

Renseignements généraux

- *Concours* : ENS
- *Matière* : Maths ULSR
- *NOM Prénom* : Sabayev Maximilian

Énoncé des exercices

On définit un ensemble parfait : C'est un ensemble C non vide, fermé, sans points isolés.

Déterminer un ensemble parfait non-vidé de \mathbb{R} sans rationnels.

Remarques sur l'oral

L'examinatrice me donne 10 min pour étudier l'exercice de mon côté d'abord. Je pense directement à l'ensemble de Cantor en tant qu'exemple d'ensemble parfait, et donc j'essaye de partir de là. Avant ceci, je remarque qu'on pourrait s'intéresser à faire un ensemble parfait non-vidé de \mathbb{R} sans irrationnels : avec une translation par un irrationnel on peut obtenir le résultat voulu. Mais elle me fait remarquer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est plus grand que \mathbb{Q} puisque l'un est indénombrable et l'autre dénombrable.

Le reste du temps consiste de voir comment appliquer la méthode de construction de Cantor à notre cas. Finalement, j'utilise la dénombrabilité de \mathbb{Q} pour avoir une suite indexée de rationnels. On commence avec un segment et comme avec Cantor on enlève des sous-segments. Elle me suggère de faire une division en 4 : je vois comment l'accrocher avec Cantor en ne gardant que 2 sur 4. De plus, j'évite les problèmes aux bords en prenant un segment initial sur $[a; a + 1]$ où a irrationnel (il m'a paru qu'elle ne s'attendait pas à ceci). Elle me dit alors après avoir formalisé tout ceci qu'une telle construction devrait marcher. J'essaie donc de montrer les propriétés : c'est un fermé comme intersection de fermés (comme la démo pour Cantor), puis pour le caractère non-vidé j'ai que le temps de donner un argument de segments emboîtés qui la satisfait - c'est la fin de l'épreuve.