{R}$ et on note U l'ouvert complémentaire de F dans $\mathbb{R}$. Comme tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$, U est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés. En effet, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ montre que :

$$U = \bigcup_{(r,r')\in\Lambda_U}]r, r'[, \qquad \text{où} \qquad \Lambda_U = \left\{(r,r') \in \mathbb{Q}^2,\ ]r,r'[\subset U\right\}.$$

13. Les fonctions de classe C^∞ à support compact ainsi mises en évidence ne sont pas des curiosités. Elles jouent un rôle essentiel en analyse (parfois très appliquée) depuis la découverte des *distributions* par Laurent Schwartz un peu avant 1950.

14. Dû à Whitney,1936.

15. Autrement dit, l'ensemble des zéros d'une application de classe C^∞ n'est pas meilleur que celui d'une fonction continue. Compte-tenu du caractère très émietté de certains fermés de $\mathbb{R}$ (Cantor), cet énoncé confirme ce que suggèrent les constructions élémentaires du paragraphe précédent : les fonctions de classe C^∞ sont des objets très malléables.

Comme Λ_U est dénombrable, on en choisit une énumération et on réécrit plus commodément :

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[,$$

où, pour tout k, (a_k, b_k) est un couple de rationnels tels que $a_k < b_k$. Posons aussi, pour k dans $\mathbb{N}$: $I_k = [a_k, b_k]$. Grâce au lemme 3, on dispose, pour tout k, d'une fonction φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, de classe C^∞ et dont l'ensemble des zéros est le complémentaire de I_k dans $\mathbb{R}$. Il suffit pour conclure de montrer l'existence d'une suite $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ de réels > 0 telle que, pour tout j dans $\mathbb{N}$, la série de fonctions : $\sum \lambda_k \varphi_k^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet, si tel est le cas, la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k(x)$$

est de classe C^∞, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'ensemble de ses zéros est : $\bigcap_{k\geq 0} (\mathbb{R} \setminus I_k) = F$.
Dans ce but, on s'arrange pour forcer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de toutes les séries dérivées en posant, pour k dans $\mathbb{N}$:

$$\lambda_k = \frac{2^{-k}}{\sum_{j=0}^{k} \|\varphi_k^{(j)}\|_\infty}.$$

En effet, si j est fixé, on a, pour $k \geq j$: $\|\lambda_k \varphi_k^{(j)}\|_\infty \leq 2^{-k}$, ce qui achève la démonstration.

5 Accroissements finis vectoriels

5.1 Le théorème ; comparaison avec le cas réel

L'égalité des accroissements finis est un énoncé typique des fonctions à but réel ; la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ y joue un rôle essentiel. On le comprend en considérant la fonction de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \qquad f(t) = e^{it}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $f' \ : t \mapsto ie^{it}$, partout de module 1. Mais on a : $f(2\pi) = f(0)$. Il n'existe donc pas de t de $]0, 2\pi[$ tel que :

$$f'(t) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi}.$$

L'image de f décrit le cercle unité avec une vitesse de module constamment égal à 1 et revient à son point de départ.

On conserve cependant une partie du théorème des accroissements finis, de loin la plus importante. C'est l'*inégalité des accroissements finis*, dont l'interprétation cinématique est immédiate : un mobile se déplaçant avec une vitesse majorée par M pendant un temps T parcourt une distance majorée par MT.

Théorème 7. *Soient M dans $\mathbb{R}^+$, a et b deux réels tels que $a < b$, $S = [a,b]$, f une application de S dans E continue sur S, dérivable sur $]a,b[$ et telle que :*

$$\forall t \in]a,b[, \qquad \|f'(t)\| \leq M.$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a).$$

Cet énoncé n'est au programme que lorsque f est de classe C^1 auquel cas l'intégration, que nous étudierons plus bas, donne un procédé de reconstruction de f à partir de f' permettant une preuve de poche :

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f' \right\| \leq \int_a^b \|f'\| \leq M(b-a).$$

Le théorème des accroissements finis est donc en réalité un résultat d'intégration permettant d'intégrer les inégalités sous une hypothèse plus faible que la classe C^1. L'interprétation cinématique va dans ce sens : on passe d'une majoration relative à la vitesse instantanée à une inégalité globale.

Le gain de généralité obtenu en passant du cas C^1 au cas dérivable est pour nous négligeable. La démonstration est en revanche très instructive.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Si t est dans $]a,b[$, la définition de la dérivée donne c_t dans $]t,b[$ tel que :

$$\forall u \in [t, c_t], \qquad \|f(u) - f(t)\| \leq (M + \varepsilon)(u - t).$$

Pour globaliser, on introduit :

$$A_\varepsilon = \{t \in [a,b], \ \|f(t) - f(a)\| \leq (M+\varepsilon)(t-a)\}.$$

Il suffit d'établir que A_ε contient b pour obtenir

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (M+\varepsilon)(b-a)$$

et le résultat désiré en faisant tendre ε vers 0.

On observe d'abord que A_ε contient a et est donc non vide, puis que A_ε est fermé par continuité de f. Soit s la borne supérieure de A_ε. On sait que s est dans A_ε. Si s était différent de b, on aurait par inégalité triangulaire : $[s, c_s] \subset A_\varepsilon$ ce qui contredirait la définition de s. [16] [17]

Exercice 36. *Soient a un nombre réel, z et z' deux nombres complexes de parties réelles majorées par a. Montrer*

$$|e^z - e^{z'}| \leq e^a \ |z - z'|.$$

On pourra considérer l'application $t \in [0,1] \longmapsto \exp((1-t)z + tz')$.

16. La démonstration fonctionne en supposant seulement f dérivable à droite sur $]a,b[$ et $\|f'_d\|$ majorée par M sur cet intervalle. Voir à ce sujet l'exercice suivant.

17. Variante plus sophistiquée (mais équivalente) de la preuve : montrer que A_ε est ouvert dans $[a,b]$ et conclure par connexité.

Exercice 37. *Démontrer le théorème 7 dans le cas où f est dérivable sur $[a,b]$ en commençant par construire, par dichotomie, deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[a,b]$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2^n}, \qquad \|f(b_n) - f(a_n)\| \geq \frac{\|f(b) - f(a)\|}{2^n}.$$

Exercice 38. *Soient f et g deux applications définies et continues sur $[a,b]$, à valeurs respectivement dans E et $\mathbb{R}$, dérivables à droite sur $]a,b[$ et telles que :*

$$\forall t \in]a,b[, \qquad \|f_d'(t)\| \leq g_d'(t).$$

Montrer :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Voici enfin une forme vectorielle du théorème de Rolle.

Exercice 39. *Soit f une application dérivable et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) \neq 0.$$

Montrer que si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $f'(t) \in H$.

5.2 Conséquences

Une des conséquences immédiates de l'inégalité des accroissements finis est la caractérisation ci-après des fonctions constantes. Il s'agit encore d'un théorème d'intégration, qui affirme que f' et la valeur de f en un point de I déterminent f mais sans fournir de formule de reconstruction :

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'$$

valable si f est de classe C^1.

Corollaire 3. *L'application f de I dans E est constante sur I si et seulement si elle est dérivable sur I de dérivée nulle.*[18]

Exemples

1. *Fonctions de norme euclidienne constante.*
   Supposons E euclidien, notons $\| \ \|$ la norme issue du produit scalaire. Soit u une application dérivable de I dans E. Le calcul de la dérivée de $\|u\|^2$ fait dans le paragraphe **2.3** montre que $\|u\|$ est constante si et seulement si $u'(t)$ et $u(t)$ sont orthogonaux pour tout t.

2. *Générateur infinitésimal d'un mouvement de rotation, suite.*
   Revenons sur un exemple du paragraphe **2.3**. Soit M une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(t_0)$ appartienne au groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et qu'existe une application A de I dans l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall t \in I, \qquad M'(t) = A(t)\, M(t).$$

18. On peut également établir ce résultat à l'aide des fonctions coordonnées.

Alors, la fonction :

$$t \mapsto {}^t M(t)\, M(t)$$

est dérivable de dérivée nulle, donc constante. Il s'ensuit que pour tout t de I, $M(t)$ est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3. *La conservation de l'énergie.*

   En dynamique, une *intégrale première* est une fonction constante le long des trajectoires. Considérons un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un champ de force F défini sur un ouvert Ω de E et un point de masse m soumis à F. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$mx'' = F(x).$$

   où $x(t)$ désigne la position du point à l'instant t. L'énergie est une intégrale première fondamentale, qui existe dès que le champ de force F dérive d'un potentiel, c'est-à-dire est de la forme :

$$F = -\nabla U.$$

   Supposons en effet :

$$mx'' = -\nabla U(x).$$

   La fonction :

$$t \mapsto \frac{m\|x'(t)\|^2}{2} + U(x(t)))$$

   a pour dérivée :

$$t \mapsto \langle x'(t), mx''(t) + \nabla U(x(t))\rangle = 0$$

   et est donc constante. Autrement dit, l'*énergie*

$$E = \frac{m\|x'\|^2}{2} + U(x)$$

   est constante sur la trajectoire de x.

Exercice 40. *Soient $\alpha > 1$, $C > 0$, f une application de I dans E telle que :*

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad \|f(y) - f(x)\| \leq C|y-x|^{\alpha}.$$

Montrer que f est constante.

Une autre conséquence est le caractère localement lipschitzien des fonctions de classe C^1.[19]

Corollaire 4. *Soit f une application de classe C^1 de I dans E. Si S est un segment de I, la restriction de f à S est lipschitzienne.*

Preuve. Il suffit de noter que la fonction continue $\|f'\|$ est bornée sur le compact S et d'appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Bien sûr, on n'a aucun espoir de résultat global de ce type : donner des exemples le montrant sur $\mathbb{R}^+$ et $[0,1[$!

Exercice 41. *Donner une démonstration du théorème 5 utilisant l'inégalité des accroissements finis et donc valable dans tout espace normé.*

19. Il s'agit d'un résultat essentiel : les accroissements des fonctions « raisonnables » sont localement linéaires.

5.3 Fonctions à valeurs dans un espace normé quelconque

Il n y a rien à changer à l'énoncé et à la preuve de l'inégalité des accroissements finis. Le seul point à noter est que la caractérisation des fonctions constantes ne peut ici être obtenue directement via les fonctions coordonnées.

6 Appendice : les lois de Képler

Le calcul différentiel exposé ici trouve une de ses origines et une de ses très belles applications dans l'étude du *problème à deux corps*. Rappelons ce dont il s'agit. Au début du dix-septième siècle, Képler a formulé, en se fondant sur des observations, trois lois décrivant le mouvement d'une planète quelconque du système solaire.

1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

2. L'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps.

3. Le rapport entre le carré d'une période et le cube du grand axe de l'ellipse est le même pour toutes les planètes.

Newton a montré que les lois de Képler sont conséquences de deux principes fondamentaux :

1. La trajectoire d'un point de masse m soumis à une force F obéit à l'équation fondamentale de la dynamique :

$$mx'' = F(x).$$

où $x(t)$ désigne la position du point à l'instant t.

2. Si deux points de masses respectives m et M ont pour positions respectives x et y, alors la force exercée par le point de masse M sur le point de masse m est donnée par :

$$F(x) = G\frac{mM}{\|x-y\|^2} \times \frac{y-x}{\|y-x\|}.$$

où G est la *constante de gravitation*.

Dans l'application aux planètes, le point de masse M est le soleil, dont la position y est choisie comme origine des coordonnées. On est ramené à étudier l'équation différentielle non linéaire :

$$x'' = -\frac{k}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|}$$

où k est une constante > 0. Autrement dit :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \qquad F(x) = -\frac{k}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|},$$

c'est-à-dire :

$$F = \nabla U,$$

où :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \qquad U(x) = \frac{k}{\|x\|}.$$

Notant $r = \|x\|$, on parle de *potentiel newtonien en* $1/r$ ou de *champ newtonien* en $1/r^2$.

Il n'est pas immédiat de déduire les lois de Kepler des deux équations précédentes.[20] Le point de départ, suggéré par la physique, est la recherche d'intégrales premières du mouvement permettant de réduire l'équation à des équations plus simples. Certaines de ces intégrales premières existent dans des situations plus générales que celle du problème des deux corps. Nous avons déjà rencontré l'énergie. Nous ne nous en servirons pas directement ici. Le travail se décompose en deux parties. On met d'abord en évidence la conservation du moment angulaire, valable pour tout champ à force centrale. Pour conclure, il faut utiliser un calcul spécifique au potentiel newtonien.

La conservation du moment angulaire, ou loi des aires

Considérons $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, un espace euclidien orienté de dimension 3. Donnons nous un *champ à force centrale* défini sur $E \setminus \{0\}$:

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \qquad F(x) = \lambda(x)x$$

où λ est une fonction de $E\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que le point x de masse m se déplace en étant soumis à l'action de F. Alors x vérifie l'équation différentielle :

$$mx'' = \lambda\,(x)\ x.$$

Le *moment angulaire*

$$L = x \wedge mx'$$

est alors constant car de dérivée : $x' \wedge x' + x \wedge x'' = x \wedge x'' = 0$.

On en déduit que la trajectoire de x est plane. Si en effet $x \wedge x'$ est constamment égal au vecteur non nul m, $x(t)$ est, pour tout t, dans le plan passant par 0 et orthogonal à m. Si $x \wedge x'$ est l'application nulle, c'est encore mieux. On voit, puisque $x(t)$ est toujours non nul, qu'il existe une fonction scalaire μ telle que : $x' = \mu\, x$. L'intégration de cette équation (coordonnée par coordonnée) montre que, pour tout t, $x(t)$ est dans la droite vectorielle engendrée par $x(0)$.

D'autre part, $(x \wedge x')(t)$ est la valeur en t de la dérivée de $:u \mapsto x(t) \wedge x(u)$, ce qui justifie, compte tenu de l'interprétation géométrique du produit vectoriel la dénomination *vitesse aréolaire* pour $x \wedge x'$. Un point soumis à l'action d'un champ à force centrale a donc une vitesse aréolaire constante. C'est la seconde loi de Képler, ou *loi des aires*, valable en particulier pour le potentiel newtonien.

La forme de la première loi de Képler suggère l'utilisation des coordonnées polaires : en effet, l'équation polaire d'une conique est simple lorsque le pôle est l'un des foyers. On oriente le plan P dans lequel évolue x, on fixe un repère orthonormé direct $(\vec{i}, \vec{j})$ de P, k tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit un repère orthonormé direct de E, on identifie x au couple de ses cordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Le théorème de relèvement[21] permet de poser :

$$x = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

20. Toutes les preuves connues demandent un peu de travail

21. Cet énoncé, désormais hors-programme, est démontré dans le paragraphe **8.6**.

où r (resp. θ) est une fonction ayant la même régularité C^k que x et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (resp. $\mathbb{R}$). On a alors :

$$x' = r'(\cos(\theta), \sin(\theta)) + r\theta'(-\sin(\theta), \cos(\theta)),$$

puis :

$$x \wedge x' = r^2\theta'\vec{k}.$$

la quantité $r^2\theta'$ est donc constante. Nous la noterons h.

Pour un champ à force centrale dérivant d'un potentiel, nous disposons donc de quatre intégrales premières scalaires : l'énergie et les trois coordonnées du moment angulaire. Or, vu la forme de l'équation de la dynamique (et le théorème de Cauchy-Lipschitz), il y a six degrés de liberté pour x : la position et la vitesse à l'instant t_0. Pour connaître la courbe image de la trajectoire, il faut donc cinq intégrales premières : il nous en manque une. Les calculs précédents explicitent ce fait : x appartient à un plan, x' aussi, et on dispose de deux relations entre les quatre quantités r, r', θ, θ'. Une dernière relation est nécessaire pour en tirer une relation entre r et θ. Autrement dit, il faut à ce stade utiliser la forme particulière du potentiel newtonien.

La première loi de Képler.

Nous allons établir la première loi de Képler par une méthode élégante due à Hamilton (1846). On pose :

$$u = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{x}{r}.$$

On note $v = x'$. Pour le potentiel newtonien en $1/r$ l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$v' = -\frac{ku}{r^2}.$$

Cette équation et la loi des aires montrent que v est une fonction très simple de θ. En effet, si h est la constante $r^2\theta'$, on a :

$$-\frac{ku}{r^2} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dv}{d\theta}$$

On a utilisé les notations de Leibniz (**2.c** et **1.d**) ; on peut, de manière un tantinet précautionneuse, noter que θ' ne s'annule pas, donc que θ est un difféomorphisme, donc que l'on peut voir r et v comme fonction de θ etc... Là n'est évidemment pas l'essentiel. On a :

$$\frac{dv}{d\theta} = -Ru \quad \text{où :} \quad R = \frac{k}{h}.$$

Vu la forme de u, v est de la forme :

$$v_0 + R(-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Ainsi, $v = x'$ décrit un cercle, non centré sur l'origine. On peut choisir les coordonnées de sorte que :

$$v_0 = (0, \varepsilon R), \qquad v = (-R\sin(\theta), R(\varepsilon + \cos(\theta))).$$

Il vient alors, en écrivant à nouveau la loi des aires :

$$rR(1 + \varepsilon\cos(\theta)) = h.$$

On reconnaît l'équation d'une conique dont l'un des foyers est à l'origine.

II. Intégration

L'intégrale des fonctions à valeurs vectorielles est construite comme celle des fonctions réelles, c'est-à-dire via l'approximation uniforme par les fonctions en escalier ; elle fait l'objet de la section **7**. *Les compléments* **7.3** *et* **7.7** *peuvent être omis sans dommage. Dans la section* **8**, *on établit le lien fondamental entre intégration et dérivation ; il faut lire le complément* **8.4** *sur la méthode « intégrer pour dériver ». Le paragraphe* **8.6**, *sur le « théorème de relèvement C^1 » est tout à fait facultatif. La section* **9** *contient le théorème relatif aux sommes de Riemann ; l'étude de la rapidité de convergence présentée dans* **9.3** *n'est pas un résultat du programme mais constitue un exercice très instructif. La section* **10**, *enfin, établit les formules de Taylor et en donne quelques applications ; il est ici essentiel de distinguer aspects locaux et globaux.*

7 Construction de l'intégrale

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, S le segment $[a, b]$. On note $\mathcal{E}(S, E)$ l'espace des fonctions en escalier de S dans E, $\mathcal{CM}(S, E)$ celui des fonctions continues par morceaux de S dans E.

7.1 Le cas des fonctions en escalier

On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier de S dans E. Si f est une telle fonction et :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

une subdivision de S adaptée à f et si, pour $0 \leq i \leq n-1$, on note c_i la valeur de f sur $]t_i, t_{i+1}[$, on pose :

$$\int_S f = \int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) c_i.$$

On vérifie que cette définition est indépendante de la subdivision adaptée choisie. [22] Les propriétés suivantes sont immédiates.

(i) L'application :

$$f \in \mathcal{E}(S, E) \mapsto \int_a^b f \in E$$

est linéaire.

(ii) L'inégalité triangulaire s'écrit sous forme intégrale :

$$\forall f \in \mathcal{E}(S, E), \qquad \left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

22. Constater l'invariance par passage à une subdivision plus fine puis utiliser l'existence d'un raffinement commun à deux subdivisions adaptées.

En particulier, pour f et g dans $\mathcal{E}(S,E)$, on a :

$$\left\| \int_a^b f - \int_a^b g \right\| \leq (b-a)\|f-g\|_\infty,$$

ce qui entraîne que l'application linéaire :

$$f \in \mathcal{E}(S,E) \longmapsto \int_a^b f$$

est continue.

(iii) Pour c dans $]a,b[$, on a la relation de Chasles :

$$\forall f \in \mathcal{E}(S,E), \qquad \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

(iv) L'intégrale commute aux applications linéaires au sens suivant. Si $(F, \| \ \|)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et T une application linéaire continue de E dans F, alors :

$$\forall f \in \mathcal{E}(S,E), \qquad T\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b T(f).$$

7.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On a vu dans le cours d'approximation que toute fonction continue par morceaux de S dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions en escalier de S dans $\mathbb{K}$. Par passage aux fonctions coordonnées ou en reprenant verbatim le raisonnement fait dans le cas scalaire, on étend cette propriété aux fonctions à valeurs dans E.

Proposition 8. *Si f appartient à $\mathcal{CM}(S,E)$, f est limite uniforme sur S d'une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{E}(S,E)$.*

On construit l'intégrale d'une fonction f de $\mathcal{CM}(S,E)$ à partir de celle des fonctions en escalier, de la proposition précédente et des deux lemmes suivants.

Lemme 5. *Si $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}(S,E)$ convergeant uniformément vers f sur S, alors la suite :*

$$\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\geq 0}$$

converge dans E.

Preuve. On montre que la suite est de Cauchy, ce qui découle du fait que $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur S et de l'inégalité :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad \left\| \int_a^b \varphi_q - \int_a^b \varphi_p \right\| \leq (b-a)\|\varphi_q - \varphi_p\|_\infty.$$

Lemme 6. *Si les suites $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}(S,E)$ convergent toutes deux uniformément vers f sur S ,alors :*

$$\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Il suffit de noter que :

$$\left\| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \right\| \leq (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty.$$

On définit alors, pour f dans $\mathcal{CM}(S,E)$:

$$\int_S f = \int_a^b f = \lim \int_a^b \varphi_n$$

où $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{E}(S,E)$ convergeant uniformément vers f sur S. Les deux lemmes précédents garantissent la validité de cette définition. Résumons les propriétés de l'intégrale ainsi obtenue.

Théorème 8. *L'application :*

$$f \in \mathcal{CM}(S,E) \mapsto \int_S f \in E$$

est linéaire, vérifie l'inégalité de la norme :

$$\forall f \in \mathcal{CM}(S,E), \qquad \left\| \int_S f \right\| \leq \int_S \|f\|,$$

la relation de Chasles :

$$\forall c \in]a,b[,\ \forall f \in \mathcal{CM}(S,E) \qquad \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f,$$

commute aux applications linéaires au sens où, pour tout $\mathbb{K}$-espace F de dimension finie et toute T de $\mathcal{L}(E,F)$, on a :

$$\forall f \in \mathcal{CM}(S,E), \qquad T\left(\int_S f\right) = \int_S T(f).$$

De plus, si f et g sont dans $\mathcal{CM}(S,E)$ et coïncident sur le complémentaire d'une partie finie, on a :

$$\int_S f = \int_S g.$$

Preuve. Toutes les propriétés s'obtiennent immédiatement par approximation uniforme à partir du cas des fonctions en escalier. Soient f et g dans $\mathcal{CM}(S,E)$, α et β dans $\mathbb{K}$, deux suites (φ_n) et (ψ_n) d'éléments de $\mathcal{E}(S,E)$ convergeant uniformément sur S vers f et g respectivement. Alors $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)$ converge uniformément sur S vers $\alpha f + \beta g$. De plus, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\int_S (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) = \alpha \int_S \varphi_n + \beta \int_S \psi_n,$$

d'où, par passage à la limite :

$$\int_S \alpha f + \beta g = \alpha \int_S f + \beta \int_S g.$$

On laisse les trois propriétés suivantes au lecteur. Si maintenant f et g sont dans $\mathcal{CM}(S, E)$ et coïncident en dehors d'un ensemble fini, on peut écrire :

$$g = f + \varphi$$

où φ est en escalier et nulle sur le complémentaire d'un ensemble fini, donc d'intégrale nulle par définition.

Remarques

1. *Cas scalaire et cas vectoriel*
   Bien sûr, dans le cas scalaire, l'intégrale ainsi obtenue coïncide avec celle construite en première année.

   La commutation aux applications linéaires montre en particulier que l'on peut, si E est de dimension finie, calculer l'intégrale « coordonnée par coordonnée ». Elle montre aussi que si $\mathbb{K} = E = \mathbb{C}$, l'intégrale commute à la partie réelle et à la partie imaginaire.
2. *Continuité de l'intégrale sur un segment*
   Le théorème entraîne que l'application :

   $$f \in \mathcal{CM}(S, E) \mapsto \int_S f \in E$$

   est linéaire continue de norme subordonnée $(b - a)$ (atteinte par exemple pour les fonctions constantes).
3. *Notation de Leibniz*
   Dans les cas concrets, on écrit l'intégrale avec la notation de Leibniz :

   $$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   L'intérêt de cette notation apparaîtra dans la formule du changement de variable. Contentons nous ici de l'interprétation intuitive (et historique). Pour une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\int_a^b f$ représente l'*aire* située entre l'axe des abscisses et le graphe de f ; c'est clair si f est en escalier (rectangles) et la définition via l'approximation par des fonctions en escalier revient à calculer $\int_a^b f$ en utilisant des rectangles épousant de mieux en mieux la forme du graphe de f. On peut ainsi dire, abusivement, que l'« on remplace f par $f(t)$ sur le segment infinitésimal $[t, t+\mathrm{d}t]$ ». L'interprétation de l'intégrale comme une sommation d'infinitésimaux conduit à la notation de Leibniz.

Exercice 42. *Généraliser l'argument utilisé ici pour construire l'intégrale des fonctions continues par morceaux en énonçant et en démontrant un théorème de prolongement pour les applications linéaires continues à but banachique.*

En pratique, on utilise surtout les propriétés de l'intégrale. Certaines démonstrations nécessitent cependant de revenir à la définition, ce qu'illustre le *lemme de Riemann-Lebesgue généralisé* de l'exercice suivant. [23]

Exercice 43. *Soient f dans $\mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ périodique, g dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Déterminer la limite, lorsque λ tend vers $+\infty$ de :*

$$I_\lambda(g) = \int_a^b g(t)\ f(\lambda t)\ dt.$$

L'exercice ci-après propose une démonstration analytique du théorème de Cayley-Hamilton. [24]

Exercice 44. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

a) Montrer que pour $r > 0$ assez grand, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{ikt}(re^{it}I_n - A)^{-1}\, dt = A^{k-1}.$$

b) En déduire : $\chi_A(A) = 0$.

7.3 Complément : les fonctions réglées.

L'argument ci-dessus construit en fait l'intégrale de f sur S pour toute fonction f de S dans E limite uniforme sur S de fonctions en escalier. On peut identifier les fonctions obtenues par ce procédé : ce sont les *fonctions réglées* de S dans E, c'est-à-dire les fonctions qui admettent en tout t de $]a, b]$ (resp. de $[a, b[$) une limite à gauche (resp. à droite). En d'autres termes, l'espace $\mathcal{R}(S, E)$ des fonctions réglées de S dans E ainsi défini est l'adhérence, dans l'espace des fonctions bornées de S dans E muni de la norme uniforme, de l'espace $\mathcal{E}(S, E)$. Cette caractérisation rend la classe des fonctions réglées [25] très naturelle. Nous allons l'établir à titre d'exercice.

Théorème 9. *Soit f une fonction de S dans E. Alors f est dans $\mathcal{R}(S, E)$ si et seulement si f est limite sur S de fonctions appartenant à $\mathcal{E}(S, E)$.*

Preuve. Supposons f limite uniforme sur S de fonctions en escalier. Comme les fonctions en escalier ont une limite à droite (resp. à gauche) en tout point de $[a, b[$ (resp. $]a, b]$), elles vérifient les critères de Cauchy correspondants. On en déduit aisément que tel est également le cas de f, donc que f est réglée ; le lecteur est prié d'écrire complètement l'argument.

Supposons inversement que f appartienne à $\mathcal{R}(S, E)$ et fixons $\varepsilon > 0$. Notons B l'ensemble des t de $[a, b]$ tels qu'existe φ dans $\mathcal{E}([a, t], E)$ approchant f à ε près sur $[a, t]$, c'est-à-dire telle :

$$\forall u \in [a, t], \qquad \|f(u) - \varphi(u)\| \leq \varepsilon.$$

Il s'agit de montrer que B contient b. Puisque B contient a, B n'est pas vide. Le caractère réglé de f va nous montrer successivement que $s > a$, que B contient sa borne supérieure s et que $s = b$.

23. Résultat fondamental, très utile dans l'étude de la convergence ponctuelle des séries de Fourier. Également excellent exemple de « convergence faible ».

24. Démonstration qui devient naturelle dans le contexte de la théorie spectrale générale.

25. Hors-programme en Spé : le programme se limite aux fonctions continues par morceaux.

Montrons d'abord que $s > a$. Puisque $f(a^+)$ existe, on dispose de $a' \in]a, b[$ tel que f diffère de $f(a^+)$ d'au plus ε sur $]a, a']$. La fonction de $\mathcal{E}(S, E)$ égale à $f(a)$ en a et à $f(a^+)$ sur $]a, a']$ approche f à ε près sur $[a, a']$. Ainsi $a' \in B$ et $s > a$.

Montrons que s est dans B. Comme $s > a$, $f(s^-)$ existe, on a s' dans $]a, s[$ tel que f diffère de $f(s^-)$ d'au plus ε sur $[s', s]$. Puisque s est la borne supérieure de B, la définition de B montre que B contient tout point de $]a, s[$, en particulier s'. On dispose donc de φ dans $\mathcal{E}(S, E)$ approchant f à ε près sur $[a, s']$. La fonction ψ coïncidant avec φ sur $[a, s']$, égale à $f(s^-)$ sur $[s', s[$ et à $f(s)$ en s appartient à $\mathcal{E}([a, s], S)$ et approche f à ε-près sur ce segment, ce qui montre bien que s est dans B.

Il reste à établir que $s = b$. Si tel n'était pas le cas, on disposerait de s'' dans $]s, b]$ tel que, sur $]s, s'']$, $f(s^+)$ approche f à ε près. Comme s est dans B, il existe ψ dans $\mathcal{E}([a, s], E)$ approchant f à ε près sur $[a, s]$. La fonction coïncidant avec ψ sur $[a, s]$ et $f(s^+)$ sur $]s, s'']$ appartient à $\mathcal{E}(S, E)$ et approche f à ε près sur $[a, ss']$, ce qui contredit la définition de s et achève la démonstration.

On pourrait donc traiter sans aucun changement le cours dans le cadre étendu des fonctions réglées de S dans E. La classe des fonctions réglées est stable par définition par convergence uniforme, et donc en ce sens plus satisfaisante que celle des fonctions continues par morceaux. Cette approche de la théorie élémentaire de l'intégration a été popularisée par Bourbaki.

Exercice 45. *a) Vérifier que toute fonction monotone de S dans $\mathbb{R}$ est réglée.*

b) Montrer que si f est dans $\mathcal{R}(S, E)$, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

7.4 Fonctions réelles : intégrale et relation d'ordre

Un avantage de l'intégration sur la dérivation est la possibilité d'intégrer les inégalités. Cette propriété explique que l'on puisse intégrer (et non pas dériver) les relations de comparaison, les convergences uniformes sur les segments.

Proposition 9. *Si f est dans $\mathcal{CM}(S, \mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors :* $\displaystyle\int_S f \geq 0$.

Si f et g sont dans $\mathcal{CM}(S, \mathbb{R})$ et telles que $f \geq g$, alors $\displaystyle\int_S f \geq \int_S g$.

Preuve. Par linéarité, il suffit d'établir le premier point. Or, par définition même, l'intégrale d'une fonction en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ appartient à $\mathbb{R}^+$. Ce fait découle du lemme suivant.

Lemme 7. *Soit f dans $\mathcal{CM}(S, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors f est limite uniforme sur S d'une suite de fonctions en escalier de S dans $\mathbb{R}^+$.*

Preuve. On part d'une suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}(S, \mathbb{R})$ convergeant vers f uniformément sur S. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in S, \qquad \psi_n(t) = \max\{\varphi_n(t), 0\}.$$

Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$|\psi_n - f| \leq |\varphi_n - f|$$

et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur S.

Exemple. *Limite des normes p en $+\infty$.*

Soit f une application continue de S dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que, lorsque p tend vers $+\infty$, la quantité

$$N_p(f) = \left(\int_S f^p\right)^{1/p}$$

tend vers le maximum M de f sur S. On a déjà :

$$N_p(f) \leq (b-a)^{1/p} M$$

et le majorant tend vers M. Dans l'autre sens, on suppose f non identiquement nulle, de sorte que $M > 0$. On fixe ε dans $]0, M[$, x_0 un antécédent de M par f dans S. Par continuité de f, il existe un sous-segment S' de S contenant x_0, de longueur $\ell > 0$ sur lequel f est minorée par $M - \varepsilon$. On écrit :

$$N_p(f) \geq \left(\int_{S'} f^p\right)^{1/p} \geq \ell^{1/p}(M-\varepsilon).$$

Pour p assez grand, le minorant dépasse $M - 2\varepsilon$, d'où le résultat.

Exercice 46. *Que se passe-t-il dans cet exemple si f est seulement continue par morceaux ?*

Exercice 47. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application continue et strictement croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$.*

a) Montrer, si n est dans $\mathbb{N}^*$, que l'équation $f(x)^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n$ a une unique solution x_n dans $[a, b]$.

b) Convergence et limite de (x_n).

Exercice 48. *Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$, m et M dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $mg \leq f \leq Mg$. Montrer :*

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2.$$

On pourra partir de $(f - mg)(f - Mg) \leq 0$.

Exemple. *Application de l'intégration à un problème de géométrie plane.*

L'intégration des inégalités montre en particulier que si f est dans $\mathcal{CM}(S, \mathbb{R})$, la *moyenne*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

de f sur $[a, b]$ est comprise entre les bornes de f. Cette remarque triviale est utilisée par les probabilistes (dans un contexte plus général) pour obtenir des résultats d'existence. Voici un exemple amusant. On considère n complexes $z_1, \ldots, z_n$ avec $n \geq 2$ s'écrivant : $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ où $r_k \geq 0$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer l'existence d'une partie I non vide de $\{1, \ldots, n\}$ telle que :

$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \;\geq\; \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n |z_k|.$$

L'idée est la suivante. Si P est un demi-plan dont la frontière passe par 0, notons I_P l'ensemble des k de $\{1,\ldots,n\}$ tels que z_k appartienne à P. Le module de la somme des z_k pour k dans I_P est minoré par la somme des modules des projetés des z_k sur la droite orthogonale à la frontière de P et passant par 0. Nous allons montrer que la moyenne de cette quantité lorsque P parcourt l'ensemble des demi-plans est :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}|z_k|,$$

ce qui justifiera le résultat. Formalisons. Un demi-plan est décrit par un angle. Si θ est dans $\mathbb{R}$, soit donc :

$$P(\theta)=\{re^{i\alpha};\ r\geq 0, |\alpha-\theta|\ \leq\ \pi/2\}.$$

Notons p_θ la projection orthogonale sur la droite d'angle polaire θ. On a donc, pour $r\geq 0$ et α réel :

$$p_\theta(re^{i\alpha})=re^{i\theta}\cos(\alpha-\theta).$$

Si I_θ est l'ensemble des k de $\{1,\ldots,n\}$ tels que z_k appartienne à $P(\theta)$, il vient :

$$\left|\sum_{k\in I_\theta} z_k\right|\geq\left|\sum_{k\in I_\theta} p_\theta(z_k)\right|=\sum_{k\in I_\theta} r_k\ \cos(\theta_k-\theta).$$

La somme minorante s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} r_k\ \cos^+(\theta-\theta_k).$$

La valeur moyenne de la fonction $\cos^+=\max(\cos,0)$ est $1/\pi$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 49. *Montrer que la constante $1/\pi$ est optimale si on veut une inégalité vraie pour tout $n\geq 2$.*

On peut caractériser le cas d'égalité de la proposition précédente.

Proposition 10. *Soit f dans $\mathcal{CM}(S,\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors :*

$$\int_S f=0$$

si et seulement si f est nulle en chacun de ses points de continuité. Si f est continue, cette condition revient à « f est identiquement nulle ».

Preuve. Si f prend une valeur >0 en un de ses points de continuité x_0, on dispose par continuité d'un segment S' de longueur $\ell>0$ sur lequel f est minorée par $f(x_0)/2$, d'où :

$$\int_S f\geq\int_{S'} f\geq\frac{\ell f(x_0)}{2}>0.$$

Exemple. *Annulation des n premiers moments.*

Soient n dans $\mathbb{N}$ et f une application continue de $S=[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \qquad \int_S f(t)\, t^k \ \mathrm{dt} \ = 0.$$

Via des combinaisons linéaires, l'hypothèse s'écrit de façon plus parlante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_S fP = 0.$$

Nous allons montrer que l'ensemble $f^{-1}(0) \cap]a,b[$ contient au moins $n+1$ points. On suppose par l'absurde que tel n'est pas le cas. Notons E l'ensemble des points de $]a,b[$ en lesquels f s'annule en changeant de signe (définition qui a bien un sens vu que f est continue et a un ensemble fini de zéros). L'hypothèse montre que E est fini de cardinal $k \leq n$. Notons : $x_1 < \cdots < x_k$ les éléments de E et P le polynôme : $\prod_{i=1}^{k}(X-x_i)$. La fonction continue fP reste de signe constant sur cet intervalle. Mais puisque $k \leq n$, l'intégrale de fP sur S est nulle. Il s'ensuit que fP est nulle, puis que f est nulle en tout point de $[a,b]$ autre que les x_i : contradiction.

Rappelons qu'on montre par application du théorème d'approximation de Weierstrass que la seule fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_a^b f(t)\, t^n \ \mathrm{dt} \ = 0$$

est la fonction nulle ; ce résultat ne se déduit pas de la forme finie précédente.

Exercice 50. *Moments trigonométriques et annulation*

Soient n dans $\mathbb{N}$ et f une application continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \qquad \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\ dt \ = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt \ = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $2n+1$ fois sur tout intervalle $[x, x+2\pi[$, $x \in \mathbb{R}$.

Si f est continue à valeurs réelles, la proposition précédente montre que l'égalité

$$\left|\int_S f\right| = \int_S |f|$$

est réalisée si et seulement si f est de signe constant. En effet, si $\int_S f$ est dans $\mathbb{R}^+$, cette relation montre que la fonction $|f|-f$ est d'intégrale nulle, donc, compte-tenu du lemme précédent, identiquement nulle. Voici une généralisation.

Exercice 51. *On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et que la norme $\| \ \|$ provient d'un produit scalaire euclidien. Soit f dans $\mathcal{C}(S,E)$ telle que : $\displaystyle\int_a^b \|f\| = \left\|\int_a^b f\right\|$. Montrer que f prend ses valeurs dans une demi-droite issue de 0.*

Exercice 52. *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe P dans $\mathbb{R}[X]$ strictement positif sur $[0,1]$ et tel que $\int_0^1 fP = 0$.*

7.5 Intégrale orientée

Il est indispensable pour calculer commodément d'élargir la notation intégrale au cas $a \geq b$. On pose donc, si $a < b$ et si f est dans $\mathcal{CM}([b,a],E)$:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

On convient aussi que :

$$\int_a^a f = 0.$$

L'avantage de cette notation est que, si f est continue par morceaux sur un intervalle I, la relation de Chasles :

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

est valable pour tout triplet (a,b,c) de I^3. Il faut par ailleurs prendre garde au fait que si $a > b$, l'inégalité de la norme s'écrit :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_b^a \|f\|.$$

L'exercice ci-après caractérise l'intégrale de manière axiomatique par la linéarité, la positivité, la relation de Chasles et l'effet sur les constantes.

Exercice 53. *Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions continues à support borné de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, on se donne une forme linéaire $I_{a,b}$ sur $\mathcal{K}$. On suppose réalisées les conditions suivantes.*

(i) Pour (a,b) dans $\mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, si l'élément f de $\mathcal{K}$ vaut 1 sur $[a,b]$, alors $I_{a,b}(f) = b - a$.

(ii) Si $a \leq b$, $f \in \mathcal{K}$ est à valeurs positives sur $[a,b]$, alors $I_{a,b}(f) \geq 0$.

(iii) Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, alors, pour f dans $\mathcal{K}$:

$$I_{a,b}(f) + I_{b,c}(f) = I_{a,c}(f).$$

Montrer

$$\forall (a,b,f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{K}, \qquad I_{a,b}(f) = \int_a^b f.$$

7.6 Intégration sur un intervalle non compact

De façon peu compréhensible, le programme ne définit les intégrales sur des intervalles non compacts que pour les fonctions scalaires. Il est cependant immédiat d'étendre les définitions de l'intégrabilité (remplacer le module par la norme) et de la semi-convergence. Le théorème de convergence dominée, le théorème de sommation L^1 et les résultats de régularité relatifs aux intégrales à paramètres se généralisent de même.

7.7 Fonctions à valeurs banachiques

Dans la construction de l'intégrale présentée ici, on utilise de manière essentielle le fait qu'un espace normé de dimension finie est de Banach. En fait, cette même construction subsiste sans aucun changement si on suppose seulement que $(E, \| \|)$ est un espace de Banach, sans hypothèse de dimension. Il en va de même dans la suite du texte. Les modifications à apporter sont immédiates et laissées au lecteur. Pour convaincre le lecteur que cette extension (hors programme) n'est pas entièrement vide, voici une application sous forme d'exercice. Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre et a un élément de A, le *spectre de a* est, par définition, l'ensemble $\sigma(a)$ des complexes λ tels que $a - \lambda 1_A$ ne soit pas inversible ; on remarquera que cette définition est cohérente avec celle adoptée dans le cours sur les endomorphismes. Si A est une algèbre de Banach, on vérifie que $\sigma(a)$ est un compact de $\mathbb{C}$. Il est nettement moins trivial que $\sigma(a)$ soit non vide ; cet énoncé, dont l'application à une matrice compagnon dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ redonne le théorème de d'Alembert-Gauss, est le but de l'exercice suivant.

Exercice 54. *Soient $(A, \| \|)$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach de neutre 1_A et a dans A. On veut montrer que $\sigma(a)$ n'est pas vide. On suppose par l'absurde que tel n'est pas le cas et, pour r dans $\mathbb{R}^+$, on pose :*

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} \left(re^{it} 1_A - a\right)^{-1} \, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, puis que φ est constante.

b) Aboutir à une contradiction : $\sigma(a)$ est donc non vide.

c) Montrer le théorème de Gelfand-Mazur[26] *: si A est un corps, que A est isomorphe à $\mathbb{C}$ par :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & A \\ \lambda & \mapsto & \lambda 1_A \end{array}.$$

8 Intégration et dérivation à l'ordre 1

Une découverte essentielle du dix-septième siècle est que « le problème des aires est l'inverse de celui des tangentes ». C'est à l'explicitation de cette phrase, i.e. du lien entre intégration et dérivation, qu'est consacré cette partie **2**.

8.1 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Une fois l'intégrale construite, les propriétés de l'intégrale fonction de sa borne supérieure se démontrent comme dans le cas scalaire. On se donne donc ici une application f de I dans E continue par morceaux, t_0 dans I et on pose :

$$\forall t \in I, \qquad F(t) = \int_{t_0}^{t} f.$$

Théorème 10. *L'application F est dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point t de I autre que l'éventuelle extrémité droite (resp. gauche) de I de dérivée $f(t^+)$ (resp. $f(t^-)$).*

26. Démontré un peu avant 1940 par Gelfand et Mazur, ce théorème est fondamental dans la théorie des algèbres de Banach.

Preuve. Soit t dans I qui n'est pas l'extrémité droite de I. Pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{\int_t^{t+h} f}{h}.$$

On fixe $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que $[t, t+\delta]$ soit contenu dans I et que :

$$\forall u \in]t, t+\delta], \qquad \|f(u) - f(t^+)\| \leq \varepsilon.$$

Pour h dans $]0, \delta]$, on a :

$$\left\| \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - f(t^+) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(u) - f(t^+)\| \, \mathrm{d}u \leq \varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration.

Corollaire 5. *Si f est continue sur I, F est de classe C^1 sur I de dérivée f.*

Exercice 55. *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \qquad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Étudier les variations de f. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}^+$ que l'on précisera. Étudier f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 56. *Soient f et g deux fonctions continues de I dans E telles que, pour tout segment S de I, on ait : $\int_S f = \int_S g$. Montrer : $f = g$.*

Exercice 57. *a) Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique réel y tel que : $\int_x^y e^{t^2} \, \mathrm{d}t = 1$. On pose $y = \varphi(x)$.*

b) Montrer que la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de φ.

c) Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes, de $\varphi(x)$ quand $x \to +\infty$.

8.2 Primitivation des fonctions continues

Si f est une application de I dans E, on appelle *primitive de f sur I* toute application dérivable sur I de dérivée f. Grâce au corollaire précédent et à la caractérisation des applications constantes sur I, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 6. *Si f est continue sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + C$ où C est un élément de E.*

Si f est maintenant une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans E, on dispose de deux primitives de f', à savoir f et :

$$t \mapsto \int_a^t f'.$$

Ces deux primitives diffèrent d'une constante, ce qui donne :

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = f(a) + \int_a^t f'.$$

On en déduit un résultat fondamental, le lien essentiel entre dérivation et intégration.

Corollaire 7. *Soient a et b dans I, f une application de classe C^1 de I dans E. Alors :*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Ainsi, si f est de classe C^1, on peut reconstruire f à partir de f' et de la valeur de f en un point. [27] Notons aussi que la preuve de l'inégalité des accroissements finis dans le cas C^1 mentionnée en 5.1 est maintenant complète !

Exercice 58. *Soient a dans $\mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions continues de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose g décroissante et f à valeurs dans $[0,1]$. Démontrer*

$$\int_0^a fg \leq \int_0^{\int_0^a f} g.$$

Exercice 59. *Soit f une application de classe C^1 du segment S dans E, $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour x et y dans S tels que $|x-y| \leq \alpha$, on ait :*

$$\|f(y) - f(x) - (y-x)f'(x)\| \leq \varepsilon |x-y|.$$

Exercice 60. *Trouver deux constantes absolues λ et μ telles que, pour tout fonction f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on ait :*

$$\|f\|_\infty{}^2 \leq \lambda \left| \int_0^1 f \right|^2 + \mu \int_0^1 f'^2.$$

Exercice 61. *Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soient, pour f dans E :*

$$N(f) = [\![f\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|.$$

Les applications N et N' sont des normes sur E : les comparer.

Exercice 62. *Soient $a > 0$, f une application de classe C^1 de $[0,a]$ dans $\mathbb{C}$ nulle en 0. Montrer :*

$$2\int_0^a |ff'| \leq \left(\int_0^a |f'| \right)^2 \leq a \int_0^a |f'|^2.$$

En déduire l'inégalité d'Opial : si f est de classe C^1 sur $[0,a]$ et vérifie $f(0) = f(a) = 0$, alors

$$\int_0^a |ff'| \leq \frac{a}{4} \int_0^a |f'|^2.$$

Montrer que la constante $1/4$ est optimale.

27. Rappel : si f est dérivable, on sait que la donnée de f' et d'une valeur de f détermine f. mais on ne dispose pas de formule simple de reconstruction (paragraphe **5.2**).

Exercice 63. *Soit L l'ensemble des applications 1-lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en 0. Déterminer*

$$\max\left\{\int_0^1 (u-u^2)\ ;\ u\in L\right\}.$$

Application *Dérivation et suites de fonctions*

Vérifions que la preuve du théorème assurant la classe C^1 de la limite d'une suite de fonctions s'adapte verbatim au cas vectoriel.

Soit donc $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de classe C^1 de I dans E. On suppose qu'il existe a dans I tel que $(f_n(a))_{n\geq 0}$ converge vers un élément ℓ de E et que la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g, nécessairement continue sur I. Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans I, on a :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'.$$

On en déduit immédiatement que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment S de I vers :

$$f\ : x \mapsto \ell + \int_a^x g.$$

L'application f est de classe C^1 et de dérivée g, ce qui achève la démonstration. La généralisation du théorème relatif à la classe C^k s'en déduit.

Exercice 64. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dérivables de I dans E. On suppose qu'il existe a dans I tel que $(f_n(a))_{n\geq 0}$ converge vers un élément ℓ de E et que la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f dérivable de dérivée g.*

8.3 Changement de variable

En combinant le corollaire 7 à la dérivation d'une composée, on obtient un outil de calcul essentiel : la formule du *changement de variable*.

Proposition 11. *Soient φ une application de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$, f une application continue sur l'intervalle $J=\varphi(I)$ et à valeurs dans E, a et b dans J. Alors :*

$$\int_a^b \varphi'.\,(f\circ\varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur J. Alors F est de classe C^1 sur J et le premier membre de l'égalité est :

$$\int_a^b (F\circ\varphi)',$$

ce qui amène le résultat.

La notation de Leibniz prend ici tout son intérêt. Lorsque l'on pose $y = \varphi(x)$, le petit élément de longueur $\mathrm{d}x$ se transforme en $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, les bornes a et b en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. D'où l'égalité :

$$\int_a^b \varphi'(x)\, f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

On renvoie au cours de première année pour les applications au calcul des primitives.

Exercice 65. *Déterminer les primitives de :*

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$$

sur les intervalles $]-\infty,-1[$ *et* $]-1,+\infty[$.

Exercice 66. *Montrer :*

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et en déduire la formule suivante[28] *:*

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n+5)}.$$

Exemple. *Distribution valeur principale de* $1/x$.

Soit f une application de classe C^1 de $[-a,a]$ dans $\mathbb{C}$ où $a > 0$. On veut montrer que :

$$S_\varepsilon(f) = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

a une limite $S(f)$ lorsque ε tend vers 0^+. Il faut remarquer que, si $f(0) \neq 0$, aucune des deux intégrales n'a de limite (singularité en $1/x$) ; la convergence souhaitée ne peut donc provenir que de compensations ce qui conduit à poser $y = -x$ dans la première intégrale. On arrive à :

$$S_\varepsilon(f) = \int_\varepsilon^a \frac{f(x) - f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Un développement limité montre que la fonction : $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ se prolonge continûment en 0 et achève la preuve avec :

$$S(f) = \int_0^a \frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 67. *Soit f comme dans l'exemple ci-dessus. Montrer que lorsque ε tend vers 0^+, la quantité :*

$$T_\varepsilon(f) = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{x - i\varepsilon}\,dx$$

a une limite $T(f)$ que l'on exprimera à l'aide notamment de $S(f)$ (i est le nombre complexe habituel).

28. Utilisée par Newton pour impressionner Leibniz.

Exercice 68. *Soit f une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[0,a]$ sur $[0,b]$ où a et b sont > 0. Montrer :*

$$\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} = ab.$$

Interprétation géométrique ? Sans entrer dans les détails, indiquer comment généraliser le résultat au cas où f est seulement continue.

L'exercice ci-après établit une inégalité due à Hilbert.

Exercice 69. *Dans a) et b), P est une fonction polynomiale à coefficient réels.*

a) Prouver :

$$\int_{-1}^1 P(x)\ dx = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta.$$

b) Prouver :

$$\int_0^1 P^2(x)\ dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2\ d\theta.$$

c) Soit $(a_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite finie de réels ≥ 0. Etablir :

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{a_n a_m}{m+n+1}\ \leq\ \pi \sum_{n=0}^N {a_n}^2.$$

8.4 Complément : la méthode « intégrer pour dériver »

On caractérise classiquement un certain nombre de fonctions classiques par une équation fonctionnelle et la continuité. L'exemple de base est le théorème de Cauchy selon lequel les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (C)$$

sont les homothéties. Il y a deux méthodes différentes pour arriver à ce résultat. La première consiste à observer que (C) implique :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, \qquad f(nx) = nf(x)$$

d'où l'on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) = xf(1),$$

puis, par continuité et densité, que cette égalité persiste pour x réel.

Nous allons donner un second argument, souvent plus efficace.

Supposons que f vérifie (C) et soit dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à x à y fixé, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(x+y) = f'(x).$$

Prenant maintenant $x = 0$, on voit que f' est constante, donc que f est affine. Reste à voir (synthèse) que parmi les fonctions affines, seules celles qui s'annulent en 0 vérifient (C), ce qui est immédiat.

La méthode « intégrer pour dériver » permet de montrer que toute solution continue de (C) est en fait dérivable (et même C^∞) ce qui permet de compléter la démonstration. L'idée est d'intégrer (C) par rapport à une des deux variables sur un segment bien choisi de manière à exprimer f au moyen d'une de ses primitives F. Ici, tout segment convient. Intégrant (C) par rapport à y dans $[0,1]$ à x fixé, il vient :

$$F(x+1) - F(x) = f(x) + \int_0^1 f,$$

expression qui établit bien que f est de classe C^1. Notons que par « va et vient » on a aussitôt que f est de classe C^k pour tout k.

Exercice 70. *Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)).$$

Exercice 71. *Trouver tous les couples (f,g) de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)\, g(y).$$

Nous allons donner un exemple un peu plus sophistiqué : la détermination des *sous-groupes à un paramètre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire des morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. [29]

Si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'application :

$$e_A \ : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}$$

est un tel morphisme. Nous allons montrer que les e_A sont les seules solutions du problème. Soit f un tel morphisme :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(t+u) = f(t)\, f(u).$$

Si f est dérivable, on obtient en dérivant par rapport à t puis en prenant $t=0$:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad f'(u) = f'(0)\, f(u).$$

Notant $A = f'(0)$, on en déduit que $f = e_A$ par application du cours sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Dans le cas général, il reste à montrer que la continuité de f et la propriété de morphisme entraînent que f est de classe C^1. Prenons $\varepsilon > 0$ et intégrons l'équation par rapport à u dans $[0,\varepsilon]$. Notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(t+\varepsilon) - F(t) = f(t) \int_0^\varepsilon f.$$

Il reste à montrer que l'on peut choisir ε de sorte que la matrice : $\displaystyle\int_0^\varepsilon f$ soit inversible pour conclure que f est de classe C^1. Or :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f(0) = I_n.$$

L'ouverture du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ montre, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, l'inversibilité de la matrice

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \quad \text{et donc de} \quad \int_0^\varepsilon f.$$

29. Le résultat démontré ici admet une généralisation importante en théorie des groupes de Lie. La méthode « intégrer pour dériver » est encore à la base de la démonstration.

Exercice 72. *Trouver les A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que l'image de e_A soit contenue dans le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

8.5 L'intégration par parties

La version « bilinéaire » de l'intégration par parties généralise l'énoncé scalaire sans nécessiter de modification dans la démonstration.

Proposition 12. *Soient ici E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie, u (resp. v) une application de classe C^1 de I dans E (resp. F) et B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Alors, si a et b sont dans I :*

$$\int_a^b B(u', v) = [B(u,v)]_a^b - \int_a^b B(u, v').$$

Preuve. L'application $B(u,v)$ est de classe C^1 de dérivée $B(u',v)+B(u,v')$.

Remarque. *Cas des fonctions continues de classe C^1 par morceaux.*

La formule d'intégration par parties subsiste si u et v sont continues et de classe C^1 par morceaux. On le voit comme suit. L'hypothèse fournit une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ telle que, pour tout i de $\{0, \ldots, n-1\}$, les restrictions de u et v à $[t_i, t_{i+1}]$ soient de classe C^1. Reste à écrire la formule d'intégration par parties sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$ et à sommer les relations obtenues.

Si les applications sont seulement de classe C^1 par morceaux, la formule doit être modifiée. Dans ce cas, on dispose seulement d'applications u_i et v_i définies et de classe C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$ et coïncidant respectivement avec u et v sur $]t_i, t_{i+1}[$; il faut donc rajouter au second membre de la formule les « termes de bord » provenant des discontinuités de u et v.

En dépit de sa simplicité, l'intégration par parties est un fantastique outil de calcul ; on en trouvera quelques applications dans les exercices ci-après. On renvoie au cours de première année pour les applications de l'intégration par parties au calcul d'intégrales.

Exercice 73. *Expliquer comment déterminer des primitives de fonctions de la forme $\ln(|F|)$ ou $\mathrm{Arctan}(F)$ lorsque F est une fraction rationnelle.*

Exercice 74. *a) Calculer les intégrales de Wallis données par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt.$$

b) Montrer : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \longrightarrow 1$. En déduire le produit infini de Wallis[30] *:*

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

30. Dans lequel on pourra reconnaître un cas particulier du développement de sin en produit eulérien.

Exercice 75. *Soit $f \in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Vérifier :*

$$\int_0^\pi f(t)\, f'(t)\ \mathit{cotan}\ t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi f^2(t)(1 + \ \mathit{cotan}^2 t)\ dt.$$

En déduire l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^\pi f^2 \ \le\ \int_0^\pi f'^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

L'exercice suivant démontre les *inégalités de Van der Corput*.

Exercice 76. *a) Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ convexe vérifiant $f'(x) \ge \mu$ sur $[a,b]$ avec $\mu > 0$. Montrer :*

$$\left|\int_a^b e^{if}\right| \ \le\ \frac{2}{\mu}.$$

b) Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $f''(x) \ge \mu$ sur $[a,b]$ avec $\mu > 0$. Démontrer :

$$\left|\int_a^b e^{if}\right| \ \le\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Indication. Supposer d'abord $f' > 0$ sur $[a,b]$ et, dans ce cas, démontrer :

$$\left|\int_a^b e^{if}\right| \ \le\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}$$

en coupant l'intégrale en $a+h$ pour un choix judicieux de h.

c) Plus généralement, démontrer l'existence d'une suite $(\alpha_k)_{k\ge 1}$ de constantes appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$ telle que, pour tout couple (a,b) de réels avec $a < b$ et tout réel $\mu > 0$, toute fonction f de classe C^k sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in [a,b],\ f^{(k)} \ge \mu$, on ait :

$$\left|\int_a^b e^{if}\right| \ \le\ \frac{\alpha_k}{\mu^{1/k}}.$$

L'exercice ci-après propose une preuve de l'irrationalité de π.[31]

Exercice 77. *On suppose que π est rationnel et on écrit $\pi = p/q$ où p et q sont dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient*

$$P_n = \frac{X^n\ (q - pX)^n}{n!} \qquad I_n = \int_0^\pi P_n(t)\ \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\ge 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et tend vers 0.

b) Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Expliciter une primitive de

$$t \longmapsto P(t)\ \sin(t)$$

31. Établie par Lambert au XVIII^e siècle. L'argument ci-après est dû à Niven (1946).

sous la forme

$$t \longmapsto A(t)\ \sin(t) + B(t)\ \cos(t) \quad \textit{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2.$$

c) Montrer que toutes les dérivées de P_n prennent des valeurs entières aux points 0 et π.

d) Obtenir uen contradiction.

L'exercice ci-après établit quelques résultats d'irrationalité plus généraux.

Exercice 78. *Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$I_n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{tz}\ dt.$$

a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $I_{n+2}(z)$ en fonction de $z, n, I_n(z)$ et $I_{n+1}(z)$.

b) Montrer qu'il existe, si $n \in \mathbb{N}$, un polynôme A_n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad I_n(z) = \frac{1}{z^{2n+1}} \left(e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z) \right).$$

On suppose, dans les questions c) et d), que $z \in \mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$ et $e^z \in \mathbb{Q}(i)$.

c) Montrer qu'il existe $D \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n I_n(z) \in \mathbb{Z}[i].$$

d) Donner un équivalent de $I_n(z)$ quand $n \to +\infty$ et obtenir une contradiction.

e) Quels sont les $r \in \mathbb{Q}^{+*}$ tels que $\ln r \in \mathbb{Q}$?

f) Montrer : $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 79. *Soit f une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle.*

a) Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}\ ;\ \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0\}$ n'est pas vide.

b) Soit ℓ le minimum de E, u une fonction de classe C^ℓ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer un développement asymptotique à la précision $o(n^{-\ell})$ de

$$I_n = \int_0^1 f(nt) u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 80. *Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et C dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que f est C-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour toute fonction φ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a*

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|.$$

On termine ces applications de l'intégration par parties par ce que l'on appelle caractérisation variationnelle des « fonctions splines cubiques ».[32]

32. Théorème de Holladay, 1957.

Exercice 81. *On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et $0 = a_0 < a_1 \cdots < a_n = 1$. On note S l'espace des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$, la restriction de la fonction f à $[a_k, a_{k+1}]$ soit polynomiale de degré ≤ 3.*

a) Montrer que S est un sous-espace de dimension $n+3$ de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$.

b) Montrer que :

$$\Psi \ : f \in S \longmapsto (f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n), f''(a_0), f''(a_n))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels de S sur $\mathbb{R}^{n+3}$.

c) On se donne $(b_0, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ On note f l'unique élément de S tel que $f''(0) = f''(1) = 0$ et

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}, \qquad f(a_i) = b_i.$$

Soit g une application de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}, \qquad g(a_i) = b_i.$$

Montrer :

$$\int_0^1 g''^2 \geq \int_0^1 f''^2,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $g = f$.

8.6 Complément : le théorème de relèvement C^1

Bien qu'il n'existe pas de fonction argument continue sur le cercle U, on peut « suivre continûment l'argument » d'un point qui se déplace sur U en dépendant continûment d'un *paramètre réel*. Cet énoncé est le *théorème de relèvement angulaire*.

Théorème 11. *Soient γ une application continue et de classe C^1 de I dans U, t_0 dans I, θ_0 dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\gamma(t_0) = e^{i\theta_0}.$$

Il existe un unique relèvement de γ envoyant t_0 sur θ_0. Ce relèvement est de classe C^1. [33]

Preuve. Supposons l'existence d'un relèvement θ de γ prenant la valeur θ_0 en t_0. Alors $i\theta'$ est la dérivée logarithmique de γ et :

$$\forall t \in I, \qquad \theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Réciproquement, si l'application θ est définie par cette formule, on a :

$$\left(\gamma e^{-i\theta}\right)' = \gamma' e^{-i\theta} - i\theta'\gamma e^{-i\theta} = 0$$

33. Le résultat reste en vrai en remplaçant partout « de classe C^1 » par « continu ». La démonstration est plus délicate, mais plus instructive. Cette généralisation est fort utile en topologie plane.

et $\gamma e^{-i\theta}$ est constante, donc égale à sa valeur 1 en t_0.

Si k est dans $\mathbb{N}^*$ et si γ est de classe C^k, la construction montre que θ est de classe C^k. Le théorème s'étend également, avec la même preuve, aux applications continues et de classe C^k par morceaux.

Passage en coordonnées polaires.

Le théorème 11 légitime certains « passages en coordonnées polaires ». Soient en effet I un intervalle de $\mathbb{R}$,

$$t \in I \mapsto (x(t), y(t))$$

une application de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. L'application :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et de classe C^k (composition). En appliquant le théorème de relèvement à :

$$z = \frac{x + iy}{r}$$

on obtient une application θ de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur I et telle que :

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

On peut donc trouver un couple (r, θ) de coordonnées polaires de (x, y) et de régularité C^k.

Application. *Indice d'un lacet du plan.*

Appelons *lacet* du plan complexe toute application continue γ définie sur un segment $S = [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. L'image de γ est, intuitivement, une courbe fermée du plan. [34] Nous allons définir rigoureusement le *nombre de tours orientés* que fait un lacet autour d'un point n'appartenant pas à son image. Pour simplifier, nous nous bornons au cas C^1.

Soient donc γ un lacet défini sur $S = [a, b]$ et de classe C^1, z un point de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\ (\gamma)$. Pour définir le nombre de tours susmentionné, il est naturel d'utiliser le théorème de relèvement. Pour t dans S, soit :

$$r(t) = |\gamma(t) - z|.$$

La fonction :

$$\frac{\gamma - z}{r}$$

est à valeurs dans le cercle unité de $\mathbb{C}$ et de classe C^1. L'ensemble $\mathcal{R}$ de ses relèvements est non vide. De plus, deux éléments de $\mathcal{R}$ diffèrent d'une constante appartenant à $2\pi\mathbb{Z}$. Si θ appartient à $\mathcal{R}$, la relation $\gamma(a) = \gamma(b)$ entraîne que le réel :

$$\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

34. En fait, l'image de γ peut être assez différente de l'idée naïve de courbe, par exemple égale à un carré plein. Lorsque γ est de classe C^1 et γ' ne s'annule pas (arc régulier), l'image de γ correspond raisonnablement à l'intuition.

est dans $\mathbb{Z}$. De plus, cet entier est indépendant de l'élément θ de $\mathcal{R}$ choisi. C'est, par définition, l'*indice de z par rapport à γ*. On le note $\mathrm{Ind}\,_\gamma(z)$.

Gardons les notations précédentes. Par dérivation logarithmique, on a :

$$\frac{\gamma'}{\gamma - z} = \frac{r'}{r} + i\theta'.$$

Par suite :

$$\mathrm{Ind}\,_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \theta' = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'}{\gamma - z}.$$

Cette dernière expression entraîne facilement que la fonction :

$$z \mapsto \mathrm{Ind}\,_\gamma(z)$$

est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\ (\gamma)$ (continuité d'une intégrale à paramètre, à justifier) et tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ (passage à la limite sous l'intégrale, à justifier également). Puisque cette fonction est à valeurs entières, on en déduit la proposition ci-après.

Proposition 13. *L'application :*

$$z \mapsto \mathit{Ind}\,_\gamma(z)$$

est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathit{Im}\ (\gamma)$ et nulle sur la composante connexe non bornée de cet ouvert de $\mathbb{C}$. En particulier, l'ensemble des z de $\mathbb{C} \setminus \mathit{Im}\ (\gamma)$ tel que :

$$\mathit{Ind}\,_\gamma(z) \neq 0$$

est un ouvert borné de $\mathbb{C}$.

Exercice 82. *Détailler la preuve de la proposition précédente.*

Exemple. Fixons n dans $\mathbb{Z}$, r dans $\mathbb{R}^{+*}$ et posons pour t dans $S = [-\pi, \pi]$:

$$\gamma(t) = re^{int}.$$

L'indice de 0 par rapport à γ est n par calcul direct. L'application :

$$t \mapsto nt$$

est en effet un relèvement de $\gamma/|\gamma|$. Il découle de la proposition précédente que $\mathrm{Ind}\,_\gamma(z)$ vaut, comme attendu, n si $|z| < r$ et 0 si $|z| > r$.

Exercice 83. *Retrouver le résultat de l'exemple ci-dessus par le calcul en développant*

$$\frac{inre^{int}}{re^{int} - z}$$

en série géométrique.

9 Sommes de Riemann

9.1 Définition et théorème de convergence

Le *pas* de la subdivision $\sigma = (a = t_0 < \cdots < t_n = b)$ de $S = [a, b]$ est, par définition, le maximum des $t_{i+1} - t_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On appelle *subdivision pointée de* $[a, b]$ tout couple (σ, u) où σ est une subdivision $(a = t_0 < \cdots < t_n = b)$ de S et $u = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ un n-uplet d'éléments de S tel que, pour tout i de $\{0, \ldots, n-1\}$, u_i appartienne à $[t_i, t_{i+1}]$.

Si f est une application de S dans E, la *somme de Riemann* de f relative à la subdivision pointée précédente est le vecteur de E :

$$S_{f,\sigma,u} = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(u_i).$$

Autrement dit, la somme de Riemann s'obtient en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier valant $f(u_i)$ sur $]t_i, t_{i+1}[$ pour tout i. Le théorème ci-après n'est donc pas surprenant.

Théorème 12. *Soient f dans $\mathcal{CM}(S, E)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision pointée (σ, u) de S de pas $\leq \delta$, on ait :*

$$\left\| S_{f,\sigma,u} - \int_a^b f \right\| \leq \varepsilon.$$

Preuve pour les fonctions continues. Soit f dans $\mathcal{C}(S, E)$. Le théorème de Heine donne $\delta > 0$ d'uniforme continuité de f sur S relatif à ε. Supposons le pas de σ majoré par δ. Avec les notations ci-dessus, on a, pour i dans $\{0, \ldots n-1\}$:

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad \|f(t) - f(u_i)\| \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que :

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) - f(u_i) \, \mathrm{d}t \right\| \leq (t_{i+1} - t_i)\varepsilon$$

Par sommation :

$$\left\| S_{f,\sigma,u} - \int_S f \right\| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Preuve du cas général. Puisque toute fonction de $\mathcal{CM}(S, E)$ est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier, il suffit d'établir le résultat pour une fonction en escalier. Par linéarité, on peut même se borner au cas où f est constante égale à c sur un sous-intervalle J de S et nulle hors de J. Si tel est le cas, un dessin montre immédiatement que, si σ est de pas δ alors :

$$\left\| S_{f,\sigma,u} - \int_S f \right\| \leq 2\|c\|\delta.$$

La conclusion est immédiate.

Les sommes de Riemann peuvent servir de base à la construction de l'intégrale. Notons au passage que le théorème précédent conforte l'interprétation intuitive (avec rectangles infinitésimaux) de la notation de Leibniz.

Le cas particulier des sommes de Riemann régulières est celui que l'on rencontre le plus fréquemment.

Corollaire 8. *Soit f dans $\mathcal{CM}([a,b],E)$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Exercice 84. *Déterminer les limites des suites définies par les formules ci-après :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\quad b_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n},\quad c_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}.$$

Exercice 85. *Soient d dans $\mathbb{N}^*$ et A une application continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose*

$$P_n(A)=\prod_{k=1}^{n}\left(I_d+\frac{1}{n}A\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que la suite $(P_n(A))_{n\geq 1}$ converge.

Application. *Intégrale et barycentre.*

Soit f dans $\mathcal{CM}([a,b],E)$. Le théorème précédent montre que le vecteur :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

est limite de barycentres à coefficients positifs d'éléments de $f([a,b])$ est appartient donc à l'*adhérence de l'enveloppe convexe de* $f([a,b])$. Si E est de dimension finie, un théorème (non immédiat) de Carathéodory assure que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte, donc, si f est continue, le vecteur précédent appartient à l'enveloppe convexe de $f([a,b])$.

Si f est de classe C^1, on peut écrire :

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'$$

et on voit ainsi que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

appartient à l'adhérence de l'enveloppe convexe de $f'([a,b])$, ce que l'on peut voir comme un substitut à l'égalité des accroissements finis du cas réel.

Application. *Inégalité de Jensen.*

Les sommes de Riemann permettent de donner une version intégrale de l'inégalité de convexité. Soient f une application continue de $[a,b]$ dans I, g une application convexe sur I. On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right)\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right),$$

d'où, en laissant tendre n vers $+\infty$:

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f.$$

Exercice 86. *Si f et g sont deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ avec f continue par morceaux sur $[0,1]$ et g nulle en 0 et dérivable en 0, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 87. *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout k de $\{0,\dots,n\}$ il existe un unique $a_{k,n}$ de $[0,1]$ tel que :*

$$\int_0^{a_{k,n}} f = \frac{k}{n}\int_0^1 f$$

et étudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}).$$

Les deux exercices suivants sortent du programme.

Exercice 88. *Montrer que le théorème de convergence des sommes de Riemann subsiste pour les fonctions de $\mathcal{R}(S,E)$.*

Exercice 89. *Un réel x de $[0,1[$ admet un unique développement décimal propre :*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(x) 10^{-n}$$

où les $\varepsilon_n(x)$ sont dans $\{0,\dots,9\}$. Soient σ une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même et f l'application de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{\sigma(n)}(x) 10^{-n}.$$

Montrer que f se prolonge en une fonction réglée sur $[0,1]$ et calculer $\int_0^1 f$.

9.2 Complément : cas des fonction de classe C^1

Dans la preuve du théorème 12, supposons f lipschitzienne de rapport C. Alors, pour toute subdivision pointée (σ,u) de pas inférieur à δ, on a :

$$\left\| S_{f,\sigma,u} - \int_a^b f \right\| \leq C(b-a)\delta.$$

En particulier, pour la subdivision régulière,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f \right\| \leq \frac{C}{n}.$$

Ceci suggère qu'une estimation précise est sans doute possible si f est de classe C^1.[35] Pour simplifier, prenons $a = 0,\ b = 1$ et f de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On souhaite estimer :

$$u_n = \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. On reprend la preuve de la convergence des sommes de Riemann :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{dt}.$$

Plus que le résultat, la méthode est instructive. L'idée de base est que si n est grand et t dans $[k/n, (k + 1)/n]$,

$$f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)$$

doit être bien approché par :

$$f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

Ceci conduit à approcher u_n par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{dt} = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

En utilisant une somme de Riemann à pas constant pour f', on estime immédiatement v_n :

$$v_n = \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il est légitime de suppose que cette estimation reste valable pour u_n. Pour le voir, il suffit d'établir que :

$$u_n - v_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{dt}.$$

Pour aller vite, utilisons l'égalité des accroissements finis : chaque $f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ s'écrit

$$\left(t - \frac{k}{n}\right) f'(c_{k,n,t})$$

où $c_{k,n,t}$ est entre t et k/n donc à distance majorée par $1/n$ de k/n. Notons :

$$\varepsilon_n = \sup\left\{|f'(v) - f'(u)|,\ (u, v) \in [0, 1]^2,\ |u - v| \leq \frac{1}{n}\right\},$$

35. Ce qui suit est hors-programme, mais très formateur.

de sorte que, par continuité uniforme de la fonction continue f' sur le compact $[0,1]$, la suite (ε_n) tend vers 0. Chacun des termes :

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

est ainsi majoré par $\varepsilon_n(t - \frac{k}{n})$ ce qui après inégalité triangulaire, intégration et sommation conduit à la majoration :

$$|u_n - v_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{2n}$$

et à l'estimation désirée.

L'exercice ci-après met en évidence des sommes de Riemann à pas constant et « à convergence lente », i.e. telles que l'erreur ne soit pas en $O(1/n)$; ces fonctions ne sont donc pas lipschitziennes.

Exercice 90. *Soient $(a_m)_{m\geq 1}$ une suite de réels > 0 telle que la série de terme général a_m converge, f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(2\pi m! x).$$

Donner, si n est dans $\mathbb{N}^*$, une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. En déduire un exemple de fonction f continue telle que :

$$n\left(\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

10 Les formules de Taylor

10.1 Polynômes de Taylor

Soient n dans $\mathbb{N}$, f une application de classe C^n de I dans $\mathbb{K}$, x_0 dans I. Cherchons, dans $\mathbb{K}_n[X]$, un polynôme p ayant un contact maximal avec f en x_0, c'est-à-dire tel que $f - p$ ait le maximum de dérivées nulles en x_0. Un polynôme de degré $\leq n$ étant entièrement déterminé par ses dérivées d'ordre $k \in \{0, \ldots, n\}$, la formule de Taylor pour les polynômes conduit à prendre :

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(X - x_0)^k}{k!}$$

On définit donc, pour f de classe C^n de I dans E et x_0 dans I, le *polynôme de Taylor d'indice* n *de* f *en* x_0 :

$$T_{(n,f,x_0)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k\, f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$ [36]

Les trois formules de Taylor ont toutes pour fonction de renseigner sur le reste :

$$R_{(n,f,x_0)}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{k!} = f(x) - T_{(n-1,f,x_0)}.$$

36. Polynôme vectoriel ici.

10.2 Formules de Taylor globales

Le résultat de base est la *formule de Taylor avec reste intégral.*

Théorème 13. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^n de I dans E, x et x_0 sont deux points de I. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{k!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$ [37]

La démonstration se fait comme dans le cas scalaire par récurrence sur n. Le passage de n à $n+1$ est une intégration par parties fondée sur le fait que si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad e_k(t) = \frac{(x-t)^k}{k!}$$

alors $-e_{k+1}$ est la primitive de e_k s'annulant en x.

On peut réécrire la formule de façon un peu différente en transformant le reste par changement de variable affine en une intégrale sur $[0,1]$; cette seconde forme est parfois plus lisible. [38] Si x et $x+h$ sont dans I et f de classe C^n sur I, on a :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k\, f^{(k)}(x)}{k!} + h^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+th)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 91. *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si f est une application de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans E nulle en 0, alors :*

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

se prolonge continûment en 0 et que le prolongement est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$. On pourra écrire $g(x)$ comme une intégrale entre 0 et 1 et utiliser des intégrales à paramètre. [39]

De la formule de Taylor avec reste intégral on déduit aussitôt l'*inégalité de Taylor-Lagrange.*

Théorème 14. *Sous les hypothèses précédentes :*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-x_0|^n}{n!} \|f^{(n)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

37. L'« égalité de Taylor-Lagrange » du cas réel ne se généralise pas plus au cas vectoriel que le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis. Contrairement à la formule avec reste intégral, elle ne donne pas un mode de reconstruction robuste de f à partir de $f^{(n)}$ et des $f^{(k)}(a)$, $0 \leq k \leq n-1$ et a donc un intérêt assez faible. Elle est d'ailleurs hors-programme.

38. Elle a l'avantage conceptuel de pouvoir s'interpréter comme l'intégrale d'un arc tracé sur un espace de fonctions.

39. Il est possible de démontrer directement ce théorème de division à l'aide du théorème de classe C^k par prolongement ; la démonstration est plus fastidieuse.

Les deux formules précédentes sont celles que l'on utilise pour obtenir des résultats globaux (valables sur tout un intervalle ou à l'infini).

Exemple. Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il suffit pour le voir de noter que toutes les dérivées de : $x \mapsto e^{ix}$ sont de module constant égal à 1.

Voici des applications plus significatives.

Application. *L'inégalité de Landau.*

On se donne une fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}^+$. On cherche à établir que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et à contrôler $\|f'\|_{\infty,\mathbb{R}^+}$ en fonction de $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}$ et $\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}^+}$. Il s'agit donc, pour x dans $\mathbb{R}^+$, de contrôler $f'(x)$ en fonction des valeurs de f et f''. Pour $h > 0$, on écrit la formule de Taylor entre x et $x + h$, puis on en tire $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x) - R_{2,f,x}(x+h)}{h},$$

puis :

$$|f'(x)| \leq \frac{2\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}{h} + \frac{h\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}{2}.$$

Le second membre est indépendant de x ; n'importe quel choix de h (par exemple $h = 1$) montre ainsi que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Pour optimiser, on choisit h de manière à minimiser le second membre, c'est-à-dire $h = 2\sqrt{\dfrac{\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}{\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}}$, choix qui conduit à :

$$\|f'\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq 2\sqrt{\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}.$$

Exercice 92. *Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f'' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que f tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.*

Exercice 93. *Démontrer que si f est une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\|f'\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \sqrt{2\|f\|_{\infty,\mathbb{R}}\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}}}.$$

Pour x dans $\mathbb{R}$ et $h > 0$, on exprimera $f'(x)$ au moyen de $f(x+h)$, $f(x-h)$, $R_{2,f,x}(x+h)$ et $R_{2,f,x}(x-h)$, ce qui permettra d'améliorer la majoration obtenue pour des fonctions de source $\mathbb{R}^+$.

Application. *Un problème d'équivalence de normes.*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, n dans $\mathbb{N}^*$ et n points $t_1 < \cdots < t_n$ de $[a, b]$. On note V l'espace des applications de classe C^n de

$[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, $\| \ \|$ la norme uniforme relative à $[a,b]$. Les deux formules ci-après définissent des normes sur V :

$$\forall f \in V, \qquad N(f) = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty, \quad N'(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)| + \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Il est clair que $N' \leq n\, N$. On va établir que N et N' sont équivalentes.

Le cas $n = 1$ est bien connu et facile. Pour m quelconque, il s'agit, pour f dans V, de contrôler les $\|f^{(k)}\|_\infty$ pour $0 \leq k \leq n-1$ en fonction de $\|f^{(n)}\|_\infty$ et des $|f(t_k)|$. On cherche donc, pour t dans $[a,b]$, à exprimer les $f^{(k)}(t)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ en fonction des $f(t_k)$ et de $f^{(n)}$. Pour ce faire, on écrit un système linéaire de n équations indépendantes en les $f^{(k)}(t)$:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad f(t_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t_k - t)^j f^{(j)}(t)}{j!} + R_{n,f,t}(t_k).$$

Posons, pour t dans $[a,b]$: $v(t) = \ {}^t\left(f(t), \dots, \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\right)$,

$$w(t) = \ {}^t\left(f(t_1) - R_{n,f}(t,t_1), \dots, f(t_n) - R_{n,f,t}(t_m)\right),$$

et notant $V(a_1, \dots, a_n)$ la matrice de Vandermonde relative au n-uplet : $(a_1, \dots, a_n)$, ces égalités s'écrivent de façon condensée :

$$V(t_1 - t, \dots, t_n - t) v(t) = w(t).$$

L'inversibilité d'une matrice de Vandermonde permet de résoudre le système :

$$v(t) = \ V(t_1 - t, \dots, t_n - t)^{-1} w(t).$$

La continuité du passage à l'inverse sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donne n^2 fonctions continues « universelles » $u_{j,k}$ définies sur $[a,b]$ et telles que pour toute f de V on ait :

$$\forall (j,t) \in \{0, \dots, n-1\} \times [a,b], \qquad \frac{f^{(j)}(t)}{j!} = \sum_{k=1}^{n} u_{j,k}(t) \left(f(t_k) - R_{n,f,t}(t_k)\right).$$

La preuve s'achève facilement via l'inégalité de Taylor-Lagrange.

L'exercice ci-après démontre une forme qualitative des « inégalités de Kolmogorov »généralisant l'inégalité de Landau ; on pourra utiliser, comme dans l'exemple précédent, un système de Vandermonde.

Exercice 94. *a) Démontrer le résultat suivant : si f est une application de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les $f^{(k)}$, $1 \leq k \leq n-1$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.*

b) Trouver des constantes $C_{n,k}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, toute fonction f de classe C^n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et tout k de $\{1, \dots, n-1\}$, on ait :

$$\|f^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq C_{n,k} \|f\|_{\infty,\mathbb{R}}{}^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|_{\infty,\mathbb{R}}{}^{\frac{k}{n}}.$$ [40]

40. Les constantes $C_{n,k}$ optimales ont été déterminées par Kolmogorov.

L'exercice suivant étudie la régularité de la racine carrée d'une fonction.[41]

Exercice 95. *Soient f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{F} = f^{-1}(0)$, $g = \sqrt{f}$.*

a) Si $t_0 \in \mathcal{F}$, montrer que $f'(t_0) = 0$ et $f''(t_0) \geq 0$. Montrer que g est dérivable est t_0 si et seulement si $f''(t_0) = 0$.

Dans la suite, on suppose : $\forall t \in \mathcal{F}$, $f''(t) = 0$. On fixe $t_0 \in \mathcal{F}$, et, pour $\alpha > 0$, soit $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Si $I_\alpha \subset I$, soit

$$M(\alpha) = \max_{x \in I_\alpha} |f''(x)| .$$

b) On suppose $I_\alpha \subset I$, $t \in I_\alpha$, $t + h \in I_\alpha$. Prouver

$$f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2} M(\alpha) \geq 0 .$$

c) On suppose $I_\alpha \subset I$. Montrer :

$$\forall t \in I_{\alpha/2}, \qquad {f'(t)}^2 \leq 2\, M(\alpha)\, f(t) .$$

d) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 96. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $h > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f'(x) = Cf(x + h).$$

Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(e^{Kx})$.

Exercice 97. *Soient k dans $\mathbb{N}$ et f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = f(t-1) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O(t^k).$$

Montrer que $f = 0$.

10.3 La formule de Taylor-Young

Sous les hypothèses du paragraphe précédent, on vérifie facilement que, lorsque h tend vers 0 :

$$R_{n,f,x}(x+h) = \frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(x) + o(1)) = \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!} + o(h^n).$$

On en déduit immédiatement la formule de Taylor-Young, qui gouverne le comportement local des applications régulières.

Théorème 15. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^n de I dans E. Alors, lorsque h tend vers 0 :*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k f^{(k)}(x)}{k!} + o(h^n).$$

41. Théorème de Glaeser, 1963.

Cette formule fournit tous les développements limités classiques, cf cours de première année. Elle reste vraie si f est seulement $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de x et n fois dérivable en x, mais ce raffinement n'est pas fondamental.

Exercice 98. *Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}.$$

Pour k dans $\mathbb{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$.

Exercice 99. *Vérifier que la fonction f nulle en 0 et telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\left(\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, admet un développement limité à tout ordre en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 100. *Soit x dans $\mathbb{R}^*$. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :*

$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 101. *Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0 uniquement. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 102. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ; pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(kx).$$

On se propose de montrer que $\dfrac{\Delta^n f(x)}{x^n}$ a une limite que l'on précisera quand $x \to 0$ et de calculer cette limite.

a) Traiter les cas $n = 1, n = 2$.

b) Exprimer le développement limité à l'ordre n de $\Delta^n(f)$ en 0 au moyen des sommes

$$\gamma_{j,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^j, \qquad 0 \le j \le n.$$

c) Calculer $\gamma_{j,n}$ pour $0 \le j \le n$. On pourra appliquer la question précédente à la fonction exp.

Exercice 103. *On se propose de déterminer les réels $\alpha > 0$ tels qu'existe N vérifiant*

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \ge N \Longrightarrow n^\alpha \in \mathbb{N}^*.$$

a) On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha.$$

Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que, si α est dans $]0,1[$, α ne vérifie pas (1).

b) On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = (n+2)^\alpha - 2(n+1)^\alpha + n^\alpha$. Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$. En déduire que, si $\alpha \in]1,2[$, α ne vérifie pas (2).

c) Généraliser l'argument précédent pour conclure.

Exercice 104. *Démontrer la formule de Taylor-Young pour une fonction n fois dérivable sur I et n fois dérivable en x. On raisonnera par récurrence sur n.*

Exercice 105. *Soient f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, g la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad g(x) = f(\sqrt{x}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour g soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

L'exercice ci-après est un renforcement amusant (et non immédiat) de la caractérisation des polynômes donnée dans la proposition 4 du paragraphe **I.3.3**. [42]

Exercice 106. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.*

a) On suppose que f n'est pas polynomiale sur I. Montrer qu'il existe un segment J de I sur lequel f n'est pas polynomiale et ne s'annule pas.

b) On suppose que f n'est pas polynomiale sur I. Montrer qu'il existe $x \in I$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Quelle caractérisation des fonctions polynomiales obtient-on ainsi ?

10.4 Zéros, changements de signe, extrema

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^n de I dans E, x dans I tel que $f(x) = 0$ mais que l'ensemble :

$$\left\{k \in \{1, \ldots, n\},\ f^{(k)}(x) \neq 0\right\}$$

soit non vide, m le minimum de l'ensemble précédent. La formule de Taylor-Young montre que le quotient :

$$\frac{f(x+h)}{h^m}$$

tend vers un vecteur non nul lorsque h tend vers 0 donc ne s'annule pas sur un voisinage épointé de 0. On a ainsi établi le résultat suivant, qui dit qu'un zéro non isolé de f de classe C^n est *plat à l'ordre n*.

Proposition 14. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^n de I dans E. Si x est un zéro non isolé de f, alors :*

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad f^{(k)}(x) = 0.$$

Nous appliquerons cette proposition [43] dans le cours sur les équations différentielles linéaires homogènes.

Un segment est compact, donc chacune de ses parties infinies admet un point d'accumulation (théorème de Bolzano-Weierstrass). On en déduit le corollaire suivant, lui aussi hors-programme.

42. Théorème de Corominas et Sunyer y Balaguer, 1954.
43. Importante mais non explicitée dans le programme.

Corollaire 9. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, S un segment de $\mathbb{R}$ et f une application de classe C^n de S dans E telle que :*

$$\forall x \in S, \qquad (f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Alors l'ensemble des zéros de f sur S est fini.

Prendre E comme but est académique. Le cas essentiel est celui où f est à valeurs réelles. On a alors des renseignements plus précis relatif au *signe* de f. Reprenons en effet les notations du début de ce paragraphe en supposant $E = \mathbb{R}$. Comme deux fonctions équivalentes ont, localement, même signe strict, on voit que si m est pair, il existe un voisinage épointé de x dans I sur lequel f est du signe (strict) de $f^{(m)}(x)$. Si m est impair, on voit de même que pour y à droite (resp. à gauche) de x et suffisamment près de x, $f(y)$ est du signe (strict) de $f^{(m)}(x)$ (resp. de $-f^{(m)}(x)$.)

Les considérations précédentes s'appliquent à l'étude des extrema d'une fonction réelle de variable réelle. On obtient ainsi une condition nécessaire et une condition suffisante.

Proposition 15. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, E l'ensemble :*

$$\left\{ k \in \{1, \dots, n\}, \ f^{(k)}(x_0) \neq 0 \right\}.$$

(i) Si f admet un maximum local en x_0 et si E n'est pas vide, son minimum m est pair et $f^{(m)}(x_0)$ est dans $\mathbb{R}^-$.

(i) Si E n'est pas vide, si le plus petit élément m de E est pair et $f^{(m)}(x_0)$ est dans $\mathbb{R}^{-*}$, alors f admet un maximum local strict en x_0.

Le cas $m = 2$ (conditions du second ordre) est particulièrement important. Nous le généraliserons aux fonctions de plusieurs variables dans le cours de calcul différentiel à l'aide de la matrice hessienne.

Le lecteur est invité à relire la remarque 3 du paragraphe **3.1** pour ne pas se laisser aller à une fausse démonstration de la proposition précédente, fondée sur des considérations erronées de monotonie locale.

Exercice 107. *Soient r dans $\mathbb{R}^{+*}$, f une application de classe C^1 de $[-r, r]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que le graphe de f est au-dessous du cercle de centre $(0, r)$ et de rayon r. Que vaut $f'(0)$?*

Exercice 108. *Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que le cercle centré sur $(0, r)$ et passant par $(0, 0)$ soit au dessus du graphe de f.