FEUILLE D'EXERCICES N° 9

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Calculs pratiques

Exercice 1

Effectuer les développements limités :

- $DL_3(0)$ de $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$
- $DL_3(0)$ de $e^{\sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$
- $DL_4(+\infty)$ de $\sqrt{1+\sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}}$
- $DL_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ de $\arcsin(\sqrt{3}\cdot \sin x)$
- $DL_7(0)$ de $\sin(\mathrm{sh}x) - \mathrm{sh}(\sin x)$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^{2x}(\cos(e^{-x})-1)$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \sqrt{\pi}} \dfrac{\sin(x^2)\cdot \ln x}{\ln(2+x)-\ln(2+\sqrt{\pi})}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin\tan x - \tan\sin x}{x^7}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \ln(e^x - e + 1)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

Exercice 3

Effectuer les calculs suivants :

- $DL_4(\dfrac{\pi}{3})$ de $x \longmapsto \cos x - \sin x$
- $DL_6(0)$ de $x \longmapsto (\cos x)^{\sin \ln(1+x)}$
- $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$
- $DL_{10}(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2}{\cos(x^2)}\right)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$
- $DL_2(-2)$ de $x \longmapsto \dfrac{4x+1}{5x^2+4x+1}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan(2x)}$
- $DL_4(+\infty)$ de $x \longmapsto \mathrm{argsh}x - \ln x$
- $DL_4(+\infty)$ de $x \longmapsto e^{\arctan x}$
- $DL_3(1)$ de $x \longmapsto (1+\ln x)^{\mathrm{sh}(\arctan(x-1))}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^{x^2}+\cos(x\cdot\sqrt{2})-2\mathrm{ch}^2(x^2)}{\ln(1+\arcsin(x^4))}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{\ln(1+2\sin 3x)}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{(\mathrm{sh}x)^2}} - \cos(e^{-x})\right) \times \mathrm{ch}(2x+1)$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes définissent des bijections au voisinage de 0, montrer que les fonctions f^{-1} sont encore de classe C^∞ au voisinage de $f(0)$ et déterminer un développement limité de f^{-1} avec :

- $f(x) = 2\tan x - x$: $DL_6(0)$ de f^{-1}
- $f(x) = x + \mathrm{ch}x$: $DL_4(1)$ de f^{-1}.

Exercice 5

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$
- $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = (x-1)e^{1/(x-3)}$
- $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$
- $f(x) = x\cdot\exp\left(\dfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x+2}\right)$.

Exercice 6

Effectuer les calculs suivants :

- $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} \left[\cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)\right]^n$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x$
- $f^{(n)}(0)$, avec $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^6}$.

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$. Déterminer la limite éventuelle du quotient

$$\frac{\sin(\mathrm{sh}(x)) - \mathrm{sh}(\sin(x))}{x^\alpha},$$

lorsque x tend vers 0^+.

Aspects théoriques

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions impaires de classe C^3 au voisinage de 0 avec $g^{(3)}(0) \neq 0$. Calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$.

Exercice 9

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'(x) = P(f(x))$.

1. Montrer que f est C^∞.
2. On suppose $f(0) = 0$. Calculer le $DL_3(0)$ de f.

Exercice 10

Déterminer un équivalent $(n+1)^{1/n} - n^{1/(n+1)}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Thèmes variés

Exercice 11

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{th}(x) - x$ sur $]0, +\infty[$.
2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \operatorname{th}(u_n) \end{cases}$.
3. Trouver, en faisant un développement limité de th à l'ordre 3 en 0, une constante $\alpha > 0$ telle que la suite $\left(v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ non nulle.
4. En utilisant les moyennes de Cesarò, trouver un équivalent de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Déterminer le développement asymptotique à trois termes significatifs de la suite (u_n) définie par : u_n est la seule solution à l'équation $e^x + 1 + nx = 0$.

Exercice 13

Trouver un équivalent de u_n dans les cas suivants :

- $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$
- $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times \cos(u_n^3)$.

Exercice 14

1. Montrer que l'équation $x = \tan x$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Déterminer le développement asymptotique à quatre termes significatifs de x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une seule solution notée x_n.
2. Étudier la suite (x_n).
3. Trouver les deux premiers termes de son développement asymptotique.

Exercice 16

On pose $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x - \ln x$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! x_n \in]0, 1]$, $\exists! y_n \in [1, +\infty[$, $f(x_n) = f(y_n) = n$.
2. Montrer que : $x_n = e^{-n} + e^{-2n} + \dfrac{3}{2}e^{-3n} + o\left(e^{-3n}\right)$.
3. Montrer que : $y_n = n + \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer tous les polynômes $P(X)$ tels que X^n divise $1 + X - P^2(X)$ (c'est-à-dire que ce dernier polynôme est un multiple de X^n).