Renseignements généraux

— *Concours* : ENS Cachan-Rennes
— *Matière* : Maths
— *NOM Prénom* : BULCKAEN Léo

Énoncé des exercices

Exercice 1 :

On considère la fonction

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \begin{cases} log(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que u est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$
   On dit qu'une fonction f est à oscillation moyenne bornée (OMB) si pour tout segment I de $\mathbb{R}$, et pour tout $n > 0$, on dispose de C_I réel vérifiant
   $$\frac{1}{l_I} \int_I |f(x) - C_I| dx \leq n$$
   (où l_I est la longueur de l'intervalle).
2. Montrer que si f est OMB alors on peut prendre comme constante la valeur moyenne de f sur I.
3. Montrer que u est OMB
4. Qu'en est-il si l'on prend u nulle sur $\mathbb{R}^-$ et coïncidant avec ln sur $\mathbb{R}_+^*$?

Remarques sur l'oral

Première question très facile : le seul problème est en zéro si l'on se place sur un segment. A posteriori, je me rends compte que la deuxième est plutôt mal posée : en fait on cherche à montrer que si f est OMB et si l'on prend la valeur moyenne de f comme constante C_I, l'intégrale est bornée quel que soit le segment. N'ayant pas compris la question de cette manière, j'ai voulu montrer que la valeur moyenne optimisait la valeur de l'intégrale, *ie* que

$$\forall C \in \mathbb{R}, \int_I |f(x) - C_I| dx \geqslant \int_I |f(x) - moy_I(f)| dx$$

Par analogie avec les calculs de variance et d'espérance dont je fais mention (à un carré près), je lui dit que ça ne semble pas aberrant. Je me lance dans du calcul un peu moche avec des disjonctions de cas avant que l'examinatrice ne m'arrête et me demande de le montrer si l'on avait un carré. Une fois fini, elle me dit qu'en fait c'est pas vraisans le carré : la moyenne n'optimise pas l'intégrale. "Tu vois ce qui vas optimiser l'intégrale ? -Non..." Elle redéfinit la question : en fait il s'agit de montrer que

$$\sup_{I segment de \mathbb{R}} \frac{1}{l_I} \int_I |f(x) - \frac{1}{l_I} \int_I f| dx < +\infty$$

A partir de là j'engage à nouveau des calculs pas super attirants pour la question 3. J'obtiens une formule un peu moche et elle m'arrête en me disant que mes calculs vont marcher mais qu'elle a autre chose en tête. Elle me demande de montrer que la propriété est vérifiée pour un segment de longueur 1 et inclus dans $[-2; 2]$. Je finis par trouver ce qu'elle demande et je montre qu'on peut se ramener à ce cas. La question 4 demande un peu de clairvoyance (ce qui n'est pas si facile après tout ces calculs). Elle m'indique de regarder des intervalles centrés en zéro. Je lui dit que la moyenne de u sur ces intervalles va tendre vers l'infini avec la longueur de l'intervalle, et donc que les valeur pour $x \leq 0$ vont poser problème. Elle accepte ma réponse appuyée par un dessin de la fonction. Avant de partir, elle me regarde avec un petit sourire : "alors ? c'est quoi le nom de cette constante qui optimise la valeur de l'intégrale ?" Apparemment c'est la médiane.